



# شمير پوهنه

(رياضي)

ستر کتاب



Ketabton.com

دويمه برخه

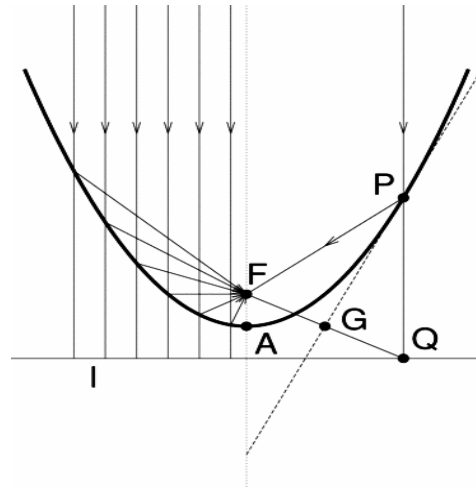
دويم غځېدلی چاپ

ليکونکی: ډاکټر ماخان (مېری) شينواری

# شمير پوهنه

(رياضي)

## ستر کتاب



دويم غزېدلی چاپ

ليکونکی: ډاکټر ماخان ميری شينواری

## دلوي څښتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهني لپاره د لگښت - لپاره د پوهني په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

makhanshinwari@gmail.com

### کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: د شميرپوهنه ستر کتاب ( دويمه برخه)

ليکونکي: ډاکټر ماخان،، ميري،، شينواری

د خپريدو لړۍ

خپرنډوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

۲۰۱۲

چاپ کال

### چاپ چاري

دانش خپرنډويي ټولني تخنيکي څانگه

[makhanshinwari@gmail.com](mailto:makhanshinwari@gmail.com)

د چاپ حقوق خپرنډويي ټولني ليکونکي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

## د خپرندوی ټولني یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولني د علمي، ساينسي او طبي اثارو د خپرولو لړۍ پيل کړې، تراوسه يې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هيواولو ته وړاندې کړې دي.

مور باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په يوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګاڼه سمبال شي او په علمي او اکاډميکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بيلابيلو ګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر مور ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووايو.

د اتحاديې له خوا د ډاکټر ماخان شينواري تراوسه زياتو چاپ شويو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمير پوهني نويو ژباړو او ليکنو او دوه ټولنيزو ليکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساينسي اثارو د خپراوي په لړ کې د يوه مهم ګام په توګه ګڼل کيدای شي او هيله ده، چې د دې برخې مينه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کټه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

## د ليکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي گټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهني توانمندي، مگر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ، د افغانستان کلتوري ودې ټولنه، جرمني، د غرو، مرستندويانو او په تيره بيا د مشر تابه څخه زياته مننه کوم، چې پرته له خپرندويې ټولني په توگه يې د دې ليکنو زياته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کليوالو ملگرو او ملگرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زياته مننه کوم:

د بناغلي دپلوم انجنير ریحان الدين حساس، بناغلي دپلوم انجنير محمد اکبر نور، بناغلي ډاکتر سردار گانه وال، بناغلي ډاکتر مانوکل گانه وال، بناغلي ټولنپوه محمدعارف بيان، بناغلي دپلوم انجنير محمد ايوب بيان، همداسې زما د ملگري ارواښاد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي بناغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي، دپلوم انجنير او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحې او نه اخر زما د لور ډاکتر څانگي شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له ميرمن بناپړۍ څخه ډېره زياته مننه، چې زما د ليکنو- نه دا چې مخه يې نه ده نيولې- پوره ملاتړ کړي.

بيا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجر و نه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن بناږ

۲۰۱۲ زک

## نيوليک

نوي سريزه

سريزه

افغاني، يوناني ، لاتين الف ب

شمير پوهنيزي نخښي

## لومړۍ برخه

۱	د شمير پوهني سم اند يا منطق	۰ ۱
۱	پوهنيزه ژبه او پيدايښت يا طبيعي ژبه	۱ ۰ ۱
۳	د شمير پوهني سم اند بنسټيزه کليمي	۲ ۰ ۱
۳	ثابتي ، اووښتوني يا واريابلي ، ترمونه	۱ ۰ ۳ ۰ ۱
۵	وينا	۲ ۰ ۲ ۰ ۱
۷	د دوه ارزښتوالي اصول يا پرينڅيپ	۳ ۰ ۲ ۰ ۱
۱۳	وينا فورم يا ۰ بڼه او کوانتورونه	۴ ۰ ۱
۲۸	اړيښ او پوره کيدونکي شرطونه	۵ ۰ ۱
۳۱	د شمير کليمه يا د لغاتو .....	۶ ۰ ۱
۳۳	برابرون او نابرابرون	۷ ۰ ۱
۳۸	تمرينونه	۸ ۰ ۱
۳۹	ډيرۍ پوهنه	۰ ۲
۴۰	د ډيرۍ پوهني کليمه	۱ ۰ ۲

۴۵	د ډبريو ترمنځ اړيکې	۲ . ۲
۴۶	ربخډېری	
۴۸	د يوې ډبرې توان يا توانډېری (توانست)	
۵۰	په ډبرې کې کارونې يا عمليې (۱)	۳ . ۲
۵۲	غوڅډېری يا متقاطعډېری	
۵۷	د يوې ډبرې يا ست کمپلیمنت	
۵۸	څيرونه	۴ . ۲
۶۷	تمرینونه	
۷۰	د ريبيل گڼونو سره د شميرلو بنسټيزي...	۰ . ۳
۷۰	د گڼونو- يا اعدادو سيستم جوړښت	۱ . ۳
۷۰	پيدايښتي يا طبيعي گڼونه	۱ . ۱ . ۳
۷۱	د پيدايښت يا طبيعي گڼونو جوړښت	الف . ۱ . ۳
۷۲	د پيدايښت گڼونو انځورونه او شميرنه	ب . ۱ . ۳
۷۸	د شميرنې بنسټيز قوانین	پ . ۱ . ۳
۸۴	ټولگڼونه	۲ . ۱ . ۳
۸۶	الف د ویش تيوري	۲ . ۱ . ۳
۸۸	غت گډ پرويشونې(بزرگترین مقسوم عليه ...)	ب ۲ . ۱ . ۳
۱۰۶	راشنلگڼونه	۳ . ۱ . ۳
۱۰۸	ريبيلگڼونه	۴ . ۱ . ۳

۱۱۹	ماتشمیرنه	۱۰۲۰۳
۱۳۰	تمرینونه	۳۰۳
۱۴۱	پوتنخ یا توان ، رینه یا جذر	۰۴
۱۴۱	توان د تولگنیز په جگ یا اکسیوننت	۱۰۴
۱۴۴	رینه او توان د راشنل اکسیوننت یا جگن سره	۲۰۴
۱۵۱	توان دریلگن اکسیوننت یا جگن سره	۳۰۴
۱۵۲	تولگه	۴۰۴
۱۵۸	لوگاریم	۰۵
۱۵۸	د لوگاریم کلیمه	۱۰۵
۱۶۶	تولگه	۳۰۵
۱۶۹	گونومتری	۰۶
۱۶۹	بنسټیزه ځمکچپونه یا هندسه	۱۰۶
۱۶۹	ټکی او کرښه	۱۰۱۰۶
۱۷۱	کونج	۲۰۱۰۶
۱۷۴	درېگودی	۳۰۱۰۶
۱۷۸	کونکروانیخ او ورته والی	۴۰۱۰۴
۱۸۴	ولارکونجیز درېگودی	۵۰۱۶۰
۱۸۸	په ولارکونجیز درېگودی کې د ...	۲۰۶
۱۹۰	په یوونگردي کې د کونج بلواک ..	۳۰۶



۱۹۵	د ساین او کوساین جملې	۴۰۶
۲۰۵	تریګنومتریګي کټمیوالی	۵۰۶
۲۱۵	تریګنومتریګي یا کونجکچیز فرمولونه	۵۰۶
۲۲۲	کمپلکس ګڼونه	۰۷
۲۳۵	د ښوونې یا ثبوت متودونه	۰۸
۲۳۵	سیده ښوونه	۱۰۸
۲۳۷	ناسیده ښوونه	۲۰۸
۲۳۹	د پوره ایندکشن له لارې ښوونه	۳۰۸
۲۴۳	لاینیز برابرې له یوې اوریدونې یا ...	۹
۲۴۴	لاینیز برابرې	۱۰۹
۲۶۶	کومبیناتوریک، د بینوم جمله	۱۰
۲۶۶	فاکولتیت یا فاکتوریل	۱۰۱۰
۲۶۷	د بینوم ځله ونه	۲۰۱۰
۲۷۰	د بینوم جمله	۳۰۱۰
۲۷۴	کومبیناتوریک	۴۰۱۰
۲۷۵	پرموتیشن	۱۰۴۰۱۰
۲۸۰	واریشن	۲۰۴۰۱۰
۲۸۶	کمبیشن	۳۰۴۰۱۰
۲۹۱	د پرموتیشن، واریشن او ....	۴۰۴۰۱۰

۲۹۵	لائيز الجبري برابرونونه	۰ ۱۱
۲۹۶	لائيز برابرون له دوه اوريدونو يا ...	۱ ۰ ۱۱
۳۰۷	دويمه درجه ديترمينانت او د کرامر...	۳ ۰ ۱ ۰ ۱۱
۳۱۲	د گاوس الگوريتم	۴ ۰ ۱ ۰ ۱۱
۳۱۶	له دوه وو زيات برابرونونه له دوه ...	۵ ۰ ۱ ۰ ۱۱
۳۱۷	لائيز برابرونونه له درې ....	۲ ۰ ۱۱
۳۱۷	يو برابرون له درې ناپيژندونو سره	۱ ۰ ۲ ۰ ۱۱
۳۱۸	دوه برابرونونه له درې ...	۲ ۰ ۲ ۰ ۱۱
۳۱۹	دريمه درجه ديترمينانت او د ...	۳ ۰ ۲ ۰ ۱۱
۳۲۲	د گاوس لگوريتم	۴ . ۲ . ۱۱
۳۲۵	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳ ۰ ۱۱
۳۲۶	د $n$ -م درجې ديترمينانت او د ...	۱ ۰ ۳ ۰ ۱۱
۳۲۸	د گاوس الگوريتم	۲ ۰ ۳ ۰ ۱۱
۳۳۳	تمر نونه	
۳۴۰	الجبري برابرونونه	۱۲
۳۴۰	نالائيز برابرونونه	۱ ۰ ۱۲
۳۴۳	څلورۍ ئيز يا مربع برابرونونه	۲ ۰ ۱۲
	د دوه په جگ برابرونونه ، د وييتا جمله	۱ . ۲۰ ۱۲
۳۵۰	څلورۍ برابرونونه ، چې په نورمال	۲ ۰ ۲ ۰ ۱۲

۳۵۱	د n-م درجې ځانگړي برابرې...	۳۰۲۰۱۲
۳۵۷	دریمه درجه برابر ونونه	۳۰۱۲
	د ریښې برابر ونونه	۴۰۱۲
۳۷۵	ترانسځیندنت برابر ونونه	۱۳
۳۷۵	لوگاریتم برابر ونونه	۱۰۱۳
۳۸۰	اکسپوننشل- یا په جگړې برابر ونونه	۲۰۱۳
۳۸۵	گونومتريکي یا کنجکچیز برابر ونونه	۳۰۱۳
۳۹۶	له نابرابرونو او مطلقه ارزښت ..	۱۴
۳۹۶	نابرابرونونه	۱۰۱۴
	بنسټیزې کلیمې او شمیر قوانین	۱۰۱۰۱۴
۳۹۷	اینټروال	الف ۱۰۱۴
۴۰۰	نابرابرونونه له یوې ناپېژندونکې...	۲۰۱۰۱۴
۴۰۹	د نابرابرونو سیستم ...	۳۰۱۰۱۴
۴۱۱	نابرابرونونه له دوه ناپېژندونکو سره	۴۰۱۰۱۴
۴۱۴	برابرونونه او نابرابرونونه ....	۲۰۱۴
۴۱۴	له مطلقه ارزښت سره شمیرنه	۱۰۲۰۱۴
۴۱۵	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۲۰۲۰۱۴
۴۲۰	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۳۰۲۰۱۴
۴۳۰	بلواک یا فنکشنونه یا تابع	۱۵

۴۳۰	د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه	۱۰۱۵
۴۳۳	د بلواک خویونه	۲۰۱۵
د ستر کتاب دویمه برخه		
۴۶۶	د هواري يا سطحې شننيزه هندسه ...	۱۶
۴۶۶	کرښه	۱۰۱۶
۴۷۵	گردی	۲۰۱۶
۴۸۲	ایلیپسی	۳۰۱۶
۴۸۷	هیوپربول	۴۰۱۶
۴۹۲	پارابول	۵۰۱۶
۴۹۴	تولگه	۶۰۱۶
۵۰۲	وکتور شمیرنه	۱۷
۵۰۲	د وکتور پیژند یا تعریف،	۱۰۱۷
۵۰۲	په کارتيزي کواوردينات سيستم کې د وکتور انځورونه	
۵۰۹	د دوه وکتورونو سکالار ځل	۲۰۱۷
۵۱۲	د دوه وکتورونو وکتوري ځل	۳۰۱۷
۵۱۷	غبرگهواريز يا موازي الاضلاع ضرب	۴۰۱۷
	په شننيزه ځمککچ کې د وکتورونو ....	۵۰۱۷
۵۲۱	د یوې کرښې وکتوري انځورونه	۱۰۵۰۱۷
۵۲۴	د هواري يا سطحې وکتوري انځورونه	۲۰۵۰۱۷

۵۲۵	د هو ابر ابرونونو سکالار فورم يا ۰ بڼه	۵۰ ۱۷
۵۳۳	پرلپسي او پرلپسي لړۍ	۱۸
۵۳۳	پيل	۱۰ ۱۸
۵۳۴	د گڼون - عددونو پرلپسي کلیمه	۲۰ ۱۸
۵۴۲	مونوتوني پرلپسي	۱۰ ۲۰ ۱۸
۵۴۵	اريتميتيکي پرلپسي	۲۰ ۲۰ ۱۸
۵۴۷	هندسي پرلپسي	۳۰ ۲۰ ۱۸
۵۵۰	لړۍ	الف ۲۰ ۱۸
۵۵۵	هندسي لړۍ	الف ۲۰ ۱۸
۵۵۷	اريتميتيکي لړۍ	الف ۲۰ ۱۸
۵۵۸	د پرلپسي او لړيو د پولې ...	۴۰ ۱۸
۵۷۸	د فنکشنونو پولې او ناپريکيدنه	۱۹
	بنسټيزې کلیمې	۱۰ ۱۹
۵۸۶	د پولو يا حدونو خويونه	
۵۹۲	د راشنل، کسري يا نسبي	
۵۹۶	د مثلثاتي يا درېکودي کچ توابعو پولې	
۶۰۴	ناپريکيدني	
	په پوله ارزښت او ناپريکيدني څو جملې	۲۰ ۱۹
۶۱۰	د ناپريکيدونکو فنکشنونو خويونه	۳۰ ۱۹

د بنسټيزو فنکشنونو ناپریکېدنه	۴۰۱۹
د څپرکي ټولگه	۶۱۶
دفرنخیالشمیرنه	۶۲۶ ۲۰
د تابع تغیر منح ارزښت (منحنی قیمت)	۶۲۶
په یوه ټکي کې د تابع گراف ...	۶۲۸
د لخصوی (سترگورپ) تغیر...	۶۳۰
کمبنتوبش ( تقسیم تفاضل؟)	۶۳۱
دفرنشلوبش یا رابیلیدنه یا مشتق	۶۳۳
کمبنتوبش او مشتق یا رابیلیدنه	۶۳۶
د $x_0$ په ځای کې د فنکشن مشتق	۶۴۳
د تانجنټ پیژند او خویونه	۶۴۷
د تانجنټ او عمود یا ولاړ ټولیز مساوات	۶۵۰
په بیدیا کې جگوالی	۶۵۲
الف : د تانجنټ یا جگیدني غوره والی	۱۰۱.۲۰
د فرنخیال یا رابیلیدني یا مشتق قاعدې	۶۵۶ ۲۰.۲۰
د درېگودیزو یا مثلثاتي .....	۶۶۲
د اکسپوننشل یا په جگ توابعو.....	۶۷۰
د مشتق استعمال په طبیعي پوهن کې	۶۷۶
د ایمپلیخیت توابعو مشتق	۶۸۳

۶۸۶	د بنسټيزو رابيليدنو(مشتقونو) جدول	
۶۸۸	ټولگه	
۶۹۱	د يوې تابع د مشتق قابليت	
۶۹۸	د معكوس- - يا په څټ توابعو مشتق	
۷۰۱	د بنسټيزو بلواكو رابيليدنه	۲۰ ۳.
۷۱۰	د رول قضيه	
۷۱۱	د وائر شتراس قضيه	
	افراطي ارزښتونه او اوږونتگی	۰۴. ۲۰
۷۱۲	د دفر نشل منح ارزښت قضيه	
۷۱۵	يوعربي توابع	
۷۲۰	ځای اړوند افراطي ټکي	
۷۲۴	د انعطاف – يا اوږونتگی	
۷۳۳	د کوي يا منحنې بحث يا خبرې	
۷۴۶	ناتاکلي حدونه يا پولې	
۷۵۰	د برنولي او د لو پيټال ....	
۷۵۷	د غټو گټو پرابلم	۵۰. ۲۰
۷۶۷	تمرینونه	
۷۷۸	په ټوټه کسرونو ټوټه کونه	
۷۸۷	انټيگر الشميرنه	۲۱

۷۸۷	پیلر اورنه	
۷۸۹	انتیگر الشمیره	۲۱
۷۹۰	د ریمن (ناټاکلی) انتیگرال	
۷۹۴	بنسټیزه یا لومړنی تابع	
۷۹۶	سطحه او لومړنی تابع	
۷۹۹	ناټاکلی انتیگرال	
۸۱۲	د ټاکلي انتیگرال شمیره	
۸۱۴	تکمیلیدونکي بنسټونه	
۸۱۵	د ټاکلي انتیگرال څخه و ټاکلي ...	
۸۱۷	د انتیگرالونې قاعدې	
۸۱۹	د اکسپوننشل توابعو انتیگرال	
۸۱۹	د لوګاریتمي توابعو انتیگرال	
۸۲۱	بدلون قانون	
۸۲۷	توابع، چې بی د بدلون له لارې...	
۸۳۲	ټوټه انتیگرالونه	
۸۳۴	د ټوټه انتیگرالونې لار	
۸۳۸	د ټوټه راشنل کسرونو انتیگرال	
۸۴۱	نږدې (مبهم) انتیگرال	
۸۵۲	د ټاکلو انتیگرالونو حل د بدلون له لارې	



۸۶۲

د انتیگرالشمیرني استعمال

۸۸۸

تمرینونه

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوی لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړې یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

## ۱۶ - د سطحې شننيزه (تحليلي) هندسه

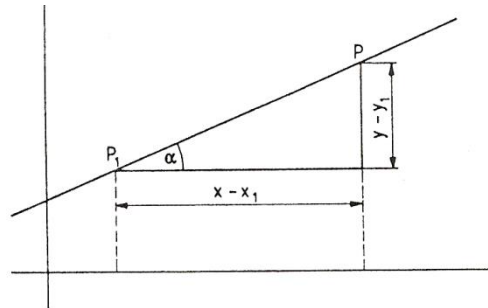
په دې برخه کې يو خود تحليلي (شننيزې يا سپرنيزې) ځمکچپوهنې يا هندسي ټاکلي پرابلمونه څيړل کيږي. د تحليلي هندسي بنسټيزه تگلار به څرگنده (وېسول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننيزې يا تحليلي څرگندونو کې د هندسي خوبونو جوړښت ښايي.

۱۶ . ۱ کرښه

د هندسي ټاکنو ټوټو له لارې مختلف امکانات شته دي، چې يوه کرښه يواځنې کره تعين کړای شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښبرابرونو يا - مساواتو مختلفې بڼې شته دي. يوه کرښه د يوه ټکي او د هغه د لور (سمت) له لارې ټاکل کيږي شي. ( ټکی او د ټکي ميلان معلوم دی ).

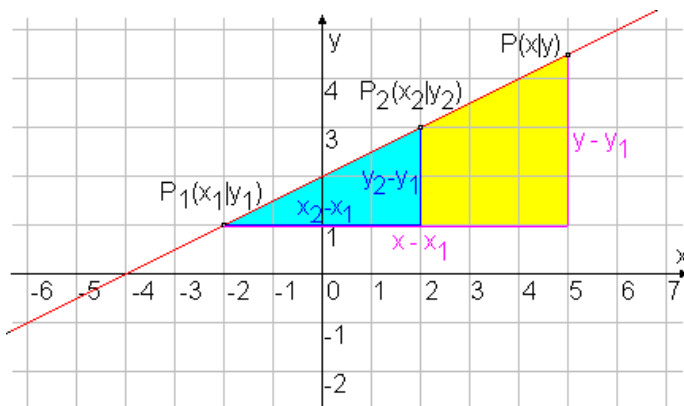
دلته دې  $P_1(x_1, y_1)$  دا ټکي وي.  $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$  دې د جگيدو کونج وي، چې د کرښې

لور ټاکي (څخه ۱۶ . ۱) او  $P(x, y)$  په کرښه يو اووښتونی (واريابل) ټکی دی .



نو د کرښې د ميلان  $\tan \alpha = m$  لپاره باور لري:  $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته څیره دې وکتل شي ( لاددې څیره هم په همدې موخه کښل شوي ده))



له دې څخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1); \dots \dots \dots (16.1)$$

پورته د کرښې ټکی لور برابر وړون

که د y په محور P1 وټاکل شي د کواورډیناتو  $x_1 = 0, y_1 = b$  سره، نو له ( ۱۶ . ۱ )  
(سملاسي په لاس راځي:  $y - b = m(x - 0)$ ) په همدې ډول ( $\Leftrightarrow$ )

$$y = mx + b \quad (16.2)$$

دا پورته برابر وړون د کرښمساواتونو نور مال فورم (بڼه) بلل کيږي

یوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوي.

دا دوه ټکي دي  $P_1(x_1, y_1)$  او  $P_2(x_2, y_2)$  وي، د  $|x_1 - x_2|$  سره، (څیره ش ۱۶ . ۲)  
د جگیدونکی یا تنجنت  $\tan \alpha = m$  لپاره داسی دي:

$$m = (y - y_1) / (x - x_1)$$

او

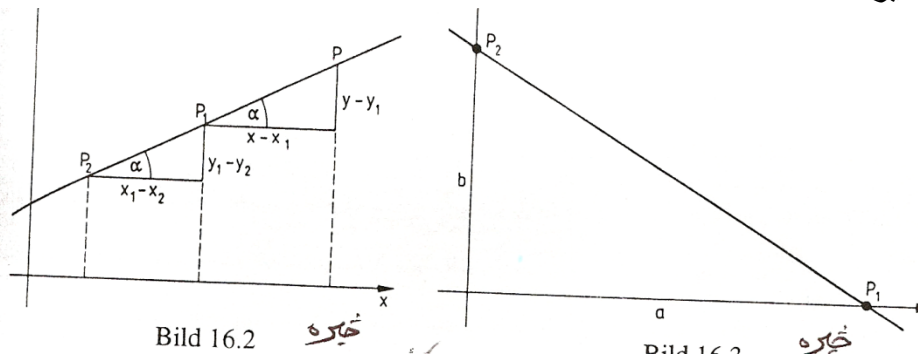
$$m = (y_2 - y_1) / (x_1 - x_2) = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$$

له کومو چی لاس ته راځي

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \dots\dots\dots (16,3)$$

پورته د کرښی دوه ټکیز برابر وړون

څیره ده



که د  $x$  - محور باندي د  $P_1$  ټکی ، د کواوردينات  $x_1 = a$  |  $y_1 = 0$  سره وټاکو او  
 ټکی  $P_2$  د  $y$  - محور باندي د کواوردينات  $x_1 = 0$  ,  $y_2 = b$  | سره وټاکو ، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:  
 $(y - 0) / (x - a) = (b - 0) / (0 - a)$   
 او له دې دا لاندي لاس ته راځي:

$$x/a + y/b = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوڅي برابر وړون

څلور پورتنی کرښمساوات ټول په  $x$  او  $y$  کی لاینیز دي. د مساوات عمومي فورم (یا ټولیزه بڼه) داسی دی:

$$Ax + By + C = 0 \quad (16.5)$$

د کرښبرابر وړونو ټولیزه بڼه (عمومي فورم)

دا فورم په ځانگړې توگه دا برابرون هم خوندي لري يا په بر کې نيسي

$$y = y_0 \quad (A = 0, B = 0)$$

او ( $x = x_0$ ) چې د  $x$  - محور او په همدې ډول د  $y$  - محور ته غبرگي کړنې دي، په داسې حال کې چې تراوسه دومه لانه ده څيرل شوي

بيلگه ۱۶ . ۱:

د کړنې برابرون يا لاینيز برابرون، چې له  $P(-2, 3)$  ټکي تيريري او د جگوالي کونج  $\alpha = 30^\circ$  یی د  $m = \tan \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3}$  له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسې ليکل

$$y - 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x + 2) \quad \text{کيري}$$

او نورمال فورم يې په لاندې ډول دی

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بيلگه ۱۶ . ۲:

د لاینيز برابرون يا د کړنې برابرون په ټکو  $P_1(3/2, -2)$  او  $P_2(1, -4)$  کې د (۱۶ . ۳) سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y + 2}{x - \frac{3}{2}} = \frac{-y + 2}{1 - \frac{3}{2}}$$

$$\text{له دې لاس ته راځي: } y + 2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x - \frac{3}{2})$$

نو نورمال فورم  $y = 4x - 8$  لرو (اته ناسم، په ځای يې شپږ دي)

بیلگه ۱۶ . ۳ :

۱۶ - د سطحی شننیزه (تحلیلی) هندسه

۴۷۰

کربنه د  $y = -(3/2)x + 1$  برابرون سره د  $y$  - محور په  $P_1(0,1)$  ټکي کی غوڅوي او جگوالی یی  $2/3$  - دی، دا په دې مانا چی د  $x$  - ارزښت تغیریدل په یو د  $y$  - ارزښت په  $2/3$  - تغیروي، په دې ډول دوم د کربني ټکی لاس ته راځي. د بیلگی په توگه

$$P_2(0+1, 1-(3/2)) = P_2(1, -1/2)$$

(خیره ۱۶ . ۴ لاندې کښل شوي )

بیلگه ۱۶ . ۴ :

د کربنی د برابر ونونو عمومي فورم  $x - 2y - 6 = 0$  څخه دغوڅیدو فورم لاس ته راځي

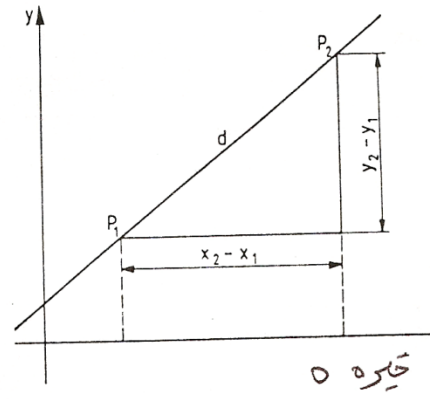
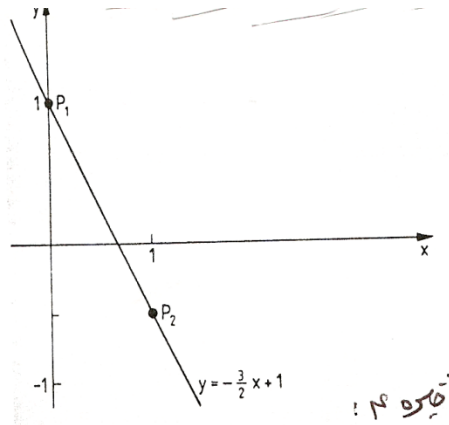
$$x / 6 + y / 3 = 1$$

کربنه دکو اور دینات محورونه په دې ټکو  $P_1(6, 0)$ ,  $P_2(0, -3)$  کې غوڅوي . په یوه کربنه د دوه ټکو  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  ترمنځ فاصله ( که د کربني واټن  $P_1P_2 = d$  وي د پیتاگوراس (فیساغورس) له جملی ( خیره . ۱۶ . ۵ ) داسی ده

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}; \dots\dots\dots(16, 6)$$

پورته د ټکو  $P_1$  او  $P_2$  ترمنځ واټن

خیري ۱۶ . ۴ او ۵ -



بیلگه ۱۶ . ۵ :

د درېګوډي ABC د اړخونو او بردوالی، چی کونجټکی یی دادی (-) B(3,1), A(3,1), C(2,5), په لاندې ډول دی

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښي (نه کټمتی) چی (یو د بلې سره) غبرګي نه وي ټیک یو غوڅټکی لري. دا چی دا ټکی په دواړو کواور دیناتو پروت دی، نو د دواړو کواور دیناتو برابر ون باید پوره کړي. په دې حالت کی د غوڅټکی کواور دیناتو، د دوه لاینیزو برابر ونونو سره چی دوه اوبستونې یا

نایژندونکی (مجهولی) ولري، د یوه سیستم یواځنی کره اوبیونه تری لاس ته راځي. په ټولیزه توګه دا باور لري: که یو برابر ون سیستم چی د دوه کرښو د برابر ونونو څخه جوړ وي، او یو یواځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښي یو بل په دې ټکي کی سره پري کوي.

که ناپای ډیرې اوبیوني شته وي، نو په دې حالت کی برابر ون همغه یوه کرښه ښایي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښي یو بل سره غبرګي ځلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بیلگه ۱۶ . ۶ :

د  $g1: y = 3x - 2$  کرښی پروتځاي (موقعیت) د لاندې کرښو

$$g2: -2x + y = 1, \text{ (الف)}$$

$$g3: 3x - y = 5, \text{ (ب)}$$

$$g4: -x + (1/3)y = -2/3 \text{ (پ)}$$

سره څیرو

اوبیونه : د  $g1$  برابر ونونو څیره داسی بدلیري :  $3x - y = 2$

(الف) د برابر ونونو سیستم  $3x - y = 2$ ،  $-2x + y = 1$

ټیک یوه اوبیونه لري:  $x1 = 3$ ،  $y1 = 7$

ددې څخه څرګندیري چی ټکی (7, 3) S د کرښو  $g1$  او  $g2$  غوڅټکی دی .

(ب) د برابر ونونو سيستم

$$3x - y = 2$$

$$3x - y = 1$$

اوبی نه لري: برابر ونونه يو بل ردوي په نه زغمي. د  $g_1$  او  $g_2$  کرښی يو د بل سره غبرگي دي

(پ) د برابر ونونو سيستم  $3x - y = 2$

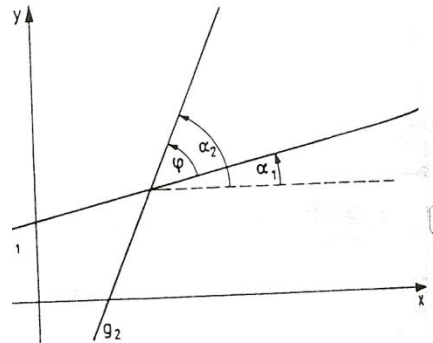
$$-x + (1/3)y = -2/3$$

نایای ډیرې اوبیوني یا حلونه لري. برابر ونونه يو بل سره برابر یا يو بل ته ورته دي. که په ۳ ضرب شي يو همغه پورته برابر ون تری لاس ته راځي.  $g_1$  او  $g_2$  دوه کټ مټ برابر ونونه دي. که د دوه کرښو

$$g_1: y = m_1x + b_1$$

$$g_2: y = m_2x + b_2$$

غوڅکونج  $\phi$  ټاکو، نو د دواړو کرښو جگید کونجونو  $\alpha_1$  او  $\alpha_2$  کمون (کمښت یا توپیر) جوړوو (خ ۱۶. ۶)



څیره ۱۶. ۶

د کرښی له برابر ونونو پوهیرو  $\tan \alpha_1 = m_1$  او  $\tan \alpha_2 = m_2$

د زیاتون تیورم (بنسټیزه جمله) (برخه ۵. ۶) څخه د  $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$  لپاره (پر تله

برخه ۵. ۴) باوري ده

$$\tan \phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1) / (1 + \tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2)$$



د کوم څخه چې  $\tan \alpha_1 = m_1 \wedge \tan \alpha_2 = m_2$  سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan \phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}; \dots \dots \dots (16, 7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج دیر

دا په دې پورې اړه لري چې ایا  $\phi > 0 \vee \phi < 0$  د پورته څیرې ۱۶ . ۶ کونج پڅ او که تیره دی.

بیلگه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو  $g_1: y = x - 1$  او  $g_2: y = (7/4)x + 1$  غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) څخه لاس ته راځي:

$$\tan \phi = \frac{\frac{7}{4} - 1}{1 + 1 \cdot \frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15, 255^\circ$$

د  $g_1$  او  $g_2$  ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی :  $180 - \phi = 164, 745^\circ$

د دوه کرښو یو بل ته ځانگړي حالتونه:

۱ - کرښی یو بل سره غبرگی ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180^\circ \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan \phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = 0$$

گورو چې د  $m_2 - m_1 = 0$  لپاره باور لري، نو  $m_2 = m_1$

(دلته باور لري :  $m_1 \cdot m_2 = m_1^2 \neq -1$ )

۲ - کرښی یو په بل (نیغی) ولاري دي، نو لرو

$$\phi = 90^\circ \Rightarrow \tan \phi = (m - m) / (1 + m \cdot m) = \infty$$

دا حالت د  $1 + m_1 \cdot m_2 = 0$  لپاره منځ ته راځي،

یعنی د  $m_2 = -1/m_1$  لپاره  $(m_1 \neq 0, m_2 \neq 0)$

په کرښه  $(m_1 = 0)$   $y = y_0$  باندې کرښه  $(m_2 = \infty)$   $x = x_0$  نیغه ولاړه ده

د غیرگوالی لپاره شرطونه

$$m_2 = m_1 \quad (16, 8)$$

د اورتوگونالیتی Orthogonalität (یو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

$$m_2 = -1 / m_1 \quad (16. 9)$$

بیلگه ۱۶. ۸ : د کرښی  $g_2$  برابرې دې وټاکل شي چی له ټکي  $P(2, -1)$  تیریري، او له کرښی  $g_1 : y = -2x + 1$  سره الف ( غیرگه او ب) اورتوگونال (نیغه) ځغلي اوبونه:

الف) د  $g_2$  کرښی میلان ( جگوالی  $m_2 = m_1 = -2$  ) دی. پام ( ۱۶ . ۱ ) ته دکرښي  $g_2$  برابرې لپاره باور لري:  $y + 1 = -2(x - 2)$  همداسی  $y = -2x + 3$   
 ب) د  $g_2$  کرښي میلان یا جگیدنه ده  $m_2 = -1/m_1 = 1/2$  د ( ۱۶ . ۱ ) سره سم د  $g_2$  کرښي برابرې دی:  $y + 1 = (1/2)(x - 2) \Leftrightarrow y = (1/2)x - 2$

بیلگه ۱۶. ۹ :

د کرښی برابرې ټاکل کیري چي د  $P_1(1/3, -1/6)$  ټکی تیریري او په کرښه چی له ټکو  $P_2(-1, 1)$  او  $P_3(-2, -1)$  تیریري، ولاړه وي.  
 ځواب: کرښه چي له  $P_2, P_3$  ټکو تیریري، و ( ۱۶ . ۳ ) ته په پام لاندې برابرې لري  $(y - 1)/(x + 1) = (-1 - 1)/(-2 + 1) = 2 \Leftrightarrow y = 2x + 3$

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی میلان یا جگوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د  $p_1$  څخه تیریدونکی کرښي برابرې د  $m_2$  میلان سره د ( ۱۶ . ۱ ) له مخی دي:

$$y+(1/6)=-1/2(x-173) \Leftrightarrow y=-1/2x$$

بیلگه ۱۶ . ۱۰ :

د  $g_1: 2x-y-1=0$  او  $g_2: 3x+2y=5$  کرښو د غوڅتکي  $S$  واټن له ټکي  $P(6,13)$  څومره دی او د کرښي برابرې څنګه دی چې د کواورډینات له سرچینې تیریري او د  $S$  او  $P$  څخه تیریدونکی کرښه باندې ولاړه کرښه وي؟

ځواب : د غوڅتکي کواورډینات د لاندې برابر ونونو سیستم څخه لاس ته راځي

$$2x-y=1$$

$$3x+2y=5$$

یعنی:  $xS=1, yS=1$

د  $S$  او  $P$  ټکو ترمنځ واټن له ( ۱۶ . ۶ ) څخه لاس ته راځي

$$d = \sqrt{(1-6)^2 + (1-13)^2} = 13$$

د ( ۱۶ . ۳ ) له مخې د کرښي برابر ونونه چې له  $S$  او  $P$  تیریري دي

$$(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1) \Leftrightarrow y=(12/5)x-7/5$$

( جگوالی:  $m = 12/5$  )

له  $S$  او  $P$  ټکو تیریدونکی کرښه باندې د ولاړې کرښي میلان

$$m_2 = -1/m = -5/12$$

د  $P_0(0,0)$  څخه تیریدونکی کرښه د  $m_2$  میلان سره د ( ۱۶ . ۱ ) له مخې لاندې

برابرون لري

$$y-0=-5/12(x-0) \Leftrightarrow y=-5/12x$$

## ۱۶ . ۲ گردی (دایره)

دایره (گردی) د ټولو هغو ټکو ډیری (سټ) ده، چې د یوه کره ځای په ځای ټکي، داسې په نامه منځنۍ څخه، همغه واټن ولری. واټن ته یی وړانګه وایو او په  $r$  یی په نڅښه کوو.

فورمال داسې ویل کیږي یا دا پیژند ورکوو، چې دایره (گردی)  $k$  د د سطحی

(هواری)  $E$  د ټولو ټکو ډیری (سټ) ده، د کومو لپاره چې باور لري:

$$k = \{ X \in E \mid |\overline{MX}| = r \}$$

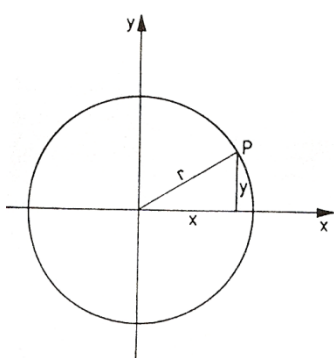
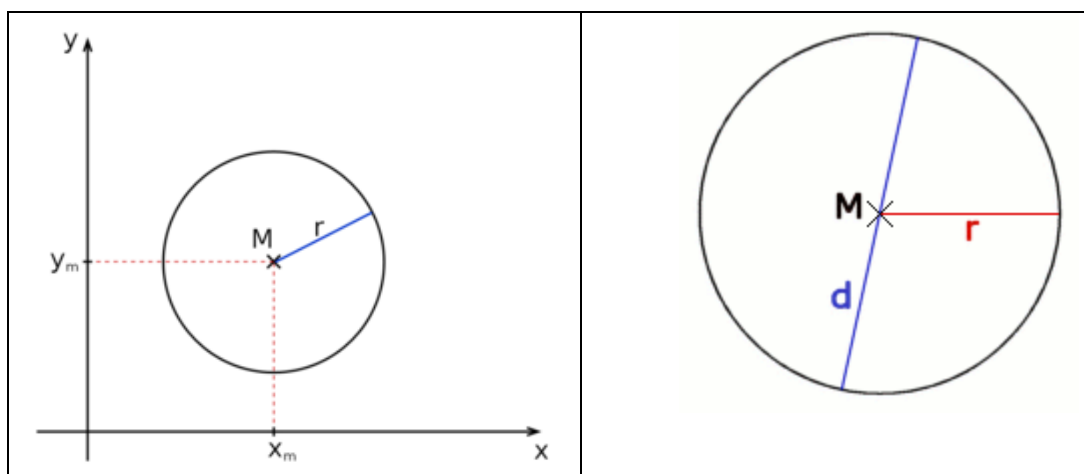


Bild 16.7 ښکاره

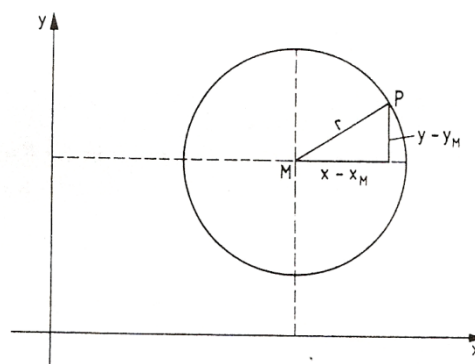


Bild 16.8 ښکاره

په شننیزه هندسه کې کیدی شي، چې گردۍ د منځتکي  $M(x_m, y_m)$  او وړانگي  $r$  سره (په هواره گي) د لاندې برابرې له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د گردۍ ټوليز برابرې

دا برابرې د پيژند او پيټاگوراس له جملې سملاسي ورکوي د يوې گردۍ ځانگړي حالت او د کواورديناټسسيستم سره، چې منځتکي يې د کواورديناټ په سرچينه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

که د گردۍ منځ ټکی د کواوردیناتسیستم ( څیره ۱۶ . ۷ ) په سرچینه پروت وي، نو د ( پیوتاگوراس د جملې له مخې ( د گردې په خوښه ټکي  $P(x,y)$  لپاره باور لري

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16.10)$$

د گردۍ منځټکي برابرېون چې د گردې منځټکي  $M(0,0)$  او وړانگه  $r$  ده.

که د گردې منځټکي  $M$  کواوردینات  $(x_M, y_M)$  ولري (څیره ۱۶ . ۸) نو د گردۍ د خوښې ټکي  $P(x)$  لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د گردې د منځټکي برابرېون وي د منځټکي  $M(x_M, y_M)$  او وړانگي  $r$  سره

که په ( ۱۶ . ۱۱ ) کې د بینوم مربع وي شمیرو او برابرېون په  $A=0$  فاکتور ځلوو (بی له دې چې د گردې برابرېون تغیر ومومي) ، پس پیژندل کېږي چې د گردیې برابرېون د څلورۍ یا مربع غږي په  $x$  او  $y$  کې په فاکتور  $A$  لاینیز برابرېون په  $x$  او  $y$  او ثابت غږي ( چې یوه غږي په څیري سره یوځای شوي ) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې ټولیز (عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + E = 0 . A \neq 0 \quad (16.12)$$

د گردې برابرېونونو (مساواتو) ټولیز فورم یا ټولیزه بڼه •  
که د گردې برابرېون په ټولیزه بڼه یا عمومي فورم ورکړ شوي او که منځټکي او وړانگه یې څرگنده کوو یا معلومو نو د گردې برابرېون د منځټکي فورم باندې راوړو یا را اړوو. دا د څلورۍ پوره کولو یا مربع تکمیلولو په بنسټ صورت نیسي . دوه څیري پورته وگورۍ

بیلگه ۱۶ . ۱۱ :

د گردۍ برابرېون دې په ټولیزه - یا عمومي توگه وي:

$$2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y = 0$$

له دې لاس ته راځي، که په دوه وويشل شي  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

(د څلورۍ پوره کونه يا مربع تکميلونه)  $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 3 + 4 + 9$

د بېنوم د مربع له لارې انځورونه  $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$  گردۍ منځتکي  $M(-2, 3)$  او وړانگه  $r=4$  لري.

بېلگه ۱۶ . ۱۲ :

د گردۍ برابرې وليکۍ چې منځتکي يې  $M(2; 0)$  وي او په کوم چې تکی  $P(6, 4-3)$  روت دی؟

اوبیونه : د  $M(2, 0)$  سره ( ۱۶ . ۱۱ ) داسی دی

$$(x-2)^2 + y^2 = r^2$$

د  $P$  تکی د گردۍ برابرې پوره کوي  $(6-2)^2 + (4-3)^2 = r^2$

له دې څخه د گردۍ وړانگه په لاندې ډول لاس ته راځي:  $r = 8$  او له دې سره د گردۍ برابرې:

$$(x-2)^2 + y^2 = 64$$

گردۍ او کرېنه يو بل ته درې مختلف ځايونه لرودی شي

۱ - کرېنه گردۍ غوڅوي، نو له دې امله غوڅی ده (سيکانتی)

۲ - کرېنه گردۍ په يوه تکی کې لمسوي يعنی مماس دی (تانجنت يا جگوالی )

۳ - کرېنه ټوله له گردۍ دباندې پرته ده (له گردۍ تيريدونکی، لنډ : تيريدونی)

د غوڅتکي (د تقاطع تکی) کواوردینات باید د گردۍ او کرېنې برابرې پوره کړي سړی د کرېنې برابرې د گردۍ په برابرېونو کې ردي  $(y$  يا  $x$  پسې حل يا اوبی شوي) او په روښانه ډول يو مربع مساوات (څلورۍ برابرې) په  $x$  او  $y$  کې لاس ته راوړي، کوم چې په څرگند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ريل اوبیوني يا ځوابونه لري، يو ريل ډبل اوبی او يا هڅ ريل اوبی کیدی شي ولري، کوم چې له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ څخه عبارت دي.

بېلگه ۱۶ . ۱۳ :

کوم پروت ځايونه گردۍ  $k$  چې راکړ شوی:  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$  او لاندې کرېنې و يو بل ته لري؟

$$g_1: 2x+y=4, g_2: 2x+y=12, g_3: -x+y/2=3$$

اوبی:  $g_1: y=-2x+4$  که د گردی برابرېون کی ځای کړو نو دا برابرېون لاس ته راځي

$$(x-2)^2+(-2x+4-3)^2=5 \Leftrightarrow 5x-8x=0$$

ددې ځوابونو  $x=0, y=4$  او  $x=8/5, y=4/5$  سره به  $g_1$  د گردې غوڅوونې یا (Sekant سکانت) وي .

که  $g_2: y=-2x+12$  د گردې مساواتو کی ځای کړو نو لاندې لاس ته راځي

$$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 \Leftrightarrow x^2-8x+16=0$$

د ډبل اوبونې  $y_{1,2} = 4, x_{1,2} = 4$  سره  $g_2$  یو تانجنت دی .

که  $g_3: y=2x+6$  د گردې مساوات کی ځای کړو، نو لاندې لاس ته راځي:

$$(x-2)^2+(2x+6-3)^2 \Leftrightarrow 5x^2+x+8=0$$

دا څلوری برابرېون یا مربع مساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه  $g_3$  له گردې  $k$  دباندې پرته ده، یعنی دباندنی یا دباندونی ده.

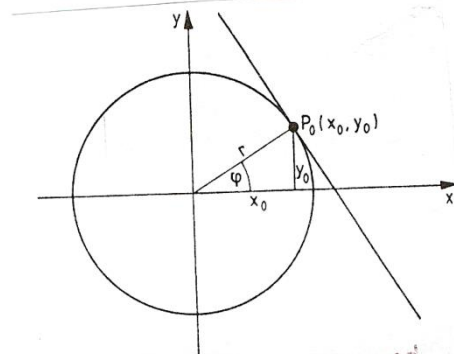


Bild 16.9

په گردې  $x^2+y^2=r^2$  (څره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرېون په ټکی  $P_0(x_0, y_0)$  مساوات  $x_0^2+y_0^2=r^2 > 0$  سره غوښتل کيږي. تنجنت د مماس په وړانګه نېغ ولاړ دی

د مماس وړانګه دا ميلان یا جګوالی لري  $\tan \phi = \frac{y_0}{x_0}$  او

له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخې د تنجنت

$$m = 1/\tan \phi = -x_0/y_0; \dots \dots \dots (16,13)$$

د تنجنت یا جګي برابرېون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) \Leftrightarrow xx_0 + yy_0 = x_0^2 + y_0^2 = r^2$$

$$xx_0 + yy_0 = r^2 \quad (16.14)$$

د گردی تنجنت باربرون په ټکي  $P_0(x_0, y_0)$  په گردی

$$x^2 + y^2 = r^2$$

(حالتونه  $P_0(0, \pm r)$  او  $P_0(\pm r, 0)$  په (۱۶. ۱۴) کی ځای ( دننه ) دي.  
( څیره . ۱۶ . ۱۰ )

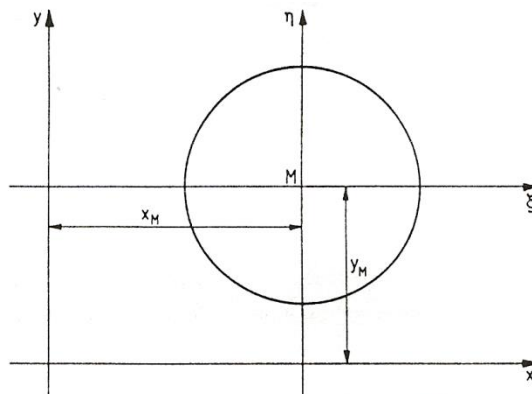


Bild 16.10 څیره

یادونه : که له دې مخ ته یا وروسته  $x_0, y_0$  یا  $x_M, y_M$  او  $x_0, y_0$  یا  $x_M, y_M$  گورو نو کټمټ دي

بیلگه ۱۶ . ۱۴ :

د دوه تنجنتو برابرې له ټکي  $P_1(-12, 4)$  په گردی  $x^2 + y^2 = r^2$  په څه ډول دي؟  
اوبیونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پیداوو. دا باید د گردی برابرې پوره کړي .  
ټکی  $P_1$  باید په تنجنت پروت وي یعنی د تنجنت برابرې ( ۱۶ . ۱۴ ) باید پوره کړي.  
نو باور لري

$$x_0 + 4y_0 = 16 \quad \text{او} \quad x_0^2 + y_0^2 = 16$$



که دا لاینیز برابرېون د  $y_0$  په لور حل شي، نو په  $x_0$  کې یو څلورۍ برابرېون یا مربع مساوات لاس ته راځي

$$x_0^2 + (3x_0 + 4)^2 = 16$$

همداسې  $5x_0^2 + 12x_0 = 0$  د اوبیونو  $x_0 = 0$ ،  $x_0 = -12/5$  سره. داهم په دې پورې اړه لري

$$y_0 = 4, y_0 = -16/5$$

د تنجنت مساوات په گردې، په ټکو  $P_0(0, 4)$  او  $P_0(-12/5, 16/5)$  د (۱۶ . ۱۴) له مخې په لاندې ډول دي

$$0 \cdot x + 4y = 16 \Leftrightarrow y = 4$$

او

$$(-12/5)x - (16/5)y = 16 \Leftrightarrow y = (-3/4)x - 5.$$

د گردۍ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځنۍ  $M(x_M, y_M)$  سره د  $\zeta, \eta$  -کووردینات سیستم کې، چې سرچینه یې په  $M$  کې پرته ده) (څیره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري

$$\zeta^2 + \eta^2 = r^2$$

د تنجنت مساوات په ټکي  $P_0(\zeta_0, \eta_0)$  کې داسې دي

$$\zeta_0 \zeta + \eta_0 \eta = r^2; \dots \dots \dots (16, 15)$$

د  $\zeta, \eta$  -کووردینات سیستم د  $x, y$  - کووردینات سیستم یو غبرگ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کووردینات سیستم کې لاندې اړیکې پرته دي

$$\zeta = x - x_M, \eta = y - y_M; \dots \dots \dots (16, 16)$$

که برابرېون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو (۱۵ . ۱۶) کې ځای په ځای شي، نو سړی بیا دا  $x, y$  -کووردینات سیستم ته ترانفورمیرکوي (کشوي یا راکاري) :

$$(x - x_M)(x_0 - x_M) + (y - y_M)(y_0 - y_M) = r^2 \quad (16.17)$$

په ټکي  $P_0(x_0, y_0)$  کې د گردۍ تنجنت برابرېون په گردۍ

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

بیلگه ۱۶ . ۱۵:

په گردۍ چې برابرې  $x^2 + y^2 + 16x + 4y + 43 = 0$  لري، د  $x$  - محور باندې، په ټکو

$$x_1 = x_2 = -5$$

سره تنجنت وکارو (کیردو). برابرې یې څنگه دي؟

اوبیونه : د گردۍ برابرې د منځني فورم ( ۱۶ . ۱۱ ) باندې بدلیري:

$$x^2 + 16x + 64 + y^2 - 4y + 4 = -43 + 64 + 4$$

$$(x+8)^2 + (y-2)^2 = 25$$

او له دې لاس ته راځي

$$x_M = -8, y_M = 2, r = 5$$

د گردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه

$$x_1 = x_2 = -5$$

د دواړو گردۍ ټکو په گردیبرابرون کې ځایوو:

$$(-5+8)^2 + (y-2)^2 = 25$$

له دې داسې لاس ته راغلي دي لپاره  $y$  څلورې برابرې یا مربع مساواتو د دواړو اوردیناتو

$$y_1 = 6, y_2 = -2$$

د ( ۱۶ . ۱۷ ) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي

$$(x+8)(-5+8) + (y-2)(6-2) = 25 \Leftrightarrow 3x + 4y = 9$$

او

$$(x+8)(-5+8) + (y-2)(-2-2) = 25 \Leftrightarrow 3x - 4y = -7$$

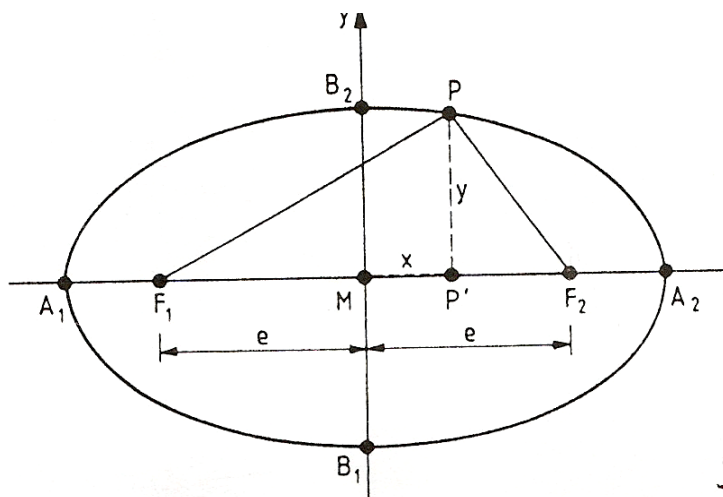
### ۱۶ . ۳ بیضوي (هگۍ) یا ایلپسی Die Ellipse

بیضوي یا ایلپسی د ټولو هغو ټکو  $P$  ډیری ده، د کومو واټن چې له دوه ټینګ په ځایټکو، داسې په نامه د ایلپسی د سوزونټکو یا محراق  $F_1$  او  $F_2$  څخه ثابت وي. دا سوزونټکی د څیرې ۱۶ . ۱۱ سره سم د  $y$  - محور سره سیومتریك د  $x$  - محور باندې ځایوو یا ږدو او د ثابت واټن زیاتون لیکو:

$$\underline{PF_1} + \underline{PF_2} = 2a \quad (16. 18)$$

د سوزونټکو واټن دي وي:

$$\underline{F_1F_2} = 2e;$$



څیره ۱۶ . ۱۱

دا  $e$  لایني اکسټنټریټیټي ( Exzentrizität ) دا یوناني کلیمه ده چی په الیپسی هوپربول او پارابول کی د همدغه تعریف لپاره ټاکل شوی) بلل کیږي .  
د پیتاگوراس له جملی لاس ته راځي:

$$\underline{PF}_1 = \sqrt{(e+x)^2 + y^2}$$

$$\underline{PF}_2 = \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

او له دې سره له ( ۱۶ . ۱۸ )

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

$$e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{(e-x)^2 + y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2$$

( څلوری یا مربع ته جگړي )

$$ex - a^2 = -a \sqrt{(e-x)^2 + y^2} \quad \text{( رینه رابیلیري )}$$

( څلوری یا مربع کوو )

$$e^2x^2 - 2exa^2 + a^4 = a^2(e^2 - 2ex + x^2 + y^2)$$

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2) \quad \text{ترتیب اوړون}$$

په ځای کوو

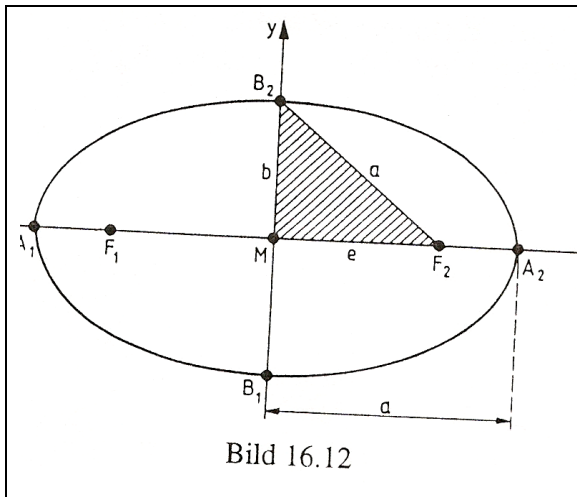
$$a^2 - e^2 = b^2 \quad (16.19)$$

او لاس ته راوړو

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x^2/a^2) + y^2/b^2 = 1 \quad (16,20)$$

د منځتکي  $M(0,0)$  سره د ایلیپسی منځتکي مساوات  
د  $y=0$  لپاره دی  $x=\pm a$ ، د  $x=0$  لپاره دی  $y=\pm b$ . (څیره ۱۶، ۱۱)  
د  $x$ -محور په ټکو  $A_1(-a,0)$ ,  $A_2(a,0)$  او د  $y$ -محور په ټکو  
 $B_1(0,-b)$ ,  $B_2(0,b)$  کې پرې کوي،  $a$  او  $b$  د دواړو نیم‌محورونو اوږدوالی دی



لکه د ایلیپسی د هر ټکي لپاره، همداسی د  
B لپاره هم اړیکې (۱۶، ۱۸) باور  
لري:

$$\underline{F_1B_2} + \underline{F_2B_2} = 2a$$

د  $\underline{F_1B_2} = \underline{F_2B_2}$  له امله له  
دې لاس ته راځي  $\underline{F_2B_2} = a$

(څیره ۱۶، ۱۲)

له دې سره په دريځوډي  $MF_2B_2$  کې د اړیکو (۱۶، ۱۹) هندسي ارزښت  
پېژندل کيږي.

که منځتکي  $M$  کواور دینات  $Mx$ ;  $My$  ولري او د ایلیپسی محورونه د کواور دیناتو سره  
غبرگ وځغلي، نو د ایلیپسی د یوه خوښي ټکي  $P(x,y)$  لپاره باور لري:

$$(x-x_M)^2/a^2 + (y-y_M)^2/b^2 = 1 \quad (16, 21)$$

د ایلیپسی د منځتکي مساوات د منځتکي  $M(x_M, y_M)$  سره

د پورته فرمول ځلولو وروسته د ایلیپسی تولید (عمومي) جوړښت پیژندل کیږي.

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad (16, 22)$$

د ایلیپسی مساواتو تولید بڼه یا - فورم

د گردې برابرې سره په توپیر (پرتله یا مقایسه ۱۶ . ۱۲) د  $x^2$  او  $y^2$  ځله وونی یا ضربیونه یو له بل توپیر لري، مگر همغه منځښته لري ( $A.B > 0$ )

بیلگه ۱۶ . ۱۶ :

د د ایلیپسی منځتکی، نیممحور، او سوزونتکي لټول کیږي، که دا برابرې

$$9x^2 + 25y^2 - 54x + 100y - 719 = 0$$

مو مخ ته پروت وي.

اوبونه : د ایلیپسي برابرې د منځتکي بڼه یا فورم ( ۱۶ . ۱۲ ) باندې اړول کیږي:

$$9(x^2 - 6x) + 25(y^2 + 4y) = 719$$

څلورې پوره کونه یا مربع تکمیلونه

$$9(x^2 - 6x + 9) + 25(y^2 + 4y + 4) = 719 + 9 \cdot 9 + 25 \cdot 4$$

$$9(x-3)^2 + 25(y+2)^2 = 900$$

( په ۹۰۰ ویش )

$$(x-3)^2 / 100 + (y+2)^2 / 36 = 1$$

د لاس ته راوړلو مساواتو څخه منځتکي او دینات

$$x_M = 3, y_M = -2$$

لوستل کیږي او د نیممحور لپاره  $a=10$ ,  $a^2=100$  او  $b=6$ ,  $b^2=36$  لوستل کیږي.

د ( ۱۶ . ۱۹ ) سره سم لاس ته راځي:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$$

او له دې سره منځتکي (پرتله څیره ۱۶ ، ۱۱)

$$F_1(x_M - e, y_M) = F_1(-5, -2), F_2(x_M + e, y_M) = F_2(11, -2)$$

بیلگه ۱۶ . ۱۷ :

د ایلیپسي برابرېون د منځتکي  $M(-1,3)$  سره لټول کيږي، په کوم چي ټکي  $P_1(-3,3)$  او  $P_2(0, 3 + \frac{3}{2}\sqrt{3})$  پراته وي.

اوبونه : د  $(۱۶, ۲۱)$  سره سم د منځتکي  $M(-1,3)$  سره د ایلیپسي برابرېون داسی دي

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1$$

ټيکي  $P_1$  او  $P_2$  باید د ایلیپسي برابرېون پوره کړي:

$$\frac{(-3+1)^2}{a^2} + \frac{\sqrt{(3-3)^2}}{b^2} = 1, \frac{(0+1)^2}{a^2} + \frac{(3-3-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2} = 1$$

د دي برابرېونونو له لومړی څخه لاس ته راځي  $4/a^2 + 0 = 1$  همداسی  $(< = >)$   
 $a = 2$  او له دي سره د دويم برابرېون څخه همداسی  $< = >$

$$\frac{(0+1)^2}{4} + \frac{(-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{9}{4} = 3/4 \Leftrightarrow b = 3$$

د ایلیپسي لټونکی برابرېون داسی دی:

$$(x+1)^2/4 + (y-3)^2/9=1$$

بیلگه ۱۶ . ۱۸ :

د کرېنو

$$y = x + 2 \quad (\text{الف})$$

$$y = x - 2 \quad (\text{او ب})$$

غوڅټکي د ایلیپسي  $9x^2+y^2+54x+72=0$  سره لټول کيږي.

اوبیونه : که الف)  $y=x+2$  د ایلیپسی برابرنونو کی خوندي شي، نو لاس ته راځي

$$9x^2+(x+2)^2+54x+72=0 \Leftrightarrow 10x^2+58x+76=0$$

د څلوری - یامربع برابرنونو اوبی :

$$x_1 = -2, x_2 = -3,8$$

د غوڅتکي اېسڅیز یا پروت محور دی. په دې پورې اوردینات یا ولاړ محور

$$y_1 = 0, y_2 = -1,8$$

اړه لري.

ب)  $y$  د رامنځ ته شوي څلوری (مربع) برابرون

$$9x^2+(x-2)^2+54x+72 \Leftrightarrow 10x^2+50x+76=0$$

رییل اوبیونه نه لري. کرښه  $y = x-2$  د ایلیپسی څخه دباندې پرته ده

## ۱۶ . ۴ : هوپربول Die Hyperbel

پيژند:

هوپربول یا هیوپربل د ټولو هغو ټکو ډیری ده، د کومو لپاره چې د کمون یا کمبنت  
مطلقه ارزښت واټن، د دوه کره په ځای ټکو  $F_1$  او  $F_2$ ، دا په نامه د هوپربول سوزونټکو

یامحراقونو، څخه ثابت وي. دا سوزونټکي ، لکه په ایلیپسی کی دلته هم مور کره ټاکو

(څیره ۱۶ . ۱۳) .

د ثابت واټنکمون یا واټنکمبنت  $|PF_1-PF_2|=2a$  او (څیره ۱۶ . ۱۳)

د سوزونټکو واټن  $F_1F_2 = 2e$  (څیره ۱۶ . ۱۳)

$$e^2 - a^2 = b^2 \quad (16.23)$$

په پورته کی یا بل چیرې، چې کوم څه لاندې کرښیز شوي وي، دا په زیاتو ادبیاتو کی  
پورته کرښیز شوي، دې ته دې پام وي، چې لاندې کرښیز شوي وي او که پورته، توپیر  
نه لري یا همغه څه دي .

یو ایلیپسی برابرون ته ورته تلنه (برخه ۱۶ ، ۱۳) مو لاندې ته لارښودوي:

$$(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1 \quad (16.24)$$

د هوپربول منځتکي برابرون د منځتکي  $M(0,0)$  سره

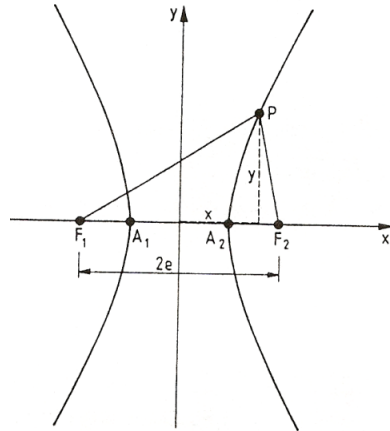


Bild 16.13

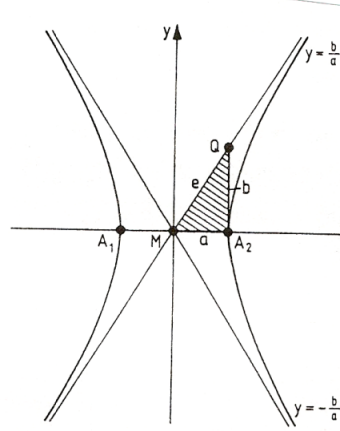


Bild 16.14

د  $y=0$  لپاره  $x=\pm a$  دی، دا په دې مانا چې هوپربول د  $x$  - محور په ټکي

$A_1(-a,0)$  او  $A_2(a,0)$  کی غوڅوي. دا ټکی ککړی ټکی بلل کېږي. گورو چی دا دککړی ټکی دی. (د ناپای سره ځاننیونی په هکله: که ( ۱۶ . ۲۴ ) د  $y$  په لور حل شي، نولاس ته راځي:

$$y = \pm b \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm \frac{b}{a} \cdot x \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

د  $\pm 0e \rightarrow x$  لپاره  $-a^2/x^2$  له منځه ځي. پس هوپربول ځان کړبڼی  $y = \pm(b/a) \cdot x$  ته نزدې کوي ( څیره ۱۶ . ۱۴ )

له دې امله لاندې برابرون

$$y = \pm(b/a)x \quad (16,25)$$

د هوپربول اسیمپتوتی بلل کږي.

د ( ۲۳ . ۱۶ ) له امله  $MQ = e$  دی .

که منځتکی  $M$  کواوردینات  $x_M, y_M$  ولري او سیومتریک غبرگ د کوردیناتو محور ته ځغلي، نو د یوه په خوښه هوپربول ټکي  $P(x,y)$  لپاره باور لري:

$$(x-x_M)^2/a^2 - (y-y_M)^2/b^2 = 1 \quad (16,26)$$



د هوپربول منځتکي برابرېون  $M(x_M, y_M)$  سره.

د پورته مساوات د څلولو وروسته، په لاندې ډول د هوپربول مساوات ټوليز جوړښت جوته يري.

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad (16,27)$$

دهيوپربول برابرېون ټوليزه بڼه يا فورم

دلته د ايليپسي سره په مخامخ ( همدا برعکس دی) يا په څټ ډول د  $x^2$  او  $y^2$

ځله ووني بدله مخنښه لري

(  $A \cdot B < 0$  ) ټوليز برابرېون هم کولی شي چې مور لاندې منځتکي برابرېون ته لارښود کړي،

$$(y - y_M)^2 / b^2 - (x - x_M)^2 / a^2 = 1 \quad (16,26')$$

د کومو څيره چې يو پورته لور او کښته لور ته واز هوپربول دی.

بيلگه ۱۶ . ۱۹:

د لاندې هوپربول منځتکي او سوزونتکي لټول کيږي

$$-25x^2 - 150x + 144y^2 - 188y + 144 = 0$$

اوبيوڼه: د ورکړشوي هوپربول مساوات بڼه په منځ تگي ( ۱۶ . ۲۶ ) اوږي يعني فورم يی بدليږي:

$$-25(x^2 + 6x) + 144(y^2 + 2y) = -144$$

( د څلورۍ پوره کونه)

$$-25(x+3)^2 + 144(y-1) - 25(x^2+6x+9) + 144(y^2-2y+1) = -144 - 225 + 144$$

$$1)^2 = -225$$

( په 225 - وپښنه)

$$-25(x+3)^2 + 144(y-1)^2 =$$

$$-225 + (x+3)^2 / 9 - (y-1)^2 / (25/16) = 1$$

د لاس ته راغلو مساواتو څخه لاندې لوستل کيږي:

$$x_M = -3, y_M = 1, a^2 = 9, a = 3,$$

$$b^2 = 25/16, b = 5/4$$

او د دې سره سم د (۱۶ . ۲۳) له امله لرو:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{144/16 + 25/14} = 13/4$$

د هوپربول منځتکی  $M(-3,1)$  دی، سوزوننکي یې  $F1(xM-e, yM)=F1(-25/4, 1)$  او  $F2(xM+e, yM)=F2(1/4, 1)$  دي.

بیلگه ۱۶ . ۲۰ :

د هوپربول  $9x^2 - 4y^2 = 36$  اسیمپتوتی یو له بل سره کوم کونجونه تری یعنی جوړوي یا اسیمپتوتی په کومو کونجونو کی یو بل پریکوي؟

اوبیونه : هوپربول د منځتکي بڼه (فورم) له (۱۶ . ۲۴) سره سم په لاندې ډول ده

$$x^2/4 - y^2/9 = 1 \quad \text{د } a=2, b=3 \text{ سره}$$

له دې سره سم دواړه اسیمپتوتی د (۱۶ . ۲۵) له مخی  $y=(3/2)x$

او  $y=-(3/2)x$  دي.

د لومړی اسیمپتوتی او  $x$  - محور ترمنځ کونج  $\varphi$  د  $\tan \varphi = 3/2, \varphi = 56,31^\circ$  څخه لاس ته راځي.

له دې امله د اسیمپتوتو ترمنځ کونج  $\psi$  باور لري  $\psi = 2\varphi = 112,62^\circ$

دا کونج کیدی شي د هوپربول د وازونکونج په نامه ونومول شي.

بیلگه ۱۶ . ۲۱ :

د ایلیپسی  $x^2/64 + y^2/16 = 1$  غوڅتکي د هوپربول سره لټول کیري چی منځ تکی یی په سرچینه او ککر تگی یی د ایلیپسی په سوزوننکو پراته وي او همغه ارزښت  $b$  لکه ایلیپسی ولري.

اوبیونه : د ایلیپسی نیممحور په  $a_1$  او  $b_1$  سره او لاینیزه اکسځینتریځیتی یی په  $e_1$  سره ښایو.

نو باور لري:  $a_1=8, b_1=4$  او د (۱۶ . ۱۹) سره سم دی.

$$e_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

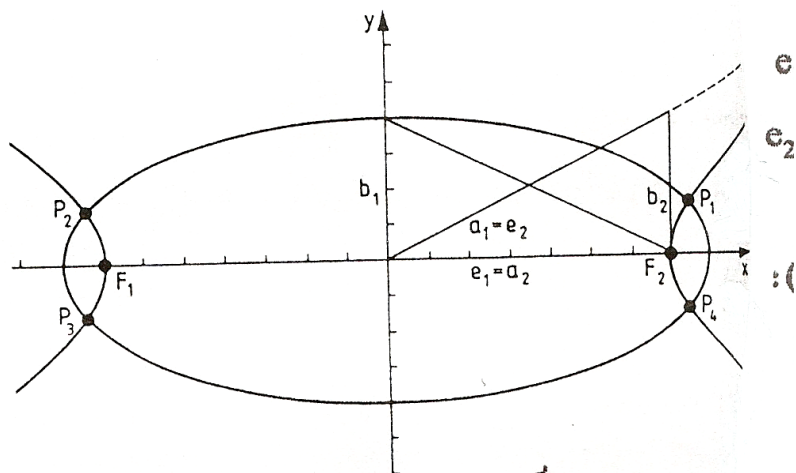


Bild 16.15

د هویربول لپاره نخښی  $e_2, a_2, b_2$  استعمالوو:

باورلري (پرتله څیره ۱۶ . ۱۵) :

$$b_2 = b_1 = 4, a_2 = e_1 = 4\sqrt{3}$$

او د (۲۳ . ۱۶) سره سم دی

$$e_2^2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 8 = a_1$$

د هویربول ابرون داسی دی:

$$x^2 / 48 - y^2 / 16 = 1$$

د غوڅټکو کواردینات د ایلیسی- او هویربول مساوات پوره کوي. که داوړه مساوات سره زیات شي نو لاس ته راځي

$$\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{48}\right)x^2 = 2, x^2 = 348/7, x_{1,2} = \pm 8\sqrt{\frac{6}{7}}$$

د ایلیسی او هویربول ابرونو څخه لاس ته راځي

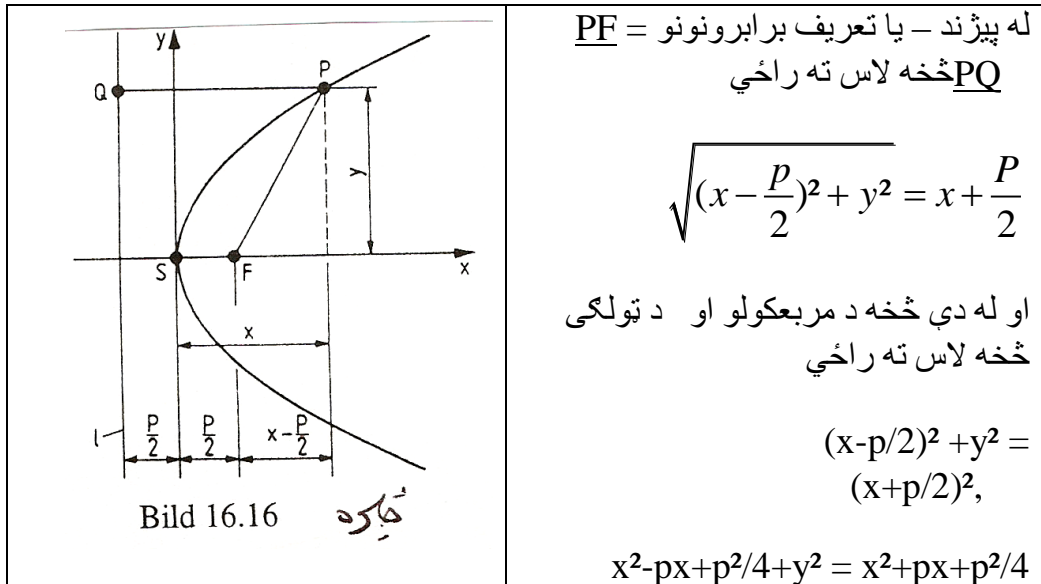
$$y^2 = 16(1 - x^2/48) = 16/7 \Leftrightarrow y^2 = 16(x^2/48 - 1) = 16/7 \Rightarrow y = \pm 4\sqrt{1/7}$$

او د دې سره سم د دواړو کبرو غوڅتکي دي:

$$P_1(8\sqrt{6/7}), P_2(-8\sqrt{6/7}, 4\sqrt{1/7}), P_3(-8\sqrt{6/7}, -4\sqrt{1/7}), P_4(8\sqrt{6/7}, -4\sqrt{1/7})$$

## ۱۶ . ۵ پارابول Die Parabel

پارابول د ټولو هغو ټکو  $P$  ډیری ده، چې واټن یی له یوه کله په ځای ټکی، د پارابول سوزون ټکی  $F$ ، او یوې کله په ځای کرښی، د پارابول تر مخکښی  $l$  (دایه څیره کی جوته ده چې دا کومه کرښه ده) سره مساوي دي (څیره ۱۶ . ۱۶) د سوزون ټکی او مخکښی ترمنځ واټن نیم پارامتر  $p$  بلل کیږي،  $S$  ککری ټکی دی، کرښه چې له  $S$  او  $F$  تیريږي د پارابول محور دی.



پس لرو

$$y^2 = 2px \quad (16,28)$$

د پارابول ککری ابرون د ککری ټکی  $S(0,0)$  سره، پورته لور ته واز ( $x > 0$ )

په همدې ډول:

$$y^2 = -2Px \quad (16, 29)$$

هغه وکین لور ته واز پارابول دی د واریابلو د بدلون څخه لاس ته راځي:

$$x^2 = 2py \quad (16, 30)$$

د پارابول ککرمساوات د ککرتکي  $S(0,0)$  سره، پورته واز پارابول  $(y > 0)$

په همدې توگه:

$$x^2 = -2py \quad (Y < 0) \quad (16.31)$$

پورته لور ته واز پارابول دی.

که ککرتکي  $S$  کواوردینات  $x_S, y_S$  ولري او د پارابول محور د  $x$  - محور ته غبرگ ځغلی په همدې ډول د  $y$  - محور ته هم غبرگ ځغلی، نو د یوې په خوبنه پارابول ټکی لپاره باور لري:

$$(y - y_S)^2 = 2p(x - x_S) \quad (16.32)$$

د پارابول ککریبرابرون د ککری ټکی  $S(x_S, y_S)$  سره، چی بنی لور ته وازوي  $(x > x_S)$

$$(x - x_S)^2 = 2p(y - y_S) \quad (16.33)$$

د پارابول ککریبرابرون د ککرتکي  $S(x_S, y_S)$  سره، چی پورته لور ته

وازوي  $(y > y_S)$

په همدې ډول:

$$(y - y_S)^2 = -2p(x - x_S) \quad (x < x_S) \quad (16.34)$$

$$(x - x_S)^2 = -2p(y - y_S) \quad (y < y_S) \quad (16.35)$$

هغه کښ لور او همداسی کوزي یا لاندي لور ته واز پارابولونه دي د فرمول  $(16, 32)$  همداسی  $(16, 33)$  ځله ونو څخه وروسته د پارابول ټولیز (عمومي) جوړښت پیژندل کیري:

$$Ay^2 + Bx + Cy + D = 0, \quad B \neq 0 \quad ((16, 36))$$

همداسی  $( < = > )$

$$Ax^2 + Bx + Cy + D = 0, \quad C \neq 0, \quad (16, 37)$$

د پارابول مساوات ټولیزه (عمومي) بڼه ( فورم )

بیلگه ۱۶ . ۲۲ :

د پارابول برابرېون دي له ککريټکي ، له نيمپارامتر او وازلوري څخه پيداشي:

الف  $(S(,0,0), P = 6)$  کين، ب  $(S(2,1); P = 0,5)$  پورته

پ  $(S(-3,-5), P = 4)$  لاندې ت  $(S(4,-2), P = 2/3)$  بنی

اوبیونه يا حل:

$$\text{الف) } y^2 = -12x \quad \text{ب) } (x-2)^2 = y-1$$

$$\text{پ) } (x+3)^2 = -8(y+5) \quad \text{ت) } (y+2)^2 = (4/3)(x-4)$$

بیلگه ۱۶ . ۲۳ :

د پارابول د لاندې مساوات سره دي د پارابول د ککريټکي کواوردينات ، نيمپارامتر او د وازون لور وټاکل شي  $y^2 - 18x + 12y - 36 = 0$  ،  $(x^2 + 4y + 20x + 10 = 0)$  . a )

اوبیونه : د پارامترتوليزه بڼه (فورم) دي په ککريټکي ابرون  $(۱۶ ، ۳۲)$  همداسی  $(۱۶ ، ۳۲)$  ،  $(۳۳)$  همداسی  $(۱۶ ، ۳۴)$  همداسی  $(۱۶ ، ۳۵)$  کی وازمايل شي (څلوری پوره کيدنه يا مربع تکميليدنه) . د ککريټکي ابرون څخه ککريټکي ، نيم پارامتر او وازلور

لوستور دي.

$$\text{a) } x^2 + 20x + 100 = -4y - 100 + 100$$

$$(x+10)^2 = -4y \quad S(-10, 0), P = 2$$

پارابول لاندې لور ته واز دی

$$\text{b) } y^2 + 12y + 36 = 18x + 36 + 36$$

$$(y+6)^2 = 18(x+4)$$

$$S(-4,-6), P = 9$$

پارابول بنی لور ته واز دی

۱۶ . ۶ ټولگه:

داله ۱۶ . ۱ نیولی تر ۱۶ . ۵ پوري څيرل شوي دهواري کزي (کزي په هواري يا سطحه کی)

-کربنه

-گردی

-ایلیپسی چی د کواوردینات محور سره غبرگ خُغلي، ټول د لاندې مساوات

-هوېربول

-پارابول

په څیر انځوریري:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad (16, 38)$$

فاکتورونه، ضریبونه یا ځله ووني  $A$  او  $B$  د کبری د توکو لپاره پرنکنده دي.برابرون ( $۱۶, ۳۸$ ) لاندې روښانويد  $A.B > 0, A \neq B$  لپاره ایلیپسی،د  $A = B$  لپاره گردید  $A.B < 0$  لپاره هوېربول، که  $A > 0, B < 0$  وي، نو کین لور ته واز،که  $A < 0, B > 0$  وي، نو پورته او لاندې لورته وازد  $A.B = 0, A = 0, B \neq 0$  لپاره یو پارابول، چی محور یی د  $x$  - محور سرهغبرگ دی د  $B = 0, A \neq 0$  یو پارابول، چی محور یی د  $y$  - محور سره غبرگ دید  $A = B = 0$  لپاره یوه کربنه که په ( $۱۶ . ۳۸$ ) یو بل گډوله (یو د بل سره گډ شوی)

څلوری توکي رامنځ ته شي، نو دا د کبری یو څلوری برابرون یا مربع مساوات

بنکاروي (توضیخ کوي)، د کومو محورونه چی نور د کواوردیناتو محورونو سره

غبرگ نه دي.

بیلگه ۱۶ . ۲۴ :

له لاندې مساواتو سره کومی کبری انځوریدلی شي؟

$$a) x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0 \quad b) 3x^2 + 24x + 15y + 138 = 0$$

$$c) 16x^2 + y^2 - 96x = 0, d) 2x^2 - 2y^2 + 16x + 10y - 105/2 = 0 ?$$

اوبیونه : (یادونه : لکه د نورو ځایونو په څیر دلته هم الف د  $a$  په ځای لیکم، ځکه چی د

پښتو لپاره کربنه په لاتین حروفو له بني لور نه شي پیل کیدی )

الف یا  $a$ ) که  $A = B = 1$  وي، نو گردیب یا  $b$ ) که  $B = 0$  پارابول چی محور یی د  $y$  - محور سره غبرگ ويپ یا  $c$ ) که  $A \neq B, A.B > 0$  نو ایلیپسیت یا  $d$ ) که  $A.B < 0$ ، نو هوېربول

## ۱۶. ۷ تمرینونه

۱ - د هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له  $P_1$  ټکي تیرېږي او د  $x$ -محور سره کونج جوړوي

- a)  $P_1(2,-3)$ ,  $= 30^\circ$ ,      b)  $P_1(-3,2)$   $= 45^\circ$   
 c)  $P_1(-1,-4)$ ,  $= 120^\circ$ ,      d)  $P_1(4,4)$ ,  $= 0^\circ$   
 e)  $P_1(0,0)$ ,  $= 150^\circ$ ,      f)  $P_1(1,-1)$ ,  $= 90^\circ$

۲ - ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو  $P_1$  او  $P_2$  تیرېږي

- a)  $P_1(0,0)$ ,  $P_2(3,3)$ ,      b)  $P_1(-3,3)$ ,  $P_2(0,0)$ ,  
 c)  $P_1(1,4)$ ,  $P_2(-3,-4)$ ,      d)  $P_1(1,2)$ ,  $P_2(-1,1)$ ,  
 e)  $P_1(0,1,-1)$ ,  $P_2(-0,1,-3)$ ,      f)  $P_1(1,-1)$ ,  $P_2(4,-2)$ !

۳ - د محورونو غوڅي (لنډ: محور غوڅي)  $a, b$  د کرښې مساوات په نورمال فورم وټاکئ او همداسې د غوڅتکو واټن  $d$  د محور غوڅتکو سره چې یو له بل یې لري وټاکئ.

- a)  $a = 5$ ,  $b = 2$ ,      b)  $a = -1$ ,  $b = 3$ ,      c)  $a = 2$ ,  $b = -3$ ,      d)  $a = -3$ ,  $b = -3$

۴ - یو دريگودی دا لاندې گوډټکی لري  $A(-4,-1)$ ,  $B(2,-2)$ ,  $C(1,3)$ . د هغو کرښو مساوات څنگه دي، په کومو چې د دريگودیو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دريگودی اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ - د لاندې کرښو مساواتو نورمال فورم او برختوب پلټنه یا فورم څنگه دی؟

- a)  $3x - 5y + 15 = 0$ ,      b)  $4x - 3y - 18 = 0$   
 c)  $-4x + 2y - 10 = 0$ ,      d)  $-3x - 4y + 15 = 0$ ?

۶ - د کرښې  $y = -(12/5)x + 2$  پروتخاي د کرښو

- a)  $y + 2, 4x - 6 = 0$ ,      b)  $28x + 10y = 0$ ,      c)  $8x + 5y = 2$ ,  
 d)  $5y + 12x - 10 = 0$ .      e)  $y + (12/5)x = 3$ ,      f)  $6x + 2, 5y = 5$

سره وڅیړئ.



۷ - د لاندې کرښو د غوڅتکو کواوردیناتونه او غوڅکونج وټاکئ:

a)  $2x + 3y = 7$       b)  $y = (1/2)x + 1$       c)  $y - x = 7$

$3x - y = 5$ ,       $y = -2x + 6$ ,       $y = 7$ ,

d)  $x/3 - y/2 = 1$       e)  $6x - 2y + 10 = 0$       f)  $y = 4x - 1$

$-x/2 + y/3 = 1$ ,       $y = 3x + 6$ ,       $y = -3x + 5!$

۸ - کومه کرښه د کرښې  $x - y = 4$  ، کرښې  $3x + y = 8$  او برسیره پر دې له غوڅتکې  $P(0,5)$  څخه تیرېږي؟

۹ - د لاندې گوځ  $A(-4,-1)$ ,  $B(2,-2)$ ,  $C(1,3)$  سره د درېگوځي دننه کونجونه څومره لوی دي؟ (پیلونه: دریکونجی وکارئ) یا (د دریکوځی)

۱۰ - د ولاړپړیوټی کرښې یا زورندې مساوات له ټکي  $P(2,0)$  څخه په کرښه  $y = 2x + 1$  څنګه دي؟

۱۱ - د ولاړکرښې مساوات په کرښه  $y = 2x + 1$  باندې په ټکي  $P(-1,-2)$  څنګه د

۱۲ - د کرښې  $y = 2x + 1$  سره د غبرګلي کرښې مساوات چې له ټکي  $P(-1,-3)$  تیرېږي، څنګه دي؟

۱۳ - د لاندې مساواتو سره ګردیمنځتکی او وړانګه وټاکئ:

a)  $x^2 + y^2 = 20$

b)  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

c)  $x^2 + y^2 - 9y = 0$ ,

d)  $4x^2 + 4y^2 + 32x - 8y + 67 = 0$

e)  $36x^2 + 36y^2 - 36x + 24y - 23 = 0$ ,      f)  $x^2 + 2x + y^2 + 2y = 16!$

۱۴ - د لاندې ګردیو مساوات وڅیړئ

(الف) چې منځ ټکی  $M(-2,-1)$  لری او له سرچینی تیرېږي

ب) هغه چی دري ټکی  $P_1(3,0)$ ,  $P_2(5, 5-3)$ ,  $P_3(5+3,-1)$  یی د غاړو ټی  
 پ) چی وړانگه  $r=6$  لري او له ټکو  $P_1(-1,11)$ ,  $P_2(5,5)$  څخه تیریري.  
 ت) له ټکی  $P_1(3,4)$  تیریري او کرښه  $y = -(4/3)x + 13$  په ټکي  $P_2(4,3)$  لمسوي.

ن) چی منځ ټکی  $M(2,2)$  لري او کرښه  $y = -(4/3)x + 13$  لمسوي.  
 ث) چی د هغې منځټکی په کرښه  $y = 3x - 19$  پروت دی او له ټکی  $P_1(7,-2)$  او همداسی له ټکي  $P_2(11,2)$  څخه تیریري.

۱۵ - کوم پروتخایونه گردی  $k$  چی فرمول لري  $x^2 + y^2 - 8x = 0$  او لاندې کرښې یو له بل سره لري:

- a)  $g: y = 2x + 1$ ,    b)  $g: y = x$ ,    c)  $g: y = x - 1$ ,  
 d)  $g: y = 4$ ,    e)  $g: y = -x - 3$ ,    f)  $g: y = x - 3$  ?

۱۶ - کوم پروتخاي کرښه  $3x + 4y = 25$  گردی  $x^2 + y^2 = 25$  ته لري؟

۱۷ - د تنجنت مساوات څنگه دی

الف) په ټکي  $P_0(5, y_0)$  چی په گردی  $x^2 + y^2 = 169$  پروت دی،

ب) په ټکي  $P_0(x_0, -2)$  چی په گردی  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$  پروت دی؟

۱۸ - د هغو گردیو منځټکي پیدا کړی چی وړانگه یې  $r=5$  وي، کومی چی کرښه  $3x + 4y = 9$  په ټکي  $P_0(-1, 3)$  کی لمسوي!

۱۹ - په گردی  $x^2 + y^2 = 25/4$  د هغه تنجنت مساوات وټاکي، کوم چی د

کرښي  $y = (4/3)x + 2$  سره غبرگ خغلي؟

۲۰ - د ایلیپسي مساوات وټاکي، له

a)  $M(0,0)$ ,  $a=11$ ,  $c=8$ ,    B)  $M(0,0)$ ,  $b=4$ ,  $c=6$ ,

c)  $M(-3,7)$ ,  $c=4$ ,  $b=5$ ,    d)  $M(4, -5)$ ,  $e=7$ ,  $a=10$ !

۲۱ - د لاندې ایلیپس مساواتو څخه د نیممحورونو او سوزونټکو منځتکی او اوږدوالی راپیدا کړی:

a)  $x^2 / 100 + y^2 / 64 = 1$       b)  $(x+3)^2 / 81 + (y-1)^2 / 56 = 1$   
 c)  $3x^2 + 4y^2 - 24x \geq 0$ ,      d)  $5x^2 + 9y^2 - 10x + -90y + 50 = 0$ ,  
 e)  $4x^2 - 13y^2 - 208 = 0$ ,      f)  $4x^2 + 9y^2 + 54y - 227 = 0$  !

۲۲ - د هغو ایلیپسو مساوات راپیدا کړی، کومې چې  
 الف) چې منځتکی  $M(0,0)$  او لایني ایکسختریختی  $e = 6$  لري او  
 ب) له منځتکی  $M(1,1)$  او لایني ایکسختریختی  $e = 4$  لري او له  
 ټکو څخه تیریري،

پ) د نیممحور اوږدوالی  $a = 9$ ,  $b = 6$  لري او له ټکو  $P_1(2,8)$ ,  $P_2(2,-4)$  څخه  
 تیریري!

ت) د نیممحور اوږدوالی  $a = 2$ ,  $b = 6$  لري او له ټکو  $P_1(-1,-4)$ ,  $P_2(-5,-4)$  څخه  
 تیریري!

۲۳ - د لاندې ایلیپسو او کرشو ترمنځ غوڅتکي پیدا کړی

a)  $x^2 + 4y^2 - 20 = 0$ ,       $x + 2y - 6 = 0$ ,  
 b)  $3x^2 + 4y^2 - 24x =$ ,       $y = 3.x$ ,  
 c)  $(x-3)^2 / 9 + (y-1)^2 / 4 = 1$ ,       $y = x + 1$ ,  
 d)  $x^2 + 4y^2 + 16y + 12 = 0$ ,       $y = x - 2$  !

۲۴ - د هویپرېبول مساوات له

الف)  $M(0,0)$ ,  $a = 4$ ,  $e = 5$ ,  $b$  (ب)  $M(-3,2)$ ,  $b = 4$ ,  $e = 6$ ,

پ)  $M(1,1)$  او هویپرېبولټکو  $P_1(-3,1)$ ,  $P_2(6, 7/4)$  !

ت)  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $x = -1$  او د هویپرېبولټکي  $P(-4,-2)$  وټاکي !

۲۵ - د هویپربولونو

$$a) x^2 / 144 - y^2 / 36 = 1, \quad b) 9x^2 - 64y^2 = 576$$

○ نیممحورونو اوږدوالی او اسیمپټوټي راپیدا کړی!

۲۶ - د لاندي هویپربولونو منځتکي او د نیممحور اوږدوالی پیدا کړی.

$$a) 9x^2 - 64y^2 - 36x - 540 = 0, \quad b) x^2 - 9y^2 + 54y - 90 = 0,$$

$$c) x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 16 = 0, \quad d) x^2 - y^2 - 2x + 10y - 28 = 0!$$

۲۷ - د لاندي مساواتو سره د کړيو غوڅنکي وټاکي:

$$a) \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

$$y = \frac{1}{5}x,$$

$$b) 4x^2 - 9y^2 = 144,$$

$$x^2 - 24y = -28,$$

$$c) \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

$$y = -\frac{2}{3}x - 5,$$

$$d) 4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 68 = 0, \quad 9y^2 - 36y - 72x + 8 = 0,$$

$$e) \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

$$x^2 - y^2 = 16!$$

۲۸ - د لاندي پارابولونو ککرتکو او سوزوتتکو کواوردینات وټاکي:

$$a) 5y^2 + 4x = 0, \quad b) 2y - (1/2)x^2 = 0 \quad c) 4y + (1/3)x = 0,$$

$$d) 2y^2 - 12x = 0, \quad e) y^2 - 2y - 10x - 9 = 0, \quad f) x^2 - 7x - y + 12 = 0$$

$$g) y^2 - 6y + 6x - 3 = 0. \quad h) x^2 + 4x + 12y - 52 = 0$$

/

۲۹ - د پارابول مساوات له لاندي ککرتکو او سوزوتتکو وټاکي:

$$S(0,0), F(0,1), \quad b) S(0,0), F(-1,0), \quad c) S(1,1), F(2,1),$$

$$S(-1,-1), F(-2,-1), \quad e) S(2,-3), F(2,-2), \quad f) S(-2,3), F(-2,2)$$

۳۰ - یو پارابول د ککري پروت ارزښت  $x_8 = 3$  لري، کښه  $y = 8$  د محور په څوټکي  $P(7,4)$  تیريږي. ددې مساوات څنگه دي؟

۳۱ - یو پارابول د ککر کواردینات  $y_s = -3$  لري، کرښه  $x = 2$  د محور په څیر او

له ټکي  $P(4, -4)$  تیریري. د هغې مساوات څنگه دي؟

۳۲ - کوم پروتڅای اړیکي د

الف) پارابول  $y^2 = -4x$  او کرښی  $y = x - 1$

ب) پارابول  $x^2 = 5y$  او کرښی  $y = x - 4$

پ) پارابول  $x^2 = -3y$  او کرښی  $y = x + 5/12$

ت) پارابول  $y^2 - 6x - 2y + 7 = 0$  او کرښی  $y = x$

ټ) پارابول  $y^2 = 7x$  او کرښی  $9x + 12y + 28 = 0$

ترمنځ پرتی دي؟

که موجود وي، نو غوڅنکی همدا سې لمستکی یې ورکړی!

## ۱۷ وکتور شمیرنه او په حُمکچ کی د هغه په کارونه

۱۷. ۱ د وکتور پیژند ،

په کارتيزي کواوردينات سيستم کی د وکتور انځورونه

په پيدايښتي پوهنو يا طبيعي علومو او تخنيک کی مور لویي پیژنو چی د ریيل ارزښتونو په ورکولو سره یواځنی ټاکلي دي، لکه وخت، گرمي، توان ، وزن . داډول لویو ته سکالار لویي وايو . نورې لویي لکه زور ، چټکتيا( سرعت)، بیره ( تعجیل)، د برقي او مقناطیسي چاپیریالزور برسیره په ارزښت ( مطلقه ارزښت ) د لور ورکونه هم غواړي، په کومه چی تاسیر اچوي. مور دې لویو ته وکتورونه وايو.

د وکتور له لارې کیدی شي چی دهندي شيانو ځان نیونه هم تشریح کړای شو. په فضا هوا کی یو ټکی کیدی شي چی د هوا کواوردينات سيستم کی د سرچینی څخه د دې ټکي په لور لوریز شوي کرښه ( په دې مانا چي مطلقه ارزښت او لوری لري ) تشریح کړی شي یعنی له سرچینی څخه یی په دې ټکي برید وي یا دا ټکی په نڅښه کړای شي یا یی د غشي څوکه د دې ټکي په لور لوریزه وي.

یادونه : ما وکتورونه  $a, b$  بنسولي، ښه به یی  $\vec{a}, \vec{b}; \dots$  وای، ډیرو کتابونو کی پند  $a, b, \dots$  لیکل شوي، خو ما د وکتور سره تل د وکتور کلمه یاده کړې، چي د ناتیکیوهني څخه مو ژ غوري .

پیژند ۱۷ . ۱ : یوه لویه  $a$  چی د یوه مطلقه ارزښت  $|a|$  چی داوردوالي کچگن یی هم (بولو) او یوې لورې له مخی ټاکل شوی وي، وکتور بلل کیږي.

