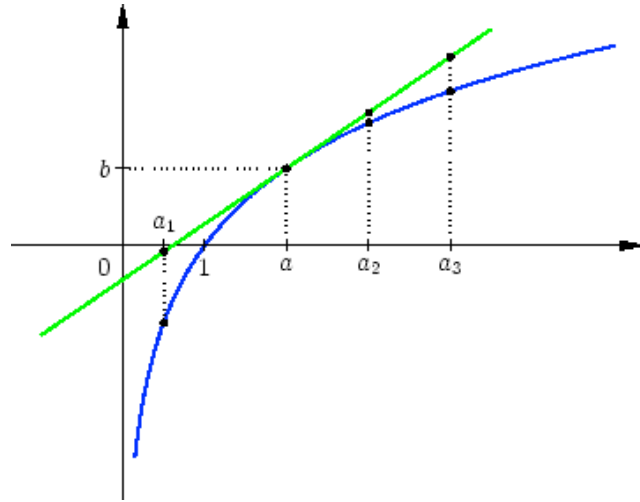


# فونکشنل انالیز

Funktionalanalysis



Ketabton.com

ڊاڪٽر ماخان ميري شينواری

دلوي ڄڻتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت -  
په ما د پوهنې لپاره د لگښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

## کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: فنکشن تيوري

ليکونکی:

ژباړی : ډاکتر ماخان،، ميري،، شينواری

د خپريدو لړۍ .....

خپرنډوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

۲۰۱۲

چاپ کال

د ژباړې برېښنا پته : [smakhan1946@gmail.com](mailto:smakhan1946@gmail.com)

چاپ چارې

چاپ ته يې د هر چمتو هيوادوال مرسته په سترگو منل کيږي

پښتو مو ژبه او شمير پوهنه پرې ساده ده

نيولیک

۱	متریکي فضاوي
۲	د اویکلید یا اقلیدس متریک
۲	د هامینگ وائین
۳	په متریکي فضاو کې پولې ته تلنه
۴	په متریکي فضا کې د کوشي پرلپسي (ترادف)
۴	د یوې متریکي فضا پوره- یا تکمیلوالی
۵	نورم
۶	د یوې نورمي وکتور فضا متریک
۹	ایپسیلون- جال
۱۰	په متریکي فضاوو کې کومپاکت (سره نښتی)
۱۱	په یوه ساحه باندې ناپرېکيدونکي توابع
۱۱	ازمابښتي توابع
۱۲	کمزوري یا ضعیف مشتقونه
۱۳	توپولوژیکي وکتور فضاوي
۱۴	د بانخ فضا
۱۴	په یوه کومپاکت ډبريو باندې ناپرېکيدونکي توابع
۱۴	په کومپاکت ډبريو باندې مشتقور توابع
۱۵	<b>p</b> -انتيگرالور توابع
۱۶	محدود توابع
۱۶	د موزونو اریتمیټیکي او هندسي منخ ترمخ ..
۱۸	د انټیگرالونو لپاره د هولدر نابرارونونه
۱۹	د انټیگرال لپاره د مینکوفسکي ناساوات
۲۱	د سوبولیف فضاوي
۲۵	د سوبولیفو په کې خونديوني جمله
۲۷	د بانخ ځای په ځای ټکي جمله
۲۸	سکالار ضرب
۲۹	هیلبرت – فضا
۳۰	مربع جمعه کیدونکي پرلپسي
۳۰	مربع انټیگرالور توابع
۳۲	د مربع انټیگرالور توابعو سوبولیف – فضا
۳۳	د هاردي-لیبسک فضا
۳۴	پوره اورتونورمالسیستم

۳۴	په هیلبرت، فضا کې فوری-پروجکشن (پربوستون)
۳۶	په هیلبرت-فضا باندې د کونوکسو ....
۳۸	په هیلبرت-فضا کې اورتوگونال کومپلیمینټ
۳۹	په هیلبرت-فضا کې د بیسل-نامساوات
۴۰	په هیلبرت-فضا کې د فوریر (فوری) ودیزینه
۴۱	په هیلبرت - فضا کې د پارزیوال-کټمټوالی
۴۲	ناپربکیدونکي کرښیز فنکشنال
۴۵	د هان-بانخ د دوام (مخ ته بیوني) جمله
۴۸	دوال- یا دوه گوني فضا
۵۰	بیدوالفضا
۵۰	د $p$ - انټیگراور توابعو دوالفضا
۵۱	د ریسخ د انخورولو جمله
۵۳	کمزوري پولی ته تلنه
۵۵	محدود کرښیز اوپراتورونه
۵۵	انټیگرال اوپراتور
۵۷	د کرښیزو اوپراتورونو پولی ته تلنه
۵۷	برابر ډوله پولی ته تلنه
۵۷	د برابر ډوله محدودوالي اصول
۵۸	د باناخ-شتاینهوز جمله
۶۱	کومپاکت اوپراتورونه
۶۳	د وازو توابعو په هکله جمله
۶۵	د رابند یا بند گراف جمله
۶۶	په هیلبرت-فضا کې د یوه کرښیز اوپراتور ماتریکس
۶۹	ادجونگيري اوپراتور
۷۰	یونیتار اوپراتور
۷۳	د یوه کرښیز اوپراتور آیگن ارزښتونه
۷۴	د هر میتیکي اوپراتورونو آیگن ارزښتونه
۷۵	د یوه هر میتیکي کومپاکت اوپراتور نورم
۷۹	د کومپاکت هر میتیکي اوپراتورونو سپکترال آنخورون
۸۱	شتورم-لیوویل-پرابلم
۸۴	گرندي لوډونکی از ماښت تابع
۸۶	تیمپیريري دیسریبوشنونه
۸۸	د تیمپیريري دیسریبوشنونو مشتق
۸۹	دیراک- او هیویزاید - فنکشنال
۹۱	اپروکسیمي کټمټوالی

- ۹۳ د گړندي لويدونکو توابعو د فوريې- ترانسفورميشن
- ۹۴ د بوه ټيمپريري ډيسټريبيوشن د فوريې-ترانسفورميشن
- ۹۶ د ماتو نظمونو د سوبوليف-فضاگانې
- ۹۹ ترانسليشنن اينواريانت اوپراتورونه
- ۱۰۲ د لاپلاس - اوپراتور بنسټيزه اوبیونه (حل)
- ۱۰۵ د ډاکټر ماخان شينواري چاپ شوي ليکنې:

## فونکشنل انلیزی Fuktionalanalysis

### متریکی فضاوی

یوه ډبرۍ یا ست  $M$  متریکی بلل کیږي، که په  $M$  باندې یو فنکشنواښن یا تابع واښن  $d$  د لاندې خوږونو سره تعریف وي:

M1 زیاتیزوالی یا مثبتوالی  $d(x, y) \geq 0$  او  $d(x, y) = 0$  ټیک هلته، که  $x = y$  وي.

M2 سیومتری

$$d(x, y) = d(y, x)$$

M3 درېگودیز – یا مثلثاتي مساوات

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

د ټولو  $x, y, z \in M$  لپاره.

تابع  $d$  د  $M$  متریکی په حیث هم بلل کیږي.

د متریکی له لارې په کانونیکی ډول په  $M$  باندې یوه توپولوژی هم تعریفیږي. له

$$B(x_0; r) = \{x \in M : d(x, x_0) < r\}$$

سره په  $x_0$  باندې یو واز غونډاری د وړانګې  $r$  سره هم په نڅبنه کیږي. یوه برخه

ډبرۍ  $U \subseteq M$  نو له دې امله وازه بلل کیږي، که هر یوه  $x \in U$  ته یوه وړانګه

$$r > 0$$

شتون ولري، داسې چې

$$B(x; r) \subseteq U$$

دی.

لیکونکي: اپې او هولیک

### Euklidische Metrik

په  $\mathbb{R}^n$  کې د اویکلید واین

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2}$$

یو متریک دی.

مثبتوالی او سیومتری سملاسی لیدل کیږي او درېگودې مساوات سیده د لاندې مینکوفسکي Minkowskischen نابرابرون څخه لاس ته راځي:

$$d_2(x, y) =$$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^n |(x_k - z_k) + (z_k - y_k)|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - z_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n |z_k - y_k|^2}$$

لیکونکي: اپې، هیولیک

### Hamming-Abstand

پای پرلپسی له 0 او 1 د کودکول په تیوري کې (دوه بییز - Binär) لغاتونه بلل کیږي.

دوه  $n$ -خایزو لغاتونو  $x$  او  $y$  د همینگ-واین

$d_H(x, y)$  د  $k$  گنون یا تعداد د  $x_k \neq y_k$  سره

یو ماتریکس دی په  $n$ -خایزو بینارلغاتونو.

د بیلگی په توگه د  $n = 3$  لپاره

$$d(011, 110) = 2$$

$$B(101; 2)$$

او واز غونډاری او  $x = 101$  د وړانگی 2 سره توکي

001, 111, 100 .

خوندي لري.

توكي چې له 101 په دوه ځايونو کې توپير لري، په دې پورې اړه نه لري، ځکه واټن بايد له دوه کوچني وي.

مثبوتالی او سيمتري روښانه دي. د درېگودي نامساوات د ورته واي تعريف څخه لاس ته راځي

$$d_H(x, y) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|$$

او د مطلقه ارزښتونو

$$|x_j - z_j| = |x_j - y_j + y_j - z_j| \leq |x_j - y_j| + |y_j - z_j|.$$

پاره د درېگودي نامساوات.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

په متریکي فضاو کې پولې ته تلنه

په متریکي فضا  $M$  کې يوه پرلپسې  $(x_n)$  پولې  $x \in M$  ته تلونکي بلل کيږي، که دا لاندې باور ولري.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

توکي  $x$  د  $(x_n)$  پرلپسې پوله بلل کيږي او يواځنئ ده.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

که  $(x_n)$  د  $x$  او  $y$  په لور وهڅيږي، نو باور لري

$$d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y)$$

د ټول  $n$  لپاره، او داچې

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y) = 0$$

دي، بايد



$$d(x, y) = 0$$

هم وي او له دي سره  $x = y$  باور لري، دابه دي معنا چي پوله ارزښت يواځني دي.  
ليکونکي: اېپ، هيو ليگ

### په متریکي فضا کي کوشي-پرلپسي (ترادف) Cauchy-Folgen in metrischen Räumen

په يوه متریکي فضا  $M$  کي يوه پرلپسي  $(x_n)$  کوشي - پرلپسي بلل کيږي، که د هر  
 $r > 0$  لپاره يوه پيژند نخښه يا ايندکس  $n_0$  شتون ولري، داسي چي د ټول  
 $m, n > n_0$  لپاره  
$$d(x_m, x_n) < r$$

باور ولري. په ځانگړي توگه پولي ته تلونکي پرلپسي کوشي-پرلپسي ده.  
که په يوه متریکي فضا  $M$  کي هره کوشي-پرلپسي په  $M$  کي يو پوله ارزښت لري،  
نو  $M$  پوره يا مکمل بلل کيږي.  
ليکونکي: اېپ، هيو ليگ

په  $M$  کي دي  $(x_n)$  يوه پولي ته تلونکي پرلپسي وي د پولي ارزښت  $x \in M$   
سره د هر  $r > 0$  لپاره يو ايندکس  $n_0$  شتون لري، داسي چي د ټولو  
لپاره  
$$d(x_n, x) < r/2$$

باور لري. نو د دريگودي نامساوات له مخي بيا دا لاندي باور لري  
$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < r/2 + r/2 = r$$

د ټول  $m, n > n_0$  لپاره د دي په تعقيب په  $M$  کي هره پولي ته تلونکي پرلپسي  
کوشي - پرلپسي ده.

ليکونکي: اېپ، هيو ليگ

## د یوې متریکي فضا پوره- یا تکمیلوالی

که د یو متریکي فضا  $M$  یو واټن تابع  $d$  په یوه پورته ډبرئ  $\widetilde{M} \supset M$  تعریف وي، کومه چې په  $M$  کې د ټولو کوشي-پرلپسیو پوله ارزښتونه خوندي ولري، نو پایونه  $\overline{M} \subseteq \widetilde{M}$  نسبت و  $d$  ته د  $M$  پوره کیدونکي بلل کيږي.

په ټوله توګه کیدی شي د  $M$  پوره کیدنه بي له په پورته -ډبرئ کې له خونديونې تعریف شي. له دې سره سرې  $\overline{M}$  د پولې ته تلونکو پرلپسیو ورته ټولګي سره په نخبه کوي یا پیژني.

د ډبريو پوره کیدنه د ناپریکیدونکو توابعو په څیرنه کې غوره رول لوبوي. خوږونه، کوم چې په کې باور لري، کیدی شي د د پوله ارزښت-جوړونو له لارې  $\overline{M}$  ته یووړل شي. پ ځانګړې توګه یو ناپریکیدونکی تابع همدا اوس په  $M$  د هغه ارزښتونو له لارې یواځنی ټاکل شوی دی. لیکونکي: اپې، هیولیک

## نورم Norm

په حقیقي یا کومپلکس وکتور فضا  $V$  یو نورم یو تابع

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

دی د لاندې خوږونو سره:

• Positivität: مثبتوالی (زیاتیزوالی)

$$\|v\| > 0 \quad \text{د} \quad v \neq 0 \quad \text{لیاره}$$

• Homogenität: هوموجینیتی

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

• Dreiecksungleichung: درېګوډیز- مثلثاتي نامساوات

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

دلته  $u, v$  په خوښه وکترونه دي او  $\lambda$  یو په خوښه سکالار.

د یوه نورم په مرسته کیدی شي د

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

له لاري د دوه وکترونو په منځ کې یو واټن تعریف شي.

لیکونکي: اپې، هیولیگ، هیورنر

د یوې نورمي وکتور فضا متریک

### Metrik eines normierten Vektorraumes

په یوه وکتور فضا  $V$  د یوه نورم  $\|\cdot\|$  دواړتایع یا واټن فنکشن

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

سره برابر دی. دا ځانګړی متریک دوه ورزیات خوښه لري:

• ترانسلیشن اینواریانڅ یا د د خوژبنت یا کښولو سره بې تغیري

Translationsinvarianz

$$d(u + w, v + w) = d(u, v)$$

• Homogenität هوموجینیتی

$$d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| d(u, v)$$

د ټولو  $u, v, w \in V$  او سکالار  $\lambda$  لپاره.  
لیکونکي: اپې، هیولیگ

### نیم نورم Halbnorm

په یوه حقیقي یا کومپلکس وکتور فضا  $V$  باندې یو نیم نورم یو تابع

$$p : V \rightarrow \mathbb{R}$$

دی د لاندې خویونو سره:

HN1 (HN) د نیم نظم لپاره

: ناکمیزوالی یا نامنفیوالی:

$$p(v) \geq 0$$

HN2

Homogenität: هوموجینوالی

$$p(\lambda v) = |\lambda|p(v)$$

HN3

Dreiecksungleichung: درېڅوډي یا مثلثي نابرابرون

$$p(u + v) \leq p(u) + p(v)$$

د ټولو  $u, v \in V$  او  $\lambda$  لپاره.

یو نیم نورم ټیک هلته یو نورم دی، کله چې  $p(x) = 0$  فقط د  $x = 0$  لپاره باور ولري.

د نیم نورم د تعریف لپاره وروستني دواړه خویونه بسیا کوي. ناکمیزوالی کیدی شي له دوي لاس ته راوستل.

لیکونکي: اپپ، هیولینگ

له هوموجینیتی څخه سیده لاس ته راځي

$$p(0) = p(0 \cdot x) = 0p(x) = 0$$

او د درېڅوډي نامساوات سره

$$0 = p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) = p(x) + |-1|p(x) = 2p(x),$$

دا په دې معنا چې ناکمیزوالی یا نامنفیوالی

$$p(x) \geq 0$$

دی، د ټولو  $x \in V$  لپاره.

لیکونکي: اپپ، هیولینگ

مټریک، چې د نیم نورم څخه رامنځ ته کیږي

**Metrik, induziert durch Halbnormen**

که په یوه وکتور فضا  $V$  د نیمنورم یوې پرلپسې  $(p_k)$  لپاره

$$p_k(v) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \implies v = 0$$

باور ولري، د ټول  $v \in V$  لپاره، نو نیمنورم یو متریک منځ ته راوړي. د کانوني واټن تابع دا لاندې ده

$$d(u, v) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(u - v)}{1 + p_k(u - v)}.$$

نسبت دې متریک ته پرلپسې  $(v_n)$  ټیک هلته د  $v$  په لور ځي یا هڅیږي، که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_k(v_n - v) = 0$$

د ټولو  $k \in \mathbb{N}$  لپاره باور ولري. لیکونکي: ایپ، هیولیک

د متریک د اکسیمونو څخه یواځې د درېگونې نامساوات ساده نه دي. باور لري

$$\begin{aligned} \frac{p_k(u - w)}{1 + p_k(u - w)} &= 1 - \frac{1}{1 + p_k(u - w)} \\ &\leq 1 - \frac{1}{1 + p_k(u - v) + p_k(v - w)} \\ &\leq \frac{p_k(u - v)}{1 + p_k(u - v)} + \frac{p_k(v - w)}{1 + p_k(v - w)} \end{aligned}$$

او له دې سره دی

$$\leq d(u, v) + d(v, w) \cdot d(u, w)$$

د پولې ته تلنی لپاره لومړی نیسو، چې

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(v_n, v) = 0$$

باور لري او یو  $k$  شتون لري، داسې چې

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_k(v_n - v) = 0$$

باور نه لري. له دې سره نو يو برخه پرلپسې  $(v_{n_j})$  شتون لري چې د هغې لپاره تل

$$p_k(v_{n_j} - v) > \varepsilon > 0$$

باور لري او له دې امله

$$d(v_{n_j}, v) \geq 2^{-k} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} > 0$$

باور لري، کوم چې مخامخوالی يا تضاد دی.

$$\varepsilon > 0$$

له بله پلوه دې وي او باور دې ولري

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_k(v_n - v) = 0$$

د ټول  $k$  لپاره. نو يو  $k_0$  شتون لري، داسې چې

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(v_n - v)}{1 + p_k(v_n - v)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور لري. پسي هم نسبت نیممتریک ته د پولې ته تلني له امله لاس ته راځي، چې د 1

او  $k_0$  تر منځ دهر  $k$  لپاره يو  $n_k$  شتون لري، داسې چې د ټولو  $n > n_k$  لپاره

$$p_k(v_n - v) < \frac{2^{k-1}}{k_0} \varepsilon$$

باور لري. که کيږدو

$$n_0 = \max_{k=1, \dots, k_0} n_k,$$

نو د ټولو  $n > n_0$  لپاره باور لري

$$= d(v_n, v)$$

$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k} \frac{p_k(v_n - v)}{1 + p_k(v_n - v)} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(v_n - v)}{1 + p_k(v_n - v)}$$

$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k} \frac{2^{k-1}}{k_0} \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

<

څه چې نسبت متریک ته پولې ته تلنه ښايي.

