الجبرون

ALGEBREN

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

Ketabton.com

ليکوال:

ډاکټر ماخان (مېرې) شينواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

سریزه .... الف
شمیرپوهنیزې نخښې............ ت
۱ . ګڼونډیرې ۱
۱ . ۱ طبیعي ګڼونډیرې ۱
۱ . ۲ د ټول ګڼونډیرې ۴
۱ . ۳ ریشنل ګڼونډیرې ۵
۱ . ۴ رییل ګڼونډیرې ....، ۷
۱ . ۵ ایماګینار ګڼونډیرې ۷
۱ . ۶ کمپلکس ګڼونډیرې ۸
۲ . ډیرپوهنیزې ستکلیمې ۱۱
۲ . ۱ ډیرې ۱۱
۲ . ۲ خلډیرې یا ضرب ډیرې او اړیکې یې... ۲۶
۲ . ۳ نیمنظم یا نیمترتیب ۳۶
۲ . ۴ مینیمالشرطونه ۳۸
۳ . الجبري جوړښتونه ۴۱
۳ . ۱ ګروپ ۴۴
۳ . ۲ بدن یا تن او کړې ۵۹
نورمې شوې ټولینوم ۶۶ څه مانا لري
۳ . ۳ . لاندیګروپ او لاندې کړې ۷۰
۳ . ۴ ایزومورفیزم ۸۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۵ د نیمګروپ په ګروپ او کړی په یوه (ناضرور
کموتاتیو) تن یا بدن کی خوندیونه ۹۲
۳ . ۶ نورمالپرویشنه ۹۵
۳ . ۷ ایدیال او پاتیتهولګیکړی ۱۰۵
۴ د بول الجبر، سرکټ الجبر......... ۱۱۶
۴ . ۱ د ول الجبر سټ کلیمی ۱۱۶
۴ . ۲ د بول فنکشنونه او پولینومونه ۱۲۹
سویچ الجبر یا برېښناجریان الجبر ۱۴۶
۵ الجبرونه ۱۵۶
یو څو بنسټکلیمی ۱۵۶
۵ . ۲ لاندي الجبر یا سب الجبر ۱۷۳
۵ . ۳ ایزمورفیزم ، هومومورفیزم ۱۸۰
۶ . ټرونونه یا ټرونی ۲۰۷
۶ . ۱ ټرونی او مکمل - یا پوره ټروني.. ۲۰۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ ګڼونډیري

د دې لیاره، چې دا د الجبر کلیمی مو پوره څیړلی وي او ښه پوهور شي، نو په سر کي غواړم هغه د ښوونځي باید (چې متآسفانه دا مو په هیواد کي، په دې نامه نه وو نومولي) ورسره بلد، د ګڼونو ډیري یو په بل پسی تعریف کړم، یا بهتره لنډه ګوته ورته ونیسم او دا په هغو کی د باوري کارونو یا اپریشنونو یا عملیو او یا ګنډنو او یا د تړونونو په ښستې.

۱ . ۱ طبیعي ګڼونډیری

Die Menge der natürliche Zahlen

(the set of non negative integer)

دا د ګڼونو ډیری چې صفر ورسه نه وي په لاندې ډول دی:

$$N = \{ 1,2,3,...,n , ... \}$$

دا لاندې د طبیعي ګڼونو ډیري دی، چې صفر ورسره دی، یا په بل عبارت : د طبیعي ګنونو ډیری د صفر سره

$$N^* = \{0,1,2,...,n,...\}$$

په دې ډیري کی لاندې شیمر قاعدې باور لري

.

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۱ . ۲ په طبيعي ګڼونو کی شميرقاعدې

الف : و زياتون ته يا بهتره، نسبت وزياتون ته:

اول : د هرو دوه طبيعي ګڼونو $a,b \in N$ لپاره، و زياتون ته، يا نسبت وزياتون ته، يو دريم طبيعي ګڼ $c \in N$ شته د کومو لپاره چې باور لري: $a + b = c$

دوېم : اسوشياتيو قانون Assotiative : د طبيعي ګڼونو لپاره د اسوشياتيو قانون باور لري:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

دريم : کموتاتيو قانون commutative : د طبيعي ګڼونو لپاره د کموتاتيو قانون باور لري، يعني:

$$a + b = b + a$$

څلورم: بي تاثيره يا ناپيلی توکی das neutrales Element: په طبيعي ګڼونو کی چی صفر ورسره وي باور لري

$$a + 0 = 0 + a = a$$

صفر د طبيعي ګڼونو ناپيلی يا بهتره بی تاثيره توکی بلل کيږي.

ب : و ځل ته يا بهتره نسبت ځل ته

.

اول : د هرو دوه طبیعی گڼونو $a , b \in N$ لپاره یو دریم طبیعی گڼ $c \in N$ شته، د کومو لپاره چی باور لري

$$a.b = c$$

دوم : د طبیعي گڼونو $a,b,c \in N$ لپار اسوشیاتیو قانون باور لري

$$(a . b) . c = a . (b . c)$$

دریم : د طبیعي گڼونوډیري کی کموتاتیو قانون باور لري

$$a . \ b = b . a$$

څلورم. نسبت و ځل ته ناپیلي یا بهتره بي تاثیره توکی : که طبیعي گنونه له 1 سره ځل شي، نو بیرته پخپله همغه طبیعي گڼ لاس ته راځي

$$1 . a = a . 1 = a$$

دا 1 د طبیعي گڼونو یو ناپیلی یا بي تاثیره توکی بلل کیږي، چی یوی(دا ځکه یوی بولو ، چی باید له یو سره یی توپیر شوی وي) یي بولو

یادونه : د بېلګو رو، چې یوې له بلو څخه توپیر [illegible] شي.

یادونه : په پورته نښلونو کی دي ته پام وي، چی ورکړ شوي توکی یو د بل څخه باید توپیریدونکی نه وي، کیدی شي، چی یو له بل سره مساوي هم وي یا بهتره همغه توکي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو چې په طبیعي ګڼونډیري کی، نسبت و زیاتون ته، د هر توکی لپاره د هغه په څټ یا برعکس ګڼ نه شته، نو له دې امله مجبوریږو، چې د طبیعی ګڼونو ډیری د ټولګڼونو ډیري ته پراخ کړو،

۱ . ۲ د ټولګڼونوډیری die Menge der ganze Zahlen :

د ټولګڼونو ډیری، د طبیعي ګڼونو ډیری د صفر او د دې طبیعي ګڼونو د توکو په څټ ګڼونو ډیری دی، چې په Z سره یی ښایو او داسی یي لیکو

$$Z = \{ ...,-n, ..., -3,-2,-1,0,1,2,3,...,n,...\}$$

په ټولګڼونو ډیري کی هغه په طبیعی ګڼونډیري کی باوري نښلونی یا عملیي باور لري او په دې برسیره د هر یوه ګڼ لپاره د هغه په څټ ګڼ نسبت و زیاتون ته هم موجود دی، یعنی لاندې باور لري:

د هر ټولګڼ $a \in Z$ لپاره د هغه په څټ ګڼ یعنی $-a \in Z$ موجود دی، چی دا لاندې باوري کوي:

$$a + (-a) = a - a = -a+ a= 0$$

دلته $-a$ د a په څټ ګڼ یا inverse دی نسبت و زیاتون ته. دې ته طبعاً پام شته، چې د مثبت ګڼ څل د منفی ګڼ

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره منځ ته راغلی، چې نتیجه یې یو منفي ګڼ دی، دا په دې مانا، چې دلته اصلي نبنلونه یا عملیه زیاتون دی او نه . (ځل).

یادونه : زیاتون دوه ځایزه عملیه binäre Operation یا نبنلونه ده او په څټ عملیه یوه یوځایزه عملیه unäre Operation یا نبنلونه ده.

ګورو، چې د ټولګڼونو په ډیري کی د ځل لپاره د ګڼونو په څټ ګڼونه inverse Zahlen نه دي تعریف، یعنی د یوې افغانی یو په څلورمه (1 / 4) یو ټولګڼ نه دی، نو له دې امله باید د ټولګڼونو ډیری و ریشنل ګڼونو Q ته پراخه شی .

۱ . ۳ ریشنل ګڼونه rationale Zahlen :

د ریشنلګڼونو ډیری له دې امله د ټولګڼونو ډیری Z او د ټولو ماتګڼونو ډیري a / b څخه جوړ دی، چې په Q سره یې په نخښه کو او په لاندې ډول یې لیکو :

$$Q = \{ Z , a/b , a,b \in Z , b \mid= 0 \}$$

دا داسې لوستل کیږي : ډیری Q مساوي دی د ټولګڼونو ډیری Z اود مات ګڼونو a / b ډیري سره، a , b ∈ Z .

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریشنلګڼونو ډیري کی، هغه په Z کی ټول د شمیرقوانین باور لري او په دې برسیره د هر ګڼ لپاره نسبت و ځل ته د هغه په څټ ګڼ هم موجود دی ، یعني په ریشنل ګڼونو کی د هر ګڼ a ∈ Z لپاره یو b ∈ Z موجود دی د کوم لپاره چي باور لري:

$$a \cdot b = 1 \Rightarrow b = 1/a,\ a \neq 0$$

دلته a باید د صفر سره برابره یا مساوي نه وي، ځکه، چی په صفر ویش نه دی تعریف.

ګورو چی ددوه په څټ ګڼونو ځل د ریشنلګڼ یو یوی راکوي. یوی هغه توکی دی، چی د ریشنلګڼون ډیري هرتوکی سره د ځل نښلونه کی بي تاثیره پاتي کیږي یا ناپیلی. دا یوی موږ له دې امله ناپیلیdas neutrale Element او یا هم بی تاثیره توکی بولو.

په پورته ګڼونو کی توان تعریف دی، یعني هر ګڼ د خپل ځان سره ځل کیدنه شته، خو د دې په څټ کارونه یاعملیه یا بهتره نښلونه موجود نه ده، نو له دې امله باید دا ګڼونډیری نور هم پراخه شي. یعني د ګڼون ریښه هم باید په ګڼونډیري کی باور ولري. د بیلګي په توګه د ۲ ریښه یعنی $\sqrt{2}$ په ټولګڼونوکی نه دی تعریف. دا پراختیا مو ریيلګڼونډیری ته لاربښودوي، چي

(c) ketabton.com: The Digital Library

په R سره ښايو يا نخښه کوو.

۱ . ۴ رييل ګڼونډيری R die Menge der reelen Zahlen:

د هغو ګڼونوډيری، چی له ريښو جوړ وي، هغه مو ړ د ايريشنل ګڼونوډيری die Menge der irationale Zahlen بولو چی په Q_i سره يی په نخښه کو . د رييل ګڼونډيری ياد رييل ګڼونو ډيری په دې توګه بيا د ريشنل ګڼونو ډيري او د ايريشنلګڼونو ډيري د ټولنی څخه جوړ دی يعنی

$$R = Q \cup Q_i$$

يادونه : په پورته او راتلونکی کي که U راشي، نود ټولنی په ځاي به يی ځاي نيولی وي، که بل نوم ورسره مل نه وي.

په دې ډيري کي د هرنامنفی ګڼ لپاره د هغه ګڼ ريښه موجود ده. د رييلګڼونوډيری. بيا تکراروو، چی د ټولو ريشنلګڼونو ډيري څخه عبارت دی، چی د نامنفي ريشنلګڼونوګڼونو ريښی هم ورزياتي شي.

په رييلګڼونو کي د ريشنل ګڼونډيري ټول قوانين باورلري او په همدې ډول په R کی د هر مثبت ګڼ a ريښه هم موجود ده، يعني $\sqrt{a}$ موجود ده، چی a منفي ګڼ نه وي. دا ريښه نيونه يو يوځايز اپريشن يا عمليه او يا نښلونه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم سملاسی راته جوته کیږي، چی د ریښي یا بهتره د مربع ریښی د منفی ریښه نیونکي یا ریښه ایستونکی ګڼ ریښه نه ده تعریف، نو له دې امله باید د رییلګڼونوډیری د کمپلکس ګڼونډیرۍ ته پراخه شي.

۱ . ۵ ایماګینار ګڼونډیری:

د ټولو منفی ګڼونو ریښوډیري ته ایماګینار ګڼونډیری وایو die Menge der imaginäre Zahlen . او دا په I سره په نخښه کوو. دا هغه ګڼونه i دي، د کومو لپاره چي باور لري: $i^2 = -1$. یانی $i = \sqrt{-1}$, نو که b یو رییلګڼ وي، نو ib یو ایماګینار ګڼ دی .
اوس راځو د کمپلکس ګڼونو ډیري تعریف ته :

۱ . ۶ کمپلکس ګڼونډیری

die Menge der komplexen Zahlen

کمپلکس ګنونډیری د رییلګڼونډیری او ایماګینارګنونډیري ټولنی ته وایي. یاني که ایماګینارګڼ د I سره په نخښه کړو نو کمپلکسګڼ چی د C سره یي په نخښه کوو، دی

$$C = R \cup I$$

دلته له دې پیژندنی یا تعریف څخه روښانیږي، چی کپلکس

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګڼونه دوه برخی لري، رييله برخه او ايماګينار برخه، نو له دې امله د کمپلکس ګڼونو په ډيري کی ټولی نښلونی يا عمليې، چی په رييل ګڼونډيري او ايماګينار ګڼونډيري کی باور لري، باوري دي. او برسيره پردې، دا لاندې قوانين هم باور لري:
دلته که $z = a + ib$ يو کمپلکس ګڼ وي، چی a رييله برخه او $ib = bi$ يی ايماګينار يا ايماجينار برخه ده. او س راځو شميرقوانينو ته:

الف : $i^5 = i \quad i^4 = 1 \quad i^3 = -i \quad i^2 = -1$

په ټوليزه توګه:

$$i^{4n+2} = -1 \qquad i^{4n+3} = -i \qquad i^{4n+4} = +1 \qquad i^{4n+5} = i$$

ب –

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 + b_2)$$
$$z_1 . z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

کيدی شي، چی وي $z^* = \bar{z} = a - ib$ ، نو دا ګڼ و $z = a + ib$ ته يو کونجوګيري کمپلکس ګڼ بلل کيږي

پ–

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$z.z^* = z.\bar{z} = (a+ ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

دا پورته د جملو یا قضیو په څیر هم ښوول کیدی شي، خو مونږ یی دلته د ښوونی څخه تیریږو او دایی د تعریف له مخی د اعتبار وړ قوانینو په څیر راوړو.

یادونه : مونږ کړای شو، چی دا د ګڼونو ډیري په لاندې ډول د ډیریو په توګه یو په بل کي خونديږ ولیکو:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

دا په ترتیب د وړپسی ډیري اصلي برخډیري دي

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – ډيرپېوهينيزې ستړکليمى

۲ . ۱ . ډيرى

په شميرپوهنه کى پل په پل موږ ددې، د ستونځو سره مل، تعريف شوې کليمې سره مخامخ کيږو، کومه چى د يوه لغات « ټولګې » سره روښانه کيدى يا پوهيدل کيدى شي. د بيلګې په توګه د انسانانو د ټولګې څخه غږيږو، چى په يوه ټاکلى وخت کى په يوه کوټه کى موجود وي، يا هغه هيلى، چى په يوه ځانګړي وخت کې په يوه ځانګړي ځاى کې په اوبو کى لامبى، هغه غرڅه، چى د هسکى مينې د سپينى مورګې په ځنګلونو کى لا پاتى دي او همدا ډول هغه ميږې او ووزې، چى په ۱۹۹۹ ميلادې کال کى د کوچيانو څخه د لوړې له امله مړې شوي دي. د داسى شيانو ټولګه «ډيرى» (Die Menge , set) بلل کيږي يا داسى ټولګې ډيرى نوموو.

۲ . ۱ . ۱ لنډ تعريف : ځموږ د خيال يا تصور د ټولو، په روښانه توګه، توپيرکيدونکو شيانو ټولګه «ډيرى» نوموو يا بولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شیان، چی له هغو ډیری جوړ شوی دی، د ډیري «توکي» بلل کیږي. د دې لپاره، چی « x د ډیري M توکی دی» لیکو: « $x \in M$ ». د دې وینا په څټ یا نفي یا نیګیشن Negationد « $x \notin M$ » له لارې ورکول کیږي.

د « $x_1 \in M$ او .... او $x_n \in M$ » په ځای لیکو:

$$"x_1,x_2,...,x_n \in M"$$

یو ځانګړی ډیری تشډیری دی، داسی کرکتریزه کیږي، چی کوم توکی نه لري. دا تشډیری د سومبول یا نخښی Ø سره نخښون کیږي یا په نخښه کیږي.

نور هغه ډیرې چی زیات مو مخ ته راځي یا زیات منځ ته راځي، دا لاندې ډیري دي:

د ټولو طبیعی یا پیدایښتیزګڼونو ډیری د N سره په نخښه کیږي، چی صفر ورسره مل دی.

د ټولو ټولګڼونو ډیری Z

د ټولو راشنلګڼونو ډیری Q

د ټولو رییلګڼونو ډیری R

د ټولو کمپلکسګڼونو ډیری C

د ۳۰ پرویشونو ډیری، چی له ۸ توکو څخه جوړ ډیری دی. یعنی {1,2,3,5, 6,10,15,30 } ډیری.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۱ . ۲ تعریف : یو ډیری M د ډیري N برخه ډیری بلل کیږي، که له $x \in M$ څخه تل لاس ته راشی $x \in N$.
په نخښونه یی : $M \supset N$. یا $M \subset N$

۲ . ۱ . ۳ تعریف : هغه ډیری، چی هیڅ توکی ونه لري، تشډیری بلل کیږي او داسی $\emptyset$ یي په نخښه کوو.

تشډیری $\emptyset$ د هرډیري برخډیری دی ، برسیره پردې هر ډیری د خپل ځان برخډیری دی. دا ډول ډیري نااصلي برخډیري بلل کیږي، هغه برخډیری اصلي برخډیری دی یا اصلي برخډیری بلل کیږي، که دا برخډیری له دې دوه ډیریو یعنی له پخپله دې ورکړ شوي ډیرې او تشډیري څخه توپیر ولري. دې ته دې هم باید ګوته نیول شوي وي، چی کله کله برخډیریو ته «لاندې ډیري» هم ویل کیږي
دا نخښی $\subset$، $\subseteq$ د اینکلوزیون نخښو Inklusionszeichen په نامه بل کیږي.

۲ . ۱ . ۴ تعریف : که وي $M \subseteq N$ او $M \neq N$ نو M د N اصلي برخډیری بلل کیږي. ($M \neq N$)
په نخښونه یی : $M \subset N$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۱ . **۵ تعریف:** د یوه ډیرۍ S توکي کیدی شي پخپله ډیري وي. دلته نوS د ډیریسیستم په توګه په نخښه کیدی شي یا د ډیري سیستم په څیر ګڼل کیدی شي یا په بل عبارت: د یوه ډیري د توکو ډیري د هغه ډیري برخډیری دي، چې دا یو د ډیریسیستم جوړوي.

۲ . ۱ . **۶ تعریف:** د یوه ناتش ډیري سیتسمS غوڅډیری (د سیستم هغه برخډیری، چې د سیستم د هر ډیري برخډیری وي) D د ټولو توکو هغه برخډیری دی، چې په همغه وخت یا یووخت کی د سیستم S د هر ډیري M توکی وي. یعنی لرو x ∈ D همغه ارزښته یا برابرارزښته د دې سره دی x ∈ M د ټولو ډیریو M ∈ S لپاره .

په نخښونه: $D = \bigcap_{M \in S} M$ یا $D = \bigcap \{ M \mid M \in S \}$

$D = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$

که S یواځي د پای ډیرو برخډیریو $M_1 , \ldots , M_n$ څخه جوړ دی.

مساوات یا برابرون $M \cap N = \emptyset$ وایي، چې M او N ګډ توکی نه لري، یعني توکی پردي دي یا لنډ پردي یا دیسیونکت دي(Disjnukt) دي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۱ . ۷ تعريف: د يوه ناتش ډيريسيستم S ټولنه V د ټولو هغو توکو ډيرى دى، چې کم له کمه د S ډيريسيستم يوه ډيري M پورې اړه ولري يعنى توکى وي.

په نخښونه : $V = \bigcup_{M\in S} M$ يا $V = \bigcup\{M \mid M \in S\}$

$V = M_1 \cup \dots \cup M_n$

که ډيريسيستم S د پای ډيرو برخډيريو $M_1, M_2, \dots, M_n$ څخه منځ ته راغلى يا جوړ وي.

د غوڅډيري او ټولنډيري د تعريف په مرسته پسى ترلي لاندې اړيکي لاس ته راځي ، چې ښوونه يې ګرانو لوستونکو ته پريښوول کيږي.

۲ . ۱ . ۸ مرستندوي جمله:

(a) $M \cup (N \cap N) = (M \cup N) \cap (M \cup N)$
(b) $M \cap (N \cup N) = (M \cap N) \cup (M \cap N)$
(c) $M \cap N = M$

د $M \subset N$ سره په همغه مانا ده

(d) $M \cup N = M$

د $N \subset M$ سره په همغه مانا ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

پایله‌یري کیدی شي، چی د هغو د غړو له لارې په نخښه شي.
لیکل کیږي

$$\{ x_1 , x_2, \dots , x_n \}$$

د همغه ډیري M لپاره، چی ټیك له دې ورکړشوو توکو څخه جوړ وي. یوتوکیز ډیرى { x } د هغه د توکي x څخه باید توپیر شي:
د بیلګي په توګه { Ø } هغه ډیری دی، چی د هغه یواځنی توکی تشه‌یری دی .

دیوه ډیري M د توکو ګڼون یا تعداد د | M | سره په نخشه کیري. دا ګڼ |M| د ډیري M زور یا توان بلل کیږي، دا په دې مانا چي د ډیري د توکو ګڼون یا تقداد د ډیري زور دی. د بیلګي په توګه دی 1 = | { Ø } | او 0 = | Ø | .
د یوه ډیري بل ډول روښانونه یا شمیرنه په دې کی نغښتی، چی دیوه ورکړ شوي ډیري M ټول توکي ورکړ شوي ، کوم توکی چی ګڼ خویونه E ولري، و یوه نوي ډیري ته سره راټولګه کړي یا را یوځاي کړي. E(x) په دې مانا چی x خویونه E لري، نو دا ډیری په { x ∈ X | E(x) } سره ښایو.
د بیلګي په توګه ډیری {$x \in Z \mid x^2 = 1$} د 1- او 1 څخه جوړ شوی، د ټولو ټولګڼونو برخه‌یري دی. د یوه ډیري دا
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډول جوړونی سره د انډولډيري X ورکونه مهمه ده، له کومی چی توکی رانیول کيږي، په غیر له دې کيدی شي، له تضاد یا مخامخوالی ډك یا په څټ ډيري رامنځ ته شي، دا چی انډولډيری په ټولیزه توګه په همغه اړيکو یواځنی ټاکلی دی، نو په دې حالت کی دې په اکسپلیځیت(Explizite لاتین : روښانه ، واضح) ورکونه تیریدنه وشي.

۲ . ۱ . ۹ تعریف: د دوه ډيريو M او N کمونډيری دی :

$$M \setminus N = \{ x \in M \mid x \in N \}$$

د غوځي ، ټولنی او کمون لپاره په پوره روښانه توګه لاندې یادوو:

کموتاتیو قانون Kommutativität

$$A \cap B = B \cap A \ , \quad A \cup B = B \cup A$$

اسوځیاتیو قانون Assotiativität

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

دیستریبوتیویتي قانون Distributivität :

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \ ,$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولیز یا عمومي

$$\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \right) \cap B = \bigcup_{\alpha} (A_{\alpha} \cap B)$$

او وروستی

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C),$$
$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B), \qquad A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$$

ډیرې شمیرپوهنیزې ښوونې د پوره اندکشن په پرینخیپ ولاړې دي، کوم چې د طبیعي ګڼونو اکسیوماتیکي جوړخت دلایلو راوړنه کې یو غوره رول لوبوي.

۲ . ۱ . ۱۰ د پوره اندکشن ثبوت پرینخیپ:

A دې په طبیعي ګڼونو $n \in N$ یوه ویناو ي. $A(n)$ په دې مانا دی، چې A په n باوري کیږي.
د یوه کره ټاکلی $n_0 \in N$ څخه پیل باور لري:

الف : $A(n_0)$ د اینډکشن پیل:
ب ؛ د اینډکشن پاي : د ټولو $n \geq n_0$ لپاره له $A(n-1)$ څخه هم $A(n)$ لاس ته راځي
نو بیا A د ټولو طبیعي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ریښتیا ده یا صحیح یا ټیك ده (دا ریښتیا مناسبه نومونه ده).

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې ته دې ګوته نیول شوي وي، چې خورا ساده دی، که چیري د اینډکشن پای په لاندې ډول لارښوده کړو:

ب : له $A(i)$ څخه د ټولو i لپاره د $n_0 \leq i < n$ سره $A(n)$ هم لاس ته راځي.

شرایط (b) او ('b) برابرارزښته دي ، لکه چې وروسی یا تړلي لیدل کیږي.

د انیدکشن ښوونه یا ثبوت بیلګي د لاندې جملو اوبیو یا حلونو ته مرسته کوي یا د لاندې جملی اُبیو په چوپړ کې دي.

۲ . ۱ . ۱۱ تعریف: M دې یو ورکړشوی ډیری وي.
د M د ټولو برخډیریو ډیری. چې په $P(M)$ سره یی په نخښنه کوو یا ښایو، د M دپوتنځډیري Potenzmenge یا توانډیري په نامه یادیږي.

۲ . ۱ . ۱۲ جمله: M دې یو n– توکیز ډیری وي.
$P = P(M)$ دې د M د ټولو برخډیریو ډیری وي. نو دا د M په توان ډیری P له 2^n توکو څخه جوړ دی.

اوبی (حل): د اینډکشن پیل: $n = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو چې M کوم توکی نه لري. له دې امله M تشډيرى Ø دی. د { Ø } = P(Ø) له امله په P کی یو توکی $1 = 2^0$ موجود دی.

وي دې : $n \in N , n \geq 1$

د ایندکشن نیونه یا فرضیه: هر (n - 1) − توکییز ډیرى دې ټيك 2^{n-1} توپیریدونکی برخډیري ولري.

د ایندکشن اوبی یا ثبوت : که M یو ډیرى د n توکو سره وي، نو (P(M ټيك له 2^n توکو جوړ دی.

د دې سره دې $M = \{ a_1,a_1,...,a_n\}$ وي.

نو بیا (P (M' د $M ' = \{ a_1 , a_2,...,a_{n-1}\}$ لپاره د ایندکشن د نیونی یا فرضیي سره ټيك 2^{n-1} توکي لري،

که ($A \in P(M$ وي، نو بیا یا $a_n \in A$ دی او یا $a_n \notin A$. په دوم حالت کي A په (P (M' پورې اړه لري، او په لومړي حالت کي $A' = A\setminus\{a\} \in P(M')$ نو P(M) ټيك

$$2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{n-1} (1 +1) = 2^n$$

توکي لري. د پوره ایندکشن د پرینځیپ له مخی دلته وښوول شو، چی د هر n − توکیز ډیري M لپاره پوتنځ − یا تواندیری (P (M ټيك 2^n توکی لري. *

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو د ثبوت له مرستندوي موادو څخه د ناپاي ډیري زدکړې لپاره د څورن Zorn جملګي ده. S دې یو ناتش ډیریسیستم وي. یو ناتش د S برخډیری K یو ځنځیر بلل کیږي، که له $M_1 , M_2 \in K$ څخه تل $M_1 \subseteq M_2$ لاس ته راشي او یا $M_2 \supseteq M_1$ لاس ته راشي.

۲ . ۱ . ۱۳ تعریف :یو ډیري $M \in S$ د S یو ماکزیمال یا لوي توکی بلل کیري، که له $N \in S$ او $M \subseteq N$ څخه تل لاس ته راشي ، چی $M = N$. نو د څورن جملګی په لاندې ډول ده: (ماکزیمال یا ماکسیمال = Maximal)

۲ . ۱ . ۱۳ د څورن جملګیLemma vo n Zorn:

که د ناتش ډیریسیستم S د هر ځنځیر K لپاره ټولنډیري { K | K∈K } هم یو د S ډیریسیستم توکی وي، نو بیا په کي یو ماکزیمال maximales Element توکی موجود دی.

ددې جملګی د ثبوت څخه دلته تیریږو .

وي دې N د یوه نیم منظم ډیرې M لاندې ډیری یا برخه ډیری. هر (ضرور نه دی، چی په N کی ځای وي یا خوندې وي)a له M څخه، کوم چی د ټولو $x \in N$ لپاره شرط $a \geq x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوره کړي د لاندي ډیري پورته بند بلل کیږي یانی ډیری یی د لته رابند دی. دې ته دوګونی کلیمه لاندې بند دی.
په ورکړ شوې نیممنظم ډیري M سره د ټولو ځنځیرونو ډیری د ډیري خوندیونی په موخه یا هدف ، هم نیمه منظم دی. دا ټول د اخرني ډیري ماکسیمال توکی ، د خپل طبیعیت له مخی د M ماکسیمال ځنځیر بلل کیږي.
لاندې جملی یو بل ته ورته دي یانی د یوې څخه بله لاس ته راځی او په څټ.

۲ . ۱ . ۱۴ د څرمیلو جمله Zermelo: هر ډیری کیدی شي منظم شي

۲ . ۱ . ۱۵ د هاوزدورف جمله Hausdorff:هره د یوه نیمه منظم ډیري ځنځیر په یوه ماکسیمال ځنځیر کي خوندې ده.

۲ . ۱ . ۱۶ د کوراتوفسکي –څورن جمله Kuratowski-Zorn :
که د یوه نیمنظم ډیري M هر ځنځیر یو پورته بند ولري، نو د M په هر توکی پسی یو په نامه ماکسیمال توګي راځی.
ددې درې جملو له ثبوت څخه دلته تیریږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس دې X او Y دوه ناتش ډیري وي. د یوې د X په Y کی څیروني (په نخښونه f : X -> Y) لاندې یو تنظیم پوهیږو ، په کوم کی چی د x ∈X هر توکی یواځنی یوه د y ∈Y توکی باندې د څیرې په توګه تنظیم شي یا ترتیب شي، د x څیره y په څیرونه f د f(x) سره او یا هم ساده د fx سره په نخښنه کوو. ډیری X د څیرونی f تعریفډیری بلل کیږي او ډیری Y د هغی موخیډیری یا څیرډیری بلل کیږي.

که f د x څیرونه یا څیره کونه وي په Y کی او M یو د X برخډیری وي، نو دا د ټولو x ∈ M توکو څیرې ډیری او په ورته توګه د ډیرې M څیره بلل کیږي او داسی‌ئ په نخښنه کوو f(M) یا په ساده توګه fM . پس باور لري:

$$fX = \{ fx \mid x \in M \},$$

او fM د Y یو برخډیری دی. د تشډیري څیره بیرته تش ډیری دی. د تعریف ډیري څیره fX د f څیره هم بلل کیږي او د Im f سره په نخښنه کیږي.

۱ . ۱ . ۱۰ **تعریف:** که Im f = Y باور ولري ، د څیروني f : X -> Y لپاره، نو f یوه سوریکتیوه څیرونه Surjektion بلل یږي، یو سوریکشن surjektive Abbildung یا یوه د X څیرونه په Y باندې. په ځتې دې N یو د S

(c) ketabton.com: The Digital Library

برخه‌یری وي. نو بیا د ټولو X د توکو ډیری، چې د هغو ځیره د N یو توکی وي، د N له ځیرې پخوا ځیرونه، په ځیرونه f کی، بلل کیږي او د $f^{-1}(N)$ سره په نخښه کیږي. باور لري

$$f^{-1}(N) = \{ x \in X \mid fx \in N \}$$

او $f^{-1}(N)$ یو د X برخه‌یری دی.

که $N \neq \emptyset$ هم باور ولري، کیدی شي $f^{-1}(N)$ تشه‌یری وي، یعنی هلته که $N \cap \mathrm{Im}\, f = \emptyset$ باور ولري.

۲ . ۱ . ۱۷ تعریف : یوه ځیرونه $f: X \longrightarrow Y$ د خویونو سره،

چې له $x_1 \neq x_2$ تل $fx_1 \neq fx_2$ لاس ته ریشي، اینیکتیو ځیره کونه injektive Abbildung بلل کیږي یا اینیکشن Injektion. که په همدې وخت کی f حتی یو اینیکتیو او سوریکتیو وي، نو f بییکتیو ځیره کوونه bijektive Abbildung بلل کیږي یا بیکشن Bijektion بلل کیږي.

۲ . ۱ . ۱۸ تعریف : $f: X \to Y$ دې یوه بییکتیوه ځیره کونه وي. په هر $y \in Y$ د ځیرې په توګه یو یواځنی

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکلی توکی $x \in X$ د $y = f(x)$ سره د ځیرې په توګه تنظیم کړي، نو دلته د Y یو بییکشن په X تعریفوي.
دا د f په ځټ ځیرونه بلل کیږي او یا دا f ته راګرځیدونکی ځیره کوونکي ده. او د $f^{-1} : Y \to X$ سره په نخښه کیږي

۱ . ۱ . ۱۹ تعریف: که دوه ځیرونی $Y \to f : X$ او $Z \to g : Y$ یو په بل پسی رامنځ ته کړی شي او په ټولیزه توګه یوه د $g \circ f$ سره په نخښه شوې ځیره کونه د X په Z کی ترې لاس ته راځي، کوم چی د f او g ځل یا ضرب ځیرونه بلل کیږي زیات وخت د ځنځیرې او یا تړلی بلواك یا ځیره کوني په نامه هم یادیږي. دا په لاندې ډول ورکړ شوی دی.

د ټولو $x \in X$ د پاره $(g \circ f) = g(fx) = g(f(x))$
کیدی شي چی تعریفډیری او ځیره ډیری یو بل باندې پریوځي. دلته بیا له یوې ځیرونی f غبریږو، چی X په خپل ځان ځیره کوي.

۲ . ۱ ۲۰ تعریف: که دډیري X هر توکی په خپل ځان بیرته ځیره شي، نو یو د X بیکشن په خپل ځان لاس ته ترې راځي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی د X کتمټ ځیرونه identische Abbildung یا Identität یي بولو او په لاندې ډول یی ښایو id_x او یا په ساده توګه id .

۲ . ۱ . ۲۱ یادونه: د هر $x \in X$ د پاره باور لري $id_x = x$.
که f یو د X بیکشن په Y وي، نود دې په څټ ځیره کونه f^{-1} هم موجود ده او لاس ته ترې راځي

$$f^{-1} \circ f = id_x , \quad f \circ f^{-1} = id_y$$

۲ . ۲ ځلېدیری یا ضربېدیری او اړیکی یی

په دې برخه کی کارتیزي ځل د ناتشو ډیریو او همداسی د اکویوالینځ اړیکو یا ورتوالی اړیکو Äquivalenzrelation کلیمه ځیړو.

۲ . ۲ . ۱ **تعریف:** د دوه ډیریو A او B کارتیزې ځل A×B د تنظیمشوو جوړو (a , b) ټولګه ده، د $a \in A$ او $b \in B$ سره. دلته (a , b) = (a',b') ټیک هلته باور لري، چی a = a' او b =b' وي.

.

۲ . ۲ . ۲ يادونه: کارتيزې ځل په ټوليزه توګه کموتاتيو نه دی ، دا په دې مانا چي $A\times B \neq B\times A$ که $A \neq B$ وي. په پام کي دې دا اثتثنا وي، چی د هر ناتشډيري A او تشډيري $\emptyset$ لپاره باور لري

$$A\times\emptyset = \emptyset \times A$$

په ورته توګه د دوه ډيريو کارتيزې ځل په څير د پاي ډيرو ډيريو دپاره هم کارتيزې ځل تعريفيږي.

۲ . ۲ . ۳ تعريف: کارتيزې ځل $A = A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ د پای ډيرو ډيريو A_i د $i = 1,\ldots,n$ لپاره، د ټولو منظمو يا ترتيبشوو n – ګونو $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ د $a_i \in A, i = 1, 2, \ldots, n$ سره. دلته

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1', a_2', \ldots, a_n')$$

ټيك هلته باور لري، که $a_i = a_i'$ د ټول $i = 1,2,\ldots,n$ لپاره وي.

که $A = A_i$ وي، د ټولو $i = 1, 2,\ldots,n$ لپاره، نو $A^n = \times_{i=1}^{n} A_i$ د A n –ايزی توان يا پوتنځ بلل کيږي. ([illegible])

ډيری $\{(a,\ldots,a) \in A^n \mid a \in A\}$ د A^n نيمی يا قطر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بینار اړیکی binäre Relationen

۲ . ۲ . ۴ تعریف : یود A×A برخېدیری R د ډیري A دوه ځایزه اړیکي بلل کیږي. وایو : د A دوه توکی a او b په اړیکه R کی یو له بل سره پراته دي، په نخښونه a ~ b , هلته او هلته یا په بل عبارت ټیك هلته، که وي

$$(a, b) \in R \quad \text{او} \quad a R b$$

د بینار اړیکو یا دوه ځایزو اړیکو R کومپلیمنت یا پوره کید- ونکی یو دوه ځایزه اړیکي $\overline{R}$ دی چي په لاندې توګه تعریف دي $\overline{R} = (M \times M) \setminus R$. په نورو ویناو سره $a \overline{R} b$ ټیك هلته باور لري، که $(a,b) \notin R$.
د بینار اړیکو د ځل RS لاندې پوهیږو، چی a(RS)b ټیك اوټیك هلته باور لري، که په M کی یو توکی c موجود وي ، د کوم لپاره چی a R c او cSb باور لري.

د بینار اړیکو ځل اسوشیاتیو دی یعنی

$$(RS)T = R(ST)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بينار اړيکو ځل په هيڅ توګه کوموتاتيو نه دی ، کله کله اړيکی R او S يو له بل سره بدليدونکی وي ، دا په دې مانا چې

$RS = SR$

يوون اړيکی E په لاندې ډول تعريف دي: aEb ټيك هلته باور لري که وي، a = b . يا په بل ډول اړيکی E د ټولو هغو توکو جوړو (a,a) د a ∈M سره ډيری دی. دلته په روښانه توګه باوور لري: $E = E^{-1}$ او ديوه خوښی اړيکیR لپاره باور لري :

$RE = ER = R$

موږ تش اړيکو 0 ته هم ګوته نيسو، چی د M × M تشډيري په څير تعريف دی. د هر بيناراړيکي R لپاره په ډيري M کی باور لري:

$0 \subseteq R$ او $0R = R0 = 0$

موږ کله کله د بينارو اړيکو سره مخامخ کيږو، چي د لاندې خويونو څخه ځنی په کی باور لري

رفلکسيويتي: a R a د ټولو a ∈M لپاره دا په دې مانا چي $E \subseteq R$

ترانزيتيويتي: له a R b او b R c څخه لاس ته راځي، a R c دا په دې مانا چي $RR \subseteq R$

سيومتري: له a R b څخه لاس ته راځي b R a دا په دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

مانا چي $R^{-1} = R$

انتیسیومتري: له $a\,R\,b$ او $b\,R\,a$ څخه لاس ته راځي
$a = b$ دا په دې مانا چی $R \cap R^{-1} \subseteq E$

۲ . ۲ . ۵ جمله : که کوم یو بینار اړیکي له دې پورته خویونو څخه کوم یو ولري یا ټول ولري، نو د دې اړیکو په څېر اړیکي R^{-1} هم دا خویونه لري.

