

کوشی KUSCH

د فرنیخیا لبر ابرون یا \_ مساوات

$$y - y' + y^2 y''^4 = 0$$

Differentialgleichungen

ژباړن:

ډاکټر مافان (مېړی) شینواری

## د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه



ماخان (په اولني نوم مېړی) د ارواښادې  
پســتو او ارواښاد نورالرحمان زوی، په  
۱۵/۹/۱۹۴۶م کال د شینوارو د هسکې مېنې  
ولسوالۍ کې زېږېدلی. (د زېږېدو نېټه یې د  
۱۳۲۴ هـ ل کال څخه یو یا دوه کاله دمخه ده).

د هسکې مېنې د درې کاله کلیوالي

ښوونځي وروسته، چې د لومړنيو زده کوونکو څخه وو. له ۱۹۵۴ څخه تر  
۱۹۶۵ پورې رحمان بابا لېسه، د ۱۹۶۶م کال سپتمبر کې د یوه برس له لارې  
اطریش ته لاړ او هلته په پوره ستونزو د شمېر پوهنې په ډاکټرۍ بریالی شو.  
د ۱۹۸۷م کال د نومبر تر ۱۹۸۸ فبروري تر اخره د افغانستان د  
باندنيو چارو کې مامور وو. دی د ۱۹۸۸م کال د فبروري له ۲۹ تر ۱۹۹۲م کال د  
اپرېل تر نیمايي وراخوا په بن (المان) کې د افغانستان جمهوریت سفارت  
شارژدافیر وو او د ۱۹۹۲ یوني څخه راپه دېخوا په المان کې نور هم د پردېسۍ  
شپې او ورځې تېروي.

ماخان شینواری د مېرمن ښاپېرۍ سره له ۱۹۷۲م کال راپه دې له لري  
واده (د واده خبر ورته اطریش ته راغی) دی په نهم ټولگي کې یې کوزده ورته  
کړې وه. دوی ته لوی څښتن دوه بچیان وښخېل، څانگه او اباسین، چې د  
۱۹۷۹م کال د می په شلم په اطریش کې زېږېدلي.

**Verein zur Förderung der Afghanischen  
Kultur e. V. Köln, Germany**

## ۱ . ديفرنخيالبرابرون يا ديفرنخيالمساوات

تراوسه مو معلوم الجبري او ترانسخندنت مساواتو نامعلومی لوي تر يوې برخې د توپيري پوتنخونو سره لکه  $x, y, z^2, a^3$  او داسی نور ، لرودي .  
که د مساواتو دا نامعلومی يا ناپيژندلی لويي فنکشنونه او د هغی رابيلدنی يا دفرنخيالويشنه يامشتقونه وي ، نو دلته د يوه ديفرنخيالمساوات څخه غږيدنه ده يا خبرې دي . د دې مساوات اوبی يا حل ستونځې لري ، په ډيرو حالتونو کې حتی شميرنيز ناممکن دی .  
د دې وړې برخې په دننه کې کيدی شي ، چې يواځې يوه پيلونه ورکړل شي ، د يوڅو په تخنيک کې ، دمهمو کاروونو يا استعمال سره .  
يادونه : دلته څه نومونه چې راځي د هغو سره بايد لوستونکی بلد وي . او که چيري داسی نه وه ، نو دا تر زياته حده ځما د مخه تيرو کتابونو کی راوړل شوي ، که هغه هندسي کليمي وي او که شميرپوهنيزې . که پوه شوم ، چې کومی کليمي ځما په تيرو کتابونو کی روښانه نه دې تعريف شوي ، وبه هڅيږم ، چې ډاکار دلته روښانه کړم .  
گران لوستونکی به په دې پوهيږي ، چې کوم شيان د ژباړونکی دي ، که په روښانه توگه می گوته لک نه کړل .

### ۱ . ۱ بنسټکليمی

#### ۱ . ۱ . ۱ تعريفونه ( پيژندنی )

تراوسه پورې : لاندې مساوات توپير شوي دي .  
ټاکنمساوات:

$$y = 2x^2 + 2x + 5x - 7 = x^2 - 3 \quad \text{— الجبري ريشنل مساوات.}$$

$$\sqrt{3x^2 - 1} = x^2 \quad \text{— الجبري ايريشنل مساوات.}$$

$$y = \sin x ; y = e^{2x+1} = 2x \quad \text{— ترانسخندنت مساوات.}$$

فنكشن مساوات

هر  $x \in D(f)$  په يواځني يو  $y \in R$  تنظيميري.

$$y = 2x^2 + 5x - 7 \Rightarrow y = f(x) \Rightarrow f = \langle f \Rightarrow f(x) \rangle$$

$$y + 2x = y' \cdot x^2 - y'' \Rightarrow f = \langle x \Rightarrow f(x), f'(x), f''(x) \rangle$$

$$\Rightarrow y = f\langle x, y', y'' \rangle$$

دفرنخيال مساوات، په کومو کې، چې د بلواکو اوبنتوني  $y$  يواځي خپلواکي اوبنتوني  $x$  اود هغه رابيليدني لکه

$$dy / dx = y' ; d^2 y / dx^2 = y'', \dots, \quad |$$

رامنځ ته کيږي، بلد يا عادي ديفرنخيال مساوات بلل کيږي.

د ديفرنخيال مساوات ټوليزه بڼه :

$$\bullet y = 3y' + 2x \cdot y'' + 4$$

$$\bullet y'^2 + x \cdot y^2 = 4$$

$$\bullet y''' + y'' + y' = e^x$$

$$\bullet x \cdot y' = y'' \cdot y$$

$$\bullet x \cdot y + x \cdot y' + x \cdot y'' + x \cdot y''' = 0$$

که د ديفرنخيال مساوات ناپيژندونکي د ډيرو اوبنتونکو فنکشنونه وي، نو د

پارشل - يا ټوټه ديفرنخيال مساواتو څخه غږيږو.

$$x^2 - \frac{\partial y}{\partial x} - 3 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y$$

د دې ټوليزه بڼه يا فورم

$$O = f(x; y; z; \frac{\partial y}{\partial x}; \frac{\partial y}{\partial z}; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \dots; \dots)$$

د  $1, 2, \dots, n$  (يعني، لمري، دوم، ... او  $n$ -ام) نظم ديفر-

نخيال مساواتو ترمنځ توپير کوو

$$d \text{—} 1 \text{—} \text{م نظم ديفرنخيال مساوات} \quad 4y - dy / dx + y^2 = 0$$

$$3x^2 + y^2 = d^2y / dx^2 = y'' \quad \text{۲- ام نظم د. م.}$$

$$y''' - 3y = y'' + y' \quad \text{د. م. ۳- ام نظم د. م.}$$

دلته په ديفرنخيالمساوات کی هغه لورديفرنخيالكووڅښت يا لوره رابيليدنه يا ديفرنخيالويش د ديفرنخيالمساوات نظم ورکوي .

د ديفرنخيالمساوات يو بل د توپيرونو لویا فرقکولو امکانات په درجه يا گراد Grad کی ورکړ شوي دي. د ديفرنخيالمساوات گراد د ديفرنخيالمساوات د زياتونو له لارې ټاکل شوی دی، په کوم کی چی د بلواکو اوبستونکو يا واريابلو د جگيو يا لوريو يا اکسپوننتونو او د ديفرنخيالويش هغه زياتون چی د ټولو لوي وي.

$$y''' - 3x^2 + y = 0 \quad \text{۱. درجه}$$

$$x^4 y' y''^2 y''' + y - x^2 = 0 \quad \text{۲. درجه}$$

$$y y'''^3 + y'' \cdot x^8 = y \quad \text{۳. درجه}$$

$$y - y^2 y''^4 - y' = 0 \quad \text{۴. درجه}$$

بلد ديفرنخيالمساوات

$$4x^5 y^2 + 2y y'^3 \cdot \cos x - 5y + 7 = 0 \quad \text{د. م. ۱. نظم او ۳. درجی}$$

بلد يا ساده (عادي) ديفرنخيالمساوات

$$y y'' + 4x y' - y = 0 \quad \text{۲. نظم او ۱. درجه}$$

### ۱. ۱. ۲ د ديفرنخيالمساواتو اوبيونی يا حلونه

د ديفرنخيالمساوات اوبيونه يو فنکشن دی او زيات وخت د ديفرنخيالمساوات اينتيگرال هم بلل کيږي، ځکه، چی په بنسټيزه توگه رابيليدنی د اينتيگرال له لارې لاس ته راځي د ديفرنخيالمساوات د اوبيو يا حلونولاندې په مساواتو کی منځ ته راغلو، د ديفرنخيالونو او ديفرنخيالكوشتونو د له منځه وړل دي، دا په دې مانا چی د ورکړشو رابيليدنو څخه بايد په هغه اړه فنکشن مساوات راپيدا کړی شي.

بیلگه: ديفرنخيالمساوات :  $x/2 - y' = x$

$$dy/dx = y' = -x/2$$

$$dy = -(x/2).dx$$

د رابيليدنو د له منځورنه په بنسټيزه توگه د اينتگرال له لارې پيښيري يا صورت نيسي. د ديفرنخيالمساواتو اوبی يا حل له امله د هغه اينتگرال او يا هم د هغه بنسټمسوات بولو.

$$\int dy = -(1/2) \int x.dx$$

$$y = -(1/4)x^2 + C, C \in \mathbb{R} \quad (\text{حل})$$

د فنکشنمسوات  $y = (x)$  څخه د اوييفنکشن لاس ته راځي

$$f = \langle x \rightarrow -(1/4)x^2 + c \rangle$$

يادونه: داسی پورته مات نوکان <, > دې بيا لږ لوي وليکل شي، زه يی په بل ډول امکانات نه لرم.

ازماينبت:

که د اوييوني فنکشن  $y = -(1/4)x^2 + c$  څخه لمړی رابيليدنه جوړه شي او د  $y' = -x/2$  لپاره ترم د ازماينبت لپاره په سر- يا پيل ديفرنخيالمساوات کی کيښوول شي، نو دا به د فنکشن د ديفرنخيالمساوات د ټولو توکو لپاره يو کټمټ يا ايدنتيک مساوات شي

$$\frac{x}{2} - y' = x \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 + c$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{4} \cdot 2x \\ = -\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} - \left(-\frac{x}{2}\right) = x \\ x = x$$

(دا يی په بل ډول ليکنود) ديفرنخيالمساوات اوبی

$$y = -(1/4)x^2 + C$$

د آزمایشت لپاره نتیجه بیرته دفرنخیالیبری یا رابیلیدنه نیول کیږي. دا نتیجه د دفرنخیالمساوات سره سرخوري.

$$dy / dx = - x / 2$$

گورو، چی بیرته په دې توگه دفرنخیالمساوات لاس ته راغی. بیلگه: د دفرنخیالمساوات

$$2x + dy / dx = 0$$

اوبی یا حل سره، لکه څنگه په ټولو اینتیگرالولو کی یوه ثابت C رامنځ ته کیږي،

$$y = - x^2 + C$$

د دفرنخیالمساوات اویونی یا حلونه کیدی شي، چی په درې ډلو وویشل شي.

### ۱ - ټولیز اوبی

د دفرنخیالمساوات اوبی یا حل کی ، لکه په هر اینتیگریشن کی یوه اینتیگریشن ثابت c رامنځ ته کیږي.

که د دفرنخیالمساوات په اوبی کی ثابته نزدې نه ټاکل کیږي، نو لاس ته راوړی حل د دې دفرنخیال مساوات ټولیز اوبی او یا د دې دفرنخیالمساوات ټولیز اینتگرال بلل کیږي.

بیلگه :

$$y' = 1 / 2 \text{ دفرنخیالمساوات}$$

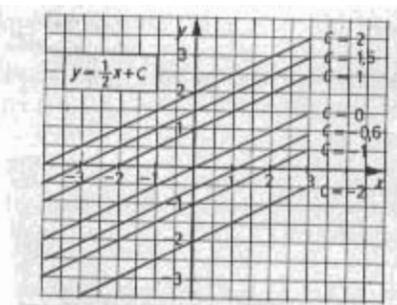
$$\Rightarrow y = (1 / 2) dx$$

$$= (1 / 2) x + c$$

$$f = \langle x \rightarrow (1/2)x + c \mid c \in \mathbb{R} \rangle \text{ ټولیز دفرنخیالمساوات}$$

د یوه دفرنخیالمساوات ټولیز حل د کپرو د کودې ( د هغو کپرو ډله، چی یو له بل سره غبرگی ځغلي ) په څیر په گراف کیانخوریدلی شي .

دلته ناپایدیری اویونی ممکن دي، ځکه چی ثابته هر په خوښه ارزښت نیولي شي.



خیره

۲- پارتيکيولر-يا ټوټشيز اوييونه partikuläre Lösung

يا برخه نيز- يا د يوې يوې برخي اوييونه

که د ورکړ شوي ديفرنخيال مساوات لپاره نور ورزيات ټاکلي شرايط ورکړ شوي وي، نو کيدی شي، چي د اينتگریشن ثابت  $C$  وشميرل شي. بيلگه:

$$y' = 1/2 \quad \text{ديفرنخيال مساوات}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \rightarrow \rangle (1/2)x + c, c \in \mathbb{R} \quad \text{ټوليز مساوات فنکشن}$$

$$y = (1/2)x + c, c \in \mathbb{R} \quad \text{ټوليز اوبی}$$

که د  $c$  د شميرلو لپاره نور ورزيات شرطونه  $x_1 = 1, y_1 = 2$  وي

$$y_1 = (1/2)x_1 + C \quad \text{بدلون يا اړونه}$$

$$C = y - (1/2)x \quad \text{ارزښت ځاي په ځاي کړی}$$

$$C = 2 - (1/2) \cdot 1$$

$$\Rightarrow C = 1,5$$

ارښت کيږدی

$$y_1 = (1/2)x_1 + 1,5 \quad \text{پارتيکيولر اوبی}$$

$$\Rightarrow 2 = (1/2) \cdot 1 + c \Rightarrow c = 1,5$$

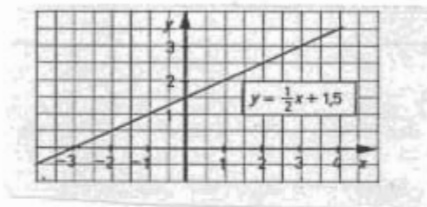
له دې د ديفرنخيال مساواتو پارتيکولر اوبی لاس ته راځي.



د  $c = 1,5$  سره له ټوليز او بيفنکشن  $f$  څخه ټوټه او بې فنکشن  $f_1$  لاس ته راځي.

$$f_1 = \langle x \rightarrow (\frac{1}{2})x + 1,5 \rangle$$

د پارتيکولار او بې په گراف کې د کرښو د کوډې څخه يوه ټاکلې کرښه بنايي د  $c = 1,5$  حالت لپاره.



په تخنیکي پراېلمونو کې زیات وخت پارتيکولار او بېونو يا حلونو ته اړتيا پېښېږي.

### ۳ - زینګولار او بېونې *singuläre Lösungen*

دا لاندې ډیفرنځیال مساوات دې ورکړ شوي وي

$$y^2 + y'^2 = 1$$

دا هلته پوره کیدونکی دی، که ونیول شي

$$y = \sin(x + C)$$

دا او بېونې د الجبري شمیرنی له لاري لاس ته نه شي راتللی

$$y^2 + y'^2 = 1 \text{ ▶ Differentialgleichung}$$

بیلګه: د جبري مساوات

$$f = \langle x \mapsto \sin(x + c) | c \in \mathbb{R} \rangle \text{ ▶ angenommene allgemeine Lösungsfunktion}$$

$$\Rightarrow y = \sin(x + c)$$

نیولی  
ټولیز  
او بې فنکشن

ازماییت

$$y = \sin(x + c) \Rightarrow y^2 = \sin^2(x + c)$$

$$\Rightarrow y' = \cos(x + c) \Rightarrow y'^2 = \cos^2(x + c)$$

$$y^2 + y'^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2(x + c) + \cos^2(x + c) = 1$$

### ازمايښت د نيول شوي اوبي رتيښتينيوالي تصديقي

دا ځنې دفرنڅيالمساوت د دې تر څنگ نورې اوبيونې هم لري، کومې چې په زينټوني ديفرنڅيالمساوات پوره کوي، مگر له دې پيدا ټوليز اوبي يا حل څخه رابيليدور نه دي.

د ټوليزې اوبيونې  $y = \sin(x + c)$  تر څنگ د فرنڅيالمساوات د فنکشنونو

$$f_1 = \langle x \rightarrow 1 \rangle \text{ او } f_2 = \langle x \rightarrow -1 \rangle$$

سره هم پوره کيږي.

دا اوبيونې يا حلونه زينگولار بلل کيږي. دا د يوه ټوليز حل د کړوکړنو د کودو هندسي پوښ انځوروي.

د دواړو زينگولار حلونو دا لاندې هندسي انځورونه د دوه کړنو په څير ښايي، چې د  $x$ -محور سره غبرگي ځغلي، کومې چې ټوليز يا عمومي اوبي يا حل  $\sin(x + C)$  پوښوي يا پټوي.

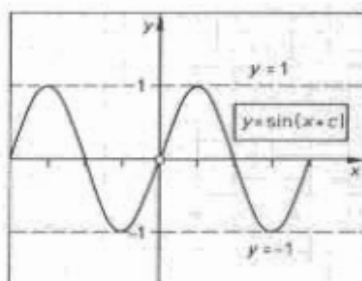
$$y^2 + y'^2 = 1$$

$$y_1 = 1; y'_1 = 0 \Rightarrow 1^2 + (0)^2 = 1$$

$$y_2 = -1; y'_2 = 0 \Rightarrow (-1)^2 + (0)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} f_1 = \langle x \rightarrow 1 \rangle \\ f_2 = \langle x \rightarrow -1 \rangle \end{matrix} \right\} \text{singuläre Lösungen}$$

زينگولار اوبيونې  
يا حلونه



د ديفرنڅيالمساواتو زينگولار حلونه د کم اهميت دي يا د کم غوروالي دي. د دې کتاب په چوکاټ کي به د دې په پيلونو يا کارونو تيريدنه وشي.

## د اوبیونی متودونه

د ديفرنخيالمساوات اوبیونی اصلاً د اینتیگرالشمیرنی له لارې صورت نیسي. د لاندې بیلگو سره دې د ممکنه حلونو لمړی تصور یا خیال رامنځ ته شي. بیلگی : د لاندې ديفرنخيالمساواتو ټولیز اوبیونی (حلونه) پیدا کړی!

$$1. \quad y' = 4x$$

$$dy / dx = 4x \quad \text{بڼه بدلون :}$$

یوځي د لمړي نظم ديفرنخيالكووخینت یا ديفرنخيالویش مخ ته پروت دی، نو د  $dy$  پسې برابریري یا ترتیبیري او اینتیگرالیري.

$$\text{اینتیگرالونه} \quad dy = 4x \, dx$$

$$\int dy = 4 \int x \, dx$$

$$y = 2x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \rightarrow 2x^2 + c \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

2. که ډیر اینتیگرالونه لاس ته راځي، نو د اینتیگرالشابتي  $c_1$  او  $c_2$  و یوې ثابتی  $c$  ته سره رابوځاي کیري.

$$y' = 8x^2 - 2x^2$$

$$y = 8 \cdot \int x^2 \, dx - 2 \cdot \int x^2 \, dx$$

$$= 2x^3 + c_1 - \frac{2}{3}x^3 + c_2$$

$$= 2x^3 - \frac{2}{3}x^3 + c; \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \rightarrow 2x^3 - \frac{2}{3}x^3 + c \mid c \in \mathbb{R} \right\rangle$$

3. د یوه بلد ۲. نظم ديفرنخيالمساوات لپاره د دوه واړه اینتیگرالولو له لارې اوبیونه پیدا کیري

$$y'' = x^2 \Rightarrow (y')' = x^2$$

$$y' = \int x^2 dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + c_1; c_1 \in \mathbb{R}$$

$$y = \frac{1}{3} \int x^3 dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$= \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2; c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x^4 - \frac{1}{12} x^4 + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

په ټوټه اینتېگرالونه کې هم دوه اینتېگرال ثابتې پیدا کېږي، کومې چې د ټوټه اوبې سره د ورکړشو شرایطو له مخې باید وټاکل شي. ۴. په دفرنخیالمساوات کې  $y' = dy/dx$  اینسول کېږي او له  $dx$  سره خلیږي

بیا دا بدلونېنه په دواړو خواوو اینتېگرالېږي.

ورپسې دواړه د اینتېگرال ثابتې  $c_1$  او  $c_2$  و  $c = 2(c_2 - c_1)$  ته سره را یوځای کېږي. (دې ته دې په شمیر پوهنیزه برخه کې پاملرنه وشي، ما د تخنیکي ستونځو له امل بل ډول نه شوې لیکلې)

$$y \cdot y' = \cos x$$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$y \cdot dy = \cos x \cdot dx$$

$$\int y dy = \int \cos x dx$$

$$\frac{y^2}{2} + c_1 = \sin x + c_2$$

$$y^2 = 2 \cdot \sin x + 2(c_2 - c_1) \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c$$

$$y = \pm \sqrt{2 \cdot \sin x + c}; c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x^4 - \sqrt{2 \cdot \sin x + c} \mid c \in \mathbb{R} \right\rangle$$

۵. اینسول کېږي  $y' = dy/dx$  او دفرنخیالمساوات د  $dx$  سره خلیږي. ورپسې د دفرنخیالمساوات دواړه خواوې اینتېگرالېږي او بیا ثابتې  $c_1, c_2$

او  $c_3$  و یوې ثابتې  $c$  ته سره راټولېږي یا رابوخاي کيږي. که دواړو لورو ته ورپسې مربع تکمیلونه ۱ ور زیاته شي نو  $y$  شمیرل کیدی شي، او لاس ته راغلی  $f$  ټولیز اوبی دی.

$$\begin{aligned}
 y' \cdot y &= y' + x \\
 \frac{dy}{dx} \cdot y &= \frac{dy}{dx} + x \\
 y \cdot dy &= dy + x \cdot dx \\
 \int y \, dy &= \int dy + \int x \, dx \\
 \frac{y^2}{2} + c_1 &= y + c_2 + \frac{x^2}{2} + c_3 \\
 y^2 - 2y &= x^2 + 2 \cdot (c_2 + c_3 - c_1) \\
 &\quad \blacktriangleright 2 \cdot (c_2 + c_3 - c_1) = c \\
 y^2 - 2y &= x^2 + c \\
 y^2 - 2y + 1 &= x^2 + c + 1 \\
 (y - 1)^2 &= x^2 + c + 1 \\
 y - 1 &= \sqrt{x^2 + c + 1} \\
 y &= \sqrt{x^2 + c + 1} + 1; c \in \mathbb{R} \\
 \Rightarrow f &= \langle x \mapsto \sqrt{x^2 + c + 1} + 1 \mid c \in \mathbb{R} \rangle
 \end{aligned}$$

په یاد ولری

- ۱ - ديفرنخيالمساوات په ټوليزه توگه ټوليز، پارتيکيولار او په ورکړ شوي حالت کي زينگولار اوبيونی يا حلونه لري.
- ۲ - ديفرنخيالمساوات په مناسب يا ورته شميرنيز کارونی له لارې په زیاتون- حالتونو کی د اینتيگرال له لارې اوبي کيږي.
- ۳ - زیات وخت باید چي اوبي ونیول شي او دا اوبي بیا د هغه د ریښتینوالی لپاره و ازمایل شي.

## ۱ . ۱ ته تمرینونه

لاندې ساده دفرنخیالمساوات اوبی یا حل کړی

1.  $y'' = x \cdot e^x$
2.  $y'' - x = 0$
3.  $2y' - \cos x = 0$
4.  $x \cdot y'' = 3y'$
5.  $y \cdot \ln x = x \cdot y'$
6.  $y' \cdot y + y' + x = 0$
7.  $y' - x^2 = 3e^x$
8.  $\sin x - e^x = y'$
9.  $y' \cdot y = x + 1$
10.  $y' \cdot y^2 = y' - x^2$
11.  $dy/dx - 3x = e^x$
12.  $y' - x^2 = x^2 - y'$
13.  $dy/dx + \cos x = 1$
14.  $y^3 \cdot y' = \sqrt{x^2 - 1}$
15.  $x^2 \cdot y' = x^4 - x^2$
16.  $e^x \cdot y' = y$
17.  $y'' = 7x^3$
18.  $d^2y/dx^2 = \sin x$
19.  $3x - y'' = a$
20.  $y'' = y'$
21.  $y'' = x \cdot \cos x$

## ۲ . ۱ د لومړي نظم دفرنخیالمساواتونه

د لمړي نظم دفرنخیالمساواتونه داسی پیژندل کیږي، چی یواخی لمړی رابیلیدني  $y'$  او یا د  $y'$  په توانونه لکه  $y'^2, y'^3$  رامنځ ته کیږي. د دې ترڅنگ کیدی شي  $x$  او  $y$  همداسی د دوي توان رامنځ ته شي بیلګي:

$$y' + x^2 = 3y^2 + 3y$$

$$y \cdot y' = y'^2 - x^2 + x - 1$$

$$y' = f(x, y)$$

تولیز:

د  $y'$  او  $x$  موجودیت او لویوالی تنظیموني پسی د دفرنخیالمساواتو مختلف ډولونه توپیریدلی شي. دلته به د دې مهمو باندې لنډې خبرې وشي.

## ۱ . ۲ . ۱ دفرنخیالمساوات د بیلوشو اووښتونو سره

دفرنخیالمساواتو د بیلو یا جودا اووښتونو یا واریابلو سره، هغه مساوات په نڅښه

کیري، په کومو کي چي ممکن وي، چي لويي  $dy, g(y)$  په همدې توگه  $dx, f(x)$  هر يو يي په يوه لور بيل يا خانله کړو.

د دې اړونى سره کيدى، چي مساوات په دواړو خواوو ايتگرال شي.

بيلگه؛

$$y' \cdot y^4 = x^2 \cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot y^4 \cdot \frac{1}{y} = x^2$$

$$dy \cdot y^3 = x^2 \cdot dx \quad \blacktriangleright \quad y^3 = g(y); \quad x^2 = f(x)$$

$$\int y^3 dy = \int x^2 dx$$

۱. دفرنخيالمساوات د  $y^2$  او  $dx$  سره ځليږي. بيا کيدى شي، چي د مساوات

دواړه خواوې ايتيگرال شي د  $y^3$  پسى او بيونى له امله ثابتى  $3 \cdot (c_2 - c_1)$  و

ثابتى  $c$  ته راغونډيږي (دا پورته ټول په لاندي بيلگه کي روښانيږي).

دلته  $f$  غوښتونکى او بيفنکشن يا حلفنکشن دى.

بيلگه:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} \quad \blacktriangleright \quad x^2 = f(x); \quad y^2 = g(y)$$

$$y^2 \cdot dy = x^2 \cdot dx$$

$$\int y^2 dy = \int x^2 dx$$

$$\frac{y^3}{3} + c_1 = \frac{x^3}{3} + c_2$$

$$y^3 = x^3 + 3(c_2 - c_1) \quad \blacktriangleright \quad 3(c_2 - c_1) = c$$

$$y^3 = x^3 + c$$

$$y = \sqrt[3]{x^3 + c}$$

$$\Rightarrow f = \langle x; \sqrt[3]{x^3 + c} | c \in \mathbb{R} \rangle$$

۲. د دې لپاره، چي د  $dy$  د  $g(x) = y - 4$  سره او  $x$  د  $f(x) = x^2$  سره

رايوځايونه لاس ته راوړاى شو. نو دفرنخيالمساوات د  $dx$  سره ځليږي او  $x^2$

سره ويشل کيږي.\*

ورپسی له دې سره  $dy$  او  $g(y)$  همدا ډول  $dx$  او  $f(x)$  هر یو په یوه خوا خانله کېږي. د کوم سره چې  $dx$  او  $dy$  باید په مات باندې کې پراته یا خای وي. \*\*  
د مساوات دواړه خواوې ایتیکرال کېږي. د ایتیکرال ثابتې  $c_1$  او  $c_2$  و  $c_3$  ته راغونډېږي.

دا راپیداشوی فنکشن د  $y$  په لور اوبی کېږي. د  $e^c$  لپاره  $c$  ایښوول کېږي. \*\*\*  
او  $f$  د دفرنخیالمساوات ټولیز اوبی دی. \*\*\*\*

یا دونه: لاندې د شمیرنی په برخه کې په \* پسی \* ...، او \*\*\* پسی \*\*\* ...  
په \*\*\*\* پسی \*\*\*\* راځي.

$$x^2 \cdot \frac{dy}{dx} - y + 4 = 0$$

\*

$$x^2 \cdot dy - y \cdot dx + 4 \cdot dx = 0$$

$$dy - \frac{y \cdot dx}{x^2} + \frac{4 \cdot dx}{x^2} = 0$$

$$dy - \frac{dx}{x^2} (y - 4) = 0$$

$$\frac{dy}{y-4} - \frac{dx}{x^2} = 0$$

$$\frac{dy}{y-4} = \frac{dx}{x^2} \quad **$$

$$\int \frac{dy}{y-4} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow \ln|y-4| + c_1 = -\frac{1}{x} + c_2 \quad \triangleright c_2 - c_1 = c_3 \quad ***$$

$$y-4 = e^{c_3 - \frac{1}{x}}$$

$$y = e^{c_3} \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4 \quad \triangleright e^{c_3} = c$$

$$y = c \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4$$

$$\Rightarrow f = \langle x \cdot c \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4 | c \in \mathbb{R} \rangle \quad ****$$



دیفرنشیال مساوات د جلا یا بیلو شوو اووښتونو سره، ځان په دې گروپونو ټوټه کوو:

۱- د لاندې فورم مساوات

$$y' = f(x)$$

دا فورم همغه ورسره بلد د تمرینوز کونی وظیفه ورکوي، لکه

څنگه، چی په اینتیگرالشمیرنه کی.

بیلگه:

$$y' = x^2$$

$$dy / dx = x^2 \quad \text{بدلونه}$$

$$dy = x^2 dx \quad \text{اینتیگرالونه}$$

$$y = \int x^2 dx$$

$$y = (x^3 / 3) + C \quad \text{تولیز اوبی}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \rightarrow (x^3 / 3) + c \mid c \in \mathbb{R} \rangle \quad \text{دلته } f \text{ تولیز حل دی}$$

۲- د لاندې فورم مساوات  $y' = g(y)$

اووښتونی  $dy$  او  $g(y) = 3y^2 + 1$  په همدې توگه  $dx$  هر د مساوات په یوه خوا

خانله کیږي.

د مساوات دواړه خواوې اینتیگرالیري، د کوم سره چی د مخامخ بنې  $\int \frac{dz}{z^2 + 1}$

اینتیگرال پخوا اوبی شویدی.

بیلگه ( یادونه: دا بیلگه لکه چی نارینتیا اوبی وې، پام ورته وکړی، ؟.؟ )

$$y' = 3y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{3y^2 + 1} = dx$$

$$\int \frac{dy}{3y^2 + 1} = \int dx$$

کین لور ته خانله کیږي په داسی توگه، چی د اینتیگریشن شاپته  $\ln \left| \frac{3y + \sqrt{3}}{3y - \sqrt{3}} \right|$

بني خوا ته راوړل شي او مساوات د  $2\sqrt{3}$  سره ځل شي.

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{3y + \sqrt{3}}{3y - \sqrt{3}} \right| + c_1 = x + c_2$$

$$\ln \left| \frac{3y + \sqrt{3}}{3y - \sqrt{3}} \right| = 2\sqrt{3} \cdot x + 2\sqrt{3}(c_2 - c_1)$$

د لوگاریتم د اویونی سره په بني لور اکسپوننشلفنکشن لاس ته راځي، کوم چی په یوه ځل پوټه کیدی شي.

د سادوني لپاره ټاکل کيږي

$$c = e^{2\sqrt{3}(c_2 - c_1)}$$

بیا د  $(3y - \sqrt{3})$  سره ځل کيږي او بالاخره مساوات د  $y$  سره کین لور ته راوړل کيږي همداسی  $\sqrt{3}$  و ښي خوا ته.

$$\frac{3y + \sqrt{3}}{3y - \sqrt{3}} = e^{2\sqrt{3} \cdot x + 2\sqrt{3}(c_2 - c_1)}$$

$$\frac{3y + \sqrt{3}}{3y - \sqrt{3}} = e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot e^{2\sqrt{3}(c_2 - c_1)} \rightarrow e^{2\sqrt{3}(c_2 - c_1)} = c$$

$$\frac{3y + \sqrt{3}}{3y - \sqrt{3}} = e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot c$$

$$3y + \sqrt{3} = (3y - \sqrt{3}) \cdot e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot c$$

$$3y + \sqrt{3} = 3y \cdot e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot c - \sqrt{3} \cdot e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot c$$

د  $y$  نوکوتلو وروسته د دفترخیالمساوات د ټولیز اویونی فنکشنمساوات لاس ته راځي

$$3y - 3y \cdot e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot c = -\sqrt{3} \cdot e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot c - \sqrt{3}$$

$$3y(1 - e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot c) = -\sqrt{3}(e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot c + 1)$$

$$y = \frac{\sqrt{3} \cdot e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot c + 1}{3 \cdot e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot c - 1}; c \in \mathbb{R}$$

۳. د  $y' = f(x) \cdot g(y)$  بني مساوات

د دفترخیالمساوات د بیلیدنی وروسته اینتیگرالیري.

د  $y$  پسی اویونی وروسته ږدو

$$e^c \cdot e^{-c} = c$$

ورپسی  $f$  بیا  $f$  ټولیز یا عمومي اویبی دی

$$y' = 4x^2 \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = 4x^2 \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = 4 \int x^2 dx$$

$$\ln|y| + c_1 = \frac{4}{3} x^3 + c_2$$

$$y = e^{\frac{4}{3}x^3 + c_2 - c_1}$$

$$y = e^{\frac{4}{3}x^3} \cdot e^{c_2 - c_1} \Rightarrow e^{c_2 - c_1} = c$$

$$y = c \cdot e^{\frac{4}{3}x^3}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto c \cdot e^{\frac{4}{3}x^3} \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

۴- د  $y' = f(x) / g(y)$  یا بنی یا فورم مساوات اووښتونی  $dy, y$  او  $dx, x$

دوه لوریز خانله کيږي.

$$y' = x / y$$

$$dy / dx = x / y$$

$$\Rightarrow y dy = x dx$$

بیا د مساواتو داوړه خواوې ایتیکراليري او د  $y$  پسی اویبی کيږي.

$$\int y dy = \int x dx$$

$$(1/2) y^2 + c_1 = (1/2) x^2 + c_2$$

$$2(c_2 - c_1) = c$$

$$y^2 = x^2 + c \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + c}$$

دافنکشن  $f$  د دفرنخیالمساوات ټولیز اویبی یا حل دی

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto \sqrt{x^2 + c} \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

## ۵ - د لاندې فورم مساوات

$$y' = g(y) / f(x)$$

اووښتونى  $y$ ,  $dy$ ,  $x$  او  $dx$  په دواړو خواوو ځانله کيږي. او په اخر کې دو خواوې ايتيگراليري او په  $y$  پسې اوبى کيږي.

