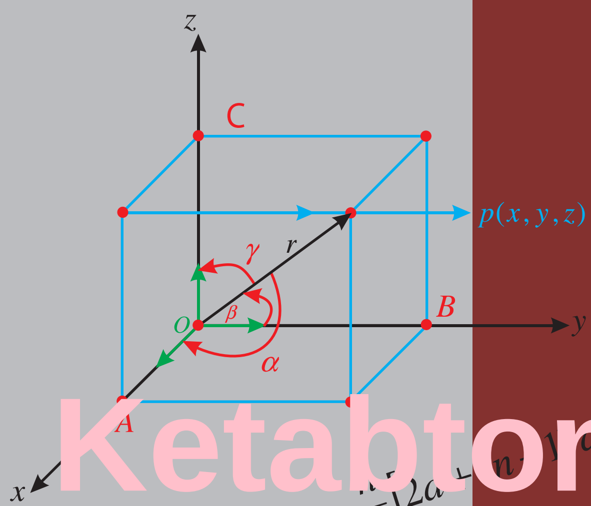
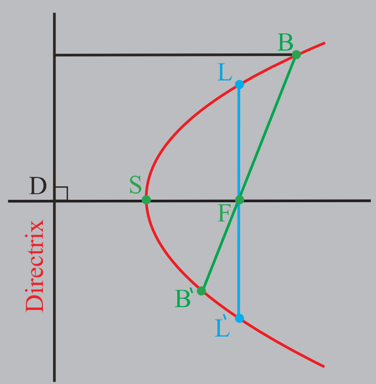
د پوهنې وزارت

ریاضي ۱۱

ټولګی



$S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$



ریاضي ۱۱ ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۸

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی — دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د توري — هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی — د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو — د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، گوجر دي — پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي — هم ایماق، هم پشه يان
دا هیواد به تل ځلیږي — لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به — لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر — وایو الله اکبر وایو الله اکبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهنې وزارت

رياضي ۱۱ ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هـ. ش.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: ریاضي

مؤلفین: د تعلیمي نصاب د ریاضیاتو د څانګې علمي او مسلکي غړي

اډیټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډیټ علمي او مسلکي غړي

ټولګی: یوولسم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکی: د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف لوی ریاست

خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړیکو او عامه پوهاوي ریاست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ ځای: کابل

چاپخونه:

برېښنالیک پته: curriculum@moe.gov.af

د درسي کتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوریت د پوهنې وزارت سره محفوظ دی. په بازار کې یې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغړوونکو سره قانوني چلند کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوهنې د وزير پيغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته يې ژوند رابښلی، او د لوست او ليک له نعمت څخه يې برخمن کړي يو، او د الله تعالی پر وروستي پيغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پيغام ورته (لوستل) و، درود وايو.

څرنگه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمريز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د گران هېواد ښوونيز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدينو شوراگانې د هېواد د پوهنيز نظام شپږگوني بنسټيز عناصر بلل کيږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختيا او پرمختيا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونيز نظام کې د ودې او پراختيا په لور بنسټيزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونيز نصاب اصلاح او پراختيا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړيتوبونو څخه دي. همدارنگه په ښوونځيو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونيزو تأسيساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کيفيت او توزيع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور يو، چې د باکيفيته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنيو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونيز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توگه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مديرانو څخه په درناوي هيله کوم، چې د هېواد بچيانو ته دې د درسي کتابونو په تدريس، او د محتوا په لېږدولو کې، هيڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د يوه فعال او په ديني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زيار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤوليت په درک سره، په دې نيت لوست پيل کړي، چې د نن ورځې گران زده‌کوونکي به سبا د يوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او گټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانگه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه گټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځيرکو او فعالو گډونوالو په توگه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدريس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونيز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په ليکلو او چمتو کولو کې يې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بريا غواړم.

د معياري او پرمختللي ښوونيز نظام او د داسې ودان افغانستان په هيله چې وگړي يې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزير

دکتور محمد ميرويس بلخي

(c) ketabton.com: The Digital Library

لړلیک

سرلیک — **مخونه**

لومړی څپرکی مخروطي مقاطع

دویم څپرکی مثلثات

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم څپرکی فضايي هندسه

څلورم څپرکی ترادفونه

پنځم څپرکی لوګاريتم

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی متریکسونه

اووم څپرکی وکتورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم څپرکی احصایه

نهم څپرکی احتمالات

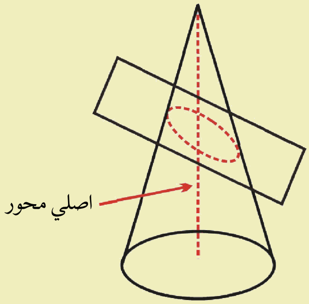
(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی څپرکی

مخروطي مقاطع

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library



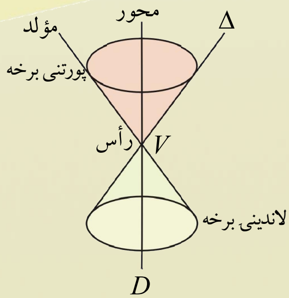
مخروطي مقاطع

sections of Conic

آیا ویلای شئ چې د یوې مستوي او مخروط د تقاطع له ګډ فصل څخه څه ډول منحني ګاني لاس ته راځي.

د مخروطي مقاطعو تعریف

د Δ او D دوه مستقیم خطونه داسې په پام کې نیسو چې یو بل د V په ټکي کې قطع کړي. که چیرې د D خط ثابت او د Δ خط د هغه په چاپیر وڅرخېږي، له دې څرخولو څخه په فضا کې دوه شکلونه چې یو یې د V (ټکی) پورته او بل یې د V د ټکي ښکته خواته جوړېږي. هر یو یې مخروط دی، لکه: مخامخ شکل د D مستقیم خط د مخروط اصلي محور او د Δ مستقیم خط د هغه مولد دی.



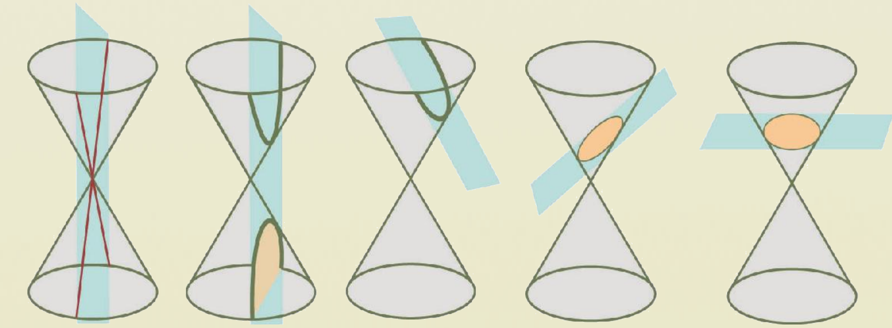
د یوې مستوي په واسطه د یوه مخروط قطع کول مختلف حالتونه لري چې مختلفې منحني ګاني منځ ته راځي چې مخروطي مقاطع بلل کېږي. په راتلونکې کې به هر یو په تفصیل سره ولوستل شي.

فعالیت

- یو مخروط د مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط په اصلي محور باندې عمود او یا له قاعدو سره موازي وي، ویلای شئ، ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي نسبت د مخروط اصلي محور ته مایله وي، ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط له مولد سره موازي وي، نوتقاطع یا ګډ فصل یې څه ډول منحني ده؟
- دوه مخروطه چې راسونه یې سر په سر (منطبق) او قاعدې یې موازي وي، د یوې مستوي په واسطه چې اصلي محور سره موازي وي قطع کړئ. ویلای شئ چې له ګډ فصل څخه یې څه ډول منحني په لاس راځي؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط اصلي محور په بر کې ولري، تقاطع یا ګډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:



پایله:

- که چېرې مستوي یو مخروط داسې قطع کړي چې مستوي د مخروط په اصلي محور عمود او یا موازي له قاعدو سره وي، نو لاس ته راغلی شکل یې یوه دایره(Circle) ده.
- که چېرې مستوي مخروط داسې قطع کړي چې مستوي نسبت د مخروط اصلي محور ته مایل وي، نو لاس ته راغلی شکل بیضوی (Ellipse) ده.
- که چېرې یوه مستوي یو مخروط داسې قطع کړې وي چې اصلي محور ته موازي اما هغه په برکې ونه لري، نو په دې حالت کې د هغوی له لاس ته راغلي شکل څخه پارابولا (Parabola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي دوه څوکې په څوکې مخروطونه داسې قطع کړي چې د مخروط له اصلي محور سره موازي وي خو هغه په ځان کې ونه لري نو، له لاس ته راغلي شکل څخه یې هایپربولا (Hyperbola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي سطحه اصلي محور په برکې ولري، نو لاس ته راغلی شکل یې له دوو متقاطع خطونو څخه عبارت دی چې هر یو یې په پورته شکلونو کې ښودل شوی دي.

پوښتنې

1- پورتني شکل ته په کتو سره، د مستوي او مخروط هغه متقاطع حالت رسم کړئ چې ګډ فصل یې یوه دایره او یا یو ټکی وي.

2- که چېرې یوه مستوي دوه څوکې په څوکې مخروطونه داسې قطع کړي چې د دواړو مخروطونو اصلي محورونه په برکې ولري، ګډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟

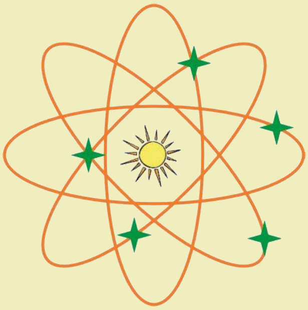
3- د یوې مستوي او یو مخروط ګډ فصل په کوم حالت کې یوه کرښه ده؟ په شکل کې یې وښیې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیضـــوي

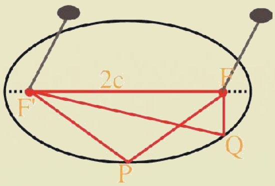
Ellipse

د سیارو حرکت د لمریز نظام په شاوخوا څه ډول منحني ګاني جوړوي؟



فعالیت

- د میز پر سر د یوې سپینې کاغذي پاڼې پر مخ دوه ستنې په یوه معین او ثابت واټن سره د F او F′ په دوو ټکو کې وټومبئ.
- د یو تار څوکه چې اوږدوالی یې د دوو ستنو ترمنځ د فاصلې څخه زیات وي یا د $\overline{FF'} = 2c$ وي، په دواړو ستنو کې وتړئ، لاندې شکل ته په کتو سره یو پنسل د تار په غاړه د ستنو په شاوخوا وڅرخوئ.

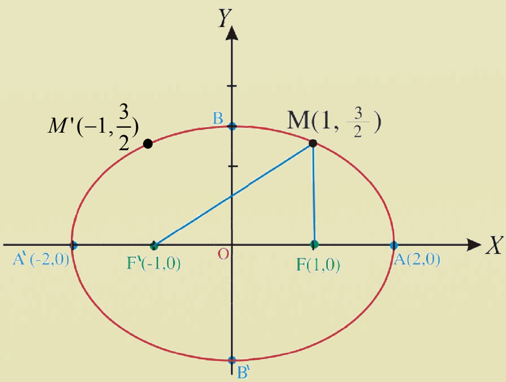


- هغه شکل چې له یوې بشپړې دورې څخه په لاس راځي څه ډول منحنی ده؟

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله بیانولای شو:

پایله: هغه شکل چې ددوو ستنو تر منځ د معین او ثابت واټن په اندازه د تار په غاړه د پنسل له څرخولو څخه په لاس راځي، بیضوي بلل کېږي، د F او F′ ټکي د بیضوي د محراقونو په نامه یادېږي.

فعالیت



- په مخامخ شکل کې د F، F′، M، M′، A′ او A ټکو مختصات درکړل شوي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې د $|MF'|$، $|MF|$ او $|AA'|$ اوږدوالی پیدا کړئ او د $|MF|+|MF'|$ د جمع حاصل لاس ته راوړئ او د $|AA'|$ اوږدوالی سره یې پرتله کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د $M'(-1,\frac{3}{2})$ ټکی د بیضوي په محیط باندې وټاکئ او پورتنۍ ذکر شوې مرحلې د M' په ټکی باندې تطبیق کړئ. همدارنګه د M ټکی هم په پام کې ونیسئ.
- وروسته د $|M F'| + |M F|$ او $|M' F| + |M' F'|$ قیمتونه یو له بله سره پرتله کړئ.

له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې تعریف بیانولای شو:

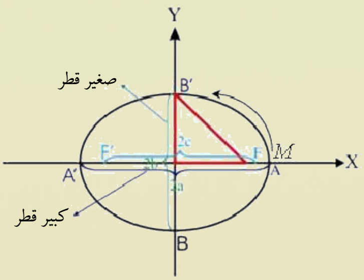
تعریف: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو ثابتو ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل تل مساوي یا ثابت اوږدوالی $(2a)$ ولري، بیضوي بلل کېږي، مستقر ټکی چې په F او F' تورو ښودل شوی، د بیضوي محراقونه او A', A د بیضوي راسونه چې $AA' = 2a$ ثابت اوږدوالی دی.

$$|M' F| + |M' F'| = 2a \quad , \quad |M F| + |M F'| = 2a$$

نو:

$$|M' F| + |M' F'| = |M F| + |M F'| = 2a$$

د بیضوي قطرونه او راسونه



بیضوي یې شمېره قطرونه لري، تر ټولو اوږد قطر یې چې له محراقونو څخه تېرېږي او بیضوي په دوو ټکو (A او A') کې قطع کوي، د کبیر قطر (Major axis) په نامه او ترټولو لنډ قطر یې چې د FF' د تنصیف په ټکي باندې عمود دی، د صغیر قطر (Minor axis) په نامه یادېږي. د A, A' او B, B' ټکي د بیضوي راسونه دي، کبیر قطر په $A A'$ چې اوږدوالی یې $AA' = 2a$ او صغیر قطر په BB' چې اوږدوالی یې $BB' = 2b$ دی، ښودل کېږي.

یادداښت

که چېرې د M ټکی د صغیر قطر په یوه راس باندې یعنې په B یا 'B باندې منطبق شي، په دې صورت کې، په پورته شکل کې: $\overline{MF} = \overline{MF'}$ سره کېږي.

د بیضوي له تعریف څخه پوهېږو چې:

$$|MF| + |MF'| = 2a$$

$$2\overline{MF} = 2a$$

$$\overline{MF} = a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

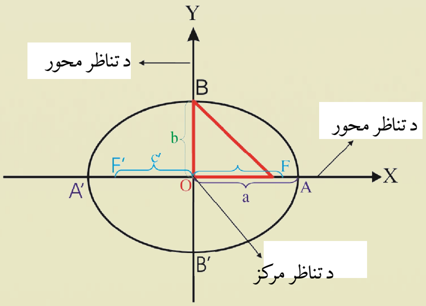
د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه

د محراقونو او قطرونو ترمنځ اړیکې د فیثاغورث د قضیې له مخې لیکلای شو:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

د بیضوي تناظري مرکز او تناظري محور

بیضوي دوه تناظري محورونه لري، یو یې اوږد محور چې د AA' پر قطر باندې منطبق دی، محراقي محور هم بلل کیږي او بل یې لنډ محور چې د BB' پر قطر باندې منطبق دی، تناظري محور په نامه یادیږي.



د دې دواړو تناظري محورونو د تقاطع ټکی د بیضوي تناظري مرکز بلل کیږي او په (O) سره ښودل کیږي.

$$\overline{OA} = \overline{OA'} = a$$
$$\overline{OB} = \overline{OB'} = b$$
$$\overline{OF} = \overline{OF'} = c$$

عن المرکزیت (Eccentricity): د محراقونو د اوږدوالي او د کبیر قطر د اوږدوالي نسبت ته عن المرکزیت وایې چې د یوې بیضوي شکل د هغه په واسطه ټاکل کیږي ، د بیضوي عن المرکزیت په e سره ښودل کیږي.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

پوهیږو چې په هره بیضوي کې $0 < c < a$ دی، نو $0 < e < 1$ کیږي، ولې؟

د بیضوي د عن المرکزیت او قطرونو تر منځ داسې رابطه $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ده، د $e = \frac{c}{a}$ د رابطې په کارولو سره هغه لاس ته راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: که چیرې د e قیمت صفر ته نژدي شي، محراقونه د مرکز خوا ته نژدي کېږي او بیضوي تقریباً دایروي شکل غوره کوي. که چیرې e د 1 عدد ته نژدي شي، په دې صورت کې محراقونه د قطرونو د راسونو خواته نژدي کېږي چې یو اوږد شکل غوره کوي، د بیضوي د ډېرو مسایلو په حل کې د عن المرکزیت څخه کار اخیستل کېږي.

پوښتنې

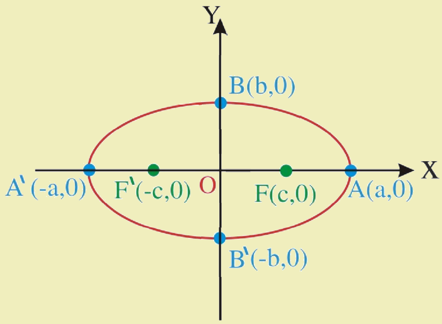
1 – که چیرې په بیضوي کې د کبیر او صغیر قطر اوږدوالی یو له بل سره مساوي وي، څه ډول منحني په لاس راځي؟

2 – که چیرې د بیضوي عن المرکزیت $\frac{2}{3}$ وي، په دې صورت کې د کبیر قطر او صغیر قطر نسبت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیضوي معادله

آیا د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، پیدا کولای شئ؟



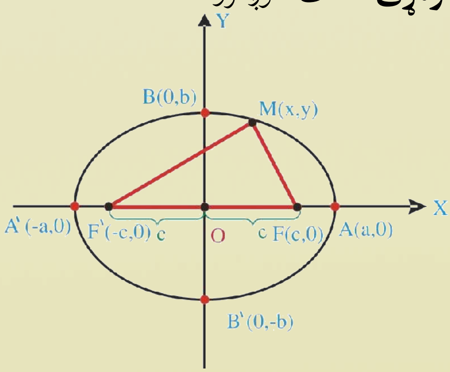
فعالیت

- داسې بیضوي رسم کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي او محراقونه یې د x د محور په مخ وټاکئ.
- د $M(x, y)$ یو اختیاري ټکی، د بیضوي پر محیط باندې وټاکئ او هغه له محراقونو سره ونښلوئ.
- د بیضوي د تعریف رابطه نظر د M ټکي ته ولیکئ.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې د MF او MF' اوږدوالی پیدا کړئ

او دهغه په اساس د بیضوي معادله په لاس راوړئ.

د بیضوي د معادلې ثبوت

لومړی حالت: موږ لرو:



$$|MF| + |MF'| = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$(\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = (2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2$$

د دواړو خواوو له مربع کولو وروسته لیکو چې:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a^2 - x^2 - 2cx - c^2 - y^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$-4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad / \div (-4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يا

$$a^2+cx=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

د پورته رابطې دواړه خواوې بيا مربع کوو او ليکو:

$$(a^2+cx)^2=(a\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2[(x+c)^2+y^2]$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$a^4+c^2x^2-a^2x^2-a^2c^2-a^2y^2=0/(-1)$$
$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2-c^2x^2-a^4=0$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

څرنګه چې $a^2=b^2+c^2$ دي، نو $b^2=a^2-c^2$ کيږي، په دې صورت کې پورته معادله په لاندې توګه ليکو:

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad / \div a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \qquad a>b$$

د بيضوي په پورته معادله کې a د کبير قطر نيمايي او b د صغير قطر نيمايي دی چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مرکز کې او محراقي محور يې د x پرمحور دی.

د کبير او صغير قطر د راسونو او د محراقونو مختصات عبارت وي له:

$$\begin{cases}A(a، 0)\\A'(-a, 0)\end{cases}\qquad\begin{cases}B(0،b)\\B'(0، -b)\end{cases}\qquad\begin{cases}F(c، 0)\\F'(-c، 0)\end{cases}$$

دويم حالت: که چيرې د بيضوي محراقونه د y په محور باندې وي، په دې صورت کې د بيضوي معادله عبارت ده له:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

د هغه ګراف رسم او د اوږد قطر، لنډ قطر د راسونو او محراقونو مختصات يې وليکي.

لومړی مثال: که چيرې د بيضوي اوږد قطر د y پر محور باندې او اوږدوالی يې $|AA'|=6$ او د لنډ قطر اوږدوالی يې $|BB'|=4$ واحده وي، د بيضوي معادله پيدا کړئ.

حل:

$$|AA'|=2a=6 \Rightarrow a=3$$
$$|BB'|=2b=4 \Rightarrow b=2$$

اوس د a او b قيمتونه په عمومي معادله کې ايږدو:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال:که چیرې اوږد قطر د x پر محور او اوږدوالی یې $|AA'|=10$ او د لنډ قطر اوږدوالی یې $|BB'|=8$ واحده وي، د بیضوي د اوږده او لنډ قطرونو د راسونو او محراقونو مختصات، محراقي فاصله، د عن المرکزیت قیمت پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل: پوهیږو چې:

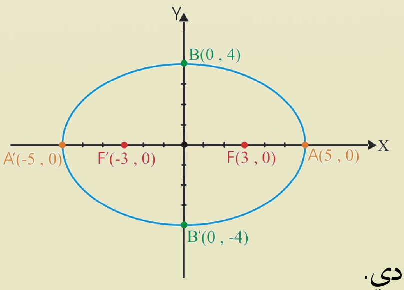
$$|AA'|=2a=10 \quad \Rightarrow \quad a=\pm 5$$
$$|BB'|=2b=8 \quad \Rightarrow \quad b=\pm 4$$

د اوږده قطر د راسونو مختصات له $A(5,0)$ او $A'(-5,0)$ څخه عبارت دي.

د لنډ قطر د راسونو مختصات له $B(0,4)$ او $B'(0,-4)$ څخه عبارت دي.

د محراقونو د مختصاتو د پیداکولو لپاره د c قیمتونه پیداکوو:

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow (5)^2=(4)^2+c^2$$
$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 5^2-4^2=25-16=9$$
$$c=\pm 3$$



د محراقونو مختصات له $F(3,0)$ او $F'(-3،0)$ څخه عبارت دي.

عین المرکزیت: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{5}$ دی.

دریم مثال: د داسې بیضوي ګراف رسم کړئ چې معادله یې $4x^2+y^2=16$ وي، د راسونو او محراقونو مختصات یې پیدا کړئ.

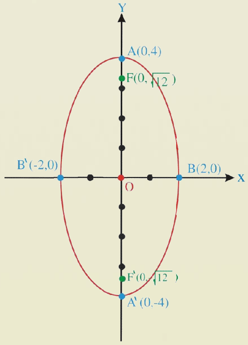
حل: د معادلې دواړه خواوې په 16 ویشو او لاندې معادله لاس ته راځي:

$$\frac{4x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{16}{16} \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

د راسونو مختصات:

$$a^2=16 \quad \Rightarrow \quad a=\pm 4 \quad \Rightarrow \quad A(0،4) \text{ ، } A'(0 \text{ ، } -4)$$
$$b^2=4 \quad \Rightarrow \quad b=\pm 2 \quad \Rightarrow \quad B(2،0) \text{ ، } B'(-2 \text{ ، } 0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د محراقونو مختصات:

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = (4)^2 - (2)^2$$
$$c^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = \pm\sqrt{12}$$
$$F(0,\sqrt{12}),\ F'(0,-\sqrt{12})$$

خلورم مثال: د بیضوي د محیط پر مخ د یوه ټکي مختصات $P(2,4)$ او د محراقونو مختصات یې له $F(3\sqrt{2},0), F'(-3\sqrt{2},0)$ څخه عبارت دي. د اوږده او لنډ قطر اوږدوالی یې پیدا کړئ.

حل: د بیضوي د تعریف له مخې لرو چې: $\quad |PF| + |PF'| = 2a \qquad \ldots \text{I}$

د PF او PF′ د فاصلو اوږدوالی پیدا کوو $|PF| = \sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2}$ او $|PF'| = \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2}$

پورتني قیمتونه د I په رابطه کې ایږدو:

$$\sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2} + \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2} = 2a$$
$$\Rightarrow \sqrt{4+12\sqrt{2}+18+16} + \sqrt{4-12\sqrt{2}+18+16} = 2a$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{38+12\sqrt{2}} + \sqrt{38-12\sqrt{2}}\right)^2 = (2a)^2$$
$$38+12\sqrt{2} + 2\sqrt{(38+12\sqrt{2})(38-12\sqrt{2})} + 38 - 12\sqrt{2} = 4a^2$$
$$76 + 2\sqrt{1444-288} = 4a^2 \Rightarrow 76 + 2\cdot 34 = 4a^2$$
$$\Rightarrow 76 + 68 = 4a^2 \Rightarrow 144 = 4a^2 \ /\div 4$$
$$\Rightarrow 36 = a^2 \Rightarrow a = \pm 6$$
$$|AA'| = 2a = 2\cdot 6 = 12$$
$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$b^2 = 6^2 - (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow b^2 = 36 - 9\cdot 2 \Rightarrow b = \pm 3\sqrt{2}$$
$$|BB'| = 2b = 2\cdot 3\sqrt{2} = 6\cdot\sqrt{2}$$

پوښتنې

1 – لاندې معادلې په پام کې ونیسئ د اوږده قطر اوږدوالی او د محراقونو ترمنځ فاصله یې پیدا کړئ.

a) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ b) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

2 – د هغې بیضوي معادله ولیکئ چې عن‌المرکزیت یې 0.8 وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې بیضوي معادله چې مرکزیې یو اختیاري ټکی وي

آیا داسې بیضوي معادله پیداکولای شو چې مرکزیې

د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي؟

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

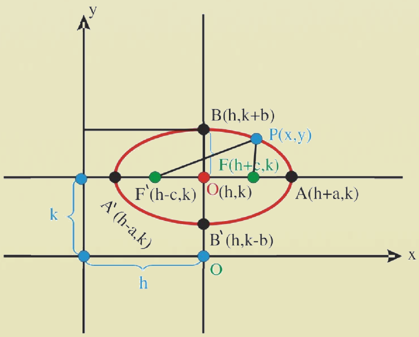
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

فعالیت

- یوه بیضوي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ چې مرکزیې (h,k) اوږد قطریې د x له محور سره موازي وي.
- د $P(x,y)$ یو ټکی د بیضوي په محیط باندې په پام کې ونیسئ او هغه له F او F' سره ونښلوئ.
- د بیضوي د مرکز مختصات (h,k) په پام کې نیولو سره د محراقونو F او F'، راسونو A , A' او B,B' وضعیه کمیات په شکل کې وښیاست.

لومړی حالت: د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول او د بیضوي د تعریف څخه په کار اخیستنې سره د بیضوي معادله په لاس راوړو:

د PF او PF' قیمتونه د بیضوي د تعریف په رابطه کې ایږدو.



$$|\overline{PF}|+|\overline{PF'}|=2a$$

$$|\overline{PF}|=\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

$$|\overline{PF'}|=\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

$$\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} \quad /(\ )2$$

$$[x-(h+c)]^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+[x-(h-c)]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h+c)+(h+c)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h-c)+(h-c)^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2-2hx-2cx+h^2+2hc+c^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2hx+2cx+h^2-2hc+c^2$$
$$4hc-4cx=4(a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2})/\div 4$$
$$hc-cx=a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$
$$c(h-x)-a^2=-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\quad /\div(-1)$$
$$c(x-h)+a^2=a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

دواړه خواوې مربع کوو:

$$c^2(h-x)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[\{x-(h-c)\}^2+(y-k)^2]$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[(x-h)+c]^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2-a^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$
$$(x-h)^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$
$$-(x-h)^2(a^2-c^2)-a^2(y-k)^2=-a^2(a^2-c^2)$$

څرنګه چې په بيضوي کې $a^2-c^2=b^2$ کېږي، نو ليکلای شو:

$$-b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=-a^2b^2\quad /\ \div(-a^2b^2)$$
$$=\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

لومړی مثال: د يوې بيضوي د مرکز، محراقونو او اوږد قطر د راسونو مختصات چې معادله يې $\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$ ده، پيدا او ګراف يې رسم کړئ.

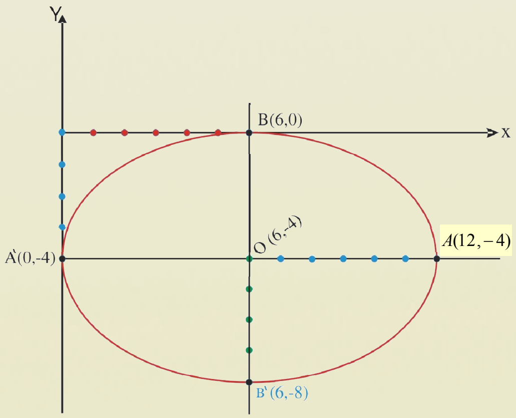
حل: څرنګه چې نوموړې معادله عمومي شکل لري، له دې امله د مرکز مختصات يې $(6,-4)$ دي، اوږد محور يې د x له محور سره موازي دی.

$$a^2=36\Rightarrow a=\pm 6$$
$$b^2=16\Rightarrow b=\pm 4$$
$$c=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=\pm 2\sqrt{5}$$

د اوږد قطر د راسونو مختصات عبارت دي له:

$$A(h+a\ ,\ k)=A(6+6,-4)=A(12,-4)$$
$$A'(h-a\ ,k)=A'(6-6,-4)=A'(0,-4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



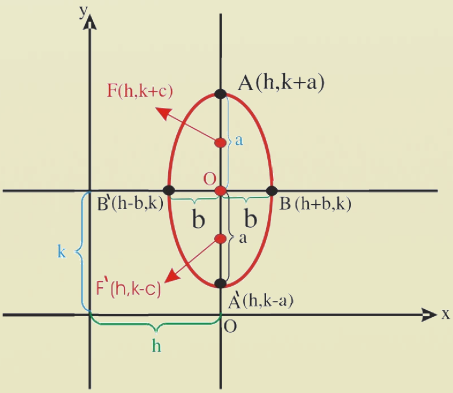
د تناظري محور د راسونو مختصات عبارت دي له:

$$B(h,k+b)=B(6,-4+4)=B(6,0)$$
$$B'(h,k-b)=B'(6,-4-4)=B'(6,-8)$$

د محراقونو مختصات عبارت دي له:

$$F(h+c,k)=F(h+c,k)=(6+2\sqrt{5},-4)$$
$$F'(h-c,k)=F'(h-c,k)=(6-2\sqrt{5}\ ,-4)$$

دويم حالت: که چېرې محراقي محور د y له محور سره موازي وي، په دې حالت کې معادله لاندې بڼه غوره کوي.



$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$
$$A(h\ ,\ k+a)\ ,\ \ A'(h,k-a)$$
$$B'(h-b\ ,k)\ ,\ \ B(h+b,k)$$
$$F'(h,k-c)\ \ ,\ \ F(h\ ,k+c)$$

يادونه: د $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ معادله هم د بيضوي عمومي معادله ده، په داسې حال کې چې $A\neq C$ او هم علامه وي، يعني $A>0\ ,\ C>0$ يا $A<0\ ,\ C<0$

دويم مثال: د $16x^2+25y^2-64x+50y-311=0$ معادله د بيضوي د معياري معادلې په ډول وليکئ.

حل: د مربع له بشپړولو څخه په کار اخيستنې سره يې په معياري ډول بدلوو .

$$16x^2+25y^2-64x+50y=311$$
$$16(x^2-4x)+25(y^2+2y)=311$$
$$16(x^2-4x+4-4)+25(y^2+2y+1-1)=311$$
$$16[(x-2)^2-4]+25[(y+1)^2-1]=311$$
$$16(x-2)^2-64+25(y+1)^2-25=311$$
$$=16(x-2)^2+25(y+1)^2=311+64+25$$
$$16(x-2)^2+25(y+1)^2=400$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته معادلې دواړه خواوې په 400 وېشو: $\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$

پورتنۍ معادله د داسې بیضوي معادله ده چې مرکز يې د $(2،-1)$ ټکی دی.

دریم مثال: د بیضوي لاندې معادله د معیاري معادلې په ډول ولیکئ.

$$x^2+9y^2+4x-18y-23=0$$

حل : لومړی معادله ترتیب بیا د مربع له بشپړولو څخه په کار اخیستنې سره هغه په معیاري شکل بدلوو:

$$x^2+9y^2+4x-18y-23=0$$

$$x^2+4x+9(y^2-2y)-23=0$$

$$x^2+4x+(2)^2-(2)^2+9[y^2-2y+(1)^2-(1)^2]-23=0$$

$$\underbrace{x^2+4x+(2)^2}_{\text{کامله مربع}}-(2)^2+9\underbrace{\left[y^2-2y+(1)^2\right]}_{\text{کامله مربع}}-9-23=0$$

$$(x+2)^2-4+9(y-1)^2-9-23=0$$

$$(x+2)^2+9(y-1)^2-36=0$$

$$(x+2)^2+9(y-1)^2=36$$

د مساواتو دواړه خواوې په 36 وېشو:

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{9(y-1)^2}{36}=\frac{36}{36}$$

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

پوښتنې

1. د لاندې هر یوه بیضوي په معادلو کې د مرکز، محراقونو، راسونو مختصات او د کبیر قطر اوږدوالی پیدا کړئ.

$a)\quad \dfrac{(x+3)^2}{2}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1 \qquad\qquad b)\quad x^2+2y^2+4x-12y+20=0$

2. د داسې بیضوي معادله ولیکئ چې مرکز يې د $(1,2)$ ټکی، محراق يې د $(2, 6)$ ټکی وي او د $(4,6)$ له ټکي څخه تېره شي.

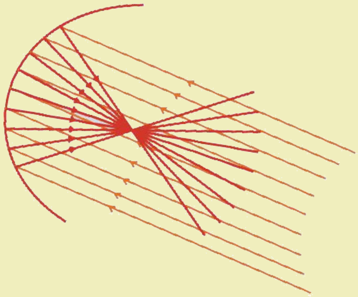
3. د بیضوي لاندې معادلې د معیاري معادلو په ډول ولیکئ، د مرکز، راسونو، محراقونو وضعیه کمیات او د اوږده قطر، لنډ قطر اوږدوالی، عن المرکزیت پیدا او ګرافونه يې رسم کړئ.

$a)\quad 9x^2+25y^2-36x-150y+36=0 \qquad\qquad b)\quad 16x^2+4y^2+96x-8y+84=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

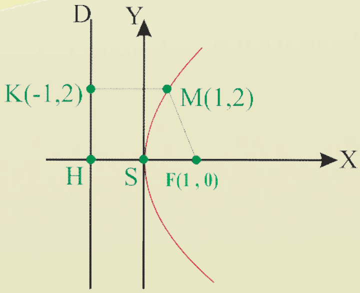
پارابـولا

Parabola



که چېرې د لمر وړانګې په يوې معقرې عدسيې ولوېږي، انعکاسـي وړانګې يې له کوم ټکي څخه تېرېږي؟ دغه ټکـی څه نـومېږي او د عدسې ګډ فصل له يوې متقاطع مستوي سره چې د عدسـيې اصلي محور په بر کې ولري. څه ډول منحني ده؟

فعالیت

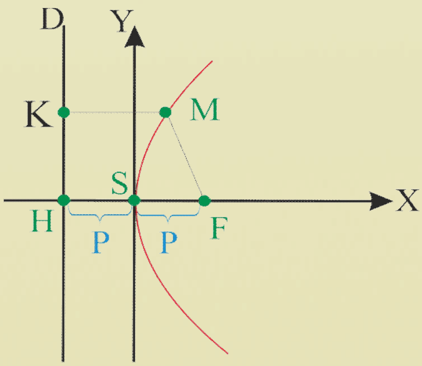


په مخامخ شکل کې د M، F او K ټکو مختصات درکړل شـوي دي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پيدا کولـو لـه فـارمول څخـه پـه کار اخيستنې سره د FM او KM هر يو اوږدوالـی پيـدا او يـو لـه بل سره يې پرتله کړئ.

له پورته فعاليت څخه لاندې تعريف بيانولای شو:

تعريف: په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د يوه ثابت يا مستقر ټکي او يـوه ثابـت مـستقيم خـط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کيږي. دغه ثابت يـا مـستقر ټکـی د پـارابولا محـراق (F) او د D ثابت مستقيم خط ته د پارابولا هادي خط يا موجه خط (Directrix) وايي $\overline{MF}=\overline{MK}$

هغه مستقيم خط چې د پارابولا له محراق او راس څخه تير او د موجه (D) پر مـستقيم خـط عمـود وي، د پـارابولا د محراقي يا تناظري محور په نامه ياديږي.

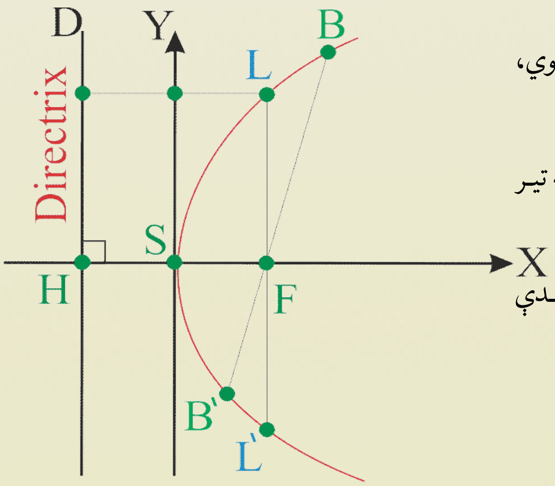


د تناظري محور او منحني ګـډ ټکـی د پـارابولا راس او پـه S سره ښودل کيږي.

آيا ويلای شئ چې S د $\overline{FH}$ نيمايي ټکی دی، ولې؟

په پارابولا کې عن المرکزيت $(e=1)$ دی، ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پارابولا وترونه

هغه مستقیم خط چې د پارابولا دوه ټکي سره ونښلوي، د پارابولا وتر بلل کیږي.

په شکل کې $\overline{BB'}$ چې د پارابولا له محراق څخه تیر شوي دی، محراقي وتر دی.

LL' چې د محراق په ټکي کې د تناظر پر محور باندې عمود دی عمودي وتر بلل کیږي.

پوښتنې

د پورته شکل په مرسته وښیئ چې د پارابولا د عمودي وتر اوږدوالی د $\overline{FH}$ خط د اوږدوالي څو برابره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پارابولا معادله

ځنګه کولای شو د هغه پارابولا معادله چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، پیدا کړو.

$$y^2 = 4px$$
$$x^2 = 4py$$

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو قایم سیستم په پام کې ونیسئ او د y له محور سره د هادي موازي خط رسم کړئ.
- د پارابولا منحني داسې رسم کړئ چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي.
- د x پر محور باندې محراق داسې وټاکئ چې فاصله یې له مبدا څخه د هادي خط له فاصلې سره مساوي وي.
- په منحني باندې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ ، هغه له F سره ونښلوئ او د M له ټکي څخه یو عمود پر هادي(موجه خط) باندې رسم او د تقاطع ټکي ته یې K ووایاست.
- د F او K د ټکو مختصات ولیکئ.

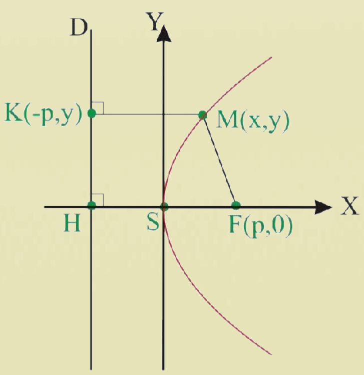
اوس د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د F,M او K,M ټکو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او دا قیمتونه د پارابولا د تعریف په رابطه کې کیږدئ. $|MF| = |MK|$

ثبوت لومړی حالت: پوهیږو چې:

$$|MF| = \sqrt{(p-x)^2 + y^2}$$
$$|MK| = x + p$$

اوس د $|MF|$ او $|MK|$ قیمتونه د $|MF| = |MK|$ په رابطه کې ایږدو:

$$\sqrt{(p-x)^2 + y^2} = x + p$$



د پورته معادلې دواړه خواوې مربع کوو:

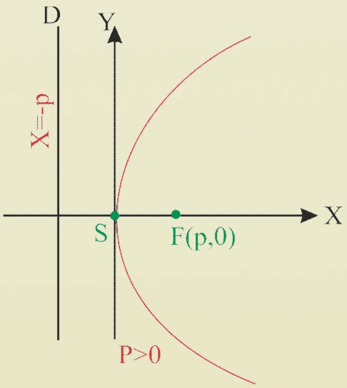
$$(\sqrt{y^2 + (p-x)^2}\,)^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 + (p-x)^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 + p^2 - 2px + x^2 = x^2 + 2px + p^2$$
$$\Rightarrow y^2 = 4px$$

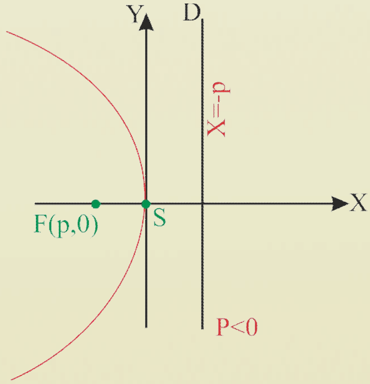
(c) ketabton.com: The Digital Library

وروستی رابطه دداسې پارابولا معادله راښيي چې راس يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې، محراق يې په $F(p,0)$ کې، د تناظر محور يې د x پر محور باندې منطبق دی او د موجه خط معادله يې $x=-p$ دی.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور ښي خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور باندې کيڼې خواته خلاصه ده.





لومړی مثال: د داسې پارابولا معادله په لاس راوړئ چې د محراق مختصات يې $F(2,0)$، د هادي مستقيم خط معادله $x=-2$ سره وي، د عمودي وتر د انجامونو مختصات يې پيدا کړئ.

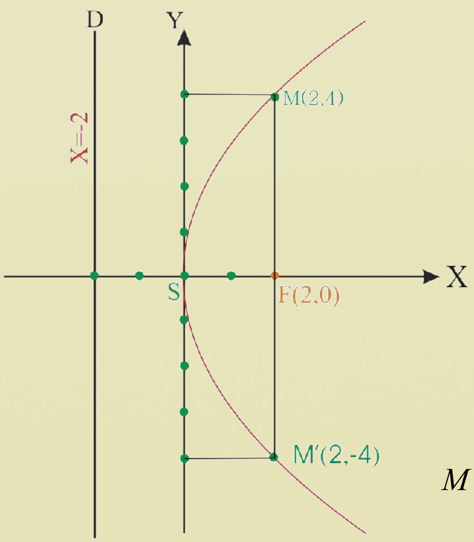
حل : د محراق مختصات چې د x په محور باندې دي، ويلاي شو $P=2>0$ ، له دې امله د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

لرو چې: $y^2=4px$

اوس د $P=2$ قيمت په معادله کې ايږدو:

$$y^2=4\cdot 2x \Rightarrow y^2=8x$$

که چېرې د $x=2$ قيمت د $y^2=8x$ په معادله کې کېږدو، په دې صورت کې د پارابولا دوه ټکي چې د عمودي وتر انجامونه دي په لاس راځي، هغه عبارت دي له:



$$y^2=8\cdot 2 \Rightarrow y^2=16$$

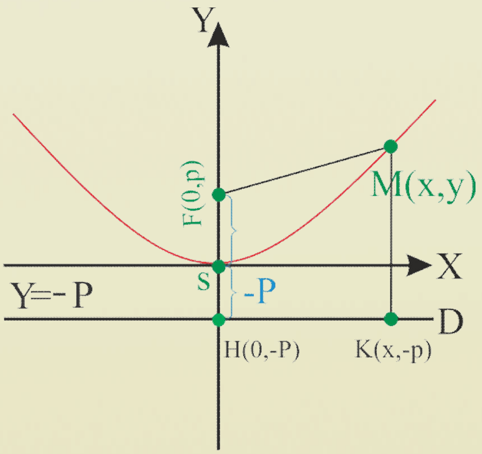
$$y=\pm 4$$

د عمودي وتر د انجامونو مختصات: $M(2,4)\ ,\ M'(2,-4)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم حالت: که چېرې د پارابولا محراق (F) د y پر محور باندې پروت او د D مستقیم خط د x له محور سره موازي وي، د پارابولا معیاري معادله پيدا کړئ.

ثبوت: د پارابولا منحني پرمخ باندې د $M(x,y)$ ټکي په پام کې نیسو د تعریف له مخې لیکلای شو:



$$|\overline{MF}| = |MK|$$

$$|\overline{MF}| = \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{x^2+(y-p)^2}$$

$$|\overline{MK}| = \sqrt{(x-x)^2+[(y-(-p))]^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$

$$(\sqrt{x^2+(y-p)^2})^2 = (\sqrt{(y+p)})^2 \;/(\;\;)^2$$

$$\Rightarrow x^2+(y-p)^2 = (y+p)^2$$

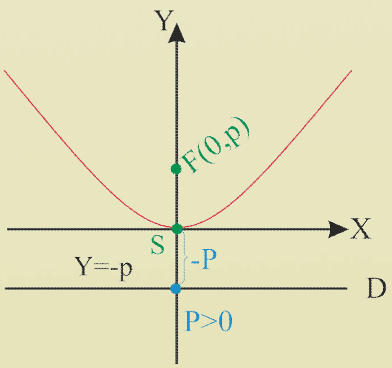
$$\Rightarrow x^2+y^2-2py+p^2 = y^2+2py+p^2$$

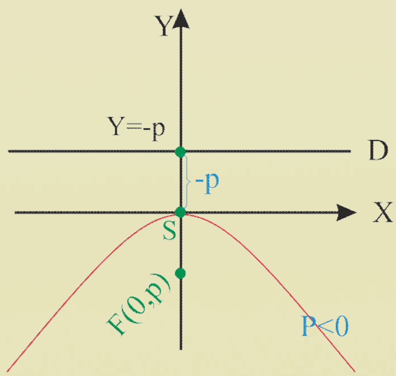
$$\Rightarrow x^2 = 4py$$

پورته معادله دداسې پارابولا معادله ده چې راس يې د وضعیه کمیاتو د سیستم په مبدا کې او محراقي محور يې د y محور دی چې د محراق مختصات يې $F(0,p)$ او $y=-p$ يې د هادي مستقیم خط معادله ده.

که چېرې $p > 0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چېرې $p < 0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.





(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $x^2 = 12y$ په معادله کې د پارابولا د راس او محراق مختصات او د هادي خط معادله پيدا کړی.

حل : **لومړي** د $x^2 = 4py$ په معادله کې د p قيمت په لاس راوړو.

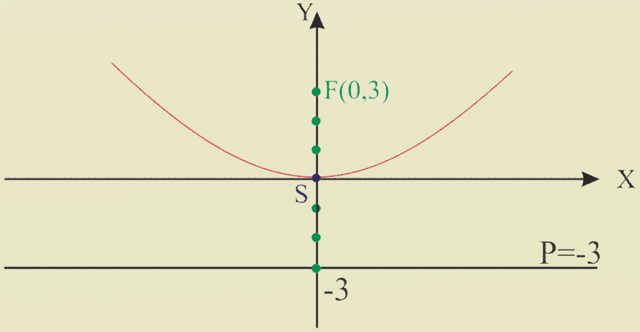
$$4p = 12 \Rightarrow p = 3$$

څرنگه چې $P = 3 > 0$ څخه دی، نو د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

1 – د راس مختصات عبارت دي له: $\left.\begin{array}{l} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow S(0,0)$

2 – د محراق مختصات عبارت دي له : F (0, 3)

3 – د هادي خط معادله عبارت ده له: $y = -p \Rightarrow y = -3$



پوښتني

1 – د $y^2 - 4x = 0$ او $x^2 = 2y$ معادلو کې د هرې پارابولا د راس وضعيه کميات او د هادي (موجه خط) معادلې پيدا او گرافونه يې رسم کړئ.

2 – د لاندې قيمتونو له مخې د هرې پارابولا معادله پيدا کړئ.

$a)\ S(0,0) \qquad F(0,5)$

$b)\ S(0,0) \qquad F(-2,0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې پارابولا معادله چې راس يې يو اختياري ټکی وي

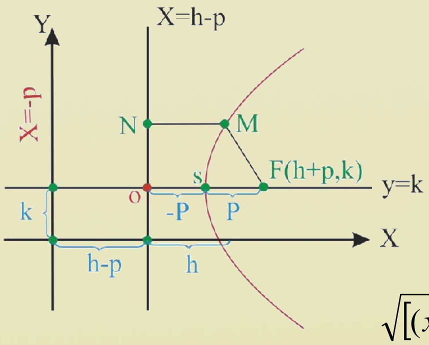
آيا د داسې پارابولا معادله پيداکولای شو چې د راس مختصات يې د وضعيه کمياتو په مبداکې نه وي.

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$
$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

فعاليت

- يوه پارابولا د وضعيه کمياتو په سيستم کې رسم کړئ چې راس يې (h,k) او تناظري محور يې د x له محور سره موازي وي.
- د پارابولا په منحني باندې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ او هغه له F سره ونښلوئ، بيا د M له ټکي څخه يو عمود خط پر هادي خط(موجه) باندې رسم او هغه ته N ووایاست.

لومړی حالت: د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې له فورمول څخه په ګټې اخيستنې سره د F,M او N,M ټکو ترمنځ فاصله پيداکړئ، بيا د هغې پارابولا معادله چې راس يې $S(h,k)$ ده، په لاس راوړئ.



ثبوت:څرنګه چې د F او M ټکو وضعيه کميات پيژنو او همدارنګه د N وضعيه کميات له $(h-p,y)$ څخه عبارت دی، د پارابولا د تعريف له مخې ليکو

$$|MF|=|MN|$$

$$\sqrt{[(x-(h+p)]^2+(y-k)^2}=\sqrt{[x-(h-p)]^2+(y-y)^2}$$

دواړه خواوې مربع کوو او له اختصار وروسته ليکو:

$$[(x-(h+p)]^2+(y-k)^2=[x-(h-p)]^2$$
$$\Rightarrow x^2-2(h+p)x+(h+p)^2+y^2-2ky+k^2=x^2-2(h-p)x+(h-p)^2$$

د پورته رابطې له پراختيا او ساده کولو وروسته په لاس راځي چې:

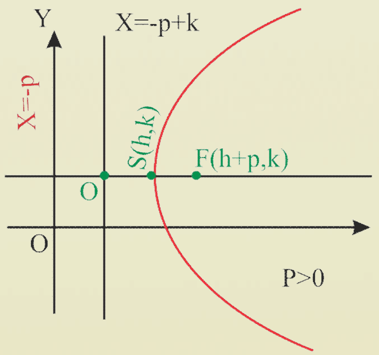
$$y^2-2ky+k^2=4px-4ph$$
$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

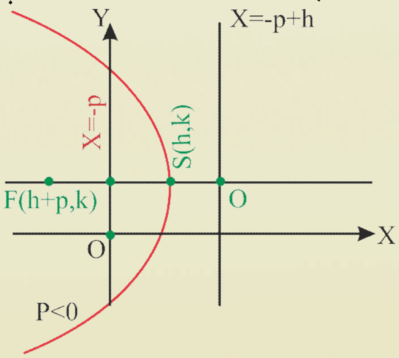
(c) ketabton.com: The Digital Library

پورتنی معادله د هغې پارابولا معادله ده، چې د راس او محراق وضعیه کمیات یې په ترتیب سره $S(h,k)$ او $F(h+p,k)$ دي، او د موجه خط معادله یې $x=-p+h$ ، تناظري محور یې $y=k$ دی.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.





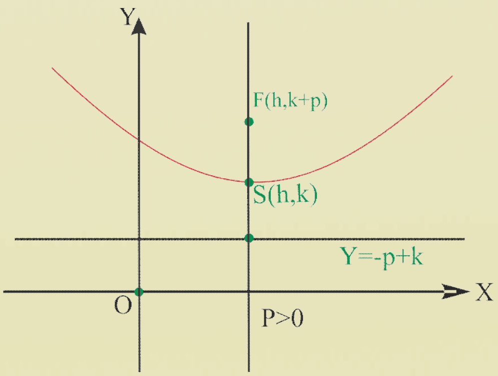
دویم حالت:د هغې پارابولا معادله چې راس یې (h,k) او د تناظر محور یې د y له محور سره موازي وي، عبارت ده له: $(x-h)^2=4p(y-k)$

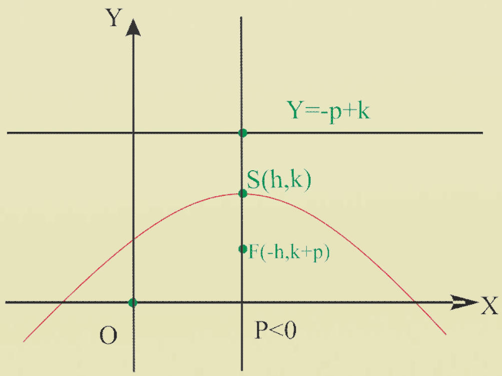
چې د پارابولا د راس مختصات $S(h,k)$ او د محراق مختصات یې $F(h,k+p)$ دي.

$y=k-p$ د پارابولا د هادي خط معادله او $x=-h$ تناظري محور دی.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.





لومړي مثال: غواړو د $(x-1)^2=12(y-2)$ پارابولا په معادله کې د راس مختصات، د محراق مختصات، د موجه خط معادله، تناظري محور او د عمودي وتر د انجامونو مختصات پیدا کړو.

حل: څرنګه چې معادله د $(x-h)^2=4p(y-k)$ عمومي شکل لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $k=2,h=1$ کېږي، په دې صورت کې د پارابولا د رأس وضعیه کمیات عبارت دي له: $S(1,2)$

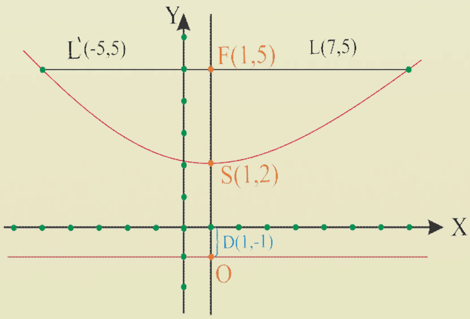
$$4p=12\Rightarrow p=\frac{12}{4}=3$$

د محراق مختصات: $F(h,k+p)=F(1,2+3)\quad\Rightarrow\quad F(1,5)$

د موجه خط معادله $y=k-P\quad\Rightarrow\quad y=2-3=-1$

د تناظر محور: $x=h\Rightarrow x=1$

د عمودي وتر د انجامونو د مختصاتو د پیدا کولو لپاره د y قیمت چې په محراق کې لرو په عمومي معادله کې اېږدو یعني $y=5$ دی.



$$(x-2)^2=12(5-2)$$
$$(x-1)^2=12\cdot3\Rightarrow(x-1)^2=36$$
$$(x-1)=\pm6$$
$$x_1=6+1=7,\ \ x_2=-6+1=-5$$
$$L(7,5)\qquad L'(-5,5)$$

دویم مثال: د $(y-4)^2=-6(x+3)$ معادله په پام کې ونیسی، د پارابولا د راس او محراق مختصات، د موجه خط معادله، د تناظري محور معادله، د عمودي وتر د انجامونو مختصات پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل: دراس مختصات: $k=4,h=-3\quad\Rightarrow\quad S(-3,4)$

$$4P=-6\Rightarrow P=-\frac{3}{2}$$

څرنګه چې $0<-\frac{3}{2}$ ده، نو د پارابولا خوله چیپ خواته خلاصه ده.

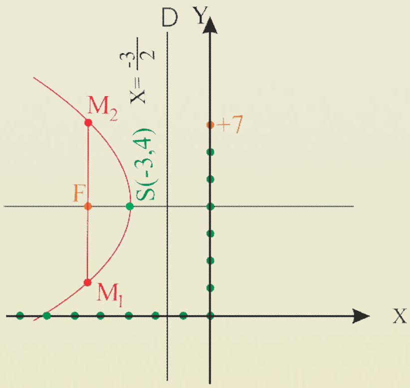
د محراق مختصات: $F(h+p,k)=(-\frac{9}{2},4)$

موجه خط معادله عبارت ده له: $x=h-p\quad\Rightarrow\quad x=-\frac{3}{2}$

د تناظري محور معادله: $y=k\quad\Rightarrow\quad y=4$

د محراق $x=-\frac{9}{2}$ مختصی قیمت په معادله کې اېږدو او د عمودي وتر د انجامونو مختصات په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$(y-4)^2=-6(x+3)=-6(-\frac{9}{2}+3)$$
$$(y-4)^2=9 \Rightarrow y-4=\pm 3$$
$$y_1=3+4=7$$
$$y_2=-3+4=1$$
$$M_2(-\frac{9}{2},7)\ ,\ M_1(-\frac{9}{2},1)$$

یادونه: د $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$ د معادلې گراف یوه پارابولا ده، په داسې حال کې چې A یا C صفر وي نه دواړه $(C\neq 0\ ,\ A=0)$ وي یا $C=0, A\neq 0$ وي).

پوښتنه: د $(x-h)^2=4p(y-k)$ معادله په توسعوي ډول ولیکئ.

دریم مثال: د $y^2-2y+8x+25=0$ پارابولا معادله، د پارابولا د معیاري معادلې په ډول ولیکئ د راس او محراق مختصات، د مؤجه خط او تناظري محور معادلې یې پیدا کړئ.

حل: په راکړل شوې معادله کې $A=0$ دی، نو نظر د y متحول ته یې، مربع بشپړوو.

$$y^2-2y+(1)^2-(1)^2+8x+25=0$$
$$(y-1)^2+8x+24=0 \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2+8(x+3)=0$$
$$\Rightarrow (y-1)^2=-8(x+3)$$

په معادله کې لیدل کیږي: $4P=-8 \quad \Rightarrow \quad P=-2$

د راس مختصات: $k=1\ ,\ h=-3 \quad \Rightarrow \quad S(-3,1)$

د محراق مختصات: $F(h+p,k)\Rightarrow F(-3-2,1)\Rightarrow F(-5,1)$

د موجه خط معادله $x=h-p \quad \Rightarrow \quad x=-3+2=-1$

د تناظر محور : $y=k \quad \Rightarrow \quad y=1$.

پوښتنې

1. د لاندې پارابولا معادله پیدا کړئ، په داسې حال کې چې:

$S(1,3), F(-1,3)$

2- د $(y-1)^2=12(x-4)$ معادلې گراف د ټولو جزئیاتو سره رسم کړئ.

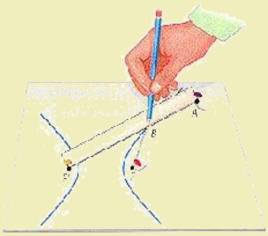
3- لاندې معادلې د پارابولا د معیاري معادلو په ډول ولیکئ او گراف یې رسم کړئ.

a) $y^2-6y+8x+41=0$ b) $x^2-2x-6y-53=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هایپربولا

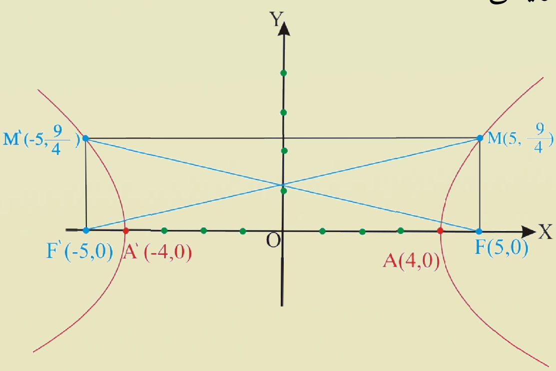
Hyperbola



په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل يې له دوو مستقرو ټکو څخه تل له یوه ثابت اوږدوالي سره مساوي وي، څه ډول یوه منحني کيدلای شي؟

فعالیت

- په لاندې شکل کې د F, F', M, M', A او A' ټکو مختصات درکړل شوي دي.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پيداکولو له فارمول څخه په کار اخيستنې سره د $|MF|, |MF'|$ او $|AA'|$ اوږدوالي پيدا کړئ.
- د $|MF'| - |MF|$ د تفريق حاصل په لاس راوړئ او د $|AA'|$ له اوږدوالي سره يې پرتله کړئ.
- پورتنی فعالیت د M' ټکي لپاره تطبيق او پايله يې وليکئ
- د $|MF'| - |MF|$ او $|M'F'| - |M'F|$ د تفريق حاصل يو له بل سره پرتله کړئ.



د پورتني فعاليت له سرته رسولو وروسته لاندې تعريف بيانولای شو:

تعريف: په یوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل يې له دوو مستقرو ټکو څخه تل مساوي اوږدوالی ولري، هايپربولا Hyperbola بلل کيږي، يعنې: $|MF'| - |MF| = |AA'| = 2a$

په شکل کې F او F' د هايپربولا محراقونه، M او M' د هايپربولا دوه اختياري ټکي دي.

د FF' منځنی ټکی د هايپربولا مرکز دی، د مرکز او هر يوه راس ترمنځ فاصله په a او د مرکز او هر يوه محراق ترمنځ فاصله په c سره ښيي. $AA' = 2a$ او $FF' = 2c$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

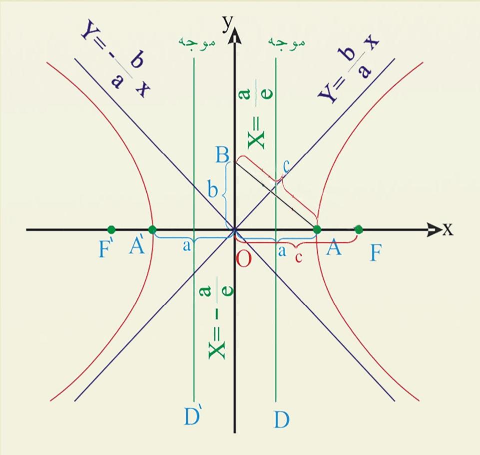
د هايپربولا تناظري محورونه او راسونه:

د بيضوي په څېر هايپربولا هم دوه تناظري محورونه لري چې يو يې په FF' باندې منطبق دی او بل يې د FF' عمودي ناصف کوونکی دی. د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکی يا ځای، د ها يپربولا مرکز بلل کېږي.

هغه تناظري محور چې له FF' څخه تېرېږي، د متقاطع محور (Transverse axis) په نامه يادېږي، ځکه چې هايپربولا د A او A' په دوو ټکو کې قطع کوي چې دې دوو ټکو ته د هايپربولا حقيقي راسونه وايې او اوږدوالی يې له $|AA'| = 2a$ څخه عبارت دی.

هغه تناظري محور چې د هايپربولا په مرکز کې په متقاطع محور باندې عمود دی او هايپربولا نه قطع کوي، د مزدوج محور (conjugate axis) په نوم يادېږي. د مرکز دواړو خواوته د B او B' دوه ټکي پر نوموړي محور باندې داسې په نظر کې نيسو چې $OB = OB' = b$ وي، دا دوه ټکي د هايپربولا غيرې حقيقي راسونه بلل کيږي چې ترمنځ يې فاصله $|BB'| = 2b$ ده.

په يوه هايپربولا کې د a, b او c اوږدوالي ترمنځ داسې رابطه شته: $c^2 = a^2 + b^2$



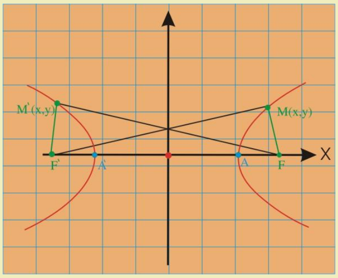
عن المركزيت: څرنګه چې په هايپربولا کې $c > a$ دې، نو $e > 1$ کيږي. چې د a, b, c او عن المرکزيت ترمنځ د $e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$ رابطه شته. د $e = \frac{c}{a}$ له رابطې څخه په کار اخېستې سره نوموړې رابطه په لاس راوړې.

پوښتنې

د هايپربولا يو شکل رسم کړئ او په هغه کې د هايپربولا مرکز، محراقونه، حقيقي او غيرې حقيقي راسونه، متقاطع او مزدوج محورنه وښيئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

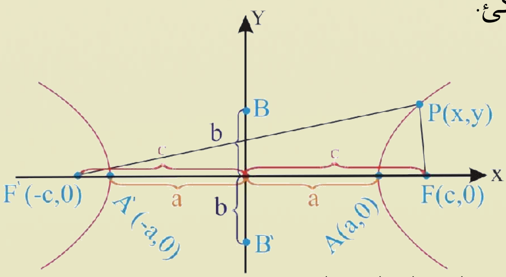
د هايپربولا معادله



آيا داسې يوه هايپربولا رسمولای شئ چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي؟

فعاليت

- داسې هايپربولا رسم کړئ چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي.
- د $P(x,y)$ ټکی د هايپربولا د منحني په يوې څانګې باندې وټاکئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ
- د F, P او F' ټکو ترمنځ د هايپربولا د تعريف رابطه وليکئ.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پيداکولو له فارمول څخه په کار اخيستنې سره د PF او PF' فاصلې پيدا کړئ او هغه د هايپربولا د تعريف په رابطه کې وليکئ.



د هايپربولا د معادلې د پيداکولو لپاره د تعريف له مخې لرو: $|PF'|-|PF|=2a$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

د مساواتو د دواړو خواو له مربع کولو څخه وروسته لرو:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$
$$\Rightarrow 4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ /\div 4$$
$$\Rightarrow cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

بيا هم د مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$(cx-a^2)^2=a^2(x-c)^2+y^2$$
$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$
$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$\Rightarrow c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4 \quad \Rightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې په هایپربولا کې $c^2 = a^2 + b^2$ رابطه شتون لري، نو $c^2 - a^2 = b^2$ کېږي، نـو پـه پورتـه افـاده کـې د $c^2 - a^2$ د قیمت په اېښودلو سره لیکلای شو: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \ /\div a^2b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

پورتنۍ معادله د داسي هایپربولا معادله ده چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدأ او محراقونه یې په افقي محور پراته دي.

دویم حالت: که چیرې د هایپربولا متقاطع محور $\overline{AA'}$ د y پر محور پروت وي، نو د هـایپربولا معادلـه عبـارت ده له: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

د پورتنۍ رابطې ګراف رسم، فارمول یې ثبوت او د محراقونو او راسونو مختصات یې پیدا کړئ.

د هایپربولا موجه خطونه

که چیرې د هایپربولا محراقونه د x یا y په محورونو پراته وي، په دې صورت کې لیکلای شو چې:

$$e = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

له دې امله ویلای شو چې دا موجه خطونه په متقاطع محور باندې عمود دي چې د هغو فاصله د هـایپربولا لـه مرکـز څخه د $\pm\frac{a}{e}$ یا $\pm\frac{a^2}{c}$ څخه عبارت ده.

د هغې هایپربولا د موجه (ها دي) خطونو معادلې چې محراقونـه یـې د y پـر محـور بانـدې پراتـه دي لـه $y = \pm\frac{a}{e}$ څخـه عبارت دي.

او د هغې هایپربولا د موجه خطونو معادلې چې محراقونه یې د x پر محور باندې پراته دي له $x = \pm\frac{a}{e}$ څخه عبارت دي.

د هایپربولا مجانبونه

هغه مستقیم خطونه چې د هایپربولا له مرکز څخه تیر اوپه لایتناهي کې د هایپربولا له منحني سره مماس وي.

د هایپربولا مجانبونه بلل کیږي .

د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هایپربولا معادله په پام کې نیسو:

$$a^2y^2=b^2x^2-a^2b^2$$
$$a^2y^2=b^2(x^2-a^2)$$
$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)=\frac{b^2}{a^2}\left[x^2(1-\frac{a^2}{x^2})\right]$$
$$\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

که چیرې په پورتنی رابطه کې x لایتناهي ته نږدې شي د $\frac{a^2}{x^2}$ کسر د صفر خواته نږدې کیږي په پایله کې $\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)$ د یوه عدد ته تقرب کوي، په دې صورت کې $y=\pm\frac{b}{a}x$ لاس ته راځي.

نو $y=\pm\frac{b}{a}x$ د هغو مجانبونو معادلې دي چې د هایپربولا محراقونه د x پر محور باندې پراته وي.

که چیرې محراقونه د y پر محور باندې پراته وي، د مجانبونو معادلې یې له $y=\pm\frac{a}{b}x$ څخه عبارت دي.

لومړی مثال: د هایپربولا د $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ په معادله کې د محراقونو مختصات، د راسونو مختصات، د موجه خطونو معادلې او د مجانبونو معادلې پیدا او په شکل کې یې وښایاست.

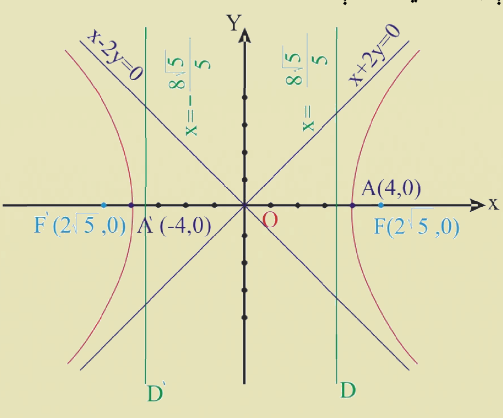
حل: دراسونو مختصات: $a^2=16\Rightarrow a=\pm4\Rightarrow A(4,0),A'(-4,0)$

$$b^2=4\ \Rightarrow\ b=\pm2\ \Rightarrow\ B(0،2)،B'(0،-2)$$

د محراقونو مختصات: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot5}=\pm2\sqrt{5}$

$$\Rightarrow F(2\sqrt{5},0),F'(-2\sqrt{5},0)$$

د موجه خطونو معادلې: څرنګه چې محراقونه د x پر محور باندې پراته دي، له دې امله:



$$x=\pm\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}=\frac{4^2}{2\sqrt{5}}=\frac{16}{2\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$
$$y=\pm\frac{b}{a}x\ \Rightarrow\ y=\pm\frac{2}{4}x=\pm\frac{1}{2}x$$
$$2y=\pm x$$

یا: $x=\pm2y\ \Rightarrow\ x+2y=0,x-2y=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$, معادله د هایپربولا یوه معادله ده، په نوموړې معادله کې د محراقونو، راسونو مختصات، د مجانبونو او موجه خطونو معادلې پیدا او گراف یې رسم کړئ.

حل: پورتنی معادله د هایپربولا معادله ده چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې او د y محور یې متقاطع محور دی.

