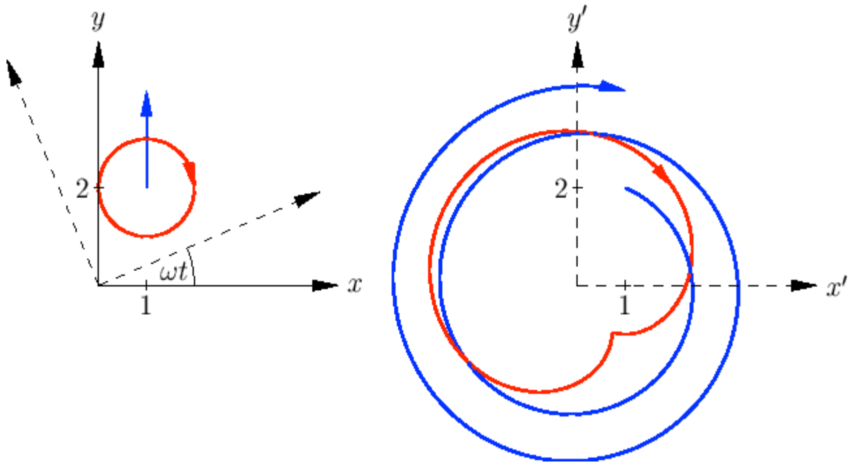
وکتورشمیرنه



Ketabton.com

ډاکتر ماخان شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشميرنه ۱

په هواره(سطح) اوهوا(فضا) کې ۱

پيکسل – يا د چوخونې کواودينات ۲

د غونداري (غونډوسکې) يا کرې کواوردينات ۲

په کارتيزي کواوردينات کې ټکي ۴

د اوږدوالي – او سور درجې ۴

توته – يا استوانه کواوردیناتونه ۶

سيګنوم (لاتين : Signum نخښه) فنکشن ... ۷

وړل (سيده يا سم کرښيز خوزښت يا انتقال) ۸

څرخون Rotation ۹

څرخنده يا څرخيدونى نسبي سيستم : ۱۱

وکتورونه په فضا کې ۱۳

د وکتورونو جمعه(زياتون) ۱۴

سکالار ضرب ۱۶

د اړخنيميو غوڅټکي ۱۷

(مطلق) ارزښت ۱۸

درېګوډيز (مثلثاتي) نامساوات ۱۸

د شميرنې قوانين ۱۹

له باد را پيداشوې د لويو اوبو يا بحر ... ۱۹

کونج يا زاويه ۲۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوساین جمله ۲۲

اورتوگونال یا یو په بل ولاړ(عمودي) بنستونه ۲۶

وکتوري ضرب ، صليبي يا چليپا ضرب ۳۰

د لورنځ زور Lorentzkraft ۳۴

د ایپسیلون – تنزور ۳۷

شپات ضرب ۳۸

د یوه څلور سطحیز د ډکي(حجم) شمیرنه ۳۹

د غبرگسطحیز یا ذوذنقي خویونه ۴۱

د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ ۴۲

ټکي – لور – بڼه ۴۳

دوه – ټکي – بڼه ۴۵

لحضوي – یا سترگورپ بڼه ۴۶

د ټکي –کربښي واټن ۴۸

د دوه کربښو واټن ۵۱

د الوتنې لارې ۵۳

د یوې سطحې پارامتریکي انځورونه ۵۵

د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه ۵۷

د یوې سطحې د هیسې -نورمال بڼه ۵۸

د سطحو انځورونو ترمنځ ... ۶۰

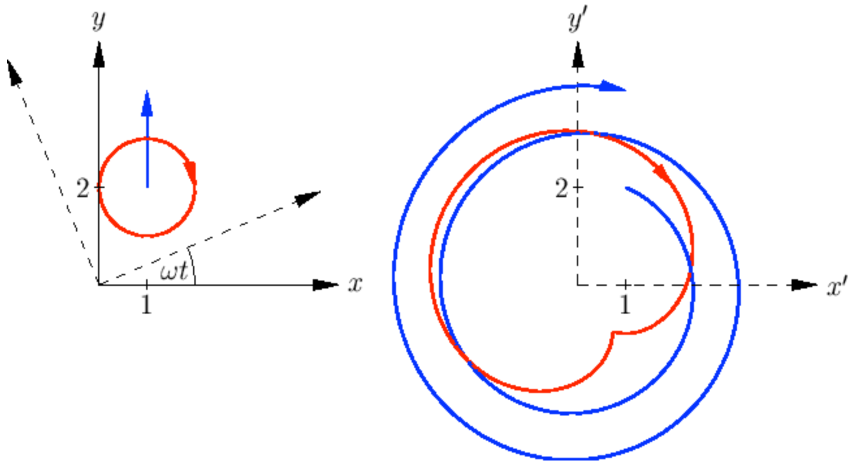
د ټکي – سطحې واټن ۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه سطحو غوڅې یا تقاطع ۶۵
هګۍ (بیضوي) Ellipse ۶۸
د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) ۷۱
پارابول Parabe ۷۲
د ساتلایت تلوېزیون Satelliten-TV ۷۳
های پاربول Hyperbel ۷۴
ناویګیشنNavigation ۷۷
د ډاکتر ماخان شینواري چاپ وي کتابونه ۷۹
د لیکونکی ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه



د شمیرپوهنې نړیوال جال څخه په مننه

ژباړی: ډاکتر ماخان شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه ۱
په هواره(سطح) اوهوا(فضا) کې ۱
پیکسل – یا د چوخونې کواودینات ۲
د غونداري (غونډوسکې) یا کرې کواوردینات ۲
په کارتیزي کواوردینات کې ټکي ۴
د اوږدوالي – او سور درجې ۴
توته – یا استوانه کواوردیناتونه ۶
سیګنوم (لاتین : Signum نخښه) فنکشن ... ۷
وړل (سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) ۸
څرخون Rotation ۹
څرخنده یا څرخیدونی نسبي سیستم : ۱۱
وکتورونه په فضا کې ۱۳
د وکتورونو جمعه(زیاتون) ۱۴
سکالار ضرب ۱۶
د اړخنیمیو غوځتکي ۱۷
(مطلق) ارزښت ۱۸
درېګوډېز (مثلثاتي) نامساوات ۱۸
د شمیرنې قوانین ۱۹
له باد را پیداشوې د لویو اوبو یا بحر ... **۱۹**
کونج یا زاویه ۲۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوساین جمله ۲۲

اورتوګونال یا یو په بل ولاړ(عمودي) بنستونه ۲۶

وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب ۳۰

د لورنڅ زور Lorentzkraft ۳۴

د ایپسیلون – تنزور ۳۷

شپاټ ضرب ۳۸

د یوه څلور سطحیز د ډکي(حجم) شمیرنه ۳۹

د غبرګسطحیز یا ذوذنقي خویونه ۴۱

د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ ۴۲

ټکي – لور – بڼه ۴۳

دوه – ټکي – بڼه ۴۵

لحضوي – یا سترګورپ بڼه ۴۶

د ټکي –کربښي واټن ۴۸

د دوه کربښو واټن ۵۱

د الوتني لارې ۵۳

د یوې سطحې پارامتریکي انځورونه ۵۵

د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه ۵۷

د یوې سطحې د هیسې -نورمال بڼه ۵۸

د سطحو انځورونو ترمنځ ... ۶۰

د ټکي – سطحې واټن ۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع ۶۵

هګۍ (بیضوي) Ellipse ۶۸

د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) ۷۱

پارابول Parabe ۷۲

د ساتلایت تلوېزیون Satelliten-TV ۷۳

های پاربول Hyperbel ۷۴

ناویګیشنNavigation ۷۷

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ وي کتابونه ۷۹

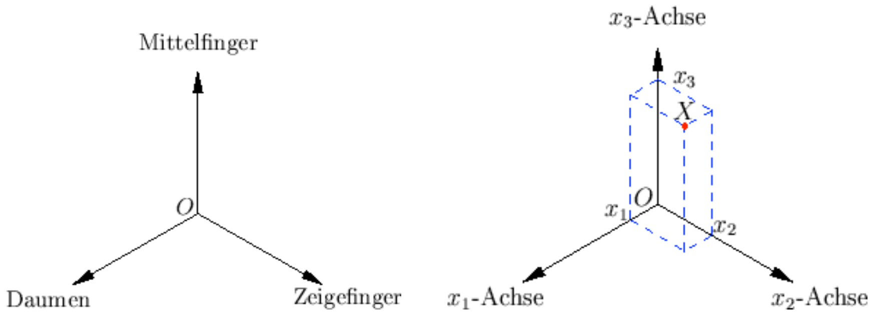
د لیکونکی ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشميرنه

په هواره(سطح) اوهوا(فضا) کې کارتيزي - يا پروت ولاړسيستم

يو فضايي کواوردیناتسيستم له درې په سرچينيز ټکي O کې يو په بل ولاړو ګڼونکرښو(محوررونو) څخه جوړ دی، چې لوريزوالی يې د ښي لاس قاعدې،، سره سم ټاکل شوی دی. ښې لاس قاعدي،، سره سم ټاکل شوی دی.



يو ټکی X د کواوردیناتو x_i سره په نخښه شوی په محوررونو د پرېوستون ارزښت سره سم کره کيدی شي. $X = (x_1, x_2, x_3)$. که ايندکس يا پيژندنخښه ونه کارول شي،نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

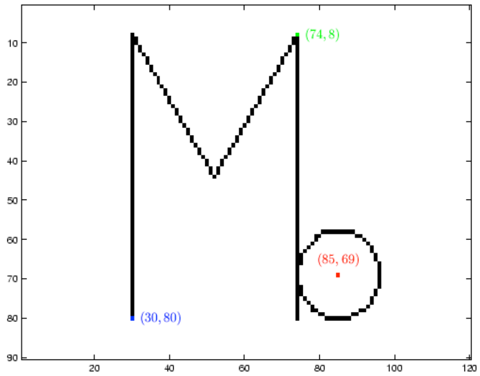
کواوردینات په ورسره بلد ډول د (x, y, z) او ګڼونمخور د x ,-y- او z - محور په

نخښه کیږي.

په ورته توګه د هوارې کارتیزي کواوردیناتسیستم پیژنو یا تعریفوو.

پیکسل – یا د چوخوني کواودینات Pixelkoordinaten

په یوه ګرافیکي کړکۍ کې شیان د پیکسل- چوخونوکواودینات (Pixel خورا کوچني ذیره شوي ټکي) له لارې ورکول کیږي.. دا انځور شوی ولاړګوډیز یوه کړکۍ ده د 90×120 چوخونو سره او د رنګه چوخونو کواوردینات پروت دی د ذیرې ګوډ په ګوته کوي .

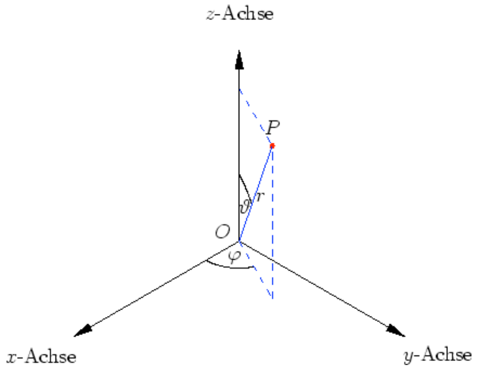


د غونډاري (غونډوسکې) یا کرې کواوردینات

یو ټکی $P = (x, y, z)$ کیدی شي د سرچیني سره د واټن $r = |\overline{OP}|$ ، د کونج φ د x - محور او د هغه پربوستون $\overline{OP}$ په xy - هواره او کونج $\vartheta \in [0, \pi]$ د $\overline{OP}$ او z - محور ترمنځ له لارې انځوربدلی شي. کونج φ ټیک تر د 2π

(c) ketabton.com: The Digital Library

زياتځلي پورې ټاکلکيدی شي. د ستاندارد په څير په $\varphi \in (-\pi, \pi]$ پرېکړه کيدی شي يا منل کېدی شي. (په لاندې او نورو ځايونو کې: محور =Achse)



باور لري:

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y = r\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = r\cos\vartheta$$

همداسې

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad \vartheta = \arccos(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

د کوم سره چې د x, y او z نيوني سره سم د ارکوستانجنت يوه مناسبه څانګه د ټاکلو وي.

د اصلي څانګې- کونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, & \text{für } x > 0, \\ \operatorname{sign}(y)\pi/2, & \text{für } x = 0, \\ \varphi_H + \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \varphi_H - \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y < 0. \end{cases}$$

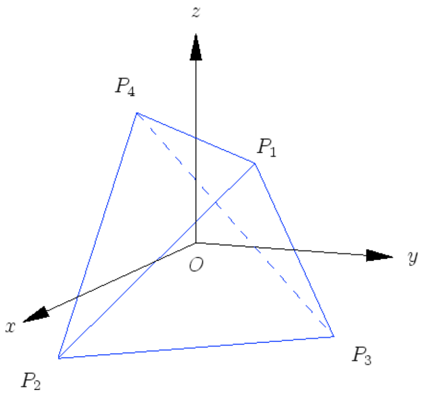
ليکونکي:اپ، هوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

په کارتيزي کواوردينات کې ټکي

$$P_1 = (1,1,1), \quad P_2 = (1,-1,-1), \quad P_3 = (-1,1,-1), \quad P_4 = (-1,-1,1)$$

د منظم تيتراايدر کونجونه جوړوي د اړخ اوږدوالي $2\sqrt{2}$ سره او په O کې د درونډ ټکي سره



په غونډاري کواوردينات (r,ϑ,φ) کې ګوډټکي يا کونج- لاندې کواوردينات لري

$$P_1' = (\sqrt{3}, \psi, \pi/4), \qquad P_2' = (\sqrt{3}, \pi-\psi, -\pi/4),$$
$$P_3' = (\sqrt{3}, \pi-\psi, 3\pi/4), \qquad P_4' = (\sqrt{3}, \psi, -3\pi/4),$$

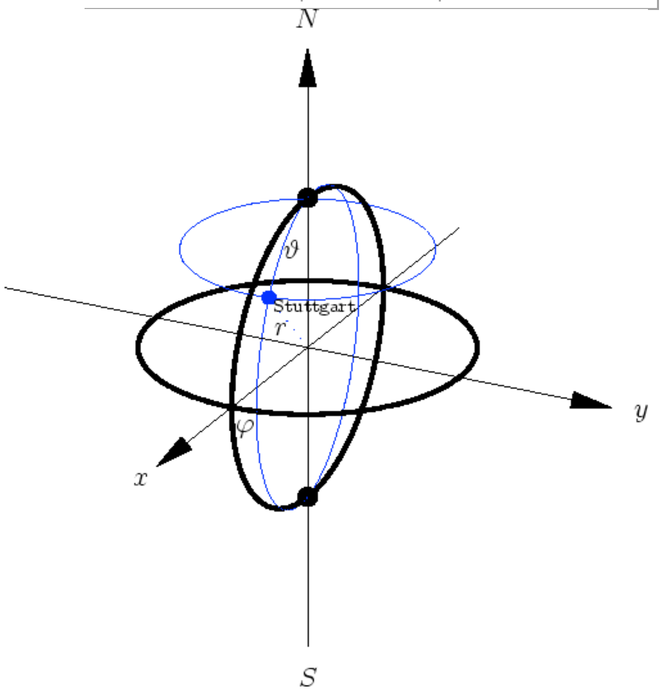
چېرته چې $\psi = \arccos(1/\sqrt{3})$ همداسې $\psi = \arctan\sqrt{2}$ دي

