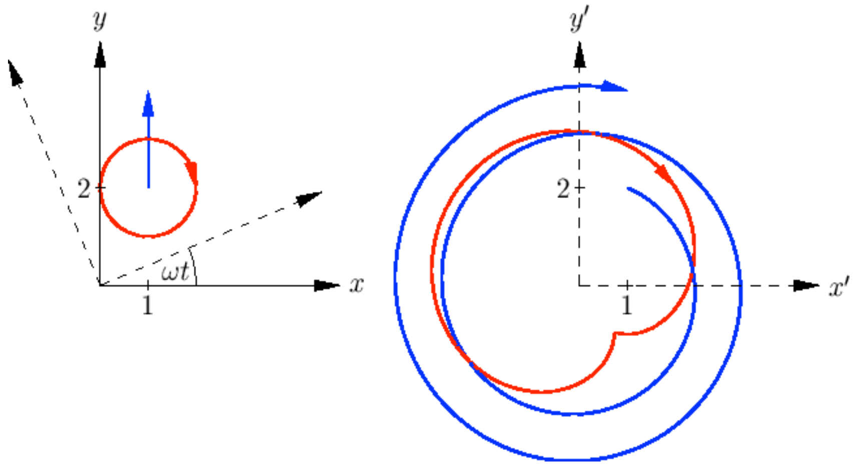
وکتورشمیرنه



Ketabton.com

ډاکتر ماخان شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه	۱
په هواره(سطح) او هوا(فضا) کې	۱
پیکسل – یا د چوخوني کواودینات	۲
د غونداري (غوندوسکي) یا کرې کواوردینات	۲
په کارتیزي کواوردینات کې ټکي	۴
د اوږدوالي – او سور درجې	۴
توته – یا استوانه کواوردیناتونه	۶
سیګنوم (لاتین : Signum نخښه) فنکشن ...	۷
وړل (سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال)	۸
څرخون Rotation	۹
څرخنده یا څرخیدونی نسبي سیستم :	۱۱
وکتورونه په فضا کې	۱۳
د وکتورونو جمعه(زیاتون)	۱۴
سکالار ضرب	۱۶
د اړخنیمیو غوځټکي	۱۷
(مطلق) ارزښت	۱۸
درېګوډیز (مثلثاتي) نامساوات	۱۸
د شمیرنې قوانین	۱۹
له باد را پیداشوې د لویو اوبو یا بحر ...	**۱۹**
کونج یا زاویه	۲۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوساین جمله	۲۲
اورتوګونال یا یو په بل ولاړ(عمودي) بنستونه	۲۶
وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب	۳۰
د لورنځ زور Lorentzkraft	۳۴
د اپیسیلون – تنزور	۳۷
شپات ضرب	۳۸
د یوه څلور سطحیز د ډکي(حجم) شمیرنه	۳۹
د غبرګسطحیز یا ذوذنقي خویونه	۴۱
د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ	۴۲
ټکي – لور – بڼه	۴۳
دوه – ټکي – بڼه	۴۵
لحضوي – یا سترګورپ بڼه	۴۶
د ټکي –کربښي واټن	۴۸
د دوه کربښو واټن	۵۱
د الوتني لارې	۵۳
د یوې سطحې پارامتریکي انځورونه	۵۵
د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه	۵۷
د یوې سطحې د هیسې -نورمال بڼه	۵۸
د سطحو انځورونو ترمنځ ...	۶۰
د ټکي – سطحې واټن	۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع ۶۵

هګۍ (بیضوي) Ellipse ۶۸

د سوزونکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) ۷۱

پارابول Parabe ۷۲

د ساتلایت تلوېزیون Satelliten-TV ۷۳

های پاربول Hyperbel ۷۴

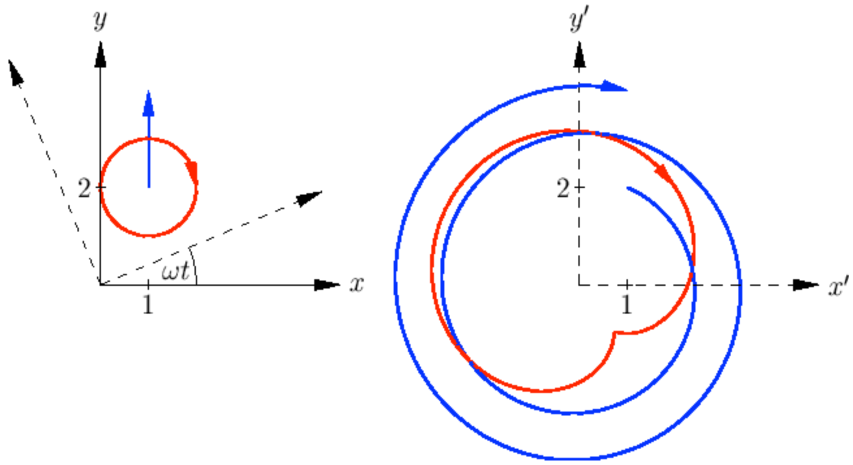
ناویګیشنNavigation ۷۷

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ وي کتابونه ۷۹

د لیکونکی ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه



د شمیرپوهنې نړیوال جال څخه په مننه

ژباړی: ډاکتر ماخان شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه ۱

په هواره(سطح) اوهوا(فضا) کې ۱

پیکسل – یا د چوخونې کواودینات ۲

د غونداري (غونډوسکې) یا کرې کواوردینات ۲

په کارتیزي کواوردینات کې ټکي ۴

د اوږدوالي – او سور درجې ۴

توته – یا استوانه کواوردیناتونه ۶

سیګنوم (لاتین : Signum نخښه) فنکشن ... ۷

وړل (سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) ۸

ځرخون Rotation ۹

ځرخنده یا ځرخیدونی نسبي سیستم : ۱۱

وکتورونه په فضا کې ۱۳

د وکتورونو جمعه(زیاتون) ۱۴

سکالار ضرب ۱۶

د ارخنیمیو غوځټکي ۱۷

(مطلق) ارزښت ۱۸

درېګوډیز (مثلثاتي) نامساوات ۱۸

د شمیرنې قوانین ۱۹

له باد را پیداشوې د لویو اوبو یا بحر ... **۱۹**

کونج یا زاویه ۲۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوساین جمله	۲۲
اورتوگونال يا يو په بل ولاړ(عمودي) بنستونه	۲۶
وکتوري ضرب ، صليبي يا چليپا ضرب	۳۰
د لورنځ زور Lorentzkraft	۳۴
د ايپسيلون – تنزور	۳۷
شپات ضرب	۳۸
د يوه څلور سطحيز د ډکي(حجم) شميرنه	۳۹
د غبرګسطحيز يا ذوذنقي خويونه	۴۱
د کواورديناتونو يا پروت ولاړ	۴۲
ټکي – لور – بڼه	۴۳
دوه – ټکي – بڼه	۴۵
لحضوي – يا سترګورپ بڼه	۴۶
د ټکي –کربښي واټن	۴۸
د دوه کربښو واټن	۵۱
د الوتنې لارې	۵۳
د يوې سطحې پارامتريکي انځورونه	۵۵
د يوې سطحې درې-ټکي-بڼه	۵۷
د يوې سطحې د هيسې -نورمال بڼه	۵۸
د سطحو انځورونو ترمنځ ...	۶۰
د ټکي – سطحې واټن	۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

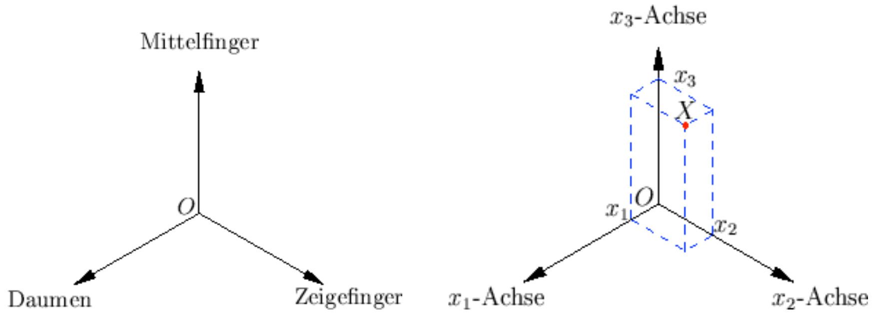
د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع ۶۵
هګۍ (بیضوي) Ellipse ۶۸
د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) ۷۱
پارابول Parabe ۷۲
د ساتلایت تلوېزیون Satelliten-TV ۷۳
های پاربول Hyperbel ۷۴
ناویګیشنNavigation ۷۷
د ډاکتر ماخان شینواري چاپ وي کتابونه ۷۹
د لیکونکی ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه

په هواره(سطح) اوهوا(فضا) کې کارتيزي - يا پروت ولاړسيستم

يو فضايي کواورديناتسيستم له درې په سرچينيز ټکي O کې يو په بل ولاړو ګڼونکرښو(محورونو) څخه جوړ دی، چې لوريزوالی يې د ښيرې له مخې،، د ښي لاس قاعدې،، سره سم ټاکل شوی دی.



يو ټکی X د کواورديناتو x_i سره په نخښه شوی په محورونو د پرېوستون ارزښت سره سم کره کيدی شي. $X = (x_1, x_2, x_3)$. که ايندکس يا پيژندنخښه ونه کارول شي،نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

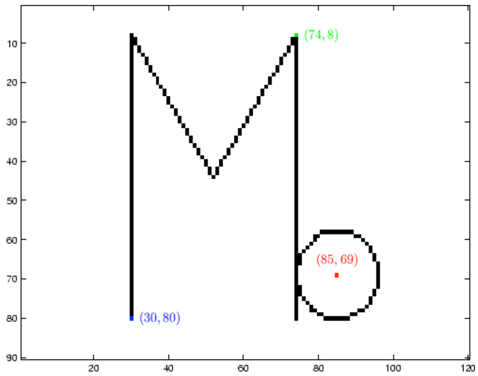
کواوردینات په ورسره بلد ډول د (x, y, z) او ګنونمخور د x ,-y- او z - محور په

نخښنه کيږي.

په ورته توګه د هوارې کارتيزي کواوردیناتسیستم پیژنو یا تعریفوو.

پيکسل – يا د چوخونې کواودينات Pixelkoordinaten

په يوه ګرافيکي کړکۍ کې شيان د پيکسل- چوخونوکواودينات (Pixel خورا کوچني ځيره شوي ټکي) له لارې ورکول کيږي.. دا انځور شوی ولاړګوډيز يوه کړکۍ ده د 90×120 چوخونو سره او د رنګه چوخونو کواوردينات پروت دی د ځيرې ګوډ په ګوته کوي .

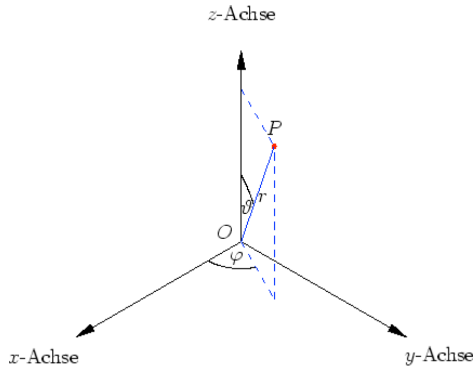


د غونډاري (غونډوسکې) يا کرې کواوردينات

يو ټکی $P = (x, y, z)$ کيدی شي د سرچينې سره د واټن $r = |\overline{OP}|$ ، د کونج φ د x - محور او د هغه پرېوستون $\overline{OP}$ په xy - هواره او کونج $\vartheta \in [0, \pi]$ د $\overline{OP}$ او z - محور ترمنځ له لارې انځورېدلی شي. کونج φ ټيک تر د 2π

(c) ketabton.com: The Digital Library

زیاتځلي پورې تاکلکیدی شي. د ستاندارد په څیر په $\varphi \in (-\pi, \pi]$ پرېکړه کیدی شي یا منل کېدی شي. (په لاندې او نورو ځایونو کې: محور =Achse)



باور لري:

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y = r\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = r\cos\vartheta$$

همداسې

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad \vartheta = \arccos(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

د کوم سره چې د x, y او z نیوني سره سم د ارکوستانجنت یوه مناسبه څانګه د ټاکلو وي.

د اصلي څانګې- کونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, & \text{für } x > 0, \\ \operatorname{sign}(y)\pi/2, & \text{für } x = 0, \\ \varphi_H + \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \varphi_H - \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y < 0. \end{cases}$$

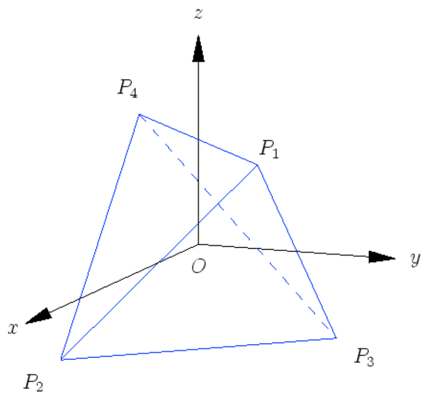
لیکونکي:اپ، هولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

په کارتيزي کواوردينات کې ټکي

$$P_1 = (1,1,1),\quad P_2 = (1,-1,-1),\quad P_3 = (-1,1,-1),\quad P_4 = (-1,-1,1)$$

د منظم تيترااېدر کونجونه جوړوي د اړخ اوږدوالي $2\sqrt{2}$ سره او په O کې د درونډ ټکي سره



په غونډاري کواوردينات (r, ϑ, φ) کې ګوډټکي يا کونج- لاندې کواوردينات لري

$$P_1' = (\sqrt{3}, \psi, \pi/4),\qquad P_2' = (\sqrt{3}, \pi-\psi, -\pi/4),$$
$$P_3' = (\sqrt{3}, \pi-\psi, 3\pi/4),\qquad P_4' = (\sqrt{3}, \psi, -3\pi/4)\,,$$

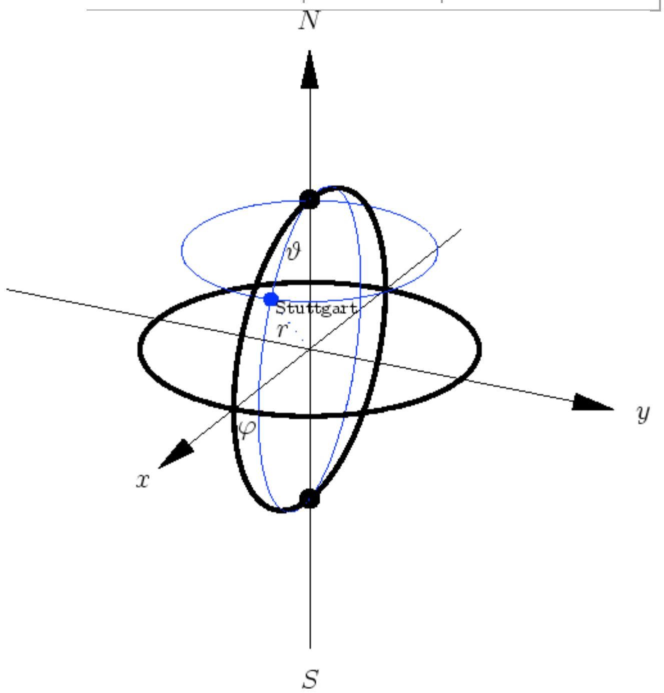
چېرته چې $\psi = \arccos(1/\sqrt{3})$ همداسې $\psi = \arctan\sqrt{2}$ دي