د راسونو مختصات: $a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2 \Rightarrow A(0,2)\ ,\ A'(0,-2)$

$$b^2=9 \Rightarrow b=\pm 3 \Rightarrow B(3\ ,0)\ ,\ B'(-3\ ,0)$$

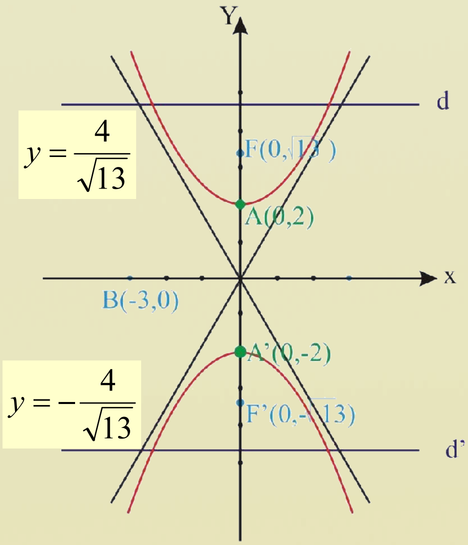
د محراقونو مختصات: $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=4+9=13 \Rightarrow c=\pm\sqrt{13}$

$$F(0,\sqrt{13})\quad ,\quad F'(0,-\sqrt{13})$$

د مجانبونو معادلې: څرنگه چې متقاطع محور د y پر محور باندې منطبق دی، نو د مجانبونو معادلې یې عبارت دي له:

$$y=\pm\frac{a}{b}x \quad\Rightarrow\quad y=\pm\frac{2}{3}x \quad\Rightarrow\quad 3y=\pm 2x$$

$$3y-2x=0 \qquad , \qquad 3y+2x=0$$



د موجه خط معادله: څرنگه چې د هایپربولا متقاطع محور د y پر محور باندې منطبق دی، نو د موجه خطونو معادلې عبارت دي له:

$$y=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{4}{\sqrt{13}}=\pm\frac{4\sqrt{13}}{13}$$

$$y_1=\frac{4\sqrt{13}}{13}\ ,\quad y_2=-\frac{4\sqrt{13}}{13}$$

پوښتنې

د $4x^2-y^2=16$ هایپربولا له معادلې څخه د محراقونو وضعیه کمیات، د راسونو وضعیه کمیات، د موجه خطونو او د مجانبونو معادلې په لاس راوړئ او گراف یې رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې هایپربولا معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي

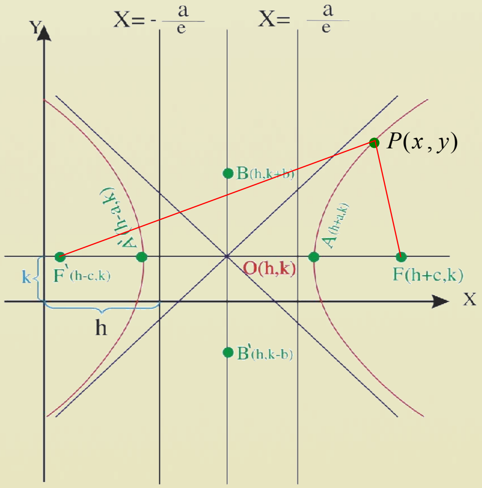
آيا د داسې هایپربولا معادله شته چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې نه وي؟

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

فعاليت

- د وضعيه کمياتو په سيستم کې داسې هايپربولا رسم کړئ چې د مرکز مختصات يې (h,k) او متقاطع محور يې د x له محور سره موازي وي.



- د هايپربولا د منحنی پرمخ باندې د $p(x,y)$ يو اختياري ټکی په پام کې ونيسئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ.
- د هايپربولا د مرکز (h,k) په پام کې نيولو سره د محراقونو مختصات يعنې F او F'، د راسونو مختصات يعنې A, A', B او B' په شکل کې وښاياست.

د شکل څخه په کار اخيستنې سره د $|PF'|-|PF|=2a$ رابطه حساب کړئ.

لومړی حالت: د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پيدا کولو له فارمول او د هايپربولا د تعريف له رابطې څخه په کار اخيستنې سره ليکلای شو:

$$|PF'|-|PF|=2a$$

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}-\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

يا

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

د پورتنې مساواتو دواړه خواوې مربع کوو:

$$\left(\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}\right)^2$$

$$[x-(h-c)]^2+(y-k)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+[x-(h+c)]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h-c)+(h-c)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h+c)+(h+c)^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشابه حدونو له جمعې او تفریق وروسته لیکلای شو:

$$cx-(ch+a^2)=a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}\ /(\ \ )^2$$

$$c^2x^2-2cx(ch+a^2)+(ch+a^2)^2=a^2[x-(h+c)]^2+a^2(y-k)^2$$

د ضرب، او توانونو له ساده کولو وروسته مشابه حدونه جمع او تفریق کوو او پورتنی رابطه په لاندې ډول لیکو:

$$c^2x^2-a^2x^2-2c^2hx+2a^2hx+c^2h^2-a^2h^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$

$$x^2(c^2-a^2)-2hx(c^2-a^2)+h^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x^2-2hx+h^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

څرنګه چې $c^2-a^2=b^2$ دې، نو پورته رابطه په لاندې ډول لیکو:

$$b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

دواړه خواوې په a^2b^2 ویشو:

$$\frac{\cancel{b^2}(x-h)^2}{a^2\cancel{b^2}}-\frac{\cancel{a^2}(y-k)^2}{\cancel{a^2}b^2}=\frac{\cancel{a^2}\cancel{b^2}}{\cancel{a^2}\cancel{b^2}}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

د حقیقي راسونو مختصات: $A(h+a,k)\quad A'(h-a,k)$

د غیرې حقیقي راسونو مختصات: $B(h,k+b)\quad B'(h,k-b)$

د محراقونو مختصات: $F(h+c,k)\ ,\ F'(h-c,k)$

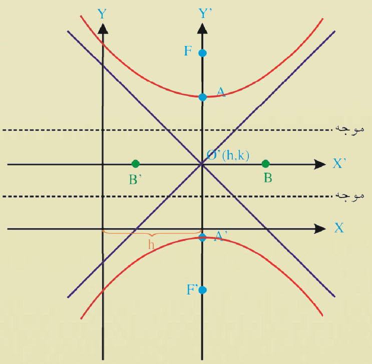
د مجانبونو معادلې: $y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$

د موجه خطونو معادلې: $x-h\pm\frac{a}{e}$

دویم حالت: که چیرې متقاطع محور د y له محور سره موازي وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده، له:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

د شکل له مخې د هایپربولا د رأسونو او محراقونو مختصات د مؤجه خطونو او د مجانبونو معادلې پیدا کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه: د هايپربولا پراختيايي معادله له $AX^2 + BY^2 + DX + EY + F = 0$ څخه عبارت ده په داسې حال کې چې $A, B \neq 0$ او $A \neq B$ يا $A = B$ خو مختلف الاشاره وي.

لومړي مثال: د $9(x-3)^2 - 4(y+1)^2 = 144$ معادله په پام کې ونيسئ، د مرکز، د راسونو، محراقونو مختصات او د مجانبونو معادلې پيدا کړئ.

حل: راکړل شوي معادله په معياري ډول ليکو:

$$\frac{9(x-3)^2}{144} - \frac{4(y+1)^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{36} = 1$$

د مرکز مختصات: $k = -1, h = 3$ يعني $(3,-1)$ دي

د راسونو مختصات: $a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$

$$A(h+a,k) = A(3+4,-1) = A(7,-1)$$
$$A'(h-a,k) = A'(3-4,-1) = A'(-1,-1)$$

او همدارنګه پوهېږو چې:

$$\begin{cases} b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm 6 \\ B(h,k+b) = B(3,-1+6) = B(3,5), \\ B'(h,k-b) = B'(3,-1-6) = B'(3,-7) \end{cases}$$

پوهېږو چې په هايپربولا کې: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow c = \pm\sqrt{52}$

د محراقونو مختصات: $F(h+c,k) = F(3+\sqrt{52},-1) \qquad F'(h-c,k) = F'(3-\sqrt{52},-1)$

که چيرې متقاطع محور د x له محور سره موازي وي، نو د مجانبونو معادلې عبارت دي له:

$$y-k = \pm\frac{b}{a}(x-h) \;\Rightarrow\; y = \pm\frac{6}{4}(x-3)-1 = \pm\frac{3}{2}(x-3)-1$$

$$y = \pm\frac{3}{2}(x-3)-1 \;\; /\cdot 2 \Rightarrow 2y = \pm 3(x-3)-2$$

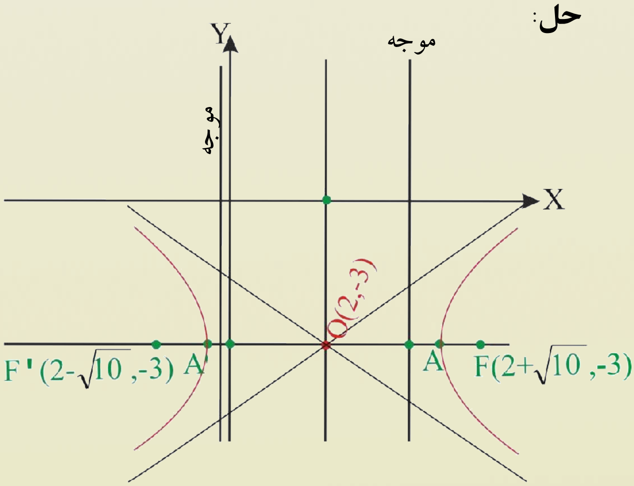
$$2y = 3x-9-2 \;\Rightarrow\; 2y-3x+11 = 0$$

$$2y = -3x+9-2 \;\Rightarrow\; 2y+3x-7 = 0$$

دويم مثال: د هايپربولا $2x^2 - 8x - 3y^2 - 18y - 31 = 0$ معادله په پام کې ونيسئ. د مرکز، راسونو او د محراقونو مختصات او د موجه خطونو او مجانبونو معادلې په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:



$$2(x^2-4x)-3(y^2+6y)-31=0$$
$$2[(x-2)^2-4]-3[(y+3)^2-9]-31=0$$
$$2(x-2)^2-8-3(y+3)^2+27-31=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2+27-39=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2-12=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2=12$$
$$\frac{2(x-2)^2}{12}-\frac{3(y+3)^2}{12}=\frac{12}{12}$$
$$\frac{(x-2)^2}{6}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$$

پورتنی معادله په معیاري ډول واړول شوه، لیدل کیږي چې $h=2$ او $k=-3$ یعني د مرکز مختصات یې: $O(2,-3)$

له بلې خوا:

$$b^2=4\Rightarrow b=\pm 2 \quad , \quad a^2=6\Rightarrow a=\pm\sqrt{6}$$
$$c^2=a^2+b^2\Rightarrow \quad c=\pm\sqrt{a^2+b^2}=\pm\sqrt{6+4}=\pm\sqrt{10}$$

د محراقونو مختصات: $F(h\pm c,k)\Rightarrow F(2+\sqrt{10},-3) \quad , \quad F'(2-\sqrt{10},-3)$

د حقیقي راسونو مختصات: $A(h\pm a,k)\Rightarrow A(2+\sqrt{6},-3) \quad , \quad A'(2-\sqrt{6},-3)$

د غیرې حقیقي راسونو مختصات: $B(h,k\pm b)\Rightarrow B(2,-1) \quad , \quad B'(2,-5)$

د موجه خطونو معادلې: $x-h=\pm\frac{a}{e}\Rightarrow x=\pm\frac{a}{e}+h=\pm\frac{6\sqrt{10}}{10}+2\Rightarrow x=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}+2$

د مجانبونو معادلې: ځرنګه چې متقاطع محور د x له محور سره موازي دی، نو لیکلای شو:

$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$$
$$y=\pm\frac{2}{\sqrt{6}}(x-2)-3/\cdot\sqrt{6}\Rightarrow \sqrt{6}y=\pm 2(x-2)-3\sqrt{6}$$
$$\begin{cases}\sqrt{6}y-2x+4+3\sqrt{6}=0\\ \sqrt{6}y+2x-4+3\sqrt{6}=0\end{cases}$$

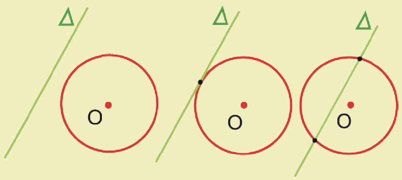
پوښتنې

د $9x^2-4y^2+54x+16y-79=0$ معادله د هایپربولا پر معیاري معادلې باندې واړوئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مستقيم خط موقعيت نظر مخروطي مقاطعو ته

يوه اختياري مستقيم خط، يوه دايره د امکان په صورت کې په څو ټکو کې قطع کولای شئ؟



فعاليت

د O دايره او د Δ مستقيم خط په پام کې ونيسئ:

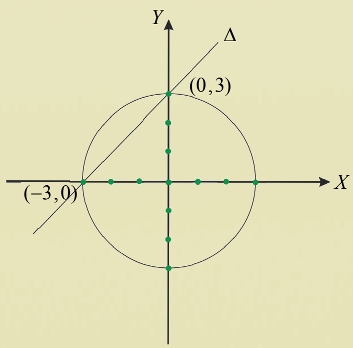
- يوه دايره او مستقيم خط داسې رسم کړئ، چې يوازې يو ګډ ټکی سره ولري.
- آيا کيدای شي چې يوه مستقيم خط، يوه دايره له دوو ټکو څخه په زياتو ټکو کې قطع کړي؟
- که چيرې د دايرې د مرکز او مستقيم خط تر منځ واټن، د دايرې له شعاع څخه لوی وي. دايره او مستقيم خط څو ګډ ټکي لري؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پايله: په يوه مستوي کې يوه اختياري مستقيم خط او يوه دايره امکان لري، يوازې يوه، دوه او يا هيڅ ګډ ټکی ونلري.

لومړی مثال: په وضعيه کمياتو کې د $x^2+y^2=9$ دايره او $y=x+3$ مستقيم خط رسم او موقعيت يې و ټاکئ.

حل: په شکل کې ليدل کيږي، چې دايره او مستقيم خط يو بل په $(0,3)$ او $(-3,0)$ دوو ټکو کې قطع کوي ددې پايلې د لاس ته راوړلو لپاره که چيرې د مستقيم خط له معادلې څخه د y قيمت د دايرې په معادله کې وضع کړو عين نتيجه په لاس راځي:



$$y=x+3$$
$$x^2+y^2=9 \Rightarrow x^2+(x+3)^2=9$$
$$x^2+x^2+6x+9=9$$
$$\Rightarrow 2x^2+6x=0$$
$$x_1=0 \quad , \quad x_2=-3$$

د x قيمتونه د $y=x+3$ په معادله کې ايږدو او د y قيمت په لاس راځي.

$$y_1=0+3 \quad \Rightarrow \quad y_1=3$$
$$y_2=-3+3 \quad \Rightarrow \quad y_2=0$$

د $(0,3)$ او $(-3,0)$ ټکي د دايرې او مستقيم خط د تقاطع ټکي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په عمومي ډول کله چې د مستقیم خط له معادلې څخه د x یا y متحول قیمت د مخروطي مقاطعو په معادله کې کېږدو، د حل لپاره یوه دویمه درجه معادله لاس ته راځي چې حل یې د Δ په قیمت پورې اړه لري. دغه مسئله په لاندې ډول د ښېړلو،او پام وړ، پایلې لري:

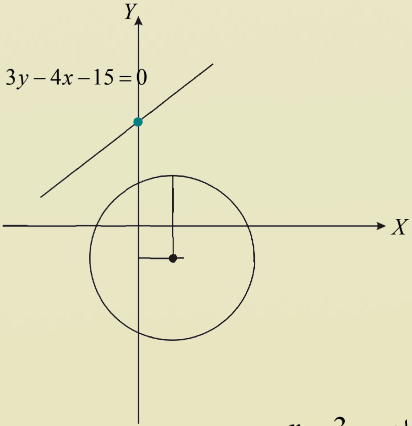
1- که چېرې $\Delta > 0$ وي، معادله دوه حلونه لري، نو په دې ډول مستقیم خط او منحني یوبل په دوو ټکو کې قطع کوي.

2- که چېرې $\Delta = 0$ وي، معادله دوه مضاعف یا مساوي حلونه لري او په دې ډول مستقیم خط د مخروطي مقاطعو له منحني سره یوازې یو ګډ ټکی چې مماس بلل کېږي، لري.

3- که چېرې $\Delta < 0$ وي، معادله حل نلري، په بل عبارت، مستقیم خط او منحني یو بل نه قطع کوي.

دویم مثال: د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ دایره او $3y - 4x - 15 = 0$ مستقیم خط په پام کې ونیسئ او موقعیتونه یې له یو بل سره و ښېړئ.

حل: لومړی د دایرې معادله په معیاري شکل بدلوو.



$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$
$$x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 + y^2 + 4y + (2)^2 - (2)^2 - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 9 = 0$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \qquad C(1,-2)$$

د دایرې له معیاري معادلې څخه پوهېږو چې د دایرې مرکز $C(1,-2)$ او شعاع یې $r = 3$ دی.

همدغه راز د مستقیم خط معادله معیاري شکل ته اړوو.

$$3y - 4x - 15 = 0 \Rightarrow 3y = 4x + 15 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې د مستقیم خط له معادلې څخه د y قیمت د x له جنسه د دایرې په معیاري معادله کې کېږدو، نو لاندې پایله په لاس راځي.

$$(x-1)^2+(\frac{4}{3}x+5+2)^2=9$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1+(\frac{4}{3}x+7)^2=9 \;\Rightarrow x^2-2x+1+\frac{16}{9}x^2+14\frac{4}{3}x+49-9=0$$

$$\Rightarrow\; 9\cdot\frac{25}{9}x^2-9\cdot\frac{50}{3}x+9\cdot 41=0$$

$$\Rightarrow 25x^2+150x+369=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=22500-36900=-14400 \quad , \quad \Delta<0$$

څرنګه چې $\Delta<0$ ده، نو مستقیم خط او دایره ګډ ټکی نه لري.

دریم مثال : د $y=x-1$ د مستقیم خط موقعیت د $y-x^2+1=0$ پارابولا ته وڅیرئ.

حل: د پورتنۍ مسئلې د څېړلو لپاره د y قیمت د پارابول په معادله کې وضع کوو، او بیاګام په ګام د معادلې حل په پام کې نیسو:

$$y=x-1$$

$$y-x^2+1=0 \;\Rightarrow\; (x-1)-x^2+1=0$$

$$\Rightarrow x-1-x^2+1=0 \;\Rightarrow\; x^2-x=0$$

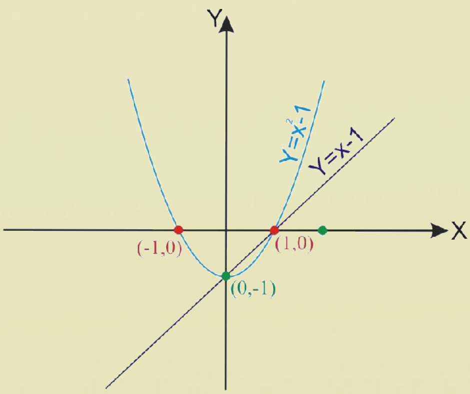
$$\Delta=b^2-4ac \;\Rightarrow\; \Delta=(-1)^2-4(1)(0)=1-0 \;\Rightarrow \Delta=1$$

څرنګه چې $\Delta=1>0$ ده، نو $y=x-1$ مستقیم خط د $y-x^2+1=0$ پارابول په دوو ټکو کې قطع کوي چې کولای شو حلونه یې په لاندې ډول پیدا کړو.

$$x^2-x=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1}}{2}$$

$$x_1=1 \qquad , \qquad x_2=0$$

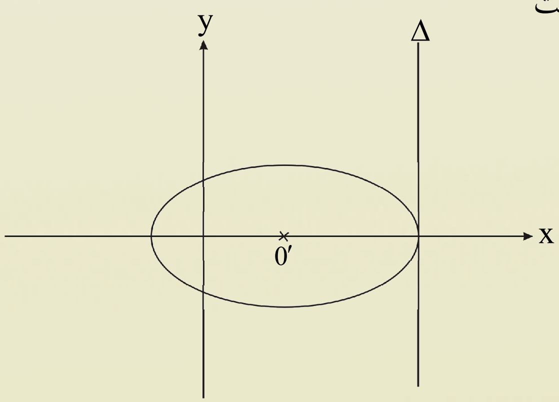


که چیرې په لاس راغلي قیمتونه د مستقیم خط په معادله کې کېږدو، نو د نوموړي مستقیم خط او پارابولا د قطع کولو ټکي په لاس راځي، هغه عبارت دي له : $(1,0)$, $(0,-1)$ چې دغه ټکي په ګراف کې هم په ښکاره ډول لیدل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثلورم مثال: د $x = 5$ مستقیم خط او $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ بیضوي موقعیتونه وڅېړئ.

حل: که چېرې د $x = 5$ د مستقیم خط قیمت د بیضوي په معادله کې کښېږدو، نو په لاس راځي:



$$\frac{(5-2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{9}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{4} = 1-1 \Rightarrow y^2 = 0$$

څرنګه چې: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

په دې ډول وېلای شو چې مستقیم خط او بیضوي یو ګډ ټکی لري چې په شکل کې په ښکاره ډول لیدل کیږي.

یادونه: د مخروطي مقاطعو غزیدلی یا انکشاف ورکړل شوي، معادله په لاندې ډول ده:

$$A, B, D, E, F \in IR \quad , Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

د پورتنی معادلې د پېژندلو لپاره په یاد ولرئ چې:

1- که چېرې $A, B \neq 0$ ، $A = B$ او یو شان علامې ولري، یوه دایره ده.

2- که چېرې $A, B \neq 0$ ، $A \neq B$ او یو شان علامې ولري، یو بیضوی دی.

3- که چېرې $A, B \neq 0$ ، $A \neq B$ یا $A = B$ او مختلفې علامې ولري، هایپربولا ده.

4- که چېرې معادلې لاندې شکل ولري، ګراف یې یو پارابولا ده.

$$Ay^2 + By + Cx + D = 0 \text{ او } Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$$

پوښتنې

1- د لاندې معادلو ډول د هغوی د ګرافونو د رسم کولو وروسته وټاکئ.

$a)\ y^2 - 2y + x + 3 = 0$ $\qquad b)\ 9x^2 + 9y^2 = 27$

$c)\ 25x^2 + 16y^2 = 400$ $\qquad d)\ x^2 - y^2 = 0$

$e)\ y^2 + 6y - x + 2 = 0$

2- د $9x^2 + 4y^2 = 36$ بیضوي او $y = 3$ مستقیم خط یو بل په څو ټکو کې قطع کوي؟

3- د $y = x$ خط او $x^2 - 2y^2 = 4$ هایپربول د تقاطع ټکي پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي مهم ټکي

مخروطي مقاطع: د مستوي تقاطع له مخروط سره په مختلفو حالتونو کې مختلف منحنيګان منځ ته راوړي چې د مخروطي مقاطعو په نوم یادیږي.

بیضوي: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو مستقرو ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل یو ثابت اوږدوالی وي، بیضوي بلل کیږي، مستقر ټکي چې په F' او F تورو ښودل شوي، د بیضوي محراقونه بلل کیږي او $AA' = 2a$ ثابت اوږدوالی دی

شمیره	معادلې	د مرکز وضعیه کمیات	د اوږده قطر انجامونه	دلنډ قطر انجامونه	محراقونه
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>b$	$(0,0)$	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې دي	$(c,0),(-c,0)$
2	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	$(0,0)$	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور باندې دي	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,c),(0,-c)$
3	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	(h,k)	$(h\pm a,k)$ په لوی قطر باندې چې د x له محور سره موازي دی	$(h,k\pm b)$ په لنډ قطر باندې چې د y له محور سره موازي دی	$(h\pm c,k)$
4	$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	(h,k)	$(h,k\pm a)$ په لوی قطر باندې چې د y له محور سره موازي دی	$(h\pm b,k)$ په لنډ قطر باندې چې د x له محور سره موازي دی	$(h,k\pm c)$

د بیضوي عمومي معادله عبارت ده له: $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$

په داسې حال کې چې A او C دواړه هم علامه وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پارابولا: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د یوه ثابت یا مستقر ټکي او ثابت مستقیم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کیږي، دغه ثابت یا مستقر ټکي ته د پاراپولا محراق (F) او ثابت مستقیم خط ته د پارابولا هادي(موجه) وایي.

تناظري محور	د موجه خط معادله	د محراق مختصات	دراس وضعیه کمیات	د پارابولا معادلې	نمبر
$x=0$	$x=-p$	$F(P,0)$	$S(0,0)$	$y^2=4Px$	1
$y=0$	$y=-p$	$F(0,P)$	$S(0,0)$	$x^2=4Py$	2
$y=k$	$x=h-p$	$F(h+p,k)$	$S(h,k)$	$(y-k)^2=4P(x-h)$	3
$x=h$	$y=k-p$	$F(h,k+p)$	$S(h,k)$	$(x-h)^2=4P(y-k)$	4

د پارابولا عمومي معادله $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ په داسې حال کې چې $A=0$ یا $C=0$ وي، نه دواړه ($C\neq 0, A=0$ یا $C=0, A\neq 0$ وي)، په پارابولا کې عن المرکزیت $e=1$ سره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هايپربولا: په يوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل يې له دوو ثابتو مستقرو ټکو څخه تـل ثابت اوږدوالی ولري، هايپربولا بلل کيږي.

د مجانبونو معادلې	د موجه خطونو معادلې	محراقونه	غير حقيقي رأسونه	د رأسونو وضعيه کميات	د مرکز وضعيه کميات	د هايپربولا معادلې
$y=\pm\frac{b}{a}x$	$x=\pm\frac{a}{c}$	$F(c,0)$ $F'(-c,0)$ د x پر محور باندې	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور پراته دي	$S(0,0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
$y=\pm\frac{a}{b}x$	$y=\pm\frac{a}{c}$	$F(0,\pm c)$ د y پر محور باندې.	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې.	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور پراته دي	$S(0,0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$	$x=h\pm\frac{a}{c}$	$F(h\pm c,k)$	$B(h,k\pm b)$	$A(h\pm a,k)$	$S(h,k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$	$y=k\pm\frac{a}{c}$	$F(h,k\pm c)$	$B(h\pm b,k)$	$A(h,k\pm a)$	$S(h,k)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

د هايپربولا عمومي معادله $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ څخه عبارت ده، په داسې حال کې چې $A=B$ يا $A\neq B$ ، خو مختلف الاشاره وي. په هايپربولا کې عن المرکزيت $e>1$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي پوښتني

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه او کرښه ترې تاو کړئ.

1- که چېرې يو مستوي يو مخروط په مايل ډول قطع کړي، نو د مستوي او مخروط ګډ فصل عبارت دی له:

a) بيضوي b) دايره c) هايپربولا d) دوه متقاطع خطونه

2- د بيضوي محراقونه هغه ټکي دي چې د بيضوي له مرکز څخه:

a) برابر واټن لري b) مختلف واټنونه لري

c) د اوږد قطر نيمايي واټن لري d) د لنډ قطر نيمايي ده.

3- که چيري M د بيضوي يو ټکی F او F' محراقونه او $2a$ د اوږده قطر اوږدوالی وي، نو په دې صورت کې لرو چې:

a) $|MF|-|MF'|=2a$ b) $|MF|+|MF'|=a$

c) $|MF|+|MF'|=2a$ d) $|MF'|+|MF|=0$

4- د بيضوي عن المرکزيت له لاندې کومې يوې رابطې څخه په لاس راځي:

a): $e=\dfrac{a}{c}$ b): $e=\dfrac{c}{a}$ c): $e=\dfrac{b}{c}$ d): $e=\dfrac{c}{b}$

5- په بيضوی کې د لنډ قطر، اوږد قطر او محراقونو ترمنځ اړيکه عبارت ده له:

a) $a^2=b^2-e^2$ b) $a^2+b^2=c^2$

c) $a^2=b^2+e^2$ d) $a^2=b^2+c^2$

6- د $(y-k)^2=4p(x-h)$ په معادله کې که $p>0$ سره وي، نو:

a) د پارابولا خوله پاس خواته خلاصه ده. b) دپارابولا خوله لاندې خواته خلاص ده

c) دپارابولا خوله ښي خواته خلاص ده d) دپارابولا خوله کيڼي خواته خلاص ده.

7- د $(x+1)^2=8(y-2)$ پارابولا معادله په پام کې ونيسئ. د محراق وضعيه کميات يې عبارت دي له:

a) $F(-1,-2)$ b) $F(-1,4)$ c) $F(-1,2)$ d) $F(-4,-1)$

8- که چېرې F او F' د هايپربولا محراقونه وي، د p ټکی په کوم شرط د هايپربولا د محيط يو ټکی کيدلای شي؟

a) $|PF|+|PF'|=2a$ b) $|PF|-|PF'|=a$

c) $|PF|-|PF'|=2a$ d) $|PF|-|PF'|=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9- د $y = x^2$ د پارابولا گراف متناظر دی نظر:

a) د y محور ته
b) د x محور ته
c) د x او y محورونو ته
c) د وضعیه کمیاتو مبدأ ته

10- په لاندې ځوابونو کې کوم یو د هایپربولا عن المرکزیت ښیي؟

a) $e<1$
b) $e=1$
c) $e>1$
d) $e=-1$

11- د $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ د بیضوي د اوږد قطر موقعیت:

a) د y پر محور باندې دی.
b) د x پر محور باندې دی.
c) د x پر محور عمود دی.
d) د y له محور سره موازي دی.

12- په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له یوه ثابت ټکي څخه مساوي فاصلې لري. د څه په نامه یادېږي؟

a) کره
b) دایره
c) پارابولا
d) بیضوي

13- د $y^2=-4(x+2)$ پارابول دراس مختصات عبارت دي له:

a) $(2,4)$
b) $(4,2)$
c) $(2,0)$
d) $(-2,0)$

14- د $4x^2+4y^2+8y+3=0$ معادله عبارت ده له:

a) دایرې
b) بیضوي
c) پارابولا
d) هایپربولا

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1- لاندې معادلې په پام کې ونیسئ، لومړی هغه په معیاري ډول ولیکئ، بیا یې گرافونه رسم کړئ.

$a)\ x^2+4y^2=4$ $\quad b)\ 9x^2+2y^2=15$

$c)\ 16x^2-96x+9y^2+90y+225=0$ $\quad d)\ x^2+12x-120y+288=0$

2- د لاندې قیمتونو له مخې د هرې یوې بیضوي معادله پیدا کړئ:

a) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $a=4$ ، $e=0{,}8$ دي او کبیر قطر یې د y پر محور باندې پروت دی.

b) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $b=6$ $e=0{,}8$ دي او کبیر قطر یې د x پر محور باندې پروت دی.

3- په لاندې معادلو کې د بیضوي کبیر قطر، صغیر قطر، د راسونو او محراقونو مختصات پیدا کړئ.

a) $4(x-1)^2+y^2=4$
b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- د پارابولا لاندې معادلې لومړی په معیاري شکل ولیکئ او بیایې ګرافونه رسم کړئ.

a) $x^2 - 11y = 0$

b) $y^2 - 4y - 4x + 2 = 0$

5- د هایپربولا لاندې هره یوه معادله په معیاري ډول واړوئ:

a) $4x^2 - y^2 - 8y - 32 = 0$

b) $2y^2 + 4y - x^2 + 10x - 25 = 0$

6- د هغې هایپربولا معادله پیدا کړئ چې $(-4,0)$ او $(4,0)$ د حقیقي راسونو مختصات او $y = \pm\frac{5}{4}x$ د مجانبونو معادلې وي.

7- د هغې هایپربولا معادله پیدا کړئ چې $(-1,3)$ ، $(1,3)$ د حقیقي راسونو مختصات او د محراقونو ترمنځ اوږدوالی یې 4 واحده وي.

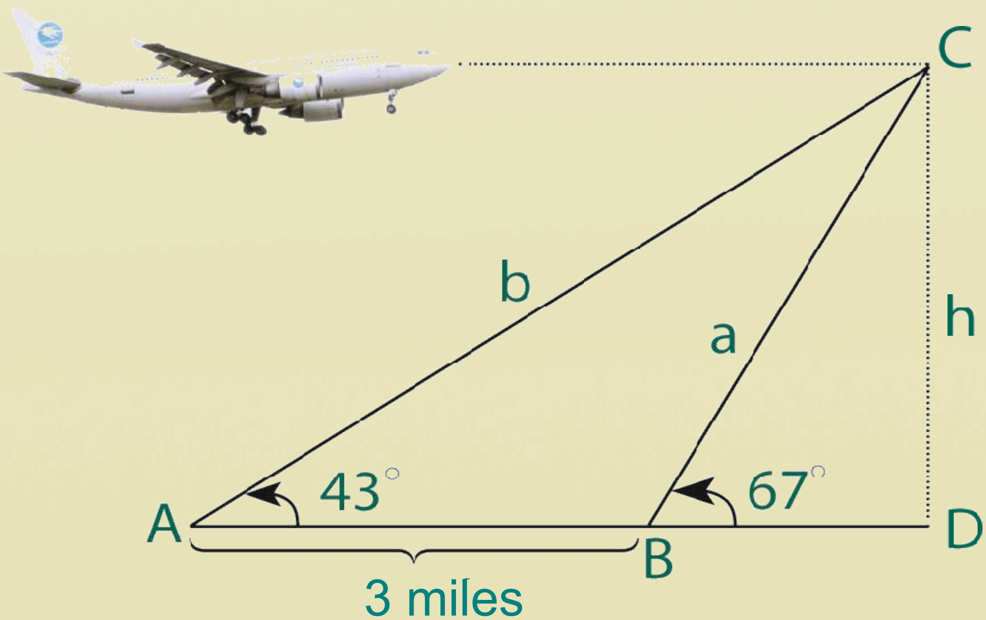
8- د $y = 2x$ مستقیم خط د $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ هایپربولا په څو ټکو کې قطع کوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم څپرکی

مثلثات

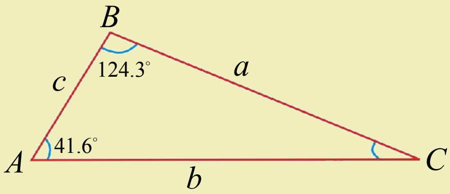
(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساین قانون

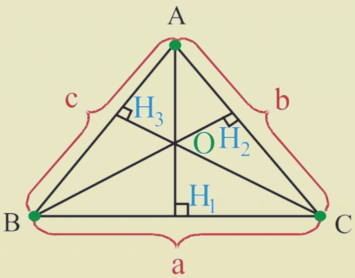
Law of sine



خرنگه کولای شو په مخامخ شکل کې د a د ضلعې او C زاویې اندازه پیدا کړو؟

فعالیت

- د ABC یو حادهالزاویه مثلث رسم او د ضلعو اوږدوالی یې وټاکئ.
- د مثلث له هر رأس څخه د هغې پرمخامخ ضلعې د($\overline{AH_1}$ ، $\overline{BH_3}$ ، $\overline{CH_2}$) ارتفاع ګانې رسم کړئ.
- د ABH_1 او ACH_1 په قایمالزاویه مثلثونو کې د ($\overline{AH_1}$) ارتفاع د $\sin B$ او $\sin C$ له جنسه پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.
- د ABH_2 او BCH_2 پــه قــایمالزاویــه مثلثــونــو کــې د ($\overline{BH_2}$) ارتفاع د $\sin A$ او $\sin C$ له جنسه پیدا او یــو له بله سره یې پرتله کړي.



له پورتني فعالیت څخه لاندې ثبوت په لاس راوړای شو.

ثبوت: د ACH_1 او ACH_1 په قایمالزاویه مثلثونو کې لرو چې:

$$\sin B = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH_1}}{c}$$

$$\overline{AH_1} = c\sin B \quad .... \quad (1)$$

$$\sin C = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AH_1}}{b}$$

$$\overline{AH_1} = b\sin C \quad .... \quad (2)$$

د (1) او (2) رابطو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

$$c\sin B = b\sin C \,/ \div bc$$

او یا:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad .... \quad \mathrm{I}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول د ABH_2 او BCH_2 قایم‌الزاویه مثلثونو په مرسته لیکلی شو چې:

$$\sin A = \frac{\overline{BH}_2}{c} \Rightarrow \overline{BH}_2 = c\sin A \;......... \;(3)$$

$$\sin C = \frac{\overline{BH}_2}{a} \Rightarrow \overline{BH}_2 = a\sin C \;......... \;(4)$$

د (3) او (4) د رابطو له پرتلې څخه لرو چې: $c\sin A = a\sin C \,/ \div ac$

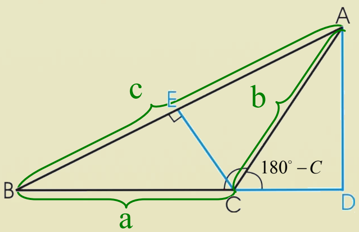
او یا: $$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \;.......... \;\mathrm{II}$$

د I او II د رابطو له پرتلې څخه لیکلی شو چې: $$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

پورتنی اړیکه(رابطه) په یوه مثلث کې د ساین د قانون(Law of sine) په نامه یادېږي.

پایله: په هر $A\overset{\Delta}{B}C$ کې چې C, B, A یې زاویې او c, b, a یې د ضلعو اوږدوالی وي، لرو:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



د ساین د قضیې ثبوت په منفرج الزاویه مثلث کې:

د ABC په مثلث کې چې د C زاویه یې منفرجه ده

د $\overline{AD}$ او $\overline{CE}$ ارتفاع ګانې رسموو.

د ADC په قایم الزاویه مثلث کې لرو: $\sin(180^\circ - C) = \frac{\overline{AD}}{b}$

د بلې خوا د متممو زاویو څخه پوهېږو چې: $\sin(180^\circ - C) = \sin C$

نو : $$\sin C = \frac{\overline{AD}}{b} ......(1)$$

همدارنګه د ADB له قایم الزاویه مثلث څخه لرو چې: $\sin B = \frac{\overline{AD}}{c} ......(2)$

اوس (1) او (2) رابطې خوا په خوا یو پر بل وېشو:

د تناسب د خواصونو له مخې د وسطینو ځاینه بدلووو. $$\frac{\sin C}{\sin b} = \frac{c}{b}$$

نو : $$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \;........ \;\mathrm{I}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د ACE قایم الزاویه مثلث له مخې لیکلی شو:

$$\sin A=\frac{\overline{CE}}{b}.....(3)$$

د BEC په مثلث کې لیدل کیږي:

$$\sin B=\frac{\overline{CE}}{a}.....(4)$$

پورته 3 او 4 رابطې خوا په خوا یو پر بل ویشو:

$$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{a}{b}$$

که چیرې د وسطینو ځایونه بدل کړو، نو:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}......(II)$$

اوس د I او II رابطو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

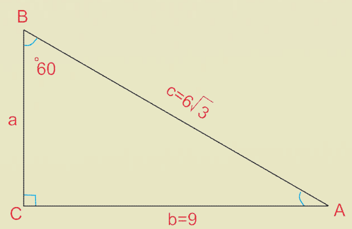
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

فعالیت

- د ساین قانون په قایم‌الزاویه مثلث کې وڅېړئ او ثبوت یې کړئ.

لومړی مثال:په لاندې ABC قایم الزاویه مثلث کې د یوې ضلعې او دوو زاویو قیمت پیدا کړئ داسې چې د یوې زاویې او دوو ضلعو قیمت درکړل شوی دی؟

حل: د ساین د قضیې یا قانون له مخې لیکلی شو چې:



$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{9}{\sin 60^\circ}=\frac{6\sqrt{3}}{\sin C} \Rightarrow \sin C=\frac{6\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ}{9}=\frac{6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{9}$$

$$\sin C=\frac{3\cdot 3}{9}=\frac{\cancel{9}}{\cancel{9}}=1 \quad \Rightarrow \sin C=1$$

څرنګه چې $\sin 90^\circ=1$ دی، نو: $C=90^\circ$

همدارنګه پوهیږو چې په یوه مثلث کې:

$$A+B+C=180^\circ$$
$$A+60^\circ+90^\circ=180^\circ$$
$$A=180^\circ-150^\circ$$
$$A=30^\circ$$

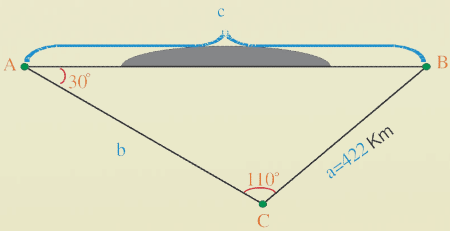
(c) ketabton.com: The Digital Library

د a ضلعي قيمت په لاندي ډول پيداکولی شو :

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}\Rightarrow a=b\cdot\frac{\sin A}{\sin B}\Rightarrow a=9\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ}=\frac{9\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow a=\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{9\cdot\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a=3\sqrt{3}\,cm$$

دويم مثال: يو ساختماني انجينر غواړي چې د دوو ټکو تر منځ واټن چې په منځ کې يې يوه غونډۍ پرته ده پيداکړي.



حل: د ساين د قانون په کارولو سره $\sin A$ او $\sin C$ ترمنځ رابطه په پام کې نيسو:

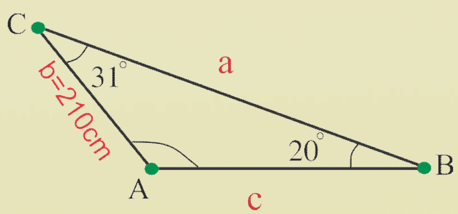
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

$$c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{422km\cdot\sin 110^\circ}{\sin 30^\circ}$$

خرنگه چې: $\sin 110^\circ=0.9396$ او $\sin 30^\circ=0.5$ دی.

نو: $c=\dfrac{422km\cdot 0.9396}{0.5}\Rightarrow c=793.0224km$

دريم مثال: په مخامخ شکل کې د دوو زاويو او يوې ضلعي اندازه درکړل شوې ده، د يوې نامعلومې زاويې او دوو ضلعو اندازې پيداکړئ.



حل: پوهېږو چې د يوه مثلث د داخلي زاويو مجموعه 180° ده؛ نو نامعلومه زاويه يې داسي پيداکولی شو:

$$A=180^\circ-(31^\circ+20^\circ)=180^\circ-51^\circ$$

$$A=129^\circ$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د a ضلعې د اوږدوالي د پيداکولو لپاره د ساين قانون په پام کې نيسو:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{\sin 129^\circ}{a}=\frac{\sin 20^\circ}{210}$$
$$\Rightarrow a=\frac{\sin 129^\circ \cdot 210cm}{\sin 20^\circ}$$

څرنگه چې $\sin 20^\circ = 0.342$ او $\sin 129^\circ = 0.7771$ دي؛ نو:

$$a=\frac{0.7771 \cdot 210}{0.342}=\frac{163.191}{0.342}=477.166cm$$
$$a=477.166cm$$

اوس د c ضلعې اوږدوالی د $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ له رابطې څخه پيداکوو:

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c} \Rightarrow \frac{\sin 20^\circ}{210}=\frac{\sin 31^\circ}{c}$$
$$\Rightarrow c=\frac{210cm \cdot \sin 31^\circ}{\sin 20^\circ}$$

څرنگه چې $\sin 31^\circ = 0.5150$ دی د قيمتونو په اېښودلو سره ليکلای شو چې:

$$\Rightarrow c=\frac{210 \cdot 0.5150}{0.342}=\frac{108.15}{0.342}=316.228cm$$

يادونه:

د ساين قانون هغه وخت کارولی شو چې:

- دوې زاويې او د معلومې زاويې مخامخ ضلع يې معلومه وي، يعنې: ($A\ \ AS$).
- دوه ضلعې او د معلومې ضلعې مخامخ زاويه يې معلومه وي، يعنې:(SAS).

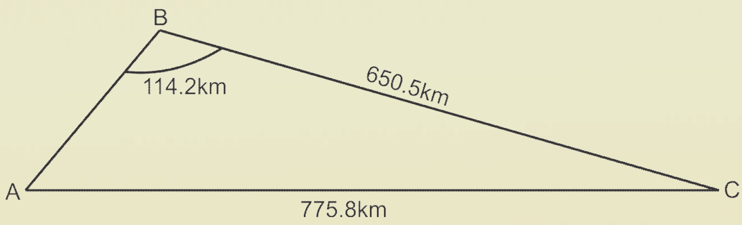
بايد ووايو چې دلتهA د Angle او s د side مخفف دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

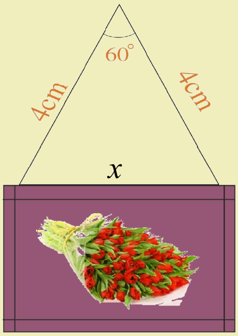
پوښتني

1. که چیرې د یوه قایم الزاویه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a = 8m$, $b = 6m$ او $c = 10m$ وي، د مثلث د زاویو اندازه پیدا کړئ.

2. لاندې شکل په پام کې ونیسئ د A او B د ښارونو ترمنځ واټن پیدا کړئ؟



(c) ketabton.com: The Digital Library



د کوساین قانون

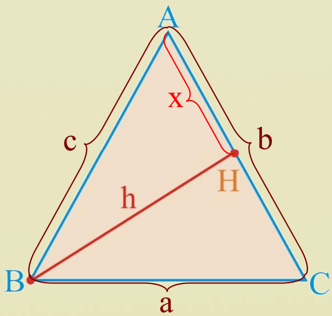
Law of cosine

د یوه شکل چارت د مېخ په مرسته د دېوال پر مخ ځړول شوی دی، که چېرې د مېخ د دوو خواوو د تار اوږدوالی هر یو $4cm$ وي او د منځ زاویه یې 60° وي، د تار د دوو ټکو ترمنځ واټن (x) څرنګه پیدا کولی شو؟

فعالیت

- د ABC کیفي مثلث رسم او د A, B, C راسونو مخامخ ضلعې په ترتیب سره په c, b, a وښایاست.
- د B له رأس څخه د $\overline{AC}$ پر ضلع د H په ټکي کې ارتفاع رسم کړئ.
- په جوړ شوو قایم‌الزاویه مثلثونو کې د فیثاغورث قضیه تطبیق کړئ.
- په ABH قایم‌الزاویه مثلث کې د $\overline{AH}$ قیمت د A زاویې د کوساین د له جنسه پیدا او د فیثاغورث په رابطه کې یې وضع کړئ.
- ممکنه الجبري محاسبې ترسره او وروستی رابطه یې ولیکئ.

د پورتني فعالیت د سرته رسولو څخه وروسته داسې ثبوتو:



ثبوت: د ABC په حاده‌الزاویه مثلث کې د $\overline{BH}$ ارتفاع رسموو

$$\overline{CH} = b - x \quad , \quad \overline{AH} = x \quad , \quad \overline{BH} = h$$

د BCH په قایم الزاویه مثلث کې لرو:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2$$

$$a^2 = (b-x)^2 + h^2 \quad .... \quad \mathrm{I}$$

د AHB په قایم الزاویه مثلث کې د h اوږدوالی پیداکوو:

$$h^2 = c^2 - x^2 \quad .... \quad \mathrm{II}$$

د I په رابطه کې د h^2 قیمت لیکو

$$a^2 = (b-x)^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د AHB په قايم‌الزاويه مثلث کې:

$$\cos A = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c\cdot \cos A$$

په $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$ رابطه کې د x پر ځای $c\cdot\cos A$ قیمت ایږدو، نو:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad \text{يا} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

پایله: په یو اختیاري مثلث کې مو دا

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} ...I \quad \text{يا} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

رابطه ثبوت کړه، په همدې ډول لاندې رابطې هم ثبوت کولای شو.

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} ....II \quad \text{يا} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} ....III \quad \text{يا} \quad c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C$$

په هر مثلث کې د یوې زاویې کوساین (Cos) مساوی دی د زاویې د دواړو ضلعو د مربعاتو مجموعه منفي د زاویې د مقابلې ضلعې مربع د زاویې د دواړو ضلعو د حاصل ضرب په دو چند باندې.

فعالیت

- د تېرمخ د مثلث د شکل په مرسته د کوساین قانون د II او III رابطې ثبوت کړئ.

یادونه: د کوساین قانون هغه وخت کارولی شو چې:

- چې دوې ضلعې او د منځ زاویه یې معلومه وي. (SAS).
- د مثلث درې ضلعې معلومې وي. (SSS).

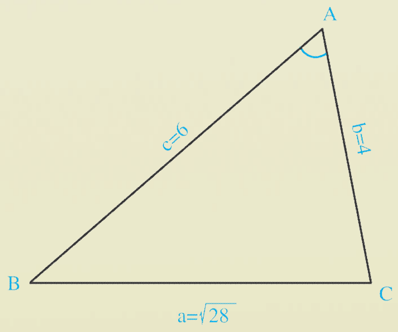
د ساین او کوساین د قانون له کارولو څخه، د مثلث د عناصرو د پیداکولو لپاره له لاندې جدول څخه کار اخلو:

د یوه مثلث د عناصرو پیدا کول	
کله چې د یوه مثلث د دریو ضلعو اوږدوالی معلوم وي، د کوساین له قانون څخه ګټه اخلو.	(SSS) (ضلع، ضلع، ضع)
کله چې د یوه مثلث د دوو زاویو او د یوې معلومې زاویې د مقابلې ضلعې اندازه معلومه وي، د ساین له قانون څخه ګټه اخلو.	SAA (زاویه، زاویه، ضلع)
کله چې د یوه مثلث د دوو ضلعو او د یوې معلومې ضلعې د مقابلې زاویې اندازه معلومه وي، د ساین له قانون څخه ګټه اخلو.	ASA (زاویه، ضلع، زاویه)
کله چې د یو مثلث د دوو ضلعو او د هغوی ترمنځ د زاویې اندازه معلومه وي، د کوساین له قانون څخه ګټه اخلو.	SAS (ضلع،زاویه، ضلع)
امکان نه لري	AAA (زاویه، زاویه، زاویه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې د هغو دریو ضلعو اندازې په لاندې ډول راکړل شوي دي، د A زاويې اندازه وټاکئ.

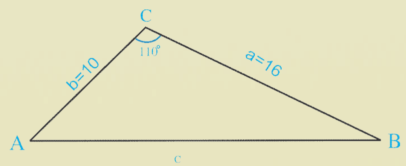
حل:



$$a=\sqrt{28}\quad,\quad b=4\quad,\quad c=6\quad,\quad A=?$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$$
$$(\sqrt{28})^2=(4)^2+(6)^2-2\cdot4\cdot6\cos A$$
$$28=16+36-48\cos A\quad\Rightarrow\quad 28=52-48\cos A$$
$$48\cos A=52-28\qquad\Rightarrow\quad 48\cos A=24$$
$$\cos A=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$$
$$\boxed{A=60^\circ}$$

دویم مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې د دوو ضلعو اوږدوالی $a=16$, $b=10$ واحده او د منځ زاويه يې $C=110^\circ$ وي، د c ضلعې اوږدوالی يې پيدا کړئ.

حل:



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$c^2=(16)^2+(10)^2-2(16)(10)\cos110^\circ$$
$$c^2=256+100-320\cos110^\circ$$
$$c^2=356-320\cos110^\circ$$
$$c=\sqrt{356-320\cos110^\circ}$$

څرنګه چې : $\cos110^\circ=-0.342$ دی، نو:

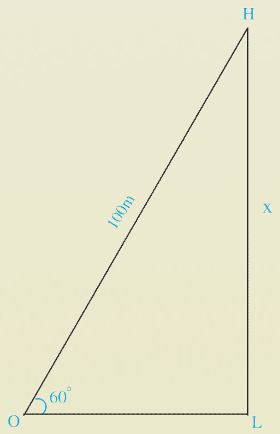
$$c=\sqrt{356-320(-0.342)}\quad\Rightarrow\quad c=\sqrt{356+109.44}$$
$$\boxed{c=21.57}$$

درېیم مثال: يو پتنګ(کاغذ پران) له $100\,m$ تار سره په هواکې دی، که تار د ځمکې له سطحې سره 60° زاويه جوړه کړې وي، له ځمکې څخه د پتنګ لوړوالی پیدا کړئ.

حل: د OHL په قایم‌الزاويه مثلث کې لرو چې:

$$\cos60^\circ=\frac{\overline{OL}}{\overline{OH}}=\frac{x}{100}\quad\Rightarrow\quad x=100\cdot\cos60^\circ=100\cdot\frac{1}{2}=50m$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د کوساین قانون له مخې لرو چې:

$$\overline{HL}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{OL}^2 - 2\overline{OH}\cdot\overline{OL}\cdot\cos 60^\circ$$

$$\overline{HL}^2 = (100)^2 + (50)^2 - 2\cdot 100\cdot 50\cdot\frac{1}{2}$$

$$\overline{HL}^2 = 10000 + 2500 - 5000$$

$$\overline{HL}^2 = 7500m^2 \quad \Rightarrow \overline{HL} = \sqrt{7500}m = 50\sqrt{3}\,m$$

$$\overline{HL} = 86.6m$$

څلورم مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې د $b=5,\ c=8\ ,\ \hat{A}=60^\circ$ وي، د a او $\sin C$ اندازه پیدا کړئ.

حل: لومړی د کوساین د قضیې په کارلو سره د a ضلع او بیا $\sin C$ پیدا کوو.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \Rightarrow \quad a^2 = 25 + 64 - 80\cdot\frac{1}{2} = 89 - 40$$

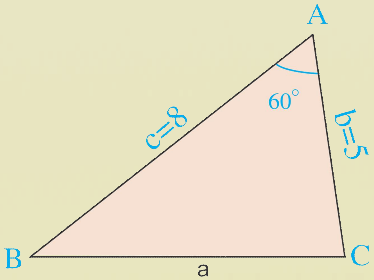
$$a^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad a = 7$$

د ساین د قضیې له مخې لیکو چې:

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\sin C = \frac{c\cdot\sin A}{a} = \frac{8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}$$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$



پوښتنې

1. که چېرې د ABC په مثلث کې $b=4ft,\ a=5ft$ او $A=45^\circ$ وي، د مثلث نامعلومې ضلعې او زاویې پیدا کړئ.

2. که چېرې په یوه مثلث کې $a=3cm$ او $b=9cm$ او د دوی ترمنځ زاویه 60° وي د c د ضلعې اوږدوالی یې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

د ټانجنټ قانون

Law of tangent

آیا په هر مثلث کې د زاویو او ضلعو ترمنځ مخامخ اړیکه شتون لري؟

فعالیت

- د ساین قانون رابطه ولیکئ او هغه له D سره مساوي په پام کې ونیسئ.
- د $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$ تناسب هر نسبت په جلا جلا ډول مساوي له D سره ولیکئ.
- پورته دوه نسبتونه د ضلعو د اوږدوالي له مخې ولیکئ.
- دوه پورتنۍ اړیکې لومړی جمع او بیا یې تفریق کړئ.
- لاس ته راغلې اړیکې یو پر بل وویشئ.
- الجبري محاسبې ترسره او د پایلې فورمول ولیکئ.

د پورته فعالیت د سرته رسولو وروسته لاندې پایله لاس ته راځي.

پایله: په هر مثلث کې د ټانجنټ قانون عبارت ده له :

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

ثبوت: د ساین قانون دوه نسبتونه له D سره مساوي لیکو:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=D$$

$$\frac{a}{\sin A}=D \quad\Rightarrow\quad a=D\sin A \qquad , \qquad \frac{b}{\sin B}=D \quad\Rightarrow\quad b=D\sin B$$

پورتنۍ اړیکې لومړی جمع او بیا تفریقوو:

$$a+b=D(\sin A+\sin B)$$
$$a-b=D(\sin A-\sin B)$$

پورتنۍ اړیکې یو پر بل ویشو:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}$$

د ضرب له فورمولونو څخه لرو:

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\tan\frac{A+B}{2}\cdot\cot\frac{A-B}{2}$$

څرنګه چې $\cot\frac{A-B}{2}=\frac{1}{\tan\frac{A-B}{2}}$ دی.

نو په پایله کې لیکلی شو چې:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

فعالیت

- لاندې رابطې ثبوت کړئ.

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}\quad,\quad\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}$$

- پورتنی رابطې په یوه مثلث کې د ټانجنټ قانون بلل کېږي.

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې $\frac{b-c}{b+c}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ او $A=90^\circ$ دی، د B او C زاویو اندازه پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې په هر مثلث کې:

$$A+B+C=180^\circ$$

$$\Rightarrow B+C=180^\circ-A=180^\circ-90^\circ\Rightarrow B+C=90^\circ\quad ...I$$

$$B+C=90^\circ\Rightarrow\frac{B+C}{2}=45^\circ$$

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan 45^\circ}$$

څرنګه چې $\tan 45^0=1$ سره ده، نو:

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

پوهېږو چې $\tan 30=\sqrt{\frac{3}{3}}$ سره ده، نو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \tan 30^\circ=\tan\frac{B-C}{2}$$
$$\frac{B-C}{2}=30^\circ \Rightarrow B-C=60^\circ \quad ...II$$

له I او II اړیکو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

$$B-C=60^\circ \quad .... \text{ I}$$
$$B+C=90^\circ \quad .... \text{ II}$$
$$2B=150^\circ$$
$$\boxed{B=75^\circ}$$

اوس د B قیمت په ایښودلو سره د C زاویه پیدا کوو:

$$B-C=60^\circ$$
$$75^\circ-C=60^\circ$$
$$-C=60^\circ-75^\circ$$
$$\boxed{C=15^\circ}$$

دویم مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې $c=432\,,\,B=42^\circ\ \ 30'$ او $a=925$ وي، د تانجنټ قانون څخه په ګټې د مثلث نورې نامعلومې اجزاوې پیدا کړئ.

حل:

$$A+B+C=180^\circ \Rightarrow A+C=180^\circ-B \Rightarrow A+C=180^\circ-42^\circ\ \ 30'$$
$$\Rightarrow A+C=179^\circ\ 60'-42^\circ\ \ 30' \Rightarrow A+C=137^\circ\ 30' \quad .... \text{ I}$$
$$\frac{A+C}{2}=\frac{137^\circ\ 30'}{2}\Rightarrow \frac{A+C}{2}=\frac{136^\circ\ 90'}{2}=68^\circ\ \ 45'$$
$$\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{a+c}{a-c}\Rightarrow \frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{925+432}{925-432} \Rightarrow \frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{1357}{493}$$
$$\Rightarrow 1357\cdot\tan\frac{A-C}{2}=493\cdot\tan 68^\circ\ 45' \Rightarrow \tan\frac{A-C}{2}=\frac{493}{1357}\cdot\tan 68^\circ\ 45'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له مثلثاتي جدول څخه پوهېږو چې $\tan 68^\circ\ 45' = 2.571$ دی؛ نو:

$$\tan\frac{A-C}{2} = 0.363\cdot 2.571 \Rightarrow \tan\frac{A-C}{2} = 0,933$$

$$\Rightarrow \frac{A-C}{2} = 43^0 \Rightarrow \boxed{A-C = 86^\circ \quad ....\ \mathrm{II}}$$

اوس د I او II رابطو په پام کې نیولو سره د A زاویې قیمت پیدا کوو:

$$A+C = 137^\circ\ 30' \quad ...I$$

$$\underline{A-C = 86^\circ \qquad} ...II$$

$$2A = 223^\circ\ 30 \Rightarrow 2A = 222^\circ\ 90' \Rightarrow A = 111^\circ 45'$$

اوس غواړو د C زاویې قیمت پیدا کړو:

$$A+C = \ 137^\circ 30' = 136^\circ 90'$$

$$\Rightarrow C = 136^\circ\ 90' - A = 136^\circ 90' - 111^\circ 45'$$

$$\Rightarrow C = 25^\circ 45'$$

اوس د ساین قانون په مرسته د b ضلعې اوږدوالی پیدا کوو:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow b = c\cdot\frac{\sin B}{\sin C}$$

$$b = 432\cdot\frac{\sin 42^\circ 30'}{\sin 25^\circ\ 45'}$$

په پورته رابطه کې د زاویو د ساین قیمتونه لیکو:

$$\sin 25^\circ\ 45' = 0.434$$

$$\sin 42^\circ\ \ 30' = 0.676$$

$$b = 432\cdot\frac{0.676}{0.434} = 672.885$$

پوښتنې

د مثلث نامعلومې اجزاوې د ټانجنټ قانون په کارونې سره پیدا کړئ.

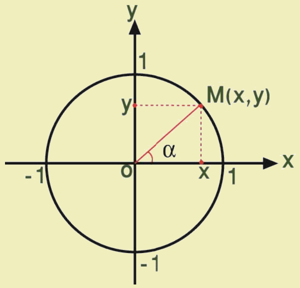
a) که چېرې $a = 35\,ft$, $B = 60^\circ$ او $C = 75^\circ$ وي.

b) که چېرې $A = 45^\circ$, $b = 37m$ او $B = 75^\circ$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلثاتي مطابقتونه

Trigonometry identities



پوهېږو چې $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ يو الجبري مطابقت دی، ځکه د a او b په ټولو قيمتونو سره د مساوات داوړه خواوې برابرېږي.

آيا $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ يو مثلثاتي مطابقت کېدلی شي؟

فعاليت

- په لاندې جدول کې د α د مختلفو قيمتونو لپاره د A او B افادو قيمتونه بشپړ کړئ.

α	$A = \dfrac{\cot\alpha}{\csc\alpha - 1}$	$B = \dfrac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$
0°		
30°		
45°		
60°		
90°		

- د جدول له بشپړولو څخه وروسته د A او B قيمتونه پرتله او رابطه يې وليکئ.

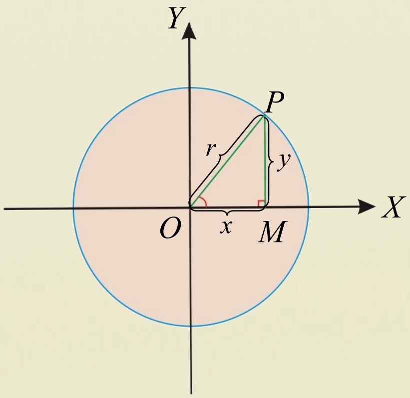
له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف لاس ته راځي.

تعريف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاويې په ټولو قيمتونو سره ، د مساوات دواړه خواوې برابرې شي، مثلثاتي مطابقت بلل کېږي،لکه:

$$\frac{\cot\alpha}{\csc\alpha - 1} = \frac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$$

که α هر قيمت واخلي، د پورته مساواتو دواړه خواوې مساوي کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ مطابقت ثبوت کړئ.

ثبوت: د $C(O,r)$ په دایره کې د OMP قایم‌الزاویه مثلث

د سموو او کولای شو ویې لیکو:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \quad \text{او} \quad \cos\alpha = \frac{x}{r}$$

د فیثارغورث د قضیې خخه کولای شو ولیکو:

$$y^2 + x^2 = r^2$$

د مساوات دواړه خواوې په r^2 ویشو:

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} \qquad \text{یا} \qquad (\frac{x}{r})^2 + (\frac{y}{r})^2 = 1$$

اوس د $\frac{y}{r}$ په ځای $\sin\alpha$ او $\frac{x}{r}$ په ځای $\cos\alpha$ لیکو.

نو لیکلی شو: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

د مثلثاتو اساسي رابطې عبارت دي له:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha \quad , \quad 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

د مثلثاتو فرعي رابطې عبارت دي له:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad , \quad \cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \quad , \quad \sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1 \quad , \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tag\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad , \quad \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1 \quad , \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

اوس غواړو د $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$ رابطه ثبوت کړو.

ثبوت: د فیثاغورث د قضیې په کارلو سره لیکو $x^2 + y^2 = r^2$

د مساوات دواړه خواوې په x^2 ویشو. $\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} \Rightarrow 1 + (\frac{y}{x})^2 = (\frac{r}{x})^2$

په نتیجه کې په پورته افاده کې د $\frac{r}{x} = \sec\alpha$ او $\frac{y}{x} = \tan\alpha$ د قیمتونو په ایښودلو سره کولای شو

ولیکو: $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د مثلثاتي نسبتونو په کارولو سره ثبوت کړئ چې:

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha} \quad , \quad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha} \quad , \quad 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$$

په عمومي توګه د مطابقتونو د حل یا ثبوت لپاره د مساوات د یوې خوا له افادې څخه د بلې خوا افاده لاس ته راوړو، یعنې د مطابقتونو یوې خواته مختلفې عملیې لکه: مربع کول، تجزیه، ضرب او نورې عملیې سر ته رسوو، څو د بلې خوا افاده لاس ته راشي، که چیرې د یوې الجبري افادې حدود د یوې یا څو زاویو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه وي، مثلثاتي افاده بلل کیږي، د مثلثاتي رابطو په واسطه مثلثاتي افادې ساده کولی شو. د موضوع د لا ښه پوهېدو لپاره لاندې مثلثاتي مطابقتونو مثالونه په پام کې ونیسئ.

لومړی مثال: د $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha\cdot\tan\alpha\cot\alpha}{1-\sin^2\alpha}$ مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل:

$$\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

دویم مثال: د $\sin^2\beta\cdot\cot^2\beta+\cos^2\beta\cdot\tan^2\beta+\tan^2\beta=1+\tan^2\beta$ مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل: په لاندې ډول افاده ساده کوو:

$$\sin^2\beta\cot^2\beta+\cos^2\beta\tan^2\beta+\tan^2\beta=\sin^2\beta\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}+\cos^2\beta\cdot\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$$

$$+\tan^2\beta=\cos^2\beta+\sin^2\beta+\tan^2\beta=1+\tan^2\beta$$

دریم مثال: لاندې افاده د $\cos\beta$ له جنسه حساب کړئ.

$$(1-\sin^2\beta)\ \ (1+\sec^2\beta)=?$$

حل: $$(1-\sin^2\beta)(1+\sec^2\beta)=\cos^2\beta(1+\frac{1}{\cos^2\beta})=\cos^2\beta(\frac{\cos^2\beta+1}{\cos^2\beta})=\cos^2\beta+1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: ثبوت کړئ چې $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

حل:د مطابقت د کیڼ اړخ قوسونو ته انکشاف ورکوو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$$
$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=2$$
$$2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2\cdot 1=2$$

پنځم مثال: لاندې مطابقت ثبوت کړئ.

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

حل:

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$
$$\frac{\sin^2 A+(1+\cos A)^2}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+1+2\cos A+\cos^2 A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$
$$\frac{1+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2(1+\cos A)}{\sin A(1+\cos A)}=2\cdot\frac{1}{\sin A}=2\csc A$$

شپږم مثال: وښایاست چې $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\tan^2 A$

حل:

$$1+\tan^2 A=\sec^2 A$$
$$1+\cot^2 A=\csc^2 A$$
$$\frac{\sec^2 A}{\csc^2 A}=\tan^2 A\quad\Rightarrow\frac{\frac{1}{\cos^2 A}}{\frac{1}{\sin^2 A}}=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2=(\tan A)^2=\tan^2 A$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم مثال: لاندې مطابقت ثبوت کړئ.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

حل: د کيڼې خوا په افاده کې د $\cot\alpha$ او $\tan\alpha$ قيمتونه د $\sin\alpha$ او $\cos\alpha$ له جنسه اېږدو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)=(\sin\alpha+\cos\alpha)\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

اتم مثال: د $\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\tan x+\cot y$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\cos x\sin y}$$

$$=\frac{\cos x\cos y}{\cos x\sin y}+\frac{\sin x\sin y}{\cos x\sin y}=\frac{\cos y}{\sin y}+\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\cot y+\tan x=\tan x+\cot y$$

نهم مثال: د $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل: پوهېږو چې $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}\Rightarrow\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}=(\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}})^2$ دی.

اوس د معادلې ښۍ خوا په $\frac{\tan x}{\tan x}$ کې ضربوو؛ نو:

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x}{\tan x}\cdot\frac{1-\cos x}{2}=\frac{\tan x-\tan x\cos x}{2\tan x}=\frac{\tan x-(\frac{\sin x}{\cos x})\cos x}{2\tan x}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم مثال: د $\dfrac{1+\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=2\sec x$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{1+2\sin x++\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{1+2\sin x+1}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2+2\sin x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{2(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2}{\cos x}=2\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=2\sec x$$

پوښتنې

1. د مثلثاتو د اساسي رابطو په پام کې نیولو سره د هرې پوښتنې معادله افاده پیدا کړئ.

$a)\ \dfrac{\sin 25\overset{\circ}{0}}{\cos 25\overset{\circ}{0}}$ $\qquad b)\ \sqrt{\sec^2\beta-1}$ $\qquad c)\ \dfrac{1}{\cos 8\overset{\circ}{0}}$

2. هره افاده د $\sin\beta$ له جنسه پیدا کړئ.

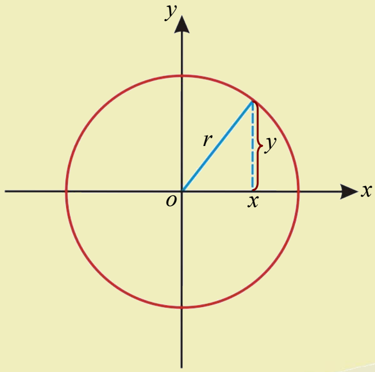
$a)\ \cot\beta\cos\beta$, $\qquad b)\ \cot^2\beta$

3. لاندې مطابقتونه ثبوت کړئ.

$a)\ \dfrac{\csc\alpha}{\cot\alpha+\tan\alpha}=\cos\alpha$ $\qquad b)\ \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos 2x$

$c)\ \dfrac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\tan\alpha$ $\qquad d)\ \dfrac{\tan x-\cot x}{\tan+\cot x}=1-2\cos^2 x$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثلثاتي معادلې

Trigonometric equation

پوهیږو چې $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ یو مثلثاتي مطابقت دی، آیا $\sin\alpha+\cos\alpha=1$ یو مطابقت دی که یوه معادله؟

فعالیت

- په لاندې جدول کې د $1-2\sin\beta=0$ او $1+tag^2\beta=\sec^2\beta$ د β د کومو قیمتونو لپاره صحیح دي.

β	$1-2\sin\beta=0$	$1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$
0°		
30°		
60°		
90°		

- د β د مختلفو قیمتونو لپاره د $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$ او $1-2\sin\beta=0$ ترمنځ څه ډول اړیکې شتون لري.

  _ آیا $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$ یو مطابقت دی، که یوه معادله؟

  _ آیا $1-2\sin\beta=0$ یو مطابقت دی، که یوه معادله؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

تعریف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاویې په ځینو قیمتونو سره د مساوات دواړه خواوې مساوي کېږي، مثلثاتي معادله بلل کېږي.

هر مثلثاتي مطابقت یوه معادله کېدلی شي، خو هره مثلثاتي معادله، مثلثاتي مطابقت نه شي کېدلای.

هره مثلثاتي معادله له لاندې څلورو حالتونو څخه په یو حالت باندې حل کولی شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی حالت: $a\sin\alpha+b=0$

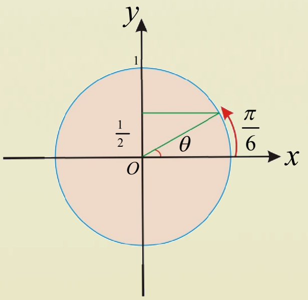
د پورتنۍ معادلې په حل کې د مناسب ځواب د پیداکولو لپاره لاندې مثالونه په پام کې ونیسئ.

مثال: د $2\sin x-1=0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیداکړئ.

حل: لومړی د $\sin x$ قیمت لاسته راوړو: $2\sin x-1=0 \quad\Rightarrow\quad 2\sin x=1 \quad\Rightarrow\quad \sin x=\dfrac{1}{2}$

اوس د $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیداکوو

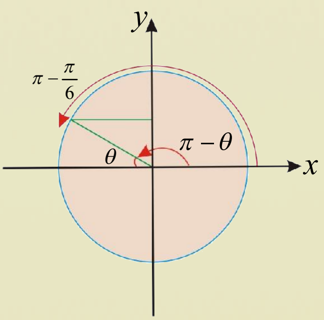
چې $\sin$ یې $\dfrac{1}{2}$ شي.



$$\sin x=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \sin x=\sin\frac{\pi}{6}$$

یوه مثلثاتي دایره په پام کې نیسو او هغه زاویې یې پیدا

کوو چې $\sin$ یې $\dfrac{1}{2}$ وي.



$$x=\frac{\pi}{6}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{6}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{6}\ ,\ldots,\ 2k\pi+\frac{\pi}{6}\ ,\quad k\in z$$

په دویمه مثلثاتي دایره کې $(\pi-\theta)$ له رابطې څخه

هغه زاویې پیداکوو چې $\sin$ یې $\dfrac{1}{2}$ وي.

$$x=\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ 3\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ 5\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ldots,\ (2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\quad k\in z$$

نو د $\sin x=\dfrac{1}{2}$ معادلې حل په لاندې دوو سټونو کې دی.

$$A_1=\left\{\frac{\pi}{6},\ 2\pi+\frac{\pi}{6}\ ,4\pi+\frac{\pi}{6}\ ,\ldots,\ 2k\pi+\frac{\pi}{6}\ ,\quad k\in z\right\}$$

$$A_2=\left\{\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ 3\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ 5\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ldots,\ (2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\quad k\in z\right\}$$

په عمومي ډول پورتني سټونه په لاندې ډول لیکلی شو:

$$A_1\cup A_2=A=\left\{x\,/\,x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\quad\wedge\quad x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ k\in Z\right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $2\sin x-3=0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: $2\sin x-3=0 \quad \Rightarrow \quad 2\sin x=3 \quad \Rightarrow \quad \sin x=\frac{3}{2}$

اوس د $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو چې $\sin x=\frac{3}{2}$ شي، دا چې د هرې زاویې د $\sin$
-1 او $+1$ په منځ($-1\le\sin x\le1$) دی، نو هغه زاویه چې $\sin$ یې $\frac{3}{2}$ وي، وجود نه لري، نو په دې اساس معادله حل نه لري.

