

# الجبر وٲ

*ALGEBREN*

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Ketabton.com

ليكوال:

ڊاڪٽر ماخان (مڀري) شينواري

## نيوليک

الف	سريزه .....
ب	شميرپوهنيزې نخښې .....
۱	۱. گڼونډيری .....
۱	۱. ۱. طبيعي گڼونډيری .....
۴	۲. ۱. د ټول گڼونډيری .....
۵	۳. ۱. ريشنل گڼونډيری .....
۷	۴. ۱. رييل گڼونډيری .....
۷	۵. ۱. ايماگينار گڼونډيری .....
۸	۶. ۱. کمپلکس گڼونډيری .....
۱۱	۲. ډيرپوهنيزې ستکليمی .....
۱۱	۱. ۲. ډيری .....
۲۶	۲. ۲. خلډيری يا ضرب ډيری او اړيکی يی .....
۳۶	۳. ۲. نيمنظم يا نيمرتريب .....
۳۸	۴. ۲. مينيمالشرطونه .....
۴۱	۳. الجبري جوړښتونه .....
۴۴	۱. ۳. گروپ .....
۵۹	۲. ۳. بدن يا تن او کړی .....
	نورمي شوی ټولينوم ۶۶ څه مانا لري
۷۰	۳. ۳. لانديکروپ او لاندي کړی .....
۸۰	۴. ۳. ايزومورفيزم .....

---

۵ . ۳	د نیمگروپ په گروپ او کړۍ په یوه (ناضرور
۹۲	کموتاتیو) تن یا بدن کی خونديونه .....
۹۵	۶ . ۳ نورمالپرویشنه .....
۱۰۵	۷ . ۳ ایډیال او پاتیتولگیگیری .....
۱۱۶	۴ د بول الجبر، سرکت الجبر .....
۱۱۶	۱ . ۴ د ول الجبر ست کلیمی .....
۱۲۹	۲ . ۴ د بول فنکشنونه او پولینومونه .....
۱۴۶	سویج الجبر یا برینسناجریان الجبر .....
۱۵۶	۵ الجبرونه .....
۱۵۶	یو خو بنسټ کلیمی
۱۷۳	۲ . ۵ لاندې الجبر یا سب الجبر .....
۱۸۰	۳ . ۵ ایزمورفیزم ، هومومورفیزم .....
۲۰۷	۶ . ترونونه یا ترونی .....
۲۰۷	۱ . ۶ ترونی او مکمل - یا پوره ترونی ..

## ۱ گڼونډپيري

د دې لپاره، چې دا د الجبر کليمی مو پوره څيړلی وي او ښه پوهور شي، نو په سر کي غواړم هغه د ښوونځي بايد ( چې متأسفانه دا مو په هيواد کي، په دې نامه نه وو نومولي ) ورسره بلد، د گڼونو ډيري يو په بل پسې تعريف کړم، يا بهتره لنډه گوته ورته ونيسم او دا په هغو کي د باوري کارونو يا ايريشنونو يا عمليو او يا گڼونو او يا د تړونونو په بنسټ.

### ۱.۱ طبيعي گڼونډپيري

Die Menge der natürlichen Zahlen

(the set of non negative integer)

دا د گڼونو ډيري چې صفر ورسه نه وي په لاندې ډول دی:

$$N = \{ 1, 2, 3, \dots, n, \dots \}$$

دا لاندې د طبيعي گڼونو ډيري دی، چې صفر ورسره

دی، يا په بل عبارت : د طبيعي گڼونو ډيري د صفر سره

$$N^* = \{ 0, 1, 2, \dots, n, \dots \}$$

په دې ډيري کي لاندې شيمر قاعدې باور لري

.  
. .  
.



## ۱ . ۱ . ۲ په طبیعی گنونا کی شمیرقاعدي

الف : و زیاتون ته یا بهتره، نسبت و زیاتون ته:

اول : د هرو دوه طبیعی گنونا  $a, b \in \mathbb{N}$  لپاره، و زیاتون ته، یا نسبت و زیاتون ته، یو دریم طبیعی گن  $c \in \mathbb{N}$  شته د کومو لپاره چی باور لري:  $a + b = c$

دوم : اسوخیاتیو قانون Assotiative : د طبیعی گنونا لپاره د اسوخیاتیو قانون باور لري:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

دریم : کموتاتیو قانون commutative : د طبیعی گنونا لپاره د کموتاتیو قانون باور لري، یعنی:

$$a + b = b + a$$

خلووم: بی تاثیره یا ناپیلی توکی das neutrales Element : په

طبیعی گنونا کی چی صفر ورسره وي باور لري

$$a + 0 = 0 + a = a$$

صفر د طبیعی گنونا ناپیلی یا بهتره بی تاثیره توکی بلل

کیږي.

ب : و خل ته یا بهتره نسبت خل ته

اول : د هرو دوه طبیعی گڼونو  $a, b \in \mathbb{N}$  لپاره یو دریم طبیعی گڼ  $c \in \mathbb{N}$  شته، د کومو لپاره چی باور لري

$$a \cdot b = c$$

دوم : د طبیعی گڼونو  $a, b, c \in \mathbb{N}$  لپار اسوخیاتیو قانون باور لري

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

دریم : د طبیعی گڼونوډپیری کی کموتاتیو قانون باور لري

$$a \cdot b = b \cdot a$$

څلورم. نسبت و ځل ته ناپیلی یا بهتره بی تاثیره توکی : که طبیعی گڼونه له 1 سره ځل شي، نو بیرته پخپله همغه طبیعی گڼ لاس ته راځي

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

دا 1 د طبیعی گڼونو یو ناپیلی یا بی تاثیره توکی بلل کیږي، چی یوی ( دا ځکه یوی بولو، چی باید له یو

سره بی توپیر شوی وي ) بی بولو  
یا دونه : د بهرني چی یوی له یو څخه یو پام وړی شوی.

یادونه : په پورته نښلونو کی دې ته پام وي، چی ورکړ شوي توکی یو د بل څخه باید توپیریدونکی نه وي، کیدی شي، چی یو له بل سره مساوي هم وي یا بهتره همغه توکي وي.

ګورو چې په طبیعي ګڼونډیروي کې، نسبت و زیاتون ته، د هر توکي لپاره د هغه په څټ یا برعکس ګڼ نه شته، نو له دې امله مجبور یرو، چې د طبیعي ګڼونو ډیری د ټولګڼونو ډیری ته پراخ کړو،

۱ . ۲ د ټولګڼونو ډیری die Menge der ganze Zahlen :

د ټولګڼونو ډیری، د طبیعي ګڼونو ډیری د صفر او د دې

طبیعي ګڼونو د توکو په څټ ګڼونو ډیری دی، چې په  $Z$

سره یی بنایو او داسی یی لیکو

$$Z = \{ \dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots \}$$

په ټولګڼونو ډیری کې هغه په طبیعي ګڼونډیروي کې باوري

ننسلونی یا عملیې باور لري او په دې برسیره د هر یوه ګڼ

لپاره د هغه په څټ ګڼ نسبت و زیاتون ته هم موجود دی،

یعنی لاندې باور لري:

د هر ټولګڼ  $a \in Z$  لپاره د هغه په څټ ګڼ یعنی  $-a \in Z$

موجود دی، چې دا لاندې باوري کوي:

$$a + (-a) = a - a = -a + a = 0$$

دلته  $-a$  د  $a$  په څټ ګڼ یا inverse دی نسبت و زیاتون ته.

دې ته طبعاً پام شته، چې د مثبت ګڼ ځل د منفی ګڼ

سره منځ ته راغلی، چي نتیجه یی یو منفی گڼ دی، دا په دې مانا، چي دلته اصلي نښلونه یا عملیه زیاتون دی او نه . (ځل).

یادونه : زیاتون دوه ځایزه عملیه binäre Operation یا نښلونه ده او په څټ عملیه یوه یوځایزه عملیه unäre Operation یا نښلونه ده.

گورو، چي د ټولگڼونو په ډیری کی د ځل لپاره د گڼونو په څټ گڼونه inverse Zahlen نه دي تعريف، یعنی د یوې افغانی یو په څلورمه ( 1 / 4 ) یو ټولگڼ نه دی، نو له دې امله باید د ټولگڼونو ډیری و ریشنل گڼونو Q ته پراخه شی .

۱ . ۳ ریشنل گڼونه rationale Zahlen :

د ریشنلگڼونو ډیری له دې امله د ټولگڼونو ډیری Z او د ټولو ماتگڼونو ډیری a / b څخه جوړ دی، چي په Q سره یی په نڅښه کو او په لاندې ډول یی لیکو :

$$Q = \{ Z , a/b , a,b \in Z , b \neq 0 \}$$

دا داسی لوستل کیږي : ډیری Q مساوي دی د ټولگڼونو ډیری Z اود مات گڼونو a / b ډیری سره،  $a , b \in Z$ .



د ریشنل گڼونو ډیری کی، هغه په  $Z$  کی ټول د شمیرقوانین باور لري او په دې برسیره د هر گڼ لپاره نسبت و ځل ته د هغه په څټ گڼ هم موجود دی، یعنی په ریشنل گڼونو کی د هر گڼ  $a \in Z$  لپاره یو  $b \in Z$  موجود دی د کوم لپاره چي باور لري:

$$a \cdot b = 1 \Rightarrow b = 1/a, a \neq 0$$

دلته  $a$  باید د صفر سره برابره یا مساوي نه وي، ځکه، چي په صفر ویش نه دی تعریف.

گورو چي ددوه په څټ گڼونو ځل د ریشنل گڼ یو یوی راکوي. یوی هغه توکی دی، چي د ریشنل گڼون ډیری هرتوکی سره د ځل نښلونه کی بی تاثیر پاتي کیري یا ناپیلی. دا یوی مورد له دې امله ناپیلی *das neutrale Element* او یا هم بی تاثیر توکی بولو.

په پورته گڼونو کی توان تعریف دی، یعنی هر گڼ د خپل ځان سره ځل کیدنه شته، خو د دې په څټ کارونه یا عملیه یا بهتره نښلونه موجود نه ده، نو له دې امله باید دا گڼونډیری نور هم پراخه شي. یعنی د گڼون رینسه هم باید په گڼونډیری کی باور ولري. د بیلگي په توگه د  $\sqrt{2}$  رینسه یعنی  $\sqrt{2}$  په ټولگڼونو کی نه دی تعریف. دا پراختیا مو ریشل گڼونډیری ته لارښودوي، چي

په  $R$  سره بنایو یا نخبه کوو.

۱.  $\mathbb{R}$  رییل گڼونډپیری  $R$  die Menge der reellen Zahlen: د هغو گڼونډپیری، چی له ریښو جوړ وي، هغه موږ د ایریشنل گڼونډپیری die Menge der irrationale Zahlen بولو چی په  $Q_i$  سره یی په نخبه کو. د رییل گڼونډپیری یاد رییل گڼونو ډیری په دې توگه بیا د ریشنل گڼونو ډیری او د ایریشنل گڼونو ډیری د ټولنی څخه جوړ دی یعنی

$$R = Q \cup Q_i$$

یادونه: په پورته او راتلونکی کی که  $U$  راشی، نود ټولنی په ځای به یی ځای نیولی وي، که بل نوم ورسره مل نه وي. په دې ډیری کی د هر نامنفی گڼ لپاره د هغه گڼ ریښه موجود ده. د رییل گڼونو ډیری بیا تکرارووو، چی د ټولو ریشنل گڼونو ډیری څخه عبارت دی، چی د نامنفی ریشنل گڼونو گڼونو ریښی هم ورزیاتی شی.

په رییل گڼونو کی د ریشنل گڼونو ډیری ټول قوانین باورلری او په همدې ډول په  $R$  کی د هر مثبت گڼ  $a$  ریښه هم موجود ده، یعنی  $\sqrt{a}$  موجود ده، چی  $a$  منفي گڼ نه وي. دا ریښه نیونه یو یو ځایز اږیشن یا عملیه او یا نښلونه ده.

دلته هم سملاسی راته جوته کیري، چی د ریښي یا بهتره د مربع ریښی د منفی ریښه نیونکي یا ریښه ایستونکی گن ریښه نه ده تعریف، نو له دې امله باید د رییلگنوندیری د کمپلکس گنوندیری ته پراخه شي.

۱ . ۵ ایماگینار گنوندیری: د ټولو منفی گنوندیری ریښوډیری

ته ایماگینار گنوندیری وایو *die Menge der imaginäre Zahlen*. او دا په  $I$  سره په نخښه کوو. دا هغه گنونه  $i$  دي، د کومو لپاره چې باور لري:  $i^2 = -1$ . یانی  $i = \sqrt{-1}$ ، نو که  $b$  یو رییلگن وي، نو  $ib$  یو ایماگینار گن دی .

اوس راځو د کمپلکس گنوندیری تعریف ته :

۱ . ۶ کمپلکس گنوندیری

*die Menge der komplexen Zahlen*

کمپلکس گنوندیری د رییلگنوندیری او ایماگینارگنوندیری ټولنی ته وایي. یانی که ایماگینارگنوندیری  $I$  سره په نخښه کړو نو کمپلکسگن چی د  $C$  سره یي په نخښه کوو، دی

$$C = R \cup I$$

دلته له دې پیژندنې یا تعریف څخه روښانیري، چی کمپلکس

گڻونه دوه برخي لري، رييله برخه او ايمائينار برخه، نو له دې  
 امله د کمپلکس گڻونو په ډيري کي ټولي نښلونى يا عمليي،  
 چي په رييل گڻونډپيري او ايمائينار گڻونډپيري کي باور لري،  
 باوري دي. او برسیره پردې، دا لاندې قوانين هم باور لري:  
 دلته که  $z = a + ib$  يو کمپلکس گڻ وي، چي  $a$  رييله برخه  
 او  $ib = bi$  يي ايمائينار يا ايمائينار برخه ده. او س راځو  
 شميرقوانينو ته:

$$\text{الف: } i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1 \quad i^5 = i$$

په ټوليزه توگه:

$$i^{4n+2} = -1 \quad i^{4n+3} = -i \quad i^{4n+4} = +1 \quad i^{4n+5} = i$$

ب -

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

کيدى شي، چي وي  $z^* = \bar{z} = a - ib$ ، نو دا گڻ  
 و  $z = a + ib$  ته يو کونجوگيري کمپلکس گڻ بلل کيږي

پ -





## ۲ - ډيريپوهينيزي ستکليمی

### ۲ . ۱ . ۲ . ډیری

په شميرپوهنه کې پل په پل مور ددې، د ستونځو سره مل، تعريف شوي کليمي سره مخامخ کيږو، کومه چې د يوه لغات « ټولگې » سره روښانه کيدی يا پوهيدل کيدی شي. د بيلگي په توگه د انسانانو د ټولگې څخه غږيزو، چې په يوه ټاکلی وخت کې په يوه کوټه کې موجود وي، يا هغه هيلی، چې په يوه ځانگړي وخت کې په يوه ځانگړي ځای کې په اوبو کې لامبې، هغه غرخه، چې د هسکې مينې د سپينی مورگي په ځنگلونو کې لا پاتی دي او همدا ډول هغه ميږي او ووزې، چې په ۱۹۹۹ ميلادي کال کې د کوچيانو څخه د لورې له امله مړې شوي دي. د داسی شيانو ټولگه «ډیری» ( Die Menge , set ) بلل کيږي يا داسی ټولگي ډیری نوموو.

۲ . ۱ . ۱ . لنډ تعريف : ځمور. د خيال يا تصور د ټولو، په روښانه توگه، توپيرکيدونکو شيانو ټولگه «ډیری» نوموو يا بولو.

شیان، چی له هغو ډیری جوړ شوی دی، د ډیری «توکی» بلل کیږي. د دې لپاره، چی « $x$  د ډیری  $M$  توکی دی» لیکو: « $x \in M$ ». د دې وینا په خټ یا نفي یا نیگیشن Negation د « $x \notin M$ » له لارې ورکول کیږي. د « $x_1 \in M$  او ... او  $x_n \in M$ » په ځای لیکو:

$$"x_1, x_2, \dots, x_n \in M"$$

یو ځانگړی ډیری تشدیری دی، داسی کرکتیزه کیږي، چی کوم توکی نه لري. دا تشدیری د سومبول یا نخنسی  $\emptyset$  سره نخنسون کیږي یا په نخننه کیږي. نور هغه ډیری چی زیات مو مخ ته راځي یا زیات منځ ته راځي، دا لاندې ډیری دي:

د ټولو طبیعی یا پیدایښتگرځونو ډیری د  $N$  سره په نخننه کیږي، چی صفر ورسره مل دی.

د ټولو ټولگڼونو ډیری  $Z$

د ټولو راشنلگڼونو ډیری  $Q$

د ټولو رییلگڼونو ډیری  $R$

د ټولو کمپلکسگڼونو ډیری  $C$

د ۳۰ پرویشونو ډیری، چی له ۸ توکو څخه جوړ ډیری دی. یعنی  $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$  ډیری.

دیریپوهنیزې سټکلیمې ۱۳

۲. ۱. ۲ تعریف : یو ډیری  $M$  د ډیری  $N$  برخه ډیری بلل کیږي، که له  $x \in M$  څخه تل لاس ته راشی  $x \in N$  .  
په نڅبنونه یی :  $N \supset M$  یا  $M \subset N$

۲. ۱. ۳ تعریف : هغه ډیری، چی هیڅ توکی ونه لري، تشډیری بلل کیږي او داسی  $\emptyset$  یی په نڅبنه کوو.

تشډیری  $\emptyset$  د هر ډیری برخډیری دی، برسیره پردې هر ډیری د خپل ځان برخډیری دی. دا ډول ډیری نااصلي برخډیری بلل کیږي، هغه برخډیری اصلي برخډیری دی. یا اصلي برخډیری بلل کیږي، که دا برخډیری له دې دوه ډیریو یعنی له پخپله دې ورکړ شوي ډیری او تشډیری څخه توپیر ولري. دې ته دې هم باید گوته نیول شوي وي، چی کله کله برخډیریو ته «لاندې ډیری» هم ویل کیږي

دا نڅبنی  $\subseteq$ ، د اینکلوزیون نڅبنو Inklusionszeichen په نامه بل کیږي.

۲. ۱. ۴ تعریف : که وي  $M \subseteq N$  او  $M \neq N$  نو  $M$  د  $N$  اصلي برخډیری بلل کیږي. ( $M \subset N$ )  
په نڅبنونه یی :  $M \subset N$



۲ . ۱ . ۵ تعریف: د یوه ډیرې  $S$  توکي کیدی شي پخپله ډیري وي. دلته نو  $S$  د ډیرسیستم په توگه په نڅبنه کیدی شي یا د ډیري سیستم په څیر گڼل کیدی شي یا په بل عبارت: د یوه ډیري د توکو ډیري د هغه ډیري برخدیری دي، چی دا یو د ډیرسیستم جوړوي.

۲ . ۱ . ۶ تعریف: د یوه ناتش ډیري سیستم  $S$  غونډیری (د سیستم هغه برخدیری، چی د سیستم د هر ډیري برخدیری یی وي)  $D$  د ټولو توکو هغه برخدیری دی، چی په همغه وخت یا یو وخت کی د سیستم  $S$  د هر ډیري  $M$  توکی ږي. یعنی لرو  $x \in D$  همغه ارزښته یا برابر ارزښته د دې سره دی.  $x \in M$  د ټولو ډیریو  $M \in S$  لپاره .

$$D = \bigcap_{M \in S} M \quad \text{یا} \quad D = \bigcap \{M \mid M \in S\}$$

$$D = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$$

که  $S$  یواځي د پای ډیرو برخدیریو  $M_1, \dots, M_n$  څخه جوړ دی.

مساوات یا برابر ون  $M \cap N = \emptyset$  وایي، چی  $M$  او  $N$  گډ توکی نه لري، یعنی توکی پردي دي یا لنډ پردي یا دیسونکت دي (Disjunkt) دي .

۲ . ۱ . ۷ تعريف: د يوه ناتش ډيريستيم  $S$  ټولنه  $V$  د ټولو هغو توکو ډيري دی، چې کم له کمه د  $S$  ډيريستيم يوه ډيري  $M$  پورې اړه ولري يعنی توکی وي.

$$V = \bigcup \{M \mid M \in S\} \text{ يا } V = \bigcup_{M \in S} M$$

$$V = M_1 \cup \dots \cup M_n$$

که ډيريستيم  $S$  د پای ډيرو برخو ډيريو  $M_1, M_2, \dots, M_n$  څخه منځ ته راغلی يا جوړ وي.

د غوڅډيري او ټولنډيري د تعريف په مرسته پسې تړلي لاندې اړيکي لاس ته راځي، چې ښوونه يې گرانو لوستونکو ته پريښوول کيږي.

۲ . ۱ . ۸ مرستندوي جمله:

$$(a) \quad M \cup (N \cap N) = (M \cup N) \cap (M \cup N)$$

$$(b) \quad M \cap (N \cup N) = (M \cap N) \cup (M \cap N)$$

$$(c) \quad M \cap N = M$$

د  $M \subset N$  سره په همغه مانا ده

$$(d) \quad M \cup N = M$$

د  $N \subset M$  سره په همغه مانا ده

پایډیری کیدی شي، چی د هغو د غړو له لارې په نخبه شي.  
لیکل کیږي

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

د همغه ډیری  $M$  لپاره، چی ټیک له دې ورکړشو توکو څخه جوړ وي. یوتوکیز ډیری  $\{x\}$  د هغه د توکي  $x$  څخه باید توییر شي:

د بیلگي په توگه  $\{\emptyset\}$  هغه ډیری دی، چی د هغه یواځنی توکی تشډیری دی.

دیوه ډیری  $M$  د توکو گڼون یا تعداد د  $|M|$  سره په نخشه کیږي. دا گڼ  $|M|$  د ډیری  $M$  زور یا توان بلل کیږي، دا په دې مانا چې د ډیری د توکو گڼون یا تعداد د ډیری زور دی. د بیلگي په توگه دی  $|\{\emptyset\}| = 1$  او  $|\emptyset| = 0$ .  
د یوه ډیری بل ډول روښانونه یا شمیرنه په دې کی نغښتی، چی دیوه ورکړ شوي ډیری  $M$  ټول توکي ورکړ شوي، کوم توکی چی گڼد خویونه  $E$  ولري، و یوه نوي ډیری ته سره راټولگه کړي یا را یوځاي کړي.  $E(x)$  په دې مانا چی  $x$  خویونه  $E$  لري، نو دا ډیری په  $\{x \in X | E(x)\}$  سره ښایو. د بیلگي په توگه ډیری  $\{x \in Z | x^2 = 1\}$  د  $-1$  او  $1$  څخه جوړ شوی، د ټولو ټولگڼونو برخډیری دی. د یوه ډیری دا

ډول جوړونى سره د انډولډيري  $X$  وركونه مهمه ده، له كومى چى توكى رانيول كيږي، په غير له دې كيدى شي، له تضاد يا مخامخوالى ډك يا په ختې ډيري رامنځ ته شي، دا چى انډولډيري په ټوليزه توگه په همغه اړيكو يواځنى ټاكلې دى، نو په دې حالت كى دې په اكسپليخيت ( Explizite لاتين : روښانه ، واضح ) وركونه تيريدنه وشي.

۲ . ۱ . ۹ تعريف: د دوه ډيريو  $M$  او  $N$  كمونډيري دى:

$$M \setminus N = \{ x \in M \mid x \notin N \}$$

د غوڅي ، ټولنى او كمون لپاره په پوره روښانه توگه لاندې يادوو:

Kommutativität كموتاتيو قانون

$$A \cap B = B \cap A , A \cup B = B \cup A$$

اسوڅياتيو قانون Assotiativität

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

ديستريبيوتيوي قانون Distributivität:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) ,$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$



ٽوليز يا عمومي

$$\left( \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \right) \cap B = \bigcup_{\alpha} (A_{\alpha} \cap B)$$

او ورسى

$$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C),$$

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B), \quad A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$$

ڊيري شميريوهنيزي بنووني د پوره اندڪشن په پرينخيپ ولاړي دي، كوم چي د طبيعي گڼونو اڪسيوماتيكي جوړخت دلایلو راورنه کي يو غوره رول لوبوي.

۲ . ۱ . ۱۰ د پوره اندڪشن ثبوت پرينخيپ:

A دې په طبيعي گڼونو  $n \in \mathbb{N}$  يوه ويناوي.  $A(n)$  په

دې مانا دي، چي A په n باوري کيږي.

د يوه کره ټاکلی  $n_0 \in \mathbb{N}$  خخه پيل باور لري:

الف :  $A(n_0)$  د اينډڪشن پيل:

ب ؛ د اينډڪشن پاي : د ټولو  $n \geq n_0$  لپاره له  $A(n-1)$

خخه هم  $A(n)$  لاس ته راځي

نو بيا A د ټولو طبيعي گڼونو  $n \geq n_0$  لپاره ريښتيا ده يا

صحيح يا ټيڪ ده (دا ريښتيا مناسبه نومونه ده).

دې ته دې گوته نيول شوي وي، چې خورا ساده دی، که چيرې د ايندکشن پای په لاندې ډول لارښوده کړو:

ب: له  $A(i)$  څخه د ټولو  $i$  لپاره د  $n \leq i$  سره  $A(n)$  هم لاس ته راځي.

شرایط  $(b)$  او  $(b')$  برابرازښته دي، لکه چې ورپسې يا ترلي ليدل کيږي.

د ايندکشن ښوونه يا ثبوت بيلگي د لاندې جملو اوبيو يا حلونو ته مرسته کوي يا د لاندې جملې اوبيو په چوپړ کي دي.

۲ . ۱ . ۱۱ تعريف:  $M$  دې يو ورکړشوی ډيری وي.

د  $M$  د ټولو برخه ډيريو ډيری. چې په  $P(M)$  سره يی په نخښه کوو يا ښايو، د  $M$  دپوتنځ ډيري  $Potenzmenge$  يا توانه ډيري په نامه يادېږي.

۲ . ۱ . ۱۲ جمله:  $M$  دې يو  $-n$  توکيز ډيری وي.

$P = P(M)$  دې د  $M$  د ټولو برخه ډيريو ډيری وي. نو دا د  $M$  په توان ډيری  $P$  له  $2^n$  توکو څخه جوړ دی.

اوبی ( حل ): د ايندکشن پيل:  $n = 0$

گورو چی  $M$  کوم توکی نه لري. له دې امله  $M$  تشډیری  
 $\emptyset$  دی. د  $\{\emptyset\} = P(\emptyset)$  له امله په  $P$  کی یو توکی  $1 = 2^0$   
 موجود دی.

وي دې :  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

د ایندکشن نیونه یا فرضیه: هر  $(n-1)$  - توکییز ډیری  
 دې ټیک  $2^{n-1}$  توپیریدونکی برخډیری ولري.  
 د ایندکشن اوبی یا ثبوت: که  $M$  یو ډیری د  $n$  توکو  
 سره وي، نو  $P(M)$  ټیک له  $2^n$  توکو جوړ دی.  
 د دې سره دې  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  وي.

نو بیا  $P(M') = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$  لپاره د ایندکشن  
 د نیونی یا فرضیې سره ټیک  $2^{n-1}$  توکی لري،  
 که  $A \in P(M')$  نو بیا یا  $a_n \in A$  دی او یا  $a_n \notin A$ . په  
 دوم حالت کی  $A$  په  $P(M')$  پورې اړه لري، او په لومړي  
 حالت کی  $A' = A \setminus \{a_n\} \in P(M')$  نو  $P(M)$  ټیک

$$2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{n-1} (1 + 1) = 2^n$$

توکی لري. د پوره ایندکشن د پرینخپ له مخی دلته  
 ونبوول شو، چی د هر  $n$  - توکییز ډیری  $M$  لپاره پوتنخ -  
 یا توانډیری  $P(M)$  ټیک  $2^n$  توکی لري. \*

یو د ثبوت له مرستندوي موادو څخه د ناپاي ډیري زدکړې لپاره د څورن Zorn جملگي ده.  $S$  دې یو ناتش ډیرسیستم وي. یو ناتش د  $S$  برخه ډیری  $K$  یو څنځیر بلل کیږي، که له  $M_1, M_2 \in K$  څخه تل  $M_1 \subseteq M_2$  لاس ته راشي او یا  $M_1 \supseteq M_2$  لاس ته راشي.

۲ . ۱ . ۱۳ تعریف: یو ډیري  $M \in S$  د  $S$  یو ماکزیمال یا لوي توکی بلل کیږي، که له  $N \in S$  او  $M \subseteq N$  څخه تل لاس ته راشي، چی  $M = N$ . نو د څورن جملگي په لاندې ډول ده: (ماکزیمال یا ماکسیمال = Maximal)

۲ . ۱ . ۱۳ د څورن جملگي Lemma von Zorn: که د ناتش ډیرسیستم  $S$  د هر څنځیر  $K$  لپاره ټولنه ډیري  $\{K \mid K \in S\}$  هم یو د  $S$  ډیرسیستم توکی وي، نو بیا په کي یو ماکزیمال maximals Element توکی موجود دی. ددې جملگي د ثبوت څخه دلته تیرېږو. وي دې  $N$  د یوه نیم منظم ډیري  $M$  لاندې ډیری یا برخه ډیری. هر ( ضرور نه دی، چی په  $N$  کی ځای وي یا خوندي وي ) له  $a$  څخه، کوم چی د ټولو  $x \in N$  لپاره شرط  $a \geq x$

پوره کړي د لاندې ډيري پورته بند بلل کيږي يانی ډیری یی د لته رابند دی. دې ته دوگونی کلیمه لاندې بند دی. په ورکړ شوي نیممنظم ډيري M سره د ټولو ځنځیرونو ډیری د ډيري خونديونی په موخه یا هدف ، هم نیمه منظم دی. دا ټول د اخري ډيري ماکسیمال توکی ، د خپل طبیعت له مخی د M ماکسیمال ځنځیر بلل کيږي. لاندې جملی یو بل ته ورته دې یانی د یوې څخه بله لاس ته راځی او په څټ.

۲ . ۱ . ۱۴ د څرمیلو جمله Zermelo: هر ډیری کیدی شي منظم شي

۲ . ۱ . ۱۵ د هاوزدورف جمله Hausdorff: هر د یوه نیمه منظم ډيري ځنځیر په یوه ماکسیمال ځنځیر کي خوندي ده.

۲ . ۱ . ۱۶ د کوراتوفسکي - څورن

جمله Kuratowski-Zorn:

که د یوه نیممنظم ډيري M هر ځنځیر یو پورته بند ولري، نو د M په هر توکی پسی یو په نامه ماکسیمال توکي راځی. ددې درې جملو له ثبوت څخه دلته تیريرو.

اوس دې  $X$  او  $Y$  دوه ناتش ډيري وي. د يوې د  $X$  په  $Y$  کې څيرونې (په نخښونه  $f: X \rightarrow Y$ ) لاندې يو تنظيم پوهيرو، په کوم کې چې د  $x \in X$  هر توکي يواځني يوه  $y \in Y$  توکي باندې د څيرې په توگه تنظيم شي يا ترتيب شي، د  $x$  څيره  $y$  په څيرونه  $f$  د  $f(x)$  سره او يا هم ساده د  $fx$  سره په نخښه کوو. ډيري  $X$  د څيرونې  $f$  تعريفډيري بلل کيږي او ډيري  $Y$  د هغې موخيدډيري يا څيرډيري بلل کيږي. که  $f$  د  $x$  څيرونه يا څيره کونه وي په  $Y$  کې او  $M$  يو د  $X$  برخدډيري وي، نو دا د ټولو  $x \in M$  توکو څيرې ډيري او په ورته توگه د ډيري  $M$  څيره بلل کيږي او داسې په نخښه کوو  $f(M)$  يا په ساده توگه  $fM$ . پس باور لري:

$$fX = \{ fx \mid x \in M \},$$

او  $fM$  د  $Y$  يو برخدډيري دی. د تشدډيري څيره بيرته تش ډيري دی. د تعريف ډيري څيره  $fX$  د  $f$  څيره هم بلل کيږي او د  $Im f$  سره په نخښه کيږي.

۱ . ۱ . ۱۰ تعريف: که  $Im f = Y$  باور ولري، د څيرونې  $f: X \rightarrow Y$  لپاره، نو  $f$  يوه سوریکتيوه څيرونه *surjektive Abbildung* بلل يږي، يو سوریکشن *Surjektion* يا يوه د  $X$  څيرونه په  $Y$  باندې. په خت دې  $N$  يو د

برخه ډیری وي. نو بیا د ټولو  $X$  د توکو ډیری، چی د هغو  
خیره د  $N$  یو توکی وي، د  $N$  له خیرې پخوا خیره، په  
خیره  $f$  کی، بلل کیږي او د  $f^{-1}(N)$  سره په نڅنه  
کیږي. باور لري

$$f^{-1}(N) = \{x \in X \mid fx \in N\}$$

او  $f^{-1}(N)$  یو د  $X$  برخه ډیری دی.

که  $N \neq \emptyset$  هم باور ولري، کیدی شي  $f^{-1}(N)$  تشه ډیری  
وي، یعنی هلته که  $N \cap \text{Im } f = \emptyset$  باور ولري.

۲ . ۱ . ۱۷ تعریف : یوه خیره  $f: X \rightarrow Y$  د  
خوینو سره،

چی له  $x_1 = x_2$  تل  $fx_1 = fx_2$  لاس ته ریشي، اینیکتیو  
خیره کونه *injektive Abbildung* بلل کیږي یا اینیکشن  
*Injektion*. که په همدې وخت کی  $f$  حتی یو اینیکتیو او  
سوریکتیو وي، نو  $f$  بییکتیو خیره کونه *bijektive*  
*Abbildung* بلل کیږي یا بییکشن *Bijektion* بلل کیږي.

۲ . ۱ . ۱۸ تعریف :  $f: X \rightarrow Y$  دې یوه بییکتیوه  
خیره کونه وي. په هر  $y \in Y$  د خیرې په توگه یو یواځنی

ټاکلی توکی  $x \in X$  د  $y = f(x)$  سره د څیرې په توګه تنظیم کړي، نو دلته د  $Y$  یو بییکشن په  $X$  تعریفوي. دا د  $f$  په خټ څیرونه بلل کېږي او یا دا  $f$  ته راګرځیدونکی څیره کوونکي ده. او د  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  سره په نڅېنه کېږي

۱. ۱. ۱۹ تعریف: که دوه څیرونې  $f: X \rightarrow Y$

او  $g: Y \rightarrow Z$  یو په بل پسې رامنځ ته کړی شي او په ټولیزه توګه یوه د  $g \circ f$  سره په نڅېنه شوې څیره کونه د  $X$  په  $Z$  کی ترې لاس ته راځي، کوم چی د  $f$  او  $g$  ځل یا ضرب څیرونه بلل کېږي زیات وخت د ځنځیرې او یا ترلی بلواک یا څیره کوني په نامه هم یادېږي. دا په لاندې ډول ورکړ شوی دی

د ټولو  $x \in X$  د پاره  $(g \circ f) = g(fx) = g(f(x))$

کیدي شي چی تعریفېږي او څیره ډیری یو بل باندې پریوځي. دلته بیا له یوې څیرونې  $f$  غږېږو، چی  $X$  په خپل ځان څیره کوي.

۲. ۱. ۲۰ تعریف: که د ډیری  $X$  هر توکی په خپل ځان بیرته

څیره شي، نو یو د  $X$  بییکشن په خپل ځان لاس ته ترې راځي،



چی د  $X$  کټمټ څیرونه  $\text{identische Abbildung}$  یا  $\text{Identität}$  یی بولو او په لاندې ډول یی بنایو  $\text{id}_x$  او یا په ساده توگه  $\text{id}$ .

۲ . ۱ . ۲ یادونه: د هر  $x \in X$  د پاره باور لري  $\text{id}_x = x$ .  
که  $f$  یو د  $X$  بیکشن په  $Y$  وي، نو د  $f$  په څټ څیره کونه  $f^{-1}$  هم موجود ده او لاس ته ترې راځي

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_x, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_y$$

## ۲ . ۲ ځلډیری یا ضربدیری او اړیکې یی

په دې برخه کی کارتیزی ځل د ناتشو ډیریو او همداسی د اکویوالینڅ اړیکو یا ورتوالی اړیکو  $\text{Äquivalenzrelation}$  کلیمه څیرو.

۲ . ۲ . ۱ تعریف: د دوه ډیریو  $A$  او  $B$  کارتیزی ځل  $A \times B$  د تنظیمشو جوړو  $(a, b)$  ټولگه ده، د  $a \in A$  او  $b \in B$  سره. دلته  $(a, b) = (a', b')$  ټیک هلته باور لري، چی  $a = a'$  او  $b = b'$  وي.

۲ . ۲ . ۲ یادونه: کارتیزې ځل په ټولیزه توګه کموتاتیو نه دی، دا په دې مانا چې  $A \times B = B \times A$  که  $A = B$  وي. په پام کې دې دا اثتنه وي، چې د هر ناشدېږي  $A$  او تشدېږي  $\emptyset$  لپاره باور لري

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A$$

په ورته توګه د دوه ډیریو کارتیزې ځل په څیر د پای ډیرو ډیریو دپاره هم کارتیزې ځل تعریفیږي.

۲ . ۲ . ۳ تعریف: کارتیزې ځل  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

د پای ډیرو ډیریو  $A_i$  د  $i = 1, \dots, n$  لپاره، د ټولو منظمو یا

ترتیبشوو  $n$  - ګونو  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

د  $a_i \in A, i = 1, 2, \dots, n$  سره. دلته

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$$

ټیک هلته باور لري، که  $a_i = a'_i$  د ټول  $i = 1, 2, \dots, n$

لپاره وي.

که  $A = A_i$  وي، د ټولو  $i = 1, 2, \dots, n$  لپاره، نو  $\tilde{A} = \prod_{i=1}^n A_i$

د  $A$   $n$  - ایزی توان یا پوتنخ بلل کیږي. (۶-۱-۱۱)

ډیری  $\{(a, \dots, a) \in A^n \mid a \in A\}$  د  $A^n$  نیمې یا قطر دی.

## بینار اړیکې binäre Relationen

۲ . ۲ . ۴ . تعریف : یو د  $A \times A$  برخدیری  $R$  د ډیری  $A$  دوه ځایزه اړیکې بلل کیږي. وایو : د  $A$  دوه توکي  $a$  او  $b$  په اړیکه  $R$  کې یو له بل سره پراته دي، په نڅښونه  $a \sim b$ ، هلته او هلته یا په بل عبارت ټیک هلته، که وي

$$a R b \quad \text{او} \quad (a, b) \in R$$

د بینار اړیکو یا دوه ځایزو اړیکو  $R$  کومپلیمنټ یا پوره کید- ونکی یو دوه ځایزه اړیکې  $\bar{R}$  دی چې په لاندې توګه تعریف دي  $\bar{R} = (M \times M) \setminus R$ . په نورو ویناو سره  $a \bar{R} b$  ټیک هلته باور لري، که  $(a, b) \notin R$ .

د بینار اړیکو د ځل  $RS$  لاندې پوهیږو، چې  $a(RS)b$  ټیک او ټیک هلته باور لري، که په  $M$  کې یو توکی  $c$  موجود وي، د کوم لپاره چې  $a R c$  او  $c S b$  باور لري.

د بینار اړیکو ځل اسوڅیاتيو دی یعنی

$$(RS)T = R(ST)$$

د بينار اړيکو ځل په هيڅ توگه کوموتايو نه دی ، کله کله اړيکی R او S يوله بل سره بدلیدونکی وي ، دا په دې مانا چې

$$RS = SR$$

يوون اړيکی E په لاندې ډول تعريف دي:  $aEb$  ټيک هلته باور لري که وي،  $a = b$  . يا په بل ډول اړيکی E د ټولو هغو توکو جوړو  $(a, a)$  د  $a \in M$  سره ډيری دی. دلته په روښانه توگه باور لري:  $E = E^{-1}$  او ديوه خوښی اړيکی R لپاره باور لري:

$$RE = ER = R$$

مورد تش اړيکو 0 ته هم گوته نيسو، چې د  $M \times M$  تش ډيري په څير تعريف دی. د هر بينار اړيکی R لپاره په ډيري M کی باور لري:

$$0 \subseteq R \quad \text{او} \quad 0R = R0 = 0$$

مورد کله کله د بينارو اړيکو سره مخامخ کيږو، چې د لاندې خوښو څخه ځنی په کی باور لري

رفلکسيويټي:  $aRa$  د ټولو  $a \in M$  لپاره دا په دې مانا

$$E \subseteq R$$

ترانزيتيويټي: له  $aRb$  او  $bRc$  څخه لاس ته راځي،

$$aRc \text{ دا په دې مانا چې } RR \subseteq R$$

سيومتري: له  $aRb$  څخه لاس ته راځي  $bRa$  دا په دې

مانا چې  $R^{-1} = R$

انتیسیومتری: له  $a R b$  او  $b R a$  څخه لاس ته راځي  
 $a = b$  دا په دې مانا چې  $E \subseteq R \cap R^{-1}$

۲ . ۲ . ۵ جمله : که کوم یو بینار اړیکې له دې پورته  
 خویونو څخه کوم یو ولري یا ټول ولري، نو د دې اړیکو په  
 څټ اړیکې  $R^{-1}$  هم دا خویونه لري.