(لنډ: یوه لویه چی لور ولري، وکتور دی. مور کړی شو چی دې لویي ته غشی هم وواږو. زه یی همدا وکتور بولم)

یو وکتور په هوا کي د یوه لور لرونکی کرښی (غشي) په څیر انځور کیدی شي. د تعریف ۱۷ . ۱ له مخی ټول مساوي اوږده او په یوه لور لوری، لوریزې- یا لورونی کرښي همغه وکتور انځوروي، په یوه بریدتکي باندي ټرل یی په نظر کي نه دي نیول شوي . سړی ویلی شي: یو وکتور کیدی شي په هوا کی په خوښه غبرگ ( موازی ) وخوځول شي یا راکښل شي، مور په راتلونکي کی د داسی ازادو وکتورو سره سر او کار لرو. نورې په وکتور انځور شوي لویي، بر سیره په مطلقه ارزښت او لور، په نورو ټاکونټوتو هم اړه لري. د بیلگي په توگه یوه قوه یا زور د همغه خپل تاثیر لیکي یا بهتره برید لیکي په اوږدوالي له یوه ځایه بل ته راکښل کیدی شي ( په غبرگ یا موازی راکښون یی تاثیر تغیر کوي) دلته په لیکه راکښونکو وکتورو باندي غبرو. هغه یو ټکی انځورونکی وکتور په کواوردیناتسیستم په سرچیني ( د برید - یا حملی ټکی) پورې تړلی. داسی وکتورونه ځای وکتورونه (په ځای تړلي -) بلل کیږي . ځنی په لاندې کی د فرمول بندي شوي شمیرقاعدي له مخي کیدی شي دې ډول وکتورونو ته هم پراخه شي.

پیژند ۱۷ . ۲ :

دوه وکتورونه  $a$  او  $b$  برابر بلل کیږي  $a = b$

که دواړه وکتورونه په مطلق ارزښت او لور یو په بل سر وخوري یا پریوځي.



Bild 17.1

ټولې برابرې او اوږدې او برابرې - یا همغه لوریزې کرښی، لکه چی وویل شو همغه وکتور ښایی.

پیژند ۱۷ . ۳ :

یو وکتور  $\mathbf{a}$  د مطلقه ارزښت  $|\mathbf{a}|=0$  سره  $0$  یا صفر وکتور بلل کیږي. صفر وکتور لور نه ټاکي یا تعینوي. یو وکتور  $\mathbf{ea}$  چې د  $\mathbf{a}$  لور او مطلقه ارزښت  $|\mathbf{e}|=1$  لري، نو په وکتور  $\mathbf{a}$  پورې اړوند یوونو وکتور (۱) بلل کیږي.

Einheitsvektor, unit vector (1) یوونو وکتور یانې ارزښت یې یو یوون دی یا واحد وکتور (؟)

پیژند ۱۷ . ۴ :

دوه وکتوره اورتوگونال (Orthogonal) بلل کیږي، که دوي یو په بل نښ و لار (عمود) ولاړ وي، کولینار (kollinear) بلل کیږي، که دواړه د همغی یوې کرښې سره غبرگ وي، کومپلنار (komplanar) بلل کیږي، که د همغی یوې هواړې سره غبرگ وي.

د وکتورونو سره شمیرلو لپاره باید مطلقه ارزښت او همدارنګه لور شمیرنیز ډوله لاس ته راوړل شي. ددې لپاره یوه نسبي سیستم ته اړتیا حس کیږي، دلته هوايي یا فضايي کار تيزي کواوردینات سیستم استعمالیدی شي. د کواوردینات سیستم انځورونو لپاره لاندني روښانه ونې یا توضیحات یعنی د وکتور ځله ونه یا ضرب د یوه ریيل گڼ سره او د وکتورونو زیاتون مخ ته پراته دي.

پیژند ۱۷ . ۵ :

د یوه وکتور ځله ونه یا ځل د یوه سکالار سره:

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}, \lambda \in R$$

یو وکتور دی چې د  $|\lambda|$  - ځله د  $\mathbf{a}$  مطلقه ارزښت لري او د  $\lambda > 0$  لپاره همغه لور لري لکه  $\mathbf{a}$ ، په څټ یا برعکس که  $\lambda < 0$  لري نو د  $\mathbf{a}$  مخامخ لور یا په څټ لور لري

جمله ۱۷ . ۱ :

د ریيل گڼ سره د وکتور د ځل د شمیرقاعدي کوموتاتیف قاعده، اسوڅیاتیو ضانون او د صفر وکتور سره ځل

$$\lambda \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \lambda; \dots \text{Kommutativ}$$

$$\lambda(\mu \cdot \vec{a}) = \eta(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \mu \cdot \vec{a}; \dots \text{Ass.}$$

$$|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|, 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}, \vec{0} = 0$$

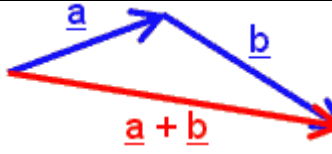


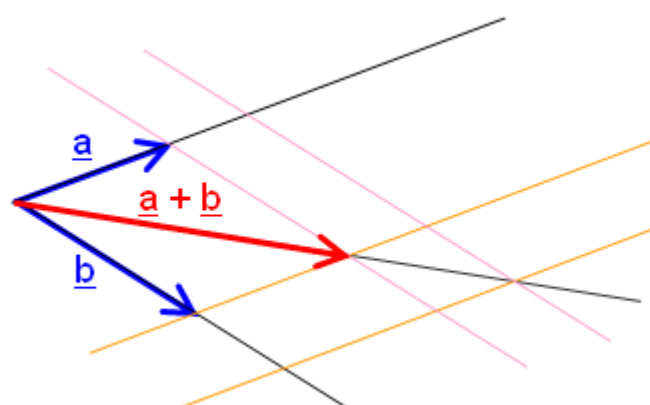
ددې ځل یا ضرب د پیژند سره ممکن کیږي چې هر وکتور  $a$  د یوه ریپل گڼ ( ددې وکتور مطلقه ارزښت) او په هغه پوری تنظیم یا ترتیب شوی یوونوکتور د ځل په څیر انځور کړو:  $a = |a|e_a$

پیژند ۱۷ . ۶ :

( د وکتورونو زیاتون)

د دوه وکتورونو  $a, b$  زیاتون ( جمع )  $a+b$  د دواړو وکتورونو  $a$  او  $b$  څخه غزیدلی غبرگ اړخیزې ( موازي الاضلاع ) لوریز دوه کونجترې ( قطر ) ده. څیره . ۱۷ ( ۲ )

	<p>د وکتورونو زیاتون ( جمع ) د قوو یا زورونو د زیاتون په څیر دی او دا د شمیر قاعده ساده د لیدو کیدی شي</p>
---	--

	<p>څیره شته د غبرگ اړخیزه پورته نیمه یا له تعریف ۱۷ . ۶ څخه پورته څیره یا مخامخ څیره</p>
---	--

جمله ۱۷ . ۲ :

( د وکتورونو د جمع لپاره د شمیر قاعدې )

$$a+b=b+a$$

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

(کوموتاتیف قانون)

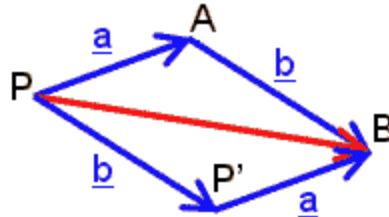
( اسوسیاتیف قانون )

دیستریبوتیوو او وربسی په لاندې نظم اړیکې

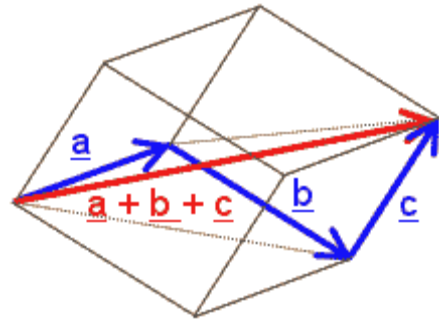
$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}; \dots\dots\dots \text{Distrib.}$$

$$\mu(\vec{a} + \vec{b}) = \mu\vec{a} + \mu\vec{b}; \dots\dots\dots \text{Distr.}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$$



د زیاتون دې قانونو سره موږ ته ممکن کيږي چې هر وکتور، د بیلگي په توگه د وکتورونو د کواور دینات محور په لور بنودونکو وکتورونو د زیاتون په څیر انځور کړای شو یا ولیکو. په دې ډول بريالي کيږو چې دواړه د وکتورونو لپاره موخه وره یا هدفمنده شمیرنه په کواور دینات سیستم کې انځور کړو



پورته څیره کې د درې وکتورونو زیاتون

پیژند ۱۷ . ۷ :

په کواور دینات سیستم کې د وکتور  $a$  انځورونې لاندې

$$a = (a_1, a_2, a_3) \quad (17.1)$$

موږ په یوه ولاړ کونجیز

$-x_1, x_2, x_3$

کواور دینات سیستم کې د وکتور انځوره ونه پوهیږو، د نخبنی یا مخ نخبنی په نظر کې

نیولوسره او د  $a_i$  پرویکشن یا پریوستون له لارې په هر  $x_i$  - محور ( $i = 1, 2, 3$ )

پرویکشن (Projection) د دوه اړخونو لپاره انځورونه (په څیره ۱۷ . ۳ کی) داسی  $a_i$  د  $a$  وکتور  $i$  - م کواوردینات بلل کیري

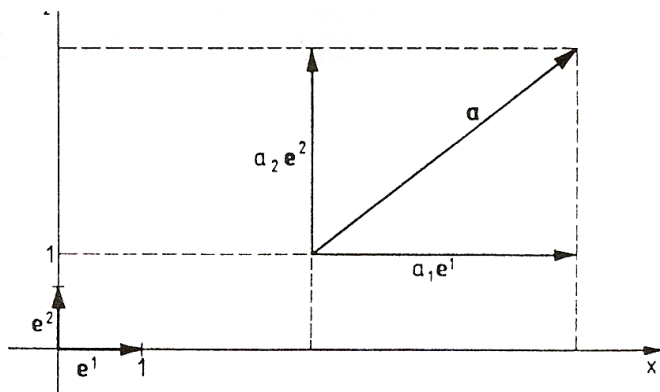


Bild 17.3 څیره

یادونه:

مور دلته که د وکتورونو پورته څه لیکو نو هغه د وکتور پوټنڅ په مانا نه دی بلکه هغه وکتور بنیایي چی په کومه کواوردینات اړه لری. دلته د لیکنی له لوري پوره جوت دی. د  $x_1$ -محورونو په لور په کواوردینات شکل د یوونو وکتورونو څرگندونه په لاندې ډول ده

$$\begin{aligned} e^1 &= (1, 0, 0) \\ e^2 &= (0, 1, 0) \\ e^3 &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (17.2)$$

د وکتور  $a$  انځورونه د کواوردیناتو  $a^i; i = 1, 2, 3$  او د یوونو وکتورونو (۱۷ . ۲) د استعمال له لاري، د تعریفونو ۱۷ . ۵ او ۱۷ . ۶ په بنسټ د کمپوننتو له لاري یا مرسته لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۳: (د کمپوننتو (جوړختبرخو) له لاري د وکتور  $a$  انځورونه) لرو:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}^1 + a_2 \vec{e}^2 + a_3 \vec{e}^3; \dots (17,3)$$

د دوه پراخیدوني یا دوه بعدیز یا دوه دیمنزویون انځورونه. (څیره ۱۷ . ۳) دلته،  $a^i e^i$  چی  $i=1,2,3$  وي، د  $a$  وکتور  $i$  - م کمپوننت یا جوړخت برخه بللکیري د جملو ۱۷ . ۲ او ۱۷ . ۳ په مرسته کیدی شي لاندې جمله لاس ته راشی:

جمله ۱۷ . ۴:

د رییل گڼ سره د یوه کتور ځله ونه او یا د وکتورونو زیاتون کو او ردینات ډوله یا په څیر صورت نیسي، دا په دې مانا چی لاندې باوري کيږي:

$$a=(a_1, a_2, a_3), \quad b = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\mu a = (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) \quad (17.4)$$

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \dots \dots \dots (17,5)$$

بیلگه ۱۷ . ۱:

د  $a=(-2,3,-5)$  ,  $b=(1,-6,4)$  لپاره لرو

$$2a+3b=(2-2,3,-5)+3(1,-6,4)=(-1,-12,2).$$

د وکتورونو کمون د وکتورونو د زیاتون په څیر (تعریف ۱۷ . ۶) صورت نیسي یا ځان نیسي

پیژند ۱۷ . ۸:

د  $a - b$  کمون یا کمښت د وکتور  $a$  او وکتور  $b$  ته مخامخ - یا په څټ وکتور یعنی  $-b$  زیاتون دی:  $a-b=a+(-b)$  (څیره ۱۷ . ۴)

له تعریف ۱۷ . ۸ لاس ته راځي: وکتور  $a$ ، کوم چی له  $x_1$  ټکي  $x_2$  ټکی ښايي (د دوه اړخونو یا بعدونو انځورونې لپاره ش ۱۷ . ۵) داسی دی (پای ټکی ترې کم پیل ټکی یانې د پایټکي او پیلټکی کمښت):  $a = x_2 - x_1$

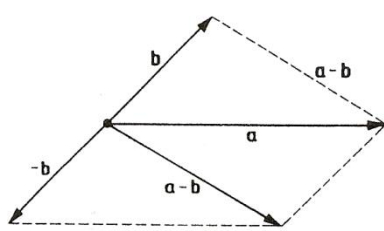


Bild 17.4 څیره

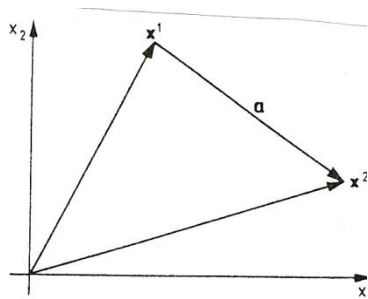


Bild 17.5 څیره

بیلگه ۱۷ . ۲:

هغه وکتور چی له  $x^1 = (-1, -3, 1)$  ټکي څخه  $x^2 = (2, -1, 5)$  ټکی بنایي ( په گوته کوی په گوتهیونی کوي) داسی دی:

$$a = x^2 - x^1 = (2, -1, 5) - (-1, -3, 1) = (3, 2, 4).$$

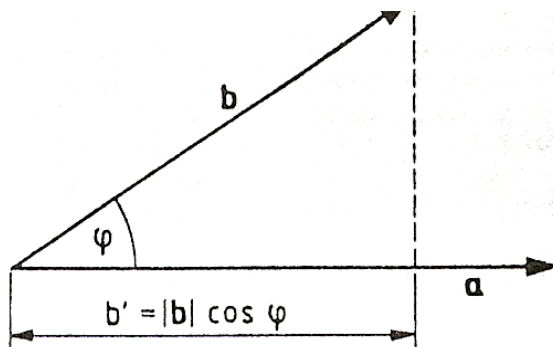
### ۱۷. ۲ د دوه وکتورنو سکالار ځله ونه یا ضربونه

پیژند ۱۷. ۹:

د دوه وکتورنو  $a, b$  سکالار ځل  $a \cdot b$  د دواړو وکتورنو د مطلقه ارزښت او له دي دواړو وکتورونو منځ ته راغلی کونج کوساین ځل یا ضرب دی، یانې

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi; \dots \dots \dots (17, 7)$$

د سکالار ځل یا ضرب نتیجه سکالار ده په (۱۷. ۷) کی فاکتور  $b' = |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$  په هندسی مانا د (مخ) نخښي ساتلو سره د کوساین د پیژند له مخی ( په وکتور  $a$  دوکتور  $b$  پرویکشن یا پریونتل یا پریپستل دي) څیره (۱۷. ۶)



په فزیک کی د سکالار ځل یا- ضرب بیلگه:

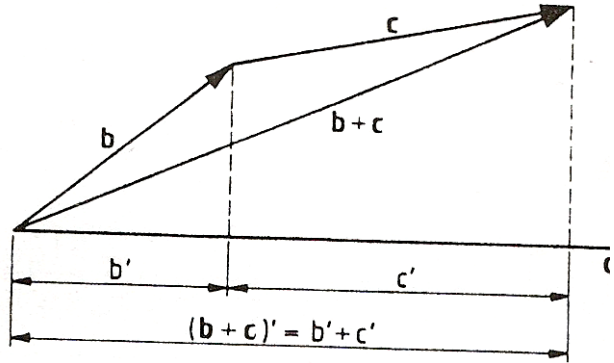
که  $a$  هغه لار وي چی د هغي په اوږدوالی د  $b$  زور تاثیر اچوي، پس  $A = a \cdot b$  له دي زور له لاري کر شوی کار بنایي ( د لار اوږدوالی چي د لار په لور د زور د پرویکشن سره ځل دی).

جمله ۱۷ . ۵ : ( د سكالار ځل شمیرقاعدي )  
 $a.b = b.a$  ( کوموتایو قانون )

( دیستریبوتیو قانون )  $a(b+c) = a.b + a.c$   
 $a.b = 0$  که  $a$  او  $b$  یوپه بل اورتوگونال یا عمود وي ( ۱۷ ، ۸ )  
 $a.a = |a|^2$  ( ۱۷ . ۹ )

د پورته شمیرقاعده جو تونه: کوموتایو قانون د ( ۱۷ . ۷ ) پسې ترلی لاس ته راځي.  
 دیستریبوتیو قانون په ( ۱۷ . ۷ ) څیره کې لیدل کیږي.

د اورتوگونال وکتورونو لپاره باور لري: که  $a.b = 0$  نو  $\alpha = 0$  او ( ۱۷ . ۸ )  
 له ( ۱۷ . ۷ ) څخه لاس ته راځي .  
 همدایول ( ۱۷ . ۹ ) له ( ۱۷ . ۷ ) او داچې  $\alpha = 0^\circ$  د  $a$  او  $a$  ترمنځ دی، نو لاس ته  
 $\cos \alpha = 1$  راځي



پورته څیره ۱۷ . ۷

جمله ۱۷ . ۶ :  
 د دوه وکتورونو سكالار ځل کواوردیناتېوله صورت نیسي یعنی د  
 $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)$   
 د ځله ونی یا ضرب څخه لاس ته راځي :  
 $a.b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$  ( ۱۷ . ۱۰ )

اوبیونه : دیوونو وکتورونو ( ۱۷ . ۲ ) لپاره لاندې باور لري

د ( ۹ . ۱۷ ) سره سمر د  $i = j$  لپاره  $e^i \cdot e^j = 1$  د ( ۹، ۱۷ ) سره سم د  $|i| = |j|$  لپاره  $e^i \cdot e^j = 0$  له دې لاس ته راځي:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 e^1 + a_2 e^2 + a_3 e^3)(b_1 e^1 + b_2 e^2 + b_3 e^3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

یادونه : دلته د وکتورونو په توانډول چی څه لیکل کیږي د توان مانا نه لري په یوونو وکتورونو کی ددې لارې بشوول کیږي چی دا دکوم کواو دینات یوون وکتور دی او د نورو وکتورونو لپاره دا مانا لري چی کوم یو وکتور مو مطلب دی او نه چی په کوم توان دی ته د مخه هم گوته نیول شوی ده .

بیلگه ۱۷ . ۳ :

وکتور  $a = (2, -3, 1)$  له لاندې وکتورونو سره ځل شي

$$a) \quad b^1 = (3, 1, 4), b) \quad b^2 = (3, 2, -2), c) \quad b^3 = (3, 3, 3)$$

اوبونه یا حل: بیا یا اینیترنیت

$$a) \quad a \cdot b^1 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 7$$

$$b) \quad a \cdot b^2 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = -2$$

$$c) \quad a \cdot b^3 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 0$$

دلته c) په دې مانا ده چی وکتورونه a او  $b^3$  اورتوگونال یا عمود دي ددې لپاره لیکو:

$$a \perp b^3$$

جمله ۱۷ . ۷ :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}; \dots \dots \dots (17, 11)$$

$$a \cdot a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad \text{لرو : ( ۱۰ . ۱۷ )}$$

بیلگه ۱۷ . ۴ :

د وکتورونو  $a = (2, -3, 1)$  ,  $b = (3, 0, -4)$  مطلقه ارزښت (اوردوالی) دی

$$|\vec{b}| = \sqrt{9 + 0 + 16} = 5; |\vec{a}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{4}$$

جمله ۱۷ . ۸ :

د دوه وکتورونو a او b ترمنځ کونج په لاندې ډول ټاکل کیږي

$$\cos \phi = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}; \dots \dots \dots (17, 12)$$

اوبیونه یا حل:  $(۱۲, ۱۷)$  له  $(۷, ۱۷)$ ،  $(۱۰, ۱۷)$  او  $(۱۱, ۱۷)$  څخه لاس ته راځی

بیلگه ۱۷ . ۵:

په بیلگه ۱۷ . ۳ کې د  $\vec{a} \wedge b^1, b^2, b^3$  تر منځ کونجونه د شمیرلو دي. اوبیونه:

$$\phi_1 = \angle(\vec{a}, \vec{b}^1) = \frac{2.3 - 3.1 + 1.4}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+1+16}} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = 0,3669; \phi_1 = 68,48^\circ$$

$$\phi_2 = \angle(\vec{a}, \vec{b}^2) = \cos \phi_2 = \frac{2.3 - 3.2 + 1(-2)}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+4+4}} = \frac{-2}{\sqrt{4}\sqrt{17}} = -0,1296; \phi_2 = 97,45^\circ$$

$$\phi_3 = \angle(\vec{a}, \vec{b}^3) = \frac{2.3 - 3.3 + 1.3}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+9+9}} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{27}} = 0; \phi_3 = 90^\circ$$

### ۱۷ . ۳ د دوه وکتورونو وکتوري ځلونه یا ځل

پیژند ۱۷ . ۱۰:

د دوه وکتورونو  $a, b$  وکتور ځل یا وکتوریز ځل یو وکتور  $c$  دی د کوم لپاره چې لیکو  $a \times b = c$  او لاندې خویونه لري:

۱ - د  $c$  مطلقه ارزښت دی

$$|c| = |a||b| \cdot \sin \phi; \dots\dots\dots(17,13)$$

دا د هندسي له مخی د  $a$  او  $b$  وکتورونو لخوا غزیدلي غبرگ اړخیز منځه‌واری په مانا دی. (څ. ۱۷ . ۸)

۲- د  $c$  وکتور  $a$  او  $b$  باندې نیغ ولاړ یا اور توگونال دی.

۳- دلته  $c, b, a$  یو بني سیستم جوړوي، دا په د مانا چې که د بني لاس غټه گوته او د بنوولو گوته د  $a$  او  $b$  لور وښايي نو کونج جوړونکي د منځ گوته دوکتور  $c$ -

لور ښايي (څیره ۱۷ . ۹)



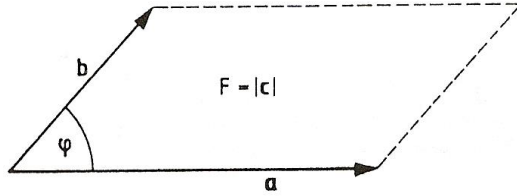


Bild 17.8

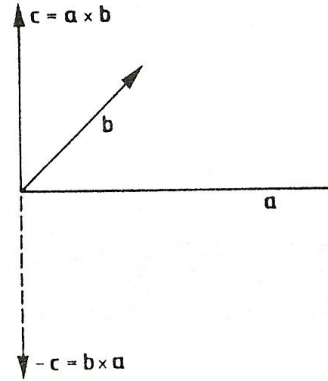


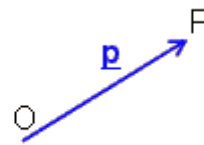
Bild 17.9

دا لاندې څیړي د فرمولونو سره مور ته ټکی، کرښه او هواره را په گوته کوي او د یوه وکتور مطلقه ارزښت.

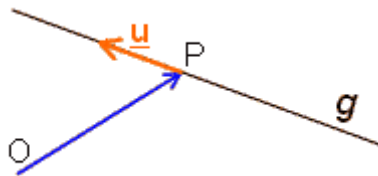
$$|\underline{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

ټکی  $P(p_1|p_2|p_3)$

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

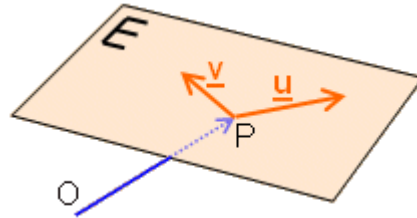


کرښه g



$$g: \underline{x} = \underline{p} + t \cdot \underline{u}$$

هواره E



$$E: \underline{x} = \underline{p} + r \cdot \underline{u} + s \cdot \underline{v}$$

وکتورخله ونه یا وکتور خُل یواځي د دري اړخيزي هوايا فضا لپاره تعريف دی.

د وکتور خُل بيلگه په فزيک کی :

که F قوه یا زور وي چي په يوه ککڅ څرخيدونکي بدن (جسم) د Q په ټکي د r په مړوند چي د r سره کونج جوړوي، برید یا حمله کوي او هغه د P په ټکي څرخوي (څیره ش).

۱۷ . ۱۰ ) نو څرخون مومنت Drehmoment منځ ته راځي  $M = r \times F$

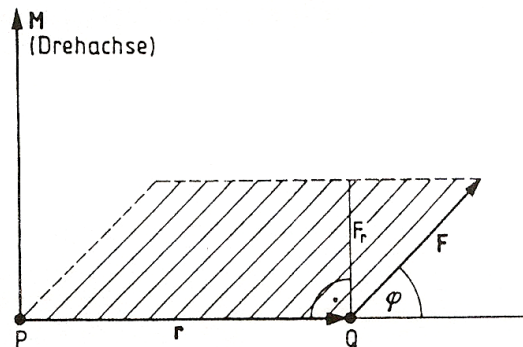


Bild 17.10

د مطلقه ارزښت له مخی د څرخونمومنت د اوږدوالی |r| د اړم مټ او مطلقه ارزښت

$$F_1 = |F| \sin \phi$$

چی د اړم په مټ (نیغ) ولاړ د قدرت یا قوت زور کپوننت (جوړونکی) دی:

$$M = |r| |F| \sin \phi$$

جمله ۱۷ . ۹: ( د وکتور ضرب لپاره د شمیر قاعدې )

$$a \times b = -b \times a \quad (17.14)$$

دیسټریبوتیو قانون )

$$a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c) \quad (17.15)$$

$$a \times b = 0 \quad (16.17) \quad \text{د کولینیار وکتورونو لپاره}$$

د پورته شمیر قاعدو بڼه څرگندونه یا توضیح: ( ۱۷ . ۱۴ ) د غوښتونکي بڼي سیستم له مخی (پیژند ۱۷ . ۱۰، ۱۷ . ۹)

د کولینیار وکتورونو لپاره  $\phi = 0$  پس لرو:  $\sin \phi = 0$  له دې سره د ( ۱۷ . ۱۳ ) له مخی ( ۱۷ . ۱۵ ) لاس ته راځي. په دیسټریبوتیو قانون په لیدنوالي (پیچي دی) دلته صرف نظر کیري، لیدور والی یی نه څرگندوو. د وکتور ځل شمیرلو لپاره د وکتور کو اور دینا تډوله ښودنی سره د یوون وکتورونو  $e^1, e^2, e^3$  وکتور ځل ته اړیو. د ( ۱۷ . ۱۵ ) شمیر قانون له یوې خوا او له بلې خوا د وکتور ځل پیژند ۱۷ . ۱۰ څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۱۰: ( د یوون وکتورونو وکتور ځل )

$$e^i \times e^i = 0, i=1,2,3; \dots \dots \dots (17,16)$$

$$e^1 \times e^2 = e^3, e^2 \times e^3 = e^1, e^3 \times e^1 = e^2; \dots \dots \dots (17,17)$$

$$e^2 \times e^1 = -e^3, e^3 \times e^2 = -e^1, e^1 \times e^3 = -e^2; \dots \dots \dots (17,17)$$

د دریمی درجی دیتر مینانت کلیمی لاندې (پیژند ۱۱ . ۲) او که څوک یوون وکتورونه د دیتر مینانت د توکو په څیر ومنلی شي، کیدی شي چی د وکتور ځل  $a \times b, b \times a$  کو اور دینا تو په څیر انځور شي

جمله ۱۷ . ۱۱: د وکتورونو

$$b = (b_1, b_2, b_3), a = (a_1, a_2, a_3)$$

وکتوریز ځل یا وکتوري ځله ونه په لاندې کې د ماتریکس په توگه ده:

$$a \times b = \begin{bmatrix} e^1 e^2 e^3 \\ a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \end{bmatrix}; \dots \dots \dots (17,18)$$

$$\begin{aligned} \text{اوبیونه یا حل : د وکتور } a &= (a_1e^1 + a_2e^2 + a_3e^3) \text{ خُل د وکتور} \\ b &= (b_1e^1 + b_2e^2 + b_3e^3) \end{aligned}$$

د توکوډوله (توګي په توګي) وکتوري خُل د جملی ۱۷ . ۱۰ کارونه، دا لاندې ورکوي  
 $a \times b = e^1(a_2b_3 - a_3b_2) + e^2(a_1b_3 - a_3b_1) + e^3(a_1b_2 - a_2b_1)$   
 دا ضرب ارزښه په دا لاس ته راوړنه یا نتیجه د دیترمینانت (۱۸ . ۱۷) د شمیرلو او د  
 پیژند ۱۱ . څخه هم ترلاس راځي

بیلګه ۱۷ . ۶:

$a \times b$  دې وشمیرل شي، که وي

$$a = (-2, 1/2, -1), b = (1/2, -2, 1) \quad (\text{الف})$$

(ب)

$$a = e^1 - 3e^2 + e^3, b = -e^1 - 2e^2 + 3e^3$$

اوبیونه یا حل (الف) (ب) د دې بیلګې اوبیونه دې ګان لستونکي او مینه وال په غاړه  
 واخلی، دا له مخه تیري جملی له مخی پوره روښانه دی.  
 وکتوري خُل د خپل مطلقه ارزښت (۱۷ . ۱۳) هندسي اهمیت په بنسټ د وکتورونو  $a$  ,  
 $b$  څخه خورې شوي منځه واري  $F_p$  څخه ډیر ځیر ه همدابول د  $a$  او  $b$  څخه خور شوي  
 یا غزیډلي دریګوډی منځه واري  $F_D$  شمیرلو لپاره خورا مساعد دی . باور لري

$$F_p = |a \times b|; F_D = \frac{1}{2} |a \times b|; \dots \dots \dots (17, 19)$$

بیلګه ۱۷ . ۷ :

د وکتورونو  $a = (1, 1, 0)$  ,  $b = (2, 0, 1)$  څخه خورې شوي هواري منځ یا دننه په لاندې  
 ډول ده

$$a \times b = \begin{vmatrix} e^1 e^2 e^3 \\ 110 \\ 201 \end{vmatrix} = (1, -1, -2), F_p = |a \times b| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

بیلګه ۱۷ . ۸ :

د دریګودی ABC منځهواره (د هوارې دننه) دې وشمیرل شي چی کونجتيکي يي وي

:

$$A=(2,1,1), B=(4,0,0), C=(1,-1,2)$$

ابیوني :

دریګودی له لاندې وکتورونو څخه غزیري

$$a=B-C=(3,-1,-2),$$

$$b=A-C=(1,2,-1) \text{ او}$$

د a او b وکتوري ځل په لاندې ډول دی

$$a \times b = \begin{vmatrix} e^1 e^2 e^3 \\ 3 1 -2 \\ 1 2 -1 \end{vmatrix} = 3e^1 + e^2 + 5e^3 = (3,1,5)$$

د دریګودی ABC د هوارې دننه یا منځهواره په لاندې ډول ده

$$F_D = \frac{1}{2} |a \times b| = \frac{1}{2} \sqrt{3^2 + 1 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{35}$$

۱۷. ۴ شپات ضرب ( غبرګهواریز ځل موزی سطحیز ضرب)

یادونه: دا یو شپیر خوا بییز تن دی چی مخامخ هوارې یی سره غبرگی او یو په بل ضرور نیغ ولار نه وي. لاندې شکل ۱۷ ۱۱ یی بیلگه او د مسئلی دحل انځورونه ده

پیژند ۱۷. ۱۱:

د درې وکتورونو غبرګهواریز ځل یا شپاتخل [a, b, c] لاندې ځل یا ضرب دی

$$[a,b,c] = (a \times b) \cdot c \quad (17.20)$$

دلته وکتورونه a او b وکتوریز ځل کیري او نتیجه یی بیا د c سره سکالار ځل کیري، یعنی لاس ته راوړنه یا نتیجه یی سکالار ده.

غبرکهوریزخُل حُمکچیز هندسي لیدونکی اهمیت لري. د سکالارخُل (پیژند ۱۷ . ۹ ) سره سم باور لري

$$[a, b, c] = (a \times b) \cdot c = |a \times b| \cdot c = |a \times b| \cdot |c| \cdot \cos \alpha$$

دلته الفا د وکتورونو  $a \times b$  او  $c$  څخه رابند شوی کونج دی. (څیره ۱۷ . ۱۱)

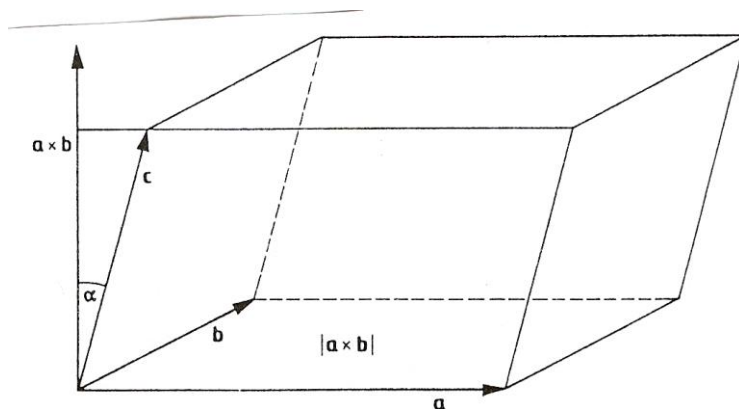


Bild 17.11

دلته د وکتورخُل تعریف سره سم (پیژند ۱۷ . ۱۰)  $|a \times b|$  د  $a$  او  $b$  غزیدلي غبرگ اړخیز دی. برسیره پر دې  $|c| \cdot \cos \alpha$  پرتله برخه ۱۷ . ۲ (په وکتور  $a \times b$  باندې د وکتور  $c$  پروجکشن یا پریوستون په مانا دی. یعنی د  $a, b$  او  $c$  څخه غزیدلي غبرگهوری یا

شپات جگوالی بنایي. پس  $[a, b, c]$  هندسي د وکتورونو  $a, b, c$  څخه غزیدلي غبرگهوریزې ډکي (حجم) په مانا دی.

دغبرگهوریز په مطلقه ارزښت (د غبرگهوریز ډکي یا-حجم) کی تغیر نه راځي که چیرې د وکتورونو پرلپسې ترتیب بدل شي. د غبرگهوریزې ډکي زیاتیز یا مثبت دی، که ورکړ شوي ترتیب یو بنی-سیستم جوړ کړی.

جمله ۱۷ . ۱۲۰:

$$[a, b, c] = [b, c, a] = [c, a, b] = -[a, c, b] = -[c, b, a] = -[b, a, c] \quad (17.21)$$

که وکتورنه په یوه هواره کی پراته وي (کومپلاناړ وي) نو یو شپات د صفر جگوالی سره لاس ته راځي. نو بیا لاندې جمله باور لري

جمله ۱۷ . ۱۳:

( 22 . 17 ) د کومپلاناړ وکتورونو لپاره باور لري  $[a,b,c]=0$

د غبرگهواريز يا شپات خُل شمیرلو لپاره د وکتورونو په کواوردیناتتوگه انځورونه بیرته دیترمینانت انځورونه په کار اچول کيږي

جمله ۱۷ . ۱۴:

د وکتورونو

$$a=(a_1,a_2,a_3),b=(b_1,b_2,b_3),c=(c_1,c_2,c_3)$$

غبرگهواريز خُل په لاندې ډول دی

$$[a,b,c] = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix}; \dots\dots\dots(17, 23)$$

اوبیونه : وکتور خُل  $a \times b$  د جملی ۱۷ . ۱۱ سره سم لاندې اوبیونه لري

$$a.b=(a_2b_3-a_3b_2)e^1-(a_1b_3-a_3b_1)e^2+(a_1b_2-a_2b_1)e^3$$

د  $a \times b$  سکالار خُل د  $c$  سره کواوردیناتډوله په لاندې توگه صورت نیسي.

$$(a \times b).c=[a_2b_3-a_3b_2,-(a_1b_2-a_2b_1),a_1b_2-a_2b_1].(c_1,c_2,c_3)$$

$$= c_1(a_2b_3-a_3b_2)-c_2(a_1b_3-a_3b_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)= a_1(b_2c_3-b_3c_2)-$$

$$a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

دا نتیجه د دیترمینانت ( ۱۷ . ۲۳ ) شمیرلو له لارې هم لاس ته راځي.

بیلگه ۱۷ . ۹:

د وکتورونو  $a=(0,1,2)$  ,  $b=(2,0,1)$  ,  $c=(1,1,0)$

غبرگهواريز - يا شپاتخُل  $[a,b,c]$  په لاندې ډول دی:

$$[a,b,c] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0(0-1.1) - 1(0-1.1) + 2(2.1-0) = 5$$

بیلگه ۱۷ . ۱۰ :

وکتورونه  $a=(1,2,3)$ ,  $b=(3,6,1)$ ,  $c=(0,0,1)$  کومپلنار دي او شپاتځل يي په لاندې ډول دی (دا اوبیونه دي گران لوستونکي او مینه وال په غاړه واخلي)

بیلگه ۱۷ . ۱۱ :

د تیترايدر (دریگودي اړخیزه ، لاندې شکل دی) ډکی (حجم) دي وشمیرل شي (خیره. ۱۷ . ۱۲)

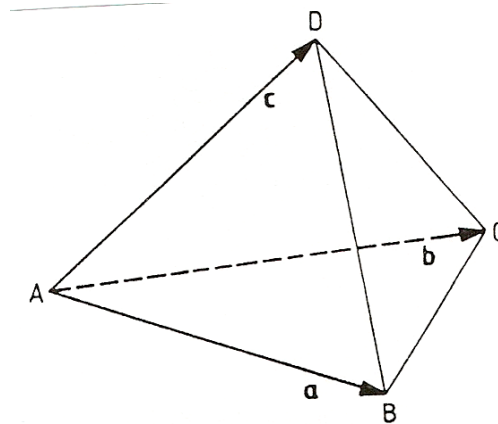


Bild 17.12

د لاندې کونجټکو یا گودټکو سره

$$A=(1,1,0), B=(2,0,1)$$

$$C=(3,-1,2), D=(1,0,3)$$

یادونه : دا پورته په خټه کې ککرتکي دي، ځکه چې دا څیره څلور ککري لري

اوبیونه : دا غوښتونکی ډکی د لاندې وکتورونو څخه خور تیترايد ۶/۱ برخه ده

$$a=B-A=(1,2,0), b=C-A=(2,1,0), c=D-A=(0,1,2)$$

دا تیترايدر یو اهرام دی چې ډکی یا حجم یی ۳/۱ ځل بنسټیزهواره ځل جگوالی د تیترايد

جگوالی د شپات جگوالی سره مساوي دی او د دریگودیهواره یی د شپات نیم د وکتورونو

$a, b, c$  کمیز یا منفي دی



$$[a, b, c] = \begin{vmatrix} 110 \\ 201 \\ 012 \end{vmatrix} = -5$$

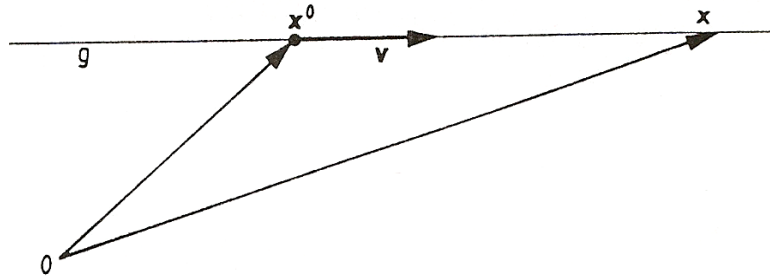
د کچکن لپاره مطلقه ارزښت نیول کیري:  $V = (1/6) \cdot |[a, b, c]| = 5/6$

۱۷. ۵ په شننیزه (تحلیلي) ځمکچ کی د وکتورونو کارونه

په دې برخه کی ځمور هدف دی چی وگورو چی د تحلیلي هندسی پرابلمونه او بیا په ځانگړي ډول تحلیلي هندسی په هوا کی وکتوري مطالعه (د ۱۶ - برخي سره په توپیر) څنگه کیري.

۱۷. ۵. ۱ د یوې کرښی وکتوریزه انځورونه

په فضا یا هوا کی د یوې کرښی ځای د یوه ټکی او لور له لاری یواځنی ټاکلی دی. په کرښه ځای د ټکی د ځای وکتور  $x_0$  په مرسته (چی د کواوردینات سیستم د  $O$  څخه دا ټکی ښایي)، لور یی په وکتور  $V$  (څیرې ۱۷. ۱۳



څیره ۱۷. ۱۳

که  $\lambda$  یو پارامتر وي چی د رییلگونو ډیری کی ځغلي، نو د کرښی  $g$  یو په زړه پور ټکی  $x$  د وکتور زیاتون یا - جمع له لاری په لاندې فورم (ښه) ښوول کیري

$$x = x^0 + \lambda \cdot v, -\infty < \lambda < \infty; \dots \dots \dots (17, 24)$$

د وکتور  $v$  په لور په ټکی  $x_0$  کی د کرښی  $g$  برابر (پارامتر فورم) که پارامتر  $\lambda$  په ریل گونو کی وځغلي نو  $x$  د کرښی ټولو ټکو کی یا د ټکو ترمنځ

خُغلي. د هر ټکي  $x \in g$  لپاره یواځني یوه  $\lambda \in R$  شته یا موجود ده وکتور مساوات

(۱۷، ۲۴) لاندې درې سکالار برابر ونونه نه دي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda.v, x_2 = x_2^0 + \lambda.v, x_3 = x_3^0 + \lambda.v; \dots (17, 25)$$

که کرښه  $g$  په دوه ټکو  $x_0, x_1$  ورکړ شوي وي، نو د لور وکتور یی دی  $v = x_1 - x_0$  او په

دې ډول یی د کرښې برابر ونونه دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0); \dots (17, 26)$$

بیلگه ۱۷ . ۱۲ :

په لاندې ټکو  $x_0 = (1, 2, 3)$ ,  $x_1 = (1, 3, 2)$  ورکړ شوي کرښه د  $v = x_1 - x_0 = (0, 1, -1)$

له امله په لاندې توگه لیکل کيږي

$$x = x^0 + \lambda.v = (1, 2, 3) + \lambda(0, 1, -1)$$

دا لاس ته راوړنه یا نتیجه مور ته لاندې درې سکالار برابر ونونه په گوته کوي

$$x_1 = 1, x_2 = 2 + \lambda, x_3 = 3 - \lambda$$

د کرښې برابر ونونو (۱۷ . ۲۴) پارامتر فورم په هواره کی د کرښې ځانگړی حالت

خوندي لري:  $x, x_0$  او  $v$  وکتورونه دي، هر یو د دوه کومپوننتو سره.

بیلگه ۱۷ . ۱۳ :

په یوې هوارې کې د یوې کرښې د مساواتو فورم:

$$x = (1, 2) + \lambda(1, -1) \quad \text{سکالار برابر ونونونه په گوته کوي.} \quad x_1 = 1 + \lambda, x_2 = 2 - \lambda$$

له دې څخه سری کولی شي چی پارامتر  $\lambda$  له منځه یوسي:

$$\lambda = x_1 - 1, x_2 = 2 - (x_1 - 1) = 3 - x_1$$

که د  $x_1$  په ځای  $x$  او د  $x_2$  په ځای  $y$  ولیکو نو لاس ته راځي  $y = -x + 3$  د

کرښې د برابر ونونو نور مال فورم (۱۶ . ۲) . که غواړو چی معلومه کړو چی ایا ټکی

$x^1$  په کرښه  $g$  پروت دی، نو باید وڅیړو چی کواوردینات یی برابر ون (۱۷ . ۲۵)

پوره کوي، که نه. دا په دی مانا چی ایا دده لپاره یو د  $\lambda$  - ارزښت موجود دی .

بیلگه ۱۷ . ۱۴ :

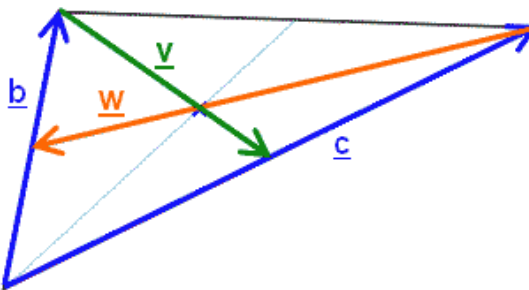
لاندي ټکي  $(2, -2, 1) \dots x^2 = (-1, 4, 3), 2) \dots x^1 = (-1, 4, 3), 2)$  په کرښه  $g : x = (1, 0, 1) + \lambda(-1, 2, 1)$  پراته دي که نه ؟

اوبیونه : (۱) د دې درې برابر ونونو  $3 = 1 + \lambda, 4 = 0 + 2\lambda, -1 = 1 - \lambda$  له جملې د دوهم څخه لاس ته راځي  $\lambda = 2$  او دا ارزښت لومړی او هم دریم مساوات ډکوي (پوره کوي  $2 = 1 + 2, 3 = 1 + 2, -1 = 1 - 2$ ) له دې امله ټکی  $x^1$  په کرښه  $g$  پروت دی. (۲) د دې درې برابر ونونو  $1 = 1 + \lambda, -2 = 0 + 2\lambda, 2 = 1 - \lambda$  له دویم لرو  $\lambda = -1$  دا ارزښت لمړي مساوات پوره کوي، مگر دریم مساوات نه: پس  $x^2$  په کرښه  $g$  نه دی پروت.

که دوه کرښو  $g_1 : x = x^1 + \lambda v; g_2 : x = x^2 + \mu w$  غوڅتکی  $x_S$  موجود وي باید د دواړه کرښو مساوات پوره کړي. په دې مانا چې باید باوري شي:

$$x_S = x^1 + \lambda v = x^2 + \mu w$$

دا وکتور برابر ونه درې سکالار برابر ونونه دي چې د هغو له دوه وو څخه سپری پارامتره  $\mu \wedge \lambda$  شمیرلی شي. که لاس ته راغلي ارزښتونه دریم مساوات پوره کړي، نو یو پریټکی مخ ته شته، که ناپای زیات حلونه مخ ته پراته وي، نو دواړه کرښی یو په بل پرتی دي.



بیلگه ۱۷ . ۱۵ : د لاندي کرښو

غوڅتکی دي پیدا شي :

$$g_1 : x = (1, 1, 0) + \lambda(1, 3, -2), g_2 : x = (1, 2, 2) + \mu(-1, -2, 4)$$

حل یا اوبیونه : غوڅتکي باید دواړه برابر ونونه پوره کړي:

$$1 + \lambda = 1 - \mu, 1 + 3\lambda = 2 - 2\mu, -2\lambda = 2 + 4\mu$$

د درې سکالار برابر ونونو له لومړي مساوت څخه لرو  $\lambda = -\mu$  ددې له مخې او له دوهم

برابرون څخه لاس ته راځي:  $\mu = -1$  نو لرو  $\lambda = 1$ . په دې ډول دریم برابر ون هم

پوره کيږي د غوڅتکي کواور دینات سیستم د کرني  $g_1$  د  $\lambda = 1$  سره لاس ته راځي:

$$x_s = (1, 1, 0) + 1 \cdot (1, 3, -2) = (2, 4, -2).$$

## ۱۷ . ۵ . ۲ د هوارې یا سطحې وکتوریزه انځورونه

د یوې هوارې  $E$  ځای په هوا کې په یوه ټکي  $x_0$  او دوه نا غبرگو وکتورونو  $v$  او  $w$  یواځنی ټاکلی دی. د وکتورونو  $v$  او  $w$  پیلټکي کیدی شي په  $x_0$  پراته ونیول شي یا پراته فرض شي (ش؟؟ څیره شته . ۱۷ . ۱۴).

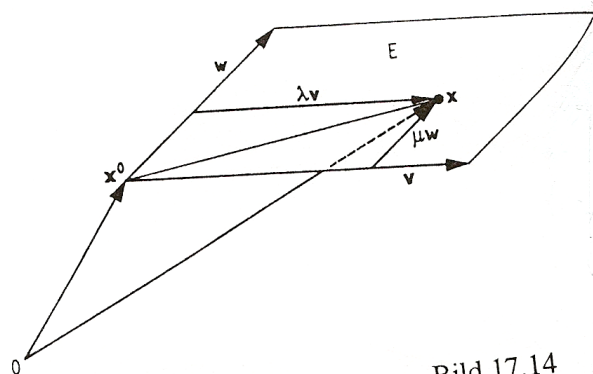
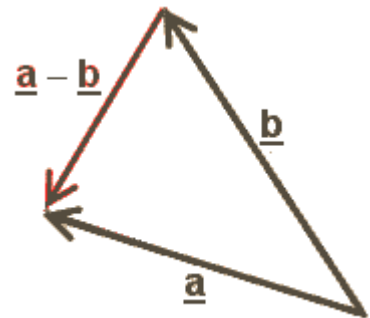


Bild 17.14

که  $\lambda, \mu$  پارامترونه وي چی یو له بل خپلواک د ریيل گڼونو پیري کی خُغلي، نو کیدی شي د هواري E په خوبنه تکی x په لاندې ډول انځور شي (17, 27).....  
 $x = x^0 + \lambda v + \mu w, -\infty < \lambda, \mu < \infty$ .

د هواري E مساوات چی د  $x_0$  تکی کی، له وکتورونو  $v, w$  غزیدلي (پارامتر فورم) هر جوړه اربنت  $\lambda, \mu \in R$  یواځنی یو  $x \in E$  بنایي. وکتور برابرېون (۱۷ . ۲۷) لاندې سکالار برابرېون څرگندوي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda v_1 + \mu w_1, x_2 = x_2^0 + \lambda v_2 + \mu w_2, x_3 = x_3^0 + \lambda v_3 + \mu w_3; \dots (17, 28)$$

که چیرې هواره په درې تکو  $x^0, x^1, x^2$  چی په یوه کرښه نه دي پراته ورکړ شوي وي، نو کیدی شي چی د هواري غزونکي وکتورونه په لاندې ډول انځور شي:  $v = x^1 - x^0, w = x^2 - x^0$  له دې سره د هواري مساوات داسی دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) + \mu(x^2 - x^0); \dots (17, 29)$$

بیلگه ۱۷ . ۱۶:

په درې تکو  $x^0 = (-1, 2, 5), x^1 = (2, 3, -6), x^2 = (1, -4, 3)$  د هواري E ورکړ شوي برابرېون د  $v = x^1 - x^0 = (3, 1, -11), w = x^2 - x^0 = (2, -6, -2)$  له امله په لاندې ډول دي:

$$x = x^0 + \lambda v + \mu w = (-1, 2, 5) + \lambda(3, 1, -11) + \mu(2, -6, -2)$$

ددې نتیجی څخه لاندې سکالار برابرېون لاس ته راځي:

$$x_1 = -1 + 3\lambda + 2\mu, x_2 = 2 + \lambda - 6\mu, x_3 = 5 - 11\lambda - 2\mu$$

۱۷ . ۵ . ۳: د هوارو برابرېون یا- مساوات سکالار فورم (-بڼه)

یوه هواره د یوه تکی  $x_0$  او یوه په هواره نیغ ولاړ وکتور  $n$  له پلوه یاله لاری هم یواځنی ټاکلی ده یا، چی عمودي یا نورمال وکتور (Normalvektor) (پي بولي) ؟؟؟ څیره شته ش . ۱۷ . ۱۵

په هواره E کی دې x یو په خوبنه تکی وي . نو دا له  $x_0$  و x ته بریدي وکتور  $x - x_0$  هم په دې هواره کی پروت دی او وکتورونه  $n$  او  $x - x_0$  یو په بل نیغ ولاړ دي.

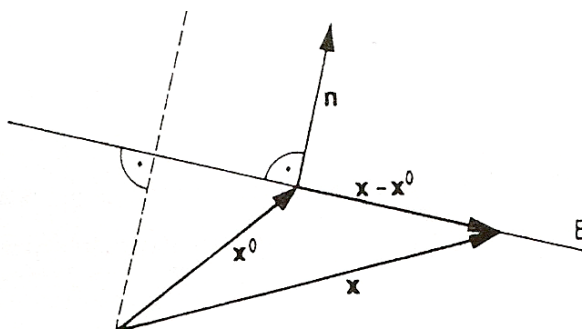


Bild 17.15

په یو بل نیغولارو ( اورتوگونال ) وکتورونوڅخه جوړ شوي سکالارځل صفر دی څیره ( خ . ۱۷ . ۸ دې برتله شي ) دا په دې مانا چی باوري کيږي :

$$n(x-x_0)=0, nx=nx_0=c \quad (17.30)$$

دهواري برابر ونونو سکالار فورم ،  $n$  - عمود وکتور ، د هواري  $x_0$  په ټکی.

بیلگه ۱۷ . ۱۷ :

د هواري برابر ون چی ټکی  $x_0=(2,-1,5)$  په پروت دی او په هغه وکتور  $n=(2,-2,1)$  ( نیغ ) ولار دی

د  $c=nx_0=(2,-2,1) \cdot (2,-1,5)=4+2+5=11$  له مخي په لاندې ډول دی:

$$(2,-2,1) \cdot x=11 \Leftrightarrow 2x_1-2x_2+x_3=11.$$

د هواري مساواتو پارامتر فورم ( ۱۷ . ۲۷ ) په یوه سکالار فورم اړول بدلول ( ۱۷ . ۳۰ ) د پارامتر د له منځه وړلو له لاري لاس ته راځي.

بیلگه ۱۷ . ۱۸ :

د هواري مساوات دي په پارامتر فورم وي:

$$x=(1,-2,4)+\lambda(0,1,-1)+\mu(1,-1,2)$$

دا وکتور برابر ون لاندې درې سکالار برابر ونونه خوندي لري یا په بر کي لري یا

ځایوي:

$$x_1=1+\mu, x_2=-2+\lambda-\mu, x_3=4-\lambda+2\mu$$

له لومړي لاس ته راځي:  $\mu=x_1-1$

له دې سره دا نور دوه برابر ونونه داسې دي

$$x_2 = -2 + \lambda - x_1 + 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -1 + \lambda \wedge$$

$$x_3 = 4 - \lambda + 2x_1 - 2 \Leftrightarrow -x_1 + x_3 = 2 - \lambda \Leftrightarrow$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

د هوارې برابر ونونو سکالار فورم:  $(-1, 1, 1)x = 1$

که غواړو چې څرگنده کړو چې ایا یو ټکی  $x_1$  په هواره  $E$  پروت دی چې برابر ون یی په پارامتر فورم ورکړ شوي ، نو باید مطالعه شي چې ددې کواوردینات ( ۱۷ . ۲۸ ) برابر ون پوره کوي که نه ( بیلگه ۱۷ ، ۱۵ : د کرښی مساواتو ته ورته ) . او یا سړی پارامتر فورم په سکالار فورم بدلوي او څیړي چې د ټکي کواوردینات دا مساوات پوره کوي، که نه .

بیلگه ۱۷ . ۱۹ :

ایا ټکی  $x^1 = (2, -2, 5)$  په هواره  $E : x = (1, -2, 4) + \lambda(0, 1, -1) + \mu(1, -1, 2)$

پروت دی ؟

اوبیونه : د لومړي دوه برابر ونونو  $2\mu = 4 - \lambda + 2$  ،  $5 = -2 + \lambda - \mu$  ،  $2 = 1 + 0\lambda + \mu$

څخه لاس ته راځي  $\mu = 1 \wedge \lambda = 1$

دا دواړه ارزښتونه دریم برابر ون پوره کوي:  $5 = 4 - 1 + 2 \cdot 1$  ، دا په دې مانا چې  $x_1$  په

هواره  $E$  پروت دی. که د هوارې برابر ون په سکالر فورم واپول شي: - )

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$  . بیلگه ۱۷ . ۱۸ دې وکتل شي ( ، نو د ټکي  $x^1$  کواوردینات دې یواځي د

$x_1, x_2, x_3$  لپاره ځاي په ځاي شي ، چې معلوم کړو چې  $x^1$  په هواره  $E$  پروت دی : -

$$2 + (-2) + 5 = 1$$

د یوې هوارې:  $E : n \cdot x = c$  او د یوې کرښی  $g : x = x^0 + \lambda v$  ترمنځ غوڅتکی  $x$  (که

شته وي) (نو هم په  $E$  پروت دی او هم په  $g$  له دې امله د هوارې په برابر ونونو کې د  $x$

لپاره  $x^0 + \lambda v$  ځاي په ځاي کوو (ردو) او په دې ډول یو برابر ون د  $\lambda$  لپاره لاس ته

راځي. که دا برابر ون یواځنی یو اوبی ولري نو غوڅتکی موجود دی ، که اوبی شته

نه وي یا موجود نه وي نو کرښه  $g$  د هوارې  $E$  سره غبرگه ځغلي، که ناپايي ډیر ي

اوبیونی شته وي نو کرښه  $g$  په هواره  $E$  پرته ده.

بیلگه ۱۷ . ۲۰ :

د کرښو  $g: x = (1, 0, 1) + \lambda(-1, 1, 1)$  پروت ځای یا موقعیت دې لاندې هوارو ته وټاکل شي:

$$a) \dots x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, b) \dots 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, c) \dots 2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

اوبیونه : دا چی لټونکی غوڅتکی  $x_s$  د کرښې برابرې پوره کوي نو باوري دي:

$$x_1 = 1 - \lambda, x_2 = \lambda, x_3 = 1 + \lambda$$

$$a) x_1 + 2x_2 + 3x_3 = (1 - \lambda) + 2\lambda + 3(1 + \lambda) = 4\lambda + 4 = -4, \lambda = -2$$

$$x_s = (1 + 2, -2, 1 - 2) = (3, -2, -1)$$

$$b) 2x_1 + x_2 + x_3 = 2(1 - \lambda) + \lambda + (1 + \lambda) = 0. \lambda + 3 = 3$$

لمدا  $\lambda$  په خوښه،  $E$  پرته ده

$$c) 2x_1 + x_2 + x_3 = 2(1 - \lambda) + \lambda + (1 + \lambda) = 0. \lambda + 3 = 4$$

حل نه شته ، نو کرښه  $g$  د سطحې  $E$  سره غبرگه ځغلي.

د دوه سطح

$$n^1 \cdot x = c1 : E1$$

او  $E2$  هوارې:  $n^2 \cdot x = c2$  غوڅکرښه دواړه برابرې ونونه پوره کوي (دا دوه برابرې ونونه دي، هر یو د درې نامعلومو  $x_1, x_2, x_3$  سره). دوه امکانات شته دي چی کرښه  $g$  (که شته وي) را پیدا کړی شو.

۱ - سری یوه واریابله یا اووښتوني په خوښه وټاکي:  $x_1 = \lambda$  (ازاد پارامتر)، نور

دواړه  $i \neq j, j \neq k, k \neq i$  له دواړو هوار مساواتو څخه په  $\lambda$  کې د کرښیزو افادو یا وینو په څیر را پیدا کوي. او په دې ډول کرښیز مساوات لاس ته راځي.

۲ - سړي د کرښې دوه مختلف ځانگړي ټکي  $x^0$  او  $x^1$  را پیدا کوي او په دې ډول د

$$کرښې  $g$  مساوات لاس ته راوړي:  $(x - x_0) = \lambda(x^1 - x_0)$ .$$

بیلگه ۱۷ . ۲۱ :

د دوه هوارو  $E_1$  او  $E_2$  پرېکرښه  $g$  غواړو پیدا کړو. هوارې دې وي :

$$E_1: x_1 - x_2 + x_3 = 3, \quad E_2: 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$$

حل (۱):  $x_1 = \lambda$  په خوښه

$$E_1: -x_2 + x_3 = 3 - \lambda, \quad E_2: -x_2 - 3x_3 = -2\lambda.$$



کمون یا تفریق :  $4x_3 = 3 + \lambda$ ,

په  $E_1$  کی دې ځای په ځای شي :  $-x_2 + 3/4 + \lambda/4 = 3 - \lambda$ ,  $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$

نو لاس ته راځي  $x_1 =$ ,  $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$ ,  $x_3 = (1/4)\lambda + 3/4$

په وکتور لیکدود :  $x = (0, -9/4, 3/4) + \lambda(1, 5/4, 1/4)$

همداسې ( $\Leftrightarrow$ ) له  $\tilde{\lambda} = (1/4)\lambda$  سره لرو

$$x = (0, -9/4, 3/4) + \tilde{\lambda}(4, 5, 1)$$

حل (اوبی) ۲ : په  $E_1$  او  $E_2$  ځای په ځای کوو :  $x_3 = 0$ , پس لاس ته

راځي  $x_1 - x_2 = 3$ ,  $2x_1 - x_2 = 0$  د لاندې حل سره  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = -6$

پس  $(-3, -6, 0) = x^0$  په هوار کې ځانگړې ټکی دی، که ولیکو  $x_2 = 0$  پس

له  $x_1 + x_2 = 3$ ,  $2x_2 - 3x_3 = 0$  د لاندې حل لرو :  $x_1 = 9/5$ ,  $x_3 = 6/5$  او په دې ډول د ه

کرنې  $g$  دوم ټکی :  $x^1 = (9/5, 0, 6/5)$

په ټکو  $x^1$ ,  $x^0$  د کرنې  $g$  مساوات (مقایسه ۱۷، ۲۶) داسې دي

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) = (-3, -6, 0) + \lambda(24/5, 6, 6/5)$$

$\Leftrightarrow$  د  $\tilde{\lambda} = (6/5)\lambda$  سره :

$$x = (-3, -6, 0) + \tilde{\lambda}(4, 5, 1)$$

دا په حل (اوبی) ۱ کی پیدا شوې کرنې  $g$  یو بل ډول انځوردي، ځکه چې د لورو

وکتورونه یو بل ته ورته دي. :  $v = (4, 5, 1)$  او د  $\tilde{\lambda} = -3/4$  لپاره په حل ۱ کې د

کرنې ټکی د حل ۲  $x^0$  دا ټکی لاس ته راځي

$$x = (0, -9/4, 3/4) - (3/4)(4, 5, 1) = (-3, -6, 0)$$

تمرینونه؛

۱ - وکتورونه  $a = (1, 0, -2)$ ,  $b = (-3, -5, 0)$ ,  $c = (4, -1, 7)$  ورکړ شوي دي.

جوړکړی :

$$-a, a+b, a-c, 2a - b + 3c!$$

۲ - وکتور  $a$  چې له ټکي  $x^1 = (3, -5, 7)$  څخه د ټکي  $x^2 = (-2, 4, -1)$  لورته لارښودوي، څنگه دی؟

۳ - وکتور  $a = (3, 21)$  دې پیلټکي  $x^1 = (1, 2, 3)$  ولري. وختیږی چې پایټکي  $x^2$  یې کوم کواوردینات لري؟

۴ - لاندې وکتورونه کوم مطلقه ارزښت لري؟

$$a = (4, -3, 12), \quad b = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}), \quad c = (3, 3, 3)?$$

۵ - وکتورونو  $a = (2, -1, 3)$ ,  $b = (7, 0, 0)$  پورې اړوند یا مربوط یوونو وکتورونه کومی کواوردینات لري؟

۶ - د لاندې وکتورونو یو په بل ولاړوالی یا اورتوگونالیتي دې وپسول شي؟

$$a = (1, 2, 3), \quad b = (3, 0, -1)!$$

۷ - دلته دې  $a_1, b_1$  او  $c_1$  څومره لوي وي، چې وکتورونه

$$a = (a_1, 3, 2), \quad b = (-4, b_1, 2), \quad c = (3, -2, c_1)$$

په وکتور  $d = (2, 1, -3)$  (نیغ) ولاړوي؟

۸ - د

$$a) \quad a = (-2/3, 1/2, 5/4), \quad b = (3/4, -1/3, 2/3),$$

$$b) \quad a = e^1 - e^2 + e^3, \quad b = 2e^1 + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$$

لپاره دې  $a \cdot b$  وشمیرل شي!

۹ - وکتورونه  $a = (3, -4, 12)$  او  $b = (-6, 8, 0)$  یو له بل سره کوم کونج جوړوي!

۱۰ - د گود-یا کونجټکو

$$A = (-2, 0, 3), \quad B = (-6, 4, -1), \quad C(4, -1, 2)$$

سره، د دريگودي کونجونه څومره لوي دي؟

۱۱ - وښايي چې وکتورونه  $a = (2, 4, -6)$  او  $b = (-1, -2, 3)$  یو بل ته کولایني دي!

۱۲ - د

a)  $a = (-4, -1, 3), \quad b = (5, -2, 7)$

b)  $a = e - e^2 + 2e^3, \quad b = 2e + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره  $a \times b$  وشمیری!

۱۳ - د دریګو لوی هواره څومره لویه ده، چې کونجونه یې په لاندې توګه راکړ شوي وي

$A = (-2, 0, 3), \quad B = (-6, 4, -1), \quad C = (4, -1, 2) \quad ?$

۱۴ - د هغه غبرګ اړخیز هواره څومره لویه ده چې له وکتورونو

$a = (-3, 2, 1), \quad b = (5, -3, 2)$

څخه غزیدلي وي ؟

۱۵ - د وکتورونو

$a = (-2, 1, -3), \quad b = (1, -3, 6), \quad c = (1, 2, -3)$

څخه غزولشو کې غبرګوارې کوم ډکي یا حجم لري؟

دا نتیجه هندسي روښانه کړی!

۱۶ - څلورګوډي د لاندې ګوډونو (بېټو): څلور اړخنی [د ادا اړام شکل ده]

$P_1(2, 1, 4), \quad P_2(0, -1, 2), \quad P_3(-3, 6, 4), \quad P_4(2, 2, 2)$

سره کوم ډکي یا حجم لري؟

۲۳ - د لاندې هوارو

الف)  $E_1$  چې له ټکي  $x^0 = (0, 1, 2)$  تیریري او د لاندې وکتورونو

لور لري:  $v = (0, 2, 1), \quad w = (2, 3, -5)$

ب)  $E_2$  چې له ټکو  $x^1 = (2, -3, 4)$  او  $x^0 = (0, 1, 2)$

ټکي  $x^2 = (7, -9, -3)$  څخه تیریري.

پ (  $E_3$  چې د نورمال وکتور  $\mathbf{n} = (0, 2, 1)$  سره  
له ټکي  $\mathbf{x}^0 = (0, 1, 2)$  تیریری، مساوات څنگه دي؟

۲۴ - له تمرینو ۲۳ الف او ب څخه د هوارې مساواتو سکالارینه څنگه ده؟

۲۵ - ودی څیرل شي چی ایا ټکي  $\mathbf{x}^1 = (1, 3, -6)$  همداسی  $\mathbf{x}^2 = (5, -5, 4)$  په هواره

a)  $E_1: \mathbf{x} = (0, 2, -1) + \lambda(1, -3, 5) + \mu(2, -2, 0),$

b)  $E_2: 2x_1 + x_2 - x_3 = 1$

پراته دي!

۲۶ - د کرښو

a)  $g_1: \mathbf{x} = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 3, 1),$

b)  $g_2: \mathbf{x} = (-1, 1, 1) + \lambda(-1, -1, 1),$

c)  $g_3: \mathbf{x} = (3, -2, 0) + \lambda(-1, -1, 1)$

پروتخاي د هوارې  $E: 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18$  سره وټاکي!

۲۷ - د هوارو

الف (  $E_1: 2x_1 + x_2 - x_3 = -1$  او  $E_2: -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$

ب (  $E_1 - 5x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 4$  او  $E_2: x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -8$

غوڅکرښه دي راپیدا شي!

## ۱۸ پرلپسی او لری پرلپسی (لنډ: لری) (sequences and series)

یا ترادف او د ترادف سلسله

### ۱.۱۸ پیل

د میلاد څخه دري سوه کاله د مخه یوه یوناني جنگسالار (نوم یی راڅخه هیبر شوی، ددی بخښنه غواړم) د خپلو عسکرو څخه وپوښتل چی ، «دا د ده له مخه کیشپ چی سل متره یی ترمنځ واټن دی، کله نیولی شي، که دی له دی کیشپ سل ځله تیز ولاړشي؟» دی ته طبعاً د لوستونکو فکر شته چی وخت باید په نظر کي نه وي نیولشوی . ځوابولو ته دی گران لوستونکی پخپله فکر وکړي.

مور د دی برخی څیرنی سره لوری شمیرپوهنی ته راځو. داسی هم نه ده، ځکه چی مور د رییل اعدادو یا - گنونو تعریف سره سم چی هلته مو د اینتروالبنډولو باندې خبري کړي او په دی توگه مو عدد تعریف کړی دی، د شمیرپوهني لوره څیرنه وه. همدا ډول د لاینیزو برابرنونو یا - مساواتو شمیرل او داسی نوري پوره دلوري شمیرپوهني بیلگي لرو، خو دلته دا په گوته کوو چی له دی ځایه د شمیرپوهنی هغه ځای پیل کیري چی شمیرپوهنیز فکر مو په پراخه توگه په کار اچولو ته راهڅوي او له دی امله مو د وړاند نیونه(لنډ: نیونه) یا فرضیه اړینه وه چی دا برخه د لوړو شمیرپوهنو پیل په څیر وښایو یا وپولو.

له دي ځايه هغه اعداد چې مور ورسره مخ کيږو، ځمور لپاره د څيرني کيږي چې هغوي يوي پولی (حد Limit) ته هڅه کوي. دا قوانين هم پوره څيرل کيږي چې وروسته بيا په ديفرنځيال شميرنه کې کار اخستلو لپاره ترې تيريدنه ناشونی ده.

په راتلونکي برخه کې لاندې کنځيپتونه (خيال، چې يو څه څنگه وشي) ځمور لپاره د هڅی وړ گرځي

- ۱ - د کليمی ليدوره يا په خيال کې لرودونکی پيلونه
  - ۲ - د ليدوروالي يا فکر کې راوړيدونکی د ټولو په غوره شننه ( تحليل )
  - ۳ - د شميرپوهنيزو پيژندو يا تعريفونو ټيکوالي،
  - ۴ - هغو وړاندنيونو يا فرضيو ته پاملرنه چې د شميرپوهنی قوانينو د باوريتوب ( اعتبار ) لپاره وي،
  - ۵ - د پرلپسی شننه، چې پوله ارزښت يی په پام کې ونه نيول شي،
  - ۶ - د گڼو دندو حل ، په ځانگړي توگه د ديفرنځيالولو او اينتگرالولو
  - ۷ - بالاخره د پرلپسی لری چې په لنډه توگه یی لری بولو څيرنه .
- دلته هم د دي موضوع د پوره څيرلو ستونځي په کتاب کې د ځاي کموالي له امله شته. داچې دا برخه يوه بنسټيزه برخه ده، نو پيل يی د يوې ساده او پوهورې بيلگې له لارې کوو چې ماته خورا په زړه پورې هم ښکاريږي.

۱۸ . ۲ دگڼونو پرلپسی ( لنډ: پرلپسی ) يا د اعدادو ترادف کلمه

پيليلگه :

پاي جمعه يا - زياتون  $s = 3+7+11+\dots+395+399$  څنگه ټاکل کيدی شي؟  
 کيدی شي چې دا د پوره ستونځو سره د يوگونو گڼونو يو د بل سره جمعی يا يو په بل زياتون له لارې وشميرل شي ترڅو چې د دي اعدادو د ترادف (گڼونپرلپسی) قانونيت پيداشوی وي:  
 هر دوه گاونډي توکي يوله بله په ۴ + توپير کيږي يعنی کمون يا کمښت يي ۴ + دی.  
 کيدی شي چې دا کارونه ( استعمال ) په يوه شکلی او سپماور لاره هم مخ ته لاره شی او دا په لاندې ډول :  
 که لومړی ( ۳ ) او اخر ( ۳۹۹ ) ، دويم ( ۷ ) او له اخر دويم ( ۳۹۵ ) دريم ( ۱۱ ) او له اخر دريم ( ۳۹۱ ) د جمعی اجزا يا زياتوني او داسی نور سره زيات شي. دا په

دې ټولو حالتونو کی همغه زیاتون ارزښت یا د جمع لاس ته راوړنه ورکوي یعنی  
۴۰۲

اوس دې د یوگونو د جمعي اعزاوو د جمعي ارزښت (زیاتونو زیاتون ارزښت)  
راپیداشي:

دویم غړی له لومړی غړي داسی لاس ته راځي چی لومړي غړي ته ۴ ور زیاتیږي او  
همداسی ورپسی تر  $n$  غړي پورې چی دلته و  $(n-1)$  ته 4 ور زیاتیږي ، یعنی:

$$n = (n-1) + 4:$$

که له دې لاس ته راوړنی لومړی غړی له اخر غړي کم کړو یعنی  $399 - 3 = 396$  ، نو  
ددې کمون سره د  $(n-1)$  دا 4 ځله ترې لاس ته راځي. داچی  $396:4 = 99$  دي، نو  
باید  $n$  او له دې امله د پرلپسي د غړو شمیر 100 وي. په دې لاس ته راوړنو سره باید  
100 گڼونه سره زیات شي. که چیرې په پورته توگه 2 زیاتووني یا د جمعي اجزاوي  
سره زیات شي، نو باید له دې سره  $100:2 = 50$  یعنی 50 - ځله زیات 402 ترې لاس  
ته راشي» له دې امله د ټولو رامخ ته شوو د پرلپسی غړو زیاتون دا دی:  
 $20100 = 402 \cdot 50$

دا لوستونکو ته په روځنی ژوند کی هم څرگنده ده لکه د یو ټولگي د زدکونکو په گڼه  
(نمره) ترتیب، یا په یوه سیالی یا مسابقه کی د بریالیو ترتیب او داسی نور موجود دي،  
مور کوبښن کوو چی دا مسئلې د شمیرپوهنی له لارې وڅیړو او وگورو چی په  
شمیرپوهنه کی ترادف یا پرلپسی څه شی دي.  
یادونه: مور له دې وروسته د رادف په ځا یواځي ترادف لیکو.

مور طبعي اعداد یا - گڼونه ۱، ۲، ۳، ۴، ..... لرو ( دلته ټکي ټکي دا مانا لري چی دا  
پرلپسی ناپای اوږدیږي )

که چیرې دا هر پیدایښتي یا طبعي گڼ په یواځنی یو رییل گڼ ترتیب شي یا یواځنی  
ترتیب رییل گڼ وښايي یعنی  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ، نو دلته د طبعي اعدادو او حقيقي  
اعدادو تر منځ یو ترتیب منځ ته راځي. داچی دلته هر طبعي عدد  $n$  په یواځنی حقيقي  
عدد  $a_n$  ترتیب شوی نو دا ترتیب یو فنکشن دی چی د فنکشن پیژندډېری (تعریفډیری  
یا تعریفست) د طبعي اعدادو ډیری  $N$  ده او ارزښتډیری یی د حقيقي اعدادو ډیری  $R$  ده.

دلته د پرلپسی هر توکی  $a_n$  د ځای گڼي (نمرې)  $n$  په بنسټ یواځنی ټاکلی، چی  $n$  ته په  
مسلكي نړیواله پیژندل شوی ژبه ایندکس Index (زیات یې Indices)، چی مانا یې :  
پیژند نڅښنه ده ، وایي. (Index پیژند نڅښنه)

پيژند تعريف: ۱۸. ۱ الف :

د پرلپسی غړو  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$  د يو ترتيب قانونيت يا قانونمندی  $a_n = a(n)$  لاس ته راځي، که د  $n$  لپاره پرلپسی طبعي اعداد  $1, 2, 3, \dots, k$  ځای په ځای شي.

پرلپسی کې  $a_1$  د پرلپسی پيل غړی بلل کيږي. که د پرلپسی اخر غړي پای وي نو پرلپسی پای او که نه نو پرلپسی ناپای ده.

بيلگی

( دا ورپسې مخ کې بيلگي نورې هم روښانه دي )

$$I - ; \dots a_n = n^2, a_1 = 1; a_2 = 4; \dots; a_{10} = 100, \dots; a_k = k^2; \dots$$

{ چيرته چې  $a_n$  يو څلوری (مربع) گڼ دی } |  $a_n \in \mathbb{N}; W = \{ \dots \}$

$$2 - \{a_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}; a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2}; \dots; a_{10} = \frac{1}{10}; \dots; \{a_k\} = \left\{ \frac{1}{k} \right\}$$

$$3 - \{a_n\} = \{(-1)^n\} \Rightarrow a_n = (-1)^n; a_1 = -1; a_2 = 1;$$

$$a_3 = -1, \dots, a_{17} = -1; \dots, a_{22} = 1$$

د دې پرلپسی غړي بدلی نخښی لري، له دې امله پرلپسی بدليدونکی Alternating بلل کيږي

$$4 - \{a_n\} = \left\{ 3 + \frac{1}{n} \right\}; 4, 3 + \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{3}, 3 + \frac{1}{4}, \dots, a_k = 3 + \frac{1}{k}, \dots, a_n = 3 + \frac{1}{n}$$

د ترتيب - يا نظمقاعدي څخه مختلفي گڼونپرلپسی يا د اعدادو پرلپسی منځ ته راځي • دا مو په لنډه توگه پرلپسی ونومولی. چی پيژند یی يو ځل بيا دلته په بل ډول رالندوو.

پيژند ( تعريف ) ۱۸ . ۱ :



که هر یو طبیعی گن.....  $n=1,2,3,4,5$  په یوه یو یواځني ریيل گن باندي ترتیب یا تنظیم شي، نو په ترتیب گڼونه  $a_1, a_2, a_3, \dots$  یوه د گڼونو پرلپسی جوړوي، چی لنډ پرلپسی یی نوموو او ددی لپاره سری داسی لیکي:  $\{a_n\}$ .  
 دې  $a_n$  ته د پرلپسی  $\{a_n\}$  -م غری ویل کیږي.

سری کړی شي چی د ریيلگڼونو یا اعدادو د نمره کولو یا گڼي لپاره له 0 یا 2 او حتی له 1 - یا 2 - څخه پیل وکړي، یعنی:  
 $a_0, a_1, a_2, \dots$  یا  $a_2, a_3, a_4, \dots$  او یا  $a-1, a_0, a_1, a_2, \dots$

گورو چی د پرلپسی لیکلو لپاره ځانگړي متودونه په کار اچول کیږي، کله دا بسیا کوي چی د پرلپسی تعریف لپاره د پرلپسی لومړي څو غړي ولیکل شي

بیلگه ۱. ۱۸: د بیلگي په توگه لیکو:

$$\{a_n\} = 1, 2, 3, \dots$$

او د طبعي اعدادو پرلپسی موخه یا مطلب دی، د جوړولو قانون  $a_n = n$  سره، نو

$$\{a_n\} = \{n\}$$

$$\{a_n\}: 1, 4, 9, 16, 25, \dots \Rightarrow \{a_n\} = \{n^2\}$$

دا په دې معنا چی ( $\Rightarrow$ )

$$\{a_n\}: 2, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5, \dots \Rightarrow$$

$$\{a_n\} = \{(n+1)/n\}$$

$$\{a_n\}: 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, \dots \Rightarrow$$

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right\}$$

$$\{a_n\}: 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots \Rightarrow$$

$$\{a_n\} = \{(n+1)/n\}$$

پیاپیله:

د شمیر پوهنی یوه بنوونکی لپاره په بنوونکي کی یو ځای تش یا خالي دی. ددې ځای لپاره دوه کسانو الف او ب ځانونه کانديد کړی. دوي ته لاندې پوښتنه ورکړ شوي چی اوبی یا حل یی کړي:

پنځه گڼونه ۱،۳،۷،۱۵،۳۱ ورکړ شوي. درې نور گڼونه باید داسی ور واچوی چی دا گڼونپرلپسی موخه وره یا هدفمنده مخ ته ولاړه شي، یا مخودیزه شي.

دواړه کانديدان دا دنده یا پوښتنه په بیلو ډولونو اوبی کوي \*

کانديد الف داسی فکر کوي ..... کانديد ب داسی فکر کوي

لومړی گڼ ۱ ..... لومړی گڼ له ۲ څخه په ۱ کوچنی دی: 1 - 2

دویم گڼ لاس ته راځي، که د لومړي ..... دوم گڼ له ۴ څخه ۱ کوچنی دی :

عدد دوه ځله ته ۱ ورزیات کړو : .....  $2^2 - 1 = 4 - 1$

$$2.1 + 1 = 3$$

دریم گڼ لاس ته راځي که د دوم ..... دریم گڼ له ۸ په ۱ کوچنی دی:

گڼ دوه ځله ته ۱ ور زیات شي.....  $2^3 - 1 = 8 - 1$

$$2.3 + 1 = 7$$

۶- ام گڼ لاس ته راځي که د پنځم ..... ۶- ام گڼ له ۶۴ څخه په ۱ کوچنی دی :

گڼ دوه برابره ته ۱ ور زیات کړو: .....  $2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$

$$2.31 + 1 = 63$$

اوم گڼ دی ..... اوم گڼ دی:  $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$

$$2.63 + 1 = 127$$

گڼ ۸ دی ..... گڼ ۸ دی

$$).....2.127 - 1 = 255 \quad 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$$

د شمیر پوهنی له مخی دا پنځه له مخه ورکړ شوي گڼونه د یوي پرلپسی لومړني پنځه توکي دي. دا پنځه توکي له

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,$

سره بنایو.

اوس زموږ په دې بیلگه کی داسی لرو:  $a_1=1, a_2=3, a_3=7, a_4=15, a_5=31$  که وغوښتل شي چی د دې پرلپسی نور توکي دې هم ورکړ شي، نو دا به تصادفي توکي نه وي، بلکه یوه جوړه شوي قاعده یا لاس ته راوړي قاعده به ورکړي، لکه څنگه چی یو په بل پسې راتلونکی توکی د پخوانی او یا له وروستني توکي څخه د مخه توکی په لاس راځي. ددې تثبیت یا ازموینی وظیفی شمیر پوهنیزه فرمولبندي په لاندې ډول ده:

د گڼو پرلپسی یا د اعدادو ترادف دې د  $a_1=1, a_2=3, a_3=7, a_4=15, a_5=31$  سره ورکړ شوي وي. یو جوړښت قانون یا قانونمندی او توکي  $a_6, a_7, a_8$  وټاکي. د دواړو کاندیدانو د اوبیوني - یا حللارې کیدی شي چی په لاندې توگه انځور شي:

ب	الف
$a_1 = 2 - 1$	$a_1 = 1$
$a_2 = 4 - 1 = 2^{2-1} = 3$	$= 2 \cdot 1 + 1 = 3a_2$
$a_3 = 8 - 1 = 2^3 - 1 = 7$	$a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
..	.
$a_6 = 2^6 - 1 = 63$	.
	$a_6 = 2 \cdot 31 + 1 = 63$

په ټولیزه (عمومی) توگه لاس ته راځي

$(k \in N)$  م- $k$  غړی  $(k \in N \wedge k \geq 2)$  م- $k$  غړی

په کوم کی چی ..... په کوم کی چی  
د  $(k-1)$ - م غړي دوه برابره ته 1 زیات شي ..... له  $a_k = 2^k$  کم شي

$$a_k = 2^k - 1 \qquad a_k = 2 \cdot a_{k-1} + 1$$

دواړو کاندیدانو پر ابل سم حل یا اوبی کړ. کله چی د پرلپسی ۲۰ - م غړي پوښتنه وشوه ، نو کاندید ب په گټه کی دی . ولی؟

دواړه کاندیدان کولی شي چی د پرلپسی هر په خوښه توکی پیدا کړي، له دې امله دوي دا پرلپسی یواځنی وټاکله. کاندید الف دا پرلپسی داسی حل کوي چی تل باید له مخه غړي

څخه ورپسی توکی لاس ته راوړي، یعنی  $a_k = 2 \cdot a_{k-1} + 1$

دا باید هر د پرلپسی د مخه توکی وپیژني. دې ډول شمیرلو ته د پرلپسی رکورزیو (recursive لاتین، له recure په څېر ځغاسته) انځورونه وایي. مگر ب کاندید دا خورا ساده او زر شمیرلی شي، دی چې کوم توکی غواړي پیدا کړي، هغه سملاسي لاس ته راوړی شي يعني  $a_k = 2^k - 1$

دې ډول بنوونلار ته ایکسپلیڅیت (لاتین خورول، روښانول) یعنی روښانه انځورونه وایي.

د لوستونکو لپاره دې دا لاندې د کور کار وي:

د پرلپسی ۲۰ - ۱م غړی وشمیری، رکورسیو او ایکسپلیڅیت. یانې د الف او ب په څیر.

بیلگه:

یوه پرلپسی د  $a_1 = 5$  او  $a_{k+1} = a_k^2 + 1$  سره ورکړ شوي. ددې پرلپسی لومړنی پنځه توکی وشمیری.

حل:

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = a_1^2 + 1 = 25 + 1 = 26$$

$$a_3 = a_2^2 + 1 = 676 + 1 = 677$$

$$a_4 = a_3^2 + 1 = 458329 + 1 = 458330$$

بیلگه :

یوه پرلپسی د  $a_1 = 1$  او  $a_{k+2} = a_{k+1} \cdot a_k$  سره ورکړ شوي ده.

ددې پرلپسی لومړني پنځه غړي وشمیری .

اوبونه:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2$$

$$a_3 = a_2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 \cdot a_2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$a_5 = a_4 \cdot a_3 = 4 \cdot 2 = 8$$

پوښتنی:

د هرې لاندنۍ پرلپسی لمړني ۱۰ غړي وشمیری پرلپسی رکورزیو ورکړ شوي

a)  $a_1 = 2, a_{k+1} = \frac{1}{a_k}$

b)  $a_1 = 0, a_{k+1} = a_k^2 + 1$

c)  $a_1 = 2, a_{k+1} = \frac{1}{a_k} + 1$

d)  $a_1 = 1, a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k + 1$

e)  $a_1 = 2, a_{k+1} = \frac{1}{2} \left( a_k + \frac{2}{a_k} \right)$

f)  $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$

g)  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{k+2} = a_{k+1}^2 \cdot a_k$

h)  $a_1 = 1, a_2 = -2, a_{k+2} = a_k : a_{k+1}$

بیلگه:

یوه پرلپسی د  $ak = k^2/(k+1)$  سره ورکړ شوي ده. د دې پرلپسی لومړني پنځه توکي

و شمیری

اوبی:

$$a_1 = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$$

$$a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

بیلگه:

پرلپسی د  $a_k = \frac{(-1)^k + 1}{k}$  سره ورکړ شوي ده. د دې پرلپسی ۳-م، ۸-م، ۱۵-م او

۲۰-م توکي و شمیری

اوبی یا حل:

$$a_3 = \frac{(-1)^3 + 1}{3} = 0$$

$$a_8 = \frac{(-1)^8 + 1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$a_{15} = \frac{(-1)^{15} + 1}{15} = 0$$

$$a_{20} = \frac{(-1)^{20} + 1}{20} = \frac{1}{10}$$

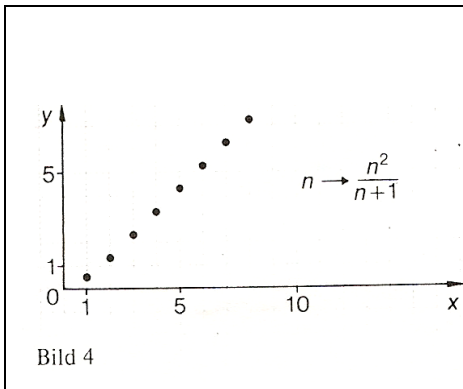
پوښتنی:

د لاندې پرلپسیو لومړني پنځه توکي، ۲۰-م او ۴۵-م توکي وشمیری

$$a) a_k = 2k + 1; b) a_k = k^2 + k; c) a_k = \frac{k^2 + 1}{k + 1};$$

$$d) a_k = \frac{k^2 - 1}{k + 1}; e) a_k = \left(-\frac{1}{10}\right)^{k-1}; f) a_k = 1 - (1/2)^k;$$

$$g) a_k = 1 + (-1/2)^k; h) a_k = 1.2.3 \dots k$$



په کارتيزي کواوردیناتسیستم کی د یوې پرلپسی د گراف انځورونه لاس ته راوړو، که هر توکی د  $x$ -کواوردینات باندې د پرلپسی هر توکی د توکي نمري  $k$  سره کینول شي او د  $y$ -کواوردینات باندې هر غړی د غړي د نمري  $ak$  سره و کینل شي

پوښتنی:

د لاندې پرلپسیو گراف په کارتيزي کواوردیناتسیستم کی وکاری.

له دې ځایه وروسته بیا پیل دی

$$a) a_k = \frac{5k}{k+2}$$

$$b) a_k = 3k + 2$$

$$c) a_k = (-1)^{k-1} \cdot \frac{12}{k}$$

$$d) a_k = \sin \frac{k\pi}{2}$$

$$e) a_1 = \frac{1}{2}, a_{k+1} = 1 - 2a_k$$

$$f) a_1 = 1, a_2 = 1, a_{k+2} = a_{k+1} \cdot a_k$$

## ۱۸. ۲. ۱ یوغریزي یا مونوتونی پرلپسی

بیلگه: د غړو  $a_k = 2k - 1$ 

(ما کله کله توکی او کله کله غړی نومونه کارولی، په په پرلپسی کې یو غړی د پرلپسی غړی دی، او د یوې ډیرې یو د هغې ډیرې توکی دی، دې ته به د گرابو لوستونکو پام وي)

سره پرلپسی هر توکی د مخته تیرشوي توکي لوي دی. دا باور لري:

د ټولو  $k \in N$  لپاره  $a_{k+1} > a_k$

حل یا ثبوت :

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2^{k+1} - 1 \\ &= 2 \cdot 2^k - 1 \\ &= 2^k + 2^k - 1 \\ &= 2^k + (2^k - 1) \\ &= 2^k + a_k \\ &> a_k \end{aligned}$$

تعریف ۱۸ . ۲ الف :

یوه پرلپسی (strictly monotonic increasing) په کلکه – یا کره مونوتون جگیدونکی ده یا کره مونوتون جگيري، که دا لاندې باور ولري :

د ټولو  $k \in N$  لپاره  $a_{k+1} > a_k$

که د یوې پرلپسی لپاره باوري وي

د ټولو  $k \in N^*$  لپاره  $a_{k+1} \geq a_k$

نو دلته د مونوتون جگیدونکی monotonic increasing پرلپسی څخه غږیرو

بیلگه :

د پرلپسی د توکو

$$a_k = 10 - 4k$$

سره هر غږی د مخ ته تیر غږی څخه کوچنی دی.

لرو:

د ټولو  $k \in N^*$  لپاره  $a_{k+1} < a_k$

اوبونه::

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 10 - 4(k+1) \\ &= 10 - 4k - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (10-4k)-4 \\ &= ak - 4 \\ &< ak \end{aligned}$$

پیژند (تعریف) ۱۸ . ۳ :

یوه پرلپسی په کلکه مونوټونیتېټې دونکی یا - لویدونکی strictlymonotonic decreasing ده، که لاندې باور ولري:

د ټولو  $k \in N$  لپاره  $ak < ak+1$

که په یوه پرلپسی کې باور ولري (په پورته کې او همداسې که ورپسې داسې څه راشي کا د ان توکی دی)

د ټولو  $k \in N$  لپاره  $a1 \leq ak+1$

نو دلته د یو غبریز یا موتون لویدونکی- یا مونوټون ټیټېټې دونکی monotonicdecreasing پرلپسی څخه خبرې دي.

پوښتنه:

د یوې پرلپسې دوه گاونډیو غرو توپیر یا کمون یا کمبنت  $ak+1 - ak$ ، کوم شرطونه باید پوره کړي، چې دا لاندې صدق ولري

( الف ) کلکه مونوټون جگیدونکی وي

( ب ) کلکه مونوټون ټیټېټې دونکي یا -لویدونکي وي

( پ ) مونوټون جگيري

( ت ) مونوټون لويري؟

ددي دندې د اوبيوني په مرسته کیدی شي، چې د توکي  $aK=(k+1)/(k+2)$  سره د پرلپسی مونوټونی په لاندې ډول وښوول شي:

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= \frac{(k+1)+1}{(k+1)+2} - \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+2}{k+3} - \frac{k+1}{k+2} \\ &= \frac{(k+2)^2 - (k+1)(k+3)}{(k+3)(k+2)} = \frac{(k^2+4k+4) - (k^2+4k+3)}{(k+3)(k+2)} \\ &= \frac{1}{(k+3)(k+2)} > 0 \quad \forall k \in N^* \end{aligned}$$

له  $ak+1-ak > 0$  همداسې  $(ak+1) > ak$  ( $\leq$ )



د ټولو  $k \in N^*$  لپاره لاس ته راځي، چې ورکړ شوي پرلپسی په کلکه مونوتون جگيري.

### ۱۸ . ۲ . ۲ اريتميتيکي پرلپسی

د پرلپسی ..... 14;11;8;5;2 هر غړی د خپل مخکښ غړي څخه په 3 لوي دی.

ددې پرلپسی لپاره ورکړی

الف) يوه رکورزيډ انځورونه

ب) ( يوه اکسپليڅيت انځورونه.

ځنی پرلپسي د ډيري پاملرني ارزښت لري، په دې ډول چې د دوه په خوښه گاونډيو غړو  $a_k$  او  $a_{k+1}$  ترمنځ يو ثابت ( تل همغه) بلواک يا تابع موجود دی غواړو چې دداسی دوه مهمو پرلپسی ټيپونه ( ډولونه ، رقمونه ) په ځانگړي توگه څرگند راوباسو يا بهتره تر څيرنی لاندې ونيسو:

پيژند ( تعريف ) ۱۸ . ۴ :

په يوه اريتميتيکي- يا گڼونشميرنيزي پرلپسي يالند: شميرنيزي پرلپسی کي د دري توکو منځنی توکی د دواړو دبانډنيو توکو اريتميتيکي منځ دی:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

په يوې ځمکچيزي لپسی(ټاکونی يا پيژند وروسته راځي) کي د دري يو په بل پسې توکو منځ غړی د دوو نورو دبانډنيو غړو ځمکچيز يا هندسي منځ دی:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

لومړی اريتميتيکي يا شميرنيزه پرلپسی څيرو:

غوښتنه(ثبوت): يوه پرلپسی ورکړی، چې لومړی توکی يي ۵ او هر ورپسې راتلونکی

توکی يي له مخ غړي څخه په ۱۲ کوچنی وي

الف) ددې پرلپسی لومړي پنځه توکي وشميری

ب) د پرلپسی رکورزيډ انځورونه ورکړی

پ) د پرلپسی اکسپليڅيت انځورونه وکړی

ت) د پرلپسی ۲۰ م- ( ۲۵ ، ۵۰ ، ۳۵ ، ۱۰۰ ) توکي وشميری.

پېژند يا تعريف ۱۸ . ۵ :

يوه پرلپسی  $a_n$  اريتميتيکي پرلپسی بلل کيږي، که د دوه پرلپسی توکو کمون ياکمښت

$$a_{n+1} - a_n = d \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + d \quad \text{تل ثابت يا همغه وي:}$$

بيلگي:

۱ - لاندنی پرلپسی  $2;5,8;11;14;...;29;32;35;...$

يوه اريتميتيکي Arithmetic پرلپسی ده چی لومړی توکی یی  $a_1 = 2$  او ثابت يا همغه کمون يا کمښت يا فرق یی  $d = 3$  دی.

۲ - دا پرلپسی  $10; -1, -12, -23, -34;...$  اريتميتيکي پرله پسی ده چی لومړی توکی یی  $a_1 = 10$  دی او  $d = -11$  ده

که په هر پل (قدم) کی فنکشن  $a_n; n \in \mathbb{N}$  په همگی زیاته ووني  $d$  زیاتيږي يا همداسی کميږي  $d=0$  (لپاره ثابت دی) نو بايد اريتميتيکي پرلپسی يو لاینيز فنکشن (لاینيز بلواک) وي ( $D = \mathbb{N}$ ) د  $d$  په جگوالي . دا د لاندی اند لاس ته راوړنه يا فکر لاس ته اوړنه ده:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

.

.

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1) \cdot d = a_1 + d \cdot n - d$$

$$f(n) = d \cdot n + (a_1 - d)$$

د لاینيز فنکشن جگوالی  $d$  دی او ثابت يا همغه توکی  $a_1 - d$  نوميږي (ياديږي يا بلل کيږي)

دلته  $a_n = 2n + 1$  د لاینيز فنکشن په څير دی، د  $d = 2$  په جگيدو او  $y$  - محور غوڅی

$$a_1 - d = 1$$

له دې سره د پرلپسی د هر توکي د شمیرلو امکانات ورکړ شوي دي:

تعريف ۱۸ . ۶ :

په اريتميتيکي- يا شميريزه پرلپسی کې  $n$ - م توکی د قاعدې له مخي داسي ورکړ شوی:

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1) \cdot d$$

بيلگی:

۱ - اريتميتيکي پرلپسی ... 53 , 36 , 19 , 2 , ورکړ شوي.

غوبنتونکي  $a_{20}$  ده.

