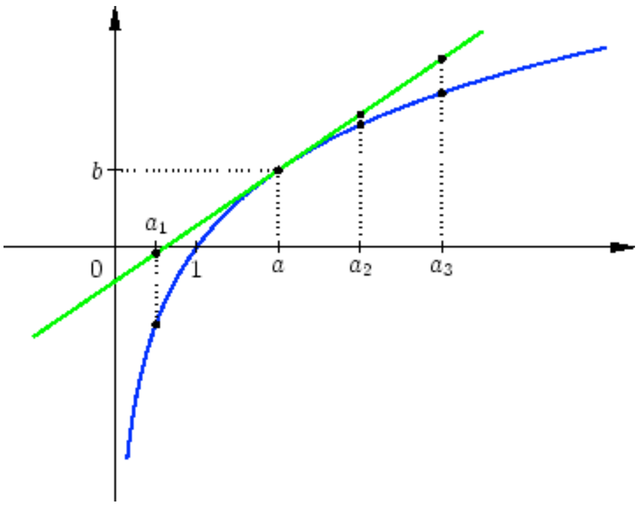
# فنکشنل انالیزې

**Funktionalanalysis**




Ketabton.com

ډاکتر ماخان میرزي شینواری

دلوي ښښتن په نامه

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهني لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسي لږ ونده اخستې وي.

## کتاب پېژندنه


د کتاب نوم: فنکشنتیوري

لیکونکی:

ژباړی : ډاکتر ماخان،، میری،، شینواری

د خپریدو لړی ........................

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲



د ژباړي برېښنا پته : smakhan1946@gmail.com


## چاپ چارې

## چاپ ته يې د هر چمتو هیوادوال مرسته په سترګو منل کیږي

.

پښتو مو ژبه او شمیرپوهنه پرې ساده ده

نیولیک

(c) ketabton.com: The Digital Library

متريکي فضاوې ۱
د اويکليد يا اقليدس متريک ۲
د هامينګ واټن ۲
په متريکي فضاو کې پولې ته تلنه ۳
په متريکي فضا کې د کوشي پرلپسې(ترادف) ۴
د يوې متريکي فضا پوره- يا تکميلوالی ۴
نورم ۵
د يوې نورمي وکتور فضا متريک ۶
اپيسيلون- جال ۹
په متريکي فضاوو کې کومپاکت(سره نبنتی) ۱۰
په يوه ساحه باندې ناپرېکيدونکي توابع ۱۱
ازماېښتي توابع ۱۱
کمزوري يا ضعيف مشتقونه ۱۲
توپولوژيکي وکتور فضاوې ۱۳
د بانخ فضا ۱۴
په يوه کومپاکت ډېريو باندې ناپرېکيدونکې توابع ۱۴
په کومپاکت ډېريو باندې مشتقوړ توابع ۱۴
**p** -انتيګرالوړ توابع ۱۵
محدود توابع ۱۶
د موزونو اريتميتيکي او هندسي منځ ترمنځ .. ۱۶
د انتيګرالونو لپاره د هولدر نابرارونونه ۱۸
د انتيګرال لپاره د مينکوفسکي ناوساوات ۱۹
د سوبوليف فضاوې ۲۱
د سوبوليو په کې خونديوني جمله ۲۵
د بانخ ځای په ځای ټکي جمله ۲۷

سکالار ضرب ۲۸
هيلبرت – فضا ۲۹

مربع جمعه کيدونکي پرلپسې ۳۰

مربع انتيګراوړ توابع ۳۰
د مربع انتيګرالوړ توابعو سوبوليف – فضا ۳۲
د هاردي-ليبسک فضا ۳۳
پوره اورتونورمالسيستم **۳۴**

(c) ketabton.com: The Digital Library


په هيلبرت٠فضا کې فوری-پروجکشن (پرېوستون) ۳۴
په هيلبرت- فضا باندې د کونوکسو .... ۳۶
په هيلبرت-فضا کې اورتوګونال کومپليمنت ۳۸
په هيلبرت-فضا کې د بيسل-نامساوات ۳۹
په هيلبرت- فضا کې د فورير(فوريې) وديزيينه ۴۰
په هيلبرت – فضا کې د پارزيوال-کتمتوالى ۴۱
ناپرېکيدونکي کربنيز فنکشنال ۴۲
د هان-بانخ د دوام( مخ ته بيونې) جمله ۴۵
دوال- يا دوه ګونې فضا ۴۸
بيدوالفضا ۵۰
د p - انتيګراوړ توابعو دوالفضا ۵۰
د ريسځ د انځورولو جمله ۵۱
کمزوري پولې ته تلنه ۵۳
محدود کربنيز اوپراتورونه ۵۵
انتيګرال اوپراتور ۵۵
د کربنيزو اوپراتورونو پولې ته تلنه ۵۷
برابرډوله پولې ته تلنه ۵۷
د برابر ډوله محدودوالي اصول ۵۷
د باناخ-شتاينهوز جلمه ۵۸
کومپاکت اوپراتورونه ۶۱
د وازو توابعو په هکله جمله ۶۳
د رابند يا بند ګراف جمله ۶۵
په هيلبرت-فضا کې د يوه کربنيز اوپراتور ماتريکس ۶۶
ادجونګيري اوپراتور ۶۹
يونيتار اوپراتور ۷۰
د يوه کربنيز اوپراتور آيګن ارزښتونه ۷۳
د هرميتيکي اوپراتورونو آيګن ارزښتونه ۷۴
د يوه هرميتيکي کومپاکت اوپراتور نورم ۷۵
د کومپاکت هرميتيکي اوپراتورونو سپکترال آنځورون ۷۹
شتورم-ليوويل-پرابلم ۸۱
ګړندی لوېدونکی ازماېښت تابع ۸۴
تيمپيريري ديسريبوشنونه ۸۶
د تيمپريري ديستريبيوشنونو مشتق ۸۸
ديراک- او هيويزايد – فنکشنال ۸۹
اپروکسيمي کتمتوالى ۹۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګرندي لويدونکو توابعو د فوريې- ترانسفورميشن ۹۳
د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن د فوريې –ترانسفورميش ۹۴
د ماتو نظمونو د سوبوليف-فضاګانې ۹۶
ترانسليشنن اينواريانت اوپراتورونه ۹۹
د لاپلاس - اوپراتور بنستيزه اوبيونه( حل) ۱۰۲
د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې: ۱۰۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

# فنکشنل انلیزې Fuktionalanalysis

## متریکي فضاوې

یوه ډېرۍ یا سټ $M$ متریکي بلل کیږي، که په $M$ باندې یو فنکشنواټن یا تابع واټن $d$ د لاندې خویونو سره تعریف وي:

M1 زیاتیزوالی یا مثبتوالی $d(x,y) \geq 0$ او $d(x,y) = 0$ ټیک هلته، که $x = y$ وي.

M2 سیومتري

$$d(x,y) = d(y,x)$$

M3 دریګوډیز – یا مثلثاتي مساوات

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

د ټولو $x, y, z \in M$ لپاره.

تابع $d$ د $M$ متریک په حیث هم بلل کیږي.

د متریک له لارې په کانونیکي ډول په $M$ باندې یوه توپولوژي هم تعریفیږي. له

$$B(x_0;r) = \{x \in M : d(x,x_0) < r\}$$

سره په $x_0$ باندې یو واز غونډاری د وړانګې $r$ سره هم په نخښه کیږي. یوه برخه ډېرۍ $U \subseteq M$ نو له دې امله وازه بلل کیږي، که هر یوه $x \in U$ ته یوه وړانګه $r > 0$ شتون ولري، داسې چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$B(x; r) \subseteq U$

دی.
لیکونکي: اِپپ او هولیګ

## د اویکلید یا اقلیدس متریک **Euklidische Metrik**

په $\mathbb{R}^n$ کي د اویکلید واټن

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$$

یو متریک دی.
مثبتوالی او سیومتري سملاسي لیدل کیږي او درېګوډي مساوات سیده د لاندې مینکوفسکي Minkowskischen نابرابرون څخه لاس ته راځي:

$d_2(x, y)$
$=$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |(x_k - z_k) + (z_k - y_k)|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k - y_k|^2}$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

## د هامینګ واټن **Hamming-Abstand**

پای پرلپسي له 0 او 1 د کودکول په تیوري کي (دوه بیز- -Binär) لغاتونه بلل کیږي.
د دوه $n$ -ځایزو لغاتونو $x$ او $y$ د هیمینګ-واټن
$=$
$d_H(x, y) =$ د $k$ ګڼون یا تعداد د $x_k \neq y_k$ سره
یو ماتریکس دی په $n$ -ځایزو بینارلغاتونو.
د بیلګې په توګه د $n = 3$ لپاره
$d(011, 110) = 2$

او واز غونډاری $B(101; 2)$ او $x = 101$ د وړانګي 2 سره توکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$001, \quad 111, \quad 100 .$$

خوندي لري.
توکي چې له 101 په دوه ځایونو کې توپیر لري، په دې پورې اړه نه لري، ځکه واټن باید له دوه کوچنی وي.
مثبتوالی او سیمتري روښانه دي. د درېګوډي نامساوات د ورته واي تعریف څخه لاس ته راځي

$$d_H(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

او د مطلقه ارزښتونو

$$|x_j - z_j| = |x_j - y_j + y_j - z_j| \le |x_j - y_j| + |y_j - z_j| .$$

لپاره د درېګوډي نامساوات.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

## په متریکي فضاو کې پولې ته تلنه

په متریکي فضا $M$ کې یوه پرلپسې $(x_n)$ پولې $x \in M$ ته تلونکي بلل کیږي، که دا لاندې باور ولري.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

توکی $x$ د $(x_n)$ پرلپسې پوله بلل کیږي او یوائځنۍ ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

که $(x_n)$ د $x$ او $y$ په لور وهڅیږي، نو باور لري

$$d(x,y) \le d(x_n, x) + d(x_n, y)$$

د ټول $n$ لپاره، او داچې

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y) = 0$$

دی، باید

(c) ketabton.com: The Digital Library

$d(x, y) = 0$

هم وي او له دې سره $x = y$ باور لري، داپه دې معنا چې پوله ارزښت يواځنی دی.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## په متريکي فضا کې کوشي- پرلپسي(ترادف)
## Cauchy-Folgen in metrischen Räumen

په يوه متريکي فضا $M$ کې يوه پرلپسي $(x_n)$ کوشي – پرلپسي بلل کيږي، که د هر $r > 0$ لپاره يوه پيژند نخښه يا ايندکس $n_0$ شتون ولري، داسې چې د ټول $m, n > n_0$ لپاره

$d(x_m, x_n) < r$

باور ولري. په ځانګړې توګه پولې ته تلونکې پرلپسي کوشي-پرلپسي ده.
که په يوه متريکي فضا $M$ کې هره کوشي-پرلپسي په $M$ کې يو پوله ارزښت لري، نو $M$ پوره يا مکمل بلل کيږي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په $M$ کې دې $(x_n)$ يوه پولې ته تلونکې پرلپسي وي د پولې ارزښت $x \in M$ سره. د هر $r > 0$ لپاره يو ايندکس $n_0$ شتون لري، داسې چې د ټولو $n > n_0$ لپاره

$d(x_n, x) < r/2$

باور لري. نو د دريګوډي نامساوات له مخې بيا دا لاندې باور لري

$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < r/2 + r/2 = r$

د ټول $m, n > n_0$ لپاره. د دې په تعقيب په $M$ کې هره پولې ته تلونکې پرلپسي کوشي – پرلپسي ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د يوې متريکي فضا پوره- يا تکميلوالی

که د يو متريکي فضا $M$ يو واټن تابع $d$ په يوه پورته ډېرئ $\widetilde{M} \supset M$ تعريف وي، کومه چې په $M$ کې د ټولو کوشي-پرلپسيو پوله رازښتونه خوندي ولري، نو پايونه $\overline{M} \subseteq \widetilde{M}$ نسبت و $d$ ته د $M$ پوره کيدونکې بلل کيږي.

په ټوله توګه کيدی شي د $M$ پوره کيدنه بې له په پورته -ډيرئ کې له خونديونې تعريف شي. له دې سره سړی $\overline{M}$ د پولې ته تلونکو پرلپسيو ورته ټولګې سره په نخښه کوي يا پيژني.
د ډېريو پوره کيدنه د ناپريکيدونکو توابعو په څېړنه کې غوره رول لوبوي.
خويونه، کوم چې په کې باور لري، کيدی شي د د پوله ارزښت-جوړونو له لارې $\overline{M}$ ته يووړل شي. بېّ ځانګړې توګه يو ناپريکيدونکی تابع همدا اوس په $M$ د هغه ارزښتونو له لارې يواځنی ټاکل شوی دی.
ليکونکي: ايپ، هيوليګ

### نورم Norm

په حقيقي يا کومپلکس وکتور فضا $V$ يو نورم يو تابع
$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$$
دی د لاندې خويونو سره:

- Positivität: مثبتوالی(زياتيزوالی)

$$\|v\| > 0$$ د $v \neq 0$ لپاره

- Homogenität: هوموجينيتي

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

- Dreiecksungleichung: دربګوډيز- مثلثاتي نامساوات

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته $u, v$ په خوښه وکترونه دي او $\lambda$ یو په خوښه سکالار.

د یوه نورم په مرسته کیدی شي د

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

له لارې د دوه وکوترونو په منځ کې یو واټن تعریف شي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،هیورنر

## د یوې نورمي وکتور فضا متریک
## Metrik eines normierten Vektorraumes

په یوه وکتورفضا $V$ د یوه نورم $\|\cdot\|$ دواټنتابع یا واټنفنکشن
$d(u,v) = \|u - v\|$

سره برابر دی. دا ځانګړی متریک دوه ورزیات خویونه لري:

- ترانسلیشن اینواریانڅ یا د د خوژښت یا کښولو سره بې تغیري Translationsinvarianz

$$d(u+w, v+w) = d(u,v)$$

- هوموجینیتيHomogenität

$$d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| d(u,v)$$

د ټولو $u, v, w \in V$ او سکالار $\lambda$ لپاره.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

### نیم نورم Halbnorm

په یوه حقیقي یا کومپلکس وکتور فضا $V$ باندې یو نیمنورم یو تابع
$p: V \to \mathbb{R}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی د لاندې خویونو سره:

HN1(HN د نیم نظم لپاره)

: ناکمیزوالی یا نامنفیوالی:

$$p(v) \geq 0$$

HN2

:Homogenität هوموجینوالی

$$p(\lambda v) = |\lambda| p(v)$$

HN3

:Dreiecksungleichung درېګوډي یا مثلثي نابرابرون

$$p(u + v) \leq p(u) + p(v)$$

د ټولو $u, v \in V$ او $\lambda$ لپاره.

یو نیم نورم ټیک هلته یو نورم دی، کله چې $p(x) = 0$ فقط د $x = 0$ لپاره باور ولري.

د نیم نورم د تعریف لپاره وروستني دواړه خویونه بسیا کوي. ناکمیزوالی کیدی شي له دوي لاس ته راوستل.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

له هوموجینیتي څخه سیده لاس ته راځي

$$p(0) = p(0 \cdot x) = 0 p(x) = 0$$

او د درېګوډي نامساوات سره

$$0 = p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) =$$
$$= p(x) + |-1| p(x) = 2p(x) \,,$$

دا په دې معنا چې ناکمیزوالی یا نامنفیوالی

$$p(x) \geq 0$$

دی، د ټولو $x \in V$ لپاره.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

## متریک، چې د نیم نورم څخه رامنځ ته کیږي
## Metrik, induziert durch Halbnormen

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه وکتور فضا $V$ د نیمنورم یوې پرلپسي $(p_k)$ لپاره

$$p_k(v) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \Longrightarrow v = 0$$

باور ولري، د ټول $v \in V$ لپاره، نو نیمنورم یو متریک منځ ته راوړي. د کانوني واټن تابع دا لاندې ده

$$d(u,v) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(u-v)}{1+p_k(u-v)} \,.$$

نسبت دې متریک ته پرلپسي $(v_n)$ ټیک هلته د $v$ په لور ځي یا هڅیږي، که

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

د ټولو $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور ولري.

