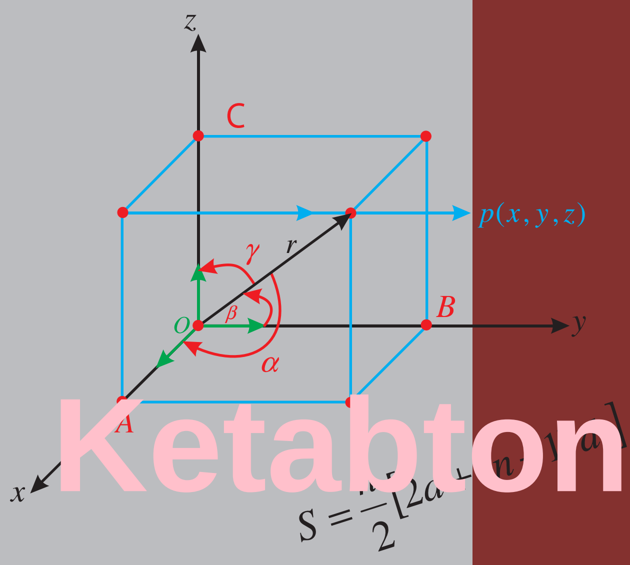
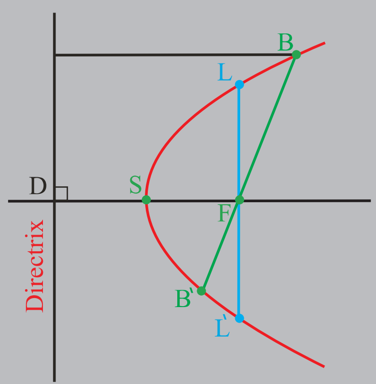
د پوهنې وزارت

ریاضي ۱۱

ټولګی





ریاضي ۱۱ ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۸

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې
هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی
د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو
د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، گوجر دي
پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي
هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي
لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به
لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحیم

د پوهنې وزارت

رياضي ۱۱ ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هـ. ش.

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: رياضي

مؤلفین: د تعلیمي نصاب د رياضياتو د څانګې علمي او مسلکي غړي

اډیټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډیټ علمي او مسلکي غړي

ټولګی: یوولسم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکی: د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف لوی ریاست

خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړیکو او عامه پوهاوي ریاست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ ځای: کابل

چاپخونه:

بریښنالیک پته: curriculum@moe.gov.af

د پوهنې د وزير پيغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته يې ژوند رابښلی، او د لوست او ليک له نعمت څخه يې برخمن کړي يو، او د الله تعالی پر وروستي پيغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پيغام ورته (لوستل) و، درود وايو.

څرنگه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمريز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د گران هېواد ښوونيز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدينو شوراگانې د هېواد د پوهنيز نظام شپږگونې بنسټيز عناصر بلل کيږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختيا او پرمختيا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونيز نظام کې د ودې او پراختيا په لور بنسټيزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونيز نصاب اصلاح او پراختيا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړيتوبونو څخه دي. همدارنگه په ښوونځيو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونيزو تأسيساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کيفيت او توزيع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور يو، چې د باکيفيته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنيو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونيز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توگه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مديرانو څخه په درناوي هيله کوم، چې د هېواد بچيانو ته دې د درسي کتابونو په تدريس، او د محتوا په لېږدولو کې، هيڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د يوه فعال او په ديني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زيار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤوليت په درک سره، په دې نيت لوست پيل کړي، چې د نن ورځې گران زده‌کوونکي به سبا د يوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او گټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانگه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه گټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځيرکو او فعالو گډونوالو په توگه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدريس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونيز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په ليکلو او چمتو کولو کې يې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بريا غواړم.

د معياري او پرمختللي ښوونيز نظام او د داسې ودان افغانستان په هيله چې وگړي يې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزير

دکتور محمد ميرويس بلخي

لړليک

سرليک	مخونه

لومړی څپرکی مخروطي مقاطع

دويم څپرکی مثلثات

دریم ځپرکی فضايي هندسه

څلورم ځپرکی ترادفونه

پنځم ځپرکی لوګاریتم

شپږم څپرکی متریکسونه

اووم څپرکی وکتورونه

اتم څپرکی احصایه

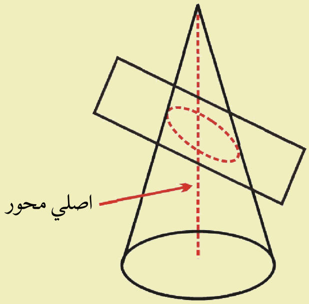
نهم څپرکی احتمالات

لومړی څپرکی

مخروطي مقاطع

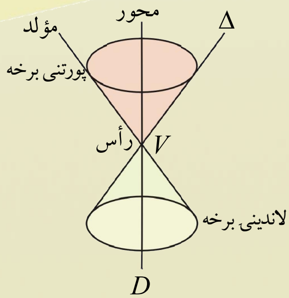
مخروطي مقاطع

sections of Conic



آیا ویلای شئ چې د یوې مستوي او مخروط د تقاطع له ګډ فصل څخه څه ډول منحني ګاني لاس ته راځي.

د مخروطي مقاطعو تعريف



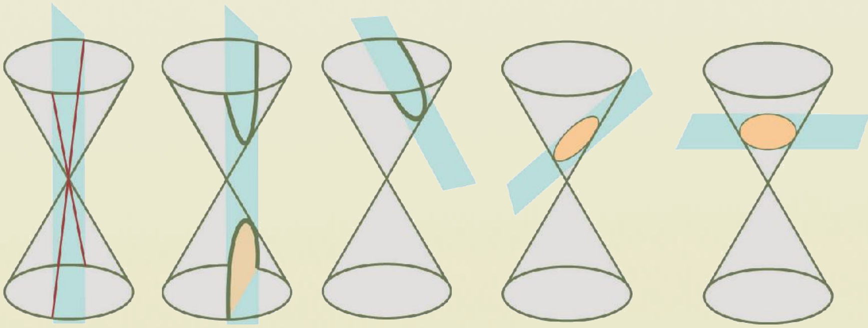
د Δ او D دوه مستقیم خطونه داسې په پام کې نیسو چې یو بل د v په ټکي کې قطع کړي. که چیرې د D خط ثابت او د Δ خط د هغه په چاپیر وڅرخیږي، له دې څرخولو څخه په فضا کې دوه شکلونه چې یو یې د v (ټکی) پورته او بل یې د v د ټکي ښکته خواته جوړیږي. هر یو یې مخروط دی، لکه: مخامخ شکل د D مستقیم خط د مخروط اصلي محور او د Δ مستقیم خط د هغه مولد دی.

د یوې مستوي په واسطه د یوه مخروط قطع کول مختلف حالتونه لري چې مختلفي منحني ګاني منځ ته راځي چې مخروطي مقاطع بلل کیږي. په راتلونکي کې به هر یو په تفصیل سره ولوستل شي.

فعالیت

- یو مخروط د مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط په اصلي محور باندې عمود او یا له قاعدو سره موازي وي، ویلاي شئ، ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي نسبت د مخروط اصلي محور ته مایله وي، ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط له مولد سره موازي وي، نوتقاطع یا ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- دوه مخروطه چې راسونه یې سر په سر (منطبق) او قاعدې یې موازي وي، د یوې مستوي په واسطه چې اصلي محور سره موازي وي قطع کړئ. ویلای شئ چې له ګډ فصل څخه یې څه ډول منحني په لاس راځي؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط اصلي محور په بر کې ولري، تقاطع یا ګډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:



پایله:

- که چېرې مستوي یو مخروط داسې قطع کړي چې مستوي د مخروط په اصلي محور عمود او یا موازي له قاعدو سره وي، نو لاس ته راغلی شکل یې یوه دایره(Circle) ده.
- که چېرې مستوي مخروط داسې قطع کړي چې مستوي نسبت د مخروط اصلي محور ته مایل وي، نو لاس ته راغلی شکل بیضوی (Ellipse) ده.
- که چېرې یوه مستوي یو مخروط داسې قطع کړی وي چې اصلي محور ته موازي اما هغه په بر کې ونه لري، نو په دې حالت کې د هغوی له لاس ته راغلي شکل څخه پارابولا (Parabola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي دوه څوکې په څوکې مخروطونه داسې قطع کړي چې د مخروط له اصلي محور سره موازي وي خو هغه په ځان کې ونه لري نو، له لاس ته راغلي شکل څخه یې هایپربولا (Hyperbola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي سطحه اصلي محور په برکې ولري، نو لاس ته راغلی شکل یې له دوو متقاطع خطونو څخه عبارت دی چې هر یو یې په پورته شکلونو کې ښودل شوی دي.

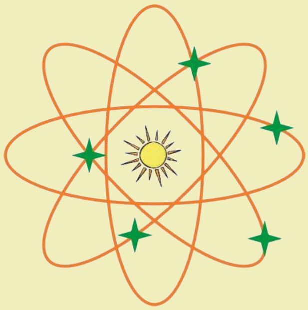
پوښتنې

1- پورتني شکل ته په کتو سره، د مستوي او مخروط هغه متقاطع حالت رسم کړئ چې ګډ فصل یې یوه دایره او یا یو ټکی وي.

2- که چېرې یوه مستوي دوه څوکې په څوکې مخروطونه داسې قطع کړي چې د دواړو مخروطونو اصلي محورونه په برکې ولري، ګډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟

3- د یوې مستوي او یو مخروط ګډ فصل په کوم حالت کې یوه کرښه ده؟ په شکل کې یې وښیې؟

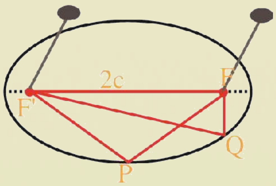
بيضــوي
Ellipse



د سيارو حرکت د لمريز نظام په شاوخوا څه ډول منحني ګانې جوړوي؟

فعاليت

- د ميز پر سر د يوې سپينې کاغذي پاڼې پر مخ دوه ستنې په يوه معين او ثابت واټن سره د F او F' پـه دوو ټکـو کې وټومبئ.
- د يو تار څوکه چې اوږدوالی يې د دوو ستنو ترمنځ د فاصلې څخه زيات يا د $\overline{FF'}=2c$ وي، په دواړو ستنو کې وتړئ، لاندې شکل تـه پـه کتـو سره يو پنسل د تار په غاړه د ستنو په شاوخوا وڅرخوئ.

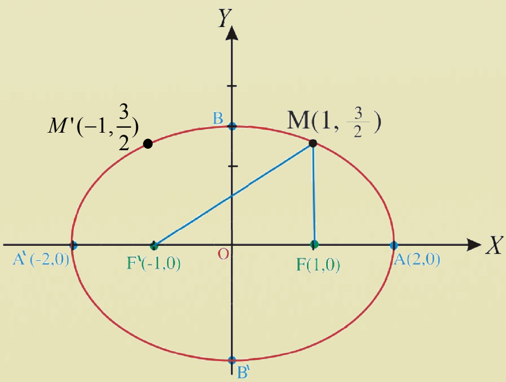


- هغه شکل چې له يوې بشپړې دورې څخه په لاس راځي څه ډول منحنی ده؟

له پورته فعاليت څخه لاندې پايله بيانولای شو:

پايله: هغه شکل چې ددوو ستنو تر منځ د معين او ثابت واټن پـه انـدازه د تـار پـه غاړه د پنسل لـه څرخولـو څخه پـه لاس راځي، بيضوي بلل کېږي، د F او F' ټکي د بيضوي د محراقونو په نامه يادېږي.

فعاليت



- پـه مخـامخ شـکل کـې د F'،F ،M'،M ،A' او A ټکو مختصات درکړل شوي، د دوو ټکو تـرمنځ د فاصلې د پيـداکولـو لـه فـارمول څخـه پـه کـار اخيـستنې د $|MF'|$,$|MF|$ او $|AA'|$ اوږدوالـی پيـدا کـړئ او د $|MF|+|MF'|$ جمع حاصل لاس تـه راوړئ او د $|AA'|$ اوږدوالی سره يې پرتله کړئ.

- د $M'(-1,\frac{3}{2})$ ټکی د بیضوي په محیط باندې وټاکئ او پورتنۍ ذکر شوې مرحلې د M' په ټکی باندې تطبیق کړئ. همدارنګه د M ټکی هم په پام کې ونیسئ.
- وروسته د $|M\,F'| + |M\,F|$ او $|M'\,F| + |M'\,F'|$ قیمتونه یو له بله سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانولای شو:

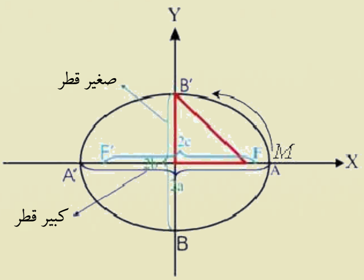
تعریف: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو ثابتو ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل تل مساوي یا ثابت اوږدوالی $(2a)$ ولري، بیضوي بلل کېږي، مستقر ټکی چې په F او F' تورو ښودل شوی، د بیضوي محراقونه او A', A د بیضوي راسونه چې $AA' = 2a$ ثابت اوږدوالی دی.

$$|M'\,F| + |M'\,F'| = 2a \quad , \quad |M\,F| + |M\,F'| = 2a$$

نو:

$$|M'\,F| + |M'\,F'| = |M\,F| + |M\,F'| = 2a$$

د بیضوي قطرونه او راسونه



بیضوي بې شمېره قطرونه لري، تر ټولو اوږد قطر یې چې له محراقونو څخه تېرېږي او بیضوي په دوو ټکو (A او A') کې قطع کوي، د کبیر قطر (Major axis) په نامه او ترټولو لنډ قطر یې چې د FF' د تنصیف په ټکي باندې عمود دی، د صغیر قطر (Minor axis) په نامه یادېږي. د A, A' او B, B' ټکي د بیضوی راسونه دي، کبیر قطر په $A\,A'$ چې اوږدوالی یې $AA' = 2a$ او صغیر قطر په BB' چې اوږدوالی یې $BB' = 2b$ دی، ښودل کېږي.

یاددښت

که چېرې د M ټکی د صغیر قطر په یوه راس باندې یعنې په B یا B' باندې منطبق شي، په دې صورت کې، په پورته شکل کې: $\overline{MF} = \overline{MF'}$ سره کېږي.

د بیضوي له تعریف څخه پوهېږو چې:

$$|MF| + |MF'| = 2a$$

$$2\overline{MF} = 2a$$

$$\overline{MF} = a$$

د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه

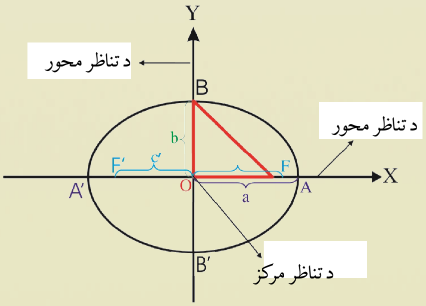
د محراقونو او قطرونو ترمنځ اړیکې د فیثاغورث د قضیې له مخې لیکلای شو:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

د بیضوي تناظري مرکز او تناظري محور

بیضوي دوه تناظري محورونه لري، یو یې اوږد محور چې د AA' پر قطر باندې منطبق دی، محراقي محور هم بلل کېږي او بل یې لنډ محور چې د BB' پر قطر باندې منطبق دی، تناظري محور په نامه یادېږي.

د دې دواړو تناظري محورونو د تقاطع ټکی د بیضوي تناظري مرکز بلل کیږي او په (O) سره ښودل کیږي.



$$\overline{OA} = \overline{OA'} = a$$
$$\overline{OB} = \overline{OB'} = b$$
$$\overline{OF} = \overline{OF'} = c$$

عن المرکزیت (Eccentricity): د محراقونو د اوږدوالي او د کبیر قطر د اوږدوالي نسبت ته عن المرکزیت وایې چې د یوې بیضوي شکل د هغه په واسطه ټاکل کیږي ، د بیضوي عن المرکزیت په e سره ښودل کیږي.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

پوهیږو چې په هره بیضوي کې $0 < c < a$ دی، نو $0 < e < 1$ کیږي، ولې؟

د بیضوي د عن المرکزیت او قطرونو تر منځ داسې رابطه $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ده، د $e = \frac{c}{a}$ د رابطې په کارولو سره هغه لاس ته راوړئ.

یادونه: که چیرې د e قیمت صفر ته نژدې شي، محراقونه د مرکز خوا ته نژدې کېږي او بیضوي تقریباً دایروي شکل غوره کوي. که چیرې e د 1 عدد ته نژدې شي، په دې صورت کې محراقونه د قطرونو د راسونو خواته نژدې کېږي چې یو اوږد شکل غوره کوي، د بیضوي د ډېرو مسایلو په حل کې د عن المرکزیت څخه کار اخیستل کېږي.

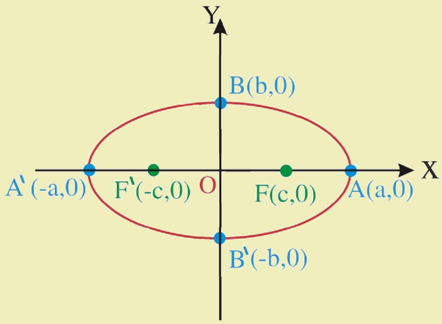
پوښتنې

1 – که چېرې په بیضوي کې د کبیر او صغیر قطر اوږدوالی یو له بل سره مساوي وي، څه ډول منحنی په لاس راځي؟

2 – که چېرې د بیضوي عن المرکزیت $\frac{2}{3}$ وي، په دې صورت کې د کبیر قطر او صغیر قطر نسبت پیدا کړئ.

د بیضوي معادله

آیا د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، پیدا کولای شئ؟

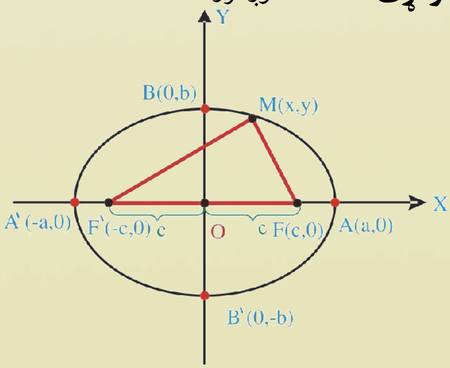


فعالیت

- داسې بیضوي رسم کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي او محراقونـه یـې د x د محور پـه مـخ وپرتې وي.
- د $M(x,y)$ یو اختیاري ټکی، د بیضوي پر محیط باندې وټاکئ او هغه له محراقونو سره ونښلوئ.
- د بیضوي د تعریف رابطه نظر د M ټکي ته ولیکئ.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې د MF او MF' اوږدوالی پیدا کړئ او دهغه په اساس د بیضوي معادله په لاس راوړئ.

د بیضوي د معادلې ثبوت

لومړی حالت: موږ لرو:



$$|MF|+|MF'|=2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$
$$(\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2=(2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2$$

د دواړو خواوو له مربع کولو وروسته لیکو چې:

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$
$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$
$$x^2-2cx+c^2+y^2-4a^2-x^2-2cx-c^2-y^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
$$-4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\quad /\div(-4)$$

یا $a^2+cx=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

د پورته رابطې دواړه خواوې بیا مربع کوو او لیکو:

$$(a^2+cx)^2=(a\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2[(x+c)^2+y^2]$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$a^4+c^2x^2-a^2x^2-a^2c^2-a^2y^2=0/(-1)$$
$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2-c^2x^2-a^4=0$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

څرنګه چې $a^2=b^2+c^2$ دي، نو $b^2=a^2-c^2$ کېږي، په دې صورت کې پورته معادله په لاندې توګه لیکو:

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad / \div a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \qquad a>b$$

د بیضوي په پورته معادله کې a د کبیر قطر نیمایي او b د صغیر قطر نیمایي دی چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مرکز کې او محراقي محور یې د x پرمحور دی.

د کبیر او صغیر قطر د راسونو او د محراقونو مختصات عبارت وي له:

$$\begin{cases}A(a،\ 0)\\A'(-a,0)\end{cases}\qquad\begin{cases}B(0،b\ )\\B'(0،\ -b)\end{cases}\qquad\begin{cases}F(c،\ 0)\\F'(-c،\ 0)\end{cases}$$

دویم حالت: که چېرې د بیضوي محراقونه د y په محور باندې وي، په دې صورت کې د بیضوي معادله عبارت ده له: $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$

د هغه ګراف رسم او د اوږد قطر، لنډ قطر د راسونو او محراقونو مختصات یې ولیکې.

لومړی مثال: که چېرې د بیضوي اوږد قطر د y پر محور باندې او اوږدوالی یې $|AA'|=6$ او د لنډ قطر اوږدوالی یې $|BB'|=4$ واحده وي، د بیضوي معادله پیدا کړئ.

حل:
$$|AA'|=2a=6\Rightarrow\ a=3$$
$$|BB'|=2b=4\ \Rightarrow\ b=2$$

اوس د a او b قیمتونه په عمومي معادله کې ایږدو: $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1\ \Rightarrow\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

دويم مثال:که چيرې اوږد قطر د x پر محور او اوږدوالی يې $|AA'|=10$ او د لنډ قطر اوږدوالی يې $|BB'|=8$ واحده وي، د بيضوي د اوږده او لنډ قطرونو د راسونو او محراقونو مختصات، محراقي فاصله، د عن‌المرکزيت قيمت پيدا او ګراف يې رسم کړئ.

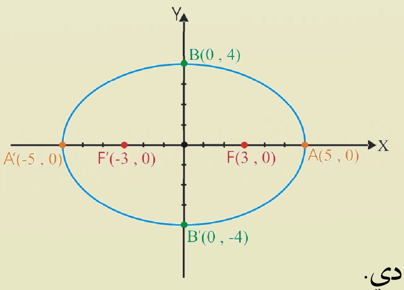
حل: پوهيږو چې:

$$|AA'|=2a=10 \quad \Rightarrow \quad a=\pm 5$$
$$|BB'|=2b=8 \quad \Rightarrow \quad b=\pm 4$$

د اوږده قطر د راسونو مختصات له $A(5,0)$ او $A'(-5,0)$ څخه عبارت دي.

د لنډ قطر د راسونو مختصات له $B(0,4)$ او $B'(0,-4)$ څخه عبارت دي.

د محراقونو د مختصاتو د پيداکولو لپاره د c قيمتونه پيداکوو:



$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow (5)^2=(4)^2+c^2$$
$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 5^2-4^2=25-16=9$$
$$c=\pm 3$$

د محراقونو مختصات له $F(3,0)$ او $F'(-3،0)$ څخه عبارت دي.

عين‌المرکزيت: $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$ دی.

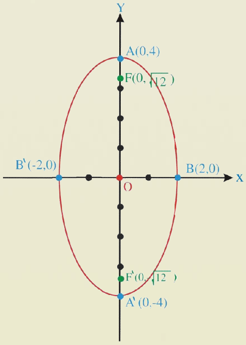
دريم مثال: د داسې بيضوي ګراف رسم کړئ چې معادله يې $4x^2+y^2=16$ وي، د راسونو او محراقونو مختصات يې پيدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې په 16 ويشو او لاندې معادله لاس ته راځي:

$$\frac{4x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{16}{16} \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

د راسونو مختصات:

$$a^2=16 \quad \Rightarrow \quad a=\pm 4 \quad \Rightarrow \quad A(0،4) \ ، \ A'(0 \ ، \ -4)$$
$$b^2=4 \quad \Rightarrow \quad b=\pm 2 \quad \Rightarrow \quad B(2،0) \ ، \ B'(-2 \ ، \ 0)$$



د محراقونو مختصات:

$$c^2=a^2-b^2$$
$$c^2=(4)^2-(2)^2$$
$$c^2=16-4=12 \Rightarrow c=\pm\sqrt{12}$$
$$F(0,\sqrt{12}),\ F'(0,-\sqrt{12})$$

څلورم مثال:د بیضوي د محیط پر مخ د یوه ټکي مختصات $P(2,4)$ او د محراقونو مختصات یې له $F'(-3\sqrt{2},0), F(3\sqrt{2},0)$ څخه عبارت دي. د اوږده او لنډ قطر اوږدوالی یې پیدا کړئ.

حل: د بیضوي د تعریف له مخې لرو چې: $|PF|+|PF'|=2a \qquad \dots \text{I}$

د PF او PF′ د فاصلو اوږدوالی پیدا کوو $|PF|=\sqrt{(2+3\sqrt{2})^2+4^2}$ او $|PF'|=\sqrt{(2-3\sqrt{2})^2+4^2}$

پورتني قیمتونه د I په رابطه کې ایږدو:

$$\sqrt{(2+3\sqrt{2})^2+4^2}+\sqrt{(2-3\sqrt{2})^2+4^2}=2a$$
$$\Rightarrow \sqrt{4+12\sqrt{2}+18+16}+\sqrt{4-12\sqrt{2}+18+16}=2a$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{38+12\sqrt{2}}+\sqrt{38-12\sqrt{2}}\right)^2=(2a)^2$$
$$38+12\sqrt{2}+2\sqrt{(38+12\sqrt{2})(38-12\sqrt{2})}+38-12\sqrt{2}=4a^2$$
$$76+2\sqrt{1444-288}=4a^2 \Rightarrow 76+2\cdot 34=4a^2$$
$$\Rightarrow 76+68=4a^2 \Rightarrow 144=4a^2 \ /\div 4$$
$$\Rightarrow 36=a^2 \Rightarrow a=\pm 6$$
$$|AA'|=2a=2\cdot 6=12$$
$$b^2=a^2-c^2$$
$$b^2=6^2-(3\sqrt{2})^2 \Rightarrow b^2=36-9\cdot 2 \Rightarrow b=\pm 3\sqrt{2}$$
$$|BB'|=2b=2\cdot 3\sqrt{2}=6\cdot\sqrt{2}$$

پوښتني

1 – لاندې معادلې په پام کې ونیسئ د اوږده قطر اوږدوالی او د محراقونو ترمنځ فاصله یې پیدا کړئ.

$a)\ \dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1 \qquad b)\ \dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$

2 – د هغې بیضوي معادله ولیکئ چې عن المرکزیت یې 0.8 وي.

د هغې بيضوي معادله چې مرکزيې يو اختياري ټکی وي

آيا داسې بيضوي معادله پيدا کولای شو چې مرکزيې

د وضعيه کمياتو په مبدا کې نه وي؟

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

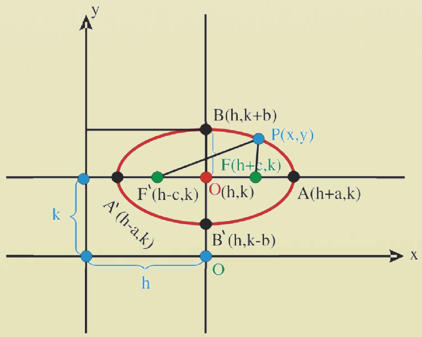
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

فعاليت

- يوه بيضوي د وضعيه کمياتو په سيستم کې رسم کړئ چې مرکزيې (h,k) اوږد قطريې د x له محور سره موازي وي.
- د $P(x,y)$ يو ټکی د بيضوي په محيط باندې په پام کې ونيسي او هغه له F او F' سره ونښلوئ.
- د بيضوي د مرکز مختصات (h,k) په پام کې نيولو سره د محراقونو F او F'، راسونو A , A' او B,B' وضعيه کميات په شکل کې وښياست.

لومړی حالت: د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پيدا کولو له فارمول او د بيضوي د تعريف څخه په کار اخيستنې سره د بيضوي معادله په لاس راوړو:

د PF او PF' قيمتونه د بيضوي د تعريف په رابطه کې ايږدو.



$$\left|\overline{PF}\right|+\left|\overline{PF'}\right|=2a$$

$$\left|\overline{PF}\right|=\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

$$\left|\overline{PF'}\right|=\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

$$\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\ /(\ )2$$

$$[x-(h+c)]^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+[x-(h-c)]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h+c)+(h+c)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h-c)+(h-c)^2$$

$$x^2-2hx-2cx+h^2+2hc+c^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2hx+2cx+h^2-2hc+c^2$$
$$4hc-4cx=4(a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2})/\div 4$$
$$hc-cx=a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$
$$c(h-x)-a^2=-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\quad /\div(-1)$$
$$c(x-h)+a^2=a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

دواړه خواوې مربع کوو:

$$c^2(h-x)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[\{x-(h-c)\}^2+(y-k)^2]$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[(x-h)+c]^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2-a^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$
$$(x-h)^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$
$$-(x-h)^2(a^2-c^2)-a^2(y-k)^2=-a^2(a^2-c^2)$$

څرنګه چې په بیضوي کې $a^2-c^2=b^2$ کېږي، نو لیکلای شو:

$$-b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=-a^2b^2\quad /\ \div(-a^2b^2)$$
$$=\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

لومړی مثال: د یوې بیضوي د مرکز، محراقونو او اوږد قطر د راسونو مختصات چې معادله یې $\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$ ده، پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل: څرنګه چې نوموړې معادله عمومي شکل لري، له دې امله د مرکز مختصات یې $(6,-4)$ دي، اوږد محور یې د x له محور سره موازي دی.

$$a^2=36\Rightarrow a=\pm 6$$
$$b^2=16\Rightarrow b=\pm 4$$
$$c=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=\pm 2\sqrt{5}$$

د اوږد قطر د راسونو مختصات عبارت دي له:

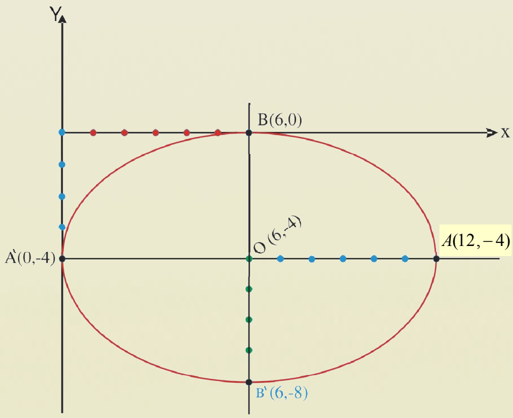
$$A(h+a\ ,k)=A(6+6,-4)=A(12,-4)$$
$$A'(h-a\ ,k)=A'(6-6,-4)=A'(0,-4)$$

د تناظري محور د راسونو مختصات عبارت دي له:

$$B(h,k+b)=B(6,-4+4)=B(6,0)$$
$$B'(h,k-b)=B'(6,-4-4)=B'(6,-8)$$

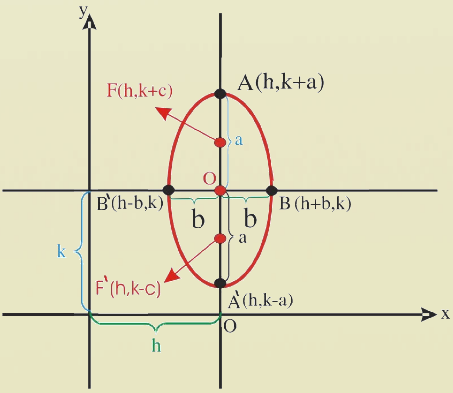
د محراقونو مختصات عبارت دي له:

$$F(h+c,k)=F(h+c,k)=(6+2\sqrt{5},-4)$$
$$F'(h-c,k)=F'(h-c,k)=(6-2\sqrt{5},-4)$$



دویم حالت: که چېرې محراقي محور د y له محور سره موازي وي، په دې حالت کې معادله لاندې بڼه غوره کوي.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$
$$A(h\,,\,k+a)\,,\;\;A'(h,k-a)$$
$$B'(h-b\,,k)\,,\;\;B(h+b,k)$$
$$F'(h,k-c)\;\;,\;\;F(h\,,k+c)$$



یادونه: د $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ معادله هم د بیضوي عمومي معادله ده، په داسې حال کې چې $A\neq C$ او هم علامه وي، یعني $A>0\,,\,C>0$ یا $A<0\,,\,C<0$

دویم مثال: د $16x^2+25y^2-64x+50y-311=0$ معادله د بیضوي د معیاري معادلې په ډول ولیکئ.

حل: د مربع له بشپړولو څخه په کار اخیستنې سره یې په معیاري ډول بدلوو .

$$16x^2+25y^2-64x+50y=311$$
$$16(x^2-4x)+25(y^2+2y)=311$$
$$16(x^2-4x+4-4)+25(y^2+2y+1-1)=311$$
$$16[(x-2)^2-4]+25[(y+1)^2-1]=311$$
$$16(x-2)^2-64+25(y+1)^2-25=311$$
$$=16(x-2)^2+25(y+1)^2=311+64+25$$
$$16(x-2)^2+25(y+1)^2=400$$

د پورته معادلې دواړه خواوې په 400 وېشو: $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$
پورتنۍ معادله د داسې بيضوي معادله ده چې مرکز يې د $(2، -1)$ ټکی دی.

دريم مثال: د بيضوي لاندې معادله د معياري معادلې په ډول وليکئ.

$$x^2+9y^2+4x-18y-23=0$$

حل : لومړی معادله ترتيب بيا د مربع له بشپړولو څخه په کار اخيستنې سره هغه په معياري شکل بدلوو:

$$x^2+9y^2+4x-18y-23=0$$
$$x^2+4x+9(y^2-2y)-23=0$$
$$x^2+4x+(2)^2-(2)^2+9[y^2-2y+(1)^2-(1)^2]-23=0$$
$$\underbrace{x^2+4x+(2)^2}_{\text{کامله مربع}}-(2)^2+9\underbrace{\left[y^2-2y+(1)^2\right]}_{\text{کامله مربع}}-9-23=0$$

$$(x+2)^2-4+9(y-1)^2-9-23=0$$
$$(x+2)^2+9(y-1)^2-36=0$$
$$(x+2)^2+9(y-1)^2=36$$

د مساواتو دواړه خواوې په 36 وېشو:

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{9(y-1)^2}{36}=\frac{36}{36}$$
$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

پوښتنې

1. د لاندې هر يوه بيضوي په معادلو کې د مرکز، محراقونو، راسونو مختصات او د کبير قطر اوږدوالی پيدا کړئ.

$a)\quad \frac{(x+3)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{9}=1 \qquad b)\quad x^2+2y^2+4x-12y+20=0$

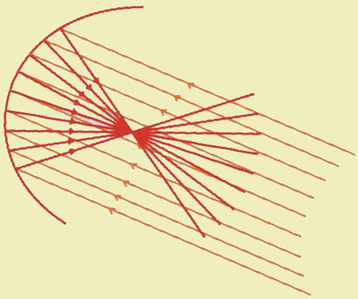
2. د داسې بيضوي معادله وليکئ چې مرکز يې د $(1,2)$ ټکی، محراق يې د $(2, 6)$ ټکی وي او د $(4,6)$ له ټکي څخه تېره شي.

3. د بيضوي لاندې معادلې د معياري معادلو په ډول وليکئ، د مرکز، راسونو، محراقونو وضعيه کميات او د اوږده قطر، لنډ قطر اوږدوالی، عن المرکزيت پيدا او ګرافونه يې رسم کړئ.

$a)\quad 9x^2+25y^2-36x-150y+36=0 \qquad b)\quad 16x^2+4y^2+96x-8y+84=0$

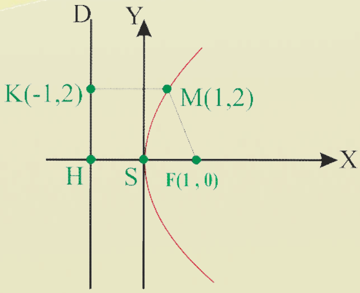
پارابـولا

Parabola



که چېرې د لمر وړانګې په يوې معقرې عدسـيې ولـوېږي، انعکاسـي وړانګې يې له کوم ټکي څخه تېرېږي؟ دغه ټکـی څه نـومېږي او د عدسې ګډ فصل له يوې متقاطع مستوي سره چې د عدسـيې اصلي محور په بر کې ولري. څه ډول منحني ده؟

فعاليت

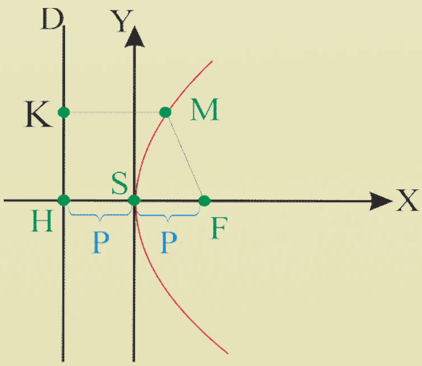


په مخامخ شکل کې د M ،F او K ټکو مختصات درکړل شـوي دي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پيداکولـو لـه فـارمول څخه پـه کار اخيستنې سره د FM او KM هر يو اوږدوالی پيـدا او يـو لـه بل سره يې پرتله کړئ.

له پورته فعاليت څخه لاندې تعريف بيانولای شو:

تعريف: په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د يوه ثابت يا مستقر ټکي او يـوه ثابـت مسـتقيم خـط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کيږي. دغه ثابت يـا مـستقر ټکـی د پـارابولا محـراق (F) او د D ثابت مستقيم خط ته د پارابولا هادي خط يا موجه خط (Directrix) وايي $\overline{MF} = \overline{MK}$

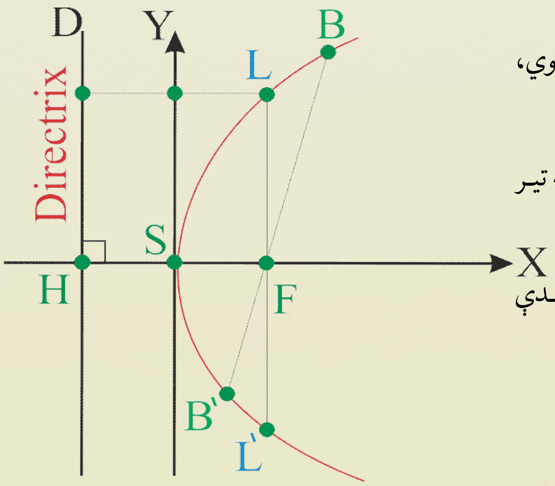
هغه مستقيم خط چې د پارابولا له محراق او راس څخه تير او د موجه (D) پر مـستقيم خـط عمـود وي، د پـارابولا د محراقي يا تناظري محور په نامه ياديږي.



د تناظري محور او منحني ګـډ ټکـی د پـارابولا راس او پـه S سره ښودل کيږي.

آيا ويلای شئ چې S د $\overline{FH}$ نيمايي ټکی دی، ولې؟

په پارابولا کې عن المرکزيت $(e = 1)$ دی، ولې؟



د پارابولا وترونه

هغه مستقيم خط چې د پارابولا دوه ټکي سره ونښلوي، د پارابولا وتر بلل کيږي.

په شکل کې $\overline{BB'}$ چې د پارابولا له محراق څخه تير شوي دی، محراقي وتر دی.

LL' چې د محراق په ټکي کې د تناظر پر محور باندې عمود دی عمودي وتر بلل کيږي.

پوښتنې

د پورته شکل په مرسته وښيئ چې د پارابولا د عمودي وتر اوږدوالی د $\overline{FH}$ خط د اوږدوالي څو برابره دی.

د پارابولا معادله

ځنکه کولای شو د هغه پارابولا معادله چې راس يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي، پيدا کړو.

$$y^2 = 4px$$
$$x^2 = 4py$$

فعالیت

- د وضعيه کمياتو قايم سيستم په پام کې ونيسئ او د y له محور سره د هادي موازي خط رسم کړئ.
- د پارابولا منحني داسې رسم کړئ چې راس يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي.
- د x پر محور باندې محراق داسې وټاکئ چې فاصله يې له مبدا څخه د هادي خط له فاصلې سره مساوي وي.
- په منحني باندې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ ، هغه له F سره ونښلوئ او د M له ټکي څخه يو عمود پر هادي(موجه خط) باندې رسم او د تقاطع ټکي ته يې K ووایاست.
- د F او K د ټکو مختصات ولیکئ.

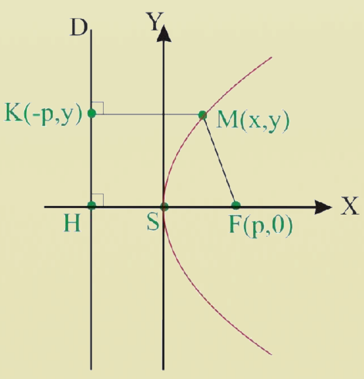
اوس د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې پيداکولو له فارمول څخه په کار اخيستنې سره د F,M او K,M ټکو ترمنځ فاصله پيدا کړئ او دا قيمتونه د پارابولا د تعريف په رابطه کې کيږدئ. $|MF|=|MK|$

ثبوت لومړی حالت: پوهيږو چې

$$|MF| = \sqrt{(p-x)^2 + y^2}$$
$$|MK| = x + p$$

اوس د $|MF|$ او $|MK|$ قميتونه د $|MF|=|MK|$ په رابطه کې ايږدو:

$$\sqrt{(p-x)^2 + y^2} = x + p$$



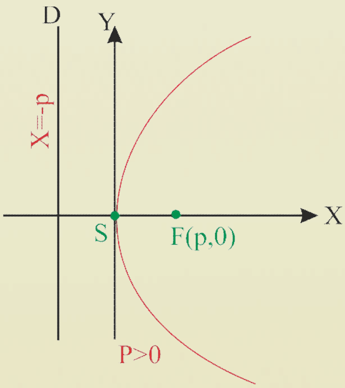
د پورته معادلې دواړه خواوې مربع کوو:

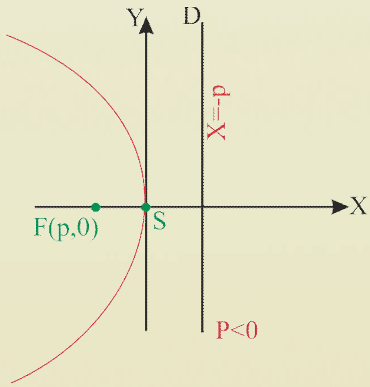
$$(\sqrt{y^2 + (p-x)^2}\,)^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 + (p-x)^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 + p^2 - 2px + x^2 = x^2 + 2px + p^2$$
$$\Rightarrow y^2 = 4px$$

وروستی رابطه دداسې پارابولا معادله راښیي چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې، محراق یې په $F(p,0)$ کې، د تناظر محور یې د x پر محور باندې منطبق دی او د موجه خط معادله یې $x=-p$ دی.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور ښي خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور باندې کیڼې خواته خلاصه ده.



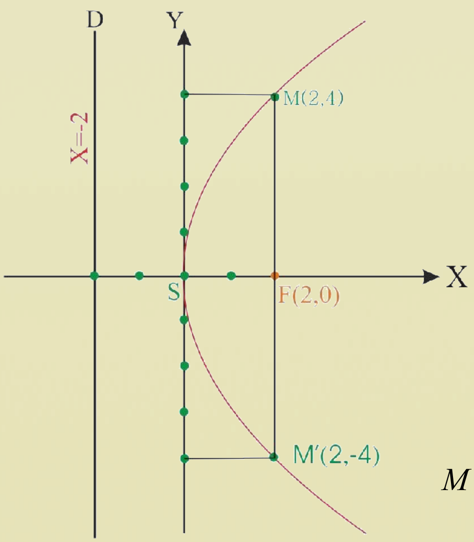


لومړی مثال: د داسې پارابولا معادله په لاس راوړئ چې د محراق مختصات یې $F(2,0)$ ، د هادي مستقیم خط معادله $x=-2$ سره وي، د عمودي وتر د انجامونو مختصات یې پیدا کړئ.

حل : د محراق مختصات چې د x په محور باندې دي، ویلای شو $P=2>0$ ، له دې امله د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

لرو چې: $y^2=4px$

اوس د $P=2$ قیمت په معادله کې ایږدو:



$$y^2=4\cdot 2x \quad \Rightarrow \quad y^2=8x$$

که چېرې د $x=2$ قیمت د $y^2=8x$ په معادله کې کېږدو، په دې صورت کې د پارابولا دوه ټکي چې د عمودي وتر انجامونه دي په لاس راځي، هغه عبارت دي له:

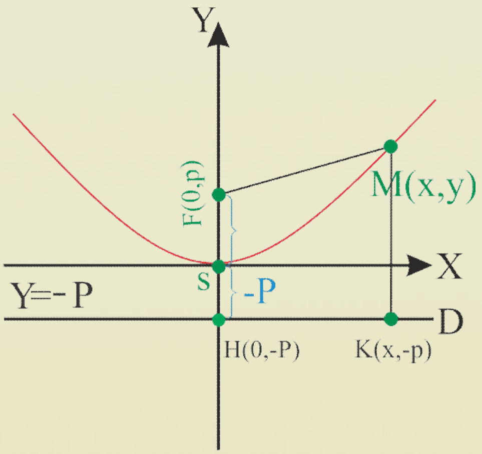
$$y^2=8\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad y^2=16$$

$$y=\pm 4$$

د عمودي وتر د انجامونو مختصات: $M(2,4)\ ,\ M'(2,-4)$

دويم حالت: كه چېرې د پارابولا محراق (F) د y پر محور باندې پروت او د D مستقيم خط د x له محور سره موازي وي، د پارابولا معياري معادله پيدا كړئ.

ثبوت: د پارابولا منحني پرمخ باندې د $M(x,y)$ ټكي په پام كې نيسو د تعريف له مخې ليكلاى شو:



$$|\overline{MF}| = |MK|$$

$$|\overline{MF}| = \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{x^2+(y-p)^2}$$

$$|\overline{MK}| = \sqrt{(x-x)^2+[(y-(-p)]^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$

$$(\sqrt{x^2+(y-p)^2})^2 = (\sqrt{(y+p)})^2 \; /(\;\;)^2$$

$$\Rightarrow x^2+(y-p)^2 = (y+p)^2$$

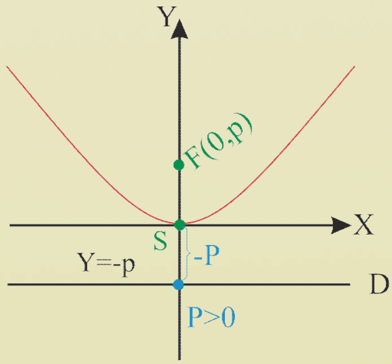
$$\Rightarrow x^2+y^2-2py+p^2 = y^2+2py+p^2$$

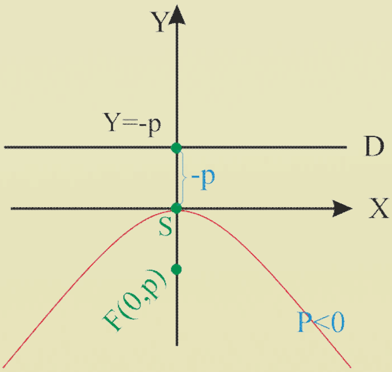
$$\Rightarrow x^2 = 4py$$

پورته معادله دداسې پارابولا معادله ده چې راس يې د وضعيه كمياتو د سيستم په مبدا كې او محراقي محور يې د y محور دی چې د محراق مختصات يې $F(0,p)$ او $y=-p$ يې د هادي مستقيم خط معادله ده.

كه چېرې $p > 0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

كه چېرې $p < 0$ وي، د پارابولا خوله ښكته خواته خلاصه ده.





دويم مثال: د $x^2 = 12y$ په معادله کې د پارابولا د راس او محراق مختصات او د هادي خط معادله پيدا کړی.

حل : **لومړي** د $x^2 = 4py$ په معادله کې د p قيمت په لاس راوړو.

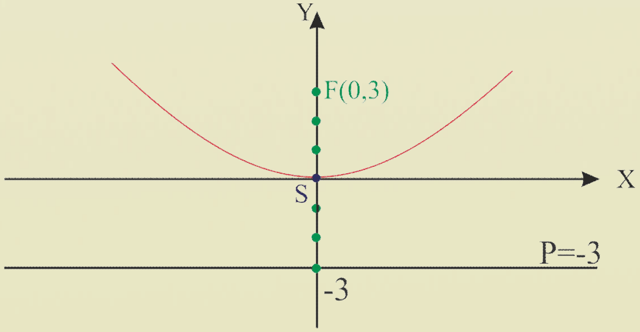
$$4p = 12 \Rightarrow p = 3$$

ځرنگه چې $P = 3 > 0$ ځخه دی، نو د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

1 – د راس مختصات عبارت دي له: $\left.\begin{array}{l} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow S(0,0)$

2 – د محراق مختصات عبارت دي له : F (0, 3)

3 – د هادي خط معادله عبارت ده له: $y = -p \Rightarrow y = -3$



پوښتنې

1 – د $y^2 - 4x = 0$ او $x^2 = 2y$ معادلو کې د هرې پارابولا د راس وضعيه کميات او د هادي (موجه خط) معادلې پيدا اوگرافونه يې رسم کړئ.

2 – د لاندې قيمتونو له مخې د هرې پارابولا معادله پيدا کړئ.

$a)\ S(0,0) \qquad F(0,5)$

$b)\ S(0,0) \qquad F(-2,0)$

د هغې پارابولا معادله چې راس يې يو اختياري ټکی وي

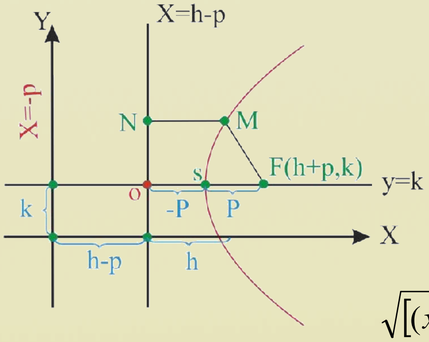
آيا د داسې پارابولا معادله پيدا کولای شو چې د راس مختصات يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې نه وي.

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$
$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

فعاليت

- يوه پارابولا د وضعيه کمياتو په سيستم کې رسم کړئ چې راس يې (h,k) او تناظري محور يې د x له محور سره موازي وي.
- د پارابولا په منحني باندې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ او هغه له F سره ونښلوئ، بيا د M له ټکي څخه يو عمود خط پر هادي خط(موجه) باندې رسم او هغه ته N ووایاست.

لومړی حالت: د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې له فورمول څخه په ګټې اخيستنې سره د F,M او N,M ټکو ترمنځ فاصله پيدا کړئ، بيا د هغې پارابولا معادله چې راس يې $S(h,k)$ ده، په لاس راوړئ.



ثبوت:څرنګه چې د F او M ټکو وضعيه کميات پيژنو او همدارنګه د N وضعيه کميات له $(h-p,y)$ څخه عبارت دی، د پارابولا د تعريف له مخې ليکو

$$|MF|=|MN|$$

$$\sqrt{[(x-(h+p)]^2+(y-k)^2}=\sqrt{[x-(h-p)]^2+(y-y)^2}$$

دواړه خواوې مربع کوو او له اختصار وروسته ليکو:

$$[(x-(h+p)]^2+(y-k)^2=[x-(h-p)]^2$$
$$\Rightarrow x^2-2(h+p)x+(h+p)^2+y^2-2ky+k^2=x^2-2(h-p)x+(h-p)^2$$

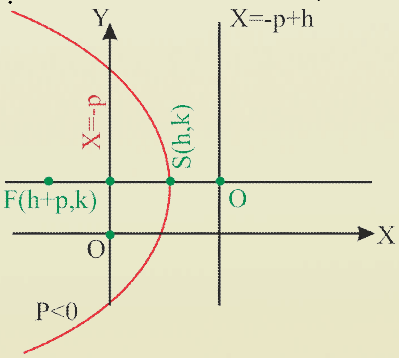
د پورته رابطې له پراختيا او ساده کولو وروسته په لاس راځي چې:

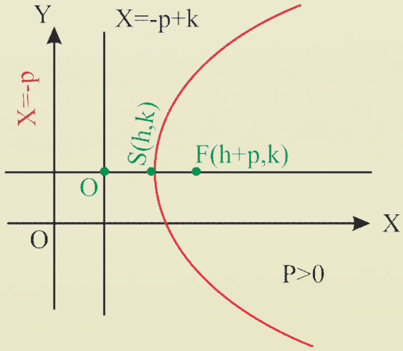
$$y^2-2ky+k^2=4px-4ph$$
$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

پورتنی معادله د هغې پارابولا معادله ده، چې د راس او محراق وضعیه کمیات یې په ترتیب سره $S(h,k)$ او $F(h+p,k)$ دي، او د موجه خط معادله یې $x=-p+h$ ، تناظري محور یې $y=k$ دی.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.





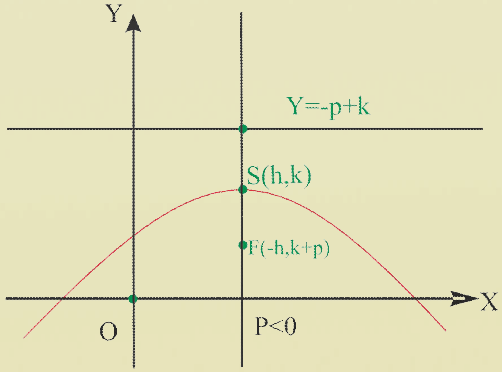
دويم حالت:د هغې پارابولا معادله چې راس يې (h,k) او د تناظر محور يې د y له محور سره موازي وي، عبارت ده له: $(x-h)^2=4p(y-k)$

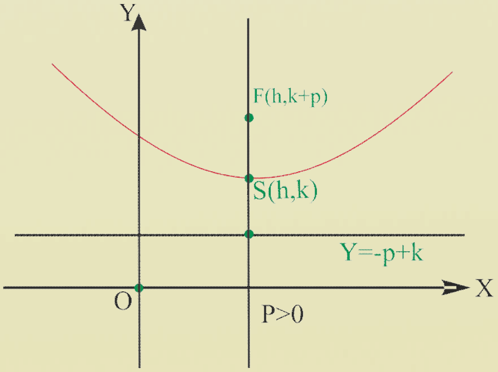
چې د پارابولا د راس مختصات $S(h,k)$ او د محراق مختصات يې $F(h,k+p)$ دي.

$y=k-p$ د پارابولا د هادي خط معادله او $x=-h$ تناظري محور دی.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.





لومړي مثال: غواړو د $(x-1)^2=12(y-2)$ پارابولا په معادله کې د راس مختصات، د محراق مختصات، د موجه خط معادله، تناظري محور او د عمودي وتر د انجامونو مختصات پيدا کړو.

حل: څرنگه چې معادله د $(x-h)^2=4p(y-k)$ عمومي شکل لري.

نو $k=2,h=1$ کېږي، په دې صورت کې د پارابولا د رأس وضعیه کمیات عبارت دي له: $S(1,2)$

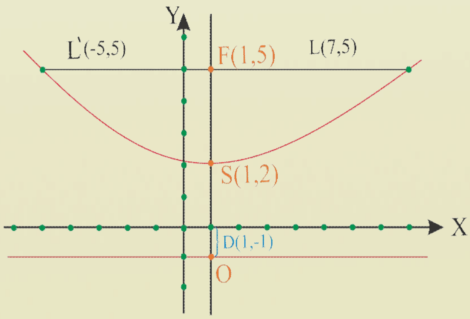
$$4p=12 \Rightarrow p=\frac{12}{4}=3$$

د محراق مختصات: $F(h,k+p)=F(1,2+3) \quad \Rightarrow \quad F(1,5)$

د موجه خط معادله $y=k-P \quad \Rightarrow \quad y=2-3=-1$

د تناظر محور: $x=h \Rightarrow x=1$

د عمودي وتر د انجامونو د مختصاتو د پیداکولو لپاره د y قیمت چې په محراق کې لـرو پـه عـمومي معادلـه کـې اېږدو یعني $y=5$ دی.



$$(x-2)^2=12(5-2)$$
$$(x-1)^2=12\cdot 3 \Rightarrow (x-1)^2=36$$
$$(x-1)=\pm 6$$
$$x_1=6+1=7,\ \ x_2=-6+1=-5$$
$$L(7,5) \qquad L'(-5,5)$$

دویم مثال: د $(y-4)^2=-6(x+3)$ معادله په پام کې ونیسی، د پارابولا د راس او محراق مختصات، د موجه خط معادله، د تناظري محور معادله، د عمودي وتر د انجامونو مختصات پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل:دراس مختصات: $k=4,h=-3 \quad \Rightarrow \quad S(-3,4)$

$$4P=-6 \Rightarrow P=-\frac{3}{2}$$

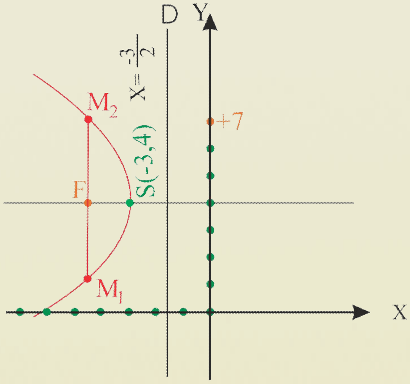
څرنګه چې $0>-\frac{3}{2}$ ده، نو د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.

د محراق مختصات: $F(h+p,k)=(-\frac{9}{2},4)$

موجه خط معادله عبارت ده له: $x=h-p \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{3}{2}$

د تناظري محور معادله: $y=k \quad \Rightarrow \quad y=4$

د محراق $x=-\frac{9}{2}$ مختصی قیمت په معادله کې اېږدو او د عمودي وتر د انجامونو مختصات په لاس راځي.



$$(y-4)^2=-6(x+3)=-6(-\frac{9}{2}+3)$$
$$(y-4)^2=9 \Rightarrow y-4=\pm 3$$
$$y_1=3+4=7$$
$$y_2=-3+4=1$$
$$M_2(-\frac{9}{2},7)\ ,\ M_1(-\frac{9}{2},1)$$

یادونه: د $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$ د معادلې گراف یوه پارابولا ده، په داسې حال کې چې A یا C صفر وي نه دواړه $(C\neq 0\ ,\ A=0)$ وي یا $C=0, A\neq 0$ وي).

پوښتنه: د $(x-h)^2=4p(y-k)$ معادله په توسعوي ډول ولیکئ.

دریم مثال: د $y^2-2y+8x+25=0$ پارابولا معادله، د پارابولا د معیاري معادلې په ډول ولیکئ د راس او محراق مختصات، د مؤجه خط او تناظري محور معادلې یې پیدا کړئ.

حل: په راکړل شوې معادله کې $A=0$ دی، نو نظر د y متحول ته یې، مربع بشپړوو.

$$y^2-2y+(1)^2-(1)^2+8x+25=0$$
$$(y-1)^2+8x+24=0 \Rightarrow (y-1)^2+8(x+3)=0$$
$$\Rightarrow (y-1)^2=-8(x+3)$$

په معادله کې لیدل کېږي: $4P=-8 \Rightarrow P=-2$

د راس مختصات: $k=1\ ,\ h=-3 \Rightarrow S(-3,1)$

د محراق مختصات: $F(h+p,k)\Rightarrow F(-3-2,1)\Rightarrow F(-5,1)$

د موجه خط معادله $x=h-p \Rightarrow x=-3+2=-1$

د تناظر محور : $y=k \Rightarrow y=1$.

پوښتنې

1ـ د لاندې پارابولا معادله پیدا کړئ، په داسې حال کې چې:

$S(1,3), F(-1,3)$

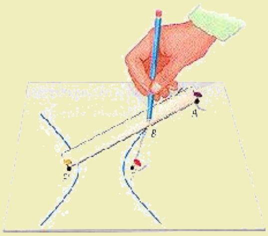
2- د $(y-1)^2=12(x-4)$ معادلې گراف د ټولو جزئیاتو سره رسم کړئ.

3- لاندې معادلې د پارابولا د معیاري معادلو په ډول ولیکئ او گراف یې رسم کړئ.

a) $y^2-6y+8x+41=0$ b) $x^2-2x-6y-53=0$

هایپربولا

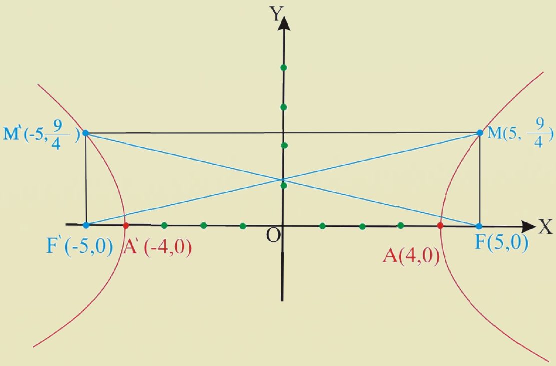
Hyperbola



په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل يې له دوو مستقرو ټکو څخه تل له يوه ثابت اوږدوالي سره مساوي وي، څه ډول يوه منحني کېدلای شي؟

فعالیت

- په لاندې شکل کې د A, M', M, F', F او A' ټکو مختصات درکړل شوي دي.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخيستني سره د $|MF|, |MF'|$ او $|AA'|$ اوږدوالی پیدا کړئ.
- د $|MF'|-|MF|$ د تفريق حاصل په لاس راوړئ او د $|AA'|$ له اوږدوالي سره يې پرتله کړئ.
- پورتنی فعاليت د M' ټکي لپاره تطبيق او پايله يې وليکئ.
- د $|MF'|-|MF|$ او $|M'F'|-|M'F|$ د تفريق حاصل يو له بل سره پرتله کړئ.



د پورتني فعاليت له سرته رسولو وروسته لاندې تعریف بیانولای شو:

تعریف: په يوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل يې له دوو مستقرو ټکو څخه تل مساوي اوږدوالی ولري، هايپربولا Hyperbola بلل کېږي، يعنې: $|MF'|-|MF|=|AA'|=2a$

په شکل کې F او F' د هايپربولا محراقونه، M او M' د هايپربولا دوه اختياري ټکي دي.

د FF' منځنی ټکی د هايپربولا مرکز دی، د مرکز او هر يوه راس ترمنځ فاصله په a او د مرکز او هر يوه محراق ترمنځ فاصله په c سره ښيي. $AA'=2a$ او $FF'=2c$.

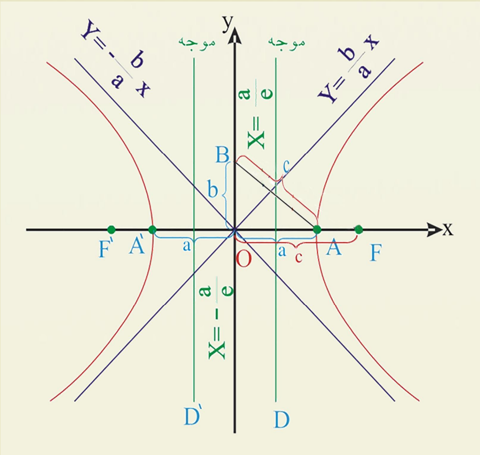
د هایپربولا تناظري محورونه او راسونه:

د بیضوي په څېر هایپربولا هم دوه تناظري محورونه لري چې یو یې په FF' باندې منطبق دی او بل یې د FF' عمودي ناصف کوونکی دی. د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکی یا ځای، د ها یپربولا مرکز بلل کېږي.

هغه تناظري محور چې له FF' څخه تېرېږي، د متقاطع محور (Transverse axis) په نامه یادیږي، څکه چې هایپربولا د A او A' په دوو ټکوکې قطع کوي چې دې دوو ټکو ته د هایپربولا حقیقي راسونه وایې او اوږدوالی یې له $|AA'| = 2a$ څخه عبارت دی.

هغه تناظري محور چې د هایپربولا په مرکز کې په متقاطع محور باندې عمود دی او هایپربولا نه قطع کوي، د مزدوج محور (conjugate axis) په نوم یادیږي. د مرکز دواړو خواوته د B او B' دوه ټکي پر نوموړي محور باندې داسې په نظر کې نیسو چې $OB = OB' = b$ وي، دا دوه ټکي د هایپربولا غیرې حقیقي راسونه بلل کیږي چې ترمنځ یې فاصله $|BB'| = 2b$ ده.

په یوه هایپربولا کې د a, b او c اوږدوالي ترمنځ داسې رابطه شته: $c^2 = a^2 + b^2$

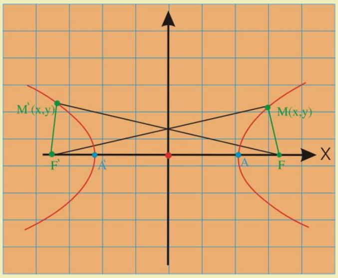


عن المرکزیت: څرنګه چې په هایپربولا کې $c > a$ دی، نو $e > 1$ کیږي. چې د a, b, c او عن المرکزیت ترمنځ د $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ رابطه شته. د $e = \frac{c}{a}$ له رابطې څخه په کار اخېستې سره نوموړې رابطه په لاس راوړې.

پوښتنې

د هایپربولا یو شکل رسم کړئ او په هغه کې د هایپربولا مرکز، محراقونه، حقیقي او غیرې حقیقي راسونه، متقاطع او مزدوج محورنه وښیئ.

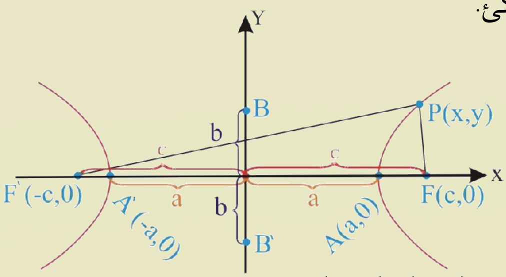
د هایپربولا معادله



آیا داسې یوه هایپربولا رسمولای شئ چې مرکز يې
د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي؟

فعالیت

- داسې هایپربولا رسم کړئ چې مرکز يې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي.
- د $P(x,y)$ ټکی د هایپربولا د منحني په یوې څانگې باندې وټاکئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ
- د F,P او F' ټکو ترمنځ د هایپربولا د تعریف رابطه ولیکئ.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د PF او PF' فاصلې پیدا کړئ او هغه د هایپربولا د تعریف په رابطه کې ولیکئ.



د هایپربولا د معادلې د پیداکولو لپاره د تعریف له مخې لرو: $|PF'|-|PF|=2a$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

د مساواتو د دواړو خواو له مربع کولو څخه وروسته لرو:

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$\Rightarrow 4cx-4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \;/\div 4$$

$$\Rightarrow cx-a^2 = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

بیا هم د مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$(cx-a^2)^2 = a^2(x-c)^2+y^2$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4 = a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4 = a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$\Rightarrow c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2 = a^2c^2-a^4 \quad \Rightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

څرنګه چې په هايپربولا کې $c^2 = a^2 + b^2$ رابطه شتون لري، نو $c^2 - a^2 = b^2$ کېږي، نو په پورته افاده کې د $c^2 - a^2$ د قيمت په اېښودلو سره ليکلای شو: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \,/\div a^2b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

پورتنۍ معادله د داسې هايپربولا معادله ده چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدأ او محراقونه يې په افقي محور پراته دي.

دويم حالت: که چيرې د هايپربولا متقاطع محور $\overline{AA'}$ د y پر محور پروت وي، نو د هايپربولا معادله عبارت ده له:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

د پورتنۍ رابطې ګراف رسم، فارمول يې ثبوت او د محراقونو او راسونو مختصات يې پيدا کړئ.

د هايپربولا موجه خطونه

که چيرې د هايپربولا محراقونه د x يا y په محورونو پراته وي، په دې صورت کې ليکلای شو چې:

$$e = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

له دې امله ويلای شو چې دا موجه خطونه په متقاطع محور باندې عمود دي چې د هغو فاصله د هايپربولا له مرکز څخه د $\pm\frac{a}{e}$ يا $\pm\frac{a^2}{c}$ څخه عبارت ده.

د هغې هايپربولا د موجه (ها دي) خطونو معادلې چې محراقونه يې د y پر محور باندې پراته دي له $y = \pm\frac{a}{e}$ څخه عبارت دي.

او د هغې هايپربولا د موجه خطونو معادلې چې محراقونه يې د x پر محور باندې پراته دي له $x = \pm\frac{a}{e}$ څخه عبارت دي.

د هايپربولا مجانبونه

هغه مستقيم خطونه چې د هايپربولا له مرکز څخه تير اوپه لايتناهي کې د هايپربولا له منحني سره مماس وي.

د هايپربولا مجانبونه بلل کيږي .

د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هایپربولا معادله په پام کې نیسو:

$$a^2y^2=b^2x^2-a^2b^2$$
$$a^2y^2=b^2(x^2-a^2)$$
$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)=\frac{b^2}{a^2}\left[x^2(1-\frac{a^2}{x^2})\right]$$
$$\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

که چیرې په پورتنی رابطه کې x لایتناهي ته نږدې شي د $\frac{a^2}{x^2}$ کسر د صفر خواته نږدې کیږي په پایله کې $\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)$ د یوه عدد ته تقرب کوي، په دې صورت کې $y=\pm\frac{b}{a}x$ لاس ته راځي.

نو $y=\pm\frac{b}{a}x$ د هغو مجانبونو معادلې دي چې د هایپربولا محراقونه د x پر محور باندې پراته وي.

که چیرې محراقونه د y پر محور باندې پراته وي، د مجانبونو معادلې یې له $y=\pm\frac{a}{b}x$ څخه عبارت دي.

لومړي مثال: د هایپربولا د $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ په معادله کې د محراقونو مختصات، د راسونو مختصات، د موجه خطونو معادلې او د مجانبونو معادلې پیدا او په شکل کې یې وښایاست.

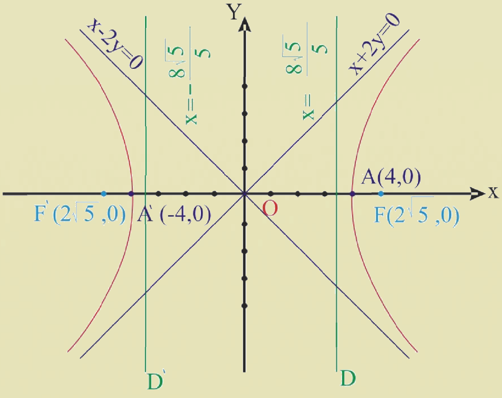
حل: درأسونو مختصات: $a^2=16\Rightarrow a=\pm4\Rightarrow A(4,0),A'(-4,0)$

$$b^2=4\quad\Rightarrow\quad b=\pm2\quad\Rightarrow\quad B(0، 2)\text{ ، }B'(0، -2)$$

د محراقونو مختصات: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot5}=\pm2\sqrt{5}$

$$\Rightarrow F(2\sqrt{5},0),F'(-2\sqrt{5},0)$$

د موجه خطونو معادلې: څرنګه چې محراقونه د x پر محور باندې پراته دي، له دې امله:



$$x=\pm\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}=\frac{4^2}{2\sqrt{5}}=\frac{16}{2\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$
$$y=\pm\frac{b}{a}x\quad\Rightarrow\quad y=\pm\frac{2}{4}x=\pm\frac{1}{2}x$$
$$2y=\pm x$$

یا: $x=\pm2y\quad\Rightarrow\quad x+2y=0,x-2y=0$

دويم مثال: د $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$, معادله د هايپربولا يوه معادله ده، په نوموړې معادله کې د محراقونو، راسونو مختصات، د مجانبونو او موجه خطونو معادلې پيدا او گراف يې رسم کړئ.

حل: پورتنی معادله د هايپربولا معادله ده چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې او د y محور يې متقاطع محور دی.

د راسونو مختصات: $a^2=4\Rightarrow a=\pm2\Rightarrow A(0,2)\ ,\ A'(0,-2)$

$$b^2=9\Rightarrow b=\pm3\Rightarrow B(3\ ,0)\ \ ,\ \ B'(-3\ ,0)$$

د محراقونو مختصات: $c^2=a^2+b^2\Rightarrow c^2=4+9=13\Rightarrow c=\pm\sqrt{13}$

$$F(0,\sqrt{13})\quad,\quad F'(0,-\sqrt{13})$$

د مجانبونو معادلې: څرنگه چې متقاطع محور د y پر محور باندې منطبق دی، نو د مجانبونو معادلې يې عبارت دي له:

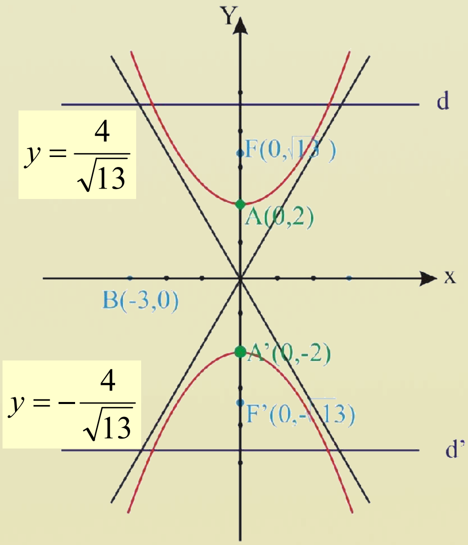
$$y=\pm\frac{a}{b}x\ \Rightarrow\ y=\pm\frac{2}{3}x\ \Rightarrow\ 3y=\pm2x$$

$$3y-2x=0\qquad,\qquad 3y+2x=0$$

د موجه خط معادله: څرنگه چې د هايپربولا متقاطع محور د y پر محور باندې منطبق دی، نو د موجه خطونو معادلې عبارت دي له:

$$y=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{4}{\sqrt{13}}=\pm\frac{4\sqrt{13}}{13}$$

$$y_1=\frac{4\sqrt{13}}{13}\ ,\quad y_2=-\frac{4\sqrt{13}}{13}$$



پوښتنې

د $4x^2-y^2=16$ هايپربولا له معادلې څخه د محراقونو وضعيه کميات، د راسونو وضعيه کميات، د موجه خطونو او د مجانبونو معادلې په لاس راوړئ او گراف يې رسم کړئ.