هغه لاس ته راوړې ايتيگریشن ثابتى ږدو:  $c_2 - c_1 = \ln |c|$

$$y' = y/x ; \quad dy/dx = y/x$$

$$\int dy/y = \int dx/x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| + c_1 = \ln|x| + c_2$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c_2 - c_1, \quad c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|x \cdot c|$$

$$y = x \cdot c$$

$$\Rightarrow f = \langle x \rightarrow x \cdot c \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

دا لاس ته راغلى  $f$  ټوليز حل دى

بيلگى

$$1. \quad \begin{aligned} y' - 3x &= -4x^2 \\ dy/dx &= 4x^2 + 3x \end{aligned}$$

$$y = 4 \cdot \int x^2 dx + 3 \cdot \int x dx$$

$$y = (4/3)x^3 + c_1 + (3/2)x^2 + c_2$$

$$c_2 + c_1 = c$$

ږدو

$$\Rightarrow f = \langle x \rightarrow (4/3)x^3 + (3/2)x^2 + c \rangle$$

دا  $f$  د مساوات ټوليزه ابيونه ده

$$2. \quad \sin x - y' = \cos x + y'$$

$$\sin x - dy/dx = \cos x + dy/dx$$

$$2dy = \sin x \cdot dx - \cos x \cdot dx$$

$$y = (1/2) \int \sin x dx - (1/2) \int \cos x dx$$

$$y = -(1/2) \cos x + c_1 - (1/2) \sin x + c_2$$

بږدو:  $c_1 + c_2 = c$

$$\Rightarrow f = \langle x \rangle - (1/2) \cos x - (1/2) \sin x + c$$

$$3. \quad 2y' = 2y^2 + 8y - 2$$

مساوات د مربع تکمیلولو له لارې په فورم  $(z+a)^2 - b^2$  راوړل کیږي

$$y^2 + 4y - 1 = (y^2 + 4y + 4) - 4 - 1 = (y+2)^2 - (\sqrt{5})^2 \Rightarrow \int \frac{dz}{(z+a)^2 - b^2}$$

دا لاندې اینټیګرال د مخه اوبی شوی دی (پاډاډو، شرا)

$$\int [(1/(z+a)^2 - b^2)] dz$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 4y - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = (y+2)^2 - (\sqrt{5})^2$$

$$\frac{dy}{(y+2)^2 - (\sqrt{5})^2} = dx$$

$$\int \frac{dy}{(y+2)^2 - (\sqrt{5})^2} = \int dx$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} \right| + c_1 = x + c_2$$

$$\ln \left| \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} \right| = 2\sqrt{5} \cdot x + 2\sqrt{5}(c_2 - c_1)$$

$$\ln z = a \Leftrightarrow z = e^a$$

$$\Rightarrow \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} = e^{2\sqrt{5} \cdot x} \cdot e^{2\sqrt{5} \cdot (c_2 - c_1)}$$

بږدو  $c = c_2 - c_1$ . بیا د  $y+2+\sqrt{5}$  سره ځلیږي، ورپسې هغه غږی،

چې  $y$  لري د مساوات یوې لور ته ځانله کیږي او  $y$  له نوکانو راوځي، دا د  $y$

په لور اوبی - یا حل کیږي، چې په دې

توگه ټوليز اوبی لاس ته راځي .

$$y = \frac{(2 + \sqrt{5}) \cdot e^{-2\sqrt{5} \cdot x} + \sqrt{5} - 2}{1 - e^{-2\sqrt{5} \cdot x}}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x, \frac{(2 + \sqrt{5}) \cdot e^{-2\sqrt{5} \cdot x} + \sqrt{5} - 2}{1 - e^{-2\sqrt{5} \cdot x}} \right\rangle$$

بیلگه ۴ :  $y' = y$

د  $x = 0$  لپاره  $y = e$  دی

غړی  $g(x)$  او  $dy$  د مساوات په یوه لور بیلیري. په اخر کې دواړه خواوې آینتیکرال کیري.

$$dy / dx = y$$

$$dy / y = dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (1/y) dy = \int dx$$

$$\ln|y| + c_1 = x + c_2$$

$$\ln|y| = x + (c_2 - c_1) , c_2 - c_1 = c$$

$$\ln|y| = x + c$$

$$y = e^{x+c}$$

د  $y$  په لور اوبیونه ټوليز اوبی  $f$  ورکوي

$$\Rightarrow f = \langle x \rightarrow e^{x+c} \rangle$$

ثابته  $c$  د شرایطو  $x_1 = 0$  او  $y_1 = e$  څخه لاس ته راځي.

$$c = \ln|y| - x$$

$$= \ln e - 0 = 1$$

دلت  $c = 1$  او  $f_1$  ټوته نیزه اوبیونه ده.

$$\Rightarrow f_1 = \langle x \rightarrow e^{x+1} \rangle$$

بیلگه ۵ :  $\sqrt{y} = x - 1$

ورزیات شرایط : د  $x_1 = 0$  لپاره دې  $y_1 = 10$  وي.

دفرنخیالمساوات د پسی اړول کیري او مات یا کسر په برخه ماتونو ټوټه کیري. د دې برخمسواتو اینتیگرالونی وروسته د دفرنخیالمساوات ټولیز اوپیونه یا حل لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
 c_1 + c_2 + c_3 &= c && \text{پردو} \\
 x \cdot \sqrt{\frac{dy}{dx}} &= x - 1 && \text{اوبی} \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{(x-1)^2}{x^2} \\
 dy &= \left( \frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) \cdot dx \\
 \int dy &= \int dx - 2 \cdot \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx \\
 y &= x + c_1 - 2 \cdot \ln|x| + c_2 - \frac{1}{x} + c_3 \\
 y &= x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + c \\
 \Rightarrow f &= \left\langle x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + c \right\rangle
 \end{aligned}$$

ورپسی د اینتیگرال ثابتته C د شرایطو  $x = 2; y = 10$  ځای په ځای کولو څخه شمیرل کیري.

$$c = y_1 - x_1 + 2 \cdot \ln|x_1| + 1/x_1$$

$$x_1 = 2, y_1 = 10 \quad \text{پردو}$$

$$= 10 - 2 + 2 \cdot \ln 2 + 1/2 = 9,8863$$

بیا د c ارزښت په ټولیز اوبی کی ځای په ځای کیري او په دې توگه پارټیکولار اوبی لاس ته راځي.

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + 9,8863 \right\rangle$$

$$y'^2 = 1 - x^2 \quad \text{بیلگه ۶:}$$

شرایط: د  $x = 1$  لپاره  $y = 0$  دی

د دفرنخیالمساواتو ریښه (جذر) وځي یا نیول کیري او د y په لور اوبی کیري

$$\begin{aligned} (dy / dx)^2 &= 1 - x^2 \\ dy / dx &= \sqrt{1 - x^2} \\ dy &= \sqrt{1 - x^2} \cdot dx \end{aligned}$$

په لاندې کې راغلی اینتیګرال  $\int \sqrt{1 - x^2} dx$  د مخه اوبی شوی دی. دا اینتیګریشن مو بیا ټولیز اوبیونی ته بیایي.

$$\begin{aligned} \int dy &= \int \sqrt{1 - x^2} dx \\ y &= \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \text{Arcsin } x + c \\ \Rightarrow f &= \left\langle x, \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \text{Arcsin } x + c \right\rangle \end{aligned}$$

د  $c$  ثابت د شرایط  $x_1 = 1$  او  $y_1 = 0$  د اینسولولو له لارې شمیرل کیږي. که  $c = -\frac{\pi}{4}$  په  $f$  کې کیږدو، نو  $f_1$  پارټیکولار اوبیونه لاس ته راځي

$$c = y_1 - \frac{x_1}{2} \sqrt{1 - x_1^2} - \frac{1}{2} \text{Arcsin } x_1 \quad \begin{matrix} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{matrix}$$

$$c = 0 - 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$c = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x, \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \text{Arcsin } x - \frac{\pi}{4} \right\rangle$$

بیلګه ۷ :  $y' = y \cdot [x / (x^2 + 1)]$

اوس  $y, dy$  او  $f(x) = x / (x^2 + 1)$  د دفرنخیالمساوات په دواړو خواو کې خانله کیږي.

د مساوات دواړه خواوې اینتیګرال کیږي او بیا د  $y$  پسې اوبی یا حل کیږي.



$$dy / dx = y \cdot [x / (x^2+1)]$$

$$dy / y = [x / (x^2 + 1)] \cdot dx$$

$$\int dy / y = \int [x / (x^2+1)] \cdot dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$\ln|y| = (1/2) \ln(x^2+1) + C$$

د اینتگرال ثابتو  $c_1$  او  $c_2$  یوځایونه و  $c_2 - c_1 = \ln|c|$  ته هدفمند دی

$$\ln|y| = \ln \sqrt{x^2+1} + (c_2 - c_1), \quad c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|y| = \sqrt{x^2+1} + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|\sqrt{x^2+1} \cdot c|$$

$$y = \sqrt{x^2+1} \cdot c$$

او لاندې  $f$  ټولیز اوبیفنکشن دی

$$\Rightarrow f = \langle x \rightarrow c\sqrt{x^2+1} \rangle$$

بیلگه ۸:  $y' = [(x^2 - 4) / x^2] \cdot (1 - y^2)$

ورزیات شرطونه: د  $x_1 = 1$  لپاره  $y_1 = 1$  دی

او  $g(x)$ ,  $dy$  او  $f(x)$ ,  $dx$  د مساوات په دواړو لورو ځانله کیږي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 - 4)\sqrt{1 - y^2}}{x^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{(x^2 - 4) \cdot dx}{x^2}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int dx - 4 \cdot \int \frac{dx}{x^2}$$

د مساوات دواړه خواوې اینتگرال کیږي، د دواړو اینتگریشن ثابتو  $c_1$

او  $c_2$ ,  $c_4$  زیاتون د سره  $c$  مساوي لیکل کیږي:  $c_2 - c_1 - c_4 = c$

$$\text{Arcsin } y + c_1 = x + c_2 - 4 \left[ - \left( \frac{1}{x} \right) + c_3 \right]$$

$$\text{Arcy} = [(x^2 + 4) / x] + c$$

$$y = \sin [(x^2 + 4) / x + c]$$

د دې په اخر کی ټولیز اوبی f لاس ته راځي

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \sin \left( \frac{x^2 + 4}{x} + c \right) \right\rangle$$

ثابته c د ورکړ شوو شرایطو څخه پیدا کيږي، داسی، چی  $x_1$  او  $y_1$  د فنکشن- مساوات په ټولیز اوبی کی ځای په ځای شي. په دې توگه ورپسی ټوټه اوبیونه  $f_1$  لاس ته راځي

$$c = \text{Arcsin } y_1 - \frac{x_1^2 + 4}{x_1} \quad \begin{matrix} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{matrix}$$

$$= \text{Arcsin } 1 - \frac{1^2 + 4}{1}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 5$$

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot \sin \left( \frac{x^2 + 4}{x} + \frac{\pi}{2} - 5 \right) \right\rangle$$

بیلگه ۹ :  $x^2 \cdot y^2 + y^2 + x \cdot y^3 \cdot y' = x \cdot y \cdot y'$

دفرنخیالمساوات د dx سره ځلیري اوبه  $x \cdot y^2$  ویشلکيږي.

غیري د dx، x سره په یوه خوا او د dy، y سره په بله خواځانله کيږي. انتیگریشن د اوبی په څیر یو ایمپلیسیت د فنکشن مساوات ورکوي، کوم، چی ایمپلیسیت

نه شی انځوریدلی وروسته ږدو  $c_4 + c_3 - c_2 - c_1 = c$

$$x^3 \cdot y^2 + y^2 + x \cdot y^3 \cdot \frac{dy}{dx} - x \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^3 \cdot y^2 \cdot dx + y^2 \cdot dx + x \cdot y^3 \cdot dy - x \cdot y \cdot dy = 0$$

$$x^2 \cdot dx + \frac{dx}{x} + y \cdot dy - \frac{dy}{y} = 0$$

$$x^2 \cdot dx + \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} - y \cdot dy$$

$$\int x^2 dx + \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} - \int y dy$$

$$\frac{x^3}{3} + c_1 + \ln|x| + c_2 = \ln|y| + c_3 - \frac{y^2}{2} + c_4$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + \ln\left|\frac{x}{y}\right| + c = 0$$

بیلگه ۱۰ :  $dx - dy = \frac{4 \cdot dx}{4+x} + \frac{dy}{y}$

د  $x$ ،  $dx$  او  $y$ ،  $dy$  خانلونی وروسته د دفرنخیالمساوات دواړه خواوې اینتیگرالیری د اینتیگریشنثابتی، کیدی شی سره رایوځای شی، اوبی اکسپلیشیت نه شی انځوریدی

$$dx - \frac{4 \cdot dx}{4+x} = \frac{dy}{y} + dy$$

$$\int dx - 4 \int \frac{dx}{4+x} = \int \frac{dy}{y} + \int dy$$

$$x + c_1 - 4 \cdot \ln|4+x| + c_2 = \ln|y| + c_3 + y + c_4$$

$$\blacktriangleright c_4 + c_3 - c_2 - c_1 = c$$

$$\underline{x - 4 \ln|4+x| = \ln|y| + y + c}$$

۱ . ۲ . ۲ دفرنخیالمساواتد هوموجینو اووښتونکو

یا واریابلو سره

د هوموجینو اووښتونکو سره دفرنخیالمساوات په هر غړي کی یو دفرنخیال  $dx$  یا  $dy$  لري.

د واریابلو  $x$  او  $y$  د اکسپوننتو یا په جگگنونو زیاتون د مساواتو په هر غړي کی برابر لوي دی.

دفرنخیالمساوات د هوموجینو اووښتونکو سره د Substitution سبستیچیوشن یا ( د ) په ځای ایښوونی یا بدلون له لارې ځان اوبیوني یا حل ته پریردی، په کوم کی چی  $y = x \cdot z$  ځای په ځای کیږی، او د کوم سره چی بیا  $z$  د  $x$  فنکشن دی. ( د ) په ځای ایښوونه مو یوه مساوات ته بیایی، چی اوبتونکی کی بیلی وی.

سبستیچیوشن : په ورکړ شوي مساوات  $y = x \cdot z$  او په ورته یا همدې توگه  $y^2 = x^2 \cdot z^2$  سبستیچیوشن کو. کله چی ترم  $y = x \cdot z$  د خلقاعدې سره دفرنخیالیږي، نو د  $dy$  لپاره بیا  $z \cdot dx + x \cdot dz$  ږدو ، دا نوي منځ ته راغلي مساوات د خانله شوو اوښتونو یا واریابلو سره د د فرنخیالمساوات په بڼه راوړل کیږي. په کوم کی چی د  $x^2$  سره خانله شي او د  $dx$  ، همداسی  $z$  ،  $dz$  سره غږي د بنیبدلون له لارې خانله شي

$$x^2 + y^2 + x \cdot y \cdot y' = 0$$

$$\frac{x^2 \cdot dx}{dx} + \frac{y^2 \cdot dx}{dx} + \frac{x \cdot y \cdot dy}{dx} = 0$$

$$\frac{x^2 \cdot dx}{n=2} + \frac{y^2 \cdot dx}{n=2} + \frac{x \cdot y \cdot dy}{n=2} = 0$$

$$\text{Man setzt } y = x \cdot z \rightarrow z = f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$\text{بیلگه : } x^2 \cdot dx + y^2 \cdot dx + xydy = 0$$

اوبی یا حل : اوبی په څلورو پلونو کی پلې کوو

۱- په مساوات کی بدلون منځ راوړو یا سبستیچیوشن کوو

$$y = x \cdot z \Rightarrow y^2 = x^2 \cdot z^2$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$x^2 \cdot dx + x^2 \cdot z^2 \cdot dx + xxz (z \cdot dx + x \cdot dz) = 0$$

$$x^2 \cdot dx + x^2 z^2 \cdot dx + x^3 z \cdot dz = 0$$

$$dx(1 + 2z^2) = -x \cdot z \cdot dz$$

$$dx / x = -(z \cdot dz) / (1 + 2z^2)$$

دا نوی رامنځ ته شوی مساوات د په دواړه لورې خانله شوو اووښتونکو د

دفرنخیالمساوات په بڼه راوړل کیږي.

۳- د مساوات دواړه خواوې اینتیگرال کیږي.

د اینتیگرال  $\int x \cdot dx / (a^2 + x^2) = (1/2) \ln(a^2 + x^2)$  اوبی راته د مخه روښان دی

$$\int \frac{dx}{x} = - \int \frac{z}{1+2z^2} dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \int \frac{z}{\frac{1}{2} + z^2} dz$$

$$\ln|x| + c_1 = -\frac{1}{4} \ln\left(\frac{1}{2} + z^2\right) + c_2 \Rightarrow z^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

انیتیکرایشتنثابتی په یوه لور راوړل کیږي او لویه  $z^2$  بیرته د  $y^2/x^2$  سره بدلیږي. د لوگاریتم د زیاتون څخه بیا د یو ځل (ضرب) لوگاریتم جوړیږي او د لوگاریتم مساوات د اکسپوننشل مساوات په څیر لیکل کیږي.

بیا  $x$  رېښې ته راوړل کیږي او مساوار په ۴ توان کیږي.

د  $e^{4(c-c_1)} = c$  لپاره لیکل کیږي، اوس د  $y$  ساده شمیرل کیدی شي.

هغه  $f$  چی وروسته لاس ته راځي د دفرنخیالمساوات ټولیز فنکشن اوبی دی

$$\ln|x| + \ln \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{y^2}{x^2}} = c_2 - c_1$$

$$\ln \left| x \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot x^2 + y^2}{x^2}} \right| = c_2 - c_1$$

$$x \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot x^2 + y^2}{x^2}} = e^{c_2 - c_1}$$

$$\sqrt{0.5 \cdot x^4 + x^2 \cdot y^2} = e^{c_2 - c_1}$$

$$0.5 \cdot x^4 + x^2 \cdot y^2 = e^{4(c_2 - c_1)} \Rightarrow e^{4(c_2 - c_1)} = c$$

$$0.5 \cdot x^4 + x^2 \cdot y^2 = c$$

$$x^2 \cdot y^2 = c - 0.5x^4$$

$$y^2 = \frac{1}{x^2} (c - 0.5x^4)$$

$$y = \frac{1}{x} \sqrt{c - 0.5x^4}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \frac{1}{x} \sqrt{c - 0.5x^4} \right\rangle$$

بیلگی :

$$x + y = y' \cdot x \quad (\text{لومړۍ})$$

دلته  $y = x \cdot z$  سبستیچیون کیري او د په توانقاعدي له مخی  $dy / dx$  جوړوو او ږدو  $dy = z \cdot dx + x \cdot dz$ . اوس د بنیډلو له لاری  $dx$ ,  $x$  او  $dz$  د مساواتو په دواړو لورو خانله کیري.

$$x + y = \frac{dy}{dx} \cdot x \quad \blacktriangleright y = x \cdot z$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$x + x \cdot z = \frac{dy}{dx} \cdot (z \cdot dx + x \cdot dz)$$

$$x \cdot dx + x \cdot z \cdot dx = x \cdot z \cdot dx + x^2 \cdot dz$$

د اوونټونکو له بیلولو وروسته مساوات په دواړو لورو اینتیگرالیري. د اینتیگر-یشنثابتی رایوځای کیري.

د لاس ته راغلی  $f$  د دفرنخیالمساوات ټولیز اوبی دی

$$x \cdot dx = x^2 \cdot dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int dz$$

$$\ln|x| + c_1 = z + c_2 \quad \blacktriangleright c_1 - c_2 = c$$

$$\ln|x| + c = z \quad \blacktriangleright z = \frac{y}{x}$$

$$y = x(\ln|x| + c)$$

$$\Rightarrow f = \langle x \cdot \ln|x| + c \rangle$$

$$(x^2 + y^2) \cdot dx = xy \cdot dx \quad \text{بیلگه ۲ :}$$

سبستیچیون یا د اوونټونکو بدلون  $y = x \cdot z$  او  $y^2 = x^2 \cdot z^2$  د خلقاعدي

سره  $dy/dx = z \cdot dx + x \cdot dz$  جوړوو او پر دو  $dy = z \cdot dx + x \cdot dz$  .  
 د مساوات بڼه بدلون سره  $x, dx$  همداسی  $z, dz$  په دواړو لورو ځانله کوو.  
 د اوبتونکو، داوړو لورو ته له بیلولو وروسته مساوات اینتیگرالیری.

$$(x^2 + y^2) dx = x \cdot y \cdot dy$$

$$x^2 \cdot dx + y^2 \cdot dx = x \cdot y \cdot dy$$

$$\Rightarrow y = x \cdot z \Rightarrow y^2 = x^2 \cdot z^2$$

$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$x^2 \cdot dx + x^2 \cdot z^2 \cdot dx = x \cdot x \cdot z (z \cdot dx + x \cdot dz)$$

$$dx + z^2 \cdot dx = z^2 \cdot dx + z \cdot x \cdot dz$$

$$\frac{dx}{x} = z \cdot dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int z \cdot dz$$

$$\ln|x| + c_1 = \frac{z^2}{2} + c_2$$

بیاد  $z^2$  په ځای  $y^2/x^2$  ځای په ځای کیری، د  $2(c_2 - c_1)$  لپاره  $c$  پر دو.  
 لاس ته راغلی  $f$  د دفرنخیالمساوات ټولیز اوجی دی.

$$2 \cdot \ln|x| + 2c_1 - 2c_2 = z^2 \Rightarrow z^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

$$2c_1 - 2c_2 = c$$

$$2 \cdot \ln|x| + c = \frac{y^2}{x^2}$$

$$y^2 = x^2(2 \cdot \ln|x| + c)$$

$$y = x \sqrt{2 \cdot \ln|x| + c}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{(x \cdot \sqrt{2 \cdot \ln|x| + c})}}$$

$$y' = (y/x) - (y^2/x^2) \quad \text{بیلگه ۳}$$

سیستیچیشن (د) په ځای اینیول

$y = x \cdot z$  او  $y^2 = x^2 \cdot z^2$  د خلاقعدي

سره  $dy/dx$  جوړوو او زیږو

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

د مساوات د بڼې بدلون له لارې  $x, dx$

همداسې  $z, dz$  په دواړو لوروځانله کوو

د اووښتونکو له بیلولو وروسته

مساوات ایتیگرالوو.

د  $z$  لپاره بیرته  $y/x$  ږدو او

ایتیگریشنثابتی رایوځای کوو.

د مساوات د  $y$  پسې اوبی مو

ټولیز اوبی  $f$  ته بیایی.

$$y' \cdot (y - x) = y \quad \text{بیلگه ۴}$$

(د) په ځای ږدو  $y = x \cdot z$

د خلقانون سره  $dy/dx$  جوړوو

مساوات بڼیدلو لاسره  $x, dx$  همداسې

$z, dz$  په دواړو لورو ځانله کوو.

د اووښتونو ځانلونې وروسته

دواړه خواو پاینتیگرالوو.

نو باور لري

$$\int [f'(x)/f(x)] \cdot dx = \ln[f(x)] + C$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright y = x \cdot z &\Rightarrow y^2 = x^2 \cdot z^2 \\ \Rightarrow dy &= z \cdot dx + x \cdot dz \end{aligned}$$

$$\frac{z \cdot dx + x \cdot dz}{dx} = \frac{x \cdot z}{x} - \frac{x^2 \cdot z^2}{x^2}$$

$$z + \frac{x \cdot dz}{dx} = z - z^2$$

$$-\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x}$$

$$-\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{z} + c_1 = \ln|x| + c_2 \quad \blacktriangleright z = \frac{y}{x}$$

$$c_2 - c_1 = c$$

$$\frac{x}{y} = \ln|x| + c$$

$$y = \frac{x}{\ln|x| + c}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \frac{x}{\ln|x| + c} \right\rangle$$

$$dy(y - x) = y \cdot dx$$

$$\blacktriangleright y = x \cdot z$$

$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$(z \cdot dx + x \cdot dz)(x \cdot z - x) = x \cdot z \cdot dx$$

$$x \cdot z^2 \cdot dx - x \cdot z \cdot dx + x^2 \cdot z \cdot dz - x^2 \cdot dz - x \cdot z \cdot dx = 0$$

$$z^2 \cdot dx - z \cdot dx + x \cdot z \cdot dz - x \cdot dz - z \cdot dx = 0$$

$$dx(z^2 - 2z) + x \cdot dz(z - 1) = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{z-1}{z^2-2z} dz = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{2z-2}{z^2-2z} dz = 0$$



(د) په ځایونه  $z = y/x$  اېښوونې سره په  
څټ راگرځول کيږي.

ورپسې اوبیونه مو فنکش-  
برابرون ته بیایي، کوم چی یواځي  
ایمپلیسیټ انځوریدلی شي.

$$\ln|x| + c_1 + \frac{1}{2} \ln|z^2 - 2z| + c_2 = 0$$

$$2 \cdot \ln|x| + \ln|z^2 - 2z| = 2(-c_1 - c_2)$$

$$\ln x^2 + \ln|z^2 - 2z| = -2(c_1 + c_2)$$

$$\blacktriangleright y = x \cdot z$$

$$\Rightarrow z = \frac{y}{x}$$

$$\ln \left| x^2 \left( \frac{y^2}{x^2} - 2 \frac{y}{x} \right) \right| = -2(c_1 + c_2)$$

$$\ln|y^2 - 2xy| = -2(c_1 + c_2)$$

$$y^2 - 2xy = e^{-2(c_1 + c_2)}$$

$$\blacktriangleright e^{-2(c_1 + c_2)} = c$$

$$\underline{y^2 - 2xy = c}$$

### ۱ . ۲ . ۳ لاینی دفرنخیال مساوات

د لمړي نظم لاینی دفرنخیالمساوات  
لاندي ، هغه مساوات پوهیږو، چی  $y$   
او  $y'$  په ۱-ام گراد کی ، دا په دې  
مانا چی لاینی وي. ولري. دا شرطونه  
داووبنتونکی  $x$  لپاره باور نه لري.  
دلته  $F(x)$  او  $f(x)$  د  $x$  فنکشونه  
یا بلواک دي او یا ثابتی.

$$\text{allgemein: } \frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = F(x)$$

$$\text{Beispiele: } \bullet y' - y \cdot \frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\bullet y' \cdot x = x \cdot \sin x - y$$

$$\bullet y' + x^2 = x^4 \cdot y$$

د لاینی دفرنخیالمساوات اوبیونی لپاره کیدی شي، چی بیلابیلی همغه ارزښتیز  
متودونه وکارول شي.

### د برنولي ( Bernoulli ) متود له مخی اوبیونه

۱- سبستیچیوشنوور  $y = u(x) \cdot v(x)$  له  
دې څخه دخلقاعدي له لارې لاس ته راځي

د  $y$  او  $y'$  لپاره ارزښتونه په دفرنخیال-

لمساوات کي کیښوول کيږي

$$y' - y \cdot \frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\blacktriangleright y = u(x) \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow y' = u(x) \frac{dv}{dx} + v(x) \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow u(x) \frac{dv}{dx} + v(x) \frac{du}{dx} - u(x) \cdot v(x) \frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

۲ - لويي  $u(x)$  همداسی  $v(x)$  له نوکانو راوځي

۳ - د  $u(x)$  همداسی  $v(x)$  لپاره د څنگشميرنی سره يو ترم غوښتل کيږي، کوم چی نوکتريم  $[dv/dx - (2/x)v(x)]$  او له دې سره د  $u$  څلورني يا فاکتور صفر کیدی شي .

دا د  $v(x) = x^2$  لپاره حالت دی، د نيونی  $c_2 - c_1 = 0$  لاندې

د  $v(x)$  لپاره راپیدا ارزښت، دا په دې مانا چی  $x^2$  په مساوات کي کينبول شي. له  $u(x)[dv/dx - 2v(x)/x]$  سره چی ځل  $u(x)$  په صفر برابر شي يو پاتی غړی راكوي، له کوم سره چي  $du$  همداسی  $x, dx$  په دواړو خواو خانله کیدی شي.

۴ - له پاتی غړي څخه  $u(x)$  د اينتيگرال کولو له لارې ټاکل کدی شي.

۵ - په وتلمساوات  $y = u(x) \cdot v(x)$  کي

راپیدا ارزښتونه کينبول کيږي :

$$u(x) = -(1/x) - (1/2x^2) + c; v(x) = x^2$$

لاس ته راوړنه يي د ورکړ شوي اينتيگر

المساوات ټوليز اوبيونه ده .

$$u(x) \left[ \frac{dv}{dx} - \frac{2}{x} v(x) \right] + v(x) \frac{du}{dx} = \frac{x+1}{x}$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x} v(x) = 0$$

$$\frac{dv}{v(x)} = \frac{2 dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v(x)} = 2 \cdot \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v(x)| + c_1 = 2 \cdot \ln |x| + c_2$$

$$\ln |v(x)| = \ln x^2 + c_2 - c_1$$

$$v(x) = x^2 \cdot e^{c_2 - c_1} \triangleright c_2 - c_1 = 0$$

$$v(x) = x^2$$

$$u(x) \left[ \frac{dv}{dx} - \frac{2}{x} v(x) \right] + v(x) \frac{du}{dx} = \frac{x+1}{x} \triangleright v(x) = x^2$$

$$u(x) \cdot 0 + x^2 \frac{du}{dx} = \frac{x+1}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x+1}{x^3}$$

$$\int du = \int \frac{x+1}{x^3} dx$$

$$\int du = \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x^3} dx$$

$$u(x) = -\frac{1}{x} + c_1 - \frac{1}{2x^2} + c_2 \triangleright c_1 + c_2 = c$$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + c$$

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

$$= \left( -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + c \right) \cdot x^2$$

$$= -x - \frac{1}{2} + cx^2; c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x^2 - cx^2 - x - \frac{1}{2} \mid c \in \mathbb{R} \right\rangle$$

## د لاکرانژ Lagrange متود له لارې اویونه

همدا بیلگه به اوس ددوم یعنی

لاکرانژ له متود وشمیرل شي.

۱ - ځای په ځای کوو  $F(x) = 0$  او راپاتی

پاتی مساوات  $y' - y \cdot f(x) = 0$  د ورسره

بلدمتود د اووښتونکو بیلولو له لارې

اوبی کوو. د اینتیگریشن ثابطي پهځای،

چی گټور دی لوگاریتم ټاکو، چی دا لو-

گاریم بیا له منځه ځی.  $c_2 - c_1 = \ln |c|$

ثابته  $C$  په لنډ شوي هوموجین مساوات

$y' - y \cdot f(x)$  کی ثابته نه ده، بلکه د  $x$

یو فنکشن دی.

۲ - لاس ته راوړی مساوات د  $y$

لپاره د ځل یا ضرب قاعدې له

لارې دینفرنخیالیري.

۳ - د  $y$  او  $y'$  دواړه ټوټه

اویونی په سرچینز مساوات کی

ځای په ځای کیري او مساوات

د  $dC(x)/dx$  پسې اوبی کیري.

۴ - د اینتیگرالولو لارې

$C(x)$  لاس ته راوړ لکیري.

۵ - په مساوات  $y = x^2 \cdot C(x)$  کې

د  $C(x)$  لپاره ارزښت کینول

کیري او مساوات ساده کیري

$$y' - y \cdot \frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$y' - y \cdot f(x) = F(x) \Rightarrow F(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - y \cdot \frac{2}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2 dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2 \cdot \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| + c_1 = 2 \cdot \ln |x| + c_2$$

$$\ln |y| = \ln x^2 + c_2 - c_1 \Rightarrow c_2 - c_1 = \ln |c|$$

$$\ln |y| = \ln x^2 + \ln |c|$$

$$\ln |y| = \ln |x^2 \cdot c|$$

$$y = x^2 \cdot c \Rightarrow c = c(x)$$

$$= u(x) \cdot v(x)$$

$$u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$v(x) = c(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{dc(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow y' = 2x \cdot c(x) + x^2 \frac{dc(x)}{dx}$$

$$y' - y \cdot \frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$2x \cdot c(x) + x^2 \frac{dc(x)}{dx} - x^2 \cdot c(x) \cdot \frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dc(x)}{dx} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} \cdot c(x) - \frac{2}{x} \cdot c(x)$$

$$\int dc(x) = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x^3}$$

$$c(x) + k_1 = -\frac{1}{x} + k_2 - \frac{1}{2x^2} + k_3 \Rightarrow k_2 + k_3 - k_1 = k$$

$$c(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + k; k \in \mathbb{R}$$

$$y = x^2 \cdot c(x)$$

$$= x^2 \cdot \left( -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + k \right)$$

دا نتیجه هم همغه برابره ټولیزه اوبیونه ده، لکه د مخه تیر د لاگرانژ اوبیونی متود.

$$y = -x - \frac{1}{2} + k \cdot x^2; k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot -kx^2 - x - \frac{1}{2} \mid k \in \mathbb{R} \right\rangle$$

بیلگه: د ۱-م نظم مساوت  $y' - ay = x$  د لانگرانژ او برنولي متودو له لارې اوبی کړی!

الف - (د) په ځای اینسوونی

(سبستیچیوشن)  $y = u \cdot v$  له

لارې او مناسب رابیلیدنی ته

$$dy / dx = u \cdot (dv/dx) + v(du/dx)$$

ب-  $u(x)$  له نوکانو راوځي

پ- په نوکانو کی ترم باید صفر

شي، چی د  $u$  اود نوکانو ځل

صفر شي. د اینتیگرالولو سره

لویه  $v(x)$  ټاکل کیږي.

$$y' - ay = x \Rightarrow y = u(x) \cdot v(x)$$

$$u(x) \frac{dv}{dx} + v(x) \frac{du}{dx} - a \cdot u(x) \cdot v(x) = x$$

$$u(x) \left[ \frac{dv}{dx} - a \cdot v(x) \right] + v(x) \frac{du}{dx} = x$$

$$\frac{dv}{dx} - a \cdot v(x) = 0$$

$$\int \frac{dv}{v(x)} = a \cdot \int dx$$

$$\ln |v(x)| + c_1 = ax + c_2$$

$$\ln |v(x)| = ax + c_2 - c_1$$

$$v(x) = e^{ax+c_2-c_1}$$

$$= e^{ax} \cdot e^{c_2-c_1} \Rightarrow c_2 - c_1 = 0$$

$$= e^{ax}$$

$$u(x) \cdot [0] + e^{ax} \cdot \frac{du}{dx} = x$$

$$\int du = \int \frac{x}{e^{ax}} dx$$

$$u(x) = -\frac{ax+1}{a^2} \cdot e^{ax} + c$$

$$y = u(x) \cdot v(x) = \left( -\frac{ax+1}{a^2} \cdot e^{ax} + c \right) \cdot e^{ax}$$

$$y = -\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + c \cdot e^{ax}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot -c \cdot e^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right\rangle$$

ت- د  $v(x)$  لپاره دا راپیدا ترم

ځای په ځای کیږي او د اینتیگرال

کیدو له لارې  $u$  لاس ته راځي.