اوبی ( حل ):

په عمل کې له  $E \subseteq R$  څخه لاس ته راځي

$$E = E^{-1} \subseteq R^{-1}$$

که  $RR \subseteq R$  وي، نو باور لري

$$R^{-1} R^{-1} = (RR)^{-1} \subseteq R^{-1}$$

که  $R^{-1} = R$  وي، نو باور لري

$$(R^{-1})^{-1} = R = R^{-1}$$

له  $E \subseteq R \cap R^{-1}$  څخه لاس ته راځي

$$R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cap R \subseteq E$$

ايکويوالنڅ اړيکي : د بينار اړيکو څخه يی خورا مهمي اړيکي ايکويوالنڅ اړيکي دي، چي په لاندې کي يي تعريفوو

۲ . ۲ . ۶ تعريف : يو ناتش دوه ځايزه اړيکي ~ په ډيري A کي ورته اړيکي يا اکويوالنڅ اړيکي بلل کيږي، که د ټولو  $a, b, c \in A$  لپاره لاندې اړيکي باور ولري.

الف)  $a \sim a$  (رفلکسيو reflexiv)  
 ب)  $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$  (سيومتري symetrisch)  
 پ)  $a \sim b$  او  $b \sim c$  څخه ( $\Leftrightarrow$ )  $a \sim c$  لاس ته راځي .  
 (ترانزيتيو transitiv)

۲ . ۲ . ۷ بيلگه:

الف) مساوات يا برابرېون « = » د هر ډيري A لپاره يو ورته والی اړيکي Äquivalenzrelation دي.  
 ب) د  $a, b \in \mathbb{Z}$  لپاره  $a \sim b$  ټيک هلته باور لري، که  $2$  د گڼ  $a - b$  پرويشونی وي.

ايکويوالنڅ اړيکي په کلکه د دې سره تړاو لري، چي يو ډيري

یو بل سره په پردیو ټولګي ډیریو ویشي. دوه ډیری یو بل سره پردی بلل کیږي، که دوي ګډ کوم توکی ونه لري یانې غوڅي یې تشدیری وي.

غواړم، چی دا ټولګیویشنه داسی لږغوندي روښانه وڅیرم، که څه هم زیاتو لوستنکو ته به ستریکیدونکي وي، مګر لږ پوهوږ به شي. که چیرې طبیعي ګڼونه په  $5$  ویشو نو دلته پنځه ټولګیویشنی لاس ته راځي، چی ویشپړدي دي: هغه ټولګی، چی  $1$  ولري او ټول  $1 + n5, 1 + 25, \dots, 1 + 5$ ، دوم هغه ټولګی، چی  $2$  ولري او ورسره تر  $2 + n5$  دریم: هغه ټولګی، چی  $3$  ولري او ټول ورسره  $3 + n5$ . څلورم هغه ټولګی، چی  $4$  ولري او ټول ورسره  $4 + n5$ . پنځم هغه ټولګی، چی  $5$  او ټول ورسره  $5 + n5$ . چی دا په  $0$  سره هم ښوولی شو، چی نور ورسره ټول  $0 + n5$  ولري. دا ټول شمرنی بیا د ګڼونتیوري دنده ده، چی په همغه ټول کتابونو کي لوستل کیږي. هلته د کونګرو-اینځ اړیکو لاندې لوستل کیږي، چی زه یې دلته په لیک دود هم نورې خبرې نه کوم. په دې کی دې ګران لوستونکی یو پوره پام وځغلوې او ټولګی ویشنه او ایکوالنځ اړیکي دې پخپله نوري هم روښانه کړي، چی.

د ټولگيويشنه په همدې وخت کي ايکويوالنځ اړيکی هم جوړوي،

دا په دې مانا چي د ايکويوالنځ اړيکو او ټولگي ویشنې ترمنځ راگرځيدونکی يواځنی اړيکي موجود دي. دا په دې مانا چي د اکويوالنځ اړيکو سره يو يواځنی تنظيم راکړ شوی او دا بيا په څټ کيدونکی هم دی.

که R په A کي يو ايکويوالنځ اړيکه وي ، نو  $A/R$  د فاکتورډيري په نامه بلل کيږي نسبت و ايکويوالنځ اړيکو R ته. هغه څيرونه چي د A او  $A/R$  ترمنځ پرته ده د طبيعي څيرونې په نامه بلل کيږي.

لنډ: ويلي شو، چي ټولگي ویشنه او ايکويوالنځ اړيکی يو له بل څخه لاس ته راځي. موردا شمير پوهنيز په لاندې توگه تعريفوو:

۲ . ۲ . ۸ تعريف: که  $\sim$  د ډيري A ورته والی اړيکي وي، نو د توکی  $a \in A$  ورته والی ټولگي يانی کلاسی يا صنف [a] په لاندې توگه ورکړ شوی دی

$$[a] = \{ b \in A \mid a \sim b \}$$

د ورته والی ټولگي [a] هر توکی b د ټولگي [a] نماينده



بلل کيږي.

۲ . ۲ . ۱۱ مرستندوي جمله: که  $\sim$  د ډيري A ورته - والی اړیکي وي، نو د توکو  $a, b \in A$  لپاره لاندې وينا وې جوړه برابرزښته يا جوړه مساوي ارزښته دي

$$(a) \quad [a] \cap [b] \neq \emptyset$$

$$(b) \quad a \sim b$$

$$(c) \quad [a] = [b]$$

اوبی (حل): که  $[a] \cap [b] \neq \emptyset$  وي، نو يو  $c \in A$  موجود دی د  $a \sim c$  او  $b \sim c$  سره. د  $\sim$  سیومتری او ترانز-یتيویتي له امله لاس ته راځي  $a \sim b$ . له دې امله (b) د (a) یوه لاس ته راوړنه ده يا تعقیب دی. اوس باور لري  $a \sim b$ . له دې امله نو  $x \in [a]$  د  $x \sim a$  سره برابرز-ښته دی، او همداسی د  $x \sim b$  سره. نو  $[a] = [b]$  دی، او (c) له (b) څخه لاس ته راځي. په پوره باور (a) له (c) څخه لاس ته راځي.

زیات موخوږ يا هدفمند دی، که یو ډیرسیستم S د یوه په نامه ایندکشنډيري يا پیژندډيري A په مرسته په نخښه کړو يا روښانه کړو. د لته A یو (پاي يا ناپای) ناتش

## ڊيريپوهنيزي سټڪليمي ۲۵

ڊيري ڊي، او هر ايندڪس يا پيژندنخني  $\alpha \in A$  يواڻي  
يو ڊيري  $A$  له  $S$  څخه داسي ترتيب شوي ڊي، چي باور  
لري:  $S = \{ A_\alpha \mid \alpha \in A \}$ .

۲. ۲. ۱۲ تعريف: د يوه ڊيري  $A \neq \emptyset$  د برخه ڊيريو  $A$   
يو سيستم  $\{ A_\alpha \mid \alpha \in A \}$  د ڊيري  $A$  يوه ٽوٽونه (تجزيه)  
بلل کيږي، که باور ولري:

(a)  $A_\alpha \neq \emptyset$  د پاره  $\alpha \in A$  د ٽولو

(b)  $A = \bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha$

(c)  $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$

د ٽولو  $\alpha, \beta \in A$  لپاره د  $\alpha \neq \beta$  سره

۲. ۲. ۱۳ جمله:  $R$  د ڊي په ڊيري  $A$  کي يو ورته اړيکي

وي. نو د ورته والي ٽولگي نسبت و  $R$  ته يو د  $A$  ٽوٽوني

ڊي. په څټ يو په خوښه د  $A$  ٽوٽونه  $\{ A_\alpha \mid \alpha \in A \}$

يواڻي يو ورته والي اړيکي په  $A$  ټاکي، د کوم لپاره چي د

ٽوٽوني ڊيري  $A$  ټيک ورته والي ٽولگي دي.

اوبی (حل يا ثبوت): سملاسي د پورته مرستندوي

جملی ۲. ۲. ۸ او تعريف ۲. ۲. ۹ څخه لاس ته راځي.

## ۲ . ۳ نیمنظم یا نیم ترتیب

د بینار اړیکو یو بل غوره یا مهم حالت نیمنظم اړیکې جوړوي. دا هغه اړیکې دي، چې رفلکسیو، ترانزیتیو او انتیسیومتري دي. هغه ډیری، چې نیمنظم په کې تعریف وي، نیمنظم یا نیم په ترتیب بلل کېږي. د نیمنظم لپاره دا سومبول  $\leq$  کارول کېږي او د ډیری  $M$  د توکو  $a, b$  لپاره باور لري  $a \leq b$  او داسې لوستل کېږي، چې  $a$  له  $b$  کوچنی او یا له  $b$  سره مساوي ده. یا  $a$  په  $b$  کې خوندي ده یا  $a$  له  $b$  څخه مخ ته ځي. که  $a \leq b$  وي او  $A \models b$  وي، نو لیکو  $a < b$  او وایو چې  $a$  له  $b$  څخه کوچنی ده، په دې حالت کې  $a$  په  $b$  کې اصلي خوندي ده. په یوه ډیری  $M$  کې دی نیمنظم تعریف وي. د دې ډیره دوه توکي  $a, b \in M$  یو له بل سره انډولور دي، که چیرې وي  $a \leq b$  او یا  $a \geq b$ . که له  $a \leq b$  څخه  $a = b$  لاس ته راشی نو د ساده نیمنظم څخه غږیږو. یو ډیری، په کوم چې دوه توکي تل یو له بل سره انډولور وي، نو دا ډیری لایني نظم شوی یا منظم یا ترتیب شوی او یا ځنځیر یعنی یو له بل سره تړلی بلل کېږي.

۲ . ۳ . ۱ تعریف: د دوه نیمنظم شوي ډیریو  $M$  او  $M'$

ترمنځ یواځنی او په څټ څیره کونه  $f$  موجود ده یعنی

$$af = a' , a \in M , a' \in M'$$

که له  $a \leq b , a, b, \in M$  تل  $af \leq bf$  لاس ته را شي او په څټ، نو  $f$  د  $M$  او  $M'$  ترمنځ یو ایزومورفیزم ispmorphism بلل کیږي، چی دا به وروسته هم بیا پوره وڅیړل شي او ډیري  $M, M'$  پخپله ایزومورف نیممنظم ډیري بلل کیږي. که یوه نیممنظم ډیری  $M$  په یوه نیممنظم ډیري  $N$  کی ایزومورف خوندي وي، نو دې ته ایزومورف ځایونه یا خونديونه وایو، که د  $M$  یوه ایزومورف څیره کونه په  $N'$  د ډیري  $N$  برخه ډیري باندې موجود وي او ډیری  $N'$  پخپله نیممنظم ډیری وي او که  $N'$  په هغه نظم ترتیب وي، چی له  $N$  ورته راپاتی وي.

۲ . ۳ . ۲ جمله:

هر نیممنظم ډیری  $M$  د ډیري  $N$ ، چی نسبت و خونديونی ته نیممنظم دی، ټولو لاندیدډیریو ډیري  $N'$  سره ایزومورف دی. په ځانگړي توگه کیدی شي، چی د ډیري  $N$  لپاره پخپله ډیری  $M$  ونیول شي یا راوړل شي. د دې جملی د خوونی څخه تیریږو. په کوروش کی کتل کیدی شي.

یوه نیممنظم ته په خټ اړیکې هم نیممنظمی دي.  
 د ټولو  $a, b \in M$  لپاره،  $af = a'$ ,  $a \in M$ ,  $a' \in M'$  سره  $a \leq b$  ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته باور لري،  
 که وي:  $af \leq bf$ .

## ۲ . ۴ مینیمال شرطونه

یو د نیممنظم ډیري  $M$  توکی  $a$  د ډیري مینیمالتوکی بلل کيږي، که په  $M$  کی داسی یو توکی  $x$  موجود نه وي، د کوم لپاره، چی شرط  $x < a$  باور ولري. دا روښانه ده، چی  $M$  ډیر مختلف مینیمال توکی لرودی شي او یا هیڅ مینیمال توکی .  
 د بیلگي په توگه ډیری  $N'$  د ټولو د ډیري  $N$  لاندېډیريو یا برخه ډیريو ډیری یواځنی یو مینیمال توکی لري، داسی په نامه تشهیری . په یوه ډیري کی هر لاندې ډیری یا برخه ډیری مینیمال توکی دی ، که دا ډیری د یوه توکی جوړ وي. دا کلیمه د یوه ځانگړي نیمتنظیم شوي ډیري ټولگیو لپاره کارول کيږي. د دې ټولگی نیمتنظیم شوي ډیري لاندې یو بل سره ورته یا ایکویوالنت شرطونه پوره کوي:

۲ . ۴ . ۱ جمله ( مينيمال شرطونه ) : هر د يوه نيمتنظيم شوي ډيري  $M$  ناتش لاندې ډيري  $N$  يو مينيمال توکي ( په  $N$  کې ) لري .

۲ . ۴ . ۲ ( د لويدونکي ځنځير پريکيدنی شرطونه ) : د نيمتنظيم شوي ډيري  $M$  په را غونډه موخه هر لويدونکي ځنځير

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$$

د پايدیرو غړو وروسته پرې کيږي يا ماتيږي يا غوڅيږي . په نورو کليمو سره ، د توکو د هر لويدونکي ځنځير

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$$

سره يو ايندکس يا پيژند نخښه  $n$  شته ، له کومې چې د دې ډيري ټول توکي برابر دي دا په دې مانا چې د  $n$  ورسته  $a_n = a_{n+1} = \dots$  باور لري

۲ . ۴ . ۳ جمله ( ايندکشن شرطونه ) : د يوې نيمتنظيم شوي ډيري  $M$  ټول توکي څه روښانه خويونه  $E$  لري . که دا خويونه په ټولو مينمال توکو ( که داسې يو توکي موجود وي ) موجود وي او که د دې موجودوالی ، د ټولو توکو لپاره ، چې له توکي  $a$  په کره توگه مخ ته ځي ، پخپله په دې خويونو  $a$

رابطه‌ی شی یانی دا خوینونه ولری.

د دې جملو، چي یو بل ته ورته دې، د بنوونی یا اویونی  
خخه تیریرو.

ویناوې چی د ټاکن اکسیوم سره همغه ارزښته دي:

ډیری  $N$  دې د یوه ډیری  $M$  لاندې ډیری وي. هر ( ضرور نه  
دی چی په  $N$  کی خوندي وي ) د  $M$  د توکی  $a$  د کوم  
لپاره چی شرط  $a \geq x$  پوره وي د ټولو  $x \in N$  لپاره، د  
لاندې ډیری پورته بند بلل کیږي یانی دا ډیری په دې توکی  
سره پورته لور ته بند دی. دا لاندې بند ته یوه دویزه کلیمه.  
په یوه ورکړ شوي نیمنظم ډیری  $M$  کی هره د ټولو خنځیرونو  
ډیری د ډیری پوهنی په بنسټ نیمتنظیم ده. د دې ډیری ټول  
ماکسیمال توکی په طبیعي توگه د  $M$  ماکسیمال خنځیر جوړوي.

یادونه : د دې پورته جملو بنوونه او زیات ورننوتنه په کروش  
کی کتل کیدی شي. موردي نوره رالندوو.

### ۳ . الجبري جوړښتونه

د الجبر په کتابونو کې ډیر وخت دا دلته څیړل شوي موضوعات له توپیریدونکو یا له بیلو بیلو لارو څخه څیړل کیږي، ځنې له عمومي الجبر څخه پیل کوي  $n$ -ځایزې عمليې، نښلونې یا کارونې تعریفوي او له دې څخه بیا گروپ  $die\ Gruppe$  ، کړۍ  $Ring$  ، تن یا بدن  $Körper$  ( engl.  $Field$  ) او په همدې ډول تړونونو یا تړنو  $Verbände$  او بول الجبر  $boolische\ Algebra$  ته راځي. زه دا لار غوره گڼم، چې لمرې له مور ورسره بلدو کاروونو یا عملیو څخه پیل وکړم او له دې لارې بیا الجبر ته راشم، او بیا په لنډ ډول د الجبر له لارې دا مور ورسره بلدې کلیمې لنډې تعريف کړم.

د الجبر د مختلفو څانگو لپاره بنسټیزه کلیمه، چې ډیره تر څیړنې لاندې نیول شوې ده هغه د الجبري اږیشن یا الجبري عمليې او یا همدا ډول د الجبري کارونې، الجبري نښلونې یا الجبري گنډني کلیمه ده.



مور ځانونه په يوه دوئيزې کارونې په زياتون يا ځل رابندوو يا محدودوو. دا دوئيزې کارونې يا عمليې، په لرې موخه، هغه عملي دي، چې د يوه ډيري  $G$  ټاکلي منظم د توکو جوړه  $(a,b)$  د دې ډيري په يوه بل توکی  $c$  تنظيم يا څيره کړي ( لکه د  $G$  د ټاکلو غړو مربع، يعني دا د لاندې خويونو سره يوه څيرونه ده:

$$G \times G \longrightarrow G$$

دا په دې مانا چې د ټولو  $(a,b) \in G \times G$  لپاره يو  $c \in G$  څخه، يعني  $c \in G$  موجود ده، د کومو لپاره چې باور لري که دا نښلونه ځل وي

$$a \cdot b \longrightarrow c$$

په دې ټوليزه توگه په يوه ډيري کې د بينار يا دوه-ځائيز عمليې کلیمې تعريف، په يوه ډيري کې د يوه ترنار ريليشن ternäre Relation يا درېځاييزو اړيکو سره په همغه يا مساوي مانا دی.

يادونه: اړيشن die Operation، عمليه، کارونه او يا نښلونه، گنډنه، او همدارنگه په بلواکو کې کمپوزيشن die Komposition يا څنگ په څنگ ايښوونه يا بهتره ځنځيرونه تل همغه مانا لري، چې ما کله کله

تېرته هم کارولی ده. د ډيرو نومونو کارونه، کوم چی همغه مانا ولري، تاوان نه لري. د شميرپوهني ژبه هم بايد پوره پراخه وي او په دې باور لرو چی کومه اشتباه په کي نه رامنځ ته کيږي.

مور دلتته د نموني په څير يواځی يويزي کارونی يا عمليي په گوته کوو. او ور پسی بيا نور سملاسی خپل اصلی موخه تر مخه نيسو. دا يويزي عمليي هغه عملي دي، چی د کارولو سره یی د ډيري توکي تغير نه خوري، لکه د صفر سره طبيعی گڼونو  $N_0$  توکو سره، په زیاتون کی چی هر توکي ته د صفر توکی ورزیاتونه پخپله همغه توکی دی،

د ټولو  $a \in N_0$  لپاره  $a + 0 = a$

او يا په ځل کی، چی د طبيعی گڼډيري  $N$  هر توکي سره 1 ځل شي، يعني

د ټولو  $a \in N$  لپاره  $a \cdot 1 = a$

## ۳ . ۱ گروپ :Gruppe

که له یوې خوا د ټولګڼونو، ریشنلګڼونو یا رییلګڼونو زیاتون په پام کې ونیسو او له بلې خوا ریشنل یارییلګڼونو د صفر توپیرې یا د صفر سره نامساوي توکو ځل په پام کې ونیسو، نو دا میندلی شو، چې دواړه نښلونعمليي یا نښلو-نکاروني د همغه یو بل سره په یوځای شمیرقوانینو لاندې دي. د بیلګې په توګه باور لري:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{او} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

برسیره پر دې راویستلي یا استثنايي ګڼونه موجود دي، دا په نامه 0 همداسی 1، کوم چې دې دوه تړنو ته ځانونه ناپیلی یا بی تاثیر نیسي. یعنی:

$$0 + a = a \quad \text{او} \quad 1 \cdot a = a$$

بلاخره باور لري

$$(1/a).a = 1 \text{ او } (-a) + a = 0$$

دا په دې مانا، چې هر گڼې  $a$  ته يو گڼې  $a^{-1}$  موجود دی (دا په نامه  $a^{-1}$  همداسې  $1/a$ )، چې د هغو زیاتون یا همداسې د هغو ځل یا ضرب د همغی یعنی زیاتون همداسې ځل نښلونې یا نښلونعمليي له لارې ناپیلی یا بی تاثیره توکی ورکوي.

دا چې دا قاعدې گڼونشمیرنه په پراخه پیمانته په واک کی لري او په ډیرو نورو حالتونو کی هم رامنځ ته کیږي، دا راته نزدې ده، چې دا د ځانگړي طبیعیت، دشمیرنی او د همغو ترنعملیو څخه خپلواک وڅیږو. په دې ذهني راوړون دود سره مو شمیرقاعدې د هر څه له مخه مخ ته پرتي دي. نه هغه څه، د کومو سره چې شمیرنه کیږي غوره دي، بلکه دا غوره دي، چې څنگه شمیرنه کیږي. په یواځني ډول د مخه نیول کیږي، چې د یوه ورکړ شوي ډیري غږو لپاره داسې یوه نښلونه یا ترنه یا عملیه تعریف ده، دکومی له مخی، چې هره منظمه جوړه  $(a,b)$  د هغه ډیري د توکو بیرته د هغه ډیري توکی باندي تنظیم شي یا څیره شي او دې پورته

ويلشوو قوانينو لاندې پرتی دي يا په بل عبارت دا پورته  
قوانين په کی باور لري.  
دا نښلونه د يوه ناپیلي سومبول ° سره ښايو.

يادونه : دا سومبول له خپل ځاي جگ ليکل شوی دی،  
خو زما بله چاره نه وه. د دوه گڼونو نښلونو ټيک منح کی  
که وليکل شی ښه به وي.

۳ . ۱ . ۱ تعريف : يو گروپ د يوه ډيري  $G$  او يوې ټرني  
يا عمليي ° څخه جوړ دی، دکومی نښلونی سره چی د دي  
ډيري  $G$  د توکو هره منظمه جوړه  $(a, b)$  يواځنی يو د  $a \circ b$   
سره په نڅښه شوی د  $G$  توکی باندې داسی تنظيم شي،  
چی دا لاندې اکسيومونه پوره کړي:

اکسيوم ۱ - اسو ځياتيو قانون باور لري

د ټولو  $a, b, c \in G$  لپاره  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

اکسيوم ۲ - يوناپیلي توکي  $e \in G$  شته، د ° ټراو  
سره ، د کوم لپاره چی باور لري

$$a \circ e = e \circ a = a$$

اکسيوم ۳ - د هر توکی  $a$  لپاره یو په خټ توکی  $a^{-1}$  شته،  
د کوم لپاره چې لرو:

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$$

د  $G$  داسی یو توکی ناپیلی توکی بلل کیږي

یو گروپ کموتاتیو یا ابل گروپ  $abelsche\ Gruppe$  بلل کیږي، که پر دې پورته اکسيومونو برسیره، دا لاندې اکسيوم ۴ هم پوره کړي:

اکسيوم ۴ - کموتاتیو قانون:

$$a \circ b = b \circ a \quad \text{لپاره } a, b \in G$$

که گروپ  $G$  پای ډیر توکی ولري، نو د  $G$  د توکو گڼون یا تعداد  $|G|$  د  $G$  نظم بلل کیږي.

د گروپ ټاکنتهوتو پورې د ډیري  $G$  ترڅنګ د گروپټرنه  $\circ$  داسی په نامه اږیشن، نښلونه یا کارونه یا عملیه هم اړه لري یا تعلق لري.

یو گروپ نو په دې توګه د یوې جوړې  $(G, \circ)$  سره په نڅښه کول کیږي. دا چی گروپټرنه ډیر واره په دې اړوند

کره ټاکلی ده، نو په داسی حالتونوکی ددې جوړې په ځای یواځی  $G$  لیکل کیږي. گروپونه تر یوې اندازې پورې د گروپځل یا گروپضرب سره هم نومول کیږي، نو په دې توگه دا توکی  $a^\circ b$  د توکو  $a$  او  $b$  د ځل په نامه هم بلل کیږي. په یوه نابیل - یا ناکموتاتیوگروپ کی دې د توکو ترتیب یا لږپیلپسی ته هم پام وي، ځکه چی په یوه نابیل گروپ کی په ټولیزه توگه  $a^\circ b$  له  $b^\circ a$  سره توپیر لري .

اکسیوم ۱ را په گوته کوي، چی په ډیرواره څلولو کی په نوکانو کی بندونه یا راگیرونه پورې اړتیا نه څرگندیږي. له دې امله کیدی شی، چی له نوکانو اینسولو څخه بیخی تیریدنه وشي او د بیلگي په توگه د  $a^\circ (b^\circ c)$  لپاره په ساده توگه لیکو

$$a^\circ b^\circ c$$

### ۳ . ۱ . ۲ بیلگی :

اول - د ټولو ټولگڼونو ډیری  $Z$  د ورسره بلد زیاتون سره، چی د کروپترنی په څیر یی نیسو، یو ابلگروپ  $(Z; +)$  جوړوي. دلته بیا له زیاتونگروپ څخه غږیږو، په همدې توگه د ریشنلگڼونو ډیری او داسی نور. په دې ټولو حالتونو کی د اکسیوم ۱ لپاره د  $e$  لپاره  $0$  او د  $a$  په څټ توکی  $\acute{a}$



د a- سره په نڅښه کوو .

دوم - په ځمککچ يا هندسه کی : د ټولو کونگرواینڅ څیرونو ( څرخون، ځایدلون، یا راکښنه ، او اینونه یا هندارونه ) گروپونه جوړوي ( ما په دې اړه یوه د هندسی برخه هم په یوه کتاب کی راوړې، چې کتاب څخه به تر مخه چاپ شوي وي، دا کلیمی که نا بلدي وي نو بیا دې هلته وکتل شي ).

دریم : د ټولو ریشنلگنډونو ډیری  $Q^*$  او د ټولو رییلگنډونو ډیری  $R^*$  توکي، چې د صفر سره، نسبت و ځل یا ضرب ته، نابرابر یا نامساوي وي، یو ابلگروپ جوړوي، دا د ډیریو  $Q^*$  او  $R^*$  څلونکی گروپ یا ضربگروپ بلل کیږي. په دې گروپونو کی  $e$  او  $1$  او  $a$  د ماتگن  $1/a$  په څیر لیکل کیږي.

څلورم:  $M$  دې یو په خوښه ناتش ډیری وي ، او  $S_M$  دې د  $M$  د ټولو بییکتیو څیرونو یا بیکشنونو ډیری وي. د هر دوه څیرونو  $f, g \in S_M$  لپاره  $f \circ g$  د دې دواړو څیرونو یو په بل پسې راوړنوله لارې ټاکل شوی ځل دی. د هر درې څیرونو  $f, g, h$  او هر  $x \in M$  لپاره دا لاندې باور لري

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(hx) = f(g(h(x)))$$

او

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)));$$

دا په دې مانا چې اکسیوم ۱ پوره دی. که د  $e$  لپاره د  $M$  کټمټ څیرونه  $id$  وټاکل شي، نو اکسیوم ۲ باور لري. بالاخره اکسیوم ۳ باور لري، که د ورکړ شوي  $f \in S_M$  لپاره د څیرونې  $f'$ ، هغه  $f$  ته په خټ څیرونه  $f'$  وټاکل شي. ډیری  $S_M$  د یو په بل پسې د څیرونو ځلونی یا ضربوني له امله یو گروپ جوړوي، چې د ډیری  $M$  سیو-متری گروپ بلل کیږي.

که په ځانگړي توګه ډیری  $M$  ډیری  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  وي، نو دا اړونده سیومتري گروپ څیفرونه یا گڼونه  $1, 2, 3, \dots, n$  په ساده توګه د  $S_n$  سره په نڅښه کوو. هره څیرونه  $f \in S_n$  د گڼونو  $1, 2, 3, \dots, n$  پرموتیشن یا بدلون دی. که  $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n$  باور ولري، نو  $f$  د څیره گڼونو پرلپسې لړۍ  $a_1, a_2, \dots, a_n$  یواځنی ټاکلی ده. مور لیکو  $f = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ، که د بیلګې په توګه باور ولري  $n = 3$  او  $f = (2, 3, 1), g = (3, 2, 1)$  نو لاندې ځلونه یا ضربونه لاس ته راځي

$$f \circ g = (1, 3, 2) \quad \text{او} \quad g \circ f = (2, 1, 3)$$

دا بیلگه بنایي، چی  $S_n$  د  $n=3$  لپاره ابل گروپ یا کموتاتیو گروپ نه دی.

۳ . ۱ . ۳ یادونه: دا د صفر سره نامساوي ټولگنونه ، نسبت و ځلونی یا ضرب ته گروپ نه جوړوي، ځکه چی د بیلگي په توگه و 2 ته کوم ټول گڼې  $\hat{a}$  وجود نه لري، د کوم لپاره، چی  $2.\hat{a}=1$  باور ولري.

د گروپ د اکسیومونو څخه کیدی شي ، چی په لاندې کی یو څو ساده «لاس ته راوړنی» رابیلی کړو. په لاندې کی دې  $G$  تل یو گروپ وي

۳ . ۱ . ۴ مرستندوي جمله: د هر توکی  $e \in G$  لپاره، چی اکسیومونه ۱ ، ۲ پوره کوي دا هم باور لري  $a^\circ e = a$  د ټولو  $a \in G$  لپاره. له  $a^\circ a = e$  څخه  $a^\circ \hat{a} = e$  لاس ته راځي.

اوبی یا ثبوت: لمړی دوهمه غوښتنه ښوول کیږي: و  $a'$  ته د اکسیوم ۳ له مخی یو  $a \in G$  د  $a'.a = e$  سره موجود دی. د اکسیومونو ۱ او ۲ په پام کی لرلو سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} a^\circ a' &= e^\circ (a^\circ a') = (a''^\circ a')^\circ (a^\circ a') = a''^\circ ((a'^\circ a)^\circ a') \\ &= a''^\circ (e^\circ a') = a''^\circ a' = e \end{aligned}$$

له دې څخه اوس لمری غوښتنه لاس ته راځی

$$a^\circ e = a^\circ (a' \circ a) = (a^\circ a')^\circ a = e^\circ a = a \quad *$$

۳ . ۱ . ۵ مرستندوي جمله: ټيک يو توکی  $e \in G$  موجود دی، چی هغه په اکسيوم ۲ او اکسيوم ۳ کی غوښتل کيږي. همدا اوس له  $x^\circ a = a$  څخه د ټولو  $a \in G$  لپاره لاس ته راځي:  $x = e$ .

اوبی يا ثبوت: توکی  $e^*$  دې هم برابر و  $e^* \circ a = a$  پوره کړي، د ټولو  $a \in G$  لپاره. نو بيا په ځانگړي توگه د ۳ . ۱ . ۴ مرستندوي جملې له امله باور لري

$$e^* = e^* \circ e = e$$

دا په دې مانا چې  $e$  يواځنی ټاکلی دی. که بيا هم ورپسی باور ولري  $x^\circ a = a$  د يوه کره ټاکلی توکي  $a \in G$  لپاره، نو د اکسيوم ۳ له امله يو  $a' \in G$  موجود دی د  $a' \circ a = e$  سره، او د ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي:

$$x = x^\circ e = x^\circ (a' \circ a) = (x^\circ a')^\circ a = a^\circ a' = e \quad *$$

دا په دې توگه د اکسيومونو سره يواځنی ټاکلی ناپیلی يا بی

تائيره د گروپ  $G$  توکی  $e$  د گروپ  $G$  «یوی توکی» بلل کیږي. په زیاتونډوله لیکلي ابلگروپ  $G$  کې ناپیلی توکی  $e$  د  $G$  «صفر توکی»  $0$  بلل کیږي.

۳ . ۱ . ۶ مرستندوي جمله : په اکسیوم ۳ کې  $a$  د  $a'$  له لارې یاد  $a$  سره یواځنی ټاکلی ده .

اوبی یا ثبوت: د  $a' \circ a = e$  تر څنګ دې  $a^* \circ a = e$  هم باور ولري. پرتله ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي

$$a^* = a^* \circ e = a^* \circ (a \circ a') = (a^* \circ a) \circ a' = e \circ a' = a'$$

دا توکی  $a$  د  $a'$  «په څټ توکی» بلل کیږي او د دې لپاره په ټولیزه توګه  $a^{-1}$  لیکل کیږي. که په ځانګړي توګه د گروپ- عملیې یا د گروپټرنی زیاتون ډوله ولیکل شي پرتله ۳ . ۱ . ۲ الف، نو ناپیلی توکی په  $0$  سره لیکل کیږي او د  $a$  په څټ توکی د  $-a$  سره لیکل کیږي.

۳ . ۱ . ۷ مرستندوي جمله :  $(a^{-1})^{-1} = a$

$$\text{او } (a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$$

اوبی: دا په ۱ . ۳ . ۴ کې ښوول شوي برابرې  $a \circ a' = e$

له مخی لرو، چی  $a$  و  $a^{-1}$  ته په خټ توکی دی، چی په دې توگه لمړی غوښتنه باور لري. دومه له لاندې څخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}(b^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ b) &= b^{-1} \circ ((a^{-1} \circ a) \circ b) \\ &= b^{-1} \circ (e \circ b) = b^{-1} \circ b = e \quad *\end{aligned}$$

۳ . ۱ . ۸ مرستندوي جمله: په یوه گروپ  $G$  کی برابرېون  $x \circ a = b$  او  $a \circ y = b$  په ورکړشوو توکو  $a, b \in G$  سره یواځني ټاکلي حلونه یا اوبیوني  $x, y \in G$  لري.

اوبی یا حل : که  $x \in G$  د لمړي برابرېون اوبی وي، یعنی که باور ولري  $x \circ a = b$  نو لاس ته راځي:

$$x = x \circ e = x \circ a \circ a = b \circ a$$

دا په دې مانا، چی  $x$  دا  $a$  او  $b$  سره یواځنی ټاکلی . په خټ د

$$(b \circ a) \circ a = b \circ (a \circ a) \circ b \circ e = b$$

له امله توکی  $x = b \circ a$  په ریښتونی یو اوبی یا حل دی. په همدې توگه دوهم برابرېون هم پای کولی شو. \*

په لاندې کی غواړم، چی داپورته د گروپ تعريف لږ وغزوم

او په دې توگه گروپوئيد او نيمگروپ تعريف كړم. دا كار په زياتو ادبياتو كې لمړی سر ته رسېږي، خو داسې تعريفونه يې هم په پوهيدلو كې ستونځي نه رامنځ ته كوي او ما هم غوښتل، چې مور لمری د گروپ كليمه باندې وپوهېږو، چې بنسټيزه ده.

۳ . ۱ . ۹ تعريف : يو ډيری  $G$ ، چې نسبت و يوه اېرېشن يا گنډنی يا عملي  $\circ$ ، چې مور يې دلته د ځل عمليي « . » په څير بنايو، ته رابند وي، نو دې ډيري ته گروپوئيد وايو، ياني كه د هرې جوړي  $(a,b) \in G$  د  $a, b$  لپاره يو توکی  $c \in G$  موجود وي، د كوم لپاره چې باور ولري  $a.b = c$  ليكنه يې په لاندې توگه ده  $(G, .)$ .

دا د گروپوئيد كليمه لږ را تنگوو او نيمگروپ تعريفوو.

۳ . ۱ . ۱۰ تعريف . هغه گروپوئيد  $G$ ، په كوم كي، چې پورته د گروپ اڪسيوم ۱ باور ولري يا نی ځل يې اسو-ځياتيو وي، نيمگروپ بلل كيږي، چې په همغه پورته توگه د اوس لپاره نڅښون كيږي.

دا چی نیمگروپ همغه گروپ دی، دا لاندې جمله یی  
روبنانه را په گوته کوي

۳ . ۱ . ۱۱ جمله : یو نیمگروپ  $G$  هلته او هلته یو  
گروپ  $G$  دی، که په  $G$  کي کم له کمه یو بنی یویتوکی  $e$   
موجودوي، چی لاندې شرطونه پوره کړي

د ټولو  $a \in G$  لپاره  $ae = a$

او دا توکی  $e$  داسی وټاکل شي، چی د هر  $a \in G$  لپاره  
کم له کمه یو بنی په څټ توکي  $a \in G$  موجود وي، چی  
غوبنتنی

$$a \cdot a^{-1} = e$$

پوره کړي.

اوبی یا حل : که دا پورته ورکړ شوې غوبنتنی پوره وي،  
خو دا مو وښوول، چی گروپ جوړوي. اوس دې یو  
نیمگروپ  $G$  راکړ شوی وي، چی پورته نیونی پوره کوي.  
دا غواړو وښایو، چی  $e$  په  $G$  کی یو کین یویتوکی هم  
دی. که د  $a^{-1}$  سره د  $a$  بنی په څټ توکی وښایو ، نولاس  
ته راځي

$$eaa^{-1} = ee = e = aa^{-1}$$



## الجبري جوړښتونه ۵۷

که د برابرې دواړه خواوې د یوه  $a$  ته په څټ توکي سره  
ځل کړو او د نیمگروپ د ځل یواځنوالي قوانین وکاروو  
یا استعمال کړو، نو لاس ته راځي

$$eae = ae$$

له کوم څخه چې د حلونکي یا اویوونکي اړیکي  $ea = a$   
لاس ته راځي.

بالاخره د  $G$  گین یویتوکي  $e'$  او بنی یویتوکي  $e''$  رانیسو،  
نو د مخ ته تیرو جملو ثبوت څخه دا اوبی یا حل  $e'' = e'$  لاس  
ته راځي، چې په دې توگه د  $G$  یو یویتوکي ( $e$ ) موجودیت  
او یواځنتوب وښوول شو.

بیا دې  $a^{-1}$  د یوه توکي  $a \in G$  بنی په څټ توکي وي.  
که برابرې  $aa^{-1} = e$  له کین لور د  $a^{-1}$  سره ځل کړو، نو لاس  
ته راځي

$$a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$$

د  $a$  د بنی په څټ توکي د اخرنی برابرې ځلولو یا ضربولو  
څخه لاندې نتیجی ته راځو

$$a^{-1}ae = e$$

له کوم، چې  $a^{-1}a = e$  لاس ته راځي.

دا توکی  $a^{-1}$  ته له دې امله یو کین په څې توکی هم دی. لکه د مخه تیرې جمله د د ثبوت په توګه، کی شي ساده وښوول شي، چي د  $a$  هر بنسې په څټوکي د کین په څټو کی سره پریوځي یا هغي سره ورته دی. په دې توګه په  $G$  کي د هر توکی  $a$  لپاره د هغه توکی په څټوکي موجودیت په یواځنی توګه تضمین دی. د جملي د ثبوت د پوره کیدو لپاره دې په ګوته شوی وي، چي توکي

$$x = a^{-1}b \quad \text{او} \quad y = ba^{-1}$$

د برابرېون  $ax = b$  او  $ya = b$  حل ښایي. دا حلونه یواځنی دي، ځکه، چي  $ax = xa$  دی، نو له کین څخه یی د  $a$  سره ځلوو او  $x = x$  لاس ته راځي. پای یا \*

د ابلګروپ د څیرنی لپاره، د ځل عمليي په ځاي د زیاتون ګنډنه یا عمليه په کار اچوو، چي ناپیلی توکی یی  $0$  دی او هر توکی  $a$  ته په څټ توکی یی د  $-a$  سره په نڅښه کوو. دلته هم همغه پورته جمله کاروول کیري، خو د بنسې یویتوکي لپاره  $0$  صفر یوي توکی دی او بنسې په څټ یی  $-a$  دی. د په څټ عمليي یواځنتوب

د يوه نيمگروپ بيلگه چي گروپ نه وي.  
که د طبيعي گڼونو ډيري  $N$  پام کي ولرو، نو دا ډيري د  
زياتون عمليي ته نيمگروپ جوړوي، خو دا گروپ نه دی،  
ځکه، چي په دې ډيري کي، په هر حالت کي کمون نه  
دی تعريف.

که نسبت و ځل ته د گڼونو څخه گروپ جوړوو، نو بايد  
دا مو پوره په پام کي وي، چي دا گڼونو ډيري د صفر توکي  
ونه لري، ځکه چي په صفر پرويشنه نه ده تعريف.

### ۳ . ۲ بدن يا تن او کړی

#### Körper und Ring (Field and ring )

په داسي حال کي چي د گروپ اپريشنونه يا گروپ عمليي  
يو اځي له يوه تړون عمليي څخه منځ ته راځي، اوس دوه  
عمليي څنگ په څنگ راوړل کيږي، چي په ورسره د گڼو-  
نشميرني بلد ډول، چي زياتون « + » او ځل يا ضرب  
« . » سره بنسول کيږي، تکیه کوو. که له ريشنل گڼونو  
څخه مخ ته ولاړ شو، نو د هلته باوري شمير قاعدو څخه

په ورته ذهنیت، لکه په گروپونو کی، نوي الجبري جوړ-  
بنتونه لاس ته راځي.