ليکونکي: اېپ، هیولیک

### ایپسیلون-جال Epsilon-Netz

د یو متریکي فضا  $M$  د یوې برخدېرې  $K$  لپاره یو  $\varepsilon$  - جال یو پوښوونکی یا پټوونکی دی، چې د پای ډبرو غونډارو  $B(x_1; \varepsilon), \dots, B(x_n; \varepsilon)$

جوړ دی. دا مینیمال وړانګه  $\varepsilon_n(K)$ ، چې د  $n$  منځتکو  $x_i$  په ښه یا اوپتیمال ټاکنې د  $M$  پوښوونې ته بسیا کوي، د  $\varepsilon$ -اینټروپي  $\varepsilon$ -Entropie (فزیکي لویه چې د تودځی پروسې خوزبنتلور په نڅښه کوي) بلل کیږي.

که یوه  $K$  ته د ټولو  $\varepsilon > 0$  لپاره یو  $\varepsilon$ -جال شتون ولري، نو  $K$  توتالي محدود یا رابند بلل کیږي. لیکونکي: اپې، هیولیک

په متریکي فضاوو کې کومپاکت(سره نښتی) او نسبي کومپاکت ډبرې

د یوه متریکي فضا  $M$  کومپاکت برخه ډبرې  $K$  کیدی شي په درې ورته ډولونو خویونیز شي

لومړی: هره وازو ډطریو سره د  $K$  پټه ونه یا پوښونه هر پای برخه پوښونه لري. دویم: په  $K$  کې هره پرلپسې یوه پولې ته ت لونکې برخه پرلپسې په  $K$  کې لري. دریم:  $K$  توتالي محدوده او پوره ده.

په پام کې دي وي، چې په  $\mathbb{R}^n$  کې باوري د کومپاکت ډبرې کرکتریزه کونه په دریم کې محدودیت او رابندوالی په گوته کوي.

د یوه متریکي فضا  $M$  یوه برخدېرې  $R$  نسبي کومپاکت بلل کیږي، که د  $\bar{R}$  رابندوالی یا راتړلوالی کومپاکت وي، یا دي ته ورته، که په  $R$  کې هره پرلپسې یوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې ولري. لیکونکي: اپې، هیولیک

د بیلګې په توګه به د حقیقی اعدادو مختلفې برخدېرې تر څیړنې لاندې ونيول شی.

لومړی: انټروال  $[0, 1]$  د  $\mathbb{R}$  یو کومپاکت (او له دي سره یو ن سبي کومپاکت) برخدېرې ده، ځکه چې رابنده یا تړلي او محدوده ده.

دویم: انټروال  $(0, 1]$  د  $\mathbb{R}$  کومپاکت برخدېرې نه ده، ځکه چې د بیلګې په توګه ،

د، پرلپسې  $1/n$ ،  $n \in \mathbb{N}$  پوله خوندي نه لري. دا چې  $[0, 1] = \overline{(0, 1]}$  دی، نو دا نیم

واز انټروال نسبي کومپاکت دی. دریم: څلورم: انټروال  $[0, \infty)$  د  $\mathbb{R}$  کومپاکت برخه ډېرې نه ده، ځکه چې په حقیقت کې د وازې ډېرې  $(n-1, n+1)$ ،  $n \in \mathbb{N}_0$  څخه پوښ کيږي، مگر دې ته یو پای برخه پوښونه شتون نه لري. له دې امله نیم ناپای انټروال هم نسبي کومپاکت نه دی، ځکه چې د بیلګې په توګه د طبیعي اعدادو پرلپسې  $1, 2, \dots$  پولي ته تلونکې برخه پرلپسې نه لري. لیکونکي: ایپ، هیولیک

په یوه ساحه باندې ناپربکيدونکي توابع **Stetige Funktionen auf einem Gebiet**

په  $\mathbb{R}$  باندې د (حقيقي- یا کومپلکس ارزښتيزو) ناپربکيدونکو توابعو په فضا  $C(\mathbb{R})$  د نیمنورم

$$|f|_{[-k,k]} = \max_{|x| \leq k} |f(x)|$$

له لارې د لاندې سره یو متریک تولیدوي

$$d(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|f - g|_{[-k,k]}}{1 + |f - g|_{[-k,k]}}$$

نسبت دې متریک ته پولي ته تلنه په خوښه کومپاکت انټروال باندې برابر ډوله پولي ته تلنه په ګوته کوي. له دې سره پوره والی لاس ته راځي، ځکه چې په برابر ډوله پولي ته تلني سره ناپربکيدنه خوندي پاتي کيږي.

د ټوليزې ساحې  $D \subseteq \mathbb{R}$  لپاره به ورته توګه مخ ته ځو. د انټروال  $[-k, k]$  په ځای یوه دا ساحه جوړه وونکې د کومپاکتو ډېریو پرلپسې

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots \subset D$$

کارول کيږي یا استعمالیږي.

د  $C_0(D)$  سره په  $D$  د ناپربکيدونکو توابعو ډېرې په نخښه کوو، د کومپاکت وړونکي (انتقال کونکي) سره. لیکونکي: ایپ، هیولیک

ازمابښتي توابع **Testfunktionen**



د یوې ساحې  $D \subseteq \mathbb{R}$  لپاره په  $D$  باندې د ناپای دېرواره مشتقوړ توابعو لپاره ساحه  $C^\infty(D)$  ده.

د تابع لاندې فضا، چې د کومپاکت برخه دېرې  $K \subset D$  د باندې برته ده ورکیري، د  $C_0^\infty(D)$  سره یا د ازماښت توابعو  $D$  په نڅښه کیري. دا فضا چې له شوارخ (Schwartz) له خوا منځ ته راوستل شوې، په ټوټه انتگرال مساواتو او دیسټریبوتیو تیوري مطالعه کې غوره رول لوبوي. لیکونکي: ایپ، هیولیک

### کمزوري یا ضعیف مشتقونه *Schwache Ableitung*

د ټوټه انتیگرال په مرسته کیدی شي کلاسیکي مشتق کليمي ټولنيزي شي. یو تابع

$$\partial^\alpha f, \quad \partial^\alpha = \prod_\nu \left( \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)^{\alpha_\nu}$$

یو په تعریف ورشو یا ساحه  $D$  تعریف شوي تابع  $f$  د کمزوري مشتق په نامه یادوو، که

$$\int_D \partial^\alpha f(x) g(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_D f(x) \partial^\alpha g(x) dx, \quad \forall g \in C_0^\infty(D),$$

د  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ،  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  سره باور ولري. له دې سره و

راندنیونه ده، چې د ازماښت توابع  $g$  لپاره دواړه انتیگرالونه شتون لري. د بیلگې په توگه دا حالت هلته رامنځ ته کیري، که  $\partial^\alpha f$  او  $f$  په هر د  $D$  په هر کومپامتبرخه دېرې مطلق انتیگرال وړ وي. لیکونکي: ایپ، هیولیک

### توپولوژیکي وکتور فضاوي *Topologischer Vektorraum*

یو توپولوژیکي وکتور فضا  $V$  یوه وکتور فضا ده، د وازو دېریوو یاسټونو په یوه سیستم  $\mathcal{U}$  باندې د لاندنځویونو سره ورکړل شوی یا روښانه شوی دی

T1

$$\emptyset \in \mathcal{U}$$

T2

$$V \in \mathcal{U}$$

T3

د هرو وازو ډېريو يا ستونو  $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$  لپاره باور لري

$$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$$

T4

د په خوښه وازو ډېريو  $U_i \in \mathcal{U}$  لپاره باور لري

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}.$$

يوه وازه ډېرئ  $U(v) \in \mathcal{U}$  د يوه ټکي  $v \in V$  چاپيريال بلل کيږي، که  $v \in U(v)$  باور ولري.

د سرچيني يا پيل د چاپيريالونو  $U_i(0)$  ډېرئ لوکال بنسټ  $\mathcal{B}$  بلل کيږي، که هر چاپيريال  $U(0)$  د لوکال بنسټ يو توکي خوندي ولري

$$\exists_i : U_i(0) \subseteq U(0).$$

داسې يو توپولوژيکي جوړښت کيږي شي د بيلگي په توگه د يوه متریک يا نورم له لارې

کره وټاکل شي يا کره شي. دا يو ډول ته تلنکليمه راکوي. يوه پرلپسې  $(v_n)$  ټيک هلته

يوه کوبني پرلپسې ده، که د ټولو  $U_i(0) \in \mathcal{B}$  لپاره يو ايندکس  $n_0$  داسې شتون ولري چې د ټولو  $m, n > n_0$  لپاره

$$v_m - v_n \in U_i(0)$$

باور ولري.

که  $v_\infty$  د  $(v_n)$  ډوله ارزښت وي، نو د  $v_\infty$  په هر چاپيريال  $U$  کې د پرلپسې ټول

غري پراته دي تر د پای ډېرو غرو پورې يعني پای ډېر غري کيدی شي له دې چاپريال دباندې پراته وي.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

### Banach-Raum د بانخ فضا

يو نورمي وکتور فضا  $V$  د بانخ فضا بلل کيږي، که د نورم له لارې منځ ته راغلي متريک پوره وي، دا په دې معنا چې که هره کوشي پرلپسې په  $V$  کې يو پوله ارزښت ولري.

$$U \subset V$$

هر رابنده لاندې وکتور فضا هم د د بانخ فضا ده. په ځانگړې توگه پای پراخيدونکي يا پای بعدې فضاوې نورمي وکتور فضاوې دي. ليکونکي: اېپ، هيوليگ

په يوه کومپاڪت ډېريو باندې ناپرېکيدونکي توابع

### Stetige Funktionen auf einer kompakten Menge

د ناپرېکيدونکو (حقيقي- يا کومپلکس ارزښتيز) توابع په يوه کومپاڪت برخه ډېريو

$$C(K) \quad K \subseteq \mathbb{R}^n$$

باندې فضا بانخ فضا ده نسبت د

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|$$

له لارې تعريف شوي نورم ته. پوره کيدنه لاس ته راځي، ځکه چې برابر ډوله پولي ته تلنه ساتلې پاتې کيږي.

د تعريف ورشو کومپکټوالي روښانه دی. په وازه يا نامحدود ډېريو باندې ناپرېکيدونکي توابع بايد نه دی، ماکسيموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري. ليکونکي: اېپ، هيوليگ

په کومپاڪت ډېريو باندې مشتقور توابع

### Differenzierbare Funktionen auf einer kompakten Menge

د  $m$ -ځله ناپرېکيدونکو مشتقور توابعو (حقيقي - يا کومپلکس ارزښتيزي) فضا

$$C^m(K) \quad K \subseteq \mathbb{R}^n$$

په يوه کومپاڪت برخه ډېريو نسبت و

$$\|f\|_{k,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$$

ته د تعريف شوي نورم يو باناخ-فضا ده. پوره والی لاس ته راځي، ځکه چې د توتیه مشتقونو ،  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$   $\partial^\alpha f$  ناپرېکيدونکی مشتقور تابع، د برابر ډوله پولې ته تلنه ساتلې پاتې کيږي.

د تعريف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په وازه يا نامحدود ډېرئ باندي ناپرېکيدونکي توابع بايد نه دی، ماکسيموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

### p-integrierbare Funktionen - انتيگرالور توابع

د يوې ساحې  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  لپاره ،  $L^p(D)$  ،  $1 \leq p < \infty$  ، د تابع باناخ-فضا په گوته کوي، چې هغه نسبت و نورم

$$\|f\|_p = \left( \int_D |f|^p \right)^{1/p}$$

ته د ناپرېکيدونکي له لاري د د کومپاکت وړونکي ډېرئ سره بنسټوکسيمي کيږي، دا په دې معناچې د  $L^p(D)$  رابندونه **Abschluß** ده نسبت و  $\|\cdot\|_p$  ته ده. توابع فقط تر کچې صفر پوري په ډېرئ ټکي ډوله تعريف دي. سړی ليکي  $f = g$

ن.ه. : نږدې هرچېرته (almost everywhere)

د توابعو لپاره، چې فقط په يو صفر ډېرئ يا فرست سره توپيري او داسې توابع راپيژني. په ټيکه توگه سړی ورته والی يا اکويوالنت تر څيړني لاندې نيسي، چې د هغوی لپاره

او  $f$   $g$  ځای نيونکي يا نماينده گان دي.

$$L^p(D)$$

د لیبسک انیگرال په مرسته کېدی شي په ټولیزه توګه د په خوښه لیبسک-کچور ډېرئ لپاره تعریف شي. د اېروکسیمیشن ته کېدی شي، ریمن-انٹیگرال ته ورته د زینې توابع کارول کېږي، چې د لیبسک-کچور د  $D$  په برخه ډېرئ ثابت دی. لیکونکي: اېپ، هیولیک

### محدود توابع Beschränkte Funktionen

$$L^\infty(D)$$

$$D \subseteq \mathbb{R}^n \quad f$$

د لیبسک کچور توابعو د ساحې یا ورشو لپاره د بانخ فضا د سره په نخښه کو، چې په یوه صفرډېرئ محدود دی، دا په دې معنا، چې  $|f(x)| \leq c < \infty$

نږدې هر چیرته دی. د  $c$  کوچني بند یا بندیز یا نور هم ښه پوله د

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |f(x)|$$

سره په نخښه کوو.

$$L^\infty(D)$$

فضا د ټول هر چیرته په  $D$  محدودو توابعو یوه اصلي برخه ډېرئ ده. دواړه

فضاوې کېدی شي نسبت ته د ناپرېکډونکو توابعو سره جوړې یا تولید کړای شي. دا یو روښانه توپیر دی د  $L^p(D)$  - انٹیگرلور توابعو ته.

$$L^p(D)$$

لیکونکي: اېپ، هیولیک

د موزونو اریتمیتیکی او هندسي منخ ترمنخ نابرابرونونه

### Ungleichung zwischen dem gewichteten arithmetischen und geometrischen Mittel

د زیاتیزو یا مثبتو  $a_1, \dots, a_n$  گونو لپاره اریتمیتیکی منخ نسبت هندسي منخ یا وسط ته کوچنی نه دی:

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

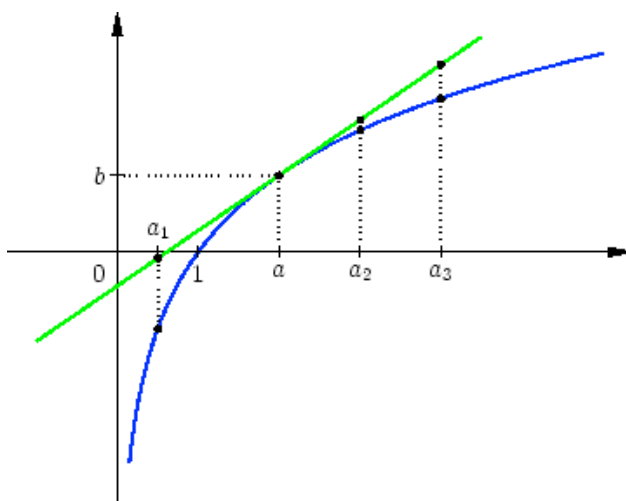
په ټوليزه توگه د مثبت وزن  $\lambda_i$  لپاره د  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  سره باور لري

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \geq a_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot a_n^{\lambda_n}.$$

برابروالی ټيک هلته باور لري، که  $a_1 = \dots = a_n$  باور ولري.

سری د  $a = \sum_i \lambda_i a_i$  او  $b = \ln a$  سره د لوگاریتم کوني وروسته موزن نابرابرون يا نامسوات ورته غوښتنې لاسته راوړي.

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \leq \ln a.$$



که-لکه په مشتق کي چې ښوول شوی- وکارول شي، چې تانجنت

$$g : y = b + \frac{1}{a}(x - a)$$

د لوگاریتم د گراف پورته لور ته پروت دی، نو د  $\sum_i \lambda_i = 1$  له امله لاس ته راځي

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \leq \sum_i \lambda_i \left( b + \frac{1}{a} (a_i - a) \right) = b + \frac{1}{a} \left( \sum_i \lambda_i a_i - a \right) = b$$

لکه چې غوښتل مو. لیکونکي: ایپ، هیولیک

د انټیگرالونو لپاره د هولدر نابرابرونه

### Höldersche Ungleichung für Integrale

وي دي  $f \in L^p(D)$  او  $g \in L^q(D)$  د  $1 < p < \infty$  او  $1/p + 1/q = 1$  سره نو  $fg \in L^1(D)$

باور لري او لاندي د هولدر نامساوات باور لري

$$\int_D |f(x)g(x)| dx \leq \left( \int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_D |g(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

مساوات ټیک هلته باور لري، که د توابعو  $|f|^p$ ،  $|g|^q$  څخه یو یې نږدې هر چیرته د د بل ډېرواره وي.

د پولی حالت  $p = \infty$ ،  $q = 1$  (همداسې)  $p = 1$ ،  $q = \infty$  د  $f$  او  $g$  سره بدلیدني لپاره

$$\int_D |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_\infty \int_D |g(x)| dx.$$

باور لري

د  $p = q = 2$  لپاره دا مساوات د کوشي-شوارخ نامساوات هم بلل کيږي. لیکونکي: ایپ، هیولیک

فقط دا ناساده حالت  $1 < p < \infty$  تر څيرني لاندې نيسو. داپسي بي له ټوليزو بنديزونو كيدى شي ونيول شي يا فرض شي، چې انټيگرال

$$I_2 = \int_D |g(x)|^q dx \quad I_1 = \int_D |f(x)|^p dx$$

او

زياتيز يامثبت دي. كه د بيلگي په توگه  $I_1 = 0$  وي، نو  $|f|^p$  او له دې سره به  $f$  هر

چيرته ورک شي، دا په دې معنا چې،  $\int_D |f(x)g(x)| dx = 0$  او نامساوات به په

ساده توگه پوره وي. دا چې نامساوات د سکالا کونې  $f \rightarrow rf$  ،  $g \rightarrow sg$  په مقابل

کې اينوارينانت يا بي تغيره دي، کيدى شي برسېره پردې  $I_1 = I_2 = 1$  ونيول يا فرض شي.