د اینتیگرال اوبی د ټوټه اینتیگرال

له لارې پیدا کیږي.

ت- لاس ته راوړی ارزښت په

مساوات  $y = u \cdot v$  کی کینوول کیږي.

لاس ته راوړنه د برنولي پسي

ټولیز اوبی دی

الف - د لاگرانژ پسی بنی لور  
په صفر مساوي گینبول کیري  
او dx همداسی dy, y په دواړو  
لورو خانله کیري.

راپاتی مساوات  $dy / y = a \cdot dx$   
اینتیگرالیري، د y پسی بنه -  
بدلیري او  $c_2 - c_1 = \ln|c|$  ږدو.

ب - د y لپاره برابرې د خل -  
قاعدې له لارې دیفرنخیالیري.

پ - د y او y' لپاره ټوټه اویونی  
په پیلبرابرون کی کینبول کیري.

داسی ودیز برابرې د  $dc(x)$

پسی اویی کیري له دې سره

$a \cdot e^{ax} \cdot C(x)$  له منځه ځي

ت - ارزښت  $C(x)$  د اینتیگر -

الولو له لارې لاس ته راځي

ټ - لاس ته راوړلی ارزښتونه  
په مساوت

$y = u(x) \cdot v(x) \cdot e^{ax} \cdot C(x)$

کی ږدو

نتیجه د لاگرانژ پسی ټولیز اویی دی.

دا د برنولی د نتیجی سره سرخوري.

$$y' - a \cdot y = x \quad x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - a \cdot y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = a \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = a \cdot \int dx$$

$$\ln|y| + c_1 = ax + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c(x)|$$

$$\ln|y| = ax + \ln|c(x)|$$

$$y = e^{ax} \cdot e^{\ln|c(x)|}$$

$$= e^{ax} \cdot c(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$y' = e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} + c(x) \cdot a \cdot e^{ax}$$

$$y' - a \cdot y = x$$

$$e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} + c(x) \cdot a \cdot e^{ax} - a \cdot e^{ax} \cdot c(x) = x$$

$$e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} = x$$

$$\int dc(x) = \int \frac{x}{e^{ax}} dx$$

$$c(x) + k_1 = -\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k_2 \quad \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$c(x) = -\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k; k \in \mathbb{R}$$

$$y = e^{ax} \cdot c(x)$$

$$= e^{ax} \cdot \left( -\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k \right)$$

$$= -\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + k \cdot e^{ax}; k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot -k \cdot e^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \mid k \in \mathbb{R} \right\rangle$$

بیلگه: مساوات  $y' + y/x = \sin x$  د برنولي متود سره اوبی کړی.

(د) په ځایکو  $y = u(x) \cdot v(x)$  او  $y'$  په دفرنخیالبرون کی ږدو

نوکتوم په 0 سره برابر ږدو او  $v$  شمیری

د پاتیمساوات څخه راپاتی دی

$$v(x)(du/dx) = \sin x$$

د  $c = 0$  له امله لاس ته راځي:

$$v(x) = 1/x$$

له پاتبرابرون څخه  $u(x)$  د اینتیگرالولوله لارې ټاکل کیري

په  $y = u(x) \cdot (x)$  کی لاس ته

راوړل شوي ارزښتونه د  $u$  او  $v$

لپاره ځای په ځای کړی.

لاس ته راوړنه د برنولي پسی

د ورکړ شوي مساوات ټولیز

اوبیدی.

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

$$\rightarrow y = u(x) \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow y' = u(x) \frac{dv}{dx} + v(x) \frac{du}{dx}$$

$$u(x) \frac{dv}{dx} + v(x) \frac{du}{dx} + \frac{u(x) \cdot v(x)}{x} = \sin x$$

$$u(x) \cdot \left( \frac{dv}{dx} + \frac{v(x)}{x} \right) + v(x) \frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v(x)}{x} = 0 \Rightarrow v(x) \frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\int \frac{dv}{v(x)} = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v(x)| + c_1 = -\ln |x| + c_2 \rightarrow c_2 - c_1 = \ln |c|$$

$$\ln |v(x)| = \ln |x^{-1}| + \ln |c|$$

$$v(x) = \frac{1}{x} \cdot c \rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{1}{x}$$

$$v(x) \frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\frac{1}{x} \frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\int du = \int x \cdot \sin x dx$$

$$u(x) + k_1 = \sin x - x \cdot \cos x + k_2 \rightarrow k_2 - k_1 = k$$

$$u(x) = \sin x - x \cdot \cos x + k; k \in \mathbb{R}$$

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

$$= (\sin x - x \cdot \cos x + k) \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{k}{x}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x, -\frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{k}{x} \mid k \in \mathbb{R} \right\rangle$$

بیلگه : مساوات  $y' + y = e^{-x}$  د لاگرانژ د متود له لارې اوبی کړی.

ردو  $F(x) = e^{-x} = 0$  او پاتي-

مساوات د اوونبتونو د بیلولو له لارې اوبی کوو.

د اینتیگریشن شتابتو په څیر کینسول کیري  $c - c = \ln |c(x)|$  او  $y$  ټاکو د ځلقاعدې سره  $y'$  شمیرل کیري

د  $y$  او  $y'$  لپاره برخ اویونی په پیلمساوات کی کینسول کیري او  $e^{-x} \cdot c(x)$  او  $e^{-x}$  لري کیري.

د اینتیگریشن له لارې  $c(x)$  ټاکل کیري.

په مساوات  $y = e^{-x} \cdot c(x)$  کی

$c(x)$  کینسول کیري. نتیجه د

لاگرانژ پسی ټولیز اویونه ده

$$y' + y = e^{-x} \quad \blacktriangleright \quad e^{-x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int dx$$

$$\ln |y| + c_1 = -x + c_2 \quad \blacktriangleright \quad c_2 - c_1 = \ln |c(x)|$$

$$\ln |y| = -x + \ln |c(x)|$$

$$y = e^{-x} \cdot c(x)$$

$$= u(x) \cdot v(x)$$

$$y' = \frac{dc(x)}{dx} \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x}$$

$$y' + y = e^{-x}$$

$$\frac{dc(x)}{dx} \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x} + e^{-x} \cdot c(x) = e^{-x}$$

$$\int dc(x) = \int dx$$

$$c(x) + k_1 = x + k_2 \quad \blacktriangleright \quad k_2 - k_1 = k$$

$$c(x) = x + k; \quad k \in \mathbb{R}$$

$$y = e^{-x} \cdot c(x) \quad \blacktriangleright \quad c(x) = x + k$$

$$= e^{-x}(x + k); \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \cdot e^{-x} - e^{-x}(x + k) | k \in \mathbb{R} \rangle$$

### تمرینونه

۱ . ۲ د لمړینظم دفرنخیالمساوات

۱ . ۲ . ۱ د فرنخیالمساوات د بیلوشوو اوونبتونو سره

د لاندې دفرنخیالمساوات لپاره ټولیزین اویونیورکیري

1.  $y' = \frac{y}{2a}$

2.  $y' = axy$

3.  $y' - 1 = x^2 + x^4$

4.  $y' - x^3 = y - x^3$

5.  $\frac{y'}{2x} = y^2$

6.  $y' = \frac{y^2}{x^2}$

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 7. $2xy^2 = y'$                                    | 8. $y' = \frac{b^2x}{a^2y}$              | 9. $y' = \frac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$                   |
| 10. $x^2 + 2x = y'$                                | 11. $xy' = y \cdot \ln y$                | 12. $(1 - x^2)dy + xy \cdot dx = 0$                    |
| 13. $y' = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ | 14. $y' = e^xy$                          | 15. $\sqrt{y'} = y'x$                                  |
| 16. $y' = (yy')^2$                                 | 17. $dy = \frac{dx}{x(x^2 + 2x + 1)}$    | 18. $y' = \frac{x^2\sqrt{x^2 + 4}}{y^2\sqrt{y^2 + 9}}$ |
| 19. $yx \cdot \sin(2x) = y'$                       | 20. $\frac{dx}{dy} = \ln y$              | 21. $dx(e^y + e^{-y}) = dy(e^x + e^{-x})$              |
| 22. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = x^2y^3$        | 23. $(x + y)^2 = y'$                     | 24. $y'^2y = x^2y' - y'$                               |
| 25. $y'^2 - 2x - x^2 = 0$                          | 26. $y' \cdot \text{Arcsin } y = x^2$    | 27. $x \cdot e^{x^2} = y' \cdot e^x$                   |
| 28. $y \cdot \ln x = y'$                           | 29. $x \cdot \sinh x = y' \cdot \cosh y$ | 30. $\frac{\text{Arsinh } x}{\text{Arcosh } y} = y'$   |

۲ . ۲ . ۱ ديفرنشيالمساوات د هوموجين اووېنتونكو يا واريابلو سره  
لاندي دفرنشيالمساوات اوبي كړي

- |   |  |
|---|--|
| 1. $y'x = -(x + y)$                                   | 2. $y'x = y$   |
| 3. $y' = \frac{x + y}{x}$                             | 4. $y'x^2 - yx = x^2 + y^2$                                    |
| 5. $y'xy = y^2 - x^2$                                 | 6. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y'$                            |
| 7. $dy \cdot x = (y - x) dx$                          | 8. $y' - \frac{y}{x} = \tan \frac{y}{x}$                       |
| 9. $(x + y) dx - (x - y) dy = 0$                      | 10. $x^2 + xy + y^2 = x^2y'$                                   |
| 11. $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$                     | 12. $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$                         |
| 13. $x \cdot dy - y \cdot dx = y \cdot dy$            | 14. $y^2 + (x^2 - xy)y' = 0$                                   |
| 15. $y^2 \cdot dx - 3x^2 \cdot dx + 2xy \cdot dy = 0$ | 16. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$                               |
| 17. $xy' = y(\ln y - \ln x)$                          | 18. $y \cdot dx + \sqrt{4xy} \cdot dy = x \cdot dy$            |
| 19. $\frac{2y(y - x)}{x^2 - 2xy + y^2} = y'$          | 20. $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ |



### ۱ . ۲ . ۳ لاینی ديفرنخيالمساوات

لاندي ديفرنخيالمساوات د برنولي او لاگرانژ متودونو سره اوبی کړی.

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1. $y' + 2xy = \frac{x}{e^{x^2}}$        | 2. $y' = e^x - y$                        | 3. $y' - y = x^2 - 1$                            |
| 4. $y' = e^{3x} - 2y$                    | 5. $y'x = y + x^2 \cdot \sin x$          | 6. $y'x = x \cdot \sin x - y$                    |
| 7. $y' + y + \cos x - e^{2x} = 0$        | 8. $y' + ay = b \cdot e^{cx}$            | 9. $y' + ay - b \cdot \sin(cx) = 0$              |
| 10. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln x}$ | 11. $y' = a + bx + cy$                   | 12. $xy' + 1 = e^x + y$                          |
| 13. $y'(1 - x^2) + xy = 1$               | 14. $\frac{y'}{\sin x} - y = 1 - \cos x$ | 15. $y' + y \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$ |
| 16. $y' - y \cdot x = x^2 - 1$           | 17. $y'x^2 + y = x$                      | 18. $y' + \frac{1}{1+x}y + x^2 = 0$              |
| 19. $y' + y \cdot \cos x = e^{-\sin x}$  | 20. $y' + y \cdot \tan x = \sin(2x)$     | 21. $y' - 2y = 3 - x$                            |

### ۱ . ۳ د دویم نظم ديفرنخيالمساوات

د دویم نظم ديفرنخيالمساوات لاندي یو مساوات پوهیږو، چی  $y'' = d^2y / dx^2$  د خورا جگ ديفرنخيالكوشنت یا ديفرنخيالویش په څیر ولري، د دې ترڅنگ کیدی شي  $y' = dy / dx \cdot x$  او  $y$  رامنځ ته شي.

د ديفرنخيالمساواتو په دې پیلونی په چاپیریال کی کیدی شي، چی لنډ یو څو د دویم نظم ديفرنخيالمساوات او د هغو کارونه یا استعمال باندي خبرې وشي.

د  $y'' = f(x)$  بنی ديفرنخيالمساوات

Beispiel:

بېلگه:

$$y'' = -\sin x$$

$$\int y'' dx = \int -\sin x dx$$

$$y' = \cos x + c_1; c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int y' dx = \int \cos x dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = \sin x + c_1 x + c_2; c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto \sin x + c_1 x + c_2 | c_1; c_2 \in \mathbb{R} \rangle$$

د اوبیونی تلنه: د رابیلیدنی د له منځه

وړلو د اوبیونی پرنڅیپ ډیرواره

اینٹیگرالول دي.

الف: د برابرین دواړه لوري اینٹیگرالیري

۲- راپورته شوي دفرنخيالمساوات بیا

اینٹیگرالیري.

۳- په ورکړ شوي حالت کی له شرایطو

$c_1$  او  $c_2$  وټاکي

بیلگی:

$$y'' = 1 / (1+x^2) \text{ - لمړی}$$

د لمړي اینتگریشن سره لاس ته  $y'$  راځي

بیا د  $y'$  اینتگریشن سره  $y$

لاس ته راځي اوله دې سره د  $f$  ټولیزه اوبیونه

$$y'' = x^2 + x + 1 \text{ - دویم}$$

لمړی اینتگرال راځي

ثابتي  $c_3, c_4, c_5$  د اینتگر -

یشنابتي  $c_1$  ته یوځای کيږي

دویم اینتگریشن  $y$  راځي

ثابتي  $c_6, c_7, c_8, c_9$  د اینتگریشن

ثابتي  $c_2$  ته راښوځایکيږي

دلته  $f$  ټولیز اوبیفنکشن دی

$$3. y'' = x \cdot e^x = u(x) \cdot v'(x)$$

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c_1$$

دلته  $f$  ټولیز اوبیفنکشن دی

$$\int y'' dx = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$y' = \text{Arctan } x + c_1$$

$$\int y' dx = \int \text{Arctan } x dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = x \cdot \text{Arctan } x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c_3 + c_1 x + c_4$$

$$\blacktriangleright c_3 + c_4 = c_2$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \text{Arctan } x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

$$\int y'' dx = \int x^2 dx + \int x dx + \int dx$$

$$y' = \frac{x^3}{3} + c_3 + \frac{x^2}{2} + c_4 + x + c_5$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$$\int y' dx = \frac{1}{3} \int x^3 dx + \frac{1}{2} \int x^2 dx + \int x dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = \frac{x^4}{12} + c_6 + \frac{x^3}{6} + c_7 + \frac{x^2}{2} + c_8 + c_1 x + c_9$$

$$= \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

$$\int y'' dx = \int x \cdot e^x dx = \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

$$y' = x \cdot e^x - e^x + c_1$$

$$\int y' dx = \int x \cdot e^x dx - \int e^x dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = x \cdot e^x - e^x + c_3 - e^x + c_4 + c_1 x + c_5$$

$$\blacktriangleright c_3 + c_4 + c_5 = c_2$$

$$= e^x(x-2) + c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot e^x - e^x(x-2) + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

## د جگ نظم دف. مساوات کیدی شي کله په ورته توگه اوبی شي

$$4. y^{(4)} = x$$

لمیری انتیگرالونه  $y'''$  رااکوي،  
دومه -  $y''$  دریمه -  $y'$  او  
خلورم انتیگریشن  $y$  راکوي

اړوند انتیگریشن ثابتی سره  
رایوځاي کيږي

$$k_1 = c_1$$

$$k_2 = c_2 + c_3$$

$$k_3 = c_4 + c_5 + c_6$$

$$k_4 = c_7 + c_8 + c_9 + c_{10}$$

$$k_1; k_2; k_3; k_4 \in \mathbb{R}$$

دلته  $f$  د ټولیز ایفینکشن دی

$$\int y^{(4)} dx = \int x dx$$

$$y''' = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$\int y''' dx = \frac{1}{2} \int x^2 dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y'' = \frac{x^3}{6} + c_2 + c_1 x + c_3$$

$$\int y'' dx = \frac{1}{6} \int x^3 dx + c_1 \cdot \int x dx + (c_2 + c_3) \int dx$$

$$y' = \frac{x^4}{24} + c_4 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_5 + (c_2 + c_3)x + c_6$$

$$\int y' dx = \frac{1}{24} \int x^4 dx + \frac{1}{2} c_1 \cdot \int x^2 dx +$$

$$+ (c_2 + c_3) \int x dx + (c_4 + c_5 + c_6) \int dx$$

$$y = \frac{x^5}{120} + c_7 + \frac{x^3}{6} c_1 + c_8 + (c_2 + c_3) \frac{x^2}{2} + c_9 +$$

$$+ (c_4 + c_5 + c_6)x + c_{10}$$

$$= \frac{x^5}{120} + k_1 \frac{x^3}{6} + k_2 \frac{x^2}{2} + k_3 x + k_4$$

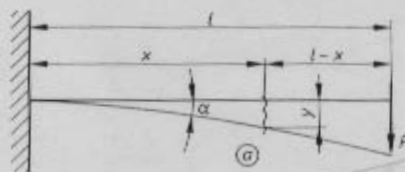
$$\Rightarrow f = \left\langle x^5 - \frac{x^5}{120} + k_1 \frac{x^3}{6} + k_2 \frac{x^2}{2} + k_3 x + k_4 \right\rangle$$

بیلگه: یوه یونوریز غزول شوي باورونی کړون  $y$  وشمیری، چی اوردوالی  $a$  او ټکیډوله پریوتلی زور یی  $F$  وي له میخانیک څخه د کړون شمیرنی برابرېون څرگند دی. د یو لنډ برابرېون دی، چی په تخنیک د واړه ورسره بلد کړون لپاره باور لري. په یوه په خوښه ځاي  $a$  کی کړومونت دی  $F(1-x)$ .

کړومونت  $M =$

د نرموالی-یاالاستیڅیټی مودول  $E =$

د هواری ورونمونت  $l =$



د اینتیگرالولو له لارې "y" په "y" اوږي.

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I} \quad \blacktriangleright \quad M = -F(l-x)$$

$$= \frac{F(l-x)}{E \cdot I}$$

$$y' = \frac{F}{E \cdot I} \int (l-x) dx$$

$$= \frac{F}{E \cdot I} \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + c_1$$

$$\text{für } x=0 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow c_1=0$$

$$y = \frac{F \cdot l}{E \cdot I} \int x dx - \frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \int x^2 dx$$

$$= \frac{F}{E \cdot I} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + c_2$$

$$\text{für } x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow c_2=0$$

$$y = \frac{F}{E \cdot I} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mid \frac{F}{E \cdot I} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \right\rangle$$

$$\text{für } x=l \Rightarrow y_{\max} = \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I \cdot 3}$$

د دویم اینتیگرالونې د مخه ثابته  $c_1$   
د باروړونې مخ ته پراته شرایطو څخه  
شمیرل کیږي. د  $x=0$  په ځای کې  
جگوالی  $y'$  هم صفر دی. د دې سره  
ثابته  $c_1=0$  ده.

دویم اینتیگرالول مود یفرنشلبرابرون ته بیایي.

دومه ثابته  $c_2$  هم صفر دی، دا چی  
د  $y$  راځپرونه د  $x=0$  په ځای کې  
د صفر سره برابره ده.

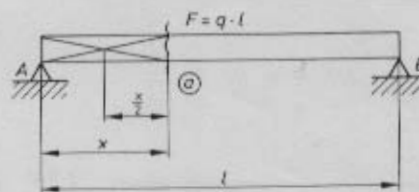
ماکسیمال ځپرونه د  $x=1$  سره پرته  
ده.  $y_{\max}$  د  $x=1$  ځای په ځای کولو  
سره لاس ته راځي.

بیلگه په دوه ستونو ولاړ باروړونکي ماکسیمال ځپرونه وشمیری، د لیکي بار  $q$  سره.  
د تیر په یوه ځای  $a$  باندې مومتمساوات ځای په ځای کوو.

دا چی بار په برابرډول ویشل شوی  
دی، نو پرتی هر  $A$  او  $B$  هر یو  
بی د ټول بار نیمې دي.

$$A = B = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{F}{2}$$

$$M = \frac{q \cdot l}{2} x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$



Die Momentengleichung **د هغه مومنتون**

$$M = \frac{q \cdot l}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

په ديفرنشيال مساوات كي كينبول  
كيري.

د "y لپاره برابرون د اينتيگریشن  
سره و'y ته بيرته بيول كييري

په  $x = l/2$  خاي كي هغه لوي كبرون  
مخ ته پروت دي، دا په دې مانا چي  
په دې خاي كي تنجنت د كبرون كرنبي  
سره پرته يعني افقي پرته ده، جكي يا  
جگوالي  $y' = 0$  مساوي په صفر دي.

د  $c_1$  لپاره راپيداشوي ارزښت په  
برابرون 'y كي اينبول كييري. د 'y  
د بيا يا نوي اينتيگرلوني سره  
فنكشن y ټاكل كييري.  
د  $x = 0$  په خاي كي راگرون  $y = 0$   
دي. د دې سره تابه  $c_2 = 0$  ده.

د  $x = l/2$  لپاره هغه خورا لوي  
كبرون  $y_{\max}$  مخ ته لرو دي، چي د  $1/2$   
اينبولو سره د خورا لوي كبرون  
فرمول لاس ته راخي

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I} \Rightarrow M = \frac{q \cdot l}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

$$= -\frac{q \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} x + \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} x^2$$

$$y' = -\frac{q \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} \int x dx + \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \int x^2 dx$$

$$= -\frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} + c_1$$

$$\text{at } x = \frac{l}{2} \quad y' = 0$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} + c_1$$

$$c_1 = 0 - \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I}$$

$$= \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

$$y' = \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{l^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

$$= \frac{q}{6 \cdot E \cdot I} \int x^3 dx - \frac{q \cdot l}{4 \cdot E \cdot I} \int x^2 dx + \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I} \int dx$$

$$y = \frac{q \cdot x^4}{24 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l \cdot x^3}{12 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3 \cdot x}{24 \cdot E \cdot I} + c_2$$

$$\text{at } x = 0 \quad y = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I} (x^4 - 2 \cdot l \cdot x^3 + l^3 \cdot x)$$

$$x = \frac{l}{2} \Rightarrow y_{\max} = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I} \left( \frac{l^4}{16} - \frac{l^4}{4} + \frac{l^4}{2} \right)$$

$$= \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

### د $y'' = f(y)$ فورم يا بني ديفرنخيال مساوات

Lösungsgang:

اوبيووننتنه

$$y' = \frac{dy}{dx} = z,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dy'}$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

۲ - مساوات اينتيگرايري اوز شميرل كييري.

۳ - او بيا ورپسي د واريابلي د خانلوني متود له لاري شميرل كييري.

د اوبيوني په خير ايمپليخيت فنكشن مساوات لاس ته راخي

Beispiele:

1.  $y'' = \frac{a}{2}$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dy}$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

Beispiel:

بيلگه

$$y'' = ay \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = ay \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\frac{dz}{dy} z = ay$$

$$z \cdot dz = a \cdot y \cdot dy$$

$$\int z dz = a \cdot \int y dy$$

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{ay^2}{2} + c_2$$

$$z^2 = ay^2 + 2(c_2 - c_1) \Rightarrow 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{ay^2 + c_3} \Rightarrow z = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + c_3}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + c_3}}$$

$$x + c_4 = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| y + \sqrt{y^2 + \frac{c_3}{a}} \right| + c_5$$

بيلگي:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{a}{2} \Rightarrow y' = z$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\frac{dz}{dy} z = \frac{a}{2}$$

$$\int z dz = \frac{a}{2} \int dy$$

د مساوات اینتیکریشن پسی Z  
شمیرل کیری

ورپسی د اووښتونی د خانلونی  
متود له لاری شمیرل کیری

د لته f ټولیزه اویونه ده

$$2. y'' = -\frac{1}{2} \sin y$$

د دفرنخیالمساوات اویونه  
مویوه نااویوونی (نامنحل)  
اینٹیگرال ته بیایی.

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{a}{2} y + c_2$$

$$z^2 = ay + 2(c_2 - c_1) \quad \blacktriangleright \quad 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{ay + c_3} \quad \blacktriangleright \quad z = \frac{dy}{dx}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{ay + c_3}}$$

$$x + c_4 = \frac{2}{a} \sqrt{ay + c_3} + c_5 \quad \blacktriangleright \quad c_4 - c_5 = c_6$$

$$(x + c_6)^2 = \frac{4}{a^2} (ay + c_3)$$

$$\frac{a^2}{4} (x + c_6)^2 - c_3 = ay$$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{4} (x + c_6)^2 - \frac{c_3}{a}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x, -\frac{1}{a} \left[ \frac{a^2}{4} (x + c_6)^2 - c_3 \right] \right\rangle$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{2} \sin y \quad \blacktriangleright \quad y' = z$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2} \sin y \quad \blacktriangleright \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\int z dz = -\frac{1}{2} \int \sin y dy$$

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{1}{2} \cos y + c_2$$

$$z^2 = \cos y + 2(c_2 - c_1) \quad \blacktriangleright \quad 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{\cos y + c_3} \quad \blacktriangleright \quad z = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\cos y + c_3}}$$

$$x + c_4 = \int \frac{dy}{\sqrt{\cos y + c_3}}$$

### د بني دفرنخيلا مساوات $y'' = f(y')$

Lösungsgang:

اوبیونلا

$$y' = \frac{dy}{dx} = z$$

$$y'' = \frac{dz}{dx} \text{ ein.}$$

۲- راپورته شوی مساوات

اینتیگرال کیری او په  $z$  پی

ترتیبیری

۳- دلته  $z$  اوبی کیری، بیا

اینتیگرال یی د دفرنخیال-

مساوات ټولیز اویونه لاس ته راځي.

Beispiele:

1.  $y'' = y'^2$

بیلگه:

Beispiel:

بیلگه:

$$y'' = ay' \rightarrow y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a \cdot z$$

$$\frac{dz}{z} = a \cdot dx$$

$$\int \frac{dz}{z} = a \cdot \int dx$$

$$\ln z + c_1 = ax + c_2$$

$$\ln z = ax + c_2 - c_1 \rightarrow c_2 - c_1 = c_3$$

$$z = e^{ax+c_3} \rightarrow z = \frac{dy}{dx}$$

$$\int dy = \int e^{ax+c_3} dx$$

$$y = \frac{1}{a} e^{ax+c_3} + c_4 \rightarrow c_3 = c_5$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \frac{1}{a} c_5 \cdot e^{ax} + c_4 \right\rangle$$

$$y'' = y'^2 \rightarrow y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2$$

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int dx$$

$$-\frac{1}{z} + c_1 = x + c_2 \rightarrow z = \frac{dy}{dx} \quad c_2 - c_1 = c_3$$

$$-\int \frac{dx}{x+c_3} = \int dy$$

$$-\ln|x+c_3| + c_4 = y + c_5 \rightarrow c_4 - c_5 = c_6$$

$$\Rightarrow y = \underline{c_6 - \ln|x+c_3|}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \cdot c_6 - \ln|x+c_3| \rangle$$



2.  $y'' = 1 - y'^2$

$y'' = 1 - y'^2 \Rightarrow y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$

$\frac{dz}{dx} = 1 - z^2$

$\int \frac{dz}{1 - z^2} = \int dx$

$\text{Arctanh } z + c_1 = x + c_2 \Rightarrow c_2 - c_1 = c_3$

$z = \tanh(x + c_3) \Rightarrow z = \frac{dy}{dx}$

$\int dy = \int \tanh(x + c_3) dx$

$y + c_4 = \ln |\cosh(x + c_3)| + c_5 \Rightarrow c_5 - c_4 = c_6$

$y = c_6 + \ln |\cosh(x + c_3)|$

د لته  $f$  د ټوليز ايفنکشن دی

$\Rightarrow f = \langle x, -c_6 + \ln |\cosh(x + c_3)| \rangle$

تمرینونه

۳۱. د دوم نظم دفرنخیالمساوات

لاندي دفرنخیالمساوات اوبی کړی

1.  $y'' = \frac{1}{x}$

2.  $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$

3.  $y'' - x^3 = 0$

4.  $y'' = x + \sin x$

5.  $y'' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

6.  $y'' = \tan x$

7.  $y'' = \sinh x$

8.  $y'' = e^{x^2}$

9.  $y^{(4)} = \cos x$

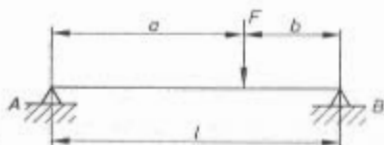
10.  $y''' = e^x$

11.  $y^{(4)} = \sinh(2x)$

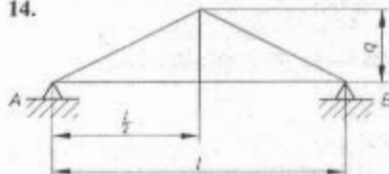
12.  $y^{(5)} = \cosh(ax)$

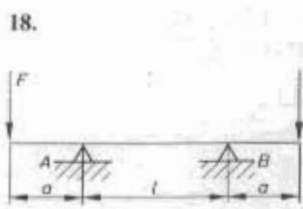
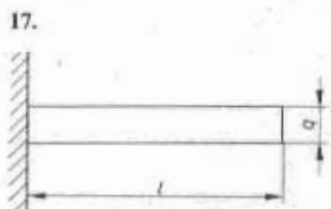
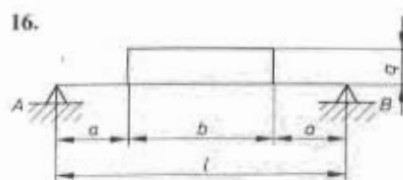
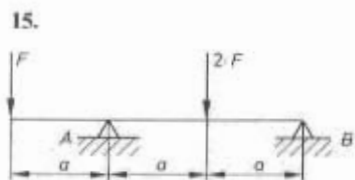
د کپرون لاین او خورا جگ یا ماکسیمال کپرونی مساوات د لاندي بارونحالت یا بار حالت یا دروندونی حالت لپاره پیدا کړی

13.



14.





لاندي دفرنخيا مساوات اوبي كرى

19.  $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$

22.  $y'' = \frac{1}{y}$

25.  $y^2 \cdot y'' = a$

28.  $y''^2 = 1 + y'^2$

31.  $y'^2 - 3y''^2 = 0$

20.  $y'' = a \cdot e^y$

23.  $y'' = k^2 y''$

26.  $y'' = 6y - 4$

29.  $y'' = e^y$

32.  $y''' + y'' = 0$

21.  $y^4 - y^3 y'' = 1$

24.  $y'' = y^2$

27.  $y'' = 1 + y'^2$

30.  $y'' = y'^3$

33.  $xy''^2 = y$

د تمرینونو اویونه یا حل  
۱. ۱ بنسټکلیمی تمرینونه

1.  $y'' = x \cdot e^x$

$$\int x \cdot e^x dx = e^x(x-1) + c_1$$

$$c_2 - c_3 + c_4 = c$$

2.  $y'' - x = 0$

$$c_2 + c_3 = c$$

3.  $2y' - \cos x = 0$

4.  $x \cdot y'' = 3y'$

$$z' = \frac{dz}{dx}$$

$$y'' = (y')' = x \cdot e^x$$

$$y' = \int x \cdot e^x dx$$

$$y' = x \cdot e^x - e^x + c_1$$

$$y = \int x \cdot e^x dx - \int e^x dx + c_1 \int dx$$

$$y = \underline{e^x(x-1) + c_2 - e^x - c_3 + c_1 x + c_4}$$

$$y'' = (y')' = x$$

$$y' = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$y = \int (y') dx = \frac{1}{2} \int x^2 dx + c_1 \int dx$$

$$y = \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + c_2 + c_1 x + c_3$$

$$y = \underline{\underline{\frac{1}{6} x^3 + c_1 x + c}}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cos x$$

$$y = \frac{1}{2} \int \cos x dx$$

$$y = \underline{\underline{\frac{1}{2} \sin x + c}}$$

$$x \cdot y'' = 3y' \rightarrow y' = z; y'' = z'$$

$$x \cdot z' = 3z$$

$$x \cdot \frac{dz}{dx} = 3z$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{3dx}{x}$$

5.  $y \cdot \ln x = x \cdot y'$

6.  $y' \cdot y + y' + x = 0$

$c_2 = 2c_1$

$c = 1 + c_2$

7.  $y' - x^2 = 3e^x$

$$\int \frac{dz}{z} = 3 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln z = 3 \ln x$$

$$z = x^3 \rightarrow z = y'$$

$$y' = x^3 \Rightarrow y = \int x^3 dx = \underline{\underline{\frac{x^4}{4} + c}}$$

$$y \cdot \ln x = x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{y} dy$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{y} dy$$

$$\frac{1}{2} \ln^2 x = \ln y$$

$$y = \underline{\underline{e^{\frac{1}{2} \ln^2 x + c}}}$$

$$y'(y+1) = -x$$

$$\frac{dy}{dx} (y+1) = -x$$

$$\int (y+1) dy = - \int x dx$$

$$\frac{y^2}{2} + y = -\frac{x^2}{2} + c_1$$

$$y^2 + 2y = -x^2 + c_2$$

$$y = -1 \pm \sqrt{1 - x^2 + c_2}$$

$$= \underline{\underline{-1 \pm \sqrt{c - x^2}}}$$

$$y' = 3e^x + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3e^x + x^2$$

$$dy = (3e^x + x^2) dx$$

8.  $\sin x - e^x = y'$

9.  $y \cdot y' = x + 1$

$c = 2c_1$

10.  $y' \cdot y^2 = y' - x^2$

اویبونه د  $y$  پسی اویبوز نه دی،  
له دې امله ایمپلیسیت اویبونه

11.  $\frac{dy}{dx} - 3x = e^x$

$$\int dy = \int (3e^x + x^2) dx$$

$$y = \underline{3e^x + \frac{1}{3}x^3 + c}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin x - e^x$$

$$dy = (\sin x - e^x) dx$$

$$\int dy = \int (\sin x - e^x) dx$$

$$y = \underline{-\cos x - e^x + c}$$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = x + 1$$

$$y \cdot dy = (x + 1) \cdot dx$$

$$\int y dy = \int (x + 1) dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$$y = \underline{\pm \sqrt{x^2 + 2x + c}}$$

$$y'(y^2 - 1) = -x^2$$

$$dy(y^2 - 1) = (-x^2) dx$$

$$\int (y^2 - 1) dy = - \int x^2 dx$$

$$\underline{\frac{y^3}{3} - y = -\frac{x^3}{3} + c}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x + 3x$$

$$\int dy = \int (e^x + 3x) dx$$

$$y = \underline{e^x + \frac{3}{2}x^2 + c}$$

$$12. y' - x^2 = x^2 - y'$$

$$13. \frac{dy}{dx} + \cos x = 1$$

$$14. y^3 \cdot y' = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \\ &\quad - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| \\ c &= 4c_1 \end{aligned}$$

$$15. x^2 \cdot y' = x^4 - x^2$$

که دفرنخیالمساوات په  $x^2$  ویشل کیږي، باید  $x \neq 0$  وغوښتل شي. که  $x = 0$  لپاره اویبونه په پام کې ونیول شي، بیژندل کیږي چی دفرنخیالمساوات  $x = 0$  لپاره هم اویبونه پوره کوي، په دې توګه د ټول  $x$  لپاره اویبونه پوره ده.

$$2y' = 2x^2 \quad || :2$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2$$

$$\int dy = \int x^2 dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} + c$$

$$dy = (1 - \cos x) dx$$

$$\int dy = \int (1 - \cos x) dx$$

$$y = \underline{x - \sin x + c}$$

$$y^3 \cdot \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\int y^3 \cdot dy = \int \sqrt{x^2 - 1} dx$$

$$\frac{y^4}{4} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + c_1$$

$$y^4 = 2x\sqrt{x^2 - 1} - 2 \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + c$$

$$y = \pm \sqrt[4]{2x\sqrt{x^2 - 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})^2 + c}$$

$$x \neq 0 \Rightarrow y' = x^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 1$$

$$dy = (x^2 - 1) dx$$

$$\int dy = \int (x^2 - 1) dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} - x + c$$

16.  $e^x \cdot y' = y$

ساده د  $y = 0$  پارتیکولار اوبیونه پیژندل کیږي.

