



# شمير پوهنه

(رياضي)

ستر کتاب



Ketabton.com

دويمه برخه

دويم غځېدلی چاپ

ليکونکی: ډاکټر ماخان (مېړی) شينواری



## دلوي څښتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهني لپاره د لگښت - لپاره د پوهني په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

makhanshinwari@gmail.com

### کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: د شميرپوهنه ستر کتاب ( دويمه برخه)

ليکونکی: ډاکتر ماخان،، ميري،، شينواری

د خپريدو لړۍ

خپرنډوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

۲۰۱۲

چاپ کال

### چاپ چاري

دانش خپرنډويي ټولني تخنيکي څانگه

[makhanshinwari@gmail.com](mailto:makhanshinwari@gmail.com)

د چاپ حقوق خپرنډويي ټولني ليکونکي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

## د خپرندوی ټولني یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولني د علمي، ساينسي او طبي اثارو د خپرولو لړۍ پيل کړې، تراوسه يې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هيواولو ته وړاندې کړي دي.

مور باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په يوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګاڼه سمبال شي او په علمي او اکاډميکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بيلابيلو ګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر مور ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووايو.

د اتحاديې له خوا د ډاکټر ماخان شينواري تراوسه زياتو چاپ شويو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمير پوهني نويو ژباړو او ليکنو او دوه ټولنيزو ليکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساينسي اثارو د خپراوي په لړ کې د يوه مهم ګام په توګه ګڼل کيدای شي او هيله ده، چې د دې برخې مينه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کټه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ زک



## د ليکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي گټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهني توانمندي، مگر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ، د افغانستان کلتوري ودې ټولنه، جرمني، د غرو، مرستندويانو او په تيره بيا د مشر تابه څخه زياته مننه کوم، چې پرته له خپرندويې ټولني په توگه يې د دې ليکنو زياته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کليوالو ملگرو او ملگرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زياته مننه کوم:

د بناغلي دپلوم انجنير ریحان الدين حساس، بناغلي دپلوم انجنير محمد اکبر نور، بناغلي ډاکتر سردار گانه وال، بناغلي ډاکتر مانوکل گانه وال، بناغلي ټولنپوه محمدعارف بيان، بناغلي دپلوم انجنير محمد ايوب بيان، همداسې زما د ملگري ارواښاد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي بناغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي، دپلوم انجنير او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحې او نه اخر زما د لور ډاکتر څانگي شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له ميرمن بناپړۍ څخه ډېره زياته مننه، چې زما د ليکنو- نه دا چې مخه يې نه ده نيولې- پوره ملاتړ کړي.

بيا هم له دوي څخه د زړه له کومي مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجر و نه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ زک

## نيولیک

نوي سريزه

سريزه

افغاني، يوناني ، لاتين الف ب

شمير پوهنيزي نخبي

## لومړی برخه

۱	د شمير پوهني سم اند يا منطق	۰ ۱
۱	پوهنيزه ژبه او پيدايښت يا طبيعي ژبه	۱ ۰ ۱
۳	د شمير پوهني سم اند بنسټيزه کليمي	۲ ۰ ۱
۳	ثابتي ، اووښتوني يا واريابلي ، ترمونه	۱ ۰ ۳ ۰ ۱
۵	وينا	۲ ۰ ۲ ۰ ۱
۷	د دوه ارزښتوالي اصول يا پرينخيپ	۳ ۰ ۲ ۰ ۱
۱۳	وينا فورم يا ۰ بڼه او کوانتورونه	۴ ۰ ۱
۲۸	اړيښ او پوره کيدونکي شرطونه	۵ ۰ ۱
۳۱	د شمير کليمه يا د لغاتو .....	۶ ۰ ۱
۳۳	برابرون او نابرابرون	۷ ۰ ۱
۳۸	تمرينونه	۸ ۰ ۱
۳۹	ډير ي پوهنه	۰ ۲
۴۰	د ډير ي پوهني کليمه	۱ ۰ ۲

۴۵	د ډبريو ترمنځ اړيکې	۲ . ۲
۴۶	ربخډېری	
۴۸	د يوې ډبرې توان يا توانډېری (توانست)	
۵۰	په ډبرې کې کارونې يا عمليې (۱)	۳ . ۲
۵۲	غوڅډېری يا متقاطعډېری	
۵۷	د يوې ډبرې يا ست کمپلیمنت	
۵۸	څيرونه	۴ . ۲
۶۷	تمرینونه	
۷۰	د ريبيل گڼونو سره د شميرلو بنسټيزي...	۰ . ۳
۷۰	د گڼونو- يا اعدادو سيستم جوړښت	۱ . ۳
۷۰	پيدايښتي يا طبيعي گڼونه	۱ . ۱ . ۳
۷۱	د پيدايښت يا طبيعي گڼونو جوړښت	الف . ۱ . ۳
۷۲	د پيدايښت گڼونو انځورونه او شميرنه	ب . ۱ . ۳
۷۸	د شميرنې بنسټيز قوانین	پ . ۱ . ۳
۸۴	ټولگڼونه	۲ . ۱ . ۳
۸۶	الف د ویش تيوري	۲ . ۱ . ۳
۸۸	غت گډ پرويشونې(بزرگترین مقسوم عليه ...)	ب ۲ . ۱ . ۳
۱۰۶	راشنلگڼونه	۳ . ۱ . ۳
۱۰۸	رييلگڼونه	۴ . ۱ . ۳

۱۱۹	ماتشمیرنه	۱۰۲۰۳
۱۳۰	تمرینونه	۳۰۳
۱۴۱	پوتنخ یا توان ، رینه یا جذر	۰۴
۱۴۱	توان د تولگنیز په جگ یا اکسیوننت	۱۰۴
۱۴۴	رینه او توان د راشنل اکسیوننت یا جگن سره	۲۰۴
۱۵۱	توان دریلگن اکسیوننت یا جگن سره	۳۰۴
۱۵۲	تولگه	۴۰۴
۱۵۸	لوگاریم	۰۵
۱۵۸	د لوگاریم کلیمه	۱۰۵
۱۶۶	تولگه	۳۰۵
۱۶۹	گونومتری	۰۶
۱۶۹	بنسټیزه ځمکچپونه یا هندسه	۱۰۶
۱۶۹	ټکی او کرښه	۱۰۱۰۶
۱۷۱	کونج	۲۰۱۰۶
۱۷۴	درېگودی	۳۰۱۰۶
۱۷۸	کونکروانیخ او ورته والی	۴۰۱۰۴
۱۸۴	ولارکونجیز درېگودی	۵۰۱۶۰
۱۸۸	په ولارکونجیز درېگودی کې د ...	۲۰۶
۱۹۰	په یوونگردي کې د کونج بلواک ..	۳۰۶

۱۹۵	د ساین او کوساین جملې	۴۰۶
۲۰۵	تریګنومتریګي کټمیوالی	۵۰۶
۲۱۵	تریګنومتریګي یا کونجکچیز فرمولونه	۵۰۶
۲۲۲	کمپلکس ګڼونه	۰۷
۲۳۵	د ښوونې یا ثبوت متودونه	۰۸
۲۳۵	سیده ښوونه	۱۰۸
۲۳۷	ناسیده ښوونه	۲۰۸
۲۳۹	د پوره ایندکشن له لارې ښوونه	۳۰۸
۲۴۳	لاینیز برابرې له یوې اوریدونې یا ...	۹
۲۴۴	لاینیز برابرې	۱۰۹
۲۶۶	کومبیناتوریک، د بینوم جمله	۱۰
۲۶۶	فاکولتیت یا فاکتوریل	۱۰۱۰
۲۶۷	د بینوم ځله ونه	۲۰۱۰
۲۷۰	د بینوم جمله	۳۰۱۰
۲۷۴	کومبیناتوریک	۴۰۱۰
۲۷۵	پرموتیشن	۱۰۴۰۱۰
۲۸۰	واریشن	۲۰۴۰۱۰
۲۸۶	کمبیشن	۳۰۴۰۱۰
۲۹۱	د پرموتیشن، واریشن او ....	۴۰۴۰۱۰

۲۹۵	لانیز الجبري برابرونونه	۰ ۱۱
۲۹۶	لانیز برابرون له دوه اوریدونو یا ...	۱ ۰ ۱۱
۳۰۷	دویمه درجه دیترمینانت او د کرامر...	۳ ۰ ۱ ۰ ۱۱
۳۱۲	د گاوس الگوریتم	۴ ۰ ۱ ۰ ۱۱
۳۱۶	له دوه وو زیات برابرونونه له دوه ...	۵ ۰ ۱ ۰ ۱۱
۳۱۷	لانیز برابرونونه له درې ....	۲ ۰ ۱۱
۳۱۷	یو برابرون له درې ناپیژندونو سره	۱ ۰ ۲ ۰ ۱۱
۳۱۸	دوه برابرونونه له درې ...	۲ ۰ ۲ ۰ ۱۱
۳۱۹	دریمه درجه دیترمینانت او د ...	۳ ۰ ۲ ۰ ۱۱
۳۲۲	د گاوس لگوریتم	۴ . ۲ . ۱۱
۳۲۵	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳ ۰ ۱۱
۳۲۶	د $n$ -م درجې دیترمینانت او د ...	۱ ۰ ۳ ۰ ۱۱
۳۲۸	د گاوس الگوریتم	۲ ۰ ۳ ۰ ۱۱
۳۳۳	تمر نونه	
۳۴۰	الجبري برابرونونه	۱۲
۳۴۰	نالاینیز برابرونونه	۱ ۰ ۱۲
۳۴۳	څلورۍ نيز یا مربع برابرونونه	۲ ۰ ۱۲
	د دوه په جگ برابرونونه ، د ویتا جمله	۱ . ۲۰ ۱۲
۳۵۰	څلورۍ برابرونونه ، چې په نورمال	۲ ۰ ۲ ۰ ۱۲



۳۵۱	د n-م درجې ځانگړي برابرې...	۳۰۲۰۱۲
۳۵۷	دریمه درجه برابر ونونه	۳۰۱۲
	د ریښې برابر ونونه	۴۰۱۲
۳۷۵	ترانسڅیندنت برابر ونونه	۱۳
۳۷۵	لوگاریتم برابر ونونه	۱۰۱۳
۳۸۰	اکسپوننشل- یا په جگړې برابر ونونه	۲۰۱۳
۳۸۵	گونومتريکي یا کنجکچیز برابر ونونه	۳۰۱۳
۳۹۶	له نابرابرونو او مطلقه ارزښت ..	۱۴
۳۹۶	نابرابرونونه	۱۰۱۴
	بنسټیزې کلیمې او شمیر قوانین	۱۰۱۰۱۴
۳۹۷	اینټروال	الف ۱۰۱۴
۴۰۰	نابرابرونونه له یوې ناپېژندونکې...	۲۰۱۰۱۴
۴۰۹	د نابرابرونو سیستم ...	۳۰۱۰۱۴
۴۱۱	نابرابرونونه له دوه ناپېژندونکو سره	۴۰۱۰۱۴
۴۱۴	برابرونونه او نابرابرونونه ....	۲۰۱۴
۴۱۴	له مطلقه ارزښت سره شمیرنه	۱۰۲۰۱۴
۴۱۵	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۲۰۲۰۱۴
۴۲۰	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۳۰۲۰۱۴
۴۳۰	بلواک یا فنکشنونه یا تابع	۱۵

۴۳۰	د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه	۱۰۱۵
۴۳۳	د بلواک خویونه	۲۰۱۵
د ستر کتاب دویمه برخه		
۴۶۶	د هواري يا سطحې شننيزه هندسه ...	۱۶
۴۶۶	کرښه	۱۰۱۶
۴۷۵	گردی	۲۰۱۶
۴۸۲	ایلیپسی	۳۰۱۶
۴۸۷	هیوپربول	۴۰۱۶
۴۹۲	پارابول	۵۰۱۶
۴۹۴	تولگه	۶۰۱۶
۵۰۲	وکتور شمیرنه	۱۷
۵۰۲	د وکتور پیژند یا تعریف،	۱۰۱۷
۵۰۲	په کارتيزي کواوردينات سيستم کې د وکتور انځورونه	
۵۰۹	د دوه وکتورونو سکالار ځل	۲۰۱۷
۵۱۲	د دوه وکتورونو وکتوري ځل	۳۰۱۷
۵۱۷	غبرگهواريز يا موازي الاضلاع ضرب	۴۰۱۷
	په شننيزه ځمککچ کې د وکتورونو ....	۵۰۱۷
۵۲۱	د یوې کرښې وکتوري انځورونه	۱۰۵۰۱۷
۵۲۴	د هواري يا سطحې وکتوري انځورونه	۲۰۵۰۱۷

۵۲۵	د هوار برابر و نونو سکالار فورم یا ۰ بڼه	۵۰۱۷
۵۳۳	پرلپسي او پرلپسي لړۍ	۱۸
۵۳۳	پیل	۱۰۱۸
۵۳۴	د گڼون - عددونو پرلپسي کلیمه	۲۰۱۸
۵۴۲	مونوتوني پرلپسي	۱۰۲۰۱۸
۵۴۵	اريتميتيکي پرلپسي	۲۰۲۰۱۸
۵۴۷	هندسي پرلپسي	۳۰۲۰۱۸
۵۵۰	لړۍ	۲۰۱۸ الف
۵۵۵	هندسي لړۍ	۱۰۲۰۱۸ الف
۵۵۷	اريتميتيکي لړۍ	۲۰۱۸ الف ۲
۵۵۸	د پرلپسي او لړيو د پولې ...	۴۰۱۸
۵۷۸	د فنکشنونو پولې او ناپريکيدنه	۱۹
	بنسټيزې کلیمې	۱۰۱۹
۵۸۶	د پولو يا حدونو خويونه	
۵۹۲	د راشنل، کسري يا نسبي	
۵۹۶	د مثلثاتي يا درېکودي کچ توابعو پولې	
۶۰۴	ناپريکيدني	
	په پوله ارزښت او ناپريکيدني څو جملې	۲۰۱۹
۶۱۰	د ناپريکيدونکو فنکشنونو خويونه	۳۰۱۹

د بنسټيزو فنکشنونو ناپريکيدنه	٤٠١٩
د څپرکي ټولگه	٦١٦
دفرنخيالشميرنه	٦٢٦ ٢٠
د تابع تغيرمنځ ارزښت(منځنی قیمت)	٦٢٦
په يوه ټکي کې د تابع گراف ...	٦٢٨
د لخصوی(سترگورپ) تغير...	٦٣٠
کمبنتوبش ( تقسيم تفاضل؟)	٦٣١
دفرنشلوبش يا راييليدنه يا مشتق	٦٣٣
کمبنتوبش او مشتق يا راييليدنه	٦٣٦
د $x_0$ په ځای کې د فنکشن مشتق	٦٤٣
د تانجنت پيژند او خويونه	٦٤٧
د تانجنت او عمود يا ولاړ ټوليز مساوات	٦٥٠
په بيديا کې جگوالی	٦٥٢
الف : د تانجنت يا جگيدني غوره والی	١٠١ .٢٠
د فرنخيال يا راييليدني يا مشتق قاعدې	٦٥٦ ٢٠٢٠
د درېگوديزو يا مثلثاتي .....	٦٦٢
د اکسپوننشل يا په جگ توابعو.....	٦٧٠
د مشتق استعمال په طبيعي پوهن کې	٦٧٦
د ايمپليڅيت توابعو مشتق	٦٨٣

۶۸۶	د بنسټيزو رابيليدنو(مشتقونو) جدول	
۶۸۸	ټولگه	
۶۹۱	د يوې تابع د مشتق قابليت	
۶۹۸	د معكوس- - يا په څټ توابعو مشتق	
۷۰۱	د بنسټيزو بلواكو رابيليدنه	۲۰ ۳.
۷۱۰	د رول قضيه	
۷۱۱	د وائر شتراس قضيه	
	افراطي ارزښتونه او اوږونتگی	۰۴. ۲۰
۷۱۲	د دفر نشل منح ارزښت قضيه	
۷۱۵	يوعربزي توابع	
۷۲۰	ځای اړوند افراطي ټکي	
۷۲۴	د انعطاف – يا اوږونتگی	
۷۳۳	د کوي يا منحنې بحث يا خبرې	
۷۴۶	ناتاکلي حدونه يا پولې	
۷۵۰	د برنولي او د لو پيټال ....	
۷۵۷	د غټو گټو پرابلم	۵۰. ۲۰
۷۶۷	تمرینونه	
۷۷۸	په ټوټه کسرونو ټوټه کونه	
۷۸۷	انټيگر الشميرنه	۲۱

۷۸۷	پیلر اورنه	
۷۸۹	انتیگر الشمیره	۲۱
۷۹۰	د ریمن (ناټاکلی) انتیگرال	
۷۹۴	بنسټیزه یا لومړنی تابع	
۷۹۶	سطحه او لومړنی تابع	
۷۹۹	ناټاکلی انتیگرال	
۸۱۲	د ټاکلي انتیگرال شمیره	
۸۱۴	تکمیلیدونکي بنسټونه	
۸۱۵	د ټاکلي انتیگرال څخه و ټاکلي ...	
۸۱۷	د انتیگرالونې قاعدې	
۸۱۹	د اکسپوننشل توابعو انتیگرال	
۸۱۹	د لوګاریتمي توابعو انتیگرال	
۸۲۱	بدلون قانون	
۸۲۷	توابع، چې بی د بدلون له لارې...	
۸۳۲	ټوټه انتیگرالونه	
۸۳۴	د ټوټه انتیگرالونې لار	
۸۳۸	د ټوټه راشنل کسرونو انتیگرال	
۸۴۱	نږدې (مبهم) انتیگرال	
۸۵۲	د ټاکلو انتیگرالونو حل د بدلون له لارې	



۸۶۲

د انتیگرالشمیرني استعمال

۸۸۸

تمرینونه

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوی لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړې یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

## ۱۶ - د سطحې شننيزه (تحليلي) هندسه

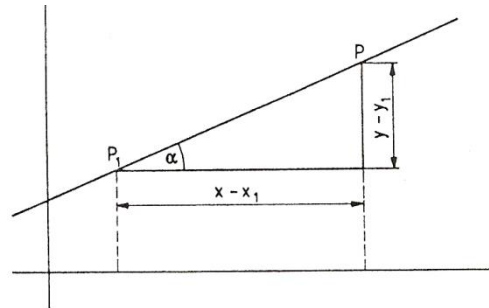
په دې برخه کې يو خود تحليلي (شننيزې يا سپرنيزې) ځمکچپوهنې يا هندسي ټاکلي پرابلمونه څيرل کيږي. د تحليلي هندسي بنسټيزه تگلار به څرگنده (وېسول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننيزې يا تحليلي څرگندونو کې د هندسي خوږونو جوړښت ښايي.

۱۶ . ۱ کرښه

د هندسي ټاکنو ټوټو له لارې مختلف امکانات شته دي، چې يوه کرښه يواځنې کره تعين کړای شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښه ابروونو يا - مساواتو مختلفې ښې شته دي. يوه کرښه د يوه ټکي او د هغه د لور (سمت) له لارې ټاکل کيږي شي. ( ټکی او د ټکي ميلان معلوم دی ).

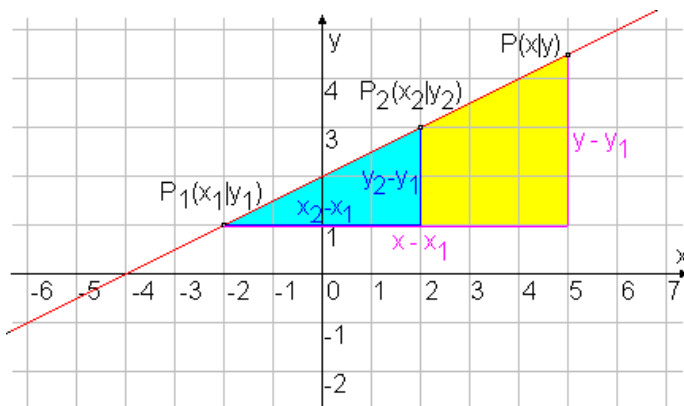
دلته دې  $P_1(x_1, y_1)$  دا ټکي وي.  $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$  دې د جگيدو کونج وي، چې د کرښې

لور ټاکي (څخه ۱۶ . ۱) او  $P(x, y)$  په کرښه يو اووښتونی (واريابل) ټکی دی .



نو د کرښې د ميلان  $\tan \alpha = m$  لپاره باور لري:  $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته څیره دې وکتل شي ( لاددې څیره هم په همدې موخه کښل شوي ده))



له دې څخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1); \dots \dots \dots (16.1)$$

پورته د کرښې ټکی لور برابر و

که د  $y$  په محور  $P_1$  وټاکل شي د کواورډیناتو  $x_1 = 0, y_1 = b$  سره، نو له ( ۱۶ . ۱ )  
(سملاسي په لاس راځي:  $(y - b = m(x - 0))$  په همدې ډول  $(\Leftrightarrow)$ )

$$y = mx + b \quad (16.2)$$

دا پورته برابر و د کرښې مساواتونو نور مال فورم (بڼه) بلل کيږي

یوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

دا دوه ټکي دي  $P_1(x_1, y_1)$  او  $P_2(x_2, y_2)$  وي، د  $|x_1 - x_2|$  سره ، (څیره ش ۱۶ . ۲ )  
د جگیدونکی یا تنجنت  $\tan \alpha = m$  لپاره داسی دي:

$$m = (y - y_1) / (x - x_1)$$

او

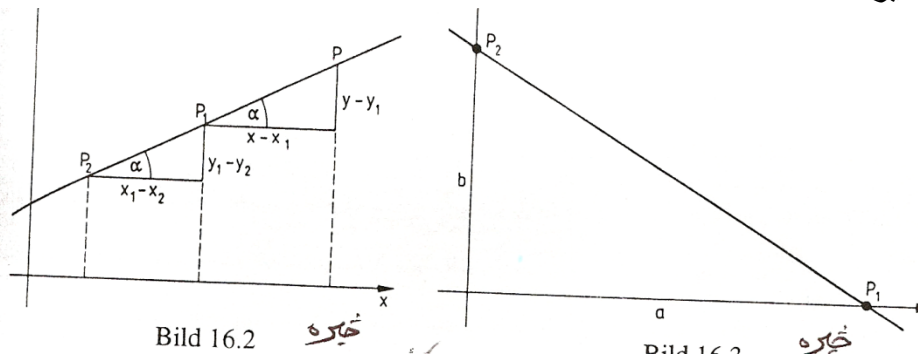
$$m = (y_2 - y_1) / (x_1 - x_2) = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$$

له کومو چی لاس ته راځي

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \dots\dots\dots (16,3)$$

پورته د کرښی دوه ټکیز برابر وړون

څیره ده



که د  $x$  - محور باندي د  $P_1$  ټکی ، د کواورډینات  $x_1 = a$  |  $y_1 = 0$  سره وټاکو او  
 ټکی  $P_2$  د  $y$  - محور باندي د کواورډینات  $x_1 = 0$  ,  $y_2 = b$  | سره وټاکو ، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:  
 $(y - 0) / (x - a) = (b - 0) / (0 - a)$   
 او له دې دا لاندي لاس ته راځي:

$$x/a + y/b = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوڅي برابر وړون

څلور پورتنی کرښمساوات ټول په  $x$  او  $y$  کی لاینیز دي. د مساوات عمومي فورم (یا ټولیزه بڼه) داسی دی:

$$Ax + By + C = 0 \quad (16.5)$$

د کرښبرابر وړونو ټولیزه بڼه (عمومي فورم)

دا فورم په ځانگړې توگه دا برابرون هم خوندي لري يا په بر کې نيسي

$$y = y_0 \quad (A = 0, B = 0)$$

او ( $x = x_0$ ) چې د  $x$  - محور او په همدې ډول د  $y$  - محور ته غبرگي کړنې دي، په داسې حال کې چې تراوسه دومه لانه ده څيرل شوي

بيلگه ۱۶ . ۱:

د کړنې برابرون يا لاینيز برابرون، چې له  $P(-2, 3)$  ټکي تيريري او د جگوالي کونج  $\alpha = 30^\circ$  یی د  $m = \tan \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3}$  له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسې ليکل

$$y - 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x + 2) \quad \text{کيري}$$

او نورمال فورم يې په لاندې ډول دی

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بيلگه ۱۶ . ۲:

د لاینيز برابرون يا د کړنې برابرون په ټکو  $P_1(3/2, -2)$  او  $P_2(1, -4)$  کې د (۱۶ . ۳) سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y + 2}{x - \frac{3}{2}} = \frac{-y + 2}{1 - \frac{3}{2}}$$

$$\text{له دې لاس ته راځي: } y + 2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x - \frac{3}{2})$$

نو نورمال فورم  $y = 4x - 8$  لرو (اته ناسم، په ځای يې شپږ دي)





بیلگه ۱۶ . ۵ :

د درېګوډي ABC د اړخونو او بردوالی، چی کونجیګی یی دادی (-) B(3,1), A(3,1), C(2,5), په لاندې ډول دی

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښي (نه کټمتی) چی (یو د بلې سره) غبرګي نه وي ټیک یو غوڅټکی لري. دا چی دا ټکی په دواړو کواور دیناتو پروت دی، نو د دواړو کواور دیناتو برابر ونه باید پوره کړي. په دې حالت کی د غوڅټکی کواور دیناتو، د دوه لاینیزو برابر ونونو سره چی دوه اوبستونی یا

نایژندونکی (مجهولی) ولري، د یوه سیستم یواځنی کره اوبیونه تری لاس ته راځي. په ټولیزه توګه دا باور لري: که یو برابر ونسیستم چی د دوه کرښو د برابر ونونو څخه جوړ وي، او یو یواځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښي یو بل په دې ټکی کی سره پري کوي.

که ناپای ډیري اوبیوني شته وي، نو په دې حالت کی برابر ون همغه یوه کرښه ښایي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښي یو بل سره غبرګي ځلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بیلگه ۱۶ . ۶ :

د  $g1: y = 3x - 2$  کرښی پروتځاي (موقعیت) د لاندې کرښو

$$g2: -2x + y = 1, \text{ (الف)}$$

$$g3: 3x - y = 5, \text{ (ب)}$$

$$g4: -x + (1/3)y = -2/3 \text{ (پ)}$$

سره څیرو

اوبیونه : د  $g1$  برابر ونونو څیره داسی بدلیري :  $3x - y = 2$

(الف) د برابر ونونو سیستم  $3x - y = 2$ ،  $-2x + y = 1$

ټیک یوه اوبیونه لري:  $x1 = 3$ ،  $y1 = 7$

ددې څخه څرګندیري چی ټکی  $S(3, 7)$  د کرښو  $g1$  او  $g2$  غوڅټکی دی .

ب) د برابر ونونو سيستم

$$3x - y = 2$$

$$3x - y = 1$$

اوبی نه لري: برابر ونونه يو بل ردوي په نه زغمي. د  $g_1$  او  $g_2$  کرښی يو د بل سره غبرگي دي

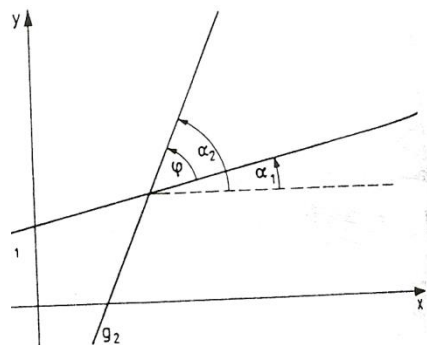
پ) د برابر ونونو سيستم  $3x - y = 2$

$$-x + (1/3)y = -2/3$$

نایای ډیرې اوبیوني یا حلونه لري. برابر ونونه يو بل سره برابر یا يو بل ته ورته دي. که په ۳ ضرب شي يو همغه پورته برابر ون تری لاس ته راځي.  $g_1$  او  $g_2$  دوه کټ مټ برابر ونونه دي. که د دوه کرښو

$$g_1: y = m_1x + b_1 \quad g_2: y = m_2x + b_2$$

غوڅکونج  $\phi$  ټاکو، نو د دواړو کرښو جگید کونجونو  $\alpha_1$  او  $\alpha_2$  کمون (کمښت یا توپیر) جوړوو (خ ۱۶. ۶)



څیره ۱۶. ۶

د کرښی له برابر ونونو پوهیرو  $\tan \alpha_1 = m_1$  او  $\tan \alpha_2 = m_2$

د زیاتون تیورم (بنسټیزه جمله) (برخه ۵. ۶) څخه د  $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$  لپاره (پر تله

برخه ۵. ۴) باوري ده

$$\tan \phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1) / (1 + \tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2)$$

د کوم څخه چې  $\tan \alpha_1 = m_1 \wedge \tan \alpha_2 = m_2$  سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan \phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}; \dots \dots \dots (16, 7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج دیر

دا په دې پورې اړه لري چې ایا  $\phi > 0 \vee \phi < 0$  د پورته څیرې ۱۶ . ۶ کونج پڅ او که تیره دی.

بیلگه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو  $g_1: y = x - 1$  او  $g_2: y = (7/4)x + 1$  غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) څخه لاس ته راځي:

$$\tan \phi = \frac{\frac{7}{4} - 1}{1 + 1 \cdot \frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15, 255^\circ$$

د  $g_1$  او  $g_2$  ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی :  $180 - \phi = 164, 745^\circ$

د دوه کرښو یو بل ته ځانگړي حالتونه:

۱ - کرښی یو بل سره غبرگی ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180^\circ \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan \phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = 0$$

گورو چې د  $m_2 - m_1 = 0$  لپاره باور لري، نو  $m_2 = m_1$

(دلته باور لري :  $m_1 \cdot m_2 = m_1^2 \neq -1$ )

۲ - کرښی یو په بل (نیغی) ولارې دي، نو لرو

$$\phi = 90^\circ \Rightarrow \tan \phi = (m - m) / (1 + m \cdot m) = \infty$$

دا حالت د  $1 + m_1 \cdot m_2 = 0$  لپاره منځ ته راځي،

یعنی د  $m_2 = -1/m_1$  لپاره  $(m_1 \neq 0, m_2 \neq 0)$

په کرښه  $(m_1 = 0)$   $y = y_0$  باندې کرښه  $(m_2 = 0)$   $x = x_0$  نیغه ولاړه ده

د غیرگوالی لپاره شرطونه

$$m_2 = m_1 \quad (16, 8)$$

د اورتوگونالیتی Orthogonalität (یو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

$$m_2 = -1 / m_1 \quad (16 . 9)$$

بیلگه ۱۶ . ۸ : د کرښی  $g_2$  برابرې دې وټاکل شي چی له ټکي  $P(2, -1)$  تیریري، او له کرښی  $g_1 : y = -2x + 1$  سره الف ( غیرگه او ب) اورتوگونال (نیغه) ځغلي اوبونه:

الف) د  $g_2$  کرښی میلان ( جگوالی  $m_2 = m_1 = -2$  ) دی. پام ( ۱۶ . ۱ ) ته دکرښي  $g_2$  برابرې لپاره باور لري:  $y + 1 = -2(x - 2)$  همداسی  $y = -2x + 3$   
 ب) د  $g_2$  کرښي میلان یا جگیدنه ده  $m_2 = -1/m_1 = 1/2$  د ( ۱۶ . ۱ ) سره سم د  $g_2$  کرښي برابرې دی:  $y + 1 = (1/2)(x - 2) \Leftrightarrow y = (1/2)x - 2$

بیلگه ۱۶ . ۹ :

د کرښی برابرې ټاکل کیري چي د  $P_1(1/3, -1/6)$  ټکی تیریري او په کرښه چی له ټکو  $P_2(-1, 1)$  او  $P_3(-2, -1)$  تیریري، ولاړه وي.  
 ځواب: کرښه چي له  $P_2, P_3$  ټکو تیریري، و ( ۱۶ . ۳ ) ته په پام لاندې برابرې لري  $(y - 1)/(x + 1) = (-1 - 1)/(-2 + 1) = 2 \Leftrightarrow y = 2x + 3$

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی میلان یا جگوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د  $p_1$  څخه تیریدونکی کرښي برابرې د  $m_2$  میلان سره د ( ۱۶ . ۱ ) له مخی دي:

$$y+(1/6)=-1/2(x-173) \Leftrightarrow y=-1/2x$$

بیلگه ۱۶ . ۱۰ :

د  $g_1: 2x-y-1=0$  او  $g_2: 3x+2y=5$  کرښو د غوڅتکي  $S$  واټن له ټکي  $P(6,13)$  څومره دی او د کرښي برابرې څنګه دی چې د کواورډینات له سرچینې تیریري او د  $S$  او  $P$  څخه تیریدونکی کرښه باندې ولاړه کرښه وي؟

ځواب : د غوڅتکي کواورډینات د لاندې برابر ونونو سیستم څخه لاس ته راځي

$$2x-y=1$$

$$3x+2y=5$$

یعنی:  $xS=1, yS=1$

د  $S$  او  $P$  ټکو ترمنځ واټن له ( ۱۶ . ۶ ) څخه لاس ته راځي

$$d = \sqrt{(1-6)^2 + (1-13)^2} = 13$$

د ( ۱۶ . ۳ ) له مخې د کرښي برابر ونونه چې له  $S$  او  $P$  تیریري دي

$$(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1) \Leftrightarrow y=(12/5)x-7/5$$

( جگوالی:  $m = 12/5$  )

له  $S$  او  $P$  ټکو تیریدونکی کرښه باندې د ولاړې کرښي میلان

$$m_2 = -1/m = -5/12$$

د  $P_0(0,0)$  څخه تیریدونکی کرښه د  $m_2$  میلان سره د ( ۱۶ . ۱ ) له مخې لاندې

برابرون لري

$$y-0=-5/12(x-0) \Leftrightarrow y=-5/12x$$

## ۱۶ . ۲ گردی (دایره)

دایره (گردی) د ټولو هغو ټکو ډیری (سټ) ده، چې د یوه کره ځای په ځای ټکي، داسې په نامه منځنۍ څخه، همغه واټن ولری. واټن ته یی وړانګه وایو او په  $r$  یی په نڅښه کوو.

فورمال داسې ویل کیږي یا دا پیژند وړکوو، چې دایره (گردی)  $k$  د د سطحی

(هواری)  $E$  د ټولو ټکو ډیری (سټ) ده، د کومو لپاره چې باور لري:

$$k = \{ X \in E \mid |\overline{MX}| = r \}$$

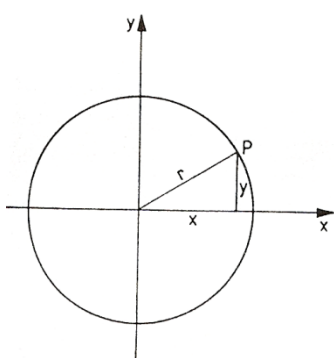
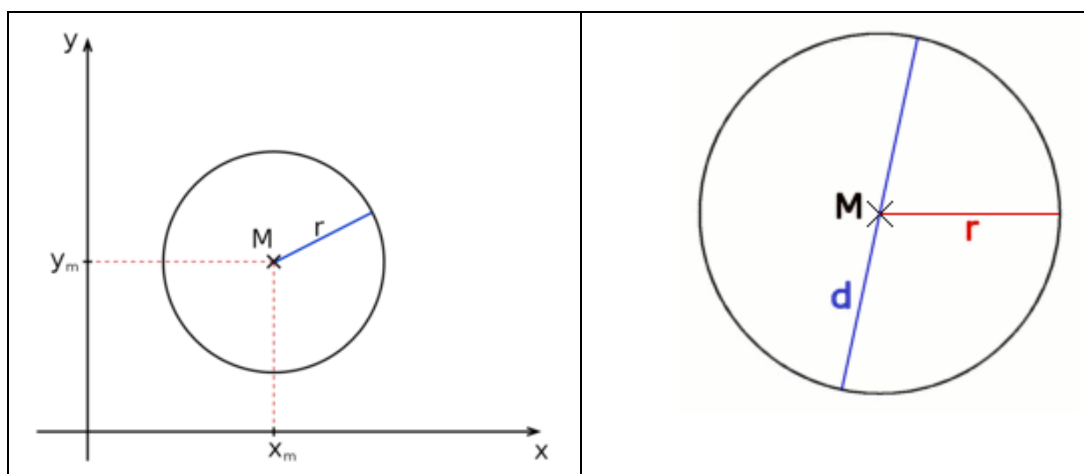


Bild 16.7 ښکاره

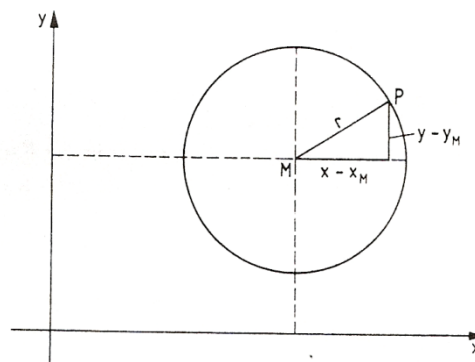


Bild 16.8 ښکاره

په شننيزه هندسه کې کيدی شي، چې گردۍ د منځتکي  $M(x_m, y_m)$  او وړانگي  $r$  سره (په هواره گي) د لاندې برابرې له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د گردۍ ټوليز برابرې

دا برابرې د پيژند او پيټاگوراس له جملې سملاسي ورکوي د يوې گردۍ ځانگړي حالت او د کواورديناټسسيستم سره، چې منځتکي يې د کواورديناټ په سرچينه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

که د گردۍ منځ ټکی د کواورديناټسيستم ( څيره ۱۶ . ۷ ) په سرچينه پروت وي، نو د ( پيوټاگوراس د جملې له مخې ( د گردې په خوښه ټکي  $P(x,y)$  لپاره باور لري

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16.10)$$

د گردۍ منځټکي برابرېون چې د گردې منځټکي  $M(0,0)$  او وړانگه  $r$  ده.

که د گردې منځټکي  $M$  کواورديناټ  $(x_M, y_M)$  ولري (څيره ۱۶ . ۸) نو د گردۍ د خوښې ټکي  $P(x)$  لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د گردې د منځټکي برابرېون وي د منځټکي  $M(x_M, y_M)$  او وړانگي  $r$  سره

که په ( ۱۶ . ۱۱ ) کې د بينوم مربع وي شميرو او برابرېون په  $A=0$  فاکتور ځلوو (بی له دې چې د گردې برابرېون تغير ومومي) ، پس پيژندل کيږي چې د گردې برابرېون د څلورۍ يا مربع غړي په  $x$  او  $y$  کې په فاکتور  $A$  لاینيز برابرېون په  $x$  او  $y$  او ثابت غړي ( چې يوه غړي په څيري سره يوځاي شوي ) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې ټوليز (عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + E = 0. \quad A \neq 0 \quad (16.12)$$

د گردې برابرېونونو (مساواتو) ټوليز فورم يا ټوليزه بڼه •  
که د گردې برابرېون په ټوليزه بڼه يا عمومي فورم ورکړ شوي او که منځټکي او وړانگه يې څرگنده کوو يا معلومو نو د گردې برابرېون د منځټکي فورم باندې راوړو يا را اړوو. دا د څلورۍ پوره کولو يا مربع تکميلولو په بنسټ صورت نيسي . دوه څيري پورته وگورۍ

بيلگه ۱۶ . ۱۱ :

د گردۍ برابرېون دې په ټوليزه - يا عمومي توگه وي:

$$2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y = 0$$

له دې لاس ته راځي، که په دوه وويشل شي  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

(د څلورۍ پوره کونه يا مربع تکميلونه)  $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 3 + 4 + 9$

د بېنوم د مربع له لارې انځورونه  $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$  گردۍ منځتکي  $M(-2, 3)$  او وړانگه  $r=4$  لري.

بېلگه ۱۶ . ۱۲ :

د گردۍ برابرې وليکۍ چې منځتکي يې  $M(2; 0)$  وي او په کوم چې تکي  $P(6, 4-3)$  روت دی؟

اوبیونه : د  $M(2, 0)$  سره ( ۱۶ . ۱۱ ) داسی دی

$$(x-2)^2 + y^2 = r^2$$

د  $P$  تکي د گردۍ برابرې پوره کوي  $(6-2)^2 + (4-3)^2 = r^2$

له دې څخه د گردۍ وړانگه په لاندې ډول لاس ته راځي:  $r = 8$  او له دې سره د گردۍ برابرې:

$$(x-2)^2 + y^2 = 64$$

گردۍ او کرېنه يو بل ته درې مختلف ځايونه لروډی شي

۱ - کرېنه گردۍ غوڅوي، نو له دې امله غوڅی ده (سيکانتی)

۲ - کرېنه گردۍ په يوه تکي کې لمسوي يعنی مماس دی (تانجنت يا جگوالی )

۳ - کرېنه ټوله له گردۍ دباندې پرته ده (له گردۍ تيريدونکی، لنډ : تيريدونې)

د غوڅتکي (د تقاطع تکي) کواوردینات باید د گردۍ او کرېنې برابرې پوره کړي سړی د کرېنې برابرې د گردۍ په برابرېونو کې رډي (  $y$  يا  $x$  پسې حل يا اوبی شوي) او په روښانه ډول يو مربع مساوات (څلورۍ برابرې) په  $x$  او  $y$  کې لاس ته راوړي، کوم چې په څرگند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲ ) دوه ريل اوبیوني يا ځوابونه لري، يو ريل ډبل اوبی او يا هڅ ريل اوبی کيدی شي ولري، کوم چې له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ څخه عبارت دي.

بېلگه ۱۶ . ۱۳ :

کوم پروت ځايونه گردۍ  $k$  چې راکړشوی:  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$  او لاندې کرېنې و يو بل ته لري؟



$$g_1 : 2x+y=4, g_2=2x+y=12, g_3: -x+y/2=3$$

اوبی:  $g_1: y=-2x+4$  که د گردی برابرېون کی ځای کړو نو دا برابرېون لاس ته راځي

$$(x-2)^2+(-2x+4-3)^2=5 \Leftrightarrow 5x-8x=0$$

ددې ځوابونو  $x=0, y=4$  او  $x=8/5, y=4/5$  سره به  $g_1$  د گردې غوڅوونې یا (Sekant سکانت) وي .

که  $g_2: y=-2x+12$  د گردې مساواتو کی ځای کړو نو لاندې لاس ته راځي

$$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 \Leftrightarrow x^2-8x+16=0$$

د ډبل اوبونې  $y_{1,2} = 4, x_{1,2} = 4$  سره  $g_2$  یو تانجنت دی .

که  $g_3: y=2x+6$  د گردې مساوات کی ځای کړو، نو لاندې لاس ته راځي:

$$(x-2)^2+(2x+6-3)^2 \Leftrightarrow 5x^2+x+8=0$$

دا څلوری برابرېون یا مربع مساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه  $g_3$  له گردې  $k$  دباندې پرته ده، یعنی دباندنی یا دباندونی ده.

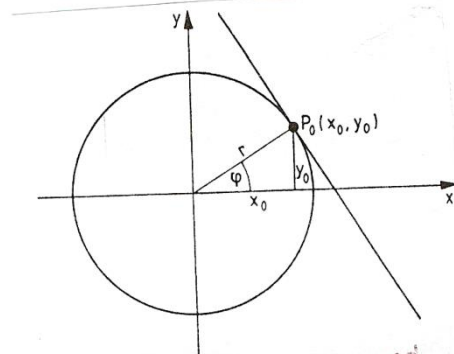


Bild 16.9

په گردې  $x^2+y^2=r^2$  (څره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرېون په ټکی  $P_0(x_0, y_0)$  مساوات  $x_0^2+y_0^2=r^2 > 0$  سره غوښتل کيږي. تنجنت د مماس په وړانګه نېغ ولاړ دی

د مماس وړانګه دا ميلان يا جګوالی لري  $\tan \phi = \frac{y_0}{x_0}$  او

له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخې د تنجنت

$$m = 1 / \tan \phi = -x_0 / y_0; \dots \dots \dots (16,13)$$

د تنجنت يا جګي برابرېون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:

$$y - y_0 = -(x_0/y_0)(x - x_0) \Leftrightarrow xx_0 + yy_0 = x^2 + y^2 = r^2$$

$$xx_0 + yy_0 = r^2 \quad (16.14)$$

د گردی تنجنت باربرون په ټکي  $P_0(x_0, y_0)$  په گردی

$$x^2 + y^2 = r^2$$

(حالتونه  $P_0(0, \pm r)$  او  $P_0(\pm r, 0)$  په (۱۶. ۱۴) کی ځای ( دننه ) دي.  
(څیره. ۱۶. ۱۰)

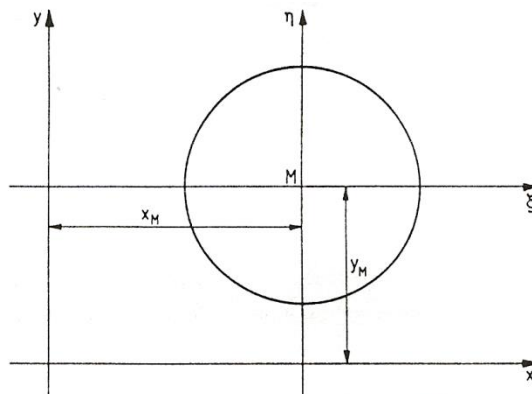


Bild 16.10 څیره

یادونه : که له دې مخ ته یا وروسته  $x_0, y_0$  یا  $x_M, y_M$  او  $x_0, y_0$  یا  $x_M, y_M$  گورو نو کټمټ دي

بیلگه ۱۶. ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرې له ټکي  $P_1(-12, 4)$  په گردی  $x^2 + y^2 = r^2$  په څه ډول دي؟  
اوبیونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پیداوو. دا باید د گردی برابرې پوره کړي .  
ټکی  $P_1$  باید په تنجنت پروت وي یعنی د تنجنت برابرې (۱۶. ۱۴) باید پوره کړي.  
نو باور لري

$$x_0 + 4y_0 = 16 \quad \text{او} \quad x_0^2 + y_0^2 = 16$$

که دا لاینیز برابرېون د  $y_0$  په لور حل شي، نو په  $x_0$  کې یو څلورۍ برابرېون یا مربع مساوات لاس ته راځي

$$x_0^2 + (3x_0 + 4)^2 = 16$$

همداسې  $5x_0^2 + 12x_0 = 0$  د اوبیونو  $x_0 = 0$ ،  $x_0 = -12/5$  سره. داهم په دې پورې اړه لري

$$y_0 = 4, y_0 = -16/5$$

د تنجنت مساوات په گردې، په ټکو  $P_0(0, 4)$  او  $P_0(-12/5, 16/5)$  د (۱۶ . ۱۴) له مخې په لاندې ډول دي

$$0 \cdot x + 4y = 16 \Leftrightarrow y = 4$$

او

$$(-12/5)x - (16/5)y = 16 \Leftrightarrow y = (-3/4)x - 5.$$

د گردۍ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځنۍ  $M(x_M, y_M)$  سره د  $\zeta, \eta$  -کووردینات سیستم کې، چې سرچینه یې په  $M$  کې پرته ده) (څیره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري

$$\zeta^2 + \eta^2 = r^2$$

د تنجنت مساوات په ټکي  $P_0(\zeta_0, \eta_0)$  کې داسې دي

$$\zeta_0 \zeta + \eta_0 \eta = r^2; \dots \dots \dots (16, 15)$$

د  $\zeta, \eta$  -کووردینات سیستم د  $x, y$  - کووردینات سیستم یو غبرگ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کووردینات سیستم کې لاندې اړیکې پرته دي

$$\zeta = x - x_M, \eta = y - y_M; \dots \dots \dots (16, 16)$$

که برابرېون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو (۱۵ . ۱۶) کې ځای په ځای شي، نو سړی بیا دا  $x, y$  -کووردینات سیستم ته ترانفورمیرکوي (کشوي یا راکاري) :

$$(x - x_M)(x_0 - x_M) + (y - y_M)(y_0 - y_M) = r^2 \quad (16.17)$$

په ټکي  $P_0(x_0, y_0)$  کې د گردۍ تنجنت برابرېون په گردۍ

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

بیلگه ۱۶ . ۱۵:

په گردۍ چې برابرې  $x^2 + y^2 + 16x + 4y + 43 = 0$  لري، د  $x$  - محور باندې، په ټکو  $x_1 = x_2 = -5$

سره تنجنت وکارو (کیردو). برابرې یې څنگه دي؟

اوبیونه : د گردۍ برابرې د منځتکي فورم ( ۱۶ . ۱۱ ) باندې بدلیري:

$$x^2 + 16x + 64 + y^2 - 4y + 4 = -43 + 64 + 4$$

$$(x+8)^2 + (y-2)^2 = 25$$

او له دې لاس ته راځي

$$x_M = -8, y_M = 2, r = 5$$

د گردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه

$$x_1 = x_2 = -5$$

د دواړو گردۍ ټکو په گردیبرابرون کې ځایوو:

$$(-5+8)^2 + (y-2)^2 = 25$$

له دې داسې لاس ته راغلي دي لپاره  $y$  څلورې برابرې یا مربع مساواتو د دواړو اوردیناتو

$$y_1 = 6, y_2 = -2 \text{ : مماس ټکي لاس ته راځي}$$

د ( ۱۶ . ۱۷ ) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي

$$(x+8)(-5+8) + (y-2)(6-2) = 25 \Leftrightarrow 3x + 4y = 9$$

او

$$(x+8)(-5+8) + (y-2)(-2-2) = 25 \Leftrightarrow 3x - 4y = -7$$

### ۱۶ . ۳ بیضوي (هگۍ) یا ایلپسی Die Ellipse

بیضوي یا ایلپسی د ټولو هغو ټکو  $P$  ډیری ده، د کومو واټن چې له دوه ټینګ په ځایټکو،

داسې په نامه د ایلپسی د سوزونټکویا محراق  $F_1$  او  $F_2$  څخه ثابت وي. دا سوزونټکی د

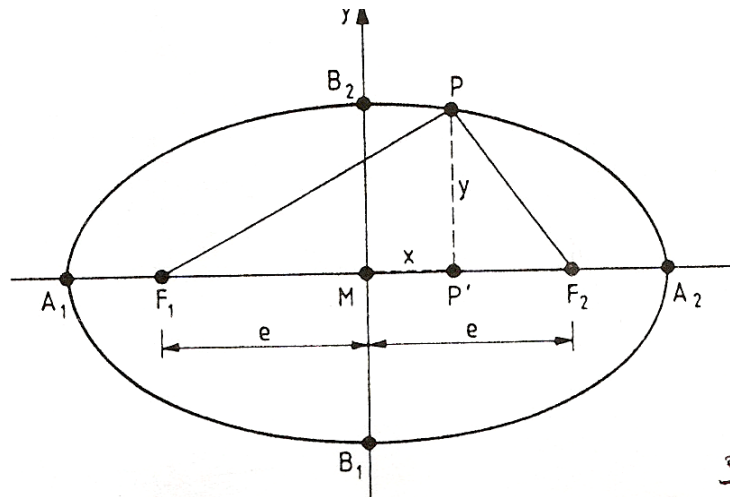
څیرې ۱۶ . ۱۱ سره سم د  $y$  - محور سره سیومتريک د  $x$  - محور باندې ځایوو یا ږدو او

د ثابت واټن زیاتون لیکو:

$$\underline{PF_1} + \underline{PF_2} = 2a \quad (16. 18)$$

د سوزونټکو واټن دي وي:

$$\underline{F_1F_2} = 2e;$$



خیره ۱۶ . ۱۱

دا  $e$  لایني اکسټنټريټيټي ( Exzentrizität ) دا یوناني کلیمه ده چی په الیپسی هوپربول او پارابول کی د همدغه تعریف لپاره ټاکل شوی بلل کیږي .  
د پیتاگوراس له جملی لاس ته راځي:

$$PF_1 = \sqrt{(e+x)^2 + y^2}$$

$$PF_2 = \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

او له دې سره له ( ۱۶ . ۱۸ )

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

$$e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{(e-x)^2 + y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2$$

( څلوری یا مربع ته جگړي )

$$ex - a^2 = -a \sqrt{(e-x)^2 + y^2} \quad \text{( رینه رابیلیري )}$$

( څلوری یا مربع کوو )

$$e^2x^2 - 2exa^2 + a^4 = a^2(e^2 - 2ex + x^2 + y^2)$$

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2) \quad \text{ترتیب اوړون}$$

په ځای کوو

$$a^2 - e^2 = b^2 \quad (16.19)$$

او لاس ته راوړو

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x^2/a^2) + y^2/b^2 = 1 \quad (16,20)$$

د منځتکي  $M(0,0)$  سره د ایلیپسی منځتکي مساوات  
د  $y=0$  لپاره دی  $x=\pm a$ ، د  $x=0$  لپاره دی  $y=\pm b$ . (څیره ۱۶، ۱۱)  
د  $x$ -محور په ټکو  $A_1(-a,0)$ ،  $A_2(a,0)$  او د  $y$ -محور په ټکو  
 $B_1(0,-b)$ ،  $B_2(0,b)$  کې پرې کوي،  $a$  او  $b$  د دواړو نیمحورونو اوږدوالی دی

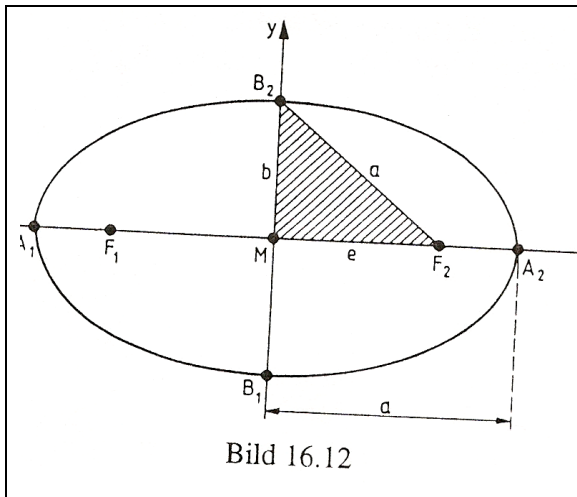


Bild 16.12

لکه د ایلیپسی د هر ټکي لپاره، همداسی د  
لپاره هم اړیکې (۱۶، ۱۸) باور  
لري:

$$\underline{F_1B_2} + \underline{F_2B_2} = 2a$$

د  $\underline{F_1B_2} = \underline{F_2B_2}$  له امله له  
دې لاس ته راځي  $\underline{F_2B_2} = a$

(څیره ۱۶، ۱۲)

له دې سره په دريځوډي  $MF_2B_2$  کې د اړیکو (۱۶، ۱۹) هندسي ارزښت  
پېژندل کيږي.

که منځتکي  $M$  کواور دینات  $Mx$ ؛  $My$  ولري او د ایلیپسی محورونه د کواور دیناتو سره  
غبرگ وځغلي، نو د ایلیپسی د یوه خوښي ټکي  $P(x,y)$  لپاره باور لري:

$$(x-x_M)^2/a^2 + (y-y_M)^2/b^2 = 1 \quad (16, 21)$$

د ایلیپسی د منځتکي مساوات د منځتکي  $M(x_M, y_M)$  سره

د پورته فرمول ځلولو وروسته د ایلیپسی تولید (عمومي) جوړښت پیژندل کیږي.

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad (16, 22)$$

د ایلیپسی مساواتو تولید بڼه یا - فورم

د گردې برابرې سره په توپیر (پرتله یا مقایسه ۱۶ . ۱۲) د  $x^2$  او  $y^2$  ځله وونی یا ضربیونه یو له بل توپیر لري، مگر همغه منځښته لري ( $A.B > 0$ )

بیلگه ۱۶ . ۱۶ :

د د ایلیپسی منځتکی، نیممحور، او سوزونکي لټول کیږي، که دا برابرې

$$9x^2 + 25y^2 - 54x + 100y - 719 = 0$$

مو مخ ته پروت وي.

اوبونه : د ایلیپسي برابرې د منځتکي بڼه یا فورم ( ۱۶ . ۱۲ ) باندې اړول کیږي:

$$9(x^2 - 6x) + 25(y^2 + 4y) = 719$$

څلورې پوره کونه یا مربع تکمیلونه

$$9(x^2 - 6x + 9) + 25(y^2 + 4y + 4) = 719 + 9 \cdot 9 + 25 \cdot 4$$

$$9(x-3)^2 + 25(y+2)^2 = 900$$

( په ۹۰۰ ویش )

$$(x-3)^2 / 100 + (y+2)^2 / 36 = 1$$

د لاس ته راوړلو مساواتو څخه منځتکي او دینات

$$x_M = 3, y_M = -2$$

لوستل کیږي او د نیممحور لپاره  $a=10$ ,  $a^2=100$  او  $b=6$ ,  $b^2=36$  لوستل کیږي.

د ( ۱۶ . ۱۹ ) سره سم لاس ته راځي:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$$

او له دې سره منځتکي (پرتله څیره ۱۶، ۱۱)

$$F_1(x_M - e, y_M) = F_1(-5, -2), F_2(x_M + e, y_M) = F_2(11, -2)$$

بیلگه ۱۶ . ۱۷ :

د ایلیپسي برابرون د منځتکي  $M(-1,3)$  سره لټول کيږي، په کوم چي ټکي  $P_1(-3,3)$  او  $P_2(0, 3 + \frac{3}{2}\sqrt{3})$  پراته وي.

اوبونه : د  $(۱۶, ۲۱)$  سره سم د منځتکي  $M(-1,3)$  سره د ایلیپسي برارون داسی دي

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1$$

ټيکي  $P_1$  او  $P_2$  باید د ایلیپسي برابرون پوره کړي:

$$\frac{(-3+1)^2}{a^2} + \frac{\sqrt{(3-3)^2}}{b^2} = 1, \frac{(0+1)^2}{a^2} + \frac{(3-3-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2} = 1$$

د دي برابرونو له لومړی څخه لاس ته راځي  $4/a^2 + 0 = 1$  همداسی  $(< = >)$   
 $a = 2$  او له دي سره د دويم برابرون څخه همداسی  $< = >$

$$\frac{(0+1)^2}{4} + \frac{(-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{9}{4} = 3/4 \Leftrightarrow b = 3$$

د ایلیپسي لټونکی برابون داسی دی:

$$(x+1)^2/4 + (y-3)^2/9=1$$

بیلگه ۱۶ . ۱۸ :

د کرښو

$$y = x + 2 \quad (\text{الف})$$

$$y = x - 2 \quad (\text{او ب})$$

غوڅټکي د ایلیپسي  $9x^2+y^2+54x+72=0$  سره لټول کيږي.



اوبیونه : که الف)  $y=x+2$  د ایلیسی برابرنونو کی خوندي شي، نو لاس ته راځي

$$9x^2+(x+2)^2+54x+72=0 \Leftrightarrow 10x^2+58x+76=0$$

د څلوری - یامربع برابرنونو اوبی :

$$x_1 = -2, x_2 = -3,8$$

د غوڅتکي ايسخيز يا پروتمحور دی. په دې پورې اوردينات يا ولاړ محور

$$y_1 = 0, y_2 = -1,8$$

اړه لري.

ب)  $y$  د رامنځ ته شوي څلوری (مربع) برابرون

$$9x^2+(x-2)^2+54x+72 \Leftrightarrow 10x^2+50x+76=0$$

رييل اوبیونه نه لري. کرښه  $y = x-2$  د ایلیسی څخه دباندې پرته ده

## ۱۶ . ۴ : هوپربول Die Hyperbel

پيژند:

هوپربول يا هيوپربل د ټولو هغو ټکو ډيری ده، د کومو لپاره چې د کمون يا کمښت  
مطلقه ارزښت واټن، د دوه کره په ځاي ټکو  $F_1$  او  $F_2$ ، دا په نامه د هوپربول سوزونټکو

يامحراقونو، څخه ثابت وي. دا سوزونټکي ، لکه په ایلیسی کی دلته هم مور کره ټاکو

(څيره ۱۶ . ۱۳) .

د ثابت واټنکمون يا واټنکمښت  $|PF_1-PF_2|=2a$  او (څيره ۱۶ . ۱۳)

د سوزونټکو واټن  $F_1F_2 = 2e$  (څيره ۱۶ . ۱۳)

$$e^2 - a^2 = b^2 \quad (16.23)$$

په پورته کې يا بل چيرې، چې کوم څه لاندې کرښيز شوي وي، دا په زياتو ادبياتو کې  
پورته کرښيز شوي، دې ته دې پام وي، چې لاندې کرښيز شوي وي او که پورته، توپير  
نه لري يا همغه څه دي .

يو ایلیسی برابرون ته ورته تلنه (برخه ۱۶ ، ۱۳) مو لاندې ته لارښودوي:

$$(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1 \quad (16.24)$$

د هوپربول منځتکي برابرون د منځتکي  $M(0,0)$  سره

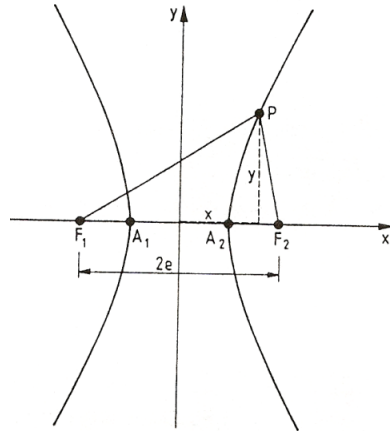


Bild 16.13

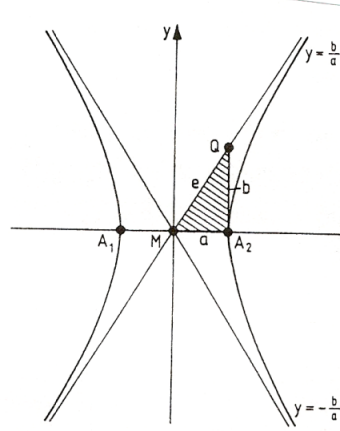


Bild 16.14

د  $y=0$  لپاره  $x=\pm a$  دی، دا په دې مانا چې هوپربول د  $x$  - محور په ټکي

د  $A_1(-a,0)$  او  $A_2(a,0)$  کی غوڅوي. دا ټکی ککړی ټکی بلل کيږي. گورو چی دا دککړی ټکی دی. (د ناپای سره ځاننيونی په هکله: که ( ۱۶ . ۲۴ ) د  $y$  په لور حل شي، نولاس ته راځي:

$$y = \pm b \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm \frac{b}{a} \cdot x \cdot \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

د  $\pm 0e \rightarrow x$  لپاره  $-a^2/x^2$  له منځه ځي. پس هوپربول ځان کړبڼی  $y = \pm(b/a) \cdot x$  ته نژدې کوي ( څیره ۱۶ . ۱۴ )

له دې امله لاندې برابرون

$$y = \pm(b/a)x \quad (16,25)$$

د هوپربول اسیمپتوتی بلل کږي.

د ( ۲۳ . ۱۶ ) له امله  $MQ = e$  دی .

که منځتکی  $M$  کواوردینات  $x_M, y_M$  ولري او سیومتريک غبرگ د کوردیناتو محور ته ځغلي، نو د یوه په خوښه هوپربول ټکي  $P(x,y)$  لپاره باور لري:

$$(x-x_M)^2/a^2 - (y-y_M)^2/b^2 = 1 \quad (16,26)$$

د هويپرېبول منځتکي برابرېون  $M(x_M, y_M)$  سره.