د موزنو اريتميتيکي - او هندسي - يا ځمکچيز منځ ترمنځ باور لري

$$|fg| = (|f|^p)^{1/p} (|g|^q)^{1/q} \leq \frac{1}{p} |f|^p + \frac{1}{q} |g|^q.$$

له دې سره  $fg \in L^1(D)$  دى او د انټيگرالونې پسې لاس ته راځي

$$\int_D |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{p} I_1 + \frac{1}{q} I_2 = 1.$$

ليکونکي: اپې، هيوالېگ

### د انټيگرال لپاره د مينکوفسکي ناساوات Minkowskische Ungleichung für Integrale

د دوه توابعو  $f$  او  $g$  په  $L^p(D)$  کې د  $1 \leq p < \infty$  سره د مينکوفسکي نامساوات باور لري



$$\left( \int_D |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left( \int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left( \int_D |g(x)|^p dx \right)^{1/p} .$$

مساوات ٽيڪ هلته باور لري، که د تابعو  $f$ ،  $g$  څخه يو يي تل هر چيرته د بل ڊبرواره يو نامنفي ولري. ليکونکي: اېپ، هيوليگ

دا چي حالت  $p = 1$  ساده دي، په لاندې کي به  $p > 1$  ونيول يا فرض شي. ورپسې دي همداسي  $1/p + 1/q = 1$  وي او انٽيگرال

$$I = \int_D |f(x) + g(x)|^p dx$$

دې بي له ٽوليزو محدوديتونو زياتيز وي. نو د درېگودي نا مساوات سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} I &= \int_D |f(x) + g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \\ &\leq \int_D |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx + \int_D |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx . \end{aligned}$$

د هولدر نامساوات او  $(p-1)q = p$  سره

$$\leq \left( \int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_D |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \int_D |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_D |f(x) + g(x)|^{(p-1)q} dx \right)^{1/q} \\
& = \left( \left( \int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left( \int_D |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \right) I^{1/q}.
\end{aligned}$$

د  $I^{1/q}$  سره د وېشنې له لارې سرې د مینکوفسکي نامساوات لاس ته راوړي لیکونکي: اپې، هیولیک

د سوبولیف فضاوې **Sobolev-Räume**

$$D \subseteq \mathbb{R}^n$$

د ورشو لپاره

$$W^{k,p}(D), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

د تابعو باناخ فضا بنایي د  $\leq k$  نظم د کمزورو مشتقونو سره په  $L^p(D)$  او

$$\|f\|_{k,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_D |\partial^\alpha f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

کې همداسي

$$\|f\|_{k,\infty} = \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |\partial^\alpha f(x)|$$

اڙونده نورم. اڙونده نيم نورم

$$\|f\|_{k,p} = \left( \sum_{|\alpha|=k} \int_D |\partial^\alpha f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

همداسي

$$\|f\|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha|=k} \operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |\partial^\alpha f(x)|$$

فقط د جگ نظم مشتق کاروي.

په ځانگړي توگه دی

$$W^{0,p}(D) = L^p(D).$$

ليکونکي: اېپ، هيولنگ

د بيلگي په توگه تابع

$$f(x) = |x|^s, \quad s \neq 0,$$

په  $n$ -بعديزي يا  $n$ -پراخيدوني يونگردي (دايره واحد)

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$

تر څيرني نيول کيږي. د لپاره  $s > -n$  انټيگرالور دی،، خکه چي د گردئ

کو اورديناتونه (پراته ولاړ محرونه) ( $r = |x|$ ) سري لاس ته راوړي

$$\|f\|_{0,1} = \int_D |x|^s dx = c_n \int_0^1 r^s r^{n-1} dr,$$

چيرته چي  $c_n$  دا  $n-1$  - بعديز حجمونو يونفضا (واحد فضا) ده. پسي دي

$$\partial_\nu f(x) = s|x|^{s-2}x_\nu$$

د  $s > 1 - n$  لپاره د  $f$  يو انټيگرالور کمزوري مشتق دي، په سرچينه کې د سيگولاريتي سره. په غونډاري کواورديناټ کې سري لاس ته رانږي

$$\begin{aligned} \|f\|_{1,2}^2 &= \int_D |f(x)|^2 dx + \sum_{\nu=1}^n \int_D |\partial_\nu f(x)|^2 dx \\ &= \text{const.} \int_0^1 (r^{2s} + s^2 r^{2s-2}) r^{n-1} dr \end{aligned}$$

د  $r = |x|$  سره. له دې سره  $f \in W^{1,2}$  دي د  $s > 1 - n/2$  لپاره. دا چې د  $n > 2$

لپاره کميز اکسپوننتونه  $s$  هم منځ ته راتلی شي، له دې لاس ته راځي، چې مربع انټيگرالور مشتقونه نه اړين محدود دي. د مشتقونو کمزوروالي څخه ناپرېکښه لاس ته راځي.

که همدا توابع په ساحه

$$\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}$$

وڅيرل شي، نو  $f$  مربع انټيگرالوردي د  $s < -n/2$  لپاره او کمزوري مشتقونه د  $s < 1 - n/2$

لپاره مربع انټيگرالور دي، کوم چې بيرته د غونډاري کواورديناټ

$$\sum_{\nu=1}^n \int_{\tilde{D}} |\partial_\nu f(x)|^2 dx = \text{const} \int_1^\infty r^{2s-2} r^{n-1} dr$$

سره بنوول کیدی شي.

ليكونكي: اڀپ، هيوليگ

كمزوري مشتقونه په حقيقت كي ټولگيزه يا كلاسيكي مشتقكليمه ټوليزه كوي، مگر قوي سينگولاريټي اجازه نه لري. د بيلگي په توگه تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

راورو، په  $n$ -بعدي يا  $n$ -پراخيدوني انټروال

$$D = (-1, 1)^n$$

ترخيزني لاندي نيسو. تابع په هيوپر سطحه Hyperebene

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$$

$$g = \partial_1 f \in L^2(D)$$

پرېكيدونكي ده او مربع - انټيگراور كمزوري مشتق لري، دا په دي معنا چي مساوات

$$\int_D g(x)\varphi(x) dx = - \int_D f(x)\partial_1\varphi(x) dx$$

$$\varphi \in C_0^\infty(D)$$

د هيڅ كوم لپاره د ټول ويناو، نو يو ازماښت تابع لپاره پوره وړ دي. د دي لپاره چي دا

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0, \quad \varphi(0) > 0,$$

ټاكو او ودي ته د  $1 > \varepsilon > 0$  لپاره

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi(x_1/\varepsilon, x_2, \dots, x_n), & x_1 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

له دي سره په پورته مساوات كي د بني اړخ لپاره راكوي

$$\int_D f(x)\partial_1\varphi_\varepsilon(x) dx = - \int_{x_1 \geq 0} \partial_1\varphi_\varepsilon(x) dx$$

$$= \int_{(-1,1)^{n-1}} \varphi_\varepsilon(\mathbf{0}, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n$$

$$\int_{n-1} \varphi(\mathbf{0}, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n = \text{const} > 0$$

په داسې حال کې چې په کینه خوا د کوشي-شوارخ نامساوت

$$\left| \int_D g(x) \varphi_\varepsilon(x) dx \right| \leq \|g\|_2 \left( \int_D |\varphi(x_1/\varepsilon, x_2, \dots, x_n)|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\left( \int_D |\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)|^2 \varepsilon dy \right)^{1/2} = O(\varepsilon^{1/2})$$

د  $\varepsilon$  سره د صفر 0 په لور ځي.  
لیکونکي: اپې، هیولیک

د سوبولیو په کې خونديونی جمله **Sobolevscher Einbettungssatz**

$D \subset \mathbb{R}^n$

د یوې لیخشیخ ورشو لپاره د سوبولیو-فضا لپاره خونديونه

$$W^{k,p}(D) \subset W^{l,q}(D), \quad q > p, \quad \frac{k-l}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q},$$

باور لري، له كوم سره چې د  $q = \infty$  لپاره ټيک يوه خونديونه په  $W^{l,\infty}(D) \cap C^l(D)$

پسي منځ ته راځي.

د محدودې ورشو لپاره خونديونه کومپاکنده، دا په دې معنا چې محدوده ډېرې په

$W^{k,p}(D)$  کې پولې ته تلونکي پرلپسي په کې لري. لیکونکي: اپې، هیولیک

د بیلگی په توگه خونديونه

$$W^{1,p} \subset W^{0,q} = L^q$$

د تابع

$$f(x) = |x|^s, \quad s \neq 0$$

په مټه په  $n$ -بعدیز یونگونډاري

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$

څیرل کیري. تابعه د  $s > -n/q$  لپاره -انتيگرالور ده، ځکه چې د غونډاري

کو اور دینات (  $r = |x|$  ) سره لاس ته راځي

$$\|f\|_{0,q}^q = \int_D |x|^{sq} dx = c_n \int_0^1 r^{sq} r^{n-1} dr,$$

د کوم سره چې  $c_n$  د یونگونډاري  $(n-1)$ -بعدیز حجم دی. نور پسي دی

$$\partial_\nu f(x) = s|x|^{s-2} x_\nu$$

د  $f$  یو کمزوری مشتق دی، کوم چې د  $s > 1 - n/p$  لپاره -انتيگرالور دی. دا بیرته کیدی شي د غونډاري کو اور دینات له لارې وازمایل شي

$$\int_D |\partial_\nu f(x)|^p dx \leq |s|^p \int_0^1 r^{(s-1)p} r^{n-1} dr,$$

د کوم سره چټ

$$|x_\nu|^p \leq \left( \sum_\nu |x_\nu|^2 \right)^{p/2} = r^p$$

$$W^{1,p} \subset W^{0,q}$$

دی، که

کارول شوی. د خونديوني جملې پسي

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

همداسي

$$1 - \frac{n}{p} = n \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{p} \right) > n \left( -\frac{1}{q} \right)$$

باور ولري، کوم چې په باندي د پورته شرايطو سره سر خوري.

ليکونکي: اپې، هيوليگ

### د بانخ های په های تکی جمله Banachscher Fixpunktsatz

که  $g$  يو رايوهای کيدونکي تابع وي، کوم چې يوه نه تشه، رابنده ډېری  $D \subset \mathbb{R}^n$  په خپل ځان څيره کړي، دا په دي معنا چې، باور لري

$$\begin{aligned} & D = \overline{D} \quad \bullet \\ & x \in D \Rightarrow g(x) \in D \quad \bullet \\ & \|g(x) - g(y)\| \leq c\|x - y\| \quad \forall x, y \in D \quad \bullet \end{aligned}$$



د سره، نو  $g$  یو یواځنی ځایه ځای ټکی  $x_* = g(x_*) \in D$  لري. که له  $x_0 \in D$  راوځو یا مخ ته لار شو، نو کیدی شي  $x_*$  د اتریشن پرلپسي (د تکرار پرلپسي) له لاري

$$x_0, x_1 = g(x_0), x_2 = g(x_1), \dots$$

اپروکسیمیر (په نږدې توگه ټاکل) شي یا نږدې (که غواړئ: تقریبي) وټاکل شي. د ناتیکیاوي لپاره باور لري

$$\|x_* - x_k\| \leq \frac{c^k}{1-c} \|x_1 - x_0\|$$

دا په دې معنا چي، که د اتریشن پرلپسي یا د تکرار پرلپسي د هر پیل ارزښت لپاره کرښیزه پولي ته لاره شي.

د ځای په ځای ټکي جمله په تولیزه توگه په پوره متریکي فضاو کي باور لري. دا چي د ترانسلیشن واریانځ او نورم هوموجینیټی ته اړتیا پینه نه شي، کیدی شي سری

$$\|x - y\| \quad d(x, y)$$

د یوه تولیز واین تابع له لاري بدل کړي. لیکونکي: اپ، بوسلي، هیولیگ

### سکالار ضرب Skalarprodukt

یو سکالار ضرب په یو کومپلکس وکتور فضا  $V$  یو تابع دی  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$

د لاندې خویونو سره:

• Positivität: مثبتوالی:

$$\langle v, v \rangle > 0 \quad v \neq 0$$

für

• Schiefsymmetrie: مایلسیمتری

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

• Linearität: کرښيزوالی

$$\langle \lambda u + \rho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \rho \langle v, w \rangle$$

له دې سره  $u, v, w \in V$  او  $\lambda, \rho \in \mathbb{C}$  په خوښه وکتورونه همداسې سکالار دي. د مایل سیومتري په بست یو کومپلکس سکالار ضرب نسبت و دویمې متحولې یا اووښتوني ته کرښيز نه دی:

$$\langle u, \lambda v + \rho w \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle + \bar{\rho} \langle u, w \rangle .$$

یواځې د حقیقي سکالار لپاره کومپلکس کنجوگیشن بې معنا دی. لیکونکي: اپې، هیولیگ، کرایخ

### هیلبرت - فضا Hilbert-Raum

یوه هیبرت - فضا  $H$  یوه پوره نورمي (حقیقي یا کومپلکس) وکتور فضا ده، چې په کومه کې نورم د سکالار ضرب له لارې تعریف ده:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} .$$

په ځانگړې توگه د کوشي - شواذرخ نابرابرونونه باور لري

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

همداسې د غیرگ اړخیز-ایدنټیټي یا - - کټمتوالی

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 .$$

سړی د هیلبرت-فضا Hilbert-Raum سپیارابل Hilbert-Raum بولي، که یوه گڼلور اورتونورمال بنسټ

$$e_1, e_2, \dots, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j},$$

د فورۍ- وډیزینه-die Fourier شتون ولري. په دې حالت کې هر  $v \in H$

Entwicklung

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k ,$$

چي نسبت پورته نورم ته پولي ته تلونکي ده.  
ليکونکي: اپې، هيوليگ

### مربع جمعہ کيدونکي پرلپسي Quadratsummierbare Folgen

مربع جمعہ کيدونکي پرلپسي

$$c_1, c_2, \dots, c_i \in \mathbb{C}$$

هيلبرت-فضا  $l^2$  جوړوي سبت سکالار ضرب ته

$$\langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \bar{d}_k.$$

فضا  $l^2$  د يوه سپارابل هيلبرت-فضا  $H$  پروتو توپ دى، ځکه چي هر توکي

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in H$$

کيدى شي د د اور توگونال بنسټ د ضريب  $c_k$  سره معلومه identifiziert شي. له دې

سره باور لري

$$\|v\|_H = \|c\|_{l^2},$$

دا په دې معنا، چي فضاوي  $H$  او  $l^2$  ايزومورف دي.

ليکونکي: اپې، هيوليگ

### مربع انتيگراور توابع Quadratintegrierbare Funktionen

د يوې ورشو يا سطحي  $D \subset \mathbb{R}^n$  لپاره  $L^2(D)$  د تابع  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  فضا بنايي  
د لاندي سر

$$\int_D |f(x)|^2 dx < \infty$$

او دا د سکالار ضرب

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_D f(x) \overline{g(x)} dx$$

له لاري منځ ته راغلي نورم  $\|\cdot\|_2$ .

$$L^2(D)$$

په بديله توگه كيدى شي د بنويي تابع په څير د رابندېدنې په توگه هم تعريف شي، دا په دې معنا، چې هر مربع انټيگرالور تابع كېدى شي د يوې ناپاي پرلپسې په

توگه د زياتخه مشتقور تابع  $f_n$  له لاري اېروكسيمى يا په نږدې توگه انځور شي شي:

$$\|f - f_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

ليكونكي: اېپ، هيو ليگ

د بيلگي په توگه تابع

$$f(x) = |x|^s$$

په پراخيدونې يا - بعديزې يوونگردي (دايره واحد)

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$

تر څيرني لاندې ونيل شي.

د غونډاري كواوردينات ( $r = |x|$ ) سره لاس ته راځي

$$\int_D |f(x)|^2 dx = c \int_0^1 r^{2s} r^{n-1} dr = c \left[ \frac{r^{2s+n}}{2s+n} \right]_0^1,$$

دا په دې معنا چې  $2s > -n$  لپاره مربع اېگرال وړ دى.

که همدا تابع په ساحه

$$\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\},$$

تر څيرني لاندې ونيسو، نو بيا هم د غونډاري كواوردينات سر لاس ته راځي

$$\|f\|_2^2 = \int_{\bar{D}} |x|^{2s} dx = c \int_1^\infty r^{2s} r^{n-1} dr,$$

دا په دې معنا، چې  $f$  لپاره مربع انتیگرالور دی.  $2s < -n$  لیکونکي: اپ، هیولیک

## د مربع انتیگرالور توابعو سوبولیف - فضا Sobolev-Raum der quadratintegrierbaren Funktionen

$H^k(D) = W^{k,2}(D)$   $D \subseteq \mathbb{R}^n$  د یوې ورشو لپاره د (حقیقي - یا کومپلکس ارزښتیو) هیلبرت-فضا په گوته کوي. توابع د مربع انتیگرالور کمزورو توپه مشتقونو سره، چې نظم  $\leq k$  لري د سکالار ضرب

$$\langle f, g \rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_D \partial^\alpha f(x) \overline{\partial^\alpha g(x)} dx$$

له لاري

$$\langle f, g \rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_D \partial^\alpha f(x) \overline{\partial^\alpha g(x)} dx$$

منځ ته راغلي نورم  $\|\cdot\|_{k,2}$  سره اړونده نیم نورم

$$\|f\|_{k,2} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_D |\partial^\alpha f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

فقط د جگ نظم مشتق کاروي. لیکونکي: اپ، هیولیک

د فوریر- لری

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

په  $D = [-\pi, \pi]$  باندې مربع انټیگرالور دی، که

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty,$$

وي، ځکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \overline{c_j} e^{-ijx} dx = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$$

دی، د فوریې - بنسټ  $e^{ikx}$  د اورتوگونالیتي په اساس مشتق

$$f'(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} ikc_k e^{ikx}$$

مربع انټیگرالور دی، که

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 < \infty,$$

وي، ځکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = - \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} kc_k e^{ikx} j \overline{c_j} e^{-ijx} dx = -2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2.$$

دا چې له دویم شرط لومړی لاس ته راځي، نو لرو

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 < \infty$$

لیکونکي: اپ، هیولیک

د هاردي-لیبسک فضا Hardy-Lebesgue-Raum

د هاردي-لیبسک فضا  $HL$  د ټولو دیوونکردی په ټیکلي

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

هولومورف توابعو

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

خخه جوړه ده

د

$$\|f\|_{HL}^2 = \langle f, f \rangle_{HL} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \bar{c}_k < \infty.$$

سره.

