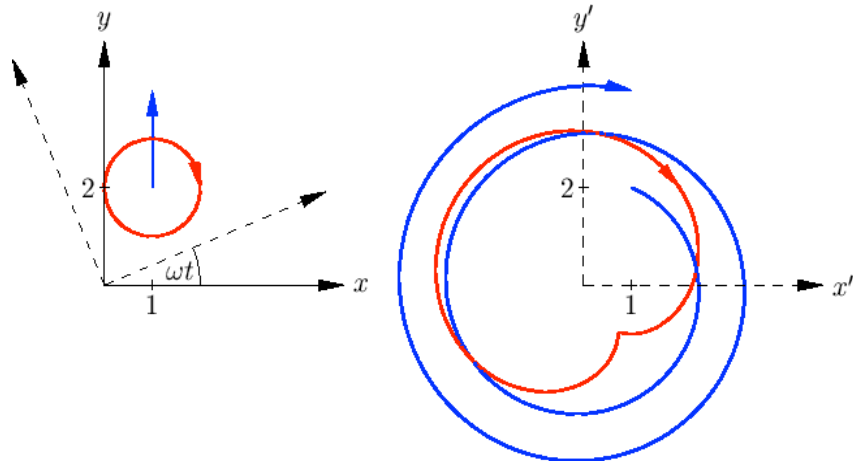
# وکتورشمیرنه




Ketabton.com

ډاکتر ماخان شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library


وکتورشمیرنه ۱

په هواره(سطح) او هوا( فضا) کې ۱

پیکسل – یا د چوخونې کواودینات ۲

د غونداري (غونډوسکي) یا کرې کواوردینات ۲

په کارتیزي کواوردینات کې ټکي ۴

د اوږدوالي – او سور درجې ۴

توته – یا استوانه کواوردیناتونه ۶

سیګنوم ( لاتین : Signum نخښه) فنکشن ... ۷

وړل ( سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) .... ۸

ځرخون Rotation ۹

ځرخنده یا ځرخیدونی نسبي سیستم : ۱۱

وکتورونه په فضا کې ۱۳

د وکتورونو جمعه(زیاتون) ۱۴

سکالار ضرب ۱۶

د اړخنیمیو غوځټکي ۱۷

(مطلق) ارزښت ۱۸

دربګوډیز ( مثلثاتي) نامساوات ۱۸

د شمیرنې قوانین ۱۹

**له باد را پیداشوې د لویو اوبو یا بحر ...** ۱۹

کونج یا زاویه ۲۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

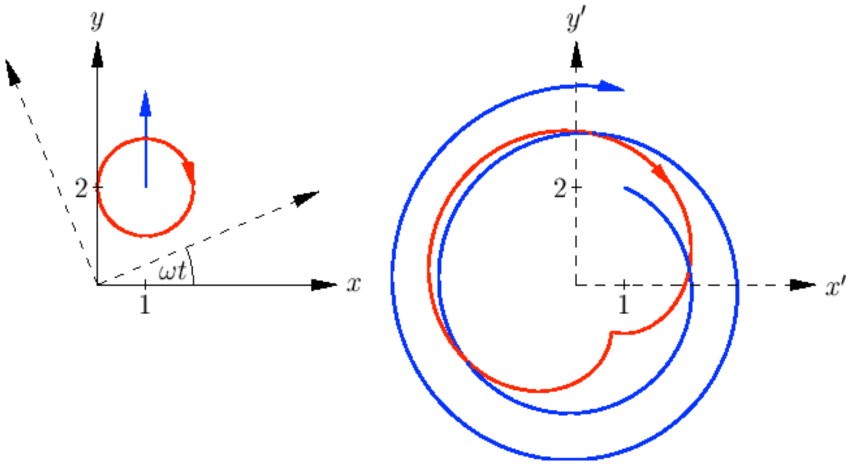

| | |
|---|---|
| د کوساین جمله | ۲۲ |
| اورتوګونال یا یو په بل ولاړ(عمودي) بنستونه | ۲۶ |
| وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب | ۳۰ |
| د لورنڅ زور Lorentzkraft | ۳۴ |
| د ایپسیلون – تنزور | ۳۷ |
| شپات ضرب | ۳۸ |
| د یوه څلور سطحیز د ډکي(حجم) شمیرنه | ۳۹ |
| د غبرګسطحیز یا ذوذنقي خویونه | ۴۱ |
| د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ ......... | ۴۲ |
| ټکي – لور – بڼه | ۴۳ |
| دوه – ټکي – بڼه | ۴۵ |
| لحضوي – یا سترګورپ بڼه | ۴۶ |
| د ټکي –کربښي واټن | ۴۸ |
| د دوه کربښو واټن | ۵۱ |
| د الوتنې لارې | ۵۳ |
| د یوې سطحې پارامتریکي انځورونه | ۵۵ |
| د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه | ۵۷ |
| د یوې سطحې د هیسې -نورمال بڼه | ۵۸ |
| د سطحو انځورونو ترمنځ ... | ۶۰ |
| د ټکي – سطحې واټن | ۶۲ |

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع ۶۵
هګۍ (بيضوي) Ellipse ۶۸
د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) ۷۱
پارابول Parabe ۷۲
د ساتلايت تلوېزيون Satelliten-TV ۷۳
های پاربول Hyperbel ۷۴
ناويګيشنNavigation ۷۷
د ډاکتر ماخان شينواري چاپ وي کتابونه ۷۹
د ليکونکی ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

# وکتورشمیرنه




## د شمیرپوهنې نړیوال جال څخه په مننه

ژباړې: ډاکتر ماخان شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library


وکتورشمیرنه ۱

په هواره(سطح) او هوا( فضا) کې ۱

پیکسل – یا د چوخوني کواودینات ۲

د غونداري (غوندوسکي) یا کرې کواوردینات ۲

په کارتیزي کواوردینات کې ټکي ۴

د اوږدوالي – او سور درجې ۴

توته – یا استوانه کواوردیناتونه ۶

سیګنوم ( لاتین : Signum نخښه) فنکشن ... ۷

وړل ( سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) .... ۸

څرخون Rotation ۹

څرخنده یا څرخیدونی نسبي سیستم : ۱۱

وکتورونه په فضا کې ۱۳

د وکتورونو جمعه(زیاتون) ۱۴

سکالار ضرب ۱۶

د اړخنیمیو غوځټکي ۱۷

(مطلق) ارزښت ۱۸

دریګوډیز ( مثلثاتي) نامساوات ۱۸

د شمیرني قوانین ۱۹

**له باد را پیداشوې د لویو اوبو یا بحر ...** **۱۹**

کونج یا زاویه ۲۱

(c) ketabton.com: The Digital Library


د كوساين جمله ۲۲

اورتوگونال يا يو په بل ولاړ(عمودي) بنستونه ۲۶

وكتوري ضرب ، صليبي يا چليپا ضرب ۳۰

د لورنڅ زور Lorentzkraft ۳۴

د اپيسيلون – تنزور ۳۷

شپات ضرب ۳۸

د يوه ځلور سطحيز د ډكي(حجم) شميرنه ۳۹

د غبرگسطحيز يا ذوذنقي خويونه ۴۱

د كواورديناتونو يا پروت ولاړ ......... ۴۲

ټكي – لور – بڼه ۴۳

دوه – ټكي – بڼه ۴۵

لحضوي – يا سترگورپ بڼه ۴۶

د ټكي –كربښي واټن ۴۸

د دوه كربښو واټن ۵۱

د الوتني لارې ۵۳

د يوې سطحې پارامتريكي انځورونه ۵۵

د يوې سطحې درې-ټكي-بڼه ۵۷

د يوې سطحې د هيسې -نورمال بڼه ۵۸

د سطحو انځورونو ترمنځ ... ۶۰

د ټكي – سطحې واټن ۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

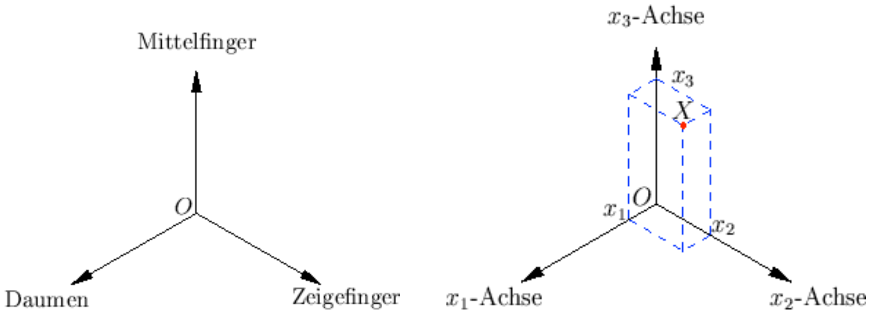
د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع ۶۵
هګۍ (بیضوي) Ellipse ۶۸
د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) ۷۱
پارابول Parabe ۷۲
د ساتلایت تلوېزیون Satelliten-TV ۷۳
های پاربول Hyperbel ۷۴
ناویګیشنNavigation ۷۷
د ډاکتر ماخان شینواري چاپ وي کتابونه ۷۹
د لیکونکی ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

# وکتورشميرنه

په هواره(سطح) اوهوا( فضا) کې کارتيزي - يا پروت ولاړسيستم

يو فضايي کواوردیناتسیستم له درې په سرچينيز ټکي O کې يو په بل ولاړو ګڼونکرښو( محورونو) څخه جوړ دی، چې لوريزوالی يې د څيرې له مخې،، د ښي لاس قاعدې،، سره سم ټاکل شوی دی.




يو ټکی $X$ د کواوردیناتو $x_i$ سره په نخښه شوی په محورونو د پرپوستون ارزښت سره سم کره کيدی شي. $X = (x_1, x_2, x_3)$. که ايندکس يا پيژندنخښه ونه کارول شي،نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

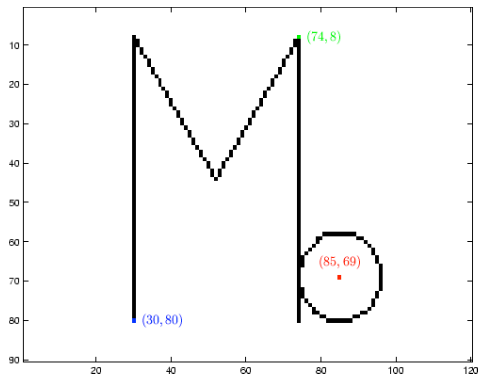
کواوردینات په ورسره بلد ډول د $(x, y, z)$ او ګنونمخور د $x$ ,-$y$- او $z$ - محور په

نخښنه کیږي.

په ورته توګه د هوارې کارتیزي کواوردیناتسیستم پیژنو یا تعریفوو.

## پیکسل – یا د چوخونې کواودینات Pixelkoordinaten

په یوه ګرافیکي کړکۍ کې شیان د پیکسل- چوخونوکواودینات (Pixel خورا کوچني ځیره شوي ټکي) له لارې ورکول کیږي.. دا انځور شوی ولاړګوډیز یوه کړکۍ ده د $90 \times 120$ چوخونو سره او د رنګه چوخونو کواوردینات پروت دی د ځیرې ګوډ په ګوته کوي .

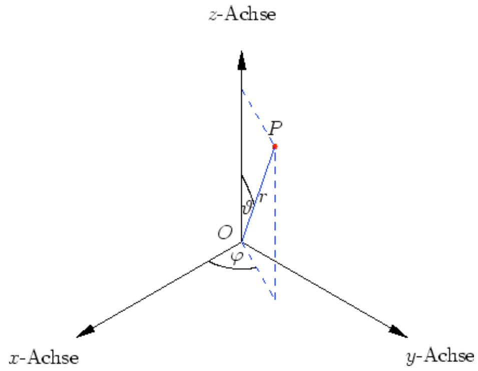



## د غونډاري (غونډوسکې) یا کرې کواوردینات

یو ټکی $P = (x, y, z)$ کیدی شي د سرچینې سره د واټن $r = |\overline{OP}|$ ، د کونج $\varphi$ د $x$ - محور او د هغه پرېوستون $\overline{OP}$ په $xy$ - هواره او کونج $\vartheta \in [0, \pi]$ د $\overline{OP}$ او $z$ - محور ترمنځ له لارې انځوربدلی شي. کونج $\varphi$ ټیک تر د $2\pi$

(c) ketabton.com: The Digital Library

زياتځلي پورې ټاکلکيدی شي. د ستاندارد په څير په $\varphi \in (-\pi, \pi]$ پرېکړه کيدی شي يا منل کېدی شي. (په لاندې او نورو ځايونو کې: محور =Achse)




باور لري:

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y = r\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = r\cos\vartheta$$

همداسې

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad \vartheta = \arccos(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

د کوم سره چې د $x, y$ او $z$ نيوني سره سم د ارکوستانجنت يوه مناسبه څانګه د ټاکلو وي.

د اصلي څانګې- کونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, & \text{für } x > 0, \\ \operatorname{sign}(y)\pi/2, & \text{für } x = 0, \\ \varphi_H + \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \varphi_H - \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y < 0. \end{cases}$$

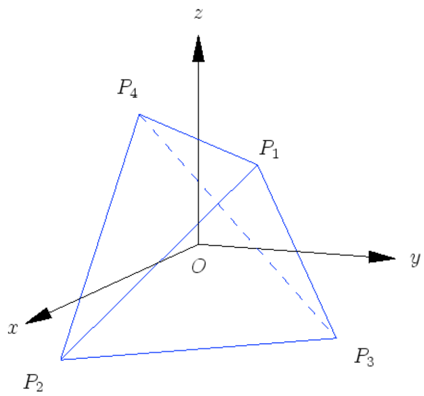
ليکونکي:اپ، هوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

## په کارتیزي کواوردینات کې ټکي

$$P_1 = (1,1,1), \quad P_2 = (1,-1,-1), \quad P_3 = (-1,1,-1), \quad P_4 = (-1,-1,1)$$

د منظم تیترااېدر کونجونه جوړوي د اړخ اوږدوالي $2\sqrt{2}$ سره او په $O$ کې د درونډ ټکي سره




په غونډاري کواوردینات $(r,\vartheta,\varphi)$ کې ګوډټکي یا کونج- لاندې کواوردینات لري

$$P_1' = (\sqrt{3}, \psi, \pi/4), \qquad P_2' = (\sqrt{3}, \pi-\psi, -\pi/4),$$
$$P_3' = (\sqrt{3}, \pi-\psi, 3\pi/4), \qquad P_4' = (\sqrt{3}, \psi, -3\pi/4),$$

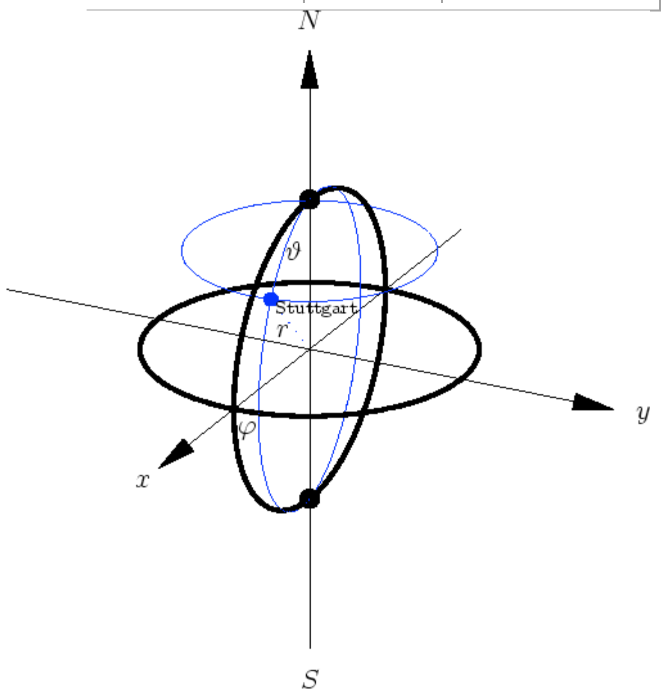
چېرته چې $\psi = \arccos(1/\sqrt{3})$ همداسې $\psi = \arctan\sqrt{2}$ دي