اوبی (حل):
په عمل کی له $E \subseteq R$ څخه لاس ته راځی

$$E = E^{-1} \subseteq R^{-1}$$

که $RR \subseteq R$ وي، نو باور لري

$$R^{-1} R^{-1} = (RR)^{-1} \subseteq R^{-1}$$

که $R^{-1} = R$ وي ، نو باور لري

$$(R^{-1})^{-1} = R = R^{-1}$$

له $R \cap R^{-1} \subseteq E$ څخه لاس ت هراځي

$$R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cap R \subseteq E$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایکویوالنځ اړیکې :د بینار اړیکو څخه یې خورا مهمې اړیکې ایکویوالنځ اړیکې دي، چې په لاندې کې یې تعریفوو

۲ . ۲ . ۶ تعریف : یو ناتش دوه ځایزه اړیکې ~ په ډیري A کې ورته اړیکې یا اکویوالنځ اړیکې بلل کیږي، که د ټولو $a, b, c \in A$ لپاره لاندې اړیکې باور ولري.

الف) $a \sim a$ (رفلکسیو reflexiv)

ب) $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$ (سیومتري symetrisch)

پ) $a \sim b$ او $b \sim c$ څخه ($\Leftrightarrow$) $a \sim c$ لاس ته راځي . (ترانزیتیو transitiv)

۲ . ۲ . ۷ بیلګه:

الف) مساوات یا برابرون « = » د هر ډیري A لپاره یو ورته والې اړیکې Äquivalenzrelation دي.

ب) د $a, b \in Z$ لپاره $a \sim b$ ټیك هلته باور لري، که 2 د ګڼ $a - b$ پرویشونې وي.

ایکویوالنځ اړیکې په کلکه د دې سره تړاو لري، چې یو ډیری

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو بل سره په پردیو ټولګي ډیریو ویشي. دوه ډیري یو بل سره پردي بلل کیږي، که دوي ګډ کوم توکی ونه لري یانی غوڅي يي تشډيرى وي.

غواړم، چې دا ټولګیویشنه داسی لړغوندې روښانه وځیړم، که څه هم زیاتو لوستنکو ته به ستړیکیدونکي وي، مګر لږ پوهوړ به شي. که چیرې طبیعي ګڼونه په ۵ وویشو نو دلته پنځه ټولګیویشنی لاس ته راځي، چې ویشپردي دي: هغه ټولګی، چې 1 ولري او ټول $1 + n5$, ... , $1 + 25$, $1 + 5$ ، دوم هغه ټولګی، چې ۲ ولري او ورسره تر $2 + n5$ دریم: هغه ټولګی، چې 3 ولري او ټول ورسره $3 + n5$. څلورم هغه ټولګی، چې ۴ ولري او ټول ورسره $4 + n5$. پنځم هغه ټولګی، چې 5 او ټول ورسره $5 + n5$. چې دا په 0 سره هم ښوولی شو، چې نور ورسره ټول $0 + n5$ ولري. دا ډول شمرنی بیا د ګڼونتیوري دنده ده، چې په همغه ډول کتابونو کي لوستل کیږي. هلته د کونګرو- اینځ اړیکو لاندې لوستل کیږي، چې زه یي دلته په لیك دود هم نورې خبرې نه کوم. په دې کی دې ګران لوستونکی یو پوره پام وځغلوي او ټولګی ویشنه او ایکوالنځ اړیکي دې پخپله نوري هم روښانه کړي، چې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولگيويشنه په همدې وخت کي ايکويوالنځ اړيکی هم جوړوي،

دا په دې مانا چی د ايکويوالنځ اړيکو او ټولگی ويشنی ترمنځ راگرځيدونکی يواځنی اړيکي موجود دي. دا په دې مانا چی د اکويوالنځ اړيکو سره يو يواځنی تنظيم راکړ شوی او دا بيا په څټ کيدونکی هم دی.

که R په A کی يو ايکويوالنځ اړيکه وي ، نو A / R د فاکتورډيري په نامه بلل کيږي نسبت و ايکويوالنځ اړيکوR ته. هغه ځيرونه چی د A او A / R ترمنځ پرته ده د طبيعي ځيرونی په نامه بلل کيږي.

لنډ: ويلی شو، چی ټولگي ويشنه او ايکويوالنځ اړيکی يو له بل څخه لاس ته راځی. مونږ دا شمير پوهنيز په لاندې توگه تعريفوو:

۲ . ۲ . ۸ تعريف: که ~ د ډيري A ورته والی اړيکي وي، نو د توکی $a \in A$ ورته والی ټولگی يانی کلاسی يا صنف [a] په لاندې توگه ورکړ شوی دی.

$$[a]=\{ b \in A \mid a \sim b \}$$

د ورته والی ټولگي [a] هر توکی b د ټولگي [a] نماينده

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بلل کیږي.

۲ . ۲ . ۱۱ مرستندوي جمله: که ~ د ډیري A ورته – والی اړیکي وي، نو د توکو $a, b \in A$ لپاره لاندې وینا وې جوړه برابرارزښته یا جوړه مساوي ارزښته دي

(a) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

(b) $a \sim b$

(c) $[a] = [b]$

اوبی (حل): که $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ وي، نو یو $c \in A$ موجود دی د $a \sim c$ او $b \sim c$ سره. د ~ سیومتري او ترانز– یتیویتي له امله لاس ته راځي $a \sim b$. له دې امله (b) د (a) یوه لاس ته راوړنه ده یا تعقیب دی. اوس باور لري $a \sim b$. له دېامله نو $x \in [a]$ د $x \sim a$ سره برابرارز– ښته دی، او همداسی د $x \sim b$ سره. نو $[a] = [b]$ دی، او (c) له (b) څخه لاس ته راځي.
په پوره باور (a) له (c) څخه لاس ته راځي.

زیات موخور یا هدفمند دی، که یو ډیریسیستم S د یوه په نامه ایندکشنډیري یا پیژندډیري A په مرسته په نخښه کړو یا روښانه کړو. د لته A یو (پاي یا ناپای) ناتش

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډیری دی، او هر ایندکس یا پیژندنخښی $\alpha \in A$ یواځنی یو ډیری A له S څخه داسی ترتیب شوی دی، چی باور لري: $S = \{ A_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

۲ . ۲ . ۱۲ تعریف : د یوه ډیري $A \neq \emptyset$ د برخډیریو A یو سیستم $\{ A_\alpha \mid \alpha \in A \}$ د د ډیري A یوه ټوټونه (تجزیه) بلل کیږي، که باور ولري:

(a) $A_\alpha \neq \emptyset$ د پاره $\alpha \in A$ د ټولو

(b) $A = \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha$

(c) $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$

د ټولو $\alpha, \beta \in A$ لپاره د $\alpha \neq \beta$ سره

۲ . ۲ . ۱۳ جمله : R دې په ډیري A کی یو ورته اړیکي وي. نو د ورته والي ټولګي نسبت و R ته یو د A ټوټونی دی. په ځېر یو په خوښه د A ټوټونه $\{ A_\alpha \mid \alpha \in A \}$ یواځنی یو ورته والی اړیکي په A ټاکي، د کوم لپاره چی د ټوټونی ډیری A ټیك ورته والي ټولګي دي.

اوبی (حل یا ثبوت): سملاسي د پورته مرستندوي جملی ۲ . ۲ . ۸ او تعریف ۲ . ۲ . ۹ څخه لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۳ نیمنظم یا نیم ترتیب

د بینار اړیکو یو بل غوره یا مهم حالت نیمنظم اړیکې جوړوي. دا هغه اړیکې دي، چې رفلکسیو، ترانزیتیو او انتیسیومتري دي. هغه ډیرې، چې نیمنظم په کې تعریف وي ، نیممنظم یا نیم په ترتیب بلل کیږي. د نیمنظم لپاره دا سومبول $\leq$ کارول کیږي او د ډیري M د توکو a , b لپاره باور لري $a \leq b$ او داسې لوستل کیږي، چې a له b کوچنۍ او یا له b سره مساوي ده. یا a په b کې خوندي ده یا a له b څخه مخ ته ځي. که $a \leq b$ وي او $A \neq b$ وي، نو لیکو $a < b$ او وایو چي a له b څخه کوچنۍ ده، په دې حالت کې a په b کې اصلي خوندې ده. په یوه ډیري Mکې دې نیمنظم تعریف وي. د دې ډیر دوه توکي $a , b \in M$ یو له بل سره انډولوږ دي، که چیرې وي $a \leq b$ او یا $b \geq a$. که له $a \leq b$ څخه $a = b$ لاس ته راشي نو د ساده نیمنظم څخه غږیږو. یو ډیرې، په کوم چې دوه توکې تل یو له بل سره انډولوږ وي، نو دا ډیرې لایني نظم شوې یا منظم یا ترتیب شوې او یا ځنځیر یعنې یو له بل سره تړلې بلل کیږي.

۲ . ۳ . ۱ تعریف: د دوه نیمنظم شوي ډیریو M او 'M

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترمنځ یواځنی او په ځتې څیره کونه f موجود ده یعني

$af = a' \quad , a \in M , a' \in M'$

که له $a \leq b \ , a\, b , \in M$ تل $af \leq bf$ لاس ته را شي او په ځتې، نو f د M او 'M ترمنځ یو ایزومورفیزم ispmorphism بلل کیږي، چی دا به وروسته هم بیا پوره وڅیړل شي او ډیري M' , M پخپله ایزومورف نیممنظم ډیري بلل کیږي.

که یوه نیممنظم ډیری M په یوه نیممنظم ډیري N کی ایزومورف خوندي وي، نو دې ته ایزومورف ځایونه یا خوندیونه وایو، که د M یوه ایزومورفه څیره کونه په 'N د ډیري N برخه ډیري باندې موجود وي او ډیری 'N پخلپه نیممنظم ډیری وي او که 'N په هغه نظم ترتیب وي ، چی له N ورته راپاتی وي.

۲ . ۳ . ۲ جمله:

هر نیمنظم ډیری M د ډیري N ، چی نسبت وخوندیونی ته نیممنظم دی، ټولو لاندیډیریو ډیري 'N سره ایزومورف دی.
په ځانګړي توګه کیدی شي ، چی د ډیري N لپاره پخپله ډیری M ونیول شي یا راوړل شي.
د دې جملی د خوونی څخه تیریږو. په کوروش کی کتل کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه نیمنظم ته په څنګ اړیکی هم نیمنظمی دي.
د ټولو $a' \in M'$, $a \in M$, $af=a'$ لپاره، د $a, b \in M$
سره $a \leq b$ ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته باور لري،
که وي: $af \leq bf$.

۲ . ۴ مینیمال شرطونه

یو د نیممنظم ډیري M توکی a د ډیري مینیمالتوکی بلل کیږي، که په M کی داسی یو توکي x موجود نه وي، د کوم لپاره، چی شرط $x < a$ باور ولري. دا روښانه ده، چی M ډیر مختلف مینیمال توکي لرودی شي او یا هیڅ مینیمال توکي . د بیلګي په توګه ډیری N' د ټولو د ډیري N لاندېډیریو یا برخه ډیریو ډیری یواځنی یو مینیمال توکی لري، داسی په نامه تشډیری . په یوه ډیري کی هر لاندې ډیری یا برخډیری مینیمال توکی دی ، که دا ډیری د یوه توکی جوړ وي. دا کلیمه د یوه ځانګړي نیمتنظیم شوي ډیري ټولګیو لپاره کارول کیږي. د دې ټولګی نیمتنظیم شوي ډیري لاندې یو بل سره ورته یا ایکویوالنت شرطونه پوره کوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۴ . ۱ جمله(مینیمال شرطونه) : هر د یوه نیمتنظیم شوي ډیري M ناتش لاندې ډیری N یو مینیمال توکی (په N کی) لري.

۲ . ۴ . ۲ (د لویدونکی ځنځیر پریکیدنی شرطونه): د نیمتنظیم شوي ډیري M په را غونډه موخه هر لویدونکی ځنځیر

$a_1 > a_2 > a_3 > ... > a_n > ....$

د پایډیرو غړو وروسته پرې کیږي یا ماتیږي یا غوڅیږي. په نورو کلیمو سره ، د توکو د هر لویدونکی ځنځیر

$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_n \geq ....$

سره یو ایندکس یا پیژند نخښه n شته، له کومی چی د دې ډیري ټول توکی برابر دي دا په دې مانا چی د n ورسته $a_n = a_{n+1} = ...$ باور لري

۲ . ۴ . ۳ جمله (ایندکشن شرطونه): د یوې نیمتنظیم شوي ډیري M ټول توکی څه روښانه خویونه E لري. که دا خویونه په ټولو مینمال توکو (که داسی یو توکی موجود وي) موجود وي او که د دې موجودوالی، د ټولو توکو لپاره، چی له توکي a په کره توګه مخ ته ځي، پخپله په دې خویونو a

(c) ketabton.com: The Digital Library

رابندیدی شي یاني دا خویونه ولري.

د دې جملو، چي یو بل ته ورته دي، د ښوونی یا اوبیونی ځخه تیرېږو.

ویناوې چی د ټاکن اکسیوم سره همغه ارزښته دي:

ډیری N دې د یوه ډیري M لاندې ډیری وي. هر (ضرور نه دی چی په N کی خوندې وي) د M د توکی a د کوم لپاره چی شرط $a \geq x$ پوره وي د ټولو $x \in N$ لپاره، د لاندې ډیري پورته بند بلل کیږي یانی دا ډیری په دې توکی سره پورته لور ته بند دی. دا لاندې بند ته یوه دویزه کلیمه. په یوه ورکړ شوي نیمنظم ډیري M کی هره د ټولو ځنځیرونو ډیری د ډیري پوهنی په بنسټ نیمتنظیم ده. د دې ډیري ټول ماکسیمال توکی په طبیعي توګه د M ماکسیمال ځنځیر جوړوي.

یادونه : د دې پورته جملو ښوونه او زیات ورننوتنه په کروش کی کتل کیدی شي. موږ یی نوره رانلږوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . الجبري جوړښتونه

د الجبر په کتابونو کی ډیر وخت دا دلته څیړل شوي
موضوعات له توپیریدونکو یا له بیلو بیلو لارو څخه
څیړل کیږي، ځنی له عمومي الجبر څخه پیل کوي
n–ځایزي عملیي، نښلونی یا کارونی تعریفوي او له
دي څخه بیا ګروپ die Gruppe ، کړی Ring ، تن یا
بدن Körper (engl. Field او په همدي ډول ترونونو
یا ترنو Verbände او بول الجبر boolische Algebra
ته راځی. زه دا لار غوره ګنم، چی لمړی له موږ ورسره
بلدو کاروونو یا عملیو څخه پیل وکړم او له دي لاري
بیا الجبر ته راشم، او بیا په لنډ ډول د الجبر له لاري دا
موږ ورسره بلدي کلیمي لنډي تعریف کړم.

د الجبر د مختلفو ځانګو لپاره بنسټیزه کلیمه، چی ډیره
تر څیړنی لاندي نیول شوي ده هغه د الجبري اپریشن یا
الجبري عملیي او یا همدا ډول د الجبري کارونی، الجبري
نښلوني یا الجبري ګنډني کلیمه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ ځانونه په یوه دوئیزې کارونی په زیاتون یا ځل رابندوو یا محدودوو. دا دوئیزې کارونی یا عملیې، په لرې موخه، هغه عملي دي، چی د یوه ډیري G ټاکلي منظم د توکو جوړه (a,b) د دې ډیري په یوه بل توکی c تنظیم یا څیره کړي(لکه د G د ټاکلو غړو مربع، یعني دا د لاندې خویونو سره یوه څیرونه ده:

$$G \times G \longrightarrow G$$

دا په دې مانا چی د ټولو $(a,b) \in G\times G$ لپاره یو c د G څخه، یعني $c \in G$ موجود ده، د کومو لپاره چی باور لري که دا نښلونه ځل وي

$$a \,.\, b \longrightarrow c$$

په دې ټولیزه توګه په یوه ډیري کی د بینار یا دوه- ځائیز عملیې کلیمی تعریف، په یوه ډیري کی د یوه ترنار ریلیشن ternäre Relation یا درېځایزو اړیکو سره په همغه یا مساوي مانا دی.

یادونه: اپریشن die Operation، عملیه ، کارونه او یا نښلونه، ګنډنه، او همدارنګه په بلواکو کی کمپوز- یشن die Komposition یا څنګ په څنګ ایښوونه یا بهتره ځنځیرونه تل همغه مانا لري، چی ما کله کله

(c) ketabton.com: The Digital Library

تړنه هم کارولی ده. د ډيرو نومونو کارونه، کوم چی همغه مانا ولري، تاوان نه لري. د شميرپوهني ژبه هم بايد پوره پراخه وي او په دې باور لرو چی کومه اشتباه په کي نه رامنځ ته کيږي.

موږ دلته د نمونی په څير يواځی يويزې کارونی يا عمليي په ګوته کوو. او ور پسی بيا نور سملاسی خپل اصلی موخه تر مخه نيسو. دا يويزې عمليي هغه عملي دې، چی د کارولو سره يی د ډيري توکي تغير نه خوري، لکه د صفر سره طبيعی ګڼونو N_0 توکو سره، په زياتون کی چی هر توکي ته د صفر توکی ورزياتونه پخپله همغه توکی دی،

$$a + 0 = a \quad \text{لپاره} \quad a \in N_0 \quad \text{د ټولو}$$

او يا په ځل کی ، چی د طبيعي ګڼډيري N هر توکي سره 1 ځل شي، يعني

$$a \,.\, 1 = a \quad \text{لپاره} \quad a \in N \quad \text{د ټولو}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۱ گروپ Gruppe:

که له یوې خوا د ټولګټونو، ریشنلګټونو یا رییلګټونو زیاتون په پام کې ونیسو او له بلې خوا ریشنل یارییلګټونو د صفر توپیرې یا د صفر سره نامساوي توکو څل په پام کې ونیسو، نو دا میندلی شو، چې دواړه ننبلونعملیې یا ننبلو-نکاروني د همغه یو بل سره په یوغږ شمیرقوانینو لاندې دي. د بیلګې په توګه باور لري:

$$(a+b)+c=a+(b+c) \quad \text{او} \quad (a.b).c=a.(b.c)$$

برسیره پر دې راویستلي یا استثنایي ګټونه موجود دي، دا په نامه 0 همداسی 1 ، کوم چی دې دوه ترنو ته خانونه ناپیلی یا بې تاثیره نیسي. یعني:

$$0+a=a \quad \text{او} \quad 1.a=a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بالاخره باور لري

$$(-a) + a = 0 \quad \text{او} \quad (1/a).a = 1$$

دا په دې مانا، چې هر ګڼ a ته یو ګڼ á موجود دی (دا په نامه a- همداسی 1 / a)، چې د هغو زیاتون یا همداسی د هغو ځل یا ضرب د همغی یعنی زیاتون همداسی ځل نبنلونی یا نبنلونعمليي له لارې ناپیلی یا بی تاثیره توکی ورکوي.

دا چې دا قاعدې ګڼونشمیرنه په پراخه پیمانه په واك کی لري او په ډیرو نورو حالتونو کی هم رامنځ ته کیږي، دا راته نزدې ده، چې دا د ځانګړي طبیعیت، دشمیرنی او د همغو تړنعملیو څخه خپلواك وڅیرو. په دې ذهني راوړون دود سره مو شمیرقاعدې د هر څه له مخه مخ ته پرتې دي. نه هغه څه، د کومو سره چې شمیرنه کیږي غوره دي، بلکه دا غوره دې، چې څنګه شمیرنه کیږي. په یواځني ډول د مخه نیول کیږي، چې د یوه ورکړ شوي ډیري غړو لپاره داسی یوه نبنلونه یا تړنه یا عملیه تعریف ده، دکومی له مخی، چې هره منظمه جوړه (a,b) د هغه ډیري د توکو بیرته د هغه ډیري توکی باندې تنظیم شي یا څیره شي او دې پورته

(c) ketabton.com: The Digital Library

ویلشوو قوانینو لاندې پرتی دي یا په بل عبارت دا پورته قوانین په کی باور لري.
دا نښلونه د یوه ناپیلی سومبول ° سره ښایو.

یادونه : دا سومبول له خپل ځاي جګ لیکل شوی دی، خو زما بله چاره نه وه. د دوه ګڼونو نښلونو ټیك منځ کی که ولیکل شی ښه به وي.

۳ . ۱ . ۱ تعریف : یو ګروپ دیوه ډیري G او یوې ترني یا عملیي ° څخه جوړ دی، دکومی نښلونی سره چی د دې ډیري G د توکو هره منظمه جوړه (a,b) یواځنی یو د $a^\circ b$ سره په نخښه شوی د G توکی باندې داسی تنظیم شي، چی دا لاندې اکسیومونه پوره کړي:

اکسیوم ۱ – اسو څیاتیو قانوباور لري

د ټولو $a,b,c \in G$ لپاره $(a^\circ b)^\circ c = a^\circ (b^\circ c)$

اکسیوم ۲ – یو ناپییلی توکي $e \in G$ شته، د ° تړاو سره ، د کوم لپاره چی باور لري

$$a^\circ e = e^\circ a = a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسیوم ۳ – د هر توکی a لپاره یو په ځتې توکی á شته، د کوم لپاره چي لرو:

$$a \circ á = á \circ a = e$$

د G داسی یو توکی ناپیلی توکی بلل کیږي

یو ګروپ کموتاتیو یا ابلي ګروپ abelsche Gruppe بلل کیږي، که پر دې پورته اکسیومونو برسیره، دا لاندې اکسیوم ۴ هم پوره کړي:

اکسیوم ۴ – کوموتاتیو قانون:

د ټولو $a, b \in G$ لپاره $a \circ b = b \circ a$

که ګروپ G پای ډیر توکی ولري ، نو د G د توکو ګڼون یا تعداد |G| د G نظم بلل کیږي.

د ګروپ ټاکنټونو پورې د ډیري G ترځنګ د ګروپټړنه ° داسی په نامه اپریشن، نښلونه یا کارونه یا عملیه هم اړه لري یا تعلق لري.
یو ګروپ نو په دې توګه د یوې جوړې (G , °) سره په نخښه کول کیږي. دا چی ګروپټړنه ډیر واره په دې اړوند

(c) ketabton.com: The Digital Library

کره ټاکلی ده، نو په داسی حالتونوکی ددې جوړې په ځاي یواځی G لیکل کیږي. ګروپټرنه تر یوې اندازې پورې د ګروپځل یا ګروپضرب سره هم نومول کیږي، نو په دې توګه دا توکی $a^\circ b$ د توکو a او b د ځل په نامه هم بلل کیږي. په یوه ناابل - یا ناکموتاتیوګروپ کی دې د توکو ترتیب یا لړیپرلپسی ته هم پام وي، ځکه چی په یوه ناابل ګروپ کی په ټولیزه توګه $a^\circ b$ له $b^\circ a$ سره توپیر لري .

اکسیوم۱ را په ګوته کوي، چی په ډیرواره ځلولو کی په نوکانو کی بندونه یا راګیرونه پورې اړ تیا نه څرګندیږي. له دې امله کیدی شی ، چی له نوکانو اینبوولو څخه بیخی تیریدنه وشي او د بیلګي په توګه د $a^\circ (b^\circ c)$ لپاره په ساده توګه لیکو

$$a^\circ b^\circ c$$

۳ . ۱ . ۲ بیلګی :

اول - د ټولو ټولګنونوډیری Z د ورسره بلد زیاتون سره، چی د کروپټرنی په څیر یی نیسو، یو ابلګروپ $(Z; +)$ جوړوي. دلته بیا له زیاتونګروپ څخه غبرېږو، په همدې توګه د ریشنلګنونو ډیری او داسی نور. په دې ټولو حالتونو کي د اکسیوم ۱ لپاره د e لپاره 0 او د a په څټ توکی á

(c) ketabton.com: The Digital Library

د a- سره په نخښه کوو.

دوم – په ځمکګچ یا هندسه کی : د ټولو کونګروایینځ ځیرونو (څرخون، ځایبدلون، یا راکښنه ، او اینونه یا هندارونه) ګروپونه جوړوي(ما په دې اړه یوه د هندسی برخه هم په یوه کتاب کی راوړې، چی دا کتاب څخه به تر مخه چاپ شوي وي، دا کلیمي که نا بلدې وې نو بیا دې هلته وکتل شي).

دریم : د ټولو ریشنلګڼونو ډیری Q^* او د ټولو رییلګڼونو ډیري R^* توکي، چی د صفر سره، نسبت و ځل یا ضرب ته، نابرابر یا نامساوي وي، یو ابلګروپ جوړوي، دا د ډیریو Q^* او R^* ځلونکی ګروپ یا ضربګروپ بلل کیږي. په دې ګروپونو کی e د 1 او á د ماتګڼ $1/a$ په ځیر لیکل کیږي.

ځلورم: M دې یو په خوښه ناتش ډیری وي ، او S_M دې د M د ټولو بییکتیو ځیرونو یا بیکشنونو ډیری وي. د هر دوه ځیرونو $f,g \in S_M$ لپاره $f \circ g$ د دې دواړو ځیرونو یو په بل پسی راوړنو له لارې ټاکل شوی ځل دی. د هر درې ځیرونو f,g,h او هر $x \in M$ لپاره دا لاندې باور لري

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(hx) = f(g(h(x)))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)));$$

دا په دې مانا چې اکسیوم ۱ پوره دی. که د e لپاره د M کتمتې څیرونه id وټاکل شي، نو اکسیوم ۲ باور لري. بالاخره اکسیوم ۳ باور لري، که د ورکړ شوي $f \in S_M$ لپاره د څیرونې f'، هغه f ته په څټ څیرونه f^{-1} وټاکل شي. ډیری S_M د یو په بل پسی د څیرونو ځلونی یا ضربوني له امله یو ګروپ جوړوي، چې د ډیري M سیو-متري ګروپ بلل کیږي.

که په ځانګړي توکه ډیری M ډیری $\{1,2,3,...,n\}$ وي، نو دا اړونده سیومتري ګروپ څیفرونه یا ګڼونه $1, 2, 3, ..., n$ په ساده توګه د S_n سره په نخښه کوو. هره څیرونه $f \in S_n$ د ګڼونو $1,2,3,...,n$ پرموتیشن یا بدلون دی. که $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, ..., $f(n) = a_n$ باور ولري، نو f د څیره ګڼونو پرلپسی لړی $a_1, a_2, ..., a_n$ یواځنی ټاکلی ده. موږ لیکو $f = (a_1,a_2,...,a_n)$، که د بیلګي په توګه باور ولري $n = 3$ او $f = (2,3,1)$, $g = (3,2,1)$ نو لاندې ځلونه یا ضربونه لاس ته راځي

$$f \circ g = (1,3,2) \quad \text{او} \quad g \circ f = (2,1,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا بيلګه ښايي، چې S_n د $n = 3$ لپاره ابل ګروپ يا کموتاتيو ګروپ نه دی.

۳ . ۱ . ۳ يادونه: دا د صفر سره نامساوي ټولګڼونه ، نسبت و ځلونی يا ضرب ته ګروپ نه جوړوي، ځکه چې د بيلګي په توګه و 2 ته کوم ټول ګڼ $\acute{a}$ وجود نه لري، د کوم لپاره، چې $2.\acute{a} = 1$ باور ولري.

د ګروپ د اکسيومونو څخه کيدی شي ، چې په لاندې کی يو څو ساده «لاس ته راوړنی » رابيلي کړو. په لاندې کی دې G تل يو ګروپ وي

۳ . ۱ . ۴ مرستندوي جمله: د هر توکی $e \in G$ لپاره، چی اکسيومونه۱ ، ۲ پوره کوي دا هم باور لري $a^\circ e = a$ د ټولو $a \in G$ لپاره. له $\acute{a}^\circ a=e$ څخه $a^\circ \acute{a} = e$ لاس ته راځي.

اوبی يا ثبوت: لمړی دوهمه غوښتنه ښوول کيږي: و a' ته د اکسيوم۳ له مخی يو $a \in G$ د $a'.a = e$ سره موجود دی. د اکسيومونو۱ او ۲ په پام کی لرلو سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} a^\circ a' &= e^\circ(a^\circ a') = (a''^\circ a')^\circ(a^\circ a') = a''^\circ((a'^\circ a)^\circ a') \\ &= a''^\circ(e^\circ a') = a''^\circ a' = e \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې څخه اوس لمړی غوښتنه لاس ته راځی

$$a^\circ e = a^\circ (a' \circ a) = (a^\circ a')^\circ a = e^\circ a = a \quad *$$

۳ . ۱ . ۵ مرستندوي **جمله:** ټیك یو توکی $e \in G$ موجود دی، چی هغه په اکسیوم ۲ او اکسیوم ۳ کی غوښتل کیږي. همدا اوس له $x^\circ a = a$ څخه د ټولو $a \in G$ لپاره لاس ته راځي: $x = e$.

اوبی یا ثبوت: توکی e^* دې هم برابرون $e^* \circ a = a$ پوره کړي، د ټولو $a \in G$ لپاره. نو بیا په ځانګړي توګه د ۳ . ۱ . ۴ مرستندوي جملې له امله باور لري

$$e^* = e^{*\circ}e = e$$

دا په دې مانا چي e یواځنی ټاکلی دی. که بیا هم وریسی باور ولري $x^\circ a = a$ د یوه کره ټاکلی توکي $a \in G$ لپاره، نو د اکسیوم ۳ له امله یو $a' \in G$ موجود دی د $a' \circ a = e$ سره، او د ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي:

$$x = x^\circ e = x^\circ (a^\circ a') = (x^\circ a) \circ a' = a^\circ a' = e \quad *$$

دا په دې توګه د اکسیومونو سره یواځنی ټاکلی ناپیلی یا بی

(c) ketabton.com: The Digital Library

تاثیره د ګروپ G توکی e د ګروپG «یوی توکی» بلل کیږي.
په زیاتونډوله لیکلي ابلګروپ G کي ناپیلی توکی e د G
«صفرتوکی» 0 بلل کیږي.

۳ . ۱ . ۶ مرستندوي جمله : په اکسیوم ۳ کي a' د a
له لارې یاد a سره یواځنی ټاکلی ده .

اوبی یا ثبوت: د $a' \circ a = e$ تر څنګ دې $a^* \circ a = e$ هم باور
ولري. پرتله ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي

$$a^* = a^* \circ e = a^* \circ (a \circ a') = (a^* \circ a) \circ a' = e \circ a' = a'$$

دا توکی a' د a « په څټ توکی» بلل کیږي او د دې لپاره
په ټولیزه توګه a^{-1} لیکل کیږي. که په ځانګړي توګه د ګروپ–
عملیي یا د ګروپتړنی زیاتون ډوله ولیکل شي
پرتله ۳ . ۱ ۲ الف، نو ناپیلی توکی په 0 سره لیکل کیږي او
د a په څټتوکی د -a سره لیکل کیږي.

۳ . ۱ . ۷ مرستندوي جمله: $a = (a^{-1})^{-1}$
او $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

اوبی: دا په ۱ . ۳ . ۴ کی ښوول شوي برابرون $a \circ a' = e$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له مخې لرو، چې a و a^{-1} ته په څټ توکی دی، چې په دې توګه لمړی غوښتنه باور لري. دومه له لاندې څخه لاس ته راځي

$$(b^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ b) = b^{-1} \circ ((a^{-1} \circ a) \circ b)$$
$$= b^{-1} \circ (e \circ b) = b^{-1} \circ b = e \qquad *$$

۳ . ۱ . ۸ مرستندوي جمله: په یوه ګروپ G کی برابرون $x \circ a = b$ او $a \circ y = b$ په ورکړشوو توکو $a,b \in G$ سره یواځنی ټاکلي حلونه یا اوبیونی $x,y \in G$ لري.

اوبی یا حل : که $x \in G$ د لمړي برابرون اوبی وي، یعني که باور ولري $x \circ a = b$ نو لاس ته راځي:

$$x = x \circ e = x \circ a \circ a = b \circ a$$

دا په دې مانا، چی x د a او b سره یواځنی ټاکلی . په څپ د

$$(b \circ a) \circ a = b \circ (a \circ a) b \circ e = b$$

له امله توکی $x = b \circ a$ په ریښتونی یو اوبی یا حل دی.
په همدې توګه دوهم برابرون هم پاي کولی شو. *

په لاندې کی غواړم، چي داپورته د ګروپ تعریف لږ وغزوم

(c) ketabton.com: The Digital Library

او په دې توګه ګروپوئید او نیمګروپ تعریف کړم. دا کار په زیاتو ادبیاتو کی لمړی سر ته رسیږي، خو داسی تعریفونه یی هم په پوهیدلو کی ستونځي نه رامنځ ته کوي او ما هم غوښتل، چی موږ لمړی د ګروپ کلیمه باندې وپوهیږو، چی بنسټیزه ده.

۳ . ۱ . ۹ **تعریف** : یو ډیری G ، چی نسبت و یوه اپریشن یا ګنډنی یا عملي ° ، چی موږ یی دلته د ځل عملیي « . » په څیر ښایو، ته رابند وي، نو دې ډیري ته ګروپویید وایو، یاني که د هرې جوړي (a,b) د a ,b ∈ G لپاره یو توکی c ∈ G موجود وي ، د کوم لپاره چي باور ولري a.b = c لیکنه یی په لاندې توګه ده(G , .) .

دا د ګروپوئید کلیمه لږ را تنګوو او نیمګروپ تعریفوو.

۳ . ۱ . ۱۰ **تعریف** . هغه ګروپوئید G، په کوم کي، چی پورته د ګروپ اکسیوم ۱ باور ولري یا نی ځل یی اسو-ځیاتیو وي، نیمګروپ بلل کیږي، چی په همغه پورته توګه د اوس لپاره نخښوڼ کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چی نیمگروپ همغه گروپ دی، دا لاندې جمله یې روښانه را په گوته کوي

۳ . ۱ . ۱۱ جمله : یو نیمگروپ G هلته او هلته یو گروپ G دی، که په G کې کم له کمه یو ښی یویتوکی e موجودوي، چی لاندې شرطونه پوره کړي

د ټولو $a \in G$ لپاره $ae = a$

او دا توکی e داسی وټاکل شي، چی د هر $a \in G$ لپاره کم له کمه یو ښی په څټ توکي $a \in G$ موجود وي، چی غوښتنی

$$a \cdot a^{-1} = e$$

پوره کړي.

اوبی یا حل : که دا پورته ورکړ شوې غوښتنی پوره وي، خو دا مو وښوول، چی گروپ جوړوي. اوس دې یو نیمگروپ G راکړ شوی وي، چی پورته نیونی پوره کوي. دا غواړو وښایو، چی e په G کی یو کینړ یویتوکي هم دی. که د a^{-1} سره د a ښی په څټ توکی وښایو ، نولاس ته راځي

$$eaa^{-1} = ee = e = aa^{-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د برابرون دواړه خواوې د يوه و a ته په ښۍ توکي سره ځل کړو او د نيمګروپ د ځل يواځنوالي قوانين وکاروو يا استعمال کړو، نو لاس ته راځي

$$eae = ae$$

له کوم ځخه چې د حلونکی يا اوبيوونکی اړيکی $ea = a$ لاس ته راځي.

بالاخره د G ګين يويتوکي e' او ښی يويتوکي e'' رانيسو، نو د مخ ته تيرو جملو ثبوت ځخه دا اوبي يا حل $e'' = e'$ لاس ته راځي، چی په دې توګه د G يوي(يويتوکي) e موجوديت او يواځنتوب وښوول شو.

بيا دې a^{-1} د يوه توکی $a \in G$ ښی په ښۍ توکی وي.
که برابرون $aa^{-1} = e$ له کيڼ لور د a^{-1} سره ځل کړو، نو لاس ته راځي

$$a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$$

د a د ښي په ښۍ توکي د اخرني برابرون ځلولو يا ضربولو ځخه لاندې نتيجی ته راځو

$$a^{-1}ae = e$$

له کوم، چی $a^{-1}a = e$ لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا توکی a^{-1} ته له دې امله يو کيڼ په څټ توکی هم دی.
لکه د مخه تيرې جمله د د ثبوت په توګه، کيی شي ساده وښوول شي، چی د a هر ښی په څټتوکي د کيڼ په څټتو کی سره پريوځي يا هغي سره ورته دی.
په دې توګه په G کي د هر توکی a لپاره د هغه توکی په څټتوکي موجوديت په يواځنی توکه تضمين دی.
د جملي د ثبوت د پوره کيدو لپاره دې په ګوته شوی وي، چي توکي

$x = a^{-1}b$ او $y = ba^{-1}$

د برابرون $ax = b$ او $ya = b$ حل ښايي. دا حلونه يواځنی دي، ځکه، چی $ax = xa$ دی، نو له کيڼ څخه يی د a' سره ځلوو او $x = x$ لاس ته راځي. پای يا *

د ابلګروپ د څيړنی لپاره، د ځل عمليي په ځاي د زياتون ګنډنه يا عمليه په کار اچوو، چی ناپيلی توکی يی 0 دی او هر توکی a ته په څټ توکی يی د a- سره په نخښه کوو.
دلته هم همغه پورته جمله کاروول کيږي، خو د ښی يويتوکي لپاره 0 صفر يوي توکی دی او ښی په څټ يی a- دی. د په څټ عمليي يواځنتوب

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه نیمګروپ بیلګه چې ګروپ نه وي.
که د طبیعي ګڼونوډیری N پام کې ولرو، نو دا ډیری د زیاتونعملیي ته نیمګروپ جوړوي، خو دا ګروپ نه دی، ځکه، چې په دې ډیري کې، په هر حالت کې کمون نه دی تعریف.

که نسبت و ځل ته د ګڼونو څخه ګروپ جوړوو، نو باید دا مو پوره په پام کې وي، چې دا ګڼونډیری د صفر توکی ونه لري، ځکه چې په صفر پرویشنه نه ده تعریف.