لیکونکي: ایپ، هیولیګ

د متریک د اکسیمونو څخه یواځې د درېګوډي نامساوات ساده نه دي. باور لري

$$\frac{p_k(u-w)}{1+p_k(u-w)} = 1 - \frac{1}{1+p_k(u-w)}$$

$$\leq 1 - \frac{1}{1+p_k(u-v)+p_k(v-w)}$$

$$\leq \frac{p_k(u-v)}{1+p_k(u-v)} + \frac{p_k(v-w)}{1+p_k(v-w)}$$

او له دې سره دی

$$\leq d(u,v) + d(v,w) \,.\, d(u,w)$$

د پولې ته تلنې لپاره لومړی نیسو، چې

$$\lim_{n\to\infty} d(v_n, v) = 0$$

باور لري او یو $k$ شتون لري، داسې چې

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور نه لري. له دې سره نو يو برخه پرلپسي $(v_{n_j})$ شتون لري چې د هغې لپاره تل
$$p_k(v_{n_j} - v) > \varepsilon > 0$$
باور لري او له دې امله
$$d(v_{n_j}, v) \geq 2^{-k}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$$
باور لري، کوم چې مخامخوالی يا تضاد دی.
له بله پلوه دې $\varepsilon > 0$ وي او باور دې ولري
$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$
د ټول $k$ لپاره. نو يو $k_0$ شتون لري، داسې چې
$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{p_k(v_n - v)}{1 + p_k(v_n - v)} < \frac{\varepsilon}{2}$$
باور لري. پسې هم نسبت نيممتريک ته د پولې ته تلنې له امله لاس ته راځي، چې د $1$ او $k_0$ تر منځ دهر $k$ لپاره يو $n_k$ شتون لري، داسې چې د ټولو $n > n_k$ لپاره
$$p_k(v_n - v) < \frac{2^{k-1}}{k_0}\varepsilon$$
باور لري. که کيږدو
$$n_0 = \max_{k=1,\dots,k_0} n_k\,,$$
نو د ټولو $n > n_0$ لپاره باور لري
$$d(v_n, v) =$$
$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k}\frac{p_k(v_n - v)}{1 + p_k(v_n - v)} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{p_k(v_n - v)}{1 + p_k(v_n - v)}$$
$$< \sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k}\,\frac{2^{k-1}}{k_0}\,\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$
څه چې نسبت متريک ته پولې ته تلنه ښايي.
ليکونکي: اپپ، هيوليگ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایپسیلون- جال **Epsilon-Netz**
د یو متریکي فضا $M$ د یوې برخدېرئ $K$ لپاره یو $\varepsilon$ – جال یو پوښوونکی یا پټوونکی دی، چې د پاي ډېرو غونډارو
$B(x_1;\varepsilon),\ldots,B(x_n;\varepsilon)$

جوړ دی. دا مینیمال وړانگه $\varepsilon_n(K)$، چې د $n$ منځټکو $x_i$ په ښه یا اوپټیمال ټاکنې د $M$ پوښوونې ته بسیا کوي، د $\varepsilon$-اینتروپي $\varepsilon$-Entropie (فزیکي لویه چې د تودخئ پروسي خوزښتلور په نخښه کوي)بلل کیږي.
که یوه $K$ ته د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو $\varepsilon$-جال شتون ولري، نو $K$ توتالي محدود یا رابند بلل کیږي.
لیکونکي: اپپ، هیولیگ

په متریکي فضاوو کې کومپاکت(سره نښتی) او نسبي کومپاکت ډېرئ

د یوه متریکي فضا $M$ کومپاکت برخه ډېرئ $K$ کیدی شي په درې ورته ډولونو خویونیز شي
لومړی: هره وازو ډطریو سره د $K$ پټه ونه یا پوښونه هر پای برخه پوښونه لري.
دویم : په $K$ کې هره پرلپسې یوه پولې ته ت لونکې برخه پرلپسې په $K$ کې لري.
دریم : $K$ توتالي محدوده او پوره ده.
په پام کې دې وي، چې په $\mathbb{R}^n$ کې باوري د کومپاکت ډېرئ کرکتریزه کونه په دریم کې محدودیت او رابندوالی په گوته کوي.

د یوه متریکي فضا $M$ یوه برخدېرئ $R$ نسبي کومپاکت بلل کیږي، که د $\overline{R}$ رابندوالی یا راتړلوالی کومپاکت وي، یا دې ته ورته، که په $R$ کې هره پرلپسې یوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې ولري.
لیکونکي: اپپ، هیولیگ

د بیلگې په توگه به د حقیقی اعدادو مختلفي برخدېرئ تر څېړنې لاندې ونیول شی.
لومړی : انتروال $[0,1]$ د $\mathbb{R}$ یو کومپاکت ( او له دې سره یو ن سبي کومپاکت) برخدېرئ ده، ځکه چې رابنده یا تړلی او محدوده ده.
دویم : انتروال $(0,1]$ د $\mathbb{R}$ کومپامت برخدېرئ نه ده، ځکه چې د بیلگې په توگه ، د، پرلپسې $1/n$ ، $n \in \mathbb{N}$ پوله خوندي نه لري. دا چې $\overline{(0,1]} = [0,1]$ دی، نو دا نیم

(c) ketabton.com: The Digital Library

واز انتروال نسبي کومپاکت دی. دريم: څلورم: انتروال $[0,\infty)$ د $\mathbb{R}$ کومپاکت برخه‌پرئ نه ده، ځکه چې په حقيقت کې د وازې ډېرئ $(n-1,n+1)$ ، $n\in\mathbb{N}_0$ څخه پوښ کيږي، مګر دې ته يو پای برخه پوښونه شتون نه لري. له دې امله نيم ناپای انتروال هم نسبي کومپاکت نه دی، ځکه چې د بيلګې په توګه د طبيعي اعدادو پرلپسي $1,2,\dots$ پولې ته تلونکې برخه پرلپسي نه لري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## په يوه ساحه باندې ناپرېکيدونکي توابع Stetige Funktionen auf einem Gebiet

په $\mathbb{R}$ باندې د( حقيقي- يا کومپلکس ارزښتيزو) ناپريکيدونکو توابعو په فضا $C(\mathbb{R})$ د نيمنورم

$$|f|_{[-k,k]}=\max_{|x|\le k}|f(x)|$$

له لارې د لاندې سره يو متريک توليدوي

$$d(f,g)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\frac{|f-g|_{[-k,k]}}{1+|f-g|_{[-k,k]}}\,.$$

نسبت دې متريک ته پولې ته تلنه په خوښه کومپاکت انتروال باندې برابرډوله پولې ته تلنه په ګوته کوي. له دې سره پورهوالی لاس ته راځي، ځکه چې په برابرډوله پولې ته تلنې سره ناپرېکيدنه خوندي پاتې کيږي.
د توليزې ساحې $D\subseteq\mathbb{R}$ لپاره به ورته توګه مخ ته ځو. د انتروال $[-k,k]$ په ځای يوه دا ساحه جوړه وونکې د کومپاکتو ډېريو پرلپسي
$K_1\subset K_2\subset K_3\subset\cdots\subset D$
کارول کيږي يا استعماليږي.
د $C_0(D)$ سره په $D$ د ناپرېکيدونکو توابعو ډېرئ په نخښه کوو، د کومپاکت وړونکي(انتقال کوونکي) سره.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## ازماېښتي توابع Testfunktionen

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}$ لپاره په $D$ باندې د ناپای ډېرواره مشتقوړ توابعو لپاره ساحه $C^\infty(D)$ ده.
د تابع لاندې فضا، چې د کومپاکت برخه ډېرئ $K \subset D$ د باندې برته ده ورکیږي، د $C_0^\infty(D)$ سره یا د ازماېښت توابعو $\mathcal{D}$ په نخښه کیږي. دا فضا چې له شوارڅ( Schwartz ) له خوا منځ ته راوستل شوې، په ټوټه انتګرالمساواتو او دیستریبوتیو تیوري مطالعه کي غوره رول لوبوي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

## کمزوري یا ضعیف مشتقونه **Schwache Ableitung**

د ټوټه انتیګرال په مرسته کیدی شي کلاسیکي مشتقکلیمې ټولنیزې شي. یو تابع

$$\partial^\alpha f, \quad \partial^\alpha = \prod_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\alpha_\nu}$$

یو په تعریف ورشو یا ساحه $D$ تعریف شوې تابع $f$ د کمزورې مشتق په نامه یادوو، که

$$\int\limits_D \partial^\alpha f(x) g(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_D f(x) \partial^\alpha g(x)\, dx, \quad \forall g \in C_0^\infty(D),$$

د $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$، $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_n$ سره باور ولري. له دې سره و ړاندنیونه ده، چې د ازماېښت توابع $g$ لپاره دواړه انتیګرالونه شتون لري. د بیلګي په توګه دا حالت هلته رامنځ ته کیږي، که $\partial^\alpha f$ او $f$ په هر د $D$ په هر کومپامتبرخه ډېرئ مطلق انتیګرالوړ وي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

## توپولوژیکي وکتور فضاوې **Topologischer Vektorraum**

یو توپولوژیکي وکتروفضا $V$ یوه وکتور فضا ده، د وازو ډېریوو یاسټونو په یوه سیستم $\mathcal{U}$ باندې د لاندطخویونو سره ورکړل شوی یا روښانه شوی دی

T1
$\emptyset \in \mathcal{U}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

T2

$V \in \mathcal{U}$

T3

د هرو وازو ډېريو يا سټونو $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$

T4

د په خوښه وازو ډېريو $U_i \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}\,.$$

يوه وازه ډېرئ $U(v) \in \mathcal{U}$ د يوه ټکي $v \in V$ چاپېريال بلل کيږي، که $v \in U(v)$ باور ولري.

د سرچينې يا پيل د چاپېريالونو $U_i(0)$ ډېرئ لوکال بنسټ $\mathcal{B}$ بلل کيږي، که هر چاپېريال $U(0)$ د لوکال بنسټ يو توکی خوندي ولري

$$\exists_i : U_i(0) \subseteq U(0)\,.$$

داسې يو توپولوژيکي جوړښت کيدی شي د بيلګې په توګه د يوه متريک يا نورم له لارې کره وټاکل شي يا کره شي. دا يو پولې ته تلنکليمه راکوي. يوه پرلپسې $(v_n)$ تيک هلته يوه کوښي پرلپسې ده، که د ټولو $U_i(0) \in \mathcal{B}$ لپاره يو ايندکس $n_0$ داسې شتون ولري چې د ټولو $m, n > n_0$ لپاره

$v_m - v_n \in U_i(0)$ باور ولري.

که $v_\infty$ د $(v_n)$ پوله ارزښت وي، نو د $v_\infty$ په هر چاپېريال $U$ کې د پرلپسې ټول

(c) ketabton.com: The Digital Library

غړي پراته دي تر د پای ډېرو غړو پورې یعنې پای ډېر غړي کیدی شي له دې چاپېریال دباندې پراته وي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

## د بانخ فضا Banach-Raum

یو نورمي وکتورفضا $V$ د بانخ فضا بلل کیږي، که د نورم له لارې منځ ته راغلي متریک پوره وي، دا په دې معنا چې که هره کوشي پرلپسې په $V$ کې یو پوله ارزښت ولري.

هر رابنده لاندې وکتور فضا $U \subset V$ هم د د بانخ فضا ده.
په ځانګړې توګه پای پراخیدونکي یا پای بعدي فضاوې نورمي وکتور فضاوې دي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

## په یوه کومپاکت ډېریو باندې ناپرېکیدونکې توابع Stetige Funktionen auf einer kompakten Menge

د ناپرېکیدونکو ( حقیقي- یا کومپلکس ارزښتیز) توابع په یوه کومپاکت برخه ډېریو $K \subseteq \mathbb{R}^n$ باندې فضا $C(K)$ بانخ فضا ده نسبت د

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|$$

له لارې تعریف شوي نورم ته. پوره کیدنه لاس ته راځي، ځکه چې برابرډوله پولې ته تلنه ساتلې پاتې کیږي.
د تعریف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په وازه یا نامحدود ډېرئ باندې ناپرېکیدونکې توابع باید نه دی، ماکسیموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

## په کومپاکت ډېریو باندې مشتقوړ توابع Differenzierbare Funktionen auf einer kompakten Menge

د $m$ -ځله ناپرېکیدونکو مشتقوړ توابعو )( حقیقي – یا کومپلکس ارزختیزې) فضا $C^m(K)$ په یوه کومپاکت برخه ډېرئ $K \subseteq \mathbb{R}^n$ نسبت و

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_{k,\infty} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$$

ته د تعریف شوي نورم یو باناخ-فضا ده. پوره والی لاس ته راځي، ځکه چې د ټوټه مشتقونو $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ، $\partial^\alpha f$ ناپرېکیدونکی مشتقوړ تابع، د برابر ډوله پولې ته تلنه ساتلې پاتې کیږي.

د تعریف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په وازه یا نامحدود ډېرئ باندې ناپرېکیدونکې توابع باید نه دی، ماکسیموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

## p -انتیګرالوړ توابع **p-integrierbare Funktionen**

د یوې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره $L^p(D)$ ، $1 \leq p < \infty$ ، د تابع باناخ-فضا په ګوته کوي، چې هغه نسبت و نورم

$$\|f\|_p = \left(\int_D |f|^p\right)^{1/p}$$

ته د ناپرېکیدونکي له لارې د د کومپاکت وړونکي ډېرئ سره ښپروکسیمي کیږي، دا په دې معناچې د $L^p(D)$ رابندونه Abschluß ده نسبت و $\|\cdot\|_p$ ته ده.

توابع فقط تر کچې صفر پورې په ډېرئ ټکي ډوله تعریف دي. سړی لیکي $f = g$ ن.ه. : نږدې هرچېرته (almost everywhere)

د توابعو لپاره، چې فقط په یو صفرډېرئ یا "فرسټ سره توپیري او داسې توابع راپیژني. په ټیکه توګه سړی ورته والی یا اکویوالنت تر څېرنې لاندې نیسي، چې د هغوی لپاره $f$ او $g$ ځای نیونکي یا نماینده ګان دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لبسک انیګرال په مرسته کېدی شي $L^p(D)$ په ټولیزه توګه د په خوښه لیبسک-کچوړ ډېرئ لپاره تعریف شي. د اپروکسیمیشن ته کیدی شي، ریمن-انتیګرال ته ورته د زینې توابع کارول کیږي، چې د لیبسک-کچوړ د $D$ په برخه ډېرئ ثابت دی.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

**محدود توابع Beschränkte Funktionen**

د لیبسک کچوړ توابعو $f$ د $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ساحي یا ورشو لپاره د بانخ فضا د $L^\infty(D)$ سره په نخښه کو، چې په یوه صفرډېرئ محدود دی، دا په دې معنا،چې
$$|f(x)| \leq c < \infty$$
نږدې هر چیرته دی. د $c$ کوچنې بند یا بندیز یا نور هم ښه پوله د
$$||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in D} |f(x)|$$
سره په نخښه کوو.
فضا $L^\infty(D)$ د ټول هرچیرته په $D$ محدودو توابعو یوه اصلي برخه ډېرئ ده. دواړه فضاوې کیدی شي نسبت $||\cdot||_\infty$ ته د ناپرېکیدونکو توابعو سره جوړې یا تولید کړای شي. دا یو روښانه توپیر دی د $p$ – انتیګرلوړ توابعو $L^p(D)$ ته.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د موزونو اریتمیتیکي او هندسي منځ ترمنځ نابرابرونونه

## Ungleichung zwischen dem gewichteten arithmetischen und geometrischen Mittel

د زیاتیزو یامثبتو $a_1, \ldots, a_n$ ګڼونو لپاره اریمیتیکي منځ نسبت هن**دسي منځ یا وسط ته کوچنی نه دی:**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}\,.$$

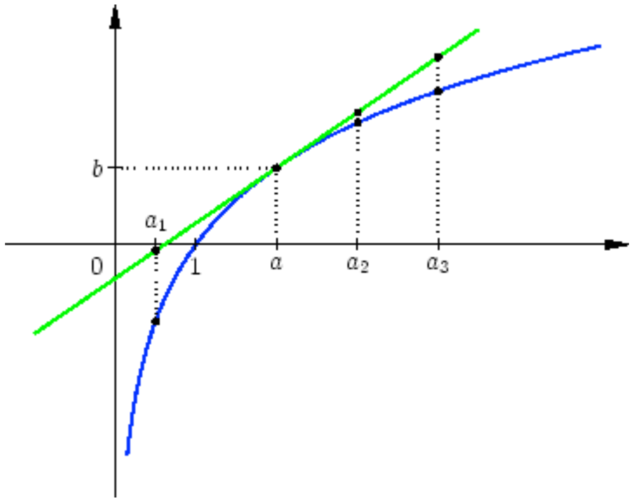
په ټولیزه توګه د مثبت وزن $\lambda_i$ لپاره د $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ سره باور لري

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \geq a_1^{\lambda_1} \cdots a_n^{\lambda_n}\,.$$

برابروالی ټیک هلته باور لري، که $a_1 = \cdots = a_n$ باور ولري.

سړی د $a = \sum_i \lambda_i a_i$ او $b = \ln a$ سره د لوګاریتم کوني وروسته موَزن نابرابرون یا نامسوات ورته غوښتني لاسته راوړي.