## د اوږدوالي – او سور درجې (طول البلد او عرض البلد؟)

په ځمکغونډاري (ځمکغونډوسکې) یا ځمکې کره باندې د اوږدوالي – او سور درجې د کرې یا غونډاري کواوردینات دي، خو یوائې بل ډول کونجورشو ګاڼي ( کونجساحې) کارول کیږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

| | | |
|---|---|---|
| ختیز اوږدوالی | 180°- 0° | $\varphi = 0 \ldots \pi$ |
| لویدیز اوږدوالی | 180°- 0° | $\varphi = 0 \ldots -\pi$ |
| شمالي سور | 90°- 0° | $\vartheta = \pi/2 \ldots 0$ |
| جنوبي سور | 90°- 0° | $\vartheta = \pi/2 \ldots \pi$ |




په خیره کې اېکواتور( سور 0° ) او صفري اوږدوالی غوږ کېنل شوي دي، شمالي قطب ( ۹۰ درجې شمالي سور) او جنوبي قطب( ۹۰ درجې جنوبي سور) هم په نخښنه شوي دي. شنه اوږدې – او سورګردی د ستوتګارت( ۹۰ درجې ختيزې اوږدوالی ، ۴۹ درجې جنوبي سور) تېرېږي

او $\varphi = \frac{1}{20}\pi$ (ختیز نیم غونډاری) او $\varphi = -\frac{19}{20}\pi$ ( لویدیز نیمغونډاری په نخښنه کوي

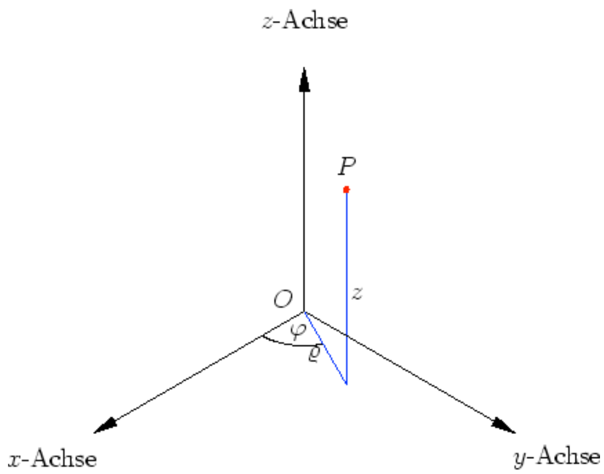
(c) ketabton.com: The Digital Library

او $\vartheta = \frac{41}{180}\pi$

## توته – یا استوانه کواوردیناتونه Zylinderkoordinaten

یو ټکی $P = (x, y, z)$ کیدی شي د یوه کونج $\varphi$ له لارې ، چې د x -مخور او د xy -هواره باندې د پریوستون ( پروجکشن) $\overline{OP}$ ترمنځ پروت دی ، پرېوستون د اوږدوالي او د z- کواوردینات له لارې وټاکل شي.

کونج $\varphi$ ټیک تر د $2\pi$ پورې ټاکلی. د ستاندارډورشو پرېکړه زیات وخت تر $\varphi \in (-\pi, \pi]$ پورې شوې.




باور لري

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z$$

همداسې

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z \,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره،چې د x او y د مخنخبني پوري اړونده د ارکوستانجنت يوه څانګه تاکل کيږي.

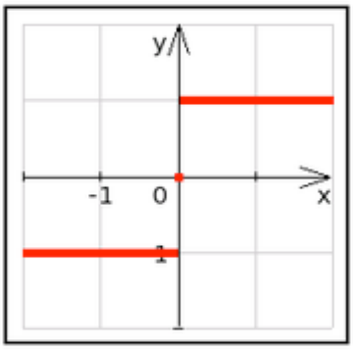
د اصليڅانګي ـکونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري:

په لاندي کي Für د ... لپاره په مانا او sign سګنوم لوستل کيږي

| | |
|---|---|
| $$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, \\ \mathrm{sign}(y)\pi/2, \\ \varphi_H + \pi, \\ \varphi_H - \pi, \end{cases}$$ | د $x > 0,$ لپاره<br>د $x = 0,$ لپاره<br>د $x < 0 \wedge y \geq 0,$ لپاره<br>د $< 0 \wedge y < 0.$ لپاره |

## سيګنوم ( لاتين : Signum نخبنه) فنکشن په رييل ګنونکربنه :

د فنکشن د مخنخبنو ګراف



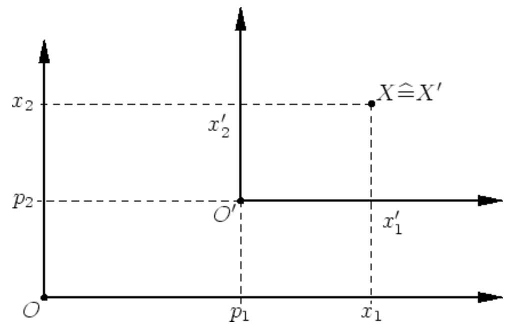

د رييل ګنونو څيره ونه ده په ډېرى {-1,0,1} کي

(c) ketabton.com: The Digital Library

## وړل ( سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) Translation

د سرچینې $O$ کشولو سره و $O' = (p_1, p_2, p_3)$ ته د برابر پاتیکیدونکي لور سره د یوه ټکي $X = (x_1, x_2, x_3)$ کواوردینات په لاندې توګه تغیر خوري

$$X' = (x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3) \,.$$




## خوزنده یا متحرک نسبي سیستم

د یوه د x -محور په لور د vچټکتیا سره ځغلنده ګاډی په هواره ( سطحه) برابرډوله خوزښت

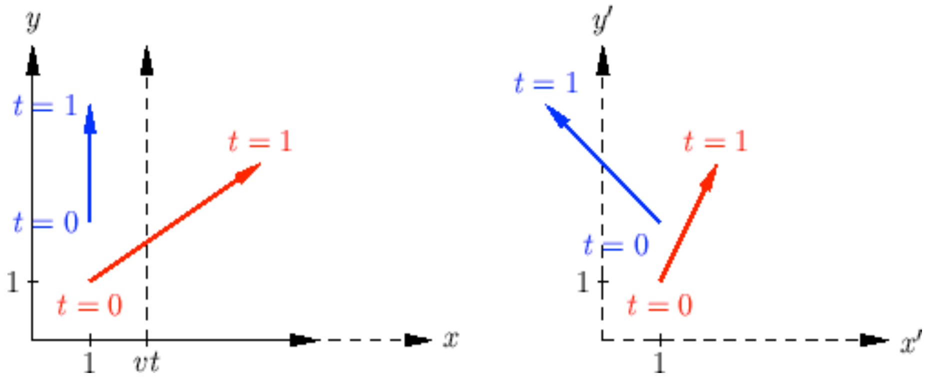
$$(x(t),\, y(t)) = (p + \alpha t,\, q + \beta t), \quad t \geq 0\,,$$

په پام کې نیسو ، نو کواوردینات یې په لاندې ډول تغیر خوري

$$x' = x - vt, \quad y' = y\,.$$

کتونکی یوه بله چټکتیا ریښتوني نیسي یا بله چټکتیا ګوري

(c) ketabton.com: The Digital Library




د بیلګي په توګه د یوه شي لپاره باور لري، چي د یوه وخت په یوون(واحد) کي د $v = 2$ لپاره له ټکي $P = (1,1)$ و ټکي $Q = (4,3)$ ته خوزي( سور غشی)

$$P' = (1,1), \quad Q' = (4-2, 3-0) = (2,3) .$$

د ریښتوني او کتونکي چټکتیا لپاره په ورته توګه باور لري

$$v_t = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}, \quad v_b = \sqrt{5};$$

له دې خوزښت څخه خوزښت بتیاوالی برېښي.

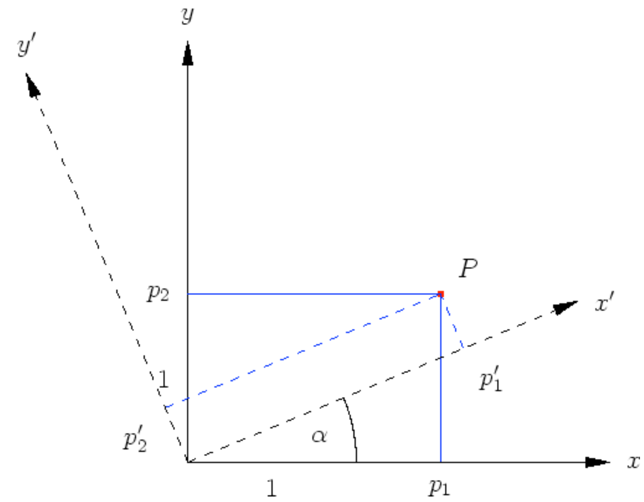
لیکونکي: اېپ، هولیګ

## څرخون Rotation

د $xy$ -هوارې یا سطحي څرخون په $z$ -محور د یوه ټکي $P = (p_1, p_2, p_3)$ کواوردینات د $\alpha$ کونج سره ترانفورمي کیږي د لاندې سره سم

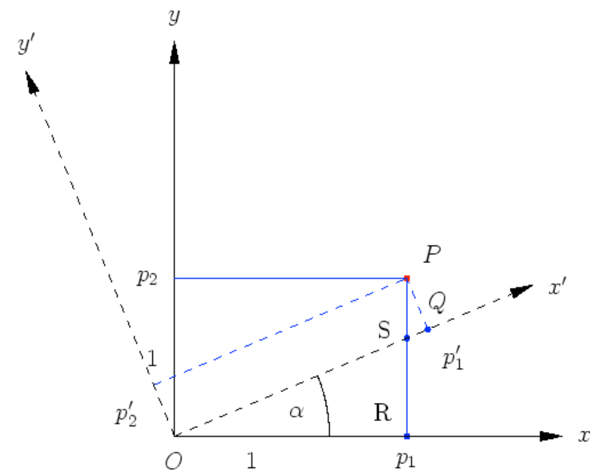
$$p_1' = \cos\alpha\, p_1 + \sin\alpha\, p_2, \quad p_2' = -\sin\alpha\, p_1 + \cos\alpha\, p_2, \quad p_3' = p_3 .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library




په ورته توګه د $yz$ - او $zx$ -هوارو خرخون لپاره فرمولونه لاس ته راخي

ليکونکي: اپپ، هوليګ




لومړی پيژنو، چي

$$\sphericalangle(S, P, Q) = \alpha\,,$$

داپه دي معنا چي ولاړکونجيز درېګودی(مثلث) $\triangle(R, O, S)$ او $\triangle(Q, P, S)$ ورته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لومړي درېګوډي کې باور لري.

$$|\overline{OS}| = p_1/\cos\alpha$$

او

$$|\overline{RS}| = p_1\tan\alpha\,.$$

له دويم درېګوډي لاس ته راځي

$$p_2' = \cos\alpha\,|\overline{PS}| = \cos\alpha\,(p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \cos\alpha\,p_2 - \sin\alpha\,p_1$$

او

$$p_1' = |\overline{OS}| + |\overline{SQ}| = p_1/\cos\alpha + \sin\alpha\,(p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \frac{1 - \sin^2\alpha}{\cos\alpha}\,p_1 + \sin\alpha\,p_2$$

ليکونکی: اپپ، هولير

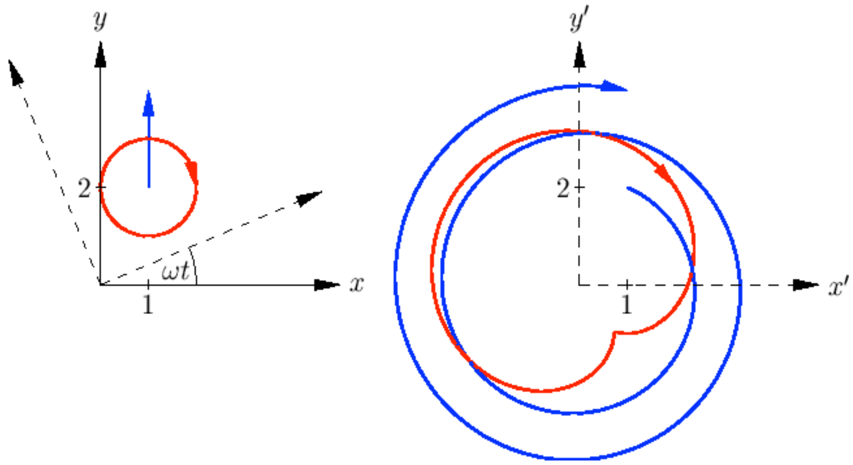
## څرخنده  يا څرخيدونی نسبي سيستم :

تابع کيږ  د د  سيده کرښيز او ګردي ډوله  خوزښتونو  د د خوزښت منحني ښايي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$G: \quad (x, y) = (1, 2 + t/(2\pi)),$$
$$K: \quad (x, y) = (1 + \cos(t), 2 - \sin(t)) .$$

ښي لور ته دواړه منحني يا کرښ ديوهکونج سره څرخيدوني نسبي سيستم انځوروي، دا په دې معنا چې داسي لکه په يوه کاروسل ( هغه څرخيدوني شيان دي، چې کسان په کې ګرځي) کې يوه کتونکي ته برېښي.




د کواوديناتو ترانفوميشن يا بدلون د سيده کرښيز خوزښت لپاره راکوي:

$$x' = c + (2 + t/(2\pi))s, \quad y' = -s + (2 + t/(2\pi))c$$

د لاندې سره

$$c = \cos(\omega t), \quad s = \sin(\omega t) .$$

يوه شپيرال منځ ته راځي، ځکه چې په نوکانو کې ضريب د جګيدونکي $t$ سره لويږي.

دا جوړشوي 2 اوړونونه وخت انتروال $0 \leq t \leq 4\pi$ په ګوته کوي.
د بدلې شوې کواودينات څخه د $\omega = 1$ سره د دايره ډوله خوزښت لپاره

$$x' = c(1 + c) + s(2 - s), \quad y' = -s(1 + c) + c(2 - s) ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

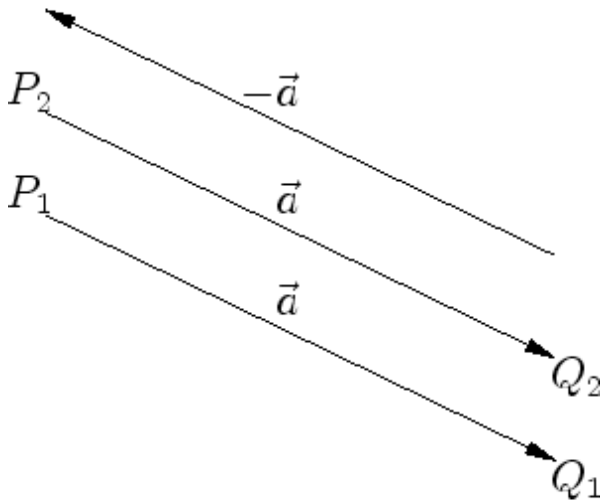
په ځرخون سیستم کې د خوزښتمنحني بڼه نه پسي ترلې پېژندل کیږي. لکه دا بېلګه چې په ګوتهکوي، کېدی شي د کتلو لور سملاسي تغیر شي. کېدی شي چې د کتلو خوزښت منحني کې ګوډ یا ماتوالی راپیداشي. په ځرخېدونکي سیستم کې په یوه داسې زینګولار ټکي کې کتونکې چټکتیا صفر ده.