د هغې هایپربولا معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي

آيا د داسې هایپربولا معادله شته چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې نه وي؟

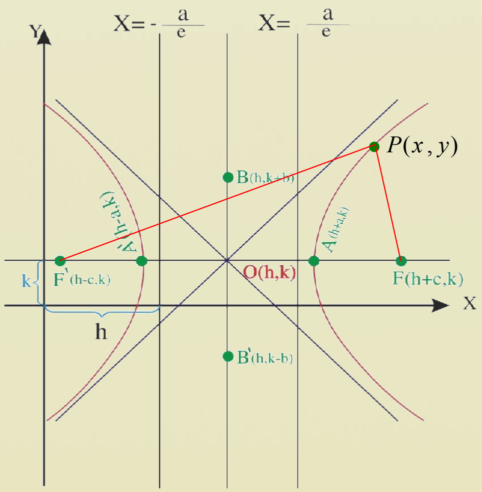
$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-h)}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

فعاليت

- د وضعيه کمياتو په سيستم کې داسې هایپربولا رسم کړئ چې د مرکز مختصات يې (h,k) او متقاطع محور يې د x له محور سره موازي وي.
- د هایپربولا د منحنی پرمخ باندې د $p(x,y)$ يو اختياري ټکی په پام کې ونيسئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ.
- د هایپربولا د مرکز (h,k) په پام کې نيولو سره د محراقونو مختصات يعنې F او F'، د راسونو مختصات يعنې A, A', B او B' په شکل کې وښاياست.

د شکل څخه په کار اخيستنې سره د $|PF'|-|PF|=2a$ رابطه حساب کړئ.



لومړی حالت: د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پيدا کولو له فارمول او د هایپربولا د تعريف له رابطې څخه په کار اخيستنې سره ليکلای شو:

$$|PF'|-|PF|=2a$$

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}-\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

يا

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

د پورتني مساواتو دواړه خواوې مربع کوو:

$$\left(\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}\right)^2$$

$$[x-(h-c)]^2+(y-k)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+[x-(h+c)]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h-c)+(h-c)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h+c)+(h+c)^2$$

د مشابه حدونو له جمعې او تفریق وروسته لیکلای شو:

$$cx-(ch+a^2)=a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}\ /(\ \ )^2$$

$$c^2x^2-2cx(ch+a^2)+(ch+a^2)^2=a^2[x-(h+c)]^2+a^2(y-k)^2$$

د ضرب، او توانونو له ساده کولو وروسته مشابه حدونه جمع او تفریق کوو او پورتنی رابطه په لاندې ډول لیکو:

$$c^2x^2-a^2x^2-2c^2hx+2a^2hx+c^2h^2-a^2h^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$

$$x^2(c^2-a^2)-2hx(c^2-a^2)+h^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x^2-2hx+h^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

څرنګه چې $c^2-a^2=b^2$ دې، نو پورته رابطه په لاندې ډول لیکو:

$$b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

دواړه خواوې په a^2b^2 ویشو:

$$\frac{\cancel{b}^2(x-h)^2}{a^2\cancel{b}^2}-\frac{\cancel{a}^2(y-k)^2}{\cancel{a}^2b^2}=\frac{\cancel{a}^2\cancel{b}^2}{\cancel{a}^2\cancel{b}^2}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

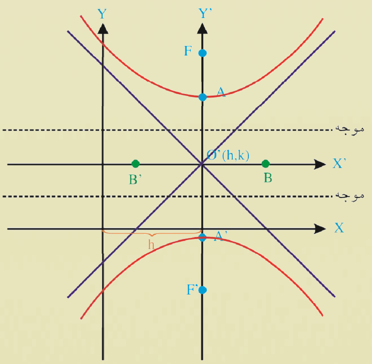
د حقیقي راسونو مختصات: $A(h+a,k)\quad A'(h-a,k)$

د غیرې حقیقي راسونو مختصات: $B(h,k+b)\quad B'(h,k-b)$

د محراقونو مختصات: $F(h+c,k)\ ,\ F'(h-c,k)$

د مجانبونو معادلې: $y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$

د موجه خطونو معادلې: $x-h\pm\frac{a}{e}$



دویم حالت: که چیرې متقاطع محور د y له محور سره موازي وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده، له:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

د شکل له مخې د هایپربولا د رأسونو او محراقونو مختصات د مؤجه خطونو او د مجانبونو معادلې پیدا کړئ.

يادونه: د هايپربولا پراختيايي معادله له $AX^2 + BY^2 + DX + EY + F = 0$ څخه عبارت ده په داسې حال کې چې $A, B \neq 0$ او $A \neq B$ يا $A = B$ خو مختلف الاشاره وي.

لومړی مثال: د $9(x-3)^2 - 4(y+1)^2 = 144$ معادله په پام کې ونيسئ، د مرکز، د راسونو، محراقونو مختصات او د مجانبونو معادلې پيدا کړئ.

حل: راکړل شوي معادله په معياري ډول ليکو:

$$\frac{9(x-3)^2}{144} - \frac{4(y+1)^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{36} = 1$$

د مرکز مختصات: $k = -1, h = 3$ يعني $(3,-1)$ دي

د راسونو مختصات: $a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$

$$A(h+a,k) = A(3+4,-1) = A(7,-1)$$
$$A'(h-a,k) = A'(3-4,-1) = A'(-1,-1)$$

او همدارنګه پوهېږو چې:

$$\begin{cases} b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm 6 \\ B(h,k+b) = B(3,-1+6) = B(3,5), \\ B'(h,k-b) = B'(3,-1-6) = B'(3,-7) \end{cases}$$

پوهېږو چې په هايپربولا کې: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow c = \pm\sqrt{52}$

د محراقونو مختصات: $F(h+c,k) = F(3+\sqrt{52},-1) \qquad F'(h-c,k) = F'(3-\sqrt{52},-1)$

که چيرې متقاطع محور د x له محور سره موازي وي، نو د مجانبونو معادلې عبارت دي له:

$$y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h) \;\Rightarrow\; y = \pm\frac{6}{4}(x-3) - 1 = \pm\frac{3}{2}(x-3) - 1$$

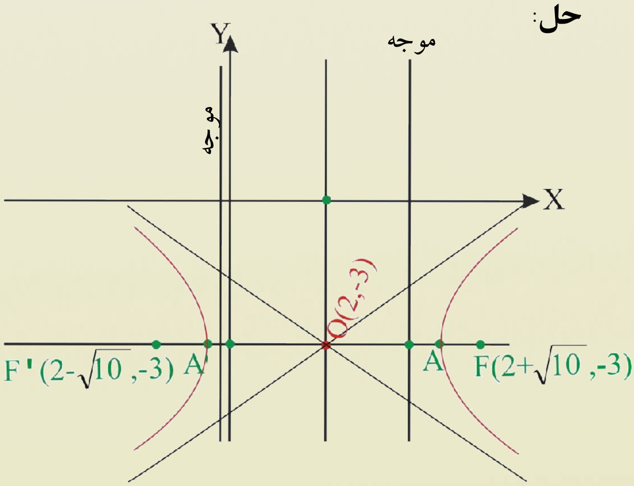
$$y = \pm\frac{3}{2}(x-3) - 1 \;\; /\cdot 2 \Rightarrow 2y = \pm 3(x-3) - 2$$

$$2y = 3x - 9 - 2 \;\Rightarrow\; 2y - 3x + 11 = 0$$

$$2y = -3x + 9 - 2 \;\Rightarrow\; 2y + 3x - 7 = 0$$

دويم مثال: د هايپربولا $2x^2 - 8x - 3y^2 - 18y - 31 = 0$ معادله په پام کې ونيسئ. د مرکز، راسونو او د محراقونو مختصات او د موجه خطونو او محانبونو معادلې په لاس راوړئ.

حل:



$$2(x^2-4x)-3(y^2+6y)-31=0$$
$$2\left[(x-2)^2-4\right]-3\left[(y+3)^2-9\right]-31=0$$
$$2(x-2)^2-8-3(y+3)^2+27-31=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2+27-39=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2-12=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2=12$$
$$\frac{2(x-2)^2}{12}-\frac{3(y+3)^2}{12}=\frac{12}{12}$$
$$\frac{(x-2)^2}{6}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$$

پورتنی معادله په معیاري ډول واړول شوه، لیدل کیږي چې $h=2$ او $k=-3$ یعني د مرکز مختصات یې: $O(2,-3)$

له بلې خوا:

$$b^2=4\Rightarrow b=\pm2 \quad , \quad a^2=6\Rightarrow a=\pm\sqrt{6}$$
$$c^2=a^2+b^2\Rightarrow \quad c=\pm\sqrt{a^2+b^2}=\pm\sqrt{6+4}=\pm\sqrt{10}$$

د محراقونو مختصات: $F(h\pm c,k)\Rightarrow F(2+\sqrt{10},-3) \quad , \quad F'(2-\sqrt{10},-3)$

د حقیقي راسونو مختصات: $A(h\pm a,k)\Rightarrow A(2+\sqrt{6},-3) \quad , \quad A'(2-\sqrt{6},-3)$

د غیرې حقیقي راسونو مختصات: $B(h,k\pm b)\Rightarrow B(2,-1) \quad , \quad B'(2,-5)$

د موجه خطونو معادلې: $x-h=\pm\frac{a}{e}\Rightarrow x=\pm\frac{a}{e}+h=\pm\frac{6\sqrt{10}}{10}+2\Rightarrow x=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}+2$

د مجانبونو معادلې: خرنګه چې متقاطع محور د x له محور سره موازي دی، نو لیکلای شو:

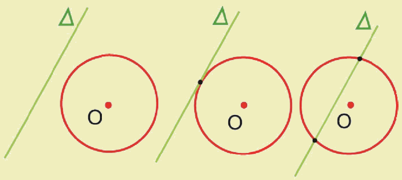
$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$$
$$y=\pm\frac{2}{\sqrt{6}}(x-2)-3/\cdot\sqrt{6}\Rightarrow \sqrt{6}y=\pm2(x-2)-3\sqrt{6}$$
$$\begin{cases}\sqrt{6}y-2x+4+3\sqrt{6}=0\\ \sqrt{6}y+2x-4+3\sqrt{6}=0\end{cases}$$

پوښتنې

د $9x^2-4y^2+54x+16y-79=0$ معادله د هایپربولا پر معیاري معادلې باندې واړوئ.

د مستقیم خط موقعیت نظر مخروطي مقاطعو ته

یوه اختیاري مستقیم خط، یوه دایره د امکان په صورت کې په څو ټکو کې قطع کولای شئ؟



فعالیت

د O دایره او د Δ مستقیم خط په پام کې ونیسئ:

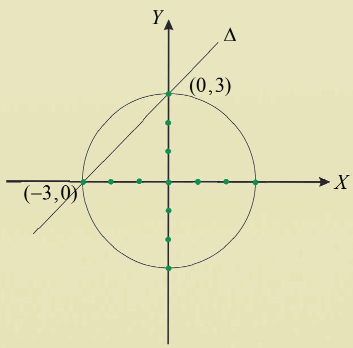
- یوه دایره او مستقیم خط داسې رسم کړئ، چې یوازې یو ګډ ټکی سره ولري.
- آیا کیدای شي چې یوه مستقیم خط، یوه دایره له دوو ټکو څخه په زیاتو ټکو کې قطع کړي؟
- که چیرې د دایرې د مرکز او مستقیم خط تر منځ واټن، د دایرې له شعاع څخه لوی وي. دایره او مستقیم خط څو ګډ ټکي لري؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: په یوه مستوي کې یوه اختیاري مستقیم خط او یوه دایره امکان لري، یوازې یوه، دوه او یا هیڅ ګډ ټکی ونلري.

لومړی مثال: په وضعیه کمیاتو کې د $x^2+y^2=9$ دایره او $y=x+3$ مستقیم خط رسم او موقعیت یې و ټاکئ.

حل: په شکل کې لیدل کیږي، چې دایره او مستقیم خط یو بل په $(0,3)$ او $(-3,0)$ دوو ټکو کې قطع کوي ددې پایلې د لاس ته راوړلو لپاره که چیرې د مستقیم خط له معادلې څخه د y قیمت د دایرې په معادله کې وضع کړو عین نتیجه په لاس راځي:



$$y=x+3$$

$$x^2+y^2=9 \Rightarrow x^2+(x+3)^2=9$$

$$x^2+x^2+6x+9=9$$

$$\Rightarrow 2x^2+6x=0$$

$$x_1=0 \quad , \quad x_2=-3$$

د x قیمتونه د $y=x+3$ په معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي.

$$y_1=0+3 \Rightarrow y_1=3$$

$$y_2=-3+3 \Rightarrow y_2=0$$

د $(0,3)$ او $(-3,0)$ ټکي د دایرې او مستقیم خط د تقاطع ټکي دي.

په عمومي ډول کله چې د مستقيم خط له معادلې څخه د x يا y متحول قيمت د مخروطي مقاطعو په معادله کې کېږدو، د حل لپاره يوه دويمه درجه معادله لاس ته راځي چې حل يې د Δ په قيمت پورې اړه لري. دغه مسئله په لاندې ډول د څېړلو،او پام وړ، پايلې لري:

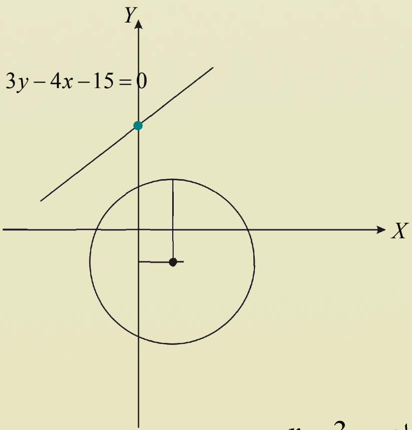
1- که چېرې $\Delta > 0$ وي، معادله دوه حلونه لري، نو په دې ډول مستقيم خط او منحني يوبل په دوو ټکو کې قطع کوي.

2- که چېرې $\Delta = 0$ وي، معادله دوه مضاعف يا مساوي حلونه لري او په دې ډول مستقيم خط د مخروطي مقاطعو له منحني سره يوازې يو ګډ ټکی چې مماس بلل کېږي، لري.

3- که چېرې $\Delta < 0$ وي، معادله حل نلري، په بل عبارت، مستقيم خط او منحني يو بل نه قطع کوي.

دويم مثال: د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ دايره او $3y - 4x - 15 = 0$ مستقيم خط په پام کې ونيسئ او موقعيتونه يې له يو بل سره و څېړئ.

حل: لومړی د دايرې معادله په معياري شکل بدلوو.



$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$
$$x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 + y^2 + 4y + (2)^2 - (2)^2 - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 9 = 0$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \qquad C(1,-2)$$

د دايرې له معياري معادلې څخه پوهېږو چې د دايرې مرکز $C(1,-2)$ او شعاع يې $r = 3$ دی.

همدغه راز د مستقيم خط معادله معياري شکل ته اړوو.

$$3y - 4x - 15 = 0 \Rightarrow 3y = 4x + 15 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 5$$

که چیرې د مستقیم خط له معادلې څخه د y قیمت د x له جنسه د دایرې په معیاري معادله کې کېږدو، نو لاندې پایله په لاس راځي.

$$(x-1)^2+(\frac{4}{3}x+5+2)^2=9$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1+(\frac{4}{3}x+7)^2=9 \Rightarrow x^2-2x+1+\frac{16}{9}x^2+14\frac{4}{3}x+49-9=0$$

$$\Rightarrow 9\cdot\frac{25}{9}x^2-9\cdot\frac{50}{3}x+9\cdot 41=0$$

$$\Rightarrow 25x^2+150x+369=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=22500-36900=-14400 \quad , \quad \Delta<0$$

څرنګه چې $\Delta<0$ ده، نو مستقیم خط او دایره ګډ ټکی نه لري.

دریم مثال : د $y=x-1$ د مستقیم خط موقعیت د $y-x^2+1=0$ پا رابولا ته وڅیړئ.

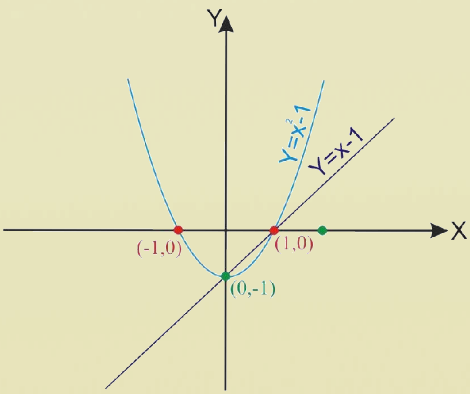
حل: د پورتنۍ مسئلې د څېړلو لپاره د y قیمت د پارا بول په معادله کې وضع کوو، او بیاګام په ګام د معادلې حل په پام کې نیسو:

$$y=x-1$$

$$y-x^2+1=0 \Rightarrow (x-1)-x^2+1=0$$

$$\Rightarrow x-1-x^2+1=0 \Rightarrow x^2-x=0$$

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=(-1)^2-4(1)(0)=1-0 \Rightarrow \Delta=1$$



څرنګه چې $\Delta=1>0$ ده، نو $y=x-1$ مستقیم خط د $y-x^2+1=0$ پارابول په دوو ټکو کې قطع کوي چې کولای شو حلونه یې په لاندې ډول پیدا کړو.

$$x^2-x=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1}}{2}$$

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=0$$

که چیرې په لاس راغلي قیمتونه د مستقیم خط په معادله کې کیږدو، نو د نوموړي مستقیم خط او پارابولا د قطع کولو ټکي په لاس راځي، هغه عبارت دي له : $(1,0)$, $(0,-1)$ چې دغه ټکي په ګراف کې هم په ښکاره ډول لیدل کېږي.

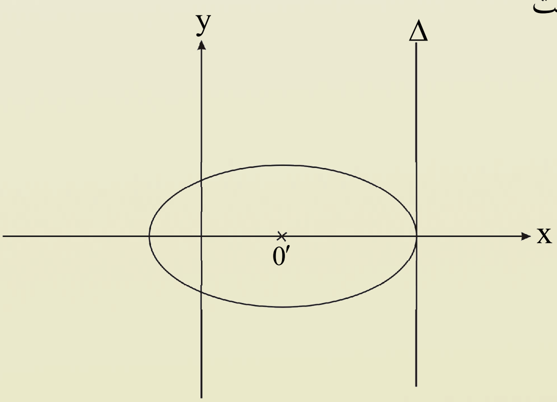
څلورم مثال: د $x = 5$ مستقیم خط او $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ بیضوي موقعیتونه وڅېړئ.

حـل: کـه چېـرې د $x = 5$ د مـستقیم خـط قیمـت د بیضوي په معادله کې کښېږدو، نو په لاس راځي:

$$\frac{(5-2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{9}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{4} = 1 - 1 \Rightarrow y^2 = 0$$

څرنګه چې: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$



په دې ډول ویلای شو چې مستقیم خط او بیضوي یو ګډ ټکی لري چې په شکل کې په ښکاره ډول لیدل کیږي.

یادونه: د مخروطي مقاطعو غزیدلی یا انکشاف ورکړل شوي، معادله په لاندې ډول ده:

$$A, B, D, E, F \in IR \quad , Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

د پورتنی معادلې د پېژندلو لپاره په یاد ولرئ چې:

1- که چېرې $A, B \neq 0$ ، $A = B$ او یو شان علامې ولري، یوه دایره ده.

2- که چېرې $A, B \neq 0$ ، $A \neq B$ او یو شان علامې ولري، یو بیضوی دی.

3- که چېرې $A, B \neq 0$ ، $A \neq B$ یا $A = B$ او مختلفې علامې ولري، هایپربولا ده.

4- که چېرې معادلې لاندې شکل ولري، ګراف یې یو پارابولا ده.

$$Ay^2 + By + Cx + D = 0 \text{ او } Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$$

پوښتنې

1- د لاندې معادلو ډول د هغوی د ګرافونو د رسم کولو وروسته وټاکئ.

$a)$ $y^2 - 2y + x + 3 = 0$ $\quad$ $b)$ $9x^2 + 9y^2 = 27$

$c)$ $25x^2 + 16y^2 = 400$ $\quad$ $d)$ $x^2 - y^2 = 0$

$e)$ $y^2 + 6y - x + 2 = 0$

2- د $9x^2 + 4y^2 = 36$ بیضوي او $y = 3$ مستقیم خط یو بل په څو ټکو کې قطع کوي؟

3- د $y = x$ خط او $x^2 - 2y^2 = 4$ هایپربول د تقاطع ټکي پیداکړئ.

د خپرکي مهم ټکي

مخروطي مقاطع: د مستوي تقاطع له مخروط سره په مختلفو حالتونو کې مختلف منحني ګان منځ ته راوړي چې د مخروطي مقاطعو په نوم یادیږي.

بیضوي: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو مستقرو ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل یو ثابت اوږدوالی وي، بیضوي بلل کیږي، مستقر ټکي چې په F' او F توررو ښودل شوي، د بیضوي محراقونه بلل کیږي او $AA'=2a$ ثابت اوږدوالی دی

محراقونه	دلنډ قطر انجامونه	د اوږده قطر انجامونه	د مرکز وضعیه کمیات	معادلې	نمبره
$(c,0),(-c,0)$	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې دي	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,0)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>b$	1
$(0,c),(0,-c)$	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور باندې دي	$(0,0)$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	2
$(h\pm c,k)$	$(h,k\pm b)$ په لنډ قطر باندې چې د y له محور سره موازي دی	$(h\pm a,k)$ په لوی قطر باندې چې د x له محور سره موازي دی	(h,k)	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	3
$(h,k\pm c)$	$(h\pm b,k)$ په لنډ قطر باندې چې د x له محور سره موازي دی	$(h,k\pm a)$ په لوی قطر باندې چې د y له محور سره موازي دی	(h,k)	$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	4

د بیضوي عمومي معادله عبارت ده له: $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$

په داسې حال کې چې A او C دواړه هم علامه وي.

پارابولا: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د یوه ثابت یا مستقر ټکي او ثابت مستقیم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کیږي، دغه ثابت یا مستقر ټکي ته د پاراپولا محراق (F) او ثابت مستقیم خط ته د پارابولا هادي(موجه) وایي.

تناظري محور	د موجه خط معادله	د محراق مختصات	دراس وضعیه کمیات	د پارابولا معادلې	شمېره
$x=0$	$x=-p$	$F(P,0)$	$S(0,0)$	$y^2=4Px$	1
$y=0$	$y=-p$	$F(0,P)$	$S(0,0)$	$x^2=4Py$	2
$y=k$	$x=h-p$	$F(h+p,k)$	$S(h,k)$	$(y-k)^2=4P(x-h)$	3
$x=h$	$y=k-p$	$F(h,k+p)$	$S(h,k)$	$(x-h)^2=4P(y-k)$	4

د پارابولا عمومي معادله $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ په داسې حال کې چې $A=0$ یا $C=0$ وي، نه دواړه ($C\neq 0, A=0$ یا $C=0, A\neq 0$ وي)، په پارابولا کې عن المرکزیت $e=1$ سره دی.

هایپربولا: په یوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو ثابتو مستقرو ټکو څخه تل ثابت اوږدوالی ولري، هایپربولا بلل کېږي.

د هایپربولا معادلې	د مرکز وضعیه کمیات	د رأسونو وضعیه کمیات	غیر حقیقي رأسونه	محراقونه	د موجه خطونو معادلې	د مجانبونو معادلې
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$S(0,0)$	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور پراته دي	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې	$F(c,0)$ $F'(-c,0)$ د x پر محور باندې	$x=\pm\frac{a}{c}$	$y=\pm\frac{b}{a}x$
$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	$S(0,0)$	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور پراته دي	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې.	$F(0,\pm c)$ د y پر محور باندې.	$y=\pm\frac{a}{c}$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$S(h,k)$	$A(h\pm a,k)$	$B(h,k\pm b)$	$F(h\pm c,k)$	$x=h\pm\frac{a}{c}$	$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$
$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	$S(h,k)$	$A(h,k\pm a)$	$B(h\pm b,k)$	$F(h,k\pm c)$	$y=k\pm\frac{a}{c}$	$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

د هایپربولا عمومي معادله $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ څخه عبارت ده، په داسې حال کې چې $A=B$ یا $A\neq B$، خو مختلف الاشاره وي. په هایپربولا کې عن المرکزیت $e>1$ دی.

د څپرکي پوښتني

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه او کرښه ترې تاو کړئ.

1- که چېرې يو مستوي يو مخروط په مايل ډول قطع کړي، نو د مستوي او مخروط ګډ فصل عبارت دی له:

a) بيضوي b) دايره c) هايپربولا d) دوه متقاطع خطونه

2- د بيضوي محراقونه هغه ټکي دي چې د بيضوي له مرکز څخه:

a) برابر واټن لري b) مختلف واټنونه لري

c) د اوږد قطر نيمايي واټن لري d) د لنډ قطر نيمايي ده.

3- که چيرې M د بيضوي يو ټکی F او F' محراقونه او $2a$ د اوږده قطر اوږدوالی وي، نو په دې صورت کې لرو چې:

a) $|MF|-|MF'|=2a$ b) $|MF|+|MF'|=a$

c) $|MF|+|MF'|=2a$ d) $|MF'|+|MF|=0$

4- د بيضوي عن المركزيت له لاندې کومې يوې رابطې څخه په لاس راځي:

a): $e=\frac{a}{c}$ b): $e=\frac{c}{a}$ c): $e=\frac{b}{c}$ d): $e=\frac{c}{b}$

5- په بيضوی کې د لنډ قطر، اوږد قطر او محراقونو ترمنځ اړيکه عبارت ده له:

a) $a^2=b^2-e^2$ b) $a^2+b^2=c^2$

c) $a^2=b^2+e^2$ d) $a^2=b^2+c^2$

6- د $(y-k)^2=4p(x-h)$ په معادله کې که $p>0$ سره وي، نو:

a) د پارابولا خوله پاس خواته خلاصه ده. b) دپارابولا خوله لاندې خواته خلاص ده

c) دپارابولا خوله ښي خواته خلاص ده d) دپارابولا خوله کيڼې خواته خلاص ده.

7- د $(x+1)^2=8(y-2)$ پارابولا معادله په پام کې ونيسئ. د محراق وضعيه کميات يې عبارت دي له:

a) $F(-1,-2)$ b) $F(-1,4)$ c) $F(-1,2)$ d) $F(-4,-1)$

8- که چېرې F او F' د هايپربولا محراقونه وي، د p ټکی په کوم شرط د هايپربولا د محيط يو ټکی کيدلای شي؟

a) $|PF|+|PF'|=2a$ b) $|PF|-|PF'|=a$

c) $|PF|-|PF'|=2a$ d) $|PF|-|PF'|=0$

9- د $y = x^2$ د پارابولا گراف متناظر دی نظر:

a) د y محور ته   b) د x محور ته

c) د x او y محورونو ته   c) د وضعیه کمیاتو مبدأ ته

10- په لاندې ځوابونو کې کوم یو د هایپربولا عن المرکزیت ښیي؟

a) $e<1$ b) $e=1$ c) $e>1$ d) $e=-1$

11- د $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ د بیضوي د اوږد قطر موقعیت:

a) د y پر محور باندې دی.   b) د x پر محور باندې دی.

c) د x پر محور عمود دی.   d) د y له محور سره موازي دی.

12- په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له یوه ثابت ټکي څخه مساوي فاصلې لري. د څه په نامه یادېږي؟

a) کره   b) دایره   c) پارابولا   d) بیضوي

13- د $y^2=-4(x+2)$ پارابول دراس مختصات عبارت دي له:

a) $(2,4)$ b) $(4,2)$ c) $(2,0)$ d) $(-2,0)$

14- د $4x^2+4y^2+8y+3=0$ معادله عبارت ده له:

a) دایرې   b) بیضوي   c) پارابولا   d) هایپربولا

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1- لاندې معادلې په پام کې ونیسئ، لومړی هغه په معیاري ډول ولیکئ، بیا یې گرافونه رسم کړئ.

$a)\ x^2+4y^2=4$ $b)\ 9x^2+2y^2=15$

$c)\ 16x^2-96x+9y^2+90y+225=0$ $d)\ x^2+12x-120y+288=0$

2- د لاندې قیمتونو له مخې د هرې یوې بیضوي معادله پیدا کړئ:

a) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $a=4$ ، $e=0,8$ دي او کبیر قطر یې د y پر محور باندې پروت دی.

b) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $b=6$ $e=0,8$ دي او کبیر قطر یې د x پر محور باندې پروت دی.

3- په لاندې معادلو کې د بیضوي کبیر قطر، صغیر قطر، د راسونو او محراقونو مختصات پیدا کړئ.

a) $4(x-1)^2+y^2=4$ b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

4- د پارابولا لاندې معادلې لومړی په معیاري شکل ولیکئ او بیایې ګرافونه رسم کړئ.

a) $x^2 - 11y = 0$

b) $y^2 - 4y - 4x + 2 = 0$

5- د هایپربولا لاندې هره یوه معادله په معیاري ډول واړوئ:

a) $4x^2 - y^2 - 8y - 32 = 0$

b) $2y^2 + 4y - x^2 + 10x - 25 = 0$

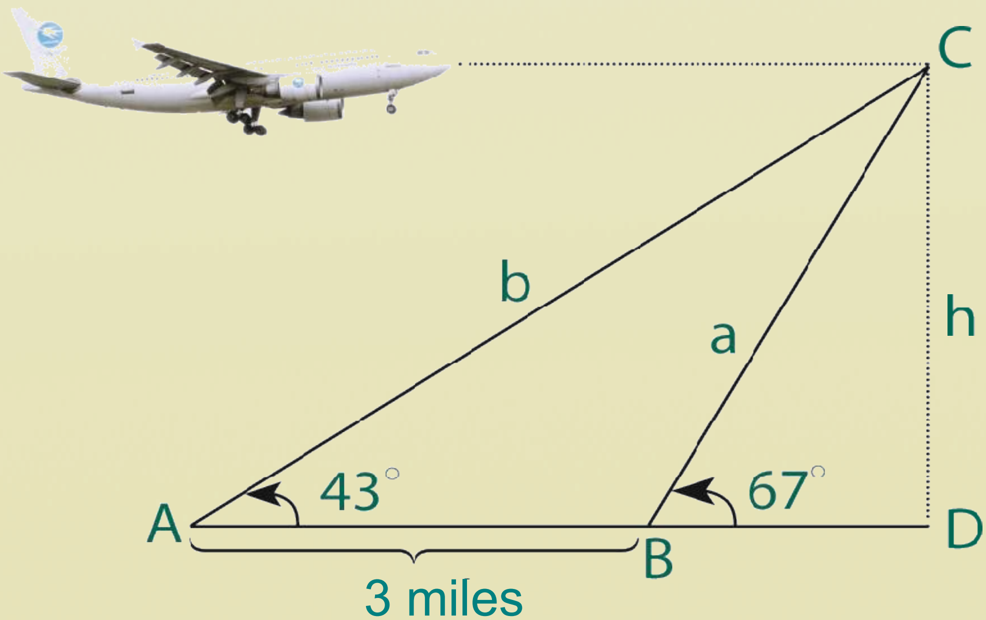
6- د هغې هایپربولا معادله پیدا کړئ چې $(-4,0)$ او $(4,0)$ د حقیقي راسونو مختصات او $y = \pm\frac{5}{4}x$ د مجانبونو معادلې وي.

7- د هغې هایپربولا معادله پیدا کړئ چې $(-1,3)$ ، $(1,3)$ د حقیقي راسونو مختصات او د محراقونو ترمنځ اوږدوالی یې 4 واحده وي.

8- د $y = 2x$ مستقیم خط د $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ هایپربولا په څو ټکو کې قطع کوي؟

دویم څپرکی

مثلثات

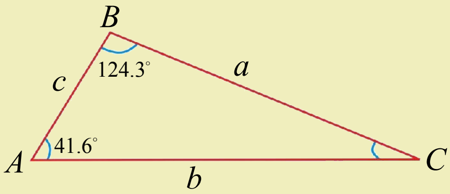


C
b
a
h
43°
67°
A
B
D
3 miles

د ساین قانون

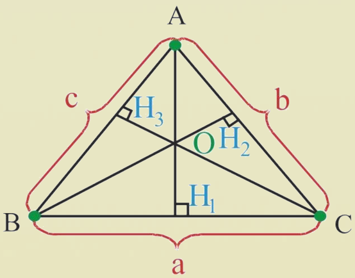
Law of sine

خرنګه کولای شو په مخامخ شکل کې د a د ضلعې او C زاويې اندازه پيدا کړو؟



فعالیت

- د ABC يو حادهالزاويه مثلث رسم او د ضلعو اوږدوالی يې وټاکئ.
- د مثلث له هر رأس څخه د هغې پرمخامخ ضلعې د($\overline{AH}_1$, $\overline{BH}_3$, $\overline{CH}_2$) ارتفاع ګاني رسم کړئ.
- د ABH_1 او ACH_1 په قايمالزاويه مثلثونو کې د ($\overline{AH}_1$) ارتفاع د $\sin B$ او $\sin C$ له جنسه پيـدا او يو له بله سره يې پرتله کړئ.
- د ABH_2 او BCH_2 پـه قـايمالزاويـه مثلثونـوکـې د ($\overline{BH}_2$) ارتفاع د $\sin A$ او $\sin C$ له جنسه پيدا او يـو له بله سره يې پرتله کړې.



له پورتني فعالیت څخه لاندې ثبوت په لاس راوړای شو.

ثبوت: د ACH_1 او ACH_1 په قايمالزاويه مثلثونو کې لرو چې:

$$\sin B = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH_1}}{c}$$

$$\overline{AH}_1 = c\sin B \quad .... \quad (1)$$

$$\sin C = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AH_1}}{b}$$

$$\overline{AH}_1 = b\sin C \quad .... \quad (2)$$

د (1) او (2) رابطو له پرتلې څخه ليکلی شو چې:

$$c\sin B = b\sin C \,/ \div bc$$

او يا:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad .... \quad \mathrm{I}$$

په همدې ډول د ABH_2 او BCH_2 قایم‌الزاویه مثلثونو په مرسته لیکلی شو چې:

$$\sin A = \frac{\overline{BH_2}}{c} \Rightarrow \overline{BH_2} = c\sin A \;......... (3)$$

$$\sin C = \frac{\overline{BH_2}}{a} \Rightarrow \overline{BH_2} = a\sin C \;......... (4)$$

د (3) او (4) د رابطو له پرتلې څخه لرو چې: $c\sin A = a\sin C / \div ac$

او یا:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \;.......... \text{II}$$

د I او II د رابطو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

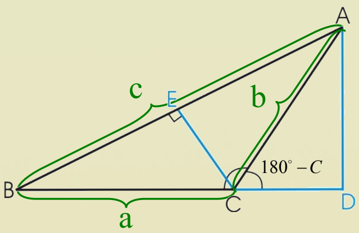
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

پورتنۍ اړیکه(رابطه) په یوه مثلث کې د ساین د قانون(Law of sine) په نامه یادیږي.

پایله: په هر $A\overset{\Delta}{B}C$ کې چې C, B, A یې زاویې او c, b, a یې د ضلعو اوږدوالی وي، لرو:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

د ساین د قضیې ثبوت په منفرج الزاویه مثلث کې:



د ABC په مثلث کې چې د C زاویه یې منفرجه ده

د $\overline{AD}$ او $\overline{CE}$ ارتفاع ګانې رسموو.

د ADC په قایم الزاویه مثلث کې لرو: $\sin(180^\circ - C) = \frac{\overline{AD}}{b}$

د بلې خوا د متممو زاویو څخه پوهیږو چې: $\sin(180^\circ - C) = \sin C$

نو : $\sin C = \frac{\overline{AD}}{b} ......(1)$

همدارنګه د ADB له قایم الزاویه مثلث څخه لرو چې: $\sin B = \frac{\overline{AD}}{c} ......(2)$

اوس (1) او (2) رابطې خوا په خوا یو پر بل ویشو:

د تناسب د خواصونو له مخې د وسطینو ځایونه بدلووو. $\frac{\sin C}{\sin b} = \frac{c}{b}$

نو : $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \;........ \text{I}$

اوس د ACE قایم الزاویه مثلث له مخې لیکلی شو:

$$\sin A = \frac{\overline{CE}}{b} \;.....(3)$$

د BEC په مثلث کې لیدل کیږي:

$$\sin B = \frac{\overline{CE}}{a} \;.....(4)$$

پورته 3 او 4 رابطې خوا په خوا یو پر بل ویشو:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

که چیرې د وسطینو ځایونه بدل کړو، نو:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \;......(II)$$

اوس د I او II رابطو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

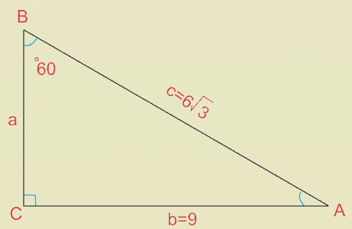
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

فعالیت

- د ساین قانون په قایم‌الزاویه مثلث کې وڅېړئ او ثبوت یې کړئ.

لومړی مثال:په لاندې ABC قایم الزاویه مثلث کې د یوې ضلعې او دوو زاویو قیمت پیدا کړئ داسې چې د یوې زاویې او دوو ضلعو قیمت درکړل شوی دی؟

حل: د ساین د قضیې یا قانون له مخې لیکلی شو چې:



$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{9}{\sin 60^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{6\sqrt{3}\cdot \sin 60^\circ}{9} = \frac{6\sqrt{3}\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{9}$$

$$\sin C = \frac{3\cdot 3}{9} = \frac{\cancel{9}}{\cancel{9}} = 1 \quad \Rightarrow \sin C = 1$$

څرنګه چې: $\sin 90^\circ = 1$ دی، نو: $\quad C = 90^\circ$

همدارنګه پوهیږو چې په یوه مثلث کې:

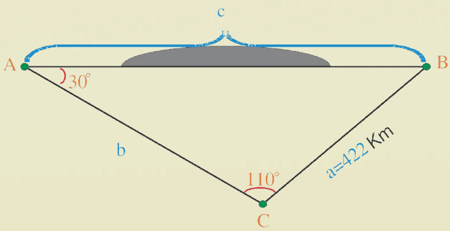
$$A + B + C = 180^\circ$$
$$A + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$
$$A = 180^\circ - 150^\circ$$
$$A = 30^\circ$$

د a ضلعې قیمت په لاندې ډول پیداکولی شو :

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}\Rightarrow a=b\cdot\frac{\sin A}{\sin B}\Rightarrow a=9\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ}=\frac{9\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow a=\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{9\cdot\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a=3\sqrt{3}\,cm$$

دویم مثال: یو ساختماني انجنیر غواړي چې د دوو ټکو تر منځ واټن چې په منځ کې یې یوه غونډۍ پرته ده پیداکړي.



حل: د ساین د قانون په کارولو سره $\sin A$ او $\sin C$ ترمنځ رابطه په پام کې نیسو:

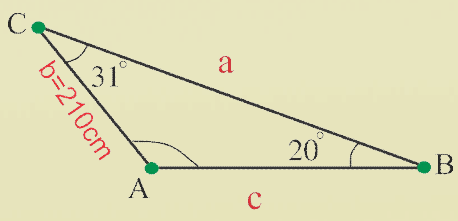
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

$$c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{422km\cdot\sin 110^\circ}{\sin 30^\circ}$$

څرنګه چې: $\sin 110^\circ=0.9396$ او $\sin 30^\circ=0.5$ دی.

نو: $c=\dfrac{422km\cdot 0.9396}{0.5}\Rightarrow c=793.0224km$

دریم مثال: په مخامخ شکل کې د دوو زاویو او یوې ضلعې اندازه درکړل شوې ده، د یوې نامعلومې زاویې او دوو ضلعو اندازې پیداکړئ.



حل: پوهیږو چې د یوه مثلث د داخلي زاویو مجموعه 180° ده؛ نو نامعلومه زاویه یې داسې پیداکولی شو:

$A=180^\circ-(31^\circ+20^\circ)=180^\circ-51^\circ$

$A=129^\circ$

د a ضلعې د اوږدوالي د پیداکولو لپاره د ساین قانون په پام کې نیسو:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin 129^{\circ}}{a}=\frac{\sin 20^{\circ}}{210}$$

$$\Rightarrow a=\frac{\sin 129^{\circ}\cdot 210cm}{\sin 20^{\circ}}$$

خرنګه چې $\sin 20^{\circ}=0.342$ او $\sin 129^{\circ}=0.7771$ دي؛ نو:

$$a=\frac{0.7771\cdot 210}{0.342}=\frac{163.191}{0.342}=477.166cm$$

$$a=477.166cm$$

اوس د c ضلعې اوږدوالی د $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ له رابطې څخه پیداکوو:

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin 20^{\circ}}{210}=\frac{\sin 31^{\circ}}{c}$$

$$\Rightarrow c=\frac{210cm\cdot \sin 31^{\circ}}{\sin 20^{\circ}}$$

خرنګه چې $\sin 31^{\circ}=0.5150$ دی د قیمتونو په ایښودلو سره لیکلای شو چې:

$$\Rightarrow c=\frac{210\cdot 0.5150}{0.342}=\frac{108.15}{0.342}=316.228cm$$

یادونه:

د ساین قانون هغه وخت کارولی شو چې:

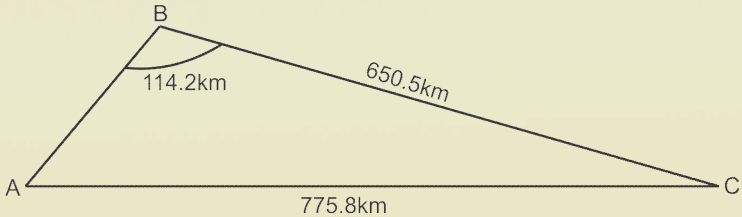
- دوې زاويې او د معلومې زاويې مخامخ ضلع يې معلومه وي، يعنې: ($A \; AS$).
- دوه ضلعې او د معلومې ضلعې مخامخ زاويه يې معلومه وي، يعنې: (SAS).

باید ووایو چې دلتهA د Angle او s د side مخفف دي.

پوښتنې

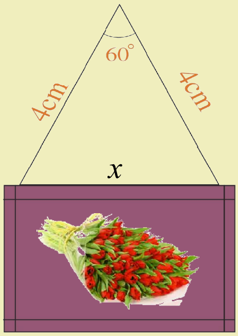
1. که چیرې د یوه قایم الزاویه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a = 8m$, $b = 6m$ او $c = 10m$ وي، د مثلث د زاویو اندازه پیدا کړئ.

2. لاندې شکل په پام کې ونیسئ د A او B د ښارونو ترمنځ واټن پیدا کړئ؟



د کوساین قانون

Law of cosine

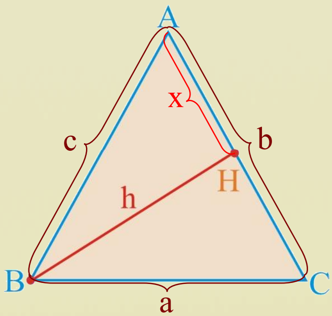


د یوه شکل چارت د مېخ په مرسته د دېوال پـر مـخ ځـړول شوی دی، که چېرې د مېخ د دوو خواوو د تار اوږدوالی هر یـو $4\,cm$ وي او د منـځ زاو یـه یـې 60° وي، د تـار د دوو ټکو ترمنځ واټن (x) څرنګه پیدا کولی شو؟

فعالیت

- د ABC کیفي مثلث رسم او د A, B, C راسونو مخامخ ضلعې په ترتیب سره په a, b, c وښایاست.
- د B له رأس څخه د $\overline{AC}$ پر ضلع د H په ټکی کې ارتفاع رسم کړئ.
- په جوړ شوو قایم‌الزاویه مثلثونو کې د فیثاغورث قضیه تطبیق کړئ.
- په ABH قایم‌الزاویه مثلث کې د $\overline{AH}$ قیمت د A زاویې د کوساین د له جنسه پیـدا او د فیثـاغورث په رابطه کې یې وضع کړئ.
- ممکنه الجبري محاسبې ترسره او وروستی رابطه یې ولیکئ.

د پورتني فعالیت د سرته رسولو څخه وروسته داسې ثبوتوو:



ثبوت: د ABC په حاده‌الزاویـه مثلـث کـې د $\overline{BH}$ ارتفـاع رسـموو

$$\overline{CH} = b - x \quad , \quad \overline{AH} = x \quad , \quad \overline{BH} = h$$

د BCH په قایم الزاویه مثلث کې لرو:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2$$

$$a^2 = (b-x)^2 + h^2 \quad .... \quad \mathrm{I}$$

د AHB په قایم الزاویه مثلث کې د h اوږدوالی پیداکوو:

$$h^2 = c^2 - x^2 \quad .... \quad \mathrm{II}$$

د I په رابطه کې د h^2 قیمت لیکو

$$a^2 = (b-x)^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$

د AHB په قايم‌الزاويه مثلث کې:

$$\cos A = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos A$$

په $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$ رابطه کې د x پر ځای $c \cdot \cos A$ قيمت ايږدو، نو:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{يا} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

پايله: په يو اختياري مثلث کې مو دا $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} ...I$ يا $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

رابطه ثبوت کړه، په همدې ډول لاندې رابطې هم ثبوت کولای شو.

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} ....II \quad \text{يا} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} ....III \quad \text{يا} \quad c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C$$

په هر مثلث کې د يوې زاويې کوساين (Cos) مساوي دی د زاويې د دواړو ضلعو د مربعاتو مجموعه منفي د زاويې د مقابلې ضلعې مربع د زاويې د دواړو ضلعو د حاصل ضرب په دو چند باندې.

فعاليت

- د تېرمخ د مثلث د شکل په مرسته د کوساين قانون د II او III رابطې ثبوت کړئ.

يادونه: د کوساين قانون هغه وخت کارولی شو چې:

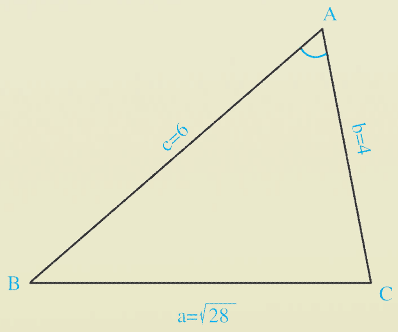
- چې دوې ضلعې او د منځ زاويه يې معلومه وي. (SAS).
- د مثلث درې ضلعې معلومې وي. (SSS).

د ساين او کوساين د قانون له کارولو څخه، د مثلث د عناصرو د پيدا کولو لپاره له لاندې جدول څخه کار اخلو:

د يوه مثلث د عناصرو پيدا کول	
کله چې د يوه مثلث د دريو ضلعو اوږدوالی معلوم وي، د کوساين له قانون څخه ګټه اخلو.	(SSS) (ضلع، ضلع، ضع)
کله چې د يوه مثلث د دوو زاويو او د يوې معلومې زاويې د مقابلې ضلعې اندازه معلومه وي، د ساين له قانون څخه ګټه اخلو.	SAA (زاويه، زاويه، ضلع)
کله چې د يوه مثلث د دوو ضلعو او د يوې معلومې ضلعې د مقابلې زاويې اندازه معلومه وي، د ساين له قانون څخه ګټه اخلو.	ASA (زاويه، ضلع، زاويه)
کله چې د يو مثلث د دوو ضلعو او د هغوی ترمنځ د زاويې اندازه معلومه وي، د کوساين له قانون څخه ګټه اخلو.	SAS (ضلع،زاويه، ضلع)
امکان نه لري	AAA (زاويه، زاويه، زاويه)

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې د هغو دريو ضلعو اندازې په لاندې ډول راکړل شوي دي، د A زاويې اندازه وټاکئ.

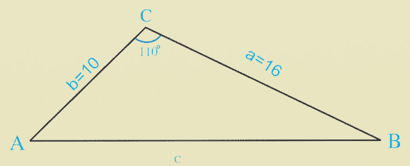
حل:



$$a=\sqrt{28}\quad,\quad b=4\quad,\quad c=6\quad,\quad A=?$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$$
$$(\sqrt{28})^2=(4)^2+(6)^2-2\cdot4\cdot6\cos A$$
$$28=16+36-48\cos A\quad\Rightarrow\quad 28=52-48\cos A$$
$$48\cos A=52-28\quad\Rightarrow\quad 48\cos A=24$$
$$\cos A=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$$
$$\boxed{A=60^\circ}$$

دويم مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې د دوو ضلعو اوږدوالی $a=16$, $b=10$ واحده او د منځ زاويه يې $C=110^\circ$ وي، د c ضلعې اوږدوالی يې پيدا کړئ.

حل:



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$c^2=(16)^2+(10)^2-2(16)(10)\cos110^\circ$$
$$c^2=256+100-320\cos110^\circ$$
$$c^2=356-320\cos110^\circ$$
$$c=\sqrt{356-320\cos110^\circ}$$

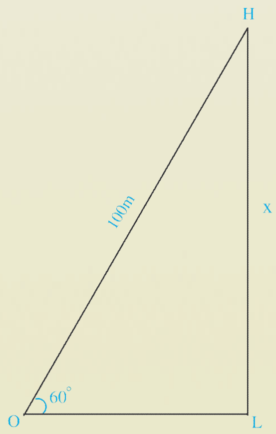
څرنګه چې : $\cos110^\circ=-0.342$ دی، نو:

$$c=\sqrt{356-320(-0.342)}\quad\Rightarrow\quad c=\sqrt{356+109.44}$$
$$\boxed{c=21.57}$$

درېيم مثال: يو پتنګ(کاغذ پران) له $100m$ تار سره په هوا کې دی، که تار د ځمکې له سطحې سره 60° زاويه جوړه کړې وي، له ځمکې څخه د پتنګ لوړوالی پيدا کړئ.

حل: د OHL په قايم‌الزاويه مثلث کې لرو چې:

$$\cos60^\circ=\frac{\overline{OL}}{\overline{OH}}=\frac{x}{100}\quad\Rightarrow\quad x=100\cdot\cos60^\circ=100\cdot\frac{1}{2}=50m$$



د کوساین قانون له مخې لرو چې:

$$\overline{HL}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{OL}^2 - 2\overline{OH}\cdot\overline{OL}\cdot\cos 60^\circ$$

$$\overline{HL}^2 = (100)^2 + (50)^2 - 2\cdot 100\cdot 50\cdot\frac{1}{2}$$

$$\overline{HL}^2 = 10000 + 2500 - 5000$$

$$\overline{HL}^2 = 7500m^2 \quad \Rightarrow \overline{HL} = \sqrt{7500}m = 50\sqrt{3}\,m$$

$$\overline{HL} = 86.6m$$

ځلورم مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې د $\hat{A}=60^\circ$, $b=5, c=8$ وي، د a او $\sin C$ اندازه پیدا کړئ.

حل: لومړی د کوساین د قضیې په کارلو سره د a ضلع او بیا $\sin C$ پیدا کوو.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \Rightarrow \quad a^2 = 25 + 64 - 80\cdot\frac{1}{2} = 89 - 40$$

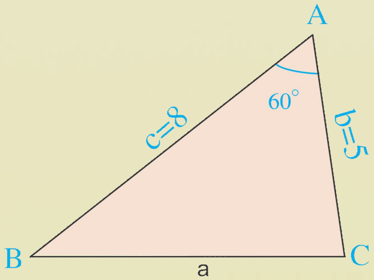
$$a^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad a = 7$$

د ساین د قضیې له مخې لیکو چې:

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\sin C = \frac{c\cdot\sin A}{a} = \frac{8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}$$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$



پوښتنې

1. که چېرې د ABC په مثلث کې $b=4ft, a=5ft$ او $A=45^\circ$ وي، د مثلث نامعلومې ضلعې او زاویې پیدا کړئ.
2. که چېرې په یوه مثلث کې $a=3cm$ او $b=9cm$ او د دوی ترمنځ زاویه 60° وي د c د ضلعې اوږدوالی یې پیدا کړئ؟

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

د ټانجنټ قانون

Law of tangent

آیا په هـر مثلـث کـې د زاویـو او ضـلعو تـرمنځ مخامخ اړیکه شتون لري؟

فعالیت

- د ساین قانون رابطه ولیکئ او هغه له D سره مساوي په پام کې ونیسئ.
- د $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$ تناسب هر نسبت په جلا جلا ډول مساوي له D سره ولیکئ.
- پورته دوه نسبتونه د ضلعو د اوږدوالي له مخې ولیکئ.
- دوه پورتنی اړیکې لومړی جمع او بیا یې تفریق کړئ.
- لاس ته راغلې اړیکې یو پر بل وویشئ.
- الجبري محاسبې ترسره او د پایلې فورمول ولیکئ.

د پورته فعالیت د سرته رسولو وروسته لاندې پایله لاس ته راځي.

پایله: په هر مثلث کې د ټانجنټ قانون عبارت ده له :

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

ثبوت: د ساین قانون دوه نسبتونه له D سره مساوي لیکو:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=D$$

$$\frac{a}{\sin A}=D \quad \Rightarrow \quad a=D\sin A \qquad , \qquad \frac{b}{\sin B}=D \quad \Rightarrow \quad b=D\sin B$$

پورتنی اړیکې لومړی جمع او بیا تفریقوو:

$$a+b=D(\sin A+\sin B)$$

$$a-b=D(\sin A-\sin B)$$

پورتنی اړیکې یو پر بل ویشو:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}$$

د ضرب له فورمولونو څخه لرو:

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\tan\frac{A+B}{2}\cdot\cot\frac{A-B}{2}$$

ځرنګه چې $\cot\frac{A-B}{2}=\frac{1}{\tan\frac{A-B}{2}}$ دی.

نو په پایله کې لیکلی شو چې:
$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

فعالیت

- لاندې رابطې ثبوت کړئ.

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}\quad,\quad\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

- پورتنی رابطې په یوه مثلث کې د ټانجنټ قانون بلل کېږي.

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې $\frac{b-c}{b+c}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ او $A=90^\circ$ دی، د B او C زاویو اندازه پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې په هر مثلث کې:

$$A+B+C=180^\circ$$
$$\Rightarrow B+C=180^\circ-A=180^\circ-90^\circ\Rightarrow B+C=90^\circ\quad ...I$$
$$B+C=90^\circ\Rightarrow\frac{B+C}{2}=45^\circ$$
$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan 45^\circ}$$
$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ځرنګه چې $\tan 45^0=1$ سره ده، نو:

پوهېږو چې $\tan 30=\sqrt{\frac{3}{3}}$ سره ده، نو:

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \tan 30^\circ=\tan\frac{B-C}{2}$$
$$\frac{B-C}{2}=30^\circ \Rightarrow B-C=60^\circ \quad ...II$$

له I او II اړیکو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

$$B-C=60^\circ \ \ .... \ \mathrm{I}$$
$$B+C=90^\circ \ \ .... \ \mathrm{II}$$
$$2B=150^\circ$$
$$\boxed{B=75^\circ}$$

اوس د B قیمت په اېښودلو سره د C زاویه پیداکوو:

$$B-C=60^\circ$$
$$75^\circ-C=60^\circ$$
$$-C=60^\circ-75^\circ$$
$$\boxed{C=15^\circ}$$

دویم مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې $c=432\ ,\ B=42^\circ\ \ 30'$ او $a=925$ وي، د د تانجنټ قانون څخه په ګټې د مثلث نورې نامعلومې اجزاوې پیداکړئ.

حل:

$$A+B+C=180^\circ \ \Rightarrow\ A+C=180^\circ-B \ \Rightarrow\ A+C=180^\circ-42^\circ\ \ 30'$$
$$\Rightarrow A+C=179^\circ\ 60'-42^\circ\ \ 30' \Rightarrow A+C=137^\circ\,30' \ \ .... \ \mathrm{I}$$
$$\frac{A+C}{2}=\frac{137^\circ\ 30'}{2}\Rightarrow\frac{A+C}{2}=\frac{136^\circ\,90'}{2}=68^\circ\ \ 45'$$
$$\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{a+c}{a-c}\Rightarrow\frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{925+432}{925-432}\ \Rightarrow\ \frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{1357}{493}$$
$$\Rightarrow 1357\cdot\tan\frac{A-C}{2}=493\cdot\tan 68^\circ\ 45' \ \Rightarrow\ \tan\frac{A-C}{2}=\frac{493}{1357}\cdot\tan 68^\circ\ 45'$$

له مثلثاتي جدول څخه پوهېږو چې $\tan 68^\circ\ 45' = 2.571$ دی؛ نو:

$$\tan\frac{A-C}{2} = 0.363\cdot 2.571 \Rightarrow \tan\frac{A-C}{2} = 0{,}933$$

$$\Rightarrow \frac{A-C}{2} = 43^0 \Rightarrow \boxed{A-C = 86^\circ \quad ....\ \text{II}}$$

اوس د I او II رابطو په پام کې نیولو سره د A زاویې قیمت پیداکوو:

$$A + C = 137^\circ\ 30' \quad ...I$$

$$\underline{A - C = 86^\circ \qquad\quad} ...II$$

$$2A = 223^\circ\ 30 \Rightarrow 2A = 222^\circ\ 90' \Rightarrow A = 111^\circ 45'$$

اوس غواړو د C زاویې قیمت پیداکړو:

$$A + C = \ 137^\circ 30' = 136^\circ 90'$$

$$\Rightarrow C = 136^\circ\ 90' - A = 136^\circ 90' - 111^\circ 45'$$

$$\Rightarrow C = 25^\circ 45'$$

اوس د ساین قانون په مرسته د b ضلعې اوږدوالی پیداکوو:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow b = c\cdot\frac{\sin B}{\sin C}$$

$$b = 432\cdot\frac{\sin 42^\circ 30'}{\sin 25^\circ\ 45'}$$

په پورته رابطه کې د زاویو د ساین قیمتونه لیکو:

$$\sin 25^\circ\ 45' = 0.434$$

$$\sin 42^\circ\ \ 30' = 0.676$$

$$b = 432\cdot\frac{0.676}{0.434} = 672.885$$

پوښتنې

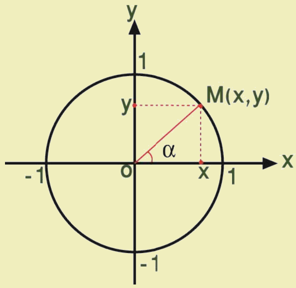
د مثلث نامعلومې اجزاوې د ټانجنټ قانون په کارونې سره پیداکړئ.

a) که چېرې $a = 35\,ft$, $B = 60^\circ$ او $C = 75^\circ$ وي.

b) که چېرې $A = 45^\circ$, $b = 37m$ او $B = 75^\circ$ وي.

مثلثاتي مطابقتونه

Trigonometry identities



پوهېږو چې $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ يو الجبري مطابقت دی، ځکه د a او b په ټولو قيمتونو سره د مساوات داوړه خواوې برابرېږي.

آيا $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ يو مثلثاتي مطابقت کېدلی شي؟

فعاليت

- په لاندې جدول کې د α د مختلفو قيمتونو لپاره د A او B افادو قيمتونه بشپړ کړئ.

α	$A = \dfrac{\cot\alpha}{\csc\alpha - 1}$	$B = \dfrac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$
0°		
30°		
45°		
60°		
90°		

- د جدول له بشپړولو څخه وروسته د A او B قيمتونه پرتله او رابطه يې وليکئ.

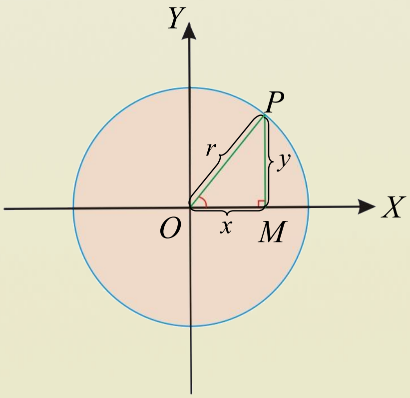
له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف لاس ته راځي.

تعريف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاويې په ټولو قيمتونو سره ، د مساوات دواړه خواوې برابرې شي، مثلثاتي مطابقت بلل کېږي،لکه:

$$\frac{\cot\alpha}{\csc\alpha - 1} = \frac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$$

که α هر قيمت واخلي، د پورته مساواتو دواړه خواوې مساوي کېږي.

د $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ مطابقت ثبوت کړئ.



ثبوت: د $C(O,r)$ په دایره کې د OMP قایم‌الزاویه مثلث

د سموو او کولای شو ویې لیکو:

$$\sin\alpha=\frac{y}{r} \quad \text{او} \quad \cos\alpha=\frac{x}{r}$$

د فیثارغورث د قضیې څخه کولای شو ولیکو:

$$y^2+x^2=r^2$$

د مساوات دواړه خواوې په r^2 ویشو:

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2} \qquad \text{یا} \qquad (\frac{x}{r})^2+(\frac{y}{r})^2=1$$

اوس د $\frac{y}{r}$ په ځای $\sin\alpha$ او $\frac{x}{r}$ په ځای $\cos\alpha$ لیکو.

نو لیکلی شو: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

د مثلثاتو اساسي رابطې عبارت دي له:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad , \quad 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha \quad , \quad 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$$

د مثلثاتو فرعي رابطې عبارت دي له:

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha} \quad , \quad \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha} \quad , \quad \sin\alpha\cdot\csc\alpha=1 \quad , \quad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tag\ \alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad , \quad \tan\alpha\cdot\cot\alpha=1 \quad , \quad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$$

اوس غواړو د $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$ رابطه ثبوت کړو.

ثبوت: د فیثاغورث د قضیې په کارلو سره لیکو $x^2+y^2=r^2$

د مساوات دواړه خواوې په x^2 ویشو. $\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{r^2}{x^2}\Rightarrow 1+(\frac{y}{x})^2=(\frac{r}{x})^2$

په نتیجه کې په پورته افاده کې د $\frac{r}{x}=\sec\alpha$ او $\frac{y}{x}=\tan\alpha$ د قیمتونو په ایښودلو سره کولای شو

ولیکو: $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$

فعالیت

- د مثلثاتي نسبتونو په کارولو سره ثبوت کړئ چې:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad , \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \quad , \quad 1+\cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

په عمومي توګه د مطابقتونو د حل يا ثبوت لپاره د مساوات د يوې خوا له افادې څخه د بلې خوا افاده لاس ته راوړو، يعنې د مطابقتونو يوې خواته مختلفې عمليې لکه: مربع کول، تجزيه، ضرب او نورې عمليې سر ته رسوو، څو د بلې خوا افاده لاس ته راشي، که چېرې د يوې الجبري افادې حدود د يوې يا څو زاويو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه وي، مثلثاتي افاده بلل کېږي، د مثلثاتي رابطو په واسطه مثلثاتي افادې ساده کولی شو. د موضوع د لا ښه پوهېدو لپاره لاندې مثلثاتي مطابقتونو مثالونه په پام کې ونيسئ.

لومړی مثال: د $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha\cdot\tan\alpha\cot\alpha}{1-\sin^2\alpha}$ مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل:

$$\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

دويم مثال: د $\sin^2\beta\cdot\cot^2\beta+\cos^2\beta\cdot\tan^2\beta+\tan^2\beta = 1+\tan^2\beta$ مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل: په لاندې ډول افاده ساده کوو:

$$\sin^2\beta\cot^2\beta+\cos^2\beta\tan^2\beta+\tan^2\beta = \sin^2\beta\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}+\cos^2\beta\cdot\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$$

$$+\tan^2\beta = \cos^2\beta+\sin^2\beta+\tan^2\beta = 1+\tan^2\beta$$

دريم مثال: لاندې افاده د $\cos\beta$ له جنسه حساب کړئ.

$$(1-\sin^2\beta)\ \ (1+\sec^2\beta) = ?$$

حل: $$(1-\sin^2\beta)(1+\sec^2\beta) = \cos^2\beta(1+\frac{1}{\cos^2\beta}) = \cos^2\beta(\frac{\cos^2\beta+1}{\cos^2\beta}) = \cos^2\beta+1$$

څلورم مثال: ثبوت کړئ چې $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

حل:د مطابقت د کيڼ اړخ قوسونو ته انکشاف ورکوو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$$

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=2$$

$$2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2\cdot 1=2$$

پنځم مثال: لاندي مطابقت ثبوت کړئ.

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

حل:

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

$$\frac{\sin^2 A+(1+\cos A)^2}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+1+2\cos A+\cos^2 A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$\frac{1+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2(1+\cos A)}{\sin A(1+\cos A)}=2\cdot\frac{1}{\sin A}=2\csc A$$

شپږم مثال: وښاياست چې $\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\tan^2 A$

حل:

$$1+\tan^2 A=\sec^2 A$$

$$1+\cot^2 A=\csc^2 A$$

$$\frac{\sec^2 A}{\csc^2 A}=\tan^2 A \quad\Rightarrow\quad \frac{\dfrac{1}{\cos^2 A}}{\dfrac{1}{\sin^2 A}}=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2=(\tan A)^2=\tan^2 A$$

اووم مثال: لاندي مطابقت ثبوت کړئ.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

حل: دکيڼې خوا په افاده کې د $\cot\alpha$ او $\tan\alpha$ قيمتونه د $\sin\alpha$ او $\cos\alpha$ له جنسه ايږدو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)=(\sin\alpha+\cos\alpha)\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

اتم مثال: د $\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\tan x+\cot y$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\cos x\sin y}$$

$$=\frac{\cos x\cos y}{\cos x\sin y}+\frac{\sin x\sin y}{\cos x\sin y}=\frac{\cos y}{\sin y}+\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\cot y+\tan x=\tan x+\cot y$$

نهم مثال: د $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل: پوهيږو چې $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}\Rightarrow\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}=(\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}})^2$ دی.

اوس د معادلې ښئ خوا په $\frac{\tan x}{\tan x}$ کې ضربوو؛ نو:

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x}{\tan x}\cdot\frac{1-\cos x}{2}=\frac{\tan x-\tan x\cos x}{2\tan x}=\frac{\tan x-(\frac{\sin x}{\cos x})\cos x}{2\tan x}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

لسم مثال: د $\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2\sec x$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{1+2\sin x++\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{1+2\sin x+1}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2+2\sin x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{2(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2}{\cos x}=2\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=2\sec x$$

پوښتنې

1. د مثلثاتو د اساسي رابطو په پام کې نیولو سره د هرې پوښتنې معادله افاده پیدا کړئ.

$a)\ \frac{\sin 250^\circ}{\cos 250^\circ}$ $b)\ \sqrt{\sec^2\beta-1}$ $c)\ \frac{1}{\cos 80^\circ}$

2. هره افاده د $\sin\beta$ له جنسه پیدا کړئ.

$a)\ \cot\beta\cos\beta$, $b)\ \cot^2\beta$

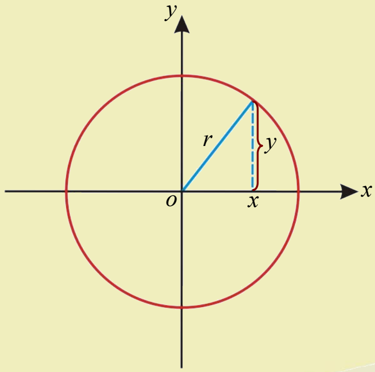
3. لاندې مطابقتونه ثبوت کړئ.

$a)\ \frac{\csc\alpha}{\cot\alpha+\tan\alpha}=\cos\alpha$ $b)\ \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos 2x$

$c)\ \frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\tan\alpha$ $d)\ \frac{\tan x-\cot x}{\tan+\cot x}=1-2\cos^2 x$

مثلثاتي معادلې

Trigonometric equation



پوهیږو چې $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ یو مثلثاتي مطابقت دی، آیا $\sin\alpha+\cos\alpha=1$ یو مطابقت دی که یوه معادله؟

فعالیت

- په لاندې جدول کې د $1-2\sin\beta=0$ او $1+tag^2\beta=\sec^2\beta$ د β د کومو قیمتونو لپاره صحیح دي.

β	$1-2\sin\beta=0$	$1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$
0°		
30°		
60°		
90°		

- د β د مختلفو قیمتونو لپاره د $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$ او $1-2\sin\beta=0$ ترمنځ څه ډول اړیکې شتون لري.

  _ آیا $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$ یو مطابقت دی، که یوه معادله؟

  _ آیا $1-2\sin\beta=0$ یو مطابقت دی، که یوه معادله؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

تعریف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاویې په ځینو قیمتونو سره د مساوات دواړه خواوې مساوي کیږي، مثلثاتي معادله بلل کیږي.

هر مثلثاتي مطابقت یوه معادله کیدلی شي، خو هره مثلثاتي معادله، مثلثاتي مطابقت نه شي کیدلای.

هره مثلثاتي معادله له لاندې څلورو حالتونو څخه په یو حالت باندې حل کولی شو.

لومړی حالت: $a\sin\alpha + b = 0$

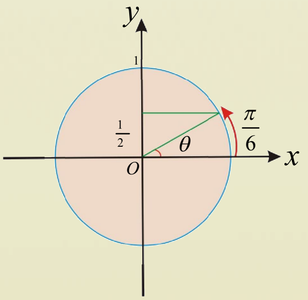
د پورتنی معادلې په حل کې د مناسب ځواب د پیداکولو لپاره لاندې مثالونه په پام کې ونیسئ.

مثال: د $2\sin x - 1 = 0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیداکړئ.

حل: لومړی د $\sin x$ قیمت لاسته راوړو: $2\sin x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sin x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2}$

اوس د $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیداکوو

چې sin یې $\frac{1}{2}$ شي.

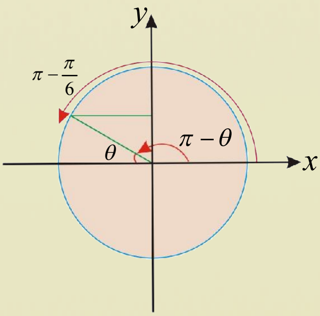


$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$$

یوه مثلثاتي دایره په پام کې نیسو او هغه زاویې یې پیدا

کوو چې sin یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x = \frac{\pi}{6}\ ,\ 2\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\ 4\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\ \ldots,\ 2k\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\quad k \in z$$



په دویمه مثلثاتي دایره کې $(\pi - \theta)$ لـه رابطې څخه

هغه زاویې پیداکوو چې sin یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x = \pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 3\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 5\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ldots,\ (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\quad k \in z$$

نو د $\sin x = \frac{1}{2}$ معادلې حل په لاندې دوو سټونو کې دی.

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{6},\ 2\pi + \frac{\pi}{6}\ ,4\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\ldots,\ 2k\pi + \frac{\pi}{6}\ ,\quad k \in z\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 3\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ 5\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ldots,\ (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\quad k \in z\right\}$$

په عمومي ډول پورتني سټونه په لاندې ډول لیکلی شو:

$$A_1 \cup A_2 = A = \left\{x \,/\, x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \wedge \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}\ ,\ k \in Z\right\}$$

دویم مثال: د $2\sin x-3=0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: $2\sin x-3=0 \;\Rightarrow\; 2\sin x=3 \;\Rightarrow\; \sin x=\frac{3}{2}$

اوس د $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیداکوو چې $\sin x=\frac{3}{2}$ شي، دا چې د هرې زاویې د $\sin$ -1 او $+1$ په منځ $(-1\le \sin x\le 1)$ دی، نو هغه زاویه چې $\sin$ یې $\frac{3}{2}$ وي، وجود نه لري، نو په دې اساس معادله حل نه لري.