د اوږدوالي – او سور درجې (طول البلد او عرض البلد؟)

په ځمکغونډاري (ځمکغونډوسکې) يا ځمکې کره باندې د اوږدوالي – او سور درجې د کرې يا غونډاري کواوردينات دي، خو يواځې بل ډول کونجورشو ګانې (کونجساحې) کارول کيږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ختیز اوږدوالی	180°- 0°	$\varphi = 0 \ldots \pi$
لویدیز اوږدوالی	180°- 0°	$\varphi = 0 \ldots -\pi$
شمالي سور	90°- 0°	$\vartheta = \pi/2 \ldots 0$
جنوبي سور	90°- 0°	$\vartheta = \pi/2 \ldots \pi$



په خیره کې ایکواتور(سور 0°) او صفري اوږدوالی غوږ کښل شوي دي، شمالي قطب (۹۰ درجې شمالي سور) او جنوبي قطب(۹۰ درجې جنوبي سور) هم په نخښنه شوي دي. شنه اوږدې – او سورګردی د ستوتګارت(۹۰ درحې ختیزې اوږدوالی ، ۴۹ درجې جنوبي سور) تېریږي

او $\varphi = \frac{1}{20}\pi$ (ختیز نیم غونډاری) او $\varphi = -\frac{19}{20}\pi$ (لویدیز نیمغونډاری په نخښنه کوي

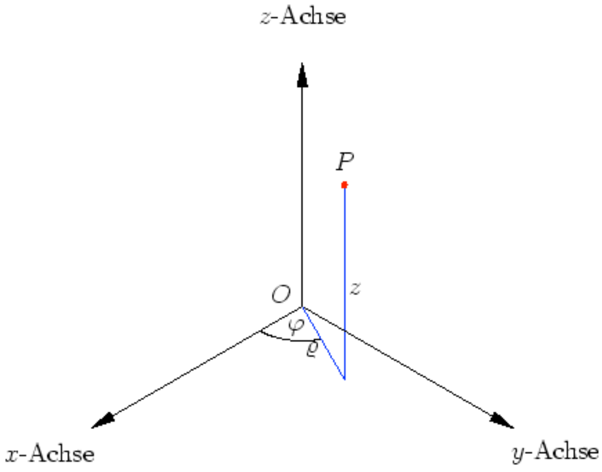
(c) ketabton.com: The Digital Library

او $\vartheta = \frac{41}{180}\pi$

توته – يا استوانه کواوردیناتونه Zylinderkoordinaten

پو ټکی $P = (x, y, z)$ کیدی شي د یوه کونج φ له لارې ، چې د x -مخور
او د xy -هواره باندې د پریوستون (پروجکشن) $\overline{OP}$ ترمنځ پروت دئ ،
پرېوستون د اوږدوالي او د z- کواوردینات له لارې وټاکل شي.

کونج φ ټیک تر د 2π پورې ټاکلی. د ستاندارډورشو پرېکړه زیات وخت تر $\varphi \in (-\pi, \pi]$
پورې شوې.



باور لري

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z$$

همداسي

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره،چي د x او y د مخنخبني پوري اړونده د ارکوستانجنت یوه څانګه تاکل کیږي.

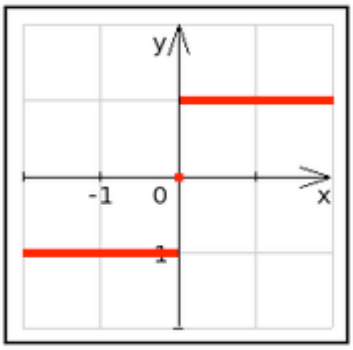
د اصلیڅانګي ـکونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري:

په لاندې کې Für د ... لپاره په مانا او sign سګنوم لوستل کیږي

$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, \\ \operatorname{sign}(y)\pi/2, \\ \varphi_H + \pi, \\ \varphi_H - \pi, \end{cases}$	د $x > 0,$ لپاره د $x = 0,$ لپاره د $x < 0 \wedge y \geq 0,$ لپاره د $< 0 \wedge y < 0.$ لپاره

سیګنوم (لاتین : Signum نخښه) فنکشن په رییل ګنونکربنه :

د فنکشن د مخنخبنو ګراف



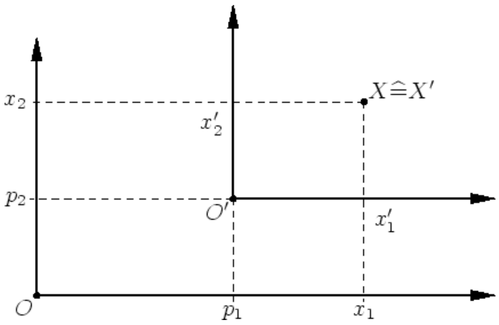
د رییل ګنونو خیره ونه ده په ډېرى {-1,0,1} کي

(c) ketabton.com: The Digital Library

وړل (سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) Translation

د سرچینې O کشولو سره و $O' = (p_1, p_2, p_3)$ ته د برابر پاتیکیدونکي لور سره د یوه ټکي $X = (x_1, x_2, x_3)$ کواوردینات په لاندې توګه تغیر خوري

$$X' = (x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3) \, .$$



خوزنده یا متحرک نسبي سیستم

د یوه د x -محور په لور د v چټکتیا سره څغلنده ګاډی په هواره (سطحه) برابرډوله خوزښت

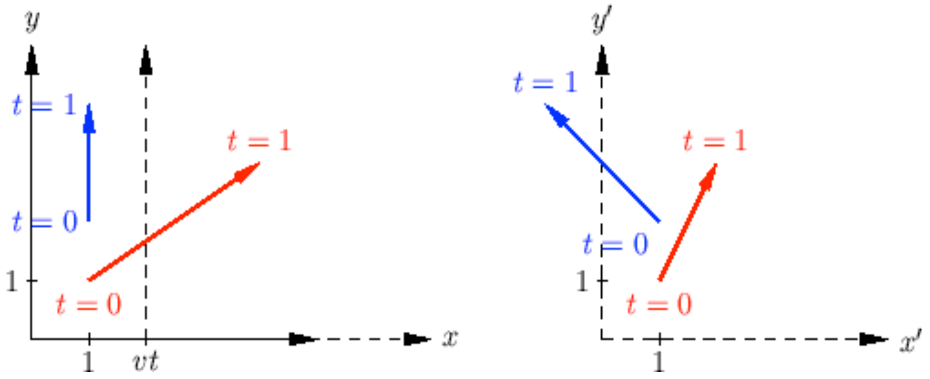
$$(x(t),\, y(t)) = (p + \alpha t,\, q + \beta t), \quad t \geq 0\,,$$

په پام کې نیسو ، نو کواوردینات یې په لاندې ډول تغیر خوري

$$x' = x - vt, \quad y' = y\,.$$

کتونکی یوه بله چټکتیا ریښتوني نیسي یا بله چټکتیا ګوري

(c) ketabton.com: The Digital Library



د بیلګې په توګه د یوه شي لپاره باور لري، چې د یوه وخت په یوون(واحد) کې د $v = 2$ لپاره له ټکي $P = (1,1)$ و ټکي $Q = (4,3)$ ته خوزي(سور غشی)

$$P' = (1,1), \quad Q' = (4-2, 3-0) = (2,3)\,.$$

د ریښتوني او کتونکي چټکتیا لپاره په ورته توګه باور لري

$$v_t = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}, \quad v_b = \sqrt{5}\,;$$

له دې خوزښت څخه خوزښت بتیاوالی بربښي.

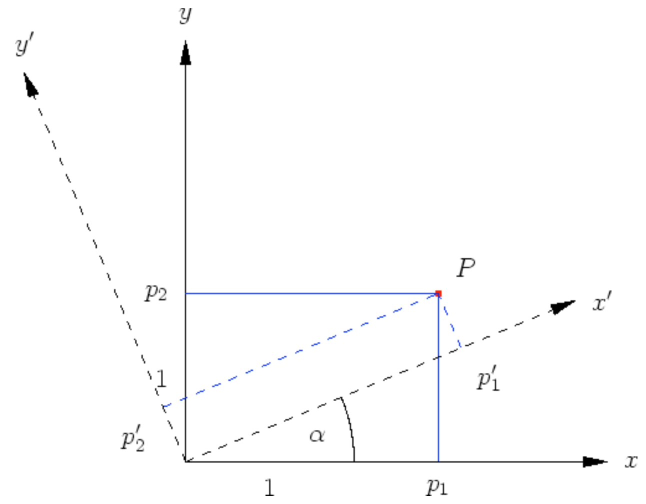
لیکونکي: اپپ، هولیګ

څرخون Rotation

د xy -هوارې یا سطحې څرخون په z -محور د یوه ټکي $P = (p_1, p_2, p_3)$ کواوردینات د α کونج سره ترانفورمي کیږي د لاندې سره سم

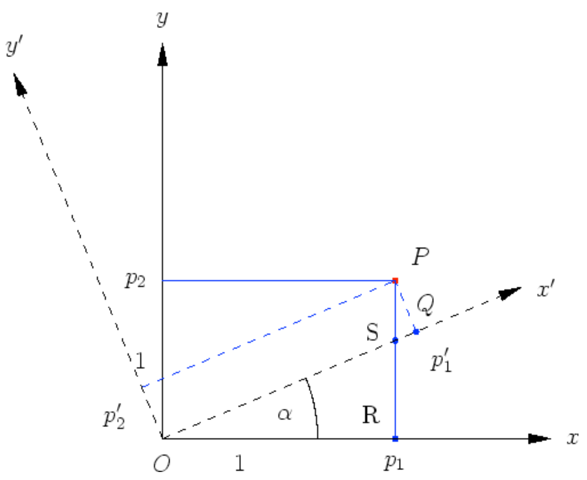
$$p_1' = \cos\alpha\, p_1 + \sin\alpha\, p_2, \quad p_2' = -\sin\alpha\, p_1 + \cos\alpha\, p_2, \quad p_3' = p_3\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه د yz - او zx -هوارو څرخون لپاره فرمولونه لاس ته راځي

لیکونکي: اېپ، هولیګ



لومړی پېژنو، چې

$$\sphericalangle(S, P, Q) = \alpha\,,$$

داپه دې معنا چې ولاړکونجيز درېګودی(مثلث) $\triangle(R, O, S)$ او $\triangle(Q, P, S)$ ورته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لومړي درېګوډي کې باور لري.

$$|\overline{OS}| = p_1 / \cos\alpha$$

او

$$|\overline{RS}| = p_1 \tan\alpha \,.$$

له دويم درېګوډي لاس ته راځي

$$p_2' = \cos\alpha \, |\overline{PS}| = \cos\alpha \, (p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \cos\alpha \, p_2 - \sin\alpha \, p_1$$

او

$$p_1' = |\overline{OS}| + |\overline{SQ}| = p_1 / \cos\alpha + \sin\alpha \, (p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \frac{1 - \sin^2\alpha}{\cos\alpha} p_1 + \sin\alpha \, p_2$$

ليکونکی: اېپ، هولير

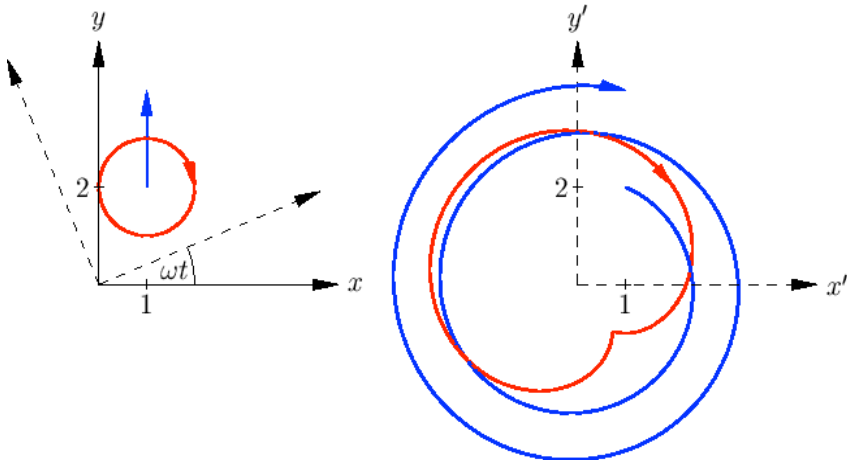
څرخنده يا څرخيدونی نسبي سيستم :

تابع کيږ د د سيده کرښيز او ګردي ډوله خوزښتونو د د خوزښت منحني ښايي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$G: \quad (x,y) = (1, 2 + t/(2\pi)),$$
$$K: \quad (x,y) = (1 + \cos(t),\ 2 - \sin(t))\,.$$

ښي لور ته دواړه منحني يا کرښې ديوهکونج   سره څرخيدوني نسبي سيستم   انځوروي، دا په دې معنا چې داسې لکه په يوه کاروسل (هغه څرخيدوني شيان دي، چې کسان په کې ګرځي) کې يوه کتونکي ته برېښي.



د کواوديناتو ترانفوميشن يا بدلون د سيده کرښيز خوزښت لپاره راکوي:

$$x' = c + (2 + t/(2\pi))s, \quad y' = -s + (2 + t/(2\pi))c$$

د لاندې سره

$$c = \cos(\omega t), \quad s = \sin(\omega t)\,.$$

يوه شپيرال منځ ته راځي، ځکه چې په نوکانو کې ضريب د ځګيدونکي t سره لويږي.

دا جوړشوي 2 اوړونونه   وخت انتروال $0 \le t \le 4\pi$ په ګوته کوي.
د بدلې شوې کواودينات څخه د $\omega = 1$ سره د دايره ډوله خوزښت لپاره

$$x' = c(1 + c) + s(2 - s), \quad y' = -s(1 + c) + c(2 - s)\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

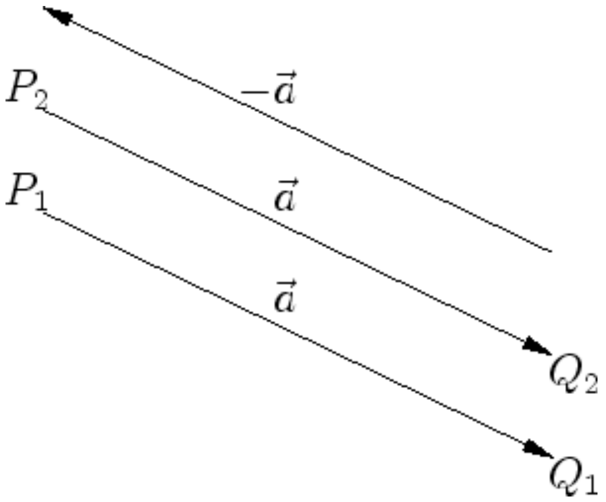
په ځرخون سیستم کې د خوزښتمنحني بڼه نه پسې ترلې پېژندل کیږي. لکه دا بېلګه چې په ګوتهکوي، کېدی شي د کتلو لور سملاسي تغیر شي. کېدی شي چې د کتلو خوزښت منحني کې ګوډ یا ماتوالی راپیداشي. په ځرخېدونکي سیستم کې په یوه داسې زینګولار ټکي کې کتونکې چټکتیا صفر ده.