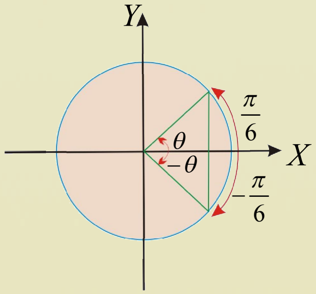
دویم حالت: $a\cos x+b=0$

د پورتنی معادلې د حل مناسب ځواب د پیداکولو لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

لومړی مثال: د $2\cos x-\sqrt{3}=0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل:له پورتنی معادلې څخه $\cos x$ لاسته راوړو:

$$2\cos x-\sqrt{3}=0 \quad \Rightarrow \quad 2\cos x=\sqrt{3} \Rightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



اوس د $[0\;,\;\pi]$ په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو یا لټوو چې $\cos$ یې $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، هغه له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت دی، نو لیکلی شو چې

$$\cos\ x = \cos\ \frac{\pi}{6}.$$

اوس د مثلثاتي دایرې په پام کې نیولو سره ټولې هغه زاویې چې $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، پیداکوو.

$$x=\frac{\pi}{6}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{6}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{6}...$$

$$x=-\frac{\pi}{6}\ ,2\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ 4\pi-\frac{\pi}{6}$$

په عمومي توګه د پورتنیو حلونو سټ داسې لیکل کیږي : $x=2n\pi\pm\theta, n=1,2,3...$

$$A=\left\{x/x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\wedge x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ k\in z\right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $2\cos x+\sqrt{2}=0$ معادله په $(0\ ,\ 2\pi)$ انټروال کې څوحلونه لري؟

حل: $2\cos x=-\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

له بلې خوا پوهېږو چې د $(0,\,2\pi)$ په انټروال کې $\cos x=\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ کېږي.

له دې امله د معادلې حل $x=\dfrac{3\pi}{4}$ په لاس راځي.

د حل سټ يې مساوي دی له:

$$A=\left\{x\,/\,x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\ \wedge\ x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\ ,\ k\in z\right\}$$

ليدل کېږي چې معادله د $(0\ ,\ 2\pi)$ په انټروال کې دوه حلونه لري.

$$x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=0}x_1=\frac{3\pi}{4}$$
$$x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=1}x_2=\frac{5\pi}{4}$$

دريم حالت: $a\tan x+b=0$

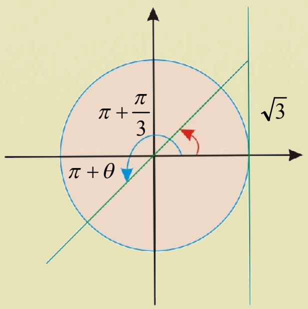
د عمومي حل د پيداکولو لپاره لاندې مثالونو ته ځير شئ.

مثال: $\tan x-\sqrt{3}=0$ حل کړئ.

حل: له پورتنی تساوي څخه $\tan x$ په لاس راوړو: $\tan x=\sqrt{3}$

اوس د $(-\dfrac{\pi}{2}\ ,\ \dfrac{\pi}{2})$ په انټروال کې د x هغه زاويه لټوو چې $\tan x=\sqrt{3}$ وي او هغه زاويه له $\dfrac{\pi}{3}$ يا 60° څخه عبارت ده.

له دې امله پورتنی معادله د $\tan x=\tan\dfrac{\pi}{3}$ په صورت کې لاسته راځي، په مثلثاتي دايره کې وينو چې کومې زاويې له $\tan\dfrac{\pi}{3}$ سره مساوي دي.



$$x=\left\{\frac{\pi}{3}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{3},\ .\ .\ .\right\}$$
$$x=\left\{\pi+\frac{\pi}{3},3\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 5\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ .\ .\ .\right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په عمومي ډول پورتني ستونه داسې ليکلی شو چې: $A=\left\{x/x=k\pi+\frac{\pi}{3}\quad k\in Z\right\}$

يا په عمومي ډول د هرې θ زاويې لپاره لرو چې: $A=\{x/x=k\pi+\theta\ ,\quad k\in Z\}$

دويم مثال: لاندې معادله حل کړئ.

$$\tan\ x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل:

$$\tan\ x=\tan\frac{\pi}{6}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{\pi}{6}$$

د معادلې د حل سټ $A=\left\{x/x=k\pi+\frac{\pi}{6}\quad k\in Z\right\}$

دريم مثال:د $\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})$ د معادلې حلونه د $[0\ ,\ 2\pi\ ]$ په انټروال کې لاسته راوړئ.

حل:

$$\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+(x+\frac{\pi}{3})$$

$$2x-x=k\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{12}$$

د k پر ځای صحيح عددونه ليکو، تر څو هغه زاويې چې د $[0\ ,\ 2\pi\ ]$ په انټروال کې دي، لاسته راشي.

$$x=k\pi+\frac{7\pi}{12}\ \begin{cases}\xrightarrow{k=0} & x_1=\frac{7\pi}{12}\\ \xrightarrow{k=1} & x_2=\pi+\frac{7\pi}{12}=\frac{19\pi}{12}\end{cases}$$

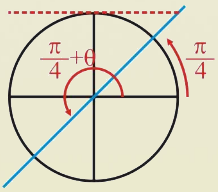
څلورم حالت: د $\cot x+b=0$ معادله، د معادلې د عمومي حل لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

لومړی مثال: د $\cot x-1=0$ معادله حل کړئ.

حل: له پورتنی معادلې څخه $\cot x$ پيداکوو: $\cot x-1=0\quad\Rightarrow\quad\cot x=1$

اوس د $[0,2\pi]$ په انټروال کې هغه زاويه ګورو چې cot يې $(+1)$ وي او هغه زاويه له $\frac{\pi}{4}$ يا 45° څخه عبارت ده :

(c) ketabton.com: The Digital Library



نو: $\cot x = \cot\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$$x = \frac{\pi}{4}\ ,\ 2\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 4\pi + \frac{\pi}{4}\ ,...$$

$$x = \pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 3\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 5\pi + \frac{\pi}{4}\ ,...$$

نو د معادلې د حل سټونه په لاندې ډول دی.

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{4}\ ,\ 2\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 4\pi + \frac{\pi}{4}\ ,...\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 3\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 5\pi + \frac{\pi}{4}\ ,...\right\}$$

$$A = \left\{x / x = k\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4},\quad k \in Z\right\}$$

یا په عمومي ډول د هرې θ زاویې لپاره داسې لیکو: $A = \{x / x = k\pi + \theta\ ,\ k \in Z\}$

دریم مثال: د $\cot 3x = \cot x$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\cot 3x = \cot x \Rightarrow 3x = k\pi + x = 3x - x = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}\ ,\ k \in Z$$

پوښتني

د لاندې معادلو د عمومي حل ځوابونه پیدا کړئ.

$a)\quad 3\cos x + 5 = 0$

$b)\quad \tan x = \sqrt{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويمه درجه مثلثاتي معادلې

په تېرو درسونو کې مو ساده مثلثاتي معادلې حل کړې دي اوس دويمه درجه مثلثاتي معادلې څېړو. د مثلثاتي معادلې عمومي شکل عبارت دی له: $a\sin^2 x+b\cos^2 x+c\sin x\cos x=d$ چې c,b,a او d ثابت عددونه دي.

$a\sin^2 x+b\cos^2 x+c\sin x\cos x=d$

لومړی مثال: د $6\sin^2 x-5\sin x+1=0$ معادله حل کړئ.

حل: په پورتنۍ معادله کې د $\sin x$ پر ځای y ليکو، او معادله داسې ليکلی شو:

$$6y^2-5y+1=0$$

$$\Delta=b^2-4ac \quad\Rightarrow\quad \Delta=(-5)^2-4(6)(1)$$

$$\Delta=25-24 \quad\Rightarrow\quad \Delta=1$$

$$y_{1,2}=\frac{5\pm1}{12} \quad , \quad y_1=\frac{5+1}{12}=\frac{6}{12}\Rightarrow y_1=\frac{1}{2} \quad , \quad y_2=\frac{5-1}{12}=\frac{4}{12}\Rightarrow y_2=\frac{1}{3}$$

$$\sin x=y_1=\frac{1}{2}$$

$$\sin x=y_2=\frac{1}{3}$$

په دې ډول هغه کوچنۍ زاويه چې ساين يې $\frac{1}{2}$ وي، له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت ده، نو:

$$A=\left\{\begin{array}{ll} x=2k\pi+\frac{\pi}{6} & \\ & k\in Z \\ x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6} & \end{array}\right\}$$

او يا ليکلی شو چې:

$$x=n\pi+(-1)^n\alpha\Rightarrow x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6} \quad , \quad n=0\,,1\,,2...$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول د $\sin x = \dfrac{1}{3}$ لپاره ډېره کوچنۍ زاویه 0.33 ده او د مثلثاتي جدول له مخې د $\sin x = \dfrac{1}{3}$
لپاره $19^\circ\ 30'$ یا $\dfrac{13\pi}{120}$ دی.

$$A = \left\{ \begin{array}{ll} x = 2k\pi + \dfrac{13\pi}{120} & \\ & k \in Z \\ x = (2k+1)\pi - \dfrac{13\pi}{120} & \end{array} \right\}$$

دویم مثال: د $\cos 2x + \sin x = 0$ معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ دی، نو لیکلی شو چې:

$$1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0$$
$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

که چېرې په پورتنۍ معادلې کې د $\sin x$ په ځای y وضع کړو، نو لیکو:

$$2y^2 - y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2y+1)(y-1) = 0$$
$$2y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y = -1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -\frac{1}{2}$$
$$y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 1$$

د $\sin x = y$ د تعویض لپاره چې مو په پام کې نیولی دی، نو د لاسته راغلو قیمتونو لپاره لرو چې:

$$\sin x = y_1 = -\frac{1}{2}$$
$$\sin x = y_2 = 1$$

په دې ډول د $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ لپاره هغه کوچنۍ زاویه چې ساین یې $-\dfrac{1}{2}$ وي له $\dfrac{7\pi}{3}$ څخه عبارت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنا پر دې د حلونو سټ يې عبارت دی له:

$$A=\begin{Bmatrix} \sin x=1 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{\pi}{2} \\ \sin x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=\dfrac{7\pi}{6} \end{Bmatrix}$$

$$A_1=\left\{\frac{\pi}{2}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{2},\ 4\pi+\frac{\pi}{2},\ \ldots\right\}$$

$$A_2=\left\{2\pi+\frac{7\pi}{6},\ 4\pi+\frac{7\pi}{6}, 6\pi+\frac{7\pi}{6},\ \ldots\right\}$$

يا په عمومي ډول:

$$A=\left\{x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}\quad ,\quad x=2n\pi+\frac{7\pi}{6}\ ,\ n=0,1,2,3\ \ldots\right\}$$

دريم مثال: د $2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\sin x(2\sin x-\sqrt{2})=0$$

$$\sin x=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0^\circ$$

$$2\sin x-\sqrt{2}=0$$

$$2\sin x=\sqrt{2}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad x_2=\frac{\pi}{4}$$

د معادلې د حلونو سټ عبارت دی له:

$$A_1=\{0^\circ\ ,\ \pi\ ,2\pi,3\pi\ ,4\pi,\ 5\pi\ ,\ \ldots\}$$

$$A_2=\left\{\frac{\pi}{4},\ \pi-\frac{\pi}{4},2\pi+\frac{\pi}{4},3\pi-\frac{\pi}{4},\ldots\right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

د لاندې معادلو د حل سټونه پیدا کړئ.

$\cos 2x + 1 = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ -1

$3\cos^2 x + 2\cos x - 5 = 0$ -2

$\sin^2 x - (1-\sqrt{3})\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$ -3

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو یا سیستمونو حل

د الجبري معادلو سیستم مو حل کړ. آیا د مثلثاتي معادلو سیستم حلولای شئ؟

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

دغه معادلې په شپږو ګروپونو باندې وېشلی شو:

لومړی ګروپ: د دغه ګروپ معادلې په لاندې اتو سیستمونو کې راتولې شوې دي.

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

څرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده، x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.یو له دغو سیستمونو څخه حلوو:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \ \ldots \ \mathrm{I} \\ x + y = \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots \ \mathrm{II} \end{cases}$$

د لومړۍ معادلې قیمت د ضرب د فورمولونو په کارولو سره لیکو، څکه چې د دوو ساینونو مجموعه ده.

$$\sin x + \sin y = a$$

په دې اساس:

$$\begin{cases} 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = a \ldots \ I \\ x + y = \alpha \ldots . II \end{cases}$$

اوس له II معادلې څخه د $x+y$ قیمت یعنې α د I په معادله کې اېږدو:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a \ldots \ I$$

د I اړیکې دواړه خواوې په $2\sin\frac{\alpha}{2}$ باندې وېشو:

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

تبصره: د پورتنې معادلې ښی لوری له $(+1)$ څخه لوی او له (-1) څخه کوچنی نه دی، څکه چې د قوس یا زاویې ساین دی. یا په بل عبارت مربع یې له یو څخه لوی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-1 \le \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

پورتنی غیرې مساوات د $1 < \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} < 0$ ، په شکل لیکو بیا یې دواړه خواوې مربع کوو:

$$\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

دواړه خواوې په $0 \ne \frac{\alpha}{2} 4\sin^2$ کې ضربوو:

$$a^2 \le 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$$

پورتنی اړیکه د سیستم د حل له شرط څخه عبارت ده.

لومړی مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حل: په پورتني سیستم کې $a = 1$ او $\alpha = \frac{\pi}{2}$ دی، وینو چې راکړل شوی شرط د سیستم د حل لپاره

صدق کوي او که نه؟ $\quad a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$

د a او α قیمتونه په پورتنی اړیکه کې اېږدو:

$$1 - 4\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}}{2} \le 0 \Rightarrow 1 - 4\sin^2\frac{\pi}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 4(\sin\frac{\pi}{4})^2 \le 0$$

$$1 - 4(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \le 0 \Rightarrow 1 - 4\frac{2}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 2 \le 0 \Rightarrow -1 \le 0$$

لیدل کیږي چې سیستم د حل وړ دی، نو د تحویل د فورمولونو په مرسته د لومړی معادلې کیڼ لوري شکل

ته تغییر ورکوو: $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ له دې امله $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ کېږي؛نو:

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1\Rightarrow\sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\Rightarrow\cos\frac{x-y}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x-y}{2}=\frac{\pi}{4}\quad\Rightarrow x-y=\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{2}\text{.........}\ I\\ x+y=\frac{\pi}{2}\text{........}\ II\end{cases}\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow 2x=\frac{2\pi}{2}\quad\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

د x قیمت په I معادله کې اېږدو نو د y قیمت په لاس راځي:

$$\frac{\pi}{2}-y=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$$

$$y=0$$

دویم ګروپ: د دغه ګروپ اړوند سیستمونه په لاندې ډول دي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\cos y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\sin y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \cos x\cdot\cos y=a\end{cases}$$

څرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی له: $-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$

دویم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړې.

$$\begin{cases}x+y=\pi\\ \sin x\sin y=1\end{cases}$$

حل: په پورتني سیستم کې $a=1$ ، $\alpha=\pi$ دی د دغو معادلو د حل د امکان شرط عبارت دی، له:

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}=-\cos\ \frac{\pi}{2}=0$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سیستم د حل شرط ته په کتنو سره کولای شو ولیکو:

$$-\cos^2\frac{\pi}{2}\le a\le \sin^2\frac{\pi}{2}$$
$$0\le a\le 1$$

د II معادلې کیڼ لوری د تحویل د فورمول په کارولو سره لاندې شکل ځانته غوره کوي:

$$2\sin x\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y)$$

څرنگه چې $\sin x\sin y=1$ دی، بنا پر دې $\cos(x-y)-\cos(x+y)=2$

له بلې خوا $x+y=\pi$ دی نو: $\cos(x-y)-\cos\pi=2$

همدارنگه پوهیږو چې $\cos\pi=-1$ دی.

نو:
$$\cos(x-y)-(-1)=2\Rightarrow \cos(x-y)+1=2$$
$$\Rightarrow \cos(x-y)=2-1\Rightarrow \cos(x-y)=1$$
$$\cos(x-y)=\cos 0^\circ$$
$$x-y=0\Rightarrow x=y$$

د I له معادلې څخه د x قیمت پیداکوو:

$$x+y=\pi\Rightarrow x+x=\pi\Rightarrow 2x=\pi$$

$$x=\frac{\pi}{2}\quad ,y=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad x=y=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}$$

دریم گروپ: دغه گروپ څلور لاندې سیستمونه تشکیلوي، چې عبارت دي له:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=a\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \dfrac{\cos x}{\cos y}=a\end{cases}$$

چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

دریم مثال: لاندې مثلثاتي سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=\sqrt{3}\end{cases}$$

حل: لیدل کیږي چې دغه سیستم له دریم گروپ سره مطابقت لري نو، په لاندې ډول کړنه کوو یعنې د سیستم دویمه معادله د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره داسې لیکو:

$$\frac{\text{sinx}-\text{siny}}{\text{sinx}+\text{siny}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ او $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ قیمتونه په پورتنی اړیکه کې اېږدو:

$$\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

څرنګه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ دی، نو $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ سره کېږي.

$$\cot\frac{\pi}{4}\tan\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

له بلې خوا $\cot\frac{\pi}{4}=1$ دی نو معادله لاندې شکل ځانته غوره کوي:

$$\tan\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan\frac{x-y}{2} = \tan 15^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{x-y}{2} = 15^\circ$$

$$x-y = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

د معادلو سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} \\ x-y = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

$$x = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د x قیمت په پورتنی یوه معادله کې اېږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x-y=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{\pi}{3}-y=\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=y\Rightarrow\frac{2\pi-\pi}{6}=y$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

څلورم ګروپ: دغه ګروپ اته لاندې سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \tan x\pm\tan y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \cot x\pm\cot y=a\end{cases}$$

څرنګه چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $a^2-4+4a\cot\alpha\geq 0$

څلورم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases}x-y=\dfrac{\pi}{3}\\ \tan x-\tan y=-2\sqrt{3}\end{cases}$$

حل: کولی شو لومړی معادله داسې ولیکو: $\tan(x-y)=\tan\dfrac{\pi}{3}$

له بلې خوا پوهېږو چې $\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y}=\sqrt{3}$

د $\tan x-\tan y=-2\sqrt{3}$ قیمت په پاسنی معادله کې اېږدو:

$$\frac{-2\sqrt{3}}{1+\tan x\cdot\tan y}=\sqrt{3}$$

د مساوات دواړه خواوې په $\sqrt{3}$ باندې وېشو او لیکو.

یا:

$$\frac{-2}{1+\tan x\cdot\tan y}=1\quad\Rightarrow\quad 1+\tan x\cdot\tan y=-2$$

یا:

$$\Rightarrow\tan x\cdot\tan y=-3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو:

$$\begin{cases}\tan x\cdot\tan y=-3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ \mathrm{I}\\ \tan x-\tan y=-2\sqrt{3} \ldots\ldots\ \mathrm{II}\end{cases}$$

د $\tan x$ قیمت له II معادلې څخه په لاس راوړو په I کې يې اېږدو:

$$\tan x=-2\sqrt{3}+\tan y$$

$$(-2\sqrt{3}+\tan y)\tan y=-3$$

$$\tan^2 y-2\sqrt{3}\tan y+3=0$$

$$(\tan y-\sqrt{3})^2=0 \quad\Rightarrow\quad \tan y-\sqrt{3}=0 \quad\Rightarrow\quad \tan y=\sqrt{3}$$

$$y=\frac{\pi}{3}$$

د y د قیمت په پام کې نیولو سره د I له معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړو.

$$\tan x\cdot\tan y=-3$$

$$\tan x\cdot\sqrt{3}=-3 \quad\Rightarrow\quad \tan x=\frac{-3}{\sqrt{3}}=-\frac{3\sqrt{3}}{3}=-\sqrt{3}$$

$$\tan x=-\sqrt{3}\Rightarrow x=\frac{2\pi}{2}$$

پنځم گروپ: دغه گروپ لاندې دوه سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \tan x\cdot\tan y=a\end{cases}$$

د تېر په څېر بیاهم α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y معلوم قوسونه یا زاویې دي.

دپورتني سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $-1\le\frac{1+a}{1-a}\cos\alpha\le 1$

پنځم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases}x+y=7\frac{\pi}{6}\\ \tan x\cdot\tan y=0\end{cases}$$

لیدل کېږي چې دغه سیستم په پنځم گروپ پورې اړه لري او په لاندې ډول يې حلوو:

$$\tan x\tan y=\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$ او $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

قیمتونه په اړونده اړیکه کې اېږدو.

$$\tan x \tan y = \frac{\frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]}{\frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]}$$

د $x+y$ قیمت د سیستم له لومړی معادلې څخه په پورتنی اړیکه کې اېږدو:

$$\tan x \cdot \tan y = \frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}}$$

څرنګه چې $\tan x \cdot \tan y = 0$ سره راکړل شوی دی، نو لیکو:

$$\frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}} = 0$$

ددې لپاره چې کسر مساوي په صفر شي، نو باید صورت یې له صفر سره برابر شي؛ یعنې:

$$\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6} = 0$$

$$\cos 7\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(x-y) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\cos(x-y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow x - y = \frac{5\pi}{6}$$

نوموړی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x - y = 5\frac{\pi}{6} \\ x + y = 7\frac{\pi}{6} \end{cases} -$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} = 2\pi \quad , \qquad x = \pi$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x قیمت د I په معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x-y=5\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \pi-y=5\frac{\pi}{6} \quad , \quad -y=\frac{5\pi}{6}-\pi$$

$$y=\pi-\frac{5\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{6\pi-5\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

شپږم ګروپ: په دغه ګروپ کې لاندې سیستمونه شتون لري:

$$\begin{cases} x \pm y=\alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=a \end{cases}$$

د حل د امکان شرط عبارت دی، له:

$$-1 \le \frac{a-1}{a+1}\sin\alpha \le 1$$

شپږم مثال:

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=-3 \end{cases}$$

د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره لرو:

$$\frac{\tan x-\tan y}{\tan x+\tan y}=\frac{-3-1}{-3+1}=2$$

د مساوات په کېڼي خوا کې د صورت او مخرج قیمتونه د $\sin$ او $\cos$ له جنسه داسې ایږدو:

$$\frac{\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}}=2 \Rightarrow \frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=2$$

$$2\sin(x+y)=\sin(x-y)$$

څرنګه چې $x-y=\dfrac{\pi}{2}$ دی، نو:

$$2\sin(x+y)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$\sin(x+y)=\frac{1}{2} \Rightarrow x+y=\frac{\pi}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه کوچنی قوس چې په معادله کې صدق کوي، عبارت دی له: $\frac{\pi}{6}$ چې د معادلو لاندې سیستم جوړوو:

$$x+y=\frac{\pi}{6}$$

$$x-y=\frac{\pi}{2}$$

نوموړی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{6} \ldots\ldots I \\ x-y=\frac{\pi}{2} \ldots\ldots II \end{cases}$$

$$2x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x=\frac{\pi+3\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}$$

$$x=\frac{4\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

د x قیمت د I په معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3}+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow y=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$$

$$y=\frac{\pi-2\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$$

$$y=-\frac{\pi}{6}$$

پوښتنې

د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه حل او ووایاست چې په کوم گروپ پورې اړه لري؟

$$a)\ \begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \tan x+\tan y=1 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\cos x}=2 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

د ساین قانون: د ABC په هر مثلث کې لاندې اړیکې شته:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

پورتنی اړیکه د ساین د قانون په نوم یادېږي.

د کوساین قانون: د ABC په هر مثلث کې چې دضلعو اوږدوالي یې b,a او c وي، د ضلعو او زاویو تر منځ لاندې اړیکې شته:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\ \cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\ \cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\ \cos C$$

د tan قانون: د ABC په هر مثلث کې د هغه د ضلعو او زاویو ترمنځ د tan له جنسه لاندې اړیکې شته:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}\quad,\quad\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}\quad,\quad\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

مثلثاتي مطابقت: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاویې د ټولو قیمتونو لپاره د مساواتو دواړه خواوې مساوي شي، مثلثاتي مطابقت بلل کېږي.

مثلثاتي معادلې: هغه مساوات چې د زاویې په ځینو قیمتونو سره دواړه خواوې مساوي شي، معادله بلل کېږي.

د مثلثاتي معادلو سیستمونه

مثلثاتي معادلو سیستمونه په لاندې شپږو ګروپونو وېشل شوي دي:

لومړی ګروپ:

$$\begin{cases}\sin x\pm\sin y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}\cos x\pm\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \cos y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \sin y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

دریم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

څلورم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases}$$

پنځم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x + \tan y = a \end{cases}$$

شپږم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتني

لاندې پوښتنې په ځير سره ولولئ، هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه کړئ.

1. که چېرې $A=20^\circ$ ، $b=10$ ، $c=7$ وي، د a د ضلعې اوږدوالی يې عبارت دی له:

$a)$ 16.4 $b)$ 16 $c)$ 15.9 $d)$ 16.8

2. که چېرې $a=8$ ، $b=5$ او $c=10$ وي، د B زاويې اندازه عبارت ده له:

$a)$ 28° $b)$ 29° $c)$ 29.4° $d)$ 28.5°

3. که چېرې $A=48^\circ$ ، $B=22^\circ$ او $a=5$ وي د b اوږدوالی عبارت دی له:

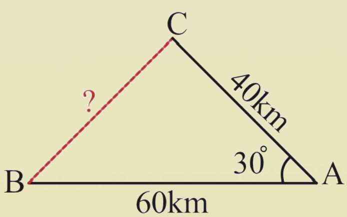
$a)$ 8 $b)$ 8.5 $c)$ 9 $d)$ -9.5

4. د $\sec x(\sec x-\cos x)$ مثلثاتي مطابقت مساوي دی له :

$a)$ $\tan x$ $b)$ $\dfrac{1}{\tan x}$ $c)$ $\cot x$ $d)$ $\tan^2 x$

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که چېرې د $A=30^\circ$ ، $c=8$ ، $b=5$ واحده وي، د a ضلع او $\sin C$ پيدا کړئ.
2. که په يوه مثلث کې $a=8$ ، $b=5$ ، $c=10$ واحده وي، د B زاويې اندازه پيدا کړئ.
3. د ABC په مثلث کې که $\frac{\text{c}}{\text{b}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ او $A=30^\circ$ وي، د B او C زاويو اندازه پيدا کړئ.
4. دوې بېړۍ د A له ټکي څخه په دوو خواوو داسې په حرکت پيل کوي چې د منځ زاويه يې 30° ده، که له يوه ساعت څخه وروسته، لومړۍ بېړۍ $40\,km$ او دويمه بېړۍ $60\,km$ واټن وهلی وي، د دوو بېړيو ترمنځ واټن پيدا کړئ.



5. د $\cot^2\beta$ او $\sin\beta$ او $\cos\beta$ له جنسه محاسبه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

6. لاندې مطابقتونه ساده کړئ.

$a)\ \dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$

$b)\ \dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A$

$c)\ \tan A+\cot A=2\csc 2A$

$d)\ \dfrac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\tan\dfrac{A}{2}\cdot\cot\dfrac{B}{2}$

$e)\ \dfrac{\cos A}{1-\sin A}=\tan(45+\dfrac{A}{2})$

$f)\ \cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=\dfrac{1}{4}\cos 3\alpha$

7. لاندې مثلثاتي معادلې حل کړئ.

$a)\ \cos^2 x+\cos^4 x=0$

$b)\ \tan^2 x-4\tan x+3=0$

$c)\ 4\cos\beta-2=0$

$d)\ \cos x-\sqrt{3}\sin x=1$

$e)\ \cos^2 x+3\sin x\cdot\cos x=-1$

8. آیا د $2\sin^2 x-\cos x=2\cos 2x+\sin x$ مساوات یو مطابقت دی او که معادله؟

9. لاندې افادې ساده کړئ.

$a)\ \dfrac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$

$b)\ 1-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=?$

$c)\ \cos 4x+2\sin^2 2x$

$d)\ (\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x)^2$

10. د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه لومړی تشخیص او بیا یې حل کړئ.

$a)\ \begin{cases}\tan x+\tan y=1\\ \cos x\cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

$b)\ \begin{cases}\sin(x+y)=\cos(x-y)\\ \tan x-\tan y=1\end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

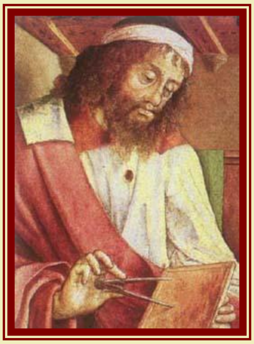
دریم ځپرکی

فضايي هندسه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اقلیـدس تـصویر چـې نومـوړی د دوه بُعـدی او درې بُعدی هندسي بنسټ ایښودونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



اساسي مفاهیم او اکسیومونه

د اقلیدس د هندسي مفاهیمو څېړنې پـه دوو بعـدونو کې د مسطحې هندسې په نامه یادېږي.

هغه هندسي مفاهیم، چې پـه دریـو اړخونـو(بعـدونو) کې څېړل کېږي، فضایي هندسه نومېږي.

فعالیت

- د مفاهیمو په برخه کې لکه: لومړني اصطلاحات، دلیل، برهان او قضیو په هکله فکر وکـړئ. خپـل مـنځ کې خبرې او د موضوع په هکله بحث وکړئ.

له پورتني بیان او بحث څخه وروسته کولای شو، لاندې تعریف وکړو:

لومړنۍ اصطلاح ګانې Postulates: د هر علم په برخه کې د لومړنیـو اصـطلاحګـانو څخـه سـترګې پټـولای نشو د نورو علومو په ډول په هندسه کې هم هغه مفاهیم او مفکـورې چـې پرتـه لـه کـوم تعریـف څخـه منـل کېـږي لومړني اصطلاحات بلل کېږي. لکه: ټکی(نقطه)، کرښه، مستوي او فضا.

منطقي دلیل او برهان Logical Reason:برهان د ذهن هغه عمل ته ویل کېږي چې لـه یـو لـړ مخکینیـو سمو وړاندیزونو او څېړنو څخه و روستنیو څېړنو ته رسېږي چې د هغې سموالی مخکې منـل شـوی وي. مـوږ هـم کولای شو، هغه و منو.

قضیهTheorem: هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت یو لړ منطقي دلایلو ته اړتیا ولري، قضیه بلل کېږي.

ټکی(نـقطه): موږ نقطه د یو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنی اصطلاح(تعریف شوې نه ده) په توګه منو.

مستقیم خط: کش شوی تار، دمېزڅنډه او د خط کش تېغه د مـستقیم خـط مفهـوم او مطلـب بیـانوي. د مـستقیم خط بېلېدونکې علامې دا دي چې د دوو راکړل شوو ټکو څخه یوازې او یوازې یوه مـستقیمه کرښـه تیرېـدلای شي مستقیم خط د لومړنۍ اصطلاح (تعریف شوی نه دی) په ډول منو.

باید فکر مو وي چې یو مستقیم خط دواړو خواوو ته تر لایتناهي پورې غزیدلای شي.

لومړی اصل: دوې ښکاره او ټاکلې نـقطې یوازې او یوازې یو مستقیم خط ځرګندوي.

دویم اصل: هر مستقیم خط لږ ترلږه دوې ځرګندې نـقطې لري چې په یو مستقیم خط باندې واقع دي، لږ تـر لـږه داسې درې نقطې شتون لري چې په یوه مستقیم خط باندې واقع نه وي.

دریم اصل: کولای شو په یوه مستقیم خط باندې د هرو دوو نقطو تر منځ یوه دریمه نقطه په لاس راوړو.

مستوي: د ولاړو اوبو سطح او د ټولګي تخته د مستوي مفهوم ځرګندوي او مستوي د لـومړنۍ اصـطلاح (تعریـف شوې نه ده) په توګه منل کېږي.

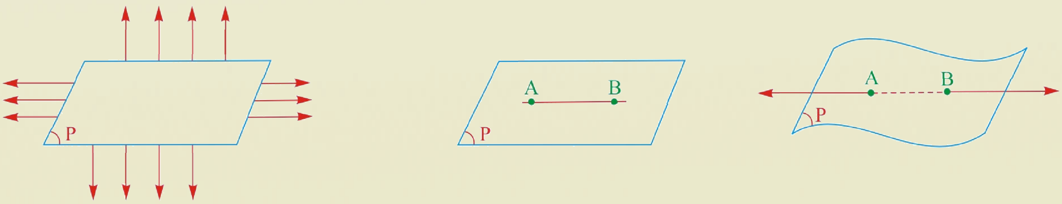
لومړی اصل: په هره مستوي کې لږ تر لږه درې نقطې شتون لري چې د یوه مستقیم خط په استقامت واقع نه وي.

دویم اصل: له هرو دریو نقطو څخه چې د یوه مستقیم خط په استقامت پرتې نه وي، یوه مستوي تېرېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم اصل: که چېرې د يوه مستقيم خط دوې نقطې په يوې مستوي کې وي، دا خط په مستوي کې دی.

په مسطحه هندسه کې د مستوي رسميدلوته اړتيا نشته، ځکه چې ټول شکلونه لکه: د کاغذ مخ، د لرگي تخته، چې هر يو يې يوه مستوي ځرگندوي رسميږي، خو په فضايي هندسه کې د مستوي رسمولو ته اړتيا شته، ځکه چې په فضايي هندسه کې مستوي يوه نه، بلکې ډېرې دي. زياتره په فضايي هندسه کې مستوي د متوازي الاضلاع، مستطيل او يا هوارې سطحې په واسطه ښودل کيږي او په يوه کونج کې يې يو توری ليکي.



مستوي نه ده　　　محدوده مستوي　　　نا محدوده مستوي

دا مستوي گانې چې په پورته شکلونو کې ليدل کيږي، په همدې پراخوالي نه دي، بلکې ترلايتناهي پورې امتداد لري. دا چې مستوي‌گانې په پورته شکلونو کې ليدل کيږي هغه متوازي الاضلاع او مستطيل نه دي، بلکې د مستوي په يوې هوارې سطحې کې ښودل دي.

تولې نښې چې په مسطحه هندسه او رياضي کې استعماليږي، په فضايي هندسه کې هم استعماليږي.

هغه اکسيومونه چې په مسطحې هندسې کې موجود دي، په فضايي هندسه کې هم لـه دې اکسيومونو ځخه کار اخيستل کيږي.

سربېره په مسطحه هندسه په فضايي هندسه کې هم يو لړ ځانگړي اکسيومونه شته چې په لاندې ډول بيانيږي.

د مستوي لومړی اکسيوم: هغه مستقيم خط چې د مستوي دوې مختلفې نقطې سره نښلوي په دې مستوي کې شامل دی.

د مستوي دويم اکسيوم: له هغو دريو نقطو ځخه چې په يوه مستقيم خط واقع نه دي، يوازې او يوازې يوه مستوي تېريږي.

د متقاطع مستوي‌گانو اکسيوم: که چيرې دوې مستوي‌گانې يو گډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چيرې يو گډ مستقيم خط ولري، د غه متقاطع خط ته د دوو مستوي‌گانو مشترک فصل وايي.

فضا: فضا هم د لومړني اصطلاح (تعريف شوې نه ده) په توگه پېژنو.

لومړی اصل: دلايتناهي نقطو مجموعې ته فضا وايي.

دويم اصل: لږتر لږه ځلور داسې نقطې شته چې په يوه مستوي کې واقع نه دي.

پوښتنې

1. ځرگنده کړئ چې ولې درې پښې لرونکې ميز د ځلورو پښو لرونکي ميز په پرتله ټينگ دی؟
2. ولې نقطه، کرښه او مستوي لومړنی اصطلاح‌گانې بولې؟
3. له دوو نقطو ځخه ځو مستوي‌گانې تېرېدلای شي چې دواړه نقطې په کې پرتې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په درې بُعدي فضا کې کرښه او مستوي

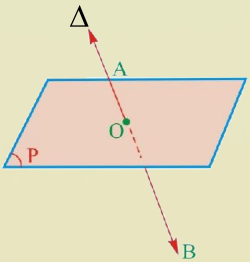
په فضا کې دوه قلمونه، دوه کتابونه، یو کتاب او یو قلم کوم حالتونه لرې؟

درې بُعدي فضا:

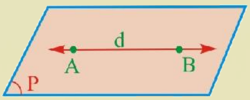
هغه فضا، چې موږ په کې ژوند کوو، درې بُعدي فضا ده. دا درې بُعدي فضا یوه له نه تعریف شوو لومړنیو مفهومونو څخه ده.

فضا دلایتناهي نقطو مجموعه ده، خط او مستوي هم په ترتیب سره یو او دوه بعدونه لري چې هر یو د فضا د سټ یوه برخه(جزء) دی.

د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت: یوه مستقیمه کرښه او یوه مستوي لاندې درې حالتونه لري:



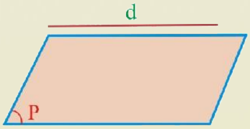
1. که چېرې یو مستقیم خط او یوه مستوي یوه مشترکه نقطه ولري، دا خط او مستوي یو له بل سره متقاطع دي. دمثال په ډول په دې شکل کې د Δ مستقیمه کرښه د P مستوي د O په نقطه کې قطع کړې ده.



2. که چېرې یو مستقیم خط له یوې مستوي سره دوه او یا له دوو څخه زیاتې مشترکې نقطې ولري دا مستقیمه کرښه په مستوي منطبقه ده او یا داسې ویل کېږي چې مستقیمه کرښه په مستوي کې شامله ده، د مثال په ډول د d مستقیم د P په مستوي کې شامل دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

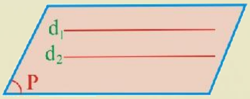
3. که چېرې یوه مستقیمه کرښه له یوې مستوي سره هیڅ ګډه نقطه و نه لري، دا مستقیم له مستوي سره موازي دی، مثلاً په لاندې شکل کې د d مستقیم خط له P مستوي سره موازي دی.



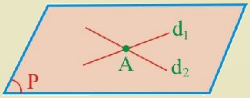
له یو بل سره د دوو مستقیمو کرښو نسبي حالت:

1- که چېرې دوه مستقیم خطونه په یوه مستوي کې شامل وي، نوموړي خطونه د همغې مستوي خطونه بلل کېږي، او یو له لاندینیو حالتونو څخه لري.

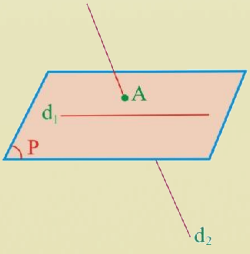
په یوې مستوي کې دوه خطونه هغه وخت موازي بلل کېږي چې هېڅ ګډټکی ونه لري.



2- په یوه مستوي کې دوه خطونه چې یوه ګډه نقط ولري، متقاطع خطونه بلل کېږي.



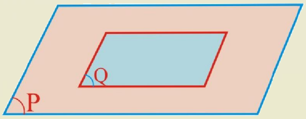
3- دوه مستقیم خطونه چې په یوه مستوي کې پراته نه وي او کومه مشترکه نقطه هم و نه لري، متنافر خطونه بلل کېږي؟



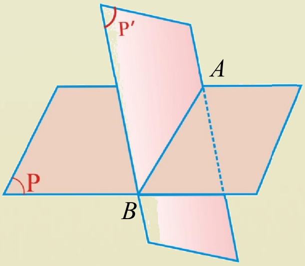
(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوو مستوي‌ګانو نسبي حالت:

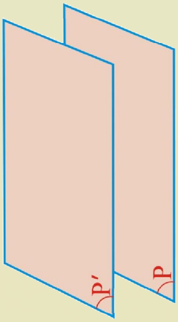
په عمومي ډول دوې مستوي‌ګانې لاندې درې حالتونه لري.



منطبق: که چېرې دوې مستوي‌ګانې لږ تر لږه درې مشترکې نقطې ولري چې د يو مستقيم خط په امتداد پرتې وي، يو پر بل منطبقې مستوي‌ګانې بلل کېږي، لکه: په مخامخ شکل کې د P او Q دوې مستوي‌ګانې يو پر بل منطبقې دي.



متقاطع: که چېرې دوې مستوي‌ګانې يو ګډ مستقيم خط ولري متقاطع مستوي‌ګانې بلل کيږي. دغه د AB مشترک خط ته مشترک فصل هم وايي. لکه: مخامخ شکل.



موازي: که چېرې دوه مستوي‌ګانې هيڅ کوم ګډ ټکی و نه لري، سره موازي دي، د مثال په توګه د P او P' مستوي‌ګانې.

فعاليت

- په فضا کې له يوې نقطې څخه څو مستقيم خطونه تېرېږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستقيم خطونه تېرېږي؟
- له يوې نقطې څخه څو مستوي ګانې تېرېږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستوي ګانې تېرېږي؟
- له دريو نقطو څخه څو مستوي ګانې تېرېږي چې درې واړې نقطې پکې شاملې وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د R او T نقطې د P په مستوي کې پرتې دي، د کوم دلیل له مخې د $\overline{RT}$ خط د P په مستوي کې پروت دی؟

2- که د Δ مستقیم خط د P په مستوي کې پروت نه وي، د Δ مسقیم خط به د P مستوي په څو نقطو کې قطع کړي؟

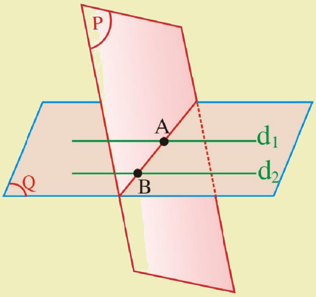
3- که چېرې د AB مستقیم خط او د P مستوي د M او K دوې ګډې نقطې ولري، د $\overline{AB}$ مستقیم خط د P په مستوي کې پروت دی؟

4- د A, B او C نقطې د P په مستوي کې واقع دي او هم د A, B او C نقطې د p' په مستوي کې پرتې دي، د P او p' مستوي ګانې یوه له بلې سره څه اړیکې لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په فضا کې موازي مستقيم خطونه

آيا په فضا کې مستقيم خطونه موازي دي؟



تعریف:

دوه مستقيم خطونه چې په يوې مستوي کې پراته او ګډه نقطه و نه لري، موازي خطونه بلل کېږي.

د موازاتو اکسيوم:له يوې خارجي نقطې څخه له يوې مستقيمې کرښې سره يوازې او يوازې يوه موازي مستقيمه کرښه رسمولای شو او بس.

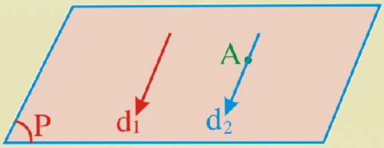
فعاليت

- د A ټکی د P مستوي او د d_1 مستقيم خط چې د A ټکی ورباندې پروت نه وي، په پام کې ونيسئ؟
- د A ټکي او د d_1 له مستقيم خط څخه څو مستويګاني تېريدلای شي؟ ولې؟

له پورتني فعاليت څخه د قضيې متن او ثبوت بيانوو.

قضيه: د يوې خارجي نقطې څخه له يوه مستقيم خط سره يوازې يو موازي مسقيم خط رسمولای شو او بس.

ثبوت: د A له نقطې او د d_1 له مستقيمې کرښې څخه يوازې يوه د P مستوي تېرېږي، ولې؟



اوس د P په مستوي کې د A له نقطې څخه يوازې د d_2 مستقيم خط د d_1 له مستقيم خط سره موازي رسمولای شو.

(پورتنی ثبوت په مسطحه هندسه کې لوستل شوی). نو پورتنی دعوا چې ټکی او خط په فضا کې وي، هم سموالی لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

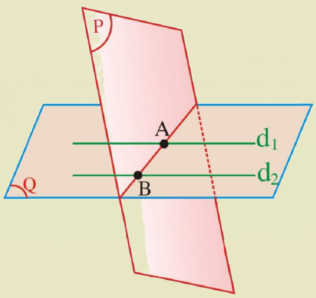
دوه د d_1 او d_2 موازي خطونه او یوه د A نقطه د P له مستوي څخه د باندې په پام کې ونیسئ.

- آیا د d_1 او d_2 مستقیم خطونه یوه بله مستوي ټاکلی شي؟
- که چېرې د P مستوي د Q مستوي د A په ټکي کې قطع کړي، آیا د P مستوي به د d_2 مستقیم خط هم قطع کړي؟
- آیا دوې مستوي‌ګانې یوه بله د یوه مستقیم خط په اوږدو کې قطع کوي، ولې؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته د قضیې متن او ثبوت بیانوو.

قضیه: که دوه مستقیم خطونه موازي وي او مستوي یو له هغو څخه قطع کړي، بل یې هم قطع کوي.

ثبوت: د d_1 او d_2 یو له بل سره موازي مستقیمونه د Q په مستوي کې پراته دي.



که د P مستوي د d_1 مستقیم د A په نقطه کې قطع کړي، نوموړې مستوي د d_2 مستقیم هم د B په نقطه کې قطع کوي د تعریف له مخې د d_1 او d_2 موازي خطونه یوه د Q مستوي ټاکي، د P او Q مستوي-ګانې د A یوه مشترکه نقطه لري، که چېرې دوې مستوي‌ګانې یوه له بل په یوه نقطه کې قطع کړي، نو ویلای شو چې هغوی یو بل د یوې مستقیمې کرښې په اوږدو کې قطع کوي، له دې امله د P او Q مستوي‌ګانې د d_2 مستقیمه کرښه د B په نقطې کې هم قطع کوي.

څکه یو مستقیم خط چې په یوې مستوي کې له دوو موازي خطونو څخه یو قطع کړي، بل یې هم قطع کوي.

پوښتنې

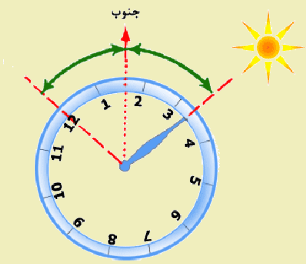
1- که چېرې دوه مستقیم خطونه له یوه دریم مستقیم خط سره موازي وي ثبوت کړئ چې دا مستقیم خطونه په خپل منځ کې هم موازي دي؟

2- که چیرې د E او F مستوي‌ګانې سره موازي او د L_1 مستقیم خط د E مستوي کې او د L_2 مستقیم خط د F په مستوي کې واقع وي آیا $L_1 // L_2$ دی؟

3- که د E او F مستوي ګانې سره متقاطع او د P مستوي هغوی دواړه قطع کړي، آیا د E او F ګډ فصل د E او P له مشترك فصل او د F او P له مشترك فصل سره موازي دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په فضا کې د دوو مستقيمو کرښو تر منځ زاويه



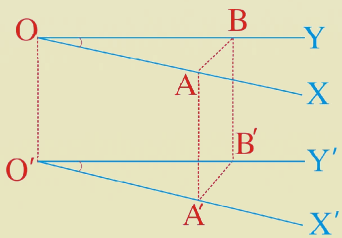
که چېرې د يوې زاويې دوراني لورى د ساعت د عقربې په مخالف لوري حرکت وکړي، زاويه مثبت او که د ساعت د عقربې په همجهت(عين لوري) وي زاويه منفي ده.

فعاليت

- د XOY او $X'O'Y'$ زاوېې داسې په پام کې ونيسئ چې ضلعې يې سره موازي او هم جهته وي.
- د $\overline{OX}$ او $\overline{O'X'}$ له ضلعو څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{O'A'}$ دوه مساوي قطعه خطونه او د $\overline{OY}$ او $\overline{O'Y'}$ له ضلعو څخه د $\overline{OB}$ او $\overline{O'B'}$ مساوي قطعه خطونه بېل کړئ.
- د $OAA'O'$ شکل، کوم هندسي شکل لري، دليل يې ووياست، د OAB او $O'A'B'$ جوړ شوي مثلثونه له يو بل سره څه اړيکه لري؟

د پورتني فعاليت له مخې د قضيې متن او ثبوت په لاندې ډول بيانولى شو.

قضيه: په فضا کې دوې زاويې چې دوه په دوه موازي او هم جهته ضلعې ولري، يوه له بلې سره مساوي دي.



ثبوت: د XOY او $X'O'Y'$ زاوېې په پام کې نيسو، داسې چې $\overline{OX}\,//\,\overline{O'X'}$ او $\overline{OY}\,//\,\overline{O'Y'}$ دي، يو لوري هم لري. په شکل کې د OX او $O'X'$ پر خطونو د $\overline{OA}$ او $\overline{A'O'}$ قطعه خطونه سره مساوي موازي او هم جهته دي.

نو د $OAA'O'$ شکل يوه متوازي‌الاضلاع ده. له دې امله د $\overline{BB'}$ او $\overline{OO'}$ قطعه خطونه موازي، مساوي او هم لوري دي. نو $ABB'A'$ هم يوه متوازي‌الاضلاع ده او $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ دی.

د $O'A'B'$ او OAB مثلثونه انطباق منونکي دي. ځکه $\overline{AB} = \overline{A'B'}$، $\overline{OA} = \overline{A'O'}$ او $\overline{OB} = \overline{O'B'}$ دي

له دې امله $A\hat{O}B = A'\hat{O'}B'$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قضيې پايله:

i) که په ترتيب سره د دوو زاويو ضلعې موازي او هم لوري وي، نومورې زاويې يو له بل سره مساوي دي.

ii) که د دوو زاويو يوه، يوه ضلع موازي او هم جهته وي او د هغو يوه، يوه ضلع يې موازي او مختلف جهتونه ولري، د دغو دواړو زاويو پراخوالى 180° دى.(ثبوت يې د زده‌کوونکو دنده ده).

د دوو متنافر و مستقيمو کرښو ترمنځ زاويه:

تعريف: په فضا کې د دوو متنافر و مستقيمونو ترمنځ زاويه له هغې زاويې څخه عبارت ده چې د يوې مستوي په يوه اختياري نقطه کې له هغو سره د دوو موازي مستقيمونو د رسمولو په واسطه حاصلېږي

پوښتنې

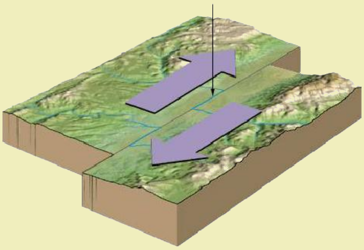
1- که د دوو زاويو پراخوالى سره مساوي وي او د يوې زاويې يوه ضلع د بلې زاويې ضلعې سره موازي وي، آيا د هغو زاويو نورې ضلعې يو له بل سره موازي دي. ولې؟

2- که د دوو زاويو ضلعې سره موازي وي، ثابت يې کړئ چې د دغو زاويو، ناصف‌الزاويې سره موازي او يا سره عمود دي.

3- د d_1, d_2 دوو متنافرو مستقيمونو ترمنځ زاويه پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په فضا کې موازي مستقیمونه او موازي مستوي ګانې



یوه مستقیمه کرښه هغه وخت له یوې مستوي سره موازي بلل کېږي چې هیڅ ګډ ټکی و نه لري.

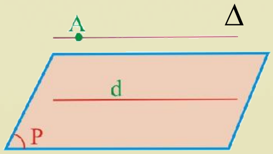
مستوي ګانې په فضا کې هغه وخت سره موازي دي چې هیڅ ګډ ټکی و نه لري.

فعالیت

که چېرې د d مستقیم د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقیمه کرښه د P د مستوي بهر او د d مسقیم سره موازي وي، آیا د Δ مستقیم د P له مستوي سره موازي کېدلای شي؟

- دوې د P او Q متقاطع مستوي‌ګانې او یو مستقیم خط له دغو مستوي ګانو څخه بهر د P او Q له مستوي‌ګانو سره موازي په پام کې ونیسئ.
- د d مستقیم(مشترک فصل) د Δ له مستقیم خط سره موازي کېدای شي؟
- له یوې ټاکلې نقطې څخه د d_1 او d_2 دوو مستقیمو کرښو سره څو موازي مستوي‌ګانې چې موازي نه وي رسمولای شو؟ د فعالیتونو د هرې برخې له تر سره کولو وروسته د قضیو متن او ثبوت په ترتیب بیانوو.

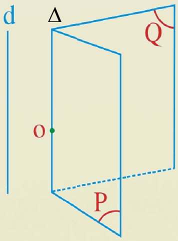
قضیه: که یو مستقیم خط د یوې مستوي له یوه خط سره موازي وي. نوموړی مستقیم خط له همدې مستوي سره موازي دی.



ثبوت:د d مسقیم خط چې د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقیمه کرښه د p د مستوي بهر او د d له مستقیم سره موازي راکړل شوې، ثابتوو چې د Δ مستقیمه کرښه د p له مستوي سره موازي ده، که د p مستوي د Δ مستقیمه کرښه قطع کړي، د d مستقیمه کرښه چې د Δ له مستقیمې کرښې سره موازي ده هم قطع کوي. دا د فرضیې خلاف ده، ځکه د d مستقیمه کرښه د P په مستوي کې پرته ده، نو د p مستوي د Δ مستقیم قطع کولای نشي.

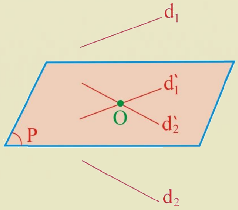
(c) ketabton.com: The Digital Library

قضیه: که یوه مستقیمه کرښه له دوو متقاطع مستويګانو سره موازي وي، نوموړې مسقیمه کرښه د نوموړو مستويګانو له ګډ فصل سره موازي ده.



ثبوت: د P او Q دوې متقاطع مستوي ګانې په پام کې نیسو چې هره یوه یې د d له مستقیمې کرښې سره موازي ده، لکه: مخامخ شکل.
که د P، Q د مستويګانو د Δ په مشترك فصل باندې د O نقطه وټاکو او له هغې نقطې څخه د d له مستقیمې کرښې سره یو موازي رسم کړو، دا موازي د Δ په مستقیمې کرښې منطبق کېږي ځکه Δ یوازینی خط دی چې په دواړو مستويګانو یعنې په P او Q کې شامل دی.

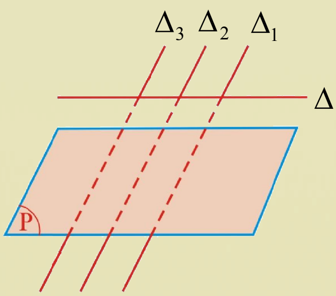
قضیه: د (O) له یوې ټاکلې نقطې څخه د d_1 او d_2 مستقیم خطونه چې یو له بل سره موازي نه دي یوازې یوه موازي مستوي رسمولای شو او بس.



ثبوت: د (O) له نقطې څخه د d'_1 او d'_2 خطونه چې په پرتیب له d_1 او d_2 مسقیمونو سره موازي وي، رسموو د P مستوي چې د (O) له نقطې څخه تیرېږي او د d'_1 او d'_2 مستقیمې کرښې په خپل ځان کې لري له d_1 او d_2 سره موازي دي؟ ولې؟
که چېرې d_1 او d_2 یو له بل سره موازي وي، نو d'_1 او d'_2 یو پر بل منطبق کېږي.

پوښتنې

1- که چېرې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه سره موازي وي، څو موازي مستويګانې له هغو سره رسمولای شئ؟

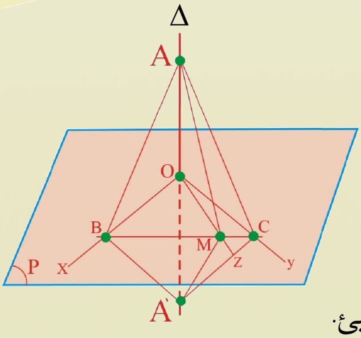


2- که چېرې د Δ_1 ، Δ_2 او Δ_3 موازي خطونه د P مستوي او د Δ مستقیمې کرښې په واسطه په داسې حال کې چې د Δ مستقیمه کرښه د P له مستوي سره موازي ده قطع شي، ثبوت کړئ چې مخامخ قطع شوي قطعات یو له بل سره مساوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په فضا کې متعامدې مستقيمې کرښې او مستوي‌گانې

که د Δ مستقيمه کرښه د P مستوي په (O) ټکي کې عمود وي، آيا هغه ټول مستقيم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تيرېږي، د Δ په مستقيمې کرښې باندې عمود دي؟



فعاليت

- مخامخ شکل په پام کې ونيسئ د $\overline{ox}$ او $\overline{oy}$ مستقيمونه د Δ په مستقيم د (O) په نقطه کې عمود رسم کړئ.
- د P په مستوي کې د OZ اختياري مستقيمه کرښه په پام کې ونسيئ.
- د Δ له مستقيمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ مساوي‌الفاصله قطعه خطونه جلا کړئ.

يو اختياري قاطع داسې رسم کړئ چې د $\overline{OX}$ مستقيمه کرښه د B او $\overline{oy}$ مستقيمه کرښه د C او د $\overline{OZ}$ مستقيمه کرښه د M په نقطو کې قطع کړي. $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ له $\overline{AA`}$ سره څه اړيکه لري.

- د OZ مستقيمه کرښه د Δ پر مستقيمه کرښه عمود ده؟ ولې؟

د پورتني فعاليت له تر سره کولو وروسته د قضيې متن او ثبوت داسې بيانوو.

قضيه: که د Δ يوه مستقيمه کرښه پر هغو دوو مستقيمو کرښو چې دواړه د Δ مستقيمه کرښه د (O) په نقطه کې قطع کوي عمود وي، په هغو ټولو مستقيمو خطونو باندې چې په مستوي کې متقاطع دي او د (O) له نقطې څخه تېرېږي، عمود ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: دوي مستقيمې کرښې د $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ په پام کې نيسو، دا دوه مستقيمونه د Δ پر مستقيم چې د(O) له نقطې څخه تېرېږي، عمود دي او د P مستوي جوړوي، د P په مستوي کې د OZ اختياري مستقيمه کرښه په پام کې نيسو، د Δ له مستقيمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ دوه متساوي الفاصله قطعه خطونه جلاکوو.

او د P په مستوي کې يو قاطع رسموو چې $\overline{OX}$ د B او $\overline{OY}$ د C او oz مستقيم د M په نقطه کې قطع کړي.

$\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ دواړه $\overline{AA'}$ منځنۍ عمودونه دي، نو

$$\overline{BA}=\overline{BA'}$$
$$\overline{CA}=\overline{CA'}$$

د ABC او $A'B'C'$ مثلثونه انطباق منونکی دي. د انطباق منلو د عمليې په وخت کې د C,B او M نقطې ثابتې پاتې کېږي او د A نقطه په A' او $\overline{MA}$ په $\overline{MA'}$ منطبق کېږي، نو ليکلی شو. $\overline{MA'}=\overline{MA}$

د $M\overset{\Delta}{A}A'$ مثلث متساوي الساقين دی او د $\overline{MO}$ منځنۍ په عين وخت کې د $\overline{AA'}$ منځنۍ عمود دی په نتيجه کې د Δ مستقيمه کرښه د $\overline{OZ}$ پر مستقيمې کرښې باندې عمود دی.

فعاليت

- که د B او C نقطې د P او Q له ټکو څخه متساوي الفاصله وي، د BC مستقيمې کرښې هره نقطه له P او Q څخه متساوي‌الفاصله ده. اوس د X يوه اختياري نقطه د BC پر مستقيمه کرښه وټاکئ او ثابت کړئ چې X د P او Q څخه متساوي الفاصله دی.

پوښتنې

1- که چېرې د d_1 او d_2 خطونه يو له بل سره موازي وي، له هغو سره څو موازي مستوي‌گانې رسمولای شئ؟

2- که د L خط د P پر مستوي عمود وي، آيا ټولې هغه مستوي گانې چې د L خط په کې پروت دی د P په مستوي باندې عمود دي؟

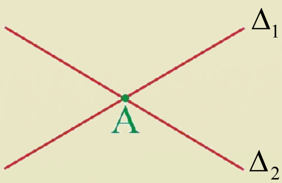
(c) ketabton.com: The Digital Library

په فضا کې موازي مستوي‌ګانې

دوې مستوي‌ګانې چې هیڅ مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستوي‌ګانې بلل کیږي.

فعالیت

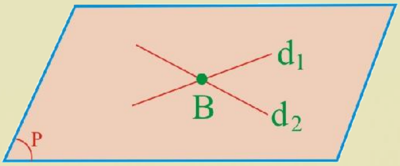
- د Δ_1 او Δ_2 مستقیم خطونه، چې د A په نقطه کې متقاطع دي، په پاڼه کې ونسیئ
- له دې دوو مستقیمو خطونو او د A له نقطې څخه یوه مستوي تیرولی شو.



- له دې مستوي څخه بهر د d_1 او d_2 دوې مستقیمې کرښې چې په ترتیب سره د Δ_1 او Δ_2 سره موازي او یو بل د B په ټکي کې قطع کړي، رسم کړئ.
- هغه مستوي چې د Δ_1 او Δ_2 او د A له نقطې څخه جوړه شوې، له هغې مستوي سره چې د d_1 او d_2 مستقیمو کرښو او د B له ټکي څخه جوړه شوې ده، څه اړیکه لري؟

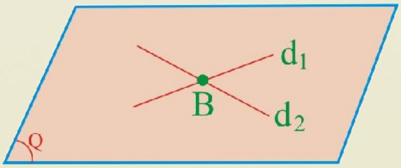
د پورتني فعالیت له تر سره کولو وروسته د قضیې متن او ثبوت بیانولی شو.

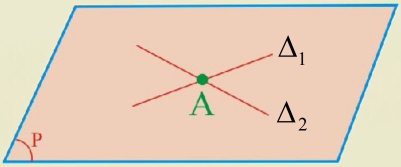
قضیه: که د یوې مستوي دوې متقاطع مستقیمې کرښې د بلې مستوي له متقاطع مستقیمو کرښو سره موازي وي، نوموړې مستوي‌ګانې سره موازي دي.



ثبوت: د Δ_1 او Δ_2 مستقیم خطونه د A په نقطه کې متقاطع دي او یوه د P مستوي جوړوي. د B له نقطې څخه(چې د P مستوي بهر ده) د d_1 او d_2 مستقیم خطونه له Δ_1 او Δ_2 سره موازي رسم شوې دي، چې d_1 او d_2 هم یوه د Q مستوي جوړوي، ثابتوو چې د P او Q مستوي‌ګانې سره موازي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library





څرنګه چې d_1 او Δ_1 سره موازي دي، نو د d_1 د P له مستوي سره هم موازي دي. همدارنګه d_2 له Δ_2 سره موازي دي نو d_2 هم د P له مستوي سره موازي دی. اوس که چېرې د P او Q مستوي ګانې يو بل سره قطع کړي، مشترك فصل يې هم په همدې وخت کې له d_1 او d_2 سره موازي کېږي، ولې؟

دا امکان نه لري، ځکه چې د d_1 او d_2 مستقيم خطونه متقاطع دي، په نتيجه کې د P او Q مستوي ګانې يوه بله سره قطع کولای نشي، نو يو بل سره موازي دي.

پوښتني

که چېرې د E او F مستوي ګانې سره موازي وي او د L_1 مستقيمه کرښه په E مستوي او د L_2 مستقيمه کرښه د F په مستوي کې پرتې وي، آيا $L_1 // L_2$ دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

1- دفضايي هندسې بنسټيز مفاهيم او اکسيومونه:

لومړنۍ اصطلاحګانې Postulates:

هغه مفاهيم او مفکورې، چې پرته له کوم تعريف څخه منل کېږي، لومړني اصطلاحات بلل کېږي د مثال په توګه. ټکی، کرښه، مستوي او فضا.

دليل او برهان Logical Reason:

برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کېږي چې لـه يـو لـړ مخکينيـو سـمو وړانـديزونو او څېړونـو څخـه و روسـته وروستيو څېړنو ته رسېږي او د هغې سموالی مخکې منل شوی وي، موږ هم کولی شو، هغه و منو.

قضيه: Theorem

هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت يولړ منطقي دلايلو ته اړتيا ولري، قضيه بلل کېږي.

ټکی: موږ نقطه د يو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوې نه ده) په توګه منو.

مستقيم خط: کش شوی تار، د مېز څنډه او د خط کش تېغه د مـستقيم خـط مفهـوم او مطلـب بيـانوي. مستقيم خط د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوی نه دی) په ډول منو.

د مستوي لومړی اکسيوم:هغه مستقيم خط چې د يوې مستوي دوې مختلفې نقطې سره ونښلوي، پـه همغه مستوي کې شامل دی.

د مستوي دويم اکسيوم:له هرو دريو نقطو څخه چې د يوه مستقيم خط په استقامت پرتـې نـه وي، يـوه مستوي تېرېږي.

د متقاطع مستوي ګانو اکسيوم:که چېـرې دوه مـستوي ګـانې يـو ګـډ ټکـی ولـري، متقـاطع دي او پـه همدې ډول که چېرې يو مسقيم خط ولري، دغه متقاطع خط ته د دوو مستوي ګانو مشترک فصل وايي.

فضا: فضا هم (تعريف شوې نه ده) لومړنۍ اصطلاح په توګه پېژنو.

لومړی اصل: فضا د لايتناهي نقطو مجموعه ده.

دويم اصل: لږتر لږه د فضا څلور داسې نقطې شته چې په يوه مستوي کې واقع نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په درې بُعدي فضا کې خط او مستوي:

درې بعدي فضا: هغه فضا چې موږ په کې ژوند کوو درې بعدي فضا ده.

له يو بل سره په فضا کې د دوو مستقيمو خطونو نسبي حالت

موازي

منطبق

متقاطع

متنافر

د يوې مستقيمې کرښې او يوې مستوي نسبي حالت

متقاطع

منطبق

موازي

د دوو مستوي ګانو نسبي حالت

منطبق

متقاطع

عمود

په فضا کې موازي مستقيمونه:

دوې مستقيمې کرښې چې په يوې مستوي کې واقع او مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستقيمونه بلل کيږي.

په فضا کې د دوو مستقيمونو تر منځ زاويه:په فضا کې دوې متوازي الاضلاع او هم جهته زاويې سره مساوي دي.

په فضا کې موازي مستقيمونه او مستوي: يو مستقيم خط له يوې مستوي سره هغه وخت موازي بلل کيږي، چې هيڅ مشترکه نقطه ونه لري.

په فضا کې متعامد مستقيمونه او مستوي ګانې:

که د Δ مستقيم د (O) په نقطه کې د P پر مستوي عمود وي، ټول هغه مستقيم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تيريږي، د Δ پر مستقيمه کرښه باندې عمود دي؟

په فضا کې موازي مستوي ګانې:دوې مستوي ګانې، چې هيڅ ګډ ټکی ونه لري، موازي مستوي ګانې بلل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا او کړۍ ترې تاو کړئ.

1- د P مستوي د A او B نقطې مفروض دي. کـه د A او B د نقطو فاصله لـه p مـستوي سـره مـساوي وي، د P مستوي په هر حال کې:

a ـ د AB له خط سره موازي دی　　　b ـ د AB خط يې له منځه تېرېږي

c ـ د AB خط عمودي ناصف دی　　　d ـ د AB له خط سره موازي دي يا له AB څخه تېرېږي

2- که د Δ خط د P د مستوي په ټولو خطونو عمود وي، نو:

a ـ د Δ خط د مستوي پر ټولو خطونو عمود دی.

b ـ د Δ خط يوازې د P مستوي پر دوو خطونو عمود دی.

c ـ د Δ خط د P مستوي له بې شمېره خطونو سره موازي دی.

d ـ د Δ خط يوازې د P مستوي له يوه خط سره موازي دی.

3- په دقيق ډول له لاندې کومو اجزاوو څخه يوه مستوي نه تېرېږي له:

a ـ هغو درې نقطو څخه چې پر يو مسقيم واقع دي.　　　b ـ له دوو متقاطع خطونو څخه

c ـ د يو خط او د هغې له خارجي نقطې څخه　　　d ـ څلور متمايزې مختلفې نقطې

4- له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې هر وخت سم نه وي.

a ـ که د Δ مستقيم خط د P له مستوي سره موازي وي او له هغه خط څخه يـوه مـستوي تېـره کـړو، دا مستوي د P له مستوي سره موازي دی.

b ـ که د Δ او Δ' دوه خطونه د d له خط سره موازي وي، هغه وخت Δ او Δ' يو له بل سره موازي دي.

c ـ که د Δ او Δ' دوه خطونه موازي وي او د P مستوي د Δ خط قطع کړي، د Δ' خط هم قطع کولای شي.

d ـ که دوې مختلفې مستوي‌گانې په يوه نقطه کې شريکې وي، نو نوموړې مستوي‌گانې د ياد شوي ټکـي پـه امتداد کې شريکې دي.

5- د Δ خط د P مستوي قطع کوي، خـو د P پـر مـستوي عمـود نـه دی. دا خـط د P د مـستوي پـه څـو خطونو باندې عمود دی؟

a) 0　　　b) 1　　　c) 2　　　d) بې شمېره

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- له لاندې څوابونو څخه کوم يو يې هر وخت سم نه دي.

a _ که کوم خط د مستوي له خطونو سره موازي وي او متمايز وي، نوموړی خط د هغې لـه مـستوي سـره موازي دی.

b _ که يو خط يو له متقاطع مستوي ګانو څخه قطع کړي، بله هم قطع کوي.

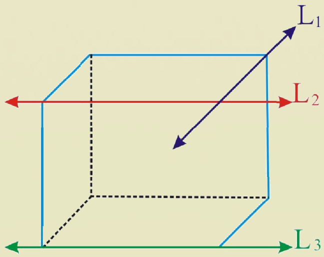
c _ که يو خط يوه له دوو موازي مستوي ګانو څخه قطع کړي، بله يې هم قطع کوي.

d _ که يوه مستوي يوه له دوو موازي مستوي‌ګانو څخه قطع کړي، بله يې هم قطع کوي.

لاندې سوالونه حل کړئ:

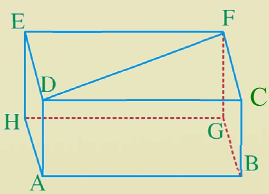
1- که چېرې د E او F مستوي ګاني يوله بله سره موازي او د L_1 مستقيم خط د E په مستوي کې او د L_2 مستقيم خط د F په مستوي کې واقع وي آيا $L_1 // L_2$ دي؟

2- که دوه مستقيم خطونه له يوې مستوي سره موازي وي، نوموړي خطونه خپل منځ کې عمـود کيـدای شي.



3- پـه لانـدې مـستطيل کـې د L_1, L_2 او L_3 خطونـو موقعيت نظر يو بل ته څرګند کړئ. د دې خطونو کومې جوړې متقاطع، کومې جوړې يـې مـوازي او کومې جوړې متنافرې دي؟

4- که د P_1 او P_2 مستوي‌ګانې د P پر مستوي باندې عمود وي، د P_1 او P_2 مستوي ګانې په خپل منځ کې موازي دي؟



5- په مخامخ شکل کې هر څلور ضلعي يو مستطيل دی.

a _ د دوو مستوي‌ګانو نومونه واخلئ چې پر AD عمـود وي او ووايـئ ولې عمود دي؟

b _ د دريو قطعـه خطونـو، نومونـه واخلـئ چې پـر $ABCD$ مـستوي باندې عمود وي.

c _ د $E\hat{D}F$ زاويه قايمه ده.