۳ . ۲ بدن یا تن او کړی

Körper und Ring (Field and ring)

په داسې حال کې چې د ګروپ اپریشنونه یا ګروپ عملیي یواځې له یوه ترونعملیي څخه منځ ته راځي، اوس دوه عملیي څنګ په څنګ راوړل کیږي، چې په ورسره د ګڼو-نشمیرني بلد ډول، چې زیاتون «+ » او ځل یا ضرب « . » سره ښوولکیږي، تکیه کوو. که له ریشنل ګڼونو څخه مخ ته ولاړ شو، نو د هلته باوري شمیر قاعدو څخه

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته ذهنیت، لکه په ګروپونو کی، نوي الجبري جوړ-
ښتونه لاس ته راځي.

۳ . ۲ . ۱ **تعریف** : یو بدن یا تن د یوه ډیري F او دوه عملیو + او . څخه جوړدی، چی د F د توکوهره جوړه (a,b) د F په یوه یواځنی توکی a+b همداسی a.b باندې داسی څیره کړي، چی لاندې باوري کړي یا لاندې په کی باور ولري:

ډیری F دې و + ته یو ابل ګروپ وي، دا په دې مانا، چی لاندې باوري کیږي

۱ – د زیاتون اسوځاتیو قانون

. د ټولو $a,b,c \in F$ دلپاره $(a+b)+c = a+(b+c)$

۲ – د زیاتون کموتاتیو قانون

د ټولو $a,b \in F$ لپاره $a+b = b + a$

۳ – په F کی یو صفر توکی 0 شته، دا په دې مانا چی $a = 0+a = a+0$ باور لري د ټولو $a \in F$ لپاره.

۴ – هر توکی $a \in F$ ته یو توکی $-a$ په F کی موجود

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی د $(-a)+a=0$ سره ، د کوم سره چي 0 په F کی صفر توکی دی

د F توکو د ځل یا ضرب . لپاره باور لري

۵ - اسوځیاتیو قانون

د ټولو $a,b,c \in F$ لپاره $(a.b).c = a.(b.c)$

۶ - په F کی یو یویتوکی 1 شته ، دا په دې مانا ،
چی $1.a = a.1 = 1$ د ټولو $a \in F$ لپاره .

۷ - هر توکی $a \in F$ ته د $a \neq 0$ سره ، یو توکی a'
د $a.a' = 1$ سره موجود دی ، چیرته چی 1 د F یوی
توکی دی.

۸ - دیستریبوتیو قانون

$a.(b+c) = a.b + a.c$ او $(b+c).a = b.a + c.a$
د ټولو $a,b,c \in F$ لپاره

۹ - $1 \neq 0$

که یوائې د اکیسیومونو ۱ - ۵ او ۸ باوریتوب وغوښتل شي، نو F ☗ کړی بللل کیږي.
که برسیره پر دې اکسیوم ۱۰ باور ولري یعنی

۱۰ - د ځل کموتاتیو قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو $a,b \in F$ لپاره $a . b = b.a$

نو F يو کموتاتيو تن يا کموتاتيو بدن او همداسی کموتاتيوکړی بلل کيږي

لکه څنګه په ګروپ کی په همدې توګه يوه کړی يا تن هم د $(F.,+,.)$ په ځاي د F سره په نخښه کوو. د ځل لپاره سومبول «.» نه ليکل کيږي او د دې لپاره لنډ ليکو ab . ډير واره د «بدن» يا «تن » لاندې کموتاتيو بدنونه پوهيږو، په داسی حال کي، چی ناکموتاتيو بدنونه ، «کاږه بدنونه» بلل کيږي. دلته به موږ تل کموتاتيتو بدنونه تر څيړنی لاندې نيولي وي.

د اکسيوم ۱ او اکيسوم ۵ له امله کيدی شي، چی نوکان نور هم پرېښوول شي يا تيريدنه ترې وشي يا ونه ليکل شي. د نوکانو د نه ليکلو لپاره يو بل د مخه پيژندل شوی قرارداد يا پريکړې يو قاعده هم شته، چی د ټکو لکه ځل عمليه د کرښو لکه زياتون عملي څخه د مخه اجرا کيږي.
لکه د $(ab)+c$ په ساده توکه $ab+c$ ليکل کيږي. دا ساده-والی همدا اوس د اکسيوم ۸ په فرمولولو کی وکارول شو.
د بدن F يا همداسی د کړی R ناپيلی توکی وزياتون ته صفر-

(c) ketabton.com: The Digital Library

توکی دی او یا لنډ صفر دی. دا په ځت توکي a- و a ته منفی توکی بلل کیږي. د b+(-a) په ځای لنډ لیکوه b - a او دا کارونه د a او b کمون بولو.

باور لري $a+(b-a) = b$ او $b - a$ د ۳ . ۱ . ۸ له مخی د برابرون $a + x = b$ یواځني حل دی. د ۳ . ۱ . ۷ له امله بالاخره باور لري $-(-a) = a$ او $-(a+b)=-a+(-b) =-a-b$.

دا د $F^*=F\setminus\{0\}$ ځلګروپ ناپيلي توکی 1 د بدن یا تن F یویتوګي یا ساده یوی بلل کیږي. کړی دې ته ضرورت نه لري چی یویتوکي ولري» که یویتوکی موجود وي نو یواځنی به ټاکلي وي.

۳ . ۲ . ۲ د بدنونو لپاره بیلګي

الف – د ریشنلګڼونو ډیری Q او همداسی د رییل ګڼونو ډیري R په ورسره بلدو ترنو یا عملیو له لارې یعنی زیاتون او ځل له لارې هر یوکموتاتیو بدن یا تن جوړوي،

ب – د ټولو کمپلکسګڼونوډیری C هم یو کموتاتیو بدن یا تن جوړوي. په روښانه توګه یا ډول یو کملکس ګڼ a دا لاندې بڼه لري $a = a_1 + a_2 i$ د رییل ګڼونو a_1 , a_2 سره او

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایماگیناریوون i سره، د کوم لپاره چی $i^2 = -1$ باور لري.
دا a_1 د a رییل برخه او a_2 د a ایماگینار برخه بلل کیږي.
په نخښونه : $a_1 = Re(a)$ او $a_2 = Im(a)$
که $b = b_1 + b_2 i$ یو دوم کمپلکس ګڼ وي، نو زیاتون، کمون او ځل یی په څرګنده توګه په لاندې ډول روښانه دي یا تشریح شوي دي:

$$a \pm b = (a_1 \pm b_1) \pm (a_2 + b_2)i,$$
$$a\,b = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\,i$$

دا و کمپلکس ګڼ $a = a + ai$ ته کوجوګیري کمپلکس ګڼ $\bar{a}$ د $\bar{a} = a_1 - a_2 i$ سره تعریف دی . په دې پسی ترلي لاس ته راځي

$$\overline{a \pm b} = \bar{a} \pm \bar{b}, \quad \overline{ab} = \bar{a} \,.\, b, \quad \bar{\bar{a}} = a,$$
$$a + \bar{a} = 2Re(a) \quad , \quad a - \bar{a} = 2iIm(a)$$

د یوه په خوښه کمپلکسګڼ a لپاره باور لري

$$a\bar{a} = (Re(a))^2 + (Im(a))^2$$

له دې امله $a\bar{a}$ تل یو نامنفی رییلګڼ دی، او $a\bar{a} = 0$ د $a = 0$ سره برابر ارزښته دی.
که $a \neq 0$ یو کمپلکسګڼ وي، نو باور لري $a\bar{a} \neq 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $a\bar{a} \in C$. $a = \bar{a} / a\bar{a}$. د کمپلکس ګڼ ارزښت $|a|$ ،
چی $a = a_1 + a_2i$ د نامنفی رییلګڼونو ریښه ارزښت
دی $a\bar{a} = a_1^2 + a_2^2$ دا په دې مانا، چې

$$| a | = + \sqrt{a^2 + a^2} .$$

رییلګڼونه ځانګړي کمپلکس ګڼونه دي، په نامه هغه ګڼونه،
چی ایماګینار یی ورکیږي: کمپلکسګڼ ټیك هلته یا هلته او
هلته یو رییلګڼ دی، که $a = \bar{a}$ وي.

۳ . ۲ . ۳ د کړیو لپاره بیلګی:

الف –د ټولو ټولګڼون ډیری Z یوه‌کموتاتیو کړی‌ده، د‌یوي
سره.* مګر Z بدن نه دی، ځکه، چی د بیلګي په توګه ۲
په Z کی نسبت و ځل ته په ځتې نه لري. یعنی 1 / 2 په Z
و 2 ته په ځتې توکی نه دی.

ب – جوړه ټولګڼونه $R = 2Z$ ددي لپاره بیلګه ده، چی
صفرتوکی نه لري.

پ – F دې یو کموتاتیو تن وي. یوه د لاندې بڼي افاده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...+a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

د $a_i \in F$, $i = 0,1,2,...,n-1,n$ سره پولینوم بلل کیږي د
یوې نامعلومې x سره او چې ځلووني یا ضریبونه او یا
کوایفځینتونه یي له F وي. که $a \neq 0$ وي، نو n د
پولینوم $f(x)$ درجه بلل کیږي.
نخښونه یې: ګراد $\text{Grad } f = n$
که حتی $a = 1$ وي، نو $f(x)$ یو نورمي شوی پولینوم
normiertes Polynom بلل کیږي. د صفر درجې
پولینومونه ثابتې دي د $a \in F$ $\neq 0$ سره. صفر پولینوم
$0(n=0,a=0)$ سره درجه نه ترتیب یا تنظیم کیږي.
د ټولو پولینومونو $f(x)$ ډیری، چې ځلووني یې له بدن F
څخه وي د $F[x]$ سره په نخښونو یا په نخښنه کوو. په $F[x]$
باندې زیاتون (په ورکړشوی حالتکې د صفرځلوونو سره)
او یو ځل یا ضرب په دې لاندې ډول تشریح شوي

$$(a_0 + a_1x+a_2x^2+,,,+a_nx^n)+(b_0+b_1x+ b_2x^2+...+b_nx^n)$$
$$= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x +...+(a_n+b_n)x^n ,$$

$$(a_0+a_1x+...+a_mx^m).(b_0+b_1x+...+b_nx^n)$$
$$= a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+ ...+a_mb_nx^{n+m}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

و زیاتون « + » او ځل « . » ته F[x] یوه کړی‌ده،
د پولینو1 سره د یویتوکي په څیر. پولینومډیری F[x]
پولینوم کړي په F باندې بللکیږ، د ناپیژنونکی x سره.

دې تراوسه یادشوو بدنونو ترمنځ د کمپلکس ګنونوګروپ
یو ځانګړی ځاي لري، له دې امله په ځانګړي څیړنی کی
ځانګړی رول لري، څکه چې ددې لپاره د الجبر اصلي
جمله باور لري کومه چې په لاندې ډول ده :

۳ . ۲ . ۴ جمله: هر یو پولینوم $f(x) \in C[x]$
د $Grad\ f > 1$ سره د لاینې پولینومونو په ځلوونویا ضریبونو
ټوټه کیږي، دا په دې مانا، چی $f(x)$ ته ډیر پای مختلف
کمپلکس ګنونه c موجود دي، او طبیعي ګڼونه k په داسی
توګه یا ډول چی لاندې باوري کوي:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - c_i)^{k_i} \qquad \text{او} \qquad Grad\ f = \sum_{i=1}^{m} k_i.$$

دا جمله دلته نه ثبوت کیږي.

دا لاندې جملی دا را په ګوته کوي، چی په خوښه کړیو او
بدنونو یا تنونوکي ، په ورسره بلد ډول شمیرنه کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۲ . ۵ مرستندوي جمله:
په یوه کړی کی باو رلي: $0.a = a.0 = 0$ د هر توکي a لپاره .
اوبی یا حل :د $0 = 0+0$ اوی د اکسیوم۸ له امله باورلري:

$$0.a+0.a = (0+0) .a = 0.a$$

د دې او ۳ . ۱ . ۴ څخه لمړی اوبی $0.a = 0$ لاس ته راځي، دوهم اوبی یا حل په ورته توګه لاس ته راځی . *

۳ . ۲ . ۶ مرستندوي جمله: په یوه کړی کي باور ري

$$a(- b) = (- a).b = - ab$$

په ځانګړي توګه دا لاندې باور لري

$$(- a) (- b) = ab$$

اوبی: د ۸ او ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي

$$ab + a(- b) = a(b- (b)) = a . 0 = 0$$

په دې پسی $a (- b)$ و ab ته منفي توکی دی، دا په دې مانا چی باور لري

$$a(- b) = - (ab)$$

په ورته توګه دوم برابرون لاس ته راځي. *

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مخه مو د بدن کليمه روښانه کړه، اوس غواړم، چي دا کليمه له يوې ډيلی لورې هم، يا بهتره، په يوه بل ډول تر څيړنی لاندې ونيسم او هغه په دې ډول، چی هغه مو ورسره بلد د ټرونکارونو نخښبی ونه کاروم او دوه ذهني ټرونونه راوړم، چي وروسته کار مو بيا همداسي مخ ته بيولی دی:

۳ . ۲ . ۷ تعريف :د ډيري M هغه جوړښتونه بدن بلل کيږي، د کومو لپاره چي باور ولري:

۱ - په ډيري M کی دوه ټراونه ° او o تعريف دي

۲ - دلته (M ; °) کموتاتيو ګروپ دی

۳ - دلته ($M\backslash e_0$; o) يو ګروپ دی او e_0 يو ناپيلی توکی دی و° ته.

دا لاندېقوانين باور لري:

۴ - ديستريبوتيو قانون: $ao(b°c) = (a° b)o(a°c)$

$(a° b)oc = (aoc)°(boc)$

په يوه کموتاتيو بدن کي په دې برسيره باور لري

۵ - کموتاتيو قانون : $aob = boa$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ لاندېګروپ او لاندېکړی

۳ . ۳ . ۱ تعریف : د یوه ګروپوئید G برخډیری یا لاندګۍډیري U ګرپوئید بلل کیږي، که د U د هرو دوه توکو همغه تړنه ° (ځل) د دې ډیري U توکی وي.
که G نیمګروپ وي، نو بیا په نتیجه نیونه کی له یوه لاندې نیمګروپ څخه غږیږو.

۳ . ۳ . ۲ تعریف : یو د ګروپ G برخډیری U یو د ګروپ G لاندېګروپ یا سبګروپ Subgrupp بلل کیږي، که U نسبت د ګروپ G ګرپ عملیو یا ګروپتړون ° ته پخپله ګروپ وي.
په نخښونه $U < G$.

۳ . ۳ . ۳ مرستندوي جمله: د ګروپ $(G,°)$ یو ناتش برخډیری U تیک هلته یا هلته او هلته د ګروپ G لاندېګروپ یا سبګروپ دی، که د هرې جوړې $a,b \in U$ لپاره تل باور ولري

$$a \circ b \in U$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبی یا حل: شرایط په پوره باور ضرور دي. دا باید وښوول شي، چی پوره کیدونکي هم دي.
دلته دې e د G یوی توکی وي. د $U \neq \emptyset$ له امله یو $a \in U$ موجود دی. نو لرو $e = a^\circ a' \in U$ او e د U یوی توکی دی. ورپسی باور لري $a = e^\circ a \in U$ د هر $a \in U$ لپاره. د مرستندوي جملي له امله لرو $a^\circ b \in U$
د ټولو $a,b \in U$ لپاره.
ساده کتل کیږي، چی په U کی اسوشیاتیو قانون باور لري.
پس $(G , ^\circ)$ یو ګروپ دی.

۳ . ۳ . ۴ تعریف : د یوې کړۍ R لاندېډیری A، نسبت و هغه په R کی تعریف شوو عملیو ته، یوه لاندې-کړۍ بلل کیږي. دا په دې مانا، چی په A کی د R ټولې ترنې یا عملیې باور ولري. یا په بل عبارت، چی A نسبت و زیاتونګروپ ته یو لاندې زیاتونګروپ جوړوي او د R ځلګروپوئید ته لاندېګروپوئید جوړوي، او په همدې ډول په R کي تعریف دیستریبوتیو قانون په لاندېډیري A کی هم باور لري.

په ورته توګه د بدن یا تن F لاندې تن هم تعریف دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ . ۵ جمله : د G لاندېګروپونه پخپله G او یونلاندیګروپ E ، چې له یویتوکی څخه جوړ دی، دي. په ورته توګه د کړې R لاندیکړې پخپله R او د صفر-توکي څخه جوړه شوې ، صفرکړې دي.

د نورو لاندیګروپونو غوره بیلګو جوړولو لپاره د یوه توکی د پوتنځ (Potenz) کلیمه پلی کوو یا رامنځ ته کوو. G دې یو په خوښه نیمګروپ وي او a دېد هغه په خوښه یو توکي وي.د ځل اسوځیاتیو قانون دا اجازه راکوي، چې په یواځنی توګه (یواځنې ته دې د ګرانو لوستونکو تل پاموي، چې د څه لپاره کارول کیږي) د یو په خوښه پوتنځ یا توان

$$a^n, \quad n = 1,2,\dots,n$$

تعریف کړو، او دا باور لري

$$a^k \,.\, a^l = a^{k+l} \qquad (1)$$

$$(a^k)^l = a^{kl} \qquad (2)$$

له (1) څخه لاس ته راځي، چې په یوه نیمګروپ G کی د یوه توکی ټول مثبت توانونه یو ابل نیمګروپ جوړوي، چې د a توکي څخه منځ ته راغلی یا جوړ ځیکلیکي یا بیرته راګرځیدونکی لاندېګروپ بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که G برسیره پر دې یو ګروپ وي، نو لمړی داسې نیسو، چې $a^0 = 1$ او بالاخره د توکي a منفي توانونه هم پلي کوو. که n یو طبیعي ګڼ وي نو د لاندې برابرون

$$a^n (a^{-1})^n = 1$$

راجوړیدنه په ساده توګه کتل کیږي، له کومې چې بیالاس ته راځي

$$(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} \qquad (3)$$

دا توکي، چې د (3) دواړه خواو کې یې ځای نیولی د a^{-n} سره ښایو یا په نخښه کوو. برابرونونه (1) او (2) د ګروپG د یوه ټولګنیز توکي a لپاره ریښتوني پاتي کیږي او د a ټول توانونه د صفر او منفي پوتنځ پورې له دې امله د G یو لاندیګروپ جوړوي. دا لاندې ګروپ د a څخه جوړ بیرته راګرځیدونکی zyklische Untergruppe لاندېګروپ بلل کیږي او په {a} سره په نخښه کیږي.
په زیاتون لیکدود سره بیا د a دپوتنځ په ځای د هغه ډیرځلی راوړل کیږي.

په ګروپ G کې د یوه توکي a توان یا پوتنځ په مختلف ځګڼ یا اکسپوننت Exponent سره ضرور د مختلف

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګروپ توکي نه ورکوي یا نه رامنځ ته کوي، کوم چی د ناپاې ګروپ له موجودیت څخه جوتیږي. که د a ټول توانونه توپیر ولري یا په بل عبارت مختلف وي، نو a د ناپایږیر نظم توکی بلل کیږي، په بل ډول بیا یو د پاینظم توکی بلل کیږي.

په دوم حالت کی یو ټولګڼ k او یو ټول ګڼ l د $k > l$ او

$$a^k = a^l$$

سره موجود دي.

له دې څخه لاس ته راځي $a^{k-l} = 1$ ، چیرته چی $k - l > 1$ دی، نو له دې امله د a توانونه شته، چی د یویتوکي سره برابر دي. ددې اکسپوننت یا جګګڼ کوچنی مورږ د a نظم بولو یا نوموو.

که a یو د پاینظم n توکی وي، نو بیا په روښانه توګه توکي

$$1 = a^{o}, a, a^{2}, \ldots, a^{n-1} \qquad (4)$$

ټول یو له بل توپیر لري او هر وریسي منفی یا مثبت د a پوتنځ a^k د یوه دې په (4) کی وکړشوو توکو سره برابر دی. دا په لاندې ډول لیدل کیږي: دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$k = nq + r, \qquad 0 < r < n$$

نو له (1) او(2) اړیکو a = 1 څخه لاس ته راځي:

$$a^k = (a^n)^q a^r = a^r$$

له دې سره د پاینظم توکو لپاره لاس ته راځي: دیوه توکي a نظم د هغه توکی n څخه تولید شوي یا جوړ شوي بیرته راګرځیدونکي یا څیوکلیکي لاندې کروپ {a} سره برابر دی یا د هغه سره سر خوري.

هغه ګروپونه، چی یواځي د پاینظم توکي لري تورزیونګرپونه Tursionsgruppen یا پریودي ګروپونهperiodische Gruppen یا بیرته راګځیدونکي ګرپونه بللکیږي، په بل ډول ناپریودي ګروپونه Torsionsfrei Gruppen بلل کیږي.

اوس دا پوښتنه د کړیو لپاره، لکه د بیرته راګرځیدونکی لاندیګروپ لپاره، رامنځ ته کیږي، چی ایا داسی یوه لاندېکړی یا مینیمال لاندیکړی شته، چي یو وړکړ شوی توکی ولري. R دې یوه ورکړشوې (ناضروري اسوځیاتیو) کړۍ وي اوa دې یو د هغی کړۍ په خوښه توکو څخه یو توکی وي. هر د هغه لاندیکړی د توکي a سره ټول ځلونه، په کومو

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې چې ټیك فاکتور a رامنځ ته کیږي، د کوم یوه ګڼون یا تعداد ..,3 , 2 , 1 = n سره، دا فاکتور د a د مثبت پوتنځ یا توان رول لوبوي. دا چې ځل باید ضرور اسوشیاتیو نه وي، نو په ټولو توپیریزو ډولونو ، جوړه ډوله په نوکانو کې نیول کیږي، چې په دې توګه د کړی دوه فاکتورونه یو د بل سره ځلیږي یا ضربیږي. د 3 = n لپاره ځل a(aa) او aa)a) او 4 = n لپاره ، او همداسې د 5 = n لپاره اوداسې وریسې. هر لاندېکړی د a سره ټول زیاتونونه ، ورکړشوي پاي زیاتو ځلونه، کوم چې د ټولګڼیز فاکتور سره سنبال وي خوندي لري. داسې د R توکې . چې په دې زیاتونیز ډول لیکل کیږي د خپلی لور څخه په R یو لاندې کړی جوړوي او دا، هغه غوښتونکې یا لټوونکې د a څخه جوړه، لاندېکړي بلل کیږي.

د یوه اسوشیاتیوې کړیR لپاره د یوه توکې a څخه جوړ لاندېکړی لاندې د R د ټولو توکو څخه جوړه لاندېکړی، چې په یوه ډول د a زیاتون او مثبت پوتنځ څخه جوړه وي لاس ته راځي(د ټولګڼیز ځلوونو سره). دا کړی له دې امله کموتاتیو ده.

د یوه ګروپ هر لاندېگروپ د دې ګروپ یویتوکې لري، د

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوې کړۍ هره لاندېکړۍ په همدې توګه د دې صفر توکي لري. دګروپ G لاندې ګروپونو (په همدې توګه د کړۍ R لاندېکړيو) غوڅی له دې امله تشه‌یری نه دی .

۳ . ۳ . ۶ جمله : د ګروپ G د لاندېګروپونو یوه سیستم غوڅی بیرته د G لاندېګروپ دی. په همدې توګه دکړۍ R د لاندېکړیو د یو سیستم غوڅی، د دې کړۍ لاندېکړۍ جوړوي. د لاندې نیمګرپونو یوه سیستم غوڅی بیرته لاندینیمګروپ دی، که دا تش نه وي، او همداسی ورپسی..

موږ دلته د لمړنی غوښتنی ثبوت مخ ته بیایو. ددې لپاره دې په ګروپ G کی یو لاندېګروپ سیستم A_i ورکړ شوی وي، چیرته چی i یو پژندډیری یا ایندکسډیری Indexmenge کی ځغلی، او D دې د دې لاندېګروپونو غوڅی وي. که چیرې b او c د D په خوښه کوم توکی وي، نو د دوي خل bc په هر لاندې ډیري A_i کی پروت دی او په ورپسی توګه یا په لاس ته راوړنی سره سملاسی هم په D کی پروت دی. نو له دې امله b^{-1} د په خوښه $b \in D$ لپاره په هر A_i کی پروت دی او له دې امله په D کی هم پروت دی. پس D د G لاندې ډیری دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس نیسو چی G دي یو ګروپ، کړی او یا په همدې توګه یو تن یا بدن یا کوم یو بل، مورږ ته څرګند، الجبري سیستم وي، کوم چی تراوسه پیژنو. د M سره د G لاندېګروپ ښایو، نو یو مینیمال لاندېګروپ(په ورته ډول لاندېکړی، لاندې تن یا لاندېبدن) شته، کوم چی M خوندي لري. دا د M سره جوړه شوي یا تولید شوي لاندې کروپ {M } جوړوي او د ټولو M خوندي لرونکود G د لاندېګروپونو غوځی دی، د کومو څخه، چی کم له کمه یو دا په نامه ګروپ G موجود دی.
د مخه ویل شوي یا ورکړ شوي څیوکلیکي لاندې ګروپ تعریف د ټولیزولو له لارې ساده ښوول کیدی شي، چی لاندیګروپ {M } ټیك د ټولو هغو G توکو څخه جوړ دی، چی د په خوښه ترتیب د پایهډیرو M توکو د پوتنځځل په بڼه لیکل کیدی شي.

ټیك په همدې توګه د مخه لوستل شوي ټولیزولو له لارې لاندېکړی، چی په R کی له M تولید ټولو توکو جوړ دی، کوم چی په M کي د پاي ډیرو توکو د ځلولو د زیاتون(د ټولګنیز ضریب سره) څخه انځوریدلی شي. په نااسوځیا- تیو حالت کی دي طبعآ ضریبونه د ټول ممکنو نوکانو سره بندې شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ . ۷ یا دونه یا تعریف: که د تیرې برخې د M لپاره، د ګروپ G د ټولو لاندې ګروپونو A_i , $i \in I$ سیستم ونیول شي یا فرض شي، نو د یوه لاندې ګروپ کلیمې ته راځو، چې د ورکړشوو لاندې ګرپونو سیستم له خوا تولید شوی دی. ددې لپاره { A_i , $i \in I$ } لیکو، یا هم {A,B} { }، که دا دلاندې کروپونو ټولنه وي. په همدې توګه کیدی شي په یوه کړی کې هم د لاندېکړی سیستم له لارې تعریف لاندېکړې هم پوهیدل کیدی شي.

۳ . ۳ . ۸ یا دونه یا تعریف . دلته دې G یو ګروپ وي، یوه کړی او همداسې ورپسې. نو په G کې داسې لاندېډیري M شته، د بیلګې په توګه پخپله G، د کوم لپاره چې باور لري

$$\{M\} = G$$

هر داسې لاندېډیري د G لپاره یو جوړیدونکی یا تولیدیږو ینکی سیستم بلل کیږي . تر هغې، چې G یو پای د تولید-ونکو سیستم ولري، نو دلته د ګروپ (یو نیمګروپ، یو کړی) G څخه غږیږو، چې پایتولیدیدونکی ګڼون یا

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیر ولري. په ځانګړې توګه کیدی شي، چی دا جوړوونکی یا تولیدونکی له یوه توکی ځخه جوړ وي. دا ګروپ چی یو جوړیدونکی توکی لري او د هغه د ځیوکلیکي لاندې ګروپ سره سر وخوري، ځیوکلیك ګروپ بلل کیږي.

۳ . ۴ . ایزومورفیزم Isomorphimus

دا دلته د هر الجبري سیستم راوړلو کلیمو لپاره د ایزمو-رفیزم کلیمه روښانه کیدی یا تشریح کیدی شي، کومه چی همغه رو ل لوبوي لکه په نیم نظم شوي ډیري کی یی چی لروده.
د بیلګي په توګه ایزمورف ګروپونه یو بل ته کتمټ دي، د یو او همغه ګروپ دوه اکسمپلاره یا نموني ، چی په نیولی دې وي، چی که د ګروپ عملیي یی ترونونه همغه وي، په داسی حال کی چی توکي له کومو چی ګروپونه جوړ دي، طبیعیت یا پیدایښت کوم رول نه لوبوي.
په کره کلك تعریف سره لاندې راوړو:

۳ . ۴ . ۱ تعریف : ګروپوئید G او G' ایزومورف

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي، كه د ګروپوئيد يواځنی او په څټ څيرونه f د ګروپو-
ئيد G په ګروپوئيد G' داسی موجود وي، چی د په
خوښه a,b ∈ G لپاره باور ولري

$$(ab)f = af.bf$$

په همدې توګه هره څيرونه ، چی دا غوښتنی پوره كوي،
د ايزومورفی څيرونی په څير يي په نخښه كوو يا يی ايز-
ومورف څيرونه بولو. د دوه ګروپوئيدو خويونه، چی يو
بل سره ايزومورف وي، سيومتري خويونه دي، (هغه و
ايزومورفی څيرونی ته په څټ څيرونه بيرته ايزومورف
څيرونه ده)، او ترانزيتيو، دا برسيره پر دې ، كه څيرې
څوك د ګروپوئيد كتمټ په ځان څيرونه ورسره وګڼي،
رفلكسيو هم دی. د ايزومورف ګروپوئيدو لپاره په ټوليزه
توګه لاندې ليكدود كارول كيږي يا استعماليږي

$$G \sim G'$$

كه چيرې د نورو الجبري جوړښتونو ايزومورفي مو هم
مطلب وي ، نو موږ به بيا هم همدا نخښه وكاروو.
طبعاً به د ګروپوئيد په ايزومورف څيرونه كی ټول هغه
خويونه، چی په ګروپوئيد كی ليكل كيږي، لكه اسوڅياتيو

(c) ketabton.com: The Digital Library

قانون، کموتایتو، د یویتوکي موجودیت او د په ځېتوکي موجودیت، د ګروپوئید ځیرې چه هم ور کارول کیږي یا وروړل کیږي. موږ په ساده بیلګه سره ښایو، چې دا وینا څنګه ښوول کیدی شي. G دې یو کومتایتو ګروپوئید وي او f دې د G یوه ایزمورف ځیرونه په 'G وي. که 'a او'b دوه د 'G په خوښه توکي وي او a, b د G هغه توکی وي، د کوم لپاره چې باوړ لري

$$af = f(a) = a' \quad , bf = f(b) = (b)f = b'$$

نو لرو

$$(ab)f = a'.b' \quad , (b.a)f = b'.a'$$

او د برابرون ab = ba او د ځیرونی د یواځنتوب څخه a'b' = b'a' دی. له دې څخ لاس ته راځي،

۳ . ۴ . ۲ جمله: د نیمګروپ، ګروپ او همداسی د ابلګروپ یا کموتاتیو ګروپ ایزومورفی ځیرې بیرته نیمګروپ، ګروپ او همداسی ابلګروپ دی.

۳ . ۴ . ۳ مرستندوي جمله: دوه کړي یو بل سره ایزومورف دي، که د هغو د توکو ترمنځ یو یواځنی اوپه

(c) ketabton.com: The Digital Library

څېکیدونکی نظم یا ځیرونه موجوده وي، چی هغه ځیرونه نسبت و زیاتونګروپ ته ایزومورفیزم وي او هم د کړی و ځلګروپوئید ته ایزمورفیزم وي. د ایزومورف ځیرونی سره طبعاً کړی هغه خویونه، اسوځیاتیو، او کموتایتو یا لیکړی liesche Ring او داسی نور وي، ساتي.
د ایزومورف ګروپونو لپاره یوه په زړه پوري بیلګه، د مثبت ریيلګڼونو ځلیزه ګروپ او د ټول رییلو ګڼونو زیاتونګروپ جوړوي. که هر مثبت ګڼ د هغه په لوګاریتم باندې تنظیم یا ځیره شي، چی بنسټ یی کره کلك ټاکلی وي ، نو د لمړي ګروپ یو ایزومورف ځیرونه، په دوم ګروپ، لاس ته راځي. ایزومورفیز له دې ریښتینیو څخه لاس ته راځي، چی د یوه ځل لوګاریتم دې د لوګاریتم د یوګونو فاکتورونو د زیاتون سره برابر یا مساوي دی (د لوګاریتم او قوانینو لپاره دې ځما د شمیر پوهنی کتاب وکتل شي).

موږ اوس هغه مخه په ګوته شوې پاملرنه په ځیوکلیکي زیاتونګروپ کی رامخ ته کوو او په یوه بیلګه پیل کوو.
د ټولګڼونو زیاتونګروپ د یوه ناپای ځیوکلیکي ګروپ لپاره بیلګه ده، ځکه، چی هر ټول ګڼ د ۱ څو ځله دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۴ . ۴ جمله : ټول ناپای څیوکلیکي ګروپونه د ټولګڼونو زیاتونګروپ سره ایزومورف دي او همداډول په خپلو منځونو کی هم. همداسی پاي د n–نظم څیوکلکي ګروپونه یو بل سره ایزومورف دي.
ددې جملی له ثبوت څخه دلته تیرېږو (ثبوت یی په Kuroŝ کی کتل کیدی شي).

۳ . ۴ . ۵ جمله: د ټولګڼونو د صفر لاندیګروپ، څخه توپیري ټول لاندیګروپونه د یوه څرګند طبیعي ګڼ n د ډیرواره ډیري څخه راپیدا دي.
او بی : روښانه ده، چی د یوه طبیعی ګڼ ټول څوواره یو لاندېګروپ، دا په نامه له n څخه جوړ لاندېګروپ جوړوي. د یو بل څخه توپیري ګڼونو n لپاره لاندېګرپونه هم یو له بل توپیر لري. کیدی شي یود ټولګڼونو زیاتون ګروپ، لاندېګروپ A، چی یواځي د منفی ګڼونو څخه نه وي جوړ، څکه چی د هر ګڼ سره د هغی په څټ هم لري. n دې کوچنی طبیعی ګڼ وي، چی په A کی خوندي ده. د یوه په خوښه $a \in A$ لپاره باور لري

$$a = qn + r\,,\ \ 0 < r < n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دی.

$$r = a - qn \in A$$

او په دې لاس ته راوړني $r = 0$ (د n له ټاکنی څخه) ، دا په دې مانا چي دی $a = qn$ ، څه مو چی ښوول.

۳ . ۴ . ۶ جمله : هر د یوه ناپای څیوکلیکي ګروپ لاندېګروپ څیوکلیکي دی، او دا د پای څیوکلیکي ګروپ لپاره هم باور لري.

۳ . ۴ . ۷ تعریف : وایو، چی ګرپوئید G په ګرپو-ئید 'G کی ایزومورف خوندې دی، او یا په 'G کی ایزومورف نغښتی دی، که چیرې له G یوه ایزمورفه څیرونه د ګروپو-ئید 'G په کوم یوه لاندېګروپوئید باندې موجود وي. دا کلیمه کړیو ته هم غزول کیدی شي،

هره کړی R، په کړی R باندې د پوره ماتریکسکړی R_n کی ایزومورف خوندې دی.
سکالار ماتریکسونه ، دا په دې مانا، چی د همغه توکي $a \in R$، چی په اصلي نیمي یا قطر کی پروت وي او نور د نیمي دواړو خواو ته صفرونه وي، په نامه R_n یو لاندېکړی، د R سره ایزمورف ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۴ . ۷ جمله : هره کړی R په ورکړ شوي ډیري M باندې یوه پوره فنکشنکړی سره، چې ارزښت یي په R کې پروت دی ، ایزومورف دی.
د ټولو x ∈ M لپاره هر فنکشن د همغه برابر ارزښت a ∈ R سره، هغه و R سره ایزومورف فنکشنکړی راکوي.
د یوه په خوښه اسوشیاتیو، کموتاتیو کړی R کې پولینومکړی R[x] پوتنځلړیکړی R{x} کې ایزومورف خوندې دی.
پوتنځکړی د زیاتو پاي صفر څخه توپیریدونکو ځلوونو یا ضریبونو سره، یو و R[x] ته ایزومورف د R{x} لاندېکړی جوړوي.

یو لوي کار د لاندې جملې اوبې یا حل غواړي:

۳ . ۴ . ۹ جمله : هره کړی R په یوه کړی کې، چې یویتوکی لري، ایزومورف خوندي ده. که کړی R په دې برسیره اسوشیاتیو یا کموتاتیو وي، نو کیدی شي ، چې دا همداسې په یوه اسوشیاتیو، کموتاتیو دیویتوکي سره کړی کې خوندي شي.
اوبې یا ثبوت: موږ د ټولو جوړو (a,k) ډیری په نظر کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیسو، چې $a \in R$ او k یو ټولګڼ دی او د دې جوړو لپاره د لاندې مساواتو له لارې زیاتون او ځل تعریفوو:

$$(a,k) + (b,l) = (a+b,k+l) \qquad (1)$$
$$(a,k)(b,l) = (ab+la+kb,kl) \qquad (2)$$

نسبت و زیاتون ته یو ابلګروپ لاس ته راځي. دا چې برسیره پر دې

$$\begin{aligned}[(a,k)+(b,l)](c,m) &= (a+b,k+l)(c,m)\\ &= ((a+b)c+m(a+b)+(k+l)c,(k+l)m\\ &= (ac+ma+kc+bc+mb+lc,km+lm)\ m\\ &= (ac+ma+kc,km)+(bc+mb+lc,lm)\\ &= (a,k)(c,m)+(b,l)(c,m)\end{aligned}$$

باور لري او ټیک په همدې ډول د دیستریبوتیو دوم قانون هم ښوولی شو، نو ډیری یوه کړی انځوروي. له (2) څخه وریسی لاس ته راځي

$$(a,k)(0,1) = (0,1)(a,k) = (a,k)$$

دا جوړه (0.1) په دې کړیکی د یویتوکي ځاي نیسی یا نماینده‌ګي کوي. بر سیره پر دې د (1) او(2) سره سم لرو

$$(a,0)+(b,0) = (a+b,0)\ ,$$
$$(a,0)(b,0) = (ab,0)$$

د کومو سره ، چې د ټولو د (a,0) فورمجوړو ډیری د ټولو

(c) ketabton.com: The Digital Library

جوړو(a,k) په کړی کی یو وR ته ایزومورف لاندېکړی جوړوي.
له دي سره د ثبوت لمړی برخه تکمیل ده، دومه برخه د (2)
استعمال سره په ساده توګه لاس ته راځي.
موږ دا په ګوته کوو، چی دا له موږ جوړه شوې کړی یواځنی
کړی نه ده (او همداسی هم نامینیماله کړی) د یویتوکي سره،

کوم چی یورکړه شوېکړی R (د ایزومورف خوندیونی په موخه)
خوندې لري، کیدی شي چی R پخپله یو یویتوکی ولري.