وکتورونه په فضا کې

یو وکتور یوه لوریزه ټوټه کرښه ده:

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$$

دا وکتور له ټکي P څخه و ټکي Q ته په نخښه کوي. یا ښایي. په بدیله توګه کیدی شي وکتور په فضا کې د P-راکښنې په توګه افاده شي او له یوه غشي سره په نخښه شي.



لکه د ځیرې څخه چې کتل کیږي برابر اوږده غشي په همغه (برابره) لور همغه(برابر) وکتورونه $\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2}$ انځوروي.

ځانکې انځورونه نسبت و سرچینې ته ځای وکتور بلل کیږي او د وکتور کواوردیناتونه داسې تعریفوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

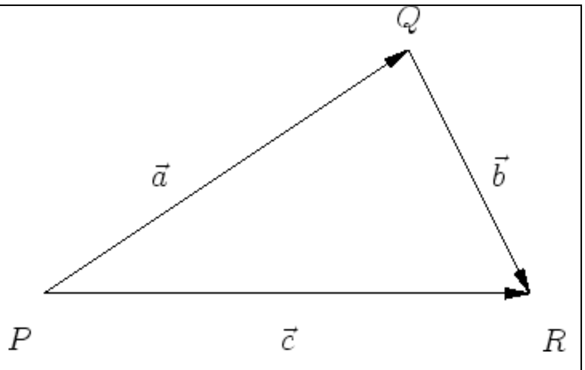
$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} .$$

د $\vec{a}$ کواوردیناتونه هم کیدی شي د د ټکو Q او P کواوردیناتونو په څېر و
شمیرل شي. بالاخره د

$$\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$$

سره صفروکتور په نخښه کوو.

د وکتورونو جمعه(زیاتون):

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>د دوه وکتورونو جمعه د وکتورونو یو و بل ته یا یو بل پسې راکښنه ده
$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} .$</td>
</tr>
</table>

د کواوردیناتونو یا محورونو لپاره دا دي:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} .$$

د

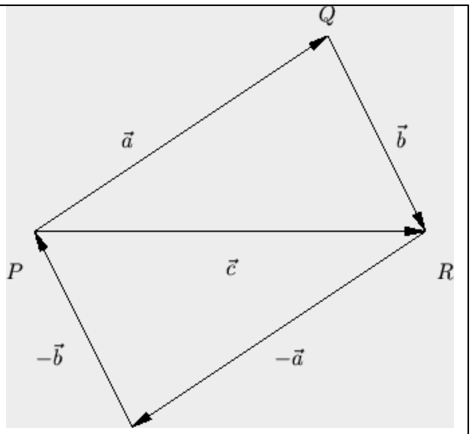
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$$

سره و $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ته مخامخ یا په څټ(برعکس) راکښنه $-\vec{a}$ په نخښنه کیږي. په ځانګړې توګه باور لري

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}\,.$$

(لیکونکي: هولیګ، موخ)

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>د ټکو

$P = (1,1,1), \quad Q = (4,2,7), \quad R = (1,4,3)$

لپاره وکتورونه

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

او

$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} + \left(-\overrightarrow{QR}\right)$

شمیرلکیږي</td>
</tr>
</table>

لکه په څیره کې چې کښل شوي د کواورد یناتو لپاره باور لري:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-1 \\ 7-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 4-2 \\ 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-4 \\ 7-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 1-2 \\ 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$=$ $-\vec{c}$

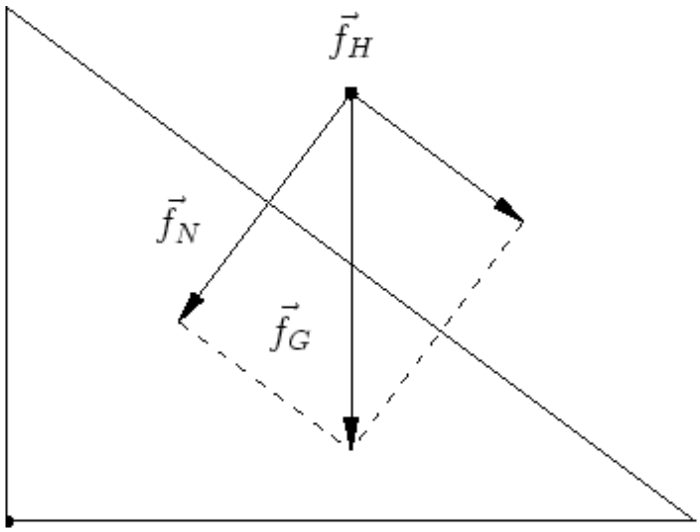
(ليکونکي: هوليګ، موخ)

د يوې کږې سطحې (هوارې) لاندې داسې يوه سطحه پوهيږو، چې د پروتوالي لور ته ميلان ولري.

لکه څنګه چې په څيره کې ليدل کيږي، کيدی شي د وزن زور $\vec{f}_G$ په دوه يو بل سره ولاړو يا عمود بوخو يا کمپوننتونو توټه شي(د زور توټه کونه د د دوه زور غبرګ اړرخيزې(مواز ی الاضلاع) سره) .

$$\vec{f}_G = \vec{f}_N + \vec{f}_H \,.$$

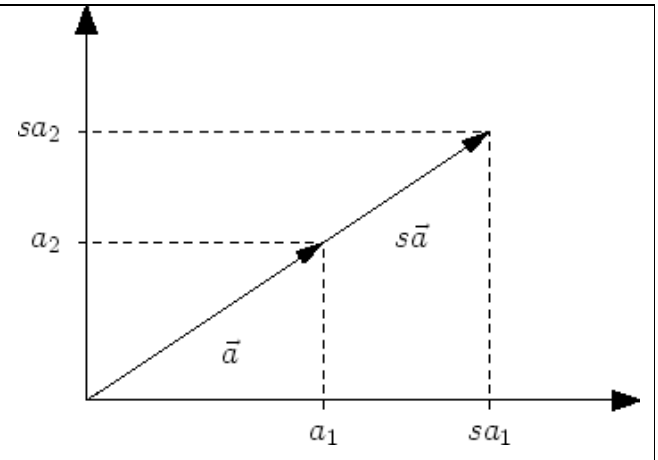
مايلې سطحې سره عمود   عمودي زور(ولاړ زور) اغيزه لري. او ميلې هوارې سره غرګ کښته لور ته لوريزه بيړه بيزه زوړند زور $\vec{f}_H$ اغيزه لري.



(ليکونکي: هوليګ، موخ)

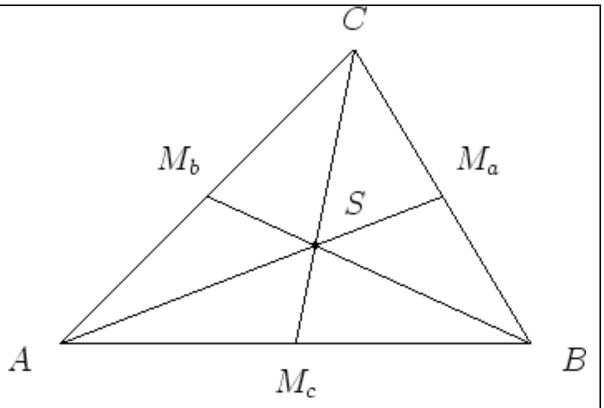
سکالار ضرب :

(c) ketabton.com: The Digital Library

	وکتور $s\vec{a}$ یو s - واره راکښنه په کوته کوي، دا په دې معنا چې $s\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sa_1\\sa_2\\sa_3\end{pmatrix}$ په ځانګې توګه $0\vec{a}=\vec{0}$ دی.

(لیکونکي هولیک، موخ)

د اړخنیمیو غوڅېټکي(نقاط تقاطع ناصف الاضلاع) :

	د یوه درېګوډي(مثلث) اړخنیمۍ یو بل په دروندټکي(مرکزالثقل) S کې سره غوځوي. $\vec{s}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\ .$

د دې د ښوولو لپاره ځای د وکتور د اړخنیمۍ په ټکو لیکو $\overline{AM_a}$ په لاندې بڼه:

$$\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{m}_a-\vec{a})=\vec{a}+t\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{a}\right),\quad t\in[0,1]\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\overline{AM_a}$ لپاره دی، نو درووند ټکی په $2:1$ نسبت وېشي

په ورته توګه اړخنیمیو $\overline{BM_b}$ او $\overline{CM_c}$ لپاره باور لري.

(لیکونکي هولیګ، موخ)

(مطلق) ارزښت

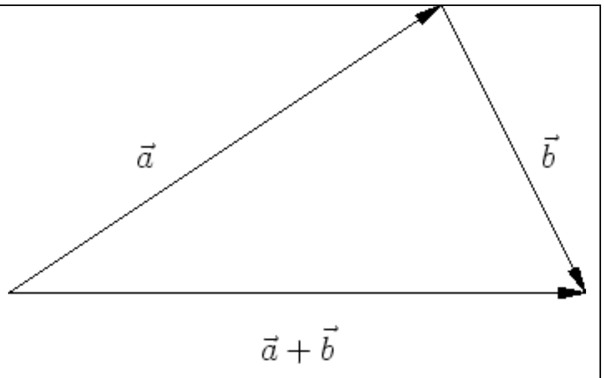
د $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ارزښت له P څخه د Q ته د غشي اوږدوالی دی همداسې له O و A ته، دا په دې معنا چې

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,.$$

په ځانګي توګه $|s\vec{a}| = |s||\vec{a}|$ دي.

یو وکتور د 1 (مطلق) ارزښت سره یوونوکتور (واحدوکتور) بلل کیږي.

درېګوډیز (مثلثاتي) نامساوات :

د دوه وکتوونو د جمعې (زیاتون) لپاره باور لري $$\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert \leq \lvert\vec{a}\rvert + \lvert\vec{b}\rvert$$ د برابروالي سره تیک هلته ، چې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ غبرګ(موازي) وي، داپه دې	

(c) ketabton.com: The Digital Library

	معناچي $\vec{a} = s\vec{b}$ دي.

(ليکونکي هوليک، موخ)

د شميرنې قوانين :

د وکتورونو لپاره لاندې شمېرقوانين باور لري:

- کموتاتيو قانونKommutativgesetz

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

- اسوڅياتيو قانونAssoziativgesetz:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

- دېستريبوتيوقانونDistributivgesetz:

$$s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$$

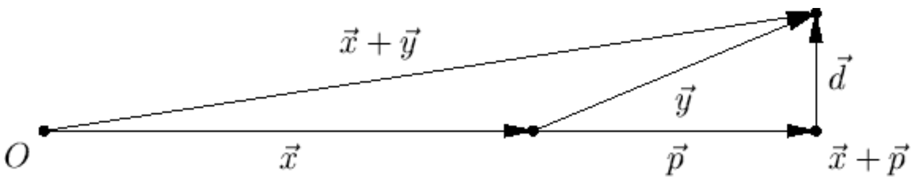
(ليکونکي هوليک، موخ)

(له باد را پيداشوې د لويو اوبو يا بحر په سر) هواجريانات

Drift eines Flugzeugs

يوه الوتکه په 800 km/h چټکتيا ختيز لور ته الوزي د يوه باد 50 km/h چټکتيا سره له WSW .

(c) ketabton.com: The Digital Library



که پروت محور د ختیز سره او ولاړ محور د شمال سره په نخښه کړښ یاوښايي، نو له

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سره د الوتکې چټکتیا او

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 50\cos(\pi/8) \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix}$$

د باد چټکتیا ښايي.

د یوه ساعت وروسته الوتکه تر

$$\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} 800+50\cos(\pi/8) \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

پورې الوتې. که له $\vec{p}$ سره په کرښه د $\vec{y}$ عمود یا orthogonale پرېوستون د $\vec{x}$ په لور وښايو، نو ټولیزه چټکتیا له کمپوننتو څخه

$$\vec{x}+\vec{p} = \begin{pmatrix} 800+50\cos(\pi/8) \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د ختیز لور ته او دریفت څخه

د شمال لورته

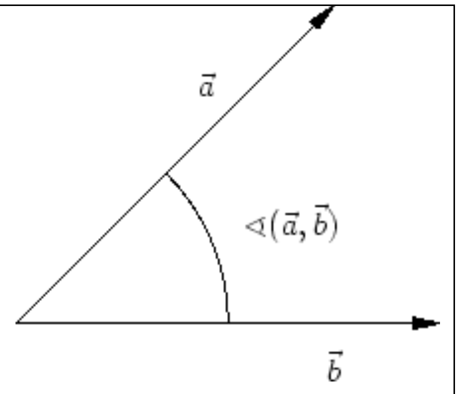
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{d} = \vec{x} + \vec{y} - (\vec{x} + \vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

جوړیږي.

(لیکونکي هولیګ، اپپ)

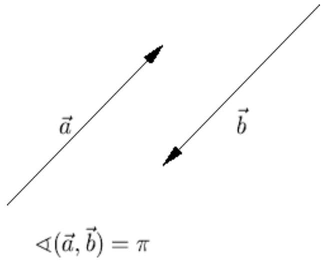
کونج یا زاویه :

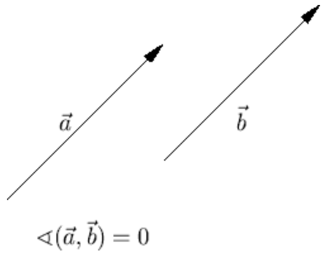
د $\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}$ لپاره سړی د $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \in [0,\pi]$ د دواړو کونجونو کوچنی کونج ښایي، چې د وکتور سره په نخښه شوي غشي سره ګډ ککرئ ټکی د رأس نقطه جوړوي.	

دواړه وکتورونه عمود دي، $\vec{a} \perp \vec{b}$ ، که کونج له $\pi/2$ سره برابر وي. له دې سره قراردادکیږي، چې صفروکتور په هر وکتور عمود یا ولاړ دریږلی.

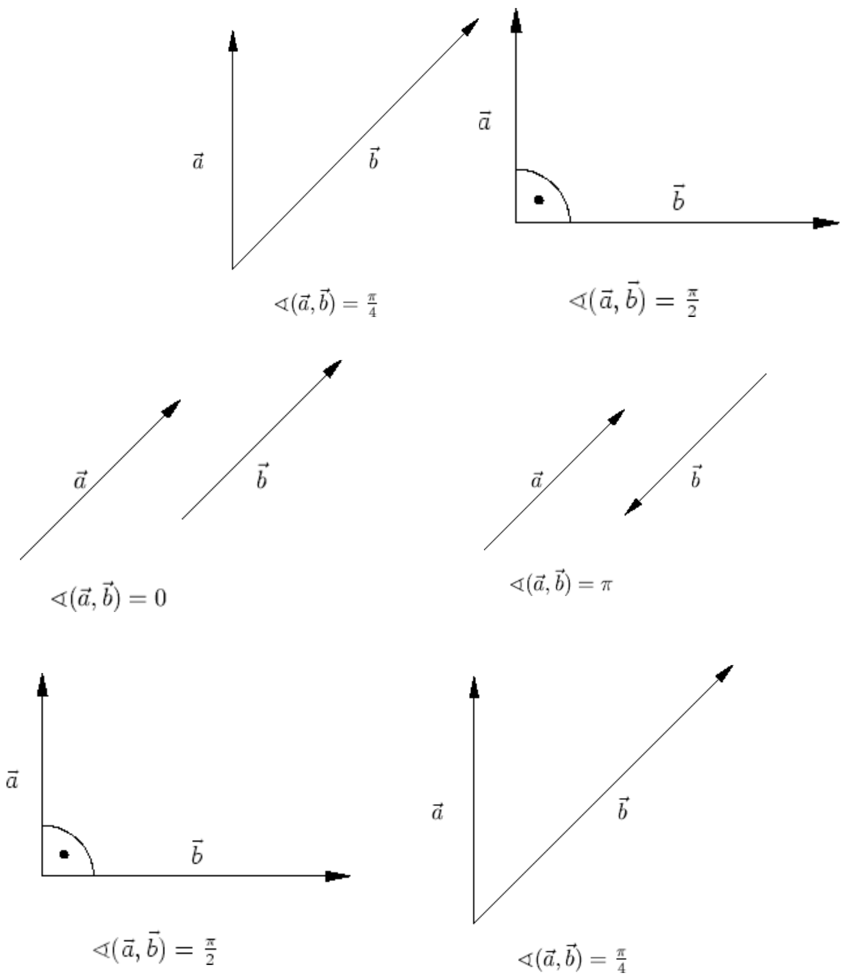
(لیکونکي هولیګ، موخ)

لاندې ځیرې یو څو نمونه یې حالتونه د لید کوي.