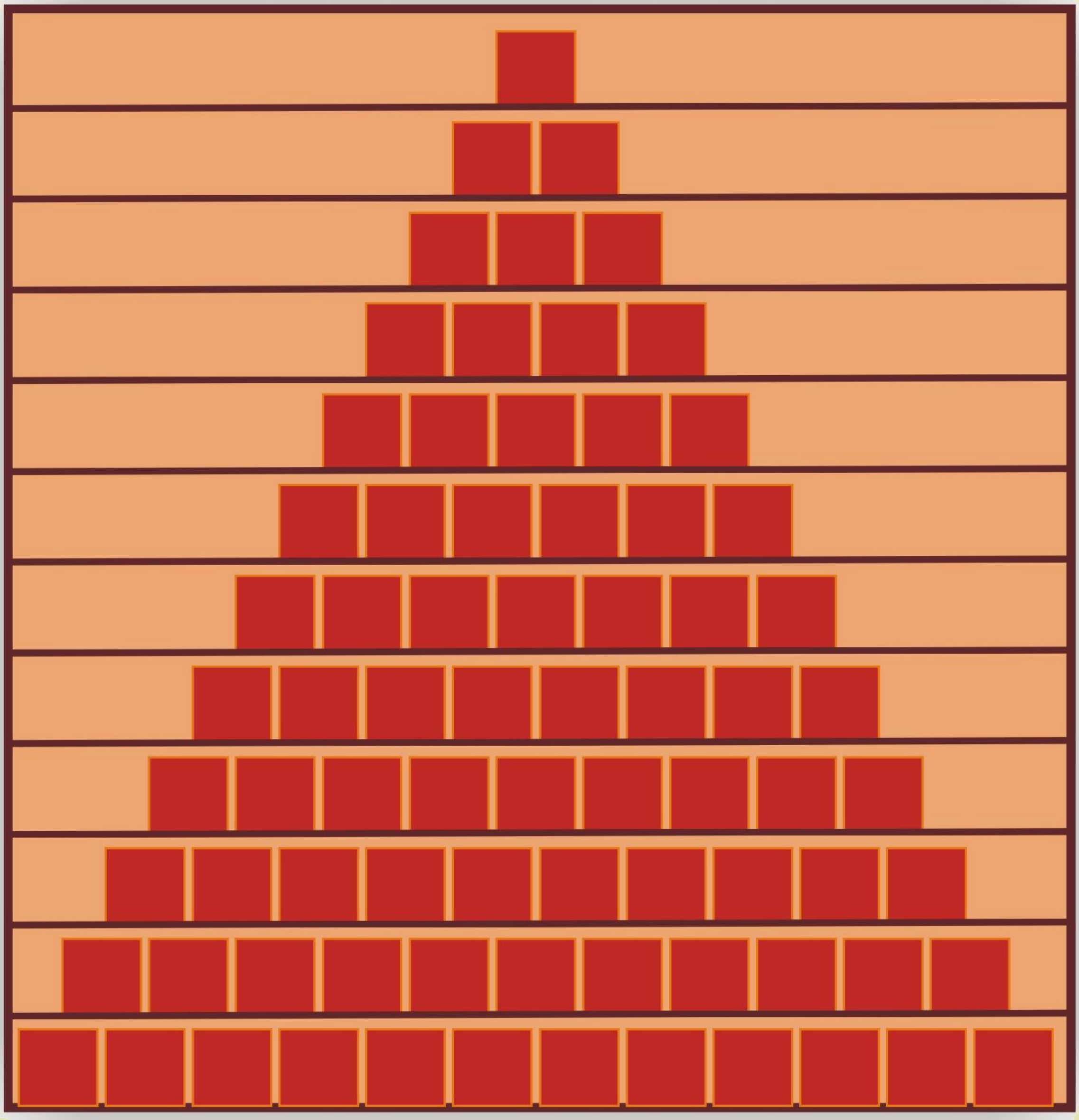
d _ د $D\hat{F}C$ زاويه قايمه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم څپرکی

ترادفونه او سلسلې

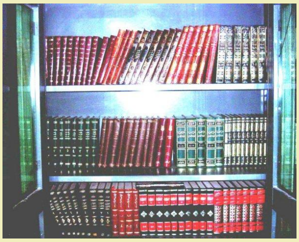
(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

تـرادفـونه

Sequence



په مخامخ شکل کې څه ډول ترتیب وینئ.

هر ترتیب چې شتون لري، توضیح یې کړئ.

تعریف: د $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ عددونه د عددونو د ترادف په نامه یادیږي، یا ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه یې طبیعي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي عددونه تشکیلوي. غیر منظم دعددونو لیکل یو ترادف نه دی.

له پورتنیو عددونوڅخه هر یو د نوموړي ترادف حدونه دي، a_1 یې لومړی حد او a_2 یې دویم حد او a_n دترادف $n-$ام حد دی، ترادف په لنډ ډول داسې لیکي: $\{a_n\}_{n\in IN}$ په دې حالت کې a_n د ترادف $n-$ام حد دی.

د جفتو عددونو ترادف	$2,4,6,8,\ \ldots\ ,2n$
د طاقو عددونو ترادف	$1,3,5,7,\ \ldots\ ,2n-1$
د 5 د مضربونو ترادف	$5,10,15,20,\ \ldots\ ,5n$

معمولاً یو ترادف د یوه اختیاري $n-$ام حد په واسطه ټاکل او تعریفیږي؛ مثلاً:

$$a_n = 2n \quad , \quad n=1,2,3,\ \ldots$$
$$b_n = 2n-1 \quad , \quad n=1,2,3,\ \ldots$$
$$c_n = 5n \quad , \quad n=1,2,3,\ \ldots$$

فعالیت

- د $\{a_n\}=\{\frac{n+1}{n}\}$ ترادف په پر مختللي شکل ولیکئ.
- د $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ترادف په پرمختللي(انکشافي) شکل ولیکئ.

هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول زیاتیږي متزاید ترادف بلل کیږي، لکه: د جفت، طاق او 5 د مضربونو عددونوترادفونه.

او هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول کمیږي، متناقص ترادف بلل کیږي، لکه:

د 5 مضرب عددونو معکوس ترادف $\frac{1}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{15},\ \ldots\ ,\frac{1}{5n}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $a_n = n^2$ او $b_n = \frac{3}{n}$ ترادفونه متزايد دي، که متناقص؟

حل:

$$a_n = n^2 \quad , \quad n = 1,2,3,\ ... \quad , \quad a_n = 1,4,9,16,25,36,\ ...$$

$$b_n = \frac{3}{n} \quad , \quad n = 1,2,3,\ ... \quad , \quad b_n = 3,\frac{3}{2},1,\frac{3}{4},\frac{3}{5},\ ...$$

ليدل کېږي چې د a_n ترادف د حدونو عددي قيمت په تدريجي ډول زياتېږي، نو د a_n ترادف متزايد دی، همدارنگه ليدل کېږي چې د b_n د ترادف د حدونو عددي قيمت په تدريجي ډول کمېږي، نو د b_n ترادف يو متناقص ترادف دی.

يادډښت: هغه ترادفونه چې دحدونوشمېر يې معلوم وي معين ترادفونه او هغه ترادفونه چې د حدونو شمېر يې معلوم نه وي، د غير معينو ترادفونو په نامه يادېږي.

دويم مثال: د $1,2,4,8...$ ترادف په پام کې ونيسئ او $n-$ ام حد يې پيدا کړئ. $a_n = 2^{n-1}$ دی.

حل: $n-$ ام حد يې $an = 2^{n-1}$ دی.

دريم مثال: که د يوه ترادف $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ وروستي حد درکړل شوی وي، 5 لومړنی حدونه يې پيدا کړئ.

حل: د 5 لومړنيو حدونو د پيدا کولو لپاره $n = 1,2,3,4,5$ قيمتونه ورکوو او په ترادف کې يې وضع کوو چې په دې ډول د ترادف 5 لومړني عناصر(حدونه) په لاس راځي.

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$n = 1 \quad , \quad a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \quad , \quad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$n = 3 \quad , \quad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$n = 4 \quad , \quad a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$$

$$n = 5 \quad , \quad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

پوښتنې

1- په لاندې ترادفونوکې $n-$ ام حد وټاکئ؟

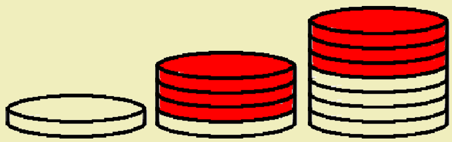
$$\left.\begin{array}{l} 1,3,5,7,\ ... \\ \frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9}\ ,\ ... \end{array}\right\}$$

2- که يو ترادف د $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ په شکل راکړل شوی وي، 6 لومړني پرله پسې حدونه يې وليکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حسابي ترادف

Arithmetic Sequences



که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپیر یې یو ثابت عدد وي، دا ترادف په څه نوم یادېږي.

فعالیت

- د مخامخ عددونو نوترادف په پام کې ونیسئ $5,8,11,14,17,20$
- د لومړي او وروستي حد ترمنځ توپیر څو دی؟
- د پورتنیو عددونو ترادف له څو حدونو څخه جوړ شوی دی؟
- له کیڼې څخه ښي خوا ته د پورتنیو عددونو ترادف ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف ویلای شو :

تعریف: که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپیر یو ثابت عدد وي، هغه د حسابي ترادف په نوم یادېږي.

دغه ثابت عدد له ګډ توپیر (Common deference) څخه عبارت دی او په d سره ښودل کېږي که d یو مثبت عدد ($d>0$) وي، ترادف متزاید او که d منفي ($d<0$) وي، ترادف متناقص بلل کېږي، لکه: په لاندې مثالونو کې:

$$2,5,8,11,14,17,\ \dots$$

$$\left.\begin{aligned} d&=5-2=3\\ d&=8-5=3\\ d&=11-8=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ d=3>0$$

څرنګه چې $d>0$ دی نو ترادف متزاید دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم ترادف په پام کې نیسو:

$$4,0,-4,-8,-12,-16,-20,\ \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} d=0-4=-4 \\ d=-4-0=-4 \\ d=-8-(-4)=-4 \\ d=-12-(-8)=-4 \\ d=-16-(-12)=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow d=-4<0$$

ځرنګه چې $d<0$ دی نو ترادف متناقص دی.

لومړی مثال: داسې یو ترادف ولیکئ چې لومړی حد يې $\frac{3}{2}$ او ګډ توپير يې 2 وي.

حل: ځرنګه چې لومړی حد يې $a_1=\frac{3}{2}$ او ګډ توپير يې $d=2$ دی، نو په عمومي ډول ليکلای شو:

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots$$

$$a_2-a_1=d \quad \Rightarrow \quad a_2=a_1+d$$

$$a_3-a_2=d \quad \Rightarrow \quad a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d$$

$$a_4-a_3=d \quad \Rightarrow \quad a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d$$

اوس د $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots\ ,a_n$ قیمتونه په ترادف کې وضع کوو:

$$a_1\ ,(a_1+d)\ ,\quad (a_1+2d)\quad ,\quad (a_1+3d),\ \ldots$$

$$\frac{3}{2}\ ,(\frac{3}{2}+2)\ ,\quad (\frac{3}{2}+2+2)\quad ,\quad (\frac{3}{2}+2+2+2),\ \ldots$$

$$\frac{3}{2}\ ,\quad \frac{7}{2}\quad ,\quad \frac{11}{2}\quad ,\quad \frac{15}{2},\ \ldots$$

دویم مثال: کوم یو له لاندې ترادفونو څخه حسابي ترادف دی.

$$a)\ 1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4,\ \ldots$$

$$b)\ 1,2,4,8,16,\ \ldots$$

a جزء حل: د حسابي ترادف د تعريف په پام کې نيولو سره د حدونو ګډ توپير په لاس راوړو:

$$1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4$$

$$d=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

$$d=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$
$$d = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$
$$d = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

ليدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو حدونو تر منځ ګډ توپير $\frac{1}{2}$ ثابت عدد دی، نو د حسابي ترادف تعريف پر بنسټ ويلی شو چې نوموړی ترادف يو حسابي ترادف دی.

د b جزء حل:

$$1 \ , \quad 2 \ , \quad 4 \ , \quad 8 \ , \quad 16$$
$$d = 2 - 1 = 1$$
$$d = 4 - 2 = 2$$
$$d = 8 - 4 = 4$$
$$d = 16 - 8 = 8$$

ليدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو عناصرو ترمنځ ګډ توپير يو ثابت عدد نه دی، نو ترادف حسابي ترادف نه دی.

په يوه حسابي ترادف کې د n-ام حد ټاکل:

که چېرې د يوه حسابي ترادف $a_1, a_2, \ \dots \ , a_n$ لومړی حد په a او ګډ توپير يې d وي، د n-ام حد د پيداکولو لپاره له لاندې تحليلي ثبوت څخه ګټه اخلو، ددې کار لپاره د $5, 7, 9, 11, \ \dots$ ترادف په پام کې نيسو.

$$5, 7, 9, 11, \ \dots$$
$$d = 7 - 5 = 2$$
$$5, 5+2, 5+2\cdot 2, 5+2\cdot 2\cdot 2, \ \dots$$
$$a_1 = 5, \ a_2 = 5+2\cdot 2\ , \ a_3 = 5+2\cdot 2\cdot 2, \ \dots$$
$$a_1, a_2, a_3, \ \dots$$
$$a_1, (a_1+d), (a_1+2d), (a_1+3d), \ \dots$$

په عمومي ډول ليکلای شو چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتني مثال په پام کې نيولو سره په عمومي توګه کولای شو وليکو چې:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = a_1\\
&a_2 - a_1 = d \quad \Rightarrow \; a_2 = a_1 + d\\
&a_3 - a_2 = d \quad \Rightarrow \; a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d\\
&a_4 - a_3 = d \quad \Rightarrow \; a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d\\
&\vdots\\
&a_n - a_{n-1} = d \quad \Rightarrow \; a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d
\end{aligned}
$$

لومړی حد	دويم حد	دريم حد	څلورم حد		n - ام حد
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	....	$a+(n-1)d$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
a_1	a_2	a_3	a_4		a_n

په پايله کې په لاس راځي چې د a , d , n او a_n ترمنځ لاندې اړيکه شتون لري:

$$a_n = a + (n-1)d$$

لومړی مثال: د دغه $-2\ ,\ 5\ ,\ 12\ ,\ .\ .\ .$ حسابي ترادف 30 - ام حد پيدا کړئ.

حل:

$$
\left.\begin{aligned}
&a_1 = -2\\
&d = 5-(-2) = 7\\
&n = 30\\
&a_{30} = ?
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
&a_n = a + (n-1)d\\
&a_{30} = -2 + (30-1)7\\
&a_{30} = -2 + 29\cdot 7\\
&a_{30} = -2 + 203 \Rightarrow a_{30} = 201
\end{aligned}
$$

دويم مثال: دلاندې حسابي ترادف د حدونو شمېر په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$35\ ,\ 40\ ,\ 45\ ,\ .\ .\ .\ ,2000$$

$$
\begin{aligned}
&a_n = a + (n-1)d\\
&2000 = 35 + 5n - 5\\
&2000 = 30 + 5n\\
&2000 - 30 = 5n\\
&1970 = 5n \quad \Rightarrow \; n = 394
\end{aligned}
\qquad
\left.\begin{aligned}
&a = 35\\
&d = 40 - 35 = 5\\
&a_n = 2000
\end{aligned}\right\}
$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- که چېرې په یوه حسابي ترادف کې $d=4, a_1=-11$ وي، a_2 او a_3 حدونه پیدا کړئ.

د حسابي ترادف وسطي حد:

که د یوه حسابي ترادف درې پرله پسې حدونه د a_{n-1}, a_n, a_{n+1} ولرو، په داسې حال کې چې $n=2,3,4$ دی.

$$a_{n-1}+a_{n+1}=[a_1+(n-2)d]+[a_1+nd]$$
$$=[a_1+nd-2d]+[a_1+nd]=[a_1+nd-2d+a_1+nd]$$
$$a_{n-1}+a_{n+1}=[2a_1+2nd-2d]=2[a_1+(n-1)d]=2a_n$$
$$\Rightarrow\ 2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}\quad \Rightarrow a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$$

لومړی مثال: د 7 او 23 عددونو حسابي اوسط عبارت دی، له:

$$a_n=\frac{7+23}{2}=\frac{30}{2}=15$$

دويم مثال: د x عدد داسې وټاکئ چې د $\underbrace{2x+1}_{a_{n+1}},\underbrace{2x-4}_{a_n},\underbrace{3x+3}_{a_{n-1}}$ درې حده حسابي ترادف تشکيل کړي، ترادف یې ولیکئ.

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\quad \Rightarrow 2x-4=\frac{3x+3+2x+1}{2}=\frac{5x+4}{2}$$
$$4x-8=5x+4\quad \Rightarrow\ 4x-5x=4+8=12\quad \Rightarrow\ -x=12$$
$$x=-12$$

ترادف یې عبارت دی له: $2(-12)+1\quad ,\quad 2(-12)-4\quad ,\quad 3(-12)+3$

$$-24+1\,,-24-4,-36+3\ \Rightarrow -23,-28,\ -33,-38,-43,\ \ ....$$

يادداښت

که د یوه حسابي ترادف n – ام او m – ام حدونه معلوم وي، يعنې:

$$a_n=a+(n-1)d\qquad ....\ I$$
$$a_m=a+(m-1)d\qquad ....\ II$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نـو د I اړيکـې څخـه II اړيکـه کمـوو، پـه پايلـه کـې کـولای شـو ګـډ تـوپير داسـې پـه لاس راوړو $d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$ (ثبوت يې د زده‌کوونکو دنده ده) چې په ياد شوي فورمول کې d ګډ تـوپير، a_n د تـرادف $n-$ام حد ، a_m د ترادف $m-$ام حد دی.

دريم مثال: د يوه حسابي ترادف پنځم حد 27 او نهم حد يې 47 دی، ګډ تـوپير او لـومړی حـد يـې پيـدا کړئ، په پای کې د ترادف ۹ حدونه وليکئ.

$$\square\,,\ \square\,,\ \square\,,\ \square\,,\ 27\,,\ \square\,,\ \square\,,\ \square\,,\ 47$$

حل:

$$\left.\begin{aligned} a_n&=47\\ n&=9\\ a_m&=27\\ m&=5\\ d&=?\\ a&=?\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&d=\frac{a_n-a_m}{n-m}=\frac{47-27}{9-5}=\frac{20}{4}=5\\ &d=5\\ &a_n=a_1+(n-1)d \ \Rightarrow\ 47=a_1+(9-1)5=a+40\\ &\Rightarrow\ 47-40=a_1 \quad \Rightarrow\ a_1=7\end{aligned}$$

ترادف يې عبارت دی له: $7,12,17,22,27,32,37,42,47$

هارمونيکي ترادف:د $\{a_n\}$ يوه ترادف ته هغه وخت هارمونيکي ترادف وايي چې معکوس يې $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ يو حسابي ترادف وي.

لومړی مثـال: د $...\ ,2,4,6,8,10$ تـرادف يـو حسابي تـرادف دی، ځکـه چې $d=2$ دی، د دغـه ترادف د حدونو معکوس يعنې $...,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{10}$ يو هارمونيکي ترادف تشکيلوي.

دويم مثال: د طبيعي عددونو معکوس ترادف يو هارمونيکي ترادف دی. $n-$ ام حد يې وليکئ.

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ \dots\ ,\frac{1}{n}$$

$$\{a_n\}=\frac{1}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال : که چېرې په یوه هارمونیکې ترادف کې $a_1 = \frac{1}{4}$ او $d = -3$ وي، هارمونیکې ترادف یې په لاس راوړئ

حل:

$$\frac{1}{4}, (\frac{1}{4}-3), (\frac{1}{4}-3-3), (\frac{1}{4}-3-3-3), (\frac{1}{4}-3-3-3-3), \ldots$$

$$\frac{1}{4}, -\frac{11}{4}, -\frac{23}{4}, -\frac{35}{4}, -\frac{47}{4}, \ldots$$

فعالیت:

آیا د طبیعي طاقو عددونو معکوس ترادف یو هارمونیکي ترادف دی، $n-$ ام حد یې ولیکئ.

هـارمونیکي حـسابي اوسـط: کـه درې مسلـسل عناصـر a_{n-1} ، a_n او a_{n+1} پـه داسې حـال کـې چې $n = 2, 3, 4 \ldots$ دی، له یوه حسابي ترادف څخه وټاکل شي، څرنګه چې $\frac{1}{a_{n-1}}, \frac{1}{a_n}$ او $\frac{1}{a_{n+1}}$ د یوه هارمونیک ترادف حدونه دي لرو، چې:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1}}}{2} = \frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2} = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2a_{n+1} \cdot a_{n-1}}$$

$$a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

په پایله کې پورتنۍ اړیکه چې هارمونیک حسابي اوسط ښیې، لیکلای شو:

$$\boxed{a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}}$$

مثال : د 2 او 8 عددونو هارمونیکي اوسط پیدا کړئ.

حل: له $a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$ فارمول څخه په کار اخیستنې سره لرو چې:

$$a_n = \frac{2(2 \cdot 8)}{2+8} = \frac{2 \cdot 16}{10} = \frac{16}{5} = 3.2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د مخامخ ترادف 35 -ام حد پیدا کړئ. $-2\ ,\ 5\ ,\ 12\ ,\ ...$

2- آیا $\frac{5}{4}, 1, \frac{3}{4}$ یو حسابي ترادف تشکیلوي؟ د پوښتنې د سموالي په صورت کې یې مشترک توپیر پیدا کړئ.

3- د $2\sqrt{2}$ او $16\sqrt{2}$ تر منځ حسابي اوسط په لاس راوړئ.

4- که $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_{10} = \frac{84}{2}$ وي د d قیمت په لاس راوړئ.

5- له لاندې ترادفونو څخه کوم یو حسابي ترادف نه دی.

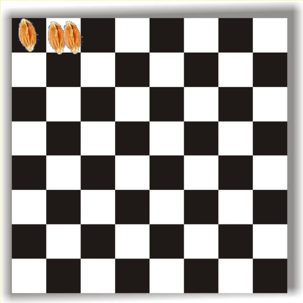
$a)\ 2\ ,\ \frac{9}{4}\ ,\ \frac{5}{2},\ \frac{11}{4},\ ...$

$b)\ 3\ ,\ 6\ ,\ 9\ ,\ 12,\ ...$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هندسي ترادف

Geometric Sequences



که د شطرنج د يوې تختې په لومړۍ خانه کې يوه دانه غنم او په دويمه خانه کې يې دوه دانې غنم په همدې ډول که په هره وروستۍ خانه کې د مخکنۍ خانې دوه برابره غنم کېښودل شي، نو د شطرنج د تختې په اخيره خانه کې(يوه د شطرنج تخته 64 خانې لري) به څو دانې غنم وي.

فعاليت

- د مخامخ ترادف عددونه په پام کې ونيسئ. $3\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ 24\ ,\ 48, \ldots$
- د پورتني ترادف د عناصرو ترمنځ کومه اړيکه موجوده ده؟
- د پورتني ترادف د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ نسبت پيدا او يو له بل سره يې پرتله کړئ.

له پورتني فعاليت څخه کولای شو لاندې پايله بيان کړو:

پايله

هغه ترادف چې د دوو پر له پسې حدونو ترمنځ نسبت يې يو ثابت عدد q وي، د هندسي ترادف په نامه يادېږي، يعنې:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \cdot q \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ \ldots$$

$$a_{1+1} = a_1 \cdot q \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 q$$

$$a_{2+1} = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_{3+1} = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

دلته q ګډ نسبت او a_1 د ترادف لومړی حد دی.

هندسي ترادف هغه وخت تاکل کېږي چې لومړی حد او ګډ نسبت يې معلوم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $. . . , 6 , 12 , 24 , 48 , 96$ هندسي ترادف په پام کې ونیسئ ،ګڼ نسبت یې په لاس راوړی.

حل: هر حد یې په مخکیني حد باندي وېشو:

$$96 \rightarrow 48 \rightarrow 24 \rightarrow 12 \rightarrow 6$$

$$q=\frac{48}{96}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{24}{48}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{12}{24}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

لیدل کېږی چې $q=\frac{1}{2}$ یو ثابت عدد وی.

فعالیت

- په یوه هندسي ترادف کې $a_1=2$ او $q=3$ دی، a_2 , a_3 او a_4 حدونه پیدا کړئ.

یادونه

$q>1$ لپاره ترادف متزاید د ی.

$q<1$ لپاره ترادف متناقص دی.

$q=1$ لپاره ثابت ترادف په لاس راځي.

دویم مثال: د $100, 300 , 900 , 2700 ,...$ هندسي ترادف په پام کې ونیسئ لومړی حد او ګڼ نسبت یې په لاس راوړئ او وواياست چې پورتنی هندسي ترادف متزاید دی او که متناقص.

حل:

$$\text{لومړی حد} = a = 2700$$

$$\text{ګڼ نسبت} = q = \frac{900}{2700}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$$

په پورتني مثال کې $q=\frac{1}{3}<1$ دی، نو نوموړی ترادف متناقص دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هندسي ترادف کې د n – ام حد پیدا کول:

که په یوه هندسي ترادف کې a لومړی حد، q ګډ نسبت او n د ترادف د حدونو شمېر وي،نو د n – ام حد پیدا کولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه کار اخلو.

که چېرې هندسي ترادف د $a_1, a_2, a_3, a_4, \ ......an$ په پام کې ونیسو، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$a_1 = a_1$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q$$

$$q = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$q = \frac{a_4}{a_3} \Rightarrow a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot q = (a_1 q^{n-2}) \cdot q = a_1 q^{n-1}$$

اوس د $a_1, a_2, a_3, a_4, \ ....$ په ترادف کې یې قیمتونه ږدو:

لومړی حد	دویم حد	دریم حد	څلورم حد		n - ام حد
a_1	a_2	a_3	a_3	, ... ,	a_n
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	, ... ,	$\downarrow$
a_1	$a_1 q$	$a_1 q^2$	$a_1 q^3$	, ... ,	$a_1 q^{n-1}$

یعنې په هندسي ترادف کې n – ام حد یا عمومي حد، د دغې اړیکې $a_n = a \cdot q^{n-1}$ په واسطه پیدا کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د لاندې هندسي ترادف شپږم حد پیدا کړئ.

حل: $5\ ,\ -10, 20, -40,\ ....$

$$\left.\begin{array}{l} a=5 \\ q=\dfrac{-10}{5}=-2 \\ n=6 \\ a_6=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_n=aq^{n-1} \\ a_6=5(-2)^{6-1} \\ a_6=5(-2)^5 \Rightarrow a_6=5(-32) \\ a_6=-160 \end{array}$$

دویم مثال: د .... , 2 , 4 , 8 هندسي ترادف دوولسم حد په لاس راوړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} n=12 \\ a=8 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n=aq^{n-1} \\ a_{12}=8(\frac{1}{2})^{12-1}=8(\frac{1}{2})^{11}=8\dfrac{1}{2^{11}} \\ a_{12}=\dfrac{8}{2^{11}}=\dfrac{2^3}{2^{11}}=2^{3-11}=2^{-8}=\dfrac{1}{2^8}=\dfrac{1}{256} \end{array}\right.$$

د هندسي ترادف وسطي حد:

که a, M, b د هندسي ترادف پر له پسې حدونه وي، د a, M او b, M ترمنځ اریکه پیدا کړئ.

$$\left.\begin{array}{l} q=\dfrac{M}{a} \\ q=\dfrac{b}{M} \end{array}\right\} q=q \Rightarrow \frac{M}{a}=\frac{b}{M} \Rightarrow M^2=a\cdot b$$

$$M=\sqrt{a\cdot b}$$

له پورتني فورمول څخه ویلی شو که چېرې a او b دوه مثبت حقیقي عددونه وي، نو د M حقیقي مثبت عدد ته د a او b هندسي وسط(Geometric mean) وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د 3 او 12 عددونو هندسي وسط پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a=3 \\ b=12 \end{array}\right\} M=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$$

$$M=6$$

څلورم مثال: د $32, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, 2$ هندسي ترادف نا معلوم حدونه پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=2 \\ n=5 \\ a_5=32 \\ q=? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_5=a\cdot q^{n-1} \quad \Rightarrow 32=2q^{5-1} \Rightarrow 32=2q^4 \\ q^4=\dfrac{32}{2}=16 \quad \Rightarrow q^4=16 \quad \Rightarrow q^4=2^4 \Rightarrow \boxed{q=2} \end{array}$$

$$a_1=2$$

$$a_2=a_1\cdot q=2\cdot 2=4$$

$$a_3=a_2\cdot q=a_1q^2=2\cdot 2^2=8$$

$$a_4=a_3\cdot q=a_1\cdot q^3=2\cdot 2^3=16$$

نو هندسي ترادف يې عبارت دی له: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 یا $2,4,8,16,32$

فعالیت

- که په هندسي ترادف کې a_n، n – ام حد، n د ترادف د حدونو شمېر او q ګډ نسبت وي، د q لپاره عمومي فورمول پیدا کړئ.

پنځم مثال: x داسې وټاکئ چې له لاندې حدونو څخه یو هندسي ترادف جوړ شي.

$$x-1 \ , \quad x+3 \quad , \ x+1$$

$$M=\sqrt{a\cdot b} \quad \Rightarrow (x+3)=\sqrt{(x-1)(x+1)} \quad \Rightarrow (x+3)^2=(x-1)(x+1)$$

$$x^2+6x+9=x^2-1 \Rightarrow 6x+10=0 \ , \ x=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}$$

$$x=-\frac{5}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د هندسي ترادف 5 حدونه داسې وليکئ چې لومړی حد يې 5 او اخيري حد يې $\frac{5}{16}$ وي.

2- کوم يو له لاندې ترادفونو څخه هندسي ترادف دی.

$a)\ \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \ldots$

$b)\ -4, -2, 0, 2, 4, \ldots$

3- د $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \ldots$ هندسي ترادف دوولسم حد پيدا کړئ.

4- د $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{4}$ هندسي وسط په لاس راوړې.

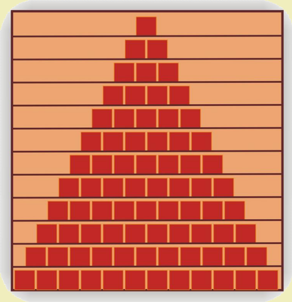
5- د $27, ?, ?, ?, \frac{1}{3}$ حدونو تر منځ درې هندسي وسطونه په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترادفونو قسمي مجموعه

a - په لسم کتارکې د قوطيو شمېر څو دی؟

b - په الماری کې د ټولو قوطيو شمېر پيدا کړئ؟



فعاليت

- د ... ,$2,4,6,8$ ترادف په پام کې ونيسئ.
- د دويم او دريم حدونو د جمعي حاصل وليکئ.
- د لس لومړيو پرله پسې حدونو د جمعي حاصل پيدا کړئ.
- د n – ام حد د جمعي حاصل وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله بيانېږي:

څرنګه چې د لومړي د n حدونو د جمعي حاصل مشکل دی چې ټول n حدونه يې وليکو، نو ځکه يې دوه يا درې لومړی حدونه ليکو او وروسته له دريو ټکو n – ام حد ليکو.

څرنګه چې يو ترادف د بې نهايت حدونو لرونکی دی، که د زياتو حدونو د جمعي حاصل، لکه: 100 , 1000 او داسې نورو حدونو په پام کې وي، نو د جمعي حاصل يې ستونزه جوړوي.

په عمومي ډول د ترادف د n لومړيو حدونو a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n د جمعي حاصل په لاندې ډول ليکو:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

د اسانتيا او لنډيز لپاره په محاسبو کې $\sum$ له دې سمبول څخه کار اخلي.

د $\sum$ پورتنۍ او ښکتنۍ نښې دا راښيي چې i له 1 څخه تر n پورې ټول طبيعي عددونه اخلي، i د انډکس په نامه يادېږي. د يوې مجموعې د انډکس لپاره هر حرف کارول کېږي، خو د i, n, k, j حروف ډېر معمول دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلاً: $\sum_{k=1}^{n} 2k=\sum_{i=1}^{n} 2i = \sum_{j=1}^{n} 2j = 2\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 3+\cdot\cdot\cdot+2n$

لومړی مثال: لاندې مجموعه ($\sum \frac{1}{1^i}$ $\sum_{i=1}^{7}$) په انکشافی شکل ولیکئ.

حل: $\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{i}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{1089}{420}$

دويم مثال: لاندې د جمعي حاصل د ($\sum$) په شکل وليکئ.

$a)\ 1+3+5+7+\ \ldots\ +(2n-1)$

$b)\ 1+4+9+\ \ldots\ +n^2$

د a جزء حل:

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

د b جزء حل:

$$1+4+9+\ \ldots\ +n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2$$

دريم مثال: لاندې مجموعه په انکشافي شکل وليکئ.

$$\sum_{i=4}^{n} i(i+2)=?$$

حل:

$$\sum_{i=4}^{n} i(i+2)=4(4+2)+5(5+2)+6(6+2)+7(7+2)+\ldots+n(n+2)$$
$$=4\cdot 6+5\cdot 7+6\cdot 8+\ldots+n(n+2)$$
$$=24+35+48+63+\ldots+n(n+2)$$

څلورم مثال: د دغې مجموعې $\sum_{n=7}^{10}\frac{n+1}{n-1}$ حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\sum_{n=7}^{10}\frac{n+1}{n-1}=\frac{7+1}{7-1}+\frac{8+1}{8-1}+\frac{9+1}{9-1}+\frac{10+1}{10-1}=\frac{8}{6}+\frac{9}{7}+\frac{10}{8}+\frac{11}{9}$$
$$=\frac{4032+3888+3780+3696}{3024}=\frac{15396}{3024}=\frac{5132}{108}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تر اوسه مو يوازې د يوه ترادف د n حدونو د جمعې حاصل وخېږه، که وغواړو د يوه ترادف د $\{a_n\}_{n\in IN}$ ټولو حدونو د جمعې حاصل پيدا کړو، په دې صورت کې ليکو:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}a_i$$

په دې حالت کې i ټول طبيعي عددونه اخېستلای شي.

د $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ سلسله د بې نهايت سلسلې(Series) په نامه يادېږي.

د $a_1+a_2+a_3+\ldots$ عددونه د سلسلې حدونه او a_n د سلسلې $n-$ام حد يا دسلسلې عمومي حد بلل کېږي.

څرنگه چې موږ نشو کولای، د عددونو بې نهايت شمېر جمع کړو، خوپه رياضي کې د ځينو قاعدو په کارولوسره کولای شو، يوې سلسلې ته ديوې مجموعې نسبت ورکړو، خو دلته غواړو د يوې سلسلې د n حدونو مجموعه پيدا کړو.

د يوې سلسلې د n لومړيو عناصرو مجموعه $\ldots+a_n+\ldots+a_3+a_2+a_1=\sum_{i=1}^{\infty}a_k$ د نومورې سلسلې د n حدونو د قسمي مجموعې په نامه يادېږي، که هغه په S_n وښيو، نو لرو:.

$$S_1=a_1$$
$$S_2=a_1+a_2$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

مثال: د $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ سلسلې S_6 او S_8 حساب کړئ.

حل:

$$S_6=1+2+3+4+5+6=21$$
$$S_8=1+2+3+4+5+6+7+8=36$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ او $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ دوې سلسلې او c يو ثابت عدد وي لاندې، خاصيتونه د قسمي مجموعو لپاره سم دي:

$$\sum_{k=1}^{n} c = c + c + \ \dots \ + c = nc$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

پوښتنې

1. لاندې مجموعې حساب کړئ.

$a)\ \sum_{i=1}^{6} \sqrt{i}$ $\qquad b)\ 3\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1}$ $\qquad c)\ \sum_{k=1}^{3} (4k^2 - 3k)$

2. لاندې مجموعې د $\sum$ په شکل کې وليکئ.

$a)\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{19}{20}$

$b)\ 1 + 4 + 9 + \dots + n^2$

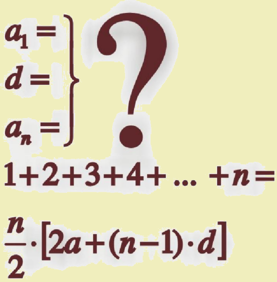
$c)\ 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$

3. لاندې قسمي مجموعې په لاس راوړئ.

$a)\ \sum_{i=4}^{n} i(i+2)$ $\qquad b)\ \sum_{i=1}^{n} (3i - 2)$ $\qquad c)\ \sum_{i=1}^{n} (2 + 5i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حسابي ترادف د n لومړيو حدونو قسمي مجموعه



که $a_1 , a_2 , a_3 ,\ldots ,a_n$ يو حسابي ترادف وي، نو $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ د يوې حسابي سلسلې قسمي مجموعه کېدلای شي؟

که چېرې ديوه حسابي ترادف د حدونو ترمنځ د جمعې نښه وي، هغې ته حسابي سلسله ويل کېږي. ياپه بل عبارت د يوه حسابي ترادف د جمعې حاصل ته حسابي سلسله وايي.

په يوه حسابي ترادف کې چې لومړی حد يې a ګډ فرق يې d او اخيري حد يې a_n وي، د حدونو د جمعې لپاره عمومي فورمول داسې په لاس راوړو:

$$S = a + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_{11} + 3d) + \ldots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \quad \ldots \text{ I}$$

$$S = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + (a_n - 3d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \quad \ldots \text{ II}$$

د I او II اړيکې خوا په خوا جمع کوو:

$$2S=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\ldots+(a_1+a_n)+a_1+a_n}_{n \text{ خلې } n(a+a_n)}$$

$$2S=n(a+a_n) \Rightarrow S=\frac{n}{2}(a+a_n)\ldots\text{I}$$

د I فورمول د حسابي سلسلې جمع راښيي چې لومړی حد، اخيري حد اود جملاتو شمېر يې معلوم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د حسابي سلسلې د جمعې حاصل په لاس راوړئ، داسې چې $a_n = 25, a = 4$ او د حدونو شمېر يې 8 وي.

حل:

$$a_1 = 4$$

$$a_n = 25 \qquad S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$n = 8 \qquad S = \frac{8}{2}(4+25) \Rightarrow S = 4(29) = 116$$

که چېرې په يوه حسابي سلسله کې لومړی حد، د حدونو شمېر او ګډ توپير ورکړل شوی وي، د جمعې حاصل يې له لاندې اړيکې څخه په لاس راځي:

$$S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \text{ .... III}$$

دويم مثال: د لاندې سلسلې د 201 حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

$$7 + 11 + 15 + \ldots$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a = 7 \\ d = 4 \\ n = 201 \\ S_{201} = ? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\ S_{201} = \frac{201}{2}[2 \cdot 7 + (201-1)4] \\ S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 200 \cdot 4) \quad \Rightarrow \quad S_{201} = \frac{201}{2}(14+800) = \frac{201}{2} \cdot 814 \\ S_{201} = 81807 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د طبیعي عددونو سلسله په پام کې ونیسئ لومړی حد، ګډ توپیر او $n-$ام حد یې ولیکئ ورووسته د مسلسلو طبیعي عددونو د جمعې دحاصل عمومي فورمول په لاس راوړئ.

په یاد ولرئ: د طبیعي جفتو پر له پسې عددونو د جمعې حاصل هم یوه حسابي سلسله ده چې فورمول یې په لاندې ډول په لاس راوړو: $2+4+6+8 \quad ...$

$$\left.\begin{array}{l} a=2 \\ d=2 \\ n=n \\ S_n=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \\ S_n=\frac{n}{2}[2\cdot 2+(n-1)2] \\ S_n=\frac{n}{2}[4+2n-2]=\frac{n}{2}(2+2n) \quad \Rightarrow \quad S_n=n(n+1) \end{array}$$

دریم مثال: د جفتو پر له پسې عددونو د سلسلې $(2+4+6+8+...)$ د 200 لومړیو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

حل:

$$\left.\begin{array}{l} n=200 \\ S_{200}=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S_n=n(n+1) \\ S_{200}=200(200+1) \quad \Rightarrow \quad S_{200}=200(201) \\ S_{200}=40200 \end{array}$$

څلورم مثال: د $2+4+...+$ جفتو عددونو د سلسلې د 200 حدونو مجموعه پیدا کړئ.

فعالیت

- د طبیعي طاقو پرله پسې عددونو د حسابي سلسلې د جمعې حاصل فورمول پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. د لاندې حسابي ترادفونو لسم او n – ام حدونه پیدا او همدرانگه د نومړو ترادفونو د لسو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$i)\ \ 2,0,-2,-4,\ \ldots$

$ii)\ 1,5,9,13,\ \ldots$

$iii)\ -2,-1,0,1,2,\ \ldots$

2. که یو ترادف د $2,5,8,11,\ \ldots$ په ډول راکړل شوی وي. د لاندې مجموعو قیمتونه حساب کړئ.

$a)\ \ S_8$ $\qquad\qquad$ $b)\ \ S_{10}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعې حاصل

که چېرې یوه مڼه نیمه او نیمه بیا نیمه او همداسې ادامه ورکړو یو هندسي ترادف په لاس راځي، له لومړی برخې نیولې، څو برخې سره جمع کړو چې د جمعې حاصل یې مساوي په 2 منو شي.

$1 \ , \ \frac{1}{2} \ , \ \frac{1}{4} \ , \ \frac{1}{8}$

فعالیت

- یو هندسي ترادف چې لومړی جمله یې a_1 او د دوو پرله پسې جملو ترمنځ نسبت یې مساوي په q راکړل شوی وي، لاندې فعالیت سرته ورسوئ.
- د ترادف دویمه جمله څو ده؟
- که چېرې دویمه جمله په q کې ضرب شي، دضرب حاصل یې له درېمې جملې سره پرتله کړئ.
- د ترادف د n جملو د جمعې حاصل د فورمول پیداکولو لپاره څه وړاندیز لرئ؟

پایله:

په یوه هندسي ترادف کې هر راتلونکی حد د مخکیني حد له ضرب څخه په q کې، په لاس راځي. دا خبره د ټولو حدونو لپاره یوه باوري خبره ده، په دې ډول د یوه هندسي ترادف $\{a_n\}$ د n جملو د جمعې حاصل $(S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ قیمت عبارت دی، له:

$$q \neq 1 \quad , \quad S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

د پورتنۍ اړیکې ثبوت کولای شو په اسانۍ سره په لاس راوړو:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ \ldots \ + a_1q^{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ I$$

$$S_n \cdot q = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ \ldots \ + a_1q^{n-1} + a_1q^n \quad \ldots\ldots\ldots \ II$$

له I اړیکې څخه د II اړیکه کموو:

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_1q^n = a_1(1-q^n)$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$q \neq 1$$

د پورتني رابطې صورت او مخرج په (-1) کې ضربوو

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{(q-1)}$$

پاسنۍ اړیکه هغه اړیکه ده، چې د هندسي ترادف د n جملو د جمعې حاصل په لاس راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: په یوه هندسي ترادف کې لومړی حد $a_1 = 2$ او ثابت نسبت $q = \frac{1}{2}$ دی.
د پاسني ترادف 5 لومړي حدونه او د لسو جملو د جمعې حاصل پیدا کړئ.
حل: پوهېږو چې $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ده، نو:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} \\ S = ? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ll} a_1 = 2(\frac{1}{2})^0 = 2 & a_4 = 2(\frac{1}{2})^{4-1} \\ a_2 = 2(\frac{1}{2}) = 1 & a_4 = 2(\frac{1}{8}) = \frac{1}{4} \\ a_3 = 2(\frac{1}{2})^{3-1} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} & a_5 = 2(\frac{1}{2})^4 = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \end{array}$$

$$S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 2 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_{10} = 2\frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{2-1}{2}} = 2\frac{\frac{1024-1}{1024}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = 2\frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{1024} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4092}{1024} = 3.99609375$$

دویم مثال: د لاندې هندسي ترادف د څو جملو مجموعه 80 کېږي؟

$2, 6, 18, \ldots$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ q = \frac{6}{2} = 3 \\ n = ? \\ S = 80 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} \\ 80 = \frac{2[(3)^n - 1]}{3-1} \\ 80 = (3)^n - 1 \;\; \Rightarrow \;\; 80 + 1 = (3)^n \\ 81 = 3^n \;\; \Rightarrow \;\; (3)^4 = 3^n \\ \Rightarrow n = 4 \end{array}$$

یعنې د پاسني هندسي ترادف د 4 جملو مجموعه 80 کېږي.

پوښتنې

1. په $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$ هندسي ترادف کې د 10 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
2. د $3, 6, 12, \ldots, 384$ هندسي ترادف د حدونو شمېر او مجموعه پیدا کړئ.
3. په $4, 12, 36, \ldots$ ترادف کې د څو جملو د جمعې حاصل 484 کېږي، د n – ام حد قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لایتناهي هندسي سلسلې

که د ترادف جملو ته په غور پاملرنه وکړو، په اسانۍ سره لیدل کېږي چې ترادف، جمله په جمله کوچنی کېږي.
آیا هر هندسي ترادف یوه عدد ته نږدې کېږي؟

$$S_\infty = \frac{a}{1-q}, |q|<1$$

که چېرې په یوه هندسي سلسله کې $|q|\geq 1$ او د حدونو شمېر یې معلوم نه وي، د متباعدې سلسلې(Divergent series) په نامه یادېږي.

او که چېرې $|q|<1$ وي، د متقاربې سلسلې(Convergent series) په نامه یادېږي. د متقاربو او متباعدو سلسلو د جمعې حاصل د پیداکولو فورمول:

$$S = a\frac{1-q^n}{1-q} = a\frac{-(q^n-1)}{-(q-1)} = a(\frac{q^n-1}{q-1})$$

که سلسله متباعده وي $|q|\geq 1$ او د حدونو شمېر بې نهایته وي، یعني $n\to\infty$ نو پوهېږو چې:

$$S_\infty = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{\infty - a}{q-1} = \infty \Rightarrow S_\infty = \infty$$

که سلسله متقاربه وي($|q|<1$) او د جملو شمېر بې نهایت وي، نو $q^n \to 0$ کوي.

$$S = a\cdot\frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_\infty = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a-a\cdot 0}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

یعني که متقارب سلسله ($|q|<1$) او د جملو شمېر یې بې نهایت وي، د نوموړې سلسلې د جمعې حاصل عبارت دی له: $S_\infty = \dfrac{a}{1-q}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د ...$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+$ سلسلې د جمعې حاصل محاسبه کړئ.

حل: په دې سلسله کې $a=1$, $q=\frac{1}{2}$ دی، څرنگه چې $|q|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$ دی، نو سلسله متقارب ده:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}=2$$

دويم مثال: که په يوه هندسي سلسله کې $a_1=27$ او $q=\frac{1}{3}$ وي، د سلسلې دحدونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې $|q|=\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده:

$$a_1+a_2+a_3+\ ...\ =\frac{a}{1-q}$$

$$27+9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...=\frac{27}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{\frac{3-1}{3}}=\frac{27}{\frac{2}{3}}$$

$$27\cdot\frac{3}{2}=\frac{81}{2}=40.5$$

دريم مثال: $0.6\overline{23}$ پيريوديک(متوالي) اعشاري کسر په عام کسر واړوئ.

حل: دا عدد کولای شو په لاندې ډول په هندسي ترادف واړوو.

$$\begin{aligned}0.6\overline{23}&=0.6232323...=0.6+0.023+0.00023+0.0000023+\ ...\\&=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\frac{23}{10000000}+\ ...\\&=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{10000})+\ ...\ ]\end{aligned}$$

د قوس دننه دهندسي ترادف د جمعې حاصل دی لومړی حدېې (۱) او د حدونو ترمنځ نسبت يې $\frac{1}{100}$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پاسنی سلسله کې $a=1$ او $1<\left|\dfrac{1}{100}\right|=\dfrac{1}{100}$ $|q|=$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{100})^2+...]$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{\frac{99}{100}}$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{100}{99}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{6}{10}+\frac{23}{990}=\frac{594+23}{990}=\frac{617}{990}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{617}{990}$$

څلورم مثال: د $0.\overline{3}$ متوالي اعشاري کسر د هندسي سلسلې په کارولو سره په عام کسر واړوئ.

حل: پوهېږو چې:

$$0.\overline{3}=0.3333\ ...\ =0.3+0.03+0.003+0.0003+\ ...$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\ ...$$

$$=\frac{3}{10}[1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ ...\ ]$$

لیدل کېږي چې په پاسنی سلسله کې $a=0.3$ او $1<\left|\dfrac{1}{10}\right|=\dfrac{1}{10}$ $|q|=$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$S=\frac{a}{1-q}=0.\overline{3}=\frac{3}{10}\cdot\frac{a}{1-q}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{10-1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\ 0.\overline{3}=\frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. لاندې هندسي مجموعې په لاس راوړئ.

$i)\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots$, $ii)\ 5+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots$

2. لاندې اعشاري متوالي کسرونه په عام کسر واړوئ.

$a)\ 0.2\overline{4}$ $b)\ 0.\overline{5}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خلورم څپرکي مهم ټکي

د ترادف تعریف: $a_1, a_2, a_3, \ \dots \ , a_n$ د عددونو د ترادف په نامه یادېږي.

پورتني هر یوه عدد ته د ترادف حد یا جمله وايي، a_1 د ترادف لومړی حد او a_n د ترادف $n-$ام حد دی

یا په بل عبارت، ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه یې طبیعي عددونه او د قیمتونو

ناحیه یې حقیقي عددونه تشکیلوي.

حسابي ترادف: که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ ګډ توپیر یو ثابت عدد وي، نو نومړی

ترادف د حسابي ترادف په نامه یادېږي.

د حسابي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه a_{n+1}, a_n, a_{n-1} ولرو، نو: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

په حسابي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول $a_n = a + (n-1)d$

هندسي ترادف: هغه ترادف چې د هغه د هر وروستي او مخکیني حد تر منځ نسبت یو ثابت عدد q وي،

د هندسي ترادف په نامه یادېږي، په هندسي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول: $a_n = aq^{n-1}$

د هندسي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه a_{n-1} , a_n , a_{n+1} په داسې حال کې چې

$n = 2, 3, 4, \ \dots$ هندسي ترادف حدونه وي، نو د ترادف وسطي حد عبارت دی له: $a_n = \sqrt{(a_{n+1})(a_{n-1})}$

د ترادفونو قسمي مجموعه: $a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots \ + a_n = \sum_{1=1}^{n} a_i$ د بې نهایته سلسلې (Series) په نامه

یادېږي.

او د $\sum_{k=1}^{n} a_k = \ +\dots+ \ a_1 + a_2 + a_3 +$ د نومړې $n-$ام سلسلې د جمعې قسمي حاصل دی.

د حسابي ترادف د n لومړیو حدونو قسمي حاصل جمع: $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

د هندسي ترادف د n لومړیو جملو قسمي حاصل جمع: $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بې نهايت هندسي سلسلې: په يوه هندسي سلسله کې که $|q|<1$ وي، متقاربه سلسله او د n جملو د جمعي حاصل يې د $\frac{a}{1-q}$ عدد ته نږدې کيږي او قيمت يې د دغه فورمول $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}$ په واسطه محاسبه او لاسته راځي.

هغه هندسي سلسله چې په هغې کې $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر يې هم بې نهايته وي، سلسله متباعد او د n لومړيو جملو مجموعه يې هم بې نهايته ده، يعنې $S_n = \infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب یې پیدا او له هغه شخه کرښه تاوکړئ.

1. د $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$ ترادف n - ام حد کوم دی؟

$a)\ \frac{\sqrt{n}-1}{n}$ $b)\ \frac{\sqrt{n}+3}{n+2}$ $c)\ \frac{n}{n-1}$ $d)\ \frac{n+1}{n}$

2. که $a_n = \frac{3n-1}{2n-1}$ د ترادف n - ام حد وي، د دغه ترادف څووم حد $\frac{11}{7}$ دی؟

$a)\ 3$ $b)\ 4$ $c)\ 5$ $d)\ 6$

3. د $-9, -5, -1, 3, \ldots$ حسابي ترادف دوولسم حد عبارت دی، له:

$a)\ 35$ $b)\ 38$ $c)\ -35$ $d)\ -38$

4. د $0.1, 0.4, 0.7, 1, 1.3, \ldots$ حسابي ترادف ګډ توپیر عبارت دی، له:

$a)\ 0.3$ $b)\ 0.1$ $c)\ \frac{2}{3}$ $d)\ -\frac{2}{3}$

5. د $96, 48, 24, 12, 6, \ldots$ هندسي ترادف ګډ نسبت عبارت دی له:

$a)\ -\frac{1}{2}$ $b)\ \frac{1}{2}$ $c)\ \frac{2}{3}$ $d)\ -\frac{2}{3}$

6. د $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \ldots$ هندسي ترادف لسم حد عبارت دی، له:

$a)\ \frac{3}{512}$ $b)\ \frac{5}{510}$ $c)\ -\frac{5}{512}$ $d)\ \frac{5}{512}$

7. د یوه هندسي ترادف د n جملو د جمعې حاصل فورمول عبارت دی، له:

$a)\ S_n = a\frac{1+q^n}{1-q}$ $b)\ S = a\frac{q^n-1}{q-1}$

$c)\ S = a\frac{1+q^n}{1+q}$ $d)$ هیڅ یو

8. په بې نهایته هندسي متقاربو سلسلو کې ګډ نسبت عبارت دی، له:

$a)\ q = 0$ $b)\ |q| > 1$ $c)\ |q| < 1$ $d)$ هیڅ یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې پوښتنې حل کړئ:

1. څو دوه رقمي طبيعي عددونه لرو چې د څلورو مضرب وي؟
2. د 21 او 31 ترمنځ په بېلا بېل ډول درې حسابي وسطونه وليکئ. $21, \square, \square, \square, 31$
3. که ديوه حسابي ترادف د لومړي او وروستي جملې مجموعه ($a_1 + a_n = 24$) او د n لومړيو جملو مجموعه يې 3720 وي، د نوموړي ترادف د حدونو شمېر وټاکئ؟
4. د لاندې ترادف د 100 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
$3, 5, 7, 9, 11, \ldots$
5. که د يوه هندسي ترادف دويمه جمله 6 او اوومه جمله يې 192 وي ،ګډ نسبت يې وټاکئ.
6. د يوه هندسي ترادف د 8 لومړيو جملو د جمعې قسمي حاصل 17 برابره ،د هغه د څلورو لومړيو جملو دی، د نوموړي ترادف ګډ نسبت حساب کړئ.
7. د لاندې سلسلې د جمعې قسمي حاصل په لاس راوړئ.
$0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \ldots$
8. د يوه ناپايه هندسي ترادف لومړی حد 9 او پنځم حد يې $\frac{1}{9}$ دی، د نوموړي ترادف د حدونو د جمعې حاصل پيدا کړئ.
9. د 3 او 96 عددونو تر منځ 4 هندسي وسطونه په بېلا بېل ډول وليکئ.
$3, \square, \square, \square, \square, 96$
10. د $\ldots + \frac{2}{9} + \frac{2}{3} + 2$ هندسي سلسلې د اتو لومړيو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
11. که $a = 4$ او $d = 3$ وي، هارمونيکي ترادف د $n = 12$ لپاره په لاس راوړئ.
12. لاندې متوالي کسرونه په عامو کسرونو واړوئ.

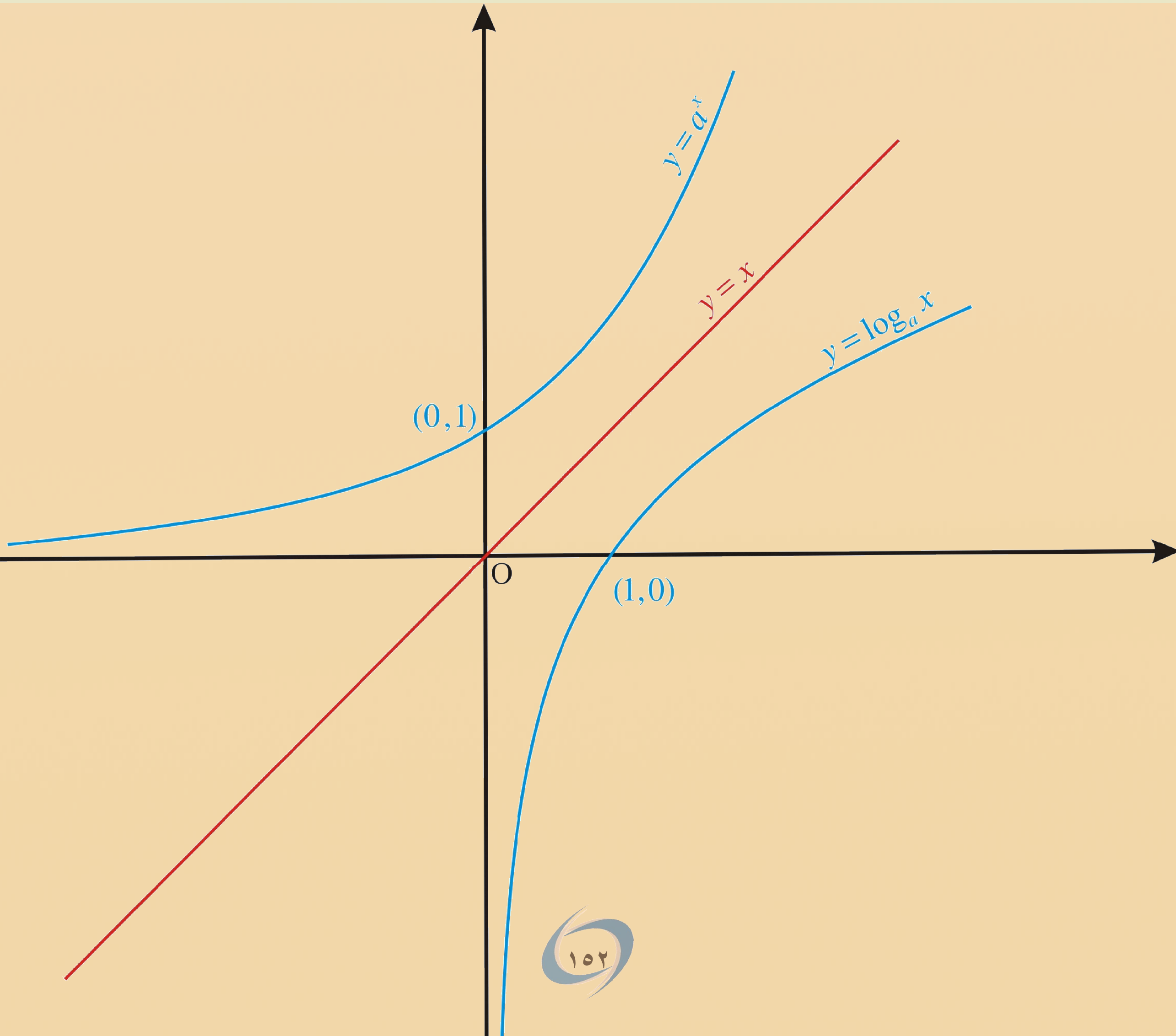
$a)\ 2.\overline{8}$ $b)\ 3.\overline{57}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم څپرکی

لوګاریتم

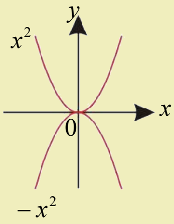
(c) ketabton.com: The Digital Library

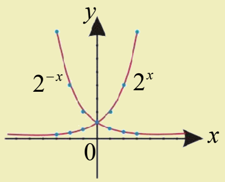


(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننشيل تابع ګاني

Exponential function





پوهيږئ چې د $f(x)=x^2$ او $f(x)=-x^2$ تابع ګانو ګرافونه نظر y محور ته پوله بل سره متناظر دي. آيا تراوسه مو د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع ګانو د ګرافونو په هکله فکر کړی دی؟

تعريف

که چېرې a يو مثبت عدد او $a\neq 1$ وي، نو د $f(x)=a^x$ تابع ته د a په قاعده اکسپوننشيل تابع وايي.

$$a\in IR^+\setminus\{1\} \quad , \quad x\in IR \quad , \quad f:\ IR\to IR^+$$
$$f(x)=a^x$$

$f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ اکسپوننشيل تابع ګاني د 2 په قاعده دي.

فعاليت

- د $x\in Z$ مختلفو قيمتونو لپاره د $f(x)=2^x$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=2^x$ تابع ګراف د y محور په کوم ټکي کې قطع کوي؟
- آيا د $f(x)=2^x$ تابع متزايده، متناقصه او که ثابته ده؟ ولې؟

د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه دوضعيه کمياتو په سيستم کې رسم او يوله بله سره يې پرتله کړئ.

- پورتنی فعاليت د $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ تابع لپاره سرته ورسوئ.

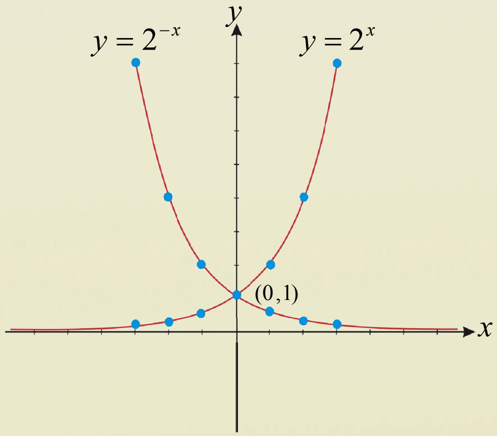
له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي.

د $f(x)=2^x$ تابع قيمت د $x\in Z$ ټولو قيمتونو لپاره هميشه مثبت ده

د $y=2^x$ او $y=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه نظر y محور ته متناظر دي، يعنې د $y=2^x$ تابع ګراف هر ټکی د $y=2^{-x}$ تابع ګراف له هر ټکي سره يوپه يو متناظر دی.

يادښت: که چېرې په اکسپوننشيل تابع کې $a>1$ وي متزايد، که $a<1$ وي متناقص او که $a=1$ وي ثابته تابع ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $y=2^{x}$ او $y=2^{-x}$ تابع گانو گرافونه رسموو.

د $y=2^{x}$ تابع گراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

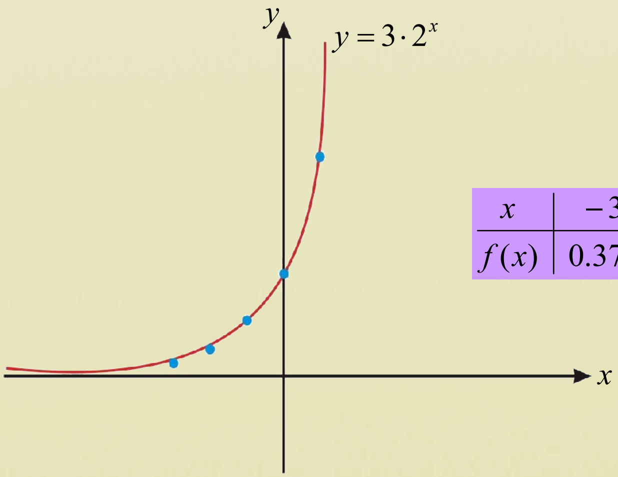
د $y=2^{-x}$ تابع گراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

مثال: د $f(x)=3\cdot 2^{x}$ اکسپوننشیل تابع گراف رسم کړئ

حل: د پايلې په پام کې نيولوسره پوهېږو چې د $f(x)=3\cdot 2^{x}$ اکسپوننشيل تابع قاعده $a=2$ ده، نو په دې اساس پورتنی اکسپوننشيل تابع متزايده ده ،ددې لپاره چې د پورتني اکسپوننشيل تابع گراف دقيق رسم کړو، نو د x متحول ته مختلف قيمتونه ورکوو د y قيمتونه پيدا او په يوه جدول کې يې ليکو، وروسته دغه ټکی (x او y) د قايمو مختصاتو په سيستم کې په نښه کوو.

چې له نښلولو وروسته يې گراف رسم کېږي.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.375	0.750	1.5	3	6	12	24

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د $f(x)=a^x$ اکسپوننشیل تابع په پام کې نیولو سره د x او y ټولو حقیقي عددونو لپاره ثبوت کړئ چې:

$$F(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

$$f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$$

$$f(a\cdot x)=(f(x))^a$$

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه: له تېرو معلوماتو څخه په ګټې اخیستنې سره د اکسپوننشیل تابع خواص په لانـدې ډول بیانوو

1. د هرې اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
2. هره اکسپوننشیل تابع یوپه یو (injective) ده یعنې د هر

$$x_1=x_2\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

$$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

3. هره اکسپوننشیل تابع د $a>1$ لپاره متزایده او د $a<1$ لپاره متناقصه ده.
4. د هرې اکسپوننشیل تابع ګراف د $(0,1)$ له ټکي څخه تېرېږي.
5. د $f(x)=a^x$ او $g(x)=a^{-x}$ اکسپوننشیل تابع ګانو ګرافونه نظر y محورته متناظر پراته دي
6. هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوسه تابع یې $Log_a x$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

دلاندې اکسپوننشیل تابع گانو گرافونه په قایمو مختصاتوکې رسم کړئ.

$a)\quad f(x) = 2\cdot 3^{x}$

$b)\quad f(x) = 2\cdot 3^{-x}$

$c)\quad f(x) = (\frac{1}{2})^{x}$

$d)\quad f(x) = (4)^{-x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لـوګاريـتم

Logarithm

آيـا کـولای شـئ چـې اکسپونـنـشيل تـابع پـه بـل ډول هـم وليکئ؟

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

فعاليت

لاندې جدول بشپړکړئ

درکړل شوي عددونه $= y$	0.0001	0.001	0.01	100	1000	10000
طاقت لرونکي عددونه $= a^x$		10^{-3}				10^4
توان $= x$	-4			2		

- د 10^{-3} طاقت لرونکی عدد قاعده او توان څو دي؟
- آيا ديوه عدد قاعده او توان د 1 عدد کيدلای شي؟
- آيا تاسوکولای شئ چې طاقت لرونکی عدد په بل ډول وښاياست؟

د پورتني جدول له بشپړولو وروسته لاندې تعريف کولای شو، بيان کړو.

تعريف: د طاقت لرونکي عدد يوې بېلې ښووني تـه لوګـاريتم وايـي، يـا پـه بـل عبـارت د مجهـول تـوان محاسـبه د لوګاريتم په نامه يادېږي .

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

په پورتنی اړيکه کې a ته د لوګاريتم قاعده (Base) او y ته لوګاريتمي عدد وايي، د يوه طاقت لرونکي عدد توان له لوګاريتم څخه عبارت دی ،که د قاعدې په اندازه توان لوړشي، راکړل شوی عدد په لاس را کوي.
په تېر جدول کې د 10 د قاعدو توانونه دراکړل شوو عددونو له لوګاريتم څخه عبارت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثال په توګه: $\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$

هر مثبت عدد پرته له 1 څخه د لوګاریتم قاعده کیدای شي.

مثال: د لوګاریتم د تعریف په ګټې اخیستې سره لاندې افادې په معادلو(طاقت لرونکو عددي) افادو واړوئ.

$a)\ \log_2 8 = 3$

$b)\ \log_{10} 1000 = 3$

حل:

$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 8 = 2^3$

$\log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$

پوښتنې

1. لاندې لوګاریتمي اړیکې د هغوی په اړوندو افادو واړوئ.

$a)\qquad \log_{10} N = x$

$b)\qquad \log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$

$c)\qquad \log_9 81 = 2$

$d)\qquad \log_5 5 = 1$

2. لاندې طاقت لرونکی عددونه د لوګاریتم په شکل ولیکی

$a)\qquad 4^3 = 256$

$b)\qquad 2^5 = 32$

$c)\qquad 10^4 = 10000$

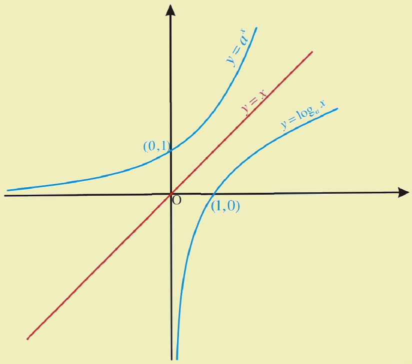
$d)\qquad 10^{-1} = 10^y$

$e)\qquad y = 2^x$

$f)\qquad y = 3^x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتمي تابع ګانې



آیا ویلی شي چې کوم ډول تابع ګانې معکوسې تابعګانې لري؟

آیا ویلی شی هغه تابع ګانې چې معکوسه لري، په قایمو مختصاتو کې نظر کوم مستقیم خط ته متناظرې دي.

تعریف: د اکسپوننشیل تابع معکوسه تابع د لوګاریتمي تابع په نامه یادیږي او هره اکسپوننشیل تابع لوګاریتمي تابع ده.

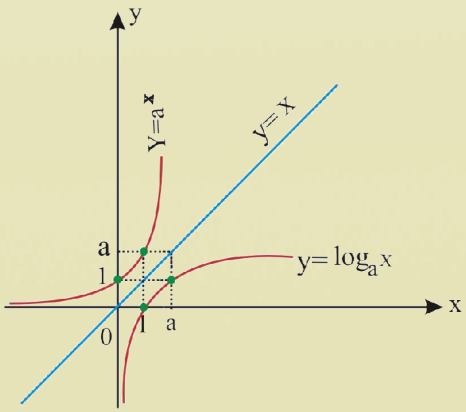
د یوې $(a \in IR^+$ او $a \neq 1)$ اکسپوننشیل تابع، معکوسه تابع د a په قاعده، هغه لوګاریتمي تابع ده چې د $\log_a x$ سره ښودل کیږي.

هره لوګاریتمي تابع، معکوسه تابع لري، د $f(x)=a^x$ او $g(x)=\log_a x$ تابعګانې یو د بل معکوسې تابعګانې او ګرافونه یې د $y=x$ مستقیم ته متناظر دي.

$$y=a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

$$f^{-1}: IR^+ \rightarrow IR,\ f^{-1}(x)=\log_a x,\ a \in IR^+,\ a \neq 1$$

د $f(x)=a^x$ تابع ګراف د $x=1$ لپاره لاندې شکل لري.



x	0		1		a		$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني جدول څخه ليدل کېږي:

که چېرې $a>1$ وي، نود $\forall x_1, x_2 \in IR$ لپاره لرو چې:

که $\log_a x_1 > \log_a x_2$ وي؛ نو $x_1 > x_2$ دی.

د $f(x)=a^x$ تابع ګراف د $x=0$ لپاره $a^0=1 \Leftrightarrow \log_a 1=0$

لومړی مثال: د $y=3^x$ او $y=\log_3 x$ تابع‌ګانو ګرافونه رسم کړئ.

حل: د $y=3^x$ تابع په پام کې نيسو:

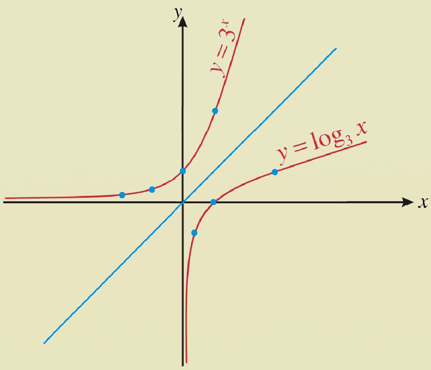
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

اوس $y=\log_3 x$ تابع په پام کې نيسو:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=\log_3 1 \end{array}\right\} (1,0) \qquad \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=\log_3 3 \end{array}\right\} (3,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ y=\log_3 \frac{1}{3} = y=\log_3 3^{-1}=-1 \end{array}\right\} (\frac{1}{3},-1)$$

x	$\frac{1}{3}$	0	1	3
y	-1	1	0	1



فعاليت

د $y=2^x$ او $y=(\frac{1}{2})^x$ اکسپوننشيل تابع‌ګانو ګراف په پام کې نيولو سره او د اکسپوننشيل تابع‌ګانو د تعريف له مخې ددوی داړوندو معکوسو لوګاريتمي تابع‌ګانو قيمتونه د $x=1,2$ لپاره پيدا کړئ او نتيجه يې په عمومي ډول وليکئ.