۳ . ۴ . ۱۰ جمله : هر ګروپوئید کیدی شي ، چی د
یوې کړی په ځلګروپوئید کی خوندي شي، یو اسوشیاتیو یا
کموتاتیو ګروپوئید کیدی شي، چی په یوه کړیکی، چی
همغه خویونه ولري خوندي شي.
د ثبوت لپاره ټول ممکن د زیاتون فورمولوټ زیاتون رانیسو

$$\sum_{a \in G} k_a a \qquad (3)$$

د کومو سره ، چی a د ورکړشوي ګروپوئید G ټولو توکو
کی ځغلی، په داسی حال کی چی ځلووني یاضریبونه k_a
ټولګڼونه دي او په رینښتونی، داسی چی زیات ترزیات پای
ډیر د صفر څخه توپیري رامنځ ته کیږي د زیاتون (3)
زیاتون او ځل د برابرونونو یا مساواتو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{a\in G} k_a a + \sum_{a\in G} l_a a = \sum_{a\in G} (k_a + l_a)a \qquad (4)$$

$$\sum_{a\in G} k_a a \cdot \sum_{a\in G} l_b b = \sum_{c\in G} m_c c \qquad (5)$$

سره روښانه یا تشریح دي، په کومو کي، چې m_c د ټولو صفر ځخه توپیر ځلونو $k_a\, l_a$ زیاتون په مانا دي، چې په ټولو a اوb کې ځغلیدلي وي، د $ab = c$ سره. روښانه ده، چې د برابرونونو ښي لور (4) او (5) د (3) فورم زیاتون انځوروي. مساوات (5) وایي، چې په کینړ لور، د فاکتورونو په څیر رامنځ ته شوي، پاي زیاتونونه د غړو په څیرېو له بل سره ځلیږي، او په ریښتونی د قانون

$$k_a a . l_a b = (k_a l_a)(ab)$$

لاندې، چې دab سره د ګروپوئید په موخه ورکړ شوې عملیه مو مطلب دي، د کومو سره چې د ځل ab رامنځ ته کیدو سره همغه توکی c ورکوي، سره یوځاي راټول شي.

د زیاتون لپاره په هره توګه یو ابلګروپ لاس ته راځي. د دیستریبوتیو قانو او د هغه ثبوت چې د G په ګروپ کی د ځل اسوشیاتیو همداسی کموتاتیو قانون او همغه مساوي یي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتونونو ځل، چې فورم (3) لري لاس ته راځي، که څه هم خورا پراخ دی، مګر په پرینځیپ یا اصولوکی ستونځی نه رامنځ ته کوي، د هغو پرمخ بیول دې د لوستونکو دنده وي.

د ټول زیاتون، چې فورم (3) لري له دې امله نسبت و(4) او (5) مساواتو تعریف شوو اپریشن ته یوه کړی جوړوي، هغه زیاتون (3) په کومو کي ، چې $k_a = 1$ دی، د په خوښه a لپاره، چې له G دی. د (5) پسی یو ګروپ G سره ایزومورف لاندېګروپوئید، د دې کړی د ځلوونکي ګروپوئید سره، جوړوي. له دې سره دا ښونه سر ته ورسیده.

دا له مونږ جوړ شوې د ګروپوئید G کړی د ټولګڼونو ګروپو-ئیدکړی بلل کیږي.
که G یو نیمګروپ وي او یا ګروپ، نو د دې په ځای د ټولګڼیزنیمګروپ او همداسی د ټولګڼیزګروپ څخه غږیږو.

۳ . ۴ . ۱۱ جمله: هر ګروپ د یوه ډیري M په سیو-متري ګروپ کی ایزومورف خوندي دی، کیدی شي، چې د M په ځای په ځانګړې توګه د ګروپ ټولو توکو ډیری وکارول شي.
دلته د ګروپ G هر توکی a هغه ترانسفورمیشن باندې تنظیمو، چې یو د G توکی x په توکي xa باندې تنظیم

(c) ketabton.com: The Digital Library

کړي. دا چي له $x \neq y$ څخه هم $ax \neq ay$ لاس ته راځي او برسیره پر دې د هر $x \in G$ لپاره برابرون

$$(xa^{-1})a = x$$

رامنځ ته کیږي، ترانسفورمیشن $x \to xa$ ګروپ G په ځان په څټ یواځنی څیره کوی یا تنظیموي، دا نو له دې امله یو پرموتیشن (پرموتیشن ځما د شمیرپوهنه کتاب کی په پراخه توګه روښانه شوی دی) دی. د $a \neq b$ لپاره په دې برسیره په دې د غوښتونکو پرموتیشنونو توکي یو له بل توپیر لرود-ونکی دي، ځکه، چی $1.a \neq 1.b$ دی.
بالاخره برابرون

$$(xa)b = x(ab)$$

په ګوته کوي، چی د ab پورې اړونده پرموتیشن د a او b پورې اړونده یوبه بل پسی راوړنو څخه لاس ته راځي.

۳ . ۴ . ۱۲ جمله : هر نیمګروپ G ، د یوه ډیري M سیومتري نیمګروپ کی خوندي دی.
اوبی یا حل: د ثبوپ لپاره نیمګروپ G د ۳ . ۴ ، ۱۰ سره سم په یوه، د یوه اسوشیاتیو کړی R, په ځلیز ګروپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې خونديږ کوو، دا بيرته د ۳ . ۴ ، ۹ سره سم په يوه اسوشياتويکړى R کې د يويتوکي سره خونديږ کوو او د G سره يې په نخښه کوو، چې داد اخرنى کړى ځليزه نيمګروپ دى. لکه څنګه، چې په G کې هم يو توکى 1 د 1.a |= 1.b سره له a |= b څخه موجود دى، نو د لغاتو پوريږ د پورته جملې ثبوت سره دا سر خوري ، چې دا نيمګروپ G د نيمګروپ سره پخپله، په دې ډيرګ G باندې، ايزومورف خوندي دى. له دې څخه د سرچينيز ګروپ G خونديونه لاس ته راځي.

مور. غواړو، چې دې ته ګوته ونيسو، چې د يوه ګروپوئيد (په ځانګړي توګه يو ه نيمګروپ) په بل ګروپوئيد (يوه نيمګروپ) کي خونديونه سيده وښايو، بې له دې، چې يوه ګړى د يويتوکى سره وکاروو.

۳ . ۵ د نيمګرپونو په ګروپ کى او کړى په يوه (ناضرورکموتاتيو) تن يا بدن کى خونديونه

هر نيمګروپ، ضرورېه يوه ګروپ کى، ايزومورفف نه شى خوندي کيدى، د دې لپاره ضروري شرطونه هغه بايد ورسره بلد د لنډونى قاعدې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۵ . ۱ جمله: له $ac = bc$ او همداسی $ca = cb$ څخه لاس ته راځي $a = b$.

یادونه : دلته ګورو، چی د لنډونی قاعدې کارول شوي دي.

په لاندې برخه کی غواړو وښایو، دا راوړلشوي ضروري شرطونه، چی د نیمګروپونو په ګروپونو همداسی د اسوشیاتیو کړی په یوه (ناسو^(۸) کموتایتو) بدن کی د کموتایتو په حالت کی پوره کیدونکي هم دي.د دې لپاره د لاندې مرستندوي جملي په ښوونه پیل کوو.

۳ . ۵ . ۲ مرستندوي جمله: د ابل په یوه نیمګروپ G کی دې یو لاندې نیمګروپ S ورکړ شوی وي، او په G کی دې د S د توکو سره لنډونه وشي، دا په دې مانا، چی له

$$ax = bx\ ,\ x \in S;\ a,b \in G$$

څخه دې تل $a = b$ لاس ته راشی. نو کیدی شي، چی G د ابل نیمګروپ ایزومورف په یوه داسی ابل ګروپ G کی د یویتوکي سره ، ایزومورف خوندې شي، چی د S هر توکی په G کی یو په څټ توکی ولري.

(۸) ناسو د کموتایتو

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : د دې جملې له ثبوت څخه تیرېږو. دا د الجبر په درسي کتابونو کې کتل کیدی شي،

په دې پورته غوښتنو له مخې لاندې جمله لاس ته راځي

۳ . ۵ . ۳ جمله : هر ابل ګروپ د لنډونو قاعدو سره په یوه ابل ګروپ کې خوندې کیدی شي .
د دې ورکړ شوي جوړښت د طبیعي ګڼونو په یوه زیاتون نیمګروپ ، کوم چې د لنډونو قاعدو سره یو ابل نیمګر-وپ دی ، په ساده توګه د ټولګڼونو په زیاتونګروپ کې میندل کیدی شي ،

۳ . ۵ . ۴ جمله: په یوه اسوشیاتیو - کوموتاتیو کړی R کې دې د توکو یو ډیری N راوستل شوی وي، په کوم کې چې صفر او پرصفرویشنه نه وي موجود. نو کیدی شي، چې کړی R ایزومورف په یوه اسوشیاتیو-کموتایتو کړی R کې، د یویتوکي سره، داسي خوندي شي، چې د N هر توکي په R کې یوه په څټ توکی ولري.

یادونه : دا ثبوت هم پرېږدو او په دې توګه نورو غوښتنو ته هم پاي ورکوو، چې موضوع اوږده نه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۶ نورمالپرویشونی

۳ . ۶ . ۱ تعریف : یو ګروپ G او په هغه کی دې توګه یو لاندېګروپ H دې ورکړ شـوې وي. که یوه a د G په خوښه توکی وي، نو ممکنه ځلونی ah چی د aH ټولګه ده ، چیرته چی h په لاندې ګروپ H کی ځغلي، دا د ah a تعریف شوې، د ګروپ G کیڼ اړخیزځنګ– ټولګی یا ګاونډی ټولګی (موږ به کوښښ وکړو چی دا تل ګاونډیټولګی وبولو) بلل کیږي و لاندې ګروپ H پسی. په څرګنده توګه a ∈ aH دی، ځکه چی لاندېګروپ H یویتوکی لري.

د یوه توکی b لپاره دې، چی د ګاونډیټولګی aH څخه دی، تل باور ولري bH = aH ، دا داسی بللکیږي، چی د ګروپ G هر کیڼ اړخیز ګاونډیټولګی و H پسی د هغه د هر توکی سره تعریفیږي. که b = aH , h ∈H باور ولري، نو د په خوښه h',h" ∈ H لپاره باور لري:

$$bh' = a(hh') \quad \text{او} \quad a\,h'' = b(hh'')$$

پس $aH \subseteq bH$ او $bH \subseteq aH$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې سره هر دوه کیڼ اړخیز ګاونډیتوبلګي، یو د بل سره کټمټ دي او یا یې غوڅې تشډیرې دي.
موږ ددې سره د ګروپ G یوه ټوټونه یا تجزیه لاس ته راوړو، په لاندېګروپ H پسې، چې د یوه مخه یې کیڼ اړخیزو ګاونډیتوبلګیو یو له بل څخه پردې دي، دا ګروپ G کیڼ اړخیزه ټوټونه بلل کیږي په یوه لاندېګروپ H پسې. د دې ټوټوونو یاتجزیې یو ټولګی پخپله H دی: د $a \in H$ سره باور لري $aH = H$.

په ورته توګه د ګروپ G ښې اړخیزه ټوټونه یا تجزیه لاس ته راوړی شو، په یوه لاندېګروپ H پسې، کوم چې له ښې اړخیز ګانډېتولګی $ha, a \in G$ څخه جوړدي، که یو ګروپ کموتاتیو نه وي، نو کیدی شي، چې کیڼ ګاونډیتو-لګي او ښې ګاونډې ټولګی باندې د یوه ګروپ G ټوټونه د لاندېګروپ H پسې یو له بل توپیر ولري. په هر صورت دواړه ټوټونې د ټولګیو برابر ګڼون لري: څیرونه چې د G هرتوکی a د G په a^{-1} توکی څیره کوي، په څټکیدو-نکی یواځنی څیرونه ده، د ګروپ G په خپل ځان او کیڼ اړخیز aH ګاونډیتولګی په همغه ورته ښې اړخیز ګانډیتو-لګي Ha^{-1} څیره کوي او په څټ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۶ . ۳ تعریف: د ګروپ G ټوټونه په لاندېګروپ H پسي ، د ګاونډیو ټولګیو ګڼون په دې دواړو هر ټوټونو یا تجزیه کی ، که دا پاي وي، د لاندې ګروپ پیژند نخښه یا ایندکس Index، په ګروپ G کی بلل کیږي.

ګروپ G دې د n نظم پاي ګروپ وي او H دې د هغه لاندېګروپ وي، د k نظم او j پیژند نخښی یا ایندکس سره. هرګاونډټولګي aH د ټیك k توکو څخه جوړ دی او له دې امه باور ولري

$$n = k.j$$

له دې څخه لاندې جمله لاس ته راځی

۳ . ۶ . ۳ د لاګرانژ Lagramge جمله: د یوه په خوښه پای لاندېګروپ نظم او پیژندنخښه د ټول ګروپ د نظم پرویشوني دي.

دا جمله د ۳ . ۳ . ۴ سره سم لاس ته رکوي ، چی د پاي ګروپ د هر په خوښه توکی نظم همداسی د ګروپ نظم ویشي. د دې جملی بله پسی راتلنه ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۶ . ۴ پسی راتلنه: هر د لمړي ګڼ نظم(لمړیګن هغه ګڼ دی ، چې پرویشوني یې ساده پرویشوني وي، یعنی پخپله دا ګروپ او یویتوکی) څیوکلیك یا په بل نوم، راګرځیدونکی دی.
دا باید د په خوښه د هغه توکي جوړه څیوکلیکي لاندی ګروپ سره سر وخوري، تر هغي چې دا توکی له ۱ څخه توپیر ولري.

۳ . ۶ . ۵ تعریف: یو لاندښنیمګروپ H د ګروپ G نورمالپرویشونی Nrmalteiler (یا اینواریانتي invariante Untergrupp لاندېګروپ) بلل کیږي، که د G کینۍ اړخیزه ټوټونه یا تجزیه د ښی خوا ټوټونی سره، نسبت و H ته، سر وخوري، دا په دې مانا، چې د هر $a \in G$ لپاره (په G کی د دواړو برخېیریو یو بل سره د سر په سر خوړلو په موخه وي) مساوات

$$aH = Ha \qquad (1)$$

رامنځ ته کیږي. یا باوري کیږي. کیدی شي چې د لته د ګروپ G ټوټونی و H پسی د نورمالګروپ څخه وغږیږو.
په لاندې کی د نورمالپرویشونی یو بل تعریف ورکوو، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې همدا اوس ورکړشوي تعریف سره برابرارزښته دی.

۳ . ۶ . ۶ **تعریف** : په ګروپ G کی توکی x او y یو د بل سره کونجوګیري konjugiert **بلل کیږي**، که په G کی یو توکی a داسی پیداکیدي شي ، چی باور ولري

$$y = a^{-1}xa$$

داسی هم ویل کیږي، چی له y څخه د x سره ، د a ترانفورمیشن له لارې لاس ته راځي.

۳ . ۶ . ۷ **جمله** : د ګروپ G لاندې ګروپ H هلته او هلته په G کی نور مالپرویشونی دی، که H وهر توکی ته دده توکی په G کي ټول کونجوګیري توکی هم ولري.

اوبی : د دې لپاره دې H په G کی نورمالپرویشونی وي، او په ورزیات دې یا برسیره پر دې دې h د H په خوښه توکی وي. a دې د G یو په خوښه توکی وي، په H کی د (۱) پسی یا د (۱) له مخی یو توکی h' د

$$ah' = ha \qquad (2)$$

سره موجود دی. پس دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^{-1}ha = h' \in H \qquad (3)$$

او په ځتې که د $h \in H$ په خوښه توکی لپاره او $a \in G$ په H کی یو توکي h' موجود وي، کوم چی برابرون (۳) پوره کړي او د دې پسی یا د دې په تعقیب(۲) پوره کړي، نو باور لري $aH \subseteq Ha$. که په دې رامنځ ته شوې اړیکی، چی د ټولو a لپاره رامنځ ته شوي یا باور لري، د a په ځای a^{-1} ولیکي ، نو و $a^{-1}H \subseteq Ha^{-1}$ ته راځي او همداسی $Ha \subseteq aH$.کوم چی د مخ ته تیر سره برابرون (۱) ورکوي.

۳ . ۶ . ۸ تعریف : دوه لاندېګروپونه U او V په G کی یو د بل سره کونجوګیر konjugiert بلل کیږي، که یو داسی توکی $a \in G$ موجود وي، چی د هغه سره د ترانسفورمیشن له لارې لاندېګروپ U په لاندېګروپ V پریباسي، یعنی باور ولري

$$a^{-1}Ua = V$$

ډيري $a^{-1}Ua$ بی له دې هم د هر $a \in G$ لپاره د په خوښه یو (په ریښتونی U سره ایزومورف) لاندېګروپ سره تل بیرته یو لاندې ګروپ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د په خوښه توکو $u_1 , u_2 \in U$ لپاره لاندې اړیکی رامنځ ته کیږي

$$(a^{-1}u_1a)(a^{-1}u_2a) = a^{-1}(u_1u_2)a$$

او له

$$a^{-1}u_1a = a^{-1}u_2a$$

څخه برسیره پردي لاس ته راځي $u_1 = u_2$ ، د کوم سره چی څیرونه یا نظم $u \to a^{-1}ua$ د $u \in U$ سره، یو ایزومورف څیرونه دU په $a^{-1}Ua$ ده: aUa هم یو لاندېگروپ انځوروي.

۳ . ۶ . ۹ جمله :د یوه گروپ G هر نورمالپرویشونی د ټولو خپلو په G کی کونجوگیر لاندېگرپونو سره یوځای پریوزی. په څټ: د گروپ G یولاندې گروپ H ټولي و H ته په G کی کونجوگیر لاندېگروپونه خوندي لري، نو له دې امله دا نورمالپرویشونی دی.

له (۱) څخه په لمړی وار لاس ته راځي

$$a^{-1}Ha = H \qquad (4)$$

کوم چی د جملی لمړی برخه ثبوتوي. اوس نو باور لري

$$a^{-1}Ha \subset H$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اصلي خونديلرنی په موخه. دا رات راکوي

$$H \subset aHa = (a^{-1})^{-1}Ha^{-1}$$

او د H لاندې ګروپ باید ، که هغه ټولی و هغی ته کونجو- ګير خوندي ولري، د دې توافق یا يو په بل سرخوړنی سره . د په خوښه توکي $a \in G$ لپاره له دې امله (۴) رامنځ ته کيږي، له کوم چی (۱) رابيليدلی شي.

۳ . ۶ . ۱۰ جمله: د یوه ګروپ G د په خوښه نومالپرو- يشونو ډيريو غوڅی ، بیرته نومال پرویشونی دي.

اوبی : که D د A_i , $i \in I$ غوڅی وي ، نو په هرترتیب D د G لاندې ګروپ انځوروي. (پرتله ۳ . ۳ . ۶) برسیره پر دې د هر توکی ، چی یوه د D توکي سره کونجوګير وي، په ټولو A_i کی پروت دی او په دې پسی لاس ته راځي، چی په غوڅ کی هم پروت دی.

۳ . ۶ . ۱۱ جمله :د یوه ګروپ G په خوښه نورمالپرو- يشونو سیستم څخه تولید یا راپیداشوي لاندېګروپ(پرتله ۲ . ۳ . ۸) په همدې حالت کی د G يو نومرمالپرويشونی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړ شوی دي نورمالپرويشونى $A_i\ ,\ i \in I$ وي او د هغه څخه جوړ شوي يا توليد شوی د لاندي ګروپ B وی لکه په ۳ . ۳ . ۷ کی ښوول شوي وو، هر د B توکی b په لاندي بڼه ليکل کيدی شي

$$b = a_1 a_2 \ldots a_n$$

د ورکړ شوي $a_j \in A_j\ ,\ j = 1,2,\ldots,n$ سره . له G څخه په خوښه توکي g لپاره باور لري

$$g^{-1}bg = (g^{-1}a_1g)(g^{-1}a_2g)\ldots(g^{-1}a_ng)$$

او دا چی

$$g^{-1}a_jg \in A_j \quad ,\ j=1,2,\ldots,n$$

دی ، نو لاس ته راځي

$$g^{-1}bg \in B$$

۶ . د ابلګروپ ټول لاندي ګروپونه د هغی خپل نورمالپر– ويشونی دي. په دې ورزيات يا برسيره پر دې په هر ګروپ G کی يوونګروپ E د نورمالپرويشونی په څير موجود دی او په همدې توګه پخپله ګروپ G هم.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۱۲.۶ تعریف : یو ګروپ ، چی نورمال پرویشونی یی یواځی یوونګروپ او پخپله خپل ځان وي، **ساده بلل کیږي**.

۳ . ۱۳.۶ جمله : یواځني ساده ابل ګروپونه، هغه ځیو- کلیکي ګروپونه دي، چی نظم یی پریمګڼ یا لمړی ګڼ وي.

اوبی : که یو ابل – یا کموتاتیو ګروپ ساده وي، نودا بیخي ناساده یا نااصلي لاندې ګروپ نه لري: دا چی په دې کي ځیوکلیکي لاندې ګرپونه باید خوندې وي، نو دا پخپله ځیوکلیکي دی. یو ناپاي ځیوکلیکي لاندې ګروپ نااصلي یا ساده لاندېګروپونه لري، په کوم چی د ټولګڼونو زیاتون- ګروپ دی ، په هغه کي چی د جفت ګڼونو ګروپ په ځان کی دننه یا خوندي لري. که یو پای ځیوکلیکي ګروپ $G = \{a\}$ راواخلو چی نظم یی n دی، نو د ټوټونی n له لارې څخه لرو $n = kl$ ، چی لاندې ګروپ $\{a^k\}$ نظم l او په دې لاس ته راوړنی سره د E او G څخه توپیر لري. د دې په څټ: ګروپ $G=\{a\}$ کیدی شي چی هیڅ ناساده لاندېګروپ ولري، که نظم یی یو پریمګڼ یا لمړی ګڼ وي. چی د لاګرانژ له جملی څخه ساده په لاس راتلی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: دا موضوع دلته رالنډوم او داسی نور ې په دې هکله موضوعګاني په خارجي ژبو درسی کتابونو کی شته، چی هلته کتل کیدی شي، دلته به زیات وخت او ځاي ونیسی. زما هئله هم دا ده، چی د زیاتو شیانو سره په دا لمړي کی داسی لږ غوندې بلد شو.

۳ . ۷ ایدیال او پاتي ټولګیکړی

Ideal und Restklassenring

یادونه: ی ما دا پاتیټولګیکړی بللی، چی یو نوم وي، خو دا کیدی شي، چی د پاتیټولګی کړی هم وبلل شي. د نومونو په هکله ستونځي به منو، تر څو، چی ځموږ په هیواد کي شمیرپوهنی خپله لار نیولي وي.

په دې برخه کی ګورو، چی د نورمالپرویشونی په ځاي د ایدیال کلیمه رامنځ ته کیږي.
په دې برخه کي R تل یوه کموتاتیوه کړی د یوېتوکی ۱ سره په نخښه کوي یا ښایي. اوس د یوې کړی د « ایدیال»کلیمه پیل کیږي. لاس ته راځی، چی د R هر ایدیال Y په R باندې

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو ایکویوالنت یا ورته ټولګی ~ تعریفوي. د دې سره ښوول کیږي، چې د هر $r \in R$ کرېیتوکی اړونده ایکویوالنتټولګي [r] بیرته یوه کړی R / Y جوړوي.

۳ . ۷ . ۱ تعریف : د کړی R یو ناتش برخټېرۍ Y یو ایدایال دی، که Y د زیاتونګروپ $(R , +)$ یو لاندې ګروپ وي او د ټولو $y \in Y$ او $r \in R$ لپاره باور ولري $yr \in Y$.
دا د R ایدیال Y اصلي ایدایل بلل کیږي که $R \neq Y$ وي .

۳ . ۷ . ۲ بیلګی:

الف) دا د R یواځي د صفرتوکی څخه جوړ برخټېری $\{ 0 \}$ د R یو ایدیال دی، دا صفرایدیال دی او له همدا اوسه به په 0 سره په نخښه شي.

ب) که $R = Z$ د ټولګښونو کړی وي، نو ډیری Y د ټولو جوړه ګڼونو $Y = 2z$ د $z \in Z$ سره جوړ ډیری د Z یو ایدیال دی. د دوه جوړه ګڼونو زیاتون او کمون تل یو جوړه ګڼ دی، او برسیره پر دې yz د ټولو $y \in Y$ لپاره او د ټولو $z \in Z$ لپاره یو جوړه ګڼ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) که $R = F$ یو بدن وي، نو 0 او F د R یواځنی ایدیالونه دي.

۳ . ۷ . ۳ تعریف: د R یو ایدیال Y اصلي ایدیال بلل کیږي، که $Y = yR$ وي، د یوه $y \in Y$ لپاره، دا په دې مانا چې یو $y \in Y$ داسې موجود دی، چې د هر $z \in R$ لپاره یو $r \in R$ د $z = ry$ سره موجود وي. داسې هم ویل کیدی شي: چې دا توکی y ایدیال Y جوړوي یا تولیدوي او یا y د Y جوړوونکي یا تولیدوونکی دی.

۳ . ۷ . ۴ تعریف: Y دې د R یو ایدیال وي. نو دوه توکی $r, s \in R$ و Y ته ایکویوالنت یا ورته بلل کیږي، که باور ولري : $r - s \in Y$

په نخښوونه یې : $r \sim s$ یا $s \sim r$.

دا په ساده توګه لیدل کیږي، چې ~ په R باندې یو ایکوبوالنځ اړیکه یا ورته اړیکه ده.

۳ . ۷ . ۵ مرستندوي جمله: Y دې د R یو ایدیال وي د $R \models Y$ سره او R / Y دې د R له توکو r څخه جوړ، د ورته ټولګیو $[r] = \{ s \in R \mid s \sim r \}$ ډیری وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو R / Y به د زیاتون $[r_1] + [r_2]$ او ځل $[r_1] . [r_2]$ سره د ټولو $r_1 , r_2 \in R$ لپاره یوه کړی وي د یوې توکی [1] سره .

اوبی: لکه د مخه مو چی ګوته ورته ونیوله ورته ټولګی $[r] , r \in R$ ډیری R په پردیو برخډیریو باندې ټوټه یا تجزیه کوي. وي دې

$$[r_1] , [r_2] \in R / Y ,$$

نو دا باید وښوول شي، چی زیاتون

$$[r_1] + [r_2] = [r_1 + r_2]$$

او ځل

$$[r_1] . [r_2] = [r_1 . r_2]$$

د هغو د نماینده توکو څخه خپلواك ایکیوالنځټولګي یا ورته ټولګي دي. که $s_1 , s_2 \in R$ نور د ټولګي $[r_1]$ او همدا ډول د ټولګی $[r_2]$ نماینده ګان وي نو $r - s = y \in Y$ هم دي، د ټولو $i = 1 , 2$ لپاره، د کوم څخه چی لومړی

$$\begin{aligned} [r_1 + r_2] - [s_1 + s_2] &= [r_1 + r_2 - s_1 - s_2] = \\ &= [(r_1 - s_1) + (r_2 - s_2)] \\ &= [y_1 - y_2] = [0] \in R / Y \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راځي. له دې امله زياتون + کره تعريف دی او [0] د ابل د ګروپ R / Y يو صفرتوکی دی او تړنې يا نښلونې يا عمليې + ته.
په R / Y باندې ځل . هم کره تعريف دی ځکه چې

$$\begin{aligned} r_1r_2 - s_1s_2 &= (s_1 + y_1)(s_2 + y_2) - s_1s_2 \\ &= s_1s_2 + y_1s_2 + s_1y_2 + y_1y_2 - s_1s_2 \\ &= y_1s_2 + s_1y_2 + y_1y_2 \in Y \end{aligned}$$

له کوم چې $[r_1] [r_2] = [r_1r_2] = [s_1s_2] = [s_1] [s_2]$ لاس ته راځي. سمې په دې پسې تړلې په دې باور راوړی شي، چې R / Y (د کړی د تعريف سره سم) يوه کړی ده د يوي توکی [1] سره.

۳ . ۷ . ۶ تعريف : دا کړی R / Y د R يو د پاتي- ټولګيو کړی و ايډيال Y ته بلل کيږي.

۳ . ۷ . ۷ تعريف : د کړی R يو ايډيال M ماکزيمال ايډيال بلل کيږي، که M ≠ R باور ولري او Y، د R يو بل ايډيال، موجود نه وي د $M \subset Y \subset R$ سره.

۳ . ۷ . ۸ جمله: R دې يوه کموتاتيوه کړی وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $1 \in R$ سره، نو باور لري:

الف) د R هر اصلي ایدال Y په یوه ماکزیمال ایدیال کي خوندي دی.
ب) که M د R یو ماکزیمال ایدیال وي، نو د پاتیټولګی کړی $F = R / Y$ یو بدن یا تن دی.

اوبی:
الف) دا چی Y د R یو اصلي ایدیال دی، نو $1 \notin Y$ دی.

$$Y \subseteq y_1 \subseteq y_2 \subseteq \ldots \subseteq Y$$

دې د کړی R د ایدیالونو Y_i یو جګیدونکی ځنځیر وي
د $1 \notin Y_i$ سره.، چیرته چي $i \in I$ او I یو اندکس ډیری
یا پیژندډیری دی. وي دې $W = \bigcup_{i \in I} Y_i$ ، نو $u , v \in W$،
د $i \in I$ سره موجود دی د $u , v \in Y_i$ سره، ځکه چی
ایدیال Y_i یو ځنځیر جوړوي. نو لرو $u - v \in Y_i \subseteq W$،
همدا ډول $ur \in W$ لاس ته راځي، د ټولو $u \in W$ لپاره
او $r \in R$. له دې امله W د R یو ایدیال دی، او $1 \notin W$
دی. نود کړی R د ټولو Z ایدیالونو ډیری M د $Y \subseteq Z$
سره، او $1 \notin Z$ سره، د څورن لیما پسی یو ماکزیمالتوکی M
لري. داچی هر اصلي لوي ایدیال $M' > M$ دا یویتوکي 1
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لري او له دې امله $M' = R$ باور لري، نو لاس ته ترې اځي ، چې M د R یو ماکزیمال ایدیال دی. دا Y خوندي لري.

ب) وي دې $[r] \neq [0]$. نو $M + rR$ د R یو ایدیال دی، کوم چې M اصلي خوندې لري. دا چې M د R یو ماکزیمال ایدیال دی، نو باور لري

$$R = M + rR$$

پس د R یوی په $M + rR$ کې پروت دی، دا په دې مانا چې $1 = m + rs$ د توکو $m \in M$ او $s \in R$ لپاره باور لري.

له دې امله $[r][s] = [1] \in R/M$ دی.

او له دې سره $[s] = [r]^{-1}$ دی.

نو پاتې ټولګې کړی یو بدن یا تن دی. څ چ د ښ و

۳ . ۷ . ۹ بیلګې

اول : د ټولګښونو Z په کړی کې Y د ټولو جفتو ګڼونو ډیری ماکزیمال ایدیال دی. پاتیټولګې بدن Z / Y یې د دواړو پاتیټولګیو [0] او [1] څخه جوړ دی. دا نو له دې امله دوه توکی لري او د $Z / 2Z$ سره په نخښه کیږي.

دوم : په پولینومکړی $R = F[X]$ کې په بدن یا تن F باندې د نا ټاکلی یا مجهولی X سره $Y = \{ X f(X) \mid f(X) \in R \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو ماکزیمال ایدیال دی د پاتی ټولګیتن $R / Y \sim F$ سره د مخ ته تیر تعریف له مخی، ځکه چی دی

$$f(X) = f_0 + f_1X + \ldots + f_nX^n \in R$$

نو $[f(X)] = [f]$ په R / Y کي پروت دی. د مرستندوي جملی۳ . ۷ . ۵ له مخی دا ځیرونه $[f_0] \to f_0 \in F$ د بدنونو یا تنونو R / Y او F ترمنځ یو ایزومورفیزم دی.

۳ . ۷ . ۱۰ تعریف: د کموتاتیو کړی R د یویتوکي 1 سره یو توکي u یوون بلل کیږي، که یو $v \in R$ **ځخه** موجود وي د $uv = 1$ سره.

۳ . ۷ . ۱۱ جمله : د یوه توکي $u \in R$ لاندې خویونه ایکویوالنت یا ورته دي

الف) u د R یو یوون دی

ب) R د u ځخه جوړ شوی یا تولید شوی اصلي ایدیال دی ، دا په دې مانا چی $uR = R$.

پ) u د R په هیڅ ماکزیما ایدیال کي خوندي دی یا په بل ډول : په کوم ماکزیمال ایدیالکی خوندي نه دی).

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت یا اوبی: پ) په ساده توګه له ب) څخه لاس ته راځی. که u د R په کوم ماکزیمال ایدیال کی خوندي نه وي، نو د جملي ۳ . ۷ . ۸ له مخی اصلي ایدیال نه دی.
پس لرو $R = uR$ او $1 = uv$ د یو $v \in R$ لپاره، که چیرې الف ښوول شوی وي. دا ایمپلیکیشن $(b) <= (a)$ ساده دی.
ځ چ ښ و (څه چی د ښوولو وو)

۳ . ۷ . ۱۲ تعریف: د کړی R یو ناتش برخڼیری U لاندېکړی بلل کیږي، که د ټولو $u_1, u_2 \in U$ لپاره هم $u_1 - u_2 \in U$ او هم $u_1 u_2 \in R$ باور ولري.

۳ . ۷ . ۱۳ بیلګي:

الف) د R هر ایدیال Y د R یو لاندې کړی ده.

ب) Z د Q یو لاندېګروپ دی، مګر د Q ایدیال نه دی.

پ) د Z د ټولو جفتو ګڼونو ډیری Y د Z لاندې کړی ده. په ځانګړې توګه دا Y داسی لاندې کړی ده، کومه چی یویتوکی نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چی په ټولیزه توګه یوه لاندېکړی U یویتوکی نه لري،
نو ضرور دا ده چی د لاندیکړی د « ایدیال» کلیمه رامنځ
ته کړو.

۳ . ۷ . ۱۴ تعریف : U دې د R یوه لاندې کړیوي.
د U دا ناتشهیری Y د لاندې کړی U یو ایدیال دی، که د
ټولو $y_1 , y_2 \in Y$ لپاره $y_1 - y_2 \in Y$ وي او که $yu \in Y$ د
ټولو $y \in Y$ او ټولو $u \in U$ لپاره باور ولري.

۳ . ۷ . ۱۵ لاسته راوړنی: U دې د R یوه لاندېکړی
وي او Y دې د کړی R یو ایدیال وي. نو باور لري:

الف) $Y_1 = U \cap Y$ د U یو ایدیال دی

ب) $U + Y = \{ r \in R \mid r = u + r$
د ټولو $u \in U$ او یوه $y \in Y$ لپاره$\}$
یوه د لاندېکړی ده.

پ) $(U + Y) / Y$ د پاتیټولګیکړی R / Y ، لاندېکړی ده.

ت) د R / Y د هر لاندېکړی T لپاره

$$T^{-} = \{ r \in R \mid r[r] \in T \}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د R لاندې کړی ده.

ټ) د R/Y د هر ایدیال I لپاره

$$I^{-} = \{ r \in R \mid [r] \in I \}$$

د R یو ایدیال دی، د $Y \subseteq I^{-}$ او $I^{-}/Y = I$ سره.

اوبی: الف) د تعریف ۳ . ۷ . ۱۲ او تعریف ۳ . ۷ . ۱۴ څخه ترلی لاس ته راځي

ب) $r_1 = u_1 + y_1 ,\ r_2 = u_2 + y_2 \in U + Y$ دي،
د $u \in U$ او $y \in Y$ سره، نو لرو

$$r_1 - r_2 = (u_1 - u_2) - (y_1 - y_2) \in U + Y$$

دا چې Y د R یو ایدیال دی نو دا لاندې هم لرو:

$$r_1 \cdot r_2 = (u_1 + y_1)(u_2 + y_2)$$
$$= u_1u_2 + (y_1u_2 + u_1y_2 + y_1y_2) \in U + Y$$

دا نورې ساده د پ) ، ت) او ټ) اوبیونې د کورکار دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ د بول الجبر ، سرکیټ الجبر

۴ . ۱ د بول د الجبر ستګلیمی

په برخه ۱ کی مو د ډیري M برخډیریو ترمنځ ترونونه یا عملی ولوستلی. په دې عملیو کی، که چیرته د ډیري M برخډیریو ترمنځ دوه ځایز اپریشنونه یا کارونی (د ډیریو ترنی) غوڅی ، ټولنه او همداسی کمپلیمنت جوړونه په پوتنځ یا تواندیري باندې یوه «جوړښت» ته سره راټولګه کړي، نو هغه «جوړښت» چی لاس ته راځي، د ډیري M د برخډیریو بول الجبر بلل کیږي. په دې جوړښت کی تشډیری Ø او ټولډیری M یو راوتلی یا کره راوتلی رول لوبوي. د ترونو لپاره مو د مخه په برخه ۱ کی یوه لړی شمیرقوانین کره کړل او په لیست کی مو راوستل.دا ډول شمیرنی د پوره بل ډول شمیرپوهنیزو شیانو لپاره هم باور لري یا کارول کیږي. دا ګټور دې، چی دا ډول شمیرقاعدې لمړی په دې لاس ته راغلی پرپریکندنی یا پریکړي یا لاس ته راغلي نتیجی په عمومی توګه تر څیړنی لاندې ونیول شي. « ټولیز» دلته په دې مانا

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی، چی د عملیي په ډول نه پیچوٸبلکه په هغو توکو، د کومو لپاره چي دا عملیي باور لري. له دې څخه مخ ته ځو، چی د شیا ٸنو یو ډیری مو مخ ته پروت دی د کومو لپاره چي عملیی روښانه یا تشریح دی یا کره شوي دي(یعنی چی یو بل سره « تړلکیدی» شي، د کومو سره چی شمیرنه ممکن وي)، او د دې عملیو سره شمیرنی له لارې، هغه تر څیړنی لاندې نیولي شمیرقوانین باور ولري. له دې څخه په فورمال توگه لاندې تعریف لاس ته راځي. دلته یو دوه ځایزه عملیه یا کارونه یا اپریشن یو تړون یا تړنه ده یو «شمیرقاعده» ده د کوم له مخی، چی له دوه توکو څخه یو دریم توکی لاس ته راځي. (د بیلگي په توگه په گڼونو کي زیاتون یا ځل). یو یوځایزه عملیه له هر توکی څخه یو ټاکلی بل توکی جوړوي (لکه مربع یا د کوم گڼ ریښه یا بهتره ریښه ویستنه).