۳ . ۲ . ۱ تعریف : یو بدن یا تن  $D$  یوه ډیری  $F$  او دوه  
عملیو  $+$  او  $\cdot$  څخه جوړدی، چی  $D$  د توکوهره جوړه  
 $(a, b) \in D$  په یوه یواځنی توکی  $a+b$  همداسی  $a \cdot b$  باندې  
داسی څیره کړي، چی لاندې باوري کړي یا لاندې په کی  
باور ولري:

ډیری  $F$  دې و  $+$  ته یو ابل گروپ وي، دا په دې مانا،  
چی لاندې باوري کيږي

۱ - د زیاتون اسوختیو قانون

. د ټولو  $a, b, c \in F$  دلپاره  $(a+b)+c = a+(b+c)$

۲ - د زیاتون کموتاتیو قانون

د ټولو  $a, b \in F$  لپاره  $a+b = b+a$

۳ - په  $F$  کی یو صفر توکی  $0$  شته، دا په دې مانا

چی  $0+a = a+0 = a$  باور لري د ټولو  $a \in F$  لپاره.

۴ - هر توکی  $a \in F$  ته یو توکی  $-a$  په  $F$  کی موجود

دۍ د  $(-a)+a=0$  سره ، د کوم سره چي 0 په F کي صفر توکي دۍ

د F توکو د ځل يا ضرب . لپاره باور لري  
۵ - اسوڅياتيو قانون

د ټولو  $a,b,c \in F$  لپاره  $(a.b).c = a.(b.c)$

۶ - په F کي يو يوټوکی 1 شته ، دا په دې مانا ،  
چي  $1.a = a.1 = 1$  د ټولو  $a \in F$  لپاره .

۷ - هر توکی  $a \in F$  ته د  $a \neq 0$  سره ، يو توکی  $a'$   
د  $a.a' = 1$  سره موجود دۍ ، چيرته چي 1 د F يوۍ  
توکی دۍ.

۸ - ديستريوتيو قانون

$$a.(b+c) = a.b + a.c \quad \text{او} \quad (b+c).a = b.a + c.a$$

د ټولو  $a,b,c \in F$  لپاره

$$1 \neq 0 \quad - ۹$$

که يواځي د اکسيومونو ۱ - ۵ او ۸ باوريتوب  
وغوښتل شي، نو F هـ کړۍ بلل کيږي.

که برسیره پر دې اکسيوم ۱۰ باور ولري يعنی  
۱۰ - د ځل کموتاتيو قانون

د ټولو  $a, b \in F$  لپاره  $a \cdot b = b \cdot a$

نو  $F$  یو کموتاتیو تن یا کموتاتیو بدن او همداسی  
کموتاتیو کړی بلل کیږي

لکه څنګه په ګروپ کې په همدې توګه یوه کړی یا تن هم  
د  $(F, +, \cdot)$  په ځای د  $F$  سره په نڅېنه کوو. د ځل لپاره  
سومبول « $\cdot$ » نه لیکل کیږي او د دې لپاره لنډ لیکو  $ab$ .  
ډیر واره د «بدن» یا «تن» لاندې کموتاتیو بدنونه پو-  
هیږو، په داسی حال کې، چې ناکموتاتیو بدنونه، «کاره  
بدنونه» بلل کیږي. دلته به موږ تل کموتاتیو بدنونه تر  
څیړنی لاندې نیولي وي.

د اکسیوم ۱ او اکسیوم ۵ له امله کیدی شي، چې نوکان  
نور هم پریښوول شي یا تیریدنه ترې وشي یا ونه لیکل شي.  
د نوکانو د نه لیکلو لپاره یو بل د مخه پیژندل شوی قرارداد  
یا پریکړې یو قاعده هم شته، چې د ټکو لکه ځل عملیه د  
کړینو لکه زیاتون عملي څخه د مخه اجرا کیږي.  
لکه د  $(ab)+c$  په ساده توګه  $ab+c$  لیکل کیږي. دا ساده-  
والی همدا اوس د اکسیوم ۸ په فرمولولو کې وکارول شو.  
د بدن  $F$  یا همداسی د کړی  $R$  ناپیلی توکی زیاتون ته صفر-



ایماگیناریوون  $i$  سره، د کوم لپاره چی  $i^2 = -1$  باور لري.  
 دا  $a_1$  د  $a$  رییل برخه او  $a_2$  د  $a$  ایماگینار برخه بلل کیږي.  
 په نخبسونه :  $a_1 = \text{Re}(a)$  او  $a_2 = \text{Im}(a)$   
 که  $b = b_1 + b_2i$  یو دوم کمپلکس گڼ وي، نو زیاتون،  
 کمون او خل یی په څرگنده توگه په لاندې ډول روښانه دي  
 یا تشریح شوي دي:

$$a \pm b = (a_1 \pm b_1) \pm (a_2 + b_2)i ,$$

$$a b = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

دا و کمپلکس گڼ  $a = a_1 + a_2i$  ته کوچوگیږي کمپلکس  
 گڼ  $\bar{a}$  د  $\bar{a} = a_1 - a_2i$  سره تعریف دی. په دې پسی تړلي  
 لاس ته راځي

$$\overline{a \pm b} = \bar{a} \pm \bar{b}, \quad \overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b}, \quad \overline{\bar{a}} = a ,$$

$$a + \bar{a} = 2\text{Re}(a) \quad , \quad a - \bar{a} = 2i\text{Im}(a)$$

د یوه په خوبنه کمپلکسگڼ  $a$  لپاره باور لري

$$a\bar{a} = (\text{Re}(a))^2 + (\text{Im}(a))^2$$

له دې امله  $a\bar{a}$  تل یو نامنفی رییلگڼ دی، او  $a\bar{a} = 0$   
 د  $a = 0$  سره برابر ارزښته دی.

که  $|a| = 0$  یو کمپلکسگڼ وي، نو باور لري  $|a\bar{a}| = 0$



او  $a = \bar{a} / aa \in \mathbb{C}$  . د کمپلکس گڼ ارزښت  $|a|$  ،  
 چې  $a = a_1 + a_2 i$  د نامنفی رییلگڼونو رېښه ارزښت  
 دی.  $aa = a_1^2 + a_2^2$  دا په دې مانا، چې

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} .$$

رییلگڼونه ځانگړي کمپلکس گڼونه دي، په نامه هغه گڼونه،  
 چې ایماگینار یی ورکیري: کمپلکسگڼ ټیک هلته یا هلته او  
 هلته یو رییلگڼ دی، که  $a = \bar{a}$  وي.

۳ . ۲ . ۳ د کړیو لپاره بیلگي:

الف - د ټولو ټولگڼونو ډیری  $Z$  یوه کموتاتیو کړی ده، د یوي  
 سره. مگر  $Z$  بدن نه دی، ځکه، چې د بیلگي په توگه ۲  
 په  $Z$  کی نسبت و ځل ته په څټ نه لري. یعنی  $1/2$  په  $Z$   
 و ۲ ته په څټ توکی نه دی.

ب - جوړه ټولگڼونه  $R = 2Z$  د دي لپاره بیلگه ده، چې  
 صفر توکی نه لري.

پ -  $F$  د یو کموتاتیو تن وي. یوه د لاندې بني افاده

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

د  $a_i \in F, i = 0, 1, 2, \dots, n-1, n$  سره پولینوم بلل کيږي د یوې نامعلومې  $x$  سره او چی څلوونې یا ضریبونه او یا کوایفیثینتونه یې له  $F$  وي. که  $a \neq 0$  وي، نو  $n$  د پولینوم  $f(x)$  درجه بلل کيږي.

نخبنونه یی:  $\text{Grad } f = n$  گراد

که حتی  $a = 1$  وي، نو  $f(x)$  یو نورمي شوی پولینوم

$\text{normiertes Polynom}$  بلل کيږي. د صفر درجي

پولینومونه ثابتی دی د  $a \in F, a \neq 0$  سره. صفر پولینوم

$0 (n=0, a=0)$  سره درجه نه ترتیب یا تنظیم کيږي.

د ټولو پولینومونو  $f(x)$  ډیری، چی څلوونې یی له بدن  $F$

څخه وي د  $F[x]$  سره په نخبنونو یا په نخبنه کوو. په  $F[x]$

باندې زیاتون (په ورکړ شوی حالتکي د صفر څلوونو سره)

او یو ځل یا ضرب په دې لاندې ډول تشریح شوي

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n)$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n,$$

$$(a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m) \cdot (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n)$$

$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 +$$

$$\dots + a_mb_nx^{n+m}$$

و زیاتون « + » او خُل « . » ته  $F[x]$  یوه کړۍ ده،  
د پولینوم ۱ سره د یوټوکی په څیر. پولینومډیری  $F[x]$   
پولینوم کړي په  $F$  باندې بللکیر، د ناپیژنونکی  $x$  سره.

دې تراوسه یادشوو بدنونو ترمنځ د کمپلکس گنونوگروپ  
یو ځانگړی ځای لري، له دې امله په ځانگړي څیړنی کی  
ځانگړی رول لري، ځکه چی ددې لپاره د الجبر اصلي  
جمله باور لري کومه چی په لاندې ډول ده:

۳ . ۲ . ۴ جمله: هر یو پولینوم  $f(x) \in C[x]$   
د  $\text{Grad } f > 1$  سره د لاینی پولینومونو په څلونو یا ضریبونو  
ټوټه کیري، دا په دې مانا، چی  $f(x)$  ته ډیر پای مختلف  
کمپلکس گنونه  $c$  موجود دي، او طبیعي گنونه  $k$  په داسی  
توگه یا ډول چی لاندې باوري کوي:

$$f(x) = \prod_{i=1}^m (x - c_i)^{k_i} \quad \text{او} \quad \text{Grad } f = \sum_{i=1}^m k_i$$

دا جمله دلته نه ثبوت کیري.

دا لاندې جملی دا را په گوته کوي، چی په خوښه کړیو او  
بدنونو یا تنونوکی، په ورسره بلد ډول شمیرنه کیري

۳ . ۲ . ۵ مرستندوي جمله:

په يوه کړی کی باو رلي:  $0.a = a.0 = 0$  د هر توکي  $a$  لپاره .  
اوبی یا حل د:  $0+0=0$  اوی د اکسیوم ۸ له امله باورلري:

$$0.a+0.a = (0+0) .a = 0.a$$

د دې او ۳ . ۱ . ۴ څخه لمړی اوبی  $0.a = 0$  لاس ته راځي، دوهم اوبی یا حل په ورته توگه لاس ته راځی . \*

۳ . ۲ . ۶ مرستندوي جمله: په يوه کړی کي باور ري

$$a(-b) = (-a).b = -ab$$

په ځانگړي توگه دا لاندې باور لري

$$(-a)(-b) = ab$$

اوبی: د ۸ او ۳ . ۱ . ۴ له امله لاس ته راځي

$$ab + a(-b) = a(b - (b)) = a . 0 = 0$$

په دې پسې  $a(-b)$  و  $ab$  ته منفي توکی دی، دا په دې مانا چی باور لري

$$a(-b) = -(ab)$$

په ورته توگه دوم برابر لاس ته راځي. \*

د مخه مو د بدن کلیمه روښانه کړه، اوس غواړم، چي دا کلیمه له یوې پېلې لورې هم، یا بهتره، په یوه بل ډول تر څیړنې لاندې ونیسیم او هغه په دې ډول، چي هغه مو ورسره بلد د تړونکارونو نخښی ونه کاروم او دوه ذهني تړونونه راوړم، چي وروسته کار مو بیا همداسي مخ ته بیولی دی:

۳ . ۲ . ۷ تعریف: د ډیري  $M$  هغه جورښتونه بدن بلل کیږي، د کومو لپاره چي باور ولري:

- ۱ - په ډیري  $M$  کی دوه تړاونه  $o$  او  $o$  تعریف دي
- ۲ - دلته  $(M; o)$  کموتاتیو ګروپ دی
- ۳ - دلته  $(M \setminus e_0; o)$  یو ګروپ دی او  $e_0$  یو ناپیلی توکی دی و  $o$  ته.

دا لاندېقوانین باور لري:

$$4 - \text{دېستریبوتیو قانون: } a o (b o c) = (a o b) o (a o c)$$

$$(a o b) o c = (a o c) o (b o c)$$

په یوه کموتاتیو بدن کی په دې برسیره باور لري

$$5 - \text{کموتاتیو قانون: } a o b = b o a$$

## ۳ . ۳ لاندېگروپ او لاندېگرمی

۳ . ۳ . ۱ تعریف : د یوه گروپوئید  $G$  برخدېری یا لاندېدېری  $U$  گروپوئید بلل کېږي، که د  $U$  د هرو دوه توکو همغه ترنه  $^{\circ}$  (خل) د دې دېری  $U$  توکی وي. که  $G$  نیمگروپ وي، نو بیا په نتیجه نیونه کی له یوه لاندې نیمگروپ څخه غبرېږو.

۳ . ۳ . ۲ تعریف : یو د گروپ  $G$  برخدېری  $U$  یو د گروپ  $G$  لاندېگروپ یا سبگروپ Subgrupp بلل کېږي، که  $U$  نسبت د گروپ  $G$  گروپ عملیو یا گروپترون  $^{\circ}$  ته پخپله گروپ وي. په نخبسونه  $U < G$ .

۳ . ۳ . ۳ مرستندوي جمله: د گروپ  $(G, ^{\circ})$  یو ناتش برخدېری  $U$  ټیک هلته یا هلته او هلته د گروپ  $G$  لاندېگروپ یا سبگروپ دی، که د هرې جوړې  $a, b \in U$  لپاره تل باور ولري

$$a \circ b \in U$$

اوبی یا حل: شرایط په پوره باور ضرور دي. دا باید وښوول شي، چی پوره کیدونکي هم دي. دلته دې  $e \in G$  یوی توکی وي.  $U \neq \emptyset$  له امله یو  $a \in U$  موجود دی. نو لرو  $a' \in U$  او  $e = a^\circ a'$  یوی توکی دی. ورپسې باور لري  $a \in U$  او  $a = e^\circ a$  هر  $a \in U$  لپاره. د مرستندوي جملې له امله لرو  $a^\circ b \in U$  د ټولو  $a, b \in U$  لپاره. ساده کتل کيږي، چی په  $U$  کی اسوخیاتیو قانون باور لري. پس  $(G, \circ)$  یو ګروپ دی.

۳ . ۳ . ۴ تعریف : د یوې کړۍ  $R$  لاندېډیری  $A$ ، نسبت و هغه په  $R$  کی تعریف شوو عملیو ته، یوه لاندې-کړۍ بلل کيږي. دا په دې مانا، چی په  $A$  کی د  $R$  ټولې ټرنې یا عملیې باور ولري. یا په بل عبارت، چی  $A$  نسبت و زیاتونګروپ ته یو لاندې زیاتونګروپ جوړوي او د  $R$  خلګروپوئید ته لاندې ګروپوئید جوړوي، او په همدې ډول په  $R$  کی تعریف دیستریبوتیو قانون په لاندېډیری  $A$  کی هم باور لري.

په ورته توګه د بدن یا تن  $F$  لاندې تن هم تعریف دي.

۳ . ۳ . ۵ جمله : د  $G$  لاندېگروپونه پخپله  $G$  او یونلاندېگروپ  $E$  ، چې له یویتوکی څخه جوړ دی ، دي . په ورته توګه د کړی  $R$  لاندېکړی پخپله  $R$  او د صفر-توکی څخه جوړه شوې ، صفرکړی دي .

د نورو لاندېگروپونو غوره بیلګو جوړولو لپاره د یوه توکی د پوتنڅ ( $Potenz$ ) کلیمه پلي کوو یا رامنځ ته کوو .  $G$  دې یو په خوښه نیمګروپ وي او  $a$  دېد هغه په خوښه یو توکی وي . د ځل اسوڅیاتيو قانون دا اجازه راکوي ، چې په یواځنی توګه ( یواځنی ته دې د ګرانو لوستونکو تل پاموي ، چې د څه لپاره کارول کیږي ) د یو په خوښه پوتنڅ یا توان

$$a^n, \quad n = 1, 2, \dots, n$$

تعریف کړو ، او دا باور لري

$$a^k \cdot a^l = a^{k+l} \quad (1)$$

$$(a^k)^l = a^{kl} \quad (2)$$

له (1) څخه لاس ته راځي ، چې په یوه نیمګروپ  $G$  کې د یوه توکی ټول مثبت توانونه یو ابل نیمګروپ جوړوي ، چې د  $a$  توګي څخه منځ ته راغلی یا جوړ څیکلیکي یا بیرته راګرځیدونکی لاندېگروپ بلل کیږي .



که  $G$  برسیره پر دې یو ګروپ وي، نو لمری داسی نيسو،  
چې  $a^0 = 1$  او بالاخره د توکي  $a$  منفي توانونه هم پلي  
کوو. که  $n$  یو طبيعي ګڼ وي نو د لاندې برابرون

$$a^n (a^{-1})^n = 1$$

راجوریدنه په ساده توګه کتل کيږي، له کومی چې بیالاس  
ته راځي

$$(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} \quad (3)$$

دا توکی، چې د (3) دواړه خواو کی یی ځای نیولی د  $a^n$   
سره بنایو یا په نخښه کوو. برابرونونه (1) او (2) د ګروپ  $G$   
د یوه ټولګڼیز توکي  $a$  لپاره ریښتوني پاتي کيږي او د  $a$   
ټول توانونه د صفر او منفي پوتنخ پورې له دې امله د  $G$   
یو لاندیګروپ جوړوي. دا لاندې ګروپ د  $a$  څخه جوړ بیږته  
راګرځیدونکی *zyklische Untergruppe* لاندې ګروپ بلل  
کيږي او په  $\{a\}$  سره په نخښه کيږي.

په زیاتون لیکدود سره بیا د  $a$  د پوتنخ په ځای د هغه  
دیرځلی راوړل کيږي. (د پوتنخ په ځای د هغه د پوتنخ په ځای د هغه)

په ګروپ  $G$  کی د یوه توکي  $a$  توان یا پوتنخ په مختلف  
جګګڼ یا اکسپوننت Exponent سره ضرور د مختلف

گروپ توکي نه ورکوي يا نه رامنځ ته کوي، کوم چی د ناپايي گروپ له موجودیت څخه جوتیږي. که د  $a$  ټول توانونه توپیر ولري يا په بل عبارت مختلف وي، نو  $a$  د ناپايدير نظم توکی بلل کیږي، په بل ډول بیا یو د پاینظم توکی بلل کیږي.

په دوم حالت کی یو ټولگن  $k$  او یو ټول گن  $l$  د  $k > l$  او

$$a^k = a^l$$

سره موجود دي.

له دې څخه لاس ته راځي  $a^{k-l} = 1$ ، چیرته چی  $k - l > 1$  دی، نو له دې امله د  $a$  توانونه شته، چی د یویتوکی سره برابر دي. ددې اکسپوننت یا جگگن کوچنی مورد د  $a$  نظم بولو یا نومو.

که  $a$  یو د پاینظم  $n$  توکی وي، نو بیا په روښانه توگه توکي

$$1 = a^0, a, a^2, \dots, a^{n-1} \quad (4)$$

ټول یو له بل توپیر لري او هر ورپسې منفی یا مثبت د  $a$  پوتنځ  $a^k$  د یوه دې په (4) کی وکړشوو توکو سره برابر دی. دا په لاندې ډول لیدل کیږي: دی

$$k = nq + r, \quad 0 < r < n$$

نوله (1) او (2) اړیکو  $a = 1$  څخه لاس ته راځي:

$$a^k = (a^n)^q a^r = a^r$$

له دې سره د پاینظم توکو لپاره لاس ته راځي: دیوه توکي  $a$  نظم د هغه توکی  $n$  څخه تولید شوي یا جوړ شوي بیرته راگرځیدونکي یا ځیوکلیکي لاندې کروپ  $\{a\}$  سره برابر دی یا د هغه سره سر خوري.

هغه گروپونه، چی یواځي د پاینظم توکي لري تورزیونگرپونه *periodische Gruppen* یا پریودي گروپونه *Torsionsgruppen* یا بیرته راگرځیدونکي گروپونه بللکیري، په بل ډول ناپریودي گروپونه *Torsionsfrei Gruppen* بلل کیري.

اوس دا پوښتنه د کړیو لپاره، لکه د بیرته راگرځیدونکي لاندیگروپ لپاره، رامنځ ته کیري، چی ایا داسی یوه لاندېکړی یا مینیمال لاندیکړی شته، چی یو ورکړ شوی توکی ولري.  $R$  دې یوه ورکړ شوې (ناضروري اسوخیاتیو) کړی وي او  $a$  دې یو د هغی کړی په خوښه توکو څخه یو توکی وي. هر د هغه لاندیکړی د توکي  $a$  سره ټول څلونه، په کومو

کی چی ټیک فاکتور  $a$  رامنځ ته کیږي، د کوم یوه گڼون یا تعداد  $n = 1, 2, 3, \dots$  سره، دا فاکتور د  $a$  د مثبت پوتنځ یا توان رول لوبوي. دا چی ځل باید ضرور اسوځیاتيو نه وي، نو په ټولو توپیریزو ډولونو، جوړه ډوله په نوکانو کی نیول کیږي، چی په دې توگه د کړی دوه فاکتورونه یو د بل سره ځلیږي یا ضربیږي. د  $n = 3$  لپاره ځل  $a(aa)$  او  $(aa)a$  او  $n = 4$  لپاره، او همداسی د  $n = 5$  لپاره اوداسی ورپسی. هر لاندېکړی د  $a$  سره ټول زیاتونونه، ورکړشوي پای زیاتو ځلونه، کوم چی د ټولگڼیز فاکتور سره سنبال وي خوندي لري. داسی د  $R$  توکی. چی په دې زیاتونیز ډول لیکل کیږي د خپلی لور څخه په  $R$  یو لاندې کړی جوړوي او دا، هغه غوښتونکی یا لټوونکی د  $a$  څخه جوړه، لاندېکړي بلل کیږي.

د یوه اسوځیاتيوې کړی  $R$  لپاره د یوه توکی  $a$  څخه جوړ لاندېکړی لاندې د  $R$  د ټولو توکو څخه جوړه لاندېکړی، چی په یوه ډول د  $a$  زیاتون او مثبت پوتنځ څخه جوړه وي لاس ته راځي (د ټولگڼیز ځلوونو سره). دا کړی له دې امله کموتاتیو ده.

د یوه گروپ هر لاندېگروپ د دې گروپ یویتوکی لري، د

يوې كړۍ هره لاندېكړۍ په همدې توگه د دې صفر توکي لري. دگروپ  $G$  لاندې گروپونو (په همدې توگه د كړۍ  $R$  لاندېكړيو) غوڅي له دې امله تشدپيري نه دي .

۳ . ۳ . ۶ جمله : د گروپ  $G$  د لاندېگروپونو يوه سيستم غوڅي بيرته د  $G$  لاندېگروپ دي. په همدې توگه د كړۍ  $R$  د لاندېكړيو د يو سيستم غوڅي، د دې كړۍ لاندېكړۍ جوړوي. د لاندې نيمگروپونو يوه سيستم غوڅي بيرته لاندېنيمگروپ دي، كه دا تش نه وي، او همداسي ورپسي..

مورد دلته د لمړني غوښتنې ثبوت مخ ته بيايو. ددې لپاره دې په گروپ  $G$  كې يو لاندېگروپ سيستم  $A_i$  وركړ شوي وي، چيرته چي  $i$  يو پژنددپيري يا ايندكسدپيري  $\text{Indexmenge}$  كې ځغلي، او  $D$  دې د دې لاندېگروپونو غوڅي وي. كه چيرې  $b$  او  $c$  د  $D$  په خوښه كوم توکي وي، نو د دوي ځل  $bc$  په هر لاندې ډيري  $A_i$  كې پروت دي او په ورپسي توگه يا په لاس ته راوړني سره سملاسي هم په  $D$  كې پروت دي. نو له دې امله  $b^{-1}$  د په خوښه  $b \in D$  لپاره په هر  $A_i$  كې پروت دي او له دې امله په  $D$  كې هم پروت دي. پس  $D$  د  $G$  لاندې ډيري دي.

اوس نيسو چې  $G$  دې يو گروپ، كړی او يا په همدې توگه يوتن يا بدن يا كوم يو بل، مورد ته څرگند، الجبري سيستم وي، كوم چې تراوسه پيژنو. د  $M$  سره د  $G$  لاندېگروپ بنايو، نو يو مينيمال لاندېگروپ (په ورته ډول لاندېگړی، لاندې تن يا لاندې بدن) شته، كوم چې  $M$  خوندي لري. دا د  $M$  سره جوړه شوي يا توليد شوي لاندې گروپ  $\{M\}$  جوړوي او د ټولو  $M$  خوندي لرونکو د  $G$  د لاندېگروپونو غوڅی دی، د كومو څخه، چې كم له كمه يو دا په نامه گروپ  $G$  موجود دی.

د مخه ويل شوي يا وركړ شوي څيوكليكي لاندې گروپ تعريف د ټوليزولو له لارې ساده بنسول كيدی شي، چې لاندېگروپ  $\{M\}$  ټيك د ټولو هغو  $G$  توکو څخه جوړ دی، چې د په خوښه ترتيب د پايدیرو  $M$  توکو د پوتنڅځل په بڼه ليكل كيدی شي.

ټيك په همدې توگه د مخه لوستل شوي ټوليزولو له لارې لاندېگړی، چې په  $R$  كی له  $M$  توليد ټولو توکو جوړ دی، كوم چې په  $M$  كی د پاي ډيرو توکو د څلولو د زياتون (د ټولگڼيز ضريب سره) څخه انځوریدلی شي. په ناسوڅيا-تيو حالت كی دې طبعاً ضريبونه د ټول ممكنو نوكانو سره بندي شي.

۳ . ۳ . ۷ يا دونه يا تعريف: که د تيرې برخې د  $M$  لپاره، د گروپ  $G$  د ټولو لاندې گروپونو  $A_i, i \in I$  سيستم ونيول شي يا فرض شي، نو د يوه لاندې گروپ کليمي ته راځو، چې د ورکړشو لاندې گروپونو سيستم له خوا توليد شوی دی. ددې لپاره  $\{A_i, i \in I\}$  ليکو، يا هم  $\{A, B\}$ ، که دا د لاندې گروپونو ټولنه وي. په همدې توگه کيدی شي په يوه کړی کې هم د لاندې کړی سيستم له لارې تعريف لاندې کړی هم پوهيدل کيدی شي.

۳ . ۳ . ۸ يا دونه يا تعريف . دلته دې  $G$  يو گروپ وي، يوه کړی او همداسی ورپسې. نو په  $G$  کې داسی لاندې کړی  $M$  شته، د بيلگي په توگه پخپله  $G$ ، د کوم لپاره چې باور لري

$$\{M\} = G$$

هر داسی لاندې کړی د  $G$  لپاره يو جوړيدونکی يا توليدونکی ينکی سيستم بلل کيږي . تر هغی، چې  $G$  يو پای د توليدونکو سيستم ولري، نو دلته د گروپ  $(\vee)$  يو نيمگروپ، يو کړی  $G$  څخه غږيږو، چې پای توليديدونکی گڼون يا

شمیر ولري. په ځانگړې توگه کیدی شي، چې دا جوړوونکی یا تولیدونکی له یوه توکی څخه جوړ وي. دا گروپ چې یو جوړیدونکی توکی لري او د هغه د څیوکلیکي لاندې گروپ سره سر و خوري، څیوکلیک گروپ بلل کیږي.

### ۳ . ۴ . ایزومورفیزم Isomorphismus

دا دلته د هر الجبري سیستم راوړلو کلیمو لپاره د ایزومورفیزم کلیمه روښانه کیدی یا تشریح کیدی شي، کومه چې همغه رول لوبوي لکه په نیم نظم شوي ډیري کی یی چې لروده.

د بیلگي په توگه ایزومورف گروپونه یو بل ته کتمت دي، د یو او همغه گروپ دوه اکسمپلاره یا نموني، چې په نیولی دي وي، چې که د گروپ عمليي یی تړونونه همغه وي، په داسی حال کی چې توکي له کومو چې گروپونه جوړ دي، طبیعت یا پیدایننت کوم رول نه لوبوي. په کره کلك تعريف سره لاندې راوړو:

### ۳ . ۴ . ۱ تعريف: گروپوئید G او G' ایزومورف



دي، که د گروپوئيد يواځنی او په خټ څيرونه  $f$  د گروپو-  
ئيد  $G$  په گروپوئيد  $G'$  داسی موجود وي، چی د په  
خوينه  $a, b \in G$  لپاره باور ولري

$$(ab)f = af.bf$$

په همدې توگه هره څيرونه ، چی دا غوښتنی پوره کوي،  
د ايزومورفی څيرونی په څير يي په نخښه کوو يا يی ايز-  
ومورف څيرونه بولو. د دوه گروپوئيدو خوينه، چی يو  
بل سره ايزومورف وي، سيومتري خوينه دي، ( هغه و  
ايزومورفی څيرونی ته په خټ څيرونه بيرته ايزومورف  
څيرونه ده )، او ترانزيتيو، دا برسیره پر دې ، که څيرې  
څوک د گروپوئيد کټمټ په ځان څيرونه ورسره وگڼي،  
رفلکسيو هم دی. د ايزومورف گروپوئيدو لپاره په ټوليزه  
توگه لاندې ليکدود کارول کيږي يا استعماليږي

$$G \sim G'$$

که چيرې د نورو الجبري جورښتونو ايزومورفي مو هم  
مطلب وي ، نو مور به بيا هم همدا نخښه وکاروو.  
طبعاً به د گروپوئيد په ايزومورف څيرونه کی ټول هغه  
خوينه، چی په گروپوئيد کی ليکل کيږي، لکه اسوڅياتيو

قانون، کموتایتو، د یویتوکی موجودیت او د په ختتوکی موجودیت، د گروپوئید خیرې چه هم ور کارول کیري یا وروزل کیري. مور په ساده بیلگه سره بنایو، چی دا وینا خنگه بنوول کیدی شي.  $G$  دې یو کومتایتو گروپوئید وي او  $f$  دې د  $G$  یوه ایزومورف خیرونه په  $G'$  وي. که  $a'$  او  $b'$  دوه د  $G'$  په خوښه توکي وي او  $a, b$  د  $G$  هغه توکی وي، د کوم لپاره چی باور لري

$$af = f(a) = a' \quad , \quad bf = f(b) = (b)f = b'$$

نولرو

$$(ab)f = a'.b' \quad , \quad (b.a)f = b'.a'$$

او د برابرېون  $ab = ba$  او د خیرونی د یواختوب خخه  $a'b' = b'a'$  دی. له دې خخ لاس ته راځي،

۳ . ۴ . ۲ جمله: د نیمگروپ، گروپ او همداسی د ابلگروپ یا کموتاتیو گروپ ایزومورفی خیرې بیرته نیمگروپ، گروپ او همداسی ابلگروپ دی.

۳ . ۴ . ۳ مرستندوي جمله: دوه کړي یو بل سره ایزومورف دي، که د هغو د توکو ترمنځ یو یواختی اوپه

ختکيدونکی نظم يا خيرونه موجوده وي، چي هغه خيرونه نسبت و زياتونگروپ ته ايزومورفيزم وي او هم د کړي و ځلگروپوئيد ته ايزومورفيزم وي. د ايزومورف خيرونی سره طبعاً کړي هغه خيونه، اسوخياتيو، او کمو- تايټو يا ليکړي liesche Ring او داسی نور وي، ساتي. د ايزومورف گروپونو لپاره يوه په زړه پورې بيلگه، د مثبت رييلگڼونو ځليزه گروپ او د ټول رييلو گڼونو زياتونگروپ جوړوي. که هر مثبت گڼ د هغه په لوگاريتم باندې تنظيم يا خيره شي، چي بنسټ يی کره کلك ټاکلی وي، نو د لمړي گروپ يو ايزومورف خيرونه، په دوم گروپ، لاس ته راځي. ايزومورفيزم له دې ريښتينيو څخه لاس ته راځي، چي د يوه ځل لوگاريتم دې د لوگاريتم د يوگونو فاکتورونو د زياتون سره برابر يا مساوي دی. ( د لوگاريتم او قوانينو لپاره دې ځما د شمير پوهنی کتاب وکتل شي).

مور. اوس هغه،<sup>✓</sup>مخه په گوته شوې پاملرنه په څيوکليکي زياتونگروپ کی رامخ ته کوو او په يوه بيلگه پيل کوو. د ټولگڼونو زياتونگروپ د يوه ناپای څيوکليکي گروپ لپاره بيلگه ده، ځکه، چي هر ټول گڼ د ۱ څو ځله دی.

۳ . ۴ . ۴ جمله : ټول ناپای څیوکلکي گروپونه د ټولگڼونو زیاتونگروپ سره ایزومورف دي او همداډول په خپلو منځونو کی هم. همداسی پای د  $n$ -نظم څیوکلکي گروپونه یو بل سره ایزومورف دي. ددې جملی له ثبوت څخه دلته تیریرو ( ثبوت یی په  $Kuro\hat{s}$  کی کتل کیدی شي ).

۳ . ۴ . ۵ جمله: د ټولگڼونو د صفر لاندیگروپ، څخه توپیری ټول لاندیگروپونه د یوه څرگند طبیعی گڼ  $n$  د ډیرواره ډیری څخه راپیدا دي. او بی : روښانه ده، چی د یوه طبیعی گڼ ټول څوواره یو لاندېگروپ، دا په نامه له  $n$  څخه جوړ لاندېگروپ جوړوي. د یو بل څخه توپیری گڼونو  $n$  لپاره لاندېگروپونه هم یو له بل توپیر لري. کیدی شي یو د ټولگڼونو زیاتون گروپ، لاندېگروپ  $A$ ، چی یواځي د منفی گڼونو څخه نه وي جوړ، ځکه چی د هر گڼ سره د هغی په څت هم لري.  $n$  دې کوچنی طبیعی گڼ وي، چی په  $A$  کی خوندي ده. د یوه په خوننه  $a \in A$  لپاره باور لري

$$a = qn + r, \quad 0 < r < n$$

نو دی

$$r = a - qn \in A$$

او په دې لاس ته راوړني  $r = 0$  (د  $n$  له ټاکنې څخه ) ، دا په دې مانا چې دی  $a = qn$  ، څه مو چي بنسول.

۳ . ۴ . ۶ جمله : هر د يوه ناپای څيوکليکي گروپ لاندېگروپ څيوکليکي دی، او دا د پای څيوکليکي گروپ لپاره هم باور لري.

۳ . ۴ . ۷ تعريف : وايو، چي گريوئيد  $G$  په گريو-ئيد  $G'$  کي ايزومورف خوندي دی، او يا په  $G'$  کي ايزومورف نغښتي دی، که چيري له  $G$  يوه ايزومورف څيرونه د گروپو-ئيد  $G'$  په کوم يوه لاندېگروپوئيد باندي موجود وي. دا کليمه گريو ته هم غزول کيدی شي،

هره کړی  $R$ ، په کړی  $R$  باندي د پوره ماتريکسکړی  $R_n$  کي ايزومورف خوندي دی.

سکالار ماتريکسونه ، دا په دې مانا، چي د همغه توکي  $a \in R$ ، چي په اصلي نيمی يا قطر کي پروت وي او نور د نيمی دواړو خواو ته صفرونه وي، په نامه  $R_n$  يو لاندېکړی، د  $R$  سره ايزومورف ده.

۳ . ۴ . ۷ جمله : هره کړی  $R$  په ورکړ شوي ډيري  $M$  باندې یوه پوره فنکشنکړی سره، چی ارزښت یې په  $R$  کی پروت دی، ایزومورف دی. د ټولو  $x \in M$  لپاره هر فنکشن د همغه برابر ارزښت  $a \in R$  سره، هغه و  $R$  سره ایزومورف فنکشنکړی راکوي. د یوه په خوښه اسوخیاتیو، کموتاتیو کړی  $R$  کی پولینومکړی  $R[x]$  پوتنخلرېکړی  $R\{x\}$  کی ایزومورف خوندي دی. پوتنخلرېکړی د زیاتو پای صفر څخه توپیریدونکو څلوونو یا ضربونو سره، یو و  $R[x]$  ته ایزومورف د  $R\{x\}$  لاندېکړی جوړوي.

یو لوي کار د لاندې جملي اوبی یا حل غواړي:

۳ . ۴ . ۹ جمله : هره کړی  $R$  په یوه کړی کی، چی یویتوکی لري، ایزومورف خوندي ده. که کړی  $R$  په دې برسیره اسوخیاتیو یا کموتاتیو وي، نو کیدی شي، چی دا همداسی په یوه اسوخیاتیو، کموتاتیو دیویتوکی سره کړی کی خوندي شي. اوبی یا ثبوت: مورد ټولو جوړو  $(a, k)$  ډیری په نظر کي

نيسو، چي  $a \in R$  او  $k$  يو ټولگن دي او  $d$  دې جوړو لپاره  
د لاندې مساواتو له لارې زياتون او ځل تعريفوو:

$$(a,k) + (b,l) = (a+b,k+l) \quad (1)$$

$$(a,k)(b,l) = (ab+la+kb,kl) \quad (2)$$

نسبت و زياتون ته يو ابلگروپ لاس ته راځي. دا چي  
برسيره پر دې

$$\begin{aligned} [(a,k)+(b,l)](c,m) &= (a+b,k+l)(c,m) \\ &= ((a+b)c+m(a+b)+(k+l)c,(k+l)m) \\ &= (ac+ma+kc+bc+mb+lc,km+lm) \\ &= (ac+ma+kc,km)+(bc+mb+lc,lm) \\ &= (a,k)(c,m)+(b,l)(c,m) \end{aligned}$$

باور لري او ټيک په همدې ډول د ديستريبوتيو دوم قانون  
هم بنسولي شو، نو ډيري يوه کړي انځوروي. له (2) څخه  
ورپسي لاس ته راځي

$$(a,k)(0,1) = (0,1)(a,k) = (a,k)$$

دا جوړه (0,1) په دې کړيکي د يوټوکي ځاي نيسي يا  
نمايندگي کوي. برسيره پر دې د (1) او (2) سره سم لرو

$$(a,0)+(b,0) = (a+b,0),$$

$$(a,0)(b,0) = (ab,0)$$

د کومو سره، چي د ټولو د (a,0) فورم جوړو ډيري د ټولو

جوړو  $(a, k)$  په کړۍ کې یو  $R$  ته ایزومورف لاندېکړی جوړوي. له دې سره د ثبوت لمری برخه تکمیل ده، دومه برخه د (2) استعمال سره په ساده توگه لاس ته راځي.

مور. دا په گوته کوو، چې دا له مور. جوړه شوې کړۍ یواځنی کړۍ نه ده (او همداسی هم نامینیماله کړۍ) د یویتوکی سره،

کوم چې یورکړه شوېکړی  $R$  (د ایزومورف خونديونی په موخه) خوندي لري، کیدی شي چې  $R$  پخپله یو یویتوکی ولري.

۳ . ۴ . ۱۰ جمله : هر گروپوئید کیدی شي ، چې د یوې کړۍ په ځلگروپوئید کې خوندي شي، یو اسوخیاتیو یا کموتاتیو گروپوئید کیدی شي، چې په یوه کړیکۍ، چې همغه خویونه ولري خوندي شي. د ثبوت لپاره ټول ممکن د زیاتون فورمولونو زیاتون رانیسو

$$\sum_{a \in G} k_a a \quad (3)$$

د کومو سره ، چې  $a$  د ورکړشوي گروپوئید  $G$  ټولو توکو کې ځغلی، په داسی حال کې چې ځلونوي یا ضریبونه  $k_a$  ټولگڼونه دي او په ریښتونی، داسی چې زیات ترزیات پای ډیر د صفر څخه توپیري رامنځ ته کیري د زیاتون (3) زیاتون او ځل د برابرنونو یا مساواتو



$$\sum_{a \in G} k_a a + \sum_{a \in G} l_a a = \sum_{a \in G} (k_a + l_a) a \quad (4)$$

$$\sum_{a \in G} k_a a \cdot \sum_{a \in G} l_a a = \sum_{c \in G} m_c c \quad (5)$$

سره روښانه يا تشریح دی، په کومو کي، چې  $m_c$  د ټولو صفر څخه توپیر ځلونو  $k_a l_a$  زیاتون په مانا دی، چې په ټولو  $a$  او  $b$  کی ځغلیدلی وي، د  $ab = c$  سره. روښانه ده، چې د برابر ونونو ښی لور (4) او (5) د (3) فورم زیاتون انځوروي. مساوات (5) وایي، چې په کینې لور، د فاکتورونو په څیر رامنځ ته شوي، پای زیاتونونه د غړو په څیر پوله بل سره ځلیږي، او په ریښتونی د قانون

$$k_a a \cdot l_a a = (k_a l_a)(ab)$$

لاندې، چې د  $ab$  سره د گروپوئید په موخه ورکړ شوي عملیه مو مطلب دی، د کومو سره چې د ځل  $ab$  رامنځ ته کیدو سره همغه توکی  $c$  ورکوي، سره یوځای راټول شي.

د زیاتون لپاره په هره توگه یو ابلگروپ لاس ته راځي. د دیستریبوتیو قانون او د هغه ثبوت چې د  $G$  په گروپ کی د ځل اسوخیاتو همداسی کموتاتیو قانون او همغه مساوي یي

د زیاتونونو ځل، چی فورم (3) لري لاس ته راځي، که څه هم خورا پراخ دی، مگر په پرینخیپ یا اصولوکی ستونځی نه رامنځ ته کوي، د هغو پرمخ بیول دې د لوستونکو دنده وي.