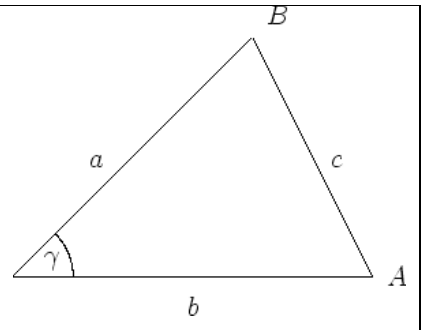




(c) ketabton.com: The Digital Library



د کوساین جمله :

په یوه درېګوډي کې په کوم چې د اړخ $\overline{AB}$ مخامخ کونج γ پروت دی باور لري $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$	

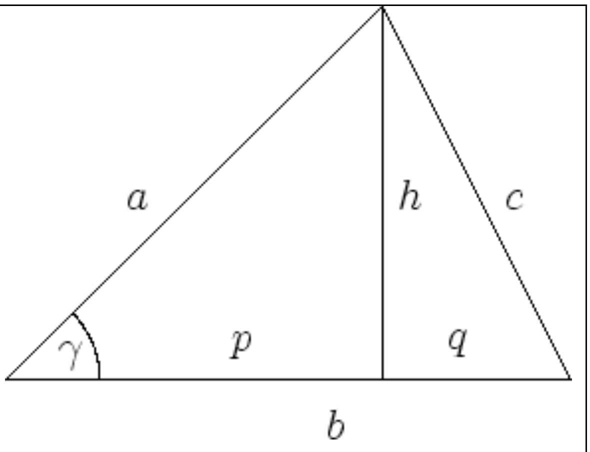
(c) ketabton.com: The Digital Library

نو په ځانګړې توکه لاس ته د $\gamma = \pi/2$ لپاره د پیتاګوراس جمله راځي:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(لیکونکي هولیګ، موخ)

د ښوونې لپاره یې د پیتاګوراس له جملې کار اخلو.

باور لري $c^2 = h^2 + q^2, \quad h^2 = a^2 - p^2$ همداسې $q = b - p, \quad p = a\cos\gamma\,.$ له دې سره لاس ته راځي $c^2 = (a^2 - p^2) + (b - p)^2$ $= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,,$ څه چې د ښوولو وو. (لیکونکي هولیګ، موخ)	

سکالار ضرب :

د دوه وکتورونو ضرب د

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

د له لارې تعريف دی

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

او

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}.$$

د سکالار ضرب د کواوردينات د انځورولو له لارې لاس ته راځي

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

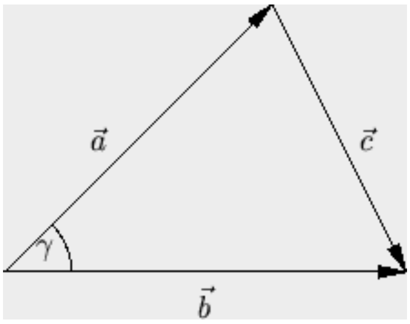
همداسې

$$\left(s\vec{a} + r\vec{b}\right) \cdot \vec{c} = s\vec{a} \cdot \vec{c} + r\vec{b} \cdot \vec{c},$$

دا په دې معناچې د ضرب ورسره بلد قوانين باور لري.

(ليکونکي هوليګ، موخ)

د دواړو ورته واليو انځورونه د کوساين جملې له لارې لاس ته اځي:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma\ .$$

که داړه مربع وې کيڼ لور ته راوړل شي،نولاس ته راځي

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\ .$$

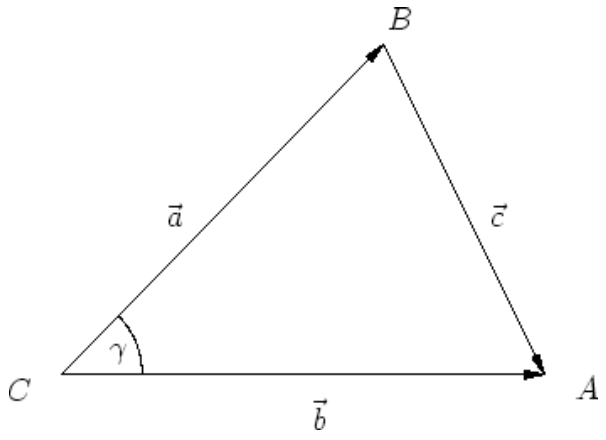
د بدلون $c_i^2 = (b_i - a_i)^2$ څخه وروسته دواړه مربع وې يو بل سره پورته کوي يا سره له منځه ځي، او پاتې ګډ ترمونه د(2-) -ځله سکالار ضرب سره يو بل سره سر خوري.

دا څېره شوی مثلث لاندې ګوټونه لري

$$A = (6,0), \quad B = (4,4), \quad C = (0,0)$$

او دی

$$\vec{a} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$



د γ کونج د سکالار ضرب په مرسته شمېرل کېدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{24}{6\sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

لاس ته راځي $\gamma = \pi/4$ ، لکه ترڅلې له کواوردیناتونو څخه د لیدنې دي. د دې راوړل شوې بېلګې په بنسټ کېدی شي د کوساین جمله هم وشمېرل شي. باور لري

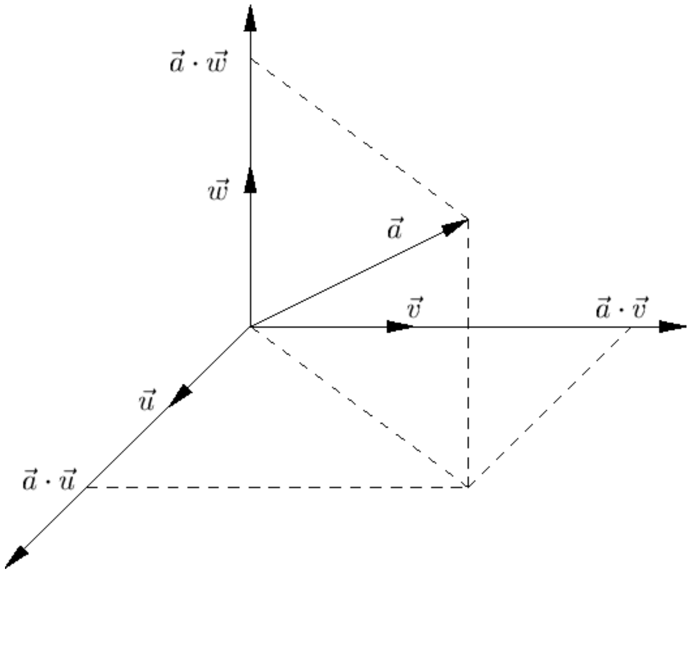
$$|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 20 - 32 - 36 = -48\,,$$

او هم د $-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma = -2\,(4\sqrt{2})\,6/\sqrt{2}$ سره توفق مومي یا سر خوري.

(لیکونکي هولیک، موخ)

اورتوګونال یا یو په بل ولاړ(عمودي) بنسټونهOrthogonalbasis

اوروتګونال بنسټ له درې جوړه اورتوګونال وکتورونو $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. څخه جوړ دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه په ځیره کې چې کښل شوی دی، کیدی شي هر وکتور $\vec{a}$ د کرښیز کمبینیشن

$$\vec{a} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{u})}{|\vec{u}|^2}\vec{u} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{v})}{|\vec{v}|^2}\vec{v} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{w})}{|\vec{w}|^2}\vec{w}$$

له لارې انځور شي. د زیاتوونو (د جمعې برخو) د بنسټیزو وکتورونو تولید شوی پرپوستونونه دي، او د ضریبونو لپاره باور لري

$$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{v}|^2}{|\vec{v}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{w}|^2}{|\vec{w}|^2} = |\vec{a}|^2 .$$

که وکتورونه $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$ نورمي یعنې یو په بل ولاړ (عمود) وي، نو د اورتوګونال بنسټ څخه غږېږو. په ځانګړې توګه لرو:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z$$

د کارتیزي کواوردینات سیتم د کانونیکي اورتوګونال بنسټ

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لپاره

(لیکونکي هولیک، موخ)

دا چې هر وکتور $\vec{a}$ د کرښیز کمبینیشن

$$\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې انځورېدلای شي، هندسي تړلی لیدل کیږي

د ضریبونو د ټاکلو لپاره د بنسټ وکتورونو سره سکالار ضرب جوړیږي . دا چې

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}=1,\quad \vec{v}\cdot\vec{u}=\vec{w}\cdot\vec{u}=0\,,$$

د سکالار ضرب د کرښیزوالي له لارې لاس ته راځي :

$$\vec{a}\cdot\vec{u}=\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}+\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\vec{u}=\alpha\,.$$

په ورته توګه د β او γ لپاره ورته فرمول تصدیقیږي. د ضریبونو د مربع جمعې فرمول لپاره سرې د لاندې ضربولو له لارې

$$|\vec{a}|^2=\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}+\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}+\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\,.$$

ښوول کیږي.

دا هم په ساده توګه لیدل کیږي، چې پرېوستونو ته کمښتوکتورونه

$$\vec{a}-\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2},\quad \vec{a}-\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2},\quad \vec{a}-\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\,,$$

هر یو په اړونده بنسټ وکتور باندې عمود یا ولاړ دی:

$$\left(\vec{a}-\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\right)\cdot\vec{u}=\left(\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\vec{u}=0\,.$$

(لیکونکي هولیګ، موخ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

نسبت اورتوګونال بنسټ ته

$$\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \vec{v}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\qquad \vec{w}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

وکتورونه

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\vec{e}_x+2\vec{e}_y+4\vec{e}_z$$

لاندې ضربيونه لري.:

$\vec{a}\cdot\vec{u}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$
$\vec{a}\cdot\vec{v}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\sqrt{3}$
$\vec{a}\cdot\vec{w}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\frac{3}{2}\sqrt{6}.$

له دې سره انځورونه لاس ته راځي:

$$\vec{a} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\vec{u}+\sqrt{3}\vec{v}+\frac{3}{2}\sqrt{6}\vec{w}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{3}{2}\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب:

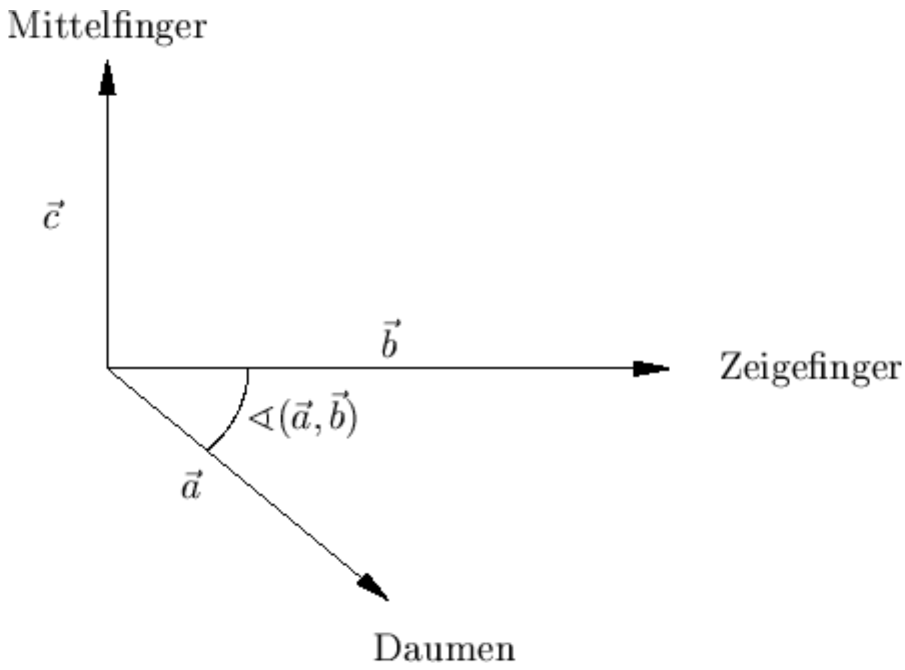
وکتور

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتوګونال دی، د ،، ښي –لاس- قانون،، لوریز دی او اوږدوالی

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}))\,.$$

لري. (د ښیرې د الماني پښتو: منځګوته، ګوتلکه، غټه ګوته)



(c) ketabton.com: The Digital Library

شکل کي الماني: پورته: منځګوته، ښی لور ته: نخښ ګوته، کښته لور ته غټه ګوته

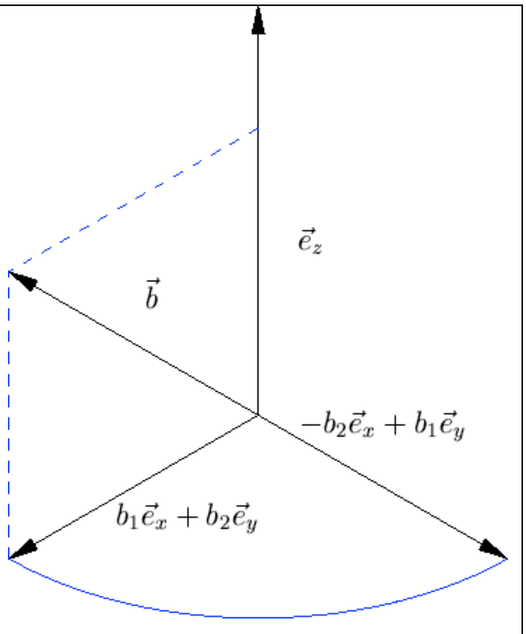
په ځانګړې توګه باور لري $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ د $\vec{a} \| \vec{b}$ لپاره او $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|$
د $\vec{a} \perp \vec{b}$ لپاره .

بدیل یي وکتور د

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

سره تعریفوي.

(لیکونکي : هولیک، ایپ)



د دې لپاره چې د دواړو تعریفونو ورته والی وښایو، لومړی په پام کې نیسو، چې دواړه انځورونې په $\vec{a}$ او $\vec{b}$ کې ګرښیزې دي، دا په دې معنا چې سکالار ضرب او وکتور جمعي سره زعمورې دي. د کواوردینات انځورني لپاره کیدی شي ادا ترلې پسي وشمیرل شي. فقط زیاتونوالی)حمعه کیدنه) د هندسي تعریف لپاره ځرګنده توګه روښانه دی.