د اوږدوالي – او سور درجې (طول البلد او عرض البلد؟)

په ځمکغونډاري (ځمکغونډوسکي) يا ځمکې کره باندې د اوږدوالي – او سور درجې د کرې يا غونډاري کواوردينات دي، خو يوائې بل ډول کونجورشو ګاني (کونجساحې) کارول کيږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\varphi = 0 \ldots \pi$	180°- 0°	ختيز اوږدوالی
$\varphi = 0 \ldots -\pi$	180°- 0°	لويديز اوږدوالی
$\vartheta = \pi/2 \ldots 0$	90°- 0°	شمالي سور
$\vartheta = \pi/2 \ldots \pi$	90°- 0°	جنوبي سور



په خيره کي ايکواتور(سور 0°) او صفري اوږدوالی غوږ کبنل شوي دي، شمالي قطب (۹۰ درجي شمالي سور) او جنوبي قطب(۹۰ درجي جنوبي سور) هم په نخبنه شوي دي. شنه اوږدي – او سورګردی د ستوتګارت(۹۰ درحي ختيزي اوږدوالی ، ۴۹ درجي جنوبي سور) تيريږي

او $\varphi = \frac{1}{20}\pi$ (ختيز نيم غونډاری) او $\varphi = -\frac{19}{20}\pi$ (لويديز نيمغونډاری په نخبنه کوي

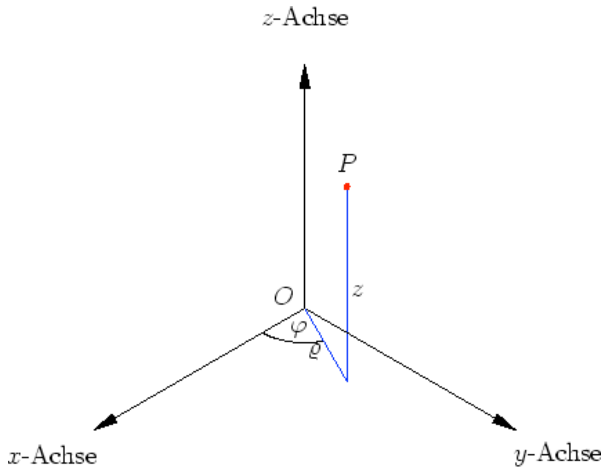
(c) ketabton.com: The Digital Library

او $\vartheta = \frac{41}{180}\pi$

توته – یا استوانه کواوردیناتونه Zylinderkoordinaten

یو ټکی $P=(x,y,z)$ کیدی شي د یوه کونج φ له لارې ، چې د x -محور او د xy -هواره باندې د پریوستون (پروجکشن) $\overline{OP}$ ترمنځ پروت دی ، پرېوستون د اوږدوالي او د z- کواوردینات له لارې وټاکل شي.

کونج φ ټیک تر د 2π پورې ټاکلی. د ستانداردورشو پرېکړه زیات وخت تر $\varphi \in (-\pi,\pi]$ پورې شوې.



باور لري

$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi, \quad z = z$$

همداسي

$$\varrho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره،چي د x او y د مخنخبني پوري اړونده د ارکوستانجنت یوه څانګه ټاکل کیږي.

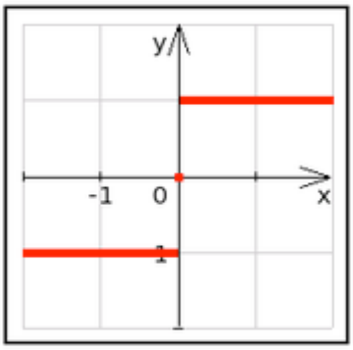
د اصلیڅانګي ــکونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري:

په لاندي کي Für د ... لپاره په مانا او sign سګنوم لوستل کیږي

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, \\ \operatorname{sign}(y)\pi/2, \\ \varphi_H + \pi, \\ \varphi_H - \pi, \end{cases}$$	د $x > 0,$ لپاره د $x = 0,$ لپاره د $x < 0 \wedge y \geq 0,$ لپاره د $< 0 \wedge y < 0.$ لپاره

سیګنوم (لاتین : Signum نخبنه) فنکشن په رییل ګنونکربنه :

د فنکشن د مخنخبنو ګراف



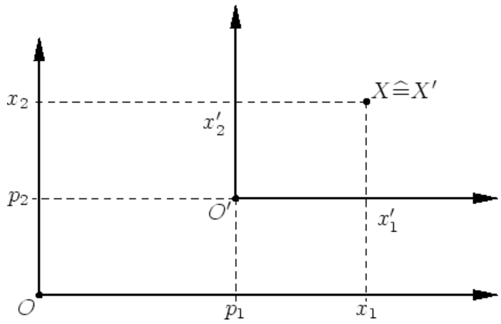
د رییل ګنونو خیره ونه ده په ډېرۍ {-1,0,1} کي

(c) ketabton.com: The Digital Library

وړل (سيده يا سم كرښيز خوزښت يا انتقال) Translation

د سرچينې O كشولو سره و $O' = (p_1, p_2, p_3)$ ته د برابر پاتيكيدونكي لور سره د يوه ټكي $X = (x_1, x_2, x_3)$ كواوردينات په لاندې توګه تغير خوري

$$X' = (x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3)\,.$$



خوزنده يا متحرک نسبي سيستم

د يوه د x -محور په لور د vچټكتيا سره ځغلنده ګاډی په هواره (سطحه) برابرډوله خوزښت

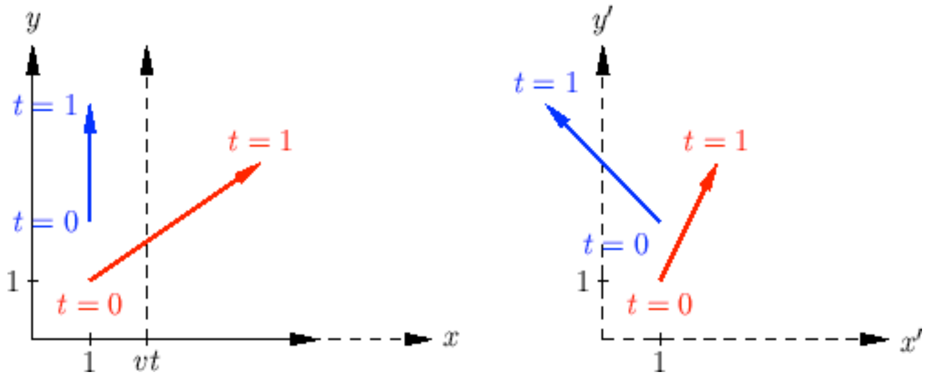
$$(x(t),\, y(t)) = (p + \alpha t,\, q + \beta t), \quad t \geq 0\,,$$

په پام كې نيسو ، نو كواوردينات يې په لاندې ډول تغير خوري

$$x' = x - vt, \quad y' = y\,.$$

كتونكی يوه بله چټكتيا ريښتوني نيسي يا بله چټكتيا ګوري

(c) ketabton.com: The Digital Library



د بيلګې په توګه د يوه شي لپاره باور لري، چې د يوه وخت په يوون(واحد) کې د $v = 2$ لپاره له ټکي $P = (1,1)$ و ټکي $Q = (4,3)$ ته خوزي(سور غشی)

$$P' = (1,1), \quad Q' = (4-2, 3-0) = (2,3)\,.$$

د ريښتوني او کتونکي چټکتيا لپاره په ورته توګه باور لري

$$v_t = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}, \quad v_b = \sqrt{5}\,;$$

له دې خوزښت څخه خوزښت بتياوالی برېښي.

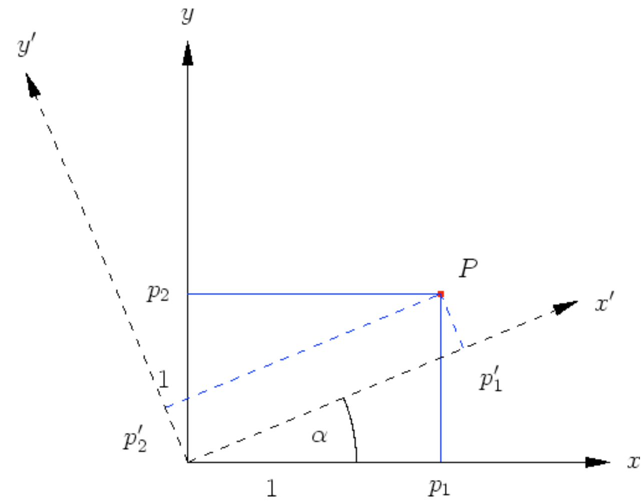
ليکونکي: اپپ، هوليګ

څرخون Rotation

د xy -هوارې يا سطحې څرخون په z -محور د يوه ټکي $P = (p_1, p_2, p_3)$ کواورديناټ د α کونج سره ترانفورمي کيږي د لاندې سره سم

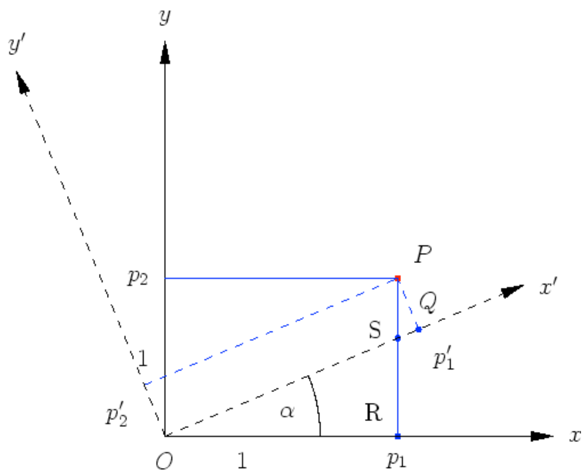
$$p_1' = \cos\alpha\, p_1 + \sin\alpha\, p_2, \quad p_2' = -\sin\alpha\, p_1 + \cos\alpha\, p_2, \quad p_3' = p_3\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه د yz - او zx -هوارو څرخون لپاره فرمولونه لاس ته راځي

ليکونکي: اپپ، هوليګ



لومړی پيژنو، چې

$$\sphericalangle(S,P,Q)=\alpha\,,$$

داپه دې معنا چې ولاړکونجيز درېګودی(مثلث) $\triangle(R,O,S)$ او $\triangle(Q,P,S)$ ورته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لومړي درېګوډي کې باور لري.

$$|\overline{OS}| = p_1 / \cos\alpha$$

او

$$|\overline{RS}| = p_1 \tan\alpha \, .$$

له دويم درېګوډي لاس ته راځي

$$p_2' = \cos\alpha \, |\overline{PS}| = \cos\alpha \, (p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \cos\alpha \, p_2 - \sin\alpha \, p_1$$

او

$$p_1' = |\overline{OS}| + |\overline{SQ}| = p_1 / \cos\alpha + \sin\alpha \, (p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \frac{1 - \sin^2\alpha}{\cos\alpha} p_1 + \sin\alpha \, p_2$$

ليکونکی: اپپ، هولير

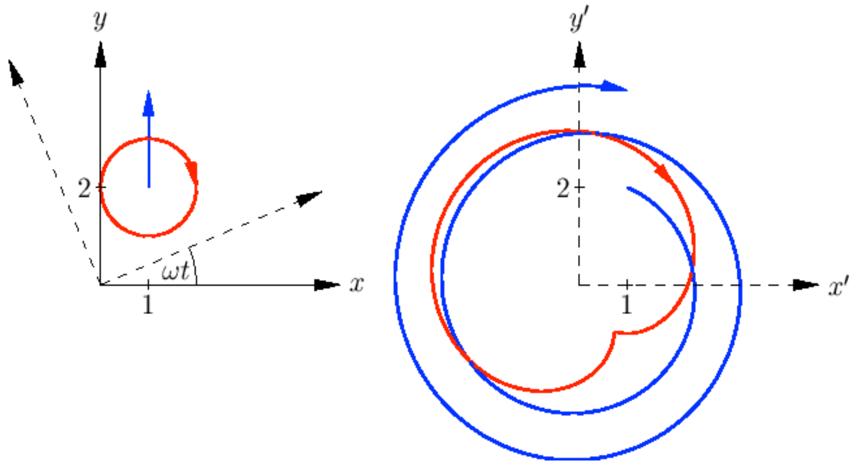
څرخنده يا څرخيدونی نسبي سيستم :

تابع کيږ د د سيده کرښيز او ګردي ډوله خوزښتونو د د خوزښت منحني ښايي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$G: \quad (x,y) = (1,\, 2 + t/(2\pi)),$$
$$K: \quad (x,y) = (1 + \cos(t),\, 2 - \sin(t))\,.$$

ښي لور ته دواړه منحني یا کږې دیوهکونج   سره څرخیدوني نسبي سیستم   انځوروي، دا په دې معنا چې داسي لکه په یوه کاروسل (هغه څرخیدوني شیان دي، چې کسان په کې ګرځي) کې یوه کتونکي ته برېښي.



د کواودیناتو ترانفومیشن یا بدلون د سیده کرښیز خوزښت لپاره راکوي:

$$x' = c + (2 + t/(2\pi))s, \quad y' = -s + (2 + t/(2\pi))c$$

د لاندې سره

$$c = \cos(\omega t), \quad s = \sin(\omega t)\,.$$

یوه شپیرال منځ ته راځي، ځکه چې په نوکانو کې ضریب د جګیدونکي t سره لویږي.

دا جوړشوي 2 اوړونونه   وخت انتروال $0 \leq t \leq 4\pi$ په ګوته کوي.
د بدلې شوې کواودینات ښخه د $\omega = 1$ سره د دایره ډوله خوزښت لپاره

$$x' = c(1 + c) + s(2 - s), \quad y' = -s(1 + c) + c(2 - s)\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

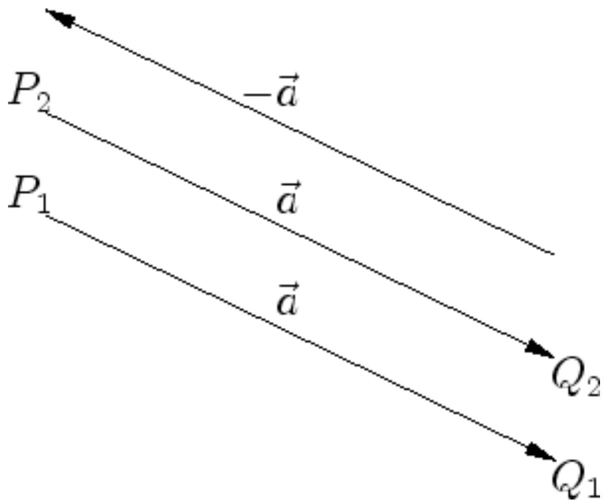
په ځرخون سیستم کې د خوزښتمنحني ښه نه پسې تړلې پېژندل کېږي. لکه دا بېلګه چې په ګوتهکوي، کېدی شي د کتلو لور سملاسي تغیر شي. کېدی شي چې د کتلو خوزښت منحني کې ګوډ یا ماتوالی راپیداشي. په ځرخېدونکي سیستم کې په یوه داسې زینګولار ټکي کې کتونکې چټکتیا صفر ده.

