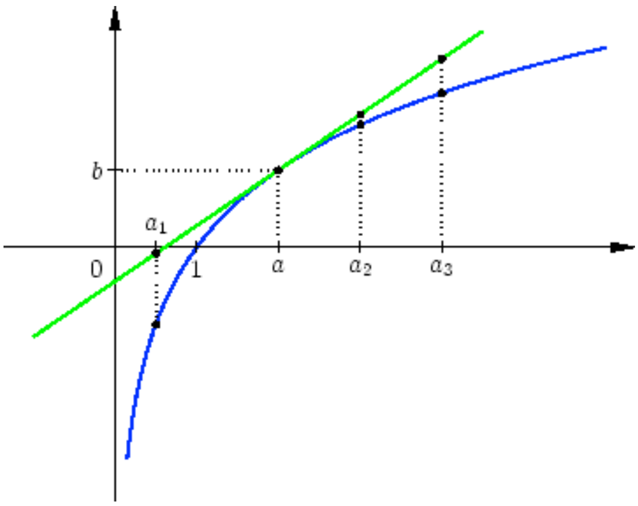
# فنکشنل انالیزې

**Funktionalanalysis**




Ketabton.com

ډاکتر ماخان میرېي شینواری

دلوي ښبنتن په نامه

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

## کتاب پېژندنه

د کتاب نوم: فنکشنتيوري

ليکونکی:

ژباړی : ډاکتر ماخان،، ميری،، شينواری

د خپريدو لړی .........................

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

د ژباړي برېښنا پته : smakhan1946@gmail.com

## چاپ چارې

## چاپ ته يې د هر چمتو هيوادوال مرسته په سترګو منل کيږي

.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

نيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library


متريکي فضاوې ١
د اويکليد يا اقليدس متريک ٢
د هامينګ واټن ٢
په متريکي فضاو کې پولې ته تلنه ٣
په متريکي فضا کې د کوشي پرلپسي(ترادف) ۴
د يوې متريکي فضا پوره- يا تکميلوالی ۴
نورم ۵
د يوې نورمي وکتور فضا متريک ۶
ايپسيلون- جال ٩
په متريکي فضاوو کې کومپاکت(سره نښتی) ١٠
په يوه ساحه باندې ناپرېکيدونکي توابع ١١
ازماېښتي توابع ١١
کمزوري يا ضعيف مشتقونه ١٢
توپولوژيکي وکتور فضاوې ١٣
د بانخ فضا ١۴
په يوه کومپاکت ډېريو باندې ناپرېکيدونکې توابع ١۴
په کومپاکت ډېريو باندې مشتقوړ توابع ١۴
**p** -انتيګرالوړ توابع ١۵
محدود توابع ١۶
د موزونو اريتميتيکي او هندسي منځ ترمنځ .. ١۶
د انتيګرالونو لپاره د هولدر نابرارونونه ١٨
د انتيګرال لپاره د مينکوفسکي ناوساوات ١٩
د سوبوليف فضاوې ٢١
د سوبوليو په کې خونديوني جمله ٢۵
د بانخ ځای په ځای ټکي جمله ٢٧

سکالار ضرب ٢٨
هيلبرت – فضا ٢٩

مربع جمعه کيدونکي پرلپسي ٣٠

مربع انتيګراوړ توابع ٣٠
د مربع انتيګرالوړ توابعو سوبوليف – فضا ٣٢
د هاردي-ليبسک فضا ٣٣
پوره اورتونورمالسيستم **٣۴**

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هیلبرت۰فضا کې فوری-پروجکشن (پرپوستون) ۳۴
په هیلبرت- فضا باندې د کونوکسو .... ۳۶
په هیلبرت-فضا کې اورتوګونال کومپلیمنت ۳۸
په هیلبرت-فضا کې د بیسل-نامساوات ۳۹
په هیلبرت- فضا کې د فوریر(فوریې) ودیزیینه ۴۰
په هیلبرت – فضا کې د پارزیوال-کټمټوالی ۴۱
ناپرېکیدونکي کربنیز فنکشنال ۴۲
د هان-بانخ د دوام( مخ ته بیونې) جمله ۴۵
دوال- یا دوه ګونې فضا ۴۸
بیدوالفضا ۵۰
د p - انتیګراوړ توابعو دوالفضا ۵۰
د ریسځ د انځورولو جمله ۵۱
کمزوري پولې ته تلنه ۵۳
محدود کربنیز اوپراتورونه ۵۵
انتیګرال اوپراتور ۵۵
د کربنیزو اوپراتورونو پولې ته تلنه ۵۷
برابرډوله پولې ته تلنه ۵۷
د برابر ډوله محدودوالي اصول ۵۷
د باناخ-شتاینهوز جلمه ۵۸
کومپاکت اوپراتورونه ۶۱
د وازو توابعو په هکله جمله ۶۳
د رابند یا بند ګراف جمله ۶۵
په هیلبرت-فضا کې د یوه کربنیز اوپراتور ماتریکس ۶۶
ادجونګیري اوپراتور ۶۹
یونیتار اوپراتور ۷۰
د یوه کربنیز اوپراتور آیګن ارزښتونه ۷۳
د هرمیتیکي اوپراتورونو آیګن ارزښتونه ۷۴
د یوه هرمیتیکي کومپاکت اوپراتور نورم ۷۵
د کومپاکت هرمیتیکي اوپراتورونو سپکترال آنځورون ۷۹
شتورم-لیوویل-پرابلم ۸۱
ګرندی لوېدونکی ازماېښت تابع ۸۴
تیمپیریري دیسریبوشنونه ۸۶
د تیمپریري دیستریبیوشنونو مشتق ۸۸
دیراک- او هیویزاید – فنکشنال ۸۹
اپروکسیمي کټمټوالی ۹۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګړندي لويدونکو توابعو د فوريې- ترانسفورميشن ۹۳
د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن د فوريې –ترانسفورميش ۹۴
د ماتو نظمونو د سوبوليف-فضاګانې ۹۶
ترانسليشنن اينواريانت اوپراتورونه ۹۹
د لاپلاس - اوپراتور بنستيزه اوبيونه( حل) ۱۰۲
د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې: ۱۰۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

# فنکشنل انليزې Fuktionalanalysis

## متريکي فضاوې

يوه ډېرى يا سټ $M$ متريکي بلل کيږي، که په $M$ باندې يو فنکشنواټن يا تابع واټن $d$ د لاندې خويونو سره تعريف وي:

M1 زياتيزوالى يا مثبتوالى $d(x,y) \geq 0$ او $d(x,y) = 0$ تيک هلته، که $x = y$ وي.

M2 سيومتري

$$d(x,y) = d(y,x)$$

M3 درېګودېز – يا مثلثاتي مساوات

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

د ټولو $x, y, z \in M$ لپاره.

تابع $d$ د $M$ متريک په حيث هم بلل کيږي.

د متريک له لارې په کانونيکي ډول په $M$ باندې يوه توپولوژي هم تعريفيږي. له

$$B(x_0; r) = \{x \in M : d(x, x_0) < r\}$$

سره په $x_0$ باندې يو واز غونداړى د وړانګې $r$ سره هم په نخښه کيږي. يوه برخه ډېرئ $U \subseteq M$ نو له دې امله وازه بلل کيږي، که هر يوه $x \in U$ ته يوه وړانګه $r > 0$ شتون ولري، داسې چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$B(x;r) \subseteq U$

دی.
ليکونکي: اٍپپ او هوليگ

## د اويکليد يا اقليدس متريک **Euklidische Metrik**

په $\mathbb{R}^n$ کې د اويکليد واټن

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$$

يو متريک دی.
مثبتوالی او سيومتري سملاسي ليدل کيږي او درپګوډي مساوات سيده د لاندې مينکوفسکي Minkowskischen نابرابرون څخه لاس ته راځي:

$d_2(x,y)$
$=$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |(x_k - z_k) + (z_k - y_k)|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k - \text{;}$$

ليکونکي: اپپ، هيوليگ

## د هامينګ واټن **Hamming-Abstand**

پای پرلپسي له 0 او 1 د کودکول په تيوري کې (دوه بيز- -Binär) لغاتونه بلل کيږي.

د دوه $n$ -ځايزو لغاتونو $x$ او $y$ د هيمينګ-واټن
$=$
د $k$ ګڼون يا تعداد د $x_k \neq y_k$ سره $= d_H(x,y)$
يو ماتريکس دی په $n$ -ځايزو بينارلغاتونو.
د بيلګې په توګه د $n = 3$ لپاره
$d(011,110) = 2$

او واز غونډاری $B(101;2)$ او $x = 101$ د وړانګې 2 سره توکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$001, \quad 111, \quad 100\,.$$

خوندي لري.
توکي چې له 101 په دوه ځايونو کې توپير لري، په دې پورې اړه نه لري، ځکه واټن بايد له دوه کوچنی وي.
مثبتوالی او سيمتري روښانه دي. د درېګوډي نامساوات د ورته واي تعريف څخه لاس ته راځي

$$d_H(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

او د مطلقه ارزښتونو

$$|x_j - z_j| = |x_j - y_j + y_j - z_j| \leq |x_j - y_j| + |y_j - z_j|\,.$$

لپاره د درېګوډي نامساوات.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

## په متريکي فضاو کې پولې ته تلنه

په متريکي فضا $M$ کې يوه پرلپسې $(x_n)$ پولې $x \in M$ ته تلونکي بلل کيږي، که دا لاندې باور ولري.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

توکی $x$ د $(x_n)$ پرلپسې پوله بلل کيږي او يوازينۍ ده.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

که $(x_n)$ د $x$ او $y$ په لور وهڅيږي، نو باور لري

$$d(x,y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y)$$

د ټول $n$ لپاره، او داچې

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y) = 0$$

دی، بايد

(c) ketabton.com: The Digital Library

$d(x,y)=0$

هم وي او له دې سره $x=y$ باور لري، داپه دې معنا چې پوله ارزښت يواځنی دی.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## په متريکي فضا کې کوشي- پرلپسي(ترادف)
**Cauchy-Folgen in metrischen Räumen**

په يوه متريکي فضا $M$ کې يوه پرلپسي $(x_n)$ کوشي – پرلپسي بلل کيږي، که د هر $r>0$ لپاره يوه پيژند نخښه يا ايندکس $n_0$ شتون ولري، داسې چې د ټول $m,n>n_0$ لپاره

$$d(x_m,x_n)<r$$

باور ولري. په ځانګړې توګه پولې ته تلونکي پرلپسي کوشي-پرلپسي ده.
که په يوه متريکي فضا $M$ کې هره کوشي-پرلپسي په $M$ کې يو پوله ارزښت لري، نو $M$ پوره يا مکمل بلل کيږي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په $M$ کې دې $(x_n)$ يوه پولې ته تلونکې پرلپسي وي د پولې ارزښت $x\in M$ سره. د هر $r>0$ لپاره يو ايندکس $n_0$ شتون لري، داسې چې د ټولو $n>n_0$ لپاره

$$d(x_n,x)<r/2$$

باور لري. نو د دريګوډي نامساوات له مخې بيا دا لاندې باور لري

$$d(x_m,x_n)\leq d(x_m,x)+d(x,x_n)<r/2+r/2=r$$

د ټول $m,n>n_0$ لپاره. د دې په تعقيب په $M$ کې هره پولې ته تلونکې پرلپسي کوشي – پرلپسي ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د يوې متريکي فضا پوره- يا تکميلوالی

که د يو متريکي فضا $M$ يو واټن تابع $d$ په يوه پورته ډېرئ $\widetilde{M} \supset M$ تعريف وي، کومه چې په $M$ کې د ټولو کوشي-پرلپسيو پوله رازښتونه خوندي ولري، نو پايونه $\overline{M} \subseteq \widetilde{M}$ نسبت و $d$ ته د $M$ پوره کيدونکې بلل کيږي.

په ټوله توګه کيدی شي د $M$ پوره کيدنه بې له په پورته -ډيرئ کې له خونديوني تعريف شي. له دې سره سرې $\overline{M}$ د پولې ته تلونکو پرلپسيو ورته ټولګي سره په نخښه کوي يا پيژني.
د ډېريو پوره کيدنه د ناپريکيدونکو توابعو په څيړنه کې غوره رول لوبوي.
خويونه، کوم چې په کې باور لري، کيدی شي د د پوله ارزښت-جوړونو له لارې $\overline{M}$ ته يووړل شي. بې ځانګړې توګه يو ناپريکيدونکی تابع همدا اوس په $M$ د هغه ارزښتونو له لارې يواځنی ټاکل شوی دی.
ليکونکي: ايپ، هيوليګ

## نورم Norm

په حقيقي يا کومپلکس وکتور فضا $V$ يو نورم يو تابع

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$

دی د لاندې خويونو سره:

- Positivität: مثبتوالی(زياتيزوالی)

$$\|v\| > 0 \quad د \quad v \neq 0 \quad لپاره$$

- Homogenität: هوموجينيتي

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

- Dreiecksungleichung: درېګوډيز- مثلثاتي نامساوات

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته $u, v$ په خوښه وکترونه دي او $\lambda$ یو په خوښه سکالار.

د یوه نورم په مرسته کیدی شي د

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

له لارې د دوه وکوترونو په منځ کې یو واټن تعریف شي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،هیورنر

## د یوې نورمي وکتور فضا متریک
## Metrik eines normierten Vektorraumes

په یوه وکتورفضا $V$ د یوه نورم $\|\cdot\|$ دواټنتابع یا واټنفنکشن

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

سره برابر دی. دا ځانګړی متریک دوه ورزیات خویونه لري:

- ترانسلیشن اینواریانځ یا د د خوژښت یا کښولو سره بې تغیري Translationsinvarianz

$$d(u + w, v + w) = d(u, v)$$

- Homogenitätهوموجینیتي

$$d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| d(u, v)$$

د ټولو $u, v, w \in V$ او سکالار $\lambda$ لپاره.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

### نیم نورم Halbnorm

په یوه حقیقي یا کومپلکس وکتور فضا $V$ باندې یو نیمنورم یو تابع
$p : V \to \mathbb{R}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی د لاندې خويونو سره:

HN1(HN د نيم نظم لپاره)

: ناکميزوالی يا نامنفيوالی:

$$p(v) \geq 0$$

HN2

:Homogenität هوموجينوالی

$$p(\lambda v) = |\lambda| p(v)$$

HN3

:Dreiecksungleichung درېګوډي يا مثلثي نابرابرون

$$p(u+v) \leq p(u) + p(v)$$

د ټولو $u, v \in V$ او $\lambda$ لپاره.

يو نيم نورم ټيک هلته يو نورم دی، کله چې $p(x) = 0$ فقط د $x = 0$ لپاره باور ولري.

د نيم نورم د تعريف لپاره وروستني دواړه خويونه بسيا کوي. ناکميزوالی کيدی شي له دوي لاس ته راوستل.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

له هوموجينيټي څخه سيده لاس ته راځي

$$p(0) = p(0 \cdot x) = 0p(x) = 0$$

او د درېګوډي نامساوات سره

$$0 = p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) =$$
$$= p(x) + |-1| p(x) = 2p(x) \,,$$

دا په دې معنا چې ناکميزوالی يا نامنفيوالی

$$p(x) \geq 0$$

دی، د ټولو $x \in V$ لپاره.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## متريک، چې د نيم نورم څخه رامنځ ته کيږي
**Metrik, induziert durch Halbnormen**

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه وکتور فضا $V$ د نیمنورم یوې پرلپسي $(p_k)$ لپاره

$$p_k(v) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \Longrightarrow v = 0$$

باور ولري، د ټول $v \in V$ لپاره، نو نیمنورم یو متریک منځ ته راوړي. د کانوني واټن تابع دا لاندې ده

$$d(u,v) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(u-v)}{1+p_k(u-v)} \, .$$

نسبت دې متریک ته پرلپسي $(v_n)$ ټیک هلته د $v$ په لور ځي یا هڅیږي، که

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

د ټولو $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور ولري.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د متریک د اکسیمونو څخه یواځې د درېګوټي نامساوات ساده نه دي. باور لري

$$\frac{p_k(u-w)}{1+p_k(u-w)} = 1 - \frac{1}{1+p_k(u-w)}$$

$$\leq 1 - \frac{1}{1+p_k(u-v)+p_k(v-w)}$$

$$\leq \frac{p_k(u-v)}{1+p_k(u-v)} + \frac{p_k(v-w)}{1+p_k(v-w)}$$

او له دې سره دی

$$\leq d(u,v) + d(v,w) \, . \, d(u,w)$$

د پولې ته تلنې لپاره لومړی نیسو، چې

$$\lim_{n\to\infty} d(v_n, v) = 0$$

باور لري او یو $k$ شتون لري، داسې چې

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور نه لري. له دې سره نو يو برخه پرلپسي $(v_{n_j})$ شتون لري چې د هغې لپاره تل
$$p_k(v_{n_j}-v) > \varepsilon > 0$$
باور لري او له دې امله
$$d(v_{n_j}, v) \geq 2^{-k}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$$
باور لري، کوم چې مخامخوالی يا تضاد دی.
له بله پلوه دې $\varepsilon > 0$ وي او باور دې ولري
$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$
د ټول $k$ لپاره. نو يو $k_0$ شتون لري، داسې چې
$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{p_k(v_n-v)}{1+p_k(v_n-v)} < \frac{\varepsilon}{2}$$
باور لري. پسې هم نسبت نيممتريک ته د پولې ته تلنې له امله لاس ته راځي، چې د $1$ او $k_0$ تر منځ دهر $k$ لپاره يو $n_k$ شتون لري، داسې چې د ټولو $n > n_k$ لپاره
$$p_k(v_n - v) < \frac{2^{k-1}}{k_0}\varepsilon$$
باور لري. که کيږدو
$$n_0 = \max_{k=1,\dots,k_0} n_k\,,$$
نو د ټولو $n > n_0$ لپاره باور لري
$$d(v_n, v) =$$
$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k}\frac{p_k(v_n-v)}{1+p_k(v_n-v)} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{p_k(v_n-v)}{1+p_k(v_n-v)}$$
$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k}\,\frac{2^{k-1}}{k_0}\,\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$
$<$

څه چې نسبت متريک ته پولې ته تلنه ښايي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایپسیلون- جال **Epsilon-Netz**

د یو متریکي فضا $M$ د یوې برخډېرئ $K$ لپاره یو $\varepsilon$ – جال یو پوښوونکی یا پټوونکی دی، چې د پاي ډېرو غونډارو
$B(x_1;\varepsilon),\ldots,B(x_n;\varepsilon)$

جوړ دی. دا مینیمال وړانګه $\varepsilon_n(K)$، چې د $n$ منځټکو $x_i$ په ښه یا اوپټیمال ټاکنې د $M$ پوښوونې ته بسیا کوي، د $\varepsilon$-اینتروپي $\varepsilon$-Entropie (فزیکي لویه چې د تودخئ پروسې خوزښتلور په نخښه کوي)بلل کیږي.