لومړی ښایو، چې .

$$\vec{e}_z \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه له ځيرې چې ليدل کيږي، وکتور ضرب لاس ته راځي، داسې چې که وکتور $\vec{b}$ په xy -سطحه پربوستل شي او بيا په کونج $\pi/2$ و ځرخول شي. دا چې د پربوستون اودوالی

$$\left|\vec{b}\right| \sin(\sphericalangle(\vec{e}_z, \vec{b}))$$

دی، نو پورتنی فرمول لاس ته راځي.

د ځانګړې انځورونې ځخه په دويمه کمپوننت کې د سيده پسې شمېرنې کربنيزوالی لاس ته راځي، ځکه چې بې د تړليز محدوديت ځخه د لومړي وکتور لور د $\vec{e}_z$ په حيث ټاکو.

په ورته توګه لومړی کمپوننت هم همداسې کاروو.

بسيا کوي، چې د $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ کانونيکي بنسټ وکتورونو کمبينيشن لپاره وراته والی و ازمايل شي.

(ليکونکي : هوليګ، اپپ)

د تعريف يا پيژند د ځرګندونې لپاره د وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ او $$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب $\vec{c}$ شميرل کيږي.

يو و $\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتونال وکتور دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \parallel \vec{c},$$

کوم چې همدا اوس ټیک لوریزوالی لري. له

$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

لاس ته راځي : $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi/4$. له دې سره

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 3\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 9$$

دی او ورپسې

$$\vec{c} = \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

په بدیله توګه په ساده توګه تحلیلي تعریف

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس ته اځي

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(لیکونکي: کلاوس، هولیګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ستاندارد بنسټ لپاره باور لري

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z\,, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$
$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0}, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{0}, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}\,.$$

اړونده فرمولونه د په خوښه ، د ،،بنې-لاس-قانون،،سره سم لوریزي اورتوګونال بنستونو لپاره باور لري.

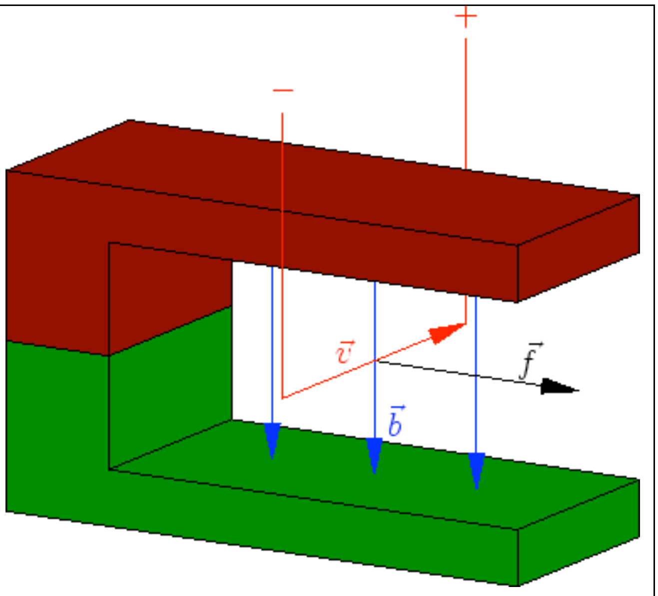
(لیکونکي : هولیګ، اپپ)

د لورنځ زور Lorentzkraft

په یوه الکترون $-e$ ، چي د $\vec{v}$ چټکتیا سره په یوه مقناطیسي ورشو $\vec{b}$ کې خوزي یا حرکت کوي، د لورنځ زور اغیز لري

$$\vec{f} = e\vec{b} \times \vec{v}\,.$$

دا په دا ځیره شوي ازمایښت نظم د بریښنا جریان تیروني د $\vec{f}$ په لور لوریزه اغیزه لري..



(لیکونکي : هولیګ، اپپ)

د وکتور ضرب لپاره قانونونه:

د وکتور ضرب لپاره لاندې قوانین باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- اسوڅیاتیو قانونAntisymmetrie

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$$

- کرښیزوالیLinearität

$$\left(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2\right) \times \left(\beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2\right) = \alpha_1\beta_1\left(\vec{a}_1 \times \vec{b}_1\right) + \alpha_1\beta_2\left(\vec{a}_1 \times \vec{b}_2\right) +$$

$$\alpha_2\beta_1\left(\vec{a}_2 \times \vec{b}_1\right) + \alpha_2\beta_2\left(\vec{a}_2 \times \vec{b}_2\right)$$

- غبرګاړخیز یا موازی الاظلاع د سطحي مساحت، هغه چې له وکتورونو a او b غزېدلي، د هغه د ضرب مطلق ارزښت دی، نو $|a \times b|$.
- د ګراسمن کتمتوالی Grassmann-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a}$$

- د لاګرانج کتمتوالی Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

(لیکونکي: اپپ،هولیګ،کیمرلي)

انتیسیومتري او کرښیزوالی د وکتورضرب د کواوردینات انځوروني ځخه تړلی لیدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کټمټوالي د ښووني لپاره کيدی شي بې له ټوليزو بنديزونو $\vec{a}=\vec{e}_x$ ونيول شي او بايد په $\vec{b}$ کې د کربنيزوالي په بنسټ فقط حالتونه $\vec{b}=\vec{e}_y$ او $\vec{a}=\vec{e}_x$ وڅيړل شي، د $\vec{a}=\vec{b}$ لپاره د کټمټوالي دواړه اوخونه په ساده توګه صفر دي.

په لومړي حالت کې د کيڼ اړخ د ګاسمن کټمټوالی لاس ته راځي

$$(\vec{e}_x\times\vec{e}_y)\times\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c_2\\c_1\\0\end{pmatrix}.$$

دا د ښي اړخ

$$c_1\vec{e}_y-c_2\vec{e}_x$$

سره يوغږيز کيږي. په دې راوړل شوي ځانګړي حالت ($\vec{a}=\vec{e}_x$, $\vec{b}=\vec{e}_y$)

کې د لاګرانژ کټمټوالی

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cdots\\\cdots\\c_1d_2-c_2d_1\end{pmatrix}=c_1d_2-c_2d_1\,,$$

هم ټيک دی.

په ورته توګه د $\vec{b}=\vec{e}_z$ لپاره هم دليل راوړل کيږي.........

کربنيزوالی کيدی شي د غبرګيزوالی لپاره وکارول شي. دا لاندې يي بيلګه ده.

$$\left(3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)\times\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad 6\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \quad 5\begin{pmatrix}0-2\\1-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\5\\0\end{pmatrix}$$

د گراسمن - او لاګرانژ کتوتوالی وکتور ضرب په ساده توګه د شمیرلو سکالار ضرب ته بیرته بیایي. د بېلګې په توګه دی

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

او

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}\right)=0\cdot 6-12\cdot 1=-12.$$

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د ایپسیلون - تنزورEpsilon-Tensor

د ε–تنزور

$$\varepsilon_{i,j,k}\in\{-1,0,1\},\quad i,j,k\in\{1,2,3\},$$

د دوه برابرو پیژندنخښو (ایندکسونو) سره صفر دی او دوه جوړه ډوله مختلفو ایندکسونو سره لاندې ارزښت لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{matrix} \varepsilon_{1,2,3} & = & \varepsilon_{2,3,1} & = & \varepsilon_{3,1,2} & = & 1\,, \\ \varepsilon_{1,3,2} & = & \varepsilon_{2,1,3} & = & \varepsilon_{3,2,1} & = & -1\,. \end{matrix}$$

نو دا د ځیکلیکي پرموتیشن (ځای بدلون) لاندې اینواریانت (تغیر نه خوړونکی) دی او د پېژندنخښو یا ایندکسونو د بدلون سره مخنخښه بدلوي.

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د –تنروز په مرسته کیدی شي د وکتور ضرب $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ په لاندې بڼه ولیکیل شي.

$$c_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_j b_k$$

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

شپات ضرب

شپات ضرب

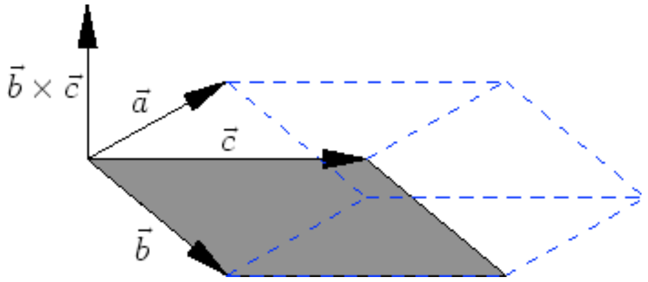
$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

ترمخنخښې پورې د له درې وکتورونو $\vec{c},\ \vec{b},\ \vec{a}$ څخه غزول شوی شپات ډکې یا حجم سره یو غبړیز شي یا برابر شي.

(غبرګ سطحیز)

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ε– تنزور په مرسته کېدی شي د غبرګخوابیز یا شپات ضرب په لاندې بڼه هم ولیکل شي:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_i b_j c_k$$

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د $\vec{d} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$ سره

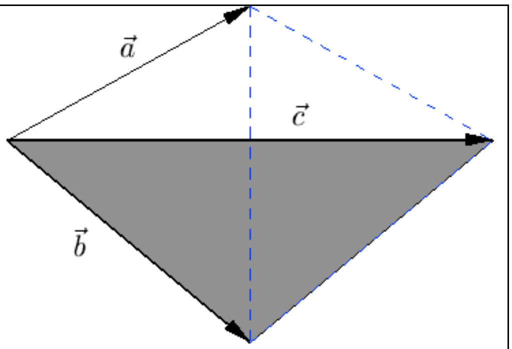
$$h = |\vec{a}| \left|\cos(\sphericalangle(\vec{a},\vec{d}))\right| = |\vec{a} \cdot \vec{d}|$$

د شپات یا غبرګ سطحیز جګوالی دی. دا چې $f = |\vec{b} \times \vec{c}|$ د کربنیز شوي غبرګ اړخیز   د سطحې خوندیونه ده، د ډکي یا حجم لپاره لاس ته راځي:

$$hf = \left|\vec{a} \cdot \left(\frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}\right)\right| |\vec{b} \times \vec{c}| = |[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]| \,.$$

د یوه څلور سطحیز (حجم) شمیرنه Volumen eines Tetraeders

(c) ketabton.com: The Digital Library

<table><tr><td>
</td><td>د يوه درې وکتورونو $\vec{a}$, $\vec{b}$ او $\vec{c}$ څخه غزېدلی تيتراايد ډکی یا حجم V دی
$V = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right|.$</td></tr></table>

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

د يوه تيتراايدر(څلور سطحيز) ډکی V داسي شميرل کيږي

$$V = \frac{1}{3}Gh\,,$$

چيرته چې G بنسټ سطحه ده او h جګوالی په ګوته کوي. که په بام کې ونيول شي، چې G نيم دومره لوی دی، لکه د غبرګسطحيز G_{Spat} سطحه، چې له درې وکتورونو غزېدلې ، نو لاس ته

$$V = \frac{1}{6}G_{\text{Spat}}h = \frac{1}{6}V_{\text{Spat}} = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right|$$

راځي، د غبرګطحيز V_{Spat} په مرسته .

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

د څلور سطحيز V ډکی ، چې له وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غزېدلی ، دی

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\,.$$

د غبرګسطحيز يا ذوذنقي خويونهEigenschaften des Spatprodukts

د غبرکسطحيز ضرب په هر Argument کې کرښيز دی او سربيره پردي دا لاندې نور خويونه لري

- ځيوکليکي – يا تل بيرته راګرځيدونی بدلون : zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

- کرښيز بلواکوالی يا تابعيت

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{0} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

د لږ ترلږه يوه سکالار α, β, γ سره د 0 سره نابرابر.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- Orientierung: لوریزونه

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] > 0$$

د هر ښي سیستم لپاره

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ ارزښتونو شمیرنه

وکتورونه $\vec{u}$ $\vec{v}$, او $\vec{w}$ یو ریښتونی غبرګهواریز(سطحیز) غزوي، نو یو په خوښه وکتور $\vec{x}$ کیدی شي د کرښیز کمبینیشن

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

په ځیر انځور شي د لاندې ضریبونو سره:

$$\alpha = \frac{[\vec{x},\vec{v},\vec{w}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]}, \quad \beta = \frac{[\vec{x},\vec{w},\vec{u}]}{[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]}, \quad \gamma = \frac{[\vec{x},\vec{u},\vec{v}]}{[\vec{w},\vec{u},\vec{v}]}.$$

(لیکونکي اپپ،هولیګ)

د

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

لپاره سکالار ضرب د $\vec{v} \times \vec{w}$ سره جوړوو، نو لاس ته راځي

$$\vec{x} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \quad = \alpha\, \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\alpha = \frac{[\vec{x},\vec{v},\vec{w}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]},$$

داچې $\vec{u}$,$\vec{v}$ او $\vec{w}$ يو رېښتونی غبرګسطحيز غزوي، داپه دې معنا چې $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \neq 0$ دي. د β او γ لپاره سړی په روته توګه مخ ته ځي.

(ليکونکي اپپ،هوليګ)

که وکتور

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د وکتورونو

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د کرښيز کمبينشن په څير انځورول غواړو، نو لاس ته راځي

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = 2$$

$$[\vec{x},\vec{v},\vec{w}] = 4, \quad [\vec{x},\vec{w},\vec{u}] = -4, \quad [\vec{x},\vec{u},\vec{v}] = 8$$

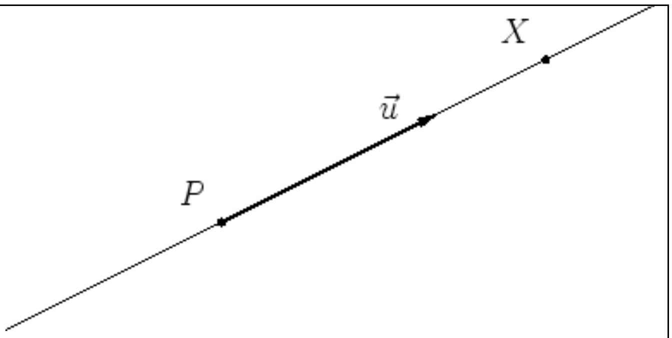
او له دې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \frac{4}{2}\vec{u} - \frac{4}{2}\vec{v} + \frac{8}{2}\vec{w} \\ &= 2\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w}\,.\end{aligned}$$

(ليکونکي اپپ،هوليګ)

ټکي – لور – بڼه:

په يوه کرښه ټکی X له P د $\vec{u}$ په لور کېدی شي د $\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$ سره انځور شي.	

په ورته توګه باور لري

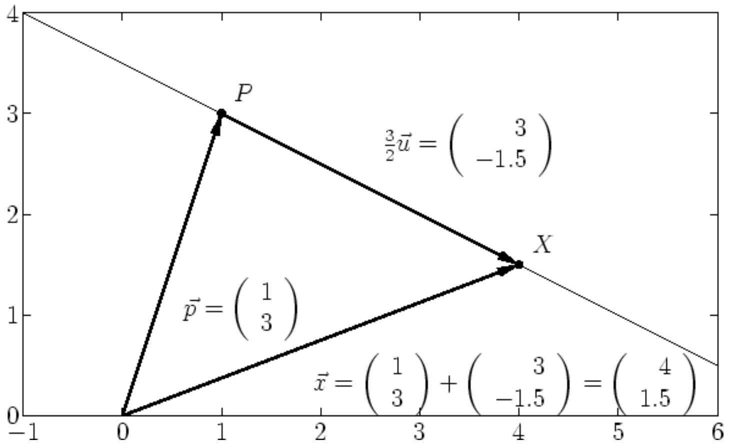
$$x_i = p_i + tu_i, \quad i = 1,2,3\,,$$

د ځای-وکتور $\vec{x}$ کواوردیناتو لپاره.