دویم حالت: $a\cos x+b=0$

د پورتنۍ معادلې د حل مناسب ځواب د پیداکولو لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

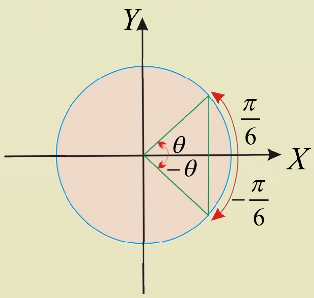
لومړی مثال: د $2\cos x-\sqrt{3}=0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل:له پورتنۍ معادلې څخه $\cos x$ لاسته راوړو:

$$2\cos x-\sqrt{3}=0 \;\Rightarrow\; 2\cos x=\sqrt{3} \Rightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

اوس د $[0\;,\;\pi]$ په انټروال کې هغه زاویه پیداکوو یا لټوو چې $\cos$ یې $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، هغه له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت دی، نو لیکلی شو چې

$$\cos\; x \;=\; \cos\;\frac{\pi}{6}.$$



اوس د مثلثاتي دایرې په پام کې نیولو سره ټولې هغه زاویې چې $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، پیداکوو.

$$x=\frac{\pi}{6}\quad,\quad 2\pi+\frac{\pi}{6}\quad,\quad 4\pi+\frac{\pi}{6}\ldots$$

$$x=-\frac{\pi}{6}\quad,\;2\pi-\frac{\pi}{6}\quad,\quad 4\pi-\frac{\pi}{6}$$

په عمومي توګه د پورتنیو حلونو سټ داسې لیکل کېږي : $x=2n\pi\pm\theta, n=1,2,3\ldots$

$$A=\left\{x\,/\,x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\wedge x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\;,\;\;k\in z\right\}$$

دویم مثال: د $2\cos x+\sqrt{2}=0$ معادله په $(0\ ,\ 2\pi)$ انټروال کې څوحلونه لري؟

حل: $2\cos x=-\sqrt{2}\ \ \Rightarrow\ \ \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

له بلې خوا پوهېږو چې د $(0,2\pi)$ په انټروال کې $\cos x=\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ کېږي.

له دې امله د معادلې حل $x=\dfrac{3\pi}{4}$ په لاس راځي.

د حل سټ یې مساوي دی له:

$$A=\left\{x\,/\,x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\ \wedge\ x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\ ,\ k\in z\right\}$$

لیدل کېږي چې معادله د $(0\ ,\ 2\pi)$ په انټروال کې دوه حلونه لري.

$$x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=0}x_1=\frac{3\pi}{4}$$

$$x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=1}x_2=\frac{5\pi}{4}$$

دریم حالت: $a\tan x+b=0$

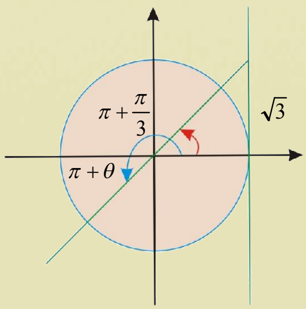
د عمومي حل د پیداکولو لپاره لاندې مثالونو ته ځیر شئ.

مثال: $\tan x-\sqrt{3}=0$ حل کړئ.

حل: له پورتنۍ تساوي څخه $\tan x$ په لاس راوړو: $\tan x=\sqrt{3}$

اوس د $(-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2})$ په انټروال کې د x هغه زاویه لټوو چې $\tan x=\sqrt{3}$ وي او هغه زاویه له $\dfrac{\pi}{3}$ یا 60° څخه عبارت ده.

له دې امله پورتنۍ معادله د $\tan x=\tan\dfrac{\pi}{3}$ په صورت کې لاسته راځي، په مثلثاتي دایره کې وینو چې کومې زاویې له $\tan\dfrac{\pi}{3}$ سره مساوي دي.



$$x=\left\{\frac{\pi}{3}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{3},\ .\ .\ .\right\}$$

$$x=\left\{\pi+\frac{\pi}{3},3\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 5\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ .\ .\ .\right\}$$

په عمومي ډول پورتني ستونه داسې ليکلی شو چې: $A=\left\{x/x=k\pi+\frac{\pi}{3}\quad k\in Z\right\}$

يا په عمومي ډول د هرې θ زاويې لپاره لرو چې: $A=\{x/x=k\pi+\theta\ ,\quad k\in Z\}$

دويم مثال: لاندې معادله حل کړئ.

$$\tan\ x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل:

$$\tan\ x=\tan\frac{\pi}{6}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{\pi}{6}$$

د معادلې د حل سټ $A=\left\{x/x=k\pi+\frac{\pi}{6}\quad k\in Z\right\}$

دريم مثال:د $\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})$ د معادلې حلونه د $[0\ ,\ 2\pi]$ په انټروال کې لاسته راوړئ.

حل:

$$\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+(x+\frac{\pi}{3})$$

$$2x-x=k\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{12}$$

د k پر ځای صحيح عددونه ليکو، تر څو هغه زاويې چې د $[0\ ,\ 2\pi]$ په انټروال کې دي، لاسته راشي.

$$x=k\pi+\frac{7\pi}{12}\ \begin{cases}\xrightarrow{k=0}\ x_1=\frac{7\pi}{12}\\[4pt]\xrightarrow{k=1}\ x_2=\pi+\frac{7\pi}{12}=\frac{19\pi}{12}\end{cases}$$

څلورم حالت: د $\cot x+b=0$ معادله، د معادلې د عمومي حل لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

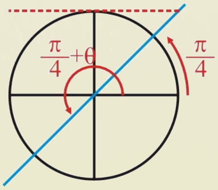
لومړی مثال: د $\cot x-1=0$ معادله حل کړئ.

حل: له پورتنی معادلې څخه $\cot x$ پيداکوو: $\cot x-1=0\quad\Rightarrow\quad\cot x=1$

اوس د $[0,2\pi]$ په انټروال کې هغه زاويه گورو چې $\cot$ يې $(+1)$ وي او هغه زاويه لـه $\frac{\pi}{4}$ يا 45° څخه

عبارت ده :

نو: $\cot x = \cot\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$



$$x = \frac{\pi}{4}\ ,\ 2\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 4\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ldots$$

$$x = \pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 3\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 5\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ldots$$

نو د معادلې د حل سېټونه په لاندې ډول دی.

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{4}\ ,\ 2\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 4\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ldots\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 3\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 5\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ldots\right\}$$

$$A = \left\{x / x = k\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4},\quad k \in Z\right\}$$

یا په عمومي ډول د هرې θ زاويې لپاره داسې ليکو: $A = \{x / x = k\pi + \theta\ ,\ k \in Z\}$

دريم مثال: د $\cot 3x = \cot x$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\cot 3x = \cot x \Rightarrow 3x = k\pi + x = 3x - x = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}\ ,\ k \in Z$$

پوښتنې

د لاندې معادلو د عمومي حل ځوابونه پيدا کړئ.

$a)\quad 3\cos x + 5 = 0$

$b)\quad \tan x = \sqrt{3}$

دویمه درجه مثلثاتي معادلې

په تېرو درسونو کې مو ساده مثلثاتي معادلې حل کړي دي اوس دویمه درجه مثلثاتي معادلې څېړو. د مثلثاتي معادلې عمومي شکل عبارت دی له: $a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = d$ چې c, b, a او d ثابت عددونه دي.

$$a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = d$$

لومړی مثال: د $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: په پورتنی معادله کې د $\sin x$ پر ځای y لیکو، او معادله داسې لیکلی شو:

$$6y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-5)^2 - 4(6)(1)$$

$$\Delta = 25 - 24 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12} \quad , \quad y_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad y_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{3}$$

$$\sin x = y_1 = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = y_2 = \frac{1}{3}$$

په دې ډول هغه کوچنی زاویه چې ساین یې $\frac{1}{2}$ وي، له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت ده، نو:

$$A = \left\{ \begin{array}{ll} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} & \\ & k \in Z \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} & \end{array} \right\}$$

او یا لیکلی شو چې:

$$x = n\pi + (-1)^n \alpha \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \quad , \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

په همدې ډول د $\sin x=\frac{1}{3}$ لپاره ډېره کوچنی زاویه 0.33 ده او د مثلثاتي جدول لـه مخې د $\sin x=\frac{1}{3}$ لپاره $19^{\circ}\ 30'$ یا $\frac{13\pi}{120}$ دی.

$$A=\left\{\begin{aligned} &x=2k\pi+\frac{13\pi}{120} \\ &x=(2k+1)\pi-\frac{13\pi}{120} \end{aligned}\qquad k\in Z\right\}$$

دویم مثال: د $\cos 2x+\sin x=0$ معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ دی، نو لیکلی شو چې:

$$1-2\sin^2 x+\sin x=0$$
$$2\sin^2 x-\sin x-1=0$$

که چیرې په پورتنی معادلې کې د $\sin x$ په ځای y وضع کړو، نو لیکو:

$$2y^2-y-1=0 \quad\Rightarrow\quad (2y+1)(y-1)=0$$
$$2y+1=0 \quad\Rightarrow\quad 2y=-1 \quad\Rightarrow\quad y_1=-\frac{1}{2}$$
$$y-1=0 \quad\Rightarrow\quad y_2=1$$

د $\sin x=y$ د تعویض لپاره چې مو په پام کې نیولی دی، نو د لاسته راغلو قیمتونو لپاره لرو چې:

$$\sin x=y_1=-\frac{1}{2}$$
$$\sin x=y_2=1$$

په دې ډول د $\sin x=-\frac{1}{2}$ لپاره هغه کوچنی زاویه چې ساین یې $-\frac{1}{2}$ وي له $\frac{7\pi}{3}$ څخه عبارت ده.

بنا پر دې د حلونو سټ يې عبارت دی له:

$$A=\left\{\begin{array}{l}\sin x=1 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{\pi}{2} \\ \sin x=-\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow x=\dfrac{7\pi}{6}\end{array}\right\}$$

$$A_1=\left\{\frac{\pi}{2}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{2},\ 4\pi+\frac{\pi}{2},\ \ldots\right\}$$

$$A_2=\left\{2\pi+\frac{7\pi}{6},\ 4\pi+\frac{7\pi}{6}, 6\pi+\frac{7\pi}{6},\ \ldots\right\}$$

يا په عمومي ډول:

$$A=\left\{x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2} \quad , \quad x=2n\pi+\frac{7\pi}{6}\ ,\ n=0,1,2,3\ \ldots\right\}$$

دريم مثال: د $2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\sin x(2\sin x-\sqrt{2})=0$$

$$\sin x=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0^\circ$$

$$2\sin x-\sqrt{2}=0$$

$$2\sin x=\sqrt{2}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2=\frac{\pi}{4}$$

د معادلې د حلونو سټ عبارت دی له:

$$A_1=\{0^\circ\ ,\ \pi\ ,2\pi,3\pi\ ,4\pi,\ 5\pi\ ,\ \ldots\}$$

$$A_2=\left\{\frac{\pi}{4},\ \pi-\frac{\pi}{4},2\pi+\frac{\pi}{4},3\pi-\frac{\pi}{4},\ldots\right\}$$

پوښتنې

د لاندې معادلو د حل سټونه پیدا کړئ.

1- $\cos 2x + 1 = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

2- $3\cos^2 x + 2\cos x - 5 = 0$

3- $\sin^2 x - (1-\sqrt{3})\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$

د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو یا سیستمونو حل

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

د الجبري معادلو سیستم مو حل کړ. آیا د مثلثاتي معادلو سیستم حلولای شئ؟

دغه معادلې په شپږو ګروپونو باندې وېشلی شو:

لومړی ګروپ: د دغه ګروپ معادلې په لاندې اتو سیستمونو کې راتولې شوې دي.

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

څرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده، x او y مجهول قوسونه یا زاوېې دي.یو له دغو سیستمونو څخه حلوو:

$$\begin{cases}\sin x + \sin y = a \ldots \quad \mathrm{I} \\ x + y = \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{II}\end{cases}$$

د لومړۍ معادلې قیمت د ضرب د فورمولونو په کارولو سره لیکو، ځکه چې د دوو ساینونو مجموعه ده.

$$\sin x + \sin y = a$$

په دې اساس:

$$\begin{cases}2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = a \ldots \quad I \\ x + y = \alpha \ldots . II\end{cases}$$

اوس له II معادلې څخه د $x+y$ قیمت یعنې α د I په معادله کې ابږدو:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a \ldots \quad I$$

د I اړیکې دواړه خواوې په $2\sin\dfrac{\alpha}{2}$ باندې وېشو:

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

تبصره: د پورتنۍ معادلې ښي لوري له $(+1)$ څخه لوی او له (-1) څخه کوچنی نه دی، ځکه چې د قوس یا زاوېې ساین دی. یا په بل عبارت مربع یې له یو څخه لوی نه دی.

$$-1 \le \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

پورتنی غیرې مساوات د $1 < \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} < 0$ ، په شکل لیکو بیا یې دواړه خواوې مربع کوو:

$$\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

دواړه خواوې په $4\sin^2\frac{\alpha}{2} \ne 0$ کې ضربوو:

$$a^2 \le 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$$

پورتنی اړیکه د سیستم د حل له شرط څخه عبارت ده.

لومړی مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حل: په پورتني سیستم کې $a = 1$ او $\alpha = \frac{\pi}{2}$ دی، وینو چې راکړل شوی شرط د سیستم د حل لپاره صدق کوي او که نه؟ $a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$

د a او α قیمتونه په پورتنی اړیکه کې اېږدو:

$$1 - 4\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}}{2} \le 0 \Rightarrow 1 - 4\sin^2\frac{\pi}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 4(\sin\frac{\pi}{4})^2 \le 0$$

$$1 - 4(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \le 0 \Rightarrow 1 - 4\frac{2}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 2 \le 0 \Rightarrow -1 \le 0$$

لیدل کیږي چې سیستم د حل وړ دی، نو د تحویل د فورمولونو په مرسته د لومړی معادلې کیڼ لوري شکل ته تغییر ورکوو: $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$

څرنګه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ له دې امله $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ کېږي؛نو:

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1\Rightarrow\sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\Rightarrow\cos\frac{x-y}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x-y}{2}=\frac{\pi}{4}\quad\Rightarrow x-y=\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{2}\ldots\ldots\ldots I\\ x+y=\frac{\pi}{2}\ldots\ldots\ldots II\end{cases}\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow 2x=\frac{2\pi}{2}\quad\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

د x قیمت په I معادله کې ایږدو نو د y قیمت په لاس راځي:

$$\frac{\pi}{2}-y=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$$

$$y=0$$

دویم ګروپ: د دغه ګروپ اړوند سیستمونه په لاندې ډول دي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\cos y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\sin y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \cos x\cdot\cos y=a\end{cases}$$

څرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی له: $-\cos^2\frac{\alpha}{2}\leq a\leq\sin^2\frac{\alpha}{2}$

دویم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړې.

$$\begin{cases}x+y=\pi\\ \sin x\sin y=1\end{cases}$$

حل: په پورتني سیستم کې $a=1$ ، $\alpha=\pi$ دی د دغو معادلو د حل د امکان شرط عبارت دی، له:

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}\leq a\leq\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}=-\cos\ \frac{\pi}{2}=0$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$$

د سیستم د حل شرط ته په کتنو سره کولای شو ولیکو:

$$-\cos^2\frac{\pi}{2}\le a\le \sin^2\frac{\pi}{2}$$
$$0\le a\le 1$$

د II معادلې کيڼ لورى د تحويل د فورمول په کارولو سره لاندې شکل ځانته غوره کوي:

$$2\sin x\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y)$$

څرنګه چې $\sin x\sin y=1$ دى، بنا پر دې $\cos(x-y)-\cos(x+y)=2$

له بلې خوا $x+y=\pi$ دى نو: $\cos(x-y)-\cos\pi=2$

همدارنګه پوهېږو چې $\cos\pi=-1$ دى.

نو:

$$\cos(x-y)-(-1)=2\Rightarrow\cos(x-y)+1=2$$
$$\Rightarrow\cos(x-y)=2-1\Rightarrow\cos(x-y)=1$$
$$\cos(x-y)=\cos 0^\circ$$
$$x-y=0\Rightarrow x=y$$

د I له معادلې څخه د x قيمت پيدا کوو:

$$x+y=\pi\Rightarrow x+x=\pi\Rightarrow 2x=\pi$$

$$x=\frac{\pi}{2}\quad ,y=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\ x=y=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}$$

دريم ګروپ: دغه ګروپ څلور لاندې سيستمونه تشکيلوي، چې عبارت دي له:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=a\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \dfrac{\cos x}{\cos y}=a\end{cases}$$

چې α معلومه زاويه او a معلوم عدد دى. x او y مجهول قوسونه يا زاويې دي.

دريم مثال: لاندې مثلثاتي سيستم حل کړئ.

$$\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=\sqrt{3}\end{cases}$$

حل: ليدل کيږي چې دغه سيستم له دريم ګروپ سره مطابقت لري نو، په لاندې ډول کړنه کوو يعنې د سيستم دويمه معادله د تناسب د خواصو په پام کې نيولو سره داسې ليکو:

$$\frac{\text{sinx}-\text{siny}}{\text{sinx}+\text{siny}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

د $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ او $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ قیمتونـه پـه پورتنی اړیکه کې اېږدو:

$$\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

څرنگه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ دی، نو $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ سره کېږي.

$$\cot\frac{\pi}{4}\tan\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

له بلې خوا $\cot\frac{\pi}{4}=1$ دی نو معادله لاندې شکل ځانته غوره کوي:

$$\tan\frac{x-y}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan 15^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan\frac{x-y}{2}=\tan 15^\circ \quad\Rightarrow\quad \frac{x-y}{2}=15^\circ$$

$$x-y=30^\circ=\frac{\pi}{6}$$

د معادلو سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2} \\ x-y=\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

$$2x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}$$

$$x=\frac{4\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

اوس د x قیمت په پورتنی یوه معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x-y=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{\pi}{3}-y=\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=y\Rightarrow\frac{2\pi-\pi}{6}=y$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

څلورم ګروپ: دغه ګروپ اته لاندې سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \cot x\pm\cot y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \tan x\pm\tan y=a\end{cases}$$

څرنګه چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $a^2-4+4a\cot\alpha\geq 0$

څلورم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases}x-y=\dfrac{\pi}{3}\\ \tan x-\tan y=-2\sqrt{3}\end{cases}$$

حل: کولی شو لومړی معادله داسې ولیکو: $\tan(x-y)=\tan\frac{\pi}{3}$

له بلې خوا پوهیږو چې $\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y}=\sqrt{3}$

د $\tan x-\tan y=-2\sqrt{3}$ قیمت په پاسنی معادله کې ایږدو: $\dfrac{-2\sqrt{3}}{1+\tan x\cdot\tan y}=\sqrt{3}$

د مساوات دواړه خواوې په $\sqrt{3}$ باندې وېشو او لیکو.

یا:

$$\frac{-2}{1+\tan x\cdot\tan y}=1\quad\Rightarrow\ 1+\tan x\cdot\tan y=-2$$

یا: $\Rightarrow\tan x\cdot\tan y=-3$

نو:

$$\begin{cases} \tan x \cdot \tan y = -3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ \mathrm{I} \\ \tan x - \tan y = -2\sqrt{3} \ldots\ldots\ \mathrm{II} \end{cases}$$

د $\tan x$ قیمت له II معادلې څخه په لاس راوړو په I کې یې اېږدو:

$$\tan x = -2\sqrt{3} + \tan y$$

$$(-2\sqrt{3} + \tan y)\tan y = -3$$

$$\tan^2 y - 2\sqrt{3}\tan y + 3 = 0$$

$$(\tan y - \sqrt{3})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan y - \sqrt{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan y = \sqrt{3}$$

$$y = \frac{\pi}{3}$$

د y د قیمت په پام کې نیولو سره د I له معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړو.

$$\tan x \cdot \tan y = -3$$

$$\tan x \cdot \sqrt{3} = -3 \quad \Rightarrow \quad \tan x = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{2}$$

پنځم گروپ: دغه گروپ لاندې دوه سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = a \end{cases}$$

د تیر په څېر بیاهم α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y معلوم قوسونه یا زاویې دي.

دپورتني سیستم د حل شرط عبارت دی، له:

$$-1 \leq \frac{1+a}{1-a}\cos\alpha \leq 1$$

پنځم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = 7\dfrac{\pi}{6} \\ \tan x \cdot \tan y = 0 \end{cases}$$

لیدل کېږي چې دغه سیستم په پنځم گروپ پورې اړه لري او په لاندې ډول یې حلوو:

$$\tan x \tan y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}$$

د $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$ او $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$

قيمتونه په اړونده اړيکه کې ايږدو.

$$\tan x \tan y = \frac{\frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]}{\frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]}$$

د $x + y$ قيمت د سيستم له لومړي معادلې څخه په پورتنۍ اړيکه کې ايږدو:

$$\tan x \cdot \tan y = \frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}}$$

څرنگه چې $\tan x \cdot \tan y = 0$ سره راکړل شوی دی، نو ليکو:

$$\frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}} = 0$$

ددې لپاره چې کسر مساوي په صفر شي، نو بايد صورت يې له صفر سره برابر شي؛ يعنې:

$$\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6} = 0$$

$$\cos 7\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(x-y) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\cos(x-y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow x - y = \frac{5\pi}{6}$$

نوموړی سيستم حلوو:

$$-\begin{cases} x - y = 5\frac{\pi}{6} \\ x + y = 7\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} = 2\pi \quad , \qquad x = \pi$$

د x قیمت د I په معادله کې اېږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x-y=5\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \pi-y=5\frac{\pi}{6} \quad , \qquad -y=\frac{5\pi}{6}-\pi$$

$$y=\pi-\frac{5\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{6\pi-5\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

شپږم ګروپ: په دغه ګروپ کې لاندې سیستمونه شتون لري:

$$\begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=a \end{cases}$$

د حل د امکان شرط عبارت دی، له:

$$-1\leq\frac{a-1}{a+1}\sin\alpha\leq 1$$

شپږم مثال:

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=-3 \end{cases}$$

د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره لرو:

$$\frac{\tan x-\tan y}{\tan x+\tan y}=\frac{-3-1}{-3+1}=2$$

د مساوات په کېڼي خوا کې د صورت او مخرج قیمتونه د $\sin$ او $\cos$ له جنسه داسې اېږدو:

$$\frac{\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}}=2\Rightarrow\frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=2$$

$$2\sin(x+y)=\sin(x-y)$$

څرنګه چې $x-y=\dfrac{\pi}{2}$ دی، نو:

$$2\sin(x+y)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$\sin(x+y)=\frac{1}{2}\Rightarrow x+y=\frac{\pi}{6}$$

هغه کوچنی قوس چې په معادله کې صدق کوي، عبارت دی له: $\frac{\pi}{6}$ چې د معادلو لاندې سیستم جوړوو:

$$x+y=\frac{\pi}{6}$$

$$x-y=\frac{\pi}{2}$$

نومو ړی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{6}.....\text{I} \\ x-y=\frac{\pi}{2}.....\text{II} \end{cases}$$

$$2x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x=\frac{\pi+3\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}$$

$$x=\frac{4\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

د x قیمت د I په معادله کې اېږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3}+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow y=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$$

$$y=\frac{\pi-2\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$$

$$y=-\frac{\pi}{6}$$

پوښتنې

د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه حل او ووایاست چې په کوم ګروپ پورې اړه لري؟

$$a)\quad \begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \tan x+\tan y=1 \end{cases} \qquad\qquad b)\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\cos x}=2 \end{cases}$$

د څپرکي مهم ټکي

د ساین قانون: د ABC په هر مثلث کې لاندې اړیکې شته:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

پورتنی اړیکه د ساین د قانون په نوم یادېږي.

د کوساین قانون: د ABC په هر مثلث کې چې دضلعو اوږدوالی یې b,a او c وي، د ضلعو او زاویو تر منځ لاندې اړیکې شته:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\ \cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\ \cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\ \cos C$$

د tan قانون: د ABC په هر مثلث کې د هغه د ضلعو او زاویو ترمنځ د tan له جنسه لاندې اړیکې شته:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}\quad,\quad\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}\quad,\quad\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

مثلثاتي مطابقت: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاویې د ټولو قیمتونو لپاره د مساواتو دواړه خواوې مساوي شي، مثلثاتي مطابقت بلل کېږي.

مثلثاتي معادلې: هغه مساوات چې د زاویې په ځینو قیمتونو سره دواړه خواوې مساوي شي، معادله بلل کېږي.

د مثلثاتي معادلو سیستمونه

مثلثاتي معادلو سیستمونه په لاندې شپږو ګروپونو وېشل شوي دي:

لومړی ګروپ:

$$\begin{cases}\sin x\pm\sin y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}\qquad\begin{cases}\cos x\pm\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

دویم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \cos y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \sin y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

دریم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

څلورم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases}$$

پنځم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x + \tan y = a \end{cases}$$

شپږم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې په ځير سره ولولئ، هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه کړئ.

1. که چېرې $A=20^\circ$, $b=10$, $c=7$ وي، د a د ضلعې اوږدوالی يې عبارت دی له:

$a)$ 16.4 $b)$ 16 $c)$ 15.9 $d)$ 16.8

2. که چېرې $a=8$, $b=5$ او $c=10$ وي، د B زاويې اندازه عبارت ده له:

$a)$ 28° $b)$ 29° $c)$ 29.4° $d)$ 28.5°

3. که چېرې $A=48^\circ$, $B=22^\circ$ او $a=5$ وي د b اوږدوالی عبارت دی له:

$a)$ 8 $b)$ 8.5 $c)$ 9 $d)$ -9.5

4. د $\sec x(\sec x-\cos x)$ مثلثاتي مطابقت مساوي دی له :

$a)$ $\tan x$ $b)$ $\dfrac{1}{\tan x}$ $c)$ $\cot x$ $d)$ $\tan^2 x$

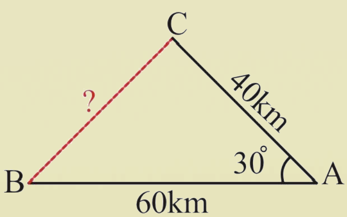
لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که چېرې د $A=30^\circ$, $c=8$, $b=5$ واحده وي، د a ضلع او $\sin C$ پيدا کړئ.

2. که په يوه مثلث کې $a=8$, $b=5$, $c=10$ واحده وي، د B زاويې اندازه پيدا کړئ.

3. د ABC په مثلث کې که $\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ او $A=30^\circ$ وي، د B او C زاويو اندازه پيدا کړئ.

4. دوې بېړۍ د A له ټکي څخه په دوو خواوو داسې په حرکت پيل کوي چې د منځ زاويه يې 30° ده، که له يوه ساعت څخه وروسته، لومړی بېړۍ $40\,km$ او دويمه بېړۍ $60\,km$ واټن وهلی وي، د دوو بېړيو ترمنځ واټن پيدا کړئ.



5. د $\cot^2\beta$ او $\sin\beta$ او $\cos\beta$ له جنسه محاسبه کړئ.

6. لاندې مطابقتونه ساده کړئ.

$a)\ \dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$ $\qquad b)\ \dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A$

$c)\ \tan A+\cot A=2\csc 2A$ $\qquad d)\ \dfrac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\tan\dfrac{A}{2}\cdot\cot\dfrac{B}{2}$

$e)\ \dfrac{\cos A}{1-\sin A}=\tan(45+\dfrac{A}{2})$ $\qquad f)\ \cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=\dfrac{1}{4}\cos 3\alpha$

7. لاندې مثلثاتي معادلې حل کړئ.

$a)\ \cos^2 x+\cos^4 x=0$ $\qquad b)\ \tan^2 x-4\tan x+3=0$

$c)\ 4\cos\beta-2=0$ $\qquad d)\ \cos x-\sqrt{3}\sin x=1$

$e)\ \cos^2 x+3\sin x\cdot\cos x=-1$

8. آیا د $2\sin^2 x-\cos x=2\cos 2x+\sin x$ مساوات یو مطابقت دی او که معادله؟

9. لاندې افادې ساده کړئ.

$a)\ \dfrac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$ $\qquad b)\ 1-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=?$

$c)\ \cos 4x+2\sin^2 2x$ $\qquad d)\ (\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x)^2$

10. د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه لومړی تشخیص او بیا یې حل کړئ.

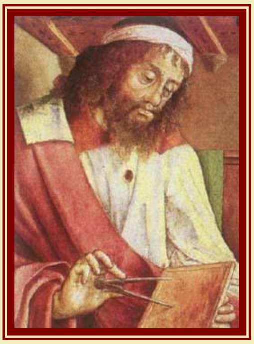
$a)\ \begin{cases}\tan x+\tan y=1\\ \cos x\cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ $\qquad b)\ \begin{cases}\sin(x+y)=\cos(x-y)\\ \tan x-\tan y=1\end{cases}$

دریم ځپرکی

فضايي هندسه

د اقلیـدس تـصویر چـې نومـوړی د دوه بُعـدی او درې بُعدی هندسي بنسټ ایښودونکی دی.

اساسي مفاهيم او اکسيومونه



د اقليدس د هندسي مفاهيمو څېړنې په دوو بعدونو کې د مسطحې هندسې په نامه يادېږي.

هغه هندسي مفاهيم، چې په دريو اړخونو(بعدونو) کې څېړل کېږي، فضايي هندسه نومېږي.

فعاليت

- د مفاهيمو په برخه کې لکه: لومړني اصطلاحات، دليل، برهان او قضيو په هکله فکر وکړئ. خپل منځ کې خبرې او د موضوع په هکله بحث وکړئ.

له پورتني بيان او بحث څخه وروسته کولای شو، لاندې تعريف وکړو:

لومړنی اصطلاحګانې Postulates: د هر علم په برخه کې د لومړنيو اصطلاحګانو څخه سترګې پټولای نشو د نورو علومو په ډول په هندسه کې هم هغه مفاهيم او مفکورې چې پرته له کوم تعريف څخه منل کېږي لومړني اصطلاحات بلل کېږي. لکه: ټکی(نقطه)، کرښه، مستوي او فضا.

منطقي دليل او برهان Logical Reason:برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کېږي چې له يو لړ مخکينيو سمو وړانديزونو او څېړنو څخه و روستنيو څېړنو ته رسېږي چې د هغې سموالی مخکې منل شوی وي. موږ هم کولای شو، هغه و منو.

قضيهTheorem: هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت يو لړ منطقي دلايلو ته اړتيا ولري، قضيه بلل کېږي.

ټکی(نقطه): موږ نقطه د يو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنی اصطلاح(تعريف شوې نه ده) په توګه منو.

مستقيم خط: کش شوی تار، دمېزڅنډه او د خط کش تېغه د مستقيم خط مفهوم او مطلب بيانوي. د مستقيم خط بېلېدونکي علامې دا دي چې د دوو راکړل شوو ټکو څخه يوازې او يوازې يوه مستقيمه کرښه تيرېدلای شي مستقيم خط د لومړنی اصطلاح (تعريف شوی نه دی) په ډول منو.

بايد فکر مو وي چې يو مستقيم خط دواړو خواوو ته تر لايتناهي پورې غزيدلای شي.

لومړی اصل: دوې ښکاره او ټاکلې نقطې يوازې او يوازې يو مستقيم خط څرګندوي.

دويم اصل: هر مستقيم خط لږ ترلږه دوې څرګندې نقطې لري چې په يو مستقيم خط باندې واقع دي، لږ تر لږه داسې درې نقطې شتون لري چې په يوه مستقيم خط باندې واقع نه وي.

دريم اصل: کولای شو په يوه مستقيم خط باندې د هرو دوو نقطو تر منځ يوه دريمه نقطه په لاس راوړو.

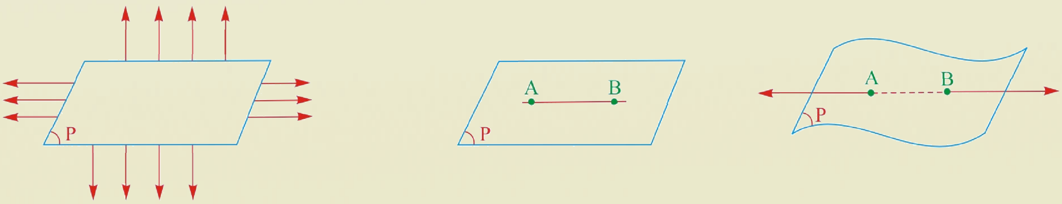
مستوي: د ولاړو اوبو سطح او د ټولګي تخته د مستوي مفهوم څرګندوي او مستوي د لومړنی اصطلاح (تعريف شوې نه ده) په توګه منل کېږي.

لومړی اصل: په هره مستوي کې لږ تر لږه درې نقطې شتون لري چې د يوه مستقيم خط په استقامت واقع نه وي.

دويم اصل: له هرو دريو نقطو څخه چې د يوه مستقيم خط په استقامت پرتې نه وي، يوه مستوي تېرېږي.

دريم اصل: که چېرې د يوه مستقيم خط دوې نقطې په يوې مستوي کې وي، دا خط په مستوي کې دی.

په مسطحه هندسه کې د مستوي رسميدلوته اړتيا نشته، ځکه چې ټول شکلونه لکه: د کاغذ مخ، د لرګي تخته، چې هر يو يې يوه مستوي څرګندوي رسميږي، خو په فضايي هندسه کې د مستوي رسمولو ته اړتيا شته، ځکه چې په فضايي هندسه کې مستوي يوه نه، بلکې ډېرې دي. زياتره په فضايي هندسه کې مستوي د متوازي الاضلاع، مستطيل او يا هوارې سطحې په واسطه ښودل کيږي او په يوه کونج کې يې يو توری ليکي.



نا محدوده مستوي   محدوده مستوي   مستوي نه ده

دا مستوي ګانې چې په پورته شکلونو کې ليدل کيږي، په همدې پراخوالي نه دي، بلکې ترلايتناهي پورې امتداد لري. دا چې مستوي ګانې په پورته شکلونو کې ليدل کيږي هغه متوازي الاضلاع او مستطيل نه دي، بلکې د مستوي په يوې هوارې سطحې کې ښودل دي.

ټولې نښې چې په مسطحه هندسه او رياضي کې استعماليږي، په فضايي هندسه کې هم استعماليږي.

هغه اکسيومونه چې په مسطحې هندسې کې موجود دي، په فضايي هندسه کې هم له دې اکسيومونو څخه کار اخيستل کيږي.

سربېره په مسطحه هندسه په فضايي هندسه کې هم يو لړ ځانګړي اکسيومونه شته چې په لاندې ډول بيانيږي.

د مستوي لومړنی اکسيوم: هغه مستقيم خط چې د مستوي دوې مختلفې نقطې سره نښلوي په دې مستوي کې شامل دی.

د مستوي دويم اکسيوم: له هغو دريو نقطو څخه چې په يوه مستقيم خط واقع نه دي، يوازې او يوازې يوه مستوي تېريږي.

د متقاطع مستوي ګانو اکسيوم: که چيرې دوې مستوي ګانې يو ګډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چيرې يو ګډ مستقيم خط ولري، د غه متقاطع خط ته د دوو مستوي ګانو مشترک فصل وايي.

فضا: فضا هم د لومړنی اصطلاح (تعريف شوې نه ده) په توګه پېژنو.

لومړی اصل: دلايتناهي نقطو مجموعې ته فضا وايي.

دويم اصل: لږتر لږه څلور داسې نقطې شته چې په يوه مستوي کې واقع نه دي.

پوښتنې

1. خرګنده کړئ چې ولې درې پښې لرونکی ميز د څلورو پښو لرونکي ميز په پرتله ټينګ دی؟
2. ولې نقطه، کرښه او مستوي لومړنی اصطلاح ګانې بولي؟
3. له دوو نقطو څخه څو مستوي ګانې تېريدلای شي چې دواړه نقطې په کې پرتې وي.

په درې بُعدي فضا کې کرښه او مستوي

په فضا کې دوه قلمونه، دوه کتابونه، یو کتاب او یو قلم کوم حالتونه لرې؟

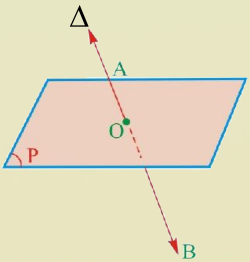
درې بُعدي فضا:

هغه فضا، چې موږ په کې ژوند کوو، درې بُعدي فضا ده. دا درې بُعدي فضا یوه له نه تعریف شوو لومړنیو مفهومونو څخه ده.

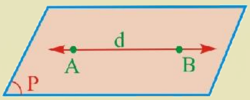
فضا دلایتناهي نقطو مجموعه ده، خط او مستوي هم په ترتیب سره یو او دوه بعدونه لري چې هر یو د فضا د سټ یوه برخه(جزء) دي.

د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت: یوه مستقیمه کرښه او یوه مستوي لاندې درې حالتونه لري:

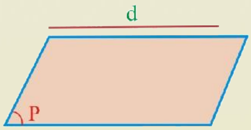
1. که چیرې یو مستقیم خط او یوه مستوي یوه مشترکه نقطه ولري، دا خط او مستوي یو له بل سره متقاطع دي. دمثال په ډول په دې شکل کې د Δ مستقیمه کرښه د P مستوي د O په نقطه کې قطع کړې ده.



2. که چیرې یو مستقیم خط له یوې مستوي سره دوه او یا له دوو څخه زیاتې مشترکې نقطې ولري دا مستقیمه کرښه په مستوي منطبقه ده او یا داسې ویل کېږي چې مستقیمه کرښه په مستوي کې شامله ده، د مثال په ډول د d مستقیم د P په مستوي کې شامل دی.



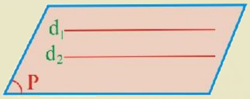
3. که چېرې یوه مستقیمه کرښه له یوې مستوي سره هیڅ ګډه نقطه و نه لري، دا مستقیم له مستوي سره موازي دی، مثلاً په لاندې شکل کې د d مستقیم خط له P مستوي سره موازي دی.



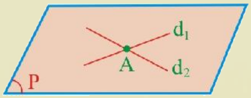
له یو بل سره د دوو مستقیمو کرښو نسبي حالت:

1- که چېرې دوه مستقیم خطونه په یوه مستوي کې شامل وي، نوموړي خطونه د همغې مستوي خطونه بلل کېږي، او یو له لاندینیو حالتونو څخه لري.

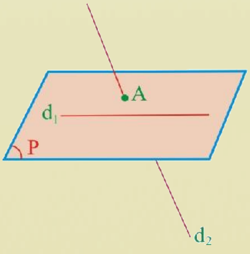
په یوې مستوي کې دوه خطونه هغه وخت موازي بلل کېږي چې هېڅ ګډټکی ونه لري.



2- په یوه مستوي کې دوه خطونه چې یوه ګډه نقط ولري، متقاطع خطونه بلل کېږي.

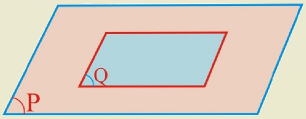


3- دوه مستقیم خطونه چې په یوه مستوي کې پراته نه وي او کومه مشترکه نقطه هم و نه لري، متنافر خطونه بلل کېږي؟

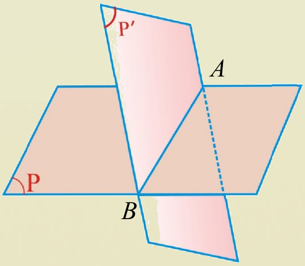


د دوو مستوي‌ګانو نسبي حالت:

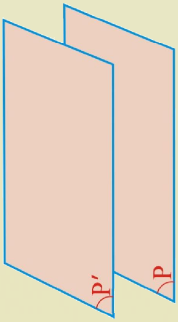
په عمومي ډول دوې مستوي‌ګانې لاندې درې حالتونه لري.



منطبق: که چېرې دوې مستوي‌ګانې لږ تر لږه درې مشترکې نقطې ولري چې د یو مستقیم خط په امتداد پرتې وي، یو پر بل منطبقې مستوي‌ګانې بلل کیږي، لکه: په مخامخ شکل کې د P او Q دوې مستوي‌ګانې یو پر بل منطبقې دي.



متقاطع: که چېرې دوې مستوي‌ګانې یو ګډ مستقیم خط ولري متقاطع مستوي‌ګانې بلل کیږي. دغه د AB مشترک خط ته مشترک فصل هم وایي. لکه: مخامخ شکل.



موازي: که چېرې دوه مستوي‌ګانې هیڅ کوم ګډ ټکی و نه لري، سره موازي دي، د مثال په توګه د P او P' مستوي‌ګانې.

فعالیت

- په فضا کې له یوې نقطې څخه څو مستقیم خطونه تېرېږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستقیم خطونه تېرېږي؟
- له یوې نقطې څخه څو مستوي ګانې تېرېږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستوي ګانې تېرېږي؟
- له دریو نقطو څخه څو مستوي ګانې تېرېږي چې درې واړې نقطې پکې شاملې وي؟

پوښتنې

1- د R او T نقطې د P په مستوي کې پرتې دي، د کوم دلیل له مخې د $\overline{RT}$ خط د P په مستوي کې پروت دی؟

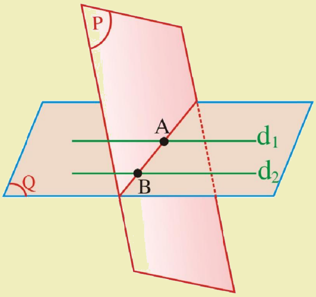
2- که د Δ مستقیم خط د P په مستوي کې پروت نه وي، د Δ مسقیم خط به د P مستوي په څو نقطو کې قطع کړي؟

3- که چېرې د AB مستقیم خط او د P مستوي د M او K دوې ګډې نقطې ولري، د $\overline{AB}$ مستقیم خط د P په مستوي کې پروت دی؟

4- د B, A او C نقطې د P په مستوي کې واقع دي او هم د B, A او C نقطې د p' په مستوي کې پرتې دي، د P او p' مستوي‌ګانې یوه له بلې سره څه اړیکې لري؟

په فضا کې موازي مستقیم خطونه

آیا په فضا کې مستقیم خطونه موازي دي؟



تعریف:

دوه مستقیم خطونه چې په یوې مستوي کې پراته او ګډه نقطه و نه لري، موازي خطونه بلل کېږي.

د موازاتو اکسیوم:له یوې خارجي نقطې څخه له یوې مستقیمې کرښې سره یوازې او یوازې یوه موازي مستقیمه کرښه رسمولای شو او بس.

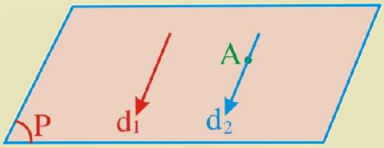
فعالیت

- د A ټکی د P مستوي او د d_1 مستقیم خط چې د A ټکی وربانـدې پـروت نـه وي، پـه پـام کـې ونیسئ؟
- د A ټکی او د d_1 له مستقیم خط څخه څو مستويګاني تېریدلای شي؟ ولې؟

له پورتني فعالیت څخه د قضیې متن او ثبوت بیانوو.

قضیه: د یوې خارجي نقطې څخه له یوه مستقیم خط سره یوازې یو موازي مسقیم خط رسـمولای شـو او بس.

ثبوت: د A له نقطې او د d_1 له مستقیمې کرښې څخه یـوازې یوه د P مستوي تېریږي، ولې؟



اوس د P پـه مـستوي کـې د A لـه نقطې څخـه یـوازې د d_2 مستقیم خط د d_1 له مستقیم خط سره موازي رسمولای شو.

(پورتنی ثبوت په مسطحه هندسه کې لوستل شوی). نو پورتنی دعوا چې ټکی او خط په فضا کـې وي، هـم سموالی لري.

فعالیت

دوه د d_1 او d_2 موازي خطونه او یوه د A نقطه د P له مستوي څخه د باندې په پام کې ونیسئ.

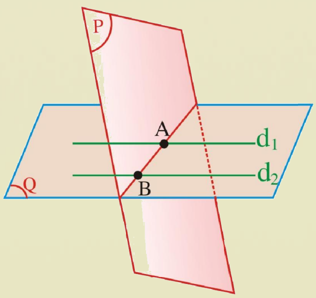
- آیا د d_1 او d_2 مستقیم خطونه یوه بله مستوي ټاکلی شي؟
- که چېرې د P مستوي د Q مستوي د A په ټکي کې قطع کړي، آیا د P مستوي به د d_2 مستقیم خط هم قطع کړي؟
- آیا دوې مستوي‌ګانې یوه بله د یوه مستقیم خط په اوږدو کې قطع کوي، ولې؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته د قضیې متن او ثبوت بیانوو.

قضیه: که دوه مستقیم خطونه موازي وي او مستوي یو له هغو څخه قطع کړي، بل یې هم قطع کوي.

ثبوت: د d_1 او d_2 یو له بل سره موازي مستقیمونه د Q په مستوي کې پراته دي.

که د P مستوي د d_1 مستقیم د A په نقطه کې قطع کړي، نوموړې مستوي د d_2 مستقیم هم د B په نقطه کې قطع کوي د تعریف له مخې د d_1 او d_2 موازي خطونه یوه د Q مستوي ټاکي، د P او Q مستوي-ګانې د A یوه مشترکه نقطه لري، که چېرې دوې مستوي‌ګانې یوه له بل په یوه نقطه کې قطع کړي، نو ویلای شو چې هغوی یو بل د یوې مستقیمې کرښې په اوږدو کې قطع کوي، له دې امله د P او Q مستوي‌ګانې د d_2 مستقیمه کرښه د B په نقطې کې هم قطع کوي.



څکه یو مستقیم خط چې په یوې مستوي کې له دوو موازي خطونو څخه یو قطع کړي، بل یې هم قطع کوي.

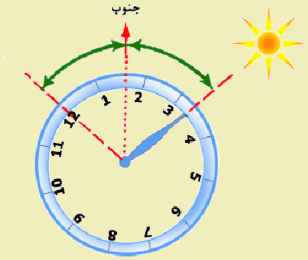
پوښتنې

1- که چېرې دوه مستقیم خطونه له یوه دریم مستقیم خط سره موازي وي ثبوت کړئ چې دا مستقیم خطونه په خپل منځ کې هم موازي دي؟

2- که چیرې د E او F مستوي‌ګانې سره موازي او د L_1 مستقیم خط د E مستوي کې او د L_2 مستقیم خط د F په مستوي کې واقع وي آیا $L_1 // L_2$ دی؟

3- که د E او F مستوي ګانې سره متقاطع او د P مستوي هغوی دواړه قطع کړي، آیا د E او F ګډ فصل د E او P له مشترك فصل او د F او P له مشترك فصل سره موازي دی؟

په فضا کې د دوو مستقیمو کرښو تر منځ زاويه



کـه چېـرې د يـوې زاويـې دورانـي لـورى د ساعت د عقربې په مخالف لوري حرکت وکـړي، زاويـه مثبـت او که د ساعت د عقربې په همجهت(عين لـوري) وي زاويه منفي ده.

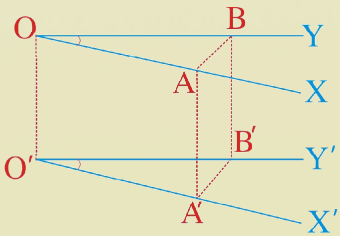
فعاليت

- د XOY او $X'O'Y'$ زاويې داسې په پام کې ونيسئ چې ضلعې يې سره موازي او هم جهته وي.
- د $\overline{OX}$ او $\overline{O'X'}$ لـه ضـلعو څخـه د $\overline{OA}$ او $\overline{O'A'}$ دوه مـساوي قطعـه خطونـه او د $\overline{OY}$ او $\overline{O'Y'}$ لـه ضلعو څخه د $\overline{OB}$ او $\overline{O'B'}$ مساوي قطعه خطونه بېل کړئ.
- د $OAA'O'$ شکل، کوم هندسي شکل لـري، دليـل يـې ووايـاسـت، د OAB او $O'A'B'$ جـوړ شـوي مثلثونه له يو بل سره څه اړيکه لري؟

د پورتني فعاليت له مخې د قضيې متن او ثبوت په لاندې ډول بيانولی شو.

قضيه: په فضا کې دوې زاويې چې دوه په دوه موازي او هم جهته ضلعې ولري، يوه له بلې سره مساوي دي.

ثبـوت: د XOY او $X'O'Y'$ زاويـې پـه پـام کـې نيـسو، داسې چې $\overline{OX}//\overline{O'X'}$ او $\overline{OY}//\overline{O'Y'}$ دي، يو لـوری هـم لـري. پـه شـکل کـې د OX او $O'X'$ پـر خطونـو د $\overline{OA}$ او $\overline{A'O'}$ قطعه خطونه سره مساوي موازي او هم جهته دي.



نو د $OAA'O'$ شکل يوه متوازي‌الاضلاع ده. له دې امله د $\overline{BB'}$ او $\overline{OO'}$ قطعه خطونه مـوازي، مـساوي او هم لوري دي. نو $ABB'A'$ هم يوه متوازي‌الاضلاع ده او $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ دي.

د $O'A'B'$ او OAB مثلثونه انطباق منونکي دي. ځکه $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{OA} = \overline{A'O'}$ او $\overline{OB} = \overline{O'B'}$ دي

له دې امله $A\hat{O}B = A'\hat{O'}B'$ دي.

د قضيې پايله:

i) که په ترتیب سره د دوو زاویو ضلعې موازي او هم لوري وي، نومورې زاویې یو له بل سره مساوي دي.

ii) که د دوو زاویو یوه، یوه ضلع موازي او هم جهته وي او د هغو یوه، یوه ضلع یې موازي او مختلف جهتونه ولري، د دغو دواړو زاویو پراخوالی 180° دی.(ثبوت یې د زده‌کوونکو دنده ده).

د دوو متنافر و مستقیمو کرښو ترمنځ زاویه:

تعریف: په فضا کې د دوو متنافر و مستقیمونو ترمنځ زاویه له هغې زاویې څخه عبارت ده چې د یوې مستوي په یوه اختیاري نقطه کې له هغو سره د دوو موازي مستقیمونو د رسمولو په واسطه حاصلیږي

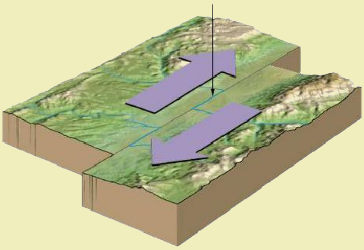
پوښتنې

1- که د دوو زاویو پراخوالی سره مساوي وي او د یوې زاویې یوه ضلع د بلې زاویې ضلعې سره موازي وي، آیا د هغو زاویو نورې ضلعې یو له بل سره موازي دي. ولې؟

2- که د دوو زاویو ضلعې سره موازي وي، ثابت یې کړئ چې د دغو زاویو، ناصف‌الزاویې سره موازي او یا سره عمود دي.

3- د d_1, d_2 دوو متنافرو مستقیمونو ترمنځ زاویه پیدا کړئ.

په فضا کې موازي مستقيمونه او موازي مستويگانې



يوه مستقيمه کرښه هغه وخت له يوې مستوي سره موازي بلل کېږي چې هيڅ ګډ ټکی و نه لري.

مستويگانې په فضا کې هغه وخت سره موازي دي چې هيڅ ګډ ټکی و نه لري.

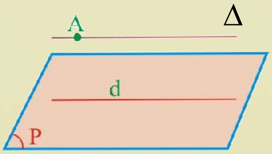
فعاليت

که چېرې د d مستقيم د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقيمه کرښه د P د مستوي بهر او د d مسقيم سره موازي وي، آيا د Δ مستقيم د P له مستوي سره موازي کېدلای شي؟

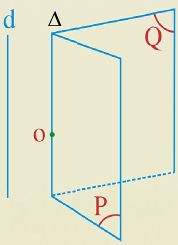
- دوې د P او Q متقاطع مستويگانې او يو مستقيم خط له دغو مستويگانو څخه بهر د P او Q له مستويگانو سره موازي په پام کې ونيسئ.
- د d مستقيم(مشترک فصل) د Δ له مستقيم خط سره موازي کيدای شي؟
- له يوې ټاکلي نقطې څخه د d_1 او d_2 دوو مستقيمو کرښو سره څو موازي مستويگانې چې موازي نه وي رسمولای شو؟ د فعاليتونو د هرې برخې له تر سره کولو وروسته د قضيو متن او ثبوت په ترتيب بيانوو.

قضيه: که يو مستقيم خط د يوې مستوي له يوه خط سره موازي وي. نوموړی مستقيم خط له همدې مستوي سره موازي دی.

ثبوت:د d مسقيم خط چې د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقيمه کرښه د p د مستوي بهر او د d له مستقيم سره موازي راکړل شوې، ثابتوو چې د Δ مستقيمه کرښه د p له مستوي سره موازي ده، که د p مستوي د Δ مستقيمه کرښه قطع کړي، د d مستقيمه کرښه چې د Δ له مستقيمې کرښې سره موازي ده هم قطع کوي. دا د فرضيې خلاف ده، ځکه د d مستقيمه کرښه د P په مستوي کې پرته ده، نو د p مستوي د Δ مستقيم قطع کولای نشي.



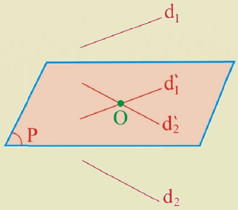
قضیه: که یوه مستقیمه کرښه له دوو متقاطع مستويګانو سره موازي وي، نوموړې مسقیمه کرښه د نوموړو مستويګانو له ګډ فصل سره موازي ده.



ثبوت: د P او Q دوې متقاطع مستوي ګانې په پام کې نیسو چې هره یوه یې د d له مستقیمې کرښې سره موازي ده، لکه: مخامخ شکل.

که د P، Q د مستويګانو د Δ په مشترک فصل باندې د O نقطه وټاکو او له هغې نقطې څخه د d له مستقیمې کرښې سره یو موازي رسم کړو، دا موازي د Δ په مستقیمې کرښې منطبق کېږي ځکه Δ یوازینی خط دی چې په دواړو مستويګانو یعنې په P او Q کې شامل دی.

قضیه: د (O) له یوې ټاکلې نقطې څخه د d_1 او d_2 مستقیم خطونه چې یو له بل سره موازي نه دي یوازې یوه موازي مستوي رسمولای شو او بس.

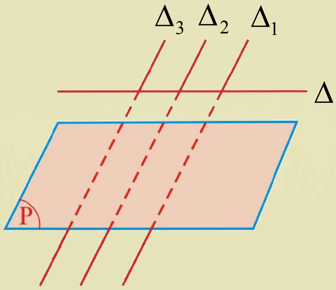


ثبوت: د (O) له نقطې څخه د d'_1 او d'_2 خطونه چې په پرتیب له d_1 او d_2 مسقیمونو سره موازي وي، رسموو د P مستوي چې د (O) له نقطې څخه تیریږي او د d'_1 او d'_2 مستقیمې کرښې په خپل ځان کې لري له d_1 او d_2 سره موازي دي؟ ولې؟

که چېرې d_1 او d_2 یو له بل سره موازي وي، نو d'_1 او d'_2 یو پر بل منطبق کېږي.

پوښتنې

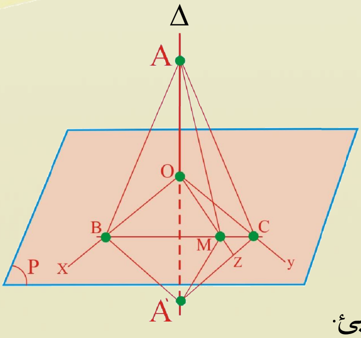
1- که چېرې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه سره موازي وي، څو موازي مستويګانې له هغو سره رسمولای شئ؟



2- که چېرې د Δ_1 , Δ_2 او Δ_3 موازي خطونه د P مستوي او د Δ مستقیمې کرښې په واسطه په داسې حال کې چې د Δ مستقیمه کرښه د P له مستوي سره موازي ده قطع شي، ثبوت کړئ چې مخامخ قطع شوي قطعات یو له بل سره مساوي دي.

په فضا کې متعامدې مستقيمې کرښې او مستوي ګانې

که د Δ مستقيمه کرښه د P مستوي په (O) ټکي کې عمود وي، آيا هغه ټول مستقيم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تيريږي، د Δ په مستقيمې کرښې باندې عمود دي؟



فعاليت

- مخامخ شکل په پام کې ونيسئ د $\overline{ox}$ او $\overline{oy}$ مستقيمونه د Δ په مستقيم د (O) په نقطه کې عمود رسم کړئ.
- د P په مستوي کې د OZ اختياري مستقيمه کرښه په پام کې ونسيئ.
- د Δ له مستقيمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ مساوي‌الفاصله قطعه خطونه جلا کړئ.

يو اختياري قاطع داسې رسم کړئ چې د $\overline{OX}$ مستقيمه کرښه د B او $\overline{oy}$ مستقيمه کرښه د C او د $\overline{OZ}$ مستقيمه کرښه د M په نقطو کې قطع کړي. $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ له $\overline{AA`}$ سره څه اړيکه لري.

- د OZ مستقيمه کرښه د Δ پر مستقيمه کرښه عمود ده؟ ولې؟

د پورتني فعاليت له تر سره کولو وروسته د قضيې متن او ثبوت داسې بيانوو.

قضيه: که د Δ يوه مستقيمه کرښه پر هغو دوو مستقيمو کرښو چې دواړه د Δ مستقيمه کرښه د (O) په نقطه کې قطع کوي عمود وي، په هغو ټولو مستقيمو خطونو باندې چې په مستوي کې متقاطع دي او د (O) له نقطې څخه تيريږي، عمود ده.

ثبوت: دوې مستقيمې كرښې د $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ په پام كې نيسو، دا دوه مستقيمونه د Δ پر مستقيم چې د (O) له نقطې څخه تېرېږي، عمود دي او د P مستوي جوړوي، د P په مستوي كې د OZ اختياري مستقيمه كرښه په پام كې نيسو، د Δ له مستقيمې كرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ دوه متساوي الفاصله قطعه خطونه جلاكوو.

او د P په مستوي كې يو قاطع رسموو چې د $\overline{OX}$ B او د $\overline{OY}$ C او oz مستقيم د M په نقطه كې قطع كړي.

$\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ دواړه $\overline{AA'}$ منځني عمودونه دي، نو

$$\overline{BA}=\overline{BA'}$$

$$\overline{CA}=\overline{CA'}$$

د ABC او $A'B'C'$ مثلثونه انطباق منونكى دي. د انطباق منلو د عمليې په وخت كې د C,B او M نقطې ثابتې پاتې كېږي او د A نقطه په A' او $\overline{MA}$ په $\overline{MA'}$ منطبق كېږي، نو ليكلى شو. $\overline{MA'}=\overline{MA}$

د $M\overset{\Delta}{A}A'$ مثلث متساوي الساقين دى او د $\overline{MO}$ منځنى په عين وخت كې د $\overline{AA'}$ منځنى عمود دى په نتيجه كې د Δ مستقيمه كرښه د $\overline{OZ}$ پر مستقيمې كرښې باندې عمود دى.

فعاليت

- كه د B او C نقطې د P او Q له ټكو څخه متساوي الفاصله وي، د BC مستقيمې كرښې هره نقطه له P او Q څخه متساوي‌الفاصله ده. اوس د X يوه اختياري نقطه د BC پر مستقيمه كرښه وټاكئ او ثابت كړئ چې X د P او Q څخه متساوي الفاصله دى.

پوښتنې

1- كه چېرې د d_1 او d_2 خطونه يو له بل سره موازي وي، له هغو سره څو موازي مستوي‌ګانې رسمولاى شئ؟

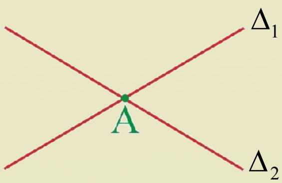
2- كه د L خط د P پر مستوي عمود وي، آيا ټولې هغه مستوي‌ګانې چې د L خط په كې پروت دى د P په مستوي باندې عمود دي؟

په فضا کې موازي مستوي‌ګانې

دوې مستوي‌ګانې چې هيڅ مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستوي‌ګانې بلل کيږي.

فعاليت

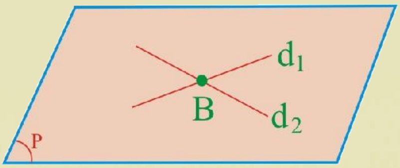
- د Δ_1 او Δ_2 مستقيم خطونه، چې د A په نقطه کې متقاطع دي، په پام کې ونسيئ
- له دې دوو مستقيمو خطونو او د A له نقطې څخه يوه مستوي تېرولی شو.



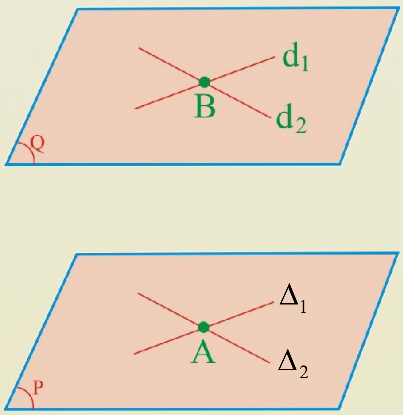
- له دې مستوي څخه بهر د d_1 او d_2 دوې مستقيمې کرښې چې په ترتيب سره د Δ_1 او Δ_2 سره موازي او يو بل د B په ټکي کې قطع کړي، رسم کړئ.
- هغه مستوي چې د Δ_1 او Δ_2 او د A له نقطې څخه جوړه شوې، له هغې مستوي سره چې د d_1 او d_2 مستقيمو کرښو او د B له ټکي څخه جوړه شوې ده، څه اړيکه لري؟

د پورتني فعاليت له تر سره کولو وروسته د قضيې متن او ثبوت بيانولی شو.

قضيه: که د يوې مستوي دوې متقاطع مستقيمې کرښې د بلې مستوي له متقاطع مستقيمو کرښو سره موازي وي، نومړې مستوي‌ګانې سره موازي دي.



ثبوت: د Δ_1 او Δ_2 مستقيم خطونه د A په نقطه کې متقاطع دي او يوه د P مستوي جوړوي. د B له نقطې څخه(چې د P مستوي بهر ده) د d_1 او d_2 مستقيم خطونه له Δ_1 او Δ_2 سره موازي رسم شوي دي، چې d_1 او d_2 هم يوه د Q مستوي جوړوي، ثابتوو چې د P او Q مستوي‌ګانې سره موازي دي.



ځرنګه چې d_1 او Δ_1 سره موازي دي، نو د d_1 د P له مستوي سره هم موازي دي. همدارنګه d_2 له Δ_2 سره موازي دي نو d_2 هم د P له مستوي سره موازي دی. اوس که چېرې د P او Q مستوي ګانې یو بل سره قطع کړي، مشترك فصل یې هم په همدې وخت کې له d_1 او d_2 سره موازي کېږي، ولې؟

دا امکان نه لري، ځکه چې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه متقاطع دي، په نتیجه کې د P او Q مستوي ګانې یوه بله سره قطع کولای نشي، نو یو بل سره موازي دي.

پوښتنې

که چېرې د E او F مستوي ګانې سره موازي وي او د L_1 مستقیمه کرښه په E مستوي او د L_2 مستقیمه کرښه د F په مستوي کې پرتې وي، آیا $L_1 // L_2$ دی؟

د څپرکي مهم ټکي

1- دفضايي هندسې بنسټيز مفاهيم او اکسيومونه:

لومړنۍ اصطلاحګانې Postulates:

هغه مفاهيم او مفکورې، چې پرته له کوم تعريف څخه منل کېږي، لومړني اصطلاحات بلل کېږي د مثال په توګه. ټکی، کرښه، مستوي او فضا.

دليل او برهان Logical Reason:

برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کېږي چې له يو لړ مخکينيو سمو وړانديزونو او څېړونو څخه و روسته وروستيو څېړنو ته رسېږي او د هغې سموالی مخکې منل شوی وي، موږ هم کولی شو، هغه و منو.

قضيه: Theorem

هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت يولړ منطقي دلايلو ته اړتيا ولري، قضيه بلل کېږي.

ټکی: موږ نقطه د يو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوې نه ده) په توګه منو.

مستقيم خط: کش شوی تار، د مېز څنډه او د خط کش تېغه د مستقيم خط مفهوم او مطلب بيانوي. مستقيم خط د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوی نه دی) په ډول منو.

د مستوي لومړی اکسيوم: هغه مستقيم خط چې د يوې مستوي دوې مختلفې نقطې سره ونښلوي، په همغه مستوي کې شامل دی.

د مستوي دويم اکسيوم: له هرو دريو نقطو څخه چې د يوه مستقيم خط په استقامت پرتې نه وي، يوه مستوي تېرېږي.

د متقاطع مستوي ګانو اکسيوم: که چېرې دوه مستوي ګانې يو ګډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چېرې يو مسقيم خط ولري، دغه متقاطع خط ته د دوو مستوي ګانو مشترک فصل وايي.

فضا: فضا هم (تعريف شوې نه ده) لومړنۍ اصطلاح په توګه پېژنو.

لومړی اصل: فضا د لايتناهي نقطو مجموعه ده.

دويم اصل: لږتر لږه د فضا څلور داسې نقطې شته چې په يوه مستوي کې واقع نه دي.

په درې بُعدي فضا کې خط او مستوي:

درې بعدي فضا: هغه فضا چې موږ په کې ژوند کوو درې بعدي فضا ده.

له يو بل سره په فضا کې د دوو مستقيمو خطونو نسبي حالت

موازي

منطبق

متقاطع

متنافر

د يوې مستقيمې کرښې او يوې مستوي نسبي حالت

متقاطع

منطبق

موازي

د دوو مستوي گانو نسبي حالت

منطبق

متقاطع

عمود

په فضا کې موازي مستقيمونه:

دوې مستقيمې کرښې چې په يوې مستوي کې واقع او مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستقيمونه بلل کيږي.

په فضا کې د دوو مستقيمونو تر منځ زاويه:په فضا کې دوې متوازي الاضلاع او هم جهته زاويې سره مساوي دي.

په فضا کې موازي مستقيمونه او مستوي: يو مستقيم خط له يوې مستوي سره هغه وخت موازي بلل کيږي، چې هيڅ مشترکه نقطه ونه لري.

په فضا کې متعامد مستقيمونه او مستوي گانې:

که د Δ مستقيم د (O) په نقطه کې د P پر مستوي عمود وي، ټول هغه مستقيم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تيريږي، د Δ پر مستقيمه کرښه باندې عمود دي؟

په فضا کې موازي مستوي گانې:دوې مستوي گانې، چې هيڅ گډ ټکی ونه لري، موازي مستوي گانې بلل کيږي.

د څېرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب یې پیدا او کرۍ ترې تاو کړئ.

1- د P مستوي د A او B نقطې مفروض دي. که د A او B د نقطو فاصله له p مستوي سره مساوي وي، د P مستوي په هر حال کې:

a _ د AB له خط سره موازي دی
b _ د AB خط یې له منځه تېرېږي
c _ د AB خط عمودي ناصف دی
d _ د AB له خط سره موازي دي یا له AB څخه تېرېږي

2- که د Δ خط د P د مستوي په ټولو خطونو عمود وي، نو:

a _ د Δ خط د مستوي پر ټولو خطونو عمود دی.
b _ د Δ خط یوازې د P مستوي پر دوو خطونو عمود دی.
c _ د Δ خط د P مستوي له بې شمېره خطونو سره موازي دی.
d _ د Δ خط یوازې د P مستوي له یوه خط سره موازي دی.

3- په دقیق ډول له لاندې کومو اجزاوو څخه یوه مستوي نه تېرېږي له:

a _ هغو درې نقطو څخه چې پر یو مستقیم واقع دي.
b _ له دوو متقاطع خطونو څخه
c _ د یو خط او د هغې له خارجي نقطې څخه
d _ څلور متمایزې مختلفې نقطې

4- له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې هر وخت سم نه وي.

a _ که د Δ مستقیم خط د P له مستوي سره موازي وي او له هغه خط څخه یوه مستوي تېره کړو، دا مستوي د P له مستوي سره موازي دی.

b _ که د Δ او Δ' دوه خطونه د d له خط سره موازي وي، هغه وخت Δ او Δ' یو له بل سره موازي دي.

c _ که د Δ او Δ' دوه خطونه موازي وي او د P مستوي د Δ خط قطع کړي، د Δ' خط هم قطع کولای شي.

d _ که دوې مختلفې مستوي‌ګانې په یوه نقطه کې شریکې وي، نو نوموړې مستوي‌ګانې د یاد شوي ټکي په امتداد کې شریکې دي.

5- د Δ خط د P مستوي قطع کوي، خو د P پر مستوي عمود نه دی. دا خط د P د مستوي په څو خطونو باندې عمود دی؟

a) 0　　b) 1　　c) 2　　d) بې شمېره

6- له لاندي ځوابونو څخه کوم يو يې هر وخت سم نه دي.

a _ که کوم خط د مستوي له خطونو سره موازي وي او متمايز وي، نوموړی خط د هغې لـه مـستوي سـره موازي دی.

b _ که يو خط يو له متقاطع مستوي ګانو څخه قطع کړي، بله هم قطع کوي.

c _ که يو خط يوه له دوو موازي مستوي ګانو څخه قطع کړي، بله يې هم قطع کوي.

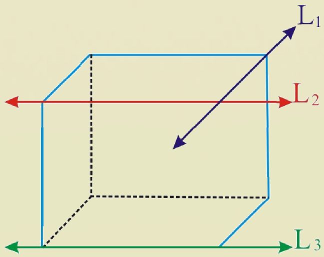
d _ که يوه مستوي يوه له دوو موازي مستويګانو څخه قطع کړي، بله يې هم قطع کوي.

لاندې سوالونه حل کړئ:

1- که چيرې د E او F مستوي ګاني يوله بله سره موازي او د L_1 مستقيم خط د E په مستوي کې او د L_2 مستقيم خط د F په مستوي کې واقع وي آيا $L_1 // L_2$ دي؟

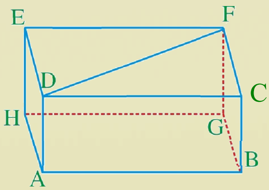
2- که دوه مستقيم خطونه له يوې مستوي سره موازي وي، نوموړي خطونه خپل منځ کې عمود کيداى شي.

3- پـه لانـدې مـستطيل کـې د L_1, L_2 او L_3 خطونـو موقعيت نظر يو بل ته څرګند کړئ. د دې خطونو کومې جوړې متقاطع، کومې جوړې يې مـوازي او کومې جوړې متنافرې دي؟



4- که د P_1 او P_2 مستوي‌ګانې د P پر مستوي باندې عمود وي، د P_1 او P_2 مستوي ګانې په خپل منځ کې موازي دي؟

5- په مخامخ شکل کې هر څلور ضلعي يو مستطيل دی.



a _ د دوو مستوي‌ګانو نومونه واخلئ چې پر AD عمـود وي او ووايـئ ولې عمود دي؟

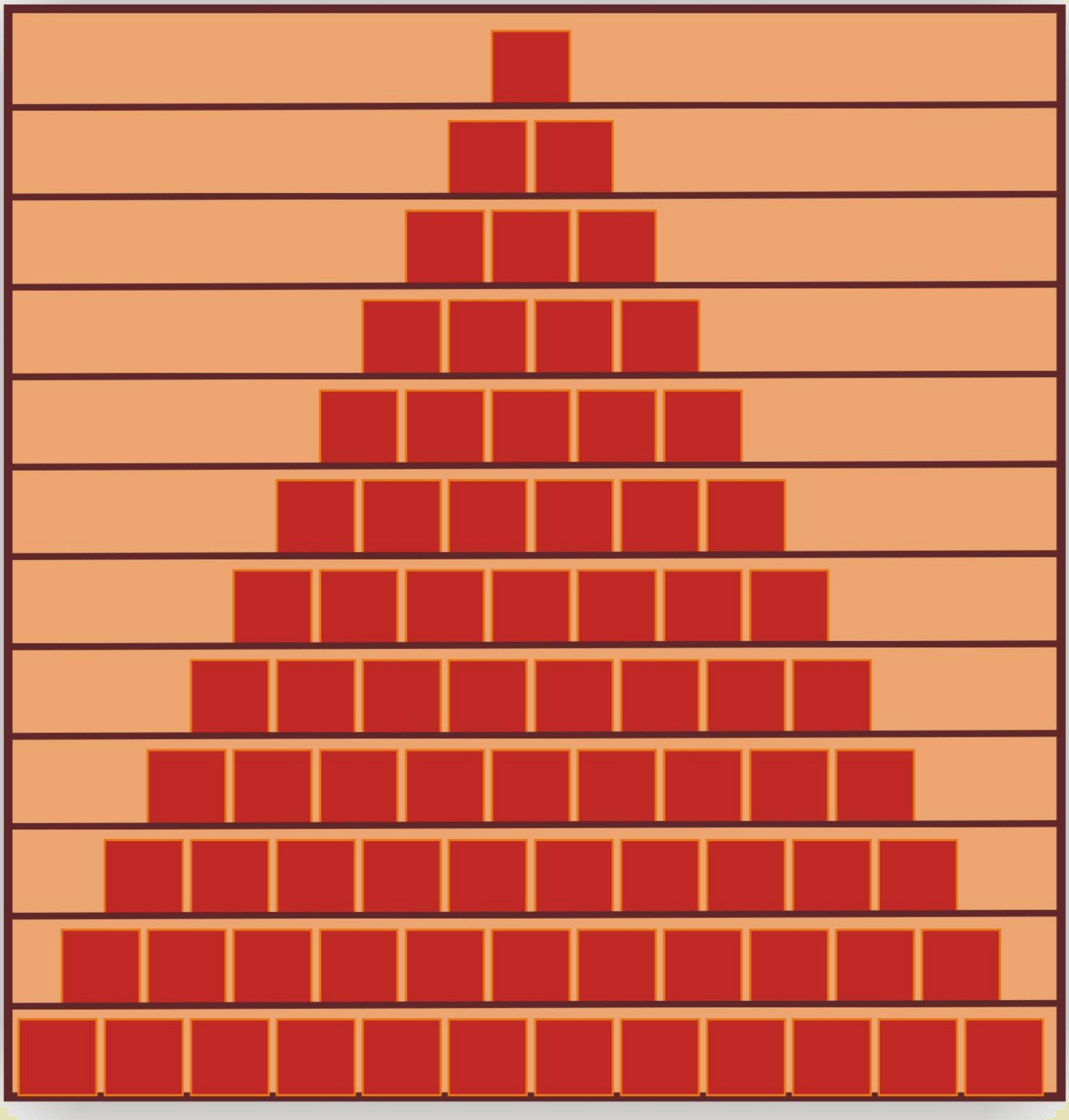
b _ د دريو قطعـه خطونـو، نومونـه واخلـئ چې پـر $ABCD$ مـستوي باندې عمود وي.

c _ د $E\hat{D}F$ زاويه قايمه ده.

d _ د $D\hat{F}C$ زاويه قايمه ده.