پايله: د هرې لوګاريتمي تابع لکه: $y=\log_a x$ د يوې اختياري قاعدې لپاره لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\log_a 1 = 0 \ , \ \log_a a = 1 \ , \ \ a \in IR \ , a > 0 \ , a \neq 1$

دویم مثال: که چېرې $f(x) = \log_3 x$ راکړل شوی وي نو $f(1), f(3^{-2}), f(9), f(3)$ په لاس راوړئ.

حل: په راکړل شوې تابع کې د x پر ځای قیمتونه ایږدو.

$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(3) = \log_3 3 = 1$

$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(9) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2 \cdot 1 = 2$

$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(3^{-2}) = \log_3 3^{-2} = -2 \cdot \log_3 3 = -2 \cdot 1 = -2$

$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(1) = \log_3 1 = 0$

دریم مثال: که $\log_3 x = 4$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: پورتنی لوګاریتم د طاقت په شکل لیکو $\log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 \Rightarrow x = 81$

د تېرومعلوماتو څخه په ګټې اخیستې سره د لوګاریتمي تابع خاصیتونو په لاندې ډول بیا نیسو.

د لوګاریتمي تابع خاصیتونه:

1. د لوګاریتمي تابع د قیمتونو ساحه د حقیقي عددونو ، له سټ څخه عبارت ده.
2. څرنګه چې $\log_a 1$ د هرې اختیاري قاعدې لپاره مساوي په صفر ده، نو په دې اساس لوګاریتمي تابع یوازې یو جذر $x_0 = 1$ لري چې په ترتیب سره د لوګاریتمي تابع ګراف په قایمو مختصاتو کې د $(1,0)$ له ټکي څخه تېرېږي.
3. هره لوګاریتمي تابع یو په یو یا انجکتیف (injective) ده یعني دهر $x_1 \neq x_2$ لپاره تل $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.

څلورم مثال:

د $f(x) = \log_2 x$ تابع قیمت د $x = 16, \frac{1}{8}$ لپاره پیدا کړئ.

حل: په راکړل شوې تابع کې د x پرځای قیمتونه وضع کوو چې په پایله کې د تابع قیمت په لاس راځي.

$f(x) = \log_2 x \Rightarrow f(16) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \cdot \log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4$

$f(x) = \log_2 x \Rightarrow f(\frac{1}{8}) = \log_2(\frac{1}{8}) = \log_2 2^{-3} = -3\log_2 2 = -3 \cdot 1 = -3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د x $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمت د $x = 28, \sqrt{2}$ لپاره په لاس راوړئ.

پوښتني

1. د x $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمتونه په $f(32), f(\frac{1}{32}), f(1), f(2)$ کې پیدا کړئ.
2. د x $f(x)=\log_3 x$ تابع قیمتونه په $f(1)$ او $f(\frac{1}{81})$ کې په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

معمولي لوګاریتم *Common logarithm*

او طبیعي لوګاریتم *Natural logarithm*

آیا یوازي 2 او 3 د لوګاریتم قاعدي دي، او که نور عددونه هم د لوګاریتم قاعده کېدلی شي ؟

$$\left.\begin{array}{l}\log_e N \\ \log_{10} 10^3\end{array}\right\} = ?$$

تعریف

ځرنګه چې ومو لیدل، هر مثبت عدد پرته له 1 څخه کیدای شي د لوګاریتم قاعده شي، خوپه عمل کې د 10 او e قاعدې معمول او په کار وړل کېږي.

1 – معمولی لوګاریتم: هغه لوګاریتم چې قاعده یې 10 وي، د معمولي لوګاریتم Common logarithm یا (Briggs سیستم) په نامه یادېږي (Briggs) دهغه عالم نوم دی چې دغه سیستم منځ ته راوړی دی معمولی لوګاریتم د log په سمبول یې ښیي او په لاندی ډول ښودل کېږي.

$$f : IR^+ \longrightarrow IR \ , \ \ f(x) = \log_{10} x = \log x$$

مثال: د $10^{-1}, 10^3, 10^2, 10^1$ او 10^0 عددونو لوګاریتمونه پیدا کړئ.

حل:

$$\log_{10} 10^0 x = \log 10^0 = y \Leftrightarrow 10^y = 1 \Rightarrow 10^y = 10^0 \Rightarrow y = 0$$

$$\log_{10} 10 = \log 10 \ = y \Leftrightarrow 10^y = 10^1 \Rightarrow y = 1$$

$$\log_{10} 10^2 = \log 10^2 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^2 \Rightarrow y = 2$$

$$\log_{10} 10^3 = \log 10^3 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^3 \Rightarrow y = 3$$

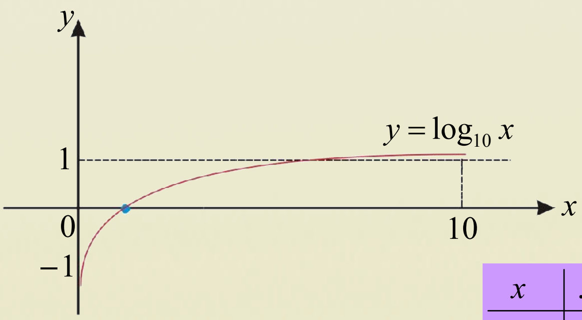
$$\log_{10} 10^{-1} = \log 10^{-1} = y \Leftrightarrow 10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1$$

$$\vdots$$

$$n \in z \quad , \quad \log_{10} 10^n = \log 10^n = y \Leftrightarrow 10^y = 10^n \Rightarrow y = n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x د مختلفو قیمتونو له مخې یې ګراف رسموو



x	$...10^{-3}$	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}
$\log x$	$...-3$	-2	-1	0	1	2	3

2– طبیعی لوګاریتم: هغه لوګاریتم چې قاعده یې e وي د طبیعي لوګاریتم(Natural logarithm) په نامه یادېږي او په ln سره ښوول کېږي، او داسې لیکو: $f: IR^{+} \to IR, F(x)=\log_e x=\ln x$:

e یو غیر ناطق عدد دی چې تقریبي قیمت یې عبارت دی له: $e=2.718281828\cdots$ چې د $(1+\frac{1}{x})^{x}$ لیمت څخه هغه وخت چې x بې نهایت ته نږدې شي په لاس راځي د e قیمت پیدا کول د لوړو ریاضیاتو کار دی. د e عدد د اویلر عدد په نامه یادېږي او $f(x)=e^{x}$ تابع د اکسپوننشیل تابع په نوم یادېږي او داسې هم لیکي: $Exp(x)=e^{x}$

د $y=e^{x}$ تابع ګراف لکه: $y=a^{x}$ تابع ګراف په څېر ده.

د $y=e^{x}$ په تابع کې x ته مختلف قیمتونه ورکوو:

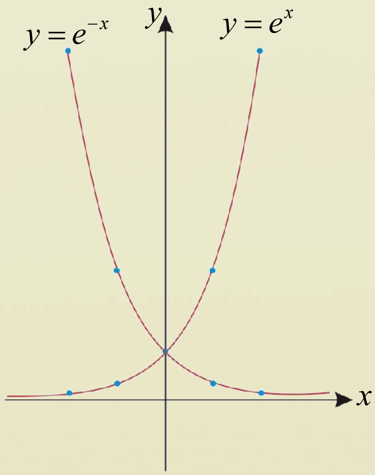
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{7.3}$	$\frac{1}{2.71}$	1	2.71	7.34

د $y=e^{-x}$ په تابع کې x ته بېلابېل قیمتونه ورکوو:

x	-2	-1	0	1	2
y	7.34	2.71	1	$\frac{1}{2.7}$	$\frac{1}{7.3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنيو تقريبي قيمتونو په پام کې نيولو سره د $y=e^{x}$ او $y=e^{-x}$ تابعګانو ګرافونه رسموو:



د طبيعي لوګاريتم مطالعه په لوړو رياضياتوکې لکه: ساينس، انجنيري، تجارت او تخنيک کې زيات استعمال لري.

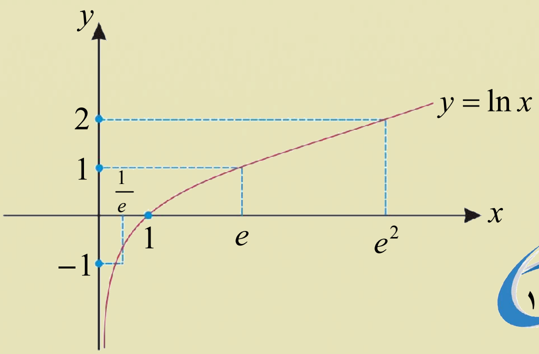
د طبيعي لوګاريتم د تابع $y=\ln x$ ګراف په لاندې ډول دی.

مثال: $\ln e^{-2}, \ln e^{-1}$ $\ln e^{0}, \ln e^{3}, \ln e^{2}$ او $\ln e^{1}$ پيدا کړئ.

حل: د تعريف په پام کې نيولو سره لرو چې: $y=\ln x=\log_e x$

$$\ln e^{1}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{1} \Rightarrow y=1$$
$$\ln e^{2}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{2} \Rightarrow y=2$$
$$\ln e^{3}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{3} \Rightarrow y=3$$
$$\ln e^{0}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{0} \Rightarrow y=0$$
$$\ln e^{-1}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{-1} \Rightarrow y=-1$$
$$\ln e^{-2}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{-2} \Rightarrow y=-2$$

د $y=\ln x$ تابع ګراف عبارت دی له:



(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د $y = \ln \frac{1}{e^7}$ قیمت پیدا کړی.
- د $\log 0.0001$ قیمت په لاس راوړئ.

پوښتني

لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$a)\log_e e^8$ $\qquad$ $b)\ln \frac{1}{e^{-3}}$

$c)\log 0.01$ $\qquad$ $d)\log \frac{1}{10^{-2}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم قوانین

Low of logarithm

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

پوهېږي چې د عـددونو طاقت خپـل قـوانين لـري، آيا د عددونو لوګاريتم هم قوانين لري او که نه؟

فعاليت

- د طاقت لرونکو عددونو د ضرب قانون وليکئ.
- د طاقت لرونکو عددونو د تقسيم قانون وليکئ.
- هر عدد د صفر او ياد يوه په توان مساوي په څودی؟

د طاقت قوانينو ته ورته لوګاريتم هم ځيني قوانين لري

لومړی قانون: د هر عدد لوګاريتم د لوګـاريتم د تعريـف پـه ساحه کې پـه خپلـه قاعـده مـساوي پـه يـو دی؛ مـثلاً:

$$a \in IR^+ ,\ a \neq 1, \log_a a = 1$$

ثبوت: پوهېږو چې $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\},\ a^1 = a$ دي، نو $\log_a a = 1$

لومړی مثال: $\log_5 5 = 1 \Leftrightarrow 5^1 = 5$

دويم قانون: د 1 عدد لوګاريتم په هره اختياري قاعده مساوي په صفر دی؛ مثلاً: $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\}\ , a^0 = 1$ نـو

$$\log_a 1 = 0$$

دويم مثال: $\log_{\sqrt{5}} 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{5})^0 = 1$

دريم قانون:د دوو يا څوعددونو د حاصل ضرب لوګاريتم د هغو د لوګاريتمونو له مجموعې سره مساوي دی يعنې:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

ثبوت: که چېرې ولرو.

$$x = a^p \quad \ldots \text{ I}$$

$$y = a^q \quad \ldots \text{ II}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د I او II اړيکې خوا په خوا ضربوو: $x \cdot y = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

د پورتنۍ اړيکې له دواړو خواوو لوګاريتم نيسو: $\log_a(x \cdot y) = p + q$

د p او q قيمتونو په اېښودلو سره ليکو: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

لومړي مثال: د 50 عدد لوګاريتم په لاس راوړئ.

حل: $\log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 = \log 5 + 1$

دويم مثال: $\log_4 2 + \log_4 8 = ?$

حل:

$$\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4(2 \cdot 8) = \log_4(2 \cdot 2 \cdot 4) = \log_4(4 \cdot 4)$$
$$= \log_4 4 + \log_4 4 = 1 + 1 = 2$$

فعاليت

- دلاندې غير مساواتو سم والى، د مثال په واسطه وښاياست.

$$\log_a(x + y) \neq \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a(x \cdot y) \neq \log_a x \cdot \log_a y$$

خلورم قانون:د دوو عددونو د تقسيم لوګاريتم د لوګاريتمونو له تفاضل سره مساوى دى، يعنې:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

ثبوت: که چېرې $x = a^p$ او $y = a^q$ ولرونو:

$$\left.\begin{array}{l} x = a^p \ldots\ldots\ldots\ I \\ y = a^q \ldots\ldots\ldots\ II \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \log_a x = p \\ \log_a y = q \end{array}$$

د I او II اړيکې خوا په خوا يو په بل ووېشو.

$$\frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

د پورتنۍ اړيکې له اطراف څخه لوګاريتم نيسو: $\log_a \frac{x}{y} = p - q$

د p او q د قيمتونو په اېښودلو سره ليکو: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي مثال: د $\log\frac{5}{2}$ محاسبه کړئ داسې چې $\log 2 = 0.3010, \log 5 = 0.6900$ وي.

حل: $\log\frac{5}{2} = \log 5 - \log 2 = 0.6900 - 0.3010 = 0.3890$

دویم مثال: $\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy)$ حاصل په لاس راوړئ.

حل:څلورم قانون له ښي لوري څخه چپ لوري ته تطبیقوو.

$$\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy) = \log_y\frac{10y^2x}{2xy} = \log\ (5y)$$
$$= \log_y(5y) = \log_y y + \log_y 5$$
$$= \log_y 5 + 1$$

پنځم قانون:د یوه توان لرونکي عدد لوګاریتم مساوي دی د توان او د طاقت د قاعدې د لوګاریتم لـه حاصل ضرب سره یعنې که چیرې $(a^x)^n$ ولرو نو $\log_a x^n = n\log_a x$ دی.

$$\log_a x^n = \log_a(x\cdot x\cdot x\cdot\ \dots\ \cdot x)$$
$$\log_a x^n = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x}_{n \text{ خلې } lag_a x}$$

په پایله کې $\log_a x^n = n\log_a x$

له پنځم قانون څخه په ګټې اخیستنې سره کولای شو ولیکو.

$$\log_a\sqrt[n]{x} = \log_a(x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x$$

لومړی مثال: $\log 625 = ?$

حل: $\log 625 = \log 5^4 = 4\log 5 = 4(0.6990) = 2.7960$

دویم مثال: دغه لوګاریتم $\log_3\sqrt[3]{9}$ پیدا کړئ؟

حل: $\log_3\sqrt[3]{9} = \log_3\sqrt[3]{3^2} = \log_3(3)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_3 3 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$

فعالیت

- لاندې لوګاریتمونه پیداکړئ.

$\log_3(0.12) = ?$ $\qquad\qquad$ $\log_5\sqrt{8} = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. لاندې ضربي افادې د جمعې د حاصل په شکل او دجمعې د حاصل افادې د حاصل ضرب په شکل ولیکئ او د امکان په صورت کې یې وروستی قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ \ \log_4(5x^2) = ?$

$b)\ \ \log_{10}(10x^2y) = ?$

$c)\ \ \log_{10}5 + \log_{10}20 = ?$

$d)\ \ \log_{12}36 + \log_{12}4 = ?$

2. لاندې د خارج قسمت افادې په تفاضل او د تفاضل افادې په خارج قسمت واړوئ، د امکان په صورت کې وروستې ځواب په لاس راوړئ.

$a)\ \ \log_7\dfrac{63}{49} = ?$

$b)\ \ \log\dfrac{125}{80} = ?$

$c)\ \ \log_a(x^2a) - \log_a x^2 = ?$

$d)\ \ \log_{10}1000 - \log_{10}100 = ?$

3. لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$a)\ \ \log_{10}(0.0001)$ $\qquad b)\ \ \log_2(8)^{-\frac{1}{3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم د یوې قاعدې اړول په بله قاعده

که د یوه عدد لوګاریتم په یوه مشخصه قاعده راکړل شـوی وي، خرنګه کولای شو، نوموړی عدد په بله قاعده واړوو.

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

شپږم قانون: د دوو عددونو د لوګاریتمونو د تقسیم حاصل چه په عین قاعده وي مساوي ده په:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

ثبوت:د ثبوت لپاره $\log_b m = y$ او معادل شکل يې يعنې $m = b^y$ ليکـو اوس لـه اطرافـو څخـه د a پـه قاعده لوګاریتم نیسو:

$$\log_b m = \log_a b^y \Rightarrow \log_b m = y \log_a b$$

اوس د y قيمت په پورتني اړيکه کې ايږدو:

$$\log_a m = \log_b m \cdot \log_a b$$

د پورتنۍ اړيکې دواړه خواوې په $\log_a b$ وېشو:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \frac{\log_b m \cdot \log_a b}{\log_a b} = \log_b m \Rightarrow \frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

لومړی مثال: $\log_9 27$ محاسبه کړئ.

حل: له شپږم قانون څخه په ګټې اخیستنې سره لرو:

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 (3)^3}{\log_3 (3)^2} = \frac{3\log_3 3}{2\log_3 3} = \frac{3\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: $\log_3 75$ حساب کړی.

حل: بیا هم د شپږم قانون په کارولو سره لرو چې:

$$\log_3 75 = \frac{\log_5 75}{\log_5 3} = \frac{\log_5 (3\cdot 5^2)}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2\log_5 5}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2}{\log_5 3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: د یوه عدد معکوس لوګاریتم مساوي دی، د هغه عدد له منفي لوګاریتم څخه چې هغه د کو لوګاریتم (co-logarithem) په نامه یاد یږي.

$$\log_a \frac{1}{M} = -\log_a M = co\log_a M$$

مثال: $\log_2 \frac{1}{32} = ?$

حل: $\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 1 - \log_2 32 = \log_2 1 - \log_2 2^5 = 0 - 5\log_2 2 = -5 \cdot 1 = -5$

اووم قانون: د یوه عدد معکوس لوګاریتم مساوي دی په: $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\frac{1}{\log_M a} = x$ نیسو: $\frac{1}{\log_M a} = x \Rightarrow x\log_M a = 1 \Rightarrow \log_M a^x = 1 \ldots I$

د I په رابطه کې د 1 عدد په ځاي لیکلی شو چې $1 = \log_M M$

$$\log_M a^x = \log_M M \Rightarrow \log a^x = \log M$$

اوس د دواړو خواوو لوګاریتم نیسو یعنې $\log_a M = x$

په پورتنی اړیکه کې د x په ځای قیمت ایږدو: $\log_a M = x = \frac{1}{\log_M a}$

مثال $\log_{125}\sqrt{5} = ?$

حل: $\log_{125}\sqrt{5} = \log_{125}(5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{125} 5 = \frac{1}{2\log_5 125} = \frac{1}{2\log_5 5^3} = \frac{1}{6\log_5 5} = \frac{1}{6}$

فعالیت

لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$\log_{64} 2 = ?$ $\qquad \log_4 \sqrt{25^6} = ?$

اتم قانون: دیوه عدد لوګاریتم په توان لرونکي قاعده مساوي دی په $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\log_a x = m$ نیسو او هغه داړوند طاقت په شکل لیکو:

$$\log_a x = m \Rightarrow x = a^m \Rightarrow x = (a^m)^{\frac{n}{n}} \Rightarrow x = (a^n)^{\frac{m}{n}}$$

د پورتنی رابطې د دواړو خواوو څخه لوګاریتم نیسو: $\log_{a^n} x = \frac{m}{n} \Rightarrow \log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a m$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د m په ځای قیمت ایږدو: $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

له پورتني قانون څخه لاندې پایلې په لاس راځي

$$1)\ \log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x \qquad 2)\ \log_{\frac{1}{n}} \frac{1}{x} = \log_n x \qquad 3)\ \log_{a^n} x^n = \log_a x$$

لومړی مثال: $\log_{25} 125 = ?$

حل:

$$\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2}\log_5 5 = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

دويم مثال: $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = ?$

حل:

$$\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = \log_{\frac{1}{(3)^{\frac{1}{3}}}} (3^3)^2 = \log_{3^{-\frac{1}{3}}} (3)^6 = \frac{6}{-\frac{1}{3}}\log_3 3 = \frac{6}{1}(\frac{3}{-1})\cdot 1 = -18$$

فعالیت

د پورتنیو خاصیتونو په کارولو سره لاندې لوګاریتمونه ساده کړئ.

a) مخامخ لوګاریتم په معکوس ډول ولیکئ. $\log_3 6 = ?$

b) $\log_8 \sqrt[3]{4} = ?$

د معمولي او طبيعي لوګاریتمونو ترمنځ اړیکه: د دغو دوو لوګاریتمونو یعنې د 10 او e عددونه د $\log_a x = \log_b x . \log_a b$ له اړیکې څخه په ګټې اخیستنې چې a, b او x مثبت عددونه او a او b د 1 خلاف دي:

که چېرې $a = e$ او $b = 10$ وضع شي، نو لرو چې:

$$\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$

$$\log_e x = \log_{10} x \cdot \log_e 10$$

پوهېږو چې $\log_e x = \ln x$ دی، نو:

$$\ln x = \log_e 10 \cdot \log x$$

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چېرې $b = e$ او $a = 10$ وضع شي، نو:

$$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}$$

$$\log_{10} x = \log x = \log_e x \cdot \log_{10} e$$

$$\log x = \log_{10} e \cdot \ln x$$

څرنګه چې $\log_{10} e = 0.4343$ دی، نو لاندې اړیکه لرو:

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

لومړي مثال: د $\ln 4.69$ قیمت په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot \log 4.69$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot 0.6712 = 1.5455$$

دویم مثال: د $\log 6.73$ قیمت پیدا کړئ په داسې حال کې چې $\ln 6.73 = 1.9066$ وي.

حل: د تېرې اړیکې په ګټې اخیستې سره لرو چې:

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

$$\log 6.73 = 0.4343 \cdot \ln 6.73$$

$$= 0.4343 \cdot 1.9066 = 0.8280$$

پوښتنې

لاندې لوګاریتمونه ساده کړئ.

$a)$ $\log_{\frac{1}{3}} 3^{-4} = ?$

$b)$ $\log_9 27 = ?$

$c)$ $\log_8 4 = ?$

$d)$ $\log_{121} 14641 = ?$

$e)$ $\ln 672000$

$f)$ $\ln 0.00927$

$g)$ $\ln 0.235$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرکټرستیک او مانتیس

Characteristic and Mantissa

$$\left.\begin{array}{l}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{array}\right\}=?$$

پوهېږو چې:

$\log_{10}1000=3\ ,\ \log_{10}100=2\ ,\ \log_{10}1=0$

دی. آیا دیوه عدد د ارقامو دشمېر او لوګاریتم ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟

تعریف

پوهېږو چې د x هر حقیقي مثبت عدد د $x=S\cdot 10^{n}$ په شکل لیکل کیدای شي، داسې چې $1\leq S<10$ او n یو تام عدد وي.

که چېرې د x لوګاریتم غوښتل شوی وي، په لاندې ډول یې پیدا کولای شو.

$$\log x=\log(S\cdot 10^{n})=\log S+\log 10^{n}=\log S+n\log 10=\log S+n$$

د $\log S$ په هغه صورت کې چې $1\leq S<10$ وي، S د x د لوګاریتم مانتیس یا اعشاري برخه او n چې یو تام عدد دی، د x د لوګاریتم مشخصه یا کرکټرستیک ځخه عبارت دی. ځرنګه چې $1\leq S<10$ دي نو.

$$\log 1\leq \log S<\log 10$$
$$0\leq \log S<1$$

له پورتنۍ اړیکې ځخه داپایله په لاس راځي چې دیوه عدد (له ۱۰ کوچنی او له یوه لوی یا مساوي) لوګاریتمي یې د یو او صفر ترمنځ قرار لري.

فعالیت

- لاندې جدول بشپړکړئ.

د عددونو توان لرونکی شکل	$0.001=10^{-3}$	$0.01=10^{-2}$	$1=10^{0}$	$1000=10^{3}$	$4=10^{0.602}$	$7=10^{0.845}$	$10=10^{1}$	$20=10^{1.390}$
د عددونو لوګاریتمي شکل	$\log_{10}0.001$		$\log_{10}1$			$\log_{10}7$		$\log_{10}20$
لوګاریتم	-3	-2		3	0.602		1	

د هغو عددونو لوګاریتمونه چې د 0، 10، 100، 1000، 0.01 د 0.001 عددونو ترمنځ واقع دي، مساوي له څوسره دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

- آیا هر څومره چې عدد لوی شي لوګاریتم یې هم لوئیږي؟
- له 1 څخه د کوچنیو عددونو د لوګاریتم علامه منفي ده، که مثبت؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

- که چېرې $1 \le x < 10$ سره وي، کرکټرستیک یې صفر دی.
- که چېرې $10 \le x < 100$ وي کرکټرستیک یې مساوي له 1 سره دی.
- که چېرې $100 \le x < 1000$ وي، نو کرکټرستیک یې 2 دی.

دیوه عدد په لوګاریتم کې صحیح برخه کرکټرستیک او اعشاري برخه یې مانتیس نومیږي.

هغه وخت چې عدد د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکل شي، د 10 د عدد توان له کرکټرستیک څخه عبارت دی.

د عدد لیکنې علمي طریقه Scientific notation

کولای شو هر عدد د 10 د توان په څېر ولیکو، لکه: د N عدد داسې لیکو $N = a \cdot 10^n$ چې په دې حالت کې $1 \le a < 10$ او n یو تام عدد دی

لومړی مثال: لاندې عددونه د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکئ.

$a)$ 2573 $b)$ 573216 $c)$ 0.0028

حل:

$a)\quad 2573 = 2.373 \cdot 10^3$

$b)\quad 573216 = 5.73216 \cdot 10^5$

$c)\quad 0.0028 = \dfrac{28}{10000} = \dfrac{28}{10^4} = 28 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10^{-3}$

قاعده: که چېرې دیوه عدد صحیح برخه چې د صفر خلاف وي، نود هغه عدد دلوګاریتم کرکټرستیک مساوي دی، د صحیح برخې د ارقامو په شمېر، منفي یو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $\log 526.9$ کرکټرسټیک مساوي له څو سره دی؟

حل: د صحیح ارقامو شمېرله 3 سره برابر دی، نو کرکټرسټیک یې $3-1=2$ دی.

او له یوه څخه د کوچنیو عددونو کرکټرسټیک منفي علامه لري او قیمت یې د اعشاري د علامې دښي خوا د صفرونو له شمېر څخه، د یوه په اندازه زیات دی.

دریم مثال: د $\log 0.002$ کرکټرسټیک مساوي په څو دی؟

حل:

$$\begin{aligned}\log 0.002 &= \log(2\cdot 10^{-3})\\ &= \log 2 + \log 10^{-3}\\ &= \log 2 - 3\log 10 = \log 2 - 3\end{aligned}$$

نو کرکټرسټیک یې -3 دی.

له تېرو دوو مثالونو څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د لاندې عددونو کرکټرسټیک په لاس راوړو.

لوګاریتمونه		کرکټرسټیک
$\log 89435$	$5-1$	4
$\log 56.784$	$2-1$	1
$\log 0.995$	$0-1$	-1
$\log 0.0789$	$-1-1$	-2

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

دلاندې لوګاریتمونو کرکټرسټیک په شفاهي ډول ووایاست؟

$a)\ \log 0.9560$ $b)\ \log 956.0$

$d)\ \log 2345$ $e)\ \log 3.875$

$c)\ \log 9560$ $f)\ \log 0.0009560$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاريتم جدول

څرنګه چې په تېرلوست کې مو ولوستل چې د يوه عدد لوګاريتم لـه دوو برخـو (کرکټرسټيک او مـانتيس) څخه تشکيل شوی دی. د مانتيس د پيدا کولو لپاره پـه څـه ډول عمل کوئ.

$$\left.\begin{array}{l}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{array}\right\}=?$$

د مانتيس د پيدا کولو طريقه:

پوهېږو چې هر لوګاريتمي عدد له دوو يعنې صحيح او اعـشاري برخوڅخه جوړ شـوی دی، څرنګه چې صحيح برخه يا مشخصه د خپل عدد د ارقامو له مخې او مانتيس يې د لوګاريتمي جدول له مخې چې مخکې ترتيب شوی ټاکل کېږي، دغه جدول يې تر ځينې 7 ، تـر 5 او ځينـې يـې تـر 4 او 3 اعـشاري خـانو پـورې ترتيـب شـوی چې د مانتيس د پيدا کولو لپاره ترې کار اخلي چې د اعشاري د تامو عددونو د ارقامو د شمېر په پام کې نيولو سره جدولونـه نومول شوی دي. لکه: 7 رقمي جدولونه 5، رقمي جدولونه او داسې نور.

د يوه عدد د مانتيس د پيدا کولو لپاره د نوموړي عدد ارقام له چپ لوري څخه په پام کې نيول کېږي په دې ډول چې ښي لوری ديوه رقم په استثنا هغه د جدول په داسې ستون کې لټوو چې د ښی خواله رقم سره مطابقت ولري، نو هغه اعشاري عدد چې د سطر او ستون تقاطع وي، له مانتيس څخه عبارت دی.

لومړی مثال:

حل:

$$\log 765 = ?$$

$$\log 765 = \log(7.65\cdot 10^2)$$

$$= \log 7.65 + \log 10^2$$

$$= \underbrace{\log 7.65}_{\text{مانتيس}} + \underbrace{2}_{\text{کرکټرسټيک}}$$

د 2 عدد د کرکټرسټيک څخه عبارت دی او دمـانتيس د پيـدا کولـو لپـاره يعنـې $\log 7.65$ پـه 76 سطر او 5 - ام ستون کې ګورو چې د 8837 عدد سره مطابقت کوي يعنې د نوموړي عدد مانتيس 0.8837 دی چې په حقيقـت کې د 765 عدد مانتيس دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
74										
75										
76	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
77										
78										
79										

$$\log 765 = \log 7.65 + 2 = 0.8837 + 2 = 2.8837$$

دویم مثال: $\log 70.9$ په لاس راوړئ؟

حل:

$$\log 70.9 = \log(7.09 \cdot 10)$$
$$= \log 7.09 + \log 10^1$$
$$= \log 7.09 + 1$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70 ⋮ 79 ⋮	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	**8506**

د 709 عدد د 9 ستون لاندې لټوو چې له 8506 عدد سره مطابقت کوي یعنې د 7.09 عدد مانتیس 0.8506 دی، په پایله کې یې لوګاریتم داسې حسابوو:

$$\log 70.9 = 0.8506 + 1 = 1.8506$$

دریم مثال: د 0.0247 لوګاریتم حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\log 0.0247 = \log(2.47 \cdot 10^{-2})$$
$$= \log 2.47 + \log 10^{-2}$$
$$= \log 2.47 - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 2.47 عـدد پـه 24 – ام سـطر او 7 – ام سـتون لانـدې لټـوو چـې لـه 3927 عـدد سـره مطابقـت كـوي يعنـې د 2.47 عدد مانتيس عبارت دی له: 0.3927 په پايله كې د لوگاريتم حاصل داسې په لاس راوړو:

$$\log 0.0247 = \log 2.24 - 2 = 0.3927 - 2 = \overline{2}.3927$$

يادونه: څرنگه چې مانتيس هميشه مثبت دی، كـه كركټرسـتيك منفـي وي او وغـواړو دواړه د يـوه مثبـت عـدد پـه شكل وليكو، نو منفي علامه د كركټرستيك له پاسه ليكو، مثلاً په پورتني مثال كې:

$$0.3927 - 2 = \overline{2}3927$$

فعاليت

- د لوگاريتم د جدول په پام كې نيولو سره 9280 عدد لوگاريتم حساب كړئ.

څلورم مثال: د لاندې جدول په پام كې نيولوسره د 15 , 105, 900 , $\frac{3}{4}$, 0.007 عـددونو لوگاريتمونـه پيـدا كړئ.

عددونه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
لوگاريتمونه	0.0000	0.30103	0.47712	0.60206	0.69897	0.77815	0.84570	0.90309	0.95424	1.0000

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log 15 = (3 \cdot 5) = \log 3 + \log 5 = 0.47712 + 0.69897 = 1.17609$$

$$\log(105) = \log(5 \cdot 3 \cdot 7) = \log 5 + \log 3 + \log 7$$
$$= 0.69897 + 0.47712 + 0.84570$$
$$= 2.02079$$

$$\log(900) = \log(9 \cdot 10^2) = \log 9 + \log 10^2$$
$$= 0.95424 + 2$$
$$= 2.95424$$

$$\log(\frac{3}{4}) = \log 3 - \log 4 = 0.47712 - 0.60206$$
$$= -0.12486$$

$$\log(0.007) = \log(7 \cdot 10^{-3}) = \log 7 + \log 10^{-3} = \overline{3}.84570$$

پوښتنې

1. دلاندې لوګاریتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول ووایاست او مانتیس یې د جدول له مخې پیدا کړئ.

$a)$ $\log 222$ $b)$ $\log 0.921$

$c)$ $\log 928$ $d)$ $\log 527$

$e)$ $\log 0.024$ $f)$ $\log 2400$

$h)$ $\log 0.00024$ $j)$ $\log 24$

2. د لاندې لوګاریتمونو قیمتونه په لاس راوړئ.

$a)$ $\log(2.73)^3$ $b)$ $\log\sqrt[5]{0.0762}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتي لوګاریتم

Anti Logarithm

که چیرې د یوه عدد لوګاریتم راکړل شوی وي څرنګه کولای شو، عدد يې پیدا کړو؟

$\log 481 = 2.6821$

$\log N = 1.6580$

$N = ?$

تعریف: که چېرې $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوګاریتم انتي لوګاریتم بلل کېږي یعنې $y = anti\log x$

مثلاً که چېرې $\log 34 = 1.5315$ وي، نود 1.5315 انتي لوګاریتم د 34 له عدد سره مساوي دی.

فعالیت

- که چېرې $\log N = 2.8779$ وي، نو د N عدد و ټاکئ.
- د نومورې عدد کرکټرسټیک پیدا کړئ.
- د مانتیس په جدول کې د 0.8779 عدد له کوم سطر او ستون سره مطابقت لري؟

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

څرنګه چې د 2 عدد کرکټرسټیک دی، نو N یو درې رقمي عدد دی، مانتیس يې په جدول کې له 75 سطر او 5 ستون سره مطابقت لري، نود N عدد عبارت دی له: 755

لومړی مثال: $\log N = 2.9939$ دی د N عدد په لاس راوړئ.

حل: د نومورې لوګاریتم د مانتیس برخه یعنې 0.9939 د لوګاریتم په جدول کې پیدا کوو، ګورو چې په کوم سطر او ستون کې ځای لري. دغه د سطر او ستون عدد داسې لیکو چې د ستون عدد داړوند سطر ښي لورى ته قرار ولري چې عبارت دی له 9.86 څخه یعنې د 986 عدد مانتیس 0.9939 دی. په پورتنۍ پوښتنه کې د 2 د کرکټرسټیک په توګه راکړل شوی، نو د صحیح رقمونو شمېرېې 3 دی، چې مطلوب عدد عبارت دی له 986 یعنې: $N = 986$

$\log 986 = 2.9939$

$anti\log 2.9939 = 986$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9.5 9.6 9.7 9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939 ↑	0.9943	0.9948	0.9952

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: که چیرې $\log N = 0.9791$ وي N په لاس راوړئ.

حل: دلته هم د 9791 عدد په جدول کې پیدا کوو، د سطر او ستون اړوند عددونه لکه: د تیر په څیر لیکو، ځرنګه چې 953 مانتیس ښیي چې د مطلوب عدد 953 رقمونه دي ځرنګه چې کرکټرستیک صفر دی، نو مطلوب عدد یعنې N یو صحیح رقم لري چې عبارت دی له:

$$N = 9.53$$
$$\log 9.53 = 0.9791$$
$$anti\log 0.9791 = 9.53$$

دریم مثال: $\log N = -3.0531$ دی، د N عدد پیدا کړئ.

په مثال کی لیدل کیږی چې کرکټرستیک او مانتیس دواړه منفي دی او په جدول کې منفي عدد وجود نه لری، ددې لپاره چې مانتیس مثبت شي، د 1 عدد له مانتیس سره جمع او له کرکټرستیک څخه یې کموو، په مساواتو کې تغیرنه راځي.

اوس کولای شو د مانتیس 0.9469 په مرسته د N عدد له جدول څخه پیدا کړو، چې عبارت دی له 886 .
کرکټرستیک ښیي چې د اعشاري د علامې او له چپې خوا څخه د لومړي 8 عدد تر منځ درې صفرونه ځای لري

$N = 0.000885$ نو $anti\log -3.05531 = 0.000885$

څلورم مثال: دلاندې عددونو لوګاریتمونه محاسبه کړئ.

$a)\ 2 \qquad b)\ 0.2 \qquad c)\ 0.02 \qquad d)\ 0.0002$

حل:

$$a)\ \log 2 = 0.3010$$
$$b)\ \log 0.2 = 0.3010 - 1 = \overline{1}.3010$$
$$c)\ \log 0.02 = 0.3010 - 2 = \overline{2}.3010$$
$$d)\ \log 0.0002 = 0.3010 - 4 = \overline{4}.3010$$

له پورتني مثال څخه دا پایله په لاس راځي چې دیوه عدد د لوګاریتم مانتیس یوازې د رقمونو په ترتیب پورې اړه لري په پورتني مثال کې ټول عددونه یو شان مانتیس 0.3010 لري، ښي او یا چپ لوري ته د صفرونو زیاتول په مانتیس باندې کومه اغېزه نه لري.

پوښتنې

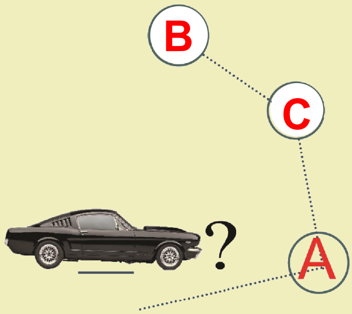
دلاندې هر یوه انتي لوګاریتم قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ anti\log 4.9479 \qquad b)\ anti\log -5.0521$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خطي انټرپولیشن

Linear Interpolation



یوګرځندي موټر په متوسط سرعت په 30 دقیقوکې د A ښارته او یونیم ساعت وروسته په همدغه سرعت د B ښارته رسیږي، وواياست چې په همدې ثابت سرعت به نوموړی موټر د C ښار ته چې د A او B ښارونو تر منځ پروت دی، په څومره وخت کې ورسیږي.

فعالیت

- که چیرې $\log A = a$, $\log B = b$ راکړل شوی وي او $\log C = c$ وي، په داسې حال کې چې $A < C < B$ دی.
- $\log C$ د حقیقي عددونو په کومه فاصله کې ځای لري.
- په اټکلي ډول وواياست چې که (a, b) یوبل ته نژدې عددونه وي، نود C لوګاریتم چیرې پروت دی؟
- د a او b تر منځ قیمتونه د حسابي وسط له مخې په لاس راوړئ.

پایله: که چیرې دیوه نامعلوم قیمت د پیداکولو لپاره چې ددوو معلومو عددونو تر منځ پروت وي، د معلوموعددونو په مرسته نامعلوم عدد پیدا کړو، په دې صورت کې نوموړې طریقه د خطي انټرپولیشن په نامه یادیږي.
که یو څلور رقمي عددلکه: 1.234 ولرو، نه شوکولای د هغه لوګاریتم له درې رقمي جدول څخه په لاس راوړو، نو د دې ډول عددونو لوګاریتم د خطي انټرپولیشن په واسطه پیداکولای شو.

لومړی مثال: د $\log 5.235$ قیمت په لاس راوړئ.

حل: ښکاره ده چې دنوموړي عدد لوګاریتم په جدول کې نشته، خو د 5.230 او 5.240 عددونوپه منځ کې پراته دي چې لوګاریتمونه یې په جدول کې شته، او په لاندې ډول یې په لاس راوړو.

$$\log 5.230 = 0.7185$$
$$\log 5.240 = 0.7193$$

څرنګه چې $5.23 < 5.235 < 5.24$ دی، نو:

$$\log 5.230 < \log 5.235 < \log 5.240$$
$$0.7185 < \log 5.235 < 0.7193$$

که چیرې $\log 5.535 = x$ په پام کې ونیسو ، نو په دې صورت کې لیکو چې: $0.7185 < x < 0.7193$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د عددونو د لوګاریتم او مانتیسو نو ترمنځ تو پیر په پام کې نیسو.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{عددونه} & \text{لوګاریتمونه} \\
\text{د عددونو توپیر } 0.010 & \left[\begin{array}{ccc} & 5.240 & 0.7193 \\ 0.005 & \left[\begin{array}{cc} 5.235 & x \\ 5.230 & 0.7185 \end{array}\right] d & \end{array}\right] & 0.0008 \text{ د لوګاریتمونو توپیر}
\end{array}
$$

د خطي انټرپولیشن په طریقه کې له دې څلورو عددونو څخه یو تناسب چې یو له بل سره متناسب دي جوړوو او نامعلوم قیمت پیدا کوو یعنې:

$$\frac{d}{0.0008}=\frac{0.005}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.005\cdot 0.0008}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.000004}{0.010}=0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عددله مانتیس سره جمع کوو. چې حاصل یې د مطلوب عدد لوګاریتم دی.

$$0.0004+0.7185=0.7189$$
$$\log 5.235=0.7189$$

دویم مثال: د 0.0007957 عدد لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$
\begin{aligned}
\log 0.0007957 &= \log(7.957\cdot 10^{-4}) \\
&= \log 7.957+\log 10^{-4} \\
&= \log 7.957-4\log 10 \\
&= \log 7.957-4
\end{aligned}
$$

د 7.957 عدد لوګاریتم په جدول کې نشته، لیدل کېږي چې کرکټرستیک یې -4 دی، خو د 7.96 او 7.95 عددونو لوګاریتم په جدول کې شته.

$$\log 7.960=0.9009$$
$$\log 7.950=0.9004$$

څرنګه چې $7.950<7.957<7.960$ نو:

$$\log 7.950<\log 7.957<\log 7.960$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\log 7.957 = x$ په پام کې نیولو سره، دخطي انټرپولیشن پواسطه يې لوګاریتم په لاس راوړو.

$$\begin{array}{cc} & \text{عددونه} \qquad\qquad \text{لوګاریتمونه} \\ \text{د عددونو توپير}\ 0.01 & \left[\begin{array}{cc} 7.96 & 0.9009 \\ 0.007\left[\begin{array}{c} 7.957 \\ 7.950 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} x \\ 0.9004 \end{array}\right]d \end{array}\right]0.0005\ \text{د لوګاریتمونو توپير} \end{array}$$

$$\frac{d}{0.0005} = \frac{0.007}{0.01} \Rightarrow$$

$$d = 0.0005\frac{0.007}{0.01} = 0.00035 \approx 0.0004$$

اوس د d قیمت دکوچني عدد له مانتیس سره جمع کوو: $0.9004 + 0.0004 = 0.9008$

په پای کې په لاس راځي چې:

$$\log 0.0007957 = 0.9008 + (-4) = \bar{4}.9008$$

دریم مثال: 4.5544 عدد انتي لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: که چېرې $x = anti\log 4.5544$ وضع شي، نو باید x پیداکړو، له پورتنۍ اړیکې څخه داسې پایله پـه لاس راځي.

$$\log x = 4.5544 = 4 + 0.5544$$

$$\log x = \log(t \cdot 10^4) = \log t + 4$$

د 4.5544 عدد په جدول کې نشته، خو د 0.5539 او 0.5551 عددونه په جدول کې شته، انتيلوګاریتم يې پیدا کوو، ددغه عددونو په مرسته د x قیمت د انټرپولیشن پـه طریقـه پیدا کـوو، د عـددونو تفاضـل لکـه: پـه تېرو مثالونوکې په لاس راوړو او تناسب يې د تېرېه شان تشکیلوو.

$$\begin{array}{cc} & \text{عددونه} \qquad\qquad \text{مانتيسونه} \\ \text{د عددونو توپير}\ 0.01 & \left[\begin{array}{cc} 3.59 & 0.5551 \\ d\left[\begin{array}{c} t \\ 3.58 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 0.5544 \\ 0.5539 \end{array}\right]0.0005 \end{array}\right]0.0012\ \text{د مانتيسونو توپير} \end{array}$$

$$\frac{d}{0.01} = \frac{0.0005}{0.0012}$$

$$d = 0.01 \cdot \frac{0.0005}{0.0012} = \frac{0.000005}{0.0012} = 0.0041667$$

$$d = 0.0042$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د t د قیمت پیداکولو لپاره د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو.

$$t = 3.58 + d = 3.58 + 0.0042$$
$$= 3.5842$$
$$\log x = \log(3.5842 \cdot 10^4)$$
$$\log x = \log 35842$$

هغه وخت چې ددوو عددونو لوګاریتمونه سره مساوي وي، خپله عددونه په خپل منځ کې سره مساوي دي، نو:

$$x = 35842$$

پوښتني

په لاندې اړیکو کې د x او z قیمتونه پیداکړئ.

$a)\quad z = \log 0.001582 \qquad\qquad b)\quad x = \log 6.289$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتمي او اکسپوننشیل معادلې

Exponential and logarithmic equations

$$\log_2(x^2-1)=3$$

$$5^x=5^{\frac{1}{2}x-2}$$

آیا تر اوسه مود $5^x=5^{\frac{1}{2}x-2}$ او $\log_2(x^2-1)=3$ معادلو د

حل په اړه فکر کړی دی؟

د x په کومو قیمتونو پورتني مساوات سم دي؟

څرنګه کولای شو په دغه ډول معادلاتو کې د x مجهول قیمت وټاکو.

تعریف

هغه معادلې چې توانونه یې مجهول وي، داکسپوننشیل معادلو په نامه یادېږي، د مجهول د پیدا کولو لپاره که چېرې وکړای شو، د دواړو خواوو قاعدې سره مساوي کړو، نو د طاقت د قوانینو له مخې، چې قاعدې مساوي وي، نو توانونه یې هم یو له بل سره مساوي دي.

لومړی مثال: که $2^{x-1}=32$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د مساواتو د دواړو خوا وو قاعدې سره مساوي کوو.

$$2^{x-1}=32\Rightarrow 2^{x-1}=2^5\Rightarrow x-1=5 \quad , \quad x=6$$

دویم مثال: د $8^{3x-1}=2^4$ اکسپوننشیل معادله حل او وازمویئ.

حل:

$$8^{3x-1}=2^4$$

$$(2^3)^{3x-1}=2^{3(3x-1)}=2^4$$

څرنګه چې قاعدې یو له بل سره مساوی دي، نو توانونه یې هم مساوی دي؛ نو لیکو:

$$3(3x-1)=4$$

$$9x-3=4\Rightarrow 9x=4+3$$

$$9x=7\Rightarrow x=\frac{7}{9}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

آزمونه:

$$8^{3\frac{7}{9}-1}=2^4$$

$$8^{\frac{7}{3}-1}=2^4$$

$$8^{\frac{7-3}{3}}=2^4 \Rightarrow 8^{\frac{4}{3}}=2^4 \Rightarrow (2^3)^{\frac{4}{3}}=2^4 \Rightarrow 2^4=2^4$$

فعاليت

- په $16^{x+1}=64^{x-2}$ اکسپوننشيل معادله کې د x قيمت پيدا کړئ.

لوګاريتمي معادلې:

هغه لوګاريتمي افادې چې په هغوی کې متحول او يا مجهول شتون ولري، د لوګاريتمي معادلو په نامه ياديږی. له يوې لوګاريتمي معادلې څخه د مجهول قيمت پيداکولو لپاره لومړی معادله د لوګاريتم د قوانينو له مخې ساده کوو، وروسته يې د الجبري قوانينو او يا له اکسپوننشيل معادلو څخه په ګټې اخيستنې سره د مجهول يا متحول قيمت په لاس راوړو.

لاندې مثالونه د لوګاريتمي معادلو بېلګې دي چې د مختلفو قوانينو له مخې د مجهول قيمت محاسبه شوی دی.

لومړی مثال: له لاندې لوګاريتمي معادلې څخه د x قيمت په لاس راوړئ.

حل:

$$\log_2(x^2-1)=3$$

پورته لوګاريتمي شکل داسې ليکو :

$$x^2-1=2^3$$

$$x^2=1+8=9$$

$$x^2=9 \Rightarrow \sqrt{x^2}=\pm\sqrt{9} \quad , \qquad x=\pm 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال:په $\log_3(x+2)=2\log_3 9$ معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$\log_3(x+2)=2\log_3 9$$
$$\log_3(x+2)=\log_3 9^2$$

څرنګه چې د لوګاریتمونو قاعدې سره مساوي دي، نوعددونه هم یوله بل سره مساوي دي.

$$x+2=9^2 \Rightarrow x+2=81 \Rightarrow x=81-2$$
$$x=79$$

دریم مثال: په $\log_{\sqrt{5}} x-\log_{\sqrt{5}} 3-\log_{\sqrt{5}} 5+\log_{\sqrt{5}} 4=0$ لوګاریتمي معادله کې د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د دوو عددونو د لوګاریتم د ضرب او وېش په کارولو سره پورتنۍ معادله په لاندې ډول لیکو :

$$\log_{\sqrt{5}} x=\log_{\sqrt{5}} 3+\log_{\sqrt{5}} 5-\log_{\sqrt{5}} 4=\log_{\sqrt{5}}\frac{3\cdot5}{4}=\log_{\sqrt{5}}\frac{15}{4} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{15}{4}$$

څلورم مثال: په $\log_3(3^{2x}+2)=x+1$ معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

حل:

$$\log_3(3^{2x}+2)=x+1 \Rightarrow 3^{2x}+2=3^{x+1}$$
$$3^{2x}-3^{x+1}+2=0 \Rightarrow 3^{2x}-3\cdot3^x+2=0$$
$$(3^x)^2-3\cdot3^x+2=0$$

که $3^x=t$ وضع کړو،نو:

$$t^2-3t+2=0 \Rightarrow (t-1)(t-2)=0$$
$$t_1=1 \quad , \quad t_2=2$$

$$3^x=t_1=1 \Rightarrow 3^x=3^0 \Rightarrow x_1=0$$
$$3^x=t_2=2 \Rightarrow \log_3 2=x \Rightarrow x_2=\log_3 2$$

پنځم مثال:په لاندې لوګاریتمي معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

$$\log(x^2+36)-2\log(-x)=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\log(x^2+36)-\log(-x)^2=1$$

$$\log\frac{x^2+36}{x^2}=\log 10\Rightarrow\frac{x^2+36}{x^2}=10$$

$$x^2+36=10x^2\Rightarrow 10x^2-x^2-36=0$$

$$9x^2=36\Rightarrow x^2=4$$

$$x_{1,2}=\pm 2\quad,\quad x_1=2\quad,\quad x_2=-2$$

پوښتني

په لاندې لوګاریتمي او اکسپوننشیل معادلو کې د x قیمت په لاس راوړئ.

$a)\quad (11)^{3x-1}=11$

$b)\quad 7^{2x-1}=3^{x+3}$

$c)\quad \log\sqrt{x}+3=4$

$d)\quad \log_5\frac{x-1}{x-2}=2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

درياضيکی عمليوپه سرته رسولوکې له لوګاريتم څخه کار اخېستنه

آيا کولای شو د اعشاری عددونو عمليې لکه ضرب، تقسيم، توان او جذر د لوګاريتم په کارولو سره په اسانه سرته ورسوو.

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{28.8}{78.8}\\[2mm] 3.17\cdot 88.2\end{array}\right\}=?$$

د ضرب حاصل پيدا کول د لوګاريتم په مرسته: کولای شو ددوو يا څو عددونو د ضرب حاصل، د لوګاريتم د لاندې قانون له مخې پيدا کړو: $\log(M\cdot N)=\log M+\log N$

مثال: غواړو چې د $3.17\cdot 88.2$ عددونو د ضرب حاصل د لوګاريتم په مرسته پيدا کړو.

حل: د ضرب د قانون په اساس ليکلای شو:

$$\log(3.17\cdot 88.2)=\log 3.17+\log 88.2$$
$$=0.5011+1.9455=2.4466$$

ليدل کېږي چې د0.4466 مانتيس عدد په جدول کې نشته، خود 0.4456 او0.4472 مانتيسونو په منځ کې شته.

له جدول څخه ليدل کېږي چې:

$$anti\log 0.4456=2.79$$
$$anti\log 0.4472=2.80$$

$$\begin{array}{c} \text{د عددونو توپير}\ 0.01 \left[\begin{array}{ccc} & \text{عددونه} & \text{مانتيسونه}\\ & 2.79 & 0.4456\\ d & \left[\begin{array}{c} t\\ 2.80\end{array}\right. & \left.\begin{array}{c}0.4466\\ 0.4472\end{array}\right]0.0006 \end{array}\right]0.0016\ \text{د مانتيسونو توپير}\end{array}$$

$$\frac{d}{0.01}=\frac{0.0006}{0.0016}\Rightarrow d=\frac{0.0006\cdot 0.01}{0.0016}=\frac{0.00006}{0.0016}$$
$$d=0.00375$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو:

$$t = 2.79 + 0.00375 = 2.79375$$

$$\log x = \log(2.79375 \cdot 10^2) \Rightarrow x = 297.375$$

په داسې حال کې چې $anti\log 2.4466 = 297.375$ دی، نو: $3.17 \cdot 88.2 = 297.375$

آیا پوهېږی؟

ددوو یا څو عددونو د ضرب لپاره لومړی د لوګاریتم د جمعې حاصل پیدا کوو ، وروسته یې انتي لوګاریتم په لاس راوړو چې دغه انتي لوګاریتم د نوموړو عددونو د ضرب حاصل تشکیلوي.

فعالیت

- د $74.2 \cdot 62$ د ضرب حاصل د لوګاریتم په واسطه پیدا کړئ.

د خارج قسمت پیدا کول د لوګاریتم په مرسته:

کولای شو د لوګاریتم له څلورم قانون څخه په کار اخیستنې سره ، د دوو اعشاري عددونو دتقسیم حاصل په لاس راوړو یعنې: $\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$

مثال: غواړو د $\frac{8750}{3.49}$ خارج قسمت د لوګاریتم پواسطه پیداکړو.

حل:

$$\log \frac{8750}{3.49} = \log 8750 - \log 3.49$$

د لوګاریتم له جدول څخه لروچې:

$$\log 8750 = 3.9420$$

$$\log 3.49 = 0.5428$$

$$\log 8750 - \log 3.49 = 3.9420 - 0.5428 = 3.3992$$

$$anti\log 3.3992 = 2507$$

$$\frac{8750}{3.49} = 2507$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه: ددوو عددونو د خارج قسمت د حاصل پيداکولو لپاره لومړی دمقسوم لـه لوگـاريتم څخـه د مقسوم عليه لوگاريتم کموو، وروسته ددغـه تفـاوت انتـي لوگـاريتم پـه لاس راوړو چې داد مطلوب خـارج قسمت حاصل دی.

فعاليت

- د $\frac{374}{16.2}$ حاصل د لوگاريتم په مرسته په لاس راوړئ.

د لوگاريتم په واسطه د توان لرونکي عدد محاسبه:

د هغو توان لرونکوعددونومحاسبه چې توانونه يې تام اويا کسرونه وي، د لوگاريتم له پـنځم قـانون څخـه کـار اخلو يعنې $\log M^n = n\log M$

مثال: غواړو چې د $(1.05)^6$ عدد محاسبه کړو.

حل:

$$\begin{aligned}\log(1.05)^6 &= 6\log 1.05 = 6(0.0212)\\ &= 0.1272\end{aligned}$$

بناپردی $anti\log 0.1272 = 1.340$

په لنډ ډول ويلای شوچې: ديوه توان لرونکي عدد قيمت پيداکولو لپاره لـومړی د عـدد تـوان پـه لوگـاريتم کې ضربوو، ددغه حاصل ضرب انتي لوگاريتم د توان لرونکي عدد قيمت دی.

فعاليت

- د $(694)^{\frac{2}{3}}$ عدد قيمت د لوگاريتم په واسطه پيداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. د لاندې حاصل ضرب د لوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$0.097 \cdot 7.78 = ?$$

2. لاندې د تقسیم حاصل د لوګاریتم په واسطه حساب کړئ.

$a)\quad \dfrac{8}{737} = ?\qquad\qquad b)\quad \dfrac{32.2}{25.1} = ?$

3. لاندې توان لرونکي عدد دلوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$(964)^{\frac{2}{3}} = ?$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

اکسپوننشیل تابع: که a یو مثبت عدد او $a \neq 1$ وي، نو د $f(x) = a^x$ تابع اکسپوننشیل تابع د a په قاعده نومېږي.

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه:

- د اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه حقیقي عددونه او دقیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د اکسپوننشیل تابع ګراف چې $a \neq 1$ وي، منحني یې د $(0،1)$ له ټکي څخه تېرېږي.
- د اکسپوننشیل تابع ګراف نظر y محور ته متناظر واقع دی.
- هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوس تابع یې $Log_a x$ دی.

لوګاریتمي تابع: $y = \log_a x$ چې د $y = a^x$ اکسپوننشیل تابع معکوس دی، د لوګاریتمي تابع په نامه یادېږي.

دلوګاریتمي تابع خواص

- دلوګاریتمي تابع د قیمتونو ساحه مثبت حقیقي عددونه تشکیلوي.
- د لوګاریتمي تابع ګراف په قایمو مختصاتو کې د $(1،0)$ له ټکي څخه تېرېږي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره تابع $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د هرې لوګاریتمي تابع $f(x) = \log_a x$ مجانب، د y محور دی.

د لوګاریتم قوانین:

- لومړی قانون $\log_a a = 1$
- دویم قانون $\log_a 1 = 0$
- دریم قانون $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
- څلورم قانون $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- پنځم قانون $\log_a x^n = n \log_a x$
- شپږم قانون $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$
- اووم قانون $\frac{\log_a M}{\log_a b} = \log_b M$
- اتم قانون $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم ډولونه:

معمولي لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده یې 10 وي، معمولي لوګاریتم یا اعشاري (Brigys) لوګاریتم بلل کېږي چې د (log) په سمبول سره ښودل کېږي.

طبیعي لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده یې e وي، د طبیعي لوګاریتم پـه نامـه یـادېږي، چې طبیعي لوګاریتم د ln په سمبول ښودل کېږي یعنې $\log_e x = \ln x$

کرکټرستیک او مانتیس

کرکټرستیک که چېرې $\log x = n + \log S$ وي داسي چې $1 \leq S < 10$ او n یو تام عدد دی n د مشخصې یا کرکټرستیک په نامه یادېږي چې د عدد د رقمونو له مخې ټاکل کېږي.

مانتیس: د $(\log S)$ اعشاري برخه د مانتیس په نامه یادېږي چې د جدول له مخې ټاکل کېږي، مانتیس یـو مثبت عدد د صفر او یوه ترمنځ دی.

انتــي لوګــاریتم (antilogarithm): کـه $\log_a y = x$ وي، نـو y د x د لوګـاریتم انتـي لوګـاریتم دی یعنـې $y = anti\log x$

خطي انټرپولیشن: که یو نامعلوم عدد ددوو معلومو عددونو په منځ کې واقع وي او د معلومو عددونو په مرسته نامعلوم عدد پیدا کړو، پدې صورت کې دا طریقه د خطي انټرپولیشن په نامه یادېږي.

اکسپوننشیل او لوګاریتمي معادلې

- **اکسپوننشیل معادلې** هغه معادلې چې په هغې کې د حدونو، توانونـه مجهـول وي، د اکسپونـنشیل معـادلې پـه نامـه یادېږي، د مجهول د پیدا کولو لپاره د طاقت له قوانینو څخه ګټه اخلو.
- **لوګاریتمي معادلې** هغه لوګاریتمي مساوات چې پـه هغـوی کـې مجهـول موجـودوي، د لوګـاریتمي معـادلو پـه نامـه یادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي پوښتني

لاندې پوښتنې په غور ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا اوله هغه څخه کړۍ تاو کړئ.

1. $\log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{4})$ مساوي له څو سره دی؟

$a)\ 4$ $\quad b)\ -4$ $\quad c)\ 3$ $\quad d)\ -3$

2. د $\log_b \sqrt[4]{81} = \frac{1}{4}$ اريکه کې د b قيمت عبارت دی له:

$a)\ \frac{1}{4}$ $\quad b)\ 81$ $\quad c)\ \sqrt{81}$ $\quad d)\ -4$

3. د $\log_3 81 - \log 0.01$ افادې قيمت په لاس راوړئ.

$a)\ 0$ $\quad b)\ 4$ $\quad c)\ 8$ $\quad d)\ 9$

4. د x قيمت په $\log 81 - \log 2x = \log 3$ افاده کې مساوي له څو سره دی.

$a)\ 2$ $\quad b)\ 3$ $\quad c)\ 4$ $\quad d)\ 5$

5. $\log_2 16 = ?$

$a)\ 4$ $\quad b)\ 3$ $\quad c)\ 5$ $\quad d)\ -4$

6. $\log_{\frac{1}{5}} 125$

$a)\ 3$ $\quad b)\ -3$ $\quad c)\ 4$ $\quad d)\ 5$

7. د $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ قيمت عبارت دی له :

$a)\ \frac{1}{2}$ $\quad b)\ -\frac{1}{2}$ $\quad c)\ 1$ $\quad d)\ -1$

8. د x قيمت د $3^{x-1} = 9$ په معادله کې عبارت دی له :

$a)\ x=-3$ $\quad b)\ x=9$ $\quad c)\ x=-9$ $\quad d)\ x=3$

9. د $\log 234.21$ مشخصه ياکرکترستيک عبارت دی له:

$a)\ 0$ $\quad b)\ 1$ $\quad c)\ 2$ $\quad d)\ 3$

10. د يوه عدد دلوګاريتم معکوس عبارت دی له:

$a)\ \log_a m = \frac{1}{\log_a m}$ $\quad b)\ \log_a m = -\frac{1}{\log_a m}$ $\quad c)\ \log_a m = \frac{1}{\log_m a}$ $\quad d)$ هيڅ يو

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. په لاندې معادلوکې د x قیمت پیدا کړئ

$a)\ 3^x = 3^{3x+2}$ $b)\ 3^{2x} = 9^{4x-1}$

$c)\log_3(x+2) = 2\log_3 9$ $d)\ 16^{x+1} = 64^{x-2}b$

$e)15^{2x-1} = 7^{x+1}$ $f)\ \log\sqrt{x+1} = 1-\frac{1}{2}\log x$

$g)\log(4x-3) = 2-\log 20$ $h)\ \log_5(x-1)-\log_5(x-2) = \log_5 2$

2- لاندې لوګاریتمي افادې د لوګاریتم د قوانینو په کارولو سره ساده کړئ.

$a)\log_8 3\sqrt{4} = ?$ $b)\log_3\frac{1}{243} = ?$

$c)\log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $d)\log(\frac{8}{\sqrt{128}}) = ?$ $e)\ \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$

3. لاندې لوګاریتمونه محاسبه کړئ.

$a)\quad \log_8\sqrt[3]{4} = ?$ $b)\quad \log_3\frac{1}{243} = ?$

$c)\quad \log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $d)\quad \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$ $e)\quad \log\frac{8}{\sqrt{128}} = ?$

4. لاندې انتي لوګاریتمونه پیدا کړئ.

$a)\ 1.7300$ $b)0.8954$ $c)4.5682$ $d)\bar{2}.1987$

5. دلاندې هر عدد لوګاریتم حساب کړئ.

$a)89500$ $b)\ 91$ $c)3065.3$ $d)\log 0.002$

6. د لوګاریتم په مرسته لاندې حاصل ضرب پیدا کړئ.

$a)\quad 2.01\cdot 52.9$ $b)\quad (0.0062)(-34.8)$

7. د لاندې تقسیم حاصل د لوګاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ 0.888\div 256$ $b)\ 17.3\div 7.47$

8. د لاندې توان لرونکو عددونو قیمتونه د لوګاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)(7.42)^3$ $b)(-84.7)^2$ $c)\sqrt{418}$ $d)\sqrt{0.21}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم جدول چې مانتیس یې څلور اعشاري رقمونه لري

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

(c) ketabton.com: The Digital Library

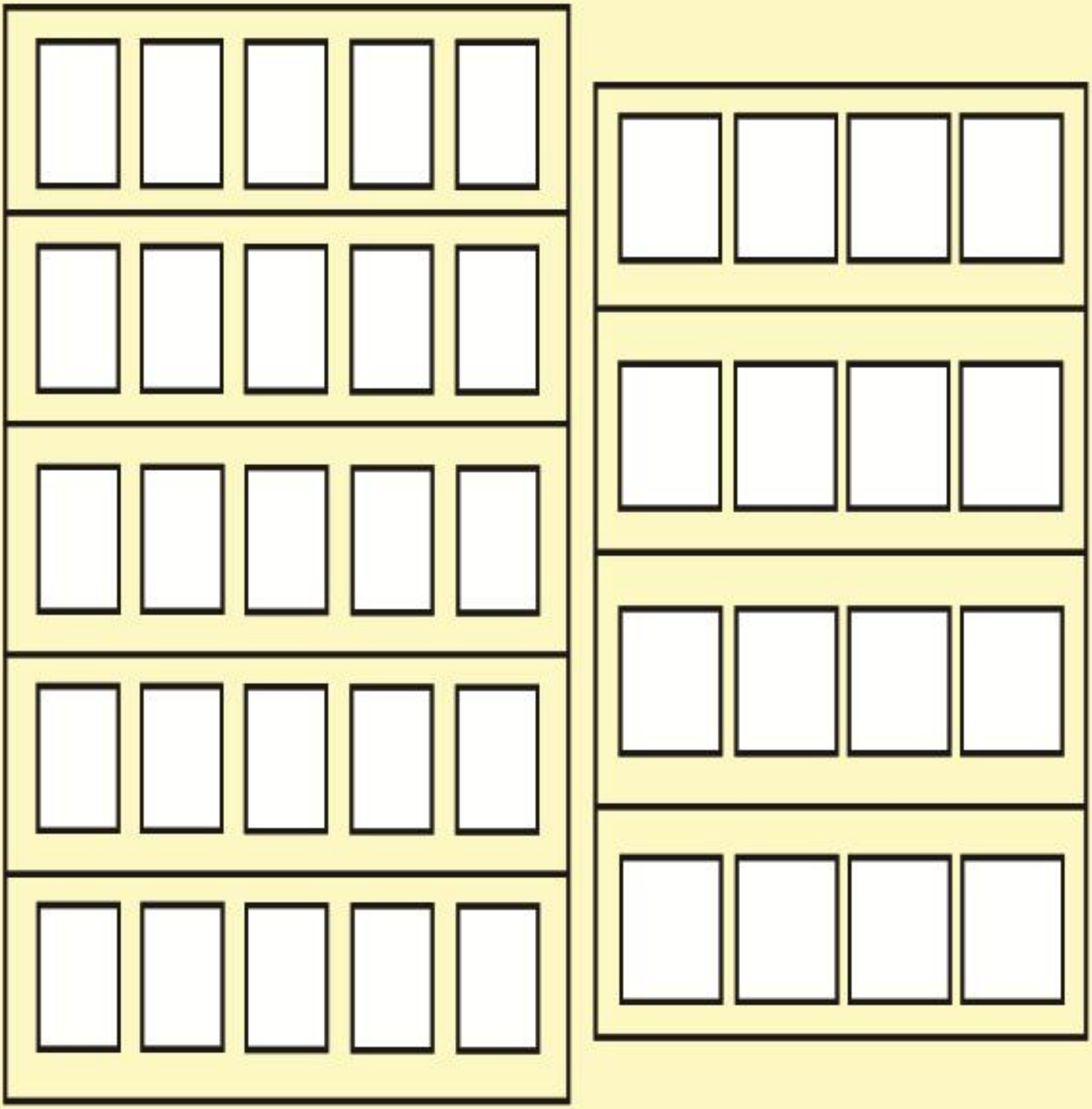
No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی

مټریکسونه

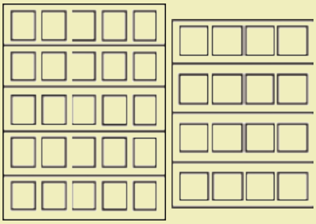
(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

متریکسونه

Matrixes



د څو پوړیزې ودانۍ تصویر په پام کې نیسو، هره ودانۍ څو پوړه لري، په مخامخ شکل کې وینو چې د لومړۍ ودانۍ د کړکیو شمېر $5\cdot 5=25$ دی، د کوچنۍ ودانۍ د هر پوړ کړکۍ وشمېرئ.

فعالیت

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ.
- د M ټکی متناظر یعني $M'(x',y')$ نظر x محور ته وټاکئ.
- د M او M' مختصاتو تر منځ اړیکې ولیکئ.
- پورتنۍ اړیکې د ضریبونو په څېر ولیکئ.
- د پورتني فعالیت ټول مراحل، د p او د هغه متناظر p'، نظر y محورته S او د هغه متناظر S' نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ سرته ورسوئ.

د پورتني فعالیت له اجراء څخه وروسته لاندې پایله لیکلای شو:

$$\begin{cases} x = x' \\ -y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\,x + 0\,y = x' \\ 0\,x - 1\,y = y' \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} M \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} M' \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \end{array}$$

په دې معنا چې د M ټکی د $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ په واسطه د M' په ټکي بدل او یا اوښتی دی.

پوهېږئ چې هر یو د $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د یوه ټکي ستوني ښوونه ده.

او دغه جدول $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ یوه نوې وسیله ده چې د لومړي ځل لپاره تاسو له هغې سره مخامخ کېږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ هر یو د p', p او s', s دټکوبدل شوي وسیله ده.

لاندې هرې یوې وسیلې ته (چې دټکود بدلولو د بدلیدو دنده په غاړه لري) مټریکس وايي.

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

تعریف:د شیانو، عددونو یا تورو ګیډۍ چې په سطري او ستوني ډول، په یوه مستطیلي جدول کې ترتیب شي، د مټریکس (Matrix) په نامه یادېږي.

د مستطیلي جدول هر عنصر د مټریکس د عنصر په نامه یادېږي. لوی حروفونه د $A, B, C...$ مټریکس ښيي او واړه حروفونه $a, b, c...$ د مټریکس عناصر دي.

د عددونو هر یولاندی جدول یو مټریکس په ګوته کوي.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ -3 & 7 & 5\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\dashrightarrow \text{لومړی سطر}\\ \dashrightarrow \text{دویم سطر}\\ \dashrightarrow \text{دریم سطر}\end{array}$$

لومړی ستون دویم ستون دریم ستون

$$B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\begin{array}{l}\dashrightarrow \text{لومړی سطر}\\ \dashrightarrow \text{دویم سطر}\\ \dashrightarrow \text{دریم سطر}\end{array}$$

$$C=\begin{pmatrix}0 & \frac{4}{3} & 7 & -2\end{pmatrix}\dashrightarrow \text{کرښه}$$

که چېرې a د یوه مټریکس په $i-$ام کرښه او $j-$ام ستون کې ځای ولري، هغه د a_{ij} په شکل ښودل کېږي چې i او j طبیعي عددونه دي، په ترتیب سره د سطر او ستون له شمېر څخه ښکارندويي کوي.

$$i=1,2,3... \quad , \quad j=1,2,3...$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}...a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}...a_{2n}\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}...a_{mn}\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مېټريکس مرتبه: که د A د مېټريکس د سطرونو شمېر m او د ستونونو شمېر يې n وي، وايو چې د A مېټريکس مرتبه د $m\times n$ څخه عبارت دی اوداسې ويل کېږي چې m په n کې مېټريکس او ليکو $A=(a_{ij})_{m\times n}$ د هر مېټريکس د سطرونو او ستونونو شمېر د همغه مېټريکس مرتبه ښيي.