وکتورونه په فضا کې

یو وکتور یوه لوریزه ټوټه کرښه ده:

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$$

دا وکتور له ټکي P څخه و ټکي Q ته په نخښه کوي. یا ښايي. په بدیله توګه کیدی شي وکتور په فضا کې د P-راکښنې په توګه افاده شي او له یوه غشي سره په نخښه شي.



لکه د ځیرې څخه چې کتل کېږي برابر اوږده غشي په همغه (برابره) لور همغه(برابر) وکتورونه $\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2}$ انځوروي.

ځانګې انځورونه نسبت و سرچینې ته ځای وکتور بلل کېږي او د وکتور کواوردیناتونه داسې تعریفوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} .$$

د $\vec{a}$ کواوردیناتونه هم کیدی شي د د ټکو Q او P کواوردیناتونو په څېر و
شمیرل شي. بالاخره د

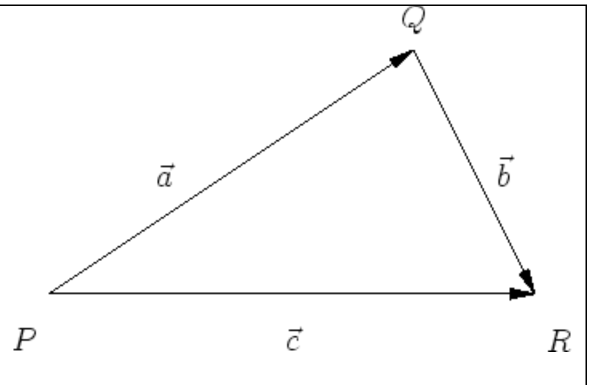
$$\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$$

سره صفروکتور په نخښه کوو.

د وکتورونو جمعه(زیاتون):

د دوه وکتورونو جمعه د وکتورونو یو و بل ته یا یو بل پسې راکښنه ده

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} .$$



د کواوردیناتونو یا محورونو لپاره دا دي:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} .$$

د

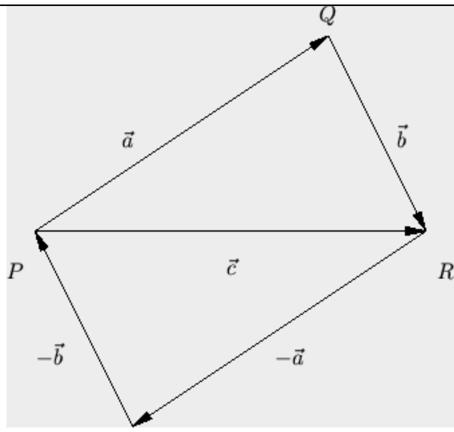
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$$

سره و $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ته مخامخ یا په څټ(برعکس) راکښنه $-\vec{a}$ په نخښه کیږي. په ځانګړې توګه باور لري

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}\,.$$

(لیکونکي: هولیګ، موخ)

د ټکو $P = (1,1,1), \quad Q = (4,2,7), \quad R = (1,4,3)$ لپاره وکتورونه $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ او $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} + \left(-\overrightarrow{QR}\right)$ شمیرلکیږي	

لکه په څیره کې چې کښل شوي د کواورد یناتو لپاره باور لري:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-1 \\ 7-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 4-2 \\ 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-4 \\ 7-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 1-2 \\ 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad -\vec{c}$$

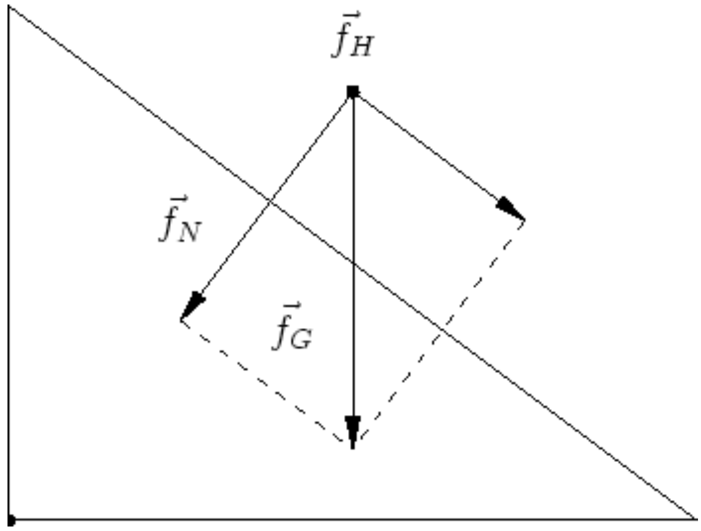
(ليکونکي: هوليک، موخ)

د يوې کږې سطحې (هوارې) لاندې داسې يوه سطحه پوهيږو، چې د پروتوالي لور ته ميلان ولري.

لکه څنګه چې په ځيره کې ليدل کيږي، کيدی شي د وزن زور $\vec{f}_G$ په دوه يو بل سره ولاړو يا عمود بوخو يا کمپوننتونو ټوټه شي(د زور ټوټه کونه د د دوه زور غبرګ اړرخيزې(مواز ی الاضلاع) سره) .

$$\vec{f}_G = \vec{f}_N + \vec{f}_H \,.$$

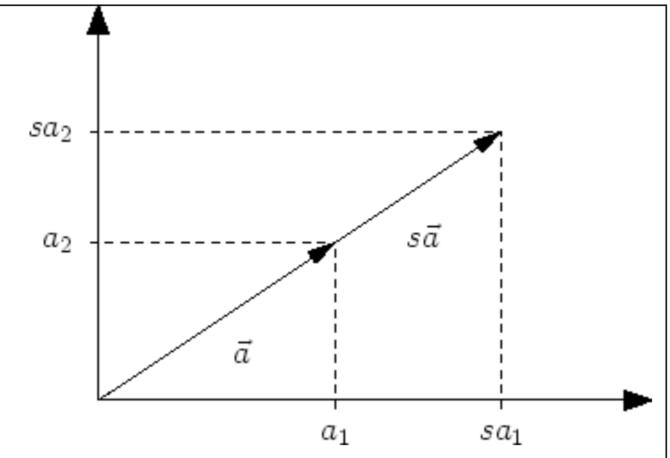
مايلې سطحې سره عمود عمودي زور(ولاړ زور) اغيزه لري. او ميلې هوارې سره غرګ کښته لور ته لوريزه بيره ييزه زوړند زور $\vec{f}_H$ اغيزه لري.



(ليکونکي: هوليک، موخ)

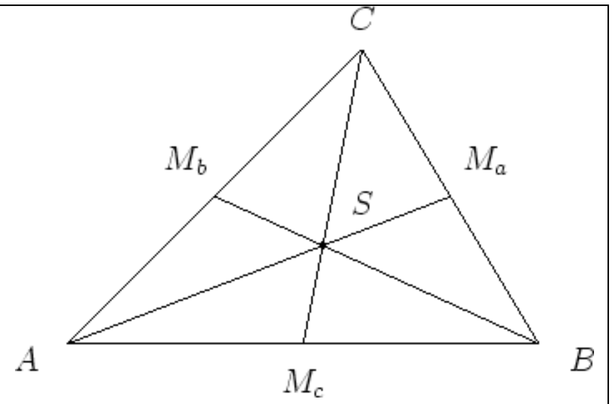
سکالار ضرب :

(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>وکتور $s\vec{a}$ یو s - واره راکښنه په کوته کوي، دا په دې معنا چې
$$s\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sa_1\\sa_2\\sa_3\end{pmatrix}$$
په ځانګې توګه $0\vec{a}=\vec{0}$ دی.</td>
</tr>
</table>

(لیکونکي هولیک، موخ)

د اړخنیمیو غوځښکي(نقاط تقاطع ناصف الاضلاع) :

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>د یوه درېګوډي(مثلث) اړخنیمی یو بل په دروندټکي(مرکزالثقل) S کې سره غوځوي.
$$\vec{s}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).$$</td>
</tr>
</table>

د دې د ښوولو لپاره ځای د وکتور د اړخنیمی په ټکو لیکو $\overline{AM_a}$ په لاندې بڼه:

$$\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{m}_a-\vec{a})=\vec{a}+t\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{a}\right),\quad t\in[0,1].$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لپاره دی، نو دروند ټکی $\overline{AM_a}$ په $2:1$ نسبت وېشي

په ورته توګه اړخنیمیو $\overline{CM_c}$ او $\overline{BM_b}$ لپاره باور لري.

(لیکونکي هولیګ، موخ)

(مطلق) ارزښت

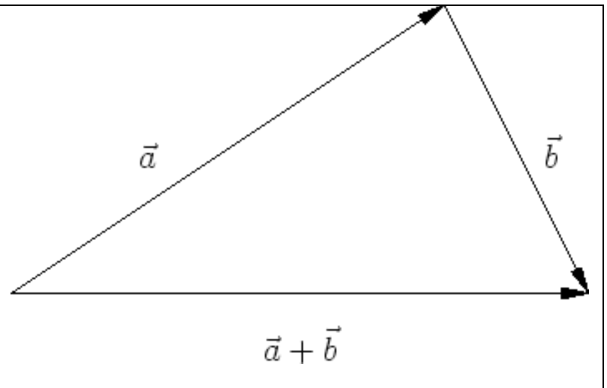
د $\vec{a}=\overrightarrow{PQ}$ ارزښت له P څخه د Q ته د غشي اوږدوالی دی همداسې له O و A ته، دا په دې معنا چې

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,.$$

په ځانګي توګه $|s\vec{a}|=|s||\vec{a}|$ دي.

یو وکتور د 1 (مطلق) ارزښت سره یوونوکتور (واحدوکتور) بلل کیږي.

درېګوډیز (مثلثاتي) نامساوات :

	د دوه وکتوونو د جمعې (زیاتون) لپاره باور لري $|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$ د برابروالي سره تیک هلته ، چې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ غبرګ(موازي) وي، داپه دې

(c) ketabton.com: The Digital Library

	معناچي $\vec{a} = s\vec{b}$ دي.

(ليکونکي هوليک، موخ)

د شميرنې قوانين :

د وکتورونو لپاره لاندې شمېرقوانين باور لري:

- Kommutativgesetz کموتاتيو قانون

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

- Assoziativgesetz: اسوښياتيو قانون

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

- Distributivgesetz: دېستريبوتيوقانون

$$s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$$

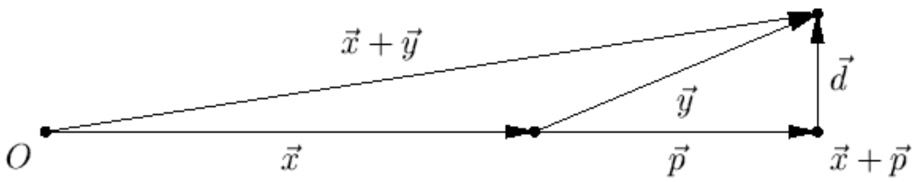
(ليکونکي هوليک، موخ)

(له باد را پيداشوې د لويو اوبو يا بحر په سر) هواجريانات

Drift eines Flugzeugs

يوه الوتکه په 800 km/h چټکتيا ختيز لور ته الوزي د يوه باد 50 km/h چټکتيا سره له WSW .

(c) ketabton.com: The Digital Library



که پروت محور د ختیز سره او ولاړ محور د شمال سره په نخښه کړښ یاوښايي، نو له

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سره د الوتکې چټکتیا او

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 50\cos(\pi/8) \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix}$$

د باد چټکتیا ښايي.

د یوه ساعت وروسته الوتکه تر

$$\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} 800 + 50\cos(\pi/8) \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

پورې الوتې. که   له $\vec{p}$ سره په کرښه د $\vec{y}$ عمود یا orthogonale پرېوستون د $\vec{x}$ په لور وښایو، نو ټولیزه چټکتیا له کمپوننتو څخه

$$\vec{x}+\vec{p} = \begin{pmatrix} 800 + 50\cos(\pi/8) \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د ختیز لور ته   او دریفت څخه

د شمال لورته

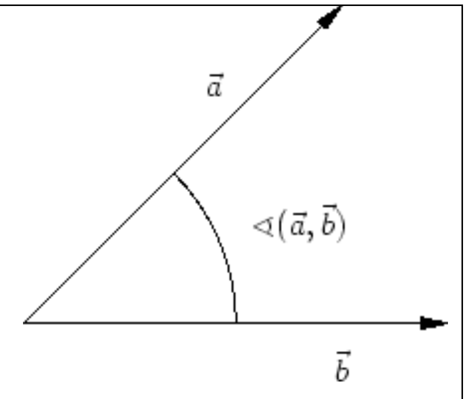
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{d} = \vec{x} + \vec{y} - (\vec{x} + \vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

جوړيږي.

(ليکونکي هوليګ، اپپ)

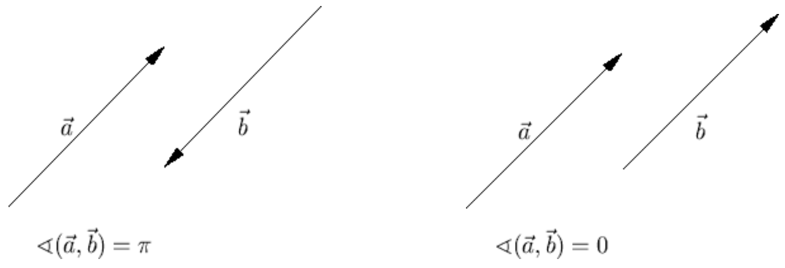
کونج يا زاويه :

	د $\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}$ لپاره سړی د $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \in [0,\pi]$ د دواړو کونجونو کوچنی کونج ښايي، چې د وکتور سره په نخښنه شوي غشي سره ګډ ککرئ ټکی د رأس نقطه جوړوي.

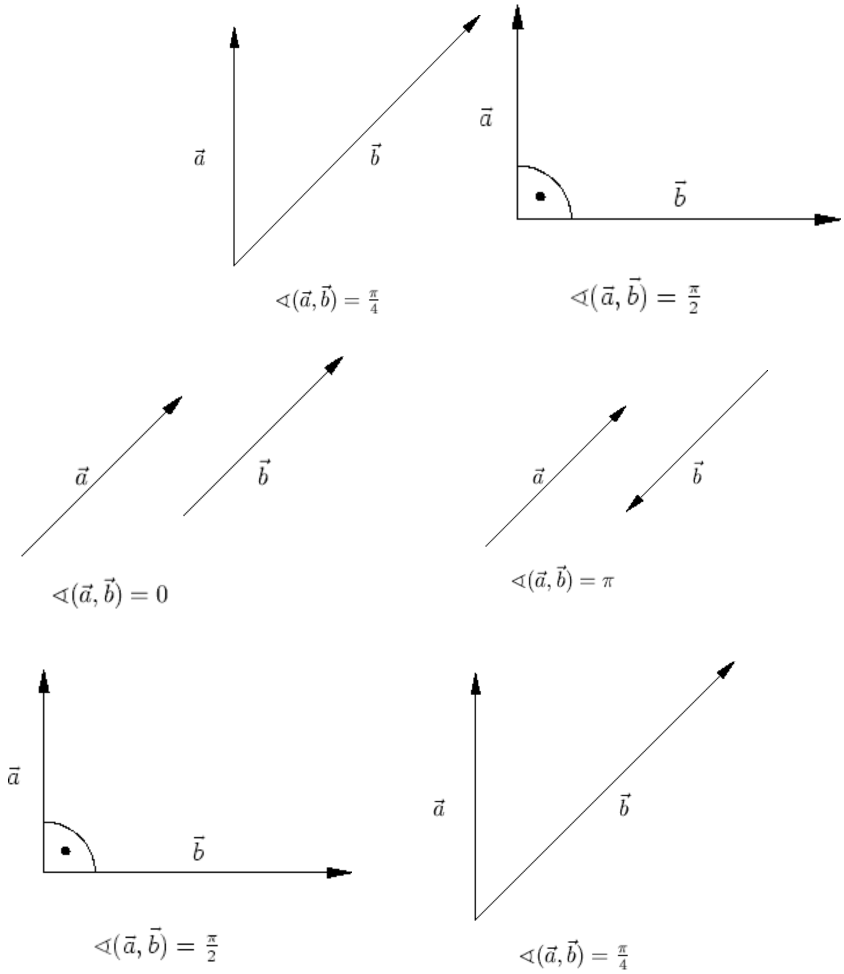
دواړه وکتورونه عمود دي، $\vec{a} \perp \vec{b}$ ، که کونج له $\pi/2$ سره برابر وي. له دې سره قراردادکيږي، چې صفروکتور په هر وکتور عمود يا ولاړ درېدلی.