که یوه $K$ ته د ټولو $\varepsilon>0$ لپاره یو $\varepsilon$-جال شتون ولري، نو $K$ توتالي محدود یا رابند بلل کیږي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په متریکي فضاوو کې کومپاکت(سره نښتی) او نسبي کومپاکت ډېرئ

د یوه متریکي فضا $M$ کومپاکت برخه ډېرئ $K$ کیدی شي په درې ورته ډولونو خویونیز شي

لومړی: هره وازو ډطریو سره د $K$ پټه ونه یا پوښونه هر پای برخه پوښونه لري.

دویم : په $K$ کې هره پرلپسې یوه پولې ته ت لونکې برخه پرلپسې په $K$ کې لري.

دریم : $K$ توتالي محدوده او پوره ده.

په پام کې دې وي، چې په $\mathbb{R}^n$ کې باوري د کومپاکت ډېرئ کرکتریزه کونه په دریم کې محدودیت او رابندوالی په ګوته کوي.

د یوه متریکي فضا $M$ یوه برخډېرئ $R$ نسبي کومپاکت بلل کیږي، که د $\overline{R}$ رابندوالی یا راتړلوالی کومپاکت وي، یا دې ته ورته، که په $R$ کې هره پرلپسې یوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې ولري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه به د حقیقی اعدادو مختلفي برخډېرئ تر څیړنې لاندې ونیول شی.

لومړی : انتروال $[0,1]$ د $\mathbb{R}$ یو کومپاکت ( او له دې سره یو ن سبي کومپاکت) برخډېرئ ده، ځکه چې رابنده یا تړلې او محدوده ده.

دویم : انتروال $(0,1]$ د $\mathbb{R}$ کومپامت برخډېرئ نه ده، ځکه چې د بیلګې په توګه ، د، پرلپسې $1/n$ ، $n\in\mathbb{N}$ پوله خوندي نه لري. دا چې $\overline{(0,1]}=[0,1]$ دی، نو دا نیم

(c) ketabton.com: The Digital Library

واز انتروال نسبي کومپاکت دی. دريم: څلورم: انتروال $[0,\infty)$ د $\mathbb{R}$ کومپاکت برخډېرئ نه ده، ځکه چې په حقيقت کې د وازې ډېرئ $(n-1,n+1)$ ، $n\in\mathbb{N}_0$ ټخه پوښ کيږي، مګر دې ته يو پای برخه پوښونه شتون نه لري. له دې امله نيم ناپای انتروال هم نسبي کومپاکت نه دی، ځکه چې د بيلګې په توګه د طبيعي اعدادو پرلپسي $1,2,\dots$ پولې ته تلونکې برخه پرلپسي نه لري.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

## په يوه ساحه باندې ناپرېکيدونکي توابع **Stetige Funktionen auf einem Gebiet**

په $\mathbb{R}$ باندې د( حقيقي- يا کومپلکس ارزښتيزو) ناپريکيدونکو توابعو په فضا $C(\mathbb{R})$ د نيمنورم

$$|f|_{[-k,k]}=\max_{|x|\le k}|f(x)|$$

له لارې د لاندې سره يو متريک توليدوي

$$d(f,g)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\frac{|f-g|_{[-k,k]}}{1+|f-g|_{[-k,k]}}\ .$$

نسبت دې متريک ته پولې ته تلنه په خوښه کومپاکت انتروال باندې برابرډوله پولې ته تلنه په ګوته کوي. له دې سره پورهوالی لاس ته راځي، ځکه چې په برابرډوله پولې ته تلنې سره ناپرېکيدنه خوندي پاتې کيږي.
د توليزې ساحې $D\subseteq\mathbb{R}$ لپاره به ورته توګه مخ ته ځو. د انتروال $[-k,k]$ په ځای يوه دا ساحه جوړه وونکې د کومپاکتو ډېريو پرلپسي
$K_1\subset K_2\subset K_3\subset\cdots\subset D$
کارول کيږي يا استعماليږي.
د $C_0(D)$ سره په $D$ د ناپرېکيدونکو توابعو ډېرئ په نخښه کوو، د کومپاکت وړونکي(انتقال کوونکي) سره.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

## ازماېښتي توابع **Testfunktionen**

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}$ لپاره په $D$ باندې د ناپای ډېرواره مشتقوړ توابعو لپاره ساحه $C^\infty(D)$ ده.
د تابع لاندې فضا، چې د کومپاکت برخه ډېرئ $K \subset D$ د باندې برته ده ورکيږي، د $C_0^\infty(D)$ سره يا د ازماېښت توابعو $\mathcal{D}$ په نخښه کيږي. دا فضا چې له شوارڅ( Schwartz ) له خوا منځ ته راوستل شوې، په ټوته انتگرالمساواتو او ديستريبوتيو تيوري مطالعه کې غوره رول لوبوي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

## کمزوري يا ضعيف مشتقونه **Schwache Ableitung**

د ټوټه انتيګرال په مرسته کيدی شي کلاسيکي مشتقکليمې ټولنيزې شي. يو تابع

$$\partial^\alpha f, \quad \partial^\alpha = \prod_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\alpha_\nu}$$

يو په تعريف ورشو يا ساحه $D$ تعريف شوې تابع $f$ د کمزورې مشتق په نامه يادوو، که

$$\int_D \partial^\alpha f(x) g(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_D f(x) \partial^\alpha g(x)\, dx, \quad \forall g \in C_0^\infty(D),$$

د $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$، $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_n$ سره باور ولري. له دې سره و ړاندنيونه ده، چې د ازماېښت توابع $g$ لپاره دواړه انتيګرالونه شتون لري. د بيلګي په توګه دا حالت هلته رامنځ ته کيږي، که $f$ او $\partial^\alpha f$ په هر د $D$ په هر کومپامتبرخه ډېرئ مطلق انتيګرالوړ وي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

## توپولوژيکي وکتور فضاوې **Topologischer Vektorraum**

يو توپولوژيکي وکتروفضا $V$ يوه وکتور فضا ده، د وازو ډېريوو ياسټونو په يوه سيستم $\mathcal{U}$ باندې د لاندطخويونو سره ورکړل شوی يا روښانه شوی دی

T1
$\emptyset \in \mathcal{U}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

T2

$V \in \mathcal{U}$

T3

د هرو وازو ډېريو يا سټونو $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$

T4

د په خوښه وازو ډېريو $U_i \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}\,.$$

يوه وازه ډېرئ $U(v) \in \mathcal{U}$ د يوه ټكي $v \in V$ چاپيريال بلل كيږي، كه $v \in U(v)$ باور ولري.

د سرچينې يا پيل د چاپيريالونو $U_i(0)$ ډېرئ لوكال بنسټ $\mathcal{B}$ بلل كيږي، كه هر چاپيريال $U(0)$ د لوكال بنسټ يو توكى خوندي ولري

$$\exists_i : U_i(0) \subseteq U(0)\,.$$

داسې يو توپولوژيكي جوړښت كيدى شي د بيلګې په توګه د يوه متريک يا نورم له لارې كره وټاكل شي يا كره شي. دا يو پولې ته تلنكليمه راكوي. يوه پرلپسې $(v_n)$ ټيک هلته يوه كوښي پرلپسې ده، كه د ټولو $U_i(0) \in \mathcal{B}$ لپاره يو ايندكس $n_0$ داسې شتون ولري چې د ټولو $m, n > n_0$ لپاره

$v_m - v_n \in U_i(0)$ باور ولري.

كه $v_\infty$ د $(v_n)$ پوله ارزښت وي، نو د $v_\infty$ په هر چاپيريال $U$ كې د پرلپسې ټول

(c) ketabton.com: The Digital Library

غړي پراته دي تر د پای ډېرو غړو پورې يعنې پای ډېر غړي کيدی شي له دې چاپريال دباندې پراته وي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## د بانخ فضا Banach-Raum

يو نورمي وکتورفضا $V$ د بانخ فضا بلل کيږي، که د نورم له لارې منځ ته راغلي متريک پوره وي، دا په دې معنا چې که هره کوشي پرلپسې په $V$ کې يو پوله ارزښت ولري.

هر رابنده لاندې وکتور فضا $U \subset V$ هم د د بانخ فضا ده.
په ځانګړې توګه پای پراخيدونکې يا پای بعدي فضاوې نورمي وکتور فضاوې دي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## په يوه کومپاکت ډېريو باندې ناپرېکيدونکي توابع
## Stetige Funktionen auf einer kompakten Menge

د ناپرېکيدونکو( حقيقي- يا کومپلکس ارزښتيز) توابع په يوه کومپاکت برخه ډېريو $K \subseteq \mathbb{R}^n$ باندې فضا $C(K)$ بانخ فضا ده نسبت د

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|$$

له لارې تعريف شوي نورم ته. پوره کيدنه لاس ته راځي، ځکه چې برابرډوله پولې ته تلنه ساتلې پاتې کيږي.
د تعريف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په وازه يا نامحدود ډېرئ باندې ناپرېکيدونکې توابع بايد نه دی، ماکسيموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## په کومپاکت ډېريو باندې مشتقوړ توابع
## Differenzierbare Funktionen auf einer kompakten Menge

د $m$ -ځله ناپرېکيدونکو مشتقوړ توابعو )( حقيقي – يا کومپلکس ارزختيزې) فضا $C^m(K)$ په يوه کومپاکت برخه ډېرئ $K \subseteq \mathbb{R}^n$ نسبت و

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_{k,\infty} = \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$$

ته د تعریف شوي نورم یو باناخ-فضا ده. پوره والی لاس ته راځي، ځکه چې د ټوټه مشتقونو $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ، $\partial^\alpha f$ ناپرېکیدونکی مشتقوړ تابع، د برابر ډوله پولې ته تلنه ساتلې پاتې کیږي.

د تعریف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په وازه یا نامحدود ډېرئ باندې ناپرېکیدونکې توابع باید نه دی، ماکسیموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

## p -انتیګرالوړ توابع **p-integrierbare Funktionen**

د یوې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره $L^p(D)$ ، $1 \le p < \infty$ ، د تابع باناخ-فضا په ګوته کوي، چې هغه نسبت و نورم

$$\|f\|_p = \left( \int_D |f|^p \right)^{1/p}$$

ته د ناپرېکیدونکې له لارې د د کومپاکت وړونکې ډېرئ سره ښپروکسیمي کیږي، دا په دې معناچې د $\|\cdot\|_p$ رابندونه Abschluß ده نسبت و $L^p(D)$ ته ده.
توابع فقط تر کچې صفر پورې په ډېرئ ټکي ډوله تعریف دي. سړی لیکي $f = g$
ن.ه. : نږدې هرچېرته (almost everywhere)
د توابعو لپاره، چې فقط په یو صفرډېرئ یا"فرسټ سره توپیري او داسې توابع راپیژني.
په ټیکه توګه سړی ورته والی یا اکویوالنت تر څیرنې لاندې نیسي، چې د هغوی لپاره $f$ او $g$ ځای نیونکې یا نماینده ګان دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لبسک انیګرال په مرسته کېدی شي $L^p(D)$ په ټولیزه توګه د په خوښه لیبسک-کچوړ ډېرئ لپاره تعریف شي. د اپروکسیمیشن ته کیدی شي، ریمن-انتیګرال ته ورته د زینې توابع کارول کیږي، چې د لیبسک-کچوړ د $D$ په برخه ډېرئ ثابت دی.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

### محدود توابع Beschränkte Funktionen

د لیبسک کچوړ توابعو $f$ د $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ساحي یا ورشو لپاره د بانخ فضا د $L^\infty(D)$ سره په نخښه کو، چې په یوه صفرډېرئ محدود دی، دا په دې معنا،چې

$$|f(x)| \leq c < \infty$$

نږدې هر چیرته دی. د $c$ کوچنې بند یا بندیز یا نور هم ښه پوله د

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in D} |f(x)|$$

سره په نخښه کوو.

فضا $L^\infty(D)$ د ټول هرچیرته په $D$ محدودو توابعو یوه اصلي برخه ډېرئ ده. دواړه فضاوې کیدی شي نسبت $\|\cdot\|_\infty$ ته د ناپرېکیدونکو توابعو سره جوړې یا تولید کړای شي. دا یو روښانه توپیر دی د $p$ – انتیګرلوړ توابعو $L^p(D)$ ته.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د موزونو اریتمیتیکي او هندسي منځ ترمنځ نابرابرونونه

### Ungleichung zwischen dem gewichteten arithmetischen und geometrischen Mittel

د زیاتیزو یامثبتو $a_1, \ldots, a_n$ ګنونو لپاره اریمیتیکي منځ نسبت هن**دسي منځ یا وسط ته کوچنی نه دی:**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}\,.$$

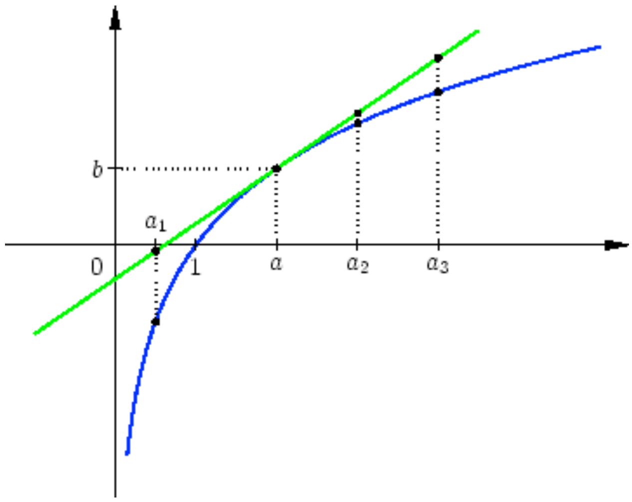
په ټولیزه توګه د مثبت وزن $\lambda_i$ لپاره د $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ سره باور لري

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \geq a_1^{\lambda_1} \cdots a_n^{\lambda_n}\,.$$

برابروالی ټیک هلته باور لري، که $a_1 = \cdots = a_n$ باور ولري.

سرِی د $a = \sum_i \lambda_i a_i$ او $b = \ln a$ سره د لوګاریتم کوني وروسته موَزن نابرابرون یا نامسوات ورته غوښتني لاسته راوړي.

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \leq \ln a\,.$$




که-لکه په مشتق کي چي ښوول شوی- وکارول شي، چي تانجنت

$$g:\ \ y = b + \frac{1}{a}(x - a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم د ګراف پورته لور ته پروت دی، نو د $\sum_i \lambda_i = 1$ له امله لاس ته راځي

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \leq \sum_i \lambda_i \left(b + \frac{1}{a}(a_i - a)\right) = b + \frac{1}{a}\left(\sum_i \lambda_i a_i - a\right) = b$$

لکه چي غوښتل مو.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د انتیګرالونو لپاره د هولدر نابرارونونه
**Höldersche Ungleichung für Integrale**

وي دې $f \in L^p(D)$ او $g \in L^q(D)$ د $1 < p < \infty$ او د $1/p + 1/q = 1$
سره. نو $fg \in L^1(D)$ باور لري او لاندې د هولدر نامساوات باور لري

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_D |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

مساوات تیک هلته باور لري، که د توابعو $|f|^p$، $|g|^q$ څخه یو یې نږدې هر چیرته د د بل ډېرواره وي.
د پولې حالت $p = \infty$، $q = 1$ ( همداسې $p = 1$، $q = \infty$ د $f$ او $g$ سره بدلیدنې) لپاره

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|_\infty \int_D |g(x)|\,dx.$$

باور لري
د $p = q = 2$ لپاراه دا مساوات د کوشي-شوارځ نامساوات هم بلل کیږي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

فقط دا ناساده حالت $1 < p < \infty$ تر څېړنې لاندې نيسو. داپسې بې له ټوليزو بنديزونو کيدی شي ونيول شي يا فرض شي، چې انتيګرال

$$I_1 = \int_D |f(x)|^p\,dx \quad \text{او} \quad I_2 = \int_D |g(x)|^q\,dx$$

زياتيز يامثبت دي. که د بيلګې په توګه $I_1 = 0$ وی،، نو $|f|^p$ او له دې سره به هر $f$ چيرته ورک شي، دا په دې معنا چې، $\int_D |f(x)g(x)|\,dx = 0$ او نا مساوات به په ساده توګه پوره وی. دا چې نامساوات د سکالا کونې $f \to rf$ ، $g \to sg$ په مقابل کې اينواريانت يا بې تغيره دی، کيدی شي برسېره پردې $I_1 = I_2 = 1$ ونيول يا فرض شي.
د موَزنو اريتميتيکي - او هندسي - يا څمککچيز منخ ترمنځ باور لري

$$|fg| = (|f|^p)^{1/p}(|g|^q)^{1/q} \le \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q\,.$$

له دې سره $fg \in L^1(D)$ دی او د انتيګرالونې پسې لاس ته راځي

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \le \frac{1}{p}I_1 + \frac{1}{q}I_2 = 1\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