فعاليت

- د لاندې مېټريکسونو مرتبه وټاکئ.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

پاملرنه وکړئ، هغه مېټريکس چې يو سطر او يو ستون لري يعنې $A=(X)_{1\times 1}$ ، نو د A مېټريکس د هغه له داخلي عدد سره مساوي دی. $A=(7)_{1\times 1}=7$

مثال: لاندې مېټريکسونه د مستطيلي جدول په ډول وليکئ.

$a)\qquad (a_{ij})_{2\times 2}=(i+j)_{2\times 2} \qquad\qquad b)\qquad (a_{ij})_{3\times 2}=(i\cdot j)_{3\times 2}$

حل: د پورتني هر مثال د حل لپاره لومړی د مېټريکس عمومي شکل ليکو، د a جزء د مېټريکس عمومي شکل 2×2 کې يو مېټريکس دی.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}=i+j$

$a_{11}=1+1=2\ ,\ a_{12}=1+2=3\ ,\ a_{21}=2+1=3\ ,\ a_{22}=2+2=4$

په پايله کې غوښتل شوی مېټريکس عبارت دی له: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

د b جزء): د b جزء د مېټريکس عمومي شکل يو (3×2) کې مېټريکس دی، يعنې 3 سطره او 2 ستونه لري.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$a_{11}=1\cdot 1=1\ ,\ a_{21}=2\cdot 1=2\ ,\ a_{31}=3\cdot 1=3$

$a_{12}=1\cdot 2=2\ ,\ a_{22}=2\cdot 2=4\ ,\ a_{32}=3\cdot 2=6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پایله کې غوښتل شوی متریکس عبارت دی له:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

دوهمه مرتبه متریکسونه هغه وخت سره مساوي دي چې د هغوی هر عنصر یو په یو سره مساوي وي، مثلاً: $\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ هغه وخت یوله بل سره مساوي دي چې $a=-1$ او $b=2$ وي، آیا $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ متریکسونه یوله بل سره مساوي دي اوکه نه؟ ولې؟

پوښتنې

1. د لاندې متریکسونو مرتبې ولیکئ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. لاندې متریکسونه د مستطیلي جدول په شکل ولیکئ.

$a)\ (a_{ij})_{3\times3} = (2i+3j)_{3\times3}$ $\qquad$ $b)\ (a_{ij})_{2\times3} = \left(\frac{i}{j}\right)_{2\times3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مېټريکسونو ډولونه

د مېټريکسونومخامخ شکلونه څو سطرونه اوڅوستونونه لري؟

آياصفرونه دمېټريکس عناصر کيداى شي؟

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(4 \quad 5 \quad 6)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. **سطري مېټريکس**(Row Matrix)**:**هغه مېټريکس چې يوازې او يوازې يو سطر ولري، سطري مېټريکس يې بولي، مثلاً: $A=(4 \quad 5 \quad 9 \quad 0)_{1\times 4}$

2. **ستوني مېټريکس** (Column Matrix)**:** هغه مېټريکس دی چې يوازې يو ستون ولري، د ستوني مېټريکس په نامه يادېږي، مثلاً: $A=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}_{3\times 1}$

3. **صفري مېټريکس**(Null matrix): هغه مېټريکس چې ټول عناصريې صفرونه وي، له صفري مېټريکس څخه عبارت دی او د $0_{m\times n}$ په شکل يې ښيي.

$$0_{2\times 4}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 4} \qquad 0_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

4. **مربعي مېټريکس**(Square Matrix)**:** که چېرې په يوه مېټريکس کې د سطرونو شمېر د ستونونو له شمېرسره برابر $(m=n)$ شي، د مربعي مېټريکس په نامه يادېږي، مثلاً:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad , \qquad m=n \ \Rightarrow\ 3=3$$

هر مربعي مېټريکس دوه قطرونه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه قطر چې عناصر يې $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ وي، اصلي قطر(Mean diagonal) او هغه قطر چې عناصر يې $a_{n1}, \dots, a_{1n}$ وي، فرعي قطر (Minor Diagonal) بلل کېږي.

اصلي قطر   فرعي قطر

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فرعي قطر   اصلي قطر

فعالیت

- داسې مېټريکسونه وليکئ چې مرتبې يې 1×3 او 4×1 وي، دا څه ډول مېټريکسونه دي؟

5. **قطري مېټريکس** (Diagonal Matrix)**:** هغه مېټريکس چې ټول عناصر يې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، د قطري مېټريکس په نامه يادېږي.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad ، \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

6. **سکالر مېټريکس** (Scalar Matrix)**:** هغه قطري مېټريکس چې د اصلي قطر عناصر يې سره مساوي وي، د سکالر مېټريکس په نامه يې يادېږي، لکه:

$$A=\begin{pmatrix} K & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & K & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K \end{pmatrix}_{m\times n}$$

7. **واحد مېټريکس** (Unite Matrix)**:** که چېرې په يو سکالر يا قطري مېټريکس کې د اصلي قطر ټول عناصر د (1) عدد وي، دغه ډول مېټريکس ته واحد مېټريکس وايي او په I_n سره ښوول کېږي.

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\dots 0 \\ 0 & 1 & 0\dots 0 \\ 0 & 0 & 1\dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\dots 1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- یو د 3×3 مرتبې متریکس ولیکئ چې د اصلي قطر ښکته ټول عناصر یې صفرونه وي.
- په همدې ډول یو د 3×3 مرتبې متریکس ولیکئ چې د اصلي قطر پورتني عناصر یې ټول صفرونه وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانېږي:

که چېرې په یوه مربعي متریکس کې د اصلي قطر پورتني او یا ښکتني ټول عناصر صفرونه وي، په دغه صورت کې متریکس د مثلثي متریکس (Triangular matrix) په نامه یادېږي.

که چېرې د اصلي قطر پورتني ټول عناصر صفرونه وي، د پورتني مثلثي متریکس (Upper triangular matrix) او که چېرې د اصلي قطر ښکتني ټول عناصر صفرونه وي، د ښکتني مثلثي متریکس (lower triangular matrix) په نامه یادېږي.

په لاندې مثالونو کې A یو پورتنی مثلثي متریکس او B ښکتنی مثلثي متریکس دی.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&0\\3&7&9\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&9\\0&0&4\end{pmatrix}$$

متقابل (متضاد) متریکس:

که چېرې د A متقابل متریکس په $(-A)$ سره وښودل شي نو، دا هغه متریکس دی چې هر عنصر د A د متناظر عنصر متضاد دی. که چېرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو متریکس وي، نومتقابل متریکس یې $(-A)$ په لاندې ډول تعریفېږي:

$$A=(a_{ij})_{m\times n}\overset{\text{متقابل}}{\Rightarrow}-A=(-a_{ij})_{m\times n}$$

لکه په لاندې مثال کې:

$$A=\begin{pmatrix}2&4&5\\-1&2&0\\2&-3&-4\end{pmatrix}\Rightarrow -A=\begin{pmatrix}-2&-4&-5\\1&-2&0\\-2&3&4\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. لاندې مټریکسونه په پام کې ونیسئ، مرتبې او اړوند نومونه یې وټاکئ:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -5\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\qquad b)\ B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad c)\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$d)\ D=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\qquad e)\ E=\begin{pmatrix}5 & -6 & 7 & 8\end{pmatrix}\qquad f)\ F=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$$

$$g)\ G=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}\qquad h)\ H=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مېټريکسونو جمع او تفريق

Addition and subtraction of Matrix

په مخامخ مېټريکسونو کې د هغوی د جمعې او تفريق

په اړه د امکان په صورت کې څه ويلای شئ.

$A+A=$

$A-A=$

$A+B=$

$A-B=$

$B+B=$

$B-B=$

?

1) **د مېټريکسونو جمع:**

که چېرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ دوه مېټريکسونه وي، نو $A+B=C$ عبارت له هغه مېټريکس څخه دی چې د C_{ij} هر عنصر يې د a_{ij} او b_{ij} د جمعې له حاصل څخه لاس ته راغلی وي، يعنې د دوو مېټريکسونو جمع کول يوازې هغه وخت امکان لري چې د دواړو مېټريکسونو مرتبې سره مساوي وي. څرنګه چې C_{ij} د دوو حقيقي عددونو د جمعې حاصل دی، نو:

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}\Rightarrow(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}$$

مثال:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\\ 1 & 7\end{pmatrix}_{3\times2}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\\ 0 & -4\end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\\ 1 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3 & 2+2\\ -2+1 & 0+2\\ 1+0 & 7+(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4\\ -1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=C_{3\times2}$$

2. **د مېټريکسونو تفريق:**

د جمعې عمليې ته ورته کولای شو، د دوو مېټريکسونو تفاضل يا د تفريق حاصل په لاس راوړو. که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ وي، نو د تفريق حاصل يې په لاندې ډول په لاس راوړای شو:

$$A_{m\times n}-B_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}-(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}=C_{m\times n}$$

فعاليت

- که $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ وي، $A-B$ په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مېټريکسونو د جمعې او تفريق خاصيتونه:

1. د مېټريکسونو جمع کول دبدلون خاصيت لرى، خو د مېټريکسونو تفريق د بدلون خاصيت نه لري، يعنې:

$$A+B=B+A$$

$$A-B\neq B-A$$

2. د مېټريکسونو جمع او تفريق اتحادي خاصيت لري. $(A\pm B)\pm C=A\pm(B\pm C)$

3. د عينيت عنصر (Identity Element) د مېټريکسونو په جمع کې صدق کوي ،خو د مېټريکسونو په تفريق کې صدق نه کوي. $A+0=0+A=A$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: څرنګه چې د دواړو مېټريکسونو مرتبه سره برابره (3×3) ده، نو کولای شو د تفريق حاصل يې په لاس راوړو.

$$A-B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-11&2-1&3-5\\2&-0&5-3&4-0\\6&-2&0-5&1-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&1&-2\\2&2&4\\4&-5&-5\end{pmatrix}$$

فعاليت

- د يوه مثال په واسطه وښاياست چې $A-B\neq B-A$ دی.

دويم مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\0&6\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}3&1&3\\2&5&-1\end{pmatrix}$ وي، د امکان په صورت کې $A+B$ او $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: ليدل کېږي چې د A او B مېټريکسونو مرتبې سره خلاف دي، نو له دې امله يې جمع او تفريق امکان نه لري، ځکه د A د مېټريکس مرتبه 3×2 او د B مېټريکس مرتبه 2×3 ده.

پوښتنې

لاندې مېټريکسونه د امکان تر بريده جمع او تفريق کړئ:

$a)$ $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

$b)$ $A=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}$, $c)$ $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&4\\-1&0&1\end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په متریکس کې د سکالر ضرب

مو‌ږ د متریکسونو د جمعې او تفریق قاعده ولیدله که $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ یو **متریکس** او K یـو سـکالر وي، د هغوی د ضرب حاصل په اړه څه فکر کوئ؟

$$K\cdot A=K\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ یو **متریکس** او k یو سکالر وي، د $K\cdot A$ حاصل په لاس راوړئ.

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad , \qquad KA=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- د $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ **متریکس** په کوم عدد کې ضرب شي، تر څو یې د ضرب حاصل یو واحد متریکس شي.

کولای شو د فعالیت له اجرا کولو وروسته یې په لاندې ډول تعریف کړو.

تعریف: که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو **متریکس** او $K\in IR$ یو حقیقي عدد وي، نو KA د C له **متریکس** څخه عبارت دی، په داسې حال کې چې د C_{ij} هر عنصر د K د ضرب حاصل په a_{ij} کې دی.

$$C_{ij}=K(a_{ij})$$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ او $K=2$ وي، د KA د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل:
$$K\,A=2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot1 & 2\cdot3 & 2\cdot6 \\ 2\cdot2 & 2\cdot1 & 2\cdot0 \\ 2\cdot1 & 2\cdot0 & 2(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په مټریکس کې د سکالر ضرب خاصیتونه:

که چېرې A او B دواړه د یو شان مرتبې مټریکسونه، α او β دوه حقیقي عددونه وي، نو:

$a)\ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$b)\ (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

$c)\ \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

دویم مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$, $\alpha=3$, $\beta=2$ راکړل شوي وي، وښایاست چې

$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

حل:

$$\alpha(\beta A)=3\left[2\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=3\begin{pmatrix}2\cdot 3 & 2\cdot 6\\ 2(-3) & 2\cdot 9\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}6 & 12\\ -6 & 18\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot 6 & 3\cdot 12\\ 3(-6) & 3\cdot 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$(\alpha\ \beta)A=(3\cdot 2)\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6\cdot 3 & 6\cdot 6\\ 6(-3) & 6\cdot 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\beta(\alpha\ A)=2\left[3\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=2\begin{pmatrix}3\cdot 3 & 3\cdot 6\\ 3(-3) & 3\cdot 9\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}9 & 18\\ -9 & 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$$

پوښتنې

1. که چېرې $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\alpha=2$ او $\beta=1$ راکړل شوي وي. په مټریکس کې د سکالر ضرب درې خاصیتونه تطبیق کړئ؟

2. که $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ او $K=3$ وي، KA او $\frac{1}{K}A$ پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوو مېټريکسونو ضرب

Multiplication of two Matrixes

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=?$$

ایاد دوو مېټريکسونو د ضرب لپاره کوم نظر ورکولای شئ؟

تاسو د دوو مېټريکسونو د جمعې لپاره پيداکړل چې $A+B=B+A$ دی، د مېټريکسونو د ضرب لپاره څه فکر کوئ؟

تعريف

دوه مېټريکسونه د $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ په پام کې ونيسئ، د دې لپاره چې دا دواړه مېټريکسونه يو په بل کې ضرب شي، نو بايد د لومړی مېټريکس د ستونونو شمېر د دويم مېټريکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي. د مېټريکسونو د ضرب حاصل بيا هم يو مېټريکس دی ،لکه: $C=(a_{ij})_{m\times p}$ چې د سطرونو شمېر يې د لومړي مېټريکس د سطرونو په اندازه او د ستونونو شمېر يې د دويم مېټريکس د ستونونو له شمېر سره برابر دی.

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

د دوو مېټريکسونو د ضرب لپاره په لاندې ډول کړنه کوو:

د لومړي مېټريکس لومړی سطر د دويم مېټريکس په ټولو ستونو کې په وار سره ضربوو او په همغه سطر کې يې ليکو، په دويمه مرحله کې بيا هم د لومړي مېټريکس دويم سطر د دويم مېټريکس په ټولو ستونونو کې په وار سره ضربوو او په همغه دويمه سطر کې يې ليکو، دغې عمليې ته تر هغه دوام ورکوو، ترڅو ټول سطرونه د لومړي مېټريکس په دويم مېټريکس کې ضرب شي، په دغه ډول د مېټريکسونو د ضرب حاصل محاسبه کېږي. دغه مطلب کولای شو په لاندې ډول وښيو.

$$(a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=(C_{ij})_{m\times p}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$ راکړل شوي وي، نو $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل: د دوو مټریکسونو د ضرب له تعریف څخه پوهېږو:

دویم پراو

لومړی پراو

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+0\cdot(-1)\\ -1\cdot1+0\cdot0+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$$

دویم مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ راکړل شوي وي، نو $A\cdot B$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: بیا هم د مټریکسونو د ضرب له تعریف څخه په کار اخېستنې لرو چې:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}(2\ \ 3\ \ -1)\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix} & (2\ \ 3\ \ -1)\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 2\end{pmatrix}\\ (-2\ \ 1\ \ 2)\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix} & (-2\ \ 1\ \ 2)\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 2\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+3\cdot2+(-1)(-1) & 2\cdot3+3\cdot0+(-1)\cdot2\\ (-2)(1)+1\cdot2+2(-1) & -2(3)+1\cdot0+2\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2+6+1 & 6+0-2\\ -2+2-2 & -6+0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 4\\ -2 & -2\end{pmatrix}_{2\times2}$$

دریم مثال: $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 6 & 1 & 7\end{pmatrix}$ وي $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل :

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 6 & 1 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot3+3\cdot6 & 1\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot0+3\cdot7\\ 5\cdot3+2\cdot6 & 5\cdot2+2\cdot1 & 5\cdot0+2\cdot7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3+18 & 2+3 & 0+21\\ 15+12 & 10+2 & 0+14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & 5 & 21\\ 27 & 12 & 14\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$ وي، د ضرب دحاصل دشتون په صورت کې AB او BA پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

خلورم مثال: که $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ او $D=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$ وي، CD او DC پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

حل:

$$CD=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(-3)+(-1)(-4) & 2\cdot4+(-1)(-3)\\ 1(-3)+2(-4) & 1\cdot4+2(-3)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 8+3\\ -3-8 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$

$$DC=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot2+4\cdot1 & (-3)(-1)+4\cdot2\\ -4\cdot2+1\cdot(-3) & -4(-1)+(-3)\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 3+8\\ -8-3 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$

معلومېږي چې $CD=DC$ دی.

د مېټریکس د ضرب خواص:

لومړی خاصیت: په عمومي ډول د دوو مېټریکسونویه ضرب کې د بدلون خاصیت صدق نه کوي.

یعنې که A او B دوه مېټریکسونه او AB او BA تعریف شي، نو: $AB\neq BA$

دویم خاصیت: د مېټریکسونو ضرب د اتحادي ضرب خاصیت لري. که چېرې B, A او C د $m\times n$ مرتبې مېټریکسونه وي، نو $(AB)C=A(BC)$

دریم خاصیت: د مېټریکسونو ضرب توزیعي خاصیت د جمعې او ضرب لپاره لري، نو لرو:

$a)\ A(B+C)=AB+AC$

$b)\ (A+B)C=AC+BC$

$c)\ K(AB)=(KA)B=A(KB)\ ,\quad K\in IR$

$d)\ IA=AI=A$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

د لاندې متریکسونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=?$$

$$b)\ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=?$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}=?$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه متریکس ترانسپوز

Transpose of Matrix

که په یو متریکس کې سطرونه په ستونونو او ستونونه په سطرونو بدل شي نوی متریکس چې په لاس راځي په څه نوم یادېږي؟

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ متریکس په پام کې ونیسئ، سطرونه ستونونوته او ستونونه سطرونو ته ولېږدوی، هغه نوی متریکس چې په لاس راځي ویې لیکئ.
- که چېرې د یوه متریکس د سطرونو او ستونونو ځایونه یوله بل سره بدل کړو افقي لیکې په عمودي او عمودي په افقي واړوو، هغه نوی متریکس چې لاس ته راځي، آیا له لومړي متریکس سره مساوي دی، نوی متریکس په څه نوم یادېږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

تعریف: که چېرې د یوه متریکس چې مرتبه یې $(m\times n)$ وي، سطر په ستون او ستون په سطر واړول شي، هغه نوی متریکس چې په لاس راځي، له ترانسپوز(Transpose) متریکس څخه عبارت دی، د A ترانسپوز متریکس په A^T بنودل کېږي. د ترانسپوز متریکس مرتبه $(n\times m)$ ده.

مثلاً: که چېرې $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}_{2\times 3}$ وي، نو ترانسپوز متریکس یې عبارت دی له: $A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}_{3\times 2}$، که یو ترانسپوز متریکس یعنې A^T له خپل ځان یعنې A سره مساوي شي، نو په دې صورت کې A متریکس ته متناظر متریکس (Symmetric Matrix) وایي.

مثلاً: $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}$ یو متناظر متریکس دی، ځکه:

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A^T=A$$

د متناظر متریکس پېژندل: په متناظرو متریکسونو کې عناصر نظر اصلي قطر ته متناظراو مساوي دي:

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & c & f\\ c & f & d\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټرانسپوز مټريکس خواص:

لومړی خاصیت: د یوه ټرانسپوز مټریکس ټرانسپوز له خپل لومړي مټریکس سره مساوي دی.

$$(A^T)^T = A \Rightarrow \left[(a_{ij})^T\right]^T = (a_{ji})^T = (a_{ij}) = A$$

دویم خاصیت: د دوو یا څو ټرانسپوز مټریکسونو د جمعې او تفریق حاصل د دوی د هر یوه د جمعې او تفریق له ټرانسپوز مټریکسونو سره مساوي دی. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

او یا په عمومي ډول $(A \pm B \pm C \pm \ldots)^T = A^T \pm B^T \pm C^T \pm \ldots$

دریم خاصیت: $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

څلورم خاصیت:

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T \quad , \quad \alpha \in IR$$

$$(-A)^T = -A^T$$

فعالیت

- که چېرې $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، وښایاست چې:

$$(A-B)^T = A^T - B^T \quad , \quad (A+B)^T = A^T + B^T$$

مثال: د لاندې مټریکسونو ټرانسپوز مټریکسونه په لاس راوړئ.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3}$$

حل:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3} \quad \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -6 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

پوښتنې

1. د A او B مټریکسونه په پام کې ونیسئ، د هغوی ټرانسپوز مټریکسونه په لاس راوړئ.

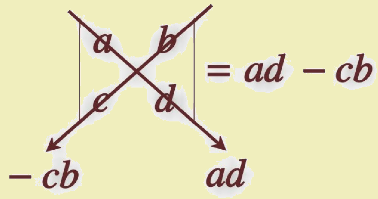
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

2. په پورتنیو مټریکسونو باندې د 3 عدد لپاره د ټرانسپوز مټریکس 4 خاصیتونه وښایاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ديټرمينانت

Determinant



په يوه عددي مثال کې يو مربعي مټريکس داسې وټاکئ چې د $ad - bc$ حاصل تفريق مساوي په صفر شي.

تعريف

که چېرې د A مټريکس يوه حقيقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د مټريکس له ديټرمينانت څخه عبارت دی، د $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ د مټريکس ديټرمينانت په $|A|$، det A او يا $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ په ډول ښودل کېږي.

په همدې ډول که چېرې د $n\times n$ مرتبې يو مټريکس چې n سطرونه او n ستونونه ولري، اړوند ديټرمينانت يې له n درجې څخه دی. د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ يو مربعي مټريکس په پام کې نيسو او د تعريف سره سم لرو چې:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix}_{nxn}$$

د 2×2 مرتبې مټريکسونو د ديټرمينانت محاسبه: د $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مټريکس ديټرمينانت په لاندې ډول تعريفوو.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - bc$$

مثال: د $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ مټريکس ديټرمينانت حساب کړئ.

حل: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - 7\cdot 4 = 6 - 28 = -22$

فعاليت

- د $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ مټريکس ديټرمينانت محاسبه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 3×3 مېټريکسونو د ديټرمېنانت محاسبه:د $A_{3\times3}$ مېټريکس، ديټرمېنانت په پام کې نيسو:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

حل: د $A_{3\times3}$ ديټرمېنانت د محاسبې لپاره لاندې ټکي په پام کې نيسو:

لومړی پړاو: اول ستون او دريم سطر له منځه وړو، د 2×2 مرتبې ديټرمېنانت محاسبه او د لومړي ستون او دريم سطر د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})a_{31}$$

دويم پړاو: دويم ستون او دريم سطر حذفوو، د 2×2 مرتبې ديټرمېنانت محاسبه او د دويم ستون او دريم سطر د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو ، هېره دې نه وي چې د ديټرمېنانت د محاسبې لپاره علامې په متناوب ډول بدلون مومي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow -(a_{11}\,a_{23}-a_{21}\,a_{13})a_{32}$$

دريم پړاو: دريم ستون او دريم سطر له منځه وړو، د 2×2 مرتبې ديټرمېنانت محاسبه، د دريم سطر او دريم ستون د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21})a_{33}$$

څلورم پړاو: د 1، 2 او 3 ټول پړاوونه سره جمع کوو، په دې ډول د A ديټرمېنانت مقدار په لاس راځي.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})\,a_{31}-(a_{11}\,a_{23}-a_{21}\,a_{13})\,a_{32}+(a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21})\,a_{33}$$

$$=a_{12}\,a_{23}\,a_{31}-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}+a_{21}\,a_{13}\,a_{32}+a_{11}\,a_{22}\,a_{33}-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د لاندې دیترمینانت مقدار په لاس راوړئ.

$$B=\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

حل: له تېرو معلوماتو څخه کار اخلو:

$$\text{I)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}=(6\cdot 2-1(-3))\cdot 4=(12+3)\cdot 4=15\cdot 4=60$$

$$\text{II)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}=-(2\cdot 2-5(-3))(-1)=4+15=19$$

$$\text{III)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}=(2\cdot 1-5(6))\cdot 7=(2-30)\cdot 7=-28\cdot 7=-196$$

$$\text{I}+\text{II}+\text{III}=60+19-196=-117$$

فعالیت

- د $A=\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ له دیترمینانت څخه د a قیمت په لاس راوړئ.

دویمه طریقه: **د ساروس په طریقه د دیترمینانت محاسبه**: په دغه طریقه کې د دیترمینانت دوه لومړي ستونونه ښي لورې ته په لاندې ډول تکرار لیکو:

$$A=\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\quad\begin{matrix} \text{فرعي قطرونه} \\ \\ \text{اصلي قطرونه} \end{matrix}$$

د اصلي قطر عناصر یوله بل سره ضرب او جمع کوو، په همدې ډول د فرعي قطر عناصر یوله بل سره ضربوو او وروسته یې جمع کوو، همدارنګه د اصلي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب له مجموع څخه، د فرعي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموع کموو، په دې ډول د A د مټریکس دیترمینانت مقدار په لاس راځي:

$$|A|=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دغه طریقه کې کولای شو د لومړي او دویم ستون د لیږد په ځای لومړی او دویم سطر د دیټرمینانت لاندینی برخې ته انتقال کړو او د تیر په ډول کړنه سرته رسوو.

$$
\begin{array}{r|ccc|l}
 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \text{فرعي قطر} \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \text{فرعي قطر} \\
\text{اصلي قطر} & a_{31} & a_{33} & a_{32} & \text{فرعي قطر} \\
\text{اصلي قطر} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\
\text{اصلي قطر} & a_{21} & a_{22} & a_{23} &
\end{array}
$$

دویم مثال: د لاندې دیټرمینانت قیمت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

حل:

$$|M| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 0 & -4 & 3 \\ 5 & -2 & 6 & 5 & -2 \end{array}\right.$$

$$= \big(3\cdot 3\cdot 6 + 2\cdot 0\cdot 5 + (-1)(-4)(-2)\big) - \big((-1)\cdot 3\cdot 5 + 3\cdot 0(-2) + 2(-4)\cdot 6\big)$$

$$= (54 + 0 - 8) - (-15 + 0 - 48) = 46 + 63 = 109$$

فعالیت

- لاندې د $|A|$ دیټرمینانت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې دوه لومړني سطرونه د دیټرمینانت لاندې برخې ته ولیږدوئ او عملیه سرته ورسوئ.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې دیټرمینانتونو مقدار په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \quad , \quad b)\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \quad , \quad c)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad , \quad d)\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

2. د لاندې دیټرمینانتونو مقدار د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$a)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix} \quad , \quad b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډيټرمېنانت خاصيتونه

که چيرې په يوه ډيټرمېنانت کې د سطر ځای له ستون سره بدل شي، د ډيټرمېنانت په قيمت کې تغير راځي او که نه؟

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

فعاليت

- د $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ او $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ ډيټرمېنانتونه محاسبه کړئ.
- د $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ ډيټرمېنانت په پام کې ونيسئ، ترانسپوز يې په لاس راوړئ، وروسته يې $|A^T|$ ډيټرمېنانت محاسبه کړئ او وښاياست چې $|A| = |A^T|$.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي.

که چيرې $A_{n\times n}$ يو مټريکس وي، د $|A|$ ډيټرمېنانت لپاره لاندې خواص صدق کوي.

1. که د $A_{n\times n}$ مټريکس د يوه سطر او يا يوه ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو د A ډيټرمېنانت مساوي له صفر سره دی.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

2. که چيرې د $A_{n\times n}$ مټريکس دوه سطرونه يا دوه ستونونه سره مساوي وي، نو اړوند ډيټرمېنانت يې مساوي له صفر سره دی.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

3. که د $A_{n\times n}$ مټريکس د يوه سطر او يا يوه ستون عناصر د بل سطر او يا ستون د عناصرو ګډ فکتور وي، نو $|A| = 0$ دی.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda(0) = 0$$

4. د A مټريکس ډيټرمېنانت او A^T مټريکس ډيټرمېنانت يو له بل سره مساوي دي، په همدې ډول ډيټرمېنانت ځينې نور خاصيتونه يا ځانګړنې هم لري، لکه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چېرې په یوه دیټرمېنانت کې د دوو سطرونو یا دوو ستونونو ځایونه یو له بل سره بدل شي، د دیټرمېنانت اشاره بدلون مومي.

لومړی مثال: د $|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ دیټرمېنانت لومړي ستون له دویم ستون سره بدل کړئ او وروسته د دواړو دېټرمېنانتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

حل:

$$A=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow (0+6+4)-(24-4+0)=-10$$

$$B=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0+24-4)-(4+6+0)=20-10=10$$

لیدل کېږي چې د A په دیټرمېنانت کې دویم ستون له لومړي ستون سره بدل شي، په ورته ډول کولای شو،دوه سطرونه هم یوله بل سره بدل کړو،نوداسې پایله په لاس راځي: $|A|=-|B|$

که د K یو ثابت عدد په دیټرمېنانت کې ضرب شي، دغه عدد یوازې په یوه سطر او یا یوه ستون کې په اختیاري ډول ضربېدلای شي. په همدې ډول کولای شو د یوه دیټرمېنانت ګډعامل له یوه سطر او یا یوه ستون څخه ګډ عددوټاکوچې د دیټرمېنانت ګډ فکتور بلل کېږي.

دویم مثال: د $|A|$ دیټرمېنانت ګډ ضربي عامل پیدا کړئ.

$$A=\begin{vmatrix} 16 & 3 & 22 \\ 8 & 2 & 21 \\ 20 & 1 & 25 \end{vmatrix}$$

حل: لیدل کېږي چې د دیټرمېنانت په لومړي ستون کې د 4 عدد ګډ ضربي عامل دی چې په حقیقت کې دا عدد د دیټرمېنانت ګډ ضربي عامل دی.

$$|A|=\begin{vmatrix} 16 & 3 & 22 \\ 8 & 2 & 21 \\ 20 & 1 & 25 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 4 & 3 & 22 \\ 2 & 2 & 21 \\ 5 & 1 & 25 \end{vmatrix}$$

پوښتنې

د دېټرمېنانت دخواصو په مرسته د لاندې دیټرمېنانتونو قیمت په لاس راوړئ.

$$a)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad c)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 2×2 مرتبه يې مېټريکسونو ضربي معکوس

Multiplication inverse of 2×2 *matrixes*

آيا د حقيقي عددونودضرب قاعده مو په ياد ده؟

د a حقيقي عدد ضربي معکوس کوم عدد دی؟

په همدې ډول د ځينو مربعي مېټريکسونو لپاره هم دا خاصيت، د مېټريکسونو د خاصيتونو په پام کې نيولو سره شتون لري.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$$

فعاليت

- د $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ مېټريکس په پام کې ونيسئ او ديټرمېنانټ يې محاسبه کړئ.
- د $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}$ مېټريکس د A له مېټريکس سره ضرب او پايله يې وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله بيانولای شو:

تعريف: د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ غير صفري مربعي مېټريکس په پام کې نيسو، که چېرې د B مربعي مېټريکس داسې موجود وي چې: $AB=BA=I$

په دې صورت کې د B مېټريکس د A د مېټريکس معکوس بلل کېږي او هغه په A^{-1} سره ښيي. له دې امله ليکلی شوچې: $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

په ياد ولرئ: د A مربعي مېټريکس ته منفرد مېټريکس(Singular Matrix) ويل کېږي، کله چې $|A|=0$ وي او همدارنګه د A مربعي مېټريکس ته غير منفرد مېټريکس(non singular matrix) ويل کېږي، که چېرې $|A|\neq0$ وي.

له دې امله هغه وخت يو مېټريکس د معکوس مېټريکس لرونکی دی چې:

1. مېټريکس مربعي وي.
2. ديټرمېنانټ يې د صفر خلاف وي.

لومړی مثال: وښاياست چې $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7 & -3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ يو د بل معکوس دي.

حل:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7 & -3\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)(-7)+3(-2) & (-1)(-3)+3(-1)\\ 2(-7)+(-7)(-2) & 2(-3)+-7(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7-6 & 3-3\\ -14+14 & -6+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-7 & -3\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7-6 & -21+21\\ 2-2 & -6+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ليدل کېږي چې: $AB=BA=I$ دی، نو A او B يو د بل معکوس دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الحاقي مېټريکس(Ad joint of matrix): د 2×2 مرتبې الحاقي مېټريکس د پيدا کولو لپاره د اصلي قطر د عناصرو ځايونه سره بدلوو او فرعي قطر د اشارې په بدلون سره ليکو، هغه نوی مېټريکس چې لاس ته راځي، له الحاقي مېټريکس (ad joint=adj) څخه عبارت دی، د مثال په ډول:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ A=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$K=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ K=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

هغه وخت يو مېټريکس معکوس مېټريکس لري چې ديټرمينانت يې د صفر خلاف وي، يعنې $|A|\neq 0$ وي. البته د بحث موضوع 2×2 مرتبې مېټريکس دی چې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\ Adj\ A \qquad |A|\neq 0$$

لومړی مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ وي، معکوس مېټريکس يې پيدا کړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-18+10=-8\neq 0$

ليدل کېږي چې د A مېټريکس ديټرمينانت د صفر خلاف دی، نو د A مېټريکس معکوس مېټريکس لري.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\ A=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{6}{-8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

ازموينه:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4}+\frac{15}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{9}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

په عمومي ډول ويلی شو، د هر $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مېټريکس چې ديټرمينانت يې د صفر خلاف يعنې $|A|\neq 0$ وي، معکوس لري چې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې مېټريکسونو څخه کوم يو مېټريکس معکوس لري.

$a)\quad A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad b)\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

2. د لاندې مېټريکسونو معکوس مېټريکس په لاس راوړئ او وازموئ.

$1)\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad 2)\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad 3)\quad C=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له معکوس متریکس څخه په کاراخیستني د خطي معادلو د سیستم حل

آیا تر اوسه مو له معکوس متریکس څخه په ګټه اخیستنې د خطي معادلو د سیستم د حل په اړه فکر کړی دی؟

$$X = A^{-1} \cdot B$$

فعالیت

د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ په پام کې و نیسئ:

- د ضریبونو متریکس، د مجهولینو متریکس، د ضریبونو او مجهولینو متریکس ولیکئ.
- هر متریکس د معادلې په ډول ولیکئ.
- د لاس ته راغلې معادلې اطراف د ضریبونو د متریکس په معکوس کې ضرب کړئ.

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

ځرنګه چې A د سیستم د چپ لورې د ضریبونو متریکس، B د ښې لورې د ثابتو عددونو ستوني متریکس او X د مجهولو عددونو ستوني متریکس دی، نو د A^{-1} په پام کې نیولو سره سیستم داسې حلیږي:

$$A\,X = B$$

$$A^{-1} \cdot A\,X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$$

$$IX = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: له معکوس مټریکس څخه په کار اخېستنې سره، د $\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$ خطي دوه مجهوله سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ دی.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$$

څرنګه چې د A مټریکس دیټرمینانت د صفر خلاف دی، نو د A مټریکس معکوس لري نو سیستم د حل وړدی چې په لاندې ډول یې په لاس راوړو:

$$Adj\ A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 5-2\cdot 7 \\ -1\cdot 5+1\cdot 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15-14 \\ -5+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ ,\ x=1\quad ,\qquad y=2$$

دویم مثال: له معکوس مټریکس څخه په کار اخیستنې سره د دغه خطي معادلو $\begin{cases} 5x-2y=2 \\ 3x-\ \ y=3 \end{cases}$ سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$B=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\quad ,\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\quad ,\quad A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-5+6=1\ \Rightarrow\ |A|\neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليدل کېږي چې $|A| \neq 0$ دی، نو A معکوس مټریکس لري.

$$AdjA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} AdjA = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \quad = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ -3\cdot 2 + 5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+6 \\ -6+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ x = 4 \quad , \quad y = 9$$

دریم مثال: د x او y په کومو قمیتونوکې لاندې معادلې په یو وخت کې صدق کوي.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases}$$

حل:

د یاد شوي سیستم حل د سیستم د ضریبونو د مټریکسونو له تشکیل څخه په لاس راوړو:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

څرنګه چې د A مټریکس دیټرمېنانت صفر دی، نو د A مټریکس معکوس نه لري، په پایله کې ویلای شو چې سیستم حل نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

له معکوس مټریکس څخه په ګټې اخیستنې، د لاندې خطي معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} a + b = 11 \\ 4a - b = 9 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه

Crammer's rule

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}$$

$$y=\frac{|A_y|}{|A|}$$

$$z=\frac{|A_z|}{|A|}$$

آیا کولای شو، د ضریبونو د متریکس د دیټرمینانت او لــه مجهولینــو یعنــې د x,y,z ســره د متنــاظرو متریکسونو د دیټرمینانت په واسطه د خطي معادلو د سیستم حل پیدا کړو؟

د خطي درې مجهوله معادلو سیستم په پام کې نیسو او د ضریبونو متریکس یې په A سره ښیو:

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=d_1$$
$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=d_2$$
$$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=d_3$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

کولای شو د x,y او z قیمتونه له لاندې اړیکو څخه په لاس راوړو، په داسې حال کې چې $|A|\neq 0$ وي.

$$X=\frac{|A_x|}{|A|}\quad,\quad y=\frac{|A_y|}{|A|}\quad,\quad z=\frac{|A_z|}{|A|}$$

په پورتنیو اړیکو کې $|A_x|$، $|A_y|$ او $|A_z|$ په ترتیب سره د x,y او z اړوند متناظرو متریکسونو دیټرمینانتونه دي. د هغوی د محاسبې لپاره په لاندې ډول کړنه کوو، د سیستم زیات شوي متریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{array}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $|A_x|$ د محاسبې لپاره د لومړی ستون د x ضریبونو په ځای ځلورم ستون(هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دي) ځای پر ځای کوو، د 3×3 مرتبې متریکس دیترمینانت په لاس راوړو او د $|A_y|$ د محاسبې لپاره د دویم ستون د y ضریبونه په ځای د ځلورم ستون هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دي ځای پر ځای کوو او د 3×3 مرتبې د متریکس دیترمینانت محاسبه کوو. او د $|A_z|$ د محاسبې لپاره دریم ستون د z ضریبونو په ځای ځلورم ستون ځای په ځای کوو او د 3×3 مرتبې متریکس دیترمینانت قیمت په لاس راوړو.

فعالیت

- له پورتنیو معلوماتو څخه په ګټې اخیستنې سره $|A_x|$، $|A_y|$ او $|A_z|$ پیدا کړئ.

لومړی مثال: د $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ سیستم حل د کرامر په طریقه په لاس راوړئ.

حل:

$$A=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-(-6)=1+6=7\neq 0$$

څرنګه چې $|A|\neq 0$ دي؛ نو سیستم حل لري.

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & -3 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{array}\right)$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}3 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3-(-6)}{7}=\frac{3+6}{7}=\frac{9}{7}$$

$$x=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}}{7}=\frac{2-6}{7}=-\frac{4}{7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: لاندې درې مجهوله سیستم د کرامر په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 3x-2y+2z=-4 \\ x+3y+z=5 \\ 2x+2y-z=11 \end{cases}$$

حل:

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{matrix} \begin{aligned} &=-9-4+4-12-6-2 \\ &=-21-8=-29\neq 0 \end{aligned}$$

څرنګه چې $|A|\neq 0$ دئ نو له دې امله سیستم حل لري.

$$|A_x|=\begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} -4 & -2 \\ 5 & 3 \\ 11 & 2 \end{matrix} \begin{aligned} &=12-22+20-(66-8+10) \\ &=10-68=-58 \end{aligned}$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{matrix} \begin{aligned} &=-15-8+22-(20+33+4) \\ &=-23+22-57=-58 \end{aligned}$$

$$y=\frac{|A_y|}{A}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_z|=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 11 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{matrix} =99-20-8-(-24+30-22)$$

$$=71+16=87$$

$$z=\frac{|A_z|}{A}=\frac{87}{-29}=-3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

میزان:

د x, y او z په لاس راغلي قیمتونه په اصلي سیستم کې وضع کوو:

$$3(2)-2(2)+2(-3)=6-4-6=-4 \quad \Rightarrow \quad -4=-4$$
$$2+3(2)-3=2+6-3=8-3=5 \quad \Rightarrow \quad 5=5$$
$$2(2)+2(2)-(-3)=4+4+3=11 \quad \Rightarrow \quad 11=11$$

فعالیت

دګرامر په طریقې د لاندې معادلو سیستم حل په لاس راوړئ.

$$\begin{cases} 2x-3y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

پوښتنې

د لاندې معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x+y-az=0 \\ ax+2y-z=0 \\ 2x+ay+2z=0 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معادلو د سیستم حل دګوس ($Gouse$) په طریقه

آیاکولای شو له مټریکس څخه په کار اخېستنې سره

د x, y او z مجهول قیمتونه پیداکړو؟

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

دګوس په طریقه د معادلو د سیستم د حل لپاره د ضریبونو مټریکس او ثابت قېمتونه لیکو وروسته په سطرونو او ستونونو، باندې لومړنۍ عملیو باندې د جمع، تفریق، ضرب او تقسیم سرته رسوو، یا سطرونه او ستونونه په یو سکالرکې ضربوو چې په پایله کې دوه مجهوله له منځه ځي او دریم مجهول محاسبه کېږي ، وروسته د نورو مجهولونو قیمت په لاس راوړو، د مټریکس سطرونه په $R_1, R_2, R_3, \ldots\ldots$ ښیو:

لومړی مثال: لاندې د خطي معادلو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

حل:د ضریبونو مټریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{لومړی سطر منفي دوم سطرتفریق حاصل په دویم سطر کې لیکو.}]{R_1 - R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{دویم سطر په(-1) کې ضرب بدلون په دویم سطر کې لیکو.}]{R_2 \cdot (-1) \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow y=2\,, \quad \begin{array}{l} x+2y=5 \\ x+2(2)=5 \Rightarrow x=5-4 \Rightarrow x=1 \end{array}$$

پاملرنه: $R_1 - R_2 \to R_2$ په دې معنا چې له دویم سطر څخه لومړي سطر تفریق شوی او په دویم سطر کې بدلون لیکل شوی دی.

$R_2(-1) \to R_2$ داسې مفهوم لري چې دویم سطر په (-1) کې ضرب شوی او په دویم سطر کې لیکل شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم دگوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=-3 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

دویم مثال: د لاندې درې مجهوله معادلو سیستم دگوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ 3x+y+2z=11 \\ 4x-2y+z=3 \end{cases}$$

حل: لومړی د سیستم د مجهولینودضریبونو او ثابتو عددونو متریکس لیکو:

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په لومړي پړاو کې د x ضریب په دویم سطر کې له منځه ورو. داسې چې لومړی سطر په -3 کې ضرب د دویم سطر له دوه چند سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-3R_1+2R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په دویم گام کې لومړی سطر په -2 کې ضرب له دریم سطر سره جمع او په دریم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right)$$

په دریم پړاو کې د y ضریب له دریم سطر څخه حذفوو، داسې چې دویم سطر په -8 کې ضرب د دریم سطر له 7 چند سره جمع او په دریم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{-8R_2+7R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -35 & -105 \end{array}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دریم سطر څخه کولای شو، د z قیمت په لاس راوړو:

$$-35z=-105 \Rightarrow z=3$$

د z قمیت په دویم سطر کې وضع او د y قیمت په لاس راوړو:

$$-7y+7z=7 \Rightarrow -7y+21=7 \Rightarrow -7y=-14 \quad , \quad y=2$$

په دریم پړاو کې د y او z قیمتونه په لومړي سطر کې ابږدو او x په لاس راځي.

$$2x+3y-z=5 \Rightarrow 2x+3\cdot 2-3=5 \Rightarrow 2x+3=5$$

$$2x=5-3=2 \quad , \quad x=1$$

د خطي معادلو د سیستم حل عبارت دی له: $(x,y,z)=(1,2,3)$

امتحان: لاسه ته داغلي قیمتونه د معادلو په سیستم کې وضع کوو.

$$2\cdot 1+3\cdot 2-3=5 \Rightarrow 2+6-3=5 \quad , \quad 5=5$$

$$3\cdot 1+2+2\cdot 3=11 \Rightarrow 3+2+6=11 \quad , \quad 11=11$$

$$4\cdot 1-2(2)+3=3 \Rightarrow 4-4+3=3 \quad , \quad 3=3$$

دریم مثال: د لاندې خطي معادلاتو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$2x_1+4x_2+6x_3=18$$

$$4x_1+5x_2+6x_3=24$$

$$2x_1+7x_2+12x_3=40$$

حل:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right) \xrightarrow[-2R_1+R_2\to R_2]{\text{لومړی پړاو}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{\text{دویم پړاو}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2+R_3\to R_3]{\text{دریم پړاو}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

لیدل کیږي چې په لاس راغلی متریکس کې د x_2, x_1 او x_3 ضریبونه په دریم سطر کې صفر دي، په داسې حال کې چې په یاد شوي سطر کې ثابت عدد 10 دی او دا غیر ممکن دی چې($x_1=x_2=x_3=0=10$) نو سیستم حل نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د لاندې معادلو سیستم حل او میزان کړئ.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

پاملرنه: که چېرې د خطي معادلو په سیستم کې یو له مجهولینو څخه موجود نه وي، د هغه ضریب صفر په پام کې نیسو، وروسته د خطي معادلو د ضریبونو او د ثابتو مقدارونو مټریکس تشکیلوو:

پوښتنې

د لاندې خطي معادلو سیستمونه د گوس په طریقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x + 4y - 10z = -2 \\ 3x + 9y - 21z = 0 \\ x + 5y - 12z = 1 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ \quad -3y = -6 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شپږم څپرکي مهم ټکي

د مېټريکس تعريف: يوه ګېډۍ عددونه يا توري چې په سطري او ستوني ډول په يوه مستطيلي جدول کې ځای پر ځای شوي وي. د مېټريکس(Matrix) په نامه يادېږي.

د مېټريکسونو ډولونه:

- **سطري مېټريکس**: هغه مېټريکس چې يوازې يو سطر ولري.
- **ستوني مېټريکس**: هغه مېټريکس چې يوازې يو ستون ولري.
- **صفري مېټريکس**: هغه مېټريکس چې ټول عناصر يې صفرونه وي.
- **مربعي مېټريکس**: هغه مېټريکس چې د سطرونو او ستونونو شمېر يې سره برابر وي.
- **مساوي مېټريکسونه**: دوه مېټريکوسونه، هغه وخت سره مساوي دي چې ټول عناصر يې يو په يو سره برابر او مساوي وی.
- قطري مېټريکس هغه مېټريکس چې ټول عناصر يې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، قطر ي مېټريکس بلل کېږي.
- **سکالر مېټريکس**: هر قطري مېټريکس چې د اصلي قطر عناصر يې سره برابر وي، سکالري مېټريکس بلل کېږي.
- **واحد مېټريکس**: په هر سکالري مېټريکس کې که د اصلي قطر عناصر د 1 عدد وي، واحد مېټريکس بلل کېږي.

په مېټريکسونو باندې لومړني عمليات:

- **د مېټريکسونو جمع او تفريق**: د مېټريکسونو جمع او تفريق هغه وخت امکان لري چې:

$$A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} \pm (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m\times n} = (C_{ij})_{m\times n} = C_{m\times n}$$

د مېټريکسونو د جمعې او تفريق خواص:

1) $A+B=B+A$

2) $A-B\neq B-A$

3) $(A\pm B)\pm C = A\pm (B\pm C)$

4) $A+0=0+A=A$

5) $A+(-A)=-A+A=0$

په مېټريکس کې د سکالر ضربول: که $K\in IR$ او $A=(a_{ij})_{m\times n}$ وي، نو:

$$KA = K(a_{ij})_{m\times n} = (C_{ij})_{m\times n} = C_{m\times n}$$

په مېټريکس کې د سکالر ضرب خواص:

a) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

b) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

c) $\alpha(\beta A)=(\alpha \beta)A=\beta(\alpha A)$

د دوو مېټريکسونو ضرب: د دوو مېټريکسونو ضرب هغه وخت ممکن دی چې د لومړي مېټريکس د ستونونو شمېر، د دويم مېټريکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي، که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ وي، نو:

$$A\cdot B = (a_{ij})_{m\times n}\cdot (b_{ij})_{n\times p} = (C_{ij})_{m\times p} = C_{m\times p}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يعنې د دوو مېټريکسونو د ضرب حاصل هغه دريم مېټريکس دی چې د سطرونو شمېر يې له لومړي مېټريکس سره او د ستونونو شمېر يې له دويم مېټريکس سره برابر وي.

د مېټريکسونو د ضرب خواص: که A او B دوه مېټريکسونه وي، نو:

1) $AB \neq BA$ 2) $(AB)C = A(BC)$

3) $A(B+C) = AB + AC$ 4) $I \cdot A = A \cdot I = A$

5) $K(AB) = (KA)B = A(KB)$

د يوه مېټريکس ټرانسپوز مېټريکس: که د يوه $A_{m\times n}$ مېټريکس ستونونه په سطرونو او سطرونه په ستونونو بدل شي، هغه نوی مېټريکس چې لاسته راځي ،د ټرانسپوز مېټريکس په نامه يادېږي. د A ټرانسپوز مېټريکس په A^T سره ښيي.

مثلثي مېټريکس: که په يوه مېټريکس کې د اصلي قطر پورتني او يا ښکتني عناصر ټول صفرونه وي، نوموړی مېټريکس د مثلثي مېټريکس په نامه يادېږي.

متناظر مېټريکس: که د A يو مېټريکس له خپل ټرانسپوز A^T مېټريکس سره برابر شي($A = A^T$)، نو د A مېټريکس ته متناظر مېټريکس وايي.

ډيټرمېنانټ: که د A مېټريکس يوه حقيقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د مېټريکس له ډيټرمېنانټ څخه عبارت دی، او د $|A|$ يا $\det A$ په شکل سره ښودل کېږي.

د ډيټرمېنانټ خواص:

1. که د $A_{n\times n}$ مېټريکس د يوه سطر او يا ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو ډيټرمېنانټ يې صفر دی، يعنې:
$$\det A = |A| = 0$$
2. که د ډيټرمېنانټ دوه سطرونه او يا دوه ستونونه سره برابر وي، نو ډيټرمېنانټ يې صفر دی. $|A| = 0$
3. که $A_{n\times n}$ مېټريکس د يوه سطر يا ستون عناصر د بل سطر يا ستون د عناصرو مضرب وي، نو ډيټرمېنانټ يې صفر دی. $|A| = 0$
4. د A مېټريکس او د A ټرانسپوز مېټريکس ډيټرمېنانټونه سره مساوي وي، يعنې: $|A^T| = |A|$

د مېټريکسونو ضربي معکوس: د $A = (a_{ij})_{m\times n}$ مربعي مېټريکس په پام کې نيسو ،که چېرې د B مربعي مېټريکس داسې موجود وي چې $AB = BA = I$ ، په دې صورت کې د B مېټريکس د A د مېټريکس معکوس دی او د A د مېټريکس معکوس مېټريکس په A^{-1} سره ښيي: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

د خطي معادلو د سيستم حل:

- له معکوس مېټريکس څخه په ګټه اخيستنې د خطي معادلو د سيستم حل.
- د خطي معادلو د سيستم حل د کرامر په طريقه.
- د ګوس په طريقه د خطي معادلو د سيستم حل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، له سم ځواب څخه کرۍ تاو کړئ.

1. که $|A| = 3$ وي، نو $|A^{-1}|$ پیدا کړئ.

$a)\ \frac{1}{3}$ $\qquad b)\ 9$ $\qquad c)\ \frac{1}{9}$ $\qquad d)\ 3$

2. که $A = \begin{pmatrix} 2m-3 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ معکوس منونکی متریکس وي، نو د m قیمت به څو وي؟

$a)\ m = 1, \frac{1}{2}$ $\qquad b)\ m \neq 1$ $\qquad c)\ m = 0$ $\qquad d)\ m \neq 1, \frac{1}{2}$

3. که $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ وي، د x هغه متریکس په لاس راوړئ چې په دغه رابطه $Ax = A^{-1}$ کې صدق وکړي.

$a)\ \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$ $\qquad b)\ \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -25 & 14 \end{pmatrix}$

$c)\ \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -25 & -16 \end{pmatrix}$ $\qquad d)\ \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -25 & -12 \end{pmatrix}$

4. د $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ متریکس لاندې د $y = 2x$ د خط بدلون منونکي خط پیدا کړئ.

a) د y محور $\qquad$ b) د x محور $\qquad$ c) $y + 2x = 0$ $\qquad$ d) $y = 0$

5. د x په کومو قیمتونو دغه دیترمینانت $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ صفر دی؟

$a)\ x = 1,2$ $\qquad b)\ x = 3,1$ $\qquad c)\ x = \frac{1}{2},3$ $\qquad d)\ x = 3,2$

6. د $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ دیترمینانت حاصل په لاس راوړئ.

$a)\ 29$ $\qquad b)\ 39$ $\qquad c)\ 19$ $\qquad d)\ 9$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ وي، لاندې محاسبې غوښتل شوې دي:

$a)\ 3A-2B \qquad b)\ -4A+3B$

2. فرض کړئ که $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو AB او BA محاسبه کړئ

او وواياست چې $AB=BA$ دی.

3. لاندې مټریکسونه په پام کې ونیسي:

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 2\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

اشتراکي خاصيت، توزيعي خاصيت او د مټريکسونو ضرب د درو مټريکسونو لپاره وښاياست.

4. لاندې ديټرمينانت په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

5. د لاندې مټريکس معکوس مټريکس د الحاق(ad joint) په طريقه پيدا کړئ.

$$M=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & -9\end{pmatrix}$$

6. د لاندې خطي معادلو سيستمونه د کرامر په طريقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases}2x+y+z=6\\ x-2y+2z=10\\ 3x-y-z=4\end{cases} \qquad b)\ \begin{cases}x_1-2x_2=4\\ 2x_1+4x_2=5\end{cases}$$

7. د لاندې خطي معادلو سيستمونه د گوس په طريقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases}2x-3y+3z=0\\ 3x+2y-5z=0\\ 5x-4y-2z=0\end{cases} \qquad b)\ \begin{cases}2x+3y-7=1\\ 2y+27=-2\end{cases}$$

8. د لاندې خطي معادلو سيستمونه د معکوس مټريکس په طريقه حل کړئ.

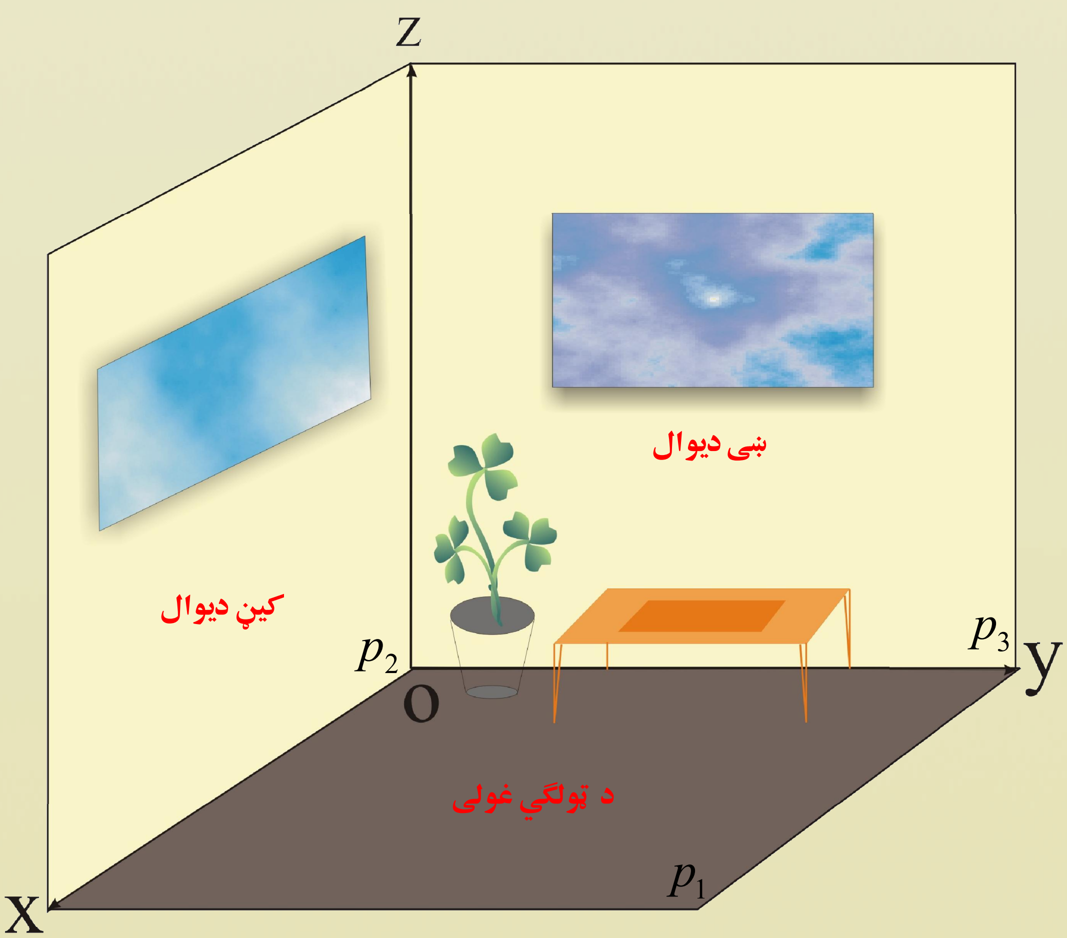
$$a)\ \begin{cases}3x+y+1=0\\ 4x+3y-2=0\end{cases} \qquad b)\ \begin{cases}x-y=2\\ x+2y=-1\end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم څپرکی

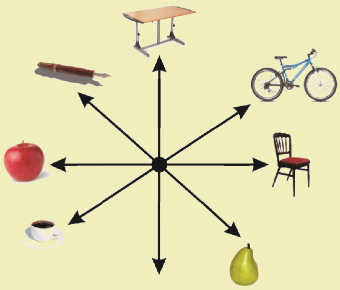
وکتورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

د وضیعه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه



له یوه ټاکلي ټکي څخه د هغې شاوخوا بېلابېلو پرتو شیانو ته لنډه لاره په نښه کړئ.

تعریف

جهت لرونکي قطعه خط ته وکتور وایي، یا په بل عبارت هغه کمیت چې هم مقدار لري او هم جهت لکه: قوه، فاصله، تعجیل او داسې نور. هر غشی د یو وکتور ممثل دی.

هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پروت وي، د شعاع وکتور (Position Vector) په نامه یادېږي.

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې د شعاع وکتور داسې رسم کړئ چې د پای ټکی یې د $B\ (5,5)$ مختصات ولري.
- د پورتني راکړل شوي وکتور درې ممثل وکتورونه په راکړل شوو قایمو مخصاتو کې داسې رسم کړئ چې وکتور او شعاع وکتورونه یې سره توپیر ولري.
- یو بل وکتور رسم کړئ چې له پورتني وکتور سره مساوي او د مخالف لوري او شعاع وکتور وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله ترلاسه کېږي.

پایله: په یوه مستوي او په فضا کې هر ممثل وکتور د خپل شعاع وکتور په اندازه وي، لکه:

1. د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونه هغه وخت مساوي بلل کېږي، چې اوږدوالی یې مساوي، $(|\vec{a}|=|\vec{b}|)$ موازي او د یو جهت لرونکی وي.
2. که چېرې یو وکتور $\vec{AB}=0$ وي، په دې صورت کې د $\vec{AB}$ وکتور صفري وکتور (Zero Vector) بلل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

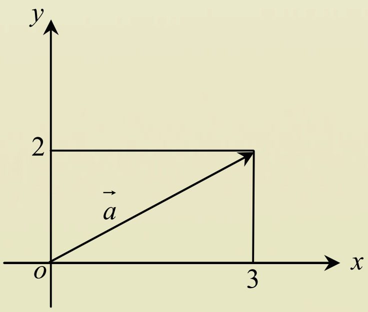
3. دوه وکتورونه هغه وخت مخالف یا منفي بلل کېږي چې اوږدوالی یې مساوي او جهت یې مخالف وي، د بېلګې په توګه:

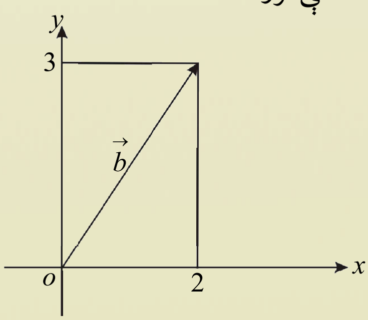
که $\vec{OA}=\vec{a}$ وي، نو $\vec{AO}=-\vec{a}$ دی، په داسې حال کې چې: $(|\vec{OA}|=|\vec{AO}|)$ وي.

تعریف: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې یو وکتور په ستوني شکل داسې ښودل کېږي $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ په داسې حال کې چې a_x د x پرمحور وضعیه کمیت او a_y د y پرمحور د $\vec{a}$ وکتور فاصله او ترتیب ښیي.

لومړی مثال: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ او $\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ وکتورونه وښایاست؟

حل: د پورتني تعریف له مخې لرو:





یادونه: د یو وکتور د ښودلو لپاره یوه مستوي په دې خاطر کارول کېږي، چې د قایم مختصاتو په سیستم کې د یو ټکي د ښودلو لپاره د مختصاتو په سیستم کې یوازې یو ځای شته، په داسې حال کې چې په مستوي کې د یو وکتور د ښودلو لپاره چې هماغه وکتور په مستوي کې ځای نیولی شي، بې نهایت ځایونه شته.

پوښتنې

1. د هغو وکتورونو لپاره چې په لومړي مثال کې ورکړل شوي دي، مطلوب دي:

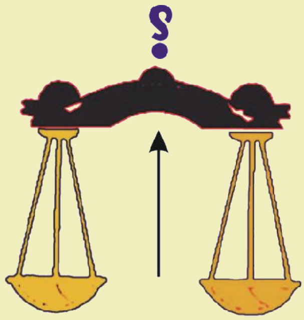
a. د هر یوه وکتور درې ممثل وکتورونه رسم کړئ.

b. دواړه وکتورونه د شعاع وکتور په موقعیت کې رسم کړئ.

c. د هغوی مخالف وکتورونه کوم وکتورونه دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی

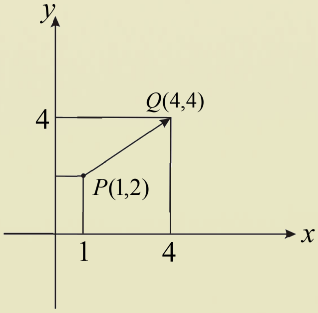


د تلې دوه هم وزنه پلې په پام کې نیسو، چې د یو شاهین په دواړو خواوو کې تړل شوي دي. د تلې د شاهین په لاس کې نیولو لپاره کوم ټکی وټاکو چې په نیولو یې د تلې پلې تعادل غوره کړي؟

فعالیت

د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې د لاندې شکل په څېر $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ ټکې په پام کې ونیسئ:

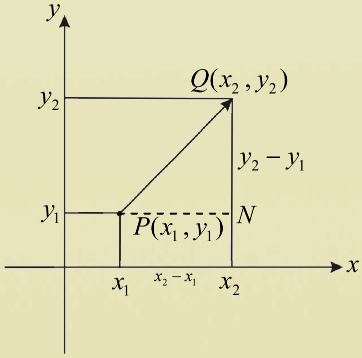
- د $\vec{PQ}$ د وکتور اوږدوالی څومره دی؟



- د $\vec{PQ}$ د منځني ټکي وضعیه کمیتونه څومره دي؟

د پورتني فعالیت له پای څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

پایله: د $\vec{a}=\vec{PQ}$ وکتور د هرو دوو اختیاري ټکو لپاره چې $P(x_1,y_1)$ مبداء او $Q(x_2,y_2)$ انجام دی په دې صورت کې وکتور په $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ سره ښیو، د $P\overset{\Delta}{Q}N$ قایم الزاویه مثلث په پام کې نیولو سره د $|\vec{a}|$ د وکتور اوږدوالی عبارت دی، له: $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^{\,2}+a_y^2}$

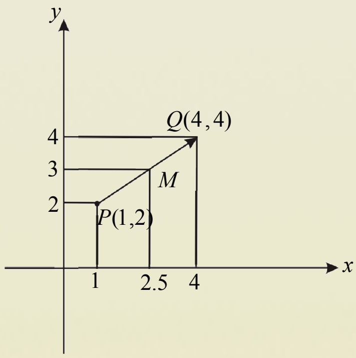


- د $\vec{PQ}$ منځنی ټکی عبارت دی، له:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{x_1+x_2}{2}\\[2mm]\dfrac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ؟



حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+4}{2}\\\frac{2+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{6}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.5\\3\end{pmatrix}$$

نو د منځني ټکي وضعیه کمیت له $M=\begin{pmatrix}2.5\\3\end{pmatrix}$ څخه عبارت دی او د P او Q د دوو ټکو د واټن د پیداکولو لپاره د فیثاغورث د قضیې په پام کې نیولو سره لرو:

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{{a_x}^2+{a_x}^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

دویم مثال: د $A(2,4)$ او $B(5,5)$ د ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ.

حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2+5}{2}\\\frac{5+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.5\\4.5\end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-2)^2+(5-4)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

پوښتني

د لاندې ورکړ شوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکي پیدا کړئ.

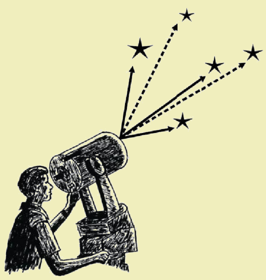
$i)\quad B(2,7)\quad,\quad A(3,4)$

$ii)\quad N(5,1)\quad,\quad M(1,5)$

$iii)\quad Q(8,8)\quad,\quad P(1,8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورونه په سطح او فضا کې



د تلسکوپ پــه واسـطه د سـتورو د تګـلوري لیـدل پــه فضا کې ځانګړې وکتورونه ښيي.

د يـوې سـطحې پـرمخ د وکتورونـو لپـاره يـوه بېلګـه راوړلای شئ؟

فعالیت

د لاندې شکل له مخې د وضعيه کمياتو د قايم سيستم او د $IR^2=\{(x,y)\ /\ x,y\in IR\}$ سټ په پام کې نيولو سره لاندې فعاليت سرته ورسوئ.

- د وضعيه کيماتو په سيستم کې د P يو ټکی چې وضعيه کميتونه يې (x,y) دی، په مستوي کې وټاکئ.
- د $\vec{u}$ يو شعاع وکتور چې وضعيه کميتونه يې $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ دي، د وضعيه کميتونو په سيستم کې وښيئ.
- په مستوي کې د P يو ټکی چې وضعيه کميتونه يې (x,y) دي، په مستوي کې لـه $\vec{u}$ يـو وکتـور سـره څه توپير لري چې وضعيه کميتونه يې $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ وي؟
- د $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ دوه اختياري وکتورونه او $a\in IR$ يو سکالر لپاره په هندسي توګـه د وضعيه کميتونو په قايم سيستم کې په جلا جلا ډول وښيئ، چې:

i) $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ (د جمعې قاعده)

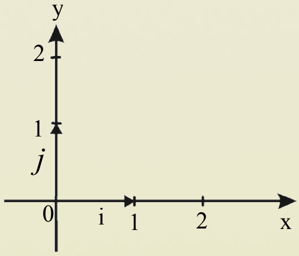
ii) $a\cdot\vec{u}=a\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\ay\end{pmatrix}$ (دسکالري ضرب قاعده)

تعریف: د هغو ټولو مرتبو جوړو سټ چې د پورته قاعدې په څېر د جمعې او سکالري ضرب قاعدې پرې تطبيق وي، د IR^2 (مستوي) د وکتورونو فضا او يا په مستوي کې د وکتور په نامه يادېږي.

له پورتني فعاليت او تعريف څخه لاندې پايله لاسته راځي:

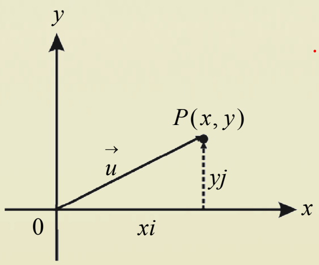
(c) ketabton.com: The Digital Library

پايله: د دوو ځانګړو وکتورونو $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په پام کې نیولو سره چې اوږدوالی یې یو واحد او $|\vec{i}|=|\vec{j}|$ دي. هر اختیاري وکتور $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ لپاره لرو:



$$\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$



$\vec{i}$ او $\vec{j}$ واحد وکتورونه دی چې د x او y محورونو په امتداد پراته دي.

واحد وکتور(unit victor): هغه وکتور دی چې طول یې یو واحد او د مختصې د جهت د تزاید لپاره ترې کار اخلي.

لومړی مثال: که $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ وي، د لاندې وکتورونو قیمت پیدا کړئ.

(i): $\vec{u}+\vec{v}=?$ (ii): $4\vec{u}+2\vec{v}=?$ (iii): $\vec{u}-\vec{v}=?$

(iv): $\vec{u}-\vec{u}=?$ (v): $|\vec{u}|=?$

حل:

$$i)\quad \vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\\-3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3\vec{i}+2\vec{j}$$

$$ii)\quad 4\vec{u}+2\vec{v}=4\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+4\\-12+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}=8\vec{i}-2\vec{j}$$

$$iii)\quad \vec{u}-\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2\\-3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix}=-\vec{i}-8\vec{j}$$

$$iv)\quad \vec{u}-\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0$$

$$v)\quad |\vec{u}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

پوښتنه

1. که $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ وي، $\vec{u}+2\vec{v}$، $\vec{u}-2\vec{v}$ او $2\vec{u}+4\vec{v}$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات

که د ټولګي په فضا کې يو ټکی وټاکئ آيا داسې يوه د حل لاره شته چې د ټکي واټن نسبت د ټولګي غولي او مجاور ديوال ته وټاکو؟

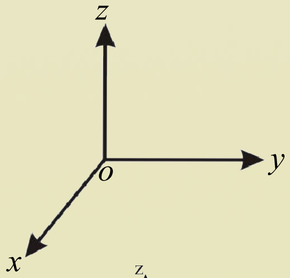
تعريف

درې بُعدي IR^3 فضا د ټولو هغو مرتبو درې ګونو (x, y, z) ځخه عبارت دی چې په لاندې ډول تعريفيږي:

$$IR^3 = IR \times IR \times IR = \{(x, y, z) / x, y, z \in IR\}$$

هغه درې مستويګانې p_3, p_2, p_1 چې دوه په دوه يو په بل عمود دي، د درې بُعدي فضا د مختصاتو مستويګانې بلل کېږي.