د پورته مساوات د څلولو وروسته، په لاندې ډول د هويپرېبول مساوات ټوليز جوړښت جوتيري.

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad (16,27)$$

دهويپرېبول برابرېون ټوليزه بڼه يا فورم

دلته د ايليپسي سره په مخامخ ( همدا برعکس دی) يا په څټ ډول د  $x^2$  او  $y^2$

ځله ووني بدله مخنښه لري

(  $A \cdot B < 0$  ) ټوليز برابرېون هم کولی شي چې مور لاندې منځتکي برابرېون ته لارښود کړي،

$$(y - y_M)^2 / b^2 - (x - x_M)^2 / a^2 = 1 \quad (16,26')$$

د کومو څيره چې يو پورته لور او کښته لور ته واز هويپرېبول دی.

بيلگه ۱۶ . ۱۹:

د لاندې هويپرېبول منځتکي او سوزونټکي لټول کيږي

$$-25x^2 - 150x + 144y^2 - 188y + 144 = 0$$

اوبيوڼه: د ورکړشوي هويپرېبول مساوات بڼه په منځ ټکي ( ۱۶ . ۲۶ ) اوږي يعني فورم يی بدليږي:

$$-25(x^2 + 6x) + 144(y^2 + 2y) = -144$$

( د څلورۍ پوره کونه)

$$-25(x+3)^2 + 144(y-1) - 25(x^2+6x+9) + 144(y^2-2y+1) = -144 - 225 + 144$$

$$1)^2 = -225$$

( په 225 - وپښنه)

$$-25(x+3)^2 + 144(y-1)^2 =$$

$$-225 + (x+3)^2 / 9 - (y-1)^2 / (25/16) = 1$$

د لاس ته راغلو مساواتو څخه لاندې لوستل کيږي:

$$x_M = -3, y_M = 1, a^2 = 9, a = 3,$$

$$b^2 = 25/16, b = 5/4$$

او د دې سره سم د ( ۱۶ . ۲۳ ) له امله لرو:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{144/16 + 25/14} = 13/4$$

د هوپربول منځتکي (  $M(-3,1)$  ) دى ، سوزوننکي يې  $F1(xM-e, yM)=F1(-25/4, 1)$  او  $F2(xM+e, yM)=F2(1/4, 1)$  دي.

بيلگه ۱۶ . ۲۰ :

د هوپربول  $9x^2 - 4y^2 = 36$  اسيمپتوتي يو له بل سره کوم کونجونه تړي يعنى جوړوي يا اسيمپتوتي په کومو کونجونو کې يو بل پريکوي؟

اوبیونه : هوپربول د منځتکي بڼه (فورم) له ( ۱۶ . ۲۴ ) سره سم په لاندې ډول ده

$$x^2/4 - y^2/9 = 1 \quad \text{د } a=2, b=3 \text{ سره}$$

له دې سره سم دواړه اسيمپتوتي د ( ۱۶ . ۲۵ ) له مخې  $y=(3/2)x$

او  $y=-(3/2)x$  دي.

د لومړي اسيمپتوتي او  $x$  - محور ترمنځ کونج  $\varphi$  د  $\tan \varphi = 3/2, \varphi = 56,31^\circ$  څخه لاس ته راځي.

له دې امله د اسيمپتوتو ترمنځ کونج  $\psi$  باور لري  $\psi = 2\varphi = 112,62^\circ$

دا کونج کيدى شي د هوپربول د وازونکونج په نامه ونومول شي.

بيلگه ۱۶ . ۲۱ :

د ايلیپسى  $x^2/64 + y^2/16 = 1$  غوڅتکي د هوپربول سره لټول کيږي چې منځ تکی يې په سرچينه او ککر تکی يې د ايلیپسى په سوزوننکو پراته وي او همغه ارزښت  $b$  لکه ايلیپسى ولري.

اوبیونه : د ايلیپسى نیم محور په  $a_1$  او  $b_1$  سره او لاینيزه اکسځینتريځيتي يې په  $e_1$  سره ښايو.

نو باور لري:  $a_1=8, b_1=4$  او د ( ۱۶ . ۱۹ ) سره سم دى.

$$e_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

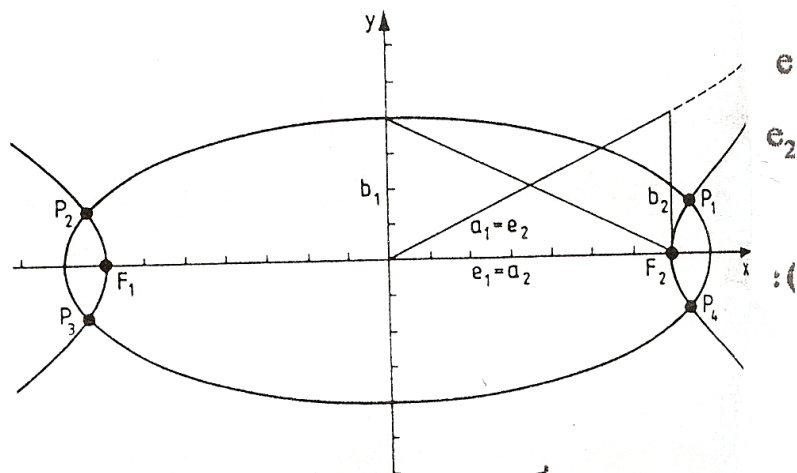


Bild 16.15

د هویربول لپاره نخښی  $e_2, a_2, b_2$  استعمالوو:

باورلري (پرتله څیره ۱۶ . ۱۵) :

$$b_2 = b_1 = 4, a_2 = e_1 = 4\sqrt{3}$$

او د (۲۳ . ۱۶) سره سم دی

$$e_2^2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 8 = a_1$$

د هویربول ابرون داسی دی:

$$x^2 / 48 - y^2 / 16 = 1$$

د غوڅټکو کواردینات د ایلیسی- او هویربول مساوات پوره کوي. که داوړه مساوات سره زیات شي نو لاس ته راځي

$$\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{48}\right)x^2 = 2, x^2 = 348/7, x_{1,2} = \pm 8\sqrt{\frac{6}{7}}$$

د ایلیسی او هویربول ابرونو څخه لاس ته راځي

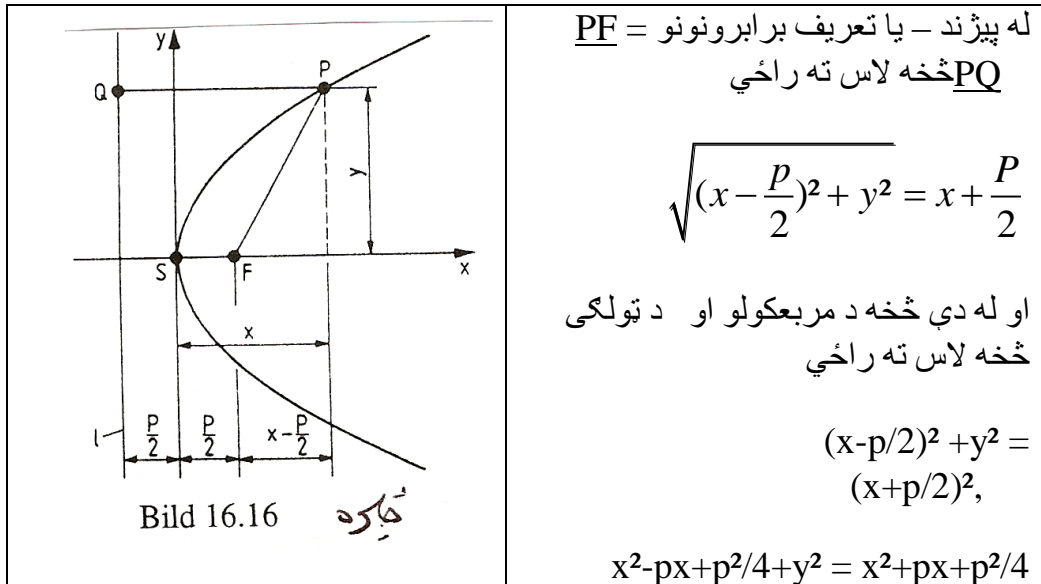
$$y^2 = 16(1 - x^2/64) = 16/7 \Leftrightarrow y^2 = 16(x^2/48 - 1) = 16/7 \Rightarrow y = \pm 4\sqrt{1/7}$$

او د دې سره سم د دواړو کبرو غوڅتکي دي:

$$P_1(8\sqrt{6/7}), P_2(-8\sqrt{6/7}, 4\sqrt{1/7}), P_3(-8\sqrt{6/7}, -4\sqrt{1/7}), P_4(8\sqrt{6/7}, -4\sqrt{1/7})$$

## ۱۶ . ۵ پارابول Die Parabel

پارابول د ټولو هغو ټکو  $P$  ډیری ده، چې واټن یی له یوه کک په ځای ټکی، د پارابول سوزون ټکی  $F$ ، او یوې کک په ځای کرښی، د پارابول تر مخکښی  $I$  (دایه څیره کی جوته ده چې دا کومه کرښه ده) سره مساوي دي (څیره ۱۶ . ۱۶) د سوزونټکی او مخکښی ترمنځ واټن نیم پارامتر  $p$  بلل کیږي،  $S$  ککری ټکی دی، کرښه چې له  $S$  او  $F$  تیريږي د پارابول محور دی.



پس لرو

$$y^2 = 2px \quad (16,28)$$

د پارابول کک برابر ون د ککریټکي  $S(0,0)$  سره، پورته لور ته واز ( $x > 0$ )

په همدې ډول:

$$y^2 = -2Px \quad (16, 29)$$

هغه وکین لور ته واز پارابول دی د واریابلو د بدلون څخه لاس ته راځي:

$$x^2 = 2py \quad (16, 30)$$

د پارابول ککرمساوات د ککرتکي  $S(0,0)$  سره، پورته واز پارابول  $(y > 0)$

په همدې توگه:

$$x^2 = -2py \quad (Y < 0) \quad (16.31)$$

پورته لور ته واز پارابول دی.

که ککرتکي  $S$  کواوردینات  $x_S, y_S$  ولري او د پارابول محور د  $x$  - محور ته غبرگ ځغلی په همدې ډول د  $y$  - محور ته هم غبرگ ځغلی، نو د یوې په خوبنه پارابول ټکی لپاره باور لري:

$$(y - y_S)^2 = 2p(x - x_S) \quad (16.32)$$

د پارابول ککریبرابرون د ککری ټکی  $S(x_S, y_S)$  سره، چی بنی لور ته وازوي  $(x > x_S)$

$$(x - x_S)^2 = 2p(y - y_S) \quad (16.33)$$

د پارابول ککریبرابرون د ککرتکي  $S(x_S, y_S)$  سره، چی پورته لور ته

وازوي  $(y > y_S)$

په همدې ډول:

$$(y - y_S)^2 = -2p(x - x_S) \quad (x < x_S) \quad (16.34)$$

$$(x - x_S)^2 = -2p(y - y_S) \quad (y < y_S) \quad (16.35)$$

هغه کښ لور او همداسی کوزي یا لاندي لور ته واز پارابولونه دي د فرمول  $(16.16)$  همداسی  $(16.33)$  ځله ونو څخه وروسته د پارابول ټولیز (عمومي) جوړښت پیژندل کیري:

$$Ay^2 + Bx + Cy + D = 0, \quad B \neq 0 \quad ((16, 36))$$

همداسی  $( < = > )$

$$Ax^2 + Bx + Cy + D = 0, \quad C \neq 0, \quad (16.37)$$

د پارابولمسوات ټولیزه (عمومي) بڼه ( فورم)

بیلگه ۱۶ . ۲۲ :

د پارابول برابرېون دي له ککريټکي ، له نيمپارامتر او وازلوري څخه پيداشي:

الف  $(S(,0,0), P = 6)$  کين، ب  $(S(2,1); P = 0,5)$  پورته

پ  $(S(-3,-5), P = 4)$  لاندې ت  $(S(4,-2), P = 2/3)$  بنی

اوبیونه يا حل:

$$\text{الف) } y^2 = -12x \quad \text{ب) } (x-2)^2 = y-1$$

$$\text{پ) } (x+3)^2 = -8(y+5) \quad \text{ت) } (y+2)^2 = (4/3)(x-4)$$

بیلگه ۱۶ . ۲۳ :

د پارابول د لاندې مساوات سره دي د پارابول د ککريټکي کواوردينات ، نيمپارامتر او د وازون لور وټاکل شي  $y^2 - 18x + 12y - 36 = 0$  ،  $(x^2 + 4y + 20x + 10 = 0)$  . a )

اوبیونه : د پارامترتوليزه بڼه (فورم) دي په ککريټکي ابرون  $(۱۶ ، ۳۲)$  همداسی  $(۱۶ ، ۳۲)$  ،  $(۳۳)$  همداسی  $(۱۶ ، ۳۴)$  همداسی  $(۱۶ ، ۳۵)$  کی وازمايل شي (څلوری پوره کيدنه يا مربع تکميليدنه) . د ککريټکي ابرون څخه ککريټکي ، نيم پارامتر او وازلور

لوستور دي.

$$\text{a) } x^2 + 20x + 100 = -4y - 100 + 100$$

$$(x+10)^2 = -4y \quad S(-10, 0), P = 2$$

پارابول لاندې لور ته واز دی

$$\text{b) } y^2 + 12y + 36 = 18x + 36 + 36$$

$$(y+6)^2 = 18(x+4)$$

$$S(-4,-6), P = 9$$

پارابول بنی لور ته واز دی

۱۶ . ۶ ټولگه:

داله ۱۶ . ۱ نیولی تر ۱۶ . ۵ پوري څيرل شوي دهواري کزي (کزي په هواري يا سطحه کی)



-کربنه

-گردی

-ایلیپسی چی د کواوردینات محور سره غبرگ خُغلي، ټول د لاندې مساوات

-هوېربول

-پارابول

په څیر انځوریري:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad (16, 38)$$

فاکتورونه، ضریبونه یا ځله ووني  $A$  او  $B$  د کبری د توکو لپاره پرېکنده دي.برابرون ( $۱۶, ۳۸$ ) لاندې روښانويد  $A.B > 0, A \neq B$  لپاره ایلیپسی،د  $A = B$  لپاره گردید  $A.B < 0$  لپاره هوېربول، که  $A > 0, B < 0$  وي، نو کین لور ته واز،که  $A < 0, B > 0$  وي، نو پورته او لاندې لورته وازد  $A.B = 0, A = 0, B \neq 0$  لپاره یو پارابول، چی محور یی د  $x$  - محور سرهغبرگ دی د  $B = 0, A \neq 0$  یو پارابول، چی محور یی د  $y$  - محور سره غبرگ دید  $A = B = 0$  لپاره یوه کربنه که په ( $۱۶, ۳۸$ ) یو بل گډوله (یو د بل سره گډ شوی)

څلوری توکي رامنځ ته شي، نو دا د کبری یو څلوری برابرون یا مربع مساوات

بنکاروي (توضیخ کوي)، د کومو محورونه چی نور د کواوردیناتو محورونو سره

غبرگ نه دي.

بیلگه ۱۶ . ۲۴ :

له لاندې مساواتو سره کومی کبری انځوریدلی شي؟

$$a) x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0 \quad b) 3x^2 + 24x + 15y + 138 = 0$$

$$c) 16x^2 + y^2 - 96x = 0, d) 2x^2 - 2y^2 + 16x + 10y - 105/2 = 0 ?$$

اوبیونه : (یادونه : لکه د نورو ځایونو په څیر دلته هم الف د  $a$  په ځای لیکم، ځکه چی د

پښتو لپاره کربنه په لاتین حروفو له بني لور نه شي پیل کیدی )

الف یا  $a$ ) که  $A = B = 1$  وي، نو گردیب یا  $b$ ) که  $B = 0$  پارابول چی محور یی د  $y$  - محور سره غبرگ ويپ یا  $c$ ) که  $A \neq B, A.B > 0$  نو ایلیپسیت یا  $d$ ) که  $A.B < 0$ ، نو هوېربول

## ۱۶. ۷ تمرینونه

۱ - د هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له  $P_1$  ټکي تیريږي او د  $x$ -محور سره کونج جوړوي

- a)  $P_1(2,-3)$ ,  $= 30^\circ$ ,      b)  $P_1(-3,2)$   $= 45^\circ$   
 c)  $P_1(-1,-4)$ ,  $= 120^\circ$ ,      d)  $P_1(4,4)$ ,  $= 0^\circ$   
 e)  $P_1(0,0)$ ,  $= 150^\circ$ ,      f)  $P_1(1,-1)$ ,  $= 90^\circ$

۲ - ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو  $P_1$  او  $P_2$  تیريږي

- a)  $P_1(0,0)$ ,  $P_2(3,3)$ ,      b)  $P_1(-3,3)$ ,  $P_2(0,0)$ ,  
 c)  $P_1(1,4)$ ,  $P_2(-3,-4)$ ,      d)  $P_1(1,2)$ ,  $P_2(-1,1)$ ,  
 e)  $P_1(0,1,-1)$ ,  $P_2(-0,1,-3)$ ,      f)  $P_1(1,-1)$ ,  $P_2(4,-2)$ !

۳ - د محورونو غوڅي (لنډ: محور غوڅي)  $a, b$  د کرښې مساوات په نورمال فورم وټاکئ او همداسې د غوڅتکو واټن  $d$  د محور غوڅتکو سره چې یو له بل یې لري وټاکئ.

- a)  $a = 5$ ,  $b = 2$ ,      b)  $a = -1$ ,  $b = 3$ ,      c)  $a = 2$ ,  $b = -3$ ,      d)  $a = -3$ ,  $b = -3$

۴ - یو دريگودی دا لاندې گوډټکی لري  $A(-4,-1)$ ,  $B(2,-2)$ ,  $C(1,3)$ . د هغو کرښو مساوات څنگه دي، په کومو چې د دريگودیو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دريگودی اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ - د لاندې کرښو مساواتو نورمال فورم او برختوب پلټنه یا فورم څنگه دی؟

- a)  $3x - 5y + 15 = 0$ ,      b)  $4x - 3y - 18 = 0$   
 c)  $-4x + 2y - 10 = 0$ ,      d)  $-3x - 4y + 15 = 0$ ?

۶ - د کرښې  $y = -(12/5)x + 2$  پروتخاي د کرښو

- a)  $y + 2,4x - 6 = 0$ ,      b)  $28x + 10y = 0$ ,      c)  $8x + 5y = 2$ ,  
 d)  $5y + 12x - 10 = 0$ .      e)  $y + (12/5)x = 3$ ,      f)  $6x + 2,5y = 5$

سره وڅیړئ.

۷ - د لاندې کرښو د غوڅتکو کواوردیناتونه او غوڅکونج وټاکئ:

a)  $2x + 3y = 7$       b)  $y = (1/2)x + 1$       c)  $y - x = 7$

$3x - y = 5$ ,       $y = -2x + 6$ ,       $y = 7$ ,

d)  $x/3 - y/2 = 1$       e)  $6x - 2y + 10 = 0$       f)  $y = 4x - 1$

$-x/2 + y/3 = 1$ ,       $y = 3x + 6$ ,       $y = -3x + 5!$

۸ - کومه کرښه د کرښی  $x - y = 4$ ، کرښی  $3x + y = 8$  او برسیره پر دې له غوڅتکی  $P(0,5)$  څخه تیریري؟

۹ - د لاندې گوځ  $A(-4,-1)$ ,  $B(2,-2)$ ,  $C(1,3)$  سره د دریکوډي دننه کونجونه څومره لوی دی؟ (پیلونه: دریکونجی وکارئ) یا (د دریکوډی)

۱۰ - د ولاړپړیوټی کرښی یا زورندې مساوات له ټکی  $P(2,0)$  څخه په کرښه  $y = 2x + 1$  څنگه دی؟

۱۱ - د ولاړکرښی مساوات په کرښه  $y = 2x + 1$  باندې په ټکی  $P(-1,-2)$  څنگه د

۱۲ - د کرښی  $y = 2x + 1$  سره د غبرگلی کرښی مساوات چې له ټکی  $P(-1,-3)$  تیریري، څنگه دي؟

۱۳ - د لاندې مساواتو سره گردیمنځتکی او وړانگه وټاکئ:

a)  $x^2 + y^2 = 20$

b)  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

c)  $x^2 + y^2 - 9y = 0$ ,

d)  $4x^2 + 4y^2 + 32x - 8y + 67 = 0$

e)  $36x^2 + 36y^2 - 36x + 24y - 23 = 0$ ,      f)  $x^2 + 2x + y^2 + 2y = 16!$

۱۴ - د لاندې گردیو مساوات وڅیړئ

(الف) چی منځ ټکی  $M(-2,-1)$  لری او له سرچینی تیریري

ب) هغه چی دري ټکی  $P_1(3,0)$ ,  $P_2(5, 5-3)$ ,  $P_3(5+3,-1)$  یی د غاړو ټی  
 پ) چی وړانگه  $r=6$  لري او له ټکو  $P_1(-1,11)$ ,  $P_2(5,5)$  څخه تیریري.  
 ت) له ټکی  $P_1(3,4)$  تیریري او کرښه  $y = -(4/3)x + 13$  په ټکي  $(4,3)$  لمسوي.

ن) چی منځ ټکی  $M(2,2)$  لري او کرښه  $y = -(4/3)x + 13$  لمسوي.  
 ث) چی د هغی منځټکی په کرښه  $y = 3x - 19$  پروت دی او له ټکی  $P_1(7,-2)$  او همداسی له ټکي  $P_2(11,2)$  څخه تیریري.

۱۵ - کوم پروتخایونه گردی  $k$  چی فرمول لري  $x^2 + y^2 - 8x = 0$  او لاندی کرښی یو له بل سره لري:

- a)  $g: y = 2x + 1$ ,    b)  $g: y = x$ ,    c)  $g: y = x - 1$ ,  
 d)  $g: y = 4$ ,    e)  $g: y = -x - 3$ ,    f)  $g: y = x - 3$  ?

۱۶ - کوم پروتخای کرښه  $3x + 4y = 25$  گردی  $x^2 + y^2 = 25$  ته لري؟

۱۷ - د تنجنت مساوات څنگه دی

الف) په ټکي  $P_0(5, y_0)$  چی په گردی  $x^2 + y^2 = 169$  پروت دی،

ب) په ټکي  $P_0(x_0, -2)$  چی په گردی  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$  پروت دی؟

۱۸ - د هغو گردیو منځټکي پیدا کړی چی وړانگه یی  $r=5$  وي، کومی چی کرښه  $3x + 4y = 9$  په ټکي  $P_0(-1, 3)$  کی لمسوي!

۱۹ - په گردی  $x^2 + y^2 = 25/4$  د هغه تنجنت مساوات وټاکي، کوم چی د

کرښی  $y = (4/3)x + 2$  سره غبرگ خغلي؟

۲۰ - د ایلیپسی مساوات وټاکي، له

- a)  $M(0,0)$ ,  $a=11$ ,  $c=8$ ,    B)  $M(0,0)$ ,  $b=4$ ,  $c=6$ ,  
 c)  $M(-3,7)$ ,  $c=4$ ,  $b=5$ ,    d)  $M(4, -5)$ ,  $e=7$ ,  $a=10$ !

۲۱ - د لاندې ایلیپس مساواتو څخه د نیممحورونو او سوزونټکو منځتکی او اوږدوالی راپیدا کړی:

a)  $x^2 / 100 + y^2 / 64 = 1$       b)  $(x+3)^2 / 81 + (y-1)^2 / 56 = 1$   
 c)  $3x^2 + 4y^2 - 24x \geq 0$ ,      d)  $5x^2 + 9y^2 - 10x + -90y + 50 = 0$ ,  
 e)  $4x^2 - 13y^2 - 208 = 0$ ,      f)  $4x^2 + 9y^2 + 54y - 227 = 0$  !

۲۲ - د هغو ایلیپسو مساوات راپیدا کړی، کومې چې  
 الف) چې منځتکی  $M(0,0)$  او لایني ایکسختريخیتي  $e = 6$  لري او  
 ب) له منځتکی  $M(1,1)$  او لایني ایکسختريخیتي  $e = 4$  لري او له  
 ټکو څخه تیریري،

پ) د نیممحور اوږدوالی  $a = 9$ ,  $b = 6$  لري او له ټکو  $P_1(2,8)$ ,  $P_2(2,-4)$  څخه  
 تیریري!

ت) د نیممحور اوږدوالی  $a = 2$ ,  $b = 6$  لري او له ټکو  $P_1(-1,-4)$ ,  $P_2(-5,-4)$  څخه  
 تیریري!

۲۳ - د لاندې ایلیپسو او کرښو ترمنځ غوڅتکي پیدا کړی

a)  $x^2 + 4y^2 - 20 = 0$ ,       $x + 2y - 6 = 0$ ,  
 b)  $3x^2 + 4y^2 - 24x =$ ,       $y = 3.x$ ,  
 c)  $(x-3)^2 / 9 + (y-1)^2 / 4 = 1$ ,       $y = x + 1$ ,  
 d)  $x^2 + 4y^2 + 16y + 12 = 0$ ,       $y = x - 2$  !

۲۴ - د هویپرېبول مساوات له

الف)  $M(0,0)$ ,  $a = 4$ ,  $e = 5$ ,  $b$  (ب)  $M(-3,2)$ ,  $b = 4$ ,  $e = 6$

پ)  $M(1,1)$  او هویپرېبولټکو  $P_1(-3,1)$ ,  $P_2(6, 7/4)$  !

ت)  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $x = -1$  او د هویپرېبولټکي  $P(-4,-2)$  وټاکي !

۲۵ - د هويربولونو

$$a) x^2 / 144 - y^2 / 36 = 1, \quad b) 9x^2 - 64y^2 = 576$$

○ نیممحورونو اوږدوالی او اسیمپټوټي راپیدا کړی!

۲۶ - د لاندي هويربولونو منځتکي او د نیممحور اوږدوالی پیدا کړی.

$$a) 9x^2 - 64y^2 - 36x - 540 = 0, \quad b) x^2 - 9y^2 + 54y - 90 = 0,$$

$$c) x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 16 = 0, \quad d) x^2 - y^2 - 2x + 10y - 28 = 0!$$

۲۷ - د لاندي مساواتو سره د کيرو غوڅتکي وټاکي:

$$a) \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

$$y = \frac{1}{5}x,$$

$$b) 4x^2 - 9y^2 = 144,$$

$$x^2 - 24y = -28,$$

$$c) \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

$$y = -\frac{2}{3}x - 5,$$

$$d) 4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 68 = 0, \quad 9y^2 - 36y - 72x + 8 = 0,$$

$$e) \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

$$x^2 - y^2 = 16!$$

۲۸ - د لاندي پارابولونو ککرتکو او سوزوتتکو کواوردینات وټاکي:

$$a) 5y^2 + 4x = 0, \quad b) 2y - (1/2)x^2 = 0 \quad c) 4y + (1/3)x = 0,$$

$$d) 2y^2 - 12x = 0, \quad e) y^2 - 2y - 10x - 9 = 0, \quad f) x^2 - 7x - y + 12 = 0$$

$$g) y^2 - 6y + 6x - 3 = 0. \quad h) x^2 + 4x + 12y - 52 = 0$$

/

۲۹ - د پارابول مساوات له لاندي ککرتکو او سوزوتتکو وټاکي:

$$S(0,0), F(0,1), \quad b) S(0,0), F(-1,0), \quad c) S(1,1), F(2,1),$$

$$S(-1,-1), F(-2,-1), \quad e) S(2,-3), F(2,-2), \quad f) S(-2,3), F(-2,2)$$

۳۰ - یو پارابول د ککري پروت ارزښت  $x_8 = 3$  لري، کښه  $y = 8$  د محور په څوټکي  $P(7,4)$  تیريږي. ددې مساوات څنگه دي؟



۳۱ - یو پارابول د ککر کواردینات  $y_s = -3$  لري، کرښه  $x = 2$  د محور په څیر او

له ټکي  $P(4, -4)$  تیریري. د هغې مساوات څنگه دي؟

۳۲ - کوم پروتخاي اړیکي د

الف) پارابول  $y^2 = -4x$  او کرښی  $y = x - 1$

ب) پارابول  $x^2 = 5y$  او کرښی  $y = x - 4$

پ) پارابول  $x^2 = -3y$  او کرښی  $y = x + 5/12$

ت) پارابول  $y^2 - 6x - 2y + 7 = 0$  او کرښی  $y = x$

ټ) پارابول  $y^2 = 7x$  او کرښی  $9x + 12y + 28 = 0$

ترمنځ پرتی دي؟

که موجود وي، نو غوڅنکی همدا سي لمستکی يې ورکړی!

## ۱۷ وکتور شمیرنه او په حُمکچ کی د هغه په کارونه

۱۷. ۱ د وکتور پیژند ،

په کارتيزي کواوردينات سيستم کی د وکتور انځورونه

په پيدايښتي پوهنو يا طبيعي علومو او تخنيک کی مور لویي پیژنو چی د ریيل ارزښتونو په ورکولو سره یواځنی ټاکلي دي، لکه وخت، گرمي، توان ، وزن . داډول لویو ته سکالار لویي وايو . نورې لویي لکه زور ، چټکتيا( سرعت)، بیره ( تعجیل)، د برقي او مقناطیسي چاپیریالزور برسیره په ارزښت ( مطلقه ارزښت ) د لور ورکونه هم غواړي، په کومه چی تاسیر اچوي. مور دې لویو ته وکتورونه وايو.

د وکتور له لارې کیدی شي چی دهندي شيانو ځان نیونه هم تشریح کړای شو. په فضا هوا کی یو ټکی کیدی شي چی د هوا کواوردينات سيستم کی د سرچینی څخه د دې ټکي په لور لوریز شوي کرښه ( په دې مانا چي مطلقه ارزښت او لوری لري ) تشریح کړی شي یعنی له سرچینی څخه یی په دې ټکي برید وي یا دا ټکی په نڅښه کړای شي یا یی د غشي څوکه د دې ټکي په لور لوریزه وي.

یادونه : ما وکتورونه  $a, b$  بنسولي، ښه به یی  $\vec{a}, \vec{b}; \dots$  وای، ډیرو کتابونو کی پند  $a, b, \dots$  لیکل شوي، خو ما د وکتور سره تل د وکتور کلمه یاده کړې، چي د ناتیکیوهني څخه مو ژ غوري .



پیژند ۱۷ . ۱ : یوه لویه  $a$  چی د یوه مطلقه ارزښت  $|a|$  چی داوردوالي کچگن یی هم (بولو) او یوې لورې له مخی ټاکل شوی وي، وکتور بلل کیږي.

(لنډ: یوه لویه چی لور ولري، وکتور دی. مور کړی شو چی دې لویی ته غشی هم وواږو. زه یی همدا وکتور بولم)

یو وکتور په هوا کي د یوه لور لرونکی کرښی (غشي) په خیر انځور کیدی شي. د تعریف ۱۷ . ۱ له مخی ټول مساوي اوږده او په یوه لور لوری، لوریزې- یا لورونی کرښي همغه وکتور انځوروي، په یوه بریدتکي باندي تړل یی په نظر کي نه دي نیول شوي . سړی ویلی شي: یو وکتور کیدی شي په هوا کی په خوښه غبرگ ( موازی ) وخوځول شي یا راکښل شي، مور په راتلونکي کی د داسی ازادو وکتورو سره سر او کار لرو. نورې په وکتور انځور شوي لویی، بر سیره په مطلقه ارزښت او لور، په نورو ټاکونټوتو هم اړه لري. د بیلگي په توگه یوه قوه یا زور د همغه خپل تاثیر لیکي یا بهتره برید لیکي په اوږدوالي له یوه ځایه بل ته راکښل کیدی شي ( په غبرگ یا موازی راکښون یی تاثیر تغیر کوي) دلته په لیکه راکښونکو وکتورو باندي غبرو. هغه یو ټکی انځورونکی وکتور په کواوردیناتسیستم په سرچینی ( د برید - یا حملی ټکی) پورې تړلی. داسی وکتورونه ځای وکتورونه (په ځای تړلي -) بلل کیږي . ځنی په لاندی کی د فرمول بندي شوي شمیرقاعدي له مخي کیدی شي دې ډول وکتورونو ته هم پراخه شي.

پیژند ۱۷ . ۲ :

دوه وکتورونه  $a$  او  $b$  برابر بلل کیږي  $a = b$

که دواړه وکتورونه په مطلق ارزښت او لور یو په بل سر وخوري یا پریوځي.



Bild 17.1

ټولې برابرې او اوږدې او برابرې - یا همغه لوریزې کرښی، لکه چی وویل شو همغه وکتور ښایی.

پیژند ۱۷ . ۳ :

یو وکتور  $\mathbf{a}$  د مطلقه ارزښت  $|\mathbf{a}|=0$  سره  $0$  یا صفر وکتور بلل کیږي. صفر وکتور لور نه ټاکي یا تعینوي. یو وکتور  $\mathbf{ea}$  چې د  $\mathbf{a}$  لور او مطلقه ارزښت  $|\mathbf{e}|=1$  لري، نو په وکتور  $\mathbf{a}$  پورې اړوند یوونو وکتور (۱) بلل کیږي.

Einheitsvektor, unit vector (1) یوونو وکتور یانې ارزښت یې یو یوون دی یا واحد وکتور (؟)

پیژند ۱۷ . ۴ :

دوه وکتوره اورتوگونال (Orthogonal) بلل کیږي، که دوي یو په بل نښ و لار (عمود) و لار وي، کولینار (kollinear) بلل کیږي، که دواړه د همغی یوې کرښې سره غبرگ وي، کومپلنار (komplanar) بلل کیږي، که د همغی یوې هواری سره غبرگ وي.

د وکتورونو سره شمیرلو لپاره باید مطلقه ارزښت او همدارنګه لور شمیرنیز ډوله لاس ته راوړل شي. ددې لپاره یوه نسبي سیستم ته اړتیا حس کیږي، دلته هوايي یا فضايي کار تيزي کواوردینات سیستم استعمالیدی شي. د کواوردینات سیستم انځورونو لپاره لاندني روښانه ونې یا توضیحات یعنی د وکتور ځله ونه یا ضرب د یوه ریيل گڼ سره او د وکتورونو زیاتون مخ ته پراته دي.

پیژند ۱۷ . ۵ :

د یوه وکتور ځله ونه یا ځل د یوه سکالار سره:

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}, \lambda \in R$$

یو وکتور دی چې د  $|\lambda|$  - ځله د  $\mathbf{a}$  مطلقه ارزښت لري او د  $\lambda > 0$  لپاره همغه لور لري لکه  $\mathbf{a}$ ، په څټ یا برعکس که  $\lambda < 0$  وي نو د  $\mathbf{a}$  مخامخ لور یا په څټ لور لري

جمله ۱۷ . ۱ :

د ریيل گڼ سره د وکتور د ځل د شمیرقاعدي کوموتاتیف قاعده، اسوخیاتیو ضانون او د صفر وکتور سره ځل

$$\lambda \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \lambda; \dots \text{Kommutativ}$$

$$\lambda(\mu \cdot \vec{a}) = \eta(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \mu \cdot \vec{a}; \dots \text{Ass.}$$

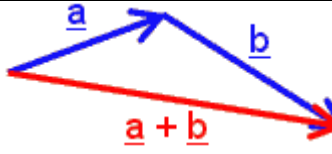
$$|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|, 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}, \vec{0} = 0$$

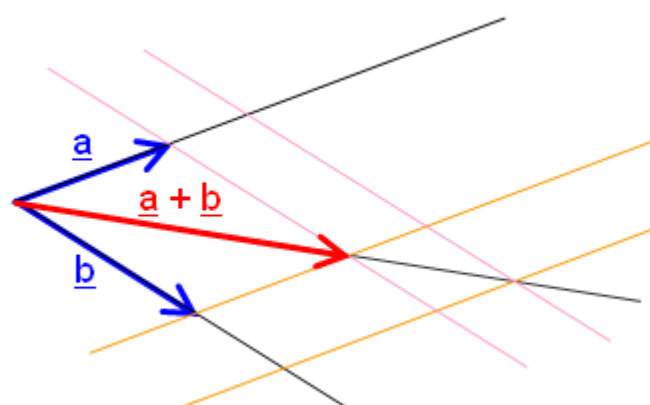
ددې ځل یا ضرب د پیژند سره ممکن کیږي چې هر وکتور  $a$  د یوه ریپل گڼ ( ددې وکتور مطلقه ارزښت) او په هغه پوری تنظیم یا ترتیب شوی یوونوکتور د ځل په څیر انځور کړو:  $a = |a|e_a$

پیژند ۱۷ . ۶ :

( د وکتورونو زیاتون)

د دوه وکتورونو  $a, b$  زیاتون ( جمع )  $a+b$  د دواړو وکتورونو  $a$  او  $b$  څخه غزیدلی غبرگ اړخیزې ( موازي الاضلاع ) لوریز دوه کونجترې ( قطر ) ده. څیره . ۱۷ ( ۲ )

	<p>د وکتورونو زیاتون ( جمع ) د قوو یا زورونو د زیاتون په څیر دی او دا د شمیر قاعده ساده د لیدو کیدی شي</p>
---	--

	<p>څیره شته د غبرگ اړخیزه پورته نیمه یا له تعریف ۱۷ . ۶ څخه پورته څیره یا مخامخ څیره</p>
---	--

جمله ۱۷ . ۲ :

( د وکتورونو د جمع لپاره د شمیر قاعدې )

$$a+b=b+a$$

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

( کوموتاتیف قانون )

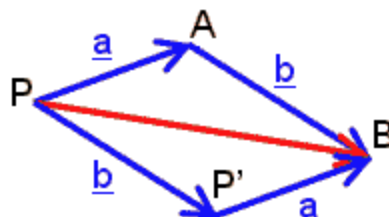
( اسوسیاتیف قانون )

دیستریبوتیو او وربسی په لاندې نظم اړیکې

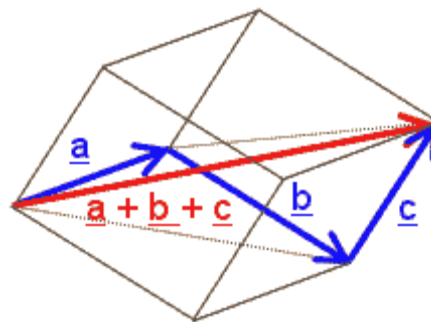
$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}; \dots\dots\dots Distrib.$

$\mu(\vec{a} + \vec{b}) = \mu\vec{a} + \mu\vec{b}; \dots\dots\dots Distr.$

$|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$



د زیاتون دې قانونو سره موږ ته ممکن کیږي چې هر وکتور، د بیلگي په توگه د وکتورونو د کواوردینات محور په لور بنودونکو وکتورونو د زیاتون په څیر انځور کړای شو یا ولیکو. په دې ډول بریالي کیږو چې دواړه د وکتورونو لپاره موخه وره یا هدفمنده شمیرنه په کواوردینات سیستم کې انځور کړو



پورته څیره کې د درې وکتورونو زیاتون

پیژند ۱۷ . ۷ :

په کواوردینات سیستم کې د وکتور a انځورونې لاندې

$a = (a_1, a_2, a_3) \quad (17.1)$

موږ په یوه ولاړکونجیز

$-x_1, x_2, x_3$

کواوردینات سیستم کې د وکتور انځوره ونه پوهیږو، د نخبنی یا مخ نخبنی په نظر کې

نیولوسره او د  $a_i$  پرویکشن یا پریوستون له لارې په هر  $x_i$  - محور ( $i = 1, 2, 3$ )

پرویکشن (Projection) د دوه اړخونو لپاره انځورونه (په څیره ۱۷ . ۳ کی) داسی  $a_i$  د  $a$  وکتور  $i$  - م کواوردینات بلل کیري

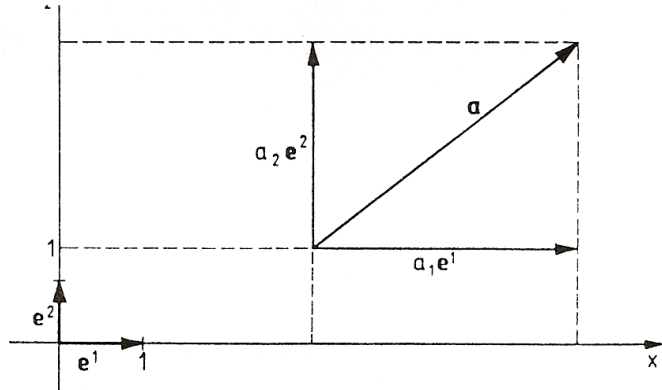


Bild 17.3 څیره

یادونه:

مور دلته که د وکتورونو پورته څه لیکو نو هغه د وکتور پوټنڅ په مانا نه دی بلکه هغه وکتور بنایي چی په کومه کواوردینات اړه لری. دلته د لیکنی له لوري پوره جوت دی. د  $x_i$  محورونو په لور په کواوردینات شکل د یوونو وکتورونو څرگندونه په لاندې ډول ده

$$\begin{aligned} e^1 &= (1, 0, 0) \\ e^2 &= (0, 1, 0) \\ e^3 &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (17.2)$$

د وکتور  $a$  انځورونه د کواوردیناتو  $a^i; i = 1, 2, 3$  او د یوونو وکتورونو (۱۷ . ۲) د استعمال له لاري، د تعریفونو ۱۷ . ۵ او ۱۷ . ۶ په بنسټ د کمپوننتو له لاري یا مرسته لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۳: (د کمپوننتو (جوړختبرخو) له لاري د وکتور  $a$  انځورونه) لرو:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}^1 + a_2 \vec{e}^2 + a_3 \vec{e}^3; \dots (17,3)$$

د دوه پراخیدوني یا دوه بعدیز یا دوه دیمنزویون انځورونه. (څیره ۱۷ . ۳) دلته،  $a^i e^i$  چی  $i=1,2,3$  وي، د  $a$  وکتور  $i$  - م کمپوننت یا جوړخت برخه بللکیري د جملو ۱۷ . ۲ او ۱۷ . ۳ په مرسته کیدی شي لاندې جمله لاس ته راشی:

جمله ۱۷ . ۴:

د رییل گڼ سره د یوه کتور ځله ونه او یا د وکتورونو زیاتون کو او ردینات ډوله یا په څیر صورت نیسي، دا په دې مانا چی لاندې باوري کيږي::

$$a=(a_1, a_2, a_3), \quad b = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\mu a = (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) \quad (17.4)$$

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \dots (17,5)$$

بیلگه ۱۷ . ۱:

د  $a=(-2,3,-5)$  ,  $b=(1,-6,4)$  لپاره لرو

$$2a+3b=(2-2,3,-5)+3(1,-6,4)=(-1,-12,2).$$

د وکتورونو کمون د وکتورونو د زیاتون په څیر (تعریف ۱۷ . ۶) صورت نیسي یا ځان نیسي

پیژند ۱۷ . ۸:

د  $a - b$  کمون یا کمښت د وکتور  $a$  او وکتور  $b$  ته مخامخ - یا په څټ وکتور یعنی  $-b$

زیاتون دی:  $a-b=a+(-b)$  (څیره ۱۷ . ۴)

له تعریف ۱۷ . ۸ لاس ته راځي: وکتور  $a$ ، کوم چی له  $x_1$  ټکي  $x_2$  ټکی ښايي

(د دوه اړخونو یا بعدونو انځورونی لپاره بش ۱۷ . ۵) داسی دی

(پای ټکی ترې کم پیل ټکی یانې د پایټکي او پیلټکی کمښت):  $a = x_2 - x_1$

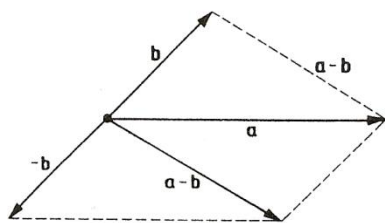


Bild 17.4 څیره

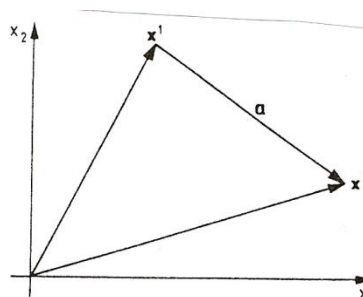


Bild 17.5 څیره

بیلگه ۱۷ . ۲:

هغه وکتور چی له  $x^1 = (-1, -3, 1)$  ټکي څخه  $x^2 = (2, -1, 5)$  ټکی بنایي (په گوته کوی په گوته یونی کوي) داسی دی:

$$a = x^2 - x^1 = (2, -1, 5) - (-1, -3, 1) = (3, 2, 4).$$

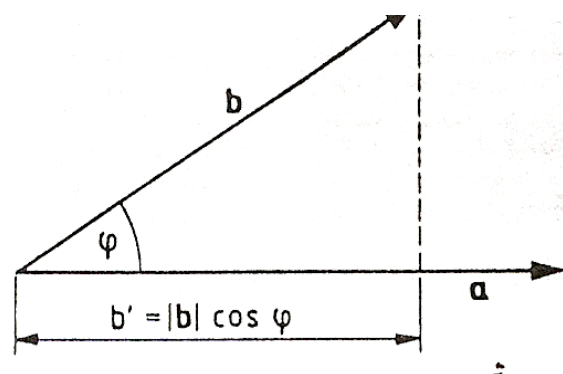
### ۱۷. ۲ دوه وکتورنو سکالار ځله ونه یا ضربونه

پیژند ۱۷. ۹:

د دوه وکتورونو  $a, b$  سکالار ځل  $a \cdot b$  د دواړو وکتورونو د مطلقه ارزښت او له دې دواړو وکتورونو منځ ته راغلی کونج کوساین ځل یا ضرب دی، یانې

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi; \dots \dots \dots (17, 7)$$

د سکالار ځل یا ضرب نتیجه سکالار ده په (۱۷. ۷) کی فاکتور  $b' = |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$  په هندسی مانا د (مخ) نخښي ساتلو سره د کوساین د پیژند له مخی (په وکتور  $a$  دوکتور  $b$  پرویکشن یا پریونتل یا پریپستل دي) څیره (۱۷. ۶)



په فزیک کی د سکالار ځل یا- ضرب بیلگه:

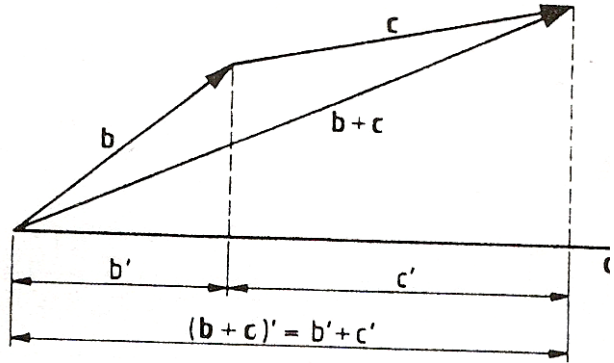
که  $a$  هغه لار وي چی د هغی په اوږدوالی د  $b$  زور تاثیر اچوي، پس  $A = a \cdot b$  له دې زور له لاری کړ شوی کار بنایي (د لار اوږدوالی چی د لار په لور د زور د پرویکشن سره ځل دی).

جمله ۱۷ . ۵ : ( د سكالار ځل شمیر قاعدې )  
 $a.b = b.a$  ( کوموتایو قانون )

( دیستریبوتیو قانون )  $a(b+c) = a.b + a.c$   
 $a.b = 0$  که  $a$  او  $b$  یو په بل اور توگونال یا عمود وي ( ۱۷ ، ۸ )  
 $a.a = |a|^2$  ( ۱۷ . ۹ )

د پورته شمیر قاعدو جو تونه: کوموتایو قانون د ( ۱۷ . ۷ ) پسې ترلی لاس ته راځي.  
 دیستریبوتیو قانون په ( ۱۷ . ۷ ) څیره کې لیدل کیږي.

د اور توگونال وکتورونو لپاره باور لري: که  $a.b = 0$  نو  $\alpha \cos \alpha = 0$  او ( ۱۷ . ۸ )  
 له ( ۱۷ . ۷ ) څخه لاس ته راځي .  
 همدایول ( ۱۷ . ۹ ) له ( ۱۷ . ۷ ) او داچې  $\alpha = 0^\circ$  د  $a$  او  $a$  تر منځ دی، نو لاس ته  
 $\cos \alpha = 1$  راځي



پورته څیره ۱۷ . ۷

جمله ۱۷ . ۶ :  
 د دوه وکتورونو سكالار ځل کو اور دینا تېوله صورت نیسي یعنی د  
 $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)$   
 د ځله ونی یا ضرب څخه لاس ته راځي :  
 $a.b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$  ( ۱۷ . ۱۰ )

اوبیونه : دیوونو وکتورونو ( ۱۷ . ۲ ) لپاره لاندې باور لري



د ( ۹ . ۱۷ ) سره سمر د  $i = j$  لپاره  $e^i \cdot e^j = 1$  د (۹، ۱۷) سره سم د  $|i| = |j|$  لپاره  $e^i \cdot e^j = 0$  له دې لاس ته راځي:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 e^1 + a_2 e^2 + a_3 e^3)(b_1 e^1 + b_2 e^2 + b_3 e^3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

یادونه : دلته د وکتورونو په توانډول چی څه لیکل کیږي د توان مانا نه لري په یوونو وکتورونو کی ددې لارې بشوول کیږي چې دا دکوم کواو دینات یوون وکتور دی او د نورو وکتورونو لپاره دا مانا لري چې کوم یو وکتور مو مطلب دی او نه چی په کوم توان دی ته د مخه هم گوته نیول شوی ده.

بیلگه ۱۷ . ۳ :

وکتور  $a = (2, -3, 1)$  له لاندې وکتورونو سره ځل شي

$$a) \quad b^1 = (3, 1, 4), b) \quad b^2 = (3, 2, -2), c) \quad b^3 = (3, 3, 3)$$

اوبونه یا حل: بیا یا اینیترنیت

$$a) \quad a \cdot b^1 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 7$$

$$b) \quad a \cdot b^2 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = -2$$

$$c) \quad a \cdot b^3 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 0$$

دلته c) په دې مانا ده چی وکتورونه a او  $b^3$  اورتوگونال یا عمود دي ددې لپاره لیکو:

$$a \perp b^3$$

جمله ۱۷ . ۷ :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}; \dots \dots \dots (17,11)$$

$$a \cdot a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad \text{لرو : ( ۱۰ . ۱۷ )}$$

بیلگه ۱۷ . ۴ :

د وکتورونو  $a = (2, -3, 1)$  ,  $b = (3, 0, -4)$  مطلقه ارزښت (اوردوالی) دی

$$|\vec{b}| = \sqrt{9+0+16} = 5; |\vec{a}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{4}$$

جمله ۱۷ . ۸ :

د دوه وکتورونو a او b ترمنځ کونج په لاندې ډول ټاکل کیږي

$$\cos \phi = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}; \dots \dots \dots (17,12)$$

اوبیونه یا حل:  $(۱۲, ۱۷)$  له  $(۷, ۱۷)$ ،  $(۱۰, ۱۷)$  او  $(۱۱, ۱۷)$  څخه لاس ته راځی

بیلگه ۱۷ . ۵:

په بیلگه ۱۷ . ۳ کې د  $\vec{a} \wedge b^1, b^2, b^3$  تر منځ کونجونه د شمیرلو دي. اوبیونه:

$$\phi_1 = \angle(\vec{a}, \vec{b}^1) = \frac{2.3 - 3.1 + 1.4}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+1+16}} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = 0,3669; \phi_1 = 68,48^\circ$$

$$\phi_2 = \angle(\vec{a}, \vec{b}^2) = \cos \phi_2 = \frac{2.3 - 3.2 + 1(-2)}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+4+4}} = \frac{-2}{\sqrt{4}\sqrt{17}} = -0,1296; \phi_2 = 97,45^\circ$$

$$\phi_3 = \angle(\vec{a}, \vec{b}^3) = \frac{2.3 - 3.3 + 1.3}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+9+9}} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{27}} = 0; \phi_3 = 90^\circ$$

### ۱۷ . ۳ د دوه وکتورونو وکتوري ځلونه یا ځل

پیژند ۱۷ . ۱۰:

د دوه وکتورونو  $a, b$  وکتور ځل یا وکتوریز ځل یو وکتور  $c$  دی د کوم لپاره چې لیکو  $a \times b = c$  او لاندې خویونه لري:

۱ - د  $c$  مطلقه ارزښت دی

$$|c| = |a||b| \cdot \sin \phi; \dots\dots\dots(17,13)$$

دا د هندسي له مخی د  $a$  او  $b$  وکتورونو لخوا غزیدلي غبرگ اړخیز منځه‌واری په مانا دی. (څ. ۱۷ . ۸)

۲- د  $c$  وکتور  $a$  او  $b$  باندې نیغ ولاړ یا اور توگونال دی.

۳- دلته  $c, b, a$  یو بني سیستم جوړوي، دا په د مانا چې که د بني لاس غټه گوته او د بنوولو گوته د  $a$  او  $b$  لور وښايي نو کونج جوړونکي د منځ گوته دوکتور  $c$ -

لور ښايي (څیره ۱۷ . ۹)

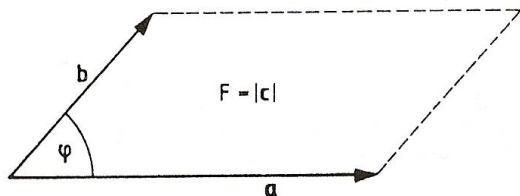


Bild 17.8

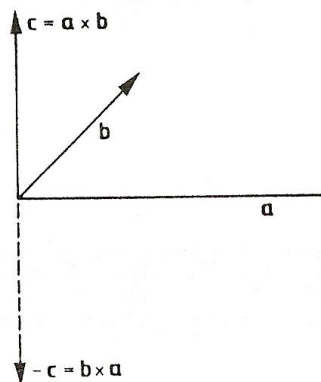


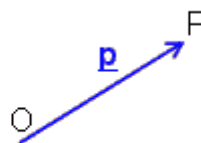
Bild 17.9

دا لاندی خیری د فرمولونو سره مور ته ټکی، کرښه او هواره را په گوته کوي او د یوه وکتور مطلقه ارزښت.

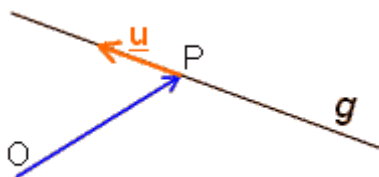
$$|\underline{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

ټکی  $P(p_1|p_2|p_3)$

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

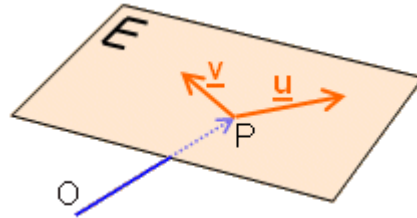


کرښه g



$$g: \underline{x} = \underline{p} + t \cdot \underline{u}$$

هواره E



$$E: \underline{x} = \underline{p} + r \cdot \underline{u} + s \cdot \underline{v}$$

وکتورخله ونه یا وکتور خُل یواځي د دري اړخيزي هوايا فضا لپاره تعريف دی.

د وکتور خُل بيلگه په فزيک کی :

که F قوه یا زور وي چي په يوه ککڅ څرخيدونکي بدن (جسم) د Q په ټکي د r په مړوند چي د r سره کونج جوړوي، برید یا حمله کوي او هغه د P په ټکي څرخوي (څیره ش).

۱۷ . ۱۰) نو څرخون مومنت Drehmoment منځ ته راځي  $M = r \times F$

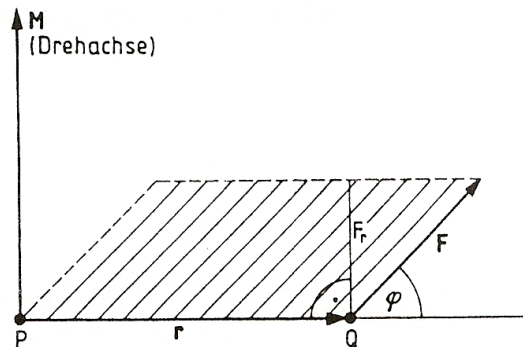


Bild 17.10

د مطلقه ارزښت له مخی د څرخونمومنت د اوږدوالی |r| د اړم مټ او مطلقه ارزښت

$$F_1 = |F| \sin \phi$$

چی د اړم په مټ (نیغ) ولاړ د قدرت یا قوت زور کپوننت (جوړونکی) دی:

$$M = |r| |F| \sin \phi$$

جمله ۱۷ . ۹: ( د وکتور ضرب لپاره د شمیر قاعدې )

$$a \times b = -b \times a \quad (17.14)$$

دیسټریبوتیو قانون )

$$a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c) \quad (17.15)$$

$$a \times b = 0 \quad (16.17) \quad \text{د کولینیار وکتورونو لپاره}$$

د پورته شمیر قاعدو بڼه څرگندونه یا توضیح: ( ۱۷ . ۱۴ ) د غوښتونکي بڼي سیستم له

مخې (پیژند ۱۷ . ۱۰، ۱۷ . ۹)

د کولینیار وکتورونو لپاره  $\phi = 0$  پس لرو:  $\sin \phi = 0$  له دې سره د ( ۱۷ . ۱۳ ) له مخې )

( ۱۷ . ۱۵ ) لاس ته راځي. په دیسټریبوتیو قانون په لیدنوالي (پیچي دی) دلته صرف نظر

کیري، لیدور والی یی نه څرگندوو. د وکتور ځل شمیرلو لپاره د وکتور کو اور دینا تډوله

ښودنی سره د یوون وکتورونو  $e^1, e^2, e^3$  وکتور ځل ته اړیو. د ( ۱۷ . ۱۵ ) شمیر قانون

له یوې خوا او له بلې خوا د وکتور ځل پیژند ۱۷ . ۱۰ څخه لاندې جمله لاس ته

راځي.

جمله ۱۷ . ۱۰ ( د یوونو وکتورونو وکتور ځل )

$$e^i \times e^i = 0, i=1,2,3; \dots \dots \dots (17,16)$$

$$e^1 \times e^2 = e^3, e^2 \times e^3 = e^1, e^3 \times e^1 = e^2; \dots \dots \dots (17,17)$$

$$e^2 \times e^1 = -e^3, e^3 \times e^2 = -e^1, e^1 \times e^3 = -e^2; \dots \dots \dots (17,17)$$

د دریمی درجی دیتر مینانت کلیمی لاندې (پیژند ۱۱ . ۲) او که څوک یوون وکتورونه

د دیتر مینانت د توکو په څیر ومنلی شي، کیدی شي چی د وکتور ځل  $a \times b, b \times a$

کو اور دینا تو په څیر انځور شي

جمله ۱۷ . ۱۱: د وکتورونو

$$b = (b_1, b_2, b_3), a = (a_1, a_2, a_3)$$

وکتوریز ځل یا وکتوري ځله ونه په لاندې کې د ماتریکس په توگه ده:

$$a \times b = \begin{bmatrix} e^1 e^2 e^2 \\ a_1 a_2 a_2 \\ b_1 b_2 b_3 \end{bmatrix}; \dots \dots \dots (17,18)$$

$$\begin{aligned} \text{اوبیونه یا حل : د وکتور } a &= (a_1e^1 + a_2e^2 + a_3e^3) \text{ خُل د وکتور} \\ b &= (b_1e^1 + b_2e^2 + b_3e^3) \end{aligned}$$

د توکوډوله (توګي په توګي) وکتوري خُل د جملی ۱۷ . ۱۰ کارونه، دا لاندې ورکوي  
 $a \times b = e^1(a_2b_3 - a_3b_2) + e^2(a_1b_3 - a_3b_1) + e^3(a_1b_2 - a_2b_1)$   
 دا ضرب ارزښه په دا لاس ته راوړنه یا نتیجه د دیترمینانت (۱۷ . ۱۸) د شمیرلو او د  
 پیژند ۱۱ . څخه هم ترلاس راځي

بیلګه ۱۷ . ۶:

$a \times b$  دې وشمیرل شي، که وي

$$a = (-2, 1/2, -1), b = (1/2, -2, 1) \quad (\text{الف})$$

(ب)

$$a = e^1 - 3e^2 + e^3, b = -e^1 - 2e^2 + 3e^3$$

اوبیونه یا حل (الف) (ب) د دې بیلګې اوبیونه دې ګان لستونکي او مینه وال په غاړه  
 واخلی، دا له مخه تیري جملی له مخی پوره روښانه دی.  
 وکتوري خُل د خپل مطلقه ارزښت (۱۷ . ۱۳) هندسي اهمیت په بنسټ د وکتورونو،  $a$ ،  
 $b$  څخه خورې شوي منځه واري  $F_p$  څخه څخه خورې شوي منځه واري  $F_D$  شمیرلو لپاره خورا مساعد دی. باور لري

$$F_p = |a \times b|; F_D = \frac{1}{2} |a \times b|; \dots \dots \dots (17, 19)$$

بیلګه ۱۷ . ۷:

د وکتورونو  $a = (1, 1, 0)$ ،  $b = (2, 0, 1)$  څخه خورې شوي هوارې منځ یا دننه په لاندې  
 ډول ده

$$a \times b = \begin{vmatrix} e^1 & e^2 & e^3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -2), F_p = |a \times b| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

بیلګه ۱۷ . ۸:

د دریګودی ABC منځهواره (د هواری دننه) دې وشمیرل شي چی کونجتيکي يي وي

:

$$A=(2,1,1), B=(4,0,0), C=(1,-1,2)$$

ابیوني :

دریګودی له لاندې وکتورونو څخه غزیري

$$a=B-C=(3,-1,-2),$$

$$b=A-C=(1,2,-1) \text{ او}$$

د a او b وکتوري ځل په لاندې ډول دی

$$a \times b = \begin{vmatrix} e^1 e^2 e^3 \\ 3 1 -2 \\ 1 2 -1 \end{vmatrix} = 3e^1 + e^2 + 5e^3 = (3,1,5)$$

د دریګودی ABC د هواری دننه یا منځهواره په لاندې ډول ده

$$F_D = \frac{1}{2} |a \times b| = \frac{1}{2} \sqrt{3^2 + 1 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{35}$$

۱۷. ۴ شپات ضرب ( غبرګهواریز ځل موزی سطحیز ضرب)

یادونه: دا یو شپیر خواییز تن دی چی مخامخ هواری یی سره غبرگی او یو په بل ضرور نیغ ولار نه وي. لاندې شکل ۱۷ ۱۱ یی بیلگه او د مسئلی دحل انځورونه ده

پیژند ۱۷. ۱۱:

د دري وکتورونو غبرګهواریز ځل یا شپاتخل [a, b, c] لاندې ځل یا ضرب دی

$$[a,b,c]=(a \times b) \quad (17.20)$$

دلته وکتورونه a او b وکتوریز ځل کیري او نتیجه یی بیا د c سره سکالار ځل کیري، یعنی لاس ته راوړنه یا نتیجه یی سکالار ده.