څلورم څپرکی

ترادفونه او سلسلې

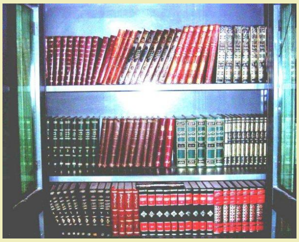


تـرادفـونه

Sequence

په مخامخ شکل کې څه ډول ترتیب وینئ.

هر ترتیب چې شتون لري، توضیح یې کړئ.



تعریف: د $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ عددونه د عددونو د ترادف په نامه یادیږي،
یا ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه‌یې طبیعي عددونه او د قیمتونو ناحیه‌یې حقیقي عددونه تشکیلوي. غیر منظم دعددونو لیکل یو ترادف نه دی.

له پورتنیو عددونوڅخه هر یو د نومورړي ترادف حدونه دي، a_1 یې لومړی حد او a_2 یې دویم حد او a_n دترادف $n-$ ام حد دی، ترادف په لنډ ډول داسې لیکي: $\{a_n\}_{n\in IN}$ په دې حالت کې a_n د ترادف $n-$ ام حد دی.

د جفتو عددونو ترادف	$2,4,6,8, \dots ,2n$
د طاقو عددونو ترادف	$1,3,5,7, \dots ,2n-1$
د 5 د مضربونو ترادف	$5,10,15,20, \dots ,5n$

معمولاً یو ترادف د یوه اختیاري $n-$ ام حد په واسطه ټاکل او تعریفیږي؛ مثلاً:

$$a_n = 2n \quad , \quad n = 1,2,3, \dots$$
$$b_n = 2n-1 \quad , \quad n = 1,2,3, \dots$$
$$c_n = 5n \quad , \quad n = 1,2,3, \dots$$

فعالیت

- د $\{a_n\} = \{\frac{n+1}{n}\}$ ترادف په پر مختللي شکل ولیکئ.
- د $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ترادف په پرمختللي(انکشافي) شکل ولیکئ.

هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول زیاتیږي متزاید ترادف بلل کیږي، لکه:
د جفت، طاق او 5 د مضربونو عددونوترادفونه.

او هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول کمیږي، متناقص ترادف بلل کیږي، لکه:
د 5 مضرب عددونو معکوس ترادف $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \dots, \frac{1}{5n}$

لومړی مثال: د $a_n = n^2$ او $b_n = \frac{3}{n}$ ترادفونه متزاید دي، که متناقص؟

حل:

$$a_n = n^2 \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad , \qquad a_n = 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$$

$$b_n = \frac{3}{n} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad , \qquad b_n = 3, \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \ldots$$

لیدل کېږي چې د a_n ترادف د حدونو عددي قیمت په تدریجي ډول زیاتېږي، نو د a_n ترادف متزاید دی، همدارنګه لیدل کېږي چې د b_n د ترادف د حدونو عددي قیمت په تدریجي ډول کمېږي، نو د b_n ترادف یو متناقص ترادف دی.

یادښت: هغه ترادفونه چې دحدونوشمېر یې معلوم وي معین ترادفونه او هغه ترادفونه چې د حدونو شمېر یې معلوم نه وي، د غیر معینو ترادفونو په نامه یادېږي.

دویم مثال: د $1, 2, 4, 8 \ldots$ ترادف په پام کې ونیسئ او $n-$ ام حد یې پیدا کړئ. $a_n = 2^{n-1}$ دی.

حل: $n-$ ام حد یې $an = 2^{n-1}$ دی.

دریم مثال: که د یوه ترادف $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ وروستي حد درکړل شوی وي، 5 لومړنی حدونه یې پیدا کړئ.

حل: د 5 لومړنیو حدونو د پیداکولو لپاره $n = 1, 2, 3, 4, 5$ قیمتونه ورکوو او په ترادف کې یې وضع کوو چې په دې ډول د ترادف 5 لومړني عناصر(حدونه) په لاس راځي.

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$n = 1 \quad , \quad a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \quad , \quad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$n = 3 \quad , \quad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$n = 4 \quad , \quad a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$$

$$n = 5 \quad , \quad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

پوښتنې

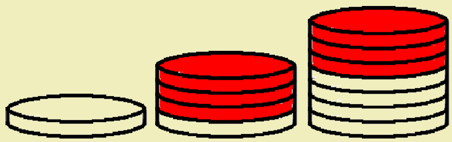
1- په لاندې ترادفونوکې $n-$ ام حد وټاکئ؟

$$\left.\begin{array}{l} 1, 3, 5, 7, \ldots \\ \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \ldots \end{array}\right\}$$

2- که یو ترادف د $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ په شکل راکړل شوی وي، 6 لومړني پرله پسې حدونه یې ولیکئ.

حسابي ترادف

Arithmetic Sequences



كه په يوه ترادف كې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپير يې يو ثابت عدد وي، دا ترادف په څه نوم يادېږي.

فعاليت

- د مخامخ عددونو نوترادف په پام كې ونيسئ $5,8,11,14,17,20$
- د لومړي او وريسې حد ترمنځ توپير څو دى؟
- د پورتنيو عددونو ترادف له څو حدونو څخه جوړ شوى دى؟
- له كينې څخه ښي خوا ته د پورتنيو عددونو ترادف وليكئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندي تعريف ويلاى شو :

تعريف: كه په يوه ترادف كې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپير يو ثابت عدد وي، هغه د حسابي ترادف په نوم يادېږي.

دغه ثابت عدد له ګډ توپير (Common deference) څخه عبارت دى او پـه d سره ښـودل كېږي كـه d يو مثبت عدد ($d>0$) وي، ترادف متزايد او كـه d منفـي ($d<0$) وي، تـرادف متنـاقص بلـل كېـږي، لكه: په لاندي مثالونو كې:

$$2,5,8,11,14,17,\ \dots$$

$$\left.\begin{array}{l} d=5-2=3 \\ d=8-5=3 \\ d=11-8=3 \end{array}\right\} \Rightarrow\ d=3>0$$

څرنګه چې $d>0$ دى نو ترادف متزايد دى.

دویم ترادف په پام کې نیسو:

$$4,0,-4,-8,-12,-16,-20,\ \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} d=0-4=-4 \\ d=-4-0=-4 \\ d=-8-(-4)=-4 \\ d=-12-(-8)=-4 \\ d=-16-(-12)=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow d=-4<0$$

ځرنګه چې $d<0$ دی نو ترادف متناقص دی.

لومړی مثال: داسې یو ترادف ولیکئ چې لومړی حد یې $\frac{3}{2}$ او ګډ توپیر یې 2 وي.

حل: ځرنګه چې لومړی حد یې $a_1=\frac{3}{2}$ او ګډ توپیر یې $d=2$ دی، نو په عمومي ډول لیکلای شو:

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots$$

$$a_2-a_1=d \quad \Rightarrow \quad a_2=a_1+d$$

$$a_3-a_2=d \quad \Rightarrow \quad a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d$$

$$a_4-a_3=d \quad \Rightarrow \quad a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d$$

اوس د $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots\ ,a_n$ قیمتونه په ترادف کې وضع کوو:

$$a_1\ ,(a_1+d)\ ,\quad (a_1+2d)\quad ,\quad (a_1+3d),\ \ldots$$

$$\frac{3}{2}\ ,(\frac{3}{2}+2)\ ,\quad (\frac{3}{2}+2+2)\quad ,\quad (\frac{3}{2}+2+2+2),\ \ldots$$

$$\frac{3}{2},\quad \frac{7}{2}\quad ,\quad \frac{11}{2}\quad ,\quad \frac{15}{2},\ \ldots$$

دویم مثال: کوم یوله لاندې ترادفونو څخه حسابي ترادف دی.

$$a)\ 1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4,\ \ldots$$

$$b)\ 1,2,4,8,16,\ \ldots$$

a جزء حل: د حسابي ترادف د تعریف په پام کې نیولو سره د حدونو ګډ توپیر په لاس راوړو:

$$1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4$$

$$d=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

$$d=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

$$d=3-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$$
$$d=\frac{7}{2}-3=\frac{1}{2}$$
$$d=4-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}$$

لیدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو حدونو تر منځ ګډ توپیر $\frac{1}{2}$ ثابت عدد دی، نو د حسابي ترادف تعریف پر بنسټ ویلی شو چې نوموړی ترادف یو حسابي ترادف دی.

د b جزء حل:

$$1\ ,\quad 2\ ,\quad 4\ ,\quad 8\ ,\quad 16$$
$$d=2-1=1$$
$$d=4-2=2$$
$$d=8-4=4$$
$$d=16-8=8$$

لیدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو عناصرو ترمنځ ګډ توپیر یو ثابت عدد نه دی، نو ترادف حسابي ترادف نه دی.

په یوه حسابي ترادف کې د n-ام حد ټاکل:

که چېرې د یوه حسابي ترادف $a_1, a_2, \ \dots\ , a_n$ لومړی حد په a او ګډ توپیر یې d وي، د n-ام حد د پیداکولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه ګټه اخلو، ددې کار لپاره د $5, 7, 9, 11, \ \dots$ ترادف په پام کې نیسو.

$$5, 7, 9, 11, \ \dots$$
$$d=7-5=2$$
$$5, 5+2, 5+2\cdot 2, 5+2\cdot 2\cdot 2, \ \dots$$
$$a_1=5,\ a_2=5+2\cdot 2\ ,\ a_3=5+2\cdot 2\cdot 2,\ \dots$$
$$a_1, a_2, a_3,\ \dots$$
$$a_1, (a_1+d), (a_1+2d), (a_1+3d),\ \dots$$

په عمومي ډول لیکلای شو چې:

د پورتني مثال په پام کې نيولو سره په عمومي توګه کولای شو وليکو چې:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = a_1\\
&a_2 - a_1 = d \quad \Rightarrow \; a_2 = a_1 + d\\
&a_3 - a_2 = d \quad \Rightarrow \; a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d\\
&a_4 - a_3 = d \quad \Rightarrow \; a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d\\
&\vdots\\
&a_n - a_{n-1} = d \quad \Rightarrow \; a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d
\end{aligned}
$$

لومړی حد	دويم حد	دريم حد	څلورم حد		n - ام حد
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	....	$a+(n-1)d$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
a_1	a_2	a_3	a_4		a_n

په پايله کې په لاس راځي چې د a , d , n او a_n ترمنځ لاندې اړيکه شتون لري:

$$a_n = a + (n-1)d$$

لومړی مثال: د دغه $-2 , 5 , 12 , . . .$ حسابي ترادف 30 - ام حد پيدا کړئ.

حل:

$$
\left.\begin{aligned}
&a_1 = -2\\
&d = 5-(-2) = 7\\
&n = 30\\
&a_{30} = ?
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
&a_n = a + (n-1)d\\
&a_{30} = -2 + (30-1)7\\
&a_{30} = -2 + 29\cdot 7\\
&a_{30} = -2 + 203 \Rightarrow a_{30} = 201
\end{aligned}
$$

دويم مثال: دلاندې حسابي ترادف د حدونو شمېر په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې:

$35 , 40 , 45 , . . . , 2000$

$$
\begin{aligned}
&a_n = a + (n-1)d\\
&2000 = 35 + 5n - 5\\
&2000 = 30 + 5n\\
&2000 - 30 = 5n\\
&1970 = 5n \quad \Rightarrow \; n = 394
\end{aligned}
\qquad
\left.\begin{aligned}
&a = 35\\
&d = 40 - 35 = 5\\
&a_n = 2000
\end{aligned}\right\}
$$

فعالیت

- که چېرې په یوه حسابي ترادف کې $d=4, a_1=-11$ وي، a_2 او a_3 حدونه پیدا کړئ.

د حسابي ترادف وسطي حد:

که د یوه حسابي ترادف درې پرله پسې حدونه د a_{n-1}, a_n, a_{n+1} ولرو، په داسې حال کې چې $n=2,3,4$ دی.

$$a_{n-1}+a_{n+1}=[a_1+(n-2)d]+[a_1+nd]$$
$$=[a_1+nd-2d]+[a_1+nd]=[a_1+nd-2d+a_1+nd]$$
$$a_{n-1}+a_{n+1}=[2a_1+2nd-2d]=2[a_1+(n-1)d]=2a_n$$
$$\Rightarrow\ 2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}\quad \Rightarrow a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$$

لومړی مثال: د 7 او 23 عددونو حسابي اوسط عبارت دی، له:

$$a_n=\frac{7+23}{2}=\frac{30}{2}=15$$

دویم مثال: د x عدد داسې وټاکئ چې د $\underbrace{2x+1}_{a_{n+1}},\underbrace{2x-4}_{a_n},\underbrace{3x+3}_{a_{n-1}}$ درې حده حسابي ترادف تشکیل کړي، ترادف یې ولیکئ.

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\quad \Rightarrow 2x-4=\frac{3x+3+2x+1}{2}=\frac{5x+4}{2}$$
$$4x-8=5x+4\quad \Rightarrow\ 4x-5x=4+8=12\quad \Rightarrow\ -x=12$$
$$x=-12$$

ترادف یې عبارت دی له: $2(-12)+1 \quad , \quad 2(-12)-4 \quad , \quad 3(-12)+3$

$$-24+1\,,-24-4,-36+3\quad \Rightarrow -23,-28,\ -33,-38,-43,\ \ ....$$

يادښت

که د یوه حسابي ترادف $n-$ام او $m-$ام حدونه معلوم وي، یعنې:

$$a_n=a+(n-1)d\qquad ....\ I$$
$$a_m=a+(m-1)d\qquad ....\ II$$

نـو د I اړيکـې څخـه II اړيکـه کمـوو، پـه پايلـه کـې کـولای شـو ګـڼ تـوپير داسـې پـه لاس راوړو

$d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$ (ثبوت يې د زده‌کوونکو دنده ده) چې په ياد شوي فورمول کې d ګڼ تـوپير، a_n د تـرادف

$n-$ ام حد ، a_m د ترادف $m-$ ام حد دی.

دريم مثال: د يوه حسابي ترادف پنځم حد 27 او نهم حد يې 47 دی، ګڼ تـوپير او لـومړی حـد يـې پيـدا کړئ، په پای کې د ترادف ۹ حدونه وليکئ.

$\square,\ \square,\ \square,\ \square,\ 27,\ \square,\ \square,\ \square,\ 47$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_n=47\\ n=9\\ a_m=27\\ m=5\\ d=?\\ a=? \end{array}\right\}\begin{array}{l} d=\frac{a_n-a_m}{n-m}=\frac{47-27}{9-5}=\frac{20}{4}=5\\ d=5\\ a_n=a_1+(n-1)d \quad\Rightarrow\ 47=a_1+(9-1)5=a+40\\ \Rightarrow\quad 47-40=a_1 \qquad\Rightarrow\ a_1=7 \end{array}$$

ترادف يې عبارت دی له: $7,12,17,22,27,32,37,42,47$

هارمونيکي ترادف: د $\{a_n\}$ يوه ترادف ته هغه وخت هارمونيکي ترادف وايي چې معکوس يې $b_n=\frac{1}{a_n}$ يو حسابي ترادف وي.

لومړی مثـال: د ... $2,4,6,8,10,$ تـرادف يـو حـسابي تـرادف دی، ځکـه چې $d=2$ دی، د دغـه ترادف د حدونو معکوس يعنې ... $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10},$ يو هارمونيکي ترادف تشکيلوي.

دويم مثال: د طبيعي عددونو معکوس ترادف يو هارمونيکي ترادف دی. $n-$ ام حد يې وليکئ.

$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ \dots\ ,\frac{1}{n}$

$\{a_n\}=\frac{1}{n}$

دریم مثال : که چېرې په یوه هارمونیکې ترادف کې $a_1 = \frac{1}{4}$ او $d = -3$ وي، هارمونیکې ترادف یې په لاس راوړئ

حل:

$$\frac{1}{4}, (\frac{1}{4}-3), (\frac{1}{4}-3-3), (\frac{1}{4}-3-3-3), (\frac{1}{4}-3-3-3-3), \ldots$$

$$\frac{1}{4}, -\frac{11}{4}, -\frac{23}{4}, -\frac{35}{4}, -\frac{47}{4}, \ldots$$

فعالیت:

آیا د طبیعي طاقو عددونو معکوس ترادف یو هارمونیکي ترادف دی، $n-$ ام حد یې ولیکئ.

هارمونیکي حسابي اوسط: که درې مسلسل عناصر a_{n-1} ، a_n او a_{n+1} په داسې حال کې چې $n = 2, 3, 4 \ldots$ دی، له یوه حسابي ترادف څخه وټاکل شي، څرنګه چې $\frac{1}{a_{n-1}}, \frac{1}{a_n}$ او $\frac{1}{a_{n+1}}$ د یوه هارمونیک ترادف حدونه دي لرو، چې:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1}}}{2} = \frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2} = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2a_{n+1} \cdot a_{n-1}}$$

$$a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

په پایله کې پورتنۍ اړیکه چې هارمونیک حسابي اوسط بنیې، لیکلای شو:

$$\boxed{a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}}$$

مثال : د 2 او 8 عددونو هارمونیکي اوسط پیدا کړئ.

حل: له $a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$ فارمول څخه په کار اخیستنې سره لرو چې:

$$a_n = \frac{2(2 \cdot 8)}{2+8} = \frac{2 \cdot 16}{10} = \frac{16}{5} = 3.2$$

پوښتنې

1- د مخامخ ترادف 35 -ام حد پیدا کړئ. $-2\ ,\ 5\ ,\ 12\ ,\ ...$

2- آیا $\frac{5}{4}, 1, \frac{3}{4}$ یو حسابي ترادف تشکیلوي؟ د پوښتنې د سموالي په صورت کې یې مشترک توپیر پیدا کړئ.

3- د $2\sqrt{2}$ او $16\sqrt{2}$ تر منځ حسابي اوسط په لاس راوړئ.

4- که $a_1 = -\frac{1}{2}\ ,\ a_{10} = \frac{84}{2}$ وي د d قیمت په لاس راوړئ.

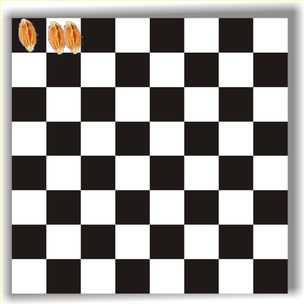
5- له لاندې ترادفونو څخه کوم یو حسابي ترادف نه دی.

$a)\ 2\ ,\ \frac{9}{4}\ ,\ \frac{5}{2}\ ,\ \frac{11}{4},\ ...$

$b)\ 3\ ,\ 6\ ,\ 9\ ,\ 12,\ ...$

هندسي ترادف

Geometric Sequences



که د شطرنج د يوې تختې په لومړۍ خانه کې يوه دانه غنم او په دويمه خانه کې يې دوه دانې غنم په همدې ډول که په هره وروستى خانه کې د مخکنى خانې دوه برابره غنم کېښودل شي، نو د شطرنج د تختې په اخيره خانه کې(يوه د شطرنج تخته 64 خانې لري) به څو دانې غنم وي.

فعاليت

- د مخامخ ترادف عددونه په پام کې ونيسئ. $3\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ 24\ ,\ 48, \ldots$
- د پورتني ترادف د عناصرو ترمنځ کومه اړيکه موجوده ده؟
- د پورتني ترادف د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ نسبت پيدا او يو له بل سره يې پرتله کړئ.

له پورتني فعاليت څخه کولاى شو لاندې پايله بيان کړو:

پايله

هغه ترادف چې د دوو پر له پسې حدونو ترمنځ نسبت يې يو ثابت عدد q وي، د هندسي ترادف په نامه ياديږي، يعني:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \cdot q \quad , \ n = 1, 2, 3, \ \ldots$$

$$a_{1+1} = a_1 \cdot q \quad \Rightarrow \ a_2 = a_1 q$$

$$a_{2+1} = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_{3+1} = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

دلته q ګډ نسبت او a_1 د ترادف لومړى حد دى.

هندسي ترادف هغه وخت تاکل کيږي چې لومړى حد او ګډ نسبت يې معلوم وي.

لومړی مثال: د $\ldots, 6, 12, 24, 48, 96$ هندسي ترادف په پام کې ونیسئ، ګڼه نسبت یې په لاس راوړئ.

حل: هر حد یې په مخکیني حد باندي وېشو:

$$96 \qquad 48 \qquad 24 \qquad 12 \qquad 6$$

$$q=\frac{48}{96}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{24}{48}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{12}{24}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

لیدل کیږي چې $q=\frac{1}{2}$ یو ثابت عدد وي.

فعالیت

- په یوه هندسي ترادف کې $a_1=2$ او $q=3$ دی، a_2 , a_3 او a_4 حدونه پیدا کړئ.

یادونه

$q>1$ لپاره ترادف متزاید د ی.

$q<1$ لپاره ترادف متناقص دی.

$q=1$ لپاره ثابت ترادف په لاس راځي.

دویم مثال: د $2700, 900, 300, 100, \ldots$ هندسي ترادف په پام کې ونیسئ لومړی حد او ګڼه نسبت یې په لاس راوړئ او وواياست چې پورتنی هندسي ترادف متزاید دی او که متناقص.

حل:

لومړی حد $=a=2700$

ګڼه نسبت $=q=\frac{900}{2700}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$

په پورتني مثال کې $1>\frac{1}{3}=q$ دی، نو نوموړی ترادف متناقص دی.

په هندسي ترادف کې د n – ام حد پیدا کول:

که په یوه هندسي ترادف کې a لومړی حد، q ګډ نسبت او n د ترادف د حدونو شمېر وي،نو د n – ام حد پیدا کولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه کار اخلو.

که چېرې هندسي ترادف د $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots an$ په پام کې ونیسو، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$a_1 = a_1$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q$$

$$q = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$q = \frac{a_4}{a_3} \Rightarrow a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot q = (a_1 q^{n-2}) \cdot q = a_1 q^{n-1}$$

اوس د $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots$ په ترادف کې یې قیمتونه ږدو:

لومړی حد	دویم حد	دریم حد	څلورم حد		n - ام حد
a_1	a_2	a_3	a_3	, … ,	a_n
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	, … ,	$\downarrow$
a_1	$a_1 q$	$a_1 q^2$	$a_1 q^3$	, … ,	$a_1 q^{n-1}$

یعنې په هندسي ترادف کې n – ام حد یا عمومي حد، د دغې اړیکې $a_n = a \cdot q^{n-1}$ په واسطه پیدا کېږي.

لومړی مثال: د لاندې هندسي ترادف شپږم حد پیدا کړئ.

حل: $5\,,\,-10, 20, -40,\,........$

$$\left.\begin{array}{l} a=5 \\ q=\dfrac{-10}{5}=-2 \\ n=6 \\ a_6=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_n=aq^{n-1} \\ a_6=5(-2)^{6-1} \\ a_6=5(-2)^5 \Rightarrow a_6=5(-32) \\ a_6=-160 \end{array}$$

دویم مثال: د .... , 2 , 4 , 8 هندسي ترادف دوولسم حد په لاس راوړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} n=12 \\ a=8 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n=aq^{n-1} \\ a_{12}=8(\dfrac{1}{2})^{12-1}=8(\dfrac{1}{2})^{11}=8\dfrac{1}{2^{11}} \\ a_{12}=\dfrac{8}{2^{11}}=\dfrac{2^3}{2^{11}}=2^{3-11}=2^{-8}=\dfrac{1}{2^8}=\dfrac{1}{256} \end{array}\right.$$

د هندسي ترادف وسطي حد:

که a, M, b د هندسي ترادف پر له پسې حدونه وي، د a , M او b, M ترمنځ اریکه پیدا کړئ.

$$\left.\begin{array}{l} q=\dfrac{M}{a} \\ q=\dfrac{b}{M} \end{array}\right\} q=q \Rightarrow \dfrac{M}{a}=\dfrac{b}{M} \Rightarrow M^2=a\cdot b$$

$$M=\sqrt{a\cdot b}$$

له پورتني فورمول څخه ویلی شو که چېرې a او b دوه مثبت حقیقي عددونه وي، نو د M حقیقي مثبت عدد ته د a او b هندسي وسط(Geometric mean) وایي.

دريم مثال: د 3 او 12 عددونو هندسي وسط پيدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a=3 \\ b=12 \end{array}\right\} M=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$$

$$M=6$$

څلورم مثال: د $32, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, 2$ هندسي ترادف نا معلوم حدونه پيدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=2 \\ n=5 \\ a_5=32 \\ q=? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_5=a\cdot q^{n-1} \quad \Rightarrow 32=2q^{5-1} \Rightarrow 32=2q^4 \\ q^4=\dfrac{32}{2}=16 \quad \Rightarrow q^4=16 \quad \Rightarrow q^4=2^4 \Rightarrow \boxed{q=2} \end{array}$$

$$a_1=2$$

$$a_2=a_1\cdot q=2\cdot 2=4$$

$$a_3=a_2\cdot q=a_1q^2=2\cdot 2^2=8$$

$$a_4=a_3\cdot q=a_1\cdot q^3=2\cdot 2^3=16$$

نو هندسي ترادف يې عبارت دی له: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 يا $2, 4, 8, 16, 32$

فعاليت

- که په هندسي ترادف کې a_n، $n-$ام حد، n د ترادف د حدونو شمېر او q ګډ نسبت وي، د q لپاره عمومي فورمول پيدا کړئ.

پنځم مثال: x داسې وټاکئ چې له لاندې حدونو څخه يو هندسي ترادف جوړ شي.

$$x-1 \ , \quad x+3 \quad , \ x+1$$

$$M=\sqrt{a\cdot b} \quad \Rightarrow (x+3)=\sqrt{(x-1)(x+1)} \quad \Rightarrow (x+3)^2=(x-1)(x+1)$$

$$x^2+6x+9=x^2-1 \Rightarrow 6x+10=0 \ , \ x=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}$$

$$x=-\frac{5}{3}$$

پوښتنې

1- د هندسي ترادف 5 حدونه داسې وليکئ چې لومړی حد يې 5 او اخيري حد يې $\frac{5}{16}$ وي.

2- کوم يو له لاندې ترادفونو څخه هندسي ترادف دی.

$a)\ \frac{2}{3}\,,\ -\frac{2}{3}\,,\ \frac{2}{3}\,,\ -\frac{2}{3}\,,\ \ldots$

$b)\ -4,-2,0,2,4,\ \ldots$

3- د $\ldots, \frac{5}{8}, \frac{5}{2}, 5$ هندسي ترادف دوولسم حد پيدا کړئ.

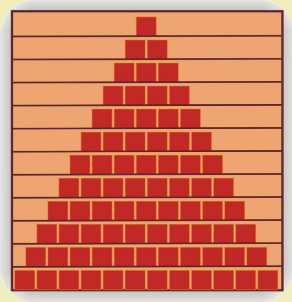
4- د $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{4}$ هندسي وسط په لاس راوړې.

5- د $27, ?, ?, ?, \frac{1}{3}$ حدونو تر منځ درې هندسي وسطونه په لاس راوړئ.

د ترادفونو قسمي مجموعه

a - په لسم کتارکې د قوطیو شمېر څو دی؟

b - په الماری کې د ټولو قوطیو شمېر پیدا کړئ؟



فعالیت

- د $2, 4, 6, 8, \ ...$ ترادف په پام کې ونیسئ.
- د دویم او دریم حدونو د جمعې حاصل ولیکئ.
- د لس لومړیو پرله پسې حدونو د جمعې حاصل پیدا کړئ.
- د $n-$ام حد د جمعې حاصل ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله بیانېږي:

څرنګه چې د لومړي د n حدونو د جمعې حاصل مشکل دی چې ټول n حدونه یې ولیکو، نو ځکه یې دوه یا درې لومړي حدونه لیکو او وروسته له دریو ټکو $n-$ام حد لیکو.

څرنګه چې یو ترادف د بې نهایت حدونو لرونکی دی، که د زیاتو حدونو د جمعې حاصل، لکه: 100 , 1000 او داسې نورو حدونو په پام کې وي، نو د جمعې حاصل یې ستونزه جوړوي.

په عمومي ډول د ترادف د n لومړیو حدونو $a_1 \ , a_2 \ , a_3 \ , \ ... \ , a_n$ د جمعې حاصل په لاندې ډول لیکو:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

د اسانتیا او لنډیز لپاره په محاسبو کې $\sum$ له دې سمبول څخه کار اخلي.

د $\sum$ پورتنۍ او ښکتنۍ نښې دا راښیي چې i له 1 څخه تر n پورې ټول طبیعي عددونه اخلي، i د انډکس په نامه یادېږي. د یوې مجموعې د انډکس لپاره هر حرف کارول کېږي، خو د i, n, k, j حروف ډېر معمول دي.

مثلاً: $\sum_{k=1}^{n} 2k = \sum_{i=1}^{n} 2i = \sum_{j=1}^{n} 2j = 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdot\cdot\cdot + 2n$

لومړی مثال: لاندې مجموعه ($\sum \frac{1}{1^i}$ $\sum_{i=1}^{7}$) په انکشافی شکل ولیکئ.

حل:

$$\sum_{i=1}^{7} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{1089}{420}$$

دویم مثال: لاندې د جمعي حاصل د ($\sum$) په شکل ولیکئ.

$a)\ 1+3+5+7+\ \ldots\ +(2n-1)$

$b)\ 1+4+9+\ \ldots\ +n^2$

د a جزء حل:

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

د b جزء حل:

$$1+4+9+\ \ldots\ +n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

دریم مثال: لاندې مجموعه په انکشافي شکل ولیکئ.

$$\sum_{i=4}^{n} i(i+2) = ?$$

حل:

$$\begin{aligned}\sum_{i=4}^{n} i(i+2) &= 4(4+2)+5(5+2)+6(6+2)+7(7+2)+\ldots+n(n+2)\\ &= 4\cdot 6+5\cdot 7+6\cdot 8+\ldots+n(n+2)\\ &= 24+35+48+63+\ldots+n(n+2)\end{aligned}$$

څلورم مثال: د دغې مجموعې $\sum_{n=7}^{10}\frac{n+1}{n-1}$ حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\begin{aligned}\sum_{n=7}^{10}\frac{n+1}{n-1} &= \frac{7+1}{7-1}+\frac{8+1}{8-1}+\frac{9+1}{9-1}+\frac{10+1}{10-1} = \frac{8}{6}+\frac{9}{7}+\frac{10}{8}+\frac{11}{9}\\ &= \frac{4032+3888+3780+3696}{3024} = \frac{15396}{3024} = \frac{5132}{108}\end{aligned}$$

تر اوسه مو يوازې د يوه ترادف د n حدونو د جمعې حاصل وښېره، که وغواړو د يـوه تـرادف د $\{a_n\}_{n\in IN}$ ټولو حدونو د جمعې حاصل پيدا کړو، په دې صورت کې ليکو:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

په دې حالت کې i ټول طبيعي عددونه اخېستلای شي.

د $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ سلسله د بې نهايت سلسلې(Series) په نامه يادېږي.

د $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ عددونه د سلسلې حدونه او a_n د سلسلې $n-$ام حد يا دسلسلې عمـومي حـد بلـل کېږي.

څرنګه چې موږ نشو کولای، د عددونو بې نهايت شمېر جمع کـړو، خوپـه رياضـي کـې د ځينـو قاعـدو پـه کارولوسره کولای شو، يوې سلسلې ته ديوې مجموعې نسبت ورکړو، خو دلتـه غـواړو د يـوې سلـسلې د n حدونو مجموعه پيدا کړو.

د يوې سلسلې د n لومړيو عناصرو مجموعه $\ldots + a_n + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_k$ د نومورې سلسلې د n حدونو د قسمي مجموعې په نامه يادېږي، که هغه په S_n وښيو، نو لرو:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

مثال: د $1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$ سلسلې S_6 او S_8 حساب کړئ.

حل:

$$S_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$
$$S_8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

که $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ او $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ دوې سلسلې او c يو ثابت عدد وي لاندې، خاصيتونه د قسمي مجموعو لپاره سم دي:

$$\sum_{k=1}^{n} c = c + c + \ \dots \ + c = nc$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

پوښتنې

1. لاندې مجموعې حساب کړئ.

$a)\ \sum_{i=1}^{6} \sqrt{i}$ $\qquad b)\ 3\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1}$ $\qquad c)\ \sum_{k=1}^{3} (4k^2 - 3k)$

2. لاندې مجموعې د $\sum$ په شکل کې وليکئ.

$a)\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{19}{20}$

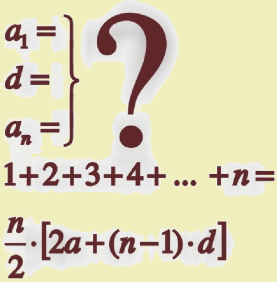
$b)\ 1 + 4 + 9 + \dots + n^2$

$c)\ 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$

3. لاندې قسمي مجموعې په لاس راوړئ.

$a)\ \sum_{i=4}^{n} i(i+2)$ $\qquad b)\ \sum_{i=1}^{n} (3i - 2)$ $\qquad c)\ \sum_{i=1}^{n} (2 + 5i)$

د حسابي ترادف د n لومړيو حدونو قسمي مجموعه



که $a_1 , a_2 , a_3 ,\dots\ ,a_n$ يو حسابي تـرادف وي، نـو $a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$ د يــوې حــسابي سلــسلې قسمي مجموعه کېدلای شي؟

که چېرې ديوه حسابي ترادف د حدونو ترمنځ د جمعې نښـه وي، هغې ته حـسابي سلـسله ويـل کېـږي. ياپـه بل عبارت د يوه حسابي ترادف د جمعې حاصل ته حسابي سلسله وايي.

په يوه حسابي ترادف کې چې لومړی حد يـې a ګـډ فـرق يـې d او اخيـري حـد يـې a_n وي، د حـدونود جمعې لپاره عمومي فورمول داسې په لاس راوړو:

$$S = a + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_{11} + 3d) + \dots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \quad \dots \text{ I}$$

$$S = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + (a_n - 3d) + \dots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \quad \dots \text{ II}$$

د I او II اړيکې خوا په خوا جمع کوو:

$$2S=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\dots+(a_1+a_n)+a_1+a_n}_{n(a+a_n)\ \text{خلي}\ n}$$

$$2S=n(a+a_n) \ \Rightarrow S=\frac{n}{2}(a+a_n)\dots\text{I}$$

د I فورمول د حسابي سلسلې جمع راښيي چې لومړی حد، اخيري حد اود جملاتو شمېر يې معلوم وي.

لومړی مثال: د حسابي سلسلې د جمعې حاصل په لاس راوړئ، داسې چې $a_n = 25, a = 4$ او د حدونو شمېر يې 8 وي.

حل:

$$a_1 = 4$$

$$a_n = 25 \qquad S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$n = 8 \qquad S = \frac{8}{2}(4 + 25) \Rightarrow S = 4(29) = 116$$

که چېرې په يوه حسابي سلسله کې لومړی حد، د حدونو شمېر او ګډ توپير ورکړل شوی وي، د جمعې حاصل يې له لاندې اړيکې څخه په لاس راځي:

$$S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_1 + (n-1)d\right] \Rightarrow S = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] \text{ .... III}$$

دويم مثال: د لاندې سلسلې د 201 حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

$$7 + 11 + 15 + \ldots$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a = 7 \\ d = 4 \\ n = 201 \\ S_{201} = ? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] \\ S_{201} = \frac{201}{2}\left[2 \cdot 7 + (201-1)4\right] \\ S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 200 \cdot 4) \quad \Rightarrow S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 800) = \frac{201}{2} \cdot 814 \\ S_{201} = 81807 \end{array}$$

فعالیت

- د طبیعي عددونو سلسله په پام کې ونیسئ لومړی حد، ګډ توپیر او $n-$ام حد یې ولیکئ وروسته د مسلسلو طبیعي عددونو د جمعې دحاصل عمومي فورمول په لاس راوړئ.

په یاد ولرئ: د طبیعي جفتو پر له پسې عددونو د جمعې حاصل هم یوه حسابي سلسله ده چې فورمول یې په لاندې ډول په لاس راوړو: $2+4+6+8\ \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} a=2 \\ d=2 \\ n=n \\ S_n=? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S_n=\dfrac{n}{2}[2a+(n-1)d] \\ S_n=\dfrac{n}{2}[2\cdot 2+(n-1)2] \\ S_n=\dfrac{n}{2}[4+2n-2]=\dfrac{n}{2}(2+2n) \quad \Rightarrow \quad S_n=n(n+1) \end{array}$$

دریم مثال: د جفتو پر له پسې عددونو د سلسلې $(2+4+6+8+\ldots)$ د 200 لومړیو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

حل:

$$\left.\begin{array}{l} n=200 \\ S_{200}=? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S_n=n(n+1) \\ S_{200}=200(200+1) \quad \Rightarrow \quad S_{200}=200(201) \\ S_{200}=40200 \end{array}$$

څلورم مثال: د $2+4+\ldots+$ جفتو عددونو د سلسلې د 200 حدونو مجموعه پیدا کړئ.

فعالیت

- د طبیعي طاقو پرله پسې عددونو د حسابي سلسلې د جمعې حاصل فورمول پیدا کړئ.

پوښتنې

1. د لاندې حسابي ترادفونو لسم او n – ام حدونه پیدا او همدرانګه د نومړو ترادفونو د لسو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$i)\ 2,0,-2,-4,\ \ldots$

$ii)\ 1,5,9,13,\ \ldots$

$iii)\ -2,-1,0,1,2,\ \ldots$

2. که یو ترادف د $2,5,8,11,\ \ldots$ په ډول راکړل شوی وي. د لاندې مجموعو قیمتونه حساب کړئ.

$a)\ S_8$ $\qquad$ $b)\ S_{10}$

د يوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعې حاصل

که چېرې يوه مڼه نيمه او نيمه بيا نيمه او همداسې ادامه ورکړو يو هندسي ترادف په لاس راځي، له لومړۍ برخې نيولې، څو برخې سره جمع کړو چې د جمعې حاصل يې مساوي په 2 مېږو شي.

$1 \; , \; \frac{1}{2} \; , \; \frac{1}{4} \; , \; \frac{1}{8}$

فعاليت

- يو هندسي ترادف چې لومړی جمله يې a_1 او د دوو پرله پسې جملو ترمنځ نسبت يې مساوي په q راکړل شوی وي، لاندې فعاليت سرته ورسوئ.
- د ترادف دويمه جمله څو ده؟
- که چېرې دويمه جمله په q کې ضرب شي، دضرب حاصل يې له دريمې جملې سره پرتله کړئ.
- د ترادف د n جملو د جمعې حاصل د فورمول پيداکولو لپاره څه وړانديز لرئ؟

پايله:

په يوه هندسي ترادف کې هر راتلونکی حد د مخکيني حد له ضرب څخه په q کې، په لاس راځي. دا خبره د ټولو حدونو لپاره يوه باوري خبره ده، په دې ډول د يوه هندسي ترادف $\{a_n\}$ د n جملو د جمعې حاصل $(S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n)$ قيمت عبارت دی، له: $q \neq 1$ ، $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

د پورتنۍ اړيکې ثبوت کولای شو په اسانۍ سره په لاس راوړو:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ ... \ + a_1q^{n-1} \quad .... \ I$$

$$S_n \cdot q = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ ... \ + a_1q^{n-1} + a_1q^n \quad .... \ II$$

له I اړيکې څخه د II اړيکه کموو:

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_1q^n = a_1(1-q^n)$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$q \neq 1$$

د پورتنۍ رابطې صورت او مخرج په (-1) کې ضربوو

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{(q-1)}$$

پاسنۍ اړيکه هغه اړيکه ده، چې د هندسي ترادف د n جملو د جمعې حاصل په لاس راکوي.

لومړی مثال: په یوه هندسي ترادف کې لومړی حد $a_1 = 2$ او ثابت نسبت $q = \frac{1}{2}$ دی.
د پاسني ترادف 5 لومړي حدونه او د لسو جملو د جمعې حاصل پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ده، نو:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ q &= \frac{1}{2} \\ S &= ? \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a_1 &= 2(\frac{1}{2})^0 = 2 \\ a_2 &= 2(\frac{1}{2}) = 1 \\ a_3 &= 2(\frac{1}{2})^{3-1} = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_4 &= 2(\frac{1}{2})^{4-1} \\ a_4 &= 2(\frac{1}{8}) = \frac{1}{4} \\ a_5 &= 2(\frac{1}{2})^4 = 2\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$S_n = a_1\frac{(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 2\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_{10} = 2\frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{2-1}{2}} = 2\frac{\frac{1024-1}{1024}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = 2\frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{1024}\cdot\frac{4}{1} = \frac{4092}{1024} = 3.99609375$$

دویم مثال: د لاندې هندسي ترادف د څو جملو مجموعه 80 کېږي؟

$2, 6, 18, \ldots$

حل:

$$\left.\begin{aligned} a &= 2 \\ q &= \frac{6}{2} = 3 \\ n &= ? \\ S &= 80 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & S = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} \\ & 80 = \frac{2[(3)^n - 1]}{3-1} \\ & 80 = (3)^n - 1 \quad \Rightarrow \; 80 + 1 = (3)^n \\ & 81 = 3^n \quad \Rightarrow \; (3)^4 = 3^n \\ & \Rightarrow n = 4 \end{aligned}$$

یعنې د پاسني هندسي ترادف د 4 جملو مجموعه 80 کېږي.

پوښتنې

1. په $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$ هندسي ترادف کې د 10 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
2. د $3, 6, 12, \ldots, 384$ هندسي ترادف د حدونو شمېر او مجموعه پیدا کړئ.
3. په $4, 12, 36, \ldots$ ترادف کې د څو جملو د جمعې حاصل 484 کېږي، د $n-$ام حد قیمت پیدا کړئ.

لایتناهي هندسي سلسلې

که د ترادف جملو ته په غور پاملرنه وکړو، په اسانۍ سره لیدل کېږي چې ترادف، جمله په جمله کوچنی کېږي.

آیا هر هندسي ترادف یوه عدد ته نږدې کېږي؟

$$S_\infty = \frac{a}{1-q}, |q|<1$$

که چېرې په یوه هندسي سلسله کې $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر یې معلوم نه وي، د متباعدې سلسلې (Divergent series) په نامه یادېږي.

او که چېرې $|q|<1$ وي، د متقاربې سلسلې (Convergent series) په نامه یادېږي. د متقاربو او متباعدو سلسلو د جمعې حاصل د پیداکولو فورمول:

$$S = a\frac{1-q^n}{1-q} = a\frac{-(q^n-1)}{-(q-1)} = a(\frac{q^n-1}{q-1})$$

که سلسله متباعده وي $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر بې نهایته وي، یعنې $n \to \infty$ نو پوهېږو چې:

$$S_\infty = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{\infty - a}{q-1} = \infty \Rightarrow S_\infty = \infty$$

که سلسله متقاربه وي ($|q|<1$) او د جملو شمېر بې نهایت وي، نو $q^n \to 0$ کوي.

$$S = a\cdot\frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_\infty = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a-a\cdot 0}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

یعنې که متقارب سلسله ($|q|<1$) او د جملو شمېر یې بې نهایت وي، د نوموړې سلسلې د جمعې حاصل عبارت دی له: $S_\infty = \dfrac{a}{1-q}$

لومړی مثال: د $... + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1$ سلسلې د جمعې حاصل محاسبه کړئ.

حل: په دې سلسله کې $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$ دی، څرنګه چې $|q| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$ دی، نو سلسله متقارب ده:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} = 2$$

دویم مثال: که په یوه هندسي سلسله کې $a_1 = 27$ او $q = \frac{1}{3}$ وي، د سلسلې دحدونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې $|q| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$ دی، نو سلسله متقاربه ده:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ ... \ = \frac{a}{1-q}$$

$$27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ... = \frac{27}{1-\frac{1}{3}} = \frac{27}{\frac{3-1}{3}} = \frac{27}{\frac{2}{3}}$$

$$27 \cdot \frac{3}{2} = \frac{81}{2} = 40.5$$

دریم مثال: $0.6\overline{23}$ پیریودیک(متوالي) اعشاري کسر په عام کسر واړوئ.

حل: دا عدد کولای شو په لاندې ډول په هندسي ترادف واړوو.

$$\begin{aligned} 0.6\overline{23} &= 0.6232323... = 0.6 + 0.023 + 0.00023 + 0.0000023 + \ ... \\ &= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} + \frac{23}{100000} + \frac{23}{10000000} + \ ... \\ &= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000}[1 + \frac{1}{100} + (\frac{1}{10000}) + \ ... \ ] \end{aligned}$$

د قوس دننه دهندسي ترادف د جمعې حاصل دی لومړی حدیې (۱) او د حدونو ترمنځ نسبت یې $\frac{1}{100}$ دی.

په پاسنی سلسله کې $a=1$ او $1<\frac{1}{100}=\left|\frac{1}{100}\right|=|q|$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{100})^2+...]$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{\frac{99}{100}}$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{100}{99}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{6}{10}+\frac{23}{990}=\frac{594+23}{990}=\frac{617}{990}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{617}{990}$$

څلورم مثال: د $0.\overline{3}$ متوالي اعشاري کسر د هندسي سلسلې په کارولو سره په عام کسر واړوئ.

حل: پوهېږو چې:

$$0.\overline{3}=0.3333\ ...\ =0.3+0.03+0.003+0.0003+\ ...$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\ ...$$

$$=\frac{3}{10}[1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ ...\ ]$$

لیدل کېږي چې په پاسنی سلسله کې $a=0.3$ او $1<\frac{1}{10}=\left|\frac{1}{10}\right|=|q|$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$S=\frac{a}{1-q}=0.\overline{3}=\frac{3}{10}\cdot\frac{a}{1-q}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{10-1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\ 0.\overline{3}=\frac{1}{3}$$

پوښتنې

1. لاندې هندسي مجموعې په لاس راوړئ.

$i)\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots$, $ii)\ 5+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\dots$

2. لاندې اعشاري متوالي کسرونه په عام کسر واړوئ.

$a)\ 0.2\overline{4}$ $b)\ 0.\overline{5}$

د خلورم څپرکي مهم ټکي

د ترادف تعریف: $a_1, a_2, a_3, \ \ldots \ , a_n$ د عددونو د ترادف په نامه یادېږي.

پورتني هر یوه عدد ته د ترادف حد یا جمله وایي، a_1 د ترادف لومړی حد او a_n د ترادف $n-$ام حد دی یا په بل عبارت، ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه یې طبیعي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي عددونه تشکیلوي.

حسابي ترادف: که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ ګډ توپیر یو ثابت عدد وي، نو نوموړی ترادف د حسابي ترادف په نامه یادېږي.

د حسابي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه a_{n+1}, a_n, a_{n-1} ولرو، نو: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

په حسابي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول $a_n = a + (n-1)d$

هندسي ترادف: هغه ترادف چې د هغه د هر وروستي او مخکیني حد تر منځ نسبت یو ثابت عدد q وي، د هندسي ترادف په نامه یادېږي، په هندسي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول: $a_n = aq^{n-1}$

د هندسي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه $a_{n+1}\ ,\ a_n\ ,\ a_{n-1}$ په داسې حال کې چې $n = 2, 3,\ 4,\ \ldots$ هندسي ترادف حدونه وي، نو د ترادف وسطي حد عبارت دی له: $a_n = \sqrt{(a_{n+1})(a_{n-1})}$

د ترادفونو قسمي مجموعه: $\sum_{1=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots \ + a_n$ د بې نهایته سلسلې (Series) په نامه یادېږي.

او د $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots +$ د نوموړې $n-$ام سلسلې د جمعې قسمي حاصل دی.

د حسابي ترادف د n لومړیو حدونو قسمي حاصل جمع: $S = \dfrac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

د هندسي ترادف د n لومړیو جملو قسمي حاصل جمع: $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

بې نهايت هندسي سلسلې: په يوه هندسي سلسله کې که $|q|<1$ وي، متقاربه سلسله او د n جملو د جمعې حاصل يې د $\frac{a}{1-q}$ عدد ته نږدې کېږي او قيمت يې د دغه فورمول $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}$ په واسطه محاسبه او لاسته راځي.

هغه هندسي سلسله چې په هغې کې $|q|\geq 1$ او د حدونو شمېر يې هم بې نهايته وي، سلسله متباعد او د n لومړيو جملو مجموعه يې هم بې نهايته ده، يعنې $S_n=\infty$

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې پيدا او له هغه شخه کړۍ تاو کړئ.

1. د $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$ ترادف $n-$ام حد کوم دی؟

$a)\ \frac{\sqrt{n}-1}{n}$ $\quad b)\ \frac{\sqrt{n}+3}{n+2}$ $\quad c)\ \frac{n}{n-1}$ $\quad d)\ \frac{n+1}{n}$

2. که $a_n = \frac{3n-1}{2n-1}$ د ترادف $n-$ام حد وي، د دغه ترادف څووم حد $\frac{11}{7}$ دی؟

$a)\ 3$ $\quad b)\ 4$ $\quad c)\ 5$ $\quad d)\ 6$

3. د $-9, -5, -1, 3, \ldots$ حسابي ترادف دوولسم حد عبارت دی، له:

$a)\ 35$ $\quad b)\ 38$ $\quad c)\ -35$ $\quad d)\ -38$

4. د $0.1, 0.4, 0.7, 1, 1.3, \ldots$ حسابي ترادف ګډ توپير عبارت دی، له:

$a)\ 0.3$ $\quad b)\ 0.1$ $\quad c)\ \frac{2}{3}$ $\quad d)\ -\frac{2}{3}$

5. د $96, 48, 24, 12, 6, \ldots$ هندسي ترادف ګډ نسبت عبارت دی له:

$a)\ -\frac{1}{2}$ $\quad b)\ \frac{1}{2}$ $\quad c)\ \frac{2}{3}$ $\quad d)\ -\frac{2}{3}$

6. د $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \ldots$ هندسي ترادف لسم حد عبارت دی، له:

$a)\ \frac{3}{512}$ $\quad b)\ \frac{5}{510}$ $\quad c)\ -\frac{5}{512}$ $\quad d)\ \frac{5}{512}$

7. د يوه هندسي ترادف د n جملو د جمعې حاصل فورمول عبارت دی، له:

$a)\ S_n = a\frac{1+q^n}{1-q}$ $\quad b)\ S = a\frac{q^n-1}{q-1}$

$c)\ S = a\frac{1+q^n}{1+q}$ $\quad d)$ هيڅ يو

8. په بې نهايته هندسي متقاربو سلسلو کې ګډ نسبت عبارت دی، له:

$a)\ q=0$ $\quad b)\ |q|>1$ $\quad c)\ |q|<1$ $\quad d)$ هيڅ يو

لاندې پوښتنې حل کړئ:

1. څو دوه رقمي طبيعي عددونه لرو چې د څلورو مضرب وي؟

2. د 21 او 31 ترمنځ په بېلا بېل ډول درې حسابي وسطونه وليکئ. $21, \square, \square, \square, 31$

3. که ديوه حسابي ترادف د لومړی او وروستی جملې مجموعه ($a_1 + a_n = 24$) او د n لومړيو جملو مجموعه يې 3720 وي، د نوموړي ترادف د حدونو شمېر وټاکئ؟

4. د لاندې ترادف د 100 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$$3, 5, 7, 9, 11, \ ...$$

5. که د يوه هندسي ترادف دويمه جمله 6 او اوومه جمله يې 192 وي ،ګډ نسبت يې وټاکئ.

6. د يوه هندسي ترادف د 8 لومړيو جملو د جمعې قسمي حاصل 17 برابره ،د هغه د څلورو لومړيو جملو دی، د نوموړي ترادف ګډ نسبت حساب کړئ.

7. د لاندې سلسلې د جمعې قسمي حاصل په لاس راوړئ.

$$0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + ...$$

8. د يوه ناپايه هندسي ترادف لومړی حد 9 او پنځم حد يې $\frac{1}{9}$ دی، د نوموړي ترادف د حدونو د جمعې حاصل پيدا کړئ.

9. د 3 او 96 عددونو تر منځ 4 هندسي وسطونه په بېلا بېل ډول وليکئ.

$$3, \square, \square, \square, \square, 96$$

10. د $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + ...$ هندسي سلسلې د اتو لومړيو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

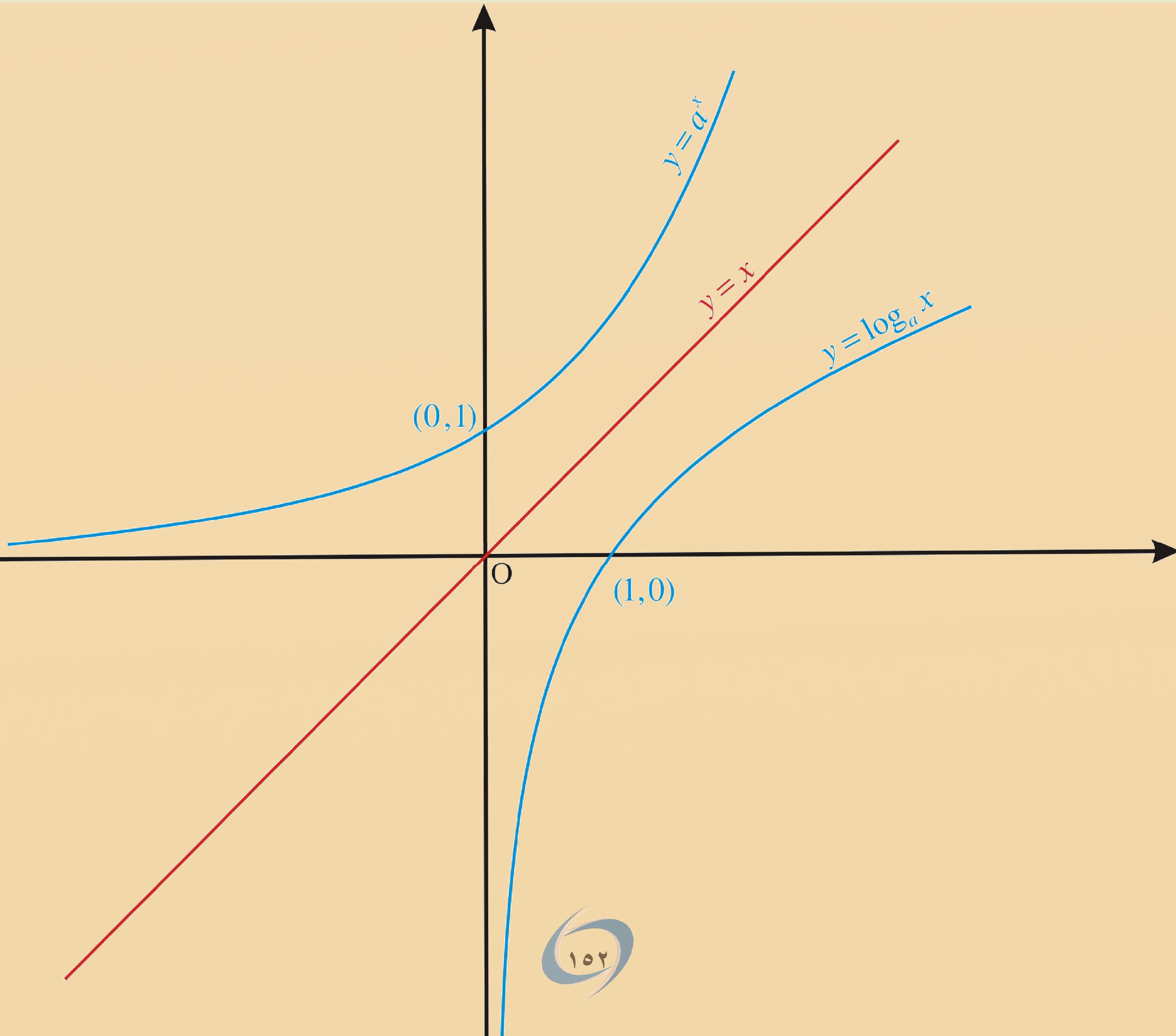
11. که $a = 4$ او $d = 3$ وي، هارمونيکي ترادف د $n = 12$ لپاره په لاس راوړئ.

12. لاندې متوالي کسرونه په عامو کسرونو واړوئ.

$a)\ 2.\overline{8}$ $\qquad$ $b)\ 3.\overline{57}$

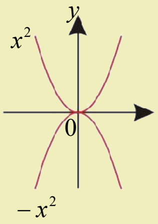
پنځم څپرکی

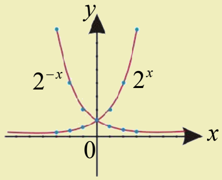
لوګاریتم


$y = a^x$
$y = x$
$y = \log_a x$
(0,1)
O
(1,0)

اکسپوننشیل تابع ګاني

Exponential function





پوهيږئ چې د $f(x)=x^2$ او $f(x)=-x^2$ تابع ګانو ګرافونه نظر y محور ته يوله بل سره متناظر دی. آيا تراوسه مو د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع ګانو د ګرافونو په هکله فکر کړی دی؟

تعريف

که چېرې a يو مثبت عدد او $a\neq 1$ وي، نو د $f(x)=a^x$ تابع ته د a په قاعده اکسپوننشيل تابع وايي.

$$a\in IR^+\setminus\{1\}\quad,\quad x\in IR\quad,\quad f:\ IR\to IR^+$$
$$f(x)=a^x$$

$f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ اکسپوننشيل تابع ګاني د 2 په قاعده دي.

فعاليت

- د $x\in Z$ مختلفو قيمتونو لپاره د $f(x)=2^x$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=2^x$ تابع ګراف د y محور په کوم ټکي کې قطع کوي؟
- آيا د $f(x)=2^x$ تابع متزايده، متناقصه او که ثابته ده؟ ولې؟

د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه دوضعيه کمياتو په سيستم کې رسم او يوله بله سره يې پرتله کړئ.

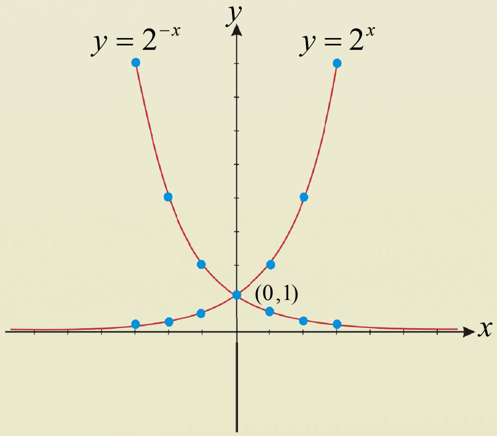
- پورتنی فعاليت د $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ تابع لپاره سرته ورسوئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي.

د $f(x)=2^x$ تابع قيمت د $x\in Z$ ټولو قيمتونو لپاره هميشه مثبت ده

د $y=2^x$ او $y=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه نظر y محور ته متناظر دي، يعنې د $y=2^x$ تابع ګراف هر ټکی د $y=2^{-x}$ تابع ګراف له هر ټکي سره يويه يو متناظر دی.

يادښت: که چېرې په اکسپوننشيل تابع کې $a>1$ وي متزايد، که $a<1$ وي متناقص او که $a=1$ وي ثابته تابع ده.



د $y = 2^{x}$ او $y = 2^{-x}$ تابع گانو گرافونه رسموو.

د $y = 2^{x}$ تابع گراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

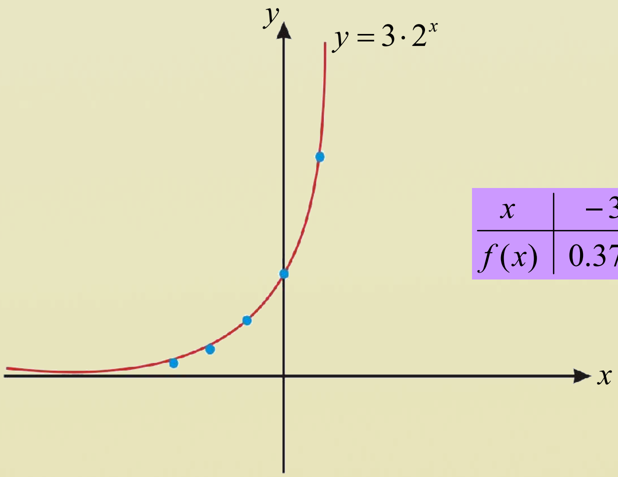
د $y = 2^{-x}$ تابع گراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

مثال: د $f(x) = 3\cdot 2^{x}$ اکسپوننشیل تابع گراف رسم کړئ

حل: د پاېلې په پام کې نیولوسره پوهېږو چې د $f(x) = 3\cdot 2^{x}$ اکسپوننشیل تـابع قاعـده $a = 2$ ده، نـو پـه دې اساس پورتنی اکسپوننشیل تابع متزایده ده ،ددې لپاره چې د پورتني اکسپوننشیل تابع گراف دقیق رسم کړو، نـو د x متحول ته مختلف قیمتونه ورکوو د y قیمتونه پیدا او په یوه جدول کې یې لیکو، وروسـته دغـه ټکـی (x او y) د قایمو مختصاتو په سیستم کې په نښه کوو.

چې له نښلولو وروسته یې گراف رسم کېږي.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.375	0.750	1.5	3	6	12	24

فعالیت

- د $f(x)=a^x$ اکسپونشیل تابع په پام کې نیولو سره د x او y ټولو حقیقي عددونو لپاره ثبوت کړئ چې:

$$F(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

$$f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$$

$$f(a\cdot x)=(f(x))^a$$

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه: له تېرو معلوماتو څخه په ګټې اخیستنې سره د اکسپوننشیل تابع خواص په لاندې ډول بیانوو

1. د هرې اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
2. هره اکسپوننشیل تابع یوپه یو (injective) ده یعنې د هر

$$x_1=x_2\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

$$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

3. هره اکسپوننشیل تابع د $a>1$ لپاره متزایده او د $a<1$ لپاره متناقصه ده.
4. د هرې اکسپوننشیل تابع ګراف د $(0,1)$ له ټکي څخه تیریږي.
5. د $f(x)=a^x$ او $g(x)=a^{-x}$ اکسپوننشیل تابع ګانو ګرافونه نظر y محورته متناظر پراته دي
6. هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوسه تابع یې $Log_a x$ دی.

پوښتنې

دلاندې اکسپوننشیل تابع گانو گرافونه په قایمو مختصاتوکې رسم کړئ.

$a)\qquad f(x) = 2\cdot 3^{x}$

$b)\qquad f(x) = 2\cdot 3^{-x}$

$c)\qquad f(x) = (\frac{1}{2})^{x}$

$d)\qquad f(x) = (4)^{-x}$

لـوګاریـتم

Logarithm

آیـا کـولای شـئ چـې اکسپونـنـشیل تـابع پـه بـل ډول هـم ولیکئ؟

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

فعالیت

لاندې جدول بشپړکړئ

$y =$ درکړل شوي عددونه	0.0001	0.001	0.01	100	1000	10000
طاقت لرونکي عددونه $= a^x$		10^{-3}				10^4
$x =$ توان	-4			2		

- د 10^{-3} طاقت لرونکی عدد قاعده او توان څو دي؟
- آیا دیوه عدد قاعده او توان د 1 عدد کیدلای شي؟
- آیا تاسوکولای شئ چې طاقت لرونکی عدد په بل ډول وښایاست؟

د پورتني جدول له بشپړولو وروسته لاندې تعریف کولای شو، بیان کړو.

تعریف: د طاقت لرونکي عدد یوې بېلې ښوونې تـه لوګـاریتم وایـي، یـا پـه بـل عبـارت د مجهـول تـوان محاسـبه د لوګاریتم په نامه یادیږي .

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

په پورتنی اړیکه کې a ته د لوګاریتم قاعده (Base) او y ته لوګاریتمي عدد وایي، د یوه طاقت لرونکي عدد توان له لوګاریتم څخه عبارت دی ،که د قاعدې په اندازه توان لوړشي، راکړل شوی عدد په لاس را کوي.
په تېر جدول کې د 10د قاعدو توانونه دراکړل شوو عددونو له لوګاریتم څخه عبارت دی.

د مثال په توګه: $\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$

هر مثبت عدد پرته له 1 څخه د لوګاریتم قاعده کېدای شي.

مثال: د لوګاریتم د تعریف په ګټې اخیستې سره لاندې افادې په معادلو(طاقت لرونکو عددي) افادو واړوئ.

$a)\ \log_2 8 = 3$

$b)\ \log_{10} 1000 = 3$

حل:

$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 8 = 2^3$

$\log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$

پوښتنې

1. لاندې لوګاریتمي اړیکې د هغوی په اړوندو افادو واړوئ.

$a)\quad \log_{10} N = x$

$b)\quad \log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$

$c)\quad \log_9 81 = 2$

$d)\quad \log_5 5 = 1$

2. لاندې طاقت لرونکې عددونه د لوګاریتم په شکل ولیکئ

$a)\quad 4^3 = 256$

$b)\quad 2^5 = 32$

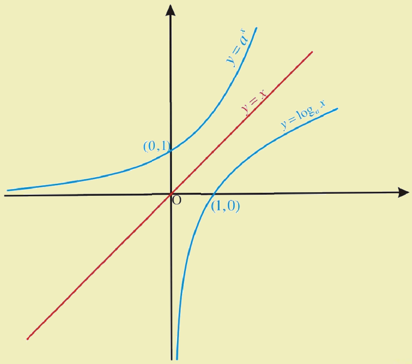
$c)\quad 10^4 = 10000$

$d)\quad 10^{-1} = 10^y$

$e)\quad y = 2^x$

$f)\quad y = 3^x$

لوګاریتمي تابع ګانې



آیا ویلی شي چې کوم ډول تابع ګانې معکوسې تابعګانې لري؟

آیا ویلی شی هغه تابع ګانې چې معکوسه لري، په قایمو مختصاتو کې نظر کوم مستقیم خط ته متناظرې دي.

تعریف: د اکسپوننشیل تابع معکوسه تابع د لوګاریتمي تابع په نامه یادیږي او هره اکسپوننشیل تابع لوګاریتمي تابع ده.

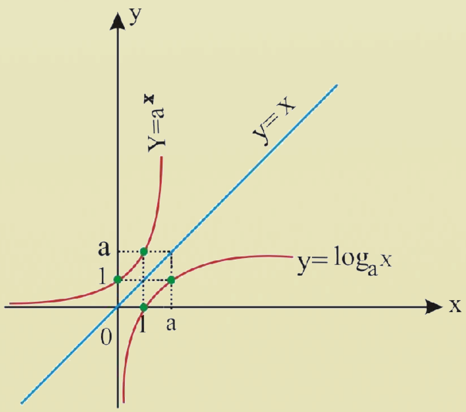
د یوې $(a \in IR^+$ او $a \neq 1)$ اکسپوننشیل تابع، معکوسه تابع د a په قاعده، هغه لوګاریتمي تابع ده چې د $\log_a x$ سره ښودل کیږي.

هره لوګاریتمي تابع، معکوسه تابع لري، د $f(x)=a^x$ او $g(x)=\log_a x$ تابعګانې یو د بل معکوسې تابعګانې او ګرافونه یې د $y=x$ مستقیم ته متناظر دي.

$$y=a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

$$f^{-1}: IR^+ \to IR, f^{-1}(x)=\log_a x,\ a\in IR^+,\ a\neq 1$$

د $f(x)=a^x$ تابع ګراف د $x=1$ لپاره لاندې شکل لري.



x	0		1		a		$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

له پورتني جدول څخه ليدل کېږي:

که چېرې $a > 1$ وي، نو د $\forall x_1, x_2 \in IR$ لپاره لرو چې:

که $\log_a x_1 > \log_a x_2$ وي؛ نو $x_1 > x_2$ دی.

د $f(x) = a^x$ تابع ګراف د $x = 0$ لپاره $a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$

لومړی مثال: د $y = 3^x$ او $y = \log_3 x$ تابع‌ګانو ګرافونه رسم کړئ.

حل: د $y = 3^x$ تابع په پام کې نيسو:

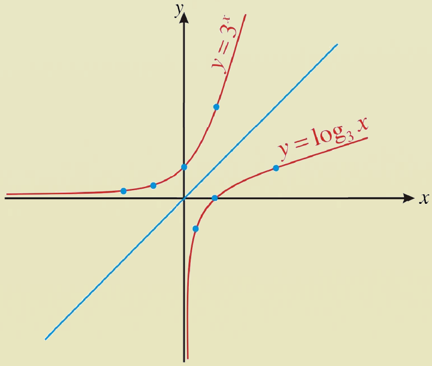
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

اوس $y = \log_3 x$ تابع په پام کې نيسو:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = \log_3 1 \end{array}\right\} (1,0) \qquad \left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = \log_3 3 \end{array}\right\} (3,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ y = \log_3 \frac{1}{3} = y = \log_3 3^{-1} = -1 \end{array}\right\} (\frac{1}{3}, -1)$$

x	$\frac{1}{3}$	0	1	3
y	-1	1	0	1



فعالیت

د $y=2^x$ او $y = (\frac{1}{2})^x$ اکسپوننشیل تابع ګانو د ګراف په پام کې نیولو سره او د اکسپوننشیل تابع ګانو د تعریف له مخې ددوی داړوندو معکوسو لوګاریتمي تابع ګانو قیمتونه د $x = 1, 2$ لپاره پیدا کړئ او نتیجه یې په عمومي ډول ولیکئ.

پايله: د هرې لوګاريتمي تابع لکه: $y = \log_a x$ د يوې اختياري قاعدې لپاره لرو.

$\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $a \in IR$, $a > 0$, $a \neq 1$

دویم مثال: که چېرې $f(x) = \log_3 x$ راکړل شوی وي نو $f(1), f(3^{-2}), f(9), f(3)$ په لاس راوړې.

حل: په راکړل شوي تابع کې د x پر ځای قیمتونه ایږدو.

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(3) = \log_3 3 = 1$$

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(9) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(3^{-2}) = \log_3 3^{-2} = -2 \cdot \log_3 3 = -2 \cdot 1 = -2$$

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(1) = \log_3 1 = 0$$

دریم مثال: که $\log_3 x = 4$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: پورتنی لوګاریتم د طاقت په شکل لیکو $\log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 \Rightarrow x = 81$

د تېرومعلوماتو څخه په ګټې اخیستې سره د لوګاریتمي تابع خاصیتونو په لاندې ډول بیا نیسو.