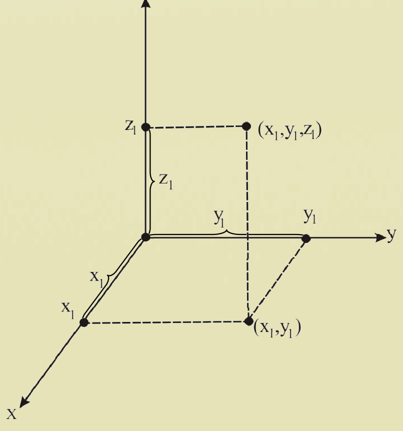
د دغو مستويګانو د دوه په دوه ګډ فصل درې قايمې زاويې جوړوي چې هغه د درې بُعدي فضا قايم مختصات بولي. د درې بعدي فضا قايم مختصات داسې نوموي چې که يو تن ودرېږي، هغه محور چې د ليدونکي د تنې په لور دی، د z محور او هغه محور چې د ليدونکی د ليد په لور دی د y محور او هغه محور چې د ليدونکو د ښي لاس په لور پروت دی، د x محور دی او د دغو درې واړو محورونو د تقاطع ټکی له O ټکي ځخه عبارت دی . چې د قايمو مختصاتو مبداء ښيي.



په درې بعدي فضا کې د يوه ټکي مختصات له هغه واټن ځخه عبارت دي چې له درې واړو مستويګانو ځخه يې لري.

د ټکي واټن د مختصاتو له مستوي ګانو ځخه په $|x|$، $|y|$ او $|z|$ سره ښيي.

په درې بعدي فضا کې د يوه ټکي د ځای ټاکل:



د درې بعدي فضا په قايمو مختصاتو کې د $A(x_1, y_1, z_1)$ ټکي د ټاکلو لپاره د هرې مختصې په اړوند محور باندې د مختصې د علامې په پام کې نيولو سره فاصلې جلاکوو، لومړی د x له محور ځخه موازي خط د y له محور سره رسموو، د تقاطع ټکی يې چې (x, y) دی، پيدا او وروسته له ياد شوي ټکي ځخه يو بل خط موازي د z له محور سره رسموو، په پايله کې د تقاطع ټکی په لاس راځي چې په دې ترتيب د ټکي ټاکل په درې بعدي فضا کې بشپړېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه: په درې بعدي فضاكې د y, x او z مختصو منفي جهتونه د نومړو محورونو له امتداد يافته څخه عبارت دي.

فعاليت

- د $A(2,4,3)$ او $B(-2,-3,3)$ ټكي د درې بعدي فضا قايم سيستم كې وښاياست.

په فضاكې د $P(x,y,z)$ يو ټكى چې د $\vec{OP}$ وكتور له $\vec{u}$ سره مساوي دى، د IR^2 د فضا په شان په درې بعدي فضا يا IR^3 كې هم د جمعې او سكالري ضرب قاعدې د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دواړو وكتورونو لپاره او د a سكالر لپاره صورت نيسي:

$$\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$$ (د جمعې قاعده)

$$a\cdot\vec{u}=a\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\ay\\az\end{pmatrix}$$ (د سكالري ضرب قاعده)

لومړى مثال: كه $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$ وي، $\vec{v}+\vec{w}$ ، $\vec{v}-\vec{w}$ ، $2\vec{w}$ او $\left|v-2\vec{w}\right|$ پيدا كړئ.

حل: لرو چې:

$$i)\quad \vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1\\1+4\\3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$ii)\quad \vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1\\1-4\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$$

$$iii)\quad 2\vec{w}=2\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}$$

$$iv)\quad \left|\vec{v}-2\vec{w}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}2+2\\1-8\\3-0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}4\\-7\\3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4^2+(-7)^2+3^2}$$

$$=\sqrt{16+49+9}=\sqrt{74}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

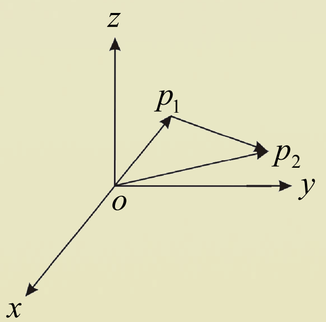
يادونه:

A- کېـدای شـي سـطحې تـه ورتـه درې واحـد وکتورونـه $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ چې:

$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ دي، په درې بعدي فضا کې په پام کې نیول شوي، د z, y, x محورونو په امتـداد د واحـد وکتورونو په نامه یاد کړو. د جمعې د قاعدې په پام کې نیولو سره د $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ هـر اختیـاري وکتـور د واحـد وکتور په پام کې نیولو سره په لاندې توګه ښـودلی شو:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

B- **پـه فـضا کـې د دوو ټکـو تـرمنځ واټـن**: کـه چېـرې $\vec{OP_1}$ او $\vec{OP}_2$ د $P_1(x_1, y_1, z_1)$ او $P_2(x_2, y_2, z_2)$ د ټکو دوه شعاع وکتورونه وي، په دې توګه لرو:



$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{p_1p_2}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{pmatrix}$$

نو د P_1 او P_2 د ټکو ترمنځ د واټن د پیداکولو لپاره لرو:

$$\left|\vec{P_1P_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

پورتنی فورمول د P_1 او P_2 ټکو ترمنځ واټن ښیي.

C- که په درې بُعدي فضا کې د یو ټکي واټن له مبدأ څخه مطلوب وي یعنې $(x_1, y_1, z_1)=(0,0,0)$ او $(x_2, y_2, z_2)=(x, y, z)$ وي؛ نو د ټکي واټن له مبدأ څخه د لانـدې فورمـول پـه واسـطه پیـدا کـولای شو:

$$\left|\overrightarrow{p_1p_2}\right|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: که $\vec{a}=(-5\ ,\ 4\ ,\ 5)$ وی؛ نو د نوموړي شعاع وکتور طول څو دی؟

حل: د شعاع وکتور موقعیت ته په کتو سره چې د شعاع وکتور مبدأ د وضعیه کمیتونو په مبدأکې پرته ده د C جز له فورمول څخه ګټه اخلو:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2++y^2+z^2}=\sqrt{(-5)^2+4^2+5^2}=\sqrt{25+16+25}=\sqrt{66}$$

دریم مثال: که $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{v}=4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=6\vec{i}-9\vec{j}-3\vec{k}$ راکړل شوی وي.

ومومئ $ii)\ \left|\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}\right|=?$ $\qquad i)\ \vec{u}+2\vec{v}=?$

حل: لرو چې:

$$i)\quad \vec{u}+2\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}+2(4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k})$$

$$=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}+8\vec{i}+12\vec{j}+4\vec{k}=10\vec{i}+15\vec{j}+5\vec{k}$$

$$ii)\quad \vec{u}-\vec{v}-\vec{w}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}-4\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}-6\vec{i}-9\vec{j}+3\vec{k}=-8\vec{i}-12\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\left|\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}\right|=\left|-8i-12j+2k\right|=\sqrt{(-8)^2+(-12)^2+2^2}=\sqrt{64+144+4}=\sqrt{212}$$

پوښتنې

1. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو جهت ته واحد وکتور پیدا کړئ.

2. په دریم مثال کې چې $\vec{u},\vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونه راکړل شوي دي په پام کې ونیسئ او لاندې پوښتنو ته ځوابونه ومومئ.

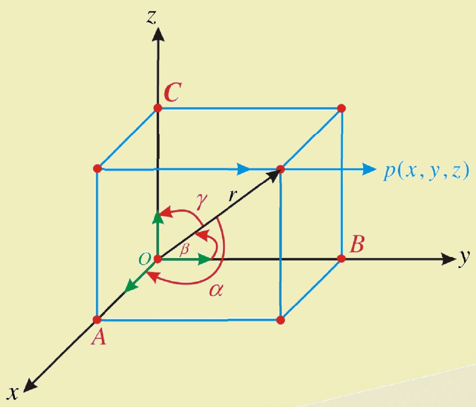
$a)\ 2\vec{u}-6\vec{v}+4\vec{w}=?$ $\qquad b)\ |\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v}-2\vec{w}|=?$

3. $\vec{u}$ او $\vec{v},\vec{v}$ او $\vec{w},\vec{w}$ او $\vec{u}$ وکتورونو ترمنځ واټن پیدا کړئ.

4. د هغه وکتور واحدونه پیدا کړئ چې د $\vec{u},\vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونو په جهت پراته وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه وکتور د جهت زاویې او کوساینونه



تعریف: که د $\vec{r}$ شعاع وکتور د قایمو مختصاتو له محورونو سره په ترتیب د β,α او γ زاویې جوړې کړي په دې صورت کې شکل ته په کتو سره لیکلای شو:

$$\overrightarrow{OP}=\vec{r}$$
$$\overrightarrow{OA}=\vec{r}_x$$
$$\overrightarrow{OB}=\vec{r}_y$$
$$\overrightarrow{OC}=\vec{r}_z$$

کولای شو د $\vec{r}$ د وکتور جهت کوساینونه په لاندې ډول ولیکو:

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}\Rightarrow x=r\cos\alpha$$
$$\cos\beta=\frac{y}{r}\Rightarrow y=r\cos\beta$$
$$\cos\gamma=\frac{z}{r}\Rightarrow z=r\cos\gamma$$

د پورتنیو اړیکو چپ لوری مربع کوو او وروسته یې سره جمع کوو:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}$$

پوهېږو چې $x^2+y^2+z^2=r^2$ دی، نو:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{r^2}{r^2}=1$$

فعالیت

که چېرې په یوه درې بعدي فضا کې $\vec{v}=\overrightarrow{OP}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ وکتور چې د صفر خلاف دی، ورکړ شوی وي، په داسې حال کې چې د پورته شکل په شان β,α او γ په ترتیب سره د $\vec{v}$ د وکتور زاویې او $\vec{k},\vec{j},\vec{i}$ واحد وکتورونه وي، په دې ډول لاندې فعالیت اجرا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- آیا ویلای شئ چې د α , β او γ زاویې په کومه اندازه تحول کوي؟
- آیا له پورتنیو زاویو څخه یوه یې منفي کیدای شي؟
- که چیرې له زاویو څخه یوه یې صفر شي، د وکتور د موقعیت په هکله څه ویلای شئ؟
- د $\vec{v}$ د وکتور د جهت زاویو د کوساین لپاره یوه ګډه اړیکه پیدا کړئ؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسیږو:

پایله: که په فضاکې د $\vec{v}$ یو وکتور، چې صفر نه وي، یعنې $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ، راکړل شوی وي، نو د جهت د

زاویو د کوساینونو ترمنځ لاندې اړیکې شته: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

د پورتنی پایلې د ثبوت لپاره پوهیږو، چې: $\left|\vec{v}\right|=\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right|=\left|x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

له بلې خوا د جهت د واحد وکتور یا د $\vec{v}=\vec{OP}$ مسیر عبارت دی، له: $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\begin{pmatrix}\dfrac{\vec{v}_x}{|\vec{v}|}\\ \dfrac{\vec{v}_y}{|\vec{v}|}\\ \dfrac{\vec{v}_z}{|\vec{v}|}\end{pmatrix}$

پوښتنې

1. که $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ وي، پیدا کړئ؟

$a)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}=?$ $b)\ v-3\vec{w}=?$ $c)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

2. د α اندازه داسې پیدا کړئ چې د $\alpha\,\vec{i}+(\alpha+1)\,\vec{j}+2\vec{k}$ وکتور اوږدوالی مساوي په 3 وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل

د دوو وکتورونو د سکالر ضرب حاصل د انجینرۍ او فزیک په زده کړه کې په کارېږي او د هغو ترمنځ زاویې په پام کې نیولو سره له یو سکالري کمیت سره مساوي دی، که چېرې: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$ وي، نو $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ ده، که نه؟

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$$

تعریف

$\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي په مستوي یا فضا کې په پام کې نیسو.

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ سکالري ضرب حاصل په $\vec{u}\cdot\vec{v}$ سره ښیو، چې حاصل یې عبارت دی، له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاویه جوړه کړې او $(0\leq\theta\leq\pi)$ سره دي.

فعالیت

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل په پام کې نیولو سره وښایاست، چې:

i) $\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=1$

ii) $\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{k}\cdot\vec{i}=0$

iii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

iv) که $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د صفر خلاف او $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ وي، نو وکتورونه یو پر بل عمود دي.

- د دوه $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}$ وکتورونو لپاره د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ضرب حاصل د $a_1a_2+b_1b_2$ له سکالري قیمت سره مساوي دی.
- په فضا کې د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ د ضرب حاصل مطلوب یا غوښتل شوی په دې ډول چې $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وي.

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل لپاره له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لاسته راځي.

پایله: که $\vec{u}$، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ درې اختیاري وکتورونه او c یو حقیقي عدد وي، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(i \quad \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}\perp\vec{v}$

$(ii \quad \vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (د ضرب تبادلوي خاصیت یا ځانګړتیا).

$(iii \quad \vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\,\vec{v}+\vec{u}\,\vec{w}$ (په جمع د ضرب توزیعي خاصیت).

$(iv \quad (c\cdot\vec{u})\,\vec{v}=c(\vec{u}\cdot\vec{v})$ د ضرب توزیعي خاصیت.

لومړی مثال: که $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ دوه وکتورونه د صفر خلاف وي، د سکالري ضرب حاصل یې پیدا کړئ.

حل: د تعریف له مخې لرو چې:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$

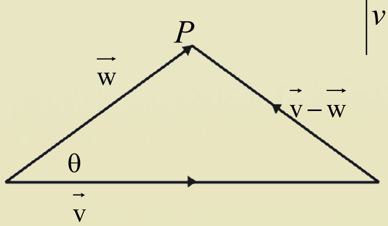
$$=a_1\cdot a_2(\vec{i}\cdot\vec{i})+a_1b_2\cdot(\vec{i}\cdot\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\cdot\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\cdot\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\cdot\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\cdot\vec{k})$$

$$+c_1\cdot a_2(\vec{k}\cdot\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\cdot\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\cdot\vec{k})=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$$

دویم مثال: که $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ د یو مستوي دوه وکتورونه وي، وښایاست چې:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=x_1x_2+y_1y_2$$

حل: د تعریف له مخې لرو: $\left|\vec{v}-\vec{w}\right|^2=\left|\vec{v}\right|^2+\left|\vec{w}\right|^2-2\,\vec{v}\cdot\vec{w}\cdot\cos\theta$



څرنګه چې $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ ، $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ په پایله کې $\vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{pmatrix}$ دي، نو د پورتنۍ اړیکې څخه لرو:

$$|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2=|x_1^2+y_1^2||x_2^2+y_2^2|-2\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|\cos\theta$$

$$\Rightarrow -2x_1x_2-2y_1y_2=-2\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|\cos\theta \;/\div -2$$

$$\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=\left|\vec{w}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cos\theta=\vec{v}\cdot\vec{w}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: که چېرې د $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ او $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ وکتورونه درکړ شوي وي، د سکالري د ضرب حاصل يې پيدا کړئ.

حل: د فورمول په پام کې نيولو سره لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=i^2+4j^2+k^2=1+4+1=6$$

څلورم مثال: وښاياست چې د $\vec{u}=\vec{2i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ او $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ وکتورونه يو پر بل عمود دي.

حل: په دې هکله لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(\vec{2i}-4\vec{j}+5\vec{k})(4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k})=(2)(4)+(-4)(-3)+(5)(-4)$$

$$=8+12-20=0 \quad\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$$

څرنگه چې د وکتورونو د سکالري ضرب حاصل مساوي په صفر شو، نو وکتورونه يو پر بل عمود دي.

پنځم مثال: د α قيمت داسې پيدا کړئ چې د $2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k}$ او $3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k}$ وکتورونه يو پربل عمود وي.

حل: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو له عمود والي څخه دې پايلې ته رسېږو چې: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ دی، نو لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k})\,(3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k})=0 \quad\Rightarrow\quad 6+\alpha+5\alpha=0 \;,\; \alpha=-1$$

شپږم مثال: وښاياست چې د $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ او $3i-4j-4k$ وکتورونه د يو قايم الزاويه مثلث ضلعې دی.

حل: که $\overline{AB}=\overline{2i}-\vec{j}+\vec{k}$ او $\vec{BC}=\vec{i}-\overline{3j}-\overline{5k}$ د مطلوب مثلث دوه ضلعې په پام کې ونيسو، نو دريمه ضلع يې د مثلث د وکتورونو د جمعې حاصل په پام کې نيولو سره چې د مثلث دريمه ضلع ټاکي عبارت دی له:

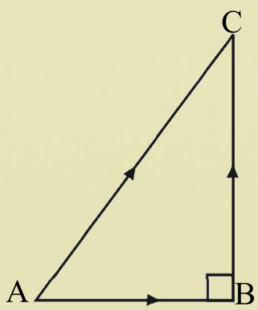
$$\vec{AB}+\vec{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})+(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$

(چې د مثلث له دريمې ضلعې څخه عبارت دی) $3\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$ اوس ښيو چې نوموړی مثلث قايم الزاويه دی، د دې لپاره د وکتوري ضرب حاصل $\vec{AB}\cdot\vec{BC}=0$ وي.

$$\vec{AB}\cdot\vec{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})\,(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$

$$=(2)(1)+(-1)(-3)+(1)(-5)=2+3-5=0$$

$$\Rightarrow \vec{AB}\perp\vec{BC}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. وښایاست چې د $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ وکتور مرتسمونه د $\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$ واحد کتورونو په امتداد په ترتیب سره له a, b او c سره مساوي دي.

2. وښایاست چې هر $\overset{\Delta}{ABC}$ کې لاندې اړیکې وجود لري:

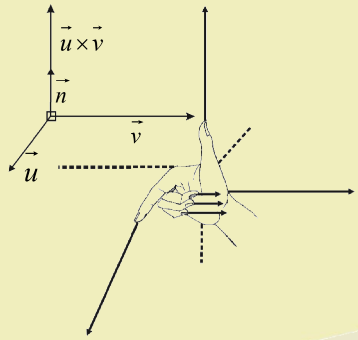
$i)\ \ a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A \qquad\qquad ii)\ \ a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B$

3. ثبوت کړئ چې: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وکتوري ضرب حاصل

The cross Product



د راکړل شوي شکل له مخې دکوم لاس (ښې یا کیڼ) پـه واسـطه د $\vec{v}\cdot\vec{u}$ او $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتورونـه داسـې وښـیو چـې $\vec{u}$ د ورغـوي پـه جهت، $\vec{v}$ د ځنګل په جهت او $\vec{u}\times\vec{v}$ د ښي لاس د غټې ګوتې په لور واقع شي؟

تعریف

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، په پام کې نیسو. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوو وکتورونو د وکتوري ضـرب حاصل په $\vec{u}\times\vec{v}$ چې($\vec{u}$ کرس $\vec{v}$ لوستل کیږي) عبارت دی، له: یعنې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب له هغه دریم وکتور څخه عبارت دی چې د دوی د مبدأ په ټکي عمود وي.

$$\vec{u}\times\vec{v}=(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin\theta)\,\vec{n}$$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ $(0\le\theta\le\pi)$ وکتورنو تـر منځ زاویـه او $\vec{n}$ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د وکتورونـو پـه واسـطه جـوړه شـوې مـستوي لـه عمـود واحـد وکتـور څخـه عبـارت دی، د ښـې لاس قاعـدې پـه واسـطه (Right hand rule) ښودل کیږي.

د دوو وکتورونو وکتوري ضرب

مخکې له دې چې د دوو وکتورنو وکتوري ضرب توضیح کړو، لازمـه ده چـې د وکتورونـو خطـي ترکیـب، وکتوري فضا، د وکتورونو خطي خپلواکي(استقلالیت) په لنډ ډول تر څېړنې لاندې ونیسو.

1. **د وکتورونو خطي ترکیب**: د یوه سټ د وکتورونو د سکالري مضربونو مجموعه د همغه سـټ د وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادیږي.

که $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ \dots\ ,\vec{a}_n$ د یوه سټ وکتورونه او $\alpha_1,\alpha_2,\ \dots\ ,\alpha_n\in IR$ سکالرونه وي، په دې صورت کې د $\vec{a}$ وکتـــور پـــه داســـې حـــال کـــې چـــې $\vec{a}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\dots+\alpha_n\vec{a}_n$ وي، $\vec{a}$ وکتـــور د $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ \dots\ ,\vec{a}_n$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادیږي.

لومړی مثال: که $\vec{a}_1=2i+j-3k$ او $\vec{a}_2=i+2j+2k$ وکتورونه راکړل شوی وي، د هغوی خطي ترکیب په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې $\alpha_1=5$ او $\alpha_2=2$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\vec{a}=5\vec{a}_1+2\vec{a}_2=5(2i+j-3k)+2(i+2j+2k)$$
$$=10i+5j-15k+2i+4j+4k$$
$$=12i+9j-11k$$

د $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

دویم مثال: کـه $\vec{a}_1=(2,3)$ او $\vec{a}_2=(5,1)$ وکتورونـه راکـړل شـوي وي، وښایاسـت چـې د $\vec{a}=(6\ ,-5\ )$ و کتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو خطي ترکیب دی.

حل: خرنګه چې $\alpha_1\ ,\ \alpha_2\in IR$ سکالرونه دي، نو:

$$\vec{a}=(6\ ,-5)=\alpha_1(2\ ,\ 3)+\alpha_2(5\ ,1)$$
$$=(6\ ,-5)=(2\alpha_1\ ,3\alpha_1)+(5\alpha_2\ ,\ \alpha_2)$$
$$=(6\ ,-5)=(2\alpha_1+5\alpha_2\ \ ,3\alpha_1+\alpha_2)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}2\alpha_1+5\alpha_2=6\\3\alpha_1+\alpha_2\ \ =-5\end{cases}$$

له پورتني سیستم څخه د α_1 او α_2 قیمتونه په لاس راوړو:

$$\begin{array}{r}3\\2\end{array}\begin{cases}2\alpha_1+5\alpha_2=6\\3\alpha_1+\alpha_2=-5\end{cases}$$
$$6\alpha_1+15\alpha_2=18$$
$$-6\alpha_1\pm2\alpha_2=\mp10$$
$$13\alpha_2=28\Rightarrow\alpha_2=\frac{28}{13}$$
$$2\alpha_1+5\frac{28}{13}=6$$
$$2\alpha_1+\frac{140}{13}=6\Rightarrow2\alpha_1=6-\frac{140}{13}=\frac{78-140}{13}$$
$$2\alpha_1=\frac{-62}{13}\Rightarrow\alpha_1=-\frac{62}{26}=-\frac{31}{13}$$
$$\vec{a}=(6\ ,-5)=\alpha_1(2\ ,\ 3)+\alpha_2(5\ ,\ 1)$$
$$\vec{a}=(6\ ,-5)=-\frac{31}{13}(2\ ,\ 3)+\frac{28}{13}(5\ ,\ 1)$$

یعنې که α_1 او α_2 قیمتونه په $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورنوکې ضرب شي، په پایله کې د $\vec{a}$ وکتور پـه لاس راځـي، نو ومولیدل چې $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ و کتورونه د $\vec{a}$ د وکتور خطي ترکیب دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د طبعي واحد وکتورونو د خطي ترکيب په واسطه د يوه وکتور ښودل:

که په دوه بعدي، درې بعدي او بلاخره په n بعدي فضا کې د شعاع وکتورونه راکړل شوي وي. کولای شو هغه د واحدو وکتورونو د ضريبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول وښيو.

a) که دوه بعدي فضا وي $(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2)$

نو: $= x_1(1, 0) + x_2(0, 1)$

که $e_2 = (0, 1)$ او $e_1 = (1, 0)$ وي.

نو: $(x_1, x_2) = e_1 x_1 + e_2 x_2$

او په بل ډول يې هم ليکلای شو:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$
$$= xe_1 + ye_2 = xi + yj$$

b) که فضا درې بعدي وي، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3)$$
$$= x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)$$

څرنگه چې $e_1 = (1,0,0)$ ، $e_2 = (0,1,0)$ او $e_3 = (0,0,1)$ په درې بُعدي فضا کې واحد وکتورونه دي، نو:

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$
$$(x, y, z) = xi + yj + zk$$

c) په عمومي حالت کې که فضا n بعدي وي

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, x_n)$$
$$= x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1)$$
$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

په داسې حال کې چې $e_1, e_2, \dots, e_n$ طبيعي واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو خطي خپلواکي: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ وکتورونه په يوه وکتوري ساحه کې خطي خپلواکي (خطي استقلال) لري، که چېرې دغه خطي ترکيب $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$ مساوي په صفر وي او همدارنگه $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ وي.

فعاليت

که $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ وي وښاياست چې S خطي خپلواکي لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

غیرې خپلواک خطي وکتورونه: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ وکتورونه خطاً مربوط خطي غیر خپلواک یا خطي انحصار لري، که چېرې یوازې او یوازې $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$ وي او کم ترکمه یو له ضریبونو د $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ څخه د صفر خلاف وي.

یادونه:

ددې لپاره چې د وکتورونو یو سټ په لاس راوړو چې خطي خپلواکي ولري، نو لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: د وکتورونو ترکیب په لاس راوړو او له صفر وکتور سره یې مساوي نیسو.

دویم پړاو: د وکتورونو د جمعې عملیه سرته رسوو.

دریم پړاو: د معادلاتو سیستم تشکیلوو.

څلورم پړاو: د معادلاتو سیستم د سکالرونو لپاره حلوو، په هغه صورت کې چې ټول سکالرونه صفر شي نو وایو چې نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري او که چېرې له ټولو سکالرونو څخه کم ترکمه یو سکالر د صفر خلاف وي، نو وکتورونه خطي خپلواکي نه لري.

مثال: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ وکتورونه په لاندې ډول راکړل شوي دي $\vec{a}_1 = (1,2,0)$ ، $\vec{a}_2 = (0,3,1)$ ، $\vec{a}_3 = (2,3,1)$ وښایاست چې $\vec{a}_1$ ، $\vec{a}_2$ او $\vec{a}_3$ وکتورونه خطي خپلواکي لري او که نه؟

حل: د خطي خپلواکو وکتورونو له اړیکې څخه په ګټې اخیستنې سره کولای شو، ولیکو:

لومړی پړاو: $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \alpha_1(1,2,0) + \alpha_2(0,3,1) + \alpha_3(2,3,1) = 0$

دویم پړاو:

$$= (\alpha_1, 2\alpha_1, 0) + (0, 3\alpha_2, \alpha_2) + (2\alpha_3, 3\alpha_3, \alpha_3) = (0,0,0)$$
$$= (\alpha_1 + 0 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3, 0 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0)$$

دریم پړاو:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 0 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 0 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

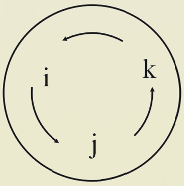
څلورم پړاو: اوس د معادلاتو سیستم د α_1 ، α_2 او α_3 لپاره حلوو:

$$\alpha_2 = -\alpha_3$$
$$2\alpha_1 + 3(-\alpha_3) + 3\alpha_3 = 2\alpha_1 - 3\alpha_3 + 3\alpha_3 = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 = 0\,,\ \alpha_1 = 0$$
$$\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0$$
$$0 + 2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$$
$$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$$
$$0 + 3\alpha_2 + 0 = 0 \Rightarrow 3\alpha_2 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنگه چې $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ دي، نو نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري.

فعالیت



د تعریف له مخې د ښي لاس د قاعدې په واسطه د $\vec{u}\times\vec{v}$ او $\vec{v}\times\vec{u}$ مسیر او یا جهت په مخامخ شکل کې وښيي.

- وښایاست چې $\vec{i}\times\vec{i}=0$ او $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ دی.
- د پورتنیو څېړنو له مخې د $\vec{j}\times\vec{j}$ ، $\vec{k}\times\vec{k}$ ، $\vec{j}\times\vec{k}$ او $\vec{k}\times\vec{i}$ وکتورونو د ضربونو حاصل په هکله څه ویلای شئ؟
- وښایاست چې: $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$ او $\vec{u}\times\vec{u}=0$ دی.
- **په عمومي ډول ویلای شو چې د $\vec{j},\vec{i}$ او $\vec{k}$ وکتورونو د ضرب حاصل په دایروي ډول د لومړني او دویم وکتور د ضرب له حاصل څخه دریم وکتور، لکه: د ورکړل شوې دایرې په ښي لاس ته راځي.**

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لاس ته راځي:

پایله: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي. د وکتوري ضرب له حاصل څخه او د ښي لاس د قاعدې په کارولو سره لرو:

$$\text{i)}\quad \vec{u}\times\vec{u}=0$$

$$\text{ii)}\quad \vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$$

$$\text{iii)}\quad \vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$$

$$\text{iv)}\quad \vec{u}\times(k\vec{v})=(k\vec{u})\times\vec{v}=k\,(\vec{u}\times\vec{v})\ ,\quad k\in IR$$

د وکتوري ضرب د حاصل د تعریف له مخې د پورته پایلې ثبوت دې زده‌کوونکو ته پرېښودل شي.

لومړی مثال: که چېرې $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وکتورونه صفر نه وي، نو وښایاست چې:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\vec{k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د تعریف نه په ګټې اخیستنې سره لیکو، چې:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})\times(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$
$$=a_1a_2(\vec{i}\times\vec{i})+a_1b_2(\vec{i}\times\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\times\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\times\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\times\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\times\vec{k})$$
$$+c_1a_2(\vec{k}\times\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\times\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\times k)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\end{array}\right\}\quad,\quad\left.\begin{array}{l}\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\end{array}\right\}\quad,\quad\left.\begin{array}{l}\vec{i}\times\vec{i}=0\\ \vec{j}\times\vec{j}=0\\ \vec{k}\times\vec{k}=0\end{array}\right\}$$

$$=a_1b_2\cdot\vec{k}-a_1c_2\cdot\vec{j}-b_1a_2\cdot\vec{k}+b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\,\vec{j}-c_1b_2\cdot\vec{i}$$
$$=(b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\cdot\vec{j}+a_1b_2\cdot\vec{k})-(c_1b_2\cdot\vec{i}+a_1c_2\,\vec{j}+b_1a_2\cdot\vec{k}$$
$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}+(c_1a_2-a_1c_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$
$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$
$$\Rightarrow\quad\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

دویم مثال: وښایاست چې د $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ لپاره د $\vec{a}\times\vec{b}$ حاصل له $(-\vec{i}+6\vec{j}+8\vec{k})$ سره مساوي دی.

حل: د لومړي مثال نه په ګټې اخیستنې سره پوهېږو، چې:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\times(4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=8(\vec{i}\times\vec{i})+4(\vec{i}\times\vec{j})-2(\vec{i}\times\vec{k})$$
$$+4(\vec{j}\times\vec{i})+2(\vec{j}\times\vec{j})-(\vec{j}\times\vec{k})+4(\vec{k}\times\vec{i})+2(\vec{k}\times\vec{j})-(\vec{k}\times\vec{k})$$
$$=0+4\vec{k}+2\vec{j}-4\vec{k}+0-\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{i}-0=-3\vec{i}+6\vec{j}$$

د مخلوط ضرب حاصل (درې ګونې ضرب) Triple Product

تعریف: د دوو یا څو وکتورونو د ضرب لپاره څو امکانه شته چې هر یو یې په لاندې ډول تر څېړنې لاندې نیسو:

i) د $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ دضرب حاصل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنيو $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونو د ضرب حاصل چې په سکالري ډول ضرب شوی، يو سکالر دی. وروسته نوموړی سکالر د $\vec{c}$ په وکتور کې ضرب شوی چې له پايلې يې وکتور په لاس راځي دغه وکتور له $\vec{c}$ وکتور سره هم جهت دی.

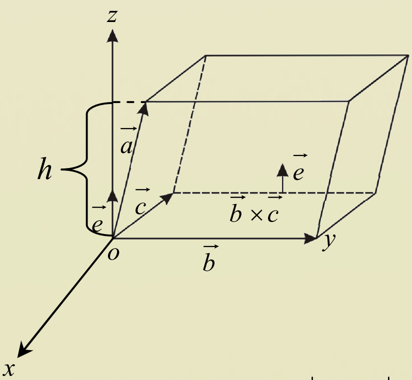
په پورتني ضرب کې لاندې قانون شته: $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \neq (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} \neq (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$

د $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ وکتور جهت د $\vec{a}$ د وکتور هم جهت او د $(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$ وکتور جهت د $\vec{b}$ د وکتور هم جهت دی.

ii) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

iii) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})$

iiv) $\vec{a}(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$



د $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ اړيکه د هغه متوازي السطوح له حجم څخه عبارت دی چې a, b او c د متوازي‌السطوح اضلاع دي، څرنګه چې په شکل کې ليدل کېږي $\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|$ د متوازي-السطوح قاعده او h د متوازي‌السطوح جګوالی دی، نو له دې امله:

$$\text{د متوازي‌السطوح حجم} = v = \left|\vec{b}\times\vec{c}\right|(\vec{a}\cdot\vec{e}) = \vec{b}\,|\vec{a}\times\vec{c}\,|\,\vec{e}$$

$$v = \vec{b}(\vec{a}\times\vec{c}) = \left|\vec{b}\times\vec{c}\right| h$$

تطبيقاتي مسئلې:

1- که چېرې $\vec{a} = 4\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ او $\vec{b} = 2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ وکتورونه راکړل شوي وي، هغه وکتور مطلوب غوښتل کيږي چې پر دواړو وکتورونو عمود وي، آيا دغه وکتور يوازنی وکتور دی، که څنګه؟ دليل مو څه دی؟

حل: د ښي لاس د قاعدې په کارولو پوهېږو چې د $\vec{a}\times\vec{b}$ وکتور پر هغو وکتورونو عمود دی، نو لرو:

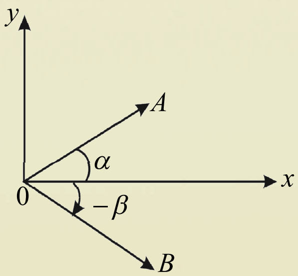
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د $\vec{a}\times\vec{b}=7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}$ وکتور پر $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونه یوازیني عمود وکتورونه دي، بلکې $\vec{b}\times\vec{a}$ وکتور هم د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په وکتورونو عمود دي، یعني لرو:

$$\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}=-7\vec{i}+6\vec{j}+10\vec{k}=-(7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k})=-\vec{a}\times\vec{b}$$

2- ثبوت کړئ چې د α او β د هرې اختیاري زاویې لپاره $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin B$.



حل: که $\vec{OA}$ او $\vec{OB}$ دوه وکتورونه د x,y په مستوي کې داسې راکړل شوي دي چې د x له محور سره د α او β زاویې جوړې کړي، له شکل څخه پوهېږو: $A\hat{O}B=\alpha+\beta$

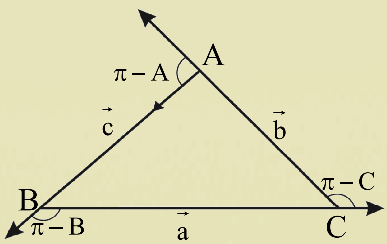
له بلې خوا پوهېږو چې $\vec{OA}=\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}$ او $\vec{OB}=\cos(-\beta)\,\vec{i}+\sin(-\beta)\,\vec{j}$ نو لرو:

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j})\times(\cos\beta\,\vec{i}-\sin\beta\,\vec{j})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ \cos\beta & -\sin\beta & 0\end{vmatrix}$$

$$=\vec{k}(-\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta)=-\vec{k}\sin(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow\ \left|\vec{OA}\right|\times\left|\vec{OB}\right|=\left|-\vec{k}\right|\cdot\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)$$

3- په یوه کیفي مثلث کې وښیئ، چې: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$



حل: فرضوو چې د لاندې شکل له مخې د $\vec{a}$، $\vec{b}$ او $\vec{c}$ وکتورونه د $\overline{BC}$، $\overline{CA}$ او $\overline{AB}$ د مثلث د ضلعو په امتداد راکړل شوي دي، نو لرو:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$$

$$\Rightarrow\ \vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}\qquad..........\ (i)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د مساوات دواړه خواوې په $\vec{c}$ وکتور کې وکتوري ضرب کړو، لاسته راځي، چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c}=-\vec{a}\times\vec{c}$$

$$(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{c}\times\vec{c})=-\vec{a}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$$

$$\vec{c}\times\vec{c}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a} \quad\Rightarrow\quad \left|\vec{b}\times\vec{c}\right|=\left|\vec{c}\times\vec{a}\right|$$

دپورتينو مساواتو د تعريف له مخې داسې ليکلاى شو:

$$|\vec{b}|\ |\vec{c}|\sin(\pi-A)=|\vec{c}|\ |\vec{a}|\ \sin(\pi-B)$$

$$\Rightarrow\quad |\vec{b}|\,|\vec{c}|\ \sin A=|\vec{c}|\ |\vec{a}|\ \sin B \quad\Rightarrow\quad b\sin A=a\sin B\ \ /\div ab$$

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a} \quad \text{..........}\ (ii) \quad \text{يا} \quad \frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A} \quad \text{..........}\ (ii)$$

د پورته په څېر که چېرې د (i) د رابطې دواړه خواوې په $\vec{b}$ وکتور کې په وکتوري ډول ضرب شي، لاسته راځي چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b}=-\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$$

$$(\vec{b}\times\vec{b})+(\vec{c}\times\vec{b})=\vec{b}\times\vec{a}$$

$$\vec{b}\times\vec{b}=0 \quad\Rightarrow\quad (\vec{c}\times\vec{b})=\vec{b}\times\vec{a}$$

$$|\vec{c}||\vec{b}|\sin A=|\vec{b}||\vec{a}|\sin C$$

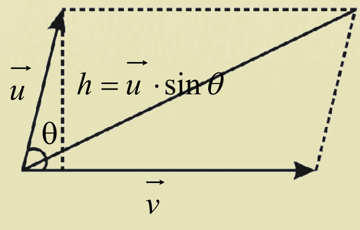
$$c\sin A=a\sin C\ \ /\div ac$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\quad \text{.....}\ iii \qquad \text{يا} \qquad \frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

د (ii) او (iii) معادلو له پرتلې څخه د ساين قضيه لاسته راځي:

$$\frac{a}{SinA}=\frac{b}{SinB}=\frac{c}{SinC}$$

4- **د يوې متوازي الاضلاع مساحت**: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي، د دوى ترمنځ زاويه د θ د لاندې شکل په څېر په پام کې نيسو. ګورو چې $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د متوازاي الاضلاع ضلعې دي چې د هغې د مساحت د پيداکولو لپاره کولاى شو، وليکو:



ارتفاع × قاعده = د متوازي الاضلاع مساحت

خرنګه چې: $|\vec{v}|$ = قاعده او $h=|\vec{u}|\sin\theta$ = ارتفاع ده

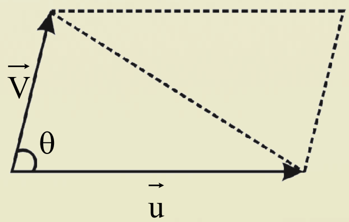
$|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta=|\vec{u}\times\vec{v}|$ = د متوازي الاضلاع مساحت

(c) ketabton.com: The Digital Library

يعنې د يوې متوازي الاضلاع مساحت، د يوې متوازي الاضلاع د ضلعو د وکتوري ضرب له حاصل څخه عبارت دی چې د متوازي الاضلاع ضلعې هم دي.

پايله:څرنګه چې د يوه مثلث مساحت د متوازي الاضلاع مساحت نيمايي دی، نو د مثلث مساحت د لاندې شکل په پام کې نيولو سره عبارت دی، له:

د مثلث مساحت $= \frac{1}{2}$ (د متوازي الاضلاع مساحت) $= \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$



پوښتنې

1. که $\vec{a}_1 = t^2+t+2$ ، $\vec{a}_2 = 2t^2+t$ او $\vec{a}_3 = 3t^2+2t+2$ وي وښاياست چې نومړي وکتورونه خطي خپلواکي لري؟

2. وښاياست چې $\vec{a} = 2i+3j+4k$ او $\vec{b} = 4i+6j+8k$ وکتورونه يو له بل سره کوم ډول خطي اړيکه لري؟

3. د هغه مثلث مساحت پيدا کړئ چې راسونه يې د $A(1,-1,1)$ ، د $B(2,1,-1$ او $C(-1,1,2)$ وکتورونو په واسطه درکړل شوي وي. همدارنګه هغه واحد وکتور چې پر ABC مستوي عمود وي، مطلوب دي.

4. د هغه متوازي الاضلاع مساحت پيدا کړئ چې: د $P(0,0,0), Q(-1,2,4)$ ، $R(2,-1,4)$ او $S(1,1,8)$ وکتورونو په واسطه ځانګړی شوي وي.

5. که $\vec{u} = 2i-j+k$ ، $\vec{v} = 4i+2j-k$ سره وي، د لاندې وکتورونو د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

i) $\vec{u}\times\vec{u}$　　ii) $\vec{u}\times\vec{v}$　　iii) $\vec{v}\times\vec{u}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېړکي مهم ټکي

د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه: هغه کمیتونه چې هم جهت اوهم مقدار ولري وکتور نومېږي. هغه وکتورونه چې اوږدوالی یې مساوي او عین جهت ولري، یو له بله سره د ممثلو وکتورونو په نامه یادیږي. هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پرته وي شعاع وکتور (Position Vector) بلل کیږي. یو وکتور په مستوي کې د $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ په څېر ښودل کېږي. چې a_x د x او a_y د y محور پرمخ له فاصلې او ترتیب څخه عبارت دی.

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی: که $P(x_1, y_1)$ وکتور مبداء او $Q(x_2, y_2)$ د پای ټکی د $\vec{a} = \vec{PQ}$ وکتور وي. په دې ډول $\vec{a}$ وکتور په $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ ښیو او د $P\overset{\Delta}{Q}N$ قایم الزاویه مثلث او $|\vec{a}|$ وکتور اوږدوالي له مخې لرو چې:

د P او Q ټکو ترمنځ واټن، $= |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ د $\vec{a}$ اوږدوالې د P او Q منځنې ټکی $M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix}$ د $\vec{PQ}$ د منځنې ټکې کمیتونه یا مختصات دی.

واحد وکتور: هغه وکتور چې د راکړل شوی وکتور په عین جهت پروت او یو واحد اوږوالی ولري، د واحد وکتور په نامه یادیږي.

مثال: $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ او $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ په قایم سیستم کې د x او y د مستوي د محورونو په جهت واحد وکتورونه دي، په داسې حال کې چې $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$، $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ او $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ په فضاکې د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د x، y او z محورونو په جهت واحد وکتورونه دي.

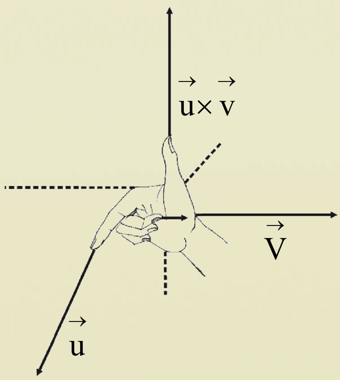
د وکتورونو سکالري او وکتوری ضرب حاصل: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د سکالري ضرب حاصل یې په مستوي او فضاکې عبارت دی له: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\ |\vec{v}|\ Cos\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاویه ده. او د وکتوري ضرب حاصل يې يـو وکتـور دي چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ په واسطه ښودل کيږي، عبارت دی، له: $\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\,Sin\theta\cdot\vec{n}$

په داسې د حال کې چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ پـر وکتورونـو عمـود دی او $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونـه سـره د ښي لاس قاعدې په واسطه ټاکل کيږي.

د ښي لاس قاعده: که د شهادت گوته په قايم ډول کږه شي، لکه د لاندې شکل په شان، په دې صورت کې د شهادت گوته د $\vec{u}$ محور په جهت، د خنگل په جهت د $\vec{v}$ محور او غټـه گوتـه د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتـور حاصـل ضرب ښيي.



په فضا کې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب:

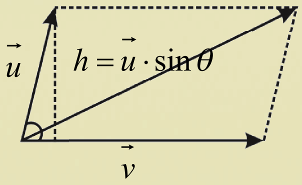
کـــه $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ ورکړل شوی وي، په دې صورت کې وکتوري حاصل ضـرب يعنې $\vec{a}\times\vec{b}$ عبارت دی له:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

مساحت او د وکتوري ضرب حاصـل: د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونـه، چـې صـفر نـه وي، د وکتوري ضـرب قيمت يې د متوازي الاضلاع له مساحت څخه عبارت دی، چې د وکتورونو په واسطه په لاندې شـکل کـې تشکيليږي.

$|\vec{u}\times\vec{v}|=$ د متوازي الاضلاع مساحت



(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1): که $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ وي:

a): $\vec{a}\cdot\vec{b}$ b): $\vec{b}\cdot\vec{a}$ مطلوب دی

2): که چېرې د $P(2,3)$ او $Q(6,-2)$ ټکي د $\vec{op}$ او $\vec{OQ}$ شعاع وکتورونو پای وي، په دې صورت کې د P او Q په مستوي کې د $xi+yj$ په څېر ولیکئ.

3): که چېرې $A(1,-1)$ ، $B(2,0)$ ، $C(-1,3)$ او $D(-2,2)$ درکړل شوي وي، د $\vec{AB}$ او $\vec{CD}$ وکتورونو حاصل جمع مطلوب ده.

4): که چیرې $A(2,5)$ ، $B(-1,1)$ او $C(2,-6)$ درکړل شوي وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{AB}=?$ $ii)\ 2\vec{AB}-\vec{CB}=?$ $iii)\ 2\vec{CB}-2\vec{CA}=?$

5): که چیرې $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ ورکړل شوی وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$ $ii)\ \vec{v}-3\vec{w}$ $iii)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

$(iv$: د $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ راکړل شوو وکتورنو په جهت واحد وکتورونه پیدا کړئ

6): د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ درکړل شوو وکتورونو لپاره سکالري ضرب حاصل د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ، $\vec{b}\cdot\vec{a}$ او وکتوري ضرب حاصل د $\vec{a}\times\vec{b}$ او $\vec{b}\times\vec{a}$ پیدا او دوه په دوه یې پرتله کړئ، که چیرې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په لاندې توګه وي:

$$i)\ \begin{cases}\vec{a}=2i+j-k\\ \vec{b}=i-j+k\end{cases}\qquad ii)\ \begin{cases}a=i+j\\ b=i-j\end{cases}$$

$$iii)\ \begin{cases}\vec{a}=3i-2j+k\\ \vec{b}=i+j\end{cases}\qquad iv)\ \begin{cases}\vec{a}=-4i+j-2k\\ \vec{b}=2i+j+k\end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7): د هغو مثلثونو مساحت مطلوب دی چې راسونه یې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل کېږي:

$i):\quad P(0,0,0),\quad Q(2,3,2),\quad R(-1,1,4)$

$ii):\quad P(1,-1,-1),\quad Q(2,0,-1),\quad R(0,2,1)$

8): د هغه متوازي الاضلاع مساحت مطلوب دی چې راسونه یې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل شوی وي.

$i):\quad A(0,0,0),\quad B(1,2,3),\quad C(2,-1,1),\quad D(3,1,4)$

$ii):\quad A(1,2,-1),\quad B(4,2,-3),\quad C(6,-5,2),\quad D(-3.5,-4)$

$iii):\quad A(1,-1,1),\quad B(-1,2,2),\quad C(-3,4,-5),\quad D(-3,5,-4)$

9): کوم وکتورونه عمود او کوم موازي دي ؟

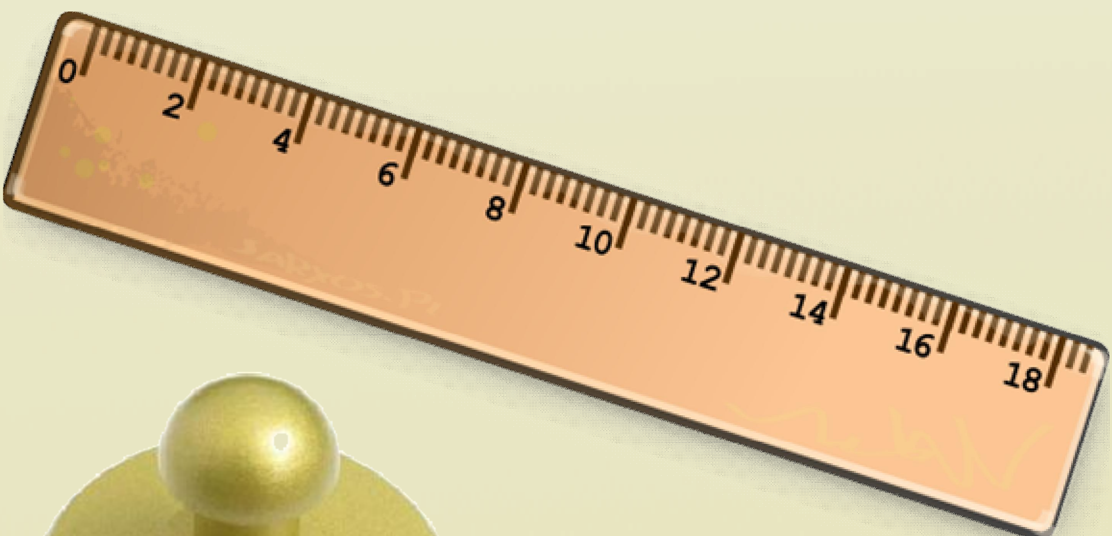
$i):\quad \vec{u}=5i-j+k,\quad \vec{v}=j-5k,\quad \vec{w}=-15i+3j-3k$

$ii):\quad \vec{u}=i+2j-k\ ,\quad \vec{v}=i+j+k,\quad \vec{w}=-\frac{\pi}{2}\vec{i}+\frac{\pi}{2}\vec{j}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم څپرکی
احصائیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

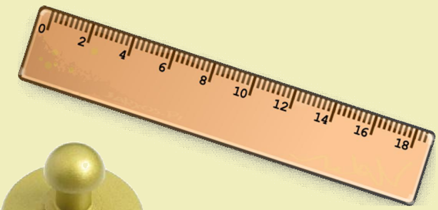


$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دبدلونونو ضریب

Coefficient Variations



که چېرې د يوې ټولنې تیتوالی په متر او د بلې ټولنې په کیلوګرام ښودل شوې وي. آیا فکر کولای شئ چې دغه دواړه تیتوالی په دواړو ټولنوکې د پرتلې وړ دي او که نه؟

$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}}=\frac{150kg}{170cm}=?$$

فعالیت

10 تنه زده کوونکي له خپل ټولګي څخه په تصادفي ډول وټاکئ؟

- د زده کونکو ونه او وزن تشخیص کړئ.
- د زده کوونکو د ونې او وزن واریانس او معیاري انحراف محاسبه کړئ.
- آیا فکر کولای شئ چې د دې دواړو متحولینو د تیتوالی د میزان پرتله د واریانس او معیاري انحراف له لارې امکان لري؟ ولې؟
- که چېرې معیاري انحراف په اوسط ووېشل شي، نو په لاس راغلی مقدار یا عدد واحد به څه وي؟
- د بدلونونو یا تغییراتو ضریب یا نسبي تیتوالی داسې کارول کېږي، چې واریانس او معیاري انحراف هغه نه لري. یو له دغو کارونو څخه د دوو نا متجانسو ټولنو پرتله ده چې د یادولو وړ ده.

دبدلونونو یا تغییراتو ضریب چې په $C\cdot V$ ښودل کېږي عبارت له هغه خارج قسمت څخه دی، چې د معیاري انحراف پر اوسط باندې په لاس راځي اویو مطلق بې واحده عدد دی په لاس راځي یعني:

$$\text{دبدلونونو یا تغییراتو ضریب}=\frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}} \qquad \text{یا} \qquad C\cdot V=\frac{S}{\bar{x}}$$

که د تغیراتو ضریب په 100 کې ضرب شي، د تحول ضریب په لاس راځي:

$$C\cdot V=100\cdot\frac{S}{\bar{x}}$$

- د بدلون ضریب یوازې د مثبتو ډېټاوو لپاره تعریف شوي وي.
- که چېرې ټوله ډېټا سره برابره وي، د بدلون ضریب مساوي په صفر دی.
- که ټوله ډېټا په یو مثبت عدد کې ضرب شي، د بدلون ضریب تغیر نه کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که په ټوله ډېټا يو مثبت عدد ورزيات شي، د بدلون نوی ضريب چې په لاس راځي له لومړي ضريب څخه کوچنی دی.

لومړی مثال: د لاندې ډېټا د بدلون ضريب محاسبه کړئ:

$$\{1,3,5\}$$

حل: د فورمول له مخې ليکلای شو:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+3+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 (5-3)^2}{3} = \frac{4+4}{3} = 2.67$$

$$S = \sqrt{2.67}$$

$$C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2.67}}{3} = 0.543$$

دويم مثال: د تصويري ټلويزوني لامپونو يو توليدونکی دوه ډوله لامپونه A او B توليدوي، په داسې حال کې چې د A متوسط عمر مساوي په 1495 او د B متوسط عمر مساوي په 1875 ساعته دی او معياري انحرافونه يې په ترتيب سره 280 او 310 دي، توليدوي.

د کوم يوه لامپ تصوير له پاسنيو ډولونو څخه د نسبي تيتوالي يا دبدلون ضريب قيمت زيات دی؟

حل: د فورمول له مخې لرو چې:

$$C \cdot V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{280}{1495} \cdot 100 = 18.7\%$$ د A لامپونو د بدلون ضريب

$$C \cdot V_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} = \frac{310}{1875} \cdot 100 = 16.5\%$$ د B لامپونو د بدلون ضريب

څرنګه چې $C \cdot V_A > C \cdot V_B$ څخه دی، له دې کبله د A لامپ ډېر تيتوالی لري، ولې ټېنګښت يې کم دی.

پوښتنې

1. دلاندې ډېټا د بدلون يا تغيراتو ضريب حساب کړئ؟

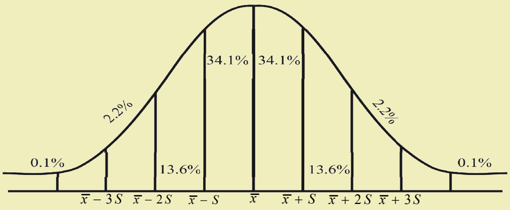
$$1 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$

2. که چېرې اوسط مساوي په 4 او معياري انحراف مساوي په 6 وي، د بدلون يا تغييراتو ضريب څو دي؟

3. ستاسو د ټولګي د زده‌کوونکو د سن دبدلون ضريب 10 کاله وروسته څومره تغيير يا بدلون کوي؟ کمېږي او که ډېرېږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په نورمال منحني کې تيتوالی

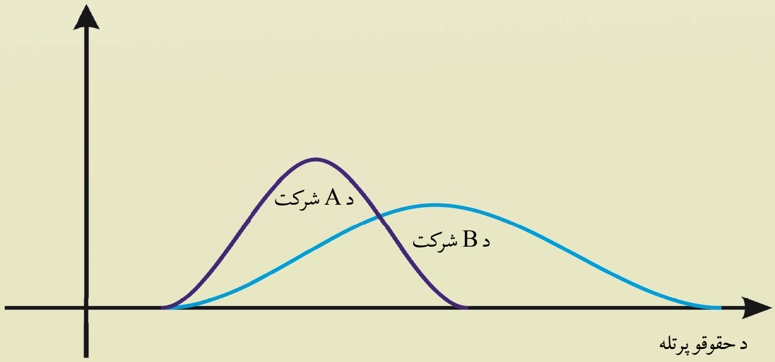


اوريدلي به مو وي چې وايي: يو ښه تصوير د زر کلميو ارزښت لري.

لاندې شکل ته وګورئ، د هغه په اړوند فکر او بحث وکړئ.

فعالیت

لاندې دوه ګرافونو د دوه A او B شرکتونو د حقوقو تأديه ښيي.



- کوم شرکت په اوسط ډول د حقوقو تاديه ډېره لري؟
- کوم شرکت د حقوقو د تأديې په ميزان کې خپلو کارمندانو ته لږه پراګنده ګي لري؟
- د دواړو شرکتونو د حقوقو تأديات سره پر تله کړئ.

لاندې ټکي د اوسط او معياري انحراف په نورمال منحني کې صدق کوي.

- که چېرې $\bar{x}$ اوسط او S معياري انحراف وي؛ نو 68% دپلټنې موارد په $(\bar{x}-S \ , \bar{x}+S)$ فاصله کې يعنې د اوسط په شا او خوا د معياري انحراف په فاصله کې ځای لري.
- 96% د پلټنې موارد په $(\bar{x}-2S \ , \bar{x}+2S)$ فاصله کې يعنې د اوسط په شاوخوا د دوه معياري انحرافونو په فاصله کې ځای لري .
- 99% د پلټنې موارد په $(\bar{x}-3S \ , \bar{x}+3S)$ فاصله کې يعنې د اوسط په دواړو خواوو درې معياري انحرافونو په فاصله کې قرار لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- په يوه نورمال منحني کې له $2S$ څخه ډېر انحراف غير عادي او له $3S$ څخه زيات انحراف زيات غير عادي شمېرل کېږي.

هغه ډېټا چې د $3S$ په اندازه له اوسط څخه فاصله يا واټن ولري، د تيتوالي يا تيتي ډېټا په نامه يادېږي.

مثال: که د يوې مؤسسې د کارکوونکو د معاش اوسط 12500 افغانۍ او معياري انحراف يې مساوي په 700 افغانۍ وي نو:

الف: له نورمال توزيع څخه د فيصدي په ګټه اخيستنې سره، د ورکړل شوي معاش توزيع تشريح کړئ؟

ب: آيا ويلاي شئ چې د 1400 افغانيو معادل معاش يو غير عادي معاش دی؟

د الف حل: لومړی د $\bar{x}\pm S$ ، $\bar{x}\pm 2S$ ، $\bar{x}\pm 3S$ قيمتونه په لاس راوړو.

فاصله د S له مخې	فاصله د افغانيو له مخې	فيصدي
$\bar{x}\pm S$	11800 – 13200	68%
$\bar{x}\pm 2S$	11100 – 13900	96%
$\bar{x}\pm 3S$	10400 – 14600	99.6 %

د ب حل: لومړی $\bar{x}-1400$ په لاس راوړئ چې مساوي په 1500 کېږي؛ يعنې 1400 افغانيو په اندازه 1500 افغانۍ له اوسط څخه ډېرې دي، که چېرې اوس دغه رقم په S ووېشو په لاس را ځي:

$$\frac{1500}{700}=2.1$$

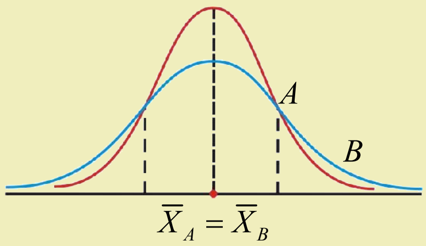
په دې ډول د 1400 افغانيو معاش غير عادي معاش دی، ځکه چې د 2S له اندازې څخه زيات او له $\bar{x}$ څخه پورته دی.

پوښتنه

که چېرې 62.28% فيصده مشاهدات د $(\bar{x}-S\,,\,\bar{x}+S)$ په فاصله کې پراته وي، آيا ويلای شئ، چې 95.45% او 99.73% مشاهدات په کومه فاصله کې قرار لري؟ انټروالونه له نورمالي منحني سره وښاياست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دنورمالي توزيع دډول معيارونه



د مرکزي تيتوالي دوه معيارونه يو زيات شمېر د يوې احصايوي مجموعې اطلاعاتو ته په لنډ ډول انعکاس ورکوي.

ددې لپاره چې د يوې احصايوي مجموعې اطلاعات، تناظر او د مثبت او منفي اشارو لرونکي وي؛ نو له کوم ډول منحني څخه بايدګټه واخلو.

فعاليت

- په يو ه نورماله توزيع کې وسط، اوسط او د موډ معيارونه څه وخت سره مساوي دي؟
- که توزيع د اوسط په اطراف کې متناظره نه وي، د وسط اوسط او موډ دکميتونو په اړه څه فکر کوئ؟
- که چېرې يوه توزيع متناظر ه وي؛ نو د اوسط او وسط تفاضل څو ده؟
- که چېرې دواړه توزيع ګانې يو شان اوسط او تناظر ولري؛ نو د ځګوالي او تيتوالي له اړخه به څه وضعيت ولري؟

دتوزيع د ډول معيارونه په دوو لاندې حالتونو کې څېړل کېږي:

1- **د خمېدلو skewness معيار**: هغه توزيع چې د اوسط په دواړو خواوو کې متناظره نه وي، خمېدل نومېږي، چې په دوو لاندې ضريبونو ښودل کېږي.

الف: د خمېدلو ضريب: دا هغه معيار دی چې د خمېدلو د ميزان د ټاکلو لپاره کارول کېږي، چې په لاندې ډول تعريف شوی دی:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum (x_i - \overline{x})^3}{S^3}$$

هغه عدد دی چې يوازې د پرتله کولو لپاره ترې کار اخېستل کېږي.

که $\alpha_3 = 0$ وي؛ د نو توزيع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي؛ توزيع مثبت خمېدل (possitve skewness)لري، يعنې ښي لوري ته خمېدګي لري.

اوکه $\alpha_3 < 0$ وي؛ توزيع منحني منفي خمېدل (negative skewness)لري يعنې کيڼ لورې ته خمېدګي لري.

که چېرې دکثرت جدول موجود وي، خمېدګي(عدم تناظر) يې د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{x})^3}{S^3}$ فورمول په واسطه پيدا کېږي. چې f_i فريکونسي ښيي.

ب: د پيرسون د خمېدلو ضريب: د پيرسون ضريب په لاندې ډول تعريف شوی دی.

$$S\,k_{(p)} = \frac{3(\overline{x} - med)}{S}$$

په متناظره توزيع کې د پيرسون د خميدلو ضريب مساوي په صفر دی. د پيرسون د خمېدلو د لو ضريب مثبت او منفي قيمتونه په ترتيب سره د توزيع د منحني مثبت يا منفي خمېدل ښيي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- **د پړسوب kurtosis معيار**: د پړسوب معيار ددې ښودونکی دی چې د توزيع يوه منحني څه وخت جګه او څه وخت ټيټوالي لري.

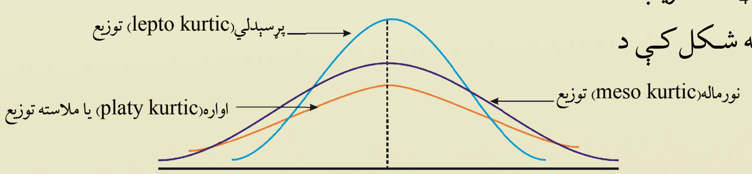
د پړسوب شاخص هغه معمولي معيار دی چې د يوې منحني د پړسېدلو د اندازه کولو لپاره په کار اچول کېږي او په لاندې ډول تعريف شوی دی:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^4}{S^4}$$

که د کثرت جدول په لاس کې ولرو، نو د پړسوب معيار فورمول $\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\overline{x})^4}{S^4}$ دی چې دلته f_i فريکونسي، x_i ډېټا او $\overline{x}$ د x_i اوسط او S معياري انحراف دی.

د پړسوب معيار د توزيع په ځای او پراګنده ګي پورې اړه نه لري. دغه معيار د پرتله کيدو لپاره په کار لوېږي.

مثال: مخامخ شکل په پام کې ونيسئ د α_4 ضريب د درې ډوله خمېدلو او پړسوب ډولونه چې په شکل کې د هغوي توزيع ښودل شوې ده ښيي.



حل: د نورمالې توزيع د پړسوب د درجې او ميزان د پرتله کېدو لپاره لکه: يو ستنډرډ په کار اچول کېږي.

د نورمالې توزيع لپاره د α_4 قيمت مساوي په 3 دی، په داسې حال کې چې که چېرې α_4 له 3 څخه زياته وي نظر نورمال منحني ته د منحني پړسوب زيات دی.

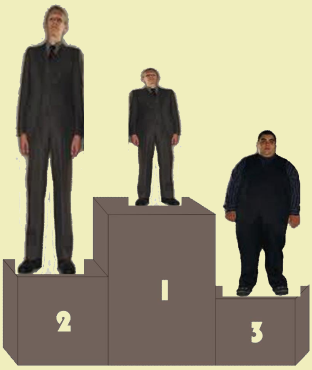
يا په بل عبارت يوه پړسيدلی توزيع چې څوکه لري او که چيرې α_4 لـه 3 لـږ وي، نظر نورمالې منحني تـه يې پړسوب کم دی چې د ملاستې يا اوارې توزيع په نامه يادېږي.

پوښتنې

د يوه ټولګي د زده‌کوونکو د احصايې د مضمون نمرې په لاند ې ډول ورکړ شوې دي، د پيرسون د پړسـوب ضـريب حساب کړئ.

نمرې	د زده‌کوونکو شمېر
40-50	4
50-60	6
60-70	10
70-80	4
80-90	4
90-100	2

(c) ketabton.com: The Digital Library



څو متحوله ټولنې

که چېرې د خپل يوه ټولګيوال د ونې په اندازه وپوهېږئ، کولای شئ هغه ته په پام د هغه د وزن په اندازه پوه او په دې اړوند فکر وکړئ.

فعاليت

آيا په تېرو درسونو کې مو د اشخاصو د ونې او وزن په اړوند يو ځای مطالعه او څېړنه کړې ده.

- فکر کولای شئ چې د يوه سړي د ونې او وزن مقدار د يو متحول په توګه کولای شو چې وړاندې يې کړو؟
- که وغواړو چې د يوه ټولګي د زده کوونکو د ونې او وزن مقدار يو ځای وڅېړو، نو دغه يوه ټولنه ده.
- دخپلو 10 تنو ټولګيوالو ونې او وزن اندازه کړئ.
- لاس ته راغلي معلومات د مرتبو جوړو په توګه وليکئ.
- هغه ټکی چې د مرتبو جوړو په مرسته په مستوي کې ټاکل کېږي، څه ډول شکل لري؟د يوه خط په واسطه يې وصل کړئ.
- آيا ويلای شئ هغه ټکي چې په مستوي کې وصل شي، کوم شکل لري؟

له پاسني فعاليت څخه پوهېږو چې د بحث موضوع، دوه ډوله متحولين دي. تر اوسه مو په تېرو درسونو کې داسې ټولنې پلټلي چې ټولنو په هغوی کې يوازې يو متحول درلوده اوس غواړو داسې ټولنې ولټوو چې دوه او يا له هغو څخه زيات متحولين ولري، دکار دآساني لپاره معمولاً د يو يا څو متحولينو تر منځ درياضيکي اړيکې په مرسته د قايمو مختصاتو په قايم سېستم کې جوړېږي.

په لومړي ګام کې په دې منظور د معادلو د جوړېدو لپاره لازم معلومات را ټول شي او په دويم ګام کې را ټول شوي معلومات د ارزښت لرونکو متحولينو په څېر په يوه مستوي کې راټول او په نښه کېږي، هغه شکل چې د دغو ټکو له وصلېدو څخه لاس ته راځي، مونږ ته يو ګراف را ښيي.

مثال: يو متخصص د غذايي رژيم يو ډول تأثير په يو شمېر موږکانو څېړلی دی. په دې ډول يې د هر موږک لومړنی وزن اندازه کړی او بيا يې د عمليې په تطبيق پيل کړي چې په پای کې يې بيا د موږکانو وزن اندازه کړی چې لاندې معلومات په لاس راغلی دي: $(1,8),(2,3),(1,7),(3,5),(2,4)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول لومړی مختصه د موږک لومړنی او دویمه مختصه د موږک وزن دغذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته ښيي.

- معلومات په يوه سطري او ستوني جدول کې ترتيب کړئ؟
- که چېرې ډېټا د یوې ټولنې په څېر وګڼل شي، نو دغه ټولنه به څو متحولين ولري؟

حل: لاندې سطري جدول په پام کې نيسو:

د موږکانو شمير	1	2	3	4	5
د موږکانو لومړنی وزن	1	2	1	3	2
د غذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته د موږکانو وزن	8	3	7	5	4

لاندې ستوني جدول په پام کې نيسو.

د موږکانو شمېر	د موږکانو لومړنی وزن	د غذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته د موږکانو وزن
1	1	8
2	2	3
3	1	7
4	3	5
5	2	4

پورتني ډېټا يوه دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

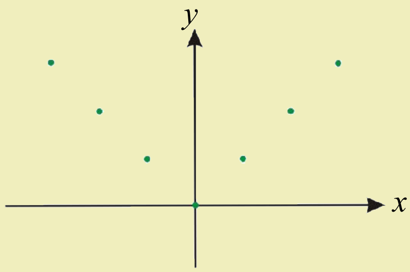
پوښتنه

د زراعتي محصولاتو دلوړوالي لپاره فکتورونه، لکه: اوبه، کود، د کود ډول، لمر او د خاورې ډول موثر ګڼل کېږي، آيا ويلی شئ چې په دغه ټولنه کې لږ تر لږه له څو ډوله متحولينو سره سروکار لرئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تیتوالي ګراف

Scatter diagram



مخامخ شکل ته په پام ، هغه ټکي چې په مستوي کې په نښه شوي دي، د مرتبو جوړو په ډول ترتیب او ریاضیکي معادله يي وليکئ:

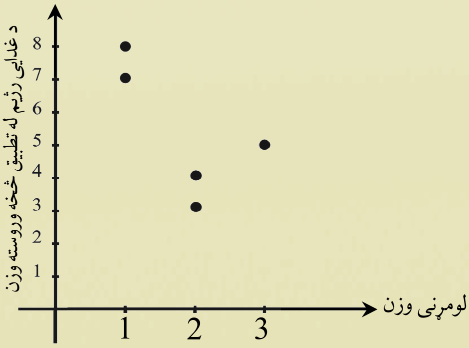
فعالیت

لاندې مرتبې جوړې ورکړل شوي دي:

(1,2) (2,3) (3,4) (4,5)

- د ورکړل شوو مرتبو جوړو ګراف په دقیق ډول رسم کړئ.
- مشخص شوي ټکي سره ونښلوئ او ریاضیکي معادله يې پیدا کړئ.
- په لاندې ډول د دغو ډېټا د هر یوه، دویمه مختصه په لاندې ډول بدلوو.
- د هر ټکي لپاره یوه سکه پورته وغورځوئ، که شېر راغله په y یو واحد اضافه او که خط راغله له y څخه یو واحد کم کړئ، نو د لاس ته راغلو ټکو یا تغییراتو ګراف رسم کړئ.
- دغه عملیه څو ځلې تکرار، خو دا ځل کله چې قیمتونه زيات یا کموي، بدلون مه ورکوئ په x او y پورې تړلي قیمتونه څنګه تغیر کوي؟

مثال: لاندې مرتبې جوړې چې پر موړکانو دغذايي رژیم تأثیراتو څخه مو په لاس راوړي دي، په پام کې ونیسئ: (2,4) (3,5) (1,7) (2,3) (1,8)

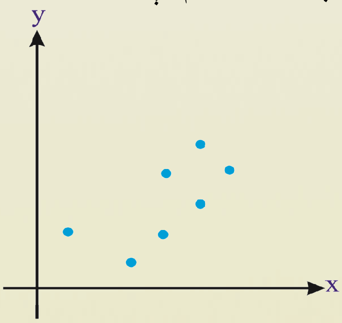


دغه مرتبې جوړې د مخامخ شکل په څېر په یوه مستوي کې ښودل شوي دي.