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \leq \ln a\,.$$




که-لکه په مشتق کې چې ښوول شوی- وکارول شي، چې تانجنت

$$g:\ y = b + \frac{1}{a}(x - a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم د ګراف پورته لور ته پروت دی، نو د $\sum_i \lambda_i = 1$ له امله لاس ته راځي

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \leq \sum_i \lambda_i \left(b + \frac{1}{a}(a_i - a)\right) = b + \frac{1}{a}\left(\sum_i \lambda_i a_i - a\right) = b$$

لکه چې غوښتل مو.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د انتیګرالونو لپاره د هولدر نابرارونونه
**Höldersche Ungleichung für Integrale**

وي دې $f \in L^p(D)$ او $g \in L^q(D)$ د $1 < p < \infty$ او د $1/p + 1/q = 1$
سره. نو $fg \in L^1(D)$ باور لري او لاندې د هولدر نامساوات باور لري

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_D |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

مساوات ټیک هلته باور لري، که د توابعو $|f|^p$، $|g|^q$ څخه یو یې نږدې هر چیرته د د بل ډېرواره وي.
د پولې حالت $p = \infty$، $q = 1$ ( همداسې $p = 1$، $q = \infty$ د $f$ او $g$ سره بدلیدنې) لپاره

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|_\infty \int_D |g(x)|\,dx.$$

باور لري
د $p = q = 2$ لپاراه دا مساوات د کوشي-شوارڅ نامساوات هم بلل کیږي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

فقط دا ناساده حالت $1 < p < \infty$ تر ځيرنې لاندې نيسو. داپسې بي له ټوليزو بنديزونو کيدی شي ونيول شي يا فرض شي، چې انتيګرال

$$I_1 = \int_D |f(x)|^p dx \quad \text{او} \quad I_2 = \int_D |g(x)|^q dx$$

زياتيز يامثبت دي. که د بيلګې په توګه $I_1 = 0$ وی،، نو $|f|^p$ او له دې سره به هر $f$ چيرته ورک شي، دا په دې معنا چې، $\int_D |f(x)g(x)|\, dx = 0$ او نا مساوات به په ساده توګه پوره وی. دا چې نامساوات د سکالا کونې $f \to rf$ ، $g \to sg$ په مقابل کې اينواريانت يا بې تغيره دی، کيدی شي برسېره پردې $I_1 = I_2 = 1$ ونيول يا فرض شي.
د موَزنو اريتميتيکي - او هندسي - يا څمککچيز منځ ترمنځ باور لري

$$|fg| = (|f|^p)^{1/p}(|g|^q)^{1/q} \leq \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q\,.$$

له دې سره $fg \in L^1(D)$ دی او د انتيګرالونې پسې لاس ته راځي

$$\int_D |f(x)g(x)|\, dx \leq \frac{1}{p}I_1 + \frac{1}{q}I_2 = 1\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## د انتيګرال لپاره د مينکوفسکي ناساوات
## **Minkowskische Ungleichung für Integrale**

د دوه توابعو $f$ او $g$ په $L^p(D)$ کې د $1 \leq p < \infty$ سره د مينکوفسکي نامساوات باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\int_D |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

مساوات تيک هلته باور لري، که د توابعو $f$ ، $g$ څخه يو يې تل هر چيرته د بل ډېرواره يو نامنفي ولري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

دا چې حالت $p = 1$ ساده دی، په لاندې کې به $p > 1$ ونيول يا فرض شي. ورپسې دې همداسې $1/p + 1/q = 1$ وي او انتيګرال

$$I = \int_D |f(x)+g(x)|^p\,dx$$

دې بې له ټوليزو محدوديتونو زاياتيز وي. نو د درېګوډي نا مساوات سره لاس ته راځي

$$I = \int_D |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx$$

$$\le \int_D |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx + \int_D |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx.$$

د هولدر نامساوات او $(p-1)q = p$ سره

$$\le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_D |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$+\left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_D |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}$$

$$=\left(\left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}+\left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\right)I^{1/q}\,.$$

د $I^{1/q}$ سره د وېشنې له لارې سرې د مینکوفسکي نامساوات لاس ته راوړي
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د سوبولیف فضاوې **Sobolev-Räume**

د ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره

$$W^{k,p}(D), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad 1 \le p \le \infty,$$

د توابعو باناخ فضا بنایي د $\le k$ نظم د کمزورو مشتقونو سره په $L^p(D)$ او

$$\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_D |\partial^\alpha f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

کي همداسي

$$\|f\|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|\le k}\|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha|\le k}\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in D}|\partial^\alpha f(x)|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړونده نورم. اړونده نیم نورم

$$|f|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|=k}\int_D |\partial^\alpha f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

همداسې

$$|f|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha|=k} \operatorname{ess\,sup}_{x\in D} |\partial^\alpha f(x)|$$

فقط د جګ نظم مشتق کاروي.
په ځانګړې توګه دی

$$W^{0,p}(D) = L^p(D)\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه تابع

$$f(x) = |x|^s, \quad s \neq 0,$$

په $n$–بعدیزې یا $n$–پراخیدونې یونګردئ(دایره واحد)

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| < 1\}$$

تر څیړنې نیول کیږي. د $f$ لپاره $s > -n$ انتیګرالوړ دی،، خکه چې د ګردئ کواوردیناتونه(پراته ولاړ محرونه) ( $r = |x|$ ) سرې لاس ته راوړي

$$\|f\|_{0,1} = \int_D |x|^s\,dx = c_n \int_0^1 r^s r^{n-1}\,dr\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چیرته چې $c_n$ دا $n-1$ – بعدیز حجمونو یونفضا ( واحد فضا) ده. پسی دی

$$\partial_\nu f(x) = s|x|^{s-2}x_\nu$$

د $s > 1-n$ لپاره د $f$ یو انتیګرالوړ کمزوری مشتق دی، په سرچینه کې د سیګولاریتي سره. په غونډاري کواودینات کې سړی لاس ته رانړي

$$\|f\|_{1,2}^2 = \int_D |f(x)|^2\,dx + \sum_{\nu=1}^n \int_D |\partial_\nu f(x)|^2\,dx$$

$$= \text{const.} \int_0^1 \left(r^{2s} + s^2 r^{2s-2}\right) r^{n-1}\,dr$$

د $r = |x|$ سره. له دې سره $f \in W^{1,2}$ دی د $s > 1 - n/2$ لپاره. دا چې د $n > 2$ لپاره کمیز اکسپوننتونه $s$ هم منځ ته راتلی شي، له دې لاس ته راځي، چې مربع انتیګرالوړ مشتقونه نه اړین محدود دي. د مشتقونو کمزوروالي څخه ناپرېکیدنه لاس ته راځي.
که همدا توابع په ساحه

$$\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| > 1\}$$

وڅیړل شي، نو $f$ مربع انتیګرالوړدی د $s < -n/2$ لپاره او کمزوري مشتقونه د $s < 1 - n/2$ لپاره مربع انتیګرالوړ دي، کوم چې بیرته د غونډاري کواوردینات

$$\sum_{\nu=1}^n \int_{\tilde{D}} |\partial_\nu f(x)|^2\,dx = \text{const} \int_1^\infty r^{2s-2} r^{n-1}\,dr$$

سره ښوول کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اپپ، هیولیک

کمزوري مشتقونه په حقیقت کې تولګیزه یا کلاسیکي مشتقکلیمه تولیزه کوي، مګر قوي سینګولاریتي اجازه نه لري. د بیلګې په توګه تابع

$$f(x)=\begin{cases}1, & x_1\geq 0,\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

راوړو، په $n$-بعدي یا $n$– پراخیدوني انتروال

$$D=(-1,1)^n$$

ترڅیرني لاندې نیسو. تابع په هیوپرسطحهHyperebene

$$S=\{x\in\mathbb{R}^n : x_1=0\}$$

پرېکیدونکي ده او مربع – انتیګرالوړ کمزورې مشتق $g=\partial_1 f\in L^2(D)$ نه لري، دا په دې معنا چې مساوات

$$\int\limits_D g(x)\varphi(x)\,dx=-\int\limits_D f(x)\partial_1\varphi(x)\,dx$$

د هیڅ کوم $g$ لپاره د ټول $\varphi\in C_0^\infty(D)$ لپاره پوره وړ دی. د دې لپاره چې دا وښایو، نو یو ازماېښت تابع

$$\varphi(x)=\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)\geq 0,\quad \varphi(0)>0\,,$$

ټاکو او ودې ته د $1>\varepsilon>0$ لپاره

$$\varphi_\varepsilon(x)=\begin{cases}\varphi(x_1/\varepsilon,x_2,\dots,x_n), & x_1\in(-\varepsilon,\varepsilon)\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}.$$

له دې سره په پورته مساوات کې د ښي اړخ لپاره راکوي

$$\int\limits_D f(x)\partial_1\varphi_\varepsilon(x)\,dx \qquad = -\int\limits_{x_1\geq 0}\partial_1\varphi_\varepsilon(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \int\limits_{(-1,1)^{n-1}} \varphi_\varepsilon(0, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \dots dx_n$$

$$\int\limits_{n-1} \varphi(0, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \dots dx_n = \text{const} > 0$$

په داسې حال کې چې په کينه خوا د کوشي-شوارڅ نامساوت

$$\left| \int\limits_D g(x)\varphi_\varepsilon(x)\, dx \right| \quad \le \|g\|_2 \left( \int\limits_D |\varphi(x_1/\varepsilon, x_2, \dots, x_n)|^2\, dx \right)^{1/2}$$

$$\left( \int\limits_D |\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)|^2\, \varepsilon\, dy \right)^{1/2} = O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$$

د $\varepsilon$ سره د صفر0 په لور ځي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

**د سوبوليو په کې خونديونې جمله Sobolevscher Einbettungssatz**

$D \subset \mathbb{R}^n$

د يوې ليښيښ ورشو لپاره د سوبوليو-فضا لپاره خونديونه

$$W^{k,p}(D) \subset W^{l,q}(D), \quad q > p, \quad \frac{k-l}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري، له کوم سره چې د $q = \infty$ لپاره ټيک يوه خونديونه په $W^{l,\infty}(D) \cap C^l(D)$ پسې منځ ته راځي.
د محدودې ورشو لپاره خونديونه کومپاکتده، دا په دې معنا چې محدوده ډېرئ په $W^{k,p}(D)$ کې پولې ته تلونکې پرلپسې په کې $W^{k,p}(D)$ لري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بيلګی په توګه خونديونه
$W^{1,p} \subset W^{0,q} = L^q$

د تابع
$f(x) = |x|^s, \quad s \neq 0$

په مټه په $n$–بعديز يونغونډاري
$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| < 1\}$

څېرل کيږي. تابعه د $s > -n/q$ لپار $q$–انتيګرالوړ ده، څکه چې د غونډاري کواوردينات ( $r = |x|$ ) سره لاس ته راځي

$$\|f\|_{0,q}^q = \int_D |x|^{sq}\, dx = c_n \int_0^1 r^{sq} r^{n-1}\, dr\,,$$

د کوم سره چې $c_n$ د يوونغونډاري $(n-1)$-بعديز حجم دی. نور پسې دی
$\partial_\nu f(x) = s|x|^{s-2} x_\nu$

د $f$ يو کمزوری مشتق دی، کوم چې د $s > 1 - n/p$ لپاره $p$– انتيګرالوړ دی. دا بيرته کيدی شي د غونډاري کواوردينات له لارې وازمايل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_D |\partial_\nu f(x)|^p \, dx \leq |s|^p \int_0^1 r^{(s-1)p} r^{n-1} \, dr \,,$$

د کوم سره چط

$$|x_\nu|^p \leq \left( \sum_\nu |x_\nu|^2 \right)^{p/2} = r^p$$

کارول شوی. د خونديوني جملې پسې $W^{1,p} \subset W^{0,q}$ دی، که

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

همداسې

$$1 - \frac{n}{p} = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right) > n\left(-\frac{1}{q}\right)$$

باور ولري، کوم چې په باندې د پورته شرايطو سره سر خوري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## د بانخ ځای په ځای ټکي جمله **Banachscher Fixpunktsatz**

که $g$ يو رايوځای کيدونکي تابع وي، کوم چې يوه نه تشه، رابنده ډېرئ $D \subset \mathbb{R}^n$ په خپل ځان ځيره کړي، دا په دې معنا چې، باور لري

- $D = \overline{D}$
- $x \in D \Rightarrow g(x) \in D$
- $\|g(x) - g(y)\| \leq c\|x - y\| \quad \forall x, y \in D$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $c < 1$ سره، نو $g$ یو یواځنی ځاېه ځای ټکی $x_* = g(x_*) \in D$ لري. که له $x_0 \in D$ راووځو یا مخ ته لاړ شو، نو کیدی شي $x_*$ د اتریشن پرلپسي (د تکرار پرلپسي) له لارې

$$x_0,\, x_1 = g(x_0),\, x_2 = g(x_1),\, \ldots$$

اپروکسیمیر( په نږدې توګه ټاکل) شي یا نږدې ( که غواړئ: تقریبي) وټاکل شي. د ناټیکاوي لپاره باور لري

$$\|x_* - x_k\| \leq \frac{c^k}{1-c}\, \|x_1 - x_0\|$$

دا په دې معنا چې، که د اتریشنپرلپسي یا د تکرار پرلپسي د هر پیل ارزښت لپاره کرښیزه پولې ته لاړه شي.
د ځای په ځاي ټکي جمله په ټولیزه توګه په پوره متریکي فضاو کې باور لري. دا چې د ترانسلیشن واریانځ او نورم هوموجینیتی ته اړتیاپیښنه نه شي، کیدی شي سرې $\|x - y\|$ د یوه ټولیز واټن تابع له لارې $d(x,y)$ بدل کړي.
لیکونکي: اپپ، بوسلي، هیولیګ

## سکالار ضرب Skalarprodukt

یو سکالار ضرب په یو کومپلکس وکتور فضا $V$ یو تابع دی
$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$

د لاندې خویونو سره:

- مثبتوالی Positivität: :

$$\langle v, v\rangle > 0 \quad \text{für} \quad v \neq 0$$

- مایلسیمتري Schiefsymmetrie:

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- کربنیزوالی Linearität:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \varrho \langle v, w \rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ او $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوښه وکتورونه همداسې سکالار دي.
د مایل سیومتري په بسټ یو کومپلکس سکالار ضرب نسبت و دویمي متحولي یا اووښتوني ته کربنیز نه دی:

$$\langle u, \lambda v + \varrho w \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle + \overline{\varrho} \langle u, w \rangle \,.$$

یواځې د حقیقي سکالار لپاره کومپلکس کنجوګیشن بې معنا دی.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ، کرایخ

## هیلبرت - فضاHilbert-Raum

یوه هیبرت – فضا $H$ یوه پوره نورمي ( حقیقي یا کومپلکس) وکتور فضا ده، چې په کومه کې نورم د سکالار ضرب له لارې تعریف ده:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \,.$$

په ځانګړې توګه د کوشي – شواذرځ نابرابرونونه باور لري

$$|\langle u, v \rangle| \le \|u\| \|v\|$$

همداسې د غبرګ اړخیز-ایدنتیتي یا - - کتمتوالی

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \,.$$

سړی د هیلبرت-فضا Hilbert-Raum سیپارابل Hilbert-Raum بولي، که یوه ګڼلوړ اورتونورمال بنسټ

$$e_1, e_2, \ldots, \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} \,,$$

شتون ولري. په دې حالت کې هر $v \in H$ د فوری- ودیزینه-die Fourier Entwicklung

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k \,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې نسبت پورته نورم ته پولې ته تلونکي ده.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## مربع جمعه کيدونکې پرلپسيQuadratsummierbare Folgen

مربع جمعه کيدونکې پرلپسي
$$c_1, c_2, \ldots, \quad c_i \in \mathbb{C}$$

هيلبرت-فضا $l^2$ جوړوي سبت سکالار ضرب ته
$$\langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}\,.$$

فضا $l^2$ د يوه سيپارابل هيلبرت-فضا $H$ پروتو تويپ دی، ځکه چې هر توکی
$$v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in H$$

کيدی شي د د اورتوګونال بنسټ د ضريب $c_k$ سره معلومه identifiziert شي. له دې سره باور ل ري
$$\|v\|_H = \|c\|_{l^2}\,,$$

دا په دې معنا، چې فضاوې $H$ او $l^2$ ايزومورف دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## مربع انتيګراوړ توابع Quadratintegrierbare Funktionen

د يوې ورشو يا سطحې $D \subset \mathbb{R}^n$ لپاره $L^2(D)$ د تابع $f:\ D \to \mathbb{C}$ فضا بنايي د لاندې سر

$$\int_D |f(x)|^2\, dx < \infty$$

او دا د سکالار ضرب

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle f, g\rangle_2 = \int_D f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

له لارې منځ ته راغلی نورم $\|\cdot\|_2$ .

په بدیله توګه کیدی شي $L^2(D)$ د ښويي تابع په څیر د رابندېدني په توګه هم تعریف شي، دا په دې معنا ، چې هر مربع انتیګرالوړ تابع کېدی شي د یوې ناپای پرلپسې په توګه د زیاتځله مشتقوړ تابع $f_n$ له لارې اپروکسیمی یا په نږدې توګه انځور شي شي:

$$\|f - f_n\| \to 0, \quad n \to \infty\,.$$

لیکونکي: اېپ، هیولیک

د بیلګې په توګه تابع

$$f(x) = |x|^s$$

په پراخیدوني یا - بعدیزې یوونګردی( دایره واحد)

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$

تر څیرني لاندې ونیل شي.

د غونډاري کواوردینات ( $r = |x|$ ) سره لاس ته راځي

$$\int_D |f(x)|^2\,dx = c\int_0^1 r^{2s}r^{n-1}\,dr = c\left[\frac{r^{2s+n}}{2s+n}\right]_0^1,$$

دا په دې معنا چې $f$ د $2s > -n$ لپاره مربع ایګرال وړ دی.

که همدا تابع په ساحه

$$\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}\,,$$

تر څیرني لاندې ونیسو، نو بیا هم د غونډاري کواوردینات سر لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_2^2 = \int\limits_{\bar{D}} |x|^{2s}\, dx = c \int\limits_1^\infty r^{2s} r^{n-1}\, dr\,,$$

دا په دې معنا، چې $2s < -n$ د $f$ لپاره مربع انتيګرالوړ دی.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## د مربع انتيګرالوړ توابعو سوبوليف – فضا
## Sobolev-Raum der quadratintegrierbaren Funktionen

د يوې ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره $H^k(D) = W^{k,2}(D)$ د ( حقيقي - يا کومپلکس ارزښتيزو) هيلبرت-فضا په ګوته کوي. توابع د مربع انتيګرالوړ کمزورو ټوټه مشتقونو سره ، چې نظم $\leq k$ لري د سکالار ضرب

$$\langle f, g\rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int\limits_D \partial^\alpha f(x)\overline{\partial^\alpha g(x)}\, dx$$

له لارې

$$\langle f, g\rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int\limits_D \partial^\alpha f(x)\overline{\partial^\alpha g(x)}\, dx$$

منځ ته راغلي نورم $\|\cdot\|_{k,2}$ سره. اړونده نيم نورم

$$|f|_{k,2} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int\limits_D |\partial^\alpha f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$$

فقط د جګ نظم مشتق کاروي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د فورير- لړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

په $D = [-\pi, \pi]$ باندې مربع انتيګرالوړ دی، که

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty \,,$$

وي، ځکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx} \overline{c_j} e^{-\mathrm{i}jx}\, dx = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$$

دی، د فوريې – بنسټ $e^{\mathrm{i}kx}$ د اورتوګوناليتې په اساس.

مشتق

$$f'(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{i}k c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

مربع انتيګرالوړ دی، که

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 < \infty \,,$$

وي، ځکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2\, dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} k c_k e^{\mathrm{i}kx} j \overline{c_j} e^{-\mathrm{i}jx}\, dx = -2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 \,.$$

دا چې له دويم شرط لومړی لاس ته راځي، نو لرو $f \in H^1$ د $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 < \infty$ لپاره.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

**د هاردي-ليبسک فضا Hardy-Lebesgue-Raum**

د هاردي-ليست – فضا $HL$ د ټولو د يوونکردئ په ټيکلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

هولومورف توابعو

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

څخه جوړه ده

د

$$\|f\|_{HL}^2 = \langle f, f \rangle_{HL} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \overline{c_k} < \infty \,.$$

سره.