پوره اورتونورمالسيستم **Vollständiges Orthonormalsystem**

يو اورتونورمال سيستم  $\{e_i : i \in I\}$  په هيلبرت-فضا كې پوره يا ماسيمال بلل كيري، كه

$$\forall_{i \in I} \langle u, e_i \rangle = 0 \implies u = 0$$

باور ولري.

$$\forall_{i \in I} \langle u, e_i \rangle = 0 \implies u = 0$$

يو اورتونورمال سيستم ټيک هلته د هيلبرت - فضا يو اورتونورمال بنسټدی، كله چط هغه پوره وي.

ليكونكي: اپ، هيوليگ

په هيلبرت-فضا كې فوري-پروجكشن (پرپوسټون)

### Fourier-Projektion in Hilbert-Räumen

د يوه وكتور  $v$  فوريي -پروجكشن په يوه هيلبرت-فضا  $H$  كې د اورتونورمالسيستم

$$e_1, e_2, \dots$$

، سره

$$p_n v = \sum_{k=1}^n c_k e_k, \quad c_k = \langle v, e_k \rangle$$

و  $v$  ته بنه اږوکیمیشن دی د سکالار ضرب  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  له لارې ایندوڅیرت (منځ ته راغلی) نور م  $\|\cdot\|$  سره، دا په دې معناچې

$$\|v - p_n v\| = \min_{q = \sum_{k=1}^n d_k e_k} \|v - q\|.$$

لیکونکي: اېپ، هیولیک

سړی لومړی په پام کې نیسي، چې

$$\langle v - p_n v, e_j \rangle = 0, \quad 1 \leq j \leq n.$$

دا د  $\{e_j\}$  د اورتونورمالیټي څخه ترلې لاس ته راځي، ځکه چې

$$\langle p_n v, e_j \rangle = \sum_{k=1}^n c_k \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^n c_k \delta_{k,j} = c_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

$$q = \sum_{k=1}^n d_k e_k$$

د یوه په خوښه اږوکسیمیشن لپاره باور لري

$$\|v - q\|^2 = \|v - p_n v + p_n v - q\|^2$$

$$\begin{aligned} &= \|v - p_n v\|^2 + \langle v - p_n v, \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^n (c_k - d_k) e_k} \rangle + \langle \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^n (c_k - d_k) e_k}, v - p_n v \rangle + \|p_n v - q\|^2 \\ &= \|v - p_n v\|^2 + \|p_n v - q\|^2, \end{aligned}$$

دا په دې معنا، چې نټیکای مینیمال کیري، که  $q$  د فوری-پروجکشن  $p_n v$  وي. لیکونکي: اېپ، هیولیک

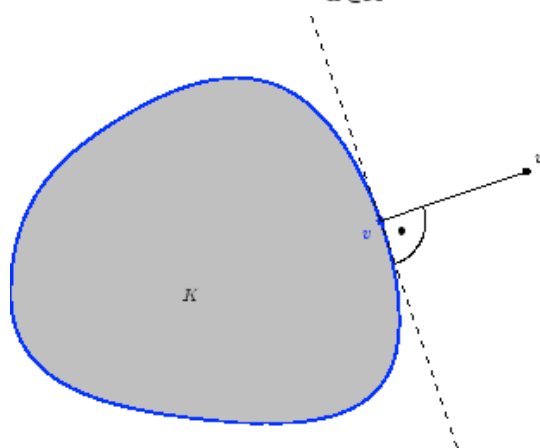


په هیلبرت-فضا باندې د کونوکسو (وتلو) ډېریو خورا بڼه اېروکسیمیشن

### Beste Approximation von konvexen Mengen in Hilbert-Räumen

د یوه هیلبرت-فضا  $H$  د یوه رابند کونوکس برخه ډېری  $K$  لپاره هر  $u \in H$  ته یو یواځنی خورا بڼه اېروکسیمیشن شتون لري د دې لاندې سره

$$\|u - v\| = \inf_{w \in K} \|u - w\| .$$



خورا بڼه اېروکسیمیشن یواځنی د

$$\langle u - v, w - v \rangle \leq 0,$$

له لارې د ټولو  $w \in K$  لپاره کرکتریزه (خوي ټاکنی) شوی، دا په دې معنا، چې د وکتورونو  $u - v$  او  $w - v$  ترمنځ کونج پخ دی.

په ځانگړې توگه د رابندو کرښیزو برخه فضاوو  $U$  خورا بڼه اېروکسیمیشن شتون لري. په دې حالت کې دا پورته سکالار ضرب صفر دی، دا په دې معنا، چې نایټیکاوی  $u - v$  و  $U$  ته اورتوگونا دی.

لیکونکي: اېپ، هیولیگ

که

$$d = \inf_{w \in K} \|u - w\|$$

خای په خای کرو

$$\|u - u_n\| \rightarrow d, \quad n \rightarrow \infty,$$

سره کې وټاکو، نو د  $K$  کونوکسیتی له امله باور لري

$$\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in K$$

او ورپسې

$$\|2u - (u_n + u_m)\|^2 \geq 4d^2.$$

د غبرگ اړخیز-کټمتوالي څخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} & \| (u - u_n) - (u - u_m) \|^2 \\ &= \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - \| (u - u_n) + (u - u_m) \|^2 \\ &\leq \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - 4d^2. \end{aligned}$$

دا چې د کروړ ورو نوکانو افاده یا وپینه د  $4d^2$  په لور هڅيري، نو

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|u_m - u_n\|^2 = 0$$

لرو او  $(u_n)$  په  $H$  کې یوه کوشي-پرلپسې ده، دا په دې معنا، چې یو  $v \in K$  شتون لري

$$\|u - v\| = d. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = v$$

سره.

پوله ارزښت يواځنی دی، ځکه چې که یو بل پوله ارزښت  $w \in K$  شتون لرو دی د  $\|u - w\| = d$  سره، نو پرلپسې  $v, w, v, w, \dots$  به لکه پورته پولې ته تلونکې وی  $v = w$  او باید باور ولري. لیکونکي: اپې، هیولېگ

### په هیلبرت-فضا کې اورتوگونال کومپلیمینټ Orthogonales Komplement in Hilbert-Räumen

د یوې هیلبرت-فضا  $H$  هرې رابندې لاندې – یا برخه – فضا  $U$  ته یو اورتوگونال کومپلیمینټ،، دا په دې معنا، چې یوه رابنده لاندې فضا

$$U^\perp = \{v \in H : \langle u, v \rangle = 0, \quad \forall u \in U\},$$

شتون لري د

$$H = U \oplus U^\perp.$$

سره.

لیکونکي: اپې، هیولېگ

دا چې  $U^\perp$  د  $H$  یو لاندې – یا برخه فضا ده، سیده له سکالار ضرب  $\langle u, v \rangle$  څخه لاس ته راځي، او د کونینش – شوارخ مساوات له لارې رابندوالی لاس ته راځي.

د  $u \in U$  او  $u \in U^\perp$  لپاره  $\langle u, u \rangle = 0$  باور لري او له دې سره  $u = 0$  همداسې  $U \cap U^\perp = \{0\}$ .

دا چې  $U$  کونوکس ده، نو د  $w \in H$  لپاره یو خورا ښه اږوکسیمیشن  $u \in U$  شتون لري، هغه چې نورم  $\|w - u\|$

میمال کوي. که کیردو  $v = w - u$ ، نو د ټولو  $\tilde{u} \in U$  او ټولو  $\alpha$  لپاره باور لري

$$\|v\|^2 \leq \|v - \alpha \tilde{u}\|^2 = \|v\|^2 - \bar{\alpha} \langle v, \tilde{u} \rangle - \alpha \langle \tilde{u}, v \rangle + \alpha \bar{\alpha} \|\tilde{u}\|^2.$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\langle \tilde{u}, v \rangle}{\|\tilde{u}\|^2} \quad \alpha = \frac{\langle v, \tilde{u} \rangle}{\|\tilde{u}\|^2},$$

همداسي

سره لاس ته راڻي

$$\|v\|^2 \leq \|v\|^2 - \frac{|\langle \tilde{u}, v \rangle|^2}{\|\tilde{u}\|^2}$$

اوله دي سره

$$v \in U^\perp. \quad \langle \tilde{u}, v \rangle = 0$$

همداسي

$$w = u + v$$

دا چي دى، نو

$$H = U \oplus U^\perp$$

و بنوولشئو.

ليكونكي: اپ، هيوليگ

په هيلبرٽ-فضا كي د بيسل-نامساوات

### Bessel-Ungleichung in Hilbert-Räumen

په يوه هيلبرٽ-فضا  $H$  كي د هر اورتونورمالسيستم  $\{e_i : i \in I\}$  لپاره باور لري

$$\sum_{i \in I} |\langle v, e_i \rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

$$v \in H$$

د ٽولو لپاره.

ليكونكي: اپ، هيوليگ

بنونه فقط يوه گنلور اورتونورمال سيستم لپاره مخ ته بيايو.

وي دي  $i_1, i_2, \dots, i_n$  د ايډکشن (پيژند نخښو) يوه په خوښه پرلپسې په  $I$  کې د کومېلکي اعدادو يوه په خوښه پرلپسې  $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_n}$  لپاره د  $e_i$  له اورټونورماليتي څخه لاس ته راځي

$$0 \leq \left\| v - \sum_{k=1}^n c_{i_k} e_{i_k} \right\|^2$$

$$\begin{aligned} &= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^n c_{i_k} \langle e_{i_k}, v \rangle - \sum_{k=1}^n \overline{c_{i_k}} \langle v, e_{i_k} \rangle + \sum_{k=1}^n |c_{i_k}|^2 \\ &= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle v, e_{i_k} \rangle - c_{i_k}|^2. \end{aligned}$$

د  $c_{i_k} = \langle v, e_{i_k} \rangle$  ټاکنو لپاره دا دا معنا لري

$$0 \leq \|v\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2$$

همداسي

$$\sum_{k=1}^n |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

دا نامساوات د پولې ته تگ  $n \rightarrow \infty$  سره هم ساتلی پټي کيږي. لیکونکي: اېپ، هیولیک

په هیلبرت-فضا کې د فوریر (فوريي) ودیزینه

### Fourier-Entwicklung in Hilbert-Räumen

په یوه هیلبرت-فضا  $H$  کې د یوه پوره اورټونورمال سیستم  $\{e_i : i \in I\}$  لپاره سری

$$u = \sum_{i \in I} \langle u, e_i \rangle e_i$$

د  $u$  د فوريي – وديزينه بولي.  
ليكونكي: اپ، هيوليگ

په هيلبرت – فضا كي د پارزيوال-كتمتوالي

### Parseval-Identität in Hilbert-Räumen

د يوې هيلبرت-فضا  $H$  د هر ( نه په اړينه توگه گنلور) پوره اورتونورمال سيستم  $\{e_i : i \in I\}$  لپاره باور لري

$$\sum_{i \in I} |\langle v, e_i \rangle|^2 = \|v\|^2, \quad v \in H,$$

دا په دي معنا، چي نورم  $v$  د بنسټ ضريونو د  $l^2$ -نورم سره سر خوري.

ليكونكي: اپ، هيوليگ

بنوونه سپار ابل خيلبرت-فضا لپاره مخ ته بيول كيږي.

د سكالار ضرب د ناپرېكيدني له امله

$$\left\langle v - \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle v - \sum_{k=1}^n \langle v, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \langle v, e_j \rangle - \langle v, e_j \rangle = 0$$

دي، د ټولو  $e_j$  لپاره، دا په دي معنا، چي

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k.$$

له دي لاس ته راځي

$$\|v\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n \langle v, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\langle v, e_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, e_k \rangle|^2$$

داپه دي معنا، چې د پارزيوال - کټوتوالی.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

ناپربکيدونکي کرښيز فنکشنال Stetiges lineares Funktional

په يوه حقيقي (کومپلکس) توپولوژيکي وکتورفضا  $V$  باندې يو ناپربکيدونکی کرښيز بنکشنل  $\Lambda$  يو ناپربکيدونکی کرښيز تابع دی د  $V$  په پسي.  $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ .

په يوه نورمي وکتورفضا کې د  $\Lambda$  ناپربکيدنوالی ورته دی په صفر باندې د يوونغونداري يا واحدغونداري د څېرې ته. په دې حالت کې سړی

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

د کرښيز فنکشنل د نورم په حيث تعريفوي يا پېزند ورکوي.

د نورم د هوموجينيټي په بنسټ هم ورته تعريفونه

$$\|\Lambda\| = \sup_{v \neq 0} \frac{|\Lambda v|}{\|v\|} = \sup_{\|v\| \leq 1} |\Lambda v|$$

شوني دي.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

د دې لپاره چې وښايو، چې د ناپربکيدني څخه محدودوالی لاس ته راځي، نيسو، چې  $\Lambda$  په نورمي وکتورفضا باندې ناپربکيدونکي دی، په صفر د يوونغونداري څېره يا عکس

نامحدود دی، دا په دې معنا، چې د هر  $n \in \mathbb{N}$  لپاره په  $V$  کې يو  $v_n$  شتون لري د

$$|\Lambda v_n| > n \quad \text{او} \quad \|v_n\| \leq 1$$

سره.

که کیردو

$$u_n = \frac{1}{n} v_n,$$

نو لاس ته راځي

$$\|u_n\| \leq \frac{1}{n},$$

دا په دې معنا، چې  $u_n \rightarrow 0$  د  $n \rightarrow \infty$  لپاره او د فنکشنل د ناپرېکيدني په بنسټ له  $\Lambda(u_n) \rightarrow \Lambda(0)$  دې سره لاس ته راځي. د فنکشنل د کريزوالي سره باور لري

$$\Lambda 0 = \Lambda(0 \cdot v) = 0 \Lambda v = 0$$

د ټولو  $v \in V$  لپاره او له دې سره  $|\Lambda u_n| \rightarrow 0$  له بله اړخه دی.

$$|\Lambda u_n| = \frac{1}{n} |\Lambda v_n| > 1,$$

چې تضاد انځوروي.

برعکس له محدودوالي څخه ناپرېکيدنوالی لاس ته راځي، که سړی رنيسي، چې

$$|\Lambda u| < c$$



په صفر د یوونغونډاري د ټولو  $u$  لپاره. که اوس سری یوه په  $V$  کې په خوښه پرلپسې ولري د  $(v_n)$  او  $v_n \rightarrow v$  سره د ټولو  $n$  لپاره، نو سری لاس ته راوړي

$$|\Lambda v_n - \Lambda v| = |\Lambda(v_n - v)| = \|v_n - v\| \left| \Lambda \left( \frac{v_n - v}{\|v_n - v\|} \right) \right| \leq \|v_n - v\|_C \rightarrow 0,$$

دا په دې معنا، چې د فنکشنال ناپرېکيدنه لرو.

ليکونکي: اېپ، هيو ليگ

د پيلگي لپاره دا کرښيز فنکشنال

$$\Lambda f = f(1)$$

د ټول  $f \in C[0, 1]$  لپاره رانيسو.

د په  $C[0, 1]$  د ماکسيموم نورم سره،

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|,$$

لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_\infty=1} |f(1)| \leq \sup_{\|f\|_\infty=1} \|f\|_\infty = 1,$$

دا به دې معنا، چې فنکشنال ناپرېکيدونکی دی. د تابع (فنکشن)  $f(x) = 1$  سره د ټولو  $x \in [0, 1]$  لپاره د فنکشنال د نورم لپاره راځوي

$$\|\Lambda\| = 1.$$

که د دې لپاره په  $C[0, 1]$  باندې  $L^2$ -نورم وکاروو،

$$\|f\|_2 = \left( \int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

او توابعو پرلپسې راواخلو

$$f_n(x) = \sqrt{2n+1}x^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

نوو سړی لاس ته راوړي

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 (2n+1)x^{2n} dx = 1,$$

مگر

$$f_n(1) = \sqrt{2n+1}$$

له ټولو پولو اوږي یا له ټول پولو لویږي، دا پهدې معنا، چې فنکشنل پرېکږونکی دی.

لیکونکي: اپې، هیولینگ

د هان-بانخ د دوام (پسې تلني یا مخ ته بیوني) جمله

### Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

د یوه نورمي وکتور فضا پ  $V$  ه یوه لاندېفضا یا برخه فضا  $U$  باندې هر ناپرېکږونکي کرښیز فنکشنال  $\Lambda$  ته یوه نورم ته وفاداره پرمخ ته تلنه شتون لري، داپه دې معنا، چې په  $V$  یو ناپرېکږونکي کرښیز فنکشنال  $\tilde{\Lambda}$  شتون لري د

$$\tilde{\Lambda}u = \Lambda u, \quad u \in U$$

او

$$\sup_{v \in V, \|v\|=1} |\tilde{\Lambda}v| = \|\tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\| = \sup_{u \in U, \|u\|=1} |\Lambda u|.$$

سره

ليكونكي: اېپ، هيوليگ

د بيلگي په توگه د  $L^2(-1, 1)$  په لاندې فضا

$$U = \text{span}\{1, x, x^2\}$$

باندې د اړونده نورم

$$\|f\|_2 = \left( \int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

سره کرښيز فنکشنال

$$\Lambda f = f(0)$$

رااخلو.

يو تابع يا فنکشن

$$f = a + bx + cx^2$$

له  $U$  څخه لاندې نورم لري

$$\|f\|_2^2 = \int_{-1}^1 (a + bx + cx^2)^2 dx = 2a^2 + \frac{2}{3}b^2 + \frac{4}{3}ac + \frac{2}{5}c^2.$$

له دې سره له  $\Lambda$  څخه په  $U$  لاس ته راځي

$$\|\Lambda|_U\|^2 = \max_{0 \neq f \in U} \frac{|\Lambda f|^2}{\|f\|_2^2} = \max_{(a,b,c) \neq (0,0,0)} \frac{a^2}{2a^2 + \frac{2}{3}b^2 + \frac{4}{3}ac + \frac{2}{5}c^2}.$$

د ځای په ځای یا کلک  $a$  د  $b = 0$ ،  $c = -\frac{5}{3}a$  لپاره مخرج یا ماتلاندي مینیمال کيږي، دا په دې معنا، چې

$$\|\Lambda|_U\| = \sqrt{\frac{a^2}{\frac{8}{9}a^2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}.$$

په روښنه توګه په  $L^2$  باندې د فنکشنال ارزښتونه پرېکړونکي ده. د دې لپاره چې د  $\Lambda$  لپاره یو پرمخ بیونه وګټو، نو ایښوونه

$$\tilde{\Lambda}f = \int_{-1}^1 \underbrace{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}_{p(x)} f(x) dx$$

کوو او ضریبونه  $\alpha, \beta, \gamma$  د غوښتو څخه ټاکو، چې  $\tilde{\Lambda}$  د  $\Lambda$  سره د  $U$  په یوه بنسټ باید یو د بل سره سر وځوري.

$$\Lambda \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\alpha + \frac{2}{3}\gamma \\ \frac{2}{3}\beta \\ \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{5}\gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \tilde{\Lambda} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{Bmatrix}.$$

له دې لاس ته راځي

$$\alpha = \frac{9}{8}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\frac{15}{8}.$$

د کوشي-شوارخ نامساوات په بنسټ دی

$$|\tilde{\Lambda}f| \leq \|p\|_2 \|f\|_2,$$

يعني  $\|\tilde{\Lambda}\| \leq \|p\|_2$  . دا چې  $p \in U$  نو دا لاندې هم باور لري

$$\|\tilde{\Lambda}|_U\| \geq \frac{|\tilde{\Lambda}p|}{\|p\|_2} = \frac{\int_{-1}^1 |p(x)|^2 dx}{\|p\|_2} = \|p\|_2.$$

دې پسي يا د دې په تعقيب دی

$$\|\tilde{\Lambda}\| = \|p\|_2 = \sqrt{2 \left(\frac{9}{8}\right)^2 + 0 + \frac{4}{3} \frac{9}{8} \left(-\frac{15}{8}\right) + \frac{2}{5} \left(-\frac{15}{8}\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{2},$$

دا په دې معنا، چې  $\tilde{\Lambda}$  د  $\Lambda$  نورمساتونکی يا - وفادار پر مخ وړنه ده.