(ليکونکي هوليګ، موخ)

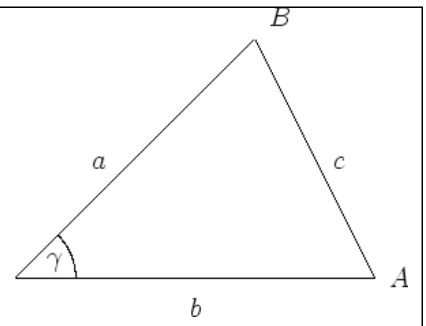
لاندې ځيرې يو څو نمونه يي حالتونه د ليد کوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library



د کوساین جمله :

	په یوه درېګوډي کې په کوم چې د اړخ $\overline{AB}$ مخامخ کونج γ پروت دی باور لري $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو په ځانګړې توکه لاس ته د $\gamma = \pi/2$ لپاره د پیتاګوراس جمله راځي:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(لیکونکي هولیګ، موخ)

د ښوونې لپاره یې د پیتاګوراس له جملې کار اخلو.

باور لري

$$c^2 = h^2 + q^2, \quad h^2 = a^2 - p^2$$

همداسې

$$q = b - p, \quad p = a\cos\gamma\,.$$

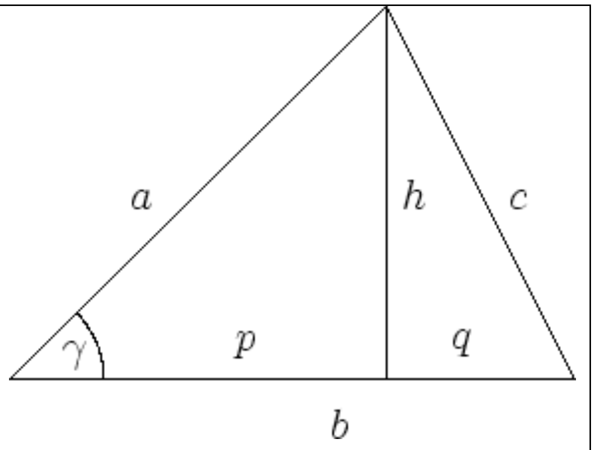
له دې سره لاس ته راځي

$$c^2 = (a^2 - p^2) + (b - p)^2$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,,$$

څه چې د ښوولو وو.

(لیکونکي هولیګ، موخ)



سکالار ضرب :

د دوه وکتورونو ضرب د

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

د له لارې تعريف دی

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

او

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}.$$

د سکالار صرب د کواوردينات د انځورولو له لارې لاس ته راځي

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

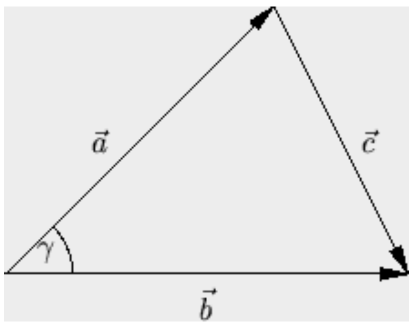
همداسې

$$\left(s\vec{a} + r\vec{b}\right) \cdot \vec{c} = s\vec{a} \cdot \vec{c} + r\vec{b} \cdot \vec{c},$$

دا په دې معناچې د ضرب ورسره بلد قوانين باور لري.

(ليکونکي هوليک، موخ)

د دواړو ورته واليو انځورونه د کوساين جملې له لارې لاس ته اځي:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma\,.$$

که داړه مربع وې کيڼ لور ته راوړل شي،نولاس ته راځي

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\,.$$

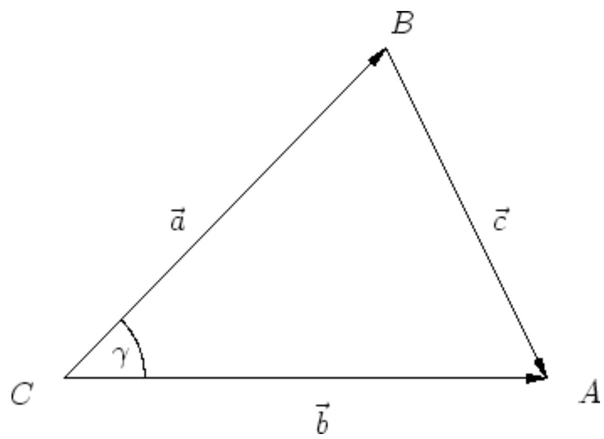
د بدلون $c_i^2 = (b_i - a_i)^2$ څخه وروسته دواړه مربع وې يو بل سره پورته کوي يا سره له منځه ځي، او پاتې ګډ ترمونه د(2-) -ځله سکالار ضرب سره يو بل سره سر خوري.

دا ځېره شوی مثلث لاندې ګوډونه لري

$$A = (6,0),\quad B = (4,4),\quad C = (0,0)$$

او دی

$$\vec{a} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix},\quad \vec{b} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \vec{c} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$



د γ کونج د سکالار ضرب په مرسته شمېرل کېدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{24}{6\sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

لاس ته راځي $\gamma = \pi/4$ ، لکه ترلې له کواورديناتونو ځخه د ليدنې دي. د دې راوړل شوې ببلګې په بنسټ کېدی شي د کوساين جمله هم وشمېرل شي. باور لري

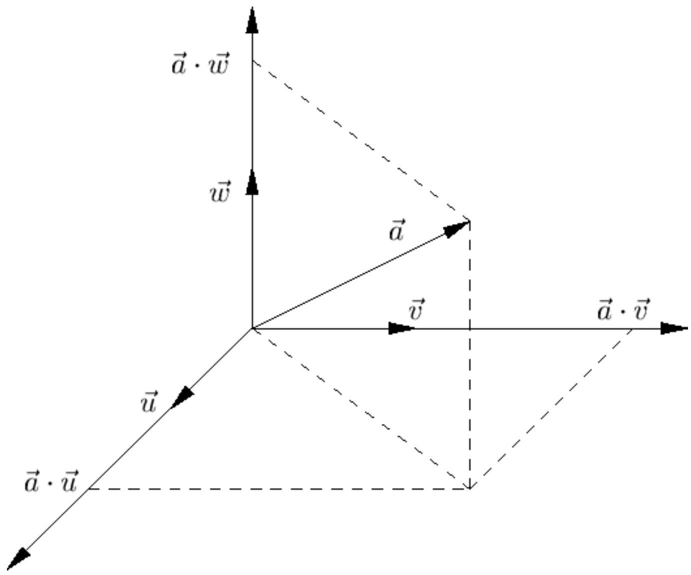
$$|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 20 - 32 - 36 = -48\,,$$

او هم د $-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma = -2\,(4\sqrt{2})\,6/\sqrt{2}$ سره توفق مومي يا سر خوري.

(ليکونکي هوليک، موخ)

اورتوګونال يا يو په بل ولاړ(عمودي) بنسټونهOrthogonalbasis

اوروتګونال بنسټ له درې جوړه اورتوګونال وکتورونو $\vec{u}$,$\vec{v}$,$\vec{w}$. ځخه جوړ دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه په ځیره کې چې کښل شوی دی، کیدی شي هر وکتور $\vec{a}$ د کرښیز کمبینیشن

$$\vec{a} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{u})}{|\vec{u}|^2}\vec{u} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{v})}{|\vec{v}|^2}\vec{v} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{w})}{|\vec{w}|^2}\vec{w}$$

له لارې انځور شي. د زیاتوونو (د جمعې برخو) د بنسټیزو وکتورونو تولید شوی پرېوستونونه دي، او د ضریبونو لپاره باور لري

$$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{v}|^2}{|\vec{v}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{w}|^2}{|\vec{w}|^2} = |\vec{a}|^2 .$$

که وکتورونه $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$ نورمي یعنې یو په بل ولاړ (عمود) وي، نو د اورتوګونال بنسټ ښخه غړېږو. په ځانګړې توګه لرو:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z$$

د کارتیزي کواوردینات سیتم د کانونیکي اورتوګونال بنسټ

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لپاره

(لیکونکي هولیک، موخ)

دا چې هر وکتور $\vec{a}$ د کرښیز کمبینیشن

$$\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې انځورېدلای شي، هندسي تړلی لیدل کیږي

د ضربیونو د ټاکلو لپاره د بنسټ وکتورونو سره سکالار ضرب جوړیږي . دا چې

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2} = 1, \quad \vec{v}\cdot\vec{u} = \vec{w}\cdot\vec{u} = 0\,,$$

د سکالار ضرب د کرښیزوالي له لارې لاس ته راځي :

$$\vec{a}\cdot\vec{u} = \left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\vec{u} = \alpha\,.$$

په ورته توګه د β او γ لپاره ورته فرمول تصدیقیږي. د ضریبونو د مربع جمعې فرمول لپاره سرې د لاندې ضربولو له لارې

$$|\vec{a}|^2 = \left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right).$$

ښوول کیږي.

دا هم په ساده توګه لیدل کیږي، چې پرېوستونو ته کمښتوکتورونه

$$\vec{a} - \alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}, \quad \vec{a} - \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}, \quad \vec{a} - \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\,,$$

هر یو په اړونده بنسټ وکتور باندې عمود یا ولاړ دی:

$$\left(\vec{a} - \alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\right)\cdot\vec{u} = \left(\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\vec{u} = 0\,.$$

(لیکونکي هولیګ، موخ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

نسبت اورتوګونال بنسټ ته

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

وکتورونه

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$$

لاندې ضربيونه لري.:

$\vec{a} \cdot \vec{u}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \sqrt{3}$ $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{6}.$
$\vec{a} \cdot \vec{v}$	$=$	
$\vec{a} \cdot \vec{w}$	$=$	

له دې سره انځورونه لاس ته راځي:

$$\vec{a} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\vec{u} + \sqrt{3}\vec{v} + \frac{3}{2}\sqrt{6}\vec{w}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب ، صليبي يا چليپا ضرب:

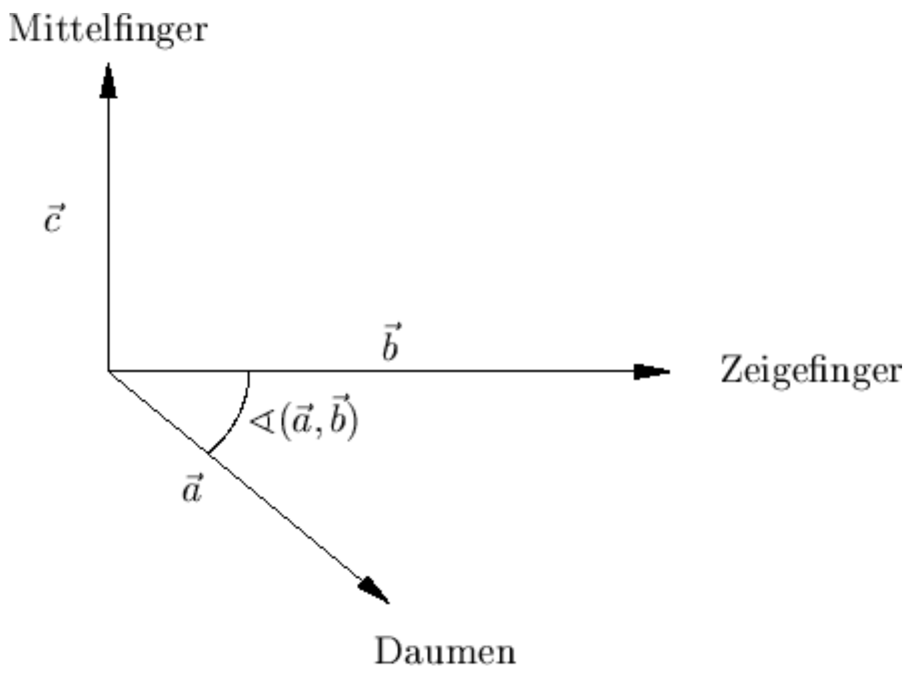
وکتور

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتوگونال دی، د ،، ښي –لاس- قانون،، لوريز دی او اوږدوالی

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))\,.$$

لري. (د ځيرې د الماني پښتو: منځگوته، گوتلکه، غټه گوته)



(c) ketabton.com: The Digital Library

شکل کي الماني: پورته: منځګوته، ښی لور ته: نخښ ګوته، کښته لور ته غټه ګوته

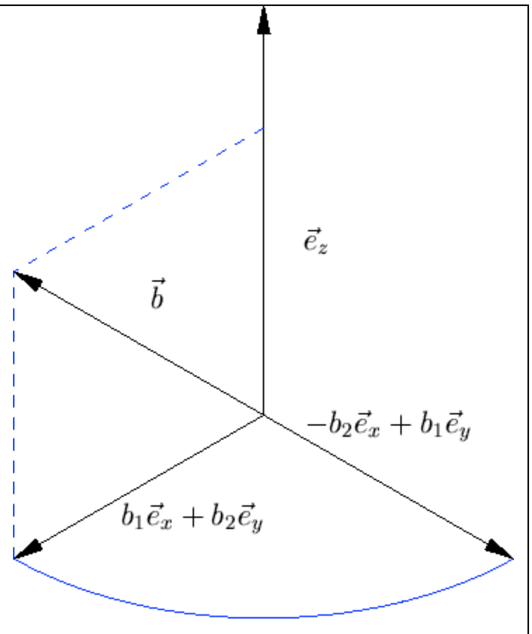
په ځانګړي توګه باور لري $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ د $\vec{a} \| \vec{b}$ لپاره او $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|$ د $\vec{a} \perp \vec{b}$ لپاره .

بدیل یي وکتور د

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

سره تعریفوي.

(لیکونکي : هولیک، ایپ)

د دې لپاره چې د دواړو تعریفونو ورته والی وښایو، لومړی په پام کې نیسو، چې دواړه انځوروني په $\vec{a}$ او $\vec{b}$ کي ګرښیزې دي، دا په دې معنا چې سکالار ضرب او وکتور جمعي سره زعمورږ دي. د کواوردینات انځورني لپاره کیدی شي دا ترلي پسي وشمیرل شي. فقط زیاتونوالی)حمعه کیدنه) د هندسي تعریف لپاره څرګنده توګه روښانه دی. لومړی ښایو، چې . $\vec{e}_z \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه له ځیري چې لیدل کیږي، وکتور ضرب لاس ته راځي، داسې چې که وکتور $\vec{b}$ په xy -سطحه پربوستل شي او بیا په کونج $\pi/2$ و ځرخول شي. دا چې د پربوستون اودوالی

$$\left|\vec{b}\right| \sin(\sphericalangle(\vec{e}_z, \vec{b}))$$

دی، نو پورتنی فرمول لاس ته راځي.