## د انتيګرال لپاره د مينکوفسکي ناساوات
## **Minkowskische Ungleichung für Integrale**

د دوه توابعو $f$ او $g$ په $L^p(D)$ کې د $1 \le p < \infty$ سره د مينکوفسکي نامساوات باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\int_D |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

مساوات تیک هلته باور لري، که د توابعو $f$ ، $g$ څخه یو یې تل هر چیرته د بل ډېرواره یو نامنفي ولري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دا چې حالت $p=1$ ساده دی، په لاندې کې به $p>1$ ونیول یا فرض شي. ورپسې دې همداسې $1/p+1/q=1$ وي او انتیګرال

$$I = \int_D |f(x)+g(x)|^p\,dx$$

دې بې له ټولیزو محدودیتونو زیاتیز وي. نو د درېګوډي نا مساوات سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} I &= \int_D |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \\ &\le \int_D |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx + \int_D |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx. \end{aligned}$$

د هولدر نامساوات او $(p-1)q=p$ سره

$$\le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_D |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$+\left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_D |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}$$

$$=\left(\left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}+\left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\right)I^{1/q}\,.$$

د $I^{1/q}$ سره د وېشني له لارې سرې د مینکوفسکي نامساوات لاس ته راوړي
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د سوبولیف فضاوې **Sobolev-Räume**

د ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره
$$W^{k,p}(D),\quad k\in\mathbb{N}_0,\quad 1\le p\le\infty,$$

د توابعو باناخ فضا بنايي د $\le k$ نظم د کمزورو مشتقونو سره په $L^p(D)$ او

$$\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_D |\partial^\alpha f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},\quad 1\le p<\infty$$

کي همداسي

$$\|f\|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|\le k}\|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha|\le k}\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in D}|\partial^\alpha f(x)|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړونده نورم. اړونده نیم نورم

$$|f|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|=k}\int_D |\partial^\alpha f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

همداسې

$$|f|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha|=k} \operatorname{ess\,sup}_{x\in D} |\partial^\alpha f(x)|$$

فقط د جګ نظم مشتق کاروي.
په ځانګړې توګه دی

$$W^{0,p}(D) = L^p(D)\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه تابع

$$f(x) = |x|^s, \quad s \neq 0,$$

په $n$–بعدیزې یا $n$–پراخیدونې یونګردئ(دایره واحد)

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| < 1\}$$

تر ځیرنې نیول کیږي. د $s > -n$ لپاره $f$ انتیګرالوړ دی،، خکه چې د ګردئ کواوردیناتونه(پراته ولاړ محرونه) ( $r = |x|$ ) سرې لاس ته راوړي

$$\|f\|_{0,1} = \int_D |x|^s\,dx = c_n \int_0^1 r^s r^{n-1}\,dr\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چیرته چې $c_n$ دا $n-1$ – بعدیز حجمونو یونفضا ( واحد فضا) ده. پسی دی

$$\partial_\nu f(x) = s|x|^{s-2}x_\nu$$

د $s > 1-n$ لپاره د $f$ یو انتیګرالوړ کمزوری مشتق دی، په سرچینه کې د سیګولاریتي سره. په غونډاري کواودینات کې سړی لاس ته رانړي

$$\|f\|_{1,2}^2 = \int\limits_D |f(x)|^2\,dx + \sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_D |\partial_\nu f(x)|^2\,dx$$

$$= \text{const.} \int\limits_0^1 \left(r^{2s} + s^2 r^{2s-2}\right) r^{n-1}\,dr$$

د $r = |x|$ سره. له دې سره $f \in W^{1,2}$ دی د $s > 1-n/2$ لپاره. دا چې د $n > 2$ لپاره کمیز اکسپوننتونه $s$ هم منځ ته راتلی شي، له دې لاس ته راځي، چې مربع انتیګرالوړ مشتقونه نه اړین محدود دي. د مشتقونو کمزوروالي څخه ناپرېکیدنه لاس ته راځي.

که همدا توابع په ساحه

$$\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| > 1\}$$

وڅیړل شي، نو $f$ مربع انتیګرالوړدی د $s < -n/2$ لپاره او کمزوري مشتقونه د $s < 1-n/2$ لپاره مربع انتیګرالوړ دي، کوم چې بیرته د غونډاري کواوردینات

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{\tilde{D}} |\partial_\nu f(x)|^2\,dx = \text{const} \int\limits_1^\infty r^{2s-2} r^{n-1}\,dr$$

سره ښوول کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

کمزوري مشتقونه په حقيقت کې ټولګيزه يا کلاسيکي مشتقکليمه ټوليزه کوي، مګر قوي سينګولاريټي اجازه نه لري. د بيلګې په توګه تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

راوړو، په $n$-بعدي يا $n$– پراخيدوني انتروال

$$D = (-1,1)^n$$

ترڅيرني لاندې نيسو. تابع په هيوپرسطحهHyperebene

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$$

پرېکيدونکي ده او مربع – انتيګرالوړ کمزورى مشتق $g = \partial_1 f \in L^2(D)$ نه لري، دا په دې معنا چې مساوات

$$\int_D g(x)\varphi(x)\,dx = -\int_D f(x)\partial_1\varphi(x)\,dx$$

د هيڅ کوم $g$ لپاره د ټول $\varphi \in C_0^\infty(D)$ لپاره پوره وړ دی. د دې لپاره چې دا وښايو، نو يو ازمايښت تابع

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \quad \varphi(0) > 0\,,$$

ټاکو او ودې ته د $1 > \varepsilon > 0$ لپاره

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi(x_1/\varepsilon, x_2, \ldots, x_n), & x_1 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

له دې سره په پورته مساوات کې د ښي اړخ لپاره راکوي

$$\int_D f(x)\partial_1\varphi_\varepsilon(x)\,dx = -\int_{x_1\geq 0} \partial_1\varphi_\varepsilon(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \int\limits_{(-1,1)^{n-1}} \varphi_\varepsilon(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n$$

$$\int\limits_{n-1} \varphi(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n = \text{const} > 0$$

په داسي حال کي چې په کينه خوا د کوشي-شوارڅ نامساوت

$$\left| \int\limits_D g(x)\varphi_\varepsilon(x)\, dx \right| \le \|g\|_2 \left( \int\limits_D |\varphi(x_1/\varepsilon, x_2, \ldots, x_n)|^2\, dx \right)^{1/2}$$

$$\left( \int\limits_D |\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n)|^2\, \varepsilon\, dy \right)^{1/2} = O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$$

د $\varepsilon$ سره د صفر0 په لور ځي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د سوبوليو په کې خونديوني جمله**Sobolevscher Einbettungssatz**

د يوې ليښشيخ ورشو $D \subset \mathbb{R}^n$ لپاره د سوبوليو-فضا لپاره خونديونه

$$W^{k,p}(D) \subset W^{l,q}(D), \quad q > p, \quad \frac{k-l}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري، له کوم سره چې د $q = \infty$ لپاره ټيک يوه خونديونه په $W^{l,\infty}(D) \cap C^l(D)$ پسې منځ ته راځي.

د محدودې ورشو لپاره خونديونه کومپاکتده، دا په دې معنا چې محدوده ډېرئ په $W^{k,p}(D)$ کې پولې ته تلونکې پرلپسې په کې $W^{k,p}(D)$ لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بيلګی په توګه خونديونه

$$W^{1,p} \subset W^{0,q} = L^q$$

د تابع

$$f(x) = |x|^s, \quad s \neq 0$$

په مټه په $n$–بعديز يونغونډاري

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| < 1\}$$

څيرل کيږي. تابعه د $s > -n/q$ لپار $q$ –انتيګرالوړ ده، ځکه چې د غونډاري کواوردينات ( $r = |x|$ ) سره لاس ته راځي

$$\|f\|_{0,q}^q = \int\limits_D |x|^{sq}\, dx = c_n \int\limits_0^1 r^{sq} r^{n-1}\, dr\;,$$

د کوم سره چې $c_n$ د يوونغونډاري $(n-1)$-بعديز حجم دی. نور پسې دی

$$\partial_\nu f(x) = s|x|^{s-2} x_\nu$$

د $f$ يو کمزوری مشتق دی، کوم چې د $s > 1 - n/p$ لپاره $p$ – انتيګرالوړ دی. دا بيرته کيدی شي د غونډاري کواوردينات له لارې وازمايل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_D |\partial_\nu f(x)|^p \, dx \le |s|^p \int_0^1 r^{(s-1)p} r^{n-1} \, dr \,,$$

د کوم سره چط

$$|x_\nu|^p \le \left( \sum_\nu |x_\nu|^2 \right)^{p/2} = r^p$$

کارول شوی. د خوندیوني جملې پسې $W^{1,p} \subset W^{0,q}$ دی، که

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

همداسې

$$1 - \frac{n}{p} = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right) > n\left(-\frac{1}{q}\right)$$

باور ولري، کوم چې په باندې د پورته شرایطو سره سر خوري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

## د بانخ ځای په ځای تکي جمله **Banachscher Fixpunktsatz**

که $g$ یو رایوځای کیدونکي تابع وي، کوم چې یوه نه تشه، رابنده ډېرئ $D \subset \mathbb{R}^n$ په خپل ځان ځیره کړي، دا په دې معنا چې، باور لري

- $D = \overline{D}$
- $x \in D \Rightarrow g(x) \in D$
- $\|g(x) - g(y)\| \le c\|x - y\| \quad \forall x, y \in D$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $c<1$ سره، نو $g$ یو یوائنی ځاپه ځای ټکی $x_* = g(x_*) \in D$ لري. که له $x_0 \in D$ راووځو یا مخ ته لاړ شو، نو کیدی شي $x_*$ د اتریشن پرلپسي (د تکرار پرلپسي) له لارې

$$x_0,\, x_1 = g(x_0),\, x_2 = g(x_1),\, \ldots$$

اپروکسیمیر( په نږدې توګه ټاکل) شي یا نږدې ( که غواړئ: تقریبي) وټاکل شي. د ناټیکاوي لپاره باور لري

$$\|x_* - x_k\| \leq \frac{c^k}{1-c}\, \|x_1 - x_0\|$$

دا په دې معنا چې، که د اتریشنپرلپسي یا د تکرار پرلپسي د هر پیل ارزښت لپاره کرښیزه پولې ته لاړه شي.
د ځای په ځای ټکي جمله په ټولیزه توګه په پوره متریکي فضاو کې باور لري. دا چې د ترانسلیشن واریانځ او نورم هوموجینیتی ته اړتیاپیښنه نه شي، کیدی شي سږی د یوه ټولیز واټن تابع له لارې $d(x,y)$ $\|x-y\|$ بدل کړي.
لیکونکي: اېپ، بوسلي، هیولیګ

## سکالار ضرب **Skalarprodukt**

یو سکالار ضرب په یو کومپلکس وکتور فضا $V$ یو تابع دی
$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$

د لاندې خویونو سره:

- Positivität: مثبتوالی:

$$\langle v,v\rangle > 0 \quad \text{für} \quad v \neq 0$$

- Schiefsymmetrie: مایلسیمتري

$$\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- :Linearität کرښیزوالی

$$\langle \lambda u + \varrho v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \varrho\langle v, w\rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ او $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوښه وکتورونه همداسې سکالار دي.
د مایل سیومتري په بسټ یو کومپلکس سکالار ضرب نسبت و دویمې متحولې یا اووښتونې ته کرښیز نه دی:

$$\langle u, \lambda v + \varrho w\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle + \overline{\varrho}\langle u, w\rangle\,.$$

یواځې د حقیقي سکالار لپاره کومپلکس کنجوګیشن بې معنا دی.
لیکونکې: اپپ، هیولیګ، کرایخ

## هیلبرت - فضاHilbert-Raum

یوه هیبرت – فضا $H$ یوه پوره نورمې ( حقیقي یا کومپلکس) وکتور فضا ده، چې په کومه کې نورم د سکالار ضرب له لارې تعریف ده:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}\,.$$

په ځانګړې توګه د کوشي – شواذرځ نابرابرونونه باور لري

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

همداسې د غبرګ اړخیز-ایدنتیتي یا - - کتمتوالی

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2\,.$$

سړی د هیلبرت-فضا Hilbert-Raum سیپارابل Hilbert-Raum بولي، که یوه ګڼلوړ اورتونورمال بنسټ

$$e_1, e_2, \ldots, \quad \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}\,,$$

شتون ولري. په دې حالت کې هر $v \in H$ د فوری- وديزينه-die Fourier Entwicklung

$$v = \sum_{k=1}^{\infty}\langle v, e_k\rangle e_k\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې نسبت پورته نورم ته پولي ته تلونکي ده.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## مربع جمعه کيدونکې پرلپسيQuadratsummierbare Folgen

مربع جمعه کيدونکې پرلپسي
$c_1, c_2, \dots, \quad c_i \in \mathbb{C}$

هيلبرت-فضا $l^2$ جوړوي سبت سکالار ضرب ته

$$\langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k} \,.$$

فضا $l^2$ د يوه سيپارابل هيلبرت-فضا $H$ پروتو تويپ دی، ځکه چې هر توکی

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in H$$

کيدی شي د د اورتوګونال بنسټ د ضريب $c_k$ سره معلومه identifiziert شي. له دې سره باور ل ري

$$\|v\|_H = \|c\|_{l^2} \,,$$

دا په دې معنا، چې فضاوې $H$ او $l^2$ ايزومورف دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## مربع انتيګراوړ توابع Quadratintegrierbare Funktionen

د يوې ورشو يا سطحې $D \subset \mathbb{R}^n$ لپاره $L^2(D)$ د تابع $f: \; D \to \mathbb{C}$ فضا بنايي د لاندې سر

$$\int_D |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

او دا د سکالار ضرب

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle f,g\rangle_2=\int_D f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

له لارې منځ ته راغلی نورم $\|\cdot\|_2$ .

په بدیله توګه کیدی شي $L^2(D)$ د بشويي تابع په خير د رابندېدني په توګه هم تعريف شي، دا په دې معنا ، چې هر مربع انتيګرالوړ تابع کېدی شي د يوې ناپای پرلپسي په توګه د زياتځله مشتقوړ تابع $f_n$ له لارې اپروکسيمی يا په نږدې توګه انځور شي شي:

$$\|f-f_n\|\to 0,\quad n\to\infty\,.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليک

د بيلګې په توګه تابع

$$f(x)=|x|^s$$

په پراخيدوني يا - بعديزې يوونګردی( دايره واحد)

$$D=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\}$$

تر څيرني لاندې ونيل شي.

د غونداري کواوردينات ( $r=|x|$ ) سره لاس ته راځي

$$\int_D |f(x)|^2\,dx=c\int_0^1 r^{2s}r^{n-1}\,dr=c\left[\frac{r^{2s+n}}{2s+n}\right]_0^1,$$

دا په دې معنا چې $f$ د $2s>-n$ لپاره مربع اايګرال وړ دی.

که همدا تابع په ساحه

$$\tilde{D}=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|>1\},$$

تر څيرني لاندې ونيسو، نو بيا هم د غونداري کواوردينات سر لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_2^2 = \int\limits_{\bar{D}} |x|^{2s}\,dx = c\int\limits_1^\infty r^{2s} r^{n-1}\,dr\,,$$

دا په دې معنا، چې $f$ د $2s < -n$ لپاره مربع انتیګرالوړ دی.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

## د مربع انتیګرالوړ توابعو سوبولیف – فضا
## Sobolev-Raum der quadratintegrierbaren Funktionen

د یوې ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره $H^k(D) = W^{k,2}(D)$ د ( حقیقي - یا کومپلکس ارزښتیزو) هیلبرت-فضا په ګوته کوي. توابع د مربع انتیګرالوړ کمزورو ټوټه مشتقونو سره ، چې نظم $\leq k$ لري د سکالار ضرب

$$\langle f, g\rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int\limits_D \partial^\alpha f(x)\overline{\partial^\alpha g(x)}\,dx$$

له لارې

$$\langle f, g\rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int\limits_D \partial^\alpha f(x)\overline{\partial^\alpha g(x)}\,dx$$

منځ ته راغلي نورم $\|\cdot\|_{k,2}$ سره. اړونده نیم نورم

$$|f|_{k,2} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int\limits_D |\partial^\alpha f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

فقط د جګ نظم مشتق کاروي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د فوریر- لړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

په $D = [-\pi, \pi]$ باندې مربع انتیګرالوړ دی، که

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty ,$$

وي، ځکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx} \overline{c_j} e^{-\mathrm{i}jx} \, dx = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$$

دی، د فوریی – بنسټ $e^{ikx}$ د اورتوګونالیټي په اساس.
مشتق

$$f'(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{i}kc_k e^{\mathrm{i}kx}$$

مربع انتیګرالوړ دی، که

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 < \infty ,$$

وي، ځکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 \, dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} kc_k e^{\mathrm{i}kx} j\overline{c_j} e^{-\mathrm{i}jx} \, dx = -2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 .$$

دا چې له دویم شرط لومړی لاس ته راځي، نو لرو $f \in H^1$ د $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 < \infty$ لپاره.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د هاردي-لیبسک فضا**Hardy-Lebesgue-Raum**

د هاردي-لیست – فضا $HL$ د ټولو د یوونکردئ په ټیکلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

هولومورف توابعو

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

څخه جوړه ده

د

$$\|f\|_{HL}^2 = \langle f, f \rangle_{HL} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \overline{c_k} < \infty \,.$$

سره.