## پوره اورتونورمالسیستم **Vollständiges Orthonormalsystem**

یو اورتونورمال سیستم $\{e_i : i \in I\}$ په هیلبرت- فضا کې پوره یا ماسیمال بلل کیږي، که

$$\forall_{i \in I} \quad \langle u, e_i \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

باور ولري.

$$\forall_{i \in I} \quad \langle u, e_i \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

یو اورتونورمال سیستم ټیک هلته د هیلبرت – فضا یو اورتونورمال بنسټدی، کله چط هغه پوره وي.

لیکونکي: ایپ، هیولیګ

## په هیلبرت٠فضا کې فوری-پروجکشن (پرېوستون)
## **Fourier-Projektion in Hilbert-Räumen**

د یوه وکتور $v$ فوریې –پروجکشن په یوه هیلبرت-فضا $H$ کې د اورتونورمالسیستم $e_1, e_2, \ldots$ ، سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p_n v = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \quad c_k = \langle v, e_k \rangle$$

و $v$ ته ښه اپروکیمیشن دی د سکالار ضرب $\langle \cdot, \cdot \rangle$ له لارې ایندوځیرت ( منځ ته راغلی) نور م $\| \cdot \|$ سره، دا په دې معناچې

$$\|v - p_n v\| = \min_{q=\sum_{k=1}^{n} d_k e_k} \|v - q\| .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

سړی لومړی په پام کې نیسي، چې

$$\langle v - p_n v, e_j \rangle = 0, \quad 1 \leq j \leq n .$$

دا د $\{e_j\}$ د اورتونورمالیتي څخه تړلې لاس ته راځي، څکه چې

$$\langle p_n v, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{k,j} = c_j, \quad 1 \leq j \leq n .$$

د یوه په خوښه اپروکسیمیشن $q = \sum_{k=1}^{n} d_k e_k$ لپلره باور لري

$$\|v - q\|^2 = \|v - p_n v + p_n v - q\|^2$$

$$= \|v - p_n v\|^2 + \langle v - p_n v, \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^{n} (c_k - d_k) e_k} \rangle + \langle \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^{n} (c_k - d_k) e_k}, v - p_n v \rangle + \|p_n v - q\|^2$$

$$= \|v - p_n v\|^2 + \|p_n v - q\|^2 ,$$

داپه‌دې معنا، چې نتیکاوی مینیمال کیږي، که $q$ د فوری- پروجکشن $p_n v$ وي.

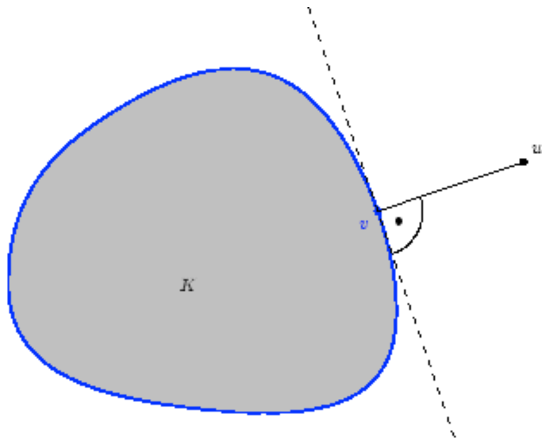
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هیلبرت- فضا باندې د کونوکسو(وتلو) ډېریو خورا ښه اپروکسیمیشن
**Beste Approximation von konvexen Mengen in Hilbert-Räumen**

د یوه هیلبرت-فضا $H$ د یوه رابند کونوکس برخه ډېرئ $K$ لپاره هر $u \in H$ ته یو یواځنی ځورابنه اپروکسیمیشن شتون لري د دې لاندې سره

$$\|u - v\| = \inf_{w \in K} \|u - w\| \,.$$




خورابنه اپروکسیمیشن یواځنی د

$$\langle u - v, w - v \rangle \leq 0,$$

له لارې د ټولو $w \in K$ لپاره کرکتریزه( خوي ټاکنی) شوی، دا په دې معنا، چې د وکتورونو $u - v$ او $w - v$ ترمنځ کونج پڅ دی.

په ځانګړې توګه د رابندو کرښیزو برخه فضاوو $U$ خورا ښه اپروکسیمیشن شتون لري.
په دې حالت کې دا پورته سکالار ضرب صفر دی، داپه دې معنا، چې ناټیکاوی $u - v$ و $U$ ته اورتوګونا دی.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

که

$$d = \inf_{w\in K} \|u - w\|$$

ځای په ځای کړو

او یوه پرلپسي $(u_n)$ په $K$ د

$$\|u - u_n\| \to d, \quad n \to \infty\,,$$

سره کې وټاکو، نو د $K$ کونوکسیټي له امله باور لري

$$\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in K$$

او ورپسې

$$\|2u - (u_n + u_m)\|^2 \geq 4d^2\,.$$

د غبرګ اړخیز-کتمتوالي څخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} &\|(u - u_n) - (u - u_m)\|^2 \\ &= \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - \|(u - u_n) + (u - u_m)\|^2 \\ &\leq \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - 4d^2\,. \end{aligned}$$

دا چې د کړوړ وړو نوکانو افاده یا وېینه د $4d^2$ په لور هڅیږي، نو

$$\lim_{n,m\to\infty} \|u_m - u_n\|^2 = 0$$

لرو او $(u_n)$ په $H$ کې یوه کوشي -پرلپسي ده، دا په دې معنا، چې یو $v \in K$ شتون لري

د $\lim_{n\to\infty} u_n = v$ او $\|u - v\| = d\,.$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$w \in K$
پوله ارزښت يواځنی دی، ځکه چې که يو بل پوله ارزښت شتون لرودی د
$\|u - w\| = d$ سره، نو پرلپسي $v, w, v, w, \dots$ به لکه پورته پولې ته تلونکې وی
او باید $v = w$ باور ولري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په هيلبرت-فضا کې اورتوګونال کوم‌پليمنت
**Orthogonales Komplement in Hilbert-Räumen**

د يوې هيبرت-فضا $H$ هرې رابندي لاندې – یا برخه – فضا $U$ ته يو اورتوګونال کومپلمنت ،، دا په دې معنا، چې يوه رابنده لاندې فضا

$$U^{\perp} = \{v \in H : \langle u, v \rangle = 0, \quad \forall u \in U\} \ ,$$

شتون لري د

$$H = U \oplus U^{\perp} \ .$$

سره.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

دا چې $U^{\perp}$ د $H$ يو لاندې – یا برخه فضا ده، سيده له سکالار ضرب $\langle u, v \rangle$ څخه لاس ته راځي، او د کوښش – شوارڅ مساوات له لارې رابندوالی لاس ته راځي.
د $u \in U$ او $u \in U^{\perp}$ لپاره $\langle u, u \rangle = 0$ باور لري او له دې سره $u = 0$ همداسي

$$U \cap U^{\perp} = \{0\} \ .$$

دا چې $U$ کونوکس ده، نو د $w \in H$ لپاره يو خورا ښه اپروکسيميشن $u \in U$ شتونلري، هغه چې نورم
$\|w - u\|$
ميمال کوي. که کيږدو $v = w - u$، نو د تولو $\tilde{u} \in U$ او تولو $\alpha$ لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|v\|^2 \leq \|v - \alpha\tilde{u}\|^2 = \|v\|^2 - \overline{\alpha}\langle v, \tilde{u}\rangle - \alpha\langle \tilde{u}, v\rangle + \alpha\overline{\alpha}\|\tilde{u}\|^2 .$$

د

$$\alpha = \frac{\langle v, \tilde{u}\rangle}{\|\tilde{u}\|^2}, \qquad \overline{\alpha} = \frac{\langle \tilde{u}, v\rangle}{\|\tilde{u}\|^2}$$

همداسې

.

سره لاس ته راځي

$$\|v\|^2 \leq \|v\|^2 - \frac{|\langle \tilde{u}, v\rangle|^2}{\|\tilde{u}\|^2}$$

او له دې سره

$\langle \tilde{u}, v\rangle = 0$ همداسې $v \in U^\perp$ .

.

دا چې $w = u + v$ دی، نو

$$H = U \oplus U^\perp$$

و ښوولشو.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

په هیلبرت-فضا کې د بیسل-نامساوات

**Bessel-Ungleichung in Hilbert-Räumen**

په یوه هیلبر-فضا $H$ کې د هر اورتونورمالسیستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره باور لري

$$\sum_{i \in I} |\langle v, e_i\rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

د ټولو $v \in H$ لپاره.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

ښونه فقط یوه ګڼلوړ اورتونورمال سیسم لپاره مخ ته بیایو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي دې $i_1, i_2, \ldots, i_n$ د ایدکشن(پیژند نخښو) یوه په خوښه پرلپسې په $I$ کې. د کومپلکې اعدادو یوهپه خوښه پرلپسې $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_n}$ لپاره د $e_i$ له اورتونورمالیتي څخهه لاس ته راځي

$$0 \leq \left\| v - \sum_{k=1}^{n} c_{i_k} e_{i_k} \right\|^2$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_{i_k} \langle e_{i_k}, v \rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{c_{i_k}} \langle v, e_{i_k} \rangle + \sum_{k=1}^{n} |c_{i_k}|^2$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle - c_{i_k}|^2 .$$

د $c_{i_k} = \langle v, e_{i_k} \rangle$ ټاکنو لپاره دا دا معنا لري

$$0 \leq \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2$$

همداسې

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 \leq \|v\|^2 .$$

دا نامساوات د پولي ته تګ $n \to \infty$ سره هم ساتلی پتې کیږي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

پە هیلبرت- فضا کې د فوریر(فوریې) ودیزیینه

**Fourier-Entwicklung in Hilbert-Räumen**

په یوه هیلبرت-فضا $H$ کې د یوه پوره اورتونورمال سیستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره سږی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = \sum_{i\in I} \langle u, e_i \rangle e_i$$

د $u$ د فوريې – وديزينه بولي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په هيلبرت – فضا کې د پارزيوال-کتمتوالی

Parseval-Identität in Hilbert-Räumen

د يوې هيلبرت-فضا $H$ د هر ( نه په اړيينه توګه ګڼلوړ) پوره اورتونورمال سيستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره باور لري

$$\sum_{i\in I} |\langle v, e_i \rangle|^2 = \|v\|^2, \quad v \in H\,,$$

دا په دې معنا، چې نورم $v$ د بنسټ ضريبونو د $l^2$-نورم سره سر خوري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ښوونه سيپارابل خيلبرت-فضا لپاره مخ ته بيول کيږي.

د سکالار ضرب د ناپرېکيدني له امله

$$\left\langle v - \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle v - \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \langle v, e_j \rangle - \langle v, e_j \rangle = 0$$

دی،، د ټولو $e_j$ لپاره، دا په دې معنا، چې

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k\,.$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|v\|^2=\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^n\langle v,e_k\rangle e_k\right\|^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n|\langle v,e_k\rangle|^2=\sum_{k=1}^\infty|\langle v,e_k\rangle|^2$$

داپه دې معنا، چې د پارزيوال – کتوتوالی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ناپرېکيدونکي کرښيز فنکشنال Stetiges lineares Funktional

په يوه حقيقي (کومپلکس) توپولوژيکي وکتورفضا $V$ باندې يو ناپرېکيدونکی کرښيز بنکشنل $\Lambda$ يو ناپرېکيدونکی کرښيز تا بع دی د $V$ په پسې.( $\mathbb{C}$ ) $\mathbb{R}$ .

په يوه نورمي وکتورفضا کې د $\Lambda$ ناپرېکيدنوالی ورته دی په صفر باندې د يوونغونډاري يا واحدغونډاري د څېرې ته. په دې حالت کې سرې

$$\|\Lambda\|=\sup_{\|v\|=1}|\Lambda v|$$

د کرښيز فنکشنل د نورم په حيث تعريفوې يا پېژند ورکوي.

د نورم د هوموجينيټي په بنسټ هم ورته تعريفونه

$$\|\Lambda\|=\sup_{v\neq 0}\frac{|\Lambda v|}{\|v\|}=\sup_{\|v\|\leq 1}|\Lambda v|$$

شوني دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د دې لپاره چې وښايو، چې د ناپرېکيدنې څخه محدودوالی لاس ته راځي، نيسو، چې $\Lambda$ په نورمي وکتورفضا باندې ناپرېکيدونکې دی، په صفر د يوونغونډاري څېره يا عکس نامحدود دی، دا په دې معنا، چې د هر $n\in\mathbb{N}$ لپاره په $V$ کې يو $v_n$ شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\|v_n\| \leq 1$ او $|\Lambda v_n| > n$ .

سره.

که کیږدو

$$u_n = \frac{1}{n} v_n \, ,$$

نو لاس ته راځي

$$\|u_n\| \leq \frac{1}{n} \, ,$$

دا په دې معنا،چې $u_n \to 0$ د $n \to \infty$ لپاره او د فنکشنل د ناپرېکيدني په بنسټ له دې سره لاس ته راځي $\Lambda(u_n) \to \Lambda(0)$ . د فنکشنل د کریزوالي سره باور لري

$$\Lambda 0 = \Lambda(0 \cdot v) = 0 \Lambda v = 0$$

د ټولو $v \in V$ لپاره او له دې سره $|\Lambda u_n| \to 0$ . له بله اړخه دی

$$|\Lambda u_n| = \frac{1}{n} |\Lambda v_n| > 1 \, ,$$

چې تضاد انځوروي.

برعکس له محدودوالي څخه ناپرېکيدنوالی لاس ته راځي، که سرې ړنيسي، چې

$$|\Lambda u| < c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په صفر د یوونغونداري د ټولو $u$ لپاره. که اوس سړی یوه په $V$ کې په خوښه پرلپسي $(v_n)$ ولري د $v_n \to v$ او $v_n \neq v$ سره د ټولو $n$ لپاره، نو سړی لاس ته راوړي

$$|\Lambda v_n - \Lambda v| = |\Lambda(v_n - v)| = \|v_n - v\| \left|\Lambda\left(\frac{v_n - v}{\|v_n - v\|}\right)\right| \leq \|v_n - v\| c \to 0 \,,$$

دا په دې معنا، چې د فنکشال ناپرېکیدنه لرو.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د پیلګې لپاره دا کرښیز فنکشنال

$$\Lambda f = f(1)$$

د ټول $f \in C[0,1]$ لپاره رانیسو.

د په $C[0,1]$ د ماکسیموم نورم سره،

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \,,$$

لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |f(1)| \leq \sup_{\|f\|_\infty = 1} \|f\|_\infty = 1 \,,$$

دا به دې معنا، چې فنکشنال ناپرېکیدونکی دی. د تابع (فنکشن) $f(x) = 1$ سره د ټولو $x \in [0,1]$ لپاره د فنکشنال د نورم لپاره راکوي

$$\|\Lambda\| = 1 \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د دې لپاره په $C[0,1]$ باندې $L^2$ -نورم وکاروو،

$$\|f\|_2 = \left( \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} ,$$

او توابعو پرلپسې راواخلو

$$f_n(x) = \sqrt{2n+1} x^n, \quad n \in \mathbb{N} ,$$

نوو سړی لاس ته راوړي

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 (2n+1) \, x^{2n} \, dx = 1 ,$$

مگر

$$f_n(1) = \sqrt{2n+1}$$

له ټولو پولو اوړي يا له ټول پولو لوييږي، دا پهدې معنا، چې فنکشنل پرېکيدونکی دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د هان-بانخ د دوام( پسې تلني يا مخ ته بيوني) جمله

Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

د يوه نورمي وکتور فضا پ $V$ ه يوه لاندېفضا يا برخه فضا $U$ باندې هر ناپرېکيدونکي کربنيز فنکشنال $\Lambda$ ته يوه نورم ته وفاداره پرمخ ته تلنه شتون لري، داپه دې معنا، چې په $V$ يو ناپرېکيدونکی کربنيز فنکشنال $\tilde{\Lambda}$ شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tilde{\Lambda}u = \Lambda u, \quad u \in U$$

او

$$\sup_{v\in V, \|v\|=1} |\tilde{\Lambda}v| = \|\tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\| = \sup_{u\in U, \|u\|=1} |\Lambda u| \,.$$

سره

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه د $L^2(-1,1)$ په لاندې فضا

$$U = \mathrm{span}\{1, x, x^2\}$$

باندې د اړونده نورم

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}$$

سره کرښيز فنکشنال

$$\Lambda f = f(0)$$

رااخلو.

يو تابع يا فنکشن

$$f = a + bx + cx^2$$

له $U$ څخه لاندې نورم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_2^2 = \int_{-1}^{1} (a + bx + cx^2)^2 \, dx = 2a^2 + \frac{2}{3}\, b^2 + \frac{4}{3}\, ac + \frac{2}{5}\, c^2 \,.$$

له دې سره له $\Lambda$ څخه په $U$ لاس ته راځي

$$\|\Lambda|_U\|^2 = \max_{0\neq f\in U} \frac{|\Lambda f|^2}{\|f\|_2^2} = \max_{(a,b,c)\neq(0,0,0)} \frac{a^2}{2a^2 + \frac{2}{3}b^2 + \frac{4}{3}ac + \frac{2}{5}c^2} \,.$$

د ځای په ځای یا کلک $a$ د $b = 0$ ، $c = -\frac{5}{3}\,a$ لپاره مخرج یا ماتلاندې مینیمال کیږي ، دا په دې معنا، چې

$$\|\Lambda|_U\| = \sqrt{\frac{a^2}{\frac{8}{9}a^2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2} \,.$$

په روښنه توګه په $L^2$ باندې د فنکشنال ارزښتونه پرېکيدونکي ده. د دې لپاره چې د $\Lambda$ لپاره یو پرمخ بیونه وګټو ، نو اینوونه

$$\tilde{\Lambda} f = \int_{-1}^{1} \underbrace{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}_{p(x)} f(x)\, dx$$

کوو او ضریبونه $\alpha, \beta, \gamma$ دغوښتو څخه ټاکو، چې $\tilde{\Lambda}$ د $\Lambda$ سره د $U$ په یوه بنسټ باید یو د بل سره سر وخوري.

$$\Lambda \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2\alpha + \frac{2}{3}\gamma \\ \frac{2}{3}\beta \\ \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{5}\gamma \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \tilde{\Lambda} \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \right\} .$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\alpha = \frac{9}{8}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\frac{15}{8}\,.$$

د کوشي-شوارخ نامساوات په بنسټ دی

$$|\tilde{\Lambda} f| \leq \|p\|_2 \|f\|_2\,,$$

یعني $\|\tilde{\Lambda}\| \leq \|p\|_2$. ډا چې $p \in U$ نو دا لاندې هم باور لري

$$\|\tilde{\Lambda}|_U\| \geq \frac{|\tilde{\Lambda} p|}{\|p\|_2} = \frac{\int_{-1}^{1} |p(x)|^2 \, dx}{\|p\|_2} = \|p\|_2\,.$$

دې پسې یا د دې په تعقیب دی

$$\|\tilde{\Lambda}\| = \|p\|_2 = \sqrt{2\left(\frac{9}{8}\right)^2 + 0 + \frac{4}{3}\,\frac{9}{8}\left(-\frac{15}{8}\right) + \frac{2}{5}\left(-\frac{15}{8}\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,,$$

دا په دې معنا، چې $\tilde{\Lambda}$ د $\Lambda$ نورمساتونکی یا - وفادار پر مخ وړنه ده.