ليکونکي: اپې، هيوليگ

دوال- يا دوه گوني فضا Dualraum

د يوه نورمي وکتور فضا  $V$  دوال- يا دوه گوني فضا  $V'$  په  $V$  د ناپرېکېدونکو کرښيزو

فنکشالونو  $\Lambda$  لاندې د نورم

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

سره په  $V'$  نخبه شوی يو بانخ-فضا ده.

ليکونکي: اپ، هيوليگ

سيده ليدل کيري، چي  $V'$  يوه نورمي وکتر فضا ده. د بنوول ټي  $V'$  پروه والی دی.  $(\Lambda_n)$

وي دي يوه کوشي-پرلپسي په  $V'$  کي دا په دي معنا دی، چي د ټولو  $\varepsilon > 0$

لپاره يو  $n_0$  شتون لري، داسي چي د ټولو  $n, m > n_0$  لپاره

$$\|\Lambda_n - \Lambda_m\| < \varepsilon$$

باور لري. نو د هر  $v \in V$  لپاره باور لري

$$\|\Lambda_n v - \Lambda_m v\| = \|(\Lambda_n - \Lambda_m)v\| \leq \|\Lambda_n - \Lambda_m\| \|v\| < \varepsilon \|v\|$$

دا په دي معنا، چي  $(\Lambda_n v)$  يوه سکالار کوشي-پرلپسي ده، نو يو پوله ارزښت

لري. دا د  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n v$  له لاري تعريف شوی تابع کرښيز او له پورته تخمينونو نورم پرلپسي د ناپرکيدني له لاري د  $m \rightarrow \infty$  لپاره

$$\|(\Lambda_n - \Lambda)v\| \leq \varepsilon \|v\|$$

د  $n > n_0$  لپاره. له دي لاس ته راځي، چي  $\Lambda_{n_0} - \Lambda$  او له دي سره هم

$$\Lambda = (\Lambda - \Lambda_{n_0}) + \Lambda_{n_0}$$

ناپرکيدونکي دی، او

$$\|\Lambda_n - \Lambda\| < \varepsilon$$

د  $n > n_0$  لپاره باور لري، دا په دي معنا، چي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n = \Lambda.$$

ليكونكي: اپ، هيوليگ

بيدوالفضا (دوه دوه بيزه فضا) Bidualraum

د يوې نورمي وكتور فضا  $V$  بيدوال-يا بيدوه بيزه فضا  $V''$  د  $V'$  دوه بيزه فضا ده. دا

$v \in V$   
چې هر توکی دي

$$\Lambda \mapsto \Lambda v, \quad \Lambda \in V'$$

يو ناپريکيدونکی کرښيز فنکشنال په  $V'$  جوړ کړي، کيدی شي  $V$  د  $V''$  يوې لاندي فضا سره جوړ شي يا منخ ته راشي. باورلري

$$V'' = V,$$

نو  $V$  رفلکسيو يا هنداروني بيل کيږي.

رفلکسيو باناخ-فضاوي فضاوي  $L^p(D)$ ،  $1 < p < \infty$  دي، همداسي هر پاي بعدي (پراخيدوني) وكتور فضاوي.  $L^1(D)$  او  $C[0, 1]$  د نا-هنداروني بيلگي باناخ - فضا دي

ليكونكي: اپ، هيوليگ

د  $p$  - انتيگراور توابعو دوالفضا

Dualraum der  $p$ -integrierbaren Funktionen

د يوې ورشو  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  او  $1 \leq p < \infty$  لپاره دی

$$L^p(D)' = L^q(D), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

ليكونكي: اپ، هيوليگ

اوس يواځي  $L^q(D) \subseteq L^p(D)'$  اينکلوزيون يا خونديونه بنوول کيږي.

هر  $g \in L^q(D)$  ته د

$$\Lambda : f \mapsto \Lambda f = \int_D f(x)g(x) dx, \quad \forall f \in L^p(D),$$

له لاري په  $L^p(D)$  يو ناپربکيدونکی کرښيز فنکشنال تعريف دی، خکه چې هولدر نامساوت پسي د د انتيگرالونو لپاره دی

$$\int_D |f(x)g(x)| dx \leq \left( \int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_D |g(x)|^q dx \right)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q < \infty$$

د  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  سره. له دې لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_p=1} |\Lambda f| \leq \|g\|_q.$$

د  $f = \text{sign}(g)|g|^{q-1}$  لپاره نامساوت تيره يا تيز دي، دا په دې معنا، چې سړی لاس ته راوړي

$$\|\Lambda\| = \|g\|_q.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليگ

د ريسخ د انځورولو جمله Darstellungssatz von Riesz

د يوي هيبرت-فضا  $H$  او يوه کره يا کلک  $v \in H$  لپاره د



$$\Lambda : u \mapsto \Lambda u = \langle u, v \rangle, \quad \forall u \in H$$

له لاري يو ناپرېکيدونکي کرښيز تابع په  $H$  د

$$\|\Lambda\| = \|v\|$$

سره تعريف دی.

معکوس هر يو ناپرېکيدونکي کرښيز فنکشنال  $\Lambda \in H'$  ته ټيک يو  $v \in H$  شتون لري، داسې چې پورته مساوات باور لري.

ليکونکي: اېپ، هيو ليگ

د بېلگې په توگه د مربعجمعه وړ پرلپسې  $l^2$  رانيسو. وي دي ، نو ټيک يوه پرلپسې

$$\Lambda \in (l^2)'$$

په  $l^2$  کې شتون لري د

$$\Lambda c = \langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \bar{d}_k, \quad \forall c \in l^2.$$

سره.

د  $d$  څخه و  $\Lambda$  ته ديو اخني تنظيم له لاري کيدی شي فضا  $l^2$  د خپل دوال- يا دوه گوني

فضا  $(l^2)'$  سره و بنوول شي ياو پيژندل شي.

ليکونکي: اېپ، هيو ليگ

د بيلگې په توگه مربع انتيگرا لور توابع  $L^2(D)$  په ورشو  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  رانيسو. وي دي ، نو ټيک يو تابع  $\Lambda \in L^2(D)'$  شتون لري د  $g \in L^2(D)$

$$\Lambda f = \langle f, g \rangle = \int_D f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \forall f \in L^2(D).$$

سره.

له  $g$  څخه و  $\Lambda$  ته د یواځني تنظیم له لارې کیدی شي فضا  $L^2$  د خپلې دوال-یادوه  
گونې فضا  $(L^2)'$  سره وپیژندل شي.

لیکونکي: اپې، هیولیک

کمزوري پولې ته تلنه Schwache Konvergenz

په یوه نورمي شوي وکتور فضا  $V$  یوه پرلپسې  $(v_n)$  کمزوري پولې  $v$  ته ځي، که

$$v_n \rightarrow v,$$

که

$$\Lambda(v_n - v) \rightarrow 0, \quad \forall \Lambda \in V'.$$

د  $\Lambda$  د ناپرېکيدني په بنسټ هره پولې ته تلونکي پرلپسې

$$v_n \rightarrow v \Leftrightarrow \|v_n - v\| \rightarrow 0$$

هم کمزوري پولې ته تلونکي ده. معکوسوالی یا په څتوالی په ټولیزه توګه باور نه لري.

لیکونکي: اپې، هیولیک

د بیلګې په توګه په فضا کې مربع جمع کیدونکي پرلپسې و  $l^2$  کې پلپسې

$= (0, 0, 0, \dots)$	$e$
$= (1, 0, 0, \dots)$	$e^1$
$= (0, 1, 0, \dots)$	$e^2$
	$\vdots$

رانيول کيڙي. دا چي هر ناپرېکيدونکي کربنيز فنکشنال  $\Lambda$  په  $l^2$  د رسسڅ (ويينه: ريڅ) د انځوريزي جملې

$$\Lambda c = \langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \bar{d}_k$$

په هيټ د کلک يا کره  $d \in l^2$  سره ليکل کيڙي، نولاس ته راځ

$$\Lambda(e^n - e) = \langle e^n, d \rangle = \bar{d}_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

ځکه چي  $d$  مربعجمعه وړ دی، دا په دي معنا، چي دی

$$e^n \rightarrow e, \quad n \rightarrow \infty.$$

مگر په ر حالت

$$\|e^n - e\| = 1,$$

داپه دي معنا، چي

$$e^n \neq e.$$

ليكونكي: اپ، هيوليگ

Beschränkte lineare Operatoren محدود کرښيز اوپراتورونه

د نورمي وکتورونو فضاو تر منځ يو کرښيز تابع

$$L : V \rightarrow W$$

محدود کرښيز اوپراتور بلل کيږي، که د اوپراتور نورم

$$\|L\| = \sup_{\|v\|=1} \|Lv\|$$

پای وي. محدودوالی د  $L$  د ناپرېکيدنوالي سره په يوه معنا دی.

سری کرښيز اوپراتور هغه په کرښيز الجبر کې د کرښيز تابع په ځای کاروي، چې داناپای -بعديز Kontext غوره وښايو يا را مخ ته کړو.

د ټولو کرښيزو محدودوله  $V$  څخه د  $W$  پسې اوپراتورونو د  $\mathcal{L}(V, W)$  سره په نڅښه کيږي. دا باناخ-فضا ده، که  $W$  يوه باناخ-فضا وي.

ليكونكي: اپ، هيوليگ

Integraloperatoren انتيگرا ل اوپراتور

د يوه تابع

$$K : D \times D \ni (x, y) \mapsto K(x, y) \in \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n,$$

لیاره د

$$(Lf)(x) = \int_D K(x, y) f(y) dy$$

له لارې یو کرنیز اوپراتو تعریفیږي. د مخته څېرې- یا تابع - او څېرې فضا(تابع تابع)  $V$  او  $W$  د داسې په نامه زری تابع  $K$  د خویونو په واک کې دي. په لاندې کې یوه څو بیلگې او همداسې د اړونده اوپراتو نور نمونه ورکړ شوي.

• په  $K$  ناپېرېدونکي،  $D$  محدود ده.

$$L: C(\bar{D}) \rightarrow C(\bar{D})$$

$$\|L\| = \max_{x \in \bar{D}} \int_D |K(x, y)| dy$$

$$K \in L^2(D \times D)$$

$$L: L^2(D) \rightarrow L^2(D)$$

$$\|L\| \leq \left( \int_D \int_D |K(x, y)|^2 dx dy \right)^{1/2}$$

$$K(x, y) = \varphi(x - y), \quad D = \mathbb{R}^n$$

$$L : L^p(D) \rightarrow L^p(D)$$

$$\|L\| = \int_D |\varphi(z)| dz$$

د کرښيزو اوپراتورونو پولې ته تلنه **Konvergenz linearer Operatoren**

د محدودو کرښيزو اوپراتورونو پرلپسيزو لپاره لاندې دوه کلیمې کارول کيږي.

• **Punktweise Konvergenz** ټکي ډوله پولې ته تلنه

يوه پرلپسې  $L_n \in \mathcal{L}(V, W)$  ټکيدوله د يوه اوپراتور  $L$  په لور پولې ته ځي،  
که

$$L_n v \rightarrow L v, \quad \forall v \in V.$$

• **Gleichmäßige Konvergenz** برابرډوله پولې ته تلنه

يوه پرلپسې  $L_n \in \mathcal{L}(V, W)$  برابرډوله د يوه اوپراتور  $L$  په لور پولې ته  
تلونکې ده، که وي

$$\|L_n - L\| = \sup_{\|v\|=1} \|L_n v - L v\| \rightarrow 0.$$

د برابرډوله پولې ته تلنې څخه ټکي ډوله پولې ته تلنه راكوي، معكوس په ټوليزه توگه باور نه لري.

د برابر ډوله محدودوالي اصول **Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit**

که د یوې باناخ-فضا  $V$  په یوه نورمي وکتور فضا  $W$  کې د یوې محدودې کرښیز اوپراتورونو  $(L_n)$  پرلپسې لپاره لاندې باور ولري

$$\sup_n \|L_n v\| < \infty \quad \forall v \in V,$$

نو لاس ته راځي

$$\sup_n \|L_n\| < \infty,$$

دا په دې معنا، چې د اوپراتور-نورم برابر ډوله مخدودوالی.

### د باناخ-شتاینهوز جلمه Satz von Banach-Steinhaus

وي دې  $V, W$  باناخ-فضا او  $U$  یوه د  $V$  ټینګه یا (غلیظه) برخه ډېرې، نو بیا یوه پرلپسې  $L_n \in \mathcal{L}(V, W)$  ټیک هلته ټکي ډوله و یوه کرښیز محدود اوپراتور  $L$  ته ځي،

$$L_n v \rightarrow L v, \quad \forall v \in V,$$

که

(a)

$$\forall u \in U, \quad L_n u$$

پولي

$$\sup_n \|L_n\| < \infty.$$

(b)

د باناخ شرایط (a) او (b) دې پوره وي او  $v$  دې یو په خوښه وکتور له  $V$  څخه وي. دا چې  $U$  په  $V$  کې ټینګه یا کیمندلی ده، نو د لپاره یو  $\varepsilon > 0$  شتون لري، داسې چې دی

$$\|u - v\| < \frac{\varepsilon}{3 \sup_n \|L_n\|}.$$

پرلپسي  $(L_n u)$  د نيوني يا ففضيي له مخې پولي ته ځي، يعني يو ايندکس يا پيژندنځپنه  
 $m, n > n_0$  شتون لري، داسې چې د لپاره

$$\|L_m u - L_n u\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

باور لري. له دې لاس ته راځي

$$\|L_m v - L_n v\| \leq \|L_m v - L_m u\| + \|L_m u - L_n u\| + \|L_n u - L_n v\|$$

$$\sup_n \|L_n\| \frac{\varepsilon}{3 \sup_n \|L_n\|} + \frac{\varepsilon}{3} + \sup_n \|L_n\| \frac{\varepsilon}{3 \sup_n \|L_n\|} = \varepsilon,$$

داپه دې معنا، چې  $(L_n v)$  په  $W$  کې يوه کوشي-پرلپسي ده. دا چې  $W$  پوره ده، ن  
 و پوله ارزښت شتون لري، يعني

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n v = Lv \in W.$$

د  $L$  محدودوالي او کرښيزوالي ترلی د نورم له ناپرېکيدني لاس ته راځي.

د معکوسوني لپاره دې فقط شرايط (b) و بنوول شي. دا د برابرېدوله محدودوالي له  
 شرايطو څخه لاس ته راځي، ځکه چې

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n v = Lv$$



راکوي، چې  $\sup_n \|L_n v\|$  د ټولو  $v$  لپاره پای دی.

وي دي

$$s_n f = \sum_{j=1}^n w_{j,n} f(x_{j,n})$$

د لاندې انتیگرال لپاره نږدېونه

$$s f = \int_0^1 f(x) dx .$$

که وزنونه  $w_{i,n}$  زیاتیز یا مثبت وي او  $s_n$  ټیک دی د  $n <$  درجې پولینوم لپاره، نو لاس ته راځي

$$s f = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n f$$

د  $f \in C[0, 1]$  لپاره.

بڼوونه د باناخ-شتاینهوز له جملې ترلی لاس ته راځي، په کارول شوی په

$C[0, 1]$  او د  $s_n \in \mathcal{L}(C[0, 1], \mathbb{R})$  پولینومونو ټینګه برخه فضا باندې. د پولینوم  $p$

لپاره د  $s_n p$  پولې ته تلنه روښانه دی، ځکه چې  $s_n p = s p$  دی د  $n > \text{Grad } p$  لپاره.

د دي لپاره چې برابر ډوله محدود والی وښایو، سری په پام کې نیسي، چې

$$\sum_{j=1}^n w_{j,n} = 1,$$

دا چې  $s_n$  د ثابتو يا د تل همغو تابعو  $f(x) = c$  لپاره ټيک دی. له دې لاس ته راځي

$$\|s_n\| = \sup_{\|f\|_\infty=1} |s_n f| = 1.$$

### کومپاکت اوپراتورونه Kompakte Operatoren

د باناخ-فضاو تر څنځ يو اوپراتور  $L \in \mathcal{L}(V, W)$  کومپاکت دی، که د  $V$  په  $W$  کې د يوونغونډاري (واحدغونډوسکي يا -کري)  $B$  څېره يا عکس نسبي کومپاکت وي، دا به دېمعنا، چې په  $B$  کې د هرې پرلپسې  $(v_n)$  لپاره پرلپسې  $(Lv_n)$  يوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې ولري.

د بېلگې په توگه په  $\mathcal{L}(V, W)$  کې دوه اوپراتورونه د  $V = W = l^2$  سره رانيسو.

• Der Operator اوپراتور

$$L : (c_1, c_2, c_3 \dots) \mapsto (c_1, c_2, c_3 \dots)$$

کومپاکت نه دی، ځکه چې د بيلگې په توگه د پرلپسې و پرلپسې

$= Le_1 = (1, 0, 0, \dots)$	$e_1$	
$= Le_2 = (0, 1, 0, \dots)$	$e_2$	
$\vdots$	$\vdots$	

په  $B$  کې پولې ته تلونکې برخه پرلپسې نه لري.