د ټول زیاتون، چی فورم (3) لري له دې امله نسبت و(4) او (5) مساواتو تعریف شوو اپریشن ته یوه کړی جوړوي، هغه زیاتون (3) په کومو کي، چی  $k_a = 1$  دی، د په خوبه  $a$  لپاره، چی له  $G$  دی. د (5) پسی یو گروپ  $G$  سره ایزومورف لاندېگروپوئید، د دې کړی د څلورونکي گروپوئید سره، جوړوي. له دې سره دا بڼونه سر ته ورسیده.

دا له مورز جوړ شوې د گروپوئید  $G$  کړی د ټولگڼونو گروپو-ئیدکړی بلل کیږي.

که  $G$  یو نیمگروپ وي او یا گروپ، نو د دې په ځاي د ټولگڼیز نیمگروپ او همداسی د ټولگڼیز گروپ څخه غږیږو.

۳ . ۴ . ۱۱ جمله: هر گروپ د یوه ډیری  $M$  په سیو-متری گروپ کی ایزومورف خوندي دی، کیدی شي، چی د  $M$  په ځاي په ځانگړې توگه د گروپ ټولو توکو ډیری وکارول شي. دلته د گروپ  $G$  هر توکی  $a$  هغه ترانسفورمیشن باندي تنظیموو، چی یو د  $G$  توکی  $x$  په توکي  $xa$  باندي تنظیم

کړي. دا چې له  $x = y$  څخه هم  $ax = ay$  لاس ته راځي او برسیره پر دې د هر  $x \in G$  لپاره برابرون

$$(xa^{-1})a = x$$

رامنځ ته کيږي، ترانسفورمیشن  $x \rightarrow xa$  ګروپ  $G$  په ځان په څټ یواځنی څیره کوی یا تنظیموي، دا نو له دې امله یو پرموتیشن ( پرموتیشن ځما د شمیرپوهنه کتاب کی په پراخه توګه روښانه شوی دی) دی. د  $a = b$  لپاره په دې برسیره په دې د غوښتونکو پرموتیشنونو توکي یو له بل توپیر لږود-ونکی دي، ځکه، چې  $1.a = 1.b$  دی. بالاخره برابرون

$$(xa)b = x(ab)$$

په ګوته کوي، چې د  $ab$  پورې اړونده پرموتیشن د  $a$  او  $b$  پورې اړونده یوه بل پسې راوړنو څخه لاس ته راځي.

۳ . ۴ . ۱۲ جمله : هر نیمګروپ  $G$ ، د یوه ډیري  $M$  سیومتري نیمګروپ کی خوندي دی.

اوبی یا حل: د ثبوت لپاره نیمګروپ  $G$  د ۳ ، ۴ ، ۱۰ سره سم په یوه، د یوه اسوځیاتيو کړی  $R$ ، په ځلیز ګروپ

کی خوندي کوو، دا بیرته د ۳ . ۴ ، ۹ سره سم په یوه  
اسوخیاتویکری R کی د یویتوکی سره خوندي کوو او  
د G سره یی په نخینه کوو، چی داد اخرنی کیری خلیزه  
نیمگروپ دی. لکه څنگه، چی په G کی هم یو توکی 1  
د  $1.a = 1.b$  سره له  $a = b$  څخه موجود دی، نو د  
لغاتو پورې د پورته جملی ثبوت سره دا سر خوري ، چی  
دا نیمگروپ G د نیمگروپ سره پخپله، په دې ډیرګا G  
باندې، ایزومورف خوندي دی. له دې څخه د سرچینیز  
گروپ G خونديونه لاس ته راځي.

مور غواړو، چی دې ته گوته ونیسو، چی د یوه گروپوئید  
(په ځانګړي توګه یوه نیمگروپ) په بل گروپوئید (یوه  
نیمگروپ) کې خونديونه سیده وښایو، بی له دې، چی یوه  
ګری د یویتوکی سره وکاروو.

۳ . ۵ د نیمگروپونو په گروپ کی او کړی په یوه  
(نا ضرور کموتاتیو) تن یا بدن کی خونديونه

هر نیمگروپ، ضرور په یوه گروپ کی، ایزومورف نه شی  
خوندي کیدی، د دې لپاره ضروري شرطونه هغه باید ورسره  
بلد د لنډونی قاعدې دي.

۳ . ۵ . ۱ جمله: له  $ac = bc$  او همداسی  $ca = cb$  څخه لاس ته راځي  $a = b$ .

یادونه : دلته گورو، چی د لنډونی قاعدې کارول شوي دي.

په لاندې برخه کی غواړو وښایو، دا راولشلوي ضروري شر-  
طونه، چی د نیمگروپونو په گروپونو همداسی د اسوخیاتیو  
کړی په یوه (ناسو<sup>۸۸</sup> کموتایتو) بدن کی د کموتایتو په حالت  
کی پوره کیدونکي هم دي. د دې لپاره د لاندې مرستندوي  
جملي په ښوونه پیل کوو.

۳ . ۵ . ۲ مرستندوي جمله: د ابل په یوه نیمگروپ  $G$

کی دې یو لاندې نیمگروپ  $S$  ورکړ شوی وي، او په  $G$   
کی دې د  $S$  د توکو سره لنډونه وشي، دا په دې مانا، چی له

$$ax = bx, x \in S; a, b \in G$$

څخه دې تل  $a = b$  لاس ته راشی. نو کیدی شي، چی  $G$   
د ابل نیمگروپ ایزومورف په یوه داسی ابل گروپ  $G$  کی  
د یویتوکی سره، ایزومورف خوندې شي، چی د  $S$  هر توکی  
په  $G$  کی یو په څت توکی ولري.

(۱) ناسو کموتایتو

یادونه : د دې جملې له ثبوت څخه تیریرو. دا د الجبر په درسی کتابونو کې کتل کیدی شي،

په دې پورته غوښتنو له مخې لاندې جمله لاس ته راځي

۳ . ۵ . ۳ جمله : هر ابل گروپ د لنډونو قاعدو سره

په یوه ابل گروپ کې خوندي کیدی شي .

د دې ورکړ شوي جوړښت د طبیعي گڼونو په یوه زیاتون

نیمگروپ ، کوم چې د لنډونو قاعدو سره یو ابل نیمگر-

وپ دی ، په ساده توګه د ټولګڼونو په زیاتونگروپ کې

میندل کیدی شي ،

۳ . ۵ . ۴ جمله: په یوه اسوخیاتیو - هوکوتاتیو کړی R

کې دې د توکو یو ډیری N راوستل شوی وي، په کوم کې

چې صفر او پرفرویشنه نه وي موجود. نو کیدی شي، چې

کړی R ایزومورف په یوه اسوخیاتیو-کموتاتیو کړی R کې،

د یویتوکی سره، داسې خوندي شي، چې د N هر توکي په R

کې یوه په خپه توګه ولري.

یادونه : دا ثبوت هم پریردو او په دې توګه نورو غوښتنو ته

هم پای ورکوو، چې موضوع اوږده نه شي.

## ۳ . ۶ . نورمال پرويشوني

۳ . ۶ . ۱ تعريف : يو گروپ  $G$  او په هغه کي دې  $a \in G$  توگه يو لاندې گروپ  $H$  دې ورکړ شوي وي. که يو  $a \in G$  په خوښه توکي وي، نو ممکنه ځلوني  $ah$  چي د  $aH$  ټولگه ده، چيرته چي  $h$  په لاندې گروپ  $H$  کي ځغلي، دا د  $aH$  تعريف شوي، د گروپ  $G$  کين اړخيز څنگ-ټولگي يا گاونډي ټولگي (مور به کونښن وکړو چي دا تل گاونډي ټولگي و بولو) بلل کيږي و لاندې گروپ  $H$  پسي. په څرگنده توگه  $a \in aH$  دي، ځکه چي لاندې گروپ  $H$  يو ټوکی لري.

د يوه توکي  $b$  لپاره دې، چي د گاونډي ټولگي  $aH$  څخه دي، تل باور ولري  $bH = aH$ ، دا داسي بلل کيږي، چي د گروپي  $G$  هر کين اړخيز گاونډي ټولگي و  $H$  پسي د هغه د هر توکي سره تعريف کيږي. که  $h \in H$ ،  $b = ah$  باور ولري، نو د په خوښه  $h', h'' \in H$  لپاره باور لري:

$$bh' = a(hh') \quad \text{او} \quad ah'' = b(hh'')$$

$$aH \subseteq bH \quad \text{او} \quad bH \subseteq aH \quad \text{پس}$$

په دې سره هر دوه کین اړخیز گاونډیتولگی، یو د بل سره کټمټ دي او یا یی غوڅی تشدیری دی. مور ددې سره د گروپ  $G$  یوه ټوټونه یا تجزیه لاس ته راوړو، په لاندېگروپ  $H$  پسی، چی د یوه مخه یی کین اړخیزو گاونډیتولگیو یو له بل څخه پردې دي، دا گروپ  $G$  کین اړخیزه ټوټونه بلل کیږي په یوه لاندېگروپ  $H$  پسی. د دې ټوټونو یا تجزیو یو ټولگی پخپله  $H$  دی:  $aH = H$  سره باور لري  $a \in H$ .

په ورته توگه د گروپ  $G$  بنی اړخیزه ټوټونه یا تجزیه لاس ته راوړی شو، په یوه لاندېگروپ  $H$  پسی، کوم چی له بنی اړخیز گاونډیتولگی  $ha, a \in G$  څخه جوړدی، که یو گروپ کموتاتیو نه وي، نو کیدی شي، چی کین گاونډیتو-لگی او بنی گاونډی ټولگی باندې د یوه گروپ  $G$  ټوټونه د لاندېگروپ  $H$  پسی یو له بل توپیر ولري. په هر صورت دواړه ټوټونی د ټولگیو برابر گڼون لري: څیرونه چی د  $G$  هر توکی  $a$  د  $G$  په  $a^{-1}$  توکی څیره کوي، په څټکیدو-نکی یواځنی څیرونه ده، د گروپ  $G$  په خپل ځان او کین اړخیز  $aH$  گاونډیتولگی په همغه ورته بنی اړخیز گاونډیتو-لگی  $Ha^{-1}$  څیره کوي او په څټ.



۳ . ۶ . ۳ تعريف: د گروپ  $G$  ټوټونه په لاندې گروپ  $H$  پسي ، د گاونډيو ټولگيو گڼون په دې دواړو هر ټوټونو يا تجزيه کي ، که دا پاي وي، د لاندې گروپ پيژندنځېنه يا ايندکس Index، په گروپ  $G$  کي بلل کيږي.

گروپ  $G$  دې د  $n$  نظم پاي گروپ وي او  $H$  دې د هغه لاندېگروپ وي، د  $k$  نظم او  $z$  پيژندنځېني يا ايندکس سره. هرگاونډېټولگي  $aH$  د ټيک  $k$  توکو څخه جوړ دي او له دې امه باور ولري

$$n = k \cdot j$$

له دې څخه لاندې جمله لاس ته راځي

۳ . ۶ . ۳ د لاگرانژ Lagrange جمله: د يوه په خوښه پای لاندېگروپ نظم او پيژندنځېنه د ټول گروپ د نظم پريوشوني دي.

دا جمله د ۳ . ۳ . ۴ سره سم لاس ته رکوي ، چي د پاي گروپ د هر په خوښه توکي نظم همدا سي د گروپ نظم ويشي. د دې جملې بله پسي راتلنه ده:

۳ . ۶ . ۴ پسی راتلنه: هر د لمړي گڼ نظم (لمړیگن هغه گڼ دی، چی پرویشونی یی ساده پرویشونی وي، یعنی پخپله دا گروپ او یوتوکی (خیوکلکیک یا په بل نوم، راگرخیدونکی دی. دا باید د په خوښه د هغه توکی جوړه خیوکلکیکي لاندی گروپ سره سر و خوري، تر هغی چی دا توکی له ۱ څخه توپیر ولري.

۳ . ۶ . ۵ تعریف: یو لاندېنیمگروپ  $H$  د گروپ  $G$  نورمالپرویشونی  $\mathcal{N}$ malteiler (یا اینواریانتي  $\mathcal{N}$ malteiler Untergrupp لاندېگروپ) بلل کیږي، که د  $G$  کین اړخیزه ټوټونه یا تجزیه د بنی خوا ټوټونی سره، نسبت و  $H$  ته، سر و خوري، دا په دې مانا، چی د هر  $a \in G$  لپاره (په  $G$  کی د دواړو برخدیريو یو بل سره د سر په سر خورلو په موخه وي) مساوات

$$aH = Ha \quad (1)$$

رامنځ ته کیږي. یا باوري کیږي. کیدی شي چی د لته د گروپ  $G$  ټوټونی و  $H$  پسی د نورمالگروپ څخه وغږیږو. په لاندې کی د نورمالپرویشونی یو بل تعریف ورکوو، چی

دې همدا اوس ورکړ شوي تعريف سره برابرازښته دی.

۳ . ۶ . ۶ تعريف : په گروپ  $G$  کې توکي  $x$  او  $y$  يو د بل سره کونجوگيري konjugiert بلل کېږي، که په  $G$  کې يو توکي  $a$  داسې پيدا کېږي شي ، چې باور ولري

$$y = a^{-1}xa$$

داسې هم ويل کېږي، چې له  $y$  څخه د  $x$  سره ،  $a$  د ترانفورميشن له لارې لاس ته راځي.

۳ . ۶ . ۷ جمله : د گروپ  $G$  لاندې گروپ  $H$  هلته او هلته په  $G$  کې نور مالپرويشوني دي، که  $H$  وهر توکي ته دده توکي په  $G$  کې ټول کونجوگيري توکي هم ولري.

اوبی : د دې لپاره دې  $H$  په  $G$  کې نورمالپرويشوني وي، او په ورزيات دې يا برسیره پر دې دې  $h$  د  $H$  په خوښه توکي وي.  $a$  دې د  $G$  يو په خوښه توکي وي، په  $H$  کې د (۱) پسې يا د (۱) له مخې يو توکي  $h'$

$$ah' = ha \quad (2)$$

سره موجود دی. پس دی

$$a^{-1}ha = h' \in H \quad (3)$$

او په خټه کې که  $h \in H$  په خوښه توګی لپاره او  $a \in G$  په  $H$  کې یو توګی  $h'$  موجود وي، کوم چی برابرې (۳) پوره کړي او د دې پسی یا د دې په تعقیب (۲) پوره کړي، نو باور لري  $aH \subseteq Ha$ . که په دې رامنځ ته شوې اړیکې، چی د ټولو  $a$  لپاره رامنځ ته شوي یا باور لري، د  $a$  په ځای  $a^{-1}$  ولیکي، نو  $a^{-1}H \subseteq Ha^{-1}$  ته راځي او همداسی  $aH \subseteq Ha$ . کوم چی د مخ ته تیر سره برابرې (۱) ورکوي.

۳ . ۶ . ۸ . تعریف : دوه لاندېګروپونه  $U$  او  $V$  په  $G$  کې یو د بل سره کونجوګیر *konjugiert* بلل کېږي، که یو داسی توګی  $a \in G$  موجود وي، چی د هغه سره د ترانسفورمیشن له لارې لاندېګروپ  $U$  په لاندېګروپ  $V$  پریباسي، یعنی باور ولري

$$a^{-1}Ua = V$$

ډیري  $a^{-1}Ua$  بی له دې هم د هر  $a \in G$  لپاره د په خوښه یو (په ریښتونی  $U$  سره ایزومورف) لاندېګروپ سره تل بیرته یو لاندې ګروپ دی.

د په خوښه توکو  $u_1, u_2 \in U$  لپاره لاندې اړیکې رامنځ ته کېږي

$$(a^{-1}u_1a)(a^{-1}u_2a) = a^{-1}(u_1u_2)a$$

او له

$$a^{-1}u_1a = a^{-1}u_2a$$

څخه برسیره پردې لاس ته راځي  $u_1 = u_2$ ، د کوم سره چې څیرونه یا نظم  $a^{-1}ua \rightarrow u \in U$  د سره، یو ایزومورف څیرونه د  $U$  په  $a^{-1}Ua$  ده: هم یو لاندې ګروپ انځوروي.

۳ . ۶ . ۹ جمله: د یوه ګروپ  $G$  هر نورمال پرویشن د

ټولو خپلو په  $G$  کې کونجوګیر لاندې ګروپونو سره یوځای

پریوزی. په څټ: د ګروپ  $G$  یو لاندې ګروپ  $H$  ټولي و  $H$

ته په  $G$  کې کونجوګیر لاندې ګروپونه خوندي لري، نو له دې امله دا نوډمال پرویشن دی.

له (۱) څخه په لمړۍ وار لاس ته راځي

$$a^{-1}Ha = H \quad (4)$$

کوم چې د جملې لمړۍ برخه ثبوتوي. اوس نو باور لري

$$a^{-1}Ha \subset H$$

د اصلي خونديلرني په موخه. دا رات راکوي

$$H \subset aHa = (a^{-1})^{-1}Ha^{-1}$$

او د  $H$  لاندې ګروپ بايد، که هغه ټولې و هغې ته کونجو-  
ګير خوندي ولري، د دې توافق يا يو په بل سرخوړنی سره .  
د په خوښه توکي  $a \in G$  لپاره له دې امله (۴) رامنځ ته  
کيږي، له کوم چي (۱) راييليدلی شي.

۳ . ۶ . ۱۰ جمله: د يوه ګروپ  $G$  د په خوښه نورمالپرو-  
يشونو ډيريو غوڅي، بيرته نورمال پرويشونی دي.

اوبی: که  $D$  د  $A_i, i \in I$  غوڅی وي، نو په هرترتيب  $D$   
د  $G$  لاندې ګروپ انځوروي. (پرتله ۳ . ۳ . ۶) برسیره پر  
دې د هر توکي، چي يوه د  $D$  توکي سره کونجوګير وي،  
په ټولو  $A_i$  کي پروت دی او په دې پسي لاس ته راځي، چي  
په غوڅ کي هم پروت دی.

۳ . ۶ . ۱۱ جمله: د يوه ګروپ  $G$  په خوښه نورمالپرو-  
يشونو سيستم څخه توليد يا راپيداشوي لاندې ګروپ (پرتله  
۲ . ۳ . ۸) په همدې حالت کي د  $G$  يو نورمالپرويشونی

دی

### ۱۰۳ الجبري جوړښتونه

ورکړ شوی دې نورمالپرويشونى  $A_i, i \in I$  وي او د هغه څخه جوړ شوي يا توليد شوي د لاندې گروپ  $B$  وي لکه په ۳ . ۳ . ۷ کې بنسول شوي وو، هر د  $B$  توکى  $b$  په لاندې بڼه ليکل کيدى شي

$$b = a_1 a_2 \dots a_n$$

د ورکړ شوي  $a_j \in A_j, j = 1, 2, \dots, n$  سره . له  $G$  څخه په خوبنه توکي  $g$  لپاره باور لري

$$g^{-1}bg = (g^{-1}a_1g)(g^{-1}a_2g)\dots(g^{-1}a_ng)$$

او دا چى

$$g^{-1}a_jg \in A_j, j=1,2,\dots,n$$

دى ، نو لاس ته راځي

$$g^{-1}bg \in B$$

۶ . د ابلگروپ ټول لاندې گروپونه د هغى خپل نورمالپير- ویشونى دي. په دې ورزيات يا برسیره پر دې په هر گروپ  $G$  کې يوونگروپ  $E$  د نورمالپرويشونى په څير موجود دى او په همدې توگه پخپله گروپ  $G$  هم.

۳ . ۱۲۰۶ تعریف : یو گروه ، چی نورمال پرویشونی یی یواخی یوونگروپ او پخپله خپل ځان وي ، ساده بلل کيږي .

۳ . ۱۳۰۶ جمله : یواځني ساده ابل گروپونه ، هغه څيو - کليکي گروپونه دي ، چی نظم یی پريمگن يا لمړی گن وي .

اوبی : که یو ابل - يا کموتاتیو گروه ساده وي ، نودا بیخي ناساده يا ناصلي لاندې گروه نه لري : دا چی په دې کي څيوکليکي لاندې گروپونه باید خوندي وي ، نو دا پخپله څيوکليکي دی . یو ناپاي څيوکليکي لاندې گروه ناصلي يا ساده لاندېگروپونه لري ، په کوم چی د ټولگڼونو زیاتون - گروه دی ، په هغه کی چی د جفت گڼونو گروه په ځان کی دننه يا خوندي لري . که یو پای څيوکليکي گروه  $G = \{a\}$  راواخلو چی نظم یی  $n$  دی ، نو د ټوټونی  $n$  له لاري څخه لرو  $n = kl$  ، چی لاندې گروه  $\{a^k\}$  نظم  $l$  او په دې لاس ته راوړنی سره د  $E$  او  $G$  څخه توپير لري . د دې په څټ : گروه  $G = \{a\}$  کیدی شي چی هیڅ ناساده لاندېگروپ ولري ، که نظم یی یو پريمگن يا لمړی گن وي . چی د لاگرانژ له جملی څخه ساده په لاس راتلی شي .



يادونه: دا موضوع دلته رالنډوم او داسی نورې په دې هکله موضوعگاني په خارجي ژبو درسی کتابونو کی شته، چی هلته کتل کیدی شي، دلته به زیات وخت او ځای ونیسی. زما هئله هم دا ده، چی د زیاتو شیانو سره په دا لمړي کی داسی لږ غونډې بلد شو.

### ۳ . ۷ ایديال او پاتي ټولگیځی

#### Ideal und Restklassenring

يادونه: ی ما دا پاتیتولگیځی بللی، چی یو نوم وي، خو دا کیدی شي، چی د پاتیتولگی کی هم وبلل شي. د نومونو په هکله ستونځي به منو، تر څو، چی ځمور په هیواد کي شمیرپوهنی خپله لار نیولي وي.

په دې برخه کی گورو، چی د نورمالپرویشونی په ځای د ایديال کلیمه رامنځ ته کیږي.

په دې برخه کي  $R$  تل یوه کموتاتیوه کړی د یوټوکی ۱ سره په نخښه کوي یا بنایي. اوس د یوې کړی د « ایديال » کلیمه پیل کیږي. لاس ته راځی، چی د  $R$  هر ایديال  $Y$  په  $R$  باندي

یو ایکویوالنت یا ورته پولگی  $\sim$  تعریفوي. د دې سره بنسول کیږي، چی د هر  $r \in R$  کړیتوکی اړونده ایکویوالنتپولگی  $[r]$  بیرته یوه کړی  $R/Y$  جوړوي.

۳ . ۷ . ۱ . تعریف : د کړی  $R$  یو ناتش برخه پیری  $Y$  یو ایدایال دی، که  $Y$  د زیاتونگروپ  $(R, +)$  یو لاندې گروپ وي او د ټولو  $y \in Y$  او  $r \in R$  لپاره باور ولري  $yr \in Y$ . دا د  $R$  ایدایال  $Y$  اصلي ایدایال بلل کیږي که  $Y = R$  وي.

۳ . ۷ . ۲ . بیلگی:

( الف ) دا د  $R$  یواځي د صفرتوکی څخه جوړ برخه پیری  $\{0\}$  د  $R$  یو ایدایال دی، دا صفرایدایال دی. او له همدا اوسه به په  $0$  سره په نخښه شي.

( ب ) که  $R = Z$  د ټولگڼونو کړی وي، نو پیری  $Y$  د ټولو جوړه گڼونو  $Y = 2z$  د  $z \in Z$  سره جوړ پیری د  $Z$  یو ایدایال دی. د دوه جوړه گڼونو زیاتون او کمون تل یو جوړه گڼی دی، او برسیره پر دې  $yz$  د ټولو  $y \in Y$  لپاره او د ټولو  $z \in Z$  لپاره یو جوړه گڼی دی.

پ ( که  $R = F$  يو بدن وي، نو  $0$  او  $F$  د  $R$  د يواځنی ایديالونه دي.

۳ . ۷ . ۳ تعريف: د  $R$  يو ایديال  $Y$  اصلي ایديال بلل کيږي، که  $Y = yR$  وي، د يوه  $y \in Y$  لپاره، دا په دې مانا چې يو  $y \in Y$  داسی موجود دی، چې د هر  $z \in R$  لپاره يو  $r \in R$  د  $z = ry$  سره موجودوي. داسی هم ويل کیدی شي: چې دا توکی  $y$  ایديال  $Y$  جوړوي يا توليدوي او يا  $y$  د  $Y$  جوړوونکي يا توليدوونکی دی.

۴ . ۷ . ۳ تعريف: د  $R$  يو ایديال وي. نو دوه توکی  $r, s \in R$  و  $Y$  ته ايكويوالنت يا ورته بلل کيږي، که باور ولري:  $r - s \in Y$   
په نخبوونه یی:  $r \sim s$  يا  $s \sim r$ .

دا په ساده توگه ليدل کيږي، چې  $\sim$  په  $R$  باندې يو ايكوبوالنځ اړیکه يا ورته اړیکه ده.

۵ . ۷ . ۳ مرستندوي جمله:  $Y$  د  $R$  يو ایديال وي د  $R/Y$  سره او  $R/Y$  دې د  $R$  له توکو  $r$  څخه جوړ، د ورته ټولگيو  $[r] = \{s \in R \mid s \sim r\}$  ډیری وي.

نو  $R/Y$  به د زیاتون  $[r_1] + [r_2]$  او ځل  $[r_1] \cdot [r_2]$  سره د ټولو  $r_1, r_2 \in R$  لپاره یوه کړۍ وي د یوې توکۍ [1] سره .

اوبی: لکه د مخه موچی گوته ورته و نیوله ورته ټولگی  $r \in R, [r]$  ډیری  $R$  په پردیو برخه ډیریو باندې ټوټه یا تجزیه کوي. وي دې

$$[r_1], [r_2] \in R/Y,$$

نودا باید وبنوول شي، چی زیاتون

$$[r_1] + [r_2] = [r_1 + r_2]$$

او ځل

$$[r_1] \cdot [r_2] = [r_1 \cdot r_2]$$

د هغود نماینده توکو څخه خپلواک ایکیوالنختولگی یا ورته ټولگی دي. که  $s_1, s_2 \in R$  نور د ټولگی  $[r_1]$  او همدا ډول د ټولگی  $[r_2]$  نماینده گان وي نو  $r - s = y \in Y$  هم دي، د ټولو  $i = 1, 2$  لپاره، د کوم څخه چی لومړی

$$\begin{aligned} [r_1 + r_2] - [s_1 + s_2] &= [r_1 + r_2 - s_1 - s_2] = \\ &= [(r_1 - s_1) + (r_2 - s_2)] \\ &= [y_1 - y_2] = [0] \in R/Y \end{aligned}$$

لاس ته راځي. له دې امله زیاتون + کره تعریف دی او  $[0]$  د ابل د گروپ  $R/Y$  یو صفرتوکی دی و ترنی یا نښلونی یا عمليي + ته. په  $R/Y$  باندې ځل . هم کره تعریف دی، ځکه چی

$$\begin{aligned} r_1 r_2 - s_1 s_2 &= (s_1 + y_1)(s_2 + y_2) - s_1 s_2 \\ &= s_1 s_2 + y_1 s_2 + s_1 y_2 + y_1 y_2 - s_1 s_2 \\ &= y_1 s_2 + s_1 y_2 + y_1 y_2 \in Y \end{aligned}$$

له کوم چی  $[r_1][r_2] = [r_1 r_2] = [s_1 s_2] = [s_1][s_2]$  لاس ته راځي. سړی په دې پسی تړلی په دې باور راوړی شي، چی  $R/Y$  (د کړی د تعریف سره سم) یوه کړی ده د یو یو توکی  $[1]$  سره.

۳ . ۷ . ۶ تعریف : دا کړی  $R/Y$  د  $R$  یو د پاتی- ټولگیو کړی و ایديال  $Y$  ته بلل کیږي.

۳ . ۷ . ۷ تعریف : د کړی  $R$  یو ایديال  $M$  ماکزیمال ایديال بلل کیږي، که  $M \mid R$  باور ولري او  $Y$ ، د  $R$  یو بل ایديال، موجود وي <sup>ته</sup>  $M \subset Y \subset R$  سره.

۳ . ۷ . ۸ جمله:  $R$  دې یوه کموتاتیوه کړی وي،

د  $1 \in R$  سره، نو باور لري:

الف) د  $R$  هر اصلي ايډال  $Y$  په يوه ماکزيمال ايډيال کې خوندي دی.  
 ب) که  $M$  د  $R$  يو ماکزيمال ايډيال وي، نو د پاتيتولګي کړی  $F = R/Y$  يو بدن يا تن دی.

اوبی:

الف) دا چې  $Y$  د  $R$  يو اصلي ايډيال دی، نو  $1 \notin Y$  دی.

$$Y \subseteq y_1 \subseteq y_2 \subseteq \dots \subseteq Y$$

دې د کړی  $R$  د ايډيالونو  $Y_i$  يو جګيدونکی څنځير وي د  $1 \notin Y_i$  سره، چيرته چې  $i \in I$  او  $I$  يو اندکس ډيری يا پيژندډيری دی. وي دې  $W = \bigcup_{i \in I} Y_i$ ، نو  $u, v \in W$ ،  $i \in I$  سره موجود دی د  $u, v \in Y_i$  سره، ځکه چې ايډيال  $Y_i$  يو څنځير جوړوي. نو لرو  $u - v \in Y_i \subseteq W$  همدا ډول  $ur \in W$  لاس ته راځي، د ټولو  $u \in W$  لپاره او  $r \in R$ . له دې امله  $W$  د  $R$  يو ايډيال دی، او  $1 \notin W$  دی. نو د کړی  $R$  د ټولو  $Z$  ايډيالونو ډيری  $M$  د  $Y \subseteq Z$  سره، او  $1 \notin Z$  سره، د څورن ليما پسی يو ماکزيمالتوکي  $M$  لري. دا چې هر اصلي لوي ايډيال  $M' > M$  دا يویتوکي  $1$

لري او له دې امله  $M' = R$  باور لري، نو لاس ته ترې اخي،  
چې  $M$  د  $R$  يو ماکزیمال ايديال دی. دا  $Y$  خوندي لري.  
ب) وي دې  $[r] = [0]$ . نو  $M + rR$  د  $R$  يو ايديال دی،  
کوم چې  $M$  اصلي خوندي لري. دا چې  $M$  د  $R$  يو  
ماکزیمال ايديال دی، نو باور لري

$$R = M + rR$$

پس د  $R$  يوی په  $M + rR$  کې پروت دی، دا په دې مانا  
چې  $1 = m + rs$  د توکو  $m \in M$  او  $s \in R$  لپاره باور لري.  
له دې امله  $[r][s] = [1] \in R/M$  دی  
او له دې سره  $[s] = [r]^{-1}$  دی.  
نو پاتې ټولګی کړی يو بدن يا تن دی. خچ د بنس و

### ۳ . ۷ . ۹ بیلګي

اول : د ټولګونو  $Z$  په کړی کې  $Y$  د ټولو جفتو ګڼونو ډیری  
ماکزیمال ايديال دی. پاتیتولګي بدن  $Z/Y$  یی د دواړو  
پاتیتولګيو  $[0]$  او  $[1]$  څخه جوړ دی. دا نو له دې امله  
دوه توکی لري او د  $Z/2Z$  سره په نخښه کېږي.  
دوم : په پولینومکړی  $R = F[X]$  کې په بدن يا تن  $F$  باندې  
د نا ټاکلی يا مېخولی  $X$  سره  $Y = \{ X f(X) \mid f(X) \in R \}$

یو ماکزیمال ایدیال دی د پاتی ټولگیځی  $R/Y \sim F$  سره د  
مخ ته تیر تعریف له مخی، ځکه چی دی.

$$f(X) = f_0 + f_1X + \dots + f_nX^n \in R$$

نو  $[f] = [f(X)]$  په  $R/Y$  کی پروت دی. د مرستندوی  
جملی ۳ . ۷ . ۵ له مخی دا څیرونه  $f_0 \in F \rightarrow [f_0]$  د بدنونو  
یا تنونو  $R/Y$  او  $F$  ترمنځ یو ایزومورفیزم دی.

۳ . ۷ . ۱۰ تعریف: د کموتاتیو کړی  $R$  د یویتوکي ۱  
سره یو توكي  $u$  یوون بلل کیږي، که یو  $v \in R$  څخه  
موجود وي د  $uv = 1$  سره.

۳ . ۷ . ۱۱ جمله : د یوه توكي  $u \in R$  لاندې څویونه  
ایکویوالنت یا ورته دي

الف )  $u$  د  $R$  یو یوون دی.

ب )  $u$  د  $R$  څخه جوړ شوی یا تولید شوی اصلي ایدیال  
دی، دا په دې مانا چی  $uR = R$ .

پ )  $u$  د  $R$  په هیڅ ماکزیمال ایدیال کی خوندي دی یا په  
بل ډول : په کوم ماکزیمال ایدیال کی خوندي نه دی.



ثبوت يا اوبی: پ ( په ساده توگه له ب ) څخه لاس ته راځی. که  $u \in R$  په کوم ماکزیمال ایډیال کی خوندي نه وي، نو د جملي ۳ . ۷ . ۸ له مخی اصلي ایډیال نه دی. پس لرو  $R = uR$  او  $1 = uv$  د یو  $v \in R$  لپاره، که چیرې الف ښوول شوی وي. دا ایمپلیکیشن  $(a) \Rightarrow (b)$  ساده دی. څ چ ښ و ( څه چی د ښوولو وو )

۳ . ۷ . ۱۲ تعریف: د کړی  $R$  یو ناتش برخدیری  $U$  لاندې کړی بلل کیږي، که د ټولو  $u_1, u_2 \in U$  لپاره هم  $u_1 - u_2 \in U$  او هم  $u_1 u_2 \in R$  باور ولري.

۳ . ۷ . ۱۳ بیلگي:

الف ( د  $R$  هر ایډیال  $Y$  د  $R$  یو لاندې کړی ده.

ب ( د  $Z$  یو لاندې کړی دی، مگر د  $Q$  ایډیال نه دی.

پ ( د  $Z$  د ټولو جفتو گڼونو ډیری  $Y$  د  $Z$  لاندې کړی ده. په ځانگړې توگه دا  $Y$  داسی لاندې کړی ده، کومه چی یویتوکی نه لري.

دا چی په ټولیزه توگه یوه لاندېگیری  $U$  یویتوکی نه لري،  
نوضرور دا ده چی د لاندیگیری د « ایدیال » کلیمه رامنځ  
ته کیرو.

۳ . ۷ . ۱۴ . تعریف :  $U$  دې د  $R$  یوه لاندېگیری وي.  
د  $U$  دا ناتشېیری  $Y$  د لاندېگیری  $U$  یو ایدیال دی، که د  
ټولو  $y_1, y_2 \in Y$  لپاره  $y_1 - y_2 \in Y$  وي او که  $yu \in Y$  د  
ټولو  $y \in Y$  او ټولو  $u \in U$  لپاره باور ولري.

۳ . ۷ . ۱۵ . لاسته راوړنی:  $U$  دې د  $R$  یوه لاندېگیری  
وي او  $Y$  دې د گیری  $R$  یو ایدیال وي. نو باور لري:

( الف )  $Y_1 = U \cap Y$  د  $U$  یو ایدیال دی

( ب )  $U + Y = \{ r \in R \mid r = u + y \}$

د ټولو  $u \in U$  او یوه  $y \in Y$  لپاره  
یوه د لاندېگیری ده.

( پ )  $(U + Y) / Y$  د پاتیټولگیگیری  $R / Y$ ، لاندېگیری ده.

( ت ) د  $R / Y$  د هر لاندېگیری  $T$  لپاره

$$T^- = \{ r \in R \mid r[r] \in T \}$$

د  $R$  لاندې کړۍ ده.  
 (ت) د  $R/Y$  د هر ایدیال  $I$  لپاره

$$I^- = \{r \in R \mid [r] \in I\}$$

د  $R$  یو ایدیال دی، د  $Y \subseteq I^-$  او  $I^-/Y = I$  سره.

اوبی: الف) د تعریف ۱۲.۷.۳ او تعریف ۱۴.۷.۳

څخه ترلی لاس ته راځي

ب)  $r_1 = u_1 + y_1$ ،  $r_2 = u_2 + y_2 \in U + Y$  دي،

د  $u \in U$  او  $y \in Y$  سره، نولرو

$$r_1 - r_2 = (u_1 - u_2) - (y_1 - y_2) \in U + Y$$

دا چې  $Y$  د  $R$  یو ایدیال دی نو دا لاندې هم لرو:

$$\begin{aligned} r_1 \cdot r_2 &= (u_1 + y_1)(u_2 + y_2) \\ &= u_1u_2 + (y_1u_2 + u_1y_2 + y_1y_2) \in U + Y \end{aligned}$$

دا نورې ساده د پ، ت، او ت) اوبیونې د کورکار دی.

## ۴ د بول الجبر ، سرکیت الجبر

### ۴ . ۱ د بول د الجبر سټکلیمی

په برخه ۱ کی مو د ډیری  $M$  برخه ډیریو ترمنځ ترونونه یا عملی ولوستلی. په دې عملیو کی، که چیرته د ډیری  $M$  برخه ډیریو ترمنځ دوه ځایز اږیشنونه یا کارونی ( د ډیریو ترنی ) غوڅی ، ټولنه او همداسی کمپلیمنت جوړونه په پوتنڅ یا توانډیری باندي یوه «جوړښت» ته سره راټولگه کړی، نو هغه «جوړښت» چی لاس ته راځی، د ډیری  $M$  د برخه ډیریو بول الجبر بلل کیږی. په دې جوړښت کی تشډیری  $\emptyset$  او ټولډیری  $M$  یو راوتلی یا کره راوتلی رول لوبوی. د ترونو لپاره مو د مخه په برخه ۱ کی یوه لړی شمیرقوانین کره کړل او په لیست کی مو راوستل، دا ډول شمیرنی د پوره بل ډول شمیرپوهنیزو شیانو لپاره هم باور لري یا کارول کیږی. دا گټور دي، چی دا ډول شمیرقاعدې لمری په دې لاس ته راغلی پرپرکندنی یا پریکړی یا لاس ته راغلي نتیجی په عمومی توگه تر څیرنی لاندې ونیول شي. « ټولیز » دلته په دې مانا

دی، چی د عملي په ډول نه پیچو بلکه په هغو توکو، د کومو لپاره چی دا عملي باور لري. له دې څخه مخ ته خو، چی د شیا لخوا یو ډیری مو مخ ته پروت دی د کومو لپاره چی عملي روښانه یا تشریح دی یا کره شوي دي (یعنی چی یو بل سره « تر لکیدی » شي، د کومو سره چی شمیرنه ممکن وي)، او د دې عمليو سره شمیرنی له لارې، هغه تر څیرنی لاندې نیولي شمیرقوانین باور ولري. له دې څخه په فورمال توگه لاندې تعریف لاس ته راځي. دلته یو دوه ځایزه عملیه یا کارونه یا اپریشن یو ترون یا ترنه ده یو « شمیرقاعده » ده د کوم له مخی، چی له دوه توکو څخه یو دریم توکی لاس ته راځي. ( د بیلگي په توگه په گڼونو کي زیاتون یا ځل ). یو یوځایزه عملیه له هر توکی څخه یو ټاکلی بل توکی جوړوي ( لکه مربع یا د کوم گڼ ریننه یا بهتره ریننه ویستنه ).

۴ . ۱ . ۱ تعریف : د بول الجبر د هغو توکو یو ډیری دی ، د کومو لپاره چی دوه دوه ځایزې نخبیلونی یا اپریشنونه ( عمليي )، غوڅی  $\cap$  ، ټولنه  $\cup$  او یوه یوځایزه عملیه ' کارول کیږي او په هغو کی دوه توکی 0 ( په صفر یی په نخبه کوو ) او 1 ( په یوې باندې په نخبه کیږي ) داسی راوتلي یا غوره شوي وي، چی د  $M$  د ټولو توکو  $a, b, c$

لپاره لاندې اړیکې باور لري:

۱ - اسوختیاتو قانون د  $\cap$  او  $\cup$  لپاره

$$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$$

$$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$$

۲ - کموتاتیو قانون د  $\cap$  او  $\cup$  لپاره

$$a \cap b = b \cap a$$

$$a \cup b = b \cup a$$

۳ - رازغمني یا راکبني یا جذب قانونونه

$$a \cap (b \cup c) = a$$

$$a \cup (b \cap c) = a$$

۴ - دیستریبوتیو قانون

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$$

۵ - د صفر او یوې خویونه

$$a \cup 0 = a, a \cap 0 = 0$$

$$a \cup 1 = 1, a \cap 1 = a$$

۶ - د کمپلیمنت یا پوره کیدونکی خویونه

$$a \cup a' = 1, a \cap a' = 0$$

دا اړیکي د بول د الجبر اکسیومونه هم بلل کیږي ( د اکسیوم تعریف څما د شمیرپوهني کتاب کی ورکړ شوی دی ) . مور تر یوې اندازې زیات اکسیومونه ورکړل، ځکه چی برخسیستمونه شته ، له کومو چی بیا دا نور اکسیو-مونه لاس ته راتللی شي .  
په دې برخه کی ددې مینیمالسیستمونو کارونی یا استعمال باندې ځانونه نه مشغولوو، همدومره دلته مهم دی، چی ټول شمیر قوانین باور ولري .