داسی لرو:  $a_1=2, d=17, n=20$

نو  $a_{20}=2+19 \cdot 17=325 \Leftrightarrow a_n=a_1+(n-1) \cdot d$

۲ - ورکړ شوي دي وي

$a_{10} = -44,5$  او  $a_1 = -0,5$

غوبنتونکي  $d$  ده:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Leftrightarrow (a_n - a_1) / (n-1) = d \Rightarrow$$

$$d = (-44,5 + 0,5) / (10-1) = -44 / 9$$

۱۸ . ۲ . ۳ - حکمکچيزي - يا هندسي پرلپسی

اوس غواړو هغه د مخه ويل شوی، د يوه ثابت ( نل ) هماغه ارزښتيز ( فنکشن سره، د پرلپسی ۲ - م تپ د دوه غرو ترمنځ تر څيرنی ونيسو

پيليلگه :

يو هوبنيار زدکړی غواړي په رسختی کې يوه مياشت کار وکړي ( ۲۰ د کار ورځی ).  
دی کار ورکونکی ته وايي، چی دی ارزانه کار ورته کوي او لاندي وړانديز ورته مخ ته کوی « د لمړی ورځي معاش دې 0,05 ډالره وي د دويمی دې دوه ځله د دريمی ورځی د دويمی ورځي دوه ځله څلورمه ورځ د دريمی ورځی دوه ځله او داسي نور، يعنی لمړی ورځ که 0,05 وي نو دومه ورځ 0,10، دريمه ورځ 0,20 او څلورمه ورځ 0,40 ډالره معاش کيری او داسی نور

پوښتنه : د

الف) د ۱ می یا لومړی ورځی

ب) د ۱۵ - می ورځی

پ) د ۲۰ - می ورځی

معاش څومره کيږي. اندازه گن(عدد) که په ډالرو وشميرل شي، لاندې پرلپسی جوړوي:

0,05;0,1; 0,2; 0,4;0,8; 1,6; 3,2,.....

پوښتنه :

ددې پرلپسی لپاره

الف) رکورزيف انځورونه

ب) اکسپليښت انځورونه ورکړی

پيژند ۱۸ . ۷:

( ځمککچيزي يا هندسی پرلپسی ) یوه پرلپسی  $a_n$  هندسي بلل کيږي، که د دوه یو بل پسی غړو ویش ثابت(( تل) همغه)  $q$  وي:

یا په بل ډول یا په بل عبارت : یوه پرلپسی چی لومړی غړی  $a_1 \neq 0$  وي اود همغه گن یعنی ثابت گن  $q$  سره د تل ځلونی څخه لاس ته راشي، ځمککچيزه یا هندسي پرلپسی بلل کيږي.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q; a_{n+1} = a_n \cdot q \quad n \in N; q \in \{R\} \setminus \{0\}$$

+d	+d	+d	+d					یو ځل بیا یوځای
		a1	a2	a3	a4	a5...	اریتمیټیکي پرلپسی	
		a1	a2	a3	a4	a5	هندسي پرله پسی.....	
				.q	.q	.q	.q	

د هندسي پرلپسی دوهم غری د لومړي غري سره د  $q$  حل يا ضرب څخه لاس ته راځي، او دا د ټولو وروسته راتلونکو غرو لپاره باوري دي. له دې امله هندسي پرلپسي  $n \rightarrow$  an اکسپونینشل فنکشن يا د جگړې بلواک بنایي چی د بنسټ په توگه لري:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

.

.

.

$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$$

---


$$f(n) = a_1 \cdot q^{n-1}$$

جمله ۱۸ :

په هندسي پرلپسی کی  $n$ -م توکی د لاندې قاعدې له مخي شمیرل کيږي

$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$$

بیلیگی:

$$1 - a_1=3, q=2, n=15 \Rightarrow a_{15} = 3 \cdot 2^{14} = 29152$$

$$2 - a_1=19, q=1,01, n=100 ; \\ = 50,8826363919,1,01^{99} a_{100} =$$

جمله :

یوه ځمکچیزه پرلپسی د زیاتیز یا مثبت پیلټوکی سره د  $q > 1$  لپاره کله مونتون جگیدونکی ده د  $0 < q < 1$  لپاره کله مونتون لویدونکی ده

غوبنتنه :

د لاندې پرلپسیو ۱۰ لومړني غړي وشمیری

a)  $a_k = \frac{k-2}{k+2}$

b)  $a_k = \sin \frac{k \cdot \pi}{6}$

c)  $a_k = \frac{1}{2} [1 + (-1)^k]$

d)  $a_k = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^k$

e)  $a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$

f)  $a_k = \cos \frac{k \cdot \pi}{2}$

g)  $a_k = k^k$

h)  $a_k = (-1)^{k-1} \cdot k^2$

i)  $a_1 = 3; a_{k+1} = \frac{1}{2} \left(a_k + \frac{4}{a_k}\right)$

k)  $a_1 = 1; a_2 = 2; a_{k+2} = \sqrt{a_{k+1} \cdot a_k}$

l)  $a_1 = 3; a_{2n} = a_{2n-1} - 3; a_{2n+1} = a_{2n} + 4 (n \in \mathbb{N}^*)$

m)  $a_k = 2k - 1 + \frac{1 + (-1)^k}{2} + (-1)^{\frac{(k+3)(k+4)}{2}}$

n)  $a_k = 3 - \frac{1}{2^{k-2}}$

غوبنتنه :

پرلپسی د مونوتون خویونو له پلوه وڅیری

a)  $a_k = \frac{k-2}{k}$

b)  $a_k = \frac{k+4}{k}$

c)  $a_k = \frac{3k}{2k-1}$

d)  $a_k = \frac{1-k^2}{k}$

e)  $a_k = 2^k$

f)  $a_k = 1 - \sin \frac{\pi}{k+1}$

## ۱۸. ۲ الف لری

د هغه کارپلټونکی زدکړي وړاندیز ته بیرته پام راگرځوو، چې د لمری ورځي 0,05 اجوره د دویمي ورځي 0,1 د دریمي ورځي 0,2، د څلورمې ورځي اجوره یی 0,4 ډالره وه او داسی نور.

په هغه وخت کی داسی پوښتنه رامنځ ته شوي:

د  $k$  - می ورځي لپاره زدکړی څومره اجوره اخلی؟

دا مویوي ځمککچیزې لری ته لارښودوي د  $a_k = 0,05 \cdot 2^{k-1}$  سره.

د هغي  $k$  - م توکی د  $k$  - می ورځي اندازه گڼ یا د اجوري معیار دی.

دا په دې مانا چې زدکړی د  $k$  - می ورځي لپاره  $0,05 \cdot 2^{k-1}$  ډالره اجوره یا معاش اخلی.

که غواړو چی وینایو چی زدکړی په لومړیو پنځو ورځو کی څومره اجوره اخلی ، نو باید د لومړیو ورځو اجورې ځککچیزه پرلپسی، د  $a_k = 0,05 \cdot 2^{k-1}$  سره، یو بل سره زیاته کړو

$$0,05+0,1+0,2+0,4+0,8 = 1,55$$

دا زدکړی د لومړیو پنځو ورځولپاره 1,55 ډالره معاش اخلي که د لومړیو n ورځو اجوره په  $S_n$  سره وینایو ، نو یوه لری د لاندې غړو سره لاس ته راځي :

$$s_1 = 0,05 \cdot 2^0 = 0,05$$

$$s_2 = s_1 + 0,05 \cdot 2 = 0,05+0,1 = 0,15$$

$$s_3 = s_2 + 0,05 \cdot 2^2 = 0,15+0,20 = 0,35$$

$$s_4 = s_3 + 0,05 \cdot 2^3 = 0,35+0,40 = 0,75$$

$$s_5 = s_4 + 0,05 \cdot 2^4 = 0,75 + 0,80 = 1,55$$

$$s_6 = s_5 + 0,05 \cdot 2^5 = 1,55+0,160 = 3,15$$

غوښتنه:

پرلپسی ته د ۱۵ - م توکي پورې پر مخ وده ورکړی (مخ وديزه کړی) ، که د ورکړ شوی پرلپسی ، چی توکي یی  $a_1, a_2, a_3 \dots$  دي، دتوکو یو په بل پسې جمعه یا زیاتون جوړ شي

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 & & = a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 & & = s_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 & & = s_2 + a_3 \\ & \cdot & & \\ s_{20} &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{19}) + a_{20} & & = s_{19} + a_{20} \\ & \cdot & & \\ s_{n-1} &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) + a_{n-1} & & = s_{n-2} + a_{n-1} \\ s_n &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + a_n & & = s_{n-1} + a_n \\ s_{n+1} &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + a_{n+1} & & = s_n + a_{n+1} \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \end{aligned}$$

نو یوه پرلپسی...  $S_1, S_2, S_3, \dots$  لاس ته راځي.

پيژند يا تعريف ۱۸ . ۸:

د یوې پرلپسی  $a_1; a_2; a_3; \dots$  څخه جوړه شوې پرلپسی  $S_1; S_2; S_3; \dots$

د رکورزیف انځورونی  $s_1 = a_1; s_n = s_{n-1} + a_n$

سره پرلپسی لری (د پرلپسیو لری) یا لنډ: لری بلل کیږي.

بیلگه:

د  $ak = 2k$  سره جوړې شوې پرلپسی څخه جوړه شوې لری په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 2^1 = 2$$

$$s_2 = s_1 + 2^2 = 2^1 + 2^2 = 6$$

$$s_3 = s_2 + 2^3 = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$$

$$s_4 = s_3 + 2^4 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

⋮

$$s_n = s_{n-1} + a_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$$

⋮

⋮

بیلگه:

د  $ak = (2+3k)/(k+1)$  سره جوړه پرلپسی څخه جوړه شوې لری، په لاندې ډول ده:

$$s_1 = \frac{5}{2}$$

$$s_2 = s_1 + \frac{8}{3} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} = \frac{31}{6}$$

$$s_3 = s_2 + \frac{11}{4} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} = \frac{95}{12}$$

$$s_4 = s_3 + \frac{14}{5} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} = \frac{643}{60}$$



$$s_n = s_{n-1} + \frac{2+3n}{n+1} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} + \dots + \frac{2+3n}{n+1}$$

پوښتنې:

د لاندې پرلپسیو څخه جوړه شوي لری توکي  $S_n$  ورکړی

$$\begin{array}{ll} \text{a) } a_k = 2 \cdot 5^{k-1} & \text{b) } a_k = -3 \cdot 2^{k-1} \\ \text{c) } a_k = 5 \cdot 0.2^{k-1} & \text{d) } a_k = 4 \cdot (-3)^{k-1} \end{array}$$

پېژند ۱۸. ۹:

د اریتمیتیکی پرلپسی توکو یو له بل سره زیاتون یا جمعه په پام کی نیسو، دا څه چی لاس ته راځي، هغه اریتمیتیکی لری پرلپسی (لنډ: لری) بولو:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

موږ دلته بیا پیل بیلگه را اخلو، چی د اریتمیتیکی لری (داد پرلپسی زیاتون پرلپسی ده چی د لری پرلپسی یی غواړو ونومو او په لنډه توگه یی له دي وروسته «لری» و بولو) زیاتون او په تولیزه توگه لری زیاتون وشمیرو. ټاکونکی زیاتون له مختلفو لورو موږ دوه واره لیکو، چی دواړه هغی پسی زیات کری شو یا یی زیاتون ونیولی شو:

$$s_{100} = 3+7+11+\dots$$

$$+395 + 399$$

$$s_{100} = 399+ 395+\dots$$

$$+ 11 + 7 + 3$$

$$s_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

$$+ a_{n-1} + a_n$$

$$s_{100} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \dots$$

$$+ a_2 + a_1$$

$$2s_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\dots+(a_n+a_1)$$

$$2s_n = (a_1+a_n) + (a_1+d+a_{n-1}) + \dots$$

$$+ (a_1+(n-1)d+a_1)$$

$$\begin{aligned}
 2s_{100} &= 402 + 402 + 402 + \dots + 402 + 402 & 2s_n &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) \\
 2s_{100} &= 100 \cdot 402 & 2s_n &= n \cdot (a_1 + a_n) \\
 s_{100} &= 50 \cdot 402 & s_n &= n(a_1 + a_n) / 2 \\
 s_{100} &= 20100 & &
 \end{aligned}$$

د پورته شمیرني سره سم د اریتمیتیکی لری زیاتون دی:  $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

که دلته د  $an = a_1 + (n-1)d$  ځای په ځای شي او د اسانتیا لپاره کموتاتیو قانون وکارل شي، دا په دې مانا چې  $n/2$  ښي خوا ته راوړو، نو لاس ته راوړو:

$$s_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2} = n \cdot a_1 + \frac{(n-1)dn}{2}$$

بیلگي:

$$a_a = 3; d = 7; n = 50 \Rightarrow s_{50} = (2 \cdot 3 + 49 \cdot 7) \cdot 50 / 2 = 8725$$

کنترول:  $a_{50} = +49 \cdot 7 = 346$  او له دې

$$s_{50} = \frac{(3 + 346) \cdot 50}{2} = 8725$$

دویم- یو میراث د شپږو ورونو ترمنځ داسی ویشل کیږي چی هر یو مشر د ورپسی مشر ورور څخه 470 افغانی زیاتي اخلي، د ځوان ورور 17000 افغانی رسیږي.

معلوم کری چی میراث څومره دی او هر یو ورور څومره میراث اخلي؟

$$a_1 = 17000; d = 4700, s_6 = 6/2(2 \cdot 17000 + 5 \cdot 4700) = 172500$$

افغانی

ورونه په لاندې ډول پیسی اخلي

17000 افغانی، 21400 افغانی، 26400 افغانی،

31100 افغانی، 35800 افغانی او 40500 افغانی.

لکه څنگه چی د اریتمیتیکی لری زیاتون پیداکیږي، همداسی د هندسي لری زیاتون هم پیداکیدی شي. عمومي فرمول به په پورتنی ۱ - بیلگه کی ځانگری یا ځانیزشي

(مشخص). د زیاتون فرمول لاس ته راوړلو لپاره د لری  $s_n$  څخه په  $q$  پراخه شوي لری کمو. په دې ډول لری لرو توکو ته لریزي:

۱۸. ۲ الف ۱. ځمکچيزي يا هندسي لریپرلپسي (لنډ: لری):

د ځمکچيزي پرلپسي څخه جوړه شوي لری ځمکچيزه لری بلل کيږي. د هندسي پرلپسي د  $a = 3.2^{k-1}$  څخه جوړه هندسي لری په لاندي ډول ده:

$$s_1 = 3.2^0 = 3$$

$$s_2 = s_1 + a_2 = 3.2^0 + 3.2^1 = 3+6 = 9$$

$$s_3 = s_2 + a_3 = 3.2^0 + 3.2^1 + 3.2^2 = 3+6+12=21$$

.

.

$$s_n = s_{n-1} + a_n = 3.2^0 + 3.2 + 3.2^2 + 3.2^3 + \dots + 3.2^{n-1}$$

.

.

جمله : (اکسپلیخیت انځورونه):

د ځمکچيزي پرلپسي د  $ak = a_1 + (k-1).d$  توکي سره جوړي پرلپسي څخه جوړي شوي هندسي لری لپاره صدق کوي:

$$S_n = a_1 + a_2q + a_3q^2 + \dots + a_nq^{n-1} = a_1(q^n - 1)/(q - 1);$$

$$q \neq 0; S_n = n \cdot a_1 \quad q = 1$$

اوبی: د  $q \neq 1$  لپاره باور لري:

$$s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$$

$$s_n \cdot q = a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

$$s_n - s_n \cdot q = a_1 \qquad - a_1q^n$$

$$s_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

غوښتنه: اوبی د  $q = 1$  لپاره د گرانو لوستونکو د کور کار دی.

دلته یو بل ډول ښوونه پلي کوو: پرلپسی د- $n$  ام غري  $an = 3.2^{n-1}$  سره ورکړ شوي. دلته په دې توگه د لری غري لرو غرو ته رالبريري.

$$s_{15} = 3 + 6 + 12 + \dots + 24576 + 49152 \quad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad +$$

$$s_{15} \cdot 2 = 6 + 12 + \dots + 49152 + 98304 \quad s_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \dots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q \quad -$$

$s_{15} - s_{15} \cdot 2 = 3 - 98304$	$s_n - s_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q$
$s_{15}(1-2) = 3-98304$	$s_n(1-q) = a_1 - a_n \cdot q$
$s_{15} = (3-98304)/(-1)$	$s_n = (a_1 - a_n \cdot q)/(1-q) = (a_1 - a_1 \cdot q^n)/(1-q)$
$s_{15} = 98401$	$s_n = a^1 \cdot (1-q^n)/(1-q)$

له کمون یا کمښت وروسته د لری په کڼه لور ټيک (یواځی) پورته ليکی لومړی توکی او د لاندې کرښی اخرنی توکی پاتيري، نور ټول توکی یوبل سره لري کوي، د بيلگي په توگه  $a_2 - a_1 \cdot q = 0$  او یا  $a_n - a_{n-1} \cdot q = 0$  دا روښانه ده چی  $q$  نه ارزښت صفر او نه ارزښت ۱ اخستلی شي، په لومړي حالت که به مو پرلپسی

$$a_1, 0, 0, 0, 0, \dots$$

لرودی او په دوهم حالت که مو د پرلپسي  $a_1, a_1, a_1, a_1$  سره سر او کار وي

بيلگي:

$$1 - 7; -21; 63; -189; \dots \quad q = -3; a_1 = 7$$

غوښتونکی  $s_7$

$$s_7 = 7 \cdot ((-3)^7 - 1) / -3 - 1 = -15316 / -4 = 3829$$

کنترول:

$$a_7 = a_1 \cdot q^6 = 7 \cdot (-3)^6 = 5103, s_7 = 5103 \cdot (-3)^7 - 1 / (-3)^7 - (-3)^6 :$$

$$= 5103 \cdot 2188 / 2916 = 3829$$

## ۱۸ . ۲ الف ۲ اریتمیتیکی لری

دلته غواړو چی یو ځل بیا لاند مگر د یوه لوی سرلیک په څیر اریتمیتیکی لری ته یو نظر واچوو . یوه د اریتمیتیکی پرلپسی منځ ته راغلی یا جوړه شوی لری اریتمیتیکی لری نوموو . د

$$a_k = 15 + (k - 1) \cdot 4$$

سره جوړه اریتمیتیکی پرلپسی څخه جوړه شوی لری په لاندې ډول ده:

$$s_1 = a_1 = 15$$

$$s_2 = s_1 + a_2 = 15 + (15 + 4) = 15 + 19 = 34$$

$$s_3 = s_2 + a_3 = 15 + (15 + 4) + (15 + 2 \cdot 4) = 15 + 19 + 23 = 57$$

.

.

$$s_n = s_{n-1} + a_n = 15 + (15 + 4) + (15 + 2 \cdot 4) + \dots + (15 + (n-2) \cdot 4) + (15 + (n-1) \cdot 4)$$

.

.

.

جمله : ( د اریتمیتیکی لری اکسپلیسیت انځورونه):

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$$

سره اریتمیتیکی پرلپسی څخه جوړه شوی لری  $s_n$  اریتمیتیکی لری لپاره صدق کوي:

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d) = (n/2) (2a_1 + (n-1)d)$$

اوبی:

$$\begin{aligned}
 s_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-3)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d) \\
 s_n &= (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-3)d) + \dots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \\
 s_n + s_n &= [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \dots \\
 &\quad + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] \\
 2 \cdot s_n &= n \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d] \\
 s_n &= \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]
 \end{aligned}$$

غوښتنه:

وښايي چې  $sn = (n/2)(a_1 + a_n)$  د  $sn = (n/2)(2a_1 + (n-1)d)$  سره په يوه مانا دي

## ۱۸ . ۶ د پرلپسی او لړيو پولی

مورن تر اوسه داسی لړيو سره سر او کار لروده چی اخرنی توکي یی لاس ته راوړونکي وو. داسی لړۍ پایلری بلل کیري. داسي فکر هم کیدی شي چي د لړۍ اخرني غړي موجود نه وي، یعنی لړۍ دې په خوښه دوام پیدا کولی شي. په عمل کی داسی پر ابلمونو سره مخامخ کیرو چی دا مو ناپای لړيو ته هڅوي. دا څرگنده ده، چي داسی لړۍ اریتمیتیکی لړۍ نه دي، کم له کمه به ی اخرنی غړی په پوښتنه کی راتلی او یا د پانډیرو غړو زیاتون، په اریتمیتیکی لړۍ کی بي مفهومه دی، ځکه چی دواړه لویي د n د ارزښت سره په ټولو پولو لویري په هندسی لړيو کی هم په یوه ناپای لړۍ کی د اخرني غړي او یا زیاتون پوښتنه بي مفهومه ده. دا روښانه ده چی د پیل غړی د |q| سره ځل له امله تل جگيري. دا د مثبت او همدادول د منفی q لپاره باور لري.

بیلگي:

۱ - اریتمیتیکی لړۍ 2+3+4+5+..... یو لاس ته راوړونکی د زیاتون یا جمعی ارزښت نه لري، ځکه چی هر راتلونکی زیاته وونی د ټولو پولو لویيري یا جگيري.

۲ - ځمکچیزه یا هندسي لړۍ 2+3+4,5+6,75+10,125+15,1875+..... د لومړي توکي  $a_1 = 2$  او د ویش  $q = 1,5$  سره په ټولو پولو لویيري. یا جگيري نه اخر توکی او نه د جمع ارزښت معلومیدی شي. د پای توکوگن زیاتون sn او اخرنی توکی an شمیریدونکی دی.

۳- ناپای ځمکچیزه یا هندسي لری

$$q = -2 \text{ او } a_1 = 1,5 \text{ د } \dots -966 + 48 - 24 + 122 - 66 + 3 - 1,5$$

سره پای ارزښت زیاتون نه لري، ځکه چې د توکو مطلقه ارزښت د هر مخکي پولی څخه جگيري يا لوييري له دې سره به څرگنده شوي وي چې کله د ناپای هندسي لری د زیاتون ارزښت پای دی.

پیلبلگه :

یو سخی سری غواړي د معیوبو هستوگنځی ته بسپنه ورکړی . په لمری میاشت کی دی ۱۰۰۰ افغانی بسپنه ورکوي او په نورو راتلونکو میاشتو کی د هغی د مخه میاشتی نیمایي یعنی په دومه میاشت کی ۵۰۰ افغانی او په دریمه کی ۲۵۰ افغانی او داسی نور. دلته  $a_1 = 1000$  او  $q = 1/2$  دي. دوخت د کموالي له امله دا لری باید پای لری وي ، مگر مور دې پوښتنی ته تیوریتیکي ځواب ورکوي.

د پای ځمکچیزو لریو لپاره کیدی شي دلته د زیاتون له فرمول  $s_n = 1000(1-0,5^n)/(1-0,5)$  څخه کار واخستل شي، که چیرې  $n$  یو ناپای لوی ارزښت نیولی شوی. که په دې فرمول کی مور ته معلوم ارزښتونه کینول شي، نو لاس ته راځي:

$$s_n = 1000(1-0,5^n)/(1-0,5)$$

$$s = 1000(1-0,5^n)/(1-0,5) = 2000 \cdot (1-(1/2)^n)$$

که  $n$  له ټولو پولو تیر شي، باید د  $(1/2)^n$  له امله دا مات  $(1/2)$  تل کوچنی شي. دې مات  $(1/2)$  باندې کیدی شي، چې د لویو  $n$  توکو لپاره، بالاخره صرف نظر وشي.

دلته روښانوي چې په دې توگه د زیاتون ارزښت یوه ناپای هندسي لری

$$1000 + 500 + 250 + 125 + 65,50 + 32,75 + \dots$$

جوړوي، کومه چی ځان و 2000 ته نژدې کوي او هغه ته هیڅ نه رسیږي. دا سری زیات له زیاته کیدی شي 2000 افغانی خیرات ورکړي.

یادونه : هغه د دې برخې په سر کې پوښتنه هم په همدې توگه ځواب کیدی شي .

پرلپسی او د پرلپسی لری په لوړو شمیرپوهنوی غوره رول لوبوي» ډیری ښوونی ( اوبونې ) په دې ولاړې دي، چې ایا یوه ټیک ټاکلی پرلپسی یوې معلومی یا ټاکلی پولی ته هڅه کوي او که نه؟ چې په اول حالت کی پرلپسی (konvergent) لیمت لرونکی

یاپوله لرونکی (بلل لکیری او په دوهم حالت کی پرلپسی (divergent لیمت یا پوله نه لرونکی) بلل کیری.

بیلگه :

د ... مخ په اول او په درېمې بیلگو کی راوړل شوی پرلپسی دیورگنت یا پوله نه لرونکی ، په ۲ -مه بیلگه کی پرلپسی کونورگنت یا پوله لرونکی ده او د صفر لور ته هڅه کوي یا صفر ته کونورگنت ده یعنی ددې پرلپسی پوله صفر دی. او ۴ -مه بیلگه کی پرلپسی پوله لري او د ۳ لور ته هڅه کوی، یعنی پوله یی ۳ دی.

پرلپسی شته چی د جگیدو سره یوه ټاکلی گڼ ته په خوبنه ورنزدي کیدی شي. د دې پرلپسی د په خوبنه لویو غړو او د دې گڼ کمون ترمنځ بالاخره دومره کوچنی کیری، چی په جبشمیرني باندې هم نه شي شمیرل کیدی .  
مور د پرلپسیو دا ډول ځاننیونی، بی له جب شمیرنی یا جبشمیری، په لاندې بیلگو کی څیرو.

د پرلپسیو غړي

$$1; 1/2; 1/3; 1/4; \dots | 0; 1/3; 2/4; 3/5; 4/6; \dots | 3/29/4; 15/8; 33/16$$

$$1; 1/2; 1/3; 1/4; \dots | 0; 1/3; 2/4; 3/5; 4/6; \dots$$

$$| 3/29/4; 15/8; 33/16$$

د لاندې سره

$$a_k = 1/k \quad | \quad a_k = (k-1)/(k+1) \quad | \quad a_k = 2 + (-1/2)^k$$

د  $k$  د جگیدو سره تل دا پرلپسځانونه ځانونه لاندې گڼونو ته نزدې کوي

$$g=0 \quad | \quad g=1 \quad | \quad g=2$$

د گراف ټکي یی تل د جگیدونکی غړی نمرې  $k$  سره د

$x$  - محور سره غبرگ |  $x$  - محور سره غبرگ |  $x$  - محور ته

د  $y=2$  سره | د  $y=1$  سره او په ریښتونی

له لاندې او پورته بدل | له لاندې راتلونکی

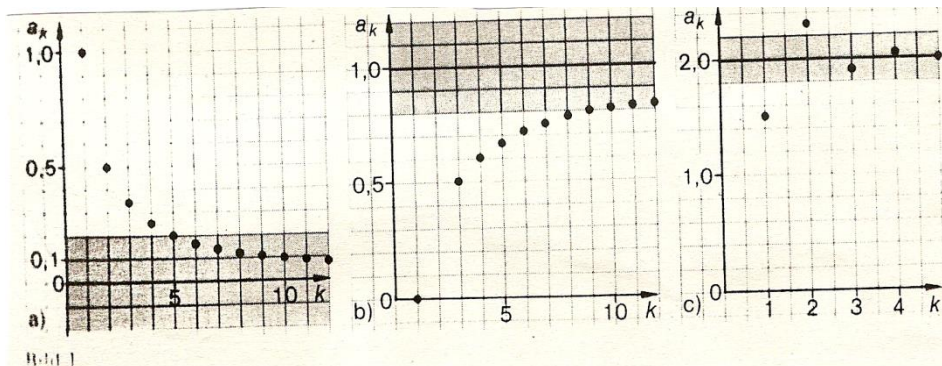
له پورته راتلونکی

راتلونکی

که په کرښه یو دواړو لورو ته پټی وکښل شي



د  $y = 2$  سره د  $y = 1$  سره د  $y = 0$  سره  
 نو د پوره لویي  $k$  نمره توکي سره د پرلپسی ټول غری په دې پټی کی دننه پراته دي.



دا لاندې ديفرنش يا کمون

$$|a_k - 0|$$

$$|1 - a_k|$$

$$|a_k - 2|$$

دا مانا لري، چی د جگیدونکی  $k$  نمرې توکيه خورا کوچنی کیدی شي. دا پوښتنه مو چی د کوم غری  $a_k$  لپاره دا کمون د بیلگي په توگه له 0,0001 کوچنی کیدی شي، لاندې ناسمساوات ته را هڅوي

$$|a_k - 0| < 0,0001$$

$$\left| \frac{1}{k} - 0 \right| < 0,0001$$

$$\frac{1}{k} < 0,0001$$

$$k > 10000$$

$$|1 - a_k| < 0,0001$$

$$\left| 1 - \frac{k-1}{k+1} \right| < 0,0001$$

$$\left| \frac{(k+1) - (k-1)}{k+1} \right| < 0,0001$$

$$\frac{2}{k+1} < 0,0001$$

$$\frac{2}{0,0001} < k+1$$

$$19999 < k$$

$$|a_k - 2| < 0,0001$$

$$\left| 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2 \right| < 0,0001$$

$$\left| \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right| < 0,0001$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k < 0,0001$$

$$k \cdot \lg \frac{1}{2} < \lg 0,0001 \parallel : \lg \frac{1}{2} < 0 (!!)$$

$$k > \frac{\lg 0,0001}{\lg \frac{1}{2}}$$

$$k > \frac{-4}{-0,3010}$$

$$k > 13,29$$

دا په دي مانا، د ټولو پرلپسی غړو د

$$k > 10000$$

$$k > 19999$$

$$k > 13$$

سره کمون  $|a_k - g|$  له  $0,0001$  کوچنی دی .  
د گراف لپاره باور لري، چی دا ټول ټکي د یوې پټی یا تسمی په دننه کی پراته دي  
سور یی  $2.0,0001$  په کرښه د مساوات

$$y = 0$$

$$y = 1$$

$$y = 2$$

$$y = 0 \quad y = 1 \quad y = 2$$

سره پروت وي .

که دا د  $0,0001$  په ځای کی یو په خوښه کوچنی رییل گن ورکړ شي، او وله  
دی وغوښتل شي چی کمون یی له دي گن کوچنی دی نو په ورته توگه مو  
لاندی نامساواتو ته لارښودوي.

$ a_k - 0  < \varepsilon$ $\left  \frac{1}{k} - 0 \right  < \varepsilon$ $\frac{1}{k} < \varepsilon$ $k > \frac{1}{\varepsilon}$	$ a_k - 1  < \varepsilon$ $\left  \frac{k-1}{k+1} - 1 \right  < \varepsilon$ $\left  \frac{(k-1) - (k+1)}{k+1} \right  < \varepsilon$ $\left  \frac{-2}{k+1} \right  < \varepsilon$ $\frac{2}{k+1} < \varepsilon$ $\frac{2}{\varepsilon} < k+1$ $\frac{2}{\varepsilon} - 1 < k$	$ a_k - 2  < \varepsilon$ $\left  2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2 \right  < \varepsilon$ $\left  \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right  < \varepsilon$ $\left(\frac{1}{2}\right)^k < \varepsilon$ $k \cdot \lg \frac{1}{2} < \lg \varepsilon \quad \lg \frac{1}{2} < 0 (!!)$ $k > \frac{\lg \varepsilon}{\lg \frac{1}{2}}$
---	---	--

دا په دي مانا چی : د ټولو پرلپسیو لپاره د

$$k > 1/\varepsilon$$

$$k > 2/\varepsilon - 1$$

$$k > \log \varepsilon / (\log(1/2))$$

سره کمون  $\frac{q^n}{1-q}$  دی .

پرلپسی له دي خوښو سره کونورگنت بلل کیري او گن  $g$  یی پوله.

پېژند ۱۸. ۱ :

یوه پرله پسې کونورگنڅ (Konvergent) لاتین convergere یو د بل په لور ور ځغلیدل یعنی یو بل ته ورنزدېکیدل (بلل کيږي یعنی د یوې ټاکلې پولې په لور هڅیږی، کله چی د هغی غږي د جگیدونکی ایندکس n سره یوې پولې ته په خوبښه نزدې شي. یوه لری کونورگنت یا پوله لرونکی بلل کيږي، کله چی د برخه زیاتون پرلپسی د جگیدونکی n سره یوې پولې ته په خوبښه نزدې شي.

هغه پرلپسی چی د صفر په لور هڅیږي صفرپرلپسی یی بولو هغه پرلپسی چی یوې ټاکلې پولې ته نه هڅیږي. دیورگنت بلل کيږی «) دا وروسته ه تر څیږنی لاندې نیول شوي دي.

جمله :

د ځمکچیزې یا هندسي لری پولې تج ت لنې یا کونور گنت لپاره شرطونه:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |q| < 1$$

که  $|q| < 1$  وي، پس د پای ځمکچیزې لری لپاره د زیاتون فرمول داسی دی

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

د  $q^n$  ارزښت څخه تېرېدی شو یعنی تری صرفنظر کیدی شي، که n پوره لوي وټاکل شي.

جمله :

دناپای ځمکچیزې لری  $a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots$  د زیاتون sn سره پوله  $s = a_1 / (1 - q)$  تیک هلته لري، کله چی  $|q| < 1$

$$n = n_0(\epsilon); \dots (18.7)$$

وي.

جمله:

هره پرلپسی د  $a_k = \frac{b}{k^n}$  ( $b \in R; n, k \in N$ ) سره یوه صفر پرلپسی ده

جمله:

هره پرلپسی د  $a_k = cq^n$  ( $c \in R$ ) سره د  $|q| < 1$  لپاره یوه صفر پرلپسی ده.

دلته غواړو چې دا د پرلپسی د پولی کلیمه لږ نوره هم زوره کړو. د یوې پرلپسی د غړو  $an$  ځانښوونې څیرنه د تل جگیدونکي  $n$  لپاره، وایو چې: که  $n$  د  $oe$  (ناپای) په لورو هڅیري او یا لنډ  $oe \rightarrow n$ ، نو دا مو د پولی ارزښت کلیمي ته بیایي او یا کونورگنځ (convergence). مور پرلپسی  $\{an\} = \{1/n\}$  په پام کې نیسو، د جگیدونکي  $n$  سره، گورو چې د پرلپسی غړي تل  $0$  ته په خوښه یا په زړه پورې وړ نژدې کیري.

که سری هرڅومره کوچنی گڼ  $\varepsilon < 0$  وټاکي د یوه معلوم  $n = n_0(\varepsilon)$  دلته  $n_0(\varepsilon)$  د  $\varepsilon$  په واک کې دی) څخه وروسته ټول گڼونه د  $0$  په  $\varepsilon$ -چاپیریال کې پراته دي

$$|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon). \quad (18.1)$$

سری کړی شي چې دا  $n$  دلته په ساده ډول ورکړي. د  $18.1$  (له امله دی)

$$n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (18.2)$$

د

$$100 / 1 =$$

لپاره  $n_0 = 100$  نو  $|an| < 1/100$  د ټولو  $n > 100$  لپاره، یعنی د  $n = 101, n = 103, \dots, n = 102$  لپاره. د  $1000000 / 1 =$  لپاره لرو  $n_0(\quad) =$

$1000000$  پس،  $|an| < 1/1000000$  د ټولو  $n > 1000000$  لپاره

په لاندې حالت کې سری وایي: چې پرلپسی

$$\{1/n\}$$

کنورگنت ده. هغه د پولی  $a = 0$  لور ته کونورگنت کیري. د دې لپاره لیکو)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

او یا په ساده ډول

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (18.3)$$

د  $1/n$  لیمس د  $n \rightarrow \infty$  لپاره په  $0$  مساوي دی او یا ساده  $0 < 1/n$  په لور ځي (د  $1/n$  لیمس د  $n \rightarrow \infty$  لپاره په  $0$  مساوي دی او یا ساده  $0 < 1/n$  په لور ځي)

د  $\{a_n\} = \{(-1)^n(1 + \frac{1}{n})\}$  لاندې پرلپسی په څیرنه کره لاس ته راځي: د جوړه یا جفت  $n$  لپاره پرلپسی  $a_n$  د  $1 +$  لورته نژدې کیږي او د ناجوړه یا طاق  $n$  لپاره پرلپسی  $-1 -$  لورته نژدې کیږي. دلته سری د دوه پولو  $1 +$  او  $-1 -$  څخه نه غږیږي بلکې د پرلپسی د دوه ډیری شوو ټکو یا ځای راتولشوو ټکو څخه. پرلپسی کونورگنت نه ده بلکه دیورگنت (divergence) (ټیگ: ناتاکی دیورگنس) ده.

پرلپسی  $\{a_n\} = \{n^2\}$  هم دیورگنت ده. دا چې  $a_n$  د جگیدونکی  $n$  سره د  $\infty$  یا ناپای لورته ځي پس د هر څومره لوي ارزښت  $K$  څخه اوږي یا جگیری، نو سری د  $\infty$  په لور د ټاکلی دیورگنت څخه غږیږي.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty \vee n^2 \rightarrow +\infty; \dots \dots \dots (18.4)$$

په پورته کې  $\vee$  د یا لپاره ځای په ځای ده له دې پیل یادونو څخه اوس باید د پولو (حدونو) کلیمی کره وپېژندل شي:

پېژند ۱۸. ۲:

یو پرلپسی  $\{a_n\}$  پوله یا حد  $a$  لري

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n \rightarrow a; \dots \dots \dots (18.5)$$

که د هر یوه (هر څومره کوچنی هم)  $\varepsilon > 0$

$< 0$

لپاره یو  $n_0 = n_0(\varepsilon)$

داسی موجود وي چی باوري وي

$$|a_n - a| < \varepsilon; \dots \dots \dots (18.6)$$

$$n = n_0(\varepsilon); \dots \dots \dots (18.7)$$

وايو چی پرلپسی  $\{a_n\}$  کونورگنت یا په بل عبارت پرلپسی  $\{a_n\}$  د پولی  $a$  په لور کونورگنت کیږي. که پرلپسی داسی پوله ونه لري، نو دیورگنت بلل کیږي (یا دیورگنت کیږي).

که یوې دیورگنتی پرلپسی  $\{a_n\}$  و هر  $\{ \}$  (په خوښه لوی) گن  $K$  لپاره یو  
 $n_0 = n_0(K)$

داسی موجود وي چی باوري وي

$$a_n > K \quad \text{یا} \quad a_n < -K \quad (18.8)$$

د ټول

$$n > n_0(K) \quad (18.9)$$

نو د پرلپسی څرگند یا معلوم دیورگنت بلل کیري د  $oe +$  په لور او یا  $oe -$  په لور او  
 ددی لپاره لیکي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow (\text{په همدې ډول}) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad (18.10)$$

یا لند:

$$a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow (\text{یا په همدې ډول}) a_n \rightarrow -\infty \quad (18.11)$$

که یوه پرلپسی دیورگنت او ټاکلی دیورگنت نه وي، نو ناټاکلی دیورگنت بلل کیري.  
 ددی پرلپس  $\{a_n\} = \{n/n+1\}$  څخه او د لاندې فورم بدلولو

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

اټکل کیدی شي چی دا پرلپسی پوله  $a = 1$  لري، یعنی  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n/n+1) = 1$

اوس باید د  $(18.18)$  تر  $(18.17)$  وښوول شي. دا  $n/(n+1) < 1$  له امله لاس  
 ته راځي:

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n)/(n+1) = 1/(n+1) < 1/n < 1/\epsilon$$

$$د \quad n+1 > n \Leftrightarrow n > (1/\epsilon) - 1 = n_0(\epsilon)$$

د  $1/100 = n_0(\epsilon) = 99$ . نو د ټولو  $n > 99$  لپاره داسی دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

ددې پورته سره کیدي شي چې تصدیق کړو چې: هر  $\epsilon > 0$  ته یو  $n_0(\epsilon) = (1/\epsilon) - 1$  داسې موجود دی چې  $|a_n - 1| < \epsilon$  د ټولو  $n > n_0(\epsilon) = (1/\epsilon) - 1$  لپاره دی.

دا ساده بیلگه د تعریف ۱۸ . ۲ . پر اېلم په گوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا نه وايي چې پوله څرنگه پیدا کیدی شي. مخکي له دې چې پولې ته تگ (کونورگنڅ Konvergenz) وښوولی شو، نو پولې  $a$  ته ضرورت دی. مخکي له دې چې کونورگنڅ اټکل کیدی شي چې دا پرلپسی پوله  $a = 1$  لري، يعني

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n/n+1) = 1$$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوولی شي. دا  $n/(n+1) < 1$  له امله لاس ته راځي:

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n)/(n+1) = 1/(1/n) < 1/n$$

د  $n+1 > n \Leftrightarrow n > (1/\epsilon) - 1 = n_0(\epsilon)$  لپاره .

د  $1/100 = n_0(\epsilon) = 99$  لپاره لرو  $n_0(\epsilon) = 99$ . نو د ټولو  $n > 99$  لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

ددې پورته سره کیدي شي چې تصدیق کړو چې: هر  $\epsilon > 0$  ته یو  $n_0(\epsilon) = (1/\epsilon) - 1$  داسې موجود دی چې  $|a_n - 1| < \epsilon$  د ټولو  $n > n_0(\epsilon) = (1/\epsilon) - 1$  لپاره دی.

ددې پورته سره کیدي شي چې تصدیق کړو چې: هر  $\epsilon > 0$

$$n_0(\epsilon) = (1/\epsilon) - 1$$

داسې شته دی چې

$$|a_n - 1| < \epsilon$$

د ټولو  $n > n_0(\epsilon) = (1/\epsilon) - 1$  لپاره دی .

دا ساده بیلگه د پیژند ۱۸ . ۲ . پر اېلم په گوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا دا نه وايي چې پوله څرنگه پیدا کیدی شي. مخکي له دې چې پولې ته تگ (کونورگنڅ Konvergenz) وښوولی شو، نو پولې  $a$  ته اړتیا شته دی. مخکي له دې چې

کونورگنځ ( ټولې تج تلنه ) وښایو نو باید پوله مو پیژندلې وي یا کم له کمه مو گومان په راغلی وي.

په ټولیزه(عمومي) توگه د  $n_0(\varepsilon)$  شمیرل هم د ستونځو ډک دي. د پولی عملي شمیرلو لپاره داسی عملیو یا کاره ونو ته اړتیا ده، چی بی د پیژند ۱۸ . ۲ د هر وار استعمال څخه ټولی راپیدا کړی شو. له دي پرابلم سره ۱۸ . ۴ -امه برخه ځان مشغولوي. کله کله دا بسوالی یا بسیا کوي چی سری دومره پوه شي چی ایا پوله وجود لري یا شته دی ( ایا کونورگنت کیری ) بی له دي چی هغه وپیژني او یا یی وشمیري. داسی د موجودیت ویناوي یواځي د کونورگنځ کریټیرین ( - خویونه) کولی شي، له کومو څخه چی لاندې یو ورکول کیري. دي ته باید گوته ونیسو چی دا کریټیرین د مخه د پولی پوهیدل ضرور نه نیسي ) دا د مخه نیونه نه ده یعنی فرضیه نه ده .

جمله ۱۸ . ۱ :

هره بنده (محدوده) مونوتون پرلپسی  $a_n$  کونورگنت ده .

دا کریټیریوم څرگند د لیدلو دی. که یوه پرلپسی تل جگیري ( کمیری ، ټیټیری ) او ټاکلی یا معلوم پای ارزښت  $K$  څخه نه اوري (  $K$  څخه نه ټیټیری ) نو باید  $a_n$  یوځاي کی راپنډ شي. دا د مونوتوني له امله یوځاي په یوځاي کی کیدی شي.

یادونه : څه گنونه چی په یوځاي کی سره ډیر راتول شي ما ورته ډیری لیکلي، دا ښه نه ده، ځکه، چی ډیری مي د ډیری یاني د سیټ لپاره کارولی ، نو دلته لیکم، چی «راپنډ» شي .

جمله ۱۸ . ۱ د بیلگي په توگه په دریمه برخه کی راوړلشوي، د طبعي لوگارېتم بنسټ په څیرگن  $e$  سره اړیکو یا رابطو کی استعمال لري . سری د یو څه ستونځو سره ښوولی شي چی لاندې باوري دی

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3.$$

له دي امله دا پرلپسی

$$\{a_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$$

مونوتون او بنده ( محدوده ) ده او د جملی ۱۸ . ۱ له امله کونورگنت ده.



ددې پوله  $e = 2, 71828$  ده (پرتله یا مقایس برخه ۳ . ۱)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (18.12)$$

۱۸ . ۴ د پولی شمیرنه

په دې برخه کې غواړو چې قاعدې ورکړو د کومو په مرسته چې د پیرندلشوو پرلپسی د کونورگنت څخه د نورو کونورگنت لاس ته راوستی شو، او همداسی، چې د هغی په مرسته د پیژندلشوو پرلپسیو د پیژندل شوي پولی ارزښت په مرسته د نورو پرلپسیو پولی ارزښت شمیرل کیدی شي. لاندې بنسټیزه جمله ښایي چې د ځانگړو شرایطو لاندې د گڼونو پرلپسیو سره همداسی شمیرل کیدی شي لکه پخپله د گڼونو سره.

جمله ۱۸ . ۲ :

که پرلپسی  $\{a_n\}$  او  $\{b_n\}$  (پای) پوله ارزښت  $a$  او  $b$  ولري ، یانې

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, \quad (18.13)$$

وي، نو باوري دي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b, \quad (18.14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \quad (18.15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}, \quad b_n \neq 0, b \neq 0, \quad (18.16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b, \quad a_n > 0, a > 0, \quad (18.17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \log a, \quad a_n > 0, a > 0. \quad (18.18)$$

دا جمله دوه گوني وينا کوي: که د پرلپسیو غرو  $a_n$  او  $b_n$  د کونورگنت عددونو پرلپسی د جمعې، تفریق، ضرب (زیاتون کمون ، ځل) او ویش، پوتنڅ یا لوگاریتم نیولو ، د یوي نوي پرلپسی یا ترادف غري لاس ته راولي نو دا نوي پرلپسی (ترادف) کونورگنت ده او

د پولی ارزښت یی په ترتیب د کونورگنتو پرلپسیو یا ترادفون جمع، تفریق، ضرب (زیاتون، کمون، حل)، ویش، پوتنخ او لوگاریم دی. په لاندې کی غواړو یواځی اړیکی (۱۸ . ۱۴) وښایو. د ښوولو لپاره یی د پولی ارزښت پیژند ۱۸ . ۲ څخه غواړوکار واخلو (استعمال کړو). نیونی (۱۸ . ۱۳) دا مانا لري، چی هر

$$< 0$$

ته یو

$$(n_1) \text{ (او یو } n_2)$$

داسی شته دی، چی باوري کوي  $|a_n - a| < \varepsilon$  دتولو  $n > n_1(\varepsilon)$  لپاره،

$|b_n - b| < \varepsilon$  دتولو  $n > n_2(\varepsilon)$  لپاره پس معتبر دي

$$n > n_0(\varepsilon) = \max \{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\} \text{ د تول } |a_n - a| < \varepsilon \text{ او } |b_n - b| < \varepsilon$$

اوس باید یواځی وښایو چی د یوه ټاکلي  $n$  چه  $|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)|$

د هر  $\varepsilon$  لاندې راتیښدی شي. لاندې باور لري

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

دتولو  $n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$  لپاره

په دې توگه (۱۸ . ۱۴) وښوول شوه.

د جملی ۱۸ . ۲ استعمال کی باید برسیره په نیونو یا فرضیو، چی په (۱۸ . ۱۵) تر (۱۸ . ۱۸) پورې شوي ټیک په پام کی ونيول شي چی پرلپسی  $\{a_n\}$  او  $\{b_n\}$  څرگند پای پولی ارزښتونه  $a$  او  $b$  باید ولري. که د بیلگي په توگه،  $a_n \rightarrow \infty$  او  $b_n \rightarrow \infty$  وي، نو فرمول (اجازه نه لرونکی استعمال!) (۱۸ ، ۱۴) په یوه په نامه نټاکلي افادې په لورځی یعنی  $\infty - \infty$

$$(a_n - b_n) \rightarrow \infty - \infty. \quad (18.19)$$

که باور ولري  $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow \infty$ ، نو سری د اجازي نه لرلو استعمال (۱۸ . ۱۵) یوه بله نټاکلی افاده لاس ته راوړي:

$$(a_n \cdot b_n) \rightarrow 0 \cdot \infty. \quad (18.20)$$

په لاندې کی bzw. د همداسی په معنا دی.

$$a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0 \text{ bzw. } a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow \infty,$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ bzw. } \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}. \quad (18.21)$$

د ( ۱۸ . ۱۷ ) استعمال مو د  $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$  همداسې د  $a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow 0$  همداسې حالتونو کې مو درې نورو ناپاکلو افادو ته لارښود وي.  $a_n \rightarrow 1, b_n \rightarrow \infty$  همداسې حالتونو کې مو درې نورو ناپاکلو افادو ته لارښود وي.  $a_n^{b_n} \rightarrow 0^0$  bzw.  $a_n^{b_n} \rightarrow \infty^0$  bzw.  $a_n^{b_n} \rightarrow 1^\infty$ . (18.22)

په پورته انځور شوو اړیکو کې لاندې افادې  $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, \infty^0, 1^\infty$  (18.23)

ناپاکلی افادې بلل کېږي.

داسې پرلپسی چې د جملې ۱۸ . ۲ فورمال استعمال څخه ناپاکلو افادو ته لارښودوي، دیورگنت او یا به مختلفو ارزښتو ته کونورگنت وي. دا یوې ځانگړې څیړنې ته اړ دي.

مخکې له دې چې داپوښتنې ځوابوو، نو باید یوڅو تییپکي پرلپسی وڅیړل شي، کومې مو چې په نامه ناپاکلو افادو ته لارښود وي، که څه هم د جملې ۱۸ . ۲ نیوني یا فرضیې پوره نه وي.

که  $a_n \rightarrow +oe$  او  $b_n \rightarrow +oe$  باور ولري نو طبعاً لاس ته راځي

$a_n + b_n \rightarrow \infty + \infty = \infty$	.....(18.24)
$a_n \cdot b_n \rightarrow \infty \cdot \infty = \infty$	.....(18.25)
$a_n - b_n \rightarrow \infty - \infty = \infty$	.....(18.26)

دا اړیکې ( ۱۸ . ۲۴ ) تر ( ۱۸ . ۲۵ ) طبعاً د ناڅرگندې پولې ارزښت - oe لپاره هم باوري دي.

که  $a_n \rightarrow a$  او  $b_n \rightarrow oe$  وي، نو باور لري :

$a_n + b_n \rightarrow a + \infty = \infty,$	(18.27)
$a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot \infty = \infty, a > 0,$	(18.28)
$a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot \infty = -\infty, a < 0,$	(18.29)
$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{\infty} = 0,$	(18.30)
$a_n^{b_n} \rightarrow a^\infty = \begin{cases} 0 \text{ für } 0 < a < 1, \\ \infty \text{ für } a > 1, \end{cases}$	(18.31)
$a_n^{-b_n} \rightarrow a^{-\infty} = \begin{cases} \infty \text{ für } 0 < a < 1, \\ 0 \text{ für } a > 1, \end{cases}$	(18.32)
$b_n^{a_n} \rightarrow \infty^a = \infty, a > 0.$	(18.33)

د لاندې لپاره باور لري :

$$a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow b, \quad (18.34)$$

$$\frac{b_n}{a_n} \rightarrow \frac{b}{0} = \infty, b > 0, a_n > 0, \quad (18.35)$$

$$a_n^{b_n} \rightarrow 0^b = \begin{cases} 0 & \text{für } b > 0, \\ \infty & \text{für } b < 0, a_n > 0, \end{cases} \quad (18.36)$$

$$\log a_n \rightarrow \log 0 = -\infty, a_n > 0. \quad (18.37)$$

د  $a_n \rightarrow 0$  او  $b_n \rightarrow \infty$  لپاره باور لري يا صدق كوي.

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{0}{\infty} = 0, a_n > 0, \quad (18.38)$$

$$\frac{b_n}{a_n} \rightarrow \frac{\infty}{0} = \infty, a_n > 0, \quad (18.39)$$

$$a_n^{b_n} \rightarrow 0^\infty = 0, a_n > 0. \quad (18.40)$$

په دې همدا اوس بنوول شوي اړيكو كې لاندې افادې ټاكلې افادې دي ( نيونه د ۱۸ ) .  
( ۲۴ ) تر ( ۱۸ . ۴۰ ) پورې دې په پام كې ونيول شي :

$$\begin{aligned} \infty + \infty = \infty, a + \infty = \infty, \infty \cdot \infty = \infty, a \cdot \infty = \infty, \\ \frac{a}{\infty} = 0, \frac{a}{0} = \infty, \frac{0}{\infty} = 0, \frac{\infty}{0} = \infty, \\ \infty^\infty = \infty, a^\infty = \infty (a > 1), a^\infty = 0 (0 < a < 1), \end{aligned} \quad (18.41)$$

$$0^\infty = 0, 0^a = 0 (a > 0), 0^a = \infty (a < 0),$$

$$\infty^a = \infty (a > 0), \infty^a = 0 (a < 0), \log 0 = -\infty.$$

په لاندې بيلگه كې به يو څو گڼونپرلپسی وركړ شي، كومی چی د ټاكلو افادې په لور لارښودوي( بيایي ) :

بيلگه ۱۸ . ۳ :

$$\begin{aligned} n^2 = n \cdot n \rightarrow \infty \cdot \infty = \infty, \quad \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty^{\frac{1}{2}} = \infty, \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0, \\ 2^n \rightarrow 2^\infty = \infty, \quad \frac{1}{n^n} = \left(\frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 0^\infty = 0, \quad \log \frac{1}{n} \rightarrow \log 0 = -\infty, \\ \frac{n}{\sin \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{\infty}{\sin 0} = \frac{\infty}{0} = \infty, \quad n \cdot \log \frac{1}{n} \rightarrow \infty \cdot (-\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

هغه پرلپسی چی د ناتاکلو افادو (۱۸ . ۲۳) . په لور مو لارښودوي، څه ستونځي پيښوي. دا د هوبنيارو فورمبدلولو يا بڼه بدلون په بنسټ په داسی پرلپسو بدليري چی څرگنده - يا تاکلي افادی (۱۸ . ۴۱) په لور مو بيابي يا چی د هغي کونورگنتخاننيوني معلوم دي . لومړی دي يو څو ځانگړي پرلپسی وکتل شي:

پرلپسی مو د  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  غړو سره د نا تاکلی افادی  $1^\infty$  په لور بيابي او د (۱۸ . ۱۲) له مخی پوله ارزښت  $e$  لري. سری بنوولی شي (دلته دي دا نه بنوول کيري) ، چی دا پولی ځاننيونه ساتلي پاتی کيري، که څوک د  $a_n = 1/n$  په ځای يوه په خوښه د صفر پرلپسی  $a_n \rightarrow 0, a_n \neq 0$  وټاکي.

جمله ۱۸ . ۳ :

د هرې په خوښه صفر پرلپسی  $\{a_n\}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, a_n \neq 0,$$

gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{a_n} = e.$$

(18.42)

(18.43)

بيلگه ۱۸ . ۴ : د جملی ۱۸ . ۳ په مرسته د بيلگي په توگه لاس ته راځي:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n(-1)} = \left(\left(1 + \left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n}\right)^{-1} \rightarrow e^{-1} = \frac{1}{e},$$

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{3} \cdot 3} = \left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^3 \rightarrow e^3, \quad \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n = \left(\frac{1 + \frac{2}{n}}{1 - \frac{3}{n}}\right)^n = \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{e^2}{e^{-3}} = e^5,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{2n-3} &= \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n-3}}{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n-3}} = \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n}}{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{-3} \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n}} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^3 \cdot \left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right)^2}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^3 \cdot \left(\left(1 - \frac{3}{n}\right)^n\right)^2} \rightarrow \frac{1^3 \cdot (e^2)^2}{(e^{-3})^2} = e^{10}, \end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2 \cdot \frac{1}{n}} = \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow e^0 = 1,$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \cdot n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^n \rightarrow e^\infty = \infty.$$

د  $a_n \rightarrow 0$  لپاره پرلپسی  $(\sin x)/n$  د ناتاکلی افادې  $0/0$  په لور ځي. لاندې باور لري:   
 جمله ۱۸. ۴: د هرې په خوبه صفر پرلپسی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, a_n \neq 0, \quad (18.44)$$

لپاره باور لري ( د لنډې الماني ژباړه  $a_n = 0$  په لينده کچ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \quad (a_n \text{ im Bogenmaß}). \quad (18.45)$$

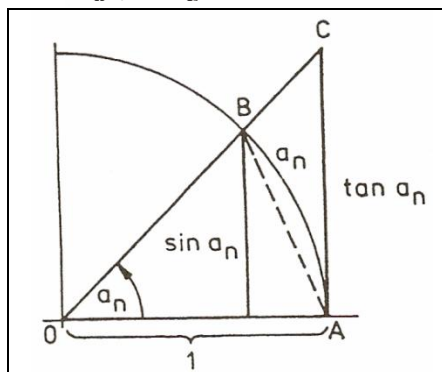


Bild 18.1

او بونه د:  $\sin(-a_n) = -\sin a_n$  له امله او له دې امله

$$\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$$

چې د  $a_n > 0$  لپاره وینول شي. دی، دلته دې (۱۸. ۴۵)

مور دلته د یوونگردي یا واحد داېرې د کوچ بلواک څخه گټه اخلو؟؟؟ څیره ش (۱۸. ۱) د

$$\frac{1 \cdot \sin a_n}{2}, \quad \text{درې گوډي OAB منځهواره:}$$

د گردۍ سکتور یا گردیبرخه OAB منځهوارې

$$\frac{1^2 \cdot a_n}{2}, \quad \text{څخه کوچنی ده، او دا بیرته د درې گوډي}$$

$$\frac{1 \cdot \tan a_n}{2}, \quad \text{OAC د منځهوارې.}$$

څخه کوچنی دی. له دې امله باور لري

$$a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n} \quad \text{او} \quad \sin a_n < a_n$$

او بونه د:  $\sin(-a_n) = -\sin a_n$

$$\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$$

له امله او له دې امله چی

دی، دلته دې (۱۸ . ۴۵) یواځي د  $a_n > 0$  لپاره وښوول شي.

مور دلته د یوونگردي یا واحد داپري د کونج بلواک څخه گټه اخلو؟؟؟ څیره ش ۱۸ .

$$\frac{1 \cdot \sin a_n}{2}, \quad (1) \text{ د درې گوډي OAB منځهواره:}$$

د گردی سکتور یا گردییرخه OAB

$$\frac{1^2 \cdot a_n}{2}, \quad \text{منځهواړي '}$$

$$\frac{1 \cdot \tan a_n}{2}$$

څخه کوچنی ده، او دا بیرته د درې گوډي OAC د منځهواړي.

څخه کوچنی دی.

$$a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n} \quad \text{او} \quad \sin a_n < a_n \quad \text{له دې امله باور لري}$$

او ورپسی

$$\frac{\sin a_n}{a_n} < 1, \quad \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n}, \quad \text{also} \quad \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1.$$

د  $\cos a_n \rightarrow 1$  له امله  $a_n \rightarrow 0$  لپاره فرمول (۱۸ . ۴۵) باور لري.

بیلگه ۱۸ . ۵ : د جملی ۱۸ . ۴ په مرسته د بیلگي په توگه لاس ته راځي:

$$n \cdot \sin \frac{1}{n} = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \rightarrow 1,$$

$$n^2 \cdot \sin \frac{1}{n} = n \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty \cdot 1 = \infty,$$

$$\frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$\sqrt{n} \cdot \tan \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\cos \frac{1}{\sqrt{n}}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1.$$

بیلگه ۱۸ . ۶ :

په پرلپسی  $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ ,

چی د ناکلی افادی  $\infty$  په لور مو هڅوي کوبنس کیري چی د مات باندې او ماتلاندې په یوه گڼ وویشل شي، چی یو تاکلی وینه یا افاده ترې رامنځ ته شي.

$$\frac{3n^2 - n + 1}{2n^2 - 1} = \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{3}{2}, \quad \frac{6n^3 + n - 1}{7n^4 + n^2 + 1} = \frac{\frac{6}{n} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}}{7 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} \rightarrow \frac{0}{7} = 0,$$

$$\frac{6n^3 + n - 1}{2n^2 - 1} = \frac{6n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{\infty}{2} = \infty, \quad \frac{\sqrt{n^2 - 1} + n - 1}{n + 1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + 1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{2}{1} = 2.$$

بیلگه ۱۸. ۷: پرلپسی  $\{a_n - b_n\}$ ، چی ناکلی افادی  $\infty - \infty$  ته مو لارښودوي، کید ی شي د نورو ترمنځ لاندې بڼه غوره کړي:

$$a_n - b_n = \frac{(a_n - b_n)(a_n + b_n)}{a_n + b_n} = \frac{a_n^2 - b_n^2}{a_n + b_n} \rightarrow \frac{?}{\infty}.$$

که صورت پولې ته و هڅیري، نو یوه تاکلی افاده بیا مخ ته لرو.

$$\sqrt{4n^2 + 5n + 2} - 2n = \frac{4n^2 + 5n + 2 - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + 5n + 2} + 2n} = \frac{5 + \frac{2}{n}}{\sqrt{4 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}} + 2} \rightarrow \frac{5}{4},$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{2n-1} = \frac{n+1-2n+1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{2n-1}} = \frac{\frac{2}{n} - 1}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}} \rightarrow \frac{-1}{+0} \rightarrow -\infty,$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \rightarrow \frac{2}{\infty} = 0.$$

تمرینونه:

د ورکړ شوي پرلپسي  $\{a_n\}$  یا ترادف پوله ارزښت  $a$  وشمیرئ (که شتون وري)  $n_0(\epsilon)$  وټاکئ، داسې، چې د ټولو (18.6)  $n > n_0(\epsilon)$ : لپاره باور ولري.

1. a)  $a_n = \frac{n+1}{2n}$

b)  $a_n = \frac{1}{n^2\sqrt{n}} + \frac{1}{n^3}$

ولري.



c)  $a_n = n \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - n$

d)  $a_n = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{10^n} \right)$

د لاندې پرلپسیو  $\{a_n\}$  پوله ارزښت وشمیری، که شتون لري.

1. a)  $a_n = \frac{2n+3}{3-4n}$

b)  $a_n = \frac{4n-3}{2-5n+7n^2}$

c)  $a_n = \frac{5n^2-6}{3n+4}$

d)  $a_n = \frac{3n^3-2n^2+5n-6}{2n^3-4n^2-7n+9}$

e)  $a_n = \left( \frac{3n-2}{3-6n} \right)^2$

f)  $a_n = \frac{(2n-3)^2}{4n+1}$

g)  $a_n = \frac{2 - \sqrt[3]{n^2}}{n^2+5}$

h)  $a_n = \frac{3 + (-1)^n + 2n}{1-3n}$

i)  $a_n = \frac{4\sqrt{n}-10n}{n\sqrt{n}}$

j)  $a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2}$

k)  $a_n = n \left( 1 - \sqrt[5]{1 - \frac{1}{n}} \right)$

l)  $a_n = n \left( \sqrt[3]{n^2+2} - \sqrt[3]{n^2+1} \right)$

2. a)  $a_n = \left( 1 + \frac{4}{n} \right)^n$

b)  $a_n = \left( 1 + \frac{1}{2n} \right)^n$

c)  $a_n = \left( \frac{cn+1}{cn} \right)^n$

d)  $a_n = \left( \frac{2+n}{n-4} \right)^n$

e)  $a_n = \left( \frac{\left( 1 - \frac{2}{n} \right) (n+3)}{n+2} \right)^n$

f)  $a_n = \left( 1 - \frac{5}{n} \right)^{\frac{n}{4}+3}$

g)  $a_n = \sqrt[n]{3}$

h)  $a_n = \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$

2.3. a)  $a_n = [2n^{-1} \cdot \sin(2n^{-1})]$

b)  $a_n = n \cdot \sin \frac{1}{n}$

c)  $a_n = n \cdot \tan \frac{1}{n}$

d)  $a_n = \sqrt{n} \tan \frac{1}{\sqrt{n}}$

e)  $a_n = 2n^2 \cdot \cos \frac{1}{n^2} \cdot \tan \frac{1}{n^2}$

f)  $a_n = \sin \frac{1}{n} - n \cdot \cos \frac{1}{n}$

## 19 پوله ( حد ) "The Limit"

لاندې د اعدادو ترادف (پرلپسي) لرو:

$$(1) \quad 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/n$$

$$(2) \quad 3/2, 4/3, 5/4, \dots, (n+1)/n$$

$$(3) \quad 2, 4, 6, \dots, 2n$$

که  $n$  د ناپاي په لور ياني  $n \rightarrow \infty$  ته لار شي، نو د پورته ترادفونو څخه (1) د صفر په لور، (2) د يو په لور او (3) د ناپاي په لور ځي.

د  $\text{Limit}$  مانا پوله (حد) ده، چې له هغې تيرېدنه اجازه نه لري. په پخواني روم کې د يوه بناړ د قلعي نوم هم  $\text{Limit}$  وو. په رياضياتو کې، لکه په ترادفونو (پرلپسي) کې مو چې وليدل ليميت د پولي يا حد مفهوم لري.

د پولي (حد) د استعمال مفهوم په دې کې پروت دی، چې د يوه فنکشن يا تابع سلوک يا کاروایي داسې وڅيرو لکه څنگه، چې د فنکشن يا تابع (بلواک) د افقي محور (پروت -  $x$  محور (abscissa)) باندې پرلپسي يا ترادفونه يوي پولي يا حد (ټکي) ته ورنزدېکيدنه. دا لکه په پورته ننوتنه کې، چې پرلپسي يا ترادفونه په پروت محور يوي پولي ارزښت ته ځي. وبه گورو، چې پوله يا حد په رياضياتو کې ددې لپاره کارول کيږي، چې مشتق وپيژنو

فعاليت :

-ايا تاسو په ورځني ژوند کې د پولي (حد) د کلمي سره بلد ياست؟

ايا تاسو په ورځني ژوند کې يوه بيلگه راوړئ شئ، چې يوې پولې ته له دواړو لورو، له بڼې و کين لورته او همدارول له کين و بڼې لورته نژدې شئ يا لاړ شئ؟

په يوه ټاکلي ځای کې د توابعو پوله :

يادونه: مور له دې وروسته د پولې په ځای پوله ارزښت لیکو، چې دا ټيک زموږ غوښتنه په گوته کوي.

فعاليت ۱ : يوه تابع  $f(x) = x + 2$  په پام کې ونيسئ، چې پروتولارسيستم يا سيستم

قيمت وضعيه کې ټکی  $P(2,4)$  لري

۱ - د تابع جدول وکارئ.

۲ - د تابع گراف وکارئ

۳ -  $f(2)$  پيدا کړئ او د  $x$  خوزښت ( حرکت ) باندې بحث وکړئ که  $x$  د 2 ارزښت ته دواړو لورونزدي شي

۴ - د  $x$  پولې ته تلنه په گراف ( څيره ) کې روښانه کړئ.

بيلگه ۱ :

يوه تابع  $f(x) = 2x$  او يو ټکی  $P_0$  دې ورکړ شوی وي، چې کواورديناټ (  $3/6$  ) لري.

( ۱ ) د تابع جدول وکارئ

( ۲ ) د تابع کراف يا څيره , وکارئ

( ۳ )  $f(3)$  پيدا کړئ او د  $f(x)$  تلنه باندې بحث وکړئ که  $x$  د "3" ارزښت ته نژدې شي

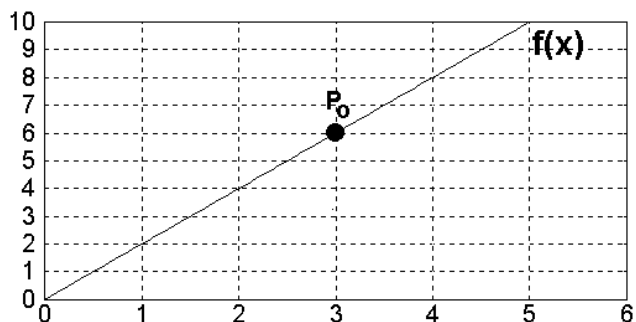
( ۴ ) د  $f(x)$  پولې ته تلنه په څيره کې روښانه کړئ.

اوس غواړو دا پورته فعاليت روښانه کړو:

( ۱ ) د تابع جدول ( دولی يې گران لوستونکي پوره کوي )

x	-1	0	1	2
f(x)	-2	0	2	4

(۲) د تابع څیره



(۳)  $f(3) = 6$  او غواړو د درې ارزښتونو څخه چې له بنې او کینې لور و ۳ ته ورنژدې کېږي و گورو، چې په دې درې ارزښتونو کې چیرته ځي. ددې لپاره لاندې ارزښتونه په دوه جدولونو کې څیرو

$x_k$	$f(x_k)$	$x_k$	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې گورو، چې له کینې لور وکښته ۲ ته نژدې کېږو او له بنې لور له کښته و پورته لورته هم ۲ ته نژدې کېږو. بل جدول پروت کارو. له بنې و کینې لور ته له کینې و بنې لورته

← 1 →

<b>x</b>	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
<b>f(x)</b>	5.96	5.98	5.998		6.002	6.02	6.04

-----> 6 <-----

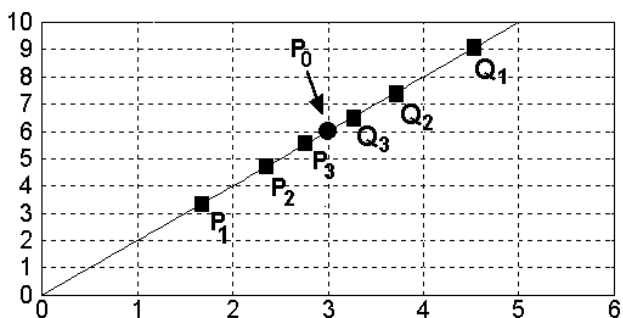
په درې پړاوونو کې د  $f(3)$  قیمت د  $f(x)$  قیمتونو سره پرتله کېږي. که  $x$  و  $3$  ته ورنژدې شي.

دا حالت مور ته په گوته کوي چې: که  $x$  و  $3$  ته ورنژدې شي، نو د  $f(x)$  پوله (حد)، برابر په  $6$  دی او دا داسې لیکو:  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$

۴) اوس پورته گراف په لاندې توګه رسموو او ښی او کین لور ته موخه ور ټکي - لکه په پورته جدول کې - په نڅښه کوو.

د لاندې څیږي له مخې ټکي  $P_1, P_2, P_3, \dots$  په پام کې نیسو، چې ټکي  $P_0$  ته تل له کین لور نژدې کېږي. او همداسې ټکي  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  چې له ښی لور ټکي  $P_0$  ته نژدې کېږي.

کنټل کېږي: هرڅومره، چې پورته ټکي و ټکي  $P_0$  ته نژدې کېږي په همغه کچه د تابع ارزښتونه و  $6$  نژدې کېږي (د ټکي  $P_0(3,6)$  قیمت له امله)



که په گراف کې ځای  $x=3$  ته نژدې شو، نو تابع ارزښت یا فنکشن ارزښت و قیمت (ارزښت)  $6$  ته نژدې کېږي.

وايو:  $6$  د فنکشن  $f(x)$  پوله ارزښت دی د  $x \rightarrow 3$  لپاره (لوستل:  $x$  د  $3$  درې) په لور تلنه).

د پوله ارزښت لپاره مو لیکډول لیکښه (په پرله پسې یا ترادف کې) پیژندلی:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

يادونه: د تابع پوله يا حد په هغه ځای کې چې تابع تعريف نه وي هم کيدی شي شته وي: په پورته کې مو د يوه تابع  $f(x)$  حد په  $x=3$  ځای کې تر څېړني لاندې ونيو. دلته تابع په  $x=3$  کې پېژند يا تعريف درلود. اړين نه ده، چې تابع د  $x=3$  په ځای کې تعريف وي، ځکه چې پوله ارزښت د  $x$  لپاره يواځې د  $x=3$  په نژدې کې تشریح شوي.

پام: په ځنو فنکشنونو يا توابعو کې، پوله يا حد، په داسې ساده ډول لاس ته نه شو راوړی - لکه دمخه - مگر د تابع د ساده بدلون له لارې دا کار سرته رسولی شو. بيلگه ۱:

$$\text{تابع } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}; x \neq 1 \text{ راکړ شوي}$$

(۱) د تابع جدول او گراف وکارئ!

که صور د  $x-1$  سره لنډ کړو، نو لرو:

$$f(x) = x + 1$$

د تابع " $f(x)$ " خوزښت تر بحث لاندې ونيسی که " $x$ " و " $1$ " ته نژدې شي يا همداسې که  $x \rightarrow 1$ . له دواړو يانې له گراف او جدول څخه مور ليکو چې  $f(x)$  د ريل عدد "1" په لور هڅيري. نو

څيره دې گران  
لوستونکي وباسي

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

له دې امله روښانه ده چې تابع په هغه ټکي کې تعريف (پېژند) نه لري، په هغه کې چې پوله (حد) شمېرل شوی.

يادونه: په پورته ډول تابع به سملاسي پسې وڅېړل شي، خو د هر څه لومړی پېژند راوړو:

**پېژند (تعريف):**

تابع  $f(x)$  يوه پوله  $L$  لري، که  $x$  د يوه ريل عدد  $c$  په لور تړلی لار شي، او داسې

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

فعاليت: ايا دا پېژند رښتيا دی، که  $f(c) \neq L$  وي؟

فعاليت: که ولرو:  $|x|$ ، چې تل مثبت دی.

- دا بي له دې مطلق ارزښت څنگه لیکو؟

- ايا دا هغو اعداو کارولی شو، چې يو بل سره د شمېرنيزو نښو له لارې تړلي وي، يعنې چې اعداد يو له بل سره د جمعې، تفریق ... له لارې سره تړلي وي؟

فعاليت: هغه توابع چې په يوه عدد د بېلگې په توگه صفر کې تعريف نه وي، څه بلل کيږي

بيلگه 2: تابع  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ،  $x \neq 0$  راکړ شوي

(1) تابع وليکي، بي له دې، چې سومبول "||" وکاروی:

(2) د تابع گراف وکاروی

(3) د  $f(x)$  ارزښت پيدا کړی، که  $x$  له بني لور و 1 ته نژدې شي

(4) د  $f(x)$  ارزښت پیدا کړی که "x" له کین لور و 1- ته نزدې شي

(5) وینایاست چې تابع  $f(x)$  څو پوله ارزښتونه لري .

یادونه: که یوه تابع چې په صورت او مخرج کې دارونده ارزښت لپاره صفر ولري او دا صفر ځایونه له منځه تللی شي، نو دا ډول تابع په صفر ځای کې بی تعریف ده (یا تشیا! functional gap) لري.

بڼونه:

(۱) تابع بی له سومبول "||" داسې لیکو:

$$f(x) = \begin{cases} 1; x > 0 \\ -1; x < 0 \end{cases}$$

(2) د تابع گراف انځور و:

که څیره ونه کښل شوه ساده ده

(3) د  $f(x)$  ارزښت که  $x$  له بڼې لور و 1 ته نزدې شي، لاندې پوله راکوي

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

(4) د  $f(x)$  پوله ارزښت که "x" له کین لور و 1- ته نزدې شي، په لاندې ډول دی.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$$

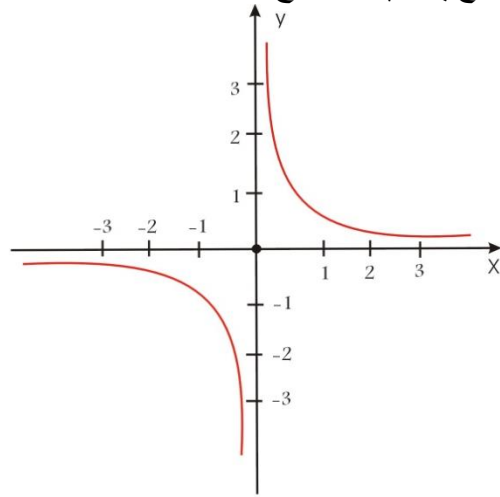
(5) گورو چې  $x$  "دوه"، ارزښتونو (1) او (-1) ته نزدې شي، نو دوه پوله ارزښتونه لري یعنې  $\lim_{x \rightarrow \pm 1} f(x) = \pm 1$ ، نو له دې امله  $f(x)$  پوله نه لري

بیلگه ۳: تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  لرو، چې  $x \neq 0$  دی.



تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  په  $x = 0$  ځای کې تابع ارزښت نه لري یانې په  $x=0$  تعریف نه ده. دا په صفر ځای کې قطب (Pol) لري (۱). لاندې څیره دې وکل شي.

(۱) یادونه: هغه تابع، چې مخرج یې صفر وي او صورت یې صفر نه وي، وایو چې تابع په دې د مخرج صفر ځای کې قطب Pol لري.



و  $x=0$  ته د نزدې کېدو لپاره ترادف (پرلپسی)  $(x_n) = \frac{1}{n}$  ټاکو.

د اړونده تابع ارزښتونو ترادف (پرلپسی)  $(x_n) = \left( \frac{1}{n} \right) = n$  دی.

دا د  $n > 0$  لپاره یو نامحدود صعودي ترادف دی،

او د  $n < 0$  لپاره نزولي-یا متناقص ترادف دی.

دا په دې معنی، چې تابع  $f(x)$  په  $0$  ځای کې حد نه لري. دا هلته یو قطب لري.

قضیه: که تابع " $f(x)$ " همغه پوله (حد) " $L$ " ولري که " $x$ " له بنی یا کین لوري وه " $c$ " ته نزدې شي، نو پوله (حد) شته دی او د " $L$ " سره برابره ده.

## د حدونو خویونه یا خواص : " Properties of Limits "

فعالیت :

په دې برخه کې د ثابتو – او کټمټ توابعو Identity function حدونه وشمیری

د لیمیت خویونو څخه کار واخلی

د پولینوم تابعو حد (پوله) پیدا کړی

پوهیږو: په ریاضیاتو (شمیرپوهنه) کې ټول توابع چې راځي د ساده توابعو ګډوله والی combination دی، لکه د توابعو جمع (زیاتون، ضرب (ځل) وپش او زنجیرونه composition. دلته دوه غوره او ساده توابع  $f(x) = c$  او  $g(x) = x$  شته، که دواړه توابع سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$h(x) = x + C, \text{ یا } L(x) = cx, \text{ یا } m(x) = x^2 \text{ او داسې نور}$$

هڅه: د توابعو  $f(x) = x, g(x) = x - 2$  څخه کار واخلی، چې درې نورې توابع ترې لاس ته راوړی

فعالیت :

ایا د یوې تابع پوله کېدی شي د تابع له حل څخه پیدا شي؟

د بېلګې په توګه، که ولرو

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 3 \lim_{x \rightarrow 2}$$

نو دا تابع ولیکی.

یادونه: د پورته کارونې په څیر همدا څه د هرې ثابتې تابع لپاره رښتیا دی

د یوې ثابتې پوله ارزښت: که  $a$  او  $b$  ثابتې وي، نو  $\lim_{x \rightarrow a} c = c$  باور لري

په همدې ډول کټمټ يا ايډنټيک تابعو  $f(x) = I(x) = x$  لپاره هم لرو ، که " c " کوم حقيقي عدد وي، نو x و c ته نږدې کيږي. دا ،، ټيک داسې ده لکه،، چې  $f(x) = I(x)$  و c ته نږدې شي فعاليتونه:

1) که  $f(x) = x$  ،  $g(x) = 2$  وي ، نو لرو :

$$g(x) = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \quad 1) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \quad ,$$

2) که وي  $h(x) = f(x) + g(x)$  لرو

$$h(x) = x + 2$$

3) د  $h(x)$  گراف

رسم دې گران لوستونکي د ځانونو لپاره وکارې

4)

← 1 →

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

→ 3 ←

تاسو په ياد ولری يا وليکی

$h(x) = \lim_{x \rightarrow 1}$	$x + 2 = 3 \lim_{x \rightarrow 1}$
---------------------------------	------------------------------------

او  $h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \lim_{x \rightarrow 1}$

هڅي

( ۱ ) که  $f(x) = -2$ ،  $h(x) = x$  وي، پيدا کړی

a)  $f(x) \pm h(x)$

b)  $f(x) \cdot h(x)$

( ۲ ) وهڅیږی، چې د پورته توابعو د  $a$  او  $b$  لپاره پولي وټاکي، که  $x$  عدد 3 ته نږدې شي.

( ۳ ) که  $g(x) = x$  وي، نو پيدا کړی  $\lim_{x \rightarrow 4} 4x$ .

( ۴ ) که  $h(x) = x$ ،  $f(x) = -2$  وي پيدا کړی

a)  $f(x) + h(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + h(x))$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} h(x)$

بیلگه ۳ : د  $g(x) = \sqrt{3-x}$  گراف وکارئ او پيدا کړی

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  ، b)  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)$

حل:

دلته دي گراف وکښل شي....

له گراف څخه

$$g(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2}$$

الف- په لاندي توگه مخ ته خو:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (3-x)} = \sqrt{1} = 1$$

ب) له گراف څخه  $g(x) = 2 \lim_{x \rightarrow -1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} (3-x)} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{يادونه:}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3^-} (3-x)} = \sqrt{0} = 0$$

گڼ دلايل شته چې پولې شميرنه ساده کوي، مور. به دا لاندې بي له ثبوته ومنو که  $f$  او  $g$  توابع وي  $C$  او  $L$  او  $M$  رييل عددونه وي، داسې چې باور ولري:

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M, \text{ او } f(x) = L, \lim_{x \rightarrow c}$$

$$1) \quad ((f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow c}$$

$$= \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L + M$$

$$2) \lim_{x \rightarrow c} (f-g)(x) =$$

$$((f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L - M \lim_{x \rightarrow c}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow c} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \cdot M$$

$$4) \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}; (M \neq 0)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

د)  $f(x) \geq 0$  لپاره او د ټولو  $x$  ارزښتونو لپاره چې  $c$  ته نژدې کيږي.

پوینتنہ : مور لاندی تابع لرو:

$f(x) =$	$x^2 - 1$	$x \leq 0$
	$x - 1$	$0 < x < 2$
	$2x + 1$	$x \geq 2$

پیدا کری

c)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$     b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$     a)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$     d)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

حل :

$$a) \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 1) = (-2)^2 - 1 = 3$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} f(x); \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = -1$$

حد شتہ او  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$  دی:

$$c) \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (2x + 1) = 2 \times 4 + 1 = 9$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 1) = 2 \times 2 + 1 = 5 \text{ له بنی لور}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1) = 2 - 1 = 1 \text{ له کین لور}$$

له دي امله پوله (حد) نه شته

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$$

بیلگه:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  ، پیدا کړی، که  $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$  وي

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 5)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 3x + \lim_{x \rightarrow 2} 5$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5$$

$$2 + 5 = 7 \times 4 - 3 \times = 2$$

$\lim_{x \rightarrow -2} (f(x))^n$ نو پیدا کړی $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3$ که فعالیت:
--

یادونه:

د یوه پولینوم لیمیت ټیک داسې شمیرل کیري، لکه د یوه فنکشن لیمیت

بیلگه ۶:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$

پیدا کړی  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

حل:  $f(x)$  د دوه توابعو  $g(x) = x^2 - 2x + 5$  او  $L(x) = 2x^2 + 1$  وېش دی

که  $x$  و 3 نژدې شي پوله یا حد کیدی شي د تابع د حل له لارې په  $x = 3$  کې پیدا شي

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 + 1)} \\ &= \frac{3^2 - 2 \times 3 + 5}{2 \times 3^2 + 1} = \frac{8}{19}\end{aligned}$$

د راشنل-نسبتي-يا كسري فنكشنونو پولې

مورن دا لاندې د پولينومونو ویش لرو

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}; b_0 \neq 0$$

په پورته پولينوم ویش کې که  $x=0$  وي، نو  $\frac{a_0}{b_0}$  ترې لاس ته راځي د  $b_0 \neq 0$  سره.

که  $n < m$  وي او  $x$  ناپای ته لاړ شي، پولينوم ویش صفر ته ځي

که  $n > m$  وي او  $x$  ناپای ته لاړ شي، د پولينوم ویش د ناپای په لور ځي.

که  $n = m$  وي، نو  $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n}{b_m}$  لرو

پام: د نسبتي يا كسري فنكشنونو (ناطقو توابعو) پوله ارزښت (حد) غواړو پيدا كړو.

ددې لپاره چې د ،،وياندو،، توابعو پولې پيدا كړو، كه شته وي، نو د مختلو لارو يا متودونو څخه كار اخلو.



پوهیرو، چې د پولینومي توابعو پوله (حد) - د یوه ورکړ شوي  $x$  ارزښت لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېر، چې د جمعې، تفریق، ضرب او وېش په څېر ورکړ شوي دي وشمیرو.

که ولرو:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  نو د تابع خواص د  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$  لپاره ساده

کو چې د پورته پولینوم ویش، چې گویاتابع ده پوله یا حد وشمیرو.

$$\text{بیلگه ۱: پیداکړی } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x + 2}$$

که  $x = 1$  وي، نو تابع تعریف ده او لرو

$$\frac{x^2 + x}{x + 2} = \frac{(1)^2 + 1}{1 + 2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 1}$$

Substitue( ځای په ځای کړو  $x = 1$  که

$$f(x) = f(1) \lim_{x \rightarrow 1}$$

$$\text{بیلگه ۲: پیداکړی } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x + 3}$$

حل: تابع په  $x = 0$  کې تعریف دی، نو لرو:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 3} = \frac{0 - 1}{0 + 3} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0}$$

$$\text{بیلگه ۳: پیداکړی } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$$

حل : تابع په  $x = 1$  کې تعريف ده، نو لرو

$$= \frac{1^2 + 1 - 2}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$$

که په يوه ځای يا عدد کې تابع تعريف نه وي، نو د مختلفو متودونو څخه کار اخلو، چې پوله (حد) پيدا کړو، که شته وي.

بيلگه ۴ : پيدا کړی  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}$

حل : دا چې تابع  $f(x)$  په  $x=2$  کې تعريف نه ده، نو پوله (حد) د تابع د حل له لارې نه شي پيدا کېدی. دا کېدی شي داسې پيدا کړو، چې تابع په ضريبونو تجزيه کړو .

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} \quad \lim_{x \rightarrow 2}$$

د تابع پوله (حد) که  $x$  و 2 ته نژدې شي، دا مانا لري، چې  $x \neq 2$  دی.

دا راشنل فنکشن (کونگه؟ تابع) رالندېږي:  $\lim_{x \rightarrow 2} (x-4)$  او لاندې پوله لري:

$$(x-4) = 2-4 = -2 \quad \lim_{x \rightarrow 2}$$

بيلگه ۵ : پيدا کړی  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$

گور، چې تابع په  $x = 16$  کې تعريف نه ده يانې  $x \neq 16$  .

په ياد ولری چې :  $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$  د  $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$  جوړه (مزدوج) دی او برعکس.

حل: د جوړې (مزدوج) سره ېې ضرب کړی

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16} \times \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4} \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt{x}+4} = \frac{1}{\sqrt{16}+4} = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

بیلگہ ۶ : پیدا کری

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

حل : تابع پہ  $x=3$  کی تعریف نہ دے ، نو مخرج او صورت د مخرج پہ مزدوج ضربوو او لرو:

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} \times \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} -1(\sqrt{x+1}+2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} \\
 &= -(\sqrt{3+1}+2) = -4
 \end{aligned}$$

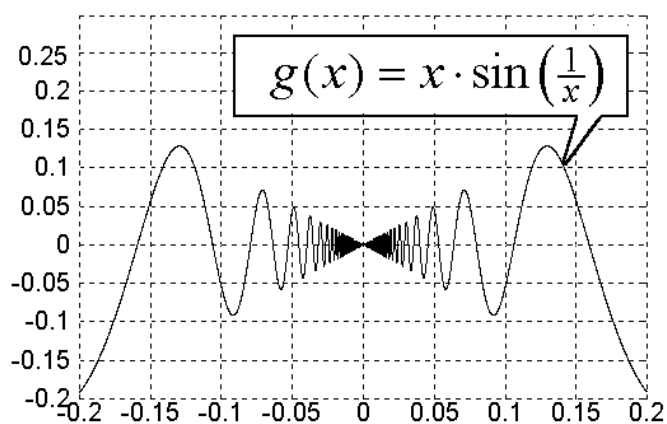
بیلگہ ۷ : پیدا کری

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5}{2x-3} + 5}{x^2-1}$$

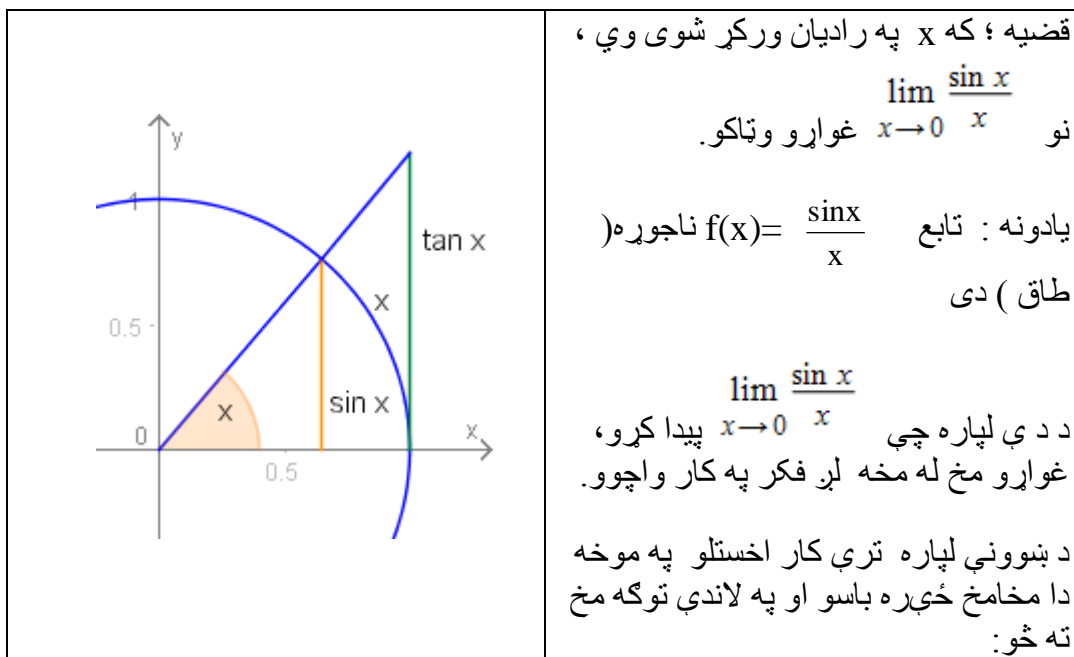
حل : تابع پہ  $x = 1$  کی تعریف نہ دے، نو پہ لاندی توگہ مخ تہ خو

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5+10x-15}{x^2-1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{\frac{2x-3}{x^2-1} + 5} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10(x-1)}{(2x-3)(x^2-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10}{(2x-3)(x+1)} = \frac{10}{(2(1)-3)(1+1)} \\
 &= \frac{10}{-2} = -5
 \end{aligned}$$

د مثلثاتي توابعو پولې



بیلگه:



په يوه انټروال  $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$  کې د رسم له حالته سملاسي لاندې نا برابرې يا نامساوات  
باور لري

$$\sin x \leq x \leq \tan x$$

مور له دې سره لرو  $\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$  او  $x > 0$  سره لاس ته راځي:

$$\frac{\cos x}{\sin x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin x}$$

او د  $\sin x$  سره ضرب ( ځل ) له امله لاندې نامساوات لاس ته راځي

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

د پولې ته تگ له امله لاس ته راځي

$$\leq \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad 1 = \lim_{x \rightarrow +0} \cos x$$

دا په دې معنا دی، چې غوښتونکي پوله ارزښت 1 دی.

د دې ښوونې سره موږ ښی پوله ارزښت یې ډاکر، د کین پوله ارزښت لپاره په ورته توګه مخ ته خو او پوله ارزښت د  $x < 0$  لپاره پیدا کوو، یعنی له دې څخه هم لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

که  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$  او  $x = -\alpha$  و لیکو، نو دا لاندې لاس ته راوړنه هم لرو

$$= \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \frac{\sin x}{x}$$

.....(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

د مساواتو (3) + (4) څخه غوښتنه لاس ته راځي

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

بیلګه ۱: حل کړی  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

حل: وي دې  $2x = \alpha$  که  $x \rightarrow 0$  نو  $\alpha \rightarrow 0$  او

$$= \frac{2 \sin 2x}{2x} = 2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sin 2x}{x}$$

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي :

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \times 1 = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x} \text{ بیلگه ۲ : وښایاست}$$

که  $y = 5x$  وي ; او  $x \rightarrow 0$  ، نو  $y \rightarrow 0$  هم

$$\text{او} \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{2} \frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)} = \frac{5}{2} \frac{\sin 5x}{2x}$$

$$= \frac{5}{2} \frac{\sin y}{y}$$

$$\text{له دې امله لرو} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{2} \frac{\sin y}{y} = \frac{5}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}$$

$$1 = \frac{5}{2} \times = \frac{5}{2}$$

قضیه : په درېگودي گچ یا مثلثاتو کې بل غوره پوله ارزښت دا لاندې دی.

$$\frac{\tan x}{x} \lim_{x \rightarrow 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x} \text{ : وښایاست : بیلگه}$$

حل : وي دې  $\theta = 3x$  ، نو  $x = \theta / 3$  ، که  $\theta \rightarrow 0$  نو  $x \rightarrow 0$

$$\text{له دې امله} = \frac{3 \tan 3x}{(3x)} = 3 \frac{\tan \theta}{\theta} \frac{\tan 3x}{x}$$

$$= 3 \times 1 = 3 \text{ نو}$$

$$\frac{5 \tan 2x}{7x} \lim_{x \rightarrow 0} \text{ بیلگه: حل کری}$$

$$\text{حل: وي دي } 2x = y, \text{ نو } x = \frac{y}{2} \text{ دی}$$

$$\text{که } x \rightarrow 0 \text{ وي، نو } y \rightarrow 0 \text{ دی}$$

له دي امله

$$= \frac{5}{7} \cdot \frac{2 \tan 2x}{2x} \frac{5 \tan 2x}{7x}$$

$$= \frac{10}{7} \frac{\tan 2x}{2x}$$

$$= \frac{10}{7} \frac{\tan y}{y}$$

نو

$$\frac{5 \tan 2x}{7x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{10}{7} \frac{\tan y}{y} \lim_{x \rightarrow 0}$$

$$= \frac{10}{7} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan y}{y}$$

$$1 = \frac{10}{7} \times = \frac{10}{7}$$

پای

وهڅيری، چې ويناياست:



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

که  $x$  په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو

الف) تانجنت  $\tan x$  د  $\sin x$  او  $\cos x$  په ترمونو ولیکی

ب)  $\frac{\tan x}{x}$  د  $\sin x$  او  $\cos x$  په ترمونو ولیکی

پ) پوله پیدا کړی

ت) ایا قضیه رښتیا یا ټیک ده؟

په یاد ولری:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$2 \cos^2 x - 1$$

$$\frac{1 - \cos 2x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \text{ حل کړی : بیلگه ۵ :}$$

$$\frac{1 - \cos 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x} \lim_{x \rightarrow 0}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x$$

$$0 = 0 \times 1 = 0$$

پوله (حد)

۶۰۲

بیلگه ۶ : وشمیری  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

حل : شمیرو

$$\frac{\tan 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}} \lim_{x \rightarrow 0} x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 \tan 3x}{3x}}{\frac{5 \sin 5x}{5x}} \lim_{x \rightarrow 0} x$$

$$= \frac{3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{3x}}{5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta}}{3 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha}}$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{1} = \frac{3}{5}$$

بیلگه ۷ : وشمیری ؛  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{x^2}$

حل : شمیرنه

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{4x+6x}{2} \sin \frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x \sin -x}{x^2}$$

۶۰۳

پوله ( حد )

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x \sin x}{x^2} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} \\
 &= 10 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad (y = 5x) \\
 &= 10 \times 1 \times 1 = 10
 \end{aligned}$$

بیلگه ۸ : پیدا کری

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x - \alpha}$$

حل :

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x - \alpha} &= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{2 \cos 3(x + \alpha) \sin 3(x - \alpha)}{x - \alpha} \lim_{x \rightarrow \alpha} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow \alpha} \cos 3(x + \alpha) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin 3(x - \alpha)}{x - \alpha} \\
 &= 2 \cos 6\alpha \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{3 \sin 3(x - \alpha)}{3(x - \alpha)}
 \end{aligned}$$

وي دي  $y \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow \alpha$  , نو لاس ته راځي  $x - \alpha = y$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \cos 6\alpha (3) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \\
 &= 6 \cos 6\alpha \cdot 1 = 6 \cos 6\alpha
 \end{aligned}$$

په یاد ولری: مثلثاتي کتمتوالی

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

بیلگه ۹: حل کری  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\tan x|}{x}$

حل:  $x > 0$

$$\frac{|\tan x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\tan x|}{x} + \frac{\tan x}{x} \lim_{x \rightarrow 0^+}$$

$$= 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\tan x|}{x} - \frac{\tan x}{x} \lim_{x \rightarrow 0^-}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan x}{x}$$

$$= -1$$

$$\neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\tan x|}{x} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\tan x|}{x}$$

لرو

گورو، چې د پورته تابع پوله یا لیمیټ نه شته

ناپړپکيدنه (متما دیت) “Continuity”

په دې برخه کې لولو ، چې یو فنکشن یا یو تابع په یوه ټکي یا یوه اینټروال کې څنگه ځان نیسي یا کوم حالت غوره کوي. ایا دا تابع په کوم ځای کې توب وځي، یا پرې کيږي او که یا په نه پرېکيږي توگه د اینټروال په دننه کې ځغلي.