(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

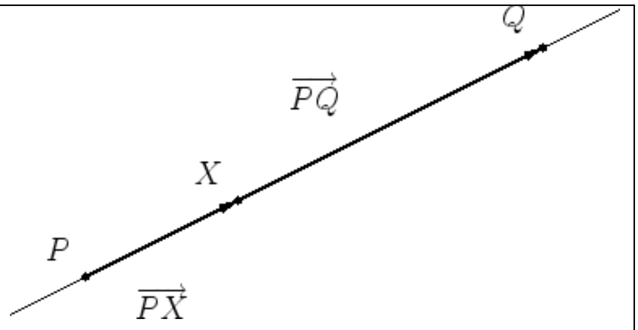
څېره د يوې کرښې د ټکي-لور-بڼه د ليدلو کوي د په د پاسه ټکي $P = (1,3)$ او $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ لور سره. د کرښې د X ټکی پارامتر $t = 3/2$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



(لیکونکي ،هولیګ،هیورنر)

دوه – ټکي – بڼه :

په یوه کرښه د X ټکی چې له دوه $P \neq Q$ ټکو تیریږي کیدی شي په بڼه $\overrightarrow{PX} = t\overrightarrow{PQ}, \quad t \in \mathbb{R},$ انځور شي. د پارامتر ارزښت $t \in [0,1]$ ټوټه کرښه $\overline{PQ}$ راکوي.	

په ورته توګه

د ځای-وکتور $\vec{x}$ د کواوردینات لپاره باور لري

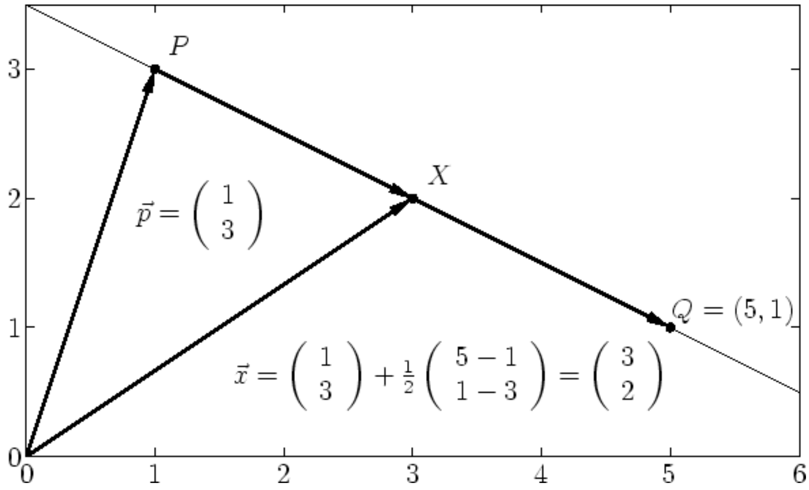
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_i = p_i + t(q_i - p_i), \quad i = 1,2,3\,,$$

(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

د $t \in [0,1]$ لپاره د دوه-ټکو-بڼې سره ټکی X ټوټه کرښه $\overline{PQ}$ په $t:(1-t)$ نسبت ویشي.

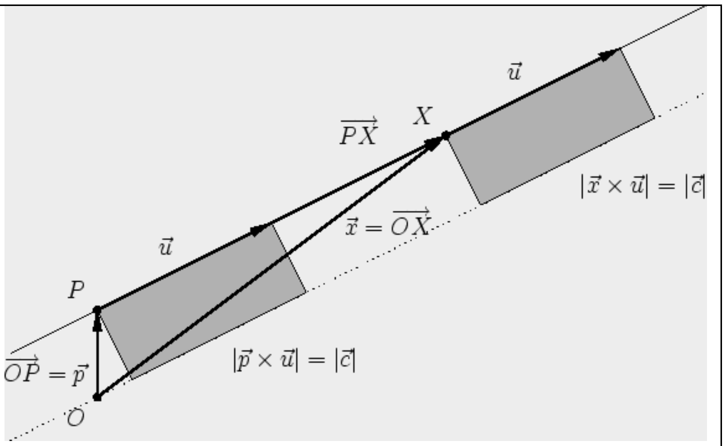
په ځانګړې توګه د P او Q ټکو ترمنځ منځ ټکو پارامتر $t = 1/2$ په ګوته کوي.



(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

لحضوي – یا سترګورپ بڼهMomentenform

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه کرښه د X ټکی چې له دوه ټکو P د $\vec{u}$ په لور تیریږي کیدی شي د $\overrightarrow{PX} \times \vec{u} = \vec{0}$ په بڼه ولیکل شي.	

په ورته توګه د ځایوکتور لپاره باور لري.

$$\vec{x} \times \vec{u} = \vec{c}, \quad \vec{c} = \vec{p} \times \vec{u}\,.$$

(لیکونکي ،هولیګ،هیورنر)

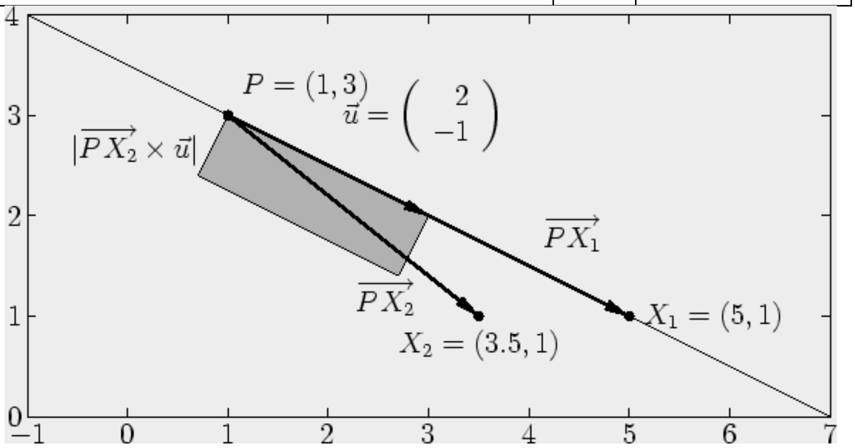
د یوې کرښې لحظوی –بڼه کېدی شي استعمال شي، چې ایا یو ورکړشوی ټکی X په یوه کرښه پروت دی. د دې ځیره شوې بیلګې لپاره د X_1 ټکي لپاره ورکوي:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PX_1} \times \vec{u} &= \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \vec{0}\,.
\end{aligned}$$

د دې برعکس د X_2 ټکي لپاره لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\begin{pmatrix} 2.5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$=$	$\overrightarrow{PX_2} \times \vec{u}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} \neq \vec{0}\,.$	$=$	



د ټکي ــکرښې واټن:

په یوه کرښه د یوه ټکي Q پروجکشن(پرېوستون) X چې له P تیریږي د لور سره لاندې پوره کوي

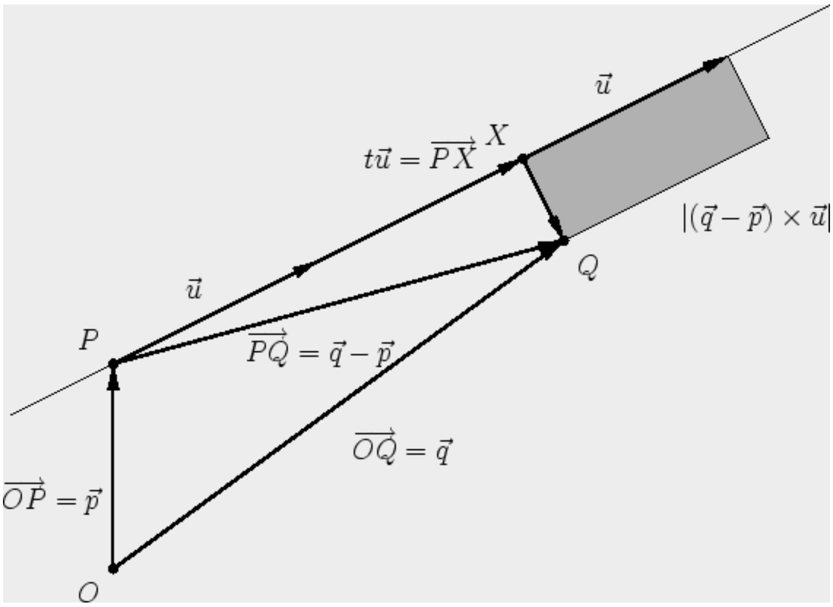
$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t = \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,.$$

له دې څخه د په حیث

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}\,.$$

واټن لاس ته راځي .

(c) ketabton.com: The Digital Library



(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

په کربنه د ټکي Q پربوستون X لپاره وکتور $\overrightarrow{XQ}$ په $\vec{u}$ عمود- يا نيغ ولاړ دی.

دا د سکالا ضرب له لارې ازمايل کېدی شي:

$$\overrightarrow{XQ} \cdot \vec{u} =$$

$$\left(\vec{q} - \left(\vec{p} + \frac{(\vec{q}-\vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,\vec{u}\right)\right) \cdot \vec{u} = (\vec{q}-\vec{p}) \cdot \vec{u} - \frac{(\vec{q}-\vec{p})\,\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,|\vec{u}|^2 = 0\,.$$

د چليپا يا ومتوري ضرب تعريف له مخې باور لري

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\left(\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right)$$

او له دې سره د واټن d لپاره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \left|\overrightarrow{XQ}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}\right)\right) =$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{PQ}\right| \, |\vec{u}| \, \sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}\right)\right)}{|\vec{u}|}$$

$$= \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

که ټکی $Q = (3, 3, 3)$ په کرښه پرېيستل شي

$$g: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نو د پروجکشن په حيث د ځای وکتور سره ټکی لاس ته راوړي

$$\vec{x} = \vec{p} + \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \vec{u} \quad =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1^2 + 1^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \left(\begin{array}{c}2\\1\\3\end{array}\right) + \frac{1\cdot 1+2\cdot 1+0\cdot 1}{3}\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}3\\2\\4\end{array}\right).$$

واټمن

$$d = \frac{\left|\left(\begin{array}{c}1\\2\\0\end{array}\right)\times\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)\right|}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(2+0)^2+(0-1)^2+(1-2)^2}{3}} = \sqrt{2},$$

د

$$\left|\overrightarrow{XQ}\right| = \sqrt{(3-3)^2+(3-2)^2+(3-4)^2} = \sqrt{2}.$$

سره يو غږيز دی.

(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

د دوه کربنو واټن :

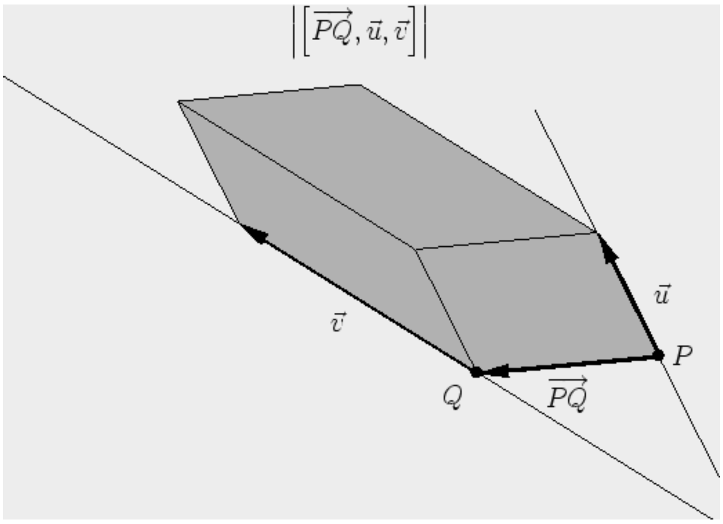
د دوه کربنو ، چې له ټکو P ، Q او د لورو $\vec{u}$, $\vec{v}$ سره ورکړ شوې دي واټن دی

$$d = \frac{|[\overrightarrow{PQ},\vec{u},\vec{v}]|}{|\vec{u}\times\vec{v}|},$$

که $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$ وي. د غبرګو کربنو پاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}\,.$$



دوه کرښې بادمايلي windschief بلل کيږي، که غبرګې نه وي او مثبتې(زياتيز) واټن ولري..

(ليکونکي:هوليګ، هيورنر)

که

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u}, \quad \vec{y} = \vec{q} + t\vec{v}$$

د ټکو ځای وکتورونه وي د خورا لنډ واټن سره، نو

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}$$

دواړو لوروکتورونو سره عمود يا ولاړ دی، يعن غبرګ وه

$$\vec{c} = \vec{u} \times \vec{v}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته.

دا چې د یوه وکتور اوږدوالی د هغه مطلق ارزښت ضرب یوون (واحد)وکتور سره برابر دی لاس ته راځي:

$$d = |\overrightarrow{XY}| = \left|(\overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}) \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right| = \left|\overrightarrow{PQ} \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right| ,$$

او له دې سره غوښتونکی فرمول.

د غبرګو کرښو لپاره هغه د یوه ټکي واټن له کرښې سره فرمول و کاروي.

(لیکونکي:هولیګ، هیورنر)

کرښې

$$g : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad h : \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

دا لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\left|\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(1-(-2))^2 + (1-1)^2 + ((-2)-1)^2}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

(ليکونکي:هوليګ، هيورنر)

د الوتنې لارې Flugkorridore

په ساده توګه نيسو، چې الوتکه په سيده لار له الوتنځای ځخه و موخې ته ا لوزي او د التنلار له سيده کرښتوتو ځخه جوړه ده، نو د يوې الوتنې لپاره له شتوتګارت (S) Stuttgart ځخه و کوپنهاګن ته د جګيدني لار

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0,8]$$

او د يوې الوتنې لپاره له فرانکفورت (F)ځخه قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,3].$$

که د ساده وينا ځخه مخ ته لاړشو، چې الوتکه په سيده لار د د الوتځای ځخه و موخه ځای ته الوزي او د الوتنې لار له سيده کرښتوتو ځخه جوړه ده، نو د شتوتګارت S ځخه د کوپنهاګن ته د يوې الوتنې د جګيدني الوتنلار ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 8]$$

او د يوې الوتنې لپاره له فرنكفورت F څخه و قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 3] \,.$$

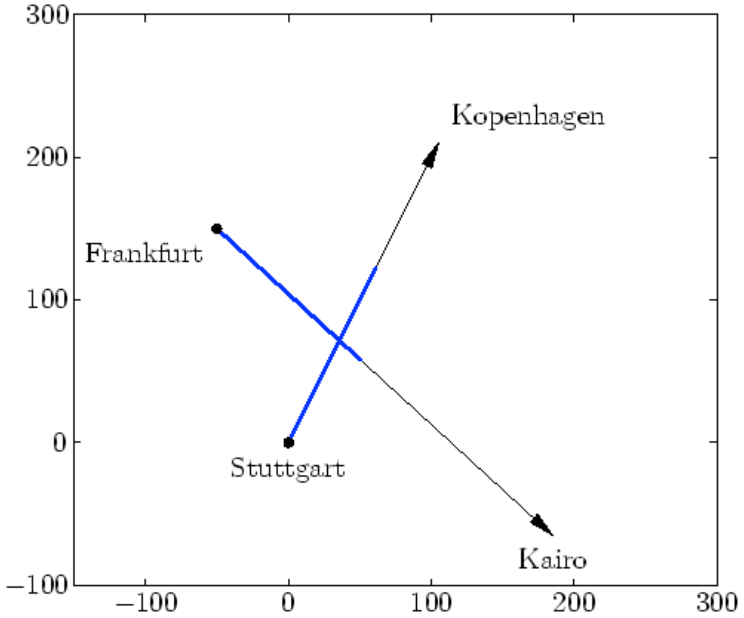
كه د كواوردينات پيل شتوتګارت و ټاكل شي، نو كواورديناتونه $F = (-50, 150, -1/4)$ لرو، په كيلو متر كچ شوي.