لیکونکي: ایپ، هیولیګ

دوال- یا دوه ګونې فضا Dualraum

دیوه نورمي وکتور فضا $V$ دوال- یا دوه ګونې فضا $V'$ په $V$ د ناپرېکېدونکو کربنیزو فنکشالونو $\Lambda$ لاندې د نورم

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

سره په $V'$ نخبنه شوی یو بانخ-فضا ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

سیده لیدل کیږي، چې $V'$ یوه نورمي وکترفضا ده. د بشوول بې د $V'$ پروه والی دی.

وي دې $(\Lambda_n)$ یوه کوشي- پرلپسي په $V'$ کې دا په دې معنا دی، چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو $n_0$ شتون ل ري، داسې چې دټولو $n, m > n_0$ لپاره

$$\|\Lambda_n - \Lambda_m\| < \varepsilon$$

باور لري. نو د هر $v \in V$ لپاره باور لري

$$\|\Lambda_n v - \Lambda_m v\| = \|(\Lambda_n - \Lambda_m)v\| \leq \|\Lambda_n - \Lambda_m\||v| < \varepsilon|v|$$

داپه دې معنا، چې $(\Lambda_n v)$ یوه سکالار کوشي – پرلپسي ده، نو یو پوله ارزښت $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n v$ لري. دا د $\Lambda v = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n v$ له لارې تعریف شوی تابع کرښیز او له پورته تخمینونو نورم پرلپسي د ناپرکیدنې له لارې د $m \to \infty$ لپاره

$$\|(\Lambda_n - \Lambda)v\| \leq \varepsilon|v|$$

د $n > n_0$ لپاره. له دې لاس ته راځي،چې $\Lambda_{n_0} - \Lambda$ او له دې سره هم $\Lambda = (\Lambda - \Lambda_{n_0}) - \Lambda_{n_0}$ ناپرېکیدونکي دی، او

$$\|\Lambda_n - \Lambda\| < \varepsilon$$

د $n > n_0$ لپاره باور لري،دا په دې معنا، چې

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n = \Lambda\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

بیدوالفضا ( دوه دوه ییزه فضا) Bidualraum

د یوې نورمي وکتورفضا $V$ بیدوال-یا بیدوه ییزه فضا $V''$ د $V'$ دوه ییزه فضا ده. دا چې هر توکی $v \in V$ دې

$$\Lambda \mapsto \Lambda v, \quad \Lambda \in V'$$

یو ناپریکیدونکی کرښيز فنکشنال په $V'$ جوړ کړي، کیدی شي $V$ د $V''$ یوې لاندې فضا سره جوړ شي یا منځ ته راشي. باورلري

$$V'' = V\ ,$$

نو $V$ رفلکسیو یا هنداروني ببل کیږي.

رفلکسیو باناخ-فضاوې فضاوې $L^p(D)$، $1 < p < \infty$ دي، همداسې هر پاې بعدي(پراخیدوني) وکتور فضاوي. $L^1(D)$ او $C[0,1]$ د نا-هنداروني بیلګې باناخ - فضا دي

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د p - انتیګراوړ توابعو دوالفضا

Dualraum der p-integrierbaren Funktionen

د یوې ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ او $1 \le p < \infty$ لپاره دی

$$L^p(D)' = L^q(D), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\ .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس يوائې $L^q(D) \subseteq L^p(D)'$ اینکلوزیون یا خوندیونه ښوول کیږي.

هر $g \in L^q(D)$ ته د

$$\Lambda: \quad f \mapsto \Lambda f = \int_D f(x)g(x)\,dx, \quad \forall f \in L^p(D),$$

له لارې په $L^p(D)$ یو ناپرېکیدونکی کرښیز فنکشنال تعریف دی، خکه چې هولدر نامساوت پسې د د انتیګرالونو لپاره دی

$$\left|\int_D f(x)g(x)\,dx\right| \le \int_D |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_D |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q} = \|f\|_p\,\|g\|_q < \infty$$

د $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ سره. له دې لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_p=1} |\Lambda f| \le \|g\|_q\,.$$

د $f = \operatorname{sign}(g)|g|^{q-1}$ لپاره نامساوات تیره یا تیز دي، دا په دې معنا، چې سړی لاس ته راوړي

$$\|\Lambda\| = \|g\|_q\,.$$

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د ریسڅ د انځورولو جمله Darstellungssatz von Riesz

د یوې هیبرت-فضا $H$ او یوه کره یا کلک $v \in H$ لپاره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda: \quad u \mapsto \Lambda u = \langle u, v \rangle, \quad \forall u \in H$$

له لارې یو ناپرېکیدونکی کربنیز تابع په $H$ د

$$\|\Lambda\| = \|v\|$$

سره تعریف دی.

معکوس هر یو ناپرېکیدونکي کربنیز فنکشنال $\Lambda \in H'$ ته تیک یو $v \in H$ شتون لري، داسې چې پورته مساوات باور لري.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د بېلګې په توګه د مربعجمعه وړ پرلپسې $l^2$ رانیسو. وي دې $\Lambda \in (l^2)'$، نو تیک یوه پرلپسې په $l^2$ کې شتنو لري د

$$\Lambda c = \langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}, \quad \forall c \in l^2 \, .$$

سره.

د $d$ څخه و $\Lambda$ ته دیواځني تنظیم له لارې کیدی شي فضا $l^2$ د خپل دوال- یا دوه ګونې فضا $(l^2)'$ سره و ښوول شي یاو پیژندل شي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه مربع انتیګرا لوړ توابع $L^2(D)$ په ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ رانیسو. وي دې $\Lambda \in L^2(D)'$، نو تیک یو تابع $g \in L^2(D)$ شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda f = \langle f, g \rangle = \int\limits_D f(x)\overline{g(x)}\, dx, \quad \forall f \in L^2(D)\,.$$

سره.

له $g$ څخه و $\Lambda$ ته د يواځني تنظيم له لارې کيدی شي فضا $L^2$ د خپلې دوال- يادوه ګوني فضا $(L^2)'$ سره وپيژندل شي.

ليکونکي: ايپ، هيوليک

کمزوري پولې ته تلنه Schwache Konvergenz

په يوه نورمي شوي وکتورفضا $V$ يوه پرلپسي $(v_n)$ کمزورې پولې $v$ ته ځي، که

$$v_n \rightharpoonup v\,,$$

که

$$\Lambda(v_n - v) \to 0, \quad \forall\, \Lambda \in V'\,.$$

د $\Lambda$ د ناپرېکيدنې په بنسټ هره پولې ته تلونکې پرلپسي

$$v_n \to v \quad \Leftrightarrow \quad \|v_n - v\| \to 0$$

هم کمزورې پولې ته تلونکې ده. معکوسوالی يا په ځېوالی په ټوليزه توګه باور نه لري.

ليکونکي: ايپ، هيوليک

د بيلګې په توګه په فضا کې مربع جمعه کيدونکې پرلپسۍو $l^2$ کې پلپسي

(c) ketabton.com: The Digital Library

| | |
|---|---|
| $= (0, 0, 0, \ldots)$ | $e$ |
| $= (1, 0, 0, \ldots)$ | $e^1$ |
| $= (0, 1, 0, \ldots)$ | $e^2$ |
| $\vdots$ | |

رانیول کیږي. دا چې هر ناپرېکیدونکی کرښیز فنکشنال $\Lambda$ په $l^2$ د رسسخ( ویینه: ریخ) د انځوریزې جملې

$$\Lambda c = \langle c, d\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}$$

په حیث د کلک یا کره $d \in l^2$ سره لیکل کیږي، نو لاس ته راځ

$$\Lambda(e^n - e) = \langle e^n, d\rangle = \overline{d_n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

ځکه چې $d$ مربعجمعه وړ دی، دا په دې معنا، چې دی

$$e^n \rightharpoonup e, \quad n \to \infty.$$

مګر په ر حالت

$$\|e^n - e\| = 1,$$

داپه دې معنا، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^n \not\to e\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## محدود کرښيز اوپراتورونهBeschränkte lineare Operatoren

د نورمي وکتورونو فضاو تر منځ يو کرښيز تابع

$$L:\quad V \to W$$

محدود کرښيز اوپراتور بلل کيږي، که د اوپراتور نورم

$$\|L\| = \sup_{\|v\|=1} \|Lv\|$$

پای وي. محدودوالی د $L$ د ناپرېکيدنوالي سره په يوه معنا دی.

سړی کرښيز اوپراتور هغه په کرښيز الجبر کې د کرښيز تابع په ځای کاروي، چې داناپای –بعديز Kontext غوره وښايو يا را مخ ته کړو.

د ټولو کرښيزو مخدودو له $V$ څخه د $W$ پسې اوپراتورونو د $\mathcal{L}(V,W)$ سره په نخښه کيږي. دا باناخ-فضا ده، که $W$ يوه باناخ-فضا وی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## انتيګرال اوپراتور Integraloperatoren

د يوه تابع

$$K:\quad D\times D \ni (x,y) \mapsto K(x,y) \in \mathbb{R},\quad D \subseteq \mathbb{R}^n,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د

$$(Lf)(x) = \int\limits_D K(x,y) f(y)\, dy$$

له لاري يو كربنيز اوپراتو تعريفيږي. د مخته ځيږي- يا تابع - او ډځيږي فضا(تابع تابع) $V$ او $W$ د داسې په نامه زړي تابع $K$ د خويونو په واک كې دي.

په لاندې كې يوه څو بيلګې او همداسې د اړونده اوپراتور نورمونه وركړ شوي.

- $K$ په $\overline{D} \times \overline{D}$ ناپرېكيدونكي، $D$ محدود ده.

$$L: \quad C(\overline{D}) \to C(\overline{D})$$

$$\|L\| = \max_{x \in \overline{D}} \int\limits_D |K(x,y)|\, dy$$

- $$K \in L^2(D \times D)$$

$$L: \quad L^2(D) \to L^2(D)$$

$$\|L\| \le \left( \int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2\, dx\, dy \right)^{1/2}$$

- $D = \mathbb{R}^n$ , $K(x,y) = \varphi(x-y)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L: \quad L^p(D) \to L^p(D)$$

$$\|L\| = \int_D |\varphi(z)|\,dz$$

## د کرښيزو اوپراتورونو پولې ته تلنه Konvergenz linearer Operatoren

د محدودو کرښيزو اوپراتورونو پرلپسيو لپاره لاندې دوه کليمې کارول کيږی.

- ټکي ډوله پولې ته تلنه Punktweise Konvergenz

يوه پرلپسي $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ ټکيډوله د يوه اوپراتور $L$ په لور پولې ته ځي، که

$$L_n v \to L v, \quad \forall v \in V\,.$$

- برابرډوله پولې ته تلنه Gleichmäßige Konvergenz

يوه پرلپسي $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ برابرډوله ديوه اوپراتور $L$ په لور پولې ته تلونکې ده، که وي

$$\|L_n - L\| = \sup_{\|v\|=1} \|L_n v - L v\| \to 0\,.$$

د برابرډوله پولې ته تلنې څخه ټکي ډوله پولې ته تلنه راکوي، معکوس په ټوليزه توګه باور نه لری.

د برابر ډوله محدودوالي اصول Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د يوې باناخ-فضا $V$ په يوه نورمي وکتور فضا $W$ کې د يوې محدودې کرښيز اوپراتورونو $(L_n)$ پرلپسې لپاره لاندې باور ولري

$$\sup_n \|L_n v\| < \infty \quad \forall v \in V ,$$
،

نو لاس ته راځي

$$\sup_n \|L_n\| < \infty ,$$

دا په دې معنا، چې د اوپراتور-نورم برابرډوله مخدودوالی.

## د باناخ-شتاينهوز جلمه Satz von Banach-Steinhaus

وي دې $V, W$ باناخ-فضا او $U$ يوه د $V$ ټينګه يا(غليضه) برخه ډېرئ، نو بيا يوه پرلپسې $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ ټيک هلته ټکي ډوله و يوه کرښيز محدود اوپراتور $L$ ته ځي،

$$L_n v \to L v , \quad \forall v \in V,$$

که

(a)

$$\forall u \in U , \quad L_n u$$
پولې

$$\sup_n \|L_n\| < \infty .$$
(b)

د باناخ شرايط a) او b) دې پوره وي او $v$ دې يو په خوښه وکتور له $V$ څخه وي. دا جې $U$ په $V$ کې ټينګه يا کيمنډلې ده، نو د $\varepsilon > 0$ لپاره يو $u \in U$ شتون لري،
داسې چې دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|u - v\| < \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|}\,.$$

پرلپسۍ $(L_n u)$ د نیونې یا فقضیې له مخې پولې ته ځي، یعنې یو اینډکس یا پیژندنخښه $n_0$ شتون لري، داسې چې د $m, n > n_0$ لپاره

$$\|L_m u - L_n u\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

باور لري. له دې لاس ته راځي

$$\|L_m v - L_n v\| \;\le \|L_m v - L_m u\| + \|L_m u - L_n u\| + \|L_n u - L_n v\|$$

$$\text{p}\,\|L_n\| \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|} + \frac{\varepsilon}{3} + \sup_n \|L_n\| \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|} = \varepsilon\,,$$

داپه دې معنا، چې $(L_n v)$ په $W$ کې یوه کوشي-پرلپسې ده. دا چې $W$ پوره ده، ن و پوله ارزښت شتون لري، یعنې

$$\lim_{n\to\infty} L_n v = Lv \in W\,.$$

د $L$ محدودوالی او کرښیزوالی ترلی د نورم له ناپرېکیدنې لاس ته راځي.

د معکوسونې لپاره دې فقط شرایط b) و ښوول شي. دا د برابرېدوله محدودوالي له شرایطو څخه لاس ته راځي، ځکه چې

$$\lim_{n\to\infty} L_n v = Lv$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

راکوي، چې $\sup_n \|L_n v\|$ د ټولو $v$ لپاره پای دی.

وي دې

$$s_n f = \sum_{j=1}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n})$$

د لاندې انتیګرال لپاره نږدېونه

$$sf = \int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

که وزنونه $w_{i,n}$ زیاتیز یا مثبت وي او $s_n$ ټیک دی د $< n$ درجې پولینوم لپاره، نو لاس ته راځي

$$sf = \lim_{n\to\infty} s_n f$$

د $f \in C[0,1]$ لپاره.

ښوونه د باناخ-شتاینهوز له جملې ترلی لاس ته راځي، په کارول شوی په $s_n \in \mathcal{L}(C[0,1], \mathbb{R})$ او د $C[0,1]$ پولینومونو ټینګه برخه فضا باندې. د پولینوم $p$ لپاره د $s_n p$ پولې ته تلنه روښانه دی،، ځکه چې $s_n p = sp$ دی د $n > \operatorname{Grad} p$ لپاره.

د دې لپاره چې برابرډوله محدودوالی وښایو، سرې په پام کې نیسي، چې

$$\sum_{j=1}^{n} w_{j,n} = 1,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې $s_n$ د ثابتو یا د تل همغو توابعو $f(x)=c$ لپاره تېک دی. له دې لاس ته راځي

$$\|s_n\| = \sup_{\|f\|_\infty=1} |s_n f| = 1.$$

## کومپاکت اوپراتورونه Kompakte Operatoren

د باناخ-فضاو تر ةنځ یو اوپراتور $L \in \mathcal{L}(V,W)$ کومپاکت دی، که د $V$ په $W$ کې د یوونغونډاري( واحدغونډوسکې یا -کرې) $B$ څېړه یا عکس نسبي کومپاکت وي، دا به دېمعنا، چې په $B$ کې د هرې پرلپسې $(v_n)$ لپاره پرلپسې $(Lv_n)$ یوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې ولرې.

د بېلګې په توګه په $\mathcal{L}(V,W)$ کې دوه اوپراتورونه د $V=W=l^2$ سره رانیسو.

- اوپراتور Der Operator

$$L: \quad (c_1, c_2, c_3 \ldots) \mapsto (c_1, c_2, c_3 \ldots)$$

کومپاکت نه دی، خکه چې د بیلګې په توګه د پرلپسېو پلرپسي

| | | |
|---|---|---|
| | $e_1$ | $= Le_1 = (1,0,0,\ldots)$ |
| | $e_2$ | $= Le_2 = (0,1,0,\ldots)$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $B$ کې پولې ته تلونکې برخه پرلپسې نه لري.