## پوره اورتونورمالسیستم **Vollständiges Orthonormalsystem**

یو اورتونورمال سیستم $\{e_i : i \in I\}$ په هیلبرت- فضا کي پوره یا ماسیمال بلل کیږي، که

$$\forall_{i \in I} \quad \langle u, e_i \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

باور ولري.

$$\forall_{i \in I} \quad \langle u, e_i \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

یو اورتونورمال سیستم ټیک هلته د هیلبرت – فضا یو اورتونورمال بنسټدی، کله چط هغه پوره وي.
لیکونکي: ایپ، هیولیګ

## په هیلبرت٠فضا کي فوری-پروجکشن (پرېوستون) **Fourier-Projektion in Hilbert-Räumen**

د یوه وکتور $v$ فوریي –پروجکشن په یوه هیلبرت-فضا $H$ کي د اورتونورمالسیستم $e_1, e_2, \ldots$ ، سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p_n v = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \quad c_k = \langle v, e_k \rangle$$

و $v$ ته ښه اپروکیمیشن دی د سکالار ضرب $\langle \cdot, \cdot \rangle$ له لارې اینډوځیرت ( منځ ته راغلی) نور م $\| \cdot \|$ سره، دا په دې معناچې

$$\|v - p_n v\| = \min_{q=\sum_{k=1}^{n} d_k e_k} \|v - q\|.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

سړی لومړی په پام کې نیسي، چې

$$\langle v - p_n v, e_j \rangle = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

دا د $\{e_j\}$ د اورتونورمالیټي څخه ترلې لاس ته راځي، ځکه چې

$$\langle p_n v, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{k,j} = c_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

د یوه په خوښه اپروکسیمیشن $q = \sum_{k=1}^{n} d_k e_k$ لپلره باور لري

$$\|v - q\|^2 = \|v - p_n v + p_n v - q\|^2$$

$$= \|v - p_n v\|^2 + \langle v - p_n v, \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^{n}(c_k - d_k) e_k} \rangle + \langle \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^{n}(c_k - d_k) e_k}, v - p_n v \rangle + \|p_n v - q\|^2$$

$$= \|v - p_n v\|^2 + \|p_n v - q\|^2,$$

داپهدې معنا، چې نتیکاوی مینیمال کیږي، که $q$ د فوری- پروجکشن $p_n v$ وي.

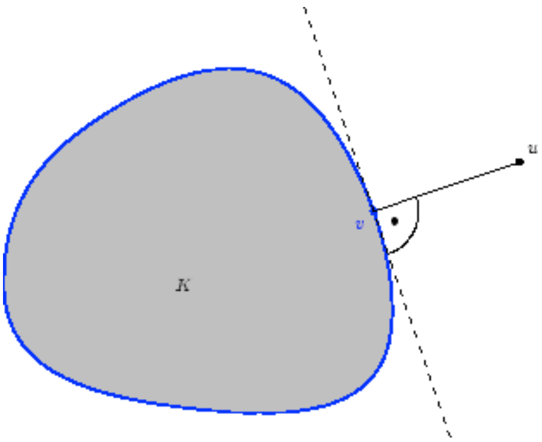
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

## په هیلبرت- فضا باندي د کونوکسو(وټلو) ډېریو خورا ښه اپروکسیمیشن
## Beste Approximation von konvexen Mengen in Hilbert-Räumen

د یوه هیلبرت-فضا $H$ د یوه رابند کونوکس برخه ډېرئ $K$ لپاره هر $u \in H$ ته یو یواځنی ځورابنه اپروکسیمیشن شتون لري د دې لاندې سره

$$\|u - v\| = \inf_{w \in K} \|u - w\| \,.$$




خورابنه اپروکسیمیشن یواځنی د

$$\langle u - v, w - v \rangle \leq 0,$$

له لارې د ټولو $w \in K$ لپاره کرکتریزه( خوي ټاکنی) شوی، دا په دې معنا، چې د وکتورونو $u - v$ او $w - v$ ترمنځ کونج پخ دی.

په ځانګړې توګه د رابندو کرښیزو برخه فضاوو $U$ خورا ښه اپروکسیمیشن شتون لري.

په دې حالت کې دا پورته سکالار ضرب صفر دی، داپه دې معنا، چې ناټیکاوی $u - v$ و $U$ ته اورتوګونا دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

که

$$d = \inf_{w \in K} \|u - w\|$$

ځای په ځای کړو

او یوه پرلپسي $(u_n)$ په $K$ د

$$\|u - u_n\| \to d, \quad n \to \infty\,,$$

سره کې وټاکو، نو د $K$ کونوکسیټي له امله باور لري

$$\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in K$$

او ورپسې

$$\|2u - (u_n + u_m)\|^2 \geq 4d^2\,.$$

د غبرګ اړخیز-کټمتوالي څخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
&\|(u - u_n) - (u - u_m)\|^2 \\
&= \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - \|(u - u_n) + (u - u_m)\|^2 \\
&\leq \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - 4d^2\,.
\end{aligned}$$

دا چې د کړوړ وړو نوکانو افاده یا وینه د $4d^2$ په لور هڅیږي، نو

$$\lim_{n,m \to \infty} \|u_m - u_n\|^2 = 0$$

لرو او $(u_n)$ په $H$ کې یوه کوشي -پرلپسي ده، دا په دې معنا، چې یو $v \in K$ شتون لري

د $\lim_{n \to \infty} u_n = v$ او $\|u - v\| = d\,.$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوله ارزښت يواځنی دی، ځکه چې که يو بل پوله ارزښت $w \in K$ شتون لرودی د $\|u - w\| = d$ سره، نو پرلپسي $v, w, v, w, \ldots$ به لکه پورته پولې ته تلونکې وی او باید $v = w$ باور ولري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په هيلبرت-فضا کې اورتوګونال کوميليمنت
## Orthogonales Komplement in Hilbert-Räumen

د يوې هيبرت-فضا $H$ هرې رابندي لاندې – يا برخه – فضا $U$ ته يو اورتوګونال کومپلمنت ،، دا په دې معنا، چې يوه رابنده لاندې فضا

$$U^{\perp} = \{v \in H : \langle u, v \rangle = 0, \quad \forall u \in U\} \ ,$$

شتون لري د

$$H = U \oplus U^{\perp} \ .$$

سره.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

دا چې $U^{\perp}$ د $H$ يو لاندې – يا برخه فضا ده، سيده له سکالار ضرب $\langle u, v \rangle$ څخه لاس ته راځي، او د کوښش – شوارڅ مساوات له لارې رابندوالی لاس ته راځي.
د $u \in U$ او $u \in U^{\perp}$ لپاره $\langle u, u \rangle = 0$ باور لري او له دې سره $u = 0$ همداسي

$$U \cap U^{\perp} = \{0\} \ .$$

دا چې $U$ کونوکس ده، نو د $w \in H$ لپاره يو خورا ښه اپروکسيميشن $u \in U$ شتونلري، هغه چې نورم

$$\|w - u\|$$

ميمال کوي. که کيږدو $v = w - u$، نو د تولو $\tilde{u} \in U$ او تولو $\alpha$ لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|v\|^2 \leq \|v - \alpha\tilde{u}\|^2 = \|v\|^2 - \overline{\alpha}\langle v, \tilde{u}\rangle - \alpha\langle \tilde{u}, v\rangle + \alpha\overline{\alpha}\|\tilde{u}\|^2 .$$

د

$$\overline{\alpha} = \frac{\langle \tilde{u}, v\rangle}{\|\tilde{u}\|^2} \qquad \alpha = \frac{\langle v, \tilde{u}\rangle}{\|\tilde{u}\|^2},$$

همداسې

.

سره لاس ته راځي

$$\|v\|^2 \leq \|v\|^2 - \frac{|\langle \tilde{u}, v\rangle|^2}{\|\tilde{u}\|^2}$$

او له دې سره

$$\langle \tilde{u}, v\rangle = 0 \qquad v \in U^{\perp} .$$

همداسې

.

$$w = u + v$$

دا چې دی، نو

$$H = U \oplus U^{\perp}$$

و ښوولشو.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

## په هيلبرت-فضا کې د بيسل-نامساوات

## Bessel-Ungleichung in Hilbert-Räumen

په يوه هيلبر-فضا $H$ کې د هر اورتونورمالسيستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره باور لري

$$\sum_{i \in I} |\langle v, e_i\rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

د ټولو $v \in H$ لپاره.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

ښونه فقط يوه ګڼلوړ اورتونورمال سيسم لپاره مخ ته بيايو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي دې $i_1, i_2, \ldots, i_n$ د ایدکشن(پیژند نخښو) یوه په خوښه پرلپسې په $I$ کې. د کومپلکی اعدادو یوهپه خوښه پرلپسې $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_n}$ لپاره د $e_i$ له اورتونورمالیتي څخهه لاس ته راځي

$$0 \leq \left\| v - \sum_{k=1}^{n} c_{i_k} e_{i_k} \right\|^2$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_{i_k} \langle e_{i_k}, v \rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{c_{i_k}} \langle v, e_{i_k} \rangle + \sum_{k=1}^{n} |c_{i_k}|^2$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle - c_{i_k}|^2 .$$

د $c_{i_k} = \langle v, e_{i_k} \rangle$ ټاکنو لپاره دا دا معنا لري

$$0 \leq \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2$$

همداسې

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 \leq \|v\|^2 .$$

دا نامساوات د پولي ته تګ $n \to \infty$ سره هم ساتلی پتې کيږي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په هيلبرت- فضا کې د فورير(فوريې) وديزيينه
**Fourier-Entwicklung in Hilbert-Räumen**

په یوه هیلبرت-فضا $H$ کې د یوه پوره اورتونورمال سیستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره سړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = \sum_{i\in I}\langle u, e_i\rangle e_i$$

د $u$ د فوريې – وديزينه بولي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

پـه هيلبرت – فضا کې د پارزيوال-کټمټوالی

Parseval-Identität in Hilbert-Räumen

د يوې هيلبرت-فضا $H$ د هر ( نه په اړيينه توګه ګڼلوړ) پوره اورتونورمال سيستم
$\{e_i : i \in I\}$ لپاره باور لري

$$\sum_{i\in I}|\langle v, e_i\rangle|^2 = \|v\|^2, \quad v \in H\,,$$

دا په دې معنا، چې نورم $v$ د بنسټ ضريبونو د $l^2$ -نورم سره سر خوري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ښوونه سيپارابل خيلبرت-فضا لپاره مخ ته بيول کيږي.

د سکالار ضرب د ناپرېکيدني له امله

$$\left\langle v - \sum_{k=1}^{\infty}\langle v, e_k\rangle e_k, e_j\right\rangle = \lim_{n\to\infty}\left\langle v - \sum_{k=1}^{n}\langle v, e_k\rangle e_k, e_j\right\rangle = \langle v, e_j\rangle - \langle v, e_j\rangle = 0$$

دی،، د ټولو $e_j$ لپاره، دا په دې معنا، چې

$$v = \sum_{k=1}^{\infty}\langle v, e_k\rangle e_k\,.$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|v\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{n}\langle v, e_k\rangle e_k\right\|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|\langle v, e_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\langle v, e_k\rangle|^2$$

داپه دې معنا، چې د پارزیوال – کتوتوالی.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

ناپرېکیدونکي کرښیز فنکشنال Stetiges lineares Funktional

په یوه حقیقي (کومپلکس) توپولوژیکي وکتورفضا $V$ باندې یو ناپرېکیدونکی کرښیز بنکشنل $\Lambda$ یو ناپرېکیدونکی کرښیز تابع دی د $V$ په پسې.( $\mathbb{C}$ )$\mathbb{R}$ .

په یوه نورمي وکتورفضا کې د $\Lambda$ ناپرېکیدنوالی ورته دی په صفر باندې د یوونغونډاري یا واحدغونډاري د څېرې ته. په دې حالت کې سړی

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

د کرښیز فنکشنل د نورم په حیث تعریفوې یا پېژند ورکوي.

د نورم د هوموجینیتي په بنسټ هم ورته تعریفونه

$$\|\Lambda\| = \sup_{v\neq 0}\frac{|\Lambda v|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|\leq 1}|\Lambda v|$$

شوني دي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د دې لپاره چې وښایو، چې د ناپرېکیدنې څخه محدودوالی لاس ته راځي، نیسو، چې $\Lambda$ په نورمي وکتورفضا باندې ناپرېکیدونکې دی، په صفر د یوونغونډاري څېره یا عکس نامحدود دی، دا په دې معنا، چې د هر $n \in \mathbb{N}$ لپاره په $V$ کې یو $v_n$ شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\|v_n\| \le 1$ او $|\Lambda v_n| > n\,.$

سره.

که کيږدو

$$u_n = \frac{1}{n} v_n\,,$$

نو لاس ته راځي

$$\|u_n\| \le \frac{1}{n}\,,$$

دا په دې معنا،چې $u_n \to 0$ د $n \to \infty$ لپاره او د فنکشنل د ناپرېکيدنې په بنسټ له دې سره لاس ته راځي $\Lambda(u_n) \to \Lambda(0)$ . د فنکشنل د کريزوالي سره باور لري

$$\Lambda 0 = \Lambda(0 \cdot v) = 0 \Lambda v = 0$$

د ټولو $v \in V$ لپاره او له دې سره $|\Lambda u_n| \to 0$ . له بله اړخه دی

$$|\Lambda u_n| = \frac{1}{n} |\Lambda v_n| > 1\,,$$

چې تضاد انځوروي.

برعکس له محدودوالي څخه ناپرېکيدنوالی لاس ته راځي، که سړی ږنيسي، چې

$$|\Lambda u| < c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په صفر د یوونغوندارۍ د ټولو $u$ لپاره. که اوس سړی یوه په $V$ کې په خوښه پرلپسې $(v_n)$ ولري د $v_n \to v$ او $v_n \neq v$ سره د ټولو $n$ لپاره، نو سړی لاس ته راوړي

$$|\Lambda v_n - \Lambda v| = |\Lambda(v_n - v)| = \|v_n - v\| \left|\Lambda\left(\frac{v_n - v}{\|v_n - v\|}\right)\right| \leq \|v_n - v\| c \to 0\,,$$

دا په دې معنا، چې د فنکشال ناپرېکیدنه لرو.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د پیلګې لپاره دا کربنیز فنکشنال

$$\Lambda f = f(1)$$

د ټول $f \in C[0,1]$ لپاره رانیسو.

د په $C[0,1]$ د ماکسیموم نورم سره،

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|\,,$$

لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |f(1)| \leq \sup_{\|f\|_\infty = 1} \|f\|_\infty = 1\,,$$

دا به دې معنا، چې فنکشنال ناپرېکیدونکی دی. د تابع (فنکشن) $f(x) = 1$ سره د ټولو $x \in [0,1]$ لپاره د فنکشنال د نورم لپاره راکوي

$$\|\Lambda\| = 1\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د دې لپاره په $C[0,1]$ باندې $L^2$ -نورم وکاروو،

$$\|f\|_2 = \left( \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} ,$$

او توابعو پرلپسې راواخلو

$$f_n(x) = \sqrt{2n+1} x^n, \quad n \in \mathbb{N} ,$$

نوو سړی لاس ته راوړي

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 (2n+1) \, x^{2n} \, dx = 1 ,$$

مګر

$$f_n(1) = \sqrt{2n+1}$$

له ټولو پولو اوړي یا له ټول پولو لوییږي، دا پهدې معنا، چې فنکشنل پرېکیدونکی دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د هان-بانخ د دوام( پسې تلني یا مخ ته بیوني) جمله

Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

د یوه نورمي وکتور فضا پ $V$ ه یوه لاندېفضا یا برخه فضا $U$ باندې هر ناپرېکیدونکي کرښیز فنکشنال $\Lambda$ ته یوه نورم ته وفاداره پرمخ ته تلنه شتون لري، داپه دې معنا، چې په $V$ یو ناپرېکیدونکی کرښیز فنکشنال $\tilde{\Lambda}$ شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tilde{\Lambda}u = \Lambda u, \quad u \in U$$

او

$$\sup_{v \in V, \|v\|=1} |\tilde{\Lambda}v| = \|\tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\| = \sup_{u \in U, \|u\|=1} |\Lambda u| .$$

سره

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه د $L^2(-1,1)$ په لاندې فضا

$$U = \mathrm{span}\{1, x, x^2\}$$

باندې د اړونده نورم

$$\|f\|_2 = \left( \int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

سره کرښيز فنکشنال

$$\Lambda f = f(0)$$

رااخلو.

يو تابع يا فنکشن

$$f = a + bx + cx^2$$

له $U$ څخه لاندې نورم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_2^2 = \int_{-1}^{1} (a+bx+cx^2)^2\,dx = 2a^2 + \frac{2}{3}\,b^2 + \frac{4}{3}\,ac + \frac{2}{5}\,c^2\,.$$

له دې سره له $\Lambda$ څخه په $U$ لاس ته راځي

$$\|\Lambda|_U\|^2 = \max_{0\neq f\in U} \frac{|\Lambda f|^2}{\|f\|_2^2} = \max_{(a,b,c)\neq(0,0,0)} \frac{a^2}{2a^2+\frac{2}{3}b^2+\frac{4}{3}ac+\frac{2}{5}c^2}\,.$$

د ځای په ځای یا کلک $a$ د $b=0$ ، $c=-\frac{5}{3}\,a$ لپاره مخرج یا ماتلاندې مینیمال کیږي ، دا په دې معنا، چې

$$\|\Lambda|_U\| = \sqrt{\frac{a^2}{\frac{8}{9}a^2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,.$$

په روښنه توګه په $L^2$ باندې د فنکشنال ارزښتونه پرېکیدونکي ده. د دې لپاره چې د $\Lambda$ لپاره یو پرمخ بیونه وګټو ، نو ایښوونه

$$\tilde{\Lambda} f = \int_{-1}^{1} \underbrace{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}_{p(x)} f(x)\,dx$$

کوو او ضریبونه $\alpha,\beta,\gamma$ دغوښتو څخه ټاکو، چې $\tilde{\Lambda}$ د $\Lambda$ سره د $U$ په یوه بنسټ باید یو د بل سره سر وخوري.

$$\Lambda\left\{\begin{array}{c}1\\x\\x^2\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}2\alpha+\frac{2}{3}\gamma\\ \frac{2}{3}\beta\\ \frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{5}\gamma\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right\} = \tilde{\Lambda}\left\{\begin{array}{c}1\\x\\x^2\end{array}\right\}.$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\alpha = \frac{9}{8}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\frac{15}{8}\,.$$

د کوشي-شوارځ نامساوات په بنسټ دی

$$|\tilde{\Lambda} f| \le \|p\|_2 \|f\|_2\,,$$

یعني $\|\tilde{\Lambda}\| \le \|p\|_2$ . ډا چې $p \in U$ نو دا لاندې هم باور لري

$$\|\tilde{\Lambda}|_U\| \ge \frac{|\tilde{\Lambda} p|}{\|p\|_2} = \frac{\int_{-1}^{1} |p(x)|^2\,dx}{\|p\|_2} = \|p\|_2\,.$$

دې پسې یا د دې په تعقیب دی

$$\|\tilde{\Lambda}\| = \|p\|_2 = \sqrt{2\left(\frac{9}{8}\right)^2 + 0 + \frac{4}{3}\,\frac{9}{8}\left(-\frac{15}{8}\right) + \frac{2}{5}\left(-\frac{15}{8}\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,,$$

دا په دې معنا، چې $\tilde{\Lambda}$ د $\Lambda$ نورمساتونکی یا - وفادار پر مخ وړنه ده.