۴ . ۱ . ۱ تعریف : د بول الجبر د هغو توکو یو ډیری دی ، د کومو لپاره چی دوه دوه ځایزې نخښلونی یا اپریشنونه (عملیي)،غوځی $\cap$ ، ټولنه $\cup$ او یوه یوځایزه عملیه ' کارول کیږي او په هغو کی دوه توکی 0 (په صفر یی په نخښه کوو) او 1 (په یوې باندې په نخښه کیږي) داسی راوتلي یا غوره شوي وي، چی د M د ټولو توکو a , b , c

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره لاندې اړیکې باور لري:

۱ - اسوشیاتیو قانون د $\cap$ او $\cup$ لپاره

$$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$$
$$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$$

۲ - کموتاتیو قانون د $\cap$ او $\cup$ لپاره

$$a \cap b = b \cap a$$
$$a \cup b = b \cup a$$

۳ - رازغمني یا راکښنی یا جذب قانونونه

$$a \cap (b \cup c) = a$$
$$a \cup (b \cap c) = a$$

۴ - دیستریبوتیو قانون

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$
$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$$

۵ - د صفر او یوې خویونه

$$a \cup 0 = a \ , \ a \cap 0 = 0$$
$$a \cup 1 = 1 \ , \ a \cap 1 = 1$$

۶ - د کمپلیمنت یا پوره کیدونکی خویونه

$$a \cup \acute{a} = 1 \ , \ a \cap \acute{a} = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا اړيکي د بول د الجبر اکسيومونه هم بلل کيږي (د اکسيوم تعريف ځما د شميرپوهني کتاب کی ورکړ شوی دی) . موږ تر يوې اندازې زيات اکسيومونه ورکړل، ځکه چی برخسيستمونه شته ، له کومو چی بيا دا نور اکسيو- مونه لاس ته راتللی شي.
په دې برخه کی ددې مينيمالسيستمونو کارونی يا استعمال باندې ځانونه نه مشغولوو، همدومره دلته مهم دی، چی ټول شمير قوانين باور ولري.

که د توان يا پوتنځ ډيری P(M) په پام کی ونيول شي، د هغه د غوڅي ∩ (انگريزي meet)، ټولنه ∪ (join) او کملپليمنت جوړونی سره او Ø = 0 , M = 1 سره نو دا د ∩ پورته تعريف سره سم يو د بول الجبر جوړوي. دا کارول شوي سومبولونه يوونيز يا واحد نورم ته نه دي راوړل شوي. د ∩ لپاره ∧ هم کارول کيږي او د ∪ په ځاي ∨ او د á په ځاي ā هم کارول کيږي.

۴ . ۱ . ۲ بيلګه : يو د بول الجبر بايد تل يو صفر 0 او يو 1 (يوی) خوندي ولري. داکيدی شي ، چی يواځي د 0 او 1 څخه جوړ وي، چی دا يی د بول ساده الجبر دی. وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې 0 او 1 کوم په خوښه سومبولونه. نو په $B=\{0,1\}$ باندې عملیې $\cup,\cap,'$ په لاندې ډول تشریح کیږي:

$$0\cap 0=0,\quad 0\cap 1=0,\quad 1\cap 0=0,\ 1\cap 1=1$$
$$0\cup 0=0,\quad 0\cup 1=1,\quad 1\cup 0=1,\ 1\cup 1=1$$
$$0'=1\quad,\ 1'=0$$

دلته په ساده توګه د بول د الجبر قوانین ازمایل کیدی شي.
له دې سره نو جوړښت یا سترکچر $(B,\cap,\cup,')$ یو د بول الجبر دی د دوه توکو سره .

د بول الجبر راوړل شوو اکسیومونو ته یو بل مهم خوي رامنځ ته کیږي: که په همغه وخت کي اکسیومونه $\cup$ د $\cap$ سره او $\cap$ د $\cup$ سره او 0 د 1 سره بدل شي، په دې ګروپ کی هغه بل اکسیوم لاس ته راځي . وایو: په ګروپ کی ورکړ شوي اکسیو- مونه یو بل ته دوال Dual یا دوه ګونی دي.
د بول الجبر هر خوي کیدی شي ، چی له اکسیومونوڅخه لاس ته راوړل شي، او د بول الجبر د هرې وینا څخه کیدیشي چی نومولي بدلونونه رامنځ ته شي، دا په دې مانا ، چی دوه ګونی وینا وې جوړې شي. « وینا دوګونی کیدنه » .دلته یوه رینښتیا وینا بیرته رینښتیا («د بول د الجبر یوه جمله ») وینا باندې

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلیږي، ځکه چی د سیستم دوه ګونوالی ساتلی پاتی کیږي.
دا د بول د الجبرد دوه ګونی پرینځیپ متن دی: د هرې جملی د ثبوت سره د هغی جملی دوه ګونی هم ثبوت ده.

د بول د الجبر خویونه دې ورکړ شي او په حقیقت کي . د اکسیومونو څخه د لاس ته راوړنو په څیر .

۱ – باور لري $a = a \cap a$ او $a = a \cup a$ د بول د الجبر ټولو توکو a لپاره

اوبی: دی

$$a = a \cap 1 = a \cap (a \cup a') = (a \cap a) \cup (a \cap a')$$
$$= (a \cap a) \cup 0 = a \cap a$$

د $a = a \cup a$ لپاره ښوونه د دوه ګونوالی څخه لاس ته راځي .

۲ – د a کمپلیمنت 'a د ورکړ شوو خویونو سره یواځنی ټاکلی دی، دا په دې ماناچي باور لري $a \cap c = 0$ او $a \cup c = a$ نو دی $c = a'$.

اوبي: لمړی دی

$$a' = 0 \cup a' = (a \cap c) \cup a' = (a \cup a') \cap (c \cup a') = c \cup a'$$

او د دې سره دوه ګوني هم $a' = c \cap a'$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله

$$a' = c \cap a' = c \cap (c \cup a') = c$$

دی . څه چی د ښوولو وو (لنډ: ځ ښ وو).

۳ – صفر 0 او يوی 1 په بول الجبر کی يواځني ټاکلي دي،
دا په دې مانا چی دا يواځني تو کی دي، د هغو خويونو
سره، چی په ټکی ۵ کی ورکړ شوي دي.

اوبی : د يوه توکی n لپاره دې د بول د الجبر د ټولو توکوa
لپاره باور ولري $a \cup n = a$ او $a \cap n = n$. که د $a = 0$ لپاره
کيږدو، نو لاس ته راځي $0 \cup n = 0$.له بلی خوا هم $0 \cup n = 0$
او له دې امله $n = 0$ دی. د 1 لپاره اوبيونه د دوه ګونوالی
څخه لاس ته راځي.

۴ – باور لري $(a')' = a$ د ټولو توکو a لپاره. دا له $a' \cap a = 0$
او $a' \cup a = 1$ څخه لاس ته راځي او د کمپليمنت د
يواځنوالی څخه.

۵ – د دې مورګان De Morgan قانون

$$(a \cup b) ' = a' \cap b ' \quad \text{او} \quad (a \cap b)' = a' \cup b'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت : د دوه ګونپرینځپ له لارې بسیا کوي، که یواځې یوه له دې دوه ګونو ویناو څخه وښایو. دبیلګې په توګه کینه. د دې لپاره لاندې شمیرقوانین کاروو:

$$(a \cup b) \cup (a' \cap b') = ((a \cup b) \cup a') \cap ((a \cup b) \cup b') =$$

$$= ((a \cup a') \cup b') \cap (a \cup (b \cup b')) = 1 \cap 1 = 1$$

او

$$(a \cup b) \cap (a' \cap b') = (a \cap (a' \cap b')) \cup (b \cap (a' \cap b')) =$$

$$= ((a \cap a') \cap b') \cup ((b \cap b') \cap a') = 0 \cup 0 = 0$$

د دوارو مساواتځنځیرڅخه په ګډه لاس ته راځي،

چې $a' \cap b'$ د $a \cup b$ کمپلیمنت دی.

۶ – د اسوشیاتیو و کموتاتیو قوانینو او له

$$a = a \cup a = a \cap a$$

څخه لاس ته راځي: د غوښې (ټولنی) جوړولو نتیجه

په یوه توکو پای ډیرې کی، د لړیپرلپسی څخه خپلواك دی او له دې هم خپلواك دی، چې یو توکي یواځې یوځل او که یا زیات رامنځ ته کیږي. زیاتون نخښې ته ورته لیکل کیږي: $\bigcap_{i=1}^{n} a_i$ همداسی د $\bigcup_{i=1}^{n} a_i$

د ټولو $a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n$ لپاره، همداسی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n$ لپاره.

۷ – ډيستريبوتيو قانون هم ټوليز کيدی شي او په رينښتونی داسی

$$\left(\bigcup_{i \in I} a_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} b_j\right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (a_i \cap b_j)$$

او

$$\left(\bigcap_{i \in I} a_i\right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} b_j\right) = \bigcap_{i \in I, j \in J} (a_i \cup b_j)$$

چيرته چی I او J پاي اينډکسډيري (پيژندډيري) دي

۸ – له $a \cap x = a \cap y$ او $a \cup x = a \cup y$ لاس ته راځی $x = y$

ښوونه : باور لري

$$x = x \cap (x \cup a) = x \cap (y \cup a) = (x \cap y) \cup (x \cap a) =$$
$$(x \cap y) \cup (y \cap a) = y \cap (x \cup a) = y \cap (y \cup a) = y$$

پای.

موږ دلته د بول الجبر ، لکه چی په پيل کی وويل شو، د يوه ذهني نظر له لارې تر څيړنی لاندې نيسو، په دې کی چی موږ د توکو په ډول (چی څه شی دی) کی خپله علاقه نه ګورو، بلکه يواځي دا علاقه لرو، چی له دې توکو سره څنګه شميرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي. له دې امله د بول الجبرونو M_1 او M_2 ترمنځ یو بییکتیوه څیرونه داسی موجوده ده، چی د M_1 دوه توکو ټولنه (غوڅي) د تنظیم شوو توکو ټولنه (غوڅي) تنظیم دي، او د هر توکي کمپلیمنت د ورسره تنظیم شوي توکی کمپلیمنت دی، نو په دې توګه کیدی شي ، چی دواړه الجبرونه «سوچه شمیریز» مساوي و لیدل شي. یو داسی بییکتیو څیرونه $f : M_1 \longrightarrow M_2$ لکه د مخه مو چی هم ګوته ورته نیولی ایزمورفیزم Isomorphismus نومیږي او دا راوړل شوي شرایط لنډ په لاندې ډول دي. د ټولو $a , b \in M_1$ لپاره باور لري:

$$f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$$
$$f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$$
$$f(a') = f(a)'$$

د دې سره په کینې لور '، $\cup$، $\cap$ د M_1 عملیي او په ښي لور د M_2 عملیي. نخښلونی یا کارونی دي.

د نور الجبرونو په څېر یا خلاف کیدی شي، چی په ټولو (پای) د بول الجبرونو باندې په ساده توګه یو د یوه پام یا نظر امکانات برابر شي. د داسي یوه پاملرنی ته دوه د بول الجبرونه باید برابر وکتل شي، که د دوي ترمنځ یو ایزومور-

(c) ketabton.com: The Digital Library

فیزم موجود وي، یعنی که دا ایزمورف وي. دا لاندې مهمه جمله باور لري، چې ثبوت لپاره یی په لیو (LIU 1977) حواله ورکوو .

۴ . ۱ . ۳ **جمله** : هر یو پای د بول الجبر د یوه پای ډیري M د برخډیریو څخه جوړ د بول د الجبر سره ایزومورف دی . په ځانګړي توګه د یوه پای بول د الجبر توکو ګڼون تل د 2^n فورم یا ډول دی ، او هر دوه پای د بول الجبرونه د برابر ډیرو توکو سره یو د بل سره ایزومورف دي.

که څه هم موږ د پای بول الجبرونو سره سر او کار لرو، دا باید په ګوته شی، چې په پورته جمله کی ورکړ شوي خویونه یا کرکتریي د ناپای ډیرو توکو ډیري لپاره باور نه لري . ناپای ډیر د بول الجبرونه شته، کوم چې د ډیري د ټولو برخډیریو د الجبر سره ایزومورف نه دي. د دې لپاره چې ټولی ناپای ډیر د بول الجبرونه کرکتریزه کړی شو، لاندې کلیمو ته اړ یو. M دې یو ډیری وي. یو سیستم K د M برخډیریو ډیریبدن یا ډیریتن بلل کیږي، که K د A, B سره $A \cap B$ او $A \cup B, A \cap B$ هم خوندي ولري.
د بیلګي په توګه ټول د تواندیری ډیریتن دی. K دې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډيري M برخه‌يريو يو ډيريتن وي، د M ∈ K سره.
په K باندې کیدی شي بیا یو بول الجبر توضیح شي، په
کوم کي چی ⊔ د ټولنی ،⊓د غوڅی ، تشه‌یری Ø د
صفر ، یو ډیری M د یوې ډیری، A' د A ∈ K
کمپلیمنت M - A سره نیسی ، یعني دا ډيري تیوریتیکي
کومپلیمنت. داسی یو الجبر ډیریبدن الجبر هم بلل کیږي او
په ټولیزه توګه د M هر برخه‌یری خوندې نه لري. اوس دا
لاندې جمله باور لري، چی د ثبوت لپاره دې
GRÄTZER(1977) وکتل شي.

۴ . ۱ . ۴ جمله : (د ستېون Stone جمله) هر د بول
الجبر د ډيريتن الجبر سره ایزومورف دی.

د بول د الجبر کرکتریزه کولو سره په اړوند ، کیدی شي چی
د بول د الجبر سیده ځل ګټور وکارول شي یا استعمال شي.

۴ . ۱ . ۵ تعریف : V او W دې دوه د بول الجبرونه
وي، چی د هغی بنستېیز ډيري هم په V او W سره په نخښه
کوو. نو دا د V او W سیده ځل V×W د بول الجبر دی
د ټولو منظمو جوړو (v,w) په ډيري، چی v ∈ V

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $w \in W$ وي، د لاندي عمليو سره

$$(v,w)\cap(v_1,w_1) = (v \cap v_1, w\cap w_1)$$
$$(v,w)\cup(v_1,w_1) = (v \cup v_1 , w\cup w_1)$$
$$(v,w)' = (v',w')$$

او د صفر توکی (0,0) او د يوي توکي (1,1) سره، چی د V او W همغه مساوي توکي دي.

د دې ښوونه دې د گرانو لوستونكو دنده وي، چی وښايي، چی سيده ځل V×W په ريښتيا دبول الجبر دی.

اوس دې B د بول الجبر وي په دوه توكو باندې، يعني $B = \{0,1\}$ د ترونونو

$$0 \cap 0 = 0 , \quad 0 \cup 1 = 1 , \quad 1 \cup 1 = 1$$
$$1 \cap 1 = 1 , 1' = 0 , 0' = 1$$

سره. د B^n لاندې، دا n–ځله، د B دخپل ځان سره سيده ځل پوهيږو. د B^n توکی منظم n–گونی دي له توکو 0, 1 او د بول ترونونو کمپوننت ډوله تشريح شوي. دا په دې مانا چی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a_1, ..., a_n) \cap (b_1, ..., b_n) = (a_1 \cap b_1, ..., a_n \cap b_n)$$
$$(a_1, ..., a_n) \cup (b_1, ..., b_n) = (a_1 \cup b_1, ..., a_n \cup b_n)$$
$$(a_1, ..., a_n)' = (a_1', ..., a_n')$$
$$1 = (1, ..., 1)$$
$$0 = (0, ..., 0)$$

د بیلګې په توګه د $n = 5$ لپاره باور لري

$$(0,1,0,1,0) \cup (1,0,1,1,0) = (1,1,1,1,0)$$
$$(0,10,10) \cap (1,0,0,1,1) = (0,0,1,1,0)$$
$$(1,1,0,0,1)' = (0,0,1,1,0)$$

له دې بیلګې لیدل کیږي، چې په B^n کی ساده شمیرنه کیدی شي. له بلی خوا د B^n توکو ګڼون 2^n دی او د جملی ۴ . ۱ . ۳ هر د بول الجبر د 2^n توکو سره د B^n سره ایزومورف دی. د بول الجبر د څیړنی لپاره کیدی شي، چی دا د الجبر درس په B رالنډ کړي.

۴ . ۲ . د بول فنکشنونه او پولینومونه

مو ږد فنکشنونو لپاره، د ترونونو په تعریف پیل کوو، چی ارزښتېدیری یې د بول الجبر وي. دلته دې M یو په خوښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډیری وي او V دې یو د بول الجبر. د دوه ځیرونو

$f, g : M \longrightarrow V$

لپاره لاندې عملیې ∩ ، ∪ تشریح کوو، د

$$(f \cap g)(x) = f(x) \cap g(x) \quad , x \in M$$
$$(f \cup g)(x) = f(x) \cup g(x) \quad , x \in M$$

سره ، او همداسې یوکمپلیمنتجوړښت د

$$f'(x) = (f(x))' \quad , x \in M$$

سره.

د دې تعریفونو ښی اړخ پوره یا ټیك تعریف دی، ځکه چې f(x) او g(x) د V توکی دي او له دې امله ∩، ∪ موخه ور یا هدفمند دي. اوس په ساده توګه شمیرل کیږي، چې د ټولو د M په V کی ځیرونو ټولګه له دې سره یو د بول الجبر کیږي، چې د هغه صفر توکي د ځیرونه f ده، د f(x) سره، ټول $x \in M$ او د هغی یوي توکي د ځیروني f له لاري ځخه د f(x) سره، ټولو $x \in M$ دي.

یو ځانګړی حالت هلته لرو که ډیری M د V د n–ځله د خپل ځان سره سیده ځل وي. موږ غواړو ټولی د V^n ځیرونی په V کی د $A_n(V)$ سره په نخښه کړو او دا $A_n(V)$ د n– ځایزې د بول فنکشنونه په V باندې نومو یا بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هره د f ځیرونه له $A_n(V)$ هر n–ګونی $(v_1,...,v_n)$ چی د V له n توکو څخه جوړ وي، د V په یوه توکی $f(v_1,...,v_n)$ تنظیموي. د دې ځیرونو لاندې یی ثابتی ځیرونی او پرویکشنونه د ځانګړو ماناو یا اهمیت دي. یوه ثابته ځیرونه د ټولو$(v_1,...,v_n)$ لپاره همغه فنکشن ارزښت لري. یو i–ام پرویکشن x په لاندې توګه تعریف دی

د ټولو $(v_1,...,v_n) \in V^n$ لپاره , $x_i(v_1,...,v_n) = v_i$

یادونه : موږ دا ستونځې لرو، چی د شمیرپوهنې لیکنه کې کله کله د کینې وښی لور ته او بیا بیرته له ښي وکینې لور ته لوستل کیږي، نو کیدی شي ، چی داپورته داسی هم ولیکل شي: د ټولو $(v_1,...,v_n) \ni V^n$ لپاره

دا دا مانا لري چی : ځیرونه x_i (داهم تر یوې اندازې ورسره نا بلد کار دی، چی فنکشن په x_i ښایو، خو فکر کوم، چی کومی ستونځي به د دې سره مل نه وي) هر n–ګونی د هغه په i– ام کمپوننت تنظیموي. له ثابتو ځیرونو او پرویکشنونو یا پریوستونونو د ∩، ∪ ، / ' عملیو. نخښلونو یا کارونو په مرسته یوه ځانګړې n–ځایز د بول فنکشنونو، مهم ټولګی د بول پولینومونه جوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ . ۲ . ۱ تعریف : هره څیرونه $f : V^n \longrightarrow V$ ، کومه چی په $A_n(V)$ د پاي زیاتو د عملیو $\cap, \cup, '$ کارونو یا استعمال څخه، له ثابتو او پرویکشنونو، لاس ته راوړي، د بول n – ځایز پولینوم فنکشنونه بلل کیږي.

۴ . ۲ . ۲ بیلګه : که ثابت فنکشن په ساده توګه د هغه د ارزښت سره وښایو، داپه دې مانا چی د V د یوه توکی په څیر ، نو

$$(a\cap x_1)\cup(b\cap x_2\cap x_3\cap x_4)\cup(x_1\cap x_2)'$$

یو د بول پولینومفنکشن $P : V^4 \longrightarrow V$ انځوروي: دکوم لپاره چی باور لري

$$P(v_1,v_2,v_3,v_4) = (a\cap v_1)\cup(b\cap v_2\cap v_3\cap v_4)\cup(v_1\cap v_2)'$$

دلته a,b د V په کلکه ځاي په ځاي توکی دي.

یو د بول پولینوم فنکشن د یوې افادي له لارې کره ټاکلی دی، چی له ثابتو (له V څخه) او پرویکشنونو x څخه د $'$ ، $\cap$ ، $\cup$ له لارې جوړ وي. داسی یوه افاده د بول پولینوم بلل کیږي او دا یو د شمیرنی قانون د فنکشن ارزښت ټاکنی یا تعین لپاره راکوي، که د x لپاره i –ام

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپوننت یو n–ګونی له V^n څخه کیښوول شي. دا شمیرنه په رابندیزه توګه په V کې باور لري او دا توکي $P(v_1,...,v_n) \in V$ راکوي. د پولینوم (= افاده) او په دې پورې اړوند پولینومفنکشن(=څیرونی) ترمنځ باید ټیك توپیر وشي. اړیکی « پولینوم» د دې بول د فنکشن لپاره دا لاس ته راکوي، چې له $x_1,...,x_n$ او ثابتو څخه د ' ، $\cap$ ، $\cup$ سره ټیك راجوړي دي یا بهتره په دې باندې جوړې دي، لکه څنګه نور رییل پولینومونه د نښلونو + , * او – سره، چې نمونه یې ده

$$p(x) = a_0 + a_1x + ...+a_nx^n$$

دلته x له یوه بنسټیزې څخه دی او a_i د ټولو $i \in I$ لپاره یو رییل ګڼ دی.

دوه د بول مختلف پولینومونه په کوم کې چې x او کومی ټاکلی ثابتی، او ' ، $\cap$ ، $\cup$ کېږی شي ، چې هغه پولینومونه وټاکی: دبیلګی په توګه د $x \cup (a \cap x)'$ او $x \cup (a' \cup x')$ لپاره همغه حالت دی. که دوه داسی پولینومونه له مخه ورکړ شوي وي، نو مهمه ده چې وڅېړل شي یا پریکړه په وشي، چې ایا د دوې سره برابر فنکشنونه مساوي دي. دا داسی پیښیږی، چې د هر پولینو–

(c) ketabton.com: The Digital Library

مفنکشن f لپاره یو نورمالفورم N(f) د یوه ټاکلی افادې په ځیر داسی ورکول کیږي، چی د $f_1 \mid= f_2$ لپاره $N(f_1) \mid= N(f_2)$ باور ولري. برسیره پردې یوه تګلار ورکول کیږي، دکومې سره چی هر پولینوم په نورمالفورم ترانسفورمي کیدی شي. نو بیا دوه پولینومونه ټیك هلته همغه پولینومفنکشن دی، کله چی د هغوی نورمالفورم یو له بل سره پریوزي. دا پروګرام اوس غواړو پلی کړو.

۴ . ۲ . ۳ تعریف: ویل کیږي، چی یو n– ځایزه پولینوم په دیسیونکتیو نورمالفورم (disjnktiver Normalform) یا نورمالبڼه دی، که دا د لاندې فورم یا بڼی وي:

$$P = \bigcup_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \ldots \cap x_n^{i_n}$$

د دې سره $a_{i\ i\ \ldots i} \in V$ دی، د ټولو $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ لپاره، هر $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ یو n–ګونی دی له ۱ او ۱– سره، او ټولنه یی په دې ټولو 2^n n –ګونو غزول کیږي، چیرته چی x_i^1 د x_i او x_i^{-1} د x_i' لپاره ځاي په ځای یا ځایول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته قانونیت یا قرارداد سره د هر پولینوم P کونیو-نکتیو نورمالفورم بلل کیږي، دلاندې ډول سره:

$$P = \bigcap_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cup x_1^{i_1} \cup x_2^{i_2} \cup \ldots \cup x_n^{i_n}$$

که یو ځانګړی دیسیونکتیو نورمالبڼه ولیکل شي، نوټول غړي به د دیسیونکتیو نورمالفورم سره $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0$ له لیکلو پرېښوول شي یا صرف نظر به پرې وشي، ځکه چې دا په نتیجه کوم تاثیر نه پرېباسي. په ورته توګه دا د دیسیو-نکتیو نورمالفورم لپاره باور لري، که $a_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 1$ وي.

۴ . ۲ . ۴ بیلګه : یو پولینوم په دیسیونکتیو نورما-لفورم دی (د $a,b,c,\ldots \in V$ سره):

$$(a \cap x_1 \cap x_2' \cap x_3) \cup (b \cap x_1' \cap x_2 \cap x_3') \cup$$
$$(c \cap x_1' \cap x_2' \cap x_3) \cup (d \cap x_1' \cap x_2' \cap x_3')$$

لاندې یو کونیونکتیو نورمالفورم دی:

$$(a \cup x_1 \cup x_2 \cup x_3) \cap (b \cup x_1 \cup x_2' \cup x_3) \cap$$
$$(c \cup x_1 \cup x_2 \cup x_3') \cap (d \cup x_1' \cup x_2 \cup x_3) \cap$$
$$(e \cup x_1' \cup x_2' \cup x_3')$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ . ۲ . ۵ جمله : هر د بول پولینومفنکشن

$P : V^n \longrightarrow V$ لپاره ټیك یو دیسیونکتیو نورمالفورم موجود دی. نو په دې توګه ټیك یو د بول پولینوم لاس ته راځي، کله چې ټول دیسیونکتیو نورمالفورمونه جوړ شي. په همدې توګه (دوه ګوني) ویناد کونیونکتیو نورمالفورم لپاره هم باور لري.

د دې جملې د ښوونې څخه هم دلته تیرېږو، دا په نورو ادبیاتو کې شته(دا دې ګران لوستونکي په پام کې ونیسي، چې دا به ځما پوره وخت ونیسي که دا هرڅه راوګورم. ځما هدف همدومره دی، لکه چې په نورو ځایونوکې مې هم ګوته ورته نیولی، دا بنستېيز څه راټول کړم)

د نورمالفورم د څېړلولپاره کله کله لاندې خویونه (قاعدې) ګټورې دي، کومې چې په نورمالفورم کې د $0,1 \in V$ « ځایونو یا ایښوونو » له لارې لاسته راوړل کیږي. څکه چې د بیلګي په توګه $x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \dots \cap x_n^{i_n}$ یواځې د n -ګونو لپاره له $0 , 1 \in V$ نا مساوي 0 دي(په ریښتونی مساوي په 1)، په کوم کې ، چې $x_j = 1$ د $i_j = 1$ لپاره او $x_j = 0$ د $i_j = -1$ لپاره دی، یعنی د دې n–ګونی

$(1^{i_1}, 1^{i_2}, \dots, 1^{i_n})$ لپاره .

(c) ketabton.com: The Digital Library

قاعده ۱ : كه دا لاندې

$$\bigcup_{(i_1, \ldots, i_n)} a_{i_1 \ldots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap \ldots \cap x_n^{i_n}$$

د بول د پولينوم فنكشن $P \in A_n(V)$ ديسيونكتيو نورمالفورم وي، نو د $1^1 = 1 , \bar{1}^1 = 1' = 0$ سره باور لري

$$a_{i_1 \ldots i_n} = P(1^{i_1}, \ldots, 1^{i_n})$$

د ټولو $(i_1, \ldots, i_n)$ لپاره.

نو د بيلګي په توګه د $n = 3$, لپاره دی:

$$a_{1,-1,1} = P(1,0.1), \quad a_{-1,-1,-1} = P(0,0,0),$$
$$a_{1,1,1} = P(1,1,1)$$

ددې اړيكو وروسته د P د ديسيونكتيو نورمالفورم د ټاكلو لپاره بسيا كوي، كه 2^n د P فنكشن ارزښتونه په ټولو n–ګونو کی له 0 او 1 (د V څخه) راپيدا كړو.

ليدوږ دا لاس ته راوړنی د $n = 2$ لپاره د P ديسيونكتيو نورمالفورم په لاندې توګه راكوي:

$$P = (P(1,1) \cap x_1 \cap x_2) \cup (P(0,1) \cap x_1' \cap x_2) \cup$$
$$(P(1,0) \cap x_1 \cap x_2') \cup (P(0,0) \cap x_1' \cap x_2')$$

د دې سره د ديسيونكتيو نورمالفورم لپاره دوه ګوني نتيجه

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې توګه ده:

قاعده ۲ : که

$$\bigcap_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} \cup x_1^{i_1} \cup \dots \cup x_n^{i_n}$$

د بول د پولینومفنکشن P دیسیونکتیو نورمالفورم وي،
نو د $1 = 0' = 0^{-1}$, $0^1 = 0$ سره باور لري

$$a_{i_1 i_2 \dots i_n} = P(0^{i_1}, 0^{i_2}, \dots, 0^{i_n})$$

د بیلګي په توګه د $n = 3$ لپاره دی :

$$a_{1,1,-1} = P(0,0,1) \quad \text{او} \quad a_{-1,-1,1} = P(1,1,0)$$

پخوا له دې چی موږ د نورمالفورم ترانفورمیشن لپاره تګلار روښانه کوو، یا لیکو، نو د مختلفو څیرو ګڼون (تعداد یا شمیر) دې ورکړ شي. دلته طبعاً بول الجبرونه پای دي.
که V تیك $2^k = m$ توکي ولري، نو $A_n(V)$ لکه چی پوهیږو $m^{(m)^n}$ توکی لري، ځکه چی V^n تیك m^n توکی لري. د بول پولینومفنکشن ګڼون د دې په څټ m^{2^n} دی، کوم چی سملاسی د نورمال فورم په څیر انځوروني څخه لاس ته راځي، ځکه چی د دلته 2^n ځلووني یا ضریبونه $a_{i_1 \dots i_n}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په خوښه د m توکو سره (له V څخه) ځاینیونکی یا ځاي په ځاي کیدی شي. که $m > 2$ وي، نو په ټولیزه توګه کم پولینومفنکشنونه موجود دي نسبت و څیرونو ته. که $m = 2$ وي، کوم چې د کارونی یا استعمال لپاره مهم حالت انځوروي، نو بیا دواړه ګڼونه مساوي دي، په نامه 2^2 سره . له دې لاس ته راځي

۴ . ۲ . ۶ جمله: که $B = \{0,1\}$ دوه توکیزه د بول الجبر وي، نو هر n – ځایز د بول فنکشن ، یو د بول پولینومفنکشن په څیر انځورږدی.

اوس د دیسیونکیو نورمالفورم د راپیداکولو تګلار و یوه پولینومفنکشن P ته، په P باندې لاندې پلونه کارول کیږي:

۱ – د دې مورګان de Morgan قاعدې د استعمال له لارې ټول کمپلیمنت ' جوړښتونه ترلي x_i ته راوړل کیږي، همداسی ثابتو ته راوړل کیږي.

۲ – د دسیتریبوتیو قانونه کارونی یا استعمال سره سم P د غوڅیو ټولنی ته راوړل کیږي. په دې فورم کی په ټولیزه توګه ځنی «زیاتووني» (د x_i او x_i' غوڅي دي) یو څو x_i ورکیږي، مګر د هر i لپاره په یوه زیاتووني کی

(c) ketabton.com: The Digital Library

زیات تر زیاته یو له x_i او x_i' رامنځ ته یا راڅرګندیږي.

۳ – که د دیسیونکشن په یوه زیاتون کی یو x_i ورك شي، نو $x_i' \cup x_i$ په دې زیاتون کی د یوه «فاکتور» په څیر ورزیاتیږي(دا اړوند پولینومفنکشن نه تغیروي، ځکه چی $x_i' \cup x_i$ تل 1 ورکوي)

۴ – په دې داسی تغیر شوې زیاتوونی باندې تر هغی پورې دیستریبوتیو قانون کارول کیږي یا استعمالیږي، تر څو چی بیرته د غوڅیو ټولنه رامنځ ته شي یا راپیدا شي. دا د برابرو زیاتونونو د ټولګی (دا په دې مانا، چی چیرته چی همغه x_i کمپلیمنت شوی وي او یا نه وي کمپلیمنت شوی) او دیسیونکتیو نورمالفورم ترتیبوو (بیرته د دیستریبوتیو قامون د کارْنی لاندې) ، که چیرې ممکن دا ورك زیاتوونی(د x_i او x_i' غوڅی) د ځلوونو 0 سره تکمیل شي.

دا روښانه ده، چی د ټول هغه بڼه اړونی یا فورمبدلون سره، چی همغه مطلوب پولینوم پورې اړه لرونکی پولینوم فنکشن، همغه پولینومفنکشن لکه پخپله P دی. په ریښتونی سره له دې امله د پولینومفنکشن نورمالفورم وP ته لاس ته راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ . ۲ . ۷ **بيلګه** : P دې په V باندې په لاندې توګه دوه ځايز پولينومونه وي

$$P = ((a \cap x_1) \cup (b \cap x_2)')' \cup (x_1 \cup b)'$$

د $a,b \in V$ سره

لمړی پل :

$$((a' \cup x_1') \cap (b \cap x_2)) \cup (x_1' \cap b')$$

دوم پل :

$$(a' \cap b \cap x_2) \cup (b \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1')$$

دريم پل

$$(a' \cap b \cap (x_1 \cup x_2') \cap x_2) \cup (b \cap x_1' \cap x_2) \cup$$
$$\cup (b' \cap x_1' \cap (x_2 \cup x_2'))$$

څلورم پل

$$(a' \cap b \cap x_1 \cap x_2) \cup (a' \cap b \cap x_1' \cap x_2) \cup$$
$$\cup (b \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1' \cap x_2')$$

د

$$(b \cap x_1' \cap x_2) \cup (b' \cap x_1' \cap x_2) = (1 \cap x_1' \cap x_2)$$

له امله، د نورمالفورم په بڼه لاس ته راځي:

$$((a' \cap b) \cap x_1 \cap x_2) \cup (1 \cap x_1' \cap x_2) \cup (0 \cap x_1 \cap x_2') \cup$$
$$\cup (b' \cap x_1' \cap x_2')$$

لوستونکي دې دا نتیجی د قاعدې ۱ سره و ازمایي.

په پای کي دې n – ځایز ځانګړی د بول فنکشنونه په $B = \{0,1\}$ باندې وڅیړل شي، کوم چی همدا اوس د n– ځایز پولینومونو له لارې ، د مخه تیرې جملی سره سم راونیول کیدی یا لاس ته راتلی شي.

که P یو داسی پولینوم وي، نو P هر n–ګونی د 1 , 0 یا په 0 او یاپه 1 تنظیموي. په دیسیونیکتیو (کونیونکتیو) نورمالفورم کی ځلووني هم یا 0 او یا 1 دي او لاندې پریکړه کوو: په دیسیونکتیو نورالفورم کی ټول زیاتووني یانی $a_{i_1 i_2 \dots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \dots \cap x_n^{i_n}$ د ځلونو $a_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0$ سره پریښوول کیږي او ځلوونی 1 نه لیکل کیږي. په کونیونکتیو نورمالفورم کی به ټول فاکتورونه (دا اوس ټولنه $x_1^{i_1} \cup x_2^{i_2} \cup \dots \cup x_n^{i_n}$ ده) د ځلونو $a_{i_1 i_2 \dots i_n} = 1$ سره پریښوول کیږي یعنی صرف نظر پري کیږي او ځلوونی 0 نه لیکل کیږي. دا چی 1 او 0 د $\cup$ او $\cap$ لپاره ناپیلی یا بیتاثیره توکی دي، نو د هغه نورمالفورم باندې لیکلي پولینوم کی تغیر نه راځي . په هر حالت بیا

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثابت فنکشن د 0 ارزښت سره (داسی ليکوړ دی) ديسيونکتيو نورمالفورم نه لري. او ثابت فنکشن د ارزښت سره کوم کونيونکتيو نورمالفورم نه لري.

۴ . ۲ . ۸ بيلګه: د لته دې ۳ -ځايز فنکشن

$P: B^3 \longrightarrow B$ د لاندې جدول سره ورکړ شوی وي:

x_1	x_2	x_3	P
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

د قاعدې ۱ سره سم د P ديسيونکتيو نورمالفورم د لاندې سره برابر دی.

$$(x_1 \cap x_2 \cap x_3) \cup (x_1 \cap x_2 \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2 \cap x_3) \cup$$
$$\cup (x_1' \cap x_2 \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_3')$$

ديسيونکتيو نورمالفورم د هر فنکشن ارزښت ۱ لپاره يو زياتوونی خوندي لري، په کوم کی چی x_i ولاړ دی ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $x_i = 1$ وي، او x_i' ولاړ وي، که $x_i = 0$ وي(په ورته توګه n– ګونی $(x_1,x_2,...,x_n)$ د فنکشن ارزښت 1 سره) . که x_i د یوه شرط په څیر ونیول شي$(x_i = 1)$ نو بیا « شرطونه پوره دی » بلل کیږي، $x_i = 0$ په همدې توګه « شرطونه نه دې پوره» بلل کیږي) ، نو په دې توګه دیسیونکتیو نورمالفورم د ټول کمبینیشنونو یو لیستونه یا یوجوړشوی لیست راکوي د ټولو n شرطونو x_i سره ، په کومو کی چې 1 د فنکشن ارزښت په څیر لاس ته راځي: $x_1 \cap x_2 \cap x_3'$ په همدې توګه x_1 او x_2 پوره دې او x_3 پوره نه دی.

د قانون ۲ د کونیونکتیو نورمالفورم P د لاندې سره برابر دی :

$$(x_1' \cup x_2 \cup x_3') \cap (x_1' \cup x_2 \cup x_3) \cap (x_1 \cup x_2 \cup x_3')$$

کونیونکتیو نورمالفورم د هر فنکشن ارزښت 0 لپاره یو فاکتور خوندې لري، په کوم کی چې x_i ولاړ دی یا ځای دی، که $x_i = 0$ وي او x_i' ځای په ځای وي ، که $x = 1$ وي (په همدې توګه n – ګونی $(x_1 , ...x_n)$ له B^n څخه د فنکشن ارزښت 0 سره) . کونیونکتیو نورمالفورم پس د کمبینیشن د شرطونو یو لیست جوړونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ده، د کومو لاندې چې 0 د فنکشن ارزښت په ځير لاس ته راځي : $x_3' \cup x_2 \cup x_1'$ په دې مانا دې، چې x_1 يا x_2 پوره دي او يا x_3 پوره نه دی.

په الجبر $A_n(B)$ کی د $A_n(B)$ څخه ديوه د مخه ورکړ شوي پولينوم فنکشن P کمپليمنت 'P څنگه ټاکل کيږي؟ د ورکړ شوې قانونمندی له مخی د دې لپاره په ساده توگه P په يوه ديسيونکتيو نورمالفورم انځوروي، بيا نو 'P ټيك د غوځيو ټولنه ده، کومه چې د P په نورمالفورم کی نه رامنځ ته کيږي(يعنی 0 ځلوونی لري).
په ورته توگه د ديسيونکتيو نورمالفورم لپاره هم مخ ته تللی شو.