• Der Operator کربنيزه تابع

$$L : (c_j) = (c_1, c_2, c_3, \dots) \mapsto (c_1, c_2/2, c_3/3, \dots) = (\tilde{c}_j),$$

$$, \quad \tilde{c}_j = c_j/j$$

کومپاڪت دی. د دې لپاره دې وي  $(c_n)$  یوه په خوښه په  $B$  کې د پرلپسېو پرلپسې. نو سړی په لومړي ځل کره کوي، چې په روښانه توګه د توکي

$$c_n = (c_{n,1}, c_{n,2}, c_{n,3}, \dots)$$

لپاره دا پرلپسې په هر ځای  $c_{n,j}$  کې محدود دي. یعنې

$$|c_{n,j}| \leq 1.$$

که د دې پرلپسې هر فقط د ټولو پرلپسې توکو لومړني ځایونه  $(c_{n,1})$  تر څیرني لاندې ونیسو، داسې چې د محدودوالي په بنسټ یوه برخې پرلپسې  $(c_{n_k(1)})$  پیدا کړو، د کومو لپاره چې لومړي ځایونه پولې ته ځي. که د دې برخې پرلپسې څخه اوس د هر توکي څخه لومړني دوه ځایونه  $(c_{n_k(1)})$

$$(c_{n_k(1),1}, c_{n_k(1),2}),$$

راونیسو، نو بېرته دمخدودوالي په بنسټ پرخپلپسې پیدا کولای شو، د کومو لپاره، چط د وه کونټرې پرلپسې یا ورتېر پرلپسې

$$(d_k) = (c_{n_k(k)}), \quad k \in \mathbb{N}$$

لپاره نو د هر کره  $J$  لپاره د  $J$  د لومړني ځایونو وکتور  $(d_{k,1}, \dots, d_{k,J})$  پولي ته ځي.

د دې لپاره چې وښايو، چې  $(d_k)$  غوښتونې برخپرلېسې ده، نو یوه د خوښې لپاره یو ایندکس  $K$  داسې ټاکو، چې

$$\sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{4}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور ولري. دا چې برخپرلېسې د پورته جوړښتاصولو له مخې د لومړنيو  $K$  ځایونو لپاره پولي ته ځي، نو یو ایندکس  $N$  شتون لري، داسې، چې د  $k, l > N$  لپاره

$$\sum_{j=1}^K \frac{|d_{k,j} - d_{l,j}|^2}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور لري. له دې سره د  $k, l > N$  لپاره لرو

$$\|Ld_k - Ld_l\|_l^2 = \sum_{j=1}^K \frac{|d_{k,j} - d_{l,j}|^2}{j^2} + \sum_{j=K+1}^{\infty} \overbrace{\frac{|d_{k,j} - d_{l,j}|^2}{j^2}}^{\leq 4} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

د وازو توابعو په هکله جمله Satz über offene Abbildungen

د باناخ-فضاؤ تر منځ یو په باندې (surjektiver) محدود کرښیز اوپراتور  $L$  یوه وازه دېرئ په یوه وازه دېرئ څېره کوي.

که  $L$  په کې ( injektiv ) هم وي، نو محدودوالی له  $L^{-1}$  لاس ته راځي. له دې سره حقيقي عدونه  $a, b$  د

$$a\|v\| \leq \|Lv\| \leq b\|v\|$$

سره شتون لري د  $L$  د مخته څېرې څخه د ټولو  $v$  لپاره، چېرته چې دویم نامساوات سملاسي د  $L$  د محدودوالي څخه لاس ته راځي.

ليکوني: هيوليگ، اېپ

صرف نظر نه شي کولای، چې د عملیه يا اوپراتوري کيدنه  $L$  د باناخ-فضاو تر منځ

ده. د دې ترمنځ کټمټوالی  $L \in \mathcal{L}(V, W)$  څيرل کيږي، د کوم سره چې  $V = l^1$  د نورم

$$\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$$

سره په نخښه کيږي او څېره فضا  $W$  د نورم

$$\|w\|_{\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_k|$$

سره په نخښه کيږي. د

$$\|v\|_{\infty} \leq \|v\|_1$$

له امله کټمټوالی  $L$  يو په ( bijektiver ) محدود کرښيز اوپراتو دی، مگر داچې

$$\left\| \sum_{k=1}^n e_k \right\|_{\infty} = 1$$

او

$$\left\| \sum_{k=1}^n e_k \right\|_1 = n$$

د  $e_1 = (1, 0, 0, \dots), e_2 = (0, 1, 0, \dots), \dots$  سره،  $L^{-1}$  نامحدود دی.

لیکوني: هیولیگ، اپ

Satz vom abgeschlossenen Graphen جمله گراف رابند یا بند گراف جمله

که د بانخ - فضاو ترمنخ اوپراتور  $L : V \rightarrow W$  رابند وي، دا په دې معنا، چط له

$$w_n = Lv_n \rightarrow w \quad v_n \rightarrow v$$

او

لاس ته راځي، چي  $w = Lv$  دی، نو  $L$  محدود دی.

لیکوني: هیولیگ، اپ

له دې بیلگې څخه لیدل کیږي، چط سری د رابند گراف په جمله کې په نیوني یا فرضیې صرف نظر نه شي کولای، داسې چي  $L$  د باناخ-فضاو ترمنخ عمل کوي یا اوپریشن کوي. د دې لپاره دفرنخیال اوپراتور

$$\mathcal{L}(V, W) \ni L : f \mapsto f'$$

رانیسو، د کوم سره چي  $V = C^1[0, 1]$  د سوپریموم نورم  $\|\cdot\|_\infty$  سره په نخبه شوی دی او  $W = C[0, 1]$  سره هم سوپریموم نورم دی.  $L$  یوو کربنیز اوپراتور دی، ځکه چي د  $f(x) = x^n$  لپاره

$$\|f\|_\infty = 1, \quad \|Lf\|_\infty = n$$

باور لري

محدود نه دی. مگر د  $L$  گراف رابند دی، له دې امله چې د یوې پرلپسې  $(f_n)$  لپاره  
 $f_n \rightarrow f$  سره باور لري،  $Lf_n \rightarrow g \in W$ ،  $f_n \rightarrow f \in V$  په  $V$  کې د  
 $f'_n \rightarrow g$ ، پر ابر ډوله دی.

$L$  له دې لاس ته راځي، چې  $f$  مشتقور دی، او

$$f' = g$$

باور لري.

(Autoren: App/Höllig)

په هیلبرت-فضا کې د یوه کرښیز اوپراتور ماتریکس

Matrix eines linearen Operators im Hilbert-Raum

یو کرښیز اوپراتو

$$L : H \rightarrow H$$

په یوه سپارابل هیلبرت-فضا د اورتوگونال بنسټ  $e_1, e_2, \dots$  سره کیدی شي د  
 ماتریکس

$$(a_{j,k}) : a_{j,k} = \langle Le_k, e_j \rangle$$

له لاري روښانه شي. باور لري

$$w = Lv \leftrightarrow w_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} v_k,$$

چيرته چي  $u_l = \langle u, e_l \rangle$  د بنسټ ضريونه بنايي يابه گوته کوي.

ليکونکي اپ، هيوليگ

د فورير-پروجکشن د پولي ته تلني او د  $L$  کرښيزوالي په بنسټ باور لري

$$w_j = \langle Lv, e_j \rangle = \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n v_k Le_k, e_j \right\rangle.$$

که پوله او زياتون يا جمعه د سکالار ضرب سره بدل شي، نو سړی د  $L$  ماتريک انځورونه لاس ته راوړي.

ليکونکي اپ، هيوليگ

د بيلگي په توگه به د يوه  $2\pi$ -پريودي يا  $2\pi$ -تل بيرته راگرځيدوني تابع

$$\varphi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e_k, \quad e_k(x) = e^{ikx}$$

لپاره په  $L^2_{2\pi}$  دوه کرښيز اوپراتورونه رانيسو.



لومړی: ضرب  $L : f \rightarrow \varphi f$  : د فوریر - ضربونو له مخې د ماتریکس- راوړنو  
**Matrix-Einträge** لپاره سری لاس ته راوړي

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{i(k-j)x} dx = \varphi_{j-k}.$$

د نورو ویونو یا لغاتو سره د ضرب د  $\varphi$  سره د  $f$  او  $\varphi$  د فوریري- ضربونو یو  
 دیسکرت قنونه په گوته کوي.

دویم قنونه غبرگونه  $L : f \rightarrow \varphi \star f$  : که د ماتریکس-قیمتونو

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) e^{i(kt-jx)} dt dx$$

په تعریف کې سری  $y = x - t$  بدل کړي، نو د

$$e^{i(kt-jx)} = e^{i((k-j)x)} e^{-iky}$$

له امله انتیگرال په  $y$  لاس ته راځي

$$a_{j,k} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k e^{i(k-j)x} dx = 2\pi \varphi_k \delta_{j,k}.$$

د قانوني ماتریکس دوه کونجتری یا دیاگونال دی، د  $f$  د فوریري- ضربونه د  $2\pi$  - واره

د  $\varphi$  فوریري- ضربونو سره ضربیږي

لیکونکي: اپپ، هیولیگ

## ادجونگيري اوپراتور Adjungierter Operator

په يوې سپارابلي هيلبرت-فضا  $H$  باندې د يوه محدود کربنيز اوپراتور  $L$  لپاره د

$$\langle Lv, w \rangle = \langle v, L^* w \rangle, \quad v, w \in H,$$

له لارې يو داسې په نامه ادجونگيري اوپراتور  $L^*$  د ماتريکس

$$(a_{j,k}^*) = (\overline{a_{k,j}})$$

سره تعريفيزي. که  $L^* = L$  باور ولري، نو سړی  $L$  پخپله يا د خان سره ادجونگيري يا هر مېټيک بولي.

د بيلگې لپاره په  $L^2(D)$  يو انټيگرال اوپراتور رانيسو.  $K$  دې يو زري تابع وي د

$$\int_D \int_D |K(x, y)|^2 dx dy < \infty,$$

سره، نو د

$$(Lf)(x) = \int_D K(x, y) f(y) dy$$

له لارې د هر  $f \in L^2(D)$  لپاره يو کربنيز اوپراتو تعريفيزي. د انټيگرال لپاره د کوشي-شوارخ نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\int_D |(Lf)(x)|^2 \leq \int_D \int_D |K(x, y)|^2 dy dx \int_D |f(y)|^2 dy,$$

د  $L^2(D)$  په دې معنا، چې  $L$  یو محدود کرښیز اوپراتور دی په

$$\|L\| \leq \left( \int_D \int_D |K(x,y)|^2 dy dx \right)^{1/2}.$$

سره.

اړونده اډجونگيري اوپراتو  $L^*$  د

$$(L^*g)(x) = \int_D \overline{K(y,x)}g(y) dy$$

سره تعريفيري، دا په دې معنا، چې  $L$  ټيک هلته د ځان سره يا خپل اډجونگيري دی، که نږدې هر چيرته

$$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$$

باور ولري.

يونيتار اوپراتور Unitärer Operator

په يوه هيلبرت-فضا کې يو محدود کرښیز اوپراتور  $Q : H \rightarrow H$  يونيتار دی، که وي

$$QQ^* = I = Q^*Q,$$

چيرته چې  $I$  کټوتوالی په گوته کوي.

د يونيتار اوپراتورونو ورته خويي خووني يا کرگتريزه کوني دي

a)

$$\langle Qv, Qw \rangle = \langle v, w \rangle, \quad v, w \in H,$$

b)

$$\|Qv\| = \|v\|, \quad v \in H,$$

کوم ته چې هر چترته د  $Q$  سورجکتیویټی یا په باندې والی له مخه نیول شوی دی. لیکونکي: اېپ، هیولیک

که  $Q$  یونیتار وي، نو سملاسي لاس ته راځي، چې  $Q$  په باندې یا سورجکتیو ده او

$$\langle Qv, Qw \rangle = \langle v, Q^*Qw \rangle = \langle v, w \rangle, \quad v, w \in H,$$

خکه چې  $Q^*Q = I$ ، دا په دې معنا، چې خويي a).

b) دا ساده لیدل کيږي، چې له خوي یا کرمتريزه a) څخه د  $v = w$  سره سملاسي

لاس ته راځي.

بالاخره له b) څخه لاس ته راځي

$$\langle Q^*Qv, v \rangle = \langle Qv, Qv \rangle = \|Qv\|^2 = \|v\|^2 = \langle v, v \rangle, \quad v \in H$$

د  $L = Q^*Q - I = L^*$  سره له دې لاس ته راځي

$$\langle Lv, v \rangle = 0$$

د ټولو  $v \in H$  لپاره، همداسي

$$\begin{aligned}
0 &= \langle L(v+w), v+w \rangle = \langle Lv, v \rangle + \langle Lv, w \rangle + \langle Lw, v \rangle + \langle Lw, w \rangle \\
&= \langle Lv, w \rangle + \langle w, Lv \rangle = \langle Lv, w \rangle + \overline{\langle Lv, w \rangle} \\
&= 2\operatorname{Re}\langle Lv, w \rangle
\end{aligned}$$

د ټولو  $v, w \in H$  لپاره، که په ځټنگړې توګه کیږدو  $w = Lv$  نو لاس ته ترې راځي

$$\operatorname{Re}\langle Lv, Lv \rangle = \langle Lv, Lv \rangle = \|Lv\|^2 = 0$$

او له دې سره  $Lv = 0$  د ټولو  $v \in H$  لپاره، نو  $L = 0$  همداسې

$$Q^*Q = I.$$

د بېلګې په توګه په  $L^2(\mathbb{R}^n)$  باندې سکالار شوی د فوريي – ترانسفورمیشن رانیسو د

$$(Lf)(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-iy^t x} dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

سره. دا چې  $\|Lf\| = \|f\|$  دی، نو  $L$  یونیتار دی، او اډیونکیري اوپراتور د، اړونده سکالار شوی، د معکوس فوريي-ترانسفورمیشن له لارې ورکړ شوی دی:

$$(L^*g)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ix^t y} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

د یوه کرښیز اوپراتور آیگن ارزښتونه

### Eigenwerte eines linearen Operators

که د یوه  $V$  وکتور فضا یوه کرښیز اوپراتور  $L$  لپاره په خپل ځانکې باور ولري

$$Lv = \lambda v, \quad v \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

نو  $\lambda$  آیگن ارزښت بولو او  $v$  د آیگنوکتور په حیث (همداسې د یوه وکتور فضا  $V$  لپاره آیگن فنکشن). فضا

$$E_\lambda = \{v \in V : Lv = \lambda v\}$$

آیگن فضا بلل کيږي او  $m_\lambda = \dim E_\lambda$  د آیگن ارزښت دېرواروالی بولو.

د بیلگې لپاره به یو ناپربکیدونکی نا- ثابت  $2\pi$  - پریودیکی (تل بیرته راگرځیدونکی) تابع

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ikx}$$

لپاره په  $L^2_{2\pi}$  دوه کرښیز اوپراتورونه راوښول شي.

(i) Der Multiplikationsoperator ضرب اوپراتور

$$L : f \mapsto \varphi f$$

آیگن ارزښت نه لري، ځکه چې له  $Lf = \lambda f$  په  $\varphi(x) = \lambda$  ،  $x \in (-\pi, \pi)$  لاس ته راشي.

(ii) Der Faltungsoperator دقاتولو اوپراتور

$$L : f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\cdot - t) f(t) dt$$

د آيگن تابع په څير لري. باور لري اکسپوننشل تابع  $e_j(x) = e^{ijx}$

$$(Le_j)(x) = \sum_k \varphi_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-t)} e^{ijt} dt = \sum_k \varphi_k (2\pi) \delta_{j,k} e^{ikx} = 2\pi \varphi_j e_j(x),$$

دپه دې معنا، چې  $2\pi\varphi_j$  اړونده آيگن ارزښتونه دي.

د هر مېټيکي اوپراتورونو آيگن ارزښتونه

Eigenwerte hermitescher Operatoren

د يوه هر مېټيکي اوپراتور  $L : H \rightarrow H$  آيگن ارزښتونه حقيقي دي او آيگنوکتورونه و مختلفو آيگن ارزښتونو ته اور توگونا دي.

که  $L$  هر مېټيکي وي، نو باور لري

$$\overline{\langle Lv, v \rangle} = \overline{\langle v, Lv \rangle} = \langle Lv, v \rangle,$$

دپه دې معنا، چې  $\langle Lv, v \rangle$  د ټولو  $v \in H$  لپاره حقيقي دي. اوس دې  $v \neq 0$  آيگن وکتور وي و آيگن ارزښت  $\lambda$  ته، نو

$$\langle Lv, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \underbrace{\langle v, v \rangle}_{\neq 0}$$

دی، همداسی

$$\lambda = \frac{\langle Lv, v \rangle}{\langle v, v \rangle}$$

حقیقی دی.

که  $w \neq 0$  د  $L$  ایگنوتور وی و ایگن ارزینت  $\mu$  ته، نو باور لري

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle Lv, w \rangle = \langle v, Lw \rangle = \mu \langle v, w \rangle$$

اوله  $\lambda \neq \mu$  سره

$$\langle v, w \rangle = 0.$$

لیکونکی: اپ، هیولیک

دیوه هر میتیکی کومپاکت اوپراتور نورم

Norm eines kompakten hermiteschen Operators

دیوه کومپاکت هر میتیکی اوپراتور  $L : H \rightarrow H$  لپاره،  $\|L\|$  یا  $-\|L\|$  د  $L$  یو ایگن ارزینت دی



بنوونه په دوه پلونو (قدمونو) کې صورت نیسي یا پلې کیري.

(i) لومړی

$$\sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v \rangle| = \|L\|$$

بنوول کیري..