د لوګاریتمي تابع خاصیتونه:

1. د لوګاریتمي تابع د قیمتونو ساحه د حقیقي عددونو ، له سټ څخه عبارت ده.
2. څرنګه چې $\log_a 1$ د هرې اختیاري قاعدې لپاره مساوي په صفر ده، نو په دې اساس لوګاریتمي تابع یوازې یو جذر $x_0 = 1$ لري چې په ترتیب سره د لوګاریتمي تابع ګراف په قایمو مختصاتو کې د $(1,0)$ له ټکي څخه تېرېږي.
3. هره لوګاریتمي تابع یو په یو یا انجکتیف (injective) ده یعنې دهر $x_1 \neq x_2$ لپاره تل $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.

څلورم مثال:

د $f(x) = \log_2 x$ تابع قیمت د $x = 16, \frac{1}{8}$ لپاره پیدا کړئ.

حل: په راکړل شوي تابع کې د x پرځای قیمتونه وضع کوو چې په پایله کې د تابع قیمت په لاس راځي.

$$f(x) = \log_2 x \Rightarrow f(16) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \cdot \log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4$$

$$f(x) = \log_2 x \Rightarrow f(\frac{1}{8}) = \log_2(\frac{1}{8}) = \log_2 2^{-3} = -3\log_2 2 = -3 \cdot 1 = -3$$

فعالیت

- د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمت د $x = 28, \sqrt{2}$ لپاره په لاس راوړئ.

پوښتني

1. د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمتونه په $f(32), f(\frac{1}{32}), f(1), f(2)$ کې پیدا کړئ.
2. د $f(x)=\log_3 x$ تابع قیمتونه په $f(1)$ او $f(\frac{1}{81})$ کې په لاس راوړئ.

معمولي لوګاريتم *Common logarithm*

او طبيعي لوګاريتم *Natural logarithm*

آيا يوازي 2 او 3 د لوګاريتم قاعدي دي، او که نور عددونه هم د لوګاريتم قاعده کيدلی شي ؟

$$\left.\begin{array}{l}\log_e N \\ \log_{10} 10^3\end{array}\right\} = ?$$

تعريف

ځرنګه چې ومو ليدل، هر مثبت عدد پرته له 1 څخه کيدای شي د لوګاريتم قاعده شي، خوپه عمل کې د 10 او e قاعدې معمول او په کار وړل کيږي.

1 – معمولي لوګاريتم: هغه لوګاريتم چې قاعده يې 10 وي، د معمولي لوګاريتم Common logarithm يا (Briggs سيستم) په نامه يادېږي (Briggs) دهغه عالم نوم دی چې دغه سيستم منځ ته راوړی دی معمولی لوګاريتم د log په سمبول يې ښيي او په لاندی ډول ښودل کيږي.

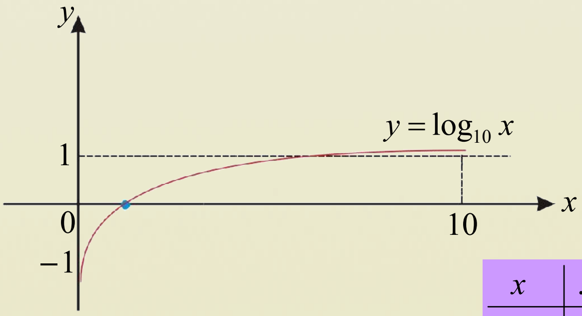
$$f: IR^+ \longrightarrow IR\ ,\ \ f(x) = \log_{10} x = \log x$$

مثال: د $10^{-1}, 10^3, 10^2, 10^1$ او 10^0 عددونو لوګاريتمونه پيدا کړئ.

حل:

$$\log_{10} 10^0 x = \log 10^0 = y \Leftrightarrow 10^y = 1 \Rightarrow 10^y = 10^0 \Rightarrow y = 0$$
$$\log_{10} 10 = \log 10 \ = y \Leftrightarrow 10^y = 10^1 \Rightarrow y = 1$$
$$\log_{10} 10^2 = \log 10^2 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^2 \Rightarrow y = 2$$
$$\log_{10} 10^3 = \log 10^3 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^3 \Rightarrow y = 3$$
$$\log_{10} 10^{-1} = \log 10^{-1} = y \Leftrightarrow 10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1$$
$$\vdots$$
$$n \in z\ ,\quad \log_{10} 10^n = \log 10^n = y \Leftrightarrow 10^y = 10^n \Rightarrow y = n$$

د x د مختلفو قیمتونو له مخې یې ګراف رسموو



x	$...10^{-3}$	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}
$\log x$	$...-3$	-2	-1	0	1	2	3

2– طبیعی لوګاریتم: هغه لوګاریتم چې قاعده یې e وي د طبیعي لوګاریتم(Natural logarithm) په نامه یادېږي او په ln سره ښوول کېږي، او داسې لیکو: $f: IR^{+} \to IR, F(x) = \log_e x = \ln x$:

e یو غیر ناطق عدد دی چې تقریبي قیمت یې عبارت دی له: $e = 2.718281828\cdots$ چې د $(1+\frac{1}{x})^{x}$ لیمت څخه هغه وخت چې x بې نهایت ته نږدې شي په لاس راځي د e قیمت پیداکول د لوړو ریاضیاتو کار دی. د e عدد د اویلر عدد په نامه یادېږي او $f(x) = e^{x}$ تابع د اکسپوننشیل تابع په نوم یادېږي او داسې هم لیکي: $Exp(x) = e^{x}$

د $y = e^{x}$ تابع ګراف لکه: $y = a^{x}$ تابع ګراف په څېر ده.

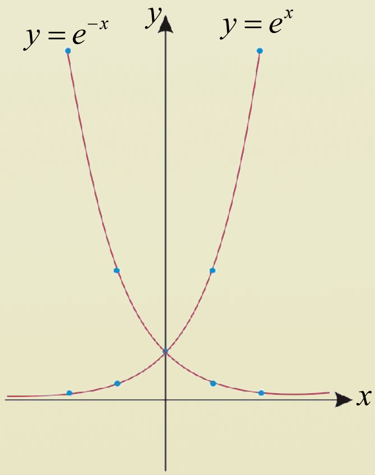
د $y = e^{x}$ په تابع کې x ته مختلف قیمتونه ورکوو:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{7.3}$	$\frac{1}{2.71}$	1	2.71	7.34

د $y = e^{-x}$ په تابع کې x ته بېلابېل قیمتونه ورکوو:

x	-2	-1	0	1	2
y	7.34	2.71	1	$\frac{1}{2.7}$	$\frac{1}{7.3}$

د پورتنیو تقریبي قیمتونو په پام کې نیولو سره د $y=e^{x}$ او $y=e^{-x}$ تابعګانو ګرافونه رسموو:



د طبیعي لوګاریتم مطالعه په لوړو ریاضیاتوکې لکه: ساینس، انجنیري، تجارت او تخنیک کې زیات استعمال لري.

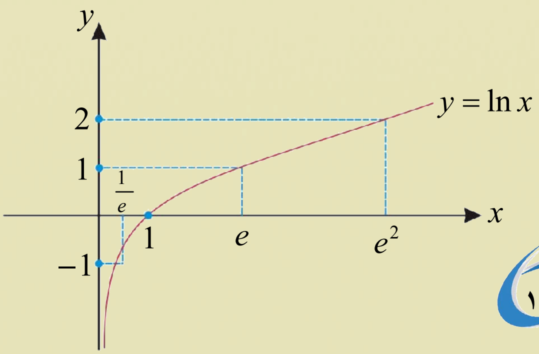
د طبیعي لوګاریتم د تابع $y=\ln x$ ګراف په لاندې ډول دی.

مثال: $\ln e^{-2}, \ln e^{-1}$ $\ln e^{0}, \ln e^{3}, \ln e^{2}$ او $\ln e^{1}$ پیدا کړئ.

حل: د تعریف په پام کې نیولو سره لرو چې: $y=\ln x=\log_e x$

$$\ln e^{1}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{1} \Rightarrow y=1$$
$$\ln e^{2}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{2} \Rightarrow y=2$$
$$\ln e^{3}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{3} \Rightarrow y=3$$
$$\ln e^{0}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{0} \Rightarrow y=0$$
$$\ln e^{-1}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{-1} \Rightarrow y=-1$$
$$\ln e^{-2}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{-2} \Rightarrow y=-2$$

د $y=\ln x$ تابع ګراف عبارت دی له:



فعالیت

- د $y=\ln\frac{1}{e^{7}}$ قیمت پیدا کړی.
- د $\log 0.0001$ قیمت په لاس راوړئ.

پوښتني

لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$a)\log_e e^{8}$

$b)\ln\frac{1}{e^{-3}}$

$c)\log 0.01$

$d)\log\frac{1}{10^{-2}}$

د لوګاریتم قوانین

Low of logarithm

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$$

پوهېږي چې د عددونو طاقت خپل قوانین لري، آیا د عددونو لوګاریتم هم قوانین لري او که نه؟

فعالیت

- د طاقت لرونکو عددونو د ضرب قانون ولیکئ.
- د طاقت لرونکو عددونو د تقسیم قانون ولیکئ.
- هر عدد د صفر او یاد یوه په توان مساوي په څودی؟

د طاقت قوانینو ته ورته لوګاریتم هم ځیني قوانین لري

لومړی قانون: د هر عدد لوګاریتم د لوګاریتم د تعریف په ساحه کې په خپله قاعده مساوي په یو دی؛ مثلاً:

$$a \in IR^+ \ ,\ a \neq 1, \log_a a = 1$$

ثبوت: پوهېږو چې $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\},\ a^1 = a$ دي، نو $\log_a a = 1$

لومړی مثال: $\log_5 5 = 1 \Leftrightarrow 5^1 = 5$

دویم قانون: د 1 عدد لوګاریتم په هره اختیاري قاعده مساوي په صفر دی؛ مثلاً: $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\}\ , a^0 = 1$ نو

$$\log_a 1 = 0$$

دویم مثال: $\log_{\sqrt{5}} 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{5})^0 = 1$

دریم قانون:د دوو یا څوعددونو د حاصل ضرب لوګاریتم د هغو د لوګاریتمونو له مجموعې سره مساوي دی یعنې:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

ثبوت: که چېرې ولرو.

$$x = a^p \ \ldots\ \mathrm{I}$$

$$y = a^q \ \ldots\ \mathrm{II}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا ضربوو: $x \cdot y = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

د پورتنی اړیکې له دواړو خواوو لوګاریتم نیسو: $\log_a (x \cdot y) = p + q$

د p او q قیمتونو په اېښودلو سره لیکو: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

لومړي مثال: د 50 عدد لوګاریتم په لاس راوړئ.

حل: $\log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 = \log 5 + 1$

دویم مثال: $\log_4 2 + \log_4 8 = ?$

حل:

$$\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4 (2 \cdot 8) = \log_4 (2 \cdot 2 \cdot 4) = \log_4 (4 \cdot 4)$$
$$= \log_4 4 + \log_4 4 = 1 + 1 = 2$$

فعالیت

- دلاندې غیر مساواتو سم والی، د مثال په واسطه وښایاست.

$$\log_a (x + y) \neq \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a (x \cdot y) \neq \log_a x \cdot \log_a y$$

خلورم قانون: د دوو عددونو د تقسیم لوګاریتم د لوګاریتمونو له تفاضل سره مساوی دی، یعنې:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

ثبوت: که چېرې $x = a^p$ او $y = a^q$ ولرونو:

$$\left.\begin{array}{l} x = a^p \ldots\ldots\ldots\ldots I \\ y = a^q \ldots\ldots\ldots\ldots II \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \log_a x = p \\ \log_a y = q \end{array}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا یو په بل ووېشو.

$$\frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

د پورتنی اړیکې له اطراف څخه لوګاریتم نیسو: $\log_a \frac{x}{y} = p - q$

د p او q د قیمتونو په اېښودلو سره لیکو: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

لومړي مثال: د $\log\frac{5}{2}$ محاسبه کړئ داسې چې $\log 2 = 0.3010,\ \log 5 = 0.6900$ وي.

حل: $\log\frac{5}{2} = \log 5 - \log 2 = 0.6900 - 0.3010 = 0.3890$

دويم مثال: $\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy)$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: څلورم قانون له ښي لوري څخه چپ لوري ته تطبيقوو.

$$\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy) = \log_y\frac{10y^2x}{2xy} = \log\ (5y)$$

$$= \log_y(5y) = \log_y y + \log_y 5$$

$$= \log_y 5 + 1$$

پنځم قانون: د يوه توان لرونکي عدد لوګاريتم مساوي دی د توان او د طاقت د قاعدې د لوګاريتم لـه حاصل ضرب سره يعني که چېرې $(a^x)^n$ ولرو نو $\log_a x^n = n\log_a x$ دی.

$$\log_a x^n = \log_a(x\cdot x\cdot x\cdot\ \ldots\ \cdot x)$$

$$\log_a x^n = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \ldots + \log_a x}_{n \text{ خلې } lag_a x}$$

په پايله کې $\log_a x^n = n\log_a x$

له پنځم قانون څخه په ګټې اخيستنې سره کولای شو وليکو.

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a(x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x$$

لومړی مثال: $\log 625 = ?$

حل: $\log 625 = \log 5^4 = 4\log 5 = 4(0.6990) = 2.7960$

دويم مثال: دغه لوګاريتم $\log_3\sqrt[3]{9}$ پيدا کړئ؟

حل: $\log_3\sqrt[3]{9} = \log_3\sqrt[3]{3^2} = \log_3(3)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_3 3 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$

فعاليت

- لاندې لوګاريتمونه پيداکړئ.

$\log_3(0.12) = ?$ $\qquad$ $\log_5\sqrt{8} = ?$

پوښتنې

1. لاندې ضربي افادې د جمعې د حاصل په شکل او دجمعې د حاصل افادې د حاصل ضرب په شکل ولیکئ او د امکان په صورت کې یې وروستی قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ \log_4(5x^2) = ?$

$b)\ \log_{10}(10x^2y) = ?$

$c)\ \log_{10}5 + \log_{10}20 = ?$

$d)\ \log_{12}36 + \log_{12}4 = ?$

2. لاندې د خارج قسمت افادې په تفاضل او د تفاضل افادې په خارج قسمت واړوئ، د امکان په صورت کې وروستې ځواب په لاس راوړئ.

$a)\ \log_7 \dfrac{63}{49} = ?$

$b)\ \log \dfrac{125}{80} = ?$

$c)\ \log_a(x^2a) - \log_a x^2 = ?$

$d)\ \log_{10}1000 - \log_{10}100 = ?$

3. لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$a)\ \log_{10}(0.0001)$ $\qquad b)\ \log_2(8)^{-\frac{1}{3}}$

د لوګاریتم د یوې قاعدې اړول په بله قاعده

که د یوه عدد لوګاریتم په یوه مشخصه قاعده راکړل شـوی وي، خرنګه کولای شو، نوموړی عدد په بله قاعده واړوو.

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

شپږم قانون: د دوو عددونو د لوګاریتمونو د تقسیم حاصل چه په عین قاعده وي مساوي ده په:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

ثبوت:د ثبوت لپاره $\log_b m = y$ او معادل شکل يې يعنې $m = b^y$ ليکـو اوس لـه اطرافـو څخـه د a پـه قاعده لوګاريتم نيسو:

$$\log_b m = \log_a b^y \Rightarrow \log_b m = y\log_a b$$

اوس د y قيمت په پورتني اړيکه کې اېږدو:

$$\log_a m = \log_b m \cdot \log_a b$$

د پورتنۍ اړيکې دواړه خواوې په $\log_a b$ ویشو:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \frac{\log_b m \cdot \log_a b}{\log_a b} = \log_b m \Rightarrow \frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

لومړی مثال: $\log_9 27$ محاسبه کړئ.

حل: له شپږم قانون څخه په ګټې اخیستنې سره لرو:

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 (3)^3}{\log_3 (3)^2} = \frac{3\log_3 3}{2\log_3 3} = \frac{3\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{3}{2}$$

دويم مثال: $\log_3 75$ حساب کړی.

حل: بیا هم د شپږم قانون په کارولو سره لرو چې:

$$\log_3 75 = \frac{\log_5 75}{\log_5 3} = \frac{\log_5 (3\cdot 5^2)}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2\log_5 5}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2}{\log_5 3}$$

يادونه: د يوه عدد معكوس لوګاريتم مساوي دی، د هغه عدد له منفي لوګاريتم څخه چې هغه د کو لوګاريتم (co-logarithem) په نامه ياد يږي.

$$\log_a \frac{1}{M} = -\log_a M = co\log_a M$$

مثال: $\log_2 \frac{1}{32} = ?$

حل: $\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 1 - \log_2 32 = \log_2 1 - \log_2 2^5 = 0 - 5\log_2 2 = -5 \cdot 1 = -5$

اووم قانون: د يوه عدد معكوس لوګاريتم مساوي دی په: $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\frac{1}{\log_M a} = x$ نيسو: $\frac{1}{\log_M a} = x \Rightarrow x\log_M a = 1 \Rightarrow \log_M a^x = 1 \ldots I$

د I په رابطه کې د1 عدد په ځاي ليکلی شو چې $1 = \log_M M$

$$\log_M a^x = \log_M M \Rightarrow \log a^x = \log M$$

اوس د دواړو خواوو لوګاريتم نيسو يعنې $\log_a M = x$

په پورتنی اړيکه کې د x په ځای قيمت اېږدو: $\log_a M = x = \frac{1}{\log_M a}$

مثال $\log_{125} \sqrt{5} = ?$

حل: $\log_{125} \sqrt{5} = \log_{125} (5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{125} 5 = \frac{1}{2\log_5 125} = \frac{1}{2\log_5 5^3} = \frac{1}{6\log_5 5} = \frac{1}{6}$

فعاليت

لاندې لوګاريتمونه حساب کړئ.

$\log_{64} 2 = ?$ $\qquad \log_4 \sqrt{25^6} = ?$

اتم قانون: ديوه عدد لوګاريتم په توان لرونکي قاعده مساوي دی په $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\log_a x = m$ نيسو او هغه داړوند طاقت په شکل ليکو:

$$\log_a x = m \Rightarrow x = a^m \Rightarrow x = (a^m)^{\frac{n}{n}} \Rightarrow x = (a^n)^{\frac{m}{n}}$$

د پورتنی رابطې د دواړو خواوو څخه لوګاريتم نيسو: $\log_{a^n} x = \frac{m}{n} \Rightarrow \log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a m$

اوس د m په ځای قیمت ایږدو:
$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$$

له پورتني قانون څخه لاندې پایلې په لاس راځي

$$1)\ \log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x \qquad 2)\ \log_{\frac{1}{n}} \frac{1}{x} = \log_n x \qquad 3)\ \log_{a^n} x^n = \log_a x$$

لومړی مثال: $\log_{25} 125 = ?$

حل:
$$\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2}\log_5 5 = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = ?$

حل:
$$\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = \log_{\frac{1}{(3)^{\frac{1}{3}}}} (3^3)^2 = \log_{3^{-\frac{1}{3}}} (3)^6 = \frac{6}{-\frac{1}{3}}\log_3 3 = \frac{6}{1}(\frac{3}{-1})\cdot 1 = -18$$

فعالیت

د پورتنیو خاصیتونو په کارولو سره لاندې لوګاریتمونه ساده کړئ.

a) مخامخ لوګاریتم په معکوس ډول ولیکئ. $\log_3 6 = ?$

b) $\log_8 \sqrt[3]{4} = ?$

د معمولي او طبیعي لوګاریتمونو ترمنځ اړیکه: د دغو دوو لوګاریتمونو یعنې د 10 او e عددونه د $\log_a x = \log_b x.\log_a b$ له اړیکې څخه په ګټې اخیستنې چې a, b او x مثبت عددونه او a او b د 1 خلاف دي:

که چېرې $a = e$ او $b = 10$ وضع شي، نو لرو چې:

$$\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$
$$\log_e x = \log_{10} x \cdot \log_e 10$$

پوهېږو چې $\log_e x = \ln x$ دی، نو:

$$\ln x = \log_e 10 \cdot \log x$$
$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

که چیرې $b=e$ او $a=10$ وضع شي، نو:

$$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}$$

$$\log_{10} x = \log x = \log_e x \cdot \log_{10} e$$

$$\log x = \log_{10} e \cdot \ln x$$

څرنګه چې $\log_{10} e = 0.4343$ دی، نو لاندې اړیکه لرو:

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

لومړی مثال: د $\ln 4.69$ قیمت په لاس راوړئ.

حل: پوهېږوچې:

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot \log 4.69$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot 0.6712 = 1.5455$$

دویم مثال: د $\log 6.73$ قیمت پیدا کړئ په داسې حال کې چې $\ln 6.73 = 1.9066$ وي.

حل: د تېرې اړیکې په ګټې اخیستې سره لروچې:

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

$$\log 6.73 = 0.4343 \cdot \ln 6.73$$

$$= 0.4343 \cdot 1.9066 = 0.8280$$

پوښتنې

لاندې لوګاریتمونه ساده کړئ.

$a)\ \log_{\frac{1}{3}} 3^{-4} = ?$

$b)\ \log_9 27 = ?$

$c)\ \log_8 4 = ?$

$d)\ \log_{121} 14641 = ?$

$e)\ \ln 672000$

$f)\ \ln 0.00927$

$g)\ \ln 0.235$

کرکټرستیک او مانتیس

Characteristic and Mantissa

$$\left.\begin{array}{l}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{array}\right\} = ?$$

پوهېږو چې:

$\log_{10} 1000 = 3\ ,\ \log_{10} 100 = 2\ ,\ \log_{10} 1 = 0$

دی. آیا دیوه عدد د ارقامو دشمېر او لوګاریتم ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟

تعریف

پوهېږو چې د x هر حقیقي مثبت عدد د $x = S \cdot 10^n$ په شکل لیکل کېدای شي، داسې چې $1 \le S < 10$ او n یو تام عدد وي.

که چېرې د x لوګاریتم غوښتل شوی وي، په لاندې ډول یې پیداکولای شو.

$$\log x = \log(S \cdot 10^n) = \log S + \log 10^n = \log S + n\log 10 = \log S + n$$

د $\log S$ په هغه صورت کې چې $1 \le S < 10$ وي، S د x د لوګاریتم مانتیس یا اعشاري برخه او n چې یو تام عدد دی، د x د لوګاریتم مشخصه یا کرکټرستیک خخه عبارت دی. خرنګه چې $1 \le S < 10$ دي نو.

$$\log 1 \le \log S < \log 10$$
$$0 \le \log S < 1$$

له پورتنۍ اړیکې ځخه داپایله په لاس راځي چې دیوه عدد (له ۱۰ کوچنی او له یوه لوی یا مساوي) لوګاریتمي یې د یو او صفر ترمنځ قرار لري.

فعالیت

- لاندې جدول بشپړکړئ.

د عددونو توان لرونکی شکل	$0.001 = 10^{-3}$	$0.01 = 10^{-2}$	$1 = 10^{0}$	$1000 = 10^{3}$	$4 = 10^{0.602}$	$7 = 10^{0.845}$	$10 = 10^{1}$	$20 = 10^{1.390}$
د عددونو لوګاریتمي شکل	$\log_{10} 0.001$		$\log_{10} 1$			$\log_{10} 7$		$\log_{10} 20$
لوګاریتم	-3	-2		3	0.602		1	

د هغو عددونو لوګاریتمونه چې د 0، 10، 100, 1000، 0.01 د 0.001 عددونو ترمنځ واقع دي، مساوي له څو سره دي؟

- آيا هر څومره چې عدد لوی شي لوګاريتم يې هم لوئيږي؟
- له 1 څخه د کوچنيو عددونو د لوګاريتم علامه منفي ده، که مثبت؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

- که چېرې $1 \le x < 10$ سره وي، کرکټرستيک يې صفر دی.
- که چېرې $10 \le x < 100$ وي کرکټرستيک يې مساوي له 1 سره دی.
- که چېرې $100 \le x < 1000$ وي، نو کرکټرستيک يې 2 دی.

ديوه عدد په لوګاريتم کې صحيح برخه کرکټرستيک او اعشاري برخه يې مانتيس نومېږي.

هغه وخت چې عدد د عدد ليکنې په علمي طريقه وليکل شي، د 10 د عدد توان له کرکټرستيک څخه عبارت دی.

د عدد ليکنې علمي طريقه Scientific notation

کولای شو هر عدد د 10 د توان په څېر وليکو، لکه: د N عدد داسې ليکو $N = a \cdot 10^n$ چې په دې حالت کې $1 \le a < 10$ او n يو تام عدد دی

لومړی مثال: لاندې عددونه د عدد ليکنې په علمي طريقه وليکئ.

$a)$ 2573 $b)$ 573216 $c)$ 0.0028

حل :

$a)\ \ 2573 = 2.373 \cdot 10^3$

$b)\ \ 573216 = 5.73216 \cdot 10^5$

$c)\ \ 0.0028 = \dfrac{28}{10000} = \dfrac{28}{10^4} = 28 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10^{-3}$

قاعده: که چېرې ديوه عدد صحيح برخه چې د صفر خلاف وي، نود هغه عدد دلوګاريتم کرکټرستيک مساوي دی، د صحيح برخې د ارقامو په شمېر، منفي يو.

دویم مثال: د $\log 526.9$ کرکټرسټیک مساوي له څو سره دی؟

حل: د صحیح ارقامو شمېرله 3 سره برابر دی، نو کرکټرسټیک یې $3-1=2$ دی.

او له یوه څخه د کوچنیو عددونو کرکټرسټیک منفي علامه لري او قیمت یې د اعشاري د علامې د ښي خوا د صفرونو له شمېر څخه، د یوه په اندازه زیات دی.

دریم مثال: د $\log 0.002$ کرکټرسټیک مساوي په څو دی؟

حل:

$$\begin{aligned}\log 0.002 &= \log(2\cdot 10^{-3})\\ &= \log 2 + \log 10^{-3}\\ &= \log 2 - 3\log 10 = \log 2 - 3\end{aligned}$$

نو کرکټرسټیک یې -3 دی.

له تېرو دوو مثالونو څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د لاندې عددونو کرکټرسټیک په لاس راوړو.

لوګاریتمونه		کرکټرسټیک
$\log 89435$	$5-1$	4
$\log 56.784$	$2-1$	1
$\log 0.995$	$0-1$	-1
$\log 0.0789$	$-1-1$	-2

پوښتنې

دلاندې لوګاریتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول ووایاست؟

$a)\ \log 0.9560$ $b)\ \log 956.0$

$d)\ \log 2345$ $e)\ \log 3.875$

$c)\ \log 9560$ $f)\ \log 0.0009560$

د لوګاریتم جدول

څرنګه چې په تېرلوست کې مو ولوستل چې د یوه عدد لوګاریتم له دوو برخو (کرکټرستیک او مانتیس) څخه تشکیل شوی دی. د مانتیس د پیدا کولو لپاره په څه ډول عمل کوئ.

$$\left.\begin{array}{l}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{array}\right\} = ?$$

د مانتیس د پیدا کولو طریقه:

پوهېږو چې هر لوګاریتمي عدد له دوو یعنې صحیح او اعشاري برخوڅخه جوړ شوی دی، څرنګه چې صحیح برخه یا مشخصه د خپل عدد د ارقامو له مخې او مانتیس یې د لوګاریتمي جدول له مخې چې مخکې ترتیب شوی ټاکل کېږي، دغه جدول یې تر څېنې 7 ، تر 5 او څېنې یې تر 4 او 3 اعشاري خانو پورې ترتیب شوی چې د مانتیس د پیدا کولو لپاره ترې کار اخلي چې د اعشاري د تامو عددونو د ارقامو د شمېر په پام کې نیولو سره جدولونه نومول شوي دي. لکه: 7 رقمي جدولونه 5، رقمي جدولونه او داسې نور.

د یوه عدد د مانتیس د پیدا کولو لپاره د نوموړي عدد ارقام له چپ لوري څخه په پام کې نیول کېږي په دې ډول چې ښي لوری دیوه رقم په استثنا هغه د جدول په داسې ستون کې لټوو چې د ښۍ خواله رقم سره مطابقت ولري، نو هغه اعشاري عدد چې د سطر او ستون تقاطع وي، له مانتیس څخه عبارت دی.

لومړی مثال:

حل:

$$\log 765 = ?$$

$$\log 765 = \log(7.65 \cdot 10^2)$$

$$= \log 7.65 + \log 10^2$$

$$= \log 7.65 + 2$$

مانتیس کرکټرستیک

د 2 عدد د کرکټرستیک څخه عبارت دی او دمانتیس د پیدا کولو لپاره یعنې $\log 7.65$ په 76 سطر او 5 - ام ستون کې ګورو چې د 8837 عدد سره مطابقت کوي یعنې د نوموړي عدد مانتیس 0.8837 دی چې په حقیقت کې د 765 عدد مانتیس دی.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
74										
75										
76	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
77										
78										
79										

$$\log 765 = \log 7.65 + 2 = 0.8837 + 2 = 2.8837$$

دويم مثال: $\log 70.9$ په لاس راوړئ؟

حل:

$$\log 70.9 = \log(7.09 \cdot 10)$$
$$= \log 7.09 + \log 10^1$$
$$= \log 7.09 + 1$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70 ⋮ 79 ⋮	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	**8506**

د 709 عدد د 9 ستون لاندې لټوو چې له 8506 عدد سره مطابقت کوي يعنې د 7.09 عدد مانتيس 0.8506 دی، په پايله کې يې لوګاريتم داسې حسابوو:

$$\log 70.9 = 0.8506 + 1 = 1.8506$$

دريم مثال: د 0.0247 لوګاريتم حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\log 0.0247 = \log(2.47 \cdot 10^{-2})$$
$$= \log 2.47 + \log 10^{-2}$$
$$= \log 2.47 - 2$$

د 2.47 عـدد پـه 24 – ام سطر او 7 – ام ستون لانـدې لټوو چې لـه 3927 عـدد سره مطابقـت کـوي يعنې د 2.47 عدد مانتيس عبارت دی له: 0.3927 په پايله کې د لوګاريتم حاصل داسې په لاس راوړو:

$$\log 0.0247 = \log 2.24 - 2 = 0.3927 - 2 = \bar{2}.3927$$

يادونه: څرنګه چې مانتيس هميشه مثبت دی، کـه کرکټرسـتيک منفـي وي او وغـواړو دواړه د يـوه مثبـت عـدد پـه شکل وليکو، نو منفي علامه د کرکټرستيک له پاسه ليکو، مثلاً په پورتني مثال کې:

$$0.3927 - 2 = \bar{2}3927$$

فعاليت

- د لوګاريتم د جدول په پام کې نيولو سره 9280 عدد لوګاريتم حساب کړئ.

څلورم مثال: د لاندې جدول په پام کې نيولوسره د 15 , 105, 900 , $\frac{3}{4}$, 0.007 عـددونو لوګاريتمونـه پيـدا کړئ.

عددونه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
لوګاريتمونه	0.0000	0.30103	0.47712	0.60206	0.69897	0.77815	0.84570	0.90309	0.95424	1.0000

$$\log 15 = (3\cdot 5) = \log 3 + \log 5 = 0.47712 + 0.69897 = 1.17609$$

$$\log(105) = \log(5\cdot 3\cdot 7) = \log 5 + \log 3 + \log 7$$
$$= 0.69897 + 0.47712 + 0.84570$$
$$= 2.02079$$

$$\log(900) = \log(9\cdot 10^2) = \log 9 + \log 10^2$$
$$= 0.95424 + 2$$
$$= 2.95424$$

$$\log(\frac{3}{4}) = \log 3 - \log 4 = 0.47712 - 0.60206$$
$$= -0.12486$$

$$\log(0.007) = \log(7\cdot 10^{-3}) = \log 7 + \log 10^{-3} = \overline{3}.84570$$

پوښتنې

1. دلاندې لوګاریتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول وواياست او مانتیس يې د جدول له مخې پیدا کړئ.

$a)\ \log 222$ $b)\ \log 0.921$

$c)\ \log 928$ $d)\ \log 527$

$e)\ \log 0.024$ $f)\ \log 2400$

$h)\ \log 0.00024$ $j)\ \log 24$

2. د لاندې لوګاریتمونو قیمتونه په لاس راوړئ.

$a)\ \log(2.73)^3$ $b)\ \log\sqrt[5]{0.0762}$

انتي لوګاریتم

Anti Logarithm

که چیرې د یوه عدد لوګاریتم راکړل شوی وي څرنګه کولای شو، عدد یې پیدا کړو؟

$$\log 481 = 2.6821$$
$$\log N = 1.6580$$
$$N = ?$$

تعریف: که چیرې $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوګاریتم انتي لوګاریتم بلل کیږي یعنې $y = anti \log x$

مثلاً که چیرې $\log 34 = 1.5315$ وي، نود 1.5315 انتي لوګاریتم د 34 له عدد سره مساوي دی.

فعالیت

- که چیرې $\log N = 2.8779$ وي، نو د N عدد و ټاکئ.
- د نوموړي عدد کرکټرستیک پیدا کړئ.
- د مانتیس په جدول کې د 0.8779 عدد له کوم سطر او ستون سره مطابقت لري؟

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

څرنګه چې د 2 عدد کرکټرستیک دی، نو N یو درې رقمي عدد دی، مانتیس یې په جدول کې له 75 سطر او 5 ستون سره مطابقت لري، نود N عدد عبارت دی له: 755

لومړی مثال: $\log N = 2.9939$ دی د N عدد په لاس راوړئ.

حل: د نوموړي لوګاریتم د مانتیس برخه یعنې 0.9939 د لوګاریتم په جدول کې پیدا کوو، ګورو چې په کوم سطر او ستون کې ځاي لري. دغه د سطر او ستون عدد داسې لیکو چې د ستون عدد داړوند سطر ښي لوری ته قرار ولري چې عبارت دی له 9.86 څخه یعنې د 986 عدد مانتیس 0.9939 دی. په پورتنۍ پوښتنه کې د 2 د کرکټرستیک په توګه راکړل شوی، نو د صحیح رقمونو شمیرې 3 دی، چې مطلوب عدد عبارت دی له 986 یعنې: $N = 986$

$$\log 986 = 2.9939$$
$$anti \log 2.9939 = 986$$

9.5 9.6 9.7 9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939 ↑	0.9943	0.9948	0.9952
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

دويم مثال: که چېرې $\log N = 0.9791$ وي N په لاس راوړئ.

حل: دلته هم د 9791 عدد په جدول کې پيدا کوو، د سطر او ستون اړوند عددونه لکه: د تېر په څير ليکو، څرنګه چې 953 مانتيس ښيي چې د مطلوب عدد 953 رقمونه دي څرنګه چې کرکټرستيک صفر دی، نو مطلوب عدد يعنې N يو صحيح رقم لري چې عبارت دی له:

$$N = 9.53$$
$$\log 9.53 = 0.9791$$
$$anti\log 0.9791 = 9.53$$

دريم مثال: $\log N = -3.0531$ دی، د N عدد پيدا کړئ.

په مثال کی ليدل کېږی چې کرکټرستيک او مانتيس دواړه منفي دی او په جدول کې منفي عدد وجود نه لری، ددې لپاره چې مانتيس مثبت شي، د 1 عدد له مانتيس سره جمع او له کرکټرستيک څخه يې کموو، په مساواتو کې تغيرنه راځي.

اوس کولای شو د مانتيس 0.9469 په مرسته د N عدد له جدول څخه پيدا کړو، چې عبارت دی له 886.

کرکټرستيک ښيي چې د اعشاري د علامې او له چپې خوا څخه د لومړي 8 عدد تر منځ درې صفرونه ځای لري

$N = 0.000885$ نو $anti\log - 3.05531 = 0.000885$

څلورم مثال: دلاندې عددونو لوګاريتمونه محاسبه کړئ.

$a)\ 2 \qquad b)\ 0.2 \qquad c)\ 0.02 \qquad d)\ 0.0002$

حل:

$$a)\ \log 2 = 0.3010$$
$$b)\ \log 0.2 = 0.3010 - 1 = \overline{1}.3010$$
$$c)\ \log 0.02 = 0.3010 - 2 = \overline{2}.3010$$
$$d)\ \log 0.0002 = 0.3010 - 4 = \overline{4}.3010$$

له پورتني مثال څخه دا پايله په لاس راځي چې ديوه عدد د لوګاريتم مانتيس يوازې د رقمونو په ترتيب پورې اړه لري په پورتني مثال کې ټول عددونه يو شان مانتيس 0.3010 لري، ښي او يا چپ لوري ته د صفرونو زياتول په مانتيس باندې کومه اغېزه نه لري.

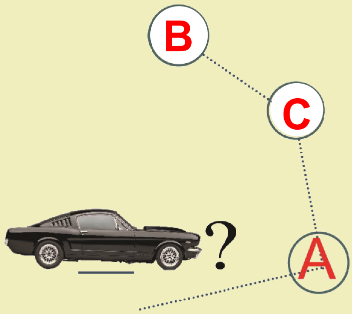
پوښتنې

دلاندې هر يوه انتي لوګاريتم قيمت په لاس راوړئ.

$a)\ anti\log 4.9479 \qquad b)\ anti\log - 5.0521$

خطي انټرپولېشن

Linear Interpolation



یوګړندی موټر په متوسط سرعت په 30 دقیقوکې د A ښارته او یونیم ساعت وروسته په همدغه سرعت د B ښارته رسېږي، وواياست چې په همدې ثابت سرعت به نوموړی موټر د C ښار ته چې د A او B ښارونو تر منځ پروت دی، په څومره وخت کې ورسېږي.

فعالیت

- که چېرې $\log A = a$, $\log B = b$ راکړل شوی وي او $\log C = c$ وي، په داسې حال کې چې $A < C < B$ دی.
- $\log C$ د حقیقي عددونو په کومه فاصله کې ځای لري.
- په اټکلي ډول وواياست چې که $(a\,,b)$ یوبل ته نژدې عددونه وي، نو د C لوګاريتم چېرې پروت دی؟
- د a او b تر منځ قیمتونه د حسابي وسط له مخې په لاس راوړئ.

پایله: که چېرې دیوه نامعلوم قیمت د پیداکولو لپاره چې ددوو معلومو عددونو تر منځ پروت وي، د معلوموعددونو په مرسته نامعلوم عدد پیداکړو، په دې صورت کې نوموړې طریقه د خطي انټرپولېشن په نامه یادېږي.

که یو څلور رقمي عددلکه: 1.234 ولرو، نه شوکولای د هغه لوګاریتم له درې رقمي جدول څخه په لاس راوړو، نو د دې ډول عددونو لوګاریتم د خطي انټرپولېشن په واسطه پیداکولای شو.

لومړی مثال: د $\log 5.235$ قیمت په لاس راوړئ.

حل: ښکاره ده چې دنوموړي عدد لوګاریتم په جدول کې نشته، خو د 5.230 او 5.240 عددونوپه منځ کې پراته دي چې لوګاریتمونه یې په جدول کې شته، او په لاندې ډول یې په لاس راوړو.

$$\log 5.230 = 0.7185$$
$$\log 5.240 = 0.7193$$

څرنګه چې $5.23 < 5.235 < 5.24$ دی، نو:

$$\log 5.230 < \log 5.235 < \log 5.240$$
$$0.7185 < \log 5.235 < 0.7193$$

که چېرې $\log 5.535 = x$ په پام کې ونیسو ، نو په دې صورت کې لیکو چې: $0.7185 < x < 0.7193$

د عددونو د لوګاریتم او مانتیسو نو ترمنځ تو پیر په پام کې نیسو.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \text{عددونه} & & \text{لوګاریتمونه} \end{array} \\
0.010 \text{ د عددونو توپیر} & \left[\begin{array}{ccc} & 5.240 & 0.7193 \\ 0.005 & \left[\begin{array}{cc} 5.235 & x \\ 5.230 & 0.7185 \end{array}\right] d & \end{array}\right] 0.0008 \text{ د لوګاریتمونو توپیر}
\end{array}
$$

د خطي انټرپولیشن په طریقه کې له دې څلورو عددونو څخه یو تناسب چې یو له بل سره متناسب دي جوړوو او نامعلوم قیمت پیدا کوو یعنې:

$$\frac{d}{0.0008}=\frac{0.005}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.005\cdot 0.0008}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.000004}{0.010}=0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عددله مانتیس سره جمع کوو. چې حاصل یې د مطلوب عدد لوګاریتم دی.

$$0.0004+0.7185=0.7189$$
$$\log 5.235=0.7189$$

دویم مثال: د 0.0007957 عدد لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$
\begin{aligned}
\log 0.0007957 &= \log(7.957\cdot 10^{-4}) \\
&= \log 7.957+\log 10^{-4} \\
&= \log 7.957-4\log 10 \\
&= \log 7.957-4
\end{aligned}
$$

د 7.957 عدد لوګاریتم په جدول کې نشته، لیدل کېږي چې کرکټرستیک یې -4 دی، خو د 7.96 او 7.95 عددونو لوګاریتم په جدول کې شته.

$$\log 7.960=0.9009$$
$$\log 7.950=0.9004$$

څرنګه چې $7.950<7.957<7.960$ نو:

$$\log 7.950<\log 7.957<\log 7.960$$

د $\log 7.957 = x$ په پام کې نیولو سره، دخطي انټرپولیشن پواسطه یې لوګاریتم په لاس راوړو.

$$\begin{array}{r c l}
 & \begin{array}{cc} \text{عددونه} & \text{لوګاریتمونه} \end{array} & \\
\text{د عددونو توپیر } 0.01 & \left[\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 7.96 & 0.9009 \end{array} \\ 0.007\left[\begin{array}{cc} 7.957 & x \\ 7.950 & 0.9004 \end{array}\right]d \end{array}\right] & 0.0005 \text{ د لوګاریتمونو توپیر}
\end{array}$$

$$\frac{d}{0.0005} = \frac{0.007}{0.01} \Rightarrow$$

$$d = 0.0005\frac{0.007}{0.01} = 0.00035 \approx 0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عدد له مانتیس سره جمع کوو:

$$0.9004 + 0.0004 = 0.9008$$

په پای کې په لاس راځي چې:

$$\log 0.0007957 = 0.9008 + (-4) = \bar{4}.9008$$

دریم مثال: 4.5544 عدد انتي لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: که چېرې $x = anti\log 4.5544$ وضع شي، نو باید x پیداکړو، له پورتنی اړیکې څخه داسې پایله په لاس راځي.

$$\log x = 4.5544 = 4 + 0.5544$$

$$\log x = \log(t \cdot 10^4) = \log t + 4$$

د 4.5544 عدد په جدول کې نشته، خو د 0.5539 او 0.5551 عددونه په جدول کې شته، انتي‌لوګاریتم یې پیدا کوو، ددغه عددونو په مرسته د x قیمت د انټرپولیشن په طریقه پیدا کوو، د عددونو تفاضل لکه: په تېرو مثالونوکې په لاس راوړو او تناسب یې د تېرېه شان تشکیلوو.

$$\begin{array}{r c l}
 & \begin{array}{cc} \text{عددونه} & \text{مانتیسونه} \end{array} & \\
\text{د عددونو توپیر } 0.01 & \left[\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & 3.59 & 0.5551 \end{array} \\ d\left[\begin{array}{cc} t & 0.5544 \\ 3.58 & 0.5539 \end{array}\right]0.0005 \end{array}\right] & 0.0012 \text{ د مانتیسونو توپیر}
\end{array}$$

$$\frac{d}{0.01} = \frac{0.0005}{0.0012}$$

$$d = 0.01 \cdot \frac{0.0005}{0.0012} = \frac{0.000005}{0.0012} = 0.0041667$$

$$d = 0.0042$$

د t د قیمت پیداکولو لپاره د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو.

$$t = 3.58 + d = 3.58 + 0.0042$$
$$= 3.5842$$
$$\log x = \log(3.5842 \cdot 10^4)$$
$$\log x = \log 35842$$

هغه وخت چې ددوو عددونو لوگاریتمونه سره مساوي وي، خپله عددونه په خپل منځ کې سره مساوي دي، نو:

$$x = 35842$$

پوښتنې

په لاندې اړیکو کې د x او z قیمتونه پیداکړئ.

$a) \quad z = \log 0.001582 \qquad\qquad b) \quad x = \log 6.289$

لوګاریتمي او اکسپوننشیل معادلې

Exponential and logarithmic equations

آیا تر اوسه مود $5^x = 5^{\frac{1}{2}x-2}$ او $\log_2(x^2-1)=3$ معادلو د

حل په اړه فکر کړی دی؟

د x په کومو قیمتونو پورتني مساوات سم دی؟

څرنګه کولای شو په دغه ډول معادلاتو کې د x مجهول قیمت وټاکو.

$$\log_2(x^2-1)=3$$

$$5^x = 5^{\frac{1}{2}x-2}$$

تعریف

هغه معادلې چې توانونه یې مجهول وي، داکسپوننشیل معادلو په نامه یادېږي، د مجهول د پیداکولو لپاره که چېرې وکړای شو، د دواړو خواوو قاعدې سره مساوي کړو، نو د طاقت د قوانینو له مخې، چې قاعدې مساوي وي، نو توانونه یې هم یو له بل سره مساوي دي.

لومړی مثال: که $2^{x-1}=32$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د مساواتو د دواړو خوا وو قاعدې سره مساوي کوو.

$$2^{x-1}=32 \Rightarrow 2^{x-1}=2^5 \Rightarrow x-1=5 \quad , \quad x=6$$

دویم مثال: د $8^{3x-1}=2^4$ اکسپوننشیل معادله حل او وازمویئ.

حل:

$$8^{3x-1}=2^4$$
$$(2^3)^{3x-1}=2^{3(3x-1)}=2^4$$

څرنګه چې قاعدې یو له بل سره مساوی دي، نو توانونه یې هم مساوی دي؛ نو لیکو:

$$3(3x-1)=4$$
$$9x-3=4 \Rightarrow 9x=4+3$$
$$9x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{9}$$

آزمونه:

$$8^{3^{\frac{7}{9}}-1} = 2^4$$

$$8^{\frac{7}{3}-1} = 2^4$$

$$8^{\frac{7-3}{3}} = 2^4 \Rightarrow 8^{\frac{4}{3}} = 2^4 \Rightarrow (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 \Rightarrow 2^4 = 2^4$$

فعالیت

- په $16^{x+1} = 64^{x-2}$ اکسپوننشیل معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

لوګاریتمي معادلې:

هغه لوګاریتمي افادې چې په هغوی کې متحول او یا مجهول شتون ولري، د لوګاریتمي معادلو په نامه یادیږي. له یوې لوګاریتمي معادلې څخه د مجهول قیمت پیداکولو لپاره لومړی معادله د لوګاریتم د قوانینو له مخې ساده کوو، وروسته یې د الجبري قوانینو او یا له اکسپوننشیل معادلو څخه په ګټې اخیستنې سره د مجهول یا متحول قیمت په لاس راوړو.

لاندې مثالونه د لوګاریتمي معادلو بېلګې دي چې د مختلفو قوانینو له مخې د مجهول قیمت محاسبه شوی دی.

لومړی مثال: له لاندې لوګاریتمي معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړئ.

حل:

$$\log_2(x^2 - 1) = 3$$

پورته لوګاریتمي شکل داسې لیکو :

$$x^2 - 1 = 2^3$$

$$x^2 = 1 + 8 = 9$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{9} \quad , \qquad x = \pm 3$$

دویم مثال:په $\log_3(x+2)=2\log_3 9$ معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$\log_3(x+2)=2\log_3 9$$
$$\log_3(x+2)=\log_3 9^2$$

څرنګه چې د لوګاریتمونو قاعدې سره مساوي دي، نوعددونه هم یوله بل سره مساوي دي.

$$x+2=9^2 \Rightarrow x+2=81 \Rightarrow x=81-2$$
$$x=79$$

دریم مثال: په $\log_{\sqrt{5}} x-\log_{\sqrt{5}} 3-\log_{\sqrt{5}} 5+\log_{\sqrt{5}} 4=0$ لوګاریتمي معادله کې د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د دوو عددونو د لوګاریتم د ضرب او وېش په کارولو سره پورتنی معادله په لاندې ډول لیکو :

$$\log_{\sqrt{5}} x=\log_{\sqrt{5}} 3+\log_{\sqrt{5}} 5-\log_{\sqrt{5}} 4=\log_{\sqrt{5}}\frac{3\cdot 5}{4}=\log_{\sqrt{5}}\frac{15}{4} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{15}{4}$$

څلورم مثال: په $\log_3(3^{2x}+2)=x+1$ معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

حل:

$$\log_3(3^{2x}+2)=x+1 \Rightarrow 3^{2x}+2=3^{x+1}$$
$$3^{2x}-3^{x+1}+2=0 \Rightarrow 3^{2x}-3\cdot 3^x+2=0$$
$$(3^x)^2-3\cdot 3^x+2=0$$

که $3^x=t$ وضع کړو،نو:

$$t^2-3t+2=0 \Rightarrow (t-1)(t-2)=0$$
$$t_1=1 \qquad , \qquad t_2=2$$

$$3^x=t_1=1 \Rightarrow 3^x=3^0 \Rightarrow x_1=0$$
$$3^x=t_2=2 \Rightarrow \log_3 2=x \Rightarrow x_2=\log_3 2$$

پنځم مثال:په لاندې لوګاریتمي معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

$$\log(x^2+36)-2\log(-x)=1$$

حل:

$$\log(x^2+36)-\log(-x)^2=1$$

$$\log\frac{x^2+36}{x^2}=\log 10 \Rightarrow \frac{x^2+36}{x^2}=10$$

$$x^2+36=10x^2 \Rightarrow 10x^2-x^2-36=0$$

$$9x^2=36 \Rightarrow x^2=4$$

$$x_{1,2}=\pm 2 \quad , \quad x_1=2 \quad , \quad x_2=-2$$

پوښتني

په لاندې لوګاریتمي او اکسپوننشیل معادلوکې د x قیمت په لاس راوړئ.

$a)\quad (11)^{3x-1}=11$

$b)\quad 7^{2x-1}=3^{x+3}$

$c)\quad \log\sqrt{x}+3=4$

$d)\quad \log_5\frac{x-1}{x-2}=2$

درياضيکی عمليوپه سرته رسولوکې له لوګاريتم څخه کار اخېستنه

آيا کولای شو د اعشاری عددونو عمليې لکه ضرب، تقسيم، توان او جذر د لوګاريتم په کارولو سره په اسانه سرته ورسوو.

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{28.8}{78.8}\\ 3.17\cdot 88.2\end{array}\right\}=?$$

د ضرب حاصل پيدا کول د لوګاريتم په مرسته: کولای شو ددوو يا څو عددونو د ضرب حاصل، د لوګاريتم د لاندې قانون له مخې پيدا کړو: $\log(M\cdot N)=\log M+\log N$

مثال: غواړو چې د $3.17\cdot 88.2$ عددونو د ضرب حاصل د لوګاريتم په مرسته پيدا کړو.

حل: د ضرب د قانون په اساس ليکلای شو:

$$\begin{aligned}\log(3.17\cdot 88.2)&=\log 3.17+\log 88.2\\ &=0.5011+1.9455=2.4466\end{aligned}$$

ليدل کېږي چې د0.4466 مانتيس عدد په جدول کې نشته، خود 0.4456 او0.4472 مانتيسونو په منځ کې شته.

له جدول څخه ليدل کېږي چې:

$$anti\log 0.4456=2.79$$
$$anti\log 0.4472=2.80$$

$$\begin{array}{ccc} & \text{عددونه} & \text{مانتيسونه} & & \\ \text{د عددونو توپير } 0.01 & \left[\begin{array}{l} \quad 2.79 \\ d\left[\begin{array}{l} t \\ 2.80 \end{array}\right. \end{array}\right. & \left.\begin{array}{r} 0.4456 \\ \left.\begin{array}{r} 0.4466 \\ 0.4472 \end{array}\right] 0.0006 \end{array}\right] & 0.0016 \text{ د مانتيسونو توپير} \end{array}$$

$$\frac{d}{0.01}=\frac{0.0006}{0.0016}\Rightarrow d=\frac{0.0006\cdot 0.01}{0.0016}=\frac{0.00006}{0.0016}$$
$$d=0.00375$$

د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو:

$$t = 2.79 + 0.00375 = 2.79375$$

$$\log x = \log(2.79375 \cdot 10^2) \Rightarrow x = 297.375$$

په داسې حال کې چې $anti\log 2.4466 = 297.375$ دی، نو: $3.17 \cdot 88.2 = 297.375$

آیا پوهېږی؟

ددوو یا څو عددونو د ضرب لپاره لومړی د لوګاریتم د جمعې حاصل پیدا کوو ، وروسته یې انتي لوګاریتم په لاس راوړو چې دغه انتي لوګاریتم د نوموړو عددونو د ضرب حاصل تشکیلوي.

فعالیت

- د $74.2 \cdot 62$ د ضرب حاصل د لوګاریتم په واسطه پیدا کړئ.

د خارج قسمت پیدا کول د لوګاریتم په مرسته:

کولای شو د لوګاریتم له څلورم قانون څخه په کار اخیستنې سره ، د دوو اعشاري عددونو دتقسیم حاصل په لاس راوړو یعنې : $\log \dfrac{M}{N} = \log M - \log N$

مثال: غواړو د $\dfrac{8750}{3.49}$ خارج قسمت د لوګاریتم پواسطه پیداکړو.

حل:

$$\log \frac{8750}{3.49} = \log 8750 - \log 3.49$$

د لوګاریتم له جدول څخه لروچې:

$$\log 8750 = 3.9420$$

$$\log 3.49 = 0.5428$$

$$\log 8750 - \log 3.49 = 3.9420 - 0.5428 = 3.3992$$

$$anti\log 3.3992 = 2507$$

$$\frac{8750}{3.49} = 2507$$

یادونه: ددوو عددونو د خارج قسمت د حاصل پیداکولو لپاره لومړی دمقسوم لـه لوګـاریتم څخـه د مقسوم علیه لوګاریتم کموو، وروسته ددغـه تفـاوت انتـي لوګـاریتم پـه لاس راوړو چې داد مطلوب خـارج قسمت حاصل دی.

فعالیت

- د $\frac{374}{16.2}$ حاصل د لوګاریتم په مرسته په لاس راوړئ.

د لوګاریتم په واسطه د توان لرونکي عدد محاسبه:

د هغو توان لرونکوعددونومحاسبه چې توانونه يې تام اويا کسرونه وي، د لوګاریتم له پـنځم قـانون څخـه کـار اخلو يعني $\log M^n = n\log M$

مثال: غواړو چې د $(1.05)^6$ عدد محاسبه کړو.

حل:

$$\begin{aligned}\log(1.05)^6 &= 6\log 1.05 = 6(0.0212)\\ &= 0.1272\end{aligned}$$

بناپردی $anti\log 0.1272 = 1.340$

په لنډ ډول ویلای شوچې: دیوه توان لرونکي عدد قیمت پیداکولو لپاره لـومړی د عـدد تـوان پـه لوګـاریتم کې ضربوو، ددغه حاصل ضرب انتي لوګاریتم د توان لرونکي عدد قیمت دی.

فعالیت

- د $(694)^{\frac{2}{3}}$ عدد قیمت د لوګاریتم په واسطه پیداکړئ.

پوښتنې

1. د لاندې حاصل ضرب د لوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$0.097 \cdot 7.78 = ?$$

2. لاندې د تقسیم حاصل د لوګاریتم په واسطه حساب کړئ.

$a)\quad \dfrac{8}{737} = ?$ $\qquad b)\quad \dfrac{32.2}{25.1} = ?$

3. لاندې توان لرونکي عدد دلوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$(964)^{\frac{2}{3}} = ?$$

د څپرکي مهم ټکي

اکسپوننشیل تابع: که a یو مثبت عدد او $a \neq 1$ وي، نو د $f(x) = a^x$ تابع اکسپوننشیل تابع د a په قاعده نومیږي.

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه:

- د اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه حقیقي عددونه او دقیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د اکسپوننشیل تابع ګراف چې $a \neq 1$ وي، منحني یې د $(0،1)$ له ټکي څخه تېرېږي.
- د اکسپوننشیل تابع ګراف نظر y محور ته متناظر واقع دی.
- هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوس تابع یې $Log_a x$ دی.

لوګاریتمي تابع: $y = \log_a x$ چې د $y = a^x$ اکسپوننشیل تابع معکوس دی، د لوګاریتمي تابع په نامه یادیږي.

دلوګاریتمي تابع خواص

- دلوګاریتمي تابع د قیمتونو ساحه مثبت حقیقي عددونه تشکیلوي.
- د لوګاریتمي تابع ګراف په قایمو مختصاتو کې د $(1،0)$ له ټکي څخه تېرېږي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره تابع $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د هرې لوګاریتمي تابع $f(x) = \log_a x$ مجانب، د y محور دی.

د لوګاریتم قوانین:

- لومړی قانون $\log_a a = 1$
- دویم قانون $\log_a 1 = 0$
- دریم قانون $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
- څلورم قانون $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- پنځم قانون $\log_a x^n = n \log_a x$
- شپږم قانون $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$
- اووم قانون $\frac{\log_a M}{\log_a b} = \log_b M$
- اتم قانون $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

د لوګاریتم ډولونه:

معمولي لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده یې 10 وي، معمولي لوګاریتم یا اعشاري (Brigys) لوګاریتم بلل کېږي چې د (log) په سمبول سره ښودل کېږي.

طبیعي لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده یې e وي، د طبیعي لوګاریتم په نامه یادېږي، چې طبیعي لوګاریتم د ln په سمبول ښودل کېږي یعنې $\log_e x = \ln x$

کرکټرستیک او مانتیس

کرکټرستیک که چېرې $\log x = n + \log S$ وي داسې چې $1 \le S < 10$ او n یو تام عدد دی n د مشخصې یا کرکټرستیک په نامه یادېږي چې د عدد د رقمونو له مخې ټاکل کېږي.

مانتیس: د $(\log S)$ اعشاري برخه د مانتیس په نامه یادېږي چې د جدول له مخې ټاکل کېږي، مانتیس یو مثبت عدد د صفر او یوه ترمنځ دی.

انتي لوګاریتم (antilogarithm): که $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوګاریتم انتي لوګاریتم دی یعنې $y = anti \log x$

خطي انټرپولیشن: که یو نامعلوم عدد ددوو معلومو عددونو په منځ کې واقع وي او د معلومو عددونو په مرسته نامعلوم عدد پیدا کړو، پدې صورت کې دا طریقه د خطي انټرپولیشن په نامه یادیږي.

اکسپوننشیل او لوګاریتمي معادلې

- **اکسپوننشیل معادلې** هغه معادلې چې په هغې کې د حدونو، توانونه مجهول وي، د اکسپوننشیل معادلی په نامه یادېږي، د مجهول د پیدا کولو لپاره د طاقت له قوانینو څخه ګټه اخلو.
- **لوګاریتمي معادلې** هغه لوګاریتمي مساوات چې په هغوی کې مجهول موجودوي، د لوګاریتمي معادلو په نامه یادېږي.

د څپرکي پوښتني

لاندې پوښتنې په غور ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا اوله هغه څخه کرې تاو کړئ.

1. $\log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{4})$ مساوي له څو سره دی؟

$a)\ 4 \qquad b)\ -4 \qquad c)\ 3 \qquad d)\ -3$

2. د $\log_b \sqrt[4]{81} = \frac{1}{4}$ اړيکه کې د b قيمت عبارت دی له:

$a)\ \frac{1}{4} \qquad b)\ 81 \qquad c)\ \sqrt{81} \qquad d)\ -4$

3. د $\log_3 81 - \log 0.01$ افادې قيمت په لاس راوړئ.

$a)\ 0 \qquad b)\ 4 \qquad c)\ 8 \qquad d)\ 9$

4. د x قيمت په $\log 81 - \log 2x = \log 3$ افاده کې مساوي له څو سره دی.

$a)\ 2 \qquad b)\ 3 \qquad c)\ 4 \qquad d)\ 5$

5. $\log_2 16 = ?$

$a)\ 4 \qquad b)\ 3 \qquad c)\ 5 \qquad d)\ -4$

6. $\log_{\frac{1}{5}} 125$

$a)\ 3 \qquad b)\ -3 \qquad c)\ 4 \qquad d)\ 5$

7. د $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ قيمت عبارت دی له :

$a)\ \frac{1}{2} \qquad b)\ -\frac{1}{2} \qquad c)\ 1 \qquad d)\ -1$

8. د x قيمت د $3^{x-1} = 9$ په معادله کې عبارت دی له :

$a)\ x=-3 \qquad b)\ x=9 \qquad c)\ x=-9 \qquad d)\ x=3$

9. د $\log 234.21$ مشخصه ياکرکترستيک عبارت دی له:

$a)\ 0 \qquad b)\ 1 \qquad c)\ 2 \qquad d)\ 3$

10. د يوه عدد دلوګاريتم معکوس عبارت دی له:

$a)\ \log_a m = \frac{1}{\log_a m} \qquad b)\ \log_a m = -\frac{1}{\log_a m} \qquad c)\ \log_a m = \frac{1}{\log_m a} \qquad d)$ هيڅ يو

1. په لاندې معادلوکې د x قیمت پیدا کړئ

$a)\ 3^x = 3^{3x+2}$ $b)\ 3^{2x} = 9^{4x-1}$

$c)\log_3(x+2) = 2\log_3 9$ $d)\ 16^{x+1} = 64^{x-2}b$

$e)15^{2x-1} = 7^{x+1}$ $f)\ \log\sqrt{x+1} = 1-\frac{1}{2}\log x$

$g)\log(4x-3) = 2-\log 20$ $h)\ \log_5(x-1)-\log_5(x-2) = \log_5 2$

2- لاندې لوګاریتمي افادې د لوګاریتم د قوانینو په کارولو سره ساده کړئ.

$a)\log_8 3\sqrt{4} = ?$ $b)\log_3\frac{1}{243} = ?$

$c)\log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $d)\log(\frac{8}{\sqrt{128}}) = ?$ $e)\ \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$

3. لاندې لوګاریتمونه محاسبه کړئ.

$a)\quad \log_8\sqrt[3]{4} = ?$ $b)\quad \log_3\frac{1}{243} = ?$

$c)\quad \log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $d)\quad \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$ $e)\quad \log\frac{8}{\sqrt{128}} = ?$

4. لاندې انتي لوګاریتمونه پیدا کړئ.

$a)\ 1.7300$ $b)0.8954$ $c)4.5682$ $d)\bar{2}.1987$

5. دلاندې هر عدد لوګاریتم حساب کړئ.

$a)89500$ $b)\ 91$ $c)3065.3$ $d)\log 0.002$

6. د لوګاریتم په مرسته لاندې حاصل ضرب پیدا کړئ.

$a)\quad 2.01\cdot 52.9$ $b)\quad (0.0062)(-34.8)$

7. د لاندې تقسیم حاصل د لوګاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ 0.888\div 256$ $b)\ 17.3\div 7.47$

8. د لاندې توان لرونکو عددونو قیمتونه د لوګاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)(7.42)^3$ $b)(-84.7)^2$ $c)\sqrt{418}$ $d)\sqrt{0.21}$

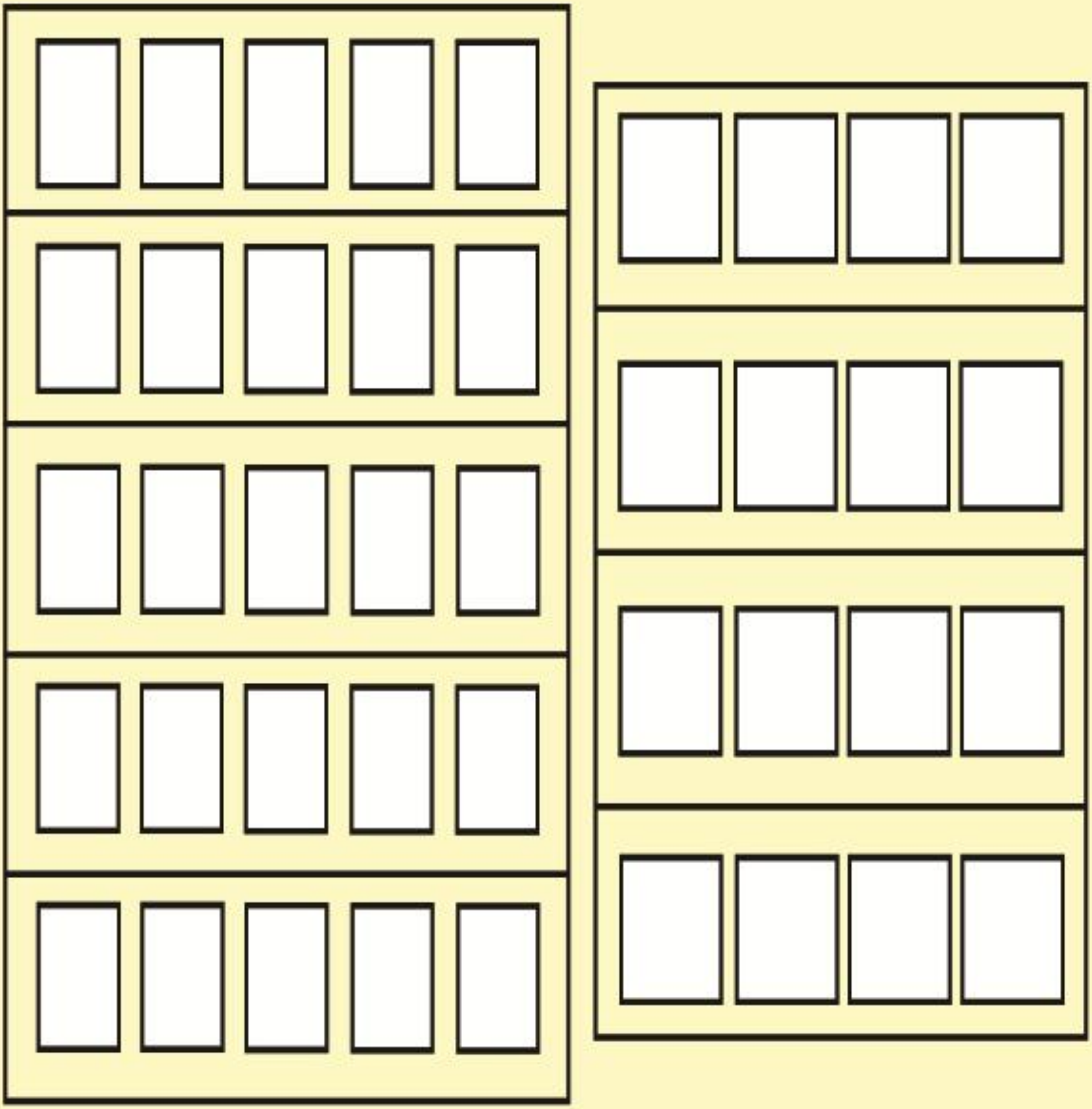
د لوګاریتم جدول چې مانتیس یې څلور اعشاري رقمونه لري

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

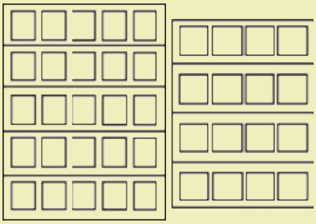
شپږم څپرکی

متریکسونه



متریکسونه

Matrixes



د څو پوړیزې ودانۍ تصویر په پام کې نیسو، هره ودانۍ څو پوړه لري، په مخامخ شکل کې وینو چې د لویې ودانۍ د کړکیو شمېر $5\cdot5 = 25$ دی، د کوچنې ودانۍ د هر پوړ کړکۍ وشمېرئ.

فعالیت

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $M(x, y)$ ټکی وټاکئ.
- د M ټکی متناظر یعني $M'(x', y')$ نظر x محور ته وټاکئ.
- د M او M' مختصاتو تر منځ اړیکې ولیکئ.
- پورتنۍ اړیکې د ضریبونو په څېر ولیکئ.
- د پورتني فعالیت ټول مراحل، د p او د هغه متناظر p'، نظر y محورته S او د هغه متناظر S' نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ سرته ورسوئ.

د پورتني فعالیت له اجراء څخه وروسته لاندې پایله لیکلای شو:

$$\begin{cases} x = x' \\ -y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x + 0y = x' \\ 0x - 1y = y' \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} M \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} M' \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \end{array}$$

په دې معنا چې د M ټکی د $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ په واسطه د M' په ټکي بدل او یا اوښتی دی.

پوهېږئ چې هر یو $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د یوه ټکي ستوني ښوونه ده.

او دغه جدول $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ یوه نوې وسیله ده چې د لومړي ځل لپاره تاسو له هغې سره مخامخ کېږئ.

په همدې ډول: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ هر يو د p', p او s', s دټکوبدل شوي وسيله ده.

لاندې هرې يوې وسيلې ته (چې دټکود بدلولو د بدليدو دنده په غاړه لري) مټريکس وايي.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

تعريف:د شيانو، عددونو يا تورو ګېډئ چې په سطري او ستوني ډول، په يوه مستطيلي جدول کې ترتيب شي، د مټريکس (Matrix) په نامه يادېږي.

د مستطيلي جدول هر عنصر د مټريکس د عنصر پـه نامـه يـادېږي. لـوی حروفونـه د $A, B, C...$ مټـريکس ښيي او واړه حروفونه $a, b, c...$ د مټريکس عناصر دي.

د عددونو هر يولاندی جدول يو مټريکس په ګوته کوي.

$$\begin{array}{c} A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ -3 & 7 & 5\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix} \\ \text{لومړی ستون} \quad \text{دويم ستون} \quad \text{دريم ستون}\end{array} \begin{array}{l} \dashrightarrow \text{لومړی سطر}\\ \dashrightarrow \text{دويم سطر}\\ \dashrightarrow \text{دريم سطر} \\ \\ \end{array}$$

$$B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} \begin{array}{l} \dashrightarrow \text{لومړی سطر}\\ \dashrightarrow \text{دويم سطر}\\ \dashrightarrow \text{دريم سطر}\end{array}$$

$$C=\begin{pmatrix}0 & \frac{4}{3} & 7 & -2\end{pmatrix} \dashrightarrow \text{کرښه}$$

که چېرې a د يوه مټريکس په $i-$ام کرښه او $j-$ام ستون کې ځای ولري، هغه د a_{ij} پـه شـکل ښـودل کېږي چې i او j طبيعي عددونه دي، په ترتيب سـره د سـطر او سـتون لـه شـمېر څخه ښـکارندويي کـوي.

$$i=1,2,3... \ , \ j=1,2,3...$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}...a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}...a_{2n}\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}...a_{mn}\end{pmatrix}$$

د متریکس مرتبه: که د A د متریکس د سطرونو شمیر m او د ستونونو شمیر یې n وي، وایو چې د A متریکس مرتبه د $m\times n$ څخه عبارت دی اوداسې ویل کېږي چې m په n کې متریکس او لیکو $A=(a_{ij})_{m\times n}$ د هر متریکس د سطرونو او ستونونو شمیر د همغه متریکس مرتبه ښیي.

فعالیت

- د لاندې متریکسونو مرتبه وټاکئ.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

پاملرنه وکړئ، هغه متریکس چې یو سطر او یو ستون لري یعنې $A=(X)_{1\times 1}$، نو د A متریکس د هغه له داخلي عدد سره مساوي دی. $A=(7)_{1\times 1}=7$

مثال: لاندې متریکسونه د مستطیلي جدول په ډول ولیکئ.

$a)\quad (a_{ij})_{2\times 2}=(i+j)_{2\times 2} \qquad\qquad b)\quad (a_{ij})_{3\times 2}=(i\cdot j)_{3\times 2}$

حل: د پورتني هر مثال د حل لپاره لومړی د متریکس عمومي شکل لیکو، د a جزء د متریکس عمومي شکل 2×2 کې یو متریکس دی.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}=i+j$

$a_{11}=1+1=2\ ,\quad a_{12}=1+2=3\ ,\quad a_{21}=2+1=3\ ,\quad a_{22}=2+2=4$

په پایله کې غوښتل شوی متریکس عبارت دی له: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

د b جزء): د b جزء د متریکس عمومي شکل یو (3×2) کې متریکس دی، یعنې 3 سطره او 2 ستونه لري.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$a_{11}=1\cdot 1=1\ ,\quad a_{21}=2\cdot 1=2\ ,\quad a_{31}=3\cdot 1=3$

$a_{12}=1\cdot 2=2\ ,\quad a_{22}=2\cdot 2=4\ ,\quad a_{32}=3\cdot 2=6$

په پایله کې غوښتل شوی مټریکس عبارت دی له:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

دوهمه مرتبه مټریکسونه هغه وخت سره مساوي دي چې د هغوی هر عنصر یو په یو سره مساوي وي، مثلاً: $\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ هغه وخت یوله بل سره مساوي دي چې $a=-1$ او $b=2$ وي، آیا $(1 \quad 2)$ او $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ مټریکسونه یوله بل سره مساوي دي اوکه نه؟ ولې؟

پوښتنې

1. د لاندې مټریکسونو مرتبې ولیکئ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. لاندې مټریکسونه د مستطیلي جدول په شکل ولیکئ.