د ځانګړې انځورونې څخه په دویمه کمپوننت کې د سیده پسې شمېرنې کربنیزوالی

لاس ته راځي، ځکه چې بې د تولیز محدودیت څخه د لومړي وکتور لور د $\vec{e}_z$ په حیث ټاکو.

په ورته توګه لومړی کمپوننت هم همداسې کاروو.

بسیا کوي، چې د $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ کانونیکي بنسټ وکتورونو کمبینیشن لپاره وراته والی و ازمایل شي.

(لیکونکي : هولیګ، اپپ)

د تعریف یا پیژند د څرګندونې لپاره د وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ او $$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب $\vec{c}$ شمیرل کیږي.

یو و $\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتونال وکتور دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \parallel \vec{c},$$

کوم چې همدا اوس ټیک لوریزوالی لري. له

$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

لاس ته راځي : $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi/4$. له دې سره

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 3\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 9$$

دی او ورپسې

$$\vec{c} = \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

په بدیله توګه په ساده توګه تحلیلي تعریف

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس ته اځي

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(لیکونکي: کلاوس، هولیګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ستاندارد بنسټ لپاره باور لري

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$
$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0}, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{0}, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}\,.$$

اړونده فرمولونه د په خوښه ، د ،،ښي-لاس-قانون،،سره سم لوریزي اورتوګونال بنسټونو لپاره باور لري.

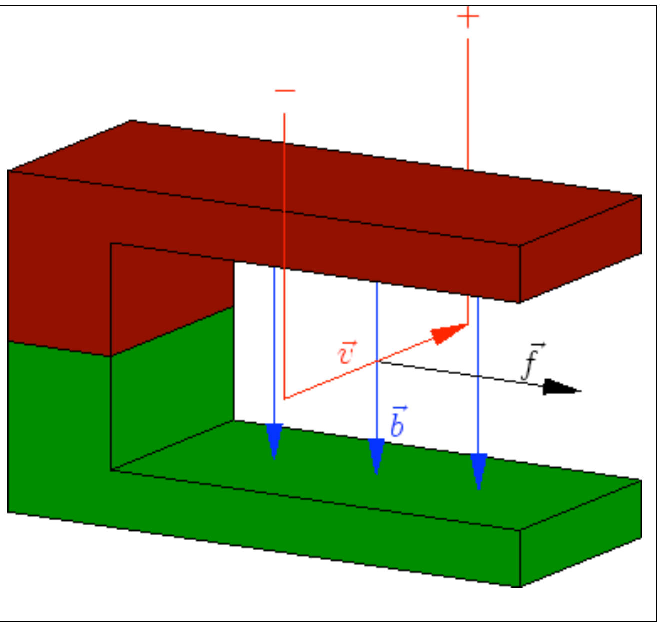
(لیکونکي : هولیګ، اپپ)

د لورنځ زور Lorentzkraft

په یوه الکترون $-e$ ، چي د $\vec{v}$ چټکتیا سره په یوه مقناطیسي ورشو $\vec{b}$ کي خوزي یا حرکت کوي، د لورنځ زور اغیز لري

$$\vec{f} = e\vec{b} \times \vec{v}\,.$$

دا په دا ځیره شوي ازمایښت نظم د بریښنا جریان تیروني د $\vec{f}$ په لور لوریزه اغیزه لري..



(لیکونکي : هولیګ، اپپ)

د وکتور ضرب لپاره قانونونه:

د وکتور ضرب لپاره لاندي قوانین باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- اسوڅیاتیو قانون Antisymmetrie

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

- کرښیزوالی Linearität

$$(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2) \times (\beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2) = \alpha_1\beta_1(\vec{a}_1 \times \vec{b}_1) + \alpha_1\beta_2(\vec{a}_1 \times \vec{b}_2) +$$

$$\alpha_2\beta_1(\vec{a}_2 \times \vec{b}_1) + \alpha_2\beta_2(\vec{a}_2 \times \vec{b}_2)$$

- غبرګاړخیز یا موازی الاظلاع ډ سطحي مساحت، هغه چې له وکتورونو a او b غزېدلي، د هغه د ضرب مطلق ارزښت دی، نو $|a \times b|$.
- د ګراسمن کتمتوالی Grassmann-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a}$$

- د لاګرانج کتمتوالی Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

(لیکونکي: اپپ،هولیګ،کیمرلي)

انتیسیومتري او کرښیزوالی د وکتورضرب د کواوردینات انځوروني څخه تړلی لیدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کټمتوالي د ښووني لپاره کيدی شي بې له ټوليزو بنديزونو $\vec{a} = \vec{e}_x$ ونيول شي او بايد په $\vec{b}$ کې د کرښيزوالي په بنسټ فقط حالتونه $\vec{b} = \vec{e}_y$ او $\vec{a} = \vec{e}_x$ وڅيړل شي، د $\vec{a} = \vec{b}$ لپاره د کټمتوالي دواړه اوخونه په ساده توګه صفر دي.

په لومړي حالت کې د کيڼ اړخ د ګاسمن کټمتوالی لاس ته راځي

$$(\vec{e}_x \times \vec{e}_y) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

دا د ښي اړخ

$$c_1\vec{e}_y - c_2\vec{e}_x$$

سره يوغږيز کيږي. په دې راوړل شوي ځانګړي حالت ($\vec{a} = \vec{e}_x$, $\vec{b} = \vec{e}_y$)

کې د لاګرانژ کټمتوالی

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ c_1d_2 - c_2d_1 \end{pmatrix} = c_1d_2 - c_2d_1,$$

هم ټيک دی.

په ورته توګه د $\vec{b} = \vec{e}_z$ لپاره هم دليل راوړل کيږي.........

کرښيزوالی کيدی شي د غبرګيزوالی لپاره وکارول شي. دا لاندې يې بيلګه ده.

$$\left(3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad 6\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \quad 5\begin{pmatrix}0-2\\1-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\5\\0\end{pmatrix}$$

د گراسمن - او لاګرانژ کتوتوالی وکتور ضرب په ساده توګه د شمیرلو سکالار ضرب ته بیرته بیایي. د بېلګې په توګه دی

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

او

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}\right)=0\cdot6-12\cdot1=-12.$$

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د اپیسیلون - تنزورEpsilon-Tensor

د ε–تنزور

$$\varepsilon_{i,j,k}\in\{-1,0,1\},\quad i,j,k\in\{1,2,3\},$$

د دوه برابرو پیژندنخښو (ایندکسونو) سره صفر دی او دوه جوړه ډوله مختلفو ایندکسونو سره لاندې ارزښت لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2,3} &= \varepsilon_{2,3,1} = \varepsilon_{3,1,2} = 1\,, \\ \varepsilon_{1,3,2} &= \varepsilon_{2,1,3} = \varepsilon_{3,2,1} = -1\,. \end{aligned}$$

نو دا د ځيکليکي پرموتيشن (ځای بدلون) لاندې اينواريانت (تغير نه خوړونکی) دی او د پيژندنخښو يا ايندکسونو د بدلون سره مخنخښه بدلوي.

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

د –تنروز په مرسته کيدی شي د وکتور ضرب $\vec c = \vec a \times \vec b$ په لاندې بڼه وليکيل شي.

$$c_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_j b_k$$

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

شپات ضرب

شپات ضرب

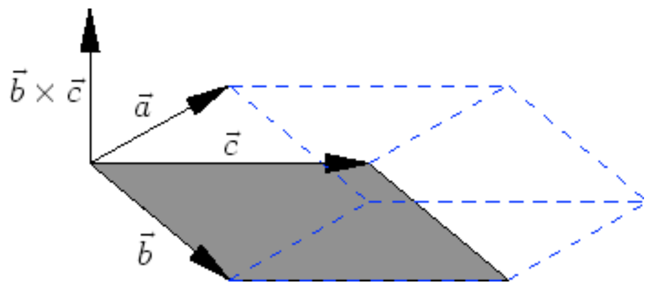
$$[\vec a, \vec b, \vec c] = \vec a \cdot (\vec b \times \vec c) =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

ترمخنخښي پورې د له درې وکتورونو $\vec c,\ \vec b,\ \vec a$ څخه غزول شوی شپات ډکي يا حجم سره يو غبريز شي يا برابر شي.

(غبرګ سطحيز)

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ε – تنزور په مرسته کېدی شي د غبرگخوایيز يا شپات ضرب په لاندې بڼه هم وليکل شي:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_i b_j c_k$$

(ليکونکي: ايپ، هوليک)

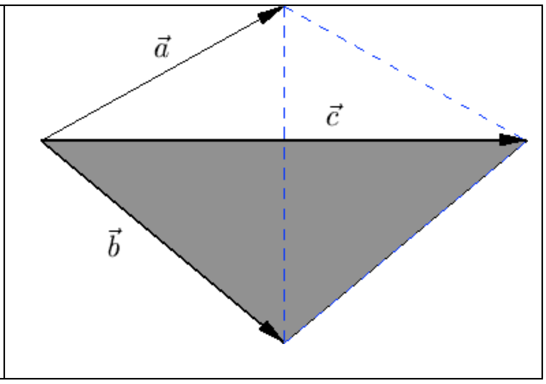
د $\vec{d} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$ سره

$$h = |\vec{a}| \left|\cos(\sphericalangle(\vec{a},\vec{d}))\right| = |\vec{a} \cdot \vec{d}|$$

د شپات يا غبرگ سطحيز جگوالی دی. دا چې $f = |\vec{b} \times \vec{c}|$ د کربنيز شوي غبرگ اړخيز   د سطحې خونديونه ده، د ډکي يا حجم لپاره لاس ته راځي:

$$hf = \left|\vec{a} \cdot \left(\frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}\right)\right| |\vec{b} \times \vec{c}| = |[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|\,.$$

د يوه څلور سطحيز (حجم) شميرنه Volumen eines Tetraeders



د یوه درې وکتورونو $\vec{a}$, $\vec{b}$ او $\vec{c}$ څخه غزېدلی تیترااید ډکی یا حجم V دی

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|\,.$$

(ليکونکي: اېپ، هوليګ)

د یوه تیترااید‌ر(څلور سطحیز) ډکی V داسې شمیرل کیږي

$$V = \frac{1}{3}Gh\,,$$

چیرته چې G بنسټ سطحه ده او h جګوالی په ګوته کوي. که په بام کې ونیول شي، چې G نیم دومره لوی دی، لکه د غبرګسطحیز G_{Spat} سطحه، چې له درې وکتورونو غزېدلې ، نو لاس ته

$$V = \frac{1}{6}G_{\text{Spat}}h = \frac{1}{6}V_{\text{Spat}} = \frac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$$

راځي، د غبرګطحیز V_{Spat} په مرسته .

(ليکونکي: اېپ، هوليګ)

د څلور سطحیز V ډکی ، چې له وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غزېدلی ، دی

$$V=\frac{1}{6}|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$$

$$=\frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right|$$

$$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\,.$$

د غبرګسطحیز یا ذوذنقي خویونهEigenschaften des Spatprodukts

د غبرکسطحیز ضرب په هر Argument کې کرښیز دی او سربیره پردي دا لاندې نور خویونه لري

- ځیوکلیکي – یا تل بیرته راګرځیدونی بدلون : zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]=[\vec{c},\vec{a},\vec{b}]$$

- کرښیز بلواکوالی یا تابعیت

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0\Leftrightarrow\vec{0}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c},$$

د لږ ترلږه یوه سکالار α,β,γ سره د 0 سره نابرابر.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- لوريزونه Orientierung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] > 0$$

د هر ښي سيستم لپاره

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ ارزښتونو شمیرنه

وکتورونه $\vec{u}$, $\vec{v}$, او $\vec{w}$ یو ریښتونی غبرګهواریز(سطحیز) غزوي، نو یو په خوښه وکتور $\vec{x}$ کیدی شي د کرښیز کمبینیشن

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

په ځیر انځور شي د لاندې ضریبونو سره:

$$\alpha = \frac{[\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}, \quad \beta = \frac{[\vec{x}, \vec{w}, \vec{u}]}{[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]}, \quad \gamma = \frac{[\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}]}{[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]}.$$

(ليکونکي اپپ،هوليګ)

د

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

لپاره سکالار ضرب د $\vec{v} \times \vec{w}$ سره جوړوو، نو لاس ته راځي

$$\vec{x} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \quad = \alpha\, \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\alpha = \frac{[\vec{x},\vec{v},\vec{w}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]},$$

داچې $\vec{u}$,$\vec{v}$ او $\vec{w}$ یو ریښتونی غبرګسطحیز غزوي، داپه دې معنا چې $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \neq 0$ دي. د β او γ لپاره سړی په روته توګه مخ ته ځي.

(لیکونکي اپپ،هولیګ)

که وکتور

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د وکتورونو

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د کرښیز کمبینشن په څیر انځورول غواړو، نو لاس ته راځي

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = 2$$

$$[\vec{x},\vec{v},\vec{w}] = 4, \quad [\vec{x},\vec{w},\vec{u}] = -4, \quad [\vec{x},\vec{u},\vec{v}] = 8$$

او له دې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{x} = \frac{4}{2}\vec{u} - \frac{4}{2}\vec{v} + \frac{8}{2}\vec{w}$$

$$= 2\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w}\,.$$

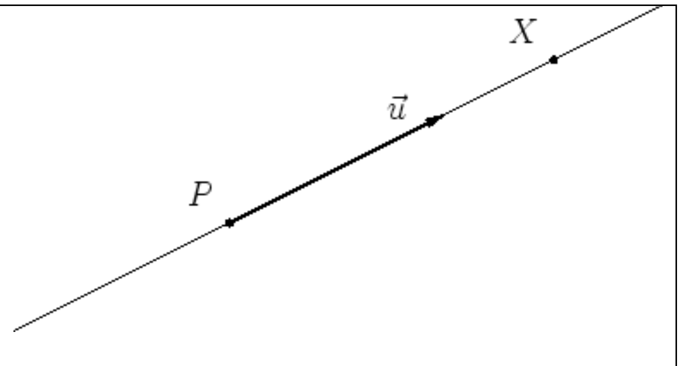
(لیکونکي اپپ،هولیګ)

ټکي – لور – بڼه:

په یوه کرښه ټکی X له P د $\vec{u}$ په لور کېدی شي د

$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$

سره انځور شي.



په ورته توګه باور لري

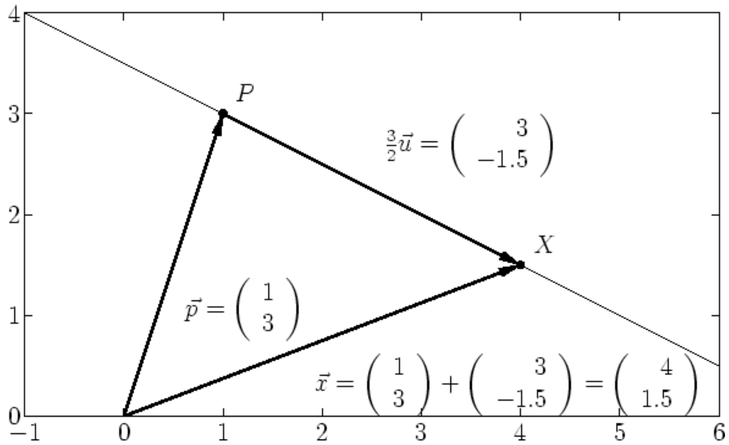
$$x_i = p_i + tu_i, \quad i = 1,2,3\,,$$

د ځای-وکتور $\vec{x}$ کواوردیناتو لپاره.