## وکتورونه په فضا کې

یو وکتور یوه لوریزه ټوټه کرښه ده:

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$$

دا وکتور له ټکي $P$ څخه و ټکي $Q$ ته په نخښه کوي. یا ښايي. په بدیله توګه کیدی شي وکتور په فضا کې د $P$-راکښنې په توګه افاده شي او له یوه غشي سره په نخښه شي.




لکه د څېرې څخه چې کتل کیږي برابر اوږده غشي په همغه (برابره) لور همغه(برابر) وکتورونه $\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2}$ انځوروي.

ځانګې انځورونه نسبت و سرچیني ته ځای وکتور بلل کیږي او د وکتور کواوردیناتونه داسې تعریفوي:

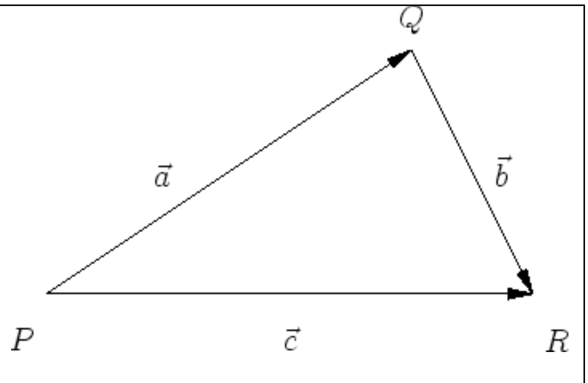
$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} .$$

د $\vec{a}$ کواوردیناتونه هم کیدی شي د د ټکو $Q$ او $P$ کواوردیناتونو په ځېر و شمیرل شي. بالاخره د

$$\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$$

سره صفروکتور په نخښه کوو.

## د وکتورونو جمعه(زیاتون):




د دوه وکتورونو جمعه د وکتورونو یو و بل ته یا یو بل پسې راکښنه ده

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} .$$

د کواوردیناتونو یا محورونو لپاره دا دي:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} .$$

د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$$

سره و $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ته مخامخ يا په څټ( برعکس) راکښنه $-\vec{a}$ په نخښه کيږي. په ځانګړې توګه باور لري

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

(ليکونکي: هوليګ، موخ)

د ټکو

$$P = (1,1,1), \quad Q = (4,2,7), \quad R = (1,4,3)$$

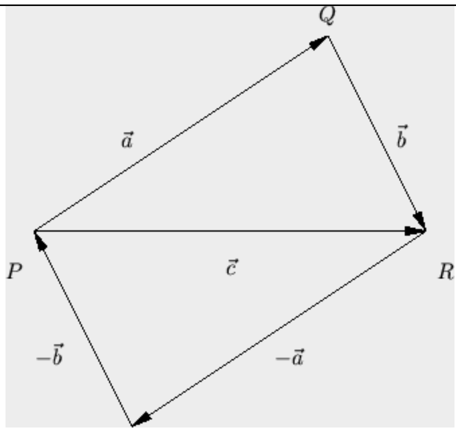
لپاره وکتورونه

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$$

او

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} + \left(-\overrightarrow{QR}\right)$$

شميرلکيږي




لکه په څېره کې چې کښل شوي د کواورد يناتو لپاره باور لري:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-1 \\ 7-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 4-2 \\ 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-4 \\ 7-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 1-2 \\ 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$= \quad -\vec{c}$

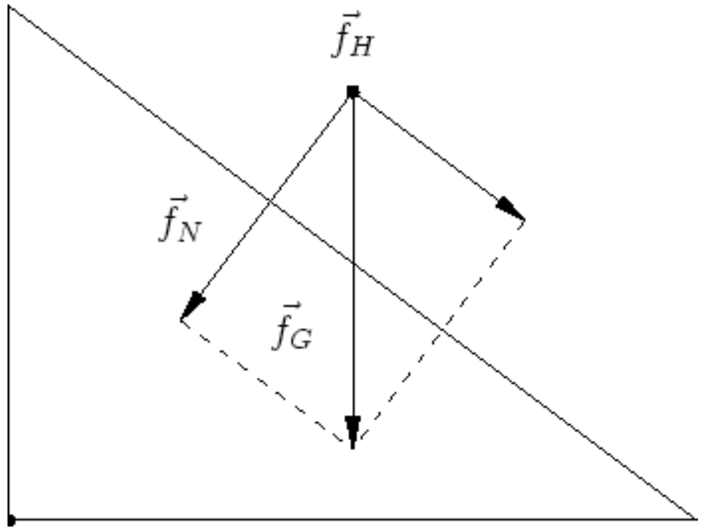
(ليکونکي: هوليګ، موخ)

د يوې کږې سطحې ( هوارې) لاندې داسې يوه سطحه پوهيږو، چې د پروتوالي لور ته ميلان ولري.

لکه څنګه چې په څيره کې ليدل کيږي، کيدی شي د وزن زور $\vec{f}_G$ په دوه يو بل سره ولاړو يا عمود بوخو يا کمپوننتونو ټوټه شي( د زور ټوټه کونه د د دوه زور غبرګ اړخيزې( مواز ی الاضلاع) سره) .

$$\vec{f}_G = \vec{f}_N + \vec{f}_H\,.$$

مايلې سطحې سره عمود عمودي زور( ولاړ زور) اغيزه لري. او ميلې هوارې سره غرګ کښته لور ته لوريزه بيره ييزه زوړند زور $\vec{f}_H$ اغيزه لري.




(ليکونکي: هوليګ، موخ)

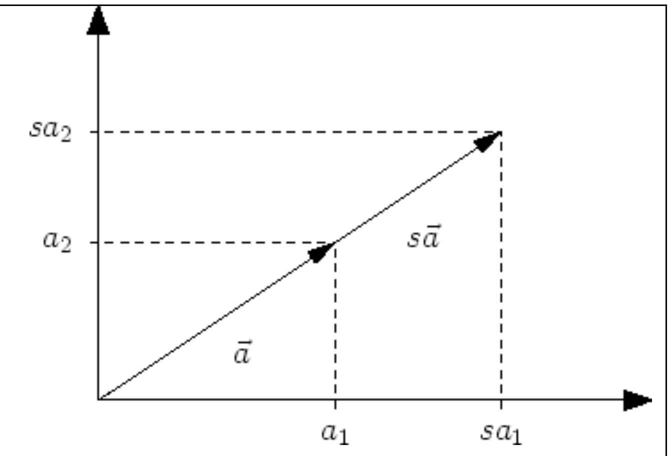
## سکالار ضرب :

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتور $s\vec{a}$ یو $s$- واره راکښنه په کوته کوي، دا په دې معنا چې

$$s\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sa_1\\sa_2\\sa_3\end{pmatrix}$$

په ځانګې توګه $0\vec{a}=\vec{0}$ دی.

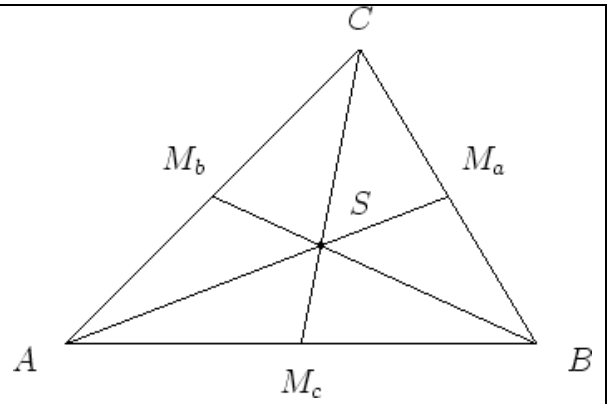



(لیکونکي هولیک، موخ)

## د اړخنیمیو غوڅېکي( نقاط تقاطع ناصف الاضلاع) :

د یوه درېګوډي(مثلث) اړخنیمۍ یو بل په دروندټکي(مرکزالثقل) $S$ کې سره غوځوي.

$$\vec{s}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\ .$$




د دې د ښوولو لپاره ځای د وکتور د اړخنیمی په ټکو لیکو $\overline{AM_a}$ په لاندې بڼه:

$$\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{m}_a-\vec{a})=\vec{a}+t\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{a}\right),\quad t\in[0,1]\ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\overline{AM_a}$ لپاره دی، نو دروند ټکی په $2:1$ نسبت وېشي

په ورته توګه اړخنیمیو $\overline{BM_b}$ او $\overline{CM_c}$ لپاره باور لري.

(لیکونکي هولیګ، موخ)

## (مطلق) ارزښت

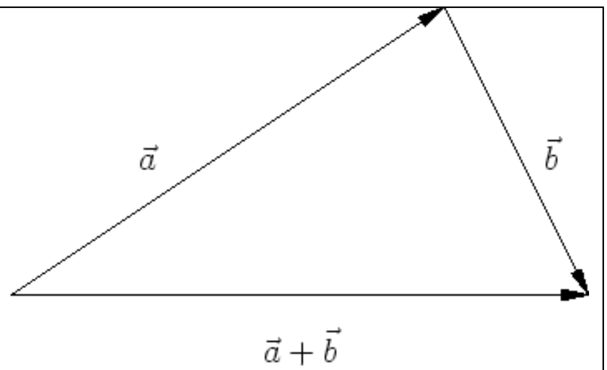
د $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ارزښت له $P$ څخه د $Q$ ته د غشي اوږدوالی دی همداسي له $O$ و $A$ ته، دا په دې معنا چې

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,.$$

په ځانګې توګه $|s\vec{a}| = |s||\vec{a}|$ دي.

یو وکتور د $1$ (مطلق) ارزښت سره یوونوکتور ( واحدوکتور) بلل کیږي.

## درېګوډیز ( مثلثاتي) نامساوات :

| | |
|---|---|
| د دوه وکتوونو د جمعې (زیاتون) لپاره باور لري<br>$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$<br>د برابروالي سره تیک هلته ، چې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ غبرګ(موازي) وي، داپه دې |  |

(c) ketabton.com: The Digital Library

| | |
|---|---|
| | معناچي $\vec{a} = s\vec{b}$ دي. |

(ليکونکي هوليک، موخ)

## د شميرنې قوانين :

د وکتورونو لپاره لاندې شمېرقوانين باور لري:

- کموتاتيو قانون Kommutativgesetz

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

- اسوشياتيو قانون Assoziativgesetz:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

- دېستريبوتيوقانون Distributivgesetz:

$$s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$$

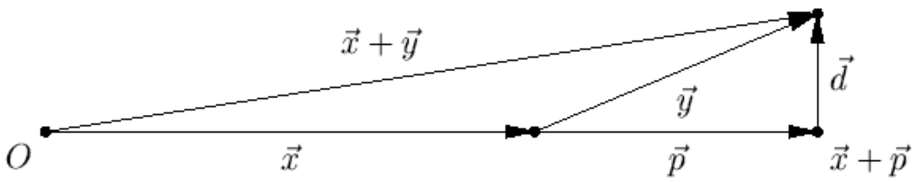
(ليکونکي هوليک، موخ)

## (له باد را پيداشوې د لويو اوبو يا بحر په سر) هواجريانات

Drift eines Flugzeugs

يوه الوتکه په $800$ km/h چټکتيا ختيز لور ته الوزي د يوه باد $50$ km/h چټکتيا سره له WSW .

(c) ketabton.com: The Digital Library




که پروت محور د ختیز سره او ولاړ محور د  شمال سره په نخښه کړښ یاوښايي، نو  له

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سره د الوتکې چټکتيا  او

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 50\cos(\pi/8) \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix}$$

د باد چټکتيا ښايي.

د يوه ساعت وروسته الوتکه  تر

$$\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} 800 + 50\cos(\pi/8) \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

پورې الوتي.  که  له $\vec{p}$ سره  په کرښه د $\vec{y}$  عمود يا orthogonale  پرېوستون  د $\vec{x}$  په لور وښايو، نو تولیزه چټکتيا  له کمپوننتو  څخه

$$\vec{x}+\vec{p} = \begin{pmatrix} 800 + 50\cos(\pi/8) \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د ختيز لور ته    او  دريفت  څخه

د شمال لورته

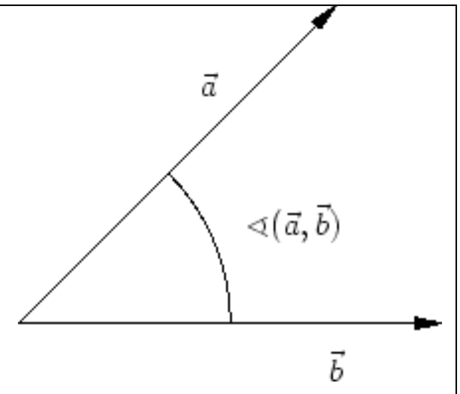
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{d}=\vec{x}+\vec{y}-(\vec{x}+\vec{p})=\begin{pmatrix}0\\ 50\sin(\pi/8)\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0\\ 19.13\end{pmatrix}$$

جوړيږي.

(ليکونکي هوليګ، اپپ)

## کونج يا زاويه :

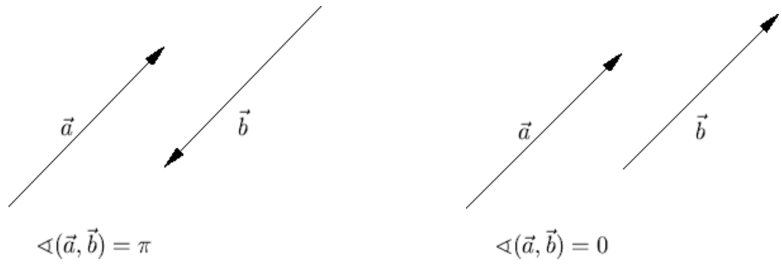
| | |
|---|---|
| د $\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$ لپاره سرى د<br>$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\in[0,\pi]$<br>د دواړو کونجونو کوچنی کونج ښايي، چې د وکتور سره په نخښنه شوي غشي سره ګډ ککرئ ټکی د رأس نقطه جوړوي. |  |



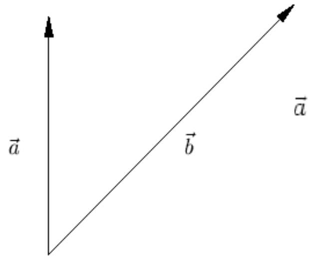
دواړه وکتورونه عمود دي، $\vec{a}\perp\vec{b}$ ، که کونج له $\pi/2$ سره برابر وي. له دې سره قراردادکيږي، چې صفروکتور په هر وکتور عمود يا ولاړ دربېدلی.

(ليکونکي هوليګ، موخ)

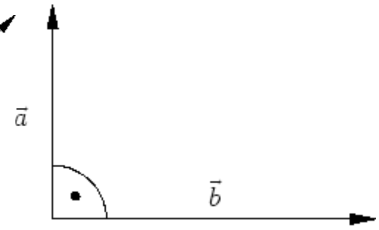
لاندې ځيرې يو څو نمونه يي حالتونه د ليد کوي.