دواړه د الوتنلارې لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}$$

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 95 \\ 2 \\ -792 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{95^2 + 2^2 + 792^2}} = \frac{4252}{\sqrt{636293}} \approx 5.33 \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



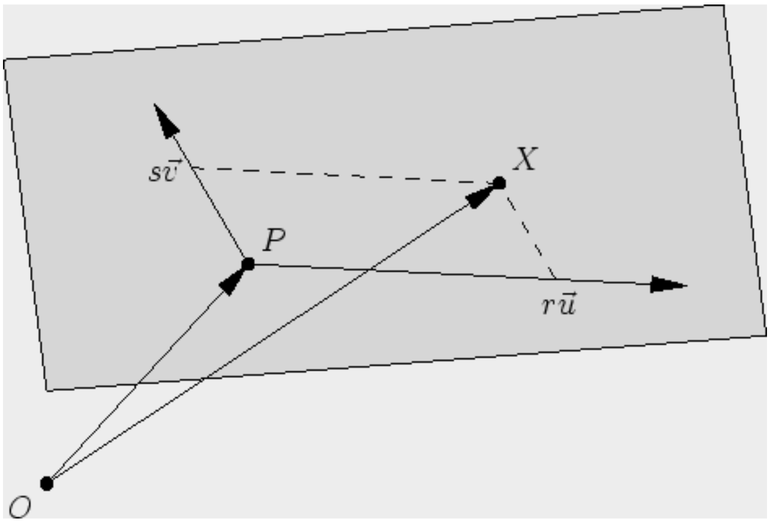
(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

د يوې سطحې پارامتريکي انځورونهParameterdarstellung einer Ebene

له ټکي P تېره ، چې له دوه نه غبرګو لورو $\vec{u}$ او $\vec{v}$ غزېدلې سطحه باندې ټکی X پوره کوي

$$\overrightarrow{PX} = s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s,t \in \mathbb{R}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه د ځای وکتور $\vec{x}$ د کواودیناتو لپاره باور لري

$$x_i = p_i + su_i + tv_i\,, \quad i = 1,2,3\,.$$

(لیکونکي:هولیګ، وایس)

یوه سطحه دې د ټکي $P = (1,2,3)$ او وکتورونو $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
سره روکړ شوې وي. نو $X = (1,1,2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{u} + (-1)\vec{v}$$

له بلې خوا $X = (0,0,0)$ په سطحه پروت نه دی، ځکه چې $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$
دی او د مساوات سیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

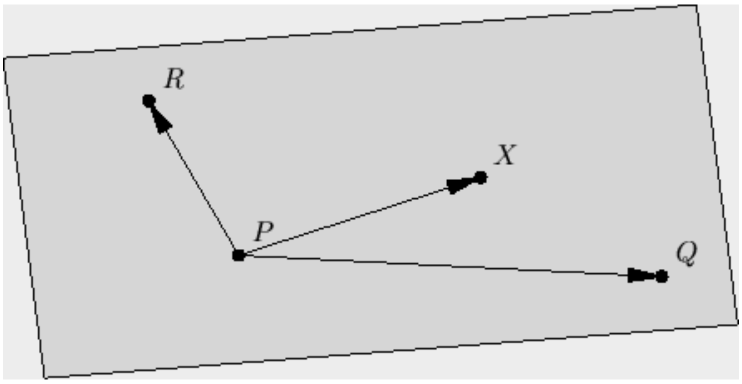
حل نه لري، که لومړۍ او دويمې ليکې ته وګورو .

د يوې سطحې درې-ټکي-بڼه Drei-Punkte-Form einer Ebene

د ټکي X لپاره چې په يوه سطحه پروت دی،کومه چې له ټکو P, Q, R, تېرېږي او يو اصلي درېګوډی جوړوي د غبرګخوايزو ضرب ورکيږي .

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}]=0.$$

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}]=0.$$



(ليکونکي:هوليک، وايس)

يوه سطحه دې د ټکو $P=(1,2,3)$, $Q=(3,2,3)$ او $R=(2,3,4)$ له لارې ورکړ شوې وي.

نو $X=(1,1,2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

له بلې خوا $X = (0,0,0)$ په سطحه نه دی پروت، څکه چې باور لري

$$[\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

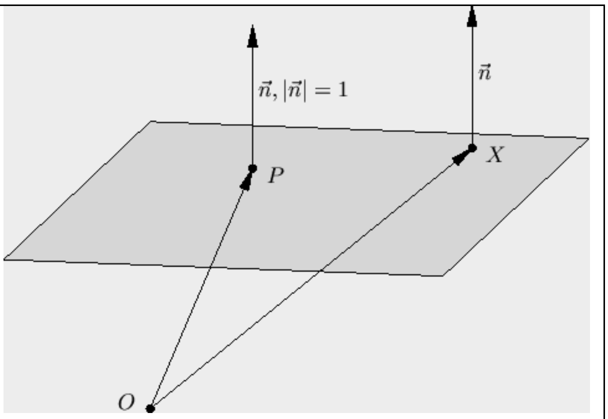
(ليکونکي:هوليګ، وايس)

د يوې سطحې د هيسې -نورمال بڼهHesse-Normalform einer Ebene

په يوه سطحه د يوه ټکي X ځايوکتور $\vec{x}$ په يوه سيخه په P کې اورتوګونال و يوه نورمالوکتور ته پوره کوي

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = d, \quad d = \vec{p} \cdot \vec{n}\,.$$

په نورمال بڼه نيول کيږي چې $|\vec{n}| = 1$ او $d \geq 0$. په دې حالت کې d د سطحې واټن دی و سرچينې ته



(ليکونکي:هوليګ، وايس)

يوه سطحه E دې د ټکي $P = (1, 2, 3)$ له لارې ورکړشوې وي او نورمي نورمال وکتور

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{n} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

دی

$$d = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = 3\,,$$

دا په دې معناچې سطحه لاندې نورمال بڼه لري

$$E: \quad \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 3\,.$$

نو $X = (4,0,1)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \frac{1}{3}(8+0+1) = d\,.$$

له بلې خوا $X = (0,0,0)$ په سطحه نه دی پروت، ځکه چې پاور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = 0 \neq d\,.$$

(ليکونکي:هوليک، وايس)

د سطحو انځورونو ترمنځ د شميرنې بدلون يا اړول

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: یوه سطحه دې د ټکي P له لارې ورکړ شوې وي همداسې دوه نه غبرګ وکتورونه $\vec{u}, \vec{v}$.

سرې نور دوه ټکي Q او R لاس ته راوړي، چې دا هم په سطحه پراته دي او له P سره، د $\vec{q} = \vec{p} + \vec{u}, \quad \vec{r} = \vec{p} + \vec{v}$.

له لارې کرښه نه جوړوي

د نورمالو وکتور $\vec{n}$ په $\vec{u}$ او $\vec{v}$ نیغ ولاړ دی یا نېغ عمودد‌ی، یعنې $\vec{u} \times \vec{v}$ ته غبرګ دی.

له دې دا نورمي نورمالو کتور د هیسي-نورمال بڼې لپاره دی

$$\vec{n} = \sigma \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \,,$$

د له کوم سره چې مخنخښه $\sigma \in \{-1, 1\}$ داسې باید وټاکل شي، چې $d = \vec{p} \cdot \vec{n}$ مثبت (زاتیز) وي.

دویم : یوه سطحه دې د درې ټکو Q, P او R له لارې ورکړ شوې وي، چې یو اصلي درېګودی(مثلث) جوړوي.

دوه وکترونه لاس ته راځي، چې سطحه غزوي یا جوړوي د لاندې وکتورونو له لارې

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{PR} \,.$$

له دې وکتورو څخه لکه په لومړي کې کېدی شي د هېسې٠نومالبڼه لاس ته راوړل شي.

دریم : یو ه سطحه دې د یوه ټکي او یوه نورمالوکتور $\vec{n}$ له لارې ورکړ شوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه وکتورونه لاس ته راځي. چې يوه سطحه داسې و غزول شي پخ کړمه کې چې دوه کربنيز خپلواک وکتورونه چې $\vec{n}$ باندې عمود يا و لاړ وي، و پلټل شي.

$$\vec{u} = \vec{n} \times \vec{x}, \quad \vec{v} = \vec{n} \times \vec{u}\,,$$

چېرته چې$\vec{x}$ يو په خوښه وکتور $\neq \lambda\vec{n}$ دی.

له دې وکتورونو څخه کېدی شي، لکه په لومړي کې دې-ټکي-بڼه لاس ته راوړای شي.

(ليکونکي:هوليګ، وايس)

لاندې ټکي دې ورکړ شوي وي

$$P = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

له دې څخه شميرو

$$\vec{u} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \vec{PR} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د هېسي –نورمال بڼې لپاره د نورمال وکتور لپاره اوس دالاندې شميرو

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -24 + 20 \\ -16 + 18 \\ 60 - 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

او له دې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{\begin{pmatrix}-4\\2\\-4\end{pmatrix}}{6}\,.$$

ځکه چې $d=\vec{p}\cdot\vec{n}$ باید مثبت (زیاتیز)وی، له لاندې لاس ته راځي

$$d=\vec{p}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}7\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-4\\2\\-4\end{pmatrix}=-4$$

$\sigma=-1$
او له دې سره

$$\vec{n}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\,.$$

نو سطحه نورمال بڼه لري

$$E:\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3=4\,.$$

(لیکونکي:هولیګ، کرایخ)

د ټکي – سطحې واټن :

د یوه ټکي Q ولاړ برېوتلی وکتور په یوه سطحه په ټکي P د نورمالوکتور $\vec{n}$ سره
دی

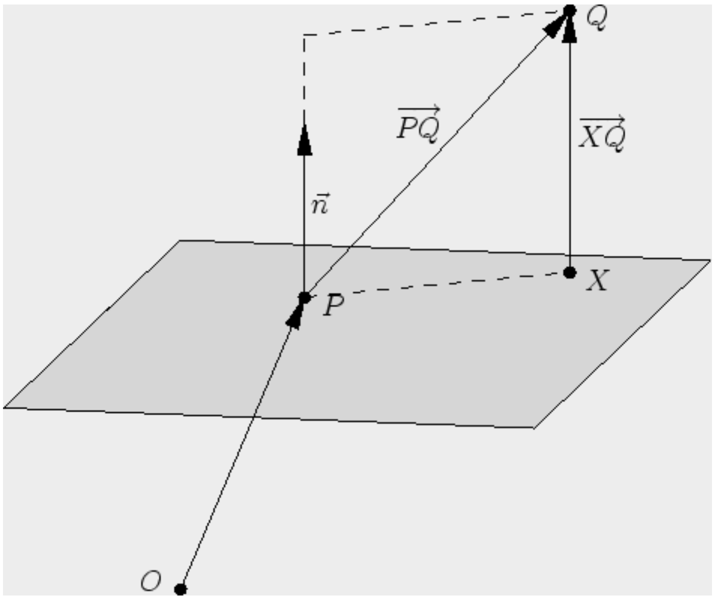
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overrightarrow{XQ} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\, \vec{n}\,.$$

د دې اوږدوالی

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

د سطحې واټندی و تکي Q ته.



(لیکونکي:هولیک، وایس)

سکالار ضرب

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = \cos\alpha |\overrightarrow{PQ}||\vec{n}| = \pm d|\vec{n}|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځخه دا $|\vec{n}|$ -واره د ټکي Q او سطحې ترمنځ واټن لاس ته راځی، د کوم سره چې
مخنخښه دا راپه ګوته کوي، چې ایا $\overrightarrow{PQ}$ په همغه خوا ښایي، لکه یې چې $\vec{n}$ ښایي.

له دې سره دی

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

او

$$\overrightarrow{XQ} = \pm d \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، وایس

له ټکي $P = (1, 2, 3)$ تېیره سطحه د نورمالوکتور $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ سره دې د
ټکي $Q = (3, 2, 3)$ واټن d همداسې په سطحه پرې ولاړټکی X وټاکل شي.

لومړی دی

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 4, \quad |\vec{n}| = 3\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

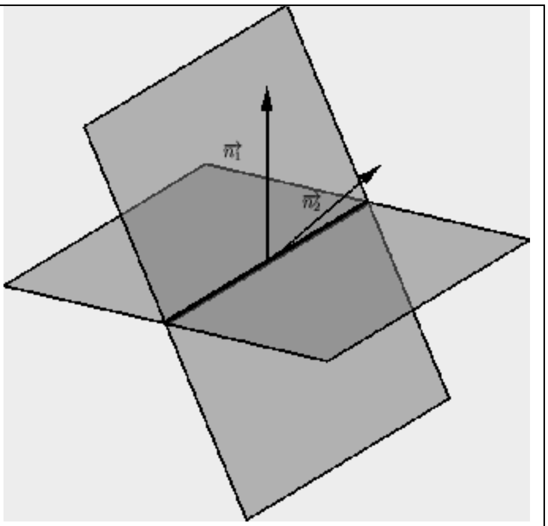
$$\overrightarrow{XQ} = \frac{4}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \quad d = \frac{4}{3}$$

او بالاخره شمیرل کيږي

$$\vec{x} = \vec{q} - \overrightarrow{XQ} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}19\\14\\19\end{pmatrix} .$$

(ليکونکي:هوليګ، وايس)

د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع:

<table>
<tr>
<td>د دوه سطحو د نورمال وکتور $\vec{n}_i$ سره د دواړو کونجونو(زاويو) $\varphi \in [0, \pi/2]$ هغه کوچني کونج يې د
$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$$
له لارې يوائنی ټاکلې او
$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$
د غوڅکربنې لور ده.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

(ليکونکي:هوليګ، وايس)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه هوارو لپاره، چې هره یوه یې له ټکو $P_1 = (1,2,0)$, $P_2 = (0,1,3)$ او نورمالوکتورونو

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سره تعریف دي، د کونج او د دواړو سطحو د غوڅکرښې سره جوړ کونج(زاویه) φ دې وټاکل شي.

دی

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{1}{2}$$

او له دې سره

$$\varphi = \pi/3\,.$$

پسې هم

$$\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

د غوڅکرښې لور ده.

د دې لپاره چې یو غوڅټکی (نقطه تقاطع) وشمیرو، و

$$d_1 = \vec{p_1} \cdot \vec{n}_1 = -1, \quad d_2 = \vec{p_2} \cdot \vec{n}_2 = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته اړتیا شته او یو ټکی S ته، چې مساوات

$$\vec{s}\cdot\vec{n}_1 = d_1, \quad \vec{s}\cdot\vec{n}_2 = d_2$$

پوره کوي. د بېلګې په توګه $S=(2,3,5)$ پیدا کیږي او له دې سره غوځکرښه لاس ته راځي:

$$g:\vec{x}=\vec{s}+t\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad t\in\mathbb{R}\,.$$

(لیکونکي:هولیک، وایس)

د منظم تترايد(څلور سطحيز) د کونج ټکو

$$P_1=(1,0,0), \quad P_2=(-1,0,0),$$

$$P_3=(0,1,\sqrt{2}), \quad P_4=(0,-1,\sqrt{2})$$

د دوه سطحو ترمنځ کونج یا زاویه دې پیدا شي.