۴ . ۲ . ۹ بيلگه : د اخرنی بيلگی څخه د پولينوم فنکشن P لپاره د 'P ديسيونکتيونورمالفورم په لاندې توگه ورکړ شويدی.

$$(x_1 \cap x_2' \cap x_3) \cup (x_1 \cap x_2' \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_3)$$

پام دې وي، چې $(p')' = P$ دی او د دېمورگان قانون له مخی د يوه ديسيونکتيونورمالفورم کمپليمنت کونيو- نکتيو نورمالفورم دی، نو گورو، چې د د ديسيونکتيو

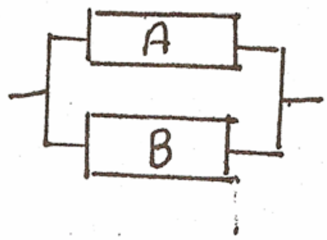
(c) ketabton.com: The Digital Library

نورمالفورم 'P ځخه کونیونکتیونورمالفورم P د کمپلیمنت
دجوړولو له لارې لاس ته راوړي،

۴ . ۳ سویچ الجبر یا بریښنا جیریان الجبر

په بریښنايي یا برقي سرکیټونو (Schlatkreise (En. circuit (یا بریښناجیریانکړی یا په ساده توګه :بریښنادوران) کی سویچ د بریښنا اړیکو یا بریښنا تړونونو کی، د وازولو او بندولو لپاره دنده په غاړه لري. موږ دلته دوه ګوني دوه اړیکیز سویچونه تر ځیړنی لاندې نیسو، کوم چی په بند حالت کی برق جیریان په دواړو لورو ممکنوي. د سویچ حالت کیدی شي بند یا واز وي، یعنی ټیك دوه ارزښتونه نیولی شي. واز سویچ سره ارزښت 0 تنظیمو او بند تړلي سویچ سره ارزښت 1 تنظیمو، داسی چی 0 په دې مانا دی ، چی«برق نه شته یا برق جریان نه لري» او 1 دا مانا لري، چی« برق جریان لري» . دلته 0,1 د سویچ ارزښتونه هم بلل کیږي.

کیدی شي، چی سویچونه په زیاتو ډولونو یوه سرکټ ته سره یوځاي کړی شي. دلته خورا مهم یی هغه سرکیټري circuitary دی، چی د پایډیرو غبرګسرکیټریو یا همداسی سیریالسرکیټریو په ځیر جوړ شوي وي. په ټولیزه توګه سویچونه هغه جوړښتونه وي ،کوم ، چی«واز» یا « بند یعنی تړلی» کیدی شي.



ځیره

(c) ketabton.com: The Digital Library

که A او B دوه سويچونه وي، نو غبرګسرکيټېري، لکه په پورته ځېره کی انځور شوی په کار واچول شي، او دا به د A v B سره په نخښنه کيږي.
په ځرګند ډول A v B يو سويچ ارزښت 1 لري، که کم له کمه يو له دې سويچونو ځخه واز وي او ارزښت 0 لري، که دواړه سو-يچونه ارزښت 0 ولري. کيدی شی د سويچ ارزښتونو لپاره پخپله غبرګ سرکيټېري (يا شايد په انګريزي سرکيټ وبېل شي) داسی وليکل شي

$0 \vee 0 = 0 , 0 \wedge 1 = 1 , 1 \vee 0 = 1 , 1 \wedge 1 = 1$

کيدی شي ، چی $A \vee B$ د يوځاي اآيښوول شوي سويچ په ځير وکتل شي، چی دا د A او B په اړتيا يا په واك برقجريان بهيږي يا برق جايان لري او که يا نه بهيږي يا نه پرېږدي.
د A او B سويچونو زيريالسرکيټېري $A \wedge B$ د A او B يو بل پسی يعنی په پرلپسی توګه ايښوونی يا ځاي په ځاي کونی ځخه منځ ته راځي، لکه په ځيره کی چی انځور شوي.
سرکيټ يا برېښنادوران $A \wedge B$ ټيك او ټيك هلته ارزښت1 لري، که دواړه سويچونه ارزښت 1 ولري او په غير له دې ارزښت 0 . لنډ : $0 \wedge 0 = 0 , 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0$

او $1 \wedge 1 = 1$

دلته هم $A \wedge B$ يو رايوځاي شوی سويچ دی.
ددې سره ترنی $A \vee B$ او $A \wedge B$ د سويچ لپاره همغه فورمالی قاعدې ډکوي يا پوره کوي، لکه د ويناو لپاره د سمسوځ له پوهی ورسره بلده په $\vee$ او په $\wedge$ راوړل شوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټرونونو کې. هلته د يوې وينا نه والی هم موجود دی.
که ۷ ، ۸ د سویچ ارزښتونو 1 , 0 په څير راونيسو، نوهغه
په باندې شميرقوانين د ۷ او ۸ ديوه بول الجبر لپاره
په { 0 , 1 } پوره دي. هلته کومپليمنټ هم په واك کی لرو.
دا کليمي جوړونی د سويچ لپاره هم يوه موخه لري: د 'A
سره يو سويچ په نخښه کوو، کوم چی تل يو و A ته په څټ
ارزښت لري، د کوم سره، چی مور په تخنيکي رېښتينوالی
یا ریالیزه باندې ددې

څيره

غوښتنو (لکه د مناسبو چالانماشين له لارې) په غم کی نه
يو.'A د A نيگيشن يا نفي هم بلل کيږي. د سويچ ارزښت
لپاره دا دامانا لري، چی 0 = '1 , 1 = '0 . په دې توګه سويچ
ارزښتونه د عمليو يا کارونو۷، ۸ ، ' سره يو دوه توکيزه
بول الجبر جوړوي.

۴ . ۳ . ۱ تعريف : يو زيريالغبرګ سرکيټري دپای ډيرو
سويچونو څخه جوړيږي د پای زيات فورمال عمليو ، ، '
د کارونی يا استعمال سره. په داسی سرکيټ کی دوه سويچونه،
کوم چی همغه د سويچ ارزښتونه لري په همغه يا برابر سومبول
سره په نخښه کيږي.

ټيك داسی تعريفولی شو: هر سويچ يو زيريالغبرګ سرکيټري
جوړوي. که S_1 ، S_2 زيريالغبرګ سرکيټرونه وي(يعنی سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

رایوځاي اینښوولي سرکیټېري یا سویچونه) ،
نو $S_1 \vee S_2$, $S_1 \wedge S_2$ او S' هم زیریالغبرګ سرکیټېرونه دي.
هر زیریالغبرګ سرکیټېري په ټولیزه توګه زیات پیچلی جوړ شوی سویچ دی، چې د «برخسویچونو»ځاینیونی څخه په واکوالی کی یا په اړه، واز (ارزښت 0) یا تړلی (ارزښت 1) دی. له دې امله کیدی شي، چې بیرته دوه سرکیټونه د $\wedge$ او $\vee$ له لارې سره وتړل شي. کیدی شي، چې موږ لنډ له سرکیټونو یا سرکیټېریو څخه وغږیږو.
د یوه زیریالغبرګ سکریټېري S د سویچ د هر ځاي نیونی لپاره د یوه ټاکلی سویچ ارزښت ټول سرکیټېري لاس ته راکوي ، په دې اړوند، چې ایا د دوي ترمنځ بریښنا بهیږي (جریان لری) او که نه. پس وي دې $A_1 , ..., A_n$ د پورته تعریف سره سم د سرکیټ $S(A_1,...,A_n)$ سویچونه ، د کومو سره چې A_i زیات واره جوړیدی شي. د سویچونو $A_1,...,A_n$ هر ځاینیونه د 1 , 0 د یو n–ګونو سره برابر دی او د S له لارې یا د S سره به دا n–ګونی یا 0 او یا 1 د S په سویچ ارزښت باندې تنظیمیږي. په دې توګه سرکیټ S یو n –ځایز د بول-فنکشن f_S په دوه توکیز د بول په الجبر $B=\{ 0 , 1 \}$, $f_S : B^n \longrightarrow B$ تعریفوي(دې ته دې دلته هم پام وي او داسی نور ورته لیکنو ته ، چې دا د لاتین تورو لیکنی له کیڼ وښی لوز ته لوستل کیږي، په دې ګران لوستونکی پوهیږي، چې یادونی ته اړتیا نه شته،خو زما زړه نه ودریده) . دلته f_S په سرکیټ S اړه لرونکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

سويچ فنکشن بلل کيږي. اوس څنګه کيدی شي، چې سرکيټ په $A_n(B)$ کی د سرکيټري لپاره د $\cap$، $\cup$، ′ کاروني يا عمليي وکارونه واضح کړای شي؟ اوس دي S,T دوه سرکيټونه وي، له سويچونو A_i څخه د سويچفنکشنونو f_T , f_S سره، نو کيدی شي، چې له S , T څخه هم زيريالسرکيټري $S \wedge T$ او هم يو غبرګسرکيټري $S \vee T$ جوړ شي، پوره و يوګونو سويچونو ته ورته يا لکه همغسی لکه يو ګوني سويچونه . دا نو اوس روښانه ده، چې $f_T \cap f_S$ د $S \wedge T$ سويچفنکشن دی او $f_S \cup f_T$ د $S \vee T$ سويچفنکشن دی. بالاخره f_S' سويچفنکشن دی و سرکيټ S' ته ، کوم چې تل و S ته مخامخ– يا په بل عبارت په څټ سويچ ارزښت لري.

۴ . ۳ . ۲ تعريف : دوه زيريالغبرګ سرکيټري S او T و همغو سويچونو $A_1 , A_2 , ..., A_n$ ته، ايکويوالنت يا همغه ارزښتيز بلل کيږي، که دا همغه سويچفنکشن ورکړي، دا په دې مانا چې که د هغو سويچفنکشنونو f_S او f_T لپاره باور ولري $f_T = f_S$.

د استعمال يا کاروني د ليدټکي څخه دا تعريف موخور (همدفمند) دی، ځکه چې لمړی علاقه مو د سويچفنکشن سره ده، يعني د سرکيټ ځانښيوني ته ده او کم د هغه دننني جوړښت ته.

د سرکيټونو ترمنځ په دې پورته ورکړ شوي تعريف کی روښانه شوی اړيکی په رښتيني برابرارزښته اړيکی دی، په داسی

(c) ketabton.com: The Digital Library

حال کی چی دې برابرارزښتتولګی پورې تړل سرکیټونه اړه لري یا په هغه ټولګی کی دي، د همغه سویچفنکشن سره.
له دې سره د سرکیټ څېړنه د بول الجبر په څېړنه بیرته واړول شوه او په دې توګه شمیرپوهنیزو متودو یا لارو ته لار ور جوړه یا ور وازه شوه، لکه په مخته تیره برخه کی چی ودیزه شوې وې.
په سرکیټري تیوری (Swiching Theory) او همداسی په ټولیزه توګه په سرکیټ تیوري کی دوه غوره پرابلمونه دا لاندې دي:
اول) د ورکړ شوي سرکیټري شننه یا تحلیل او
دوم) د پلټونکی سرکیټري سینتیز Synthese .
په شننیز حالت کی یو سرکیټري S د مخه ورکړ شوې ده او د هغه سویچفنکشن باید راپیدای شي یا غوښتل کیږي. د دې لپاره د S د هر سویچ $A_1,A_2,...,A_n$ د سرکیټري S لپاره د سویچ ارزښت باید کره وټاکل شي. کیدی چي اوس S په $A_1,A_2,...,A_n$ کی (د $x_1,x_2,...,x_n$ په ځای) باندې د بول د پولینوم په څیر انځور شي په همدې توګه یا په ورته ډول د S جوړونه په ۸.۷. ' سره له $A_1,A_2,...,A_n$ څخه . له دې پولینوم څخه یا سیده د فنکشن ارزښت شمیرل کیږي او یا په هغو د دواړو نورمالفورمونو څخه په یوه ترانفورمي کیږي، له کومو چی بیا فنکشن په ساده توګه لوستل کیږي.
۴ . ۳ . ۳ بیلګه : لاندې سرکیټ S دې د سویچونو A , B , C سره مخ ته روټ وي، څېړه دې وکتل شي، په

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورته توګه د بول پولینوم په دې توګه دی

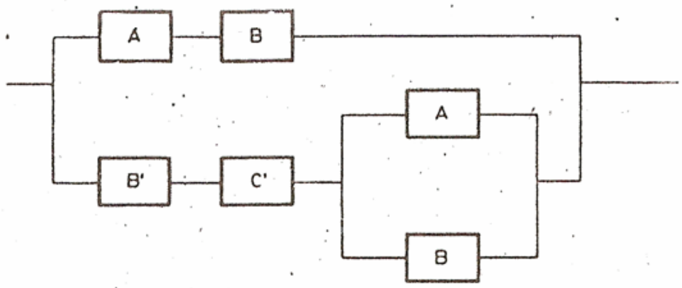
$(A\wedge B)\vee(B'\wedge C'\wedge(A\vee B))$

دا په دیسیونکتیو نورمالفورم اړوو:

$(A\wedge B)\vee(A\wedge B'\wedge C')\vee(B\wedge B'\wedge C)$

$(A\wedge B\wedge(C\vee C'))\vee(A\wedge B'\wedge C')$

$(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge B\wedge C')\vee(A\wedge B'\wedge C')$



د نورمالفورم (اخرنی لیکه) سملاسی د S ارزښت جدول لاس ته راځي :

A	B	C	f_S
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

تیګ د دې په څټ د سینتیز پرابلم رامنځ ته کیدنی سره د یوهسرکیپ د پرابلم رامنځ ته کیدنه ده.د لته دې د سویچفن-کشن fورکړ شوی وي، او د دې سویچفنکشن ربښتیاکیدونکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا ریالیزه کیدونکی سرکیټري دپیدا شي. دا پرابلم یواځنی ټاکلی اوبی یا حل نه لري او امکانات شته، چی د همغه موخی لپاره جګ اوبی ولټول شي. یو په هر صورت یواځي تیوریکي مانا لرونکی اوبی سملاسی ورکول کیدی شي. که ارزښت جدول پیژندل کیږي، نو کیدی شي ، چی د دیسیونکتیو نور-مالفورم ولیکل شي او د هغي سره سم یو سرکیټري جوړ کړی شي. په دې سرکیټري کی مګر د دې
رامنځته کیدونکی ګټون هر د سویچ په ټولیزه توګه نازغموړ یا بهتره بي وعدي وړ لوي وي، دا په دې مانا، چی تخنیکي ریښتینوالی به یی زیات قمته وي. دلته یو سرکیټري د کمو سویچونو سره لټول کیږي، چی هغهٔ د مخه ورکړ شوی سویچفنکشن ریښتینی کوي. د جوړولو قمت یا مصرف باندې یي یواځی د سویچونو ګټون تاثیر نه لري،بلکه جوړونه هم او همداسی د سرکیټ سکترکتور یا جوړښتډول، د زیاتو مختلفو قمتفنکشنونو له مخی پاملرنه ورته شي. داد کمون پرابلم نسبی تاونی کیدی شي حل شي. د دې پرابلمونو حل یا اوبی د بیلګي په توګه د Kohavi 1970 په کتان کی ورکړ شوی دی. د سرکیټونوکارونه د مختلفو کارخانو په چا-لانولو کی د خورا لوي اهمیت دي: په مرکزګرمی، خطرزنګ، کنترولخونوکی او داسی نور. یوګوني سویچونه په دې کی ټاکلی پیښي ، حالتونه ، او شرایط په ګوته کوي له کومو، چی د هغو ځاي مربوط دی یا اړه لري. موضوع هم دلته را لنډوو او په همدې لوستلشوو بسیا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو څو بنسټیزې کلیمې

لومړیموخه مو دا ده، چې د دې کتاب د الجبر بنسټیزو کلیمو په څېړلو پیل وکړو، چې موږ دا په نامه ټولیز الجبر، یا لنډ الجبر بولو. برسیره پردې دلته درې مهمې جوړښتیز کلیمې پیژندل کیږي یا معرفي کیږي، چې د هغو په مرسته بیا له ورکړ شوو الجبرونو څخه نور (واړه یا کوچنې) الجبرونه ګټل کیدی شي، په نامه لاندې الجبرونه ، بیا هومومورفي څیره کونی او بالاخره فاکتور الجبرونه، کوم چې د کونګروانیڅ اړیکو له فاکتوره کوونی څخه لاس ته راوړل کیږي.

په تکراري توګه د لته هم د الجبري جوړښتونو د بیلګې لپاره ، لومړی، لکه ددې کتاب هم ، لکه د ګروپونو په

(c) ketabton.com: The Digital Library

درس کی مو چی ګوته ورته ونیوله ، ګروپونه څیړل کیږي.

دا تعریف به د لمړني تعریف سره لکه په برخه ۳ کی موچی کړی وو، یواځی په نخښونه کی توپیر ولري.دلته به مو د ګروپ تعریف داسی وي، چی سملاسی راته د الجبر یوه بیلګه راکوي.

۵ . ۱ . ۱ تعریف: ګروپ په پیژندل شوي ډول یو ډیری G دی، د یوه، په G باندې د دوه ځایزې کارونی یا اپریشن، نښلونی ، ګنډنی یا عملیي د تعریف سره. (دا په دې مانا، چې یوه څیره کونه له $G\times G$ څخه په G کې د $x.y <-- (x,y)$ سره) کوم چی لاندې قاعدې پوره کوي یا په کومو کې، چی لاندې قاعدې صدق کوي

(د ټولو) $x,y,z \in G$ (لپاره باورل ري):

(اسوشیاتیو قانون) $(x.y).z = x.(y.z)$

دا اسوشیاتیو قانون په نخښو داسی لیکلی شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\forall\ x, y, z \in G : ((x.y).z = x.(y.z)$

(یو) $e \in G$ (د ټولو) $x \in G$ (لپاره موجود دی، د کوم لپاره چی باور لري) :

$e.x = x.e = x$ (ناپیلی توکی)

دا پورته قاعده داسی په نخښنولیکلی شو:

$\exists\ e \in G, \forall\ x \in G : e.x = x.e = x$

(د ټولو) $x \in G$ (لپاره یو) $x' \in G$ موجود دی د کوم لپاره چی باور لري:

$x.x' = x'.x$ (په څټ توکی)

دا قاعده په شمیرپوهنیزه نخښنو داسی لیکلی شو:

$\forall\ x \in G \quad \exists\ x' \in G : x.x' = x'x = e$

په دې قاعدو کې د ټول کوانتور (Allquantor) $\forall$ (لوستل یی : د ټولو لپاره) او د موجودیت کوانتور (Existenzquantor) $\exists$ (لوستل یی : موجود دی) کارول شوي دي. دریمه قاعده د بیلګې په توګه داسی لو

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ستل کېږي: «د ټولو x لپاره، چې د G توکی دی یا په
کې G پروت دی ، یو توکی 'x له G څخه موجود دی،
د $x.x' = e$ سره یا په بل ډول : د کوم لپاره چې $x.x' = e$
باور لري ». دلته e د دومی قاعدې سره ورکړ شوی
ناپیلی توکی دی(یواځنی ټاکلی) . ناپیلی په شمیرپوهنه
کی د یوې عملیي یا کاروني یا نښلونی په نسبت دا مانا
ورکوي، چې دا ناپیلی توکی د یوه توکی سره په همغه
عملیه کی همغه توکی بیرته لاس ته راکوي، یانی د همغی
عملیي سره د یوه توکی سره په نښلونه یا عملیه کی راوستلو
سره ور سره نښلووني توکي کی بدلون نه راولی.
په پوره ورته توګه، لکه ګروپ، کیدی شي ، چې د بیلګي
په توګه کړی هم تعرفي شي، چې دې کار دمخه صورت
نیولی، د کوم لپاره، چې په هر حالت کی دوه عملیي په کار
دي(زیاتون او څل) . د دې پام لرنو یا کتلوڅخه د دې
کتاب بنسټیزو کلیمو فکر رامنځته کیږي: د یوه « ټولیز یا
عمومي الجبر » لاندې یو ډیری پوهیږو د عملیو د یوې
کورنی سره، کوم چې تل یا ضرور باید دوه ځایز نه وي.
دا اوس باید په پوره دقت یا پوره پام ور تعریفونو کي راټول
شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۱ . ۲ تعریف : د هر ګڼ $n \in N \ \{0\}$ او هر ډیري A لپاره یوه څیره ونه $f: A^n -> A$ شته، کومه چې n- ځایزه عملیه په A بلل کیږي . د ټولو n - ځا- یزو عملیو ډیری په A د $Op_n(A)$ سره په نخښه کوو.
په A باندې د پایځایزو عملیو لاندې دا عملیې پوهیږو:

$$Op(A) := \bigcup_{n=0}^{\infty} Op_n(A)$$

۵ . ۱ . ۳ یادونه : د همدې ورکړ شوي تعریف سره به د یو صفر ځایزې عملیې لاندې څه پوه شو؟ کره دې ونیول شي، چې A^n دې د ټولو g څیره کو نو یا څیره ونو

$$g: \{0,1,2,..., n-1\} \longrightarrow A$$

ډیری وي. په ځانګړې توګه باور لري:

$$A^0 = \{g \mid g: \emptyset \longrightarrow A .$$

مګر ګورو، چې یواځې یوه څیرونه g موجود ده، یانې په نامه $g = \emptyset$ (پام دې وي ، چې هره څیرونه $g: \emptyset \longrightarrow A$ په کره نیونه د جوړو یو ډیری دی، دا په نامه

$$g = \{(x,g(x)) \mid x \in B\}$$

د $B = \emptyset$ لپاره، پس $g = \emptyset$) له دې امله یوه صفرځایزه

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

عملیه یوه دا ورکړ شوې څیرونه ده : $f : \{\emptyset\} \longrightarrow A$.
دا څیرونې همداسې ټیك د A توکې په ګوته کوي، څکه چې f د $f(\emptyset) \in A$ توکې سره یواځنې ټاکلې دی، او د هر $a \in A$ (بیایې لوستل هر a له G څخه) لپاره ټیك یوه څیره ونه $f_a : \{\emptyset\} \longrightarrow A$ موجود ده، د $f_a(\emptyset) = a$ سره. له دې امله صفرځایزې اړیکې ثابتې هم بلل کیږي، او د f_a په ځاې په ساده توګه a لیکو.

۵ . ۱ . ۴ تعریف : د یوه الجبر د تیپ یا ډول لاندې یوه تنظیم شوې جوړه (f, β) (دلته دا f باید لوې وی ، خو زه یې بل ډول امکان نه لرم، بیا د سهوو سره مخامخ کیږو، څکه چې په کمپیوتر کې د F څخه بدل بل لوی F نه لرم) پوهیږو، چیرته چې f یو ډیری دی ، چې توکې یې د عملیو سومبولونه دې او $\beta : f \longrightarrow N \cup \{0\}$ یوه څیره ونه ده، کوم چې هر $f \in f$ په ځایزوالی (یانې هغه ځاې چې دا یې نیسی) $\beta(f)$ باندې تنظیم وي. دلته f یو د $\beta(f)$ – ځایزوالي عملیو سومبول بلل کیږي.

یو ټولیز الجبر (یا لنډ : الجبر) د (F, β) تیوپ یو تنظیم شوې جوړه $A = (A, F)$ ده ، کومه چې له ډیري A او یوې
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په A د عملیو کورنۍ $F(f \mid f \in f)$ څخه منځ ته راغلی یا جوړه شوې ده، چیرته چې هر $f \in f$ په $\beta(f)$ – ځایز عملیې $f \in Op(A)$ باندې تنظیم شي. ډیرۍ A د A بنسټډیرۍ بلل کیږي او د F توکی د A بنسټیزې عملیې بلل کیږي.

۵ . ۱ . ۶ یادو نه : الف) : که چیرې د لوستونکو لپاره دا د الجبر تعریف، د د تیوپ سره ، اپریشن سومبول سره ، او داسې نور، لږ پیچلی ښکاریږي، نو کړی شي ، چې دا لاندې تعریف ته خپل پام راوګرځوي.

د الجبر لاندې کیدی شي ، چې یوه جوړه $A=(A,F)$ پام یا خیال کې راولو، چې A یو ډیرۍ او F یو د په A د عملیو یا کاروونو یا اپریشن پای ډیری وي. هغه نازکوالی، چې د مخ ته تیر تعریف و شا ته خوندې یا پټ دی؛کیدی شي، چې وروسته په کرار کرار د نورو تیوریو په ودیزه کې روښانه شي.

ب) په دې کتاب کې تل د الجبر د کلیمې لاندې ټولیز یا عمومي الجبر پوهیږو. چې په دې توګه د کلاسیکي یا ټولګیز الجبر د کلیمې سره په یوه کړی باندې، څخه یی
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

توپیر کیدی شي. له دې امله ټولیزه یا عمومي کلیمه نه لیکو او لنډ یې «الجبر» لیکو.

پ) لیکنو ته یې یو څو یادونې : زیات وخت f د الجبر تیوپ بلل کېږي، دا په دې مانا، چې له سره مو فکر د کارونې سومبول ځایزوالی ته پام راګرځي. په څټ یا برعکس، زیات وخت د تیوپ ß څخه غبرېږو، که زیات مو موخه ځایزوالی وي او کم مو موخه د کارونې یا عملیي سومبول وي.

که یو الجبر (A,F) یواځې پای ډیرې بنسټیزې کارونې یا عملي ولري، د بیلګې په توګه $F = (f_1, f_2, ..., f_k)$، نو زیات وخت دلته $(A, f_1, ..., f_k)$ د (A, F) په ځای لیکل کیږي، او تیوپ په دې $(ß_1, ..., ß_k)$ بڼه نوټ کوو، چیرته چې $ß_i$ د f_i ځایزوالی راکوي.

د یوه تیوپ f په الجبرونو کې بنسټیزې کارونې یا عملیي د f_A سره نه په نخښنه کیږي، بلکه په ساده توګه د f سره، دا په دې مانا، چې د اړوند کارونې سومبول سره، لکه چې د ابل ګروپ کې زیاتون زیات د نخښې « + » سره په نخښنه کیږي. دا امکانات، چې دا به مو سهوو ته لاربنود کړي، خورا کم دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۱ . ۷ بیلګه ګروپ: په دې برخه کې ، لکه په سر کې مو چې الجبر تعریف کړ، هغې ته ورته ګروپ د یو الجبر (G , .) په څیر د تیوپ (2) تعریفوو (ټیك: د یوه الجبر، چې تیوپ یې (ƒ , ß) د ƒ = {.} سره دی او 2 = (.)ß)، چې هغه هلته نه ورکړ شوې اکسیومونه پوره کړي. په هر حالك ګټور دی ، که ګروپ بل ډول تعریف کړو (د مخه مو ګروپ پوره څیړلی دی او هلته یې تعریف بل ډول وو و دې اوسنی تعریف ته). ورسره بلد یا مروج میتودونه دي: یو ګروپ یو الجبر ($G(\,.\,,^{-1},e)$ دی، د تیوپ (2 , 1 , 0) ، چې لاندې اکسیومونه پوره کړي:

ګ ۱ : (x.y).z= x.(y.z)   (اسوشیاتیو قانون)
ګ ۲ : x . e = e . x = x   (ناپیلی یا بې تاثیره توکی)
ګ ۳ : $x . x^{-1} = x^{-1} . x = e$ (په څټ توکی)

د دې متود ګټه په دې کې نغښتې ده، چې د موجودیت کوانتورونو ته اړتیا نه پیښیږي او په څټ توکی په ساده توره د یوه یوځایزې کارونی څخه لاس ته راځي، او ناپیلی توکی د صفرځایزې کارونی په څیر په « تیوپ کی خوندې

(c) ketabton.com: The Digital Library

ده» . که چیرې له ټولکوانتورونو څخه تیر شو، نو کیدی شي، چی د ګروپ اکسیومونه د مساوت یا برابرون په څیر ولیکل شي، څنګه چی دلته ورکړ شوي دي. دا نور هم روښانه کیږي، چی برابرون په ټولیز الجبر کی لوي رول لوبوي.

سړی کړی شي، چی ګروپ په بل ډول هم ولیکي، د بیلګي په توګه د یو الجبر (G,p) په څیر، چی تیوپ یی (3) وي، په داسی ډول ، چی p د سرچینیزې ګروپ کارونی یا عملي د p (x,y,z) = x.y.z په څیر تعریف شوې وي.

لوستونکی دې پخپله دې ته پام کړي، چی ایا د ګروپ اکسیومونه، یواځي د p له لارې فرمولولی شي.

دې ته دې هم پام راواړول شي، چي یو ګروپ (G , . , $^{-1}$, e) ابیلي abelsche Grupp یا کموتاتیو بلل کیږي، که لاندې برانرونونه باور ولري:

ګ ۴ : x . y = y . x (کموتاتیو قانون)

دا ورسره بلد یا مروج دی، چی په ابل یا کموتاتیو ګروپ کی +, - , 0 د . , e په ځای کارول کیږي.

(د زیاتون لیکنډول یا لیکندود).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) یو الجبر (. , G) د تیوپ {2} ګروپوئید بلل کېږي.
یو ګروپوئید بل څه نه دې په غیر له یوه ډیري، چې په هغه کې یو دوه ځایزه کارونه یا عمیله کارول شوي وي، په ځانګړي توګه ګروپونه په همدې وخت کې ګروپوئید هم دي، که دا د تیوپ (2) الجبر په څیر وګڼل شي.

پ) یو ګروپوئید (. , H) نیمګروپ بلل کېږي، که (. , H) برابرون ګ ۱ پوره کړي. .

ت) یو الجبر (M , . , e) د تیوپ (2 , 0)، مونوئید بلل کېږي، که (. , M) یو نیم ګروپ وي او برسیره پر دې برابرون ګ ۲ پوره کړي.

ټ) یو ګروپوئید (. , Q) کوازیګروپ بلل کېږي، که د هر $a \in Q$ لپاره لاندې څیرونې د Q په Q باندې پرموتیشنونه وي، یعنې:

(د a سره کیڼ ځلوونه) $x \longrightarrow a \,.\, x$
(د a سره ښې ځلوونه) $x \longrightarrow x \,.\, a$

زیات وخت د کارونې یا مروج دی، چې کوازیګروپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تیوپ (2,2,2) الجبر (Q , . , \ , /) په څیر تعریف کړو، کوم چې لاندې برابرونونه یا مساوات پوره کوي:

$$(Q1) \qquad x\backslash(x.y) = y \ ,$$
$$(Q2) \qquad (x.y) / y = x \ ,$$
$$(Q3) \qquad x.(x\backslash y) = y \ ,$$
$$(Q4) \qquad (x/y).y = x$$

یا دونه: ګورو چې / او \ د ښي او کیڼې ویشنې په څیر کارول شوي(دا سي، نخښې ، چې په هر بل ځای کې په بل مفهوم ورکړ شوې وي، همغلته به په همغه مفهوم ونومول شي)

ث) یو لوپ یو د تیوپ (0,2) الجبر (L , . , e) دی، په کوم کې چې (L , .) یو کوازیګروپ وي، او e یو ناپیلی توکی وي، دا په دې مانا چې برابرون ګ۲ باور لري. لکه د کوازیګروپ په څیر کیدی شي چې لوپ هم تعریف شي، د یوه الجبر (L , . / , \ , e) په څیر.

ج) کړې: یو د تیوپ (2,1,0,2) الجبر (R , + , - , 0 , .) کړې بلل کیږي، که (R,+,-,0) یو ابل ګروپ وي، (R , .) یو نیمګروپ او لاندې دیستریبوتیو

(c) ketabton.com: The Digital Library

قوانين باور ولري:

د ۱) $x . (y + z)) x.y+x.z$

د ۲) $(x + y) z = x . z + y . z$

پام دې وي: د دې لپاره، چې نوکان مو سپما کړي وي، نو هغه له پخوا معلومه قاعده کارول کيږي، چې ټکيشميرنه له کربنشميرنې له مخه ده، دا په دې مانا، چې لمړی د ټکو شميرنه بدنيز (تنيز) کيږي يا صورت نيسي لکه ځل او ويش او ورپسې بيا هغه چې کربنشميرنه وي لکه زياتون او کمون.

يوه اونيتار کړۍ (unitärer Ring (R,+,-,0,.,1 (دا په دې مانا چې دا يوه کړی ده د يوي سره)، يو الجبر دی ، چيرته چې (. , R,+,-,0) يوه کړی ده او 1 يو ورزيات شوی صفر ځائيزه کارونه يا عمليه ده، کوم چې مساوت ګ ۲ پوره کوي (طبعاً دلته 1 د e په ځاي دی).

ح تن يا بدن) يو اونيتارکړۍ (K , + , - , . , 0 , 1) يو تن يا بدن بلل کيږي (انکريزي field) که (. , { K , \ ,{0) يو ابل ګروپ وي ، د ناپيلي توکی 1 سره. دا راته نزدې پرته ده، چې اوس که پر دې په ورزياته توګه $x \longrightarrow x^{-1}$ (په (. ,{ K \ {0) کې په څټ څيرونه) يوه يوځائيزه کارونه يا

(c) ketabton.com: The Digital Library

عملیه یا اپریشن وګڼو. دا چي 0^{-1} تعریف نه دی، نو ($K,+,-,0,.,^{-1},1$) به د لمړنی تعریف په موخه کوم الجبر نه وي. د ټوټه الجبر په تیوري کی ، چی په دې کتاب کی نه راوړل کیږي، نا پوره تعریف شوې عملیي یا کارونی اجازه لري.

خ) مودولونه Moduln . دا ($R,+,-,0,.$) دې یوه کړی وي. یو الجبر $(M,+,-,0,R)$ د $(2,1,0,(1)_{r\in R})$ تیوپ R–مودول بلل کیږي(یا مودول په کړی R باندې)، که $(M,+,-,0)$ یو ابل ګروپ وي، او د ټولو $r,s \in R$ لپاره لاندې مساوات باور ولري:

م ۱) $r(x+y) = r(x) + r(y)$

م ۲) $(r+s)(x) = r(x) + s(x)$

م ۳) $(r.s)(x) = r(s(x))$

په یوه اومنیتارکړی ($R,+,-,.,1$) باندې مودول څخه دا د لاندې مساوات باوریوالی هم غوښتل کیږي.

م ۴) $1(x) = x$

دا لمړنی بیلګه ده د ناپایږیرو عملیو سره(طبعآ که R ناپای وي) . برسیره پردې هم یو ځانګړی پام ضرور دی، ځکه چی سومبولونه $+ , - , 0$ په دوه مختلفو ماناو رامنځ ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته کیږي: یو ځل د ابل ګروپ (R,+,-,0) عملیې په څېر او بیا د ابلګروپ (M,+,-,0) په څېر. دا پرابلم په ساده توګه کیدی شي ، چې راوباسل شي، د بیلګې په توګه په کوم کې ($R, +_R, -_R, 0$) او ($M, +_M, -_M, 0$) په څیر لیکل کیږي. یواځې د اسانتیا له خاطره ضرور ښکاریږي، چې د ابل ګروپونو باندې په همغه یوون د +, -, 0 سره پاتې شو،

خ) وکتور فضا (وکتورهوا) : وي دې (K,+,-,0,.,1) یو تن . نو هر K–مودول (V,+,-,0,K) مورږ K –وکتورهوا (یا وکتورهوا یا وکتورفضا په تن K) بولو.

ځ) تړون(تړونونه) (Verband(english: lattice)) یو لاتیس یا تړون یو الجبر (∧، ∨، L) دی، د تیوپ (2,2)، کوم چې لاندې مساوات پوره کوي:

ل ۱) $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$ کموتاتیو قانون

ل ۲) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$,

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

(اسوشیاتیو قانون)

ل۳) $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$ (ایدمپوتینڅ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ل ۴) $x \vee (x \wedge y) = x, \quad x \wedge (x \vee y) = x$

(ابزربشن یا راکښنه یا جذبونه)

دلته افادې " $x \vee y = z$ " او په همدېتوګه " $x \wedge y = z$ " داسې لوستل کیږي x له y سره ترلی مساوي په z دی. همداسې x غوځ په y مساوي په z دی.

یو رابند تړون یا لاتیس (یا تړون د 0 او 1 سره) یو الجبر ($L, \vee, \wedge, 0, 1$) ددی د تیوپ (2,2,0,0), داسې چې ($L, \vee, \wedge$) یو تړون یا لاتیس دی او په دې برسیره لاندې مساوات هم باور لري:

ل ۵) $x \wedge 0 = 0, \quad x \vee 1 = 1$

تړونونه به په ځانګړي توګه په ورپسې برخو کې پوره وڅیړل شي او د هغو مختلف ډولونه او هم به په هازې دیاګرام کې و ښنل شي)

د) نیم تړون (semilattice) یو نیم ګروپ ($S, .$) نیمتړون یا سیمیلاتیس بلل کیږي، که دا کموتاتیو او ایدمپوتنت وي. دا په د ې مانا، چې که مساوات ګ ۴ او همداسې لاندې باور ولري:

س ۱) $x . x = x$ ایدمپوتنځ (Idempotenz)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هر لاتیس $(L, \wedge, \vee)$ جوړښتونه $(L, \wedge)$ او $(L, \vee)$ په روښانه توګه سیمیلاتیسونه دي. (د نیمه تړون)

ذ) دیستریبوتیو تړون یا - لاتیس) یو لاتیس $(L, \wedge, \vee)$ دیستریبوتیو بلل کیږي، په کوم کی چی دا لاندي دیستریبوتیو قانونونه باور ولري:

د ل ۱) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

د ل ۲) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

کیدی شي ، چی د ل ۱ تر ل ۴) مساواتو پوري وښول شي، چی د ل ۱ او دل ۲ یو بل ته ورته دی یا همغسی دي. چی له دي مساواتو یو بیا پوره دی، یا بسیا کوي.

ر) د بول الجبر : یو الجبر $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ د تیوپ $(2,2,1,,0,0)$ د بول الجبر بلل کیږي، که $(B, \wedge, \vee)$ یو دسیتریبوتیو لاتیس وي، مساوات ل ۵ پوره کړي او په دي برسیره لاندي هم پوره کړي

ب ۱) $x \wedge x' = 0 , x \vee x' = 1$

دا څه د الجبر پورته تیري بیلګي مو، چی دلته راوړلی، د هغو څخه به ځنی وروسته پوره ترڅیړنی لاندي ونیول شي. او س په دا همدومره بسیا کولی شو.

۵ . ۲ لاندې الجبر یا سب الجبر Subalgebra

د هر الجبري ديسخيپلين مهمه موخه داده، چی پوره بیلگي ترې لاس ته راوړل شي. زيات وخت داسی کيږي، چی د لرلو الجبري جوړښتونو څخه نوي الجبري جوړښتو نه لاس ته راوړو. په دې برخه کی به يو متود يا يوه لار وپيژندل شي يا معرفي شي، کومه چی د ټولگيزو کليمو څخه لکه لاندېگروپ، لاندېوکتورفضا، لاندېټرون په لور لوريزه وي.