(لیکونکي ،هولیګ،هیورنر)

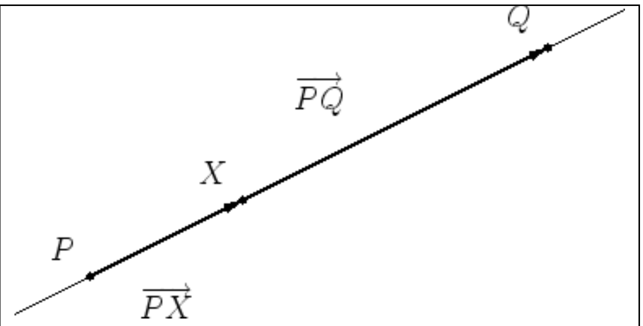
ځېره د یوې کرښې د ټکي-لور-بڼه د لیدلو کوي د په د پاسه ټکي $P = (1,3)$ او $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ لور سره. د کرښې د X ټکی پارامتر $t = 3/2$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

دوه – ټکي – بڼه :

	په يوه کرښه د X ټکی چې له دوه $P \neq Q$ ټکو تيرېږي کيدی شي په بڼه $\overrightarrow{PX} = t\overrightarrow{PQ}, \quad t \in \mathbb{R},$ انځور شي. د پارامتر ارزښت $t \in [0,1]$ ټوټه کرښه $\overline{PQ}$ راکوي.

په ورته توګه

د ځای-وکتور $\vec{x}$ د کواوردينات لپاره باور لري

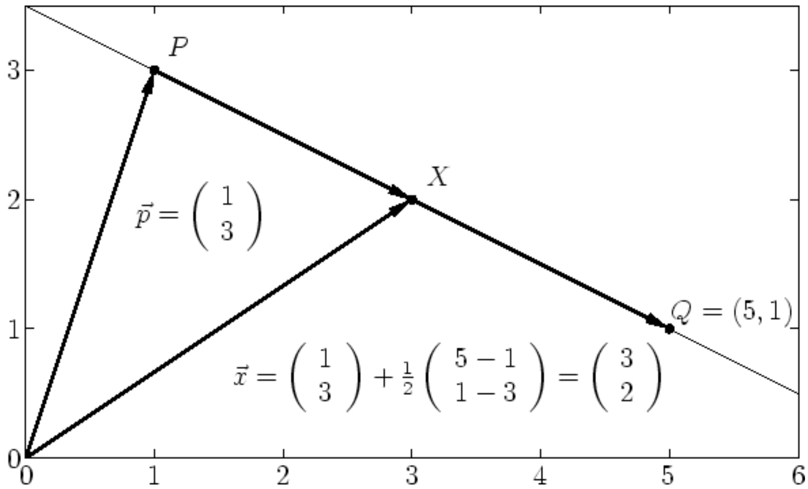
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_i = p_i + t(q_i - p_i), \quad i = 1, 2, 3\,,$$

(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

د $t \in [0,1]$ لپاره د دوه-ټکو-بڼې سره ټکی X ټوټه کرښه $\overline{PQ}$ په $t:(1-t)$ نسبت ويشي.

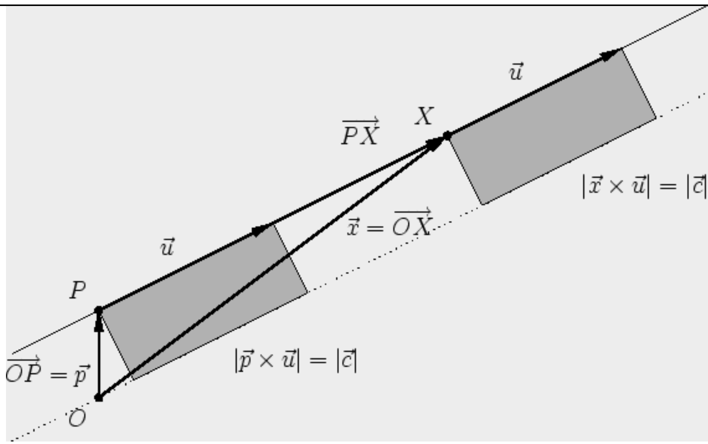
په ځانګړې توګه د P او Q ټکو ترمنځ منځ ټکو پارامتر $t = 1/2$ په ګوته کوي.



(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

لحضوي – يا سترګورپ بڼهMomentenform

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه کرښه د X ټکی چې له دوه ټکو P د $\vec{u}$ په لور تیرېږي کیدی شي د $\overrightarrow{PX} \times \vec{u} = \vec{0}$ په بڼه ولیکل شي.	

په ورته توګه د ځایوکتور لپاره باور لري.
$$\vec{x} \times \vec{u} = \vec{c}, \quad \vec{c} = \vec{p} \times \vec{u}\,.$$

(لیکونکي ،هولیګ،هیورنر)

د یوې کرښې لحظوی –بڼه کېدی شي استعمال شي، چې ایا یو ورکړشوی ټکی X په یوه کرښه پروت دی. د دې څیره شوې بیلګې لپاره د X_1 ټکي لپاره ورکوي:

$$\overrightarrow{PX_1} \times \vec{u} = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

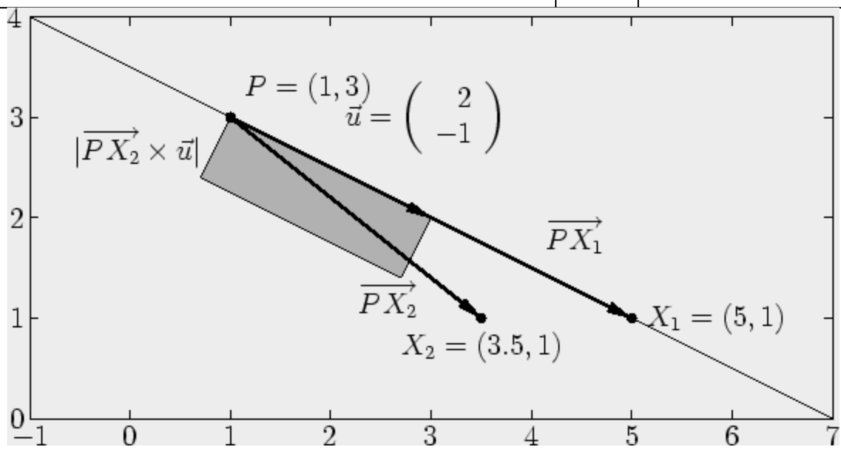
$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \vec{0}\,.$$

د دې برعکس د X_2 ټکي لپاره لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\begin{pmatrix} 2.5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$=$	$\overrightarrow{PX_2} \times \vec{u}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$	$=$	



د ټکي ــکرښې واټن:

په يوه کرښه د يوه ټکي Q پروجکشن(پرېوستون) X چې له P تيريږي د لور سره لاندې پوره کوي

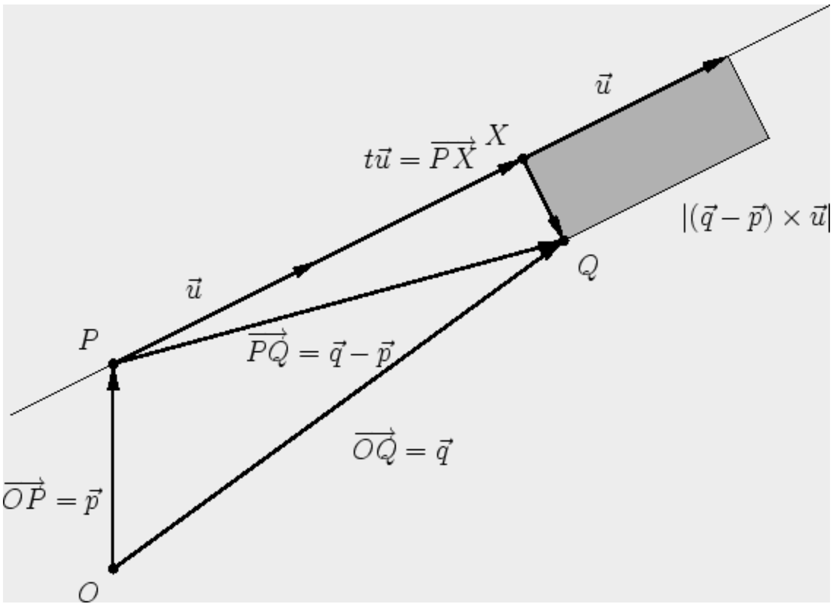
$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t = \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}.$$

له دې څخه د په حيث

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

واټن لاس ته راځي .

(c) ketabton.com: The Digital Library



(ليکونکي ،هوليک،هيورنر)

په کرښه د ټکي Q پربوستون X لپاره وکتور $\overrightarrow{XQ}$ په $\vec{u}$ عمود- يا نيغ ولاړ دی.

دا د سکالا ضرب له لارې ازمايل کېدی شي:

$$\overrightarrow{XQ} \cdot \vec{u} =$$

$$\left(\vec{q} - \left(\vec{p} + \frac{(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,\vec{u}\right)\right)\cdot\vec{u} = (\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{u} - \frac{(\vec{q}-\vec{p})\,\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,|\vec{u}|^2 = 0\,.$$

د چليپا يا ومتوري ضرب تعريف له مخې باور لري

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\left(\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)$$

او له دې سره د واټن d لپاره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \left|\overrightarrow{XQ}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{PQ},\vec{u}\right)\right) =$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{PQ}\right| \; |\vec{u}| \; \sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{PQ},\vec{u}\right)\right)}{|\vec{u}|}$$

$$= \frac{|(\vec{q}-\vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} \, .$$

(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

که ټکی $Q = (3,3,3)$ په کرښه پرېيستل شي

$$g: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نو د پروجکشن په حيث د ځای وکتور سره ټکی لاس ته راوړي

$$\vec{x} = \vec{p} + \frac{(\vec{q}-\vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \, \vec{u} \quad =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1^2 + 1^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

واټمن

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(2+0)^2 + (0-1)^2 + (1-2)^2}{3}} = \sqrt{2},$$

د

$$\left|\overrightarrow{XQ}\right| = \sqrt{(3-3)^2 + (3-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}.$$

سره يو غږيز دی.

(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

د دوه کرښو واټن :

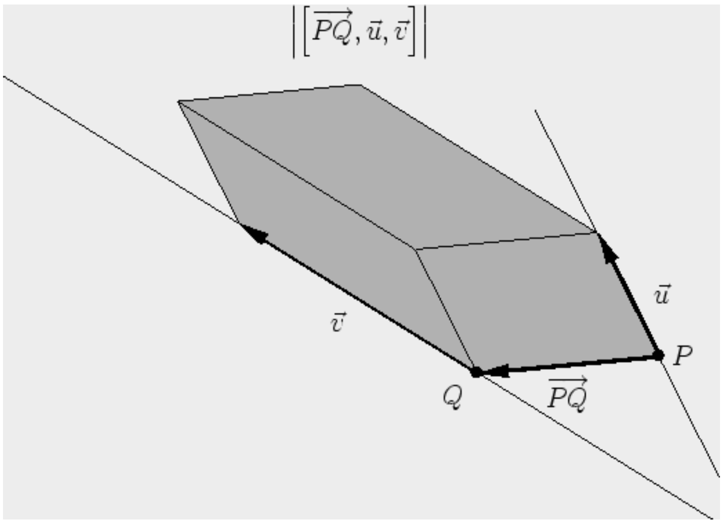
د دوه کرښو ، چې له ټکو P ، Q او د لورو $\vec{u}$, $\vec{v}$ سره ورکړ شوي دي واټن دی

$$d = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|},$$

که $\vec{u} \nparallel \vec{v}$ وي. د غبرګو کرښو پاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}\,.$$



دوه کرښي بادمايلي windschief بلل کيږي، که غبرګي نه وي او مثبت(زياتيز) واټن ولري..

(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

که

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u}, \quad \vec{y} = \vec{q} + t\vec{v}$$

د ټکو ځای وکتورونه وي د خورا لنډ واټن سره، نو

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}$$

دواړو لوروکتورونو سره عمود يا ولاړ دی، يعن غبرګ وه

$$\vec{c} = \vec{u} \times \vec{v}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته.

دا چې د یوه وکتور اوږدوالی د هغه مطلق ارزښت ضرب یوون (واحد)وکتور سره برابر دی لاس ته راځي:

$$d = |\overrightarrow{XY}| = \left|(\overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}) \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right| = \left|\overrightarrow{PQ} \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right| ,$$

او له دې سره غوښتونکی فرمول.

د غبرګو کرښو لپاره هغه د یوه ټکي واټن له کرښې سره فرمول و کاروي.

(لیکونکي:هولیګ، هیورنر)

کرښې

$$g : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad h : \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

دا لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\left|\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{(1-(-2))^2+(1-1)^2+((-2)-1)^2}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

د الوتنې لارې Flugkorridore

په ساده توګه نيسو، چې الوتکه په سيده لار له الوتنځای څخه و موخې ته ا لوزي او د التنلار له سيده کرښتوتو څخه جوړه ده، نو د يوې الوتنې لپاره له شتوتګارت (S) Stuttgart څخه و کوپنهاګن ته د ځګيدنې لار

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0,8]$$

او د يوې الوتنې لپاره له فرانکفورت (F)څخه قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,3].$$

که د ساده وينا څخه مخ ته لاړشو، چې الوتکه په سيده لار د د الوتځای څخه و موخه ځای ته الوزي او د الوتنې لار له سيده کرښتوتو څخه جوړه ده، نو د شتوتګارت S څخه د کوپنهاګن ته د يوې الوتنې د ځګيدنې الوتنلار ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 8]$$

او د يوې الوتنې لپاره له فرنکفورت F څخه و قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 3].$$

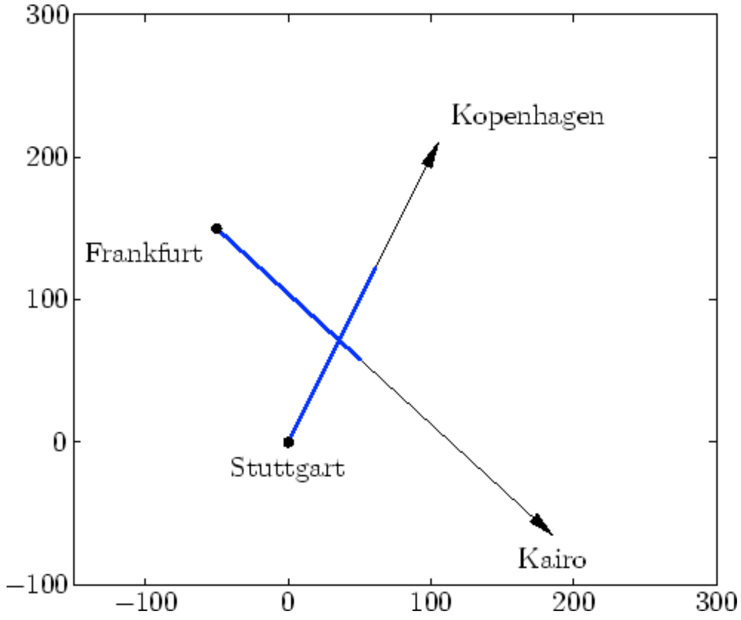
که د کواوردينات پيل شتوتګارت و ټاکل شي، نو کواوردیناتونه $F = (-50, 150, -1/4)$ لرو، په کيلو متر کچ شوي.