- Der Operatorکرښيزه تابع

$$L: \quad (c_j) = (c_1, c_2, c_3, \ldots) \mapsto (c_1, c_2/2, c_3/3, \ldots) = (\tilde{c}_j)\,,$$

$$, \quad \tilde{c}_j = c_j/j$$

کومپاکت دی. د دې لپاره دې وي $(c_n)$ يوه په خوښه په $B$ کې د پرلپسيو پرلپسې. نو سړی په لومړي ځل کره کوي، چې په روښانه توګه د توکي

$$c_n = (c_{n,1}, c_{n,2}, c_{n,3}, \ldots)$$

لپاره دا پرلپسي په هر ځاي $c_{n,j}$ کې محدود دي. يعنې

$$|c_{n,j}| \leq 1\,.$$

که د دې پرلپسی هر فقط د ټولو پرلپسي توکو لومړني ځايونه $(c_{n,1})$ تر څېړنې لاندې ونيسو، داسې چې د محدودوالي په بنسټ يوه برخپرلپسي $(c_{n_k(1)})$ پيداکړو، د کومو لپاره چې لومړي ځايونه پولې ته ځي. که د دې برخپرلپسيو $(c_{n_k(1)})$ څخه اوس د هر توکي څخه لومړني دوه ځايونه

$$\left(c_{n_k(1),1}, c_{n_k(1),2}\right),$$

راونيسو، نو بېرته دمخدودوالي په بنسټ پرخپرلپسي پيداکولای شو، دکومو لپاره، چط د وه کونترې پرلپسي يا ورتر پرلپسي

$$(d_k) = \left(c_{n_k(k)}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره نو د هر کره $J$ لپاره د $J$ د لومړني ځايونو وکتور $(d_{k,1},\ldots,d_{k,J})$ پولي ته ځي.

د دې لپاره چې وښايو، چې $(d_k)$ غوښتوني برخپرلپسي ده، نو يوه د خوښې $\varepsilon > 0$ لپاره يو ايندکس $K$ داسي ټاکو، چې

$$\sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{4}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور ولري. دا چې برخپرلپسي $(d_k)$ د پورته جوړښتاصولو له مخې د لومړنيو $K$ ځايونو لپاره پولي ته ځی، نو يو ايندکس $N$ شتون لري،دا سي، چې د $k,l > N$ لپاره

$$\sum_{j=1}^{K} \frac{|d_{k,j}-d_{l,j}|^2}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور لري. له دې سره د $k,l > N$ لپاره لرو

$$\|Ld_k - Ld_l\|_{l^2}^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{|d_{k,j}-d_{l,j}|^2}{j^2} + \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{\overbrace{|d_{k,j}-d_{l,j}|^2}^{\leq 4}}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

د وازو توابعو په هکله جمله Satz über offene Abbildungen

د باناخ-فضاو تر منځ يو په باندي(surjektiver ) محدود کرښيز اوپراتور $L$ يوه وازه ډېرئ په يوه وازه ډېرئ ځېره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $L$ په کې ( injektiv ) هم وي، نو محدودوالی له $L^{-1}$ لاس ته راځي. له دې سره حقيقي عدونه $a, b$ د

$$a\|v\| \leq \|Lv\| \leq b\|v\|$$

سره شتون لري د $L$ د مخته څېړې څخه د ټولو $v$ لپاره، چېرته چې دويم نامساوات سملاسې د $L$ د محدودوالي څخه لاس ته راځي.

ليکوني: هيوليګ، اپپ

صرف نظر نه شي کولای، چې د عمليه يا اوپراتوري کيدنه $L$ د باناخ-فضاو تر منځ ده. د دې ترمنځ کټمټوالی $L \in \mathcal{L}(V, W)$ څېرل کيږي، د کوم سره چې $V = l^1$ د نورم

$$\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$$

سره په نخښنه کيږي او څېړه -فضا $W$ د نورم

$$\|w\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_k|$$

سره په نخښنه کيږي. د

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_1$$

له امله کټمټوالی $L$ يو په ( bijektiver ) محدود کرښيز اوپراتو دی، مګر داچې

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \right\|_\infty = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \right\|_1 = n$$

د $e_1 = (1, 0, 0, \ldots), e_2 = (0, 1, 0, \ldots), \ldots$ سره، $L^{-1}$ نامحدود دی.

لیکوني: هیولیګ، اپپ

د رابند یا بند ګراف جمله Satz vom abgeschlossenen Graphen

که د بانخ – فضاو ترمنځ اوپراتور $L : V \to W$ رابند وي، دا په دې معنا،چط له

$v_n \to v$ او $w_n = Lv_n \to w$

لاس ته راځي، چې $w = Lv$ دی، نو $L$ محدود دی.

لیکوني: هیولیګ، اپپ

له دې بیلګې ښخه لیدل کیږي، چط سړی د رابند ګراف په جمله کې په نیوني یا فرضیي صرف نطر نه شي کولای، داسې چې $L$ د باناخ-فضاو ترمنځ عمل کوي یا اوپریشن کوي. د دې لپاره دفرنځیال اوپراتور

$$\mathcal{L}(V, W) \ni L : \quad f \mapsto f'$$

رانیسو، د کوم سره چې $V = C^1[0,1]$ د سوپریموم نورم $\|\cdot\|_\infty$ سره په نخښه شوی دی او $W = C[0,1]$ سره هم سوپریمومنورم دی. $L$ یوو کرښیز اوپراتور دی، ځکه چې د $f(x) = x^n$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_\infty = 1, \quad \|Lf\|_\infty = n$$

باور لري

محدود نه دی.  مګر د $L$ ګراف رابند دی، له دې امله چې د یوې پرلپسې $(f_n)$ لپاره
په $V$ کې د $f_n \to f \in V$، $Lf_n \to g \in W$ سره باور لري $f_n \to f$ برابر
ډوله دی، $f_n' \to g$, پرابر ډوله دی.

$L$ له دې لاس ته راځي،چې $f$ مشتقوړ دی، او

$$f' = g$$

باور لري.

(Autoren: App/Höllig)

## په هیلبرت-فضا کې د یوه کرښیز اوپراتور ماتریکس

Matrix eines linearen Operators im Hilbert-Raum

یو کرښیز اوپراتو

$$L: \quad H \to H$$

په یوه سیپارابل هیلبرت-فضا د اورتوګونال بنسټ $e_1, e_2, \ldots$ سره کیدی شي د
ماتریکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a_{j,k}): \quad a_{j,k} = \langle Le_k, e_j \rangle$$

له لارې روښانه شي. باور لري

$$w = Lv \leftrightarrow w_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} v_k \,,$$

چیرته چې $u_l = \langle u, e_l \rangle$ د بتسټ ضریبونه ښايي ياپه ګوته کوي.

لیکونکي اپپ، هیولیک

د فوریر-پروجکشن د پولې ته تلنې او د $L$ کرښیزوالي په بنسټ باور لري

$$w_j = \langle Lv, e_j \rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k Le_k, e_j \right\rangle .$$

که پوله او زیاتون یا جمعه د سکالار ضرب سره بدل شي، نو سړی د $L$ ماتریک انځورونه لاس ته راوړي.

لیکونکي اپپ، هیولیک

د بیلګې په توګه به د یوه $2\pi$ -پریودي یا $2\pi$ - تل بیرته راګرځیدوني تابع

$$\varphi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e_k, \quad e_k(x) = e^{ikx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه کرښیز اوپراتورونه رانیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: ضرب $L : f \to \varphi f$ : د فوریر – ضریبونو له مخې د ماتریکس- راوړنو Matrix-Einträge لپاره سرې لاس ته راوړي

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)e^{\mathrm{i}(k-j)x}\,dx = \varphi_{j-k}\,.$$

د نورو ویونو یا لغاتو سره د $f$ ضرب د $\varphi$ سره د $f$ او $\varphi$ د فوریې- ضریبونو یو دیسکرت قتونه په ګوته کوي.

دویم قتونه غبرګونه $L : f \to \varphi \star f$ : که د ماتریکس-قیمتونو

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)e^{\mathrm{i}(kt-jx)}\,dt\,dx$$

په تعریف کې سرې $y = x - t$ بدل کړي، نو د

$$e^{\mathrm{i}(kt-jx)} = e^{\mathrm{i}((k-j)x)}e^{-\mathrm{i}ky}$$

له امله انتیګرال په $y$ لاس ته راځي

$$a_{j,k} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k e^{\mathrm{i}(k-j)x}\,dx = 2\pi\varphi_k\delta_{j,k}\,.$$

د قاتوني ماتریکس دوه کونجترې یا دیاګونال دی، د $f$ د فوریې- ضریبونه د $2\pi$ –واره د $\varphi$ فورې-ضریبونو سره ضربیږي

لیکونکي: اپپ، هیولیک

(c) ketabton.com: The Digital Library

## ادجونګيري اوپراتور Adjungierter Operator

په يوې سيپارابلې هيلبرت-فضا $H$ باندې د يوه محدود کرښيز اوپراتور $L$ لپاره د

$$\langle Lv, w\rangle = \langle v, L^{\star}w\rangle, \quad v, w \in H,$$

له لارې يو داسې په نامه ادجونګيري اوپراتور $L^{\star}$ د ماتريکس

$$(a^{\star}_{j,k}) = (\overline{a_{k,j}})$$

سره تعريفيږي. که $L^{\star} = L$ باور ولري، نو سړی $L$ پخپله يا د ځان سره ادجونګيري يا هرميتيک بولي.

د بيلګې لپاره په $L^2(D)$ يو انتيګرال اوپراتور رانيسو. $K$ دې يو زړي تابع وي د

$$\int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 \, dx \, dy < \infty \,,$$

سره، نو د

$$(Lf)(x) = \int\limits_D K(x,y) f(y) \, dy$$

له لارې د هر $f \in L^2(D)$ لپاره يو کرښيز اوپراتو تعريفيږي. د انتيګرال لپاره د کوشي-شوارڅ نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\int\limits_D |(Lf)(x)|^2 \le \int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 \, dy \, dx \int\limits_D |f(y)|^2 dy \,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې $L$ یو محدود کرښیز اوپراتور دی په $L^2(D)$ د

$$\|L\| \leq \left(\int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 dy\, dx\right)^{1/2}.$$

سره.

اړونده ادجونګيري اوپراتو $L^\star$ د

$$(L^\star g)(x) = \int\limits_D \overline{K(y,x)} g(y)\, dy$$

سره تعريفيږي، دا په دې معنا، چې $L$ ټيک هلته د ځان سره يا خپل ادجونګيري دی، که نږدې هرچيرته

$$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$$

باور ولري.

## يونيتار اوپراتور Unitärer Operator

په يوه هيلبرت-فضا کې يو محدود کرښيز اوپراتور $Q : H \to H$ يونيتار دی، که وي

$$QQ^\star = I = Q^\star Q\,,$$

چيرته چې $I$ کتوتوالی په ګوته کوي.

د يونيتار اوپراتورونو ورته خويې خووني يا کرګتريزه کوني دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

a)

$$\langle Qv, Qw\rangle = \langle v, w\rangle, \quad v, w \in H\,,$$

b)

$$\|Qv\| = \|v\|, \quad v \in H\,,$$

کوم ته چې هر چطرته د $Q$ سورجکتیویتې یا په باندې والی له مخه نیول شوی دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

که $Q$ یونیتار وي، نو سملاسي لاس ته راځي، چې $Q$ په باندې یا سورجکتیو ده او

$$\langle Qv, Qw\rangle = \langle v, Q^{\star}Qw\rangle = \langle v, w\rangle, \quad v, w \in H,$$

ځکه چې $Q^{\star}Q = I$ ، دا په دې معنا، چې خوېې (a.

دا ساده لیدل کیږي،چې له خوي یا کرمتریزه (aڅخه د $v = w$ سره سملاسي (b لاس ته راځي.

بالاخره له (b څخه لاس ته راځي

$$\langle Q^{\star}Qv, v\rangle = \langle Qv, Qv\rangle = \|Qv\|^2 = \|v\|^2 = \langle v, v\rangle, \quad v \in H$$

د $L = Q^{\star}Q - I = L^{\star}$ سره له دې لاس ته راځي

$$\langle Lv, v\rangle = 0$$

د ټولو $v \in H$ لپاره، همداسي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0 = \langle L(v+w), v+w \rangle = \langle Lv, v \rangle + \langle Lv, w \rangle + \langle Lw, v \rangle + \langle Lw, w \rangle$$

$$= \langle Lv, w \rangle + \langle w, Lv \rangle = \langle Lv, w \rangle + \overline{\langle Lv, w \rangle}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\langle Lv, w \rangle$$

د ټولو $v, w \in H$ لپاره، که په ځتنګړې توګه کېږدو $w = Lv$ نو لاس ته ترې راځي

$$\mathrm{Re}\langle Lv, Lv \rangle = \langle Lv, Lv \rangle = \|Lv\|^2 = 0$$

او له دې سره $Lv = 0$ د ټولو $v \in H$ لپاره، نو $L = 0$ همداسې

$$Q^{\star}Q = I\,.$$

د بېلګې په توګه په $L^2(\mathbb{R}^n)$ باندې سکالار شوی د فوریې – ترانسفورمیشن رانیسو د

$$(Lf)(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\mathrm{i} y^{\mathrm{t}} x}\, dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

سره. دا چې $\|Lf\| = \|f\|$ دی ، نو $L$ یونیتار دی، او ادیونکیري اوپراتور د، اړونده سکالار شوی، د معکوس فوری-ترانسفورمیشن له لارې ورکړ شوی دی:

$$(L^{\star}g)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\mathrm{i} x^{\mathrm{t}} y}\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د یوه کرښیز اوپراتور آیګن ارزښتونه

Eigenwerte eines linearen Operators

که د یوه $V$ وکتور فضا یوه کرښیز اوپراتور $L$ لپاره په خپل ځانګي باور ولري

$$Lv = \lambda v, \quad v \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

نو $\lambda$ آیګن ارزښت بولو او $v$ د آیګنوکتور په حیث( همداسې دیوه وکتور فضا $V$ لپاره آیګن فنکشن). فضا

$$E_\lambda = \{v \in V : Lv = \lambda v\}$$

آیګن فضا بلل کیږي او $m_\lambda = \dim E_\lambda$ د آیګن ارزښت ډیرواروالی بولو.

د بیلګې لپاره به یو ناپرېکیدونکی نا- ثابت $2\pi$ - پریودیکي( تل بیرته راګرځیدونی) تابع

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ikx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه کرښیز اوپراتورونه راونیول شي.

(i) Der Multiplikationsoperator ضرب اوپراتور

$$L : \quad f \mapsto \varphi f$$

آیګن ارزښت نه لري، ځکه چي له $Lf = \lambda f$ په $\varphi(x) = \lambda$ ، $x \in (-\pi, \pi)$ لاس ته راشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دقاتولو اوپراتور (ii) Der Faltungsoperator

$$L: \quad f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\cdot - t) f(t)\, dt$$

اکسپوننشل تابع $e_j(x) = e^{\mathrm{i}jx}$ د آیګن تابع په څیر لري. باور لري

$$(Le_j)(x) = \sum_k \varphi_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}k(x-t)} e^{\mathrm{i}jt}\, dt = \sum_k \varphi_k (2\pi) \delta_{j,k} e^{\mathrm{i}kx} = 2\pi \varphi_j e_j(x)\,,$$

داپه دې معنا، چې $2\pi\varphi_j$ اړونده ایګن ارزښتونه دی.

## د هرمیتیکي اوپراتورونو آیګن ارزښتونه

Eigenwerte hermitescher Operatoren

د یوه هرمیتیکي اوپراتور $L: H \to H$ آیګن ارزښتونه حقیقي دي او آیګنوکتورونه و مختلفو أیګن ارزښتونو ته اورتوګونا دي.

که $L$ هرمیتیکي وي، نو باور لري

$$\overline{\langle Lv, v\rangle} = \overline{\langle v, Lv\rangle} = \langle Lv, v\rangle\,,$$

دا په دې معنا، چې $\langle Lv, v\rangle$ د ټولو $v \in H$ لپاره حقیقي دی. اوس دې $v \neq 0$ د آیګن وکتور وي و آیګن ارزښت $\lambda$ ته، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle Lv, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \underbrace{\langle v, v\rangle}_{\neq 0}$$

دی، همداسې

$$\lambda = \frac{\langle Lv, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

حقیقي دي.

که $w \neq 0$ د $L$ آيګنوکتور وي و آيګن ارزښت $\mu$ ته، نو باور لري

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle Lv, w\rangle = \langle v, Lw\rangle = \mu\langle v, w\rangle$$

او له $\lambda \neq \mu$ سره

$$\langle v, w\rangle = 0\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د یوه هرمیتیکي کومپاکت اوپراتور نورم

Norm eines kompakten hermiteschen Operators

د یوه کومپاکت هرمیتیکي اوپراتور $L : H \to H$ لپاره، $\|L\|$ یا $-\|L\|$ د $L$ یو آيګن ارزښت دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه په دوه پلونو(قدمونو) کې صورت نیسي یا پلې کیږي.

(i) لومړی

$$\sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v\rangle| = \|L\|$$

ښوول کیږي..

د

$$s = \sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v\rangle|$$

او

$$|\langle Lv, v\rangle| \leq \|Lv\| \|v\|$$

سره سړی سملاسي لاس ته راوړي

$$s \leq \|L\| .$$

د دې لپاره چې معکوسونه یا په څټوالی $\|L\| \leq s$ وښوول شي، لومړی په پامې نیسو، چې د په خوښه حقیقي $\alpha > 0$ لپاره لرو

$$\left\langle L(\alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv), \alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle - \left\langle L(\alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv), \alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle$$

$$= \alpha^2 \langle Lv, v\rangle + \langle LLv, v\rangle + \langle Lv, Lv\rangle + \frac{1}{\alpha^2}\langle LLv, v\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\alpha^2\langle Lv,v\rangle + \langle LLv,v\rangle + \langle Lv,Lv\rangle - \frac{1}{\alpha^2}\langle LLv,v\rangle$$

$$= 4\langle Lv,Lv\rangle = 4\|Lv\|^2 .$$

د

$$|\langle Lv,v\rangle| = \|v\|^2\left|\left\langle L\frac{v}{\|v\|},\frac{v}{\|v\|}\right\rangle\right| \le s\|v\|^2$$

سره او د غبرګاږخیز – یا مازی الاضلاع کټمټوالي سره له دې لاس ته راځي

$$\|Lv\|^2 \le \frac{s}{4}\left(\left\|\alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv\right\|^2 + \left\|\alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv\right\|^2\right)$$

$$= \frac{s}{2}\left(\alpha^2\|v\|^2 + \frac{1}{\alpha^2}\|Lv\|^2\right) .$$

که په ځانګړې توګه کيږدو

$$\alpha = \left(\frac{\|Lv\|}{\|v\|}\right)^{1/2}$$

نو راکوي

$$\|Lv\| \le s\|v\|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

داپه دې معنا، چې $\|L\| \leq s$ .