لیکونکي: ایپ، هیولیګ

دوال- یا دوه ګونې فضا Dualraum

دیوه نورمي وکتور فضا $V$ دوال- یا دوه ګونې فضا $V'$ په $V$ د ناپرېکېدونکو کربنیزو فنکشالونو $\Lambda$ لاندې د نورم

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

سره په $V'$ نخبنه شوی یو بانخ-فضا ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

سيده ليدل کيږي، چې $V'$ يوه نورمي وکترفضا ده. د ښوول يې د $V'$ پروه والی دی.

وي دې $(\Lambda_n)$ يوه کوشي- پرلپسي په $V'$ کې دا په دې معنا دی، چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو $n_0$ شتون ل ري، داسې چې دټولو $n, m > n_0$ لپاره

$$\|\Lambda_n - \Lambda_m\| < \varepsilon$$

باور لري. نو د هر $v \in V$ لپاره باور لري

$$\|\Lambda_n v - \Lambda_m v\| = \|(\Lambda_n - \Lambda_m)v\| \leq \|\Lambda_n - \Lambda_m\||v| < \varepsilon|v|$$

داپه دې معنا، چې $(\Lambda_n v)$ يوه سکالار کوشي – پرلپسي ده، نو يو پوله ارزښت $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n v$ لري. دا د $\Lambda v = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n v$ له لارې تعريف شوی تابع کرښيز او له پورته تخمينونو نورم پرلپسي د ناپرکيدني له لارې د $m \to \infty$ لپاره

$$\|(\Lambda_n - \Lambda)v\| \leq \varepsilon|v|$$

د $n > n_0$ لپاره. له دې لاس ته راځي،چې $\Lambda_{n_0} - \Lambda$ او له دې سره هم $\Lambda = (\Lambda - \Lambda_{n_0}) - \Lambda_{n_0}$ ناپرېکيدونکي دی، او

$$\|\Lambda_n - \Lambda\| < \varepsilon$$

د $n > n_0$ لپاره باور لري،دا په دې معنا، چې

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n = \Lambda\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

بيدوالفضا ( دوه دوه بيزه فضا) Bidualraum

د يوې نورمي وکتورفضا $V$ بيدوال-يا بيدوه بيزه فضا $V''$ د $V'$ دوه بيزه فضا ده. دا
چې هر توکی $v \in V$ دې

$$\Lambda \mapsto \Lambda v, \quad \Lambda \in V'$$

يو ناپريکيدونکی کرښيز فنکشنال په $V'$ جوړ کړي، کيدی شي $V$ د $V''$ يوې لاندې فضا سره جوړ شي يا منځ ته راشي. باورلري

$$V'' = V\ ,$$

نو $V$ رفلکسيو يا هندارونې ببل کيږي.

رفلکسيو باناخ-فضاوې فضاوې $L^p(D)$، $1 < p < \infty$ دي، همداسې هر پاي بعدي(پراخيدونې) وکتور فضاوي. $L^1(D)$ او $C[0,1]$ د نا-هندارونې بيلګې باناخ - فضا دي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د p - انتيګراوړ توابعو دوالفضا

Dualraum der p-integrierbaren Funktionen

د يوې ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ او $1 \leq p < \infty$ لپاره دی

$$L^p(D)' = L^q(D), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\ .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس يوائې $L^q(D) \subseteq L^p(D)'$ اينکلوزيون يا خونديونه ښوول کيږي.

هر $g \in L^q(D)$ ته د

$$\Lambda : \quad f \mapsto \Lambda f = \int_D f(x)g(x)\,dx, \quad \forall f \in L^p(D),$$

له لارې په $L^p(D)$ يو ناپرېکيدونکی کرښيز فنکشنال تعريف دی، خکه چې هولدر نامساوت پسې د د انتيګرالونو لپاره دی

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_D |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q < \infty$$

د $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ سره. له دې لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_p=1} |\Lambda f| \leq \|g\|_q .$$

د $f = \mathrm{sign}(g)|g|^{q-1}$ لپاره نامساوات تيره يا تيز دي، دا په دې معنا، چې سړی لاس ته راوړي

$$\|\Lambda\| = \|g\|_q .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ريسڅ د انځورولو جمله Darstellungssatz von Riesz

د يوې هيبرت-فضا $H$ او يوه کره يا کلک $v \in H$ لپاره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda : \quad u \mapsto \Lambda u = \langle u, v\rangle, \quad \forall u \in H$$

له لارې يو ناپرېکيدونکی کرښيز تابع په $H$ د

$$\|\Lambda\| = \|v\|$$

سره تعريف دی.

معکوس هر يو ناپرېکيدونکي کرښيز فنکشنال $\Lambda \in H'$ ته ټيک يو $v \in H$ شتون لري، داسې چې پورته مساوات باور لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بېلګې په توګه د مربعجمعه وړ پرلپسې $l^2$ رانيسو. وي دې $\Lambda \in (l^2)'$، نو ټيک يوه پرلپسې په $l^2$ کې شتنو لري د

$$\Lambda c = \langle c, d\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}, \quad \forall c \in l^2 .$$

سره.

د $d$ څخه و $\Lambda$ ته ديواځني تنظيم له لارې کيدی شي فضا $l^2$ د خپل دوال- يا دوه ګونې فضا $(l^2)'$ سره و ښوول شي ياو پيژندل شي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه مربع انتيګرا لوړ توابع $L^2(D)$ په ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ رانيسو. وي دې $\Lambda \in L^2(D)'$، نو ټيک يو تابع $g \in L^2(D)$ شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda f = \langle f, g \rangle = \int_D f(x)\overline{g(x)}\,dx, \quad \forall f \in L^2(D)\,.$$

سره.

له $g$ څخه و $\Lambda$ ته د يواځني تنظيم له لارې کيدی شي فضا $L^2$ د خپلې دوال- يادوه ګوني فضا $(L^2)'$ سره وپيژندل شي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

کمزوري پولې ته تلنه Schwache Konvergenz

په يوه نورمي شوي وکتورفضا $V$ يوه پرلپسې $(v_n)$ کمزورې پولې $v$ ته ځي، که

$$v_n \rightharpoonup v\,,$$

که

$$\Lambda(v_n - v) \to 0, \quad \forall\, \Lambda \in V'\,.$$

د $\Lambda$ د ناپرېکيدنې په بنسټ هره پولې ته تلونکې پرلپسې

$$v_n \to v \quad \Leftrightarrow \quad \|v_n - v\| \to 0$$

هم کمزورې پولې ته تلونکې ده. معکوسوالی يا په ټولیزه توګه باور نه لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د بيلګې په توګه په فضا کې مربع جمعه کيدونکې پرلپسې و $l^2$ کې پلپسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

| | |
|---|---|
| $e$ | $= (0, 0, 0, \ldots)$ |
| $e^1$ | $= (1, 0, 0, \ldots)$ |
| $e^2$ | $= (0, 1, 0, \ldots)$ |
| | $\vdots$ |

رانیول کیږي. دا چې هر ناپرېکیدونکی کرښیز فنکشنال $\Lambda$ په $l^2$ د رسسخ( وبینه: ریخ) د انځوریزې جملې

$$\Lambda c = \langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}$$

په حیث د کلک یا کره $d \in l^2$ سره لیکل کیږي، نو لاس ته راځ

$$\Lambda(e^n - e) = \langle e^n, d \rangle = \overline{d_n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

ځکه چې $d$ مربعجمعه وړ دی، دا په دې معنا، چې دی

$$e^n \rightharpoonup e, \quad n \to \infty.$$

مګر په ر حالت

$$\|e^n - e\| = 1,$$

داپه دې معنا، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^n \not\to e\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

محدود کرښيز اوپراتورونهBeschränkte lineare Operatoren

د نورمي وکتورونو فضاو تر منځ يو کرښيز تابع

$$L:\quad V \to W$$

محدود کرښيز اوپراتور بلل کيږي، که د اوپراتور نورم

$$\|L\| = \sup_{\|v\|=1} \|Lv\|$$

پای وي. محدودوالی د $L$ د ناپرېکيدنوالي سره په يوه معنا دی.

سږی کرښيز اوپراتور هغه په کرښيز الجبر کې د کرښيز تابع په ځای کاروي، چې داناپای –بعديز Kontext غوره وښايو يا را مخ ته کړو.

د ټولو کرښيزو مخدودو له $V$ څخه د $W$ پسې اوپراتورونو د $\mathcal{L}(V,W)$ سره په نخښه کيږي. دا باناخ-فضا ده، که $W$ يوه باناخ-فضا وی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

انتيګرال اوپراتور Integraloperatoren

د يوه تابع

$$K:\quad D \times D \ni (x,y) \mapsto K(x,y) \in \mathbb{R},\quad D \subseteq \mathbb{R}^n,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د

$$(Lf)(x) = \int\limits_D K(x,y) f(y)\, dy$$

له لارې يو کربنيز اوپراتو تعريفيږي. د مخته ځېرې- يا تابع - او ډځېرې فضا(تابع تابع) $V$ او $W$ د داسې په نامه زړې تابع $K$ د خويونو په واک کې دي.

په لاندې کې يوه څو بيلګې او همداسې د اړونده اوپراتور نورمونه ورکړ شوې.

- $K$ په $\overline{D} \times \overline{D}$ ناپرېکيدونکې، $D$ محدود ده.

$$L: \quad C(\overline{D}) \to C(\overline{D})$$

$$\|L\| = \max_{x \in \overline{D}} \int\limits_D |K(x,y)|\, dy$$

- $$K \in L^2(D \times D)$$

$$L: \quad L^2(D) \to L^2(D)$$

$$\|L\| \le \left( \int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 \, dx\, dy \right)^{1/2}$$

- $D = \mathbb{R}^n$, $K(x,y) = \varphi(x-y)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L: \quad L^p(D) \to L^p(D)$$

$$\|L\| = \int_D |\varphi(z)|\, dz$$

## د کربنیزو اوپراتورونو پولې ته تلنه Konvergenz linearer Operatoren

د محدودو کربنیزو اوپراتورونو پرلپسيو لپاره لاندې دوه کليمې کارول کيږی.

- تکي ډوله پولې ته تلنهPunktweise Konvergenz

يوه پرلپسي $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ تکيډوله د يوه اوپراتور $L$ په لور پولې ته ځي، که

$$L_n v \to L v, \quad \forall v \in V\,.$$

- برابرډوله پولې ته تلنه Gleichmäßige Konvergenz

يوه پرلپسي $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ برابرډوله ديوه اوپراتور $L$ په لور پولې ته تلونکې ده، که وي

$$\|L_n - L\| = \sup_{\|v\|=1} \|L_n v - L v\| \to 0\,.$$

د برابرډوله پولې ته تلنې څخه تکي ډوله پولې ته تلنه راکوي، معکوس په ټوليزه توګه باور نه لری.

د برابر ډوله محدودوالي اصول Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د یوې باناخ-فضا $V$ په یوه نورمي وکتور فضا $W$ کې د یوې محدودې کرښیز اوپراتورونو $(L_n)$ پرلپسې لپاره لاندې باور ولري

$$\sup_n \|L_n v\| < \infty \quad \forall v \in V \,,$$
،

نو لاس ته راځي

$$\sup_n \|L_n\| < \infty \,,$$

دا په دې معنا، چې د اوپراتور-نورم برابرېوله مخدودوالی.

## د باناخ-شتاینهوز جلمه Satz von Banach-Steinhaus

وي دې $V, W$ باناخ-فضا او $U$ یوه د $V$ ټینګه یا(غلیضه) برخه دېرئ، نو بیا یوه پرلپسې $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ ټیک هلته ټکي ډوله و یوه کرښیز محدود اوپراتور $L$ ته ځي،

$$L_n v \to L v \,, \quad \forall v \in V,$$

که

(a)

$$\forall u \in U \,, \quad L_n u$$
پولې

$$\sup_n \|L_n\| < \infty \,.$$
(b)

د باناخ شرایط a) او b) دې پوره وي او $v$ دې یو په خوښه وکتور له $V$ څخه وي. دا جې $U$ په $V$ کې ټینګه یا کیمنډلې ده، نو د $\varepsilon > 0$ لپاره یو $u \in U$ شتون لري، داسې چې دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|u-v\| < \frac{\varepsilon}{3\sup_n \|L_n\|}\,.$$

پرلپسې $(L_n u)$ د نيونې يا فقضيي له مخې پولې ته ځي، يعنې يو اينډکس يا پيژندنخښه $n_0$ شتون لري، داسې چې د $m, n > n_0$ لپاره

$$\|L_m u - L_n u\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

باور لري. له دې لاس ته راځي

$$\|L_m v - L_n v\| \le \|L_m v - L_m u\| + \|L_m u - L_n u\| + \|L_n u - L_n v\|$$

$$\ldots\mathrm{p}\,\|L_n\| \frac{\varepsilon}{3\sup_n \|L_n\|} + \frac{\varepsilon}{3} + \sup_n \|L_n\| \frac{\varepsilon}{3\sup_n \|L_n\|} = \varepsilon\,,$$

داپه دې معنا، چې $(L_n v)$ په $W$ کې يوه کوشي-پرلپسي ده. دا چې $W$ پوره ده، ن و پوله ارزښت شتون لري، يعنې

$$\lim_{n\to\infty} L_n v = Lv \in W\,.$$

د $L$ محدودوالی او کرښيزوالی تړلی د نورم له ناپرېکيدني لاس ته راځي.

د معکوسونې لپاره دې فقط شرايط b) و ښوول شي. دا د برابرېدوله محدودوالي له شرايطو څخه لاس ته راځي، ځکه چې

$$\lim_{n\to\infty} L_n v = Lv$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

راکوي، چې $\sup_n \|L_n v\|$ د ټولو $v$ لپاره پای دی.

وي دې

$$s_n f = \sum_{j=1}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n})$$

د لاندې انتيګرال لپاره نږدېونه

$$sf = \int_0^1 f(x)\, dx\,.$$

که وزنونه $w_{i,n}$ زياتيز يا مثبت وي او $s_n$ ټيک دی د $< n$ درجې پولينوم لپاره، نو لاس ته راځي

$$sf = \lim_{n\to\infty} s_n f$$

د $f \in C[0,1]$ لپاره.

ښوونه د باناخ-شتاينهوز له جملې تړلی لاس ته راځي، په کارول شوی په $s_n \in \mathcal{L}(C[0,1],\mathbb{R})$ او د $C[0,1]$ پولينومونو ټينګه برخه فضا باندې. د پولينوم $p$ لپاره د $s_n p$ پولې ته تلنه روښانه دی،، ځکه چې $s_n p = sp$ دی د $n > \mathrm{Grad}\, p$ لپاره.

د دې لپاره چې برابرډوله محدودوالی وښايو، سړی په پام کې نيسي، چې

$$\sum_{j=1}^{n} w_{j,n} = 1,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې $s_n$ د ثابتو یا د ټل همغو توابعو $f(x) = c$ لپاره تیک دی. له دې لاس ته راځي

$$\|s_n\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |s_n f| = 1.$$

## کومپاکت اوپراتورونه Kompakte Operatoren

د باناخ-فضاو تر ةنځ یو اوپراتور $L \in \mathcal{L}(V, W)$ کومپاکت دی، که د $V$ په $W$ کې د یوونغونډاري( واحدغونډوسکي یا -کرې) $B$ څېره یا عکس نسبي کومپاکت وي، دا به دېمعنا، چې په $B$ کې د هرې پرلپسي $(v_n)$ لپاره پرلپسي $(Lv_n)$ یوه پولې ته تلونکي برخه پرلپسي ولري.

د بېلګې په توګه په $\mathcal{L}(V, W)$ کې دوه اوپراتورونه د $V = W = l^2$ سره رانیسو.

- اوپراتور Der Operator

$$L : \quad (c_1, c_2, c_3 \ldots) \mapsto (c_1, c_2, c_3 \ldots)$$

کومپاکت نه دی، ځکه چې د بیلګې په توګه د پرلپسېو پلرپسي

| | | |
|---|---|---|
| $= Le_1 = (1, 0, 0, \ldots)$ | $e_1$ | |
| $= Le_2 = (0, 1, 0, \ldots)$ | $e_2$ | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | |

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $B$ کې پولې ته تلونکې برخه پرلپسي نه لري.