دواړه د الوتنلارې لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}$$

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 95 \\ 2 \\ -792 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{95^2 + 2^2 + 792^2}} = \frac{4252}{\sqrt{636293}} \approx 5.33.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



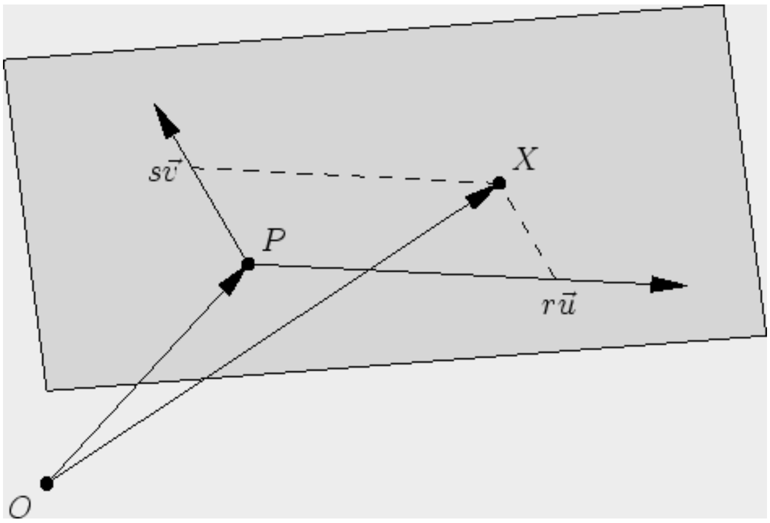
(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

د يوې سطحې پارامتريکي انځورونهParameterdarstellung einer Ebene

له ټکي P تېره ، چې له دوه نه غبرګو لورو $\vec{u}$ او $\vec{v}$ غزېدلې سطحه باندې ټکی X پوره کوي

$$\overrightarrow{PX} = s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s,t \in \mathbb{R}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه د ځای وکتور $\vec{x}$ د کواودیناتو لپاره باور لري

$$x_i = p_i + su_i + tv_i, \quad i = 1, 2, 3\,.$$

(لیکونکي:هولیک، وایس)

یوه سطحه دې د ټکي $P = (1,2,3)$ او وکتورونو $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ سره روکړ شوې وي. نو $X = (1,1,2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{u} + (-1)\vec{v}$$

له بلې خوا $X = (0,0,0)$ په سطحه پروت نه دی، ځکه چې $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ دی او د مساوات سیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

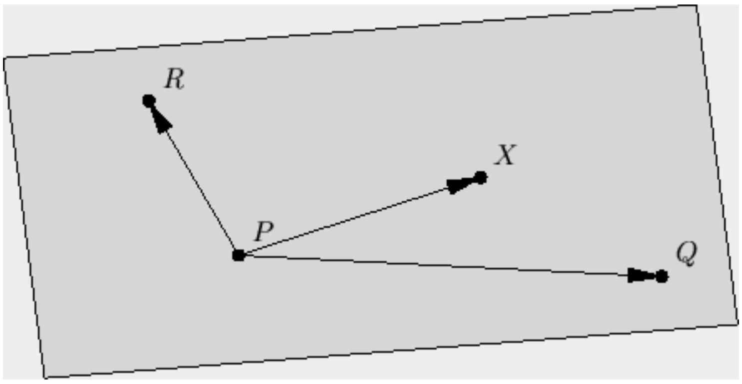
حل نه لري، كه لومړۍ او دويمې ليكې ته وګورو .

د يوې سطحې درې-ټكي-بڼه Drei-Punkte-Form einer Ebene

د ټكي X لپاره چې په يوه سطحه پروت دى،كومه چې له ټكو P, Q, R, تېرېږي او يو اصلي درېګوډی جوړوي د غبرګخوايزو ضرب وركيږي   .

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}]=0\,.$$

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}]=0\,.$$



(ليكونكي:هوليک، وايس)

يوه سطحه دې د ټكو $P=(1,2,3)$, $Q=(3,2,3)$ او $R=(2,3,4)$ له لارې وركړ شوې وي.

نو $X=(1,1,2)$ په سطحه پروت دى، ځكه چې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

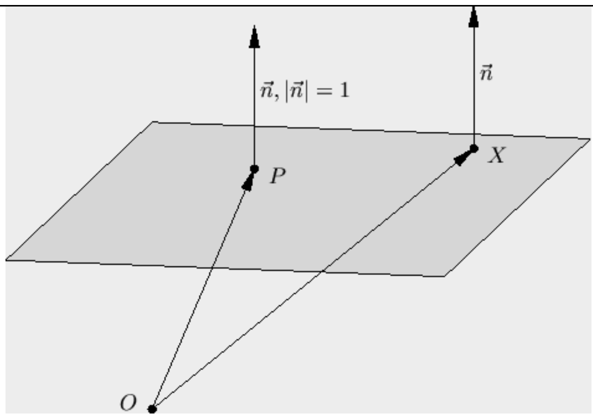
$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} = 0$$

له بلې خوا $X=(0,0,0)$ په سطحه نه دی پروت، څکه چې باور لري

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = 4-6 = -2 \neq 0$$

(لیکونکي:هولیګ، وایس)

د یوې سطحې د هیسې -نورمال بڼهHesse-Normalform einer Ebene



(لیکونکي:هولیګ، وایس)

په یوه سطحه د یوه ټکي X ځایوکتور $\vec{x}$ په یوه سیخه په P کې اورتوګونال و یوه نورمالوکتور ته پوره کوي

$$\vec{x}\cdot\vec{n} = d, \quad d = \vec{p}\cdot\vec{n}\,.$$

په نورمال بڼه نیول کیږي چې $|\vec{n}| = 1$ او $d \geq 0$. په دې حالت کې d د سطحې واټن دی و سرچینې ته

یوه سطحه E دې د ټکي $P=(1,2,3)$ له لارې ورکړشوې وي او نورمي نورمال وکتور

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{n} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

دی

$$d = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = 3\,,$$

دا په دي معناچې سطحه لاندې نورمال بڼه لري

$$E: \quad \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 3\,.$$

نو $X = (4,0,1)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \frac{1}{3}(8+0+1) = d\,.$$

له بلې خوا $X = (0,0,0)$ په سطحه نه دی پروت، ځکه چې پاور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = 0 \neq d\,.$$

(ليکونکي:هوليګ، وايس)

د سطحو انځورونو ترمنځ د شميرنې بدلون يا اړول

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: یوه سطحه دې د ټکي P له لارې ورکړ شوې وي همداسې دوه نه غبرګ وکتورونه $\vec{u},\vec{v}$.

سږی نور دوه ټکي Q او R لاس ته راوړي، چې دا هم په سطحه پراته دي او له P سره، د $\vec{q}=\vec{p}+\vec{u},\quad \vec{r}=\vec{p}+\vec{v}$.

له لارې کرښه نه جوړوي

د نورمالو وکتور $\vec{n}$ په $\vec{u}$ او $\vec{v}$ نیغ ولاړ دی یا نېغ عموددی، یعني $\vec{u}\times\vec{v}$ ته غبرګ دی.

له دې دا نورمي نورمالو کتور د هیسي-نورمال بڼې لپاره دی

$$\vec{n}=\sigma\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}\,,$$

د له کوم سره چې مخنخښه $\sigma\in\{-1,1\}$ داسې باید وټاکل شي، چې $d=\vec{p}\cdot\vec{n}$ مثبت (زاټیز) وي.

دویم : یوه سطحه دې د درې ټکو P ,Q او R له لارې ورکړ شوې وي، چې یو اصلي درېګودی(مثلث) جوړوي.

دوه وکترونه لاس ته راځي، چې سطحه غزوي یا جوړوي د لاندې وکتورونو له لارې

$$\vec{u}=\overrightarrow{PQ},\quad \vec{v}=\overrightarrow{PR}\,.$$

له دې وکتورو څخه لکه په لومړي کې کېدی شي د هېسې٠نومالبڼه لاس ته راوړل شي.

دریم : یو ه سطحه دې د یوه ټکي او یوه نورمالوکتور $\vec{n}$ له لارې ورکړ شوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه وکتورونه لاس ته راځي. چې یوه سطحه داسې و غزول شي پخ کړمه کې چې دوه کرښیز خپلواک وکتورونه چې $\vec{n}$ باندې عمود یا و لاړ وي، و پلټل شي.

$$\vec{u} = \vec{n} \times \vec{x}, \quad \vec{v} = \vec{n} \times \vec{u}\,,$$

چېرته چې$\vec{x}$ یو په خوښه وکتور $\neq \lambda\vec{n}$ دی.

له دې وکتورونو څخه کېدی شي، لکه په لومړي کې دې-ټکي-بڼه لاس ته راوړای شي.

(لیکونکي:هولیګ، وایس)

لاندې ټکي دې ورکړ شوي وي

$$P = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

له دې څخه شمیرو

$$\vec{u} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \vec{PR} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د هېسي ـــنورمال بڼې لپاره د نورمال وکتور لپاره اوس دالاندې شمیرو

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -24+20 \\ -16+18 \\ 60-64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

او له دې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{\begin{pmatrix}-4\\2\\-4\end{pmatrix}}{6}\,.$$

ځکه چې $d=\vec{p}\cdot\vec{n}$ باید مثبت (زیاتیز)وی، له لاندې لاس ته راځي

$$d=\vec{p}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}7\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-4\\2\\-4\end{pmatrix}=-4$$

$\sigma=-1$
او له دې سره

$$\vec{n}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\,.$$

نو سطحه نورمال بڼه لري

$$E:\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3=4\,.$$

(لیکونکي:هولیک، کرایخ)

د ټکي – سطحې واټن :

د یوه ټکي Q ولاړ برېوتلی وکتور په یوه سطحه په ټکي P د نورمالوکتور $\vec{n}$ سره دی

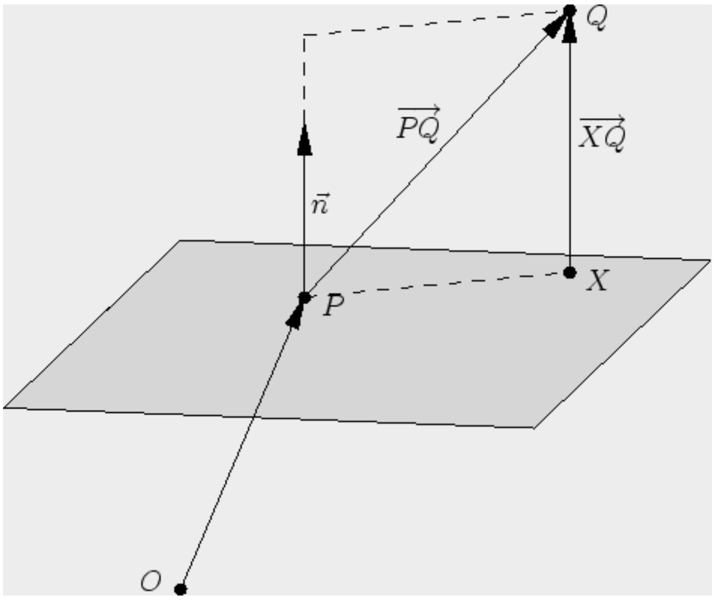
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overrightarrow{XQ} = \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\,\vec{n}\,.$$

د دې اوږدوالی

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

د سطحې واټندی و تکي Q ته.



(ليکونکي:هوليک، وايس)

سکالار ضرب

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n} = \cos\alpha|\overrightarrow{PQ}||\vec{n}| = \pm d|\vec{n}|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څخه دا $|\vec{n}|$ -واره د ټکي Q او سطحې ترمنځ واټن لاس ته راځی، د کوم سره چې مخنخښه دا راپه ګوته کوي، چې ایا $\overrightarrow{PQ}$ په همغه خوا ښايي، لکه یې چې $\vec{n}$ ښايي.

له دې سره دی

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

او

$$\overrightarrow{XQ} = \pm d \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n} \,.$$

لیکونکي: هیولیګ، وایس

له ټکي $P = (1,2,3)$ تېیره سطحه د نورمالوکتور $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ سره دې د ټکي $Q = (3,2,3)$ واټن d همداسې په سطحه پرې ولاړټکی X وټاکل شي.

لومړی دی

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 4, \quad |\vec{n}| = 3 \,.$$

له دې سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

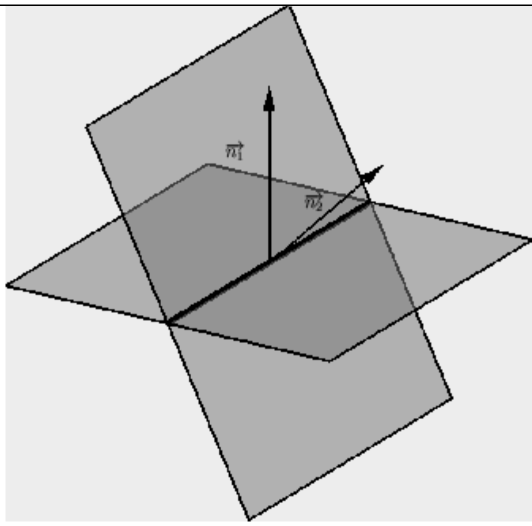
$$\overrightarrow{XQ} = \frac{4}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \quad d = \frac{4}{3}$$

او بالاخره شمیرل کیږي

$$\vec{x} = \vec{q} - \overrightarrow{XQ} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}19\\14\\19\end{pmatrix} .$$

(لیکونکي:هولیک، وایس)

د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع:

 	د دوه سطحو د نورمال وکتور $\vec{n}_i$ سره د دواړو کونجونو(زاویو) $\varphi \in [0, \pi/2]$ هغه کوچني کونج يې د $\cos\varphi = \frac{\vert\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\vert}{\vert\vec{n}_1\vert\vert\vec{n}_2\vert}$ له لارې یواځنی ټاکلې او $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ د غوڅکرښې لور ده.

(لیکونکي:هولیک، وایس)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه هوارو لپاره، چې هره یوه یې له ټکو $P_1 = (1, 2, 0)$, $P_2 = (0, 1, 3)$ او نورمالوکتورونو

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سره تعریف دي، د کونج او د دواړو سطحو د غوڅکربښې سره جوړ کونج(زاویه) φ دې وټاکل شي.

دی

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{1}{2}$$

او له دې سره

$$\varphi = \pi/3\,.$$

پسې هم

$$\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

د غوڅکربښې لور ده.

د دې لپاره چې یو غوڅټکی (نقطه تقاطع) وشمیرو، و

$$d_1 = \vec{p}_1 \cdot \vec{n}_1 = -1, \quad d_2 = \vec{p}_2 \cdot \vec{n}_2 = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته اړتیا شته او یو ټکی S ته، چې مساوات

$$\vec{s}\cdot\vec{n}_1 = d_1, \quad \vec{s}\cdot\vec{n}_2 = d_2$$

پوره کوي. د بېلګې په توګه $S=(2,3,5)$ پیدا کیږي او له دې سره غوښکرښه لاس ته راځي:

$$g:\vec{x}=\vec{s}+t\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad t\in\mathbb{R}\,.$$

(لیکونکي:هولیک، وایس)

د منظم تتراید(څلور سطحیز) د کونج ټکو

$$P_1=(1,0,0), \quad P_2=(-1,0,0),$$

$$P_3=(0,1,\sqrt{2}), \quad P_4=(0,-1,\sqrt{2})$$

د دوه سطحو ترمنځ کونج یا زاویه دې پیدا شي.