غبرکهوراريزخل حُمکچيز هندسي ليدونکی اهميت لري. د سکالارخل (پيژند ۱۷ . ۹ ) سره سم باور لري

$$[a, b, c] = (a \times b) \cdot c = |a \times b| \cdot c = |a \times b| \cdot |c| \cdot \cos \alpha$$

دلته الفا د وکتورونو  $a \times b$  او  $c$  څخه رابند شوی کونج دی. (څیره ۱۷ . ۱۱)

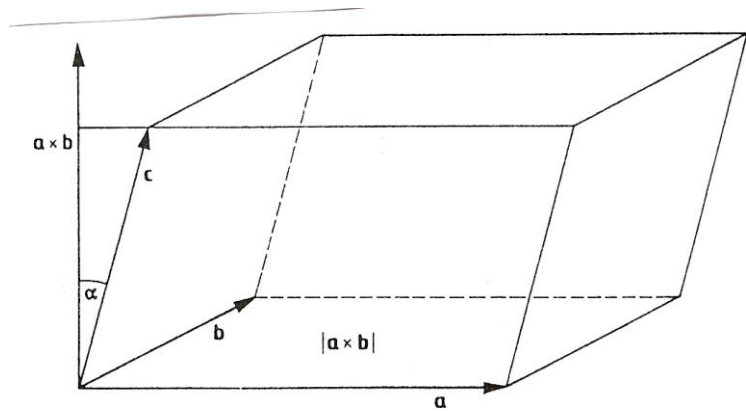


Bild 17.11

دلته د وکتورخل تعريف سره سم (پيژند ۱۷ . ۱۰)  $|a \times b|$  د  $a$  او  $b$  غزیدلي غبرگ اړخيز دی. برسیره پر دې  $|c| \cdot \cos \alpha$  پرتله برخه ۱۷ . ۲ (په وکتور  $a \times b$  باندې د وکتور  $c$  پروجکشن يا پريوستون په مانا دی. يعنې د  $a, b$  او  $c$  څخه غزیدلي غبرگهوراري يا

شپات جگوالی بنايي. پس  $[a, b, c]$  هندسي د وکتورونو  $a, b, c$  څخه غزیدلي غبرگهوراريزي ډکي (حجم) په مانا دی.

دغبرگهوراريز په مطلقه ارزښت (د غبرگهوراريز ډکي يا-حجم) کی تغیر نه راځي که چیرې د وکتورونو پرلپسې ترتیب بدل شي. د غبرگهوراريزي ډکي زیاتيز يا مثبت دی، که ورکړ شوي ترتیب یو بنی-سیستم جوړ کړی.

جمله ۱۷ . ۱۲۰:

$$[a, b, c] = [b, c, a] = [c, a, b] = -[a, c, b] = \\ = -[c, b, a] = -[b, a, c] \quad (17.21)$$

که وکتورنه په یوه هواره کی پراته وي (کومپلاناړ وي) نو یو شپات د صفر جگوالي سره لاس ته راځي. نو بیا لاندې جمله باور لري



جمله ۱۷ . ۱۳:

( 22 . 17 ) د کومپلاناړ وکتورونو لپاره باور لري  $[a,b,c]=0$

د غیرگهواریز یا شپات خُل شمیرلو لپاره د وکتورونو په کواوردیناتتوگه انځورونه بیرته دیترمینانت انځورونه په کار اچول کیري

جمله ۱۷ . ۱۴:

د وکتورونو

$$a=(a_1,a_2,a_3),b=(b_1,b_2,b_3),c=(c_1,c_2,c_3)$$

غبرگهواریز خُل په لاندې ډول دی

$$[a,b,c] = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix}; \dots\dots\dots(17, 23)$$

اوبیونه : وکتور خُل  $a \times b$  د جملی ۱۷ . ۱۱ سره سم لاندې اوبیونه لري

$$a.b=(a_2b_3-a_3b_2)e^1-(a_1b_3-a_3b_1)e^2+(a_1b_2-a_2b_1)e^3$$

د  $a \times b$  سکالارخُل د  $c$  سره کواوردیناتډوله په لاندې توگه صورت نیسي.

$$(a \times b).c=[a_2b_3-a_3b_2,-(a_1b_2-a_2b_1),a_1b_2-a_2b_1].(c_1,c_2,c_3)$$

$$= c_1(a_2b_3-a_3b_2)-c_2(a_1b_3-a_3b_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)= a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

دا نتیجه د دیترمینانت ( ۱۷ . ۲۳ ) شمیرلو له لارې هم لاس ته راځي.

بیلگه ۱۷ . ۹:

د وکتورونو  $a=(0,1,2)$  ,  $b=(2,0,1)$  ,  $c=(1,1,0)$

غبرگهواریز - یا شپاتخُل  $[a,b,c]$  په لاندې ډول دی:

$$[a,b,c] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0(0-1.1) - 1(0-1.1) + 2(2.1-0) = 5$$

بیلگه ۱۷ . ۱۰ :

وکتورونه  $a=(1,2,3)$ ,  $b=(3,6,1)$ ,  $c=(0,0,1)$  کومپلنار دي او شپاتځل يي په لاندې ډول دی ( دا اوبیونه دي گران لوستونکي او مینه وال په غاړه واخلي )

بیلگه ۱۷ . ۱۱ :

د تیترايدر ( دريگودي اړخيزه ، لاندې شکل دی ) ډکی (حجم) دي وشميرل شي ( څیره . ۱۷ . ۱۲ )

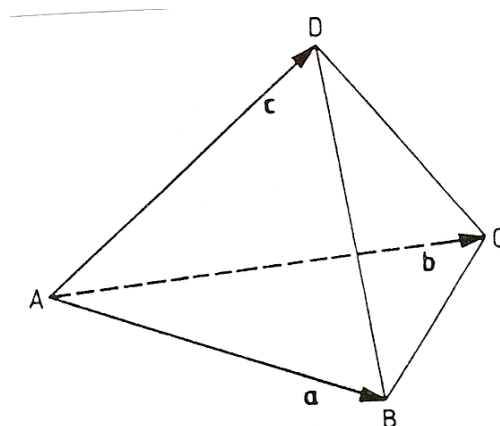


Bild 17.12

د لاندې کونجټکو يا گودټکو سره

$$A=(1,1,0) , B=(2,0,1)$$

$$C=(3,-1,2) , D=(1,0,3)$$

يادونه : دا پورته په خټه کې ککرتکي دي، ځکه چې دا څیره څلور ککري لري

اوبیونه : دا غوښتونکی ډکی د لاندې وکتورونو څخه خور تیتريد ۶/۱ برخه ده

$$a=B-A=(1,2,0), b=C-A=(2,1,0) , c=D-A=(0,1,2)$$

دا تیتريد يو اهرام دی چې ډکی يا حجم يی ۳/۱ ځل بنسټيز هواره ځل جگوالی د تیترايد

جگوالی د شپات جگوالي سره مساوي دی او د دريگودي هواره يی د شپات نيم د وکتورونو

$a$  ,  $b$  ,  $c$  کميز يا منفي دی

$$[a, b, c] = \begin{vmatrix} 110 \\ 201 \\ 012 \end{vmatrix} = -5$$

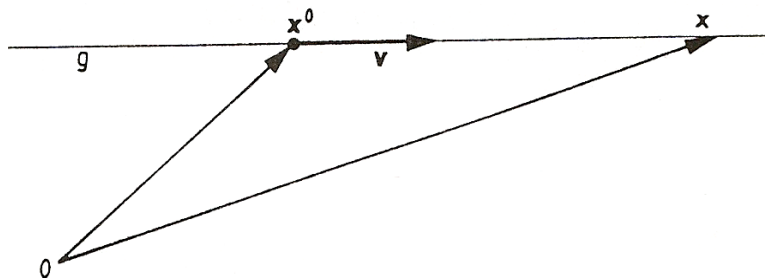
د کچکن لپاره مطلقه ارزښت نیول کیري:  $V = (1/6) \cdot |[a, b, c]| = 5/6$

۱۷. ۵ په شننیزه (تحلیلي) ځمکچ کی د وکتورونو کارونه

په دې برخه کی ځمور هدف دی چی وگورو چی د تحلیلي هندسی پرابلمونه او بیا په ځانگړي ډول تحلیلي هندسی په هوا کی وکتوري مطالعه (د ۱۶ - برخي سره په توپیر) څنگه کیري.

۱۷. ۵. ۱ د یوې کرښی وکتوریزه انځورونه

په فضا یا هوا کی د یوې کرښی ځای د یوه ټکی او لور له لاری یواځنی ټاکلی دی. په کرښه څخه د یوې نښتی ټکی د ځای وکتور  $x_0$  په مرسته (چی د کواوردینات سیستم د  $O$  څخه دا ټکی ښایي)، لور یی په وکتور  $V$  (څیري ۱۷. ۱۳



څیره ۱۷. ۱۳

که  $\lambda$  یو پارامتر وي چی د رییلگونو ډیری کی ځغلي، نو د کرښی  $g$  یو په زړه پور ټکی  $x$  د وکتور زیاتون یا - جمع له لاری په لاندی فورم (ښه) ښوول کیري

$$x = x_0 + \lambda \cdot v, -\infty < \lambda < \infty; \dots \dots \dots (17, 24)$$

د وکتور  $v$  په لور په ټکی  $x_0$  کی د کرښی  $g$  برابر و (پارامتر فورم) که پارامتر  $\lambda$  په ریل گونو کی وځغلي نو  $x$  د کرښی ټولو ټکو کی یا د ټکو ترمنځ

خُغلي. د هر ټکي  $x \in g$  لپاره یواځني یوه  $\lambda \in R$  شته یا موجود ده وکتور مساوات

(۱۷، ۲۴) لاندې درې سکالار برابر ونونه نه دي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda.v, x_2 = x_2^0 + \lambda.v, x_3 = x_3^0 + \lambda.v; \dots \dots \dots (17, 25)$$

که کرښه  $g$  په دوه ټکو  $x_0, x_1$  ورکړ شوي وي، نو د لور وکتور یی دی  $v = x_1 - x_0$  او په

دې ډول یی د کرښې برابر ونونه دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0); \dots \dots \dots (17, 26)$$

بیلگه ۱۷ . ۱۲ :

په لاندې ټکو  $x_0 = (1, 2, 3)$ ,  $x_1 = (1, 3, 2)$  ورکړ شوي کرښه د  $v = x_1 - x_0 = (0, 1, -1)$

له امله په لاندې توگه لیکل کيږي

$$x = x^0 + \lambda.v = (1, 2, 3) + \lambda(0, 1, -1)$$

دا لاس ته راوړنه یا نتیجه مور ته لاندې درې سکالار برابر ونونه په گوته کوي

$$x_1 = 1, x_2 = 2 + \lambda, x_3 = 3 - \lambda$$

د کرښې برابر ونونو (۱۷ . ۲۴) پارامتر فورم په هواره کی د کرښې ځانگړی حالت

خوندي لري:  $x, x_0$  او  $v$  وکتورونه دي، هر یو د دوه کومپوننتو سره.

بیلگه ۱۷ . ۱۳ :

په یوې هوارې کې د یوې کرښې د مساواتو فورم:

$$x = (1, 2) + \lambda(1, -1) \quad \text{سکالار برابر ونونونه په گوته کوي.} \quad x_1 = 1 + \lambda, x_2 = 2 - \lambda$$

له دې څخه سری کولی شي چی پارامتر  $\lambda$  له منځه یوسي:

$$\lambda = x_1 - 1, x_2 = 2 - (x_1 - 1) = 3 - x_1$$

که د  $x_1$  په ځای  $x$  او د  $x_2$  په ځای  $y$  ولیکو نو لاس ته راځي  $y = -x + 3$  د

کرښې د برابر ونونو نورمال فورم (۱۶ . ۲) . که غواړو چی معلومه کړو چی ایا ټکی

$x^1$  په کرښه  $g$  پروت دی، نو باید وڅیړو چی کواوردینات یی برابر ون (۱۷ . ۲۵)

پوره کوي، که نه. دا په دی مانا چی ایا دده لپاره یو د  $\lambda$  - ارزښت موجود دی .

بیلگه ۱۷ . ۱۴ :

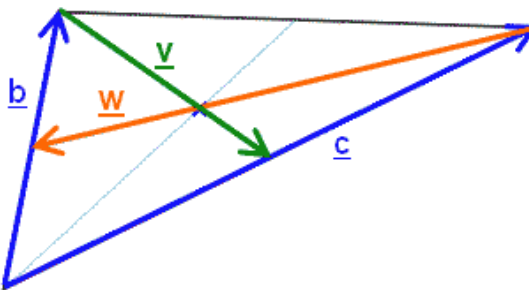
لاندي ټکي  $(2, -2, 1) \dots x^2 = (-1, 4, 3), 2) \dots x^1 = (-1, 4, 3), 2)$  په کرښه  $g : x = (1, 0, 1) + \lambda(-1, 2, 1)$  پراته دي که نه ؟

اوبیونه : (۱) د دې درې برابر ونونو  $3 = 1 + \lambda, 4 = 0 + 2\lambda, -1 = 1 - \lambda$  له جملې د دوهم څخه لاس ته راځي  $\lambda = 2$  او دا ارزښت لومړی او هم دریم مساوات ډکوي (پوره کوي  $2 = 1 + 2, 3 = 1 + 2, -1 = 1 - 2$ ) له دې امله ټکی  $x^1$  په کرښه  $g$  پروت دی. (۲) د دې درې برابر ونونو  $1 = 1 + \lambda, -2 = 0 + 2\lambda, 2 = 1 - \lambda$  له دویم لرو  $\lambda = -1$  دا ارزښت لمړي مساوات پوره کوي، مگر دریم مساوات نه: پس  $x^2$  په کرښه  $g$  نه دی پروت.

که د دوه کرښو  $g_1 : x = x^1 + \lambda v; g_2 : x = x^2 + \mu w$  غوڅټکی  $x_S$  موجود وي باید د دواړه کرښو مساوات پوره کړي. په دې مانا چې باید باوري شي:

$$x_S = x^1 + \lambda v = x^2 + \mu w$$

دا وکتور برابر ونه درې سکالار برابر ونونه دي چې د هغو له دوه وو څخه سپری پارامتره  $\mu \wedge \lambda$  شمیرلی شي. که لاس ته راغلي ارزښتونه دریم مساوات پوره کړي، نو یو پریټکی مخ ته شته، که ناپای زیات حلونه مخ ته پراته وي، نو دواړه کرښی یو په بل پرتی دي.



بیلگه ۱۷ . ۱۵ : د لاندي کرښو

غوڅټکی دې پیدا شي :

$$g_1 : x = (1, 1, 0) + \lambda(1, 3, -2), g_2 : x = (1, 2, 2) + \mu(-1, -2, 4)$$

حل یا اوبیونه : غوڅټکي باید دواړه برابر ونونه پوره کړي:

$$1 + \lambda = 1 - \mu, 1 + 3\lambda = 2 - 2\mu, -2\lambda = 2 + 4\mu$$

د درې سکالار برابر ونونو له لومړي مساوت څخه لرو  $\lambda = -\mu$  ددې له مخې او له دوهم

برابرون څخه لاس ته راځي:  $\mu = -1$  نو لرو  $\lambda = 1$ . په دې ډول دریم برابر ون هم

پوره کيږي د غوڅټکي کواورډینات سیستم د کرښې  $g_1$  سره  $\lambda = 1$  لاس ته راځي:

$$x_s = (1, 1, 0) + 1 \cdot (1, 3, -2) = (2, 4, -2).$$

## ۱۷ . ۵ . ۲ د هواري یا سطحې وکتوریزه انځورونه

د یوې هواري  $E$  ځای په هوا کې په یوه ټکي  $x_0$  او دوه ناغبرگو وکتورونو  $v$  او  $w$  یواځنې ټاکلی دی. د وکتورونو  $v$  او  $w$  پیلټکي کیدی شي په  $x_0$  پراته ونیول شي یا پراته فرض شي (ش؟؟ څیره شته . ۱۷ . ۱۴).

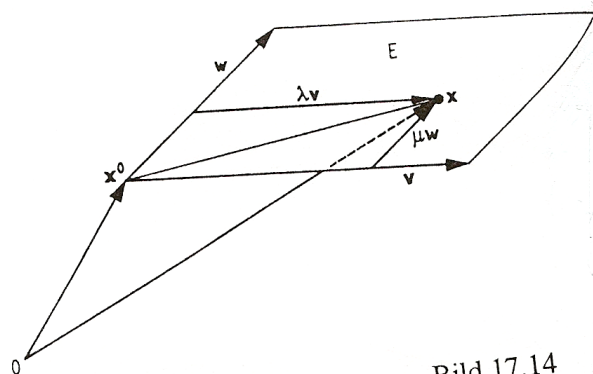
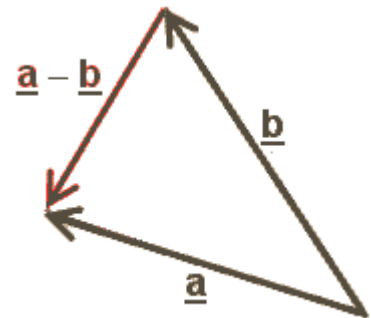


Bild 17.14

که  $\lambda, \mu$  پارامترونه وي چی یو له بل خپلواک د ریيل گڼونو پیري کی خُغلي، نو کیدی شي د هواري E په خوبنه ټکی x په لاندې ډول انځور شي (17, 27).....  
 $x = x^0 + \lambda v + \mu w, -\infty < \lambda, \mu < \infty$ .

د هواري E مساوات چی د  $x_0$  ټکی کی، له وکتورونو  $v, w$  غزیدلي (پارامتر فورم) هر جوړه اربنت  $\lambda, \mu \in R$  یواځنی یو  $x \in E$  بنایي. وکتور برابرېون (۱۷ . ۲۷) لاندې سکالار برابرېون څرگندوي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda v_1 + \mu w_1, x_2 = x_2^0 + \lambda v_2 + \mu w_2, x_3 = x_3^0 + \lambda v_3 + \mu w_3; \dots (17, 28)$$

که چیرې هواره په درې ټکو  $x^0, x^1, x^2$  په درې ټکو  $x^0, x^1, x^2$  چی په یوه کرښه نه دي پراته ورکړ شوي وي، نو کیدی شي چی د هواري غزونکي وکتورونه په لاندې ډول انځور شي:  $v = x^1 - x^0, w = x^2 - x^0$  له دې سره د هواري مساوات داسی دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) + \mu(x^2 - x^0); \dots (17, 29)$$

بیلگه ۱۷ . ۱۶:

په درې ټکو  $x^0 = (-1, 2, 5), x^1 = (2, 3, -6), x^2 = (1, -4, 3)$  د هواري E ورکړ شوي برابرېون د  $v = x^1 - x^0 = (3, 1, -11), w = x^2 - x^0 = (2, -6, -2)$  له امله په لاندې ډول دي:

$$x = x^0 + \lambda v + \mu w = (-1, 2, 5) + \lambda(3, 1, -11) + \mu(2, -6, -2)$$

ددې نتیجی څخه لاندې سکالار برابرېون لاس ته راځي:

$$x_1 = -1 + 3\lambda + 2\mu, x_2 = 2 + \lambda - 6\mu, x_3 = 5 - 11\lambda - 2\mu$$

۱۷ . ۵ . ۳: د هوارو برابرېون یا- مساوات سکالار فورم (-بڼه)

یوه هواره د یوه ټکي  $x_0$  او یوه په هواره نیغ ولاړ وکتور  $n$  له پلوه یاله لاری هم یواځنی ټاکلی ده یا، چی عمودي یا نورمال وکتور (Normalvektor) (پي بولي) ؟؟؟ څیره شته ش . ۱۷ . ۱۵

په هواره E کی دې x یو په خوبنه ټکی وي . نو دا له  $x_0$  و x ته بریدي وکتور  $x - x_0$  هم په دې هواره کی پروت دی او وکتورونه  $n$  او  $x - x_0$  یو په بل نیغ ولاړ دي.

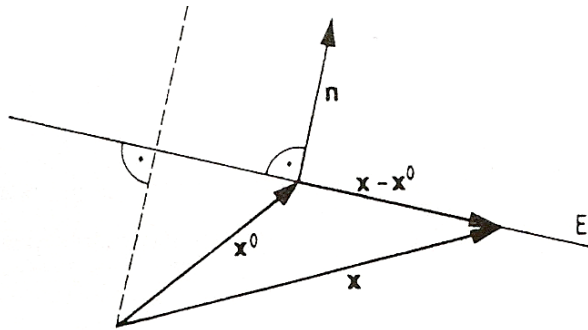


Bild 17.15

په یو بل نیغولارو ( اورتوگونال ) وکتورونوڅخه جوړ شوي سکالارځل صفر دی څیره ( خ . ۱۷ . ۸ دې برتله شي ) دا په دې مانا چی باوري کيږي :

$$n(x-x_0)=0, nx=nx_0=c \quad (17.30)$$

دهواري برابر ونونو سکالار فورم ،  $n$  - عمود وکتور ، د هواري  $x_0$  په ټکی.

بیلگه ۱۷ . ۱۷ :

د هواري برابر ون چی ټکی  $x_0=(2,-1,5)$  په پروت دی او په هغه وکتور  $n=(2,-2,1)$  ( نیغ ) ولار دی

د  $c=nx_0=(2,-2,1) \cdot (2,-1,5)=4+2+5=11$  له مخي په لاندې ډول دی:

$$(2,-2,1) \cdot x=11 \Leftrightarrow 2x_1-2x_2+x_3=11.$$

د هواري مساواتو پارامتر فورم ( ۱۷ . ۲۷ ) په یوه سکالار فورم اړول بدلول ( ۱۷ . ۳۰ ) د پارامتر د له منځه وړلو له لاري لاس ته راځي.

بیلگه ۱۷ . ۱۸ :

د هواري مساوات دي په پارامتر فورم وي:

$$x=(1,-2,4)+\lambda(0,1,-1)+\mu(1,-1,2)$$

دا وکتور برابر ون لاندې درې سکالار برابر ونونه خوندي لري یا په بر کي لري یا

ځایوي:

$$x_1=1+\mu, x_2=-2+\lambda-\mu, x_3=4-\lambda+2\mu$$

له لومړي لاس ته راځي:  $\mu=x_1-1$



له دې سره دا نور دوه برابر ونونه داسې دي

$$x_2 = -2 + \lambda - x_1 + 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -1 + \lambda \wedge$$

$$x_3 = 4 - \lambda + 2x_1 - 2 \Leftrightarrow -x_1 + x_3 = 2 - \lambda \Leftrightarrow$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

د هوارې برابر ونونو سکالار فورم:  $(-1, 1, 1)x = 1$

که غواړو چې څرگنده کړو چې ایا یو ټکی  $x_1$  په هواره  $E$  پروت دی چې برابر ون یی په پارامتر فورم ورکړ شوي ، نو باید مطالعه شي چې ددې کواوردینات ( ۱۷ . ۲۸ ) برابر ون پوره کوي که نه ( بیلگه ۱۷ ، ۱۵ : د کرښی مساواتو ته ورته ) . او یا سړی پارامتر فورم په سکالار فورم بدلوي او څیړي چې د ټکي کواوردینات دا مساوات پوره کوي، که نه .

بیلگه ۱۷ . ۱۹ :

ایا ټکی  $x^1 = (2, -2, 5)$  په هواره  $E : x = (1, -2, 4) + \lambda(0, 1, -1) + \mu(1, -1, 2)$

پروت دی ؟

اوبیونه : د لومړي دوه برابر ونونو  $2 = 1 + 0\lambda + \mu, -2 = -2 + \lambda - \mu, 5 = 4 - \lambda + 2\mu$

څخه لاس ته راځي  $\lambda = 1 \wedge \mu = 1$

دا دواړه ارزښتونه دریم برابر ون پوره کوي:  $5 = 4 - 1 + 2 \cdot 1$  ، دا په دې مانا چې  $x_1$  په

هواره  $E$  پروت دی. که د هوارې برابر ون په سکالر فورم واپول شي: - )

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$  . بیلگه ۱۷ . ۱۸ دې وکتل شي ( ، نو د ټکي  $x^1$  کواوردینات دې یواځي د

$x_1, x_2, x_3$  لپاره ځاي په ځاي شي ، چې معلوم کړو چې  $x^1$  په هواره  $E$  پروت دی : -

$$2 + (-2) + 5 = 1$$

د یوې هوارې:  $E : n \cdot x = c$  او د یوې کرښی  $g : x = x^0 + \lambda v$  ترمنځ غوڅتکی  $x$  (که

شته وي) (نو هم په  $E$  پروت دی او هم په  $g$  له دې امله د هوارې په برابر ونونو کې د  $x$

لپاره  $x^0 + \lambda v$  ځاي په ځاي کوو (ردو) او په دې ډول یو برابر ون د  $\lambda$  لپاره لاس ته

راځي. که دا برابر ون یواځنی یو اوبی ولري نو غوڅتکی موجود دی ، که اوبی شته

نه وي یا موجود نه وي نو کرښه  $g$  د هوارې  $E$  سره غبرگه ځغلي، که ناپايي ډیر ي

اوبیونی شته وي نو کرښه  $g$  په هواره  $E$  پرته ده.

بیلگه ۱۷ . ۲۰ :

د کرښو  $g: x = (1, 0, 1) + \lambda(-1, 1, 1)$  پروت ځای یا موقعیت دې لاندې هوارو ته وټاکل شي:

$$a) \dots x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, b) \dots 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, c) \dots 2x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

اوبیونه : دا چی لټونکی غوڅتکی  $x_s$  د کرښې برابرې پوره کوي نو باوري دي:

$$x_1 = 1 - \lambda, x_2 = \lambda, x_3 = 1 + \lambda$$

$$a) x_1 + 2x_2 + 3x_3 = (1 - \lambda) + 2\lambda + 3(1 + \lambda) = 4\lambda + 4 = -4, \lambda = -2$$

$$x_s = (1 + 2, -2, 1 - 2) = (3, -2, -1)$$

$$b) 2x_1 + x_2 + x_3 = 2(1 - \lambda) + \lambda + (1 + \lambda) = 0. \lambda + 3 = 3$$

لمدا  $\lambda$  په خوښه، په  $E$  پرته ده

$$c) 2x_1 + x_2 + x_3 = 2(1 - \lambda) + \lambda + (1 + \lambda) = 0. \lambda + 3 = 4$$

حل نه شته ، نو کرښه  $g$  د سطحې  $E$  سره غبرگه ځغلي.

د دوه سطح

$$n^1 \cdot x = c1 : E1$$

او  $E2$  هوارې:  $n^2 \cdot x = c2$  غوڅکرښه دواړه برابرې ونونه پوره کوي (دا دوه برابرې ونونه دي، هر یو د درې نامعلومو  $x_1, x_2, x_3$  سره). دوه امکانات شته دي چی کرښه  $g$  (که شته وي) را پیدا کړی شو.

۱ - سری یوه واریابله یا اووښتونې په خوښه وټاکي:  $x_1 = \lambda$  (ازاد پارامتر)، نور

دواړه  $i \neq j, j \neq k, k \neq i$  له دواړو هوار مساواتو څخه په  $\lambda$  کې د کرښیزو افادو یا وینو په څیر را پیدا کوي. او په دې ډول کرښیز مساوات لاس ته راځي.

۲ - سړي د کرښې دوه مختلف ځانگړي ټکي  $x^0$  او  $x^1$  را پیدا کوي او په دې ډول د

$$کرښې  $g$  مساوات لاس ته راوړي:  $(x - x_0) = \lambda(x^1 - x_0)$ .$$

بیلگه ۱۷ . ۲۱ :

د دوه هوارو  $E_1$  او  $E_2$  پرېکرښه  $g$  غواړو پیدا کړو. هوارې دې وي :

$$E_1: x_1 - x_2 + x_3 = 3, \quad E_2: 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$$

حل (۱):  $x_1 = \lambda$  په خوښه

$$E_1: -x_2 + x_3 = 3 - \lambda, \quad E_2: -x_2 - 3x_3 = -2\lambda.$$

کمون یا تفریق :  $4x_3 = 3 + \lambda$ ,

په  $E_1$  کی دې ځای په ځای شي :  $-x_2 + 3/4 + \lambda/4 = 3 - \lambda$ ,  $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$

نو لاس ته راځي  $x_1 =$ ,  $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$ ,  $x_3 = (1/4)\lambda + 3/4$

په وکتور لیکدود :  $x = (0, -9/4, 3/4) + \lambda(1, 5/4, 1/4)$

همداسې ( $\Leftrightarrow$ ) له  $\tilde{\lambda} = (1/4)\lambda$  سره لرو

$$x = (0, -9/4, 3/4) + \tilde{\lambda}(4, 5, 1)$$

حل (اوبی) ۲ : په  $E_1$  او  $E_2$  ځای په ځای کوو :  $x_3 = 0$ , پس لاس ته

راځي  $x_1 - x_2 = 3$ ,  $2x_1 - x_2 = 0$  د لاندې حل سره  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = -6$

پس  $(-3, -6, 0) = x^0$  په هوار کې ځانگړې ټکی دی، که ولیکو  $x_2 = 0$  پس

له  $x_1 + x_2 = 3$ ,  $2x_2 - 3x_3 = 0$  د لاندې حل لرو :  $x_1 = 9/5$ ,  $x_3 = 6/5$  او په دې ډول د ه

کرنې  $g$  دوم ټکی :  $x^1 = (9/5, 0, 6/5)$

په ټکو  $x^1$ ,  $x^0$  د کرنې  $g$  مساوات (مقایسه ۱۷، ۲۶) داسې دي

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) = (-3, -6, 0) + \lambda(24/5, 6, 6/5)$$

$\Leftrightarrow$  د  $\tilde{\lambda} = (6/5)\lambda$  سره :

$$x = (-3, -6, 0) + \tilde{\lambda}(4, 5, 1)$$

دا په حل (اوبی) ۱ کی پیدا شوې کرنې  $g$  یو بل ډول انځوردي، ځکه چې د لورو

وکتورونه یو بل ته ورته دي. :  $v = (4, 5, 1)$  او د  $\tilde{\lambda} = -3/4$  لپاره په حل ۱ کې د

کرنې ټکی د حل ۲  $x^0$  دا ټکی لاس ته راځي

$$x = (0, -9/4, 3/4) - (3/4)(4, 5, 1) = (-3, -6, 0)$$

تمرینونه؛

۱ - وکتورونه  $a = (1, 0, -2)$ ,  $b = (-3, -5, 0)$ ,  $c = (4, -1, 7)$  ورکړ شوي دي.

جوړکړی :

$$-a, a+b, a-c, 2a - b + 3c!$$

۲ - وکتور  $a$  چې له ټکي  $x^1 = (3, -5, 7)$  څخه د ټکي  $x^2 = (-2, 4, -1)$  لورته لارښودوي، څنگه دی؟

۳ - وکتور  $a = (3, 21)$  دې پیلټکي  $x^1 = (1, 2, 3)$  ولري. وڅیړئ چې پایټکي  $x^2$  یې کوم کواوردینات لري؟

۴ - لاندې وکتورونه کوم مطلقه ارزښت لري؟

$$a = (4, -3, 12), \quad b = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}), \quad c = (3, 3, 3)?$$

۵ - وکتورونو  $a = (2, -1, 3)$ ,  $b = (7, 0, 0)$  پورې اړوند یا مربوط یوونو وکتورونه کومې کواوردیناتې لري؟

۶ - د لاندې وکتورونو یو په بل ولاړوالی یا اورتوگونالیتي دې وپسول شي؟

$$a = (1, 2, 3), \quad b = (3, 0, -1)!$$

۷ - دلته دې  $a_1, b_1$  او  $c_1$  څومره لوي وي، چې وکتورونه

$$a = (a_1, 3, 2), \quad b = (-4, b_1, 2), \quad c = (3, -2, c_1)$$

په وکتور  $d = (2, 1, -3)$  (نیغ) ولاړ وي؟

۸ - د

$$a) \quad a = (-2/3, 1/2, 5/4), \quad b = (3/4, -1/3, 2/3),$$

$$b) \quad a = e^1 - e^2 + e^3, \quad b = 2e^1 + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$$

لپاره دې  $a \cdot b$  وشمیرل شي!

۹ - وکتورونه  $a = (3, -4, 12)$  او  $b = (-6, 8, 0)$  یو له بل سره کوم کونج جوړوي!

۱۰ - د گوند-یا کونجټکو

$$A = (-2, 0, 3), \quad B = (-6, 4, -1), \quad C = (4, -1, 2)$$

سره، د دريگودي کونجونه څومره لوي دي؟

۱۱ - وښايي چې وکتورونه  $a = (2, 4, -6)$  او  $b = (-1, -2, 3)$  یو بل ته کولایني دي!

۱۲ - د

a)  $a = (-4, -1, 3), \quad b = (5, -2, 7)$

b)  $a = e - e^2 + 2e^3, \quad b = 2e + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره  $a \times b$  وشمیری!

۱۳ - د دریګو لوی هواره څومره لویه ده، چې کونجونه یې په لاندې توګه راکړ شوي وي

$A = (-2, 0, 3), \quad B = (-6, 4, -1), \quad C = (4, -1, 2) \quad ?$

۱۴ - د هغه غبرګ اړخیز هواره څومره لویه ده چې له وکتورونو

$a = (-3, 2, 1), \quad b = (5, -3, 2)$

څخه غزیدلي وي ؟

۱۵ - د وکتورونو

$a = (-2, 1, -3), \quad b = (1, -3, 6), \quad c = (1, 2, -3)$

څخه غزولشو کې غبرګهوارې کوم ډکي یا حجم لري؟

دا نتیجه هندسي روښانه کړی!

۱۶ - څلورګوډي د لاندې ګوډونو (بېټو): څلور اړخنی [د ادا اړام شکل ده]

$P_1(2, 1, 4), \quad P_2(0, -1, 2), \quad P_3(-3, 6, 4), \quad P_4(2, 2, 2)$

سره کوم ډکي یا حجم لري؟

۲۳ - د لاندې هوارو

الف)  $E_1$  چې له ټکي  $x^0 = (0, 1, 2)$  تیریري او د لاندې وکتورونو

لور لري:  $v = (0, 2, 1), \quad w = (2, 3, -5)$

ب)  $E_2$  چې له ټکو  $x^1 = (2, -3, 4)$  او  $x^0 = (0, 1, 2)$

ټکي  $x^2 = (7, -9, -3)$  څخه تیریري.

پ (  $E_3$  چې د نورمال وکتور  $\mathbf{n} = (0, 2, 1)$  سره  
له ټکي  $\mathbf{x}^0 = (0, 1, 2)$  تیریری، مساوات څنگه دي؟

۲۴ - له تمرینو ۲۳ الف او ب څخه د هوارې مساواتو سکالارینه څنگه ده؟

۲۵ - ودی څیرل شي چی ایا ټکي  $\mathbf{x}^1 = (1, 3, -6)$  همداسی  $\mathbf{x}^2 = (5, -5, 4)$  په هواره

a)  $E_1: \mathbf{x} = (0, 2, -1) + \lambda(1, -3, 5) + \mu(2, -2, 0),$

b)  $E_2: 2x_1 + x_2 - x_3 = 1$

پراته دي!

۲۶ - د کرښو

a)  $g_1: \mathbf{x} = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 3, 1),$

b)  $g_2: \mathbf{x} = (-1, 1, 1) + \lambda(-1, -1, 1),$

c)  $g_3: \mathbf{x} = (3, -2, 0) + \lambda(-1, -1, 1)$

پروتخاي د هوارې  $E: 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18$  سره وټاکي!

۲۷ - د هوارو

الف (  $E_1: 2x_1 + x_2 - x_3 = -1$  او  $E_2: -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$

ب (  $E_1 - 5x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 4$  او  $E_2: x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -8$

غوڅکرښه دي راپیدا شي!

## ۱۸ پرلپسی او لری پرلپسی (لنډ: لری) (sequences and series)

یا ترادف او د ترادف سلسله

### ۱.۱۸ پیل

د میلاد څخه دري سوه کاله د مخه یوه یوناني جنگسالار (نوم یی راڅخه هیر شوی، ددی بخښنه غواړم) د خپلو عسکرو څخه وپوښتل چی ، «دا د ده له مخه کیشپ چی سل متره یی ترمنځ واټن دی، کله نیولی شي، که دی له دی کیشپ سل ځله تیز ولاړ شي؟» دې ته طبعاً د لوستونکو فکر شته چی وخت باید په نظر کي نه وي نیولشوی . ځوابولو ته دې گران لوستونکی پخپله فکر وکړي.

مور د دې برخی څیرنی سره لوری شمیرپوهنی ته راځو. داسی هم نه ده، ځکه چی مور د رییل اعدادو یا - گنونو تعریف سره سم چی هلته مو د اینتروالبنډولو باندې خبري کړي او په دې توگه مو عدد تعریف کړی دی، د شمیرپوهني لوره څیرنه وه. همدا ډول د لاینیزو برابرنونو یا - مساواتو شمیرل او داسی نوري پوره دلوري شمیرپوهني بیلگي لرو، خو دلته دا په گوته کوو چی له دې ځایه د شمیرپوهنی هغه ځای پیل کیري چی شمیرپوهنیز فکر مو په پراخه توگه په کار اچولو ته راهڅوي او له دې امله مو د وړاند نیونه(لنډ: نیونه) یا فرضیه اړینه وه چی دا برخه د لوړو شمیرپوهنو پیل په څیر وښایو یا وپولو.

له دي ځايه هغه اعداد چې مور ورسره مخ کيږو، ځمور لپاره د څيرني کيږي چې هغوي يوي پولی (حد Limit) ته هڅه کوي. دا قوانين هم پوره څيرل کيږي چې وروسته بيا په ديفرنځيال شميرنه کې کار اخستلو لپاره ترې تيريدنه ناشونی ده.

په راتلونکي برخه کې لاندې کنځيپتونه (خيال، چې يو څه څنگه وشي) ځمور لپاره د هڅې وړ گرځي

- ۱ - د کليمی ليدوره يا په خيال کې لرودونکي پيلونه
  - ۲ - د ليدوروالي يا فکر کې راوړيدونکي د ټولو په غوره شننه ( تحليل )
  - ۳ - د شميرپوهنيزو پيژندو يا تعريفونو ټيکوالي،
  - ۴ - هغو وړاندنيونو يا فرضيو ته پاملرنه چې د شميرپوهنې قوانينو د باوريتوب ( اعتبار ) لپاره وي،
  - ۵ - د پرلپسی شننه، چې پوله ارزښت يې په پام کې ونه نيول شي،
  - ۶ - د گڼو دندو حل ، په ځانگړي توگه د ديفرنځيالولو او اينتگرالولو
  - ۷ - بالاخره د پرلپسی لری چې په لنډه توگه يې لری بولو څيرنه .
- دلته هم د دې موضوع د پوره څيرلو ستونځي په کتاب کې د ځاي کموالي له امله شته. داچې دا برخه يوه بنسټيزه برخه ده، نو پيل يې د يوې ساده او پوهورې بيلگې له لارې کوو چې ماته خورا په زړه پورې هم ښکاريږي.

۱۸ . ۲ دگڼونو پرلپسی ( لنډ: پرلپسی ) يا د اعدادو ترادف کلمه

پيليلگه :

پاي جمعه يا - زياتون  $s = 3+7+11+\dots+395+399$  څنگه ټاکل کيدی شي؟  
 کيدی شي چې دا د پوره ستونځو سره د يوگونو گڼونو يو د بل سره جمعي يا يو په بل زياتون له لارې وشميرل شي ترڅو چې د دې اعدادو د ترادف (گڼونپرلپسی) قانونيت پيداشوی وي.  
 هر دوه گاونډي توکي يوله بله په ۴ + توپير کيږي يعنی کمون يا کمښت يې ۴ + دی.  
 کيدی شي چې دا کارونه ( استعمال ) په يوه شکلی او سپماور لاره هم مخ ته لاره شی او دا په لاندې ډول :  
 که لومړی ( ۳ ) او اخر ( ۳۹۹ ) ، دويم ( ۷ ) او له اخر دويم ( ۳۹۵ ) دريم ( ۱۱ ) او له اخر دريم ( ۳۹۱ ) د جمعي اجزا يا زياتوني او داسی نور سره زيات شي. دا په



دې ټولو حالتونو کی همغه زیاتون ارزښت یا د جمع لاس ته راوړنه ورکوي یعنی  
۴۰۲

اوس دې د یوگونو د جمعي اعزاوو د جمعي ارزښت (زیاتونو زیاتون ارزښت)  
راپیداشي:

دویم غړی له لومړی غړي داسی لاس ته راځي چی لومړي غړي ته ۴ ور زیاتیږي او  
همداسی ورپسی تر  $n$  غړي پورې چی دلته و  $(n-1)$  ته 4 ور زیاتیږي ، یعنی:  
 $n = (n-1)+4$ :

که له دې لاس ته راوړنی لومړی غړی له اخر غړي کم کړو یعنی  $399 - 3 = 396$  ، نو  
ددې کمون سره د  $(n-1)$  دا 4 ځله ترې لاس ته راځي. داچی  $396:4 = 99$  دي، نو  
باید  $n$  او له دې امله د پرلپسي د غړو شمیر 100 وي. په دې لاس ته راوړنو سره باید  
100 گڼونه سره زیات شي. که چیرې په پورته توگه 2 زیاتووني یا د جمعي اجزاوي  
سره زیات شي، نو باید له دې سره  $100:2 = 50$  یعنی 50 - ځله زیات 402 ترې لاس  
ته راشي» له دې امله د ټولو رامخ ته شوو د پرلپسی غړو زیاتون دا دی:  
 $20100 = 402 \cdot 50$

دا لوستونکو ته په روځنی ژوند کی هم څرگنده ده لکه د یو ټولگي د زدکونکو په گڼه  
(نمره) ترتیب، یا په یوه سیالی یا مسابقه کی د بریالیو ترتیب او داسی نور موجود دي،  
مور کوبښن کوو چی دا مسئلې د شمیرپوهنی له لارې وڅیړو او وگورو چی په  
شمیرپوهنه کی ترادف یا پرلپسی څه شی دي.  
یادونه: مور له دې وروسته د رادف په ځا یواځي ترادف لیکو.

مور طبعي اعداد یا - گڼونه ۱، ۲، ۳، ۴، ..... لرو ( دلته ټکي ټکي دا مانا لري چی دا  
پرلپسی ناپای اوږدیږي )

که چیرې دا هر پیدایښتي یا طبعي گڼ په یواځنی یو رییل گڼ ترتیب شي یا یواځنی  
ترتیب رییل گڼ وښاي یعنی  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ، نو دلته د طبعي اعدادو او حقيقي  
اعدادو تر منځ یو ترتیب منځ ته راځي. داچی دلته هر طبعي عدد  $n$  په یواځنی حقيقي  
عدد  $a_n$  ترتیب شوی نو دا ترتیب یو فنکشن دی چی د فنکشن پیژندېږی (تعریفیږی  
یا تعریفست) د طبعي اعدادو ډیری  $N$  ده او ارزښتدیږی یی د حقيقي اعدادو ډیری  $R$  ده.

دلته د پرلپسی هر توکی  $an$  د ځای گڼي (نمرې)  $n$  په بنسټ یواځنی ټاکلی، چی  $n$  ته په  
مسلكي نړیواله پیژندل شوی ژبه ایندکس Index (زیات یې Indices)، چی مانا یې :  
پیژند نخبه ده ، وایي. (Index پیژند دخبه)

پيژند تعريف: ۱۸. ۱ الف :

د پرلپسی غړو  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$  د يو ترتيب قانونيت يا قانونمندی  $a_n = a(n)$  لاس ته راځي، که د  $n$  لپاره پرلپسی طبعي اعداد  $1, 2, 3, \dots, k$  ځای په ځای شي.

پرلپسی کې  $a_1$  د پرلپسی پيل غړی بلل کيږي. که د پرلپسی اخر غړي پای وي نو پرلپسی پای او که نه نو پرلپسی ناپای ده.

بيلگی

( دا ورپسې مخ کې بيلگی نورې هم روښانه دي )

$$I - ; \dots a_n = n^2, a_1 = 1; a_2 = 4; \dots; a_{10} = 100, \dots; a_k = k^2; \dots$$

{ چيرته چې  $a_n$  يو څلوری (مربع) گڼ دی } |  $a_n \in \mathbb{N}; W = \{ \dots \}$

$$2 - \{a_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}; a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2}; \dots; a_{10} = \frac{1}{10}; \dots; \{a_k\} = \left\{ \frac{1}{k} \right\}$$

$$3 - \{a_n\} = \{(-1)^n\} \Rightarrow a_n = (-1)^n; a_1 = -1; a_2 = 1;$$

$$a_3 = -1, \dots, a_{17} = -1; \dots, a_{22} = 1$$

د دې پرلپسی غړي بدلی نخښی لري، له دې امله پرلپسی بدليدونکی Alternating بلل کيږي

$$4 - \{a_n\} = \left\{ 3 + \frac{1}{n} \right\}; 4, 3 + \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{3}, 3 + \frac{1}{4}, \dots, a_k = 3 + \frac{1}{k}, \dots, a_n = 3 + \frac{1}{n}$$

د ترتيب - يا نظمقاعدي څخه مختلفي گڼونپرلپسی يا د اعدادو پرلپسی منځ ته راځي • دا مو په لنډه توگه پرلپسی ونومولی. چی پيژند یی يو ځل بيا دلته په بل ډول رالندوو.

پيژند ( تعريف ) ۱۸ . ۱ :

که هر یو طبیعی گن.....  $n=1,2,3,4,5$  په یوه یو یواځني ریيل گن باندي ترتیب یا تنظیم شي، نو په ترتیب گڼونه  $a_1, a_2, a_3, \dots$  یوه د گڼونو پرلپسی جوړوي، چی لنډ پرلپسی یی نوموو او ددی لپاره سری داسی لیکي:  $\{a_n\}$ .  
 دې  $a_n$  ته د پرلپسی  $\{a_n\}$  -م غری ویل کیږي.

سری کړی شي چی د ریيلگڼونو یا اعدادو د نمره کولو یا گڼي لپاره له 0 یا 2 او حتی له 1 - یا 2 - څخه پیل وکړي، یعنی:  
 $a_0, a_1, a_2, \dots$  یا  $a_2, a_3, a_4, \dots$  او یا  $a-1, a_0, a_1, a_2, \dots$

گورو چی د پرلپسی لیکلو لپاره ځانگړي متودونه په کار اچول کیږي، کله دا بسیا کوي چی د پرلپسی تعریف لپاره د پرلپسی لومړي څو غړي ولیکل شي

بیلگه ۱. ۱۸: د بیلگي په توگه لیکو:

$$\{a_n\} = 1, 2, 3, \dots$$

او د طبعي اعدادو پرلپسی موخه یا مطلب دی، د جوړولو قانون  $a_n = n$  سره، نو

$$\{a_n\} = \{n\}$$

$$\{a_n\}: 1, 4, 9, 16, 25, \dots \Rightarrow \{a_n\} = \{n^2\}$$

دا په دې معنا چی ( $\Rightarrow$ )

$$\{a_n\}: 2, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5, \dots \Rightarrow$$

$$\{a_n\} = \{(n+1)/n\}$$

$$\{a_n\}: 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, \dots \Rightarrow$$

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right\}$$

$$\{a_n\}: 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots \Rightarrow$$

$$\{a_n\} = \{(n+1)/n\}$$

پیاپیله:

د شمیر پوهنی یوه بنوونکی لپاره په بنوونکي کی یو ځای تش یا خالي دی. ددې ځای لپاره دوه کسانو الف او ب ځانونه کانديد کړی. دوي ته لاندې پوښتنه ورکړ شوي چی اوبی یا حل یی کړي:

پنځه گڼونه ۱،۳،۷،۱۵،۳۱ ورکړ شوي. درې نور گڼونه باید داسی ور واچوی چی دا گڼونپرلپسی موخه وره یا هدفمنده مخ ته ولاړه شي، یا مخودیزه شي.

دواړه کانديدان دا دنده یا پوښتنه په بیلو ډولونو اوبی کوي \*

کانديد الف داسی فکر کوي ..... کانديد ب داسی فکر کوي

لومړی گڼ ۱ ..... لومړی گڼ له ۲ څخه په ۱ کوچنی دی: 1 - 2

دویم گڼ لاس ته راځي، که د لومړي ..... دوم گڼ له ۴ څخه ۱ کوچنی دی :

عدد دوه ځله ته ۱ ورزیات کړو : .....  $2^2 - 1 = 4 - 1$

$$2.1 + 1 = 3$$

دریم گڼ لاس ته راځي که د دوم ..... دریم گڼ له ۸ په ۱ کوچنی دی:

گڼ دوه ځله ته ۱ ور زیات شي .....  $2^3 - 1 = 8 - 1$

$$2.3 + 1 = 7$$

۶- ام گڼ لاس ته راځي که د پنځم ..... ۶- ام گڼ له ۶۴ څخه په ۱ کوچنی دی :

گڼ دوه برابره ته ۱ ور زیات کړو : .....  $2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$

$$2.31 + 1 = 63$$

اوم گڼ دی ..... اوم گڼ دی:  $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$

$$2.63 + 1 = 127$$

گڼ ۸ دی ..... گڼ ۸ دی

.....  $2.127 - 1 = 255$   $2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$

د شمیر پوهنی له مخی دا پنځه له مخه ورکړ شوي گڼونه د یوي پرلپسی لومړني پنځه توکي دي. دا پنځه توکي له  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,$  سره بنایو.

اوس زموږ په دې بیلگه کی داسی لرو:  $a_1=1, a_2=3, a_3=7, a_4=15, a_5=31$  که وغوښتل شي چی د دې پرلپسی نور توکي دې هم ورکړ شي، نو دا به تصادفي توکي نه وي، بلکه یوه جوړه شوي قاعده یا لاس ته راوړي قاعده به ورکړي، لکه څنگه چی یو په بل پسې راتلونکی توکی د پخوانی او یا له وروستني توکي څخه د مخه توکی په لاس راځي. ددې تثبیت یا ازموینی وظیفی شمیر پوهنیزه فرمولبندي په لاندې ډول ده:

د گڼو پرلپسی یا د اعدادو ترادف دې د  $a_1=1, a_2=3, a_3=7, a_4=15, a_5=31$  سره ورکړ شوي وي. یو جوړښت قانون یا قانونمندی او توکي  $a_6, a_7, a_8$  وټاکي. د دواړو کاندیدانو د اوبیوني -یا حللارې کیدی شي چی په لاندې توگه انځور شي:

ب	الف
$a_1 = 2 - 1$	$a_1 = 1$
$a_2 = 4 - 1 = 2^{2-1} = 3$	$= 2 \cdot 1 + 1 = 3a_2$
$a_3 = 8 - 1 = 2^3 - 1 = 7$	$a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
..	.
$a_6 = 2^6 - 1 = 63$	.
	$a_6 = 2 \cdot 31 + 1 = 63$

په ټولیزه (عمومی) توگه لاس ته راځي

$(k \in N)$  م- $k$  غړی  $(k \in N \wedge k \geq 2)$  م- $k$  غړی

په کوم کی چی ..... په کوم کی چی  
د  $(k-1)$ -م غړي دوه برابره ته 1 زیات شي ..... له  $a_k = 2^k$  کم شي

$$a_k = 2^k - 1 \qquad a_k = 2 \cdot a_{k-1} + 1$$

دواړو کاندیدانو پر ابل سم حل یا اوبی کړ. کله چی د پرلپسی ۲۰ - م غړي پوښتنه وشوه ، نو کاندید ب په گټه کی دی . ولی؟

دواړه کاندیدان کولی شي چی د پرلپسی هر په خوښه توکی پیدا کړي، له دې امله دوي دا پرلپسی یواځنی وټاکله. کاندید الف دا پرلپسی داسی حل کوي چی تل باید له مخه غړي

څخه ورپسی توکی لاس ته راوړي، یعنی  $a_k = 2 \cdot a_{k-1} + 1$

دا باید هر د پرلپسی د مخه توکی وپیژني. دې ډول شمیرلو ته د پرلپسی رکورزیو (recursive لاتین، له recure په خټ خُغاسته) انځورونه وایي. مگر ب کاندید دا خورا ساده او زر شمیرلی شي، دی چې کوم توکی غواړي پیدا کړي، هغه سملاسي لاس ته راوړی شي يعني  $a_k = 2^k - 1$

دې ډول بنوونلار ته ایکسپلیخیت explizite (لاتین خورول، روښانول) یعنی روښانه انځورونه وایي.

د لوستونکو لپاره دې دا لاندې د کور کار وي:

د پرلپسی ۲۰ - ۱م غړی وشمیری، رکورسیو او ایکسپلیخیت. یانی د الف او ب په څیر.

بیلگه:

یوه پرلپسی د  $a_1 = 5$  او  $a_{k+1} = a_k^2 + 1$  سره ورکړ شوي. ددې پرلپسی لومړنی پنځه توکی وشمیری.

حل:

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = a_1^2 + 1 = 25 + 1 = 26$$

$$a_3 = a_2^2 + 1 = 676 + 1 = 677$$

$$a_4 = a_3^2 + 1 = 458329 + 1 = 458330$$

بیلگه :

یوه پرلپسی د  $a_1 = 1$  او  $a_{k+2} = a_{k+1} \cdot a_k$  سره ورکړ شوي ده.

ددې پرلپسی لومړني پنځه غړي وشمیری .

اوبونه:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2$$

$$a_3 = a_2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 \cdot a_2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$a_5 = a_4 \cdot a_3 = 4 \cdot 2 = 8$$

پوښتنی:

د هرې لاندنۍ پرلپسی لمړني ۱۰ غړي وشمیری پرلپسی رکورزیو ورکړ شوي

a)  $a_1 = 2, a_{k+1} = \frac{1}{a_k}$

b)  $a_1 = 0, a_{k+1} = a_k^2 + 1$

c)  $a_1 = 2, a_{k+1} = \frac{1}{a_k} + 1$

d)  $a_1 = 1, a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k + 1$

e)  $a_1 = 2, a_{k+1} = \frac{1}{2} \left( a_k + \frac{2}{a_k} \right)$

f)  $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$

g)  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{k+2} = a_{k+1}^2 \cdot a_k$

h)  $a_1 = 1, a_2 = -2, a_{k+2} = a_k : a_{k+1}$

بیلگه:

یوه پرلپسی د  $ak = k^2/(k+1)$  سره ورکړ شوي ده. د دې پرلپسی لومړني پنځه توکي

و شمیری

اوبی:

$$a_1 = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$$

$$a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

بیلگه:

پرلپسی د  $a_k = \frac{(-1)^k + 1}{k}$  سره ورکړ شوي ده. د دې پرلپسی ۳-م، ۸-م، ۱۵-م او

۲۰-م توکي و شمیری

اوبی یا حل:

$$a_3 = \frac{(-1)^3 + 1}{3} = 0$$

$$a_8 = \frac{(-1)^8 + 1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$a_{15} = \frac{(-1)^{15} + 1}{15} = 0$$

$$a_{20} = \frac{(-1)^{20} + 1}{20} = \frac{1}{10}$$

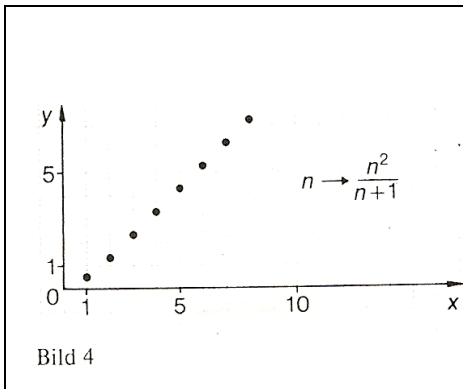
پوښتنی:

د لاندې پرلپسیو لومړني پنځه توکي، ۲۰-م او ۴۵-م توکي وشمیری

$$a)a_k = 2k + 1; b)a_k = k^2 + k; c)a_k = \frac{k^2 + 1}{k + 1};$$

$$d)a_k = \frac{k^2 - 1}{k + 1}; e)a_k = \left(-\frac{1}{10}\right)^{k-1}; f)a_k = 1 - (1/2)^k;$$

$$g)a_k = 1 + (-1/2)^k; h)a_k = 1.2.3 \dots k$$



په کارتيزي کواورديناتسيستم کې د يوې پرلپسې د گراف انځورونه لاس ته راوړو، که هر توکی د  $x$  -کواوردينات باندې د پرلپسې هر توکی د توکي نمرې  $k$  سره کيښول شي او د  $y$  -کواوردينات باندې هر غړی د غړي د نمرې  $ak$  سره و کښل شي

پوښتنی:

د لاندې پرلپسیو گراف په کارتيزي کواورديناتسيستم کې وکارۍ.

له دې ځايه وروسته بيا پيل دی

$$a) a_k = \frac{5k}{k+2}$$

$$b) a_k = 3k + 2$$

$$c) a_k = (-1)^{k-1} \cdot \frac{12}{k}$$

$$d) a_k = \sin \frac{k\pi}{2}$$

$$e) a_1 = \frac{1}{2}, a_{k+1} = 1 - 2a_k$$

$$f) a_1 = 1, a_2 = 1, a_{k+2} = a_{k+1} \cdot a_k$$

## ۱۸ . ۲ . ۱ يوغريزي يا مونوتونی پرلپسی

بيلگه: د غړو  $ak = 2k - 1$ 

( ما کله کله توکی او کله کله غړی نومونه کارولی، په په پرلپسې کې يو غړی د پرلپسې غړی، دی او د يوې ډيری يو د هغې ډيری توکی دی، دې ته به د گرابو لوستونکو پام وي )

سره پرلپسې هر توکی د مخته تيرشوي توکي لوي دی . دا باور لري:



د ټولو  $k \in N$  لپاره  $a_{k+1} > a_k$

حل یا ثبوت :

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2^{k+1} - 1 \\ &= 2 \cdot 2^k - 1 \\ &= 2^k + 2^k - 1 \\ &= 2^k + (2^k - 1) \\ &= 2^k + a_k \\ &> a_k \end{aligned}$$

تعریف ۱۸ . ۲ الف :

یوه پرلپسی (strictly monotonic increasing) په کلکه – یا کره مونوتون جگیدونکی ده یا کره مونوتون جگيري، که دا لاندې باور ولري :

د ټولو  $k \in N$  لپاره  $a_{k+1} > a_k$  که د یوې پرلپسی لپاره باوري وي

د ټولو  $k \in N^*$  لپاره  $a_{k+1} \geq a_k$

نو دلته د مونوتون جگیدونکی monotonic increasing پرلپسی څخه غږیرو

بیلگه :

د پرلپسی د توکو

$$a_k = 10 - 4k$$

سره هر غږی د مخ ته تیر غږی څخه کوچنی دی.

لرو:

د ټولو  $k \in N^*$  لپاره  $a_{k+1} < a_k$

اوبونه::

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 10 - 4(k+1) \\ &= 10 - 4k - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (10-4k)-4 \\ &= ak - 4 \\ &< ak \end{aligned}$$

پیژند (تعریف) ۱۸ . ۳ :

یوه پرلپسی په کلکه مونوټونیتېټې ډونکی یا - لویډونکی strictlymonotonic decreasing ده، که لاندې باور ولري:

د ټولو  $k \in N$  لپاره  $ak < ak+1$

که په یوه پرلپسی کې باور ولري (په پورته کې او همداسې که ورپسې داسې څه راشي کا د ان توکی دی)

د ټولو  $k \in N$  لپاره  $a1 \leq ak+1$

نو دلته د یو غبریز یا موتون لویډونکی- یا مونوټون ټیټې ډونکی monotonicdecreasing پرلپسی څخه خبرې دي.

پوښتنه:

د یوې پرلپسې دوه گاونډیو غرو توپیر یا کمون یا کمښت  $ak+1 - ak$ ، کوم شرطونه باید پوره کړي، چې دا لاندې صدق ولري

( الف ) کلکه مونوټون جگیدونکی وي

( ب ) کلکه مونوټون ټیټې ډونکي یا - لویډونکي وي

( پ ) مونوټون جگيري

( ت ) مونوټون لویري؟

ددي دندې د اوبیوني په مرسته کیدی شي، چې د توکي  $aK=(k+1)/(k+2)$  سره د پرلپسی مونوټونی په لاندې ډول وښوول شي:

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= \frac{(k+1)+1}{(k+1)+2} - \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+2}{k+3} - \frac{k+1}{k+2} \\ &= \frac{(k+2)^2 - (k+1)(k+3)}{(k+3)(k+2)} = \frac{(k^2+4k+4) - (k^2+4k+3)}{(k+3)(k+2)} \\ &= \frac{1}{(k+3)(k+2)} > 0 \quad \forall k \in N^* \end{aligned}$$

له  $ak+1-ak > 0$  همداسې  $(ak+1) > ak$  ( $\leq$ )

د ټولو  $k \in N^*$  لپاره لاس ته راځي، چې ورکړ شوي پرلپسي په کلکه مونوتون جگيري.

### ۱۸ . ۲ . ۲ اريتميتيکي پرلپسي

د پرلپسي ..... 14;11;8;5;2 هر غړی د خپل مخکښ غړي څخه په 3 لوي دي.

ددې پرلپسي لپاره ورکړی

الف) يوه رکورزيډ انځورونه

ب) ( يوه اکسپليډيټ انځورونه.

ځنی پرلپسي د ډيري پاملرني ارزښت لري، په دې ډول چې د دوه په خوښه گاونډيو غړو  $a_k$  او  $a_{k+1}$  ترمنځ يو ثابت ( تل همغه) بلواک يا تابع موجود دی غواړو چې دداسی دوه مهمو پرلپسي ټيپونه ( ډولونه ، رقمونه ) په ځانگړي توگه څرگند راوباسو يا بهتره تر څيرنی لاندې ونيسو:

پيژند ( تعريف ) ۱۸ . ۴ :

په يوه اريتميتيکي- يا گڼونشميرنيزي پرلپسي يالند: شميرنيزي پرلپسي کي د دري توکو منځنی توکی د دواړو دبانډنيو توکو اريتميتيکي منځ دی:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

په يوې ځمکچيزي لپسي (ټاکونی يا پيژند وروسته راځي) کي د دري يو په بل پسي توکو منځ غړی د دوو نورو دبانډنيو غړو ځمکچيز يا هندسي منځ دی:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

لومړی اريتميتيکي يا شميرنيزه پرلپسي څيرو:

غوښتنه(ثبوت): يوه پرلپسي ورکړی، چې لومړی توکی يي ۵ او هر ورپسي راتلونکی

توکی يي له مخ غړي څخه په ۱۲ کوچنی وي

الف) ددې پرلپسي لومړي پنځه توکي وشميری

ب) د پرلپسي رکورزيډ انځورونه ورکړی

پ) د پرلپسي اکسپليډيټ انځورونه وکړی

ت) د پرلپسي ۲۰ م- ( ۲۵ ، ۵۰ ، ۳۵ ، ۱۰۰ ) توکي وشميری.