- Der Operatorکرښیزه تابع

$$L: \quad (c_j) = (c_1, c_2, c_3, \ldots) \mapsto (c_1, c_2/2, c_3/3, \ldots) = (\tilde{c}_j)\,,$$

$$, \quad \tilde{c}_j = c_j/j$$

کومپاکت دی. د دې لپاره دې وي $(c_n)$ یوه په خوښه په $B$ کې د پرلپسیو پرلپسي. نو سړی په لومړي ځل کره کوي، چې په روښانه توګه د توکي

$$c_n = (c_{n,1}, c_{n,2}, c_{n,3}, \ldots)$$

لپاره دا پرلپسي په هر ځای $c_{n,j}$ کې محدود دي. یعنې

$$|c_{n,j}| \leq 1\,.$$

که د دې پرلپسی هر فقط د ټولو پرلپسي توکو لومړني ځایونه $(c_{n,1})$ تر ښیرنې لاندې ونیسو، داسې چې د محدودوالي په بنسټ یوه برخپرلپسي $(c_{n_k(1)})$ پیداکړو، د کومو لپاره چې لومړي ځایونه پولې ته ځي. که د دې برخپرلپسیو $(c_{n_k(1)})$ څخه اوس د هر توکي څخه لومړني دوه ځایونه

$$\left(c_{n_k(1),1}, c_{n_k(1),2}\right),$$

راونیسو، نو بیرته دمخدودوالي په بنسټ پرخپرلپسي پیداکولای شو، دکومو لپاره، چط د وه کونترې پرلپسي یا ورتر پرلپسي

$$(d_k) = \left(c_{n_k(k)}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره نو د هر کره $J$ لپاره د $J$ د لومړني ځایونو وکتور $(d_{k,1},\ldots,d_{k,J})$ پولې ته ځي.

د دې لپاره چې وښایو، چې $(d_k)$ غوښتونې برخپرلپسې ده، نو یوه د خوښې $\varepsilon > 0$ لپاره یو ایندکس $K$ داسې ټاکو، چې

$$\sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{4}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور ولري. دا چې برخپرلپسې $(d_k)$ د پورته جوړښتاصولو له مخې د لومړنیو $K$ ځایونو لپاره پولې ته ځی، نو یو ایندکس $N$ شتون لري،دا سې، چې د $k,l > N$ لپاره

$$\sum_{j=1}^{K} \frac{|d_{k,j} - d_{l,j}|^2}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور لري. له دې سره د $k,l > N$ لپاره لرو

$$\|Ld_k - Ld_l\|_{l^2}^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{|d_{k,j} - d_{l,j}|^2}{j^2} + \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{\overbrace{|d_{k,j} - d_{l,j}|^2}^{\leq 4}}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

د وازو توابعو په هکله جمله Satz über offene Abbildungen

د باناخ-فضاو تر منځ یو په باندې(surjektiver ) محدود کرښیز اوپراتور $L$ یوه وازه ډېرئ په یوه وازه ډېرئ څېره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $L$ په کې ( injektiv ) هم وي، نو محدودوالی له $L^{-1}$ لاس ته راځي. له دې سره حقيقي عدونه $a, b$ د

$$a\|v\| \le \|Lv\| \le b\|v\|$$

سره شتون لري د $L$ د مخته ځېرې څخه د ټولو $v$ لپاره، چېرته چي دويم نامساوات سملاسي د $L$ د محدودوالي څخه لاس ته راځي.

ليکونې: هيوليګ، اېپ

صرف نظر نه شي کولای، چې د عمليه يا اوپراتوري کيدنه $L$ د باناخ-فضاو تر منځ ده. د دې ترمنځ کتمېتوالی $L \in \mathcal{L}(V, W)$ ځيرل کيږي، د کوم سره چې $V = l^1$ د نورم

$$\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$$

سره په نخښنه کيږي او ځېره –فضا $W$ د نورم

$$\|w\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_k|$$

سره په نخښنه کيږي. د

$$\|v\|_\infty \le \|v\|_1$$

له امله کتمېتوالی $L$ يو په ( bijektiver ) محدود کرښيز اوپراتو دی، مګر داچې

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \right\|_\infty = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \right\|_1 = n$$

د $e_1 = (1,0,0,\dots), e_2 = (0,1,0,\dots),\dots$ سره، $L^{-1}$ نامحدود دی.

لیکوني: هیولیګ، اپپ

د رابند یا بند ګراف جمله Satz vom abgeschlossenen Graphen

که د بانخ – فضاو ترمنځ اوپراتور $L : V \to W$ رابند وي، دا په دې معنا،چط له

$$v_n \to v \quad \text{او} \quad w_n = Lv_n \to w$$

لاس ته راځي، چې $w = Lv$ دی، نو $L$ محدود دی.

لیکوني: هیولیګ، اپپ

له دې بیلګې څخه لیدل کیږي، چط سرې د رابند ګراف په جمله کې په نیوني یا فرضیي صرف نطر نه شي کولای، داسې چې $L$ د باناخ-فضاو ترمنځ عمل کوي یا اوپریشن کوي. د دې لپاره دفرنځیال اوپراتور

$$\mathcal{L}(V,W) \ni L: \quad f \mapsto f'$$

رانیسو، د کوم سره چې $V = C^1[0,1]$ د سوپریموم نورم $\|\cdot\|_\infty$ سره په نخښه شوی دی او $W = C[0,1]$ سره هم سوپریمومنورم دی. $L$ یوو کربنیز اوپراتور دی، ځکه چې د $f(x) = x^n$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_\infty = 1, \quad \|Lf\|_\infty = n$$

باور لري

محدود نه دی. مګر د $L$ ګراف رابند دی، له دې امله چې د یوې پرلپسې $(f_n)$ لپاره
په $V$ کې د $f_n \to f \in V$ ، $Lf_n \to g \in W$ سره باور لري $f_n \to f$ برابر
ډوله دی، $f_n' \to g$ , پرابر ډوله دی.

$L$ له دې لاس ته راځي،چې $f$ مشتقوړ دی، او

$$f' = g$$

باور لري.

(Autoren: App/Höllig)

## په هیلبرت-فضا کې د یوه کرښیز اوپراتور ماتریکس

Matrix eines linearen Operators im Hilbert-Raum

یو کرښیز اوپراتو

$$L: \quad H \to H$$

په یوه سیپارابل هیلبرت-فضا د اورتوګونال بنسټ $e_1, e_2, \ldots$ سره کیدی شي د ماتریکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a_{j,k}): \quad a_{j,k} = \langle Le_k, e_j \rangle$$

له لارې روښانه شي. باور لري

$$w = Lv \leftrightarrow w_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} v_k \,,$$

چیرته چې $u_l = \langle u, e_l \rangle$ د بتسټ ضريبونه ښايي ياپه ګوته کوي.

ليکونکي اپپ، هيوليګ

د فورير-پروجکشن د پولي ته تلني او د $L$ کرښيزوالي په بنسټ باور لري

$$w_j = \langle Lv, e_j \rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k Le_k, e_j \right\rangle .$$

که پوله او زياتون يا جمعه د سکالار ضرب سره بدل شي، نو سړی د $L$ ماتريک انځورونه لاس ته راوړي.

ليکونکي اپپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه به د يوه $2\pi$ -پريودي يا $2\pi$ - تل بيرته راګرځيدوني تابع

$$\varphi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e_k, \quad e_k(x) = e^{\mathrm{i}kx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه کرښيز اوپراتورونه رانيسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: ضرب $L : f \to \varphi f$ : د فوریر – ضریبونو له مخې د ماتریکس- راوړنو Matrix-Einträge لپاره سړی لاس ته راوړي

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{\mathrm{i}(k-j)x} \, dx = \varphi_{j-k} \, .$$

د نورو ویونو یا لغاتو سره د $f$ ضرب د $\varphi$ سره د $f$ او $\varphi$ د فوریې- ضریبونو یو دیسکرت قتونه په ګوته کوي.

دویم قتونه غبرګونه $L : f \to \varphi \star f$ : که د ماتریکس-قیمتونو

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) e^{\mathrm{i}(kt-jx)} \, dt \, dx$$

په تعریف کې سړی $y = x - t$ بدل کړي، نو د

$$e^{\mathrm{i}(kt-jx)} = e^{\mathrm{i}((k-j)x)} e^{-\mathrm{i}ky}$$

له امله انتیګرال په $y$ لاس ته راځي

$$a_{j,k} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_k e^{\mathrm{i}(k-j)x} \, dx = 2\pi \varphi_k \delta_{j,k} \, .$$

د قاتونې ماتریکس دوه کونجتړی یا دیاګونال دی، د $f$ د فوریې- ضریبونه د $2\pi$ –واره د $\varphi$ فوری-ضریبونو سره ضربیږي

لیکونکي: اپپ، هیولیک

(c) ketabton.com: The Digital Library

## ادجونګيري اوپراتور Adjungierter Operator

په يوې سيپارابلې هيلبرت-فضا $H$ باندې د يوه محدود کرښيز اوپراتور $L$ لپاره د

$$\langle Lv, w\rangle = \langle v, L^{\star} w\rangle, \quad v, w \in H,$$

له لارې يو داسې په نامه ادجونګيري اوپراتور $L^{\star}$ د ماتريکس

$$(a^{\star}_{j,k}) = (\overline{a_{k,j}})$$

سره تعريفيږي. که $L^{\star} = L$ باور ولري، نو سړی $L$ پخپله يا د ځان سره ادجونګيري يا هرميتيک بولي.

د بيلګې لپاره په $L^2(D)$ يو انتيګرال اوپراتور رانيسو. $K$ دې يو زړي تابع وي د

$$\int\limits_{D} \int\limits_{D} |K(x,y)|^2 \, dx \, dy < \infty \, ,$$

سره، نو د

$$(Lf)(x) = \int\limits_{D} K(x,y) f(y) \, dy$$

له لارې د هر $f \in L^2(D)$ لپاره يو کرښيز اوپراتو تعريفيږي. د انتيګرال لپاره د کوشي-شوارڅ نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\int\limits_{D} |(Lf)(x)|^2 \le \int\limits_{D} \int\limits_{D} |K(x,y)|^2 \, dy \, dx \int\limits_{D} |f(y)|^2 dy \, ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې $L$ يو محدود كرښيز اوپراتور دی په $L^2(D)$ د

$$\|L\| \leq \left(\int_D \int_D |K(x,y)|^2 \, dy \, dx\right)^{1/2} .$$

سره.

اړونده ادجونګيري اوپراتو $L^\star$ د

$$(L^\star g)(x) = \int_D \overline{K(y,x)} g(y) \, dy$$

سره تعريفيږي، دا په دې معنا، چې $L$ تيک هلته د ځان سره يا خپل ادجونګيري دی، که نږدې هرچيرته

$$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$$

باور ولري.

## يونيتار اوپراتور Unitärer Operator

په يوه هيلبرت-فضا کې يو محدود كرښيز اوپراتور $Q : H \to H$ يونيتار دی، که وي

$$QQ^\star = I = Q^\star Q \, ,$$

چيرته چې $I$ کتوتوالی په ګوته کوي.

د يونيتار اوپراتورونو ورته خويې خوونې يا کرګتريزه کونې دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

a)

$$\langle Qv, Qw\rangle = \langle v, w\rangle, \quad v, w \in H\,,$$

b)

$$\|Qv\| = \|v\|, \quad v \in H\,,$$

کوم ته چې هر چطرته د $Q$ سورجکتیویتې یا په باندې والی له مخه نیول شوی دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

که $Q$ یونیتار وي، نو سملاسي لاس ته راځي، چې $Q$ په باندې یا سورجکتیو ده او

$$\langle Qv, Qw\rangle = \langle v, Q^{\star}Qw\rangle = \langle v, w\rangle, \quad v, w \in H,$$

ځکه چې $Q^{\star}Q = I$، دا په دې معنا، چې خوېي (a.

دا ساده لیدل کیږي،چې له خوي یا کرمتریزه (aڅخه د $v = w$ سره سملاسي (b لاس ته راځي.

بالاخره له (b ځخه لاس ته راځي

$$\langle Q^{\star}Qv, v\rangle = \langle Qv, Qv\rangle = \|Qv\|^2 = \|v\|^2 = \langle v, v\rangle, \quad v \in H$$

د $L = Q^{\star}Q - I = L^{\star}$ سره له دې لاس ته راځي

$$\langle Lv, v\rangle = 0$$

د ټولو $v \in H$ لپاره، همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0 = \langle L(v+w), v+w\rangle = \langle Lv, v\rangle + \langle Lv, w\rangle + \langle Lw, v\rangle + \langle Lw, w\rangle$$

$$= \langle Lv, w\rangle + \langle w, Lv\rangle = \langle Lv, w\rangle + \overline{\langle Lv, w\rangle}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\langle Lv, w\rangle$$

د ټولو $v, w \in H$ لپاره، که په ځتنګړې توګه کیږدو $w = Lv$ نو لاس ته ترې راځي

$$\mathrm{Re}\langle Lv, Lv\rangle = \langle Lv, Lv\rangle = \|Lv\|^2 = 0$$

او له دې سره $Lv = 0$ د ټولو $v \in H$ لپاره، نو $L = 0$ همداسې

$$Q^{\star}Q = I\,.$$

د بېلګې په توګه په $L^2(\mathbb{R}^n)$ باندې سکالار شوی د فوریې – ترانسفورمیشن رانیسو د

$$(Lf)(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\mathrm{i}y^{\mathrm{t}}x}\, dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

سره. دا چې $\|Lf\| = \|f\|$ دی ، نو $L$ یونیتار دی، او ادیونکیري اوپراتور د، اړونده سکالار شوی، د معکوس فوری-ترانسفورمیشن له لارې ورکړ شوی دی:

$$(L^{\star}g)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y}\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د یوه کرښیز اوپراتور آیګن ارزښتونه

Eigenwerte eines linearen Operators

که د یوه $V$ وکتور فضا یوه کرښیز اوپراتور $L$ لپاره په خپل ځانګي باور ولري

$$Lv = \lambda v, \quad v \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

نو $\lambda$ آیګن ارزښت بولو او $v$ د آیګنوکتور په حیث( همداسې دیوه وکتور فضا $V$ لپاره آیګن فنکشن). فضا

$$E_\lambda = \{v \in V : Lv = \lambda v\}$$

آیګن فضا بلل کیږي او $m_\lambda = \dim E_\lambda$ د آیګن ارزښت ډېرواروالی بولو.

د بیلګي لپاره به یو ناپرېکیدونکی نا- ثابت $2\pi$ - پریودیکي( تل بیرته راګرځیدونی) تابع

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ikx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه کرښیز اوپراتورونه راونیول شي.

(i) Der Multiplikationsoperator ضرب اوپراتور

$$L: \quad f \mapsto \varphi f$$

آیګن ارزښت نه لري، ځکه چي له $Lf = \lambda f$ په $\varphi(x) = \lambda$ ، $x \in (-\pi, \pi)$ لاس ته راشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دقاتولو اوپراتور (ii) Der Faltungsoperator

$$L: \quad f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\cdot - t) f(t)\, dt$$

اکسپوننشل تابع $e_j(x) = e^{\mathrm{i}jx}$ د آیګن تابع په څير لري. باور لري

$$(Le_j)(x) = \sum_k \varphi_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}k(x-t)} e^{\mathrm{i}jt}\, dt = \sum_k \varphi_k (2\pi) \delta_{j,k} e^{\mathrm{i}kx} = 2\pi \varphi_j e_j(x)\,,$$

داپه دې معنا، چې $2\pi\varphi_j$ اړونده ایګن ارزښتونه دی.

## د هرمیتیکي اوپراتورونو آیګن ارزښتونه

Eigenwerte hermitescher Operatoren

د یوه هرمیتیکي اوپراتور $L: H \to H$ آیګن ارزښتونه حقیقي دي او آیګنوکتورونه و مختلفو أیګن ارزښتونو ته اورتوګونا دي.

که $L$ هرمیتیکي وي، نو باور لري

$$\overline{\langle Lv, v\rangle} = \overline{\langle v, Lv\rangle} = \langle Lv, v\rangle\,,$$

دا په دې معنا، چې $\langle Lv, v\rangle$ د ټولو $v \in H$ لپاره حقیقي دی. اوس دې $v \neq 0$ د آیګن وکتور وي و آیګن ارزښت $\lambda$ ته، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle Lv, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \underbrace{\langle v, v\rangle}_{\neq 0}$$

دی، همداسې

$$\lambda = \frac{\langle Lv, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

حقيقي دي.

که $w \neq 0$ د $L$ آيګنوکتور وي و آيګن ارزښت $\mu$ ته، نو باور لري

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle Lv, w\rangle = \langle v, Lw\rangle = \mu\langle v, w\rangle$$

او له $\lambda \neq \mu$ سره

$$\langle v, w\rangle = 0\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د يوه هرميتيکي کومپاکت اوپراتور نورم

Norm eines kompakten hermiteschen Operators

د يوه کومپاکت هرميتيکي اوپراتور $L : H \to H$ لپاره، $\|L\|$ يا $-\|L\|$ د $L$ يو آيګن ارزښت دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه په دوه پلونو(قدمونو) کې صورت نیسي یا پلې کیږي.

(i) لومړی

$$\sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v\rangle| = \|L\|$$

ښوول کیږي..

د

$$s = \sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v\rangle|$$

او

$$|\langle Lv, v\rangle| \leq \|Lv\|\|v\|$$

سره سړی سملاسي لاس ته راوړي

$$s \leq \|L\|\,.$$

د دې لپاره چې معکوسونه یا په ځتوالی $\|L\| \leq s$ وښوول شي، لومړی په پامې نیسو ،
چې د په خوښه حقیقي $\alpha > 0$ لپاره لرو

$$\left\langle L(\alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv), \alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle - \left\langle L(\alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv), \alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle$$

$$= \alpha^2 \langle Lv, v\rangle + \langle LLv, v\rangle + \langle Lv, Lv\rangle + \frac{1}{\alpha^2}\langle LLv, v\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\alpha^2\langle Lv,v\rangle+\langle LLv,v\rangle+\langle Lv,Lv\rangle-\frac{1}{\alpha^2}\langle LLv,v\rangle$$

$$=4\langle Lv,Lv\rangle=4\|Lv\|^2\,.$$

د

$$|\langle Lv,v\rangle|=\|v\|^2\left|\left\langle L\frac{v}{\|v\|},\frac{v}{\|v\|}\right\rangle\right|\le s\|v\|^2$$

سره او د غبرګاږخيز – يا مازی الاضلاع کټمټوالي سره له دې لاس ته راځي

$$\|Lv\|^2\le\frac{s}{4}\left(\left\|\alpha v+\frac{1}{\alpha}Lv\right\|^2+\left\|\alpha v-\frac{1}{\alpha}Lv\right\|^2\right)$$

$$=\frac{s}{2}\left(\alpha^2\|v\|^2+\frac{1}{\alpha^2}\|Lv\|^2\right)\,.$$

که په ځانګړې توګه کيږدو

$$\alpha=\left(\frac{\|Lv\|}{\|v\|}\right)^{1/2}$$

نو راکوي

$$\|Lv\|\le s\|v\|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

داپه دې معنا، چې $\|L\| \leq s$ .