له (i) د (ii) Nach (i) existiert eine Folge $(v_n)$ in $H$ mit $\|v_n\| = 1$ und

مخې په $H$ کې یوه پرلپسې $(v_n)$ شتون لري د او

$$|\langle Lv_n, v_n\rangle| \to \|L\|,$$

سره، دا په دې معنا، چې یوه برخه پرلپسې $(v_{n_k})$ شتون لري د

$$\langle Lv_{n_k}, v_{n_k}\rangle \to \lambda$$

او

$$|\lambda| = \|L\|.$$

سره.

اوس فقط ښایو، چې

$$\|Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\| \to 0$$

د دې لپاره په پام کې نیسو $\|Lv\| \leq \|L\|\|v\| = |\lambda|\|v\|$ او

$$Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\|^2 = \|Lv_{n_k}\|^2 - \langle Lv_{n_k}, \lambda v_{n_k}\rangle - \langle \lambda v_{n_k}, Lv_{n_k}\rangle + |\lambda|^2$$

$$\lambda|^2\|v_{n_k}\|^2 - \overline{\lambda}\langle Lv_{n_k}, v_{n_k}\rangle - \lambda\langle v_{n_k}, Lv_{n_k}\rangle + |\lambda|^2,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره چې ښی اړخ د $\infty$ $k \to$ لپاره د

$$|\lambda|^2 - |\lambda|^2 - |\lambda|^2 + |\lambda|^2 = 0$$

په لور هڅیږي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د کومپاکت هرمیتیکي اوپراتورونو سپکترال انځورونه

Spektraldarstellung kompakter hermitescher Operatoren

یوه کومپاکت هر میتیکي اوپراتور $L : H \to H$ ته په یوه هیلبرت-فضا یو اورتونورمل بنسټ له آیګن ارزښتونو څخه شتون لري

$$e_1, e_2, \ldots ,$$

د کوم سره چې مطلق ارزښتونو د اړونده آیګن رازښتونه $\lambda_j$ یوه همغږیزه صفرپرلپسي جوړوي، یعنې

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots , \quad \lambda_j \to 0 \, .$$

نسبت دې بنسټ ته $L$ دا لاندې انځورونه لري

$$Lv = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle v, e_j \rangle e_j \, .$$

ښوونه یې په ډېرو برخه پلونو)(قدمونو) کې پلی کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د $e_j$ جوړښت. د کومپاکت هرمیتیکي اوپراتورونو نورم د خویونو په بنسټ یو آیګن ارزښت $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ شتون لري د لاندطي سره

$$|\lambda_1| = \|L\| \,.$$

اوس سړی په پام کې نیسي، چې $L$ د آیګنوکور $e_1$ څخه غزېدلي لاندې فضا $E_1$ اوتوګونال کومپلمنت ایناریانت پرېږدي. د $v \in E_1^\perp$ لپاره دی

$$\langle Lv, e_1 \rangle = \langle v, Le_1 \rangle = \lambda \langle v, e_1 \rangle = 0,$$

داپه دې معنا، چې $Lv \in E_1^\perp$. د دې پسې یا د دې په تعقیب $L$ همداسې په $E_1^\perp$ باندې یو کومپاکت هرمیتیکي اوپراتور دی. د نورم خوی یا کرکتریزه بېرته یو آیګن لرزښت $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ راکوي د لاندې سره

$$|\lambda_2| = \|L|_{E_1^\perp}\| \,.$$

د $\lambda_2$ ارزښښت $\leq |\lambda_1|$ دی ، خکه چې د یوې کوچنۍ فضا په نسبت نورم جوړېږي.

اوس سړی کړی شي جوړښت ایندوکتیو مخ ت ه بوزي:

$$|\lambda_n| = \|L|_{E_n^\perp}\|$$

د لومړیو $n$ اوتوګونال آیګنوکتورونو کرښیز پوښ Hülle $E_n$ سره. دا تلنلار پرې کیږي، که $L|_{E_n^\perp} = 0$ وي، داپه دې معنا، چې که

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\dim \mathrm{Bild}(L) = n < \infty$$

وي.

دويم: د صفر 0په لور پولې ته تلنه: وړاندنيونه، چې $\lambda_j \geq \lambda > 0$ د ناپاى ډېرو $j$ لپاره باور لري، لاندې تضاد ته لاربنودوي. د $L$ د کومپاکتوالي په بنسټ د $\{e_1, e_2, \ldots\}$ څېره يا عکسدا لاندې محدوده ډېرئ يا سټ

$$\{e_1/\lambda_1, e_2/\lambda_2, \ldots\}$$

نسبي کومپاکت ده، بايد يوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې يې خوندي لرودې وى. دا د

$$\|e_j - e_k\|^2 = \|e_j\|^2 + \|e_k\|^2 = 2, \quad j \neq k$$

له امله ناشونې ده.

دريم: د $L$ انځورونه: د جوړښت وروسته $e_1, e_2, \ldots$ يو اورتونورمال بنسټ دى د

$$H = \mathrm{Bild}\, L \oplus \ker L\,.$$

لپاره.

دا وديزېنه ترلې د کرښيزوالي څخه لاس ته راځي، چيرته چې آيګنوکتورونه، کوم چې د $\ker L$ لپاره بنسټ جوړوي، طبعاً ترې تيريدلى شو يا صرف نظر ترې کولاى شو.

## شتورم-ليوويل-پرابلم Sturm-Liouville-Problem

د ژئ ارزښت پرابلم

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Lu = -(pu')' + qu \quad = f \text{ auf } (0,1),$$

$$u(0) = u(1) \quad = 0,$$

د ناپرېکیدونکي، کره همغږيزو توابعو $p, q$ سره يو ځانګړی شتور-ليوويل پرابلم دی. د کومپاکت-هرميتيکي اوپراتورونو لپاره د سپکترال انځورنې سره کيدی شي يو اورتوکورمال بنسټ $e_1, e_2, \ldots$ شتون د $L^2(0,1)$ لپاره د $L$ آيګن توابعو څخه وښوول شي، د ايګن ارزښتونو

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$$

او $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ سره . د دې بنسټ په مرسته کيدی شي په

$$u = \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \langle f, e_j \rangle e_j$$

بڼه انځور شي.

داوينا کيدی شي نوره هم تيزه شي. دا مګر له دې برسيره نور فکر کونې ته اړتيا لري.

د آيګن توابعو څخه د اورتونورمال بنسټ شتون د دې برعکس تړلی د ټوليزې تيوريڅخه، لکه چې په لاندې کې روښانه کيږي.

لومړی: د $f = 0$ لپاره د ژئ پرابلم فقط ساده حل لري. ځکه چې د $u$ سره ضرب ټوټه انتيګرال

$$\int_0^1 \underbrace{p}_{\geq 0}(u')^2 + \underbrace{q}_{\geq 0} u^2 = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

راکوي، يعني $u = 0$ . د عادي دفرنشل مساواتو څخه اوس لاس ته راځي، چې د ژئ پرابلم د خوښې $f \in L^2(0,1)$ لپاره يو يواځنی حل $u \in C^1[0,1]$ لري.

دويم: دا حل $u$ د $f$ کرښيز په واک دی يا کرښيز تابع دی، نو هر $L$ ته يو معکوس اوپراتور $A$ شتون لري:

$$f \to u = Af\,.$$

دريم: د ټوټه انتيکريشن پهمرسته سړی ښايي، چې $A$ د ځان سره – يا خپل ادجونګيري ده. د $u = Af$ ، $v = Ag$ سره دی

$$\langle Af, g\rangle = \int_0^1 -u(pv')' + quv = \int_0^1 -(pu')'v' + quv = \langle f, Ag\rangle\,.$$

څلورم: د $u = Af$ سره د ضرب له مخې د دفرنشل مساوات د $u$ سره لاس ته راځي او انتيګريشن

$$\int_0^1 p(u')^2 + qu^2 = \int fu$$

او له دې سره

$$c\,\|u\|_{1,2}^2 \leq \|f\|_0\,\|u\|,$$

د کوم سره چې $c > 0$ د $p$ او $q$ لپاره يوه پورته بند يا بنديز دی، او $\|\cdot\|_{1,2}$ په سوبوليو-فضا $H^1(0,1)$ نورم ښايي. دا چې $\|u\| \leq \|u\|_{1,2}$ ، نو $A$ په

(c) ketabton.com: The Digital Library

$L^2(0,1)$ کې يوونغونډاری (واحد کره) جوړوي، چې د يوه محدوده ډېرئ يا سټ په $H^1(0,1)$ کې. دا چې $\|u\| \le \|u\|_{1,2}$ ، نو $A$ په $L^2(0,1)$ کې يوونغونډاری جوړوي، چې دا د محدودې ډېرئ په $H^1(0,1)$ کې پروت دی، يعنې د سوبليو خونديونې جملې په بنسټ کومپاکت دی.

پنځم: د کومپاکت هرميتيکي اوپراتورونو شپکتاکولار انځورونې څخه له آيګن توابعو څخه د يوه اورتونورمال بنسټ شتون لاس ته راځي، چيرته چې د آيګنارزښت مطلق ارزښت $\lambda_j$ يوه صفرپرلپسې جوړوي. په ورته توګه د معکوس اوپراتور $A$ لپاره وينا سړی لاس ته راوړی شي.

## ګړندی لوېدونکی ازماېښت تابع Schnell abfallende Testfunktion

د ګړندي لوېدونکو ازماېښتتوابعو $S$ فضا کومپلکس ارزښتيز توابع $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ لري د

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره د ټولو $\alpha, \beta$ لپاره.

نيمنورم $|\ |_{\alpha,\beta}$ په $S$ باندې يو متريک تعريفوي. د يوه په خوښه کره ټاکلې پرلپسې $(\alpha_k, \beta_k)$ لپاره مولتی ايندکس جوړه Multiindexpaare سړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\varrho_k(f) = \frac{|f|_{\alpha_k,\beta_k}}{1+|f|_{\alpha_k,\beta_k}}$$

ږدي او

$$d(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \varrho_k(f-g)$$

د کانوني واټنتابع په حيث تعريفوي.

فضا $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ د شوارڅ د ازمايښت تابع د $S$ يو نيښکه يا غليظه لاندې فضا ده. په انالیز کې په $S$ باندې د ناپرېکيدونکو توابعو کيدی شي سرې کړی شي په همغه ازمايښت توابعو د کومپاکت وړونکي سره ځان محدود کړي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د ګړندي لوېدونکو توابعو لپاره تيوپيکي بيلګې توابع دي د يوه اکسپوننشل د راکميدو حالت يا ځانښيوني Abklingverhalten, سره، لکه د بيګي په توګه

$$f(x) = p(x) \exp(-|x|^2)\,,$$

چيرته چې $p$ يو په خوښه پولينوم دی.

تابع

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & |x| < 1\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

په $\mathcal{D}$ کې د تابع لپاره يوه بېلګه ده. په همدې توګه $gh$ د $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ سره په $\mathcal{D}$ پورې اړه لري او له دې سره په $S$ پورې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع $f(x)=\exp(-|x|)$ په حقیقت کې کړندئ لویږي، مګر په اصل یا سرچینه کې ناپرېکېدونکې مشتقوړ نه دی او له دې سره په $S$ پورې اړه نه لري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

تیمپیریري دیسریبوشنونه Temperierte Distributionen

تیمپریري دیستریبوشن و فضا $S$ ته د ګړندیو لوېدونکو ازماېښت توابعو دوال-یا دوه ګونې فضا $S'$ جوړوي. یعنې یو تیمپریري دیستریبیوشن $\Lambda$ یو کرښیز تابع دی، کوم چې هر تابع $f$ د

$$|f|_{\alpha,\beta}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha\partial^\beta f(x)|<\infty$$

سره یو کومپلکس ګڼ یا عدد $\Lambda f$ ترتیبوي یا تنظیموي او اټکل

$$|\Lambda f|\leq c\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq n}|f|_{\alpha,\beta}$$

د پوره یا کافي لوی $n(\Lambda)$ لپاره پوره کوي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

په لاندې کې د تیمپریري دیستریبیوشنونو دوه تیپیکي بېلګې تشریح شوي دي.

(i)

کمزوري جګېدونکي توابع:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور لري

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \frac{dx}{(1+|x|^2)^{k/2}} < \infty$$

نو

$$\Lambda_\varphi f = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f\,, \quad f \in \mathcal{S}\,,$$

يو تيمپريري ديستريبيوشن تعريفوي. د

$$(1+|x|^2)^{k/2} \le c \sum_{|\alpha| \le k} |x^\alpha|\,,$$

له امله کېدی شي $|\Lambda_\varphi f|$ د

$$c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)|}{(1+|x|^2)^{k/2}} \left( \sum_{|\alpha| \le k} |x^\alpha f| \right) \le \tilde{c} \sum_{|\alpha| \le k} |f|_{\alpha,0}$$

له لارې تخمين يا اټکل شي.

(ii)

د مشتقونو کرښيز کمبينيشن:

د مشتقونو هره موزن يا درونږ زياتون يا جمعه

$$\Lambda f = \sum_\alpha c_\alpha \partial^\alpha f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو تيمپريري ديستريبيوشن تعريفوي. په جوته توګه باور لري

$$|\Lambda f| \le \left(\max_{\alpha} |c_\alpha|\right) \sum_{\alpha} |f|_{0,\alpha} \, .$$

په ازماېښت توابعو د کرښيزو توابعو لپاره بېلګې چې په $\mathcal{S}$ ناپرېکېدونکې( متمادي) نه دي، دي

$$\Lambda f = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp(x^2) f(x)\, dx$$

او

$$\Lambda f = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(k) \, .$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د تيمپريري ديستريبيوشنونو مشتق

Ableitung von temperierten Distributionen

د يوه ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ توپه مشتق د

$$f \mapsto (\partial^\alpha \Lambda)\, f = (-1)^{|\alpha|} \Lambda\, (\partial^\alpha f) \;, \quad f \in \mathcal{S} \, ,$$

له لارې تعريف شوی ديستريبيوشن دی. دا تعريف د کمزورو مشتقونو کونڅپت(کنسپټ) توليز کوي او د

$$\Lambda_\varphi f = \int\limits_D \varphi(x) f(x)\, dx \, , \quad \varphi \in C_0^\infty(D) \, ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د ورسره بلد مشتق تعریف سره سرخوري یا یو غړیز کیږي.

$$\partial^\alpha \Lambda_\varphi = \Lambda_{\partial^\alpha \varphi} .$$

د تعریف سره سم تمپیریري دیستریبیشن ناپای زیات مشتقوړ دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

## دیراک- او هیویزایډ – فنکشنال Dirac- und Heavyside-Funktional

د هیویزاید-فنکشنال $H$ یو دیستریبیوشن دی، هغه چې د تابع

$$h : x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

له لارې ایندوڅیر کیږي، دا په دې معنا، چې

$$Hf = \int_0^\infty f .$$

.

د مشتق $H'$ لپاره راکوي

$$f \mapsto H'f = -H(f') = -\int_0^\infty f' = -\left(\lim_{x\to\infty} f(x) - f(0)\right) = f(0) = \delta f ,$$

دکوم سره چې $\delta$ یو دیراک-تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تيمپيريري ديستريبيوشنونو ضرب(څل)

Multiplikation von temperierten Distributionen

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ سره د يوه کمزوري چټکېدونکي تابع $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ ضرب د

$$(\varphi\Lambda)\, f = \Lambda\,(\varphi f)\ \ , f \in \mathcal{S}\,,$$

له لارې تعريف شوی تيمپريری ديستريبيوشن $(\varphi\Lambda)$ دی.

$$\sup_x \left| \left(1 + |x|^2\right)^{-s/2} \partial^{\alpha}\varphi \right| < \infty$$

د ټولو ضربيزو(ډېر) اندکشني(پېژندنښنو) $\alpha$ او $s(\alpha) > 0$ لپاره. دا شرايط په ځانګړې توګه د ټول پولينومونو لپاره پره دی.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د تيمپيريري ديستريبيوشنونو قات کونه يا راغبرګونه

Faltung von temperierten Distributionen

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره اويوه ګړندي لويدونکي ازماېښت تابع $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره

$$(\Lambda \star \varphi)\,(x) = \Lambda\varphi(x - \cdot)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د له لارې یوه قاتونه یا را غبرگونه تعریف ده.