### د تابعو ناپرېکيږنه Continuous functions

په دې موضوع کې موږ د د یوې تابع د ناپرېکيږني (متماډیت) په هکله څرنگه کوو او د ناپرېکيږني یا متماډیت پیژند(تعریف) ورکوو.

// رسمه //

// رسمه //

// رسمه //

(1)

(2)

(3)

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = x^2 - 1$$

دا رسمونه دې هم گران زده کوونکي وکارې، زه د رسم کولو ستونځي لرم (تمرین)

$b$  دې د تابع  $f$  په پیژندورشو یا تعریفساحه کې یو حقیقي (رییل) عدد وي. تابع  $f$  په  $b$  کې ناپرېکيږونکي (متماډي)، بلل کيږي، که د ټکي  $(b, f(b))$  نږدې د  $f$  گراف وکښل شي، بې له دې، چې پنسل له کاغذ پورته کړی شي.

له دې امله تابع  $f(x) = x^2 - 1$  او تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  په ټکي  $x=b$  کې ناپرېکيږونکي دي.

تابع  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  په  $x=0$  کې ناپرېکيږونکي نه ده یانې پرېکيږونکي ده یا توپ وځي.

تابع په  $x=a$  کې پرېکيږونکي ده، که پرې شي (تشیيا ولري)، توپ ووهي او یا ماته شي.

لرو  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$  او  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$  نو له دې امله  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$  په  $x = 0$  کې

نه شته

بیلگه ۱ : وي دي  $f(x) = 2x + 1 ; x \geq 1$

$$1 - x ; x < 1$$

الف) گراف وکاري گراف

ب) پيدا کړی  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

پ) پيدا کړی  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

که تابع په  $x=3$  او  $x=1$  کې نابړېکيدونکي وي

حل :

الف) گراف کين لور ته کينل شوی دی

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = (2x + 1) = 7 \quad \text{ب)}$$

$$f(3) = 7$$

پ)

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) = 3 \lim_{x \rightarrow 1^+}$$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - x = 0 \lim_{x \rightarrow 1^-}$$

له ب) او پ) څخه لرو

$$f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \lim_{x \rightarrow +1}$$

له دي امله تابع په  $x = 3$  نابړېکيدونکي او  $x = 1$  کې پړېکيدونکي ده يا نامتمادي

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{x}; \quad x \neq 0 \quad \text{بیلگه ۲: وي دي}$$

$$= 3 ;$$

// رسمه // (الف) فنکشن رسم کری

ب) بحث وکری، چي تابع په  $x = 2$  او  $x = 0$  کې ناپرېکيدونکي ده او که نه

حل: الف) د تابع گراف لپاره

$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	5	2	1	2	5

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5 \quad \text{ب)}$$

$$f(2) = \frac{2^3 + 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دي امله د  $f$  پوله (حد) شته او  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ ، نو تابع په  $x = 2$  کې متمادي يا نه

پرېکيدونکي دي

وي دي  $x = 0$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x}{x} = 1 \lim_{x \rightarrow 0^+}$$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + x}{x} = 1 \lim_{x \rightarrow 0^-}$$

دا دا مانا لري چې  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$  په دې مانا دی چې  $f(0) = 3$ .

دا دا مانا لري، چې  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$

تابع په  $x = 0$  کې پرېکښونکي (نامتمادي) ده

که له دې شرطونو کوم یو شرط پوره نه وي نو تابع پرېکښونکي (نامتمادي) ده

بیلگه ۳: وي دی

$$x \neq -3, \quad f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$$

ایا تابع په  $x = -3$  کې ناپرېکښونکي ده؟

حل ( تابع  $f(-3)$  تعریف نه دی، له دې امله تابع په  $x = -3$  کې متمادي نه دی

پیژند(تعریف):

$f$  دې یوه تابع وي، چې د ټولو  $x$  لپاره په همغه واز اینټروال کې چې  $x=c$  لري تعریف وي.

تابع  $f$  په  $x = c$  کې ناپرېکښونکي بلل کېږي، که دا لاندې شرایطو پوره وي.

(۱)  $f(x)$  تعریف دی (۲) که  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  شته وي (موجود وي)

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \quad (۳)$$

که تابع د ټولو  $x \in (a, b)$  لپاره متمادي وي، نو تابع په واز اینټروال  $(a, b)$  کې هم متمادي دی.



$$f(x) = 2x^2 + 1 \quad ; \quad x \leq 1$$

$$= 4+x \quad ; \quad x > 1$$

وگوری، چې تابع چېرته ناپرېکېدونکې ده او چېرته پرېکېدونکې.

حل : په  $x = 1$  کې  $f$  تعريف دی

$$f(1) = 3.$$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow^-1} (2x^2 + 1) = 3 \lim_{x \rightarrow^-1}$$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow^+1} (4+x) = 5 \lim_{x \rightarrow^+1}$$

$$f(x) \neq \lim_{x \rightarrow^+1} f(x) \lim_{x \rightarrow^-1}$$

له دې امله تابع په  $x = 1$  کې پرېکېدونکې ( نامتمادي ) ده

بيلگه ۵ : وي دي

$$= 2x^2 + 1 \quad ; \quad x < 2$$

$$f(x) = 3 \quad x = 2$$

$$= x + 3 \quad ; \quad x > 2$$

د تابع  $f(x)$  متماديت په  $x = 2$  کې تر بحث لاندې ونيسی

حل : تابع  $f(x)$  په  $x = 2$  کې تعريف ده او لرو  $f(2) = 3$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow^+2} (x + 3) = 5 \lim_{x \rightarrow^+2}$$

او

$$\lim_{x \rightarrow +2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 1) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

دا چي  $f(x) = 3$  دی، نوله دي امله  $(\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2))$  دا په دي مانا دی، چي تابع په  $x = 2$  كي پرېكيدونكي (نامتمادي) ده

د ناپرېكيدونكو يا متمادي توابعو خويونه

فعاليت:

( ۱ ) د توابعو  $f$  او  $g$  جمع (زياتون) پيداكري

$$(f+g)(x) = \dots\dots$$

( ۲ ) د  $f$  او  $g$  توابع په  $x=2$  كي متمادي (ناپرېكيدونكي) دي، نو :

$$f(x) = \dots\dots\dots \& \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \dots\dots \lim_{x \rightarrow a}$$

( ۳ ) د پوله ارزښتونو (حدونو) ارزښتونه وکاروی

$$(f + g) (x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g (x) ) \lim_{x \rightarrow a}$$

$$\dots : = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots = (f + g)$$

(a)

له دي امله  $(f+g)$  په  $x=a$  کې متمادی دي.

که تابع  $f$  او  $g$  په  $x=c$  کې متمادی وي، نو د لاندې توابعو څخه یې هر ه یوه په  $x=c$  کې متمادی ده

( ۱ ) د توابعو جمع  $f + g$

( ۲ ) د توابعو تفریق (کمون)  $f - g$

( ۳ ) د توابعو ضرب (خُل)  $f.g$

د توابعو وېش  $\frac{f}{g}; g \neq 0$

بیلگه ۱ : وي دي

$$f(x) = \sin x + 1,$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 2$$

نو ( ۱ )  $f$  او  $g$  په  $x=1$  کې متمادی دي.

( ۲ ) وڅیړی، چې الف)  $\sin x + x^2 + 3x - 1$

ب)  $(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2)$

په  $x=1$  کې متمادی که نامتمادی دي

حل :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \sin 1 + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) = 2; \quad \text{نو } f \text{ په } x = 1 \text{ کې متمادی دی}$$

نو  $g$  په  $x = 1$  کې متمادی دی

دويم خوي وڅيړی

$$2) a) \sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2)$$

( ۲ الف )

$$= f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

د متمادي توابعو جمع په  $x = 1$  کې متمادي ده

$$( b) (\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x) \cdot g(x)$$

$$= (f \cdot g)(x)$$

نو د ناپرېکيدونکو- يا متمادي توابعو ضرب (ځل) په  $x = 1$  کې متمادي دی

بيلگه ۲ : وي دي

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = 3x - 2;$$

وڅيړی، چې ايا  $f(x) \cdot g(x)$  په  $x = 2$  کې متمادي ده

حل :

$$f(x) = f(2) = 3 \lim_{x \rightarrow 2}$$

$$g(x) = 4 = g(2) \lim_{x \rightarrow 2}$$

$$f(x) \cdot g(x) = 3x^2 + x - 2$$

$$f(x) \cdot g(x) = 3(4) + 2 - 2 = 12 \lim_{x \rightarrow 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

$$= f(2) \cdot g(2)$$

له پورته څخه لاس ته راځي، چې  $f(x) \cdot g(x)$  متمادي دی

په کین لور بند اینتروال  $[a, b]$  کې گراف متمادي تابع په گوته کوي یا بنایي، چیرته چې  $f(a) \neq f(b)$  دی.

که ولرو  $f(a) < k < f(b)$  نو گراف له ټکي  $(b, f(b))$  څخه نه شي انځورېدلی تر څو پرته (افقي) کرښه  $y = k$  د ثابتې  $k$  سره غوڅه نه کړي.

( انځور راځي )

له پورته څخه لیکلی شو:

که تابع  $f$  په بند اینتروال  $[a, b]$  کې متمادي (ناپربکېدونکي) او  $k$  د  $b$  ترمنځ پروت وي، نو هلته کم له کمه یو عدد  $c$  د  $f(a)$  او  $f(b)$  ترمنځ شته داسې چې  $f(c) = k$  دی

$$\text{بیلگه ۳: وي دي } f(x) = x^3 + 4x, x \in [1, 2]$$

و بنایي، چې یو  $c \in (1, 2)$  شته داسې، چې  $f(c) = 11$  وي.

حل:  $f(x)$  یو پولینوم دی نو  $f$  په بند اینتروال  $[1, 2]$  کې متمادي دی. لرو

$$f(1) = 1^3 + 4(1) = 5; f(2) = 8 + 4(2) = 16$$

$$5 < 11 < 16 \text{ او } f(1) \neq f(2)$$

له دې امله یو عدد  $c \in (1, 2)$  شته، داسې چې  $f(c) = 11$  دی

بیلگه ۴ : وي دي

$$f(x) = 2x + 4; -1 \leq x < 2$$

$$; 2 \leq x \leq 20 |x-10| =$$

نو

الف ) و آزمایي، چي تابع متمادي ده ( ب ) و آزمایي، چي يو  $c \in (-1, 20)$  شته داسي چي  $f(c) = 6$  دي او د  $c$  ارزښت پيدا کړي.

حل :

$$f(x) = 2x^2 + 4 = 8 \lim_{x \rightarrow 2^-}$$

$$f(x) = 10 - 2 = 8 \lim_{x \rightarrow 2^+}$$

له دي امله لرو

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8$$

$$f(x) = 10 - 2 = 8$$

گورو چي تابع په  $[-1, 20]$  کي متمادي دي

$$b) f(-1) = 2x - 1 + 4 = 2$$

$$f(20) = |20-10| = 10 \Rightarrow f(-1) \neq f(20)$$

$$2 < 6 < 10 \quad \text{په دي اساس لرو}$$

$$c \in (-1, 20): f(c) = 6 \quad \text{له دي امله لرو}$$

$$2x + 4 = 6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1, 2).$$

$$= 6 \Rightarrow |x-10|$$

$$x - 10 = 6 \Rightarrow x = 16 \in (-2, 20)$$

$$10 - x = 6 \Rightarrow x = 4 \in (-2, 20)$$

د c ارزښت دی 1, 4, 16

**بیلگه ۵ : وي دي**

$$f(x) = 2 \sin x + 3; x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

وښایې چې  $c \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  شته د کومې لپاره چې باور لري  $f(c) = 4$  او c پیدا کړی.

حل : د تابع f د ساین تابع ده، نو له دې امله f متمادي (ناپربکېدونکی) دی

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ نو مور لرو :}$$

$$1 < 4 < 5$$

تابع f متمادي ده او لرو

دا په دې مانا چې  $c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  شته، د کوم لپاره چې  $f(c) = 4$  صدق کوي

د دې لپاره چې c پیدا کړو نو لرو

$$f(c) = 2 \sin c + 3 = 4$$

$$2 \sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

د گراف څخه څرگندېږي، چې  $f$  په اینټروال  $[a, b]$  متمادي دی،  $f(a)$  او  $f(b)$  متضادي مخنښې(علامې) لري، نو  $c$  د  $f(a)$  او  $f(b)$  ترمنځ د منځ ارزښت جملې له مخې د  $K=0$  سره کم له کمه یو  $C$  د  $a$  او  $b$  ترمنځ شته، چې لاس ته تری رآځي  $f(c) = 0$ .

دا په دې مانا چې  $x=c$  د  $f(x) = 0$  مساواتو یو حل دی. انځور شته

$$f(x) = x^3 + 5x - 23 \quad \text{بیلگه ۶: وي دي}$$

وښایي، چې تابع  $f$  د  $x$ -محور په اینټروال  $(2,3)$  کې غوڅوي.

حل:  $f$  پولینومتابع ده، نو  $f$  په اینټروال کې  $[2,3]$  متمادي دی.

$$f(2) = 2^3 + 5(2) - 23 = -5$$

$$f(3) = 3^3 + 5(3) - 23 = 19$$

اود متضادو مخنښو(عالمو) سره  $f(2) \neq f(3)$

له دې امله د  $c \in (2,3)$  لرو چې  $f(c) = 0$  دی

## د څپرکي ټولگه " Chapter Summary "

پیژند: تابع  $f(x)$  یو حد  $L$  لري، که  $x$  ترلیي یو حقیقي عدد  $c$  ته لار شي. دا په دې معنی چې د  $f(x)$  لپاره، چې ترلی و  $L$  ته ځي دادی، چې  $x$  ترلی و  $c$  ته

لار شي او داسې یې لیکو:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$



قضیه : که  $f(x)$  همغه پوله ارزښت  $L$  ولري، که  $x$  د بنی یا کیني لور و  $c$  ته نزدې شي، نو پوله ارزښت شته او د  $L$  سره برابر دی.

د پوله ارزښت یا حد خوږونه :

که  $f$  او  $g$  توابع وي،  $c; L$  او  $M$  حقيقي اعداد وي داسي چې  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

او  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ ، نو لاندې لرو:

$$1) \lim_{x \rightarrow c} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L + M$$

$$2) \lim_{x \rightarrow c} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L - M$$

$$3) \lim_{x \rightarrow c} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \cdot M$$

$$4) \lim_{x \rightarrow c} \left( \frac{f}{g} \right)(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}; (M \neq 0)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

د  $f(x) \geq 0$  او  $x$  د ټولو ارزښتونو لپاره، چې  $c$  ته ور نزدې کيږي.

$$\text{قضیه : که } x \text{ په راديان ورکړ شوی وي، نو لرو : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\text{قضیه : که } x \text{ په راديان ورکړ شوی وي، نو لرو : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

پيژند :  $f$  دې يو تابع وي، چې د ټولو  $x$  لپاره په يو واز انتروال کې چې  $x = c$  ولري، تعريف وي، نو وايو چې  $f$  په  $x = c$  کې متمادي، د لاندې شرايطو لاندې:

شته دی 2)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  (تعريف دی  $f(x)$ )

$$3) \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

که تابع د ټول  $x \in (a, b)$  لپاره متمادي وي، نو تابع په ټول انټروال  $(a, b)$  (کي متمادي ده.

پيژند: وايو چي يو تابع په يوه بند انټروال  $[a, b]$  کي متمادي ده، که تابع له بني لور په  $x = a$  ي متمادي وي او له کين لور په  $x = b$  کي او د واز انټروال  $(a, b)$  په هر ارزښت کي متمادي وي.

د متمادي توابعو خويونه: که  $f$  او  $g$  په  $x = c$  کي متمادي وي، نو دا لاندي توابع هر يو په  $x = c$  کي متمادي دی.

اول) د جمعي  $f+g$  تابع

دويم) د تفريق  $f-g$  تابع

دريم) د ضرب  $f.g$  تابع

څلورم) د ويش تابع

د منځني ارزښت قضيه: که تابع  $f$  په بند انټروال  $[a, b]$  کي متمادي وي او  $k$  د  $f(a)$  او  $f(b)$  ترمنځ يو عدد وي، نو کم له کمه د  $a$  او  $b$  ترمنځ يو عدد  $c$  شته، د کوم لپاره چي  $f(c) = k$  باور لري.

ترنه

د  $x \rightarrow \pm\infty$  لپاره پوله ارزښت ( حد )

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{\pm\infty} = 0^\pm$$

اول:

د ۵ وېشنه په یوه ډېر لوی (ناپای) مثبت (منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت (منفي) عدد ورکوي یانې  $\square \square$  .

گراف  $G_f$  یو پروت اسیمپتوت  $y=0$  لري ، چې له پورته او کښته گراف ته ور نژدې کیږي.

دویم :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{x+1} = \frac{-3}{\pm\infty} = 0^{\mp}$$

د ۳- وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت (منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت (منفي) عدد ورکوي یانې  $\square \square$  .

گراف  $G_f$  یو پروت اسیمپتوت  $y=0$  لري ، چې له پورته او کښته گراف ته ور نژدې کیږي.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x^2 - 2x} = \frac{5}{+\infty} = 0^+$$

دریم :

په مخرج کې فقط  $x^2$  ستر رول لوبوي. د مربع کونې له لارې هر عدد مثبت کیږي. که ۵ په یوه ډېر لوی مثبت عدد ووېشل شي، نو یو خورا کوچنی مثبت عدد تری لاس ته راځي، یانې گراف  $G_f$  یو پروت اسیمپتوت  $y=0$  لري ، چې فقط له پورته لور ور نژدې کېږي سره .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{x^2 - 2} = \frac{-3}{+\infty} = 0^-$$

څلورم :

د مخرج مربع کونې سره منفي عددونه هم مثبت میږي.. د ۳- وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت عدد باندې یو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي یانې  $\square$  - .

گراف  $G_f$  یو پروت اسیمپتوت  $y=0$  لري ، چې فقط کښته گراف ته ور نژدې کیږي.

د پرېښودني - يا تري صرفنظر کوني اصول

اول :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0^\pm$$

په صورت کې د  $x$  توانونه، په مخرج کې د  $x^2$  توانه په پام کې نيسو او همداسې له ټولو ثابتو تيرپرو (ټولې ثابتې پريښول کيږي، صرف نظر تري کيږي) او بيا  $x$  لنډيږي. که ۱ په ډېر لوی مثبت (منفي) عدد وويشل شي. نو  $\square\square$  تري لاس ته راځي.

څیره  $G_f$  پروت اسيمپټوت (مجانِب)  $y=0$  لري، چې له پورته او کښته ورنژدي کيږي.

دويم

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$$

- په صورت کې د  $x^2$  او په مخرج کې د  $x$  له ټولو توانونو په پام کې نيسو او له ټولو ثابتو تيرپرو ( صرفنظر تري کوو ) او بيا يې د  $x$  سره لنډوو. په روښانه توگه ټول پوله ارزښتونه  $\square\square$  لاس ته راځي.

څیره  $G_f$  مايله اسيمپټوتي راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د ۱ په اندازه ستره ده.

دريم :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2-2}{3x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

په صورت کې د  $x^2$  ټول توانونه په پام کې نيسو او له ټولو ثابتو تيرپرو او بيا يې د  $x^2$  سره لنډوو.

ټولې پولې په روښانه توګه  $-2/3$  راکوي.

څیره  $G_f$  پرته اسیمپټوت راکوي ، چې  $y = -2/3$  ده.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + 2x - 1}{3x^3 + 2x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2}{3x} = \frac{-2}{\pm\infty} = 0^\mp$$

څلورم :

په صورت کې د  $x^2$  څخه کوچنیو ټولو توانونو او په مخرج کې د  $x^3$  له ټولو کوچنیو توانونو او همداسې له ثابتو تېرېږو ( صرف د نظر پرې کوو ). که په ووبشل شي ، نو یو کوچنی مثبت یا منفي عدد یانې  $0^\mp$  ترې لاس ته راځي.

څیره  $G_f$  یو پروت اسیمپټوت  $y = 0$  لري، چې له پورته او کښته لور ورنزدې کيږي.

شمیرنیز حلونه

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2} =$$

دویم :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left( 1 - \frac{2}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{0^\pm}{1} = 0^\pm$$

په صورت او مخرج  $x^2$  له نوکانو ( قوسونو ) راوستني او بیا د  $x^2$  سره لنډوني وروسته مخرج د  $1$  په لور ځي او صورت د  $+\infty$  په لور ، نو

ترمونه  $2/x$  او  $1/x$  و صفر ته نژدې کيږي.

څیره  $G_f$  یوه مایله اسیمپټوت لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په  $1$  لویه ده.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 - 2}{3x^2 + 2x} =$$

دریم :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left( -2 - \frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \left( 3 + \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2 - \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{2}{x}} = -\frac{2}{3}$$

- که  $x^2$  له نوکانو راووبستل شي او بیا لاند شي، نو صورت د صفر په لور ځي یا صفر ته نژدې کیږي؛ مخرج، ۱ ته نژدې کیږي، ځکه ټول ترمونه د او و صفر ته ځي په صورت فقط ترم د صفر مخخښه ټاکي.

څیره پرته اسیمپتوت لري له پورته او کښته نژدې کیږي سره.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + 1}{x^4 - 2x^2 + 2} = \text{څلورم:}$$

په صورت او مخرج کې هغه د لوی توان  $x$  یعنی  $x^4$  له نوکانو دباندي نیسو او بیا په ترتیب شمېرنیزه عملیه مخ ته بیاوو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 \left( \frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)}{x^4 \left( 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^4}} = \frac{0^-}{1} = 0^-$$

تولیز خوبونه :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1} = \pm\infty \quad \text{اول:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( 3x - \frac{2}{x} \right)}{x \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

په پورته بیلگه کې داسې مخ ته تللي ی، چې په صورت کې له ټولو عددونو تیرېږو، چې د خپلواکي متحولې توان له ۱ کوچنی یعنی صفر وي او په صورت کې له ټولو آه ۲ څخه کوچنی توان څخه تیرېږو. گورو، چې په صورت کې پاتې کېږی، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي نابای په لور ځي.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2} = 0^{\pm} \quad \text{دویم :}$$

په پورته بیلگه کې په صورت کې له ۱ او مخرج کې له ۲ څخه تیرېږو او بیا صورت او مخرج په  $x$  ویشو، چې لاس ته رانه یې یو یې د یوه ثابت عدد وېشل وي په  $x$ . چې د  $\square \square x$  سره تابع و  $0^{\pm}$  ته ځي.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2-2}{3x^2+2x} = \quad \text{بیلگه ۳ : لرو :}$$

په صورت کې له ۲ او مخرج کې له  $2x$  څخه تیرېږو او د  $x^2$  سره لنډونې وروسته د  $x^2$  سره لنډیږي او په دې ډول لاندې پایله لرو :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2-2}{3x^2+2x} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2} = 0^{-} \quad \text{بیلگه ۴ :}$$

په صورت کې له ۱ او مخرج کې له اوو څخه تیرېږو او بیا له لنډونې وروسته یو ثابت عدد په نابای وېشل کېږي، چې پایله یې  $0^{-}$  دی، یعنی لرو :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2} = 0^{-}$$

۱۹ . ۵ تمرینونه

۱ . د بلواکو پولی

۱ . ۱ لاندې پولی وټکی

1.1.1.a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1}$

1.1.2.a)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{1 + x}$

1.1.3.a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 6}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

1.1.4.a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}}{1 - \sqrt{x + 1}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$

1.1.5.a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$

i)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{1 - \cot x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{1 - \sqrt{x}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{27 - x^3}{x - 3}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 + x}{32 + x^5}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 25} - 5}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \sin x \frac{\cos x}{x} \right)$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$



$$k) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin \frac{\pi}{4}}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$$

۱.۲ په ورکړشو ځایونو کې د لاندې بلواکو کین او نسی یولی وټاکو

$$a) f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad \text{für } x = 0$$

$$b) f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad \text{für } x = 0$$

$$c) f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}} \quad \text{für } x = 1$$

$$d) f(x) = \frac{x}{1+e^x} \quad \text{für } x = 0$$

$$e) f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad \text{für } x = 0$$

$$f) f(x) = \frac{x}{2x + e^{x-1}} \quad \text{für } x = 1$$

$$g) f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}} \quad \text{für } x = 1$$

$$h) f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} + 3}{3^x + 2} \quad \text{für } x = 0$$

$$i) f(x) = \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x-1}}} \quad \text{für } x = 1$$

$$j) f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } x = 1$$

$$k) f(x) = \frac{x}{x+1} \quad \text{für } x = -1$$

$$l) f(x) = \frac{x+1}{|x+1|} x \quad \text{für } x = -1$$

۲ . ناپریکیدونکی بلواک : لاندې بلواک د کوم لپاره پریکیدونکی ځایونه لري، دا د کوم ډول ډک او که ممکن وي، په کومه توګه دا له منځه وړ اګیدی شي.

$$a) y = \frac{|x-1|}{x-1}$$

$$b) y = \frac{x+2}{|x+2|} \cdot x$$

$$c) y = \frac{1-x}{1-|x|}$$

$$d) y = \frac{x+2}{x+2} + \frac{1}{x+1}$$

$$e) y = \frac{x-3}{\sqrt{1+x}-2}$$

$$f) y = \frac{x-4}{\sqrt{x-2}}$$

$$g) y = \sin \frac{1}{x}$$

$$h) y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$$

$$i) y = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$j) y = \frac{\sin x}{x}$$

$$k) y = x \cdot 2^{\frac{|x|}{x}}$$

$$l) y = \ln 2^{\frac{1}{x-1}}$$

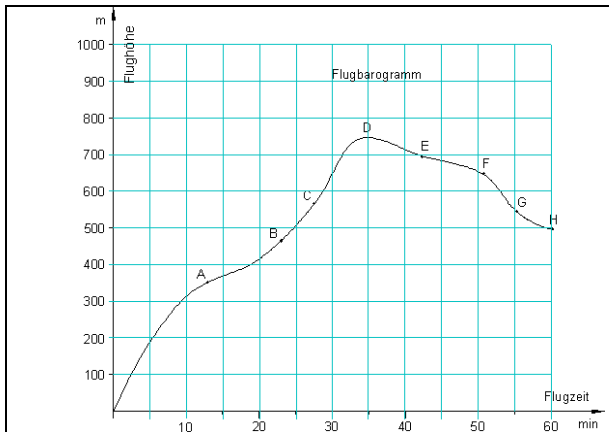
## ۲۰ . مشتقشمیرنه (رابیلیدنه)

### II.1. د تابع تغییر منح ارزښت (منحنی قیمت) Average rate of change

د کتاب په دې برخه کې موږ د ریاضیاتو یوه غوره برخه، چې د ریاضیاتو زری ورته ویلی شو، تر څېړنې لاندې نیسو، نو له دې امله لازم ګڼم، چې په دې هکله داسې مهم څه د یوه یادښت په څېر راوړم:

که له یوه ځای څخه بل ځای ته د تابع د تغییر منح ارزښت  $Average\ rate\ of\ change$  څخه غږیږو، نو موخه ترې په یوه ټکي یا دوه ټکو کې د تابع جگوالی، میل او یا تانجنت دی او دا درېوآره کلمې د ریاضیاتو له مخې په همغه یوه معنا دي او و به ګورو، چې همداسې د تفاضل وېش (Difference quotient) هم.

په یوه ټکي کې د تابع د ګراف میل (جګوړه)



په الوتکو کې د الوتنې دلیک (الوتنلیک) الی (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل د الوتنې جگوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت تابعیت کې رسموي او په هر جگوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پښتو واورو، نو د لیک بکس به ورته ووايو.

په پورته گراف کې د یوې الوتکې د الوتنې د بیلا بیلو وختونو جگوالی بنوول شوی.

-ایا فکر کوی، چې په ټکي B کې نسبت و ټکي A ته جگوالی زیات دی؟

-ایا فکر کوی، چې د E او G په ټکو کې جگوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جگوالی زیات دی نسبت د G ټکي ته؟

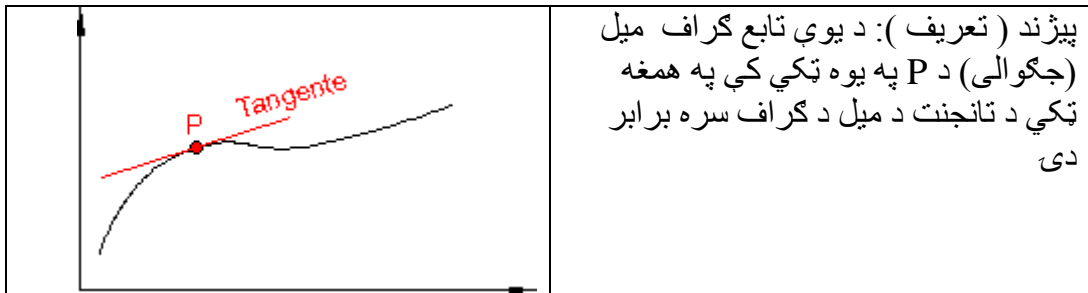
-ایا د یوې کرښې او منحنی جگوالی هر چېرته توپیر لري او که نه؟

لاس ته راوړنه :

۱ - گورو، چې په یوه منحنی کې د گراف جگوالی هر چېرته برابر نه دی، نو له دې امله باید ټکی په گوته کړو، چې هلته میل څپرل کیږي.

۲ - په لاندې بیلگه کې به روښانه کړو، چې تنها د یوې (سیده) کرښې میل هر چېرته برابر دی، نو له دې امله دلته د یوې کرښې د میل یا جگوالی څخه غږیږو.

برښي چې لاندې پیژند یا تعریف عاقلانه دی:

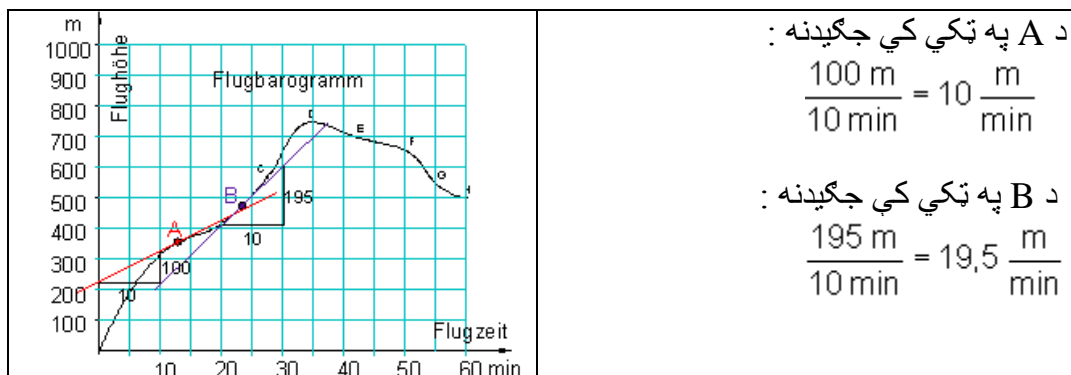


لیدل کیږي چې دلته یو تانجنټ د کرښې تعریف لري، چې د لمستکي (مماس) په چاپېریال کې د امکاناتو سره سم لمستکي (مماس) ته ښه وړ نږدې کیږي.

ددې پیژند یا تعریف له مخې په یوه ټکي کې د یوه گراف میل د یوې کرښې میل دی.

د گراف د جگیدني ټاکلو لپاره د A او B په ټکو هر یوه کې یوه کرښه (تانجنټ) انځوروو، چې گراف ته خورا زیاته نږدې کیږي.

د میل یا جگیدني مثلث په مرسته جگیدنه په شډل یا ساده ډول شمیرل کېدی شي:



د A په ټکي کې جگیدنه :

$$\frac{100 \text{ m}}{10 \text{ min}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

د B په ټکي کې جگیدنه :

$$\frac{195 \text{ m}}{10 \text{ min}} = 19,5 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

زموږ د بیلګې لپاره میل یا جګیدنه په یوه ټاکلي ټکي کې د لحظوي (سملاسي) میل د چټکتیا (سرعت) په معنا دی.

د A په ټکي کې : د الوتنې وخت نږدې 12,5 min ، د میل یا جګیدني چټکتیا (سرعت)

$$\text{نږدې } 10 \frac{\text{m}}{\text{min}} \text{ ده}$$

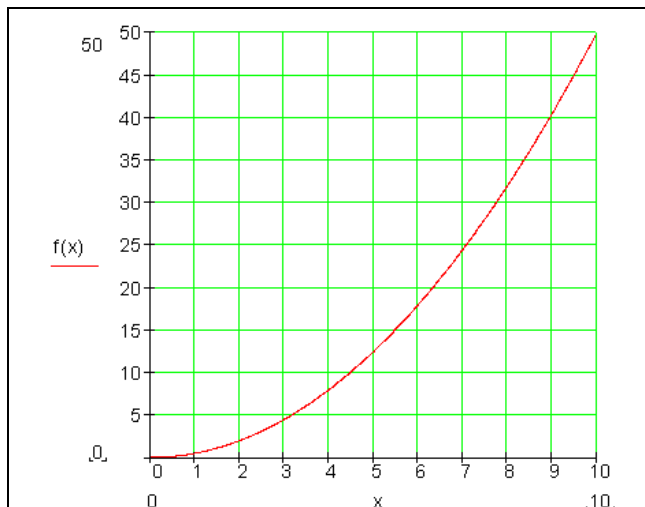
د B په ټکي کې : د الوتنې وخت نږدې 23,0 min ، د جګیدني چټکتیا (سرعت) نږدې

$$19,5 \frac{\text{m}}{\text{min}} \text{ ده.}$$

تانجنت تر اوسه فقط د لیدني له مخې تعریف شوی ، چې د لمستکي چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د گراف میل د A او B په ټکو کې هم یواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی.

## II.2 په یوه ټکي کې د تابع دگراف میل (جگیدنه):

معلومه ده ، چې یو ریلګاډی د تمخای څخه له خوزېدو (حرکت) وروسته خپله چټکتیا (سرعت) په ورو ورو (کراره کراره) زیاتوي. وهلي لار (د تمخای څخه لږوالی) تل زیاتېږي. د تمخای څخه لږوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کې ده .



دا عمل د لاندې تابع مساوات له لارې لیکلی شو.

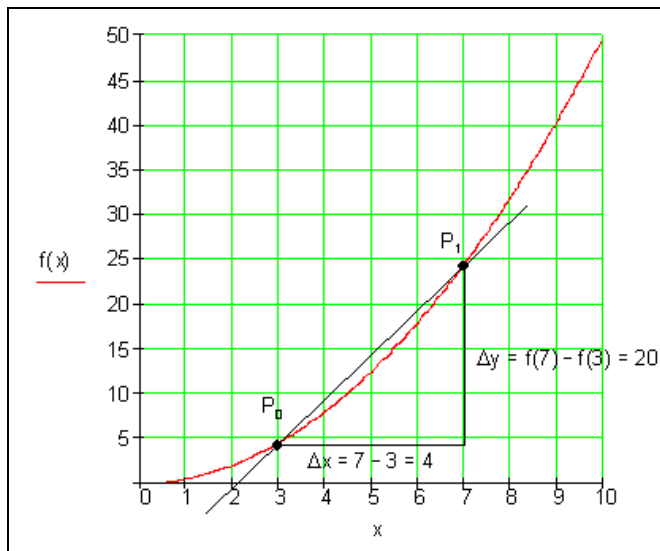
دلته د  $x$  وخت د ثانیه او د  $s$  لار د متر لپاره لیکو

$$s = f(x) = 0,5x^2$$

مخامخ : د تابع گراف

اوس باید منځنی ارزښت (منځنی جگوالی) **Averagerat of change** د ۳-مې او ۷-مې ثانیه ترمنځ وشمیرل شي.

ددې لپاره اړونده سیکانټ انځور و او د هغې جگوالی شمیرو.



اوس دې د تغیر ارزښت (منځنی جگوالی) د ۳-مې او ۷-مې ثانیه ترمنځ وشمیرل شي.

په دریمه ثانیه کې د ارزښت تغیر یا جگوالی څومره دی؟

د منځنی جگوالی داسې مخ ته بوزی، چې د  $P_0$  او  $P_1$  ترمنځ واټن تل کوچنی شي، داسې چې  $P_1$  د  $P_0$  په لور وځویږي.

د ۳-مې او ۷-مې دقیقې ترمنځ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \frac{24,5 - 4,5}{7 - 3} = \frac{20}{4} = 5$$

منځنی تغیر ارزښت (جگوالی) دی:

د ۳-مې او ۴-مې دقیقې ترمنځ

منځنی تغیر ارزښت (منځنی جگوالی) دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{8 - 4,5}{4 - 3} = \frac{3,5}{1} = 3,5$$

دریمې دقیقې ته د ورنزدې کیدنی شمیرنه

Intervall [3; x]	[3; 4]	[3; 3,1]	[3; 3,01]	[3; 3,001]
$\Delta x = x - 3$	1	0,1	0,01	0,001
$\Delta y = f(x) - f(3)$	3,5	0,305	0,03005	0,0030005
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3,5	3,05	3,005	3,0005

پورته شمیرنه په گوته کوي، چې که ټکی  $P_1$  د ټکي  $P_0$  په لور وخوزیږي یا ورنزدې شي، نو د تغیر ارزښت (جگوالی) تل زیاته و ارزښت ۳ ته ورنزدې کیږي.

موږ په دې توگه یو ارزښت لاس ته راوړو، چې لحظوي تغیر ارزښت (لحظوي جگیدنی) ته تل ورنزدې کیږي.

که موږ فیزیکی لویي (واحدونه) په خپله بیلگه کې وکاروو، نو د تغیر ارزښت (جگوالی) لپاره  $m/s$  باور لري. دا د چټکتیا لپاره یوون (واحد) دی

دا په دې مانا دی، چې د لار-وخت دیاگرام چټکتیا (سرعت) په گوته کوي.

## II.3 د لحظوي (د سترگو رپ) تغیر ارزښت شمیرلو ته

شمیرنیزه تگلار

د  $f(x) = 0,5x^2$  لپاره په اینتروال  $[3; \Delta x]$  کې منځنی تغیر ارزښت جگوالی:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{0,5(3+\Delta x)^2 - 0,5 \cdot 3^2}{\Delta x} = \frac{0,5[9+6\Delta x + (\Delta x)^2] - 0,5 \cdot 9}{\Delta x} \\ &= \frac{0,5 \cdot 9 + 3\Delta x + 0,5(\Delta x)^2 - 0,5 \cdot 9}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3+0,5\Delta x)}{\Delta x} = 3+0,5\Delta x\end{aligned}$$

دا  $3+0,5\Delta x$  د منځنی تغیر ارزښت دی

که اوس  $\Delta x$  تل کوچنی شي، مورن وایو که  $\Delta x$  د صفر په لور وهڅیږي (  $\Delta x \rightarrow 0$  )، نو د منځنی تغیر ارزښت  $3+0,5\Delta x$  د 3 به لور هڅیږي.

دا نو اوس لحظوي (د سترگو رپ) تغیر ارزښت دی د  $x_0$  په ځای کې.

د دې لپاره لیکو:  $\Delta x \rightarrow 0$  لپاره باور رې:  $3+0,5\Delta x \rightarrow 3$

یا

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3+0,5\Delta x) = 3$$

## II.4 کمښت ویش (د تفاضل (?)) ویش (Difference quotient)

په ورته توگه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش (Difference quotient) تر څېړنې لاندې نیسو.

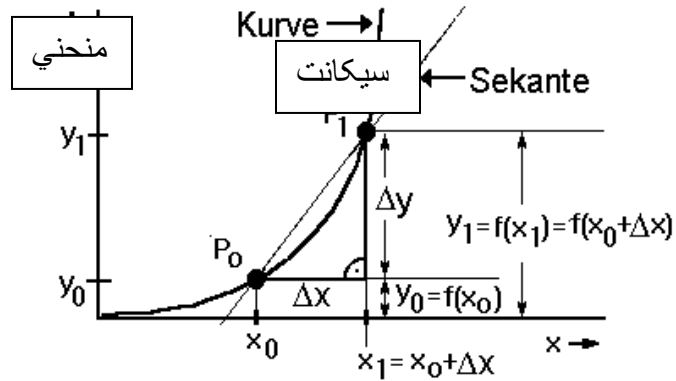
د یوې کرښې میل یا جگیدنه بې له مشتق نیونې ټاکل کېدی شي:

کرښه  $y=f(x) = mx+a$  لرو

د دې کرښې د جگیدني فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د قاطع (seccnce) پیژند: قاطع هغه کرښه ده، چې منحنی د  $P_0$  او  $P_1$  په دوه ټکو کې غوڅوي (لاندې څیره وگورئ)



پایله: د قاطع (غوڅوونوي secant) میل یا جگیدنه (جگوالی): دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو،، میل (جگوالی)،، یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمېرل کېږي.

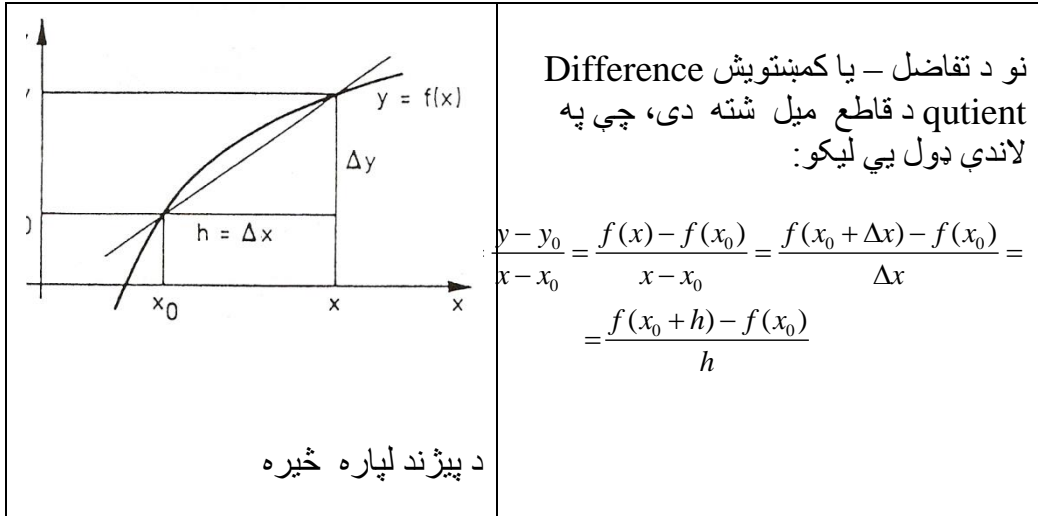
$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

**پیژند (تعریف)**

د  $y = f(x)$  تابع دې د  $x_0$  په یوه چاپیریال او په  $x_0$  کې پخپله تعریف شوي تابع وي،  $x$  د  $x_0$  څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی (مخامخ څیره دي وکتل شي).





د  $f$  تابع لپاره فرمول:  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ . دا فرمول د  $f$  په گراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمېرنه ده. دا ټکي د  $x$  او  $x+h$  ټکي دي. د کمبت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.

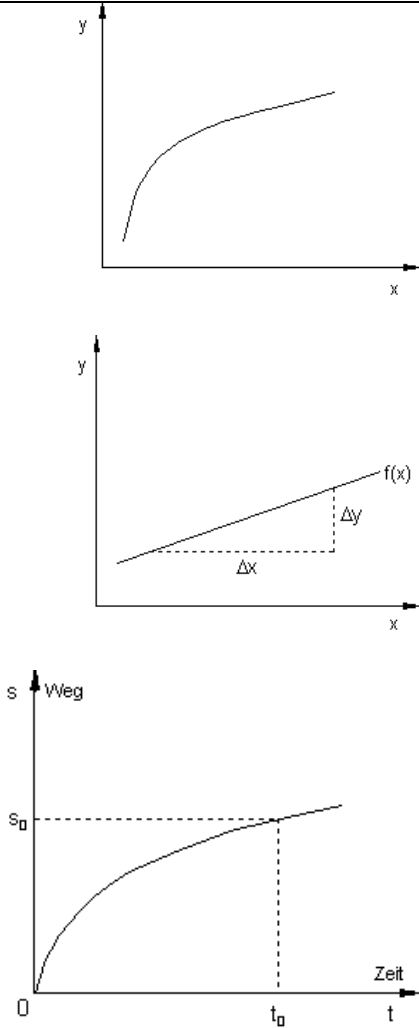
بیلگه:

د  $y = f(x) = 3x^2 - 5x + 4$  تابع دې ورکړ شوي وي. د دې تابع کمبت ویش (د تفاضل

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{3(x+h)^2 - 5(x+h) + 4 - (3x^2 - 5x + 4)}{h} \\ &= \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 4 - 3x^2 + 5x - 4}{h} \\ &= \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h} \\ &= 6x + 3h - 5 \end{aligned}$$

وېش) پیدا کړئ.

## II.2.1 د غوڅوونې (تقاطع) جگوالي څخه و د تانجنت جگوالي یا جگیدني ته



یو تابع  $y = f(x)$  او اړونده گراف دې ورکړ شوی وي.

که د تابع جگیدني حالت په پام کې ونیسو، نو گورو چې د تابع جگیدنه په نزدې ټولو ټکو کې توپیر لري.

یوه ثابت جگیدنه، لکه په لانیز تابع  $f(x) = a_1x + a_0$  کې د

$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{konstant}$$

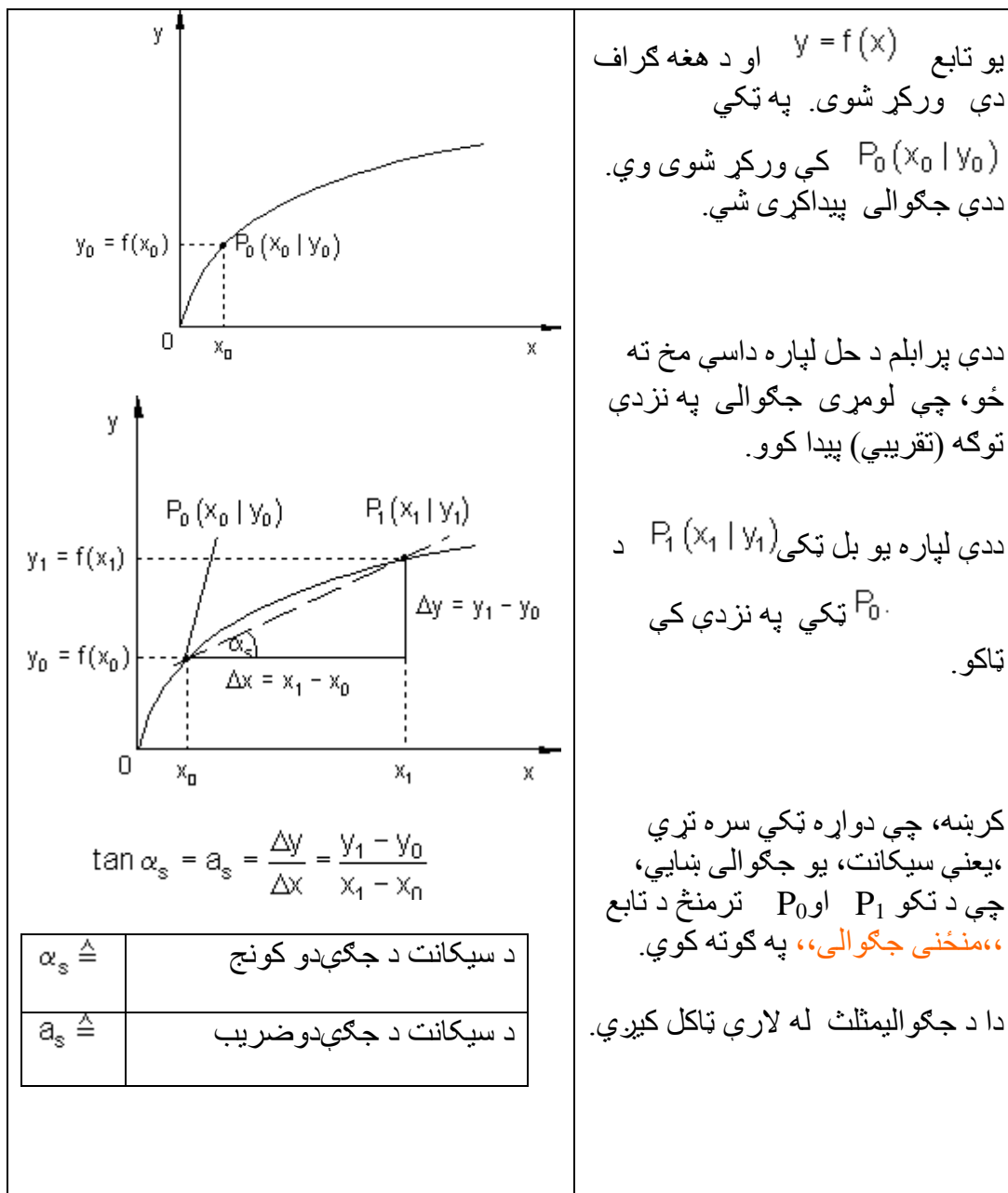
په زیاتو وختونو اړینه ده، چې د تغیر حالت (د جگیدني حالت) کې د تابع د تلني حالت وڅیرو.

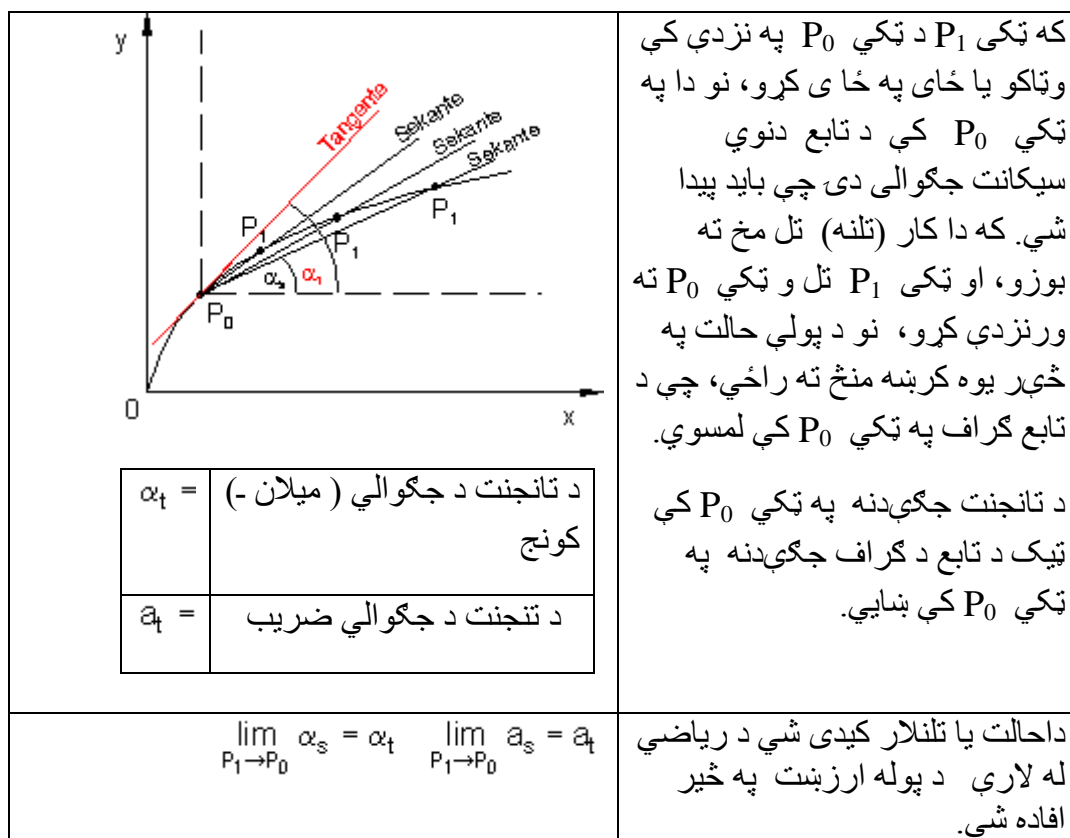
نوله دې امله لحظوی چټکتیا (همغه وختیزه - یا سملاسي)  $v(t_0)$  په لار- وخت دیاگرام کې وڅیرو.

د مشتقشمیرني په مرسته دا پرابلم حل کیدی شي.

د یوه تابع د جگیدني ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې **differenzieren** د مشتق نیونه بلل کیږي.

$t_0 \triangleq$	په پام کې نیولی سترگو رپ
$s_0 \triangleq$	تر دې سترگو رپ پورې وهلي لار





## II.2.2. کمښتویش او مشتق Difference quotient and differential quotient

د سیکانت جگیدنه ( منځنی تغیر

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

ارزښت)

د  $x$  لپاره د مساوات ښی خوا ځای په ځای کوو

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

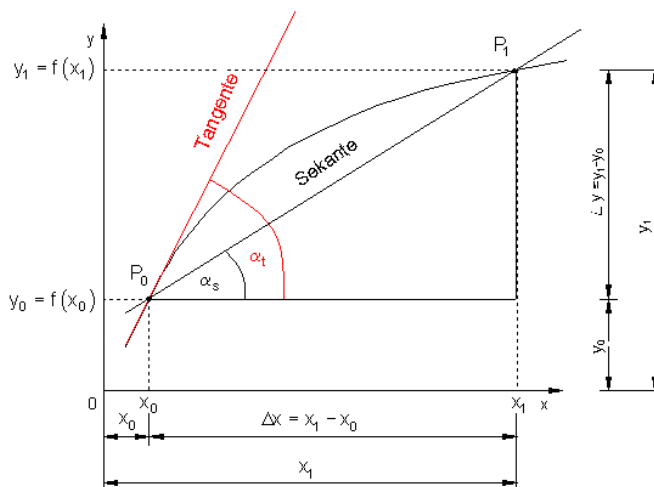
د تنجنت جگېدنې سره د حد (پوله ارزښت) له لارې لرو

$$a_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

دا مشتق یا لحظوي - یا د سترگورپ تغیر ارزښت دی

$$a_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

یا لنډ:



په ورته توگه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څیرني لاندې نیسو:

د یوې کرښې میل یا جگیدنه یې له مشتق نیوني ټاکلکیدی شي.

کرښه  $y = f(x) = mx + a$  لرو.

د دې کرښې د جگیدني فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

## II.6 د غوڅوونې (قاطع seconce) پیژند:

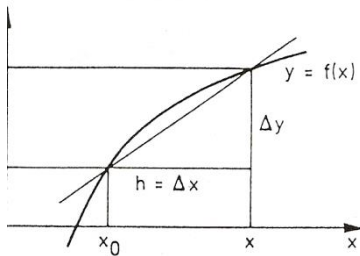
قاطع هغه کرښه ده، چې منحنی د  $P_0$  او  $P_1$  په دوه ټکو کې غوڅوي.

پایله: د قاطع میل یا جگیدنه (جگوالی secant): دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو میل (جگوالی) یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمېرل کېږي.

په لاندې کې  $m_s$  د جگوالی لپاره لیکل کېږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

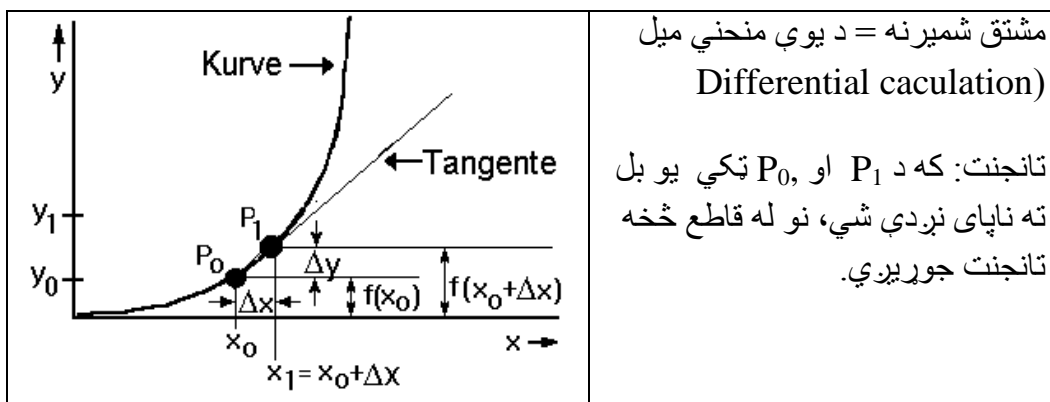
د پیژند لپاره څیره



پیژند (تعریف): د  $y = f(x)$  تابع دې د  $x_0$  په یوه چاپیریال او په  $x_0$  کې پخپله تعریف شوي تابع وي،  $x$  د  $x_0$  څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوبښه یا په زړه پورې ځای دی (مخامخ څیره دې وکتل شي). نو د تفاضل یا کمښتویش Difference quotient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$

د  $f$  تابع غوڅي ميل لپاره فرمول:  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  . دا فرمول د  $f$  په گراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د ميل شمیرنه ده. ټکي د  $x$  - محور باندې د  $x$  او  $x+h$  ټکي دي. د کمښت وپش يا د تفاضلونو وپش د مشتق د تعريف لپاره په کار راځي. د يوه تابع د ميل يا جگیدني ټاکنه په يوه د مخه ورکړ شوي ځای کې د تابع د مشتق نيونه بلل کيږي.



پایله : د تانجنت جگیدنه : د تانجنت جگیدنه د قاطع د جگیدني ، حد ، دی.

$$m_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

پام: لکه د مخه مو چي گوته ورته ونيوله، د derivative کلمه نوي ده، نو له دې امله دا څو ټکي په پام کې نيسو : derivative د رابیلیدني په مانا دی، چي موږ يې تراوسه مشتق بولو، چي همدا معنا لریيعنط له اشتقاق سره تړاو لري.

تعريف: که د تابع دا کمښتویش (د تفاضل وپش)  $x > x_0$  او (همداسي)  $(x > 0)$  او يا په (همدې ډول)  $(x < 0)$

$h > 0$  لپاره یو حد ولري، نو د  $y = f(x)$  تابع د  $x = x_0$  په ځای کې د مشتق قابلیت لري او د دې لپاره لیکو:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}; \dots$$

دا حد یا پوله داسی بنایو

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{x=x_0} = f'(x):$$

د  $x_0$  خای کی د  $y = f(x)$  تابع له مشتق (Derivativ) یا رایلیدنی) څخه یوه بله سیده یا بل ډول کړه لار رایلله وو.

د مشتق ساده شمیرنی لپاره یوه بیلگه:

د  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  مشتق غواړو پیدا کړو.

ددې کمبنتوېش په لاندې ډول دی:

$$\begin{aligned} \frac{y - y_0}{x - x_0} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{((x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 2) - (x_0^2 - 3x_0 + 2)}{\Delta x} \\ &= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3x_0 - 3\Delta x + 2 - x_0^2 + 3x_0 - 2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x} \\ &= 2x_0 + \Delta x - 3 \end{aligned}$$

او د لیمیت  $\Delta x \rightarrow 0$  سره یې مشتق لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x - 3) = 2x_0 - 3.$$

د دې لپاره دا لاندې پیژند وړکوو:

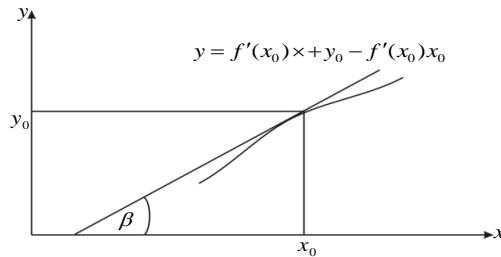


پیژند 2:

که یو د  $y = f(x)$  تابع د  $x_0$  په ځای کې مشتقوړوي، نو هغه لاندې کرښه چې د  $(x_0, y_0)$  ټکي څخه تیرېږي او میل یا جگوالی یې  $f'(x) = \tan \beta$  دی په لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$$

او دا د  $(x_0, y_0)$  په ټکي کې د ورکړ شوي منحنی  $y = f(x)$  تانجنت بلل کېږي (پرته له مخامخ شکل)



مور اوس د څو بنسټيزو توابعو مشتق شمیرنه تر څیرني لاندې نیسو.

بیلگه ۱:

د یوې ثابتې مشتق:

مور د لاندې تابع لرو، چې ارزښت یې یو ثابت دی  
 ثابت  $y = f(x) = c = \text{Const}$

نو د هر  $x_0$  ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = 0$$

بیلگه ۲:

یوه  $f(x) = x$  خطي (کرښیزه) تابع لرو.

د  $x_0$  په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} & \Rightarrow f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1 \end{aligned}$$

نو  $f'(x_0) = 1$  د  $x_0$  په ځای کې د تابع مشتق دی او  $f'(x_0) = 1$  د مشتق تابع ده یعنې یوه ثابته ده.

بیلگه ۳ : د  $y = f(x) = c \cdot u(x)$  ډوله تابع مشتق د  $c =$  ثابتې سره.

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د (ثابتې  $c =$ ) سره ضرب شوی وي. یعنې

له  $y = f(x) = c \cdot u(x)$  څخه لرو:

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

ثبوت:

$f(x_0) = c u(x_0)$ $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c \cdot u(x_0 + \Delta x) - c \cdot u(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} c \cdot \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{c}_{c} \cdot \underbrace{\frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$ $\Leftrightarrow f'(x_0) = \underline{\underline{c \cdot u'(x_0)}}$
---	---

پیژند (تعریف): دفرنځیالوېش

Der Differentialquotient  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$   
 heißt Ableitung der Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x_0$

د  $x_0$  په ځای کې د تابع  $f(x)$  مشتق یا رابیلیدنه بل کیري

تعریف (پیژند): د تابع لومړی مشتق یا رابیلیدنه د  $x_0$  په ځای کې د تانجنت جگېدنه ورکوي، چې د تابع گراف یې په ټکي  $P_0(x_0, y_0)$  کې لمسوي او له دې سره غیرگ د تابع د گراف جگېدنه ده په ټکي  $P_0(x_0, y_0)$  کې. دا سړی د تابع جگېدنه هم بولي.

تانجنت جگېدنه په ټکي  $P_0(x_0, y_0)$  کې

Tangentensteigung in  $P_0(x_0 | y_0)$

$$a_t = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د  $x_0$  په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

د  $x_0$  په ځای کې د تابع مشتق یعنی څه؟

ددې د روبښانه ونې لپاره د لاندې بیلگې څخه کار اخلو

بیلگه:

تابع  $y = f(x) = x^2$  دې ورکړ شوی وي.

غواړو د  $x = x_0$  په ځای کې او په ځانگړې توگه د  $x_0 = 2$  په ځای کې د هر څه لومړی

کمښتویش (د تفاضل وېش) پیداوو.

$x = x_0 :$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$
---	---

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لاری د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو  $f'(x_0) = 2x_0$  لرو او د  $x_0 = 2$  لپاره  $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$  باور لري.

د په ځای کې د تابع لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی

چې تابع د په ځای کې میل یاجگوالی 4 لري.

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لاری د مشتق ضریب ته راځو:

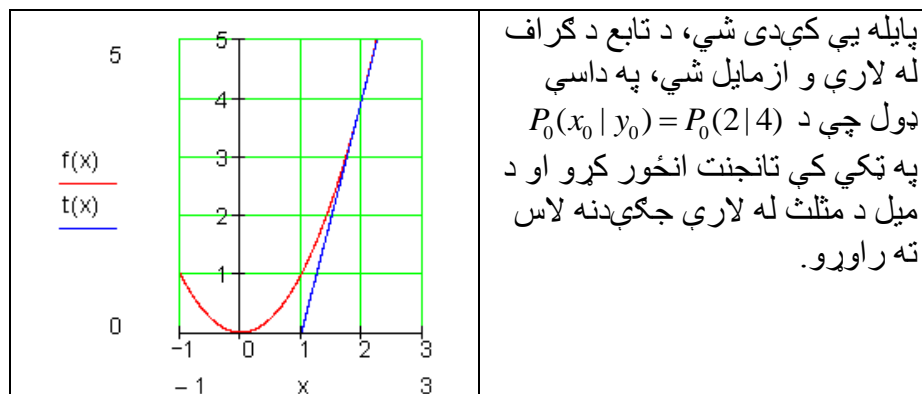
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو  $f'(x_0) = 2x_0$  لرو او د  $x_0 = 2$  لپاره  $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$  باور لري.

د  $x_0 = 2$  په ځای کې د تابع  $y = f(x) = x^2$  لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی

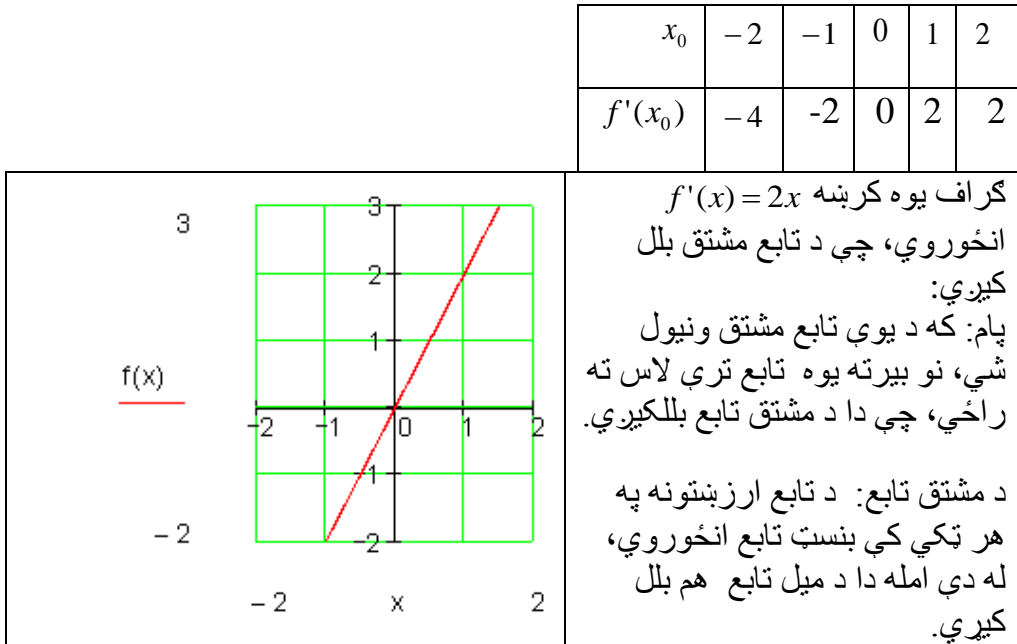
چې تابع د  $x_0 = 2$  په ځای کې میل یاجگوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یې:



لکه پورته بېلگه کې:  $y = f(x) = x^2$  په هر خوښه ځای  $x_0$  کې تابع پیداوو:

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$$



بیلگه: د  $f(x) = x^3$  تابع دې ورکړ شوی دی.

فعالیت: گران لوستونکي دې د  $f(x) = x^3$  تابع او د تابع د مشتق گراف وروسته له حله رسم کړي.

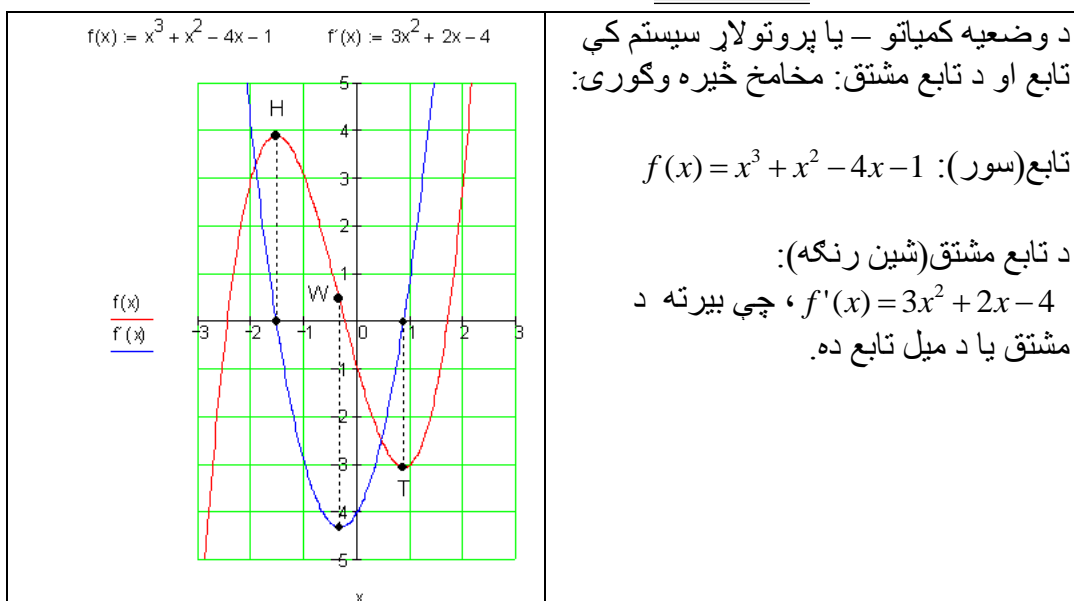
مور غواړو په  $x_0$  ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} & \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x (3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2$$

نو  $f'(x_0) = 3x_0^2$  د تابع  $f(x) = x^3$  مشتق دی په خای یا ټکی  $x_0$  کې.

د مشتق تابع داسې ده:  $f'(x_0) = 3x_0^2$



بیلگه ۴ : یوه تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  دې ورکړ شوی وي.

د  $x_0$  په خای کې د تابع مشتق پیدا کړئ او د مشتق تابع.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}) \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو  $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$  د  $x_0$  په خای کې د پورته تابع مشتق دی

او د مشتق تابع ده  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

د شمیرني په بنسټ مو تر اوسه دا لاندې تر لاسه کړي:

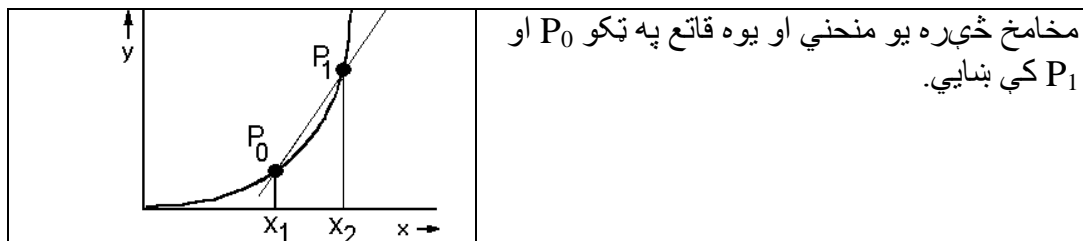
تابع	د مشتق تابع	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$f'(x) = 1 \cdot x^0$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2 \cdot x$	$f'(x) = 2 \cdot x^1$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f'(x) = -x^{-2}$
$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

که دا پورته پنځه قوانین یو د بل سره پرتله شي، نو کومان ترې لاس ته راځي، چې دا لاندې قوانین به باور ولري.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

بیلگه:

د تانجنت تعریف او خوښونه:



	<p>اوس غوارو، چې ټکی <math>P_0</math> د ټکي <math>P_1</math> په لور و خوځيږي.</p> <p>پام: ددې سره قاطع خپل ميل تغيروي</p>
	<p>بالاخره غوارو، چې <math>P_1</math> ټکی و <math>P_0</math> ټکي ته ناپای ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کيږي</p>
	<p>چې دا پوره وپيژندلی شو د ټکو <math>P_1</math> او <math>P_0</math> په شاوخوازوو يا لويه وو:</p> <p>که د <math>P_1</math> ټکی و <math>P_0</math> ټکي ته ناپای نږدې شي، نو کتل کيږي، چې تانجنت په ټکي <math>P_0</math> کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحنې په <math>P_0</math> ټکي کې.</p>

د دې خويونو غوره غوره والی يا لاس ته راوړنه (پايله):  
 ومو ليدل، چې د تانجنت ميل په  $P_0$  ټکي کې په همدې ټکي کې د منحنې ميل هم دی. له دې دا پايله لرو، چې که څوک غواړي د منحنې ميل په  $P_0$  ټکي پيدا کړي، بسيا کوی، چې د تانجنت جگوالی يا ميل په  $P_0$  ټکي کې پيدا کړي.

### د تانجنت او عمود عمومي فرمولونه:

پيل: تانجنت دې د  $f(x)$  گراف د  $(x_0, f(x_0))$  په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د  $f(x)$  گراف د په  $(x_0, f(x_0))$  ټکي کې عمود يا ولاړ غوڅ کړي.

د تانجنت مساوات:

د سره لیکو:

دا چې  $(x_0, f(x_0))$  تانجنت يو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot x + b_t = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لږ:



$$t(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0) \\ = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال):

د منحنی سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود ځغلي.  
د عمود میل:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)} \\ \Rightarrow n(x) = \underline{\underline{-\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)}}$$

بیلگه:

$$د \quad f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \quad \text{تابع لرو.}$$

د تابع تانجنت او عمود (نورمال) پیدا کړئ:

حل: په لاندې توگه د تابع مشتق نیسو او گراف یې (څیره لاندې کینل شوي) کارو:

$x$	-4	-1	0	1.5	3
$f'(x)$	4	2.5	2	1.25	0.5

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad \text{لرو:}$$

د تانجنت میل په ټکي  $x_0$  کې د میل ارزښت 3 لري.

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2 \cdot (-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د  $P(-2, -5)$  په ټکي کې تانجنت په  $f(x)$  باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x, \quad P(2, f(2))$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د  $x_0 = 2$  په ځای کې دا لاندې لرو:

.

$$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \quad f'(2) - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x-2) + 3 = x - 2 + 3 = \underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x, \quad P(2 | f(2))$$

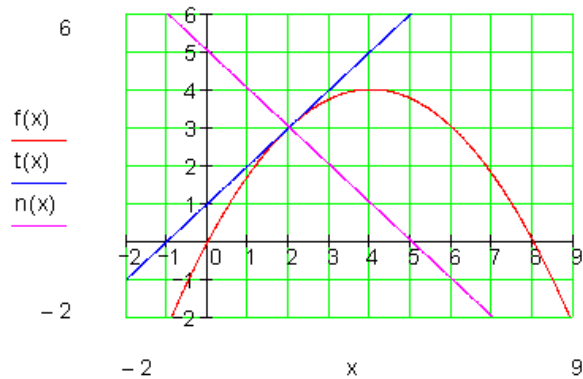
$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

د  $x_0 = 2$  سره لاندې راځوي:

$$n(x) = \frac{1}{f'(2)}(x - 2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \quad f'(2) - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x - 2) + 3 = -x + 2 + 3 = \underline{\underline{-x + 5}}$$



د تانجنت او عمود عمومي مساوات

بیلگه: تابع  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$  لرو.

د تانجنت میل: د یوه تابع د گراف میل په ټکي  $P(x_0 | f(x_0))$  کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل. مور  $f(x)$  تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

$$\text{مور د تابع مربع لرو } f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

$$\text{د تابع مشتق } f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

ارزبنتجدول:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د  $f(x)$  ارزبنتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککړی ټکی دی:

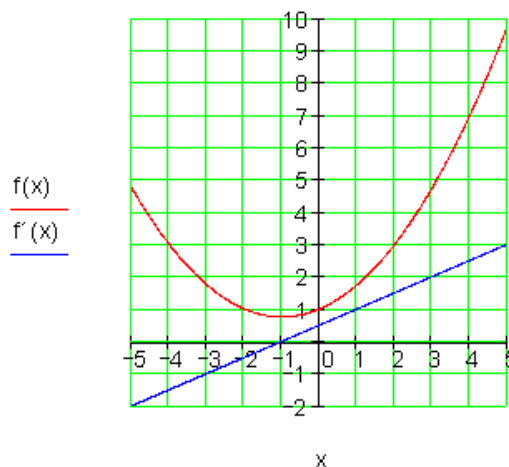
$$S(-1, 0.75) \text{ د } x = -1 \text{ ارزبنت لپاره } f'(-1) = 0 \text{ د میل تابع ارزبنت دی:}$$

دا دا معنی لري، چې په ککړی ټکي کې د  $f'(x)$  میل صفر دی.

تانجنت په  $s$  کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت (افقي) ځغلي؛ یعنی د  $-x$  محور سره غبرگ ځغلي.

گرافونه:

$$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \quad f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



$$\begin{aligned}
 & \text{بیلگه: تابع لرو: } f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 7 \\
 & \text{تانجنت دې پیداکړی شي، چې د } f(x) \text{ گراف د } P(-2, f(-2)) \text{ په ټکي کې لمسوي،} \\
 & f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 7 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 14x + 1 \quad P(-2 | f(2)) \Rightarrow x_0 = -2 \\
 & t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\
 & f'(x_0) f'(-2) = 24 - 28 + 1 = -3 \\
 & f(x_0) = f(-2) = -16 + 28 - 2 - 7 = 3 \\
 & \Rightarrow t(x) = -3(x + 2) + 3 = -3x - 6 + 3 = \underline{\underline{-3x - 3}}
 \end{aligned}$$

لاس ته راورنه (پایله):

د  $f(x)$  تابع گراف کې تانجنت او عمود په  $P(x_0, f(x_0))$  ټکي کې لاندې بڼه لري.

$t(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{جگیدنه}}(x - x_0) + f(x_0)$ <p>د تانجنت مساوات</p>	$\frac{1}{n(x)} = \frac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جگیدنه}}(x - x_0) + f(x_0)} ; f'(x_0) \neq 0$ <p>د عمود مساوات</p>
--	---

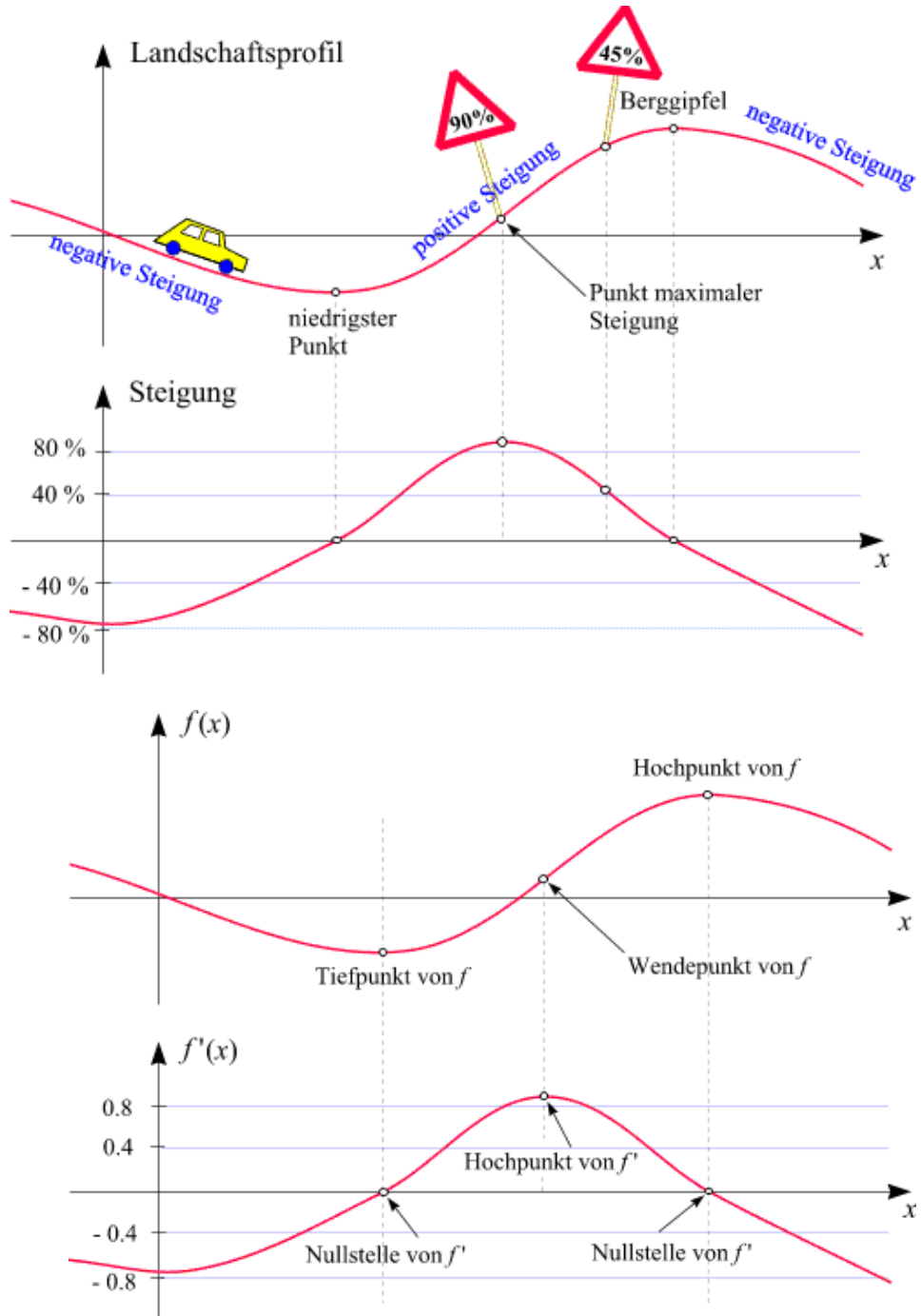
### Steigungen in der Landschaft په بیدیا کې جگوالی

لاندې د د تابع گراف د سرک په څیر په فکر کې راولو، چې په بیدیا کې جگ او ټیټیږي یا

کښتپورته خُغلي، نو په بڼه توگه یې رسمولی شو، چې د گراف خویونه د مشتق سره په اړیکو کې راځي:

دپورته څیرو پښتو: له کین لور کښته بڼي لور ته: بیدیا یا کرونده، منفي جگوالی، جگوالی، (بله کرښه) خورا ټیټ ټکی، (شي لور ته بله کرښه) مثبت جگیدنه، (پسي کرښه) د غره څوکه، د خورا جگي جگیدني ټکی، (اخره) کمیز یا منفي جگیدنه.

د سرک کښته یا لاندې لور ته د ځانگړي دیاگرام سره د سرک جگیدنه په هر ټکي کې انځور ده، د کومی سره چې یوه دویمه منحنی ورکوي.



دپورته پښتو: له پورته کښته له کین وښي لور ته: د  $f$  جگ ټکی، د  $f$  ټیټ ټکی، د  $f$  اورونټکی یا د انعطاف ټکی، د  $f'$  جگ ټکی، د  $f'$  صفرخای، د  $f''$  صفرخای.

دیاگرامونه په کره توره وگوری او وهڅیرئ، چې د دویمې منحنی خویونه د لومړی منحنی له خویونو را برسیره کړی.

چیرته چې سرک خورا ټیټ ټکی لري، هلته د جگیدني ارزښت  $0\%$  دی. دا په دې معنا چې که موټر له دې خایه تیر پري په افقي نا پراته ډول خُلي او په همدې توره که موټر د غره په څوکه هم و خُلي. دا ټیک هغه ټکی دي، د کومو په چاپیریال کې چې منفي او مثبت جگیدنه یو بل سره رابندوي یا پولې لري.

د دې په منځ کې یو چیرته یو ټکی شتون لري، چې هلته جگیدنه ماکزیمال یا خورا لویه ده (په دې بیلگه کې  $90\%$ ).

همدې ته ورته په دویمه منحنی (کږې) کې یو ه څوکه لري، مگر دا په دې بیدیا کې هغه ستره،، څوکه،، نه ده، مگر که څوک غواړي، نو یوه د،، جگیدني څوکه،، ده.

اوس دا دواړه کږې یا منحنی په ورسره بلده یا معمول ریاضیکي ډول لاندې شکلونه لري:

لومړی منحنی د  $f(x)$  گراف دی، دویمه منحنی یا کږه د مشتق تابع  $f'(x)$  گراف دی.

دا دواړه گرافونه بیا هم ټیک وگوری او وهڅدږی، چې وپوهږی، چې دا په هره برخه کې یو د بل سره څنگه اړیکې لري.

د  $f(x)$  گراف دوه ځانگړي ټکي مو سترگو ته راځي: په یوه کې  $f(x)$  مینیمال ( خورا ټیټ ټکی) په بل کې  $f(x)$  ماکسیمال ( خورا جگ ټکی) دی.

په دې ځایونو کې  $f(x)$  صفرخایونه لري.

هغه ټکی چې هلته د  $f(x)$  گراف خورا ستوغ دی، هغه، هغه د انعطاف ټکی یا اورونټکی بلل کیري.

دا چې په دې ټکي کې د  $f(x)$  مشتق خورا جگ دی (په دې بیلگه کې  $0,9$ )، دا د  $f'(x)$  عظمي نقطه ده.

د ازادی سترگی سره د هغه ځای له لاندې منحنی څخه بڼه څرکندیري، نسبت و پورته منحنی ته.

مورد دې بیلګې څخه همدا اوس اټکل کولای شو یا گومان راوړی شو: که یوه تابع  $f(x)$  ولرو، نو د دې  $f(x)$  تابع په هکله د  $f(x)$  له مشتق څخه ارزښناک معلومات په لاس روړی شو. دا مورته د ماکسیمیا او مینیمیا په هکله (چې دا دواړه د افراطي ارزښت تر نامه یادیري) او په دې هکله چې گراف چېرته خور یا ستوغ دی، پوره کتور معلومات راکوي.

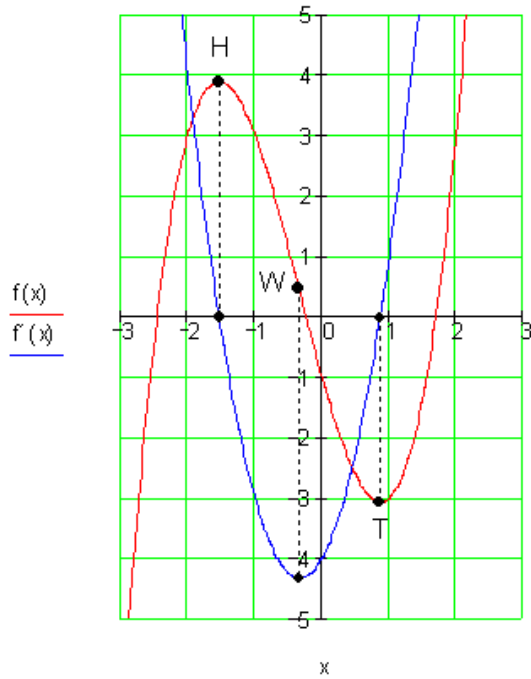
په کواوردینات (یوه پروت - ولار) - سیستم کې تابع اود تابع مشتق:

$$\text{تابع: } f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$$

$$\text{مشتق: } f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$$

د یوه تابع مشتق بیرته تابع دی. موردا د مشتق تابع او یا د جګیدني (میلان) تابع بولو

$$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \quad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$$



د دواړو توابعو گراف په یوه قیمتې وضعیه (پروت ولاړ سیستم) کې و کښل شو.

هلته چې تابع  $f(x)$  یو جگ ټکی (H) همداسې ټیټ ټکی (T) لري گراف د مشتق تابع  $x$ -محور کې غوڅوي، په دې مانا چې د تابع ارزښت دلته صفر دی.

دا روښانه دی، ځکه چې په H او T کې تابع  $f(x)$  پروت یا افقي تانجنت لري، دا دا معنا لري، چې په دې ټکي کې د  $f(x)$  جگېدنه صفر ده.

د مشتق تابع  $f'(x)$  هلته مینیموم لري، چېرته چې د  $f(x)$  جگېدنه د H او T ترمنځ په پام ونيول شي د مطلق قیمت له مخې خورا لویه ده.

### II.3. د مشتق شمیرني قوانین

قضیه (د جمعي یا زیاتون قاعده یا لار):

که یو تابع  $f(x)$  د دوه توابعو  $u(x)$  او  $v(x)$  د جمعي څخه جوړ وي، نو مشتق یې هم د هر تابع د مشتق د جمعي څخه جوړ دی، یعنې:

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)] + [v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)]}{\Delta x} + \frac{[v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \right]}_{u'(x_0)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} \right]}_{v'(x_0)}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{f'(x) = u'(x) + v'(x)}}$$

بیلگه:

د دې ورکړ  $f(x) = 5x^2 + 3x$  ,  $u(x) = 5x^2$  ,  $v(x) = 3x$  توابعو شتق وشمیرئ.

ښوونه:



$$\begin{aligned}
 f(x) &= 5x^2 + 3x & u(x) &= 5x^2 & v(x) &= 3x \\
 \Rightarrow u'(x) &= 10x & v'(x) &= 3 \\
 f'(x) &= u'(x) + v'(x) = \underline{\underline{10x + 3}}
 \end{aligned}$$

د جمعی قاعدی تولید کونه:

که چیری  $f_1, f_2, \dots, f_n$  توابع او  $k_1, k_2, \dots, k_n$  ثابت عددونه وی نو لرو (بی له بنوونی):

$$\begin{aligned}
 & [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x)]' \\
 & = k_1 f_1'(x) + k_2 f_2'(x) + \dots + k_n f_n'(x)
 \end{aligned}$$

قضیه (د ضرب قاعده یا لار):

که  $f(x)$  او  $g(x)$  دوه توابع وی، نو بنایو:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x)' \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x)'$$

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \quad \text{بنوونه:}$$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعنی په صورت کې د  $-f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x)$  ورزیاتولو څخه دا لاندی لرو:

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\
 &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}
 \end{aligned}$$

له پورته څخه لاس راځی، یعنی که د دواړو لورو لیمیت نیسو:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

بیلهکه:

که  $g(x) = x^2 - 1$  او  $h(x) = \sqrt{x}$  ولرو، نو د  $f(x) = g(x)h(x)$  مشتق غوارو پیدا کړو.

ښوونه: په لاندې توگه مخ ته خو:

$$f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}, f'(x) = 2x\sqrt{x} + (x^2 - 1)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د وېش قانون):

f او g دې دوه توابع وي. غوارو وښایو:

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښایو (ثبوت کړو).

لومړۍ لار:

لومړۍ لار یا طریقه یې په لاندې کې ښایو او دویمه لار دې گران زده کوونکي وښایي:

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}, \quad g(x) \neq 0$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{g(x+h)g(x)} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \right]
 \end{aligned}$$

غوارو  $f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)$  صورت ته ور زیات کرو، نو لرو:.

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \\
 &= \frac{1}{g(x)g(x)} \left[ \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
 &= \frac{1}{[g(x)]^2} \left[ g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
 &= \frac{1}{[g(x)]^2} [g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}
 \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{یعنی لرو:}$$

دویمه لار: د  $\frac{1}{g(x)}$  مشتق غوارو پیدا کرو او بنایوچي دی:

$$\left( \frac{1}{g(x)} \right)' = - \frac{g'(x)}{g^2(x)} \quad (*) \quad (f(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

که  $f(x) = \frac{1}{g(x)}$  کي ږدو نو لرو:

$$\begin{aligned}
 (f(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x).h}$$

$$= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{-\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

که دا  $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)}$  وپش ولرو او وغوارو چې مشتق يي پيدا کړو، نو له پورته بنووني، د (\*) اړیکي او د ضرب قاعدې له مخي لرو:

$$\begin{aligned} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' &= \left[f(x) \frac{1}{g(x)}\right]' \\ &= f(x) \left(\frac{1}{g(x)}\right)' + \frac{1}{g(x)} f'(x) \\ &= f(x) \left(\frac{g'(x)}{(g(x))^2}\right) + \frac{1}{g(x)} f'(x) \\ &= \frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} + \frac{f'(x)}{g(x)} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$

بیلگه:

د  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$  تابع (د  $x^2 - 4 \neq 0$  سره) مشتق غوارو پيدا کړو.

حل: که چيرې  $g(x) = x^2 - 4$  او  $h(x) = x^2$

وضع شي نو لرو:

$$g'(x) = 2x$$

$$h'(x) = 2x$$

او د ویش قانون له مخي لرو:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[ \frac{g(x)}{h(x)} \right]' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2} \\ &= \frac{2x(x^2 - 4) - x^2 \cdot 2x}{[x^2 - 4]^2} \\ &= \frac{-8x}{[x^2 - 4]^2} \end{aligned}$$

بیلگه:

د  $y = \sin x^2$  تابع یوه په لاندې توگه ورکړ شوی خنځیري تابع ده:

$$y = \sin z, \quad z = x^2$$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق وړدي. له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d \sin x^2}{dx} = \frac{d \sin z}{dz} \cdot \frac{dx^2}{dx} = \cos z \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2$$

بیلگه:

د  $y = \sin^2 x$  تابع په لاندې ډول تړلی ورکړ شوی.

$$y = z^2, \quad z = \sin x$$

دلته هم دواړه توابع هر چیرته مشتق وړ دي. نو له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d \sin^2 x}{dx} = \frac{dz^2}{dz} \cdot \frac{d \sin x}{dx} = 2z \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

بیلگه:

د  $f(x) = (x^5 + 4)^8$  تابع مشتق وشمیری!

حل: هرکله چې  $g(x) = x^8$  او  $h(x) = x^5 + 4$  وضع کوو نو لرو:

$$f(x) = g(h(x))$$

$$f'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$h'(x) = 5x^4 \quad g'(x) = 8x^7$$

$$f'(x) = 8(h(x))^7 5x^4 = 40(x^5 + 4)^7 \cdot x^4$$

د مثلثاتي فنکشنتابعگانو مشتق

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad \dots I$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad \dots II$$

قضیه: د ساین تابع  $y=f(x)=\sin x$  مشتق غواړو وبنایوو چې  
 $f'(x)=(\sin x)' = \cos x$  دی:

ددې قضیې د بنوولو له پاره پورتنی په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي.

د  $y=f(x)=\sin x$  ساین تابع د هر  $x$  لپاره تعریف ده، نو د  $x_0$  په خوبنه ټاکلوڅخه لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} \\ &= \frac{2}{h} \cos \frac{2x_0 + h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2} = \cos \left( x_0 + \frac{h}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \end{aligned}$$

د لیمیټ د برخې په پام کې لرلو سره لرو:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right) = \cos x_0.$$

د ساین تابع په هر ځای کې، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري یا مشتقور ده:

$$\left( \frac{d \sin x}{dx} \right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \cos x_0, \quad (\text{په لینده کچ یا رادیان})$$

قضیه:

همداسې بنوول کیري چی کوساین تابع هم په هر ځای کې مشتقور ده، دلاندې مشتق سره:

$$\left( \frac{d \cos x}{dx} \right)_{x=x_0} = f'(x_0) = -\sin x_0, \quad (\text{په لینده کچ یا رادیان})$$

ثبوت: لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x_0}{h}$$

په پورته ننوتنه کې د دویم فرمول له مخې لرو:

$$= \frac{-2 \sin \frac{x+h+x}{2} \cdot \sin \frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \frac{-2 \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin \frac{h}{2}}{h}$$

$$= -\left[ \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right]$$

د د پولې او د پولې یا حد د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي:

$$-\lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنډه توګه لیکو:

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

قضیه: غوارو وښایو چې د تانجنت تابع  $f(x) = \tan x$  مشتق ورته او د مشتق تابع

$$\text{یې } f'(x) = \frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ ده.}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\tan x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right) \\ &= \frac{\cos x \frac{d}{dx} (\sin x) - \sin x \frac{d}{dx} (\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$= 1 + \tan^2 x, x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

بیلګه: غوارو د  $y = \cos \frac{\pi x}{180}$  تابع مشتق پیدا کړو.

حل: ږدو:  $f(x) = \cos x$  او  $g(x) = \frac{\pi x}{180}$ ، نو  $y$  په لاندې توګه لیکلی شو:

نو د زنجیرې قاعدې په بنسټ لرو:



$$\begin{aligned}
 y' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\
 &= \cos'(g(x)) \cdot \left(\frac{\pi}{180} \cdot x\right)' \\
 &= -\sin(g(x)) \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180} \cdot \sin \frac{\pi x}{180}
 \end{aligned}$$

بیلگی :

۱ - د  $f(x) = \sin x$  تابع لومړي څلور مشتقونه دې پیدا شي.

$$f''(x) = \cos x ; f'''(x) = -\sin x ; f^{(4)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$$

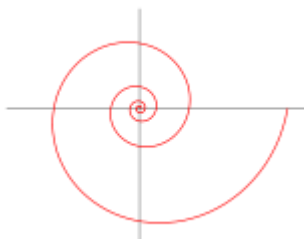
۲ - د  $f(x) = x \cdot \sin x$  تابع مشتق پیدا کړئ  
د ضرب قانون څخه کار واخلي.

$$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x$$

۳ - د  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  ;  $x \neq 0$  تابع مشتق پیدا کولو له پاره د ځنځیر قانون څخه نار اخلو.

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} \cos \frac{1}{x^2} \quad \text{برو } z = \frac{1}{x^2} \text{ او } u(z) = \sin z \text{ ته رايي: } u'(z) = \cos z$$

د لوگارېتم مشتق



قضیه :

د لوگاریم تابع مشتق:

قضیه: هر د لوگاریم تابع  $y=f(x)=\log_b x$  د  $b > 0, b \neq 0, x > 0$  سره، مشتقور دی

$$\text{او صدق کوي: } f'(x) = \frac{1}{x} \log_e = \frac{1}{x \cdot \ln b}$$

ثبوت: دا چې تابع  $y=f(x)=\log_b x$  یواځې د  $x > 0$  لپاره پیژند لري یا تعریف دی. په هر ځای کې چې  $x > 0$  وي، نو دا لاندې باوري دی :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\log_b(x_0 + h) - \log_b x_0}{h} = \frac{1}{h} \log_b \frac{x_0 + h}{x_0} = \log_b \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}}$$

د ( لومړۍ برخې ) له مخې دا لاس ته راځي:

$$\log_b \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} = \left[ \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}} \right]^{\frac{1}{x_0}} \rightarrow e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \log_b \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} = \log_b e^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \log_b e$$

د لوگاریم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پیژند ست کې د مشتق قابلیت لري.