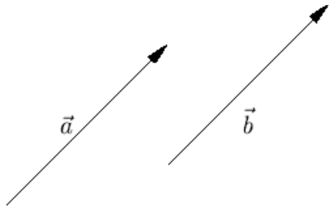
(c) ketabton.com: The Digital Library



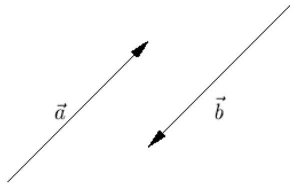

$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{4}$



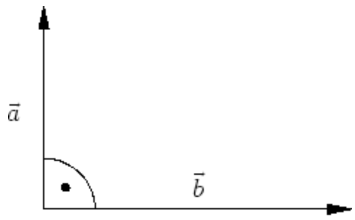

$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{2}$



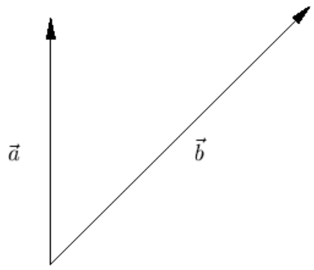

$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=0$




$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\pi$

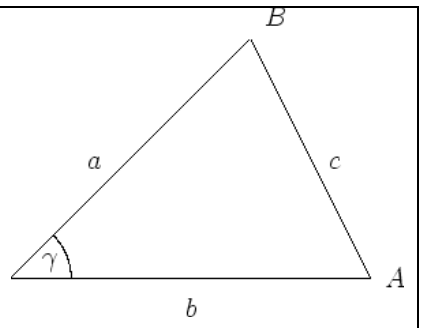



$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{2}$




$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{4}$

## د کوساین جمله :

| | |
|---|---|
| په یوه درېګوډي کې په کوم چې د اړخ $\overline{AB}$ مخامخ کونج $\gamma$ پروت دی باور لري<br>$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma\,.$ |  |

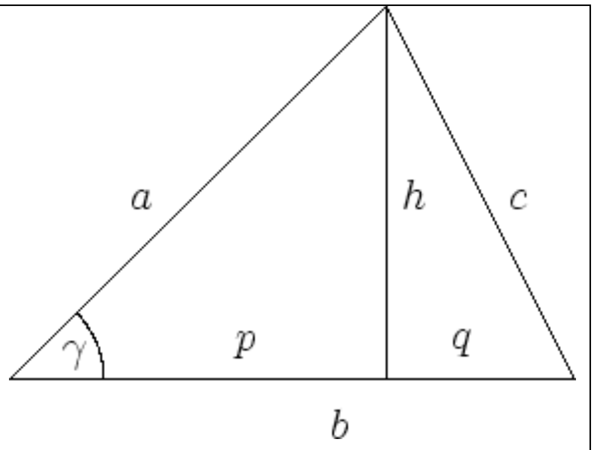
(c) ketabton.com: The Digital Library

نو په ځانګړې توکه لاس ته د $\gamma = \pi/2$ لپاره د پیتاګوراس جمله راځي:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(لیکونکي هولیګ، موخ)

د ښوونې لپاره یي د پیتاګوراس له جملې کار اخلو.

| | |
|---|---|
| باور لري<br>$c^2 = h^2 + q^2, \quad h^2 = a^2 - p^2$<br>همداسي<br>$q = b - p, \quad p = a\cos\gamma\,.$<br>له دې سره لاس ته راځي<br>$c^2 = (a^2 - p^2) + (b - p)^2$<br>$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,,$<br>څه چي د ښوولو وو.<br>(لیکونکي هولیګ، موخ) |  |

سکالار ضرب :

د دوه وکتورونو ضرب د

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

د له لارې تعریف دی

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

او

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}.$$

د سکالار صرب د کواوردینات د انځورولو له لارې  لاس ته راځي

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

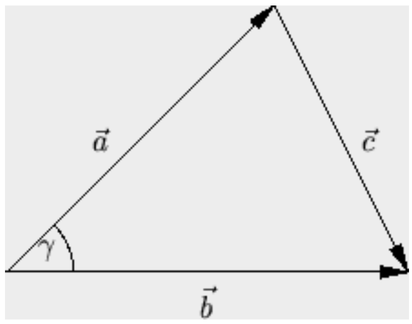
همداسې

$$\left(s\vec{a} + r\vec{b}\right) \cdot \vec{c} = s\vec{a} \cdot \vec{c} + r\vec{b} \cdot \vec{c},$$

دا په دې معناچې  د ضرب ورسره بلد قوانین باور لري.

(لیکونکي هولیک، موخ)

د دواړو ورته والیو انځورونه  د کوساین جملې له لارې  لاس ته اځي:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma\,.$$

که داړه مربع وې  کېن لور ته راوړل شي،نولاس ته راځي

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\,.$$

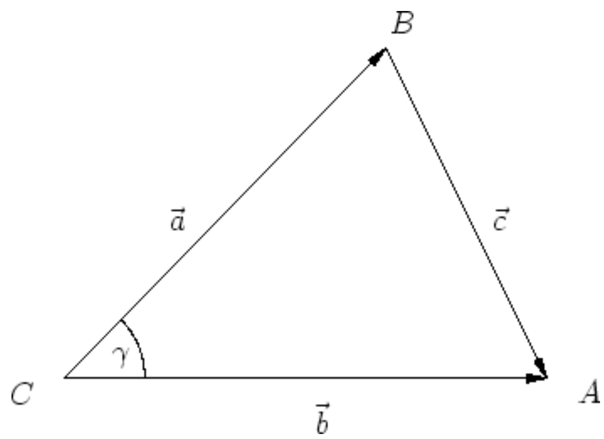
د  بدلون $c_i^2 = (b_i - a_i)^2$  څخه وروسته دواړه مربع وې یو بل  سره پورته کوي یا سره له منځه ځي، او پاتې ګډ ترمونه  د(2-)  -ځله سکالار ضرب  سره یو بل سره سر خوري.

دا څېره شوی مثلث  لاندې ګوډونه لري

$$A = (6, 0), \quad B = (4, 4), \quad C = (0, 0)$$

او دی

$$\vec{a} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$




د  $\gamma$ کونج د سکالار ضرب  په مرسته شمېرل کېدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{24}{6\sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

لاس ته راځي $\gamma = \pi/4$ ، لکه ترلې له کواوردیناتونو څخه د لیدنې دي. د دې راوړل شوې بېلګې په بنسټ کېدی شي د کوساین جمله هم وشمېرل شي. باور لري

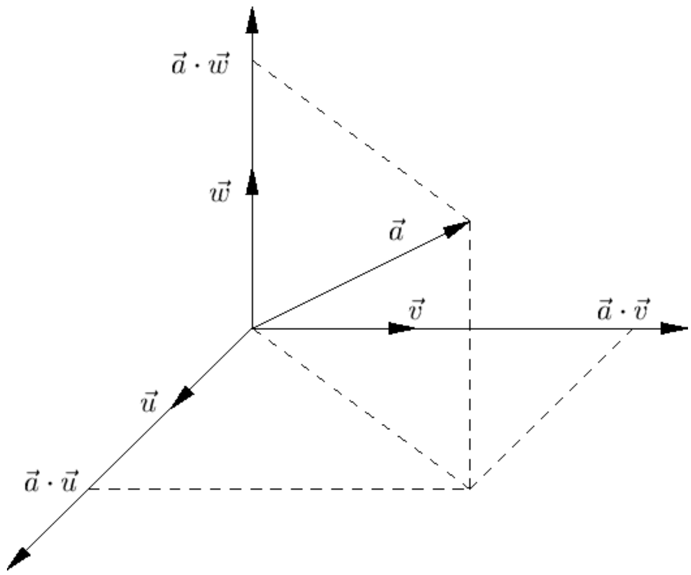
$$|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 20 - 32 - 36 = -48\,,$$

او هم د $-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma = -2\,(4\sqrt{2})\,6/\sqrt{2}$ سره توفق مومي یا سر خوري.

(لیکونکي هولیک، موخ)

## اورتوګونال یا یو په بل ولاړ(عمودي) بنسټونهOrthogonalbasis

اوروتګونال بنسټ له درې جوړه اورتوګونال وکتورونو $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ . څخه جوړ دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه په ځیره کې چې کښل شوی دی، کیدی شي هر وکتور $\vec{a}$ د کرښیز کمبینیشن

$$\vec{a} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{u})}{|\vec{u}|^2}\vec{u} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{v})}{|\vec{v}|^2}\vec{v} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{w})}{|\vec{w}|^2}\vec{w}$$

له لارې انځور شي. د زیاتوونو ( د جمعې برخو) د بنسټیزو وکتورونو تولید شوی پرېوستونونه دي، او د ضریبونو لپاره باور لري

$$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{v}|^2}{|\vec{v}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{w}|^2}{|\vec{w}|^2} = |\vec{a}|^2 .$$

که وکتورونه $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$ نورمي یعنې یو په بل ولاړ (عمود) وي، نو د اورتوګونال بنسټ ښخه غړېږو. په ځانګړې توګه لرو:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z$$

د کارتیزي کواوردینات سیتم د کانونیکي اورتوګونال بنسټ

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لپاره

(لیکونکي هولیک، موخ)

دا چې هر وکتور $\vec{a}$ د کرښیز کمبینیشن

$$\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې انځورېدلای شي، هندسي تړلی ليدل کيږي

د ضريبونو د ټاکلو لپاره د بنسټ وکتورونو سره سکالار ضرب جوړيږي . دا چې

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2} = 1, \quad \vec{v}\cdot\vec{u} = \vec{w}\cdot\vec{u} = 0\,,$$

د سکالار ضرب د کرښيزوالي له لارې لاس ته راځي :

$$\vec{a}\cdot\vec{u} = \left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\vec{u} = \alpha\,.$$

په ورته توګه د $\beta$ او $\gamma$ لپاره ورته فرمول تصديقيږي. د ضريبونو د مربع جمعې فرمول لپاره سړی د لاندې ضربولو له لارې

$$|\vec{a}|^2 = \left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right).$$

ښوول کيږي.

دا هم په ساده توګه ليدل کيږي، چې پرېوستونو ته کمښتوکتورونه

$$\vec{a} - \alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}, \quad \vec{a} - \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}, \quad \vec{a} - \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\,,$$

هر يو په اړونده بنسټ وکتور باندې عمود يا ولاړ دی:

$$\left(\vec{a} - \alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\right)\cdot\vec{u} = \left(\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\vec{u} = 0\,.$$

(ليکونکي هوليک، موخ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

نسبت اورتوګونال بنسټ ته

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

وکتورونه

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$$

لاندې ضربیونه لري.:

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ | $=$ | $\vec{a}\cdot\vec{u}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \sqrt{3}$ | $=$ | $\vec{a}\cdot\vec{v}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{6}.$ | $=$ | $\vec{a}\cdot\vec{w}$ |

له دې سره انځورونه لاس ته راځي:

$$\vec{a} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\vec{u} + \sqrt{3}\vec{v} + \frac{3}{2}\sqrt{6}\vec{w}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{2}\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

## وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب:

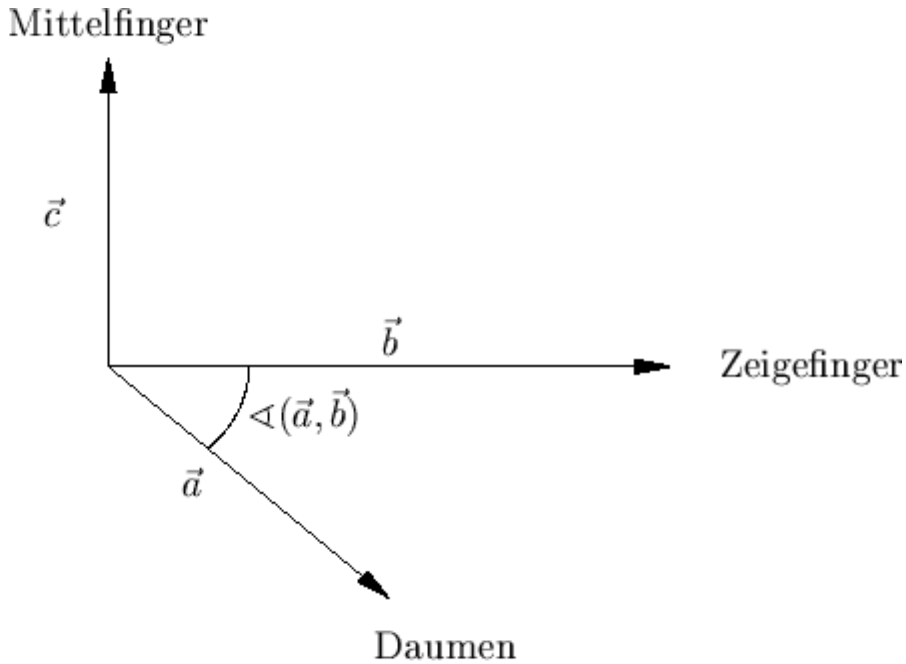
وکتور

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتوگونال دی، د ،، ښي –لاس- قانون،، لوریز دی او اوږدوالی

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))\,.$$

لري. (د خيرې د الماني پښتو: منځګوته، ګوتلکه، غټه ګوته)



(c) ketabton.com: The Digital Library

شکل کې الماني: پورته: منځګوته، ښی لور ته: نخښ ګوته، کښته لور ته غټه ګوته

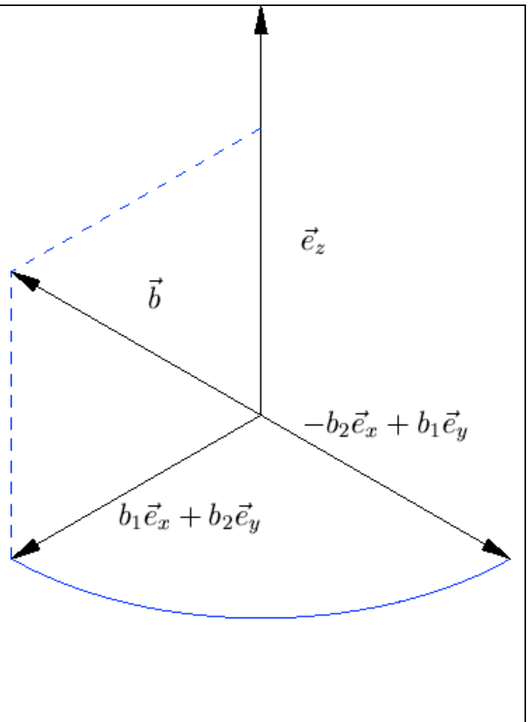
په ځانګړي توګه باور لري $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ د $\vec{a} \| \vec{b}$ لپاره او $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|$
د $\vec{a} \perp \vec{b}$ لپاره .

بدیل یې وکتور د

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

سره تعریفوي.

(لیکونکي : هولیک، ایپ)

| | |
|---|---|
| د دې لپاره چې د دواړو تعریفونو ورته والی وښايو، لومړی په پام کې نیسو، چې دواړه انځورونې په $\vec{a}$ او $\vec{b}$ کې ګرښيزې دي، دا په دې معنا چې سکالار ضرب او وکتور جمعې سره زغمورې دي. د کواوردینات انځورنې لپاره کیدی شي دا ترلې پسې وشمیرل شي. فقط زیاتونوالی)حمعه کیدنه) د هندسي تعریف لپاره ځرګنده توګه روښانه دی.<br><br>لومړی ښايو، چې .<br><br>$\vec{e}_z \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . |  |

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه له ځيری چې ليدل کيږي، وکتور ضرب لاس ته راځي، داسې چې که وکتور $\vec{b}$ په $xy$ -سطحه پرېوستل شي او بيا په کونج $\pi/2$ و ځرخول شي. دا چې د پرېوستون اودوالی

$$\left|\vec{b}\right| \sin(\sphericalangle(\vec{e}_z, \vec{b}))$$

دی، نو پورتنی فرمول لاس ته راځي.

د ځانګړې انځورونې څخه په دويمه کمپوننت کې د سيده پسې شمېرنې کرښيزوالی

لاس ته راځي، ځکه چې بې د تولیز محدوديت څخه د لومړي وکتور لور د $\vec{e}_z$ په حيث ټاکو.