له (i) د (ii) Nach (i) existiert eine Folge $(v_n)$ in $H$ mit $\|v_n\| = 1$ und

مخې په $H$ کې یوه پرلپسې $(v_n)$ شتون لري د او

$$|\langle Lv_n, v_n\rangle| \to \|L\| \,,$$

سره، دا په دې معنا، چې یوه برخه پرلپسې $(v_{n_k})$ شتون لري د

$$\langle Lv_{n_k}, v_{n_k}\rangle \to \lambda$$

او

$$|\lambda| = \|L\| \,.$$

سره.

اوس فقط ښايو، چې

$$\|Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\| \to 0$$

د دې لپاره په پام کې نیسو $\|Lv\| \leq \|L\|\|v\| = |\lambda|\|v\|$ او

$$Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\|^2 = \|Lv_{n_k}\|^2 - \langle Lv_{n_k}, \lambda v_{n_k}\rangle - \langle \lambda v_{n_k}, Lv_{n_k}\rangle + |\lambda|^2$$

$$\lambda|^2\|v_{n_k}\|^2 - \overline{\lambda}\langle Lv_{n_k}, v_{n_k}\rangle - \lambda\langle v_{n_k}, Lv_{n_k}\rangle + |\lambda|^2 \,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره چې ښی اړخ د $\infty$ $k \to$ لپاره د

$$|\lambda|^2 - |\lambda|^2 - |\lambda|^2 + |\lambda|^2 = 0$$

په لور هڅيږي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د کومپاکت هرميتيکي اوپراتورونو سپکترال انځورونه

Spektraldarstellung kompakter hermitescher Operatoren

يوه کومپاکت هر ميتيکي اوپراتور $L : H \to H$ ته په يوه هيلبرت-فضا يو اورتونورمل بنسټ له آيګن ارزښتونو څخه شتون لري

$$e_1, e_2, \ldots,$$

د کوم سره چې مطلق ارزښتونو د اړونده آيګن رازښتونه $\lambda_j$ يوه همغږيزه صفرپرلپسي جوړوي، يعنې

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots, \quad \lambda_j \to 0\,.$$

نسبت دې بنسټ ته $L$ دا لاندې انځورونه لري

$$Lv = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle v, e_j \rangle e_j\,.$$

ښوونه يې په ډېرو برخه پلونو)(قدمونو) کې پلی کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د $e_j$ جوړښت. د کومپاکت هرمیتیکي اوپراتورونو نورم د خویونو په بنسټ یو آیګن ارزښت $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ شتون لري د لاندطي سره

$$|\lambda_1| = \|L\| \,.$$

اوس سړی په پام کې نیسي، چې $L$ د آیګنوکور $e_1$ څخه غزېدلي لاندې فضا $E_1$ اوتوګونال کومپلمنت ایناریانت پرېږدي. د $v \in E_1^\perp$ لپاره دی

$$\langle Lv, e_1\rangle = \langle v, Le_1\rangle = \lambda\langle v, e_1\rangle = 0,$$

داپه دې معنا، چې $Lv \in E_1^\perp$. د دې پسې یا د دې په تعقیب $L$ همداسې په $E_1^\perp$ باندې یو کومپاکت هرمیتیکي اوپراتور دی. د نورم خوی یا کرکتریزه بېرته یو آیګن لرزښت $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ راکوي د لاندې سره

$$|\lambda_2| = \|L|_{E_1^\perp}\| \,.$$

د $\lambda_2$ ارزښښت $\leq |\lambda_1|$ دی ، خکه چې د یوې کوچنۍ فضا په نسبت نورم جوړیږي.

اوس سړی کړی شي جوړښت ایندوکتیو مخ ت ه بوزي:

$$|\lambda_n| = \|L|_{E_n^\perp}\|$$

د لومړیو $n$ اوتوګونال آیګنوکتورونو کرښیز پوښ Hülle $E_n$ سره. دا تلنلار پرې کیږي، که $L|_{E_n^\perp} = 0$ وي، داپه دې معنا، چې که

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\dim \operatorname{Bild}(L) = n < \infty$$

وي.

دويم: د صفر 0په لور پولي ته تلنه: وړاندنيونه، چې $\lambda_j \geq \lambda > 0$ د ناپای ډېرو $j$ لپاره باور لري، لاندې تضاد ته لاربنودوي. د $L$ د کومپاکتوالي په بنسټ د $\{e_1, e_2, \ldots\}$ څېره یا عکسدا لاندې محدوده ډېرۍ یا سټ

$$\{e_1/\lambda_1, e_2/\lambda_2, \ldots\}$$

نسبي کومپاکت ده، باید یوه پولي ته تلونکي برخه پرلپسي يې خوندي لرودې وی. دا د

$$\|e_j - e_k\|^2 = \|e_j\|^2 + \|e_k\|^2 = 2, \quad j \neq k$$

له امله ناشوني ده.

دريم: د $L$ انځورونه: د جوړښت وروسته $e_1, e_2, \ldots$ يو اورتونورمال بنسټ دی د

$$H = \operatorname{Bild} L \oplus \ker L\,.$$

لپاره.

دا وديزېنه تړلي د کربښزوالي څخه لاس ته راځي، چيرته چې آيګنوکتورونه، کوم چې د $\ker L$ لپاره بنسټ جوړوي، طبعاً ترې تيريدلی شو يا صرف نظر ترې کولای شو.

## شتورم-ليوويل-پرابلم Sturm-Liouville-Problem

د ژئ ارزښت پرابلم

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Lu = -(pu')' + qu \qquad = f \text{ auf } (0,1),$$

$$u(0) = u(1) \qquad = 0,$$

د ناپرېکیدونکي، کره همغږیزو توابعو $p, q$ سره یو ځانګړی شتور-لیوویل پرابلم دی. د کومپاکت-هرمیتیکي اوپراتورونو لپاره د سپکترال انځورنې سره کیدی شي یو اورتوکورمال بنسټ $e_1, e_2, \cdots$ شتون د $L^2(0,1)$ لپاره د $L$ آیګن توابعو څخه وښوول شي، د ایګن ارزښتونو

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$$

او $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ سره . د دې بنسټ په مرسته کیدی شي په

$$u = \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \langle f, e_j \rangle e_j$$

بڼه انځور شي.

داوینا کیدی شي نوره هم تیزه شي. دا مګر له دې برسیره نور فکر کونې ته اړتیا لري.

د آیګن توابعو څخه د اورتونورمال بنسټ شتون د دې برعکس تړلی د ټولیزې تیوریڅخه، لکه چې په لاندې کې روښانه کیږي.

لومړی: د $f = 0$ لپاره د ژئ پرابلم فقط ساده حل لري. ځکه چې د $u$ سره ضرب ټوټه انتیګرال

$$\int_0^1 \underbrace{p}_{\geq 0}(u')^2 + \underbrace{q}_{\geq 0} u^2 = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

راکوي، يعني $u=0$ . د عادي دفرنشل مساواتو څخه اوس لاس ته راځي، چې د ژئ پرابلم د خوښې $f \in L^2(0,1)$ لپاره يو يواځنی حل $u \in C^1[0,1]$ لري.

دويم: دا حل $u$ د $f$ کرښيز په واک دی يا کرښيز تابع دی، نو هر $L$ ته يو معکوس اوپراتور $A$ شتون لري:

$$f \to u = Af\,.$$

.

دريم: د ټوټه انتيکريشن پهمرسته سړی ښايي، چې $A$ د ځان سره – يا خپل ادجونګيري ده. د $u=Af$ ، $v=Ag$ سره دی

$$\langle Af, g\rangle = \int_0^1 -u(pv')' + quv = \int_0^1 -(pu')'v' + quv = \langle f, Ag\rangle\,.$$

څلورم: د $u=Af$ سره د ضرب له مخې د دفرنشل مساوات د $u$ سره لاس ته راځي او انتيګريشن

$$\int_0^1 p(u')^2 + qu^2 = \int fu$$

او له دې سره

$$c\,\|u\|_{1,2}^2 \le \|f\|_0\,\|u\|,$$

د کوم سره چې $c>0$ د $p$ او $q$ لپاره يوه پورته بند يا بنديز دی، او $\|\cdot\|_{1,2}$ په سوبوليو-فضا $H^1(0,1)$ نورم ښايي. دا چې $\|u\| \le \|u\|_{1,2}$ ، نو $A$ په

(c) ketabton.com: The Digital Library

$L^2(0,1)$ کې یوونغونډاری (واحد کره) جوړوي، چې د یوه محدوده ډېرئ یا سټ په $H^1(0,1)$ کې. دا چې $\|u\| \le \|u\|_{1,2}$ ، نو $A$ په $L^2(0,1)$ کې یوونغونډاری جوړوي، چې دا د محدودې ډېرئ په $H^1(0,1)$ کې پروت دی، یعني د سوبلیو خوندیونې جملې په بنسټ کومپاکت دی.

پنځم: د کومپاکت هرمیتیکي اوپراتورونو شپکتاکولار انځورونې څخه له آیګن توابعو څخه د یوه اورتونورمال بنسټ شتون لاس ته راځي، چیرته چې د آیګنارزښت مطلق ارزښت $\lambda_j$ یوه صفرپرلپسې جوړوي. په ورته توګه د معکوس اوپراتور $A$ لپاره وینا سرې لاس ته راوړی شي.

## ګړندی لوېدونکی ازماېښت تابع Schnell abfallende Testfunktion

د ګړندي لوېدونکو ازماېښتتوابعو $S$ فضا کومپلکس ارزښتیز توابع $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ لري د

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره د ټولو $\alpha, \beta$ لپاره.

نیمنورم $|\ |_{\alpha,\beta}$ په $S$ باندې یو متریک تعریفوي. د یوه په خوښه کره تاکلې پرلپسې $(\alpha_k, \beta_k)$ لپاره مولتی ایندکس جوړه Multiindexpaare سرې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\varrho_k(f) = \frac{|f|_{\alpha_k,\beta_k}}{1+|f|_{\alpha_k,\beta_k}}$$

ږدي او

$$d(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \varrho_k(f-g)$$

د کانوني واټنتابع په حيث تعريفوي.

فضا $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ د شوارڅ د ازماېښت تابع د $S$ يو نينګه يا غليظه لاندې فضا ده. په انالیز کې په $S$ باندې د ناپرېکيدونکو توابعو کيدی شي سرې کړی شي په همغه ازماېښت توابعو د کومپاکت وړونکي سره ځان محدود کړي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د ګړندي لوېدونکو توابعو لپاره تيوپيکي بېلګې توابع دي د يوه اکسپوننشل د راکميدو حالت يا ځاننيونې Abklingverhalten, سره، لکه د بيګي په توګه

$$f(x) = p(x)\exp(-|x|^2)\,,$$

چيرته چې $p$ يو په خوښه پولينوم دی.

تابع

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & |x|<1\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

په $\mathcal{D}$ کې د تابع لپاره يوه بېلګه ده. په همدې توګه $gh$ د $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ سره په $\mathcal{D}$ پورې اړه لري او له دې سره په $S$ پورې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع $f(x) = \exp(-|x|)$ په حقیقت کې کړندئ لویږي، مګر په اصل یا سرچینه کې ناپرېکېدونکې مشتقوړ نه دی او له دې سره په $S$ پورې اړه نه لري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

تیمپیریري دیسریبوشنونه Temperierte Distributionen

تیمپریري دیستریبوشن و فضا $S$ ته د ګړندیو لوېدونکو ازماېښت توابعو دوال-یا دوه ګونې فضا $S'$ جوړوي. یعنې یو تیمپریري دیستریبیوشن $\Lambda$ یو کرښیز تابع دی، کوم چې هر تابع $f$ د

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره یو کومپلکس ګڼ یا عدد $\Lambda f$ ترتیبوي یا تنظیموي او اټکل

$$|\Lambda f| \leq c \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq n} |f|_{\alpha,\beta}$$

د پوره یا کافي لوی $n(\Lambda)$ لپاره پوره کوي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

په لاندې کې د تیمپریري دیستریبیوشنونو دوه تیپیکي بېلګې تشریح شوي دي.

(i)

کمزوري جګېدونکي توابع:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور لري

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \frac{dx}{(1+|x|^2)^{k/2}} < \infty$$

نو

$$\Lambda_\varphi f = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi f\,, \quad f \in \mathcal{S}\,,$$

يو تيمپريري ديستريبيوشن تعريفوي. د

$$(1+|x|^2)^{k/2} \le c \sum_{|\alpha|\le k} |x^\alpha|\,,$$

له امله کېدی شي د $|\Lambda_\varphi f|$

$$c \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)|}{(1+|x|^2)^{k/2}} \left( \sum_{|\alpha|\le k} |x^\alpha f| \right) \le \tilde{c} \sum_{|\alpha|\le k} |f|_{\alpha,0}$$

له لارې تخمين یا اټکل شي.

(ii)

د مشتقونو کرښيز کمبينيشن:

د مشتقونو هره موزن یا درونډ زياتون یا جمعه

$$\Lambda f = \sum_\alpha c_\alpha \partial^\alpha f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو تيمپريري ديستريبيوشن تعريفوي. په جوته توګه باور لري

$$|\Lambda f| \leq \left(\max_{\alpha} |c_\alpha|\right) \sum_{\alpha} |f|_{0,\alpha} .$$

په ازماېښت توابعو د کرښيزو توابعو لپاره بېلګي چې په $\mathcal{S}$ ناپرېکېدونکي( متمادي) نه دي، دي

$$\Lambda f = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(x^2) f(x)\, dx$$

او

$$\Lambda f = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(k) .$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د تيمپريري ديستريبيوشنونو مشتق

Ableitung von temperierten Distributionen

د يوه ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ توپه مشتق د

$$f \mapsto (\partial^\alpha \Lambda)\, f = (-1)^{|\alpha|} \Lambda\, (\partial^\alpha f) \ , \quad f \in \mathcal{S} ,$$

له لارې تعريف شوی ديستريبيوشن دی. دا تعريف د کمزورو مشتقونو کونڅپت(کنسپټ) تولېز کوي او د

$$\Lambda_\varphi f = \int\limits_D \varphi(x) f(x)\, dx\, , \quad \varphi \in C_0^\infty(D) ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د ورسره بلد مشتق تعریف سره سرخوري يا يو غبزیز کیږي.

$$\partial^\alpha \Lambda_\varphi = \Lambda_{\partial^\alpha \varphi} \,.$$

د تعریف سره سم تمپیریري دیستریبیشن ناپای زیات مشتقوړ دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

## دیراک- او هیویزایډ – فنکشنال Dirac- und Heavyside-Funktional

د هیویزایډ-فنکشنال $H$ یو دیستریبیوشن دی، هغه چې د تابع

$$h : x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

له لارې ایندوڅیر کیږي، دا په دې معنا، چې

$$Hf = \int_0^\infty f \,.$$

.

د مشتق $H'$ لپاره راکوي

$$f \mapsto H'f = -H(f') = -\int_0^\infty f' = -\left(\lim_{x\to\infty} f(x) - f(0)\right) = f(0) = \delta f \,,$$

دکوم سره چې $\delta$ یو دیراک-تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تیمپیریږي دیستریبیوشنونو ضرب(څل)

Multiplikation von temperierten Distributionen

د یوه تیمپیریږي دیستریبیوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ سره د یوه کمزوري چګېدونکي تابع $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ ضرب د

$$(\varphi\Lambda)\, f = \Lambda\,(\varphi f)\ \ , f \in \mathcal{S}\,,$$

له لارې تعریف شوی تیمپریری دیستریبیوشن $(\varphi\Lambda)$ دی.

$$\sup_x \left| \left(1 + |x|^2\right)^{-s/2} \partial^\alpha \varphi \right| < \infty$$

د ټولو ضربیزو(ډېر) اندکشني(پېژندنښنو) $\alpha$ او $s(\alpha) > 0$ لپاره. دا شرایط په ځانګړې توګه د ټول پولینومونو لپاره پره دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د تیمپیریږي دیستریبیوشنونو قات کونه یا راغبرګونه

Faltung von temperierten Distributionen

د یوه تیمپیریږي دیستریبیوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره اویوه ګړندي لویدونکي ازماېښت تابع $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره

$$(\Lambda \star \varphi)\ (x) = \Lambda\varphi(x - \cdot)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د له لارې یوه قاتونه یا را غبرګونه تعریف ده.