د

$$s = \sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v \rangle|$$

او

$$|\langle Lv, v \rangle| \leq \|Lv\| \|v\|$$

سره سری سملاسي لاس ته راوړي

$$s \leq \|L\| .$$

د دې لپاره چې معکوسونه یا په څتوالی وبنوول شي، لومړی په پامې نیسو، چې د په خوښه حقیقي  $\alpha > 0$  لپاره لرو  $\|L\| \leq s$

$$\left\langle L\left(\alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv\right), \alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle - \left\langle L\left(\alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv\right), \alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle$$

$$= \alpha^2 \langle Lv, v \rangle + \langle LLv, v \rangle + \langle Lv, Lv \rangle + \frac{1}{\alpha^2} \langle LLv, v \rangle$$

$$\begin{aligned} & -\alpha^2 \langle Lv, v \rangle + \langle LLv, v \rangle + \langle Lv, Lv \rangle - \frac{1}{\alpha^2} \langle LLv, v \rangle \\ & = 4 \langle Lv, Lv \rangle = 4 \|Lv\|^2. \end{aligned}$$

د

$$|\langle Lv, v \rangle| = \|v\|^2 \left| \left\langle L \frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \right| \leq s \|v\|^2$$

سره او د غبرگارځيز - يا مازى الاضلاع کټمتوالي سره له دې لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \|Lv\|^2 & \leq \frac{s}{4} \left( \left\| \alpha v + \frac{1}{\alpha} Lv \right\|^2 + \left\| \alpha v - \frac{1}{\alpha} Lv \right\|^2 \right) \\ & = \frac{s}{2} \left( \alpha^2 \|v\|^2 + \frac{1}{\alpha^2} \|Lv\|^2 \right). \end{aligned}$$

که په ځانگړې توگه کيږدو

$$\alpha = \left( \frac{\|Lv\|}{\|v\|} \right)^{1/2}$$

نوراکوي

$$\|Lv\| \leq s \|v\|$$

$$\|L\| \leq s$$

داپه دي معنا، چي

(i) له (ii) Nach (i) existiert eine Folge  $(v_n)$  in  $H$  mit  $\|v_n\| = 1$  und

مخي په  $H$  كي يوه پرلپسي  $(v_n)$  شتون لري د او

$$|\langle Lv_n, v_n \rangle| \rightarrow \|L\|,$$

سره، دا په دي معنا، چي يوه برخه پرلپسي  $(v_{n_k})$  شتون لري د

$$\langle Lv_{n_k}, v_{n_k} \rangle \rightarrow \lambda$$

او

$$|\lambda| = \|L\|.$$

سره.

اوس فقط بنايو، چي

$$\|Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\| \rightarrow 0$$

د دي لپاره په پام كي نيسو  $\|Lv\| \leq \|L\| \|v\| = |\lambda| \|v\|$  او

$$\|Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\|^2 = \|Lv_{n_k}\|^2 - \langle Lv_{n_k}, \lambda v_{n_k} \rangle - \langle \lambda v_{n_k}, Lv_{n_k} \rangle + |\lambda|^2$$

$$\lambda^2 \|v_{n_k}\|^2 - \bar{\lambda} \langle Lv_{n_k}, v_{n_k} \rangle - \lambda \langle v_{n_k}, Lv_{n_k} \rangle + |\lambda|^2,$$

د کوم سره چې بنی اړخ د  $k \rightarrow \infty$  لپاره د

$$|\lambda|^2 - |\lambda|^2 - |\lambda|^2 + |\lambda|^2 = 0$$

په لور هڅیږي.

لیکونکي: ایپ، هیولیک

د کومپاکت هر میتیکي اوپراتورونو سپکترال انځورونه

### Spektraldarstellung kompakter hermitescher Operatoren

یوه کومپاکت هر میتیکي اوپراتور  $L : H \rightarrow H$  ته په یوه هیلبرت-فضا یو اورتونورمل بنسټ له آیگن ارزښتونو څخه شتون لري

$$e_1, e_2, \dots,$$

د کوم سره چې مطلق ارزښتونو د اړونده آیگن رازښتونه  $\lambda_j$  یوه همغږیزه صفر پرلپسې جوړوي، یعنی

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots, \quad \lambda_j \rightarrow 0.$$

نسبت دی بنسټ ته  $L$  دا لاندې انځورونه لري

$$Lv = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle v, e_j \rangle e_j.$$

ښوونه یې په ډېرو برخه پلونو (قدمونو) کې پلی کیږي.

لومړی: د  $e_j$  جوړښت. د کومپاکت هر میتیکي اوپراتورونو نورم د خویونو په بنسټ یو  
 آیگن ارزښت  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  شتون لري د لاندې سره

$$|\lambda_1| = \|L\|.$$

اوس سری په پام کې نیسي، چې  $L$  د آیگنوکور  $e_1$  څخه غزېدلې لاندې فضا  
 $E_1$  او توگونال کومپلمنت ایناریانت پرېږدي. د  $v \in E_1^\perp$  لپاره دی

$$\langle Lv, e_1 \rangle = \langle v, Le_1 \rangle = \lambda \langle v, e_1 \rangle = 0,$$

دپه دې معنا، چې  $Lv \in E_1^\perp$ . د دې پسې یا د دې په تعقیب  $L$  همداسې په

باندې یو کومپاکت هر میتیکي اوپراتور دی. د نورم خوی یا کرکتریزه بېرته یو  
 آیگن ارزښت  $\lambda_2 \in \mathbb{R}$  راځي د لاندې سره

$$|\lambda_2| = \|L|_{E_1^\perp}\|.$$

د  $\lambda_2$  ارزښت  $\leq |\lambda_1|$  دی، ځکه چې د یوې کوچنۍ فضا په نسبت نورم جوړیږي.

اوس سری کړی شي جوړښت ایندوکتیو مخ ت ه بوزي:

$$|\lambda_n| = \|L|_{E_n^\perp}\|$$

د لومړیو  $n$  او توگونال آیگنوکتورونو کرښیز پوښ  $E_n$  Hülle سره. دا تلنلار پرې  
 کيږي، که  $L|_{E_n^\perp} = 0$  وي، دپه دې معنا، چې که

$$\dim \text{Bild}(L) = n < \infty$$

وي.

دويم: د صفر 0 په لور پولې ته تلنه: وړاندنيونه، چې  $\lambda_j \geq \lambda > 0$  د ناپاي ډېرو  $j$  لپاره باور لري، لاندې تضاد ته لارښودوي. د  $L$  د کومپاکتوالي په بنسټ د  $\{e_1, e_2, \dots\}$  څيره يا عکسدا لاندې محدوده ډېرئ يا ست

$$\{e_1/\lambda_1, e_2/\lambda_2, \dots\}$$

نسبي کومپاکت ده، بايد يوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې يې خوندي لروډې وي. دا د

$$\|e_j - e_k\|^2 = \|e_j\|^2 + \|e_k\|^2 = 2, \quad j \neq k$$

له امله ناشوني ده.

درېم: د  $L$  انځورونه: د جورښت وروسته  $e_1, e_2, \dots$  يو اورتونورمال بنسټ دی د

$$H = \text{Bild } L \oplus \ker L.$$

لپاره.

دا وديزبنه تړلې د کرښيزوالي څخه لاس ته راځي، چيرته چې آيگنوکتورونه، کوم چې د  $\ker L$  لپاره بنسټ جوړوي، طبعاً ترې تيريدلی شو يا صرف نظر ترې کولای شو.

شتورم-ليوويل-پرابلم Sturm-Liouville-Problem

د ژئ ارزښت پرابلم

$$Lu = -(pu')' + qu = f \quad \text{auf } (0, 1),$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

د ناپرېکيدونکي، کره همغږيزو توابعو  $p, q$  سره يو خانگري شتور-ليوويل پرابلم دی. د کومپاکت-هرميتيکي اوپراتورونو لپاره د سپکترال انځورني سره کيدی شي يو اورتوکورمال بنسټ  $e_1, e_2, \dots$  شتون د  $L^2(0, 1)$  لپاره د  $L$  آيگن توابعو څخه وپنول شي، د آيگن ارزښتونو

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

او  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$  سره. د دې بنسټ په مرسته کيدی شي په

$$u = \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \langle f, e_j \rangle e_j$$

بڼه انځور شي.

داوينا کيدی شي نوره هم تيزه شي. دا مگر له دې برسیره نور فکر کوني ته اړتيا لري. د آيگن توابعو څخه د اورتونورمال بنسټ شتون د دې برعکس تړلی د ټوليزې تيوريڅخه، لکه چې په لاندې کې روښانه کيږي.

لومړی: د  $f = 0$  لپاره د ژی پرابلم فقط ساده حل لري. ځکه چې د  $u$  سره ضرب ټوټه انټيگرال

$$\int_0^1 \underbrace{p}_{\geq 0} (u')^2 + \underbrace{q}_{\geq 0} u^2 = 0,$$

راکوي، يعني  $u = 0$ . د عادي دفرنشل مساواتو څخه اوس لاس ته راځي، چې د ژئ

پرابلم د خوښي لپاره يو يواځنی حل لري.  $u \in C^1[0, 1]$   $f \in L^2(0, 1)$

دويم: دا حل  $u$  د  $f$  کرښيز په واک دی يا کرښيز تابع دی، نو هر  $L$  ته يو معکوس اوپراتور  $A$  شتون لري:

$$f \rightarrow u = Af.$$

دریم: د توتو انتيگریشن په مرسته سړی بنایي، چې  $A$  د ځان سره - يا خپل ادجونگيري

ده د  $v = Ag$  ،  $u = Af$  سره دی

$$\langle Af, g \rangle = \int_0^1 -u(pv')' + quv = \int_0^1 -(pu')'v' + quv = \langle f, Ag \rangle.$$

څلورم: د  $u = Af$  سره د ضرب له مخي د دفرنشل مساوات د  $u$  سره لاس ته راځي او انتيگریشن

$$\int_0^1 p(u')^2 + qu^2 = \int fu$$

او له دې سره

$$c \|u\|_{1,2}^2 \leq \|f\|_0 \|u\|,$$

د کوم سره چې  $c > 0$  د  $p$  او  $q$  لپاره يوه پورته بند يا بنديز دی، او  $\|\cdot\|_{1,2}$  په

سوبوليو-فضا  $H^1(0, 1)$  نورم بنایي. دا چې  $\|u\| \leq \|u\|_{1,2}$  ، نو  $A$  په



$L^2(0, 1)$  کی یوونغونډاری (واحد کره) جوړوي، چې د یوه محدوده ډبرئ یاست په  
 $H^1(0, 1)$  کې. دا چې  $\|u\| \leq \|u\|_{1,2}$ ، نو  $A$  په  $L^2(0, 1)$  کې یوونغونډاری  
 $H^1(0, 1)$  کې پروت دی، یعنی د سوبلیو  
 جوړوي، چې دا د محدودې ډبرئ په  
 خونډیوني جملې په بنسټ کومپاکت دی.

پنځم: د کومپاکت هر میتیکي اوپراتورونو شپکتاکولار انځوروني څخه له ایکن توابعو  
 څخه د یوه اورتونورمال بنسټ شتون لاس ته راځي، چېرته چې د ایکنارزبنت مطلق  
 ارزبنت  $\lambda_j$  یوه صفرپرلپسي جوړوي. په ورته توگه د معکوس اوپراتور  $A$  لپاره وینا  
 سری لاس ته راوړی شي.

### گرندی لوډونکی ازماپبنت تابع Schnell abfallende Testfunktion

د گرندی لوډونکو ازماپبنتتوابعو  $S$  فضا کومپلکس ارزبنتیز توابع

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

لري د

$$|f|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره د ټولو  $\alpha, \beta$  لپاره.

نیمنورم  $| \cdot |_{\alpha, \beta}$  په  $S$  باندي یو متریک تعریفوي. د یوه په خوښه کره ټاکلي پرلپسي

لپاره مولتی اینډکس جوړه Multiindexpaare سری  $(\alpha_k, \beta_k)$

$$\varrho_k(f) = \frac{|f|_{\alpha_k, \beta_k}}{1 + |f|_{\alpha_k, \beta_k}}$$

ردی او

$$d(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \varrho_k(f - g)$$

د کانونی و انتتابع په حیث تعریفوی.

$$\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

فضا  $\mathcal{D}$  د شوارخ د ازماښت تابع د  $\mathcal{S}$  یو نینګه یا غلیظه لاندې فضا ده. په انالیز کې په  $\mathcal{S}$  باندې د ناپرېکښونکو توابعو کیدی شي سری سری په همغه ازماښت توابعو د کومپاکت وړونکي سره ځان محدود کړي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د ګرنډي لوېدونکو توابعو لپاره تیوپیګی بیلګی توابع دي د یوه اکسپوننشل د راکمیدو حالت یا ځاننیونی **Abklingverhalten** سره، لکه د بیګی په توګه

$$f(x) = p(x) \exp(-|x|^2),$$

چیرته چې  $P$  یو په خوښه پولینوم دی.

تابع

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

په  $\mathcal{D}$  کې د تابع لپاره یوه بېلګه ده. په همدې توګه د  $gh$  سره په  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  پورې اړه لري او له دې سره په  $\mathcal{S}$  پورې.

تابع  $f(x) = \exp(-|x|)$  په حقيقت کې کړندئ لويږي، مگر په اصل يا سرچينه کې ناپربکېدونکې مشتقور نه دی او له دې سره په  $S$  پورې اړه نه لري. لیکونکي: هیولیک، هیورنر

### Temperierte Distributionen دیسریبوشنونه

تیمپریږي دیسټریبوشن و فضا  $S$  ته د گړندیو لوېدونکو ازماېنت توابعو دوال-یا دوه گوني فضا  $S'$  جوړوي. یعنی یو تیمپریږي دیسټریبوشن  $\Lambda$  یو کرښیز تابع دی، کوم چې هر تابع  $f$  د

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره یو کومپلکس گڼ یا عدد  $\Lambda f$  ترتیبوي یا تنظیموي او اټکل

$$|\Lambda f| \leq c \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq n} |f|_{\alpha,\beta}$$

د پوره یا کافي لوی  $n(\Lambda)$  لپاره پوره کوي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

په لاندې کې د تیمپریږي دیسټریبوشنونو دوه ټیپیکي بېلگې تشریح شوي دي.

(i)

کمزوري جگېدونکي توابع:

د یوه  $k \in \mathbb{N}$  لپاره باور لري

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \frac{dx}{(1 + |x|^2)^{k/2}} < \infty$$

نو

$$\Lambda_\varphi f = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f, \quad f \in \mathcal{S},$$

یو تیمپریری دیستریبیوشن تعریفوي. د

$$(1 + |x|^2)^{k/2} \leq c \sum_{|\alpha| \leq k} |x^\alpha|,$$

له امله کېدی شي  $|\Lambda_\varphi f|$  د

$$c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)|}{(1 + |x|^2)^{k/2}} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} |x^\alpha f| \right) \leq \tilde{c} \sum_{|\alpha| \leq k} |f|_{\alpha, 0}$$

له لاری تخمین یا اټکل شي.

(ii)

د مشتقونو کرنبیز کمبینیشن:

د مشتقونو هره موزن یا دروند زیاتون یا جمعه

$$\Lambda f = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \partial^{\alpha} f(x)$$

یو تیمپریری دیستریبیوشن تعریفوی. په جوته توگه باور لري

$$|\Lambda f| \leq \left( \max_{\alpha} |c_{\alpha}| \right) \sum_{\alpha} |f|_{0, \alpha}.$$

په ازماښت توابعو د کرښیزو توابعو لپاره بېلگې چې په  $\mathcal{S}$  ناپرېکې دونکې (متمادي) نه دي، دي

$$\Lambda f = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(x^2) f(x) dx$$

او

$$\Lambda f = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(k).$$

لیکونکې: هیولیگ، هیورنر

د تیمپریری دیستریبیوشنونو مشتق

Ableitung von temperierten Distributionen

د یوه دیستریبیوشن  $\Lambda \in \mathcal{S}'$  ټوټه مشتق د

$$f \mapsto (\partial^{\alpha} \Lambda) f = (-1)^{|\alpha|} \Lambda (\partial^{\alpha} f), \quad f \in \mathcal{S},$$

له لارې تعریف شوی دیستریبیوشن دی. دا تعریف د کمزورو مشتقونو کونخپت (کنسپت) ټولیز کوي او د

$$\Lambda_{\varphi} f = \int_D \varphi(x) f(x) dx, \quad \varphi \in C_0^{\infty}(D),$$

لپاره د ورسره بلد مشتق تعريف سره سرخوري يا يو غريز کيږي.

$$\partial^\alpha \Lambda_\varphi = \Lambda_{\partial^\alpha \varphi}.$$

د تعريف سره سم تمپيريډي ديستريبيوشن ناپای زیات مشتقور دی.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

## ديراک- او هيويز ايډ – فنکشنال Dirac- und Heavyside-Funktional

د هيويز ايډ-فنکشنال  $H$  يو ديستريبيوشن دی، هغه چې د تابع

$$h : x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

له لاري ايندوڅير کيږي، دا په دي معنا، چې

$$Hf = \int_0^\infty f.$$

د مشتق  $H'$  لپاره راکوي

$$f \mapsto H'f = -H(f') = -\int_0^\infty f' = -\left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - f(0)\right) = f(0) = \delta f,$$

دکوم سره چې  $\delta$  يو ديراک-تابع دی.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د تیمپیری د یستر بیوشنونو ضرب (ځل)

### Multiplikation von temperierten Distributionen

$\Lambda \in \mathcal{S}'$  د یوه تیمپیری د یستر بیوشنون  
 سره د یوه کمزوري چگې-دونکي تابع  
 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$   
 ضرب د

$$(\varphi \Lambda) f = \Lambda (\varphi f), f \in \mathcal{S},$$

له لاري تعريف شری تیمپیری د یستر بیوشنون دی.

$$\sup_x \left| (1 + |x|^2)^{-s/2} \partial^\alpha \varphi \right| < \infty$$

د ټولو ضربیزو (ډېر) اندکښني (پېژندنځې)  $\alpha$  او لپاره  $s(\alpha) > 0$  دا شرایط په ځانگړې توگه د ټول پولینومونو لپاره پره دی.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د تیمپیری د یستر بیوشنونو قات کونه یا راغبرگونه

### Faltung von temperierten Distributionen

$\Lambda \in \mathcal{S}'$  د یوه تیمپیری د یستر بیوشنون لپاره او یوه گړندي لویدونکي ازماېنت تابع  
 $\varphi \in \mathcal{S}$  لپاره

$$(\Lambda \star \varphi)(x) = \Lambda \varphi(x - \cdot)$$

د له لارې یوه قاتونه یا را غیرگونه تعریف ده.