موږ د بیلګې په توګه د سطحو څخه چه له P_1,P_2,P_3 همداسې له P_1,P_2,P_4 جوړې وي یا تېرېږی کار اخلو.

د نورمال وکتورونو لپاره باور لري

$$\vec{n}_1=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\-2\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسي

$$\vec{n}_2 = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} .$$

له دې سره دی:

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{12}\sqrt{12}} = \frac{1}{3}$$

او لاس ته راوړو

$$\varphi \approx 70,59^\circ .$$

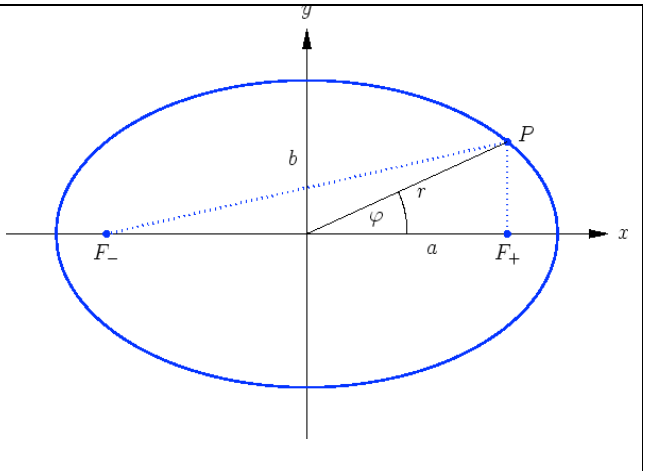
(ليکونکي:هوليک، وايس)

هکی (بيضوي) Ellipse

په يوې ايليپسي يا بيضوي د تکو $P = (x,y)$ د دوه سوزونتيکو $F_\pm$ څخه واټن ثابت يا همغه دی:

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a$$

د $2a > |\overrightarrow{F_-F_+}|$ سره .



(c) ketabton.com: The Digital Library

که وي $F_{\pm} = (\pm f, 0)$ ، نو د کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2\,,$$

او

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د ټکو P د قطبي کواودیناتونو لپاره.

د هګی پارامتري کونه ده

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

د $t \in [0, 2\pi)$ سره.

(لیکونکي:اېپ،هولیګ)

د انځوره ونو ورته والی کیدی شي د سیده پسې شمیرنې له لارې و ازمایل شي.

د دې لپاره چې وښایو، چې

$$|\overrightarrow{PF_{-}}| + |\overrightarrow{PF_{+}}| = 2a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

مربع (څلورې) کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\underbrace{2a-\sqrt{(x+f)^2+y^2}}_{>0}=\sqrt{(x-f)^2+y^2}$$

او دې کېن مساوات ته ورته مساوات لاس ته راوړو

$$\underbrace{4a^2+4xf}_{>0}=4a\sqrt{(x+f)^2+y^2}\,.$$

د $4a$ سره وېشنې وروسته نوې مربع کول یا بیا مربع کول راکوي

$$a^2+2xf+\frac{f^2}{a^2}x^2=x^2+2xf+f^2+y^2\,.$$

د بدلون $f^2=a^2-b^2$ له لارې د بڼې بدلون وروسته د کواوردینات بنه راکوي.

د قطبي بڼې پیدا کوني

$$r^2=\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

لپاره د مخرج(ماتلاندې) سره ضربولو سره او په پام کې نیسو

$$x^2=(x^2+y^2)\cos^2(\varphi)\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$x^2+y^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2=b^2$$

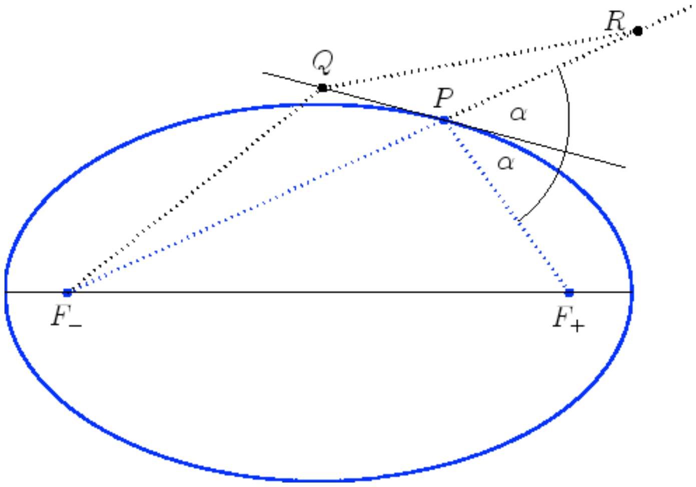
او د b^2 سره وېش له لارې د کواوردینات بنه.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) :

د سوزونټکو وړانګي (په سوزونټکو کې راګرځي (رفلکت کونه یا بیرته راګرځیدنه)



د ښووني لپاره د مرستندوی ټکي په حیث په تانجنت g د سوزونټکي F_+ هنداره شوي ځیره R ټاکو او په g یو په خوښه ټکی $Q \neq P$ ټاکو . دا چې Q د هګۍ یا بیضوي دباندې پروت دی، نو دی

$$2a = |\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QF_+}| .$$

که د ټوټه کرښو $\overline{PF_+}$ او $\overline{QF_+}$ په ځای یې هنداره شوي ځیري کیږدو، نو لاس ته راځي

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PR}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QR}| ,$$

او پسي یا تعقیب باید $R,\ P,\ F_-$ په یوه کرښه پراته وي. له دی سره $\sphericalangle(F_-PQ) = \alpha$ دی.

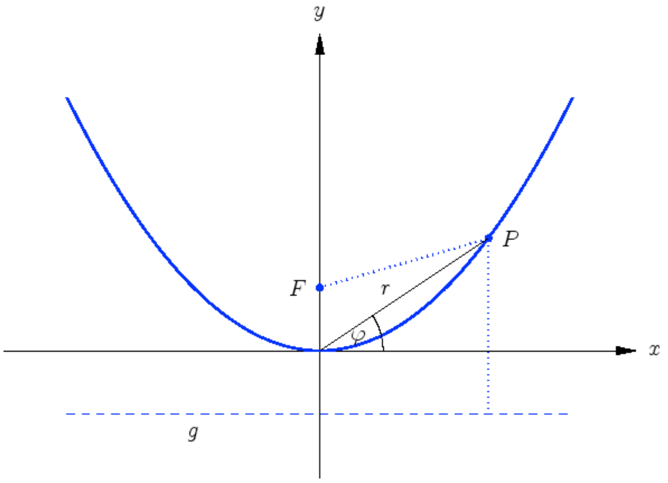
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا هندارون خويونه د پختورګو تيګو توټه کوني لپاره په کار راځي. په سوزونټکي F_- کي د يوې راديال (د وړانګي په لور) سرچيني ځخه وړانګي کېدی شي د يوه هګی ډوله يا بيضوي ډوله رفلکتور له لارې په سوزونټکی F_+ کي کوده شي يعني سره غوڅ کړي..

(ليکونکي:ايپ،هوليک)

پارابول Parabel

په يوه پارابول د ټکی $P=(x,y)$ د سوزونټکي F او يوې وړونکي کرښي g ځخه برابر واټن لري.



که $F=(0,f)$ او $g: y=-f$ وي، نو کواورديناتونو لپاره باور لري

$$4fy = x^2$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r = \frac{4f\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

د ټکي P قطبي کواوردیناتونو لپاره

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د انځوروني ورته والی یې ترلی ځرګند دی. د مربع شوي واټن د برابر ایښوونې له لارې

$$|\overrightarrow{PF}|^2 = x^2 + (y-f)^2 = (y+f)^2 = (\mathrm{dist}(P,g))^2$$

د کواوردینات بڼه لاس ته راځي. د

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

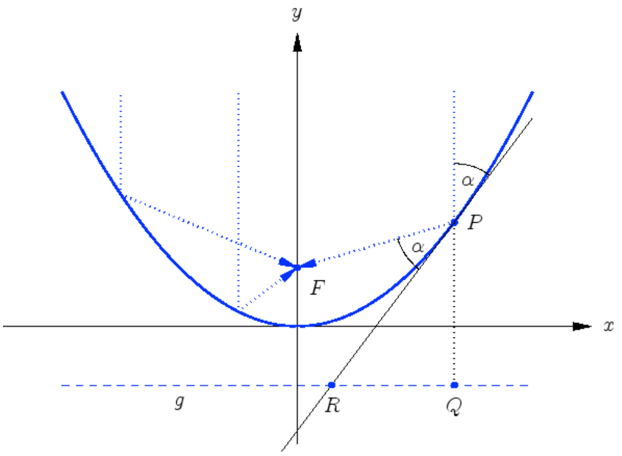
بدلون مو قطبي بڼې ته بیایي.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د ساتلایت تلویزیون Satelliten-TV

غبرګې کربښې، وړونکربښو سره ولاړې یا عمود غورځېدونکې وړانګې په سوزونټکي کې سره کوده کیږي.

داد د ساتلایت په کاسه او تېلېسکوپ کې کارول کیږي، چې پریوتي سیګنالونه قوي کړي.



د ښووني لپاره په بام کي نيسو، چي

$$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{QP}=\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\f\end{pmatrix}\right)+\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\-f\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x\\2y\end{pmatrix}$$

په ټکي Pt , $\begin{pmatrix}1\\x/(2f)\end{pmatrix}$, کي د تانجنت د لور سره غبګ دی. دا چي

$$|\overrightarrow{FP}|=|\overrightarrow{QP}|,$$

له دې څخه د کونج $\sphericalangle(F,P,R)$ او $\sphericalangle(R,P,Q)$ مساوات لاس ته راځي، د کوم سره چي R د تانجنت غوځتکی دی د g سره.

(ليکونکي:اپپ،هوليګ)

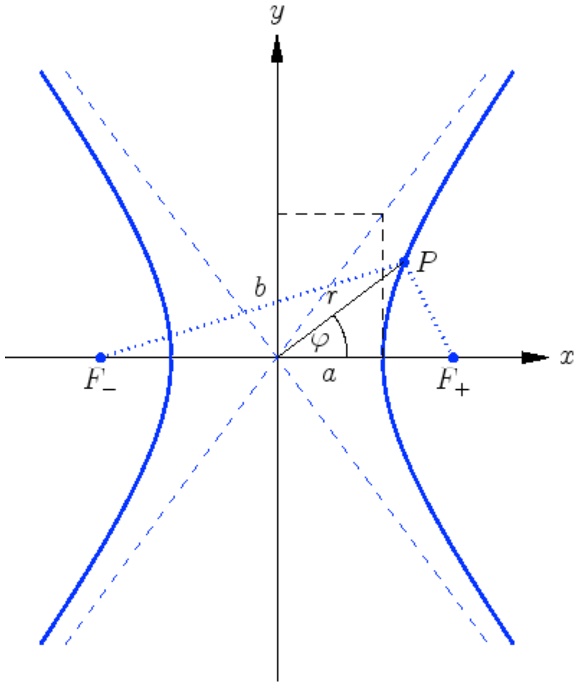
های پاربول Hyperbel

په يوه های پابول د يوه ټکي $P=(x,y)$ د سوزون ټکو $F_\pm$ سره د واټونو کمښت ثابت دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

د $2a < |\overrightarrow{F_-F_+}|$ سره .



که $F_\pm = (\pm f, 0)$ وي، نو کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2 \,,$$

او

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2\varphi}$$

د ټکو P د قطبي کواوردیناتونو لپاره . اسیپتوتي $\pm b/a$ جګوالی لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هایپرابول د ښاخونو پارامتري کونه

$$x = \pm a\cosh t, \quad y = b\sinh t$$

ده د $t \in \mathbb{R}$ سره.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د انځوره ونو ورته کېدی شي سیده یو په بل پسې وازمایل شي.

د دې لپاره چې وښایو ، چې لرو

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a \quad \iff \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2,$$

نو

$$\underbrace{\sqrt{(x+f)^2 + y^2} \pm 2a}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

مربع کوو او دې و کېڼ مساوات ته ورته اړیکي لاس ته راځي

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = \pm 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2}\,.$$

د $4a$ سره وېشنې وروسته له نوې مربع کونې ځخه لرو

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f^2 = a^2 + b^2$ بدلون سره د بنې بدلون وروسته د کواودیناتونو بڼه لاس ته راځي.

د قطبي بڼ لاس ته راوړلو ته

$$r^2 = -\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

د مخرج سره ضربوو او په بام کې نیسو

$$x^2 = (x^2+y^2)\cos^2\varphi\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 = -b^2$$

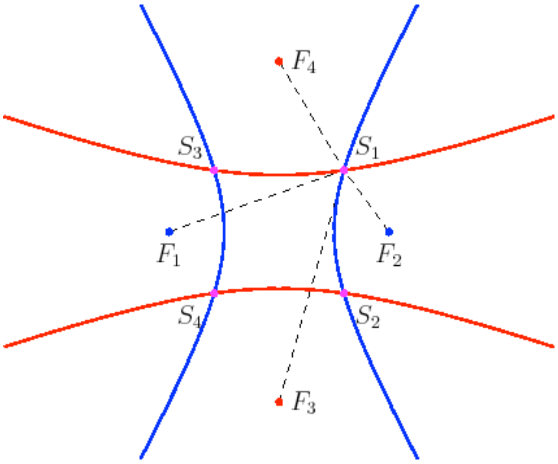
او د $-b^2$ سره ضربولو له لارې د کواودیناتونو بڼّ راکوي

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

ناویګیشنNavigation

د یوې کیشتۍ ځای Position معلوملو P لپاره د وخت کمښتونه $2a_{j,k}$ د سینکرون رادیو سیګنالونو د مختلفو خورونکو ستیشنونو F_i څخه سره پرتله کیږي. نو په دې توګه کیدی شي P د هایپرابول د سوزونټکو F_k, F_j سره د غوځټکي په څیر لاس ته راړل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



یوه ځرګنده بیلګه کیدی شي

$$F_1 = (-2,0),\ F_2 = (2,0), \quad F_3 = (0,-3),\ F_4 = (0,3)$$

او $a_{1,2} = a_{3,4} = 1$ و ټاکل شي. اړونده هاپرابول مساوات دي

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \qquad y^2 - \frac{x^2}{8} = 1\,,$$

او د ځللر غوښتکو S_i د کواودیناتو لپاره لاس ته راځي

$$x^2 = \frac{32}{23}, \quad y^2 = \frac{27}{23}$$

لکه د څیرې څخه چې ه م لیدل کیږی، ځلور اوبیونې(حلونه) لاس ت ه راځي. د ناوېګیشن لپاره دا بې پرابلمونو دی، ځکه چې یو کفتان باید وپوهیږي، چې کیښتۍ نږدې یا ت قریباً چیرته پرځای ده، دا په دې معنا چې کوم د منلو اوبی یا حل دی.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنستونه دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

شپږم: د شميرپوهنې   انګرېزي – پښتو ډکشنري.

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

اتم: دفرنځيال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې يو پيل   دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

<u>Bonn (Germany): 2003</u>

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

<u>1997 Bonn (Germany):</u>

يوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

(c) ketabton.com: The Digital Library

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نوري ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې څنې یې په نړیوال جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپیني خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library