تابع $\Lambda \star \varphi$ ناپای ډېر مشتقوړ دی او کمزوری جګېدونکی، کېدی شي د تیمپیریري دیستریبیوشن سره و پېژندل شي،

که $\Lambda = \Lambda_\psi$ له $\psi \in \mathcal{D}$ سره وي، نو

$$(\Lambda \star \varphi)\,(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)\,dy\,,$$

قاتونه ده د دیستریبیوشن سره یعنې د تابع لپاره ورسره بلد تعریف دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

اپروکسیمي کتمتوالی Approximierende Identität

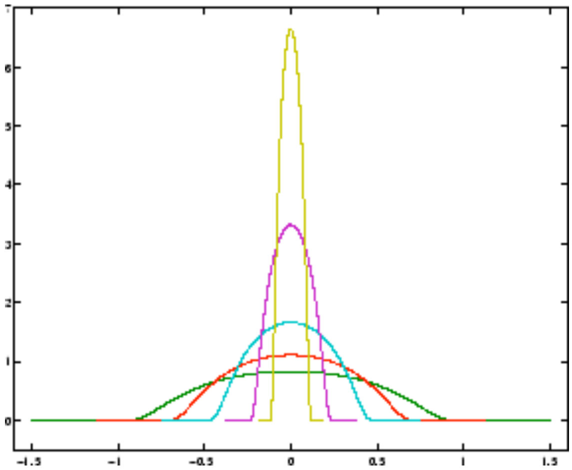
وي دې $\varphi \in \mathcal{D}$ یو د

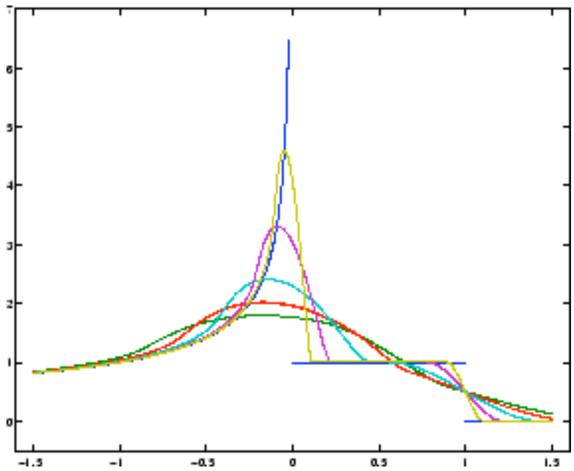
$$\varphi \geq 0\,, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$$

سره ازماېښتي تابع او $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ ، نو باور لري

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon \star f = f\,, \quad f \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





کينه ځيرونه ياتابع د $\varepsilon = 1, .75, .5, .25, .125$ لپاره $\varphi_\varepsilon$ او $\varphi = c\exp(1/(x^2-1))\,, x \in \mathbb{R}$ ښايي ، ښئ تابع يا ځيرونه اړونده قاتوني ښايي.

لکه په تابع کي چي ښوول شوی دی، کيدی شي قاتونه د توابعو د خويوني لپاره وکارول شي، ځکه چي

$$\varphi_\varepsilon \star f \in L^p \cap C^\infty .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې اپروکسيمسشن-پروسې په مرسته بسيا کوي، چې د بيلګې په توګه دا کټمټوالى د ناپرکيدونکو کربنيز اوپراتورونو لپاره فقط د خويو توابعو لپاره وښايو.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د ګړندي لويدونکو توابعو د فوريې- ترانسفورميشن

Fourier-Transformation schnell abfallender Testfunktionen

د فوريې ترانسفورميشن

$$f \to \hat{f}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-\mathrm{i}xy)\, dx$$

اد فوريې په څټ يا معکوس ترانسفورميشن

$$g \to \check{g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y) \exp(\mathrm{i}xy)\, dy$$

ناپرېکيدونکي کربنيز اوپراتورونه دي د ګړندي لويدونکو ازماېښت توابعو په فضا $S$ باندې

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

تر يوه نورمي شوي ضريب د فوريې – ترانسفورميشن او د فوريې په څټ يا معکوس ترانسفورميشن پورې په $L^2(\mathbb{R}^n)$ باندې ايزومتريګانې دي، کوم چې يو بل ته معکوس يا په څټ دی. دا چې $S \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ دی، نو بايد چې د $S$ په توپولوژي کې ناپرېکيدنه وښايو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فوريې – ترانسفورميشن  قوانينو سره سم باور لري

$$\left|(\mathrm{i}y)^\alpha \partial^\beta \hat{f}(y)\right| =$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha \left((-\mathrm{i}x)^\beta f(x)\right) \exp(-\mathrm{i}xy)\, dy\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-n} \left|\left(1+|x|^2\right)^n \partial^\alpha \left(x^\beta f(x)\right)\right|\, dx\,.$$

دا چې $\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-n}\, dx < \infty$ دی،  نو کيدی شي ښئ خوا د $\mathcal{S}$ د نيم نظم له لارې اټکل شي.

د په څېر يا معکوس فوريې – ترانسفورميشن لپاره په ورته توګه مخ ته ځو.

ليکونکې: هيوليګ، هيورنر

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن د فوريې –ترانسفورميشن

Fourier-Transformation einer temperierten Distribution

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ د فوريې –ترانسفورميشن د

$$\hat{\Lambda}\varphi = \Lambda\hat{\varphi}\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

له لارې  تعريف دی او په $\mathcal{S}$ باندې يو ناپرېکيدونکی کرښيز اوپراتور تعريف دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیستریبیوشن $\hat{\Lambda}$ کېدی شي په دېرو حالتونو کې د

$$\hat{\Lambda}(y) = \Lambda_x e^{-\mathrm{i}xy}$$

له لارې وشمېرل شي. د ټولیزو تیمپریري دیتریبیوشنونو $\Lambda$ لپاره داکتمتوالی باید د یوه اپروکسیمیشن-پورسې په مرسته و ښوول شي، ځکه چې $e^{-\mathrm{i}xy}$ یو نه اجازه لرونکې ازماېښت تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د $\Lambda = \Lambda_\psi$ لپاره د $\psi \in \mathcal{S}$ سره دی

$$\Lambda\hat{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dx\,\psi(y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dy\,\varphi(x)\,dx\,.$$

دویمه لیکه د $\Lambda_{\hat{\psi}}\varphi$ سره برابره ده، دا په دې معنا، چې $\hat{\Lambda}$ د $\hat{\psi}$ له لارې ایندوځیر شوی دیستریبیوشن دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د تمپوریري دیستریبیوشنونو د فوریې – ترانسفورمیشن لپاره قواعد یا لارې

د توابعو د فوریې – ترانسفورمیشن ته ورته لاندې کتمتوالی د ګړندیو لوېدونکو ازماېښت توابعو و $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره باور لري ا و د تیپریري دیستریبیوشنونو $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- مشتقونه او ضربونه:

د یوه پولینوم $p(y) = \sum a_\alpha y^\alpha$ لپاره باور لري

$$p\widehat{(-\mathrm{i}\partial)\Lambda} = p\hat{\Lambda}\,.$$

لهدې سره دی $p(-\mathrm{i}\partial) = \sum a_\alpha (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\partial^\alpha$. په ځانګړې توکه $-\mathrm{i}\partial_\nu$ ټوټه مشتقونه د $y_\nu$ سره ضرب په ګوته کوي( دلته دی $p(y) = y_\nu$ ).

په ورته توګه باور لري

$$\widehat{p\Lambda} = p(\mathrm{i}\partial)\hat{\Lambda}\,.$$

- Faltung:قاتونه:

$$\widehat{\Lambda \star \varphi} = \hat{\varphi}\hat{\Lambda}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

## د ماتو نظمونو د سوبولیف-فضاګانې

Sobolev-Räume gebrochener Ordnung

د سوبولیف-فضا $H^s\left(\mathbb{R}^n\right)\ ,\ s \in \mathbb{R}$ د ټولو تیمپیری دیستریبیوشنونو $\Lambda$ څخه جوړه ده د

$$w^s\hat{\Lambda} \in L^2\left(\mathbb{R}^n\right)\ , \quad w(y) = \left(1 + |y|^2\right)^{1/2}\ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره .

دا خویونه یا کرکتاریزه کونه د $H^k(\mathbb{R}^n)\ ,\ k \in \mathbb{N}_0$ تولګیز تعریف تولیز کوي، د
تولو توابعو فضا په حیث د مربع انتیګرالوړ توته مشتقونو سره بالاخره تر نظم $k$ پورې.

د کمیز یا منفي اکسپوننت یا جګګن سره فضاوې د زیاتیز یا مقبت اکسپوننت سره فضاوو
دوه ګوني فضاوې دي.

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)'\ , \quad s \geq 0\,.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د ښووني لپاره د $n = 1$ حالت تر څېړني لاندې نیسو. تولیز حالت کېدی شي په ورته
توګه تر څیړني لاندې ونیول شي او تنها تخنیکي پیچلی دی

(i)

د $k \in \mathbb{N}_0$ لپاره د تعریف سره همغږیزوالی د پلانشرل-کتمتوالي
Plancherel-Identitätڅخه لاس ته را ځي

$$f, f', \ldots, f^{(k)} \in L^2 \Leftrightarrow \hat{f}, |y|\hat{f}, \ldots, |y|^k\hat{f} \in L^2\,.$$

دا چې

$$|y|^j \leq \left(1+|y|^2\right)^{k/2} \leq c\left(1+|y|^k\right)\ , \quad y \in \mathbb{R}$$

د $j \leq k$ لپاره دی، ورته والی کرکتي کوني $\left(1+|y|^2\right)^{k/2}\hat{f} \in L^2$ ته بیایي

(ii)

د دوال فضا کرکتري کونه کیدی شي د د یوه ابسترکت د لیل سره وښوول شي. که د
فوریې ترانسفورمیشن د $F$ سره په نخښه شي $w^s$ او د ضرب د $W$ سره ، نو سړی
لاندې دیاګرام لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L^2 \xleftarrow{W} \hat{H}^s \xleftarrow{F} H^s \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{C}.$$

یو فنکشنال $\Lambda \in (H^s)'$ یو فنکشنال

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda F^{-1} W^{-1} : L^2 \to \mathbb{C}.$$

ایندوخیرت کوي.

دا چې $(L^2)' = L^2$ دی سړی کړی شي $\tilde{\Lambda}$ د یوه تابع $g \in L^2$ سره وښوول شي یا په نخښه شي

$$\tilde{\Lambda} f = \int_{\mathbb{R}} f \bar{g}.$$

نو د $(FF\varphi)(x) = 2\pi\varphi(-x)$ له امله لاندې باور لري

$$\hat{\Lambda}\varphi = \Lambda\hat{\varphi} = \tilde{\Lambda} W F F \varphi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \varphi(-x) w^s(x) \overline{g(x)}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \underbrace{\left( \frac{1}{2\pi} w^s(-x) \overline{g(-x)} \right)}_{\hat{\Lambda}(x)} dx$$

له دې سره غوښتونی کرکتاری کونه $\hat{\Lambda} w^{-s} \in L^2$ لاس ته راځي، ځکه چې کومپلکس کونجوګیشن او هندارونه په انتیابیلیتي باندې کومه اغیزه نه ري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

# ترانسليشنن اينواريانت اوپراتورونه Translationsinvariante Operatoren

هر محدود کربنيز اوپراتور $L : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ، هغه چې له ترانسليشن سره کومتير دی ،

$$Lf(\cdot - h) = (Lf)(\cdot - h),$$

کيدی شي د يوه تيمپريري ديستريبيوشن $\Lambda$ سره د محدود فوريي – ترانسليشن سره انځور شي، دا په دې معنا، چې

$$L\varphi = \Lambda \star \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

او

$$\|L\| = \text{ess sup}_{y\in\mathbb{R}^n} |\hat{L}(y)| .$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د جملې يو اړخ د پلانشيرل قضيي حخه لاس ته راځي:

$$\|\Lambda \star \varphi\|_2 = (2\pi)^{n/2}\|\hat{\Lambda}\hat{\varphi}\|_2 \le (2\pi)^{n/2}\|L\|\|\hat{\varphi}\|_2 = \|L\|\|\varphi\|_2,$$

د کوم سره چې اټکلونه خورا ښه شونې(ممکنه) ده.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د دفرنشل-اوپراتورونو لپاره بنستيزه اوبيونه( حل)

د هر دفرنشل اوپراتور

$$L = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \partial^\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د ثابت یا تل همغه ضریب $c_\alpha$ سره یو تیمپریري بنسټیز حل شتون لري، دا په دې معنا، چ ېیو تیمپریري دیستریبیوشن $\Lambda$ د لاندې سره شتون لري

$$L\Lambda = \delta \, .$$

د دفرنسیشن او قاتولو قانو سره سم ، د ټوټه دنرنشیشن مساوات یا ــبرابرون

$$Lu = f \, , \quad f \in \mathcal{D} \, ,$$

یو حل  به لاندې بڼه

$$u = \Lambda \star f$$

انځور شي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د اونیوارینت دفرنشل اوپراتر

$$L = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 1$$

لپاره تیمبیریري بنسټیز حل $\Lambda = e^{-|x|}/2$ دی، د دې لپاره چې دا وښوول شي، سړی د لاندې برابرونیا مساوات فوریې – ترانسفورمي جوړوي

$$L\Lambda = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \Lambda + \Lambda = \delta$$

او لاس ته راوړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-(iy)^2\hat{\Lambda} + \hat{\Lambda} = 1\,.$$

د $\hat{\Lambda}$ پسې حلونې پله مخې راكوي

$$\hat{\Lambda} = \frac{1}{1+y^2}\,,$$

كوم چې د $e^{-|x|}/2$ فوريې – ترانسفورمي په ګونه كوي.

نو د دفرنشل مساوات

$$-u'' + u = \sin x$$

يو حل دى

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|}\sin(x-y)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{y}\sin(x-y)\,dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x-y)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x+y)\,dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x-y)\,dy
\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad \sin x \int_0^\infty e^{-y} \cos y \, dy = \frac{\sin x}{2} \, .$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

## د لاپلاس - اوپراتور بنسټيزه اوبيونه( حل)

Fundamentallösung des Laplace-Operators

د لاپلاس - اوپراتور

$$\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$$

په $\mathbb{R}^n$ کې لاندې بنسټيز حل لري

$$\frac{1}{(2-n)c_n} \, |x|^{2-n} \, , \quad n \geq 3 \, ,$$

د $c_n$ سره د يوونسفر(واحد سفر) د $(n-1)$ - بعديز ډکي يا حجم.

د $n = 2$ لپاره

$$\frac{1}{2\pi} \, \ln |x|$$

يو بنسټيز حل دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د ښوونې لپاره سړی د $\Delta\varphi = \Delta|x|^{2-n}$ له لارې منځ ته راغلی فنکشنال $\Lambda$ اغيزه په يوه ازماېښت تابع $f \in C_0^\infty$ باندې تر څېړنې لاندې نيسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda f = \int\limits_{R^n} \varphi \Delta f \, .$$

که د انتیګریشن ورشو د غونډاري پوښ $K_{\varepsilon,R}$ له لارې اپروکسیمي کړو د د دننئ
وړانګې $\varepsilon$ او دباندنئ وړانګې $R$ سره، نو د ګرین Greenد دویم انتیګرال فورم یا بڼې
له مخې باور لري

$$\int\limits_{K_{\varepsilon,R}} \varphi \Delta f = \int\limits_{\partial K_{\varepsilon,R}} \varphi \partial_{\perp} f - \int\limits_{\partial K_{\varepsilon,R}} f \partial_{\perp} \varphi + \int\limits_{K_{\varepsilon,R}} f \Delta \varphi \, ,$$

د $\partial_{\perp}$ د نورمال مشتق سره. له دې سره پهښنی اړخخ دریم انتیګرال ورکیږي، ځکه چې
$\Delta\varphi = 0$ د $x \neq 0$ لپاره دی. لومړیو دواړو انتیګراله ونو ته فقط دننئ ژی تر
څېړنې لاندې نیسو، ځکه چې $f$ محدود وړونکی لري او د پوره لوی $R$ لپاره د خپلو
ټولو مشتقونو سره ورکیږي.

که سړی پولار یا قطبي کواوردینات $x = rx^{\circ}\,,\; r \in [0,\infty)\,,\; x^{\circ} \in S_n$ وکاروي، د
کومو سره چې $S_n$ $(n-1)$ -بعدیز یوونسفر په ګوته کوي، نو دی

$$\int\limits_{K_{\varepsilon}} \varphi \Delta f dx = -\int\limits_{S_n} \varepsilon^{2-n} (\operatorname{grad} f)(\varepsilon x^{\circ}) \cdot x^{\circ} \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$+\int\limits_{S_n} f(\varepsilon x^{\circ})(2-n)\varepsilon^{1-n} x^{\circ} \cdot x^{\circ} \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$= -\varepsilon \int\limits_{S_n} (\operatorname{grad} f)(\varepsilon x^{\circ}) \cdot x^{\circ} dS_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$+(2-n)\int\limits_{S_n} f(\varepsilon x^\circ)dS_n\,.$$

دا لومړی انتیګرال د $\varepsilon$ سره د صفر په لور هڅیږي، ځکه چې $\operatorname{grad} f$ محدود دی، اودویم انتیګرال د $n \neq 2$ لپاره ارزښت $(2-n)\operatorname{vol}(S_n)f(0)$ راکوي. له دې سره دی

$$\frac{1}{(2-n)c_n}\Lambda f = f(0) = \delta f\,.$$

د $n = 2$ لپاره کیدی شیپه ورته توګه مخ ته لاړ شو، له دې سره دی

$$\operatorname{grad}(\ln r) = \frac{x^\circ}{r}\,, \quad r \neq 0\,,$$

$$\Delta(\ln r) = 0\,, \quad r \neq 0\,,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

،،له هر څه ستونځمن یو څه ته نیت اوملا راتړل دي(ژباړی)،،.

(c) ketabton.com: The Digital Library

# د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

*Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, Dissertation at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

*<u>2000 Bonn (Germany):</u>*

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

*<u>2003 Bonn (Germany):</u>*

څلورم: ځمککچپوهنه( هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

*<u>2003 Bonn (Germany):</u>*

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

*2003 Bonn (Germany):*

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

*2003 Bonn (Germany):*

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

*2003 Bonn (Germany):*

اتم: دفرنشیال برابرون ( دا کتاب په دې ښانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

*Bonn (Germany): 2003*

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

*Mathematical Formulas*

*2003 Bonn (Germany):*

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپېدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

(c) ketabton.com: The Digital Library

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

٣ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ١

٧ – اناليزې ٢

٨ – کرښيز الجبر

٩ - د شميرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل اناليز

١٢ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

١٣ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

١۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما لیکنې

*Bonn (Germany):*

۱۵ ـ د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ ـ څمککچپوهنه ( هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ ـ الجبر ښستونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ ـ ډېرئ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ ـ د شمیرپوهنې سم اند ( منطق ریاضي)

۲۰ ـ د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ ـ د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲ـ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته

تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ ـ د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ ـ د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ ـ د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویيونو په پښتو روښانه ونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۶ - د زړه له کومې( دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

**Get more e-books from www.ketabton.com**
**Ketabton.com: The Digital Library**