پیژند یا تعریف ۱۸ . ۵ :

یوه پرلپسی  $a_n$  اریتمیتیکی پرلپسی بلل کیږي، که د دوه پرلپسی توکو کمون یا کمینت

$$a_{n+1} - a_n = d \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + d \quad \text{تل ثابت یا همغه وي:}$$

بیلگی:

۱ - لاندنی پرلپسی  $2;5,8;11;14;...;29;32;35;...$

یوه اریتمیتیکی Arithmetic پرلپسی ده چی لومری توکی یی  $a_1 = 2$  او ثابت یا همغه کمون یا کمینت یا فرق یی  $d = 3$  دی.

۲ - دا پرلپسی  $10; -1, -12, -23, -34;...$  اریتمیتیکی پرله پسی ده چی لومری توکی یی  $a_1 = 10$  دی او  $d = -11$  ده

که په هر پل (قدم) کی فنکشن  $a_n; n \in \mathbb{N}$  په همگی زیاته وونی  $d$  زیاتیږي یا همداسی کمیږي  $d=0$  (لپاره ثابت دی) نو باید اریتمیتیکی پرلپسی یو لاینیز فنکشن (لاینیز بلواک) وي  $(D = \mathbb{N})$  د  $d$  په جگوالی . دا د لاندی اند لاس ته راوړنه یا فکر لاس ته اوړنه ده:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

.

.

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1) \cdot d = a_1 + d \cdot n - d$$

$$f(n) = d \cdot n + (a_1 - d)$$

د لاینیز فنکشن جگوالی  $d$  دی او ثابت یا همغه توکی  $a_1 - d$  نومیری (یادیږي یا بلل کیږي)

دلته  $a_n = 2n + 1$  د لاینیز فنکشن په څیر دی، د  $d = 2$  په جگیدو او  $y$  - محور غوڅی

$$a_1 - d = 1$$

له دې سره د پرلپسی د هر توکي د شمیرلو امکانات ورکړ شوي دي:

تعريف ۱۸ . ۶ :

په اريتميتيکي- يا شميريزه پرلپسی کې  $n$ - م توکی د قاعدې له مخي داسي ورکړ شوی:

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1) \cdot d$$

بيلگی:

۱ - اريتميتيکي پرلپسی ... 53 , 36 , 19 , 2 , ورکړ شوي.

غوبنتونکي  $a_{20}$  ده.

داسی لرو:  $a_1=2, d=17, n=20$

نو  $a_{20}=2+19 \cdot 17=325 \Leftrightarrow a_n=a_1+(n-1) \cdot d$

۲ - ورکړ شوي دي وي

$a_{10} = -44,5$  او  $a_1 = -0,5$

غوبنتونکي  $d$  ده:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Leftrightarrow (a_n - a_1) / (n-1) = d \Rightarrow$$

$$d = (-44,5 + 0,5) / (10-1) = -44 / 9$$

۱۸ . ۲ . ۳ حکمکچيزي - يا هندسي پرلپسی

اوس غواړو هغه د مخه ويل شوی، د يوه ثابت ( نل ) هماغه ارزښتيز ( فنکشن سره، د پرلپسی ۲ - م تپ د دوه غرو ترمنځ تر څيرنی ونيسو

پيليلگه :

يو هوبنيار زدکړی غواړي په رسختی کې يوه مياشت کار وکړي ( ۲۰ د کار ورځی ).  
دی کارورکونکی ته وايي، چی دی ارزانه کار ورته کوي او لاندي وړانديز ورته مخ ته کوی « د لمړی ورځي معاش دې 0,05 ډالره وي د دويمی دې دوه ځله د دريمی ورځی د دويمی ورځي دوه ځله څلورمه ورځ د دريمی ورځی دوه ځله او داسي نور، يعنی لمړی ورځ که 0,05 وي نو دومه ورځ 0,10، دريمه ورځ 0,20 او څلورمه ورځ 0,40 ډالره معاش کيړی او داسی نور

پوښتنه : د

الف) د ۱ می یا لومړی ورځی

ب) د ۱۵ - می ورځی

پ) د ۲۰ - می ورځی

معاش څومره کيږي. اندازه گن(عدد) که په ډالرو وشميرل شي، لاندې پرلپسی جوړوي:

0,05;0,1; 0,2; 0,4;0,8; 1,6; 3,2,.....

پوښتنه :

ددې پرلپسی لپاره

الف) رکورزيف انځورونه

ب) اکسپليښت انځورونه ورکړی

پيژند ۱۸ . ۷:

( ځمککچيزي يا هندسی پرلپسی ) یوه پرلپسی  $a_n$  هندسي بلل کيږي، که د دوه یو بل پسی غړو ویش ثابت(( تل) همغه)  $q$  وي:

یا په بل ډول یا په بل عبارت : یوه پرلپسی چی لومړی غړی  $a_1 \neq 0$  وي اود همغه گن یعنی ثابت گن  $q$  سره د تل ځلونی څخه لاس ته راشي، ځمککچيزه يا هندسي پرلپسی بلل کيږي.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q; a_{n+1} = a_n \cdot q \quad n \in N; q \in \{R\} \setminus \{0\}$$

+d	+d	+d	+d					یو ځل بیا یوځای
		a1	a2	a3	a4	a5...		اریتمیټیکي پرلپسی
		a1	a2	a3	a4	a5	.....	هندسي پرله پسی.....
				.q	.q	.q	.q	

د هندسي پرلپسی دوهم غری د لومړي غري سره د  $q$  حل يا ضرب څخه لاس ته راځي، او دا د ټولو وروسته راتلونکو غرو لپاره باوري دي. له دې امله هندسي پرلپسي  $n \rightarrow$  an اکسپونینشل فنکشن يا د جگړې بلواک بنایي چی د بنسټ په توگه لري:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$$

.

.

.

$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$$

---


$$f(n) = a_1 \cdot q^{n-1}$$

جمله ۱۸ :

په هندسي پرلپسی کی  $n$ -م توکی د لاندي قاعدې له مخي شميرل کيږي

$$a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$$

بیلگی:

$$1 - a_1=3, q=2, n=15 \Rightarrow a_{15} = 3 \cdot 2^{14} = 29152$$

$$2 - a_1=19, q=1,01, n=100 ; \\ = 50,8826363919,1,01^{99} a_{100} =$$

جمله :

یوه ځمکچیزه پرلپسی د زیاتیز یا مثبت پیلټوکی سره د  $q > 1$  لپاره کله مونتون جگړونکی ده د  $0 < q < 1$  لپاره کله مونتون لویونکی ده

غوبنتنه :

د لاندې پرلپسیو ۱۰ لومړني غړي وشمیری

a)  $a_k = \frac{k-2}{k+2}$

b)  $a_k = \sin \frac{k \cdot \pi}{6}$

c)  $a_k = \frac{1}{2} [1 + (-1)^k]$

d)  $a_k = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^k$

e)  $a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$

f)  $a_k = \cos \frac{k \cdot \pi}{2}$

g)  $a_k = k^k$

h)  $a_k = (-1)^{k-1} \cdot k^2$

i)  $a_1 = 3; a_{k+1} = \frac{1}{2} \left(a_k + \frac{4}{a_k}\right)$

k)  $a_1 = 1; a_2 = 2; a_{k+2} = \sqrt{a_{k+1} \cdot a_k}$

l)  $a_1 = 3; a_{2n} = a_{2n-1} - 3; a_{2n+1} = a_{2n} + 4 (n \in \mathbb{N}^*)$

m)  $a_k = 2k - 1 + \frac{1 + (-1)^k}{2} + (-1)^{\frac{(k+3)(k+4)}{2}}$

n)  $a_k = 3 - \frac{1}{2^{k-2}}$

غوبنتنه :

پرلپسی د مونوتون خویونو له پلوه وڅیری

a)  $a_k = \frac{k-2}{k}$

b)  $a_k = \frac{k+4}{k}$

c)  $a_k = \frac{3k}{2k-1}$

d)  $a_k = \frac{1-k^2}{k}$

e)  $a_k = 2^k$

f)  $a_k = 1 - \sin \frac{\pi}{k+1}$

## ۱۸. ۲ الف لری

د هغه کارپلټونکی زدکړي وړاندیز ته بیرته پام راگرځوو، چې د لمری ورځي 0,05 اجوره د دویمي ورځي 0,1 د دریمي ورځي 0,2، د څلورمې ورځي اجوره یی 0,4 ډالره وه او داسی نور.

په هغه وخت کی داسی پوښتنه رامنځ ته شوي:

د  $k$  - می ورځي لپاره زدکړی څومره اجوره اخلی؟

دا مویوي ځمککچیزې لری ته لارښودوي د  $a_k = 0,05 \cdot 2^{k-1}$  سره.

د هغي  $k$  - م توکی د  $k$  - می ورځي اندازه گڼ یا د اجوري معیار دی.

دا په دې مانا چې زدکړی د  $k$  - می ورځي لپاره  $0,05 \cdot 2^{k-1}$  ډالره اجوره یا معاش اخلی.



که غواړو چی وینایو چی زدکړی په لومړیو پنځو ورځو کی څومره اجوره اخلی ، نو باید د لومړیو ورځو اجورې ځکچیزه پرلپسی، د  $a_k = 0,05 \cdot 2^{k-1}$  سره، یو بل سره زیاته کړو

$$0,05+0,1+0,2+0,4+0,8 = 1,55$$

دا زدکړی د لومړیو پنځو ورځولپاره 1,55 ډالره معاش اخلي که د لومړیو n ورځو اجوره په  $S_n$  سره وینایو ، نو یوه لری د لاندې غړو سره لاس ته راځي :

$$s_1 = 0,05 \cdot 2^0 = 0,05$$

$$s_2 = s_1 + 0,05 \cdot 2 = 0,05+0,1 = 0,15$$

$$s_3 = s_2 + 0,05 \cdot 2^2 = 0,15+0,20 = 0,35$$

$$s_4 = s_3 + 0,05 \cdot 2^3 = 0,35+0,40 = 0,75$$

$$s_5 = s_4 + 0,05 \cdot 2^4 = 0,75 + 0,80 = 1,55$$

$$s_6 = s_5 + 0,05 \cdot 2^5 = 1,55+0,160 = 3,15$$

غوښتنه:

پرلپسی ته د ۱۵ - م توکي پورې پر مخ وده ورکړی (مخ وديزه کړی) ، که د ورکړ شوی پرلپسی ، چی توکي یی  $a_1, a_2, a_3, \dots$  دي، دتوکو یو په بل پسې جمعه یا زیاتون جوړ شي

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 & & = a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 & & = s_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 & & = s_2 + a_3 \\ & \cdot & & \\ s_{20} &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{19}) + a_{20} & & = s_{19} + a_{20} \\ & \cdot & & \\ s_{n-1} &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) + a_{n-1} & & = s_{n-2} + a_{n-1} \\ s_n &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + a_n & & = s_{n-1} + a_n \\ s_{n+1} &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + a_{n+1} & & = s_n + a_{n+1} \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \end{aligned}$$

نو یوه پرلپسی...  $S_1, S_2, S_3, \dots$  لاس ته راځي.

پيژند يا تعريف ۱۸ . ۸:

د یوې پرلپسی  $a_1; a_2; a_3; \dots$  څخه جوړه شوې پرلپسی  $S_1; S_2; S_3; \dots$

د رکورزيف انځورونی  $s_1 = a_1; s_n = s_{n-1} + a_n$

سره پرلپسی لری (د پرلپسیو لری) یا لنډ: لری بلل کيږي.

بیلگه:

د  $ak = 2k$  سره جوړې شوې پرلپسی څخه جوړه شوې لری په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 2^1 = 2$$

$$s_2 = s_1 + 2^2 = 2^1 + 2^2 = 6$$

$$s_3 = s_2 + 2^3 = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$$

$$s_4 = s_3 + 2^4 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

⋮

$$s_n = s_{n-1} + a_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$$

⋮

⋮

⋮

⋮

بیلگه:

د  $ak = (2+3k)/(k+1)$  سره جوړه پرلپسی څخه جوړه شوې لری، په لاندې ډول ده:

$$s_1 = \frac{5}{2}$$

$$s_2 = s_1 + \frac{8}{3} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} = \frac{31}{6}$$

$$s_3 = s_2 + \frac{11}{4} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} = \frac{95}{12}$$

$$s_4 = s_3 + \frac{14}{5} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} = \frac{643}{60}$$

$$s_n = s_{n-1} + \frac{2+3n}{n+1} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} + \dots + \frac{2+3n}{n+1}$$

پوښتنې:

د لاندې پرلپسیو څخه جوړه شوي لری توکي  $S_n$  ورکړی

$$\begin{array}{ll} \text{a) } a_k = 2 \cdot 5^{k-1} & \text{b) } a_k = -3 \cdot 2^{k-1} \\ \text{c) } a_k = 5 \cdot 0.2^{k-1} & \text{d) } a_k = 4 \cdot (-3)^{k-1} \end{array}$$

پېژند ۱۸. ۹:

د اریتمیتیکی پرلپسی توکو یو له بل سره زیاتون یا جمعه په پام کی نیسو، دا څه چی لاس ته راځي، هغه اریتمیتیکی لری پرلپسی (لنډ: لری) بولو:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

موږ دلته بیا پیل بیلگه را اخلو، چی د اریتمیتیکی لری (داد پرلپسی زیاتون پرلپسی ده چی د لری پرلپسی یی غواړو ونومو او په لنډه توگه یی له دي وروسته «لری» و بولو) زیاتون او په تولیزه توگه لری زیاتون وشمیرو. ټاکونکی زیاتون له مختلفو لورو موږ دوه واره لیکو، چی دواړه هغی پسی زیات کړی شو یا یی زیاتون و نیولی شو:

$$s_{100} = 3+7+11+\dots$$

$$+395 + 399$$

$$s_{100} = 399+ 395+\dots$$

$$+ 11 + 7 + 3$$

$$s_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

$$+ a_{n-1} + a_n$$

$$s_{100} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \dots$$

$$+ a_2 + a_1$$

$$2s_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\dots+(a_n+a_1)$$

$$2s_n = (a_1+a_n) + (a_1+d+a_{n-1}) + \dots$$

$$+ (a_1+(n-1)d+a_1)$$

$$\begin{aligned}
 2s_{100} &= 402 + 402 + 402 + \dots + 402 + 402 & 2s_n &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) \\
 2s_{100} &= 100 \cdot 402 & 2s_n &= n \cdot (a_1 + a_n) \\
 s_{100} &= 50 \cdot 402 & s_n &= n(a_1 + a_n) / 2 \\
 s_{100} &= 20100 & &
 \end{aligned}$$

د پورته شمیرني سره سم د اریتمیتیکی لری زیاتون دی:  $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

که دلته د  $an = a_1 + (n-1)d$  ځای په ځای شي او د اسانتیا لپاره کموتاتیو قانون وکارل شي، دا په دې مانا چې  $n/2$  ښي خوا ته راوړو، نو لاس ته راوړو:

$$s_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2} = n \cdot a_1 + \frac{(n-1)dn}{2}$$

بیلگي:

$$a_a = 3; d = 7; n = 50 \Rightarrow s_{50} = (2 \cdot 3 + 49 \cdot 7) \cdot 50 / 2 = 8725$$

کنترول:  $a_{50} = 3 + 49 \cdot 7 = 346$  او له دې

$$s_{50} = \frac{(3 + 346) \cdot 50}{2} = 8725$$

دویم- یو میراث د شپږو ورونو ترمنځ داسی ویشل کیږي چی هر یو مشر د ورپسی مشر ورور څخه 470 افغانی زیاتي اخلي، د ځوان ورور 17000 افغانی رسیږي.

معلوم کری چی میراث څومره دی او هر یو ورور څومره میراث اخلي؟

$$a_1 = 17000; d = 4700, s_6 = 6/2(2 \cdot 17000 + 5 \cdot 4700) = 172500$$

افغانی

ورونه په لاندې ډول پیسی اخلي

17000 افغانی، 21400 افغانی، 26400 افغانی،

31100 افغانی، 35800 افغانی او 40500 افغانی.

لکه څنگه چی د اریتمیتیکی لری زیاتون پیداکیږي، همداسی د هندسي لری زیاتون هم پیداکیدی شي. عمومي فرمول به په پورتنی ۱ - بیلگه کی ځانگری یا ځانیزشي

(مشخص). د زیاتون فرمول لاس ته راوړلو لپاره د لری  $s_n$  څخه په  $q$  پراخه شوي لری کمو. په دې ډول لری لرو توکو ته لریږي:

۱۸. ۲ الف ۱. ځمکچیزې یا هندسي لریپرلپسي (لنډ: لری):

د ځمکچیزې پرلپسي څخه جوړه شوي لری ځمکچیزه لری بلل کيږي. د هندسي پرلپسي د  $a = 3.2^{k-1}$  څخه جوړه هندسي لری په لاندي ډول ده:

$$s_1 = 3.2^0 = 3$$

$$s_2 = s_1 + a_2 = 3.2^0 + 3.2^1 = 3+6 = 9$$

$$s_3 = s_2 + a_3 = 3.2^0 + 3.2^1 + 3.2^2 = 3+6+12=21$$

.

.

$$s_n = s_{n-1} + a_n = 3.2^0 + 3.2 + 3.2^2 + 3.2^3 + \dots + 3.2^{n-1}$$

.

.

جمله : (اکسپلیڅیت انځورونه):

د ځمکچیزې پرلپسي د  $ak = a_1 + (k-1).d$  توکي سره جوړې پرلپسي څخه جوړې شوي هندسي لری لپاره صدق کوي:

$$S_n = a_1 + a_2q + a_3q^2 + \dots + a_nq^{n-1} = a_1(q^n - 1)/(q - 1);$$

$$q \neq 0; S_n = n \cdot a_1 \quad q = 1$$

اوبی: د  $q \neq 1$  لپاره باور لري:

$$s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$$

$$s_n \cdot q = a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

$$s_n - s_n \cdot q = a_1 \qquad - a_1q^n$$

$$s_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

غوښتنه: اوبی د  $q = 1$  لپاره د گرانو لوستونکو د کور کار دی.

دلته یو بل ډول ښوونه پلي کوو: پرلپسی د- $n$  ام غري  $an = 3.2^{n-1}$  سره ورکړ شوي. دلته په دې توگه د لری غري لرو غرو ته رالبريري.

$$s_{15} = 3 + 6 + 12 + \dots + 24576 + 49152 \quad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad +$$

$$s_{15} \cdot 2 = 6 + 12 + \dots + 49152 + 98304 \quad s_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \dots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q \quad -$$

$$s_{15} - s_{15} \cdot 2 = 3 - 98304$$

$$s_n - s_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q$$

$$s_{15}(1-2) = 3-98304$$

$$s_n(1-q) = a_1 - a_n \cdot q$$

$$s_{15} = (3-98304)/(-1)$$

$$s_n = (a_1 - a_n \cdot q)/(1-q) = (a_1 - a_1 \cdot q^n)/(1-q)$$

$$s_{15} = 98401$$

$$s_n = a^1 \cdot (1-q^n)/(1-q)$$

له کمون یا کمښت وروسته د لری په کښه لور ټیک (یواځی) پورته لیکي لومړی توکی او د لاندې کرښی اخرنی توکی پاتیري، نور ټول توکی یوبل سره لری کوي، د بیلگي په توگه  $a_2 - a_1 \cdot q = 0$  او یا  $a_n - a_{n-1} \cdot q = 0$  دا روښانه ده چی  $q$  نه ارزښت صفر او نه ارزښت ۱ اخستلی شي، په لومړي حالت که به مو پرلپسی

$$a_1, 0, 0, 0, 0, \dots$$

لرودی او په دوهم حالت که مو د پرلپسي  $a_1, a_1, a_1, a_1$  سره سر او کار وي

بیلگي:

$$1 - 7; -21; 63; -189; \dots \quad q = -3; a_1 = 7$$

غوښتونکی  $s_7$

$$s_7 = 7 \cdot ((-3)^7 - 1) / -3 - 1 = -15316 / -4 = 3829$$

کنترول:

$$a_7 = a_1 \cdot q^6 = 7 \cdot (-3)^6 = 5103, s_7 = 5103 \cdot (-3)^7 - 1 / (-3)^7 - (-3)^6 : \\ = 5103 \cdot 2188 / 2916 = 3829$$

## ۱۸ . ۲ الف ۲ اریتمیتیکی لری

دلته غواړو چی یو ځل بیا لاند مگر د یوه لوی سرلیک په څیر اریتمیتیکی لری ته یو نظر واچوو . یوه د اریتمیتیکی پرلپسی منځ ته راغلی یا جوړه شوی لری اریتمیتیکی لری نوموو . د

$$a_k = 15 + (k - 1) \cdot 4$$

سره جوړه اریتمیتیکی پرلپسی څخه جوړه شوی لری په لاندې ډول ده:

$$s_1 = a_1 = 15$$

$$s_2 = s_1 + a_2 = 15 + (15 + 4) = 15 + 19 = 34$$

$$s_3 = s_2 + a_3 = 15 + (15 + 4) + (15 + 2 \cdot 4) = 15 + 19 + 23 = 57$$

.

.

$$s_n = s_{n-1} + a_n = 15 + (15 + 4) + (15 + 2 \cdot 4) + \dots + (15 + (n-2) \cdot 4) + (15 + (n-1) \cdot 4)$$

.

.

.

جمله : ( د اریتمیتیکی لری اکسپلیسیت انځورونه):

$$a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$$

سره اریتمیتیکی پرلپسی څخه جوړه شوی لری  $s_n$  اریتمیتیکی لری لپاره صدق کوي:

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d) = (n/2) (2a_1 + (n-1)d)$$

اوبی:

$$\begin{aligned}
 s_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-3)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d) \\
 s_n &= (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-3)d) + \dots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \\
 s_n + s_n &= [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \dots \\
 &\quad + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] \\
 2 \cdot s_n &= n \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d] \\
 s_n &= \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]
 \end{aligned}$$

غوښتنه:

وښايي چې  $sn = (n/2)(a_1 + a_n)$  د  $sn = (n/2)(2a_1 + (n-1)d)$  سره په يوه مانا دي

## ۱۸ . ۶ د پرلپسی او لړيو پولی

مورن تر اوسه داسی لړيو سره سر او کار لروده چی اخرنی توکي یی لاس ته راوړونکي وو. داسی لړۍ پایلری بلل کیږي. داسي فکر هم کیدی شي چې د لړۍ اخرني غړي موجود نه وي، یعنی لړۍ دې په خوښه دوام پیدا کولی شي. په عمل کی داسی پر اېلمونو سره مخامخ کیږو چی دا مو ناپای لړيو ته هڅوي. دا څرگنده ده، چې داسی لړۍ اریتمیتیکی لړۍ نه دي، کم له کمه به ی اخرنی غړی په پوښتنه کی راتلی او یا د پانډیرو غړو زیاتون، په اریتمیتیکی لړۍ کی بی مفهومه دی، ځکه چی دواړه لویي د  $n$  د ارزښت سره په ټولو پولو لویږي په هندسی لړيو کی هم په یوه ناپای لړۍ کی د اخرني غړي او یا زیاتون پوښتنه بی مفهومه ده. دا روښانه ده چی د پیل غړی د  $|q|$  سره ځل له امله تل جگړي. دا د مثبت او همدادول د منفی  $q$  لپاره باور لري.

بیلگي:

۱ - اریتمیتیکی لړۍ  $2+3+4+5+\dots$  یو لاس ته راوړونکی د زیاتون یا جمعی ارزښت نه لري، ځکه چی هر راتلونکی زیاته وونی د ټولو پولو لویږي یا جگړي.

۲ - ځمکچیزه یا هندسی لړۍ  $2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+\dots$  د لومړي توکي  $a_1 = 2$  او د ویش  $q = 1,5$  سره په ټولو پولو لویږي. یا جگړي نه اخر توکی او نه د جمع ارزښت معلومیدی شي. د پای توکوگن زیاتون  $sn$  او اخرنی توکی  $an$  شمیریدونکی دی.



۳- ناپای ځمکچیزه یا هندسي لری

$$q = -2 \text{ او } a_1 = 1,5 \text{ د } \dots -966 + 48 - 24 + 122 - 66 + 3 - 1,5$$

سره پای ارزښت زیاتون نه لري، ځکه چې د توکو مطلقه ارزښت د هر مخکي پولی څخه جگيري يا لوييري . له دې سره به څرگنده شوي وي چې کله د ناپای هندسي لری د زیاتون ارزښت پای دی.

پیلبلگه :

یو سخی سری غواړي د معیوبو هستوگنځی ته بسپنه ورکړی . په لمری میاشت کی دی ۱۰۰۰ افغانی بسپنه ورکوي او په نورو راتلونکو میاشتو کی د هغی د مخه میاشتی نیمایي یعنی په دومه میاشت کی ۵۰۰ افغانی او په دریمه کی ۲۵۰ افغانی او داسی نور. دلته  $a_1 = 1000$  او  $q = 1/2$  دي. دوخت د کموالي له امله دا لری باید پای لری وي ، مگر مور دې پوښتنی ته تیوریتیکي ځواب ورکوي.

د پای ځمکچیزو لریو لپاره کیدی شي دلته د زیاتون له فرمول  $s_n = 1000(1-0,5^n)/(1-0,5)$  څخه کار واخستل شي، که چیرې  $n$  یو ناپای لوی ارزښت نیولی شوی. که په دې فرمول کی مور ته معلوم ارزښتونه کینول شي، نو لاس ته راځي:

$$s_n = 1000(1-0,5^n)/(1-0,5)$$

$$s = 1000(1-0,5^n)/(1-0,5) = 2000 \cdot (1-(1/2)^n)$$

که  $n$  له ټولو پولو تیر شي، باید د  $(1/2)^n$  له امله دا مات  $(1/2)$  تل کوچنی شي. دې مات  $(1/2)$  باندې کیدی شي، چې د لویو  $n$  توکو لپاره، بالاخره صرف نظر وشي.

دلته روښانوي چې په دې توگه د زیاتون ارزښت یوه ناپای هندسي لری

$$1000 + 500 + 250 + 125 + 65,50 + 32,75 + \dots$$

جوړوي، کومه چی ځان و 2000 ته نژدي کوي او هغه ته هیڅ نه رسیري. دا سری زیات له زیاته کیدی شي 2000 افغانی خیرات ورکړي.

یادونه : هغه د دې برخې په سر کې پوښتنه هم په همدې توگه ځواب کیدی شي .

پرلپسی او د پرلپسی لری په لوړو شمیرپوهنوکي غوره رول لوبوي» ډیري ښوونی ( اوبونې ) په دې ولاړي دي، چې ایا یوه ټیک ټاکلی پرلپسی یوي معلومی یا ټاکلی پولی ته هڅه کوي او که نه؟ چې په اول حالت کی پرلپسی (konvergent) لیمت لرونکی

یاپوله لرونکي (بلل لکيري او په دوهم حالت کی پرلپسی (divergent لیمت یا پوله نه لرونکی) بلل کیري.

بیلگه :

د ... مخ په اول او په درېمې بیلگو کی راوړل شوي پرلپسی دیورگنت یا پوله نه لرونکی ، په ۲-مه بیلگه کی پرلپسی کونورگنت یا پوله لرونکی ده او د صفر لور ته هڅه کوي یا صفر ته کونورگنت ده یعنی ددې پرلپسي پوله صفر دی. او ۴-مه بیلگه کی پرلپسی پوله لري او د ۳ لور ته هڅه کوی، یعنی پوله یی ۳ دی.

پرلپسی شته چی د جگیدو سره یوه ټاکلی گڼ ته په خوبنه ورنزدي کیدی شي. د دې پرلپسی د په خوبنه لویو غرو او د دې گڼ کمون ترمنځ بالاخره دومره کوچنی کیري، چی په جبشمیرني باندې هم نه شي شمیرل کیدی .  
مور د پرلپسیو دا ډول ځاننیونی، بی له جب شمیرنی یا جبشمیري، په لاندې بیلگو کی څیرو.

د پرلپسیو غري

$$1; 1/2; 1/3; 1/4; \dots | 0; 1/3; 2/4; 3/5; 4/6; \dots | 3/29/4; 15/8; 33/16$$

$$1; 1/2; 1/3; 1/4; \dots | 0; 1/3; 2/4; 3/5; 4/6; \dots$$

$$| 3/29/4; 15/8; 33/16$$

د لاندې سره

$$a_k = 1/k \quad | \quad a_k = (k-1)/(k+1) \quad | \quad a_k = 2 + (-1/2)^k$$

د  $k$  د جگیدو سره تل دا پرلپسځانونه ځانونه لاندې گڼونو ته نزدې کوي

$$g=0 \quad | \quad , g=1 \quad | \quad g=2$$

د گراف ټکي یی تل د جگیدونکی غری نمرې  $k$  سره د

$x$  - محور سره غبرگ |  $x$  - محور سره غبرگ |  $x$  - محور ته

د  $y=2$  سره | د  $y=1$  سره او په ریښتونی

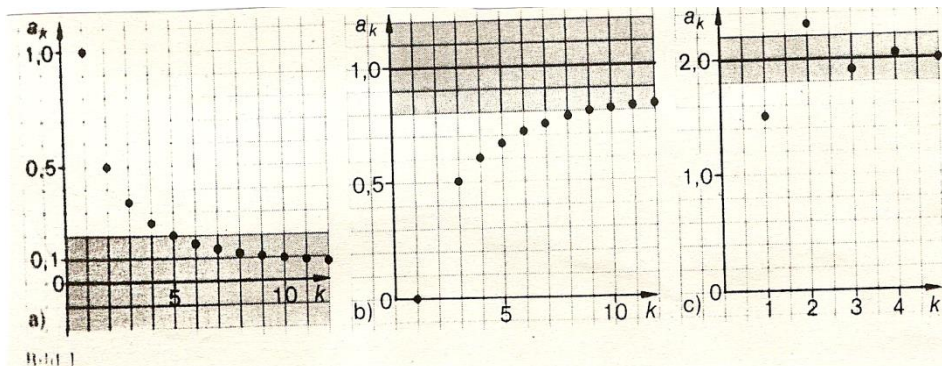
له لاندې او پورته بدل | له لاندې راتلونکي

له پورته راتلونکي

راتلونکی

که په کرښه یو دواړو لورو ته پټی وکښل شي

د  $y = 2$  سره د  $y = 1$  سره د  $y = 0$  سره  
 نو د پوره لویي  $k$  نمره توکي سره د پرلپسی ټول غری په دې پټی کی دننه پراته دي.



دا لاندې ديفرنش يا کمون

$$|a_k - 0|$$

$$|1 - a_k|$$

$$|a_k - 2|$$

دا مانا لري، چی د جگیدونکی  $k$  نمرې توکيه خورا کوچنی کیدی شي. دا پوښتنه مو چی د کوم غری  $a_k$  لپاره دا کمون د بیلگي په توگه له 0,0001 کوچنی کیدی شي، لاندې ناسمساوات ته را هڅوي

$$|a_k - 0| < 0,0001$$

$$\left| \frac{1}{k} - 0 \right| < 0,0001$$

$$\frac{1}{k} < 0,0001$$

$$k > 10000$$

$$|1 - a_k| < 0,0001$$

$$\left| 1 - \frac{k-1}{k+1} \right| < 0,0001$$

$$\left| \frac{(k+1) - (k-1)}{k+1} \right| < 0,0001$$

$$\frac{2}{k+1} < 0,0001$$

$$\frac{2}{0,0001} < k+1$$

$$19999 < k$$

$$|a_k - 2| < 0,0001$$

$$\left| 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2 \right| < 0,0001$$

$$\left| \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right| < 0,0001$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k < 0,0001$$

$$k \cdot \lg \frac{1}{2} < \lg 0,0001 \parallel : \lg \frac{1}{2} < 0 (!!)$$

$$k > \frac{\lg 0,0001}{\lg \frac{1}{2}}$$

$$k > \frac{-4}{-0,3010}$$

$$k > 13,29$$

دا په دي مانا، د ټولو پرلپسی غړو د

$$k > 10000$$

$$k > 19999$$

$$k > 13$$

سره کمون  $|a_k - g|$  له  $0,0001$  کوچنی دی .  
د گراف لپاره باور لري، چی دا ټول ټکي د یوې پټی یا تسمي په دننه کی پراته دي  
سور یي  $2.0,0001$  په کرښه د مساوات

$$y = 0$$

$$y = 1$$

$$y = 2$$

$$y = 0 \quad y = 1 \quad y = 2$$

سره پروت وي .

که دا د  $0,0001$  په ځاي کی یو په خوښه کوچنی رییل گن ورکړ شي، او وله  
دي وغوښتل شي چی کمون یی له دي گن کوچنی دی نو په ورته توگه مو  
لاندي نامساواتو ته لارښودوي.

$$|a_k - 0| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{k} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{k} < \varepsilon$$

$$k > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$|a_k - 1| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{k-1}{k+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{(k-1) - (k+1)}{k+1} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{-2}{k+1} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{2}{k+1} < \varepsilon$$

$$\frac{2}{\varepsilon} < k+1$$

$$\frac{2}{\varepsilon} - 1 < k$$

$$|a_k - 2| < \varepsilon$$

$$\left| 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right| < \varepsilon$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k < \varepsilon$$

$$k \cdot \lg \frac{1}{2} < \lg \varepsilon \quad \lg \frac{1}{2} < 0 (!!)$$

$$k > \frac{\lg \varepsilon}{\lg \frac{1}{2}}$$

دا په دي مانا چی : د ټولو پرلپسیو لپاره د

$$k > 1/\varepsilon$$

$$k > 2/\varepsilon - 1$$

$$k > \log \varepsilon / (\log(1/2))$$

سره کمون  $\frac{q^n}{1-q}$  دی .

پرلپسی له دي خوښو سره کونورگنت بلل کيږي او گن  $g$  یی پوله.

پېژند ۱۸. ۱ :

یوه پرله پسې کونورگنڅ (Konvergent) لاتین convergere یو د بل په لور ور ځغلیدل یعنی یو بل ته ورنزدېکیدل (بلل کيږي یعنی د یوې ټاکلې پولې په لور هڅیږی، کله چی د هغی غړي د جگیدونکی ایندکس  $n$  سره یوې پولې ته په خوبنه نزدې شي. یوه لری کونورگنت یا پوله لرونکی بلل کيږي، کله چی د برخه زیاتون پرلپسی د جگیدونکی  $n$  سره یوې پولې ته په خوبنه نزدې شي.

هغه پرلپسی چی د صفر په لور هڅیږي صفر پرلپسی یی بولو هغه پرلپسی چی یوې ټاکلې پولې ته نه هڅیږي. دیورگنت بلل کيږی «) دا وروسته ه تر څیږنی لاندې نیول شوي دي.

جمله :

د ځمکچیزې یا هندسي لری پولې تج ت لنې یا کونور گنت لپاره شرطونه:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |q| < 1$$

که  $|q| < 1$  وي، پس د پای ځمکچیزې لری لپاره د زیاتون فرمول داسی دی

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

د  $q^n$  ارزښت څخه تېرېدی شو یعنی ترې صرفنظر کیدی شي، که  $n$  پوره لوي وټاکل شي.

جمله :

دناپای ځمکچیزې لری  $a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots$  د زیاتون  $s_n$  سره پوله  $s = a_1 / (1 - q)$  تیک هلته لري، کله چی  $|q| < 1$

$$n = n_0(\varepsilon); \dots \dots \dots (18.7)$$

وي.

جمله:

هره پرلپسی د  $a_k = \frac{b}{k^n}$  (  $b \in R; n, k \in N$  ) سره یوه صفر پرلپسی ده

جمله:

هره پرلپسی د  $a_k = cq^n$  (  $c \in R$  ) سره د  $|q| < 1$  لپاره یوه صفر پرلپسی ده.

دلته غواړو چې دا د پرلپسی د پولی کلیمه لږ نوره هم زوره کړو. د یوې پرلپسی د غړو  $an$  ځانښوونې څیرنه د تل جگیدونکي  $n$  لپاره، وایو چې: که  $n$  د  $oe$  (ناپای) په لورو هڅیري او یا لنډ  $oe \rightarrow n$ ، نو دا مو د پولی ارزښت کلیمي ته بیایي او یا کونورگنځ (convergence). مور پرلپسی  $\{an\} = \{1/n\}$  په پام کی نیسو، د جگیدونکي  $n$  سره، گورو چې د پرلپسی غړي تل  $0$  ته په خوښه یا په زړه پورې ور نژدې کیږي.

که سری هرڅومره کوچنی گڼ  $\varepsilon < 0$  وټاکي د یوه معلوم  $n = n_0(\varepsilon)$  دلته  $n_0(\varepsilon)$  د  $\varepsilon$  په واک کی دی) څخه وروسته ټول گڼونه د  $0$  په  $\varepsilon$ -چاپیریال کی پراته دي

$$|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon). \quad (18.1)$$

سری کړی شي چې دا  $n$  دلته په ساده ډول ورکړي. د  $18.1$  (له امله دی)

$$n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (18.2)$$

د

$$100 / 1 =$$

لپاره  $n_0 = 100$  نو  $|an| < 1 / 100$  د ټولو  $n > 100$  لپاره، یعنی د  $n = 101, n = 103, \dots, n = 102$  لپاره. د  $1000000 / 1 =$  لپاره لرو  $n_0( ) =$

$1000000$  پس،  $|an| < 1 / 1000000$  د ټول  $n > 1000000$  لپاره

په لاندې حالت کی سری وایي: چې پرلپسی

$$\{1/n\}$$

کنورگنت ده. هغه د پولی  $a = 0$  لور ته کونورگنت کیږي. د دې لپاره لیکو)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

او یا په ساده ډول

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (18.3)$$

د  $1/n$  لیمس د  $n \rightarrow \infty$  لپاره په  $0$  مساوي دی او یا ساده  $0 < 1/n$  په لور ځي (د  $1/n$  لیمس د  $n \rightarrow \infty$  لپاره په  $0$  مساوي دی او یا ساده  $0 < 1/n$  په لور ځي)  
 د  $\{a_n\} = \{(-1)^n(1 + \frac{1}{n})\}$  لاندې پرلپسی په څیرنه کره لاس ته راځي: د جوړه  
 یا جفت  $n$  لپاره پرلپسی  $a_n$  د  $1 +$  لورته نژدې کیږي او د ناجوړه یا طاق  $n$  لپاره  
 پرلپسی  $-1 -$  لورته نژدې کیږي. دلته سری د دوه پولو  $1 +$  او  $-1 -$  څخه نه غږیږي  
 بلکې د پرلپسی د دوه ډیری شوو ټکو یا ځای راتولشوو ټکو څخه. پرلپسی کونورگنت نه  
 ده بلکه دیورگنت (divergence) (ټیگ: ناتاکی دیورگنس) ده.

پرلپسی  $\{a_n\} = \{n^2\}$  هم دیورگنت ده. دا چې  $a_n$  د جگیدونکی  $n$  سره د  $\infty$  یا ناپای  
 لورته ځي پس د هر څومره لوي ارزښت  $K$  څخه اوږي یا جگیری، نو سری د  $\infty$  په  
 لور د ټاکلی دیورگنت څخه غږیږي.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty \vee n^2 \rightarrow +\infty; \dots \dots \dots (18.4)$$

په پورته کې  $\vee$  د یا لپاره ځای په ځای ده  
 له دې پیل یادونو څخه اوس باید د پولو (حدونو) کلیمی کره وپېژندل شي:

پېژند ۱۸. ۲:

یو پرلپسی  $\{a_n\}$  پوله یا حد  $a$  لري

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n \rightarrow a; \dots \dots \dots (18.5)$$

که د هر یوه (هر څومره کوچنی هم)  $\varepsilon > 0$   
 $< 0$

لپاره یو  $n_0 = n_0(\varepsilon)$

داسی موجود وي چی باوري وي

$$|a_n - a| < \varepsilon; \dots \dots \dots (18.6)$$

$$n = n_0(\varepsilon); \dots \dots \dots (18.7)$$

وايو چی پرلپسی  $\{a_n\}$  کونورگنت یا په بل عبارت پرلپسی  $\{a_n\}$  د پولی  $a$  په  
 لور کونورگنت کیږي. که پرلپسی داسی پوله ونه لري، نو دیورگنت بلل کیږي (یا  
 دیورگنت کیږي).

که یوې دیورگنتی پرلپسی  $\{a_n\}$  و هر  $\{ \}$  (په خوښه لوی) گن  $K$  لپاره یو  
 $n_0 = n_0(K)$

داسی موجود وي چی باوري وي

$$a_n > K \quad \text{یا} \quad a_n < -K \quad (18.8)$$

د ټول

$$n > n_0(K) \quad (18.9)$$

نو د پرلپسی څرگند یا معلوم دیورگنت بلل کیري د  $oe +$  په لور او یا  $oe -$  په لور او  
 ددې لپاره لیکي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow (\text{په همدې ډول}) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad (18.10)$$

یا لنډ:

$$a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow (\text{یا په همدې ډول}) a_n \rightarrow -\infty \quad (18.11)$$

که یوه پرلپسی دیورگنت او ټاکلی دیورگنت نه وي، نو ناټاکلی دیورگنت بلل کیري.  
 ددې پرلپس  $\{a_n\} = \{n/n+1\}$  څخه او د لاندي فورم بدلولو

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

اټکل کیدی شي چی دا پرلپسی پوله  $a = 1$  لري، یعنی  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n/n+1) = 1$

اوس باید د (۱۸. ۵) تر (۱۸. ۷) وښوول شي. دا  $n/(n+1) < 1$  له امله لاس  
 ته راځي:

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n)/(n+1) = 1/(1/n) < 1/\epsilon$$

$$د \quad n+1 > n \Leftrightarrow n > (1/\epsilon) - 1 = n_0(\epsilon)$$

د  $1/100 = n_0(\epsilon) = 99$ . نو د ټولو  $n > 99$  لپاره داسی دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$



ددې پورته سره کیدي شي چې تصدیق کړو چې: هر  $\epsilon > 0$  ته یو  $n_0(\epsilon) = (1/\epsilon) - 1$  داسې موجود دی چې  $|a_n - 1| < \epsilon$  د ټولو  $n > n_0(\epsilon) = (1/\epsilon) - 1$  لپاره دی.

دا ساده بیلگه د تعریف ۱۸ . ۲ . پر اېلم په گوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا نه وايي چې پوله څرنگه پیداکیدی شي. مخکي له دې چې پولې ته تگ (کونورگنڅ Konvergenz) وښوولی شو، نو پولې  $a$  ته ضرورت دی. مخکي له دې چې کونورگنڅ اټکل کیدی شي چې دا پرلپسی پوله  $a = 1$  لري، يعني

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n/n+1) = 1$$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوولی شي. دا  $n/(n+1) < 1$  له امله لاس ته راځي:

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n)/(n+1) = 1/(n+1) < 1/n$$

د  $n+1 > n \Leftrightarrow n > (1/\epsilon) - 1 = n_0(\epsilon)$  لپاره .

د  $1/100 = n_0(\epsilon)$  لپاره لرو  $n_0(\epsilon) = 99$ . نو د ټولو  $n > 99$  لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

ددې پورته سره کیدي شي چې تصدیق کړو چې: هر  $\epsilon > 0$  ته یو  $n_0(\epsilon) = (1/\epsilon) - 1$  داسې موجود دی چې  $|a_n - 1| < \epsilon$  د ټولو  $n > n_0(\epsilon) = (1/\epsilon) - 1$  لپاره دی.

ددې پورته سره کیدي شي چې تصدیق کړو چې: هر  $\epsilon > 0$

$$n_0(\epsilon) = (1/\epsilon) - 1$$

داسې شته دی چې  $|a_n - 1| < \epsilon$

د ټولو  $n > n_0(\epsilon) = (1/\epsilon) - 1$  لپاره دی .

دا ساده بیلگه د پیژند ۱۸ . ۲ . پر اېلم په گوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا دا نه وايي چې پوله څرنگه پیداکیدی شي. مخکي له دې چې پولې ته تگ (کونورگنڅ Konvergenz) وښوولی شو، نو پولې  $a$  ته اړتیا شته دی. مخکي له دې چې

کونورگنځ ( ټولې تج تلنه ) وښایو نو باید پوله مو پیژندلې وي یا کم له کمه مو گومان په راغلی وي.

په ټولیزه(عمومي) توگه د  $n_0(\varepsilon)$  شمیرل هم د ستونځو ډک دي. د پولی عملي شمیرلو لپاره داسی عملیو یا کاره ونو ته اړتیا ده، چی بی د پیژند ۱۸ . ۲ د هر وار استعمال څخه ټولی راپیدا کړی شو. له دي پرابلم سره ۱۸ . ۴ -امه برخه ځان مشغولوي. کله کله دا بسوالی یا بسیا کوي چی سری دومره پوه شي چی ایا پوله وجود لري یا شته دی ( ایا کونورگنت کیری ) بی له دي چی هغه وپیژني او یا یی وشمیري. داسی د موجودیت ویناوي یواځي د کونورگنځ کریټیرین ( - خویونه) کولی شي، له کومو څخه چی لاندې یو ورکول کیري. دي ته باید گوته ونیسو چی دا کریټیرین د مخه د پولی پوهیدل ضرور نه نیسي ) دا د مخه نیونه نه ده یعنی فرضیه نه ده ) .

جمله ۱۸ . ۱ :

هره بنده (محدوده) مونوتون پرلپسی  $a_n$  کونورگنت ده .

دا کریټیریوم څرگند د لیدلو دی. که یوه پرلپسی تل جگیري ( کمیری ، ټیټیری ) او ټاکلی یا معلوم پای ارزښت  $K$  څخه نه اوري (  $K$  څخه نه ټیټیری ) نو باید  $a_n$  یوځاي کی راپنډ شي. دا د مونوتوني له امله یوځاي په یوځاي کی کیدی شي.

یادونه : څه گنونه چی په یوځاي کی سره ډیر راتول شي ما ورته ډیری لیکلي، دا ښه نه ده، ځکه، چی ډیری مي د ډیری یاني د سیټ لپاره کارولی ، نو دلته لیکم، چی «راپنډ» شي .

جمله ۱۸ . ۱ د بیلگي په توگه په دریمه برخه کی راوړلشوي، د طبعي لوگاریتم بنسټ په څیرگن  $e$  سره اړیکو یا رابطو کی استعمال لري . سری د یو څه ستونځو سره ښوولی شي چی لاندې باوري دی

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3.$$

له دي امله دا پرلپسی

$$\{a_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$$

مونوتون او بنده ( محدوده ) ده او د جملی ۱۸ . ۱ له امله کونورگنت ده.

ددې پوله  $e = 2, 71828$  ده (پرتله یا مقایس برخه ۳ . ۱)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (18.12)$$

۱۸ . ۴ د پولی شمیرنه

په دې برخه کې غواړو چې قاعدې ورکړو د کومو په مرسته چې د پیرندلشوو پرلپسی د کونورگنت څخه د نورو کونورگنت لاس ته راوستی شو، او همداسی، چې د هغی په مرسته د پیژندلشوو پرلپسیو د پیژندل شوي پولی ارزښت په مرسته د نورو پرلپسیو پولی ارزښت شمیرل کیدی شي. لاندې بنسټیزه جمله ښاي چې د ځانگړو شرایطو لاندې د گڼونو پرلپسیو سره همداسی شمیرل کیدی شي لکه پخپله د گڼونو سره.

جمله ۱۸ . ۲ :

که پرلپسی  $\{a_n\}$  او  $\{b_n\}$  (پای) پوله ارزښت  $a$  او  $b$  ولري ، یانې

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, \quad (18.13)$$

وي، نو باوري دي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b, \quad (18.14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \quad (18.15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}, \quad b_n \neq 0, b \neq 0, \quad (18.16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b, \quad a_n > 0, a > 0, \quad (18.17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \log a, \quad a_n > 0, a > 0. \quad (18.18)$$

دا جمله دوه گوني وينا کوي: که د پرلپسیو غرو  $a_n$  او  $b_n$  د کونورگنت عددونو پرلپسی د جمعې، تفریق، ضرب (زیاتون کمون ، ځل) او ویش، پوتنڅ یا لوگاریتم نیولو ، د یوي نوي پرلپسی یا ترادف غري لاس ته راولي نو دا نوي پرلپسی (ترادف) کونورگنت ده او

د پولی ارزښت یی په ترتیب د کونورگنتو پرلپسیو یا ترادفون جمع، تفریق، ضرب (زیاتون، کمون، حل)، ویش، پوتنخ او لوگاریم دی. په لاندې کی غواړو یواځی اړیکی (۱۸ . ۱۴) وښایو. د ښوولو لپاره یی د پولی ارزښت پیژند ۱۸ . ۲ څخه غواړوکار واخلو (استعمال کړو). نیونی (۱۸ . ۱۳) دا مانا لري، چی هر

$$< 0$$

ته یو

$$(n_1) \text{ (او یو } n_2)$$

داسی شته دی، چی باوري کوي  $|a_n - a| < \varepsilon$  دتولو  $n > n_1(\varepsilon)$  لپاره،

$|b_n - b| < \varepsilon$  دتولو  $n > n_2(\varepsilon)$  لپاره پس معتبر دي

$$n > n_0(\varepsilon) = \max \{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\} \text{ د تول } |a_n - a| < \varepsilon \text{ او } |b_n - b| < \varepsilon$$

اوس باید یواځی وښایو چی د یوه ټاکلي  $n$  چه  $|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)|$

د هر  $\varepsilon$  لاندې راتیښدی شي. لاندې باور لري

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

دتولو  $n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$  لپاره

په دې توگه (۱۸ . ۱۴) وښوول شوه.

د جملی ۱۸ . ۲ استعمال کی باید برسیره په نیونو یا فرضیو، چی په (۱۸ . ۱۵) تر (۱۸ . ۱۸) پورې شوي ټیک په پام کی ونيول شي چی پرلپسی  $\{a_n\}$  او  $\{b_n\}$  څرگند پای پولی ارزښتونه  $a$  او  $b$  باید ولري. که د بیلگي په توگه،  $a_n \rightarrow \infty$  او  $b_n \rightarrow \infty$  وي، نو فرمول (اجازه نه لرونکی استعمال!) (۱۸ ، ۱۴) په یوه په نامه نټاکلي افادې په لورځی یعنی  $\infty - \infty$

$$(a_n - b_n) \rightarrow \infty - \infty. \quad (18.19)$$

که باور ولري  $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow \infty$ ، نو سری د اجازي نه لرلو استعمال (۱۸ . ۱۵) یوه بله نټاکلی افاده لاس ته راوړي:

$$(a_n \cdot b_n) \rightarrow 0 \cdot \infty. \quad (18.20)$$

په لاندې کی bzw. د همداسی په معنا دی.

$$a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0 \text{ bzw. } a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow \infty,$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ bzw. } \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}. \quad (18.21)$$

د ( ۱۸ . ۱۷ ) استعمال مو د  $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$  همداسې د  $a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow 0$  همداسې حالتونو کې مو درې نورو ناپاکلو افادو ته لارښود وي.  $a_n \rightarrow 1, b_n \rightarrow \infty$  همداسې حالتونو کې مو درې نورو ناپاکلو افادو ته لارښود وي.  $a_n^{b_n} \rightarrow 0^0$  bzw.  $a_n^{b_n} \rightarrow \infty^0$  bzw.  $a_n^{b_n} \rightarrow 1^\infty$ . (18.22)

په پورته انځور شوو اړیکو کې لاندې افادې  $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, \infty^0, 1^\infty$  (18.23)

ناپاکلی افادې بلل کېږي.

داسې پرلپسی چې د جملې ۱۸ . ۲ فورمال استعمال څخه ناپاکلو افادو ته لارښودوي، دیورگنت او یا به مختلفو ارزښتو ته کونورگنت وي. دا یوې ځانگړې څیړنې ته اړ دي.

مخکې له دې چې داپوښتنې ځوابوو، نو باید یوڅو تییپکي پرلپسی وڅیړل شي، کومې مو چې په نامه ټاکلو افادو ته لارښود وي، که څه هم د جملې ۱۸ . ۲ نیوني یا فرضیې پوره نه وي.

که  $an \rightarrow +oe$  او  $bn \rightarrow +oe$  باور ولري نو طبعاً لاس ته راځي

$a_n + b_n \rightarrow \infty + \infty = \infty$	.....(18.24)
$a_n \cdot b_n \rightarrow \infty \cdot \infty = \infty$	.....(18.25)
$a_n - b_n \rightarrow \infty - \infty = \infty$	.....(18.26)

دا اړیکي ( ۱۸ . ۲۴ ) تر ( ۱۸ . ۲۵ ) طبعاً د ناڅرگندې پولې ارزښت - oe لپاره هم باوري دي.

که  $an \rightarrow a$  او  $bn \rightarrow oe$  وي، نو باور لري :

$a_n + b_n \rightarrow a + \infty = \infty,$	(18.27)
$a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot \infty = \infty, a > 0,$	(18.28)
$a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot \infty = -\infty, a < 0,$	(18.29)
$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{\infty} = 0,$	(18.30)
$a_n^{b_n} \rightarrow a^\infty = \begin{cases} 0 \text{ für } 0 < a < 1, \\ \infty \text{ für } a > 1, \end{cases}$	(18.31)
$a_n^{-b_n} \rightarrow a^{-\infty} = \begin{cases} \infty \text{ für } 0 < a < 1, \\ 0 \text{ für } a > 1, \end{cases}$	(18.32)
$b_n^{a_n} \rightarrow \infty^a = \infty, a > 0.$	(18.33)

د لاندې لپاره باور لري :

$$a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow b, \quad (18.34)$$

$$\frac{b_n}{a_n} \rightarrow \frac{b}{0} = \infty, b > 0, a_n > 0, \quad (18.35)$$

$$a_n^{b_n} \rightarrow 0^b = \begin{cases} 0 & \text{für } b > 0, \\ \infty & \text{für } b < 0, a_n > 0, \end{cases} \quad (18.36)$$

$$\log a_n \rightarrow \log 0 = -\infty, a_n > 0. \quad (18.37)$$

د  $a_n \rightarrow 0$  او  $b_n \rightarrow \infty$  لپاره باور لري يا صدق كوي.

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{0}{\infty} = 0, a_n > 0, \quad (18.38)$$

$$\frac{b_n}{a_n} \rightarrow \frac{\infty}{0} = \infty, a_n > 0, \quad (18.39)$$

$$a_n^{b_n} \rightarrow 0^\infty = 0, a_n > 0. \quad (18.40)$$

په دې همدا اوس بنوول شوي اړيكو كې لاندې افادې ټاكلې افادې دي ( نيونه د ۱۸ ) .  
( ۲۴ ) تر ( ۱۸ . ۴۰ ) پورې دې په پام كې ونيول شي :

$$\begin{aligned} \infty + \infty &= \infty, a + \infty = \infty, \infty \cdot \infty = \infty, a \cdot \infty = \infty, \\ \frac{a}{\infty} &= 0, \frac{a}{0} = \infty, \frac{0}{\infty} = 0, \frac{\infty}{0} = \infty, \\ \infty^\infty &= \infty, a^\infty = \infty (a > 1), a^\infty = 0 (0 < a < 1), \end{aligned} \quad (18.41)$$

$$\begin{aligned} 0^\infty &= 0, 0^a = 0 (a > 0), 0^a = \infty (a < 0), \\ \infty^a &= \infty (a > 0), \infty^a = 0 (a < 0), \log 0 = -\infty. \end{aligned}$$

په لاندې بيلگه كې به يو څو گڼونپرلپسی وركړ شي، كومی چي د ټاكلو افادې په لور لارښودوي) بيایي :

بيلگه ۱۸ . ۳:

$$\begin{aligned} n^2 = n \cdot n &\rightarrow \infty \cdot \infty = \infty, & \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}} &\rightarrow \infty^{\frac{1}{2}} = \infty, & \frac{1}{n^2} &\rightarrow \frac{1}{\infty} = 0, \\ 2^n &\rightarrow 2^\infty = \infty, & \frac{1}{n^n} = \left(\frac{1}{n}\right)^n &\rightarrow 0^\infty = 0, & \log \frac{1}{n} &\rightarrow \log 0 = -\infty, \\ \frac{n}{\sin \frac{1}{n}} &\rightarrow \frac{\infty}{\sin 0} = \frac{\infty}{0} = \infty, & n \cdot \log \frac{1}{n} &\rightarrow \infty \cdot (-\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

هغه پرلپسی چی د ناتاکلو افادو (۱۸ . ۲۳) . په لور مو لارښودوي، څه ستونځي پيښوي. دا د هوبنيارو فورمبدلولو يا بڼه بدلون په بنسټ په داسی پرلپسو بدليري چی څرگنده - يا تاکلي افادی (۱۸ . ۴۱) په لور مو بيابي يا چی د هغي کونورگنتځاننيوني معلوم دي . لومړی دي يو څو ځانگړي پرلپسی وکتل شي:

پرلپسی مو د  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  غړو سره د نا تاکلی افادی  $1^\infty$  په لور بيابي او د (۱۸ . ۱۲) له مخی پوله ارزښت  $e$  لري. سری بنوولی شي (دلته دي دا نه بنوول کيري) ، چی دا پولی ځاننيونه ساتلي پاتی کيري، که څوک د  $a_n = 1/n$  په ځای يوه په خوبه د صفر پرلپسی  $a_n \rightarrow 0, a_n \neq 0$  وټاکي.

جمله ۱۸ . ۳ :

د هرې په خوبه صفر پرلپسی  $\{a_n\}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, a_n \neq 0, \quad (18.42)$$

gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{a_n} = e. \quad (18.43)$$

بيلگه ۱۸ . ۴ : د جملی ۱۸ . ۳ په مرسته د بيلگي په توگه لاس ته راځي:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n(-1)} = \left(\left(1 + \left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n}\right)^{-1} \rightarrow e^{-1} = \frac{1}{e},$$

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{3} \cdot 3} = \left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^3 \rightarrow e^3, \quad \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n = \left(\frac{1 + \frac{2}{n}}{1 - \frac{3}{n}}\right)^n = \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{e^2}{e^{-3}} = e^5,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{2n-3} &= \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n-3}}{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n-3}} = \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-3} \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n}}{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^{-3} \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n}} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^3 \cdot \left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right)^2}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^3 \cdot \left(\left(1 - \frac{3}{n}\right)^n\right)^2} \rightarrow \frac{1^3 \cdot (e^2)^2}{(e^{-3})^2} = e^{10}, \end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2 \cdot \frac{1}{n}} = \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow e^0 = 1,$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \cdot n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^n \rightarrow e^\infty = \infty.$$

د  $a_n \rightarrow 0$  لپاره پرلپسی  $(\sin x)/n$  د ناتاکلی افادې  $0/0$  په لور ځي. لاندې باور لري:   
 جمله ۱۸. ۴: د هرې په خوبه صفر پرلپسی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, a_n \neq 0, \quad (18.44)$$

لپاره باور لري ( د لنډې الماني ژباړه  $a_n$  په لينده کچ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \quad (a_n \text{ im Bogenmaß}). \quad (18.45)$$

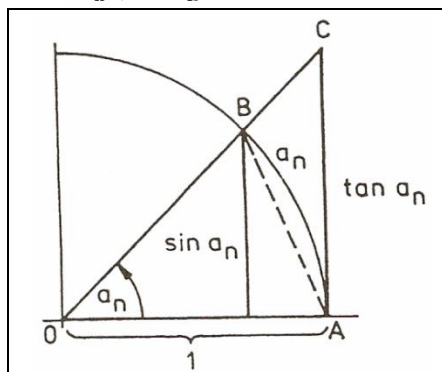


Bild 18.1

اوبونه د:  $\sin(-a_n) = -\sin a_n$  له امله او له دې امله

$$\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$$

چې د  $(18.45)$  دې، دلته دې  $(18.45)$  یواځې د  $a_n > 0$  لپاره وینول شي.

مور دلته د یوونگردي یا واحد داېرې د کوچ بلواک څخه گټه اخلو؟؟؟ څیره ش  $(18.45)$  د

$$\frac{1 \cdot \sin a_n}{2}, \quad \text{درې گوډي OAB منځه‌واره:}$$

د گردۍ سکتور یا گردیبرخه OAB منځه‌واري

$$\frac{1^2 \cdot a_n}{2}, \quad \text{څخه کوچنی ده، او دا بیرته د درې‌گوډي}$$

$$\frac{1 \cdot \tan a_n}{2} \quad \text{OAC د منځه‌واري.}$$

څخه کوچنی دی. له دې امله باور لري

$$a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n} \quad \text{او} \quad \sin a_n < a_n$$



او بپونه د:  $\sin(-a_n) = -\sin a_n$

$$\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$$

له امله او له دې امله چی

دی، دلته دې (۱۸ . ۴۵) یواځي د  $a_n > 0$  لپاره وپنول شي.

مور دلته د یوونگردي یا واحد داپري د کونج بلواک څخه گټه اخلو؟؟؟ څیره ش ۱۸ .

$$\frac{1 \cdot \sin a_n}{2}, \quad (1) \text{ د درې گوډي OAB منځهواره:}$$

د گردی سکتور یا گردییرخه OAB

$$\frac{1^2 \cdot a_n}{2}, \quad \text{منځهواړي '}$$

$$\frac{1 \cdot \tan a_n}{2}$$

څخه کوچنی ده، او دا بیرته د درې گوډي OAC د منځهواړي.

څخه کوچنی دی.

$$a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n} \quad \text{او} \quad \sin a_n < a_n \quad \text{له دې امله باور لري}$$

او ورپسی

$$\frac{\sin a_n}{a_n} < 1, \quad \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n}, \quad \text{also} \quad \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1.$$

د  $\cos a_n \rightarrow 1$  له امله  $a_n \rightarrow 0$  لپاره فرمول (۱۸ . ۴۵) باور لري.

بیلگه ۱۸ . ۵ : د جملی ۱۸ . ۴ په مرسته د بیلگي په توگه لاس ته راځي:

$$n \cdot \sin \frac{1}{n} = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \rightarrow 1,$$

$$n^2 \cdot \sin \frac{1}{n} = n \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty \cdot 1 = \infty,$$

$$\frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$\sqrt{n} \cdot \tan \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\cos \frac{1}{\sqrt{n}}} \rightarrow \frac{1}{1} = 1.$$

بیلگه ۱۸ . ۶ :

په پرلپسی  $\left\{ \begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} \right\}$ ,

چې د ناپاکلی افادې  $\frac{\infty}{\infty}$  په لور مو هڅوي کوبنس کيږي چې د مات باندې او ماتلاندې په یوه گڼ وویشل شي، چې یو ټاکلی وینه یا افاده ترې رامنځ ته شي.

$$\frac{3n^2 - n + 1}{2n^2 - 1} = \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{3}{2}, \quad \frac{6n^3 + n - 1}{7n^4 + n^2 + 1} = \frac{\frac{6}{n} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4}}{7 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} \rightarrow \frac{0}{7} = 0,$$

$$\frac{6n^3 + n - 1}{2n^2 - 1} = \frac{6n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{\infty}{2} = \infty, \quad \frac{\sqrt{n^2 - 1} + n - 1}{n + 1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + 1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{2}{1} = 2.$$

بیلگه ۱۸. ۷: پرلپسی  $\{a_n - b_n\}$ ، چې ناپاکلی افادې  $\frac{\infty}{\infty}$  ته مو لارښودوي، کیدای شي د نورو ترمنځ لاندې بڼه غوره کړي:

$$a_n - b_n = \frac{(a_n - b_n)(a_n + b_n)}{a_n + b_n} = \frac{a_n^2 - b_n^2}{a_n + b_n} \rightarrow \frac{?}{\infty}.$$

که صورت پولې ته و هڅیږي، نو یوه ټاکلی افاده بیا مخ ته لرو.

$$\sqrt{4n^2 + 5n + 2} - 2n = \frac{4n^2 + 5n + 2 - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + 5n + 2} + 2n} = \frac{5 + \frac{2}{n}}{\sqrt{4 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}} + 2} \rightarrow \frac{5}{4},$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{2n-1} = \frac{n+1-2n+1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{2n-1}} = \frac{\frac{2}{n} - 1}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}} \rightarrow \frac{-1}{+0} \rightarrow -\infty,$$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \rightarrow \frac{2}{\infty} = 0.$$

تمرینونه:

د ورکړ شوي پرلپسي  $\{a_n\}$  یا ترادف پوله ارزښت  $a$  وشمیرئ (که شتون وري)  $n_0(\epsilon)$  وټاکئ، داسې، چې د ټولو (18.6)  $n > n_0(\epsilon)$ : لپاره باور ولري.