د نورې کارونې لپاره دې  $y \neq 0$  نیول شوی وي

$c = e^{c_1}$

د  $c = 0$  سره پارتیکولار-یا ټوټه اوبیونه خوندي ده.

17.  $y'' = 7x^3$

18.  $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$

پارتیکولار اوبیونه  $y=0$  Partikuläre Lösung:

$y \neq 0 \Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = e^{-x}$

$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = e^{-x}$

$\int \frac{dy}{y} = \int e^{-x} dx$

$\ln |y| = -e^{-x} + c_1$

$e^{\ln |y|} = e^{-e^{-x} + c_1}$   
 $= e^{-e^{-x}} \cdot e^{c_1}$

$y = c \cdot e^{-e^{-x}}$

$\frac{dy'}{dx} = 7x^3$

$\int dy' = 7 \int x^3 dx$

$y' = \frac{7}{4} x^4 + c_1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{4} x^4 + c_1$

$\int dy = \int \left( \frac{7}{4} x^4 + c_1 \right) dx$

$y = \frac{7}{20} x^5 + c_1 x + c_2$

$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \sin x$

$\frac{dy'}{dx} = \sin x$

$\int dy' = \int \sin x dx$

$y' = -\cos x + c_1$

$\frac{dy}{dx} = -\cos x + c_1$

19.  $3x - y'' = a$

$$\int dy = \int (-\cos x + c_1) dx$$
$$y = \underline{-\sin x + c_1 x + c_2}$$

$$y'' = 3x - a$$

$$\frac{dy'}{dx} = 3x - a$$

$$\int dy' = \int (3x - a) dx$$

$$y' = \frac{3}{2} x^2 - ax + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} x^2 - ax + c_1$$

$$\int dy = \int \left( \frac{3}{2} x^2 - ax + c_1 \right) dx$$

$$y = \underline{\frac{1}{2} x^3 - \frac{a}{2} x^2 + c_1 x + c_2}$$

20.  $y'' = y'$

سملاسی  $y = a = \text{const}$  د پارتیکو-

لار اویونی په خیر پیژندل کیږي.

د پسی اویونی لپاره  $|y'| = 0$  د

سره فنکشن رانیول کیږي، دا په

دې مانا چې نا ثابت فنکشنونه

پارتیکولار اویونه Partikuläre Lösung:

$y = a = \text{const.}$  = ثابتہ

$$y' \neq 0 \Rightarrow y'' \cdot \frac{1}{y'} = 1$$

$$\frac{dy'}{dx} \cdot \frac{1}{y'} = 1$$

$$\frac{dy'}{y'} = dx$$

$$\int \frac{dy'}{y'} = \int dx$$

$$\ln |y'| = x + c_1^*$$

$$e^{\ln |y'|} = e^{x+c_1^*}$$

$$= e^x \cdot e^{c_1^*}$$

$$y' = c_1 \cdot e^x$$

$$e^{c_1^*} = c_1$$



په روښانه توگه د  $C_4 = C_5 = 0$   
 همداسی د  $C_4 = 0$  سره پورتنی  
 پارټیکولار اوبی په ټولیز اوبی  
 کی دننه یا خوندي دی.

21.  $y'' = x \cdot \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \cdot e^x$$

$$\int dy = \int c_1 \cdot e^x dx$$

$$y = \underline{c_1 \cdot e^x + c_2}$$

$$\frac{dy'}{dx} = x \cdot \cos x$$

$$\int dy' = \int \underbrace{x}_{u_1} \cdot \underbrace{\cos x dx}_{dv_1}$$

$$y' = x \cdot \sin x - \int \sin x dx$$

$$= x \cdot \sin x + \cos x + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \sin x + \cos x + c_1$$

$$\int dy = \int (x \cdot \sin x + \cos x + c_1) dx$$

$$y = \int \underbrace{x}_{u_2} \cdot \underbrace{\sin x dx}_{dv_2} + \sin x + c_1 x$$

$$= -x \cdot \cos x + \int \cos x dx + \sin x + c_1 x$$

$$= -x \cdot \cos x + \sin x + \sin x + c_1 x + c_2$$

$$= \underline{2 \sin x - x \cdot \cos x + c_1 x + c_2}$$

۲. ۱ د لمړي نظم ديفرنخيالمساوات ته تمرينونه  
۱. ۲. ۱ ديفرنخيالمساوات د بيلوشو او وېنټونکو سره

1.  $y' = \frac{y}{2a}$

پارتيکولار اوبيونه:  $y=0$

Voraussetzung:  $y \neq 0$  ; نيونه

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{2a}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2a}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2a} \int dx$$

$$\ln |y| = \frac{x}{2a} + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\frac{x}{2a} + c_1}$$

$$= e^{\frac{x}{2a}} \cdot e^{c_1}$$

$$y = \underline{c \cdot e^{\frac{x}{2a}}}$$

$c = e^{c_1}$

پارتيکولار اوبيونه په ټوليز  
اوبی هم دننه دي (  $C = 0$  )

2.  $y' = axy$

پارتيکولار اوبيونه:  $y=0$

Voraussetzung:  $y \neq 0$  ; نيونه

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = ax$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = ax$$

$$\int \frac{dy}{y} = a \int x dx$$

$$\ln |y| = \frac{ax^2}{2} + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\frac{a}{2}x^2 + c_1}$$

$$= e^{\frac{a}{2}x^2} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = \underline{c \cdot e^{\frac{a}{2}x^2}}$$

د  $c = 0$  سره پارتيکولار اوبيونه  
په ټوليز اوبيونی کی دننه دی.

3.  $y' - 1 = x^2 + x^4$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 + x^4$$

$$\int dy = \int (1 + x^2 + x^4) dx$$

$$y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + c$$

4.  $y' - x^3 = y - x^3$

$$y' = y + x^3 - x^3$$

$$y' = y$$

$$y = c \cdot e^x$$

د دې ديفرنخيالبراون اوبى د تيرتيرين ١  
خځه د  $a = 1/2$  سره، لاس ته راوړل كيږي

5.  $\frac{y'}{2x} = y^2$

زینگولار اوبيونه :  $y=0$

Voraussetzung:  $y \neq 0$  : نيونه

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y^2} = 2x$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = 2 \int x dx$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + c$$

د ديفرنخيالمساوات اوبيونه يو  
زینگولار اوبى لري.

$$y = -\frac{1}{x^2 + c}$$

$$y = 0$$

6.  $y' = \frac{y^2}{x^2}$

زینگولار اوبيونه :  $y=0$

Voraussetzung:  $y \neq 0$  : نيونه

ساده پيژندلکيږي، چى اوبى  
 $y = 0$ ، زینگولار اوبى دى چى  
دا به وروسته وښوول شي.

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2}$$

7.  $2xy^2 = y'$

د دې ديفرنشيال مساوات اوبى د  
تر مخه تير تمرين ۵ څخه رانيول  
كيدى شي

8.  $y' = \frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}$

$c = -2c_1$

اوبى په ايمپليسيته بڼه  
(اهرامغوخى)

9.  $y' = \frac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}|$

$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2}$

$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c$

$= -\frac{1 - c \cdot x}{x}$

$y = \frac{x}{1 - c \cdot x}$

$y = 0$

زيكولار زوييونه:  $y=0$

Voraussetzung:  $y \neq 0$ ; نيونه

$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = 2x \Rightarrow y = -\frac{1}{x^2 + c}$

$y = -\frac{1}{x^2 + c}$

$y = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}$

$a^2 y \cdot dy = b^2 x \cdot dx$

$a^2 \int y dy = b^2 \int x dx$

$a^2 \cdot \frac{y^2}{2} = b^2 \cdot \frac{x^2}{2} + c_1 \quad || \cdot 2$

$a^2 y^2 = b^2 x^2 + 2c_1$

$b^2 x^2 - a^2 y^2 = c$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

$\int dy = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

$y = 2 \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}| + c$

10.  $x^2 + 2x = y'$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 2x$$

$$\int dy = \int (x^2 + 2x) dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} + x^2 + c$$

11.  $x \cdot y' = y \cdot \ln y$

د تمرینور کړي څخه ورکول کيږي

(د  $\ln y$  له امله)، چې  $y > 0$  باید

باور ولري. د ديفرنخيالمساوات پسي

کارونی لپاره یواځي  $x \neq 0$  نیول شوی.

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = y \cdot \ln y$$

Voraussetzung:  $x \neq 0$  نیونه:

$$\Rightarrow \frac{dy}{y \cdot \ln y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y \cdot \ln y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{\ln y} \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |\ln y| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |\ln y|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$\ln y = c \cdot x$$

$$e^{\ln y} = e^{c \cdot x}$$

$$y = e^{c \cdot x}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = f(x) \ln y$$

اوبی ديفرنخيالمساوات د  $x = 0$

لپاره هم پوره کوي، چې له دې

امله دا ټوليز اوبی دی

پارتيکولار اوبيونه:  $y=0$

12.  $(1-x^2)dy + xy \cdot dx = 0$

د پارتيکولار اوبی په څير  $y = 0$

سملاسي پيژندل کيږي. د ديفرنخ

یالمساوات د نورو اوبیو لپاره لمړی

باید  $y \neq 0$  ونيول شي او  $1-x \neq 0$

دا په دې مانا چې  $y \cdot (1-x)^2 \neq 0$

Voraussetzung:  $y \cdot (1-x^2) \neq 0$  نیونه:

$$(1-x^2) dy + xy \cdot dx = 0 \quad || : y(1-x^2)$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{x}{1-x^2} dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{x}{1-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$e^{c_1} = c$$

د  $c = 0$  سره په دې کې پارتيکیو-

لار اوبی دننه یا خوندي دی.

د  $1 - x^2 = 0$  لپاره، دا په دې مانا ،

چی  $|x| = 1$  اوبی هم دیفرنشیال مسا-

وات پوره کوي، داسی چی دا ټولیز

اوبی انځوروي.

بدلون ( سبستیچیوشن )

$$z = \sin x + \cos x$$

$$\Rightarrow dz = (\cos x - \sin x) dx$$

$$14. y' = e^x \cdot y$$

د  $c = 0$  سره په دې کې ټوته

اویونه خوندي ده .

$$\ln |y| = \frac{1}{2} \ln |1 - x^2| + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\frac{1}{2} \ln |1 - x^2| + c_1}$$

$$= (e^{\ln |1 - x^2|})^{\frac{1}{2}} \cdot e^{c_1}$$

$$y = \underline{c \cdot \sqrt{|1 - x^2|}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$\int dy = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$y = - \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$= - \int \frac{dz}{z}$$

$$= - \ln |z| + c$$

$$= \underline{- \ln |\sin x + \cos x| + c}$$

$y = 0$  : پارتيکولار اویونه

نیونه :  $y \neq 0$  Voraussetzung:

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = e^x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int e^x dx$$

$$\ln |y| = e^x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{e^x + c_1} = e^{(e^x)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = \underline{c \cdot e^{(e^x)}}$$

15.  $\sqrt{y'} = y' \cdot x$

16.  $y' = (y \cdot y')^2$

$c = 3c_1$

17.  $dy = \frac{dx}{x(x^2 + 2x + 1)}$

زیگولار اویبونه  $y' = 0$

$y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$  ثابت

Voraussetzung:  $y' \neq 0, x \neq 0$  : نیونه

$\Rightarrow 1 = \frac{y'}{\sqrt{y'}} \cdot x \rightarrow$  مربع کونده quadrieren

$1 = y' \cdot x^2$

$\frac{1}{x^2} = \frac{dy}{dx}$

$\int \frac{dx}{x^2} = \int dy$

$y = -\frac{1}{x} + c \rightarrow$  für  $x \neq 0$

$y = a = \text{const.}$  ثابت

Singuläre Lösung:  $y' = 0$  زیگولار اویبونه

$y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$  ثابت

Voraussetzung:  $y' \neq 0$  : نیونه

$\Rightarrow 1 = y^2 \cdot y'$

$1 = y^2 \cdot \frac{dy}{dx}$

$\int y^2 dy = \int dx$

$\frac{1}{3} y^3 = x + c_1$

$y = \sqrt[3]{3x + c}$

$y = a = \text{const.}$  ثابت

$\int dy = \int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

$= \int \left( \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \right) dx$

$= \int \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2} dx$

Koeffizientenvergleich: د کوفونوا تپوول

I:  $A+B=0$

II:  $2A+B+C=0$

III:  $A=1$

I:  $1+B=0 \Rightarrow B=-1$

II:  $2-1+C=0 \Rightarrow C=-1$

18.  $y' = \frac{x^2 \sqrt{x^2+4}}{y^2 \sqrt{y^2+9}}$

دواړه اینتیگرالونه همغه فورم لري  
او د ۲ . ۵ تمرین ۷۴ سره په  
پرتله ریکورزیون فرمول ټاکل کیږي.

$$\int \sqrt{x^2+a^2} dx =$$

$$\frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x+\sqrt{x^2+a^2}| + c$$

اوبیونه یواځي په ایمپلیخیت فورم  
ممکن ده.

$$\int dy = \int \frac{A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx}{x(x+1)^2} dx$$

$$= \int \frac{x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A}{x(x+1)^2} dx$$

$$= \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \ln |x| - \ln |x+1| + \frac{1}{x+1} + c$$

$$\int dy = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + \frac{1}{x+1} + c$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \sqrt{x^2+4}}{y^2 \sqrt{y^2+9}}$$

$$\int y^2 \sqrt{y^2+9} dy = \int x^2 \sqrt{x^2+4} dx$$

$$\frac{y}{4} \sqrt{(y^2+9)^3} - \frac{9}{4} \int \sqrt{y^2+9} dy =$$

$$= \frac{x}{4} \sqrt{(x^2+4)^3} - \frac{4}{4} \int \sqrt{x^2+4} dx \quad || \cdot 4$$

$$y \sqrt{(y^2+9)^3} - 9 \left[ \frac{y}{2} \sqrt{y^2+9} + \frac{9}{2} \ln |y+\sqrt{y^2+9}| \right] =$$

$$= x \sqrt{(x^2+4)^3} -$$

$$- 4 \left[ \frac{x}{2} \sqrt{x^2+4} + 2 \ln |x+\sqrt{x^2+4}| \right] + c$$

$$y(y^2+9) \sqrt{y^2+9} - \frac{9}{2} y \sqrt{y^2+9} - \frac{81}{2} \ln |y+\sqrt{y^2+9}| =$$

$$= x(x^2+4) \sqrt{x^2+4} - 2x \sqrt{x^2+4} -$$

$$- 8 \ln |x+\sqrt{x^2+4}| + c$$

$$\frac{y}{2} (2y^2+9) \sqrt{y^2+9} - \frac{81}{2} \ln |y+\sqrt{y^2+9}| =$$

$$= x(x^2+2) \sqrt{x^2+4} - 8 \ln |x+\sqrt{x^2+4}| + c$$

$$y(2y^2+9) \sqrt{y^2+9} - 81 \ln |y+\sqrt{y^2+9}| =$$

$$= x(2x^2+4) \sqrt{x^2+4} - 16 \ln |x+\sqrt{x^2+4}| + c$$



19.  $y \cdot x \cdot \sin(2x) = y'$

پارخیل اینتیگرال

د  $c = 0$  سره پارتيکیوالر اوبی  
په دې کی خوندي دی.

20.  $\frac{dx}{dy} = \ln y$

21.  $dx(e^y + e^{-y}) = dy(e^x + e^{-x})$   
دا چی دواړه اینتیگرالونه برابر فورم  
لري بسیا کوي، چی یو وشمیرل شي  
بدلون ( سبستیچیوشن )

$$t = e^x \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

اوبی په ایمپلیخیتفورم

Partikuläre Lösung:  $y=0$

Voraussetzung:  $y \neq 0$

$$\triangleright x \cdot \sin 2x = y' \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = x \cdot \sin 2x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\sin 2x}_{dv} dx$$

$$= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx$$

$$\ln |y| = -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{x}{2} \cos 2x} + c_1$$

$$= e^{\frac{1}{4} (\sin 2x - 2x \cos 2x)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = c \cdot e^{\frac{1}{4} (\sin 2x - 2x \cos 2x)}$$

$$dx = \ln y dy$$

$$\int dx = \int \ln y dy$$

$$x = y (\ln y - 1) + c$$

$$\int \frac{dy}{e^y + e^{-y}} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x}$$

$$= \int \frac{e^x \cdot dx}{e^{2x} + 1}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$= \text{Arctan } t + c$$

$$= \text{Arctan } e^x + c$$

$$\text{Arctan } e^y = \text{Arctan } e^x + c$$

$$22. \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = x^2 \cdot y^3$$

دریمه ریننه یی راوستل کیری.  
یا یی ۳. جذر نیول کیری

د  $c = 0$  سره پارتیکولر اوبی  
په دې کی خوندي دی.

$$23. (x+y)^2 = y'$$

لمری په سبستیچیشن پیل کوو.

$$z = x + y; \quad y = z - x$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{d(z-x)}{dx} \\ &= \frac{dz}{dx} - \frac{dx}{dx} \\ &= \frac{dz}{dx} - 1 \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' \Rightarrow y'^3 = x^2 \cdot y^3$$

پارتیکولر اوبیونه:  $y=0$

نیونه:  $y \neq 0$ ; Voraussetzung:  $y \neq 0$

$$y'^3 \cdot \frac{1}{y^3} = x^2$$

$$\frac{y'}{y} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dy}{y} = x^{\frac{2}{3}} \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^{\frac{2}{3}} dx$$

$$\ln |y| = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c_1} = e^{\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}}} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = \underline{\underline{c \cdot e^{\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}}}}}$$

$$z^2 = \frac{dz}{dx} - 1$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2 + 1$$

$$\frac{dz}{z^2 + 1} = dx$$

$$\int \frac{dz}{z^2 + 1} = \int dx$$

$$\text{Arctan } z = x + c$$

$$z = \tan(x + c)$$

$$x + y = \tan(x + c)$$

$$y = \underline{\underline{\tan(x + c) - x}}$$

$$24. y'^2 \cdot y = x^2 \cdot y' - y'$$

$$c = 2c_1$$

$$25. y'^2 - 2x - x^2 = 0$$

سیستیچیوشن :

$$z = x + 1 \Rightarrow dx = dz$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx =$$

$$\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|$$

Singuläre Lösung:  $y' = 0$

$$y' = 0 \Rightarrow \underline{y = a = \text{const.}}$$

Voraussetzung:  $y' \neq 0$

$\Rightarrow$  په  $y'$  ویشنه اجازه لري

$$y' \cdot y = x^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot y = x^2 - 1$$

$$\int y dy = \int (x^2 - 1) dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} - x + c_1 \quad || \cdot 2$$

$$y^2 = \frac{2}{3} x^3 - 2x + c$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3} x^3 - 2x + c}$$

$$y = a = \text{const.}$$

$$y'^2 = x^2 + 2x$$

$$y' = \pm \sqrt{x^2 + 2x}$$

$$= \pm \sqrt{x^2 + 2x + 1 - 1}$$

$$= \pm \sqrt{(x+1)^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{(x+1)^2 - 1}$$

$$\int dy = \pm \int \sqrt{(x+1)^2 - 1} dx$$

$$y = \pm \int \sqrt{z^2 - 1} dz$$

$$= \pm \left[ \frac{z}{2} \sqrt{z^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |z + \sqrt{z^2 - 1}| \right] + c$$

$$y = \pm \frac{1}{2} [(x+1) \sqrt{x^2 + 2x} -$$

$$\underline{\underline{-\ln |x+1 + \sqrt{x^2 + 2x}| + c}}$$

بڼو لار او بڼو نه

بڼو نه

26.  $y' \cdot \text{Arcsin } y = x^2$

پارخیل (توتیه -) اینتیگرال

په ایمپلیشیته بنه اویونه

27.  $x \cdot e^{x^2} = y' \cdot e^y$

بدلون ( سبستیچیوشن )

$x^2 = z \Rightarrow dx = \frac{dz}{2x}$

28.  $y \cdot \ln x = y'$

$\frac{dy}{dx} \cdot \text{Arcsin } y = x^2$

$\int \underbrace{\text{Arcsin } y}_{u} \underbrace{dy}_{dv} = \int x^2 dx$

$y \cdot \text{Arcsin } y - \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{3} x^3$

$y \cdot \text{Arcsin } y + \sqrt{1-y^2} = \frac{1}{3} x^3 + c$

$x \cdot e^{x^2} = \frac{dy}{dx} \cdot e^y$

$\int e^y \cdot dy = \int x \cdot e^{x^2} dx$

$= \frac{1}{2} \int e^z dz$

$e^y = \frac{1}{2} e^z + c$

$= \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

$\ln(e^y) = \ln\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right)$

$y = \ln\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right)$

پارتیکولار اویونه :  $y=0$

Voraussetzung:  $y \neq 0$  : نیونه

$\Rightarrow \ln x = \frac{1}{y} \cdot y'$

$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \ln x$

$\int \frac{dy}{y} = \int \ln x dx$

د  $c = 0$  سره پارتيکيوالر اوبی  
په دې کی خوندي دی.

$$29. x \cdot \sinh x = y' \cdot \cosh y$$

پارخیل اینتیگرال

$$30. \frac{\operatorname{Arsinh} x}{\operatorname{Arcosh} y} = y'$$

پارخیل یا پارشل اینتیگرال

$$\ln |y| = x \cdot \ln x - x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{x(\ln x - 1) + c_1} = e^{x(\ln x - 1)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = c \cdot e^{x(\ln x - 1)}$$

$$x \cdot \sinh x = \frac{dy}{dx} \cdot \cosh y$$

$$\int \cosh y \cdot dy = \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\sinh x}_{dv} dx$$

$$= x \cdot \cosh x - \int \cosh x dx$$

$$\sinh y = x \cdot \cosh x - \sinh x + c$$

$$y = \operatorname{Arsinh} [x \cdot \cosh x - \sinh x + c]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{Arsinh} x}{\operatorname{Arcosh} y}$$

$$\int \underbrace{\operatorname{Arcosh} y}_{u_1} \underbrace{dy}_{dv_1} = \int \underbrace{\operatorname{Arsinh} x}_{u_2} \underbrace{dx}_{dv_2}$$

$$y \cdot \operatorname{Arcosh} y - \int \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} dy =$$

$$= x \cdot \operatorname{Arsinh} x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$y \cdot \operatorname{Arcosh} y - \sqrt{y^2 - 1} = x \cdot \operatorname{Arsinh} x - \sqrt{x^2 + 1} + c$$

۱ . ۲ . ۳ ديفرنخيالمساوات د هوموجينو اوونستونكو سره

پام وړ : يو خو د دې اوبيونو ديفرنخيالمساوات د هوموجين واريابلو سره ديفرنخيا-  
لمساوات نه دي. مگر دا اجازه ورکوي يا خان دې ته پرېردي، چې د سېسټيميچيوشن  
 $y = x \cdot z$  له لارې اوبی شي ( تمرين ۸ ، ۱۲ ، ۱۶ ، ۱۷ ، ۱۸ ، ۲۰ )

$$1. y' \cdot x = -(x+y)$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$dy \cdot x = -(x+y) dx$$

$$(z \cdot dx + x \cdot dz)x = -x \cdot dx - x \cdot z \cdot dx$$

$$\int \frac{2}{1+2z} dz \cong \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$e^{-2c_1} = c$$

$$2. y' \cdot x = y$$

دا دیفرنشیال مساوات په ساده توګه  
د اووښتونو یا واریابلو بیلولو له  
لارې اوبی کیدی شي.

$|x| = 0$ : پس په  $x$  ویشنه اجزاولری

$$z \cdot dx + x \cdot dz = -dx - z \cdot dx$$

$$x \cdot dz = dx(-1 - 2z)$$

$$\frac{dz}{1+2z} = \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{2}{1+2z} dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2} \ln |1+2z| = \ln |x| + c_1$$

$$-\frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{2y}{x} \right| = \ln |x| + c_1$$

$$-\frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{2y}{x} \right| - \ln |x| = c_1$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{2y}{x} \right| + \frac{2}{2} \ln |x| = -c_1$$

$$\frac{1}{2} \left[ \ln \left| 1 + \frac{2y}{x} \right| + \ln x^2 \right] = -c_1 \quad \parallel \cdot 2$$

$$\ln x^2 \cdot \left| 1 + \frac{2y}{x} \right| = -2c_1$$

$$\ln |x^2 + 2yx| = -2c_1$$

$$e^{\ln |x^2 + 2yx|} = e^{-2c_1}$$

$$x^2 + 2yx = c$$

$$y = \frac{c - x^2}{2x}; \quad x \neq 0$$

$y=0$ : پارتیکولار اوبیونه

Voraussetzung:  $y \neq 0, x \neq 0$ : **نیونه**

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

په دې اوبيونو کي پارتيکيولار اوبيوني  
خوندي دي (د  $c=0$  سره) اود  $x=0$   
لپاره هم، دا په دې مانا، چي دا ټوليز  
اوبي دي.

$$3. y' = \frac{x+y}{x}$$

د وظيفي ورکوني سره سم لاسي  
د  $x=0$  ورکوي

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$4. y' \cdot x^2 - y \cdot x = x^2 + y^2$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = \underline{c \cdot x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

$$dy = \left(1 + \frac{y}{x}\right) dx$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = (1+z) dx$$

$$x \cdot dz = dx$$

$$dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$z = \ln |x| + c$$

$$y = \underline{x(\ln |x| + c)}$$

$$dy \cdot x^2 - y \cdot x \cdot dx = (x^2 + y^2) dx$$

$$(x \cdot dz + z \cdot dx) x^2 - x^2 \cdot z \cdot dx = (x^2 + x^2 \cdot z^2) dx$$

نيونه:  $x \neq 0$  له دې امله په  $x^2$  ويش

$$x \cdot dz + z \cdot dx - z \cdot dx = (1+z^2) dx$$

$$x \cdot dz = (1+z^2) dx$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\text{Arctan } z = \ln |x| + c$$

$$\tan(\text{Arctan } z) = \tan(\ln |x| + c)$$

$$z = \tan(\ln |x| + c)$$

$$y = \underline{x \cdot \tan(\ln |x| + c)}$$

د  $x \neq 0$  لپاره

$$5. y' \cdot x \cdot y = y^2 - x^2$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$c = 2c_1$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$6. \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y'$$

د وظيفي ورکړی څخه روښانه ده، چې

همدا اوس  $|y| = 0$  او  $|x| = 0$  باور لري.

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$2c_1 = c; \quad z = \frac{y}{x}$$

$$dy \cdot x \cdot y = (y^2 - x^2) dx$$

$$(x \cdot dz + z \cdot dx) \cdot x^2 \cdot z = (x^2 \cdot z^2 - x^2) dx$$

نیونه:  $|x| = 0$  له دې امله په  $x^2$  ویش

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)z = (z^2 - 1) dx$$

$$z \cdot x \cdot dz + z^2 \cdot dx = z^2 \cdot dx - dx$$

$$z \cdot x \cdot dz = -dx$$

$$\int z \cdot dz = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} z^2 = -\ln |x| + c_1 \quad || \cdot 2$$

$$z^2 = -2 \ln |x| + 2c_1$$

$$= c - \ln x^2$$

$$y = \underline{\underline{\pm x \sqrt{c - \ln x^2}}}; \quad x \neq 0$$

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad || \cdot xy$$

$$xyy' = x^2 + y^2$$

$$x^2 \cdot z(x \cdot dz + z \cdot dx) = (x^2 + x^2 \cdot z^2) dx \quad || : x^2$$

$$z(x \cdot dz + z \cdot dx) = (1 + z^2) dx$$

$$z \cdot x \cdot dz + z^2 \cdot dx = dx + z^2 \cdot dx$$

$$z \cdot x \cdot dz = dx$$

$$z \cdot dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int z \cdot dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} z^2 = \ln |x| + c_1 \quad || \cdot 2$$

$$z^2 = 2 \ln |x| + 2c_1$$

$$y = \underline{\underline{\pm x \sqrt{\ln x^2 + c}}}$$



$$7. dy \cdot x = (y-x) \cdot dx$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$8. y' - \frac{y}{x} = \tan \frac{y}{x}$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$\frac{y}{x} = z$$

د وظيفي ورکړی څخه روښانه ده، چې همدا اوس  $x \neq 0$  لاس ته راځي.