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_b e \quad \text{همداسې } f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln e}{\ln b} \quad \text{داچې } \ln e = 1 \quad \text{نو صدق کوي:}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln b} \quad \text{خه چې د بنوولو وو.}$$

په ځانگړي ډول دا لاندې باور لري:

$$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0} = \frac{1}{x_0} \quad \text{پای.}$$

بیلگه:

د  $f(x) = \log \sqrt{x^3}$  مشتق وشمیرئ.

بنوونه: په لاندې توگه مخ تخ ځو:

$$f(x) = \log \sqrt{x^3} = \log_{10} x^{3/2} = \frac{3}{2} \log_{10} x$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 10}$$

$$= 0.6514 \cdot \frac{1}{x}; \underline{\underline{D(f') = \mathbb{R}^{>0}}}$$

بیلگه:

د  $y = \ln \frac{x-2}{x+2}$  تابع مشتق پیدا کړئ

حل:

مور لیکلای شو:

$$y = \ln \frac{x-2}{x+2}$$

$$= \ln(x-2) - \ln(x+2)$$

دا چې  $(\ln(x-2))' = \frac{1}{x-2}$  او  $(\ln(x+2))' = \frac{1}{x+2}$  دی، نو لرو:

$$y' = (\ln(x-2))' - (\ln(x+2))'$$

$$= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{4}{x^2-4}$$

بیلگه:

لرو:  $f(x) = \log_2(x)$   
 غواړو پیدا کړو: ۱. مشتق  $f'(x)$

مشتق د  $x_0=16$  په ځای کې  
 حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو:  $f'(x) = 1/(x \cdot \ln 2)$   
 اوس د  $x_0=16$  په ځای کې مشتق ټاکو:  
 $f'(x_0) = 1/(16 \cdot \ln 2) = 1/(16 \cdot 0.69) = 0.09$

پای

اوس دې یوه بله د دیفرنسیشن قاعده ورکړل شي کومه چې په جدول 20-1 کې غیر مستقیم  
 خوندي یا په بل عبارت دننه ده.

مور غواړو د لاندې شکل تابع یا بلواک مشتق ونیسو

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

د ځنځیر قاعدې له مخې تر څیرني نیول کېدی شي،  $y = e^z$ ,  $z = g(x) \ln(f(x))$   
 لاندې بلواک  $u = \ln f(x) = \ln v$ ,  $v = f(x)$  مشتق هم د ځنځیر قاعدې له مخې را پیدا کېدی  
 شي. دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

او

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^z \cdot (g'(x) \ln f(x) + g(x) u') \\ &= f(x)^{g(x)} \left( g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)} \right) \end{aligned}$$

د ځنځیر قاعدې د نیونو په نظر کې نیولو سره او د جملې 20-10 له مخې لاس ته راځي

جمله 10-20 که  $f(x)$  او  $g(x)$  د  $f(x) > 0$  سره د مشتق قابلیت لري ، نو

$$y = f(x)^{g(x)}$$

هم د لاندې مشتق سره مشتقور دي

بیلگه : تابع یا بلواک  $y = x^x$  د  $x > 0$  لپاره مشتقور دی. دا دې په (20-57) کې داسی

$f = x, g = x$  خای په خای شي او له دې سره  $f' = 1, g' = 1$ . له دې امله اوس د  $x > 0$

$$\text{لپاره لرو: } dx^x / dx = x^x (\ln x + 1)$$

( دا وروسته د ایمپلیخیت توابعو مشتق کې هم په همغه توگه روارول شوي ده )

بیلگه: د  $y = (x^2 - 1) \ln x$  د مشتق سره باید د  $g = \ln x$  له امله و غوښتل شي چی

$x > 0$  او د  $f = (x^2 - 1) > 0$  له امله باید باور ولري  $x^2 > 1$  او له همدې امله  $|x| > 1$

پس کیدی شي چی فرمول (20-57) د  $x > 1$  لپاره د  $f = x^2 - 1$  او  $g = \ln x$  سره استعمال

شي:

بیلگه: د  $f(x) = x^3 \cdot \ln 4x$  ( $x > 0$ ) مشتق دي پیدا شي

$u(x) = x^3$  د  $u'(x) = 3x^2$  سره،  $v(x) = \ln 4x$  د خنزيري قانون له امله لرو:

$$v(x) = 4 \cdot \frac{1}{4x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \ln 4x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \cdot \ln 4x + x^2 = x^2 (3 \ln 4x + 1)$$

بیلگه: د  $f(x) = (x^2 + 2) \cdot \lg x$  ( $x > 0$ ) مشتق غواړو پیدا کړو

د ضرب قانون:  $v(x) = \lg x$ ;  $u(x) = x^2 + 2$ ;  $u'(x) = 2x$  او

$$v'(x) = 1 / x \cdot 10$$

$$f'(x) = 2x \cdot \lg x + (x^2 + 2) \frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \cdot (2x \cdot \ln x + x + \frac{2}{x})$$

## د اکسپوننشل توابعو مشتق

**قضیه:** هر اکسپوننشل تابع د  $y = b^x, (b > 0)$  د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقور دی او صدق کوي:  $f' = b^x \ln b$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f(x) = b^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b^x - b^{x_0}}{x - x_0}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b^{x-x_0} - 1}{x - x_0}, \quad x - x_0 = h$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

له پورته لرو  $\begin{cases} b^h - 1 = k \\ h = \log_b(1+k) \end{cases}$  او لاس ته تري راځي

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{k} \cdot \log_b(1+k)}$$

د لوگارېتم قانون څخه لرو:  $n \cdot \log x = \log x^n$  او لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
 &= b^{x_0} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\log_b(1+k)} \\
 &= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b[\lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}}]} , \lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = e
 \end{aligned}$$

له پورته لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
 &= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b e} , \log_b e = \frac{1}{\ln b} \\
 &= \underline{\underline{b^{x_0} \cdot \ln b}} ; x_0 \in \mathbb{R} ; b \in \mathbb{R}^{>0}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f' : f'(x) = b^x \cdot \ln b ; D(f) = \mathbb{R} ; b \in \mathbb{R}^{>0}$$

$$f'(x) = b^x \cdot \ln b$$

قضیه : د  $y = f(x) = e^x$  مشتق پیدا کری.

حل:

$$y = f(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

مورن دا لرلي په پام کې نیسو:  $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

مورن د تل کوچنیکیدونکي  $\Delta x$  ارزښت لپاره څیړو  $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

	$\Delta x$				
$\Delta x$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ مور لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

زمور د شمیرني په بنسټ دا مهنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_1 = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که  $x_0$  د  $x$  په  $x$  های های کړو، نو لرو:

$$f(x) = e^x \text{ und } f'(x) = e^x$$

اکسپوننشل فنکشن  $e^x$  ټیک  $y' = f'(x) = e^x$  مشتق لري

لرو:

اکسپوننشل فنکشن یو فنکشن دی، په کوم کې چې فنکشن او د تابع مشتق سره برابر دي

$e$  - تابع بیرته د مشتق له لارې تولیدیږي یا لاس ته راځي.

بل بدیل یا الترناتیو: که ولرو  $y = f(x) = e^x$  ، نو  $y' = f'(x) = e^x$  لاس ته راځي.

په پورته جمله کې مو وښوول: که ولرو  $y = b^x$  دو  $y' = y \cdot \ln b = b^x \cdot \ln b$  دی.

که  $b=e$  کړدو، نو لرو:



$$f'(x) = b^x \cdot \ln b = e^x \cdot \ln e \Rightarrow \ln e = 1$$

$$= e^x; x \in \mathbb{R}$$

$$f : f(x) = e^x; D(f) = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \underline{f' : f'(x) = e^x; D(f) = \mathbb{R}}$$

گورو چې  $f(x) = e^x; D(f) = \mathbb{R}$  یواځنی تابع دی، چې مشتق یې پخپله

$$\underline{f'(x) = e^x; D(f) = \mathbb{R}} \text{ دی}$$

$$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

د  $x \in \mathbb{R}^+ \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  سره.

فرمول

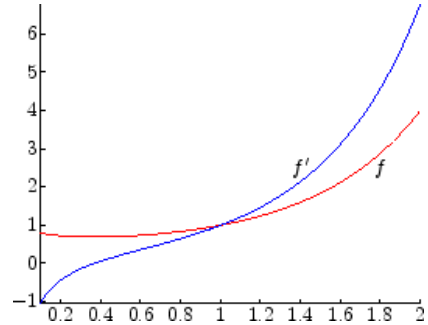
$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)|$$

کیدى شي د  $y = g(x)^{h(x)}$  بڼې تابع چې  $g(x) > 0$  دی، د مشتق لپاره وکارول شي

لاس ته ترې راځي:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx} (h(x) \ln g(x)) .$$

لیکونکی: (App/Höllig) اپپ ، هیولیک



د  $x \rightarrow 0$  لپاره  $\ln f(x) = x \ln x$  د 0 په لور هڅیږي، پس  $f$  د 0 په لور نو تابع په صفر کې بني لوریزه متمادي ده. د مشتق لپاره یې دا حالت ده دی.

د  $x^x \rightarrow 1$  او د  $\ln x + 1 \rightarrow -\infty$  له امله د  $x \rightarrow 0$  لپاره د  $f$  تابع په صفر کې یو عمود تانجنت لري.

د  $g(x) = x^{\ln x}$  لپاره لاس ته راځي:

$$g'(x) = x^{\ln x} \frac{d}{dx} (\ln x)^2 = 2x^{\ln x} \frac{\ln x}{x}.$$

(لیکونکي اېپ او هیولیک)

په طبیعت کې یې څیرنه:

د اکیوننشل توابعو مشتق

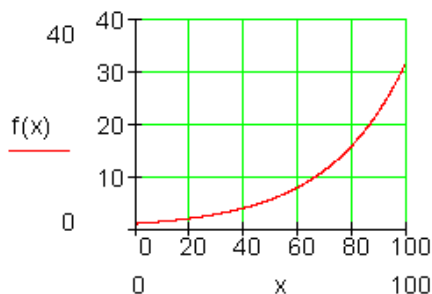
د تابع مساواتو جوړښت

کولي باکتریا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوتي ویش ( حجره وېش) له لارې زیاتیري. و مساعدو شرایطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقیقو

کي خان تجزیه کوي. د غه عملیې لپاره یو ارزښت جدول :ار، او گراف یې کارو. دلته د  $x$  اووښتوني (متغیره) په دقیقو د وخت لپاره ده. د  $y$  متحوله د باکتریاگانو د تعداد لپاره ده.

$x = \text{Minuten}$	0	20	40	60	80	100	دقیقې د باکتریاگانو تعداد
$y = \text{Bakterienzahl}$	1	2	4	8	16	32	

پورته جدول کي :  $x =$  دقیقې  $y =$  د باکتریاو تعداد



بیلگه: لرو :  $f : f(x) = b^{3x^2-10}$ ;  $D(f) = IR$ ;  $b \in IR^{>0}$

د پورته تابع مشتق ونیسئ.

$$D'(f) = D(f) = IR \Rightarrow D(f') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2-10} = g[h(x)]$$

$$g(z) = b^z \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b}; z \in IR$$

$$h(z) = 3x^2 - 10 \Rightarrow h'(x) = \underline{6x}; x \in IR$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$

$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$

$$= b^{3x^2-10} \cdot \ln b \cdot 6x; x \in IR$$

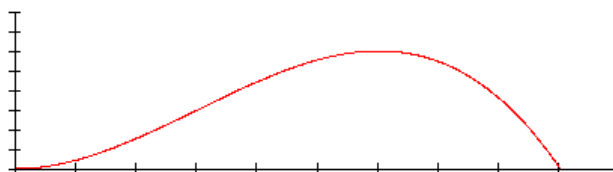
$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2}}}; D(f) = IR; b \in IR^{>0}$$

## - د مشتق استعمال په طبیعي علومو

په ریاضیاتو کې زیات وخت توابع راوړل کيږي، چې د یوې متحولې (اوښتونې)  $x$  په واک کې وي.

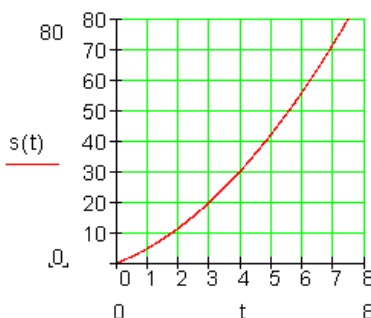
په طبیعي پوهنو کې زیات وخت توابع څیړو، چې د وخت په واک کې وي.

لکه په شکل کې د یوه توپ د غورځولو وهلي لار (دا وروسته روښانه کيږي)



بیلگه: د یوه په برابر ډوله بیره (تعجیل) غورځول شوي شي لپاره د پیل چټکتیا (لومړنۍ سرعت)  $v_0 = 4 \frac{m}{s}$  او  $a = 1,8 \frac{m}{s^2}$  بیږي (تعجیل) سره د لار-وخت-قانون په لاندې ډول دی:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$



حل: د پورته ورکړ شوي د  $v_0$  ارزښت لپاره

باور لري:  $S(t) = 0,9t^2 + 4t$   
( $s$  په ثانیه،  $s(t)$  په  $m$  (متر))

منځنۍ چټکتیا (سرعت)  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  (ده)

لحظوي (سملاسي) چټکتیا په لاندې ډول ده:

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$ $v = s'(t) = 1,8t + 4$	
	<p>په <math>v-t</math> - دیاگرام کې یوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتیا په برابر ډول زیاتېږي. دا دلته ثابتې جگې دده <math>\frac{\Delta v}{\Delta t}</math> ده او <math>a = 1,8 \frac{m}{s^2}</math> بیرته (تعجیل) ده.</p>
	<p>د بیرې یا تعجیل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي:</p> $v'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$

پام: د یوه برابر ډوله په بیرته (تعجیلې) خوزښت لپاره لاندې باور

$$\left| s(t) = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t \right| \quad \boxed{v(t) = s'(t) = at + v_0} \quad \boxed{a(t) = v'(t) = a} \quad \text{لري:}$$

د یوې چټکتیا (سرعت)  $v$  لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره  $v(t) = s'(t)$  لرو. د

$$s'(t) \text{ لپاره داسې } v(t) = s'(t) \text{ هم لیکو.}$$

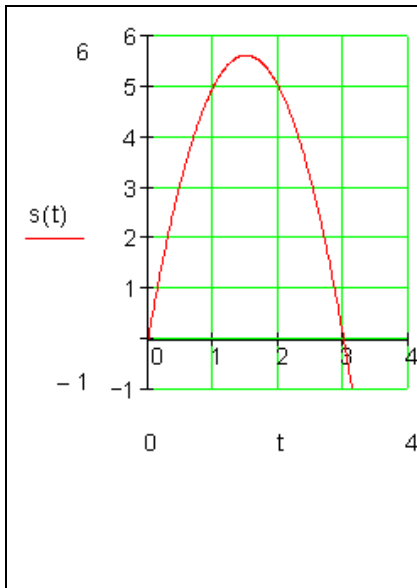
فعالیت:

	<p>(۱) د یوه خوزنده تن یا جسم د لار-وخت-دیاگرام ورکړ شوی. الف: دا خوزښت تشریح کړی.</p> <p>ب: دې پورې اړونده د چټکتیا - وخت - دیاگرام وکارئ.</p>
--	---

۲) یوه تیره د پیل چټکتیا  $v_0 = 7 \frac{m}{s}$  سره عمودي (ولاره) پورته غورځول کيږي.

د لار-وخت-قانون دی:  $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$  د  $g = 10 \frac{m}{s^2}$  (را ټولي؟؟) گډي شوي سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تیري چټکتیا (سرعت) صفر دی؟  
ب) خورا جگ د میل جگوالی وشمیرئ.



۳) تابع د یوه خوزبنت د لار-وخت-دیاگرام بڼایي.

الف) د ورځني ژوند څخه یوه بېلگه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ټیک وي.

د منحنی تلنه د  $t > 3$  لپاره فزیکي څه مفهوم لري؟

ب) د خوزبنت لپاره د لار-وخت-دیاگرام

په لاندې ډول دی.  $s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$

a او  $v_0$  وټاکئ

پ) د اړونده بیړي - وخت-دیاگرام وکارئ او دا تشریح کړئ. یوه منفي چټکتیا (سرعت) څه معنا لري؟

۴) یوتن (جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي، چې د  $t$  وخت کې  $S(t) = 5 \cdot t^2$  لار وهي.

په وختونو  $t=1;2;3$  کې لحظوي چټکتیا (سرعت) وښایئ.

۴ - حل:

لحظوي چټکتیا د سملاسي تغیر ارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

$$t = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1 + \Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د  $\Delta x \rightarrow 0$  لپاره باور لري:  $10 + 5\Delta x \rightarrow 10$

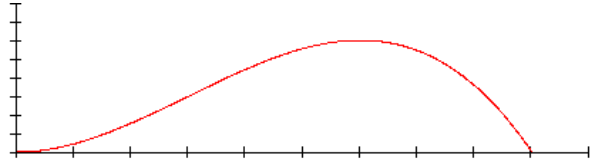
$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2 + \Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د  $\Delta x \rightarrow 0$  لپاره باور لري:  $20 + 5\Delta x \rightarrow 20$

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3 + \Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د  $\Delta x \rightarrow 0$  لپاره باور لري  $30 + 5\Delta x \rightarrow 30$

تمرین : لاندې د  $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$ ;  $x > 0$  تابع گراف او په ورنزدي توگه د فوټبال میدان کې د توپ الوتنې منحنی بنیایي، چې لاندې څیره لري.



لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

الف: توپ کوم خورا جگ (ماکسیمال) جگوالی لري او د وهلتکي (شوت شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟

ب: د توپ وهلتکي (شوت شوي ټکي) څخه توپ څومره لري بېرته ځمکې ته راځي؟

پ: د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهني ځای څخه ۹ متره لري او ۲ متره جگ دی. ایا توپ له دې څخه جگ الوزي؟

ت: توپ د تور لاین (د x محور) څخه په ۲ متره جگوالي الوزي. له کول څخه په کوم لربوالي دا ازاده شوت وهل شوی دی؟

## د جگو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسې مشتق له لارې لاسته راځي  
د  $f''(x)$  بیا مشتق نیونې سره د  $f'''(x)$  مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دویم مشتقتابع په نامه یادېږي.

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \quad \text{بیلگه:}$$

د  $f''(x)$  بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور

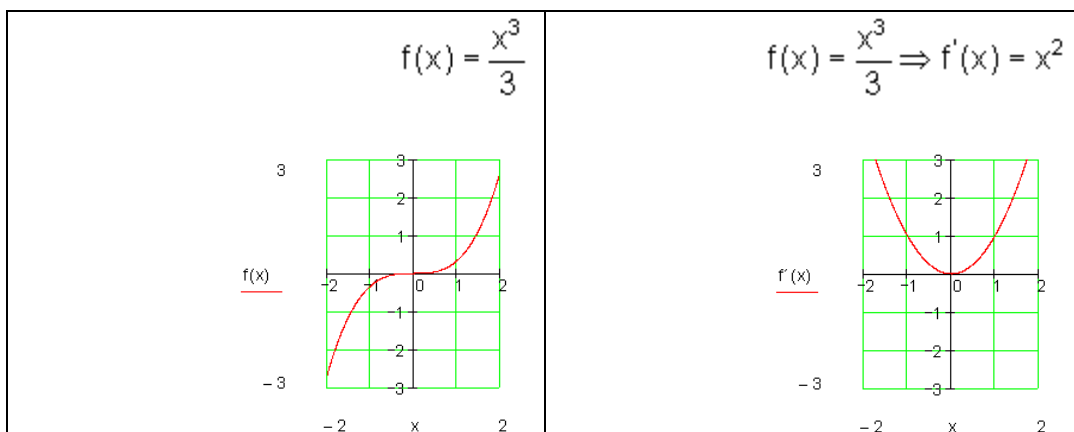
$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f'''(x) = 6$$

د  $f(x) = \frac{x^3}{3}$  تابع دې ۴ واره مشتق و نیول شي

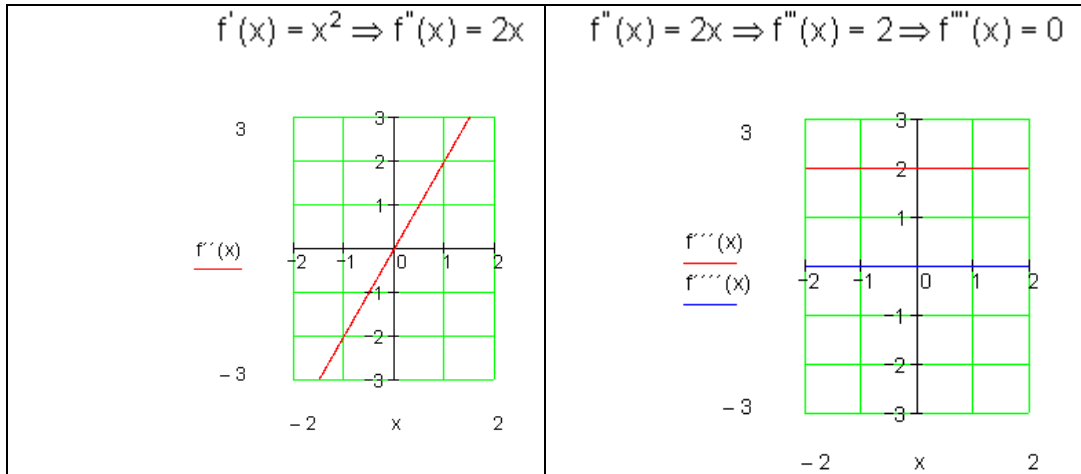
$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f^{(4)}(x) = 0$$

د تابع گراف:

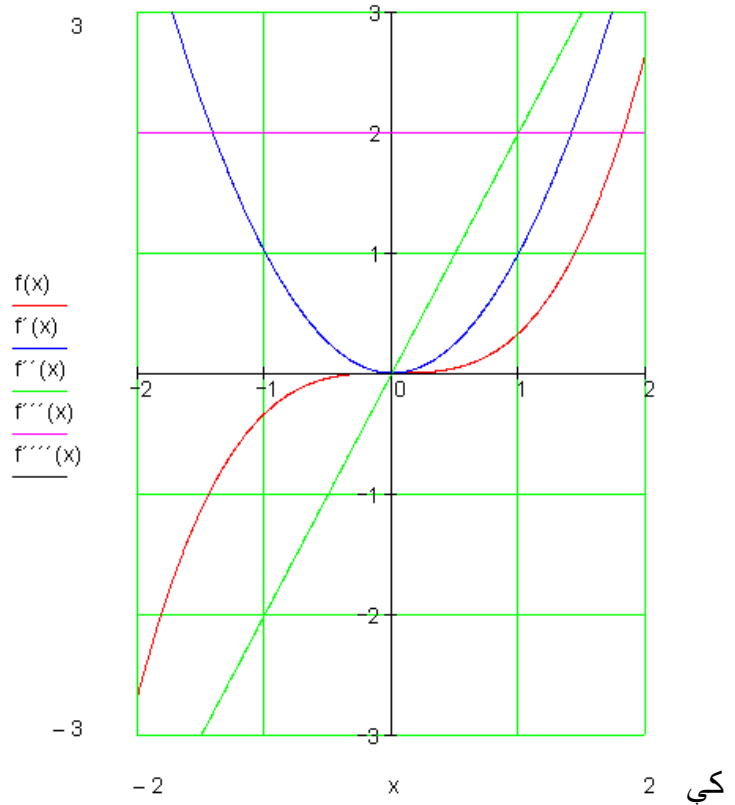
د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره







د ټولو توابعو گراف په یوه پروت ولاړ سیستم



بیلگی:

اول:

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$$

$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = 24x - 4$$

$$f'''(x) = 24$$

دویم:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 24x + \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{9}{2}x - 24$$

$$f'''(x) = \frac{9}{2}$$

تولگه: د  $f(x)$  لومړی مشتق د  $f(x)$  مشتق تابع  $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$  ده:

د  $f(x)$  دویم مشتق د  $f'(x)$  مشتق تابع  $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$  دی:

د  $f(x)$  دریم مشتق د  $f''(x)$  مشتق تابع  $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$  دی:

په ځانگړي ډول: بيو په خوشه وياند تابع  $f(x)$  په خوښه د مشتق قابليت لري.

## - - د ایمپلیسیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د  $f(x)$  تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیسیت Explicit ډول، که تابع متحوله د برابرېون په یوه اړخ ځانله شوې وي:

یا داسې: که یوه تابع  $y = y(x)$  په ایمپلیسیته توګه ورکړ شوې وي، دا په دې معنا چې په  $x$  او  $y$  کې یوه مساوات له لارې ورکړ شوې، نو کیدی شي دا مساوات پل برابرېون تړلی یې په  $x$  پسې مشتق ونيول شي. دلته په ځانله توګه کیدی شي په  $y = y(x)$  ځنډیري قانون وکارول شي.

د دې لپاره لاندې بیلګې راوړو:

$$Y = 3x^2 + 7x \quad \text{بیلګه:}$$

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړه انځورونه د تابع د مساوات له مخې دی، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیسیت Implicit ډول د بیلګې په توګه  $Ex^2 + 7x + y = 0$  فعالیت: که  $Ex^2 + 7x + y = 0$  ولرو، څنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟ قضیه: یوه تابع په ایمپلیسیته بڼه  $x^2 + xy - y^2 = 1$  لرو، غواړو  $dy / dx$  پیدا کړو. بنوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + xy - y^2) = \frac{d}{dx}(1) \quad (1)$$

$$2x + (1 \cdot y + x \frac{dy}{dx}) - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + y = \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx}$$

$$2x + y = \frac{dy}{dx} (2y - x)$$

$$\frac{2x + y}{2y - x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{-x + 2y} \quad \vee \quad \frac{2x + y}{2y - x}$$

ایمپلیخیت مشتق د یوې تابع مشتق‌نیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیخیت یعنی د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیخیت یعنی د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي. دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیخیت یا څرگند ډول ورکړ شوی وي، خو د دې مشتق‌نیول ستونځمن وي.

بیلگه: د  $f(x) = x^x$  تابع مشتق په ورسره بلدو مشتق‌وانینو نه شي نیول کېدی، ځکه چې په بنسټ او جگ اکسپوننت کې یې متحولې پرتې دي. د لوگارېتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منځه وړل کېدی شي:  $\ln f(x) = x \ln x$

اوس ایمپلیخیت دا حل کوو، داسې چې دواړو لورو ته یې د  $x$  پسې مشتق نیسو:

$$\frac{d(\ln f(x))}{dx} = \frac{d(x \ln x)}{dx}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځیرقانون له لارې صورت نیسي:

$$\frac{d(\ln y)}{dy} f'(x) = \frac{d(x \ln x)}{dx}$$

دلته  $y = f(x)$  دی. د لوگارېتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y} f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x}$$

که په  $f(x)$  پسې حل شي او د  $y$  له پاره بېرته  $f(x) = x^x$  ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x) = y (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

بیلگه: دایره د  $r$  وړانګې سره مساوات  $x^2 + y^2 = r^2$  لري. له دې ځنې برخې د  $y = f(x)$  تابع د گراف په څېر لیکل کېدی شي. د دې مشتق د ایمپلیخیت مشتق له لارې په لاندې توګه حل کېدی شي

په تعریف شوي مساوات کې  $y = f(x)$  ځای په ځای کوو:

$$x^2 + f(x)^2 = r^2$$

د دې مساوات د مشتق له لار لرو:  $2x + 2f(x)f'(x) = 0$

د  $f(x)$  پسې د حل له لارې لاس ته راځي:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$$

د دې مساوات سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي، چې په داپربتاجنت په ټکي  $(x, y)$  کې جګوالی  $-\frac{x}{y}$  لري.

بیلګه: د بیلګیپه توګه د  $E: x^2 + 3y^2 = 7$  له لارې ورکړ شوي ایلیپسي (هګی یا بیضوي) له لارې لرو:

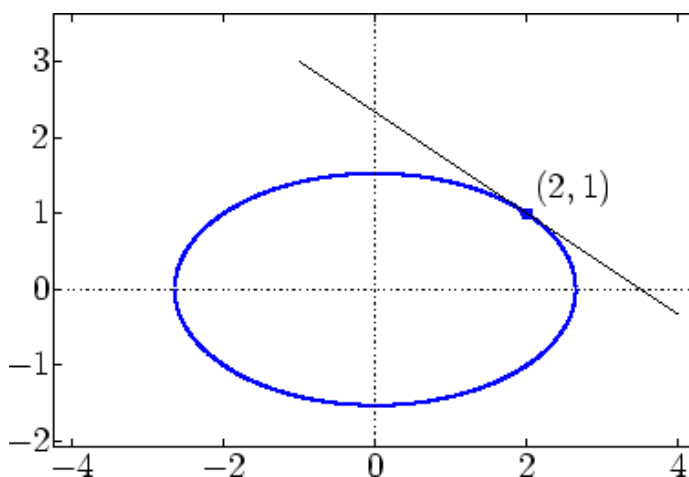
$$\frac{d}{dx}(x^2 + 3y^2) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

$$y' = -\frac{1}{3} \frac{x}{y} \quad \text{همداسې}$$

له

دې سره کیدی شي په  $E$  باندې په یوه ټکي د  $y \neq 0$  سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي. د بیلګې په توګه د  $(2, 1)$  لپاره لاس ته راځي

$$y' = -\frac{1}{3} \frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$



په ورته توگه کیدی شي لور يا جگ مشتقونه هم وشمیرل شي. د  $yy'$  لپاره د ضرب قانون کارول يا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx} (2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0.$$

له دې لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

بیرته په  $E$  د یوه ټکي د کواورډینات ایښوولو او همدا اوس د  $y'(x)$  ټاکلي ارزښت له لارې څرگند ارزښتونه وټاکل شي.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د بستیزو مشتقونو جدول

Nr	$f(x)$	$f'(x)$	نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	$X^n$	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3,\dots$
3	$X^n$	$n.x^{n-1}$	$x \neq 0$ تول عدد او
4	$X^r$	$r.X^{r-1}$	$r$ rational, $x > 0$
5	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3,\dots, x > 0$
6	$x^a$	$a.x^{a-1}$	$x > 0, a$ reell
7	$a^x$	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, a \neq 1$
8	$e^x$	$e^x$	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$

د پورته جدول په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمال ډول ، په خوبه د هری شننیزې یا سپرنیزې (تحلیلي) وینې یا افادې مشتق په شننیزه توگه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم باید سړی همغه نیونی په نظر کي ونیسي.

**ټولگه**

کمبنتویش **Differenzenquotient** ( د سیکانت جگېدنه) یا منحنی تغیر ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق **Differetialquotient** ( د تانجنت چگوالی یا لخصوي تغیر ارزښت)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتې قانون

$$f(x) = c \cdot u(x) \text{ mit } c = \text{constant}$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

د جمعې قانون

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

$$\boxed{f' = u' + v'}$$

د ضرب قانون

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

د وېش قانون

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$\boxed{f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

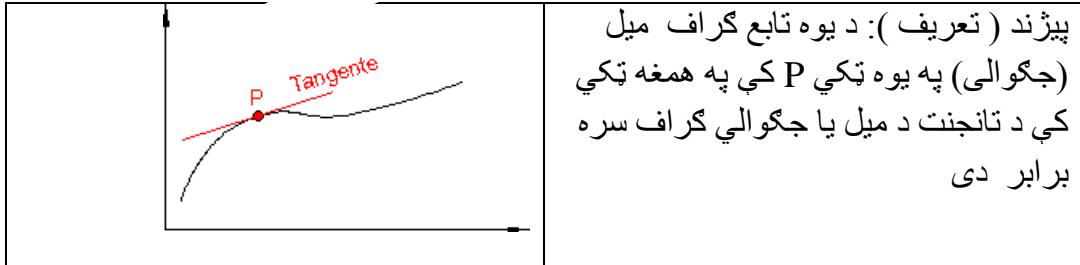


د خنځیر قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

دا پورته الماني په پښتو شي (دا کمپیتریسټ سرته رسوم)



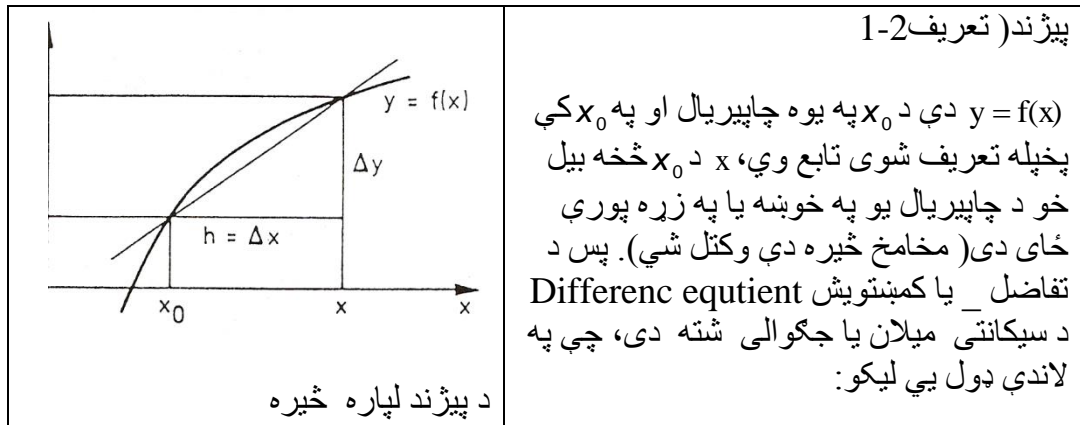
د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient

د یوې کرښې جگړه دغه بی له مشتق نیونې ټاکل کېدی شي:

$$\text{کرښه } y=f(x) = mx+a \text{ لرو}$$

د دې کرښې د جگړدنې فرمول په لاندې ډول دی:

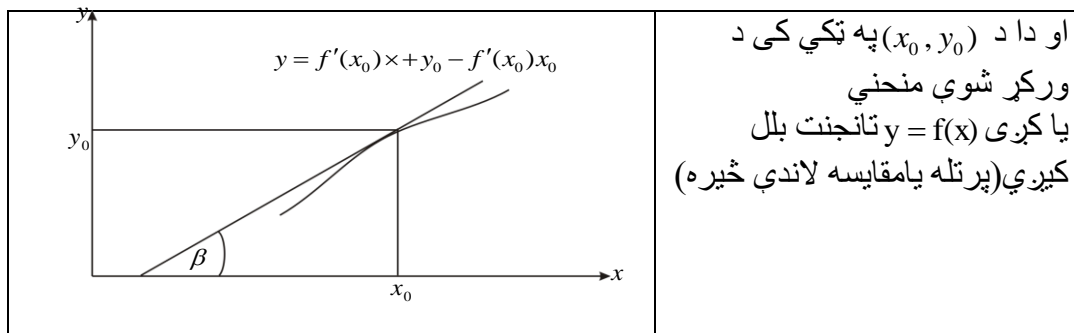
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$

پیژند: که یو تابع یابلواک  $y = f(x)$  د  $x_0$  په ځای کی د مشتق ور (قابل اشتقاق، رابیلیدور) وي، نو هغه لاندنی کرښه چی د  $(x_0, y_0)$  څخه تیریري او میلان یا جگوالی  $f'(x) = \tan \beta$  یی دی په لاندی ډول لیکو:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x) \Leftrightarrow f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$$



لومړی د تیرو جملو له مخی ددیفرنسیشن قاعدی د فورمال قاعدو په څیر بیا راتولوو یا رابوځای کوو، بی له دې چی نیونی ورکړو. په استعمال کی یی بایددا نیونی کلکی تر پام لاندی ونیول شي. د لته د  $f(x)$  او  $g(x)$  بلواک په  $f$  او  $g$  لندیري. د مشتق نیونو یا رابیلدنو مشتق قاعدو جدول

گڼه د قاعدی نوم	فرمول
۱ د ثابتی سره ځل (ضرب) قاعده	
۲ د زیاتون - کمون قاعده	$(cf)' = cf'$ $(f \pm g)' = f' \pm g'$
۳ د ځل (ضرب) قاعده	$(f \cdot g)' = f' \cdot g'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ $y = f(z); \quad z = g(x); \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$ $y = f(x); \quad x = f^{-1}(y); \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$	<p>گڼه د قاعدې نوم</p> <p>۴ - وېشقاوده</p> <p>۵ - د زخړونې قاعده</p> <p>د په څټ يا برعکس قاعده</p>
--	--

**قضیه:** هر اکسپوننشل تابع د  $y = b^x, (b > 0)$  د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقور دی او صدق کوي:  $f' = b^x \ln b$

**قضیه:** هر د لوگارېتم تابع  $y = f(x) = \log_b x$  د  $b > 0, b \neq 0, x > 0$  سره، مشتقور دی

$$\text{او صدق کوي: } f'(x) = \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x \cdot \ln b}$$

### --- د یوې تابع د مشتق قابلیت

مور و لیدل، چی یوه تابع په هر ځای کې تعریف نه ده، په هر ځای کې حد نه لري او همداسې په هر ځای کې متمادي یا ناپېرېکیدونکې نه ده. په همدې توگه یوه تابع هر چیرته د مشتق قابلیت هم نه لري.

تابع  $f(x) = |x|$  په ۰ ځای کې تعریف نه ده:

د ټولو  $x > 0$  له پاره باور لري  $f(x) = x$

$$\text{او له دې سره } 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x - 0}$$

د ټولو  $x < 0$  لپاره د پورته په برعکس  $f(x) = -x$  باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

دا چي کين- او بنی اړخیز حد یو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راورل شوي خای کې مشتقور نه ده.

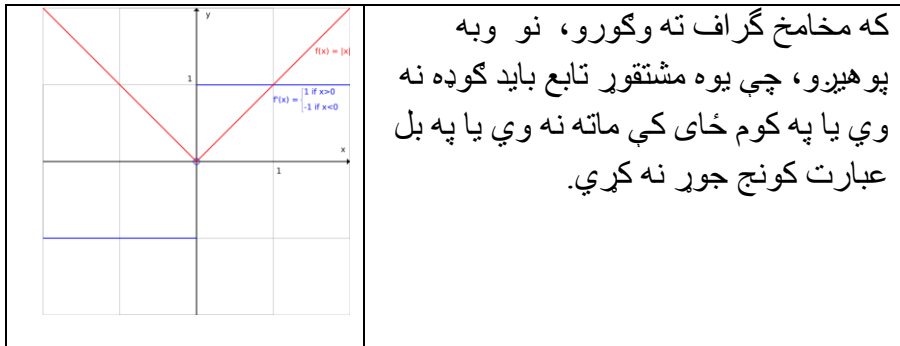
د تابع مشتق کېدنه په نورو ټولو خایونو کې تر اوسه تل ورکړ شوي.

په صفر خای کې سره له دې یو بنی اړخیز مشتق ورکړ شوی، یعنی لرو:

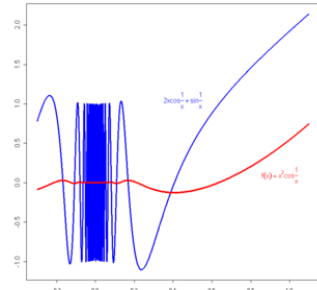
$$f'_{+}(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = 1$$

او یو کین اړخیز مشتق هم:

$$f'_{-}(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$



د یوه نه متمادي مشتقور تابع لپاره بېلگه:



یو تابع متمادي مشتقور بلل کېږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که یوه تابع هر چېرته مشتقور وي، باید نه دی چې مشتق دې یې هم متمادي وي.

د بیلگي په توگه:

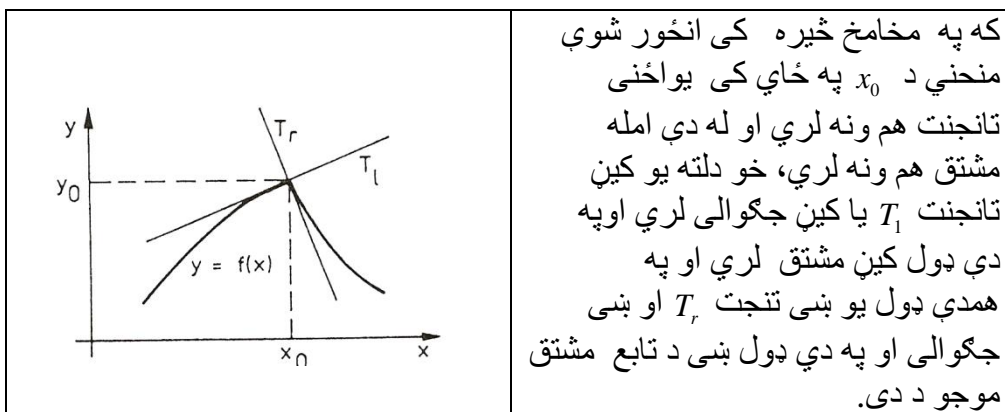
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

تابع په هر ټکي کې حتي د  $x = 0$  سره مستقر دی. مشتق

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

په ددې په خلاف په 0 ځای کې متمادي نه دی. مشتق د ټاکلو نیونویا فرضیو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چې لیمیت (پولی) ته تگ ممکن وي یعنی چیرته چې د تفاضل ویش یو لیمیت د  $x \rightarrow 0$  لپاره ولري.

که کومه منحنی چیرته راماته وي (څیره 4)، گورو چې هلته تانجنت نه شته او همدارنگه جگیدل او هم د تفاضل ویش نه شته. پس د مشتق قابلیت د متمادیت په څیر د یوې تابع ځانگړي خوي دی.



یوه نامتمادي (پرېکیدونکي) تابع کې د تانجنت یا مشتق پوښتنه بی معناده.

اربین یا ضروري شرطونه:

دا دلته انځور شوی پر اېلم یا مسأله اوس د شمیرني د ټيک فرمول لاندې راوړو.

ولیدل شو چی په یوه ځای  $x_0$  کی چی تابع متمادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نیسو چی دا دي ښوول شوی وی. دا څرگنده ده چی هره متمادي تابع باید ضرور مشتقورنه وي. د بیلگي په توگه که تابع زاویه یا کونج ولري.

دي ته اړتیا ده چی وښایو، چی یواځي متمادي (نه پرېکیدونکي) توابع د مشتق قابلیت لري، دا بیا دا معنا لري چی هره تابع چې مشتقور وي باید لږ تر لږه متمادي (نه پرېکیدونکي) وي او په دې ډول مشتق متمادیت په بر کی لري یا خوندي لري، په دې معنا چی متمادیت د مشتقوروالی لپاره اړین یا ضروري شرطونه دي

جمله:

که د  $y = f(x)$  تابع د  $x_0$  په ځای کی مشتقور وي، نو هلته ضرور متمادي ده.

ښوونه: د د مشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی حد شته دی.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

لیمیت یا پوله یواځی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د  $x \rightarrow x_0$  لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې  $f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$  لار شي.

نو باور لري:  $f(x) \rightarrow f(x_0)$  د  $x \rightarrow x_0$  لپاره.

دا د متمادیت یا ناپرېکیدني پیژند دی.

دا تفاضل یا کمښت وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که  $x = x_0 + \Delta x$  وکاروو:

دلته مشتق  $f'(x)$  په لاندې توگه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یواځی په ځای (lokal) پورې اړ خوي دی یعنی په یو ځای  $x = x_0$  کی تعریف دی. لکه څنگه چی په متمادیت کی (لومړي څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف: د  $y = (x)$  یوه تابع په واز اینتروال  $(a, b)$  کې، د اشتقاق قابل (مشتقور) بلل کېږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) ; a < x < b$$

که داد  $x = x_0 \in (a, b)$  په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق  $f'(x_0)$  سره. دا په بند اینتروال  $[a, b]$  کې مشتق وړ بلل کېږي، که دا سربېره پر دې د  $a$  په ځای کې بنی اړخیز او د  $b$  په ځای کې کین اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلگه: د توان تابع  $y = x^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  په هرځای کې د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

د ساین تابع  $y = \sin x$  او کوساین تابع  $y = \cos x$  په هرځای کې مشتقورده، د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

په یوه واز اینتروال کې  $y = f(x)$  مشتقور تابع مشتق بیرته  $y' = f'(x)$  تابع ده، نو په دې ډول یې د مشتق قابلیت او د متمادیت قابلیت پوښتنه کېدی شي.

پېژند: په یو د  $x = x_0$  چاپیریال کې د مشتق قابل تابع (رابیلیدور بلواک)  $y = f(x)$  په  $x = x_0$  کې دوه واره د مشتق قابلیت لري (رابیلیدور دی)، که د هغې اشتقاق (رابیلیدنه)  $y' = f'(x)$  هلته د مشتق قابلیت لري (رابیلیدور وي). سری د  $f'(x)$  مشتق د تابع (رابیلیدنه د بلواک)  $y = f(x)$  دویمه رابیلیدنه بولي او لیکي:

$$\left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=x_0} = f''(x_0) = \left( \frac{df'(x)}{dx} \right)_{x=x_0}$$

یو په یوه واز اینتروال کې مشتق کېدونکې تابع  $y = f(x)$  هلته دوه واره مشتقور بلل کېږي، که د هغه مشتق  $y' = f'(x)$  په دې اینتروال کې مشتق وړ وي.

ددې لپاره لیکل کېږي:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$$

بیلگه ۲ . ۷ :

لاندې توابع  $y = c; y = x^n; y = \sin x; y = \cos x$

هر چیرته دوه واره مشتقور دي، د لاندې مشتقونو سره:

$$\frac{d^2 c}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}, \quad n \geq 2,$$

$$\frac{d^2 \sin x}{dx^2} = -\sin x, \quad \frac{d^2 \cos x}{dx^2} = -\cos x .$$

دا په ۲ . ۴ کې تعریف شوي کیلمې کیدی شي چی په ساده ډول په خوښه پراخه شي یعنی داکسپوننت مشتقونو ته وارول شي ( $n - m$  مشتق (رابیلیدنه) یی وشمیرل شي).

د  $y = f(x)$  تابع دلته  $n$  - واره مشتقور ده، که  $n - m$  مشتق ولري یعنی

$$\frac{d^n y}{d^n x} = \frac{d^n f(x)}{d^n x} = f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx}; \dots$$

جمله:

که د  $y = f(x)$  تابع د  $x_0$  په ځای کې **مشتقور وي**، نو هلته ضرور متمادي یا ناپرېکېدونکي ده.



بنسونه : د مشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چې پوله یا حد شته دی

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

پوله یا حد یواځی هلته کیدی شي چې موجود وي، چې د  $x \rightarrow x_0$  لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یا  $f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$  لار شي. نو باور لري:  $f(x) \rightarrow f(x_0)$  د  $x \rightarrow x_0$  لپاره. دا د ناپرېکېدنې یا متمادیت تعریف یا پیژند دی.

دا کمښت-یا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که  $x = x_0 + \Delta x$  وکاروو:

دلته مشتق  $f'(x)$  په لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یواځی په ځای (lokal) پورې اړوند یا تړلی خوي دی یعنی په یو ځای  $x = x_0$  کې تعریف دی. لکه څنګه چې په ناپرېکېدنه یا متمادیت کې (۱۹ - څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چې د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینټروال ته وغزول شي.

تعریف :

د  $y = f(x)$  یوه تابع په واز اینټروال  $(a, b)$  کې، د اشتقاق قابل (مشتقور) بلل کيږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x); a < x < b$$

که دا  $x = x_0 \in (a, b)$  په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق  $f'(x_0)$  سره. دا په بند اینټروال  $[a, b]$  کې مشتقور بلل کيږي، که دا سربیره پر دې د  $a$  په ځای کې بنی اړخیز او د  $b$  په ځای کې کین اړخیز مشتقور هم وي.

## --- د معکوس تابع مشتق invers funktion

د یوه گراف به مرسته تابع او د هغه په څت تابع د بیلگی به توکه یوه مربع تابع.

اوس دې معکوسه تابع تر څیرني لاندې ونيول شي . دلته دې ونيول شي، چې  $y = f(x)$  په  $x = x_0$  کې د  $f(x) = 0$  سره او په یوه د  $x_0$  چاپیریال کې جگیدونکی دی  $f'(x_0) > 0$  او یا په کلکه لوېدونکی  $f'(x_0) < 0$  او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعنی  $x = f^{-1}(y)$  ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې  $x \rightarrow x_0$  او  $f(x)$  د متمادیت له امله هم  $y \rightarrow y_0$  او باور لري.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}}$$

که په د لاندې ټکي ځای  $x = x_0$  لپاره ساده بیرته  $x$  ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د  $y = f(x)$  لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

د پورته ورکړ شوو نیونوسره سری بیرته یو د تفاضل یا کمښت ویش لاس ته راوړي چی د هغه سره د

مروج ویش په څیر شمیرنه کیدی شي، لکه

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

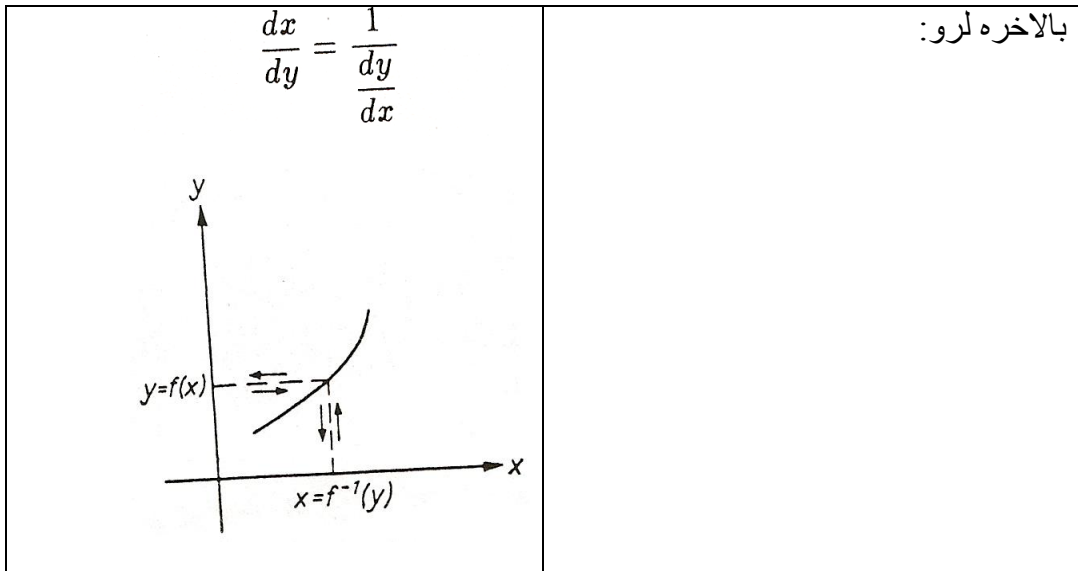
جمله:

د معکوس تابع مشتق : که  $y = f(x)$  د  $x$  په یوه چاپیریال کی د  $x = f^{-1}(y)$  سره معکوس او هملته د  $f'(x) \neq 0$  سره مشتق وړی، نو معکوس تابع د  $y = f(x)$  سره مشتق وړی او باوري دی

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

حل: کیدی چی د  $f$  تابع د مشتق څخه د  $f^{-1}$  معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له  $x \rightarrow 0$  او هم  $y \rightarrow 0$  او معکوس څخه، د  $y = f(x) - f(x)$  سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$



**بیلگه:** د  $y = f(x) = x^n; n = 1, 2, 3, 4, \dots$  تابع لپاره که  $x \geq 0$  و ټاکل شي او په دې  $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}; y \geq 0$  توگه معکوس تابع، نو لرو:

شته دی او لاندې ارزښت لري  $\frac{dy}{dx} = f'(x)nx^{n-1}$  د  $x > 0$  لپاره. له دې امله د  $y > 0$  لپاره د معکوس تابع مشتق

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\sqrt[n]{y}}{dy} = \frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{1-n} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}$$

که  $x$  او  $y$  سره بدل شي نو دا لاس ته راځي

$$dx^{1/n} / dx = (1/n) \cdot x^{n-1}$$

**بیلگه:** دا  $y = x^{\frac{m}{n}}$  تابع د تام عدد  $m$  او د مثبت تام عدد  $n$  سره یعنې د خوښي کسري اکسپوننت یا په «جگ عدد» کیدی شي چی د مخه څیړلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق نیول شي، چې د  $x > 0$  لپاره باور لري.

$$y = x^{m/n} = z^m, \quad z = x^{1/n}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = m \cdot z^{m-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, \quad x > 0$$

په دې ډول د مخه طبیعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

په لاندې جدول کې لاندې د بنسټتابع مشتق ځای په ځای شوی. له کین و بنې لور ته اول درځ نمره ده دویم درځ یی تابع  $f(x)$  بنای او په دریم درځ کی یی مشتق  $f'(x)$  ځای په ځای دي او په څلورم درځ کی د راپیداشوی پارامتر او د متحولې  $x$  نیونی ځای په ځای شوي. که چیرې د واریابلی یا پارامتر لپاره نیونی نه وي شوي نو په خوښه نیول کیدی شي.

جدول د بنسټتابعو مشتق

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	وړاند نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	$X^n$	$n \cdot x^{n-1}$	$n = 1, 2, 3, \dots$
3	$X^n$	$n \cdot x^{n-1}$	$n \text{ ganz, } x \neq 0$
4	$X^r$	$r \cdot x^{r-1}$	$r \text{ rational, } x > 0$
5	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx} \sqrt[n]{x}$	$n = 1, 2, 3, \dots, x > 0$
6	$x^a$	$a \cdot x^{a-1}$	$x > 0, a \text{ reell}$
7	$a^x$	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, a \neq 1$
8	$e^x$	$e^x$	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	

12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
14	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} (Z)$
15	$\text{Arc sin } x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x  < 1$
16	$\text{Arc cos } x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x  < 1$
17	$\text{Arc tan } x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
18	$\text{Arc cot}$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

د جدول 20-2 او همدارنگه د جدول 20-1 په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمال ډول ، په خوبه د هرې شننیزې یا سپرنیزې (تحلیلي) وییني یا افادې مشتق په شننیزه توگه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم باید سړی همغه نیونی په نظر کي ونیسي.

بیلگه 20-18: د زیاتون قاعده کیدی شي د حل قاعدې په مرسته د یوې ثابتی سره یوځای یا گډه شي او ډیرو زیاتونکو یا د جمعي اعضاو باندي استعمال شي. لکه لاندې

$$y = f(x) = 3 \sin x + 4e^x - 7 \tan x - 6\sqrt{x^3}$$

$$= 3 \sin x + 4e^x - 7 \tan x - 6x^{\frac{3}{2}}$$

دلته  $\tan x$  یوځای د  $x \neq (2k+1)$  او د  $x^3$  له امله یوځای د  $x > 0$  لپاره رابیلیدور دی او ددې بندیزونو (محدودیتونو) له امله لاس ته راځي.

$$\begin{aligned} dy/dx = f'(x) &= 3\cos x + 4e^x - 7 - 7\tan^2 x - 6.(3/2).x^{3/2-1} \\ &= 3\cos x + 4e^x - 7 - 7\tan^2 x - 9\sqrt{x} \end{aligned}$$

لکه چی بنسټیز بلواک او له دوي ټولی راجوري شوي سپرنيزې افادې هر چيرته متمادي يا ناپريکيدونکی وي، چيرته چې تعريف شوي وي. نو د جدول 20-2 له مخې بنسټيز بلواک يواځې تعريف ډيري کی رابيليدوردي، په دې کې کوم تغير نه راځي که په دې بلواکو څلور بنسټيزې عملي استعمال شي. يعنې لاندې جمله باوري ده .

جمله 20-8: د بنسټيز بلواکو د څلورو بنسټيزو عمليو له لارې جوړې شوي شننيزې (تحليلي) افادې د دوي تعريف ډيري په دننه کې رابيليدور ده.

که څوک ځنځيري بلواک جوړوي نو دا وينا بايد نوره هم رابنده يا محدوده شي

$$y = \sqrt{(x-1)^2(x+1)} = (x^3 - x^2 - x + 1)^{1/2} \text{ دا بلواک 19-20: بيلگه}$$

د  $(x-1)^2(x+1) > 0$  ، پس د  $x+1 > 0$  يعنې  $x > -1$  تعريف دی او هلته هم نه پريکيدونکی يا متمادي (د  $x = -1$  په غاړه طبعاً بنی اړخيز) ده.

دا په ځانگړي توگه د  $x=1$  لپاره هم ناپريکيدونکی يا متمادي دی (20-7 دې وکتل شي) د پيژندډېرې يا تعريف ډيری دننه  $x > -1$  دی، او هلته تابع يا بلواک په واقعيت کې نه پريکيدونکی يا متمادي دی. اوس نو مخ ته پروت تابع يا بلواک ترلی (ځنځيري) ورکړ شوی:

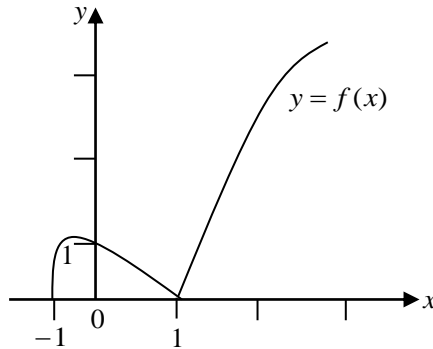
$$y = f(z) = \sqrt{z} = z^{1/2}$$

$$z = g(x) = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$z = g(x) = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$$

بلواک  $z = g(x)$  د ټولو  $x$  لپاره مشتقور يا رابيليدور دی، تابع  $y = f(z) = z^{1/2}$  له دې امله ځنځيري قاعده يواځې د  $z > 0$  لپاره صدق کوي، پس د  $x = 1$  ،  $x > -1$  لپاره. هلته باور لري.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 - 2x - 1) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{2 \cdot \sqrt{(x-1)^2(x+1)}}$$



د یو ځنځیري تابع مشتقوروالی د هغه  $x$  ارزښتونو لپاره باور لري یا هلته ډاډور دی، کوم چي د د ننني تابع یا بلواک په دننه کی پراته دي او په هغو کی د دننني تابع ارزښت د دباندي تابع د د تعریف ډیری په دننه کي پروت وي. که د  $x$  ارزښتونو ډیری د بند تعریفډیری دننه وښايي، نو لاندې جمله باور لري.

جمله 20-9: هره یوه شننیزه یا تحلیلي افاده د خپل بند(محدود) تعریفډیری په دننه کی رابیلدور ده.

بیلگه 20-20: ځنځیري قاعده هم استعمالیدونکی ده، که په یوه ترلي بلواک کی د ننني بلواک پخپله یو ترلي بلواک وي، پس (د لازمه وړاند نیونو لاندې) باور لري

$$y = f(z), \quad z = g(u), \quad u = h(x)$$

$$y = f(g(h(x))) \quad \text{پس د}$$

ځنځیري قاعده

$$dy/dx = (dy/dz)(dz/du)(du/dx)$$

فنکشن یا بلواک یا تابع

$$y = \text{Arc sin } \sqrt{1-x^2}$$



یو داسی تابع دی. دلته لرو:

$$y = f(z) = \text{Arcsin } z, \quad z = g(u) = u^{1/2}, \quad u = h(x) = 1 - x^2$$

دلته  $h(x)$  رابیلیدور دی،  $g(u)$  یواخی د  $u > 0$  لپاره رابیلید وړ دی، پس د  $-1 < x_2 < 0$  او یا  $x_2 < 0$  یاد  $|x| < 1$ ، او  $f(z)$  د  $|z| < 1$  لپاره، پس د  $1 - x_2 < 1$  لپاره پس د  $1 - x_2 < 1$  لپاره په دې مانا چی  $x_2 > 0$  د  $|x| > 0$  لپاره.

رابیلیدوروالی یواخی د لاندې چاپریال لپاره تضمین دی

$$\text{او یا} \quad 0 < |x| < 1 \iff -1 < x < 0$$

$$0 < x < 1 \iff |x| < 1 \quad x \neq 0 \quad (20.53)$$

دپیژندډېری یا تعر یفډیری دننه  $|x| < 1$  دی. د تعریفډیری محدودیت (20-53) = دی.

فنکشن یا بلواک (20-52) یواخی هملته تعریف او د (20-51) له مخی باور لري:

$$\begin{aligned} \frac{d \text{Arcsin } \sqrt{1-x^2}}{dx} &= \frac{d \text{Arcsin } z}{dz} \cdot \frac{du^{\frac{1}{2}}}{du} \cdot \frac{d(1-x^2)}{dx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{x^2} \sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{|x| \sqrt{1-x^2}} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ fur } 0 < x < 1, \\ +\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ fur } -1 < x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

اوس دی یوه بله د دیفرنسیشن قاعده ورکړل شي کومه چی په جدول 1-20 کی غیر مستقیم خوندي یا په بل عبارت دننه ده. دا د لاندې شکل بلواک دیفرنخیشن دی

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دي امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

د خنځیر قاعدې له مخی ترخیرني نیول کیدی شي،  $y = e^z$ ,  $z = g(x) \ln(f(x))$  لاندې بلواک  $u = \ln f(x) = \ln v$ ,  $v = f(x)$  مشتق هم د خنځیری قاعدې له مخی را پیدا کیدی شي.

دا لاندې صدق کوي:

$$\text{او } u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{1}{v} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^z \cdot (g'(x) \ln f(x) + g(x)u') \\ &= f(x)^{g(x)} \left( g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)} \right) \end{aligned}$$

د خنځیری قاعدې د نیونو په نظر کی نیولو سره او د جملی 10-20 له مخی لاس ته راځي

جمله: که  $f(x)$  او  $g(x) > 0$  د  $f(x)$  سره د مشتق قابلیت لري، نو  $y = f(x)^{g(x)}$

هم د لاندې مشتق سره مشتقور دی.

بیلگه: تابع  $y = x^x$  د  $x > 0$  لپاره رابیلیدور دی. دا دي داسی  $f = x$ ,  $g = x$  ځاي په ځاي شي او له دي سره  $f' = 1$ ,  $g' = 1$  له دي امله اوس د  $x > 0$  لپاره لرو:

$$dx^x / dx = x^x (\ln x + 1)$$

بیلگه: د  $y = (x^2 - 1)^{\ln x}$ ,  $x > 1$  دیفرنسیشن سره باید د  $g = \ln x$  له امله و غوښتل شي چی  $x > 0$  او د  $f = (x^2 - 1) > 0$  له امله باید باور ولري  $x^2 > 1$  او له همدې امله  $|x| > 1$  پس کیدی شي چی د  $x > 1$  لپاره  $f = x^2 - 1$  او  $g = \ln x$  سره استعمال شي:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x^2 - 1)^{\ln x} \cdot \left( \frac{1}{x} \ln(x^2 - 1) + \frac{(\ln x) \cdot (2x)}{x^2 - 1} \right) \\ &= (x^2 - 1)^{\ln x} \cdot \left( \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} + \frac{2x \ln x}{x^2 - 1} \right), \quad x > 1 \end{aligned}$$

بیلگه یا تمرین: د  $y = f(x) = x^n$ ;  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  تابع لپاره که  $x \geq 0$  و ټاکل شي او په دې توگه  $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$ ;  $y \geq 0$  یې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

، نو لرو:  $\frac{dy}{dx} = f'(x)nx^{n-1}$  د  $x > 0$  لپاره له دې امله د  $y > 0$  لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d^n \sqrt{y}}{dy} = \frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{1-n} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}$$

که  $x$  او  $y$  سره بدل شي نو دا لاس ته راځي.

$$\frac{dx^{\frac{1}{n}}}{dx} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

بیلگه -- د  $y = x^{\frac{m}{n}}$ ,  $m, n \in N$  تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

د تام عدد  $m$  او د مثبت تام عدد  $n$  سره یعنی د خوښي کسري اکسپوننت

یا په «جگ عدد» کیدی شي چی د مخه څپرلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق ونيول شي، چی د  $x > 0$  لپاره باور لري.

$$y = x^{\frac{m}{n}} = z^m, \quad z = x^{\frac{1}{n}}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = m \cdot z^{m-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبيعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

بیلگه : یوه بډای چی په یوه ټاکلي وخت کی ټولست (ټولډیری)  $M$  تولید کړي او دا تل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لگښتونه  $F$  ترلي دي. کیدی شي چي سملاسی د دې تولید په ټولست (ټولډیری)  $M$  کی تولید کړي ، په یوه زخیره ځاي (زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یی سملاسي ورسوي. دلته د زېرمتون (زخیره کوني) لگښتونه راپید کيږي (د دې د زخیرې لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چی تولید په لږه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته ورورل شي. دلته نو د زخیره کولو لگښتونه منځ ته نه راځي. مگر تل تولید په دې ډول تولید باندي درول، لگښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لگښتونه یی بولو. کومه ډیری  $x$  (ازاده لویه) باید تولید شي، چی د امکان تر پولي کم لگښتونه پرې وشي؟ د زخیرې لگښت د چمتووالی لگښت سره متناسب دی، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چي خرڅلاو ته چمتو کيږي، په څټ متناسب دی. که  $x$  لوي وي نو چمتووالی ته کم اړتیا شته او که  $x$  کم وي نو چمتووالی بدلون تل باید تغیر وخوري یعنی. ټول لگښتونه

لگښتونه دي،  $L$  د زخیرې لگښتونه او  $R$  د چمتووالی لگښتونه دي. دا ازاده لویه  $x$  د

چیرته چی  $F$  ثابت (همغه) یا په کلکه اینبول شوي

$y = f(x) = F + Lx + R/x$  دي ،

تولیددیری  $M$  څخه نه شي سترېدلی، لونیډلی یا غټیډلی. له دې امله صدق کوي  $0 \leq x \leq M$ . مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

$$y = f(x) = F + Lx + R/x = \text{Min!} \quad (0 \leq x \leq M)$$

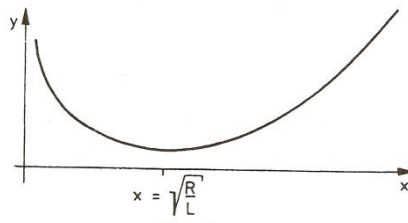
(لمړی  $f(x)$ ) دوه واره دیفرنخیال کیري یا یې دوه واره رابیلیدنه

نیول کیري:

$$f'(x) = L - R/x^2, \quad f''(x) = 2R/x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي:  $f'(x) = 0$ ، پس لرو  $x = R/L$  ؟؟؟

د  $x \geq 0$  له امله  $f''(x) \geq 0$  هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیوم مخ ته لرو



د کړي تگلار په څیره ۲۰. ۱۵ کی انځور شوي.

څرگنده ده: که  $x = R/L < M$  صدق ولري، نو مینیوم مو مخته پروت دی. که  $x = (R/L) > M$  وي، نو یو مینیوم په څنډه  $x = M$  لرو.

نامساوت  $x = R/L < M$  دا مانا لري  $R/L < M^2$  په همدې ډول  $R^2 < M^2L$ . پس مخ ته لرو:  $x = R/L$  د  $R < M^2L$  لپاره او  $x = M$  د  $R > M^2L$  لپاره

نو: که د چمتوالي لگښتونه  $R$  زخیري لگښتونو  $L$  څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید  $x = M$  صورت ونیس. که د زخیري لگښتونه د چمتوالي لگښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد  $x$  تولید شي.

ټاکلی بیلگه : د  $M = 10000, R = 1000, L = 10$  لپاره صدق کوي:

$$R = 1000 < M^2L = 108 \cdot 10 = 109$$

ستر یا غټ ازاد لگښت دی

د  $x = R/L = 1000/10 = 100 = 10$  ازاد  $a$  دلته ۱۰ یوونه باید ورزیات شي، چی ۱۰۰۰۰ یوونه تولید کړي د  $M = 10, R = 1000, L = 1$  لپاره صدق کوي  $R = 1000 > M^2L = 100$  غټ ازاده لویه له دي امله  $x = M = 10$  ده . یواځي یوه ازاده لویه دي تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

## د رول قضیه ( Rolle )

ننوتنه :

که د  $f$  یوه تابع په بند اینتروال  $[a, b]$  کې متمادي او  $c$  د  $a$  او  $b$  ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عدد  $k$  د  $f(a)$  او  $f(b)$  ترمنځ شته، داسې چې  $f(c) = k$  دی

## د وایر شتراس قضیه Weierstrass

که د  $f$  یوه تابع په بند اینتروال  $[a, b]$  کې متمادي یا ناپربکيدونکي وي، نو په دي اینتروال کې لږ تر لږه یو جگ ارزښت (اعظمي قیمت) او یو ټیټ ارزښت (اصغري قیمت) نیسی

دلته شننیز یا تحلیلي ځواب نه ورکول کيږي، دا وینا د لیدلو له مخې معقوله برېښي. کیدی شي چی یو یو غریز (monoton مونوتون یا جگټیټ)

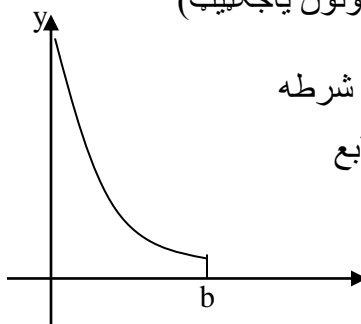
ارزښت د اینتروال په غاړه هم پروت وي.

د اینتروال محدودوالی (بندوالی) بی قید او شرطه

حتمي دی. د بیلگي په توگه د  $y=f(x)=\frac{1}{x}$  تابع

په نیم بنداینتروال  $(0, b]$  کې متمادي ده،

مگر پورته لور ته بنده نه ده، چی په دي

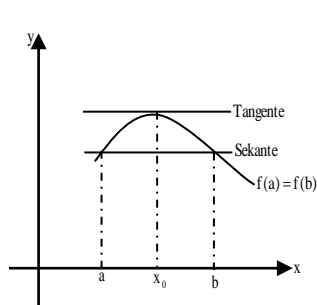


توگه اعظمی ټکی نه لري.

۳. د مشتق منځ ارزښت قضیې

د تانجنت او قاطع ترمځ او په همدې ډول د مشتق – او تفاضل ویش ترمځ داسې نږدې اړیکې وجود لري، کومې چې د انالیوزې په منځ ارزښت قضیو کې تشریح کېږي. د تابع او انحرافي ارزښتونو خوږونو څخه لومړی پسی ترلې لاندې د رول قضیه لاس ته راځي

د رول (Rolle) قضیه:



یوه د  $f$  تابع دې په بند اینټروال  $[a, b]$  کې متمادی وي د  $f(a)=f(b)$  سره او په واز اینټروال  $(a, b)$  کې مشتقور، نو لږ تر لږه یوځای  $c \in (a, b)$  شته دی د  $f'(x_0) = 0$  سره.

حل:

(۱) که  $f$  ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي:  $f'(x_0) = 0$

(۲) که  $f$  ثابت نه وي، نو د وایر شټراس د قضی له مخې لږ تر لږه د تابع یوخورا لوي او یوخورا کوچنی ارزښت موجود دی. دا ارزښتونه توپیر لري، ځکه چې  $f$  ثابت نه دی. نو له دې کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د  $f(a)=f(b)$  سره نامساوي دی. په دې اساس د اینټروال په دننه کې یو مونوټون (جگټیټ) ځای  $x_0$  موجود دی. د مشتقور توابعو مونوټوني (جگټیټ ارزښت) شتون د اړین یا ضروري شرطونو قضی له مخې لاس ته راځي:  $f'(x_0) = 0$

تر اوسه مو وښوول، چې د لازمو شرایطو لاندې یوې افقي قاطع ته یو افقي تانجنت هم شته دی.

دا هندسي پرابلم کیدی شي چې عمومي شي.

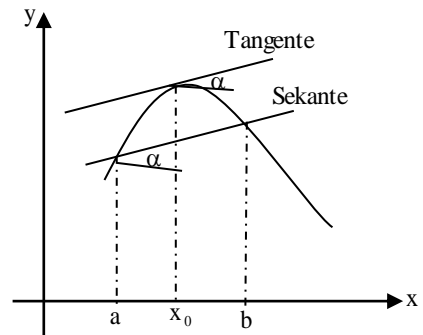
پوښتنه رامنځ ته کیري، چی ایا یوې مایلی قاطع ته په همغه ډول تانجنت د همغه میل (جگوالي) سره جوړیدلی شي؟

ځواب یی لاندې قضیه راکوي

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قیمت) قضیه:

که  $y=f(x)$  تابع په بند اینتروال  $[a,b]$  کی متمادي او په واز اینتروال  $(a,b)$  کی د مشتق وړ وي، نو هلته یوځای  $x \in (a,b)$  شته دی، د کوم لپاره چی لرو:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$



( څیره ښه نه ده انځور شوي تیک دي  
د الفا د کونج لاندې ضلعي باید د  $x$  محور سره غبرگي وي)

حل:

دا پرابلم په یوه مرستندوي تابع داسی تعریفیري، چی د رول قضیه وکارول شي. د دي لپاره د قاطع مساوات رامنځ ته کوو:

$$y = g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a)$$

د مرستندوي تابع په څیر د مشتق تابع جوړیري:

$$h: h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) - f(a),$$



نو باور لري:  $h(a)=h(b)=0$ . برسیره پر دي  $h$  په  $(a,b)$  کې د مشتق وړوالی لري او په  $[a,b]$  کې متمادي ده. له دې سره د رول د قضیې وړاند نیونه (فرضیه) ورکړ شوي، دا په دې معنا چې یو ځای  $x \in (a,b)$  شته دی د  $h'(x)=0$  سره، چې له هغې لرو:

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ یعنی } h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

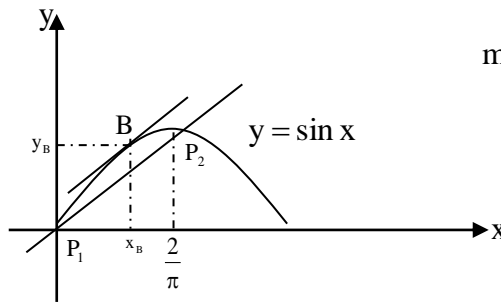
پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بې‌لگې نوره هم روښانه کړي.

بیلگه :

د  $f(x)=\sin x$  یوه تابع دی داسې ورکړ شوي وي، چې په یوه ټکي  $B(x_B, y_B)$  کې تانجنت د منحنی مماس وي، او کوم چه په  $P_1(0,0)$  او  $P_2(\frac{\pi}{2}, 1)$  ټکو کې همغه میل یا

جگوالی لري لکه قاطع.

ځواب: د قاطع (غوڅي) میل یا جگوالی:



$$m = \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{2}{\pi}$$

د منحنی میل د  $B(x_B : y_B)$  په ټکی کې  $f'(x_B) = \cos x_B = \frac{2}{\pi}$

له دې څخه لاس ته راځي:  $x_B = \arccos \frac{2}{\pi} = 0,88$  او  $f(x_B) = f(0,88) = 0,77$

لمس ټکی:  $B(0,88 : 0,77)$

د تانجنت مساوات:  $y = \frac{2}{\pi}(x - 0,88) + 0,77$

د منح قضی د عمومیت څخه لاس ته راځي:

پراخه شوې یا غزېدلې منځفضیه :

که  $u = f(x)$  او  $v = g(f)$  په بند اینټروال  $[a, b]$  کې متمادي توابع وي او په واز اینټروال  $(a, b)$  د مشتقوړ او  $g'(x) \neq 0$  باور ولري، نو د ټولو  $x \in (a, b)$  لپاره، کم له کمه یوځای  $x_0 \in (a, b)$  وجودلري چې لاس ته تری راځي:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: د  $g'(x) \neq 0$  له امله  $g$  معکوس کېدونکی ده او  $v = g(x)$  مساوات د  $x$  په لور معکوس

کېدنه ورکوي، یعنې  $x = g^{-1}(v)$

که  $f$  په تابع کې هم نوې متحوله ځای پر ځای شي، نو یوه زنځیري تابع لاس ته تری راځي:

$$u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

د زنځیري قاعدې له مخې یی دا مشتق لاس ته راځي:

که په  $u = h(x)$  تابع د  $v_1 = g(a)$  او  $v_2 = g(b)$

سره د وسطي قیمت قضیه استعمال شي، نو د ځای  $v_0 \in (v_1, v_2)$  په لاندې ډول موجود دی:

$$\frac{h(v_2) - h(v_1)}{v_2 - v_1} = h'(v_0)$$

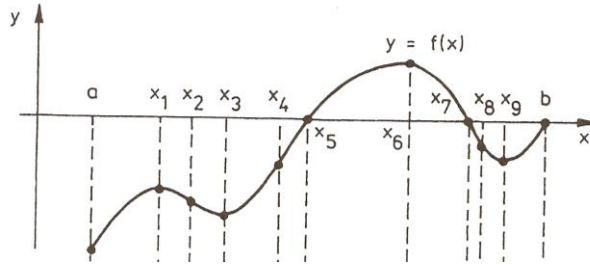
له دې څخه د  $h(v) = f(x), v = g(x)$  او  $x_0 = g^{-1}(v_0)$  سره لاس ته راځي:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

- .
- .
- .
- .
- .
- .

يوغريزي توابع (Monotony) (يوناني: يوغريز، برابرډوله)

جگيدونکي (متزايد)، ټيټي ډونکي (متناقص) توابع (جگ-ټيټي ډونکي توابع)



که د ټولو  $x_1 < x_2$  لپاره  $f$  يوه تابع په يوه اينټروال کې  $f(x_1) \geq f(x_2)$  يا  $f(x_1) \leq f(x_2)$  وي، نو تابع په دې اينټروال کې مونوټون جگيدونکي ( - ټيټيدونکي) بلل کيږي، که  $f(x_1) = f(x_2)$  په کې اجازه ونه لري، نو دا  $f(x_1) > f(x_2)$  يا  $f(x_1) < f(x_2)$  کره يا ټينگه مونوټون جگيدونکي ( همغريز ټيټيدونکي) بلل کيږي.

لاندي قواعد، چې له همغريزووالي په لاس راځي، د همغريزووالي حالت لپاره گټور دي.

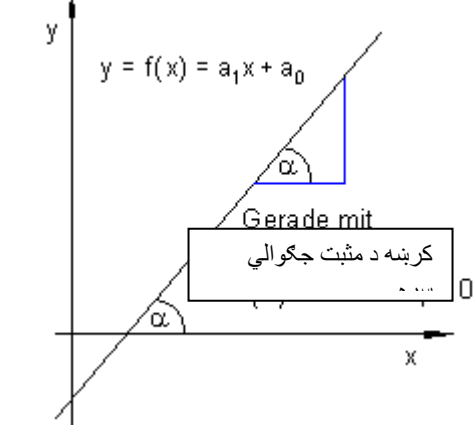
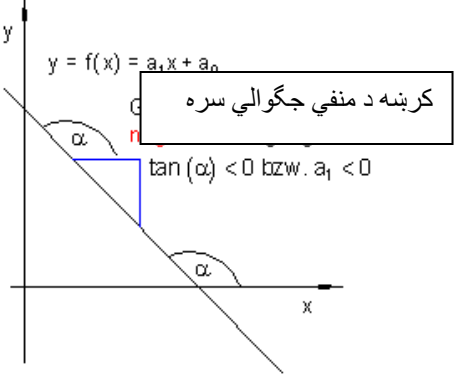
$f$  يوه تابع ټيک هلته د تعريف په ورشو (ساحه)  $D$  کې مونوټون جگيدونکي ده، که د خوښي  $x_1$  او  $x_2$  لپاره، چې په  $D$  کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

د  $f$  يوه تابع ټيک هلته په  $D$  کې مونوټون ټيټيدونکي ده، که د خوښي  $x_1$  او  $x_2$  لپاره، چې په  $D$  کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

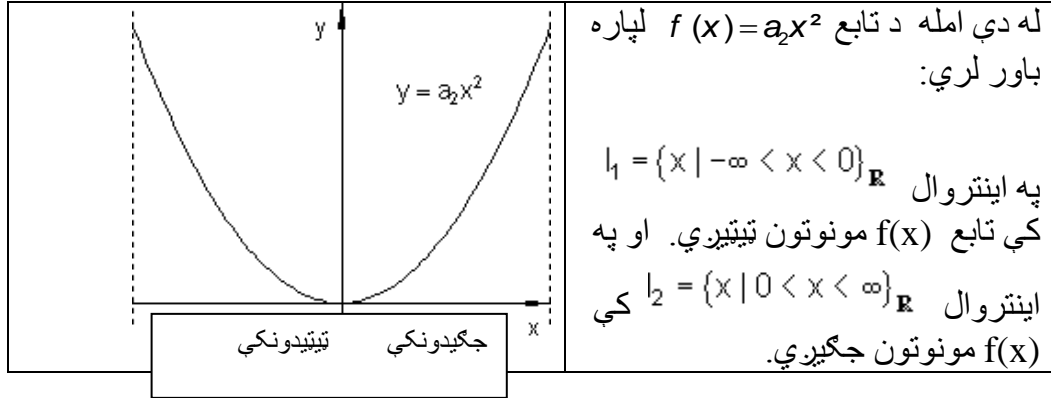
یو غریزوالی (یکنواخت) Monotony جگیتیتوالی، د جگیتیتوالی جملی

 <p><math>y = f(x) = a_1x + a_0</math></p> <p>Gerade mit کرښه د مثبت جگوالی</p>	<p>دا <math>f(x) = a_1x + a_0</math> کرښیز (خطی) تابع خورا ساده تابع ده، چې انحنانه لري. ددی لپاره مسئول یې ثابتته جگیدنه یا ثابت میل، <math>a_1 = \tan(\alpha)</math> دی، چېرته چې <math>\alpha</math> د کرښې او مثبت لوریز د <math>x</math>-محور ترمنځ زاویه (کونج) ده.</p> <p>په مخامخ شکل کې: کرښه د مثبت میل سره <math>\tan \alpha &gt; 0 \Leftrightarrow a_1 &gt; 0</math></p>
 <p><math>y = f(x) = a_1x + a_0</math></p> <p>کرښه د منفي جگوالی سره</p> <p><math>\tan(\alpha) &lt; 0</math> bzw. <math>a_1 &lt; 0</math></p>	<p>که <math>0 &lt; \alpha &lt; 90^\circ</math> یا <math>0 &lt; a_1 &lt; \infty</math> وي، دا په دې مانا چې <math>a_1 &gt; 0 \vee \alpha &gt; 0</math> همداسې (<math>\Leftrightarrow</math>)، نو کرښه جگيري. دا دا معنی لري، چې د جگیدونکي <math>x</math> سره د تابع <math>f(x)</math> ارزښت هم جگيري.</p> <p>په مخامخ شکل کې: کرښه د منفي جگیدني سره: <math>\tan \alpha &lt; 0</math> همداسې (<math>\Leftrightarrow</math>)</p> <p><math>a_1 &lt; 0</math></p> <p>داپورته داسې دی: <math>\tan \alpha &lt; 0</math> همداسې <math>a_1 &lt; 0</math></p>

که  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  یا  $-\infty < a_1 < 0$  وي، دا په دې معنی، چې  $\alpha < 0$  همداسې  $a_1 < 0$ ، نو کرښه ټیټيري یا لویري. دا په دې معنی، چې د جگیدونکي  $x$  سره د تابع ارزښت  $f(x)$  کوچنی کيږي.

په پورته دواړو حالتونو کې د همغریزي تابع (یا د جگ-ټیټي دونکي تابع) غریزو او له یوه مونوتون جگیدونکي تابع څخه، که  $a_1 > 0$  وي. له یوې مونوتون ټیټیدونکي تابع څخه، که  $a_1 < 0$  وي.

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کيږي، چې د منحنیو تلنه راكوي، که فکر وشي، چې په توليزه توگه د منحنی د گراف په هر ټکي تانجنت ايښول کېدی شي.



لکه د کرښې په گراف کې، چې جگیدنه ثابتې وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعنی جگیدنه ثابتې نه ده، بلکې دا د منحنی له یوه ټکي څخه بل ټکي ته تغیر خوري.

د تانجنت جگیدنه  $0 <$  ← منحنی مونوتون جگيږي

د تانجنت جگیدنه  $0 >$  ← منحنی مونوتون ټیټیږي

د تانجنت جگیدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کيږي.

روښانه ده چې د  $f(x)$  تابع لومړی مشتق  $f'(x)$  د تابع میل (جگوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتوني قضیه په لاندې ډول فرمولوو .

قضیه: د  $f(x)$  تابع دې په اینتروال  $I$  کې مشتقور وي.

۱ که د  $f(x)$  تابع په اینتروال  $I$  کې مونوتون جگیدونکي وي، نو باور لري:  $f'(x) \geq 0$  د ټولو  $x \in I$  لپاره

که  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې مونوتون ټیټیدونکي وي، نو باور لري:  $f'(x) \leq 0$  د ټولو  $x \in I$  له پاره.

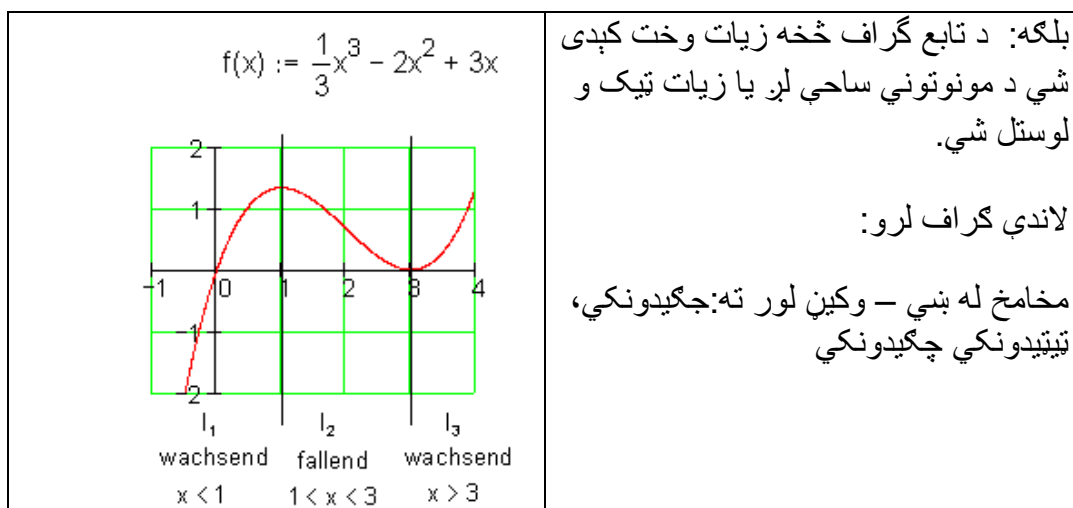
۲. که  $f'(x) \geq 0$  وي، د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې مونوتون جگیدونکي ده.

که  $f'(x) \leq 0$  وي د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې مونوتون ټیټیدونکي ده.

۳. که  $f'(x) > 0$  وي، د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې په کلکه مونوتون جگیدونکي ده.

که  $f'(x) < 0$  وي د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې په کلکه مونوتون ټیټیدونکي ده.

د مونوتوني پیژند ورشو (تعریفساحو) ټاکنه:

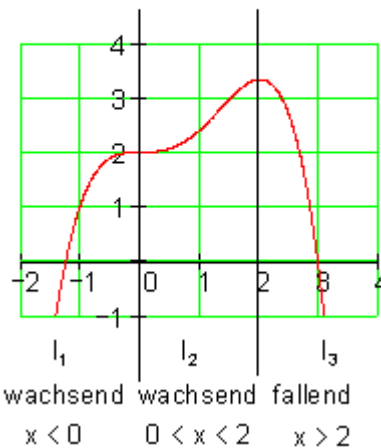


د  $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_{\mathbf{R}}$  لپاره  $f(x)$  په کلکه مونوتون جگیدونکي دی.

د  $I_2 = \{1 < x < 3\}_{\mathbf{R}}$  له پاره  $f(x)$  مونوتون ټیټیدونکي ده.

د  $I_3 = \{3 < x < \infty\}_{\mathbf{R}}$  لپاره  $f(x)$  په کلکه مونوتون جگیدونکي ده.

$$f(x) := \frac{-1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2$$



بیلگه:

پورته له بنی - وکین لور ته: جگیدونکی، جگیدونکی، تییدونکی

له گراف څخه لاندې مونوتونی ساحې لوستل کیری.

د  $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbf{R}}$  لپاره  $f(x)$  په کلکه مونوتونج گیدونکی ده.

د  $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbf{R}}$  له پاره  $f(x)$  په کلکه مونوتونج گیدونکی ده.

د  $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbf{R}}$  لپاره  $f(x)$  په کلکه مونوتون تییدونکی ده.

### ځای اړونده افراطي ټکی

یادونه: که په لیکنه انحرافي ټکی گوری، نو هغه افراپی ټکی دي.

که د  $f(x)$  لپاره د  $x_0$  په ځای کې  $f'(x) = 0$  ولرو نو یو نسبي تیت ټکی مخ ته لرو.

که د  $f(x)$  لپاره د  $x_0$  په ځای کې  $f'(x) = 0$  او  $f''(x) > 0$  ولرو نو یو نسبي تیت ټکمو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو:  $f'(x) = 0$  او  $f''(x) < 0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي (تیت ټکي یا جگ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې  $f'(x) = 0$  وي، او د  $f''(x)$  مخ نښه ( $+$ ،  $-$ )، په دې پریکړه کوي چې ایا یو تیت ټکی (اصغریټکی) او که جگ ټکی (اعظمی ټکی) مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

۱- دا اړیکي یواځې د  $x_0$  لپاره ارزښت لري چې د تعریف سټ په دننه کې پروت وي او هلته د  $y = f(x)$  تابع پوره څو ځلي مشتقور وي، د غاړو (څنډو) او د هغو ځایونو له پاره چې هلته  $f(x)$  تابع کم یا هیڅ مشتقور نه وي، ځانگړو څیړنو ته اړتیا ده.

۲- شرایط چې  $f'(x) = 0$  وي (مشتقور تابع) یواځې د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی (ضروري یا اړین شرایط).

۳- شرایط  $f'(x) = 0$  او  $f''(x) \neq 0$  د بحراني ټکي لپاره یواځې پوره کیدونکی دی او نه ضروري (

بیلگه :

د  $f(x) = x^2 + 2$  تابع گراف وکارئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د گراف او د مشتق له لارې وټاکئ.

حل: د بیلگې له گراف څخه روښانه ده، چې تابع د  $x=0$  په ځای کې خورا تیت ټکی (اصغري-) لري.



### گراف: که گراف دي گران لوستونکي وباسي

د انحراف ټکي له پاره اړيبن شرطونه:

۱ - د تابع لومړي مشتق دی:  $f'(x) = 2x$  په دې مساوات کې د تابع مشتق د  $x_0$  له پاره صفر ځای لري، یعنی دلته یو پحراني ټکي پروت دی.

۲ - د تابع دویم مشتق:  $f''(x) = 2$ . دا چې  $f''(x) > 0$  دی، نو یو نسبي ټیټ ټکي مخ ته لرو.

بیلگه: د  $y = x^4$  تابع د  $x = x_0 = 0$  لپاره نسبي ټیټ ټکي لري او باوري دي

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

گورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوی دی.

د پورته شني څخه لاندې پېژند ته راځو:

**پېژند:** د  $x = x_0$  په چاپیریال کې د  $y = f(x)$  تعریف شوي تابع یو نسبي جگنکی په همدې ډل نسبي ټیټ ټکي لري، که ټولو  $x_0$  ته پوره نږدې  $x$  لپاره باور ولري:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{په همدې ډول} \quad f(x) > f(x_0)$$

**جمله:** (د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په  $x_0$  کې مشتقور تابع  $y = f(x)$  انحرافي لري نو لرو:  $f'(x) = 0$

دا جمله مور ته وايي (یادونه ۲ دې مقایسه شي): چیرته چې  $f'(x) \neq 0$  وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځې د  $x_0$  ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره لرو  $f'(x) = 0$ ، خو حتمي نه ده چې  $y = f(x)$  د یواکستریموم و لري.

**جمله :** ( د یوه افراطي ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په  $x = x_0$  کی دوه واره مشتقور تابع  $y = f(x)$  لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0, \quad f''(x) \neq 0$$

نو تابع  $y = f(x)$  هله یو افراطي ټکی لري. خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي:

$$f''(x) < 0$$

خورا جگ ټکی مخ ته پروت دی، که وي:

$$f''(x) > 0$$

له بنی لور انحنا یا کوږوالی اوله کین لور انحنا یا کوږوالی (مقعر او محدب)

که په یوه اینتروال کی د مشتقور تابع  $f$  دویم مشتق  $f'' > 0$  وي، نو په دې اینتروال کی گراف کین کوږ شوی یا کینه انحنا لري او که دویم مشتق  $f'' < 0$  وي، نو د تابع گراف بنی کوږ یا بنی انحنا لري.

**دوه څیری ( د لاندې بېلگې څیره و باسی ؟ )**

بیلگه:

ټول گونگتابع (راشنل تابع)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$  سره په کومه ورشو (ساحه) کی کین کوږدی (کینه انحنا لري) (ننوتی یا مقعر دی) او په کومه ورشو کی بنی کوږدی (بنی انحنا لري) (محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (لومړی مشتق)

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

د  $6x - 4 > 0 \Rightarrow x > 2/3$  لپاره کین گوروال (کینه انحنای ننواتی یامقعر)

د  $6x - 4 < 0 \Rightarrow x < 2/3$  لپاره بنی کوروالی (بنی انحنای وتلی یامحدب)

بیلگه: د مات راشنل تابع  $f(x) = \frac{1}{x+2}$  گراف یو های پارابول دی. د های پارابول کومه خانگه کینه کره ده یا کینه انحنای لری (مقعر)، او کومه یوه بی بنی کوروالی - یا بنی انحنای لری (محدب)؟

$$\text{دویم مشتق: } f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}; f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$$

صورت تل مثبت دی.

د  $x < -2$  لپاره د مخرج او همداسی د کسر ارزښت منفي دی. د های پارابول خانگه بنی کوروالی یا انحنای لری (وتلی یا محدب).

د لپاره  $x > -2$  مخرج او همداسی ټول کسر (مات) مثبت دی.

های پارابول کینکور دی یا کینه انحنای لری (ننواتی یامقعر).

بیلگه: د دواړو توابعو  $f(x) = \sqrt{x}$  او  $g(x) = \sqrt{x^3}$  کوروالی (انحنای) دی یو د بل سره پرتله شي.

دواړه توابع د لپاره تعریف دي.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad g'(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{2}$$

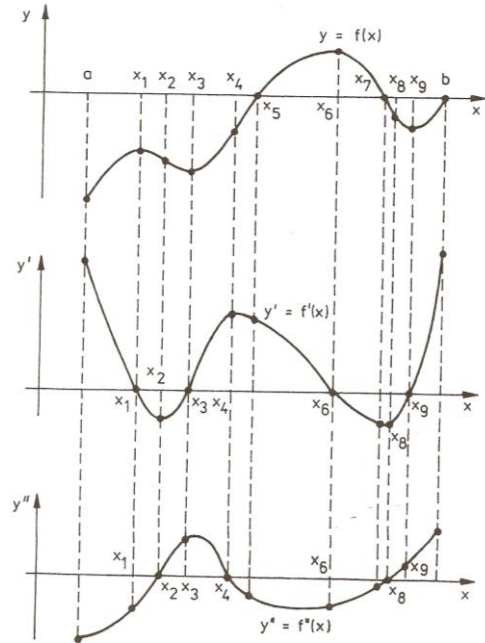
$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \quad g'' = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

دویم مشتقونه د  $x \in R^+$  پاره تعریف دي.

په دې ساحه کې  $f''(x) < 0$  دی. اړونده گراف بنی کوروالی یا انحنای لري، دا یو شي لور ته واز پارابول بنیایي.

په همدې ساحه کې  $f''(x) > 0$  دی. اړونده گراف کین کور دی یا کینه انحنای لري. اړونده گراف یو کین کوروالی یا کینه انحنای لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د انعطاف ټکي (اورونټکي)



یادونه: ولي اورونټکی؟

وبه گورو، چې په دې ټکي کې گراف خپله لور اړوي، نو ..... مور له پورته څیرې اټکل کولی شو چې: که د  $x_0$  ځای کې دا لاندې ولرو  $f''(x) = 0$  (او  $f'''(x) > 0$ )، نو یو بنی-کین-انعطاف ټکی (اورونټکی)

مو مخ ته پروت دی.

برعکس (په څټ):

که وي:  $f''(x) = 0$  او  $f'''(x) < 0$  نو یو کین - بنی - د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

د انعطاف ټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چی  $f''(x) = 0$  وي ، داچی دا بنی - کین - او که کین- بنی - انعطاف ټکی (اورونټکي) دی، د  $f''(x)$  مخ نښه یی ټاکي.

۴ - شرایط  $f''(x) = 0$  د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړیین یا ضروري دي.

د  $y = x^4$  لپاره  $f''(0) = 0$  دی، مگر اورونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

۵ - شرایط  $f''(x_0) = 0$  او  $f'''(x_0) \neq 0$  د انعطاف ټکي لپاره پوره کیدونکي دي.