که د توان یا پوتنڅ ډیری  $P(M)$  په پام کی ونیول شي، د هغه د غوڅي  $\cap$  (انگریزي meet)، ټولنه  $\cup$  (join) او کمپلیمنت جوړونی سره او  $M=1, \emptyset=0$  سره نو دا د پورته تعریف سره سم یو د بول الجبر جوړوي. دا کارول شوي سومبولونه یوونیز یا واحد نورم ته نه دي راوړل شوي. د لپاره  $\wedge$  هم کارول کیږي او د  $\vee$  په ځای او د  $\bar{a}$  په ځای هم کارول کیږي.

۴ . ۱ . ۲ بیلگه : یو د بول الجبر باید تل یو صفر 0 او یو 1 ( یوی ) خوندي ولري. دا کیدی شي ، چی یواځي د 0 او 1 څخه جوړ وي، چی دا یی د بول ساده الجبر دی. وي

دې 0 او 1 کوم په خوښه سومبولونه. نو په  $B = \{0,1\}$  باندې عمليي  $(\cap, \cup, ')$  په لاندې ډول تشریح کيږي:

$$0 \cap 0 = 0, \quad 0 \cap 1 = 0, \quad 1 \cap 0 = 0, \quad 1 \cap 1 = 1$$

$$0 \cup 0 = 0, \quad 0 \cup 1 = 1, \quad 1 \cup 0 = 1, \quad 1 \cup 1 = 1$$

$$0' = 1, \quad 1' = 0$$

دلته په ساده توګه د بول د الجبر قوانین ازمايل کیدی شي. له دې سره نو جوړښت یا سترکچر  $(B, \cap, \cup, ')$  یو د بول الجبر دی د دوه توکو سره .

د بول الجبر راوړل شوو اکسیومونو ته یو بل مهم خوي رامنځ ته کيږي: که په همغه وخت کې اکسیومونه  $\cup$  د  $\cap$  سره او  $\cup$  د  $\cap$  سره او  $0$  د  $1$  سره بدل شي، په دې ګروپ کې همغه بل اکسیوم لاس ته راځي . وایو: په ګروپ کې ورکړ شوي اکسیوم-مونه یو بل ته دوال Dual یا دوه ګونی دي.

د بول الجبر هر خوي کیدی شي ، چې له اکسیومونو څخه لاس ته راوړل شي، او د بول الجبر د هرې وینا څخه کیدشي چې نومولي بدلونونه رامنځ ته شي، دا په دې مانا ، چې دوه ګونی وینا وې جوړې شي. « وینا دوګونی کیدنه ». دلته یوه ریښتیا وینا بیرته ریښتیا (« د بول د الجبر یوه جمله » ) وینا باندې



بدليږي، ځکه چې د سيستم دوه گونوالی ساتلی پاتی کيږي. دا د بول د الجبر دوه گونی پرينڅيپ متن دی: د هرې جملې د ثبوت سره د هغی جملې دوه گونی هم ثبوت ده.

د بول د الجبر خويونه دې ورکړ شي او په حقيقت کي . د اکسيومونو څخه د لاس ته راوړنو په څير .

۱ - باور لري  $a = a \cap a$  او  $a = a \cup a$  د بول د الجبر ټولو توکو  $a$  لپاره اوبی: دی

$$\begin{aligned} a &= a \cap 1 = a \cap (a \cup a') = (a \cap a) \cup (a \cap a') \\ &= (a \cap a) \cup 0 = a \cap a \end{aligned}$$

د  $a = a \cup a$  لپاره بنسونه د دوه گونوالی څخه لاس ته راځي .

۲ - د  $a$  کمپليمنت  $a'$  د ورکړ شوو خويونو سره يواځنی ټاکلی دی، دا په دې ماناچي باور لري  $a \cap c = 0$  او  $a \cup c = a$  نو دی  $c = a'$ .

اوبی: لمړی دی

$$a' = 0 \cup a' = (a \cap c) \cup a' = (a \cup a') \cap (c \cup a') = c \cup a'$$

او د دې سره دوه گوني هم  $a' = c \cap a'$  دی.

له دې امله

$$a' = c \wedge a' = c \wedge (c \cup a') = c$$

دی . څه چې د بنوولو وو ( لنډه : څ بن وو ) .

۳- صفر 0 او یوی 1 په بول الجبر کی یواځني ټاکلي دي، دا په دې مانا چې دا یواځني تو کی دي، د هغو خویونو سره، چې په ټکی ۵ کی ورکړ شوي دي.

اوبی : د یوه توکی n لپاره دې د بول د الجبر د ټولو توکو a لپاره باور ولري  $a \cup n = a$  او  $a \cap n = n$ . که د  $a = 0$  لپاره کیردو، نو لاس ته راځي  $0 \cup n = 0$ ، له بلی خوا هم  $0 \cup n = 0$  او له دې امله  $0 = n$  دی. د 1 لپاره اوبیونه د دوه گونوالی څخه لاس ته راځي.

۴- باور لري  $(a')' = a$  د ټولو توکو a لپاره. دا له  $a' \cap a = 0$  او  $a' \cup a = 1$  څخه لاس ته راځي او د کمپلیمنت د یواځنوالی څخه.

۵- د دې مورگان De Morgan قانون

$$(a \cup b)' = a' \cap b' \quad \text{او} \quad (a \cap b)' = a' \cup b'$$

ثبوت : د دوه گونډیرینڅپ له لارې بسیا کوي، که یواځي یوه له دې دوه گونو ویناو څخه وینایو. دییلګي په توګه کینه. د دې لپاره لاندې شمیرقوانین کاروو:

$$(a \cup b) \cup (a' \cap b') = ((a \cup b) \cup a') \cap ((a \cup b) \cup b') = \\ = ((a \cup a') \cup b') \cap (a \cup (b \cup b')) = 1 \cap 1 = 1$$

او

$$(a \cup b) \cap (a' \cap b') = (a \cap (a' \cap b')) \cup (b \cap (a' \cap b')) = \\ = ((a \cap a') \cap b') \cup ((b \cap b') \cap a') = 0 \cup 0 = 0$$

د دواړو مساواتخنځیرڅخه په ګډه لاس ته راځي،

چې  $a \cup b$  د  $a' \cap b'$  کمپلیمنټ دی.

۶- د اسوخیاتیوو کموتاتیوو قوانینو اوله

$$a = a \cup a = a \cap a$$

څخه لاس ته راځي: د غوڅي (ټولنی) جوړولو نتیجه

په یوه توکو پای ډیرې کې د لږپرلپسی څخه خپلواک دی او له دې هم خپلواک دی، چې یو توکي یواځي یوځل او که یا زیات رامنځ ته کیږي. زیاتون نخښي ته ورته

لیکل کیږي:  $\bigcap_{i=1}^n a_i$  همداسی د  $\bigcup_{i=1}^n a_i$

د ټولو  $a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n$  لپاره، همداسی

د  $a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n$  لپاره.  
 ۷- دیستریبوتیو قانون هم ټولیز کیدی شي او په ریښتونی داسی

$$\left( \bigcup_{i \in I} a_i \right) \cap \left( \bigcup_{j \in J} b_j \right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (a_i \cap b_j)$$

او

$$\left( \bigcap_{i \in I} a_i \right) \cup \left( \bigcap_{j \in J} b_j \right) = \bigcap_{i \in I, j \in J} (a_i \cup b_j)$$

چیرته چی I او J پای ایندکسډیری ( پیژندډیری ) دي

۸- له  $a \cap x = a \cap y$  او  $a \cup x = a \cup y$  لاس ته راخی  $x = y$

ښوونه : باور لري

$$\begin{aligned} x &= x \cap (x \cup a) = x \cap (y \cup a) = (x \cap y) \cup (x \cap a) = \\ &= (x \cap y) \cup (y \cap a) = y \cap (x \cup a) = y \cap (y \cup a) = y \end{aligned}$$

پای.

مور. دلته د بول الجبر ، لکه چی په پیل کی وویل شو، د یوه ذهني نظر له لارې تر څیړنی لاندې نیسو، په دې کی چی مور د توکو په ډول ( چی څه شی دی ) کی خپله علاقه نه گورو، بلکه یواځي دا علاقه لرو، چی له دې توکو سره څنگه شمیرنه

کیدى شي. له دې امله د بول الجبرونو  $M_1$  او  $M_2$  ترمنځ يو بيبكتيوه څيرونه داسې موجوده ده، چې د  $M_1$  دوه توکو ټولنه (غوڅى) د تنظيم شوو توکو ټولنه (غوڅي) تنظيم دي، او د هر توکي کمپليمنت د ورسره تنظيم شوي توکي کمپليمنت دی، نو په دې توگه کيدى شي، چې دواړه الجبرونه «سوجه شميريز» مساوي و ليدل شي. يو داسې بيبكتيو څيرونه  $f: M_1 \rightarrow M_2$  لکه د مخه مو چى هم گوته ورته نيولى ايزومورفيزم Isomorphism نوميري او دا راوړل شوي شرايط لاندې په لاندې ډول دي. د ټولو  $a, b \in M_1$  لپاره باور لري:

$$f(a \cap b) = f(a) \cap f(b)$$

$$f(a \cup b) = f(a) \cup f(b)$$

$$f(a') = f(a)'$$

د دې سره په کين لور  $\cap, \cup, '$  د  $M_1$  عملي او په بني لور د  $M_2$  عملي. نخبيلونى يا کارونى دي.

د نور الجبرونو په څې يا خلاف کيدى شي، چې په ټولو (پاى) د بول الجبرونو باندې په ساده توگه يو د يوه پام يا نظر امکانات برابر شي. د داسې يوه پاملرنى ته دوه د بول الجبرونه بايد برابر وکتل شي، که د دوي ترمنځ يو ايزومور-

فیزم موجود وي، یعنی که دا ایزومورف وي. دا لاندې مهمه جمله باور لري، چی ثبوت لپاره یی په لیو (LIU 1977) حواله ورکوو .

۴ . ۱ . ۳ جمله : هر یو د بول الجبر د یوه پای ډیری  $M$  د برخه ډیریو څخه جوړ د بول د الجبر سره ایزومورف دی . په ځانګړي توګه د یوه پای بول د الجبر توکو ګڼهون تل د  $2^n$  فورم یا ډول دی ، او هر دوه پای د بول الجبرونه د برابر ډیرو توکو سره یو د بل سره ایزومورف دي.

که څه هم مور د پای بول الجبرونو سره سر او کار لرو، دا باید په ګوته شی، چی په پورته جمله کی ورګر شوي خوږونه یا کرکټريي د ناپای ډیرو توکو ډیری لپاره باور نه لري . ناپای ډیر د بول الجبرونه شته، کوم چی د ډیری د ټولو برخه ډیریو د الجبر سره ایزومورف نه دي. د دې لپاره چی ټولی ناپای ډیر د بول الجبرونه کرکټریزه کړی شو، لاندې کلیمو ته اړ یو.  $M$  دې یو ډیری وي. یو سیسټم  $K$  د  $M$  برخه ډیریو ډیرییدن یا ډیریتن بلل کیږي، که  $K$  د  $A, B$  سره  $A \cup B, A \cap B$  او  $A \cap B$  هم خوندي ولري. د بیلګي په توګه ټول د توانه ډیری ډیریتن دی.  $K$  دې د

ډيري  $M$  برخه ډيري يو ډيريتن وي، د  $M \in K$  سره. په  $K$  باندې کيدی شي بيا يو بول الجبر توضیح شي، په کوم کي چي  $L$  د ټولني،  $M$  د غوڅی، تشه ډيري  $\emptyset$  د صفر، يو ډيري  $M$  د يوې ډيري،  $A' \in K$  د  $A \in K$  کومپليمنت  $M - A$  سره نيسي، يعني دا ډيري تيوري تيکي کومپليمنت. داسی يو الجبر ډيري بدن الجبر هم بلل کيږي او په ټوليزه توگه د  $M$  هر برخه ډيري خوندي نه لري. اوس دا لاندې جمله باور لري، چي د ثبوت لپاره دې GRÄTZER(1977) وکتل شي.

۴ . ۱ . ۴ جمله : ( د ستون Stone جمله ) هر د بول الجبر د ډيريتن الجبر سره ايزومورف دی.

د بول د الجبر کرکتریزه کولو سره په اړوند، کيدی شي چي د بول د الجبر سيده ځل گټور وکارول شي يا استعمال شي.

۴ . ۱ . ۵ تعريف :  $V$  او  $W$  دې دوه د بول الجبرونه وي، چي د هغی بنسټيز ډيري هم په  $V$  او  $W$  سره په نخښه کوو. نو دا د  $V$  او  $W$  سيده ځل  $V \times W$  د بول الجبر دی. د ټولو منظمو جوړو  $(v, w)$  په ډيري، چي  $v \in V$

او  $w \in W$  وي، د لاندې عملیو سره

$$(v,w) \cap (v_1,w_1) = (v \cap v_1, w \cap w_1)$$

$$(v,w) \cup (v_1,w_1) = (v \cup v_1, w \cup w_1)$$

$$(v,w)' = (v',w')$$

او د صفر توکی  $(0,0)$  او د یو توکی  $(1,1)$  سره، چی د  $V$  او  $W$  همغه مساوي توکی دي.

د دې ښوونه دې د گرانو لوستونکو دنده وي، چی وښايي، چی سیده ځل  $V \times W$  په ریښتیا د بول الجبر دی.

اوس دې  $B$  د بول الجبر وي په دوه توکو باندي، یعنی  $B = \{0,1\}$  د ترونونو

$$0 \cap 0 = 0, 0 \cup 1 = 1, 1 \cup 1 = 1$$

$$1 \cap 1 = 1, 1' = 0, 0' = 1$$

سره. د  $B^n$  لاندې، دا  $n$ -ځله، د  $B$  دخپل ځان سره سیده ځل پوهیږو. د  $B^n$  توکی منظم  $n$ -گونی دې له توکو  $0, 1$  او د بول ترونونو کمپوننت ډوله تشریح شوي. دا په دې مانا چی:



$$\begin{aligned}(a_1, \dots, a_n) \cap (b_1, \dots, b_n) &= (a_1 \cap b_1, \dots, a_n \cap b_n) \\ (a_1, \dots, a_n) \cup (b_1, \dots, b_n) &= (a_1 \cup b_1, \dots, a_n \cup b_n) \\ (a_1, \dots, a_n)' &= (a_1', \dots, a_n') \\ 1 &= (1, \dots, 1) \\ 0 &= (0, \dots, 0)\end{aligned}$$

د بیلگي په توگه د  $n = 5$  لپاره باور لري

$$(0, 1, 0, 1, 0) \cup (1, 0, 1, 1, 0) = (1, 1, 1, 1, 0)$$

$$(0, 10, 10) \cap (1, 0, 0, 1, 1) = (0, 0, 1, 1, 0)$$

$$(1, 1, 0, 0, 1)' = (0, 0, 1, 1, 0)$$

له دې بیلگي لیدل کیږي، چې په  $B^n$  کې ساده شمیرنه کیدی شي. له بلې خوا د  $B^n$  توکو گڼون  $2^n$  دی او د جملې  $۴ . ۱ . ۳$  هر د بول الجبر د  $2^n$  توکو سره د  $B^n$  سره ایزومورف دی. د بول الجبر د څیړنې لپاره کیدی شي، چې دا د الجبر درس په  $B$  رالنډ کېږي.

#### ۴ . ۲ . د بول فنکشنونه او پولینومونه

مورد فنکشنونو لپاره، د ترونونو په تعریف پیل کوو، چې ارزښت پیری یې د بول الجبر وي. دلته دې  $M$  یو په خوبه

ډیری وي او  $V$  دې يو د بول الجبر. د دوه څیرونو

$$f, g : M \rightarrow V$$

لپاره لاندې عمليي  $\cap$ ،  $\cup$  تشریح کوو، د

$$(f \cap g)(x) = f(x) \cap g(x), x \in M$$

$$(f \cup g)(x) = f(x) \cup g(x), x \in M$$

سره، او همداسی یو کمپلیمنت جوبنت د

$$f'(x) = (f(x))', x \in M$$

سره.

د دې تعریفونو بنی اړخ پوره یا ټیک تعریف دی، ځکه چې  $f(x)$  او  $g(x)$  د  $V$  توکی دي او له دې امله  $\cap$ ،  $\cup$  موخه ور یا هدفمند دي. اوس په ساده توګه شمیرل کیږي، چې د ټولو د  $M$  په  $V$  کی څیرونو ټولګه له دې سره یو د بول الجبر کیږي، چې د هغه صفر توکي د څیرونه  $f$  ده، د  $f(x)$  سره، ټول  $x \in M$  او د هغی یوي توکي د څیروني  $f$  له لارې څخه د  $f(x)$  سره، ټولو  $x \in M$  دي. یو ځانګړی حالت هلته لرو که ډیری  $M$  د  $V$   $n$ -ځله د خپل ځان سره سیده ځل وي. مور غواړو ټولی د  $V^n$  څیرونی په  $V$  کی د  $A_n(V)$  سره په نڅبنه کړو او دا  $A_n(V)$  د  $n$ -ځایزي د بول فنکشنونه په  $V$  باندې نومو یا بلل کیږي.

هره د  $f$  څیرونه له  $A_n(V)$  هر  $n$ -گونۍ  $(v_1, \dots, v_n)$  چی د  $V$  له  $n$  توکو څخه جوړ وي، د  $V$  په یوه توکی  $f(v_1, \dots, v_n)$  تنظیموي. د دې څیرونو لاندې یی ثابتی څیرونۍ او پرویکشنونه د ځانگړو ماناو یا اهمیت دی. یوه ثابته څیرونه د ټولو  $(v_1, \dots, v_n)$  لپاره همغه فنکشن ارزښت لري. یو  $i$ -ام پرویکشن  $x$  په لاندې توگه تعریف دی

$$x_i(v_1, \dots, v_n) = v_i, \quad (v_1, \dots, v_n) \in V^n \text{ لپاره}$$

یادونه: مورد دا ستونځې لرو، چی د شمیرپوهنې لیکنه کې کله کله د کین وینې لور ته او بیا بیرته له ښي وکین لور ته لوستل کیږي، نو کیدی شي، چی داپورته داسی هم ولیکل شي: د ټولو  $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$  لپاره

دا دا مانا لري چی: څیرونه  $x_i$  (داهم تر یوې اندازې ورسره نا بلد کار دی، چی فنکشن په  $x_i$  ښایو، خو فکر کوم، چی کومی ستونځي به د دې سره مل نه وي) هر  $n$ -گونۍ د هغه په  $i$ -ام کمپوننت تنظیموي. له ثابتو څیرونو او پرویکشنونو یا پرېوستونونو  $\mathcal{A}$ ،  $\mathcal{U}$ ،  $\mathcal{I}$ ، عملیو. نڅښلونو یا کارونو په مرسته یوه ځانگړې  $n$ -ځایز د بول فنکشنونو، مهم ټولگی د بول پولینومونه جوړي.

۴ . ۲ . ۱ . تعریف : هره څیرونه  $f: V^n \rightarrow V$  ، کومه چی په  $A_n(V)$  د پای زیاتو<sup>۱۰</sup>د عملیو<sup>۱۱</sup>  $\cup, \cap, \prime$  کارونو یا استعمال څخه، له ثابتو او پرویکشنونو، لاس ته راوړي، د بول  $n$  - ځایز پولینوم فنکشنونه بلل کیږي.

۴ . ۲ . ۲ . بیلگه : که ثابت فنکشن په ساده توگه د هغه د ارزښت سره وښایو، داپه دې مانا چی د  $V$  د یوه توکی په څیر ، نو

$$(a \cap x_1) \cup (b \cap x_2 \cap x_3 \cap x_4) \cup (x_1 \cap x_2)'$$

یو د بول پولینوم فنکشن  $P: V^4 \rightarrow V$  انځوروي: دکوم لپاره چی باور لري

$$P(v_1, v_2, v_3, v_4) = (a \cap v_1) \cup (b \cap v_2 \cap v_3 \cap v_4) \cup (v_1 \cap v_2)'$$

دلته  $a, b$  د  $V$  په کلکه ځای په ځای توکی دي \* .

یو د بول پولینوم فنکشن د یوې افادي له لارې کره ټاکلی دی، چی له ثابتو ( له  $V$  څخه ) او پرویکشنونو  $x$  څخه د  $\cup, \cap, \prime$  له لارې جوړ وي. داسی یوه افاده د بول پولینوم بلل کیږي او دا یو د شمیرنی قانون د فنکشن ارزښت ټاکنی یا تعین لپاره راکوي، که د  $x$  لپاره  $i-1$ م

کمپوننت یو  $n$ -ګونی له  $V^n$  څخه کینډول شي. دا شمیرنه په رابندیزه توګه په  $V$  کې باور لري او دا توکي  $P(v_1, \dots, v_n) \in V$  راګوي. د پولینوم (= افاده) او په دې پورې اړوند پولینوم فنکشن (= څیړونې) ترمنځ باید ټیک توپیر وشي. اړیکې «پولینوم» د دې بول د فنکشن لپاره دا لاس ته راګوي، چې له  $x_1, \dots, x_n$  او ثابتو څخه د  $'$ ،  $\cap$ ،  $\cup$  سره ټیک راجوړي دي یا بهتره په دې باندې جوړې دي، لکه څنګه نور رییل پولینومونه د نښلونو  $+$ ،  $*$  او  $-$  سره، چې نمونه یی ده

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

دلته  $x$  له یوه بنسټیزې څخه دی او  $a_i$  د ټولو  $i \in I$  لپاره یو رییل ګڼ دی.

دوه د بول مختلف پولینومونه په کوم کې چې  $x$  او کومی ټاکلی ثابتی، او  $'$ ،  $\cap$ ،  $\cup$  کړی شي، چې هغه پولینومونه وټاکي: د بیلګې په توګه د  $x \cup (a \cap x)'$  او  $x \cup (a' \cup x)'$  لپاره هغه حالت دی. که دوه داسې پولینومونه له مخه ورکړ شوي وي، نو مهمه ده چې وڅیړل شي یا پرېکړه په وشي، چې ایا د دوی سره برابر فنکشنونه مساوي دي. دا داسې پېښیږی، چې د هر پولینو-

مفکشن  $f$  لپاره یو نورمالفورم  $N(f)$  د یوه ټاکلی افادې په څیر داسی ورکول کیږي، چی د  $f_1 = f_2$  لپاره  $N(f_1) = N(f_2)$  باور ولري. برسیره پردې یوه تگلار ورکول کیږي، دکومي سره چی هر پولینوم په نورمالفورم ترانسفورمي کیدی شي. نو بیا دوه پولینومونه ټیک هلته همغه پولینومفنکشن دی، کله چی د هغوی نورمالفورم یو له بل سره پریوزي. دا پروگرام اوس غواړو پلی کړو.

۳ . ۲ . ۴ تعریف: ویل کیږي، چی یو  $n$ - څایزه

پولینوم په دیسیونکتیو نورمالفورم (disjunktiver

Normalform) یا نورمالبنه دی، که دا د لاندې فورم یا

بنی وي:

$$P = \bigcup_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{i_1 i_2 \dots i_n} \wedge x_1^{i_1} \wedge x_2^{i_2} \wedge \dots \wedge x_n^{i_n}$$

د دې سره  $a_{i_1 i_2 \dots i_n} \in V$  دی، د ټولو  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  لپاره،

هر  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  یو  $n$ -گونی دی له  $1$  او  $-1$  سره، او

ټولنه یی په دې ټولو  $2^n - n$  گونو غزول کیږي، چیرته چی

$x_i^1$  د  $x_i$  او  $x_i^{-1}$  د  $x_i^1$  لپاره ځای په ځای یا ځایول کیږي.

په ورته قانونیت یا قرارداد سره د هر پولینوم  $P$  کونیو-  
نکتیو نورمالفورم بلل کیږي، دلاندې صحنی سره:

$$P = \bigcap_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{i_1 i_2 \dots i_n} \cup x_1^{i_1} \cup x_2^{i_2} \cup \dots \cup x_n^{i_n}$$

که یو خانگړی دیسیونکتیو نورمالبنه ولیکل شي، نوټول  
غړي به د دیسیونکتیو نورمالفورم سره  $a_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0$  له  
لیکلو پریښوول شي یا صرف نظر به پرې وشي، ځکه چی  
دا په نتیجه کوم تاثیر نه پریباسی. په ورته توگه دا د دیسیو-  
نکتیو نورمالفورم لپاره باور لري، که  $a_{i_1 i_2 \dots i_n} = 1$  وي.

۴ . ۲ . ۴ بیلگه : یو پولینوم په دیسیونکتیو نورما-  
لفورم دی (  $a, b, c, \dots \in V$  سره ):

$$(a \wedge x_1 \wedge x_2' \wedge x_3) \cup (b \wedge x_1' \wedge x_2 \wedge x_3') \cup$$

$$(c \wedge x_1' \wedge x_2' \wedge x_3) \cup (d \wedge x_1' \wedge x_2' \wedge x_3')$$

لاندې یو کونیونکتیو نورمالفورم دی:

$$(a \cup x_1 \cup x_2 \cup x_3) \wedge (b \cup x_1 \cup x_2' \cup x_3) \wedge$$

$$(c \cup x_1 \cup x_2 \cup x_3') \wedge (d \cup x_1' \cup x_2 \cup x_3) \wedge$$

$$(e \cup x_1' \cup x_2' \cup x_3')$$

## ۴ . ۲ . ۵ . جمله : هر د بول پولینومفنکشن

$P: V^n \rightarrow V$  لپاره ټيک يو ديسيونکتيو نورمالفورم موجود دی. نو په دې توگه ټيک يو د بول پولینوم لاس ته راځي، کله چی ټول ديسيونکتيو نورمالفورمونه جوړ شي. په همدې توگه (دوه گوني) ويناد کونيونکتيو نورمالفورم لپاره هم باور لري.

د دې جملی د بنوونی څخه هم دلته تیريرو، دا په نورو ادبیاتو کی شته ( دا دې گران لوستونکی په پام کی ونیسی، چی دا به ځما پوره وخت ونیسی که دا هرڅه راوگورم. ځما هدف همدومره دی، لکه چی په نورو ځایونوکی می هم گوته ورته نیولی، دا بنسټیز څه راټول کړم )

د نورمالفورم د څیړلو لپاره کله کله لاندې خویونه ( قاعدې )

گټورې دي، کومی چی په نورمالفورم کی  $0, 1 \in V$

« ځایونو یا اینبوونو » له لارې لایسته راوړل کیږي. ځکه چی

د بیلگي په توگه  $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$  یواځي د  $n$ -گونو لپاره

له  $0, 1 \in V$  نا مساوي 0 دي ( په ریښتونی مساوي په 1 )،

په کوم کی ، چی  $x_j = 1$  د  $i_j = 1$  لپاره او  $x_j = 0$

د  $i_j = -1$  لپاره دی، یعنی د دې  $n$ -گونی

.  $(1^{i_1}, 1^{i_2}, \dots, 1^{i_n})$  لپاره



قاعده ۱ : که دا لاندې

$$\bigcup_{(i_1, \dots, i_n)} a_{i_1 \dots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap \dots \cap x_n^{i_n}$$

د بول د پولینوم فنکشن  $P \in A_n(V)$  د سیونکتیو نورمالفورم وي، نو د  $\bar{1}^1 = 1, \bar{1}^1 = 1' = 0$  سره باور لري

$$a_{i_1 \dots i_n} = P(1^{i_1}, \dots, 1^{i_n})$$

د ټولو  $(i_1, \dots, i_n)$  لپاره.

نو د بیلگي په توگه د  $n = 3$ , لپاره دی:

$$a_{1,-1,1} = P(1,0,1), \quad a_{-1,-1,-1} = P(0,0,0),$$

$$a_{1,1,1} = P(1,1,1)$$

ددې اړیکو وروسته د  $P$  د سیونکتیو نورمالفورم د ټاکلو لپاره بسیا کوي، که  $2^n$  د  $P$  فنکشن ارزښتونه په ټولو  $n$ -گونو کې له 0 او 1 (د  $V$  څخه) راپیدا کړو. لیدوږ دا لاس ته راوړنی د  $n = 2$  لپاره د  $P$  سیونکتیو نورمالفورم په لاندې توگه راکوي:

$$P = (P(1,1) \cap x_1 \cap x_2) \cup (P(0,1) \cap x_1' \cap x_2) \cup (P(1,0) \cap x_1 \cap x_2') \cup (P(0,0) \cap x_1' \cap x_2')$$

د دې سره د سیونکتیو نورمالفورم لپاره دوه گوني نتیجه

په لاندې توگه ده:

قاعدہ ۲ : که

$$\bigcap_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} U_{x_1}^{i_1} U \dots U_{x_n}^{i_n}$$

د بول د پولینومفنکشن P دیسیونکتیو نورمالفورم وي،

نود  $0^1 = 0$  ,  $0^{-1} = 0' = 1$  سره باور لري

$$a_{i_1 i_2 \dots i_n} = P(0^{i_1}, 0^{i_2}, \dots, 0^{i_n})$$

د بیلگي په توگه د  $n = 3$  لپاره دی :

$$a_{1,1,-1} = P(0,0,1) \quad \text{او} \quad a_{-1,-1,1} = P(1,1,0)$$

پخوا له دې چی مور د نورمالفورم ترانفورمیشن لپاره تگلار

روښانه کوو، یا لیکو، نو د مختلفو څیرو گڼون (تعداد یا

شمیر) دې ورکړ شي. دلته طبعاً ټول الجبرونه پای دي.

توکی  $V$  که  $2^k = m$  تکی ولري، نو  $A_n(V)$

لکه چی پوهیرو  $m^{(m)}$  توکی لري، ځکه چی  $V^n$  تکی  $m^n$

توکی لري. د بول پولینومفنکشن گڼون د دې په څې  $m^{2^n}$

دی، کوم چی سملاسی د نورمال فورم په څیر انځورونی څخه

لاس ته راځي، ځکه چی د دلته  $2^n$  څلوروني یا ضریبونه  $a_{i_1 \dots i_n}$

په خوبه د  $m$  توکو سره (له  $V$  څخه) ځایونکی یا ځای په ځای کیدی شي. که  $m > 2$  وي، نو په ټولیزه توګه کم پولینومفنکشنونه موجود دي نسبت و څیرونو ته. که  $m = 2$  وي، کوم چی د کارونی یا استعمال لپاره مهم حالت انځوروي، نو بیا دواړه ګڼونه مساوي دي، په نامه  $2^2$  سره. له دې لاس ته راځي

۴ . ۲ . ۶ جمله: که  $B = \{0,1\}$  دوه توکیزه د بول الجبر وي، نو هر  $n$  - ځایز د بول فنکشن، یو د بول پولینومفنکشن په څیر انځوروي.

اوس د دیسیونکیو نورمالفورم د راپیدا کولو تګلار و یوه پولینومفنکشن  $P$  ته، په  $P$  باندې لاندې پلونه کارول کیږي:

۱ - د دې مورګان de Morgan قاعدې د استعمال له لارې ټول کمپلیمنت ' جورینتونه تړلي  $x_i$  ته راوړل کیږي، همداسی ثابتو ته راوړل کیږي.

۲ - د دسیتریبوتیو قانونه کارونی یا استعمال سره سم  $P$  د غوڅیو ټولنی ته راوړل کیږي. په دې فورم کی په ټولیزه توګه ځنی «زیاتوونی» (د  $x_i$  او  $x_i'$  غوڅي دي) یو څو  $x_i$  ورکیږي، مګر د هر  $i$  لپاره په یوه زیاتوونی کی

زیات تر زیاته یو له  $x_i$  او  $x_i'$  رامنځ ته یا راڅرگند یږي. ۳ - که د دیسیونکشن په یوه زیاتون کی یو  $x_i$  وړک شي، نو  $x_i' \cup x_i$  په دې زیاتون کی د یوه «فاکتور» په څیر ورزیات یږي ( دا اړوند پولینومفنکشن نه تغیریوي، ځکه چی  $x_i' \cup x_i$  تل 1 وړکوي )

۴ - په دې داسی تغیر شوې زیاتوونی باندې تر هغی پورې دیستریبوتیو قانون کارول کیږي یا استعمال یږي، تر څو چی بیرته د غوڅیو ټولنه رامنځ ته شي یا راپیدا شي. دا د برابر و زیاتونونو د ټولگی ( دا په دې مانا، چی چیرته چی همغه  $x_i$  کمپلیمنت شوی وي او یا نه وي کمپلیمنت شوی ) او دیسیونکتیو نورمالفورم ترتیبوو ( بیرته د دیستریبوتیو قامون د کارونی لاندې ) ، که چیرې ممکن دا وړک زیاتوونی ( د  $x_i$  او  $x_i'$  غوڅی ) د ځلوونو 0 سره تکمیل شي.

دا روښانه ده، چی د ټول هغه بڼه اړونی یا فورم بدلون سره، چی همغه مطلوب پولینوم پورې اړه لرونکی پولینوم فنکشن، همغه پولینومفنکشن لکه پخپله P دی. په ریښتونی سره له دې امله د پولینومفنکشن نورمالفورم و P ته لاس ته راوړو.

۴ . ۲ . ۷ بیلگه : P دې په V باندې په لاندې توگه

دوه ځایز پولینومونه وي

$$P = ((a \wedge x_1) \cup (b \wedge x_2))' \cup (x_1 \cup b)'$$

د  $a, b \in V$  سره

لمړی پل :

$$((a' \cup x_1') \cap (b \wedge x_2)) \cup (x_1' \cap b')$$

دوم پل :

$$(a' \cap b \wedge x_2) \cup (b \wedge x_1' \wedge x_2) \cup (b' \wedge x_1')$$

دریم پل

$$(a' \cap b \wedge (x_1 \cup x_2') \wedge x_2) \cup (b \wedge x_1' \wedge x_2) \cup (b' \wedge x_1' \wedge (x_2 \cup x_2'))$$

څلورم پل

$$(a' \cap b \wedge x_1 \wedge x_2) \cup (a' \cap b \wedge x_1' \wedge x_2) \cup (b \wedge x_1' \wedge x_2) \cup (b' \wedge x_1' \wedge x_2) \cup (b' \wedge x_1' \wedge x_2')$$

د

$$(b \wedge x_1' \wedge x_2) \cup (b' \wedge x_1' \wedge x_2) = (1 \wedge x_1' \wedge x_2)$$

له امله، د نورمالفورم په بڼه لاس ته راځي:

$$((a' \cap b) \cap x_1 \cap x_2) \cup (1 \cap x_1' \cap x_2) \cup (0 \cap x_1 \cap x_2') \cup \\ \cup (b' \cap x_1' \cap x_2')$$

لوستونکي دې دا نتیجی د قاعدې ۱ سره وازمایي.

په پای کي دې  $n$  - ځایز ځانگړی د بول فنکشنونه په  $B = \{0,1\}$  باندې وڅیړل شي، کوم چی همدا اوس د  $n$  - ځایز پولینومونو له لارې، د مخه تیرې جملی سره سم راوینول کیدی یا لاس ته راتلی شي.

که  $P$  یو داسی پولینوم وي، نو  $P$  هر  $n$ -گونی د  $0, 1$  یا په  $0$  او یا په  $1$  تنظیموي. په دیسیونکتیو (کونیونکتیو) نورمالفورم کی څلوروني هم یا  $0$  او یا  $1$  دي او لاندې پریکړه کوو: په دیسیونکتیو نورمالفورم کی ټول زیاتووني یانی  $a_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0$  د څلورنو  $a_{i_1 i_2 \dots i_n} \cap x_1^{i_1} \cap x_2^{i_2} \cap \dots \cap x_n^{i_n}$  سره پرینبوول کیږي او څلورونی  $1$  نه لیکل کیږي. په کونیونکتیو نورمالفورم کی به ټول فاکتورونه ( دا اوس ټولنه  $a_{i_1 i_2 \dots i_n} = 1$  د څلورنو  $(x_1^{i_1} \cup x_2^{i_2} \cup \dots \cup x_n^{i_n})$  سره پرینبوول کیږي یعنی صرف نظر پري کیږي او څلورونی  $0$  نه لیکل کیږي. دا چی  $1$  او  $0$  د  $\cup$  او  $\cap$  لپاره ناپیلی یا بیتاثره توکی دي، نو د هغه نورمالفورم باندې لیکلي پولینوم کی تغیر نه راځي. په هر حالت بیا

د بول الجبر اسرکیت الجبر ۱۴۳

ثابت فنکشن د 0 ارزښت سره (داسی لیکور دی) دسیونکتیو نورمالفورم نه لري. او ثابت فنکشن د ارزښت سره کوم کونیونکتیو نورمالفورم نه لري.

۴ . ۲ . ۸ بیلگه: د لته دې ۳-خایز فنکشن د لاندې جدول سره ورکړ شوی وي:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	P
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

د قاعدې ۱ سره سم د P دسیونکتیو نورمالفورم د لاندې سره برابر دی.

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3') \vee (x_1' \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1' \wedge x_2 \wedge x_3') \vee (x_1 \wedge x_2' \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2' \wedge x_3') \vee (x_1' \wedge x_2' \wedge x_3) \vee (x_1' \wedge x_2' \wedge x_3')$$

دسیونکتیو نورمالفورم د هر فنکشن ارزښت ۱ لپاره یو زیاتوونی خوندي لري، په کوم کی چی  $x_i$  ولاړ دی،

که  $x_i = 1$  وي، او  $x_i' = 0$  ولاړ وي، که  $x_i = 0$  وي (په ورته توګه  $n$ -ګونی  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  د فنکشن ارزښت 1 سره). که  $x_i$  د یوه شرط په څیر ونيول شي ( $x_i = 1$ ) نو بیا «شرطونه پوره دي» بلل کېږي،  $x_i = 0$  په همدې توګه «شرطونه نه دي پوره» بلل کېږي، نو په دې توګه د سیونکتیو نورمالفورم د ټول کمبینیشنونو یو لیستونه یا یو جوړشوی لیست راګوي د ټولو  $n$  شرطونو  $x_i$  سره، په کومو کې چې 1 د فنکشن ارزښت په څیر لاس ته راځي:  $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3'$  په همدې توګه  $x_1$  او  $x_2$  پوره دي او  $x_3$  پوره نه دی.

د قانون ۲ د کونیونکتیو نورمالفورم  $P$  د لاندې سره

برابر دی:

$$(x_1' \cup x_2 \cup x_3') \wedge (x_1' \cup x_2 \cup x_3) \wedge (x_1 \cup x_2 \cup x_3')$$

کونیونکتیو نورمالفورم د هر فنکشن ارزښت 0 لپاره یو فاکتور خوندي لري، په کوم کې چې  $x_i$  ولاړ دی یا ځای دی، که  $x_i = 0$  وي او  $x_i'$  ځای په ځای وي، که  $x = 1$  وي (په همدې توګه  $n$ -ګونی  $(x_1, \dots, x_n)$  له  $B^n$  څخه د فنکشن ارزښت 0 سره). کونیونکتیو نورمالفورم پس د کمبینیشن د شرطونو یو لیست جوړونه



ده، د کومو لاندې چې  $0$  د فنکشن ارزښت په څیر لاس ته راځي:  $x_1' \cup x_2' \cup x_3'$  په دې مانا دي، چې  $x_1$  یا  $x_2$  پوره دي او یا  $x_3$  پوره نه دی.

په الجبر  $A_n(B)$  کې د  $A_n(B)$  څخه د یوه د مخه ورکړ شوي پولینوم فنکشن  $P$  کمپلیمنټ  $P'$  څنګه ټاکل کېږي؟ د ورکړ شوي قانونمندی له مخې د دې لپاره په ساده توګه  $P$  په یوه د سیونکتیو نورمالفورم انځوروي، بیا نو  $P'$  ټیک د غوڅیو ټولنه ده، کومه چې د  $P$  په نورمالفورم کې نه رامنځ ته کېږي (یعنې  $0$  ځلوونی لري). په ورته توګه د سیونکتیو نورمالفورم لپاره هم مخ ته تللی شو.

۴ . ۲ . ۹ بیلګه : د اړخنی بیلګی څخه د پولینوم فنکشن  $P$  لپاره د  $P'$  د سیونکتیو نورمالفورم لاندې توګه ورکړ شوی دی.