$a)\ (a_{ij})_{3\times3} = (2i+3j)_{3\times3}$ $\qquad$ $b)\ (a_{ij})_{2\times3} = (\frac{i}{j})_{2\times3}$

د مېټريکسونو ډولونه

د مېټريکسونومخامخ شکلونه څو سطرونه اوڅوستونونه لري؟

آیاصفرونه دمېټريکس عناصر کېدای شي؟

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. **سطري مېټريکس(Row Matrix):** هغه مېټريکس چې يوازې او يوازې يو سطر ولري، سطري مېټريکس يې بولي، مثلاً:
$$A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 & 0 \end{pmatrix}_{1\times 4}$$

2. **ستوني مېټريکس (Column Matrix):** هغه مېټريکس دى چې يوازې يو ستون ولري، د ستوني مېټريکس په نامه يادېږي، مثلاً:
$$A=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

3. **صفري مېټريکس(Null matrix):** هغه مېټريکس چې ټول عناصريې صفرونه وي، له صفري مېټريکس څخه عبارت دى او د $0_{m\times n}$ په شکل يې ښيي.
$$0_{2\times 4}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 4} \qquad 0_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

4. **مربعي مېټريکس(Square Matrix):** که چېرې په يوه مېټريکس کې د سطرونو شمېر د ستونونو له شمېرسره برابر $(m=n)$ شي، د مربعي مېټريکس په نامه يادېږي، مثلاً:
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad , \qquad m=n \;\Rightarrow\; 3=3$$

هر مربعي مېټريکس دوه قطرونه لري.

هغه قطر چې عناصر يې $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ وي، اصلي قطر(Mean diagonal) او هغه قطر چې عناصر يې $a_{n1}, \ldots, a_{1n}$ وي، فرعي قطر (Minor Diagonal) بلل کيږي.

اصلي قطر　　　　فرعي قطر

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فرعي قطر　　　　اصلي قطر

فعاليت

- داسې متريکسونه وليکئ چې مرتبې يې 1×3 او 4×1 وي، دا څه ډول متريکسونه دي؟

5. **قطري متريکس** (Diagonal Matrix)**:** هغه متريکس چې ټول عناصر يې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، د قطري متريکس په نامه ياديږي.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad ، \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

6. **سکالر متريکس** (Scalar Matrix)**:** هغه قطري متريکس چې د اصلي قطر عناصر يې سره مساوي وي، د سکالر متريکس په نامه يې ياديږي، لکه:

$$A=\begin{pmatrix} K & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & K & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & K & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & K \end{pmatrix}_{m\times n}$$

7. **واحد متريکس** (Unite Matrix)**:** که چيرې په يو سکالر يا قطري متريکس کې د اصلي قطر ټول عناصر د (1) عدد وي، دغه ډول متريکس ته واحد متريکس وايي او په I_n سره ښوول کيږي.

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\ldots0 \\ 0 & 1 & 0\ldots0 \\ 0 & 0 & 1\ldots0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\ldots1 \end{pmatrix}$$

فعالیت

- یو د 3×3 مرتبې متریکس ولیکئ چې د اصلي قطر ښکته ټول عناصر یې صفرونه وي.
- په همدې ډول یو د 3×3 مرتبې متریکس ولیکئ چې د اصلي قطر پورتني عناصر یې ټول صفرونه وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانېږي:

که چېرې په یوه مربعي متریکس کې د اصلي قطر پورتني او یا ښکتني ټول عناصر صفرونه وي، په دغه صورت کې متریکس د مثلثي متریکس (Triangular matrix) په نامه یادېږي.

که چېرې د اصلي قطر پورتني ټول عناصر صفرونه وي، د پورتني مثلثي متریکس (Upper triangular matrix) او که چېرې د اصلي قطر ښکتني ټول عناصر صفرونه وي، د ښکتني مثلثي متریکس (lower triangular matrix) په نامه یادېږي.

په لاندې مثالونو کې A یو پورتنی مثلثي متریکس او B ښکتنی مثلثي متریکس دی.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&0\\3&7&9\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&9\\0&0&4\end{pmatrix}$$

متقابل (متضاد) متریکس:

که چېرې د A متقابل متریکس په $(-A)$ سره وښودل شي نو، دا هغه متریکس دی چې هر عنصر د A متناظر عنصر متضاد دی. که چېرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو متریکس وي، نومتقابل متریکس یې $(-A)$ په لاندې ډول تعریفېږي:

$$A=(a_{ij})_{m\times n}\overset{\text{متقابل}}{\Rightarrow}-A=(-a_{ij})_{m\times n}$$

لکه په لاندې مثال کې:

$$A=\begin{pmatrix}2&4&5\\-1&2&0\\2&-3&-4\end{pmatrix}\Rightarrow -A=\begin{pmatrix}-2&-4&-5\\1&-2&0\\-2&3&4\end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. لاندې مټریکسونه په پام کې ونیسئ، مرتبې او اړوند نومونه یې وټاکئ:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -5\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\qquad b)\ B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad c)\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$d)\ D=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\qquad e)\ E=\begin{pmatrix}5 & -6 & 7 & 8\end{pmatrix}\qquad f)\ F=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$$

$$g)\ G=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}\qquad h)\ H=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

د مېټريکسونو جمع او تفريق

Addition and subtraction of Matrix

په مخامخ مېټريکسونو کې د هغوی د جمعې او تفريق په اړه د امکان په صورت کې څه ويلای شئ.

$$\left.\begin{array}{l} A+A= \\ A-A= \\ A+B= \\ A-B= \\ B+B= \\ B-B= \end{array}\right\} ?$$

1) **د مېټريکسونو جمع**:

که چېرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ دوه مېټريکسونه وي، نو $A+B=C$ عبارت له هغه مېټريکس څخه دی چې د C_{ij} هر عنصر يې د a_{ij} او b_{ij} د جمعې له حاصل څخه لاس ته راغلی وي، يعنې د دوو مېټريکسونو جمع کول يوازې هغه وخت امکان لري چې د دواړو مېټريکسونو مرتبې سره مساوي وي. څرنګه چې C_{ij} د دوو حقيقي عددونو د جمعې حاصل دی، نو:

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}\Rightarrow (a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}$$

مثال:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\\ 1 & 7\end{pmatrix}_{3\times 2} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\\ 0 & -4\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\\ 1 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3 & 2+2\\ -2+1 & 0+2\\ 1+0 & 7+(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4\\ -1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=C_{3\times 2}$$

2. **د مېټريکسونو تفريق**:

د جمعې عمليې ته ورته کولای شو، د دوو مېټريکسونو تفاضل يا د تفريق حاصل په لاس راوړو. که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ وي، نو د تفريق حاصل يې په لاندې ډول په لاس راوړای شو:

$$A_{m\times n}-B_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}-(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}=C_{m\times n}$$

فعاليت

- که $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ وي، $A-B$ په لاس راوړئ.

د مټریکسونو د جمعې او تفریق خاصیتونه:

1. د مټریکسونو جمع کول دبدلون خاصیت لرى، خو د مټریکسونو تفریق د بدلون خاصیت نه لري، یعنې:

$$A+B=B+A$$

$$A-B\neq B-A$$

2. د مټریکسونو جمع او تفریق اتحادي خاصیت لري. $(A\pm B)\pm C=A\pm(B\pm C)$

3. د عینیت عنصر (Identity Element) د مټریکسونو په جمع کې صدق کوي ،خو د مټریکسونو په تفریق کې صدق نه کوي. $A+0=0+A=A$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: ځرنګه چې د دواړو مټریکسونو مرتبه سره برابره (3×3) ده، نو کولای شو د تفریق حاصل یې په لاس راوړو.

$$A-B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-11&2-1&3-5\\2&-0&5-3&4-0\\6&-2&0-5&1-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&1&-2\\2&2&4\\4&-5&-5\end{pmatrix}$$

فعالیت

- د یوه مثال په واسطه وښایاست چې $A-B\neq B-A$ دی.

دویم مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\0&6\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}3&1&3\\2&5&-1\end{pmatrix}$ وي، د امکان په صورت کې $A+B$ او $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: لیدل کېږي چې د A او B مټریکسونو مرتبې سره خلاف دي، نو له دې امله یې جمع او تفریق امکان نه لري، ځکه د A د مټریکس مرتبه 3×2 او د B مټریکس مرتبه 2×3 ده.

پوښتنې

لاندې مټریکسونه د امکان تر بریده جمع او تفریق کړئ:

a) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}$, c) $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&4\\-1&0&1\end{pmatrix}$

په مټريکس کې د سکالر ضرب

$$K\cdot A=K\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

موږ د مټريکسونو د جمعې او تفريق قاعده وليدله که $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ يو **مټريکس** او K يو سکالر وي،

د هغوی د ضرب حاصل په اړه څه فکر کوئ؟

فعاليت

- که $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ يو **مټريکس** او k يو سکالر وي، د $K\cdot A$ حاصل په لاس راوړئ.

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad , \quad KA=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- د $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ **مټريکس** په کوم عدد کې ضرب شي، تر څو يې د ضرب حاصل يو واحد مټريکس شي.

کولای شو د فعاليت له اجرا کولو وروسته يې په لاندې ډول تعريف کړو.

تعريف: که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ يو **مټريکس** او $K\in IR$ يو حقيقي عدد وي، نو KA د C له **مټريکس** څخه عبارت دی، په داسې حال کې چې د C_{ij} هر عنصر د K د ضرب حاصل په a_{ij} کې دی.

$$C_{ij}=K(a_{ij})$$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ او $K=2$ وي، د KA د ضرب حاصل پيدا کړئ.

حل:
$$KA=2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 6 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 0 & 2(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

په مټريکس کې د سکالر ضرب خاصيتونه:

که چېرې A او B دواړه د يو شان مرتبې مټريکسونه، α او β دوه حقيقي عددونه وي، نو:

$a)\ \ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$b)\ \ (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

$c)\ \ \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

دويـــم مثــال: کـه چېـرې $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$, $\alpha=3$, $\beta=2$ راکـړل شـوي وي، وښاياسـت چـې

$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)\ A=\beta(\alpha A)$

حل:

$$\alpha(\beta A)=3\left[2\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}\right]=3\begin{pmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot 6 \\ 2(-3) & 2\cdot 9 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -6 & 18 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3\cdot 6 & 3\cdot 12 \\ 3(-6) & 3\cdot 18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 36 \\ -18 & 54 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha\ \beta)A=(3\cdot 2)\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 6\cdot 3 & 6\cdot 6 \\ 6(-3) & 6\cdot 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 36 \\ -18 & 54 \end{pmatrix}$$

$$\beta(\alpha\ A)=2\left[3\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}\right]=2\begin{pmatrix} 3\cdot 3 & 3\cdot 6 \\ 3(-3) & 3\cdot 9 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 9 & 18 \\ -9 & 27 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 36 \\ -18 & 54 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$$

پوښتني

1. کـه چېـرې $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha=2$ او $\beta=1$ راکـړل شـوي وي. پـه مټريکس کې د سکالر ضرب درې خاصيتونه تطبيق کړئ؟

2. که $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ او $K=3$ وي، KA او $\frac{1}{K}A$ پيدا کړئ.

د دوو مېټریکسونو ضرب

Multiplication of two Matrixes

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=?$$

ایاد دوو مېټریکسونو د ضرب لپاره کوم نظر ورکولای شئ؟

تاسو د دوو مېټریکسونو د جمعې لپاره پیدا کړل چې $A+B=B+A$ دی، د مېټریکسونو د ضرب لپاره څه فکر کوئ؟

تعریف

دوه مېټریکسونه د $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ په پام کې ونیسئ، د دې لپاره چې دا داوړه مېټریکسونه یو په بل کې ضرب شي، نو باید د لومړی مېټریکس د ستونونو شمېر د دویم مېټریکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي. د مېټریکسونو د ضرب حاصل بیا هم یو مېټریکس دی ،لکه: $C=(a_{ij})_{m\times p}$ چې د سطرونو شمېر یې د لومړي مېټریکس د سطرونو په اندازه او د ستونونو شمېر یې د دویم مېټریکس د ستونونو له شمېر سره برابر دی.

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

د دوو مېټریکسونو د ضرب لپاره په لاندې ډول کړنه کوو:

د لومړي مېټریکس لومړی سطر د دویم مېټریکس په ټولو ستونونو کې په وار سره ضربوو او په همغه سطر کې یې لیکو، په دویمه مرحله کې بیا هم د لومړي مېټریکس دویم سطر د دویم مېټریکس په ټولو ستونونو کې په وار سره ضربوو او په همغه دویمه سطر کې یې لیکو، دغې عملیې ته تر هغه دوام ورکوو، ترڅو ټول سطرونه د لومړي مېټریکس په دویم مېټریکس کې ضرب شي، په دغه ډول د مېټریکسونو د ضرب حاصل محاسبه کېږي. دغه مطلب کولای شو په لاندې ډول وښیو.

$$(a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=(C_{ij})_{m\times p}$$

لومړی مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ راکړل شوي وي، نو $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل: د دوو متریکسونو د ضرب له تعریف څخه پوهیږو:

دویم پړاو

لومړی پړاو

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 0+0\cdot(-1) \\ -1\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

دویم مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ راکړل شوي وي، نو $A\cdot B$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: بیا هم د متریکسونو د ضرب له تعریف څخه په کار اخیستنې لرو چې:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} (2\ \ 3\ \ -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} & (2\ \ 3\ \ -1)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ (-2\ \ 1\ \ 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} & (-2\ \ 1\ \ 2)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}\begin{array}{l} =\begin{pmatrix} 2\cdot 1+3\cdot 2+(-1)(-1) & 2\cdot 3+3\cdot 0+(-1)\cdot 2 \\ (-2)(1)+1\cdot 2+2(-1) & -2(3)+1\cdot 0+2\cdot 2 \end{pmatrix} \\ =\begin{pmatrix} 2+6+1 & 6+0-2 \\ -2+2-2 & -6+0+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 2} \end{array}$$

دریم مثال: $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ وي $A\cdot B$ پیدا کړئ.

حل :

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 3+3\cdot 6 & 1\cdot 2+3\cdot 1 & 1\cdot 0+3\cdot 7 \\ 5\cdot 3+2\cdot 6 & 5\cdot 2+2\cdot 1 & 5\cdot 0+2\cdot 7 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3+18 & 2+3 & 0+21 \\ 15+12 & 10+2 & 0+14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 21 & 5 & 21 \\ 27 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ وي، د ضرب دحاصل دشتون په صورت کې AB او BA پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

څلورم مثال: که $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ او $D=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ وي، CD او DC پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

حل:

$$CD=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2(-3)+(-1)(-4) & 2\cdot 4+(-1)(-3) \\ 1(-3)+2(-4) & 1\cdot 4+2(-3) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -6+4 & 8+3 \\ -3-8 & 4-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{pmatrix}$$

$$DC=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3\cdot 2+4\cdot 1 & (-3)(-1)+4\cdot 2 \\ -4\cdot 2+1\cdot(-3) & -4(-1)+(-3)\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -6+4 & 3+8 \\ -8-3 & 4-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{pmatrix}$$

معلومېږي چې $CD = DC$ دی.

د میټریکس د ضرب خواص:

لومړی خاصیت: په عمومي ډول د دوو میټریکسونو په ضرب کې د بدلون خاصیت صدق نه کوي.

یعنې که A او B دوه میټریکسونه او AB او BA تعریف شي، نو: $AB \neq BA$

دویم خاصیت: د میټریکسونو ضرب د اتحادي ضرب خاصیت لري. که چېرې B, A او C د $m \times n$ مرتبې میټریکسونه وي، نو $(AB)C = A(BC)$

دریم خاصیت: د میټریکسونو ضرب توزیعي خاصیت د جمعې او ضرب لپاره لري، نو لرو:

$a)\ \ A(B+C)=AB+AC$

$b)\ \ (A+B)C=AC+BC$

$c)\ \ K(AB)=(KA)B=A(KB) \quad , \quad K \in IR$

$d)\ \ IA=AI=A$

پوښتنې

د لاندې متریکسونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

$$b)\ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = ?$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$$

د یوه مټریکس ترانسپوز

Transpose of Matrix

که په یو مټریکس کې سطرونه په ستونونو او ستونونه په سطرونو بدل شي نوی مټریکس چې په لاس راځي په څه نوم یادیږي؟

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ مټریکس په پام کې ونیسئ، سطرونه ستونونوته او ستونونه سطرونو ته ولیږدوی، هغه نوی مټریکس چې په لاس راځي ویې لیکئ.
- که چیرې د یوه مټریکس د سطرونو او ستونونو ځایونه یوله بل سره بدل کړو افقي لیکې په عمودي او عمودي په افقي واړوو، هغه نوی مټریکس چې لاس ته راځي، آیا له لومړي مټریکس سره مساوي دی، نوی مټریکس په څه نوم یادیږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

تعریف: که چیرې د یوه مټریکس چې مرتبه یې $(m\times n)$ وي، سطر په ستون او ستون په سطر واړول شي، هغه نوی مټریکس چې په لاس راځي، له ترانسپوز(Transpose) مټریکس څخه عبارت دی، د A ترانسپوز مټریکس په A^T بنودل کیږي. د ترانسپوز مټریکس مرتبه $(n\times m)$ ده.

مثلاً: که چیرې $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}_{2\times 3}$ وي، نو ترانسپوز مټریکس یې عبارت دی له: $A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}_{3\times 2}$، که یو ترانسپوز مټریکس یعنې A^T له خپل ځان یعنې A سره مساوي شي، نو په دې صورت کې A مټریکس ته متناظر مټریکس (Symmetric Matrix) وایي.

مثلاً: $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}$ یو متناظر مټریکس دی، ځکه: $A^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=A$

د متناظر مټریکس پیژندل: په متناظرو مټریکسونو کې عناصر نظر اصلي قطر ته متناظراو مساوي دي:

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & c & f\\ c & f & d\end{pmatrix}$$

د ټرانسپوز مټریکس خواص:

لومړی خاصیت: د یوه ټرانسپوز مټریکس ټرانسپوز له خپل لومړي مټریکس سره مساوي دی.

$$(A^T)^T = A \Rightarrow \left[(a_{ij})^T\right]^T = (a_{ji})^T = (a_{ij}) = A$$

دویم خاصیت: د دوو یا څو ټرانسپوز مټریکسونو د جمعې او تفریق حاصل د دوی د هر یوه د جمعې او تفریق له ټرانسپوز مټریکسونو سره مساوي دی. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

او یا په عمومي ډول $(A \pm B \pm C \pm \ldots)^T = A^T \pm B^T \pm C^T \pm \ldots$

دریم خاصیت: $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

څلورم خاصیت: $(\alpha A)^T = \alpha A^T \quad , \quad \alpha \in IR$

$$(-A)^T = -A^T$$

فعالیت

- که چېرې $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ راکړل شوي وي، وښایاست چې:

$$(A - B)^T = A^T - B^T \quad , \quad (A + B)^T = A^T + B^T$$

مثال: د لاندې مټریکسونو ټرانسپوز مټریکسونه په لاس راوړئ.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3}$$

حل:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3} \quad \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -6 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

پوښتنې

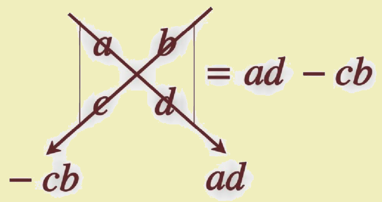
1. د A او B مټریکسونه په پام کې ونیسئ، د هغوی ټرانسپوز مټریکسونه په لاس راوړئ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

2. په پورتنیو مټریکسونو باندې د 3 عدد لپاره د ټرانسپوز مټریکس 4 خاصیتونه وښایاست.

دیټرمینانت

Determinant



پـه یـوه عـددي مثـال کـې یـو مربعـي مټـریکس داسـې وټاکئ چې د $ad - bc$ حاصل تفریق مساوي په صفر شي.

تعریف

که چېرې د A مټریکس یوه حقیقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د مټریکس له دیټرمینانت څخه عبارت دی، د $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ د مټریکس دیټرمینانت په $|A|$، det A او یا $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ په ډول ښودل کېږي.

پـه همـدې ډول کـه چېـرې د $n\times n$ مرتبـې یـو مټـریکس چـې n سـطرونه او n سـتونونه ولـري، اړونـد دیټرمینانت یې له n درجې څخه دی. د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ یو مربعي مټـریکس پـه پـام کـې نیـسو او د تعریـف سره سم لرو چې:

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}_{nxn}$$

د 2×2 مرتبې مټریکسونو د دیټرمینانت محاسبه: د $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مټریکس دیټرمینانت په لاندې ډول تعریفوو.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

مثال: د $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ مټریکس دیټرمینانت حساب کړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 2-7\cdot 4=6-28=-22$

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ مټریکس دیټرمینانت محاسبه کړئ.

د 3×3 مېټريکسونو د ډيټرمينانټ محاسبه:د $A_{3\times3}$ مېټريکس، ډيټرمينانټ په پام کې نيسو:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

حل: د $A_{3\times3}$ ډيټرمينانټ د محاسبې لپاره لاندې ټکي په پام کې نيسو:

لومړی پړاو: اول ستون او دريم سطر له منځه وړو، د 2×2 مرتبې ډيټرمينانټ محاسبه او د لومړي ستون او دريم سطر د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})a_{31}$$

دويم پړاو: دويم ستون او دريم سطر حذفوو، د 2×2 مرتبې ډيټرمينانټ محاسبه او د دويم ستون او دريم سطر د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو ، هېره دې نه وي چې د ډيټرمينانټ د محاسبې لپاره علامې په متناوب ډول بدلون مومي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow -(a_{11}\,a_{23}-a_{21}\,a_{13})a_{32}$$

دريم پړاو: دريم ستون او دريم سطر له منځه وړو، د 2×2 مرتبې ډيټرمينانټ محاسبه، د دريم سطر او دريم ستون د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21})a_{33}$$

څلورم پړاو: د 1، 2 او 3 ټول پړاوونه سره جمع کوو، په دې ډول د A ډيټرمينانټ مقدار په لاس راځي.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})\,a_{31}-(a_{11}\,a_{23}-a_{21}\,a_{13})\,a_{32}+(a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21})\,a_{33}$$

$$= a_{12}\,a_{23}\,a_{31}-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}+a_{21}\,a_{13}\,a_{32}+a_{11}\,a_{22}\,a_{33}-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

مثال: د لاندې دیټرمینانت مقدار په لاس راوړئ.

$$B=\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

حل: له تېرو معلوماتو څخه کار اخلو:

$$\text{I)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}=\left(6\cdot 2-1(-3)\right)\cdot 4=\left(12+3\right)\cdot 4=15\cdot 4=60$$

$$\text{II)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}=-(2\cdot 2-5(-3))(-1)=4+15=19$$

$$\text{III)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}=(2\cdot 1-5(6))\cdot 7=(2-30)\cdot 7=-28\cdot 7=-196$$

$$\text{I}+\text{II}+\text{III}=60+19-196=-117$$

فعالیت

- د $A=\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ له دیټرمینانت څخه د a قیمت په لاس راوړئ.

دویمه طریقه: **د ساروس په طریقه د دیټرمینانت محاسبه**: په دغه طریقه کې د دیټرمینانت دوه لومړي ستونونه ښي لوري ته په لاندې ډول تکرار لیکو:

$$A=\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

فرعي قطرونه

اصلي قطرونه

د اصلي قطر عناصر یوله بل سره ضرب او جمع کوو، په همدې ډول د فرعي قطر عناصر یوله بل سره ضربوو او وروسته یې جمع کوو، همدارنګه د اصلي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب له مجموع څخه، د فرعي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموع کموو، په دې ډول د A د مټریکس دیټرمینانت مقدار په لاس راځي:

$$|A|=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33})$$

په دغه طریقه کې کولای شو د لومړي او دويم ستون د لېږد په ځای لومړی او دويم سطر د ديټرمينانت لاندينی برخې ته انتقال کړو او د تېر په ډول کړنه سرته رسوو.

$$\begin{array}{r|ccc|l} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \text{فرعي قطر} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \text{فرعي قطر} \\ \text{اصلي قطر} & a_{31} & a_{33} & a_{32} & \text{فرعي قطر} \\ \text{اصلي قطر} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ \text{اصلي قطر} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \end{array}$$

دويم مثال: د لاندې ديټرمينانت قيمت د ساروس په طريقه په لاس راوړئ.

$$|M|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

حل:

$$|M|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 0 & -4 & 3 \\ 5 & -2 & 6 & 5 & -2 \end{array}\right.$$

$$=\big(3\cdot 3\cdot 6+2\cdot 0\cdot 5+(-1)(-4)(-2)\big)-\big((-1)\cdot 3\cdot 5+3\cdot 0(-2)+2(-4)\cdot 6\big)$$

$$=(54+0-8)-(-15+0-48)=46+63=109$$

فعاليت

- لاندې د $|A|$ ديټرمينانت د ساروس په طريقه په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې دوه لومړني سطرونه د ديټرمينانت لاندې برخې ته ولېږدوئ او عمليه سرته ورسوئ.

$$|A|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې ديټرمينانتونو مقدار په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \quad , \quad b)\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \quad , \quad c)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad , \quad d)\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

2. د لاندې ديټرمينانتونو مقدار د ساروس په طريقه په لاس راوړئ.

$$a)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix} \quad , \quad b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

د ديټرمينانت خاصيتونه

که چيرې په يوه ديټرمينانت کې د سطر ځای له ستون سره بدل شي، د ديټرمينانت په قيمت کې تغير راځي او که نه؟

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

فعالیت

- د $|A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$ او $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$ ديټرمينانتونه محاسبه کړئ.
- د $|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 6\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}$ ديټرمينانت په پام کې ونيسئ، ترانسپوز يې په لاس راوړئ، وروسته يې $|A^T|$ ديټرمينانت محاسبه کړئ او وښاياست چې $|A|=|A^T|$.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي.

که چيرې $A_{n\times n}$ يو ميټريکس وي، د $|A|$ ديټرمينانت لپاره لاندې خواص صدق کوي.

1. که د $A_{n\times n}$ ميټريکس د يوه سطر او يا يوه ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو د A ديټرمينانت مساوي له صفر سره دی.

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & e & f\end{vmatrix}=0\ ,\quad |A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=0$$

2. که چيرې د $A_{n\times n}$ ميټريکس دوه سطرونه يا دوه ستونونه سره مساوي وي، نو اړوند ديټرمينانت يې مساوي له صفر سره دی.

$$A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=0$$

3. که د $A_{n\times n}$ ميټريکس د يوه سطر او يا يوه ستون عناصر د بل سطر او يا ستون د عناصرو ګډ فکتور وي، نو $|A|=0$ دی.

$$|A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ \lambda a & \lambda b & \lambda c\\ d & e & f\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=\lambda(0)=0$$

4. د A ميټريکس ديټرمينانت او A^T ميټريکس ديټرمينانت يو له بل سره مساوي دي، په همدې ډول ديټرمينانت ځينې نور خاصيتونه يا ځانګړنې هم لري، لکه:

که چېرې په یوه دیټرمېنانت کې د دوو سطرونو یا دوو ستونونو ځایونه یو له بل سره بدل شي، د دیټرمېنانت اشاره بدلون مومي.

لومړی مثال: د $|A|=\begin{vmatrix}2&-1&4\\1&2&-2\\3&1&0\end{vmatrix}$ دیټرمېنانت لومړي ستون له دویم ستون سره بدل کړئ او وروسته د دواړو دیټرمېنانتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

حل:

$$A=\begin{vmatrix}2&-1&4\\1&2&-2\\3&1&0\end{vmatrix}\Rightarrow(0+6+4)-(24-4+0)=-10$$

$$B=\begin{vmatrix}-1&2&4\\2&1&-2\\1&3&0\end{vmatrix}=(0+24-4)-(4+6+0)=20-10=10$$

لیدل کېږي چې د A په دیټرمېنانت کې دویم ستون له لومړي ستون سره بدل شي، په ورته ډول کولای شو،دوه سطرونه هم یوله بل سره بدل کړو،نوداسې پایله په لاس راځي: $|A|=-|B|$

که د K یو ثابت عدد په دیټرمېنانت کې ضرب شي، دغه عدد یوازې په یوه سطر او یا یوه ستون کې په اختیاري ډول ضربېدلای شي. په همدې ډول کولای شو د یوه دیټرمېنانت ګډعامل له یوه سطر او یا یوه ستون څخه ګډ عددوټاکوچې د دیټرمېنانت ګډ فکتور بلل کېږي.

دویم مثال: د $|A|$ دیټرمېنانت ګډ ضربي عامل پیدا کړئ.

$$A=\begin{vmatrix}16&3&22\\8&2&21\\20&1&25\end{vmatrix}$$

حل: لیدل کېږي چې د دیټرمېنانت په لومړي ستون کې د 4 عدد ګډ ضربي عامل دی چې په حقیقت کې دا عدد د دیټرمېنانت ګډ ضربي عامل دی.

$$|A|=\begin{vmatrix}16&3&22\\8&2&21\\20&1&25\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}4&3&22\\2&2&21\\5&1&25\end{vmatrix}$$

پوښتنې

د دېټرمینانت دخواصو په مرسته د لاندې دیټرمېنانتونو قیمت په لاس راوړئ.

$$a)\begin{vmatrix}0&1&2\\0&3&4\\0&5&6\end{vmatrix}\qquad b)\begin{vmatrix}1&2&4\\7&9&11\\0&0&0\end{vmatrix}\qquad c)\begin{vmatrix}3&5&8\\0&4&2\\0&0&1\end{vmatrix}$$

د 2×2 مرتبه يې مېټريکسونو ضربي معکوس

Multiplication inverse of 2×2 *matrixes*

آيا د حقيقي عددونودضرب قاعده مو په ياد ده؟

د a حقيقي عدد ضربي معکوس کوم عدد دی؟

په همدې ډول د ځينو مربعي مېټريکسونو لپاره هم دا خاصيت، د مېټريکسونو د خاصيتونو په پام کې نيولو سره شتون لري.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

فعاليت

- د $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ مېټريکس په پام کې ونيسئ او ډيټرمينانت يې محاسبه کړئ.
- د $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}$ مېټريکس د A له مېټريکس سره ضرب او پايله يې وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله بيانولای شو:

تعريف: د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ غير صفري مربعي مېټريکس په پام کې نيسو، که چېرې د B مربعي مېټريکس داسې موجود وي چې: $AB=BA=I$

په دې صورت کې د B مېټريکس د A د مېټريکس معکوس بلل کېږي او هغه په A^{-1} سره ښيي. له دې امله ليکلی شوچې: $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

په ياد ولرئ: د A مربعي مېټريکس تـه منفـرد مېټريکس(Singular Matrix) ويـل کېږي، کله چې $|A|=0$ وي او همدارنګه د A مربعي مېټريکس ته غير منفرد مېټريکس(non singular matrix) ويل کېږي، که چېرې $|A|\neq 0$ وي.

له دې امله هغه وخت يو مېټريکس د معکوس مېټريکس لرونکی دی چې:

1. مېټريکس مربعي وي.
2. ډيټرمينانت يې د صفر خلاف وي.

لومړی مثال: وښاياست چې $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7 & -3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ يو د بل معکوس دي.

حل:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7 & -3\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)(-7)+3(-2) & (-1)(-3)+3(-1)\\ 2(-7)+(-7)(-2) & 2(-3)+-7(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7-6 & 3-3\\ -14+14 & -6+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-7 & -3\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7-6 & -21+21\\ 2-2 & -6+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ليدل کېږي چې: $AB=BA=I$ دی، نو A او B يو د بل معکوس دي.

الحاقي مټریکس(Ad joint of matrix): د 2×2 مرتبې الحاقي مټریکس د پیداکولو لپاره د اصلي قطر د عناصرو ځایونه سره بدلوو او فرعي قطر د اشارې په بدلون سره لیکو، هغه نوی مټریکس چې لاس ته راځي، له الحاقي مټریکس (ad joint=adj) څخه عبارت دی، د مثال په ډول:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ A=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$K=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ K=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

هغه وخت یو مټریکس معکوس مټریکس لري چې دیټرمینانت یې د صفر خلاف وي، یعنې $|A|\neq 0$ وي. البته د بحث موضوع 2×2 مرتبې مټریکس دی چې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\ Adj\ A \qquad |A|\neq 0$$

لومړی مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ وي، معکوس مټریکس یې پیداکړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-18+10=-8\neq 0$

لیدل کېږي چې د A مټریکس دیټرمینانت د صفر خلاف دی، نو د A مټریکس معکوس مټریکس لري.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\ A=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{6}{-8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

ازموینه:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4}+\frac{15}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{9}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

په عمومي ډول ویلی شو، د هر $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مټریکس چې دیټرمینانت یې د صفر خلاف یعنې $|A|\neq 0$ وي، معکوس لري چې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې مټریکسونو څخه کوم یو مټریکس معکوس لري.

a) $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

2. د لاندې مټریکسونو معکوس مټریکس په لاس راوړئ او وازموئ.

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $C=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

له معکوس متریکس څخه په کاراخېستنې د خطي معادلو د سیستم حل

آیا تر اوسه مو له معکوس متریکس څخه په ګټه اخېستنې د خطي معادلو د سیستم د حل په اړه فکر کړی دی؟

$$X = A^{-1} \cdot B$$

فعالیت

د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ په پام کې و نیسئ:

- د ضریبونو متریکس، د مجهولینو متریکس، د ضریبونو او مجهولینو متریکس ولیکئ.
- هر متریکس د معادلې په ډول ولیکئ.
- د لاس ته راغلې معادلې اطراف د ضریبونو د متریکس په معکوس کې ضرب کړئ.

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

څرنګه چې A د سیستم د چپ لوري د ضریبونو متریکس، B د ښي لوري د ثابتو عددونو ستوني متریکس او X د مجهولو عددونو ستوني متریکس دی، نو د A^{-1} په پام کې نیولو سره سیستم داسې حلېږي:

$$A\,X = B$$

$$A^{-1} \cdot A\,X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$$

$$IX = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$$

لومړی مثال: له معکوس مټریکس څخه په کار اخېستنې سره، د $\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$ خطي دوه مجهوله سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ دی.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$$

څرنګه چې د A مټریکس دیټرمینانت د صفر خلاف دی، نو د A مټریکس معکوس لري نو سیستم د حل وړدی چې په لاندې ډول یې په لاس راوړو:

$$Adj\ A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 5-2\cdot 7 \\ -1\cdot 5+1\cdot 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15-14 \\ -5+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ ,\ x=1\quad ,\qquad y=2$$

دویم مثال: له معکوس مټریکس څخه په کار اخیستنې سره د دغه خطي معادلو $\begin{cases} 5x-2y=2 \\ 3x-\ y=3 \end{cases}$ سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$B=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\ ,\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ ,\quad A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-5+6=1\ \Rightarrow\ |A|\neq 0$$

لیدل کېږي چې $|A| \neq 0$ دی، نو A معکوس متریکس لري.

$$AdjA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} AdjA = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \quad = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ -3\cdot 2 + 5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+6 \\ -6+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ x = 4 \quad , \quad y = 9$$

دریم مثال: د x او y په کومو قمیتونوکې لاندې معادلې په یو وخت کې صدق کوي.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases}$$

حل:

د یاد شوي سیستم حل د سیستم د ضریبونو د متریکسونو له تشکیل څخه په لاس راوړو:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

څرنګه چې د A متریکس دیترمینانت صفر دی، نو د A متریکس معکوس نه لري، په پایله کې ویلای شو چې سیستم حل نه لري.

پوښتني

له معکوس مټریکس څخه په ګټې اخېستنې، د لاندې خطي معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} a + b = 11 \\ 4a - b = 9 \end{cases}$$

د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه

Crammer's rule

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}$$

$$y=\frac{|A_y|}{|A|}$$

$$z=\frac{|A_z|}{|A|}$$

آیا کولای شو، د ضریبونو د متریکس د دیټرمېنانت او له مجهولینو یعنې د z, y, x سره د متناظرو مټریکسونو د دیټرمېنانت په واسطه د خطي معادلو د سیستم حل پیدا کړو؟

د خطي درې مجهوله معادلو سیستم په پام کې نیسو او د ضریبونو مټریکس یې په A سره ښیو:

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=d_1$$
$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=d_2$$
$$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=d_3$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

کولای شو د y, x او z قیمتونه له لاندې اړیکو څخه په لاس راوړو، په داسې حال کې چې $|A|\neq 0$ وي.

$$X=\frac{|A_x|}{|A|} \quad , \quad y=\frac{|A_y|}{|A|} \quad , \quad z=\frac{|A_z|}{|A|}$$

په پورتنیو اړیکو کې $|A_x|$، $|A_y|$ او $|A_z|$ په ترتیب سره د y, x او z اړوند متناظرو مټریکسونو دیټرمېنانتونه دي. د هغوی د محاسبې لپاره په لاندې ډول کړنه کوو، د سیستم زیات شوي مټریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{array}\right)$$

د $|A_x|$ د محاسبې لپاره د لومړی ستون د x ضریبونو په ځای خلورم ستون(هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دي) ځای پر ځای کوو، د 3×3 مرتبې مټریکس دیټرمینانت په لاس راوړو او د $|A_y|$ د محاسبې لپاره د دویم ستون د y ضریبونه په ځای د څلورم ستون هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دي ځای پر ځای کوو او د 3×3 مرتبې د مټریکس دیټرمینانت محاسبه کوو.او د $|A_z|$ د محاسبې لپاره دریم ستون د z ضریبونو په ځای څلورم ستون ځای په ځای کوو او د 3×3 مرتبې مټریکس دیټرمینانت قیمت په لاس راوړو.

فعالیت

- له پورتنیو معلوماتو څخه په ګټې اخیستنې سره $|A_x|$ ، $|A_y|$ او $|A_z|$ پیدا کړئ.

لومړی مثال: د $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ سیستم حل د کرامر په طریقه په لاس راوړئ.

حل:

$$A=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-(-6)=1+6=7\neq 0$$

څرنګه چې $|A|\neq 0$ دي؛ نو سیستم حل لري.

$$\left(\begin{array}{cc:c}1 & -3 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{array}\right)$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}3 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3-(-6)}{7}=\frac{3+6}{7}=\frac{9}{7}$$

$$x=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}}{7}=\frac{2-6}{7}=-\frac{4}{7}$$

دويم مثال: لاندې درې مجهوله سيستم د کرامر په طريقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 3x-2y+2z=-4 \\ x+3y+z=5 \\ 2x+2y-z=11 \end{cases}$$

حل:

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{matrix} \begin{aligned} &=-9-4+4-12-6-2 \\ &=-21-8=-29\neq 0 \end{aligned}$$

 څرنګه چې $|A|\neq 0$ دئ نو له دې امله سيستم حل لري.

$$|A_x|=\begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} -4 & -2 \\ 5 & 3 \\ 11 & 2 \end{matrix} \begin{aligned} &=12-22+20-(66-8+10) \\ &=10-68=-58 \end{aligned}$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{matrix} \begin{aligned} &=-15-8+22-(20+33+4) \\ &=-23+22-57=-58 \end{aligned}$$

$$y=\frac{|A_y|}{A}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_z|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 11 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{matrix} =99-20-8-(-24+30-22)$$

$$=71+16=87$$

$$z=\frac{|A_z|}{A}=\frac{87}{-29}=-3$$

میزان:

د y, x او z په لاس راغلي قیمتونه په اصلي سیستم کې وضع کوو:

$$3(2)-2(2)+2(-3)=6-4-6=-4 \quad \Rightarrow \quad -4=-4$$
$$2+3(2)-3=2+6-3=8-3=5 \quad \Rightarrow \quad 5=5$$
$$2(2)+2(2)-(-3)=4+4+3=11 \quad \Rightarrow \quad 11=11$$

فعالیت

د ګرامر په طریقې د لاندې معادلو سیستم حل په لاس راوړئ.

$$\begin{cases} 2x-3y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

پوښتنې

د لاندې معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x+y-az=0 \\ ax+2y-z=0 \\ 2x+ay+2z=0 \end{cases}$$

د معادلو د سیستم حل دګوس($Gouse$) په طریقه

آیا کولای شو له مټریکس څخه په کار اخېستنې سره

د x, y او z مجهول قیمتونه پیدا کړو؟

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

دګوس په طریقه د معادلو د سیستم د حل لپاره د ضریبونو مټریکس او ثابت قیمتونه لیکو وروسته په سطرونو او ستونونو، باندې لومړنی عملیو باندې د جمع، تفریق، ضرب او تقسیم سرته رسوو، یا سطرونه او ستونونه په یو سکالر کې ضربوو چې په پایله کې دوه مجهوله له منځه ځي او دریم مجهول محاسبه کېږي ، وروسته د نورو مجهولونو قیمت په لاس راوړو، د مټریکس سطرونه په $R_1, R_2, R_3, \ldots\ldots$ ښیو:

لومړی مثال: لاندې د خطي معادلو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

حل:د ضریبونو مټریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{لومړی سطر منفي دوم سطردتفریق حاصل په دویم سطر کې لیکو.}]{R_1 - R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{دویم سطر په(1-) کې ضرب بدلون په دویم سطر کې لیکو.}]{R_2 \cdot (-1) \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow y=2\ , \quad \begin{array}{l} x+2y=5 \\ x+2(2)=5 \Rightarrow x=5-4 \Rightarrow x=1 \end{array}$$

پاملرنه: $R_1 - R_2 \to R_2$ په دې معنا چې له دویم سطر څخه لومړی سطر تفریق شوی او په دویم سطر کې بدلون لیکل شوی دی.

$R_2(-1) \to R_2$ داسې مفهوم لري چې دویم سطر په (-1) کې ضرب شوی او په دویم سطر کې لیکل شوی دی.

فعالیت

- د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم د گوس په طريقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=-3 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

دويم مثال: د لاندې درې مجهوله معادلو سیستم د گوس په طريقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ 3x+y+2z=11 \\ 4x-2y+z=3 \end{cases}$$

حل: لومړی د سیستم د مجهولینودضریبونو او ثابتو عددونو متریکس لیکو:

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په لومړی پړاو کې د x ضریب په دويم سطر کې له منځه وړو. داسې چې لومړی سطر په -3 کې ضرب د دويم سطر له دوه چند سره جمع او په دويم سطر کې يې ليکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-3R_1+2R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په دويم گام کې لومړی سطر په -2 کې ضرب له دريم سطر سره جمع او په دريم سطر کې يې ليکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right)$$

په دريم پړاو کې د y ضريب له دريم سطر څخه حذفوو، داسې چې دويم سطر په -8 کې ضرب د دريم سطر له 7 چند سره جمع او په دريم سطر کې يې ليکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{-8R_2+7R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -35 & -105 \end{array}\right)$$

له دریم سطر ځخه کولای شو، د z قیمت په لاس راوړو:

$$-35z=-105 \Rightarrow z=3$$

د z قمیت په دویم سطر کې وضع او د y قیمت په لاس راوړو:

$$-7y+7z=7 \Rightarrow -7y+21=7 \Rightarrow -7y=-14 \quad , \quad y=2$$

په دریم پړاو کې د y او z قیمتونه په لومړي سطر کې ابږدو او x په لاس راځي.

$$2x+3y-z=5 \Rightarrow 2x+3\cdot 2-3=5 \Rightarrow 2x+3=5$$

$$2x=5-3=2 \quad , \quad x=1$$

د خطي معادلو د سیستم حل عبارت دی له: $(x,y,z)=(1,2,3)$

امتحان: لاسه ته داغلي قیمتونه د معادلو په سیستم کې وضع کوو.

$$2\cdot 1+3\cdot 2-3=5 \Rightarrow 2+6-3=5 \quad , \quad 5=5$$

$$3\cdot 1+2+2\cdot 3=11 \Rightarrow 3+2+6=11 \quad , \quad 11=11$$

$$4\cdot 1-2(2)+3=3 \Rightarrow 4-4+3=3 \quad , \quad 3=3$$

دریم مثال: د لاندې خطي معادلاتو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$2x_1+4x_2+6x_3=18$$

$$4x_1+5x_2+6x_3=24$$

$$2x_1+7x_2+12x_3=40$$

حل:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right) \xrightarrow[-2R_1+R_2 \to R_2]{\text{لومړی پړاو}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-R_1+R_3 \to R_3]{\text{دویم پړاو}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2+R_3 \to R_3]{\text{دریم پړاو}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

لیدل کیږي چې په لاس راغلی مټریکس کې د x_2, x_1 او x_3 ضریبونه په دریم سطر کې صفر دي، په داسې حال کې چې په یاد شوي سطر کې ثابت عدد 10 دی او دا غیر ممکن دی چې($x_1=x_2=x_3=0=10$) نو سیستم حل نه لري.

فعالیت

د لاندې معادلو سیستم حل او میزان کړئ.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

پاملرنه: که چېرې د خطي معادلو په سیستم کې یو له مجهولینو څخه موجود نه وي، د هغه ضریب صفر په پام کې نیسو، وروسته د خطي معادلو د ضریبونو او د ثابتو مقدارونو متریکس تشکیلوو:

پوښتنې

د لاندې خطي معادلو سیستمونه د گوس په طریقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x + 4y - 10z = -2 \\ 3x + 9y - 21z = 0 \\ x + 5y - 12z = 1 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ \quad -3y = -6 \end{cases}$$

د شپږم څپرکي مهم ټکي

د متریکس تعریف: یوه ګېډۍ عددونه یا توري چې په سطري او ستوني ډول په یوه مستطیلي جدول کې ځای پر ځای شوي وي. د متریکس(Matrix) په نامه یادیږي.

د متریکسونو ډولونه:

- **سطري متریکس**: هغه متریکس چې یوازې یو سطر ولري.
- **ستوني متریکس**: هغه متریکس چې یوازې یو ستون ولري.
- **صفري متریکس**: هغه متریکس چې ټول عناصر یې صفرونه وي.
- **مربعي متریکس**: هغه متریکس چې د سطرونو او ستونونو شمېر یې سره برابر وي.
- **مساوي متریکسونه**: دوه متریکوسونه، هغه وخت سره مساوي دي چې ټول عناصر یې یو په یو سره برابر او مساوي وی.
- قطري متریکس هغه متریکس چې ټول عناصر یې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، قطر ي متریکس بلل کیږي.
- **سکالر متریکس**: هر قطري متریکس چې د اصلي قطر عناصر یې سره برابر وي، سکالري متریکس بلل کیږي.
- **واحد متریکس**: په هر سکالري متریکس کې که د اصلي قطر عناصر د 1 عدد وي، واحد متریکس بلل کیږي.

په متریکسونو باندې لومړني عملیات:

- **د متریکسونو جمع او تفریق**: د متریکسونو جمع او تفریق هغه وخت امکان لري چې:

$$A_{m\times n}\pm B_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}\pm(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}=(C_{ij})_{m\times n}=C_{m\times n}$$

د متریکسونو د جمعې او تفریق خواص:

1) $A+B=B+A$
2) $A-B\neq B-A$
3) $(A\pm B)\pm C=A\pm(B\pm C)$
4) $A+0=0+A=A$
5) $A+(-A)=-A+A=0$

په متریکس کې د سکالر ضربول: که $K\in IR$ او $A=(a_{ij})_{m\times n}$ وي، نو:

$$KA=K(a_{ij})_{m\times n}=(C_{ij})_{m\times n}=C_{m\times n}$$

په متریکس کې د سکالر ضرب خواص:

$a)\ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$b)\ (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

$c)\ \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

د دوو متریکسونو ضرب: د دوو متریکسونو ضرب هغه وخت ممکن دی چې د لومړي متریکس د ستونونو شمېر، د دویم متریکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي، که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ وي، نو:

$$A\cdot B=(a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p}=(C_{ij})_{m\times p}=C_{m\times p}$$

يعنې د دوو مېټريکسونو د ضرب حاصل هغه دريم مېټريکس دی چې د سطرونو شمېر يې له لومړي مېټريکس سره او د ستونونو شمېر يې له دويم مېټريکس سره برابر وي.

د مېټريکسونو د ضرب خواص: که A او B دوه مېټريکسونه وي، نو:

1) $AB \neq BA$ 2) $(AB)C = A(BC)$

3) $A(B+C) = AB + AC$ 4) $I \cdot A = A \cdot I = A$

5) $K(AB) = (KA)B = A(KB)$

د يوه مېټريکس ټرانسپوز مېټريکس: که د يوه $A_{m\times n}$ مېټريکس ستونونه په سطرونو او سطرونه په ستونونو بدل شي، هغه نوی مېټريکس چې لاسته راځي ،د ټرانسپوز مېټريکس په نامه يادېږي. د A ټرانسپوز مېټريکس په A^T سره ښيي.

مثلثي مېټريکس: که په يوه مېټريکس کې د اصلي قطر پورتني او يا ښکتني عناصر ټول صفرونه وي، نوموړی مېټريکس د مثلثي مېټريکس په نامه يادېږي.

متناظر مېټريکس: که د A يو مېټريکس له خپل ټرانسپوز A^T مېټريکس سره برابر شي($A = A^T$) ، نو د A مېټريکس ته متناظر مېټريکس وايي.

ديټرمېنانټ: که د A مېټريکس يوه حقيقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د مېټريکس له ديټرمېنانټ څخه عبارت دی، او د $|A|$ يا $\det A$ په شکل سره ښودل کېږي.

د ديټرمېنانټ خواص:

1. که د $A_{n\times n}$ مېټريکس د يوه سطر او يا ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو ديټرمېنانټ يې صفر دی، يعنې:
$$\det A = |A| = 0$$
2. که د ديټرمېنانټ دوه سطرونه او يا دوه ستونونه سره برابر وي، نو ديټرمېنانټ يې صفر دی. $|A| = 0$
3. که $A_{n\times n}$ مېټريکس د يوه سطر يا ستون عناصر د بل سطر يا ستون د عناصرو مضرب وي، نو ديټرمېنانټ يې صفر دی. $|A| = 0$
4. د A مېټريکس او د A ټرانسپوز مېټريکس ديټرمېنانټونه سره مساوي وي، يعنې: $|A^T| = |A|$

د مېټريکسونو ضربي معکوس: د $A = (a_{ij})_{m\times n}$ مربعي مېټريکس په پام کې نيسو ،که چېرې د B مربعي مېټريکس داسې موجود وي چې $AB = BA = I$ ، په دې صورت کې د B مېټريکس د A د مېټريکس معکوس دی او د A د مېټريکس معکوس مېټريکس په A^{-1} سره ښيي: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

د خطي معادلو د سيستم حل:

- له معکوس مېټريکس څخه په ګټه اخيستنې د خطي معادلو د سيستم حل.
- د خطي معادلو د سيستم حل د کرامر په طريقه.
- د ګوس په طريقه د خطي معادلو د سيستم حل.

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، له سم ځواب څخه کړۍ تاو کړئ.

1. که $|A| = 3$ وي، نو $|A^{-1}|$ پیدا کړئ.

$a)\ \frac{1}{3}$ $\quad b)\ 9$ $\quad c)\ \frac{1}{9}$ $\quad d)\ 3$

2. که $A = \begin{pmatrix} 2m-3 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ معکوس منونکی متریکس وي، نو د m قیمت به څو وي؟

$a)\ m = 1, \frac{1}{2}$ $\quad b)\ m \neq 1$ $\quad c)\ m = 0$ $\quad d)\ m \neq 1, \frac{1}{2}$

3. که $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ وي، د x هغه متریکس په لاس راوړئ چې په دغه رابطه $Ax = A^{-1}$ کې صدق وکړي.

$a)\ \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$ $\quad b)\ \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -25 & 14 \end{pmatrix}$

$c)\ \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -25 & -16 \end{pmatrix}$ $\quad d)\ \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -25 & -12 \end{pmatrix}$

4. د $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ متریکس لاندې د $y = 2x$ د خط بدلون منونکي خط پیدا کړئ.

a) د y محور $\quad$ b) د x محور $\quad$ $c)\ y + 2x = 0$ $\quad$ $d)\ y = 0$

5. د x په کومو قیمتونو دغه دیترمینانت $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ صفر دی؟

$a)\ x = 1,2$ $\quad b)\ x = 3,1$ $\quad c)\ x = \frac{1}{2},3$ $\quad d)\ x = 3,2$

6. د $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ دیترمینانت حاصل په لاس راوړئ.

$a)\ 29$ $\quad b)\ 39$ $\quad c)\ 19$ $\quad d)\ 9$

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ وي، لاندې محاسبې غوښتل شوې دي:

$a)\ 3A-2B \qquad b)\ -4A+3B$

2. فرض کړئ که $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو AB او BA محاسبه کړئ

او وواياست چې $AB = BA$ دی.

3. لاندې مېټريکسونه په پام کې ونيسي:

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 2\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

اشتراکي خاصيت، توزيعي خاصيت او د مېټريکسونو ضرب د درو مېټريکسونو لپاره وښاياست.

4. لاندې ډيټرمېنانت په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

5. د لاندې مېټريکس معکوس مېټريکس د الحاق(ad joint) په طريقه پيدا کړئ.

$$M=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & -9\end{pmatrix}$$

6. د لاندې خطي معادلو سيستمونه د کرامر په طريقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases}2x+y+z=6\\ x-2y+2z=10\\ 3x-y-z=4\end{cases} \qquad b)\ \begin{cases}x_1-2x_2=4\\ 2x_1+4x_2=5\end{cases}$$

7. د لاندې خطي معادلو سيستمونه د گوس په طريقه حل کړئ.

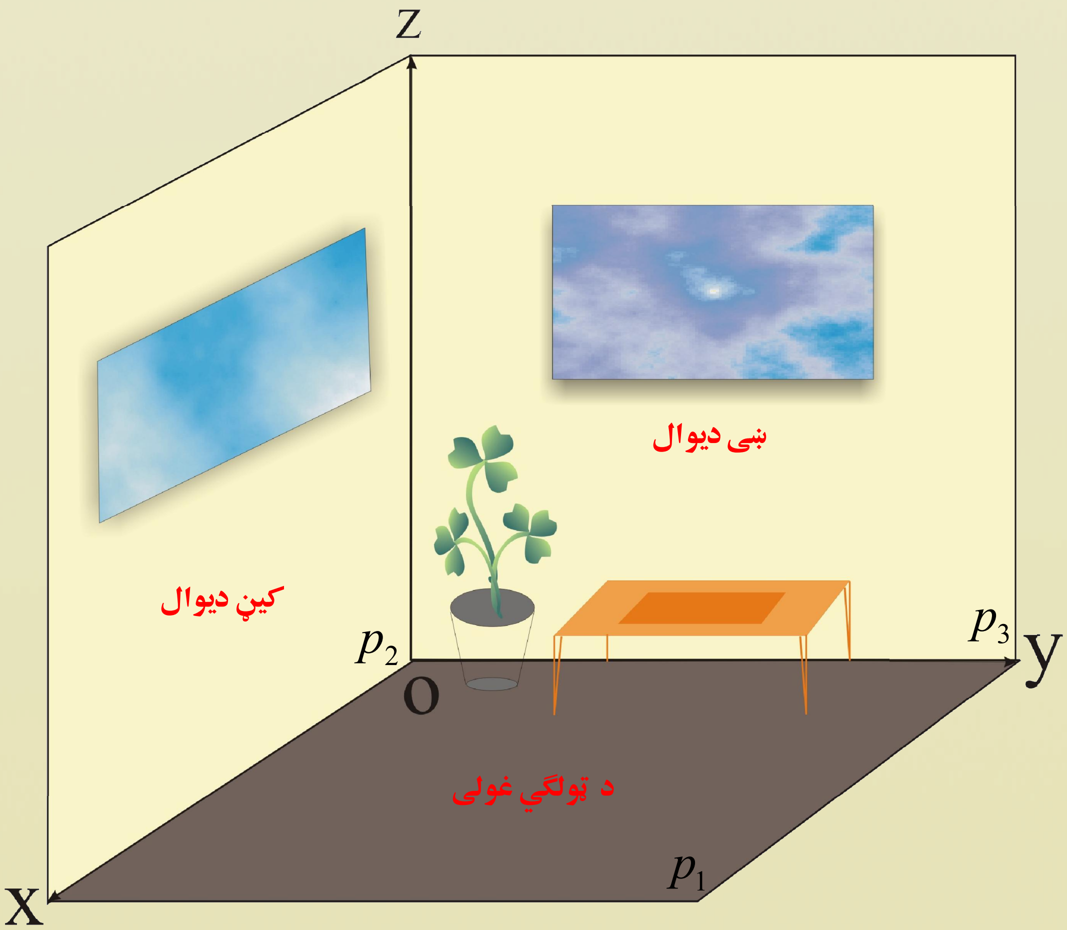
$$a)\ \begin{cases}2x-3y+3z=0\\ 3x+2y-5z=0\\ 5x-4y-2z=0\end{cases} \qquad b)\ \begin{cases}2x+3y-7=1\\ 2y+27=-2\end{cases}$$

8. د لاندې خطي معادلو سيستمونه د معکوس مېټريکس په طريقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases}3x+y+1=0\\ 4x+3y-2=0\end{cases} \qquad b)\ \begin{cases}x-y=2\\ x+2y=-1\end{cases}$$

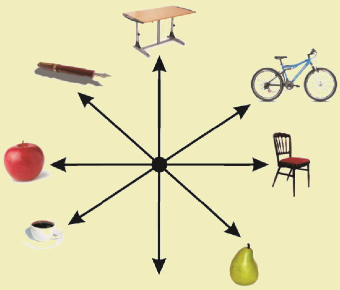
اووم څپرکی

وکتورونه


z
بنی دیوال
کیڼ دیوال
p_2
o
p_3
y
د ټولګي غولی
p_1
x

د وضیعه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه

له یوه ټاکلي ټکي څخه د هغې شاوخوا بېلابېلو پرتو شیانو ته لنډه لاره په نښه کړئ.



تعریف

جهت لرونکي قطعه خط ته وکتور وایي، یا په بل عبارت هغه کمیت چې هم مقدار لري او هم جهت لکه: قوه، فاصله، تعجیل او داسې نور. هر غشی د یو وکتور ممثل دی.

هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پروت وي، د شعاع وکتور (Position Vector) په نامه یادېږي.

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې د شعاع وکتور داسې رسم کړئ چې د پای ټکی یې د $B\ (5,5)$ مختصات ولري.
- د پورتني راکړل شوي وکتور درې ممثل وکتورونه په راکړل شوو قایمو مخصاتو کې داسې رسم کړئ چې وکتور او شعاع وکتورونه یې سره توپیر ولري.
- یو بل وکتور رسم کړئ چې له پورتني وکتور سره مساوي او د مخالف لوري او شعاع وکتور وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله ترلاسه کېږي.

پایله: په یوه مستوي او په فضا کې هر ممثل وکتور د خپل شعاع وکتور په اندازه وي، لکه:

1. د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونه هغه وخت مساوي بلل کېږي، چې اوږدوالی یې مساوي، $(|\vec{a}|=|\vec{b}|)$ موازي او د یو جهت لرونکی وي.
2. که چېرې یو وکتور $\vec{AB}=0$ وي، په دې صورت کې د $\vec{AB}$ وکتور صفري وکتور (Zero Vector) بلل کېږي.

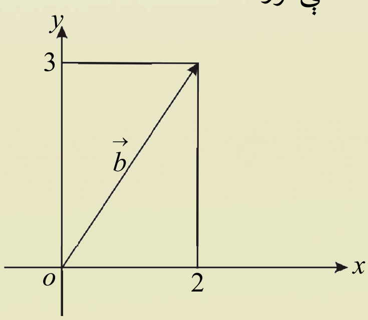
3. دوه وکتورونه هغه وخت مخالف یا منفي بلل کېږي چې اوږدوالی یې مساوي او جهت یې مخالف وي، د بېلګې په توګه:

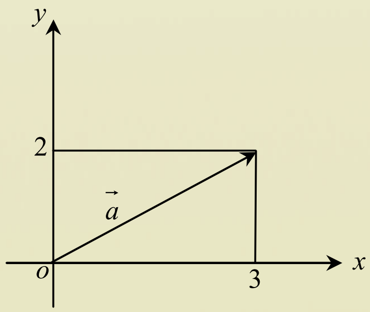
که $\vec{OA}=\vec{a}$ وي، نو $\vec{AO}=-\vec{a}$ دی، په داسې حال کې چې: $(|\vec{OA}|=|\vec{AO}|)$ وي.

تعریف: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې یو وکتور په ستوني شکل داسې ښودل کېږي $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ په داسې حال کې چې a_x د x پرمحور وضعیه کمیت او a_y د y پرمحور د $\vec{a}$ وکتور فاصله او ترتیب ښیي.

لومړی مثال: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ او $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ وکتورونه وښایاست؟

حل: د پورتني تعریف له مخې لرو:





یادونه: د یو وکتور د ښودلو لپاره یوه مستوي په دې خاطر کارول کېږي، چې د قایم مختصاتو په سیستم کې د یو ټکي د ښودلو لپاره د مختصاتو په سیستم کې یوازې یو ځای شته، په داسې حال کې چې په مستوي کې د یو وکتور د ښودلو لپاره چې هماغه وکتور په مستوي کې ځای نیولی شي، بې نهایت ځایونه شته.

پوښتنې

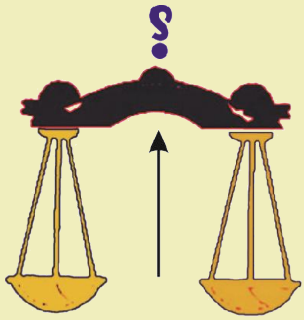
1. د هغو وکتورونو لپاره چې په لومړي مثال کې ورکړل شوي دي، مطلوب دي:

a. د هر یوه وکتور درې ممثل وکتورونه رسم کړئ.

b. دواړه وکتورونه د شعاع وکتور په موقعیت کې رسم کړئ.

c. د هغوی مخالف وکتورونه کوم وکتورونه دي؟

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنۍ ټکی

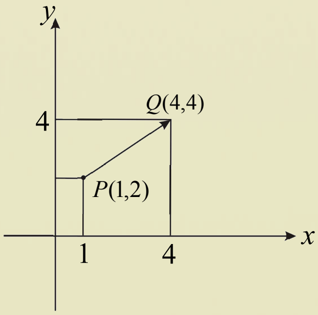


د تلې دوه هم وزنه پلې په پام کې نیسو، چې د یو شاهین په دواړو خواوو کې تړل شوي دي. د تلې د شاهين په لاس کې نیولو لپاره کوم ټکی وټاکو چې په نیولو یې د تلې پلې تعادل غوره کړي؟

فعالیت

د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې د لاندې شکل په څېر $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ ټکې په پام کې ونیسئ:

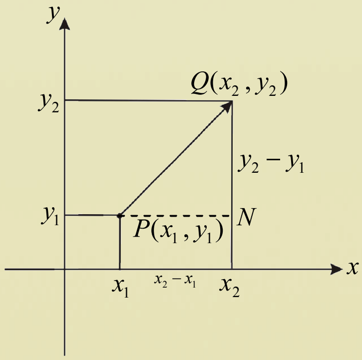
- د $\vec{PQ}$ د وکتور اوږدوالی څومره دی؟



- د $\vec{PQ}$ د منځنې ټکې وضعیه کمیتونه څومره دي؟

د پورتنې فعالیت له پای څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

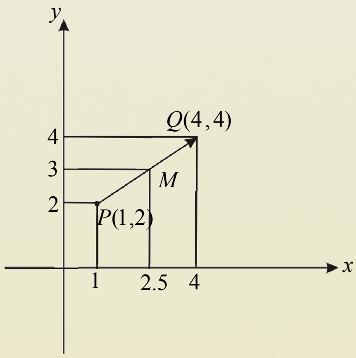
پایله: د $\vec{a}=\vec{PQ}$ وکتور د هرو دوو اختیاري ټکو لپاره چې $P(x_1, y_1)$ مبداء او $Q(x_2, y_2)$ انجام دی په دې صورت کې وکتور په $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ سره ښیو، د $P\overset{\Delta}{Q}N$ قایم الزاویه مثلث په پام کې نیولو سره د $|\vec{a}|$ د وکتور اوږدوالی عبارت دی، له: $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^{\,2}+a_y^2}$



- د $\vec{PQ}$ منځنی ټکی عبارت دی، له:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{x_1+x_2}{2}\\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}$$

لومړی مثال: د $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ؟



حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+4}{2}\\\frac{2+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{6}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.5\\3\end{pmatrix}$$

نو د منځني ټکي وضعیه کمیت له $M=\begin{pmatrix}2.5\\3\end{pmatrix}$ څخه عبارت دی او د P او Q د دوو ټکو د واټن د پیداکولو لپاره د فیثاغورث د قضیې په پام کې نیولو سره لرو:

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{a_x{}^2+a_x{}^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

دویم مثال: د $A(2,4)$ او $B(5,5)$ د ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ.

حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2+5}{2}\\\frac{5+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.5\\4.5\end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-2)^2+(5-4)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

پوښتنې

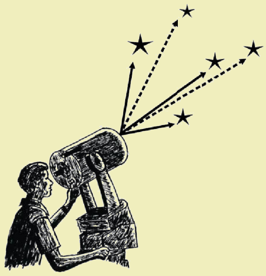
د لاندې ورکړ شوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکي پیدا کړئ.

$i)\ \ B(2,7)\quad , \quad A(3,4)$

$ii)\ \ N(5,1)\quad , \quad M(1,5)$

$iii)\ \ Q(8,8)\quad , \quad P(1,8)$

وکتورونه په سطح او فضا کې



د تلسکوپ پـه واسـطه د سـتورو د تګلوري لیـدل پـه فضا کې ځانګړې وکتورونه ښیي.

د یـوې سـطحې پـرمخ د وکتورونـو لپـاره یـوه بېلګـه راوړلای شئ؟

فعالیت

د لاندې شکل له مخې د وضعیه کمیاتو د قایم سیستم او د $IR^2=\{(x,y)\ /\ x,y\in IR\}$ سټ په پام کې نیولو سره لاندې فعالیت سرته ورسوئ.

- د وضعیه کیماتو په سیستم کې د P یو ټکی چې وضعیه کمیتونه یې (x,y) دی، په مستوي کې وټاکئ.
- د $\vec{u}$ یو شعاع وکتور چې وضعیه کمیتونه یې $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ دي، د وضعیه کمیتونو په سیستم کې وښیئ.
- په مستوي کې د P یو ټکی چې وضعیه کمیتونه یې (x,y) دي، په مستوي کې لـه $\vec{u}$ یـو وکتـور سـره څه توپیر لري چې وضعیه کمیتونه یې $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ وي؟
- د $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ دوه اختیاري وکتورونه او $a\in IR$ یو سکالر لپاره په هندسي توګـه د وضعـیه کمیتونو په قایم سیستم کې په جلا جلا ډول وښیئ، چې:

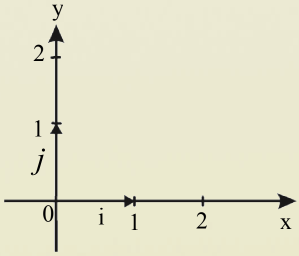
i) $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ (د جمعې قاعده)

ii) $a\cdot\vec{u}=a\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\ay\end{pmatrix}$ (دسکالري ضرب قاعده)

تعریف: د هغو ټولو مرتبو جوړو سټ چې د پورته قاعدې په څېر د جمعې او سکالري ضرب قاعدې پـرې تطبیق وي، د IR^2 (مستوي) د وکتورونو فضا او یا په مستوي کې د وکتور په نامه یادېږي.

له پورتني فعالیت او تعریف څخه لاندې پایله لاسته راځي:

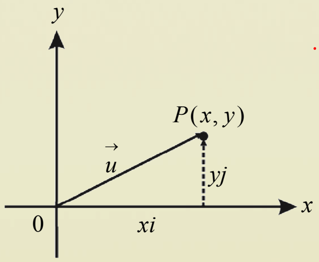
پایله: د دوو ځانګړو وکتورونو $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په پام کې نیولو سره چې اوږدوالی یې یو واحد او $|\vec{i}|=|\vec{j}|$ دي. هر اختیاري وکتور $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ لپاره لرو:



$$\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

$\vec{i}$ او $\vec{j}$ واحد وکتورونه دی چې د x او y محورونو په امتداد پراته دي.



واحد وکتور (unit victor): هغه وکتور دی چې طول یې یو واحد او د مختصې د جهت د تزاید لپاره ترې کار اخلي.

لومړی مثال: که $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ وي، د لاندې وکتورونو قیمت پیدا کړئ.

(i): $\vec{u}+\vec{v}=?$ (ii): $4\vec{u}+2\vec{v}=?$ (iii): $\vec{u}-\vec{v}=?$

(iv): $\vec{u}-\vec{u}=?$ (v): $|\vec{u}|=?$

حل:

$$i)\quad \vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\\-3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3\vec{i}+2\vec{j}$$

$$ii)\quad 4\vec{u}+2\vec{v}=4\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+4\\-12+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}=8\vec{i}-2\vec{j}$$

$$iii)\quad \vec{u}-\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2\\-3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix}=-\vec{i}-8\vec{j}$$

$$iv)\quad \vec{u}-\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0$$

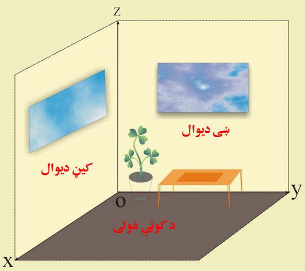
$$v)\quad |\vec{u}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

پوښتنه

1. که $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ وي، $\vec{u}+2\vec{v}$، $\vec{u}-2\vec{v}$ او $2\vec{u}+4\vec{v}$ پیدا کړئ.

په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات

که د ټولګي په فضا کې يو ټکی وټاکئ آيا داسې يـوه د حل لاره شته چې د ټکي واټن نسبت د ټولګي غـولي او مجاور ديوال ته وټاکو؟



تعريف

درې بُعدي IR^3 فضا د ټولو هغو مرتبو درې ګونو (x, y, z) څخه عبارت دی چې په لاندې ډول تعريفيږي:

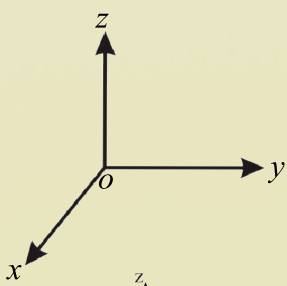
$$IR^3 = IR \times IR \times IR = \{(x, y, z) / x, y, z \in IR\}$$

هغه درې مستويګانې p_3, p_2, p_1 چې دوه په دوه يو په بل عمود دي، د درې بُعدي فضا د مختصاتو مستويګانې بلل کېږي.

د دغو مستويګانو د دوه په دوه ګډ فصل درې قـايمې زاويـې جـوړوي چـې هغـه د درې بُـعـدي فـضا قـايم مختـصات بولي. د درې بعدي فضا قايم مختصات داسې نوموي چې که يو تن ودرېږي، هغه محور چې د ليـدونکي د تنـې پـه لور دی، د z محور او هغه محور چې د ليدونکی د ليد په لور دی د y محور او هغه محور چې د ليدونکو د ښي لاس په لور پروت دی، د x محور دی او د دغو درې واړو محورونو د تقاطع ټکی له O ټکي څخه عبـارت دی . چې د قايمو مختصاتو مبداء ښيي.

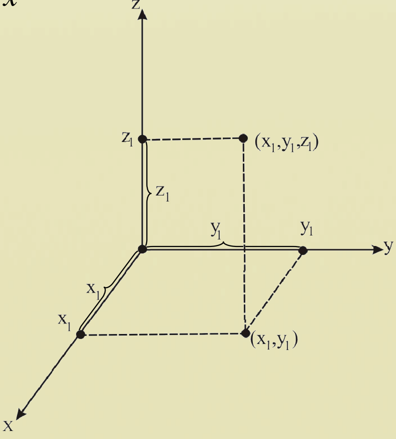
په درې بعدي فضا کې د يوه ټکي مختصات له هغه واټن څخه عبـارت دي چې لـه درې واړو مستويګانو څخه يې لري.

د ټکي واټن د مختصاتو له مستوي ګانو څخه په $|x|$ ، $|y|$ او $|z|$ سره ښيي.