په ورته توګه لومړی کمپوننت هم همداسې کاروو.

بسيا کوي، چې د $\vec{e}_x$ , $\vec{e}_y$ , $\vec{e}_z$ کانونيکي بنسټ وکتورونو کمبينيشن لپاره وراته والی و ازمايل شي.

(ليکونکي : هوليک، اپپ)

د تعريف يا پيژند د څرګندونې لپاره د وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ او $$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب $\vec{c}$ شميرل کيږي.

يو و $\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتونال وکتور دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \parallel \vec{c},$$

کوم چې همدا اوس ټیک لوریزوالی لري. له

$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

لاس ته راځي : $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi/4$ . له دې سره

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 3\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 9$$

دی او ورپسې

$$\vec{c} = \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

په بدیله توګه په ساده توګه تحلیلي تعریف

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس ته اځي

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

( لیکونکي: کلاوس، هولیګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ستاندارد بنسټ لپاره باور لري

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$
$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0}, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{0}, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}\,.$$

اړونده فرمولونه د په خوښه ، د ،،ښي-لاس-قانون،،سره سم لوریزي اورتوګونال بنسټونو لپاره باور لري.

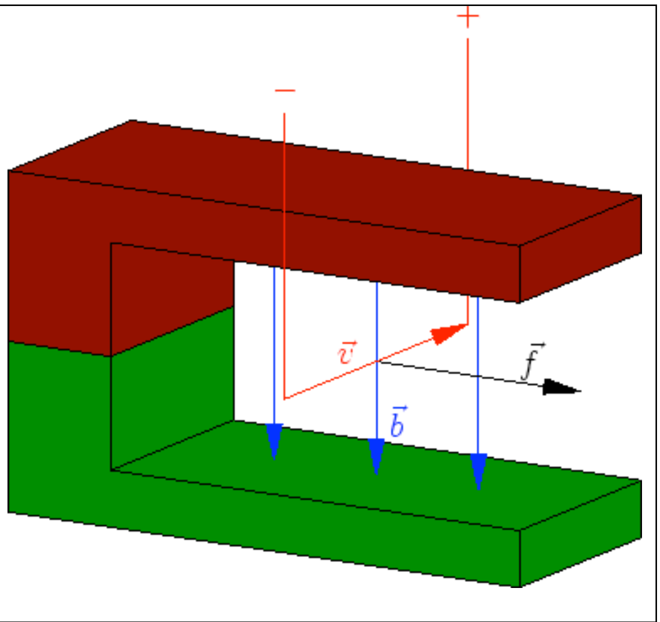
(لیکونکي : هولیک، اپپ)

د لورنځ زور Lorentzkraft

په یوه الکترون $-e$ ، چې د $\vec{v}$ چټکتیا سره په یوه مقناطیسي ورشو $\vec{b}$ کې خوزي یا حرکت کوي، د لورنځ زور اغیز لري

$$\vec{f} = e\vec{b} \times \vec{v}\,.$$

دا په دا ځیره شوي ازمایښت نظم د بریښنا جریان تیروني د $\vec{f}$ په لور لوریزه اغیزه لري..




(لیکونکي : هولیک، اپپ)

د وکتور ضرب لپاره قانونونه:

د وکتور ضرب لپاره لاندې قوانین باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- اسوڅیاتیو قانون Antisymmetrie

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$$

- کرښیزوالی Linearität

$$\left(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2\right) \times \left(\beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2\right) = \alpha_1\beta_1\left(\vec{a}_1 \times \vec{b}_1\right) + \alpha_1\beta_2\left(\vec{a}_1 \times \vec{b}_2\right) +$$

$$\alpha_2\beta_1\left(\vec{a}_2 \times \vec{b}_1\right) + \alpha_2\beta_2\left(\vec{a}_2 \times \vec{b}_2\right)$$

- غبرګاړخیز یا موازی الاظلاع د سطحي مساحت، هغه چې له وکتورونو $a$ او $b$ غزېدلي، د هغه د ضرب مطلق ارزښت دی، نو $|a \times b|.$
- د ګراسمن کټمټوالی Grassmann-Identität

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)\vec{a}$$

- د لاګرانج کټمټوالی Lagrange-Identität

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$$

(لیکونکي: اېپ،هولیګ،کیمرلې)

انتیسیومتري او کرښیزوالی د وکتورضرب د کواوردینات انځوروني څخه ترلی لیدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کټمټوالي د ښووني لپاره کيدی شي بې له ټوليزو بنديزونو $\vec{a}=\vec{e}_x$ ونيول شي او بايد په $\vec{b}$ کې د کرښيزوالي په بنسټ فقط حالتونه $\vec{b}=\vec{e}_y$ او $\vec{a}=\vec{e}_x$ وڅيړل شي، د $\vec{a}=\vec{b}$ لپاره د کټمټوالي دواړه اوخونه په ساده توګه صفر دي.

په لومړي حالت کې د کيڼ اړخ د ګاسمن کټمټوالی لاس ته راځي

$$(\vec{e}_x \times \vec{e}_y) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

دا د ښي اړخ

$$c_1\vec{e}_y - c_2\vec{e}_x$$

سره يوغږيز کيږي. په دې راوړل شوي ځانګړي حالت ( $\vec{a}=\vec{e}_x$ , $\vec{b}=\vec{e}_y$ )

کې د لاګرانژ کټمټوالی

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ c_1d_2 - c_2d_1 \end{pmatrix} = c_1d_2 - c_2d_1 \, ,$$

هم ټيک دی.

په ورته توګه د $\vec{b}=\vec{e}_z$ لپاره هم دليل راوړل کيږي.........

کرښيزوالی کيدی شي د غبرګيزوالی لپاره وکارول شي. دا لاندې يي بيلګه ده.

$$\left(3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad 6\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \quad 5\begin{pmatrix}0-2\\1-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\5\\0\end{pmatrix}$$

د ګراسمن - او لاګرانژ کتوتوالی وکتور ضرب په ساده توګه د شمیرلو سکالار ضرب ته بیرته بیایي. د بېلګې په توګه دی

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

او

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}\right)=0\cdot 6-12\cdot 1=-12.$$

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

## د ایپسیلون - تنزورEpsilon-Tensor

د $\varepsilon$–تنزور

$$\varepsilon_{i,j,k}\in\{-1,0,1\},\quad i,j,k\in\{1,2,3\}\,,$$

د دوه برابرو پیژندنخښنو ( ایندکسونو ) سره صفر دی او دوه جوړه ډوله مختلفو ایندکسونو سره لاندې ارزښت لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2,3} &= \varepsilon_{2,3,1} = \varepsilon_{3,1,2} = 1\,, \\ \varepsilon_{1,3,2} &= \varepsilon_{2,1,3} = \varepsilon_{3,2,1} = -1\,. \end{aligned}$$

نو دا د ځيکليکي پرموتيشن (ځای بدلون) لاندې اینواریانت ( تغیر نه خوړونکی) دی او د پيژندنخښنو يا ايندکسونو د بدلون سره مخنخښنه بدلوي.

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

د ــتنروز په مرسته کيدی شي د وکتور ضرب $\vec c = \vec a \times \vec b$ په لاندې بڼه وليکل شي.

$$c_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_j b_k$$

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

شپات ضرب

شپات ضرب

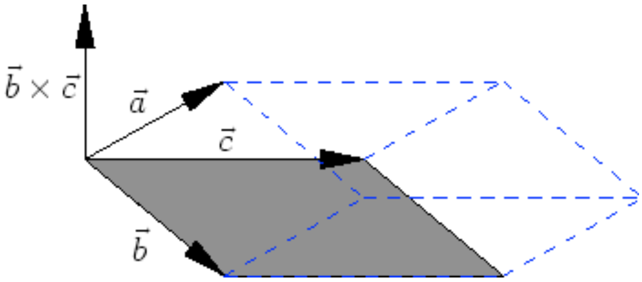
$$[\vec a, \vec b, \vec c] = \vec a \cdot (\vec b \times \vec c) =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

ترمخنخښي پورې د له درې وکتورونو $\vec c,\ \vec b,\ \vec a$ ځخه غزول شوی شپات ډکي يا حجم سره يو غبريز شي يا برابر شي.

(غبرګ سطحيز)

(c) ketabton.com: The Digital Library




د $\varepsilon-$ تنزور په مرسته کېدی شي د غبرګخوابيز يا شپاټ ضرب په لاندې بڼه هم وليکل شي:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_i b_j c_k$$

(ليکونکي: ايپ، هوليګ)

د $\vec{d} = \frac{\vec{b}\times\vec{c}}{|\vec{b}\times\vec{c}|}$ سره

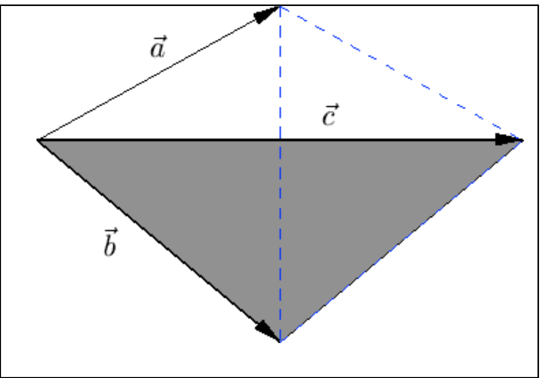
$$h = |\vec{a}| \left|\cos(\sphericalangle(\vec{a},\vec{d}))\right| = |\vec{a}\cdot\vec{d}|$$

د شپاټ يا غبرګ سطحيز جګوالی دی. دا چې $f = |\vec{b}\times\vec{c}|$ د کربنيز شوي غبرګ اړخيز د سطحې خونديونه ده، د ډکي يا حجم لپاره لاس ته راځي:

$$hf = \left|\vec{a}\cdot\left(\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{|\vec{b}\times\vec{c}|}\right)\right| |\vec{b}\times\vec{c}| = |[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]| \,.$$

د يوه څلور سطحيز (حجم) شميرنه Volumen eines Tetraeders

(c) ketabton.com: The Digital Library




د یوه درې وکتورونو $\vec{a}$, $\vec{b}$ او $\vec{c}$ څخه غزېدلی تیتراید ډکی یا حجم $V$ دی

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|\,.$$

(ليکونکي: اپيپ، هوليګ)

د یوه تیترایدر(څلور سطحیز) ډکی $V$ داسې شمیرل کیږي

$$V = \frac{1}{3}Gh\,,$$

چیرته چې $G$ بنسټ سطحه ده او $h$ جګوالی په ګوته کوي. که په بام کې ونیول شي، چې $G$ نیم دومره لوی دی، لکه د غبرګسطحیز $G_{\text{Spat}}$ سطحه، چې له درې وکتورونو غزېدلې ، نو لاس ته

$$V = \frac{1}{6}G_{\text{Spat}}h = \frac{1}{6}V_{\text{Spat}} = \frac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$$

راځي، د غبرګطحیز $V_{\text{Spat}}$ په مرسته .

(ليکونکي: اپيپ، هوليګ)

د څلور سطحیز $V$ ډکی ، چې له وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غزېدلی ، دی

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\,.$$

## د غبرگسطحیز یا ذوذنقې خویونهEigenschaften des Spatprodukts

د غبرکسطحیز ضرب په هر Argument کې کربنیز دی او سربیره پردې دا لاندې نور خویونه لري

- ځیوکلیکي – یا تل بیرته راګرځیدونی بدلون : zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

- کربنیز بلواکوالی یا تابعیت

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{0} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

د لږ ترلږه یوه سکالار $\alpha, \beta, \gamma$ سره د 0 سره نابرابر.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- لوریزونه Orientierung:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] > 0$$

د هر ښي سیستم لپاره

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

## د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ ارزښتونو شمیرنه

وکتورونه $\vec{u}$, $\vec{v}$ او $\vec{w}$ یو ریښتونی غبرګهواریز(سطحیز) غزوي، نو یو په خوښه وکتور $\vec{x}$ کیدی شي د کرښیز کمبینیشن

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

په ځیر انځور شي د لاندې ضریبونو سره:

$$\alpha = \frac{[\vec{x},\vec{v},\vec{w}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]}, \quad \beta = \frac{[\vec{x},\vec{w},\vec{u}]}{[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]}, \quad \gamma = \frac{[\vec{x},\vec{u},\vec{v}]}{[\vec{w},\vec{u},\vec{v}]}\,.$$

(لیکونکي اپپ،هولیګ)

د

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

لپاره سکالار ضرب د $\vec{v} \times \vec{w}$ سره جوړوو، نو لاس ته راځي

$$\vec{x}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) \quad = \alpha\,\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\alpha = \frac{[\vec{x},\vec{v},\vec{w}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]},$$

داچې $\vec{u}$ ,$\vec{v}$ او $\vec{w}$ یو ریښتونی غبرګسطحیز غزوي، داپه دې معنا چې $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \neq 0$ دي. د $\beta$ او $\gamma$ لپاره سړی په روته توګه مخ ته ځي.

(لیکونکي اپپ،هولیګ)

که وکتور

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د وکتورونو

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د کرښیز کمبینشن په څیر انځورول غواړو، نو لاس ته راځي

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = 2$$

$$[\vec{x},\vec{v},\vec{w}] = 4, \quad [\vec{x},\vec{w},\vec{u}] = -4, \quad [\vec{x},\vec{u},\vec{v}] = 8$$

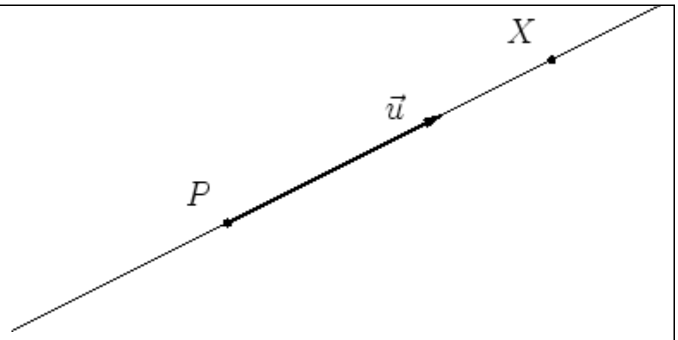
او له دې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{x} = \frac{4}{2}\vec{u} - \frac{4}{2}\vec{v} + \frac{8}{2}\vec{w}$$
$$= 2\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w}\,.$$

(ليكونكي اپپ،هوليګ)

## ټكي – لور – بڼه:

| | |
|---|---|
|  | په یوه کرښه ټکی $X$ له $P$ د $\vec{u}$ په لور کېدی شي د $\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$ سره انځور شي. |

په ورته توګه باور لري

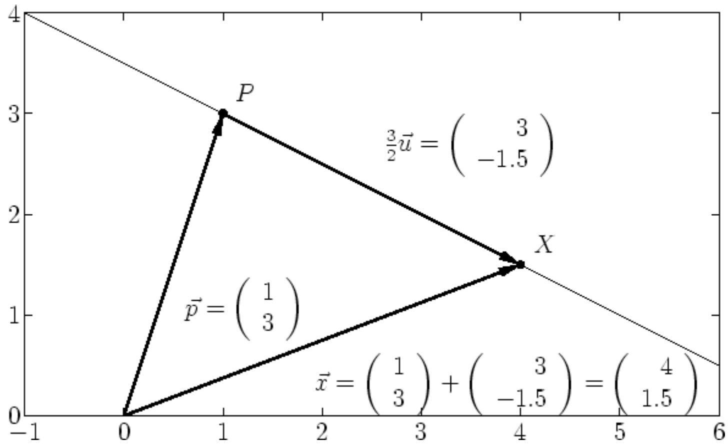
$$x_i = p_i + tu_i, \quad i = 1, 2, 3\,,$$

د ځای-وکتور $\vec{x}$ کواوردیناتو لپاره.