گورو چی  $y = f(x) = x^5$  تابع د  $x = x_0 = 0$  ځای کی یو انعطاف ټکی لري او باوري دي:

$$f'(x) = 5x^4, \quad f'(0) = 0$$

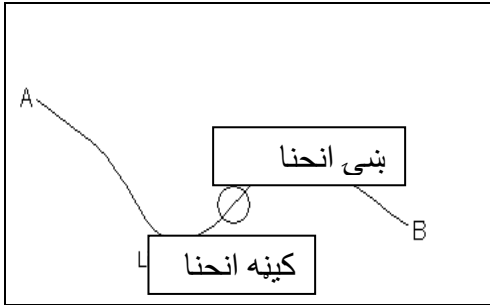
$$f''(x) = 20x^3, \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 60x^2, \quad f'''(0) = 0$$

گورو چی دریم مشتق  $f'''(x)$  نه له صفر څخه کوچنی او نه لوي دی.

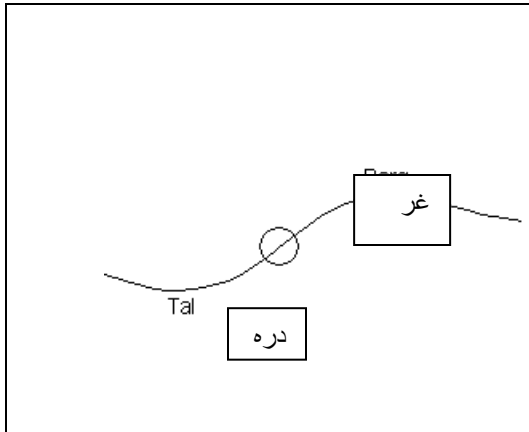
تر مخ راوړني او د کلمي روښانه وني:

د دی کلمي د لا نوري روښانه کولو لپاره په لاندې توگه مخ ته ځو:

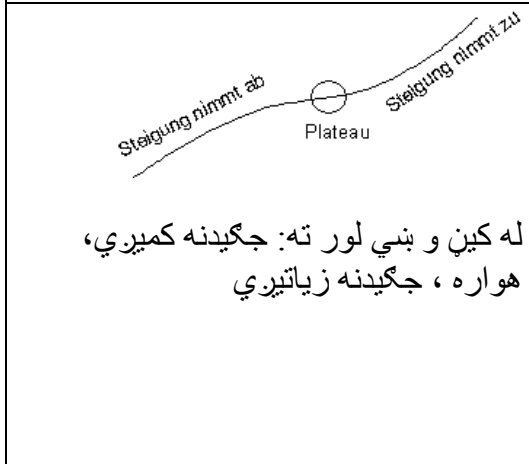


د بایسکل خُغاستي چي له A څخه خُغلي د منحنی څخه تیرېږي او B ته رسيږي. د همغه وخت د بایسکل خُغاستي د انډل حالت د خُغاستي په وخت کي په پام کي ولری. د کیني منحنی (د کین لوري د انډل حالت) څخه وروسته د بنی لوري منحنی کي خُغلي.

د کیني- او بنی منحنی (کړي) ترمنځ باید د بایسکل انډل سیده ولار وي (عمود وي)، چي دا د انډل بدلون دی له کیني لوري و بنی لوري ته. دا د کیني او بنی منحنی ترمنځ اوړیدنه یاد **انعطاف ټکی** بلل کيږي.



تاسو له بایسکل سره په یوه غونډی خُغلي. وروسته له هغي، چي له تالي څخه تیرېږي، نو لار په جگي دو پیل کوي. په لومړي سر کي نرم او بیا په نیغه جگيري، بیا په دي پسي جگوالی بېرته کميري، چي پاس د غونډی په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. یو چیرته په غونډی پورته صفر ارزښت ته رسيږي. یو چیرته په لار جگي دنه خورا لویه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.



د بایکل خُغلوونکي بل حالت، چي له څنګ دیاگرام څخه یي رانیسو:  
په غره د بایسکل خُغاستمیل یا جگي دنه لومړی کميري، چي له سره بېرته جگه شي. ددي ترمنځ یوه ساحه شته، د کم جگوالي سره (یوه نسبتاً هواره). دي نسبتاً هوار ځای کي د توتیه کرښي جگي دنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونټکی (د انعطاف ټکی) پروت دی.

له کین و بنی لور ته: جگیدنه کميري، هواره، جگیدنه زیاتيري

پوهیرو، چې د یوې تابع لومړی مشتق د تابع د جگوالی تابع دی، چې له گراف څخه یې جگوالی لوستل کیږي. دا چې د انعطاف ټکی خورا لوی یا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پیدا کیږي، چې د مشتق تابع انحرافي ارزښتونه پیدا کړو.

دا تلنار همغسې ده، لکه د پیل تابع  $f(x)$  لپاره مو ټاکلي. اوس د مشتق تابع  $f'(x)$  باندې دا کار یا عمل اجرا کیږي.

مخکی له دې چې یو لړ جملی د بحراني (جگ - ټیټ -) ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څیرو، غواړو چې دا کلیمی تعریف کړو .

دواړه کلمې به د نسبي بحراني ټکي په بڼه کی سره را غونډې شي.

**پېژند ۲۰ . ۶ :** په یوه چاپیریال  $x = x_0$  کی مشتقور تابع  $y = f(x)$  یو کین- بنی- انعطافټکی په همدې ډول بنی- کین- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جگټکی (عظمي نقطه) په همدې توگه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

**جمله ۲۰ . ۱۱ :** ( د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په  $x_0$  کی مشتقور تابع  $y = f(x)$  اکستریموم لري نو لرو:  $f'(x) = 0$

دا جمله مور ته وایي ( یادونه ۲ دې پرته شي): چیرته چې  $f'(x) \neq 0$  وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکولپاره یواځې د  $x_0$  ځای په پوښتنه کی راځي، چې د هغې لپاره  $f'(x) = 0$  وي، خو حمتي نه ده چې  $y = f(x)$  دې یو بحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په  $y' = f'(x)$  څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

**جمله ۲ . ۱۲ :** ( د اورونټکي (انعطاف ټکي) لپاره اړین شرایط):

که په  $x = x_0$  کی دوه واره مشتق وړ تابع  $y = f(x)$  هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته تري راځي:  $f''(x) = 0$

دلته هم باور لري ( یادونه ۴ دې پرتله شي): چیرته چی  $f''(x) \neq 0$  وي ، نو هلته نه شي کیدی چي اورونتيكي موجود وي. مگر چیرته چی  $f''(x) = 0$  وي ، اورونتيکی شته کېدلی شي، خو اریین یا ضرور نه ده چی هلته انعطاف ټکی شته وي. له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

**جمله ۲۰، ۱۳:** (د اورونتيكي یا انعطافتيكي لپاره پوره کیدونکی شرطونه) که په  $x$

$x_0 =$  کی دریوار مشتقور تابع  $y = f(x)$  لپاره وي:

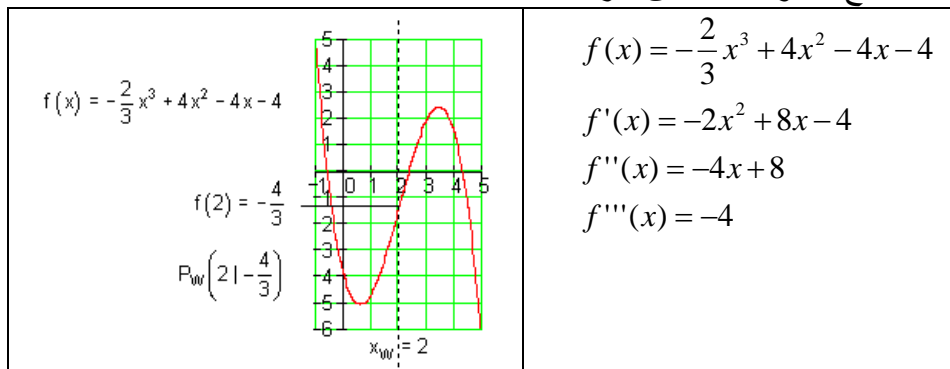
$$f''(x) = 0 \quad \text{او} \quad f'''(x) \neq 0$$

نو هلته یو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که  $f'''(x) < 0$  وي، نو یو کین-بني - انعطاف ټکی مخ ته پروت دی او د  $f'''(x) > 0$  لپاره یو بنی-کین-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

شننیزه یا تحلیلي بیلگه:

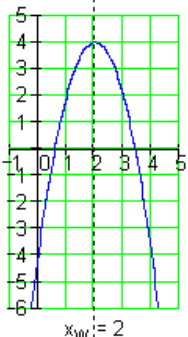
یادونه: مور د  $x_E$  سره افراطي ټکی په نښه کوو او د  $x_W$  سره د انعطاف - یا اوړون ټکی په نښه کوو.

1- تابع مساوات د مشتق سره



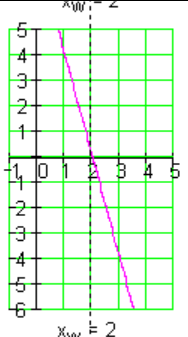


۲- دویم مشتق صفر کری.

$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$ <p>Extremwert von <math>f'(x)</math> bei <math>x_W = 2</math></p>  <p style="text-align: center;"><math>x_W = 2</math></p> <p>د المانی پینو: د <math>f'(x)</math> صفرخای په کي <math>x_W = 2</math></p>	$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 8 = 0$ $\Rightarrow x_W = 2$
---	--

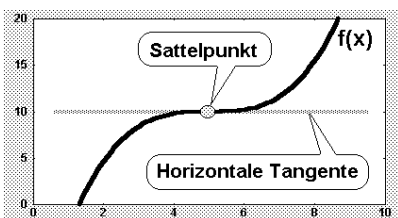
3- د انعطاف تکی له مخی بنوونه، چي ایا د انعطاف تکی شته دی؟

	$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$ <p>4- په <math>f(x)</math> د انعطاف خایونه خای په خای کولو له لاری د انعطاف تکی ټاکنه</p>
--	--

$f''(x) = -4x + 8$ <p>Nullstelle von <math>f''(x)</math> bei <math>x_W = 2</math></p>  <p style="text-align: center;"><math>x_W = 2</math></p> <p>د المانی پینو: د <math>f''(x)</math> صفرخای په کي <math>x_W = 2</math></p>	$f(x_W) = f(2) =$ $-\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$ $\Rightarrow \underline{\underline{P_W\left(2-\frac{4}{3}\right)}}$ $\underline{\underline{P_W(21-1.33)}}$
---	---

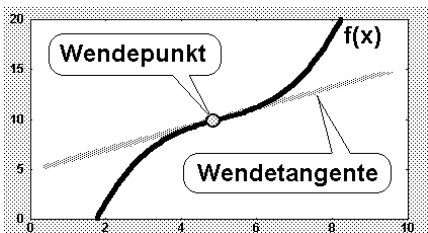
پام: په انعطاف های  $x_w$  کې د  $f(x)$  گراف کېږي.

په یوه په خوبه ټکي  $x_0$  کې د کېږوني (انحنا) لپاره باور لري:  
 $f''(x) > 0$  په دې معني دی، چې  $f(x)$  کین لور ته کېږي (انحنا لري) دی.  
 $f''(x) < 0$  په دې معنی، چې تابع  $f(x)$  گراف بنی لور ته کېږي (انحنا کوي)  
یو زینټکی Der Sattelpunkt څه شی دی؟

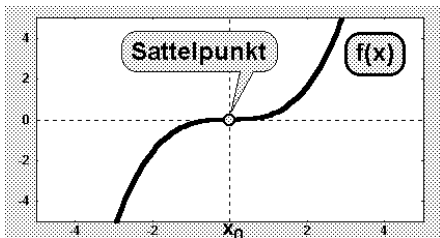


پیزند: د زینټکي (کله کله برنډې ټکی هم بلل کېږي) لاندې د انعطافټکي ځانگړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت)

وي:



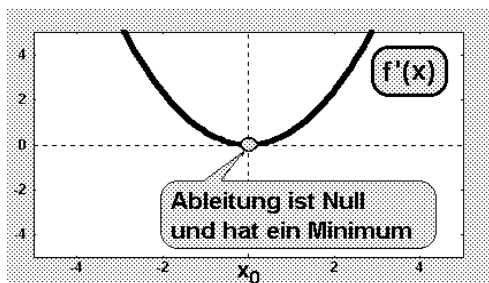
د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي. دا یو مائل (نه افقي) تانجنت لري



توضیح: اوس فکر کوو، چې یو زینټکی څنگه د شمېرلو له مخې پېژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانگړي توگه دا مخ ته لرو، چې یو زینټکی له بني -و کینه انحنا و شمېرو.

د دې لپاره د  $f(x)$  تابع جگوالی په پام کې نیسو، یعنی لومړی مشتق: د زینتکي د مخه د  $f(x)$  جگوالي کمیري، په زینتکي کې صفر ارزښت لري، او له زینتکي څخه وروسته بېرته جگیري.

یو زینتکي (د بني - کین - بدلون سره) په دې پېژندل کېږي، چې لومړی مشتق  $f'(x)$  یې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي تیتکي (مینیموم) ولري.



د لومړي مشتق  $f'(x)$  شکل داسې برېښي:

لومړی شرط دی، چې مشتق یعنی  $f'(x)$  په زینتکي کې د صفر سره مساوي دی.

زینتکي (بني-کین-بدلون)  $f'(x_0) = 0$  دوم شرط دی، چې مشتق  $f'(x)$  هلته یو نسبي مینیموم لري.

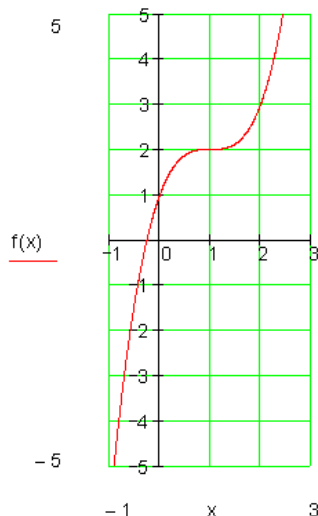
دا په دې معنای، چې بل جگ مشتق  $f''(x)$  باید په صفر مساوي وي او مخښه له منفي و مثبت ته بدلېږي.

له دې سره سم د زینتکي لپاره پوره کېدونکي قضیه ومیندل شوه: د زینتکي لپاره جمله (خوي ټاکنه) (د بني - کین - انعطاف سره) الف: د  $x_0$  ځا کې لومړی مشتق  $f'(x)$  صفر دی:  $f'(x_0) = 0$

ب: د  $x_0$  په ځا کې لومړی مشتق  $f'(x_0)$  یو مینیموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، یعنی  $f''(x) = 0$  دوم مشتق مخښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي. بل بدیل (د گرانو دوستانو وړاندیز)

؟  
\  
,

### زینتکی Der Sattelpunkt



د انعطاف ټکي یو ځانگړی حالت زینتکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جگیدني سره که د کین لور ورنږدې شو فکر کیري، چي، نسبي جگتکی مو مخ ته پروت دی که څوک د بني لور ور نږدې شي فکر کوي، چي یو نسبي ټیټکی مخ ته لرو. اوس دا حالت د ریاضیاتو له لوري څیرو: مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

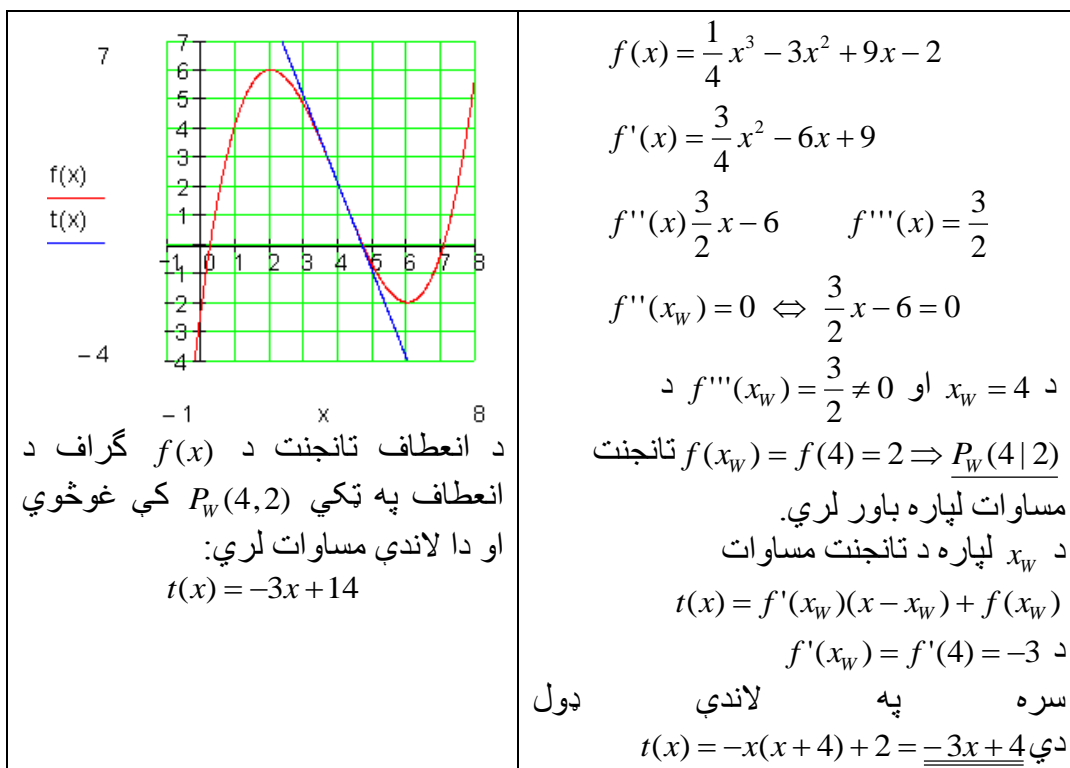
$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1$$

د $x=1$ سره زینتکی	د $x=1$ سره د انعطاف ټکی	$f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ $f'''(1) = 6$
-----------------------	-----------------------------	---

د انعطاف ټکي لپاره شرایط پوره دي. دا چي د  $f''(1) = 0$  له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زینتکی دی. د انعطاف ټکي پیداکونه: د تابع گراف باندي انعطاف ټکي کي تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیري. د انعطاف تانجنت هم همداسي پیدا کیري لکه د تابع دگراف په یوه ټکي کي تانجنت، چي تانجنت مساوات ټاکل کیري.



د انعطاف- يا ورون ټکي تانجنت پيدا کونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دگراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کيږي. د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کيږي، لکه د تانجنت مساوات د گراف په خوښه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه  $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0$  دلته تر څيرنی لاندي نه نيول کيږي.

د کړي يا منحنی بحث (Kurven Diskussion):

يوه تابع  $y = x^3 + x^2 - 3$  لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بيا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نڅښه کړئ، رښانه کړئ، چې انحنای چيرته له کيني لور و ښی لوري ته او له ښی لوري و کيني لوري ته ده.

## فعالیت:

- تناظر تعریف کری.
  - لاندی توابع رسم کری، جگ تکی، تیت تکی او د انعطاف تکی یی پیدا اگری.
  - $x^3 + x$
  - $3x^3 + x + 2$
- ددی لپاره چي یوه تابع رسم کرای شو، ساده ده که د تابع غوره تکی و پیژنو. مور دي بحث ته د منحنی بحث وایو. مور په دا ډول خبرو اترو کي باید سیستماتیک مخ ته لار شو.
- په لاندی ډول تلنه گتوره بلل شوي.

دتعریف ساحه: د تابع څیرنه یواځي په همدې ورشو کي موخه وره ده. تناظر **Symetry**: باید وټاکل شي، چي تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده. د محوري تناظر لپاره باور لري:  $f(-x) = f(x)$  د مرکزي تناظر لپاره باور لري.  $f(-x) = -f(x)$  په پورته دواړو حالتونو کي دي فقط  $x \geq 0$  وڅیرل شي. یه تولیزه توگه که ټول ریل تابع په پام کي ونیسو، نو گورو چي که توان (د پولینوم درجه) یی جفت (جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان (د پولینوم درجه) طاق (ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

بحراني تکی **Extrema**: د نسبي بحراني ټکو ټاکل (جگتکی، تیتکی) د جگتکی یا نسبي جگ تکی پوره کیدونکي شرطونه:

$$f'(x_1) = 0 \wedge f''(x_1) < 0$$

## انعطافتکی یا اورونتیکی : Inflection Point

د انعطافتکو او همداسي زینتکی ټاکلو له پاره پوره کیدونکي شرطونه:

$$f''(x_w) = 0 \wedge f'''(x_w) \neq 0$$

زینتکی انعطافتکی دی د افقي تانجنت سره.

د تابع تقاطع د  $x$  او  $y$  محورونوسره (د محورونو غوڅتکی):

$$P_{xi}(x_i | 0) \Rightarrow (x) = 0$$

$$P_y(0 | y_s) \Rightarrow f(0) \text{ ټاکي (صفرخای) ټاکي}$$

دگراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې گراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځور پیري. دا راته په گوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمیرل کيږي.

د انحنای حالت او یو غریزوالی:

د انعطاف په ټکي  $x_w$  کې د  $f(x)$  گراف تغیر خوري.

په خوښه یوه ټکي  $x_0$  کې د انحنای لپاره باور لري:

$f''(x_0) > 0$  په دې معنا، چې د  $f(x)$  تابع گراف کینه انحنای لري (کونوکس)

$f''(x_0) < 0$  په دې معنا، چې د  $f(x)$  تابع گراف ښی انحنای لري (کونکاو)

یو غریزوالی

1- که د ټولو  $x \in I$  لپاره وي  $f'(x) \geq 0$ ، نو  $f(x)$  په انتروال  $I$  کې مونوتون جگپړي. که

د ټولو  $x \in I$  لپاره  $f'(x) \leq 0$  وي، نو  $f(x)$  په انتروال  $I$  کې مونوتون ټیټیډونکی دی.

2- که د ټولو  $x \in I$  لپاره  $f'(x) > 0$  وي، نو  $f(x)$  تابع په انتروال  $I$  کې کره غښتلي مونوتون

جگپړیډونکی ده.

که د ټولو  $x \in I$  لپاره  $f'(x) < 0$  وي، نو  $f(x)$  تابع په انتروال  $I$  کې غښتلي مونوتون

جگپړیډونکی ده.

د پيژند ورسوژي ټکي:

د تابع ژي ټکي کتنه په پيژند ورسوژي کې. که پيژند ورسو نامحدوده وي، نو ليميټ

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  او  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ټاکو.

بيلگه:

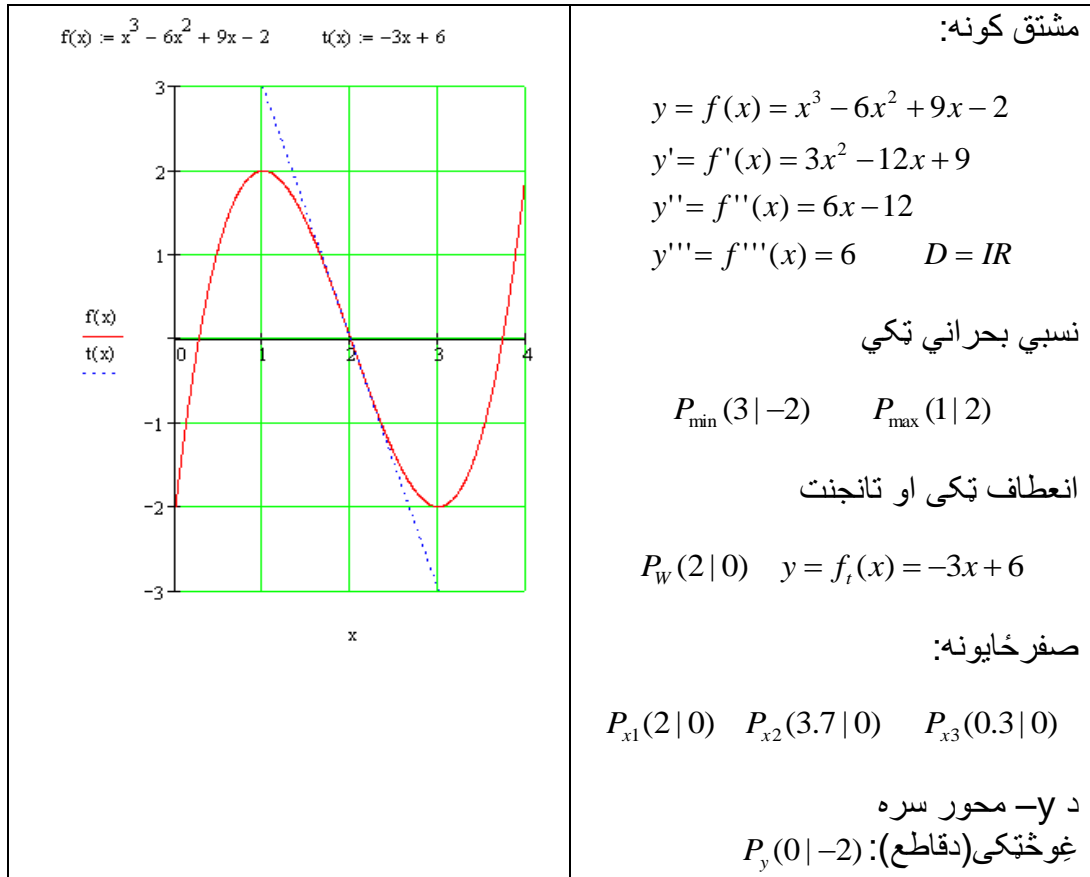
د  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$  تابع رسم کړئ.

.

.

.

.



<p>د تابع حالت په <math>x \rightarrow -\infty</math> او <math>x \rightarrow \infty</math> کې</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left( 1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left( 1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = \infty$ <p>سیومتري: نه لري</p>	<p>یو غریزو والی (مونوتونی یا جگ - نیټوالی)</p> <p>په <math>I_1 = \{x \mid -\infty &lt; x \leq 1\}_{\mathbb{R}}</math> کې یو غریز جگیري.</p> <p>په <math>I_3 = \{x \mid 3 \leq x &lt; \infty\}_{\mathbb{R}}</math> کې یو غریز جگیري.</p>
--	--



د کبروالی یا انحنای حالت:

بنی کبروالی یا انحنای (محدب) :  $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کین کبروالی یا انحنای (مقعر) :  $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

د افراطی د جگ-تیت ټکو جملی یعنی دا وروستی نومولی جملی اوس باید په یو لړ بیلگو استعمال شي.

دلته دې د ورکړ شوو توابعو، د پیژند سټ (- ډیری)، انعطاف‌تکی، جگ-تیت‌تکی (اکستریموم، قطبونه، اسیومپتوتی وینوول شي او په دې جوړ(ودان) دې د تابع تلنه وکینل شي. دې بنوونو یا څیرنو ته د کبرو خبرې اترې یا - مباحثه ویل کیږي، یعنی دلته د کبرو ( انحنای) د مختلفو ډولونو په څوونو غږیږو.

مور خپل تمرکز د افراطی ټکو(اکستریموم) او انعطاف‌تکو( اړونټکو) رامعلومو یا روښانو څیرنو ته متوجه کوو او د «انحنای- خبرې اترې) د انحنای(کبرې)-چنون (« د لاندې شیمای له لارې مخ ته بیایو:

0 - د چمتووالي لپاره د تابع  $y = f(x)$  د دریمې درجې پورې مشتق پیدا کیږي، بیا له ټولو هغو ارزښتونو  $x_i$  څخه سټ  $M$  جوړیږي (۴ ټکی) چی وروسته باید ځانگړې تر څیرنی لاندې ونیول شي.

په سټ  $M$  کی لومړی د غاړو ټکو اېسټیز یا پراټه ارزښتونه نیول کیږي. په دې پورې په ځانگړي ډول بیا تشخیونه (لوکی Lücke نیمگرتیا) او هم قطبونه اړه لري. د  $M$  سټ به وروسته په نورو ارزښتونو تکمیل شي.

۱ - د  $f(x) = 0$  صفر ځایونو  $x_i$  سټ  $M_0$  لټول کیږي.

۲ - ټول ځایونه  $x$  لټول کیږي، چی هلته  $y = f(x)$  د مشتق قابلیت نه لري او په ډیری  $M$  کی یی نیسي. بیا د ټولو ارزښتونو  $x_j$  ډیری  $M_1$  لټول کیږي، چیرته چی  $f'(x) = 0$  وي، ( دا د بحراني ارزښتونو لپاره په پوښتنه کی راځي) ، او د  $y_j = f(x_j)$  تابع

ارزبنتونه یی. ورپسی سړی د ټولو  $x_j \in M_1$  ارزبنتونه د  $f(x_j)$  د دویم مشتق لپاره لټوي.

۳ - ټول هغه ارزبنتونه  $x$  چیرته چی  $y = f(x)$  دوه ځله مشتقور نه دی د  $M$  په سټ کی نیول کیږي.

ورپسی بیا سړی د ټولو  $x_k$  سټ  $M_2$  لټوي، چیرته چی  $f''(x) = 0$  وي (دلته نو د انعطاف ټکی پوښتنه کی راځي) او د هغه د تابع ارزبنتونه  $y_k = f(x_k)$ .

بیا د ټول  $x_k \in M_2$  لپاره دریم مشتق  $f'''(x)$  ازمائیل کیږي. د ټولو  $x_k \in M_2$  ارزبنتونو ډیری  $M_{21}$  د کومو لپاره چی  $f'''(x_k) < 0$  وي نو افقي (پراته) محور کین - بنی - انعطاف ټکی جوړوي. د ټولو  $x_k \in M_2$  ارزبنتونو ډیری، د کومو لپاره چی وي  $f'''(x_k) > 0$  نو د پراته - یا افقي محور د بنی - کین - انعطاف ټکی جوړوي. د ټولو  $x_k \in M_2$  ډیری د کومو لپاره چی  $f'''(x_k) = 0$  وي او یا دریم رابیلیدونکی نه وي موجود نو په ډیری  $M$  کی نیول کیږي.

۴ - د تیرو درسونو تعریفونو او جملو سره سم په افراطي ټکو او انعطاف ټکی یا ورونتکی باندي د ډیری  $M$  څیرنه د اصلي حالتونو لپاره اوس یو څو بیلگی راوړو

**بیلگه :** بلواک  $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$  هر چیرته پوره زیات مشتقور دی.

$$0 - f(x) = 3x^2 - 12x + 9, f'(x) = 6x - 12, f''(x) = 6$$

په سټ  $M$  کی یواځي  $-\infty, \infty$  نیول کیږي د حد - یا پولي تیریدنو په موخه یا هدف  
 $M = \{-\infty, \infty\}$

$$1 - f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$M_0 = \{x_1, x_2\} = \{0, 3\}.$$

$$2 - f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$M1 = \{x_3, x_4\} = \{1, 3\}, y_3 = 4, y_4 = 0$$

$$f''(x_3) = f''(1) = -6 < 0, \text{ Minimum (}$$

$$) f''(x_4) = f''(3) = 6 > 0, \text{ maximum (}$$

$$M11 = \{1\}, M12 = \{3\}.$$

$$3 - f''(x) = 6x - 12 = 0,$$

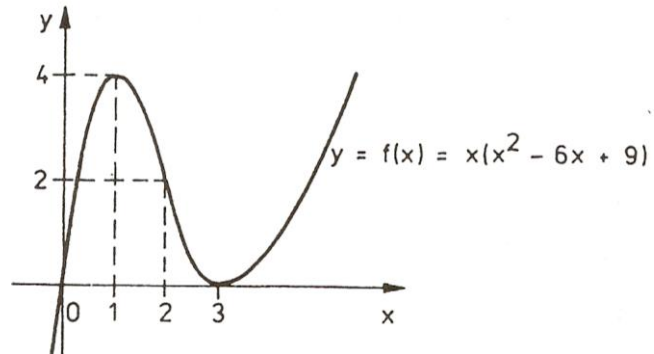
$$M2 = \{x_5\} = \{2\}, y_5 = 2$$

$$f'''(x_5) = f'''(2) = 6 > 0 ($$

بسی - کین اوریدونتیکی.  $M22 = \{2\}$ .

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

په دي ډول د منحنی تگلار په لاندې څېره کې لاس ته راځي



بیلگه : تابع  $f(x) = x^4 - 4x^3$  پوره په خوښه مشتق ورده.

$$0 - f'(x) = 4x^3 - 12x^2, f''(x) = 12x^2 - 24x, f'''(x) = 24x - 24$$

په سټ  $M$  یواځي  $-\infty, \infty$  نیول کیري:  $M = \{-\infty, \infty\}$

$$1 - f(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x - 4) = 0$$

$$M_0 = \{x_1, x_2\} = \{0, 4\}.$$

$$2 - f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3) = 0$$

$$M_1 = \{x_3\} = \{3\}, \quad y_3 = -27$$

دا چی د  $x = 0$  لپاره دویم مشتق  $f''(0) = 0$  دی، دا ارزښت د ۳ - لاندې څیرل کیري

$$f''(x_3) = f''(3) = 36 > 0, \quad \text{Minimum, } M_{12} = \{3\}$$

$$3 - f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2) = 0$$

$$M_2 = \{x_4 - x_5\} = \{0, 2\}, \quad y_4 = 0, \quad y_5 = -16,$$

$$f'''(x_4) = f'''(0) = -24 < 0$$

انعطاف‌تکی (کین- بنی - انعطاف‌تکی),  $M_{21} = \{x_4\} = \{0\}$ ,

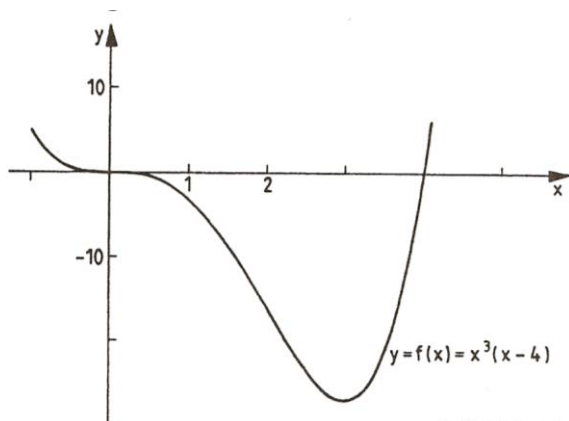
$$f'''(x_5) = f'''(2) = 24 > 0,$$

انعطاف‌تکی (بنی - کین - انعطاف‌تکی)

$$M_{22} = \{x_5\} = 2.$$

$$4 - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$$

د لاندې څیرې څخه د کړي تڼشکل لاس ته راځي



بیلگه : تابع  $y = f(x) = e^{x^3}$  پوره مشتق‌ور دی:

صفر:

$$f'(x) = 3x^2 e^{x^3}$$

$$f''(x) = 3x(3x^3 + 2)e^{x^3}$$

$$f'''(x) = 9x^3 e^{x^3} (3x^3 + 2) + 6e^{x^3} (6x^3 + 1),$$

$$M = \{\infty, -\infty\}$$

۱ - تابع کوم صفرځای نه لري

$$f'(x) = 3x^2 e^{x^3} = 0 \quad - ۲$$

یواځې د  $x_1 = 0$  لپاره ارزښت لري. مگر داچې  $f''(0) = 0$  دی، نو  $x_1 = 0$  د ۳ - لاندې څیرل کيږي

- ۳

$$f''(x) = 3x(3x^3 + 2)e^{x^3} = 0,$$

$$M_2 = \{x_2, x_3\} = \left\{0, -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = \frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}.$$

بنی - کین انعطافتکی:

$$f'''(x) = f'''(0) = 6 > 0$$

$$M_{21} = \{x_2\} = \{0\}$$

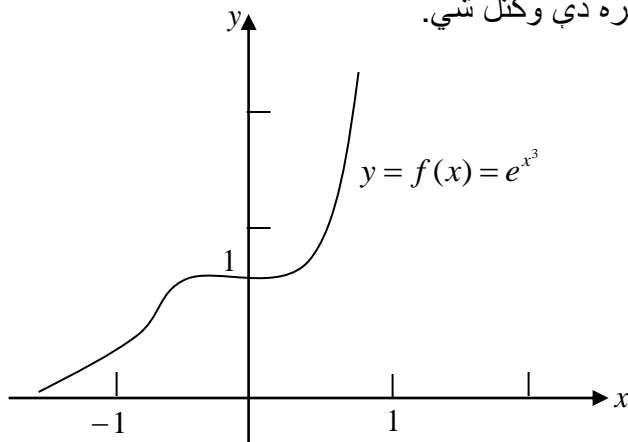
کین - بنی انعطافتکی:

$$f'''(x_3) = f'''(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}) = 0 + 6e^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-6\frac{2}{3} + 1\right) < 0,$$

$$M_{22} = (x_3) = \left\{-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^3} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^3} = +\infty. \quad - ۴$$

لاندي خېره دي وکتل شي.



بیلگه: تابع  $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2}$  د ټولو  $x$  لپاره تعریف دی، مگر یواځې د  $x = 0$  لپاره مشتقور دی

صفر - د  $x \neq 0$  لپاره باور لري یا صدق کوي

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}},$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

دلته  $f'''(x)$  ته اړتیا نه پېښیږي

د  $M$  سټ له  $x = \pm \infty$  او  $x = 0$  څخه جوړ دی

$$M = \{-\infty, 0, \infty\}$$

اول:  $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2} = 0$

$$x = -\sqrt[3]{x^2}, x^3 = -x^2, x^3 + x^2 = 0$$

له امله د حل لپاره په پوښتنه کې  $x_1 = 0, x_2 = -1$  راځي. دواړه ارزښتونه، لکه ازماينه روښانه کوي، صفر ځایونه دي:

$$M_0 = \{x_1, x_2\} = (0, -1)$$

$$M_0 = \{x_1, x_2\} = \{0, -1\}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = 0. \text{ دویم:}$$

م - د دې مساواتو حلونه له لاندې لاس ته راوړني څخه لاس ته راځي:

$$1 + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = 0, \quad \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = -1, \quad \frac{8}{27x} = -1, \quad x = x_3 = -\frac{8}{27},$$

$$y_3 = f(x_3) = -\frac{8}{27} + \frac{4}{9} = \frac{4}{27}.$$

$$M_1 = \left(-\frac{8}{27}\right).$$

$$f''\left(-\frac{8}{27}\right) = -\frac{8}{9^3 x^4} < 0, \text{ Maximum}$$

$$M_{11} = \left\{-\frac{8}{27}\right\}.$$

- ۳

$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} = 0$$

د کوم له پاره شوونی نه ده.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}\right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \quad - ۴$$

هغه خای  $x_1 = 0$  ، د کوم لپاره چی  $f(x)$  مشتقور نه دی او د کومی لپاره چی  $f(0) = 0$  لرو، باید تر اوس تر څیرنی لاندی و نیول شي

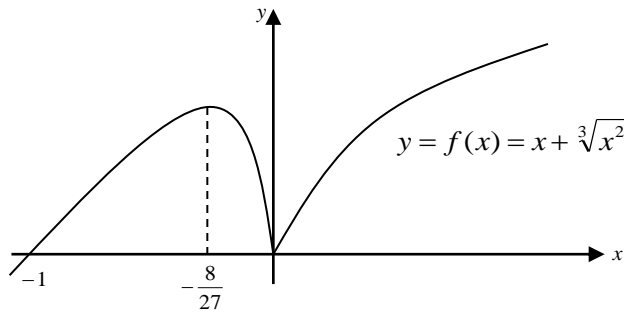
د  $x > 0$  لپاره  $f(x) > 0$  دی.

د  $-1 < x < 0$  لپاره صدق کوي (د  $x^2 > 0$  سره ضرب  $-x^2 < x^3 < 0$ ) په همدې ډول  
 $\Leftrightarrow$  لاس ته راځي او برعس) یعنی  $0 < -x^3 < x^2$  او له دې امله  $0 < \sqrt[3]{-x^3} < \sqrt[3]{x^2}$



$$f(x) = x + \sqrt[3]{x^2} > 0, \text{ او له دې سره: } 0 < -x < \sqrt[3]{x^2}$$

له دې امله د  $x_1 = 0$  سره یو نسبي ټیټکی (نقطه اصغري) مخ ته پروت دی. په دې توګه د کرې یا منحنی تلنلار د لاندې څیرې سره سم روښانه ده.



په لاندې بیلګه کې دې د  $x$  ارزښتونه د  $f''(x) = f''(x) = 0$  لپاره هم د  $M$  په سټ کې ونیول شي.

بیلګه : تابع  $y = f(x) = x^4 + x$  پوره زیات مشتق وړ دی.

صفر:

$$f'(x) = 4x^3 + 1,$$

$$f''(x) = 12x^2,$$

$$f'''(x) = 24x,$$

$$f^{(4)}(x) = 24,$$

$$f^{(5)}(x) = f^{(6)}(x) = \dots = 0$$

په  $M$  کې یواځې د اېسټیزي یعنی دېرته محور د غاړوټکی یعنی  $\pm\infty$  نیول کېدې شي:

$$M = \{-\infty, +\infty\}$$

--

$$1 \quad f(x) = x^4 + x = x(x^3 + 1)0, \quad M = (0 - 1)$$

$$2 \quad f'(x) = 4x^3 + 1 = 0$$

$$M_1 = \left\{ -1/3\sqrt[3]{4} \right\}, \quad y_3 = -3/4 \sqrt[3]{4} = \frac{3}{4 \sqrt[3]{4}}$$

$$f''(-1/3\sqrt[3]{4}) = 12(-1/3\sqrt[3]{4})^2 > 0. \text{Min}, \quad M_{12} = \left\{ -1/3\sqrt[3]{4} \right\}$$

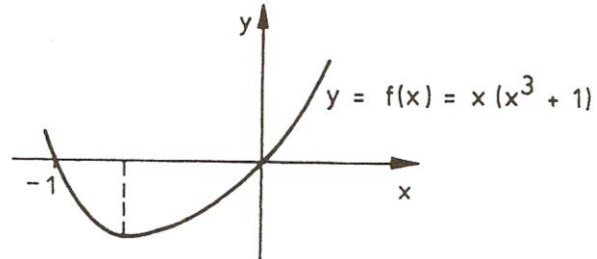
$$3 \quad f''(x) = 12x^2 = 0, \quad M_2 = \{0\}$$

$$f'''(x) = 0$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

د  $x=0$  سره هېڅ اوږونټکی مخ ته نه لرو، ځکه چې  $f'(x)$  هلته اکستريموم ارزښتونه نه لري، بلکې یو اوږونټکی  $y = x^3$  (په ۴ غزول شوی او د ۱ سره و پورته لور ته خوځول شوی یا پورته شوی).

دا د څیږي ۲۰، ۱۳ سره سم د کږي تله ورکوي.



ناتاکلي حدونه یا پولې

یا د ناتاکلو افادو (ویینو) حدونه یا پولې

که و لرو  $x \neq 5$ ;  $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$  ، ومو لیدل، چي د داسي توابعو حد پیداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلي افادي وايي، ځکه چي مشتق يې نیول کېدی شي، يعني د کمېنتونو ویش (د تفاضلونو ویش) حد يې ټاکل کېدی شي.

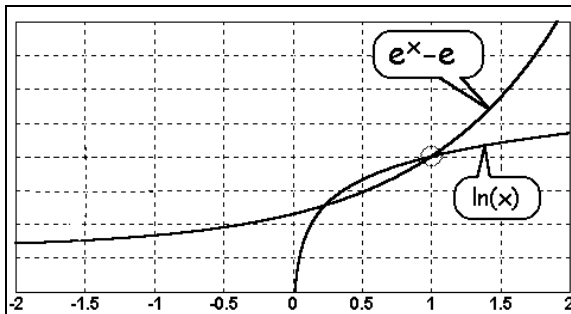
که  $\frac{\sin 2x}{5x}$  توابع و لرو، نود  $x=0$  لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توگه نه شو نیولی، چي له دې امله ناټاکلي افادي ورته وايو.

پیل خیرنه:

د  $\frac{0}{0}$  حالت

که پوله ارزښت جوړېدو کي يو کسر پیدا شي، چي صورت او مخرج يې دواړه د صفر په لور لار شي، نو دا پوله ارزښت،، ناټاکلي افاده،، بولو.

بیلگه: لاندي د الماني پښتو: صورت يا ماتباندي، مخرج يا ماتلاندي



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\text{Zähler} \rightarrow 0}{\text{Nenner} \rightarrow 0}$$

په څيره کي برخه توابع رسم شوي دي، يعني د صورت او همداسي د مخرج گرافونه.

گورو: د صورت او مخرج د توابعو ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱ په لور لار شي)

$$\frac{0 \rightarrow \text{صورت}}{0 \rightarrow \text{مخرج}}$$

ليکنود (ليکنډول): د افادي

لپاره په پوله شميرنه کې لنډ لیکو:

$$\frac{0}{0}$$

دا په حقيقت کې دقيق نه دی، مگر په ټوليزه توگه داسې معمول دی  
روښانه ونه :

ناتاکلي افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې دا ناتاکلي افاده خپل نوم له کومه ځايه اخلي. دا ، ،  
ناتاکلی، ، بلل کيږي، ځکه چې حديې د عادي طريقو له لارې نه شي شميرل کيدی. د  
لورې رياضي سره دا کار شميرنه شونی شوه (دبيلگې په توگه د لو پيټال قانون له مخې،  
چې پسې به وڅيرل شي).

روښانه ونو ته تشریح:

اوس ښايو، چې د داسې توابعو شميرل ولې ناشوني دي.

مور بيا دا د تېر مخ بيلگه رانيسو:

$$\frac{\rightarrow 0}{\rightarrow 0} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\text{Zähler} \rightarrow 0}{\text{مخرج} \rightarrow 0}$$

۱ - که هڅه وشي، چې حد پیدا کړو، داسې چې د  $x=1$  په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده  $0:0$  به ترې لاس ته راشي. دا تعریف نه لري،  $u=f\left(\frac{1}{z}\right)$  ځکه په صفر ویش اجازه نه شته.

۲ - ترمخه مو د ناکلو افادو د شمیرلو لپاره یعنی د ناطق کسري توابعو پوله شمیرنه کې د چل یا د طریقي څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارولی، لکه په پورته بیلگه کې.

۳ - د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي لید کې دی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لار شي، نو کسر به د ۱ په لور وخوزیږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001} = 1$$

$$\frac{0.000000001}{0.000000001} = 1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معنی ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نږدې برابر شي. دا دا معنی نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.000000100}{0.000000001} = 100$$

$$\frac{0.00000000100}{0.00000000100} = 100$$

لکه چې گورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نږدې برابر دي (دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مگر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعنی (100) دی،

## د برنولي او د دي لو، پیتال قاعده Brnoulli and de L,Hospital

د برنولي او د دو لو پیتال قاعدې د  $\frac{f(x)}{g(x)}$  ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانگړی رول لوبوي. دا حالت په ځانگړي ډول هلته رامنځ ته کېږي، چې مخرج او صورت ( ماتباندي او ماتلاندي) همغه صفر ځای  $x_0$  ولري. دا ناټاکلی افاده  $\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{0}{0}$  موخه وره (هدمفنده)

نه ده. کیدی شي چې د ویش حد  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  وڅیړل شي، په کومو کې چې صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د غوښتنلو دي. د بیلگې په توگه تابع

$$f: y = f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$$

صورت او مخرج همغه صفر ځای  $x_0 = -2$  لري، سره له دې هم پوله شته دی.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)^2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x + 2) = 0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شمیرل کیدی شي، چې د صورت او مخرج توابعو له نتيجي څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوي منځ ارزښتقضيي استعمال هم بلل کېږي.

### د برنولي او د دي لو، پیتال قاعده :

که توابع  $u = f(x)$  او  $v = g(x)$  د یوه  $U(x_0)$  چاپیریال د  $x_0$  په ځای کې مشتقور وي د  $g'(x) \neq 0$  سره او د ټولو  $x \in U(x)$  لپاره او  $f$  او  $g$  یو صفر ځای وي،

د  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  سره، نو باور لري:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ترڅو په بني لور حد شته وي. په ورته توگه لاس ته راځي.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

حل: تابع د پراخه شوې منح ارزښت قضي نیونی پوره کوي. د هر  $x \in U(x_0)$  لپاره  
یو  $x_m \in (x_0, x)$  سره موجود دی، په داسی ډول چی لرو

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د  $f(x_0) = 0 \wedge g(x_0) = 0$  له امله لرو:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچی د  $x \rightarrow x_0$  سره  $x_m \rightarrow x_0$  هم هڅه کوي.  
د  $x \rightarrow \infty$  په حالت کی  $x = 1/z$  په ځای په ځای کوو. د زنجیري قضي په مرسته لاس ته  
راځي:

$$u = f(1/z)$$

د مشتق  $du/dz = f(1/z) \cdot (-1/z^2)$  او مشتق  $dv/dz = g'(1/z) \cdot (-1/z^2)$  سره

، داسی چی لرو :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

یادونه : که په پورته حالت کی  $f(x_0) = g'(x_0) = 0$  هم وي ، نو په ویش بیاله سره دا قاعده  
استعمالیږي. که سړي  $n$ -پلونو (قدمونو) وروسته بریالی وي نو دا قاعده لرو:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چیرته چی  $f^{(n)}$  او  $g^{(n)}$  د تابع  $n$  - م مشتق په معنی دی.

۰ / ۰: ډول یا تیپ:

بیلگه:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

بیلگه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

بیلگه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = \frac{0}{1} = 1$$

تیپ یا ډول:  $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \quad \alpha > 0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان (جگعدد)  $\alpha$  لپاره یو په خوښه توان  $x^\alpha$  د  $x \rightarrow \infty$  لپاره په غښتلي توگه جگيري، نسبت لوگاریتم تابع  $\ln$  ته

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \alpha > 0$$

له دې  $f(x) = \frac{x^n}{e^x}$  تابع د لوپیتال د قواعدې د بیرځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$



اکسپوننشل تابع  $e^x$  د  $x$  په هرتوان تابع څخه په غښتلي جگيري:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

نور حالتونه کیدی شي په بڼه يا تيپ  $\frac{0}{0}$  او يا  $\frac{\infty}{\infty}$  بيرته وارول شي

له تيپ يا بڼي  $\infty - \infty$  څخه و بڼي يا تيپ  $\frac{0}{0}$  ته

ددې لپاره لاندې تابع بیلگه کیدی شي:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$$

د  $x \rightarrow 0$  لپاره

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \cos x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

داچې دلته مشتق بيرته د بڼي تيپ  $\frac{0}{0}$  ده، نو د لويپتال قاعده استعمالیدی شي.

له تيپ يا بڼي  $0 \cdot (\pm\infty)$  څخه بڼي  $\frac{\pm\infty}{\infty}$  ته:

د تيپ  $0 \cdot (-\infty)$  حالت د بيلگي په توگه تابع  $f(x) = x \cdot \ln x$  د  $x \rightarrow 0^+$  لپاره بڼايي. په کوم کی چي ضرب د ویش په څیر انځور کړي، نو د لويپتال د قاعدې په استعمال دا لاندې لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0$$

له بڼي  $0^0$  څخه و بڼي  $e^0$  ته:

دلته د بيلگي په توگه تابع  $f(x) = x^x$  د  $x \rightarrow 0^+$  لپاره تر څيرنی لاندې نیول کيږي.

د بني بدلون يا فورم بدلون و بنسبت  $e$  ته د یوې انځورونې په مرسته په بریالی توګه لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \cdot \ln x} = e^0 = 1$$

له  $1^\infty$  بني څخه و  $e^{0.\infty}$  بني ته

د بنوونې، د بیلګې په توګه د تابع  $f(x) = (1 + \frac{\mu}{x})^x$  پوله ده د  $\mu \in R^+$  لپاره او  $x$

د  $x \rightarrow \infty$  سره:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\mu}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \cdot \ln\left(1 + \frac{\mu}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot \ln\left(1 + \frac{\mu}{x}\right))}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{\mu}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{\mu}{x}} \cdot \left(-\frac{\mu}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\mu}{1 + \frac{\mu}{x}}} = e^{-\mu}$$

د  $\mu=1$  له پاره لاس ته راځي

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

له بني  $0$  و بني  $0.(±\infty)$  ته

دا کارونه په یوې بیلګې روښانه کوو:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\sin x \cdot \ln \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} (\sin x \cdot \ln \frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\cos x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x - x \cdot \sin x} = 0$$

$$\text{سره } \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1 \quad \text{د}$$

باید لاندې جدول کې پام وشي. لري يا تي: شي

لاندې جدول د پورته بنوول شوو بنویا ډولونو د بنی بدلون ټولیزه کتنه ممکنوي

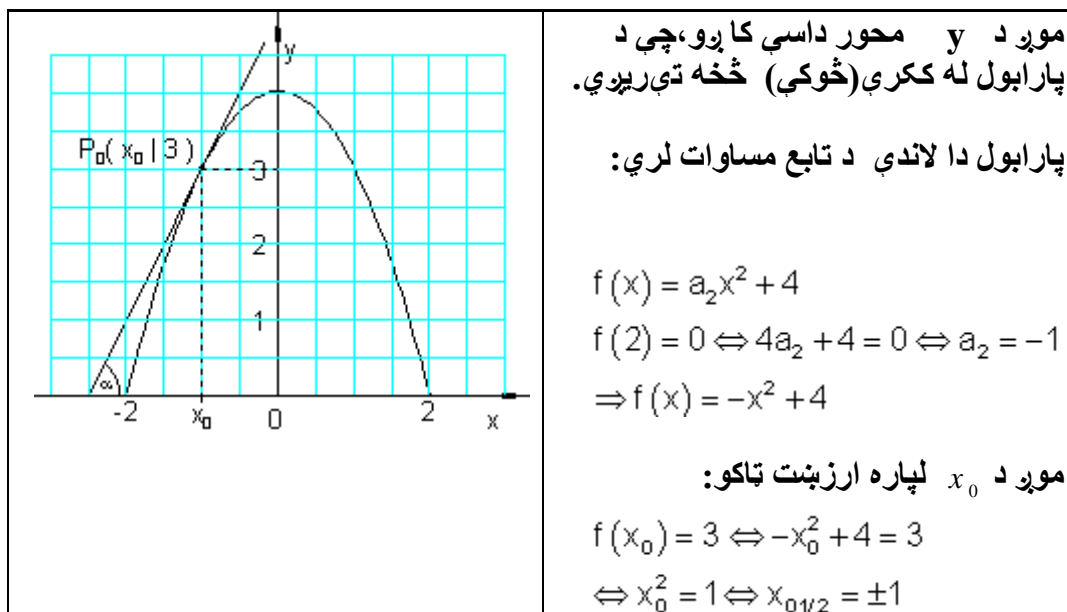
تیپ (ډول)	$f(x) \rightarrow$	$g(x) \rightarrow$	بڼه بدلون یا لنډ: بدلون
$-\infty$	0	0	$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x) - f(x)}{f(x) \cdot g(x)} \rightarrow \frac{0}{0}$
$\infty$	0		$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \rightarrow \frac{0}{0}$ $\wedge (Or)$ $f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$
$\infty$	0 1 0	0	$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x)g(x))} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \rightarrow e^{0 \cdot \infty}$ <p>د <math>f(x) &gt; 0</math> سره.</p>

د یوې تابع د استعمال بیلگه د تانجنت له پاره :

The diagram shows a parabolic haystack (Heuhaufen) with a base of 4 m and a height of 3 m. A ladder (Leiter) is leaning against the peak of the haystack. The point of contact is labeled 'Berührungspunkt P<sub>0</sub>'. The height from the ground to this point is 1 m. The angle between the ladder and the ground is labeled alpha (α).

له ځمکې څخه د وېشو په توپي يوه زينه ايښول کيږي. دا زينه په درې متره جگوالي توپي لم د وېشو توپي دی د يوه کيښکودي پارابول څيره ولري، چې بنسټ يې ۴ متره سرور دی او ۴ متره جگوالی لري. غواړو په دې يوه زينه کيږدو، چې د وېشو توپي سره تانجنت جوړ کړي. په کومه زاويه (کونج) بايد دا زينه کيښول شي؟

د وېشو توپي له بيخ څخه دې په کوم لږوالي په ځمکه دا زينه کيښول شي؟



شمیرنه :

د نورو شمېرنو لپاره ارزښت  $x_0 = -1$  کاروو. زینه توپې په  $P_0(-1, 3)$  ټکي کې لمسوي. مور په  $P_0(-1, 3)$  ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1 | 3) \Rightarrow x_0 = -1; f(x_0) = 3$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\text{د } f'(x) = -2x \text{ سره لاس ته راځي}$$

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

$$\tan \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha \approx \underline{\underline{63,4^\circ}}$$

جوړه زاویه:

د زینې او د وېشو ټوپې تر منځ واټن د  $f(x)$  د صفرځای او د تانجنټ  $t(x)$  د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځایونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$

$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2,5$$

د  $x$  ارزښتونو  $-2,5$  او  $-2$  ترمنځ واټن  $0,5$  دی.

زینه د وېشو د ټوپې له پښو څخه باید نیم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنټ مساوات څنګه ټاکل کېږي، چې یو ګراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

### د سترې ګټې (غټو ګټو) مسئله یا قضیه

دا د سترې ګټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د یو څو بیلګو له لارې وڅیړل شي.

نزدې ټولو پروسو کې، چې په عمل کې کارول کېږي یا صورت نیسي، له تاثیر وونکو یا په همدې ډول د هغو ټاکلو لویو استعمال ته اړ دی، کومې چې مور په ځانګړو یا مخصوصو پولو کې په اختیار کې لروډی شو.

مور یواځې هغه پروسې تر څیړني لاندې نیسو چې د یوې واریابلی یا اووښتوني  $x$  په واک کې وي. دا د بل په واک کې د یوې تابع  $y = f(x)$  له لارې څرګندولی شو.

که  $y$  ټول لگښتونه یا مصارف په کوټه کړي، نو  $x$  باید داسی وټاکل شي چی  $f(x)$  مینیمال یا خورا کم شي.

که په څټ یا برعکس  $y$  گټه وي یا گټور تاثیر وي، نو  $x$  باید داسی لاس ته راوړل شي، چی  $f(x)$  ماکسیمال یا خورا لوي شي. په قاعده کی اغزمنه یا مؤثره لویه یا په بل عبارت، خپلواک واریابل یا اوښتونی  $x$  د  $-\infty$  او  $\infty$  پولو ترمنځ ازاده ټاکونکی نه ده، بلکه د تخنیک یا تخنیکپوهنی له امله، یواځی په ټاکلو پولو کی

$$a \leq x \leq b \quad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پوري د گټي مسئلی، په دې پوري اړه لري، چی ایا دا گټه ده او که لگښت.

$$y = f(x) = \max! \quad (a \leq x \leq b) \quad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \leq x \leq b) \quad ($$

دا د افراطي ارزښتونو برخی پرابلمونو سره خورا نزدې یا ټینگ تړلی دی. دلته ځمور علاقه په ځانگړې توگه د لاندې پرابلم د کارکولو سره ده:

۱ - د بلواکیزو  $y = f(x)$  گډو اړیکو راپیدا کول، د دندې یا وظیفې ورکولو سره سم ( مودالیتی پرابلم)

۲ - د تخنیکپوهنی پولو په پام کی لرل (\*)

دادي د دوه بیلگو له لاری وښول شي

بیلگه : یو د مندو (پټي ته په کلوکي د اغزو مندو کپښول کیري، چی مالونه ور وا نه وړي) سیم لرو چی ټول اوږدوالی یی  $L$  دی. له دې سیم سره باید یوه مربع سطحه (څلورگودیزه هواره)، چی د امکان تر حده باید لویه وي، مندو شي. دا وظیفه شوه یا په بل عبارت غوښتنه.

اوس د مودالیتی Art und Weise پر اېلم : غوښتنه مو د یوې څلور ضلعي (څلورگودی) پیدا کول دي. لکه چې معمول دي، ددې څلور ضلعي (-گودی) یو اړخ په  $a$  ښایو او بل اړخ یې په  $b$  ښایو، د څیرې  $۲۰$  .  $۱۴$  له مخی .

دا په سر کی دوه اغیزې لرونکي یا تاثیر اچونکی لویي  $a$  او  $b$  دي. د

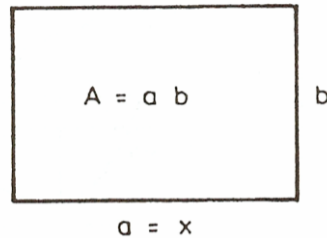
$$L = 2a + 2b, \quad b = (L/2) - a$$

له امله یواځي یوې اغیزمنې (تاثیر اچونکي) لویي ته اړیو د بیلگي په توگه  $a = x$  ، دا

$$A = ab = x((L/2) - x) \text{ داسي ده}$$

دا روښانه ده چی صدق کوي .  $0 \leq x \leq L/2$

له دې امله د ستري گتی پر اېلم داسی دی



$$y = f(x) = x((L/2) - x) = \text{Max!} \quad (0 < x < L/2)$$

د  $f(0) = f(L/2) = 0$  له امله باید ماکس د  $0$  او  $L/2$  ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره یواځي  $x = L/4$  په پوښتنه کی راځي.

د دې لپاره  $y'' = f''(x) = -2 < 0$  دی.

په ریښتیا چی یو ماکس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنیکپوهنیزې پولی 0 او  $L/2$  رول نه لوبوي. نو صدق کوي.  $a = b = L/4$ .

بیلگه: یوه بډای چی په یوه ټاکلي وخت کی ټولست (ټولډیری)  $M$  تولید کړي او دا تل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لگښتونه  $F$  ټرلي دي. کیدی شي چي سملاسی د دې تولید په ټولست (ټولډیری)  $M$  کی تولید کړي، په یوه زخیره ځای (زېرمون؟) کی ځای په ځای کړي او اخستونکو ته یی سملاسي ورسوي. دلته د زېرمون (زخیره کونې) لگښتونه راپید کیري (ددې د زخیرې لپاره ځای او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چی تولید په لږه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته ورورل شي. دلته نو د زخیره کولو لگښتونه منځ ته نه راځي. مگر تل تولید په دې ډول تولید باندې درول، لگښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لگښتونه یی بولو. کومه ډیری  $x$  (ازاده لویه) باید تولید شي، چی د امکان تر پولې کم لگښتونه پرې وشي؟ د زخیرې لگښت د چمتووالی لگښت سره متناسب دی، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چي خرڅلاو ته چمتو کیري، په څت متناسب دی. که  $x$  لوي وي نو چمووالی ته کم اړتیا شته او که  $x$  کم وي نو چمتووالی بدلون تل باید تغیر وخوري یعنی. ټول لگښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$  دي، چیرته چی  $F$  ثابت (همغه) یا په کلکه اینول شوي لگښتونه دي،  $L$  د زخیرې لگښتونه او  $R$  د چمتووالی لگښتونه دي. دا ازاده لویه  $x$  د تولیدډیری  $M$  څخه نه شي سترېدلی، لویډلی یا غټیډلی. له دې امله صدق کوي  $0 \leq x \leq M$ . مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

$$y = f(x) = F + Lx + R/x = \text{Min!} \quad (0 \leq x \leq M)$$

(لمړی  $f(x)$ ) دوه واره دیفرنځیال کیري یا یی دوه واره رابیلیدنه

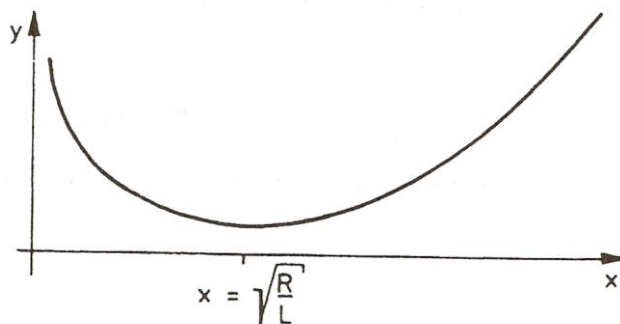
نیول کیري:

$$f'(x) = L - R/x^2, \quad f''(x) = 2R/x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي:  $f'(x) = 0$ , پس لرو  $x = R/L$ ؟؟؟



د  $x \geq 0$  له امله  $f''(x) \geq 0$  هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کړي تگلار په څیره ۲۰. ۱۵ کی انځور شوي. څرگنده ده: که  $x = R/L < M$  صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که  $x = R/L > M$  وي، نو یو مینیموم په څنډه  $x = M$  لرو. نامساوت  $x = R/L < M$  دا مانا لري  $R/L < M^2$  په همدې ډول  $R^2 < M^2L$  پس مخ ته لرو:  $x = R/L$  د  $R < M^2L$  لپاره او  $x = M$  د  $R > M^2L$  لپاره

نو: که د چمتوالي لگښتونه  $R$ ، زخیرې لگښتونه  $L$  څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دي ټول تولید  $x = M$  صورت ونیس. که د زخیرې لگښتونه د چمتوالي لگښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد  $x$  تولید شي.

ټاکلی بیلگه: د  $M = 10000, R = 1000, L = 10$  لپاره صدق کوي  $R = 1000 < M^2L = 109.10 = 108.10$  ستر یا غټ ازاد لگښت دی  $x = R/L = 1000/10 = 100 = 10$  ازاد  $a$  دلته  $10$  یوونه باید ورزیات شي، چی  $10000$  یوونه تولید کړي د  $M = 10, R = 1000, L = 1$  لپاره صدق کوي  $R = 1000 > M^2L = 100$  غټ ازاده لویه له دي امله  $x = M = 10$  ده. یواځې یوه ازاده لویه دي تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

په تولید کي د مشتق استعمال

فعالیت : یوه فابریکه  $x$  تولید کوي. په دې تولید د لگښت کيږي، چې دا د تولید په واک کي دی، چې موږ ورته د لگښت تابع وایو او په  $K(x)$  سره ښایو.

څنگه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لگښت را ټیټ کړو؟

د لگښت تابع  $K(x)$  د تولید سټ (ډېری) او ټول لگښت تر منځ تړاو انځوروي.

که تولید د  $\Delta x$  شاو خوا کي زیات شي، نو لگښت هم د  $\Delta K$  په شاو خوا کي زیاتېږي.

کمښتویش (تقسیم تفاضل)  $\frac{\Delta K}{\Delta x}$  د منځني لگښت زیاتوالی ښایي، د یوه  $\Delta x$  تولید تغیر

سره (منځنی تغیر ارزښت)

د  $x_0$  ځای کي لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لگښت بلل کيږي. دا د پوله ارزښت

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$$

سره ټاکل کيږي، داپه دې معني، چې د لگښت د تابع  $K$  مشتق.

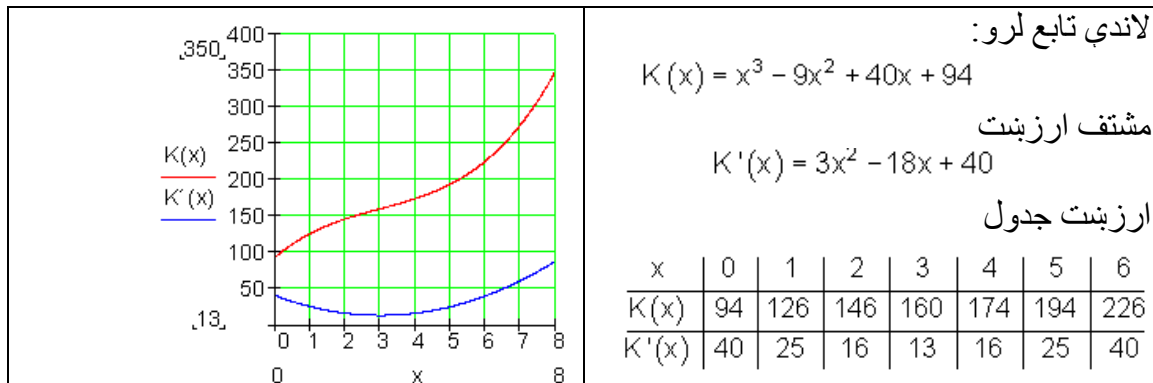
پيژند : د لگښتتابع  $K(x)$  مشتق د مشتقارزښت  $K'(x)$  په نامه یادوو یا يي پوله لگښت  $K'(x)$  هم بولو.

بیلگه: د لگښت تابع  $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$  دې ورکړ شوي وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکي، یو ارزښت جدول د  $K(x)$  او  $K'(x)$  لپاره وکاروي او په پروتولار سیستم یا کواوردیناتسیستم کي يي گراف وکاري.

پوله ارزښت د  $I = [0 ; 6]$  لپاره په ۱ پل (قدو) پراخوالي سره.

ب : د ډېر کم لگښتزاوالی و ټاکي:

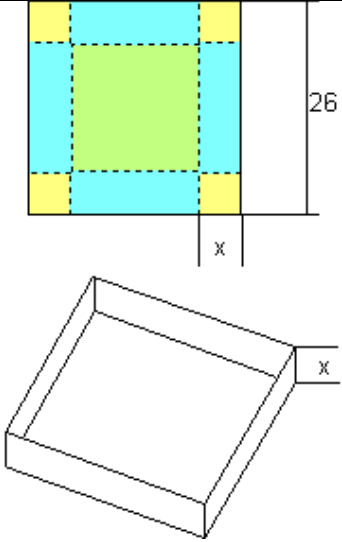


خورا کم د لگبنتزیا توالی (لگبنتجگي دنه) د پارابول  $K'(x)$  په ککره (خوکه) کې پروت دی ، یعنی هلته چې تانجنت  $K'(x)$  پروت یا افقي دی ،

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

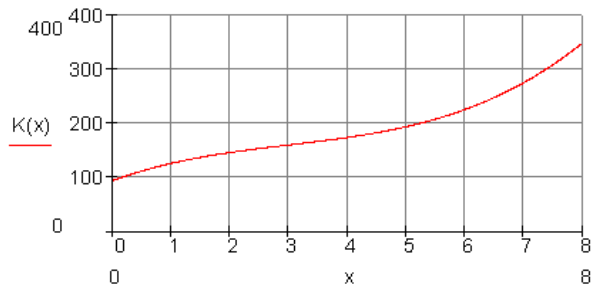
دد تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره :

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{x = 3}$$

	<p>د ی، مربع کارتون (د کلک کاغذ څخه جوړ) څخه ، چې ۲۶ سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بی له سرپوښ، چې د <math>x</math> جگوالی لري.</p> <p>الف: د یوه تابع ترم وټاکي، چې د بکس حجم (دکی) <math>V</math> د <math>x</math> په واکوالي یا تابعیت کې ښایي.</p> <p>ب – گراف وکارئ او په نږدې توگه یې ماگسیم (خورا جگ) حجم وټاکي.</p>
--	---

- د یوه روغتون د نرختابع (مصرف تابع)  $K(x)$  د ناروغانو گڼه (تعداد)  $x$  او د ټول مصرف ترمنځ اړیکې انځوروي، داسې چې  $x = 1$  د 100 ناروغانو معنی او  $y = 1$  دی معنی چې  $1000 \text{ € / Tag}$  یوزر یورو په ورځ (  $1000 \text{ € / Tag}$  ) .

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



تولگه:

د رول (Rolle) قضیه:

یوه د  $f$  تابع دې په بند اینتروال  $[a, b]$  کې متمادي وي د  $f(a) = f(b)$  سره او په واز اینتروال  $(a, b)$  کې مشتقور، نو لږ تر لږه یوځای  $c \in (a, b)$  شته دی د  $f'(x_0) = 0$  سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطی قیمت) قضیه:

که  $y = f(x)$  تابع په بند اینتروال  $[a, b]$  کې متمادي او په واز اینتروال  $(a, b)$  کې د مشتق وړ وي، نو

نه ده کښل

هلته یوځای  $x \in (a, b)$  شته دی، د کوم لپاره چی

$$\text{لرو: } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

پراخه شوي منځقضية:

که  $u = f(x)$  او  $v = g(f)$  په بند اینتروال  $[a, b]$  کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال  $(a, b)$  کې مشتقور او  $g'(x) \neq 0$  باور ولري، نو د ټولو  $x \in (a, b)$  لپاره، کم له

$$\text{کمه یوځای } x_0 \in (a, b) \text{ وجودلري چی لاس ته ترې راځي: } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

قضیه:

د  $f(x)$  تابع دې په اینتروال  $I$  کې مشتقور وي.

1. که د  $f(x)$  تابع په اینتروال  $I$  کې مونوټون جگېدونکي وي، نو باور لري:  $f'(x) \geq 0$  د ټولو  $x \in I$  لپاره

- که  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې همغږیز ټیټېدونکي وي، نو باور لري:  $f'(x) \leq 0$  د ټولو  $x \in I$  لپاره.

- که  $f'(x) \geq 0$  وي، د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې همغږیز جگېدونکي ده.

۲۰ مشتق شمیرنه (رایبیلدنه) ۷۶۵ -

- که  $f'(x) \leq 0$  وي د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینټروال  $I$  کې همغریز ټیټېدونکې ده.  
 - که  $f'(x) > 0$  وي ، د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینټروال  $I$  کې په کلکه همغریز جگېدونکې ده.  
 - که  $f'(x) < 0$  وي د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینټروال  $I$  کې په کلکه مونوټون ټیټېدونې ده.

که د  $f(x)$  لپاره د  $x_0$  په ځای کې  $f'(x) = 0$  ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د  $f(x)$  لپاره د  $x_0$  په ځای کې  $f'(x) = 0$  او  $f''(x) > 0$  ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو:  $f'(x) = 0$  او  $f''(x) < 0$  ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي (ټیټ ټکي یا جگ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې  $f'(x) = 0$  وي، او د  $f''(x)$  مخ نښه ( + ، - )، په دې پریکړه کوي چی ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د  $x = x_0$  په چاپیریال کې د  $y = f(x)$  تعریف شوي تابع یونسبي جگ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو  $x_0$  ته پوره نږدی  $x$  لپاره باور ولري:

$$f(x) > f(x_0) \text{ په همدې ډول } f(x) \leq f(x_0)$$

جمله: ( د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په  $x_0$  کې مشتق وړ تابع  $y = f(x)$  انحرافي ټکی لري نو لرو:  $f'(x) = 0$

دا جمله مور ته وایي: چیرته چې  $f'(x) \neq 0$  وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځې د  $x_0$  ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره لرو  $f'(x) = 0$ ، خو حتمي نه ده چې  $y = f(x)$  دې یواکستریموم و لري.

**جمله:** ( د یوه بحراني ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په  $x = x_0$  کې دوه واره مشتقور  $y = f(x)$  تابع لپاره ولرو:  $f'(x) = 0$ ،  $f''(x) \neq 0$ ، نو تابع  $y = f(x)$  هلته یو بحراني ټکی لري.

خو را ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي:  $f''(x) > 0$

خو را جگ ټکی مخ ته پروت دی، که وي:  $f''(x) < 0$

پېژند: په یوه چاپیریال  $x = x_0$  کې مشتق وړ تابع  $y = f(x)$  یو کین-بنی-انعطاف ټکی په همدې ډول بنی-کین-انعطاف ټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جگ ټکی (عظمي نقطه) په همدې توگه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

**جمله:** ( د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په  $x_0$  کې مشتق وړ تابع  $y = f(x)$  اکستریموم لري نو لرو:  $f'(x) = 0$

دا جمله مور ته وایي: چیرته چې  $f'(x) \neq 0$  وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره یواځې د  $x_0$  ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره  $f'(x) = 0$  وي، خو حتمي نه ده چې  $y = f(x)$  دې یو بحراني ټکی ولري.

د پورته جملې استعمال په  $y' = f'(x)$  څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

**جمله:** ( د اوږونټکي (انعطاف ټکي) لپاره اړین شرایط):

که په  $x = x_0$  کې دوه واره مشتق وړ تابع  $y = f(x)$  هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو

لاس ته ترې راځي:  $f''(x) = 0$

پیزند: د زینتکي (کله کله برنډې ټکی هم بلل کيږي) لاندې د انعطافټکي ځانگړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:

د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي. دا یو مانل (نه افقي) تانجنت لري

د برنولي او د دې لو، پیتال قاعده:

که توابع  $u = f(x)$  او  $v = g(x)$  د یوه  $U(x_0)$  چاپیریال د  $x_0$  په ځای کې مشتقور وي د  $g'(x) \neq 0$  سره او د ټولو  $x \in U(x)$  لپاره او  $x_0$  د  $f$  او  $g$  یوصفرځای وي،

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{د } f(x_0) = g(x_0) = 0 \text{ سره، نو باور لري:}$$

ترڅو په بني لور حد شته وي.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{په ورته توگه لاس ته راځي:}$$

تمرینونه:

۱- د لاندې لیکل شوو تحلیلي افادو مشتق د  $x_0$  په ځای کې وشمیرئ او د فرمول د اعتبار ورشو (ساحه) ورکړئ.

a)  $y = x^3 - 2x^2 + 1$

b)  $y = \sqrt{x}$

c)  $y = x \sqrt{x}$

d)  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

e)  $y = \frac{x}{x-1}$

f)  $y = \sin \frac{x}{2}$

۲- د یوه تن یا جسم عمود پورته غورځونې د تن دروندټکي (د جسم د ثقل مرکز) د لار- وخت- مساوات په لاندې ډول دي:

$$s = f(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

پیلچتکتیا یا پیل سرعت  $v_0 = 30 \frac{m}{s}$  او د ځمکې بیرې (د ځمکې تعجیل)

سره. دا تن یا جسم کله خپل عظمي جگوالي ته رسیري؟  $g = 10 \frac{m}{s^2}$ .

دا جگوالی څومره لوي دی

۳- یو تن په برابر ډوله چتکتیا خوزي ( حرکت کوي)، داسې چې بیره (تعجیل) یې

$$a = 2 \frac{m}{s^2}$$

دی

په لاندې جدول کې د  $\{\Delta t\}_n$  لپاره یو صفر ترادف (- پرلپسې) کېږدی (د بیلگې په توگه لکه په اوله مټه (ستن) کې) او جدول پوره کړی.

له  $t_0 = 3 s$  وروسته د تن یا بدن لحظوي چتکتیا څومره ده.

۴- د لاندې تحلیلي افادو مشتق ونیسی! پام وکړی، چې د مشتق نیولو کومه قاعده په کار وړی شی

a)  $y = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x} - 5$

b)  $y = a^2x^3 - \sqrt{bx^2} + \frac{1}{2}cx - 1$

c)  $y = -2x^{-5} + 3x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-2} + 4$

d)  $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{6 \cdot \sqrt[3]{x}}{x}$

e)  $y = (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{x})$

f)  $y = (1 - x^{-4})(x^{-1} + x^2)$

g)  $y = (x^2 + 2x\sqrt{x} + x)(x - \sqrt{x})$

h)  $y = (ax^2 - b)^2$

i)  $y = \frac{x^2 + x}{3x^3}$

j)  $y = \frac{2x^3 - 3}{x^2}$

k)  $y = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$

l)  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot (1 + \sqrt[4]{x})$

۵- د لاندې ورکړل شوو تحلیلي افادو مشتق ونیسی، او هغه ارزښتونه تری وباسی، د کومو له پاره چې مشتق شته (موجود) نه وي



- ۱ . ۵

a)  $y = (x - 1)(1 - x^3)$

c)  $y = (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x})(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt{x^3})$

b)  $y = (x^3 + 1)(1 - x - x^2)$

d)  $y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)(\sqrt[4]{x} - 2x)$

- ۲ . ۵

a)  $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 + x + 1}$

b)  $y = 4x + \frac{1}{x^2 + 1}$

c)  $y = \frac{x - 4}{4 - x}$

d)  $y = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^3 - 5}$

e)  $y = \frac{\sqrt{3}x - \sqrt{2}}{3x^2 - 2}$

f)  $y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$

g)  $y = \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$

h)  $y = \frac{2x - \sqrt[3]{x}}{x^2 - 2x - 1}$

i)  $y = \frac{x^3 + 3\sqrt[3]{x}}{2x^2 + x}$

j)  $y = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 2\sqrt{x} + 1}$

- ۳ . ۵

a)  $y = \sqrt{x} \sin x$

b)  $y = 2 \sin x \cos x$

c)  $y = 1 - \cos^2 x$

d)  $y = x^3 \cos x$

e)  $y = 2 \sin x (x - \cot x)$

f)  $y = \frac{\tan x}{\cot x}$

g)  $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$

h)  $y = \frac{x \sin x}{1 + \tan x}$

i)  $y = \tan x - \cot x - 2x$

j)  $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

- ۴ . ۵

a)  $y = \frac{x}{e^x}$

b)  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2x^2}$

c)  $y = e^x \tan x$

d)  $y = \frac{5e^x}{\cos x}$

- ۵ . ۵

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= \frac{\ln x}{x} \\ \text{c) } y &= x^2 \ln x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y &= \sin x \ln x \\ \text{d) } y &= 10 \ln e \ln x \end{aligned}$$

- ۶ . ۵

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= 5^x + 2^x \\ \text{c) } y &= 2^x - 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y &= 3^x x^3 \\ \text{d) } y &= \frac{4^x}{2^x} \end{aligned}$$

- ۷ . ۵

$$\begin{aligned} \text{c) } y &= 2^x - 2x \\ \text{a) } y &= (2x+1)^4 \\ \text{c) } y &= \left(1 - \frac{1}{x}\right)^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } y &= \frac{4^x}{2^x} \\ \text{b) } y &= (1-x^4)^5 \\ \text{d) } y &= \left(2x^2 - \frac{4}{x} + 3\right)^6 \end{aligned}$$

- ۸ . ۵

$$\text{a) } y = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\text{b) } y = \sqrt{1 - 2x}$$

$$\text{c) } y = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$$

$$\text{d) } y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$$

$$\text{e) } y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\text{f) } y = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$$

$$\text{g) } y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

$$\text{h) } y = \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$$

- ۹ . ۵

$$\text{a) } y = 5x^2 \sin 2x$$

$$\text{b) } y = \sin^2 x$$

$$\text{c) } y = \sin \sqrt{\frac{x}{2}}$$

$$\text{d) } y = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x$$

$$\text{e) } y = \cos \frac{1}{1+x}$$

$$\text{f) } y = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{g) } y = \cot(1 - 3x)$$

$$\text{h) } y = \cot \sqrt{1 - 2x}$$

$$\text{i) } y = \sqrt{\tan x}$$

-- ۷۷۱

۲۰ مشتقشمیرنه (رایبیلدنه)

j)  $y = \frac{\cos x^2}{\pi x}$

k)  $y = \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x}$

l)  $y = \left(3 + \frac{2}{\cos^2 x}\right) \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

m)  $y = \left(\frac{3}{\sin x} - 5\right) \frac{1}{\sin x}$

n)  $y = \tan \sqrt[3]{\frac{1-2x}{x}}$

o)  $y = 2 \sin \sqrt[3]{\frac{3}{x}}$

p)  $y = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$

- ۱۰ . ۵

a)  $y = \text{Arcsin} \frac{x}{a}$

b)  $y = \text{Arccos} \frac{a-x}{a}$

c)  $y = \text{Arctan} \frac{1}{x}$

d)  $y = \text{Arccos} \sqrt{1-x^2}$

e)  $y = \frac{1}{2} \text{Arctan} \frac{2x}{1-x^2}$

f)  $y = \text{Arctan} \sqrt{\frac{x}{x+a}}$

g)  $y = \text{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

h)  $y = \text{Arctan} \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$

i)  $y = \text{Arccot} \frac{1+x}{1-x}$

j)  $y = \text{Arcsin} 2x \sqrt{1-x^2}$

k)  $y = \text{Arctan} \frac{x-2}{2\sqrt{x^2+x-1}}$

l)  $y = a \cdot \text{Arc cos} \frac{a-x}{a} - \sqrt{2ax-x^2}$

- ۱۱ . ۵

g)  $y = \frac{e^{-\cos x}}{\sin x}$

h)  $y = \sqrt{1-e^{-x}}$

i)  $y = \frac{\sin \frac{x}{2}}{e^{2x}}$

j)  $y = e^x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

- ۱۲ . ۵

a)  $y = \ln 2x$

b)  $y = \ln x^2$

c)  $y = (\ln x)^2$

d)  $y = \ln \sqrt{x}$

e)  $y = \sqrt{\ln x}$

f)  $y = \ln \sqrt{1-x}$

g)  $y = \ln \tan x$

h)  $y = \ln \ln x$

i)  $y = \ln \cot \frac{x}{2}$

$$\begin{aligned} \text{j) } y &= \ln \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) & \text{k) } y &= \ln \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \\ \text{l) } y &= \ln (x + \sqrt{x^2 - a}) & \text{m) } y &= \ln \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} & \text{n) } y &= \ln \sqrt{\frac{2x-3}{2x+3}} \\ \text{o) } y &= \ln (a + x + \sqrt{2ax + x^2}) & \text{p) } y &= \ln \sqrt[4]{\sin^3 x \cos^3 x} \\ \text{q) } y &= \ln \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2} \cdot \sqrt[5]{(x-2)^3}}{\sqrt[4]{(x^2-4)^5}} \end{aligned}$$

- ۱۳ . ۵

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= |x| & \text{b) } y &= \sqrt{|x|} & \text{c) } y &= \ln |x| \\ \text{d) } y &= \sqrt{|\ln \cos x|} & \text{e) } y &= \ln |\ln |x|| \end{aligned}$$

- ۱۴ . ۵

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= \sqrt[x]{x} & \text{b) } y &= (x^x)^x & \text{c) } y &= x^{(x^x)} \\ \text{d) } y &= x^{\sin x} & \text{e) } y &= (\cos x)^{\sin x} & \text{f) } y &= a^x \cdot x^a \\ \text{g) } y &= x^{e^x} & \text{h) } y &= a^{e^x} & \text{i) } y &= (\text{Arc tan } x)^x \\ \text{j) } y &= (\tan x)^{\frac{1}{\cos x}} \end{aligned}$$

۶ - تانجنت په  $P_0(x_0, y_0)$  ټکي کې په منحنی  $f(x)$  د  $x$ -مخور سره کومه زاویه (کونج) جوړوي

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= \sqrt{x}, & x_0 &= 1 & \text{b) } y &= \sqrt[3]{x+1}, & x_0 &= 0 \\ \text{c) } y &= (x^2 - \sqrt[3]{x^2})^2, & x_0 &= 1 & \text{d) } y &= \sqrt{\frac{x^2-4}{9x^2-25}}, & x_0 &= 0 \\ \text{e) } y &= x\sqrt{x+1}, & x_0 &= 3 & \text{f) } y &= \frac{x}{x+\sqrt{x}}, & x_0 &= 1 \\ \text{g) } y &= \sqrt{x-\sqrt{x}}, & x_0 &= 1 & \text{h) } y &= \sqrt{1+\sqrt{x}}, & x_0 &= 1 \\ \text{i) } y &= \sin(2\pi - x), & x_0 &= \pi & \text{j) } y &= \sqrt{\sin 2x}, & x_0 &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$k) y = \sin\sqrt{2x}, \quad x_0 = \frac{1}{2} \quad l) y = (x-1)e^x, \quad x_0 = 0$$

۷ - په پروت تانجنت د -محور باندې پرته منحنی کوم ټکي کې غوڅوي، که زاویه او همداسې وي.

$$\begin{array}{lll} a) y = x^2 & b) y = x^3 & c) y = x \cdot |3 - x| \\ d) y = \frac{x^2 - 3}{2x} & e) y = \frac{x^2 + x + 14}{x + 2} & f) y = \frac{x^2(x-9)}{2(x-6)^3} \end{array}$$

۸ - د ورکړشوو تخليلي افادو لومړي درې مشتقونه جوړ کړئ! و ازمایې، چې ایا د مشتق قابلیت کې د یو گونو ورشو گانوو یا ساحو کې تغیر راځي!

د - مشتق لپاره یو عمومي فرمول ورکړئ، ترهغې چې شته وي.

$$\begin{array}{lll} a) y = x^n & b) y = \sqrt{x} & c) y = \sqrt[4]{x^3} \\ d) y = \sqrt{1-x^2} & e) y = \frac{x}{1-x} & f) y = \frac{1+x}{1-x} \\ g) y = \cos x & h) y = \frac{1}{2} \sin 2x & i) y = \sin(1-2x) \\ j) y = x^2 \sin 2x & k) y = \tan x & l) y = \tan^2 x \\ m) y = e^x \sin x & n) y = e^{mx} & o) y = e^{-x} + e^{-2x} \\ p) y = \ln x & q) y = \ln \sqrt[3]{1+x^2} & r) y = \text{Arcsin } x \end{array}$$

۹ - د تانجنت مساوات  $y = mx + n$  په  $y = f(x)$  کې کیدي.

- ۱ . ۹

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = x^2 + 1, & P_1(1, y_1) \text{ bzw. } P_2(-1, y_2) \\ b) f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1, & P_1(0, y_1) \text{ bzw. } P_2(2, y_2) \\ c) y^2 = 1 - x, & P_0(-3, y_0) \quad d) y^2 = x - 1, \quad P_0(5, y_0) \end{array}$$

-۲. ۹

a)  $f(x) = e^{-x}$ ,  $m = -1$

b)  $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 4$ ,  $m = 0$

c)  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ,  $m = 1$

d)  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $m = -1$

۱۰ - د لاندې توابعو  $y=f(x)$  په خټ تابع (برعکس تابع)  $f^{-1}(x)$  مشتق  $dx/dy$ په  $P_0(x_0, y_0)$  ټکي کې وشمیري (جوړ کړی)

a)  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$ ,  $x_0 = -1$

b)  $y = x^2 - 2x - 1 + \frac{2}{x}$ ,  $x_0 = 1$

c)  $y = \frac{1}{2x^2 - 5x + 9}$ ,  $x_0 = \frac{5}{4}$

d)  $y = \frac{x+1}{x+2}$ ,  $x_0 = -3$

e)  $y = \sqrt{1-x}$ ,  $x_0 = 1$

f)  $y = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$ ,  $x_0 = \frac{a}{2}$

g)  $y = (x+1)\sqrt{1-x}$ ,  $x_0 = -1$

h)  $y = \sin x$ ,  $x_0 = 0$

i)  $y = \sin(2x + 3\pi)$ ,  $x_0 = -2\pi$

j)  $y = \sin^2 x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{4}$

k)  $y = x \cos x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{2}$

l)  $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$ ,  $x_0 = \frac{3\pi}{2}$

m)  $y = e^x \cos x$ ,  $x_0 = 0$

n)  $y = x e^{\cos x}$ ,  $x_0 = 2\pi$

o)  $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$ ,  $x_0 = 1$

p)  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ ,  $x_0 = x \in (-\infty, \infty)$ ,  $a \neq 0$

q)  $y = \ln(x+1)$ ,  $x_0 > -1$

r)  $y = \ln \sqrt{\frac{3x-4}{3x+4}}$ ,  $|x_0| > \frac{4}{3}$

s)  $y = x^{\frac{1}{x}}$ ,  $x_0 > 0$ ,  $x_0 \neq e$

۱۱ - لاندې تحلیلي افادي په متمادیت او مشتق والي باندې وڅیوی،

a)  $y = \begin{cases} -a & \text{für } x \leq 0 \\ +a & \text{für } x > 0 \end{cases}$

b)  $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x \leq 2 \\ -2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$

c)  $y = |x - 1|$

d)  $y = |\sin x|$

e)  $y = -\frac{x^2}{2}$

f)  $y = -|x|$

g)  $y = \sqrt[3]{x^2}$

h)  $y = (x+1)^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

i)  $y = e^{\frac{1}{x}}$

j)  $y = e^{\frac{x}{x-1}}$

k)  $y = e^{\frac{x^4}{x^2-1}}$

l)  $y = \operatorname{Arccot} \frac{1}{x}$

m)  $y = \operatorname{Arcsin}(\sin x)$

n)  $y = \operatorname{Arctan}(\tan x)$

o)  $y^2 = \frac{x^3}{4-x}$

p)  $y^3 = 3x^2 - x^3$

q)  $y^2 = \frac{1-x}{x}$

۱۲ - لاندې منحنې چې د پسي برابر ونونو سره ورکړ شوي، د افراطي ټکو او اورونټکو (نقاط افراطي و انعطاف) له مخې وڅېړئ.

a)  $y = x^2 - 2x + 3$

b)  $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$

c)  $y = x^3(8-x)$

d)  $y = (x-a)^4 + b$

e)  $y = \frac{x}{x^2+1}$

f)  $y = \frac{x^2-7x+6}{x-10}$

g)  $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$

h)  $y = \frac{ax^2}{ax+b}$

i)  $y = \frac{a^2(a-x) + b^2x}{x(a-x)}$

j)  $y = \cos^2 x$

k)  $y = \sin x \cos x$

l)  $y = \sin 2x - 2 \sin x$

m)  $y = e^x \sin x$

n)  $y = x e^x$

o)  $y = x^n e^{-x}$

p)  $y = e^{-x} + e^{2x}$

q)  $y = e^{-x} - e^{-2x}$

r)  $y = x \ln x$

s)  $y = x \ln^2 x$

t)  $y = \frac{1}{2} \ln x - \operatorname{Arctan} x$

۱۳ - د دې لاندې برابر ونونو سره ورکړ شوي منحنې تر بحث لاندې ونیسئ:

13.1. a)  $y = x^2 - x - 2$

b)  $y = -(x+4)^2 + 4$

c)  $y = x^3 - x^2$

d)  $y = x^3 - 10x$

e)  $y = -x(x+3)^2$

f)  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

g)  $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$

h)  $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

i)  $y = (x+2)(x^2 - 4x + 3)$

j)  $y = (1-x)(x^2 + 6x + 8)$

k)  $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$

l)  $y = |-x(x^2 - 16)|$

13.2. a)  $y = x^4 - 8x^2 - 9$

b)  $y = -x^4 + 5x^2 - 4$

c)  $y = x^4 - 10x^2 + 9$

d)  $y = (x-2)^2(x-4)(x+3)$

e)  $y = \frac{1}{24} x(x-1)(x-2)(x-3)$

f)  $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

- 13.1. a)  $y = x^2 - x - 2$       b)  $y = -(x+4)^2 + 4$   
 c)  $y = x^3 - x^2$       d)  $y = x^3 - 10x$   
 e)  $y = -x(x+3)^2$       f)  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$   
 g)  $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$       h)  $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$   
 i)  $y = (x+2)(x^2 - 4x + 3)$       j)  $y = (1-x)(x^2 + 6x + 8)$   
 k)  $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$       l)  $y = |-x(x^2 - 16)|$
- 13.2. a)  $y = x^4 - 8x^2 - 9$       b)  $y = -x^4 + 5x^2 - 4$   
 c)  $y = x^4 - 10x^2 + 9$       d)  $y = (x-2)^2(x-4)(x+3)$   
 e)  $y = \frac{1}{24}x(x-1)(x-2)(x-3)$       f)  $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$   
 g)  $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$       h)  $y = (x+2)^2(x-1)^3$   
 i)  $y = x^2(x^2 - 1)^2$       j)  $y = (x-4)^4(x+3)^3$

- 13.3. a)  $y = \frac{1}{1+x^2}$       b)  $y = \frac{3x-1}{2x+1}$       c)  $y = \frac{5}{(2x+1)^2}$   
 d)  $y = \frac{2x+x^2+25}{1+x^2+2x}$       e)  $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$       f)  $y = \frac{x^2+2x+1}{2x}$   
 g)  $y = \frac{x^2-5x+4}{x-5}$       h)  $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2-2x+1}$       i)  $y = x - \frac{4}{x-1}$   
 j)  $y = \frac{x^3+2}{2x}$       k)  $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$   
 l)  $y = \frac{2x^2-6x}{x^3-3x^2+x-3}$       m)  $y = \frac{x^3}{x^2-2x+1}$       n)  $y = \frac{5(3x^2-4)-13x}{\frac{1}{8}(2x-1)(4x+7)}$

- 13.4. a)  $y = x\sqrt{9x-x^2}$       b)  $y = x^2\sqrt{25-x^2}$   
 c)  $y = x\sqrt{14+8x-x^2}$       d)  $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$       e)  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$   
 f)  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} - 2$       g)  $y = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$       h)  $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$   
 i)  $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$       j)  $y = \sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}$   
 k)  $y = \sqrt{(x+1)^2-x} - \sqrt{(x-1)^2+x}$   
 l)  $y = \frac{1}{2}(\sqrt{(x+1)^2-x} + \sqrt{(x-1)^2+x})$



- 
- 13.5. a)  $y^2 = x^3 + x + 2$       b)  $y^2 = x^3 - 3x + 2$       c)  $y^2 = x^3 - 2x + 1$   
d)  $y^2 = x^4(x - 1)$       e)  $y^2 = x^2[x(1 - x)]$       f)  $y^2 = \frac{1-x}{x}$   
g)  $y^2 = \frac{x^2}{1+x}$       h)  $y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$       i)  $y^2 = \frac{x(1-x)}{(x+1)^2}$
- 13.6. a)  $y = 2 \sin^2 x$       b)  $y = \sin 2x \cos x$       c)  $y = \sin x \cos^2 x$   
d)  $y = \sin^2 x + 2 \cos^2 x$       e)  $y = x \sin x$       f)  $y = \frac{\sin x}{x}$   
g)  $y = \frac{\sin 2x}{\sin x}$       h)  $y = x^3 \cos x$   
i)  $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$       j)  $y = \sin^3 x + \cos^3 x$   
k)  $y = \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$       l)  $y = \cos 2x + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$
- 13.7. a)  $y = e^{-2x}$       b)  $y = xe^{-x}$       c)  $y = x e^{\sqrt{x}}$   
d)  $y = (x^2 - 1) e^x$       e)  $y = e^{\tan x}$       f)  $y = 2 e^{-x} \sin 2x$   
g)  $y = e^{2x} \sin 3x$
- 13.8. a)  $y = \ln 3x$       b)  $y = \ln(x^2 - 1)$       c)  $y = x^2 \ln x$

### په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرچ يې مختلف کرښيز يا لاینيز ضریبونه لري.

بنسټ: که د یوه اصلي پولینوم  $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$  مخرچپولینوم  $P_n(x)$  په مختلفو کرښيزو (لایني)

ضریبونو  $P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)$  ټوټه کېدونکی وي، نو پولینوم

$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$  په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} \dots \frac{N}{x-x_n}$$

داسې یوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه، بلل کېږي، چې  $A, B, C, \dots, N$  حقیقي عددونه دي.