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\int \frac{\cos z}{\sin z} dz \cong \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$9. (x+y) \cdot dx - (x-y) \cdot dy = 0$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$x^2 \cdot dz + x \cdot z \cdot dx = (x \cdot z - x) \cdot dx$$

نښه:  $x \neq 0$  له دې امله په  $x$  ویش

$$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot dx - dx$$

$$x \cdot dz = -dx$$

$$\int dz = - \int \frac{dx}{x}$$

$$z = -\ln |x| + c$$

$$y = x(c - \ln |x|); \quad x \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} - z = \tan z$$

$$dy = (z + \tan z) dx$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot dx + \tan z \cdot dx$$

$$x \cdot dz = \tan z \cdot dx$$

$$\int \frac{dz}{\tan z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\cos z}{\sin z} dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |\sin z| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |\sin z|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$\sin z = c \cdot x$$

$$z = \text{Arcsin}(c \cdot x)$$

$$y = x \cdot \text{Arcsin}(c \cdot x)$$

$$(x+x \cdot z) \cdot dx - (x-x \cdot z) \cdot (x \cdot dz + z \cdot dx) = 0$$

نښه:  $x \neq 0$  له دې امله په  $x$  ویش

$$(1+z) dx - (1-z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = 0$$

$$(1+z) dx - x(1-z) dz - (z-z^2) dx = 0$$

$$(1+z^2) dx - x(1-z) dz = 0$$

$$\int \frac{2z}{1+z^2} dz \cong \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

اوبیونی یواخی په ایملیخته  
بڼه یا فورم ورکړ شوی دی.

$$10. x^2 + xy + y^2 = x^2 \cdot y'$$

$$y = z \cdot x \Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$11. y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-z}{1+z^2} dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \left( \frac{1}{1+z^2} - \frac{z}{1+z^2} \right) dz$$

$$= \int \frac{dz}{1+z^2} - \frac{1}{2} \int \frac{2z}{1+z^2} dz$$

$$\ln |x| = \text{Arctan } z - \frac{1}{2} \ln |1+z^2| + c$$

$$\ln |x| = \text{Arctan } \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + y^2}{x^2} + c$$

لياره  $x \neq 0$

$$(x^2 + xy + y^2) dx = x^2 \cdot dy$$

$$(x^2 + x^2z + x^2z^2) dx = x^2 (z \cdot dx + x \cdot dz)$$

نیونه:  $x \neq 0$  له دې امله په  $x^2$  ویش

$$(1 + z + z^2) dx = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$(1 + z^2) dx = x \cdot dz$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\text{Arctan } z = \ln |x| + c$$

$$\tan (\text{Arctan } z) = \tan (\ln |x| + c)$$

$$z = \tan (\ln |x| + c)$$

$$y = x \cdot \tan (\ln |x| + c)$$

لياره  $x \neq 0$

$$y' \cdot (3x^2 - y^2) = 2xy$$

$$dy \cdot (3x^2 - y^2) = 2xy \cdot dx$$

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)(3x^2 - x^2z^2) = 2x^2z \cdot dx$$

نیونه:  $x \neq 0$  له دې امله په  $x^2$  ویش

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)(3 - z^2) = 2z \cdot dx$$

$$3x \cdot dz + 3z \cdot dx - xz^2 \cdot dz - z^3 dx = 2z \cdot dx$$

$$(3x - xz^2) dz + (z - z^3) dx = 0$$

## داينتگرال اينتكروالونكى

$$\int \frac{3-z^2}{z^3-z} dz$$

په ټوټه ماتونو ټوټه كيږي

د ضريبونو پرته:

I:  $A+B+C = -1$

II:  $-B+C = 0$

III:  $-A = 3; \underline{A = -3}$

I:  $-3+B+C = -1$

$B+C = 2$

II:  $-B+C = 0$

$2C = 2; \underline{C = 1}$

II:  $-B+C = 0; \underline{B = 1}$

$e^{c_1} = c$

$y = x \cdot z \Rightarrow z = \frac{y}{x}$

په ايمپليخيته بڼه اوبيونه

۷۳

$x(3-z^2) dz = (z^3-z) dx$

$\int \frac{3-z^2}{z^3-z} dz = \int \frac{dx}{x}$

$\frac{3-z^2}{z^3-z} = \frac{3-z^2}{z(z^2-1)}$

$= \frac{3-z^2}{z(z+1)(z-1)}$

$= \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z-1}$

$= \frac{A(z^2-1) + B(z-1)z + C(z+1)z}{z^3-z}$

$= \frac{z^2(A+B+C) + z(-B+C) - A}{z^3-z}$

$= \frac{-3}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}$

$\int \frac{3-z^2}{z^3-z} dz = \int \frac{dx}{x}$

$\int \left( \frac{-3}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} \right) dz = \int \frac{dx}{x}$

$-3 \ln |z| + \ln |z+1| + \ln |z-1| = \ln |x| + c_1$

$-\ln |z|^3 + \ln |(z+1)(z-1)| = \ln |x| + c_1$

$-\ln |z^3| + \ln |z^2-1| = \ln |x| + c_1$

$\ln \left| \frac{z^2-1}{z^3} \right| = \ln |x| + c_1$

$e^{\ln \left| \frac{z^2-1}{z^3} \right|} = e^{\ln |x| + c_1}$

$= e^{\ln |x|} \cdot e^{c_1}$

$\frac{z^2-1}{z^3} = c \cdot x$

$z^2-1 = c \cdot x \cdot z^3$

$\frac{y^2}{x^2} - 1 = c \cdot \frac{y^3}{x^2} \quad \parallel \cdot x^2$

$\underline{y^2 - x^2 = c \cdot y^3; \quad x \neq 0}$

$$12. y' = \frac{y}{x} \cdot \ln \frac{y}{x}$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$\frac{y}{x} = z$$

د پوښتنوسملاسی  $x > 0, y > 0$  لاس ته

راځي دا په دې مانا، چې  $z > 0$  هم

$$\int \frac{1}{\ln z - 1} dz \cong \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$13. x \cdot dy - y \cdot dx = y \cdot dy$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$\frac{dy}{dx} = z \cdot \ln z$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot \ln z \cdot dx$$

$$x \cdot dz = z(\ln z - 1) dx$$

$$\int \frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{\ln z - 1} dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |\ln z - 1| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |\ln z - 1|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$\ln z - 1 = c \cdot x$$

$$\ln z = c \cdot x + 1$$

$$e^{\ln z} = e^{c \cdot x + 1}$$

$$z = e^{c \cdot x + 1}$$

$$y = x \cdot e^{c \cdot x + 1}; \quad x > 0$$

$$(x - y) dy = y \cdot dx$$

$$(x - x \cdot z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = x \cdot z \cdot dx$$

نیونه:  $x \neq 0$  له دې امله په  $x$  ویش

$$(1 - z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = z \cdot dx$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx - zx \cdot dz - z^2 \cdot dx = z \cdot dx$$

$$x(1 - z) dz - z^2 \cdot dx = 0$$

ورپسی نیونی  $\therefore z \neq 0$  (d.h.  $y \neq 0$ )

$$\Rightarrow \frac{1 - z}{z^2} dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int \left( \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} \right) dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{z} - \ln |z| = \ln |x| + c$$

$$-\frac{1}{z} = \ln |x| + \ln |z| + c$$

$$z = \frac{y}{x}$$

په ایمپلیخیته بڼه اویونه

$$14. y^2 + (x^2 - xy)y' = 0$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

په ایمپلیخیته بڼه اویونه

$$15. y^2 \cdot dx - 3x^2 \cdot dx + 2xy \cdot dy = 0$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$-\frac{1}{z} = \ln |x \cdot z| + c \quad \| \cdot z$$

$$-1 = z \cdot \ln |x \cdot z| + c \cdot z$$

$$-1 = \frac{y}{x} \cdot \ln |y| + c \cdot \frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x} (\ln |y| + c) + 1 = 0; \quad x \neq 0; \quad y \neq 0$$

$$y'(x^2 - xy) = -y^2$$

$$dy(x^2 - xy) = -y^2 \cdot dx$$

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)(x^2 - x^2z) = -x^2z^2 \cdot dx$$

نیونه:  $x \neq 0$  له دې امله په  $X^2$  ویش

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)(1 - z) = -z^2 \cdot dx$$

$$x(1 - z) dz + (z - z^2) dx = -z^2 dx$$

$$x(1 - z) dz = -z \cdot dx$$

ورپسی نیونی:  $z \neq 0$  (d.h.  $y \neq 0$ )

په  $Z$  ویش اجازه لري

$$\frac{1-z}{z} dz = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \left( \frac{1}{z} - 1 \right) dz = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |z| - z = -\ln |x| + c$$

$$\ln |z| + \ln |x| = z + c$$

$$\ln |z \cdot x| = z + c$$

$$\ln |y| = \frac{y}{x} + c; \quad x \neq 0; \quad y \neq 0$$

$$0 = (y^2 - 3x^2) dx + 2xy \cdot dy$$

$$= (x^2 \cdot z^2 - 3x^2) dx + 2x^2 \cdot z(x \cdot dz + z \cdot dx)$$

نیونه:  $x \neq 0$  له دې امله په  $X^2$  ویش

$$0 = (z^2 - 3) dx + 2z(x \cdot dz + z \cdot dx)$$

$$0 = (3z^2 - 3) dx + 2xz \cdot dz$$

$$\int \frac{2z}{z^2-1} dz \triangleq \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$e^{c_1} = c_2$$

$$c = \frac{1}{c_2}; \quad z = \frac{y}{x}$$

$$16. \quad xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$-3(z^2 - 1) dx = 2xz \cdot dz$$

$$-3 \frac{dx}{x} = \frac{2z}{z^2 - 1} dz$$

$$-3 \int \frac{dx}{x} = \int \frac{2z}{z^2 - 1} dz$$

$$-3 \ln |x| = \ln |z^2 - 1| + c_1$$

$$e^{-3 \ln |x|} = e^{\ln |z^2 - 1| + c_1}$$

$$e^{\ln |x^{-3}|} = e^{\ln |z^2 - 1|} \cdot e^{c_1}$$

$$x^{-3} = (z^2 - 1) \cdot c_2$$

$$z^2 - 1 = \frac{c}{x^3}$$

$$\frac{y^2}{x^2} - 1 = \frac{c}{x^3} \quad || \cdot x^2$$

$$y^2 - x^2 = \frac{c}{x}$$

$$y = \pm \sqrt{x^2 + \frac{c}{x}}; \quad x \neq 0$$

$$x \cdot dy = (y + \sqrt{y^2 - x^2}) dx$$

$$x(x \cdot dz + z \cdot dx) = (xz + \sqrt{x^2 z^2 - x^2}) dx$$

$$= (xz + x\sqrt{z^2 - 1}) dx$$

نیونہ:  $x = 0$  لہ دے املہ پہ  $x$  ویش

$$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot dx + \sqrt{z^2 - 1} dx$$

$$x \cdot dz = \sqrt{z^2 - 1} dx$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |z + \sqrt{z^2 - 1}| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |z + \sqrt{z^2 - 1}|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$z + \sqrt{z^2 - 1} = c \cdot x$$

په ایملیثیت فورم اویبی

$$17. xy' = y(\ln y - \ln x)$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$\frac{y}{x} = z$$

د پوښتنوسملاسی  $x > 0, y > 0$  لاس ته

راځي دا په دې مانا، چې  $z > 0$  هم

$$\int \frac{\frac{1}{z}}{\ln z - 1} dz \cong \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$18. y \cdot dx + \sqrt{4xy} \cdot dy = x \cdot dy$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

د پوښتنکونی څخه لاس ته راځي،

چې تل  $4xy \geq 0$  باید باور ولري

دا په دې مانا چې  $x \cdot y \geq 0$  هم

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1} = c \cdot x \quad || \cdot x$$

$$y + \sqrt{y^2 - x^2} = cx^2; \quad x \neq 0$$

$$x \cdot y' = y \cdot \ln \frac{y}{x}$$

$$x \cdot dy = y \cdot \ln \frac{y}{x} \cdot dx$$

$$x(x \cdot dz + z \cdot dx) = x \cdot z \cdot \ln z \cdot dx \quad || : x$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot \ln z \cdot dx$$

$$x \cdot dz = z(\ln z - 1) dx$$

$$\frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\frac{1}{z}}{\ln z - 1} dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |\ln z - 1| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |\ln z - 1|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$\ln z - 1 = c \cdot x$$

$$\ln z = c \cdot x + 1$$

$$e^{\ln z} = e^{c \cdot x + 1}$$

$$z = e^{c \cdot x + 1}$$

$$y = x \cdot e^{c \cdot x + 1}; \quad x > 0$$

$$y \cdot dx = (x - \sqrt{4xy}) dy$$

$$x \cdot z \cdot dx = (x - \sqrt{4x^2z})(x \cdot dz + z \cdot dx)$$

$$= (x - 2x\sqrt{z})(x \cdot dz + z \cdot dx)$$

نیونه:  $x \neq 0$  له دې امله په  $x$  ویش

$$z \cdot dx = (1 - 2\sqrt{z})(x \cdot dz + z \cdot dx)$$

$$z \cdot dx = x(1 - 2\sqrt{z}) dz + (z - 2z\sqrt{z}) dx$$

$$0 = x(1 - 2\sqrt{z}) dz - 2z\sqrt{z} dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

په ایمپلیسایته بڼه اویښونه

$$19. \frac{2y(y-x)}{x^2 - 2xy + y^2} = y'$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

نورې نیوډي  $\therefore z \neq 0$  (d.h.  $y \neq 0$ )

$$\frac{1-2\sqrt{z}}{2z\sqrt{z}} dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{2z\sqrt{z}} dz - \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} \int z^{-\frac{3}{2}} dz - \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \ln |z| = \ln |x| + c$$

$$-z^{-\frac{1}{2}} = \ln |x| + \ln |z| + c$$

$$-\frac{1}{\sqrt{z}} = \ln |x \cdot z| + c$$

$$-\sqrt{\frac{x}{y}} = \ln |y| + c$$

$$0 = \sqrt{\frac{x}{y}} + \ln |y| + c; \quad x \cdot y > 0$$

$$y' = \frac{2y(y-x)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{-2y(x-y)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{-2y}{x-y}$$

$$0 = (x-y) dy + 2y \cdot dx$$

$$0 = (x-xz)(x \cdot dz + z \cdot dx) + 2xz \cdot dx$$

نیونه:  $x \neq 0$  له دې امله په  $x$  ویش

$$0 = (1-z)(x \cdot dz + z \cdot dx) + 2z \cdot dx$$

$$0 = x(1-z) dz + (z - z^2 + 2z) dx$$

$$0 = x(1-z) dz + (3z - z^2) dx$$

$$-x(1-z) dz = (3z - z^2) dx$$

$$\int \frac{1-z}{3z-z^2} dz = - \int \frac{dx}{x}$$



یو پارشل ماتریلونه یا تجزیه ساده

ورکوي  $A = \frac{1}{3}; B = \frac{2}{3}$ .

$$e^{3c_1} = c$$

$$z = \frac{y}{x}$$

په ایمپلیسیت فورم اوبی

$$20. y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$\frac{y}{x} = z$$

د پوښتنورکونې څخه سملاسي  $x \neq 0$

ورکوي، چی دا نور باید فرض نه شي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}|$$

$$z = \frac{y}{x}$$

په ایمپلیسیت فورم اوبی

$$\int \frac{z-1}{z(z-3)} dz = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \left( \frac{A}{z} + \frac{B}{z-3} \right) dz = \frac{1}{3} \int \left( \frac{1}{z} + \frac{2}{z-3} \right) dz$$

$$\frac{1}{3} \ln |z| + \frac{2}{3} \ln |z-3| = -\ln |x| + c_1 \quad || \cdot 3$$

$$\ln |z| + \ln (z-3)^2 = -3 \ln |x| + 3c_1$$

$$\ln |z(z-3)^2| = \ln |x^{-3}| + 3c_1$$

$$e^{\ln |z(z-3)^2|} = e^{\ln |x^{-3}| + 3c_1}$$

$$= e^{\ln |x^{-3}|} \cdot e^{3c_1}$$

$$z(z-3)^2 = c \cdot x^{-3}$$

$$\frac{y}{x} \left( \frac{y}{x} - 3 \right)^2 = c \cdot x^{-3}$$

$$\frac{y}{x^3} (y-3x)^2 = c \cdot x^{-3} \quad || \cdot x^3$$

$$\underline{y(y-3x)^2 = c; \quad x \neq 0}$$

$$dy = \left( \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right) dx$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = (z + \sqrt{1+z^2}) dx$$

$$= z \cdot dx + \sqrt{1+z^2} dx$$

$$x \cdot dz = \sqrt{1+z^2} dx$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |z + \sqrt{1+z^2}| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |z + \sqrt{1+z^2}|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$z + \sqrt{1+z^2} = c \cdot x$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = c \cdot x \quad || \cdot x$$

$$\underline{y + \sqrt{x^2 + y^2} = c \cdot x^2; \quad x \neq 0}$$

## ۱، ۲، ۳ لاینی دیفرنشیال مساوات

$$1. y' + 2xy = \frac{x}{e^{x^2}}$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

$$u = u(x); \quad v = v(x)$$

## دېرولې متود له مخې

رامنځ ته شوي اینتیگرال شایته  $c_1$

تل په خوښه ټاکل کیدونکی ده. له

دې امله  $c_1$  داسې ټاکل کیږي، چې

وروسته شمیرنه یې ترممکنی

اندازې ساده شي.

## ۱- د برنولي متود له مخې اوبی

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} + 2xuv = x \cdot e^{-x^2}$$

$$u \left( \underbrace{\frac{dv}{dx} + 2xv}_{=0} \right) + v \cdot \frac{du}{dx} = x \cdot e^{-x^2}$$

$$\frac{dv}{dx} = -2xv$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2 \int x dx$$

$$\ln |v| = -x^2 + c_1$$

$$e^{\ln |v|} = e^{-x^2 + c_1} = e^{-x^2} \cdot e^{c_1}$$

$$\text{Wählen: } c_1 = 0$$

$$\Rightarrow v = e^{-x^2}$$

$$u \cdot 0 + e^{-x^2} \cdot \frac{du}{dx} = x \cdot e^{-x^2} \quad \| : e^{-x^2}$$

$$\frac{du}{dx} = x$$

$$\int du = \int x dx$$

$$u = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$y = e^{-x^2} \left( \frac{x^2}{2} + c \right)$$

## ۲- د لاکرانج د متود له مخې اوبی

$$y' + 2xy = 0$$

$$dy = -2xy \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int x dx$$

دا افاده د  $y'$  لپاره په  
دiferensial مساوت اينبول كيږي.

2.  $y' = e^x - y$

$$y = u \cdot v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

$$u = u(x); \quad v = v(x)$$

Wählen:  $c_1 = 0$

وتګی

$$\ln |y| = -x^2 + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-x^2 + c_1} = e^{-x^2} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = c \cdot e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow y = \underline{c(x) \cdot e^{-x^2}}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot c(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot c(x) + 2x \cdot c(x) \cdot e^{-x^2} = x \cdot e^{-x^2}$$

$$c'(x) \cdot e^{-x^2} = x \cdot e^{-x^2} \quad || : e^{-x^2}$$

$$\frac{dc(x)}{dx} = x$$

$$\int dc(x) = \int x dx$$

$$c(x) = \frac{x^2}{2} + k$$

$$y = \underline{e^{-x^2} \left( \frac{x^2}{2} + k \right)}$$

۱ - د برنولي متود له مخې اوبی

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} = e^x - u \cdot v$$

$$u \left( \frac{dv}{dx} + v \right) + v \cdot \frac{du}{dx} = e^x$$

= 0

$$\frac{dv}{dx} = -v$$

$$\int \frac{dv}{v} = - \int dx$$

$$\ln |v| = -x + c_1$$

$$\underline{v = e^{-x}}$$

$$u \cdot 0 + e^{-x} \cdot \frac{du}{dx} = e^x \quad || \cdot e^x$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

په ديفرنخيال مساوات کي کيږدی

$$\frac{du}{dx} = e^{2x}$$

$$\int du = \int e^{2x} dx$$

$$u = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \left( \frac{1}{2} e^{2x} + c \right) \cdot e^{-x}$$

$$= \frac{1}{2} e^x + c \cdot e^{-x}$$

۲ - د لاکرانج د متود له مخي اوبی

$$y' + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int dx$$

$$\ln |y| = -x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-x+c_1} = e^{-x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = c \cdot e^{-x} \Rightarrow y = \underline{c(x) \cdot e^{-x}}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot c(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot c(x) = e^x - c(x) \cdot e^{-x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-x} = e^x \quad || \cdot e^x$$

$$\frac{dc(x)}{dx} = e^{2x}$$

$$\int dc(x) = \int e^{2x} dx$$

$$c(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + k$$

3.  $y' - y = x^2 - 1$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$c_1 = 0$  و تا که

$\int x^2 \cdot e^{-x} dx$

دا پورته اینتیگرال د پارشل  
ایتیگرال سره اوبی کیری

$y = \left(\frac{1}{2} e^{2x} + k\right) \cdot e^{-x}$

$= \frac{1}{2} e^x + k \cdot e^{-x}$

۱ - د برنولی متود له مخی اوبی

$u \cdot v' + v \cdot u' - u \cdot v = x^2 - 1$

$u(v' - v) + v \cdot u' = x^2 - 1$   
 $= 0$

$\frac{dv}{dx} = v$

$\int \frac{dv}{v} = \int dx$

$\ln |v| = x + c_1$

$v = e^x$

$u \cdot 0 + e^x \cdot u' = x^2 - 1 \quad || : e^x$

$\frac{du}{dx} = (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$

$\int du = \int x^2 \cdot e^{-x} dx - \int e^{-x} dx$

$u = \int x^2 \cdot e^{-x} dx + e^{-x}$

$\int x^2 \cdot e^{-x} dx = x^2 \cdot (-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) \cdot 2x dx$

$= -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \int x \cdot e^{-x} dx$

$= -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \left[ x(-e^{-x}) - \right.$

$\left. - \int (-e^{-x}) dx \right]$

$$\int x^2 \cdot e^{-x} dx = -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx$$

$$= -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} - 2e^{-x} + c$$

$$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$$

$$u = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + e^{-x} + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= [-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + e^{-x} + c] \cdot e^x$$

$$= -(x^2 + 2x + 2) + (e^{-x} + c)e^x$$

$$= \underline{\underline{ce^x - x^2 - 2x - 1}}$$

## ۲ - دلاگرانج د متود له مخی اوبی :

$$y' - y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ln |y| = x + c_1$$

$$y = c \cdot e^x$$

$$y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^x}}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x$$

$$c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x - c(x) \cdot e^x = x^2 - 1$$

$$c'(x) \cdot e^x = x^2 - 1 \quad || : e^x$$

$$c'(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$$

$$c(x) = \int (x^2 - 1) \cdot e^{-x} dx$$

$$c(x) = \underline{\underline{-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + e^{-x} + k}}$$

$$y = c(x) \cdot e^x = -x^2 - 2x - 2 + 1 + ke^x$$

$$= \underline{\underline{ke^x - x^2 - 2x - 1}}$$

$$c = e^{c_1}$$

په دیفرنخیالمساوات کي ځاي  
په ځاي کړی.

دا ایتیکریشن همدا په برخه ۱  
کی اوبی شو

$$4. y' = e^{3x} - 2y$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

وتناکی  $c_1 = 0$

### ۱ - د برنولي متود له مخی اوی

$$u \cdot v' + v \cdot u' = e^{3x} - 2u \cdot v$$

$$u(v' + 2v) + v \cdot u' = e^{3x}$$

$= 0$

$$\frac{dv}{dx} = -2v$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2 \int dx$$

$$\ln |v| = -2x + c_1$$

$$v = e^{-2x}$$

$$u \cdot 0 + e^{-2x} \cdot u' = e^{3x} \quad || : e^{2x}$$

$$\frac{du}{dx} = e^{5x}$$

$$\int du = \int e^{5x} dx$$

$$u = \frac{1}{5} e^{5x} + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \left( \frac{1}{5} e^{5x} + c \right) e^{-2x}$$

$$= \frac{1}{5} e^{3x} + c \cdot e^{-2x}$$

### ۲ - د لاکرانج د متود له مخی اوی

$$y' + 2y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int dx$$

$$\ln |y| = -2x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-2x + c_1} = e^{-2x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

### په ديفرنخيالمساوات کی دې کيبنوول شي

5.  $y' \cdot x = y + x^2 \cdot \sin x$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

وتاکي  $c_1 = 0$

دا اوبي ديفرنخيالمساوات د  $x = 0$  لپاره هم پوره کوي، دا په دې مانا چي دا ټوليز اوبي دی.

$$y = c \cdot e^{-2x} \Rightarrow \underline{y = c(x) \cdot e^{-2x}}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-2x} - 2e^{-2x} \cdot c(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-2x} - 2e^{-2x} \cdot c(x) = e^{3x} - 2c(x) \cdot e^{-2x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-2x} = e^{3x} \parallel \cdot e^{2x}$$

$$c'(x) = e^{5x}$$

$$\underline{c(x) = \frac{1}{5} e^{5x} + k}$$

$$y = c(x) \cdot e^{-2x}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{5} e^{3x} + k \cdot e^{-2x}}}}$$

### ۱- د برنولي متود له لاري اوبي

$$(u \cdot v' + v \cdot u') \cdot x = u \cdot v + x^2 \cdot \sin x$$

$$u(xv' - v) + xv \cdot u' = x^2 \cdot \sin x$$
  
$$\underbrace{\hspace{1cm}}_{=0}$$

$$x \cdot \frac{dv}{dx} = v$$

نيونه:  $|x| = c$  , په  $x$  ويشنه

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v| = \ln |x| + c_1$$

$$\underline{v = x}$$

$$u \cdot 0 + x^2 \cdot u' = x^2 \cdot \sin x \parallel : x^2$$

$$\frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\underline{u = -\cos x + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{x(c - \cos x)}}$$



دلته هم لمړی  $x \neq 0$  غوښتل  
کيږي، اوبی لکه پورته مگرد  
 $x = 0$  لپاره به هم باور ولري.

په ديفرنخيالمساوات کي ځاي  
په ځاي کړی.

$$6. y'x = x \cdot \sin x - y$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\text{Wählen: } c_1 = 0$$

وتگی

## ۲ د لاگرانج متود له لاري اوبی

$$y' \cdot x - y = 0 \quad || : x$$

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = c \cdot x \Rightarrow \underline{y = c(x) \cdot x}$$

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

$$c'(x) \cdot x^2 + c(x) \cdot x = c(x) \cdot x + x^2 \cdot \sin x$$

$$c'(x) \cdot x^2 = x^2 \cdot \sin x \quad || : x^2$$

$$c'(x) = \sin x$$

$$\underline{c(x) = -\cos x + k}$$

$$y = \underline{x(k - \cos x)}$$

## ۱ - د برنولی متود له لاري اوبی

$$(u \cdot v' + v \cdot u') \cdot x = x \cdot \sin x - u \cdot v$$

$$u \underbrace{(v' \cdot x + v)}_{=0} + x \cdot v \cdot u' = x \cdot \sin x$$

$$\frac{dv}{dx} \cdot x = -v$$

نېونه:  $x \neq 0$ , ځکه په  $x$  ویشنه

$$\int \frac{dv}{v} = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v| = -\ln |x| + c_1$$

$$\ln |v| = \ln \left| \frac{1}{x} \right|$$

پارشل یا توتہ انیتیکریشن

پہ دیفرنخیالمساوات کی کیپدی

دالاندی

$$\int x \cdot \sin x \, dx$$

اینٹیگرال همدا اوس برخه ۱

کی اوبی شو

$$v = \frac{1}{x}$$

$$u \cdot 0 + u' = x \cdot \sin x$$

$$\int du = \int x \cdot \sin x \, dx$$

$$u = x(-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx$$

$$= -x \cdot \cos x + \sin x + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= -\cos x + \frac{1}{x}(\sin x + c); \quad x \neq 0$$

۲ . د لاکرانژ متود له لارہ اوبی

$$y' \cdot x + y = 0$$

نیونه:  $x \neq 0$ , خکه په  $x$  ویشنه

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = -\ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = \frac{c}{x} \Rightarrow y = \frac{c(x)}{x}$$

$$y' = \frac{x \cdot c'(x) - c(x)}{x^2} = \frac{c'(x)}{x} - \frac{c(x)}{x^2}$$

$$c'(x) - \frac{c(x)}{x} = x \cdot \sin x - \frac{c(x)}{x}$$

$$c'(x) = x \cdot \sin x$$

$$\int dc(x) = \int x \cdot \sin x \, dx$$

$$c(x) = -x \cdot \cos x + \sin x + k$$

7.  $y' + y + \cos x - e^{2x} = 0$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

Wählen:  $c_1 = 0$ : **وټاکئ**

**د انتگرال**  
 $\int e^x \cdot \cos x \, dx$

د ټوټه انتیگرال سره اوبی کیږي

$y = \frac{1}{x} \cdot c(x)$   
 $= -\cos x + \frac{1}{x} (\sin x + k); \quad x \neq 0$

**۱- د برنولی متود له لارې اوبی**

$u \cdot v' + v \cdot u' + u \cdot v = e^{2x} - \cos x$

$u(v' + v) + v \cdot u' = e^{2x} - \cos x$   
 $= 0$

$\frac{dv}{dx} = -v$

$\int \frac{dv}{v} = - \int dx$

$\ln |v| = -x + c_1$

$v = e^{-x}$

$u \cdot 0 + e^{-x} \cdot u' = e^{2x} - \cos x \quad || \cdot e^x$

$u' = e^{3x} - e^x \cdot \cos x$

$u = \int (e^{3x} - e^x \cdot \cos x) \, dx$

$= \int e^{3x} \cdot dx - \int e^x \cdot \cos x \, dx$

$= \frac{1}{3} e^{3x} - \int e^x \cdot \cos x \, dx$

$F = \int e^x \cdot \cos x \, dx$

$= e^x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot e^x \, dx$

$= e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x \, dx$

$= e^x \cdot \sin x - [e^x(-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot e$

$$c = \frac{1}{2} c_1$$

په ديفرنخيالمساوات كي خاي  
په خاي كيرى.

دا اينتيگرال همدا اوس په برخه ۱  
كي اوبى شو

$$F = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x - \underbrace{\int e^x \cdot \cos x \, dx}_F$$

$$2F = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x + c_1$$

$$F = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + c$$

$$u = \frac{1}{3} e^{3x} - F$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \frac{1}{3} e^{2x} - \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) + c \cdot e^{-x}$$

۲ - د اگرائز متود له لارې اوبى :

$$y' + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int dx$$

$$\ln |y| = -x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-x+c_1} = e^{-x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = c \cdot e^{-x} \Rightarrow \underline{y = c(x) \cdot e^{-x}}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot c(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot c(x) + c(x) \cdot e^{-x} + \cos x - e^{2x} = 0$$

$$c'(x) \cdot e^{-x} = e^{2x} - \cos x \quad \| \cdot e^x$$

$$c'(x) = e^{3x} - e^x \cdot \cos x$$

$$c(x) = \int (e^{3x} - e^x \cdot \cos x) \, dx$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + k$$

8.  $y' + ay = b \cdot e^{cx}$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

Wählen:  $c_1 = 0$  : *وتاکه*

$$c_2 = e^{c_1}$$

$$y = c(x) \cdot e^{-x}$$

$$= \frac{1}{3} e^{2x} - \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) + k \cdot e^{-x}$$

۱- د برنولي متود له لارې اوبی

$$u \cdot v' + v \cdot u' + auv = b \cdot e^{cx}$$

$$u \underbrace{(v' + av)}_{=0} + v \cdot u' = b \cdot e^{cx}$$

$$\frac{dv}{dx} = -av$$

$$\int \frac{dv}{v} = -a \int dx$$

$$\ln |v| = -ax + c_1$$

$$v = e^{-ax}$$

$$u \cdot 0 + e^{-ax} \cdot u' = b \cdot e^{cx} \quad || \cdot e^{ax}$$

$$u' = b \cdot e^{x(a+c)}$$

$$u = \frac{b}{a+c} e^{x(a+c)} + c_2$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \frac{b}{a+c} e^{cx} + c_2 \cdot e^{-ax}$$

۲- د لاکرانژ متود له لارې اوبی

$$y' + ay = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -ay$$

$$\int \frac{dy}{y} = -a \int dx$$

$$\ln |y| = -ax + c_1$$

$$y = c_2 \cdot e^{-ax} \Rightarrow \underline{\underline{y = c_2(x) \cdot e^{-ax}}}$$

په ديفرنخيالمساوات كي خاي  
په خاي كيري

$$9. y' + ay - b \cdot \sin(cx) = 0$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\text{Wählen: } c_1 = 0$$

وتاکي

دا اينتيگرال د توتيه يا پارشل  
اينتيگرال له لاري اوبي كيږي

$$y' = c_2'(x) \cdot e^{-ax} - ac_2(x) \cdot e^{-ax}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{-ax} - ac_2(x) \cdot e^{-ax} + ac_2(x) \cdot e^{-ax} = b \cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{-ax} = b \cdot e^{cx} \quad || \cdot e^{ax}$$

$$c_2'(x) = b \cdot e^{x(a+c)}$$

$$c_2(x) = \frac{b}{a+c} e^{x(a+c)} + k$$

$$y = c_2(x) \cdot e^{-ax}$$

$$= \frac{b}{a+c} e^{cx} + k \cdot e^{-ax}$$

۱ - د برنولي متود له لاري اوبي

$$u \cdot v' + v \cdot u' + auv - b \sin cx = 0$$

$$u(v' + av) + v \cdot u' - b \sin cx = 0$$

$$= 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -av$$

$$\int \frac{dv}{v} = -a \int dx$$

$$\ln |v| = -ax + c_1$$

$$v = e^{-ax}$$

$$u \cdot 0 + e^{-ax} \cdot u' - b \sin cx = 0 \quad || \cdot e^{ax}$$

$$u' = b \cdot e^{ax} \cdot \sin cx$$

$$u = b \int e^{ax} \cdot \sin cx \, dx$$

$$= -\frac{b}{c} e^{ax} \cdot \cos cx + \frac{ab}{c} \int e^{ax} \cdot \cos cx \, dx$$

$$= -\frac{b}{c} e^{ax} \cdot \cos cx +$$

$$+ \frac{ab}{c} \left[ e^{ax} \cdot \frac{\sin cx}{c} - \frac{a}{c} \int e^{ax} \cdot \sin cx \, dx \right]$$

$$1 + \frac{a^2}{c^2} = \frac{a^2 + c^2}{c^2}$$

$$c_3 = c_2 \cdot \frac{c^2}{a^2 + c^2}$$

$$c_2 = e^{c_1}$$

په دیفرنشیا مساوات کی دې  
کیبنوول شی

دا اینٹیگرال همدا اوس برخه ۱  
کی اوبی شو

۹۳

$$u = -\frac{b}{c} e^{ax} \cdot \cos cx + \frac{ab}{c^2} e^{ax} \cdot \sin cx -$$

$$-\frac{a^2}{c^2} \cdot b \underbrace{\int e^{ax} \cdot \sin cx \, dx}_u$$

$$\left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right) u = \frac{b}{c} e^{ax} \left(\frac{a}{c} \sin cx - \cos cx\right) + c_2$$

$$u = \frac{bc}{a^2 + c^2} e^{ax} \left(\frac{a}{c} \sin cx - \cos cx\right) + c_3$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \frac{bc}{a^2 + c^2} \left(\frac{a}{c} \sin cx - \cos cx\right) + c_3 \cdot e^{-ax}$$

۲ - د لاکرانژ د متود له لارې اوبی

$$y' + ay = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -ay$$

$$\int \frac{dy}{y} = -a \int dx$$

$$\ln |y| = -ax + c_1$$

$$y = c_2 \cdot e^{-ax} \Rightarrow y = c_2(x) \cdot e^{-ax}$$

$$y' = c_2'(x) \cdot e^{-ax} - ac_2(x) \cdot e^{-ax}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{-ax} - ac_2(x) \cdot e^{-ax} + ac_2(x) \cdot e^{-ax} - b \cdot \sin cx = 0$$

$$c_2'(x) \cdot e^{-ax} = b \sin cx \quad || \cdot e^{ax}$$

$$c_2'(x) = b \cdot e^{ax} \cdot \sin cx$$

$$c_2(x) = b \int e^{ax} \cdot \sin cx \, dx$$

$$= \frac{bc}{a^2 + c^2} e^{ax} \left(\frac{a}{c} \sin cx - \cos cx\right) + k$$

10.  $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln x}$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

د سوالورکونی څخه سملاسی لاس  
ته راځی  $x > 0$

وټاکي:  $c_1 = 0$

$\int \frac{1}{\ln x} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$

$y = c_2(x) \cdot e^{-ax}$   
 $= \frac{b}{a^2 + c^2} (a \cdot \sin cx - c \cdot \cos cx) + k \cdot e^{-ax}$

۱- د برنولي د متود له لاري اوبي

$u \cdot v' + v \cdot u' = \frac{uv}{x} + \frac{1}{\ln x}$

$u \left( v' - \frac{v}{x} \right) + v \cdot u' = \frac{1}{\ln x}$   
 $= 0$

$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$

$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$

$\ln |v| = \ln |x| + c_1$

$v = x$

$u \cdot 0 + x \cdot u' = \frac{1}{\ln x} \parallel \cdot \frac{1}{x}$

$u' = \frac{1}{x \ln x}$

$u = \int \frac{1}{x \ln x} dx$   
 $= \ln |\ln x| + c$

$y = u \cdot v$

$= x (|\ln |\ln x| + c)$

۲- د لاگرانژ د متودي له لاري وبي

$y' - \frac{y}{x} = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$



$$c = e^{c_1}$$

پہ دیفرنخیالمساوات کی کیردی

11.  $y' = a + bx + cy$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

Wählen:  $c_1 = 0$

وتاکہ

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + c_1$$

$$y = c \cdot x \Rightarrow \underline{y = c(x) \cdot x}$$

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

$$c'(x) \cdot x + c(x) = c(x) + \frac{1}{\ln x}$$

$$c'(x) \cdot x = \frac{1}{\ln x} \quad \parallel \cdot \frac{1}{x}$$

$$c'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$c(x) = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx \\ = \underline{\ln |\ln x| + k}$$

$$y = c(x) \cdot x$$

$$= \underline{x(\ln |\ln x| + k)}$$

۱ - د برنولی متورله لارہاوبی

$$u \cdot v' + v \cdot u' = a + bx + cw$$

$$u \underbrace{(v' - cv)}_{=0} + v \cdot u' = a + bx$$

$$\frac{dv}{dx} = cv$$

$$\int \frac{dv}{v} = c \int dx$$

$$\ln |v| = cx + c_1$$

$$\underline{v = e^{cx}}$$

پارشل ایتیکریشن یا اینتیگرال

$$u \cdot 0 + e^{cx} \cdot u' = a + bx \quad \parallel \cdot e^{-cx}$$

$$u' = (a + bx) \cdot e^{-cx}$$

$$u = \int (a + bx) e^{-cx} dx$$

$$= a \int e^{-cx} dx + b \int x \cdot e^{-cx} dx$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} + b \int x \cdot e^{-cx} dx$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} + b \left[ -\frac{x}{c} e^{-cx} + \frac{1}{c} \int e^{-cx} dx \right]$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} - \frac{bx}{c} e^{-cx} - \frac{b}{c^2} e^{-cx} + c_1$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{c} e^{-cx} \left( a + bx + \frac{b}{c} \right) + c_1}}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{c} \left( a + bx + \frac{b}{c} \right) + c_1 \cdot e^{cx}}}$$