(ليكونكي ،هوليګ،هيورنر)

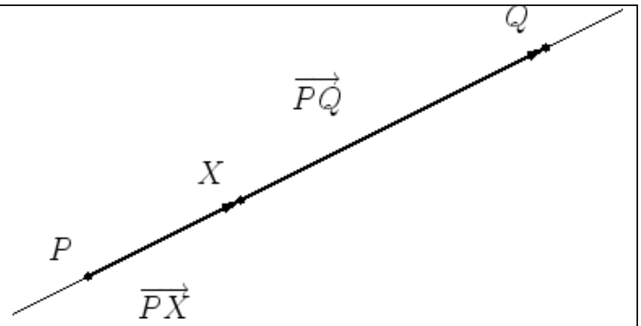
ځېره د یوې کرښې د ټکي-لور-بڼه د لیدلو کوي د په د پاسه ټکي $P = (1, 3)$ او $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ لور سره. د کرښې د $X$ ټکی پارامتر $t = 3/2$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library




(لیکونکي ،هولیګ،هیورنر)

## دوه – ټکي – بڼه :

| | |
|---|---|
|   | په یوه کرښه د $X$ ټکی چې له دوه $P \neq Q$ ټکو تیریږي کیدی شي په بڼه $\overrightarrow{PX} = t\overrightarrow{PQ}, \quad t \in \mathbb{R},$ انځور شي. د $t \in [0,1]$ پارامتر ارزښت ټوټه کرښه $\overline{PQ}$ راکوي. |

په ورته توګه

د ځای-وکتور $\vec{x}$ د کواوردینات لپاره باور لري

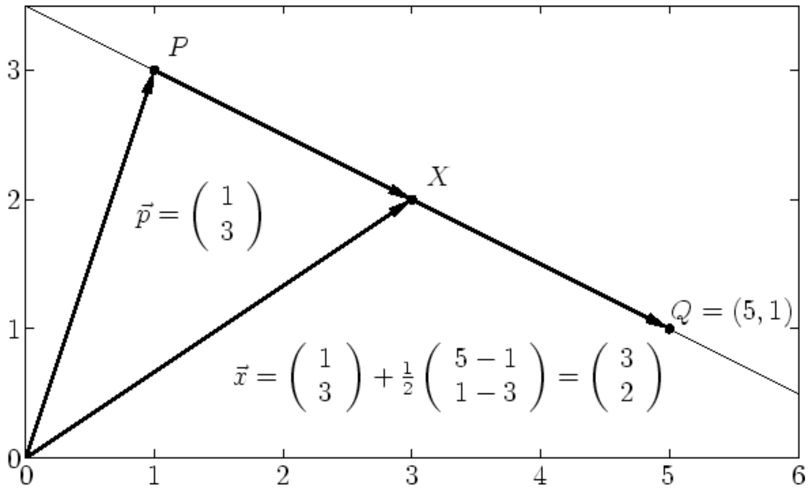
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_i = p_i + t(q_i - p_i), \quad i = 1, 2, 3\,,$$

(ليکونکي ،هوليک،هيورنر)

د $t \in [0,1]$ لپاره د دوه-ټکو-بڼې سره ټکی $X$ ټوټه کرښه $\overline{PQ}$ په $t : (1-t)$ نسبت ويشي.

په ځانګړې توګه د $P$ او $Q$ ټکو ترمنځ منځ ټکو پارامتر $t = 1/2$ په ګوته کوي.




(ليکونکي ،هوليک،هيورنر)

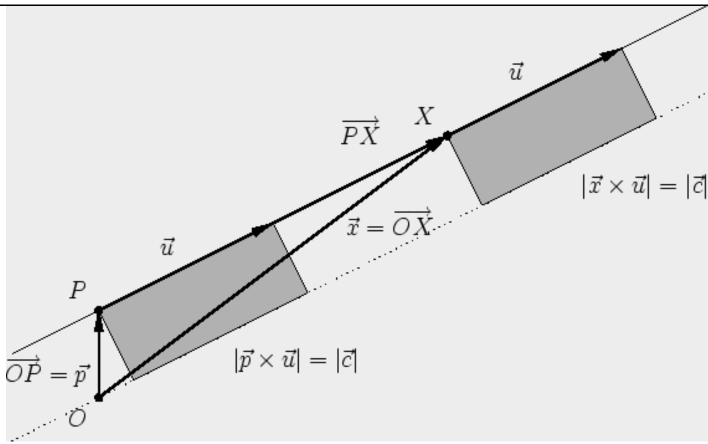
## لحضوي – يا سترګورپ بڼهMomentenform

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه کرښه د $X$ ټکی چې له دوه ټکو $P$ د $\vec{u}$ په لور تیریږي کیدی شي د

$$\overrightarrow{PX} \times \vec{u} = \vec{0}$$

په بڼه ولیکل شي.




په ورته توگه د ځایوکتور لپاره باور لري.

$$\vec{x} \times \vec{u} = \vec{c}, \quad \vec{c} = \vec{p} \times \vec{u}\,.$$

(لیکونکي ،هولیگ،هیورنر)

د یوې کرښې لحظوی ـبڼه کېدی شي استعمال شي، چې ایا یو ورکړشوی ټکی $X$ په یوه کرښه پروت دی. د دې ځیره شوې بیلګې لپاره د $X_1$ ټکي لپاره ورکوي:

$$\overrightarrow{PX_1} \times \vec{u} = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

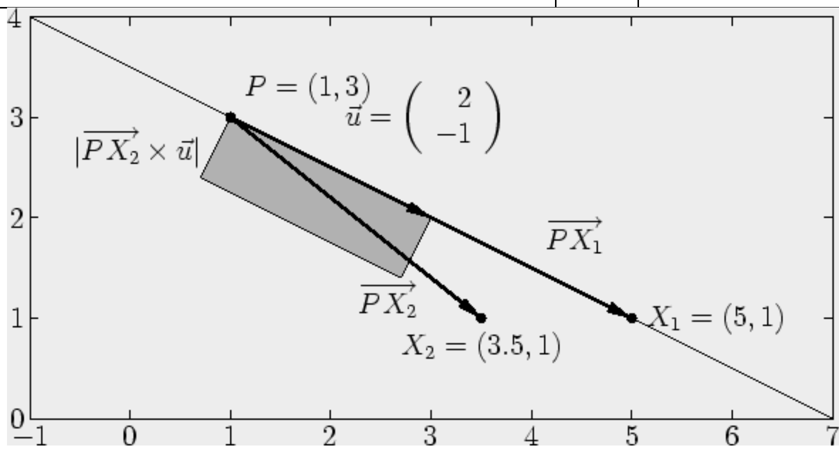
$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \vec{0}\,.$$

د دې برعکس د $X_2$ ټکي لپاره لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} 2.5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ | $=$ | $\overrightarrow{PX_2} \times \vec{u}$ |
| $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$ | $=$ | |




## د ټکي ــکرښې واټن:

په يوه کرښه  د يوه ټکي $Q$ پروجکشن(پرېوستون) $X$ چې له $P$ تيريږي د  لور سره لاندې پوره کوي

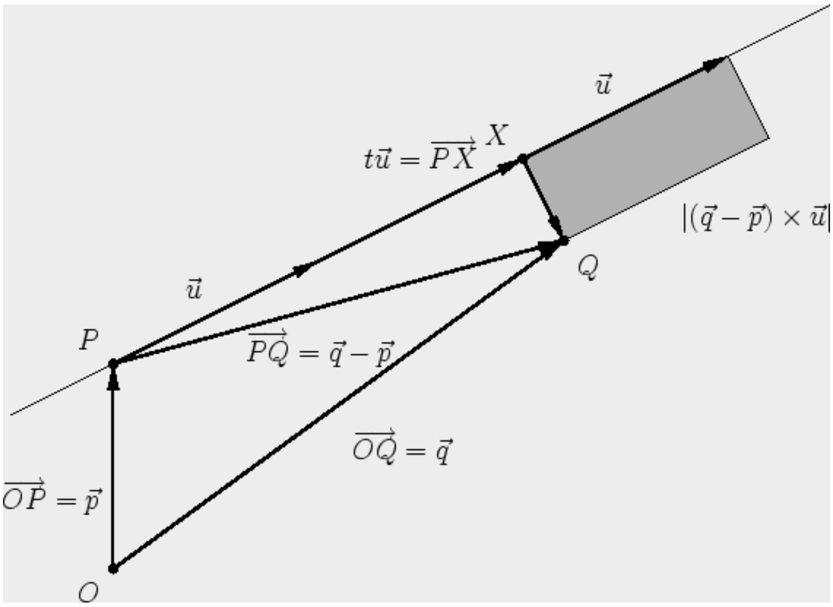
$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t = \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}.$$

له دې څخه د په حيث

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

واټن  لاس ته راځي .

(c) ketabton.com: The Digital Library




(ليکونکي ،هوليک،هيورنر)

په کرښه د ټکي $Q$ پربوستون $X$ لپاره وکتور $\overrightarrow{XQ}$ په $\vec{u}$ عمود- يا نيغ ولاړ دی.

دا د سکالا ضرب له لارې ازمايل کېدی شي:

$$\overrightarrow{XQ}\cdot\vec{u} =$$

$$\left(\vec{q}-\left(\vec{p}+\frac{(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,\vec{u}\right)\right)\cdot\vec{u} = (\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{u} - \frac{(\vec{q}-\vec{p})\,\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,|\vec{u}|^2 = 0\,.$$

د چليپا يا ومتوري ضرب تعريف له مخې باور لري

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\left(\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)$$

او له دې سره د واټن $d$ لپاره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \left|\overrightarrow{XQ}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}\right)\right) =$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{PQ}\right| \; |\vec{u}| \; \sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}\right)\right)}{|\vec{u}|}$$

$$= \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} \, .$$

(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

که ټکی $Q = (3, 3, 3)$ په کرښه پرېیستل شي

$$g : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نو د پروجکشن په حيث د ځای وکتور سره ټکی لاس ته راوړي

$$\vec{x} = \vec{p} + \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \, \vec{u} \quad =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1^2 + 1^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

واټمن

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(2+0)^2 + (0-1)^2 + (1-2)^2}{3}} = \sqrt{2},$$

د

$$\left| \overrightarrow{XQ} \right| = \sqrt{(3-3)^2 + (3-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}.$$

سره يو غږيز دی.

(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

## د دوه کرښو واټن :

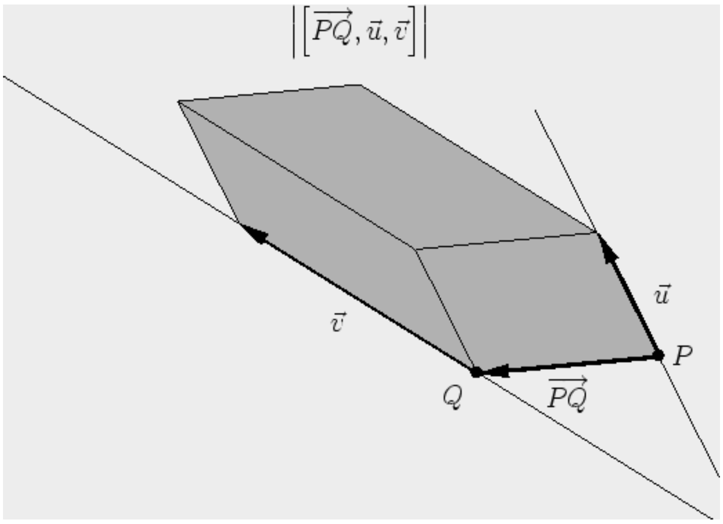
د دوه کرښو ، چې له ټکو $P$ ، $Q$ او د لورو $\vec{u}$, $\vec{v}$ سره ورکړ شوې دي واټن دی

$$d = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|},$$

که $\vec{u} \nparallel \vec{v}$ وي. د غبرګو کرښو پاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}\,.$$




دوه کرښې بادمايلې windschief بلل کيږي، که غبرګې نه وي او مثبت( زياتيز) واټن ولري..

(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

که

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u}, \quad \vec{y} = \vec{q} + t\vec{v}$$

د ټکو ځای وکتورونه وي د خورا لنډ واټن سره، نو

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}$$

دواړو لوروکتورونو سره عمود يا ولاړ دی، يعن غبرګ وه

$$\vec{c} = \vec{u} \times \vec{v}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته.

دا چې د یوه وکتور اوږدوالی د هخه مطلق ارزښت ضرب یوون (واحد)وکتور سره برابر دی لاس ته راځي:

$$d = |\overrightarrow{XY}| = \left|(\overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}) \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right| = \left|\overrightarrow{PQ} \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right| ,$$

او له دې سره غوښتونکی فرمول.

د غبرګو کرښو لپاره هغه د یوه ټکي واټن له کرښې سره فرمول و کاروي.

(لیکونکي:هولیګ، هیورنر)

کرښې

$$g : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad h : \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

دا لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\left|\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{(1-(-2))^2+(1-1)^2+((-2)-1)^2}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

## د الوتنې لارې Flugkorridore

په ساده توګه نيسو، چې الوتکه په سيده لار له الوتنځای څخه و موخې ته ا لوزي او د التنلار له سيده کرښتوتو څخه جوړه ده، نو د يوې الوتنې لپاره له شتوتګارت ( $S$ ) Stuttgart څخه و کوپنهاګن ته د جګيدنې لار

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0,8]$$

او د يوې الوتنې لپاره له فرانکفورت ( $F$ )څخه قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,3].$$

که د ساده وينا څخه مخ ته لاړشو، چې الوتکه په سيده لار د د الوتځای څخه و موخه ځای ته الوزي او د الوتنې لار له سيده کرښتوتو ځخه جوړه ده، نو د شتوتګارت $S$ څخه د کوپنهاګن ته د يوې الوتنې د جګيدنې الوتنلار ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 8]$$

او د  یوې الوتنې لپاره  له فرنکفورټ $F$ څخه و قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 3] .$$

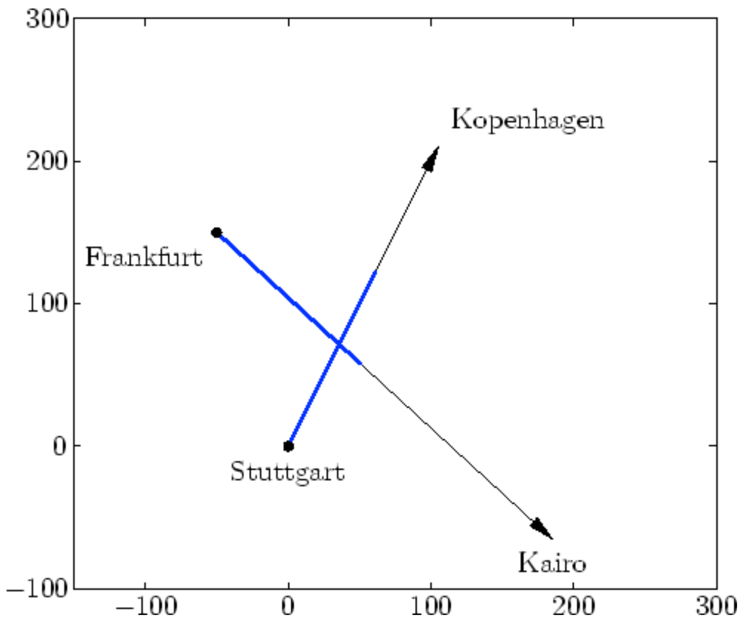
که د کواوردینات پیل  شتوتګارټ و ټاکل شي، نو کواوردیناتونه $F = (-50, 150, -1/4)$ لرو، په کیلو متر کچ شوي.