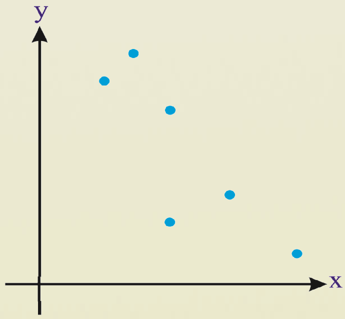
پورتنی ګراف چې د موړکانو وزن راښیي، د هغو پاشلو ټکو مجموعه ده چې په مستوي کې ده چې د اړوندې ډېټا په اندازه کېدلو په یوه دوه متحوله ټولنه کې د مختصاتو په سیستم کې لاسته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

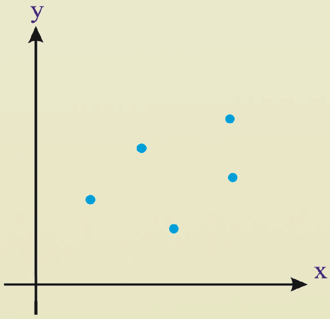
مثلاً: لاندې ګرافونه په پام کې ونيسئ:



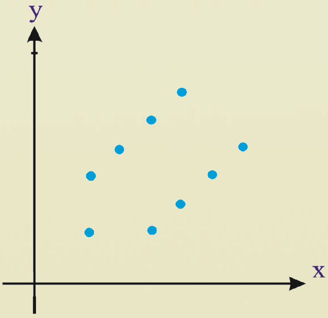
(الف)



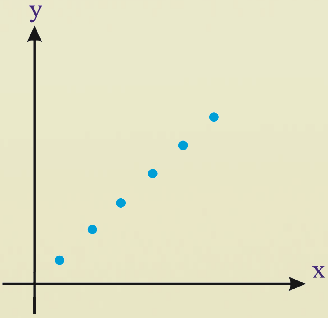
(ب)



(ج)



(د)

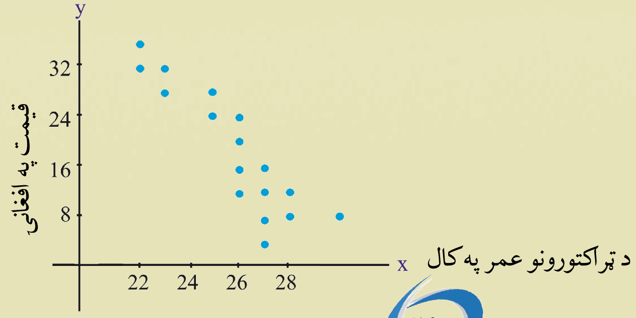


(هـ)

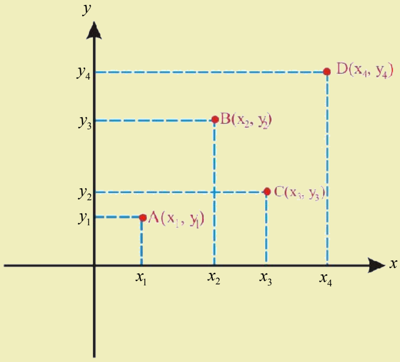
د(الف) په ګراف کې ليدل کېږي چې که چيرې د x قيمتونه زيات شي؛ نو د y قيمتونه هم زياتېږي، خو د (ب) په ګراف کې بر عکس د x د قيمتونو په زياتوالي د y قيمتونه کمېږي.
د(ج) په ګراف کې د x په قيمت کې تغييرات هيڅ ډول اطلاع د y دبدلونونوپه اړوند نه ورکوي ځکه د x قيمت په درلودلو سره په ډېر دقت سره په دې ګراف کې د(الف) او (ب) ګرافونو پـه پرتلـه زياتـه ده، د (هـ)پـه ګراف کې د y د قيمت حدس په ډېرې پاملرنې صورت مومي.

پوښتنې

لاندې ګراف ديو شمېر ټراکترونو عمر راښيي، آيا ددې دوو متحولينو تر منځ کومه اړيکـه يـا ارتبـاط وينـې؟ توضيح يې کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

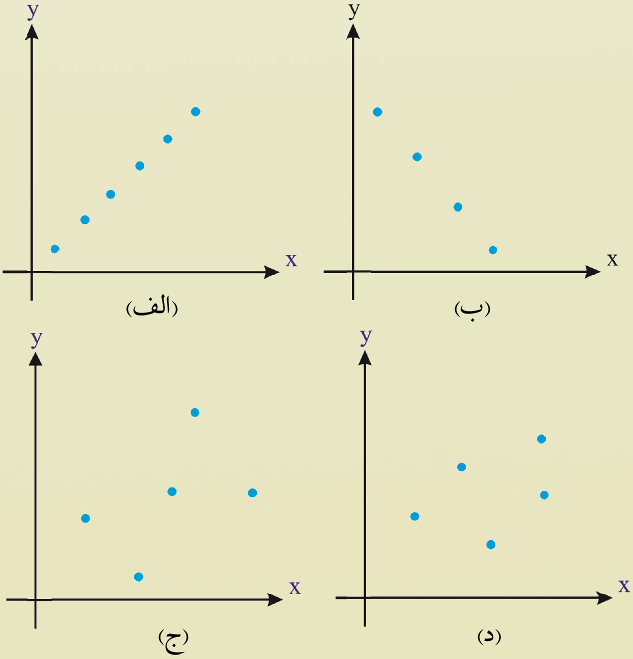


پیوستون او دپیوستون ضریب

د C, B,A او D ټکي لکه: مخامخ شکل راکړل شوي دي، آیا شوني ده چې ټکي په یوه مستقیمه کرښه سره وصل شي، ولې؟

فعالیت

لاندې شکلونه په پام کې ونیسئ:



- د (الف) او (ب) په شکلونو کې کولای شو چې د y متحول د هغې کرښې په مرسته چې له دغو ټکو تېرېږي وټاکو.
- د (الف) او (ب) په شکلونو کې د x او y تر مینځ څه ډول اړیکه ده؟
- آیا کولای شو چې د(ج) او(د) په شکلونو کې داسې یوه کرښه وټاکو چې ټول ټکي پرې پراته وي؟
- د(ج) او (د) په شکلونو کې د x او y ترمنځ اړیکې په څه ډول دي؟
- - د (الف) او (ب) د شکلونو اړیکې د(ج) او(د) د شکلونو له اړیکو سره پرتله او ووایئ چې د y د متحول خطا د x د متحول په مرسته په کوم شکل کې ډېره ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعالیت څخه داسې پوهېږو چې که چېرې ټکي په مستوي کې یوې مستقیمې کرښې ته نږدې پراته وي؛ نو په دې صورت کې د y د متحول خطا نظر x ته لږ ده او برعکس هر څومره چې ټکي له کرښې لرې پراته وي، نو په هم هغه اندازه د y خطا ډېره ده.

له دې کبله داسې معیار غواړو در ویېژنو چې د ټکو پیوستون مونږ ته اندازه کړي.

هغه فورمول چې د پیوستون د محاسبې لپاره ورکړ شوی ده، د پیوستون د ضریب په نامه یاد او په r سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$r=\frac{\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ د ضرب د حاصل مجموعه}}{n}-(\text{د } y \text{ ګانو اوسط})(\text{د } x \text{ ونو اوسط})}{(\text{د } y \text{ ګانو معیاري انحراف})(\text{د } x \text{ ونو معیاري انحراف})}=\frac{\frac{\sum xy}{n}-\bar{x}\,\bar{y}}{S_x\,S_y}$$

مثال: دموږکانو د لومړني وزن او غذایي رژیم څخه وروسته ډېټا لکه: لاندې جدول په پام کې ونیسئ.

د x او y دضرب حاصل	له عملیې څخه وروسته وزن y	لومړنی وزن X	د موږکانو شمېره
8	8	1	1
6	3	2	2
7	7	1	3
15	5	3	4
8	4	2	5
$\sum 44$	$\sum 27$	$\sum 9$	

دلومړني او وروستني غذایي رژیم د وزنونو تر منځ د پیوستون ضریب محاسبه کړئ.

حل: که چیرې x لومړني وزنونه او y د غذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته وزنونه او $n=5$ د موږکانو شمېر په پام کې ونیسو، نو د x او y اوسطونه عبارت دي له:

$$\bar{x}=\frac{9}{5}=1.8 \qquad , \qquad \bar{y}=\frac{27}{5}=5.4$$

$$S_x^2=\text{د } x \text{ ونو واریانس}=\frac{(1-1.8)^2+(2-1.8)^2+(1-1.8)^2+(3-1.8)^2+(2-1.8)^2}{5}$$

$$=\frac{0.64+0.04+0.64+1.44+0.04}{5}=\frac{2.8}{5}=0.56$$

$$S_y^2=\text{د } y \text{ ګانو واریانس}=\frac{(8-5.4)^2+(3-5.4)^2+(7-5.4)^2+(5-5.4)^2+(4-5.4)^2}{5}$$

$$=\frac{6.76+5.76+2.56+0.16+1.96}{5}=\frac{17.2}{5}=3.44$$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{\text{د ډېټا شمېر}}=\frac{\sum x\cdot\sum y}{n}=\frac{(1\cdot 8)+(2\cdot 3)+(1\cdot 7)+(3\cdot 5)+(2\cdot 4)}{5}=\frac{44}{5}=8.8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول په پایله کې د پیوستون ضریب په لاندې ډول لاس ته را ځي:

$$r = \text{د پیوستون ضریب} = \frac{8.8-(1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\cdot\sqrt{3.44}} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

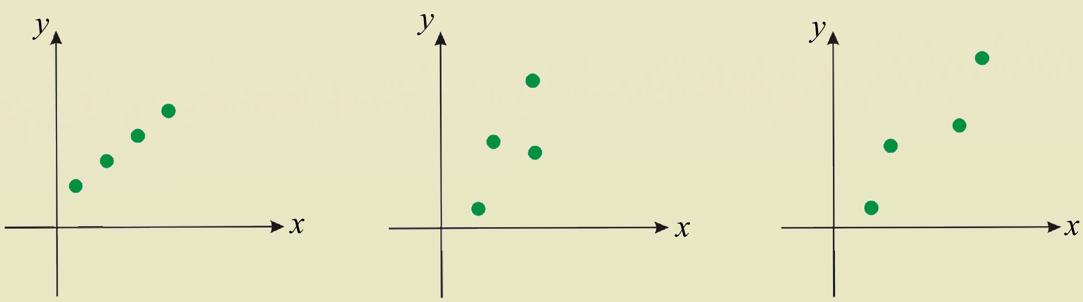
اوس داسې سوال را منځ ته کېږي چې د پیوستون د -0.67 ضریب د x او y ترمنځ د ډېر پیوستون ښودونکې ده او که نه؟ د دې سوال د ځواب د پیدا کېدو لپاره د پیوستون ضریب له لاندې مثالونو څخه په څو مرحلو کې په لاس راوړو:

مثال: لاندې جدولونه په پام کې و نیسئ:

x	y
1	2.5
2	5.5
3	6.5
4	8.5

x	y
1	2
2	6
3	6
4	10

x	y
1	3
2	5
3	7
4	9



(الف) (ب) (ج)

د (الف) په شکل کې ټکي ټول په یوه کرښه پراته دي، نو په دې ډول د ټکو ترمنځ د پیوستون ضریب ډېر لوړ قیمت لري.

د (ب) په شکل کې ټکي د یوې مستقیمې کرښې په شاخوا پراته دي، نو له دې کبله نظر د(الف) حالت ته د ټکو تر منځ د پیوستون ضریب لږ دی د (ج) په شکل کې څرنګه چې ټکي د مستقیمې کرښې د(ب) د حالت په اندازه نږدې پراته دي، نو باید ضریب یې په دې حالت کې د(ب) له حالته زیات، خو د(الف) له حالته لږ دی، د دې خبرې د پخلې لپاره موضوع په لاندې ډول څېړو، د پیوستون ضریب د(الف) حالت لپاره:

$$\bar{x} = \frac{10}{4} = 2.5 \qquad \bar{y} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\text{د } x \text{ ونو واریانس} = \frac{(-1.5)^2+(-0.5)^2+(0.5)^2+(1.5)^2}{4} = \frac{2.25+0.25+0.25+2.25}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$\text{د } y \text{ ګانو واریانس} = \frac{(-3)^2+(-1)^2+1^2+3^2}{4} = \frac{9+1+1+9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو دضرب حاصل} = (1\cdot3)+(2\cdot5)+(3\cdot7)+(9\cdot4) = 70$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r = \text{دپیوستون ضریب} = \frac{\frac{70}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{5}} = \frac{17.5-15}{\sqrt{6.25}} = \frac{2.5}{2.5} = 1$$

د پیوستون ضریب د (ب) په حالت کې:

$\bar{x} = 2.5$, $\bar{y} = \frac{24}{4} = 6$

د x ونو واریانس $= 1.25$ ، د y گانو واریانس $= \frac{16+0+0+16}{4} = 8$

د x او y گانو د ضرب د حاصل مجموعه $= 2+12+18+40 = 72$

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{\frac{72}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{8}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.9486$$

د (ج) په حالت کې د پیوستون ضریب: $\bar{x} = 2.5$, $\bar{y} = \frac{23}{4} = 5.75$

د x ونو واریانس $= 1.25$ ، د y گانو واریانس $= 4.6875$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ گانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{4} = 16.75$$

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{16.75-(2.5)(5.75)}{\sqrt{1.25}\sqrt{4.6875}} = \frac{2.375}{\sqrt{5.858}} = 0.9812$$

په یاد ولرئ چې په هغو شرایطو کې چې y لږ خطا و لري(د x او y مقدارونه خط ته نږدې پراته دي) که چیرې د پیوستون ضریبونه 1او -1 وي، x او y پر یوه مستقیمه کرښه پراته دي. غیر له هغه څخه د پیوستون ضریب د دغو دوو مقدارونو تر منځ پروت دی.

پوښتنې

1- لاندې ډېټا راکړل شوې ده.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

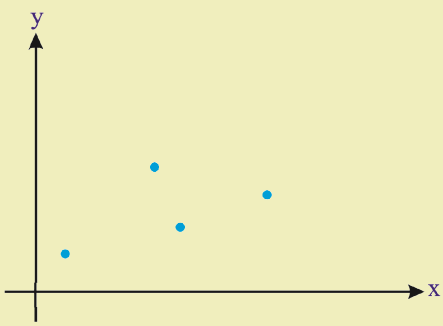
د ډېټا دپیوستون ضریب محاسبه کړئ.

2- د خپلو ټولگیوالو د ونې او وزن تر منځ د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

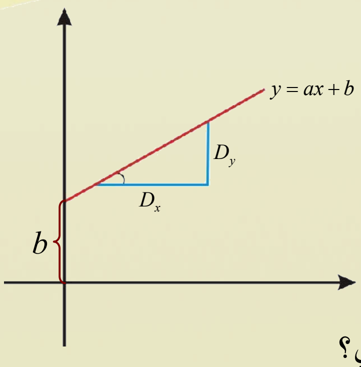
د خطي ميلان معادله

The linear regression equation



فرض کړئ چې يو پاشلی ګراف په لاندې ډول راکړل شوی وي. يوه مستقيمه کرښه چې معادله يې د $y = ax + b$ په ډول ورکړل شوي وي، پيدا کړئ چې ګراف يې ټولو ټکو ته نږدې فاصله يا واټن ولري.

فعاليت

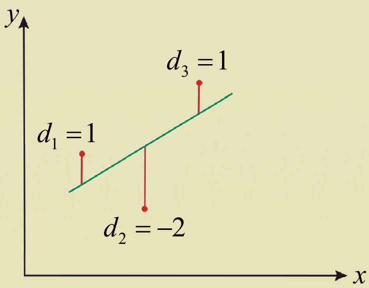


په مخامخ شکل کې يوه خطي تابع(لومړی درجه) چې ګراف يې مستقيمه کرښه ده، رسم شوې ده.

- د $y = ax + b$ خطي تابع کې a او b څه ډول مقدارونه دي؟
- د $y = ax + b$ په تابع کې د x او y متحولين په کوم نوم ياديږي؟
- د $y = ax + b$ مستقيمې کرښې ميل پيدا کړئ؟
- د $y = ax + b$ په معادله کې د y بدلون ، د يو واحد په اندازه په x کې و ټاکئ؟
- د $y = ax + b$ معادله کې که چېرې $a > 0$ وي؛ د تابع ګراف متزايد او که متناقص دی؟

همدغه راز که چيرې $a < 0$ سره وي، د تابع ګراف څه شکل لري؟

او که چېرې $a = 0$ وي، د تابع دګراف شکل و ټاکئ؟

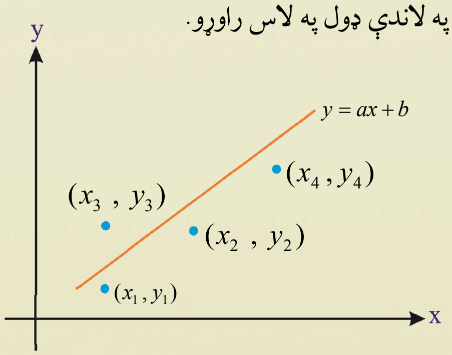


مخامخ شکل په پام کې ونيسئ:

د فاصلو مجموعه $d_1 + d_2 + d_3$ او $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ محاسبه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعالیت څخه پوهېږو چې د $y = ax + b$ معادله یوه خطي تابع ده چې د a ضریب ددې معادلې میل جوړ وي او کله چې a مثبت وي، مستقیمه کرښه متزاید او که چېرې a منفي وي، نو کرښه متناقصه ده.
پاملرنه وکړئ چې که د (x, y) جوړه د $y = ax + b$ په معادله کې صدق وکړي، په دې صورت کې نوموړي ټکي د مستقیمې کرښې په ګراف پراته دي.
هر څومره چې د پاشلي ټکی مستقیمې کرښې ته نژدې وي، نو د پیوستون ضریب به -1 او $+1$ ته ورنژدې وي، که چېرې د یوې مستقیمې کرښې معادله ولرو او پوه شو چې د پیوستون ضریب مناسب او کولای شو د y د متحول په مرسته متحول وټاکو او که چیرې مستقیمه کرښه ونلرو، کولای شو چې دغه کرښه په داسې یوه تګلاره چې د لږکیو یعني اصغري مېتود جوړوني[1] مربعو په نامه یادېږي، په لاندې ډول په لاس راوړو.
فرض کوو چې د پاشلو ټکو ګراف(متفرقه دیاګرام یا Scatrter diagram) په دې ډول راکړل شوی وي.

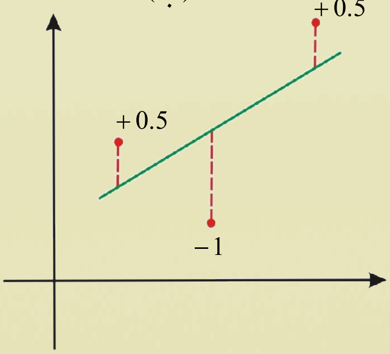


او غواړو داسې یوه کرښه چې معادله یې $y = ax + b$ وي، د ټکو له منځ څخه داسې تیره کړو چې ټولو ټکو ته نږدې وي. په دې تګلاره کې باید په مناسب ډول د کرښې معادله داسې جوړه شي چې د عمودي انحرافونو د دویم توان مجموع له مستقیمې کرښې څخه لږ تر لږه اصغري وي، مخ کې له فورمول څخه لاندې مثال په پام کې نیسو:

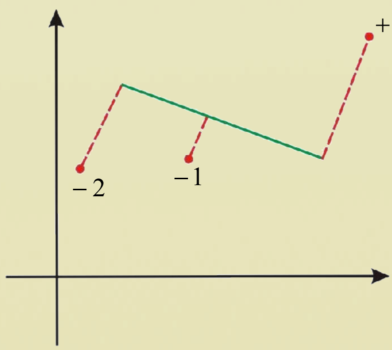
x	1	5	9
y	6	5	7

لاندې شکلونه د دغې ډېټا لپاره رسموو او د کرښو خطاوې له مشاهدو څخه تشخیصوو.

(ب)



(الف)



---

[1] - the method of least square

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښکاره ده چې رسم شوې کرښه د (ب) په حالت کې په مرتب ډول د(الف) له حالته څخه ښه ده.

په دواړو حالتونو کې د کرښو د خطاګانو الجبري جمع صفر ده.

د (الف) حالت: $0 = 3 + (-1) + (-2) =$ د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

د (ب) حالت: $0 = 0.5 + (-1) + (0.5) =$ د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

څرنګه چې په دواړو حالتونو کې د جمعې حاصل مساوي په صفر ده، نو له دې کبله نشو ويلای چې کومه کرښه يوه مناسبه کرښه ده. ددې لپاره چې مثبت او منفي خطاوې يو له بله د منځه يو نسي، نو هره کرښه وروسته له مربع کولو جمع کوو:

$14 = (3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 =$ د خطاګانو د دويم توان مجموع

$1.5 = (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 =$ د خطاګانو ددويم توان مجموع

له دې کبله د کرښې د خطاګانو د دويم توان مجموع څرنګه چې د(ب) په حالت کې نظر له(الف) حالت څخه يې قيمت لږ دی، نو ويلی شوچې:

مناسبه کرښه هغه ده چې د خطاګانو د مربعاتو مجموع يې له نورو کرښو کمه وي، دغه راز کرښو ته د ريګريشن کرښې وايي.

که چېرې د ريګريشن کرښې د مقدار او هغو مشاهداتو تر منځ د مقدارونو توپيرچې منځ ته راځي په $\bar{y}$ وښيو، په دې صورت کې د دويمو توانونو د مجموع د لا کوچني والي په خاطر په لاندې ډول عمل کوو:

$$\text{د خطاګانو ددويمو توانونو مجموع} = \sum (y-\bar{y})^2 = \sum [y-(ax+b)]^2$$

$$= \sum (y-b-ax)^2$$

$$= (ax_1+b-y_1)^2 + (ax_2+b-y_2)^2 + \ldots..$$

په دې حالت کې x او y ثابت، a او b متحولين دي.

پرته له دې مونږ هغه تګلاره چې د a او b د محاسبې او په لاس راوړلو لپاره په کار لويدلې، وړننو څو، يوازې د هغوی د محاسبې خطا په پام کې نيسو:

$$a = r\frac{sy}{sx}b = \text{د پيوستون ضريب} \times \frac{\text{د } y \text{ معياري انحراف}}{\text{د } x \text{ معياري انحراف}}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \qquad , \qquad b = \frac{\sum x\,y - n\,\bar{x}\,y}{\sum x^2 - n\,\bar{x}^2} = \frac{\sum x\,y}{\sum x^2}$$

د a او b د محاسبې دغه لاره چې د لږکيو مربعاتو تګلارې په نامه يادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پایله: د ریگریشن کرښه هغه وسیله ده چې د یو متحول د مقدار د وړاند وینې لپاره د بل متحول په حسابولو کې چې ورسره تړلې دی، د استفادې وړ گرځي.

مثال:لاندې ډېټا په پام کې ونیسئ.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د y د ریگریشن کرښه نظر x ته په لاس راوړئ.

حل: څرنگه چې:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$S_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2 \quad \Rightarrow \quad S_x = \sqrt{2}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} \qquad \Rightarrow \quad S_y = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum x\, y}{n} = \frac{4+6+6+4+0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - \bar{x}\cdot\bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{4-3\cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

له دې کبله:

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - b\cdot 3$$

$$a = r\frac{S_y}{S_x} = -1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - (-1)(3) = 2 + 3 = 5$$

په دې ډول د ریگریشن معادله عبارت ده له: $y = ax + b = -x + 5$

پوښتنه

که چېرې $y = 2x + 3$ د y د ریگریشن معادله نظر x ته او د x اوسط مساوي په 2 راکړل شوي وي، د y اوسط به څومره وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اتم څپرکي مهم ټکي

د بدلون ضریب: د بدلون ضریب د معیاري انحراف له اوسط څخه عبارت دی چې مطلق بې واحده عدد دی لکه:

$$\text{د بدلون ضریب} = \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}} \quad \text{یا} \quad C\cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

دغه ضریب ډېر ځلې د فیصدي په ډول ښودل کېږي چې د تحول د ضریب په نامه یادېږي.

$$\text{د تحول ضریب} \quad C\cdot V = 100\cdot\frac{S}{\bar{x}}$$

د بدلون ضریب د مثبتې ډېټا لپاره تعریفېږي، په یاد یې ولرئ که چېرې ډېټا سره مساوي وي، نو د ټیټوالي ټول معیارونه مساوي له صفر سره دي.

په نورماله منحني کې ټيټوالی: نورماله منحني د احصایوي مجموعې یوه داسې توصیفي وسیله ده چې په نورماله منحني کې ډېټا په نورماله توزیع او کثرت منحني کې متناظر پراته دي؛ نو واریانس عمده نقش لري، په حقیقت کې د دوو پارامترو مشخص کیدل او معیاري انحراف په نورماله توزیع کې په عمومي ډول مشخص او د هر ډول شاخص د محاسبې زمینه برابر وي.

د نورمالي توزيع د شکل شاخصونه: د اوسط او معیاري انحراف په مرسته کولای شو د لید ځرنګوالی د کږېدواو پرسېدو(اوج) په ډول په ښه توګه څرګند او وړاندې کړو.

د کږېدلو معیار د کږېدو او پیوستون د ضریبونو په مرسته چې د اندازه کولو او اندازو د پرتله کولو لپاره پکارېږي په لاندې ډول لیکل کېږي:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^3}{S^3} \quad , \quad \alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum f_i(x_i-\bar{x})^3}{S^3} \quad , \quad SK_{(p)} = \frac{3(\bar{x}-med)}{S}$$

د پرسېدو(جګېدلو) معیار د پرسېدو د ضریب α_4 په مرسته اندازه او پرتله کېږي.

$$\alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{S^4} \quad , \quad \alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\bar{x})^4}{S^4}$$

څومتحوله ټولنې: په احصایوي څېړنو کې تر ټولو لویه موخه وړاندوینه او د یو متحول ټاکل د بل متحول له مخې دي. کله چې د دوو شیانو ترمنځ اړیکې څېړل زموږ مقصد وي، په حقیقت کې موخه یوه دوه متحوله ټولنه ده لکه: د یو غاز د حجم او فشار ترمنځ اړیکه د صحت او حرکت د میزان ترمنځ اړیکه، د کرنې او د حاصل د مقدار ترمنځ اړیکه او یا هم د یوې دایرې د شعاع او مساحت ترمنځ اړیکه چې دغه راز ټولې اړیکې دوه متحوله ټولنې بیانوي. د آسانتیا لپاره معمولاً د دوه یا څو متحولینو ترمنځ اړیکه د ریاضي معادلو په مرسته وړاندې کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تيتوالي ګراف: د تيتوالي ګراف د رسمولو لپاره ډېټا د مرتبو جوړو په شکل په يوه مستوي کې د قايمو مختصاتو په سېستم کې ښودل کېږي. کيداى شي د ټکو او تيتوالي ګراف په مرسته درې ډوله اطلاعات زموږ په اختيار کې راکړي.

الف: آيا داسې نمونه چې د څېړنو ترمنځ اړيکه ښيي، شته او که نه؟

ب: د يو ډول اړيکې د شتون په صورت کې دغه اړيکه خطي ده او که نه؟

ج: که چېرې اړيکه خطي وي، نو څه ډول اړيکه ده؟

پيوستون او د پيوستون ضريب: پيوستون د متحولينو ترمنځ د اړيکو د مېندلو درجه ده، کله کله دواړه متحولين په يوه لوري بدلون کوي يعنې x او y دواړه په يوه کرښه لوى او ياهم کوچنی شي، چې پيوستون يې مستقيمه کرښه ده. که چېرې د دوو متحولينو اندازه يو د بل پر خلاف بدلون وکړي يعنې که چېرې x لوى شي y کوچنی کېږي. او يا هم برعکس صورت نيسي.

د پېژندنې ډېر ښه معيار د پيوستون شتون او نه شتون دى او حتا د خطي پيوستون ډول، جهت او ميزان د پيوستون ضريب دى، چې د لاندې فورمول په واسطه ښوول کېږي:

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - (\overline{x}\,\overline{y})}{S_x \cdot S_y}$$

په پورتنيو اړيکو کې $\sum xy$ د x ونو او y ګانو د ضرب د حاصل مجموع، $\overline{x}$ د x ونو اوسط او $\overline{y}$ د y ګانو اوسط دى، همداراز S_x د x ونو معياري انحراف او S_y د y ګانو معياري انحراف دى.

د ريګريشن کرښه: ريګريشن(تخميني) د تابع د يوه متحول له قيمت لاسته راوړل او سنجش څخه عبارت دى، چې د يو يا څو مستقلو متحولينو له ارزښت څخه په لاس راځي.

هغه معادله چې د متحولينو ترمنځ اړيکې افاده کوي، د ريګرېشن معادلې په نامه يادېږي.

کولاى شو دغه معادله د ډېرو لږو مربعاتو د محاسبې په طريقه حساب او همدارنګه د a او b ضريبونه د دغې طريقې په مرسته په لاندې ډول په لاس راوړو: $a = \overline{y} - b\overline{x}$, $b = r\frac{S_y}{S_x}$

چې S_y د y معياري انحراف او S_x د x معياري انحراف دى، په داسې حال کې چې r د پيوستون ضريب، $\overline{x}$ د x ونو اوسط او $\overline{y}$ د y ګانو اوسط دى.

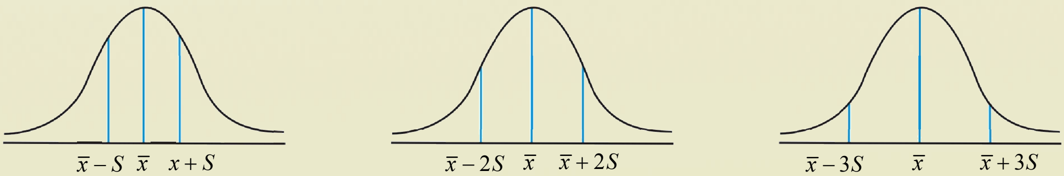
(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1-که چېرې په يوه ټولنه کې چې اوسط يې $\bar{x} = 50$ او واريانس يې $S^2 = 64$ وي، د بدلون ضريب y چې له $y = 2x + 10$ رابطې سره سم بدلون مومي څو دی؟

2-که چېرې د هر زده کوونکی په نمروکې %20 نمبرې ورزياتې شي، نو د نمبرو د بدلون په ضريب څه اغيزه کوي؟

3- د هغو ټولنو فيصدي چې په لاندې درکړل شوو منحني ګانو کې پرته ده، وليکئ؟



4- لاندې اړيکو ته په پاملرنې سره وواياست چې کومه يوه له دغو اړيکو څخه يو متحوله، دوه متحوله او درې متحوله اړيکې دي.

الف: ستاسو د ټولګيوالو د ونو اندازه؟

ب: د يو شي د عمومي مصرف او جنس ترمنځ اړيکه؟

ج: د يوې استوانې د حجم، جګوالی او د قاعدې د مساحت تر منځ اړيکې؟

5- د يو ټولګي د مصرف شوو ساعتونو د شمېر او د زدکوونکو د نمبرو تر منځ چې د %20 له مخې اخيستل شوی دی، د مرتبو جوړو په شکل په لاندې ډول دی:

(2,10) , (3,10) , (3,14) , (4,10) , (4,14)
(5,14) , (5,16) , (6,12) , (6,16) , (6,18)
(7,14) , (7,18) , (7,20) , (8,16) , (8,18)

د زده کونکو د مصرف شوو ساعتونو او نمبرو تر منځ د اړيکو له مخې ګراف رسم او خپلې پايلې وڅېړئ؟

6- مخامخ ډېټا په پام کې ونيسئ:

x	1	1	2	3
y	1	5	4	2

په ورکړ شوې ډېټا کې د پيوستون ضريب حساب کړئ؟

که چېرې د پيوستون ضريب صفر ته نژدې وي، نو خطا ډېره، که لږه ده؟

که چېرې د پيوستون ضريب د $+1$ او -1 عدد ته نژدې وي، نو د y د خطا په اړوند څه وايئ؟

د سروې له مخې چې د يوه ښوونځي په دوه A او B ټولګيو کې شوې ده، لاندې عددونه د کيلوګرام په حساب د زده کوونکو د وزن لپاره راټول شوي دي:

A:	65	63	67	64	62	70	66	68	67	78	69	71
B:	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنيو اعدادو په پام کې نيولو سره:

الف: د معلومات د تيتوالي گراف رسم کړئ؟

ب: د اړوندې مستقيمې کرښې معادله په لاس راوړئ a او b وټاکئ؟

ج: اړونده مستقيمه کرښه نظر د ريگريشن معادلې ته رسم کړئ؟

10- که چيرې x او y سره بشپړ پيوستون او معکوس ولري، يعني $S_x = S_y$ ، نو د y نسبت x ته د ريگريشن خط کوم دی؟

1) $y = -\frac{1}{2}x + b$ 2) $y = \frac{1}{2}x + b$ 3) $y = x + b$ 4) $y = -x + b$

11- د 20 تنو زده کوونکو د رياضي او فزيک د مضمون 20% د آزموينې پايلې چې په لاندې ډول ورکړ شوي، رسم کړئ؟

زده‌کوونکي	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
د رياضي نمبرې	18	8	12	18	16	6	10	6	16	10	12
د فزيک نمبرې	16	10	8	18	14	10	10	6	10	14	10

زده‌کوونکي	12	13	14	15	16	17	18	19	20
د رياضي نمبرې	12	10	16	18	12	6	14	14	12
د فزيک نمبرې	6	12	16	12	12	8	12	14	16

ـ د ريگريشن د کرښې معادله په لاس راوړئ؟

ـ آيا د دوو آزموينو د پايلو تر منځ اړيکې شتون لري؟

12- پر چنگښنو د خوراک د مالگې د 5 او يو فيصده محلول اغيزې د يون پلازما پر ميزان د هغوی په بدن کې په لاندې جدول کې ثبت شوي دي؟

د مالگې په محلول کې د پاتې کېدو وخت	50	40	30	20	10	5	0
د يون پلازما ميزان(mm)	136	132	126	122	118	110	90

ـ په پورتنی جدول کې متحولين وڅېړئ؟

ـ په پورتنيو متحولينو کې کوم يو خپلواک او کوم يو ناخپلواک متحول دی؟

ـ يو داسې گراف رسم کړئ چې د دواړو متحولينو ترمنځ اړيکه وښيي؟

ـ د دې گراف په رسم کې خپلواک متحول په افقي محور وښاياست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم څپرکی

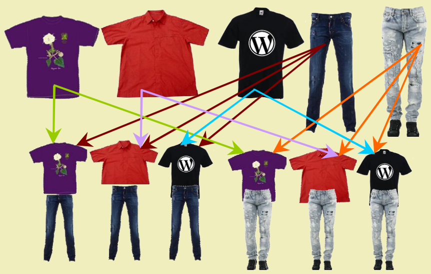
احتمالات

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرموټېشن یا ترتیب

Permutation



که چېرې درې بېلابېل کمیسونه او دوه پطلونونه ولرو، پـه څـو ډولـه کـولای شـو هغـه سـره جـوړه جـوړه واغوندو؟

فعالیت

خپل درې تنه ملګري وآزمویئ چې په څو ډوله کولای شي په یو کتار کې و درېږي؟

- له درې یو رقمي اختیاري عددونو څخه څو درې رقمي عددونه کولای شو جوړ کړو.
- له پورتنیو عددونو څخه چې پورته مو د درې رقمي عددونو د جوړولو لپاره ټاکلي دي څـو درې رقمـي عدونه جوړولای شو، په دې شرط چې په عددکې رقم تکرار نه وي.
- د پورتنی فعالیت د اول، دویم او دریم پاراګراف پایلې سره پرتله او ووایي چې څه اړیکې سره لري؟

له پورتنې فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله

د n شیانو د ترتیب د شمېر ډولونه چې سره خوا په خوا راشي عبارت دي له:

- که تکرار مجاز نه وي مساوي په $n\cdot(n-1)\ \dots\ 2\cdot 1$ سره دي.
- که تکرار مجاز وي مساوي په $\underbrace{n\cdot n\cdot\ \dots\ \cdot n}_{n\ \text{ځلې}} = n^n$ سره دي.

تعریف: د یوه طبیعي عـدد لپاره د $(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \dots\ \cdot n)$ حاصـل ضـرب پـه لنډ ډول پـه $n!$ (n – فکتوریـل) ښودل کېږي. او د تعریف له مخې $1!=1, 0!=1$ سره دي.

2: د n عنصرونو د ترتیب ډولونه چې د n غړو د پرموټېشن (Permutation) په نامـه هـم یـادېږي په P_n سره ښودل کېږي. که چېرې تکرار په ترتیب کې ناشونی او یا مجازنه وي.

نو د پاسني تعریف په پام کې نېولو سره $P_n = n!$ سره کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چېرې په ترتيب کې تکرار شونی او يا مجاز وي، نو په دې صورت کې د ترتيب ډولونه او يا پرموټېشنونه په مجاز تکرار کې عبارت دي له. $P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!} \quad , \quad (k \le n)$ او دارنګه معنا ورکوي چې يو عنصر په n ترتيب کې k ځلې تکرار شوي دي.

لومړی مثال: (1) : د لاندې عددونو قيمت پيدا کړئ.

$$3!, 8!, 5!$$

(2) د هر يوه طبيعي عدد لپاره وښيئ چې $n! = n(n-1)!$ سره ده ؟

حل (i):د تعريف له مخې لرو چې:

$$3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$$
$$5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$$
$$8! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 40320$$

(ii) پوهېږو چې: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \;\ldots\; \cdot n = (1\cdot 2\cdot 3\cdot \;\ldots\; \cdot n-1)(n) = n(n-1)!$

دويم مثال: د آزموينې لپاره په يوسالون کې 16 زده کوونکي له بېلابېلو ټولګيو د سوېې آزموينې لپاره راغونډ شوي دي.

په څو ډوله کولای شو د 16 مېزونو تر شا په ليکه کښېنې چې د هر يو د ځای تغيير د ناستې يو حالت وشمېرل شي.

حل: پوهېږو چې ځواب !16 دی چې تکرار پکې ناشونی دی. که چېرې تکرار مجاز وي، په دې صورت کې مسئله عبارت له ترتيب د n شيانو چې k عدده يې د مثال په ډول په تکراري ډول راښکاربېږي، نو په دې صورت کې لرو چې: $P_n^k = \frac{n!}{k!} \quad , \quad (k \le n)$

مثلاً په پاسني مثال کې، که چېرې 16 زده کوونکي وغواړي خپل ځايونه په خپلو لاسي بکسونو ونيسي او له دې څخه 4 تنه يو ډول لاسي بکسونه ولري، نو لرو چې:

$$P_{16}^{(4)} = \frac{16!}{(16-4)!} = \frac{16!}{12!} = 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16 = 43680$$

که چېرې د دې مسئلې عمومي حالت په پام کې ونيسو، نو په دې صورت کې د $P_n^{(k_1, k_2, \;\ldots\;, k_n)}$ n ترتيبه يا پرموټېشنونه چې په هغه کې تکرار مجاز نه او په حقيقت کې، m ګروپه شيان چې هر يو يې په ترتيب سره د $k_1!, k_2! \cdot \;\ldots\; \cdot k_n!$ په اندازه سره يو شان دي، لرو چې:

$$P_n^{(k_1, k_2, \;\ldots\;, k_n)} = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot k_3!\cdot \;\ldots\; \cdot k_n!}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: له پنځه $(5,5,5,4,4)$ عددونو څخه په څو ډوله کولای شو، پنځه رقمي عددونه جوړ کړو.

حل: پوهېږو چې د فورمول له مخې د عددونو شمېر عبارت دی له: $P_3^{(2,3)} = \dfrac{5!}{2!.3!} = 10$

چې په خپله عددونه په لاندې ډول دي:

55544 , 55454 , 54554 , 45554 , 45545

45455 , 44555 , 54545 , 55445 , 54455

څلورم مثال: د سبا کاروان ټرانسپورټي شرکت د کابل جلال آباد په لین کې 5 لوی سروېسونه او د جلال آباد- کنړ په لاره 3 میني بسه لري. په څو ډوله کولای شو، د نوموړي ټرانسپورټ په سروېسونو او میني بسونو کې له کابله- کنړ ته سفر وکړو؟

حل:پوهېږو له کابله تر جلال آباد پورې د نوموړي شرکت له سروېسونو څخه یوازې 5 امکانه وجود لري، چې د هر یوه امکان په وړاندې 3 امکانه د میني بس د انتخاب چانس له جلال آباد څخه تر کنړه، د نوموړي شرکت وجود لري.

په دې ډول ټول امکانات مساي دي په: $5\times3=15$

پنځم مثال: د $8,7,2$ او 5 عددونو په مرسته څو درې رقمي عددونه پرته له تکراره جوړولای شو.

حل: دې خبرې ته په پاملرنې سره چې عددونه درې رقمي دي، نو درې خالي ځایونه لرو، چې په لاندې ډول د هغو ډکول په عددونو امکان لري:

د دریم رقم ځای	د دویم رقم ځای	د لومړي رقم ځای
$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$ دامکاناتو ډولونه

پوهېږو چې د لومړي رقم د ځای د ډکولو لپاره 4 امکانه شتون لري، په دې ډول د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره 3 امکانه پاتې کېږي، ځکه چې له څلور عددونو څخه یو د لومړي رقم لپاره نیول شوی دی، او بلې خواته څرنګه چې تکرار مجاز نه دی، نو یوازې 3 امکانه د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره شته او د دریم رقم د ځای د ډکولو لپاره دوه امکانه شته چې ټول حالتونه عبارت دي له: $4\cdot3\cdot2=24$ او د فورمول له مخې لروچې:

$$P_4^{(3)}=\frac{4!}{(4-3)!}=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1!}{1!}=24$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

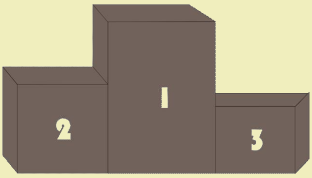
پوښتنې

1. څو پنځه رقمي عددونه وجود لري چې لومړی رقم یې 2 او وروستی رقم یې مساوي په 4 وي، په عدد کې هیڅ رقم تکراري نه وي؟
2. په څو ډوله 10 نفره کولای شي، د یوه ګردي میز په شاوخوا کې کښېني چې له دې جملې څخه 2 تنه غواړي په هر حالت کې سره خوا په خوا کښېني.
3. په څو ډول کولای شئ 3 سره توپونه، 2 آسماني او څلور زیړ توپونه سره خوا په خوا په یو کتار کې کېږدو. د هم رنګه تو پونو په کتار کې د هم رنګه توپونو ځای بدلول بل حالت نه شمېرل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترکیب یا کمبېنیشن

Combination



د 1 او 2 عددونو ترکیب څه دی؟

د 1 او 2 عددونو ترتیب کوم دی؟

ستا سو له نظره ترکیبونه او ترتیبونه څه توپیر سره لري؟

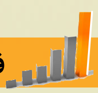
مخکې له دې چې لاندې فعالیت سرته ورسوو، لاندې تعریف چې په فعالیت کې به له هغه څخه کار واخلو په پام کې نیسو.

تعریف

د $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ لیکدود چې n د k له پاسه ویل کېږي او په حقیقت کې د بینوم د ضریبونو په نامه یادېږي چې k د بینوم توان ښیي او په لاندې ډول دی:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad , \qquad 0 \le k \le n \quad , \quad k, n \in IN$$

فعالیت



- د پورتني تعریف په پام کې نیولو سره، د بینوم د $(a+b)^2$ د دوه حدي په انکشاف کې د بینوم ضرایب چې مساوي په $\begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$, $k = 0,1,2,$ سره دی، پرتله کړئ:

$$(a+b)^2 = \square\, a^2 + \square\, ab + \square\, b^2$$

- د بینوم ضریبونه چې په پاسني انکشاف کې، په چوکاټونو کې نیول شوي، د $\begin{pmatrix} 2 \\ k \end{pmatrix}$ $k = 0,1,2$ له قیمتونو سره پرتله کړئ؟
- څرنګه چې $1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ سره دي، ویلای شئ چې د هر $n \in IN$ لپاره $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$ او د $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}$ قیمتونه هم سره برابر او مساوي په 1 دي؟
- د $(a+b)^n$ په انکشاف کې د بینوم د ضریب د دویم حد قیمت د $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ له مخې حساب کړئ.
- د $\begin{pmatrix} 4 \\ k \end{pmatrix}$, $k = 0,1,2,3,4,$ قیمتونه د بینوم د انکشاف له کومو ضریبونو سره مساوي دی، ویې لیکئ؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د هر n او k طبیعي عددونو لپاره، په داسې حال کې چې $0 \le k \le n$ سره دی لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{0}=1 \quad , \quad \binom{n}{n}=1 \qquad \text{(i)}$$

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r} \qquad \text{(ii)}$$

(iii) له n شخه د r شیانو ترکیبونه عبارت د یو n عنصره سټ د غړو د ترکیب یا کمبینیشن د r له n شیانو شخه ده چې په C_r^n سره ښودل کیږي او قیمت یې عبارت دی له: $C_r^n=\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

لومړی مثال: په یوه ښوونځي کې د لسم 7 ټولګي شتون لري. د ښوونځي اداره غواړي چې لسم ټولګي له 7 تنو اول نمره ګانو، 4 تنه و ټاکي. په څو ډوله دغه انتخاب کیدلای شي؟

حل: لیدل کیږي چې له 7 تنو شخه د 4 تنو په ټاکنه کې هیڅ ډول برلاسي او ترتیب په پام کې نشته؛ یعنې دا چې، مهمه نه ده زده کوونکي د کوم ټولګي دي، نو دا ډول مسئله عبارت له ترکیب شخه ده چې له 7 تنو شخه 4 تنه و ټاکو، نو لرو چې: $C_4^7=\binom{7}{4}=\dfrac{7!}{4!(7-4)!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4!}{3!\cdot4!}=\dfrac{5\cdot6\cdot7}{6}=35$

دویم مثال: که له 7 تنو زده کوونکو 4 تنه د لسم ټولګي د زده کوونکو د اتحادیې د مشرتابه لپاره، داسې چې لومړی تن رئیس، دویم معاون، دریم منشي او څلورم تن د مالي مسؤول په توګه و ټاکل شي، په دې صورت کې لرو چې:

څرنګه چې لیدل کیږي په دې ټاکنه کې ترتیب مهم دی، ځکه چې د ABCD د انتخاب ترتیب په داسې حال کې چې A رئیس، B معاون، C منشي او D مالي مسؤول دی، په داسې حال کې چې د CABD په ترکیب کې C رئیس، A معاون، B منشي او D مالي مسؤول ګڼل کیږي.

دا ډول مسئله عبارت له ترتیب یا پرموټېشن شخه ده چې له 7تنو شخه د 4 تنو په ترتیب انتخاب دی؛ یعنې لرو چې: $P(7,4)=\dfrac{7!}{(7-4)!}=\dfrac{7!}{3!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!}=120\cdot7=840$

پوښتنې

1- له اوو حرفونو شخه لکه: A, B, C, D, E, F او G څو 4 حرفي کلمې، پرته له تکراري حرفه جوړولای شو؟

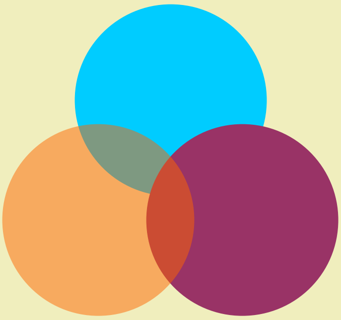
2- د والیبال په یوه لیګ کې، 7 ټیمونه ګډون لري. څو ډوله ټیمونه کولای شي لومړی، دویم او دریم مقام لاس ته راوړي؟

3- له 4 نارینه وو او 6 میرمنو شخه 2 نارینه او 3 ښځې داسې ټاکو چې نارینه په کې یو رئیس او دویم یې مالي مسؤول وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترکیب

Combination



آیا پوهېږئ چې اصلي رنګونه کوم دي؟

د نارنجي او بنفش رنګ ترکیب کوم رنګ دی؟

ستاسو په نظر ژېړ رنګ د کومو رنګونو له ترکیبه جوړېږي؟

آسماني رنګ، بنفش رنګ، نارنجي رنګ.

فعالیت

د خپلو 5 تنو ټولګیوالو څخه 3 تنه په څو ډوله ټاکلی شئ؟

- موضوع په عملي توګه په ټولګي کې تجربه او حالتونه یې و شمېرئ؟
- که چېرې له 5 تنو زده‌کوونکو څخه 3 تنه داسې و ټاکل شي چې، لومړی کس سرګروپ، دویم د سرګروپ مرستیال او دریم تن منشي وي، د دریو تنو ګروپ، د ټاکلو ټول ډولونه څو دي؟
- د پورتني فعالیت لومړی او وروستی جزء یو تربله څه توپیر لري؟
- آیا فکر کولای شئ د پاسنیو ګروپونو د ټاکلو شمېر مساوي له کوم عدد سره دی؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: دلته د k په شمېر غړو یو ګروپ له یو سټ څخه چې n غړي لري، په عمومي ډول په دوه ډوله صورت نیسي چې په یوه کې ترتیب په پام کې دی، خو په بل کې ترتیب مهم نه شمېرل کېږي، یوازې د هغوی ترکیب د پام وړ دی.

په دې ترتیب د یو ترکیب یا کمبینیشن چې k شیان له n بېلابېلو شیانو څخه مطلب دی، چې په لاندې تعریف کې بیانېږي.

تعریف: د k شیانو ترکیب له یوه n عنصره سټ څخه چې په C_k^n ښودل کېږي او عبارت له $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ ترکیبي امکاناتو څخه دی چې د k په شمېر غړي یې پرته له ترتیب څخه ټاکل کېږي، عبارت دي له:

$$C_k^n = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی‌مثال: له 30 تنو څخه د 4 تنو ټاکل چې ترتیب په کې مهم نه دی، حساب کړئ؟

حل: پوهېږو چې مسئله عبارت له 30 تنو څخه د 4 تنو دی چې د فورمول له مخې په لاندې ډول پـه لاس راځي:

$$C_4^{30}=\begin{pmatrix}30\\4\end{pmatrix}=\frac{30!}{4!(30-4)!}=\frac{30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26!}{26!\cdot4!}=27405$$

دویم مثال: له $A=\{1,2,3,4,5\}$ سټ څخه څو 3 عنصره فرعي سټونه په لاس راځي؟

حل: پوهېږو چې مسئله په حقیقت کې له 5 غړو څخه د 3 غړو ټاکل دي چې شمېر یـې پـه لانـدې ډول په لاس راځي:

$$C_3^{5}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}=10$$

پوښتنې

1- که چېرې په یوه آزموینه کې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنو ته ځواب مطلوب وي، پـه څـو ډولـه کـولای شو چې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنې د حل لپاره وټاکو؟

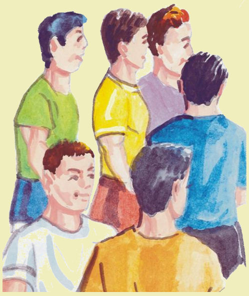
2- په یوه مستوي کې پنځه ټکي چې په یوه کرښه پراته نه دي، په پام کې ونیسئ د دې ټکو پـه نـښولولو سـره په څو ډوله مثلث جوړولای شو.

3- که چیرې $P(n,2)-C_2^n=36$ سره وي، د n قیمت پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

تبـدیـل

Variation



په یوه المپیاکې له 10 ورزشـي ټیمونـو څخه پـه څـو ډولونو د سرو زرو، سپینو زرو او برونزو مډالونه شـتون لري؟

فعالیت

- د n بېلابېلو شیانو په پام کې نیولو سره د k په شمېر شیان ټاکو، د هغوی مجموعې شمېر څو دی؟
- که چېرې د k شیانو په ټاکلو کې ترتیب داسې وي، چې په هغوی کې لومړی، دویم، دریم او ... شـتون ولري، ټول مجموعي حالات به څو وي؟
- د پاسنیو دوارو ډولونو ترمنځ توپیر په کومه اندازه ده؟

پایله: د هغو ترکیبونو شمېر چې د k غړو د پرله پسې ترتیب په انتخاب کې له n غړو څخه په پام کـې وي، نو په دې صورت کې یې شمېر مساوي په $k!\cdot C_k^n$ سره کېږي.

دغه ترکیب د وریشن Variation یا تبدیل په نامه یاد او په V_k^n سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$V_k^n = k!\cdot C_k^n = k!\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \Rightarrow V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: څو امکانه وجود لري چې په یوه انتخاباتي غونډه کې له 30 تنوګډون کوونکو څخه 4 تنه د مشرتابه لپاره په داسې حال کې چې یو تن رئیس، یو لومړی مرستیال، یو دویم مرستیال او څلورم تن د منشي په توګه دنده ترسره کړي؟

حل:مسئله په حقیقت کې د 4 تنو تبدیل له 30 تنو څخه ده، چې د تعریف لـه مخې لـه لانـدې فورمول څخه په لاس راځي:

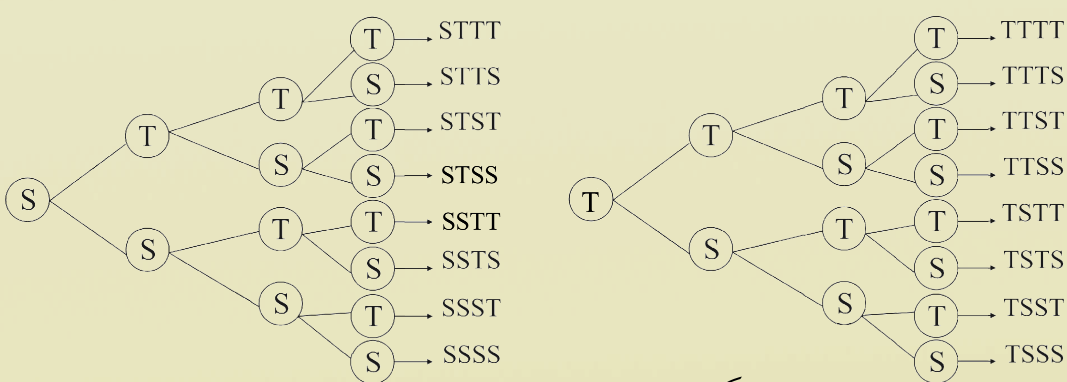
$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{30\cdot 27\cdot 29\cdot 28\cdot 26!}{26!} = 657520$$

پورتنی حالات چې تر اوسه مو د ترتیبونو، ترکیبونو او تبدیلونو لپاره تر بحث لاندې و نیول په لاندې جـدول کې را ټول شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټاکنو ډول k غړي له n غړو څخه	پرته له تکراره $k \le n$	له تکرار سره $k \le n$
	د امکاناتو شمېر	
ترتیب یا پرموټېشن	$P(n,k) = n! \quad , \quad n = k$	$P(n,k) = \dfrac{n!}{k!}$
ترکیب یا کمبینیشن	$C_k^n = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$C_k^n = \binom{n+k-1}{k}$
تبدیل یا وریشن	$V_k^n = k!\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$V_k^n = n^k$

مثال: د یوې سکې په اچولو سره چې د راتګ امکان یې، شیر یا خط ممکن دی او د هرې خوا د راتګ احتمال یې مساوي په $\frac{1}{2}$ دی، په پام کې ونیسئ، که چیرې سکه 2 ځلې، درې ځلې، شپږ ځلې، اته ځلې او یا 16 ځلې وغورځوو، پوهېږو چې د هم چانسو لومړنیو پېښو په نمونه‌یي فضا کې په یوه ونه‌ییز ګراف کې لاندې حالت لرو: (شیر $= S$ او خط $= T$) دی.



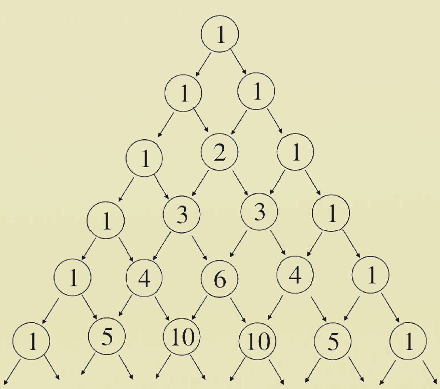
د پاسني مثال د شیر او خط د راتګ احتمال په یو، دوه، درې او څلور ځلې اچولو کې په لاندې جدول کې راټول شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سکې غورځول	هيڅ ځل		يو ځل		دوه ځله		درې ځله		څلور ځله	
	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال
د خط د راتګ شمېر	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{16}$
			1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{4}$	1	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{4}{16}$
					2	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{3}{8}$	2	$\frac{6}{16}$
							3	$\frac{1}{8}$	3	$\frac{4}{16}$
									4	$\frac{1}{16}$

که چېرې جدول ته په ځير سره پاملرنه وکړئ، د هر وار د احتمال د کسرونو په صورت کې يو نظم وينو چې د بنيوم په انکشاف کې په ترتيب سره د حدونو ثابت ضريب دي چې د لومړي ځل لپاره د پاسکال له خوا راوپېژندل شول او تر اوسه د هغه په نامه يادېږي.

دغه نظم مثلاً په مخامخ مثلث کې په يوه ليکه کې اعداد د کيڼې او ښي خوا د عددونو سره په پورته ليکه کې له جمعې لاس ته راغلي دي.



په دې ډول کولای شو چې مثلث ته تر بينهايت پورې دوام ورکړو، چې که چېرې هغوی د يو دوه جمله‌يي له انکشاف سره پرتله کړو، لکه: د راکړل شوي پاسکال مثلث عددونه دي، مثلاً پاملرنه وکړئ چې د دوه

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله‌يې په انکشاف کې له هغو عددونو څخه مو حلقه تاو کړې ده د مثلث له اعدادو سره چې حلقه ترې تاوشوې ده يو شان ده:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$
$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$
$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^3$$

1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

چې دغه ضريبونه د $(a+b)^n$ په انکشاف کې n د k له پاسه د ضريبونو استعمال په لاندې ډول ليکلی‌شو:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د " $\sum$ " علامه د پاسنی مجموع لپاره استعمال شوې ده.

په دې ډول د خط راتللو احتمال په k– امه مرتبه کې عبارت دي له: $P(\text{خط راتگ}) = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$

پوښتني

1. د فوټبال په يوه سيالۍ کې 12 ټيمونه ګډون لري، په څو ډوله کولای شو ګټونکي لومړی، دويم او دريم مقام ته ورټاکو.
2. د يوولسم ټولګي له 20 تنو زده‌کوونکو څخه په څو ډوله دوه تنه، د ټولګي د استازي او د استازي د مرستيال په توګه وټاکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بینوم قضیه

د پاسکال د مثلث له مخې د بینوم د انکشاف ضریبونه وټاکئ.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

$$(a+b)^2 = \bigcirc a^2 + \bigcirc ab + \bigcirc b^2$$
$$(a+b)^3 = \bigcirc a^3 + \bigcirc a^2b + \bigcirc ab^2 + \bigcirc b^3$$
$$(a+b)^4 = \bigcirc a^4 + \bigcirc a^3b + \bigcirc a^2b^2 + \bigcirc ab^3 + \bigcirc b^4$$

فعالیت

- په یوه ناڅاپي تجربه کې چې یوازې دوه ناڅاپي پېښې د A او $\overline{A}$ پېښېږي، یعنې د $\{A,\overline{A}\}$ نمونوي فضا لري. د A د پېښې احتمال عبارت دی له:
- که چېرې $P(A)=P$ د A د پېښې احتمال وي، د هغې د مکملې پېښې احتمال یعنې $\overline{A}$ څو دی $P(\overline{A})=?$
- د پورتنۍ تجربې له بیا بیا تکرار څخه که چېرې د A حادثې پېښېدو ته 1 او د نه پېښېدو حالت ته یې 0 ووایو لاندې جدول د تجربې د بیا بیا تکرار یعنې $n=2$ لپاره بشپړ کړئ.

k	ممکنې پایلې	احتمال	د بینوم د ضریبونو ارایه
0		$(1-p)^2$	$\binom{2}{0}.p^0.(1-p)^2$
1	10	$2p(1-p)$	
2	11		$\binom{2}{2}p^2(1-p)^2$
		$(p+(1-p))^2$	$\sum\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=?$

د $B(n,p,k)$ لیکنه د برنولي د مسالې د احتمال په نامه یادیږي.

$$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

د بینوم د حدونو د انکشاف مجموع یعنې $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ پیداکړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: په یوه ناڅاپي تجربه کې چې د نمونې فضا غړي يې په مساوي احتمال په تجربه کې بیابیا د تکرار وړ وي، نو د تجربې په n ځله تکرار کې د بېنوم د انکشاف k − ام حد کې لاندې احتمال لري:

$$\binom{n}{k}.p^k(1-p)^{n-k}$$

پورتنی بېنوم په $B(n,p,k)$ ښودل کېږي، د برنولي د پرابلم د احتمال په نامه یادېږي او لیکو: $B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ سره کېږي.

مثال: له n تنو څخه د 10 تنو په شمېر په ناڅاپي ډول ټاکو، د k تنو انتخاب شوو خلکو له جملې څخه 2 تنه ټاکو، پیدا کړئ د دې احتمال چې دواړه تنه په یوه ورځ زېږېدلي وي. $P(k\le n)=?$

حل: په دې ډول د Ω په نمونه‌یي فضا کې داسې فرضوو چې د کال د هرې ورځې احتمال $\frac{1}{365}$ او د زوکړې ورځ د سوال وړ ده نه د زرکړې کال.

په دې ډول Ω په نمونه‌یي فضا کې ټول امکانات له 365 ورځو څخه د k شمېر لپاره عبارت دی له:

$$|\Omega|=(365)^k$$

د A حادثه

په دې ډول اوس که چېرې د A ناڅاپي پېښه چې لږترلږه دوه تنه په یوه ورځ زېږېدلي وي، په ساده ډول داسې د محاسبې وړ ده، چې د A د حادثې مکمله په پام کې نیسو، په دې ډول $\overline{A}$ عبارت له هغې نا څاپي پېښې څخه ده چې k تنه په بېلابېلو ورځو کې زېږېدلي دي. په دې ډول $\overline{A}$ عبارت د k پرموټېشن له 365 څخه ده چې لرو:

$$P(\overline{A})=\binom{365}{k}=\frac{365!}{(365-k)!}$$

په دې ډول:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{|\overline{A}|}{|\Omega|}=1-\binom{365}{k}=1-\frac{365!}{(365-k)!}\cdot\frac{1}{(365)^k}$$

پوښتنې

وښيئ چې:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0 \qquad (I)$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n \qquad (II)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه جمله يي احتمال

آيا کولای شو چې د هرې نمونه‌يي فضا پايلې په دوه ناڅاپي پېښو چې له يو بل سره هيڅ ګډ عنصر نه‌لري، ترتيب کړو. موضوع د سټ د تيوري له مخې په يوه اختياري نمونه‌يي فضا Ω کې، دوه ناڅاپي پېښو ته چې اتحاد يې نمونه‌يي فضاوي په مثال کې يې تشريح کړي.

فعاليت

- د هغو تجربو څخه چې تر اوسه يې پېژنئ يا دونه وکړئ او يوه نمونه‌يي فضا د دوه اتفاقي يا ناڅاپي پېښو په ارايه چې ټوله نمونه‌يي فضا يې يوازې دوه غړي ولري.
- آيا هغه ناڅاپي تجربې چې نمونه‌يي فضاګانې يې له 2 څخه زيات غړي لري. کولای شو په داسې نمونه‌يي فضاګانو واړوو چې يوازې 2 غړي ولري؟ مثال راوړئ.
- په عمومي ډول څنګه کولای شو چې يوه نمونه‌يي فضا چې ډېر غړي لري، په يوه داسې نمونه‌يي فضا چې 2 غړي لري، واړوو؟
- که چېرې د دا ډول فضاګانو د يو غړي د پېښې احتمال p وي، د بلې پېښې د احتمال قيمت به څو وي؟
- که چېرې تجربه n ځلې سرته ورسوو، او د k په شمېر له n ځلې($0 \leq k \leq n$) وړل او نور يې بايلل دي و، د k ځلې بريالیتوب (P) په n ځلې تکرار کې پيدا کړئ؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پايله: د هرې ناڅاپي تجربې نمونه‌يي فضا کولای شو چې په داسې يوې نمونه‌وي فضا واړوو چې دوه غړي ولري.

- که چېرې د دا ډول نمونه‌وي فضا د يو غړي احتمال (P) وي، نو هرو مرو د بل حالت احتمال $1-p$ او بايلل دي.
- که چېرې دا ډول تجربې n ځلې تکرار شي، نو د $k-$ ام ځلې وړل په n ځلې تکرار کې او د بايللو احتمال به $q = 1-p$ سره دي، يعنې لرو چې:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad , \quad 0 \leq k \leq n$$ = د $k-$ ام ځلې وړل په n ځلې تکرار کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: پاملرنه وکړئ چې که چېرې په یوه تجربه کې د ورلو احتمال $\frac{1}{2}$ ، د بایللو احتمال هم مساوي په $\frac{1}{2}$ سره وي، په دې ډول ناخاپي پېښو کې پورتنی اړیکه په لاندې ډول حسابېږي:

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}.(\frac{1}{2})^k.(1-\frac{1}{2})^{n-k}=\binom{n}{k}.\left(\frac{1}{2}\right)^k.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

پورتنی پایله د یوې تجربې په n ځله تکرار کې چې لـه هغې جملې څخه k ځلې یـې ورل وي، یـوې دوه عنصره نمونه‌یي فضا ته وځیږئ؟

دویم مثال: په یوه کورنۍ کې چې 5 ماشومان لري، د دې احتمال چې لـه اولادونـو څخه 2 تنـه هلکـان او پاتې نجونې وي، څو دی؟

حل: که چېرې د اولادونو د هلك او نجلۍ زوکړې چانس برابر په پام کې ونیسو لرو چې:

څرنګه چې په دې مثال کې $p=\frac{1}{2}$ او $q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ سره دی، نو لیکلای شو:

$$=\frac{\binom{5}{2}}{2^5}=\frac{10}{2^5}=\frac{5}{16}=0.3125=31.25\%$$ د دې احتمال چې دوه هلکان او درې نجونې وي.

دریم مثال: د رمل یوه دانه 6 ځلې غورځوو، د دې احتمال پیدا کړئ چې په 4 ځلې غورځېدو کې راغلي خالونه له دریو څخه لږ وي؟

حل: که چېرې له 3 څخه لږ راتلل حالت ورل په پام کې ونیسو نو:

$$p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.3333=33.33\%$$

$$q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=0.6666=66.66\%$$

(د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدو کې له 6 ځلې څخه، خالونه له 3 څخه لږ وي) $=\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{243}=0.0823=8.23\%$

څلورم مثال: یوه فلزي سکه داسې جوړه شوې ده چې د خط راتلـو احتمـال یـې مـساوي پـه $\frac{1}{3}$ وي، کـه چېرې دغه سکه 4 ځلې وغورځول شي، د دې احتمال چې لږ تر لږه 3 ځلې شېر راشي، مطلوب دی.

حل: که چېرې د سکې د خط راتللو حالت ته ورل او احتمـال یـې p پـه پـام کـې ونیـسو، نـو د خـط د نـه راتللو یا شېر راتګ مساوي په $1-p$ سره دی یعنې: $1-p=\frac{1}{3}p$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځخه $p=\frac{3}{4}$ او $q=\frac{1}{4}$ په لاس راځي:

$$\left\langle \text{د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدوکې لږ تر لږه 3 ځله شېر راشي.} \right\rangle = \binom{4}{3}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^3}_{\text{3ځلې شېر}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)+\underbrace{\binom{4}{4}}_{\text{1 ځل خط}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^4}_{\text{4 ځلې شېر}}=\frac{3}{64}+\frac{1}{256}=\frac{13}{256}$$

پنځم مثال: يوه نورماله سکه څو ځلې وغورځوو چې لږ تر لږه د خط راتلو احتمال يې له 0.99 ځخه ډېر وي؟

حل: داسې فرضوو چې سکه n ځلې غورځوو د دې احتمال چې لږتر لږه يو ځل سکه خط راشي مساوي ده په:

د هر n ځلې شير راتگ احتمال $-1=$ دی لږ تر لږه يو ځل خط راتلو احتمال

$$=1-\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

په دې ډول ددې شرط $1-\frac{1}{2^n}>0.99$ يا $\frac{1}{2^n}<0.01$ سره دی چې $2^n>100$ يا $n\geq 7$ سره کېږي.

په دې ډول بايد سکه 7 ځلې وغورځوو چې لږتر لږه يو ځل خط راشي، احتمال به يې له 0.99 ځخه لوی وي.

پوښتنې

يوه سکه څو ځله غورځوو، د دې احتمال پيداکړی چې:

(i): په 4 ځله غورځيدو کې، 2 ځلې خط راشي.

(ii): په 6 ځله غورځيدو کې، 3 ځلې خط راشي

(iii): په 8 ځله غور ځيدو کې، 4 ځلې خط راشي.

(iv): فکر وکړئ چې که سکه 2n ځلې وغورځول شي او n ځلې خط راشي، د n په ډېريدو، د p بدلون په څه ډول دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېړکي مهم ټکي

فکتوریــــل: د هــرn طبیعــي عــدد لپــاره د $n\cdot$ ... $1\cdot2\cdot3\cdot$ د ضــرب حاصــل پــه لنــډ ډول پــه n!(n فکتوریل) ښودل کېږي، د تعریف له مخې $0!=1$ سره دی.

پرموټېشن یا ترتیب: د n غړو ترتیب په p_n ښودل کېږي که چېرې:

- په ترتیب کې تکرار غیر مجاز او ممکن نه وي: $P_n = n!$

خو که چېرې تکرار مجاز وي، د ترتیبونو شمېر مساوي په $P_k^{\,n}$ سره ده او داسې معنا ورکوي چې k ځلې په n ځلې ترتیبونو کې تکرار وجود لري. چې د پورتني حالت په پام کې نیولو سره ټول حالتونـه مـساوي دی په:

$$P_k^{\,n} = \frac{n!}{k!} \quad , \quad k \le n$$

$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ $n,$ د k **له پاسه**: د $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ $n,$ د k له پاسه، د بینوم هغه ضریبونه دي چې k د بینوم د توان پـه ټاکلو سره، د ضریبونو لپاره داسې صورت نیسي:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ ، } n,k \in IN \text{ ، } 0 \le k \le n$$

- له n شیانو څخه د r شیانو ترکیبونه په:

$$C_r^n = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{،} \quad r \le n$$

وریشن یا تبدیلونه: په ترتیبونو کې چې پر له پسې ترتیب د k انتخابي غړو له n غـړو څخه مطلوب وي، په نامه دې، n په k تبدیلونو یاد او لیکو:

$$V_k^{\,n} = k!\cdot C_k^{\,n} = k!\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_k^{\,n} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

دبینوم قضیه: د $(a+b)^n$ دو جملهیي انکشاف عبارت دی له:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

د یوې تجربې په n ځلې تکرار کې، چې هر حالت یې p او د $q=1-p$ احتمال لري.

د $k-$ام ځلې وړلو یعنې p له n ځلې څخه او نور پاتې حالتونه چې بایلل ګڼل کېږي؛یعنې $q=1-p$ سره دي اوصورت نیسي:

$$\left\langle \begin{matrix} \text{د k ځلې وړلو د احتمال قیمت د تجربې} \\ \text{د n ځلې په پای کې} \end{matrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \text{ ، } 0 \le k \le n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې عددونو سټ په پام کې ونيسئ:

$$S=\{0,1,2,3,4,5,6\}$$

i): په څو ډوله کولای شو له پاسنيو عددونو څخه 3 رقمي عددونه جوړ کړو.

ii): ټول 3 رقمي جفت عددونه به څو وي؟

2- په څو ډوله 6 تنه زده‌کوونکي په يوه کتار کې څنګ په څنګ دربدلی شي؟

3- په څو ډوله ابوبکر، زبير، ياسر، حنظله او حبيب کولای شي، په يو کتار کې خوا په خوا د يو يادګاري تصوير د اخيستلو لپاره ودريږي؟

4- په څو ډولونو کولای شو چې 9 تنه په درې 3 ګروپونو وويشو؟

5- د پاسکال د مثلث له مخې د $(a+b)^7$ انکشاف په لاس راوړئ؟

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library