۲ - د لاگرانج متود له لارې اوبی

$$y' - cy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = cy$$

$$\int \frac{dy}{y} = c \int dx$$

$$\ln |y| = cx + c_1$$

$$y = c_2 \cdot e^{cx} \Rightarrow \underline{\underline{y = c_2(x) \cdot e^{cx}}}$$

$$y' = c_2'(x) \cdot e^{cx} + c \cdot c_2(x) \cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{cx} + c \cdot c_2(x) \cdot e^{cx} = a + bx + c \cdot c_2(x) \cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{cx} = a + bx \quad \parallel \cdot e^{-cx}$$

$$c_2'(x) = (a + bx) e^{-cx}$$

$$c_2 = e^{c_1}$$

په دیفرنشیا مساوات کې ځای

په ځای کېږي یا کېږدی

دا اینتیگرال همدا اوس برخه ۱  
کی اوبی شو

$$c_2(x) = \int (a+bx)e^{-cx} dx$$
$$= -\frac{1}{c} e^{-cx} \left( a+bx + \frac{b}{c} \right) + c_2$$

$$y = k(x) \cdot e^{cx}$$
$$= -\frac{1}{c} \left( a+bx + \frac{b}{c} \right) + k \cdot e^{cx}$$

12.  $xy' + 1 = e^x + y$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

۱ - د برنولی متود له لاری اوبی

$$x(u \cdot v' + v \cdot u') + 1 = e^x + uv$$

$$u \underbrace{(xv' - v)}_{=0} + xv \cdot u' + 1 = e^x$$

$$x \cdot \frac{dv}{dx} = v$$

نیونه:  $x \neq 0$ , ځکه په  $x$  ویشنه

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v| = \ln |x| + c_1$$
$$\underline{v = x}$$

$$u \cdot 0 + x^2 \cdot u' + 1 = e^x$$

$$u' = \frac{e^x - 1}{x^2}$$

$$u = \int \frac{e^x}{x^2} dx - \int \frac{dx}{x^2}$$

$$= \int \frac{e^x}{x^2} \cdot dx + \frac{1}{x}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\frac{e^x}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \dots$$

وټاکه:  $c_1 = 0$  : Wählen:

د دې لاندې اینتیگرال

$$\int \frac{e^x}{x^2} dx$$

اوبی کی د انتیگریشن لپاره لری  
ودیزینه باندي تیریدنه نه شي کیدی

$$\int \frac{e^x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + \ln |x| + \frac{x}{1 \cdot 2!} + \frac{x^2}{2 \cdot 3!} +$$

$$+ \frac{x^3}{3 \cdot 4!} + \dots + c$$

$$u = \ln |x| + \frac{x}{1 \cdot 2!} + \frac{x^2}{2 \cdot 3!} + \frac{x^3}{3 \cdot 4!} + \dots + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= c \cdot x + x \cdot \ln |x| + \frac{x^2}{1 \cdot 2!} + \frac{x^3}{2 \cdot 3!} + \frac{x^4}{3 \cdot 4!} + \dots$$

für  $x \neq 0$

### ۲ - دلاگرانژ متود له لاري اوبی

$$xy' - y = 0$$

نیونه:  $x \neq 0$ , ځکه په  $x$  ویشنه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + c_1$$

$$y = c \cdot x \Rightarrow y = \underline{c(x) \cdot x}$$

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

$$x^2 \cdot c'(x) + c(x) \cdot x + 1 = e^x + c(x) \cdot x$$

$$x^2 \cdot c'(x) + 1 = e^x \quad || : x^2$$

$$c'(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$$

$$c(x) = \int \frac{e^x}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \ln |x| + \frac{x}{1 \cdot 2!} + \frac{x^2}{2 \cdot 3!} +$$

$$+ \frac{x^3}{3 \cdot 4!} + \dots + k$$

۹۸

$$c = e^x$$

په دیفرنخیال مساوات کی کیږدی

دا اینتیگرال همدا اوس تر ۱  
لاندي اوبی شویدی.

$$13. y'(1-x^2) + xy = 1$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\int \frac{-2x}{1-x^2} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$\text{Wählen: } c_1 = 0$$

وټاکئ

د ورپسې اوبيوني لپاره باید د  $|x|$  لپاره دوه حالتونه توپیر شي

Substitution: سبستيجيوشن:

$$1-x^2 = z^2 \Rightarrow dx = -\frac{z \cdot dz}{x}$$

$$y = c(x) \cdot x$$

$$= k \cdot x + x \cdot \ln |x| + \frac{x^2}{1 \cdot 2!} + \frac{x^3}{2 \cdot 3!} + \frac{x^4}{3 \cdot 4!} + \dots$$

$x \neq 0$

۱. د برنولي د متود له لارې دا دلته

$$(uv' + vu')(1-x^2) + xuv = 1$$

$$u \underbrace{[v'(1-x^2) + xv]}_{=0} + vu'(1-x^2) = 1$$

$$\frac{dv}{dx} (1-x^2) = -xv$$

نيونه:  $|x| = 1$ ; ويشنه په  $1-x^2$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{-x}{1-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2} dx$$

$$\ln |v| = \frac{1}{2} \ln |1-x^2| + c_1$$

$$= \ln |1-x^2|^{\frac{1}{2}}$$

$$v = \sqrt{|1-x^2|}$$

$$v = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{für } |x| < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

$$1. \text{ Fall: } v = \sqrt{1-x^2}; |x| < 1$$

$$u \cdot 0 + \sqrt{1-x^2} \cdot u' \cdot (1-x^2) = 1$$

$$u' = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$u = \int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$= \int \frac{1}{z^3} \cdot \frac{-z dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$x = \sqrt{1-z^2}; \quad dx = -\frac{z \cdot dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

سبستیچیوشن

$$z = \sin t \Rightarrow dz = \cos t \cdot dt$$

$$\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t; \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

دا اوی دیفرنخیالمساوات  
د  $|x| = 1$  هم پوره کوي

سبستیچیوشن : Substitution:

$$x^2 - 1 = z^2 \Rightarrow dx = \frac{z \cdot dz}{x}$$

$$x = \sqrt{1+z^2}; \quad dx = \frac{z \cdot dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

سبستیچیوشن

$$z = \sinh t \Rightarrow dz = \cosh t \cdot dt$$

$$\sqrt{1+\sinh^2 t} = \cosh t$$

$$u = -\int \frac{dz}{z^2 \cdot \sqrt{1-z^2}}$$

$$= -\int \frac{\cos t \, dt}{\sin^2 t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t}}$$

$$= -\int \frac{dt}{\sin^2 t} \quad \blacktriangleright \text{ بنسټ ایتیکرال}$$

$$= \cot t + c$$

$$= \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} + c$$

$$= \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} + c$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{x + c \cdot \sqrt{1-x^2} \quad \text{für } |x| \leq 1}}$$

$$2. \text{ Fall: } v = \sqrt{x^2-1}; \quad |x| > 1$$

$$u \cdot 0 + \sqrt{x^2-1} \cdot u' \cdot (1-x^2) = 1$$

$$u' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1} (1-x^2)}$$

$$u = -\int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\int \frac{1}{z^3} \cdot \frac{z \, dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$u = -\int \frac{dz}{z^2 \cdot \sqrt{1+z^2}}$$

$$= -\int \frac{\cosh t \, dt}{\sinh^2 t \cdot \sqrt{1+\sinh^2 t}}$$

$$= -\int \frac{dt}{\sinh^2 t} \quad \blacktriangleright \text{ بنسټ ایتیکرال}$$

$$\coth t = \frac{\cosh t}{\sinh t}$$

دا اوبی ديفرنخيالمساوات  
د  $|x|=1$  هم پوره کوي  
په ۱ او ۲ حالت کې د ارزښت  
کارونې له لارې و يوه اوبی ته  
رايوځاي شي.

$$\int \frac{-2x}{1-x^2} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$c = e^{c_1}$$

د نورو اوبيونولپاره بايد د  $|x|$   
لپاره دوه حالتونه توپير شي

۱۰۱

$$u = \coth t + c$$

$$= \frac{\sqrt{1+\sinh^2 t}}{\sinh t} + c$$

$$= \frac{\sqrt{1+z^2}}{z} + c$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= x + c \cdot \sqrt{x^2-1} \quad \text{په } |x| \geq 1$$

$$y = x + c \cdot \sqrt{|1-x^2|} \quad \text{په } |x| < 1$$

۲- د لاگرانژ متود له لارې اوبی

$$y'(1-x^2) + xy = 0$$

نيونه:  $|x| = 1$ ; ويشنه په  $1-x^2$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{xy}{1-x^2}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x}{1-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2} dx$$

$$\ln |y| = \frac{1}{2} \ln |1-x^2| + c_1$$

$$= \ln \sqrt{|1-x^2|} + c_1$$

$$y = \sqrt{|1-x^2|} \cdot c$$

$$y = c(x) \cdot \sqrt{|1-x^2|}$$

$$y = \begin{cases} c(x) \cdot \sqrt{1-x^2} & \text{په } |x| < 1 \\ c(x) \cdot \sqrt{x^2-1} & \text{په } |x| > 1 \end{cases}$$

په ديفرنخيالمساوات كي ځاي  
په ځاي كړی.

دا ايتيگراال همدا اوس په برخه ۱  
حالت ۱ کی وشميرل شو

دا اوبی ديفرنخيالمساوات  
د  $|x|=1$  هم پوره کوي

په ديفرنخيالمساوات كي ځاي  
په ځاي كړی.

$$1. \text{ Fall: } y = c(x) \cdot \sqrt{1-x^2}; \quad |x| < 1$$

$$y' = c(x) \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + c'(x) \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$c(x) \cdot \frac{-x(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + c'(x)(1-x^2)\sqrt{1-x^2} +$$

$$-c(x) \cdot x\sqrt{1-x^2} + xc(x) \cdot \sqrt{1-x^2} = 1$$

$$c'(x)(1-x^2)\sqrt{1-x^2} = 1$$

$$c'(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$c(x) = \int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + k$$

$$y = c(x) \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$= x + k \cdot \sqrt{1-x^2} \quad \text{für } |x| \leq 1$$

$$2. \text{ Fall: } y = c(x) \cdot \sqrt{x^2-1}; \quad |x| > 1$$

$$y' = c'(x) \cdot \sqrt{x^2-1} + c(x) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(1-x^2) \cdot c'(x) \cdot \sqrt{x^2-1} + c(x) \frac{x(1-x^2)}{\sqrt{x^2-1}} +$$

$$+ x \cdot c(x) \cdot \sqrt{x^2-1} = 1$$

$$(1-x^2) \cdot c'(x) \cdot \sqrt{x^2-1} = 1$$

$$c'(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= -\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$



دا ايتيگراڻ همدا اوس برخه ۱  
۲. حالت کي اوبي شو

دا اوبي ديفرنخيالمساوات  
د  $|x|=1$  هم پوره کوي  
په ۱ او ۲ حالت کي د ارزښت  
کاروني له لاري و يوه اوبي ته  
رايوخاي شي.

$$14. \frac{y'}{\sin x} - y = 1 - \cos x$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

د پوښتنی څخه  $|x|=0$  ورکوي،

دا په دې مانا چې  $x = n \cdot \pi$

د  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  سره

Wählen:  $c_1 = 0$

وټاکي

سبستيچيوشن (بدلون)

$$z = \cos x \Rightarrow dx = \frac{dz}{-\sin x}$$

$$c(x) = - \int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + k$$

$$y = c(x) \cdot \sqrt{x^2-1}$$

$$= x + k \cdot \sqrt{x^2-1} \quad \text{für } |x| \geq 1$$

$$y = x + k \cdot \sqrt{|1-x^2|} \quad \text{für alle } x$$

۱ - د برنولي متود له لاري اوبي

$$y' - \sin x \cdot y = \sin x (1 - \cos x)$$

$$uw' + vu' - uv \cdot \sin x = \sin x \cdot (1 - \cos x)$$

$$u \underbrace{(v' - v \cdot \sin x)}_{=0} + vu' = \sin x (1 - \cos x)$$

$$\frac{dv}{dx} = v \cdot \sin x$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \sin x \, dx$$

$$\ln |v| = -\cos x + c_1$$

$$v = e^{-\cos x}$$

$$u \cdot 0 + e^{-\cos x} \cdot u' = \sin x (1 - \cos x) \parallel \cdot e^{\cos x}$$

$$u' = \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x}$$

$$u = \int \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x} dx$$

$$= - \int (1-z) e^z dz$$

$$= - \int e^z dz + \int z \cdot e^z dz$$

پارشل یا توتہ ایتیگریشن

$$\begin{aligned}
u &= -e^z + \int z \cdot e^z dz \\
&= -e^z + z \cdot e^z - \int e^z dz \\
&= -e^z + z \cdot e^z - e^z + c \\
&= e^z(z-2) + c \\
&= \underline{e^{\cos x} \cdot (\cos x - 2) + c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= u \cdot v \\
&= \underline{\underline{\cos x - 2 + c \cdot e^{-\cos x}}}
\end{aligned}$$

۲- د لاگرانج متود له لاری اوبی

$$\frac{y'}{\sin x} - y = 0 \quad \parallel \cdot \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \sin x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \sin x dx$$

$$\ln |y| = -\cos x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-\cos x + c_1} = e^{-\cos x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = c \cdot e^{-\cos x} \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{-\cos x}}}$$

په دیفرنخیالمساوات کی خای  
په خای کبری.

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\cos x} + c(x) \cdot \sin x \cdot e^{-\cos x}$$

$$\frac{c'(x)}{\sin x} e^{-\cos x} + c(x) \cdot e^{-\cos x} - c(x) \cdot e^{-\cos x} = 1 - \cos x$$

$$\frac{c'(x)}{\sin x} e^{-\cos x} = 1 - \cos x \quad \parallel \cdot \sin x \cdot e^{\cos x}$$

$$c'(x) = \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x}$$

$$\begin{aligned}
c(x) &= \int \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x} \cdot dx \\
&= \underline{\underline{e^{\cos x} \cdot (\cos x - 2) + k}}
\end{aligned}$$

دا اینتیگرال همدا اوس برخه ۱  
کی اوبی شو

$$15. y' + y \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\text{Wählen: } c_1 = 0$$

وفاقی

$$\sin 2x = 2 \cos x \cdot \sin x$$

Substitution: بدلون

$$\sin x = z \Rightarrow dx = \frac{dz}{\cos x}$$

پارشل یا توہہ ایتیگریشن

۱۰۵

$$y = c(x) \cdot e^{-\cos x}$$

$$= \underline{\underline{\cos x - 2 + k \cdot e^{-\cos x}}}$$

۱ - د برنولی متود له لاری اویونه

$$uv' + vu' + uv \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\underbrace{u(v' + v \cdot \cos x)}_{=0} + vu' = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\frac{dv}{dx} = -v \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dv}{v} = - \int \cos x \, dx$$

$$\ln |v| = -\sin x + c_1$$

$$v = \underline{e^{-\sin x}}$$

$$u \cdot 0 + e^{-\sin x} \cdot u' = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \| \cdot e^{\sin x}$$

$$u' = \frac{1}{2} \sin 2x e^{\sin x}$$

$$u = \int \sin x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x} \, dx$$

$$= \int z \cdot e^z \cdot dz$$

$$= z \cdot e^z - \int e^z \, dz$$

$$u = z \cdot e^z - e^z + c$$

$$= e^z(z-1) + c$$

$$= \underline{\underline{e^{\sin x}(\sin x - 1) + c}}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{\sin x - 1 + c \cdot e^{-\sin x}}}$$

## ۲ - د لاکرانخ د متود له لارې اوبی

$$y' + y \cdot \cos x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \cos x \, dx$$

$$\ln |y| = -\sin x + c_1$$

$$y = c \cdot e^{-\sin x} \Rightarrow y = \underline{c(x) \cdot e^{-\sin x}}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x} + \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x} = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \| \cdot e^{\sin x}$$

$$c'(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot e^{\sin x}$$

$$c(x) = \int \cos x \cdot \sin x \cdot e^{\sin x} \, dx \\ = \underline{e^{\sin x}(\sin x - 1) + k}$$

$$y = c(x) \cdot e^{-\sin x} \\ = \underline{\sin x - 1 + k \cdot e^{-\sin x}}$$

## ۱ - د برنولي متود له لارې اوبی

$$y' - yx = x^2 - 1$$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} - u \cdot v \cdot x = x^2 - 1$$

$$u \cdot \left[ \frac{dv}{dx} - v \cdot x \right] + v \frac{du}{dx} = x^2 - 1$$

$$\frac{dv}{dx} - v \cdot x = 0$$

۱۰۶

$$c = e^{c_1}$$

په ديفرنخيالمساوات کي ځاي  
په ځاي کړی.

دا ايتيگرال همدا اوس برخه ۱  
کی اوبی شو

$$16. y' - yx = x^2 - 1$$

$$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$$

$$y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\left[ \frac{dv}{dx} - v \cdot x \right] = 0$$

$$v = v(x)$$

د

$$v(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$$

سره

$$u \cdot \left[ \frac{dv}{dx} - v \cdot x \right] = 0.$$

حل اوله لاره

د راپاتې مساواتو په  $u = u(x)$  اېنټېگرېشن له لارې وټاکل شي.

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 - 1) dx$$

$$= \int e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x \cdot x dx - \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx -$$

$$- \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx + c_2$$

دا لاسته راغلی ارزښتونه  $u(x)$  او

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

کې کینبول شي.

دا لاسته راوړنه د ورکړل شوي دفر-

نځیالمساوات ټولیزه اوبیونه ده

$$F(x) = 0$$

$$\Rightarrow y' - y \cdot x = 0; \quad x^2 - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - y \cdot x = 0$$

$$\frac{dy}{y} = x dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x dx \Rightarrow \ln y = \frac{x^2}{2} + \ln c_1(x)$$

$$y = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y' = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int x dx$$

$$\ln v = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$e^{\ln v} = e^{\frac{x^2}{2} + c_1} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{c_1}; \quad c_1 = 0$$

$$v = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$v \cdot \frac{du}{dx} = x^2 - 1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x^2 - 1}{v}$$

$$du = \frac{x^2 - 1}{e^{\frac{x^2}{2}}} dx$$

$$\int du = \int e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 - 1) dx$$

$$u = u(x) = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2$$

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

$$y = (-x e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y = -x + c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f = \langle x, -c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - x \rangle$$

۲- د لاکرانج د متود له لارې اوبی

$$y' - yx = x^2 - 1$$

$$c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx} - c_1(x) e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = x^2 - 1$$

$$e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx} = x^2 - 1$$

$$\frac{dc_1(x)}{dx} = \frac{x^2 - 1}{e^{\frac{x^2}{2}}}$$

دا د مساوات  $y' - yx = 0$  د اوبیونی

سره لاس ته راغلی اینتیگریشن ثابت

د  $x$  فنکشن دی

$c_1(x)$  د  $y$  لپاره برخاوی کی اینبول کیری.

لاس ته راورنه همغه پولیزه اوبیونه ده،

لکه څنگه چی د برونولی متود له لارې

لاس ته راغلی

$$dc_1(x) = \frac{x^2 - 1}{e^{\frac{x^2}{2}}} dx = e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 - 1) dx$$

$$\int c_1(x) dx = \int e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 - 1) dx$$

$$c_1(x) = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2$$

$$y = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$= (-x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y = -x + c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f = \langle x, -c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - x \rangle$$

17.  $y' \cdot x^2 + y = x$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

۱ - د برونولی متود له لارې اوبی

$$(uv' + vu')x^2 + uv = x$$

$$u(x^2v' + v) + x^2vu' = x$$
  
$$= 0$$

$$x^2v' = -v$$

نیونه:  $x \neq 0$  د  $x^2$  سره ویشنه

$$\int \frac{dv}{v} = - \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\ln |v| = \frac{1}{x} + c_1$$

$$v = e^{\frac{1}{x}}$$

$$u \cdot 0 + x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot u' = x \quad || : x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$u' = \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

$$u = \int \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}} dx$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$z = -\frac{1}{x}$$

Wählen:  $c_1 = 0$  و تکی

دا ایتیگرال کیدی شی یواخی  
د لریودیزی له لارې اوبی شی

$$e^{-\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2!x^2} - \frac{1}{3!x^3} + \frac{1}{4!x^4} - + \dots$$

$$\frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2!x^3} - \frac{1}{3!x^4} + \frac{1}{4!x^5} - + \dots$$

$$u = \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2!2x^2} + \frac{1}{3!3x^3} - \frac{1}{4!4x^4} + - \dots + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= e^{\frac{1}{x}} \left( \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2!2x^2} + \frac{1}{3!3x^3} - \frac{1}{4!4x^4} + - \dots + c \right)$$

د لپاره  $x \neq 0$

۲- د لاکرانژ موتود له لارې اویونه

$$y' \cdot x^2 + y = 0$$

نیونه:  $x \neq 0$  د  $x^2$  سره ویشنه

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2}$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\ln|y| = \frac{1}{x} + c_1$$

$$y = c \cdot e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{\frac{1}{x}}}}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{\frac{1}{x}} - \frac{c(x)}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

$$x^2 \cdot c'(x) \cdot e^{\frac{1}{x}} - c(x) \cdot e^{\frac{1}{x}} + c(x) \cdot e^{\frac{1}{x}} = x$$

$$x^2 \cdot c'(x) \cdot e^{\frac{1}{x}} = x \quad || : x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$c'(x) = \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

$$c(x) = \int \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}} dx$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2!2x^2} + \frac{1}{3!3x^3} -$$

$$\frac{1}{4!4x^4} + - \dots + k$$

$$c = e^{c_1}$$

په ديفرنخيالمساوات کی کېږدی

دا اینتیګرال

همدا اوس برخه اکی اوبی شو

$$18. y' + \frac{1}{1+x} y + x^2 = 0$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

د پوښتنې کولو څخه همداوس  
ورکوي  $x = -1$

Wählen:  $c_1 = 0$  وټاکئ

$$-\ln |1+x| = \ln |1+x|^{-1}$$

$$c = 12c_2$$

$$y = c(x) \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$= e^{\frac{1}{x}} \left( \ln |x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2!2x^2} + \frac{1}{3!3x^3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4!4x^4} + \dots + k \right)$$

für  $x \neq 0$

۱- د برنولي متود له لارې اوبیونه

$$uv' + vu' + \frac{uv}{1+x} + x^2 = 0$$

$$u \left( v' + \frac{v}{1+x} \right) + vu' + x^2 = 0$$

$= 0$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-v}{1+x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = - \int \frac{dx}{1+x}$$

$$\ln |v| = -\ln |1+x| + c_1$$

$$v = \frac{1}{1+x}$$

$$u \cdot 0 + \frac{u'}{1+x} + x^2 = 0 \quad || \cdot (1+x)$$

$$u' = -x^2(1+x)$$

$$u = - \int (x^2 + x^3) dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + c_2$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \frac{c - 4x^3 - 3x^4}{12(1+x)}$$



## ۲- د لاگرانژ موتود له لارې اویونه

$$y' + \frac{1}{1+x} y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{1+x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{1+x}$$

$$\ln |y| = -\ln |1+x| + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-\ln |1+x| + c_1} = e^{\ln |1+x|^{-1}} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = c \cdot \frac{1}{1+x} \Rightarrow y = \frac{c(x)}{1+x}$$

$$y' = c'(x) \cdot \frac{1}{1+x} - c(x) \cdot \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\frac{c'(x)}{1+x} - \frac{c(x)}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x} \cdot \frac{c(x)}{1+x} + x^2 = 0$$

$$\frac{c'(x)}{1+x} + x^2 = 0$$

$$c'(x) = -x^2(1+x)$$

$$c(x) = - \int (x^2 + x^3) dx$$

$$= - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + c_2$$

$$y = \frac{c(x)}{1+x}$$

$$= \frac{k - 4x^3 - 3x^4}{12(1+x)}$$

په ديفرنشيامساوات کی کړدی

$$k = 12c_2$$

$$19. y' + y \cdot \cos x = e^{-\sin x}$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

## ۱- د برنولي متود له لارې اویونه

$$uv' + vu' + uv \cdot \cos x = e^{-\sin x}$$

$$u(v' + v \cdot \cos x) + vu' = e^{-\sin x}$$

$$= 0$$

Wählen:  $c_1 = 0$  و ناکمی

$$\frac{dv}{v} = -v \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dv}{v} = - \int \cos x \, dx$$

$$\ln |v| = -\sin x + c_1$$

$$v = e^{-\sin x}$$

$$u \cdot 0 + e^{-\sin x} \cdot u' = e^{-\sin x} \parallel \cdot e^{\sin x}$$

$$u' = 1$$

$$u = x + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{(x+c)e^{-\sin x}}}$$

۲- د لاگرانژ موتود له لارې اویونه

$$y' + y \cdot \cos x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \cos x \, dx$$

$$\ln |y| = -\sin x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-\sin x + c_1} = e^{-\sin x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = c \cdot e^{-\sin x} \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{-\sin x}}}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x} +$$

$$+ c(x) \cdot e^{-\sin x} \cdot \cos x = e^{-\sin x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} = e^{-\sin x} \parallel \cdot e^{\sin x}$$

$$c'(x) = 1$$

$$c(x) = \underline{\underline{x+k}}$$

په دیفرنشیا مساوات کی کړدی

$$20. y' + y \cdot \tan x = \sin(2x)$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

د پوښتني کولو څخه همداوس  
ورکوي  $\cos x \neq 0$

$$-\int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

Wählen:  $c_1 = 0$  وټاکي

$$y = c(x) \cdot e^{-\sin x}$$

$$= (x+k) e^{-\sin x}$$

۱ - د برنولي متود له لارې اوبیونه

$$uv' + vu' + uv \cdot \tan x = \sin(2x)$$

$$u \underbrace{(v' + v \cdot \tan x)}_{=0} + vu' = \sin(2x)$$

$$\frac{dv}{dx} = -v \cdot \tan x$$

$$\int \frac{dv}{v} = - \int \tan x dx$$

$$= - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$\ln |v| = \ln |\cos x| + c_1$$

$$v = \underline{\cos x}$$

$$u \cdot 0 + \cos x \cdot u' = \sin(2x)$$

$$= 2 \sin x \cdot \cos x \quad \| : \cos x$$

$$u' = 2 \sin x$$

$$u = 2 \int \sin x$$

$$= \underline{-2 \cos x + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\cos x \cdot (c - 2 \cos x)}$$

د لاگرانژ متود له لارې اوبیونه

$$y' + y \cdot \tan x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \tan x$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \tan x \cdot dx$$

$$= - \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx$$

$$c = e^{2x}$$

په ديفرنخيال مساوات کی کينبول

21.  $y' - 2y = -x + 3$

$$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$$

$$y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\left[ \frac{du}{dx} - 2 \cdot u \right] = 0 \quad \text{له}$$

لاس ته راخي

$$u = e^{2x} \quad \text{د}$$

$$v \cdot \left[ \frac{du}{dx} - 2u \right] = 0 \quad \text{سره حل لرو}$$

د لاندې پاتی برابر وځخه د

ایتیگرا ل له لاری

$$u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$$

$$v = v(x) \quad \text{تاکل کیری}$$

$$\ln |y| = \ln |\cos x| + c_1$$

$$y = \cos x \cdot c \Rightarrow y = \underline{c(x) \cdot \cos x}$$

$$y' = c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x$$

$$c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x + c(x) \cdot \underbrace{\frac{\cos x \cdot \tan x}{\sin x}} = \sin(2x)$$

$$c'(x) \cdot \cos x = \sin(2x)$$

$$= 2 \sin x \cdot \cos x \quad \parallel : \cos x$$

$$c'(x) = 2 \sin x$$

$$c(x) = 2 \int \sin x \cdot dx$$

$$= \underline{-2 \cos x + k}$$

$$y = c(x) \cdot \cos x$$

$$= \underline{(k - 2 \cos x) \cdot \cos x}$$

۱ - د برنولي متود له لاری اویونه

$$y' - 2 \cdot y = -x + 3$$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} - 2 \cdot u \cdot v = -x + 3$$

$$v \cdot \left[ \frac{du}{dx} - 2 \cdot u \right] + u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$$

$$\frac{du}{dx} - 2u = 0$$

$$\int \frac{du}{u} = \int 2 dx$$

$$\ln u = 2x + c_1 \Rightarrow u = e^{2x} \cdot e^{c_1}$$

$$c_1 = 0 \Rightarrow u = e^{2x}$$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-x + 3}{u} \Rightarrow u = e^{2x}$$

$$\int e^{-2x} \cdot (3-x) dx$$

$$= 3 \int e^{-2x} dx - \int x \cdot e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{3}{2} e^{-2x} - \left[ x \cdot \left( -\frac{1}{2} e^{-2x} \right) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4} e^{-2x} \right] + c_2$$

د  $u(x)$  او  $v(x)$  لاس ته راوړي  
 ارزښتونه د  $y = u(x) \cdot v(x)$   
 په مساوات کې کینبول کيږي.  
 لاس ته راوړنی د ورکړ شوي  
 دفرنخیالبرابراون ټولیز اوبی دي

$$y' - 2y = -x + 3 \quad \text{ردو نولو}$$

$$y' - 2y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2 dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2 dx$$

$$\ln y = 2x + c_1$$

$$y = e^{2x+c_1} = e^{2x} \cdot e^{c_1}$$

$$= c_3(x) \cdot e^{2x}$$

د اینتگریشن ثابتی  $c_3(x) = e^{c_1}$

د  $x$  فنکشن دی

د  $y$  او  $y'$  لپاره دواړه برخاویونی

په پیلمساوات  $y' - 2y = -x + 3$

کې کینبول کيږي

د اینتگریشن له لارې لویه  $c_3(x)$

پیدا کيږي

$$dv = e^{-2x}(3-x) dx$$

$$v = \int e^{-2x} \cdot (3-x) dx$$

$$v = e^{-2x} \cdot \left( \frac{1}{2} x - \frac{5}{4} \right) + c_2$$

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

$$y = e^{2x} \cdot \left[ e^{-2x} \cdot \left( \frac{1}{2} x - \frac{5}{4} \right) + c_2 \right]$$

$$y = \frac{1}{2} x - \frac{5}{4} + e^{2x} \cdot c_2$$

$$f = \left\langle x, -\frac{1}{2} x + e^{2x} \cdot c_2 - \frac{5}{4} \right\rangle$$

۲- د لاگرانژ مود له لارې اویونه

$$y' - 2y = -x + 3$$

$$y' - 2y = 0$$

$$y = c_3(x) \cdot e^{2x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = c_3(x) \cdot e^{2x} \cdot 2 + c_3'(x) \cdot e^{2x}$$

$$c_3(x) \cdot e^{2x} \cdot 2 + c_3'(x) \cdot e^{2x} - 2 \cdot c_3(x) \cdot e^{2x} = -x + 3$$

$$\Rightarrow c_3'(x) \cdot e^{2x} = -x + 3$$

$$c_3'(x) = (-x + 3) \cdot e^{-2x}$$

$$\int c_3'(x) = \int e^{-2x} \cdot (3-x) dx$$

$$c_3(x) = e^{-2x} \left( \frac{1}{2} x - \frac{5}{4} \right) + c_2$$

$$\begin{array}{l}
 \text{په برابرون کی کینبول کیږي} \\
 y = c_3(x) \cdot e^{2x} \\
 \text{لاسته راوړنه همغه ټوليزه اوبیونه} \\
 \text{ده، لکه د مخه د برنول د متود} \\
 \text{له لارې راپیدا شوه}
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 y = \left[ e^{-2x} \left( \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} \right) + c_2 \right] \cdot e^{2x} \\
 y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + e^{2x} \cdot c_2 \\
 f = \left\langle x, -\frac{1}{2}x + e^{2x} \cdot c_2 - \frac{5}{4} \right\rangle
 \end{array}
 \right.$$

### ۱. ۳ د دوم نظم درفنخيالمساوات

$$\begin{array}{l}
 1. y'' = \frac{1}{x} \\
 \text{د پوښتنیورکړې څخه لاسته 0=x} \\
 \text{راځي} \\
 \text{ورپسی اوبیونی ته دې حالتونه } x > 0 \\
 \text{او } x < 0 \text{ توپیر شي} \\
 \\
 \text{پارشل یا ټوټه ایتیگریشن} \\
 \\
 c_3 = c_1 - 1
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{x} \\
 \int dy' = \int \frac{dx}{x} \\
 y' = \ln |x| + c_1 \\
 = \begin{cases} \ln x + c_1 & \text{für } x > 0 \\ \ln(-x) + c_1 & \text{für } x < 0 \end{cases} \\
 \text{1. Fall: } y' = \ln x + c_1; \quad x > 0 \\
 \int dy = \int (\ln x + c_1) dx \\
 y = \int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} + c_1 \int dx \\
 = x \cdot \ln x - \int dx + c_1 \cdot x \\
 = x(\ln x + c_1 - 1) + c_2 \\
 = \underline{\underline{x(\ln x + c_3) + c_2; \quad x > 0}}
 \end{array}
 \right.$$

پارخیل یا پارشل اینتیگرال

$$c_3 = -1 + c_1$$

د ارزښتکړینو کارونې له لارې  
کیدې شي دواړه اوبیونې رایوځاي  
شي. نومبدلون یا -پرونه:  $c_3 = c_1$

$$2. \frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

$$3. y'' - x^3 = 0$$

$$2. \text{ Fall: } y' = \ln(-x) + c_1; \quad x < 0$$

$$\int dy = \int [\ln(-x) + c_1] dx$$

$$y = \int \underbrace{\ln(-x)}_u \cdot \underbrace{dx + c_1}_{dv} dx$$

$$= x \cdot \ln(-x) - \int x \cdot \frac{-1}{-x} dx + c_1 \cdot x$$

$$= x \cdot \ln(-x) - \int dx + c_1 \cdot x$$

$$= x[\ln(-x) - 1 + c_1] + c_2$$

$$= \underline{\underline{x[\ln(-x) + c_3] + c_2; \quad x < 0}}$$

$$y = \underline{\underline{x(\ln|x| + c_1) + c_2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = f(x)$$

$$\int dy' = \int f(x) dx$$

$$y' = \int f(x) dx + c_1$$

$$y = \underline{\underline{\int \left[ \int f(x) \cdot dx + c_1 \right] dx + c_2}}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = x^3$$

$$\int dy' = \int x^3 dx$$

$$y' = \frac{x^4}{4} + c_1$$

$$\int dy = \int \left( \frac{x^4}{4} + c_1 \right) dx$$

$$y = \underline{\underline{\frac{x^5}{20} + c_1 \cdot x + c_2}}$$

4.  $y'' = x + \sin x$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = x + \sin x$$

$$\int dy' = \int (x + \sin x) dx$$

$$y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + c_1$$

$$\int dy = \int \left( \frac{x^2}{2} + c_1 - \cos x \right) dx$$

$$y = \frac{x^3}{6} + c_1 \cdot x - \sin x + c_2$$

5.  $y'' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln |x + \sqrt{a^2+x^2}| + c$$