دواړه د الوتنلارې لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left| \left( \begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left( \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}$$

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 95 \\ 2 \\ -792 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{95^2 + 2^2 + 792^2}} = \frac{4252}{\sqrt{636293}} \approx 5.33 .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



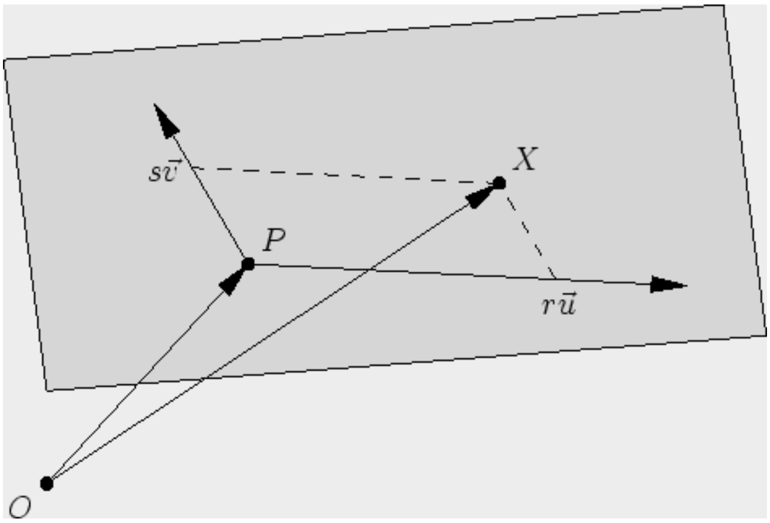

(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

د يوې سطحې پارامتريکي انځورونه Parameterdarstellung einer Ebene

له ټکي $P$ تېره ، چې له دوه نه غبرګو لورو $\vec{u}$ او $\vec{v}$ غزېدلې سطحه باندې ټکی $X$ پوره کوي

$$\overrightarrow{PX} = s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s,t \in \mathbb{R}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library




په ورته توګه د ځای وکتور $\vec{x}$ د کواوديناتو لپاره باور لري

$$x_i = p_i + su_i + tv_i, \quad i = 1,2,3\,.$$

(ليکونکي:هوليک، وايس)

يوه سطحه دې د ټکي $P=(1,2,3)$ او وکتورونو $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ سره روکړ شوې وي. نو $X=(1,1,2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{u} + (-1)\vec{v}$$

له بلې خوا $X=(0,0,0)$ په سطحه پروت نه دی، ځکه چې $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ دی او د مساوات سيستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

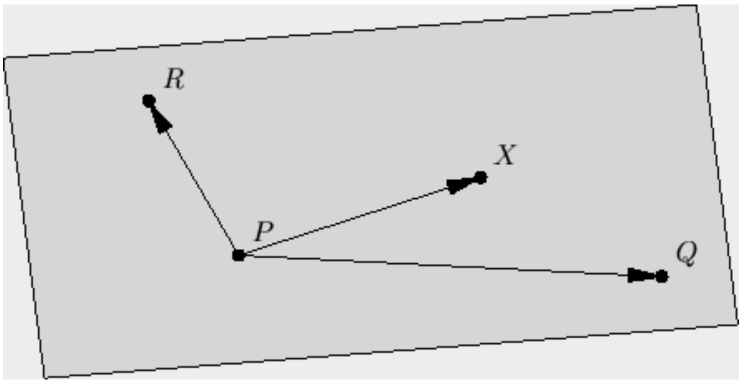
حل نه لري، که لومړۍ او دویمې  لیکې ته وګورو .

## د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه Drei-Punkte-Form einer Ebene

د ټکي $X$ لپاره چې په یوه سطحه پروت دی،کومه چې له ټکو $P$ ,$Q$ ,$R$ , تېرېږي او یو  اصلي  دربګوډی جوړوي د غبرګخوایزو ضرب ورکیږي  .

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}]=0\,.$$

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}]=0\,.$$




(لیکونکي:هولیک، وایس)

یوه سطحه دې د ټکو $P=(1,2,3)$, $Q=(3,2,3)$ او $R=(2,3,4)$ له لارې ورکړ شوې وي.

نو $X=(1,1,2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

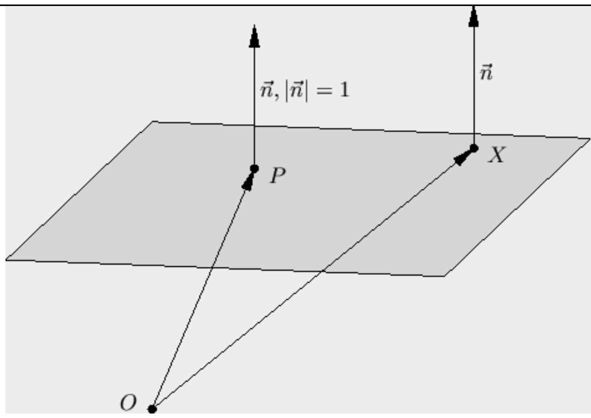
$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} = 0$$

له بلې خوا $X = (0,0,0)$ په سطحه نه دی پروت، څکه چې باور لري

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = 4-6 = -2 \neq 0$$

(لیکونکي:هولیګ، وایس)

## د یوې سطحې د هیسې -نورمال بڼه Hesse-Normalform einer Ebene

| | |
|---|---|
|   (لیکونکي:هولیګ، وایس) | په یوه سطحه د یوه ټکي $X$ ځایوکتور $\vec{x}$ په یوه سیخه په $P$ کې اورتوګونال و یوه نورمالوکتور ته پوره کوي $\vec{x}\cdot\vec{n} = d, \quad d = \vec{p}\cdot\vec{n}\,.$ په نورمال بڼه نیول کیږي چې $\lvert\vec{n}\rvert = 1$ او $d \geq 0$ . په دې حالت کې $d$ د سطحې واټن دی و سرچینې ته |

یوه سطحه $E$ دې د ټکي $P = (1,2,3)$ له لارې ورکړشوې وي او نورمي نورمال وکتور

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{n} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

دی

$$d = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = 3\,,$$

دا په دې معناچې سطحه  لاندې نورمال بڼه لري

$$E: \quad \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 3\,.$$

نو $X = (4,0,1)$ په  سطحه  پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \frac{1}{3}(8+0+1) = d\,.$$

له بلې خوا $X = (0,0,0)$ په سطحه نه دی پروت، ځکه چې پاور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = 0 \neq d\,.$$

(ليکونکي:هوليک، وايس)

## د سطحو انځورونو ترمنځ د شميرنې بدلون يا اړول

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: یوه سطحه دې د ټکي $P$ له لارې ورکړ شوې وي همداسې دوه نه غبرګ وکتورونه $\vec{u}, \vec{v}$ .

سړی نور دوه ټکي $Q$ او $R$ لاس ته راوړي، چې دا هم په سطحه پراته دي او له $P$ سره، د $\vec{q} = \vec{p} + \vec{u}, \quad \vec{r} = \vec{p} + \vec{v}$ .

له لارې کرښه نه جوړوي

د نورمالو وکتور $\vec{n}$ په $\vec{u}$ او $\vec{v}$ نیغ ولاړ دی یا نېغ عموددی، یعني $\vec{u} \times \vec{v}$ ته غبرګ دی.

له دې دا نورمي نورمالو کتور د هیسي-نورمال بڼې لپاره دی

$$\vec{n} = \sigma \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \,,$$

د له کوم سره چې مخنخښه $\sigma \in \{-1, 1\}$ داسې باید وټاکل شي، چې $d = \vec{p} \cdot \vec{n}$ مثبت (زاتیز) وي.

دویم : یوه سطحه دې د درې ټکو $Q,\ P$ او $R$ له لارې ورکړ شوې وي، چې یو اصلي درېګودی(مثلث) جوړوي.

دوه وکترونه لاس ته راځي، چې سطحه غزوي یا جوړوي د لاندې وکتورونو له لارې

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{PR} \,.$$

له دې وکتورو څخه لکه په لومړي کې کېدی شي د هېسې٠نومالبڼه لاس ته راوړل شي.

دریم : یو ه سطحه دې د یوه ټکي او یوه نورمالوکتور $\vec{n}$ له لارې ورکړ شوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه وکتورونه لاس ته راځي. چې يوه سطحه داسې و غزول شي پخ کړمه کې چې دوه کربنيز خپلواک وکتورونه چې $\vec{n}$ باندې عمود يا و لاړ وي، و پلټل شي.

$$\vec{u} = \vec{n} \times \vec{x}, \quad \vec{v} = \vec{n} \times \vec{u}\,,$$

چېرته چې$\vec{x}$ يو په خوښه وکتور $\neq \lambda\vec{n}$ دی.

له دې وکتورونو څخه کېدی شي، لکه په لومړي کې دې-ټکي-بڼه لاس ته راوړای شي.

(ليکونکي:هوليګ، وايس)

لاندې ټکي دې ورکړ شوي وي

$$P = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

له دې څخه شميرو

$$\vec{u} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \vec{PR} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د هېسې –نورمال بڼې لپاره د نورمال وکتور لپاره اوس دالاندې شميرو

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -24+20 \\ -16+18 \\ 60-64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

او له دې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{\begin{pmatrix}-4\\2\\-4\end{pmatrix}}{6}\,.$$

ځکه چې $d=\vec{p}\cdot\vec{n}$ باید مثبت (زیاتیز)وی، له لاندې لاس ته راځي

$$d=\vec{p}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}7\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-4\\2\\-4\end{pmatrix}=-4$$

او له دې سره $\sigma=-1$

$$\vec{n}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\,.$$

نو سطحه نورمال بڼه لري

$$E:\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3=4\,.$$

(لیکونکي:هولیک، کرایخ)

## د ټکي – سطحې واټن :

د یوه ټکي $Q$ ولاړ برېوتلی وکتور په یوه سطحه په ټکي $P$ د نورمالوکتور $\vec{n}$ سره دی

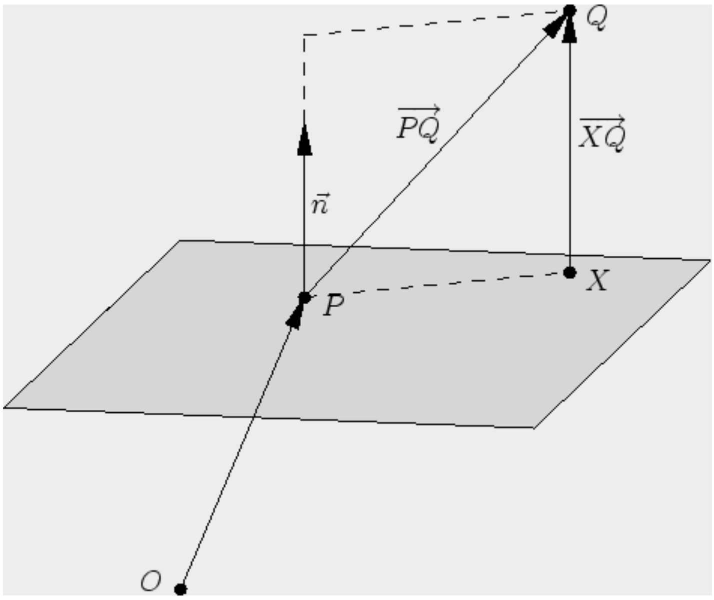
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overrightarrow{XQ} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\,\vec{n}\,.$$

د دې اوږدوالی

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

د سطحې واټندی و تکي $Q$ ته.




(ليکونکي:هوليک، وايس)

سکالار ضرب

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = \cos\alpha|\overrightarrow{PQ}||\vec{n}| = \pm d|\vec{n}|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څخه دا $|\vec{n}|$ -واره د ټکي $Q$ او سطحې ترمنځ واټن لاس ته راځی، د کوم سره چې مخنخښه دا راپه ګوته کوي، چې ایا $\overrightarrow{PQ}$ په همغه خوا ښایي، لکه یې چې $\vec{n}$ ښایي.

له دې سره دی

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

او

$$\overrightarrow{XQ} = \pm d \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، وایس

له ټکي $P = (1, 2, 3)$ تېیره سطحه د نورمالوکتور $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ سره دې د ټکي $Q = (3, 2, 3)$ واټن $d$ همداسې په سطحه پرې ولاړټکی $X$ وټاکل شي.

لومړی دی

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 4, \quad |\vec{n}| = 3\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

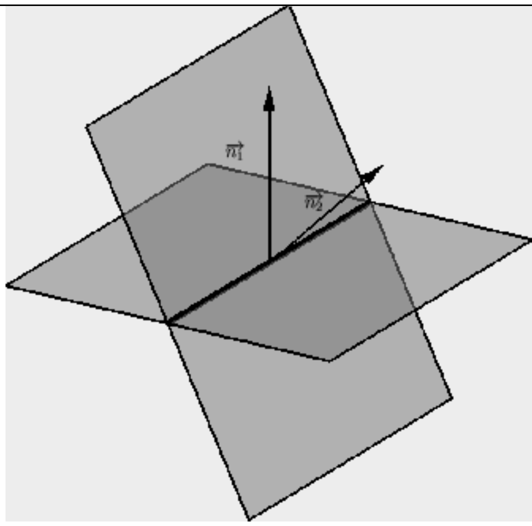
$$\overrightarrow{XQ} = \frac{4}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \quad d = \frac{4}{3}$$

او بالاخره شمیرل کیږي

$$\vec{x} = \vec{q} - \overrightarrow{XQ} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}19\\14\\19\end{pmatrix} .$$

(لیکونکي:هولیک، وایس)

## د دوه سطحو غوڅې یا تقاطع:

| | |
|---|---|
|  | د دوه سطحو د نورمال وکتور $\vec{n}_i$ سره د<br>دواړو کونجونو(زاویو) $\varphi \in [0, \pi/2]$<br>هغه کوچنې کونج يې د<br>$\cos\varphi = \frac{\lvert\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert\lvert\vec{n}_2\rvert}$<br>له لارې یواځنی ټاکلې او<br>$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$<br>د غوڅکرښې لور ده. |

(لیکونکي:هولیک، وایس)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه هوارو لپاره، چې هره یوه یې له ټکو $P_1 = (1,2,0)$, $P_2 = (0,1,3)$ او نورمالوکتورونو

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سره تعریف دي، د کونج او د دواړو سطحو د غوڅکرښې سره جوړ کونج(زاویه) $\varphi$ دې وټاکل شي.

دی

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{1}{2}$$

او له دې سره

$$\varphi = \pi/3\,.$$

پسې هم

$$\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

د غوڅکرښې لور ده.

د دې لپاره چې یو غوځټکی ( نقطه تقاطع) وشمیرو، و

$$d_1 = \vec{p}_1 \cdot \vec{n}_1 = -1, \quad d_2 = \vec{p}_2 \cdot \vec{n}_2 = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته اړتیا شته او یو ټکی $S$ ته، چې مساوات

$$\vec{s}\cdot\vec{n}_1 = d_1, \quad \vec{s}\cdot\vec{n}_2 = d_2$$

پوره کوي. د بېلګې په توګه $S = (2,3,5)$ پیدا کیږي او له دې سره غوښکرښه لاس ته راځي:

$$g:\vec{x} = \vec{s} + t\vec{r} = \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad t\in\mathbb{R}\,.$$

(لیکونکي:هولیک، وایس)

د منظم تتراید(څلور سطحیز) د کونج ټکو

$$P_1 = (1,0,0), \quad P_2 = (-1,0,0),$$

$$P_3 = (0,1,\sqrt{2}), \quad P_4 = (0,-1,\sqrt{2})$$

د دوه سطحو ترمنځ کونج یا زاویه دې پیدا شي.