۵ . ۲ . ۱ تعریف : $A = (A,F)$ دې يو د تيوپ f الجبروي، او برخېيری $B \subset A$ دې يو د A برخېيری وي، د خويونو سره ، چی

$$f(b_1, \ldots, b_n) \in B^n$$

د ټولو $f \in f$ لپاره او د ټولو n –گونو $(b_1, \ldots b_n) \in B^n$ لپاره (د کومو سره، چی $ß(f) = n$ ځای په ځاي کيږي). الجبر $B = (B, (f | f \in f))$ د الجبر A لاندې الجبر بلل کيږي، د کوم سره $f : B \longrightarrow B$ د ټولو $f \in f$ لپاره د f بنديزنو په څير په ډيري B تعريف وي، د « B د A لاندې الجبر» لپاره ليکو $B \leq A$.

.د $Sub\ A$ سره د ټولو د A د لاندې الجبرونو بنستېډيريو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډیری په نخښنه کیږي، دا په دې مانا، چی $A=\{B \mid B \leq A\}$
(انګر: Subalgebra = لاندې الجبر)

یو برخډیری $B \subset A$ ټیك هلته د یوه االجبر $A=(A, F)$
لاندې الجبر بنسټډیری دی، که B د ټولو د $f_A \in F$ بنسټ
عملیو سره رابنده، راټړلی وي یا رامحدوده وي. څه ناڅه
ټیکه توګه زیات داسی لیکل کیږي $B=(B,F)$،
داپه دې مانا، چی د B د بنسټعملیو ډیری بیرته په F
سره په نخښنه کیږي. لکه څنګه د f_A لپاره همداسی د f_B
لپاره هم په ساده توګه د کارونی سومبول په f سره ښوول
کیږي یا بهتره، نخښنون کیږي.
د ګروپ په بیلګه روښانه کیږي، چی په لاندې الجبر کی
په هغه تیوپ ګڼل کیږي ،کوم چی ټاکل شوی دی: که
ګروپ د یوه الجبر په څیر، چی تیوپ یی $(2, 1, 0)$ دی
راوړل شي یا وګڼل شي، لکه په مخ ته تیره بیلګه کیٔ نو
لاندې الجبرونه په ټولګیزه موخه لاندېګروپونه دي. که
چیرې ګروپ د (2) تیوپ الجبر په څیر راوړل شي یا په
پام کی ونیول شي، د ګروپ سرهٔچی یواځنی عملیه یا
کارونه ده، ممکن دي، چی لاندې الجبر لاس ته راوړو،
کوم چی لاندې ګروپونه نه دي. بیا نور لاندې الجبرونه
،

لاس ته راځي، كه ګروپ د يوه الجبر ، په څير د

$$p(x, y, z) = xy^{-1}z$$

سره راوړل شي، چې دا يې يواځنی عمليه وي.

د هر الجبر لپاره دا سيستم د غوڅيجوړښت په مخامخ رابند دی. ټيك يا كره په لاندې ډول :

۵ . ۲ . ۲ جمله : A دې يو الجبر وي. نو باور لري:

الف) $A \in \text{Sub } A$

ب) $B \in \text{SubA}$ د هر ناتشډيري $B \subseteq \text{Sub A}$ لپاره،

يادونه : دا افاده " $\bigcap B$ " د $\bigcap_{B \in B} B$ لپاره ځاي په ځاي ده او همداسی د $\bigcap \{B \mid B \in B\}$ لپاره .

اوبی : الف) روښانه دی. د ب) د ښوونی لپاره دې وي: $B \subseteq \text{SubA}$, $B \neq \emptyset$. دا د ښوولو دی، چې $\bigcap B$ د A د هر ې عمليي f لپاره رابند دی يا راتړلی دی. وي دې $n = \beta(f)$. له $\bigcap B$ $b_1, \ldots, b_n \in$ څخه $b_1, \ldots, b_n \in B$ لاس ته راځي د ټولو $B \in B$ لپاره . دا چی ټولی $B \in B$ څخه د لاندې الجبرونو بنستډيري

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي، نو باور لري $f(b_1, \ldots, b_n) \in B$ د ټولو $B \in \mathcal{B}$ لپاره . له دې څخه لاس ته راځي $f(b_1, \ldots, b_n) \in B$.

۵ . ۲ . ۳ لاس ته راوړنه(دا هم ديوې جملې په څير ده، خو له جملي څخه لاس ته راځي): د هر الجبر A او هر برخېيري $X \subseteq A$ لپاره دی

$$<X> = \bigcap \{ B) \in Sub\,A \mid B \supseteq X \}$$

د A د لاندې الجبر ښستهيرى، دا په دې مانا چې $<X> \in SubA$. په څرګنده توګه $<X>$ د A د لاندېالجبرونو کوچنی بنستهيرى دی، کوم چې X خوندې لري (دا د X څخه راجوړه يا توليد شوې لاندې الجبر) د الجبر A باندې زور اچووني له امله ډير وخت $<X>_A$ د $<X>$ په ځاي ليکو اوله بلی خوا په ساده توګه د پاي ډيري $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ لپاره .

د بيلګي په توګه څيوکليکي لاندې ګروپ $(Z_6, +, -, 0)$ را نيسو (د ګڼونو $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ سره مودول 6 شميرل کيږي): باور لري

$$<0> = \{0\}, <1> = Z_6, <2> = \{0, 1, 4\},$$
$$<3> = \{0, 3\}, <2, 3> = Z_6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۲ . ۴ جمله : A دې یو الجبر وي . د برخه‌يريو $X, Y \subseteq A$ لپاره باور لري:

الف) $X \subseteq \langle X \rangle$ (اکستنزیویتیت Extensität)

ب) $X \subseteq Y \Rightarrow \langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$ (مونوتوني Monotonie)

پ) $\langle X \rangle = \langle\langle X \rangle\rangle$ (ایدمپوتنت Idenmpotent)

د دې جملې اوبې سملاسې د مخ ته تیرې عملي $\langle\ \rangle$ له تعریف څخه لاس ته راځي. پای

بنسټه‌يرى $\langle X \rangle$ په ریښتیا چې د X څخه تولید شوې د $A = (A, F)$ لاندې الجبرونو څخه لاس ته راځي د يوه توليدپروسې سره: د هر برخه‌يري $X \subseteq A$ لپاره دې وي

$$E(X) = X \cup \{f(a_1, \ldots, a_n) \mid f \in F, a_1, \ldots, a_n \in X (n = ß(f))\}$$

وريسى دې وي

$$E^0(X) = X$$

اود ټولو $k \in N \cup \{0\}$ لپاره

$$E^{k+1}(X) = E(E^k(X))$$

۵ . ۲ . ۵ جمله : د هر الجبر $A = (A, F)$ او هر

(c) ketabton.com: The Digital Library

برخه‌یري $X \subseteq A$ لپاره باور لري

$$<X> = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$$

اوبی : « $\supseteq$ »: وي دې $<X> \supseteq x = E^0(X)$.
نیونه دې وي، چې $E^k(X) \supseteq <X>$، ښوول شوی دی،
او وي دې $a \in E^{k+1}(X)$. وي دې $a \notin E^{k+1}(X)$ د مخه
نیونه(ځکه، چې په بل ډول به په ساده توګه باور ولري

$a \in <X>$ (

نو $f \in F, a_1, \ldots, a_n \in E^k(X)$
موجود دی، د $a = f(a_1, \ldots, a_n)$ سره .
د $E^k(X) \supseteq <X>$ له امله او دا چې $<X>$ د یوه لاندې
الجبر بنسټ ډیري دي، لاس ته راځي $a \in <X>$. دا
ښايي $E^{k+1}(X) \supseteq <X>$، او په k باندي د ایندکشن
سره لاس ته راکوي $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X) \supseteq <X>$.

« $\subseteq$ »: یواځې دې وښوول شي ، چې $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$ د یوه
لاندې الجبر بنسټډیری دی، دا په دې ما ، چې د F
د ټولو اپریشنونو په هکله رابنده یا راتړلی ده. وي دې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f \in F, n = \beta(n), a_1, \ldots, a_n \in \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k(X.$$

نو بیا د هر $i \in \{1, \ldots, n\}$ لپاره په لاندې توګه یو $k(i) \in N \cup \{0\}$ د $a_i \in E^{k(i)}(X)$ سره موجود دی. وي دې $m = \max\{(k(i) \mid i = 1, \ldots, n\}$. نو باور لري $a_i \in E^m(X)$ د ټولو $i = 1, \ldots, n$ لپاره. په دې پسی لاس ته راځي

$$f(a_1, \ldots, a_n) \in E^{m+1}(X) \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$$

دا په دې مانا، چی $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X$ د f لاندې رابند یا تړلی دی. پای

یادونه: دا رابند یا راتړلی دا مانا لري، چی f په همغه الجبر کی باور لري. دې لغات ته دې په نورو ځایونو کی هم پام وي، چی ډیر کارول کیږي.

دا تر اوس پام په یو څو برخو کی په کار راځي، چی په خپل ځاي کی به وکتل شي.

د ډیریسیستم Sub A یواځی دې ته همدا دلته ګوته نیسم، چی د یوه الجبر A د لاندې الجبرونوبنسټ‌ډیری په

پيدايښتي يا طبيعي ډول يو تړون يا تړنه يا لاټيس جوړوي:
د $A \ni B, C$ لپاره دې وي

$$B \wedge C = B \cap C$$
$$B \vee C = B \cup C$$

نو لرو

۵ . ۲ . ۶جمله :د هر الجبر A لپاره (Sub A , ∨ , ∧)
يو تړون دی(د A د لاندې الجبرونو تړون يا تحتاوريا تړنۍ)
اوبی دې تمرين وي: د لته د تړون اکسيومونه له ل۱ تر
ل۴ پورې ازمائيل کيږي.

۵ . ۳ ايزومورفيزم ، هومومورفيزم

Isomorphismen, Homomorpismen

دا روښانه ده ، چی د يوه الجبر ذهني خويونه تغير نه خوري، که چيرې د الجبر د سټډيري د توکو نومونه بدل شي ، يا بل ډول ونومول شي. دا پام يا فکر مو تړلی د ايزمورفي کليمي ته لارښودوي .

دوه الجبره يو بل سره ايزمورف بلل کيږي، که چيرې يو الجبر له دې بل څخه د هغو توکو نومونو د بدلون له لارې لاس ته راوړی شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۳ . ۱ تعریف : A او B دې دوه الجبرونه وي، د همغه تيوپ f، او $u : A \rightarrow B$ دې يو بيجکتيوه bijektive ځيرونه وي. نون د A ايزومورفيزم په B بلل کيږي، که د ټولو $f \in f$ لپاره او ټولو$(n = ß(f)$, $a_1 , \ldots, a_n \in A$ لاندې شرطونه پوره وي:

$$uf_A(a , \ldots , a) = f_B (ua, \ldots , ua) \quad (\text{هوم})$$

دا الجبرونه A او B بيا (يو د بل سره) ايزومورف بلل کيږي، په نخښونه يې $B \cong A$ ده.

۵ . ۳ . ۲ بيلګه

الف) : دوه ګروپونه $(G, . , ^{-1} , e)$

او $(H , . , ^{-1} , e)$ ټيك هلته ايزمورف دي، كه يوه بيجكتيو ځيرونه $u : A \rightarrow B$ موجود وي كوم چې د ټولو $a , b \in G$ لپاره لاندې شرطونه پوره كوي.

$$(i) \qquad u(a.b) = u(a).u(b)$$
$$(ii) \qquad u(e) = e ,$$
$$(iii) \qquad u(a^{-1}) = u(a)^{-1}$$

که پام وکړو، نو دلته شرطونه (ii) او (iii) د اړتيا اخوا دي، ځکه چې دا دواړه له (i) څخه لاس ته راوړلی شو:

$$u(e) = u(e.e) = u(e).u(e) \Rightarrow u(e) = e,$$
$$e = u(e) = u(a.a^{-1}) = u(a).u(a^{-1}) \Rightarrow u(a) = u(a)^{-1}$$

ب) (1, ‏ . . , ‏{0}‏ $(Z_7 \setminus \{0\}$) دې د تن $(Z_7, +, -, 0, 1)$
یو ځلیزګروپ وي. نو ایزومورفیزم

$$u: (Z_6, +, -, 0) \longrightarrow (Z_7 \setminus \{0\}, ., ^{-1}, 1)$$
په لاندې سره لاس ته راځي:

x	0	1	2	3	4	5
u(x)	1	3	2	6	4	5

د A ایزومورفیزم و B ته په ټوله توګه سیومتري نه دی.
مګر باور لري:

۵ . ۳ . ۳ جمله: که u یو ایزمورفیزم د A په B
وي، نو په څټ ځیرونه u^{-1} د B یو ایزمورفیزم دی و A ته.

اوبی : شرطونه (هوم) له همدا تیر درس څخه کیدی شي
و ازمائل شي، د u^{-1} لپاره ، چی د u لپاره ځاي په ځاي شي.
وي دې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f \in f$, $b_1, \ldots, b_n \in B$

د $a_1 = u^{-1}(b_1), \ldots, a_n = u^{-1}(b_n)$ سره، نو لاس ته راځي

$u^{-1}(f_B(b,\ldots,b) = u^{-1}f_B(ua_1,\ldots,ua_n)$

ځکه چي u ایزومرفیزم $= u^{-1}[uf_A(a_1,\ldots,a_n)]$

پاي $= f_A(u^{-1}(b_1),\ldots,u^{-1}(b_n))$

پای

که د مخه تیرو لوستونو کی له غوښتنو څخه تیر شو، چی $u: A \rightarrow B$ بیجکتیو دی، نو د هوموموړفیزم ټولیزې کلیمی ته راځو. پس هوموموړفیزم د الجبرونو مساوات کره نه ټاکي (تر د توکو د چاپیریال پورې لکه په ایزموړفیزم کی)، مګر بیا مو هم د جوړښت ورتوالی مخ ته پروت دی:

۵ . ۳ . ۴ تعریف : A او B دي د همغه تیوپ f الجبرونه وي. یوه ځیرونه $u : A \rightarrow B$ هومو مورفیزم د A وB ته بلل کیږي،

د ټولو $f \in f$ او ټولو $a_1, \ldots, a_n \in A$ $(n = \beta(n))$ لپاره هوموموړفي شرطونه (هوم) له تیر درس څخه پوره دي.

د « u یو د A هوموموړفیزم دی و B ته» لپاره لنډ لیکدود « $u : A \rightarrow B$ » هم معمول دی یا کارول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شرط (i) د له مخ ته تیرې جملی څخه همغه ورسره بلد د
هومومورفیزم شرطونه دي، د ګروپونو لپاره. ټیك په همدې توګه،
لکه د ګرووپ هومومورفیزم، په ټولیزه توګه د ټولو الجبرونو د هو-
مومورفیزم لپاره لاندې نخښونی معمول دي: سورجکتیو هومومو-
رفیزم ایپیمورفیزم Epimorphismus بلل کیږي. که u : A—> B
یو ایپیمورفیزم وي، نو B د A یو هومومورفه څیره بلل
کیږي. (په نخښونه یی uA = B) . اینجکتیو هومومور-
فیزم د نزدې پرتو دلایلو له امله خوندیونه Einbettung یا
نغږنه (په کی) بهتره یی رانغږنه(زه یی خوندیونه بولم)
بلل کیږي. (د دې لپاره راتلونکی‌یادونه وګوری) د یوه
الجبر A هومومورفیزم u: A—> A یانی هومورفیزم په خپل
ځان ایندومورفیزم Endomorphimus بلل کیږي، او ایندو-
مورفیزم چی په همغه وخت کی ایزومورفیزم (دا په دې مانا،
چی بیجکتیو) دی د A اوتومورفیزم Automorphismus
بلل کیږي د A د ټولو ایندومورفیزمونو ډیری End A په
پیدایښتي یا طبیعي توګه یو نیمګروپ جوړوي، او د A د
ټولو اوتومورفیزمونو Auotomorpihismen (Aut A) یو
ګروپ جوړوي. د دې لپاره چی دا ولیدلی شو، لاندې دوه
ویناوو ته اړتیا پیښیږي، چی اوبی یی ګرانو لوستونکو ته
یوه ساده د تمرین دنده یا وظیفه ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : الف) د هر الجبر A لپاره کتمتې څیرونه
یانی $id\ A \longrightarrow A$ یو اوتومورفیزم دی
ب) که $u_1 : A \longrightarrow B$ او $u_2 : B \longrightarrow A$ هوموموروفیزمونه
وي، نو یو په بل پسی راوړنه یا په بل پسی نښلونه $u_1 \circ u_2$
یی هم یو د A هوموموروفیزم و C پسی دی.
د لمخ ته تیرې جملی له امله د End A همداسی
د Aut A ډیري د کارونی یا عملی ° لاندې رابند یا راګیر
دی . د مخ ته تیرې جملی له امله Aut A تل دا ناپیلی
توکی id A خوندي لري. همغه تیره جمله ښایي، چی
له $u \in Aut\ A$ څخه تل $u^{-1} \in Aut\ A$ لاس ته راځي،
یعني باور لري:

۵ . ۳ . ۵ جمله: د هر الجبر A لپاره (End A,°) یو
نیم ګروپ دی (د A د ایندومورفیزم نیمګروپ) ،
او $(Aut\ A, \circ, {}^{-1}, id\ A)$ یو ګروپ دی (داسی په
نامه د A د اوتومورفیزم ګروپ)
لاندې الجبرونه او هوموموروفیزم یو له بل څخه کامل
خپلواک راوړل شو. اوس به وښوول شي ، چی دا
جوړښتکلیمي یو د بل سره په یو ډول زغموړ دي:

۵ . ۳ . ۶ جمله: څیرونه $u : A \longrightarrow B$ دې یو هومو-

(c) ketabton.com: The Digital Library

مورفیزم وي، نو باور لري:

الف) له $U \in Sub\ A$ څخه لاس ته راځي $uU \in Sub\ B$

ب) له $V \in Sub\ B$ څخه لاس ته راځي $\bar{u}^{1}V \in Sub A$ (۲)

پ) د ټولو برخېزیریو $X \subseteq A$ لپاره باور لري

$$<uX> = u<X>$$

اوبی : الف) وي دې $f \in f, b_1 ..., b_n \in uU$ (چیرته چی، لکه چی ورسره بلدیو، $ß(f) = n$ لیکل کیږي) .

نو $a_1 , ..., a_n \in U$ موجود دي، د $b_1 = ua_1 , ..., b_n = ua_n$ سره . باور لري

$$f_B(b, . . . , b) = f_B(ua , . .. , ua)$$

دا چي u هومورفیزم $= uf_A(a , . . . , a)$

د $U \in Sub\ A$ له امله $\in uU$

دا راته په ګوته کوي، چی

$$uU \in Sub\ B$$

ب) وي دې $f \in f, a^1 , . . . , a^n \in \bar{u}^1 V$. نو باور لري $ua^1,...,ua^n \in V$.

له دې لاس ته راځي

دا چی u هومورفیزم $uf_A (a_1, . .. ,a_n) = f_B(ua_1, . . .,ua_n)$

د $V \in Sub\ B$ له امله $\in V$

. (۲) $u^{-1} \in ...$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې املې باور لري $u^{-1}V \in f_A(a_1, \ldots, a_n)$ او له دې
امله $u^{-1}V \in \text{Sub } A \Rightarrow (u^{-1}V$

پ) E دې لکه هغه د مخه تعریف شوی اپریټر یا عملیه
وي. لمړی ښوول کیږي، چې $E(uY) = uE(X)$ د ټولو $Y \subseteq A$
لپاره باور لري: $E(uY)$ ټیك له هغو توکو uy څخه د $y \in Y$
سره جوړ دی، او همداسی له هغو توکو څخه، چې لاندې بڼه
لري $f_B(uy_1, \ldots uy_n)$، د $f \in f, y_1, \ldots, y_n \in Y$ سره.
همداسی یا په همدې ډول $uE(Y)$ له توکو uy څخه جوړ دی،
د $y \in Y$ سره، او همداسی له توکو څخه، چې لاندې بڼه لري:

$$uf_A(y_1, \ldots, y_n)$$

دا چې u یو هومومورفیزم دی، نو ښایي چې $E(uY) = uE(Y)$.
په k باندې د اینډکشن له لارې کیدی شي،
چې $E^k(uY) = uE^k(Y)$ وښوول شي، د ټولو $k \in N \cup \{0\}$
لپاره. د له مخ ته تیرو څخه لاس ته راځي

$$< uX > = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(uX) = uE^k(X) = u[\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)]$$

$$= u<X>$$

پای

لکه د مخه مو، چې ګوته ورته ونیوله د الجبر بنسټیزي uU
د uU سره په نخښه کیږي او همداسی له مخه بلدوڅخه د

(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبر بنسټيري $u^{-1}V$ د$u^{-1}V$ سره په نخښنه کيږي. کيدی شي ، همدا د مخه کيدی شي، چی زيات وکارول شي، که د یوه الجبر A هومومورفیزم (ایزومورفیزم) په یوه الجبر B غواړو، چی وټاکو.

بیلګه: د توکو $u \in Aut(Z_6, +, -, 0)$ د ټاکلو لپاره فکر کیدی شي، چی $<u1> = u<1> = uZ_6 = Z_6$. له دې امله یا $u1 = 1$ باور لري له کوم، چی $u = id$ ($=idZ$) لاس ته راځي، او یا $u1 = 5$ دا په دې مانا چی $u = -id$.
پس:

$$Aut(Z_6, +, -, 0) = \{id, -id\}$$

په ورته توګه د $End(Z_6, +, -, 0)$ توکی هم ټاکل کيږي

لکه د مخه مو چی ګوته ورته ونیوله، اینجکتیو هومومور- فیزم $u : A \rightarrow B$ خوندیونه هم بلل کيږي، د u سره A په B کی خوندي کيږي. دا برخه چی لاندې الجبرونه او خوندیونه په کی روښانه شوه داسی پاي کيږي:

یادونه : الف) د هرې خوندیونی $u:A \rightarrow B$ لپاره باور لري $uA \le B$ او $uA = A$ دا په دې مانا، چی uA یو و A ته ایزومورف د B لاندې الجبر دی.

ب) د الجبر B د هر لاندې الجبر A لپاره د یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

اینکلوژنځیرونه Inklusionsabbildun

$$i : A \longrightarrow B \, , \, i(x) = x$$

یو ه خوندیونه ده.

کونګروا ینڅ اړیکی او فاکتور الجبر
Kongruenzrelationen und Faktoralgebren

لکه د ګروپ تیوري کی د نورمالپرویشوني، یا همداسی د ایدیال کلیمه په کړۍ تیوري کی منځنی یا مرکزي کلیمه ده، همدا ډول په ټولیزه توګه په الجبر کی د ټولیزې یا پورته کلیمي کونګروا ینڅ اړیکو کلیمه جوړوي. دا به راته څرګنده کړاي شي، چی د کونګروا ینڅ اړیکو او هومومورفیزم ترمنځ نزدې اړیکی پرتی دي، لکه څنګه چی په ګروپتیوري او همدا ډول کړیتیوري کی، کیدی شي چی الجبرونه د کونګر-واینڅ اړیکو له لارې فاکتوریزه کړی شو، د کوم له مخی چی «فاکتور الجبر» ته رسیږو. یو ګروپ د نورمالپرویشنونی پسی فاکتورونی کوي، په کوم کي چی د نورمالپرویشونی څنګټولګی د نوي ګروپ توکو په څیر یا په توګه وکاروي، دا په نامه فاکتورګروپتوکی. دا په څنګټولګی یا اړختټولګی د یوه ایکویوالنڅ اړیکی «ایکویوالنڅ ټولګی» جوړوي. دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

کتنه یا څیړنه د «کونګروا ینخ» فکر رامنځ ته کوي، کوم چی باید دلته تعقیب شي.

۵ . ۳ . ۷ تعریف : A دې یو ډیری وي. هر برخډیری $R \subseteq A^n$ یو په ډیري A باندې n–ځایزه اړیکه بلل کیږي. یو 2 –ځایزه اړیکه Θ په A باندې ایکویوالنت اړیکه بلل کیږي، که د ټولو $x , y \in A$ لپاره لاندې شرطونه باور ولري:

اي ۱) $(x,x) \in \Theta$ (رفلیکسیویتټي)

اي ۲) $(x,y) \in \Theta \Rightarrow (y,x) \in \Theta$ (سیومتري)

اي ۳) $(x, y) \in \Theta$ ، $(y,z) \in \Theta \Rightarrow (x,z) \in \Theta$ (ترانزیتیویټي)

د $(a , b) \in \Theta$ په ځاي داسي هم لیکلی شو $a = b(\mathrm{mod}\ \Theta)$ (په کلیمو: "a په b مودولو Θ سره مساوي دی")، او یا هم داسی لکو $a \Theta b$ ، په دې توګه کیدی شي، چی اکسیوم ۳ په لاندې توګه فرمولبندې شي، له $x \Theta y \Theta z$ څخه لاس ته $x \Theta z$ راځي. د هر ایکویوالنځ اړیکو Θ لپاره د لاندې بنی ډیری $[a]\Theta = \{x \in A \mid x \Theta a\}$ ایکوالنځټولګی بل کیږي.

په روښانه یا څرګنده توګه هر یو توکی $x \in A$ ټیك د Θ یوه ګونګروایځټولګي پورې اړه لري. (ساده بیلګه د ټولګی : لکه چی یو هلك په همغه وخت کی په دوه یا

(c) ketabton.com: The Digital Library

زياتو ټولګيو پورې اړه نه شي لرودی).
د A ټولو ايکوالنتټولګيو ډيری په Eq A سره په نخښه کوو (د ايکويوالنځټولګی الماني او انګريزی:
(ÄquivalenZklassen = equivalence relation
د ډيري A لپاره دوه ايکوالنځ اړيکی∇_A اوΔ_A په لاندې ډول لاس ته راځی

(ټول اړيکی Allrelation) $\nabla_A = A^2 = \nabla_A$
(کتمتې يا دياګونالی Identität oder Diagonale)
$\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\} = \Delta A$

خيره: ۱۰۱
په پورته څيره کی په ډيري {1,2,3 } باندې ټول ايکوالنځ-اړيکی د لويوالی په ترتيب بيرته ورکړ شوي دي(دا يو د Hasse-DiaGram هازېدياګرام دې) هر ايکويوالنت اړيکه د ايکويوالنځټولګي په بيرته ورکړه کی انځور ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۳ . ۸ جمله: A دې یو ډیری وي او R دې یو ناتش د Eq A برخډیری وي. نو باور لري

$$\bigcap R \in \text{Eq } A$$

(لیکدود ته یی " $\bigcap R$ " . دا دې د مخ ته تیرو درسونو سره انډول شي یا دا مو د مخه لوستلی دي)
اوبې : د دې ښوونه یو ساده تمرین دی. پای

دیوه ډیري A ایکویوالنځ اړیکې په طبیعي یا پیداینښتي توګه یو لاټیس یا تړون جوړوي. یا تړونی جوړوی .
د ټولو $\Psi \in \text{Eq } A$, Θ دې وي

نو کیدی شي، چی په ساده توګه وښوول شي:

۵ . ۳ . ۹ جمله: د هر ډیري A لپاره ($\text{EqA}, \vee, \wedge$) یو تړون یا لاټیس دی (په A باندې د ایکوالنځ اړیکو تړون)
دا پورته ورکړ شوی تعریف د $\Theta \vee \Psi$ په ټولیزه توګه لږ مناسب دی ، که په ریښتیا $\Theta \vee \Psi$ شمیرو. د دې لپاره کیدي شي، په خوښه دوه ځایز اړیکو Θ_1 , Θ_2 لپاره

تعریف شوی د اړیکو ځل

$$\Theta_1 \circ \Theta_2 = \{ (x, y) \mid \exists z \in A : x \Theta_1 z \Theta_2 y \}$$

وکارول شي یا استعمال شي. دا اړیکځل اسوشیاتیو دی
(د ې ښوونه دې تمرین وي) :

$$(\Theta_1 \circ \Theta_2) \circ \Theta_3 = \Theta_1 \circ (\Theta_2 \circ \Theta_3)$$

له دې امله کیدی شي، چی ډیر واره راوړل شوي نوکان له لیکلو پاتی شي.

۵ . ۳ . ۱۰ جمله : د هر ډیري A او ټولو $\Theta, \Psi \in Eq\, A$ لپاره باور لري

$$\Theta \vee \Psi = \Theta \cup (\Theta \circ \Psi) \cup (\Theta \circ \Psi \circ \Theta) \cup (\Theta \circ \Psi \circ \Theta \circ \Psi) \cup \ldots,$$

دا په دې مانا چی $(a, b) \in \Theta \vee \Psi$ ټیك هلته باور لري،
کله چی توکي $c_1, c_2, \ldots, c_n \in A$ موجود وي،
د $a = c_1 \Theta c_2 \Psi c_3 \Theta c_4 \ldots c_n = b$ سره.
اوبی یا ځل: تمرین دې وي: لمړی فکر کیږي، چی اوبیونی یا حل کوونی برابرون مساوات و ښي لور ته یو ایکویوالنت اړیکه پرته ده، او هر دا . په ښی لور یا اړخ، په نوکانو کی نیول شوو اړیکوځل (اړیکځل) په $\Theta \vee \Psi$ کی خوندي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه ډیري A باندې د یوې ایکویوالنت اړیکی Θ لپاره ډیری $A / \Theta = \{ [a]\Theta \mid a \in A \}$ د ډیري A د Θ دټولو ایکویولنتټولګیو د A فاکتور الجبر په Θ پسی بلل کیږي. فاکتورډیري زیات وخت پارتیشن Partitionen یا ټوټوونی هم بلل کیږي(ځکه، چی A / Θ د A یو ټوټونی یا تجزیه ده، په پردیو برخډیریو باندې)، او ایکووالنځټو-لګي د ټوټوونو بلاکونه بلل کیږي.
خاماخا فاکتورډیري او (چی وروسته به تعریف شي) فاکتور الجبرونه یو له بل سره سر او کار لري. وهغې لار ته مرسته کوي، که د ګروپونو حالت راواخلو یا بهتره تر څیړني لاندې ونیسو: $(G, ., ^{-1}, e)$ دې یو ګروپ وي او N دې د G یو نورمالپرویشونی وي، دا په دې مانا چي یو لاندې ګروپ شته د دې لاندې نورمالپرویشونی شرطونو سره:

$\forall x \in G: x^{-1} N x = N$ (د نومال پرویشوني شرتونه)
(دا پورته داسی لوستل کیږي: د ټولو x لپاره، چی له G دی یا د G توکی دی باور لري.......)
وي دې Θ_N په G باندې یوه ایکویوالنځ اړیکه د څنګټولګي aN سره د یوه ایکویوالنځ په څیر،دا په دې مانا چی د $G / \Theta_N = \{aN \mid a \in G\}$ سره. نو کیدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي، چې په G/Θ_N باندې يو ګروپجوړخت يا ګروپسکترکچر $(G / \Theta_N , . , ^{-1} , e_N)$ د دې لاندې سره تعريف کړي

$$(aN) . (bN) = abN \ , \quad (a N)^{-1} = a^{-1}N \ , \quad eN = eN$$

اوس دا غوره ده، چې وښوول شي، چې دا ډول تعريف شوی اپريشن يا کارونه کره تعريف ده. د بيلګي په توګه د ځل . لپاره ښوول کيدی شي، چې له $aN = a'N$ او $bN = b'N$ څخه تل $abN = a'b'N$ لاس ته راځي. دا کيدی شی، چې د نورما پرويشوني شرايطو سره ساده وشميرل شي. دلته ويل کيږي، چې Θ_N او . يوله بل سره زغموړ دي. همداسې په ټوليزه توګه تعريفيږي:

۵ . ۳ . ۱۱ تعريف: A دې يو ډيری وي او $\Theta \in Eq\ A$ او $f \in Op_n(A)$. نو Θ او f د زغموړ بلل کيږي، که د ټول $a_1 , a_2 , ..., a_n , b_1 , ...,b_n \in A$ لپاره د $a_1\Theta\ b_1 , ... , a_n \Theta\ b_n$ سره تل

$$f(a_1,...,a_n)\ \Theta\ f(b_1,...,b_n)$$

باور ولري. $\Theta \in Eq\ A$ په الجبر $A = (A,F)$ يو کونګرو- اينځ اړيکه بلل کيږي، که Θ د ټولو f سره زغموړ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په A د ټولو کونګورنیځ اړیکو ډیړۍ په Con A سره په نخښنه کیږي یا نخښوون کیږي.
(انګریزي Kongroenzrelation= congruence relation)

۵ . ۳ . ۱۲ بیلګې

الف) په هر ډیري A باندې ثابتې عملیي یا کارونې $f_c : A^n \longrightarrow A , f(x_1,...,x_n) = c$ او id_A کتمټ څیرونې د ټولو $\Theta \in Con A$ سره زغموږ دي. له دې امله د پریوستونځیرونې (المانی او انګریزې (Projektionsabbidung or projections mapping یا -عملیي باور لري:

$$p_i : A^n \longrightarrow A , p_i(x_1,...,x_n) = x_i$$

یا دونه : دې ته‌بیا ګوته نیسم، چې دا پورته ډول څیرونه د پریوستونځیرونې Projektionsabbildung تعریف دي.

ب) د ټولو الجبرونو(A , F) لپاره $\Delta_A, \nabla_A \in Con A$ باور لري. یو الجبر (A , F)، کوم چې د Δ_A او ∇_A څخه بل کونګر-واینځ اړیکه ونه لري ساده بلل کیږي، د بیلګې په توګه د هر ډیري A لپاره الجبر ((A ,Op(A) ساده دی:

$$Con(A,Op(A)) = \{\Delta_A, \nabla_A\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) باور لري

$$Con(A\ ,\ Ø) = Eq\ A$$

کیدی شي ، چی گونگروواینخ اړیکي، د زغمووالی له لاري، د ځانګړو یوځایزو عملیو سره کرکتر.یزه شي:

۵ . ۳ . ۱۳ تعریف : (A ,F) دي یو الجبر وي. یوه څیرونه د بڼی

$$x \longrightarrow f(a_1 , , a ..., a_{i-1} , x ,a_{i+1} ,...,a_n)$$

د $f \in F$ (n – ځایز) او $a_1 , ...,a_{i.1} ,a_{i+1},...,a_n \in A$ سره د (A , F) یو ترانسلاشن Translation بلل کیږي.

۵ . ۳ . ۱۴ جمله: د هر الجبر (A , F) لپاره باور لري: $\Theta \in Eq\ A$ ټیك او ټیك هلته په (f (A , F باندې یو کونګرواینخ اړیکه ده، که Θ د (A , F) د ټولو ترانسلا- یشنونو سره زغمور وي.

اوبی : دا چی هر ($\Theta \in Con(A , F)$ د ټولو ترانسلیشنونو سره زغمور دی، دا سیده مخه لوستلود کونګرواینخ اړیکو څخه لاس ته راځي. په څټ دي $\Theta \in Eq\ A$ د ټولو ترانسلیشنونو سره زغمور وي. دا باید وښوول شي چي Θ د ټولو $f \in F$ سره زغمور دی. f دې یو n–ځایزه کارونه یا عملیه وي او باور دې ولري $a_1 \Theta b_1 , ..., a_n \Theta b_n$. دا چی هر د f څخه گټلی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترانسلیشن د Θ سره زغمور دی، نو لاس ته راځی

$$f(a_1,a_2,...,a_n) \;\Theta\; f(b_1,a_2,a_3...,a_n)$$
$$\Theta\; f(b_1,b_2, a_3 ,...,a_n)$$
$$.$$
$$.$$
$$\Theta\; f(b,b,...,b)$$

۵ . ۳ . ۱۵ تعریف : A دې یو الجبر وي، د تیپ f او $\Theta \in$ Con A سره. په لاندې توګه تعریف شوی الجبر A / Θ د الجبر A فاکتور الجبر Faktoralgebra نومیږي یا بلل کېږي و کونګروا‌ینخ Θ پسی یا کونګروا‌ینخ Θ ته: د A / Θ بنسټ- ډیری یی همدا فاکتورډیری A / Θ دی ، دا په دې مانا چی د Θ د ټولوکونګروا‌ینټټولګیو ډیری. د A / Θ بنسټکارونی یا عملي دA له کارونویا اپریشنونو څخه لاس ته راوړل کیږی له

$$f_{A/\Theta} : (A / \Theta)^n \longrightarrow A / \Theta ,$$
$$f_{A/\Theta} ([a_1]\Theta,...,[a_n]\Theta = [f_A(a_1,...,a_n)]\Theta$$

څخه . کارونی یاعملیي $f_{A/\Theta}$ په دې توګه کره تعریف دي: له $[a_1]\Theta = [b_1]\Theta,...,[a_n]\Theta = [b_n]\Theta$ څخه

$$[f_A(a_1,...,a_1)] = [f_A(b_1,...,b_n)]\Theta$$

لاس ته راځي (ټیك همدا د مخه تیر تعریف کی د وینا

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زغموالي خوبونه دي).
الجبر $A / \Theta = (A / \Theta, | f_{A/\Theta} \in f))$ بيرته د تيپ يا ډول f دی. زيات وخت په ساده توګه داسی $A = (A , F)$ او $A / \Theta = (A /\Theta,F)$ ليکل کيږي.

هومومورفيزم د کونګروانيځ اړيکو او فاکتور الجبر سره کلك خپلوان دي يا کلك تړلي. دا به په لاندې کی وښوول شي.

۵ . ۳ . ۱۵ تعریف : $u : A \longrightarrow B$ دې يوه څيرونه وي . نو د u زړی (الماني Kern) په لاندې توګه تعريف دی :

$$\text{Ker } u = \{ (a,b) \in A^2 \mid ua = ub \}$$

دا روښانه ده، چی د u زړی تل په A باندې يو ايکويوالنځ اړيکه ده . په دې برسيره د الجبرونو لپاره باور لري:

۵ . ۳ ۱۶ جمله: د هر هومومورفيزم $u : A \longrightarrow B$ لپاره، د u زړی Ker u په A يو کونګروانيځ اړيکه ده، دا په دې مانا چی $\text{Kern } u \in \text{Con } A$ باور لري:

اوبی: f دې د A يو n–ځايز بنستېيزه کارونه يا عمليه وي او باور دې ولري

$$(a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n) \in \text{Kern } u$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې مانا چی $ua_1 = ub_1 , ...,ua_n = ub_n$ ، نو دا لاندې لاس ته راځی:

$$uf(a_1,...,a_n) = f(ua_1,...,ua_n)$$
$$= f(ub_1,...,ub_n)$$
$$=uf(b_1,...,b_n)$$

له دې لاس ته راځی

$$(f(a_1,...,a_n) , f(b_1,...,b_n)) \in Ker\ u$$

دا په دې مانا چی Kern u یا د u زړی د ټولو بنسټیزو کارونو یا عملیو سره زغموړ دی. ځ چ ښ و

د دې په څټ د کونګرویخ اړیکو څخه تل هومومورفیزمونه لاس ته راځي:

۵ . ۳ . ۱۷ تعریف: A دې یو ډیری وي او $\Theta \in Eq\ A$. نو

$$P_\Theta : A \longrightarrow A / \Theta,\ P_\Theta (x) = [x] \Theta$$

د Θ کانوني ځیرونه kanonische Abbildung بلل کیږي.