دلته ارزښتکړنې ضرور نه دي

ځکه چې  $x + \sqrt{1+x^2} > 0$  د ټولو

x لپاره باور لري

پاشل اینتیګریشن

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int dy' = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c_1$$

$$\int dy = \int \underbrace{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}_{u} \underbrace{dx}_{dv} + c_1 \int dx$$

$$y = x \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x + \sqrt{1+x^2}} dx + c_1 x$$

$$= x [\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c_1] - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$= x [\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c_1] - \sqrt{1+x^2} + c_2$$

5.  $y'' = \tan x$

ددي انتیګرالبرابرون اویونې

کی په لړپوډینه تردنه ناشونی ده

$$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \dots$$

د  $|x| < \frac{\pi}{2}$  لپاره

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \tan x$$

$$\int dy' = \int \tan x dx$$



7.  $y'' = \sinh x$

8.  $y'' = e^{x^2}$

د دې انتيگرالبرابرون اوبيوني  
يواخى لړبودينى سره شونى ده.

$$y' = c_1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} + \frac{2x^6}{6 \cdot 15} + \frac{17x^8}{8 \cdot 315} + \dots$$

$$y = c_2 + c_1 \cdot x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^7}{315} + \frac{17x^9}{22680} + \dots$$

لپاره  $|x| < \frac{\pi}{2}$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \sinh x$$

$$\int dy' = \int \sinh x \, dx$$

$$y' = \cosh x + c_1$$

$$\int dy = \int (\cosh x + c_1) \, dx$$

$$y = \sinh x + c_1 \cdot x + c_2$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$z = x^2$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = e^{x^2}$$

$$\int dy' = \int e^{x^2} \, dx$$

$$y' = c_1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} + \dots$$

$$y = c_2 + c_1 \cdot x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{30 \cdot 2!} + \frac{x^8}{56 \cdot 3!} +$$

$$\frac{x^{10}}{90 \cdot 4!} + \dots$$

9.  $y^{(4)} = \cos x$

$$y''' = \frac{dy''}{dx}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx}$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$c_1 = \frac{1}{6} c_1^* ; \quad c_2 = \frac{1}{2} c_2^*$$

10.  $y''' = e^x$

$$c_1 = \frac{1}{2} c_1^*$$

$$y^{(4)} = \frac{dy'''}{dx} = \cos x$$

$$\int dy''' = \int \cos x \, dx$$

$$y''' = \sin x + c_1^*$$

$$\int dy'' = \int (\sin x + c_1^*) \, dx$$

$$y'' = -\cos x + c_1^* \cdot x + c_2^*$$

$$\int dy' = \int (-\cos x + c_1^* \cdot x + c_2^*) \, dx$$

$$y' = -\sin x + c_1^* \cdot \frac{x^2}{2} + c_2^* \cdot x + c_3$$

$$\int dy = \int \left( -\sin x + \frac{c_1^*}{2} \cdot x^2 + c_2^* \cdot x + c_3 \right) \, dx$$

$$y = \cos x + \frac{c_1^*}{6} x^3 + \frac{c_2^*}{2} x^2 + c_3 x + c_4$$

$$y = \underline{\underline{\cos x + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4}}$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = e^x$$

$$\int dy'' = \int e^x \, dx$$

$$y'' = e^x + c_1^*$$

$$\int dy' = \int (e^x + c_1^*) \, dx$$

$$y' = e^x + c_1^* \cdot x + c_2$$

$$\int dy = \int (e^x + c_1^* \cdot x + c_2) \, dx$$

$$y = e^x + c_1^* \cdot \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$= \underline{\underline{e^x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3}}$$

$$11. \quad y^{(4)} = \sinh(2x) \quad \blacktriangleright \quad y^{(4)} = \frac{dy'''}{dx} \Rightarrow dy''' = y^{(4)} \cdot dx$$

$$\int dy''' = \int \sinh(2x) dx$$

$$y''' = \frac{1}{2} \cosh(2x) + c_1 \quad \blacktriangleright \quad y''' = \frac{dy''}{dx} \Rightarrow dy'' = y''' \cdot dx$$

$$\int dy'' = \int \left( \frac{1}{2} \cosh(2x) + c_1 \right) dx$$

$$y'' = \frac{1}{2} \int \cosh(2x) dx + \int c_1 dx$$

$$= \frac{1}{4} \sinh(2x) + c_2 + c_1 x + c_3 \quad \blacktriangleright \quad c_2 + c_3 = c_4$$

$$= \frac{1}{4} \sinh(2x) + c_1 x + c_4$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} \Rightarrow dy' = y'' \cdot dx$$

$$\int dy' = \int \left( \frac{1}{4} \sinh(2x) + c_1 x + c_4 \right) dx$$

$$y' = \frac{1}{8} \cosh(2x) + c_5 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_6 + c_4 x + c_7 \quad \blacktriangleright \quad c_5 + c_6 + c_7 = c_8$$

$$= \frac{1}{8} \cosh(2x) + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_4 x + c_8$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y' \cdot dx$$

$$\int dy = \int \left[ \frac{1}{8} \cosh(2x) + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_4 x + c_8 \right] dx$$

$$y = \frac{1}{16} \cosh(2x) + c_9 + \frac{1}{6} c_1 x^3 + c_{10} + \frac{1}{2} c_4 x^2 + c_{11} + c_8 x + c_{12}$$

$$y = \underline{\underline{\frac{1}{16} \cosh(2x) + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_4 x^2 + c_8 x + k}}$$

$$12. \quad y^{(5)} = \cosh(ax) \quad \blacktriangleright \quad y^{(5)} = \frac{dy^{(4)}}{dx} \Rightarrow dy^{(4)} = y^{(5)} \cdot dx$$

$$\int dy^{(4)} = \int \cosh(ax) dx = \frac{1}{a} \sinh(ax) + c_1 = y^{(4)} = \frac{dy'''}{dx}$$

$$\int dy''' = \int \left[ \frac{1}{a} \sinh(ax) + c_1 \right] dx = \frac{1}{a^2} \cosh(ax) + c_2 + c_1 x + c_3$$

$$y''' = \frac{1}{a^2} \cosh(ax) + c_1 x + c_4 = \frac{dy''}{dx}$$

$$\int dy'' = \int \left[ \frac{1}{a^2} \cosh(ax) + c_1 x + c_4 \right] dx$$

$$y'' = \frac{1}{a^3} \sinh(ax) + c_5 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_6 + c_4 x + c_7$$

$$y'' = \frac{1}{a^3} \sinh(ax) + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_4 x + c_8 = \frac{dy'}{dx}$$

$$\int dy' = \int \left[ \frac{1}{a^3} \sinh(ax) + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_4 x + c_8 \right] dx$$

$$y' = \frac{1}{a^4} \cosh(ax) + c_9 + \frac{1}{6} c_1 x^3 + c_{10} + \frac{1}{2} c_4 x^2 + c_{11} + c_8 x + c_{12}$$

$$y' = \frac{1}{a^4} \cosh(ax) + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{4} c_4 x^2 + c_9 x + c_{13} = \frac{dy}{dx}$$

$$\int dy = \int \left[ \frac{1}{a^4} \cosh(ax) + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{4} c_4 x^2 + c_9 x + c_{13} \right] dx$$

$$y = \frac{1}{a^5} \sinh(ax) + c_{14} + \frac{1}{24} c_1 x^4 + c_{15} + \frac{1}{12} c_4 x^3 + c_{16} + \frac{1}{2} c_9 x^2 + c_{17} + c_{13} x + c_{18}$$

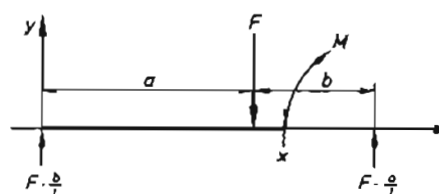
$$y = \frac{1}{a^5} \cosh(ax) + \frac{1}{24} c_1 x^4 + \frac{1}{12} c_4 x^3 + \frac{1}{2} c_9 x^2 + c_{13} x + k$$

د مومنتو ټاڪلو لپاره بايد ورشوگا-

نی یا ساحی  $0 \leq x \leq a$  او  $a \leq x \leq a+b=1$

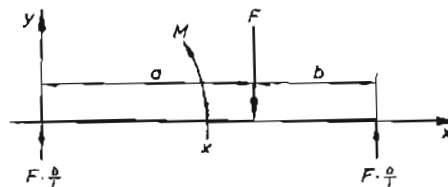
توپیر شي

1. Bereich:  $0 \leq x \leq a$  ورشو



$$M - F \cdot \frac{b}{l} \cdot x = 0$$

$$M = F \cdot \frac{b}{l} \cdot x \quad \text{für } 0 \leq x \leq a$$

2. Bereich:  $a \leq x \leq a+b=l$ 

$$M - F \cdot \frac{a}{l} \cdot (l-x) = 0$$

$$M = F \cdot \frac{a}{l} (l-x) \quad \text{für } a \leq x \leq l$$

د دې دواړو هریوه ورشو یا  
ساحولپاره دې کرونلاین وټاکل  
شي، چی د  $x=a$  لپاره باید  
بوڅاي ولویري.

د ورشو یا تعریفیږي  $0 < x < a$ لپاره د کرونلاین  $y_1$  ټاکنه

$$y_1'' = -\frac{M}{E \cdot I}$$

$$\frac{dy_1'}{dx} = -\frac{F \cdot \frac{b}{l} \cdot x}{E \cdot I}$$

$$\int dy_1' = -\frac{F \cdot b}{l \cdot E \cdot I} \int x \, dx$$

$$y_1' = -\frac{F \cdot b}{2lEI} x^2 + c_1$$

$$y_1 = \int \left( -\frac{F \cdot b}{2lEI} x^2 + c_1 \right) dx$$

$$= -\frac{F \cdot b}{6lEI} x^3 + c_1 \cdot x + c_2$$

د  $x=0$  لپاره کرون 0 دی

$$y_1(0) = 0 - c_2 = 0$$

$$y_1 = -\frac{F \cdot b}{6lEI} x^3 + c_1 \cdot x$$

د ورشو یا تعریفیږي  $0 < x < a$ لپاره د کرونلاین  $y_2$  ټاکنه:

$$y_2'' = -\frac{M}{E \cdot I}$$

Substitution: بدھونا

$$z = l - x \Rightarrow dx = -dz$$

ثابتی  $c_4$  د غاړه بارزېست  $y_2(l) = 0$

څخه ټاکل کيږي

په فنکشنونو  $y_1$  او  $y_2$  رامنځ ته شوي

ثابتي  $c_1$  او  $c_2$  داسی وټاکل شي، چې

دواړه فنکشنونه په  $x=a$  کی یوځای

پریوځي، دا په دې

صافا، چې باور لري

$$y_1(a) = y_2(a)$$

$$y_1'(a) = y_2'(a)$$

دا ثابتي  $c_1$  او  $c_2$  په  $y_1$  او  $y_2$

کی گینول کيږي

$$\frac{dy_2'}{dx} = -\frac{F \cdot a}{EI} (l-x)$$

$$\int dy_2' = -\frac{F \cdot a}{EI} \int (l-x) dx$$

$$= \frac{F \cdot a}{EI} \int z dz$$

$$y_2' = \frac{F \cdot a}{2EI} z^2 + c_3$$

$$\int dy_2 = -\int \left( \frac{F \cdot a}{2EI} z^2 + c_3 \right) dz$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6EI} z^3 - c_3 \cdot z + c_4$$

$$= -\frac{F \cdot a}{6EI} (l-x)^3 - c_3(l-x) + c_4$$

$$y_2(l) = c_4 \quad c_4 = 0$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6EI} (l-x)^3 - c_3(l-x)$$

$$y_1(a) = y_2(a)$$

$$-\frac{Fba^3}{6EI} + c_1 \cdot a = -\frac{Fab^3}{6EI} - c_3 \cdot b$$

$$y_1'(a) = y_2'(a)$$

$$-\frac{Fba^2}{2EI} + c_1 = +\frac{Fab^2}{2EI} + c_3$$

$$c_1 = \frac{Fab(a+2b)}{6EI}$$

$$c_3 = \frac{-Fab(2a+b)}{6EI}$$

$$y_1 = -\frac{F \cdot b}{6EI} x^3 + \frac{Fab(a+2b)}{6EI} x$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6EI} (l-x)^3 + \frac{Fab(b+2a)}{6EI} (l-x)$$

رایوخایون :

ماکسیمالکبرونه کیدیشی د  $y_1$  یا  $y_2$  ورشو کی داسی پرته وی، چی دفرنخیالییدی شی.

د  $b < a$  له امله لاسته راخی

$$\sqrt{\frac{a}{3}(a+2b)} < \sqrt{\frac{a}{3}(a+2a)} = a.$$

دا په دې ماناچی  $x_m < a$  په  $x_m$  کی ماکسیمالکبرون د  $y_1$  ورشوکی پروت دی، چی نور  $y_2$  کی څیرنی ته باید اړ نه دی

$$y = \begin{cases} \frac{Fbx}{6lEI} [a(a+2b) - x^2] & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ \frac{Fa(l-x)}{6lEI} [b(b+2a) - (l-x)^2] & \text{für } a \leq x \leq l \end{cases}$$

$$y'_1 = \frac{Fb}{6lEI} [a(a+2b) - 3x^2]$$

$$y'_1 = 0$$

$$x_m^2 = \frac{a}{3}(a+2b)$$

$$x_{m1,2} = \pm \sqrt{\frac{a}{3}(a+2b)}$$

$$x_m = \sqrt{\frac{a}{3}(a+2b)}$$

$(x_m = -\sqrt{\frac{a}{3}(a+2b)} < 0$  ist hier sinnlos.) <sup>معموماً</sup> دلته چی  $y_1$

ماکسیمالکبرون  $y_{max}$

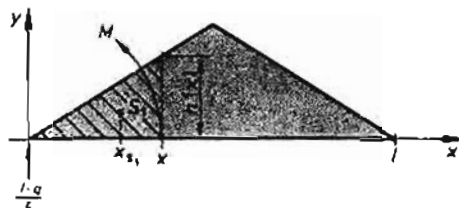
$$y_{max} = y_1(x_m)$$

$$= \frac{Fb\sqrt{a(a+2b)}}{6\sqrt{3}lEI} \left[ a(a+2b) - \frac{a}{3}(a+2b) \right]$$

$$= \frac{Fab(a+2b)\sqrt{a(a+2b)}}{9\sqrt{3}lEI}$$

1. Bereich:  $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$

ورشو



$$h(x) = \frac{2q}{l} x$$

۱۴ - ټول بار  $F = (\frac{1}{2}) l \cdot q$  دی داسی چی پروتوزر په A او B هریو کی  $(\frac{1}{4}) l \cdot q$  دی دا کرنی شوی هواره دا بار  $(\frac{1}{2}) h(x) \cdot x$  دی.

د دروندېټکې پروتمحور  $x_{S1}$  کیدی  
شي بنسټهندسیز و  $x_{S1} = (2/3)x$   
ته وشمیرل شي.

$$0 = M + (x - x_{S1}) \cdot \frac{1}{2} h(x) \cdot x - x \cdot \frac{l \cdot q}{4}$$

$$M = \frac{l \cdot q}{4} x - \left(x - \frac{2}{3}x\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2q}{l} x \cdot x$$

$$= \frac{l \cdot q}{4} x - \frac{q}{3l} x^2 \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

د کړونلاین  $y_1$  ټاکنه د لاندې

ورشو لپاره  $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ :

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{dy_1'}{dx} = -\frac{q}{EI} \left(\frac{l}{4}x - \frac{1}{3l}x^2\right)$$

$$\int dy_1' = -\frac{q}{EI} \int \left(\frac{l}{4}x - \frac{1}{3l}x^2\right) dx$$

$$y_1' = -\frac{q}{EI} \left(\frac{l}{8}x^2 - \frac{1}{12l}x^3 + c_1\right)$$

$$0 = -\frac{q}{EI} \left(\frac{l}{8} \cdot \frac{l^2}{4} - \frac{1}{12l} \cdot \frac{l^3}{16} + c_1\right)$$

$$c_1 = -\frac{l^3}{32} + \frac{l^3}{192}$$

$$= -\frac{5l^3}{192}$$

$$y_1' = -\frac{q}{EI} \left(\frac{l}{8}x^2 - \frac{x^3}{12l} - \frac{5l^3}{192}\right)$$

$$\int dy_1 = \frac{q}{EI} \int \left(\frac{x^3}{12l} - \frac{lx^2}{8} + \frac{5l^3}{192}\right) dx$$

$$y_1 = \frac{q}{EI} \left(\frac{x^4}{60l} - \frac{lx^3}{24} + \frac{5l^3 \cdot x}{192}\right) + c_2$$

$$y_1(0) = \frac{q}{EI} \cdot 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

د سیومتري دلائلو له امله  $c_1$   
له لاندې څخه لاس ته راځي

$$x_m = \frac{l}{2} \text{ mit } y_1'\left(\frac{l}{2}\right) = y_2'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

$$y_1(0) = 0 \Rightarrow c_2$$



د سیومتریکی بارونۍ یا زور له  
امله کپرونلاین و  $x = 1/2$  ته سیو-  
متری دی. د  $y_2$  لپاره په ورشو  
د  $1/2 \leq x \leq 1$  کی په  $y_1$  کی فقط  $x$   
د  $1-x$  سره بدل کړي.

د  $x_m = 1/2$  لپاره ماکسیمال کپرون  
له  $y_1$  څخه شمیرل کیدی شي.

۱۵ - دې ټوینټنی سره د  $x$  لپاره  
درې ورزوگانۍ باید توپیر شي

د  $0 \leq x \leq a$  لپاره کپرونلاین:  $y_1$

ژۍ ارزښت:  $y_1(a) = 0 = c_2$

$$y_1 = \frac{qx}{12EI} \left( \frac{x^4}{5l} - \frac{lx^2}{2} + \frac{5l^3}{16} \right)$$

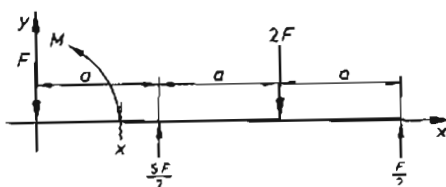
$$\text{für } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

$$y = \begin{cases} \frac{qx}{12EI} \left( \frac{x^4}{5l} - \frac{lx^2}{2} + \frac{5l^3}{16} \right) & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ \frac{q(l-x)}{12EI} \left[ \frac{(l-x)^4}{5l} - \frac{l(l-x)^2}{2} + \frac{5l^3}{16} \right] & \text{für } \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

$$y_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql}{24EI} \left( \frac{l^3}{80} - \frac{l^3}{8} + \frac{5l^3}{16} \right)$$

$$y_{\max} = \frac{ql^4}{120EI}$$

۱. Bereich:  $0 \leq x \leq a$  ورشو:



$$0 = M + F \cdot x \Rightarrow M = -F \cdot x$$

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= \frac{F}{EI} x$$

$$y_1' = \frac{F}{2EI} x^2 + c_1$$

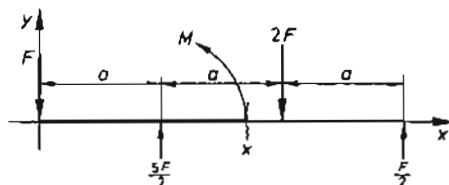
$$y_1 = \frac{F}{6EI} x^3 + c_1 x + c_2$$

$$0 = \frac{Fa^3}{6EI} + c_1 a + c_2$$

$$c_2 = -\frac{Fa^3}{6EI} - c_1 a$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI} (x^3 - a^3) + c_1(x - a)$$

2. Bereich:  $a \leq x \leq 2a$  : **وردشتو**



$$0 = M - \frac{5F}{2} \cdot (x - a) + F \cdot x$$

$$M = \frac{5F}{2} (x - a) - F \cdot x$$

$$= \frac{3F}{2} x - \frac{5aF}{2}$$

$$= \frac{F}{2} (3x - 5a)$$

$y_2$  دپاره کړونلایڼ:  $a \leq x \leq 2a$

$$y_2' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{F}{2EI} (3x - 5a)$$

$$y_2' = -\frac{F}{2EI} \left( \frac{3}{2} x^2 - 5ax + c_3 \right)$$

$$y_2 = -\frac{F}{2EI} \left( \frac{x^3}{2} - \frac{5a}{2} x^2 + c_3 x + c_4 \right)$$

ژي ارزښت:  $y_2(a) = 0 \Rightarrow c_4$

$$0 = -\frac{F}{2EI} \left( \frac{a^3}{2} - \frac{5a^3}{2} + c_3 a + c_4 \right)$$

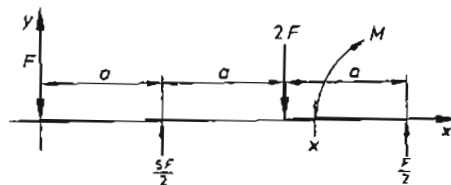
$$c_4 = \frac{5a^3}{2} - \frac{a^3}{2} - c_3 a$$

$$= \frac{4a^3}{2} - c_3 a$$

$$y_2 = -\frac{F}{2EI} \left[ \frac{x^3}{2} - \frac{5a}{2} x^2 + c_3(x - a) + 2a^3 \right]$$

3. Bereich:  $2a \leq x \leq 3a$ 

ورستو



$$0 = M - \frac{F}{2}(3a - x) \Rightarrow M = \frac{F}{2}(3a - x)$$

د  $2a \leq x \leq 3a$  لپاره کپرونلاین  $y_3$ :

$$y_3'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{F}{2EI}(3a - x)$$

$$y_3' = -\frac{F}{2EI}\left(3ax - \frac{x^2}{2} + c_5\right)$$

$$y_3 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3a}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + c_5x + c_6\right)$$

$$0 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{27a^3}{2} - \frac{27a^3}{6} + 3ac_5 + c_6\right)$$

$$c_6 = -27a^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) - 3ac_5$$

$$= -9a^3 - 3ac_5$$

$$y_3 = -\frac{F}{2EI}\left[\frac{3a}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + c_5(x - 3a) - 9a^3\right]$$

د  $c_5$  او  $c_3$  ټاکه:

$$\text{شرطونه: } y_2(2a) = y_3(2a)$$

$$y_2'(2a) = y_3'(2a)$$

$$y_2(2a) = -\frac{F}{2EI}[4a^3 - 10a^3 + ac_3 + 2a^3]$$

$$= -\frac{F}{2EI}[ac_3 - 4a^3]$$

$$y_3(2a) = -\frac{F}{2EI}\left[6a^3 - \frac{4}{3}a^3 - ac_5 - 9a^3\right]$$

$$\text{ژي ارزښت: } y_3(3a) = 0 \Rightarrow c_6$$

دا په فنکشنونو  $y_3, y_2, y_1$  کې لا  
دنده ثابتې  $c_5, c_3, c_1$  باید دې  
دري فنکشنونو رابوځایونې له  
لارې وټاکل شي

مساوات یا برابرین I

مساوات یا برابرین II  
د مساواتو I او II څخه  $c_3$  او  $c_3$   
ساده را پیدا کيږي

ثابته  $c_1$  د  $y_1'(a) = y_2'(a)$  اړیکو  
څخه شمیرل کيږي

$$= -\frac{F}{2EI} \left[ -\frac{13a^3}{3} - ac_3 \right]$$

$$y_2(2a) = y_3(2a)$$

$$-\frac{F}{2EI} [ac_3 - 4a^3] = -\frac{F}{2EI} \left[ -\frac{13a^3}{3} - ac_3 \right]$$

$$c_3 - 4a^2 = -\frac{13a^2}{3} - c_3$$

$$I: \quad c_3 + c_3 = -\frac{1}{3}a^2$$

$$y_2'(2a) = -\frac{F}{2EI} (6a^2 - 10a^2 + c_3)$$

$$= -\frac{F}{2EI} (c_3 - 4a^2)$$

$$y_3'(2a) = -\frac{F}{2EI} (6a^2 - 2a^2 + c_3)$$

$$= -\frac{F}{2EI} (4a^2 + c_3)$$

$$y_2'(2a) = y_3'(2a)$$

$$-\frac{F}{2EI} (c_3 - 4a^2) = -\frac{F}{2EI} (4a^2 + c_3)$$

$$c_3 - 4a^2 = 4a^2 + c_3$$

$$II: \quad c_3 - c_3 = 8a^2$$

$$I + II: \quad 2c_3 = -\frac{1}{3}a^2 + 8a^2 \Rightarrow c_3 = \frac{23}{6}a^2$$

$$I - II: \quad 2c_3 = -\frac{1}{3}a^2 - 8a^2 \Rightarrow c_3 = -\frac{25}{6}a^2$$

د  $c_4$  ټاکنه

$$y_1'(a) = \frac{Fa^2}{2EI} + c_1$$

$$y_2'(a) = -\frac{F}{2EI} \left( \frac{3a^2}{2} - 5a^2 + \frac{23a^2}{6} \right)$$

$$\begin{aligned}
 y_2'(a) &= -\frac{Fa^2}{6EI} \\
 y_1'(a) &= y_2'(a) \\
 \frac{Fa^2}{2EI} + c_1 &= -\frac{Fa^2}{6EI} \Rightarrow c_1 = -\frac{2Fa^2}{3EI}
 \end{aligned}$$

په بنده بڼه کې د ټولو درې ورشوگانو یا ساحو انځورونه:

$$y = \begin{cases} \frac{F}{6EI} (x^3 - 4a^2x + 3a^3) & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ \frac{-F}{12EI} (3x^3 - 15ax^2 + 23a^2x - 11a^3) & \text{für } a \leq x \leq 2a \\ \frac{F}{12EI} (x^3 - 9ax^2 + 25a^2x - 21a^3) & \text{für } 2a \leq x \leq 3a \end{cases}$$

د ماکسیمال راډیونې ټاکلو لپاره باید  $y_1'$ ,  $y_2'$  او  $y_3'$  جوړ شي.

هم  $x_1$  او هم  $x_2$  د ورشو  $0 \leq x \leq a$  څخه دباندې پراته دي، چې له دې امله د ماکسیمال راډیون لپاره په پوښتنه کې نه راځي په ورشو  $0 \leq x \leq a$  کې کیدی شي ماکسیمال- لږیون یواځې په ژی ارزښت  $x_{m1} = 0$  کې رامنځ ته شي.

$$y_1' = \frac{F}{6EI} (3x^2 - 4a^2)$$

$$y_1' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4a^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm a \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$y_1(0) = y_1(x_{m1}) = y_{\max 1}$$

$$y_{\max 1} = \frac{Fa^3}{2EI}$$

$$y_2' = -\frac{F}{12EI} (9x^2 - 30ax + 23a^2)$$

$$y_2' = 0 \Rightarrow 9x^2 - 30ax + 23a^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{10}{3}ax + \frac{23}{9}a^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5}{3}a \pm \sqrt{\frac{25}{9}a^2 - \frac{23}{9}a^2}$$

$$x_1 = \frac{5}{3}a + \frac{\sqrt{2}}{3}a > 2a$$

دا پورته ارزښت نور د  $y_1$  باورورشو  
 دې امله یواځ د  $x_2$  لپاره ماکسیمال  
 راکړون مو مخ ته پریوتی شی.

پام دې وي، چې دا راکړون د  
 $-y$  محور په مثبت- یا زیاتونلور  
 رامنځ ته کیږي (دا په دې مانا، چې  
 تراوسه پاس یا پورته پروت دی)،  
 ځکه چې په دې کوارډینات سیستم  
 کې زور  $F$  کمون (تفریق) نڅښه لري.

د  $-x_1$  ارزښت نور د  $y_3$  باورورشو  
 کې نه دی پروت، نو ځکه یواځي

$$x_{1,2} = \frac{5}{3}a \pm \frac{\sqrt{2}}{3}a$$

دلته پامور نه دی.  $x_1 = \frac{5}{3}a + \frac{\sqrt{2}}{3}a > 2a$

$$x_{m_2} = \frac{a}{3}(5 - \sqrt{2})$$

$$y_{\max_2} = y_2(x_{m_2})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-F}{12EI} \left[ \frac{a^3}{9} (5 - \sqrt{2})^3 - \frac{5a^3}{3} (5 - \sqrt{2})^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{23a^3}{3} (5 - \sqrt{2}) - 11a^3 \right] \\ &= \frac{-F}{12EI} \left[ \frac{a^3}{9} (155 - 77\sqrt{2}) - \frac{5a^3}{3} (27 - 10\sqrt{2}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{23a^3}{3} (5 - \sqrt{2}) - 11a^3 \right] \\ &= -\frac{Fa^3}{108EI} [155 - 77\sqrt{2} - 405 + 150\sqrt{2} + \\ &\quad + 345 - 69\sqrt{2} - 99] \end{aligned}$$

$$y_{\max_2} = -\frac{Fa^3}{108EI} [-4 + 4\sqrt{2}]$$

$$= -\frac{Fa^3}{27EI} (\sqrt{2} - 1)$$

$$y_3' = \frac{F}{12EI} (3x^2 - 18ax + 25a^2)$$

$$y_3' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18ax + 25a^2 = 0$$

$$x^2 - 6ax + \frac{25}{3}a^2 = 0$$

$$x_{1,2} = 3a \pm \sqrt{9a^2 - \frac{25}{3}a^2}$$

$$= 3a \pm a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

دلته پامور نه دی  $x_1 = 3a + a\sqrt{\frac{2}{3}} > 3a$

د  $x_2$  لپاره ماکسیمال راکړون  
موجود کیدی شي

$$x_{m_3} = a \left( 3 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$$

$$y_{\max_3} = y_3(x_{m_3})$$

$$= \frac{F}{12EI} \left[ a^3 \left( 3 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^3 - 9a^3 \left( 3 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 + 25a^3 \left( 3 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) - 21a^3 \right]$$

$$= \frac{Fa^3}{12EI} \left[ 33 - \frac{83}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} - 9 \left( \frac{29}{3} - 6 \sqrt{\frac{2}{3}} \right) + 25 \left( 3 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) - 21 \right]$$

$$= \frac{Fa^3}{12EI} \left[ 33 - \frac{83}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} - 87 + 54 \sqrt{\frac{2}{3}} + 75 - 25 \sqrt{\frac{2}{3}} - 21 \right]$$

$$= \frac{Fa^3}{12EI} \cdot \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

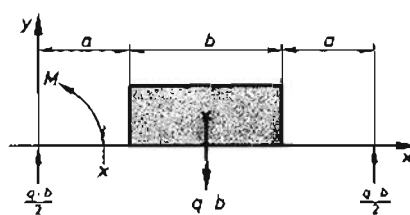
$$= \frac{Fa^3}{9EI} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

۱۶. د  $x$  لپاره درې ورشوګانې  
توییر کیدی شي.

$$l = 2a + b$$

د  $0 \leq x \leq a$  لپاره کیرولاین:  $y_1$

نعمې نغږ (ورشو): 1. Bereich:  $0 \leq x \leq a$



$$0 = M - \frac{q \cdot b}{2} x \Rightarrow M = \frac{q \cdot b}{2} x$$

$$y_1'' = -\frac{M}{E \cdot I}$$

$$= -\frac{qb}{2EI} x$$

اثری ارزینت:  $y_1(0)=0 \Rightarrow c_2$

$$x_s = \frac{x+a}{2}$$

$x_2$ : د  $a \leq x \leq a+b$  لپاره کپرونلاین

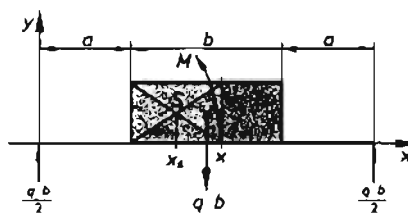
$$y_1' = -\frac{qb}{4EI} x^2 + c_1$$

$$y_1 = -\frac{qb}{12EI} x^3 + c_1 x + c_2$$

$$0 = -0 + 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y_1 = -\frac{qb}{12EI} x^3 + c_1 x$$

2. Bereich:  $a \leq x \leq a+b$  ورشو



$$0 = M + q(x-a) \cdot (x-x_s) - \frac{qb}{2} x$$

$$M = \frac{qb}{2} x - q(x-a) \cdot \frac{x-a}{2}$$

$$= \frac{qb}{2} x - \frac{q}{2} (x-a)^2$$

$$= \frac{q}{2} [bx - (x-a)^2]$$

$$= \frac{q}{2} [bx - x^2 + 2ax - a^2]$$

$$= \frac{q}{2} [-x^2 + x(2a+b) - a^2]$$

$$y_2' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{q}{2EI} [-x^2 + x(2a+b) - a^2]$$

$$= \frac{q}{2EI} [x^2 - x(2a+b) + a^2]$$

$$y_2 = \frac{q}{2EI} \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} (2a+b) + a^2 x + c_3 \right]$$



د سيومتري بارويشني له امله

$$y_2' \left( a + \frac{b}{2} \right) = 0,$$

باور لري، له كوم سره

چي  $c_3$  ټاکله کيږي.

$$0 = \frac{q}{2EI} \left[ \frac{(2a+b)^3}{24} - \frac{(2a+b)^3}{8} + \frac{a^2}{2} (2a+b) + c_3 \right]$$

$$c_3 = \frac{2a+b}{24} [-12a^2 + 3(2a+b)^2 - (2a+b)^2]$$

$$= \frac{2a+b}{24} [-12a^2 + 2(2a+b)^2]$$

$$= \frac{2a+b}{24} [-12a^2 + 8a^2 + 8ab + 2b^2]$$

$$= \frac{2a+b}{24} [-4a^2 + 8ab + 2b^2]$$

$$= \frac{1}{12} (2a+b)(b^2 + 4ab - 2a^2)$$

$$= \frac{1}{12} (2ab^2 + 8a^2b - 4a^3 + b^3 + 4ab^2 - 2a^2b)$$

$$= \frac{1}{12} (b^3 + 6ab^2 + 6a^2b - 4a^3)$$

ثابتي  $c_1$  او  $c_4$  بايد له فنکشنونو

$y_1$  او  $y_2$  څخه د يوشانيزشرتونو

$y_1'(a) = y_2'(a)$  او  $y_1(a) = y_2(a)$

له امله وگټل شي.

$$y_2 = \frac{q}{2EI} \left[ \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} (2a+b) + \frac{a^2 x^2}{2} + c_3 x + c_4 \right]$$

د  $c_1$  ټاکنه

$$y_1'(a) = -\frac{qb}{4EI} a^2 + c_1$$

$$y_2'(a) = \frac{q}{2EI} \left[ \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} (2a+b) + a^3 + c_3 \right]$$

$$= \frac{q}{2EI} \left[ \frac{a^3}{3} - a^3 - \frac{a^2 b}{2} + a^3 + c_3 \right]$$

$$y_2'(a) = \frac{q}{2EI} \left[ \frac{a^3}{3} - \frac{a^2 b}{2} + \frac{1}{12} (b^3 + 6ab^2 + 6a^2b - 4a^3) \right]$$

$$= \frac{q}{24EI} [4a^3 - 6a^2b + b^3 + 6ab^2 + 6a^2b - 4a^3]$$

$$= \frac{qb^2}{24EI} (b + 6a)$$

$$y_1' = y_2'(a)$$

$$-\frac{qb}{4EI}a^2 + c_1 = \frac{qb^2}{24EI}(b+6a)$$

$$c_1 = \frac{qb}{24EI}(6a^2 + 6ab + b^2)$$

د  $c_4$  ټاکنه !

$$y_1(a) = -\frac{qba^3}{12EI} + \frac{qba}{24EI}(6a^2 + 6ab + b^2)$$

$$= \frac{qab}{24EI}(4a^2 + 6ab + b^2)$$

$$y_2(a) = \frac{q}{2EI} \left[ \frac{a^4}{12} - \frac{a^3}{6}(2a+b) + \frac{a^4}{2} + c_3a + c_4 \right]$$

$$= \frac{q}{24EI} [a^4 - 4a^4 - 2a^3b + 6a^4 + 12ac_3 + 12c_4]$$

$$= \frac{q}{24EI} [3a^4 - 2a^3b + ab^3 + 6a^2b^2 + 6a^3b - 4a^4 + 12c_4]$$

$$= \frac{q}{24EI} [-a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + ab^3 + 12c_4]$$

$$y_1(a) = y_2(a)$$

$$ab(4a^2 + 6ab + b^2) = -a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + ab^3 +$$

$$4a^3b + 6a^2b^2 + ab^3 = -a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + ab^3 +$$

$$0 = -a^4 + 12c_4$$

$$c_4 = \frac{a^4}{12}$$

(=)

د دې ورشو لپاره کیدی شي کیرونلایڼ  $y_3$  له  $y_1$  څخه ساده وشمیرل شي، ځکه چی دا د سیومتري دروندوالي یا بارونی له امله و  $x = l/2 = (1/2)(2a+b)$  ته سیومتري دي.