موږ د بیلګې په توګه د سطحو څخه چه له $P_1,P_2,P_3$ همداسې له $P_1,P_2,P_4$ جوړې وي یا تېریږی کار اخلو.

د نورمال وکتورونو لپاره باور لري

$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\-2\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسي

$$\vec{n}_2 = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} .$$

له دې سره دی:

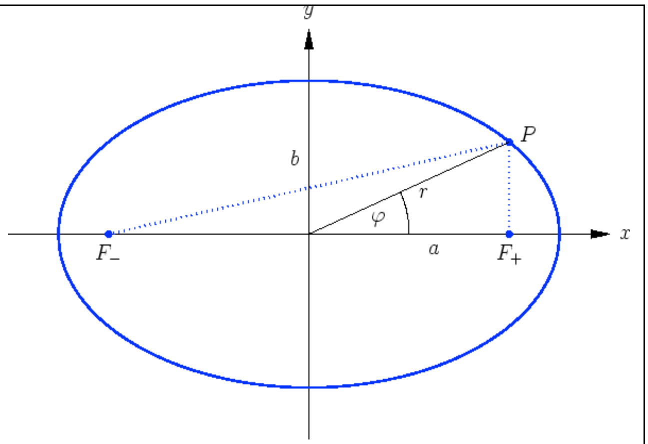
$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{12}\sqrt{12}} = \frac{1}{3}$$

او لاس ته راوړو

$$\varphi \approx 70,59° .$$

(ليکونکي:هوليک، وايس)

## هګۍ (بيضوي) Ellipse

| | |
|---|---|
| په يوې ايليپسي يا بيضوي د تکو $P = (x, y)$ د د دوه سوزونتيکو $F_\pm$ څخه واټن ثابط يا همغه دی: $\lvert\overrightarrow{PF_-}\rvert + \lvert\overrightarrow{PF_+}\rvert = 2a$ د $2a > \lvert\overrightarrow{F_-F_+}\rvert$ سره . |  |

(c) ketabton.com: The Digital Library

که وي $F_\pm = (\pm f, 0)$ ، نو د کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2\,,$$

او

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د ټکو $P$ د قطبي کواودیناتونو لپاره.

د هګی پارامتري کونه ده

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

د $t \in [0, 2\pi)$ سره.

(لیکونکي:اپیپ،هولیګ)

د انځوره ونو ورته والی کیدی شي د سیده پسي شمیرنې له لارې و ازمایل شي.

د دې لپاره چې وښایو، چې

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

مربع (څلورې) کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\underbrace{2a-\sqrt{(x+f)^2+y^2}}_{>0}=\sqrt{(x-f)^2+y^2}$$

او دې کېنې مساوات ته ورته مساوات لاس ته راوړو

$$\underbrace{4a^2+4xf}_{>0}=4a\sqrt{(x+f)^2+y^2}\,.$$

د $4a$ سره وېشنې وروسته نوې مربع کول یا بیا مربع کول راکوي

$$a^2+2xf+\frac{f^2}{a^2}x^2=x^2+2xf+f^2+y^2\,.$$

د بدلون $f^2=a^2-b^2$ له لارې د بڼې بدلون وروسته د کواوردينات بنه راکوي.

د قطبي بڼې پيدا کوني

$$r^2=\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

لپاره د مخرج(ماتلاندې) سره ضربولو سره او په پام کې نيسو

$$x^2=(x^2+y^2)\cos^2(\varphi)\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$x^2+y^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2=b^2$$

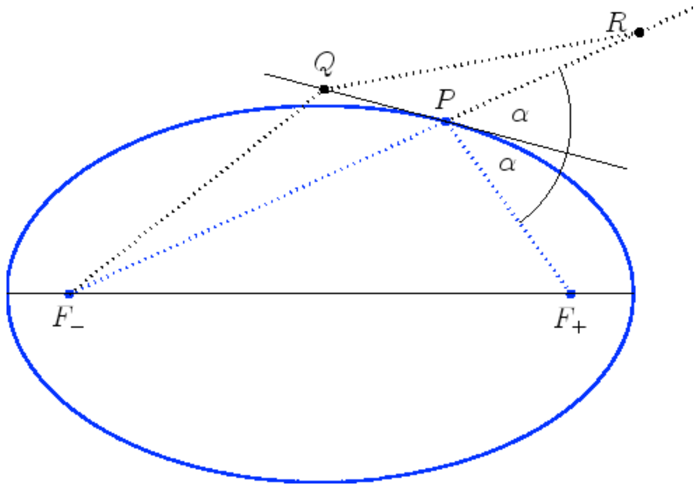
او د $b^2$ سره وېش له لارې د کواوردينات بنه.

(ليکونکي:اپپ،هوليګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) :

د سوزونټکو وړانګي (په سوزونټکو کې راګرځي ( رفلکت کونه يا بيرته راګرځيدنه)




د ښوونې لپاره د مرستندوی ټکي په حيث په تانجنت $g$ د سوزونټکي $F_+$ هنداره شوي ځيره $R$ ټاکو او په $g$ يو په خوښه ټکی $Q \neq P$ ټاکو . دا چي $Q$ د هګۍ يا بيضوي دباندي پروت دی، نو دی

$$2a = |\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QF_+}| .$$

که د ټوټه کرښو $\overline{PF_+}$ او $\overline{QF_+}$ په ځای يي هنداره شوي ځيري کيږدو، نو لاس ته راځي

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PR}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QR}| ,$$

او پسي يا تعقيب بايد $R,\ P,\ F_-$ په يوه کرښه پراته وي. له دی سره $\sphericalangle(F_-PQ) = \alpha$ دی.

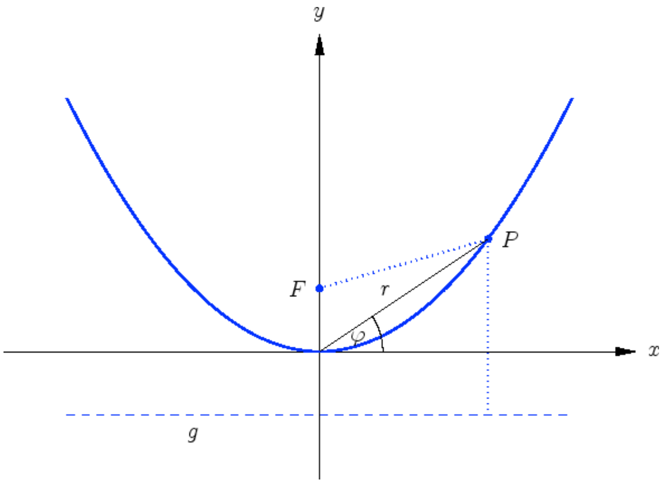
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا هنداروِن خویونه د پختورګو تیګو توټه کوني لپاره په کار راځي. په سوزونټکي $F_-$ کې د یوې رادیال ( د وړانګې په لور) سرچینې څخه وړانګې کېدی شي د یوه هګۍ ډوله یا بیضوي ډوله رفلکتور له لارې په سوزونټکی $F_+$ کې کوده شي یعنې سره غوڅ کړي..

(لیکونکي:ایپ،هولیک)

## پارابول Parabel

په یوه پارابول د ټکی $P = (x, y)$ د سوزونټکي $F$ او یوې وړونکي کرښې $g$ څخه برابر واټن لري.




که $F = (0, f)$ او $g : y = -f$ وي، نو کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$4fy = x^2$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r = \frac{4f\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

د ټکي $P$ قطبي کواوردیناتونو لپاره

(لیکونکي:اېپ،هولیګ)

د انځورونې ورته والی یې ترلی ځرګند دی. د مربع شوي واټن د برابر ایښوونې له لارې

$$|\overrightarrow{PF}|^2 = x^2 + (y-f)^2 = (y+f)^2 = (\mathrm{dist}(P,g))^2$$

د کواوردینات بڼه لاس ته راځي. د

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

بدلون مو قطبي بڼې ته بیایي.

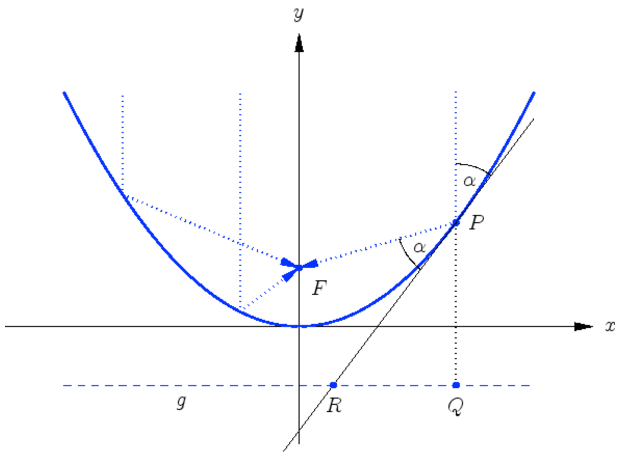
(لیکونکي:اېپ،هولیګ)

## د ساتلایت تلوېزیون Satelliten-TV

غبرګې کربښې، وړونکربښو سره ولاړې یا عمود غورځېدونکي وړانګې په سوزونټکي کې سره کوده کیږي.

داد د ساتلایت په کاسه او تېلېسکوپ کې کارول کیږي، چې پریوتي سیګنالونه قوي کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library




د ښووني لپاره په بام کي نيسو، چې

$$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{QP}=\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\f\end{pmatrix}\right)+\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\-f\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x\\2y\end{pmatrix}$$

په ټکي $P$t , $\begin{pmatrix}1\\x/(2f)\end{pmatrix}$, کې د تانجنت د لور سره غبګ دی. دا چې

$|\overrightarrow{FP}|=|\overrightarrow{QP}|$,

له دې څخه د کونج $\sphericalangle(F,P,R)$ او $\sphericalangle(R,P,Q)$ مساوات لاس ته راځي، د کوم سره چې $R$ د تانجنت غوځتکی دی د $g$ سره.

(ليکونکي:اپپ،هوليګ)

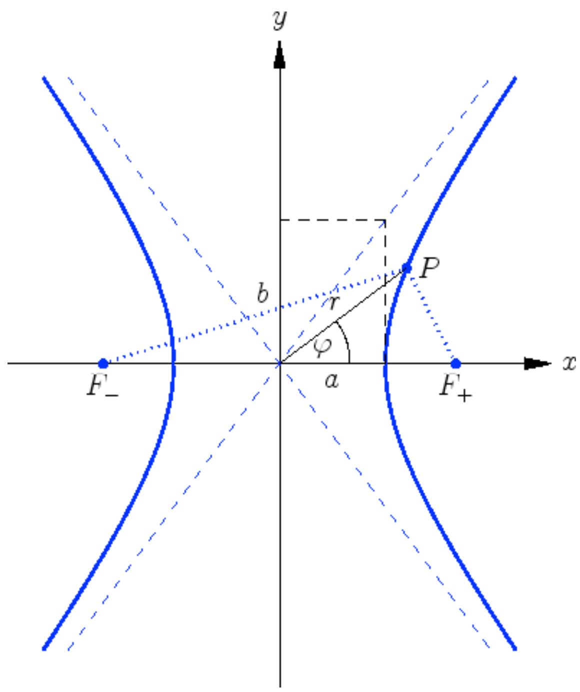
## های پاربول Hyperbel

په يوه های پابول د يوه ټکي $P=(x,y)$ د سوزون ټکو $F_{\pm}$ سره د واټنونو کمښت ثابت دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

د $2a < |\overrightarrow{F_-F_+}|$ سره .




که $F_\pm = (\pm f, 0)$ وي، نو کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2 \,,$$

او

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د ټکو $P$ د قطبي کواوردیناتونو لپاره . اسیپتوتې $\pm b/a$ جګوالی لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هايپرابول د ښاخونو  پارامتري کونه

$$x = \pm a \cosh t, \quad y = b \sinh t$$

ده د $t \in \mathbb{R}$ سره.

(ليکونکي:اپپ،هوليګ)

د انځوره ونو  ورته کېدی شي سيده يو په بل پسې وازمايل شي.

د دې لپاره چې وښايو ، چې  لرو

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2,$$

نو

$$\underbrace{\sqrt{(x+f)^2 + y^2} \pm 2a}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

مربع کوو او دې و کيڼ مساوات ته ورته اړيکي لاس ته راځي

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = \pm 4a \sqrt{(x+f)^2 + y^2}\,.$$

د $4a$ سره وېشني وروسته له نوې مربع کوني  څخه لرو

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2} x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f^2 = a^2 + b^2$ بدلون سره د بنې بدلون وروسته د کواوديناتونو بڼه لاس ته راځي.

د قطبي بڼ لاس ته راوړلو ته

$$r^2 = -\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

د مخرج سره ضربوو او په بام کې نيسو

$$x^2 = (x^2+y^2)\cos^2\varphi\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 = -b^2$$

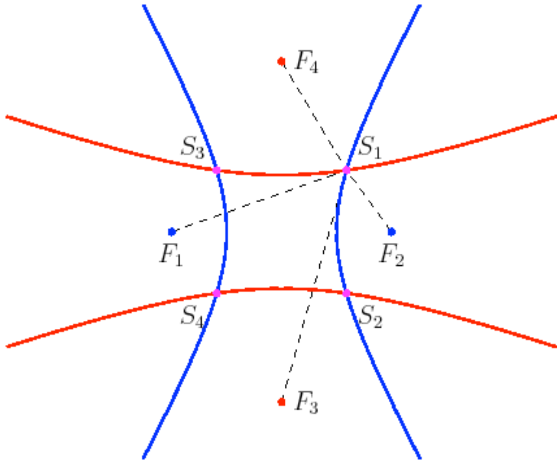
او د $-b^2$ سره ضربولو له لارې د کواوديناتونو بڼّ راکوي

(ليکونکي:اپپ،هوليګ)

## ناويګيشنNavigation

د يوې کيشتۍ ځای Position معلومولو $P$ لپاره د وخت کمښتونه $2a_{j,k}$ د سينکرون راديو سيګنالونو د مختلفو خورونکو ستيشنونو $F_i$ څخه سره پرتله کيږي. نو په دې توګه کيدی شي $P$ د هايپرابول د سوزونټکو $F_k$, $F_j$ سره د غوښتکي په څير لاس ته راړل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library




یوه  څرګنده بیلګه کیدی شي

$$F_1 = (-2,0),\ F_2 = (2,0), \quad F_3 = (0,-3),\ F_4 = (0,3)$$

او $a_{1,2} = a_{3,4} = 1$ و ټاکل شي. اړونده هاپرابول مساوات دي

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \qquad y^2 - \frac{x^2}{8} = 1\,,$$

او د څللر غوڅټکو $S_i$ د کواودیناتو لپاره لاس ته راځي

$$x^2 = \frac{32}{23}, \quad y^2 = \frac{27}{23}$$

لکه د څیرې څخه چې ه م لیدل کیږی، څلور اوبیونې( حلونه) لاس ت ه راځي. د ناوېګیشن لپاره دا بې پرابلمونو دی، ځکه چې یو کفتان باید وپوهیږي، چې کینتی نږدې یا ت قریباً چیرته  پرځای ده، دا په دې معنا چې کوم د منلو اوبی  یا حل دی.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

# د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه( هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنستونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون ( دا کتاب په دې ځانګه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولګه

*Mathematical Formulas*

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

(c) ketabton.com: The Digital Library

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شنوتکارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نوري ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کربنیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه ( هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند ( منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راځخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې( دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتګارت پوهنتون لکچرنوټونو ځخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج ځخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي ځخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په ځیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

**Get more e-books from www.ketabton.com**
**Ketabton.com: The Digital Library**