۵ . ۳ . ۱۸ جمله : A دې یو الجبر وي او $\Theta \in Con\ A$. نو کانوني ځیرونه P_Θ یو سورجیکتیو هومومورفیزم:

$$P_\Theta : A \longrightarrow A/ \Theta$$

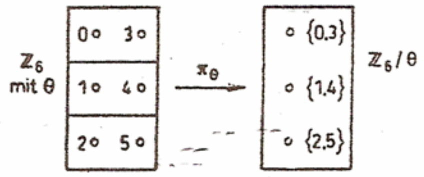
ذی. (د Θ کانوني هومومورفیزم). باور لري: د P_Θ زړی یعنی $\text{Kern}\ P_\Theta = \Theta$.

د مخ ته تیرې جملې ویناوې ساده ښوول کیږي. په تو-لیزه توګه له مخ ته تیرو دوه جملو څخه لاس ته راځي:

لاس ته راوړنه: په الجبر A باندې کونګروانیڅ اړیکی تیك د هومومورفیزم زړي دي د A پیل سره.

۵ . ۳ . ۲۰ بیلګه: Θ دې د ګروپ $Z_6 = (Z_6, +, -, 0)$ یوه کونګروانیڅ اړیکه وي، د کونګروانیڅټولګیو $\{0,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,5\}$ سره.

نو $Z_6 / \Theta = (Z_6/\Theta, +, -, 0)$ د $Z_6 / \Theta = \{\{0,3\},\{1,4\},\{2,5\}\}$ او $\Theta = \{0, 3\}$ سره. په ښرګند ډول باور لري $Z_6 / \Theta = Z_3$، چیرته چی Z_3 څیوکلیکي یا بیرته راګرزیدونکی ګروپ دی د دریو توکو سره. (وریسی څیره دې وکتل شي)



څیره ۲۸

طبعاً د یوه الجبر کونګروانیڅ اړیکي، لکه لاندې الجبرونو ته ورته، یو-تړون یا لاتیس جوړوي. د دې د کتلو لپاره ذا لاندې لاس ته راوړنې ته اړیو:

۵ . ۳ . ۲۱ جمله: A دې يوالجبر وي او R دې د $\mathrm{Con}\,A$ يو ناتش برخډيری وي. نو باور لري

$$\bigcap R \in \mathrm{Con}\,A$$

اوبې يا ثبوت: f دې د A يو n-ځايزه بنستيزه كارونه يا عمليه وي، او وې دې: $(a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n) \in R$ ، نو باور لري: $(a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n) \in \Theta$ او له دې امله

$$f(a_1,\dots,a_n)\,\Theta\, f(b_1,\dots,b_n)$$

د ټولو $\Theta \in R$ لپاره. له دې امله باور لري

$$f(a_1,\dots,a_n) \quad R\, f(b_1,\dots,b_n) \qquad \text{پای}$$

په دې پسې به وښوول شي چې د $\Theta, \Psi \in \mathrm{Con}\,A$ لپاره تل $\Theta \wedge \Psi \in \mathrm{Con}\,A$ او $\Theta \vee \Psi \in \mathrm{Con}\,A$ باور لري، د $\wedge$ او $\vee$ سره لكه د مخه مو ، چې و ښوول.

په نورو ټكو يا كليمو سره په Θ او Ψ كې غټ خوندي اكويوالنځ اړيكی او كوچنی Θ او Ψ خوندي لرلي ايكو- يوالنځ اړيكي دواړه اوتوماتيك كونګروراينځ اړيكي دي.

په داسی حال كي چې $\Theta \wedge \Psi \in \mathrm{Con}\,A$ په دې د مخه جمله پسې ترلی لاس ته راځي د $\Theta \vee \Psi \in \mathrm{Con}\,A$ ښونه په لاندې ډول سرته رسيدلي شي:

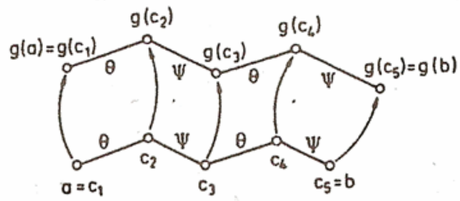
داچې $\Theta \vee \Psi \subset \mathrm{Eq}\,A$ روښانه ده نو لكه د مخه مو، چې ښوولی، بسيا كوي چې د $\Theta \vee \Psi$ زغموالی د $A = (A, F)$ ترانسليشن سره وښوول شي. وي دې $(a, b) \in \Theta \vee \Psi$ او $g(x) = f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n)$ يو ترانسليشن د $f \in F$ او $a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n \in A$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $\Theta \in (g(a),g(b))$ د ثبوت دی. جمله د
توکو $c_1,\dots,c_n \in A$ موجودیت لاس ته راکوي
د $a = c_1 \Theta c_2 \quad c_3 \Theta c_4 \dots c_n = b_n$ سره. دا چي g
د Θ همدا ډول د Ψ سره زغمور ده، نو لاس ته راځي:

$$g(a)=g(c_1)\Theta g(c_2) \Psi g(c_3) \Theta g(c_4) \dots g(c_n) = g(b_n)$$

له کومی چی د ۵.۲.۰۱پسی $(g(a),g(b)) \in \Theta \vee \Psi$ ورکوي،
لکه څنګه چی د غوښتلو وو (دا پسی خیره دې وکتل شي).



خیره

دا پورته راوړلی فکرونه کیدی شي چی په لاندې ډول راټول شي:

۵.۳ . ۲۱ جمله: د هر الجبر A لپاره $(\mathrm{Con}\,A, \wedge, \vee)$ د $(\mathrm{Eq}\,A, \wedge, \vee)$ یو لاندې الجبر دی. په ځانګړي توګه $(\mathrm{Con}\,A, \wedge, \vee)$ یو تړون یا فرباند دی (د A کونګرو-اینخفرباند یا کونګروانیخ تړون)

د دې جملی له مخه تیرې جملی څخه تړلی لاس ته راوړنه لاندې هم ده:

۳.۵ . ۲۲ جمله: د هر الجبر A او هر برخدیري $X \subseteq A^2$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Theta(X) = \bigcap\{ \Theta \in \mathrm{Con}\, A \mid \Theta \supsetneq X\}$$

یو کونګروانیڅ اړیکه په A ده، دا په دې مانا چې $\Theta(X) \in \mathrm{Con}A$. په ښکاره ډول $\Theta(X)$ په A باندې کوچنی کونګروانیڅ اړیکه ده، چې X خوندي لري.
دلته $\Theta(X)$ هغه د X څخه جوړه شوې یا تولید کونګرو-اینڅ اړیکه بلل کیږي. د پایډیري $X=\{(a_1,b_1),...,(a_n,b_n)\}$ لپاره زیات وخت داسی لیکل کیږي $\Theta((a_1,b_1),...,(a_n,b_n))$ د $\Theta(X)$ په ځای. د $Y \subsetneq A$ لپاره په زیات وخت کی په ساده توګه د $\Theta(Y^2)$ اود$\Theta(a_1,...,a_n)$ په ځاي $\Theta(Y)$ لیکل کیږي، که $Y = \{ a_1,...,a_n \}$ وي. د $\Theta(a,b)$ بنې کوانګروانیڅ اړیکی د $a \models b$ سره اصلي کوانګروانیڅ بلل کیږي.
لکه په لاندې الجبرونو کی ، دمخه دې وکتل شي، کیدی شي، چې له X و $\Theta(X)$ ته تلونکی تولیدي پروسی په روښانه ډول تشریح کړای شي یا روښانه شي. د په ساده توګه داسی کیږي، چې کونګروانیڅ اړیکي دلاندې الجبر-ونو د بنسټډیري په څیر تشریح کړای شي: A دې یو الجبر وي د تیپ f د بنسټډیري A سره. د نوي الجبر بنسټډیری A^2 دی. د هر n -ځایزې عملي سومبول $f \in f$ همداسی یو n-ځایزه عملیه f_2 په A^2 تعریفوي د

$$f_2((x_1,y_1),...,(x_n,y_n)) = (f_A(x_1,,...,x_n),f_A(y_1,...,y_n))$$

سره.
بیا د هر $a \in A$ لپاره توکی (a,a) د صفرځایزې عملیي په څیر ورزیاتیږي، په دې برسیره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s((x,y)) = (y,x)$$

سره یوه یوځایزه عملیه تعریفیږي او بالاخره په لاندي توګه تعریف شوې دوه ځایزه عملیه:

که $y_1 = x_2$ وي $t((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (x_1,y_2)$

په بله توګه (x_1,y_1)

د فامیل F سره، چی له عملیو

$$f_2\,(\,f \in f\,)\,,(\,a,a)\,(\,a \in A\,)\,,\,s\,,\,t$$

څخه جوړ وي، هغه غوښتونکی الجبر لاس ته راځي.

(ښوونه دې د کورکار وي)

۵ . ۳ . ۲۳ جمله: د هر الجبر A لپاره باور لري

$$Con\ A = Sub\,(\,A^2\,,F_{Con}\,)$$

دا په دې مانا، چی په A باندې کونګروا ینځ ټیك د $(\,A^2\,,F_{Con}\,)$ لاندې الجبرونو بنسټیزي دي. کیدي شي ، چی سیده په کونګروا ینځ اړیکو وکارول شي یااستعمال شي. څکه چی باور لري $\Theta(X) = <X>$، د کوم سره، چی $<X>$ کوچنی X خوندې لرونکی د $(\,A^2\,,F\,)$ لاندې الجبر په نخښه کوي. د $\Theta(X)$ یو بل جوړښیزه روښانونه به په جمله کی ورکړ شوې وي، چیرته چی د پولینوم کلیمه په واك کی لرو. یوه بله د کونګروینځ اړیکو او لاندېالجبرونو ترمنځ اړندونه په لاندې جمله کې روښانه شوې ده، چی ښوونه یی بیا هم ګرانو لوستونکو ته پاتی ده.

د دې له مخه یو بل تعریف : د هر ډیري A دې $\Theta \in Eq\ A$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $X \subseteq A$ لپاره دې وي

$$[X] = \bigsqcup_{x \in X} [x]\Theta$$

دا په دې مانا چې $[X]\Theta$ د هغو ایکویوالنت اړیکوΘ ټولنه ده، کوم چې یو $x \in X$ خوندې ولري.

۵ . ۳ . ۲۴ جمله : وي دې A یو الجبر، $\Theta \in ConA$،

او $B \in Sub\ A$. نو باور لري

$$[B]\Theta \in Sub\ A.$$

عمومي الجبر تیپ او داسې نور لاندې الجر

۶ تړوني Verband (lattice)

۶ . ۱ تړوني او مکمل يا پوره تړوني

: ګروپ تيورۍ اوکړۍ تيورۍ ترمنځ غبرګوالی نورۍ تيورۍ، په ځانګړي توګه د تړونی تيوري رامنځ ته کړه يا راپورته کړه. دا له دې لاندې څخه لاس ته راغله: د يوه ګروپ لاندېګرو- پونه او هم د ګروپ نورمالپرويشوني او په همدې توګه د يوې په خوښه کړۍ ټولو لاندېکړۍ اويا ټول (دوه اړخيزو، کيڼ اړخيز ، ښي اړخيز) ايدیالونه نسبت د ډيرۍ تيوري خونديونی ته-چی نيممنظم يا نيمترتيب دي-هلته دا نيمنظم يو څو بنسټيز خويونه لري.

۶ . ۱ . ۱ تعريف : يوه نيمترتيب ډيرۍ S تړونی بلل کيږي، که هغه دا لاندې دوه خويونه ولري:

الف ۱ . د توکو $a, b \in S$ هرو جوړو لپاره په S کی يو داسی توکی $c = a \cap b$ شته. چی د a او b غوځي بلل کيږي، د کومو لپاره چی

$$c \leq a \quad , c \leq b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري، که یو بل توکی 'c موجود وي، چې هغه همدا شرطونه $c' \leq b$, $c' \leq a$ پوره کړي ، نو $c' \leq c$ دی.
الف ۲) د توکو $a, b \in S$ هرې جوړې ته په S کې یو توکی d ، چې د a او b ټولنه بلل کیږي، شته، دکوم لپاره چې
$d \geq a$, $d \geq b$
باور لري، او هر بل داسې توکی 'd د $d' \geq b$, $d' \geq a$ سره دا اړیکی $d \geq d'$ پوره کوي.
په ښکاره توګه د دوه توکو a ، b دا ټولونه $a \cup b$ او غوڅی $a \cap b$ له دې سره- یواځني ټاکلي دي.دا هم په ښکاره توګه ساده لیدل کیږي، چې هر نیممنظم ډیری ، یوه ترون ته په خټ یا مخامخ ایزومورف ډیري (پرتله برخه ۲) په همدې ډول یو ترون دی. په کومو کې چې کلیمی غوڅی او ټولنه یو بل ته دوه ایزې یا دوال Dual کلیمي دي. پس کیدی شي، چې د کوم ګروپ G د یوه لاندېګروپ له ترونې او همداسی د دې ګروپ G د نورمالپرویشونې له ترونې څخه وغیره، او همداسی د یوې کړی R د لاندې کړیو ترون او همداسی د دې کړی R د ایدیال د ترونو څخه وغیره، که دا ایدیالونه کیږ او ښي هم وي- په دې ټولو حالت نوکي د لاندېګروپونو (لاندېکړیو) A , B د غوڅی څخه د هغو ډیرېتیوریکی غوڅی $A \cap B$ پوهیږو، د ټولنی په ځیر د دې لاندې ګروپونو (لاندېکړیو) څخه جوړ شوي لاندې- ګروپونه(په همدې ورته توګه لاندېکړی) { A , B } .
په ټولیزه توګه کیدی شي ، د یوه الجبر د لاندی الجبرونو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تړون څخه وغږېږو. د تړون لپاره یوڅو نورې بېلګی هم راوړو. د یوه ډېرې M ټول لاندې ډېرې نسبت د ډېرېتیورې خوند- بوني ته یو تړونی جوړوي، په کومو کی چی غوڅي او ټولنی د ډېرېتیورې د موخی یا هدف په څېر پوهېدل کېږي، داد لاندېډېریو M تړون به وریسی هم زیات وکارول شي.

۶ . ۱ . ۲ **جمله:** هر لاینې منظم ډیری L یو تړون دی، او دا د

$a \cap b = a \ , a \cup b = b$

سره د $a , b \in L , a < b$ (دې ته دلته بیا هم ګوته نیسم، چی دا په لاتین تورو لیکنه له کېڼ لورلوستل کېږي) له امله. د پیداینېتي یا طبیعي ګڼونو ډیری یو تړون دی، که د نظم اړیکې د ویشوړوالی اړیکی ونیول شي، د غوڅي رول دلته غټ ګډ پرویشونی لوبوي او د ټولنی رول کوچنی ګډ زیات- څله لوبوي. (دا د غ.ګ .و او ك.ګ.ز.موضوعګانی څما د شمیرپوهنی په کتاب کی پوره څیړل شوې)

تړونونه د الجبر یو ځانګړی حالت دی. کیدی شي ، چی تړون بې د نیمنظم له استعمال څخه،یواځې د خویونو له مخې تعریف کړی شي، چی غوڅي او تړون د بینار اړیکو په څېر باید ولري:

۶ . ۱ . ۳ **جمله :** ډیریS د دوه بینار یادوه ګونو اړیکو $a \cup b$ او $a \cap b$ سره هلته او هلته یا ټیك هلته یو تړون دی، که دا عملیې لاندې کتمټ اړیکی پوره کړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

يا دونه: لوستونکی دې بيا هم ماته بخښنه وکړي، که دا ساده کليمه بيا دلته کوته لکه کړم، چې دا هلته او هلته په دې مانا دی، چې که چيرې دا شرطونه پوره وي، نو دا يو ترون دی. اوپه ښتې: که دا الجبر يو ترون وي ، نو دا شرطونه پوره دی. دا په دې مانا، چې د يوه ښخه بل لاس ته راځي او په ښتې

$II_1.\quad a \cap a = a,\quad a \cup a = a$

$II_2.\quad a \cap b = b \cap a,\quad a \cup b = b \cup a$

$II_3.\quad (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c),$
$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c):$

$II_4.\quad a \cap (a \cup b) = a \cup (a \cap b) = a$

موږ لمړی نيسو ، چې يو ترون S ورکړ شوی دی، عمليې $a \cap b$ او $a \cup b$ د الف۱ او الف ۲ لاندې تعريف شوې دي يا پيژندلای شوي دي. د II_1 او II_2 باوري کيد نه بيا روښانه ده. موږ اوس خوي II_3 ازمايو او دا د غوښې لپاره. له لمړي ۱ ښخه لاس ته راځي:

$(a \cap b) \cap c \leq a \cap b \leq a.$
$(a \cap b) \cap c \leq a \cap b \leq b,$
$(a \cap b) \cap c \leq c$

همداسی لکه د لمړي ۱ پسی

$(a \cap b) \cap c < b \cap c.$
$(a \cap b) \cap c < a \cap (b \cap c)$

لاس ته راځي. په برابره يا همدې توګه دی

$a \cap (b \cap c) < (a \cap b) \cap c$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره II_3 باوري کیږي
وریسی بیا د لمړي ۱ پسی روښانه دي

$$a \cap (a \cup b) < a ;$$

په همدې توګه له بلې خوا $a < a$ باور لري او د لمړي۲
له امله $a < a \cup b$ ، پس د لمړي ۱ پسی دی

$$a < a \cap (a \cup b)$$

له دې څخه د II_2 باوري کیدنه لاس ته راځي.
اوس دې یو ډیریS د دوه بینار یا دوه ګونو اړیکو سره ورکړ
شوي وي، کوم چې خویونه II_1 او II_4 لري. د $a, b \in S$
لپاره خویونه

$$a \cap b = a, \quad a \cup b = b \qquad (1)$$

تل سملاسي پوره دي یا پوره نه دي. که $a \cap b = a$ وي نو
له II_4 او II_2 څخه

$$(a \cup b) = (a \cap b) \cup b = b$$

لاس ته راځي.
که د دې په څېر $a \cup b = b$ وي، نو II_4 پسی لرو

$$a \cap b = a \cap (a \cup b) = a$$

که د توکو a او b لپاره مساوات (۱) باور ولري،
نوکیږدو $a \leq b$. له دې سره په ډیريS کی یو نیمنظم
پلی کیږي. په ریښتونی $a \leq a$ د II_1 په بنسټ دی.
که په دې ورزیات $a \leq b$ او $b \leq c$ باور ولري، یعنی

$$a \cap b = a, b \cup c = b ،$$

نو د II_3 سره سم لاس ته راځی:

$$a \cap c = (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b = a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې مانا، چې $a \lneq c$. بالاخره دی: $a \leq b$, $b \lneq a$,
پـ $a \cap b = a$, $b \cap a = b$ له II_2 بیا لاس ته $a = b$ راځي .
پسی ترلی د لمړي ۱ شرط باوړوالی یا باوریتوب ښایو. له
$$(a \cap b) \cap a = a \cap (a \cap b) = (a \cap a) \cap b = a \cap b$$
څخه لاس ته راځي $a \cap b \leq a$ ، په ورته توګ کیدی شي
$a \cap b \leq b$ وښوول شي.

د دې په ختې په S کی دې یو په خوښه توکی c' تاکلی وي،
کوم چې شرطونه $c' \lneq a$, $c' \lneq b$ دا په دې مانا چې
$$c' \cap a = c' , \quad c' \cap b = c'$$
پوره کوي، نو باور لري
$$c' \cap (a \cap b) = (c' \cap a) \cap b = c' \cap b = c'$$
له کوم چې $c' \lneq a \cap b$ لاس ته راځي. دا توکی $a \cap b$ په
تعقیب د توکو a او b غوځي د لمړي ۱ په موخه یا هدف
انځوروي. په تیك دې سره سمه توګه توکی $a \cup b$ ښوول
کیدی شي، چی د توکو a او b تړلنه ده، د لمړي ۲ په
موخه یا هدف.

څمور د ترون د کلیمي دوم تعریف په ګوته کوي، چی ترون
د تولیز الجبر پریمیتیو تولګي یا ساده تولګی جوړوي، د
دې دوه دوه ځایزو عملیو سره(دا مو د مخه په ګوته کړي
وو، چی ساده تولګی څه ته وایي)

دا د ترون د کلیمي هغه زړی دی، څنګه چی دا د لاندې
ترونو او ایزومورفو ځیرونو او د ترونونو د خوندیونو لپاره
په پام کې نیول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ . ۱ . ۴ **تعریف** : یو د ترون S لاندېډېری T لاندېترون بلل کیږي، که دا د مخ ته تعریف شوې، د الجبر په موخی راوړل شوي ترون، یو لاندې الجبر انځور کړي. د نورو ټکو سره یا کلیمو سره یا په بل ډول T د هرو دوه توکو a او b غوڅی $a \cap b$ او د هغو توکو ټولنه $a \cup b$ خوندې لري، نسبت وهغو عملیو ته چی په ترون S کی تعریف شوي دي، چی T پخپله یو ترون شي وهغو عملیو ته چي په S کی تعریف شوي وي.

دې ته دې پام وي، چی د یوه ترون S یو لاندې ډېری T نسبت په S کی تعریف شوي نیمنظم ته چی هغه په کی هم باور و لري، ښوول کیدی شي، مگر دا ضرور نه ده یا په نورو کلیمو ، تل داسی نه ده، چی دا دې یو لاندېترون جوړ کړي. د گروپ G د ټولولاندېگروپونو ترون د ډیریتیوري له مخي نظم راوستی شي، خو دا ترون د گروپ G د ټولو لاندېډیریو ترون لاندېترون نه انځوروي، ځکه چی ټولنه په دواړو ترونونو کی مختلفی ماناوې لري. په همدې توګه د یوې کړی R د لاندېکړیو ترون هم همداسی دی، چی په ټولیزه توګه دکړی د زیاتونیگروپ لاندېگروپونه ترون نه جوړوي.

۶ . ۱ . ۵ **جمله** : د یوه گروپ G د نورمالپرویشونو ترون د زیاتونگروپ G د ټولولاندېگروپونو لاندې ترون نه دی، چی دا مو د مخه د گروپتیوري کی ښوولی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ . ۱ . ۶ **تعریف** : د یوه تړوني S را په ځتکیدونکی یواځنی ځیرونه یا په بل عبارت یو اینجکتیوه ځیرونه u په تړون 'S باندې یوه ایزومورفه ځیرونه ده یا په بل عبارت یوه ایزومورفه خوندیونه ده د S په 'S کی ، که د په خوښه توکو a , b ∈ S لپاره

$$(a \cup b)\, u = au \cup bu \;,\quad (a \cap b)\, u = au \cap bu$$

باور ولري

یادونه : د u لپاره په کتابونوکی زیات وخت یوناني توري ځاي په ځاي کیږي، مگر زه دا ستونځي لرم، چې یوناني توري مې په پروگرام کی نه شته. هیله ده چې ځیرونی او د یوه ډیری توکی توپیر ته به د گرانو لوستونکو پام وي) دا د S او 'S یو ایزومورفیزم دی، چې د ټولیز الجبر په ځیر راوړل شوي تړوني یې یو له بل سره لري.

۶ . ۱ . ۷ **جمله** : د یوه تړوني S ایزومررف خوندیونه u په تړون'S کی، د نیممنظم ډیریو په موخه یا هدف د ډیري S په ډیري S کی یو ایزومورفیزم انځوروي.

اوبی : د اوبیوني لپاره ټکو a , b ∈ S ، که a < b وي یعنی a∩b = a ، نو وبه لرو

$$(a \cap b)\, u = au \cap bu = au$$

او له دې امله لاس ته راځي au < bu ، که دا پام په ځېر یا په برعکس لور وکړو او وکاروو، چې u یو یواځنی په ځتکیدونکی دی، نو له au < bu ځخه هم a < b لاس

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته راځي.
دا پورته بيلګی را ته ښايي، چی په ښتړ ثابتونه باورنه لري.
د دوه ډيريو S او 'S لپاره ، چی نيممنظمي دي، يو ايزو-
مورف څيروني u ته د S په 'S کی، هلته اړتيا يا
ضرورت شته، چی S او 'S دواړه ترونونه وي. دا د S
ايزمورفی څيرونی کي په 'S باندې بل ډول ځانونه نيسي.

۶ ۱ . ۸ جمله : که ترونونه S او 'S ورکړ شوي وي،
نو د نيم نظم په موخه هر ايزمورف څيرونه د S په 'S
باندې ترون S ايزمورف په ترون 'S باندې انځوروي.
اوبی : په ريښتيني د $a, b \in S$ سره له $a \cap b \leq a$
څخه هم $(a \cap b)u \leq au$ او په همدې توګه

$$(a \cap b)u \leq bu$$

که $c' \in S$ داسی وي، چی $c' \leq au$ او $c' \leq bu$ باور
ولري، او c د S هغه توکی وي، د کوم لپاره چی
$cu = c'$ دی، نو لاس ته راځي $c \leq a$ او $c \leq b$ دا
په دې مانا چی $c \leq a \cap b$ له کوم څخه چی
$cu < (a \cap b)u$ لاس ته راځي. له دې سره سم
لاس ته راځي

$$(a \cap b)u = au \cap bu$$

د ټولنی لپاره يی ښوونه يا اوبيونه په همدې توګه ده. موږ
دا هم په پام کی نيسو، چی په ترونونو باندې د هومورفيزم
اوټولی هغه کيلمي چی په خوښه، د ټوليزالجبرونو په ساده

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا پریمیتو ټولګیو کارول کیږي، کارولی شو. (دلته نورې بیلګې هم شته خو هغه موضوعګانی موږ نه دې څیړلی ، له دې امله یې نورې زه هم دلته نه ګوته لکی کوم)
د تیرو بینار اړیکو په بنسټ(لمړی برخه دې وکتل شي)،
په یوه ډیرې M باندې بینار اړیکی یو تړوني جوړوي،
کوم چی د M×M ډیري د ټولو لاندې ډیریو سره پریوځي،
یا برابر دی. په همدې توګه په یوه ډیري M باندې تعریف شوي ایکویوالنت اړیکي یو تړون جوړوي، لکه په برخه ۱ کی چی ښوول شوي دي. دا د ایکویوالنت اړیکو تړون د بینار اړیکو د تړون لاندې تړون نه دی.

۶ . ۱ . ۹ جمله: هر تړون په یوه ځانګړي ډیري باندې تعریف شوي ایکویوالنت اړیکو تړون کی ایزومورف خوندې دی.
(Whitman, Bull.Amer. Math. Soc 52(1946), 507 - 522)

۶ . ۱ . ۱۰ جمله :په یوه ورکړ شوي ډیري باندي تعریف شوی تړون د یوه ټاکلی ګروپ ټولو لاندېګروپونو تړون کی ایزومورف خوندي دی.
(Brkhoff , Proc .Cambr.Phil.Soc 31(1935) , 433 - 454)
له دې سره سم هر تړون د یوه ټاکلی ګروپ ټولو لاندېګرو-پونوتړون کی ایزومورف خوندي دی.
ډیر دا مخ ته راوړل شوي تړونونه – لکه د یوه ډیري M لاند-ډیریو تړون ، د یوه ګروپ G لاندېګروپونو تړون، د یوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

کړی R د ایډیالونو ترون ، په یوه ډیرې کی د ایکویوالنځ-اړیکو ترون، - دا سی خویونه لري، د هغو غوځی او ټولنه نه یواځې د دوه توکو لپاره بلکه د اسوځیاتیو قانون سره سم د زیاتو توکو لپاره روښانه یا تشریح شوي ده، بلکه د ناپای ډیرو ډیریو لپاره هم.

په بل ډول افاده کوو، دا ترونونونه دلاندي تعریف سره سم پوره ترونونه انځوروي:

۶ . ۱ . ۱۱ تعریف : یو نیم منظمډیری S پوره ترون یا مکمل ترون بلل کیږي، که په خوښه ناتش لاندیډیري $A \subseteq S$ لپاره په S کي توکي c او d د لاندې ورکړشوو خویونو سره سم موجود وي:

الف ۱ . د ټولو $a \in A$ لپاره نامساوات $c \leq a$ باور لري، هر وریسی توکی c' د $c' \leq a$ سره د ټولو $a \in A$ لپاره شرطونه $c' \leq c$ پوره کوي.

دوم ۲ - د ټول $a \in A$ لپاره نامساوات $d \geq a$ باور لري، هر اوریسی توکي d' د $d' \geq a$ سره د ټولو $a \in A$ لپاره شرطونه $d' \geq d$ پوره کوي.

دا یواځنی ټاکلی توکی c او d د لاندیډیري A د توکو غوځی او همداسی ټولنه بلل کیږي. د سومبولونو سره کیدی ، چی c او d په لاندې توګه انځور شي:

$$c = \bigcap_{a \in A} a, \quad d = \bigcup_{a \in A} a$$

[illegible]

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا پیژند نخښه i یو ټاکلی پیژندډیري I کی وڅغلي یعنی $i \in I$، په لاندي بڼه هم لیکل کیږي

$$c = \bigcap_{i \in I} a, \quad d = \bigcup_{i \in I} a$$

طبعآ یو پوره تړون یو تړون هم دی، په ورسره بلده موخه یا هدف.

۶ . ۱ . ۱۲ تعریف :د پوره تړون S د ټولو توکو غوڅی د تړون صفرتوکی بلل کیږي او په سومبول 0 سره په نخښه کیږي. دا توکي د لاندې درې شرطونو، هر یوه سره یوا- څنی ټاکل کیدیشي. د ټولو $a \in S$ لپاره باور لري

1) $0 \leq a$; 2) $0 \cap a = 0$; 3) $0 \cup a = a$.

۶ . ۱ . ۱۳ تعریف : د یو پوره تړون د ټولو توکو ټولنه د تړون یویتوکی بلل کیږي اود سومبول 1 سره په نخښه کیږي. دا سي یویتوکی د لاندې دري په خوښه شرطونو، له یوه څخه یواځنی ټاکلی دی : د ټولو $a \subset S$ لپاره باور لري

1') $1 \geq a$; 2) $1 \cup a = 1$; 3') $1 \cap a = a$

طبعآ هغه تړونونه چی پوره تړونونه نه دي کړی شي، چی صفرتوکی او یویتوکی (او یا یو له دوي څخه) ولري.
د یوه ګروپ G د لاندې ګروپونو په تړون کی د هغه صفر توکی یونلاندېګروپ سره او یویتوکی یی پخپله د G سره انځوریږي، د یوې کړی د لاندېکړیو په تړون کی د صفرتوکی د صفر لاندېکړی سره او پخپله د کړی R

سره انځوریږي، د یوه ډیرې M ټولو لاندېډیریو تړون کی د تشډیري او پخپله د ډیري M سره انځوریږي.
د پرویشنی قانون له مخی منظم یا تنظیم شوي د طبیعي ګڼونو تړون او د ځنځیروني ، چی پخپله طبیعي نظم یی جوړوي، هر وار یی صفر توکی ګڼ ۱ دی، په داسی حال چی یویتوکي موجود نه دی.

۶ . ۱ . ۱۳ جمله: یو نیم منظم ډیری S هلته او هلته یوتړون دی، که هغه یو یویتوکی ولري او په هغی کی د هرو، په خوښه ناتش لاندې ډیریو لپاره غوځی موجود وي.
اوبی : د ښوونی لپاره بسیا کوي، که داسی فکر وکړو، چی د یویتوکی د موجودیت او د د ټولو غوځیو له موجو-دیت څخه د ټولنی موجودیت لاس ته راځي. A دې د S یو ناتش لاندېډیری وي. په S کي داسی توکيb موجود دی د کوم لپاره چی $b \geq a$ دی، د ټولو $a \in A$ لپاره، داسی یو توکی تل دا یویتوکی دی، B دي د ټولو داسی توکو یو ناتش لاندېډیري وي او d دې د هغو غوځی وي :

$$d = \bigcap_{b \in B} b$$

موږ به سملاسی وښایو، چی d د لاندېډیري A ټولنه انځوروي. په رېښتیني سره $a \leq b$ دی د ټولو $a \in A$ لپاره او د ټولو $b \in B$ ، له دې امله $a \leq d$ باور لري. وربسی دې $s \in S$ داسی وي، چی $s \geq a$ د ټولو$a \in A$ لپاره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې څخه $s \in B$ لاس ته راځي او له دې سره $d \le s$.
په دې ډول دی

$$d = \bigcup_{a \in A} a$$

د یوه نیم منظم ډیري خویونه، چې یو پوره ترون(او یا هم یو ترون) وي، ځان په یوه په ځټ ایزومورفیزم ته لانبودوي (د دې سره دې لمړی برخه پرتله شي)، موږ کړی شو، چې د همدا اوس ښوول شوو جملو څخه او د هغو د نیونو یا فرضیو څخه هم د صفر توکي موجودیت او د ټولو لاندېډیریو موجودیت و غوښتل شو.

۶ . ۱ . ۱۴ تعریف: د یوه نیم منظم ډیري M څیرونه u په نیم منظم ډیري N کی، په کوم کی چې له $a , b \in M , a \le b$ څخه تل $au \le bu$ لاسته اځي، مونوتون monoton بلل کیږي(مونوتون په دې مانا، چې توکی یو په بل پسی یا لویږي او یا کوچني کیږي). یو ترون S هلته او هلته پوره ترون دی که د S په هر مونوتون څیرونی u په خپل ځان باندې فیکس توکی موجود وي، یعني توکي، د کومو لپاره چې $au = a$ دی
(Tarski , Pacif. J. Math.5 (1955) , 285 - 309 ;
David Ö Pacif. J . Math 5(1955) 311 - 319)
لکه د مخه تیرو درسونو چې وښول شو، هر نیم منظم ډيري M د ټولو لاندېډیریو په پوره ترون M کی خوندي ده.

موږ غواړو چې دا لاندې جمله وښايو

۶ . ۱ . ۱۵ جمله : هر تړون کيدی شي ، چې په يو پوره تړون کی ايزومورف(د تړونونود ايزومورفي په موخه، پرتله دمخه همدا برخه) خوندي شي.

دا جمله د راتولنکي جملی څخه لاس ته راځي، چې نسبت و مخ ته تيره لمړی برخی کی وينا ته لږ تيزه ويناد :

۶ . ۱ . ۱۶ جمله : هر نيم منظم ډيری M په يو ټاکلي تړون S کی ايزومورف خوندي دی، او دا په داسی توګه چې د هر لاندېډيري M A لپاره و کوم ته چې په M کی غوڅی يا ټولنه موجود ده، چې دواړه د u په خونديونه کی و بل ته وړل کيږي: دا داسی بلل کيږي، چې دی

$$\left(\bigsqcap_{a \in A} a\right) u = \bigsqcap_{a \in A} au \ , \ \left(\bigsqcup_{a \in A} a\right) u = \bigsqcup_{a \in A} au \qquad (2)$$

دا په برخه ۱ کي جوړ شوي د M خونديونه په M کی، په روښانه توګه مخ ته لرونکی شرطونو لپاره بسيانه کوي.

موږ په لاندې توګه مخ په وړاندې خو: لمړی نيسو چې ډيری M يو صفر توکی لري، که نه نو M ته يو توکی 0 صفر ورزياتوو.

۶ . ۱ . ۱۷ تعريف : يو ناتش لانديډيری X M په M کی يو ايديال بولو که:

اول) X و هر خپل توکی x ته تړل توکی y هم ...

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x \leq y$ سره.

دوم) د هر $X' \subseteq X$ لپاره، د کوم لپاره چی په M کی ټولنه موجود وي دا ټولنه په X کي هم موجود ده.

د ډیري M د ټولو ایدیالونو ډیری S نسبت د ډیریتیوري خوندیونی ته نیم منظم دی. دا چی S یو یویتوکی لري– په څرګند ډول M د خپل ځان ایدیال دی–، له دې وراخواد ایدیالونو په خوښه ډیري غوځی، چی صفر لري، او ټول د ایدیال په تیوري کی راغلي تعریفونه پوره کوي، نو ډیريS د په دې برخه کی د مخه لوستل شوو له مخی پوره تړون دی.

د یوه په خوښه توکی $a \in M$ لپاره د ټولو توکو $b \in M$ ډیری (a) د $b \leq a$ سره یو ایدیال انځوري، کوم چی د a څخه راجوړ یا تولید شوی اصلي ایدیال بلل کیږي. که هر توکی $a \in M$ د هغه څخه راجوړ یا تولید ایدیال(a)باندې تنظیم شي، نو په لمړی برخه کي لوستل شوو له مخی یو ایزومورف خوندیونه u د نیم تنمظیم شویډیر M ، په پوره تړون S کی، لاس ته راځي.

موږ نو نیسو ، چی په M کی د لاندېډیریو $A \subseteq M$ د هغو غوځی

$$c = \bigcap_{a \in A} a$$

موجود دی. پس لرو $c \leq a$ او په دې پسی $(c) \leq (a)$ د ټولو $a \in A$ لپاره.

که بیا د ټولو اصلي ایډیالونو (a) , $a \in A$ د ډیریتیور–

(c) ketabton.com: The Digital Library

یکي غوښې توکی x ولري، نو $x \leq a$ دی، د ټولو $a \subset A$ لپاره او له دې امله $x \leq c$.له دې سره باور لري

$$(c) = \bigcap_{a \in A} (a)$$

او له دې سره جوخت لمړی مساوات (۲) وښوول شو.

همداسې دې و دې لاند ډیر $A \subseteq M$ ته په M کی ټولنه

$$d = \bigcup_{a \in A} a$$

موجود وي. نو $(a) \supseteq (d)$ دی د ټولو $a \in A$ لپاره.

که یو ټاکلی ایدیال X ټول $a \in A$ ولري، نو په همدې توګه د دې ټولنه هم خوندي لري. په دې لاس ته راوړنی سره $X \subseteq (d)$ دی.

له دی امله باور لري

$$(d) = \bigcup_{a \in A} (a)$$

په دې توګه مو د (۲) دوهم مساوات وښوول، او په له دې امله د جملې اوبې پوره شو.

۶ . ۱ . ۱۸ جمله :یو نیمتنظیم شوی ډیری S هلته او هلته یو پوره ترون دی، کله چې په S کی یو صفر توکیموجود وي او هر ایدیال یو اصلي ایدیال وي.

یا دونه: د دې جملې له ښوونی څخه هم دلته تیریږو .

کیدی شي په کوروش یا خوروش کې وکتل شي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library