$(x_1 \cap x_2' \cap x_3) \cup (x_1 \cap x_2' \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_3)$   
پام دې وي، چې  $(P')' = P$  دی او د دې مورګان قانون له مخې د یوه د سیونکتیو نورمالفورم کمپلیمنټ کونیو-نکتیو نورمالفورم دی، نو ګورو، چې د د سیونکتیو

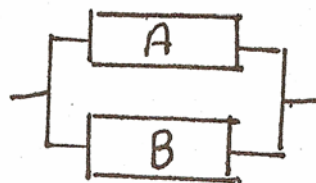
نورمالفورم P' څخه کونیونکتیونورمالفورم P د کمپلیمنت  
دجوړولو له لارې لاس ته راوړي،

### ۳ . ۴ سویچ الجبر یا برینسنا جیریان الجبر

په برینسنايي یا برقي سرکیتونو (Schlatkreise (En. circuit  
(یا برینسناجیریانکړی یا په ساده توگه: برینسنادوران) کې  
سویچ د برینسنا اړیکو یا برینسنا ترونونو کې، د وازولو او  
بندولو لپاره دنده په غاړه لري. مور دلتته دوه گوني دوه اړیکیز  
سویچونه تر څیرنی لاندې نیسو، کوم چی په بند حالت کې برق  
جیریان په دواړو لورو ممکنوي. د سویچ حالت کیدی شي بند  
یا واز وي، یعنی ټیک دوه ارزښتونه نیولی شي. واز سویچ سره  
ارزښت 0 تنظیموو او بند ترلي سویچ سره ارزښت 1 تنظیموو،  
داسی چی 0 په دې مانا دی، چی «برق نه شته یا برق جیریان  
نه لري» او 1 دا مانا لري، چی «برق جیریان لري». دلتته 0,1  
د سویچ ارزښتونه هم بلل کیږي.

کیدى شي، چی سویچونه په زیاتو ډولونو یوه سرکت ته سره

یوځای کړی شي. دلتته خورا مهم یی هغه سرکیتري circuitary  
دی، چی د پایډیرو غیرگسرکیتريو یا همداسی سیريالسرکیتريو  
په څیر جوړا شوي وي. په ټولیزه توگه سویچونه هغه جوړښتونه  
وي، کوم، چی «واز» یا «بند یعنی ترلی» کیدی شي.



څیره

که  $A$  او  $B$  دوه سویچونه وي، نو غیرگسرکیتېري، لکه په پورته څیره کې انځور شوی په کار واچول شي، او دا به د  $A \vee B$  سره په نڅینه کېږي.

په څرگند ډول  $A \vee B$  یو سویچ ارزښت 1 لري، که کم له کمه یو له دې سویچونو څخه واز وي او ارزښت 0 لري، که دواړه سو- یچونه ارزښت 0 ولري. کیدی شي د سویچ ارزښتونو لپاره پخپله غیرگ سرکیتېري (یا شاید په انگریزي سرکیت وپیل شي) داسی ولیکل شي

$$0 \vee 0 = 0, 0 \wedge 1 = 1, 1 \vee 0 = 1, 1 \wedge 1 = 1$$

کیدی شي، چی  $A \vee B$  د یوځای آینمول شوي سویچ په څیر وکتل شي، چی دا د  $A$  او  $B$  په اړتیا یا په واک برقجریان بهیږي یا برق جایان لري او که یا نه بهیږي یا نه پریږدي.

د  $A$  او  $B$  سویچونو زیریالسرکیتېري  $A \wedge B$  د  $A$  او  $B$  یو بل پسې یعنی په پرلپسې توگه آینمولی یا ځای په ځای کونی څخه منځ ته راځي، لکه په څیره کې چی انځور شوي.

سرکیت یا برېښنادوران  $A \wedge B$  ټیک او ټیک هلته ارزښت 1 لري، که دواړه سویچونه ارزښت 1 ولري او په غیر له دې

$$\text{ارزښت } 0. \text{ لنډ: } 0 \wedge 0 = 0, 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0$$

$$\text{او } 1 \wedge 1 = 1$$

دلته هم  $A \wedge B$  یو رایوځای شوی سویچ دی.

ددې سره تړنی  $A \vee B$  او  $A \wedge B$  د سویچ لپاره همغه

فورمالی قاعدې ډکوي یا پوره کوي، لکه د ویناو لپاره د

سمسوچ له پوهی ورسره بلده په  $\vee$  او په  $\wedge$  راوړل شوو

## د بول الجبر، سرکیت الجبر ۱۱۹

ټرونونو کي. هلته د یوې وینا نه والی هم موجود دی. که  $V, 8$  د سویچ ارزښتونو  $1, 0$  په څیر راوښو، نو هغه په باندې شمیرقوانین د  $V$  او  $8$  د یوه بول الجبر لپاره په  $\{0, 1\}$  پوره دي. هلته کومپلیمنت هم په واک کی لرو. دا کلیمي جوړونی د سویچ لپاره هم یوه موخه لري: د  $A'$  سره یو سویچ په نخښه کوو، کوم چی تل یو و  $A$  ته په څټ ارزښت لري، د کوم سره، چی مور. په تخنیکي ریښتینوالی یا ریالیزه باندې ددې



څیره

غوښتنو ( لکه د مناسبو چالانماشین له لارې ) په غم کی نه یو.  $A$  د  $A'$  نیگیشن یا نفی هم بلل کیږي. د سویچ ارزښت لپاره دا دامانا لري، چی  $0' = 1, 1' = 0$ . په دې توگه سویچ ارزښتونه د عملیو یا کارونو  $V, 8$ ، سره یو دوه توکیزه بول الجبر جوړوي.

۳. ۴. ۱ تعریف: یو زیریالغبرگ سرکیتري د پای ډیرو سویچونو څخه جوړیږي د پای زیات فورمال عملیو ، ، ، د کارونی یا استعمال سره. په داسی سرکیت کی دوه سویچونه، کوم چی همغه د سویچ ارزښتونه لري په همغه یا برابر سومبول سره په نخښه کیږي.

ټیک داسی تعریفولی شو: هر سویچ یو زیریالغبرگ سرکیتري جوړوي. که  $S_1, S_2$  زیریالغبرگ سرکیترونه وي ( یعنی سره

رایوځای ایښوولی سرکیتري یا سوچونه) ،  
 نو  $S_1 \vee S_2, S_1 \wedge S_2$  او  $S'$  هم زیریالغبرگ سرکیترونه دي.  
 هر زیریالغبرگ سرکیتري په ټولیزه توگه زیات پیچلی جوړ  
 شوی سوچ دی، چی د «برخسویچونو» ځاینیونی څخه په  
 واکوالی کی یا په اړه، واز ( ارزښت 0 ) یا ترلی  
 ( ارزښت 1 ) دی. له دې امله کیدی شي، چی بیرته دوه  
 سرکیتونه د  $\wedge$  او  $\vee$  له لارې سره وتړل شي. کیدی شي،  
 چی مور لنډ له سرکیتونو یا سرکیتريو څخه وغږیږو.  
 د یوه زیریالغبرگ سرکیتري  $S$  د سوچ د هر ځای نیونی  
 لپاره د یوه ټاکلی سوچ ارزښت ټول سرکیتري لاس ته  
 راکوي ، په دې اړوند ، چی ایا د دوي ترمنځ برینسنا بهیږي  
 (جریان لری ) او که نه. پس وي دې  $A_1, \dots, A_n$  د پورته  
 تعریف سره سم د سرکیت  $S(A_1, \dots, A_n)$  سوچونه ، د  
 کومو سره چی  $A_i$  زیات واره جوړیدی شي. د سوچونو  
 $A_1, \dots, A_n$  هر ځاینیونه د 0, 1 د یو  $n$ -گونو سره برابر  
 دی او د  $S$  له لارې یا د  $S$  سره به دا  $n$ -گونی یا 0 او  
 یا 1 د  $S$  په سوچ ارزښت باندي تنظیمیږي. په دې توگه  
 سرکیت  $S$  یو  $n$ -ځایز د بول-فنکشن  $f_S$  په دوه توکیز د  
 بول په الجبر  $B = \{0, 1\}$  ,  $f_S : B^n \rightarrow B$  تعریفوي ( دې ته  
 دې دلته هم پام وي او داسی نور ورته لیکنو ته ، چی دا د  
 لاتین تورو لیکنی له کین وښی لور ته لوستل کیږي، په دې  
 گران لوستونکی پوهیږي، چی یادونی ته اړتیا نه شته، خو  
 زما زړه نه ودریده) . دلته  $f_S$  په سرکیت  $S$  اړه لرونکی

سویچ فنکشن بلل کیږي. اوس څنگه کیدی شي، چی سرکیت په  $A_n(B)$  کی د سرکیتري لپاره د  $\cup, \cap, \prime$  کارونی یا عملی وکارونه واضح کړای شي؟ اوس دې  $S, T$  دوه سرکیتونه وي، له سویچونو  $A_i$  څخه د سویچفنکشنونو  $f_S, f_T$  سره، نو کیدی شي، چی له  $S, T$  څخه هم زیریالسرکیتري  $S \wedge T$  او هم یو غیرگسرکیتري  $S \vee T$  جوړ شي، پوره و یوگونو سویچونو ته ورته یا لکه همغسی لکه یو گوني سویچونه. دا نو اوس روښانه ده، چی  $f_S \cap f_T$  د  $S \wedge T$  سویچفنکشن دی او  $f_S \cup f_T$  د  $S \vee T$  سویچفنکشن دی. بالاخره  $f_S'$  سویچفنکشن دی و سرکیت  $S'$  ته، کوم چی تل و  $S$  ته مخامخ- یا په بل عبارت په څټ سویچ ارزښت لري.

۴ . ۳ . ۲ تعریف : دوه زیریالغبرگ سرکیتري  $S$

او  $T$  و همغو سویچونو  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ته، ایکویوالنت یا همغه ارزښتیز بلل کیږي، که دا همغه سویچفنکشن ورکړي، دا په دې مانا چی که د هغو سویچفنکشنونو  $f_S$  او  $f_T$  لپاره باور ولري  $f_T = f_S$ .

د استعمال یا کارونی د لیدټکی څخه دا تعریف موخوږ ( همدفمند ) دی، ځکه چی لمړی علاقه مو د سویچفنکشن سره ده، یعنی د سرکیت ځانیونی ته ده او کم د هغه دننی جوړښت ته.

د سرکیتونو ترمنځ په دې پورته ورکړ شوي تعریف کی روښانه شه، اړیکه به دښتینم، برابر ارزښته اړیکی دی، په داسی



حال کی چی دې برابر ارزښتبولگی پورې ټول سرکیتونه اړه لري یا په هغه ټولگی کی دي، د هغه سویچفنکشن سره. له دې سره د سرکیت څیرنه د بول الجبر په څیرنه بیرته واپرول شوه او په دې توگه شمیرپوهنیزو متودو یا لارو ته لار ور جوړه یا ور وازه شوه، لکه په مخته تیره برخه کی چی ودیزه شوې وې.

په سرکیتري تیوری (Switching Theory) او همداسی په ټولیزه توگه په سرکیت تیوري کی دوه غوره پرابلمونه دا لاندې دي:

اول ( د ورکړ شوي سرکیتري شننه یا تحلیل او

دوم ) د پلټونکی سرکیتري سینتیز Synthese.

په شننیز حالت کی یو سرکیتري S د مخه ورکړ شوې ده او د هغه سویچفنکشن باید راپیدای شي یا غوښتل کیږي. د دې لپاره د S د هر سویچ  $A_1, A_2, \dots, A_n$  د سرکیتري S لپاره د سویچ ارزښت باید کره وټاکل شي. کیدی چي اوس S په  $A_1, A_2, \dots, A_n$  کی (د  $x_1, x_2, \dots, x_n$  په ځای ) باندې د بول د پولینوم په څیر انځور شي په همدې توگه یا په ورته ډول د S جوړونه په  $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$  سره له  $A_1, A_2, \dots, A_n$  څخه. له دې پولینوم څخه یا سیده د فنکشن ارزښت شمیرل کیږي او یا په هغو د دواړو نورمالفورمونو څخه په یوه ترانفورمي کیږي، له کومو چی بیا فنکشن په ساده توگه لوستل کیږي.

۳ . ۳ . ۴ بیلگه : لاندې سرکیت S دې د سویچونو A, B, C سره مخته دوت و،  $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$  څخه د وکتا شه . به

## د بول الجبر ، سرکیت الجبر ۱۲۳

ورته توگه د بول پولینوم په دې توگه دی

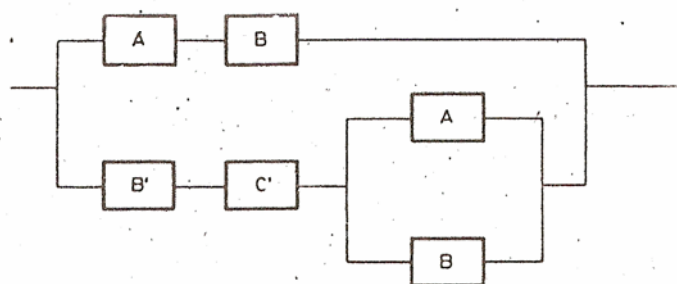
$$(A \wedge B) \vee (B' \wedge C' \wedge (A \vee B))$$

دا په دې سیونکتیو نورمال فورم اړوو:

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge B' \wedge C') \vee (B \wedge B' \wedge C)$$

$$(A \wedge B \wedge (C \vee C')) \vee (A \wedge B' \wedge C')$$

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C') \vee (A \wedge B' \wedge C')$$



د نورمال فورم (اخرنی لیکه) سملاسی د S ارزښت جدول لاس ته راځي:

A	B	C	$f_S$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

ټیگ د دې په خټ د سینتیز پرابلم رامنځ ته کیدنی سره د یوه سرکیپ د پرابلم رامنځ ته کیدنه ده. د لته دې د سویچفن-کشن فورکر شوی وي، او د دې سویچفنکشن رښتیا کیدونکی



یا ریالیزه کیدونکی سرکیټری دپیدا شی. دا پرابلم یواځنی ټاکلی اوبی یا حل نه لري او امکانات شته، چی د همغه موخی لپاره جگ اوبی ولټول شی. یو په هر صورت یواځی تیوریکي مانا لرونکی اوبی سملاسی ورکول کیدی شی. که ارزښت جدول پیژندل کیږي، نو کیدی شی، چی د دیسیونکتیو نور-مالفورم ولیکل شی او د هغی سره سم یو سرکیټری جوړ کړی شی. په دې سرکیټری کی مگر د دې رامنځته کیدونکی گڼون هر د سویج په ټولیزه توگه نازغمور یا بهتره بی وعدي ور لوي وي، دا په دې مانا، چی تخنیکي ریښتینوالی به یی زیات قمته وي. دلته یو سرکیټری د کمو سویچونو سره لټول کیږي، چی هغه د مخه ورکړ شوی سویچفنکشن ریښتینی کوي. د جوړولو قیمت یا مصرف باندې یی یواځی د سویچونو گڼون تاثیر نه لري، بلکه جوړونه هم او همداسی د سرکیټ ښکرتکتور یا جوړشودول، د زیاتو مختلفو قمټفنکشنونو له مخی پاملرنه ورته شی. داد کمون پرابلم نسبی تاوونی کیدی شی حل شی. د دې پرابلمونو حل یا اوبی د بیلگي په توگه د Kohavi 1970 په کتان کی ورکړ شوی دی. د سرکیټونو کارونه د مختلفو کارخانو په چا-لانو کی د خورا لوي اهمیت دي: په مرکزگرمی، خطرزنګ، کنترولخونوکی او داسی نور. یوگونی سویچونه په دې کی ټاکلی پیښي، حالتونه، او شرایط په گوته کوي له کومو، چی د هغو ځای مربوط دی یا اړه لري. موضوع هم دلته را لنډوو او په همدې لوستلشوو بسیا کوو.

## ۵ الجبرونه

### يو څو بنسټيزې کليمي

لومړۍ موخه مو دا ده، چې د دې کتاب د الجبر بنسټيزو کليمو په څيرلو پيل وکړو، چې موږ دا په نامه ټوليز الجبر، يا لنډ الجبر بولو. برسیره پردې دلته درې مهمې جوړښتيز کليمي پيژندل کيږي يا معرفي کيږي، چې د هغو په مرسته بيا له ورکړ شوو الجبرونو څخه نور (واړه يا کوچنۍ) الجبرونه گټل کيدی شي، په نامه لاندې الجبرونه، بيا هومومورفي څيره کونۍ او بالاخره فاکتور الجبرونه، کوم چې د کونگرواينځ اړيکو له فاکتوره کونۍ څخه لاس ته راوړل کيږي.

په تکراري توگه دلته هم د الجبري جوړښتونو د بيلگي لپاره، لومړۍ، لکه ددې کتاب هم، لکه د گروپونو په

درس کی موچی گوته ورته ونيوله ، گروپونه خیرل کیری.

دا تعریف به د لمړني تعریف سره لکه په برخه ۳ کی موچی کړی وو، یواځی په نخبونه کی توپیر ولری. دلته به مو د گروپ تعریف داسی وی، چی سملاسی راته د الجبر یوه بیلگه راکوی.

۵ . ۱ . ۱ تعریف: گروپ په پیژندل شوي ډول یو ډیری  $G$  دی، د یوه، په  $G$  باندې د دوه ځایزې کارونی یا اپریشن، نښلونی، گنډنی یا عملیې د تعریف سره. ( دا په دې مانا، چي یوه څیره کونه له  $G \times G$  څخه په  $G$  کی د  $x.y \rightarrow (x,y)$  سره ) کوم چی لاندې قاعدې پوره کوي یا په کومو کی، چی لاندې قاعدې صدق کوي

( د ټولو )  $x,y,z \in G$  ( لپاره باورل ري ):

$$(x.y).z = x.(y.z) \quad (\text{اسوخیاتیو قانون})$$

دا اسوخیاتیو قانون په نخبو داسی لیکلی شو:

$\forall x, y, z \in G : ((x.y).z = x.(y.z))$   
 (یو)  $\exists e \in G$  (د ټولو)  $x \in G$  لپاره موجود دی، د  
 کوم لپاره چی باور لري)؛

$$e.x = x.e = x \quad (\text{ناپیلی توکی})$$

دا پورته قاعده داسی په نخبولیکلی شو:

$\exists e \in G, \forall x \in G : e.x = x.e = x$   
 (د ټولو)  $x \in G$  (لپاره یو)  $x' \in G$  موجود دی د کوم  
 لپاره چی باور لري:

$$x.x' = x'.x \quad (\text{په خټ توکی})$$

دا قاعده په شمیرپوهنیزه نخبو داسی لیکلی شو:

$$\forall x \in G \quad \exists x' \in G : x.x' = x'.x = e$$

په دې قاعدو کې د ټول کوانتور (Allquantor)  $\forall$   
 (لوستل یی : د ټولو لپاره) او د موجودیت کوانتور  
 (Existenzquantor)  $\exists$  (لوستل یی : موجود دی)  
 کارول شوي دي. دریمه قاعده د بیلگي په توگه داسی لو

ستل کږي: «د ټولو  $x$  لپاره، چې د  $G$  توکی دی یا په کلي  $G$  پروت دی، یو توکی  $x'$  له  $G$  څخه موجود دی، د  $x.x' = e$  سره یا په بل ډول: د کوم لپاره چې  $x.x' = e$  باور لري». دلته  $e$  د دومی قاعدې سره ورکړ شوی ناپیلی توکی دی (یواځنی ټاکلی). ناپیلی په شمیرپوهنه کې د یوې عملیې یا کارونې یا نښلونې په نسبت دا مانا ورکوي، چې دا ناپیلی توکی د یوه توکی سره په همغه عملیه کې همغه توکی بیرته لاس ته راکوي، یانې د همغی عملیې سره د یوه توکی سره په نښلونه یا عملیه کې راوستلو سره ورسره نښلونې توکي کی بدلون نه راولی.

په پوره ورته توګه، لکه ګروپ، کیدی شي، چې د بیلګې په توګه کړی هم تعرفي شي، چې دې کار دمخه صورت نیولی، د کوم لپاره، چې په هر حالت کې دوه عملیې په کار دي (زیاتون او ځل). د دې پام لرنو یا کتلوڅخه د دې کتاب بنسټیزو کلیمو فکر رامنځته کېږي: د یوه «ټولیز یا عمومي الجبر» لاندې یو ډیری پوهیږو د عملیو د یوې کورنۍ سره، کوم چې تل یا ضرور باید دوه ځایز نه وي. دا اوس باید په پوره دقت یا پوره پام وړ تعریفونو کې راټول شي.

۵ . ۱ . ۲ تعريف : د هر گڼې  $\{0\} \in \mathbb{N}$  او هر  $n \in \mathbb{N}$  او هر  $A$  ډيري لپاره يوه څيره ونه  $f: A^n \rightarrow A$  شته، کومه چې  $n$ -ځاييزه عمليه په  $A$  بلل کيږي. د ټولو  $n$ -ځاييزو عمليو ډيري په  $A$  د  $Op_n(A)$  سره په نڅښه کوو. په  $A$  باندې د پاڼيزو عمليو لاندې دا عمليې پوهيږو:

$$Op(A) := \bigcup_{n=0}^{\infty} Op_n(A)$$

۵ . ۱ . ۳ يادونه : د همدې ورکړ شوي تعريف سره به د يو صفر ځاييزې عمليې لاندې څه پوه شو؟ کره دې ونيول شي، چې  $A^n$  دې د ټولو  $g$  څيره کونو يا څيره ونو

$$g: \{0,1,2,\dots,n-1\} \rightarrow A$$

ډيري وي. په ځانگړې توگه باور لري:

$$A^0 = \{g \mid g: \emptyset \rightarrow A\}.$$

مگر گورو، چې يواځې يوه څيرونه  $g$  موجود ده، يانې په نامه  $g = \emptyset$  (پام دې وي، چې هره څيرونه  $g: \emptyset \rightarrow A$  په کره نيوکه د جوړو يو ډيري دی، دا په نامه

$$g = \{(x, g(x)) \mid x \in B\}$$

د  $B = \emptyset$  لپاره، پس  $g = \emptyset$ ) له دې امله يوه صفرځاييزه

عملیه یوه دا ورکړ شوې څیرونه ده :  $f: \{\emptyset\} \rightarrow A$ .  
 دا څیرونی همداسی ټیک د  $A$  توکی په گوته کوي، ځکه  
 چی  $f$  د  $f(\emptyset) \in A$  توکی سره یواځنی ټاکلی دی، او د  
 هر  $a \in A$  (بیایی لوستل هر  $a$  له  $G$  څخه) لپاره ټیک  
 یوه څیره ونه  $f_a: \{\emptyset\} \rightarrow A$  موجود ده، د  $f_a(\emptyset) = a$   
 سره. له دې امله صفرځایزې اړیکې ثابتې هم بلل کیږي، او  
 د  $f_a$  په ځای په ساده توگه  $a$  لیکو.

۵ . ۱ . ۴ . تعریف : د یوه الجبر د تیپ یا ډول لاندې یوه  
 تنظیم شوې جوړه  $(f, B)$  (دلته دا  $f$  باید لوي وی ، خو  
 زه یی بل ډول امکان نه لرم، بیا د سهوو سره مخامخ کیږو،  
 ځکه چی په کمپیوتر کی د  $F$  څخه بدل بل لوی  $F$  نه لرم)  
 پوهیږو، چیرته چی  $f$  یو ډیری دی ، چی توکي یی د عملیو  
 سومبولونه دي او  $B: f \rightarrow N \cup \{0\}$  یوه څیره ونه ده، کوم  
 چی هر  $f \in f$  په ځایزوالی (یاني هغه ځای چی دا یی نیسی)  
 $B(f)$  باندې تنظیم وي. دلته  $f$  یو د  $B(f)$  - ځایزوالی  
 عملیو سومبول بلل کیږي.

یو ټولیز الجبر (یا لنډ : الجبر) د  $(F, B)$  تیوپ یو تنظیم  
 شوې جوړه  $A = (A, F)$  ده ، کومه چی له ډیری  $A$  او یوې

په  $A$  د عملیو کورنۍ  $F(f | f \in f)$  څخه منځ ته راغلی یا جوړه شوې ده، چیرته چې هر  $f \in f$  په  $\beta(f)$  - ځایز عملیې  $f \in \text{Op}(A)$  باندې تنظیم شي. ډیری  $A$  د  $A$  بنسټیزې بلل کېږي او د  $F$  توکی د  $A$  بنسټیزې عملیې بلل کېږي.

۵ . ۱ . ۶ یادونه : الف ) : که چیرې د لوستونکو

لپاره دا د الجبر تعریف، د د تیوب سره ، اږیشن سومبول سره ، او داسی نور ، لږ پیچلی بنسټیزې ، نو کړی شي ، چې دا لاندې تعریف ته خپل پام راوگرځوي.

د الجبر لاندې کیدی شي ، چې یوه جوړه  $A=(A,F)$  پام یا خیال کي راولو، چې  $A$  یو ډیری او  $F$  یو د په  $A$  د عملیو یا کاروونو یا اږیشن پای ډیری وي. هغه نازکوالی، چې د مخ ته تیر تعریف و شا ته خوندي یا پت دی، کیدی شي، چې وروسته په کرار کرار د نورو تیوریو په ودیزه کی روښانه شي.

ب ) په دې کتاب کی تل د الجبر د کلیمې لاندې ټولیز یا عمومي الجبر پوهیږو . چې په دې توگه د کلاسیکي یا ټولگیز الجبر د کلیمې سره په یوه کړی باندې، څخه یی



توپیر کیدی شي. له دې امله ټولیزه یا عمومي کلیمه نه لیکو او لنډ یې «الجبر» لیکو.

پ ( لیکنو ته یې یو څو یادونې : زیات وخت  $f$  د الجبر تیوپ بلل کېږي، دا په دې مانا، چې له سره مو فکر د کارونې سومبول ځایزوالی ته پام راگرځي. په څټ یا برعکس، زیات وخت د تیوپ  $\beta$  څخه غږیږو، که زیات مو موخه ځایزوالی وي او کم مو موخه د کارونې یا عمليي سومبول وي.

که یو الجبر  $(A, F)$  یواځي پای ډیرې بنسټیزې کارونې یا عملي ولري، د بیلگي په توگه  $F = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ ، نو زیات وخت دلته  $(A, f_1, \dots, f_k)$  د  $(A, F)$  په ځاي لیکل کېږي، او تیوپ په دې  $(\beta_1, \dots, \beta_k)$  بڼه نوټ کوو، چیرته چې  $\beta_i$  د  $f_i$  ځایزوالی راکوي.

د یوه تیوپ  $f$  په الجبرونو کې بنسټیزې کارونې یا عمليي د  $f_A$  سره نه په نڅښه کېږي، بلکه په ساده توگه د  $f$  سره، دا په دې مانا، چې د اړوند کارونې سومبول سره، لکه چې د ابل گروپ کې زیاتون زیات د نڅښې « + » سره په نڅښه کېږي. دا امکانات، چې دا به مو سهو ته لارښود کړي، خورا کم دی.

۵ . ۱ . ۷ بیلگه گروپ: په دې برخه کې ، لکه په سر کې مو چي الجبر تعريف کړ، هغی ته ورته گروپ د یو الجبر  $(G, \cdot)$  په څیر د تیوپ (2) تعريفوو (ټیک: د یوه الجبر، چي تیوپ یی  $(f, \beta)$  د  $f = \{ \cdot \}$  سره دی او  $\beta(\cdot) = 2$ )، چي هغه هلته نه ورکړ شوي اکسیومونه پوره کړي. په هر حالک ځتور دی ، که گروپ بل ډول تعريف کړو ( د مخه مو گروپ پوره څیړلی دی او هلته یی تعريف بل ډول وو و دې اوسنی تعريف ته ). ورسره بلد یا مروج میتودونه دي: یو گروپ یو الجبر  $(G, \cdot, e, ^{-1})$  دی، د تیوپ  $(2, 1, 0)$  ، چي لاندې اکسیومونه پوره کړي:

- گ ۱ :  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$  (اسوخیاتیو قانون)  
 گ ۲ :  $x \cdot e = e \cdot x = x$  (ناپیلی یا بي تاثیر توکی)  
 گ ۳ :  $x \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot x = e$  (په څټ توکی)

د دې متود گټه په دې کی نغښتی ده، چي د موجودیت کوانتورونو ته اړتیا نه پېښیږي او په څټ توکی په ساده توره د یوه یوځایزې کارونی څخه لاس ته راځي، او ناپیلی توکی د صفرځایزې کارونی په څیر په « تیوپ کی خوندي

ده». که چیرې له ټولکوانتورونو څخه تیر شو، نو کیدی شي، چې د گروپ اکسیومونه د مساوت یا برابرې په څیر ولیکل شي، څنگه چې دلته ورکړ شوي دي. دا نور هم روښانه کیږي، چې برابرې په ټولیز الجبر کې لوی رول لوبوي.

سپری کړی شي، چې گروپ په بل ډول هم ولیکي، د بیلګې په توګه د یو الجبر  $(G, p)$  په څیر، چې تیوپ یی (3) وي، په داسې ډول، چې  $p$  د سرچینیزې گروپ کارونې یا عملي د  $p(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$  په څیر تعریف شوي وي. لوستونکی دې پخپله دې ته پام کړي، چې ایا د گروپ اکسیومونه، یواځې د  $p$  له لارې فرمولولی شي. دې ته دې هم پام راواړول شي، چې یو گروپ  $(G, \cdot, ^{-1}, e)$  ایلي abelsche Grupp یا کموتاتیو بلل کیږي، که لاندې برانرونونه باور ولري:

گ ۴ :  $x \cdot y = y \cdot x$  (کموتاتیو قانون)

دا ورسره بلد یا مروج دی، چې په ابل یا کموتاتیو گروپ کې  $+$ ,  $-$ ,  $0$  د  $e$  په ځای کارول کیږي. (د زیاتون لیکنډول یا لیکنډود).

ب) يو الجبر  $(G, \cdot)$  د تيوپ {2} گروپوئيډ بلل کيږي. يو گروپوئيډ بل څه نه دې په غير له يوه ډيري، چي په هغه کي يو دوه ځايزه کارونه يا عميله کارول شوي وي، په ځانگړي توگه گروپونه په همدې وخت کي گروپوئيډ هم دي، که دا د تيوپ (2) الجبر په څير وگڼل شي.

پ) يو گروپوئيډ  $(H, \cdot)$  نيمگروپ بلل کيږي، که  $(H, \cdot)$  برابر وگ ۱ پوره کړي.

ت) يو الجبر  $(M, \cdot, e)$  د تيوپ  $(2, 0)$ ، مونوئيډ بلل کيږي، که  $(M, \cdot)$  يو نيم گروپ وي او برسیره پر دې برابر وگ ۲ پوره کړي.

ټ) يو گروپوئيډ  $(Q, \cdot)$  کوازيگروپ بلل کيږي، که د هر  $a \in Q$  لپاره لاندې څيرونې د  $Q$  په باندې پرموتيشنونه وي، يعنې:

$$x \rightarrow a \cdot x \quad (\text{د } a \text{ سره کيڼ څلوونه})$$

$$x \rightarrow x \cdot a \quad (\text{د } a \text{ سره ښي څلوونه})$$

زيات وخت د کارونې يا مروج دي، چي کوازيگروپ

د تیوپ (2,2,2) الجبر ( $Q, \cdot, \setminus, /$ ) په څیر تعریف  
کړو، کوم چی لاندې برابر ونونه یا مساوات پوره کوي:

$$(Q1) \quad x \setminus (x \cdot y) = y \quad ,$$

$$(Q2) \quad (x \cdot y) / y = x \quad ,$$

$$(Q3) \quad x \cdot (x \setminus y) = y \quad ,$$

$$(Q4) \quad (x / y) \cdot y = x$$

یا دونه: گورو چی / او  $\setminus$  د بني او کینی ویشنی په  
څیر کارول شوي (دا سي، نخبنی، چی په هر بل ځاي  
کی په بل مفهوم ورکړ شوې وي، همغلته به په همغه  
مفهوم ونومول شي)

ث ( یو لوب یو د تیوپ (0,2) الجبر ( $L, \cdot, e$ ) دی،  
په کوم کی چی ( $L, \cdot$ ) یو کوازیگروپ وي، او  $e$  یو  
ناپیلی توکی وي، دا په دې مانا چی برابر ون گ ۲ باور  
لري. لکه د کوازیگروپ په څیر کیدی شی چی لوپ هم  
تعریف شي، د یوه الجبر ( $L, \cdot, \setminus, /, e$ ) په څیر.

ج ( کړی: یو د تیوپ (2,1,0,2) الجبر  
( $R, +, -, 0, \cdot$ ) کړی بلل کیږي، که ( $R, +, -, 0$ ) یو ابل  
گروپ وي، ( $R, \cdot$ ) یو نیمگروپ او لاندې دیستریبوتیو

قوانين باور وٺري:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad (۱ \text{ د})$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad (۲ \text{ د})$$

پام ڏي وي: د ڏي لپاره، ڇي نوڪان مو سڀما ڪري وي،  
 نو هغه له پخوا معلومه قاعده ڪارول ڪيري، ڇي ٽڪيشميرنه  
 له ڪرنبشميرني له مخه ده، دا په ڏي مانا، ڇي لمري د ٽڪو  
 شميرنه بدنيز (تنيز) ڪيري يا صورت نيسي لکه ڄل او ویش  
 او ورپسي بيا هغه ڇي ڪرنبشميرنه وي لکه زياتون او ڪمون.  
 يوه اونيتار ڪري (unitärer Ring  $(R, +, -, 0, \cdot, 1)$ ) دا په ڏي  
 مانا ڇي دا يوه ڪري ده د يوي سره، يو الجبر ڏي، چيرته  
 ڇي  $(R, +, -, 0, \cdot)$  يوه ڪري ده او 1 يو ورزيات شوي صفر  
 ڄائيزه ڪارونه يا عمليه ده، ڪوم ڇي مساوت ڪ ۲ پوره ڪوي  
 (طبعاً دلته 1 د e په ڄاي ڏي).

ح تن يا بدن (يو اونيتار ڪري  $(K, +, -, \cdot, 0, 1)$ ) يو تن  
 يا بدن بلل ڪيري (انڪريزي field) که  $(K, \setminus \{0\}, \cdot)$  يو  
 ابل گروپ وي، د ناپيلي توکي 1 سره. دا راته نزدې پرته ده،  
 ڇي اوس که پر ڏي په ورزياته توگه  $x \rightarrow x^{-1}$   
 (په  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  کي په ڄٽ ڄيرونه) يوه يوڄائيزه ڪارونه يا

عملیه یا اږیشن وگڼو. دا چي  $0^{-1}$  تعریف نه دی، نو  
 $(K, +, -, 0, \cdot, 1, -1)$  به د لمړنی تعریف په موخه کوم الجبر نه وي.  
 د ټوټه الجبر په تیوري کی، چی په دې کتاب کی نه راوړل  
 کیږي، نا پوره تعریف شوې عملیې یا کارونی اجازه لري.

خ ( مودولونه Moduln . دا  $(R, +, -, 0, \cdot)$  دې یوه کړی  
 وي. یو الجبر  $(M, +, -, 0, R)$  د  $(2, 1, 0, (1)_{r \in R})$  تیوپ  
 $R$ -مودول بلل کیږي (یا مودول په کړی  $R$  باندې)،  
 که  $(M, +, -, 0)$  یو ابل گروپ وي، او د ټولو  $r, s \in R$  لپاره  
 لاندې مساوات باور ولري:

$$r(x+y) = r(x) + r(y) \quad (1 \text{ م})$$

$$(r+s)(x) = r(x) + s(x) \quad (2 \text{ م})$$

$$(r \cdot s)(x) = r(s(x)) \quad (3 \text{ م})$$

په یوه اونیارکړی  $(R, +, -, \cdot, 1)$  باندې مودول څخه دا د  
 لاندې مساوات باوریوالی هم غوښتل کیږي.

$$1(x) = x \quad (4 \text{ م})$$

دا لمړنی بیلگه ده د ناپایدیرو عملیو سره (طبعاً که  $R$   
 ناپای وي). برسیره پردې هم یو ځانگړی پام ضرور دی،  
 ځکه چی سومبولونه  $+$ ,  $-$ ,  $0$  په دوه مختلفو ماناو رامنځ

ته کيږي: يو ځل د ابل گروپ  $(R, +, -, 0)$  عمليې په څير او بيا د ابلگروپ  $(M, +, -, 0)$  په څير. دا پرابلم په ساده توگه کيدی شي، چي راوباسل شي، د بيلگي په توگه په کوم کي  $(R, +_R, -_R, 0)$  او  $(M, +_M, -_M, 0)$  په څير ليکل کيږي. يواځي د اسانتيا له خاطره ضرور بنسټيزي، چي د ابل گروپونو باندې په همغه يوون د  $+, -, 0$  سره پاتي شو،

خ ( وکتور فضا ( وکتور هوا ) : وي دې  $(K, +, -, 0, \cdot, 1)$  يو تن . نو هر  $K$ -مودول  $(V, +, -, 0, K)$  مور  $K$ -وکتور هوا ( يا وکتور هوا يا وکتور فضا په تن  $K$  ) بولو.

خ ( تړون (تړونونه) ( Verband(english: lattice) ) يو لاتيس يا تړون يو الجبر  $(L, \vee, \wedge)$  دی، د تيوپ  $(2,2)$ ، کوم چي لاندې مساوات پوره کوي:

$$x \vee y = y \vee x, x \wedge y = y \wedge x \quad (1)$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \quad (2)$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

( اسوخياتيون قانون )

$$x \vee x = x, x \wedge x = x \quad (3)$$

( ايډمپوتينڅ )



$$x \vee (x \wedge y) = x, \quad x \wedge (x \vee y) = x \quad (۴ ل)$$

(ابزربشن يا راكبننه يا جذبونه )

دلته افادې "  $x \vee y = z$  " او په همدې توگه "  $x \wedge y = z$  " داسې لوستل كيږي  $x$  له  $y$  سره تړلی مساوي په  $z$  دی. همداسې  $x$  غوڅ په  $y$  مساوي په  $z$  دی.

يو رابند تړون يا لاتيس ( يا تړون د 0 او 1 سره ) يو الجبر

(  $L, \vee, \wedge, 0, 1$  ) ددی د تيوپ (2,2,0,0), داسې چي

(  $L, \vee, \wedge$  ) يو تړون يا لاتيس دی او په دې برسیره لاندې

مساوات هم باور لري:

$$x \wedge 0 = 0, \quad x \vee 1 = 1 \quad (۵ ل)$$

تړونونه به په ځانگړي توگه په ورپسې برخو کې پوره وڅيړل شي او د هغو مختلف ډولونه او هم به په هازې دياگرام کې و کښل شي )

د ( نیم تړون ( semilattice ) يو نیم گروپ (  $S, \cdot$  )

نیم تړون يا سيميلاتيس بلل كيږي، که دا کموتاتيو او

ایدمپوتنت وي. دا په دې مانا، چي که مساوات گ ۴

او همداسې لاندې باور ولري:

$$x \cdot x = x \quad (۱ س) \quad \text{ایدمپوتنخ (Idempotenz)}$$

د هر لاتیس  $(L, \wedge, \vee)$  جوړښتونه  $(L, \wedge)$  او  $(L, \vee)$  په روښانه توګه سیمیلاتیسونه دي. **د نېټروټی**

ذ) دیستریبوتیو تړون یا - لاتیس ( یو لاتیس  $(L, \wedge, \vee)$  دیستریبوتیو بلل کیږي، په کوم کې چې دا لاندې دیستریبوتیو قانونونه باور ولري:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad (\text{د ل ۱})$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad (\text{د ل ۲})$$

کیدې شي، چې د ل ۱ تر ل ۴ مساواتو پورې وښول شي، چې د ل ۱ او د ل ۲ یو بل ته ورته دی یا همغسې دي. چې له دې مساواتو یو بیا پوره دی، یا بسیا کوي.

ر) د بول الجبر: یو الجبر  $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$  د تیوپ  $(2, 2, 1, 0, 0)$  د بول الجبر بلل کیږي، که  $(B, \wedge, \vee)$  یو دیستریبوتیو لاتیس وي، مساوات ل ۵ پوره کړي او په دې برسیره لاندې هم پوره کړي

$$x \wedge x' = 0, x \vee x' = 1 \quad (\text{ب ۱})$$

دا څه د الجبر پورته تیرې بیلګې مو، چې دلته راوړلې، د هغو څخه به ځنی وروسته پوره ترخپرنی لاندې ونيول شي. او س په دا همدومره بسیا کولی شو.

## ۵ . ۲ . لاندي الجبر يا سب الجبر Subalgebra

د هر الجبري ديسخيپلين مهمه موخه داده، چي پوره بيلگي ترې لاس ته راوړل شي. زيات وخت داسي كيږي، چي د لرلو الجبري جوړښتونو څخه نوي الجبري جوړښتونه لاس ته راوړو. په دې برخه كي به يو متود يا يوه لار وپيژندل شي يا معرفي شي، كومه چي د ټولگيزو كليمو څخه لكه لاندېگروپ، لاندېكتورفضا، لاندېتروني په لور لوريزه وي.