په درې بعدي فضا کې د يوه ټکي د ځای ټاکل:

د درې بعدي فضا په قايمو مختصاتو کې د $A(x_1, y_1, z_1)$ ټکـي د ټاکلو لپاره د هرې مختصې په اړوند محور بانـدې د مختـصې علامې په پام کې نيولـو سره فاصلې جـلا کـوو، لـومړی د x لـه محور څخه مـوازي خط د y لـه محور سره رسـموو، د تقـاطع ټکی يې چې (x, y) دی، پيدا او وروسته له ياد شوي ټکي څخه يو بل خط موازي د z له محور سره رسموو، په پايله کې د تقاطع ټکی په لاس راځي چې په دې ترتيب د ټکي ټاکل پـه درې بعـدي فضا کې بشپړيږي.



يادونه: په درېي بعدي فضا کې د y, x او z مختصو منفي جهتونه د نومړو محورونو له امتداد يافته څخه عبارت دی.

فعاليت

- د $A(2,4,3)$ او $B(-2,-3\ ,3)$ ټکي د درېي بعدي فضا قايم سيستم کې وښاياست.

په فضا کې د $P(x, y, z)$ يو ټکی چې د $\vec{OP}$ وکتور له $\vec{u}$ سره مساوي دی، د IR^2 د فضا په شان په درېي بعدي فضا يا IR^3 کې هم د جمعي او سکالري ضرب قاعدې د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دواړو وکتورونو لپاره او د a سکالر لپاره صورت نيسي:

$$\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$$ (د جمعي قاعده)

$$a\cdot\vec{u}=a\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\ay\\az\end{pmatrix}$$ (د سکالري ضرب قاعده)

لومړی مثال: که $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$ وي، $\vec{v}+\vec{w}$ ، $\vec{v}-\vec{w}$ ، $2\vec{w}$ او $\left|\vec{v}-2\vec{w}\right|$ پيدا کړئ.

حل: لرو چې:

$$i)\quad \vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1\\1+4\\3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$ii)\quad \vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1\\1-4\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$$

$$iii)\quad 2\vec{w}=2\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}$$

$$iv)\quad \left|\vec{v}-2\vec{w}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}2+2\\1-8\\3-0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}4\\-7\\3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4^2+(-7)^2+3^2}$$

$$=\sqrt{16+49+9}=\sqrt{74}$$

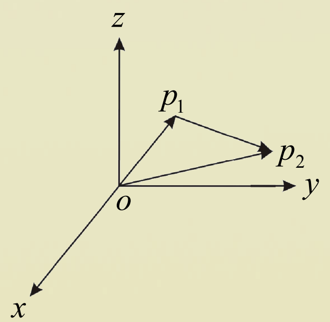
یادونه:

A- کېدای شي سطحې ته ورته درې واحد وکتورونه $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ چې:

$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ دي، په درې بعدي فضا کې په پام کې نیول شوي، د z,y,x محورونو په امتداد د واحد وکتورونو په نامه یاد کړو. د جمعې د قاعدې په پام کې نیولو سره د $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ هر اختیاري وکتور د واحد وکتور په پام کې نیولو سره په لاندې توګه ښودلی شو:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

B- **په فضا کې د دوو ټکو ترمنځ واټن**: که چېرې $\vec{OP_1}$ او $\vec{OP_2}$ د $P_1(x_1,y_1,z_1)$ او $P_2(x_2,y_2,z_2)$ د ټکو دوه شعاع وکتورونه وي، په دې توګه لرو:



$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$$

$$\Rightarrow\quad \overrightarrow{p_1p_2}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{pmatrix}$$

نو د P_1 او P_2 د ټکو ترمنځ د واټن د پیداکولو لپاره لرو:

$$\left|\vec{P_1P_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

پورتنی فورمول د P_1 او P_2 ټکو ترمنځ واټن ښیي.

C- که په درې بُعدي فضا کې د یو ټکي واټن له مبدأ څخه مطلوب وي یعنې $(x_1,y_1,z_1)=(0,0,0)$ او $(x_2,y_2,z_2)=(x,y,z)$ وي؛ نو د ټکي واټن له مبدأ څخه د لاندې فورمول په واسطه پیداکولای شو:

$$\left|\overrightarrow{p_1p_2}\right|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

دویم مثال: که $\vec{a}=(-5\ ,\ 4\ ,\ 5)$ وی؛ نو د نوموړي شعاع وکتور طول څو دی؟

حل: د شعاع وکتور موقعیت ته په کتو سره چې د شعاع وکتور مبدأ د وضعیه کمیتونو په مبدأکې پرته ده د C جز له فورمول څخه ګټه اخلو:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2++y^2+z^2}=\sqrt{(-5)^2+4^2+5^2}=\sqrt{25+16+25}=\sqrt{66}$$

دریم مثال: که $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{v}=4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=6\vec{i}-9\vec{j}-3\vec{k}$ راکړل شوی وي.

ومومئ $\quad ii)\ \left|\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}\right|=?\qquad i)\ \vec{u}+2\vec{v}=?$

حل: لرو چې:

$$i)\quad \vec{u}+2\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}+2(4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k})$$
$$=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}+8\vec{i}+12\vec{j}+4\vec{k}=10\vec{i}+15\vec{j}+5\vec{k}$$
$$ii)\quad \vec{u}-\vec{v}-\vec{w}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}-4\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}-6\vec{i}-9\vec{j}+3\vec{k}=-8\vec{i}-12\vec{j}+2\vec{k}$$
$$\left|\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}\right|=\left|-8i-12j+2k\right|=\sqrt{(-8)^2+(-12)^2+2^2}=\sqrt{64+144+4}=\sqrt{212}$$

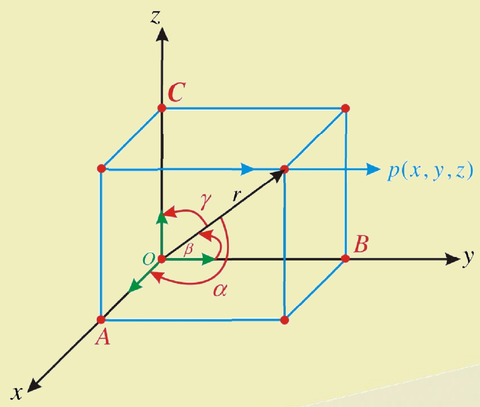
پوښتنې

1. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو جهت ته واحد وکتور پیدا کړئ.
2. په دریم مثال کې چې $\vec{u},\vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونه راکړل شوي دي په پام کې ونیسئ او لاندې پوښتنو ته ځوابونه ومومئ.

$a)\ 2\vec{u}-6\vec{v}+4\vec{w}=?\qquad b)\ |\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v}-2\vec{w}|=?$

3. $\vec{u}$ او $\vec{v},\vec{v}$ او $\vec{w},\vec{w}$ او $\vec{u}$ وکتورونو ترمنځ واټن پیدا کړئ.
4. د هغه وکتور واحدونه پیدا کړئ چې د $\vec{u},\vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونو په جهت پراته وي؟

د یوه وکتور د جهت زاويې او کوساینونه



تعریف: که د $\vec{r}$ شعاع وکتور د قایمو مختصاتو له محورونو سره په ترتیب د β, α او γ زاويې جوړې کړي په دې صورت کې شکل ته په کتو سره لیکلای شو:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$$

$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_x$$

$$\overrightarrow{OB} = \vec{r}_y$$

$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}_z$$

کولای شو د $\vec{r}$ د وکتور جهت کوساینونه په لاندې ډول ولیکو:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\cos\beta$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r\cos\gamma$$

د پورتنیو اړیکو چپ لوری مربع کوو او وروسته یې سره جمع کوو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}$$

پوهېږو چې $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ دی، نو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

فعالیت

که چېرې په یوه درې بعدي فضا کې $\vec{v} = \vec{OP} = \vec{xi} + \vec{yj} + \vec{zk}$ وکتور چې د صفر خلاف دی، ورکړ شوی وي، په داسې حال کې چې د پورته شکل په شان β, α او γ په ترتیب سره د $\vec{v}$ د وکتور زاويې او $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ واحد وکتورونه وي، په دې ډول لاندې فعالیت اجرا کړئ.

- آيا ويلاي شئ چې د α , β او γ زاويې په کومه اندازه تحول کوي؟
- آيا له پورتنيو زاويو څخه يوه يې منفي کيداى شي؟
- که چيرې له زاويو څخه يوه يې صفر شي، د وکتور د موقعيت په هکله څه ويلاى شئ؟
- د $\vec{v}$ د وکتور د جهت زاويو د کوساين لپاره يوه ګډه اړيکه پيدا کړئ؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايلې ته رسيږو:

پايله: که په فضاکې د $\vec{v}$ يو وکتور، چې صفر نه وي، يعني $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ، راکړل شوى وي، نو د جهت د زاويو د کوساينونو ترمنځ لاندې اړيکې شته: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

د پورتنى پايلې د ثبوت لپاره پوهيږو، چې: $\left|\vec{v}\right|=\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right|=\left|x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

له بلې خوا د جهت د واحد وکتور يا د $\vec{v}=\vec{OP}$ مسير عبارت دى، له: $\dfrac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}=\begin{pmatrix}\dfrac{\vec{v}_x}{\left|\vec{v}\right|}\\[2mm]\dfrac{\vec{v}_y}{\left|\vec{v}\right|}\\[2mm]\dfrac{\vec{v}_z}{\left|\vec{v}\right|}\end{pmatrix}$

پوښتنې

1. که $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ وي، پيدا کړئ؟

$a)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}=?$ $\qquad b)\ v-3\vec{w}=?$ $\qquad c)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

2. د α اندازه داسې پيدا کړئ چې د $\alpha\,\vec{i}+(\alpha+1)\,\vec{j}+2\vec{k}$ وکتور اوږدوالى مساوي په 3 وي.

د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$$

د دوو وکتورونو د سکالر ضرب حاصل د انجینری او فزیک په زده کړه کې په کاربړي او د هغو ترمنځ زاويې په پام کې نيولو سره له يو سکالري کميت سره مساوي دی، که چېرې: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$ وي، نو $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ ده، که نه؟

تعريف

$\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي په مستوي يا فضا کې په پام کې نيسو.

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ سکالري ضرب حاصل په $\vec{u}\cdot\vec{v}$ سره ښيو، چې حاصل يې عبارت دی، له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاويه جوړه کړې او $(0\leq\theta\leq\pi)$ سره دي.

فعاليت

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل په پام کې نيولو سره وښاياست، چې:

$$i)\quad \vec{i}\cdot\vec{i}=1,\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

$$ii)\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{k}\cdot\vec{i}=0$$

$$iii)\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$$

$iv)$ که $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د صفر خلاف او $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ وي، نو وکتورونه يو پر بل عمود دي.

- د دوه $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}$ وکتورونو لپاره د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ضرب حاصل د $a_1a_2+b_1b_2$ له سکالري قيمت سره مساوي دی.
- په فضا کې د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ د ضرب حاصل مطلوب يا غوښتل شوی په دې ډول چې $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وي.

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل لپاره له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله لاسته راځي.

پايله: که $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ درې اختياري وکتورونه او c يو حقيقي عدد وي، نو لرو:

$(i \quad \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

$(ii \quad \vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (د ضرب تبادلوي خاصیت یا ځانګړتیا).

$(iii \quad \vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\,\vec{v}+\vec{u}\,\vec{w}$ (په جمع د ضرب توزیعي خاصیت).

$(iv \quad (c\cdot\vec{u})\vec{v}=c(\vec{u}\cdot\vec{v})$ د ضرب توزیعي خاصیت.

لومړی مثال: که $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ دوه وکتورونه د صفر خلاف وي، د سکالري ضرب حاصل یې پیدا کړئ.

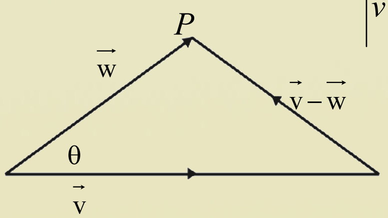
حل: د تعریف له مخې لرو چې:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$
$$=a_1\cdot a_2(\vec{i}\cdot\vec{i})+a_1b_2\cdot(\vec{i}\cdot\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\cdot\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\cdot\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\cdot\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\cdot\vec{k})$$
$$+c_1\cdot a_2(\vec{k}\cdot\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\cdot\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\cdot\vec{k})=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$$

دویم مثال: که $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ د یوې مستوي دوه وکتورونه وي، وښایاست چې:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=x_1x_2+y_1y_2$$

حل: د تعریف له مخې لرو: $\left|\vec{v}-\vec{w}\right|^2=\left|\vec{v}\right|^2+\left|\vec{w}\right|^2-2\vec{v}\cdot\vec{w}\cdot\cos\theta$



څرنګه چې $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ ، $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ په پایله کې $\vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{pmatrix}$ دي، نو د پورتنۍ اړیکې څخه لرو:

$$|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2=|x_1^2+y_1^2||x_2^2+y_2^2|-2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow -2x_1x_2-2y_1y_2=-2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta\,/\div -2$$

$$\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=|\vec{w}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta=\vec{v}\cdot\vec{w}$$

دریم مثال: که چېرې د $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ او $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ وکتورونه درکړ شوي وي، د سکالري د ضرب حاصل یې پیدا کړئ.

حل: د فورمول په پام کې نیولو سره لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=i^2+4j^2+k^2=1+4+1=6$$

څلورم مثال: وښایاست چې د $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ او $\vec{u}=2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ وکتورونه یو پر بل عمود دي.

حل: په دې هکله لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k})(4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k})=(2)(4)+(-4)(-3)+(5)(-4)$$

$$=8+12-20=0 \quad\Rightarrow\ \vec{u}\perp\vec{v}$$

څرنګه چې د وکتورونو د سکالري ضرب حاصل مساوي په صفر شو، نو وکتورونه یو پر بل عمود دي.

پنځم مثال: د α قیمت داسې پیدا کړئ چې د $2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k}$ او $3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k}$ وکتورونه یو پر بل عمود وي.

حل: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو له عمود والي ځخه دې پایلې ته رسېږو چې: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ دی، نو لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k})\ (3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k})=0 \quad\Rightarrow\quad 6+\alpha+5\alpha=0\ ,\ \alpha=-1$$

شپږم مثال: وښایاست چې د $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ او $3i-4j-4k$ وکتورونه د یو قایم الزاویه مثلث ضلعې دی.

حل: که $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ او $\overrightarrow{BC}=\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ د مطلوب مثلث دوه ضلعې په پام کې ونیسو، نو دریمه ضلع یې د مثلث د وکتورونو د جمعې حاصل په پام کې نیولو سره چې د مثلث دریمه ضلع ټاکي عبارت دی له:

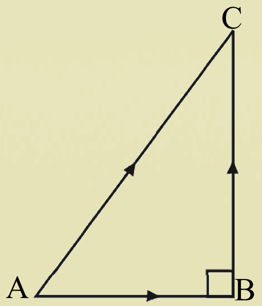
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})+(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$

(چې د مثلث له دریمې ضلعې څخه عبارت دی) $3\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$ اوس ښیو چې نوموړی مثلث قایم الزاویه دی، د دې لپاره د وکتوري ضرب حاصل $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ وي.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})\ (\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$

$$=(2)(1)+(-1)(-3)+(1)(-5)=2+3-5=0$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$$



پوښتنې

1. وښاياست چې د $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ وکتور مرتسمونه د $\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$ واحد کتورونو په امتداد په ترتيب سره له a,b او c سره مساوي دي.

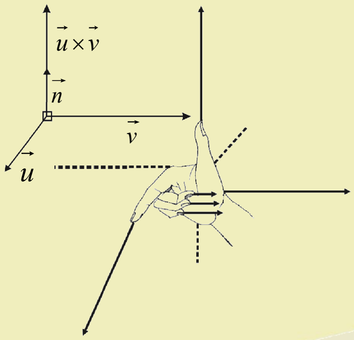
2. وښاياست چې هر $A\overset{\Delta}{B}C$ کې لاندې اړيکې وجود لري:

$i)\;\; a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$ $\qquad$ $ii)\;\; a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B$

3. ثبوت کړئ چې: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

د وکتوري ضرب حاصل

The cross Product



د راکړل شوي شکل له مخې دکوم لاس (ښي یا کیڼ) په واسطه د $\vec{v}\cdot\vec{u}$ او $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتورونه داسې وښیو چې $\vec{u}$ د ورغوي په جهت، $\vec{v}$ د ځنګل په جهت او $\vec{u}\times\vec{v}$ د ښي لاس د غټې ګوتې په لور واقع شي؟

تعریف

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، په پام کې نیسو. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوو وکتورونو د وکتوري ضرب حاصل په $\vec{u}\times\vec{v}$ چې($\vec{u}$ کرس $\vec{v}$ لوستل کیږي) عبارت دی، له: یعنې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب له هغه دریم وکتور څخه عبارت دی چې د دوی د مبدأ په ټکي عمود وي.

$$\vec{u}\times\vec{v}=(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin\theta)\,\vec{n}$$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ $(0\le\theta\le\pi)$ وکتورنو تر منځ زاویه او $\vec{n}$ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د وکتورونو په واسطه جوړه شوې مستوي له عمود واحد وکتور څخه عبارت دی، د ښې لاس قاعدې په واسطه (Right hand rule) ښودل کیږي.

د دوو وکتورونو وکتوري ضرب

مخکې له دې چې د دوو وکتورنو وکتوري ضرب توضیح کړو، لازمه ده چې د وکتورونو خطي ترکیب، وکتوري فضا، د وکتورونو خطي خپلواکي(استقلالیت) په لنډ ډول تر څېړنې لاندې ونیسو.

1. **د وکتورونو خطي ترکیب**: د یوه سټ د وکتورونو د سکالري مضربونو مجموعه د همغه سټ د وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادیږي.

که $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ \dots\ ,\vec{a}_n$ د یوه سټ وکتورونه او $\alpha_1,\alpha_2,\ \dots\ ,\alpha_n\in IR$ سکالرونه وي، په دې صورت کې د $\vec{a}$ وکتور په داسې حال کې چې $\vec{a}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\dots+\alpha_n\vec{a}_n$ وي، $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ \dots\ ,\vec{a}_n$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادیږي.

لومړی مثال: که $\vec{a}_1=2i+j-3k$ او $\vec{a}_2=i+2j+2k$ وکتورونه راکړل شوي وي، د هغوی خطي ترکیب په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې $\alpha_1=5$ او $\alpha_2=2$ وي.

حل:

$$\vec{a} = 5\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 = 5(2i + j - 3k) + 2(i + 2j + 2k)$$
$$= 10i + 5j - 15k + 2i + 4j + 4k$$
$$= 12i + 9j - 11k$$

د $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو د خطي ترکيب په نامه يادېږي.

دويــم مثــال: کــه $\vec{a_1} = (2,3)$ او $\vec{a_2} = (5,1)$ وکتورونــه راکــړل شــوي وي، وښاياســت چــې د $\vec{a} = (6\ ,-5\ )$ وکتور د $\vec{a_1}$ او $\vec{a_2}$ وکتورونو خطي ترکيب دی.

حل: خرنګه چې $\alpha_1\ ,\ \alpha_2 \in IR$ سکالرونه دي، نو:

$$\vec{a} = (6\ ,-5) = \alpha_1(2\ ,\ 3) + \alpha_2(5\ ,1)$$
$$= (6\ ,-5) = (2\alpha_1\ ,3\alpha_1) + (5\alpha_2\ ,\ \alpha_2)$$
$$= (6\ ,-5) = (2\alpha_1 + 5\alpha_2\ \ ,3\alpha_1 + \alpha_2)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 \quad = -5 \end{cases}$$

له پورتني سيستم څخه د α_1 او α_2 قيمتونه په لاس راوړو:

$$\begin{array}{r} 3 \\ 2 \end{array}\begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \end{cases}$$
$$6\alpha_1 + 15\alpha_2 = 18$$
$$-6\alpha_1 \pm 2\alpha_2 = \mp 10$$
$$13\alpha_2 = 28 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{28}{13}$$
$$2\alpha_1 + 5\frac{28}{13} = 6$$
$$2\alpha_1 + \frac{140}{13} = 6 \Rightarrow 2\alpha_1 = 6 - \frac{140}{13} = \frac{78 - 140}{13}$$
$$2\alpha_1 = \frac{-62}{13} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{62}{26} = -\frac{31}{13}$$
$$\vec{a} = (6\ ,-5) = \alpha_1(2\ ,\ 3) + \alpha_2(5\ ,\ 1)$$
$$\vec{a} = (6\ ,-5) = -\frac{31}{13}(2\ ,\ 3) + \frac{28}{13}(5\ ,\ 1)$$

يعنې که α_1 او α_2 قيمتونه په $\vec{a_1}$ او $\vec{a_2}$ وکتورنو کې ضرب شي، په پايله کې د $\vec{a}$ وکتور پـه لاس راځـي، نو ومولیدل چې $\vec{a_1}$ او $\vec{a_2}$ وکتورونه د $\vec{a}$ د وکتور خطي ترکيب دی.

د طبعي واحد وکتورونو د خطي ترکيب په واسطه د يوه وکتور ښودل:

که په دوه بعدي، درې بعدي او بلاخره په n بعدي فضاکې د شعاع وکتورونه راکړل شوي وي. کولای شو هغه د واحدو وکتورونو د ضريبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول وښيو.

a) که دوه بعدي فضا وي $(x_1 , x_2) = (x_1 , 0) + (0 \; , \; x_2)$

نو: $= x_1(1 \; ,0) + x_2(0 \; ,1)$

که $e_2 = (0 ,1)$ او $e_1 = (1 ,0)$ وي.

نو: $(x_1 , x_2) = e_1 x_1 + e_2 x_2$

او په بل ډول يې هم ليکلای شو:

$$(x , y) = (x ,0) + (0, y) = x(1,0) + y(0 \; ,1)$$
$$= xe_1 + ye_2 = xi + yj$$

b) که فضا درې بعدي وي، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$(x_1 , x_2 , x_3) = (x , y , z) = (x_1 \; ,0 \; ,0) + (0, x_2 \; ,0) + (0 \; ,0 \; , \; x_3)$$
$$= x_1(1,0 \; ,0) + x_2 \, (0 \; ,1 \; ,0) + x_3(0,0 \; ,1)$$

څرنگه چې $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ او $e_3 = (0,0,1)$ په درې بُعدي فضاکې واحد وکتورونه دي، نو:

$$(x_1 , x_2 , x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$
$$(x , y \; , z) = xi + yj + zk$$

c) په عمومي حالت کې که فضا n بعدي وي

$$(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) = (x_1 \; , \; 0, \ldots, \; 0) + (0 \; , \; x_2 , \; \ldots, \; 0) + \ldots + (0,0 \; ,\ldots, x_n)$$
$$= x_1(1 \; ,0,\ldots,0) + x_2(0,1,\ldots,0) + \ldots + x_n(0 \; , \; 0,\ldots, \; 1)$$
$$= x_1 \, e_1 + x_2 \, e_2 + \ldots + x_n \, e_n$$

په داسې حال کې چې $e_1 , e_2 , \; \ldots \; , \; e_n$ طبيعي واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو خطي خپلواکي: د $\vec{a}_1 , \vec{a}_2 , \; \ldots \; , \vec{a}_n$ وکتورونه په يوه وکتوري ساحه کې خطي خپلواکي (خطي استقلال) لري، که چېرې دغه خطي ترکيب $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$ مساوي په صفر وي او همدارنگه $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ وي.

فعاليت

که $S = \{(1 \; ,0 \; \; ,0) \; , (0 \; ,1 \; ,0) \; , (0 \; ,0 ,1)\}$ وي وښاياست چې S خطي خپلواکي لري.

غیرې خپلواک خطي وکتورونه: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونه خطاً مربوط خطي غیر خپلواک یا خطي انحصار لري، که چېرې یوازې او یوازې $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=0$ وي او کم ترکمه یو له ضریبونو د $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ څخه د صفر خلاف وي.

یادونه:

ددې لپاره چې د وکتورونو یو سټ په لاس راوړو چې خطي خپلواکي ولري، نو لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: د وکتورونو ترکیب په لاس راوړو او له صفر وکتور سره یې مساوي نیسو.

دویم پړاو: د وکتورونو د جمعې عملیه سرته رسوو.

دریم پړاو: د معادلاتو سیستم تشکیلوو.

څلورم پړاو: د معادلاتو سیستم د سکالرونو لپاره حلوو، په هغه صورت کې چې ټول سکالرونه صفر شي نو وایو چې نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري او که چېرې له ټولو سکالرونو څخه کم ترکمه یو سکالر د صفر خلاف وي، نو وکتورونه خطي خپلواکي نه لري.

مثال: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونه په لاندې ډول راکړل شوي دي $\vec{a}_1=(1,2,0)$, $\vec{a}_2=(0,3,1)$, $\vec{a}_3=(2,3,1)$ وښایاست چې $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ او $\vec{a}_3$ وکتورونه خطي خپلواکي لري او که نه؟

حل: د خطي خپلواکو وکتورونو له اړیکې څخه په ګټې اخیستنې سره کولای شو، ولیکو:

لومړی پړاو: $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3=\alpha_1(1,2,0)+\alpha_2(0,3,1)+\alpha_3(2,3,1)=0$

دویم پړاو:

$$=(\alpha_1, 2\alpha_1, 0)+(0, 3\alpha_2, \alpha_2)+(2\alpha_3, 3\alpha_3, \alpha_3)=(0,0,0)$$
$$=(\alpha_1+0+2\alpha_3, 2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3, 0+\alpha_2+\alpha_3)=(0,0,0)$$

دریم پړاو:

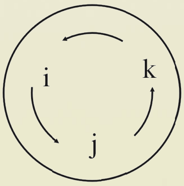
$$\begin{cases}\alpha_1 \;\; +0 \;\; +2\alpha_3=0\\ 2\alpha_1+3\alpha_2 \;\; +3\alpha_3=0\\ 0 \;\; +\alpha_2 \;\; +\alpha_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 \;\; +2\alpha_3=0\\ 2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3=0\\ \alpha_2 \;\; +\alpha_3=0\end{cases}$$

څلورم پړاو: اوس د معادلاتو سیستم د α_1 ، α_2 او α_3 لپاره حلوو:

$$\alpha_2=-\alpha_3$$
$$2\alpha_1+3(-\alpha_3)+3\alpha_3=2\alpha_1-3\alpha_3+3\alpha_3=0 \Rightarrow 2\alpha_1=0\,,\;\; \alpha_1=0$$
$$\alpha_1+2\alpha_3=0$$
$$0+2\alpha_3=0 \;\; \Rightarrow \alpha_3=0$$
$$2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3=0$$
$$0+3\alpha_2+0=0 \;\; \Rightarrow 3\alpha_2=0 \quad , \qquad \alpha_2=0$$

خرنګه چې $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ دي، نو نومړي وکتورونه خطي خپلواکي لري.

فعالیت



د تعریف له مخې د ښي لاس د قاعدې په واسطه د $\vec{u} \times \vec{v}$ او $\vec{v} \times \vec{u}$ مسیر او یا جهت په مخامخ شکل کې وښيي.

- وښایاست چې $\vec{i} \times \vec{i} = 0$ او $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ دی.
- د پورتنیو څېړنو له مخې د $\vec{j} \times \vec{j}$ ، $\vec{k} \times \vec{k}$ ، $\vec{j} \times \vec{k}$ او $\vec{k} \times \vec{i}$ وکتورونو د ضربونو حاصل په هکله څه ویلای شئ؟
- وښایاست چې: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ او $\vec{u} \times \vec{u} = 0$ دی.
- **په عمومي ډول ویلای شو چې د $\vec{j}, \vec{i}$ او $\vec{k}$ وکتورونو د ضرب حاصل په دایروي ډول د لومړني او دویم وکتور د ضرب له حاصل څخه دریم وکتور، لکه: د ورکړل شوې دایرې په ځېر لاس ته راځي.**

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لاس ته راځي:

پایله: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي. د وکتوري ضرب له حاصل څخه او د ښي لاس د قاعدې په کارولو سره لرو:

i) $\vec{u} \times \vec{u} = 0$

ii) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

iii) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

iv) $\vec{u} \times (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = k\,(\vec{u} \times \vec{v})$, $k \in IR$

د وکتوري ضرب د حاصل د تعریف له مخې د پورته پایلې ثبوت دې زده‌کوونکو ته پرېښودل شي.

لومړی مثال: که چېرې $\vec{u} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ او $\vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ وکتورونه صفر نه وي، نو وښایاست چې:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1 c_2 - c_1 b_2)\vec{i} - (a_1 c_2 - c_1 a_2)\vec{j} + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\vec{k}$$

حل: د تعریف نه په ګټې اخیستنې سره لیکو، چې:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})\times(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$

$$=a_1a_2(\vec{i}\times\vec{i})+a_1b_2(\vec{i}\times\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\times\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\times\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\times\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\times\vec{k})$$

$$+c_1a_2(\vec{k}\times\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\times\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\times k)$$

$$\left.\begin{matrix}\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\end{matrix}\right\}\quad,\quad\left.\begin{matrix}\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\end{matrix}\right\}\quad,\quad\left.\begin{matrix}\vec{i}\times\vec{i}=0\\ \vec{j}\times\vec{j}=0\\ \vec{k}\times\vec{k}=0\end{matrix}\right\}$$

$$=a_1b_2\cdot\vec{k}-a_1c_2\cdot\vec{j}-b_1a_2\cdot\vec{k}+b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\,\vec{j}-c_1b_2\cdot\vec{i}$$

$$=(b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\cdot\vec{j}+a_1b_2\cdot\vec{k})-(c_1b_2\cdot\vec{i}+a_1c_2\,\vec{j}+b_1a_2\cdot\vec{k}$$

$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}+(c_1a_2-a_1c_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

$$\Rightarrow\quad\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

دویم مثال: وښایاست چې د $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ لپاره د $\vec{a}\times\vec{b}$ حاصل له $(-\vec{i}+6\vec{j}+8\vec{k})$ سره مساوي دی.

حل: د لومړي مثال نه په ګټې اخیستنې سره پوهېږو، چې:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\times(4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=8(\vec{i}\times\vec{i})+4(\vec{i}\times\vec{j})-2(\vec{i}\times\vec{k})$$

$$+4(\vec{j}\times\vec{i})+2(\vec{j}\times\vec{j})-(\vec{j}\times\vec{k})+4(\vec{k}\times\vec{i})+2(\vec{k}\times\vec{j})-(\vec{k}\times\vec{k})$$

$$=0+4\vec{k}+2\vec{j}-4\vec{k}+0-\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{i}-0=-3\vec{i}+6\vec{j}$$

د مخلوط ضرب حاصل(درې ګوني ضرب) Triple Product

تعریف: د دوو یا څو وکتورونو د ضرب لپاره څو امکانه شته چې هر یو یې په لاندې ډول تر څېړنې لاندې نیسو:

i) د $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ دضرب حاصل.

د پورتنیو $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونو د ضرب حاصل چې په سکالري ډول ضرب شوی، یو سکالر دی. وروسته نوموړی سکالر د $\vec{c}$ په وکتور کې ضرب شوی چې له پایلې یې وکتور په لاس راځي دغه وکتور له $\vec{c}$ وکتور سره هم جهت دی.

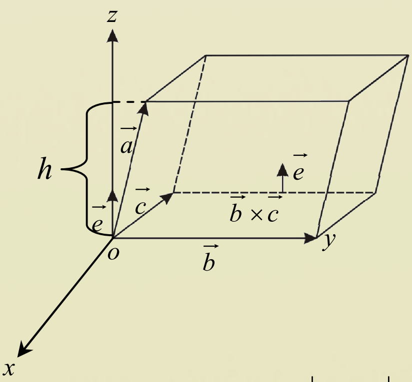
په پورتني ضرب کې لاندې قانون شته: $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \neq (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} \neq (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$

د $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ وکتور جهت د $\vec{a}$ د وکتور هم جهت او د $(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$ وکتور جهت د $\vec{b}$ د وکتور هم جهت دی.

ii) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

iii) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})$

iiv) $\vec{a}(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$



د $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ اړیکه د هغه متوازي السطوح له حجم څخه عبارت دی چې a, b او c د متوازي‌السطوح اضلاع دي، څرنګه چې په شکل کې لیدل کیږي $\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|$ د متوازي-السطوح قاعده او h د متوازي‌السطوح جګوالی دی، نو له دې امله:

$\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|(\vec{a}\cdot\vec{e}) = \vec{b}\,|\vec{a}\times\vec{c}\,|\,\vec{e}$ = v = د متوازي‌السطوح حجم

$v = \vec{b}(\vec{a}\times\vec{c}) = \left|\vec{b}\times\vec{c}\right| h$

تطبیقاتي مسئلې:

1- که چېرې $\vec{a} = 4\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ او $\vec{b} = 2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ وکتورونه راکړل شوي وي، هغه وکتور مطلوب غوښتل کیږي چې پر دواړو وکتورونو عمود وي، آیا دغه وکتور یوازنی وکتور دی، که څنګه؟ دلیل مو څه دی؟

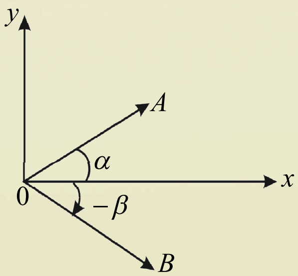
حل: د ښي لاس د قاعدې په کارولو پوهیږو چې د $\vec{a}\times\vec{b}$ وکتور پر هغو وکتورونو عمود دی، نو لرو:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}$$

نو د $\vec{a}\times\vec{b}=7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}$ وکتور پر $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونه یوازیني عمود وکتورونه دي، بلکې $\vec{b}\times\vec{a}$ وکتور هم د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په وکتورونو عمود دي، یعني لرو:

$$\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}=-7\vec{i}+6\vec{j}+10\vec{k}=-(7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k})=-\vec{a}\times\vec{b}$$

2- ثبوت کړئ چې د α او β د هرې اختیاري زاویې لپاره $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin B$.



حل: که $\vec{OA}$ او $\vec{OB}$ دوه وکتورونه د x,y په مستوي کې داسې راکړل شوي دي چې د x له محور سره د α او β زاویې جوړې کړي، له شکل څخه پوهېږو: $A\hat{O}B=\alpha+\beta$

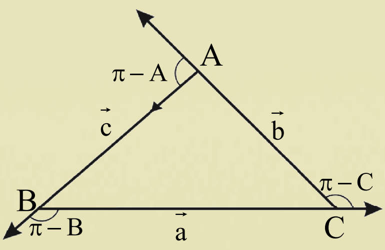
له بلې خوا پوهېږو چې $\vec{OA}=\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}$ او $\vec{OB}=\cos(-\beta)\,\vec{i}+\sin(-\beta)\,\vec{j}$ نو لرو:

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j})\times(\cos\beta\,\vec{i}-\sin\beta\,\vec{j})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ \cos\beta & -\sin\beta & 0\end{vmatrix}$$

$$=\vec{k}(-\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta)=-\vec{k}\sin(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow\ |\vec{OA}|\times|\vec{OB}|=|-\vec{k}|\cdot\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)$$

3- په یوه کیفي مثلث کې وښیئ، چې: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$



حل: فرضوو چې د لاندې شکل له مخې د $\vec{a}$، $\vec{b}$ او $\vec{c}$ وکتورونه د $\overline{BC}$، $\overline{CA}$ او $\overline{AB}$ د مثلث د ضلعو په امتداد راکړل شوي دي، نو لرو: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

$$\Rightarrow\ \vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}\qquad ....\ (i)$$

که د مساوات دواړه خواوې په $\vec{c}$ وکتور کې وکتوري ضرب کړو، لاسته راځي، چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c} = -\vec{a}\times\vec{c}$$

$$(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{c}\times\vec{c}) = -\vec{a}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$$

$$\vec{c}\times\vec{c} = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a} \quad\Rightarrow\quad \left|\vec{b}\times\vec{c}\right| = \left|\vec{c}\times\vec{a}\right|$$

دپورتینو مساواتو د تعریف له مخې داسې لیکلای شو:

$$|\vec{b}|\ |\vec{c}|\sin(\pi - A) = |\vec{c}|\ |\vec{a}|\ \sin(\pi - B)$$

$$\Rightarrow\quad |\vec{b}|\ |\vec{c}|\ \sin A = |\vec{c}|\ |\vec{a}|\ \sin B \quad\Rightarrow\quad b\sin A = a\sin B\ \ / \div ab$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \qquad .... \quad (ii) \qquad \text{یا} \qquad \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \qquad .... \quad (ii)$$

د پورته په څېر که چېرې د (i) د رابطې دواړه خواوې په $\vec{b}$ وکتور کې په وکتوري ډول ضرب شي، لاسته راځي چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b} = -\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{a}$$

$$(\vec{b}\times\vec{b})+(\vec{c}\times\vec{b}) = \vec{b}\times\vec{a}$$

$$\vec{b}\times\vec{b} = 0 \quad\Rightarrow\quad (\vec{c}\times\vec{b}) = \vec{b}\times\vec{a}$$

$$|\vec{c}||\vec{b}|\sin A = |\vec{b}||\vec{a}|\sin C$$

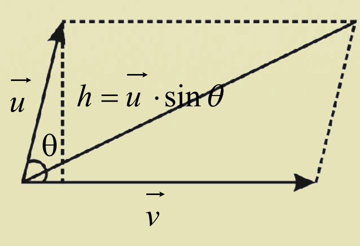
$$c\sin A = a\sin C\ \ / \div ac$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}\quad .....\ iii \qquad \text{یا} \qquad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

د (ii) او (iii) معادلو له پرتلې څخه د ساین قضیه لاسته راځي:

$$\frac{a}{SinA} = \frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC}$$

4- **د یوې متوازي الاضلاع مساحت:** د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي، د دوی ترمنځ زاویه د θ د لاندې شکل په څېر په پام کې نیسو. ګورو چې $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د متوازای الاضلاع ضلعې دي چې د هغې د مساحت د پیداکولو لپاره کولای شو، ولیکو:



ارتفاع × قاعده = د متوازي الاضلاع مساحت

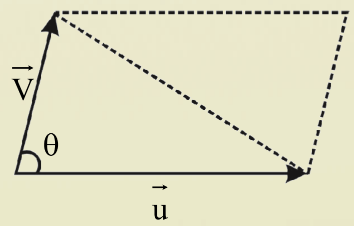
خرنګه چې: $|\vec{v}|$ = قاعده او $h = |\vec{u}|\sin\theta$ = ارتفاع ده

$|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta = |\vec{u}\times\vec{v}|$ = د متوازي الاضلاع مساحت

يعنې د يوې متوازي الاضلاع مساحت، د يوې متوازي الاضلاع د ضلعو د وکتوري ضرب له حاصل څخه عبارت دی چې د متوازي الاضلاع ضلعې هم دي.

پايله:څرنگه چې د يوه مثلث مساحت د متوازي الاضلاع مساحت نيمايي دی، نو د مثلث مساحت د لاندې شکل په پام کې نيولو سره عبارت دی، له:

$$\text{د مثلث مساحت} = \frac{1}{2}\,(\text{د متوازي الاضلاع مساحت}) = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$$



پوښتنې

1. که $\vec{a}_1 = t^2+t+2$ ، $\vec{a}_2 = 2t^2+t$ او $\vec{a}_3 = 3t^2+2t+2$ وي وښاياست چې نومړي وکتورونه خطي خپلواکي لري؟

2. وښاياست چې $\vec{a} = 2i+3j+4k$ او $\vec{b} = 4i+6j+8k$ وکتورونه يو له بل سره کوم ډول خطي اړيکه لري؟

3. د هغه مثلث مساحت پيدا کړئ چې راسونه يې د $A(1,-1,1)$ ، د $B(2,1,-1$ او $C(-1,1,2)$ وکتورونو په واسطه درکړل شوي وي. همدارنگه هغه واحد وکتور چې پر ABC مستوي عمود وي، مطلوب دي.

4. د هغه متوازي الاضلاع مساحت پيدا کړئ چې: د $P(0,0,0), Q(-1,2,4)$ ، $R(2,-1,4)$ او $S(1,1,8)$ وکتورونو په واسطه ځانگړې شوي وي.

5. که $\vec{u} = 2i-j+k$ ، $\vec{v} = 4i+2j-k$ سره وي، د لاندې وکتورونو د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

i) $\vec{u}\times\vec{u}$ ii) $\vec{u}\times\vec{v}$ iii) $\vec{v}\times\vec{u}$

د څېړکي مهم ټکي

د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه: هغه کمیتونه چې هم جهت اوهم مقدار ولري وکتور نومېږي. هغه وکتورونه چې اوږدوالی یې مساوي او عین جهت ولري، یو له بله سره د ممثلو وکتورونو په نامه یادیږي. هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پرته وي شعاع وکتور (Position Vector) بلل کیږي. یو وکتور په مستوي کې د $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ په څېر ښودل کېږي. چې a_x د x او a_y د y محور پرمخ له فاصلې او ترتیب څخه عبارت دی.

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی: که $P(x_1,y_1)$ وکتور مبداء او $Q(x_2,y_2)$ د پای ټکی د $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{PQ}$ وکتور وي. په دې ډول $\overrightarrow{a}$ وکتور په $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ ښیو او د $P\overset{\Delta}{Q}N$ قایم الزاویه مثلث او $|\overrightarrow{a}|$ وکتور اوږدوالي له مخې لرو چې:

د P او Q ټکو ترمنځ واټن، $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$ د $\overrightarrow{a}$ اوږدوالې د P او Q منځنې ټکی $M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_1+x_2}{2}\\\frac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}$ د $\overrightarrow{PQ}$ د منځنې ټکې کمیتونه یا مختصات دی.

واحد وکتور: هغه وکتور چې د راکړل شوی وکتور په عین جهت پروت او یو واحد اوږوالی ولري، د واحد وکتور په نامه یادیږي.

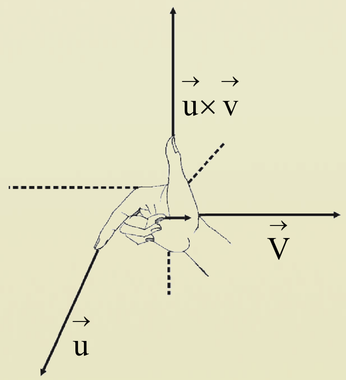
مثال: $\overrightarrow{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\overrightarrow{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په قایم سیستم کې د x او y د مستوي د محورونو په جهت واحد وکتورونه دي، په داسې حال کې چې $\overrightarrow{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$، $\overrightarrow{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ او $\overrightarrow{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ په فضاکې د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د x، y او z محورونو په جهت واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو سکالري او وکتوری ضرب حاصل: د $\overrightarrow{u}$ او $\overrightarrow{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د سکالري ضرب حاصل یې په مستوي او فضاکې عبارت دی له: $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}|\,Cos\theta$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاويه ده. او د وکتوري ضرب حاصل يې يـو وکتـور دي چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ په واسطه ښودل کيږي، عبارت دی، له: $\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\,Sin\theta\cdot\vec{n}$

په داسې د حال کې چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ پـر وکتورونـو عمـود دی او $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونـه سـره د ښي لاس قاعدې په واسطه ټاکل کېږي.

د ښي لاس قاعده: که د شهادت ګوته په قايم ډول کږه شي، لکه د لاندې شکل په شان، په دې صورت کې د شهادت ګوته د $\vec{u}$ محور په جهت، د خنګل په جهت د $\vec{v}$ محور او غټـه ګوتـه د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتـور حاصـل ضرب ښيي.



په فضا کې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب:

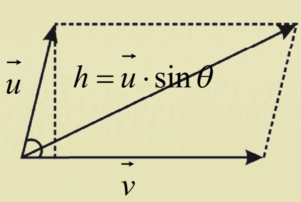
کــه $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ ورکړل شوی وي، په دې صورت کې وکتوري حاصل ضـرب يعنې $\vec{a}\times\vec{b}$ عبارت دی له:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

مساحت او د وکتوري ضرب حاصـل: د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونـه، چـې صـفر نـه وي، د وکتـوري ضـرب قيمت يې د متوازي الاضلاع له مساحت څخه عبارت دی، چې د وکتورونو په واسطه په لاندې شـکل کـې تشکيليږي.

$|\vec{u}\times\vec{v}|=$ د متوازي الاضلاع مساحت



د څپرکي پوښتنې

1): که $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ وي:

a): $\vec{a}\cdot\vec{b}$ b): $\vec{b}\cdot\vec{a}$ مطلوب دی

2): که چېرې د $P(2,3)$ او $Q(6,-2)$ ټکي د $\vec{op}$ او $\vec{OQ}$ شعاع وکتورونو پای وي، په دې صورت کې د P او Q په مستوي کې د $xi+yj$ په څېر ولیکئ.

3): که چېرې $A(1,-1)$ ، $B(2,0)$ ، $C(-1,3)$ او $D(-2,2)$ درکړل شوي وي، د $\vec{AB}$ او $\vec{CD}$ وکتورونو حاصل جمع مطلوب ده.

4): که چیرې $A(2,5)$ ، $B(-1,1)$ او $C(2,-6)$ درکړل شوي وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{AB}=?$ $ii)\ 2\vec{AB}-\vec{CB}=?$ $iii)\ 2\vec{CB}-2\vec{CA}=?$

5): که چېرې $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ ورکړل شوی وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$ $ii)\ \vec{v}-3\vec{w}$ $iii)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

$(iv$: د $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ راکړل شوو وکتورنو په جهت واحد وکتورونه پیدا کړئ

6): د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ درکړل شوو وکتورونو لپاره سکالري ضرب حاصل د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ، $\vec{b}\cdot\vec{a}$ او وکتوري ضرب حاصل د $\vec{a}\times\vec{b}$ او $\vec{b}\times\vec{a}$ پیدا او دوه په دوه یې پرتله کړئ، که چیرې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په لاندې توګه وي:

$i)\ \begin{cases}\vec{a}=2i+j-k\\ \vec{b}=i-j+k\end{cases}$ $ii)\ \begin{cases}a=i+j\\ b=i-j\end{cases}$

$iii)\ \begin{cases}\vec{a}=3i-2j+k\\ \vec{b}=i+j\end{cases}$ $iv)\ \begin{cases}\vec{a}=-4i+j-2k\\ \vec{b}=2i+j+k\end{cases}$

7): د هغو مثلثونو مساحت مطلوب دی چې راسونه يې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل کېږي:

$i): \quad P(0,0,0), \quad Q(2,3,2), \quad R(-1,1,4)$

$ii): \quad P(1,-1,-1), \quad Q(2,0,-1), \quad R(0,2,1)$

8): د هغه متوازي الاضلاع مساحت مطلوب دی چې راسونه يې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل شوی وي.

$i): \quad A(0,0,0), \quad B(1,2,3), \quad C(2,-1,1), \quad D(3,1,4)$

$ii): \quad A(1,2,-1), \quad B(4,2,-3), \quad C(6,-5,2), \quad D(-3.5,-4)$

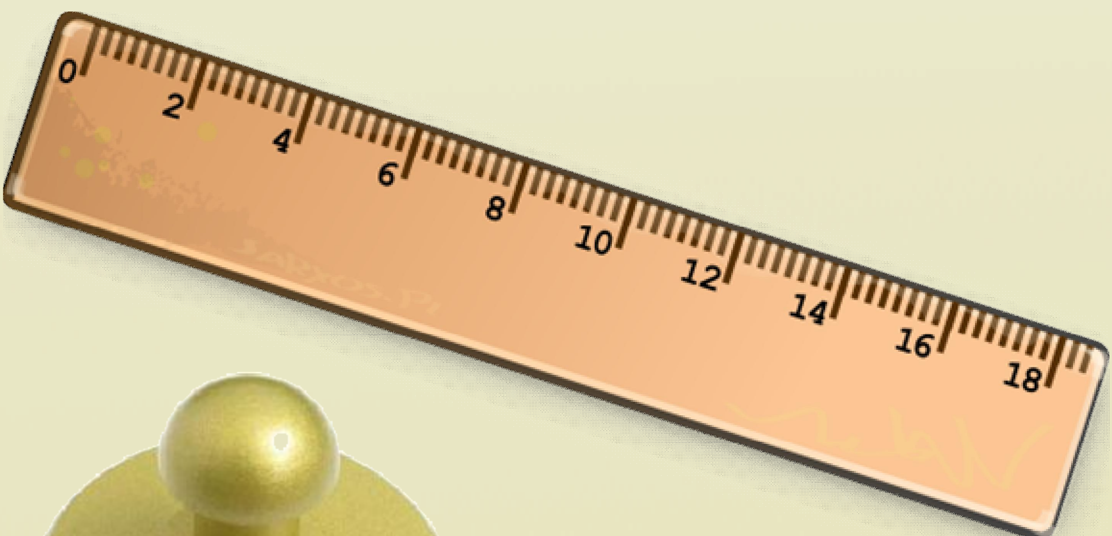
$iii): \quad A(1,-1,1), \quad B(-1,2,2), \quad C(-3,4,-5), \quad D(-3,5,-4)$

9): کوم وکتورونه عمود او کوم موازي دي؟

$i): \quad \vec{u} = 5i - j + k, \quad \vec{v} = j - 5k, \quad \vec{w} = -15i + 3j - 3k$

$ii): \quad \vec{u} = i + 2j - k\ , \quad \vec{v} = i + j + k, \quad \vec{w} = -\frac{\pi}{2}\vec{i} + \frac{\pi}{2}\vec{j}$

اتم څپرکی
احصائیه



$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$

دبدلونونو ضریب

Coefficient Variations

که چېرې د يوې ټولنې تيتوالى په متر او د بلې ټولنې په کيلوګرام ښودل شوې وي. آيا فکر کولاى شئ چې دغه دواړه تيتوالى په دواړو ټولنوکې د پرتلې وړ دي او که نه؟

$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$

فعاليت

10 تنه زده کوونکي له خپل ټولګي څخه په تصادفي ډول وټاکئ؟

- د زده کونکو ونه او وزن تشخيص کړئ.
- د زده کوونکو د ونې او وزن واريانس او معياري انحراف محاسبه کړئ.
- آيا فکر کولاى شئ چې د دې دواړو متحولينو د تيتوالى د ميزان پرتله د واريانس او معياري انحراف له لارې امکان لري؟ ولې؟
- که چېرې معياري انحراف په اوسط وويشل شي، نو په لاس راغلى مقدار يا عدد واحد به څه وي؟
- د بدلونونو يا تغييراتو ضريب يا نسبي تيتوالى داسې کارول کېږي، چې واريانس او معياري انحراف هغه نه لري. يو له دغو کارونو څخه د دوو نا متجانسو ټولنو پرتله ده چې د يادولو وړ ده.

دبدلونونو يا تغييراتو ضريب چې په $C \cdot V$ ښودل کېږي عبارت له هغه خارج قسمت څخه دى، چې د معياري انحراف پر اوسط باندې په لاس راځي اويو مطلق بې واحده عدد دى په لاس راځي يعنې:

$$\text{دبدلونونو يا تغييراتو ضريب} = \frac{\text{معياري انحراف}}{\text{اوسط}} \qquad \text{يا} \qquad C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

که د تغيراتو ضريب په 100 کې ضرب شي، د تحول ضريب په لاس راځي:

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}}$$

- د بدلون ضريب يوازې د مثبتو ډېټاوو لپاره تعريف شوي وي.
- که چېرې ټوله ډېټا سره برابره وي، د بدلون ضريب مساوي په صفر دى.
- که ټوله ډېټا په يو مثبت عدد کې ضرب شي، د بدلون ضريب تغير نه کوي.

- که په ټوله ډېټا یو مثبت عدد ورزیات شي، د بدلون نوی ضریب چې په لاس راځي له لومړي ضریب څخه کوچنی دی.

لومړی مثال: د لاندې ډېټا د بدلون ضریب محاسبه کړئ:

$$\{1,3,5\}$$

حل: د فورمول له مخې لیکلای شو:

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{1+3+5}{3}=\frac{9}{3}=3$$

$$S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{(1-3)^2+(3-3)^2(5-3)^2}{3}=\frac{4+4}{3}=2.67$$

$$S=\sqrt{2.67}$$

$$C\cdot V=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{2.67}}{3}=0.543$$

دویم مثال: د تصویري ټلویزوني لامپونو یو تولیدونکی دوه ډوله لامپونه A او B تولیدوي، په داسې حال کې چې د A متوسط عمر مساوي په 1495 او د B متوسط عمر مساوي په 1875 ساعته دی او معیاري انحرافونه یې په ترتیب سره 280 او 310 دي، تولیدوي.

د کوم یوه لامپ تصویر له پاسنیو ډولونو څخه د نسبي تیتوالي یا دبدلون ضریب قیمت زیات دی؟

حل: د فورمول له مخې لرو چې:

$$C\cdot V_A=\frac{S_A}{\bar{x}_A}=\frac{280}{1495}\cdot 100=18.7\%$$ د A لامپونو د بدلون ضریب

$$C\cdot V_B=\frac{S_B}{\bar{x}_B}=\frac{310}{1875}\cdot 100=16.5\%$$ د B لامپونو د بدلون ضریب

څرنګه چې $C\cdot V_A > C\cdot V_B$ څخه دی، له دې کبله د A لامپ ډېر تیتوالی لري، ولې ټېنګښت یې کم دی.

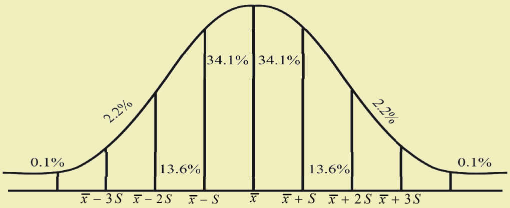
پوښتنې

1. دلاندې ډېټا د بدلون یا تغیراتو ضریب حساب کړئ؟

1 3 4 5 6

2. که چېرې اوسط مساوي په 4 او معیاري انحراف مساوي په 6 وي، د بدلون یا تغیراتو ضریب څو دي؟
3. ستاسو د ټولګي د زده‌کوونکو د سن دبدلون ضریب 10 کاله وروسته څومره تغییر یا بدلون کوي؟ کمېږي او که ډېرېږي؟

په نورمال منحني کې تيتوالى

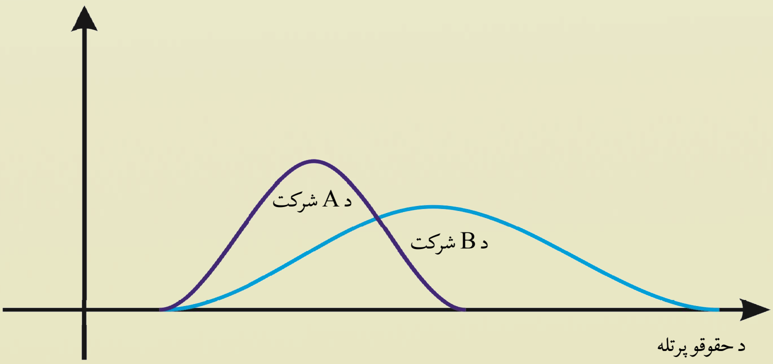


اوريدلي به مو وي چې وايي: يو ښه تصوير د زر کلميو ارزښت لري.

لاندي شکل ته وګورئ، د هغه په اړوند فکر او بحث وکړئ.

فعاليت

لاندې دوه ګرافونو د دوه A او B شرکتونو د حقوقو تأديه ښيي.



- کوم شرکت په اوسط ډول د حقوقو تاديه ډېره لري؟
- کوم شرکت د حقوقو د تأديې په ميزان کې خپلو کارمندانو ته لږه پراګنده ګي لري؟
- د دواړو شرکتونو د حقوقو تأديات سره پر تله کړئ.

لاندې ټکي د اوسط او معياري انحراف په نورمال منحني کې صدق کوي.

- که چېرې $\bar{x}$ اوسط او S معياري انحراف وي؛ نو 68% دپلټنې موارد په $(\bar{x}-S \ , \bar{x}+S)$ فاصله کې يعنې د اوسط په شا او خوا د معياري انحراف په فاصله کې ځاى لري.
- 96% د پلټنې موارد په $(\bar{x}-2S \ , \bar{x}+2S)$ فاصله کې يعنې د اوسط په شاوخوا د دوه معياري انحرافونو په فاصله کې ځاى لري .
- 99% د پلټنې موارد په $(\bar{x}-3S \ , \bar{x}+3S)$ فاصله کې يعنې د اوسط په دواړو خواوو درې معياري انحرافونو په فاصله کې قرار لري.

- په يوه نورمال منحني کې له $2S$ څخه ډېر انحراف غير عادي او له $3S$ څخه زيات انحراف زيات غير عادي شمېرل کېږي.

هغه ډېټا چې د $3S$ په اندازه له اوسط څخه فاصله يا واټن ولري، د تيتوالي يا تيتي ډېټا په نامه يادېږي.

مثال: که د يوې مؤسسې د کارکوونکو د معاش اوسط 12500 افغانۍ او معياري انحراف يې مساوي په 700 افغانۍ وي نو:

الف: له نورمال توزيع څخه د فيصدي په ګټه اخيستنې سره، د ورکړل شوي معاش توزيع تشريح کړئ؟

ب: آيا ويلاي شئ چې د 1400 افغانيو معادل معاش يو غير عادي معاش دی؟

د الف حل: لومړی د $\bar{x}\pm S$ ، $\bar{x}\pm 2S$ ، $\bar{x}\pm 3S$ قيمتونه په لاس راوړو.

فيصدي	فاصله د افغانيو له مخې	فاصله د S له مخې
68%	11800 – 13200	$\bar{x}\pm S$
96%	11100 – 13900	$\bar{x}\pm 2S$
99.6 %	10400 – 14600	$\bar{x}\pm 3S$

د ب حل: لومړی $\bar{x}-1400$ په لاس راوړئ چې مساوي په 1500 کېږي؛ يعنې 1400 افغانيو په اندازه 1500 افغانۍ له اوسط څخه ډېرې دي، که چېرې اوس دغه رقم په S ووېشو په لاس را ځي:

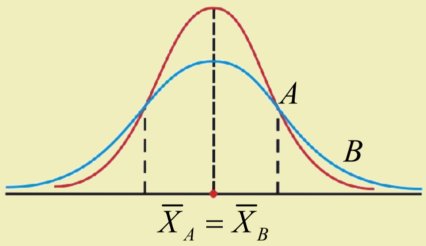
$$\frac{1500}{700}=2.1$$

په دې ډول د 1400 افغانيو معاش غير عادي معاش دی، ځکه چې د 2S له اندازې څخه زيات او له $\bar{x}$ څخه پورته دی.

پوښتنه

که چېرې 62.28% فيصده مشاهدات د $(\bar{x}-S,\ \bar{x}+S)$ په فاصله کې پراته وي، آيا ويلای شئ، چې 95.45% او 99.73% مشاهدات په کومه فاصله کې قرار لري؟ انټروالونه له نورمالې منحنې سره وښاياست؟

دنورمالي توزيع دډول معيارونه



د مرکزي تيتوالي دوه معيارونه يو زيات شمېر د يـوې احـصايوي مجموعې اطلاعاتو ته په لنډ ډول انعکاس ورکوي.

ددې لپـاره چـې د يـوې احـصايوي مجمـوعې اطلاعـات، تناظر او د مثبت او منفـي اشـارو لرونکـي وي؛ نـو لـه کـوم ډول منحني څخه بايد گټه واخلو.

فعاليت

- په يو ه نورماله توزيع کې وسط، اوسط او د موډ معيارونه څه وخت سره مساوي دي؟
- که توزيع د اوسط په اطراف کې متناظره نه وي، د وسط اوسط او موډ د کميتونو په اړه څه فکر کوي؟
- که چېرې يوه توزيع متناظر ه وي؛ نو د اوسط او وسـط تفاضل څو ده؟
- که چېرې دواړه توزيع گانې يو شان اوسط او تناظر ولري؛ نو د جگوالي او ټيټوالي له اړخه به څه وضعيت ولري؟

دتوزيع د ډول معيارونه په دوو لاندې حالتونو کې څېړل کېږي:

1- **د خمېدلو skewness معيار**: هغه توزيع چې د اوسط په دواړو خواوو کې متناظره نه وي، خمېدل نومېږي، چې په دوو لاندې ضريبونو ښودل کېږي.

الف: د خمېدلو ضريب: دا هغه معيار دی چې د خمېدلو د ميزان د ټاکلو لپاره کارول کېږي، چې په لاندې ډول تعريف شوی دی:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{x})^3}{S^3}$$

هغه عدد دی چې يوازې د پرتله کولو لپاره ترې کار اخېستل کېږي.

که $\alpha_3 = 0$ وي؛ د نو توزيع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي؛ توزيع مثبت خمېدل (possitve skewness)لري، يعنې ښي لوري ته خمېدگي لري.

اوکه $\alpha_3 < 0$ وي؛ توزيع منحني منفي خمېدل (negative skewness)لري يعنې کيڼ لوري ته خمېدگي لري.

که چېرې د کثرت جدول موجود وي، خمېدگي(عدم تناظر) يې د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i(x_i - \overline{x})^3}{S^3}$ فورمـول پـه واسـطه پيدا کېږي. چې f_i فريکونسي ښيي.

ب: د پيرسون د خمېدلو ضريب: د پيرسون ضريب په لاندې ډول تعريف شوی دی.

$$S\,k_{(p)} = \frac{3(\overline{x} - med)}{S}$$

په متناظره توزيع کې د پيرسون د خميدلو ضريب مساوي په صفر دی. د پيرسـون د خمېـدلو د لـو ضـريب مثبـت او منفي قيمتونه په ترتيب سره د توزيع د منحني مثبت يا منفي خمېدل ښيي.

2- **د پړسوب kurtosis معيار**: د پړسوب معيار ددې ښودونکی دی چې د توزيع يوه منحني څه وخت جگه او څه وخت ټيټوالي لري.

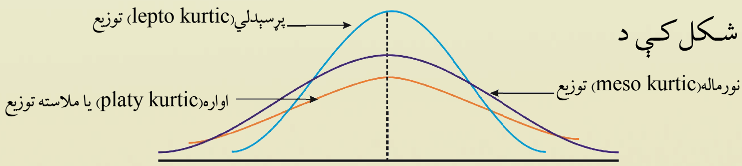
د پړسوب شاخص هغه معمولي معيار دی چې د يوې منحني د پړسېدلو د اندازه کولو لپاره په کار اچول کېږي او په لاندې ډول تعريف شوی دی:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{S^4}$$

که د کثرت جدول په لاس کې ولرو، نو د پړسوب معيار فورمول $\alpha_4 = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\bar{x})^4}{S^4}$ دی چې دلته f_i فريکونسي، x_i ډېټا او $\bar{x}$ د x_i اوسط او S معياري انحراف دی.

د پړسوب معيار د توزيع په ځای او پراګنده ګي پورې اړه نه لري. دغه معيار د پرتله کيدو لپاره په کار لوېږي.

مثال: مخامخ شکل په پام کې ونيسئ د α_4 ضريب د درې ډوله خمېدلو او پړسوب ډولونه چې په شکل کې د هغوي توزيع ښودل شوي ده ښيي.



حل: د نورمالې توزيع د پړسوب د درجې او ميزان د پرتله کېدو لپاره لکه: يو سټنډرډ په کار اچول کېږي.

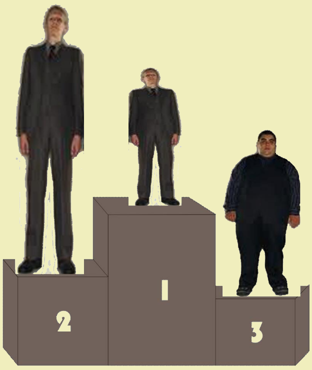
د نورمالې توزيع لپاره د α_4 قيمت مساوي په 3 دی، په داسې حال کې چې که چېرې α_4 له 3 څخه زياته وي نظر نورمال منحنې ته د منحنې پړسوب زيات دی.

يا په بل عبارت يوه پړسيدلې توزيع چې څوکه لري او که چيرې α_4 له 3 لږ وي، نظر نورمالې منحنې ته يې پړسوب کم دی چې د ملاستې يا اوارې توزيع په نامه يادېږي.

پوښتنې

د يوه ټولګي د زده‌کوونکو د احصايې د مضمون نمرې په لاند ې ډول ورکړ شوي دي، د پيرسون د پړسوب ضريب حساب کړئ.

د زده‌کوونکو شمېر	نمرې
4	40-50
6	50-60
10	60-70
4	70-80
4	80-90
2	90-100



څو متحوله ټولنې

که چېرې د خپل یوه ټولګیوال د ونې په اندازه وپوهېږئ، کولای شئ هغه ته په پام د هغه د وزن په اندازه پوه او په دې اړوند فکر وکړئ.

فعالیت

آیا په تېرو درسونو کې مو د اشخاصو د ونې او وزن په اړوند یو ځای مطالعه او څېړنه کړې ده.

- فکر کولای شئ چې د یوه سړي د ونې او وزن مقدار د یو متحول په توګه کولای شو چې وړاندې یې کړو؟
- که وغواړو چې د یوه ټولګي د زده کوونکو د ونې او وزن مقدار یو ځای وڅېړو، نو دغه یوه ټولنه ده.
- دخپلو 10 تنو ټولګیوالو ونې او وزن اندازه کړئ.
- لاس ته راغلي معلومات د مرتبو جوړو په توګه ولیکئ.
- هغه ټکي چې د مرتبو جوړو په مرسته په مستوي کې ټاکل کېږي، څه ډول شکل لري؟د یوه خط په واسطه یې وصل کړئ.
- آیا ویلای شئ هغه ټکي چې په مستوي کې وصل شي، کوم شکل لري؟

له پاسني فعالیت څخه پوهېږو چې د بحث موضوع، دوه ډوله متحولین دي. تر اوسه مو په تېرو درسونو کې داسې ټولنې پلټلې چې ټولنو په هغوی کې یوازې یو متحول درلوده اوس غواړو داسې ټولنې ولټوو چې دوه او یا له هغو څخه زیات متحولین ولري، دکار دآساني لپاره معمولاً د یو یا څو متحولینو تر منځ درياضيکي اړیکې په مرسته د قایمو مختصاتو په قایم سیستم کې جوړیږي.

په لومړي ګام کې په دې منظور د معادلو د جوړېدو لپاره لازم معلومات را ټول شي او په دویم ګام کې را ټول شوي معلومات د ارزښت لرونکو متحولینو په څېر په یوه مستوي کې راټول او په نښه کېږي، هغه شکل چې د دغو ټکو له وصلېدو څخه لاس ته راځي، مونږ ته یو ګراف را ښيي.

مثال: یو متخصص د غذایي رژیم یو ډول تأثیر په یو شمېر موږکانو څېړلی دی. په دې ډول یې د هر موږک لومړنۍ وزن اندازه کړی او بیا یې د عملیې په تطبیق پیل کړي چې په پای کې یې بیا د موږکانو وزن اندازه کړی چې لاندې معلومات په لاس راغلی دي: $(2,4),(3,5),(1,7),(2,3),(1,8)$

په دې ډول لومړی مختصه د موږک لومړنی او دويمه مختصه د موږک وزن دغذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته ښيي.

- معلومات په يوه سطري او ستوني جدول کې ترتيب کړئ؟
- که چېرې ډېټا د يوې ټولنې په څېر وګڼل شي، نو دغه ټولنه به څو متحولين ولري؟

حل: لاندې سطري جدول په پام کې نيسو:

د موږکانو شمير	1	2	3	4	5
د موږکانو لومړنی وزن	1	2	1	3	2
د غذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته د موږکانو وزن	8	3	7	5	4

لاندې ستوني جدول په پام کې نيسو.

د موږکانو شمېر	د موږکانو لومړنی وزن	د غذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته د موږکانو وزن
1	1	8
2	2	3
3	1	7
4	3	5
5	2	4

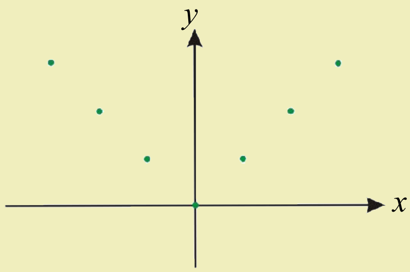
پورتني ډېټا يوه دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

پوښتنه

د زراعتي محصولاتو دلوړوالي لپاره فکتورونه، لکه: اوبه، کود، د کود ډول، لمر او د خاورې ډول موثر ګڼل کېږي، آيا ويلی شئ چې په دغه ټولنه کې لږ تر لږه له څو ډوله متحولينو سره سروکار لرئ؟

د تيتوالي ګراف

Scatter diagram



مخامخ شکل ته په پام ، هغه ټکي چې په مستوي کې په نښه شوي دي، د مرتبو جوړو په ډول ترتيب او رياضيکي معادله يې وليکئ:

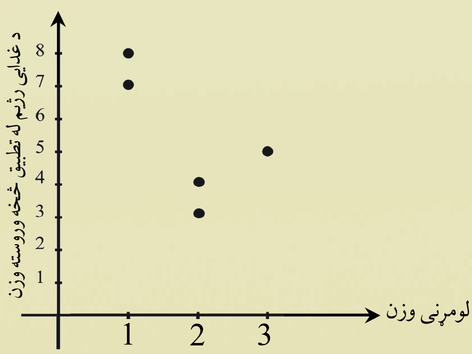
فعاليت

لاندې مرتبې جوړې ورکړل شوي دي:

(1,2) (2,3) (3,4) (4,5)

- د ورکړل شوو مرتبو جوړو ګراف په دقيق ډول رسم کړئ.
- مشخص شوي ټکي سره ونښلوئ او رياضيکي معادله يې پيدا کړئ.
- په لاندې ډول د دغو ډېټا د هر يوه، دويمه مختصه په لاندې ډول بدلوو.
- د هر ټکي لپاره يوه سکه پورته وغورځوئ، که شېر راغله په y يو واحد اضافه او که خط راغله له y څخه يو واحد کم کړئ، نو د لاس ته راغلو ټکو يا تغييراتو ګراف رسم کړئ.
- دغه عمليه څو ځلې تکرار، خو دا ځل کله چې قيمتونه زيات يا کموي، بدلون مه ورکوئ په x او y پورې تړلي قيمتونه څنګه تغير کوي؟

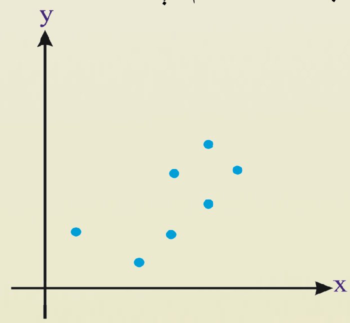
مثال: لاندې مرتبې جوړې چې پر موږکانو دغذايي رژيم تأثيراتو څخه مو په لاس راوړي دي، په پام کې ونيسئ: (2,4) (3,5) (1,7) (2,3) (1,8)



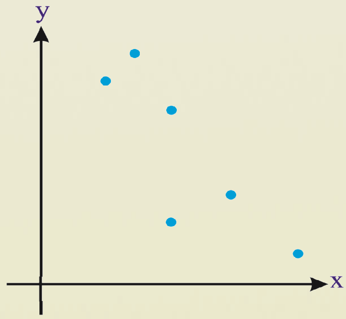
دغه مرتبې جوړې د مخامخ شکل په څېر په يوه مستوي کې ښودل شوي دي.

پورتنی ګراف چې د موږکانو وزن راښيي، د هغو پاشلو ټکو مجموعه ده چې په مستوي کې ده چې د اړوندې ډېټا په اندازه کېدلو په يوه دوه متحوله ټولنه کې د مختصاتو په سيستم کې لاسته راځي.

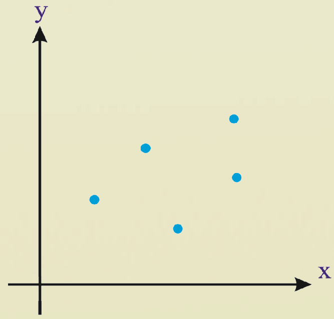
مثلاً: لاندې ګرافونه په پام کې ونیسئ:



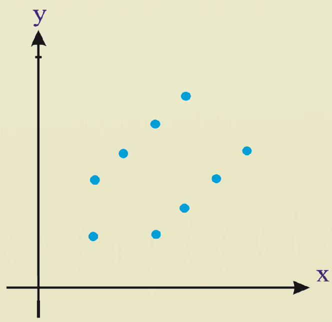
(الف)



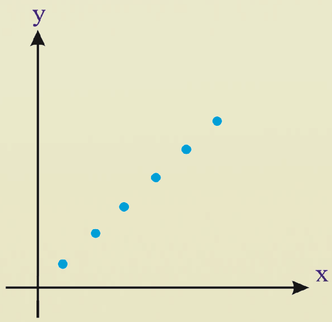
(ب)



(ج)



(د)



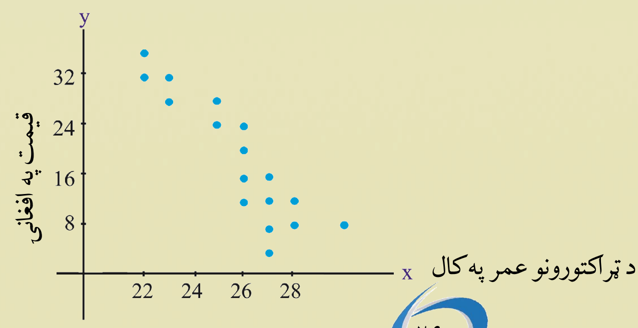
(هـ)

د(الف) په ګراف کې لیدل کېږي چې که چیرې د x قیمتونه زیات شي؛ نو د y قیمتونه هم زیاتېږي، خو د (ب) په ګراف کې بر عکس د x د قیمتونو په زیاتوالي د y قیمتونه کمېږي.