تابع  $\Lambda \star \varphi$  ناپای ډېر مشتقور دی او کمزوری جگېدونکی، کېدی شي د تیمپیریري دیستریبیوشن سره و پېژندل شي،

که  $\Lambda = \Lambda_\psi$  له  $\psi \in \mathcal{D}$  سره وي، نو

$$(\Lambda \star \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y) dy ,$$

قاتونه ده د دیستریبیوشن سره یعنی د تابع لپاره ورسره بلد تعریف دی.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

اپروکسیمیرنده کټمټوالی Approximierende Identität

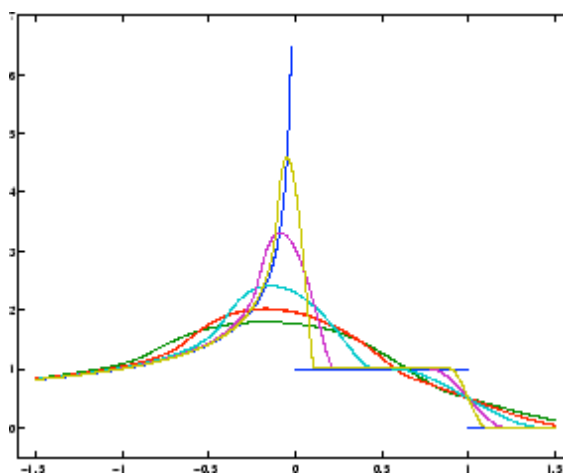
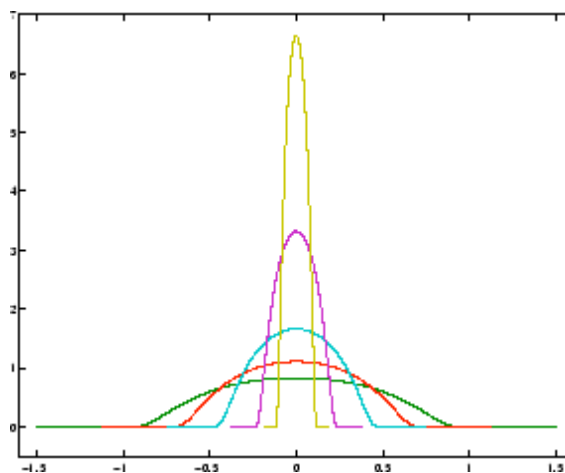
وي دي  $\varphi \in \mathcal{D}$  یو د

$$\varphi \geq 0, \int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$$

سره از ماښتې تابع او  $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$  ، نو باور لري

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\varepsilon \star f = f, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n) .$$





کینه خیرونه یاتابع د  $\varepsilon = 1, .75, .5, .25, .125$  لپاره  $\varphi_\varepsilon$  او

$$\varphi = c \exp(1/(x^2 - 1)), x \in \mathbb{R}$$

بنایي ، بنی تابع یا خیرونه اړونده قاتوني

بنایي.

لکه په تابع کې چې بنوول شوی دی، کیدی شي قاتونه د توابعو د خویوني لپاره وکارول شي، ځکه چې

$$\varphi_\varepsilon \star f \in L^p \cap C^\infty .$$

د دې اېروکسیمیشن-پروسی په مرسته بسیا کوي، چې د بیلگي په توگه دا کټموالی د ناپرکیدونکو کرښیز اوپراتورونو لپاره فقط د خوړو تابعو لپاره وښایو.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د گړندي لویدونکو تابعو د فوریي- ترانسفورمیشن

### Fourier-Transformation schnell abfallender Testfunktionen

د فوریي ترانسفورمیشن

$$f \rightarrow \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-ixy) dx$$

د فوریي په څټ یا معکوس ترانسفورمیشن

$$g \rightarrow \check{g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \exp(ixy) dy$$

ناپرکیدونکي کرښیز اوپراتورونه دي د گړندي لویدونکو ازماښت تابعو په فضا  $\mathcal{S}$  باندې

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

تر یوه نورمي شوي ضریب د فوریي – ترانسفورمیشن او د فوریي په څټ یا معکوس

$$L^2(\mathbb{R}^n)$$

ترانسفورمیشن پورې په باندې ایزومتریگاني دي، کوم چې یو بل ته معکوس

$$\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$$

یا په څټ دی. دا چې دی، نو باید چې د  $\mathcal{S}$  په توپولوزي کې

ناپرکیدنه وښایو:

د فوريې - ترانسفورميشن قوانينو سره سم باور لري

$$\left| (iy)^\alpha \partial^\beta \hat{f}(y) \right| =$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha ((-ix)^\beta f(x)) \exp(-ixy) dy \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n} |(1 + |x|^2)^n \partial^\alpha (x^\beta f(x))| dx.$$

دا چې  $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n} dx < \infty$  دی، نو کیدی شي بنی خوا د  $\mathcal{S}$  د نیم نظم له لارې اټکل شي.

د په څټ یا معکوس فوريې - ترانسفورميشن لپاره په ورته توگه مخ ته خو. لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د یوه تیمپریري دیسټریبیوشن د فوريې - ترانسفورميشن

### Fourier-Transformation einer temperierten Distribution

د یوه تیمپریري دیسټریبیوشن  $\Lambda \in \mathcal{S}'$  د فوريې - ترانسفورميشن د

$$\hat{\Lambda}\varphi = \Lambda\hat{\varphi}, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

له لارې تعریف دی او په  $\mathcal{S}$  باندې یو ناپرېکیدونکی کرینیز اوپراتور تعریف دی.

ديستريبيوشن  $\hat{\Lambda}$  كېدى شي په ډېرو حالتونو كې د

$$\hat{\Lambda}(y) = \Lambda_x e^{-ixy}$$

له لارې وشمېرل شي. د توليزو تيمپريري ديستريبيوشنونو  $\Lambda$  لپاره ډاكتيمتوالي بايد د يوه پروكسيميشن-پورسي په مرسته و بنوول شي، ځكه چې  $e^{-ixy}$  يو نه اجازه لرونكي ازماېنت تابع دى.

ليكونكي: هيوليگ، هيورنر

د  $\Lambda = \Lambda_\psi$  لپاره د  $\psi \in \mathcal{S}$  سره دى

$$\Lambda_\psi \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \exp(-ixy) dx \psi(y) dy$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \exp(-ixy) dy \varphi(x) dx .$$

دويمه ليكه د  $\Lambda_\psi \varphi$  سره برابره ده، دا په دې معنا، چې  $\hat{\Lambda}$  د  $\hat{\psi}$  له لارې ايندوڅير شوى ديستريبيوشن دى.

ليكونكي: هيوليگ، هيورنر

د تمپوريري ديستريبيوشنونو د فوريي - ترانسفورميشن لپاره قواعد يا لارې

د توابعو د فوريي - ترانسفورميشن ته ورته لاندې كتمتوالي د گړنديو لوېدونكو ازماېنت

توابعو و  $\varphi \in \mathcal{S}$  لپاره باور لري او د تيپريري ديستريبيوشنونو  $\Lambda \in \mathcal{S}'$  لپاره:

• مشتقونه او ضربونه:

$$p(y) = \sum a_\alpha y^\alpha$$

د یوه پولینوم لپاره باور لري

$$p(\widehat{-i\partial})\Lambda = p\hat{\Lambda}.$$

لهدې سره دی  $p(-i\partial) = \sum a_\alpha (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha$  په ځانګړې توګه  $-i\partial_\nu$  توپه مشتقونه د  $y_\nu$  سره ضرب په ګوته کوي (دلته دی  $p(y) = y_\nu$ ).

په ورته توګه باور لري

$$\widehat{p\Lambda} = p(i\partial)\hat{\Lambda}.$$

• Faltung قاتونه:

$$\widehat{\Lambda \star \varphi} = \hat{\varphi} \hat{\Lambda}.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د ماتو نظمونو د سوبولیف-فضاګانې

Sobolev-Räume gebrochener Ordnung

د سوبولیف-فضا  $H^s(\mathbb{R}^n)$ ،  $s \in \mathbb{R}$  د ټولو تیمپیری دیستریبیوشنونو  $\Lambda$  څخه جوړه ده د

$$w^s \hat{\Lambda} \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad w(y) = (1 + |y|^2)^{1/2}.$$

سره .

دا خويونه يا کرکتاريزه کونه د  $H^k(\mathbb{R}^n)$  ,  $k \in \mathbb{N}_0$  تولگيز تعريف توليز کوي، د  
تولو توابعو فضا په حيث د مربع انتيگرالور توتيه مشتقونو سره بالاخره تر نظم  $k$  پورې.  
د کميز يا منفي اکسپوننت يا جگگن سره فضاوې د زياتيز يا مقبت اکسپوننت سره فضاوو  
دوه گوني فضاوې دي.

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)', \quad s \geq 0.$$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د بنووني لپاره د  $n = 1$  حالت تر څيرني لاندې نيسو. توليز حالت کېدی شي په ورته  
توگه تر څيرني لاندې ونيول شي او تنها تخنيکي پيچلی دی

(i)

د  $k \in \mathbb{N}_0$  لپاره د تعريف سره همغريزووالی د پلانشرل-کټمتوالي  
Plancherel-Identität څخه لاس ته راځي

$$f, f', \dots, f^{(k)} \in L^2 \Leftrightarrow \hat{f}, |y|\hat{f}, \dots, |y|^k \hat{f} \in L^2.$$

دا چې

$$|y|^j \leq (1 + |y|^2)^{k/2} \leq c(1 + |y|^k), \quad y \in \mathbb{R}$$

د  $j \leq k$  لپاره دی، ورته والی کرکتی کوني  $(1 + |y|^2)^{k/2} \hat{f} \in L^2$  ته بيايي

(ii)

د دوال فضا کرکتري کونه کیدی شي د ديوه ابسترکت د لیل سره وبنوول شي. که د  
فوريې ترانسفورميشن د  $F$  سره په نخبنه شي  $w^s$  او د ضرب د  $W$  سره، نو سړی  
لاندې دياگرام لري

$$L^2 \xleftarrow{W} \hat{H}^s \xleftarrow{F} H^s \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{C}.$$

يو فنڪشنال  $\Lambda \in (H^s)'$  يو فنڪشنال

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda F^{-1} W^{-1} : L^2 \rightarrow \mathbb{C}.$$

ايندوڌيرت ڪوي.

دا چي  $(L^2)' = L^2$  دي سري ڪري شي  $\tilde{\Lambda}$  د يوه تابع  $g \in L^2$  سره وٺوول شي يا په نخبه شي

$$\tilde{\Lambda} f = \int_{\mathbb{R}} f \bar{g}.$$

نو د  $(FF\varphi)(x) = 2\pi\varphi(-x)$  له امله لاندې باور لري

$$\hat{\Lambda}\varphi = \Lambda\hat{\varphi} = \tilde{\Lambda}WFF\varphi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi}\varphi(-x)w^s(x)\overline{g(x)} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \underbrace{\left( \frac{1}{2\pi} w^s(-x) \overline{g(-x)} \right)}_{\hat{\Lambda}(x)} dx$$

له دي سره غوڻتونى ڪرڪتارى ڪونه  $\hat{\Lambda}w^{-s} \in L^2$  لاس ته راڃي، ڇڪه چي ڪومپلڪس ڪونجوگيشن او هندارونه په انتيايبيليتي باندې ڪومه اغيزه نه ري.

ليڪونڪي: هيوليڪ، هيورنر

## Translationsinvariante Operatoren

هر محدود کربنيز اوپراتور  $L : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  ، هغه چي له ترانسليشن سره کومټير دی ،

$$Lf(\cdot - h) = (Lf)(\cdot - h),$$

کیدی شي د يوه ټيمپري ديستريبيوشن  $\Lambda$  سره د محدود فوريي - ترانسليشن سره انځور شي، دا په دې معنا، چي

$$L\varphi = \Lambda \star \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

او

$$\|L\| = \text{ess sup}_{y \in \mathbb{R}^n} |\hat{L}(y)|.$$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د جملې يو اړخ د پلانشيرل قضیې حخه لاس ته راځي:

$$\|\Lambda \star \varphi\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|\hat{\Lambda} \hat{\varphi}\|_2 \leq (2\pi)^{n/2} \|L\| \|\hat{\varphi}\|_2 = \|L\| \|\varphi\|_2,$$

د کوم سره چي اټکلونه خورا ښه شوني(ممکنه) ده.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د دفرنشل-اوپراتورونو لپاره بنسټيزه اوبیونه (حل)

د هر دفرنشل اوپراتور

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha$$



لپاره د ثابت يا تل همغه ضريب  $c_\alpha$  سره يو تيمپريري بنسټيز حل شتون لري، دا په دې معنا، چ پيو تيمپريري ديستريبيوشن  $\Lambda$  د لاندې سره شتون لري

$$L\Lambda = \delta.$$

د دفرنسيشن او قاتولو قانو سره سم ، د ټوټه دفرنسيشن مساوات يا برابرون

$$Lu = f, \quad f \in \mathcal{D},$$

يو حل به لاندې بڼه

$$u = \Lambda \star f$$

انخور شي.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د اونيوارينت دفرنشل اوپراتر

$$L = - \left( \frac{d}{dx} \right)^2 + 1$$

لپاره تيمپريري بنسټيز حل  $\Lambda = e^{-|x|/2}$  دی، د دې لپاره چې دا وښوول شي، سړی د لاندې برابرونيا مساوات فوريي – ترانسفورمي جوړوي

$$L\Lambda = - \left( \frac{d}{dx} \right)^2 \Lambda + \Lambda = \delta$$

او لاس ته راوړي

$$-(iy)^2 \hat{\Lambda} + \hat{\Lambda} = 1.$$

د  $\hat{\Lambda}$  پسي حلوني پله مخي راكوي

$$\hat{\Lambda} = \frac{1}{1 + y^2},$$

كوم چي د  $e^{-|x|/2}$  فوريي - ترانسفورمي په گوته كوي.

نو د دفرنشل مساوات

$$-u'' + u = \sin x$$

يو حل دی

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} \sin(x - y) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^y \sin(x - y) dy + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-y} \sin(x - y) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-y} \sin(x + y) dy + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-y} \sin(x - y) dy$$

$$= \sin x \int_0^{\infty} e^{-y} \cos y \, dy = \frac{\sin x}{2}.$$

ليكونكي: هيوليگ، هيورنر

د لاپلاس - اوپراتور بنسټيزه اوبيونه (حل)

Fundamentallösung des Laplace-Operators

د لاپلاس - اوپراتور

$$\Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$$

په  $\mathbb{R}^n$  كې لاندې بنسټيز حل لري

$$\frac{1}{(2-n)c_n} |x|^{2-n}, \quad n \geq 3,$$

د  $c_n$  سره د يوونسفر (واحد سفر) د  $(n-1)$  - بعديز ډكي يا حجم.

د  $n = 2$  لپاره

$$\frac{1}{2\pi} \ln |x|$$

يو بنسټيز حل دی.

ليكونكي: هيوليگ، هيورنر

د بنووني لپاره سړی د  $\Delta \varphi = \Delta |x|^{2-n}$  له لارې منځ ته راغلی فنكشنال  $\Lambda$  اغيزه په

يوه ازمايښت تابع  $f \in C_0^\infty$  باندې تر څېړنې لاندې نيسو:

$$\Delta f = \int_{R^n} \varphi \Delta f.$$

که د انتیگریشن ورشو د غونډاري پوښ  $K_{\varepsilon, R}$  له لاري اېروکسيمي کړو د د دنننئ وړانگي  $\varepsilon$  او دبانډنئ وړانگي  $R$  سره، نو د گرین Green د دویم انتیگرال فورم یا بڼي له مخي باور لري

$$\int_{K_{\varepsilon, R}} \varphi \Delta f = \int_{\partial K_{\varepsilon, R}} \varphi \partial_{\perp} f - \int_{\partial K_{\varepsilon, R}} f \partial_{\perp} \varphi + \int_{K_{\varepsilon, R}} f \Delta \varphi,$$

د  $\partial_{\perp}$  د نورمال مشتق سره. له دې سره پهبڼی اړخ دریم انتیگرال ورکیري، ځکه چې  $\Delta \varphi = 0$  د  $x \neq 0$  لپاره دی. لومړیو دواړو انتیگراله ونو ته فقط دنننئ ژی تر څپرني لاندې نیسو، ځکه چې  $f$  محدود وړونکی لري او د پوره لوی  $R$  لپاره د خپلو ټولو مشتقونو سره ورکیري.

که سړی پولار یا قطبي کواوردینات  $x = r x^0$ ,  $r \in [0, \infty)$ ,  $x^0 \in S_n$  وکاروي، د کومو سره چې  $S_n$   $(n-1)$ -بعدیز یوونسفر په گوته کوي، نو دی

$$\int_{K_{\varepsilon}} \varphi \Delta f dx = - \int_{S_n} \varepsilon^{2-n} (\text{grad } f)(\varepsilon x^0) \cdot x^0 \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$+ \int_{S_n} f(\varepsilon x^0) (2-n) \varepsilon^{1-n} x^0 \cdot x^0 \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$= -\varepsilon \int_{S_n} (\text{grad } f)(\varepsilon x^0) \cdot x^0 dS_n$$

$$+(2-n) \int_{S_n} f(\varepsilon x^0) dS_n .$$

دا لومړی انټیگرال د  $\varepsilon$  سره د صفر په لور هڅیږي، ځکه چې  $\text{grad } f$  محدود دی، اودویم انټیگرال د  $n \neq 2$  لپاره ارزښت  $(2-n) \text{vol}(S_n) f(0)$  راکوي. له دې سره دی

$$\frac{1}{(2-n)c_n} \Delta f = f(0) = \delta f .$$

د  $n = 2$  لپاره کیدی شپیه ورته توګه مخ ته لاړ شو، له دې سره دی

$$\text{grad}(\ln r) = \frac{x^0}{r}, \quad r \neq 0,$$

$$\Delta(\ln r) = 0, \quad r \neq 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0 .$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

،، له هر څه ستونځمن یو څه ته نیت او ملا راتړل دي (ژباړی) ،،.

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :  
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .  
Uni. Wien

*Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,  
Dissertation at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له  
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسيره د انجنري، فزیک او اقتصاد  
لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او  
دا نوي ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه ( هندسه ) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې  
شمیرنه ، د احتمالي شمیرنه کتاب د بنوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمير پوهنې انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمير پوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخيال برابر وړ ( دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

*Mathematical Formulas*

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمير پوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو

ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندي د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دويم ټوک

۳ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالي شميرنه د بنوونځي لپاره

۵ - احصايه يا ستاتيستيک د بنوونځي لپاره

لاندي کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - اناليزی ۱

۷ - اناليزي ۲

۸ - کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهني بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولگه

۱۱ - فنکشنل اناليز

۱۲ - وکتور شميرنه

نوري ژباړي

۱۳ - له [www.grundstudium.info/linearealgebra](http://www.grundstudium.info/linearealgebra) څخه: کرښيز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري



زما لیکنی

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهني ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهني برخې برسیره د

انجری، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده‌کونکو لپاره پوره کتور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه ( هندسه ) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - دېری پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ - د شمیرپوهني سم اند ( منطق ریاضي )

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ - د شمیر پوهني گډې وډې لیکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیگرال شمیرنو ته

تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې

۲۳ - د شمیرپوهني انگریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شمیرپوهني پښتو انگریزي ډکشنري

۲۵ - د شمیرپوهني پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زره له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې و به غزیري.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

د گروپونو تیوري

- د بنوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره بڼه لیکنه ده، چې د شمیرپوهنې په څېر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات کټور برېشي)

**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**