بیلگه:

اصلي پولینوم کسر  $\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$  په ټوټه کسر ټوټه کړی.

حل: د مساوات  $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$  لومړی حل  $x_1 = 1$  د ازمايننت له لارې پيدا کيږي.

د پولينوم ویش (لنډ: پولينومویش)  $(x-1) = x^2 - 3x - 10$ :  $(x^3 - 4x^2 - 7x + 10)$  مو ټوټه ونې ته بيايي  $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x^2 - 3x - 10)(x-1)$  مساوات  $x^2 - 3x - 10$  اوس  $x_2 = -2$  او  $x_3 = 5$  حلونه لري.

له دې امله  $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-1)(x+2)$  دی.

د اصلي کسر  $\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$  په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمېرنو قاعدې له مخې کېدی شي ورکړ شوی پولينوم په درې جمعې برخو ټوټه شي، چې مخرجونه يې لاینيز (کرنيز -) ضريبونه دي:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمع:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولينوم مخرج دی.

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} &= \frac{A(x-1)(x+2) + B(x-5)(x+2) + C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)} \\ \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} &= \frac{Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 - 3Bx - 10B + Cx^2 - 6Cx + 5C}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} \\ \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} &= \frac{(A+B+C)x^2 + (A-3B-6C)x + (-2A-10B+5C)}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} \end{aligned}$$

د صورتونو ارزښت  $A, B$  او  $C$  ټاکنه د ضريبونو (ځلوونو) د پرتلي له لارې:

د مساوي مخرجونو کسرکې بسيا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته بايد د مساوي توانونو ضريبونه، دا په دې مانا چې د  $x, x^2$  او  $x_0$  بايد مساوي وي.

$$A + B + C = 4 \quad \text{I}$$

$$A - 3B - 6C = -1 \quad \text{II}$$

$$-2A - 10B + 5C = 39 \quad \text{III}$$

د فاکټور 2 سره د I او II مساوات ضربونه او د هر یوه جمع د III سره پورته درې مساوات سیستم و دوه مساواتسیستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$-8B = -72 \quad \text{V}$$

$$-16B - 7C = -41 \quad \text{IV}$$

د مساوات IV.V څخه لرو:  $B = 3$   $\Rightarrow -24B = -72$

د  $B = 3$  په V کې ایښوونه:  $C = -1$   $\Rightarrow -16.3 - 7C = -41$

د  $B = 3$  او  $C = -1$  په I کې ایښوونه:  $A = 2$   $\Rightarrow A + 3 - 1 = 4$

په ټوټه کونې فرمول کې ایښوونې سره غوښتونکې ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x-5} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

ازماینت:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+2) + 3(x-5)(x+2) - 1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)} = \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$$

ب) اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج یې مساوي لاینیز (کربنیز) ضریبونه لري.

که د یوه اصلي پولینوم  $P_n(x)$  مخرج  $\frac{P(x)}{P_n(x)}$  د کرښیز فاکتور  $x - x_0$

توان  $\frac{A}{(x-x_0)} + \frac{B}{(x-x_0)^n} + \dots + \frac{N}{(x-x_0)^n}$  وي نو ددې کرښیزو فاکتورونو له

پاره پولینوم لاندې بڼه لري:  $\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کرښیزو فاکتورونو ټوټه کسرونه (ماتونه) په بلده بڼه ورکول کيږي.

بیلگه:

د اصلي پولینوم کسر  $\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$  لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کرښیزو فاکتورونو:

د پولینوم  $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$  لومړی حل  $x_1 = 1$  د ازمايښت له لارې پیدا کيږي.

پولینوم ویش  $(x-1) = x^2 + 3x + 2$ :  $(x^3 - 4x^2 + 4x - 2)$  مو لاندې ټوټه کوني ته لارښودوي:

$$x^3 - 4x^2 + 4x - 2 = (x^2 + 5x - 2)(x - 1)$$

مساوات  $x^2 - 3x + 2 = 0$  دا  $x_2 = 1$  او  $x_3 = 2$  حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره ډبل حل دی:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 2)(x - 1)^2$$

د ټوټه کسر پیل:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزوني له لارې:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{A(x-1)^2 + B(x-2)(x-1) + C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{(A+B)x^2 + (-2A-3B+C)x + (A+2B-2C)}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

د A, B او C صورتونو ارزښت د ضریبونو پرتله کونې له لارې.

$$\begin{array}{ll} A + B = 3 & \text{I} \\ -2A - 3B + C = -6 & \text{II} \\ A + 2B - 2C = 2 & \text{III} \end{array}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره گډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$\begin{array}{ll} A + B = 3 & \text{I} \\ -3A - 4B = -10 & \text{II} \end{array}$$

د ضرب د 4 سره او جمعه یې د IV سره:  $A = 2$

د  $A = 2$  ایښوونه په I کې:  $2 + B = 3 \Rightarrow B = 1$

د  $A = 2$  او  $B = 1$  ایښوونه په III کې:  $2 + 2 \cdot 2 - 2C = 2 \Rightarrow C = 1$

د ټوټه کونې فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

پ ( اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج یې پوره په کرښیزو ضریبونو یا فاکتورونو نه ټوټه کیږي.

بنسټ:

که د یوه اصلي پولینوم کسر  $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$  مخرجپولینوم  $P_n(x)$  نور په یوه حقیقي ضریب نه ټوټه کېدونکي ضریب  $ax^2+bx+c$  مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کېدو کې دې د یو ټوټه کسر  $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$  په بڼه کېښودل شي یا راوړل شي

بیلگه:

د پولینوم کسر  $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$  له پاره دې په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرج ټوټه کونه په کرښیزو ضریبونو:

لومړی حل دې  $x_1 = -1$  وي مساوات  $x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 0$  د ازماښت له لارې پیدا کیږي.

پولینوم وېش  $(x+1) = x^2 + 2x + 4$ :  $(x^3 + 3x^2 + 6x + 4)$  مو لاندې ټوټه کوني ته بیایي:

$$x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = (x+1)(x^2 + 2x + 4)$$

دا چې مساوات  $x^2 + 2x + 4$  حقیقي حل نه لري، نو د حقیقي اعدادو په ورشو کې نوره ټوټه کونه ناشوني ده.

نو له دې امله پولینوم کسر لاندې بڼه لري:  $\frac{Ax}{x^2 + 2x + 4}$

د  $\frac{c}{x+1}$  بڼې کسر سره یوځای مو لاندې ټوټه کسر ټوټه کونې ته بیایي:

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 4} + \frac{C}{x + 1}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمع

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{(Ax + B)(x + 1) + C(x^2 + 2x + 4)}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4}$$

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{(A + C)x^2 + (A + B + 2C)x + (B + 4C)}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4}$$

د ضریبونو A, B, C ټاکنه د پرتله کولو له لارې:

$$A + C = 5 \quad \text{I}$$

$$A + B + 2C = 8 \quad \text{II}$$

$$B + 4C = 9 \quad \text{III}$$

د III کمښت (تفریق) له مساوات II څخه د I سره یې گډولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اووښتونې یا متحولې لري:

$$A - 2C = 5 \quad \text{IV}$$

$$A + C = 5 \quad \text{I}$$

مساوات III منقې مساوات II:  $-3C = -6 \Rightarrow C = 2$

د  $C = 2$  په ائښنولو سره:  $A + 4.2 = 9 \Rightarrow B = 1$

د  $C = 2$  په III اېښولو سره:  $B + 4.2 = 9 \Rightarrow B = 1$



که دا د ټوټه کونې فرمول کې کېږدو نو د ټوټه کسر ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 4} + \frac{2}{x + 1}$$

(ج) نا اصلي پولینوم کسرونه:

که د یوه پولینوم  $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$  د صورت درجه د پولینوم د مخرج له درجې څخه لویه وي، نو دا په پولینومویش له لارې په ټولناتق کسر او یوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بیلگه:

کسري پولینوم  $\frac{3x^3 - 6x^2 - 20x - 1}{x^2 - 2x - 8}$  په ټوټه کسري پولینومونو ټوټه کړئ .

د پولینوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو یو نا اصلي پولینومکسر مخ ته پروت دی.

پولینوم وېش:

$$(3x^3 - 6x^2 - 20x - 1) : (x^2 - 2x - 8) = 3x + \frac{4x - 1}{x^2 - 2x - 8}$$

$$\frac{-(3x^3 - 6x^2 - 24x)}{4x - 1}$$

د پاتې - یا باقي کسر  $\frac{4x - 1}{x^2 - 2x - 8}$  له پاره د ټوټه کسر ټوټه کونې کارونه (عملیه)

مخ ته بیایو. مخرج په کرښیزو ضربونو ټوټه کړی:

د مساوات  $x^2 - 2x - 8 = 0$  له پاره حل  $x_1 = -2$  او  $x_2 = 4$  لرو.

نو  $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$  دی.

د ټوټه کسر ټوټه کونې لپاره ځای په ځای کوي:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمعه کول:

$$\begin{aligned} \frac{4x-1}{x^2-2x-8} &= \frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)} \\ \frac{4x-1}{x^2-2x-8} &= \frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8} \end{aligned}$$

د ضریبونو د پرتله کونې په مرسته د A او B ټاکل:

$$\begin{aligned} A+B &= 4 & \text{I} \\ 2A-4B &= 4 & \text{II} \end{aligned}$$

د I ضرب له 2 سره او له II څخه یې تفریق یا کول  $6B = 9 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$

په II کې ایښوول:  $2A - 4 \cdot \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow A = \frac{5}{2}$

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

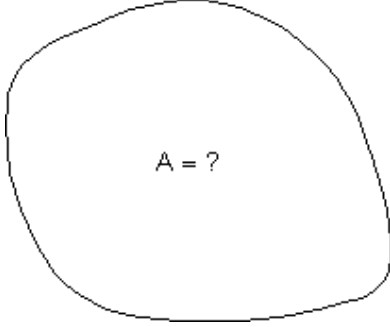
متحول (بستونکی) په ټوټه کسر ټوټه کونه لاندې بڼه غوره کوي:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8} = 3x + \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

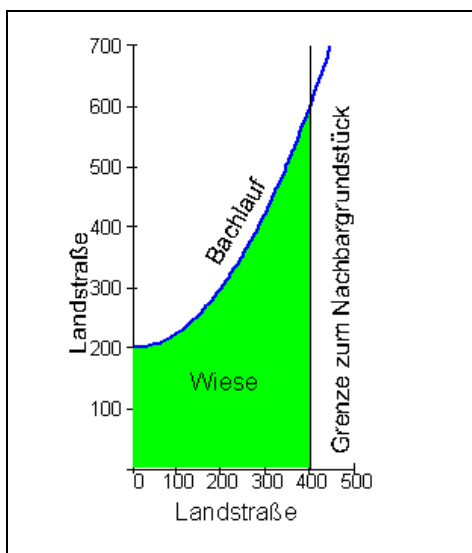
## د انتیگرال شمیرنه

د انتیگرال شمیرنې لپاره پیل راوړنې

مور د ځمکچپوهنې یا هندسې له لارې بلد یو چې د کرښو رابند تټونو یا جسمونو سطحه او ډکۍ یا حجم څنګه وشمیرو. که یوه سطحه له ګرڼې (کرښې) رابنده وي، نو څه باید وشي؟ دا مو انتیګرال شمیرنې ته رابولي.

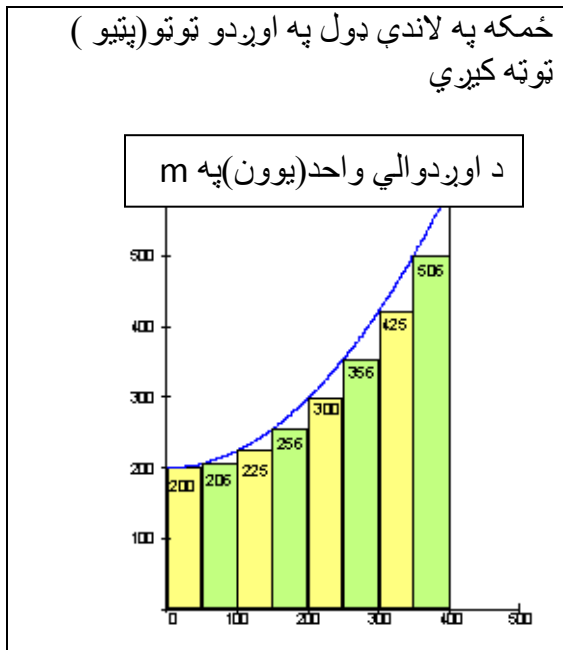
	<p>پخوانیو یونانیانو ته دا د منحنی څخه رابندې سطحې شمیرلو اصول معلوم وو. دا د مشتق شمیرنه، چې مور ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پېړۍ پای کې) د طبیعي علومو پوهانو لایبنیڅ او نیوتون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.</p>
---	--

پیلبلګه



دا څېړه شوی چمن خرڅیږي. له پورته لور د ویالې را بند دی او له بڼې لور د گاونډي ځمکه ده او کین لور ته کوڅه او له کښته لور هم د یوې کوڅې را بند دی. ددی لپاره چې چمن وپلورل شي، باید سطحه وپېژندل شي. د پلورونکی لپاره سطحه باید نزدې پوره مگر هیڅکله کمه ونه شمېرل شي. اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پیسې باید ورکړي، خو هیڅکله ځمکه د اصل څخه زیات ونه شمېرل شو.

وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي. ویاله  $f(x) = \frac{1}{400}x^2 + 200$  د تابع مساوات لري. د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

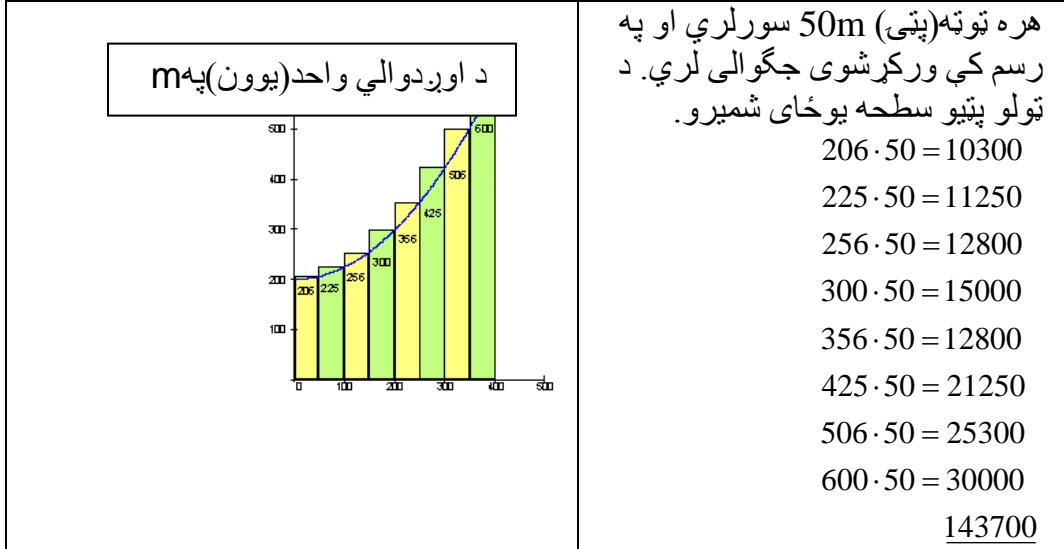


هره توتېه (مستطیل پتی) 50m سره وره ده او په رسم کې ورکړ شوی جگوالی لري. د ټولو پتیو، سطحه یو ځای شمیرو.

$200 \cdot 50 = 10000$   
 $206 \cdot 50 = 10300$   
 $225 \cdot 50 = 11250$   
 $256 \cdot 50 = 12800$   
 $300 \cdot 50 = 15000$   
 $256 \cdot 50 = 12800$   
 $425 \cdot 50 = 21250$   
 $506 \cdot 50 = 25300$   
123700

د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نزدې  $123700 m^2$  ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:



د د پلورونکي له پاره د ټولي سطحې مساحت نزدې  $143700 m^2$  دی. اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قیمتونو، منځ، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعنې د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700 + 143700}{2} = 133700 \text{unt}^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انتیگرال برخه (په مخ) کې وشمېرو، چې ریښتونی ارزښت یې  $133333.3m^2$  دی.

د اخستونکي په بېلگه کې دا ډول شمېرنه لاندنۍ، جمعې جوړول، بلل کيږي.

د پلورونکي په بېلگه کې دا ډول شمېرنه، پورتنۍ جمعې، جوړول بلل کيږي.

دا د سطحې ریښتونی ارزښت یو چیرته په دا منځ کې پروت دی.

باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې رښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

د سطحې تابع له پاره تر مخ راوړنه:  
 دا دانتيگرال هندسي مفهوم هم دی.  
 په کارتيزي وضعيه قيمت سيستم کې د گراف په سرچينه کې يوه کرينه رسموو.  
 غواړو سطحه پيدا کړو، چې د تابع دگراف او  $x$  - محور ترمنځ د  $x$  په واکوالي کې  
 پرته وي (د  $x$  تابع وي).

### د ريمن (تاکلی) انتگرال

يادونه: انتیگرال څه شی دی؟

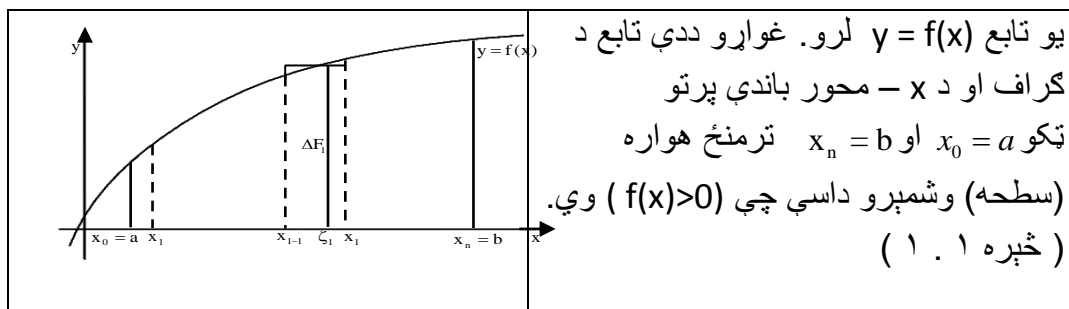
انتیگرال کونه Integration د ورگډېدلو په معنی دی ، لکه چې يو څوک يوې پردی  
 ټولني ته ورگډيږي يعني ددې پردی ټولني خويونه خپلوي، يعني دی په دې ټولنه  
 ورزياتيږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څېړلو ته وړاندې کيږي، چې څنگه د  
 يوې کوچنی درجې تابع و يوه جگ درجې فنکشن يا تابع ته ځي.

د انتیگرال هندسي تعريف:  
 لوريزه سطحه-د انتیگرال تعريف:که يوه  $f$  تابع ولرو، نو د  $x$  محور او تابع ترمنځ  
 سطحې شمېرل د انتیگرال له لارې کيږي. په دې سطحه کې د  $x$  محور پورته  
 لوري ته سطحه مثبتې مخنځېنه لري او د  $x$  محور کښته لوري ته سطحه منفي  
 مخنځېنځ لري.

#### تحليلي تعريف:

تعريف: د  $f$  يوه تابع ورکړ شوي، چې په يوه انتروال  $[a,b]$  باندې تعريف دی، نو  
 د  $a$  څخه تر  $b$  پورې د تابع د انتیگرال څخه د  $x$  په محور د  $f$  د گراف او د کرښې  
 $x=a$  او  $x=b$  تر منځ يوه يوه لوريزه سطحه پوهيږو.

په دې برخه کې غوارو، چې د انتگرال کلیمې ته وده ورکړو. د سطحې کچونې یا اندازه کوونې څخه کړی شو د انتگرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتگرال نیول د مشتق په څې یا برعکس کارونه یا عملیه ده.



ددې دندې د حل لپاره د  $[a, b]$  اینټروال په  $n$  (نه اړین) برابر برخو انټروالونو  
 $[x_{i-1}, x_i]$  ټوټه کوو.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اینټروال  $[x_{i-1}, x_i]$  کې په خوښه  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ټاکو.

د  $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$  ترمنځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطیل  
 سطحه (و لارکونجیزه هواره) ده:

$$\Delta F_i(x) = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i, \quad (4.2)$$

د ټولو پورته مستطیل ډوله کوچنیو سطحو د جمعي (زیاتون) له لارې غوښتونکي، نزدې  
 ټوله سطحه لاس ته راځي:

$$F_n = \sum_{i=1}^n \Delta F_i = \sum f(\xi_i) \Delta x_i; \dots \dots \dots (4,2)$$

دا نږدېوالی تر هغې بڼه کيږي څومره چې د اینټروال  $[a, b]$  ویش نری شي يعنې  $\max \Delta x \rightarrow 0$ ، هر څومره چې د زیاتیدونکو شمیر  $n \rightarrow \infty$  (شي).

که ( ۴ . ۲ ) تل همغه پوله ارزښت  $F$  ولري، په دې اړه نه چې اینټروال  $[a, b]$  څنګه ویشل شوی

او  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  څنګه ټاکل شوي، نو  $f(x)$  په اینټروال  $[a, b]$  کی اینټیګرال وړ دی. دا د بیلګې په

توګه د ټولو ټوټه، متمادی او محدودو توابعو  $y = f(x)$  حالت دی.

پیژند (تعریف) ۴ . ۱ : لیمیت (پوله)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F; (\Delta x \rightarrow 0), \dots \dots \dots (4,3)$$

که په اینټروال  $[a, b]$  کی موجود وي، نو دا د  $f(x)$  ټاکلی اینټیګرال بولو، یا د ریمن سطحه

$F$ - Riemann . دلته  $a$  د اینټیګرال کېدونکې لاندې (کښته) پوله یا حد او  $b$  د اینټیګرال کېدونکې پورته پوله یا حد بلل کيږي او  $[a, b]$  د اینټیګرال کېدونکې اینټروال او (  $f(x)$  Integrand اینټیګرال کېدونکی) او  $x$  د اینټیګرال کېدونکې متحول ( Integrationsvariable ) بلل کيږي

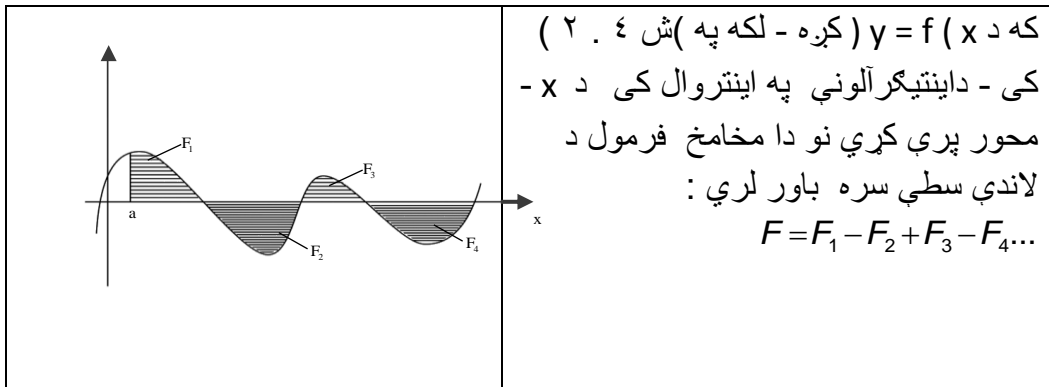
یادونه ۱ : د اینټیګریشن واریابله یا اوښتون کیږي شي په خپله خوښه په نخښه شي (مخښه یا علامه یی په خوښه وټاکل شي).



$$\text{مور لرو: } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$$

یادونه ۲: دا پورته تعریف ۴. ۱ کیدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چیرته چی  $f(x) > 0$  باوري نه وي.

که  $f(x) < 0$  وي نو دا ټاکلی اینتیگرال بیا د  $x$ -محور تر لاندې منفي هواره لري



د تعریف ۴. ۱ پسي ترلي دا لاندې جمله لرو:

جمله ۴. ۱: که  $f(x)$  په  $[a, b]$  کې اینتیگرالور وي او  $c \in [a, b]$  وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

ددې لپاره چی دا پورته مساوات د  $c$  ارزښتونو ته پراخه کړی شو، باید له اینتروال  $[a, b]$  د باندې نه وي پروت، یعنی ټکي  $a, b$  او  $c$  په یوه اینتروال کی باید پراته وي، په هغه کی چی تابع  $f(x)$  اینتیگرالور دی.

مور دا لاندې تعریف (پیژند) لرو :

پیژند یا تعریف ۴ . ۲ :  $f(x)$  په یوه بند انتروال  $[a, b]$  کې اینتیگرالور دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

د پیژند تعریف ۴ . ۱ له مخی تل باور لري:  $\int_a^a f(x) dx = 0$

### بنسټیز - یا لومړنی تابع

ددې لپاره چی د مشتقنیولو او اینتیگرال نیولو ترمنځ اړیکی لاس ته راوړو، د لومړنی تابع کلمه په لاندې توگه تعریفوو:

پیژند (تعریف): تابع  $y = f(x)$  دې په یوه واز اینتروال کې تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقور  $F(x)$  تابع چی  $F'(x) = f(x)$  شرایط پوره کړي، د  $f(x)$  بنسټیز - ، ساده - یا لومړنی تابع بلل کیري

په ساده توگه لیدل کیري چی د یوې  $f(x)$  تابع لپاره نه یواځي یو بنسټیز تابع  $F(x)$  موجود دی، د بیلگي په توگه  $F_0(x) = x^2$ ،  $F_1(x) = x^2 + 1$ ،  $F_2(x) = x^2 + 2$  تابع، بلکي په عمومي ډول

$F(x) = x^2 + C$ ، چی دا ټول مساوي مشتقونه  $f(x) = 2x$  لري.

د پورته بنوونو پایله، چی څنگه سری د یوه متمادي تابع  $f(x)$  لومړنی تابع پیدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

$y = f(x)$  دې په اینتروال  $I$  کی متمادي تابع وي، نو د  $a \in I$  لپاره

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

د  $f(x)$  یوه لومړنی تابع ده، د ټولو  $c \in I$  لپاره .

د  $f(x)$  هره بله لومړنی (بنسټیزه) تابع لاندې بڼه لري:

$$F(x) = F_a(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

خواب:

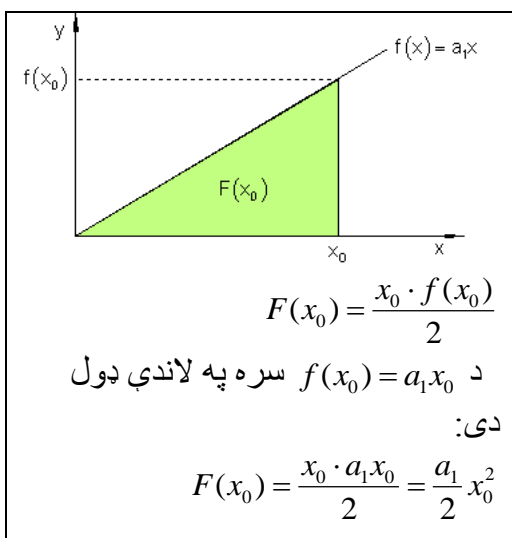
بنايو چی  $F_a(x)$  د  $f(x)$  بنسټیز تابع ده. ددې د بنوولو لپاره بنايو چی د  $F_a(x)$  لپاره د پورته پېژند شرایط باور لري. د  $F_a(x)$  مشتق د  $x \in I$  او  $x \neq a$  لپاره په لاندې ډول ده.

$$\begin{aligned} F_a'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left[ \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_a^{x+h} f(t) dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\xi), \quad \xi \in [x, x+h] \end{aligned}$$

د لیمیټ منځ ارزښت جملې له مخې داسې یوه  $\xi$  شته دی  
 د متمادیت له امله  $((f(\xi) \rightarrow f(x))$   
 $= f(x)$

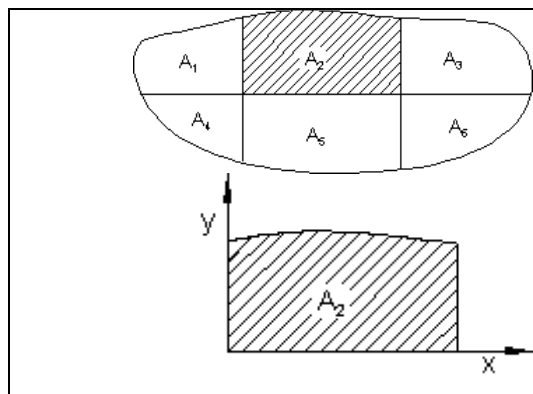
سطحه او لومړنۍ تابع:

سطحي تابع ته ترمنځ راورنه:



د تابع  $f(x) = a_1 x$  گراف په کارټیزي وضعیه سیستم (پروت ولارسیستم) په سرچینه کې یوه کرښه انځوروي. یو تابع غواړو پیدا کړو، چې د گراف او  $x$ -محور ترمنځ، د  $x_0$  په واکوالي یا تابعیت کې سطحه په گوته کوي. دا چې دا جوړه شوی سطحه یو مثلث دی، نو حل یې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته  $A = \frac{g \cdot h}{2}$  ساده پیدا کيږي: زمونږ د مسألې لپاره متحوله داسې تغیروو:  $A \rightarrow F(x_0); g \rightarrow x_0; h \rightarrow f(x_0) = a_1 x_0$

تابع  $F(x_0)$  د گراف او د  $x$ -محور ترمنځ سطحه د  $x_0$  په واکوالي (تابعیت) کې تشریح کوي یا ښایي. مونږ دا تابع د سطحې تابع بولو. د سطحې پرابلم:



هره له کروکړښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو (قدمونو)، چې په هغې کې فقط یوه یوه کرښه رامنځ ته کيږي. نورې ټولې رابندونې سیده کړښي دي. هره یوه د سطحې برخه (د بېلگې په توگه دلته  $A_2$ ) کېدی شي د وضعیه قیمتونو سیستم کې د یوې سطحې په څېر انځور شي، چې د کړې کړښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.

که له کړو کړنو رابند گراف د  $f(x)$  متمدادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ایا یو تابع شته چې د افقي (پروت) محور ارزښت  $x_0$  په سطحه  $F(x_0)$  تنظیم کړي، لکه په پیلې لگه کې؟

که داسې یو تابع  $F$  شتون ولري، او سطحه  $F(x_0)$  چې د  $x_0$  افقي محور ارزښت تنظیم وي، نو باید د افقي (پروت) محور ارزښت  $(x_0 + \Delta x)$  په سطحه  $F(x_0 + \Delta x)$  باندې تنظیم کړای شي.

په یوه څلورضلعي (مستطیل) کې د سطحې رابندول:

د منحنی لاندې په نخښه شوي سطحه له ریښتوني سطحې څه کوچنی ده.

ریښتوني سطحه ده.

د منحنی لاندې په نخښه شوي سطحه د ریښتوني سطحې څخه څه لویه ده.

که د سطحې پټي (یا کوچني مستطیلونه یا ولارکوډیز) هرڅومره کوچني شي، په همغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه یې توپیر کميږي. دا اړودوالی د ریاضیاتو له مخې په لاندې توگه فرمول باندې کېدی شي:

$F(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta x$	$F(x_0 + \Delta x)$	$F(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x$
----------------------------------	---------------------	---

دا مو دې لاندې نابرابرونو یا نامساواتو ته راهڅوي

$$\begin{aligned}
 F(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta x &\leq F(x_0 + \Delta x) \leq F(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x \quad | F(x_0) \\
 \Leftrightarrow f(x_0) \cdot \Delta x &\leq F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x \quad | : \Delta x \\
 \Leftrightarrow f(x_0) &\leq \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} \leq f(x_0 + \Delta x)
 \end{aligned}$$

لیمیت یی نیسو (پوله یی پیدا کوو):

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0) &\leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) \\
 f(x_0) &\leq F'(x_0) \leq f(x_0) \\
 f(x_0) &\leq F'(x_0) = f(x_0) \\
 \underline{F'(x_0) = f(x_0)} & \text{ نو لرو:}
 \end{aligned}$$

دا په دې معنا، چې د سطحې  $F(x)$  مشتق د کړې کړنې د تابع ارزښت  $f(x_0)$  سره په  $x_0$  ځای کې برابر دی. مور لیکو:

$$\boxed{F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)} \quad \text{یا} \quad F'(x_0) = \frac{dF(x_0)}{dx} = f(x_0)$$

که مور بریالي شو، داسې یو تابع  $F(x)$  پیدا کړو چې مشتق یې د رابندې کړې  $f(x)$  تابع وي، نو  $F(x)$  د سطحې تابع دی. که مور یو تابع د لومړني تابع څخه رابیل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د یوې سطحې تابع پیدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی.

سری کړی شي فورمال ووايي:

د یوې سطحې مساحت تابع، چې پیدا کړو، دا معنا لري چې ورګډول یا انتیګرال یې شمېرو. د یوه ساده توان تابع په بیلګه د احساس له مخې یوه لار پیدا کیدی شي، چې دا څنګه ایتې کړلوي.

توانتابع :

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په یو کمیري او پوتنختابع د زاړه پوتنخ سره ضربیږي.

انتیگرالونه (زیاتونه یا ورگډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په یو جگیري او پوتنختابع په نوي اکسپوننت وپشل کیږي.  
دا همدا اوس ازمايو:

پوتنختابع:

$$f(x) = 3x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{3}{2+1} x^{2+1} = \underline{x^3}$$

تابع  $F(x)$  د  $f(x)$  بنسټتابع (لومړنی تابع یا ساده تابع) بلل کیږي، ځکه چې  $f(x)$  له  $F(x)$  څخه لاس ته راځي یا را پیدا کیږي یا راځیږي.

## ناټاکلی انتیگرال

و به گورو، چې ناټاکلی انتیگرال د لومړنی تابع لپاره بل نوم دی.

که دیوی ورکړ شوي  $f(x)$  تابع  $F(x)$  لومړنی تابع، یعنې  $F(x)$  وپېژنو، نو دیوی ثابتې  $c$  د ور جمع کولو سره د  $f(x)$  د ټولو لومړنیو توابعو سټ  $G$  لاسته راوړو ( $c$  په خوښه یو حقیقي عدد دی).

مورن د  $f(x)$  تابع د  $F(x)$  لومړنی تابع ټاکنه یا اینتگرالونه هم بولو او ددې له پاره لیکو:

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \Leftrightarrow dF(x) = f(x)dx \Leftrightarrow F(x) = \int dF(x) = \int f(x)dx$$

$$F(x) = \int f(x)dx$$

دا تراوسه فورمال لیکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.

مورن لومړنی توابع پلټو

بیلگه:

لومړنی تابع  $F(x)$  دې پیدا شي، چې مشتق یې  $f(x) = 2x$  دی.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int 2x dx$$

مور ازمایو:

$$F(x) = x^2 \quad \text{خکه چي } f(x) = 2x = F'(x)$$

$F(x) = x^2 + 2$  خکه چي  $f(x) = 2x = F'(x)$ . په تولیزه توگه باور لري:

$$F(x) = x^2 + C \quad \text{خکه چي په هر حالت کي لرو: } f(x) = 2x = F'(x)$$

دواړه توابع په ثابت غړي کې یو له بل توپیر لري. دوی همغه مشتق لري، خکه چي د مشتق سره

هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله باید دې خپلې لار ته تغیر ورکړو.

$$\boxed{\int f(x) dx = F(x) + C} \quad \text{قاعده (لار): باور لري:}$$

د لومړنیو توابعو سټ (ډبرې)

بیلگه بنایي، چي د تابع  $f(x)$  لپاره نه یواځي یو لومړنی تابع بلکي ناپای ډبر توابع شته، چي یواځي ثابت عدد کي یو له بل سره توپیر لري، چي دا د  $f(x)$  د لومړنیو توابعو سټ بولو.

بیلگه

یو لومړنی تابع  $F(x)$  دي پیدا شي، چي د هغه مشتق  $f(x) = 3x^2 + 2$  وي.

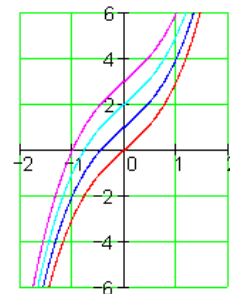
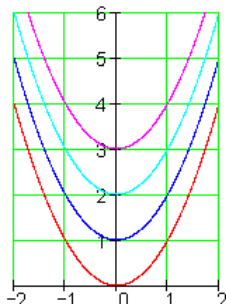
$$F(x) = x^3 + 2x + C \quad \text{، خکه چي } f(x) = 3x^2 + 2 = F'(x)$$

د ټولو لومړنیو توابعو ډبرې دي د منحیو ډلې په څېر انځور شي، چي فقط ثابتو عددونو کي یو له بل توپیر لري.

د دې لپاره دي د گرافونو لاندې دوه بېلگي وکتل شي.

$$F(x) = x^2 + C$$

$$F(x) = x^3 + 2x + C$$





انتیگرالشمیرنه د مشتقشمیرني برعکس دی.

لاندې توابع په اړونده توگه په ،، برعکس مشتقولو،، له لارې. مور د مخه ځنې انتیگرال قاعدې لوستلي.

لکه چې ومو لیدل دواړه تمرینونه د همغه تیپ او اصولو له لارې اجرا کيږي، خو یواځې لیکنه یې توپیر لري

دویم (لاتین) د سطحې د شمېرلو لپاره د مشتق او انتیگرال اصلي جملې ته گوته نیسو.

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = |F(b) - F(a)|$$

د یوې ساده بیلگې له لارې د اصلي جملې په مرسته دا سي مخ ته ځو

تمرین (چا چې ډېر کار کوی وي) شوی لیدونکی گوري یا پیژني، چې د سطحې مساحت په دې بیلگه کې بی له مطلق ارزښت شمیرل کېدای شي.، ځکه چې په دې بیلگه کې سطحه د  $-x$  محور پورته لور ته پرته ده .

د دې درس تکمیل – یا \*پوره کیدني لپاره بیلگي.

1. ټول تام کسري تابع د  $x$ -محور او د کرښو  $x = -2$  او  $x = 1$  سره یوه سطحه پوره رابندوي یا راتري. د سطحې مساحت وشمیرئ.

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 6$$

$$a = -2, b = 1$$

2. د دوه توابعو  $f(x)$  او  $F(x)$  مساوات ورکړ شوي دي (الف) صفرځایونه وشمیرئ او د  $f(x)$  گراف وکارئ. (ب) وښایئ، چې  $F(x)$  د  $f(x)$  لومړنی تابع دی. (پ) د  $f(x)$  او  $x$ -محور څخه پوره رابندي سطحې مساحت وشمیرئ.

:

$$f(x) = 3e^{-x} \cdot (2x - x^2 + 1)$$

$$F(x) = 3 \cdot (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$$

3. د ۴ - می درجی تاملراشنل تابع د  $x$ - محور په درې ټکو کې غوڅوي او د هغې سره یوه سطحه مکمله رابندوي. د سطحې مطلقه مساحت وښایئ.

$$f(x) = x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3)$$

۴. د  $f(x)$  مثلثاتي تابع د -محور د  $a$  او  $b$  ټکو او همداسر نورو ټکو کې غوڅوي. د  $f(x)$  او  $x$ -محور تر منځ د  $x=a$  تر  $x=b$  په انټروال کې د سطحې مساحت وشمېرئ.

$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$

$$a = -\frac{\pi}{6}, \quad b = \frac{3}{2}\pi$$

5. دوه تاملراشنل توابع  $f(x)$  او  $g(x)$  په ټکو  $A, B$  او  $C$  کې غوڅوي. (الف) د شي حالت رسم کړئ. (ب) د سطحو مساحت د  $f(x)$  او  $g(x)$  ترمنځ له  $x=a$  څخه تر  $x=b$  انټروال کې وشمېرئ.

$$f(x) = x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$$

$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$

$$A(a;0), \quad B(b;0)$$

6. د وضعیه قیمتسیستم په لومړئ او دویمه څلورمه (ریع) کې تابع  $f(x)$  او  $g(x)$  تابع ټیک په دوه ټکو کې غوڅوي. (الف) غوڅتکي یې وښایاست او انځور یې وکارئ. (ب) د دواړو گرافونو څخه کوم د سطحې مساحت رابندیري.

$$f(x) = x + \frac{1}{x+1} \quad (x \neq -1)$$

$$g(x) = 3\frac{1}{4}$$

7. د دوه توابعو  $f(x)$  او  $F(x)$  مساوات ورکړل شوي دي. (الف) صفرخایونه یې وشمېرئ او د  $f(x)$  گراف وکارئ. (ب) وښایئ، چې  $F(x)$  د  $f(x)$  لومړی تابع دی. (پ) د سطحې مساحت وشمېرئ، چې د  $f(x)$  له گراف د وضعیه سیستم له محورونو او د کرني  $x=4$  څخه رابنده وي.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

$$F(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

8. کسري راشنل تابع د -محور، کرني او کرني سره په دریمه څلورمه (ربع) یوه سطحه رابندوي.

د دې کچ عدد وښایئ.

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x}{4x - 2} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{11}{16} + \frac{11}{32x - 16}$$

حلونه.

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x + c$$

$$G(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + c$$

$$H(x) = \frac{1}{3}a \cdot x^3 - \frac{x^2}{6} + x + c$$

$$K(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + c$$

$$L(x) = \frac{x^5}{10} + \frac{2}{9}x^3 - 4x + c$$

- ۲

$$\int f(x) dx = x^2 + \frac{1}{4}e^{4x} + c$$

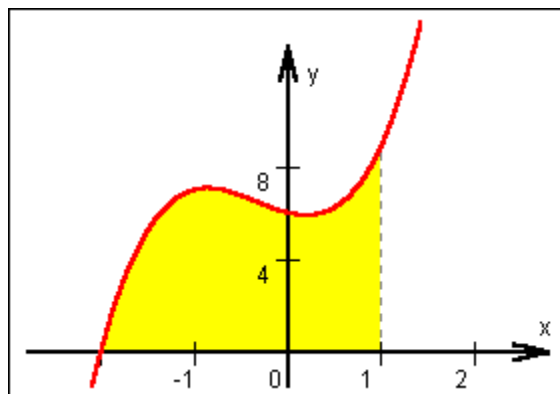
$$\int g(x) dx = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{0,5x} + c$$

$$\int h(x) dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \ln|x| + c$$

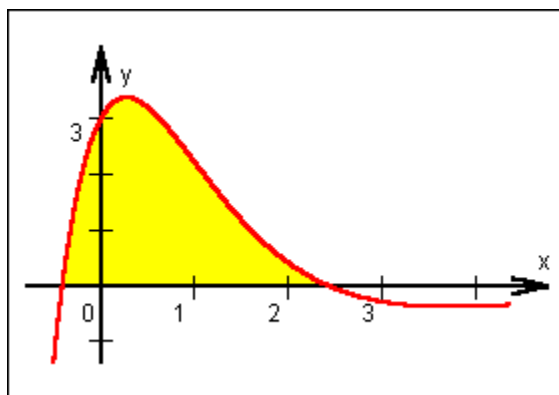
$$\int k(x) dx = -\cos x + \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

$$\int l(x) dx = 2\sqrt{x^3} + c$$

- ۱ . ۲



$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 (2x^3 + 2x^2 - x + 6) \cdot dx \\ &= \left[ \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_{-2}^1 \\ &= \left| 6\frac{2}{3} - \left(-11\frac{1}{3}\right) \right| = \underline{\underline{18FE}} \end{aligned}$$



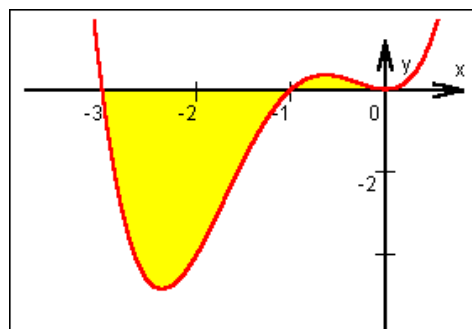
$$F'(x) = f(x)$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 3 \cdot 2x \cdot e^{-x} + 3(x^2 - 1) \cdot e^{-x} \cdot (-1) \\ &= 3e^{-x} \cdot (2x - (x^2 - 1)) = f(x) \end{aligned}$$

$$A = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} f(x) \cdot dx = [F(x)]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A = [3 \cdot (x^2 - 1) \cdot e^{-x}]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A \approx |1,30 - (-3,76)| = \underline{\underline{5,06 FE}}$$



$$x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3) = x^4 + 4x^3 + 3x^2$$

$$A = \int_{-3}^{-1} (x^4 + 4x^3 + 3x^2) \cdot dx + \int_{-1}^0 (x^4 + 4x^3 + 3x^2) \cdot dx$$

$$A = \left[ \frac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3 \right]_{-3}^{-1} + \left[ \frac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3 \right]_{-1}^0$$

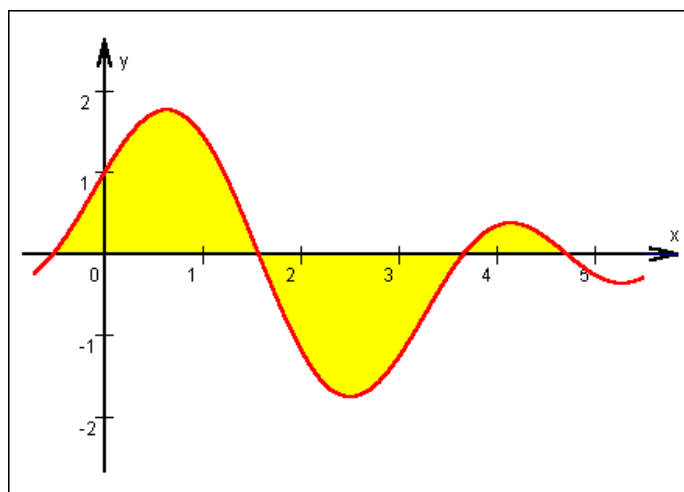
$$A = |0,2 - 5,4| + |0 - (-0,2)| = \underline{\underline{5,8FE}}$$

— ۴ . ۲

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin 2x + \cos x \\ &= 2 \sin x \cdot \cos x + \cos x \\ &= \cos x \cdot (2 \sin x + 1) \end{aligned}$$

$$0 = \cos x \rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \pi, x_2 = \frac{3}{2} \pi$$

$$0 = 2 \sin x + 1 \rightarrow x_3 = -\frac{1}{6} \pi, x_4 = \frac{7}{6} \pi$$



$$A = \int_{x_3}^{x_1} f(x) \cdot dx + \int_{x_1}^{x_4} f(x) \cdot dx + \int_{x_4}^{x_2} f(x) \cdot dx$$

$$A = \left[ -\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x \right]_{x_3}^{x_1} + \left[ \right]_{x_1}^{x_4} + \left[ \right]_{x_4}^{x_2}$$

$$A = 2,25FE + 2,25FE + 0,25FE = \underline{\underline{4,75FE}}$$

— ٥ . ٢

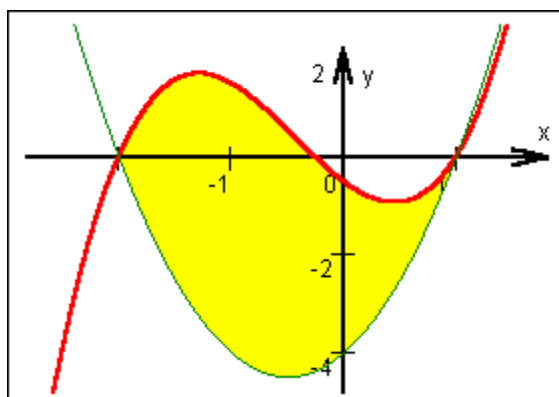
$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$

$$0 = x^2 + x - 2$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{2,25}$$

$$\underline{\underline{x_1 = a = -2}}$$

$$\underline{\underline{x_2 = b = +1}}$$



$$A = \int_{-2}^{+1} (f(x) - g(x)) \cdot dx$$

$$= \int_{-2}^{+1} \left( x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 3\frac{3}{4}x + 3\frac{1}{2} \right) \cdot dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 1\frac{7}{8}x^2 + 3\frac{1}{2}x \right]_{-2}^{+1} \\
 &= \left[ 1\frac{5}{8} - \left(-8\frac{1}{2}\right) \right] = \underline{\underline{10\frac{1}{8} FE}}
 \end{aligned}$$

- ۶. ۲

$$x + \frac{1}{x+1} = 3\frac{1}{4}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x+1} = 3\frac{1}{4}$$

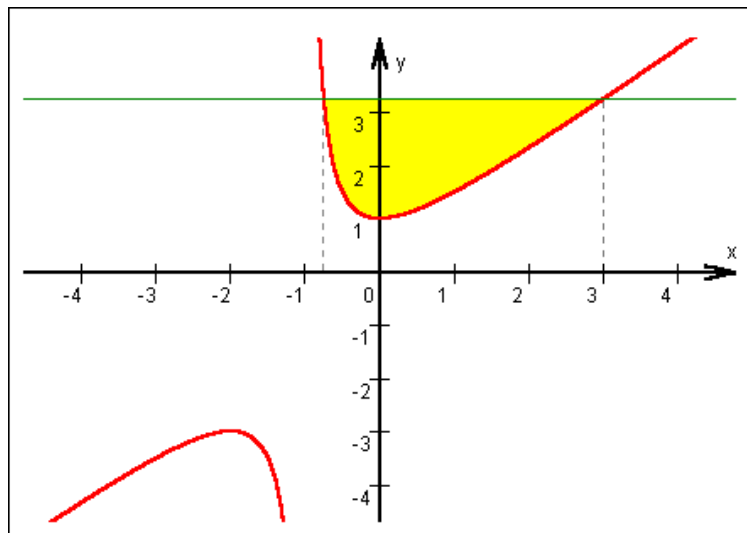
$$x^2 + x + 1 = 3\frac{1}{4}x + 3\frac{1}{4}$$

$$x^2 - 2\frac{1}{4}x - 2\frac{1}{4} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{9}{8} \pm \sqrt{\frac{81}{64} + \frac{144}{64}} = \frac{9}{8} \pm \frac{15}{8}$$

$$x_1 = a = -\frac{3}{4}$$

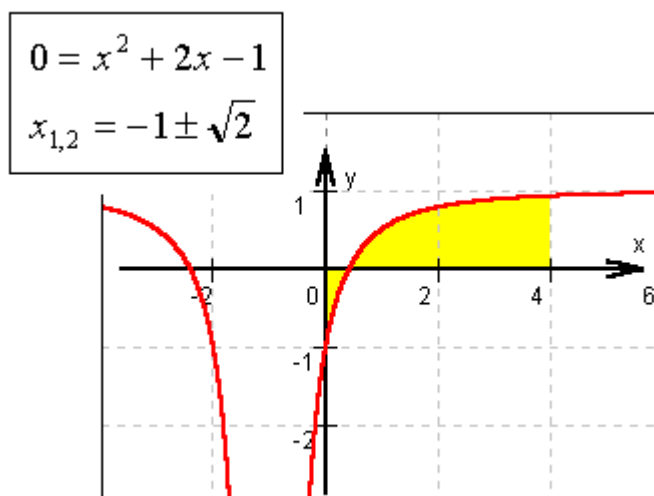
$$\underline{\underline{x_2 = b = 3}}$$





$$\begin{aligned}
 A &= \int_a^b (g(x) - f(x)) \cdot dx \\
 &= \int_{-\frac{3}{4}}^3 \left( 3\frac{1}{4} - x - \frac{1}{x+1} \right) \cdot dx \\
 &= \left[ 3\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(x+1) \right]_{-0,75}^{+3} \\
 &\approx |3,86 - (-1,33)| = \underline{\underline{5,19FE}}
 \end{aligned}$$

- ٧ . ٢

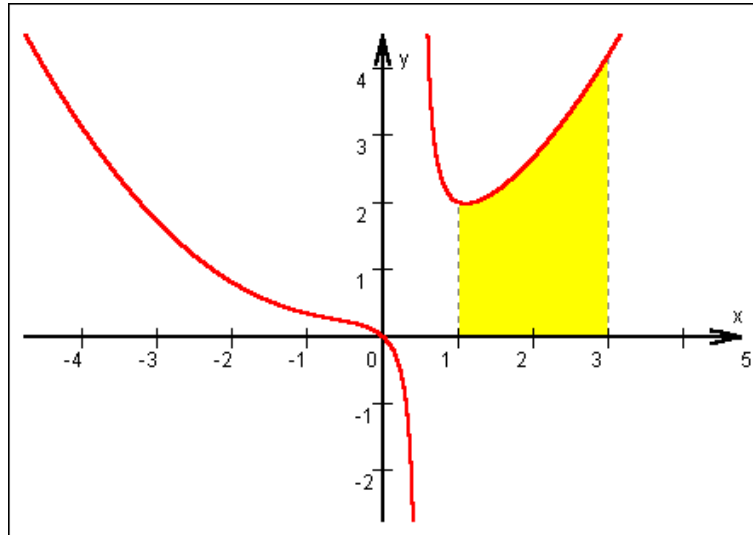


$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \frac{2x \cdot (x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1} = f(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{-1+\sqrt{2}} f(x) \cdot dx + \int_{-1+\sqrt{2}}^4 f(x) \cdot dx \\
 &= \left[ \frac{x^2+1}{x+1} \right]_0^{-1+\sqrt{2}} + \left[ \frac{x^2+1}{x+1} \right]_{-1+\sqrt{2}}^4 \\
 &= 0,17FE + 2,57FE = \underline{\underline{2,74FE}}
 \end{aligned}$$

په پورته کې  $FE$  د سطحې واحد (یون) په معنای

۲ . ۸ -



$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^3 \left( \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{11}{16} + \frac{11}{32x-16} \right) \cdot dx \\
 &= \int_1^3 \left( \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{11}{16} \right) \cdot dx + \int_1^3 \frac{11}{32x-16} \cdot dx
 \end{aligned}$$

$$A_1 = \left[ \frac{1}{12} x^3 + \frac{3}{16} x^2 + \frac{11}{16} x \right]_1^3 = 5 \frac{1}{24} FE$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 32x - 16 \\ \frac{dz}{dx} = 32 \Rightarrow dx = \frac{1}{32} dz \end{array} \right.$$

$$A_2 = \int_{16}^{80} \frac{11}{z} \cdot \frac{1}{32} dz = \frac{11}{32} \cdot [\ln z]_{16}^{80} \approx 0,55 FE$$

$$\underline{\underline{A \approx 5,59 FE}}$$

په پورته کې  $FE$  د سطحې واحد (یوون) په معنای

بیلگه:

مشتقور مگر نامتمادي (پرېکېدونکی) مشتقور تابع:

لرو:

$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ 0 \end{cases}$	<p>د <math>x \neq 0</math> لپاره</p> <p>د <math>x = 0</math> لپاره</p>
--	--

نو  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0$  د  $x \rightarrow 0$  لپاره، له امله

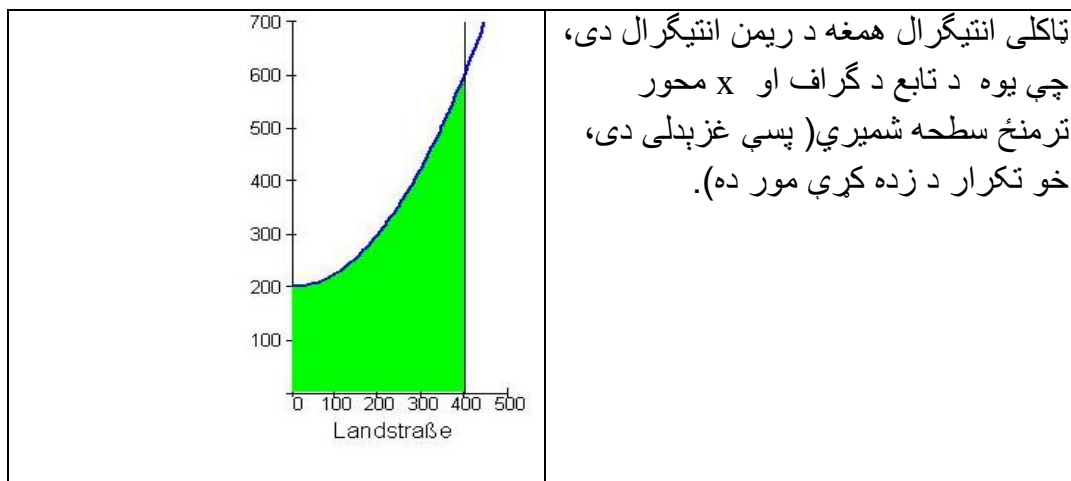
مشتق  $f'(0) = 0$  دی. او د  $\forall x \neq 0$  لرو:

، چېرې چې  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  ناشته دی. تابع  $f$

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

له دې امله مشتقور دی مگر نه ناپرېکېدونکی (متمادي) مشتقور.

## د ټاکلي انتیگرال شمیرنه



## ټاکلي انتیگرال:

که  $f$  یو حقيقي تابع وي، نو د ټاکل انتیگرال  $\int_a^b f(x) dx$  (لوستل: د  $f(x)$  انتیگرال د پولې (حد)  $a$  تر پولې (حد)  $b$  پا د  $a$  او  $b$  حدونو ترمنځ یا انتیگرال په  $f(x)$  باندې له  $a$  تر  $b$ ) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د  $f$  گراف لاندې د  $a$  او  $b$  تر منځ.

$G$  دې په بند انټروال  $a \leq x \leq b$  کې د  $g(x)$  لومړنی انتیگرال وي، د

$$\int_a^x f(t) dt = g(x) \text{ سره، نو باور لري: } \int_a^t f(t) dt = G(b)$$

دا چې د دوه لومړنیو توابعو  $F$  او  $G$  تر منځ یو ثابت  $C$  توپیر شته، نو  $G(x) = F(x) + C$  باور لري. د  $x=b$  لپاره لاسته راوړو:  $G(b) = F(b) + C$

دا چې  $G(x) = \int_a^x f(t) dt = 0$  دی او  $G(a) = F(a) + C$  دی، نو  $C = -F(a)$  ده.

دا په دې معنا، چې  $G(b) = F(b) - F(a)$  همداسې  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ .

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتیگرال جمله لاس ته راوړه

یا دا وینا د مشتق - او انتیگرال شمېرنې بنسټیزه جمله بلل کیري:

تعریف:  $f$  په انټروال  $a \leq x \leq b$  کې متمادي تابع ده او  $F$  د  $f$  لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیگرال دی:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

د  $F(b) - F(a)$  لپاره زیات وخت  $[F(x)]_a^b$  لیکو. په دې توگه دی

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتیگرال شمېرنه په لومړني انتیگرال بېرته واپوله او د مشتق او انتیگرال تر منځ مو اړیکې رامنځ ته کي.

بیلگي:

$$a) \int_1^2 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$b) \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx = \int_2^4 x^{-2} dx = \left[ \frac{x^{-1}}{-1} \right]_2^4 = \left[ -\frac{1}{x} \right]_2^4 = \frac{1}{4}$$

$$c) \int_1^3 \sqrt{x} dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^3 = \frac{2}{3} [\sqrt{x^3}]_1^3 (\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3})$$

$$= \frac{2}{3} (3\sqrt{3} - 1) = 2(\sqrt{3} - \frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتیگرالونو لپاره لاندې جملې رښتیا دي:

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx +$$

تکمیلیدونکي بنسټونه:

د  $F(b) - F(a)$  له امله د انتگرالونې ثابته  $c$  له منځه ځي. له دې امله کولی شو د انتیگرال ثابتې ټاکلو لپاره  $c=0$  ولیکو.

بیلگه:

: د ټاکلي انتیگرال  $\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x dx$  ارزښت و ټاکي.

ښوونه: مور په دا لاندې ډول ښایو:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x dx = [\sin x]_{-\pi}^{+0.5\pi} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1 - 0 = 1$$

یادونه : دا چې په دې برخه کې یواځې د ټاکلي انتیگرال ارزښت غوښتل شوي دي او نه د یوې منحنې لاندې سطحه، نو باید نه دي چې صفرخایونه په پام کې ونیول شي. عوره یادونه: دادي په یاد وي، چې ناکلی انتیگرال تابع ده او ټاکلی انتیگرال یو عدد.

د ناکلي انتیگرال څخه و ټاکلي انتیگرال ته

ترمنځ راوړنه یا وړاندراوړنه

مور و لیدل، چې څنگه یو تابع  $f(x)$  ته لومړنی تابع  $F(x)$  منځ ته راوړی شو، نو ناپای دېر لومړني توابع شته دي، چې فقط د یوې ورجمع کونکې ثابتې له امله یو له بل توپیر لري.

لرو: تابع  $f(x) = 3x^2 + 2$  او د دې د لومړنیو توابعو سټ  $f(x) = x^3 + 2x + C$

پېژند: د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع  $f(x)$  ته ،، ناکلی انتیگرال ،، بلل

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

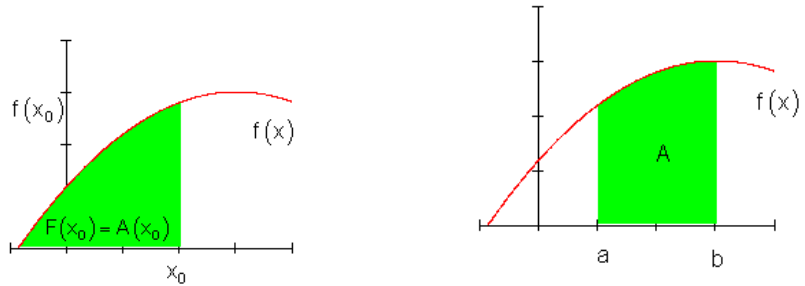
کیري او ددې له پاره لیکو:

د مشتق- او انتیگرالشمیرني ترمنځ اړیکې کېدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

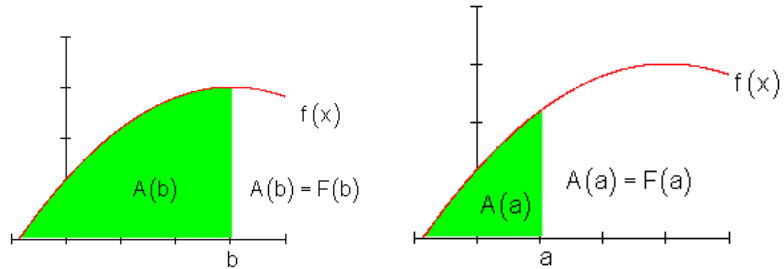
جمله(قضیه): د ناکلی انتیگرالشمیرنه د مشتقشمیرني برعکس انځوروي

$$\frac{d[f(x)] + C}{dx} = [F(x) + C]' = f(x)$$

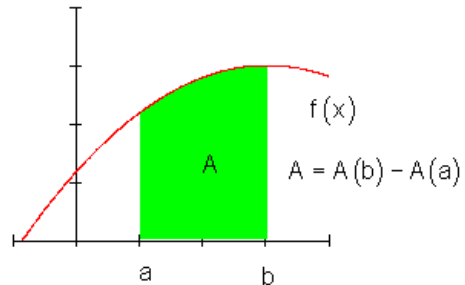
د تابع د گراف لاندې او د انتروال  $[a; b]$  تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم مور تر اوسه لاس ته راوړي زده کړي کاروو.



د یوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لارښوده وي:  
 د یوې سطحې، چې د یوې په پام کې نیولې  $f(x)$  تابع گراف لاندې ده تر  $x_0$  ځای پورې او یوې  $F'(x)$  تابع، چې د  $F(x)$  تابع مشتق د  $x_0$  ځای د تابع  $f$  د تابع ارزښت سره د  $x_0$  په ځای کې برابر وي، ترمنځ اړیکې شته دی، یعنی  $F'(x) = f(x)$



د انټروال  $[a, b]$  حدونو ترمنځ سطحې پیدا کول د تابع د گراف سطحو د کمښت څخه په ځای  $A(b)$  او سطحې په  $A(a)$  ځای کې، یعنی  $A = A(b) - A(a)$  په همدې توگه  $F = F(b) - F(a)$  لاس ته راځي.





په انټروال  $[a, b]$  کې د تابعگراف لاندې سطحه د لومړنیو توابعو تفریق دی:

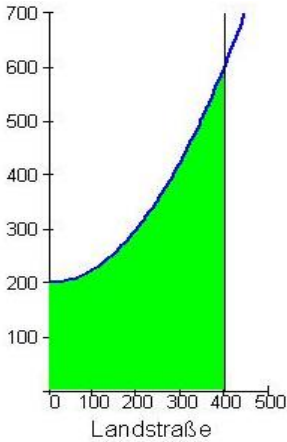
$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x) dx$$

دا انتیگرال ټاکلی انتیگرال هم بلل کیږي.

جمله :

دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پیل بېلگه کې راوړي د چمن سطحه وشمیرو.

ثابته له تفریق سره لري کیږي. په عمل کې د دې مسألې د حل لپاره یوه بله لار ګټوره راوستلې یا ګټوره بڼوولي:



$$\begin{aligned} A &= \int_0^{400} \left( \frac{1}{400} x^2 + 200 \right) dx = \frac{1}{1200} x^3 + 200 \cdot x \Big|_0^{400} \\ &= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 \left[ \frac{1}{1200} 0^3 + 200 \cdot 0 \right] \\ &= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 = \underline{\underline{133333.\bar{3}}} \end{aligned}$$

## د انتیگرالونې قاعدې

د ناټاکلي انتیگرال انتیگرالونې قاعدې: په لاندې انتیگریشن قاعدو کې د اینټیگریشن ثابته باندې صرف نظر کیږي دلته مساوات تر یوې ورجع شوي ثابتې C پورې مساوات دی، په دې معنا چې د مساواتو تر منځ یواځې یوه ثابته کیدی شي زیاته یا کمه وي. دا قاعده

کیدۍ شي چی په ټاکلي انتیگرال کې بنوولي جملی سره سم ټاکلي انتیگرال ته نقل شي يعني په ټاکلي انتیگرال استعمال شي . دا قاعدې کیدۍ شي چی د تېرو درسونو سره سم د دواړو خواو د مشتق نیولو سره وینول شي.

جمله :

د یوې ثابتې سره ضرب : که تابع  $f(x)$  په یوه اینتروال کې متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad a \in R$$

جمله: د جمعی (تفریق) قاعده که  $f_1(x)$  او  $f_2(x)$  په یوه اینتروال کې نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

بیلگې:

لاندې انتیگرالونه کیدۍ شي چی د مخ ته تېرو جملو په استعمالیدو او ساده څیره بدلون بیرته په بنسټیزو انتیگرالونو بدلکرای شي

$$a) \int \frac{dx}{3x^4} = \frac{1}{3} \int x^{-4} dx = \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{3} \right) x^{-3} + C = -\frac{1}{9x^3} + C,$$

$$b) \int (3x^2 + 4x - 1) dx = 3 \int x^2 dx + 4 \int x dx - \int dx = 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 4 \cdot \frac{1}{2} x^2 - x + C \\ = x^3 + 2x^2 - x + C,$$

$$c) \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{x^3}{\sqrt{x}} dx - 3 \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx = 2 \int x^{\frac{5}{2}} dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx \\ = 2 \cdot \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{7} x^3 \cdot \sqrt{x} - 2x \cdot \sqrt{x} + C$$

## د اکسپوننشل توابعو انتیگرالونه

بنسټ:

د طبیعي اکسپوننشل تابع  $f(x) = e^x$  لپاره لرو:  $\int e^x dx = e^x + C$  ( $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$ )

د تولیز اکسپوننشل تابع  $a^x$  لپاره لرو:  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

بیلگه:

دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع  $\int 2^{x-3} dx$  غواړو پیداکړو

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8} 2^x \quad \text{بڼه بدون: د توان قانون سره سم لرو}$$

د فاکتورونې قانون سره سم لرو:  $\int \frac{1}{8} 2^x dx = \frac{1}{8} \int 2^x dx$

$$\frac{1}{8} \int 2^x dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + c = \frac{2^x}{8 \cdot \ln 2} + c = \frac{2^{x-3}}{\ln 2} + c \quad \text{انتیگرال یې ونیسئ:}$$

## د لوگاریتمي توابعو انتیگرالونه

بنسټ:

د طبیعي لوگاریتم تابع  $f(x) = \ln x$  ( $x \in \mathbb{R}^+$ ) لپاره  $\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x + c$  دی.

د تولیز لوگاریتم تابع ( $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$ )  $f(x) = \log_a x$

$$\text{لپاره } \int \log_a x dx = \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln a} + c \text{ دی.}$$

بیلگه :

ناتکلی انتیگرال  $\int \ln 3x dx$  غاړو پیدا کړو:

بڼه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx + \int \ln x dx = x \cdot \ln 3 + x \cdot \ln x - x + c$$

$$\int \ln 3x dx = x \cdot (\ln 3 + \ln x - 1) + c$$

بنسټیز اینټیگرالونه په یوه جدول کې

د اینټیگرالولو او مشتق نیول د اړیکو په بنسټ کېدی شي چې د بنسټیزو اینټیگرالونو یو جدول ترتیب شي. دا په مشتق جدول کې راوړل شوو بنسټیزو توابعو پر عکس څرگندېږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x) = \int f(x) dx$	نیونه یا فرضیه
1	$x^n$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln x  + C$	$x \neq 0$
3	$x^a$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$	$a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x > 0$
4	$a^x$	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$	$a > 0, a \neq 1$
5	$e^x$	$e^x + C$	

6	$\sin x$	$-\cos x + C$
7	$\cos x$	$\sin x + C$
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C \quad x \neq n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$
9	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

بیلگه :

د جدول او تېرو جملو څخه په گټه لاندې اېټیگرالونه په لاندې ساده ډول په بنسټیز توابعو بدلیدلی شي

- a)  $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = -\frac{1}{4} x^{-4} + C, \dots\dots\dots 1,$
- b)  $\int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0), \dots\dots\dots 3,$
- c)  $\int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x} dx = \int \left( x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{3+1}{2 \cdot 3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x > 0), \dots\dots\dots 3,$
- d)  $\int \frac{\sin 2x}{2 \sin x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin x} dx = \int \cos x dx = \sin x + C, \dots\dots\dots (4,21) \quad 6,$
- e)  $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad \left( x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \right), \quad (4,11) \quad 9,$
- f)  $\int (1 + \cot^2 x) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi) \quad (4,12) \quad 8,$
- g)  $\int \frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3} dx = \int \frac{1-x^2}{x(1-x^2)} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1, x \neq 0), \quad Nr.2,$
- h)  $\int_{-1}^0 e^x dx = e^x \Big|_{-1}^0 = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}, \dots\dots\dots 5$

Substitutionlaw بدلون قانون

تراوسه پورې مو فقط انتیگرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنیو توابعو په انتیگرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتیگرالونو د نورو انتیگرالولو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنۍ انتیگرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به ولیدل شي.

جمله :

د ،، بدلون ( قاعده ) ،، ( Substitution لاتین د ) یوه ارزښت په ځای د همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لند: بدلون ) د نیونو یا فرضیو له مخې، چې  $u = g(x)$  نه برېکېدونکې یا متمادي او مشتقور دی او  $y = f(u)$  متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

حل : د بني اړخ مشتق د تېرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx} \int f(u) du = \frac{d}{du} \int f(u) du \cdot \frac{du}{dx} = f(u) \cdot u' = f[g(x)] \cdot g'(x),$$

دا د کین اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتیگرالېډو لپاره مساعده ده، په کوم کې چې یو فاکتور زنجیري تابع  $f[g(x)]$  وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق  $g'(x)$  وي. سری د دننه تابع لپاره په دې توگه متحولې بدلوي یا ځای په ځای کوي  $u = g(x)$  :

$$\text{مشتق } \frac{du}{dx} = G'(x) \text{ جوړوي په همدې ډول } du = g'(x) dx$$

د بريالي انتیگرالېډو وروسته بدلون بیرته راگرځول کيږي.

بیلگه a :

لرو :  $I = \int 2 \cos(2x-1) dx$  د دې انتیگرال وشمېرئ.

بدلون یا په خای کونه:  $2x - 1 = u$

مشتق  $2 = du/dx$  همداسی  $2dx = du$

$$I = \int \cos u \, du = \sin u + C = \sin(2x - 1) + C$$

بیلگه b: لرو  $I = \int 3 \cos(2x + 1) dx$

بدلوو:  $2x = u - 1$ , مشتق  $2 = du/dx$  همداسی  $dx = (1/2) du$

$$I = \int 3 \cos u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{3}{2} \int \cos u \, du = \frac{3}{2} \sin(2x - 1) + C$$

ومولیدل چی خنخیري تابع د لایني دننه تابع سره د بدلونو قاعدی سره تل اینتیگرال کیدی شي، خکه چی د لایني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تبری جملی سره سم د اینتیگرال تر مخ(موخه کین لور ده) لیکل کیږي.

بیلگه: لرو  $I = \int \sqrt{-3x+5} \, dx$

بدلون:  $-3x + 5 = u$

را بیلیدنه:  $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

$$I = \int \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) du = -\frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9} \cdot \sqrt{(-3x+5)^3} + C.$$

$$b) I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx.$$

$$-2x - 3 = u, \quad \Rightarrow \quad -2 = \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{1}{2} du,$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4} \int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C.$$

$$c) I = \int \frac{2dx}{x+2}.$$

$$x+2 = u, \quad 1 = \frac{du}{dx} \quad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln|u| + C = 2 \ln|x+2| + C.$$

د بنسټيزو انتیگرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱. ۱) متحولې  $x$  یواځې په جگ یا مټ د دوه منځ ته راځي. له دې امله داسې انتیگرال، کومو کی چی د  $x^2$  په ځای لایني ترم (Term) پروت دی، کیدی شي چی د لایني بدلولو له لارې په بنسټيز انتیگرالو ۱۰ او ۱۱ بیرته وارول شي. ډیروخت یو د فورم بدلون ته هم اړتیا موجود وي، چی د انتیگراند فورم ته راشو.

بیلگه 5.2:

$$a) I = \int \frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2 = (\sqrt{2}x)^2, \quad d \cdot h \cdot I = \int \frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x = u, \quad \sqrt{2} = \frac{du}{dx} \quad dx = \frac{1}{\sqrt{2}} du,$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arctan } u + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arctan}(\sqrt{2}x) + C.$$

$$b) I = \int \frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2 = 9(1-4x^2) = 9(1-(2x)^2), \quad d \cdot h \cdot$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$



$$2x = u, \quad 2 = \frac{du}{dx} \quad dx = \frac{1}{2} du$$

$$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{6} \operatorname{Arcsin} u + C = \frac{1}{6} \operatorname{Arcsin}(2x) + C.$$

اینٹیگریشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لایني نه وي، نو د اینٹیگراند دوم فاکتور (تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سړی بنسټیز اینٹیگرال ته راشي. دلته هم سړی بیا دنننی تابع په نوې متحولې یا واریابلی بدلوي.

بیلگه 6.21: الف:

$$I = \int 4x\sqrt{x^2-1} dx$$

بدلون:  $u = x^2 - 1 = u$  مشتق  $2x = du/dx$  دی، همداسې لرو:  $x dx = 1/2 du$

$$I = \int 4\sqrt{u} \cdot 1/2 du = 2 \int u^{1/2} du = 2 \cdot 2/3 u^{3/2} + C = 4/3 \sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

$$I = \int \sin^3 x \cdot \cos x dx \quad (\text{ب})$$

بدلون:  $\sin x = u$  را بیل شوي  $\cos x = du/dx$  همداسې  $\cos x dx$

$$I = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4$$

$$\text{c) } I = \int \frac{1}{x} \cdot \ln^2 x dx$$

$$\ln x = u, \quad \frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \quad \frac{1}{x} dx = du,$$

$$I = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} \ln^3 x + C$$

$$\text{d) } I = \int \tan x dx.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d \cdot h. \quad I = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x \, dx,$$

$$\cos x = u, \quad -\sin x = \frac{du}{dx} \quad \sin x \, dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u} \, du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

$$e) \quad I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3} \, dx.$$

$$2 - x^3 = u, \quad -3x^2 = \frac{du}{dx} \quad x^2 \, dx = -\frac{1}{3} \, du,$$

$$I = -\frac{1}{3} \int_0^1 \frac{2 \, du}{u} = -\frac{2}{3} \ln|u| \Big|_0^1 = -\frac{2}{3} \ln|2-x^3| \Big|_0^1 = -\frac{2}{3} (\ln 1 - \ln 2) = \frac{2}{3} \ln 2.$$

۲۱ د بدلونقاعده ( ۲۱ . ۱۳ ) دې په چپه ( یعنی د بنی وکین) لور هم استعمال شي .  
 اینتیگرال  $f(x) \, dx$  کیدی شي چی په بل وارول شي چی  $x$  په یو مناسب بلواک (  $t$  ) بدل شي ( ۲۱ . ۱۴ )  
 دا:  $f(x) \, dx = f[g(t)] \cdot g'(t) \, dt.$   
 افاده « مناسب » بلواک دې دلته داسی وپوهیدی شي چی سری د بدلون وروسته یو ساده او ممکن یو بنسټیز اینتیگرال لاس ته راوړي. د ( ۲۱ . ۱۴ ) استعمال په قاعده کی داسی دی چی په یوه بلواک  $f(x)$  کی موجود « پیچلی » ترم  $h(x)$  د  $t = h(x)$  ( په بدلون له منځ څخه وړي او بیا ) که ممکن وي ( د  $x$  په لوری حلوي

$$x = g(t) = h^{-1}(t)$$

بیلگه 7.21: الف:

$$a) \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$\sqrt{x-1} = t, \quad x; \quad x = (t+1)^2, \quad dx = 2(t+1) \, dt :$$

$$I = \int \frac{2(t+1)}{t} dt = 2 \cdot \left[ \int 1 dt + \int \frac{1}{t} dt \right] = 2(t + \ln|t|) + C = 2(\sqrt{x} - 1) + 2 \ln|\sqrt{x} - 1| + C$$

مناسب تابع، چې ورکړ شوی اینتگرال د دوه ایتکوالو جمعی ته بیایي، دلته

$$x = g(t) = (t+1)^2 \text{ وو.}$$

$$\text{b) } I = \int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}.$$

$$\sin x \cdot \cos^3 x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^4 x = \tan x \cdot \cos^4 x.$$

نو لرو:

$$I = \int \frac{dx}{\tan x \cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx,$$

$$\tan x = t, \quad \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt,$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2 \cdot \sqrt{\tan x} + C.$$

توابع، چې بی د بدلون له لارې حل کیري لکه لاندې بلگه:

بیلگه:

عوارو د  $f(x) = e^x$  مشتق پیدا کرو. دا مشتق په ساده ډول پیدا کولی شو، یعنی لرو:

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^x dx = e^x + C$$

گورو، چې  $F'(x) = e^x = f(x)$  دی.

که ولرو:  $f(x) = e^{2x}$  او د پورته په څېر لار شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx \neq e^{2x} + C$$

$$F(x) = e^{2x} + C \text{ که دی، } F'(x) = 2e^{2x} \neq f(x) \text{ وي}$$

له دې امله د بدلون قانون ته اړیو:

بیلگه:

د  $f(x) = e^{2x}$  تابع انتیگرال ونیسی

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = ?$$

بدلون:  $u(x) = 2x = u$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\int f(x) dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C$$

$$\frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C \text{ د بدلون برعکس:}$$

$$F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C \text{ نو لرو:}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} = f(x) \text{ ازماینت:}$$

بیلگه:

وښایې چې باور

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x+1)^2 dx \text{ لري.}$$

$$u(x) = x+1 = u \text{ بدلون}$$

جوړ کړی

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

بیرته- یا په څټ بدلون:  $\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C$

$$\int (x)dx = \int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^2}{3} + C \text{ نو:}$$

بیلگه :  
و ښایي چې باور لري:

$$f(x) = (3x + 6)^3 \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int (3x + 6)^3 dx$$

بدلون:  $u(x) = 3x + 6 = u$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

$$\int f(x)dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^3 du = \frac{u^4}{12} + C$$

بیرته بدلون:  $\frac{u^4}{12} (3x + 6)^4 + C$

$$\int (x)dx = \int (3x + 6)^3 dx = \frac{1}{12} (3x + 6)^4 + C \text{ نو لرو:}$$

بیلگه :

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = ?$$

بدلون :  $u(x) = x^2 = u$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

جوړوو:

$$\int f(x) dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int \ln(u) du = \frac{1}{2} [u \cdot \ln(u) - u + C] = \frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C$$

$$: \frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C$$

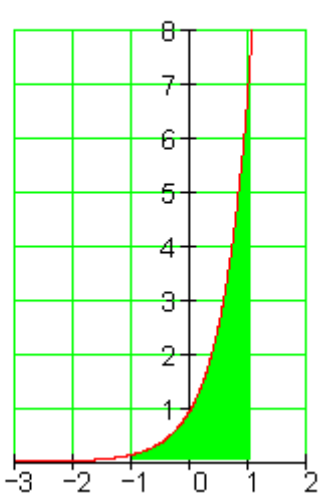
بیرته بدلون:

$$\int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C}}$$

نولرو:

د ټاکلو انتیگرالونو حل د بدلون له لارې:

ټاکلی انتیگرالونه هم د بدلون له لارې حل کیري.

<p><math>f(x) := e^{2 \cdot x}</math></p> 	<p>بیلگه: وینایاست:</p> $f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^1 e^{2x} dx$ <p>د انتیگرال حل د بدلون له لارې:</p> <p>۱ - بدلون <math>u(x) = 2x</math></p> <p>۲ - د <math>dx</math> په ځای کیردی</p> $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$ <p>۳ - د پولو بدلون</p> <p>- لاندې پوله <math>u(-1) = -2</math></p> <p>- پورته پوله <math>u(1) = 2</math></p> <p>۴ - په انتیگرال کې څا په ځای کړی</p> $\frac{1}{2} \int_{-2}^2 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_{-2}^2 = \frac{1}{2} [e^2 - e^{-2}] = \underline{\underline{3.627}}$
---	---

بیلگه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2) dx$$

د انتیگرال حل د بدلون له لارې

$$۱ - بدلون  $u(x) = x^2$$$

۲ - د  $u$  په په  $x$  کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳ - د پولي بدلون

$$- \text{ لاندې پوله } u(1) = 1$$

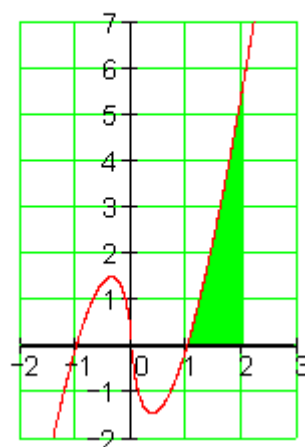
$$- \text{ پورته پوله } u(2) = 4$$

۴ - په انتیگرال کې  $u$  په  $x$  کړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u) du = [u \cdot \ln(u) - u]_1^4$$

$$= [4 \cdot \ln(4) - 4] - [1 \cdot \ln(1) - 1] \approx \underline{2.545}$$

$$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$$



بیلگه :

$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 & x < 2 \\ (e^2 - 2)e^{-(x-2)} & x \geq 2 \end{cases}$	د $x < 2$ له پاره د $x \geq 2$ له پاره
--	---

$$A = \underbrace{\int_1^2 (e^x - 2) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^4 (e^2 - 2) e^{-(x-2)} dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_1^2 (e^x - 2) dx = [e^x - 2x]_1^2 = e^2 - e - 2$$

$$I_2 = (e^2 - 2) \int_2^4 e^{-(x-2)} dx$$

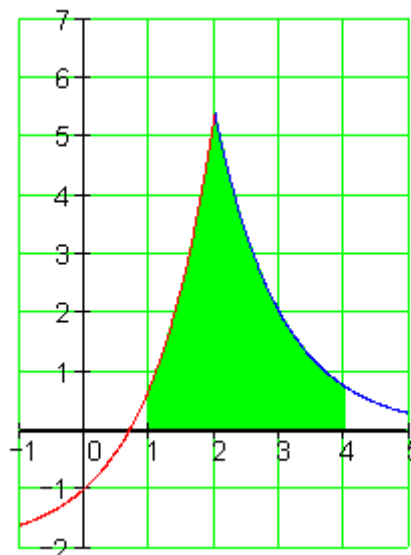
$$u(x) = -(x-2) = -x + 2$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du; u(2) = 0; u(4) = -2$$

$$I_2 = -(e^2 - 2) \int_0^{-2} e^u du = (e^2 - 2) \int_{-2}^0 e^u du$$

$$= (e^2 - 2) \cdot [e^u]_{-2}^0 = e^2 + 2e^{-2} - 3$$

$$I = I_1 + I_2 = e^2 - e - 2 + e^2 + 2e^{-2} - 3 = \underline{\underline{7,331}}$$



## توتیه انتیگرالونه Partialy Integration

توتیه انتیگرالونه، چې ضرب انتیگرالونه هم بلل کیږي، په انتیگرال شمیرنه کې د لومړنیو توابعو ټاکلو یا شمیرلو لپاره امکان دی. دا کېدی شي د مشتق شمیرني د برعکس کونې په څیر وگنل شي.



د توتیه انتیگرالونې له پاره لاندې قانون کارول کیږي، چې د متمدني (نه پرېکېدونکي) توابعو  $f$  او  $g$  له پاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

دا قانون ټیک هلته گټور دی، که  $f$  مشتق نیولو سره یو ساده تابع منځ ته راځي. پیل

د ضرب قانون (د ضرب مشتق نیونې) څخه لرو:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتیگرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$$

یا همدغسې، لکه په زیاتو ریاضي کتابونو کې چې پیدا کیږي.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره گټور دی، چې لومړی ځان په ناکلي انتیگرال محدود کړو، چې دا نا اړینو حدونو څخه چې لید مو رابندوي، ازاد یو.

بیلگه:

د بیلگې په توگه لاندې انتیگرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x) dx$$

یو ساده انتیگرالیدونکې تابع  $g'(x)$  او همداسې یو ساده مستقیمې دونکې تابع  $f(x)$  لټوو. نیسو چې  $f(x) = \ln(x)$  او  $g'(x) = x$ ، ځکه چې د  $\ln(x)$  انتیگرالونه نوي  $\ln(x)$  راکوي. اوس د  $f(x)$  مشتق نیسو (مشتق کوو) او انتیگرالوو، نو لرو:

$$g(x) = \frac{x^2}{2} \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

$$\int x \cdot \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکبڼه:

اوس دی  $u$  او  $v$  په خوښه توابع وي.  $U$  او  $V$  دې د  $u$  او  $V$  لومړني توابع وي، او همداسې دې  $u'$  او  $v'$  د  $u$  او  $v$  مشتقونه وي.  $u$  تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري،  $v$  تابع ده چې د انتیگرالونې له پاره لومړیتوب لري. نو باورلري:

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x) \cdot v(x) dx &= u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x) dx \\ &= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x) dx \end{aligned}$$

د ټوټه انتیگرالونې لار (طریقه)

د ټوټه انتیگرالونې گټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلگه: کله کله کېدی شي گټور وي، چې د مساوات بنی لور ته ټوټه انتیگرال د څو واره انتیگرالونې وروسته بېرته راوگرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کین لور انتیگرال سره یوځای کولی شي.

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx$$

که کېږدو  $f(x) = \cos(x)$  او  $g'(x) = \sin(x)$ ، نو ترې لرو:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx.$$

که دواړو لورو ته وتون انتیگرال ورزیات کړو، نو راځي:

$$2 \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = -\cos^2(x)$$

که واره لورې په 2 ووېشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$+ C \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = -\frac{1}{2} \cdot \cos^2(x)$$

بیلگه ۲ :

د ځنو انتیگرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د  $g'(x)$  له پاره یو ترم وټاکو چې په انتیگرالونې کې هېڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بېلگې په توگه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کېدی شي دا بل ترم ،، له منځه یووړل شي،،.

$$\int e^x \cdot (2 - x^2) dx$$

که هر ځل  $g'(x) = e^x$  کېږدو او د  $f(x)$  له پاره، د انتیگرال لاندې ترم ، نو ترې لاس ته راځي:

.

$$\begin{aligned}
 \int e^x \cdot (2 - x^2) dx &= [e^x \cdot (2 - x^2)] - \int e^x \cdot (-2x) dx \\
 &= [e^x \cdot (2 - x^2)] + [e^x \cdot 2x] - \int 2 \cdot e^x dx \\
 &= [e^x \cdot (2 - x^2)] + [e^x \cdot 2x] - [2 \cdot e^x] \\
 &= [e^x \cdot (2 - x^2 + 2x - 2)] \\
 &= [e^x \cdot (2x - x^2)] + C
 \end{aligned}$$

بیلگه ۳ :

که تر انتیگرال لاندې فقط یو ترم ولرو، چې د هغه لومړنۍ تابع بی له جدول ارزښت څخه پاي ته نه رسیري (نه پایول کیري) (نه ختمیري) کېدی شي کله د ورزیاتونې له لارې (ناڅرگند شته) ضریب "1" توتېه انتیگرال شي.

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx = \int g'(x) \cdot \ln(x) dx$$

که  $f(x) = \ln(x)$  او  $g'(x) = 1$  کیردو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\begin{aligned}
 \int 1 \cdot \ln(x) dx &= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= x \cdot \ln(x) - \int 1 dx \\
 &= x \cdot \ln(x) - x + C
 \end{aligned}$$

$$\int x \cos(x) dx$$

جمله : مور د دې لاندې انتیگرال نیسو:

ردو  $u = x$  ، نو لرو :  $du = dx$

ردو  $dv = \cos(x) dx$  ، نو  $v = \sin(x)$  لرو

په لاندې توگه مخ ته څو:

$$\begin{aligned}
 \int x \cos(x) dx &= \int u dv \\
 &= uv - \int v du
 \end{aligned}$$

$$= x \sin(x) - \int \sin(x) dx$$

$$= x \sin(x) + \cos(x) + C.$$

C د انتیگرالونې یوه په خوبه ثابتې ده

د ټوټه انتیگرالونې د استعمال سره د انتیگرالونو لکه

$$\int x^2 e^x dx \text{ او } \int x^3 \sin(x) dx$$

کیده شي په همدې لار حل شي:

یوه په زړه پورې بیلگه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x) dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولري.

دا بیلگه د دوه واړه ټوټه انتیگرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی :  $u = \cos(x)$  داسې چې  $du = -\sin(x) dx$

$$v = e^x \text{ داسې چې } dv = e^x dx$$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیگرال حل شي، نو د ټوټه انتیگرالونې قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$$u = \sin(x); du = \cos(x) dx$$

$$v = e^x; dv = e^x dx$$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته زاڅي:

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیگرال لرو (بي له مخ نڅينې)، نو د بڼي لور انتیگرال که کين لور ته یوسو، لاس ته ترې راڅي:

$$2 \int e^x \cos(x) dx = e^x (\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x (\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیگرالونې یوه په خوښه ثابتې ده

د ټوټه راشنل کسرونو انتیگرال

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x} \quad \text{د انتیگرال نیول}$$

نیول تر واده ورسره بلده لار شونې دی، که څنگه؟

بیلگه :

$$\int \left[ \frac{7x-12}{x^2-6x+8} \right] dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفرځایونو  $x_1 = -2$  او  $x_2 = -4$  سره د کرښیزو توابعو په ضریبونو تجزیه کیږي:

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه ونې له پاره لاندې پیل کوو:

$$\int \left[ \frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)} \right] dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعی له پاره په اصلي مخرج ورغزیري او لاس ته ترې راځي:

$$\frac{[A(x-4) + B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[Ax-4A + Bx-2B]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[(A+B)x - 4A-2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضربونو د پرتلي څخه لاس ته راځي، چې د  $x$  له مخه یعنې کین لور ته  $(A+B)$  افاده باید پرته وي

$$7x-12 = (A+B)x \quad \text{او} \quad (-4A-2B) \quad \text{، چې} \quad ۱۲ - \text{ورکوي (وټون مساوات وگورئ):} \quad 7x-12 = (A+B)x$$

له دې څخه لاندې مساواتسیستم لاس ته راځي:

$$7 = A + B$$

$$-12 = -4A - 2B$$

بدلون یې د  $A$  او  $B$  پسې :  $A = (7-B)$

$$-12 = -4(7-B) - 2B$$

$$-12 = -28 + 4B - 2B \quad | +28$$

$$+16 = 2B$$

$$B = 8$$

$$A = (7-8) = -1$$

لیکلی شو :

$$\int \left[ \frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)} \right] dx = \int \left[ \frac{-1}{(x-2)} \right] dx = \int \left[ \frac{8}{(x-4)} \right] dx$$

لومړني تابع جوړه کړی:  $F(x) = \ln x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$  . دا چې طبیعي لوگایتم فقط له مثبت اعدادو شمېرل کیږي، نو یواځې ازبنتونه نیسو.

$$\int \left[ \frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)} \right] dx = -1 \ln |x-2| + 8 \ln |x-4| + c$$

نا اصلي ماتراشنل توابع باید لومړی په پول راشنل تابع او اصلي مات راشنلمبع ټرټه شي. دا د ټوټه کسرونو ټوټه کوونې له لارې کيږي يا صورت نيسي. بیلگه :

$$\int \left[ \frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)} \right] dx$$

په مخرجکي مربع تابع په صفرځایونو  $x_1 = -2$  او  $x_2 = +3$  کي په کنبیزو فاکتورونو تحزیه کيږي :

$$x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه کونې له پاره اصلي مخرج غزوو او بیا يي ضربوو :

$$\int \left[ \frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)} \right] dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعي له پاره په اصلي مخرج غزیزو او بیا سره ضربیږي:

$$\frac{[A(x+3) + B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A + Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x + 3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضربیونو پرتلې کونې له امله، چې د  $x$  ترمخه یعنی کين لور ته له  $(A+B)$  افادې څخه باید اوه لاس ته راشي او  $(+3A-2B)$  او یا ورته ۱۲ (وتونمساوات وگورئ):

$$-5x+9 = (A+B)x + (3A-2B)$$

لاندې مساواتسیستم لاس ته راځي:

$$-5 = A + B$$

$$9 = 3A - 2B$$

د  $A$  او  $B$  پسې يې حل کړئ:

$$9 = 3(-5-B) - 2B$$

$$9 = -15 - 3B - 2B + 15$$

$$24 = -5B \quad | :(-5)$$

$$\underline{B = -4.8}$$

$$\underline{A = (-5 + 4.8) = -0.2}$$

نو لیکلی شو :



$$\int \left[ \frac{-5x+9}{x^2+x-6} \right] dx = \int \left[ \frac{-0.2}{x-2} \right] dx + \int \left[ \frac{-4.8}{x+6} \right] dx$$

لومړی تابع جوړ کړی :

$$F(x) = \ln x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

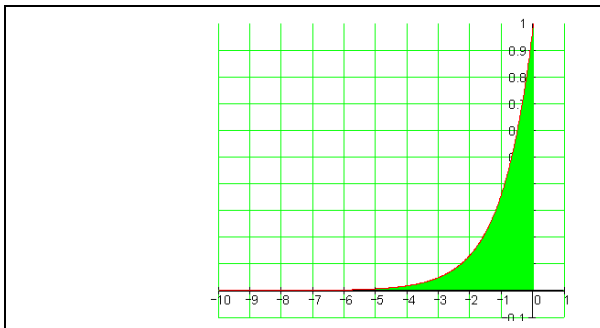
دا چې طبیعي لوگاریتم فقط له طبیعي اعدادو شمیرل کېدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نیسو.

$$\int \left[ \frac{-5x+9}{x^2+x-6} \right] dx = -0.2 \ln |x-2| - 4.8 \ln |x+3| + C$$

### ناپايي (مبھوم) انتیگرال

تعریف : که په یوه ټاکلي انتیگرال کې لږ تر لږه یو حد د مثبت یا منفي ناپايي لور ته لاړشي یا د انتیگرال ساحه ناپايي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپايي انتیگرال څخه غږیږو. په یوه مناسب ډول ناپايي انتیگرال د عادي انتیگرال د حد په څېر تعریفیږي. په دې توګه په زړه پورې پوهېدنې لاس ته راځي د بېلګې په توګه، چې څنګه د منفي تواند پوټنڅ د ګراف لاندې ناپايي ته رسېدونکې په زړه پورې سطحې. نو باور لري

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \quad \text{او} \quad \int_1^{\infty} x^{-2} dx = 1$$



هم او د دې معکوس انتیګرالونه

$$\int_1^{\infty} x^{-1} dx$$

$$\int_0^1 x^{-1} dx$$

حدونو اوږي

یعني د ناپايی په لور ځي..

د  $f(x) = e^x$  ګراف او  $x$ -محور ترمنځ دې په انټروال  $(-\infty; 0]$  کې ټوله سطحه و شمیرل شي، یعنی

$$A = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx$$

تراوسه د یوه ټاکلي انتیگرال د پورته همداسي کښته (لاندې) پولې عددونه وو. د انتیگرالونې ورشو یا ساحه محدود وه. په دې حالت کې یا اوس د انتیگرالولو ورشو محدوده نه ده، داسي انتیگرال یو نامحدود انتیگرال بولو، د انتیگرالونې نامحدودې ورشو سره. انتیگرالونه د دې لاندې څخه په یوې بڼې منځ ته راځي:

$\int_a^{\infty} f(x) dx$	$\int_{-\infty}^b f(x) dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$
---------------------------	----------------------------	-----------------------------------

د دې انتیگرال شمیرني له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

لومړی د یوه پای انتروال  $[a; b]$  له پاره انتیگرال  $\int_a^b f(x) dx$  شمېرو، بیا پسي د ورته افادو  $a \rightarrow -\infty$  یا  $a \rightarrow \infty$  همداسي،  $b \rightarrow -\infty$  یا  $b \rightarrow \infty$  له پاره پولې جوړوو.