1. a)  $a_n = \frac{n+1}{2n}$

b)  $a_n = \frac{1}{n^2\sqrt{n}} + \frac{1}{n^3}$

ولري.

c)  $a_n = n \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - n$

d)  $a_n = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{10^n} \right)$

د لاندې پرلپسیو  $\{a_n\}$  پوله ارزښت وشمیری، که شتون لري.

1. a)  $a_n = \frac{2n+3}{3-4n}$

b)  $a_n = \frac{4n-3}{2-5n+7n^2}$

c)  $a_n = \frac{5n^2-6}{3n+4}$

d)  $a_n = \frac{3n^3-2n^2+5n-6}{2n^3-4n^2-7n+9}$

e)  $a_n = \left( \frac{3n-2}{3-6n} \right)^2$

f)  $a_n = \frac{(2n-3)^2}{4n+1}$

g)  $a_n = \frac{2 - \sqrt[3]{n^2}}{n^2+5}$

h)  $a_n = \frac{3 + (-1)^n + 2n}{1-3n}$

i)  $a_n = \frac{4\sqrt{n}-10n}{n\sqrt{n}}$

j)  $a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2}$

k)  $a_n = n \left( 1 - \sqrt[5]{1 - \frac{1}{n}} \right)$

l)  $a_n = n \left( \sqrt[3]{n^2+2} - \sqrt[3]{n^2+1} \right)$

2. a)  $a_n = \left( 1 + \frac{4}{n} \right)^n$

b)  $a_n = \left( 1 + \frac{1}{2n} \right)^n$

c)  $a_n = \left( \frac{cn+1}{cn} \right)^n$

d)  $a_n = \left( \frac{2+n}{n-4} \right)^n$

e)  $a_n = \left( \frac{\left( 1 - \frac{2}{n} \right) (n+3)}{n+2} \right)^n$

f)  $a_n = \left( 1 - \frac{5}{n} \right)^{\frac{n}{4}+3}$

g)  $a_n = \sqrt[n]{3}$

h)  $a_n = \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$

2.3. a)  $a_n = [2n^{-1} \cdot \sin(2n^{-1})]$

b)  $a_n = n \cdot \sin \frac{1}{n}$

c)  $a_n = n \cdot \tan \frac{1}{n}$

d)  $a_n = \sqrt{n} \tan \frac{1}{\sqrt{n}}$

e)  $a_n = 2n^2 \cdot \cos \frac{1}{n^2} \cdot \tan \frac{1}{n^2}$

f)  $a_n = \sin \frac{1}{n} - n \cdot \cos \frac{1}{n}$

## 19 پوله (حد) "The Limit"

لاندې د اعدادو ترادف (پرلپسي) لرو:

$$(1) \quad 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/n$$

$$(2) \quad 3/2, 4/3, 5/4, \dots, (n+1)/n$$

$$(3) \quad 2, 4, 6, \dots, 2n$$

که  $n$  د ناپاي په لور ياني  $n \rightarrow \infty$  ته لار شي، نو د پورته ترادفونو څخه (1) د صفر په لور، (2) د يو په لور او (3) د ناپاي په لور ځي.

د  $\text{Limit}$  مانا پوله (حد) ده، چې له هغې تيرېدنه اجازه نه لري. په پخواني روم کې د يوه بناړ د قلعي نوم هم  $\text{Limit}$  وو. په رياضياتو کې، لکه په ترادفونو (پرلپسي) کې مو چې وليدل ليميت د پولي يا حد مفهوم لري.

د پولي (حد) د استعمال مفهوم په دې کې پروت دی، چې د يوه فنکشن يا تابع سلوک يا کاروایي داسې وڅيرو لکه څنگه، چې د فنکشن يا تابع (بلواک) د افقي محور (پروت -  $x$  محور (abscissa)) باندې پرلپسي يا ترادفونه يوي پولي يا حد (ټکي) ته ورنزدېکيدنه. دا لکه په پورته ننوتنه کې، چې پرلپسي يا ترادفونه په پروت محور يوي پولي ارزښت ته ځي. وبه گورو، چې پوله يا حد په رياضياتو کې ددې لپاره کارول کيږي، چې مشتق وپيژنو

فعاليت :

-ايا تاسو په ورځني ژوند کې د پولي (حد) د کلمي سره بلد ياست؟

ايا تاسو په ورځني ژوند کې يوه بيلگه راوړئ شئ، چې يوې پولې ته له دواړو لورو، له بڼې و کين لورته او همدارول له کين و بڼې لورته نژدې شئ يا لاړ شئ؟

په يوه ټاکلي ځای کې د توابعو پوله :

يادونه: مور له دې وروسته د پولې په ځای پوله ارزښت لیکو، چې دا ټيک زموږ غوښتنه په گوته کوي.

فعاليت ۱ : يوه تابع  $f(x) = x + 2$  په پام کې ونيسئ، چې پروتولارسيستم يا سيستم

قيمت وضعيه کې ټکی  $P(2,4)$  لري

۱ - د تابع جدول وکارئ.

۲ - د تابع گراف وکارئ

۳ -  $f(2)$  پيدا کړئ او د  $x$  خوزښت ( حرکت ) باندې بحث وکړئ که  $x$  د ۲ ارزښت ته دواړو لورونزدي شي

۴ - د  $x$  پولې ته تلنه په گراف ( څيره ) کې روښانه کړئ.

بيلگه ۱ :

يوه تابع  $f(x) = 2x$  او يو ټکی  $P_0$  دې ورکړ شوی وي، چې کواورديناټ (  $3/6$  ) لري.

( ۱ ) د تابع جدول وکارئ

( ۲ ) د تابع کراف يا څيره , وکارئ

( ۳ )  $f(3)$  پيدا کړئ او د  $f(x)$  تلنه باندې بحث وکړئ که  $x$  د " ۳ " ارزښت ته نژدې شي

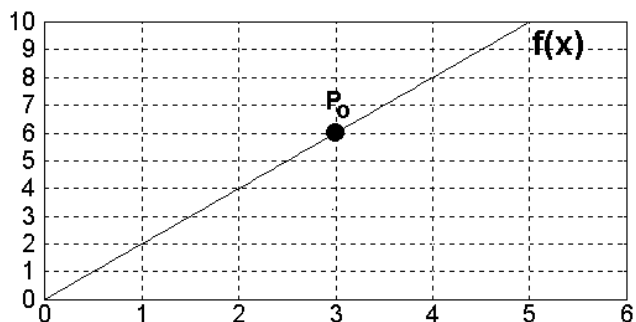
( ۴ ) د  $f(x)$  پولې ته تلنه په څيره کې روښانه کړئ.

اوس غواړو دا پورته فعاليت روښانه کړو:

( ۱ ) د تابع جدول ( دولی يې گران لوستونکي پوره کوي )

x	-1	0	1	2
f(x)	-2	0	2	4

(۲) د تابع څیره



(۳)  $f(3) = 6$  او غواړو د درې ارزښتونو څخه چې له بنې او کینې لور و ۳ ته ورنژدې کېږي و گورو، چې په دې درې ارزښتونو کې چیرته ځي. ددې لپاره لاندې ارزښتونه په دوه جدولونو کې څیرو

$x_k$	$f(x_k)$	$x_k$	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې گورو، چې له کینې لور وکښته ۲ ته نژدې کېږو او له بنې لور له کښته و پورته لورته هم ۲ ته نژدې کېږو. بل جدول پروت کارو. له بنې و کینې لور ته له کینې و بنې لورته

← 1 →

<b>x</b>	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
<b>f(x)</b>	5.96	5.98	5.998		6.002	6.02	6.04

-----> 6 <-----

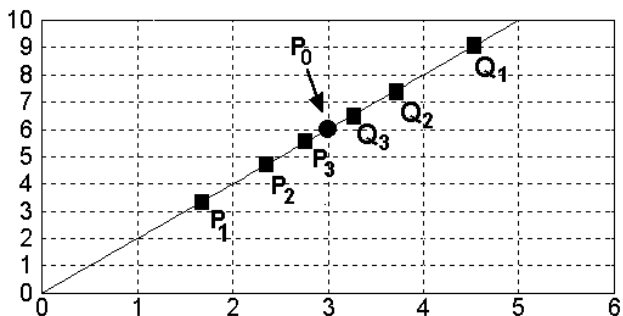
په درې پړاوونو کې د  $f(3)$  قیمت د  $f(x)$  قیمتونو سره پرتله کېږي. که  $x$  و  $3$  ته ورنژدې شي.

دا حالت مور ته په گوته کوي چې: که  $x$  و  $3$  ته ورنژدې شي، نو د  $f(x)$  پوله (حد)، برابر په  $6$  دی او دا داسې لیکو:  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$

۴) اوس پورته گراف په لاندې توگه رسموو او بڼې او کین لور ته موخه ور ټکي - لکه په پورته جدول کې - په نڅښه کوو.

د لاندې څیړې له مخې ټکي  $P_1, P_2, P_3, \dots$  په پام کې نیسو، چې ټکي  $P_0$  ته تل له کین لور نژدې کېږي. او همداسې ټکي  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  چې له بڼې لور ټکي  $P_0$  ته نژدې کېږي.

کنټل کېږي: هرڅومره، چې پورته ټکي و ټکي  $P_0$  ته نژدې کېږي په همغه کچه د تابع ارزښتونه و  $6$  نژدې کېږي (د ټکي  $P_0(3,6)$  - قیمت له امله)



که په گراف کې ځای  $x=3$  ته نژدې شو، نو تابع ارزښت یا فنکشن ارزښت و قیمت (ارزښت)  $6$  ته نژدې کېږي.

وايو:  $6$  د فنکشن  $f(x)$  پوله ارزښت دی د  $x \rightarrow 3$  لپاره (لوستل:  $x$  د  $3$  درې) په لور تلنه).

د پوله ارزښت لپاره مو لیکډول لیکښه (په پرله پسې یا ترادف کې) پیژندلی:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

يادونه: د تابع پوله يا حد په هغه ځای کې چې تابع تعريف نه وي هم کيدی شي شته وي: په پورته کې مو د يوه تابع  $f(x)$  حد په  $x=3$  ځای کې تر څېړني لاندې ونيو. دلته تابع په  $x=3$  کې پېژند يا تعريف درلود.

اړين نه ده، چې تابع د  $x=3$  په ځای کې تعريف وي، ځکه چې پوله ارزښت د  $x$  لپاره يواځې د  $x=3$  په نژدې کې تشریح شوي.

پام: په ځنو فنکشنونو يا توابعو کې، پوله يا حد، په داسې ساده ډول لاس ته نه شو راوړی - لکه دمخه - مگر د تابع د ساده بدلون له لارې دا کار سرته رسولی شو.

بيلگه ۱:

$$\text{تابع } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}; x \neq 1 \text{ راکړ شوي}$$

(۱) د تابع جدول او گراف وکارئ!

که صور د  $x-1$  سره لنډ کړو، نو لرو:

$$f(x) = x + 1$$

د تابع " $f(x)$ " خوزښت تر بحث لاندې ونيسی که " $x$ " و " $1$ " ته نژدې شي يا همداسې که  $x \rightarrow 1$ .

له دواړو پاني له گراف او جدول څخه مور لیکو چې  $f(x)$  د ريل عدد "1" په لور هڅيري. نو

څيره دې گران  
لوستونکي وباسي



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

له دې امله روښانه ده چې تابع په هغه ټکي کې تعريف (پېژند) نه لري، په هغه کې چې پوله (حد) شمېرل شوی.

يادونه: په پورته ډول تابع به سملاسي پسې وڅېړل شي، خو د هر څه لومړی پېژند راوړو:

**پېژند (تعريف):**

تابع  $f(x)$  يوه پوله  $L$  لري، که  $x$  د يوه ريل عدد  $c$  په لور تړلی لار شي، او داسې

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

فعاليت: ايا دا پېژند رښتيا دی، که  $f(c) \neq L$  وي؟

فعاليت: که ولرو:  $|x|$ ، چې تل مثبت دی.

- دا بي له دې مطلق ارزښت څنگه لیکو؟

- ايا دا هغو اعداو کارولی شو، چې يو بل سره د شمېرنيزو نښو له لارې تړلي وي، يعنې چې اعداد يو له بل سره د جمعې، تفریق ... له لارې سره تړلي وي؟

فعاليت: هغه توابع چې په يوه عدد د بېلگې په توگه صفر کې تعريف نه وي، څه بلل کيږي

بيلگه 2: تابع  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ،  $x \neq 0$  راکړ شوي

(1) تابع وليکي، بي له دې، چې سومبول "||" وکاروی:

(2) د تابع گراف وکاروی

(3) د  $f(x)$  ارزښت پيدا کړی، که  $x$  له بني لور و 1 ته نژدې شي

(4) د  $f(x)$  ارزښت پیدا کړی که "x" له کین لور و 1- ته نزدې شي

(5) وینایاست چې تابع  $f(x)$  څو پوله ارزښتونه لري .

یادونه: که یوه تابع چې په صورت او مخرج کې دارونده ارزښت لپاره صفر ولري او دا صفر ځایونه له منځه تللی شي، نو دا ډول تابع په صفر ځای کې بی تعریف ده (یا تشیا! functional gap) لري.

بڼونه:

(۱) تابع بی له سومبول "||" داسې لیکو:

$$f(x) = \begin{cases} 1; x > 0 \\ -1; x < 0 \end{cases}$$

(2) د تابع گراف انځور و:

که څیره ونه کښل شوه ساده ده

(3) د  $f(x)$  ارزښت که  $x$  له بڼې لور و 1 ته نزدې شي ، لاندې پوله راکوي

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

(4) د  $f(x)$  پوله ارزښت که "x" له کین لور و 1- ته نزدې شي، په لاندې ډول دی.

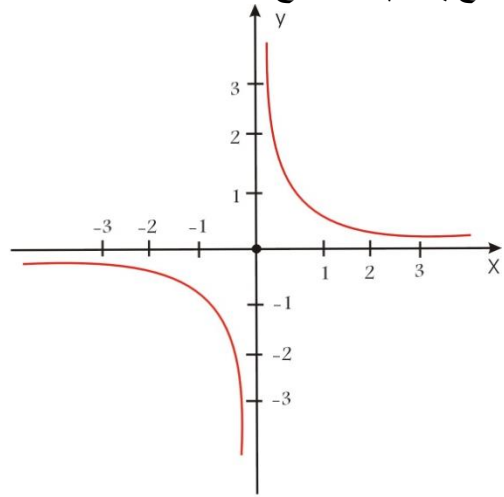
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$$

(5) گورو چې  $x$  ،،دوه،، ارزښتونو (1) او (-1) ته نزدې شي ، نو دوه پوله ارزښتونه لري یعنی  $\lim_{x \rightarrow \pm 1} f(x) = \pm 1$  ، نو له دې امله  $f(x)$  پوله نه لري

بیلگه ۳: تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  لرو، چې  $x \neq 0$  دی.

تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  په  $x = 0$  ځای کې تابع ارزښت نه لري یانې په  $x=0$  تعریف نه ده. دا په صفر ځای کې قطب (Pol) لري (۱). لاندې څیره دې وکل شي.

(۱) یادونه: هغه تابع، چې مخرج یې صفر وي او صورت یې صفر نه وي، وایو چې تابع په دې د مخرج صفر ځای کې قطب Pol لري.



و  $x=0$  ته د نزدې کېدو لپاره ترادف (پرلپسی)  $(x_n) = \frac{1}{n}$  ټاکو.

د اړونده تابع ارزښتونو ترادف (پرلپسی)  $(x_n) = \left( \frac{1}{n} \right) = n$  دی.

دا د  $n > 0$  لپاره یو نامحدود صعودي ترادف دی،

او د  $n < 0$  لپاره نزولي-یا متناقص ترادف دی.

دا په دې معنی، چې تابع  $f(x)$  په  $0$  ځای کې حد نه لري. دا هلته یو قطب لري.

قضیه: که تابع " $f(x)$ " همغه پوله (حد) " $L$ " ولري که " $x$ " له بنې یا کین لوري وه " $c$ " ته نزدې شي، نو پوله (حد) شته دی او د " $L$ " سره برابره ده.

## د حدونو خویونه یا خواص : " Properties of Limits "

فعالیت :

په دې برخه کې د ثابتو – او کټمټ توابعو Identity function حدونه وشمیری

د لیمیت خویونو څخه کار واخلی

د پولینوم تابعو حد (پوله) پیدا کړی

پوهیږو: په ریاضیاتو (شمیرپوهنه) کې ټول توابع چې راځي د ساده توابعو ګډوله والی combination دی، لکه د توابعو جمع (زیاتون، ضرب (ځل) وېش او زنجیرونه composition. دلته دوه غوره او ساده توابع  $f(x) = c$  او  $g(x) = x$  شته، که دواړه توابع سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$h(x) = x + C, \text{ یا } L(x) = cx, \text{ یا } m(x) = x^2 \text{ او داسې نور}$$

هڅه: د توابعو  $f(x) = x, g(x) = x - 2$  څخه کار واخلی، چې درې نورې توابع ترې لاس ته راوړی

فعالیت :

ایا د یوې تابع پوله کېدی شي د تابع له حل څخه پیدا شي؟

د بېلګې په توګه، که ولرو

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 3 \lim_{x \rightarrow 2}$$

نو دا تابع ولیکی.

یادونه: د پورته کارونې په څیر همدا څه د هرې ثابتې تابع لپاره رښتیا دی

د یوې ثابتې پوله ارزښت: که  $a$  او  $b$  ثابتې وي، نو  $\lim_{x \rightarrow a} c = c$  باور لري

په همدې ډول کټمټ يا ايډنټيک تابعو  $f(x) = I(x) = x$  لپاره هم لرو ، که " c " کوم حقيقي عدد وي، نو x و c ته نږدې کيږي. دا ،، ټيک داسې ده لکه،، چې  $f(x) = I(x)$  و c ته نږدې شي فعاليتونه:

1) که  $f(x) = x$  ،  $g(x) = 2$  وي ، نو لرو :

$$g(x) = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \quad 1) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \quad ,$$

2) که وي  $h(x) = f(x) + g(x)$  لرو

$$h(x) = x + 2$$

3) د  $h(x)$  گراف

رسم دې گران لوستونکي د ځانونو لپاره وکارې

4)

← 1 →

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

→ 3 ←

تاسو په ياد ولری يا وليکی

$h(x) = \lim_{x \rightarrow 1}$	$x + 2 = 3 \lim_{x \rightarrow 1}$
---------------------------------	------------------------------------

او  $h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \lim_{x \rightarrow 1}$

هڅي

( ۱ ) که  $f(x) = -2$ ،  $h(x) = x$  وي، پيدا کړی

a)  $f(x) \pm h(x)$

b)  $f(x) \cdot h(x)$

( ۲ ) وهڅیږی، چې د پورته توابعو د (a او b) لپاره پولي وټاکي، که x عدد 3 ته نږدې شي.

( ۳ ) که  $g(x) = x$  وي، نو پيدا کړی  $\lim_{x \rightarrow 4} 4x$ .( ۴ ) که  $h(x) = x$ ،  $f(x) = -2$  وي پيدا کړی

a)  $f(x) + h(x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + h(x))$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} h(x)$

بیلگه ۳ : د  $g(x) = \sqrt{3-x}$  گراف وکارئ او پيدا کړی

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  ، b)  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ ; c)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)$

حل:

دلته دي گراف وکښل شي....

له گراف څخه

$$g(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2}$$

الف- په لاندي توگه مخ ته خو:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (3-x)} = \sqrt{1} = 1$$

ب) له گراف څخه  $g(x) = 2 \lim_{x \rightarrow -1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} (3-x)} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{يادونه:}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3^-} (3-x)} = \sqrt{0} = 0$$

گڼ دلايل شته چې پولې شميرنه ساده کوي، مور. به دا لاندې بي له ثبوته ومنو که  $f$  او  $g$  توابع وي  $C$  او  $L$  او  $M$  رييل عددونه وي، داسې چې باور ولري:

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M, \text{ او } f(x) = L, \lim_{x \rightarrow c}$$

$$1) \quad ((f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow c}$$

$$= \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L + M$$

$$2) \lim_{x \rightarrow c} (f-g)(x) =$$

$$((f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L - M \lim_{x \rightarrow c}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow c} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \cdot M$$

$$4) \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}; (M \neq 0)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

د)  $f(x) \geq 0$  لپاره او د ټولو  $x$  ارزښتونو لپاره چې  $c$  ته نژدې کيږي.

پوینتنہ : مور لاندی تابع لرو:

$f(x) =$	$x^2 - 1$	$x \leq 0$
	$x - 1$	$0 < x < 2$
	$2x + 1$	$x \geq 2$

پیدا کری

c)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$     b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$     a)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$     d)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

حل :

$$a) \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 1) = (-2)^2 - 1 = 3$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} f(x); \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = -1$$

حد شتہ او  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$  دی:

$$c) \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (2x + 1) = 2 \times 4 + 1 = 9$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 1) = 2 \times 2 + 1 = 5 \text{ له بنی لور}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1) = 2 - 1 = 1 \text{ له کین لور}$$



له دي امله پوله (حد) نه شته

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$$

بیلگه:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  ، پیدا کړی، که  $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$  وي

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 5)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 3x + \lim_{x \rightarrow 2} 5$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 5$$

$$2 + 5 = 7 \times 4 - 3 \times = 2$$

$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x))^n$ نو پیدا کړی $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ که فعالیت:
--

یادونه:

د یوه پولینوم لیمیت ټیک داسې شمیرل کیري، لکه د یوه فنکشن لیمیت

بیلگه ۶:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$

پیدا کړی  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

حل:  $f(x)$  د دوه توابعو  $g(x) = x^2 - 2x + 5$  او  $L(x) = 2x^2 + 1$  وېش دی

که  $x$  و 3 نزدې شي پوله یا حد کیدی شي د تابع د حل له لارې په  $x = 3$  کې پیدا شي

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 + 1)} \\ &= \frac{3^2 - 2 \times 3 + 5}{2 \times 3^2 + 1} = \frac{8}{19}\end{aligned}$$

د راشنل-نسبتي-يا كسري فنكشنونو پولې

مورن دا لاندې د پولينومونو ویش لرو

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}; b_0 \neq 0$$

په پورته پولينوم ویش کې که  $x=0$  وي، نو  $\frac{a_0}{b_0}$  ترې لاس ته راځي د  $b_0 \neq 0$  سره.

که  $n < m$  وي او  $x$  ناپای ته لاړ شي، پولينومویش صفر ته ځي

که  $n > m$  وي او  $x$  ناپای ته لاړ شي، د پولينوم ویش د ناپای په لور ځي.

$$\text{که } n = m \text{ وي، نو } R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n}{b_m} \text{ لرو}$$

پام : د نسبتي يا كسري فنكشنونو (ناطقو توابعو) پوله ارزښت (حد) غواړو پيدا كړو.

ددې لپاره چې د ،،وياندو،، توابعو پولې پيدا كړو، كه شته وي، نو د مختلو لارو يا متودونو څخه كار اخلو.

پوهیرو، چې د پولینومي توابعو پوله (حد) - د یوه ورکړ شوي  $x$  ارزښت لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېر، چې د جمعې، تفریق، ضرب او وېش په څېر ورکړ شوي دي وشمیرو.

که ولرو:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  نو د تابع خواص د  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$  لپاره ساده

کو چې د پورته پولینوم ویش، چې گویاتابع ده پوله یا حد وشمیرو.

$$\text{بیلگه ۱: پیداکړی } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x + 2}$$

که  $x = 1$  وي، نو تابع تعریف ده او لرو

$$\frac{x^2 + x}{x + 2} = \frac{(1)^2 + 1}{1 + 2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 1}$$

Substitue( ځای په ځای کړو  $x = 1$  که

$$f(x) = f(1) \lim_{x \rightarrow 1}$$

$$\text{بیلگه ۲: پیداکړی } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x + 3}$$

حل: تابع په  $x = 0$  کې تعریف دی، نو لرو:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 3} = \frac{0 - 1}{0 + 3} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0}$$

$$\text{بیلگه ۳: پیداکړی } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$$

حل : تابع په  $x = 1$  کې تعريف ده، نو لرو

$$= \frac{1^2 + 1 - 2}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$$

که په يوه ځای يا عدد کې تابع تعريف نه وي، نو د مختلفو متودونو څخه کار اخلو، چې پوله (حد) پيدا کړو، که شته وي.

بيلگه ۴ : پيدا کړی  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}$

حل : دا چې تابع  $f(x)$  په  $x=2$  کې تعريف نه ده، نو پوله (حد) د تابع د حل له لارې نه شي پيدا کېدی. دا کېدی شي داسې پيدا کړو، چې تابع په ضريبونو تجزیه کړو .

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} \quad \lim_{x \rightarrow 2}$$

د تابع پوله (حد) که  $x$  و 2 ته نژدې شي، دا مانا لري، چې  $x \neq 2$  دی.

دا راشنل فنکشن (کونگه؟ تابع) رالندېږي:  $\lim_{x \rightarrow 2} (x-4)$  او لاندې پوله لري:

$$(x-4) = 2-4 = -2 \quad \lim_{x \rightarrow 2}$$

بيلگه ۵ : پيدا کړی  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$

گور، چې تابع په  $x = 16$  کې تعريف نه ده يانې  $x \neq 16$  .

په ياد ولری چې :  $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$  د  $\sqrt{a} \sqrt{b} + \sqrt{a} \sqrt{b}$  جوړه (مزدوج) دی او برعکس.

حل : د جوړې (مزدوج) سره ېې ضرب کړی

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16} \times \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4} \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt{x}+4} = \frac{1}{\sqrt{16}+4} = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

بیلگہ ۶ : پیدا کری

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

حل : تابع پہ  $x=3$  کی تعریف نہ دے ، نو مخرج او صورت د مخرج پہ مزدوج ضربوو او لرو :

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} \times \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} -1(\sqrt{x+1}+2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} \\
 &= -(\sqrt{3+1}+2) = -4
 \end{aligned}$$

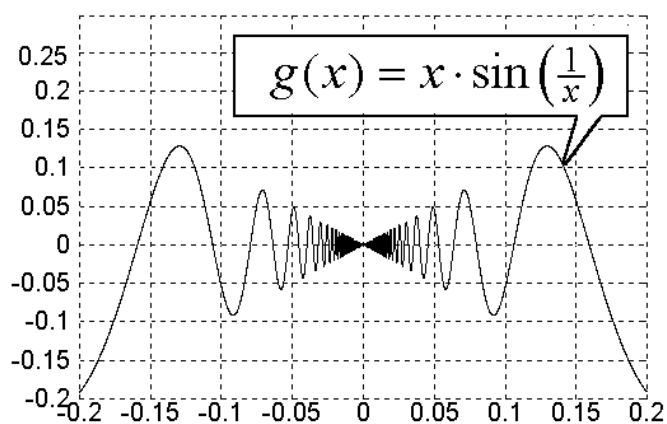
بیلگہ ۷ : پیدا کری

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5}{2x-3} + 5}{x^2-1}$$

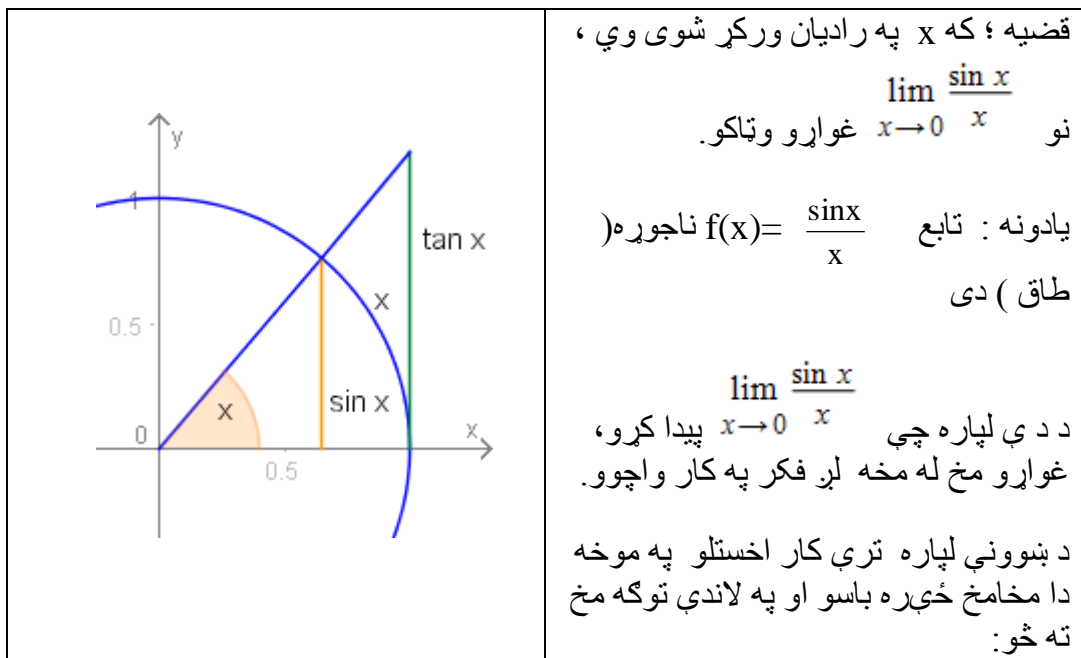
حل : تابع پہ  $x = 1$  کی تعریف نہ دے ، نو پہ لاندی توگہ مخ تہ خو

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5+10x-15}{x^2-1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{\frac{2x-3}{x^2-1} + 5} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10(x-1)}{(2x-3)(x^2-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10}{(2x-3)(x+1)} = \frac{10}{(2(1)-3)(1+1)} \\
 &= \frac{10}{-2} = -5
 \end{aligned}$$

د مثلثاتي توابعو پولې



بیلگه:



په يوه انټروال  $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$  کې د رسم له حالته سملاسي لاندې نا برابرې يا نامساوات  
باور لري

$$\sin x \leq x \leq \tan x$$

مور له دې سره لرو  $\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$  او  $x > 0$  سره لاس ته راځي:

$$\frac{\cos x}{\sin x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin x}$$

او د  $\sin x$  سره ضرب ( ځل ) له امله لاندې نامساوات لاس ته راځي

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

د پولې ته تگ له امله لاس ته راځي

$$\leq \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \quad 1 = \lim_{x \rightarrow +0} \cos x$$

دا په دې معنا دی، چې غوښتونکي پوله ارزښت 1 دی.

د دې ښوونې سره موږ ښی پوله ارزښت یې ډاکر، د کین پوله ارزښت لپاره په ورته توګه مخ ته خو او پوله ارزښت د  $x < 0$  لپاره پیدا کوو، یعنی له دې څخه هم لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

که  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$  او  $x = -\alpha$  و لیکو، نو دا لاندې لاس ته راوړنه هم لرو

$$= \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \frac{\sin x}{x}$$

.....(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

د مساواتو (3) + (4) څخه غوښتنه لاس ته راځي

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

بیلګه ۱: حل کړی  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

حل: وي دې  $2x = \alpha$  که  $x \rightarrow 0$  نو  $\alpha \rightarrow 0$  او

$$= \frac{2 \sin 2x}{2x} = 2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sin 2x}{x}$$



له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي :

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \times 1 = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

بیلگه ۲ : وښایاست  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x}$

که  $y = 5x$  وي ; او  $x \rightarrow 0$  ، نو  $y \rightarrow 0$  هم

$$\text{او } \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{2} \frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)} = \frac{5}{2} \frac{\sin 5x}{2x}$$

$$= \frac{5}{2} \frac{\sin y}{y}$$

له دې امله لرو  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{2} \frac{\sin y}{y} = \frac{5}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}$

$$1 = \frac{5}{2} \times = \frac{5}{2}$$

قضیه : په درېگودي گچ یا مثلثاتو کې بل غوره پوله ارزښت دا لاندې دی.

$$\frac{\tan x}{x} \lim_{x \rightarrow 0}$$

بیلگه : وښایاست  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x}$

حل : وي دې  $3x = \theta$  ، نو  $x = \theta / 3$  ، که  $\theta \rightarrow 0$  نو  $x \rightarrow 0$

$$\text{له دې امله} = \frac{3 \tan 3x}{(3x)} = 3 \frac{\tan \theta}{\theta} \frac{\tan 3x}{x}$$

$$= 3 \times 1 = 3 \text{ نو}$$

$$\frac{5 \tan 2x}{7x} \lim_{x \rightarrow 0} \text{ بیلگه: حل کری}$$

$$\text{حل: وي دي } 2x = y, \text{ نو } x = \frac{y}{2} \text{ دی}$$

$$\text{که } x \rightarrow 0 \text{ وي، نو } y \rightarrow 0 \text{ دی}$$

له دي امله

$$= \frac{5}{7} \cdot \frac{2 \tan 2x}{2x} \frac{5 \tan 2x}{7x}$$

$$= \frac{10}{7} \frac{\tan 2x}{2x}$$

$$= \frac{10}{7} \frac{\tan y}{y}$$

نو

$$\frac{5 \tan 2x}{7x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{10}{7} \frac{\tan y}{y} \lim_{x \rightarrow 0}$$

$$= \frac{10}{7} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan y}{y}$$

$$1 = \frac{10}{7} \times = \frac{10}{7}$$

پای

وهڅيری، چې ويناياست:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

که  $x$  په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو

الف) تانجنت  $\tan x$  د  $\sin x$  او  $\cos x$  په ترمونو وليکی

ب)  $\frac{\tan x}{x}$  د  $\sin x$  او  $\cos x$  په ترمونو وليکی

پ) پوله پیدا کړی

ت) ایا قضیه رښتیا یا ټیک ده؟

په یاد ولری:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$2 \cos^2 x - 1$$

$$\frac{1 - \cos 2x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \text{ حل کړی : بیلگه ۵ :}$$

$$\frac{1 - \cos 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x} \lim_{x \rightarrow 0}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x$$

$$0 = 0 \times 1 = 0$$

پوله (حد)

۶۰۲

بیلگه ۶ : وشمیری  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

حل : شمیرو

$$\frac{\tan 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}} \lim_{x \rightarrow 0} x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 \tan 3x}{3x}}{\frac{5 \sin 5x}{5x}} \lim_{x \rightarrow 0} x$$

$$= \frac{3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{3x}}{5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta}}{3 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha}}$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{1} = \frac{3}{5}$$

بیلگه ۷ : وشمیری ؛  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{x^2}$

حل : شمیرنه

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{4x+6x}{2} \sin \frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x \sin -x}{x^2}$$

۶۰۳

پوله ( حد )

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x \sin x}{x^2} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} \\
 &= 10 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad (y = 5x) \\
 &= 10 \times 1 \times 1 = 10
 \end{aligned}$$

بیلگه ۸ : پیدا کری

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x - \alpha}$$

حل :

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x - \alpha} &= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{2 \cos 3(x + \alpha) \sin 3(x - \alpha)}{x - \alpha} \lim_{x \rightarrow \alpha} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow \alpha} \cos 3(x + \alpha) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin 3(x - \alpha)}{x - \alpha} \\
 &= 2 \cos 6\alpha \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{3 \sin 3(x - \alpha)}{3(x - \alpha)}
 \end{aligned}$$

وي دي  $y \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow \alpha$  , نو لاس ته راڻي  $x - \alpha = y$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \cos 6\alpha (3) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \\
 &= 6 \cos 6\alpha \cdot 1 = 6 \cos 6\alpha
 \end{aligned}$$

پوله (حد)

۶۰۴

په یاد ولری: مثلثاتي کتمتوالی

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\frac{|\tan x|}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \text{ حل کری: بیلگه ۹}$$

حل:  $x > 0$ 

$$\frac{|\tan x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x}$$

= 1

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan x}{x} - \frac{\tan x}{x} \frac{|\tan x|}{x} \lim_{x \rightarrow 0^-}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan x}{x}$$

= -1

$$\neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\tan x|}{x} \frac{|\tan x|}{x} \lim_{x \rightarrow 0^+}$$

گورو، چي د پورته تابع پوله يا ليميټ نه شته

ناپړپکيدنه (متماډيت) "Continuity"

په دې برخه کې لولو ، چې یو فنکشن یا یو تابع په یوه ټکي یا یوه اینټروال کې څنگه ځان نیسي یا کوم حالت غوره کوي. ایا دا تابع په کوم ځای کې توب وځي، یا پرې کيږي او که یا په نه پرېکيږي توگه د اینټروال په دننه کې ځغلي.

### د تابعو ناپرېکيږنه Continuous functions

په دې موضوع کې موږ د د یوې تابع د ناپرېکيږني (متماډیت) په هکله څر نه کوو او د ناپرېکيږني یا تماډیت پیژند(تعریف) ورکوو.

// رسمه //

// رسمه //

// رسمه //

(1)

(2)

(3)

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = x^2 - 1$$

دا رسمونه دې هم گران زده کوونکي وکارې، زه د رسم کولو ستونځي لرم (تمرین)

$b$  دې د تابع  $f$  په پیژندور شو یا تعریف ساحه کې یو حقیقي (رییل) عدد وي. تابع  $f$  په  $b$  کې ناپرېکيږونکي (متماډي)، بلل کيږي، که د ټکي  $(b, f(b))$  نږدې د  $f$  گراف وکښل شي، بې له دې، چې پنسل له کاغذ پورته کړی شي.

له دې امله تابع  $f(x) = x^2 - 1$  او تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  په ټکي  $x=b$  کې ناپرېکيږونکي دي.

تابع  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  په  $x=0$  کې ناپرېکيږونکي نه ده یانې پرېکيږونکي ده یا توپ وځي.

تابع په  $x=a$  کې پرېکيږونکي ده، که پرې شي (تشییا ولري)، توپ ووهي او یا ماته شي.

لرو  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$  او  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$  نو له دې امله  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$  په  $x = 0$  کې

نه شته

بیلگه ۱ : وي دي  $f(x) = 2x + 1 ; x \geq 1$

$$1 - x ; x < 1$$

الف) گراف وکاري گراف

ب) پيدا کړی  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

پ) پيدا کړی  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

که تابع په  $x=3$  او  $x=1$  کې نابړېکيدونکي وي

حل :

الف) گراف کين لور ته کينل شوی دی

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = (2x + 1) = 7 \quad \text{ب)}$$

$$f(3) = 7$$

پ)

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) = 3 \lim_{x \rightarrow 1^+}$$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - x = 0 \lim_{x \rightarrow 1^-}$$

له ب) او پ) څخه لرو

$$f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \lim_{x \rightarrow +1}$$

له دي امله تابع په  $x = 3$  نابړېکيدونکي او  $x = 1$  کې پړېکيدونکي ده يا نامتمادي



$$f(x) = \frac{x^3 + x}{x}; \quad x \neq 0 \quad \text{بيلاڪه ۲: وي دي}$$

$$= 3 \quad ;$$

// رسمه // (الف) فنڪشن رسم ڪري

ب) بحث وڪري، چي تابع په  $x = 2$  او  $x = 0$  ڪي ناپرپڪيدونڪي ده او ڪه نه

حل: الف) د تابع گراف لپاره

$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	5	2	1	2	5

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5 \quad \text{ب)}$$

$$f(2) = \frac{2^3 + 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دي امله د  $f$  پوله (حد) شته او  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ ، نو تابع په  $x = 2$  ڪي متمادي يا نه

پرپڪيدونڪي دي

وي دي  $x = 0$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x}{x} = 1 \lim_{x \rightarrow 0^+}$$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + x}{x} = 1 \lim_{x \rightarrow 0^-}$$

دا دا مانا لري چې  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$  په دې مانا دی چې  $f(0) = 3$ .

دا دا مانا لري، چې  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$

تابع په  $x = 0$  کې پرېکېدونکي (نامتمادي) ده

که له دې شرطونو کوم یو شرط پوره نه وي نو تابع پرېکېدونکي (نامتمادي) ده

بیلگه ۳: وي دی

$$x \neq -3, \quad f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$$

ایا تابع په  $x = -3$  کې ناپرېکېدونکي ده؟

حل ( تابع  $f(-3)$  تعریف نه دی، له دې امله تابع په  $x = -3$  کې متمادي نه دی

پیژند(تعریف):

$f$  دې یوه تابع وي، چې د ټولو  $x$  لپاره په همغه واز اینتروال کې چې  $x=c$  لري تعریف وي.

تابع  $f$  په  $x = c$  کې ناپرېکېدونکي بلل کېږي، که دا لاندې شرایطو پوره وي.

(۱)  $f(x)$  تعریف دی (۲) که  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  شته وي (موجود وي)

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \quad (۳)$$

که تابع د ټولو  $x \in (a, b)$  لپاره متمادي وي، نو تابع په واز اینتروال  $(a, b)$  کې هم متمادي دی.

$$f(x) = 2x^2 + 1 \quad ; \quad x \leq 1$$

$$= 4+x \quad ; \quad x > 1$$

وگوری، چې تابع چېرته ناپرېکېدونکې ده او چېرته پرېکېدونکې.

حل : په  $x = 1$  کې  $f$  تعريف دی

$$f(1) = 3.$$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow^-1} (2x^2 + 1) = 3 \lim_{x \rightarrow^-1}$$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow^+1} (4+x) = 5 \lim_{x \rightarrow^+1}$$

$$f(x) \neq \lim_{x \rightarrow^+1} f(x) \lim_{x \rightarrow^-1}$$

له دې امله تابع په  $x = 1$  کې پرېکېدونکې ( نامتمادي ) ده

بيلگه ۵ : وي دي

$$= 2x^2 + 1 \quad ; \quad x < 2$$

$$f(x) = 3 \quad x = 2$$

$$= x + 3 \quad ; \quad x > 2$$

د تابع  $f(x)$  متماديت په  $x = 2$  کې تر بحث لاندې ونيسی

حل : تابع  $f(x)$  په  $x = 2$  کې تعريف ده او لرو  $f(2) = 3$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow^+2} (x + 3) = 5 \lim_{x \rightarrow^+2}$$

او

$$\lim_{x \rightarrow +2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 1) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

دا چي  $f(x) = 3$  دی، نوله دي امله  $(\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2))$  دا په دي مانا دی، چي تابع په  $x = 2$  كي پرېكيدونكي (نامتمادي) ده

د ناپرېكيدونكو يا متمادي توابعو خويونه

فعاليت:

( ۱ ) د توابعو  $f$  او  $g$  جمع (زياتون) پيداكري

$$(f+g)(x) = \dots\dots$$

( ۲ ) د  $f$  او  $g$  توابع په  $x=2$  كي متمادي (ناپرېكيدونكي) دي، نو :

$$f(x) = \dots\dots \& \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \dots\dots \lim_{x \rightarrow a}$$

( ۳ ) د پوله ارزښتونو (حدونو) ارزښتونه وکاروی

$$(f + g) (x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g (x) ) \lim_{x \rightarrow a}$$

$$\dots : = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots = (f + g)$$

(a)

له دې امله  $(f+g)$  په  $x=a$  کې متمدادي دي.

که تابع  $f$  او  $g$  په  $x=c$  کې متمدادي وي، نو د لاندې توابعو څخه يې هره يوه په  $x=c$  کې متمدادي ده

( ۱ ) د توابعو جمع  $f + g$

( ۲ ) د توابعو تفریق (کمون)  $f - g$

( ۳ ) د توابعو ضرب (خُل)  $f.g$

د توابعو وېش  $\frac{f}{g}; g \neq 0$

بيلگه ۱ : وي دې

$$f(x) = \sin x + 1,$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 2$$

نو ( ۱ )  $f$  او  $g$  په  $x=1$  کې متمدادي دي.

( ۲ ) وڅیړئ، چې الف)  $\sin x + x^2 + 3x - 1$

ب)  $(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2)$

په  $x=1$  کې متمدادي که نامتمدادي دي

حل :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \sin 1 + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) = 2; \quad \text{نو } f \text{ په } x = 1 \text{ کې متمدادي دی}$$

نو  $g$  په  $x = 1$  کې متمدادي دی

دويم خوي وڅيری

$$2) a) \sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2)$$

( ۲ الف )

$$= f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

د متمادي توابعو جمع په  $x = 1$  کې متمادي ده

$$( b) (\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x) \cdot g(x)$$

$$= (f \cdot g)(x)$$

نو د ناپرېکيدونکو- يا متمادي توابعو ضرب (ځل) په  $x = 1$  کې متمادي دی

بيلگه ۲ : وي دي

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = 3x - 2;$$

وڅيری، چې ايا  $f(x) \cdot g(x)$  په  $x = 2$  کې متمادي ده

حل :

$$f(x) = f(2) = 3 \lim_{x \rightarrow 2}$$

$$g(x) = 4 = g(2) \lim_{x \rightarrow 2}$$

$$f(x) \cdot g(x) = 3x^2 + x - 2$$

$$f(x) \cdot g(x) = 3(4) + 2 - 2 = 12 \lim_{x \rightarrow 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

$$= f(2) \cdot g(2)$$

له پورته څخه لاس ته راځي، چې  $f(x) \cdot g(x)$  متمادي دی

په کین لور بند اینتروال  $[a, b]$  کې گراف متمادي تابع په گوته کوي یا بنایي، چیرته چې  $f(a) \neq f(b)$  دی.

که ولرو  $f(a) < k < f(b)$  نو گراف له ټکي  $(b, f(b))$  څخه نه شي انځورېدلی تر څو پرته (افقي) کرښه  $y = k$  د ثابتې  $k$  سره غوڅه نه کړي.

( انځور راځي )

له پورته څخه لیکلی شو:

که تابع  $f$  په بند اینتروال  $[a, b]$  کې متمادي (ناپربکې دونکې) او  $k$  د  $b$  ترمنځ پروت وي، نو هلته کم له کمه یو عدد  $c$  د  $f(a)$  او  $f(b)$  ترمنځ شته داسې چې  $f(c) = k$  دی

$$\text{بیلگه ۳: وي دي } f(x) = x^3 + 4x, x \in [1, 2]$$

و بنایي، چې یو  $c \in (1, 2)$  شته داسې، چې  $f(c) = 11$  وي.

حل:  $f(x)$  یو پولینوم دی نو  $f$  په بند اینتروال  $[1, 2]$  کې متمادي دی. لرو

$$f(1) = 1^3 + 4(1) = 5; f(2) = 8 + 4(2) = 16$$

$$5 < 11 < 16 \text{ او } f(1) \neq f(2)$$

له دې امله یو عدد  $c \in (1, 2)$  شته، داسې چې  $f(c) = 11$  دی

بیلگه ۴ : وي دي

$$f(x) = 2x + 4; -1 \leq x < 2$$

$$; \quad 2 \leq x \leq 20 \quad |x-10| =$$

نو

الف ) و آزمایي، چي تابع متمادي ده ( ب ) و آزمایي، چي يو  $c \in (-1, 20)$  شته داسي چي  $f(c) = 6$  دی او د  $c$  ارزښت پيدا کړی.

حل :

$$f(x) = 2x^2 + 4 = 8 \lim_{x \rightarrow 2^-}$$

$$f(x) = 10 - 2 = 8 \lim_{x \rightarrow 2^+}$$

له دي امله لرو

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8$$

$$f(x) = 10 - 2 = 8$$

گورو چي تابع په  $[-1, 20]$  کي متمادي دی

$$b) f(-1) = 2x - 1 + 4 = 2$$

$$f(20) = |20-10| = 10 \Rightarrow f(-1) \neq f(20)$$

په دي اساس لرو  $2 < 6 < 10$

له دي امله لرو  $c \in (-1, 20): f(c) = 6$



$$2x + 4 = 6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1, 2).$$

$$= 6 \Rightarrow |x-10|$$

$$x - 10 = 6 \Rightarrow x = 16 \in (-2, 20)$$

$$10 - x = 6 \Rightarrow x = 4 \in (-2, 20)$$

د c ارزښت دی 1, 4, 16

**بیلگه ۵ : وي دي**

$$f(x) = 2 \sin x + 3; x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

وښایې چې  $c \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  شته د کومې لپاره چې باور لري  $f(c) = 4$  او c پیدا کړی.

حل : د تابع f د ساین تابع ده، نو له دې امله f متمادي (ناپربکېدونکی) دی

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ نو مور لرو :}$$

$$1 < 4 < 5$$

تابع f متمادي ده او لرو

دا په دې مانا چې  $c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  شته، د کوم لپاره چې  $f(c) = 4$  صدق کوي

د دې لپاره چې c پیدا کړو نو لرو

$$f(c) = 2 \sin c + 3 = 4$$

$$2 \sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

د گراف څخه څرگندېږي، چې  $f$  په اینټروال  $[a, b]$  متمادي دی،  $f(a)$  او  $f(b)$  متضادي مخنښي(علامي) لري، نو  $c$  د  $f(a)$  او  $f(b)$  ترمنځ د منځ ارزښت جملې له مخې د  $K=0$  سره کم له کمه یو  $C$  د  $a$  او  $b$  ترمنځ شته، چې لاس ته تری رآځي  $f(c) = 0$ .

دا په دې مانا چې  $x=c$  د  $f(x) = 0$  مساواتو یو حل دی. انځور شته

$$f(x) = x^3 + 5x - 23 \quad \text{بیلگه ۶: وي دي}$$

وښایي، چې تابع  $f$  د  $x$ -محور په اینټروال  $(2,3)$  کې غوڅوي.

حل:  $f$  پولینومتابع ده، نو  $f$  په اینټروال کې  $[2,3]$  متمادي دی.

$$f(2) = 2^3 + 5(2) - 23 = -5$$

$$f(3) = 3^3 + 5(3) - 23 = 19$$

اود متضادو مخنښنو(عالمو) سره  $f(2) \neq f(3)$

له دې امله د  $c \in (2,3)$  لرو چې  $f(c) = 0$  دی

## د څپرکي ټولگه " Chapter Summary "

پیژند: تابع  $f(x)$  یو حد  $L$  لري، که  $x$  ترلیي یو حقیقي عدد  $c$  ته لار شي. دا په دې معني چې د  $f(x)$  لپاره، چې ترلی و  $L$  ته ځي دادی، چې  $x$  ترلی و  $c$  ته

لارشي او داسي یې لیکو:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

قصیه : که  $f(x)$  همغه پوله ارزښت  $L$  ولري، که  $x$  د بنی یا کیني لور و  $c$  ته نزدې شي، نو پوله ارزښت شته او د  $L$  سره برابر دی.

د پوله ارزښت یا حد خوږونه :

که  $f$  او  $g$  توابع وي،  $c; L$  او  $M$  حقيقي اعداد وي داسي چې  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

او  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ ، نو لاندې لرو:

$$1) \lim_{x \rightarrow c} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L + M$$

$$2) \lim_{x \rightarrow c} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L - M$$

$$3) \lim_{x \rightarrow c} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \cdot M$$

$$4) \lim_{x \rightarrow c} \left( \frac{f}{g} \right)(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}; (M \neq 0)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

د  $f(x) \geq 0$  او  $x$  د ټولو ارزښتونو لپاره، چې  $c$  ته ور نزدې کيږي.

$$\text{قصیه : که } x \text{ په راديان ورکړ شوی وي، نو لرو : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\text{قصیه : که } x \text{ په راديان ورکړ شوی وي، نو لرو : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

پيژند :  $f$  دې يو تابع وي، چې د ټولو  $x$  لپاره په يو واز انتروال کې چې  $x = c$  ولري، تعريف وي، نو وايو چې  $f$  په  $x = c$  کې متمادي، د لاندې شرايطو لاندې:

شته دی 2)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  (تعريف دی  $f(x)$ )

$$3) \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

که تابع د ټول  $x \in (a, b)$  لپاره متمادي وي، نو تابع په ټول انټروال  $(a, b)$  (کي متمادي ده.

پيژند: وايو چي يو تابع په يوه بند انټروال  $[a, b]$  کي متمادي ده، که تابع له بني لور په  $x = a$  ي متمادي وي او له کين لور په  $x = b$  کي او د واز انټروال  $(a, b)$  په هر ارزښت کي متمادي وي.

د متمادي توابعو خويونه: که  $f$  او  $g$  په  $x = c$  کي متمادي وي، نو دا لاندي توابع هر يو په  $x = c$  کي متمادي دی.

اول) د جمعي  $f+g$  تابع

دويم) د تفريق  $f-g$  تابع

دريم) د ضرب  $f.g$  تابع

څلورم) د ويش تابع

د منځني ارزښت قضيه: که تابع  $f$  په بند انټروال  $[a, b]$  کي متمادي وي او  $k$  د  $f(a)$  او  $f(b)$  ترمنځ يو عدد وي، نو کم له کمه د  $a$  او  $b$  ترمنځ يو عدد  $c$  شته، د کوم لپاره چي  $f(c)=k$  باور لري.

ترنه

د  $x \rightarrow \pm\infty$  لپاره پوله ارزښت ( حد )

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{\pm\infty} = 0^\pm$$

اول:

د ۵ وېشنه په یوه ډېر لوی (ناپای) مثبت (منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت (منفي) عدد ورکوي یانې  $\square \square$  .

گراف  $G_f$  یو پروت اسیمپتوت  $y=0$  لري ، چې له پورته او کښته گراف ته ور نژدې کیږي.

دویم :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{x+1} = \frac{-3}{\pm\infty} = 0^{\mp}$$

د ۳- وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت (منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت (منفي) عدد ورکوي یانې  $\square \square$  .

گراف  $G_f$  یو پروت اسیمپتوت  $y=0$  لري ، چې له پورته او کښته گراف ته ور نژدې کیږي.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x^2 - 2x} = \frac{5}{+\infty} = 0^+$$

دریم :

په مخرج کې فقط  $x^2$  ستر رول لوبوي. د مربع کونې له لارې هر عدد مثبت کیږي. که ۵ په یوه ډېر لوی مثبت عدد ووېشل شي، نو یو خورا کوچنی مثبت عدد تری لاس ته راځي، یانې گراف  $G_f$  یو پروت اسیمپتوت  $y=0$  لري ، چې فقط له پورته لور ور نژدې کېږي سره .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{x^2 - 2} = \frac{-3}{+\infty} = 0^-$$

څلورم :

د مخرج مربع کونې سره منفي عددونه هم مثبت میږي.. د ۳- وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت عدد باندې یو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي یانې  $\square$  - .

گراف  $G_f$  یو پروت اسیمپتوت  $y=0$  لري ، چې فقط کښته گراف ته ور نژدې کیږي.

د پرېښودني - يا تري صرفنظر کوني اصول

اول :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0^\pm$$

په صورت کې د  $x$  توانونه، په مخرج کې د  $x^2$  توانه په پام کې نيسو او همداسې له ټولو ثابتو تيرپرو (ټولې ثابتې پرېښول کېږي، صرف نظر تري کېږي) او بيا  $x$  لنډېږي. که ۱ په ډېر لوی مثبت (منفي) عدد ووبشل شي. نو  $\square\square$  تري لاس ته راځي.

څیره  $G_f$  پروت اسيمپټوت (مجانِب)  $y=0$  لري، چې له پورته او کښته ورنژدي کېږي.

دويم

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$$

- په صورت کې د  $x^2$  او په مخرج کې د  $x$  له ټولو توانونو په پام کې نيسو او له ټولو ثابتو تيرپرو ( صرفنظر تري کوو ) او بيا يې د  $x$  سره لنډوو. په روښانه توگه ټول پوله ارزښتونه  $\square\square$  لاس ته راځي.

څیره  $G_f$  مايله اسيمپټوتي راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د ۱ په اندازه ستره ده.

دريم :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2-2}{3x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

په صورت کې د  $x^2$  ټول توانونه په پام کې نيسو او له ټولو ثابتو تيرپرو او بيا يې د  $x^2$  سره لنډوو.

ټولې پولې په روښانه توګه  $-2/3$  راکوي.

څیره  $G_f$  پرته اسیمپټوت راکوي ، چې  $y = -2/3$  ده.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + 2x - 1}{3x^3 + 2x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2}{3x} = \frac{-2}{\pm\infty} = 0^\mp$$

څلورم :

په صورت کې د  $x^2$  څخه کوچنیو ټولو توانونو او په مخرج کې د  $x^3$  له ټولو کوچنیو توانونو او همداسې له ثابتو تېرېږو ( صرف د نظر پرې کوو ). که په ووبشل شي ، نو یو کوچنی مثبت یا منفي عدد یانې  $0^\mp$  ترې لاس ته راځي.

څیره  $G_f$  یو پروت اسیمپټوت  $y = 0$  لري، چې له پورته او کښته لور ورنزدې کيږي.

شمیرنیز حلونه

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2} =$$

دویم :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left( 1 - \frac{2}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{0^\pm}{1} = 0^\pm$$

په صورت او مخرج  $x^2$  له نوکانو ( قوسونو ) راوستني او بیا د  $x^2$  سره لنډوني وروسته مخرج د ۱ په لور ځي او صورت د  $+\infty$  په لور ، نو

ترمونه  $2/x$  او  $1/x$  و صفر ته نژدې کيږي.

څیره  $G_f$  یوه مايله اسیمپټوت لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په ۱ لویه ده.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 - 2}{3x^2 + 2x} =$$

دریم :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left( -2 - \frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \left( 3 + \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2 - \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{2}{x}} = -\frac{2}{3}$$

- که  $x^2$  له نوکانو راووبستل شي او بيا لاند شي، نو صورت د صفر په لور ځي يا صفر ته نژدې کيږي؛ مخرج ، ۱ ته نژدې کيږي، ځکه ټول ترمونه د او و صفر ته ځي په صورت فقط ترم د صفر مخخښه ټاکي.

څپره څپره اسيمپټوت لري له پورته او کښته نژدې کيږي سره.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + 1}{x^4 - 2x^2 + 2} =$$

څلورم:

په صورت او مخرج کي هغه د لوی توان  $x$  يعني  $x^4$  له نوکانو دباندي نيسو او بيا په ترتيب شمېرنيزه عمليه مخ ته بياوو ، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 \left( \frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)}{x^4 \left( 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^4}} = \frac{0^-}{1} = 0^-$$

ټوليز خوبونه :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1} = \pm\infty$$

اول :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( 3x - \frac{2}{x} \right)}{x \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{+\infty}{1} = +\infty$$



په پورته بیلگه کې داسې مخ ته تللي ی، چې په صورت کې له ټولو عددونو تیرېږو، چې د خپلواکي متحولې توان له ۱ کوچنی یعنی صفر وي او په صورت کې له ټولو آه ۲ څخه کوچنی توان څخه تیرېږو. گورو، چې په صورت کې پاتې کېږی، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي نابای په لور ځي.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2} = 0^{\pm} \quad \text{دویم :}$$

په پورته بیلگه کې په صورت کې له ۱ او مخرج کې له ۲ څخه تیرېږو او بیا صورت او مخرج په  $x$  ویشو، چې لاس ته رانه یې یو یې د یوه ثابت عدد وېشل وي په  $x$ . چې د  $x$  سره تابع و  $0^{\pm}$  ته ځي.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2-2}{3x^2+2x} = \quad \text{بیلگه ۳ : لرو :}$$

په صورت کې له ۲ او مخرج کې له  $2x$  څخه تیرېږو او د  $x^2$  سره لنډونې وروسته د  $x^2$  سره لنډیږي او په دې ډول لاندې پایله لرو :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2-2}{3x^2+2x} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2} = 0^{-} \quad \text{بیلگه ۴ :}$$

په صورت کې له ۱ او مخرج کې له اوو څخه تیرېږو او بیا له لنډونې وروسته یو ثابت عدد په ناپای وېشل کېږي، چې پایله یې  $0^{-}$  دی، یعنی لرو :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2} = 0^{-}$$

۱۹ . ۵ تمرینونه

۱ . د بلواکو پولی

۱ . ۱ لاندې پولی وټکی

1.1.1.a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x + 1}$

1.1.2.a)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{1 + x}$

1.1.3.a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 6}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

1.1.4.a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}}{1 - \sqrt{x + 1}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$

1.1.5.a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$

i)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{1 - \cot x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{1 - \sqrt{x}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{27 - x^3}{x - 3}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 + x}{32 + x^5}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 25} - 5}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \sin x \frac{\cos x}{x} \right)$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

$$k) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin \frac{\pi}{4}}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$$

۱.۲ په ورکړشو ځایونو کې د لاندې بلواکو کین او شمی یولی وټاکو

$$a) f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad \text{für } x = 0$$

$$b) f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad \text{für } x = 0$$

$$c) f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}} \quad \text{für } x = 1$$

$$d) f(x) = \frac{x}{1+e^x} \quad \text{für } x = 0$$

$$e) f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^x + 1} \quad \text{für } x = 0$$

$$f) f(x) = \frac{x}{2x + e^{x-1}} \quad \text{für } x = 1$$

$$g) f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}} \quad \text{für } x = 1$$

$$h) f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} + 3}{3^x + 2} \quad \text{für } x = 0$$

$$i) f(x) = \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x-1}}} \quad \text{für } x = 1$$

$$j) f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } x = 1$$

$$k) f(x) = \frac{x}{x+1} \quad \text{für } x = -1$$

$$l) f(x) = \frac{x+1}{|x+1|} x \quad \text{für } x = -1$$

۲ . ناپریکیدونکی بلواک : لاندې بلواک د کوم لپاره پریکیدونکی ځایونه لري، دا د کوم ډول ډک او که ممکن وي، په کومه توګه دا له منځه وړ اېکیدی شي.

$$a) y = \frac{|x-1|}{x-1}$$

$$b) y = \frac{x+2}{|x+2|} \cdot x$$

$$c) y = \frac{1-x}{1-|x|}$$

$$d) y = \frac{x+2}{x+2} + \frac{1}{x+1}$$

$$e) y = \frac{x-3}{\sqrt{1+x}-2}$$

$$f) y = \frac{x-4}{\sqrt{x-2}}$$

$$g) y = \sin \frac{1}{x}$$

$$h) y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$$

$$i) y = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$j) y = \frac{\sin x}{x}$$

$$k) y = x \cdot 2^{\frac{|x|}{x}}$$

$$l) y = \ln 2^{\frac{1}{x-1}}$$

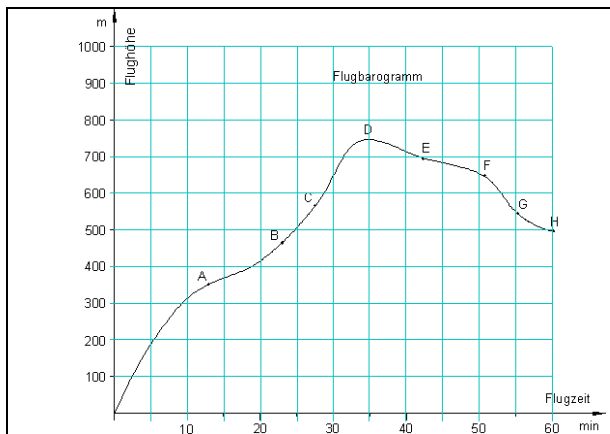
## ۲۰ . مشتقشمیرنه (رابیلیدنه)

### II.1. د تابع تغییر منح ارزښت (منحنی قیمت) Average rate of change

د کتاب په دې برخه کې موږ د ریاضیاتو یوه غوره برخه، چې د ریاضیاتو زری ورته ویلی شو، تر څېړنې لاندې نیسو، نو له دې امله لازم ګڼم، چې په دې هکله داسې مهم څه د یوه یادښت په څېر راوړم:

که له یوه ځای څخه بل ځای ته د تابع د تغییر منح ارزښت  $\text{Average rate of change}$  څخه غږیږو، نو موخه ترې په یوه ټکي یا دوه ټکو کې د تابع جگوالی، میل او یا تانجنت دی او دا درېوآره کلمې د ریاضیاتو له مخې په همغه یوه معنا دي او و به ګورو، چې همداسې د تفاضل وېش (Difference quotient) هم.