3. Bereich:  $a+b \leq x \leq l$  ودرستو

$$y_1 = \frac{qbx}{24EI}(6a^2 + 6ab + b^2 - 2x^2)$$

$$x: \triangleright l-x$$

$$y_3 = \frac{qb(l-x)}{24EI} [6a^2 + 6ab + b^2 - 2(l-x)^2]$$

د ټولو درې ورشوگان په رابندفورم کې د گېرونلاين انځورونه

$$y = \begin{cases} \frac{qbx}{24EI} (6a^2 + 6ab + b^2 - 2x^2) & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ \frac{q}{24EI} [x^4 - 2x^3(2a+b) + 6a^2x^2 + x(b^3 + 6ab^2 + 6a^2b - 4a^3) + a^4] & \text{für } a \leq x \leq a+b \\ \frac{qb(l-x)}{24EI} [6a^2 + 6ab + b^2 - 2(l-x)^2] & \text{für } a+b \leq x \leq l \end{cases}$$

د سيومتريکي بارویشني له امله ماکسیمال راکړونه په لاندې کې پرته ده

$$x_m = \frac{l}{2} = \frac{1}{2}(2a+b).$$

$$\begin{aligned} y_{\max} &= y_2(x_m) = y_2\left(\frac{l}{2}\right) \\ &= \frac{q}{24EI} \left[ \frac{1}{16} (2a+b)^4 - \frac{1}{4} (2a+b)^4 + \frac{3}{2} a^2 (2a+b)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (2a+b) (b^3 + 6ab^2 + 6a^2b - 4a^3) + a^4 \right] \\ &= \frac{q}{384EI} [(2a+b)^4 - 4(2a+b)^4 + 24(2a+b)^2 a^2 + \\ &\quad + 8(2a+b) (b^3 + 6ab^2 + 6a^2b - 4a^3) + 16a^4] \\ &= \frac{q}{384EI} [-3(16a^4 + 32a^3b + 24a^2b^2 + 8ab^3 + b^4) + 24a^2(4a^2 + 4ab + b^2) + \\ &\quad + 8(2a+b) (b^3 + 6ab^2 + 6a^2b - 4a^3) + 16a^4] \\ &= \frac{q}{384EI} [-48a^4 - 96a^3b - 72a^2b^2 - 24ab^3 - 3b^4 + 96a^4 + 96a^3b + 24a^2b^2 + \\ &\quad + 16ab^3 + 96a^2b^2 + 96a^3b - 64a^4 + 8b^4 + 48ab^3 + 48a^2b^2 - 32a^3b + 16a^4] \\ &= \frac{q}{384EI} [64a^3b + 96a^2b^2 + 40ab^3 + 5b^4] \\ &= \frac{qb}{384EI} (64a^3 + 96a^2b + 40ab^2 + 5b^3) \end{aligned}$$

17.

$$x_s = \frac{l+x}{2}$$

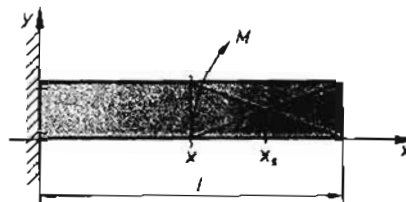
Substitution: بدلون

$$z = l-x \Rightarrow dx = -dz$$

رئی ارزښت:  $y'(0) = 0 \Rightarrow c_1$ 

بدلون (سبسټیټیویشن)

$$z = l-x \Rightarrow dx = -dz$$



$$0 = M + q(l-x) \cdot (x_1 - x)$$

$$= M + q(l-x) \cdot \frac{l-x}{2}$$

$$= M + \frac{q}{2} (l-x)^2$$

$$M = -\frac{q}{2} (l-x)^2$$

$$y'' = \frac{M}{EI}$$

$$= \frac{q}{2EI} (l-x)^2$$

$$y' = \frac{q}{2EI} \int (l-x)^2 dx$$

$$= -\frac{q}{2EI} \int z^2 dz$$

$$= -\frac{q}{6EI} z^3 + c_1$$

$$= -\frac{q}{6EI} (l-x)^3 + c_1$$

$$0 = -\frac{q}{6EI} l^3 + c_1; \quad c_1 = \frac{ql^3}{6EI}$$

$$y' = \frac{q}{6EI} [l^3 - (l-x)^3]$$

$$y = \frac{q}{6EI} \int [l^3 - (l-x)^3] dx$$

$$= -\frac{q}{6EI} \int (l^3 - z^3) dz$$

$$= -\frac{q}{6EI} \left( l^3 \cdot z - \frac{z^4}{4} + c_2 \right)$$

زى ارزښت

Randwert:  $y(0)=0 \Rightarrow c_2$

ماکسیماراگرون په زى ارزښت

$z=1$  کى رامنځ ته کيږي.

۱۸. د  $x$  لپاره دې بيا درې

ورشوگانى توپير شي.

$y_1$ : د  $0 \leq x \leq a$  لپاره کرونلاين

زى ارزښت

Randwert:  $y_1(a)=0 \Rightarrow c_2$

$$y = -\frac{q}{6EI} \left[ (l-x)^3 - \frac{1}{4}(l-x)^4 + c_2 \right]$$

$$0 = -\frac{q}{6EI} \left[ l^3 - \frac{1}{4}l^4 + c_2 \right]$$

$$0 = l^3 - \frac{1}{4}l^4 + c_2; \quad c_2 = -\frac{3}{4}l^4$$

$$y = -\frac{q}{6EI} \left[ (l-x)^3 - \frac{1}{4}(l-x)^4 - \frac{3}{4}l^4 \right]$$

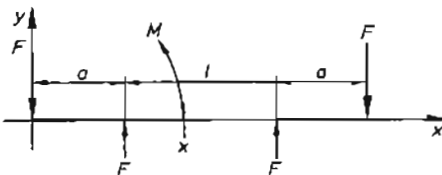
$$= \frac{q}{24EI} \left[ (l-x)^4 - 4l^3(l-x) + 3l^4 \right]$$

$$y_{\max} = y(l)$$

$$= \frac{ql^4}{8EI}$$

1. Bereich:  $0 \leq x \leq a$

ورشو



$$0 = M + x \cdot F \Rightarrow M = -x \cdot F$$

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= \frac{F}{EI} x$$

$$y_1' = \frac{F}{2EI} x^2 + c_1$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI} x^3 + c_1 x + c_2$$

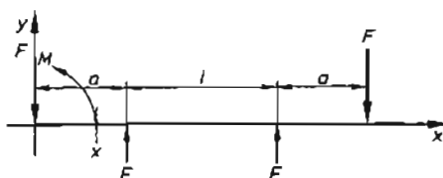
$$0 = \frac{F}{6EI} a^3 + c_1 a + c_2$$

$$c_2 = -\frac{F}{6EI} a^3 - c_1 a$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI} (x^3 - a^3) + c_1 (x - a)$$

2. Bereich:  $a \leq x \leq a+l$ 

وردشو



$$0 = M + x \cdot F - (x-a)F$$

$$= M + x \cdot F - x \cdot F + a \cdot F$$

$$M = -aF$$

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$y_2'' = \frac{aF}{EI}$$

$$y_2' = \frac{aF}{EI} x + c_3$$

$$0 = \frac{aF}{EI} \left( a + \frac{l}{2} \right) + c_3$$

$$c_3 = -\frac{aF}{EI} \left( a + \frac{l}{2} \right)$$

$$y_2' = \frac{aF}{EI} \left[ x - \left( a + \frac{l}{2} \right) \right]$$

$$y_2 = \frac{aF}{EI} \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} (2a+l) + c_4 \right]$$

$$0 = \frac{aF}{EI} \left[ \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} (2a+l) + c_4 \right]$$

$$0 = \frac{a^2}{2} - a^2 - \frac{al}{2} + c_4$$

$$c_4 = \frac{a^2}{2} + \frac{al}{2}$$

$$= \frac{a}{2} (a+l)$$

$$y_2 = \frac{aF}{2EI} [x^2 - x(2a+l) + a(a+l)]$$

$y_2$  د  $0 \leq x \leq a+l$  لپاره کړونلاين

د سيومتريکي بارویشنی له  
امله باور لري:

$$y_2' \left( a + \frac{l}{2} \right) = 0 \Rightarrow c_3$$

زما ارزښت

$$\text{Randwert: } y_2(a) = 0 \Rightarrow c_4$$

د فنکشن  $y_1$  ثابتہ  $c_1$  د هومو-  
گینیتی شرتونو  $y'_1(a) = y'_2(a)$   
له لارې پیدا کړي.

$$y'_1(a) = \frac{Fa^2}{2EI} + c_1$$

$$y'_2(a) = \frac{aF}{EI} \left[ a - \left( a + \frac{l}{2} \right) \right]$$

$$= -\frac{aF}{2EI}$$

$$y'_1(a) = y'_2(a)$$

$$\frac{Fa^2}{2EI} + c_1 = -\frac{aF}{2EI}$$

$$c_1 = -\frac{aF}{2EI} (a+l)$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI} [x^3 - a^3 - 3a(a+l)(x-a)]$$

د سیومتريکی بارویشنی له امله  
کرونلین  $y_3$  و  $x = a + (1/2)$  ته  
سیومتري دی د کرونلین  $y_1$  سره.  
له دې سره  $y_3$  سملاسی له  $y_1$  څخه  
شمیرل کيږي.

3. Bereich:  $a+l \leq x \leq 2a+l$  **وروستو**

$$y_1 = y_1(x)$$

$$x: \triangleright 2a+l-x$$

$$y_3 = \frac{F}{6EI} [(2a+l-x)^3 - a^3 - 3a(a+l)(a+l-x)]$$

د ټولو درې ورشوگانو لپاره په یو رابند فورم کې د اوبیونو (حلونو) انځورونه

$$y = \begin{cases} \frac{F}{6EI} [x^3 - a^3 - 3a(a+l)(x-a)] & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ \frac{aF}{2EI} [x^2 - x(2a+l) + a(a+l)] & \text{für } a \leq x \leq a+l \\ \frac{F}{6EI} [(2a+l-x)^3 - a^3 - 3a(a+l)(a+l-x)] & \text{für } a+l \leq x \leq 2a+l \end{cases}$$

دوه ماکسیمال، مختلف  
راگرونونه رامنځ ته کيږي

$$y_{\max_1} = y(0) = y_{\max_2} = y(2a+l)$$

$$y_{\max_1} = y_1(0)$$

$$= \frac{F}{6EI} [-a^3 - 3a(a+l)(-a)]$$

$$= \frac{F}{6EI} [-a^3 + 3a^3 - 3a^2l]$$

$$19. y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

د پوښتنکونی څخه لاسته راځي:  
 $y > 0.$

$$c_1 = 2c_1^*$$

Substitution:

$$t = 4\sqrt{y} + c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy = \frac{1}{2} \sqrt{y} dt$$

$$= \frac{1}{8} (t - c_1) dt$$

بدلون

$$y_{\max_1} = \frac{Fa^2}{6EI} (2a + 3l) = y_{\max_2}$$

$$y_{\max_3} = y \left( a + \frac{l}{2} \right)$$

$$= y_2 \left( a + \frac{l}{2} \right) = y_2 \left( \frac{2a+l}{2} \right)$$

$$= \frac{aF}{2EI} \left[ \frac{1}{4} (2a+l)^2 - \frac{1}{2} (2a+l)^2 + a(a+l) \right]$$

$$= \frac{aF}{2EI} \left[ -\frac{1}{4} (4a^2 + 4al + l^2) + a^2 + al \right]$$

$$= \frac{aF}{2EI} \left[ -a^2 - al - \frac{l^2}{4} + a^2 + al \right]$$

$$= \underline{\underline{-\frac{al^2 F}{8EI}}}$$

$$\frac{dz}{dy} \cdot z = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\int z dz = \int y^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$\frac{z^2}{2} = 2y^{\frac{1}{2}} + c_1^* \quad \parallel \cdot 2$$

$$z^2 = 4\sqrt{y} + 2c_1^*$$

$$z = \sqrt{4\sqrt{y} + c_1}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{4\sqrt{y} + c_1}}$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{t - c_1}{\sqrt{t}} dt$$

$$= \frac{1}{8} \int \left( \sqrt{t} - \frac{c_1}{\sqrt{t}} \right) dt$$

$$= \frac{1}{8} \left( \frac{2}{3} t \sqrt{t} - 2c_1 \sqrt{t} \right) + c_2$$



$$20. y'' = a \cdot e^y$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$c_1 = 2c_1^*$$

Substitution: **بدلون**

$$t^2 = 2ae^y + c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t dt = 2ae^y dy$$

$$dy = \frac{t \cdot dt}{ae^y}$$

$$= \frac{2t}{t^2 - c_1} \cdot dt$$

$$\int \frac{dx}{a - x^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Artanh} \frac{x}{\sqrt{a}} + c$$

für  $a > 0$

$$\int \frac{dt}{c_1 - t^2} = \frac{1}{\sqrt{c_1}} \operatorname{Artanh} \frac{t}{\sqrt{c_1}} + c_2$$

$$21. y^4 - y^3 \cdot y'' = 1$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$x = \frac{\sqrt{t}}{12} (t - 3c_1) + c_2$$

$$= \frac{1}{12} \sqrt{4\sqrt{y} + c_1 (4\sqrt{y} - 2c_1) + c_2}; y > 0$$

$$\frac{dz}{dy} \cdot z = a \cdot e^y$$

$$\int z \cdot dz = a \int e^y dy$$

$$\frac{z^2}{2} = a \cdot e^y + c_1^* \quad || \cdot 2$$

$$z^2 = 2ae^y + c_1$$

$$z = \sqrt{2ae^y + c_1}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{2ae^y + c_1}}$$

$$= \int \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{t^2 - c_1} dt$$

$$= 2 \int \frac{dt}{t^2 - c_1} = -2 \int \frac{dt}{c_1 - t^2}$$

$$x = -2 \frac{1}{\sqrt{c_1}} \operatorname{Artanh} \frac{t}{\sqrt{c_1}} + c_2$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{c_1}} \operatorname{Artanh} \sqrt{\frac{2a}{c_1}} e^y + 1 + c_2; c_1 > 0$$

$$y^4 - y^3 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z = 1$$

نیونہ:  $y \neq 0$  پہ  $y^3$  ویشنه

$$y - \frac{dz}{dy} z = y^{-3}$$

$$\int z \cdot dz = \int (y - y^{-3}) dy$$

Substitution: بدلون

$$y^2 = t \Rightarrow dy = \frac{dt}{2y}$$

Substitution: بدلون

$$u = t + c_1 \Rightarrow du = dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c_1$$

$a^2 > 1 - c_1^2$

≠

$$22. y'' = \frac{1}{y}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

د پوښتنکونی څخه لاسته راځي:  
 $y \neq 0$ .

$$c_1 = 2c_1^*$$

Substitution: بدلون

$$t^2 = \ln y^2 + c_1 \Rightarrow$$

$$\frac{z^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{y^{-2}}{2} + c_1 \quad || \cdot 2$$

$$z^2 = y^2 + y^{-2} + 2c_1$$

$$z = \sqrt{y^2 + y^{-2} + 2c_1}$$
$$= \frac{1}{y} \sqrt{y^4 + 2c_1 y^2 + 1}$$

$$\int dx = \int \frac{y}{\sqrt{y^4 + 2c_1 y^2 + 1}} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 2c_1 t + 1}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{(t+c_1)^2 + 1 - c_1^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1 - c_1^2}}$$

$$x = \frac{1}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 + 1 - c_1^2} \right| + c_2$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| t + c_1 + \sqrt{(t+c_1)^2 + 1 - c_1^2} \right| + c_2$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| y^2 + c_1 + \sqrt{y^4 + 2c_1 y^2 + 1} \right| + c_2$$

د  $y \neq 0$  پاره

$$\frac{dz}{dy} \cdot z = \frac{1}{y}$$

$$\int z dz = \int \frac{dy}{y}$$

$$\frac{z^2}{2} = \ln |y| + c_1^* \quad || \cdot 2$$

$$z^2 = 2 \ln |y| + 2c_1^*$$

$$= \ln y^2 + c_1$$

$$z = \sqrt{\ln y^2 + c_1}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{\ln y^2 + c_1}}$$

$$\Rightarrow 2t \, dt = \frac{2y}{y^2} \, dy$$

$$dy = y t \cdot dt$$

د دې اینتیگریشن سره ل  
لمرودینی څخه تیریدنه ناشونی ده

$$\int dx = \int \frac{y t \cdot dt}{t}$$

$$= \int y \, dt$$

$$= \int e^{\frac{t^2 - c_1}{2}} \, dt$$

$$= e^{-\frac{c_1}{2}} \int e^{\frac{t^2}{2}} \, dt$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\blacktriangleright x = \frac{t^2}{2}$$

$$e^{\frac{t^2}{2}} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4 \cdot 2!} + \frac{t^6}{8 \cdot 3!} + \frac{t^8}{16 \cdot 4!} + \dots$$

$$\int e^{\frac{t^2}{2}} \, dt = c_2 + t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{5 \cdot 4 \cdot 2!} +$$

$$+ \frac{t^7}{7 \cdot 8 \cdot 3!} + \frac{t^9}{9 \cdot 16 \cdot 4!} + \dots$$

$$x = e^{-\frac{c_1}{2}} \left[ c_2 + \sqrt{\ln y^2 + c_1} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^3}{6} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^5}{5 \cdot 4 \cdot 2!} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^7}{7 \cdot 8 \cdot 3!} + \dots \right]$$

پاره  $y \neq 0$

$$23. y'' = k^2 \cdot y''$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$c_1 = -3c_1^*$$

$$y'' = k^2 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$\int y'' \, dy = k^2 \int z \, dz$$

$$\frac{y^3}{3} = k^2 \cdot \frac{z^2}{2} + c_1^* \quad \parallel \cdot \frac{2}{k^2}$$

$$z^2 = \left( \frac{2}{3} y^3 - 2c_1^* \right) \cdot \frac{1}{k^2}$$

$$= \frac{1}{k^2} \cdot \frac{2}{3} (y^3 - 3c_1^*)$$

$$z = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{3} (y^3 + c_1)}$$

۱۴۵

$$\int dx = k \sqrt{\frac{3}{2}} \int \frac{dy}{\sqrt{y^3 + c_1}}$$

$$= k \sqrt{\frac{3}{2}} \int \frac{dy}{\sqrt{c_1 \left(1 + \frac{y^3}{c_1}\right)}}$$

$$= k \sqrt{\frac{3}{2c_1}} \int \left(1 + \frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}x + \binom{-\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{3}x^3 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$$

د دې اینٹیگرال شمیرنه یواځې  
د لړۍ ودیزینې له لارې شونې ده.

د  $|x| < 1$  لپاره

$$\frac{y^3}{c_1} = x$$

$$\left(1 + \frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{y^3}{c_1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{y^6}{c_1^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{y^9}{c_1^3} + \dots$$

د  $|c_1| < |y^3|$  لپاره

$$x = k \sqrt{\frac{3}{2c_1}} \int \left(1 + \frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$= k \sqrt{\frac{3}{2c_1}} \left[ c_2 + y - \frac{1}{2} \frac{y^4}{4c_1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{y^7}{7c_1^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{y^{10}}{10c_1^3} + \dots \right]$$

د  $|c_1| < |y^3|$  لپاره

$$\left| \frac{y^3}{c_1} \right| < 1 \Rightarrow |y^3| < |c_1|$$

=

24.  $y'' = y$

دا دفرنخیالمسارت هغه د مخه تیره  
پوښتنه ۲۳ کی شمیرلی دفرنخیالمسا-  
وات خانگړی حالت دی د  $k = 1$  سره

$$x = \sqrt{\frac{3}{2c_1}} \left[ c_2 + y - \frac{1}{2} \frac{y^4}{4c_1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{y^7}{7c_1^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{y^{10}}{10c_1^3} + \dots \right]$$

د  $|c_1| < |y^3|$  لپاره

$$25. y^2 \cdot y'' = a$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$c_1 = 2c_1^*$$

Substitution: **بدلون**

$$c_1 - \frac{2a}{y} = t^2 \Rightarrow dy = \frac{ty^2}{a} dt$$

ایتیگرال په ټوټه یا پارشل ماتو  
ماتو ټوټه یا تجزیه کیری

د ځلوونو یا ضربونو انځول:

$$\begin{aligned} 1 &= A(\sqrt{c_1+t})(\sqrt{c_1-t})^2 + B(\sqrt{c_1-t})^2 + C(\sqrt{c_1+t})^2(\sqrt{c_1-t}) + D(\sqrt{c_1+t})^2 \\ &= A(c_1-t^2)(\sqrt{c_1-t}) + B(\sqrt{c_1-t})^2 + C(c_1-t^2)(\sqrt{c_1+t}) + D(\sqrt{c_1+t})^2 \\ &= A(c_1\sqrt{c_1} - c_1t - \sqrt{c_1}t^2 + t^3) + B(c_1 - 2\sqrt{c_1}t + t^2) + C(c_1\sqrt{c_1} + c_1t - \sqrt{c_1}t^2 - t^3) + \\ &\quad + D(c_1 + 2\sqrt{c_1}t + t^2) \end{aligned}$$

۱۴۷

$$y^2 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z = a$$

نیونه:  $y \neq 0$  په  $y^2$  ویشنه

$$\int z \cdot dz = a \int \frac{dy}{y^2}$$

$$\frac{z^2}{2} = -\frac{a}{y} + c_1^* \quad || \cdot 2$$

$$z^2 = -\frac{2a}{y} + c_1$$

$$z = \sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}}$$

$$x = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{ty^2}{a} dt$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{4a^2}{(c_1 - t^2)^2} dt$$

$$= 4a \int \frac{dt}{[(\sqrt{c_1+t})(\sqrt{c_1-t})]^2}$$

$$= 4a \int \frac{dt}{(\sqrt{c_1+t})^2 \cdot (\sqrt{c_1-t})^2}$$

$$= 4a \int \left[ \frac{A}{\sqrt{c_1+t}} + \frac{B}{(\sqrt{c_1+t})^2} + \frac{C}{\sqrt{c_1-t}} + \frac{D}{(\sqrt{c_1-t})^2} \right] dt$$

$$1 = t^3(A-C) + t^2(-A\sqrt{c_1} + B - C\sqrt{c_1} + D) + t(-Ac_1 - 2B\sqrt{c_1} + Cc_1 + 2D\sqrt{c_1}) + Ac_1\sqrt{c_1} + Bc_1 + Cc_1\sqrt{c_1} + Dc_1$$

$$\text{I: } 0 = A - C \quad \Rightarrow A = C$$

$$\text{II: } 0 = -A\sqrt{c_1} + B - C\sqrt{c_1} + D$$

$$\text{III: } 0 = -Ac_1 - 2B\sqrt{c_1} + Cc_1 + 2D\sqrt{c_1}$$

$$\text{IV: } 1 = Ac_1\sqrt{c_1} + Bc_1 + Cc_1\sqrt{c_1} + Dc_1$$

$$\text{II: } 0 = -2A\sqrt{c_1} + B + D$$

$$\text{III: } 0 = -2B\sqrt{c_1} + 2D\sqrt{c_1} \quad \parallel : 2\sqrt{c_1} \quad \Rightarrow B = D$$

$$\text{IV: } 1 = 2Ac_1\sqrt{c_1} + Bc_1 + Dc_1$$

$$\text{II: } 0 = -2A\sqrt{c_1} + 2B \quad \parallel \cdot c_1 \quad \left. \vphantom{\text{II:}} \right\} +$$

$$\text{IV: } \frac{1 = 2Ac_1\sqrt{c_1} + 2Bc_1}{1 = 4Bc_1} \Rightarrow B = \frac{1}{4c_1} = D$$

$$\text{IV: } 1 = 2Ac_1\sqrt{c_1} + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow A = \frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}} = C$$

له دې سره x شميرل يوي.

$$\begin{aligned} x &= 4a \int \left[ \frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_1+t}} + \frac{1}{4c_1} \cdot \frac{1}{(\sqrt{c_1+t})^2} + \frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_1-t}} + \frac{1}{4c_1} \cdot \frac{1}{(\sqrt{c_1-t})^2} \right] dt \\ &= \frac{a}{c_1} \int \left[ \frac{1}{\sqrt{c_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_1+t}} + \frac{1}{(\sqrt{c_1+t})^2} + \frac{1}{\sqrt{c_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_1-t}} + \frac{1}{(\sqrt{c_1-t})^2} \right] dt \\ &= \frac{a}{c_1} \left[ \frac{1}{\sqrt{c_1}} \ln |\sqrt{c_1+t}| - \frac{1}{\sqrt{c_1+t}} - \frac{1}{\sqrt{c_1}} \ln |\sqrt{c_1-t}| + \frac{1}{\sqrt{c_1-t}} \right] + c_2 \\ &= \frac{a}{c_1} \left[ \frac{1}{\sqrt{c_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{c_1+t}}{\sqrt{c_1-t}} \right| + \frac{2t}{c_1-t^2} \right] + c_2 \\ &= \frac{a}{c_1} \left[ \frac{1}{\sqrt{c_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}}{\sqrt{c_1} - \sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}} \right| + \frac{2\sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}}{c_1 - \left(c_1 - \frac{2a}{y}\right)} \right] + c_2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{a}{c_1} \left[ \frac{1}{\sqrt{c_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{yc_1 + \sqrt{yc_1 - 2a}}}{\sqrt{yc_1 - \sqrt{yc_1 - 2a}}} \right| + \frac{1}{a} \sqrt{y(yc_1 - 2a)} \right] + c_2 \quad \text{für } y \neq 0$$

$$26. y'' = 6y - 4$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$c_1 = -\frac{4}{9} + \frac{1}{3} c_1^*$$

Substitution: بدلون

$$t = y - \frac{2}{3} \Rightarrow dy = dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}|$$

$$27. y'' = 1 + y'^2$$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dy} \cdot z = 6y - 4$$

$$\int z dz = \int (6y - 4) dy$$

$$\frac{z^2}{2} = 3y^2 - 4y + c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$$z^2 = 6y^2 - 8y + 2c_1^*$$

$$z = \sqrt{6y^2 - 8y + 2c_1^*}$$

$$= \sqrt{6} \sqrt{y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{1}{3}c_1^*}$$

$$= \sqrt{6} \sqrt{y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} + \frac{1}{3}c_1^*}$$

$$z = \sqrt{6} \sqrt{\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + c_1}$$

$$\int dx = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{dy}{\sqrt{\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + c_1}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + c_1}}$$

$$x = \frac{\sqrt{6}}{6} \ln |t + \sqrt{t^2 + c_1}| + c_2$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6} \ln \left| y - \frac{2}{3} + \sqrt{\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + c_1} \right| + c_2$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 + z^2$$

$$\int dx = \int \frac{dz}{1 + z^2} \quad \text{بنسب ایتیکرال}$$

$$x = \text{Arctan } z + c_1$$

$$\int \frac{-\sin(x-c_1)}{\cos(x-c_1)} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

28.  $y''^2 = 1 + y'^2$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \text{Arsinh } z$$

29.  $y'' = e^y$

$$y' = z; \quad y'' = \frac{dz}{dx}$$

Arctan  $z = x - c_1$

$$z = \tan(x - c_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(x - c_1)$$

$$\int dy = \int \tan(x - c_1) dx$$

$$y = - \int \frac{-\sin(x-c_1)}{\cos(x-c_1)} dx$$

$$= \underline{\underline{-\ln |\cos(x-c_1)| + c_2}}$$

$$y'' = \sqrt{1+y'^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1+z^2}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int dx$$

Arsinh  $z = x + c_1$

$$z = \sinh(x + c_1)$$

$$y = \int \sinh(x + c_1) dx$$

$$= \underline{\underline{\cosh(x + c_1) + c_2}}$$

$$\frac{dz}{dx} = e^z$$

$$\int e^{-z} dz = \int dx$$

$$- \int e^{-z} dz = - \int dx$$

$$e^{-z} = -x + c_1$$

$$\ln(e^{-z}) = \ln(c_1 - x)$$

$$-z = \ln(c_1 - x)$$

$$y' = -\ln(c_1 - x)$$



سبستیچیوشن

$$c_1 - x = t \Rightarrow dx = -dt$$

پارشل - یا توتنه اینتیگرال

30.  $y'' = y'^3$

$$y' = z; \quad y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$c_1 = -c_1^*$$

$$\begin{aligned}
 y &= - \int \ln(c_1 - x) dx \\
 &= \int \underbrace{\ln t}_{u} \underbrace{dt}_{dv} \\
 &= t \cdot \ln t - \int \frac{1}{t} \cdot t dt \\
 &= t \cdot \ln t - t + c_2 \\
 &= t (\ln t - 1) + c_2 \\
 &= \underline{(c_1 - x) [\ln(c_1 - x) - 1] + c_2}
 \end{aligned}$$

نهایت زینگولار اویونه :  $y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$

Voraussetzung:  $y' \neq 0$  نیوند

$$\frac{dz}{dx} = z^3$$

$$\int \frac{dz}{z^3} = \int dx$$

$$-\frac{1}{2z^2} = x + c_1^*$$

$$z^2 = -\frac{1}{2(x + c_1^*)}$$

$$= \frac{1}{2(c_1 - x)}$$

$$z = \frac{1}{\pm \sqrt{2(c_1 - x)}}$$

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{c_1 - x}}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-2 \sqrt{c_1 - x}) + c_2$$

$$y = \pm \sqrt{2(c_1 - x)} + c_2$$

$$y = a = \text{const.} = \text{تابته}$$

31.  $y' \cdot y' - 3y''^2 = 0$

$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$

د  $c_1 = 0$  سره په دې کې  
پارتيکولار او بیونه خوندي ده

32.  $y''' + y''^2 = 0$

$y'' = z \Rightarrow y''' = \frac{dz}{dx}$

$y'^2 - 3y''^2 = 0$

$y'^2 = 3y''^2$

$y' = \pm\sqrt{3}y''$

پارتيکولار او بیونه :  $y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$

نیونه :  $y' = z \neq 0$  ; Voraussetzung:

$z = \pm\sqrt{3} \frac{dz}{dx}$

$\pm\sqrt{3} \int \frac{dz}{z} = \int dx$

$\ln |z| = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} x + c_1^*$

$e^{\ln|z|} = e^{\pm \frac{1}{\sqrt{3}} x + c_1^*} = e^{\pm \frac{1}{\sqrt{3}} x} \cdot \underbrace{e^{c_1^*}}_{c_1}$

$z = c_1 \cdot e^{\pm \frac{1}{\sqrt{3}} x}$

$y = c_1 \int e^{\pm \frac{1}{\sqrt{3}} x} \cdot dx$

$y = \underline{\underline{\pm\sqrt{3}c_1 \cdot e^{\pm \frac{1}{\sqrt{3}} x} + c_2}}$

زیگولار زو بیونه :  $y'' = 0 \Rightarrow y' = a$

$y = ax + b$

نیونه :  $y'' = z \neq 0$

$\frac{dz}{dx} + z^2 = 0$

$\frac{dz}{dx} = -z^2$

$-\int \frac{dz}{z^2} = \int dx$

$\frac{1}{z} = x + c_1$

$z = \frac{1}{x + c_1} = y''$

د وړېسى ايتيگريشن لپاره  
دې ارزښتکړنې کيښول شي

د ارزښتکړنېوکارونې سره د دواړو  
چالنتويپرونو لاس ته راوړنې يا  
نتيجه رايوځاي کيږي

33.  $xy'^2 = y$

د اوبستونو يا واريابلو بيلښت  
 $x, dx$  und  $y, dy$

ايتيگريشن

$$\frac{c_1 - c_2}{2} = c$$

$$y' = \int \frac{dx}{x+c_1} \\ = \ln |x+c_1| + c_2$$

1. Fall:  $x+c_1 > 0$

$$y' = \ln(x+c_1) + c_2 \\ y = \underline{\underline{(x+c_1)[\ln(x+c_1)-1] + c_2x + c_3}}$$

2. Fall:  $x+c_1 < 0$

$$y' = \ln(-x-c_1) + c_2 \\ y = \underline{\underline{(x+c_1)[\ln(-x-c_1)-1] + c_2x + c_3}}$$

$$y = (x+c_1)[\ln|x+c_1|-1] + c_2x + c_3 \\ y = ax + b$$

$$(y')^2 = \frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$2\sqrt{x+c_1} = 2\sqrt{y+c_2}$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} + \frac{c_1 - c_2}{2}$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} + c$$

$$y = \underline{\underline{x + 2c\sqrt{x} + c^2}}$$

**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**