فورمال دا په لاندې ډول برېښي:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx$$

زموږ د سطحې شمېرلو له پاره دا په لاندې ډول برېښي:

$$f(x) = e^x$$

$$A = \int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^x]_a^0$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^0 - e^a] = \lim_{a \rightarrow -\infty} \underbrace{e^0}_1 - \lim_{a \rightarrow -\infty} \underbrace{e^a}_0 = 1$$

بیلگه:

دا د  $y$  په محور هنداره شوي د  $e$  تابع دي د  $f(x) = e^{-x}$  سره په انټروال  $[0, \infty)$  کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

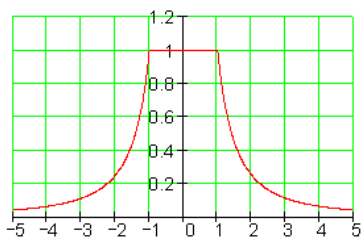
$$u(0) = 0; u(b) = -b$$

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{-b} e^u \frac{du}{-1} &= - \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{-b} e^u du = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^0 e^u du \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [e^u]_{-b}^0 = \lim_{b \rightarrow \infty} [e^0 - e^{-b}] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} e^0 - \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

بیلگه:

د یوه یوځای ایښول شوي یا یو ځای شوي تابع بیلگه لرو:

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ 1 \\ \frac{1}{x^2} \end{cases}$	د $x < -1$ لپاره
	د $-1 \leq x \leq 1$ لپاره
	د $x > 1$ لپاره
$A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	



د انتیگرال په برخو وېشنه یا ټوټه کونه:  
لاندې د انتیگرالونو تمعه دي و شمیرل شي.

$$A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx + \int_{-1}^1 dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

لومړنی اند یا تر مخه فکرکونه:

د تناظر دلایلو له مخې لرو:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

داسې، چې دا انتیگرال باید فقط یوځل وشمیرل شي.

$$\int_{-1}^1 dx = [x]_{-1}^1 = [1] - [-1] = 1 + 1 = 2$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{b} \right] - \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{1} \right] = 0 - (-1) = 1$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx}_1 + \underbrace{\int_{-1}^1 dx}_2 + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx}_1 = 1 + 2 + 1 = 4$$

ټولگه

د انتیگرال هندسي تعريف

لوریزه سطحه-د انتیگرال تعريف: که یوه  $f$  تابع ولرو، نو د  $x$  محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیگرال له لارې کېږي. په دې سطحه کې د  $x$  محور پورته لوري ته سطحه مثبتېه مخنځېنه لري او د  $x$  محور کښته لوري ته سطحه منفي مخنځېنه لري.

تحليلي تعريف: د  $f$  یوه تابع ورکړ شوي، چې په یوه انتروال  $[a, b]$  باندې تعريف دی، نو د  $a$  څخه تر  $b$  پورې د تابع د انتیگرال څخه د  $x$  په محور د  $f$  د گراف او د کرښې  $x=a$  او  $x=b$  تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

پیژند (تعریف) ۴. ۱ : لیمیت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F; (\max \Delta x \rightarrow 0), \dots \dots (4,3)$$

که په اینتروال  $[a, b]$  کی موجود وي، نو دا د  $f(x)$  ټاکلی اینتیگرال بولو، یا

F- Riemann (د ریمن سطحه). دلته  $a$  د اینتیگراله ونې لاندې (کښته) پوله او  $b$  د اینتیگرالونې پورته پوله بلل کیږي او  $[a, b]$  د اینتیگرالونې اینتروال او  $f(x)$  (Integrand)  $x$  (اینتیگرالېدونکی) او  $x$  د اینتیگرالونې (Integrationsvariable) متحول بلل کیږي

جمله ۴. ۱ : که  $f(x)$  په  $[a, b]$  کې اینتیگرالور وي او  $c \in [a, b]$  وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

پیژند یا تعریف ۴. ۲ :  $f(x)$  په یوه بند انتروال  $[a, b]$  کې اینتیگرالور دی، نو باور

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{لري:}$$

پیژند تعریف 3.2: تابع  $y = f(x)$  دې په یوه واز اینتروال  $I$  کې تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقور  $F(x)$  تابع چې  $F'(x) = f(x)$  شرایط پوره کړي، د  $f(x)$  (بنسټیز-، ساده- یا لومړنی تابع بلل کیږي)

ټاکلی اینتیگرال:

که  $f$  یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل اینتیگرال  $\int_a^b f(x) dx$  (لوسټل: د  $f(x)$  اینتیگرال د  $a$  تر  $b$  او په پولو یا حدونو یا اینتیگرال په  $f(x)$  باندې له  $a$  تر  $b$ ) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږود او  $a$  او  $b$  تر منځ او د  $f$  گراف لاندې.

تعریف:

$f$  په انټروال  $a \leq x \leq b$  کې متمادي تابع ده او  $F$  د  $f$  لومړنی تابع ده، نو ټاکلی

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \quad \text{انتیگرال دی:}$$

د  $F(b) - F(a)$  لپاره زیات وخت  $[F(x)]_a^b$  لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

جمله:

د یوې ثابتې سره ضرب: که تابع  $f(x)$  په یوه اینټروال کې متمادي وي، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad a \in \mathbb{R}$$

جمله:

د جمعې (تفریق) قاعده که  $f_1(x)$  او  $f_2(x)$  په یوه اینټروال کې نه پریکېدونکي وي، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

جمله:

د بدلون (قاعده)،، (Substitution) لاتین: د یوه ارزښت په ځای د همغه ارزښت بله لویه ایښوول، لاندې بدلون (د نیونو لاندې چې  $u = g(x)$  متمادي او مشتقور دی او  $y = f(u)$  متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

د ضربونو انتیگرالونه

که د دوه توابعو د ضرب انتیگرال د ورسره بلدو متودونو یا لارو شمېرو، نو زیات وخت دا ناشوني وي.

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = ?$$

بدلون Substitution

د ناټاکلي انتیگرال حل د بدلون له لارې (ننوتنه راځي)

تراوسه پورې مو فقط د انتیگرالونه او جملې حل کړي، چې د لومړنیو توابعو په انتیگرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتیگرالونو د نورو انتیگرالولو حل جملې راکوي. د لومړنی انتیگرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې گوته ورته نیول کيږي.

جمله ۲ . ۶ : د ،، بدلون (قاعده) ،، ( Substitution لاتین : د یوه ارزښت په ځای د همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لنډ: بدلون ) د نیونو لاندې چې  $u = g(x)$  متمادي او مشتقوردی او  $y = f(u)$  متمادي، نو باور لري: ( کتاب کنل که لاندی بی د انتیگرال له نخبې)

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(u)du$$

حل : د ( ۲۱ . ۱۳ ) د بني اړخ مشتق د ځنځیرقاعدي ( جمله ۲ . ۶ ) له مخی داسی دی

$$\frac{d}{dx} \int f(u) du = \frac{d}{du} \int f(u) du \cdot \frac{du}{dx} = f(u) \cdot u' = f[g(x)] \cdot g'(x),$$

دا د کین اړخ د رابیلیدنی سره سر خوري ( ۲۱ . ۱۳ ) قاعده د ضرب اینتگرالېدو ( اینتگریشن ) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور ځنځیری بلواک  $f[g(x)]$  وي

او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق  $g'(x)$  وي. سری د دننه تابع لپاره متحولی یا واریابل بدلوي یا خای په خای کوي  $u = g(x)$ : جوړوي  $du / dx = g'(x)$  په همدې ډول  $du = g'(x) dx$

د بريالي ایتگرالېدو (اینټیکریشن) کیدو ورسته بدلون بیرته راگرځول کيږي.

بیلگه ۲۱. ۳: a

$$I = \int 2\cos(2x-1) dx \quad \text{لرو}$$

بدلون یا په خای کونه:  $2x-1 = u$

مشتق  $2 = du/dx$  همداسی  $2dx = du$

$$I = \int \cos u \, du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بیلگه ۲۱. ۳: b لرو  $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو:  $2x = u-1$ , کشتق  $2 = du/dx$  همداسی  $dx = (1/2) du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{3}{2} \int \cos u \, du = \frac{3}{2} \sin(2x-1) + C$$

ومولیدل چی خنځيري تابع د لایني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینټیگرال کیدی شي، ځکه چی د لایني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د جملی ۲۱. ۴ سره سم د اینټیگرال تر مخ (موخه کین لور ده) لیکل کيږي.

بیلگه 4.2: لرو  $I = \int \sqrt{-3x+5} \, dx$

بدلون:  $-3x+5 = u$

را بیلیدنه:  $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$



$$I = \int \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) du = -\frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9} \cdot \sqrt{(-3x+5)^3} + C.$$

$$\text{b) } I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx.$$

$$-2x - 3 = u, \quad -2 = \frac{du}{dx} \quad dx = -\frac{1}{2} du,$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4} \int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C.$$

$$\text{c) } I = \int \frac{2dx}{x+2}.$$

$$x + 2 = u, \quad 1 = \frac{du}{dx} \quad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln|u| + C = 2 \ln|x+2| + C.$$

بیلگه:

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^x dx = e^x + C$$

**ځکه چې**  $F'(x) = e^x = f(x)$

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx \neq e^{2x} + C$$

**مگر:**

**ځکه چې**  $F'(x) = 2e^{2x} \neq f(x)$  **که**  $F(x) = e^{2x} + C$  **وی.**

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

بیلگه: د  $f(x) = e^{2x}$  تابع انتیگرال ونیسی

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = ?$$

$$u(x) = 2x = u \quad \text{بدلون:}$$

$$\therefore u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2} \quad \text{جوړ کړی:}$$

$$\int f(x) dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C$$

$$\frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C \quad \text{د بدلون برعکس:}$$

$$\therefore F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C \quad \text{نو:}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} = f(x) \quad \text{ازماینت:}$$

بیلکه:

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x+1)^2 dx = ? \quad \text{وښایی چې}$$

باور لري

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x+1)^2 dx = ?$$

$$u(x) = x+1 = u \quad \text{بدلون:}$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{1} \quad \text{جوړ کړی:}$$

$$\int f(x) dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

$$\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

بیرته - یا په څټ بدلون:

$$\int f(x) dx = \int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

نو:

بیلگه:

$$f(x) = (3x+6)^3 \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (3x+6)^3 dx = ?$$

$$u(x) = 3x+6 = u \quad \text{بدلون:}$$

$$\Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

جوړوو:

$$\int f(x) dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^3 du = \frac{u^4}{12} + C$$

$$\frac{u^4}{12} + C = \frac{1}{12} (3x+6)^4 + C$$

بیرته بدلون:

$$\int f(x) dx = \int (3x+6)^3 dx = \frac{1}{12} (3x+6)^4 + C$$

نو لرو:

بیلگه:

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = ?$$

$$u(x) = x^2 = u \quad \text{بدلون :}$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du \quad \text{جوړوو:}$$

$$\int f(x) dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int \ln(u) du = \frac{1}{2} [u \cdot \ln(u) - u + C] = \frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C$$

$$: \frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C \quad \text{بیرته بدلون:}$$

$$\int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C}} \quad \text{نولرو:}$$

د ټاکلو انتیگرالونو حل د بدلون له لارې

ټاکلي انتیگرالونه هم د بدلون له لارې حل کېږي.

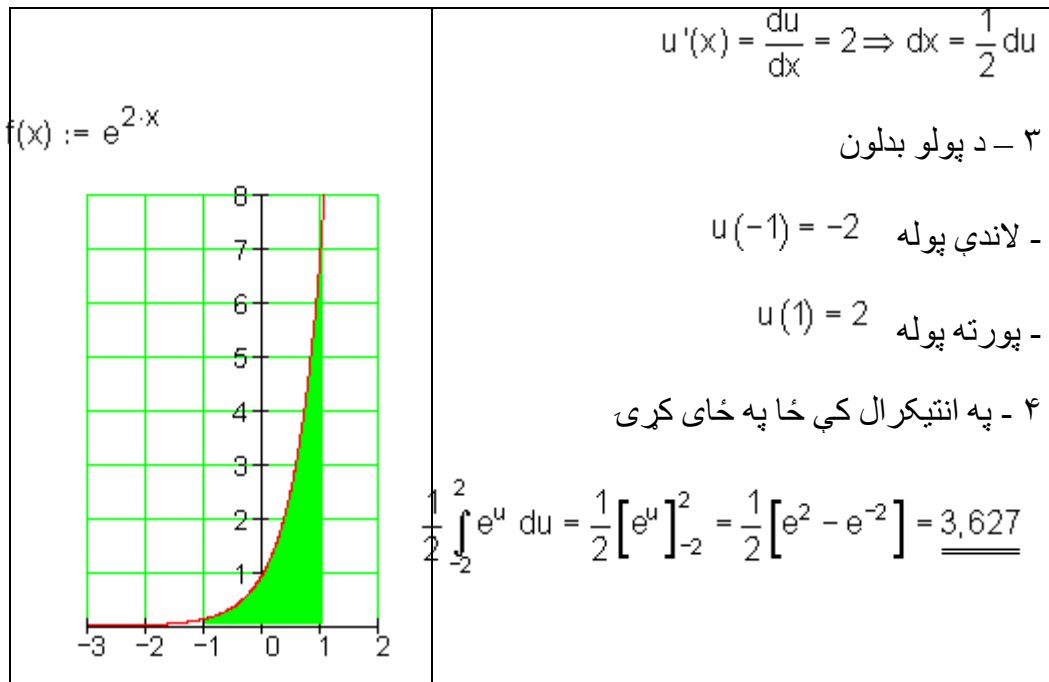
بیلگه :

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^1 e^{2x} dx$$

د انتیگرال حل د بدلون له لارې:

$$u(x) = 2x \quad \text{۱ - بدلون}$$

۲ - د  $dx$  په ځای کېږدی



بیلگه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int 2x \cdot \ln(x^2) dx$$

د انتیگرال حل د بدلون له لارې

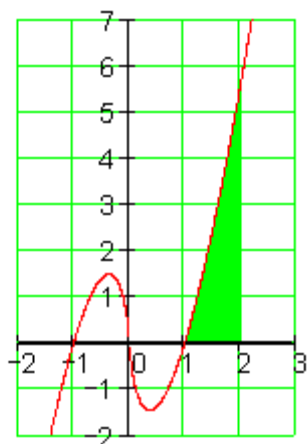
$$u(x) = x^2 \quad \text{۱- بدلون}$$

۲- د ځای په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳- د پولې بدلون

$$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$$



$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int_1^x 2x \cdot \ln(x^2) dx$$

د انتیگرال حل د بدلون له لارې

$$u(x) = x^2 \quad ۱ - بدلون$$

۲ - د خای په خای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳ - د پولې بدلون

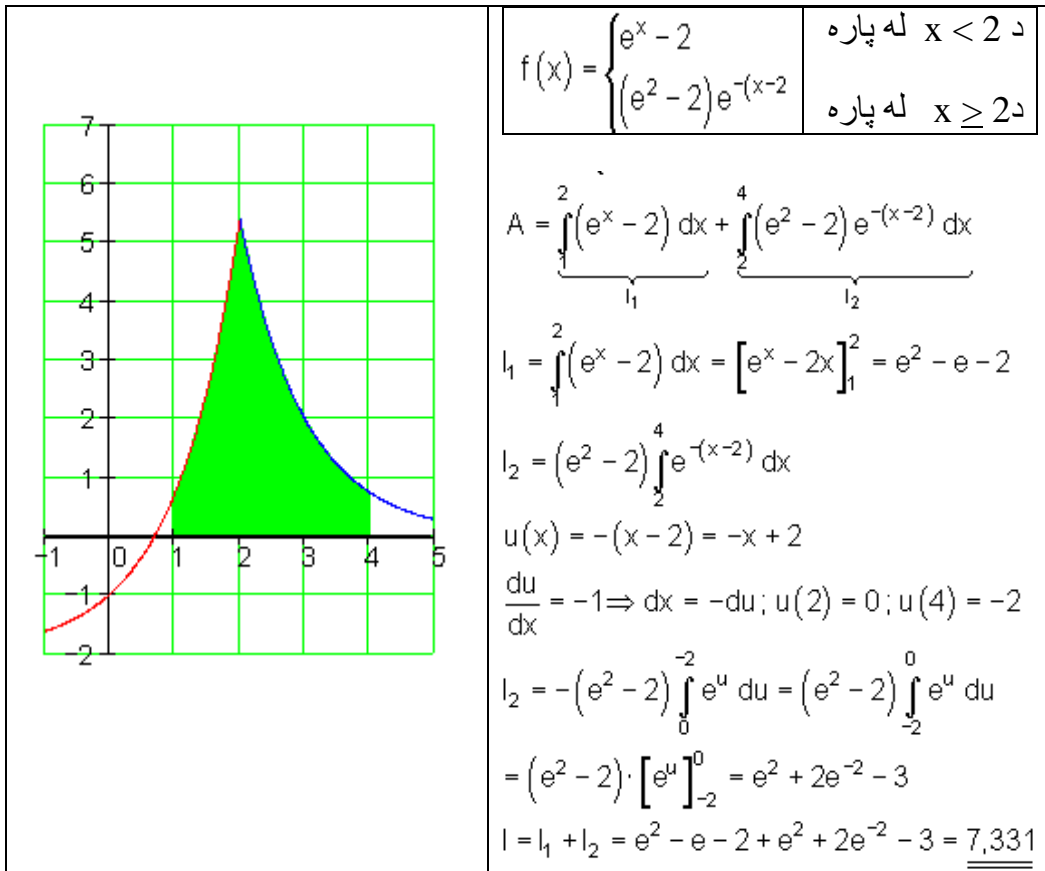
$$u(1) = 1 \quad - \text{لاندې پوله}$$

$$u(2) = 4 \quad - \text{پورته پوله}$$

۴ - په انتیگرال کې خای په خایکړی

$$\begin{aligned} \int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du &= \int_1^4 \ln(u) du = [u \cdot \ln(u) - u]_1^4 \\ &= [4 \cdot \ln(4) - 4] - [1 \cdot \ln(1) - 1] \approx \underline{\underline{2,545}} \end{aligned}$$

بیلگه :



جمله ۲ . ۶:

د ،، بدلون،، (Substitution) لاتین: د یوه ارزښت په ځای د هماغه ارزښت بله لویه ایښوول، لاند: بدلون) قاعده: د نیونو لاندې چې  $u = g(x)$  متمادي (نه پریکړدونکی) او د مشتق قابلیت لري او  $y = f(u)$  متمادي دی، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(u)du$$

حل: د (۲ . ۱۳) د بنی اړخ مشتق د ځنځیر قاعدې (جمله ۲ . ۶) له مخی داسی دی

$$\frac{d}{dx} \int f(u) du = \frac{d}{du} \int f(u) du \cdot \frac{du}{dx} = f(u) \cdot u' = f[g(x)] \cdot g'(x),$$

دا د کین اړخ د رابیلیدنی سره سره خوري ( ۲۱. ۱۳ ) قاعده د ضرب اینتگرالېدو ( اینتگریشن ) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور خنخیري بلواک  $f [ g ( x ) ]$  وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق  $g' ( x )$  وي. سری د دننه تابع لپاره متحولی یا واریابل بدلوي یا خای په خای کوي  $u = g ( x )$  : جوړوي  $du / dx = g' ( x )$  په همدې ډول  $du = g' ( x ) dx$

د بریالی اینتگرالېدو ( اینتگریشن ) کیدو ورسته بدلون بیرته راگرخول کیري.

$$I = \int 2 \cos(2x - 1) dx \quad \text{لرو : a ( ۲۱ . ۳ )}$$

بدلون یا په خای کونه:  $2x - 1 = u$

مشتق  $2 dx = du$  همداسی  $2 = du / dx$

$$I = \int \cos u du = \sin u + C = \sin(2x - 1) + C$$

$$I = \int 3 \cos(2x + 1) dx \quad \text{لرو : b ( ۲۱ . ۳ )}$$

بدلوو :  $2x = u - 1$  , کشتق  $2 = du / dx$  همداسی  $dx = (1/2) du$

$$I = \int 3 \cos u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{3}{2} \int \cos u du = \frac{3}{2} \sin(2x - 1) + C$$

ومولیدل چی خنخیري تابع د لایني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتگرال کیدی شي، خکه چی د لایني تابع مشتق ثابت دی او ثابت فاکتور د **جملی ۲ . ۴** سره سم د اینتگرال تر مخ ( موخه کین لور ده ) لیکل کیري.

د بنسټیزو اینتگرالو سره ۱۰ او ۱۱ ) جدول ۲۱ . ۱ ( متحولی  $x$  یواځي په جگ یا مټ د دوه منخ ته راځي. له دې امله داسی اینتگرال، کومو کی چی د  $x^2$  په خای لایني ترم



(Term) پروت دی، کیدی شي چی د لایني بدلولو له لارې په بنسټیز اینتیگرالو ۱۰ او ۱۱ بیرته وارول شي. ډیروخت یو د فورم بدلون ته هم اړتیا موجود وي، چی د اینتیگراند فورم ته راشو.

بیلگه 5.2:

$$a) I = \int \frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2 = (\sqrt{2}x)^2, \quad d \cdot h \cdot I = \int \frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x = u, \quad \sqrt{2} = \frac{du}{dx} \quad dx = \frac{1}{\sqrt{2}} du,$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arctan } u + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arctan}(\sqrt{2}x) + C.$$

$$b) I = \int \frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2 = 9(1-4x^2) = 9(1-(2x)^2), \quad d \cdot h \cdot$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

$$2x = u, \quad 2 = \frac{du}{dx} \quad dx = \frac{1}{2} du$$

$$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{6} \text{Arcsin } u + C = \frac{1}{6} \text{Arcsin}(2x) + C.$$

اینټیگریشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لایني نه وي، نو د اینټیگراند دوم فاکتور (تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سری بنسټیز اینټیگرال ته راشي. دلته هم سری بیا دنننی تابع په نوي متحولي یا واریابلی بدلوي.

بیلگه 6.21 الف:  $I = 4x\sqrt{x^2 - 1} dx$

بدلون:  $u = x^2 - 1 = u$  مشتق  $2x = du/dx$  دی، همداسی لرو:  $x dx = \frac{1}{2} du$

$$I = \int 4\sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} du = 2 \int u^{1/2} du = 2 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{4}{3} \sqrt{(x^2 - 1)^3} + C$$

ب)  $I = \int \sin^3 x \cdot \cos x dx$

بدلون:  $\sin x = u$  را بیل شوی  $\cos x = du/dx$  همداسی  $\cos x dx$

$$I = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x$$

c)  $I = \int \frac{1}{x} \cdot \ln^2 x dx$

$$\ln x = u, \quad \frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \quad \frac{1}{x} dx = du,$$

$$I = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} \ln^3 x + C$$

d)  $I = \int \tan x dx.$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d \cdot h. \quad I = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x dx,$$

$$\cos x = u, \quad -\sin x = \frac{du}{dx} \quad \sin x dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

e)  $I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3} dx.$

$$2 - x^3 = u, \quad -3x^2 = \frac{du}{dx} \quad x^2 dx = -\frac{1}{3} du,$$

$$I = -\frac{1}{3} \int_0^1 \frac{2du}{u} = -\frac{2}{3} \ln|u| \Big|_0^1 = -\frac{2}{3} \ln|2-x^3| \Big|_0^1 = -\frac{2}{3} (\ln 1 - \ln 2) = \frac{2}{3} \ln 2.$$

۲۱ د بدلونقاعده ( ۲۱ . ۱۳ ) دې په چپه ( یعنی د بنی وکین ) لور هم استعمال شي .  
 اینتیگرال  $f(x) dx$  کیدی شي چی په بل وارول شي چی  $x$  په یو مناسب بلواک (  $t$  ) بدل شي ( ۲۱ . ۱۴ )  
 دا:  $f(x) dx = f[g(t)] \cdot g'(t) dt$ .  
 افاده « مناسب » بلواک دې دلته داسی وپوهیدی شي چی سری د بدلون وروسته یو ساده او ممکن یو بنسټیز اینتیگرال لاس ته راوړي. د ( ۲۱ . ۱۴ ) استعمال په قاعده کی داسی دی چی په یوه بلواک  $f(x)$  کی موجود « پیچلی » ترم  $h(x)$  د  $t = h(x)$  په بدلون له منځ څخه وړي او بیا ( که ممکن وي ) د  $x$  په لوری حلوي

$$x = g(t) = h^{-1}(t)$$

بیلگه 7.21: الف:  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$  a)

$$\sqrt{x-1} = t, \quad x; x = (t+1)^2, \quad dx = 2(t+1)dt :$$

$$I = \int \frac{2(t+1)}{t} dt = 2 \cdot \left[ \int 1 dt + \int \frac{1}{t} dt \right] = 2(t + \ln|t|) + C = 2(\sqrt{x-1}) + 2 \ln|\sqrt{x-1}| + C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اینتیگرال د دوه ایتکوالو جمعی ته بیایي، دلته

$$x = g(t) = (t+1)^2 \text{ وو.}$$

$$b) I = \int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}$$

$$\sin x \cdot \cos^3 x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^4 x = \tan x \cdot \cos^4 x.$$

نو لرو:

$$I = \int \frac{dx}{\tan x \cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx,$$

$$\tan x = t, \quad \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt,$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2 \cdot \sqrt{\tan x} + C.$$

مور د دې لاندې انتیگرال نیسو:

ردو  $u = x$ ، نو لرو:  $du = dx$

ردو  $dv = \cos(x) dx$ ، نو  $v = \sin(x)$  لرو

په لاندې تریکه مخ ته خو:

$$\begin{aligned} \int x \cos(x) dx &= \int u dv \\ &= uv - \int v du \\ &= x \sin(x) - \int \sin(x) dx \\ &= x \sin(x) + \cos(x) + C. \end{aligned}$$

C د انتیگرالوونې یوه په خوښه ثابتې ده

انتیگرالوونې **Integrand** د  $x$  توان یا  $e^x$  سره

د توپه انتیگرالوونې د استعمال سره د انتیگرالوونو لکه

$$\int x^2 e^x dx \text{ او } \int x^3 \sin(x) dx$$

کېده شي په مدي لا حل شي:

يوه په زړه پوري پلگه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x) dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دي حل ولي.

دا بېلگه د دوه واره توتېه انتیگرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی :  $u = \cos(x)$  داسې چې  $du = -\sin(x) dx$

$v = e^x$  داسې چې  $dv = e^x dx$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیگرال حل شي، نو د توتېه انتیگرالونې قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x); du = \cos(x) dx$

$v = e^x; dv = e^x dx$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته زاځي:

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx.$$

که فکر وکړو، نو د پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیگرال لرو (بی له مخ نڅیښی)، نو د ښي لور انتیگرال که کین لور ته یوسو، لاس ته ترې راځي:

$$2 \int e^x \cos(x) dx = e^x (\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x (\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیگرالونې یوه په خوښه ثابتې ده

### د اینتیگرال شمیرنی استعمال

د سطحو مساحت، چې د  $f(x)$  د گراف او  $x$  محور ترمنځ پرتې وي.

$$\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a) \quad \text{په څلورم څپرکي کی وویل شو چی ټاکلی اینتیگرال}$$

سطحې مساحت A ښایي، چې له منحنې  $y=f(x)$ ، د  $x$ -محور  $y=0$  او د کرښې  $x=a$  او  $x=b$  له خوا رابند وي. مور له دې څخه مخ ته تللي یو چې  $y=f(x)$  د اینتیگرال اینتروال په دننه کی د  $x$ -محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدی شي د محور کښته لور ته هم لاړ شي..

## فعالیت:

--د یوې په خوبه تابع د منحنی یا کرني او د  $x$  محور ترمنځ او یا د دوه توابعو د سطحی شمیرلو لپاره وړ اندیزونه وکړئ.

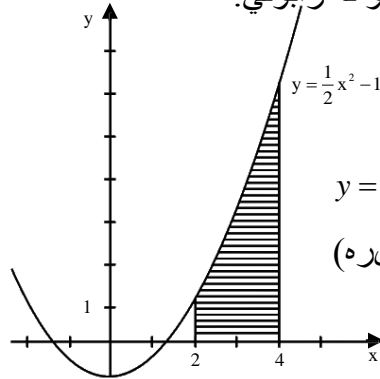
- دا هم د شمیرلو لپاره په پام کې ونیسئ، که منحنی یا د تابع کرينه د  $x$  د محور لاندې لور ته پراته وي.

- یوه په خوبه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکارئ او د تابع انتیگرال د  $x$  محور په ټاکلو پولو کې وشمیرئ.

- یوه په خوبه تابع ولیکئ، چې د انټروال په دننه کې د  $x$  محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم وکارئ او دا تابع به کومه منخښه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د منحنی په ورکولو کې دا بیا وڅیړئ، چې ولې؟

یادونه: که موږ د سطحی مساحت شمیرلو کې هغه عدد ولیکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونیول شي، چې د سطحی واحد (یون) ور سره شته دی. که دا ورسره لیکل شوی نه وي، خو باید تل په پام کې وي.

دا پورته فعالیتونه مو دې لاندې بېلگو ته رابولي:



بیلگه ۱.۵:

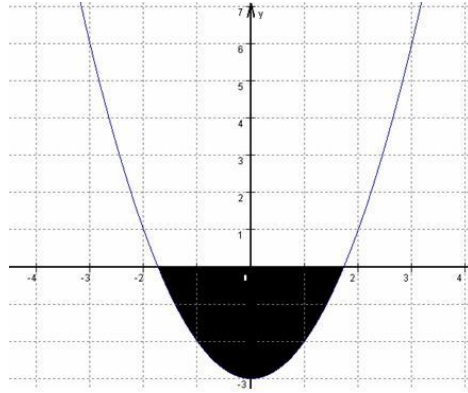
د سطحی مساحت

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 1, \quad y = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 4$$

ترمنځ په لاندې ډول دی (مخامخ څیره)

$$\begin{aligned} A &= \int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) dx = \left(\frac{1}{6}x^3 - x\right) \Big|_2^4 \\ &= \frac{1}{6} \cdot 64 - 4 - \frac{1}{6} \cdot 8 + 2 \\ &= \frac{22}{3} \end{aligned}$$

که د تابع  $y=f(x)$  سطحی د منحنی تلنه د  $-x$  محور لاندې لور ته وي، نو دا ټاکلی اینټیگرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحی تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینټیگرال مطلقه ارزښت نیسو یعنی منفي اینټیگرال.



بېلگه ۵ . ۲ :

د  $f(x) = x^2 - 3$  گراف د  $x$

محور سره یوه

سطحه رابندويي د گراف او

$x$  محور ترمنځ

د ټولې سطحې مساحت

و شمېری.

تگلار:

۱ - د دې لپاره چې دا مسئله راته ښه روښانه شوي وي، نو دا پورته رسم کارو.

۲ - د دې لپاره چې د انتیگرال حدونه لاس ته اړوری شو، باید صفرخایونه و شمېرو.

$$0 = x^2 - 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

۳ - اوس د سطحې د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انتیگرال لیکو.

د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر  $\sqrt{3}$  پورې انتیگرال شمېرو او نتیجه یې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

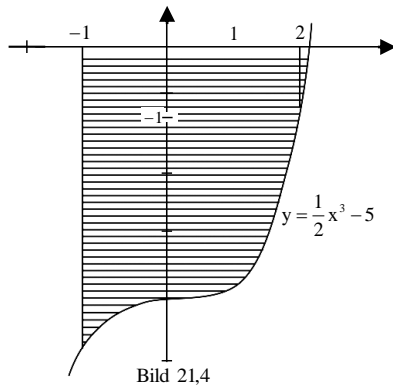
$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3) dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2) dx - 3 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} 1 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^{\sqrt{3}} - 3x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{3} = |-2 \cdot \sqrt{3}|$$

$$A = 2 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot \sqrt{3}$$

بیلگه:



د سطحې مساحت د  $y = \frac{1}{2}x^3 - 5$ ،  $y = 0$ ،  $x_1 = -1$ ،  $x_2 = 2$  ترمنځ دی: (لاندې څیره)



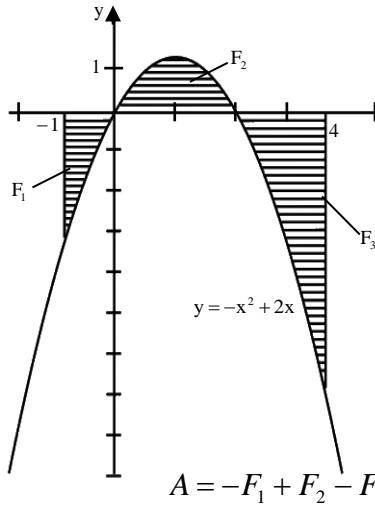
$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-1}^2 \left( \frac{1}{2}x^3 - 5 \right) dx \right| \\ &= - \int_{-1}^2 \left( \frac{1}{2}x^3 - 5 \right) dx \\ &= \left( -\frac{1}{8}x^4 + 5x \right) \Big|_{-1}^2 \\ &= (-2 + 10 + 1/8 + 5) = \frac{105}{8} \end{aligned}$$

بیلگه:

د لاندې پولو  $x_1 = -1$  تر

$x_2 = 4$  او د منحنی  $y = -x^2 + 2x$  او  $y = 0$

ترمنځ د  $x$ -محور پورته او کښته پرته سطحه (په مخامخ څیره کې نښانه شوي ده) دې وشمیرل شي



حل: د تابع  $y = -x^2 + 2x$  د  $x=0$

صفر ځایونو  $x_1 = 0$  او  $x_2 = 2$  ترمنځ پرته

غوښتونکي سطحه د  $x$ -محور پورته، نوره

کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$A = -F_1 + F_2 - F_3 = \int_{-1}^0 (-x^2 + 2x) dx + \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx - \int_2^4 (-x^2 + 2x) dx$$

$$= - \left( -\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) \Big|_{-1}^0 - \left( -\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) \Big|_0^2 + \left( -\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) \Big|_2^4 = \frac{28}{3}$$

د لاندې پولو  $x = -1$  تر  $x = 4$  او د کبري  $y = -x^2 + 2x$

او  $y = 0$  ترمنځ (د  $x$  - محور پورته او کښته)

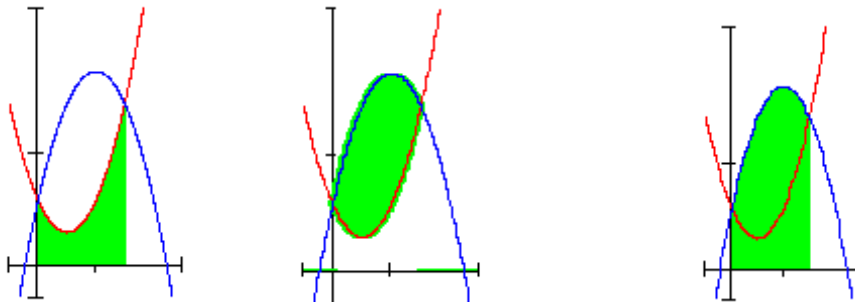
له دوه گرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شمېرنه:

ننوتنه د یوه ډنډ یا یوه بند څېره دې دلته راوړل شي یا دیوه پټې چې له گڼو پولو را بند وي.

فعالیت:

- که داسې یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنگه وشمېرو؟

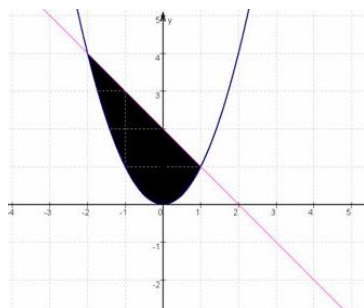
په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمیرل کېږي، چې د دوه توابعو گرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدې شي د ټاکلو اینټگرالونو د کمښت له لارې و شمیرل شي. که دواړه گرافونه د  $x$ -محور پورته لور ته پراته وي، نو د لاندې شپا څخه مخ ته ځو:



## د انتیگرالشمیرن ۸۶۷

---

$$A = A_1 - A_2$$



بیلگه . ۵ . ۵ :

د  $f(x) = x^2$  او  $g(x) = -x + 2$  دوه  
توابعو ترمنځ رابند د سطحې مساحت  
غواړو وشمېرو:

د تگلارې لار: دلته هم یو شکل یا  
گراف رسموو، چې دا حالت راته  
روښانه شي.

۲ - د دې لپاره چې انتیگرال وشمېرو، د گرافونو د قاطع ټکي ټاکو.

$$x^2 = -x + 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

فرمول - P;q

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

۳ - په ساده توگه لیدل کیږي.

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

پس باور لري

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^{-2} (-x + 2) dx - \int_1^{-2} x^2 dx = \\
 &= -1 \cdot \left( \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - 6 - \left( \frac{(-2)^3}{3} \right) - \frac{1}{3} \\
 &= -1,5 - 6 + + = -4,5 \\
 A &= 4,5
 \end{aligned}$$

جمله :

که د ټولو  $x$  لپاره، د  $a < x < b$  سره  $f(x) > g(x)$  وي، دا په دې معنا چې د  $f$  گراف د  $a$  او  $b$  تر منځ د  $g$  پورته لور ته ځغلي، نو د دواړو گرافونو په انټروال کې رابندې سطحې مساحت لپاره بارور لري.

$$\boxed{A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx}$$

بیلگه ۵. ۶ :

د توابعو  $f(x) = x^2 - 2x + 2$  او  $g(x) = -x^2 + 4x + 2$  گرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پیدا کړو. د دواړو گرافونو د  $x$ -ارزښتونو غوڅتکي (د تقاطع ټکي) د اینټیگرال حدونه جوړوي.

د غوڅتکو د  $x$  - کواردیناتو ټاکل:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 4x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$x_1 = 0$  او  $x_2 = 3$  د اینټیگرال لیمیتونه یا پولې دي.

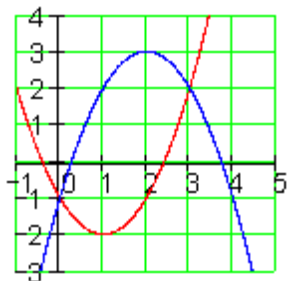
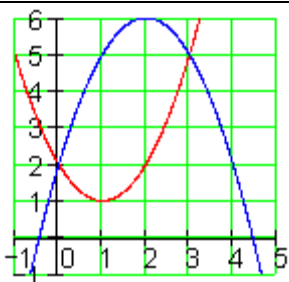
د اینتگرال جوړونه:

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x \right]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot 27 - 9 + 2 \cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

$$\int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2) dx = \left[ -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x \right]_0^3 = -\frac{1}{3} \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 = -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه گرافونو ترمنځ سطحه باید تل مثبت وي، نو له لوي ارزښت څخه کوچنی ارزښت باید کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x) dx - \int_0^3 f(x) dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$



لکه چې پوهیږو، د یوې سطحې مخنښنه ددې په واک کې ده، چې ایا سطحه د  $x$  - محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. مورځی ورو، چې ایا دا تاثیرات په پورتنۍ بیلگه کې پراته دي او که نه. مور سطحه د  $y$  - محور په درې واحدونو (یوونونو) کښته لورته بیایو او سطحې نوې شمیرو.

که د لید له مخې قضاوت وکړو، نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د  $x$ -ارزښت غوڅتکي هم او له دې سره د انتیگرال حدونه به یې تغیره پاتیري.

$$g(x) = -x^2 + 4x - 1 \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 - 2x - 1$$

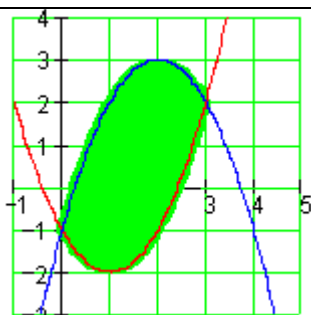
$$A = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx \quad \text{ځای په ځای کونه:}$$

$$\text{د } f(x) - g(x) = 2x^2 - 6x \text{ سره کیري:}$$

$$A = \int_0^3 (2x^2 - 6x) dx = \left[ \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 \right]_0^3 = \frac{2}{3} \cdot 27 - 3 \cdot 9 = 18 - 27 = \underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنیو ترمنځ سطحه فزیکي سطحه ښایي، باید لاس ته راوړنه یو مثبت عدد وي. دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A = \left| \int_0^3 (2x^2 - 6x) dx \right| = \left| \left[ \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 \right]_0^3 \right| = \left| \frac{2}{3} \cdot 27 - 3 \cdot 9 \right| = |18 - 27| = |-9| = \underline{\underline{9}}$$



د دې متود ټولیزه ونه (عمومیت):

د دوه گرافونو ترمنځ سطحه:

که یوه سطحه د یوې پورته او یوې کښته منحنی څخه رابنده وي، چې تابع  $f(x)$  او تابع  $g(x)$  پورې اړه ولري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شمیرل کیري.

$$A = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

د انتیگرالونې حدونه  $a$  او  $b$  د  $x$  - محور د دواړو گرافونو د وضعیه قی متونو غوڅتکي دي

-- د منحنیو  $y=f_1(x)$  او  $y=f_2(x)$

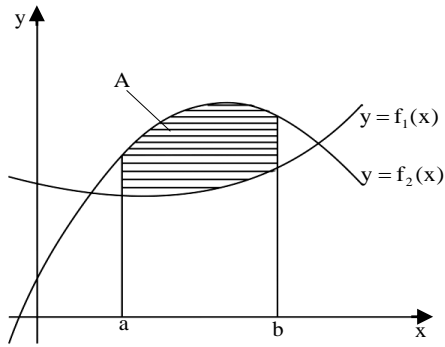


Bild 21,6

تر منځ پرته سطحې مساحت په لاندې پولو کې له  $x=a$  تر  $x=b$  پورې او  $y=f_1(x)$  او  $y=f_2(x)$

اینٹیگرال وړ او  $f_1(x) < f_2(x)$

په  $[a, b]$  اینتروال کې (ش ۱ . ۶) داسې لاس ته راوړل کېږي چې دتابع  $y=f_2(x)$  لاندې سطحې مساحت څخه د  $y=f_1(x)$  تابع لاندې سطحې مساحت کم کړئ.

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

سړی په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواک چې  $f_1(x)$  او  $f_2(x)$  په اینتروال  $[a, b]$  کومه یوه مخنښنه ځان ته غوره کوي باوري دی.

بیلگه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشمیرو  $y=x^2-1$  او  $y=-x^2+1$

حل: د اینٹیگرال پولې (حدونه) د افقي (پراته) محور غوڅتکي (د تقاطع ټکي) دي

$$x^2-1 = -x^2+1$$

$$2x^2=2$$

$$x^2=1$$

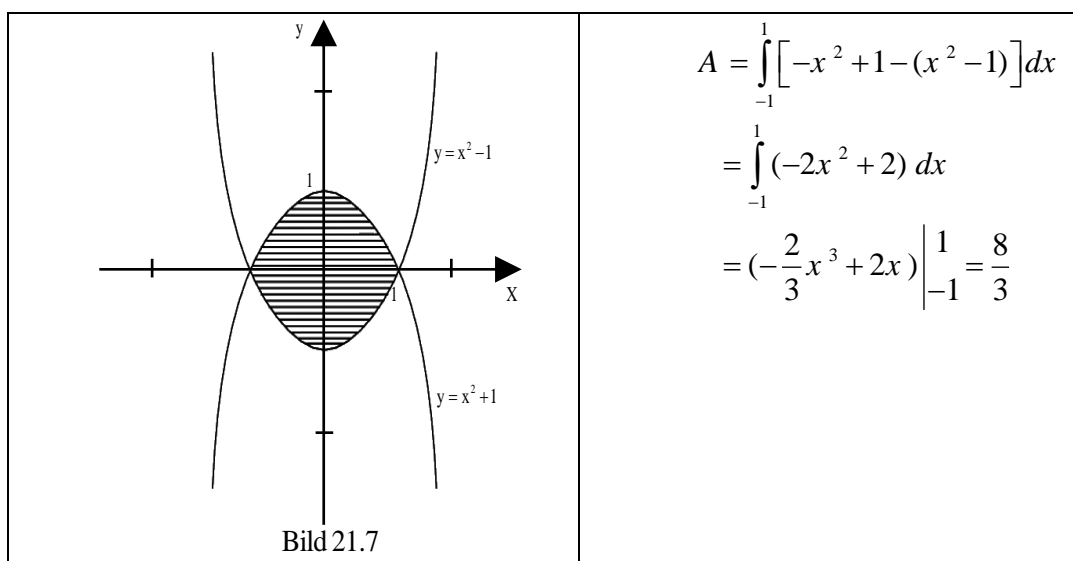
$$x_1 - a = 1, x_2 = b = -1$$

د اینٹیگرالولو په اینتروال  $[-1, 1]$  کې لرو  $-x^2+1 > x^2-1$

(که چېرې په اینتروال  $[a, b]$  او په (۲ . ۱) کې  $f_2(x) > f_1(x)$  په نظر کې ونه نیول

شي، نو د څرگند اینٹیگرال به منفي شي او سړی (لکه د مخه چې ویل شوي) بیا

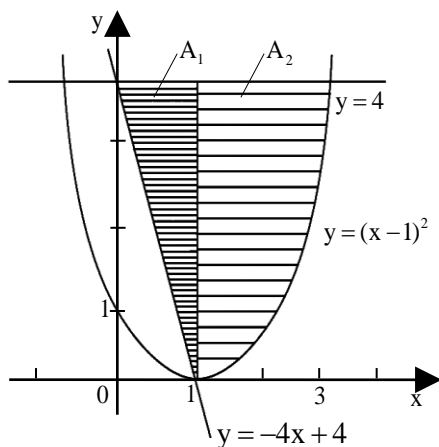
د اینٹیگرال مطلقه ارزښت نیسي. له دې امله لرو:



بیلگه ۵ . ۸ :

د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ  
سطحه شمیرل کیري.

$$y=(x-1)^2, y=-4x+4, y=4$$



حل : دا د شمیرلو سطحه، د منحنیو ترمنځ د دوه  
سطحو  $A_1$  او  $A_2$  له یوځای کیدو څخه لاس  
ته راځي.

$A_1$  د منحنیو  $y=4$  او  $y=-4x+4$  ترمنځ  
پروت دی. د اینتیگرال پولی (حدونه) د لومړي

کو او رینات ( $x$ -محور) غوڅتکی دی،  
د  $y=4$  او  $y=-4x+4$  ترمنځ.

لرو  $4 = -4x + 4, x_1 = 0$  په همدې ډول د

بني غوڅتکي لومړی وضعیه ارزښت (کو او ر دینات)



د  $y = -4x + 4$  او  $y = (x - 1)^2$  ترمنځ

$$-4x + 4 = (x - 1)^2, x^2 + 2x - 3 = 0$$

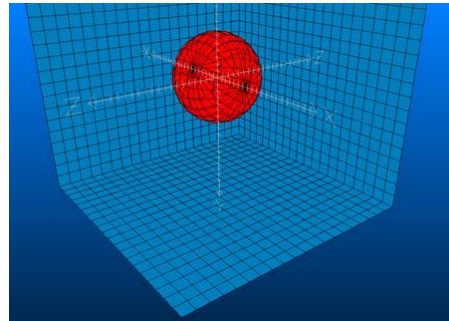
$$x_{2,3} = -1 \pm 2, x_3 = 1.$$

گورو چې  $A_2$  د  $y = -4$  او  $y = (x - 1)^2$  ترمنځ پرته ده، د اینتیگرال حدونه (پولی)  $x_1 = 1$  او د لومړي وضعیه قیامت د بني غوڅتکي د  $y = 4$  او  $y = (x - 1)^2$ .

غوښتوني سطحه داسي ده:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_0^1 [4 - (-4x + 4)] dx + \int_0^1 [4 - (x - 1)^2] dx \\ &= \int_0^1 4x dx + \int_0^1 (-x^2 + 2x + 3) dx = 2x^2 \Big|_0^1 + (1/3x^3 + x + 3x) \Big|_0^1 = 7 \frac{1}{3} \end{aligned}$$

د څرخیدونکو بدنونو (جسمونو) ډکي (حجم)



فعالیت:

- په ورسره بلده توگه د مستطیل حجم ولیکئ.

- د کړي، استواني او د مخروط حجمونه، چي تراوسه مو لوستلي و ليکي.

يادونه: دا دي تل په پام کي ونيول شي: که د انتیگرال شمیرني له لاري کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د يوه جسم حجم بنایي. مور ددي لپاره ليکو، چي د حجم مطلوبه واحد.

### څرخ ددونيکي تنونه:

څرخي دونيکي تنونه په هندسه کي هغه تنونه دي، چي په يوه څرخي دونيکي محور باندې د يوې کريني يا منحنې څرخي دني له لاري منځ ته راځي. کرينه يا منحنې په يوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحنې محور نه غوڅوي، او يا زيات له زياته يي ممکن لمس کړي. چي غوره بېلگي به يي په لاندې کي و څيړل شي.

د  $x$  په محور څرخېدنه (څرخون)

لکه د مخه مو چي وويل، حجم هم يو انتیگرال دی. دا داسي منځ ته راځي، چي که يوه تابع د  $X$  په محور و څرخول شي.

د يوه څرخي دونيکي جسم (بدن يا تن) حجم (دکي)

د يوه څرخي دونيکي جسم لپاره، چي د سطحې په څرخي دنه د  $x$  په محور په انتروال  $[a, b]$  کي د  $f$  تابع له گراف، د  $x$  له محور او له دواړو کرينو  $x = a$  او  $x = b$  ترمنځ جوړيږي، رابنده وي.

د حجم شمیرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

د  $y$  په محور څرخيدنه

د يوې سطحې په څرخي دني (د  $y$  په محور)، چي په  $[a, b]$  انتروال د  $f$  تابع گراف د  $y = f(x)$  محور او د دواړو کرينو  $y = f(a)$  او  $y = f(b)$  له خوا رابند وي بايد د

بڼه بدله شي و  $x = f^{-1}(y)$  معکوس تابع ته. دا شتون لري، که  $f$  متمادی او غښتلی یو غریز وي. که نه (لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي، چې  $f$  په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادی او غښتلی یو غریز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمیرل کيږي او سره جمعه کيږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a), f(b))}^{\max(f(a), f(b))} (f^{-1}(y))^2 dy$$

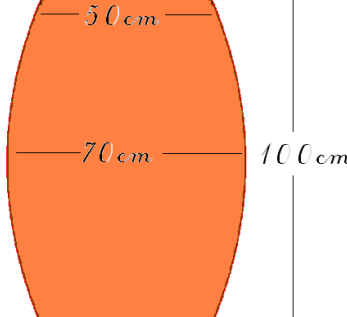
که دلته  $x = f^{-1}(y)$  بدل کړو، نو د  $x$  په محور په لاندې توګه حجم لاس ته راوړو:

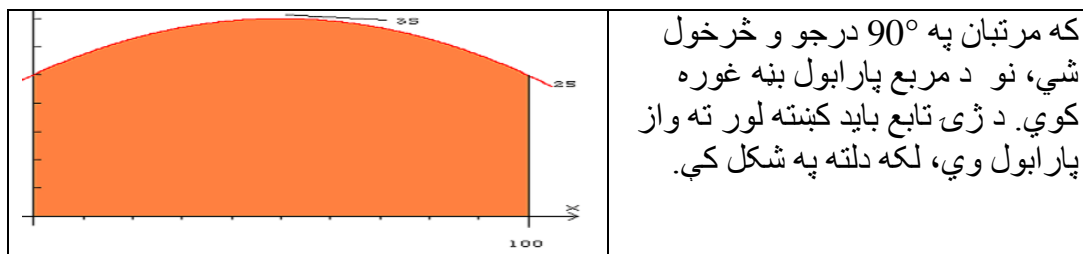
$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a), f(b))}^{\max(f(a), f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)| dx$$

د  $f'$  مطلق ارزښت او د انتیګرال په حدونو کې خورا جګ – ټیټ (min/max) توابع یو مثبت انتیګرال تضمینوي.

د سطحې په څرخولو (د  $y$  په محور)، چې د  $f$  تابع له ګراف او دواړو کرښو  $x = a$  او  $x = b$  څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f(x))^2 dx$$

	<p>د یوه مرتبان حجم:</p> <p>د یوه مرتبان حجم غواړو پیدا کړو چې جګوالی یې 1 متر، وړانګه یې 25 سنتي متره په پای او 35 سانتیمتره په منځ کې ده.</p>
---	---



حل: د پارابول د تابع لیکبڼه کېدی شي ساده په ککرتکي یا راس باندې ولیکل شي.

ټولیز باور لري:

$$f(x) = -a \cdot (x-5)^2 + 3.5 \text{ ( dm )}$$

په څرگند دول 5- د راس راکښنه د  $x+$  په لور ورکوي او 3,5 د  $y+$  په لور. د غزوني ضریب  $a$  په لور اړین دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضریب  $a$  نه شته. که په فرمول کې یو معلوم ټکی کیدو، کېدی شي  $a$  وشمیرل شي. دا ټکی  $(0/2,5)$  دی.

$$f(x) = -a \cdot (x-5)^2 + 3.5$$

$$-a \cdot (0-5)^2 + 3.5 \quad \text{د } x \text{ ارزښت } \chi \text{ په } \chi \text{ کونو لرو}$$

$$\frac{2.5-3.5}{25} = -0.04 \quad \text{له دې } a \text{ دی:}$$

$$f(x) = -0.04 \cdot (x-5)^2 + 3.5 \quad \text{او مساوات پوره بلل کیري.}$$

د ساده والي لپاره د راس ټکي فرمول په نورمال یا عمودي فورم بدلوو:

$$f(x) = -0.04x^2 + 0.4x + 2.5$$

$$f(x) = (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2 \quad \text{تابع مربع کړی}$$

$$f(x) = 0.0016x^2 - 0.032x^3 - 0.04x^2 + 2x + 6.25 \quad \text{نو دی}$$

لومړنی تابع

$$f(x) = \frac{0.0016x^2}{5} \cdot x^5 - \frac{0.032x^3}{4} \cdot \frac{-0.04x^2}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x$$

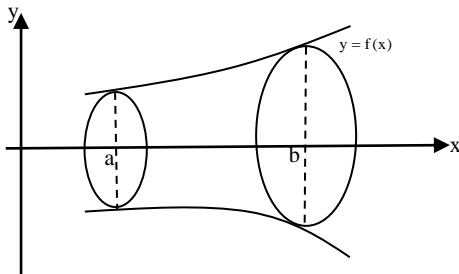
د حجم شمېرلو لپاره ټاکلی انتیگرال دی؛

$$\begin{aligned} \pi \cdot \int_0^{10} (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2 dx &= \pi \cdot \int_0^{10} (-0.0016x^2 - 0.032x^3 - 2x + 6.25) dx \\ &= \pi \left[ \frac{0.0016}{5} \cdot 10^5 - \frac{0.032}{4} \cdot x^4 - \frac{0.04}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x \right]_0^{10} \\ &= \pi \left[ 32 - 80 - 13\frac{1}{3} + 100 + 62.5 \right]_0^{10} \\ &= \pi \cdot 101.167 \end{aligned}$$

د حجم واحدونه (یوونونه)

دا چې مور له پبله په دیکسیمتر شمېرنه کړې، نو طبعاً دا په لیتر شمېرل کېږي.

$$= 317.824 \text{ liter}$$

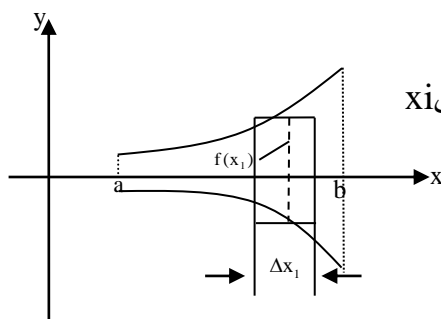


د تابع  $y=f(x), y=0, x=a, x=b$  ترمنځ  
سطحه چې د  $x$ -محور باندې څرخي (ش ۵ . ۹).  
دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوي  
یا- راغلي دڅرخیدونکي بدن ډکي (حجم) دی.

لاندېجمله باوري ده

جمله ۵ . ۸ ) د څرخیدونکي بدن ډکۍ (حجم):  
په اینتروال  $[a, b]$  کې د  $y=f(x)$  متماذي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چې د سطحو  
 $y=f(x), y=0, x=a, x=b$  ترمنځ ، راپیدا کيږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



ښونه:  $V$  د توتو (استوانو) د جمعي له  
لارې چې وړانگه يې  $f(x_i)$ ، جگوالی يې  $x_i$   
د  $i=1, 2, 3, \dots, n$  لپاره لری.

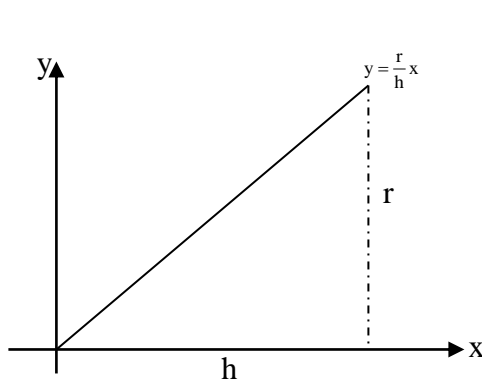
( ش: ۵ . ۱۰ ) د  $i$ -مې توتي  
( سلیندر ډکۍ ) (حجم) دی.

$$\Delta_i V = \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د ټولو  $n$  سلیندرونو یا توتو زیاتون

$$V_n = \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \pi [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه)  $n \rightarrow \infty, \Delta x_i \rightarrow 0$  ( د بنسټ اینتیگرال د تعریف سره سم



حجم (ډکۍ) را کوي.  $V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$

بیلگه ۵ . ۹ ) د مخروط یا کیگل ډکۍ

(حجم) د  $y = \frac{r}{h}x$  کرښې ( د سرچینې

تیره کرښه د  $\frac{r}{h}$  جگوالی سره) او د  $x$ -محور

(  $y=0$  ) د حدونو  $x=0$  تر  $x=h$

پوری (ش . ۱۱)

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[ \frac{r}{h} x \right]^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

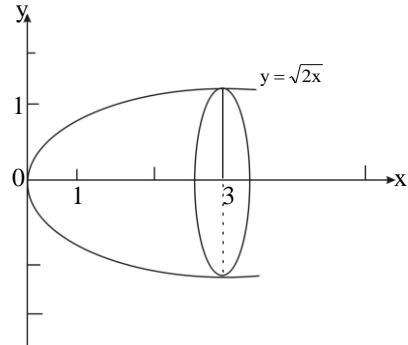
دا له بنسټیزې شمیرنې (د اساساتو) څخه معلومه نتیجه ده.

بیلگه ۵ . ۱۰:

$$y = \sqrt{2x}, y = 0, x = 0, x = 3$$

ترمنځ د  $x$ -محور باندې څرخېدلو جوړ (تولید) شوی جسم څرخېدلی پارابولویډ دی (څ  
۵ پ ۱۲)

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^3 \left[ \sqrt{2x} \right]^2 dx \\ &= 2\pi \cdot \int_0^3 x dx \\ &= 2\pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = 9\pi. \end{aligned}$$



د ارشمیدس جملہ Archimedischer Satz

د توتې، غونډارې (کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

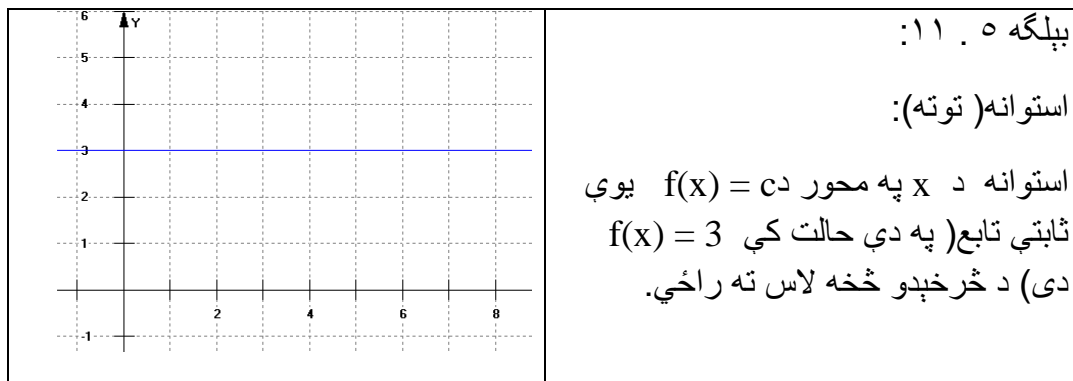
$$V \text{ توتہ (استوتنه) } : V \text{ غونډارې (کره) } : V \text{ مخروط } = 3 : 2 : 1$$

د 1886 زک یوه درسي کتاب څخه



د پورته الماني پښتو: ارنیمیډس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب یې ومونده، له دې امله دا دلته راغلي جمله د ارنیمیډس جلي په نامه نومول شوي.

د څرخېدونکي بدن(حسم) حجم.



د یوې استواني حجم (ډکې) شمېرنه:

اوس دې په  $[0;5]$  انټروال کې د توتي حجم وشمېرل شي. د استواني د حجم د شمېرلو لپاره  $V = \pi r^2 \cdot h$  عمومي فرمول دی. په دې حالت کې  $r=3$  او  $h=5$  دی. د هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.



لومړی له هرڅه غواړو  $V = \pi r^2 \cdot h$  څخه فقط  $r^2 \cdot h$  تر څپرني لاندې و نیسو او غواړو یوه لار پیدا کړو، چې د هغې لارې د انتیگرال په مرسته حجم وشمېرلای شو. د سطحې مساحت د لاندې انتیگرال په مرسته وشمېرل شو:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x) dx$$

که د دې ناپايي ډبرو مستطیلونو (د  $f(x)$  د مربع مساحت ا د صفر په لور ځغېلېدونکي پنډوالي  $dx$  سره) انتیگرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 [f(x)]^2 dx$$

دا په دې معنا چې دا انتیگرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتنی فرمول څخه دد یوې توتې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راځوي:

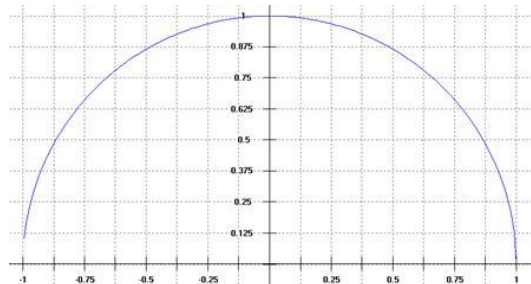
$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx$$

د دې ورکړ شوي استوانې د حجم شمېرنه:

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^5 [9(x)]^2 dx = \pi \int_0^5 [45 - 0] dx = 45\pi$$

د پرتلي لپاره:  $\pi r^2 h = 45\pi$

کره (غونډاری یا غنډوسکه(توپ)):



د  $x$  په محور د  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  تابع څرخېدني څخه غونډاری یا کره منځ ته راځي (پورته د ننوتني شکل).

دا تابع هم کېدی شي په گردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکي تابع يې  $q(x) = \pi[f(x)]^2$  ده. د دې ټوټو د انتیگرالولو له لارې دې بیا حجم وشمېرل شي.

په دې بېلگه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځاي څخه و صفر ځاي ته د  $x$  په محور باندي

د  $f(x) = \sqrt{1^2 - x^2}$  تابع څرخېدنو له لارې منځ ته راځي، يعنې په انتروال  $[-1;1]$  کې.

$$\pi \int_{-1}^1 [f(x)]^2 dx = \pi \left[ x - \frac{1}{3} x^3 \right] = \pi \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi$$

### Kegel (Geometrie) مخروط

دا هم ممکن ده، چې يو مخروط د

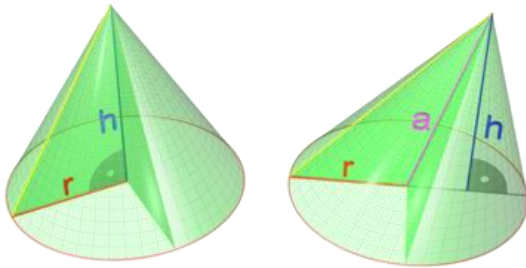
يوه منظم  $n$  زاویو

(اړخيزي) (کونجيز) څخه رابندي

بنسټيزي سطحې (د  $n$  لپاره چې ناپا

ي ته ځي) اهرام ته ور نژدې کړو.

د مخروط حجم:



د انتیگرال په مرسته د یوه مستقیم

مخروط د حجم د شمېرلو یوه بله

مرستندویه لار. یو د کارتيزي

وضعيه ارزښت (قيمت) سيستم په کار اچول کيږي، د هغه سره چې د مخروط څوکه په

سرچینه  $(0|0)$  او منځ ټکی په ټکي  $(h|0)$  کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنیو توتو (استوانو) رايوځاي شوی په پام کې ونیسو، چې جگوالی (پندوالی) يې  $dx$  دی. داچې د داسې یوې توتې یا استوانې گردې توتې (کترې) واټن د مخروط له څوکي د وضعیه قیمت سیستم په  $x$  سره ور کړ شوی دی، د وړانگي جملې له مخې (دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوي) باور لري.

د یوه ناپاي کوچنی توتې (استوانې) وړانگه:

$$r z(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

د یوې ناپاي کوچنی توتې (استوانې) حجم:

$$\left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx$$

د ټول څرخي دوني مخروط د ټولو داسې کوچنیو توتو حجم دی. د شمېرلو لپاره يې ټاکلی انتیگرال جوړوو، د انتیگرال حدونو  $0$  او  $h$  سره:

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[ \frac{x^3}{3} \right]^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left( \frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

یو مخروط د  $x$  په محور د  $f(x) = mx$  یو کرښیز (خطي) تابع (د بېلگې په توګه  $f(x) = 0,5x$ ) څرخېدنه (څرخون) ده.

د یوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولای چې لومړی د کوارډر حجم وشمېرو. دلته د دې ګراف لاندې په ډېرو کترو کترو کول دي د  $dx$  پندوالي سره. د دې کترو د سطحو مساحت وشمېری، چې وړانګه  $f(x)$  لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بیا یې انتیګرال په ورکړ شوي  $[0;5]$  انټروال کې ونیسئ.

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi \left[ \frac{1}{12} x^3 \right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلي لپاره دی د یوه مخروط د حجم معیاري (ستاندارد) بڼه وکتل شي.

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h = 32.72$$

لنډ:

که یوه منحنی د  $x$  یا  $y$  په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې مور دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پندوالي  $x$  همداسې  $y$  سره او دا په ورته نږدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نږدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$$

$$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$$

بېلګه ۵. ۱۲:

د  $y = x^2/4$  تابع گراف په  $[0, 2]$  انټروال کې د وضعیه قیمتونو په محورونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دی؟

د  $x$  په محور څرخېدنه:  $y^2 = x^4/16, x_1 = 0, x_2 = 2$

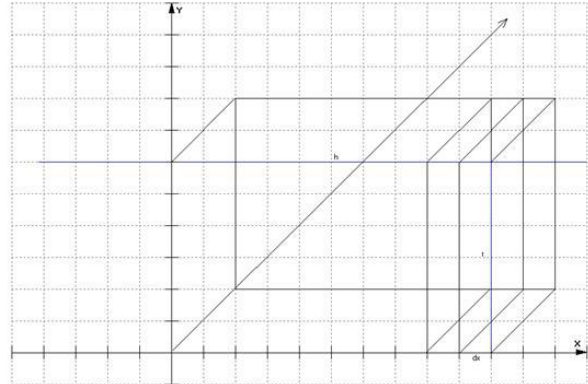
$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16} dx = 0.4\pi$$

د  $y$  په محور څرخېدنه:  $x^2 = 4y, y_1 = 0, y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y dy = 2\pi$$

د ناڅرخېدونکي جسم حجم.

شپږ اړخیز جسم یا مکعبډوله - 2.1 Quader



دا لید شکل د استوانې څخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه څرخي. حجم یې کېدی شي د عادي کوارډ په څېر وشمیرل شي ( $V = r^2h$ ) او یا د صفر په لور تلونکي  $dx$  سرورې مربع وي توتیه شي. د دې لپاره دې د پروت غوڅي (قاطع) سطحه وشمیرل شي، یعنې  $q(x)$  د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بیا باید انتیگرال ونیول شي.

په ټولیزه توګه دا معنا لري:  $V = \int_a^b q(x) dx$

په دې بېلګه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژۍ تابع مربع ده:  $q(x) = [f(x)]^2$

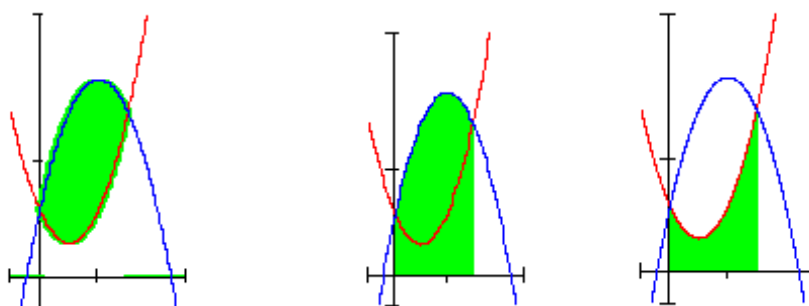
که موږ  $f(x) = 3$  تابع له 0 تر 5 انټروال کې د پروتقاطع تابع سره انټیګرال کړو،

$$\int_0^5 q(x) dx = [9x]_0^5 = 45 \text{ لاس ته راشي. } V = r^2 h = 45$$

ټولګه

که د تابع  $y=f(x)$  سطحې د منحنی ټلنه د  $-x$  محور لاندې لور ته وي، نو دا ټاکلی اینټیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې ټل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینټیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعنې منفي اینټیګرال.

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کېږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدې شي د ټاکلو اینټیګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د  $-x$  محور پورته لور ته پراته وي، نو د لاندې شپا څخه مخ ته ځو:



$A, A_1$

$A_2$

$$A = A_1 - A_2$$

د منحنیو  $y=f_1(x)$  او  $y=f_2(x)$

تر منځ پرته سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له  $x=a$  تر  $x=b$  پورې او  $y=f_1(x)$  او  $y=f_2(x)$ .

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د  $x$  په محور په انټروال  $[a,b]$  کې د  $f$  تابع له گراف، د  $x$  له محور او له دواړو کرښو  $x=a$  او  $x=b$  ترمنځ جوړېږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

د  $y$  په محور څرخېدنه

د یوې سطحې په څرخېدني (د  $y$  په محور)، چې په  $[a,b]$  انټروال د  $f$  تابع گراف د  $y=f(x)$  محور او د دواړو کرښو  $y=f(a)$  او  $y=f(b)$  له خوا رابند وي باید د  $x=f^{-1}(y)$  معکوس تابع ته. دا شتون لري، که  $f$  متمادي او غښتلي یو غږیز وي. که نه (لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي، چې  $f$  په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلي یو غږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کېږي او سره جمعه کېږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a), f(b))}^{\max(f(a), f(b))} (f^{-1}(y))^2 dy$$

جمله ۵. ۸) د څرخېدونکي بدن ډکې (حجم):

په اینټروال  $[a,b]$  کې د  $y=f(x)$  متمادي وي، د څرخېدونکي بدن حجم چې د سطحو  $y=f(x)$ ،  $y=0$ ،  $x=a$ ،  $x=b$  ترمنځ، راپیدا کېږي داسې دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

د توتې، غونډاري (کري) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$$V \text{ (توتې) (استوتته) } V : \text{ غونډاري (کره) } V : \text{ مخروط } 1 : 2 : 3 =$$

يو مخروط د  $x$  په محور د  $f(x) = mx$  يوې کرښيزې (خطي) تابع (د بېلگې په توگه  $f(x) = 0,5x$ ) څرخېدنه (څرخون) ده.

که يوه منحنی د  $x$  يا  $y$  په محور وڅرخول شي، يو جسم چې لاس ته راځي، چې مور دا جسم په نريو کترو يا زونونو توتې کوو، د پندوالي  $x$  همداسې  $y$  سره او دا په ورته نژدې توگه په استوانو بدلوو، نو په نژدې توگه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx \quad \text{د } x \text{ په محور څرخونه:}$$

$$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx \quad \text{د } y \text{ په محور څرخونه:}$$

د  $x$  په محور د  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  تابع څرخېدني څخه کره منځ ته راځي (پورته د ننوتني شکل).

دا تابع هم کېدی شي په گردو توتو توتې شي، پرته غوڅوونکي تابع يې  $q(x) = \pi[f(x)]^2$  ده. د دې توتو د انتیگرالولو له لارې دې بيا حجم وشمیرل شي.

تمرینونه

د بن

سټیز انتیگرال د جدول په کارونه يا استعمال لاندې انتیگرالونه وشمیری

$$\text{a) } \int (x^3 - 5x^2 + 7x - 2) dx, \quad \text{b) } \int (2/x^3) dx, \quad \text{c) } \int (1/3) \sqrt[3]{x} dx$$

$$\text{d) } \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx, \quad \text{e) } \int \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} dx, \quad \text{f) } \int (\sqrt[3]{x^4} + 1) dx,$$



$$\begin{array}{lll}
 \text{g) } \int \sqrt[3]{x^{-3}} dx, & \text{h) } \int \frac{ax^2 + bx + cx^{-1}}{x^4} dx, & \text{i) } \int 3 \cdot 2^x dx, \\
 \text{j) } \int \frac{1}{2 \sin^2 x} dx, & \text{k) } \int \frac{1}{3 + 3x^2} dx, & \text{l) } \int \cos \phi \cdot s ds, \\
 \text{m) } \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}, & \text{n) } \int \sqrt{t} \cdot \sqrt{t} \cdot \sqrt{t} dt, & \text{o) } \int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} du.
 \end{array}$$

۱. ۲ - د بیرته په اګلي انتیګرال وروسته یې انتیګرال ونیسی

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \int \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2(1+x)^2} dx, & \text{b) } \int \frac{2 \sin 2x}{3 \cos x} dx, & \text{c) } \int \frac{7 \cos 2x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx, \\
 \text{d) } \int \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos^2 x} dx, & \text{e) } \int (-2 - 2 \tan^2 x) dx, & \text{f) } \int \frac{2t^3 - 8t}{(t-2)(t+2)} dt.
 \end{array}$$

۳ - لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیری

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \int_0^1 \frac{1}{2} e^x dx, & \text{b) } \int_{\pi}^{2\pi} \cos x dx, & \text{c) } 2 \int_2^3 dt, \\
 \text{d) } \int_0^{\pi} \cos \pi \sin x dx, & \text{e) } \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}, & \text{f) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + 1}{\sin^2 x} dx, \\
 \text{g) } \int_{x_1}^{x_2} (2x-1) dx, & \text{h) } \int_0^8 (\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x}) dx, & \text{i) } \int_{\ln 2}^{\ln 3} e \cdot e^t dt, \\
 \text{j) } \int_0^1 \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}} du, & \text{k) } \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}} dx, & \text{l) } \int_a^b a^x dx.
 \end{array}$$

۴ - د بدلون یا سبستجیشن له لارې یې انتیګرال وشمیری.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \sqrt[3]{2x-7} dx, & \text{b)} \int \frac{dx}{-x+1}, & \text{c)} \int 2^{3x+6} dx, \\ \text{d)} \int \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right) dx, & \text{e)} \int \frac{dx}{1+(x+1)^2}, & \text{f)} \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)} dt, \\ \text{g)} \int x \cdot \sqrt[3]{x^2-7} dx, & \text{h)} \int \frac{3x dx}{-x^2+1}, & \text{i)} \int x \cdot e^{2x^2+3} dx, \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{j)} \int 7 \cos^7 x \sin x dx, & \text{k)} \int (1-2 \sin x)^3 \cos x dx, & \text{l)} \int \frac{\sin x}{\cos^n x} dx, \\ \text{m)} \int \cot t dt, & \text{n)} \int \frac{4x-5}{2x^2-5x+3} dx, & \text{o)} \int \frac{\text{Arc sin } u}{2 \cdot \sqrt{1-u^2}} du, \\ \text{p)} \int \frac{\sqrt{2 \ln x + 3}}{3x} dx, & \text{q)} \int e^x \cdot \cos e^x dx, & \text{r)} \int e^{\cos x} \cdot \sin x dx. \end{array}$$

۵. د تر زیرینو فورمیدلون وروسته او په بنسټیز اینټیگرال ۱۰ او ۱۱ د

بدلون له لارې یې اینټیگرال وشمیری،

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \frac{dx}{1+4x^2}, & \text{b)} \int \frac{dx}{2+4x^2}, & \text{c)} \int \frac{dx}{3+5x^2}, \\ \text{d)} \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}, & \text{e)} \int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}}, & \text{f)} \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}, \\ \text{g)} \int \frac{dx}{x^2-10x+34}, & \text{h)} \int \frac{dx}{3x^2-6x+30}, & \text{i)} \int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}. \end{array}$$

۶ لاندې ټاکلي اینټیگرالونه وشمیری

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(4x-1)^3}, & \text{b)} \int_{-1}^0 e^{3x} dx, & \text{c)} \int_0^2 2^{2x+1} dx, \\ \text{d)} \int_{-1}^1 \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5} dx, & \text{e)} \int_{e^3}^e \frac{1}{x} \ln x dx, & \text{f)} \int_2^4 \frac{e^t}{1+e^t} dt, \\ \text{g)} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x} \cos x dx, & \text{h)} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2}, & \text{i)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \cos x dx. \end{array}$$

۷. د جملې ۲۱. ۸ استعمال په بنسټ یې (ټوټه اینټیگرالونه) اینټیگرال کړی

- a)  $\int 0,2x \cdot \sin x \, dx$ ,      b)  $\int 4x^3 \cdot \ln x \, dx$ ,      c)  $\int \cos^2 x \, dx$ ,  
 d)  $\int \cos x \cdot \sin x \, dx$ ,      e)  $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$ ,      f)  $\int x \cdot (\cos x + 1) \, dx$ ,  
 g)  $\int x^3 \cdot e^x \, dx$ ,      h)  $\int \text{Arc sin } x \, dx$ ,      i)  $\int x^{\frac{1}{3}} \cdot \ln x \, dx$ ,  
 j)  $\int \text{Arc tan } x \, dx$ .

لاندي ټاکلي انتیگرالونه وشمیری

- a)  $\int_{-1}^1 x \cdot e^x \, dx$ ,      b)  $\int_1^2 \ln x \, dx$ ,      c)  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ ,  
 d)  $\int_0^{\pi} e^x \cdot \sin x \, dx$ ,      e)  $\int_0^{\pi} x^3 \cdot \sin x \, dx$ ,      f)  $\int_0^{\pi} x^4 \cdot \sin x \, dx$ .

د هغې هواری دننه وشمیری، چې د وګر شوو مساواتو ګرو څخه رابنده شوي وي

- a)  $y = e^{0,5x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$ ;  
 b)  $y = \frac{1}{2}x^3$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$ ;  
 c)  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $y = 0$ ,  $y = 9$ ,  $x = -3$ ,  $x = 3$ ;  
 d)  $y = \cos x$ ,  $y = 0$ .  
 e)  $y = \cos x$ ,  $y = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{5\pi}{6}$ ;  
 f)  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$ ,  $x = 4$ ;  
 g)  $y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$ ;  
 h)  $y = x^3 + 7$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ;  
 i)  $y = x^3 + 7$ ,  $y = x^3 - x^2 + 3x + 5$ ;  
 j)  $y = 3 - \frac{1}{2}x^4$ ,  $y = 3 - 4x$ ;

k)  $y = \frac{1}{x}$ ,  $3y + 3x = 10$ ;

l)  $y = \cos x$ ,  $y = \sin x$  ;

m)  $y = \sqrt{3x+1}$ ,  $y = 1$ ,  $x = 8$ ;

n)  $y = \frac{x^2}{4}$ ,  $y = \frac{8}{4+x^2}$ ;

o)  $y = x^2$ ,  $x = y^2$ ;

p)  $y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x^3}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$ ;

q)  $y = 2\sin x$ ,  $y = \sqrt{3} \tan x$ ,  $x = [0, \pi/2)$

f)  $y = \tan x$

کریښه چې په کې  $y = \tan x$  پرتو تکیو  $(0,0)$  او  $(\pi/4, 1)$  تیرېږي د  $x$ -محور باندې د ورکړ شویو مساواتو سره د گېرو ترمنځ هواره څرخي د راپورته شوي څرخیدونکي بدن یا جسم ډکي یا حجم وشمیري. پام دې وي، چې په ورکړ شوي حالت کې ورکړ شوي هواره د دوه کېو څخه رابنده ده، نو له دې امله د لوي کېږي ډکي څخه د کوچني کېږي ډکي کمېږي.

a)  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = h$ ;      b)  $y = \sqrt[3]{x^2} + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$

c)  $y = e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ ; d)  $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ ;

e)  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $y = 2x$ ;      f)  $y = 4x - x^2$ ,  $y = 0$ ;

g)  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $x \in [0, \pi]$ .

تراپخ (خلورگودی، چې تیک دوه اړخونه یو غبرگ وي) د کونجونو

$(1,0), (5,0), (1,3), (5,5)$  د  $x$ -محور باندې څرخي، وشمیري

الف) د جوړې شوي هوارې دننه

ب) د څرخیدونکي بدن ډکي

د کپرو  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $y = -x + 6$  ترمنځ هواره د  $x$ -محور

باندې څرخي، وشمیري.

الف) د کپري غوڅتکو د پروت محور سره

ب) د کپرو ترمنځ هواره

پ) د څرخیدونکي بدن ډکي

د هغه څرخیدونکي بدن ډکي وشمیري، کوم چی په اینتروال  $[\frac{\pi}{4}, \pi]$

کی د  $x$ -محور پورته خواته د کپرو  $y = \sin x$  او  $y = \cos x$  ترمنځ

پرت هواره، چی د  $x$ -محور باندې څرخیري!

۱۴ نیمگردی  $y = \sqrt{9-x}$  د  $x$ -محور باندې څرخیري. د گودیبرخی ډکي

وشمیري. د پولو  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$  او ترمنځ!

۱۵ د څرخیدونکي ایلیپسوئید ډکي څومره لوي دي، کوم چی د  $x$ -محور

پورته خواته پرت هواره د ایلیپسی نیمی هوارې د رابندونکی  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

کپري سره د  $x$ -محور باندې تولیدوي؟

د څپرکي نور تمرینونه:

$$a) \frac{x^3 + 7x^2 + 9x - 5}{x + 5}$$

$$b) \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2 - 2}$$

$$c) \frac{x^3 - 2x^2 + x - 5}{x^3 + 1}$$

$$d) \frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

$$e) \frac{x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 3}{x - 2}$$

$$f) \frac{x^5 - x^4 + 1}{x^2 + 2}$$

۱ - لاندې ناصلي پولینومونه دي د یوه ټول کسري پولینومونو او یوه اصلي پولینوم د جمعي په څېر ولیکل شي.

۲ - لاندې پولینومونه د جمعي په څېر ولیکئ

a)  $\frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$

b)  $\frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$

c)  $\frac{4x + 10}{x^2 + 6x + 8}$

d)  $\frac{-3x^2 + 19x - 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$

e)  $\frac{4x^2 + 6x - 20}{x^3 - 4x}$

f)  $\frac{14}{x^2 + 20x + 51}$

۳ - د لاندې اصلي پولینومونو په توپه کسرونو توپه ونه وکاروئ.

a)  $\frac{3x^2 + 5x + 10}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$

b)  $\frac{3x^2 - 18x + 36}{x^3 - 6x^2 + 9x}$

c)  $\frac{x^2 + 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1}$

d)  $-\frac{x^2 + 13x + 10}{x^3 - 5x^2}$

۴ - د لاندې اصلي پولینومونو په توپه کسرونو توپه کونه ورکړئ.

a)  $\frac{x^2 + 2x - 12}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5}$

b)  $\frac{4x^2 - 3x + 8}{x^3 - 2x + 4}$

c)  $\frac{8x^2 - 16x + 10}{x^3 - 4x^2 + 5x}$

d)  $\frac{x}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$

۵ - د لاندې پولینوم کسرونو په توپه کسرونو توپه کونه ورکړئ.

a)  $\frac{x^3 + 7x^2 + 17x + 17}{x^2 + 6x + 8}$

b)  $\frac{2x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 4}{x^2 - 4x + 3}$

c)  $\frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1}$

d)  $\frac{4x^3 + 16x^2 - 7x - 49}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$

۶ - و بنایئ، چې د F تابع د f تابع لومړنی تابع ده.

a)  $f(x) = 2x^2 + 4x - 7$  ,  $f(x) = 4x + 4$

b)  $F(x) = (x^2 - x)^3$  ,  $f(x) = 3 \cdot (2x - 1) \cdot (x^2 - x)^2$

$$c) F(x) = \sqrt{2x+1} \quad , \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$d) F(x) = 1 + \sin x \quad , \quad f(x) = 3x \cdot \cos 3x$$

$$e) F(x) = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \frac{4}{9}x^3 \quad , \quad f(x) = x^2 \cdot (\ln x - 1)$$

۷ - وینایې، چې د F او G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$$a) F(x) = x^3 + x + 4 \quad , \quad G(x) = x^3 + x + 1$$

$$b) F(x) = (x-3)^2 \quad , \quad G(x) = x^2 - 6x + 4$$

$$c) F(x) = \frac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x) = \frac{3x+5}{x+2}$$

$$d) F(x) = 1 + \sin x \quad , \quad G(x) = \sin x$$

۱۳ - لاندې ناکلي انتیگرالونه پیدا کړئ او تیکوالی یې وازمایې.

$$a) \int x^3 dx \quad b) \int 7 dx \quad c) \int x dx \quad d) \int (1-x^2) dx$$

$$e) \int (x + \frac{1}{x}) dx \quad f) \int (e^x + \cos x) dx \quad g) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx \quad h) \int \frac{5}{\cos^2 x} dx$$

$$i) \int u dx \quad k) \int (2 + e^x) dx \quad l) \int (1 + \ln x) dx \quad m) \int (\sqrt{x} + \sin) dx$$

۱۴ - د لاندې ټاکلو انتیگرالونو ارزښت وشمېرئ

$$a) \int_0^3 4 dx$$

$$b) \int_{-3}^{-1} x dx$$

$$c) \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

$$d) \int_1^e (2 + \frac{1}{x}) dx$$

$$e) \int_{-1}^0 e^x dx$$

$$f) \int_0^\pi \sin x dx$$

$$g) \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4 dx$$

$$h) \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$i) \int_{-2}^2 x^3 dx$$

$$j) \int_2^6 (1+x) dx$$

$$k) \int_1^2 (x^2 - x^5) dx$$

$$l) 0 \int_{-2}^2 (\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3}) dx$$

۱۷ د لاندې ټاکلو انتیگرالونو ارزښت وشمېری او ارزښتونه یې سره پرتله کوی.

$$a) \int_{-3}^1 3dx \text{ und } - \int_{-3}^1 3dx \qquad b) \int_0^1 (1+e^x) dx \quad \wedge \quad - \int_0^1 (1+e^x) dx$$

$$c) \int_{-\pi}^0 \sin x dx \quad \wedge \quad - \int_{-\pi}^0 \sin x dx$$

۱۷- هر دوه انتیگرالونه د یوه انتیگرال سره انځور کړی.

$$a) \int_0^{0.5\pi} \cos x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi} \cos x dx \qquad b) \int_{-1}^0 (x+e^x) dx + \int_0^1 (x+e^x) dx$$

$$c) \int_2^3 3x^2 dx + \int_3^5 3x^2 dx \qquad d) \int_{-2}^1 (2+x) dx - \int_4^1 (2+x) dx$$

۱۸- د لاندې ټاکلو انتیگرالونو لپاره ارزښت تخمین کړی.

$$a) \int_{-4}^{-2} e^{x+3} dx \qquad b) \int_0^8 \sqrt{1+x} dx$$

$$c) \int_3^5 2^{4-x} dx \qquad d) \int_0^{0.5\pi} \sin^2 x dx$$

۱۹- د کومو  $x$  ارزښتونو لپاره لاندې انتیگرالونه ورکړ شوي ارزښتونه لري؟

$$a) \int_1^x 5t^4 dt, \quad la(x) = 31 \qquad b) \int_0^x e^t dt, \quad la(x) = e - 1$$

۲۰- لاندې انتیگرالونه توابع ته د انتیگرال توابع وټاکي.

$$a) f(x) = x^2, \quad a = 3 \qquad b) f(x) = 2 + e^x, \quad a = 0$$

$$c) f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad a = 0 \qquad d) f(x) = 2, \quad a \in \mathbb{R}$$

۲۱- د لومړني انتیگرال په استعمال سره لاندې انتیگرالونه وشمېری.



$$\begin{aligned}
 d) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx, \quad e) \int \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} dx, \quad f) \int (\sqrt[3]{x^4} + 1) dx, \\
 g) \int \sqrt[3]{x^{-3}} dx, \quad h) \int \frac{ax^2 + bx + cx^{-1}}{x^4} dx, \quad i) \int 3 \cdot 2^x dx, \\
 j) \int \frac{1}{2\sin^2 x} dx, \quad k) \int \frac{1}{3+3x^2} dx, \quad l) \int \cos \varphi \cdot s \, ds, \\
 m) \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}, \quad n) \int \sqrt{t} \cdot \sqrt{t} \cdot \sqrt{t} dt, \quad o) \int (1-u^2)^{\frac{1}{2}} du. \text{ -----}
 \end{aligned}$$

۲۲ - د بیرته په بنسټیز اینټیگرال بدلون وروسته یې اینټیگرال ونیسئ:

$$\begin{aligned}
 a) \int \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2(1+x)^2} dx, \quad b) \int \frac{2\sin 2x}{3\cos x} dx, \quad c) \int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx, \\
 d) \int \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 x} dx, \quad e) \int (-2 - 2\tan^2 x) dx, \quad f) \int \frac{2t^3 - 8t}{(t-2)(t+2)} dt.
 \end{aligned}$$

۲۳ -- لاندې ټاکلی اینټیگرالونه وشمیرئ:

$$\begin{aligned}
 a) \int_0^1 \frac{1}{2} e^x dx, \quad b) \int_{\pi}^{2\pi} \cos x \, dx, \quad c) \int_2^3 dt, \\
 d) \int_0^{\pi} \cos \pi \sin x \, dx, \quad e) \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}, \quad f) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + 1}{\sin^2 x} dx, \\
 g) \int_{x_1}^{x_2} (2x-1) dx, \quad h) \int_0^8 \left( \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} \right) dx, \quad i) \int_{\ln 2}^{\ln 3} e \cdot e^t dt, \\
 j) \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}} du, \quad k) \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}} dx, \quad l) \int_a^b a^x dx.
 \end{aligned}$$

۲۴ - د بدلون یا سبټیچوشن قاعدې استعمال له لارې یې اینټیگرال وشمیرئ:

$$\begin{aligned}
 a) \int \sqrt[3]{2x-7} dx, \quad b) \int \frac{dx}{-x+1}, \quad c) \int 2^{3x+6} dx, \\
 d) \int \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right) dx, \quad e) \int \frac{dx}{1+(x+1)^2}, \quad f) \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)} dt,
 \end{aligned}$$

$$g) \int x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 7} dx, \quad h) \int \frac{3x dx}{-x^2 + 1}, \quad i) \int x \cdot e^{2x^2 + 3} dx,$$

۲۵- د تر زیریوني فورمبلون وروسته او په بنسټیز اینتیگرال 10 او 11 د بدلون له لارې یې اینتیگرال وشمیری

$$a) \int \frac{dx}{1+4x^2}, \quad b) \int \frac{dx}{2+4x^2}, \quad c) \int \frac{dx}{3+5x^2}.$$

$$d) \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}, \quad e) \int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}}, \quad f) \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},$$

$$g) \int \frac{dx}{x^2-10x+34}, \quad h) \int \frac{dx}{3x^2-6x+30}, \quad i) \int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}.$$

۲۶- لاندې ټاکلی اینتیگرالونه وشمیری:

$$a) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(4x-1)^3}, \quad b) \int_{-1}^0 e^{3x} dx, \quad c) \int_0^2 2^{2x+1} dx,$$

$$d) \int_{-1}^1 \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5}, \quad e) \int_e^{e^x} \frac{1}{x} \ln x dx, \quad f) \int_2^4 \frac{e^t}{1+e^t} dt,$$

$$g) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x} \cos x dx, \quad h) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2}, \quad i) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \cos x dx.$$

۲۷- لاندې ټوټه اینتیگرالونه اینتیگرال کړي:

$$a) \int_0^1 2x \cdot \sin x dx, \quad b) \int 4x^3 \cdot \ln x dx, \quad c) \int \cos^2 x dx$$

$$d) \int \cos x \cdot \sin x dx \quad e) \int x^2 \cdot \sin x dx \quad f) \int x \cdot (\cos x + 1) dx$$

$$g) \int x^3 \cdot e^x dx, \quad h) \int x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x dx,$$

د ډاکټر ماخان شینواري لیکني او ژباړي

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي لیکني:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :  
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .  
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,  
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهني پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له  
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهني ستر کتاب : د شمیرپوهني برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد  
لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ  
او دا نوي لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځني ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

خلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د احتمالي شمیرنه کتاب د بنوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انگرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرېون ( دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولگه

*Mathematical Formulas*

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

، د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکټر ماخان شینواري د ، د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکټر ماخان ، میری، ، شینواري لیکني او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برینکن لیکني چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دویم ټوک

۳ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالي شمیرنه د بنوونځي لپاره

۵ - احصایه یا ستاتیسټیک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - انالیزی ۱

۷ - انالیزی ۲

۸ - کرنبیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ - فنکشنل انالیز

۱۲ - وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له [www.grundstudium.info/linearealgebra](http://www.grundstudium.info/linearealgebra) څخه: کرنبیز الجبر

۱۴ - Georg Gutenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره: دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره، همداسې د بنوونکو او زده‌کوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېری پوهنه یا ست تیوري

۱۹ - د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

- ۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک
- ۲۱ - د شمیر پوهنې گډې وډې لیکنې
- ۲۲ - داهم ژباړه ده، خو لیکونکې یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیگرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې
- ۲۳ - د شمیرپوهنې انگریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري
- ۲۴ - د شمیرپوهنې پښتو انگریزي ډکشنري
- ۲۵ - د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه
- ۲۶ - د زره له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)
- ۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې و به غزیري.
- نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي
- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوتونو څخه ، چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپریري:
- د گروپونو تیوري
- د بنوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه
- له پنځم ټولگي څخه تر اومم ټولگي پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره بڼه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېشي)

## د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميروي شينواری د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ هـ لمريز کې د شينواریو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترگې راغړولي.

د هسکې ميني د لومړني ښوونځي (د لومړنيو زده کونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا ليسانس له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې (ښوونځي له لومړي ټولگي پيل او د دويم ټولگي څخه گام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپټمبر د کابل طب پوهنځي. له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چې هلته يې د شميرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د ۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير (صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمني کې سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي څانگه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان ميروي په ۱۹۷۲ کې له لري د ميرمن ښاپيري سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له ميرمن ښاپيري سره په ۱۹۶۳ ز کې کوزده کړې وه.

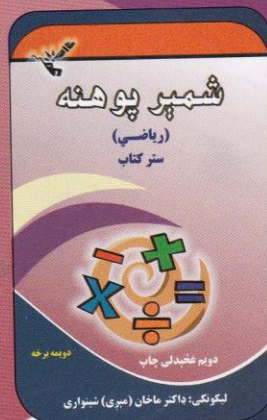
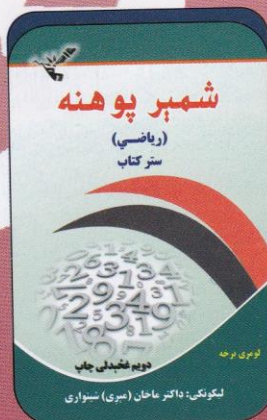
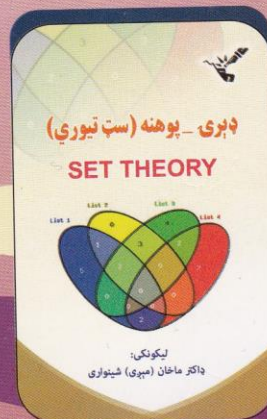
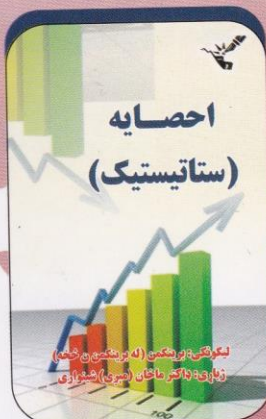
دوي ته لوي څښتن په اتریش ويانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز کې دوه بچيان وبخښل، چې څانگه او اباسين نوميري. څانگه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکټره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه ساپکولوژي لوستلي.

ماخان شينواري بي کاره نه دی او لږ تر لږه له ۱۹۹۷ څخه همدا د کتابونو ليکلو او د ژباړې دنده يې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.





ډاکټر ماخان (مېرې) شینواری



د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه - جرمني

VEREIN ZUR FORDERUNG DER AFGHANISCHEN KULTUR E.V

د خپرونو لړ (۱۳۰)

**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**