په یوه ټکي کې د تابع د ګراف میل (جګوړه)



په الوتکو کې د الوتنې دلیک (الوتنلیک) الی (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل د الوتنې جگوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت تابعیت کې رسموي او په هر جگوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پښتو واورو، نو د لیک بکس به ورته ووايو.

په پورته گراف کې د يوي الوتکې د الوتنې د بيلا بيلو وختونوجگوالی بنوول شوی.

-ايا فکر کوی، چې په ټکي B کې نسبت و ټکي A ته جگوالی زیات دی؟

-ايا فکر کوی، چې د E او G په ټکو کې جگوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جگوالی زیات دی نسبت د G ټکي ته؟

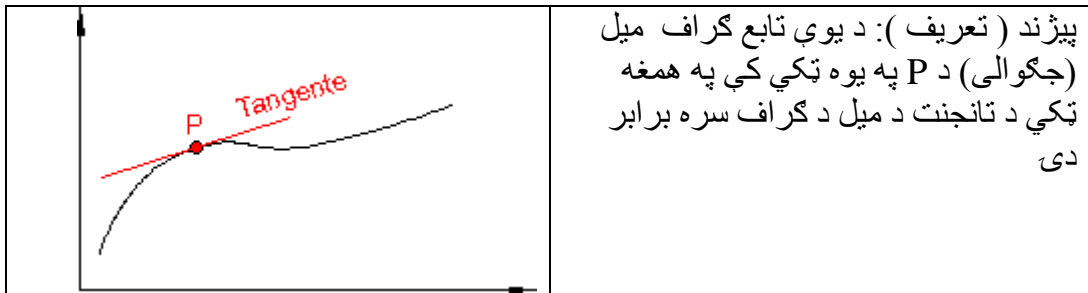
-ايا د يوي کرښې او منحنې جگوالی هرچېرته توپير لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه :

۱ - گورو، چې په يوه منحنې کې د گراف جگوالی هرچېرته برابر نه دی، نو له دې امله بايد ټکی په گوته کړو، چې هلته ميل څپرل کيږي.

۲ - په لاندي بيلگه کې به روښانه کړو، چې تنها د يوي (سيده)کرښې ميل هرچېرته برابر دی، نو له دې امله دلته د يوي کرښې د ميل يا جگوالي څخه غږيږو.

بريښي چې لاندي پيژند يا تعريف عاقلانه دی:

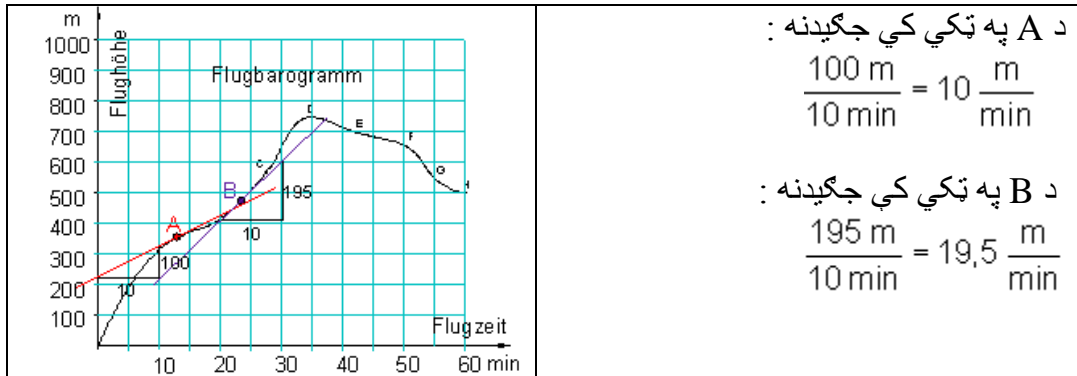


ليدل کيږي چې دلته يو تانجنټ د کرښې تعريف لري، چې د لمستکي(مماس) په چاپېريال کې د امکاناتو سره سم لمستکي(مماس) ته ښه وړ نږدې کيږي.

ددې پيژند يا تعريف له مخې په يوه ټکي کې د يوه گراف ميل د يوي کرښې ميل دی.

د گراف د جگيدني ټاکلو لپاره د A او B په ټکو هر يوه کې يوه کرښه (تانجنټ) انځوروو، چې گراف ته خورا زیاته نږدې کيږي.

د ميل يا جگيدني مثلث په مرسته جگيدنه په شډل يا ساده ډول شميرل کېدی شي:



زموږ د بیلگې لپاره میل یا جگیدنه په یوه ټاکلي ټکي کې د لحظوي (سملاسي) میل د چټکتیا (سرعت) په معنا دی.

د A په ټکي کې : د الوتنې وخت نږدې 12,5 min ، د میل یا جگیدني چټکتیا (سرعت)

$$\text{نږدې } 10 \frac{\text{m}}{\text{min}} \text{ ده}$$

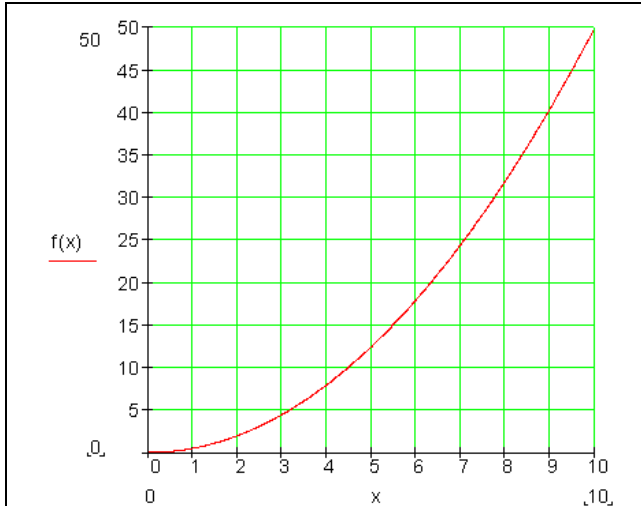
د B په ټکي کې : د الوتنې وخت نږدې 23,0 min ، د جگیدني چټکتیا (سرعت) نږدې

$$19,5 \frac{\text{m}}{\text{min}} \text{ ده.}$$

تانجنت تر اوسه فقط د لیدني له مخې تعریف شوی ، چې د لمستکي چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د گراف میل د A او B په ټکو کې هم یواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی.

## II.2 په یوه ټکي کې د تابع دگراف میل (جگیدنه):

معلومه ده ، چې یو ریلگادی د تمخای څخه له خوزېدو (حرکت) وروسته خپله چټکتیا (سرعت) په ورو ورو (کراره کراره) زیاتوي. وهلي لار (د تمخای څخه لږوالی) تل زیاتېږي. د تمخای څخه لږوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کې ده .



دا عمل د لاندې تابع مساوات له لارې لیکلی شو.

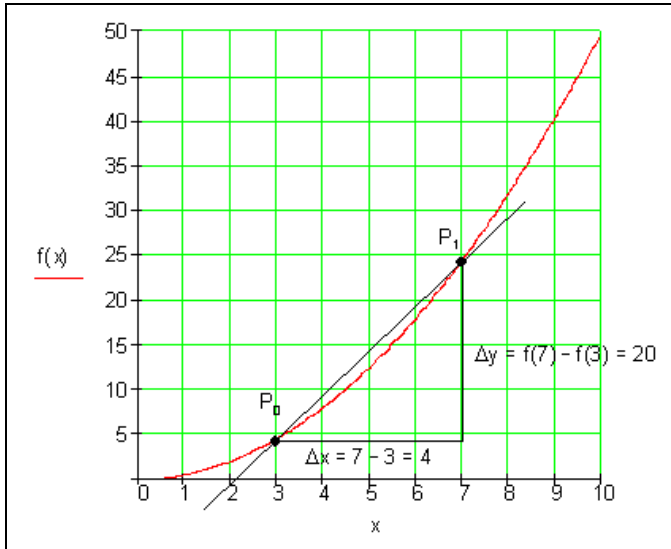
دلته د  $x$  وخت د ثانیه او د  $s$  لار د متر لپاره لیکو

$$s = f(x) = 0,5x^2$$

مخامخ : د تابع گراف

اوس باید منځنی ارزښت (منځنی جگوالی) **Averagerat of change** د ۳-مې او ۷-مې ثانیه ترمنځ وشمیرل شي.

ددې لپاره اړونده سیکانټ انځور و او د هغې جگوالی شمیرو.



اوس دې د تغیر ارزښت (منځنی جگوالی) د ۳-مې او ۷-مې ثانیه ترمنځ وشمیرل شي.

په دریمه ثانیه کې د ارزښت تغیر یا جگوالی څومره دی؟

د منځنی جگوالی داسې مخ ته بوزی، چې د  $P_0$  او  $P_1$  ترمنځ واټن تل کوچنی شي، داسې چې  $P_1$  د  $P_0$  په لور وځویږي.

د ۳-مې او ۷-مې دقیقې ترمنځ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \frac{24,5 - 4,5}{7 - 3} = \frac{20}{4} = 5$$

منځنی تغیر ارزښت (جگوالی) دی:

د ۳-مې او ۴-مې دقیقې ترمنځ

منځنی تغیر ارزښت (منځنی جگوالی) دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{8 - 4,5}{4 - 3} = \frac{3,5}{1} = 3,5$$

دریمې دقیقې ته د ورنزدې کیدنی شمیرنه

Intervall [3; x]	[3; 4]	[3; 3,1]	[3; 3,01]	[3; 3,001]
$\Delta x = x - 3$	1	0,1	0,01	0,001
$\Delta y = f(x) - f(3)$	3,5	0,305	0,03005	0,0030005
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3,5	3,05	3,005	3,0005

پورته شمیرنه په گوته کوي، چې که ټکی  $P_1$  د ټکي  $P_0$  په لور وخوزیږي یا ورنزدې شي، نو د تغیر ارزښت (جگوالی) تل زیاته و ارزښت ۳ ته ورنزدې کیږي.

موږ په دې توگه یو ارزښت لاس ته راوړو، چې لحظوي تغیر ارزښت (لحظوي جگیدنی) ته تل ورنزدې کیږي.

که موږ فیزیکی لویي (واحدونه) په خپله بیلگه کې وکاروو، نو د تغیر ارزښت (جگوالی) لپاره m/s باور لري. دا د چټکتیا لپاره یوون (واحد) دی

دا په دې مانا دی، چې د لار-وخت دیاگرام چټکتیا (سرعت) په گوته کوي.

## II.3 د لحظوي (د سترگو رپ) تغیر ارزښت شمیرلو ته

شمیرنیزه تگلار



د  $f(x) = 0,5x^2$  لپاره په اینتروال  $[3; \Delta x]$  کې منځنی تغیر ارزښت جگوالی:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{0,5(3+\Delta x)^2 - 0,5 \cdot 3^2}{\Delta x} = \frac{0,5[9+6\Delta x + (\Delta x)^2] - 0,5 \cdot 9}{\Delta x} \\ &= \frac{0,5 \cdot 9 + 3\Delta x + 0,5(\Delta x)^2 - 0,5 \cdot 9}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3+0,5\Delta x)}{\Delta x} = 3 + 0,5\Delta x \end{aligned}$$

دا  $3 + 0,5\Delta x$  د منځنی تغیر ارزښت دی

که اوس  $\Delta x$  تل کوچنی شي، مورن وایو که  $\Delta x$  د صفر په لور وهڅیږي (  $\Delta x \rightarrow 0$  )، نو د منځنی تغیر ارزښت  $3 + 0,5\Delta x$  د 3 به لور هڅیږي.

دا نو اوس لحظوي (د سترگو رپ) تغیر ارزښت دی د  $x_0$  په ځای کې.

د دې لپاره لیکو:  $\Delta x \rightarrow 0$  لپاره باور رې:  $3 + 0,5\Delta x \rightarrow 3$

یا

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3 + 0,5\Delta x) = 3$$

## II.4 کمښت ویش (د تفاضل (?)) ویش (Difference quotient)

په ورته توگه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش (Difference quotient) تر څېړنې لاندې نیسو.

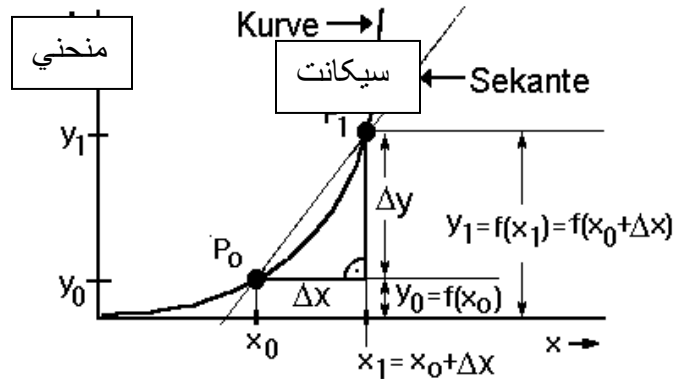
د یوې کرښې میل یا جگیدنه بې له مشتق نیونې ټاکل کېدی شي:

کرښه  $y=f(x) = mx+a$  لرو

د دې کرښې د جگیدني فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د قاطع ( secance ) پیژند : قاطع هغه کرښه ده، چې منحنی د  $P_0$  او  $P_1$  په دوه ټکو کې غوڅوي (لاندې څیره وگورئ)



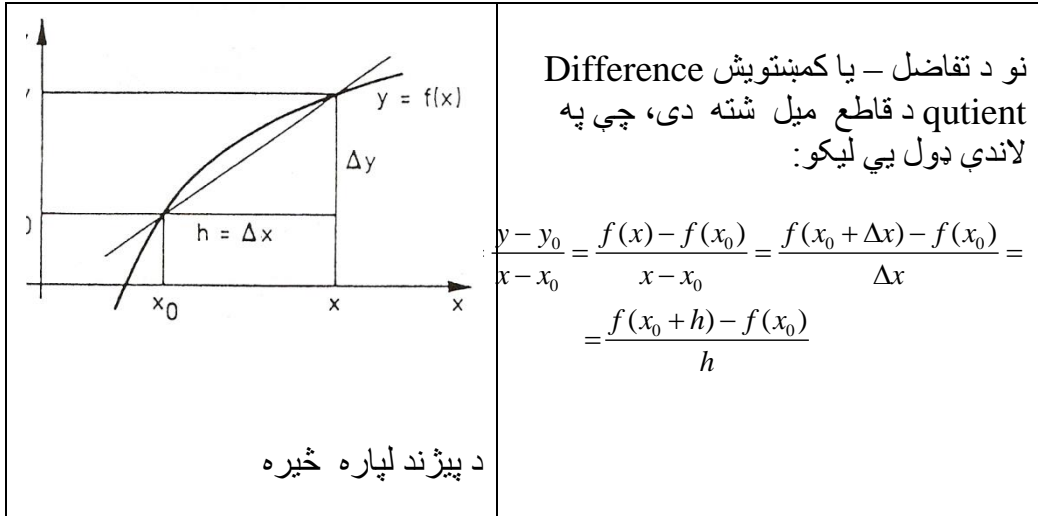
پایله : د قاطع (غوڅوونې secant) میل یا جگیدنه (جگوالی) : دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو ،،میل (جگوالی) ،، یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمېرل کېږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

**پیژند (تعریف)**

د  $y = f(x)$  تابع دې د  $x_0$  په یوه چاپیریال او په  $x_0$  کې پخپله تعریف شوي تابع وي،  $x$  د  $x_0$  څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی (مخامخ څیره دي وکتل شي).



د  $f$  تابع لپاره فرمول:  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ . دا فرمول د  $f$  په گراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمېرنه ده. دا ټکي د  $x$  او  $x+h$  ټکي دي. د کمبت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.

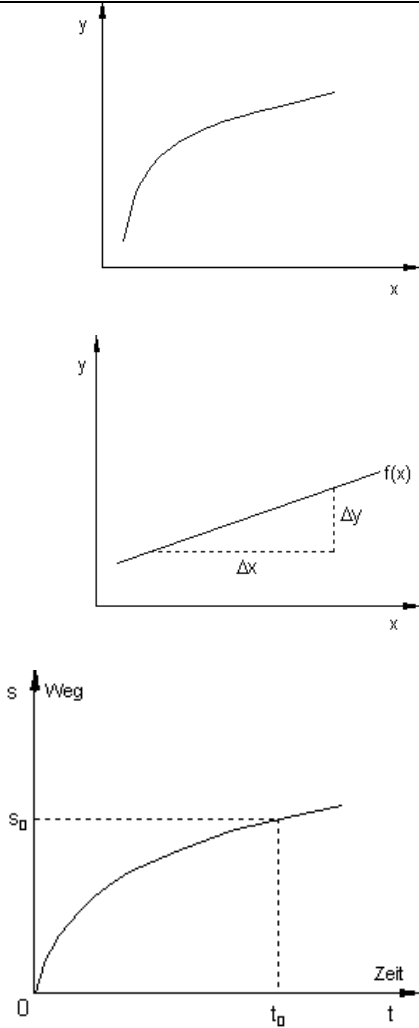
بیلگه:

د  $y = f(x) = 3x^2 - 5x + 4$  تابع دې ورکړ شوي وي. د دې تابع کمبت ویش (د تفاضل

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{3(x+h)^2 - 5(x+h) + 4 - (3x^2 - 5x + 4)}{h} \\ &= \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 4 - 3x^2 + 5x - 4}{h} \\ &= \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h} \\ &= 6x + 3h - 5 \end{aligned}$$

وېش) پیدا کړئ.

## II.2.1 د غوڅوونې (تقاطع) جگوالي څخه و د تانجنت جگوالي یا جگیدني ته



یو تابع  $y = f(x)$  او اړونده گراف دې ورکړ شوی وي.

که د تابع جگیدني حالت په پام کې ونیسو، نو گورو چې د تابع جگیدنه په نزدې ټولو ټکو کې توپیر لري.

یوه ثابت جگیدنه، لکه په لانیز تابع  $f(x) = a_1x + a_0$  کې د

$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{konstant}$$

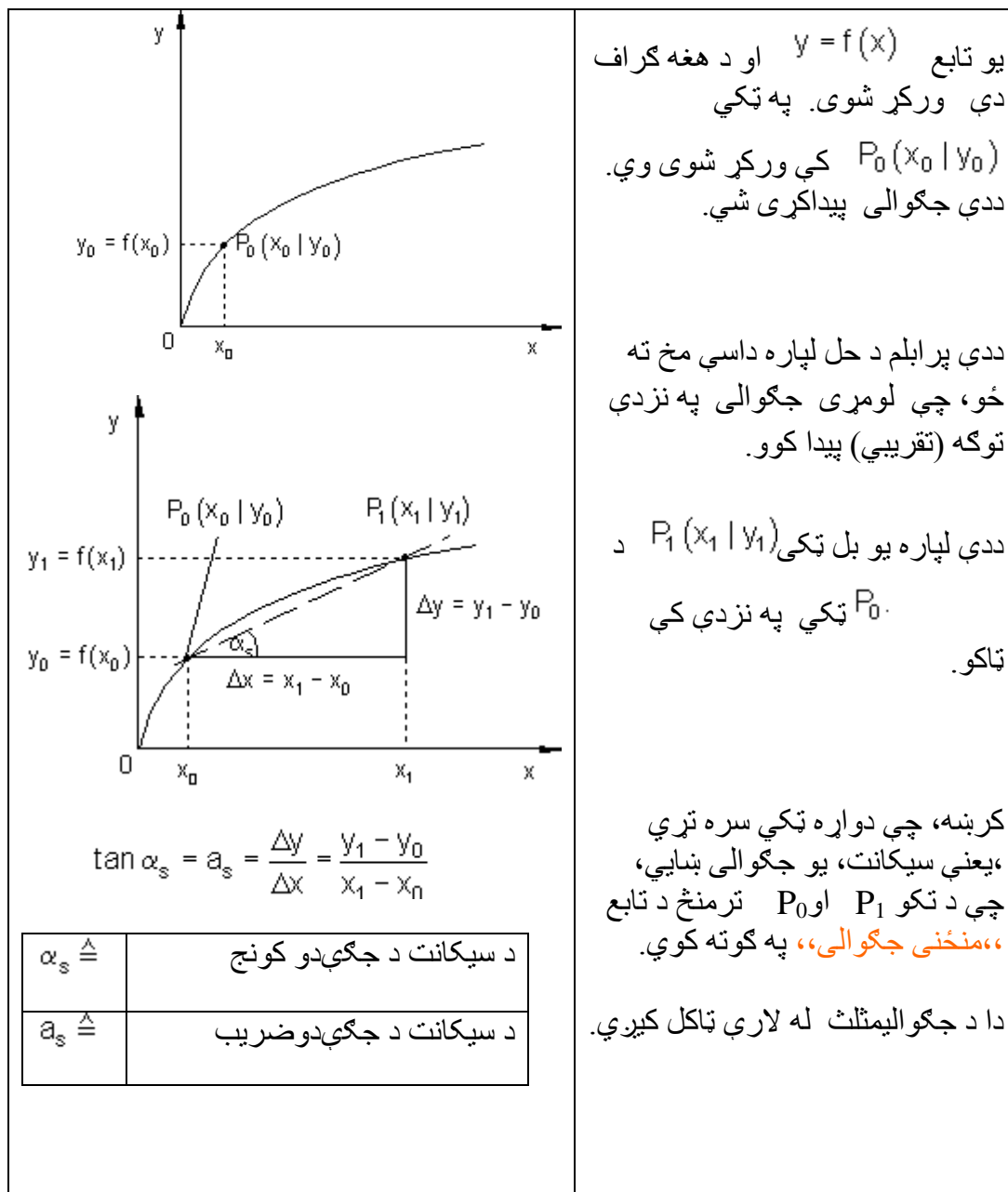
په زیاتو وختونو اړینه ده، چې د تغیر حالت (د جگیدني حالت) کې د تابع د تلني حالت وڅیرو.

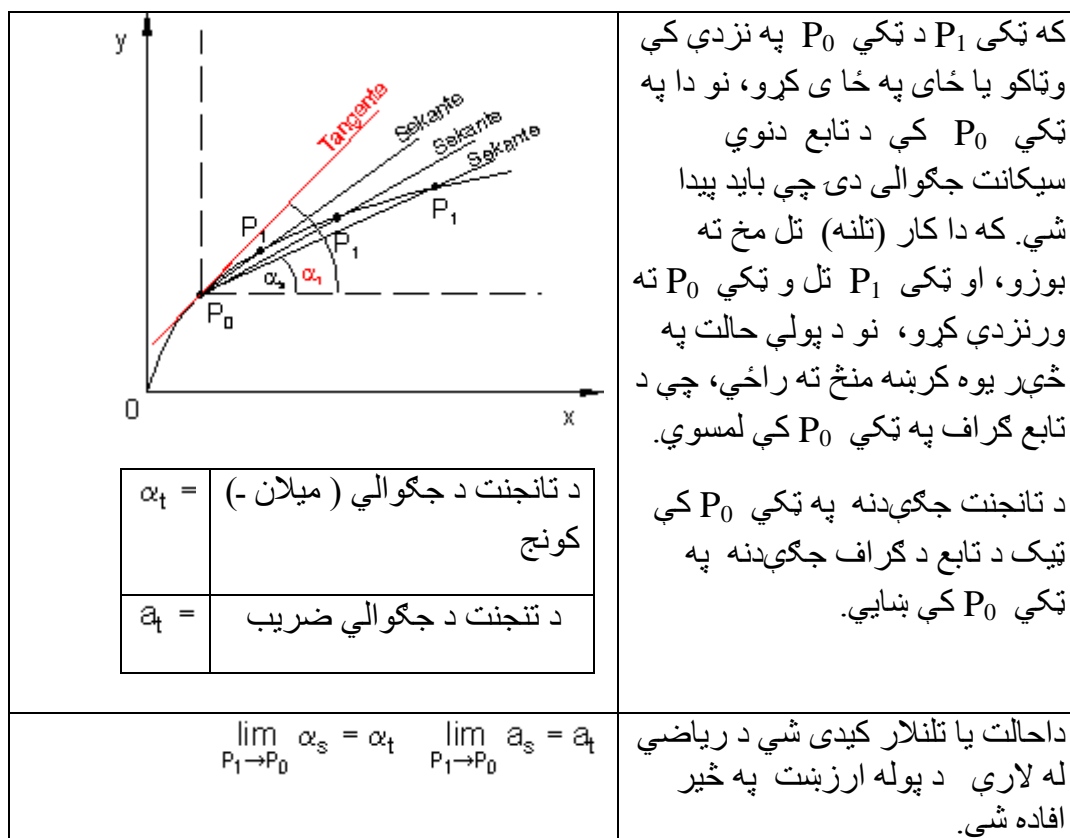
نوله دې امله لحظوی چټکتیا (همغه وختیزه - یا سملاسي)  $v(t_0)$  په لار- وخت دیاگرام کې وڅیرو.

د مشتقشمیرني په مرسته دا پرابلم حل کیدی شي.

د یوه تابع د جگیدني ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې **differenzieren** د مشتق نیونه بلل کیږي.

$t_0 \triangleq$	په پام کې نیولی سترگو رپ
$s_0 \triangleq$	تر دې سترگو رپ پورې وهلي لار





## II.2.2. کمینتویش او مشتق Difference quotient and differentialquotien

د سیکانت جگیدنه ( منحنی تغیر

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

ارزښت)

د  $x$  لپاره د مساوات ښی خوا ځای په ځای کوو

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

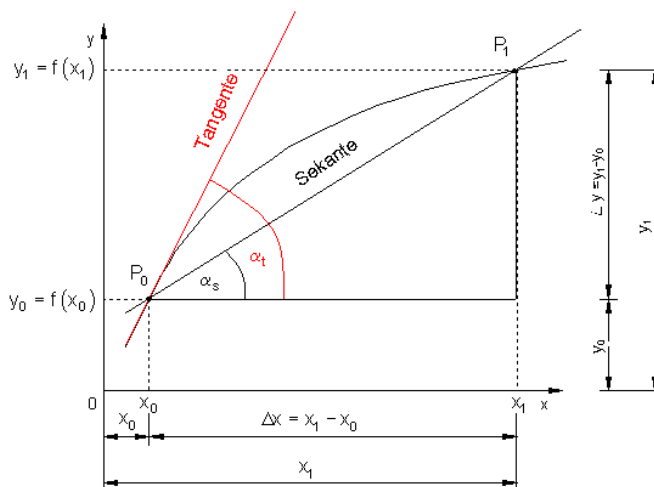
د تنجنت جگیدنی سره د حد (پوله ارزښت) له لاري لرو

$$a_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

دا مشتق یا لحظوي - یا د سترگورپ تغیر ارزښت دی

$$a_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

یا لنډ:



په ورته توگه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څیرني لاندې نیسو:

د یوې کرښې میل یا جگیدنه یې له مشتق نیوني ټاکلکیدی شي.

کرښه  $y = f(x) = mx + a$  لرو.

د دې کرښې د جگیدني فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

## II.6 د غوڅوونې (قاطع second) پیژند:

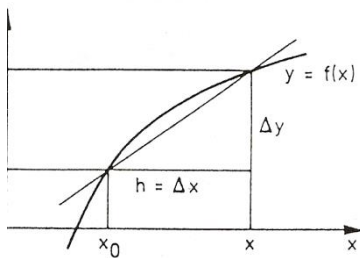
قاطع هغه کرښه ده، چې منحنی د  $P_0$  او  $P_1$  په دوه ټکو کې غوڅوي.

پایله: د قاطع میل یا جگیدنه (جگوالی secant): دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو میل (جگوالی) یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمېرل کېږي.

په لاندې کې  $m_s$  د جگوالی لپاره لیکل کېږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د پیژند لپاره څیره

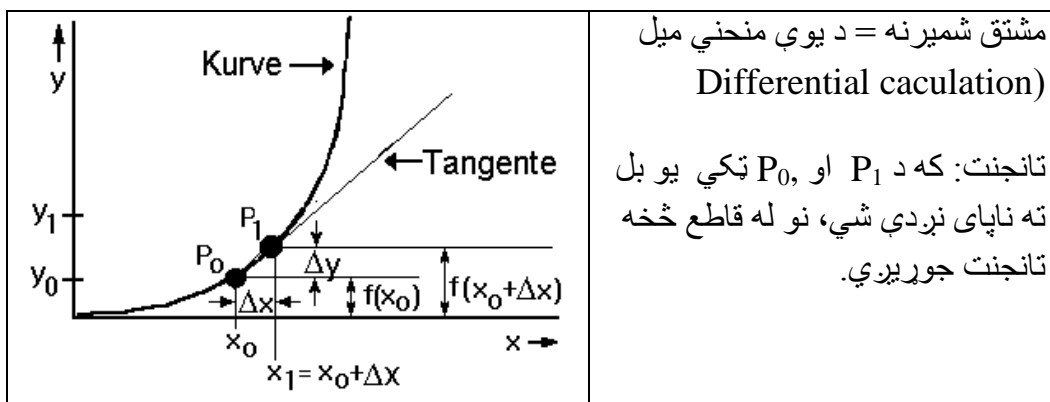


پیژند (تعریف): د  $y = f(x)$  تابع دې د  $x_0$  په یوه چاپیریال او په  $x_0$  کې پخپله تعریف شوي تابع وي،  $x$  د  $x_0$  څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوبښه یا په زړه پورې ځای دی (مخامخ څیره دې وکتل شي). نو د تفاضل یا کمښتویش Difference quotient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$



د  $f$  تابع غوڅي ميل لپاره فرمول:  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  . دا فرمول د  $f$  په گراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د ميل شمیرنه ده. ټکي د  $x$  - محور باندې د  $x$  او  $x+h$  ټکي دي. د کمښت وېش يا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعريف لپاره په کار راځي. د يوه تابع د ميل يا جگیدني ټاکنه په يوه د مخه ورکړ شوي ځای کې د تابع د مشتق نيونه بلل کيږي.



پایله : د تانجنت جگیدنه : د تانجنت جگیدنه د قاطع د جگیدني ، حد ، دی.

$$m_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

پام: لکه د مخه مو چي گوته ورته ونيوله، د derivative کلمه نوي ده، نو له دې امله دا څو ټکي په پام کې نيسو : derivative د رابیلیدني په مانا دی، چي موږ يې تراوسه مشتق بولو، چي همدا معنا لریيعنط له اشتقاق سره تړاو لري.

تعريف: که د تابع دا کمښتویش (د تفاضل وېش)  $x > x_0$  او (همداسي)  $(x > 0)$  او يا په (همدې ډول)  $(x < 0)$

$h > 0$  لپاره یو حد ولري، نو د  $y = f(x)$  تابع د  $x = x_0$  په ځای کې د مشتق قابلیت لري او د دې لپاره لیکو:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} &= f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}; \dots \end{aligned}$$

دا حد یا پوله داسی بنایو

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{x=x_0} = f'(x):$$

د  $x_0$  خای کی د  $y = f(x)$  تابع له مشتق (Derivativ) یا رایلیدنی) څخه یوه بله سیده یا بل ډول کږه لار رایلله وو.

د مشتق ساده شمیرنی لپاره یوه بیلگه:

د  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  مشتق غواړو پیدا کړو.

ددې کمبنتوېش په لاندې ډول دی:

$$\begin{aligned} \frac{y - y_0}{x - x_0} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{((x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 2) - (x_0^2 - 3x_0 + 2)}{\Delta x} \\ &= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3x_0 - 3\Delta x + 2 - x_0^2 + 3x_0 - 2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x} \\ &= 2x_0 + \Delta x - 3 \end{aligned}$$

او د لیمیت  $\Delta x \rightarrow 0$  سره یې مشتق لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x - 3) = 2x_0 - 3.$$

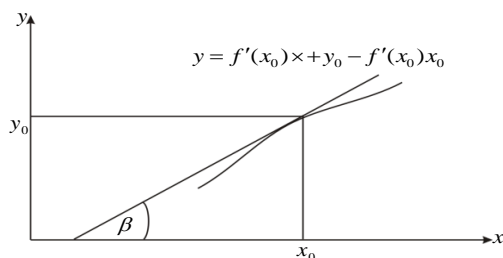
د دې لپاره دا لاندې پیژند ورکړو:

پیژند 2:

که یو د  $y = f(x)$  تابع د  $x_0$  په ځای کې مشتقوړوي، نو هغه لاندې کرښه چې د  $(x_0, y_0)$  ټکي څخه تیرېږي او میل یا جگوالی یې  $f'(x) = \tan \beta$  دی په لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$$

او دا د  $(x_0, y_0)$  په ټکي کې د ورکړ شوي منحنی  $y = f(x)$  تانجنت بلل کېږي (پرته له مخامخ شکل)



مور اوس د څو بنسټيزو توابعو مشتق شمیرنه تر څیرني لاندې نيسو.

بیلگه ۱:

د یوې ثابتې مشتق:

مور د لاندې تابع لرو، چې ارزښت یې یو ثابت دی  
 $y = f(x) = c = \text{Const}$  ثابت

نو د هر  $x_0$  ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = 0$$

بیلگه ۲:

یوه  $f(x) = x$  خطي (کرښیزه) تابع لرو.

د  $x_0$  په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} & \Rightarrow f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1 \end{aligned}$$

نو  $f'(x_0) = 1$  د  $x_0$  په ځای کې د تابع مشتق دی او  $f'(x_0) = 1$  د مشتق تابع ده یعنې یوه ثابته ده.

بیلگه ۳ : د  $y = f(x) = c \cdot u(x)$  ډوله تابع مشتق د  $c =$  ثابتې سره.

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د (ثابتې  $c =$ ) سره ضرب شوی وي. یعنې

له  $y = f(x) = c \cdot u(x)$  څخه لرو:

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

ثبوت:

$f(x_0) = c u(x_0)$ $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c \cdot u(x_0 + \Delta x) - c \cdot u(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} c \cdot \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{c}_{c} \cdot \underbrace{\frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$ $\Leftrightarrow f'(x_0) = \underline{\underline{c \cdot u'(x_0)}}$
---	---

پیژند (تعریف): دفرنځیالوېش

Der Differentialquotient  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$   
 heißt Ableitung der Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x_0$

د  $x_0$  په ځای کې د تابع  $f(x)$  مشتق یا رابیلیدنه بل کیري

تعریف (پیژند): د تابع لومړی مشتق یا رابیلیدنه د  $x_0$  په ځای کې د تانجنت جگېدنه ورکوي، چې د تابع گراف یې په ټکي  $P_0(x_0, y_0)$  کې لمسوي او له دې سره غیرگ د تابع د گراف جگېدنه ده په ټکي  $P_0(x_0, y_0)$  کې. دا سړی د تابع جگېدنه هم بولي.

تانجنت جگېدنه په ټکي  $P_0(x_0, y_0)$  کې

Tangentensteigung in  $P_0(x_0 | y_0)$

$$a_t = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د  $x_0$  په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

د  $x_0$  په ځای کې د تابع مشتق یعنی څه؟

ددې د روبښانه ونې لپاره د لاندې بیلگې څخه کار اخلو

بیلگه:

تابع  $y = f(x) = x^2$  دې ورکړ شوی وي.

غواړو د  $x = x_0$  په ځای کې او په ځانگړې توگه د  $x_0 = 2$  په ځای کې د هر څه لومړی

کمښتویش (د تفاضل وېش) پیداوو.

$x = x_0 :$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$
---	---

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لاری د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو  $f'(x_0) = 2x_0$  لرو او د  $x_0 = 2$  لپاره  $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$  باور لري.

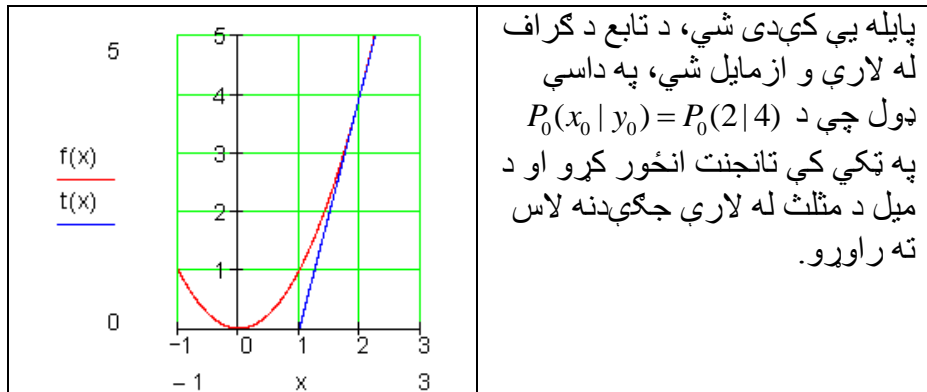
د په ځای کې د تابع لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د په ځای کې میل یاجگوالی 4 لري.

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لاری د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

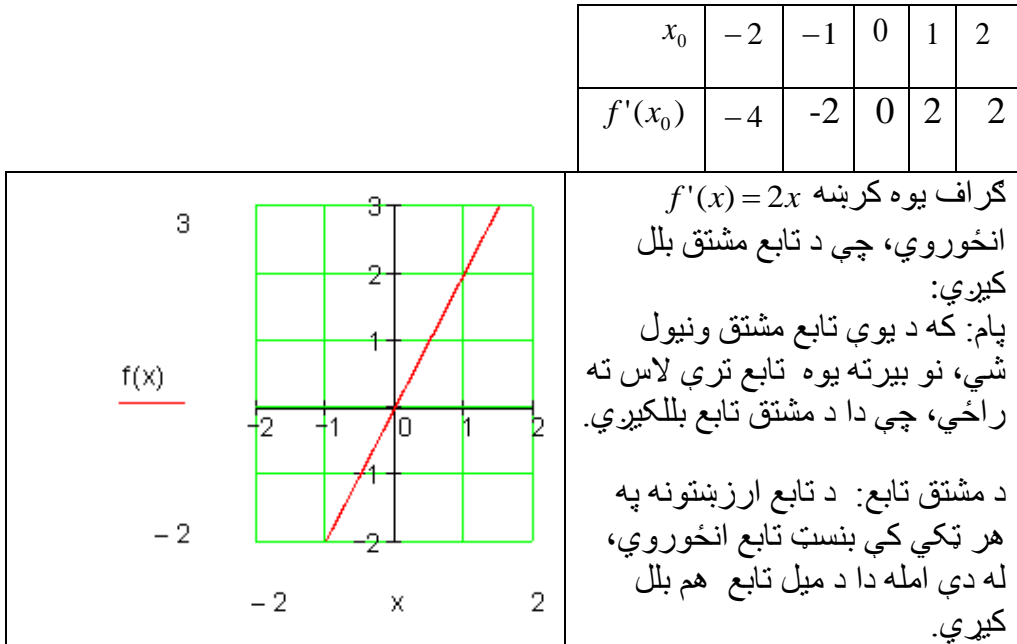
نو  $f'(x_0) = 2x_0$  لرو او د  $x_0 = 2$  لپاره  $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$  باور لري.

د  $x_0 = 2$  په ځای کې د تابع  $y = f(x) = x^2$  لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د  $x_0 = 2$  په ځای کې میل یاجگوالی 4 لري. لاس ته راوړنه یې:



لکه پورته بېلگه کې:  $y = f(x) = x^2$  په هر خوښه ځای  $x_0$  کې تابع پیداوو:

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$$



بیلگه: د  $f(x) = x^3$  تابع دې ورکړ شوی دی.

فعالیت: گران لوستونکي دې د  $f(x) = x^3$  تابع او د تابع د مشتق گراف وروسته له حله رسم کړي.

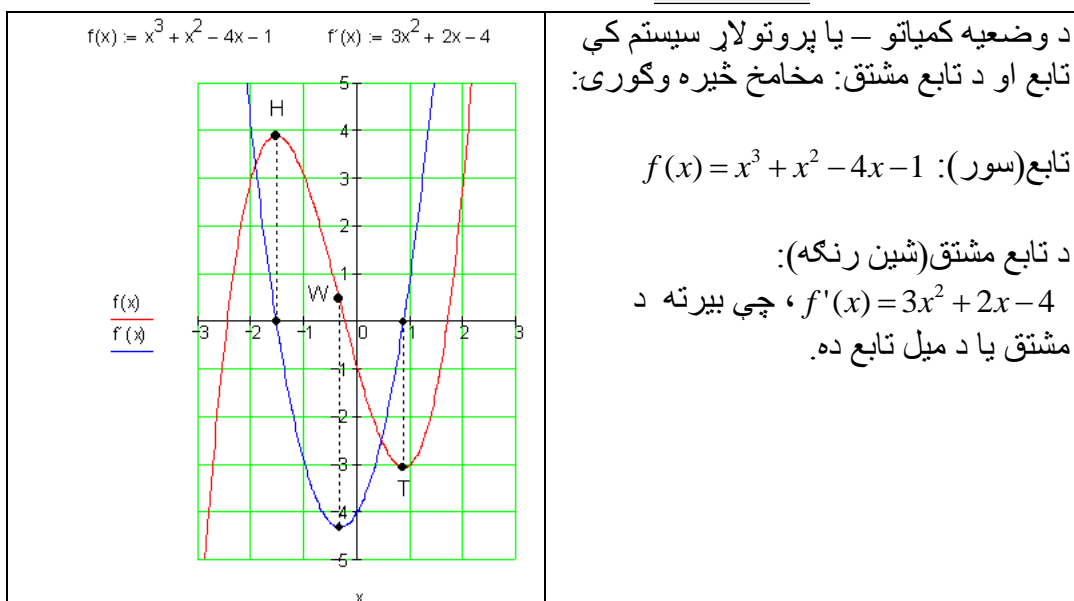
مور غواړو په  $x_0$  ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} & \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x (3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2$$

نو  $f'(x_0) = 3x_0^2$  د تابع  $f(x) = x^3$  مشتق دی په خای یا ټکی  $x_0$  کې.

د مشتق تابع داسې ده:  $f'(x_0) = 3x_0^2$



بیلگه ۴ : یوه تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  دې ورکړ شوی وي.

د  $x_0$  په خای کې د تابع مشتق پیدا کړئ او د مشتق تابع.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}) \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$



نو  $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$  د  $x_0$  په خای کې د پورته تابع مشتق دی

او د مشتق تابع ده  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

د شمیرني په بنسټ مو تر اوسه دا لاندې تر لاسه کړي:

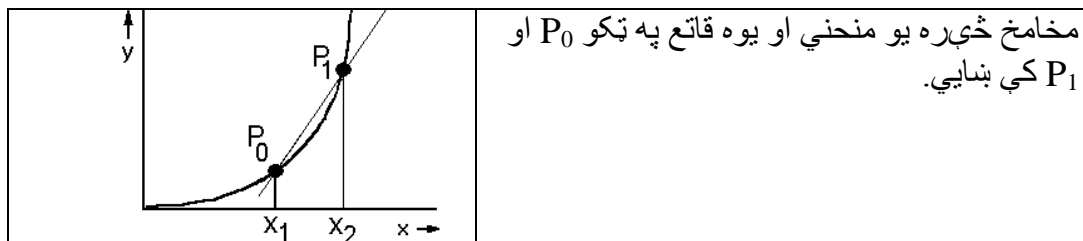
تابع	د مشتق تابع	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$f'(x) = 1 \cdot x^0$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2 \cdot x$	$f'(x) = 2 \cdot x^1$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f'(x) = -x^{-2}$
$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

که دا پورته پنځه قوانین یو د بل سره پرتله شي، نو کومان ترې لاس ته راځي، چې دا لاندې قوانین به باور ولري.

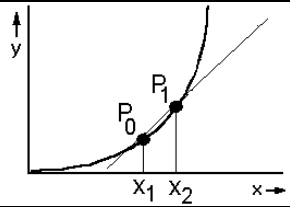
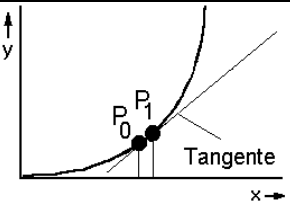
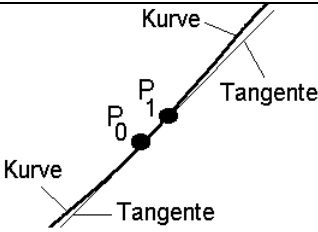
$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

بیلگه:

د تانجنت تعریف او خوږونه:



مخامخ څیره یو منحنی او یوه قانع په ټکو  $P_0$  او  $P_1$  کې ښايي.

	<p>اوس غوارو، چې ټکی <math>P_0</math> د ټکي <math>P_1</math> په لور و خوځيږي.</p> <p>پام: ددې سره قاطع خپل ميل تغيروي</p>
	<p>بالاخره غوارو، چې <math>P_1</math> ټکی و <math>P_0</math> ټکي ته ناپای ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کيږي</p>
	<p>چې دا پوره وپيژندلی شو د ټکو <math>P_1</math> او <math>P_0</math> په شاوخوازوو يا لويه وو:</p> <p>که د <math>P_1</math> ټکی و <math>P_0</math> ټکي ته ناپای نږدې شي، نو کتل کيږي، چې تانجنت په ټکي <math>P_0</math> کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحنې په <math>P_0</math> ټکي کې.</p>

د دې خويونو غوره غوره والی يا لاس ته راوړنه (پايله):  
 ومو ليدل، چې د تانجنت ميل په  $P_0$  ټکي کې په همدې ټکي کې د منحنې ميل هم دی. له دې دا پايله لرو، چې که څوک غواړي د منحنې ميل په  $P_0$  ټکي پيدا کړي، بسيا کوی، چې د تانجنت جگوالی يا ميل په  $P_0$  ټکي کې پيدا کړي.

### د تانجنت او عمود عمومي فرمولونه:

پيل: تانجنت دې د  $f(x)$  گراف د  $(x_0, f(x_0))$  په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د  $f(x)$  گراف د په  $(x_0, f(x_0))$  ټکي کې عمود يا ولاړ غوڅ کړي.

د تانجنت مساوات:

د سره ليکو:

دا چې  $(x_0, f(x_0))$  تانجنت يو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot x + b_t = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لږ:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0) \\ = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال):

د منحنی سره په همغه ټکي کې چې تانجنټ په پروت دی، عمود ځغلي.  
د عمود میل:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)} \\ \Rightarrow n(x) = \underline{\underline{-\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)}}$$

بیلگه:

$$د \quad f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \quad \text{تابع لرو.}$$

د تابع تانجنټ او عمود (نورمال) پیدا کړئ:

حل: په لاندې توگه د تابع مشتق نیسو او گراف یې (څیره لاندې کینل شوي) کارو:

$x$	-4	-1	0	1.5	3
$f'(x)$	4	2.5	2	1.25	0.5

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad \text{لرو:}$$

د تانجنټ میل په ټکي  $x_0$  کې د میل ارزښت 3 لري.

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2 \cdot (-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د  $P(-2, -5)$  په ټکي کې تانجنټ په  $f(x)$  باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad , P(2, f(2))$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د  $x_0 = 2$  په ځای کې دا لاندې لرو:

.

$$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \quad f'(2) - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x-2) + 3 = x - 2 + 3 = \underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x, \quad P(2 | f(2))$$

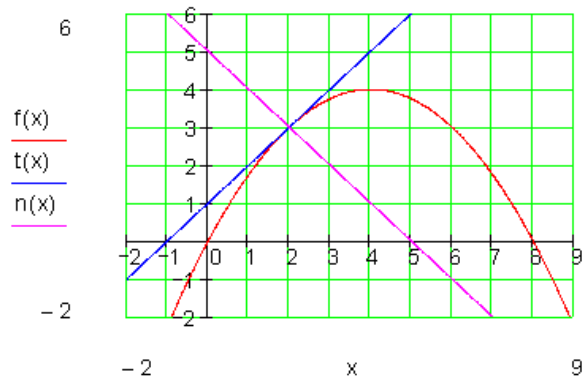
$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

د  $x_0 = 2$  سره لاندې راځوي:

$$n(x) = \frac{1}{f'(2)}(x - 2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \quad f'(2) - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x - 2) + 3 = -x + 2 + 3 = \underline{\underline{-x + 5}}$$



د تانجنت او عمود عمومي مساوات

بیلگه: تابع  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$  لرو.

د تانجنت میل: د یوه تابع د گراف میل په ټکي  $P(x_0 | f(x_0))$  کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل. مور  $f(x)$  تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

$$\text{مور د تابع مربع لرو } f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

$$\text{د تابع مشتق } f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

ارزبنتجدول:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د  $f(x)$  ارزبنتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککړی ټکی دی:

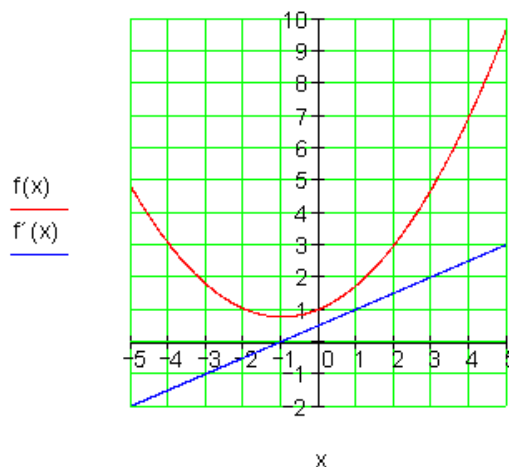
$$S(-1, 0.75) \text{ د } x = -1 \text{ ارزبنت لپاره } f'(-1) = 0 \text{ د میل تابع ارزبنت دی:}$$

دا دا معنی لري، چې په ککړی ټکي کې د  $f'(x)$  میل صفر دی.

تانجنت په  $s$  کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت (افقي) ځغلي؛ یعنی د  $-x$  محور سره غبرگ ځغلي.

گرافونه:

$$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \quad f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



$$\begin{aligned}
 & \text{بیلگه: تابع لرو: } f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 7 \\
 & \text{تانجنت دې پیداکړی شي، چې د } f(x) \text{ گراف د } P(-2, f(-2)) \text{ په ټکي کې لمسوي،} \\
 & f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 7 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 14x + 1 \quad P(-2 | f(2)) \Rightarrow x_0 = -2 \\
 & t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\
 & f'(x_0) f'(-2) = 24 - 28 + 1 = -3 \\
 & f(x_0) = f(-2) = -16 + 28 - 2 - 7 = 3 \\
 & \Rightarrow t(x) = -3(x + 2) + 3 = -3x - 6 + 3 = \underline{\underline{-3x - 3}}
 \end{aligned}$$

لاس ته راورنه (پایله):

د  $f(x)$  تابع گراف کې تانجنت او عمود په  $P(x_0, f(x_0))$  ټکي کې لاندې بڼه لري.

$t(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{جگیدنه}}(x - x_0) + f(x_0)$ <p>د تانجنت مساوات</p>	$n(x) = \frac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جگیدنه}}}(x - x_0) + f(x_0); \quad f'(x_0) \neq 0$ <p>د عمود مساوات</p>
--	--

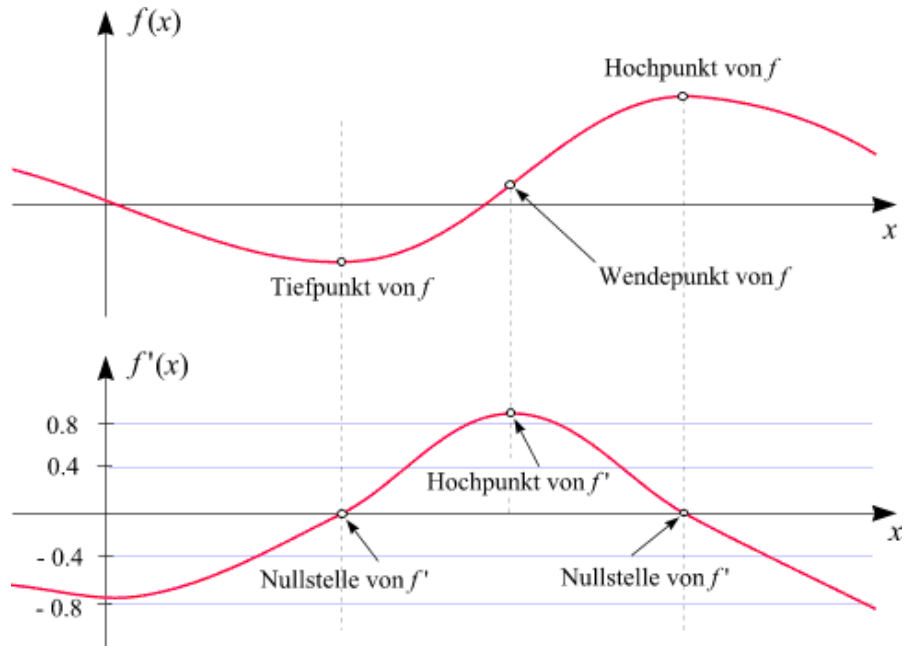
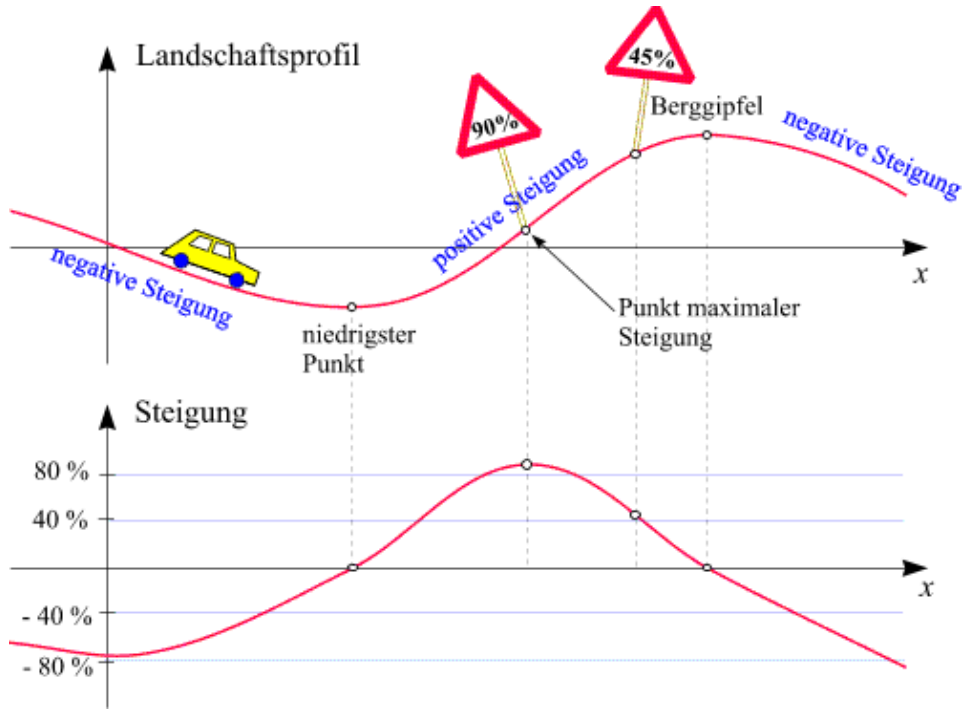
### Steigungen in der Landschaft په بیدیا کې جگوالی

لاندې د د تابع گراف د سرک په څیر په فکر کې راولو، چې په بیدیا کې جگ او ټیټیری یا

کښتپورته خُغلي، نو په بڼه توگه یې رسمولی شو، چې د گراف خویونه د مشتق سره په اړیکو کې راځي:

دپورته څیرو پښتو: له کین لور کښته بڼي لور ته: بیدیا یا کرونده، منفي جگوالی، جگوالی، (بله کرښه) خورا ټیټ ټکی، (شي لور ته بله کرښه) مثبت جگیدنه، (پسي کرښه) د غره څوکه، د خورا جگي جگیدني ټکی، (اخره) کمیز یا منفي جگیدنه.

د سرک کښته یا لاندې لور ته د ځانگړي دیاگرام سره د سرک جگیدنه په هر ټکي کې انځور ده، د کومی سره چې یوه دویمه منحنی ورکوي.



دپورته پښتو: له پورته کښته له کین وښي لور ته: د  $f$  جگ ټکی، د  $f$  ټیټ ټکی، د  $f$  اورونټکی یا د انعطاف ټکی، د  $f'$  جگ ټکی، د  $f'$  صفرخای، د  $f''$  صفرخای.

دیاگرامونه په کره توره وگوری او وهڅیرئ، چې د دویمې منحنی خویونه د لومړی منحنی له خویونو را برسیره کړی.

چیرته چې سرک خورا ټیټ ټکی لري، هلته د جگیدني ارزښت  $0\%$  دی. دا په دې معنا چې که موټر له دې خایه تیر پري په افقي نا پراته ډول خُلي او په همدې توره که موټر د غره په څوکه هم و خُلي. دا ټیک هغه ټکی دي، د کومو په چاپیریال کې چې منفي او مثبت جگیدنه یو بل سره رابندوي یا پولې لري.

د دې په منځ کې یو چیرته یو ټکی شتون لري، چې هلته جگیدنه ماکزیمال یا خورا لویه ده (په دې بیلگه کې  $90\%$ ).

همدې ته ورته په دویمه منحنی (کږې) کې یو ه څوکه لري، مگر دا په دې بیدیا کې هغه ستره،، څوکه،، نه ده، مگر که څوک غواړي، نو یوه د،، جگیدني څوکه،، ده.

اوس دا دواړه کږې یا منحنی په ورسره بلده یا معمول ریاضیکي ډول لاندې شکلونه لري:

لومړی منحنی د  $f(x)$  گراف دی، دویمه منحنی یا کږه د مشتق تابع  $f'(x)$  گراف دی.

دا دواړه گرافونه بیا هم ټیک وگوری او وهڅدږی، چې وپوهږی، چې دا په هره برخه کې یو د بل سره څنگه اړیکې لري.

د  $f(x)$  گراف دوه ځانگړي ټکي مو سترگو ته راځي: په یوه کې  $f(x)$  مینیمال ( خورا ټیټ ټکی) په بل کې  $f(x)$  ماکسیمال ( خورا جگ ټکی) دی.

په دې ځایونو کې  $f(x)$  صفرخایونه لري.

هغه ټکی چې هلته د  $f(x)$  گراف خورا ستوغ دی، هغه، هغه د انعطاف ټکی یا اورونټکی بلل کيږي.

دا چې په دې ټکي کې د  $f(x)$  مشتق خورا جگ دی (په دې بیلگه کې  $0,9$ )، دا د  $f'(x)$  عظمي نقطه ده.



د ازادی سترگی سره د هغه ځای له لاندې منحنی څخه بڼه څرکندیري، نسبت و پورته منحنی ته.

مور د دې بیلګې څخه همدا اوس اټکل کولای شو یا گومان راوړی شو: که یوه تابع  $f(x)$  ولرو، نو د دې  $f(x)$  تابع په هکله د  $f(x)$  له مشتق څخه ارزښناک معلومات په لاس روړی شو. دا مورته د ماکسیمیا او مینیمیا په هکله (چې دا دواړه د افراطي ارزښت تر نامه یادیري) او په دې هکله چې گراف چېرته خور یا ستوغ دی، پوره کتور معلومات راکوي.

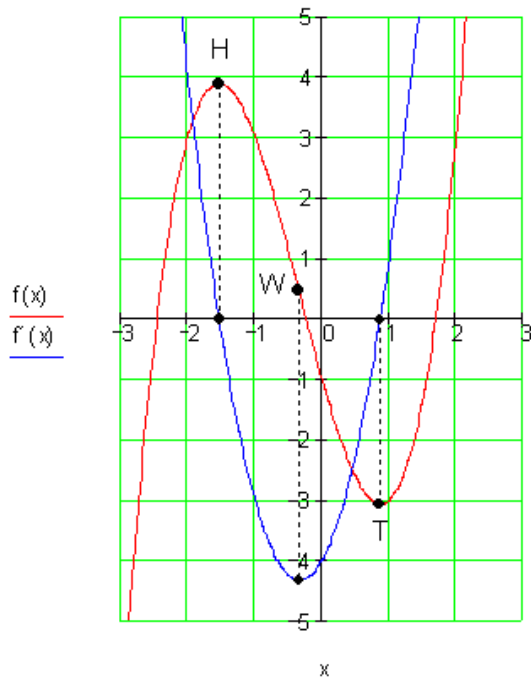
په کواوردینات (یوه پروت - ولار) - سیستم کې تابع اود تابع مشتق:

$$\text{تابع: } f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$$

$$\text{مشتق: } f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$$

د یوه تابع مشتق بیرته تابع دی. موردا د مشتق تابع او یا د جګیدني (میلان) تابع بولو

$$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \quad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$$



د دواړو توابعو گراف په یوه قیمتې وضعیه (پروت ولاړ سیستم) کې و کښل شو.

هلته چې تابع  $f(x)$  یو جگ ټکی (H) همداسې ټیټ ټکی (T) لري گراف د مشتق تابع  $x$ -محور کې غوڅوي، په دې مانا چې د تابع ارزښت دلته صفر دی.

دا روښانه دی، ځکه چې په H او T کې تابع  $f(x)$  پروت یا افقي تانجنت لري، دا دا معنا لري، چې په دې ټکي کې د  $f(x)$  جگېدنه صفر ده.

د مشتق تابع  $f'(x)$  هلته مینیموم لري، چېرته چې د  $f(x)$  جگېدنه د H او T ترمنځ په پام ونيول شي د مطلق قیمت له مخې خورا لویه ده.