موږ د بیلګې په توګه د سطحو څخه چه له P_1,P_2,P_3 همداسي له P_1,P_2,P_4 جوړې وي یا تېرېږي کار اخلو.

د نورمال وکتورونو لپاره باور لري

$$\vec{n}_1=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\-2\end{pmatrix}$$

همداسي

$$\vec{n}_2 = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} .$$

له دې سره دی:

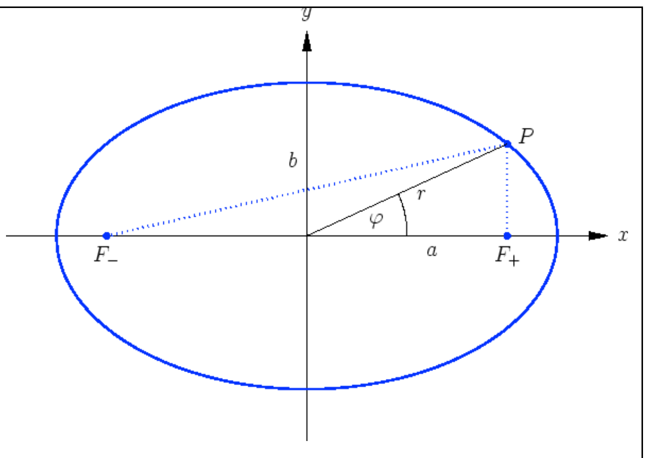
$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{12}\sqrt{12}} = \frac{1}{3}$$

او لاس ته راوړو

$$\varphi \approx 70,59^\circ .$$

(ليکونکي:هوليک، وايس)

هګی (بيضوي) Ellipse



په يوې ايليپسي يا بيضوي د تکو $P = (x, y)$ د د دوه سوزونتيکو $F_\pm$ څخه واټن ثابط يا همغه دی:

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a$$

د $2a > |\overrightarrow{F_-F_+}|$ سره .

(c) ketabton.com: The Digital Library

که وي $F_{\pm} = (\pm f, 0)$ ، نو د کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2\,,$$

او

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2\varphi}$$

د ټکو P د قطبي کواودیناتونو لپاره.

د هګی پارامتري کونه ده

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

د $t \in [0, 2\pi)$ سره.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د انځوره ونو ورته والی کیدی شي د سیده پسې شمیرنې له لارې و ازمایل شي.

د دې لپاره چې وښایو، چې

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

مربع (څلورۍ) کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\underbrace{2a-\sqrt{(x+f)^2+y^2}}_{>0}=\sqrt{(x-f)^2+y^2}$$

او دې کينې مساوات ته ورته مساوات لاس ته راوړو

$$\underbrace{4a^2+4xf}_{>0}=4a\sqrt{(x+f)^2+y^2}\,.$$

د $4a$ سره وېشنې وروسته نوې مربع کول يا بيا مربع کول راکوي

$$a^2+2xf+\frac{f^2}{a^2}x^2=x^2+2xf+f^2+y^2\,.$$

د بدلون $f^2=a^2-b^2$ له لارې د بنې بدلون وروسته د کواوردينات بنه راکوي.

د قطبي بنې پيدا کوني

$$r^2=\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

لپاره د مخرج(ماتلاندې) سره ضربولو سره او په پام کې نيسو

$$x^2=(x^2+y^2)\cos^2(\varphi)\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$x^2+y^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2=b^2$$

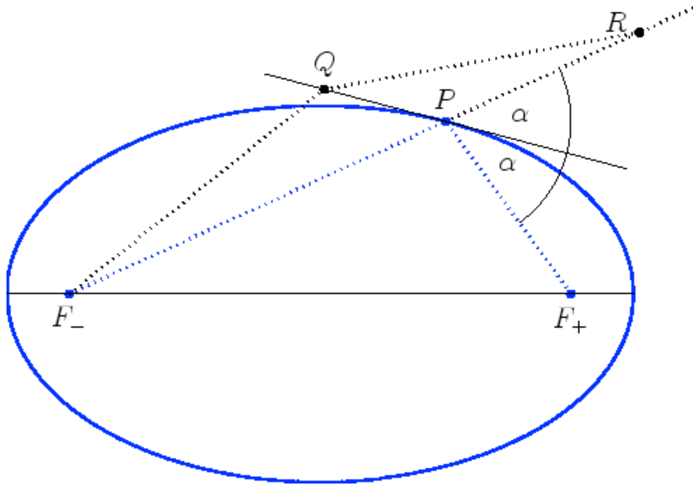
او د b^2 سره وېش له لارې د کواوردينات بنه.

(ليکونکي:اپپ،هوليگ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) :

د سوزونټکو وړانګي (په سوزونټکو کې راګرځي (رفلکت کونه یا بیرته راګرځیدنه)



د ښووني لپاره د مرستندوی ټکي په حیث په تانجنت g د سوزونټکي F_+ هنداره شوې ځیره R ټاکو او په g یو په خوښه ټکی $Q \neq P$ ټاکو . دا چې Q د هګۍ یا بیضوي دباندې پروت دی، نو دی

$$2a = |\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QF_+}| \,.$$

که د توټه کرښو $\overline{PF_+}$ او $\overline{QF_+}$ په ځای یې هنداره شوې ځیرې کیږدو، نو لاس ته راځي

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PR}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QR}| \,,$$

او پسي یا تعقیب باید $R,\ P,\ F_-$ په یوه کرښه پراته وي. له دې سره $\sphericalangle(F_-PQ) = \alpha$ دی.

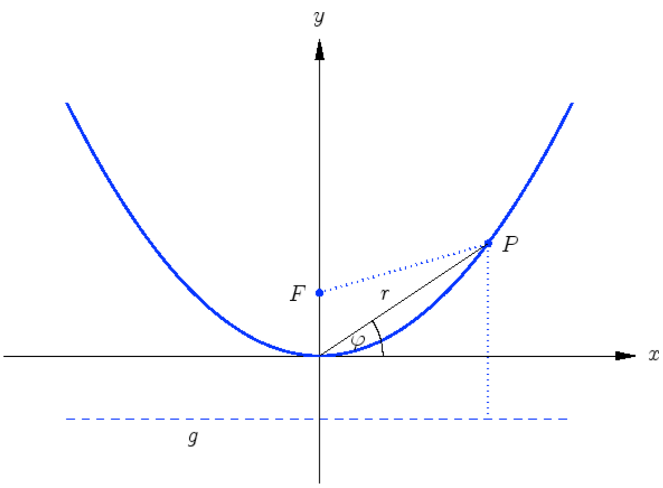
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا هنداروں خوینه د پختورګو تيګو توټه كوني لپاره په كار راځي.   په سوزونټكي F_- كې د يوې راديال (د وړانګې په لور) سرچينې ځخه وړانګې كېدی شي د يوه هګی ډوله يا بيضوي ډوله رفلكټور له لارې په سوزونټكی F_+ كې كوده شي يعنې سره غوڅ كړي..

(ليكونكي:ايپ،هوليک)

پارابول Parabel

په يوه پارابول د ټكی $P = (x,y)$ د سوزونټكي F او يوې وړونكي كرښې g ځخه برابر واټن لري.



كه $F = (0,f)$ او $g : y = -f$ وي، نو كواورديناتونو لپاره باور لري

$$4fy = x^2$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r = \frac{4f\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

د ټکي P قطبي کواوردیناتونو لپاره

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د انځوروني ورته والی یې ترلی ځرګند دی. د مربع شوي واټن د برابر اینسووني له لارې

$$|\overrightarrow{PF}|^2 = x^2 + (y-f)^2 = (y+f)^2 = (\text{dist}(P,g))^2$$

د کواوردینات بنه لاس ته راځي. د

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

بدلون مو قطبي بڼې ته بیایي.

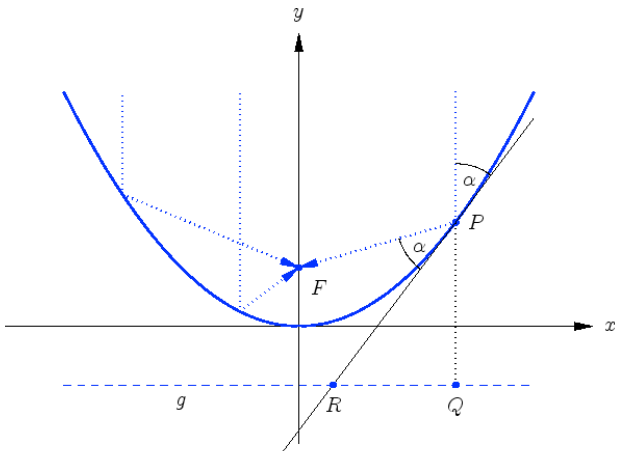
(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د ساتلایت تلویزیون Satelliten-TV

غبرګې کربنې، وړونکربښو سره ولاړې یا عمود غورځېدونکې وړانګې په سوزونټکې کې سره کوده کیږي.

داد د ساتلایت په کاسه او تېلېسکوپ کې کارول کیږي، چې پریوتي سیګنالونه قوي کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ښووني لپاره په بام کې نيسو، چې

$$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{QP}=\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\f\end{pmatrix}\right)+\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\-f\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x\\2y\end{pmatrix}$$

په ټکي Pt , $\begin{pmatrix}1\\x/(2f)\end{pmatrix}$, کې د تانجنت د لور سره غبرګ دی. دا چې

$$|\overrightarrow{FP}|=|\overrightarrow{QP}|\,,$$

له دې څخه د کونج $\sphericalangle(F,P,R)$ او $\sphericalangle(R,P,Q)$ مساوات لاس ته راځي، د کوم سره چې R د تانجنت غوځټکی دی د g سره.

(ليکونکي:اپپ،هوليګ)

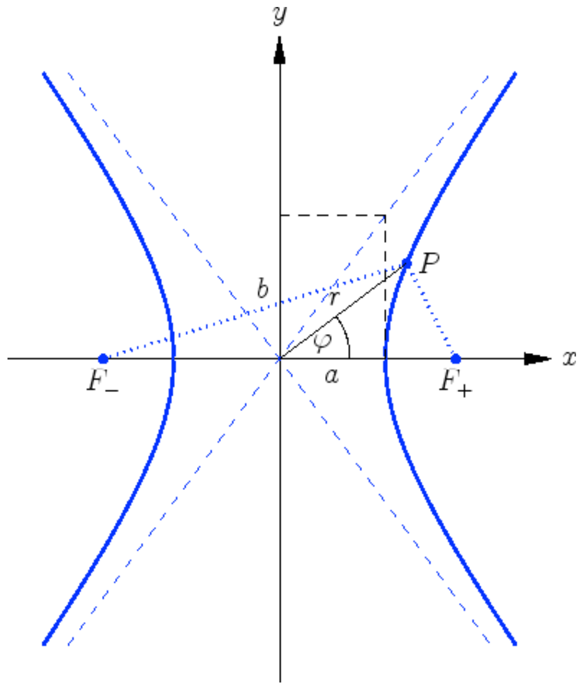
های پاربول Hyperbel

په يوه های پابول د يوه ټکي $P=(x,y)$ د سوزون ټکو $F_\pm$ سره د واټنونو کمښت ثابت دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

د $2a < |\overrightarrow{F_-F_+}|$ سره .



که $F_\pm = (\pm f, 0)$ وي، نو کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2 \, ,$$

او

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د ټکو P د قطبي کواوردیناتونو لپاره . اسیپتوتې $\pm b/a$ جګوالی لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هایپرابول د ښاخونو پارامتري کونه

$$x = \pm a \cosh t, \quad y = b \sinh t$$

ده د $t \in \mathbb{R}$ سره.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د انځوره ونو ورته کېدی شي سیده یو په بل پسې وازمایل شي.

د دې لپاره چې وښایو ، چې لرو

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2,$$

نو

$$\underbrace{\sqrt{(x+f)^2 + y^2} \pm 2a}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

مربع کوو او دې و کېڼ مساوات ته ورته اړیکي لاس ته راځي

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = \pm 4a \sqrt{(x+f)^2 + y^2}\,.$$

د $4a$ سره وېشني وروسته له نوې مربع کوني څخه لرو

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f^2 = a^2 + b^2$ بدلون سره د بنې بدلون وروسته د کواودیناتونو بڼه لاس ته راځي.

د قطبي بڼ لاس ته راوړلو ته

$$r^2 = -\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

د مخرج سره ضربوو او په بام کې نیسو

$$x^2 = (x^2 + y^2)\cos^2\varphi\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 = -b^2$$

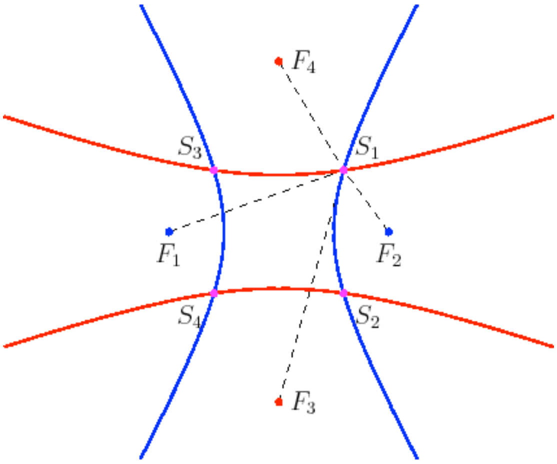
او د $-b^2$ سره ضربولو له لارې د کواودیناتونو بڼ راکوي

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

ناویګیشنNavigation

د یوې کیشتۍ ځای Position معلومولو P لپاره د وخت کمښتونه $2a_{j,k}$ د سینکرون رادیو سیګنالونو د مختلفو خورونکو سټیشنونو F_i څخه سره پرتله کیږي. نو په دې توګه کیدی شي P د هایپرابول د سوزونټکو F_k, F_j سره د غوښتکي په څیر لاس ته راړل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



یوه ځرګنده بیلګه کیدی شي

$$F_1 = (-2,0),\ F_2 = (2,0), \quad F_3 = (0,-3),\ F_4 = (0,3)$$

او $a_{1,2} = a_{3,4} = 1$ و ټاکل شي. اړونده هایپرابول مساوات دي

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \qquad y^2 - \frac{x^2}{8} = 1\,,$$

او د څللر غوښتکو S_i د کواودیناتو لپاره لاس ته راځي

$$x^2 = \frac{32}{23}, \quad y^2 = \frac{27}{23}$$

لکه د څیرې څخه چې ه م لیدل کیږی، څلور اوبیونې(حلونه) لاس ت ه راځي. د ناوېګیشن لپاره دا بې پرابلمونو دی، ځکه چې یو کفتان باید وپوهیږي، چې کینتی نږدې یا ت قریباً چیرته پرځای ده، دا په دې معنا چې کوم د منلو اوبی یا حل دی.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنستونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهني الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل   دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهني فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

(c) ketabton.com: The Digital Library

.يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،ميرې،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نوري ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنستونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲- داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library