۵ . ۲ . ۱ تعريف :  $A = (A, F)$  دې يو د تيوپ  $f$  الجبروي، او برخېږي  $B \subseteq A$  دې يو د  $A$  برخېږي وي، د خويونو سره، چي

$$f(b_1, \dots, b_n) \in B^n$$

د ټولو  $f \in f$  لپاره او د ټولو  $n$ -گونو  $(b_1, \dots, b_n) \in B^n$  لپاره (د كومو سره، چي  $\beta(f) = n$  ځای په ځای كيږي). الجبر  $B = (B, (f | f \in f))$  د الجبر  $A$  لاندي الجبر بلل كيږي، د كوم سره  $f: B \rightarrow B$  د ټولو  $f \in f$  لپاره د  $f$  بنديزنو په څير په ډيري  $B$  تعريف وي، د « $B$  د  $A$  لاندي الجبر» لپاره ليكو  $B \leq A$ .  
د  $Sub A$  سره د ټولو د  $A$  لاندي الجبرونو بنسټډيريو

ډیری په نخښه کيږي، دا په دې مانا، چې  $A = \{ B \mid B \leq A \}$  (انگر: Subalgebra = لاندې الجبر)

يو برخه ډیری  $B \subseteq A$  ټيک هلته د يوه الجبر  $A = (A, F)$  لاندې الجبر بنسټ ډیری دی، که  $B$  د ټولو  $f_A \in F$  بنسټ عمليو سره رابنده، راتړلی وي يا رامحدوده وي. څه ناڅه ټيکه توگه زيات داسی ليکل کيږي  $B = (B, F)$ ، دا په دې مانا، چې  $B$  د بنسټ عمليو ډیری بيرته په  $F$  سره په نخښه کيږي. لکه څنگه د  $f_A$  لپاره همداسی د  $f_B$  لپاره هم په ساده توگه د کارونی سومبول په  $f$  سره بنسټ کيږي يا بهتره، نخښون کيږي.

د گروپ په بيلگه روښانه کيږي، چې په لاندې الجبر کی په هغه تيوپ گڼل کيږي، کوم چې ټاکل شوی دی: که گروپ د يوه الجبر په څير، چې تيوپ یی  $(2, 1, 0)$  دی راورل شي يا وگڼل شي، لکه په مخ ته تيره بيلگه کی نو لاندې الجبرونه په ټولگيزه موخه لاندې گروپونه دي. که چيرې گروپ د  $(2)$  تيوپ الجبر په څير راورل شي يا په پام کی ونيول شي، د گروپ سره چې يواځنی عملیه يا کارونه ده، ممکن دي، چې لاندې الجبر لاس ته راورو، کوم چې لاندې گروپونه نه دي. بيا نور لاندې الجبرونه

لاس ته راځي، که ګروپ د یوه الجبر، په څیر د

$$p(x, y, z) = xy^{-1}z$$

سره راوړل شي، چی دا یی یواځنی عملیه وي.

د هر الجبر لپاره دا سیستم د غوڅیجورښت په مخامخ رابند دی. ټیک یا کره په لاندې ډول :

۵ . ۲ . ۲ جمله : A دې یو الجبر وي. نو باور لري:

( الف )  $A \in \text{Sub } A$

( ب )  $B \in \text{Sub } A$  د هر ناتشپیری  $B \notin \text{Sub } A$  لپاره،

یادونه : دا افاده " $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$ " لپاره ځای په ځای ده او همداسی د  $\bigcap \{B \mid B \in \mathcal{B}\}$  لپاره .

اوبی : الف ) روښانه دی. د ب ) د ښوونی لپاره دې وي:

$B \subseteq \text{Sub } A$  ,  $B \neq \emptyset$  . دا د ښوولو دی، چی  $\bigcap B$

د A د هرې عملیې f لپاره رابند دی یا راتړلی دی.

وي دې  $n = \beta(f)$  . له  $b_1, \dots, b_n \in \bigcap B$  څخه

$b_1, \dots, b_n \in B$  لاس ته راځي د ټولو  $B \in \mathcal{B}$  لپاره .

دا چی ټولی  $B \in \mathcal{B}$  څخه د لاندې الجبرونو بنسټپیری

دي، نو باور لري  $f(b_1, \dots, b_n) \in B$  د ټولو  $B \in B$  لپاره . له دې څخه لاس ته راځي  $f(b_1, \dots, b_n) \in B$  .

۵ . ۲ . ۳ لاس ته راوړنه ( دا هم د يوې جملې په څير ده ، خو له جملې څخه لاس ته راځي ) : د هر الجبر  $A$  او هر برخه  $X \subseteq A$  لپاره دى

$$\langle X \rangle = \bigcap \{ B \in \text{Sub } A \mid B \supseteq X \}$$

د  $A$  د لاندې الجبر بنسټيزى، دا په دې مانا چى

$$\langle X \rangle \in \text{Sub } A \text{ د } A \text{ د } \langle X \rangle \text{ په څرگنده توگه}$$

لاندې الجبرونو کوچنى بنسټيزى دى، كوم چى  $X$  خوندي لري ( دا د  $X$  څخه راجوره يا توليد شوې لاندې الجبر ) د الجبر  $A$  باندې زور اچوونى له امله ډير وخت  $\langle X \rangle_A$  د  $\langle X \rangle$  په ځاي ليكو اوله بلى خوا په ساده توگه د پاي ډيري  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  لپاره .

د بيلگي په توگه څيوكليكي لاندې گروپ  $(Z_6, +, -, 0)$  را نيسو (د گڼونو  $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  سره مودول 6 شميرل كيږي) : باور لري

$$\langle 0 \rangle = \{0\}, \langle 1 \rangle = Z_6, \langle 2 \rangle = \{0, 1, 4\}, \\ \langle 3 \rangle = \{0, 3\}, \langle 2, 3 \rangle = Z_6$$

۵ . ۲ . ۴ جمله :  $A$  دې يو الجبر وي . د برخه پيريو  
 $X, Y \subseteq A$  لپاره باور لري:

( الف )  $X \subseteq \langle X \rangle$  (اکستنزيويتيت Extensität)  
 ( ب )  $X \subseteq Y \Rightarrow \langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$  (مونوتوني Monotonie)  
 ( پ )  $\langle X \rangle = \langle \langle X \rangle \rangle$  (ایدمپوتنت Idempotent)  
 د دې جملې اوبی سملاسی د مخ ته تیرې عملي  $\langle \rangle$   
 له تعريف څخه لاس ته راځي. پای

بنسټ پيری  $\langle X \rangle$  په ريننتيا چی د  $X$  څخه توليد شوي  
 د  $A = (A, F)$  لاندې الجبرونو څخه لاس ته راځي د يوه  
 توليد پروسې سره: د هر برخه پيري  $X \subseteq A$  لپاره دې وي

$$E(X) = X \cup \{f(a_1, \dots, a_n) \mid f \in F, a_1, \dots, a_n \in X (n = \beta(f))\}$$

ورپسې دې وي

$$E^0(X) = X$$

اود ټولو  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  لپاره

$$E^{k+1}(X) = E(E^k(X))$$

۵ . ۲ . ۵ جمله : د هر الجبر  $A = (A, F)$  او هر

برخه پيري  $X \subseteq A$  لپاره باور لري

$$\langle X \rangle = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$$

اوبى: «  $\supseteq$  »: وي دې  $\langle X \rangle \supseteq x = E^0(X)$ .  
 نيونه دې وي، چي  $\langle X \rangle \supseteq E^k(X)$ ، بنوول شوي دي،  
 او وي دې  $a \in E^{k+1}(X)$ . وي دې  $a \notin E^{k+1}(X)$  د مخه  
 نيونه (ځكه، چي په بل ډول به په ساده توگه باور ولري

$$(a \in \langle X \rangle$$

نو  $f \in F, a_1, \dots, a_n \in E^k(X)$

موجود دي، د  $a = f(a_1, \dots, a_n)$  سره.

د  $\langle X \rangle \supseteq E^k(X)$  له امله او دا چي  $\langle X \rangle$  د يوه لاندي

الجبر بنسټه پيري دي، لاس ته راځي  $a \in \langle X \rangle$ . دا

بنيايي  $\langle X \rangle \supseteq E^{k+1}(X)$ ، او په  $k$  باندي د ايندکشن

سره لاس ته راځوي  $\langle X \rangle \supseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$ .

«  $\subseteq$  »: يواځي دې وبنوول شي، چي  $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$  د يوه

لاندي الجبر بنسټه پيري دي، دا په دې ما، چي  $F$  کي

د ټولو اپريشنونو په هکله رابنده يا راتړلي ده. وي دې:



$$f \in F, n = \beta(n), a_1, \dots, a_n \in \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k(X).$$

نوبیا د هر  $i \in \{1, \dots, n\}$  لپاره په لاندې توگه  
یو  $k(i) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  د  $a_i \in E_{k(i)}(X)$  سره موجود دی.  
وي دې  $m = \max \{k(i) \mid i = 1, \dots, n\}$  نو باور  
لري  $a_i \in E^m(X)$  د ټولو  $i = 1, \dots, n$  لپاره. په  
دې پسی لاس ته راځي

$$f(a_1, \dots, a_n) \in E^{m+1}(X) \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$$

دا په دې مانا، چې  $f$  د  $\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)$  لاندې رابند یا  
تړلی دی. پای

یادونه: دا رابند یا راتړلی دا مانا لري، چې  $f$  په همغه  
الجبر کی باور لري. دې لغات ته دې په نورو ځایونو کی  
هم پام وي، چې ډیر کارول کیږي.

دا تر اوس پام په یو څو برخو کی په کار راځي، چې په خپل  
ځای کی به وکتل شي.

د ډیرسیستم  $\text{Sub } A$  یواځی دې ته همدا دلته گوته  
نیسم، چې د یوه الجبر  $A$  د لاندې الجبرونو بنسټ ډیری په

پیداينستي يا طبيعى ډول يو تړون يا تړنه يا لاييس جوړوي:  
د  $B, C \in A$  لپاره دې وي

$$B \wedge C = B \cap C$$

$$B \vee C = B \cup C$$

نولو

۵ . ۲ . ۶ جمله: د هر الجبر  $A$  لپاره  $(\wedge, \vee, \text{Sub } A)$

يو تړون دی. (د  $A$  د لاندې الجبرونو تړون يا تړنه يا لاييس جوړوي)  
اوبى دې تمرين وي: د لته د تړون اکسيومونه له ل تر  
ل ۴ پورې آزمائيل کيږي.

۵ . ۳ ايزومورفيزم ، هومومورفيزم

Isomorphismen, Homomorphismen

دا روښانه ده ، چى د يوه الجبر ذهني خويونه تغير نه خوري،  
که چيرې د الجبر د سټډيري د توکو نومونه بدل شي ، يا بل  
ډول ونومول شي. دا پام يا فکر مو تړلى د ايزومورفي کليمي  
ته لارښودوي .

دوه الجبره يو بل سره ايزومورف بلل کيږي، که چيرې يو الجبر  
له دې بل څخه د هغو توکو نومونو د بدلون له لارې لاس ته  
راوړى شو:

۵ . ۳ . ۱ تعريف : A او B دې دوه الجبرونه وي، د همغه تيوپ  $f$ ، او  $u : A \rightarrow B$  دې يو بيجكتيوه  $u$  bijektive څيرونه وي. نو  $u$  د A ايزومورفيزم په B بلل كيږي، كه د  $f \in f$  لپاره او ټولو  $(n = \beta(f))$ ،  $a_1, \dots, a_n \in A$  لاندې شرطونه پوره وي:

$$u f_A(a_1, \dots, a_n) = f_B(u a_1, \dots, u a_n) \quad (\text{هوم})$$

دا الجبرونه A او B بيا (يو د بل سره) ايزومورف بلل كيږي، په نڅبنونه يې  $A \cong B$  ده.

### ۵ . ۳ . ۲ بيلگه

الف ( ) : دوه گروپونه  $(G, \cdot, ^{-1}, e)$  او  $(H, \cdot, ^{-1}, e)$  ټيک هلته ايزومورف دي، كه يوه بيجكتيو څيرونه  $u : A \rightarrow B$  موجود وي كوم چي د ټولو  $a, b \in G$  لپاره لاندې شرطونه پوره کوي.

$$(i) \quad u(a \cdot b) = u(a) \cdot u(b)$$

$$(ii) \quad u(e) = e,$$

$$(iii) \quad u(a^{-1}) = u(a)^{-1}$$

كه پام وكړو، نو دلته شرطونه (ii) او (iii) د اړتيا اخوا دي، ځكه چي دا دواړه له (i) څخه لاس ته راوړلي شو:

$$u(e) = u(e.e) = u(e).u(e) \Rightarrow u(e) = e ,$$

$$e = u(e) = u(a.a^{-1}) = u(a).u(a^{-1}) \Rightarrow u(a) = u(a)^{-1}$$

ب)  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot, ^{-1}, 1)$  دې د تن  $(\mathbb{Z}_6, +, -, 0, 1)$  یو څلینګروپ وي. نو ایزومورفیزم

$$u: (\mathbb{Z}_6, +, -, 0) \longrightarrow (\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot, ^{-1}, 1)$$

په لاندې سره لاس ته راځي:

x	0	1	2	3	4	5
u(x)	1	3	2	6	4	5

د A ایزومورفیزم و B ته په ټوله توګه سیومتري نه دی. مګر باور لري:

۵ . ۳ . ۳ جمله: که u یو ایزومورفیزم د A په B وي، نو په څټ څیرونه  $u^{-1}$  د B یو ایزومورفیزم دی و A ته.

اوبی: شرطونه (هوم) له همدا تیر درس څخه کیدی شي و ازمائل شي، د  $u^{-1}$  لپاره، چی د u لپاره ځاي په ځاي شي.

وي دې

$$f \in f, b_1, \dots, b_n \in B$$

د  $a_1 = u^{-1}(b_1), \dots, a_n = u^{-1}(b_n)$  سره، نو لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \bar{u}(f(b, \dots, b)) &= u^{-1}f_B(ua_1, \dots, ua_n) \\ &= u^{-1}[uf_A(a_1, \dots, a_n)] \quad \text{ځکه چې } u \text{ ايزومورفيزم} \\ &= f_A(u^{-1}(b_1), \dots, u^{-1}(b_n)) \quad \text{پاي} \end{aligned}$$

پاي

که د مخه تيرو لوستونو کی له غوښتنو څخه تير شو،  
چې  $u: A \rightarrow B$  بېچکتیو دی، نو د هومومورفيزم ټوليزې  
کليمې ته راځو. پس هومومورفيزم د الجبرونو مساوات کره نه  
ټاکي ( تر د توکو د چاپيريال پورې لکه په ايزومورفيزم کې )،  
مگر بيا موهم د جوړښت ورتوالی مخ ته پروت دی:

۵ . ۳ . ۴ تعريف :  $A$  او  $B$  دې د همغه تيوپ  $f$

الجبرونه وي. يوه څيرونه  $u: A \rightarrow B$  هومومورفيزم د

$A$  و  $B$  ته بلل کيږي،

د ټولو  $f \in f$  او ټولو  $(n = \beta(n)) a_1, \dots, a_n \in A$  لپاره

هومومورفي شرطونه ( هوم ) له تير درس څخه پوره دي.

د «  $u$  يو د  $A$  هومومورفيزم دی و  $B$  ته » لپاره لنډ

ليکدود «  $u: A \rightarrow B$  » هم معمول دی يا کارول کيږي.

شرط (i) د له مخ ته تیرې جملې څخه همغه ورسره بلد د هومومورفیزم شرطونه دي، د گروپونو لپاره. ټیک په همدې توگه، لکه د گروپ هومومورفیزم، په ټولیزه توگه د ټولو الجبرونو د هومومورفیزم لپاره لاندې نڅښونې معمول دي: سورجکتیو هومومورفیزم ایپیمورفیزم Epimorphism بلل کیږي. که  $u: A \rightarrow B$  یو ایپیمورفیزم وي، نو  $A$  د  $B$  یو هومومورفه څیره بلل کیږي. (په نڅښونه یی  $uA = B$ ) . اینجکتیو هومومورفیزم د نزدې پرتو دلایلو له امله خونديونه Einbettung یا نغرنه (په کی) بهتره یی رانغرنه (زه یی خونديونه بولم) بلل کیږي. (د دې لپاره راتلونکی یادونه وگورئ) د یوه الجبر  $A$  هومومورفیزم  $u: A \rightarrow A$  یانی هومومورفیزم په خپل ځان ایندومورفیزم Endomorphism بلل کیږي، او ایندومورفیزم چی په همغه وخت کی ایزومورفیزم (دا په دې مانا، چی بیجکتیو) دی د  $A$  اوتومورفیزم Automorphism بلل کیږي د  $A$  د ټولو ایندومورفیزمونو ډیری  $\text{End } A$  په پیداینستي یا طبیعي توگه یو نیمگروپ جوړوي، او د  $A$  د ټولو اوتومورفیزمونو  $(\text{Aut } A)$  Automorphihismen یو گروپ جوړوي. د دې لپاره چی دا ولیدلی شو، لاندې دوه ویناوو ته اړتیا پېښیږي، چی اوبی یی گرانو لوستونکو ته یوه ساده د تمرین دنده یا وظیفه ده:

یادونه : الف ) د هر الجبر  $A$  لپاره کټمټ څیرونه  
یانی  $\text{id } A \rightarrow A$  یو اوتومورفیزم دی  
ب ) که  $u_1: A \rightarrow B$  او  $u_2: B \rightarrow A$  هومومورفیزمونه  
وي، نو یو په بل پسې راوړنه یا په بل پسې نښلونه  $u_1 \circ u_2$   
یې هم یو د  $A$  هومومورفیزم و  $C$  پسې دی.  
د له مخ ته تیرې جملې له امله د  $\text{End } A$  همداسې  
د  $\text{Aut } A$  ډیرې د کارونې یا عملې  $\circ$  لاندې رابند یا راگیر  
دی . د مخ ته تیرې جملې له امله  $\text{Aut } A$  تل دا ناپیلی  
توکی  $\text{id } A$  خوندي لري. همغه تیره جمله بنایي، چی  
له  $u \in \text{Aut } A$  څخه تل  $u^{-1} \in \text{Aut } A$  لاس ته راځي،  
یعني باور لري:

۵ . ۳ . ۵ جمله: د هر الجبر  $A$  لپاره  $(\text{End } A, \circ)$  یو  
نیم گروپ دی ( د  $A$  د ایندومورفیزم نیمگروپ ) ،  
او  $(\text{Aut } A, \circ, ^{-1}, \text{id } A)$  یو گروپ دی ( داسې په  
نامه د  $A$  د اوتومورفیزم گروپ )  
لاندې الجبرونه او هومومورفیزم یو له بل څخه کامل  
خپلواک راوړل شو. اوس به وښوول شي ، چی دا  
جوړښتکلیمي یو د بل سره په یو ډول زغمور دي:  
۵ . ۳ . ۶ جمله: څیرونه  $u: A \rightarrow B$  دې یو هومو-

مورفيزم وي، نو باور لري:

الف ( له  $U \in \text{Sub } A$  څخه لاس ته راځي  $uU \in \text{Sub } B$

ب ( له  $V \in \text{Sub } B$  څخه لاس ته راځي  $u^{-1}V \in \text{Sub } A$  )<sup>(۱)</sup>

پ ( د ټولو برخديريو  $X \subseteq A$  لپاره باور لري

$$\langle uX \rangle = u \langle X \rangle$$

اوبی: الف ( وي دې  $f \in f, b_1, \dots, b_n \in uU$  ) چيرته چی،

لکه چی ورسره بلديو،  $\beta(f) = n$  ليکل کيږي ) .

نو  $a_1, \dots, a_n \in U$  موجود دي، د  $b_1 = ua_1, \dots, b_n = ua_n$

سره . باور لري

$$f_B(b, \dots, b) = f_B(ua, \dots, ua)$$

دا چې  $u$  هومورفيزم  $u f_A(a, \dots, a)$

د  $U \in \text{Sub } A$  له امله  $\in uU$

دا راته په گوته کوي، چی

$$uU \in \text{Sub } B$$

ب ( وي دې  $f \in f, a^1, \dots, a^n \in u^{-1}V$  . نو باور لري

.  $ua^1, \dots, ua^n \in V$

له دې لاس ته راځي

دا چې  $u$  هومورفيزم  $u f_A(a_1, \dots, a_n) = f_B(ua_1, \dots, ua_n)$

د  $V \in \text{Sub } B$  له امله  $\in V$

$$u^{-1} \in \dots \quad (۱)$$



له دې سره باور لري  $f_A(a_1, \dots, a_n) \in u^{-1}V$  او له دې  
 امله  $(u^{-1}V \Rightarrow) \bar{u}V \in \text{Sub } A$

پ)  $E$  دې لکه هغه د مخه تعريف شوی اپريتر يا عملیه  
 وي. لمړی بنوول کيږي، چې  $E(uY) = uE(X)$  د ټولو  $Y \subseteq A$   
 لپاره باور لري:  $E(uY)$  ټيک له هغو توکو  $uy$  څخه د  $y \in Y$   
 سره جوړ دی، او همداسی له هغو توکو څخه، چې لاندې بڼه  
 لري  $f \in f, y_1, \dots, y_n \in Y$ ، د  $f_B(uy_1, \dots, uy_n)$  سره.  
 همداسی يا په همدې ډول  $uE(Y)$  له توکو  $uy$  څخه جوړ دی،  
 د  $y \in Y$  سره، او همداسی له توکو څخه، چې لاندې بڼه لري:

$uf_A(y_1, \dots, y_n)$   
 دا چې  $u$  یو هومومورفیزم دی، نو بنایي  $E(uY) = uE(Y)$ .  
 په  $k$  باندې د ایندکشن له لارې کیدی شي،  
 چې  $E^k(uY) = uE^k(Y)$  وبنوول شي، د ټولو  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$   
 لپاره. د له مخ ته تیرو څخه لاس ته راځي  

$$\langle uX \rangle = \bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(uX) = uE^k(X) = u[\bigcup_{k=0}^{\infty} E^k(X)]$$
  

$$= u\langle X \rangle$$
 پای

لکه د مخه مو، چې ګوته ورته ونيوله د الجبر بنسټيږي  $uU$   
 د  $uU$  سره په نڅېنه کيږي او همداسی له مخه بلدو څخه د

الجبر بنسټېډيري  $u^{-1}v$  د  $u^{-1}v$  سره په نخښه کيږي. کيدی شي ، همدا د مخه کيدی شي، چی زیات وکارول شي، که د یوه الجبر  $A$  هومومورفيزم ( ایزومورفيزم ) په یوه الجبر  $B$  غواړو، چی وټاکو.

بیلگه: د توکو  $u \in \text{Aut}(Z_6, +, -, 0)$  د ټاکلو لپاره فکر کيدی شي، چی  $u\langle 1 \rangle = \langle 1 \rangle = uZ_6 = Z_6$ . له دې امله یا  $u1 = 1$  باور لري له کوم، چی  $u = \text{id}$  ( $= \text{id}_Z$ ) چی لاس ته راځي، او یا  $u1 = 5$  دا په دې مانا چی  $u = -\text{id}$ . پس:

$$\text{Aut}(Z_6, +, -, 0) = \{ \text{id}, -\text{id} \}$$

په ورته توگه د  $\text{End}(Z_6, +, -, 0)$  توکی هم ټاکل کيږي

لکه د مخه مو چی گوته ورته ونيوله، اینجکتیو هومومور-فيزم  $u: A \rightarrow B$  خوندېونه هم بلل کيږي، د  $u$  سره  $A$  په  $B$  کی خوندې کيږي. دا برخه چی لاندې الجبرونه او خوندېونه په کی روښانه شوه داسی پای کيږي:

یادونه: الف) د هرې خوندیونی  $u: A \rightarrow B$  لپاره

باور لري  $uA \leq B$  او  $uA = A$  دا په دې مانا، چی  $uA$

یو و  $A$  ته ایزومورف د  $B$  لاندې الجبر دی.

ب) د الجبر  $B$  د هر لاندې الجبر  $A$  لپاره د یو

Inklusionsabbildun اینکلوزنخیرونه

$$i : A \rightarrow B, i(x) = x$$

یوه خوندیونه ده.

کونگرواینخ اړیکې او فاکتور الجبر

Kongruenzrelationen und Faktoralgebren

لکه د گروپ تیوري کی د نورمالپرویشونې، یا همداسی د ایدیا ل کلیمه په کړی تیوري کی منځنی یا مرکزي کلیمه ده، همدا ډول په ټولیزه توگه په الجبر کی د ټولیزې یا پورته کلیمې کونگرواینخ اړیکو کلیمه جوړوي. دا به راته څرگنده کړای شي، چی د کونگرواینخ اړیکو او هومومورفیزم ترمنځ نزدې اړیکې پرتی دي، لکه څنگه چی په گروپ تیوري او همدا ډول کړی تیوري کی، کیدی شي چی الجبرونه د کونگر-واینخ اړیکو له لارې فاکتوریزه کړی شو، د کوم له مخی چی «فاکتور الجبر» ته رسیږو. یو گروپ د نورمالپرویشونې پسې فاکتورونی کوي، په کوم کی چی د نورمالپرویشونې څنگټولگی د نوي گروپ توکو په څیر یا په توگه وکاروي، دا په نامه فاکتورگروپتوکی. دا په څنگټولگی یا اړخټولگی د یوه ایکویوالنخ اړیکې «ایکویوالنخ ټولگی» جوړوي. دا

کننه یا څیرنه د «کونگرواینځ» فکر رامنځ ته کوي، کوم چی باید دلته تعقیب شي.

۵ . ۳ . ۷ تعریف :  $A$  دې یو ډیری وي. هر برخه ډیری

$R \subseteq A^n$  یو په ډیری  $A$  باندې  $n$ -ځایزه اړیکه بلل کیږي.

یوه  $2$ -ځایزه اړیکه  $\theta$  په  $A$  باندې ایکویوالنت اړیکه بلل کیږي، که د ټولو  $x, y \in A$  لپاره لاندې شرطونه باور ولري:

ای ( ۱ )  $(x, x) \in \theta$  ( رفلیکسیویټي )

ای ( ۲ )  $(x, y) \in \theta \Rightarrow (y, x) \in \theta$  ( سیومتری )

ای ( ۳ )  $(x, y) \in \theta$  ،  $(y, z) \in \theta \Rightarrow (x, z) \in \theta$

( ترانزیتیویټي )

د  $(a, b) \in \theta$  په ځای داسې هم لیکلی شو

$a = b \pmod{\theta}$  ( په کلیمو: "په  $a$  په  $b$  مودولو  $\theta$  سره

مساوي دی" )، او یا هم داسې لکو  $a \theta b$  ، په دې توگه

کیدي شي، چی اکسیوم ۳ په لاندې توگه فرمولبندې

شي، له  $x \theta y \theta z$  څخه لاس ته  $x \theta z$  راځي. د

هر ایکویوالنت اړیکو  $\theta$  لپاره د لاندې بنی ډیری

$[a]_{\theta} = \{x \in A \mid x \theta a\}$  ایکوالنختولگی بل کیږي.

په روبنانه یا څرگنده توگه هر یو توکی  $x \in A$  ټیک

د  $\theta$  یوه گونگروایختولگی پورې اړه لري. ( ساده بیلگه

د ټولگی : لکه چی یو هلك په همغه وخت کی په دوه یا

زیاتو ټولگیو پورې اړه نه شي لروډی).  
 د  $A$  ټولو ایکوالنتټولگیو ډیری په  $Eq A$  سره په نڅبنه  
 کوو (د ایکویوالنختټولگی المانی او انگریزی:  
 (Äquivalenzklassen = equivalence relation  
 د ډیری  $A$  لپاره دوه ایکوالنختټولگی  $\nabla_A$  او  $\Delta_A$  په لاندې  
 ډول لاس ته راځی

$$\nabla_A = A^2 = \nabla_A \quad (\text{ټول اړیکې Allrelation})$$

$$(\text{کتبتی یا دیاگونالی Identität oder Diagonale})$$

$$\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\} = \Delta_A$$

څیره: ۱۰۱

په پورته څیره کی په ډیری  $\{1,2,3\}$  باندې ټول ایکوالنختټولگی  
 اړیکې د لویوالی په ترتیب بیرته ورکړ شوي دي (دا یو  
 د Hasse-DiaGram هازېدیاگرام دې) هر ایکویوالنت اړیکه  
 د ایکویوالنختټولگی په بیرته ورکړه کی انځور ده.

۵ . ۳ . ۸ جمله:  $A$  دې یو ډیری وي او  $R$  دې یو ناتېس  
د  $Eq A$  برخه ډیری وي. نو باور لري

$$\bigcap R \in Eq A$$

( لیکدود ته یی " $\bigcap R$ " . دا دې د مخ ته تیرو درسونو  
سره انډول شي یا دا مو د مخه لوستلی دي )  
اوبی : د دې ښوونه یو ساده تمرین دی. پای

دیوه ډیری  $A$  ایکویوالنخ اړیکې په طبیعي یا پیداینستي  
توگه یو لاتیس یا ترون جوړوي. یا  $\mathcal{P} \cup \emptyset$  جوړوی .  
د ټولو  $\mathcal{P} \in Eq A$ ،  $\emptyset$  دې وي

نو کیدی شي، چی په ساده توگه وښوول شي:

۵ . ۳ . ۹ جمله: د هر ډیری  $A$  لپاره  $(Eq A, \vee, \wedge)$   
یو ترون یا لاتیس دی ( په  $A$  باندې د ایکوالنخ اړیکو ترون )  
دا پورته ورکړ شوی تعریف د  $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$  په ټولیزه توگه لږ  
مناسب دی، که په ریښتیا  $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$  شمیرو. د دې لپاره  
کیدي شي، په خوښه دوه ځایز اړیکو  $\theta_1, \theta_2$  لپاره

تعريف شوی د اړیکو ځل

$$\Theta_1 \circ \Theta_2 = \{ (x, y) \mid \exists z \in A : x \Theta_1 z \Theta_2 y \}$$

وکارول شي يا استعمال شي. دا اړیکو ځل اسوخیاتیو دی.  
(دې بنوونه دې تمرین وي) :

$$(\Theta_1 \circ \Theta_2) \circ \Theta_3 = \Theta_1 \circ (\Theta_2 \circ \Theta_3)$$

له دې امله کیدی شي، چې ډیر واره راوړل شوي نوکان  
له لیکلو پاتی شي.

۵ . ۳ . ۱۰ جمله : د هر ډیري A او ټولو  $\Theta, \Psi \in \text{Eq } A$   
لپاره باور لري

$$\Theta \vee \Psi = \Theta \cup (\Theta \circ \Psi) \cup (\Theta \circ \Psi \circ \Theta) \cup (\Theta \circ \Psi \circ \Theta \circ \Psi) \cup \dots$$

دا په دې مانا چې  $(a, b) \in \Theta \vee \Psi$  ټیک هلته باور لري،  
کله چې توکي  $c_1, c_2, \dots, c_n \in A$  موجود وي،  
د  $a = c_1 \Theta c_2 \Psi c_3 \Theta c_4 \dots c_n = b$  سره.

اوبی یا ځل: تمرین دې وي: لمړی فکر کیږي، چې اویونی  
یا حل کوونی برابر و مساوات و بنی لور ته یو ایکویوالنت  
اړیکه پرته ده، او هر دا . په بنی لور یا اړخ، په نوکانو کی  
نیول شوو اړیکو ځل ( اړیکو ځل ) په  $\Theta \vee \Psi$  کی خوندي دی.

په یوه ډیرې  $A$  باندې د یوې ایکویوالنټ اړیکې  $\Theta$  لپاره ډیری  $A / \Theta = \{ [a]_{\Theta} \mid a \in A \}$  د ډیرې  $A$  د  $\Theta$  د ټولو ایکویولنتټولگیو د  $A$  فاکتور الجبر په  $\Theta$  پسې بلل کیږي. فاکتور ډیرې زیات وخت پارټیشن Partitionen یا ټوټوونې هم بلل کیږي (ځکه، چې  $A / \Theta$  د  $A$  یو ټوټوونې یا تجزیه ده، په پرديو برخه ډیريو باندې)، او ایکووالنختو-لگي د ټوټوونو بلاکونه بلل کیږي.

خاماڅا فاکتور ډیرې او (چې وروسته به تعریف شي) فاکتور الجبرونه یو له بل سره سر او کار لري. وهغي لار ته مرسته کوي، که د گروپونو حالت راواخلو یا بهتره تر څیرني لاندې ونیسو:  $(G, \cdot, ^{-1}, e)$  دې یو گروپ وي او  $N$  دې د  $G$  یو نورمال پرویشونی وي، دا په دې مانا چې یو لاندې گروپ شته د دې لاندې نورمال پرویشونی شرطونو سره:

(د نومال پرویشونی شرتونه)  $\forall x \in G : x^{-1} N x = N$   
 (دا پورته داسی لوستل کیږي: د ټولو  $x$  لپاره، چې له  $G$  دی یا د  $G$  توکی دی باور لري.....)

وي دې  $\Theta_N$  په  $G$  باندې یوه ایکویوالنخ اړیکه د څنگټولگي  $aN$  سره د یوه ایکویوالنخ په څیر، دا په دې مانا چې د  $G / \Theta_N = \{aN \mid a \in G\}$  سره. نو کیدی



شي، چي په  $G/\Theta_N$  باندې يو گروپ جوړخت يا گروپسکترکچر  $(G/\Theta_N, \cdot, ^{-1}, e_N)$  د دې لاندې سره تعريف کړي

$$\begin{aligned}(aN) \cdot (bN) &= abN, \\ (aN)^{-1} &= a^{-1}N, \\ eN &= eN\end{aligned}$$

اوس دا غوره ده، چي وښوول شي، چي دا ډول تعريف شوی اپريشن يا کارونه کره تعريف ده. د بيلگي په توگه د  $aN = a'N$  لپاره ښوول کيدی شي، چي له  $abN = a'b'N$  لاس ته راځي. دا کيدی شي، چي د نورما پرويشوني شرايطو سره ساده وشميرل شي. دلته ويل کيږي، چي  $\Theta_N$  او . يوله بل سره زغمور دي. همداسی په ټوليزه توگه تعريفیږي:

۵ . ۳ . ۱۱ تعريف:  $A$  دې يو ډيري وي او  $\Theta \in \text{Eq } A$

او  $f \in \text{Op}_n(A)$ . نو  $\Theta$  او  $f$  زغمور بلل کيږي، که د

ټول  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$  لپاره

د  $a_1 \Theta b_1, \dots, a_n \Theta b_n$  سره تل

$$f(a_1, \dots, a_n) \Theta f(b_1, \dots, b_n)$$

باور ولري.  $\Theta \in \text{Eq } A$  په الجبر  $A = (A, F)$  يو کونگرو-

اينځ اړيکه بلل کيږي، که  $\Theta$  د ټولو  $f$  سره زغمور وي.

پہ  $A$  د ٲولو کونگورنٹش اړیکو ډیکو په  $\text{Con } A$  سره په  
نخنه کیري یا نخنوون کیري.  
( انگریزي  $\text{Kongroenzrelation} = \text{congruence relation}$  )

### ۵ . ۳ . ۱۲ بیلگی

الف ) په هر ډیري  $A$  باندي ثابتی عملی یا کارونی  
 $f_c : A^n \rightarrow A, f(x_1, \dots, x_n) = c$  او  $\text{id}_A$  کټمت ٲیرونی  
د ٲولو  $\text{Con } A \in \Theta$  سره زغمور دي. له دي امله د  
پریوستونٲیرونی ( المانی او انگریزي  
يا  $\text{Projektionsabbildung}$  or  $\text{projections mapping}$  )  
-عملی باور لري:

$$p_i : A^n \rightarrow A, p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$$

یا دونه : دي ته بیا گوته نیسم، چی دا پورته ډول ٲیرونه د  
پریوستونٲیرونی  $\text{Projektionsabbildung}$  تعریف دی.

ب ) د ٲولو الجبرونو  $(A, F)$  لپاره  $\Delta_A, \nabla_A \in \text{Con } A$  باور  
لري. یو الجبر  $(A, F)$ ، کوم چی د  $\Delta_A$  او  $\nabla_A$  ٲخه بل کونگر-  
واینٲ اړیکه ونه لري ساده بلل کیري، د بیلگی په توگه د هر  
ډیري  $A$  لپاره الجبر  $(A, \text{Op}(A))$  ساده دی:

$$\text{Con}(A, \text{Op}(A)) = \{ \Delta_A, \nabla_A \}$$

پ ( باور لري

$$\text{Con}(A, \emptyset) = \text{Eq } A$$

كیدی شي ، چي گونگرواينځ اړيكي، د زغمووالی له لاري،  
د ځانگړو يوځایزو عمليو سره کرکتریزه شي:

۵ . ۳ . ۱۳ تعريف :  $(A, F)$  دې يو الجبر وي. يوه څيرونه

د بنی

$$x \rightarrow f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

د  $f \in F$  ( $n$ - ځایز) او  $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in A$  سره

د  $(A, F)$  يو ترانسلاشن Translation بلل کيږي.

۵ . ۳ . ۱۴ جمله: د هر الجبر  $(A, F)$  لپاره باور لري:

$\theta \in \text{Eq } A$  ټيک او ټيک هلته په  $f(A, F)$  باندې يو  
گونگرواينځ اړيکه ده، که  $\theta$  د  $(A, F)$  د ټولو ترانسلا-  
يشنونو سره زغموړ وي.

اوبی : دا چي هر  $\theta \in \text{Con}(A, F)$  د ټولو ترانسليشنونو  
سره زغموړ دی، دا سيده مخه لوستلود گونگرواينځ اړيکو  
څخه نه راځي. په څټ دې  $\theta \in \text{Eq } A$  د ټولو ترانسليشنونو  
سره زغموړ وي. دا بايد وښوول شي چي  $\theta$  د ټولو  $f \in F$  سره  
زغموړ دی.  $f$  دې يو  $n$ -ځایزه کارونه يا عملیه وي او باور  
دې ولري  $a_1 \theta b_1, \dots, a_n \theta b_n$ . دا چي هر د  $f$  څخه گټلی

ترانسلیشن د  $\Theta$  سره زغمور دی، نو لاس ته راځي

$$\begin{aligned} f(a_1, a_2, \dots, a_n) \Theta f(b_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \\ \Theta f(b_1, b_2, a_3, \dots, a_n) \\ \vdots \\ \Theta f(b, b, \dots, b) \end{aligned}$$

۵ . ۳ . ۱۵ تعریف :  $A$  دې یو الجبر وي، د تیپ  $f$  او  $\Theta \in \text{Con } A$  سره. په لاندې توگه تعریف شوی الجبر  $A / \Theta$  د الجبر  $A$  فاکتور الجبر Faktoralgebra نومبيري يا بلل کږي و کونگرواینځ  $\Theta$  پسې يا کونگرواینځ  $\Theta$  ته: د  $A / \Theta$  بنسټ-ډیری یی همدا فاکتورډیری  $A / \Theta$  دی، دا په دې مانا چی د  $\Theta$  د ټولو کونگرواینټټولگیو ډیری. د  $A / \Theta$  بنسټکارونی یا عملي د  $A$  له کارونویا اږیشنونو څخه لاس ته راوړل کیږی له

$$f_{A/\Theta} : (A / \Theta)^n \longrightarrow A / \Theta,$$

$$f_{A/\Theta} ([a_1]_\Theta, \dots, [a_n]_\Theta) = [f_A(a_1, \dots, a_n)]_\Theta$$

څخه. کارونی یا عملي  $f_{A/\Theta}$  په دې توگه کره تعریف دي:

$$\text{له } [a_1]_\Theta = [b_1]_\Theta, \dots, [a_n]_\Theta = [b_n]_\Theta \text{ څخه}$$

$$[f_A(a_1, \dots, a_n)]_\Theta = [f_A(b_1, \dots, b_n)]_\Theta$$

لاس ته راځي ( ټیک همدا د مخه تیر تعریف کی د وینا

د زغموالي خويونه دي).

الجبر  $(A/\Theta, |f_{A/\Theta} \in f)$  بیرته د تیپ یا ډول  $f$

دی. زیات وخت په ساده توګه داسی  $A = (A, F)$

او  $A/\Theta = (A/\Theta, F)$  لیکل کیږي.

هومومورفیزم د کونګرواینڅ اړیکو او فاکتور الجبر سره کلک

خپلوان دي یا کلک تړلي. دا به په لاندې کی وښوول شي.

۵ . ۳ . ۱۵ . تعریف :  $u : A \rightarrow B$  دې یوه څیرونه وي .

نو د  $u$  زری (المانی Kern) په لاندې توګه تعریف دی :

$$\text{Ker } u = \{ (a,b) \in A^2 \mid ua = ub \}$$

دا روښانه ده، چی د  $u$  زری تل په  $A$  باندې یو ایکویوالنڅ

اړیکه ده . په دې برسیره د الجبرونو لپاره باور لري:

۵ . ۳ . ۱۶ . جمله: د هر هومومورفیزم  $u : A \rightarrow B$  لپاره،

د  $u$  زری  $\text{Ker } u$  په  $A$  یو کونګرواینڅ اړیکه ده، دا په دې

مانا چی  $\text{Ker } u \in \text{Con } A$  باور لري:

اوبی:  $f$  دې د  $A$  یو  $n$ -ځایز بنسټیزه کارونه یا عملیه وي

او باور دې ولري

$$(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in \text{Ker } u$$

دا په دې مانا چې  $ua_1 = ub_1, \dots, ua_n = ub_n$  ، نو دا لاندې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} uf(a_1, \dots, a_n) &= f(ua_1, \dots, ua_n) \\ &= f(ub_1, \dots, ub_n) \\ &= uf(b_1, \dots, b_n) \end{aligned}$$

له دې لاس ته راځي

$$(f(a_1, \dots, a_n), f(b_1, \dots, b_n)) \in \text{Ker } u$$

دا په دې مانا چې  $\text{Kern } u$  يا د  $u$  زری د ټولو بنسټيزو کارونو يا عميليو سره زغمور دی. څ چ بن و د دې په څټ د گونگرویش اړیکو څخه تل هومومورفیزمونه لاس ته راځي:

۵ . ۳ . ۱۷ . تعریف:  $A$  دې یو ډیری وي او  $\Theta \in \text{Eq } A$  .