### II.3. د مشتق شمیرني قوانین

قضیه (د جمعي یا زیاتون قاعده یا لار):

که یو تابع  $f(x)$  د دوه توابعو  $u(x)$  او  $v(x)$  د جمعي څخه جوړ وي، نو مشتق یې هم د هر تابع د مشتق د جمعي څخه جوړ دی، یعنې:

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)] + [v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)]}{\Delta x} + \frac{[v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \right]}_{u'(x_0)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} \right]}_{v'(x_0)}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{f'(x) = u'(x) + v'(x)}}$$

بیلگه:

د دې ورکړ  $f(x) = 5x^2 + 3x$  ,  $u(x) = 5x^2$  ,  $v(x) = 3x$  توابعو شتق وشمیرئ.

ښوونه:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 5x^2 + 3x & u(x) &= 5x^2 & v(x) &= 3x \\
 \Rightarrow u'(x) &= 10x & v'(x) &= 3 \\
 f'(x) &= u'(x) + v'(x) = \underline{\underline{10x + 3}}
 \end{aligned}$$

د جمعی قاعدی تولید کونه:

که چیری  $f_1, f_2, \dots, f_n$  توابع او  $k_1, k_2, \dots, k_n$  ثابت عددونه وی نو لرو (بی له بنوونی):

$$\begin{aligned}
 & [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x)]' \\
 & = k_1 f_1'(x) + k_2 f_2'(x) + \dots + k_n f_n'(x)
 \end{aligned}$$

قضیه (د ضرب قاعده یا لار):

که  $f(x)$  او  $g(x)$  دوه توابع وی، نو بنایو:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x)' \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x)'$$

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \quad \text{بنوونه:}$$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعنی په صورت کې د  $-f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x)$  ورزیاتولو څخه دا لاندی لرو:

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\
 &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}
 \end{aligned}$$

له پورته څخه لاس راځی، یعنی که د دواړو لورو لیمیت نیسو:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

بیلهکه:

که  $g(x) = x^2 - 1$  او  $h(x) = \sqrt{x}$  ولرو، نو د  $f(x) = g(x)h(x)$  مشتق غواړو پیدا کړو.

ښوونه: په لاندې توگه مخ ته خو:

$$f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}, f'(x) = 2x\sqrt{x} + (x^2 - 1)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د وېش قانون):

f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښایو:

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښایو (ثبوت کړو).

لومړۍ لار:

لومړۍ لار یا طریقه یې په لاندې کې ښایو او دویمه لار دې گران زده کوونکي وښایي:

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}, \quad g(x) \neq 0$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{g(x+h)g(x)} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \right]
 \end{aligned}$$

غوارو  $f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)$  صورت ته ور زیات کرو، نو لرو:.

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \\
 &= \frac{1}{g(x)g(x)} \left[ \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
 &= \frac{1}{[g(x)]^2} \left[ g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\
 &= \frac{1}{[g(x)]^2} [g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}
 \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{یعنی لرو:}$$

دویمه لار: د  $\frac{1}{g(x)}$  مشتق غوارو پیدا کرو او بنایوچي دی:

$$\left( \frac{1}{g(x)} \right)' = - \frac{g'(x)}{g^2(x)} \quad (*) \quad (f(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

که  $f(x) = \frac{1}{g(x)}$  کي ږدو نو لرو:

$$\begin{aligned}
 (f(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x).h}$$

$$= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{-\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

که دا  $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)}$  وپش ولرو او وغوارو چې مشتق یې پیدا کړو، نو له پورته بنووني، د (\*) اړیکې او د ضرب قاعدې له مخې لرو:

$$\begin{aligned} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' &= \left[f(x) \frac{1}{g(x)}\right]' \\ &= f(x) \left(\frac{1}{g(x)}\right)' + \frac{1}{g(x)} f'(x) \\ &= f(x) \left(\frac{g'(x)}{(g(x))^2}\right) + \frac{1}{g(x)} f'(x) \\ &= \frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} + \frac{f'(x)}{g(x)} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$

بیلگه:

د  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$  تابع (د  $x^2 - 4 \neq 0$  سره) مشتق غوارو پیدا کړو.

حل: که چیرې  $g(x) = x^2 - 4$  او  $h(x) = x^2$   
 $g'(x) = 2x$   
 $h'(x) = 2x$

وضع شي نو لرو:

او د ویش قانون له مخي لرو:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[ \frac{g(x)}{h(x)} \right]' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2} \\ &= \frac{2x(x^2 - 4) - x^2 \cdot 2x}{[x^2 - 4]^2} \\ &= \frac{-8x}{[x^2 - 4]^2} \end{aligned}$$

بیلگه:

د  $y = \sin x^2$  تابع یوه په لاندې توگه ورکړ شوی خنځیري تابع ده:

$$y = \sin z, \quad z = x^2$$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق وړدي. له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d \sin x^2}{dx} = \frac{d \sin z}{dz} \cdot \frac{dx^2}{dx} = \cos z \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2$$

بیلگه:

د  $y = \sin^2 x$  تابع په لاندې ډول تړلی ورکړ شوی.

$$y = z^2, \quad z = \sin x$$

دلته هم دواړه توابع هر چیرته مشتق وړ دي. نو له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d \sin^2 x}{dx} = \frac{dz^2}{dz} \cdot \frac{d \sin x}{dx} = 2z \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

بیلگه:

د  $f(x) = (x^5 + 4)^8$  تابع مشتق وشمیری!

حل: هرکله چې  $g(x) = x^8$  او  $h(x) = x^5 + 4$  وضع کوو نو لرو:

$$f(x) = g(h(x))$$

$$f'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$h'(x) = 5x^4 \quad g'(x) = 8x^7$$

$$f'(x) = 8(h(x))^7 5x^4 = 40(x^5 + 4)^7 \cdot x^4$$

د مثلثاتي فنکشنتابعگانو مشتق

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad \dots I$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad \dots II$$

قضیه: د ساین تابع  $y=f(x)=\sin x$  مشتق غواړو وښایوو چې  
 $f'(x)=(\sin x)' = \cos x$  دی:

ددې قضیې د ښوولو له پاره پورتنی په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي.

د  $y=f(x)=\sin x$  ساین تابع د هر  $x$  لپاره تعریف ده، نو د  $x_0$  په خوبنه ټاکلوڅخه لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} \\ &= \frac{2}{h} \cos \frac{2x_0 + h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2} = \cos \left( x_0 + \frac{h}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \end{aligned}$$

د لیمیټ د برخې په پام کې لرلو سره لرو:



$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right) = \cos x_0.$$

د ساین تابع په هر ځای کې، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري یا مشتقور ده:

$$\left( \frac{d \sin x}{dx} \right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \cos x_0, \quad (\text{په لینده کچ یا رادیان})$$

قضیه:

همداسې بنوول کیري چی کوساین تابع هم په هر ځای کې مشتقور ده، دلاندې مشتق سره:

$$\left( \frac{d \cos x}{dx} \right)_{x=x_0} = f'(x_0) = -\sin x_0, \quad (\text{په لینده کچ یا رادیان})$$

ثبوت: لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x_0}{h}$$

په پورته ننوتنه کې د دویم فرمول له مخې لرو:

$$= \frac{-2 \sin \frac{x+h+x}{2} \cdot \sin \frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \frac{-2 \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin \frac{h}{2}}{h}$$

$$= -\left[ \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right]$$

د د پولې او د پولې یا حد د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي:

$$-\lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنډه توګه لیکو:

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

قضیه: غوارو وښایو چې د تانجنټ تابع  $f(x) = \tan x$  مشتق ورته او د مشتق تابع

$$\text{یې } f'(x) = \frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ ده.}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\tan x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right) \\ &= \frac{\cos x \frac{d}{dx} (\sin x) - \sin x \frac{d}{dx} (\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$= 1 + \tan^2 x, x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

بیلګه: غوارو د  $y = \cos \frac{\pi x}{180}$  تابع مشتق پیدا کړو.

حل: ږدو:  $f(x) = \cos x$  او  $g(x) = \frac{\pi x}{180}$ ، نو  $y$  په لاندې توګه لیکلی شو:

نو د زنجیرې قاعدې په بنسټ لرو:

$$\begin{aligned}
 y' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\
 &= \cos'(g(x)) \cdot \left(\frac{\pi}{180} \cdot x\right)' \\
 &= -\sin(g(x)) \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180} \cdot \sin \frac{\pi x}{180}
 \end{aligned}$$

بیلگی :

۱ - د  $f(x) = \sin x$  تابع لومړي څلور مشتقونه دې پیدا شي.

$$f''(x) = \cos x ; f'''(x) = -\sin x ; f^{(4)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$$

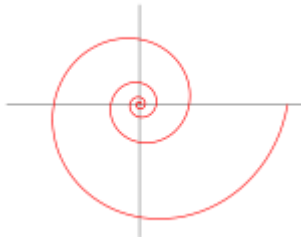
۲ - د  $f(x) = x \cdot \sin x$  تابع مشتق پیدا کړئ  
د ضرب قانون څخه کار واخلي.

$$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x$$

۳ - د  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  ;  $x \neq 0$  تابع مشتق پیدا کولو له پاره د ځنځیر قانون څخه نار اخلو.

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} \cos \frac{1}{x^2} \quad \text{برو } z = \frac{1}{x^2} \text{ او } u(z) = \sin z \text{ ته راجي: } u'(z) = \cos z$$

د لوگارېتم مشتق



قضیه:

د لوگاریم تابع مشتق:

قضیه: هر د لوگاریم تابع  $y=f(x)=\log_b x$  د  $b > 0, b \neq 0, x > 0$  سره، مشتقور دی

$$\text{او صدق کوي: } f'(x) = \frac{1}{x} \log_e = \frac{1}{x \cdot \ln b}$$

ثبوت: دا چې تابع  $y=f(x)=\log_b x$  یواځې د  $x > 0$  لپاره پیژندلري یا تعریف دی. په هر ځای کې چې  $x > 0$  وي، نو دا لاندې باوري دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\log_b(x_0+h) - \log_b x_0}{h} = \frac{1}{h} \log_b \frac{x_0+h}{x_0} = \log_b \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}}$$

د ( لومړۍ برخې ) له مخې دا لاس ته راځي:

$$\log_b \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} = \left[ \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}} \right]^{\frac{1}{x_0}} \rightarrow e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \log_b \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} = \log_b e^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \log_b e$$

د لوگاریم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پیژند سټ کې د مشتق قابلیت لري.

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_b e \quad \text{همداسې } f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln e}{\ln b} \quad \text{داچې } \ln e = 1 \quad \text{نو صدق کوي:}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln b} \quad \text{خه چې د بنوولو وو.}$$

په ځانگړي ډول دا لاندې باور لري:

$$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0} = \frac{1}{x_0} \quad \text{پای.}$$

بیلگه:

د  $f(x) = \log \sqrt{x^3}$  مشتق وشمیرئ.

بنوونه: په لاندې توگه مخ تخ ځو:

$$f(x) = \log \sqrt{x^3} = \log_{10} x^{3/2} = \frac{3}{2} \log_{10} x$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 10}$$

$$= 0.6514 \cdot \frac{1}{x}; \underline{\underline{D(f') = \mathbb{R}^{>0}}}$$

بیلگه:

د  $y = \ln \frac{x-2}{x+2}$  تابع مشتق پیدا کړئ

حل:

مور لیکلای شو :

$$y = \ln \frac{x-2}{x+2}$$

$$= \ln(x-2) - \ln(x+2)$$

دا چې  $(\ln(x-2))' = \frac{1}{x-2}$  او  $(\ln(x+2))' = \frac{1}{x+2}$  دی، نو لرو:

$$y' = (\ln(x-2))' - (\ln(x+2))'$$

$$= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{4}{x^2-4}$$

بیلگه:

لرو:  $f(x) = \log_2(x)$   
 غواړو پیدا کړو: ۱. مشتق  $f'(x)$

مشتق د  $x_0=16$  په ځای کې  
 حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو:  $f'(x) = 1/(x \cdot \ln 2)$   
 اوس د  $x_0=16$  په ځای کې مشتق ټاکو:  
 $f'(x_0) = 1/(16 \cdot \ln 2) = 1/(16 \cdot 0.69) = 0.09$

پای

اوس دې یوه بله د دیفرنسیشن قاعده ورکړل شي کومه چې په جدول 20-1 کې غیر مستقیم  
 خوندي یا په بل عبارت دننه ده.

مور غواړو د لاندې شکل تابع یا بلواک مشتق ونیسو

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

د ځنځیر قاعدې له مخې تر څیرني نیول کېدی شي،  $y = e^z$ ,  $z = g(x) \ln(f(x))$   
 لاندې بلواک  $u = \ln f(x) = \ln v$ ,  $v = f(x)$  مشتق هم د ځنځیر قاعدې له مخې را پیدا کېدی  
 شي. دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

او

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^z \cdot (g'(x) \ln f(x) + g(x) u') \\ &= f(x)^{g(x)} \left( g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)} \right) \end{aligned}$$

د ځنځیر قاعدې د نیونو په نظر کې نیولو سره او د جملې 20-10 له مخې لاس ته راځي

جمله 10-20 که  $f(x)$  او  $g(x)$  د  $f(x) > 0$  سره د مشتق قابلیت لري ، نو

$$y = f(x)^{g(x)}$$

هم د لاندې مشتق سره مشتقور دي

بیلگه : تابع یا بلواک  $y = x^x$  د  $x > 0$  لپاره مشتقور دی. دا دې په (20-57) کې داسی

$f = x, g = x$  خای په خای شي او له دې سره  $f' = 1, g' = 1$ . له دې امله اوس د  $x > 0$

$$\text{لپاره لرو: } dx^x / dx = x^x (\ln x + 1)$$

( دا وروسته د ایمپلیخیت توابعو مشتق کې هم په همغه توگه روارول شوي ده )

بیلگه: د  $y = (x^2 - 1) \ln x$  د مشتق سره باید د  $g = \ln x$  له امله و غوښتل شي چی

$x > 0$  او د  $f = (x^2 - 1) > 0$  له امله باید باور ولري  $x^2 > 1$  او له همدې امله  $|x| > 1$

پس کیدی شي چی فرمول (20-57) د  $x > 1$  لپاره د  $f = x^2 - 1$  او  $g = \ln x$  سره استعمال

شي:

بیلگه: د  $f(x) = x^3 \cdot \ln 4x$  ( $x > 0$ ) مشتق دي پیدا شي

$u(x) = x^3$  د  $u'(x) = 3x^2$  سره،  $v(x) = \ln 4x$  د خنزيري قانون له امله لرو:

$$v(x) = 4 \cdot \frac{1}{4x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \ln 4x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \cdot \ln 4x + x^2 = x^2(3 \ln 4x + 1)$$

بیلگه: د  $f(x) = (x^2 + 2) \cdot \lg x$  ( $x > 0$ ) مشتق غوارو پیدا کرو

د ضرب قانون:  $v(x) = \lg x$ ;  $u(x) = x^2 + 2$ ;  $u'(x) = 2x$  او

$$v'(x) = 1 / x \cdot 10$$

$$f'(x) = 2x \cdot \lg x + (x^2 + 2) \frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \cdot (2x \cdot \ln x + x + \frac{2}{x})$$

## د اکسپوننشل توابعو مشتق

**قضیه:** هر اکسپوننشل تابع د  $y = b^x, (b > 0)$  د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقور دی او صدق کوي:  $f' = b^x \ln b$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f(x) = b^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b^x - b^{x_0}}{x - x_0}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b^{x-x_0} - 1}{x - x_0}, \quad x - x_0 = h$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

له پورته لرو  $\begin{cases} b^h - 1 = k \\ h = \log_b(1+k) \end{cases}$  او لاس ته تري راځي

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{k} \cdot \log_b(1+k)}$$

د لوگارېتم قانون څخه لرو:  $n \cdot \log x = \log x^n$  او لاس ته راځي



$$\begin{aligned}
 &= b^{x_0} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\log_b(1+k)} \\
 &= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b[\lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}}]} , \lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = e
 \end{aligned}$$

له پورته لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
 &= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b e} , \log_b e = \frac{1}{\ln b} \\
 &= \underline{\underline{b^{x_0} \cdot \ln b}} ; x_0 \in \mathbb{R} ; b \in \mathbb{R}^{>0}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f' : f'(x) = b^x \cdot \ln b ; D(f) = \mathbb{R} ; b \in \mathbb{R}^{>0}$$

$$f'(x) = b^x \cdot \ln b$$

قضیه : د  $y = f(x) = e^x$  مشتق پیدا کری.

حل:

$$y = f(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

مورن دا لرلي په پام کې نیسو:  $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

مورن د تل کوچنیکیدونکي  $\Delta x$  ارزښت لپاره څیړو  $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

	$\Delta x$				
$\Delta x$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ مور لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

زمور د شمیرني په بنسټ دا مهنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_1 = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که  $x_0$  د  $x$  په ځای ځای په ځای کړو، نو لرو:

$$f(x) = e^x \text{ und } f'(x) = e^x$$

اکسپوننشل فنکشن  $e^x$  ټیک  $y' = f'(x) = e^x$  مشتق لري

لرو:

اکسپوننشل فنکشن یو فنکشن دی، په کوم کې چې فنکشن او د تابع مشتق سره برابر دي

$e$  - تابع بیرته د مشتق له لارې تولیدیږي یا لاس ته راځي.

بل بدیل یا الترناتیو: که ولرو  $y = f(x) = e^x$  ، نو  $y' = f'(x) = e^x$  لاس ته راځي.

په پورته جمله کې مو وښوول: که ولرو  $y = b^x$  دو  $y' = y \cdot \ln b = b^x \cdot \ln b$  دی.

که  $b=e$  کړدو، نو لرو:

$$f'(x) = b^x \cdot \ln b = e^x \cdot \ln e \Rightarrow \ln e = 1$$

$$= e^x; x \in \mathbb{R}$$

$$f : f(x) = e^x; D(f) = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \underline{f' : f'(x) = e^x; D(f) = \mathbb{R}}$$

گورو چې  $f(x) = e^x; D(f) = \mathbb{R}$  یواځنی تابع دی، چې مشتق یې پخپله

$$\underline{f'(x) = e^x; D(f) = \mathbb{R}} \text{ دی}$$

$$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

د  $x \in \mathbb{R}^+ \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  سره.

فرمول

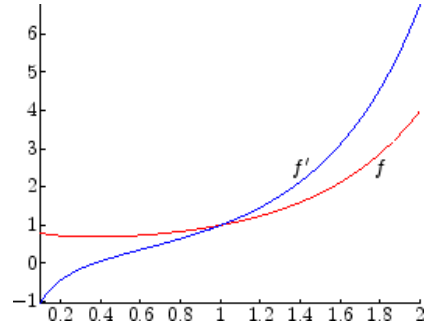
$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)|$$

کیدى شي د  $y = g(x)^{h(x)}$  بڼې تابع چې  $g(x) > 0$  دی، د مشتق لپاره وکارول شي

لاس ته ترې راځي:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx} (h(x) \ln g(x)) .$$

لیکونکی: (App/Höllig) اپپ ، هیولیک



د  $x \rightarrow 0$  لپاره  $\ln f(x) = x \ln x$  د 0 په لور هڅیږي، پس  $f$  د 0 په لور نو تابع په صفر کې بني لوریزه متمادي ده. د مشتق لپاره یې دا حالت ده دی.

د  $x^x \rightarrow 1$  او د  $\ln x + 1 \rightarrow -\infty$  له امله د  $x \rightarrow 0$  لپاره د  $f$  تابع په صفر کې یو عمود تانجنت لري.

د  $g(x) = x^{\ln x}$  لپاره لاس ته راځي:

$$g'(x) = x^{\ln x} \frac{d}{dx} (\ln x)^2 = 2x^{\ln x} \frac{\ln x}{x}.$$

(لیکونکي اېپ او هیولیک)

په طبیعت کې یې څیرنه:

د اکیوننشل توابعو مشتق

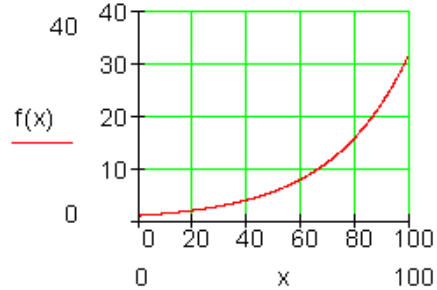
د تابع مساواتو جوړښت

کولي باکتریا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوتي ویش ( حجره وېش) له لارې زیاتیري. و مساعدو شرایطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقیقو

کي خان تجزیه کوي. د غه عملیې لپاره یو ارزښت جدول :ار، او گراف یې کارو. دلته د  $x$  اووښتوني (متغیره) په دقیقو د وخت لپاره ده. د  $y$  متحوله د باکتریاگانو د تعداد لپاره ده.

$x = \text{Minuten}$	0	20	40	60	80	100	دقیقې د باکتریاگانو تعداد
$y = \text{Bakterienzahl}$	1	2	4	8	16	32	

پورته جدول کي :  $x = \text{دقیقې}$  ،  $y = \text{د باکتریاو تعداد}$



بیلگه: لرو :  $f : f(x) = b^{3x^2-10}$  ;  $D(f) = IR$  ;  $b \in IR^{>0}$

د پورته تابع مشتق ونیسئ.

$$D'(f) = D(f) = IR \Rightarrow D(f') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2-10} = g[h(x)]$$

$$g(z) = b^z \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b} ; z \in IR$$

$$h(z) = 3x^2 - 10 \Rightarrow h'(x) = \underline{6x} ; x \in IR$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$

$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$

$$= b^{3x^2-10} \cdot \ln b \cdot 6x ; x \in IR$$

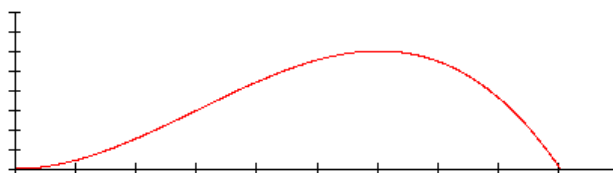
$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2}} ; D(f) = IR ; b \in IR^{>0}}$$

## - د مشتق استعمال په طبیعي علومو

په ریاضیاتو کې زیات وخت توابع راوړل کيږي، چې د یوې متحولې (اوښتونې)  $x$  په واک کې وي.

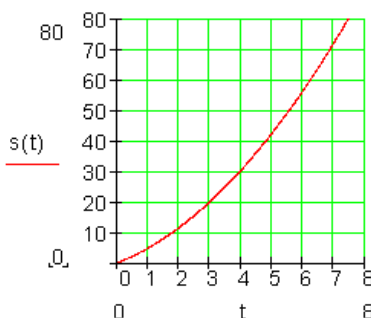
په طبیعي پوهنو کې زیات وخت توابع څیړو، چې د وخت په واک کې وي.

لکه په شکل کې د یوه توپ د غورځولو وهلي لار (دا وروسته روښانه کيږي)



بیلگه: د یوه په برابر ډوله بیره (تعجیل) غورځول شوي شي لپاره د پیل چټکتیا (لومړنۍ سرعت)  $v_0 = 4 \frac{m}{s}$  او  $a = 1,8 \frac{m}{s^2}$  بیږي (تعجیل) سره د لار-وخت-قانون په لاندې ډول دی:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

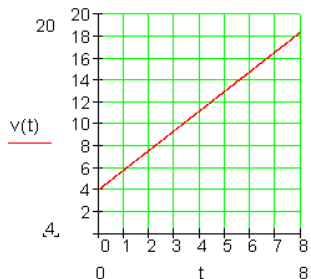
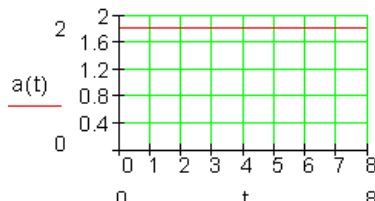


حل: د پورته ورکړ شوي د  $v_0$  ارزښت لپاره

باور لري:  $S(t) = 0,9t^2 + 4t$   
 (په  $s$  ثانیه)،  $s(t)$  په  $m$  (متر))

منځنۍ چټکتیا (سرعت)  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  (ده)

لحظوی (سملاسي) چټکتیا په لاندې ډول ده:

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$ $v = s'(t) = 1,8t + 4$	
	<p>په <math>v-t</math> - دیاگرام کې یوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتیا په برابر ډول زیاتېږي. دا دلته ثابتې جگې دڼه <math>\frac{\Delta v}{\Delta t}</math> ده او <math>a = 1,8 \frac{m}{s^2}</math> بیرته (تعجیل) ده.</p>
	<p>د بیرې یا تعجیل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي:</p> $v'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$

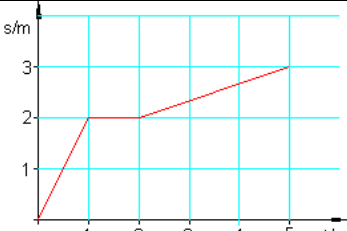
پام : د یوه برابر ډوله په بیرته (تعجیلې) خوزښت لپاره لاندې باور

$$\left| s(t) = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t \right| \quad \boxed{v(t) = s'(t) = at + v_0} \quad \boxed{a(t) = v'(t) = a} \quad \text{لري:}$$

د یوې چټکتیا (سرعت)  $v$  لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره  $v(t) = s'(t)$  لرو. د

$$s'(t) \text{ لپاره داسې } v(t) = s'(t) \text{ هم لیکو.}$$

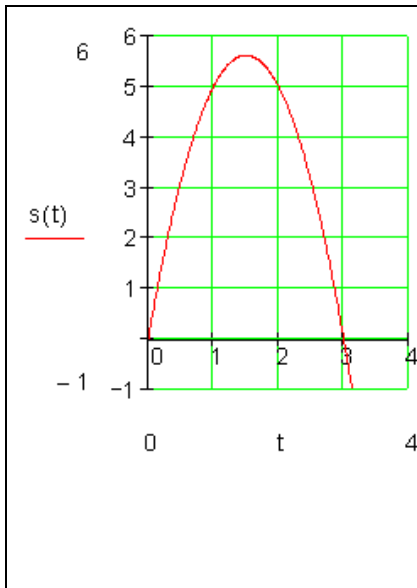
فعالیت:

	<p>۱) د یوه خوزنده تن یا جسم د لار-وخت-دیاگرام ورکړ شوی. الف: دا خوزښت تشریح کړی.</p> <p>ب: دې پورې اړونده د چټکتیا - وخت - دیاگرام وکارئ.</p>
---	--

۲) یوه تیره د پیل چټکتیا  $v_0 = 7 \frac{m}{s}$  سره عمودي (ولاره) پورته غورځول کيږي.

د لار-وخت-قانون دی:  $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$  د  $g = 10 \frac{m}{s^2}$  (را ټولي؟؟) گډي شوي سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تیري چټکتیا (سرعت) صفر دی؟  
ب) خورا جگ د میل جگوالی وشمیرئ.



۳) تابع د یوه خوزبنت د لار-وخت-دیاگرام بڼایي.

الف) د ورځني ژوند څخه یوه بېلگه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ټیک وي.

د منحنی تلنه د  $t > 3$  لپاره فزیکي څه مفهوم لري؟

ب) د خوزبنت لپاره د لار-وخت-دیاگرام

په لاندې ډول دی.  $s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$

a او  $v_0$  وټاکئ

پ) د اړونده بیړي - وخت-دیاگرام وکارئ او دا تشریح کړئ. یوه منفي چټکتیا (سرعت) څه معنا لري؟

۴) یوتن (جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي، چې د  $t$  وخت کې  $S(t) = 5 \cdot t^2$  لار وهي.

په وختونو  $t=1;2;3$  کې لحظوي چټکتیا (سرعت) وښایئ.

۴ - حل:

لحظوي چټکتیا د سملاسي تغیر ارزښت سره په دې لاندې معنا دی:



$$t = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1 + \Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د  $\Delta x \rightarrow 0$  لپاره باور لري:  $10 + 5\Delta x \rightarrow 10$

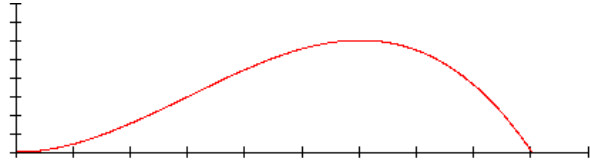
$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2 + \Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د  $\Delta x \rightarrow 0$  لپاره باور لري:  $20 + 5\Delta x \rightarrow 20$

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3 + \Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د  $\Delta x \rightarrow 0$  لپاره باور لري  $30 + 5\Delta x \rightarrow 30$

تمرین : لاندې د  $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$ ;  $x > 0$  تابع گراف او په ورنزدي توگه د فوټبال میدان کې د توپ الوتنې منحنی بنیایي، چې لاندې څیره لري.



لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

الف: توپ کوم خورا جگ (ماکسیمال) جگوالی لري او د وهلتکي (شوت شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟

ب: د توپ وهلتکي (شوت شوي ټکي) څخه توپ څومره لري بېرته ځمکې ته راځي؟

پ: د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهني ځای څخه ۹ متره لري او ۲ متره جگ دی. ایا توپ له دې څخه جگ الوزي؟

ت: توپ د تور لاین (د x محور) څخه په ۲ متره جگوالي الوزي. له کول څخه په کوم لربوالي دا ازاده شوت وهل شوی دی؟

## د جگو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسې مشتق له لارې لاسته راځي. د  $f''(x)$  بیا مشتق نیونې سره د  $f''(x)$  مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دویم مشتقتابع په نامه یادېږي.

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \quad \text{بیلگه:}$$

د  $f''(x)$  بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور

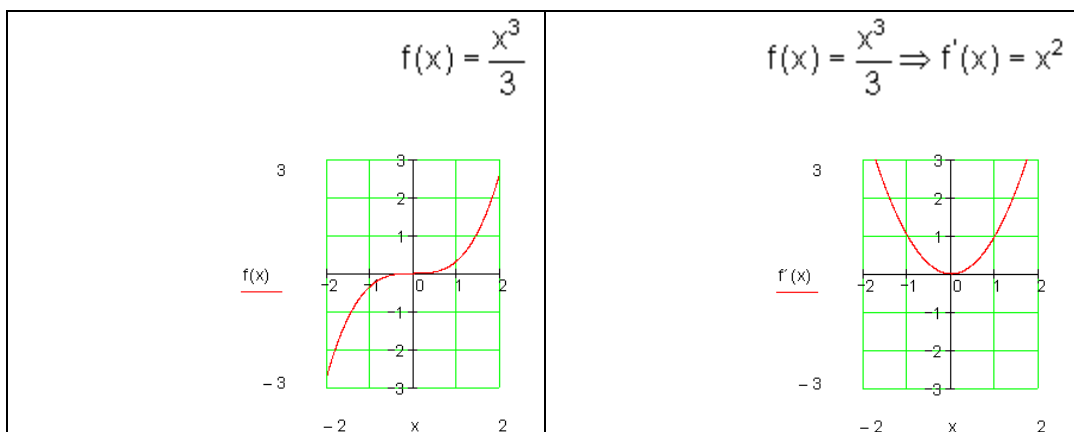
$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f'''(x) = 6$$

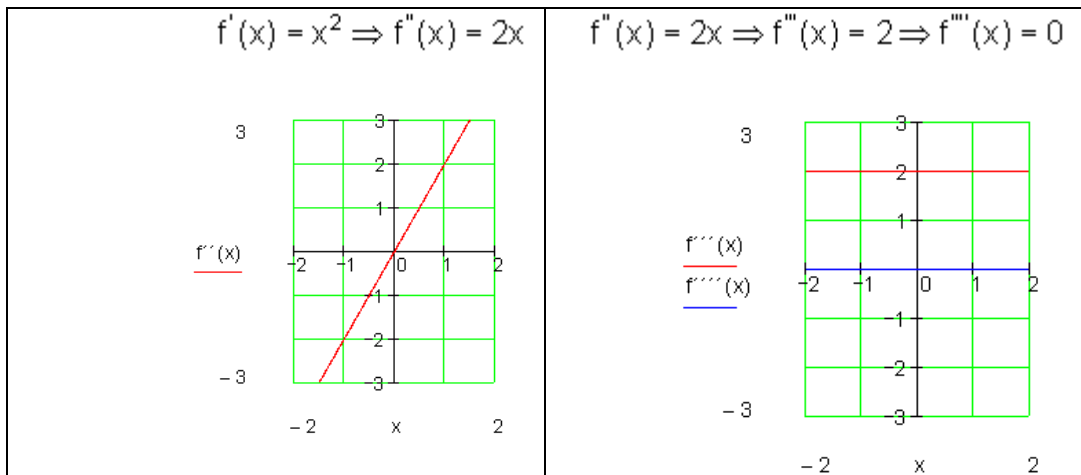
د  $f(x) = \frac{x^3}{3}$  تابع دې ۴ واره مشتق و نیول شي

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$

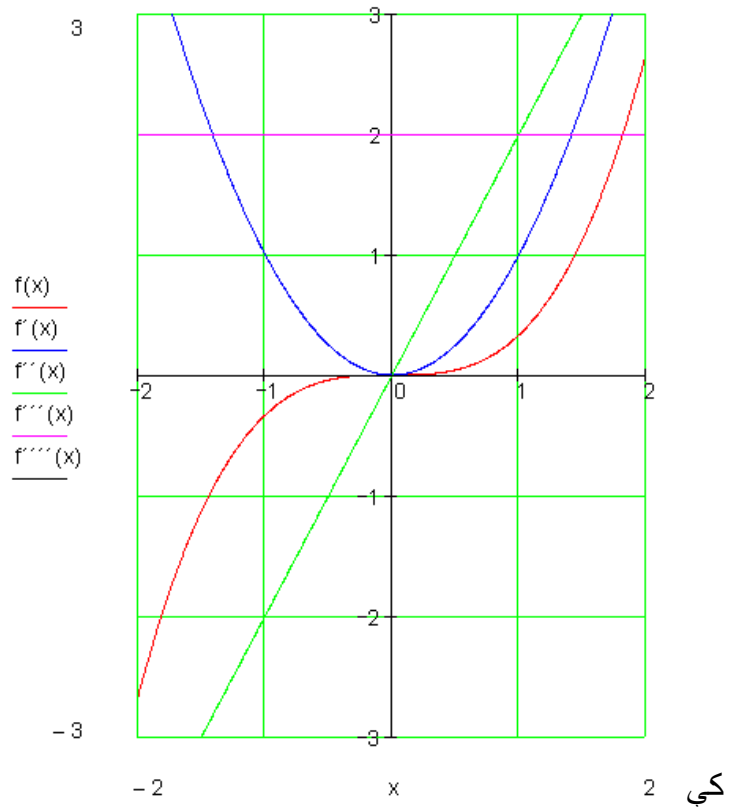
د تابع گراف:

د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره





د ټولو توابعو گراف په یوه پروت ولاړ سیستم



بیلگی:

اول:

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$$

$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = 24x - 4$$

$$f'''(x) = 24$$

دویم:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 24x + \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{9}{2}x - 24$$

$$f'''(x) = \frac{9}{2}$$

تولگه: د  $f(x)$  لومړی مشتق د  $f(x)$  مشتق تابع  $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$  ده:

د  $f(x)$  دویم مشتق د  $f''(x)$  مشتق تابع  $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$  دی:

د  $f(x)$  دریم مشتق د  $f'''(x)$  مشتق تابع  $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$  دی:

په ځانگړي ډول: یو په خوشه ویاند تابع  $f(x)$  په خوښه د مشتق قابلیت لري.

## - - د ایمپلیسیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د  $f(x)$  تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیسیت Explicit ډول، که تابع متحوله د برابرېون په یوه اړخ ځانله شوی وي:

یا داسې: که یوه تابع  $y = y(x)$  په ایمپلیسیته توګه ورکړ شوی وي، دا په دې معنا چې په  $x$  او  $y$  کې یوه مساوات له لارې ورکړ شوې، نو کیدی شي دا مساوات پل برابرېون تړلی یې په  $x$  پسې مشتق ونيول شي. دلته په ځانله توګه کیدی شي په  $y = y(x)$  ځنډیري قانون وکارول شي.

د دې لپاره لاندې بیلګې راوړو:

$$Y = 3x^2 + 7x \quad \text{بیلګه:}$$

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړه انځورونه د تابع د مساوات له مخې دی، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیسیت Implicit ډول د بیلګې په توګه  $Ex^2 + 7x + y = 0$  فعالیت: که  $Ex^2 + 7x + y = 0$  ولرو، څنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟  
قضیه: یوه تابع په ایمپلیسیته بڼه  $x^2 + xy - y^2 = 1$  لرو، غواړو  $dy / dx$  پیدا کړو. بنوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + xy - y^2) = \frac{d}{dx}(1) \quad (1)$$

$$2x + (1 \cdot y + x \frac{dy}{dx}) - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + y = \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx}$$

$$2x + y = \frac{dy}{dx} (2y - x)$$

$$\frac{2x + y}{2y - x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{-x + 2y} \quad \vee \quad \frac{2x + y}{2y - x}$$

ایمپلیخیت مشتق د یوې تابع مشتق‌نیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیخیت یعنی د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیخیت یعنی د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي. دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیخیت یا څرگند ډول ورکړ شوی وي، خو د دې مشتق‌نیول ستونځمن وي.

بیلگه: د  $f(x) = x^x$  تابع مشتق په ورسره بلدو مشتق‌وانینو نه شي نیول کېدی، ځکه چې په بنسټ او جگ اکسپوننت کې یې متحولې پرتې دي. د لوگارېتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منځه وړل کېدی شي:

$$\ln f(x) = x \ln x$$

اوس ایمپلیخیت دا حل کوو، داسې چې دواړو لورو ته یې د  $x$  پسې مشتق نیسو:

$$\frac{d(\ln f(x))}{dx} = \frac{d(x \ln x)}{dx}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځیرقانون له لارې صورت نیسي:

$$\frac{d(\ln y)}{dy} f'(x) = \frac{d(x \ln x)}{dx}$$

دلته  $y = f(x)$  دی. د لوگارېتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y} f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x}$$

که په  $f(x)$  پسې حل شي او د  $y$  له پاره بېرته  $f(x) = x^x$  ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x) = y (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

بیلگه: دایره د  $r$  وړانګې سره مساوات  $x^2 + y^2 = r^2$  لري. له دې ځنې برخې د  $y = f(x)$  تابع د گراف په څېر لیکل کېدی شي. د دې مشتق د ایمپلیخیت مشتق له لارې په لاندې توګه حل کېدی شي:

په تعریف شوي مساوات کې  $y = f(x)$  ځای په ځای کوو:

$$x^2 + f(x)^2 = r^2$$

د دې مساوات د مشتق له لار لرو:  $2x + 2f(x)f'(x) = 0$

د  $f(x)$  پسي د حل له لارې لاس ته راځي:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$$

د دې مساوات سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي، چې په داپربتاجنت په ټکي  $(x, y)$  کې جګوالی  $-\frac{x}{y}$  لري.

بیلګه: د بیلګیپه توګه د  $E: x^2 + 3y^2 = 7$  له لارې ورکړ شوي ایلیپسي (هګی یا بیضوي) له لارې لرو:

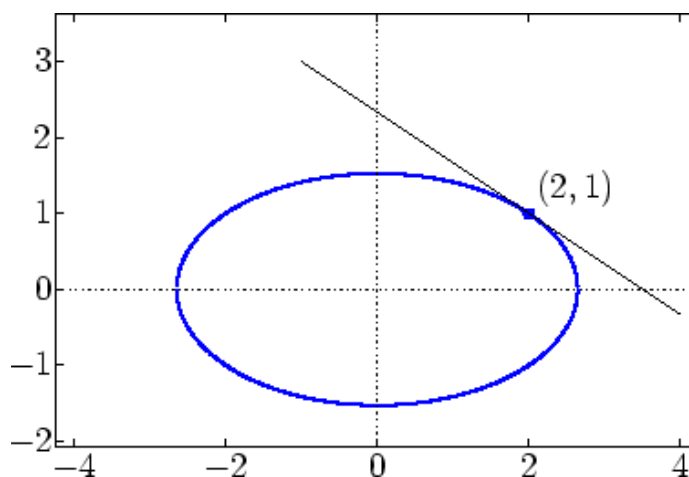
$$\frac{d}{dx}(x^2 + 3y^2) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

$$y' = -\frac{1}{3} \frac{x}{y}$$

له

دې سره کیدی شي په  $E$  باندې په یوه ټکي د  $y \neq 0$  سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي. د بیلګې په توګه د  $(2, 1)$  لپاره لاس ته راځي

$$y' = -\frac{1}{3} \frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$



په ورته توگه کیدی شي لور يا جگ مشتقونه هم وشمیرل شي. د  $yy'$  لپاره د ضرب قانون کارول يا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx} (2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0.$$

له دې لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

بیرته په  $E$  د یوه ټکي د کواورډینات ایښوولو او همدا اوس د  $y'(x)$  ټاکلي ارزښت له لارې څرگند ارزښتونه وټاکل شي.

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

د بستیزو مشتقونو جدول



Nr	$f(x)$	$f'(x)$	نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	$X^n$	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3,\dots$
3	$X^n$	$n.x^{n-1}$	$x \neq 0$ تول عدد او
4	$X^r$	$r.X^{r-1}$	$r$ rational, $x > 0$
5	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3,\dots, x > 0$
6	$x^a$	$a.x^{a-1}$	$x > 0$ , $a$ reell
7	$a^x$	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0$ , $a \neq 1$
8	$e^x$	$e^x$	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0$ , $a \neq 1$ , $x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$

د پورته جدول په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمال ډول ، په خوبه د هری شننیزې یا سپرنیزې (تحلیلي) وینې یا افادې مشتق په شننیزه توگه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم باید سړی همغه نیونی په نظر کي ونیسي.

**ټولگه**

کمبنتویش **Differenzenquotient** ( د سیکانت جگېدنه) یا منحنی تغیر ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق **Differetialquotient** ( د تانجنت چگوالی یا لحضوي تغیر ارزښت)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتې قانون

$$f(x) = c \cdot u(x) \text{ mit } c = \text{constant}$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

د جمعې قانون

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

$$\boxed{f' = u' + v'}$$

د ضرب قانون

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

د وېش قانون

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

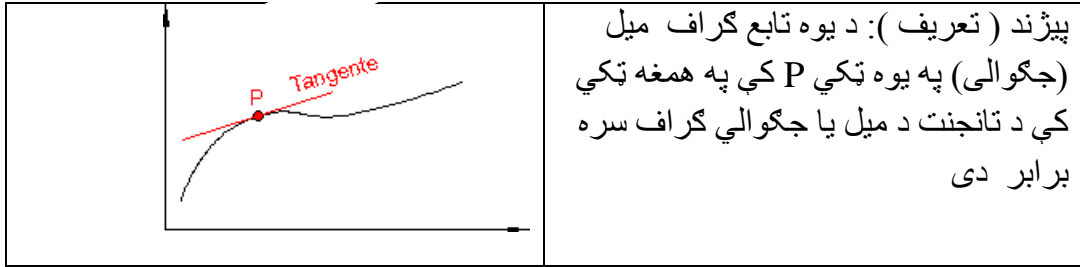
$$\boxed{f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

د خنځیر قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

دا پورته الماني په پښتو شي (دا کمپیتریسټ سرته رسوم)



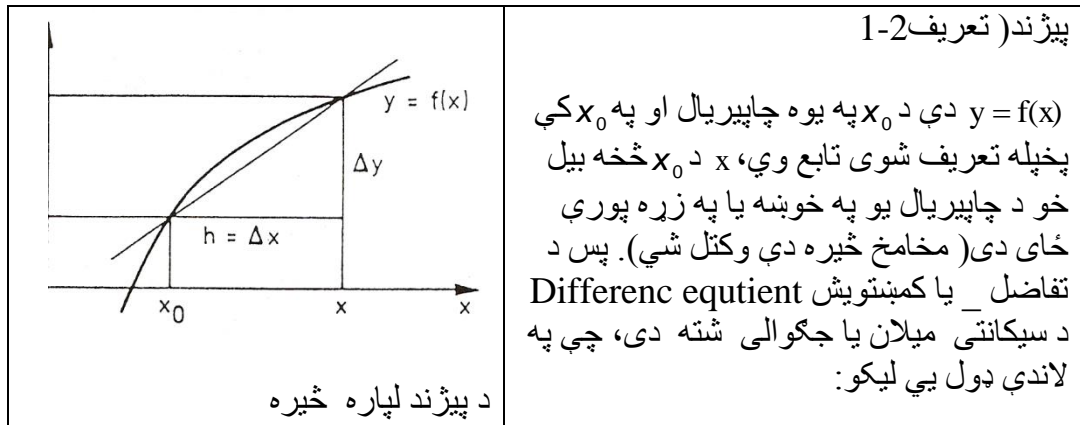
د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient

د یوې کرښې جگړه دغه بی له مشتق نیونې ټاکل کېدی شي:

$$\text{کرښه } y=f(x) = mx+a \text{ لرو}$$

د دې کرښې د جگړدنې فرمول په لاندې ډول دی:

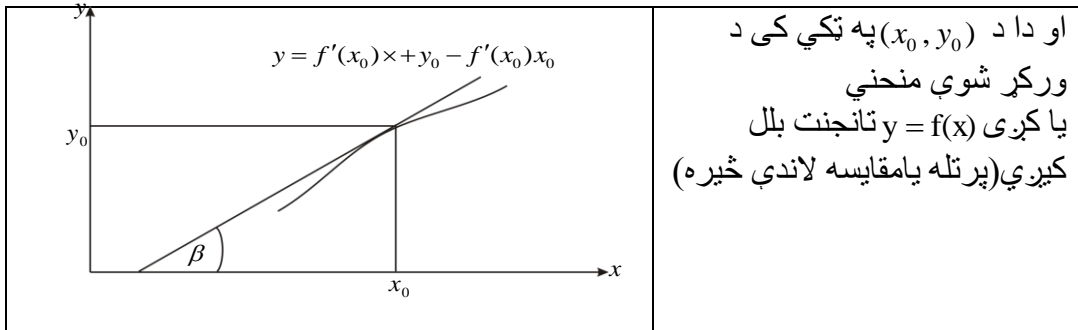
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\end{aligned}$$

پیژند: که یو تابع یابلواک  $y = f(x)$  د  $x_0$  په ځای کې د مشتق ور (قابل اشتقاق، رابیلیدور) وي، نو هغه لاندنی کرښه چی د  $(x_0, y_0)$  څخه تیریري او میلان یا جگوالی  $f'(x) = \tan \beta$  یی دی په لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x) \Leftrightarrow f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$$



لومړی د تیرو جملو له مخې د دیفرنسیشن قاعدې د فورمال قاعدو په څیر بیا راټولوو یا رابوځای کوو، بی له دې چی نیونی ورکړو. په استعمال کي یی بایددا نیونی کلکی تر پام لاندې و نیول شي. د لته د  $f(x)$  او  $g(x)$  بلواک په  $f$  او  $g$  لندیري. د مشتق نیونو یا رابیلدنو مشتق قاعدو جدول

فرمول	گڼه د قاعدې نوم
	۱ د ثابتې سره ځل (ضرب) قاعده
$(cf)' = cf'$	۲ د زیاتون - کمون قاعده
$(f \pm g)' = f' \pm g'$	۳ د ځل (ضرب) قاعده
$(f \cdot g)' = f' \cdot g'$	

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ $y = f(z); \quad z = g(x); \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$ $y = f(x); \quad x = f^{-1}(y); \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$	<p>گڼه د قاعدې نوم</p> <p>۴ - وېش قاعده</p> <p>۵ - د زخیروني قاعده</p> <p>د په څټ یا بر عکس قاعده</p>
--	---

**قضیه:** هر اکسپوننشل تابع د  $y = b^x, (b > 0)$  د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقور دی او صدق کوي:  $f' = b^x \ln b$

**قضیه:** هر د لوگارېتم تابع  $y = f(x) = \log_b x$  د  $b > 0, b \neq 0, x > 0$  سره، مشتقور دی او صدق کوي:  $f'(x) = \frac{1}{x} \log e = \frac{1}{x \cdot \ln b}$

### --- د یوې تابع د مشتق قابلیت

مور ولیدل، چی یوه تابع په هر ځای کې تعریف نه ده، په هر ځای کې حد نه لري او همداسې په هر ځای کې متمادي یا ناپېرېکیدونکې نه ده. په همدې توگه یوه تابع هر چیرته د مشتق قابلیت هم نه لري. تابع  $f(x) = |x|$  په ۰ ځای کې تعریف نه ده:

د ټولو  $x > 0$  له پاره باور لري  $f(x) = x$  او له دې سره  $1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x - 0}$

د ټولو  $x < 0$  لپاره د پورته په بر عکس  $f(x) = -x$  باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

دا چي کين- او بنی اړخیز حد یو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راورل شوي ځای کې مشتقور نه ده.

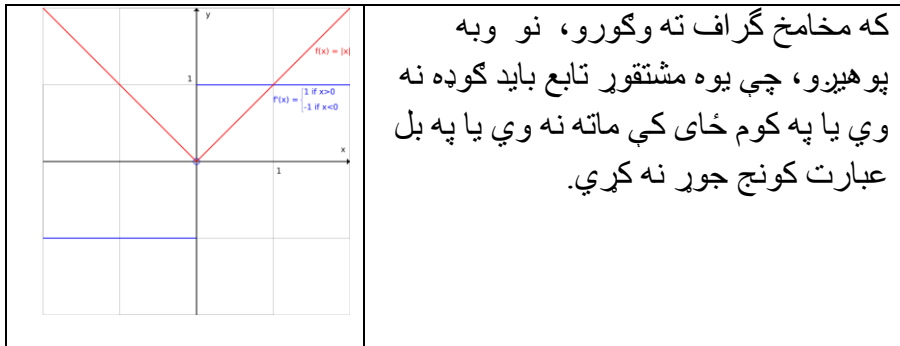
د تابع مشتق کېدنه په نورو ټولو ځایونو کې تر اوسه تل ورکړ شوي.

په صفر ځای کې سره له دې یو بنی اړخیز مشتق ورکړ شوی، یعنی لرو:

$$f'_{+}(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = 1$$

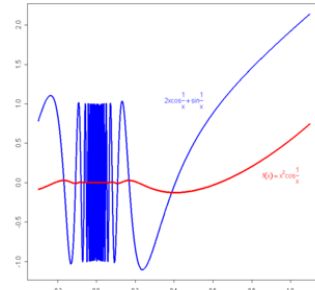
او یو کین اړخیز مشتق هم:

$$f'_{-}(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$



که مخامخ گراف ته وگورو، نو وبه پوهیږو، چې یوه مشتقور تابع باید گوډه نه وي یا په کوم ځای کې ماته نه وي یا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.

د یوه نه متمادي مشتقور تابع لپاره بېلگه:



یو تابع متمادي مشتقور بلل کېږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که یوه تابع هر چېرته مشتقور وي، باید نه دی چې مشتق دې یې هم متمادي وي.

د بیلگي په توگه:

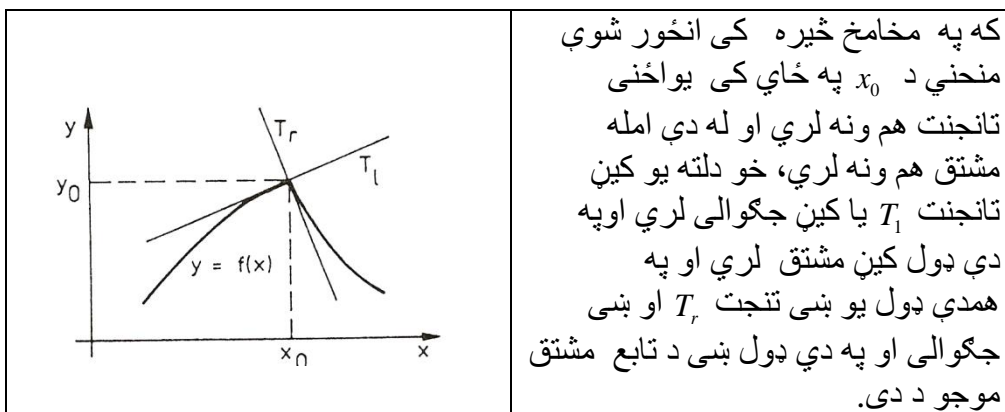
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

تابع په هر ټکي کې حتي د  $x = 0$  سره مستقر دی. مشتق

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

په ددې په خلاف په 0 ځای کې متمادي نه دی. مشتق د ټاکلو نیونویا فرضیو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چې لیمیت (پولی) ته تگ ممکن وي یعنی چیرته چې د تفاضل ویش یو لیمیت د  $x \rightarrow 0$  لپاره ولري.

که کومه منحنی چیرته راماته وي (څیره 4)، گورو چې هلته تانجنت نه شته او همدارنگه جگیدل او هم د تفاضل ویش نه شته. پس د مشتق قابلیت د متمادیت په څیر د یوې تابع ځانگړي خوي دی.



یوه نامتمادي (پرېکیدونکي) تابع کې د تانجنت یا مشتق پوښتنه بی معناده.

اربین یا ضروري شرطونه:

دا دلته انځور شوی پر ابلم یا مسأله اوس د شمیرني د ټيک فرمول لاندې راوړو.

ولیدل شو چی په یوه ځای  $x_0$  کی چی تابع متمادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نیسو چی دا دي ښوول شوی وی. دا څرگنده ده چی هره متمادي تابع باید ضرور مشتقورنه وي. د بیلگي په توگه که تابع زاویه یا کونج ولري.

دي ته اړتیا ده چی وښایو، چی یواځي متمادي (نه پرېکیدونکي) توابع د مشتق قابلیت لري، دا بیا دا معنا لري چی هره تابع چې مشتقور وي باید لږ تر لږه متمادي (نه پرېکیدونکي) وي او په دې ډول مشتق متمادیت په بر کی لري یا خوندي لري، په دې معنا چی متمادیت د مشتقوروالی لپاره اړین یا ضروري شرطونه دي

جمله:

که د  $y = f(x)$  تابع د  $x_0$  په ځای کی مشتقور وي، نو هلته ضرور متمادي ده.

ښوونه: د د مشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی حد شته دی.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

لیمیت یا پوله یواځی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د  $x \rightarrow x_0$  لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې  $f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$  لار شي.

نو باور لري:  $f(x) \rightarrow f(x_0)$  د  $x \rightarrow x_0$  لپاره.

دا د متمادیت یا ناپرېکیدني پیژند دی.

دا تفاضل یا کمښت وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که  $x = x_0 + \Delta x$  وکاروو:

دلته مشتق  $f'(x)$  په لاندې توگه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یواځی په ځای (lokal) پورې اړ خوي دی یعنی په یو ځای  $x = x_0$  کی تعریف دی. لکه څنگه چی په متمادیت کی (لومړي څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.



تعریف: د  $y = (x)$  یوه تابع په واز اینتروال  $(a, b)$  کې، د اشتقاق قابل (مشتقور) بلل کېږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) ; a < x < b$$

که داد  $x = x_0 \in (a, b)$  په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق  $f'(x_0)$  سره. دا په بند اینتروال  $[a, b]$  کې مشتق وړ بلل کېږي، که دا سربېره پر دې د  $a$  په ځای کې بنی اړخیز او د  $b$  په ځای کې کین اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلگه: د توان تابع  $y = x^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  په هر ځای کې د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

د ساین تابع  $y = \sin x$  او کوساین تابع  $y = \cos x$  په هر ځای کې مشتقورده، د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

په یوه واز اینتروال کې  $y = f(x)$  مشتقور تابع مشتق بیرته  $y' = f'(x)$  تابع ده، نو په دې ډول یې د مشتق قابلیت او د متمادیت قابلیت پوښتنه کېدی شي.

پېژند: په یو د  $x = x_0$  چاپیریال کې د مشتق قابل تابع (رابیلیدور بلواک)  $y = f(x)$  په  $x = x_0$  کې دوه واره د مشتق قابلیت لري (رابیلیدور دی)، که د هغې اشتقاق (رابیلیدنه)  $y' = f'(x)$  هلته د مشتق قابلیت لري (رابیلیدور وي). سری د  $f'(x)$  مشتق د تابع (رابیلیدنه د بلواک)  $y = f(x)$  دویمه رابیلیدنه بولي او لیکي:

$$\left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=x_0} = f''(x_0) = \left( \frac{df'(x)}{dx} \right)_{x=x_0}$$

یو په یوه واز اینتروال کې مشتق کېدونکې تابع  $y = f(x)$  هلته دوه واره مشتقور بلل کېږي، که د هغه مشتق  $y' = f'(x)$  په دې اینتروال کې مشتق وړ وي.

ددې لپاره لیکل کېږي:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$$

بیلگه ۲ . ۷ :

لاندې توابع  $y = c; y = x^n; y = \sin x; y = \cos x$

هر چیرته دوه واره مشتقور دي، د لاندې مشتقونو سره:

$$\frac{d^2 c}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2 x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}, \quad n \geq 2,$$

$$\frac{d^2 \sin x}{dx^2} = -\sin x, \quad \frac{d^2 \cos x}{dx^2} = -\cos x .$$

دا په ۲ . ۴ کې تعریف شوي کیلمې کیدی شي چې په ساده ډول په خوښه پراخه شي یعني داکسپوننت مشتقونو ته وارول شي ( $n - m$  مشتق (رابیلیدنه) یی وشمیرل شي).

د  $y = f(x)$  تابع دلته  $n$ -واره مشتقور ده، که  $n - m$  مشتق ولري یعني

$$\frac{d^n y}{d^n x} = \frac{d^n f(x)}{d^n x} = f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx}; \dots$$

جمله:

که د  $y = f(x)$  تابع د  $x_0$  په ځای کې **مشتقور وي**، نو هلته ضرور متمادي یا ناپېرېدونکي ده.

بنسونه : د مشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چې پوله یا حد شته دی

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

پوله یا حد یواځی هلته کیدی شي چې موجود وي، چې د  $x \rightarrow x_0$  لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې  $f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$  لار شي. نو باور لري:  $f(x) \rightarrow f(x_0)$  د  $x \rightarrow x_0$  لپاره. دا د ناپرېکښې یا متمادیت تعریف یا پیژند دی.

دا کمښت-یا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که  $x = x_0 + \Delta x$  وکاروو:

دلته مشتق  $f'(x)$  په لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یواځی په ځای (lokal) پورې اړوند یا تړلی خوي دی یعنی په یو ځای  $x = x_0$  کې تعریف دی. لکه څنګه چې په ناپرېکښې یا متمادیت کې (۱۹ - څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چې د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینټروال ته وغزول شي.

تعریف :

د  $y = f(x)$  یوه تابع په واز اینټروال  $(a, b)$  کې، د اشتقاق قابل (مشتقور) بلل کیږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x); a < x < b$$

که دا  $x = x_0 \in (a, b)$  په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق  $f'(x_0)$  سره. دا په بند اینټروال  $[a, b]$  کې مشتقور بلل کیږي، که دا سربیره پر دې د  $a$  په ځای کې بنی اړخیز او د  $b$  په ځای کې کین اړخیز مشتقور هم وي.

## --- د معکوس تابع مشتق invers funktion

د یوه گراف به مرسته تابع او د هغه په څت تابع د بیلگی به توکه یوه مربع تابع.

اوس دې معکوسه تابع تر څیرني لاندې ونيول شي . دلته دې ونيول شي، چې  $y = f(x)$  په  $x = x_0$  کې د  $f(x) = 0$  سره او په یوه د  $x_0$  چاپیریال کې جگیدونکی دی  $f'(x_0) > 0$  او یا په کلکه لوېدونکی  $f'(x_0) < 0$  او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعنی  $x = f^{-1}(y)$  ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې  $x \rightarrow x_0$  او  $f(x)$  د متمادیت له امله هم  $y \rightarrow y_0$  او باور لري.

$$\left( \frac{dx}{dy} \right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left( \frac{df^{-1}(y)}{dy} \right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left( \frac{df(x)}{dx} \right)_{x=x_0}}$$

که په د لاندې ټکي ځای  $x = x_0$  لپاره ساده بیرته  $x$  ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د  $y = f(x)$  لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

د پورته ورکړ شوو نیونوسره سری بیرته یو د تفاضل یا کمښت ویش لاس ته راوړي چی د هغه سره د

مروج ویش په څیر شمیرنه کیدی شي، لکه

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

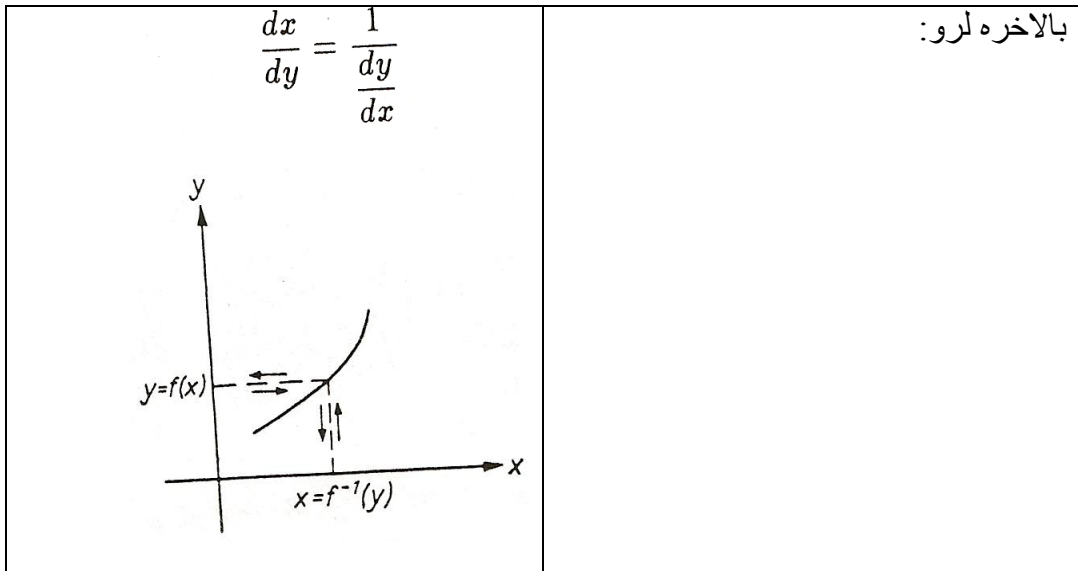
جمله:

د معکوس تابع مشتق: که  $y = f(x)$  د  $x$  په یوه چاپیریال کې د  $x = f^{-1}(y)$  سره معکوس او هملته د  $f'(x) \neq 0$  سره مشتق وړ وي، نو معکوس تابع د  $y = f(x)$  سره مشتق وړ دی او باوري دی

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

حل: کیدی چې د  $f$  تابع د مشتق څخه د  $f^{-1}$  معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له  $x \rightarrow 0$  او هم  $y \rightarrow 0$  او معکوس څخه، د  $y = f(x) - f(x)$  سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$



**بیلگه:** د  $y = f(x) = x^n; n = 1, 2, 3, 4, \dots$  تابع لپاره که  $x \geq 0$  و ټاکل شي او په دې  $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}; y \geq 0$  توگه معکوس تابع، نو لرو:

شته دی او لاندې ارزښت لري  $\frac{dy}{dx} = f'(x)nx^{n-1}$  د  $x > 0$  لپاره. له دې امله د  $y > 0$  لپاره د معکوس تابع مشتق

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\sqrt[n]{y}}{dy} = \frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{1-n} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}$$

که  $x$  او  $y$  سره بدل شي نو دا لاس ته راځي

$$dx^{1/n} / dx = (1/n) \cdot x^{n-1}$$

**بیلگه:** دا  $y = x^{\frac{m}{n}}$  تابع د تام عدد  $m$  او د مثبت تام عدد  $n$  سره یعنې د خوښي کسري اکسپوننت یا په «جگ عدد» کیدی شي چی د مخه څیړلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق نیول شي، چې د  $x > 0$  لپاره باور لري.

$$y = x^{m/n} = z^m, \quad z = x^{1/n}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = m \cdot z^{m-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, \quad x > 0$$

په دې ډول د مخه طبیعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

په لاندې جدول کې لاندې د بنسټتابع مشتق ځای په ځای شوی. له کین و بنې لور ته اول درځ نمره ده دویم درځ یی تابع  $f(x)$  بنای او په دریم درځ کی یی مشتق  $f'(x)$  ځای په ځای دي او په څلورم درځ کی د راپیداشوی پارامتر او د متحولې  $x$  نیونی ځای په ځای شوي. که چیرې د واریابلی یا پارامتر لپاره نیونی نه وي شوي نو په خوښه نیول کیدی شي.