تابع $\Lambda \star \varphi$ ناپای ډېر مشتقوړ دی او کمزوری جگېدونکی، کېدی شي د تیمپیریري دیستریبیوشن سره و پېژندل شي،

که $\Lambda = \Lambda_\psi$ له $\psi \in \mathcal{D}$ سره وي، نو

$$(\Lambda \star \varphi)\,(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)\,dy\,,$$

قاتونه ده د دیستریبیوشن سره یعني د تابع لپاره ورسره بلد تعریف دی.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

اپروکسیمي کتمتوالی Approximierende Identität

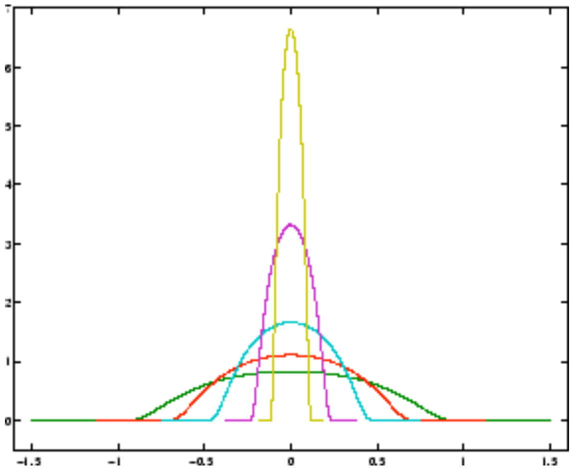
وي دې $\varphi \in \mathcal{D}$ یو د

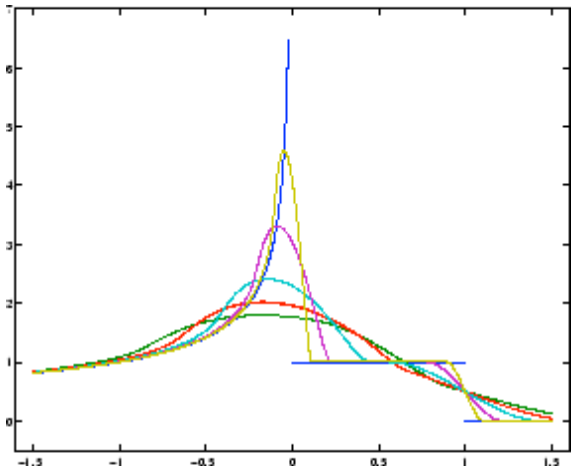
$$\varphi \geq 0\,, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$$

سره ازماېښتي تابع او $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$، نو باور لري

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon \star f = f\,, \quad f \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





کینه ځیرونه یاتابع د $\varepsilon = 1, .75, .5, .25, .125$ لپاره $\varphi_\varepsilon$ او
$\varphi = c\exp(1/(x^2-1))\,, x \in \mathbb{R}$ ښايي ، ښئ تابع یا ځیرونه اړونده قاتوني
ښايي.

لکه په تابع کې چې ښوول شوی دی، کیدی شي قاتونه د توابعو د خویوني لپاره وکارول شي، څکه چې

$$\varphi_\varepsilon \star f \in L^p \cap C^\infty \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې اپروکسيمسشن-پروسې په مرسته بسيا کوي، چې د بيلګې په توګه دا کټمټوالی د ناپرکيدونکو کربنيز اوپراتورونو لپاره فقط د خويو توابعو لپاره وښايو.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د ګړندي لويدونکو توابعو د فوريې- ترانسفورميشن

Fourier-Transformation schnell abfallender Testfunktionen

د فوريې ترانسفورميشن

$$f \to \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-\mathrm{i}xy)\, dx$$

اد فوريې په څټ يا معکوس ترانسفورميشن

$$g \to \check{g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \exp(\mathrm{i}xy)\, dy$$

ناپرېکيدونکي کربنيز اوپراتورونه دي د ګړندي لويدونکو ازماېښت توابعو په فضا $S$ باندې

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

تر يوه نورمي شوي ضريب د فوريې – ترانسفورميشن او د فوريې په څټ يا معکوس ترانسفورميشن پورې په $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ باندې ايزومتريګانې دي، کوم چې يو بل ته معکوس يا په څټ دی. دا چې $S \subset L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ دی، نو بايد چې د $S$ په توپولوزي کې ناپرېکيدنه وښايو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فوريي – ترانسفورميشن قوانينو سره سم باور لري

$$\left|(\mathrm{i}y)^\alpha \partial^\beta \hat f(y)\right| =$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha \left((-\mathrm{i}x)^\beta f(x)\right) \exp(-\mathrm{i}xy)\, dy\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-n} \left|\left(1+|x|^2\right)^n \partial^\alpha \left(x^\beta f(x)\right)\right| \, dx\,.$$

دا چې $\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-n} \, dx < \infty$ دی، نو کيدی شي ښئ خوا د $\mathcal{S}$ د نيم نظم له لارې اټکل شي.

د په څېر يا معکوس فوريي – ترانسفورميشن لپاره په ورته توګه مخ ته ځو.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن د فوريي –ترانسفورميشن

Fourier-Transformation einer temperierten Distribution

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ د فوريي –ترانسفورميشن د

$$\hat\Lambda\varphi = \Lambda\hat\varphi\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

له لارې تعريف دی او په $\mathcal{S}$ باندې يو ناپرېکيدونکی کرښيز اوپراتور تعريف دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیستریبیوشن $\hat{\Lambda}$ کېدی شي په دېرو حالتونو کې د

$$\hat{\Lambda}(y) = \Lambda_x e^{-\mathrm{i}xy}$$

له لارې وشمېرل شي. د ټولیزو تیمپریري دیتریبیوشنونو $\Lambda$ لپاره داکتمتوالی باید د یوه اپروکسیمیشن-پورسي په مرسته و ښوول شي، ځکه چې $e^{-\mathrm{i}xy}$ یو نه اجازه لرونکي ازماېښت تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د $\Lambda = \Lambda_\psi$ لپاره د $\psi \in \mathcal{S}$ سره دی

$$\Lambda\hat{\varphi} \underset{=}{} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dx\,\psi(y)\,dy$$

$$\underset{=}{} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dy\,\varphi(x)\,dx\,.$$

دویمه لیکه د $\Lambda_{\hat{\psi}}\varphi$ سره برابره ده، دا په دې معنا، چې $\hat{\Lambda}$ د $\hat{\psi}$ له لارې ایندوڅیر شوی دیستریبیوشن دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د تمپوریري دیستریبیوشنونو د فوریې – ترانسفورمیشن لپاره قواعد یا لارې

د توابعو د فوریې – ترانسفورمیشن ته ورته لاندې کټمتوالی د ګرندیو لوېدونکو ازماېښت توابعو و $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره باور لري ا و د تیپریري دیستریبیوشنونو $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- مشتقونه او ضربونه:

د یوه پولینوم $p(y) = \sum a_\alpha y^\alpha$ لپاره باور لري

$$p\widehat{(-\mathrm{i}\partial)\Lambda} = p\hat{\Lambda}\,.$$

لهدې سره دی $p(-\mathrm{i}\partial) = \sum a_\alpha (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\partial^\alpha$. په ځانګړې توکه $-\mathrm{i}\partial_\nu$ توته مشتقونه د $y_\nu$ سره ضرب په ګوته کوي( دلته دی $p(y) = y_\nu$ ).

په ورته توګه باور لري

$$\widehat{p\Lambda} = p(\mathrm{i}\partial)\hat{\Lambda}\,.$$

- Faltung: قاتونه:

$$\widehat{\Lambda \star \varphi} = \hat{\varphi}\hat{\Lambda}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیوررنر

## د ماتو نظمونو د سوبولیف-فضاګانې

Sobolev-Räume gebrochener Ordnung

د سوبولیف-فضا $H^s(\mathbb{R}^n)$ , $s \in \mathbb{R}$ د تولو تیمپیری دیستریبیوشنونو $\Lambda$ څخه جوړه ده د

$$w^s\hat{\Lambda} \in L^2(\mathbb{R}^n)\,, \quad w(y) = \left(1 + |y|^2\right)^{1/2}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره .

دا خویونه یا کرکتاریزه کونه د $H^k(\mathbb{R}^n)\ ,\ k\in\mathbb{N}_0$ تولګیز تعریف تولیز کوي، د ټولو توابعو فضا په حیث د مربع انتیګرالوړ توټه مشتقونو سره بالاخره تر نظم $k$ پورې.

د کمیز یا منفي اکسپوننت یا جګګن سره فضاوې د زیاتیز یا مقبت اکسپوننت سره فضاوو دوه ګوني فضاوې دي.

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)'\ ,\quad s\geq 0\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د ښووني لپاره د $n=1$ حالت تر څېړني لاندې نیسو. تولیز حالت کېدی شي په ورته توګه تر څیرني لاندې ونیول شي او تنها تخنیکي پیچلی دی

(i)

د $k\in\mathbb{N}_0$ لپاره د تعریف سره همغږیزوالی د پلانشرل-کټمټوالي Plancherel-Identitätڅخه لاس ته را ځي

$$f, f', \ldots, f^{(k)}\in L^2 \Leftrightarrow \hat{f}, |y|\hat{f}, \ldots, |y|^k\hat{f}\in L^2\,.$$

دا چې

$$|y|^j \leq \left(1+|y|^2\right)^{k/2} \leq c\left(1+|y|^k\right)\ ,\quad y\in\mathbb{R}$$

د $j\leq k$ لپاره دی، ورته والی کرکتي کوني $\left(1+|y|^2\right)^{k/2}\hat{f}\in L^2$ ته بیایي

(ii)

د دوال فضا کرکتري کونه کیدی شي د د یوه ابسترکت د لیل سره وښوول شي. که د فوریې ترانسفورمیشن د $F$ سره په نخښه شي $w^s$ او د ضرب د $W$ سره ، نو سړی لاندې دیاګرام لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L^2 \overset{W}{\longleftarrow} \hat{H}^s \overset{F}{\longleftarrow} H^s \overset{\Lambda}{\longrightarrow} \mathbb{C}\,.$$

یو فنکشنال $\Lambda \in (H^s)'$ یو فنکشنال

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda F^{-1} W^{-1} : L^2 \to \mathbb{C}\,.$$

ایندوڅیرت کوي.

دا چې $(L^2)' = L^2$ دی سړی کړی شي$\tilde{\Lambda}$ د یوه تابع $g \in L^2$ سره
وښوول شي یا په نخښه شي

$$\tilde{\Lambda} f = \int_{\mathbb{R}} f \bar{g}\,.$$

نو د $(FF\varphi)(x) = 2\pi\varphi(-x)$ له امله لاندې باور لري

$$\hat{\Lambda}\varphi = \Lambda\hat{\varphi} = \tilde{\Lambda} W F F \varphi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi}\varphi(-x) w^s(x) \overline{g(x)}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} w^s(-x) \overline{g(-x)}\right)}_{\hat{\Lambda}(x)}\, dx$$

له دې سره غوښتونی کرکتاری کونه $\hat{\Lambda} w^{-s} \in L^2$ لاس ته راځي، ځکه چې کومپلکس
کونجوګیشن او هندارونه په انتیابیلیتي باندې کومه اغیزه نه ري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

## ترانسليشنن اينواريانت اوپراتورونه Translationsinvariante Operatoren

هر محدود كربنيز اوپراتور $L : L^2\left(\mathbb{R}^n\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ ، هغه چې له ترانسليشن سره كومتير دی ،

$$Lf(\cdot - h) = \left(Lf\right)\left(\cdot - h\right),$$

كيدی شي د يوه تيمپريري ديستريبيوشن $\Lambda$ سره د محدود فوريي – ترانسليشن سره انځور شي، دا په دې معنا، چې

$$L\varphi = \Lambda \star \varphi\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}\,,$$

او

$$\|L\| = \text{ess sup}_{y\in\mathbb{R}^n} \left|\hat{L}(y)\right|.$$

ليكونكي: هيوليگ، هيورنر

د جملې يو اړخ د پلانشيرل قضيې حخه لاس ته راځي:

$$\|\Lambda \star \varphi\|_2 = (2\pi)^{n/2}\|\hat{\Lambda}\hat{\varphi}\|_2 \le (2\pi)^{n/2}\|L\|\|\hat{\varphi}\|_2 = \|L\|\|\varphi\|_2,$$

د كوم سره چې اټكلونه خورا ښه شونې(ممكنه) ده.

ليكونكي: هيوليگ، هيورنر

د دفرنشل-اوپراتورونو لپاره بنسټيزه اوبيونه( حل)

د هر دفرنشل اوپراتور

$$L = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \partial^\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د ثابت يا تل همغه ضريب $c_\alpha$ سره يو تيمپريري بنسټيز حل شتون لري، دا په دې معنا، چې يو تيمپريري ډيستريبيوشن $\Lambda$ د لاندې سره شتون لري

$$L\Lambda = \delta\,.$$

د دفرنسيشن او قاتولو قانو سره سم ، د ټوټه دنرنشيشن مساوات يا –برابرون

$$Lu = f\,, \quad f \in \mathcal{D}\,,$$

يو حل به لاندې بڼه

$$u = \Lambda \star f$$

انځور شي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د اونيوارينت دفرنشل اوپراتر

$$L = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 1$$

لپاره تيمبيريري بنسټيز حل $\Lambda = e^{-|x|}/2$ دی، د دې لپاره چې دا وښوول شي، سړی د لاندې برابرونيا مساوات فوريې – ترانسفورمي جوړوي

$$L\Lambda = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \Lambda + \Lambda = \delta$$

او لاس ته راوړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-(\mathrm{i}y)^2\hat{\Lambda}+\hat{\Lambda}=1\,.$$

د $\hat{\Lambda}$ پسې حلونې پله مخې راکوي

$$\hat{\Lambda}=\frac{1}{1+y^2}\,,$$

کوم چې د $e^{-|x|}/2$ فوريې – ترانسفورمې په ګوته کوي.

نو د دفرنشل مساوات

$$-u''+u=\sin x$$

يو حل دی

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|}\sin(x-y)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{y}\sin(x-y)\,dy+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x-y)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x+y)\,dy+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x-y)\,dy
\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad \sin x \int_0^\infty e^{-y} \cos y \, dy = \frac{\sin x}{2} \, .$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

## د لاپلاس - اوپراتور بنسټيزه اوبيونه( حل)

Fundamentallösung des Laplace-Operators

د لاپلاس - اوپراتور

$$\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$$

په $\mathbb{R}^n$ کې لاندې بنسټيز حل لري

$$\frac{1}{(2-n)c_n} \, |x|^{2-n} \, , \quad n \geq 3 \, ,$$

د $c_n$ سره د يوونسفر(واحد سفر) د $(n-1)$ - بعديز ډکې يا حجم.

د $n = 2$ لپاره

$$\frac{1}{2\pi} \, \ln |x|$$

يو بنسټيز حل دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د ښوونې لپاره سړی د $\Delta\varphi = \Delta|x|^{2-n}$ له لارې منځ ته راغلی فنکشنال $\Lambda$ اغيزه په يوه ازماېښت تابع $f \in C_0^\infty$ باندې تر څېړنې لاندې نيسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda f = \int\limits_{R^n} \varphi \Delta f \, .$$

که د انتیګریشن ورشو د غونډاري پوښ $K_{\varepsilon,R}$ له لارې اپروکسیمي کړو د د دننئ
وړانګې $\varepsilon$ او دباندنۍ وړانګې $R$ سره، نو د ګرین Greenد دویم انتیګرال فورم یا بڼې
له مخې باور لري

$$\int\limits_{K_{\varepsilon,R}} \varphi \Delta f = \int\limits_{\partial K_{\varepsilon,R}} \varphi \partial_\perp f - \int\limits_{\partial K_{\varepsilon,R}} f \partial_\perp \varphi + \int\limits_{K_{\varepsilon,R}} f \Delta \varphi \, ,$$

د $\partial_\perp$ د نورمال مشتق سره. له دې سره پهښنی اړخخ دریم انتیګرال ورکیږي، ځکه چې
$\Delta\varphi = 0$ د $x \neq 0$ لپاره دی. لومړیو دواړو انتیګراله ونو ته فقط دننئ ژی تر
څېړنې لاندې نیسو، ځکه چې $f$ محدود وړونکی لري او د پوره لوی $R$ لپاره د خپلو
ټولو مشتقونو سره ورکیږي.

که سرې پولار یا قطبي کواوردینات $x = rx^\circ \, , \, r \in [0, \infty) \, , \, x^\circ \in S_n$ وکاروي، د
کومو سره چې $S_n$ $(n-1)$ -بعدیز یوونسفر په ګوته کوي، نو دی

$$\int\limits_{K_\varepsilon} \varphi \Delta f dx \; = \; - \int\limits_{S_n} \varepsilon^{2-n} (\text{grad}\, f)(\varepsilon x^\circ) \cdot x^\circ \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$+ \int\limits_{S_n} f(\varepsilon x^\circ)(2-n)\varepsilon^{1-n} x^\circ \cdot x^\circ \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$= \; -\varepsilon \int\limits_{S_n} (\text{grad}\, f)(\varepsilon x^\circ) \cdot x^\circ dS_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$+(2-n)\int_{S_n} f(\varepsilon x^\circ)dS_n\,.$$

دا لومړی انتیګرال د $\varepsilon$ سره د صفر په لور هڅیږي، ځکه چې $\operatorname{grad} f$ محدود دی، اودویم انتیګرال د $n \neq 2$ لپاره ارزښت $(2-n)\operatorname{vol}(S_n)f(0)$ راکوي. له دې سره دی

$$\frac{1}{(2-n)c_n}\Lambda f = f(0) = \delta f\,.$$

د $n = 2$ لپاره کیدی شیپه ورته توګه مخ ته لاړ شو، له دې سره دی

$$\operatorname{grad}(\ln r) = \frac{x^\circ}{r}\,, \quad r \neq 0\,,$$

$$\Delta(\ln r) = 0\,, \quad r \neq 0\,,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln\varepsilon = 0\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

،،له هر څه ستونځمن یو څه ته نیت اوملا راتړل دي(ژباړی)،،.

(c) ketabton.com: The Digital Library

# د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

*Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, Dissertation at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

*<u>2000 Bonn (Germany):</u>*

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

*<u>2003 Bonn (Germany):</u>*

څلورم: ځمککچپوهنه( هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

*<u>2003 Bonn (Germany):</u>*

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

*2003 Bonn (Germany):*

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

*2003 Bonn (Germany):*

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

*2003 Bonn (Germany):*

اتم: دفرنځیال برابرون ( دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

*Bonn (Germany): 2003*

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

*Mathematical Formulas*

*2003 Bonn (Germany):*

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په الماان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپېدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

(c) ketabton.com: The Digital Library

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

٣ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ١

٧ – اناليزې ٢

٨ – کرښيز الجبر

٩ - د شميرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولگه

١١ – فنکشنل اناليز

١٢ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

١٣ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

١۴ – Georg Gutenbrunner گڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما لیکنې

*Bonn (Germany):*

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ  د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک  او اقتصاد لپاره ، همداسې  د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - څمککچپوهنه  ( هندسه)  دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ -  ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند ( منطق ریاضي)

۲۰ -  د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲-   داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انټیګرال شمیرنو ته

تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۶ - د زړه له کومې( دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

**Get more e-books from www.ketabton.com**
**Ketabton.com: The Digital Library**