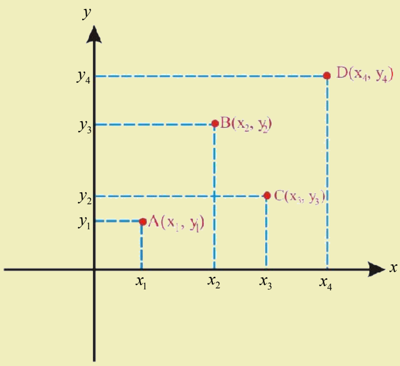
د(ج) په ګراف کې د x په قیمت کې تغییرات هیڅ ډول اطلاع د y دبدلونونوپه اړوند نه ورکوي څکه د x قیمت په درلودلو سره په ډېر دقت سره په دې ګراف کې د(الف) او (ب) ګرافونو پـه پرتلـه زیاتـه ده، د (هـ)پـه ګراف کې د y د قیمت حدس په ډېرې پاملرنې صورت مومي.

پوښتني

لاندې ګراف دیو شمېر ټراکترونو عمر راښیي، آیا ددې دوو متحولینو تر منځ کومه اړیکـه یـا ارتبـاط وینـي؟ توضیح یې کړئ.



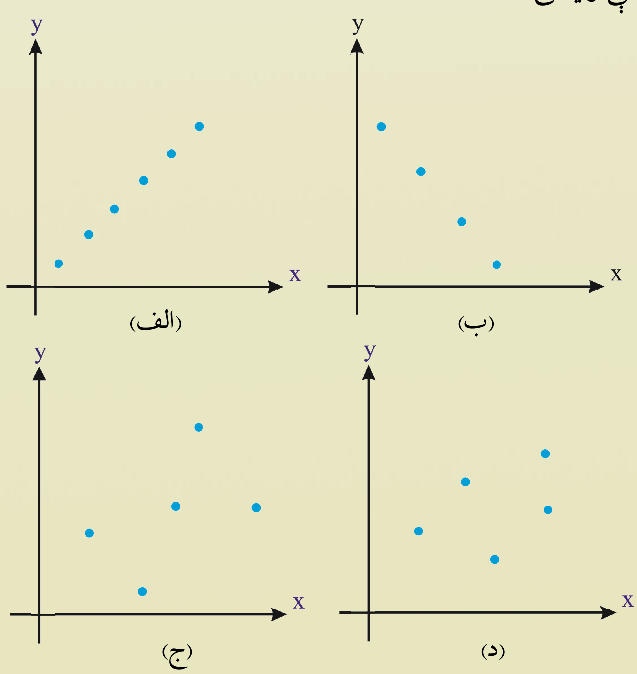
پیوستون او دپیوستون ضریب



د A,B ,C او D ټکي لکه: مخامخ شکل راکړل شوي دي، آیا شوني ده چې ټکي په یوه مستقیمه کرښه سره وصل شي، ولې؟

فعالیت

لاندې شکلونه په پام کې ونیسئ:



- د (الف) او (ب) په شکلونو کې کولای شو چې د y متحول د هغې کرښې په مرسته چې له دغو ټکو تېرېږي وټاکو.
- د (الف) او (ب) په شکلونو کې د x او y تر مینځ څه ډول اړیکه ده؟
- آیا کولای شو چې د(ج) او(د) په شکلونو کې داسې یوه کرښه وټاکو چې ټول ټکي پرې پراته وي؟
- د(ج) او (د) په شکلونو کې د x او y ترمنځ اړیکې په څه ډول دي؟
- - د (الف) او (ب) د شکلونو اړیکې د(ج) او(د) د شکلونو له اړیکو سره پرتله او وواییځ چې د y د متحول خطا د x د متحول په مرسته په کوم شکل کې ډېره ده؟

له پورتني فعالیت څخه داسې پوهېږو چې که چېرې ټکي په مستوي کې یوې مستقیمې کرښې ته نږدې پراته وي؛ نو په دې صورت کې د y د متحول خطا نظر x ته لږ ده او برعکس هر څومره چې ټکي له کرښې لرې پراته وي، نو په هم هغه اندازه د y خطا ډېره ده.

له دې کبله داسې معیار غواړو در ویېژنو چې د ټکو پیوستون مونږ ته اندازه کړي.

هغه فورمول چې د پیوستون د محاسبې لپاره ورکړ شوی ده، د پیوستون د ضریب په نامه یاد او په r سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$r = \frac{\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ د ضرب د حاصل مجموعه}}{n} - (\text{د } y \text{ ګانو اوسط})(\text{د } x \text{ ونو اوسط})}{(\text{د } y \text{ ګانو معیاري انحراف})(\text{د } x \text{ ونو معیاري انحراف})} = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{S_x S_y}$$

مثال: دموږکانو د لومړني وزن او غذایي رژیم څخه وروسته ډېټا لکه: لاندې جدول په پام کې ونیسئ.

د موږکانو شمېره	لومړنی وزن X	له عملیې څخه وروسته وزن y	د x او y دضرب حاصل
1	1	8	8
2	2	3	6
3	1	7	7
4	3	5	15
5	2	4	8
	$\sum 9$	$\sum 27$	$\sum 44$

دلومړني او وروستني غذایي رژیم د وزنونو تر منځ د پیوستون ضریب محاسبه کړئ.

حل: که چېرې x لومړني وزنونه او y د غذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته وزنونه او $n = 5$ د موږکانو شمېر په پام کې ونیسو، نو د x او y اوسطونه عبارت دی له:

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8 \qquad , \qquad \bar{y} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$$S_x^2 = \text{د } x \text{ ونو واریانس} = \frac{(1-1.8)^2 + (2-1.8)^2 + (1-1.8)^2 + (3-1.8)^2 + (2-1.8)^2}{5}$$

$$= \frac{0.64 + 0.04 + 0.64 + 1.44 + 0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$$S_y^2 = \text{د } y \text{ ګانو واریانس} = \frac{(8-5.4)^2 + (3-5.4)^2 + (7-5.4)^2 + (5-5.4)^2 + (4-5.4)^2}{5}$$

$$= \frac{6.76 + 5.76 + 2.56 + 0.16 + 1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{\text{د ډېټا شمېر}} = \frac{\sum x \cdot \sum y}{n} = \frac{(1\cdot 8) + (2\cdot 3) + (1\cdot 7) + (3\cdot 5) + (2\cdot 4)}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$$

په دې ډول په پایله کې د پیوستون ضریب په لاندې ډول لاس ته را ځي:

$$r = \text{د پیوستون ضریب} = \frac{8.8-(1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\cdot\sqrt{3.44}} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

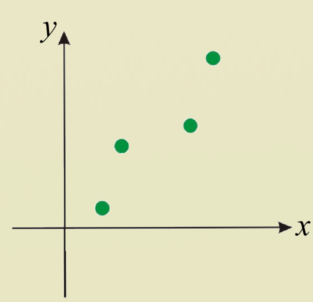
اوس داسې سوال را منځ ته کېږي چې د پیوستون د -0.67 ضریب د x او y ترمنځ د ډېر پیوستون ښودونکې ده او که نه؟ د دې سوال د ځواب د پیدا کېدو لپاره د پیوستون ضریب له لاندې مثالونو څخه په څو مرحلو کې په لاس راوړو:

مثال: لاندې جدولونه په پام کې و نیسئ:

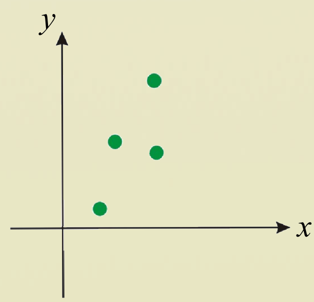
x	y
1	2.5
2	5.5
3	6.5
4	8.5

x	y
1	2
2	6
3	6
4	10

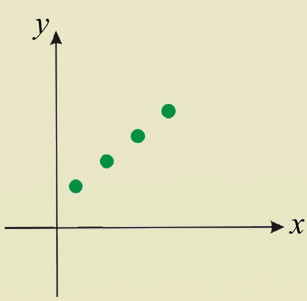
x	y
1	3
2	5
3	7
4	9



(ج)



(ب)



(الف)

د (الف) په شکل کې ټکي ټول په یوه کرښه پراته دي، نو په دې ډول د ټکو ترمنځ د پیوستون ضریب ډېر لوړ قیمت لري.

د (ب) په شکل کې ټکي د یوې مستقیمې کرښې په شاخوا پراته دي، نو له دې کبله نظر د(الف) حالت ته د ټکو تر منځ د پیوستون ضریب لږ دی د (ج) په شکل کې څرنګه چې ټکي د مستقیمې کرښې د(ب) د حالت په اندازه نږدې پراته دي، نو باید ضریب یې په دې حالت کې د(ب) له حالته زیات، خو د(الف) له حالته لږ دی، د دې خبرې د پخلي لپاره موضوع په لاندې ډول څېړو، د پیوستون ضریب د(الف) حالت لپاره:

$$\bar{x} = \frac{10}{4} = 2.5 \qquad \bar{y} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\text{ونو واریانس } x \text{ د} = \frac{(-1.5)^2+(-0.5)^2+(0.5)^2+(1.5)^2}{4} = \frac{2.25+0.25+0.25+2.25}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$\text{ګانو واریانس } y \text{ د} = \frac{(-3)^2+(-1)^2+1^2+3^2}{4} = \frac{9+1+1+9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{ګانو دضرب حاصل } y \text{ او } x \text{ د} = (1\cdot 3)+(2\cdot 5)+(3\cdot 7)+(9\cdot 4) = 70$$

$$r = \text{دپیوستون ضریب} = \frac{\frac{70}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{5}} = \frac{17.5-15}{\sqrt{6.25}} = \frac{2.5}{2.5} = 1$$

د پیوستون ضریب د (ب) په حالت کې:

$$\bar{x} = 2.5 \quad , \quad \bar{y} = \frac{24}{4} = 6$$

د x ونو واریانس $= 1.25$ ، د y ګانو واریانس $= \frac{16+0+0+16}{4} = 8$

د x او y ګانو د ضرب د حاصل مجموعه $= 2+12+18+40 = 72$

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{\frac{72}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{8}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.9486$$

د (ج) په حالت کې د پیوستون ضریب: $\bar{y} = \frac{23}{4} = 5.75$, $\bar{x} = 2.5$

د x ونو واریانس $= 1.25$ ، د y ګانو واریانس $= 4.6875$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{4} = 16.75$$

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{16.75-(2.5)(5.75)}{\sqrt{1.25}\sqrt{4.6875}} = \frac{2.375}{\sqrt{5.858}} = 0.9812$$

په یاد ولرئ چې په هغو شرایطو کې چې y لږ خطا و لري(د x او y مقدارونه خط ته نږدې پراته دي) که چیرې د پیوستون ضریبونه 1او -1 وي، x او y پر یوه مستقیمه کرښه پراته دي. غیر له هغه څخه د پیوستون ضریب د دغو دوو مقدارونو تر منځ پروت دی.

پوښتنې

1- لاندې ډېټا راکړل شوې ده.

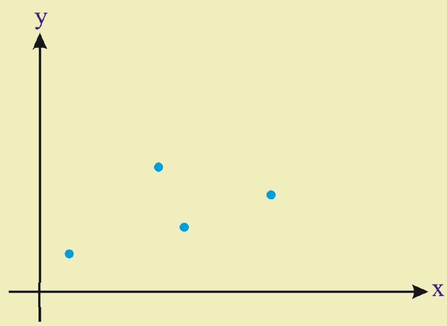
x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د ډېټا دپیوستون ضریب محاسبه کړئ.

2- د خپلو ټولګیوالو د ونې او وزن تر منځ د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

د خطي میلان معادله

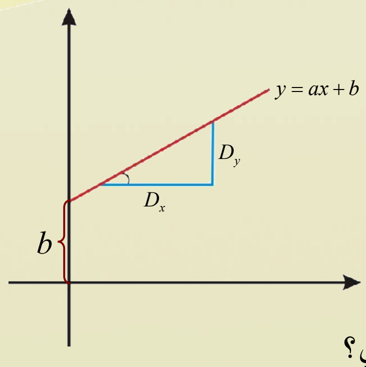
The linear regression equation



فرض کړئ چې یو پاشلي ګراف په لاندې ډول راکړل شوی وي. یوه مستقیمه کرښه چې معادله یې د $y = ax + b$ په ډول ورکړل شوې وي، پیدا کړئ چې ګراف یې ټولو ټکو ته نږدې فاصله یا واټن ولري.

فعالیت

په مخامخ شکل کې یوه خطي تابع(لومړی درجه) چې ګراف یې مستقیمه کرښه ده، رسم شوې ده.

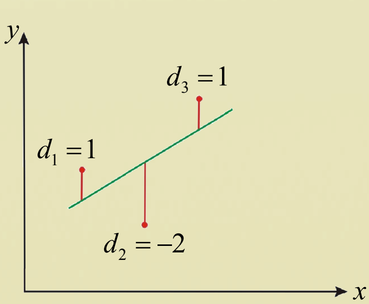


- د $y = ax + b$ خطي تابع کې a او b څه ډول مقدارونه دي؟
- د $y = ax + b$ په تابع کې د x او y متحولین په کوم نوم یادیږي؟
- د $y = ax + b$ مستقیمې کرښې میل پیداکړئ؟
- د $y = ax + b$ په معادله کې د y بدلون ، د یو واحد په اندازه په x کې و ټاکئ؟
- د $y = ax + b$ معادله کې که چېرې $a > 0$ وي؛ د تابع ګراف متزاید او که متناقص دی؟

همدغه راز که چیرې $a < 0$ سره وي، د تابع ګراف څه شکل لري؟

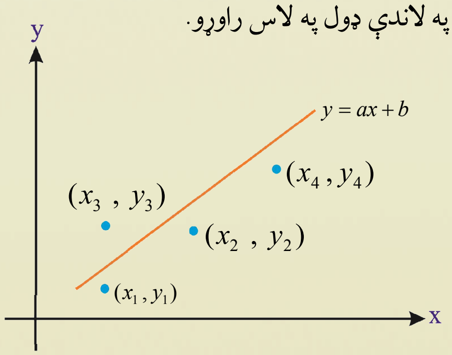
او که چېرې $a = 0$ وي، د تابع دګراف شکل و ټاکئ؟

مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:



د فاصلو مجموع $d_1 + d_2 + d_3$ او $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ محاسبه کړئ.

له پورتني فعالیت څخه پوهېږو چې د $y = ax+b$ معادله یوه خطي تابع ده چې د a ضریب ددې معادلې میل جوړ وي او کله چې a مثبت وي، مستقیمه کرښه متزاید او که چېرې a منفي وي، نو کرښه متناقصه ده.
پاملرنه وکړئ چې که د (x, y) جوړه د $y = ax+b$ په معادله کې صدق وکړي، په دې صورت کې نوموړې ټکي د مستقیمې کرښې په ګراف پراته دي.
هر څومره چې د پاشلي ټکی مستقیمې کرښې ته نژدې وي، نو د پیوستون ضریب به -1 او $+1$ ته ورنژدې وي، که چېرې د یوې مستقیمې کرښې معادله ولرو او پوه شو چې د پیوستون ضریب مناسب او کولای شو د y متحول په مرسته متحول وټاکو او که چیرې مستقیمه کرښه ونلرو، کولای شو چې دغه کرښه په داسې یوه تګلاره چې د لږکیو یعني اصغري مېتود جوړونې[1] مربعو په نامه یادېږي، په لاندې ډول په لاس راوړو.

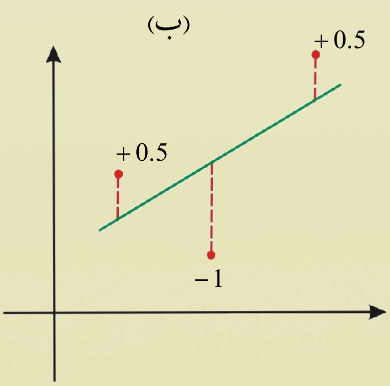


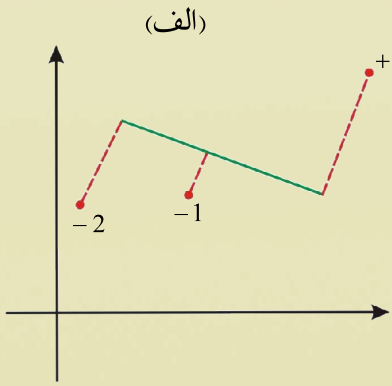
فرض کوو چې د پاشلو ټکو ګراف(متفرقه دیاګرام یا Scatrter diagram) په دې ډول راکړل شوی وي.

او غواړو داسې یوه کرښه چې معادله یې $y = ax+b$ وي، د ټکو له منځ څخه داسې تېره کړو چې ټولو ټکو ته نږدې وي. په دې تګلاره کې باید په مناسب ډول د کرښې معادله داسې جوړه شي چې د عمودي انحرافونو د دویم توان مجموع له مستقیمې کرښې څخه لږ تر لږه اصغري وي، مخ کې له فورمول څخه لاندې مثال په پام کې نیسو:

x	1	5	9
y	6	5	7

لاندې شکلونه د دغې ډېټا لپاره رسموو او د کرښو خطاوې له مشاهدو څخه تشخیصوو.





the method of least square -[1]

ښکاره ده چې رسم شوې کرښه د (ب) په حالت کې په مرتب ډول د(الف) له حالته څخه ښه ده.

په دواړو حالتونو کې د کرښو د خطاګانو الجبري جمع صفر ده.

د (الف) حالت: $0 = 3 + (-1) + (-2) =$ د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

د (ب) حالت: $0 = 0.5 + (-1) + (0.5) =$ د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

څرنګه چې په دواړو حالتونو کې د جمعې حاصل مساوي په صفر ده، نو له دې کبله نشو ویلای چې کومه کرښه یوه مناسبه کرښه ده. ددې لپاره چې مثبت او منفي خطاوې یو له بله د منځه یو نسي، نو هره کرښه وروسته له مربع کولو جمع کوو:

$14 = (3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 =$ د خطاګانو د دویم توان مجموع

$1.5 = (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 =$ د خطاګانو ددویم توان مجموع

له دې کبله د کرښې د خطاګانو د دویم توان مجموع څرنګه چې د(ب) په حالت کې نظر له(الف) حالت څخه یې قیمت لږ دی، نو ویلی شوچې:

مناسبه کرښه هغه ده چې د خطاګانو د مربعاتو مجموع یې له نورو کرښو کمه وي، دغه راز کرښو ته د ریګریشن کرښې وایي.

که چېرې د ریګریشن کرښې د مقدار او هغو مشاهداتو تر منځ د مقدارونو توپیرچې منځ ته راځي په $\bar{y}$ وښیو، په دې صورت کې د دویمو توانونو د مجموع د لا کوچني والي په خاطر په لاندې ډول عمل کوو:

$$\text{د خطاګانو ددویمو توانونو مجموع} = \sum (y-\bar{y})^2 = \sum [y-(ax+b)]^2$$
$$= \sum (y-b-ax)^2$$
$$= (ax_1+b-y_1)^2 + (ax_2+b-y_2)^2 + ...$$

په دې حالت کې x او y ثابت، a او b متحولین دي.

پرته له دې مونږ هغه تګلاره چې د a او b د محاسبې او په لاس راوړلو لپاره په کار لویدلې، ورننو څو، یوازې د هغوی د محاسبې خطا په پام کې نیسو:

$$a = r\frac{sy}{sx}b = \text{د پیوستون ضریب} \times \frac{\text{د } y \text{ معیاري انحراف}}{\text{د } x \text{ معیاري انحراف}}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \qquad , \qquad b = \frac{\sum x\,y - n\,\bar{x}\,y}{\sum x^2 - n\,\bar{x}^2} = \frac{\sum x\,y}{\sum x^2}$$

د a او b د محاسبې دغه لاره چې د لږکیو مربعاتو تګلارې په نامه یادیږي.

پایله: د ریګریشن کرښه هغه وسیله ده چې د یو متحول د مقدار د وړاند وینې لپاره د بل متحول په حسابولو کې چې ورسره تړلې دی، د استفادې وړ ګرځي.

مثال:لاندې ډېټا په پام کې ونیسئ.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د y د ریګریشن کرښه نظر x ته په لاس راوړئ.

حل: څرنګه چې:

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=\frac{15}{5}=3$$

$$\bar{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{4+3+2+1+0}{5}=\frac{10}{5}=2$$

$$S_x^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{2}=\frac{4+1+0+1+4}{5}=\frac{10}{5}=2 \quad\Rightarrow\quad S_x=\sqrt{2}$$

$$S_y^2=\frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{n}=\frac{4+1+0+1+4}{5}=\frac{10}{5} \qquad\Rightarrow\quad S_y=\sqrt{2}$$

$$\frac{\sum xy}{n}=\frac{4+6+6+4+0}{5}=\frac{20}{5}=4$$

$$r=\frac{\frac{1}{n}\sum xy-\bar{x}\cdot\bar{y}}{S_x\cdot S_y}=\frac{4-3\cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{-2}{2}=-1$$

له دې کبله:

$$b=\bar{y}-b\bar{x}=2-b\cdot 3$$

$$a=r\frac{S_y}{S_x}=-1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1$$

$$b=\bar{y}-b\bar{x}=2-(-1)(3)=2+3=5$$

په دې ډول د ریګریشن معادله عبارت ده له: $y=ax+b=-x+5$

پوښتنه

که چېرې $y=2x+3$ د y د ریګریشن معادله نظر x ته او د x اوسط مساوي په 2 راکړل شوي وي، د y اوسط به څومره وي؟

د اتم څپرکي مهم ټکي

د بدلون ضریب: د بدلون ضریب د معیاري انحراف له اوسط څخه عبارت دی چې مطلق بې واحده عدد دی لکه:

$$\text{د بدلون ضریب} = \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}} \quad \text{یا} \quad C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

دغه ضریب ډېر ځلې د فیصدي په ډول ښودل کېږي چې د تحول د ضریب په نامه یادېږي.

$$\text{د تحول ضریب} \quad C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}}$$

د بدلون ضریب د مثبتې ډېټا لپاره تعریفېږي، په یاد یې ولرئ که چېرې ډېټا سره مساوي وي، نو د ټیټوالي ټول معیارونه مساوي له صفر سره دي.

په نورماله منحني کې ټیټوالی: نورماله منحني د احصایوي مجموعې یوه داسې توصیفي وسیله ده چې په نورماله منحني کې ډېټا په نورماله توزیع او کثرت منحني کې متناظر پراته دي؛ نو واریانس عمده نقش لري، په حقیقت کې د دوو پارامترو مشخص کېدل او معیاري انحراف په نورماله توزیع کې په عمومي ډول مشخص او د هر ډول شاخص د محاسبې زمینه برابر وي.

د نورمالي توزیع د شکل شاخصونه: د اوسط او معیاري انحراف په مرسته کولای شو د لید څرنګوالی د کږېدواو پړسېدو(اوج) په ډول په ښه توګه څرګند او وړاندې کړو.

د کږېدلو معیار د کږېدو او پیوستون د ضریبونو په مرسته چې د اندازه کولو او اندازو د پرتله کولو لپاره پکارېږي په لاندې ډول لیکل کېږي:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^3}{S^3} \quad , \quad \alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{S^3} \quad , \quad SK_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S}$$

د پړسېدو(جګېدلو) معیار د پړسېدو د ضریب α_4 په مرسته اندازه او پرتله کېږي.

$$\alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^4}{S^4} \quad , \quad \alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^4}{S^4}$$

څومتحوله ټولنې: په احصایوي څېړنو کې تر ټولو لویه موخه وړاندوینه او د یو متحول ټاکل د بل متحول له مخې دي. کله چې د دوو شیانو ترمنځ اړیکې څېړل زموږ مقصد وي، په حقیقت کې موخه یوه دوه متحوله ټولنه ده لکه: د یو غاز د حجم او فشار ترمنځ اړیکه د صحت او حرکت د میزان ترمنځ اړیکه، د کرنې او د حاصل د مقدار ترمنځ اړیکه او یا هم د یوې دایرې د شعاع او مساحت ترمنځ اړیکه چې دغه راز ټولې اړیکې دوه متحوله ټولنې بیانوي. د آسانتیا لپاره معمولاً د دوه یا څو متحولینو ترمنځ اړیکه د ریاضي معادلو په مرسته وړاندې کوي.

د تيتوالي ګراف: د تيتوالي ګراف د رسمولو لپاره ډېټا د مرتبو جوړو په شکل په يوه مستوي کې د قايمو مختصاتو په سېستم کې ښودل کېږي. کيداى شي د ټکو او تيتوالي ګراف په مرسته درې ډوله اطلاعات زموږ په اختيار کې راکړي.

الف: آيا داسې نمونه چې د څېړنو ترمنځ اړيکه ښيي، شته او که نه؟

ب: د يو ډول اړيکې د شتون په صورت کې دغه اړيکه خطي ده او که نه؟

ج: که چېرې اړيکه خطي وي، نو څه ډول اړيکه ده؟

پيوستون او د پيوستون ضريب: پيوستون د متحولينو ترمنځ د اړيکو د مېندلو درجه ده، کله کله دواړه متحولين په يوه لورې بدلون کوي يعنې x او y دواړه په يوه کرښه لوی او ياهم کوچنی شي، چې پيوستون يې مستقيمه کرښه ده. که چېرې د دوو متحولينو اندازه يو د بل پر خلاف بدلون وکړي يعنې که چېرې x لوی شي y کوچنی کېږي. او يا هم برعکس صورت نيسي.

د پېژندنې ډېر ښه معيار د پيوستون شتون او نه شتون دی او حتا د خطي پيوستون ډول، جهت او ميزان د پيوستون ضريب دی، چې د لاندې فورمول په واسطه ښوول کېږي:

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - (\bar{x}\,\bar{y})}{S_x \cdot S_y}$$

په پورتنيو اړيکو کې $\sum xy$ د xونو او yګانو د ضرب د حاصل مجموع، $\bar{x}$ د xونو اوسط او $\bar{y}$ د yګانو اوسط دی، همداراز S_x د xونو معياري انحراف او S_y د yګانو معياري انحراف دی.

د ريګريشن کرښه: ريګريشن(تخميني) د تابع د يوه متحول له قيمت لاسته راوړل او سنجش څخه عبارت دی، چې د يو يا څو مستقلو متحولينو له ارزښت څخه په لاس راځي.

هغه معادله چې د متحولينو ترمنځ اړيکې افاده کوي، د ريګرېشن معادلې په نامه يادېږي.

کولای شو دغه معادله د ډېرو لږو مربعاتو د محاسبې په طريقه حساب او همدارنګه د a او b ضريبونه د دغې طريقې په مرسته په لاندې ډول په لاس راوړو: $a = \bar{y} - b\bar{x}$, $b = r\frac{S_y}{S_x}$

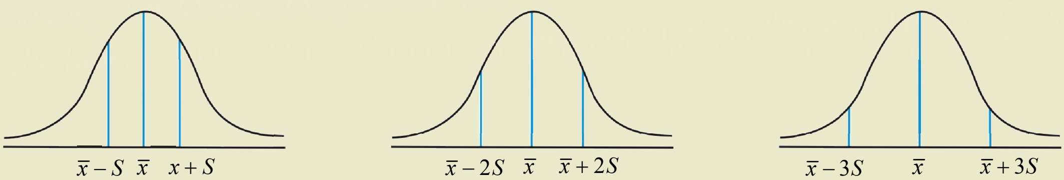
چې S_y د y معياري انحراف او S_x د x معياري انحراف دی، په داسې حال کې چې r د پيوستون ضريب، $\bar{x}$ د xونو اوسط او $\bar{y}$ د yګانو اوسط دی.

د څپرکي پوښتني

1-که چېرې په یوه ټولنه کې چې اوسط یې $\bar{x} = 50$ او واریانس یې $S^2 = 64$ وي، د بدلون ضریب y چې له $y = 2x + 10$ رابطې سره سم بدلون مومي څو دی؟

2-که چېرې د هر زده کوونکی په نمرو کې 20% نمبرې ورزیاتې شي، نو د نمبرو د بدلون په ضریب څه اغیزه کوي؟

3- د هغو ټولنو فیصدي چې په لاندې درکړل شوو منحني ګانو کې پرته ده، ولیکئ؟



4- لاندې اړیکو ته په پاملرنې سره وواياست چې کومه یوه له دغو اړیکو څخه یو متحوله، دوه متحوله او درې متحوله اړیکې دي.

الف: ستاسو د ټولګیوالو د ونو اندازه؟

ب: د یو شي د عمومي مصرف او جنس ترمنځ اړیکه؟

ج: د یوې استوانې د حجم، جګوالی او د قاعدې د مساحت تر منځ اړیکې؟

5- د یو ټولګي د مصرف شوو ساعتونو د شمېر او د زدکوونکو د نمبرو تر منځ چې د 20% له مخې اخېستل شوی دی، د مرتبو جوړو په شکل په لاندې ډول دی:

(2,10) , (3,10) , (3,14) , (4,10) , (4,14)
(5,14) , (5,16) , (6,12) , (6,16) , (6,18)
(7,14) , (7,18) , (7,20) , (8,16) , (8,18)

د زده کونکو د مصرف شوو ساعتونو او نمبرو تر منځ د اړیکو له مخې ګراف رسم او خپلې پايلې وڅېړئ؟

6- مخامخ ډېټا په پام کې ونیسئ:

x	1	1	2	3
y	1	5	4	2

په ورکړ شوې ډېټا کې د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

که چېرې د پیوستون ضریب صفر ته نژدې وي، نو خطا ډېره، که لږه ده؟

که چېرې د پیوستون ضریب د $+1$ او -1 عدد ته نژدې وي، نو د y د خطا په اړوند څه وایئ؟

د سروې له مخې چې د یوه ښوونځي په دو A او B ټولګیو کې شوې ده، لاندې عددونه د کیلوګرام په حساب د زده کوونکو د وزن لپاره راټول شوي دي:

A:	65	63	67	64	62	70	66	68	67	78	69	71
B:	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

د پورتنيو اعدادو په پام کې نيولو سره:

الف: د معلومات د تيتوالي گراف رسم کړئ؟

ب: د اړوندې مستقيمې کرښې معادله په لاس راوړئ a او b وټاکئ؟

ج: اړونده مستقيمه کرښه نظر د ريگريشن معادلې ته رسم کړئ؟

10- که چېرې x او y سره بشپړ پيوستون او معکوس ولري، يعنې $S_x = S_y$ ، نو د y نسبت x ته د ريگريشن خط کوم دی؟

1) $y=-\frac{1}{2}x+b$ 2) $y=\frac{1}{2}x+b$ 3) $y=x+b$ 4) $y=-x+b$

11- د 20 تنو زده کوونکو د رياضي او فزيک د مضمون 20% د آزموينې پايلې چې په لاندې ډول ورکړ شوي، رسم کړئ؟

زده‌کوونکي	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
د رياضي نمبرې	18	8	12	18	16	6	10	6	16	10	12
د فزيک نمبرې	16	10	8	18	14	10	10	6	10	14	10

زده‌کوونکي	12	13	14	15	16	17	18	19	20
د رياضي نمبرې	12	10	16	18	12	6	14	14	12
د فزيک نمبرې	6	12	16	12	12	8	12	14	16

ـ د ريگريشن د کرښې معادله په لاس راوړئ؟

ـ آيا د دوو آزموينو د پايلو تر منځ اړيکې شتون لري؟

12- پر چنگښو د خوراک د مالگې د 5 او يو فيصده محلول اغيزې د يون پلازما پر ميزان د هغوی په بدن کې په لاندې جدول کې ثبت شوي دي؟

د مالگې په محلول کې د پاتې کېدو وخت	50	40	30	20	10	5	0
د يون پلازما ميزان(mm)	136	132	126	122	118	110	90

ـ په پورتنی جدول کې متحولين وڅېړئ؟

ـ په پورتنيو متحولينو کې کوم يو خپلواک او کوم يو ناخپلواک متحول دی؟

ـ يو داسې گراف رسم کړئ چې د دواړو متحولينو ترمنځ اړيکه وښيي؟

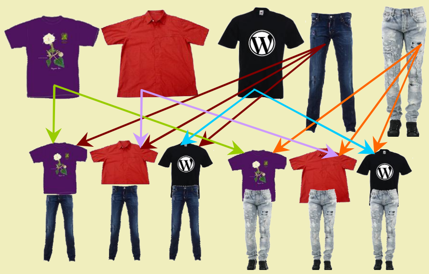
ـ د دې گراف په رسم کې خپلواک متحول په افقي محور وښاياست؟

نهم څپرکی

احتمالات

پرموټېشن یا ترتیب

Permutation



که چېري درې بېلابېل کمیسونه او دوه پطلونونه ولرو، پـه څـو ډولـه کـولای شـو هغـه سـره جـوړه جـوړه واغوندو؟

فعالیت

خپل درې تنه ملګري وآزمویئ چې په څو ډوله کولای شي په یو کتار کې و درېږي؟

- له درې یو رقمي اختیاري عددونو څخه څو درې رقمي عددونه کولای شو جوړ کړو.
- له پورتنیو عددونو څخه چې پورته مو د درې رقمي عددونو د جوړولو لپاره ټاکلي دي څـو درې رقمـي عدونه جوړولای شو، په دې شرط چې په عددکي رقم تکرار نه وي.
- د پورتنی فعالیت د اول، دویم او دریم پاراګراف پایلې سره پرتله او ووایي چې څه اړیکې سره لري؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله

د n شیانو د ترتیب د شمېر ډولونه چې سره خوا په خوا راشي عبارت دي له:

- که تکرار مجاز نه وي مساوي په $n\cdot(n-1)\ \ldots\ 2\cdot 1$ سره دي.

- که تکرار مجاز وي مساوي په $\underbrace{n\cdot n\cdot\ \ldots\ \cdot n}_{n \text{ ځلې } n} = n^n$ سره دي.

تعریف: د یوه طبیعي عـدد لپاره د $(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot n)$ حاصـل ضـرب پـه لنډ ډول پـه $n!$ (n – فکتوریـل) ښودل کېږي. او د تعریف له مخې $1!=1, 0!=1$ سره دي.

2: د n عنصرونو د ترتیب ډولونه چې د n غړو د پرموټېشن(Permutation) په نامـه هـم یـادېږي په P_n سره ښودل کېږي.که چېرې تکرار په ترتیب کې ناشونی او یا مجازنه وي.

نو د پاسني تعریف په پام کې نېولو سره $P_n = n!$ سره کېږي.

که چېرې په ترتيب کې تکرار شونی او يا مجاز وي، نو په دې صورت کې د ترتيب ډولونه او يا پرموتېشنونه په مجاز تکرار کې عبارت دي له. $(k \le n)$, $P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!}$ او دارنگه معنا ورکوي چې يو عنصر په n ترتيب کې k ځلې تکرار شوي دي.

لومړی مثال: (1) : د لاندې عددونو قيمت پيدا کړئ.

$$3!, 8!, 5!$$

(2) د هر يوه طبيعي عدد لپاره وښيئ چې $n! = n(n-1)!$ سره ده؟

حل (i): د تعريف له مخې لرو چې:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

(ii) پوهېږو چې: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \dots \ \cdot n = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \dots \ \cdot n-1)(n) = n(n-1)!$

دويم مثال: د آزمويني لپاره په يوسالون کې 16 زده کوونکي له بېلابېلو ټولگيو د سوېي آزمويني لپاره راغونډ شوي دي.

په څو ډوله کولای شو د 16 مېزونو تر شا په ليکه کښېني چې د هر يو د ځای تغيير د ناستې يو حالت وشمېرل شي.

حل: پوهېږو چې ځواب 16! دی چې تکرار پکې ناشونی دی. که چېرې تکرار مجاز وي، په دې صورت کې مسئله عبارت له ترتيب د n شيانو چې k عدده يې د مثال په ډول په تکراري ډول راښکاربږي، نو په دې صورت کې لرو چې: $P_n^k = \frac{n!}{k!}$, $(k \le n)$

مثلاً په پاسني مثال کې، که چېرې 16 زده کوونکي وغواړي خپل ځايونه په خپلو لاسي بکسونو ونيسي او له دې څخه 4 تنه يو ډول لاسي بکسونه ولري، نو لرو چې:

$$P_{16}^{(4)} = \frac{16!}{(16-4)!} = \frac{16!}{12!} = 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 43680$$

که چېرې د دې مسئلې عمومي حالت په پام کې ونيسو، نو په دې صورت کې د $P_n^{(k_1, k_2, \ \dots \ , k_n)}$ n ترتيبه يا پرموتېشنونه چې په هغه کې تکرار مجاز نه او په حقيقت کې، m گروپه شيان چې هر يو يې په ترتيب سره د $k_1!, k_2! \cdot \ \dots \ \cdot k_n!$ په اندازه سره يو شان دي، لرو چې:

$$P_n^{(k_1, k_2, \ \dots \ , k_n)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ \dots \ \cdot k_n!}$$

دريم مثال: له پنځه $(5,5,5,4,4)$ عددونو څخه په څو ډوله کولای شو، پنځه رقمي عددونه جوړ کړو.

حل: پوهېږو چې د فورمول له مخې د عددونو شمېر عبارت دی له: $P_3^{(2,3)} = \dfrac{5!}{2!.3!} = 10$

چې په خپله عددونه په لاندې ډول دي:

$55544\ ,\quad 55454\ ,\quad 54554\ ,\quad 45554\ ,\quad 45545$

$45455\ ,\quad 44555\ ,\quad 54545\ ,\quad 55445\ ,\quad 54455$

څلورم مثال: د سبا کاروان ټرانسپورټي شرکت د کابل جلال‌آباد په لین کې 5 لوی سروېسونه او د جلال‌آباد- کنړ په لاره 3 میني بسه لري. په څو ډوله کولای شو، د نوموړي ټرانسپورټ په سروېسونو او میني بسونو کې له کابله- کنړ ته سفر وکړو؟

حل:پوهېږو له کابله تر جلال‌آباد پورې د نوموړي شرکت له سروېسونو څخه یوازې 5 امکانه وجود لري، چې د هر یوه امکان په وړاندې 3 امکانه د میني بس د انتخاب چانس له جلال‌آباد څخه تر کنړه، د نوموړي شرکت وجود لري.

په دې ډول ټول امکانات مساي دي په: $5\times3=15$

پنځم مثال: د $8,7,2$ او 5 عددونو په مرسته څو درې رقمي عددونه پرته له تکراره جوړولای شو.

حل: دې خبرې ته په پاملرنې سره چې عددونه درې رقمي دي، نو درې خالي ځایونه لرو، چې په لاندې ډول د هغو ډکول په عددونو امکان لري:

د دريم رقم ځای	د دويم رقم ځای	د لومړي رقم ځای
$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$ دامکاناتو ډولونه

پوهېږو چې د لومړي رقم د ځای د ډکولو لپاره 4 امکانه شتون لري، په دې ډول د دويم رقم د ځای د ډکولو لپاره 3 امکانه پاتې کېږي، ځکه چې له څلور عددونو څخه يو د لومړي رقم لپاره نيول شوی دی، او بلې خواته څرنګه چې تکرار مجاز نه دی، نو يوازې 3 امکانه د دويم رقم د ځای د ډکولو لپاره شته او د دريم رقم د ځای د ډکولو لپاره دوه امکانه شته چې ټول حالتونه عبارت دي له: $4\cdot3\cdot2=24$ او د فورمول له مخې لروچې:

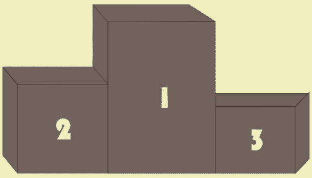
$$P_4^{(3)}=\frac{4!}{(4-3)!}=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1!}{1!}=24$$

پوښتنې

1. څو پنځه رقمي عددونه وجود لري چې لومړی رقم يې 2 او وروستی رقم يې مساوي په 4 وي، په عدد کې هيڅ رقم تکراري نه وي؟
2. په څو ډوله 10 نفره کولای شي، د يوه ګردي ميز په شاوخوا کې کښېني چې له دې جملې څخه 2 تنه غواړي په هر حالت کې سره خوا په خوا کښېني.
3. په څو ډول کولای شئ 3 سره توپونه، 2 آسماني او څلور زېړ توپونه سره خوا په خوا په يو کتار کې کېږدو. د هم رنګه تو پونو په کتار کې د هم رنګه توپونو ځاي بدلول بل حالت نه شمېرل کېږي.

ترکیب یا کمبینیشن

Combination



د 1 او 2 عددونو ترکیب څه دی؟

د 1 او 2 عددونو ترتیب کوم دی؟

ستا سو له نظره ترکیبونه او ترتیبونه څه توپیر سره لري؟

مخکې له دې چې لاندې فعالیت سرته ورسوو، لاندې تعریف چې په فعالیت کې به له هغه څخه کار واخلو په پام کې نیسو.

تعریف

د $\binom{n}{k}$ لیکدود چې n د k له پاسه ویل کېږي او په حقیقت کې د بینوم د ضریبونو په نامه یادېږي چې k د بینوم توان ښیي او په لاندې ډول دی:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0\le k\le n \quad , \quad k,n\in IN$$

فعالیت

- د پورتني تعریف په پام کې نیولو سره، د بینوم د $(a+b)^2$ د دوه حدي په انکشاف کې د بینوم ضرایب چې مساوي په $\binom{2}{k}$, $k=0,1,2,$ سره دی، پرتله کړئ:

$$(a+b)^2=\square a^2+\square ab+\square b^2$$

- د بینوم ضریبونه چې په پاسني انکشاف کې، په چوکاټونو کې نیول شوي، د $\binom{2}{k}$ $k=0,1,2$ له قیمتونو سره پرتله کړئ؟
- څرنګه چې $1=\binom{2}{0}=\binom{2}{2}$ سره دي، ویلای شئ چې د هر $n\in IN$ لپاره $\binom{n}{n}$ او د $\binom{n}{0}$ قیمتونه هم سره برابر او مساوي په 1 دي؟
- د $(a+b)^n$ په انکشاف کې د بینوم د ضریب د دویم حد قیمت د $\binom{n}{k}$ له مخې حساب کړئ.
- د $\binom{4}{k}$, $k=0,1,2,3,4,$ قیمتونه د بینوم د انکشاف له کومو ضریبونو سره مساوي دی، ویې لیکئ؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د هر n او k طبیعي عددونو لپاره، په داسې حال کې چې $0\le k\le n$ سره دی لرو:

$$\binom{n}{0}=1 \quad , \quad \binom{n}{n}=1 \qquad \text{(i)}$$

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r} \qquad \text{(ii)}$$

(iii) له n څخه د r شیانو ترکیبونه عبارت د یو n عنصره سټ د غړو د ترکیب یا کمبینیشن د r لـه n شیانو څخه ده چې په C_r^n سره ښودل کېږي او قیمت یې عبارت دی له: $C_r^n=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

لومړی مثال: په یوه ښوونځي کې د لسم 7 ټولګي شتون لري. د ښوونځي اداره غواړي چې لسم ټولګي له 7 تنو اول نمره ګانو، 4 تنه و ټاکي. په څو ډوله دغه انتخاب کیدلای شي؟

حل: لیدل کېږي چې له 7 تنو څخه د 4 تنو په ټاکنه کې هیڅ ډول برلاسي او ترتیب په پام کې نـشته؛ یعنـې دا چې، مهمه نه ده زده کوونکي د کوم ټولګي دي، نو دا ډول مسئله عبارت له ترکیـب څخـه ده چې لـه 7 تنو څخه 4 تنه و ټاکو، نو لرو چې: $C_4^7=\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!(7-4)!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4!}{3!\cdot4!}=\frac{5\cdot6\cdot7}{6}=35$

دویم مثال: که له 7 تنو زده کوونکو 4 تنه د لسم ټولګي د زده کوونکو د اتحادیې د مـشرتابه لپـاره، داسـې چې لومړی تن رئیس، دویم معاون، دریـم منشي او څلورم تن د مالي مسؤول پـه توګـه و ټاکـل شـي، پـه دې صورت کې لرو چې:

څرنګه چې لیدل کیږي په دې ټاکنه کې ترتیب مهم دی، ځکه چې د ABCD د انتخاب ترتیب پـه داسـې حال کې چې A رئیس، B معاون، C منشي او D مالي مسؤول دی، په داسې حال کـې چـې د CABD پـه ترکیب کې C رئیس، A معاون، B منشي او D مالي مسؤول ګڼل کېږي.

دا ډول مسئله عبارت له ترتیب یا پرموټېشن څخه ده چې له 7تنو څخه د 4 تنو په ترتیب انتخاب دی؛ یعنې لرو چې: $P(7,4)=\frac{7!}{(7-4)!}=\frac{7!}{3!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!}=120\cdot7=840$

پوښتنې

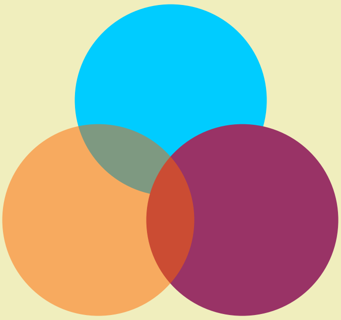
1- له اوو حرفونو څخه لکه: F,E,D,C,B,A او G څو 4 حرفي کلمې، پرته له تکراري حرفه جوړولای شو؟

2- د والیبال په یوه لیګ کې، 7 ټیمونه ګډون لري. څو ډوله ټیمونه کولای شي لومړی، دویم او دریـم مقـام لاس تـه راوړي؟

3- له 4 نارینه‌وو او 6 مېرمنو څخه 2 نارینه او 3 ښځې داسې ټاکو چې نارینـه پـه کـې یـو رئـیس او دویـم یـې مـالي مسؤول وي.

ترکیب

Combination



آیا پوهېږئ چې اصلي رنګونه کوم دي؟

د نارنجي او بنفش رنګ ترکیب کوم رنګ دی؟

ستاسو په نظر ژېړ رنګ د کومو رنګونو له ترکیبه جوړېږي؟

آسماني رنګ، بنفش رنګ، نارنجي رنګ.

فعالیت

د خپلو 5 تنو ټولګیوالو څخه 3 تنه په څو ډوله ټاکلی شئ؟

- موضوع په عملي توګه په ټولګي کې تجربه او حالتونه یې و شمېرئ؟
- که چېرې له 5 تنو زده‌کوونکو څخه 3 تنه داسې و ټاکل شي چې، لومړی کس سرګروپ، دویم د سرګروپ مرستیال او دریم تن منشي وي، د دریو تنو ګروپ، د ټاکلو ټول ډولونه څو دي؟
- د پورتني فعالیت لومړی او وروستی جزء یو تربله څه توپیر لري؟
- آیا فکر کولای شئ د پاسنیو ګروپونو د ټاکلو شمېر مساوي له کوم عدد سره دی؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: دلته د k په شمېر غړو یو ګروپ له یو سېټ څخه چې n غړي لري، په عمومي ډول په دوه ډوله صورت نیسي چې په یوه کې ترتیب په پام کې دی، خو په بل کې ترتیب مهم نه شمېرل کېږي، یوازې د هغوي ترکیب د پام وړ دی.

په دې ترتیب د یو ترکیب یا کمبینیشن چې k شیان له n بېلابېلو شیانو څخه مطلب دی، چې په لاندې تعریف کې بیانېږي.

تعریف: د k شیانو ترکیب له یوه n عنصره سېټ څخه چې په C_k^n ښودل کېږي او عبارت له $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ ترکیبي امکاناتو څخه دی چې د k په شمېر غړي یې پرته له ترتیب څخه ټاکل کېږي، عبارت دي له:

$$C_k^n = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

لومړی‌مثال: له 30 تنو څخه د 4 تنو ټاکل چې ترتیب په کې مهم نه دی، حساب کړئ؟

حل: پوهېږو چې مسئله عبارت له 30 تنو څخه د 4 تنو دی چې د فورمول له مخې په لاندې ډول پـه لاس راځي:

$$C_4^{30}=\binom{30}{4}=\frac{30!}{4!(30-4)!}=\frac{30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26!}{26!\cdot4!}=27405$$

دویم مثال: له $A=\{1,2,3,4,5\}$ سټ څخه څو 3 عنصره فرعي سټونه په لاس راځي؟

حل: پوهېږو چې مسئله په حقیقت کې له 5 غړو څخه د 3 غړو ټاکل دي چې شمېر یـې پـه لانـدې ډول په لاس راځي:

$$C_3^5=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}=10$$

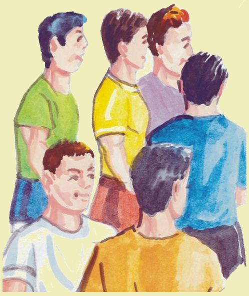
پوښتنې

1- که چېرې په یوه آزموینه کې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنو ته ځواب مطلوب وي، پـه څـو ډولـه کـولای شو چې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنې د حل لپاره وټاکو؟

2- په یوه مستوي کې پنځه ټکي چې په یوه کرښه پراته نه دي، په پام کې ونیسئ د دې ټکو پـه نـښولولو سـره په څو ډوله مثلث جوړولای شو.

3- که چیرې $P(n,2)-C_2^n=36$ سره وي، د n قیمت پیدا کړئ؟

تبـدیـل
Variation



په یوه المپیاکې له 10 ورزشـي ټیمونـو څخه پـه څـو ډولونو د سرو زرو، سپینو زرو او برونزو مډالونه شـتون لري؟

فعالیت

- د n بېلابېلو شیانو په پام کې نیولو سره د k په شمېر شیان ټاکو،د هغوی مجموعې شمېر څو دی؟
- که چېرې د k شیانو په ټاکلو کې ترتیب داسې وي، چې په هغوی کې لومړی، دویم، دریم او ... شـتون ولري، ټول مجموعي حالات به څو وي؟
- د پاسنیو دواړو ډولونو ترمنځ توپیر په کومه اندازه ده؟

پایله: د هغو ترکیبونو شمېر چې د k غړو د پرله پسې ترتیب په انتخاب کې له n غړو څخه په پام کې وي، نو په دې صورت کې یې شمېر مساوي په $k!\cdot C_k^n$ سره کېږي.

دغه ترکیب د وریشن Variation یا تبدیل په نامه یاد او په V_k^n سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$V_k^n = k!\cdot C_k^n = k!\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad\Rightarrow\quad V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: څو امکانه وجود لري چې په یوه انتخاباتي غونډه کې له 30 تنو ګډون کوونکو څخه 4 تنه د مشرتابه لپاره په داسې حال کې چې یو تن رئیس، یو لومړی مرستیال، یو دویم مرستیال او څلورم تن د منشي په توګه دنده ترسره کړي؟

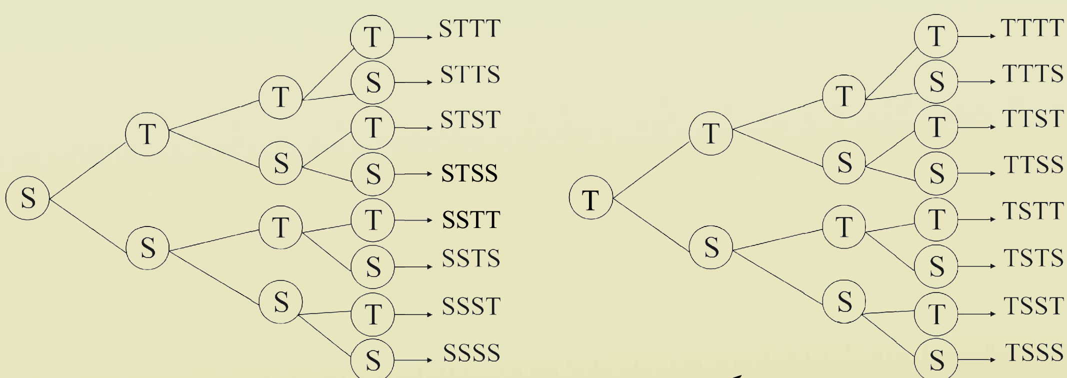
حل:مسئله په حقیقت کې د 4 تنو تبدیل له 30 تنو څخه ده، چې د تعریف لـه مخې لـه لانـدې فورمول څخه په لاس راځي:

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{30\cdot 27\cdot 29\cdot 28\cdot 26!}{26!} = 657520$$

پورتنی حالات چې تر اوسه مو د ترتیبونو، ترکیبونو او تبدیلونو لپاره تر بحث لاندې و نیول په لاندې جدول کې را ټول شوي دي.

د ټاکنو ډول k غړي لـه n غـړو څخه	د امکاناتو شمېر	
	له تکرار سره $k \le n$	پرته له تکراره $k \le n$
ترتیب یا پرموټېشن	$P(n,k)=\dfrac{n!}{k!}$	$P(n,k)=n! \quad , \quad n=k$
ترکیب یا کمبینیشن	$C_k^n=\dbinom{n+k-1}{k}$	$C_k^n=\dbinom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
تبدیل یا وریشن	$V_k^n=n^k$	$V_k^n=k!\dbinom{n}{k}=\dfrac{n!}{(n-k)!}$

مثال: د یوې سکې په اچولو سره چې د راتګ امکان یې، شیر یا خط ممکن دی او د هرې خوا د راتګ احتمال یې مساوي په $\frac{1}{2}$ دی، په پام کې ونیسئ، که چیرې سکه 2 ځلې، درې ځلې، شپږ ځلې، اته ځلې او یا 16 ځلې وغور ځوو، پوهېږو چې د هم چانسو لومړنیو پېښو په نمونه‌یي فضا کې په یوه ونه‌ییز ګراف کې لاندې حالت لرو: (شیر $= S$ او خط $= T$) دی.

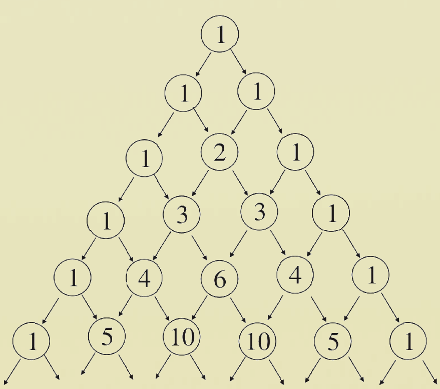


د پاسني مثال د شېر او خط د راتګ احتمال په یو، دوه، درې او څلور ځلې اچولو کې په لاندې جدول کې راټول شوي دي.

<table>
<tr><th rowspan="2">د سکې غورځول</th><th colspan="2">هیڅ ځل</th><th colspan="2">یو ځل</th><th colspan="2">دوه ځله</th><th colspan="2">درې ځله</th><th colspan="2">څلورځله</th></tr>
<tr><th>خط</th><th>احتمال</th><th>خط</th><th>احتمال</th><th>خط</th><th>احتمال</th><th>خط</th><th>احتمال</th><th>خط</th><th>احتمال</th></tr>
<tr><td rowspan="16">د خط د راتګ شمېر</td><td rowspan="16">0</td><td rowspan="16">1</td><td rowspan="8">0</td><td rowspan="8">$\frac{1}{2}$</td><td rowspan="4">0</td><td rowspan="4">$\frac{1}{4}$</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">$\frac{1}{8}$</td><td>0</td><td>$\frac{1}{16}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="4">$\frac{4}{16}$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">1</td><td rowspan="6">$\frac{3}{8}$</td></tr>
<tr></tr>
<tr><td rowspan="8">1</td><td rowspan="8">$\frac{2}{4}$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">2</td><td rowspan="6">$\frac{6}{16}$</td></tr>
<tr></tr>
<tr></tr>
<tr><td rowspan="8">1</td><td rowspan="8">$\frac{1}{2}$</td><td rowspan="6">2</td><td rowspan="6">$\frac{3}{8}$</td></tr>
<tr></tr>
<tr></tr>
<tr><td rowspan="4">3</td><td rowspan="4">$\frac{4}{16}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="4">$\frac{1}{4}$</td></tr>
<tr></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">$\frac{1}{8}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\frac{1}{16}$</td></tr>
</table>

که چېرې جدول ته په ځیر سره پاملرنه وکړئ، د هر وار د احتمال د کسرونو په صورت کې یو نظم وینو چې د بنیوم په انکشاف کې په ترتیب سره د حدونو ثابت غړي دي چې د لومړي ځل لپاره د پاسکال له خوا راوپېژندل شول او تر اوسه د هغه په نامه یادېږي.

دغه نظم مثلاً په مخامخ مثلث کې په یوه لیکه کې اعداد د کېڼې او ښې خوا د عددونو سره په پورته لیکه کې له جمعې لاس ته راغلي دي.



په دې ډول کولای شو چې مثلث ته تر بېنهایت پورې دوام ورکړو، چې که چېرې هغوی د یو دوه جملهیي له انکشاف سره پرتله کړو، لکه: د راکړل شوي پاسکال مثلث عددونه دي، مثلاً پاملرنه وکړئ چې د دوه

جملهېي په انکشاف کې له هغو عددونو څخه مو حلقه تاوکړې ده د مثلث له اعدادو سره چې حلقه ترې تاوشوي ده يو شان ده:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$
$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$
$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^3$$

1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

چې دغه ضريبونه د $(a+b)^n$ په انکشاف کې n د k له پاسه د ضريبونو استعمال په لاندې ډول ليکلی‌شو:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د " $\sum$ " علامه د پاسنی مجموع لپاره استعمال شوې ده.

په دې ډول د خط راتللو احتمال په k– امه مرتبه کې عبارت دي له: $P(\text{خط راتگ}) = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$

پوښتنې

1. د فوټبال په يوه سيالۍ کې 12 ټيمونه ګډون لري، په څو ډوله کولای شو ګټونکي لومړی، دويم او دريم مقام ته وټاکو.
2. د يوولسم ټولګي له 20 تنو زده‌کوونکو څخه په څو ډوله دوه تنه، د ټولګي د استازي او د استازي د مرستيال په توګه وټاکو.

د بينوم قضيه

د پاسکال د مثلث له مخې د بينوم د انکشاف ضريبونه وټاکئ.

$$(a+b)^2 = \bigcirc a^2 + \bigcirc ab + \bigcirc b^2$$
$$(a+b)^3 = \bigcirc a^3 + \bigcirc a^2b + \bigcirc ab^2 + \bigcirc b^3$$
$$(a+b)^4 = \bigcirc a^4 + \bigcirc a^3b + \bigcirc a^2b^2 + \bigcirc ab^3 + \bigcirc b^4$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

فعاليت

- په يوه ناخاپي تجربه کې چې يوازې دوه ناخاپي پېښې د A او $\overline{A}$ پېښېږي، يعنې د $\{A, \overline{A}\}$ نمونوي فضا لري. د A د پېښې احتمال عبارت دی له:
- که چېرې $P(A) = P$ د A د پېښې احتمال وي، د هغې د مکملې پېښې احتمال يعنې $\overline{A}$ څو دی $P(\overline{A}) = ?$
- د پورتنۍ تجربې له بيا بيا تکرار څخه که چېرې د A حادثې پېښېدو ته 1 او د نه پېښېدو حالت ته يې 0 ووايو لاندې جدول د تجربې د بيا بيا تکرار يعنې $n = 2$ لپاره بشپړ کړئ.

k	ممکنې پايلې	احتمال	د بينوم د ضريبونو ارايه
0		$(1-p)^2$	$\binom{2}{0}.p^0.(1-p)^2$
1	10	$2p(1-p)$	
2	11		$\binom{2}{2}p^2(1-p)^2$
		$(p+(1-p))^2$	$\sum\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = ?$

د $B(n,p,k)$ ليکنه د برتولی د مسالې د احتمال په نامه يادېږي.

$$B(n,p,k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

د بينوم د حدونو د انکشاف مجموع يعنې $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ پيداکړئ؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: په یوه ناڅاپي تجربه کې چې د نمونې فضا غړي یې په مساوي احتمال په تجربه کې بیابیا د تکرار وړ وي، نو د تجربې په n ځله تکرار کې د بینوم د انکشاف k – ام حد کې لاندې احتمال لري:

$$\binom{n}{k}.p^k(1-p)^{n-k}$$

پورتنی بینوم په $B(n,p,k)$ ښودل کېږي، د برنولي د پرابلم د احتمال په نامه یادېږي او لیکو: $B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ سره کېږي.

مثال: له n تنو څخه د 10 تنو په شمېر په ناڅاپي ډول ټاکو، د k تنو انتخاب شوو خلکو له جملې څخه 2 تنه ټاکو، پیدا کړئ د دې احتمال چې دواړه تنه په یوه ورځ زېږیدلي وي. $P(k\le n)=?$

حل: په دې ډول د Ω په نمونه‌يي فضا کې داسې فرضوو چې د کال د هرې ورځې احتمال $\frac{1}{365}$ او د زوکړې ورځ د سوال وړ ده نه د زرکړې کال.

په دې ډول Ω په نمونه‌يي فضا کې ټول امکانات له 365 ورځو څخه د k شمېر لپاره عبارت دی له:

د A حادثه $|\Omega|=(365)^k$

په دې ډول اوس که چیرې د A ناڅاپي پیښه چې لږترلږه دوه تنه په یوه ورځ زیږیدلي وي، په ساده ډول داسې د محاسبې وړ ده، چې د A د حادثې مکمله په پام کې نیسو، په دې ډول $\overline{A}$ عبارت له هغې نا څاپي پیښې څخه ده چې k تنه په بېلابېلو ورځو کې زیږیدلي دي. په دې ډول $\overline{A}$ عبارت د k پرموټېشن له 365 څخه ده چې لرو:

$$P(\overline{A})=\binom{365}{k}=\frac{365!}{(365-k)!}$$

په دې ډول:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{|\overline{A}|}{|\Omega|}=1-\binom{365}{k}=1-\frac{365!}{(365-k)!}\cdot\frac{1}{(365)^k}$$

پوښتني

وښیئ چې:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0 \qquad (I)$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n \qquad (II)$$

دوه جمله يي احتمال

آيا کولای شو چې د هرې نمونه‌يي فضا پايلې په دوه ناڅاپي پيښو چې له يو بل سره هيڅ ګډ عنصر نه‌لري، ترتيب کړو. موضوع د سټ د تيوري له مخې په يوه اختياري نمونه‌يي فضا Ω کې، دوه ناڅاپي پېښو ته چې اتحاد يې نمونه‌يي فضاوي په مثال کې يې تشريح کړي.

فعاليت

- د هغو تجربو ځخه چې تر اوسه يې پېژنئ يا دونه وکړئ او يوه نمونه‌يي فضا د دوه اتفاقي يا ناڅاپي پېښو په ارايه چې ټوله نمونه‌يي فضا يې يوازې دوه غړي ولري.
- آيا هغه ناڅاپي تجربې چې نمونه‌يي فضاګانې يې له 2 ځخه زيات غړي لري. کولای شو په داسې نمونه‌يي فضاګانو واړوو چې يوازې 2 غړي ولري؟ مثال راوړئ.
- په عمومي ډول ځنګه کولای شو چې يوه نمونه‌يي فضا چې ډېر غړي لري، په يوه داسې نمونه‌يي فضا چې 2 غړي لري، واړوو؟
- که چېرې د دا ډول فضاګانو د يو غړي د پېښې احتمال p وي، د بلې پېښې د احتمال قيمت به څو وي؟
- که چېرې تجربه n ځلې سرته ورسوو، او د k په شمېر له n ځلې($0 \le k \le n$) وړل او نور يې بايلل دي و، د k ځلې بريالیتوب (P) په n ځلې تکرار کې پيدا کړئ؟

له پورتني فعاليت ځخه لاندې پايله په لاس راځي:

پايله: د هرې ناڅاپي تجربې نمونه‌يي فضا کولای شو چې په داسې يوې نمونه‌وي فضا واړوو چې دوه غړي ولري.

– که چېرې د دا ډول نمونه‌وي فضا د يو غړي احتمال (P) وي، نو هرو مرو د بل حالت احتمال $1-p$ او بايلل دي.

– که چېرې دا ډول تجربې n ځلې تکرار شي، نو د k – ام ځلې وړل په n ځلې تکرار کې او د بايللو احتمال به $q=1-p$ سره دي، يعني لرو چې:

$$0 \le k \le n \quad , \quad \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = $$ ،k – ام ځلې وړل په n ځلې تکرار کې

لومړی مثال: پاملرنه وکړئ چې که چېرې په یوه تجربه کې د وړلو احتمال $\frac{1}{2}$، د بايللو احتمال هم مساوي په $\frac{1}{2}$ سره وي، په دې ډول ناڅاپي پېښو کې پورتنی اړیکه په لاندې ډول حسابېږي:

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}.(\frac{1}{2})^k.(1-\frac{1}{2})^{n-k}=\binom{n}{k}.\left(\frac{1}{2}\right)^k.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

پورتنی پایله د یوې تجربې په n ځله تکرار کې چې لـه هغې جملې څخه k ځلې یـې وړل وي، یـوې دوه عنصره نمونه‌یي فضا ته وځیږئ؟

دویم مثال: په یوه کورنی کې چې 5 ماشومان لري، د دې احتمال چې لـه اولادونـو څخه 2 تنـه هلکـان او پاتې نجونې وي، څو دی؟

حل: که چېرې د اولادونو د هلك او نجلی زوکړې چانس برابر په پام کې ونیسو لرو چې:

څرنګه چې په دې مثال کې $p=\frac{1}{2}$ او $q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ سره دی، نو لیکلای شو:

$$=\frac{\binom{5}{2}}{2^5}=\frac{10}{2^5}=\frac{5}{16}=0.3125=31.25\%$$ د دې احتمال چې دوه هلکان او درې نجونې وي.

دریم مثال: د رمل یوه دانه 6 ځلې غورځوو، د دې احتمال پیدا کړئ چې په 4 ځلې غورځیدو کې راغلي خالونه له دریو څخه لږ وي؟

حل: که چېرې له 3 څخه لږ راتلل حالت وړل په پام کې ونیسو نو:

$$p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.3333=33.33\%$$

$$q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=0.6666=66.66\%$$

(د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدو کې له 6 ځلې څخه، خالونه له 3 څخه لږ وي) $=\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{243}=0.0823=8.23\%$

څلورم مثال: یوه فلزي سکه داسې جوړه شوې ده چې د خط راتلـو احتمـال یـې مـساوي پـه $\frac{1}{3}$ وي، کـه چېرې دغه سکه 4 ځلې وغورځول شي، د دې احتمال چې لږ تر لږه 3 ځلې شېر راشي، مطلوب دی.

حل: که چېرې د سکې د خط راتللو حالت ته وړل او احتمـال یـې p پـه پـام کـې ونیـسو، نـو د خـط د نـه راتللو یا شېر راتګ مساوي په $1-p$ سره دی یعنې: $1-p=\frac{1}{3}p$

له دې ځخه $p=\frac{3}{4}$ او $q=\frac{1}{4}$ په لاس راځي:

$$\left\langle \text{د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدوکې لږ تر لږه 3 ځله شېر راشي.} \right\rangle = \binom{4}{3}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^3}_{\text{3ځلې شېر}}\cdot\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)}_{\text{1 ځل خط}}+\binom{4}{4}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^4}_{\text{4 ځلې شېر}}=\frac{3}{64}+\frac{1}{256}=\frac{13}{256}$$

پنځم مثال: یوه نورماله سکه څو ځلې وغورځوو چې لږ تر لږه د خط راتلو احتمال یې له 0.99 څخه ډېر وي؟

حل: داسې فرضوو چې سکه n ځلې غورځوو د دې احتمال چې لږتر لږه یو ځل سکه خط راشي مساوي ده په:

د هر n ځلې شیر راتگ احتمال $-1=$ دی لږ تر لږه یو ځل خط راتلو احتمال

$$=1-\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

په دې ډول ددې شرط $1-\frac{1}{2^n}>0.99$ یا $\frac{1}{2^n}<0.01$ سره دی چې $2^n>100$ یا $n\geq 7$ سره کېږي.

په دې ډول باید سکه 7 ځلې وغورځوو چې لږتر لږه یو ځل خط راشي، احتمال به یې له 0.99 څخه لوی وي.

پوښتنې

یوه سکه څو ځله غورځوو، د دې احتمال پیداکړی چې:

(i): په 4 ځله غورځیدوکې، 2 ځلې خط راشي.

(ii): په 6 ځله غورځیدوکې، 3 ځلې خط راشي

(iii): په 8 ځله غور ځیدوکې، 4 ځلې خط راشي.

(iv): فکر وکړئ چې که سکه 2n ځلې وغورځول شي او n ځلې خط راشـي، د n پـه ډېریـدو، د p بدلون په څه ډول دی؟

د څېړکي مهم ټکي

فکتوریــــل: د هــر n طبیعــي عــدد لپــاره د $n\cdot\ \ldots\ \cdot 3\cdot 2\cdot 1$ د ضــرب حاصــل پــه لنــډ ډول پــه $n!$ (n فکتوریل) ښودل کېږي، د تعریف له مخې $0!=1$ سره دی.

پرموټېشن یا ترتیب: د n غړو ترتیب په p_n ښودل کېږي که چېرې:

- په ترتیب کې تکرار غیر مجاز او ممکن نه وي: $P_n = n!$

خو که چېرې تکرار مجاز وي، د ترتیبونو شمېر مساوي په $P_k^{\ n}$ سره ده او داسې معنا ورکوي چې k ځلې په n ځلې ترتیبونو کې تکرار وجود لري. چې د پورتني حالت په پام کې نیولو سره ټول حالتونه مساوي دی په:

$$P_k^{\ n} = \frac{n!}{k!} \quad , \quad k \le n$$

$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ **د n, k له پاسه**: د $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, n د k له پاسه، د بېنوم هغه ضریبونه دي چې k د بېنوم د توان پــه ټاکلو سره، د ضریبونو لپاره داسې صورت نیسي:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{،} \quad n,k \in IN \text{،} \quad 0 \le k \le n$$

- له n شیانو څخه د r شیانو ترکیبونه په:

$$C_r^n = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{،} \quad r \le n$$

وریشن یا تبدیلونه: په ترتیبونو کې چې پر له پسې ترتیب د k انتخابي غړو له n غــړو څخه مطلوب وي، په نامه دې، n په k تبدیلونو یاد او لیکو:

$$V_k^{\ n} = k!\cdot C_k^{\ n} = k!\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_k^{\ n} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

دبېنوم قضیه: د $(a+b)^n$ دو جملهیي انکشاف عبارت دی له:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

د یوې تجربې په n ځلې تکرار کې، چې هر حالت یې p او د $q = 1-p$ احتمال لري.

د $k-$ام ځلې ورلو یعنې p له n ځلې څخه او نور پاتې حالتونه چې بایلل ګڼل کېږي؛یعنې $q = 1-p$ سره دي اوصورت نیسي:

$$\left\langle \begin{matrix} \text{د k ځلې ورلو د احتمال قیمت د تجربې} \\ \text{د n ځلې په پای کې} \end{matrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \text{،} \quad 0 \le k \le n$$

د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې عددونو سټ په پام کې ونیسئ:

$$S = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

(i): په څو ډوله کولای شو له پاسنیو عددونو څخه 3 رقمي عددونه جوړ کړو.

(ii): ټول 3 رقمي جفت عددونه به څو وي؟

2- په څو ډوله 6 تنه زده‌کوونکي په یوه کتار کې څنګ په څنګ دربېدلی شي؟

3- په څو ډوله ابوبکر، زبیر، یاسر، حنظله او حبیب کولای شي، په یو کتار کي خوا په خوا د یو یادګاري تصویر د اخېستلو لپاره ودریږي؟

4- په څو ډولونو کولای شو چې 9 تنه په درې 3 ګروپونو ووېشو؟

5- د پاسکال د مثلث له مخې د $(a+b)^7$ انکشاف په لاس راوړئ؟