نو

$$P_\Theta : A \rightarrow A / \Theta, P_\Theta(x) = [x]_\Theta$$

د  $\Theta$  کانوني څیرونه  $\text{kanonische Abbildung}$  بلل کیږي.

۵ . ۳ . ۱۸ . جمله:  $A$  دې یو الجبر وي او  $\Theta \in \text{Con } A$  .

نو کانوني څیرونه  $P_\Theta$  یو سورجیکتو هومومورفیزم:

$$P_\Theta : A \rightarrow A / \Theta$$

دی. (د  $\Theta$  کانونی هومومورفیزم). باور لري: د  $P_\Theta$  زری  
یعنی  $\text{Kern } P_\Theta = \Theta$ .

د مخ ته تیرې جملي ویناوې ساده بشوول کیري. په ټو-  
لیزه توگه له مخ ته تیرو دوه جملو څخه لاس ته راځي:  
لاس ته راوړنه: په الجبر  $A$  باندې کونگرواینڅ اړیکې  
ټیک د هومومورفیزم زری دي د  $A$  پیل سره.

۵ . ۳ . ۲۰ بیلگه:  $\Theta$  دې د گروپ  $Z_6 = (Z_6, +, -, 0)$

یوه کونگرواینڅ اړیکه وي، د کونگرواینڅ ټولگيو

$\{0,3\}$ ،  $\{1,4\}$ ،  $\{2,5\}$  سره.

نو  $Z_6 / \Theta = (Z_6 / \Theta, +, -, 0)$  د  $\{0,3\}$ ،  $\{1,4\}$ ،  $\{2,5\}$

او  $\Theta = \{0, 3\}$  سره. په څرگند ډول باور لري  $Z_6 / \Theta = Z_3$ ،

چیرته چی  $Z_3$  څیوکلیکي یا بیرته راگرزیدونکی گروپ دی

د درې توکو سره. (ورپسی څیره دې وکتل شي)

$$\begin{array}{c} Z_6 \\ \text{mit } \Theta \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 3 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\pi_\Theta} \begin{array}{|c|} \hline \circ \{0,3\} \\ \hline \circ \{1,4\} \\ \hline \circ \{2,5\} \\ \hline \end{array} Z_6 / \Theta$$

څیره ۲۸

طبعاً د یوه الجبر کونگرواینڅ اړیکې، لکه لاندې الجبرونو  
ته ورته، یو تړون یا لاتیسن جوړوي. د دې د کتلو لپاره دا  
لاندې لاس ته راوړني ته اړیو:

۵ . ۳ . ۲۱ جمله:  $A$  دې یو الجبر وي او  $R$  دې د  $\text{Con } A$

یو ناتش برخدیری وي. نو باور لري

$$\bigcap R \in \text{Con } A$$

اوبی یا ثبوت:  $f$  دې د  $A$  یو  $n$ -خایزه بنسټیزه کارونه یا

عملیه وي، او وې دې:  $R \in (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ ، نو باور

لري:  $\Theta \in (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$  او له دې امله

$$f(a_1, \dots, a_n) \Theta f(b_1, \dots, b_n)$$

د ټولو  $\Theta \in R$  لپاره. له دې امله باور لري

$$f(a_1, \dots, a_n) R f(b_1, \dots, b_n) \text{ پای}$$

په دې پسی به وښوول شي چی د  $\text{Con } A$   $\Theta, \Psi$  لپاره

تل  $\Theta, \Psi \in \text{Con } A$  او  $\Theta \vee \Psi \in \text{Con } A$  باور لري،

د  $\wedge$  او  $\vee$  سره لکه د مخه مو، چی وښوول.

په نورو ټکو یا کلیمو سره په  $\Theta$  او  $\Psi$  کی غټ خوندي

اکویوالنځ اړیکې او کوچنی  $\Theta$  او  $\Psi$  خوندي لرلي ایکو-

یوالنځ اړیکې دواړه اوتوماتیک کونکرواینځ اړیکې دي.

په داسی حال کي چی  $\Theta \wedge \Psi \in \text{Con } A$  په دې د مخه

جمله پسی ټرلی لاس ته راځي د  $\text{Con } A$   $\Theta \vee \Psi$  بڼونه

په لاندې ډول سرته رسیدلي شي:

داچی  $\Theta \vee \Psi \in \text{Eq } A$  روښانه ده نو لکه د مخه مو، چی

ښوولی، بسیا کوي چی د  $\Theta \vee \Psi$  زغموالی د  $A = (A, F)$

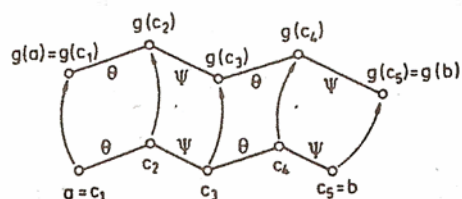
ترانسلیشن سره وښوول شي. وي دې  $\Theta \vee \Psi \in (a, b)$

او  $g(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$  یو ترانسلیشن د  $f \in F$

او  $a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n \in A$  سره.



نو  $(g(a), g(b)) \in \Theta$  د ثبوت دی. جمله د  
 توکوي  $c_1, \dots, c_n \in A$  موجودیت لاس ته راکوي  
 د  $a = c_1 \Theta c_2 \Theta c_3 \Theta c_4 \dots c_n = b_n$  سره. دا چي  $g$   
 د  $\Theta$  همدا ډول د  $\Psi$  سره زغمور ده، نو لاس ته راځي:  
 $g(a) = g(c_1) \Theta g(c_2) \Psi g(c_3) \Theta g(c_4) \dots g(c_n) = g(b_n)$   
 له کومې چي د  $10.20$  پسي  $(g(a), g(b)) \in \Theta \Psi$  ورکوي،  
 لکه څنگه چي د غوښتلو وو ( دا پسي څيره دي وکتل شي ).



څيره

دا پورته راوړلي فکرونه کيدی شي چي په لاندې ډول  
 راټول شي:

۳۵ . ۲۱ جمله: د هر الجبر A لپاره  $(v, 8, A \text{ Con})$

د  $(v, 8, A \text{ Eq})$  يو لاندې الجبر دی. په ځانگړي توگه

$(v, 8, A \text{ Con})$  يو تړون يا فرباند دی ( د A کونگرو-

اينخفرباند يا کونگرواينځ تړون )

د دې جملې له مخه تيرې جملې څخه تړلی لاس ته راوړنه

لاندې هم ده:

۳۵ . ۲۲ جمله: د هر الجبر A او هر برخه پيري

$X \subseteq A^2$  لپاره

$$\Theta(X) = \bigcap \{ \Theta \in \text{Con } A \mid \Theta \supseteq X \}$$

یو کونگرواینځ اړیکه په  $A$  ده، دا په دې مانا چې  $\Theta(X) \in \text{Con } A$ . په ښکاره ډول  $\Theta(X)$  په  $A$  باندې کوچنی کونگرواینځ اړیکه ده، چې  $X$  خوندي لري. دلته  $\Theta(X)$  هغه د  $X$  څخه جوړه شوې یا تولید کونگرو-اینځ اړیکه بلل کیږي. د پایډیري  $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$  لپاره زیات وخت داسې لیکل کیږي  $\Theta((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n))$  د  $\Theta(X)$  په ځای. د  $Y \subseteq A$  لپاره په زیات وخت کې په ساده توګه د  $\Theta(Y^2)$  اود  $\Theta(a_1, \dots, a_n)$  په ځای  $\Theta(Y)$  لیکل کیږي، که  $Y = \{a_1, \dots, a_n\}$  وي. د  $\Theta(a, b)$  ښی کوانگرواینځ اړیکې د  $a = b$  سره اصلي کوانگرواینځ بلل کیږي. لکه په لاندې الجبرونو کې، دمخه دې وکتل شي، کیدی شي، چې له  $X$  و  $\Theta(X)$  ته تلونکی تولیدي پروسې په روښانه ډول تشریح کړای شي یا روښانه شي. د په ساده توګه داسې کیږي، چې کونگرواینځ اړیکې دلاندې الجبر-ونو د بنسټډیري په څیر تشریح کړای شي:  $A$  دې یو الجبر وي د تیپ  $f$  د بنسټډیري  $A$  سره. د نوي الجبر بنسټډیري  $A^2$  دی. د هر  $n$ -ځایزې عملي سومبول  $f \in f$  همدا سې یو  $n$ -ځایزه عملیه  $f_2$  په  $A^2$  تعریفوي د

$$f_2((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) = (f_A(x_1, \dots, x_n), f_A(y_1, \dots, y_n))$$

سره.

بیا د هر  $a \in A$  لپاره توکی  $(a, a)$  د صفرځایزې عمليې په څیر ورزیاتیږي، په دې برسیره د

$$s((x,y)) = (y,x)$$

سره یوه یوځایزه عملیه تعریفیږي او بالاخره په لاندې توگه تعریف شوې دوه ځایزه عملیه:

$$t((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (x_1,y_2) \text{ وي } y_1 = x_2$$

په بله توگه  $(x_1,y_1)$

د فامیل  $F$  سره، چی له عملیو

$$f_2 (f \in f), (a,a) (a \in A), s, t$$

څخه جوړ وي، هغه غوښتونکی الجبر لاس ته راځي.

( ښوونه دې د کورکار وي )

۵ . ۳ . ۲۳ جمله: د هر الجبر  $A$  لپاره باور لري

$$\text{Con } A = \text{Sub} ( A^2, F_{\text{Con}} )$$

دا په دې مانا، چی په  $A$  باندې کونگرواینڅ ټیک

د  $( A^2, F_{\text{Con}} )$  لاندې الجبرونو بنسټیږي دي.

کیدي شي، چی سیده په کونگرواینڅ اړیکو وکارول شي

یا استعمال شي. ځکه چی باور لري  $\langle X \rangle = \Theta(X)$ ، د کوم

سره، چی  $\langle X \rangle$  کوچنی  $X$  خوندي لرونکی د  $( A^2, F )$

لاندې الجبر په نڅښه کوي. د  $\Theta(X)$  یو بل جوړځایزه

روښانونه به په جمله کی ورکړ شوې وي، چیرته چی د

پولینوم کلیمه په واک کی لرو. یوه بله د گونگرواینڅ اړیکو

او لاندې الجبرونو ترمنځ اړوندونه په لاندې جمله کی روښانه

شوې ده، چی ښوونه یی بیا هم گرانو لوستونکو ته پاتی ده.

د دې له مخه یو بل تعریف: د هر ډیري  $A$  دې  $\Theta \in \text{Eq } A$

او  $X \subseteq A$  لٲاره ڊي وي

$$[X] = \bigcup_{x \in X} [x]_{\Theta}$$

ڊا ٲه ڊي مانا چي  $[X]_{\Theta}$  ڊ هغو ايڪويوانٽ اٲريڪوٽ  $\Theta$  ٲولنه ڊه، ڪوم چي يو  $x \in X$  خونڊي ولري.

٥ . ٣ . ٢٤ جمله : وي ڊي  $A$  يو الجبر،  $\Theta \in \text{Con}A$ ،

او  $B \in \text{Sub } A$  . نو باور لري

$$[B]_{\Theta} \in \text{Sub } A.$$

عمومي الجبر ٲيٲ او ڊاسي نور لانڊي الجبر

## ۶ تروني Verband ( lattice)

### ۶. ۱ تروني او مکمل يا پوره تروني

: گروپ تيورې او کړې تيورې ترمنځ غبرگوالی نورې تيورې،  
 په ځانگړي توگه د تروني تيوري رامنځ ته کړه يا راپورته کړه.  
 دا له دې لاندې څخه لاس ته راغله: د يوه گروپ لاندې پکرو-  
 بونه او هم د گروپ نورمالپرويشوني او په همدې توگه د  
 يوې په خوښه کړې ټولو لاندې پکړې او يا ټول ( دوه اړخيزو،  
 کين اړخيز، بني اړخيز) ايديالونه نسبت د ډيرې تيوري  
 خوندیونې ته-چې نيممنظم يا نيمترتيب دي-هله دا نيممنظم  
 يو څو بنسټيز خوښه لري.

### ۶. ۱. ۱ تعريف: يوه نيمترتيب ډيرې S تروني بلل

کيږي، که هغه دا لاندې دوه خوښه ولري:  
 الف ۱. د توکو  $a, b \in S$  هرو جوړو لپاره په S کې يو داسې  
 توکی  $c = a \cap b$  شته. چې د a او b غوڅي بلل کيږي، د  
 کومو لپاره چې

$$c \leq a, c \leq b$$

باور لري، که یو بل توکی  $c'$  موجود وي، چی هغه همدا شرطونه  $b \leq c'$ ،  $a \leq c'$  پوره کړي، نو  $c' \leq c$  دی. الف ۲) د توکو  $a, b \in S$  هرې جوړې ته په  $S$  کې یو توکی  $d$ ، چی  $a$  او  $b$  ټولنه بلل کېږي، شته، دکوم لپاره چی

$$d \geq a, d \geq b$$

باور لري، او هر بل داسی توکی  $d'$  د  $d' \geq a, d' \geq b$  سره دا اړیکې  $d \geq d'$  پوره کوي.

په ښکاره توګه د دوه توکو  $a, b$  دا ټولونه  $a \cup b$  او غوڅی  $a \cap b$  له دې سره یواځني ټاکلي دي. دا هم په ښکاره توګه ساده لیدل کېږي، چی هر نیممنظم ډیږی، یوه تړون ته په څټې یا مخامخ ایزومورف ډیږي (یرتله برخه ۲) په همدې ډول یو تړون دی. په کومو کې چی کلیمی غوڅی او ټولنه یو بل ته دوه ایزې یا دوال Dual کلیمی دي. پس کیدی شی، چی د کوم ګروپ  $G$  د یوه لاندېګروپ له تړوني او همداسی د دې ګروپ  $G$  د نورمالپرویشوني له تړوني څخه وغیږو، او همداسی د یوې کړی  $R$  د لاندې کړیو تړون او همداسی د دې کړی  $R$  د ایدیال د تړونو څخه وغیږو، که دا ایدیالونه کین او ښي هم وي. په دې ټولو حالتونو کې د لاندېګروپونو (لاندېکړیو)  $A, B$  د غوڅی څخه د هغو ډیربټیوريکی غوڅی  $A \cap B$  پوهیږو، د ټولنی په څیر د دې لاندې ګروپونو (لاندېکړیو) څخه جوړ شوي لاندې-ګروپونه (په همدې ورته توګه لاندېکړی)  $\{A, B\}$ .  
په ټولیزه توګه کیدی شم، د یوه الجبر د لاندی الجبرونو.

تړون څخه وغږیږو. د تړون لپاره یوڅو نورې بېیلګې هم راوړو. د یوه ډیرې  $M$  ټول لاندې ډیرې نسبت د ډیریتوری خوند-پوښی ته یو تړونی جوړوي، په کومو کې چې غوڅي او ټولنی د ډیریتوری د موڅی یا هدف په څیر پوهیدل کیري، داد لاندې ډیري  $M$  تړون به ورپسی هم زیات وکارول شي.

۶ . ۱ . ۲ جمله: هر لایني منظم ډیری  $L$  یو تړون دی، او داد

$$a \cap b = a, a \cup b = b$$

سره د  $a, b \in L, a < b$  ( دې ته دلته بیا هم ګوته نیسم، چې دا په لاتین تورو لیکنه له کین لورلوستل کیري ) له امله. د پیدایښتي یا طبیعي ګڼونو ډیری یو تړون دی، که د نظم اړیکي د ویشوروالی اړیکي و نیول شي، د غوڅي رول دلته غټ ګډ پرویشونی لوبوي او د ټولنی رول کوچنی ګډ زیات-څله لوبوي. ( دا د غ. ګ. و او ک. ګ. ز. موضوعګانی څما د شمیرپوهنی په کتاب کی پوره څیرل شوې )

تړونونه د الجبر یو ځانګړی حالت دی. کیدی شي، چې تړون بي د نیمنظم له استعمال څخه، یواځي د خوینو له مخی تعریف کړی شي، چې غوڅي او تړون د بینار اړیکو په څیر باید ولري:

۶ . ۱ . ۳ جمله : ډیری  $S$  د دوه بینار یادوه ګونو اړیکو

$a \cap b$  او  $a \cup b$  سره هلته او هلته یا ټیک هلته یو تړون دی، که دا عملیې لاندې کټمټ اړیکي پوره کړي:



یا دونه: لوستونکی دې بیا هم ماته بخښنه وکړي، که دا ساده کلیمه بیا دلته کوته لکه کړم، چی دا هلته او هلته په دې مانا دی، چی که چیرې دا شرطونه پوره وي، نو دا یو تړون دی او په څت: که دا الجبر یو تړون وي، نو دا شرطونه پوره دی. دا په دې مانا، چی د یوه څخه بل لاس ته راځي او په څت

$$\Pi_1. \quad a \cap a = a, \quad a \cup a = a$$

$$\Pi_2. \quad a \cap b = b \cap a, \quad a \cup b = b \cup a$$

$$\Pi_3. \quad (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c),$$

$$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c):$$

$$\Pi_4. \quad a \cap (a \cup b) = a \cup (a \cap b) = a$$

مور لمری نیسو، چی یو تړون  $S$  ورکړ شوی دی، عملیې  $a \cap b$  او  $a \cup b$  د الف او الف ۲ لاندې تعریف شوي دي یا پیژندلای شوي دي. د  $\Pi_1$  او  $\Pi_2$  باوري کیدنه بیا روښانه ده. مور اوس خوي  $\Pi_3$  ازمایو او دا د غوڅي لپاره. له لمری ۱ څخه لاس ته راځي:

$$(a \cap b) \cap c \leq a \cap b \leq a.$$

$$(a \cap b) \cap c \leq a \cap b \leq b,$$

$$(a \cap b) \cap c \leq c$$

همداسی لکه د لمری ۱ پسی

$$(a \cap b) \cap c < b \cap c.$$

$$(a \cap b) \cap c < a \cap (b \cap c)$$

لاس ته راځي. په برابره یا همدې توگه دی

$$a \cap (b \cap c) < (a \cap b) \cap c$$



له دې سره  $\Pi_3$  باوري کيږ.

ورپسې بيا د لمړي ۱ پسي روښانه دي

$$a \cap (a \cup b) < a;$$

په همدې توگه له بلې خوا  $a < a \cup b$  باور لري او د لمړي ۲

له امله  $a < a \cup b$ ، پس د لمړي ۱ پسي دي

$$a < a \cap (a \cup b)$$

له دې څخه د  $\Pi_2$  باوري کيدنه لاس ته راځي.

اوس دې يو ډيري  $S$  د دوه بينار يا دوه گونو اړيکو سره ورکړ

شوي وي، کوم چي خويونه  $\Pi_1$  او  $\Pi_4$  لري. د  $a, b \in S$

لپاره خويونه

$$a \cap b = a, a \cup b = b \quad (1)$$

تل سملاسي پوره دي يا پوره نه دي. که  $a \cap b = a$  وي نو

له  $\Pi_4$  او  $\Pi_2$  څخه

$$(a \cup b) = (a \cap b) \cup b = b$$

لاس ته راځي.

که د دې په څې  $a \cup b = b$  وي، نو  $\Pi_4$  پسي لرو

$$a \cap b = a \cap (a \cup b) = a$$

که د اتوکو  $a$  او  $b$  لپاره مساوات (۱) باور ولري،

نو کيږدو  $a \leq b$ . له دې سره په ډيري  $S$  کي يو نيمنظم

پلي کيږي. په رښتوني  $a \leq a$  د  $\Pi_1$  په بنسټ دي.

که په دې ورزيات  $a \leq b$  او  $b \leq c$  باور ولري، يعنې

$$a \cap b = a, b \cup c = b,$$

نو د  $\Pi_3$  سره سم لاس ته راځي:

$$a \cap c = (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b = a$$

دا په دې مانا، چې  $a \leq c$ . بالاخره دی:  $a \leq b$ ,  $b \leq a$ .  
 په  $a \cap b = a$ ,  $b \cap a = b$  بیا لاس ته راځي.  $a = b$  راځي.  
 پسی تړلی د لمړي ۱ شرط باورېوالی يا باوریتوب ښایو. له  
 $(a \cap b) \cap a = a \cap (a \cap b) = (a \cap a) \cap b = a \cap b$   
 څخه لاس ته راځي  $a \cap b \leq a$ ، په ورته توگه کیدی شي  
 $a \cap b \leq b$  وښوول شي.

د دې په څېر په  $S$  کې دې یو په خوښه توکی  $c'$  ټاکلی وي،  
 کوم چې شرطونه  $c' \leq a$ ,  $c' \leq b$  دا په دې مانا چې

$$c' \cap a = c', \quad c' \cap b = c'$$

پوره کوي، نو باور لري

$$c' \cap (a \cap b) = (c' \cap a) \cap b = c' \cap b = c'$$

له کوم چې  $c' \leq a \cap b$  لاس ته راځي. دا توکی  $a \cap b$  په  
 تعقیب د توکو  $a$  او  $b$  غوڅی د لمړي ۱ په موخه يا هدف  
 انځوروي. په ټيک دې سره سمه توگه توکی  $a \cup b$  ښوول  
 کیدی شي، چې د توکو  $a$  او  $b$  ټولنه ده، د لمړي ۲ په  
 موخه يا هدف.

څمور د تړون د کلیمې دوم تعریف په گوته کوي، چې تړون  
 د ټولیز الجبر پریمیتيو ټولگي يا ساده ټولگی جوړوي، د  
 دې دوه دوه ځایزو عملیو سره (دا مو د مخه په گوته کړي  
 وو، چې ساده ټولگی څه ته وايي)

دا د تړون د کلیمې هغه زری دی، څنگه چې دا د لاندې  
 تړونو او ایزومورفو څیرونو او د تړونونو د خونديونو لپاره  
 په پام کې نیول کېږي.

۶ . ۱ . ۴ تعريف : يو د تړون  $S$  لاندې ډيری  $T$  لاندې تړون بلل کيږي، که دا د  $M$  ته تعريف شوې، د الجبر په موخې راوړل شوي تړون، يو لاندې الجبر انځور کړي. د نورو ټکو سره يا کليمو سره يا په بل ډول  $T$  د هرو دوه توکو  $a$  او  $b$  غوڅی  $a \wedge b$  او د هغو توکو ټولنه  $a \cup b$  خوندي لري، نسبت و هغو عمليو ته چې په تړون  $S$  کې تعريف شوي دي، چې  $T$  پخپله يو تړون شي و هغو عمليو ته چې په  $S$  کې تعريف شوي وي.

دې ته دې پام وي، چې د يوه تړون  $S$  يو لاندې ډيری  $T$  نسبت په  $S$  کې تعريف شوي نيمنظم ته چې هغه په کې هم باور و لري، بنسول کيدی شي، مگر دا ضرور نه ده يا په نورو کليمو، تل داسی نه ده، چې دا دې يو لاندې تړون جوړ کړي. د گروپ  $G$  د ټولولاندې گروپونو تړون د ډيريتيوري له مخي نظم راوستی شي، خو دا تړون د گروپ  $G$  د ټولو لاندې ډيريو تړون لاندې تړون نه انځوروي، ځکه چې ټولنه په دواړو تړونونو کې مختلفي ماناوې لري. په همدې توگه د يوې کړی  $R$  د لاندې کړيو تړون هم همداسی دی، چې په ټوليزه توگه دکړی د زياتونو گروپ لاندې گروپونه تړون نه جوړوي.

۶ . ۱ . ۵ جمله : د يوه گروپ  $G$  د نورمالپرويشونو تړون د زياتونو گروپ  $G$  د ټولولاندې گروپونو لاندې تړون نه دی، چې دا مو د مخه د گروپ تيوري کې بنسولي دی.

۶ . ۱ . ۶ تعریف: د یوه ترونې  $S$  را په څنګیدونکې یواځنی څیرونه یا په بل عبارت یو اینجکتیوډ څیرونه  $u$  په ترون  $S$  باندې یوه ایزومورفیه څیرونه ده یا په بل عبارت یوه ایزومورفیه څوندیونه ده د  $S$  په  $S$  کې، که د په خوښه توکو  $a, b \in S$  لپاره

$$(a \cup b) u = au \cup bu \quad (a \cap b) u = au \cap bu$$

باور ولري

یادونه: د  $u$  لپاره په کتابونو کې زیات وخت یوناني توري ځای په ځای کېږي، مګر زه دا ستونځې لرم، چې یوناني توري می په پروګرام کې نه شته. هیله ده چې څیرونې او د یوه ډیری توکی توپیر ته به د گرانو لوستونکو پم وي ( دا د  $S$  او  $S'$  یو ایزومورفیزم دی، چې د ټولیز انجبر په څیر راوړل شوي ترونې یې یو له بل سره نري.

۶ . ۱ . ۷ جمله: د یوه ترونې  $S$  ایزومورف څوندیونه

$u$  په ترون  $S$  کې، د نیممنظم ډیریو په موخه یا هدف د ډیری  $S$  په ډیری  $S$  کې یو ایزومورفیزم انځوروي.

اوبی: د اوبیونې لپاره ټاکو  $a, b \in S$ ، که  $a < b$  وي

یعنی  $a \cap b = a$ ، نو وپه نرو

$$(a \cap b) u = au \cap bu = au$$

او له دې امله لاس ته راځي  $au < bu$ ، که دا پام په څنګه یا په برعکس لور وګورو او وکاروو، چې  $u$  یو یواځنی په څنګیدونکې دی، نو له  $au < bu$  څخه هم  $a < b$  لاس

ته راځي.

دا پورته بیلګی را ته ښایي، چی په خت ثابتونه باورنه لري. د دوه ډیریو S او S' لپاره، چی نیممنظمي دي، یو ایزو-مورف څیروني u ته د S په S' کی، هلته اړتیا یا ضرورت شته، چی S او S' دواړه تړونونه وي. دا د S ایزومورفی څیرونی کی په S' باندې بل ډول ځانونه نیسي.

۶.۱.۸ جمله: که تړونونه S او S' ورګر شوي وي،

نو د نیم نظم په موخه هر ایزومورف څیرونه د S په S' باندې تړون S ایزومورف په تړون S' باندې انځوروي.

اوبی: په ریښتیني د  $a, b \in S$  سره له  $a \wedge b \leq a$

څخه هم  $(a \wedge b)u \leq au$  او په همدې توګه

$$(a \wedge b)u \leq bu$$

که  $c' \in S$  داسی وي، چی  $c' \leq au$  او  $c' \leq bu$  باور

ولري، او c د S هغه توکی وي، د کوم لپاره چی

$cu = c'$  دی، نو لاس ته راځي  $c \leq a$  او  $c \leq b$  دا

په دې مانا چی  $c \leq a \wedge b$  له کوم څخه چی

$cu < (a \wedge b)u$  لاس ته راځي. له دې سره سم

لاس ته راځي

$$(a \wedge b)u = au \wedge bu$$

د ټولنی لپاره یی ښوونه یا اویښونه په همدې توګه ده. مور

دا هم په پام کی نیسو، چی په تړونونو باندې د هومورفیزم

اوتولی هغه کیلمی چی په خوښه، د ټولیزالجبرونو په ساده

يا پريميتو ټولگيو کارول کيږي، کارولي شو. (دلته نورې بيلگي هم شته خو هغه موضوعگانې مور نه دې څيړلې، له دې امله يې نورې زه هم دلته نه گوته لکې کوم) د تيرو بينار اړيکو په بنسټ (لمړۍ برخه دې وکتل شي)، په يوه ډيرې  $M$  باندې بينار اړيکې يو ترونې جوړوي، کوم چې د  $M \times M$  ډيري د ټولو لاندې ډيريو سره پريوځي، يا برابر دی. په همدې توگه په يوه ډيري  $M$  باندې تعريف شوي ايکويوالنت اړيکي يو ترون جوړوي، لکه په برخه ۱ کې چې ښوول شوي دي. دا د ايکويوالنت اړيکو ترون د بينار اړيکو د ترون لاندې ترون نه دی.

۶ . ۱ . ۹ جمله: هر ترون په يوه ځانگړي ډيري باندې

تعريف شوي ايکويوالنت اړيکو ترون کې ايزومورف خوندي دی.

( Whitman, Bull.Amer. Math. Soc 52(1946), 507 - 522 )

۶ . ۱ . ۱۰ جمله: په يوه ورکړ شوي ډيري باندې

تعريف شوی ترون د يوه ټاکلې گروپ ټولو لاندېگروپونو

ترون کې ايزومورف خوندي دی.

( Brkhoff , Proc .Cambr.Phil.Soc 31(1935) , 433 - 454 )

له دې سره سم هر ترون د يوه ټاکلې گروپ ټولو لاندېگرو-

پونوترون کې ايزومورف خوندي دی.

ډير دا مخ ته راوړل شوي ترونونه - لکه د يوه ډيري  $M$  لاند-

ېډيريو ترون، د يوه گروپ  $G$  لاندېگروپونو ترون، د يوې

کړی  $R$  د ایډیالونو تړون، په یوه ډیری کی د ایکویوالنڅ-اړیکو تړون، - دا سی خوښه لري، د هغو غوڅی او ټولنه نه یواځی د دوه توکو لپاره بلکه د اسوخیاتیو قانون سره سم د زیاتو توکو لپاره روښانه یا تشریح شوی ده، بلکه د ناپای ډیرو ډیریو لپاره هم. په بل ډول افاده کوو، دا تړونونه دلاندی تعریف سره سم پوره تړونونه انځوروي:

۶ . ۱ . ۱۱ تعریف : یونیم منظمډیری  $S$  پوره تړون یا مکمل تړون بلل کیري، که په خوښه ناتش لاندیډیری  $A \subseteq S$  لپاره په  $S$  کی توکی  $c$  او  $d$  د لاندی ورکړشو خوښو سره سم موجود وي:

الف ۱ . د ټولو  $a \in A$  لپاره نامساوات  $c \leq a$  باور لري، هر ورپسی توکی  $c'$  د  $a \leq c'$  سره د ټولو  $a \in A$  لپاره شرطونه  $c' \leq c$  پوره کوي.

دوم ۲ - د ټول  $a \in A$  لپاره نامساوات  $d \geq a$  باور لري، هر ورپسی توکی  $d'$  د  $d' \geq a$  سره د ټولو  $a \in A$  لپاره شرطونه  $d' \geq d$  پوره کوي.

دا یواځنی ټاکلی توکی  $c$  او  $d$  د لاندیډیری  $A$  د توکو غوڅی او همداسی ټولنه بلل کیري. د سومبولونو سره کیدی، چی  $c$  او  $d$  په لاندی توگه انځور شي:

$$c = \bigcap_{a \in A} a, \quad d = \bigcup_{a \in A} a$$

۱.۱.۱.  $c \leq a, \quad d \geq a$



يا پيژند نخښه  $i$  يو ټاکلی پيژندډيري  $I$  کی وځغلي

يعنی  $i \in I$ ، په لاندې بڼه هم ليکل کيږي

$$c = \bigcap_{i \in I} a, \quad d = \bigcup_{i \in I} a$$

طبعاً يو پوره تړون يو تړون هم دی، په ورسره بلده موخه يا هدف.

۱. ۶. ۱۲. تعريف: د پوره تړون  $S$  د ټولو توکو غوڅی د

تړون صفرتوکی بلل کيږي او په سومبول  $0$  سره په نخښه

کيږي. دا توگی د لاندې درې شرطونو، هر يوه سره يوا-

ځنی ټاکل کيدی شي. د ټولو  $a \in S$  لپاره باور لري

$$1) \quad 0 \leq a; \quad 2) \quad 0 \cap a = 0; \quad 3) \quad 0 \cup a = a.$$

۱. ۶. ۱۳. تعريف: د يو پوره تړون د ټولو توکو

ټولنه د تړون يویتوکی بلل کيږي او د سومبول  $1$  سره په

نخښه کيږي. دا سي يویتوکی د لاندې دري په خوښه

شرطونو، له يوه څخه يواځنی ټاکلی دی: د ټولو

$a \in S$  لپاره باور لري

$$1) \quad 1 \geq a; \quad 2) \quad 1 \cup a = 1; \quad 3) \quad 1 \cap a = a$$

طبعاً هغه تړونونه چی پوره تړونونه نه دي کړی شي، چی

صفرتوکی او يویتوکی ( او يا يو له دوي څخه ) ولري.

د يوه گروپ  $G$  د لاندې گروپونو په تړون کی د هغه صفر

توکی يونلانديگروپ سره او يویتوکی یی پخپله د  $G$

سره انځور يږي، د يوې کړی د لاندېکړيو په تړون کی د

صفرتوکی د صفر لاندېکړی سره او پخپله د کړی  $R$



سره انځور يري، د يوه ډيري  $M$  ټولو لاندېډيريو ترون  
 کي د تشډيري او پخپله د ډيري  $M$  سره انځور يري.  
 د پرويشني قانون له مخي منظم يا تنظيم شوي د طبيعي  
 گڼونو ترون او د ځنځيرونو، چي پخپله طبيعي نظم يي  
 جوړوي، هر وار يي صفر توکي گڼي  $۱$  دي، په داسي حال  
 چي يويتوکي موجود نه دي.

۶ . ۱ . ۱۳ جمله: يو نيم منظم ډيري  $S$  هلته او هلته  
 يوترون دي، که هغه يو يويتوکي ولري او په هغي کي د  
 هرو، په خوښه ناتش لاندې ډيريو لپاره غوڅي موجود وي.  
 اوبى : د ښوونى لپاره بسيا کوي، که داسي فکر وکړو،  
 چي د يويتوکي د موجوديت او د د ټولو غوڅيو له موجو-  
 ديت څخه د ټولني موجوديت لاس ته راځي.  $A$  دې د  $S$   
 يو ناتش لاندېډيري وي. په  $S$  کي داسي توکي  $b$  موجود  
 دي د کوم لپاره چي  $b \geq a$  دي، د ټولو  $a \in A$  لپاره،  
 داسي يو توکي تل دا يويتوکي دي،  $B$  دي د ټولو داسي  
 توکو يو ناتش لاندېډيري وي او  $d$  دې د هغو غوڅي وي :

$$d = \bigcap_{b \in B} b$$

مور به سملاسي وښايو، چي  $d$  لاندېډيري  $A$  ټولنه  
 انځوروي. په ريښتيني سره  $b \leq a$  دي د ټولو  $a \in A$  لپاره  
 او د ټولو  $b \in B$ ، له دې امله  $a \leq d$  باور لري. ورپسي  
 دې  $s \in S$  داسي وي، چي  $s \geq a$  دي د ټولو  $a \in A$  لپاره دي.

له دې څخه  $s \in B$  لاس ته راځي او له دې سره  $d \leq s$ .  
په دې ډول دی

$$d = \bigcup_{a \in A} a$$

د یوه نیم منظم ډیري خویونه، چی یو پوره ترون (او یا هم یو ترون) وي، ځان په یوه په څت ایزو مورفیزم ته لانسودوي (د دې سره دې لمړۍ برخه پرتله شي)، مورز کړی شو، چی د همدا اوس بنسول شوو جملو څخه او د هغو د نیونو یا فرضیو څخه هم د صفر توکي موجودیت او د ټولو لاندې ډیريو موجودیت و غوښتل شو.

۶ . ۱ . ۱۴ تعریف: د یوه نیم منظم ډیري M څیرونه u

په نیم منظم ډیري N کی، په کوم کی چی له  $a, b \in M, a \leq b$  څخه تل  $au \leq bu$  لاسته اځي، مونوتون monoton بلل کیږي (مونوتون په دې مانا، چی توکی یو په بل پسې یا لویري او یا کوچني کیږي). یو ترون S هلته او هلته پوره ترون دی که د S په هر مونوتون څیرونې u په خپل ځان باندې فیکس توکی موجود وي، یعنی توکي، د کومو لپاره چی  $au = a$  دی

( Tarski , Pacif. J. Math.5 ( 1955) , 285 - 309 ;

David Ö Pacif. J . Math 5(1955) 311 - 319)

لکه د مخه تیرو درسونو چی وښول شو، هر نیم منظم ډیري M د ټولو لاندې ډیريو په پوره ترون M کی خوندي ده.

مورد غواړو چې دا لاندي جمله وښايو

۶ . ۱ . ۱۵ جمله : هر تړون کيدی شي ، چې په يو پوره تړون کی ايزومورف ( د تړونونو ايزومورفي په موخه، پرتله دمخه همدا برخه ) خوندي شي.

دا جمله د راتولنکي جملی څخه لاس ته راځي، چې نسبت و مخ ته تيره لمړی برخي کی وينا ته لير تيزه وينا د:

۶ . ۱ . ۱۶ جمله : هر نيم منظم ډيري M په يو ټاکلي تړون S کی ايزومورف خوندي دی، او دا په داسی توگه چې د هر لاندېډيري M لپاره و کوم ته چې په M کی غوڅی يا ټولنه موجود ده، چې دواړه د u په خونديونه کی و بل ته وړل کيږي: دا داسی بلل کيږي، چې دی

$$(\bigcap_{a \in A} a)u = \bigcap_{a \in A} au \quad , \quad (\bigcup_{a \in A} a)u = \bigcup_{a \in A} au \quad (2)$$

دا په برخه ۱ کې جوړ شوي د M خونديونه په M کی، په روښانه توگه مخ ته لرونکی شرطونو لپاره بسيانه کوي. مور په لاندي توگه مخ په وړاندي خو: لمړی نيسو چې ډيري M يو صفر توکی لري، که نه نو M ته يو توکی 0 صفر ورزياتوو.

۶ . ۱ . ۱۷ تعريف : يوناتش لانديډيري X M په M کی يو ايديال بولو که:

اول ( X و هر خط ته که x ته تا ته که v ه ل

د  $y \leq x$  سره.

دوم ( د هر  $X' \subseteq X$  لپاره، د کوم لپاره چی په  $M$  کی ټولنه موجود وي دا ټولنه په  $X$  کی هم موجود ده. د ډیری  $M$  د ټولو ایډیالونو ډیری  $S$  نسبت د ډیری تیوری خونديونی ته نیم منظم دی. دا چی  $S$  یو یویتوکی لري- په څرگند ډول  $M$  د خپل ځان ایډیال دی، له دې وراخواه ایډیالونو په خوښه ډیری غوڅی، چی صفر لري، او ټول د ایډیال په تیوری کی راغلي تعریفونه پوره کوي، نو ډیری  $S$  د په دې برخه کی د مخه لوستل شوو له مخی پوره ترون دی. د یوه په خوښه توکی  $a \in M$  لپاره د ټولو توکو  $b \in M$  ډیری  $(a)$  د  $b \leq a$  سره یو ایډیال انځوري، کوم چی د  $a$  څخه راجور یا تولید شوی اصلي ایډیال بلل کیږي. که هر توکی  $a \in M$  د هغه څخه راجور یا تولید ایډیال  $(a)$  باندې تنظیم شي، نو په لمړی برخه کی لوستل شوو له مخی یو ایزومورف خونديونه  $u$  د نیم تنظیم شویډیر  $M$ ، په پوره ترون  $S$  کی، لاس ته راځي.

مور. نو نیسو، چی په  $M$  کی د لاندېډیریو  $A \subseteq M$  د هغو غوڅی

$$c = \bigcap_{a \in A} a$$

موجود دی. پس لرو  $c \leq a$  او په دې پسی  $(a) \geq (c)$  د ټولو  $a \in A$  لپاره.

که بیا د ټولو اصلي ایډیالونو  $(a)$ ،  $a \in A$ ، د ډیری تیور-

يکي غوڅی توکی  $x$  ولري، نو  $x \leq a$  دی، د ټولو  $a \in A$  لپاره او له دې امله  $x \leq c$ . له دې سره باور لري

$$(c) = \bigcap_{a \in A} (a)$$

او له دې سره جوخت لمړی مساوات (۲) وښوول شو. همداسی دې و دې لاند ډیر  $A \subseteq M$  ته په  $M$  کی ټولنه

$$d = \bigcup_{a \in A} a$$

موجود وي. نو  $(d) \supseteq (a)$  دی د ټولو  $a \in A$  لپاره. که یو ټاکلی ایډیال  $X$  ټول  $a \in A$  ولري، نو په همدې توگه د دې ټولنه هم خوندي لري. په دې لاس ته راوړنی سره  $X \supseteq (d)$  دی.

له دې امله باور لري

$$(d) = \bigcup_{a \in A} (a)$$

په دې توگه مو د (۲) دوهم مساوات وښوول، او په له دې امله د جملی اوبی پوره شو.

۶ . ۱ . ۱۸ جمله: یو نیمتنظیم شوی ډیری  $S$  هلته

او هلته یو پوره ترون دی، کله چی په  $S$  کی یو صفر توکیموجود وي او هر ایډیال یو اصلي ایډیال وي. یا دونه: د دې جملی له ښوونی څخه هم دلته تیريرو. کیدی شی په کوروش یا خوروش کې وکتل، شه..



**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**