جدول د بنسټتابعو مشتق

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	وړاند نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	$X^n$	$n \cdot x^{n-1}$	$n = 1, 2, 3, \dots$
3	$X^n$	$n \cdot x^{n-1}$	$n \text{ ganz, } x \neq 0$
4	$X^r$	$r \cdot x^{r-1}$	$r \text{ rational, } x > 0$
5	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx} \sqrt[n]{x}$	$n = 1, 2, 3, \dots, x > 0$
6	$x^a$	$a \cdot x^{a-1}$	$x > 0, a \text{ reell}$
7	$a^x$	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, a \neq 1$
8	$e^x$	$e^x$	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	

12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
14	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} (Z)$
15	$\text{Arc sin } x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x  < 1$
16	$\text{Arc cos } x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x  < 1$
17	$\text{Arc tan } x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
18	$\text{Arc cot}$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

د جدول 20-2 او همدارنگه د جدول 20-1 په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمال ډول ، په خوبه د هرې شننیزې یا سپرنیزې (تحلیلي) وییني یا افادې مشتق په شننیزه توگه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم باید سړی همغه نیونی په نظر کي ونیسي.

بیلگه 20-18: د زیاتون قاعده کیدی شي د حل قاعدې په مرسته د یوې ثابتی سره یوځای یا گډه شي او ډیرو زیاتونکو یا د جمعي اعضاو باندي استعمال شي. لکه لاندې

$$y = f(x) = 3 \sin x + 4e^x - 7 \tan x - 6\sqrt{x^3}$$

$$= 3 \sin x + 4e^x - 7 \tan x - 6x^{\frac{3}{2}}$$

دلته  $\tan x$  یوځای د  $x \neq (2k+1)$  او د  $x^3$  له امله یوځای د  $x > 0$  لپاره رابیلیدوړ دی او ددې بندیزونو (محدودیتونو) له امله لاس ته راځي.



$$\begin{aligned} dy/dx = f'(x) &= 3\cos x + 4e^x - 7 - 7\tan^2 x - 6.(3/2).x^{3/2-1} \\ &= 3\cos x + 4e^x - 7 - 7\tan^2 x - 9\sqrt{x} \end{aligned}$$

لکه چی بنسټیز بلواک او له دوي ټولی راجورې شوي سپرنيزې افادې هر چيرته متمادي يا ناپريکيدونکی وي، چيرته چې تعريف شوي وي. نو د جدول 20-2 له مخې بنسټيز بلواک يواځې تعريف ډيري کی رابيليدوردي، په دې کې کوم تغير نه راځي که په دې بلواکو څلور بنسټيزې عملي استعمال شي. يعني لاندي جمله باوري ده .

جمله 20-8: د بنسټيز بلواکو د څلورو بنسټيزو عمليو له لارې جوړې شوي شننيزې (تحليلي) افادې د دوي تعريف ډيري په دننه کې رابيليدور ده.

که څوک ځنځيري بلواک جوړوي نو دا وينا بايد نوره هم رابنده يا محدوده شي

$$y = \sqrt{(x-1)^2(x+1)} = (x^3 - x^2 - x + 1)^{1/2} \text{ دا بلواک 19-20: بيلگه}$$

د  $(x-1)^2(x+1) > 0$  ، پس د  $x+1 > 0$  يعني  $x > -1$  تعريف دی او هلته هم نه پريکيدونکی يا متمادي (د  $x = -1$  په غاړه طبعاً بنی اړخيز) ده.

دا په ځانگړې توگه د  $x=1$  لپاره هم ناپريکيدونکی يا متمادي دی (20-7 دې وکتل شي) د پيژندډېرې يا تعريف ډيری دننه  $x > -1$  دی، او هلته تابع يا بلواک په واقعيت کې نه پريکيدونکی يا متمادي دی. اوس نو مخ ته پروت تابع يا بلواک ترلی (ځنځيري) ورکړ شوی:

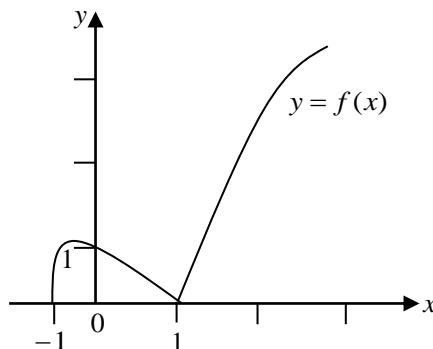
$$y = f(z) = \sqrt{z} = z^{1/2}$$

$$z = g(x) = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$z = g(x) = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$$

بلواک  $z = g(x)$  د ټولو  $x$  لپاره مشتقور يا رابيليدور دی، تابع  $y = f(z) = z^{1/2}$  له دې امله ځنځيري قاعده يواځې د  $z > 0$  لپاره صدق کوي، پس د  $x = 1$  ،  $x > -1$  لپاره. هلته باور لري.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 - 2x - 1) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{2 \cdot \sqrt{(x-1)^2(x+1)}}$$



د یو ځنځیري تابع مشتقوروالی د هغه  $x$  ارزښتونو لپاره باور لري یا هلته ډاډور دی، کوم چي د د ننني تابع یا بلواک په دننه کی پراته دي او په هغو کی د دننني تابع ارزښت د دباندي تابع د د تعریف ډیری په دننه کي پروت وي. که د  $x$  ارزښتونو ډیری د بند تعریفډیری دننه وښايي، نو لاندې جمله باور لري.

جمله 20-9: هره یوه شننیزه یا تحلیلي افاده د خپل بند(محدود) تعریفډیری په دننه کی رابیلدور ده.

بیلگه 20-20: ځنځیري قاعده هم استعمالیدونکی ده، که په یوه ترلي بلواک کی د ننني بلواک پخپله یو ترلي بلواک وي، پس (د لازمه وړاند نیونو لاندې) باور لري

$$y = f(z), \quad z = g(u), \quad u = h(x)$$

$$y = f(g(h(x))) \quad \text{پس د}$$

ځنځیري قاعده

$$dy/dx = (dy/dz)(dz/du)(du/dx)$$

فنکشن یا بلواک یا تابع

$$y = \text{Arc sin } \sqrt{1-x^2}$$

یو داسی تابع دی. دلته لرو:

$$y = f(z) = \text{Arcsin } z, \quad z = g(u) = u^{1/2}, \quad u = h(x) = 1 - x^2$$

دلته  $h(x)$  رابیلیدور دی،  $g(u)$  یواخی د  $u > 0$  لپاره رابیلید وړ دی، پس د  $-1 < x_2 < 0$  او یا  $x_2 < 0$  یاد  $|x| < 1$ ، او  $f(z)$  د  $|z| < 1$  لپاره، پس د  $1 - x_2 < 1$  لپاره پس د  $1 - x_2 < 1$  لپاره په دې مانا چی  $x_2 > 0$  د  $|x| > 0$  لپاره.

رابیلیدوروالی یواخی د لاندې چاپریال لپاره تضمین دی

$$\text{او یا} \quad 0 < |x| < 1 \iff -1 < x < 0$$

$$0 < x < 1 \iff |x| < 1 \quad x \neq 0 \quad (20.53)$$

دپیژندډېری یا تعر یفډیری دننه  $|x| < 1$  دی. د تعریفډیری محدودیت (20-53) = دی.

فنکشن یا بلواک (20-52) یواخی هملته تعریف او د (20-51) له مخی باور لري:

$$\begin{aligned} \frac{d \text{Arcsin } \sqrt{1-x^2}}{dx} &= \frac{d \text{Arcsin } z}{dz} \cdot \frac{du^{\frac{1}{2}}}{du} \cdot \frac{d(1-x^2)}{dx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \cdot \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{x^2} \sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{|x| \sqrt{1-x^2}} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ fur } 0 < x < 1, \\ +\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ fur } -1 < x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

اوس دی یوه بله د دیفرنسیشن قاعده ورکړل شي کومه چی په جدول 1-20 کی غیر مستقیم خوندي یا په بل عبارت دننه ده. دا د لاندې شکل بلواک دیفرنخیشن دی

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دي امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

د خنخیر قاعدې له مخی ترخیرني نیول کیدی شي،  $y = e^z$ ,  $z = g(x) \ln(f(x))$  لاندې بلواک  $u = \ln f(x) = \ln v$ ,  $v = f(x)$  مشتق هم د خنخیری قاعدې له مخی را پیدا کیدی شي.

دا لاندې صدق کوي:

$$\text{او } u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{1}{v} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^z \cdot (g'(x) \ln f(x) + g(x)u') \\ &= f(x)^{g(x)} \left( g'(x) \ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)} \right) \end{aligned}$$

د خنخیری قاعدې د نیونو په نظر کی نیولو سره او د جملی 10-20 له مخی لاس ته راځي

جمله: که  $f(x)$  او  $g(x) > 0$  د  $f(x)$  سره د مشتق قابلیت لري، نو  $y = f(x)^{g(x)}$

هم د لاندې مشتق سره مشتقور دی.

بیلگه: تابع  $y = x^x$  د  $x > 0$  لپاره رابیلیدور دی. دا دي داسی  $f = x$ ,  $g = x$  ځاي په ځاي شي او له دي سره  $f' = 1$ ,  $g' = 1$  له دي امله اوس د  $x > 0$  لپاره لرو:

$$dx^x / dx = x^x (\ln x + 1)$$

بیلگه: د  $y = (x^2 - 1)^{\ln x}$ ,  $x > 1$  دیفرنسیشن سره باید د  $g = \ln x$  له امله و غوښتل شي چی  $x > 0$  او د  $f = (x^2 - 1) > 0$  له امله باید باور ولري  $x^2 > 1$  او له همدې امله  $|x| > 1$  پس کیدی شي چی د  $x > 1$  لپاره  $f = x^2 - 1$  او  $g = \ln x$  سره استعمال شي:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (x^2 - 1)^{\ln x} \cdot \left( \frac{1}{x} \ln(x^2 - 1) + \frac{(\ln x) \cdot (2x)}{x^2 - 1} \right) \\ &= (x^2 - 1)^{\ln x} \cdot \left( \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} + \frac{2x \ln x}{x^2 - 1} \right), \quad x > 1\end{aligned}$$

بیلگه یا تمرین: د  $y = f(x) = x^n$ ;  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  تابع لپاره که  $x \geq 0$  و ټاکل شي او په دې توگه  $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$ ;  $y \geq 0$  یې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

، نو لرو:  $\frac{dy}{dx} = f'(x)nx^{n-1}$  د  $x > 0$  لپاره له دې امله د  $y > 0$  لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d^n \sqrt{y}}{dy} = \frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{1-n} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}$$

که  $x$  او  $y$  سره بدل شي نو دا لاس ته راځي.

$$\frac{dx^{\frac{1}{n}}}{dx} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

بیلگه -- د  $y = x^{\frac{m}{n}}$ ,  $m, n \in N$  تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

د تام عدد  $m$  او د مثبت تام عدد  $n$  سره یعنی د خوښي کسري اکسپوننت

یا په «جگ عدد» کیدی شي چی د مخه څپرلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق ونيول شي، چی د  $x > 0$  لپاره باور لري.

$$y = x^{\frac{m}{n}} = z^m, \quad z = x^{\frac{1}{n}}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = m \cdot z^{m-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبيعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

بیلگه : یوه بډای چی په یوه ټاکلي وخت کی ټولست (ټولډیری)  $M$  تولید کړي او دا تل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لگښتونه  $F$  ترلي دي. کیدی شي چي سملاسی د دې تولید په ټولست (ټولډیری)  $M$  کی تولید کړي، په یوه زخیره ځاي (زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یی سملاسي ورسوي. دلته د زېرمتون (زخیره کوني) لگښتونه راپید کيږي (ددې د زخیرې لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چی تولید په لږه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته ورورل شي. دلته نو د زخیره کولو لگښتونه منځ ته نه راځي. مگر تل تولید په دې ډول تولید باندي درول، لگښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لگښتونه یی بولو. کومه ډیری  $x$  (ازاده لویه) باید تولید شي، چی د امکان تر پولي کم لگښتونه پرې وشي؟ د زخیرې لگښت د چمتووالی لگښت سره متناسب دی، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چي خرڅلاو ته چمتو کيږي، په څټ متناسب دی. که  $x$  لوي وي نو چمتووالی ته کم اړتیا شته او که  $x$  کم وي نو چمتووالی بدلون تل باید تغیر وخوري یعنی. ټول لگښتونه

لگښتونه دي،  $L$  د زخیرې لگښتونه او  $R$  د چمتووالی لگښتونه دي. دا ازاده لویه  $x$  د

چیرته چی  $F$  ثابت (همغه) یا په کلکه اینبول شوي

$y = f(x) = F + Lx + R/x$  دي،

تولیددیری  $M$  څخه نه شي سترېدلی، لونیډلی یا غټیډلی. له دې امله صدق کوي  $0 \leq x \leq M$ . مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

$$y = f(x) = F + Lx + R/x = \text{Min!} \quad (0 \leq x \leq M)$$

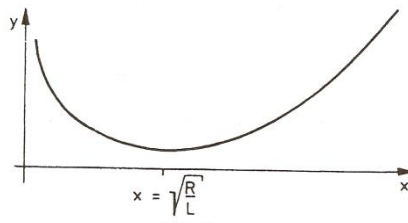
(لمړی  $f(x)$ ) دوه واره دیفرنځیال کیري یا یې دوه واره رایبیلدنه

نیول کیري:

$$f'(x) = L - R/x^2, \quad f''(x) = 2R/x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي:  $f'(x) = 0$ ، پس لرو  $x = R/L$  ؟؟؟

د  $x \geq 0$  له امله  $f''(x) \geq 0$  هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیوم مخ ته لرو



د کړي تگلار په څیره ۲۰. ۱۵ کی انځور شوي.

څرگنده ده: که  $x = R/L < M$  صدق ولري، نو مینیوم مو مخته پروت دی. که  $x = (R/L) > M$  وي، نو یو مینیوم په څنډه  $x = M$  لرو.

نامساوت  $x = R/L < M$  دا مانا لري  $R/L < M^2$  په همدې ډول  $R^2 < M^2L$ . پس مخ ته لرو:  $x = R/L$  د  $R < M^2L$  لپاره او  $x = M$  د  $R > M^2L$  لپاره

نو: که د چمتوالي لگښتونه  $R$  زخیري لگښتونو  $L$  څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید  $x = M$  صورت ونیس. که د زخیري لگښتونه د چمتوالي لگښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد  $x$  تولید شي.

ټاکلی بیلگه : د  $M = 10000, R = 1000, L = 10$  لپاره صدق کوي:

$$R = 1000 < M^2L = 108 \cdot 10 = 109$$

ستر یا غټ ازاد لگښت دی

د  $x = R / L = 1000 / 10 = 100 = 10$  ازاد  $a$  دلته ۱۰ یوونه باید ورزیات شي، چی ۱۰۰۰۰ یوونه تولید کړي د  $M = 10, R = 1000, L = 1$  لپاره صدق کوي  $R = 1000 > M^2L = 100$  غټ ازاده لویه له دي امله  $x = M = 10$  ده . یواځي یوه ازاده لویه دي تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

## د رول قضیه ( Rolle )

ننوتنه :

که د  $f$  یوه تابع په بند اینتروال  $[a, b]$  کې متمادی او د  $a$  او  $b$  ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عدد  $k$  د  $f(a)$  او  $f(b)$  ترمنځ شته، داسې چې  $f(c) = k$  دی

## د وایر شتراس قضیه Weierstrass

که د  $f$  یوه تابع په بند اینتروال  $[a, b]$  کې متمادی یا ناپربکیدونکی وي، نو په دي اینتروال کې لږ تر لږه یو جگ ارزښت (اعظمي قیمت) او یو ټیټ ارزښت (اصغري قیمت) نیسی

دلته شننیز یا تحلیلي ځواب نه ورکول کيږي، دا وینا د لیدلو له مخې معقوله برېښي. کیدی شي چی یو یو غریز (monoton مونوتون یا جگټیټ)

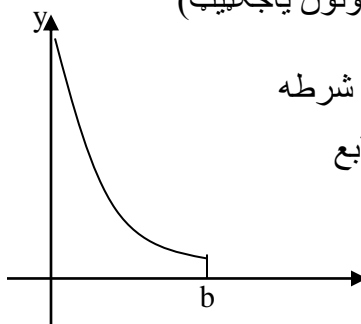
ارزښت د اینتروال په غاړه هم پروت وي.

د اینتروال محدودوالی (بندوالی) بی قید او شرطه

حتمي دی. د بیلگي په توگه د  $y=f(x)=\frac{1}{x}$  تابع

په نیم بنداینتروال  $(0, b]$  کې متمادی ده،

مگر پورته لور ته بنده نه ده، چی په دي



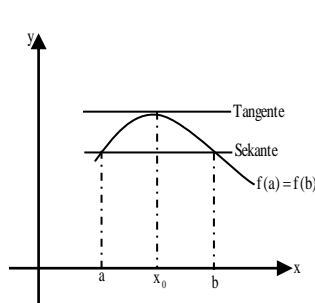


توگه اعظمی ټکی نه لري.

۳. د مشتق منځ ارزښت قضیې

د تانجنت او قاطع ترمځ او په همدې ډول د مشتق – او تفاضل ویش ترمځ داسې نږدې اړیکې وجود لري، کومې چې د انالیوزې په منځ ارزښت قضیو کې تشریح کېږي. د تابع او انحرافي ارزښتونو خوږونو څخه لومړی پسی ترلې لاندې د رول قضیه لاس ته راځي

د رول (Rolle) قضیه:



یوه د  $f$  تابع دې په بند اینټروال  $[a, b]$  کې متمادی وي د  $f(a)=f(b)$  سره او په واز اینټروال  $(a, b)$  کې مشتقور، نو لږ تر لږه یوځای  $c \in (a, b)$  شته دی د  $f'(x_0) = 0$  سره.  
حل:

(۱) که  $f$  ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي:  $f'(x_0) = 0$   
(۲) که  $f$  ثابت نه وي، نو د وایر شټراس د قضی له مخې لږ تر لږه د تابع یوخورا لوي او یوخورا کوچنی ارزښت موجود دی. دا ارزښتونه توپیر لري، ځکه چې  $f$  ثابت نه دی. نو له دې کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د  $f(a)=f(b)$  سره نامساوي دی. په دې اساس د اینټروال په دننه کې یو مونوټون (جگتیب) ځای  $x_0$  موجود دی. د مشتقور توابعو مونوټوني (جگتیب ارزښت) شتون د اړین یا ضروري شرطونو قضی له مخې لاس ته راځي:  $f'(x_0) = 0$

تر اوسه مو وښوول، چې د لازمو شرایطو لاندې یوې افقي قاطع ته یو افقي تانجنت هم شته دی.

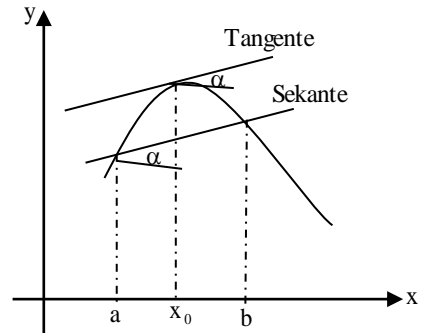
دا هندسي پرابلم کیدی شي چې عمومي شي.

پوښتنه رامنځ ته کیري، چی ایا یوې مایلی قاطع ته په همغه ډول تانجنت د همغه میل (جگوالي) سره جوړیدلی شي؟

ځواب یی لاندې قضیه راکوي

د مشتق د منځني ارزښت (وسطی قیمت) قضیه:  
که  $y=f(x)$  تابع په بند اینتروال  $[a,b]$  کی متمادي او په واز اینتروال  $(a,b)$  کی د مشتق وړ وي، نو هلته یوځای  $x \in (a,b)$  شته دی، د کوم لپاره چی لرو:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$



( څیره ښه نه ده انځور شوي تیک دي  
د الفا د کونج لاندې ضلعي باید د  $x$  محور سره غبرگي وي)

حل:

دا پرابلم په یوه مرستندوي تابع داسی تعریفیري، چی د رول قضیه وکارول شي. د دي لپاره د قاطع مساوات رامنځ ته کوو:

$$y = g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a)$$

د مرستندوي تابع په څیر د مشتق تابع جوړیري:

$$h: h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) - f(a),$$

نو باور لري:  $h(a)=h(b)=0$ . برسیره پر دي  $h$  په  $(a,b)$  کې د مشتق وړوالی لري او په  $[a,b]$  کې متمادي ده. له دي سره د رول د قضیې وړاند نیونه (فرضیه) ورکړ شوي، دا په دي معنا چې یو ځای  $x \in (a,b)$  شته دی د  $h'(x)=0$  سره، چې له هغې لرو:

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ یعنی } h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بې‌لگې نوره هم روښانه کړي.

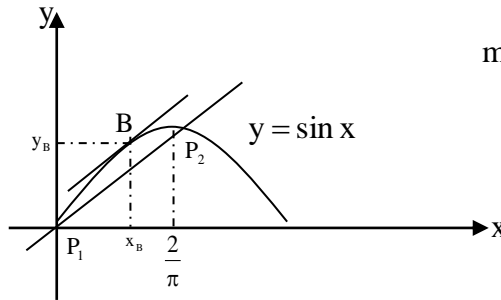
بیلگه :

د  $f(x)=\sin x$  یوه تابع دي داسې ورکړ شوي وي، چې په یوه ټکي  $B(x_B, y_B)$  کې تانجنت د منحنی مماس وي، او کوم چه په  $P_1(0,0)$  او  $P_2(\frac{\pi}{2}, 1)$  ټکو کې همغه میل یا

جگوالی لري لکه قاطع.

ځواب: د قاطع (غوڅي) میل یا جگوالی:

$$m = \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{2}{\pi}$$



د منحنی میل د  $B(x_B : y_B)$  په ټکی کې  $f'(x_B) = \cos x_B = \frac{2}{\pi}$

له دي څخه لاس ته راځي:  $x_B = \arccos \frac{2}{\pi} = 0,88$  او  $f(x_B) = f(0,88) = 0,77$

لمس ټکی:  $B(0,88 : 0,77)$

د تانجنت مساوات:  $y = \frac{2}{\pi}(x - 0,88) + 0,77$

د منح قضی د عمومیت څخه لاس ته راځي:

پراخه شوې یا غزېدلې منځفضیه :

که  $u = f(x)$  او  $v = g(x)$  په بند اینټروال  $[a, b]$  کې متمادی توابع وي او په واز اینټروال  $(a, b)$  د مشتقوړ او  $g'(x) \neq 0$  باور ولري، نو د ټولو  $x \in (a, b)$  لپاره، کم له کمه

پوخاي  $x_0 \in (a, b)$  وجودلري چی لاس ته تري راځي:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: د  $g'(x) \neq 0$  له امله  $g$  معکوس کېدونکی ده او  $v = g(x)$  مساوات د  $x$  په لور معکوس

کېدنه ورکوي، یعنی  $x = g^{-1}(v)$

که  $f$  په تابع کی هم نوي متحوله ځاي پر ځاي شي، نو یوه زنجیري تابع لاس ته تري راځي:

$$u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

د زنجیري قاعدې له مخې یی دا مشتق لاس ته راځي:

که په  $u = h(x)$  تابع د  $v_1 = g(a)$  او  $v_2 = g(b)$

سره د وسطي قیمت قضیه استعمال شي، نو د ځای  $v_0 \in (v_1, v_2)$  په لاندې ډول موجود دی:

$$\frac{h(v_2) - h(v_1)}{v_2 - v_1} = h'(v_0)$$

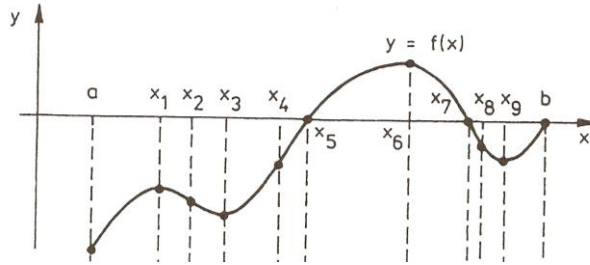
له دې څخه د  $h(v) = f(x), v = g(x)$  او  $x_0 = g^{-1}(v_0)$  سره لاس ته راځي:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

- 
- 
- 
- 
- 
-

يوغريزي توابع (Monotony) (يوناني: يوغريز، برابرډوله)

جگيدونکي (متزايد)، ټيټي ډونکي (متناقص) توابع (جگ-ټيټي ډونکي توابع)



که د ټولو  $x_1 < x_2$  لپاره  $f$  يوه تابع په يوه اينټروال کې  $f(x_1) \geq f(x_2)$  يا  $f(x_1) \leq f(x_2)$  وي، نو تابع په دې اينټروال کې مونوټون جگيدونکي ( - ټيټيدونکي) بلل کيږي، که  $f(x_1) = f(x_2)$  په کې اجازه ونه لري، نو دا  $f(x_1) > f(x_2)$  يا  $f(x_1) < f(x_2)$  کره يا ټينگه مونوټون جگيدونکي ( همغريز ټيټيدونکي) بلل کيږي.

لاندي قواعد، چې له همغريزووالي په لاس راځي، د همغريزووالي حالت لپاره گټور دي.

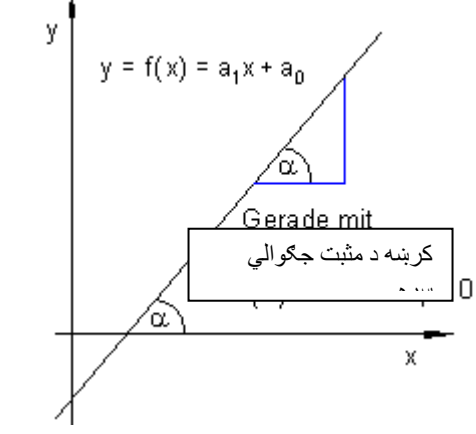
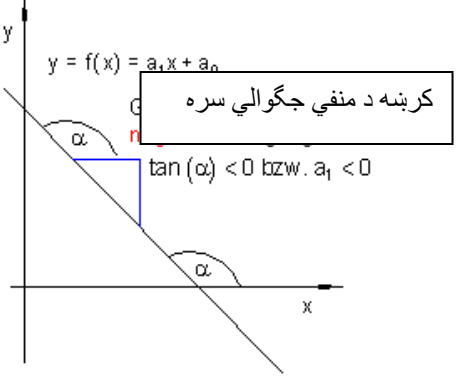
$f$  يوه تابع ټيک هلته د تعريف په ورشو (ساحه)  $D$  کې مونوټون جگيدونکي ده، که د خوښي  $x_1$  او  $x_2$  لپاره، چې په  $D$  کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

د  $f$  يوه تابع ټيک هلته په  $D$  کې مونوټون ټيټيدونکي ده، که د خوښي  $x_1$  او  $x_2$  لپاره، چې په  $D$  کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

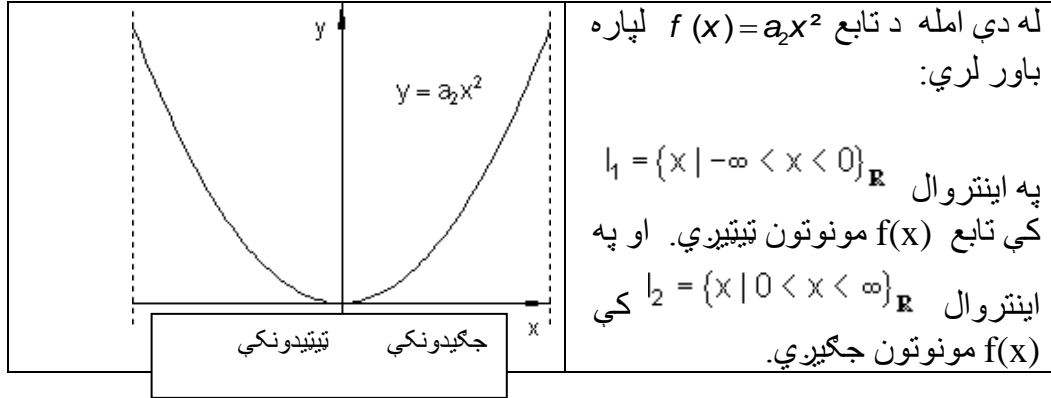
یو غریزوالی (یکنواخت) Monotony جگیتیتوالی، د جگیتیتوالی جملی

 <p><math>y = f(x) = a_1x + a_0</math></p> <p>Gerade mit کرښه د مثبت جگوالی</p>	<p>دا <math>f(x) = a_1x + a_0</math> کرښیز (خطی) تابع خورا ساده تابع ده، چې انحنانه لري. ددی لپاره مسئول یې ثابتته جگیدنه یا ثابت میل، <math>a_1 = \tan(\alpha)</math> دی، چېرته چې <math>\alpha</math> د کرښې او مثبت لوریز د <math>x</math>-محور ترمنځ زاویه (کونج) ده. په مخامخ شکل کې: کرښه د مثبت میل سره <math>\tan \alpha &gt; 0 \Leftrightarrow a_1 &gt; 0</math></p>
 <p><math>y = f(x) = a_1x + a_0</math></p> <p>کرښه د منفي جگوالی سره</p> <p><math>\tan(\alpha) &lt; 0</math> bzw. <math>a_1 &lt; 0</math></p>	<p>که <math>0 &lt; \alpha &lt; 90^\circ</math> یا <math>0 &lt; a_1 &lt; \infty</math> وي، دا په دې مانا چې <math>a_1 &gt; 0 \vee \alpha &gt; 0</math> همداسې (<math>\Leftrightarrow</math>)، نو کرښه جگيري. دا دا معنی لري، چې د جگیدونکي <math>x</math> سره د تابع <math>f(x)</math> ارزښت هم جگيري. په مخامخ شکل کې: کرښه د منفي جگیدني سره: <math>\tan \alpha &lt; 0</math> همداسې (<math>\Leftrightarrow</math>) <math>a_1 &lt; 0</math></p> <p>داپورته داسې دی: <math>\tan \alpha &lt; 0</math> همداسې <math>a_1 &lt; 0</math></p>

که  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  یا  $-\infty < a_1 < 0$  وي، دا په دې معنی، چې  $\alpha < 0$  همداسې  $a_1 < 0$ ، نو کرښه ټیټيري یا لویري. دا په دې معنی، چې د جگیدونکي  $x$  سره د تابع ارزښت  $f(x)$  کوچنی کيري.

په پورته دواړو حالتونو کې د همغریزي تابع (یا د جگ-ټیټي دونکي تابع) غریزو او له یوه مونوتون جگیدونکي تابع څخه، که  $a_1 > 0$  وي. له یوې مونوتون ټیټیدونکي تابع څخه، که  $a_1 < 0$  وي.

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کيږي، چې د منحنیو تلنه راكوي، که فکر وشي، چې په توليزه توگه د منحنی د گراف په هر ټکي تانجنت ايښول کېدی شي.



لکه د کرښې په گراف کې، چې جگیدنه ثابتې وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعنی جگیدنه ثابتې نه ده، بلکې دا د منحنی له یوه ټکي څخه بل ټکي ته تغیر خوري.

د تانجنت جگیدنه  $0 <$  ← منحنی مونوتون جگيږي

د تانجنت جگیدنه  $0 >$  ← منحنی مونوتون ټیټیږي

د تانجنت جگیدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کيږي.

روښانه ده چې د  $f(x)$  تابع لومړی مشتق  $f'(x)$  د تابع میل (جگوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتوني قضیه په لاندې ډول فرمولوو .

قضیه: د  $f(x)$  تابع دې په اینتروال  $I$  کې مشتقور وي.

۱ که د  $f(x)$  تابع په اینتروال  $I$  کې مونوتون جگیدونکي وي، نو باور لري:  $f'(x) \geq 0$  د ټولو  $x \in I$  لپاره

که  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې مونوتون ټیټیدونکي وي، نو باور لري:  $f'(x) \leq 0$  د ټولو  $x \in I$  له پاره.

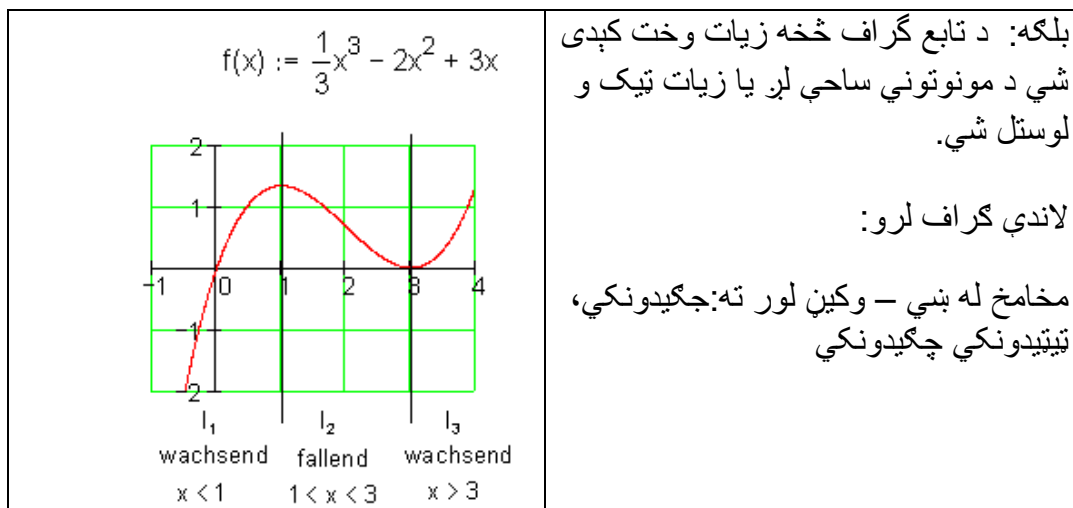
۲. که  $f'(x) \geq 0$  وي، د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې مونوتون جگیدونکي ده.

که  $f'(x) \leq 0$  وي د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې مونوتون ټیټیدونکي ده.

۳. که  $f'(x) > 0$  وي، د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې په کلکه مونوتون جگیدونکي ده.

که  $f'(x) < 0$  وي د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې په کلکه مونوتون ټیټیدونکي ده.

د مونوتوني پیژند ورشو (تعریفساحو) ټاکنه:



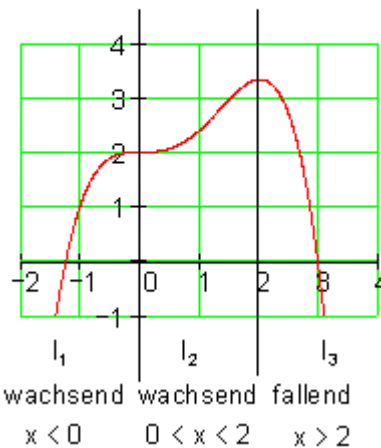
د  $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_{\mathbf{R}}$  لپاره  $f(x)$  په کلکه مونوتون جگیدونکي دی.

د  $I_2 = \{1 < x < 3\}_{\mathbf{R}}$  له پاره  $f(x)$  مونوتون ټیټیدونکي ده.

د  $I_3 = \{3 < x < \infty\}_{\mathbf{R}}$  لپاره  $f(x)$  په کلکه مونوتون جگیدونکي ده.



$$f(x) := \frac{-1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2$$



بیلگه:

پورته له بني – وکین لور ته: جگیدونکي، جگیدونکي، تیتیدونکي

له گراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کیري.

د  $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbf{R}}$  لپاره  $f(x)$  په کلکه مونوتونج گیدونکي ده.

د  $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbf{R}}$  له پاره  $f(x)$  په کلکه مونوتونجگیدونکي ده.

د  $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbf{R}}$  لپاره  $f(x)$  په کلکه مونوتون تیتیدونکي ده.

### ځای اړونده افراطي ټکي

یادونه: که په لیکنه انحرافي ټکي گورئ، نو هغه افراپي ټکي دي.

که د  $f(x)$  لپاره د  $x_0$  په ځای کې  $f'(x) = 0$  ولرو نو یو نسبي تیت ټکی مخ ته لرو.

که د  $f(x)$  لپاره د  $x_0$  په ځای کې  $f'(x) = 0$  او  $f''(x) > 0$  ولرو نو یو نسبي تیت ټکمو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو:  $f'(x) = 0$  او  $f''(x) < 0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي (تیت ټکي یا جگ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې  $f'(x) = 0$  وي، او د  $f''(x)$  مخ نښه ( $-$ ،  $+$ )، په دې پریکړه کوي چې ایا یو تیت ټکی (اصغریټکی) او که جگ ټکی (اعظمي ټکی) مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

۱- دا اړیکي یواځې د  $x_0$  لپاره ارزښت لري چې د تعریف سټ په دننه کې پروت وي او هلته د  $y = f(x)$  تابع پوره څو ځلي مشتقور وي، د غاړو (څنډو) او د هغو ځایونو له پاره چې هلته  $f(x)$  تابع کم یا هیڅ مشتقور نه وي، ځانگړو څیړنو ته اړتیا ده.

۲- شرایط چې  $f'(x) = 0$  وي (مشتقور تابع) یواځې د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی (ضروري یا اړین شرایط).

۳- شرایط  $f'(x) = 0$  او  $f''(x) \neq 0$  د بحراني ټکي لپاره یواځې پوره کیدونکی دی او نه ضروري (

بیلگه :

د  $f(x) = x^2 + 2$  تابع گراف وکارئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د گراف او د مشتق له لارې وټاکئ.

حل: د بیلگې له گراف څخه روښانه ده، چې تابع د  $x=0$  په ځای کې خورا تیت ټکی (اصغري-) لري.

### گراف: که گراف دی گران لوستونکی وباسی

د انحراف ټکی له پاره اریبن شرطونه:

۱ - د تابع لومړي مشتق دی:  $f'(x) = 2x$  په دې مساوات کې د تابع مشتق د  $x_0$  له پاره صفر ځای لري، یعنی دلته یو پحراني ټکی پروت دی.

۲ - د تابع دویم مشتق:  $f''(x) = 2$ . دا چې  $f''(x) > 0$  دی، نو یو نسبي ټیټ ټکی مخ ته لرو.

بیلگه: د  $y = x^4$  تابع د  $x = x_0 = 0$  لپاره نسبي ټیټ ټکی لري او باوري دي

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

گورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوی دی.

د پورته شني څخه لاندې پېژند ته راځو:

**پېژند:** د  $x = x_0$  په چاپیریال کې د  $y = f(x)$  تعریف شوي تابع یو نسبي جگنکی په همدې ډل نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو  $x_0$  ته پوره نږدې  $x$  لپاره باور ولري:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{په همدې ډول} \quad f(x) > f(x_0)$$

**جمله:** (د یوه نسبي افراطي ټکی لپاره ضروري شرایط):

که په  $x_0$  کې مشتقور تابع  $y = f(x)$  انحرافي لري نو لرو:  $f'(x) = 0$

دا جمله مور ته وایي (یادونه ۲ دې مقایسه شي): چیرته چې  $f'(x) \neq 0$  وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځې د  $x_0$  ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره لرو  $f'(x) = 0$ ، خو حتمي نه ده چې  $y = f(x)$  دې یواکستریموم ولري.

**جمله :** ( د یوه افراطي ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په  $x = x_0$  کی دوه واره مشتقور تابع  $y = f(x)$  لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0, \quad f''(x) \neq 0$$

نو تابع  $y = f(x)$  هلته یو افراطي ټکی لري. خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي:

$$f''(x) < 0$$

خورا جگ ټکی مخ ته پروت دی، که وي:

$$f''(x) > 0$$

له بنی لور انحنا یا کوروالی اوله کین لور انحنا یا کوروالی (مقعر او محدب)

که په یوه اینتروال کی د مشتقور تابع  $f$  دویم مشتق  $f'' > 0$  وي، نو په دې اینتروال کی گراف کین کور شوی یا کینه انحنا لري او که دویم مشتق  $f'' < 0$  وي، نو د تابع گراف بنی کور یا بنی انحنا لري.

**دوه څیرې ( د لاندې بېلگې څیره و باسی ؟ )-**

بیلگه:

ټول گونگتابع (راشنل تابع)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$  سره په کومه ورشو (ساحه) کی کینکور دی (کینه انحنا لري) (ننوتی یا مقعر دی) او په کومه ورشو کی بنی کور دی (بنی انحنا لري) (محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (لومړی مشتق)

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

د  $6x - 4 > 0 \Rightarrow x > 2/3$  لپاره کین گوروال (کینه انحنای ننواتی یا مقعر)

د  $6x - 4 < 0 \Rightarrow x < 2/3$  لپاره بنی کوروالی (بنی انحنای وتلی یا محدب)

بیلگه: د مات راشنل تابع  $f(x) = \frac{1}{x+2}$  گراف یو های پارابول دی. د های پارابول کومه خانگه کینه کره ده یا کینه انحنای لری (مقعر)، او کومه یوه بی بنی کوروالی - یا بنی انحنای لری (محدب)؟

$$\text{دویم مشتق: } f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}; f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$$

صورت تل مثبت دی.

د  $x < -2$  لپاره د مخرج او همداسی د کسر ارزښت منفي دی. د های پارابول خانگه بنی کوروالی یا انحنای لری (وتلی یا محدب).

د لپاره  $x > -2$  مخرج او همداسی ټول کسر (مات) مثبت دی.

های پارابول کینکور دی یا کینه انحنای لری (ننواتی یا مقعر).

بیلگه: د دواړو توابعو  $f(x) = \sqrt{x}$  او  $g(x) = \sqrt{x^3}$  کوروالی (انحنای) دی یو د بل سره پرتله شي.

دواړه توابع د لپاره تعریف دي.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad g'(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{2}$$

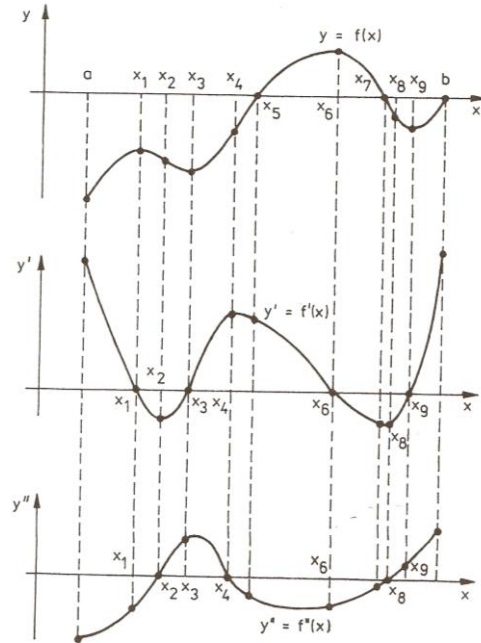
$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \quad g'' = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

دویم مشتقونه د  $x \in R^+$  پاره تعریف دی.

په دې ساحه کې  $f''(x) < 0$  دی. اړونده گراف بنی کوروالی یا انحنا لري، دا یو شي لور ته واز پارابول بنیایي.

په همدې ساحه کې  $f''(x) > 0$  دی. اړونده گراف کین کور دی یا کینه انحنا لري. اړونده گراف یو کین کوروالی یا کینه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د انعطاف ټکی (اورونټکی)



یادونه: ولي اورونټکی؟

وبه گورو، چې په دې ټکي کې گراف خپله لور اړوي، نو ..... مور له پورته څیرې اټکل کولی شو چې: که د  $x_0$  ځای کې دا لاندې ولرو  $f''(x) = 0$  (او  $f'''(x) > 0$ )، نو یو بنی-کین- انعطاف ټکی (اورونټکی)

مو مخ ته پروت دی.

برعکس (په څټ):

که وي:  $f''(x) = 0$  او  $f'''(x) < 0$  نو یو کین - بنی - د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

د انعطاف ټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چی  $f''(x) = 0$  وي ، داچی دا بنی - کین - او که کین- بنی - انعطاف ټکی (اورونټکي) دی، د  $f''(x)$  مخ نښه یی ټاکي.

۴ - شرایط  $f''(x) = 0$  د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړیین یا ضروري دي.

د  $y = x^4$  لپاره  $f''(0) = 0$  دی، مگر اورونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

۵ - شرایط  $f''(x_0) = 0$  او  $f'''(x_0) \neq 0$  د انعطاف ټکي لپاره پوره کیدونکي دي.

گورو چی  $y = f(x) = x^5$  تابع د  $x = x_0 = 0$  ځای کی یو انعطاف ټکی لري او باوري دي:

$$f'(x) = 5x^4, \quad f'(0) = 0$$

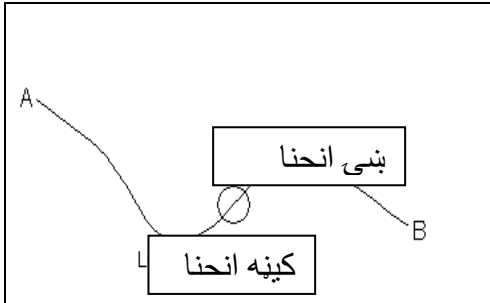
$$f''(x) = 20x^3, \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 60x^2, \quad f'''(0) = 0$$

گورو چی دریم مشتق  $f'''(x)$  نه له صفر څخه کوچنی او نه لوي دی.

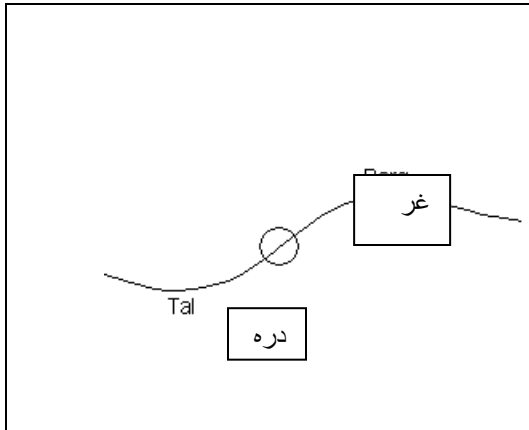
تر مخ راورني او د کلمي روښانه وني:

د دی کلمي د لا نوري روښانه کولو لپاره په لاندې توگه مخ ته ځو:

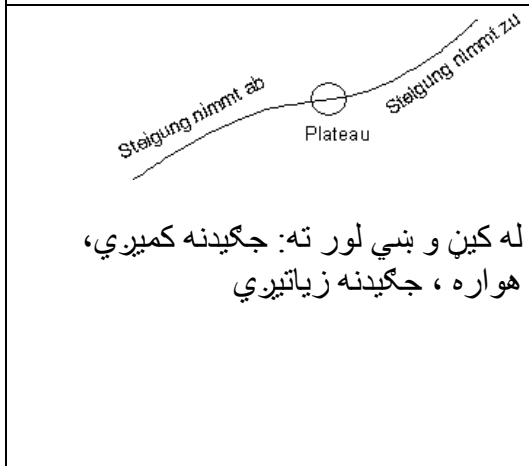


د بایسکل خُغاستي چي له A خُخه خُغلي د منحنی خُخه تیرپرې او B ته رسيږي. د همغه وخت د بایسکل خُغاستي د انډل حالت د خُغاستي په وخت کي په پام کي ولری. د کیني منحنی (د کین لوري د انډل حالت) خُخه وروسته د بنی لوري منحنی کي خُغلي.

د کیني- او بنی منحنی (کړي) ترمنځ باید د بایسکل انډل سیده ولار وي (عمود وي)، چي دا د انډل بدلون دی له کیني لوري و بنی لوري ته. دا د کیني او بنی منحنی ترمنځ اوریدنه یاد **انعطاف تکی** بلل کيږي.



تاسو له بایسکل سره په یوه غونډی خُغلي. وروسته له هغی، چي له تالی خُخه تیرپرې، نو لار په جگي دو پیل کوي. په لومړي سر کي نرم او بیا په نیغه جگيري، بیا په دې پسي جگوالی بیرته کميري، چي پاس د غونډی په خوکه صفر ارزښت غوره کړي. یو چیرته په غونډی پورته صفر ارزښت ته رسيږي. یو چیرته په لار جگي دنه خورا لویه وه. هلته د انعطاف تکی پروت دی.



د بایکل خُغلوونکي بل حالت، چي له خُنگ دیاگرام خُخه یي رانیسو:

له کین و بنی لور ته: جگیدنه کميري، هواره، جگیدنه زیاتيري

په غره د بایسکل خُغاستمیل یا جگي دنه لومړی کميري، چي له سره بیرته جگه شي. ددې ترمنځ یوه ساحه شته، د کم جگوالي سره (یوه نسبتاً هواره). دې نسبتاً هوار خای کي د توتیه کرښي جگي دنه نسبت بل خای ته کمه ده. هلته اوړونکی (د انعطاف تکی) پروت دی.



پوهیرو، چې د یوې تابع لومړی مشتق د تابع د جگوالی تابع دی، چې له گراف څخه یې جگوالی لوستل کیږي. دا چې د انعطاف ټکی خورا لوی یا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پیدا کیږي، چې د مشتق تابع انحرافي ارزښتونه پیدا کړو.

دا تلنار همغسې ده، لکه د پیل تابع  $f(x)$  لپاره مو ټاکلي. اوس د مشتق تابع  $f'(x)$  باندې دا کار یا عمل اجرا کیږي.

مخکی له دې چې یو لړ جملی د بحراني (جگ - ټیټ -) ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څیرو، غواړو چې دا کلیمی تعریف کړو .

دواړه کلمې به د نسبي بحراني ټکي په بڼه کی سره را غونډې شي.

**پېژند ۲۰ . ۶ :** په یوه چاپیریال  $x = x_0$  کی مشتقور تابع  $y = f(x)$  یو کین- بنی- انعطاف ټکی په همدې ډول بنی- کین- انعطاف ټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جگ ټکی (عظمي نقطه) په همدې توگه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

**جمله ۲۰ . ۱۱ :** ( د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په  $x_0$  کی مشتقور تابع  $y = f(x)$  اکستریموم لري نو لرو:  $f'(x) = 0$

دا جمله مور ته وایي ( یادونه ۲ دې پرته شي): چیرته چې  $f'(x) \neq 0$  وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکولپاره یواځې د  $x_0$  ځای په پوښتنه کی راځي، چې د هغې لپاره  $f'(x) = 0$  وي، خو حمته نه ده چې  $y = f(x)$  دې یو بحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په  $y' = f'(x)$  څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

**جمله ۲۰ . ۱۲ :** ( د اورونټکي (انعطاف ټکي) لپاره اړین شرایط):

که په  $x = x_0$  کی دوه واره مشتق وړ تابع  $y = f(x)$  هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته تري راځي:  $f''(x) = 0$

دلته هم باور لري ( یادونه ۴ دې پرتله شي): چیرته چی  $f''(x) \neq 0$  وي ، نو هلته نه شي کیدی چي اورونتيكي موجود وي. مگر چیرته چی  $f''(x) = 0$  وي ، اورونتيکی شته کېدلی شي، خو اریین یا ضرور نه ده چی هلته انعطاف ټکی شته وي. له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

**جمله ۲۰، ۱۳:** (د اورونتيكي یا انعطافټكي لپاره پوره کیدونکی شرطونه) که په  $x$

$x_0 =$  کی دریوار مشتقور تابع  $y = f(x)$  لپاره وي:

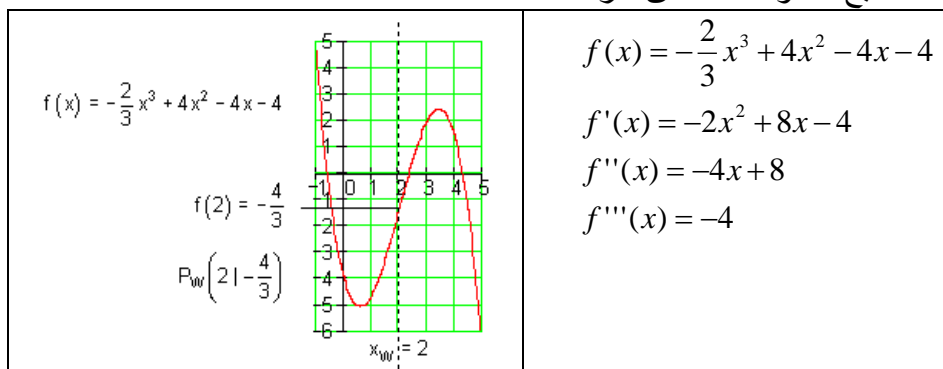
$$f''(x) = 0 \quad \text{او} \quad f'''(x) \neq 0$$

نو هلته یو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که  $f'''(x) < 0$  وي، نو یو کین- بنی - انعطاف ټکی مخ ته پروت دی او د  $f'''(x) > 0$  لپاره یو بنی-کین-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

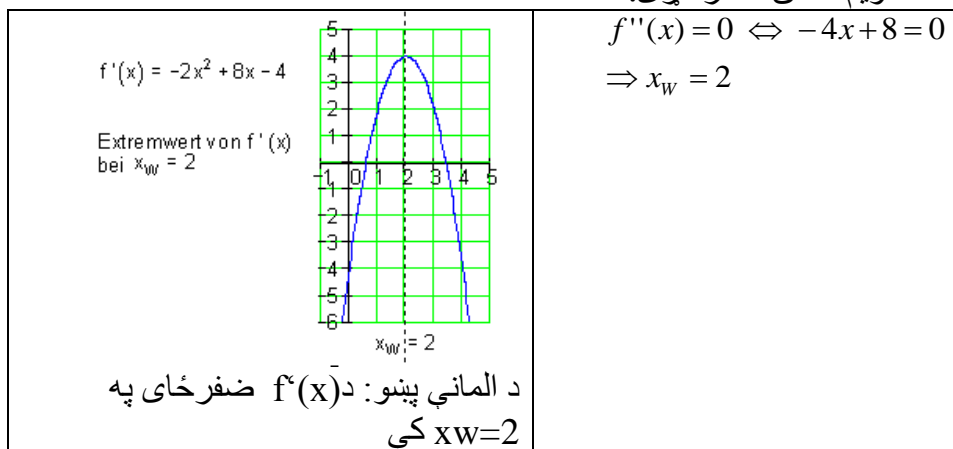
شننیزه یا تحلیلي بیلگه:

یادونه: مور د  $x_E$  سره افراطي ټکی په نښه کوو او د  $x_W$  سره د انعطاف - یا اوړون ټکی په نښه کوو.

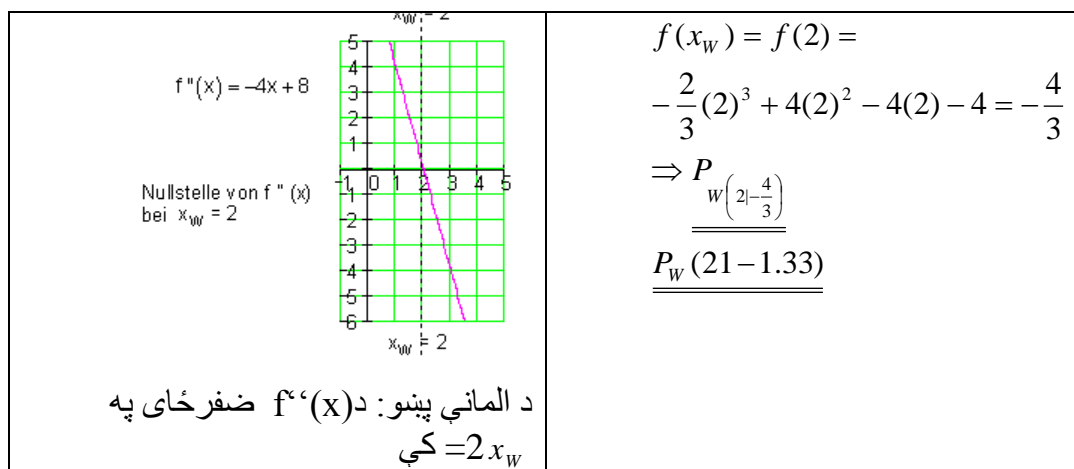
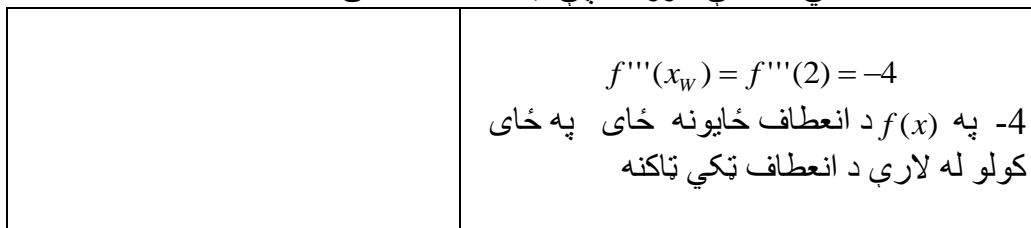
1- تابع مساوات د مشتق سره



۲- دویم مشتق صفر کری.

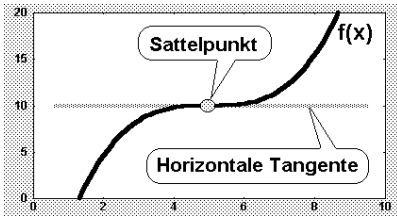


3- د انعطاف تکی له مخی بنوونه، چي ایا د انعطاف تکی شته دی؟



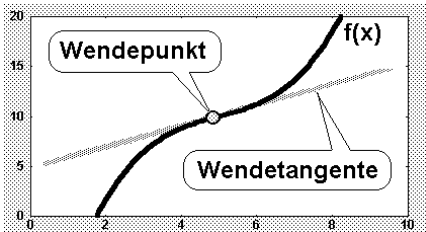
پام: په انعطاف های  $x_w$  کې د  $f(x)$  گراف کېږي.

په یوه په خوبه ټکي  $x_0$  کې د کېږوني (انحنا) لپاره باور لري:  
 $f''(x) > 0$  په دې معني دی، چې  $f(x)$  کین لور ته کېږي (انحنا لري) دی.  
 $f''(x) < 0$  په دې معنی، چې تابع  $f(x)$  گراف بنی لور ته کېږي (انحنا کوي)  
یو زینټکی Der Sattelpunkt څه شی دی؟

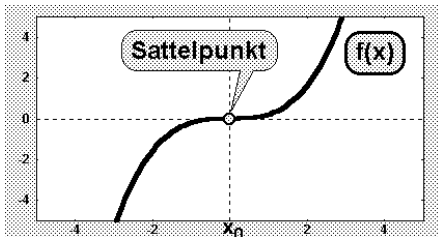


پیزند: د زینټکي (کله کله برنډې ټکی هم بلل کېږي) لاندې د انعطافټکي ځانگړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت)

وي:



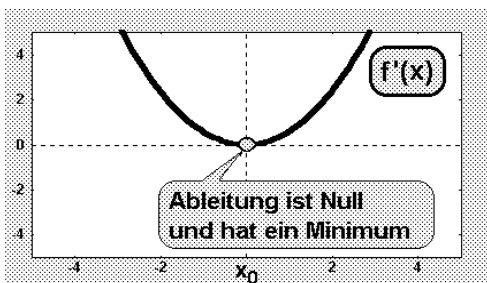
د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي. دا یو مائل (نه افقي) تانجنت لري



توضیح: اوس فکر کوو، چې یو زینټکی څنگه د شمېرلو له مخې پېژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانگړي توگه دا مخ ته لرو، چې یو زینټکی له بني - کینه انحنا و شمېرو.

د دې لپاره د  $f(x)$  تابع جگوالی په پام کې نیسو، یعنی لومړی مشتق: د زینتکي د مخه د  $f(x)$  جگوالي کمیري، په زینتکي کې صفر ارزښت لري، او له زینتکي څخه وروسته بېرته جگيري.

یو زینتکي (د بني - کین - بدلون سره) په دې پېژندل کیري، چې لومړی مشتق  $f'(x)$  یې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي تیتکي (مینیموم) ولري.



د لومړي مشتق  $f'(x)$  شکل داسې برېښي:

لومړی شرط دی، چې مشتق یعنی  $f'(x)$  په زینتکي کې د صفر سره مساوي دی.

زینتکي (بني-کین-بدلون)  $f'(x_0) = 0$  دوم شرط دی، چې مشتق  $f'(x)$  هلته یو نسبي مینیموم لري.

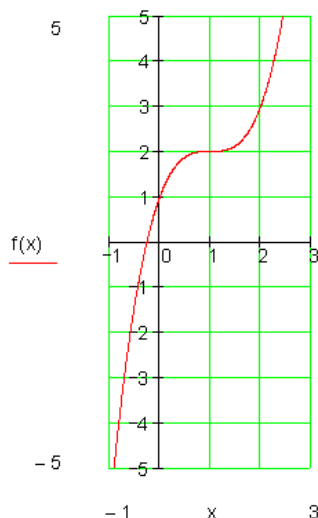
دا په دې معنای، چې بل جگ مشتق  $f''(x)$  باید په صفر مساوي وي او مخښه له منفي و مثبت ته بدلېږي.

له دې سره سم د زینتکي لپاره پوره کېدونکي قضیه ومیندل شوه: د زینتکي لپاره جمله (خوي ټاکنه) (د بني - کین - انعطاف سره) الف: د  $x_0$  ځا کې لومړی مشتق  $f'(x)$  صفر دی:  $f'(x_0) = 0$

ب: د  $x_0$  په ځا کې لومړی مشتق  $f'(x_0)$  یو مینیموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، یعنی  $f''(x) = 0$  دوم مشتق مخښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي. بل بدیل (د گرانو دوستانو وړاندیز)

؟  
\  
,

### زینتکی Der Sattelpunkt



د انعطاف ټکي یو ځانگړی حالت زینتکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جگیدني سره که د کین لور ورنږدې شو فکر کیري، چي، نسبي جگتکی مو مخ ته پروت که څوک د بني لور ور نږدې شي فکر کوي، چي یو نسبي ټیټکی مخ ته لرو. اوس دا حالت د ریاضیاتو له لوري څیرو: مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'''(x) = 6$$

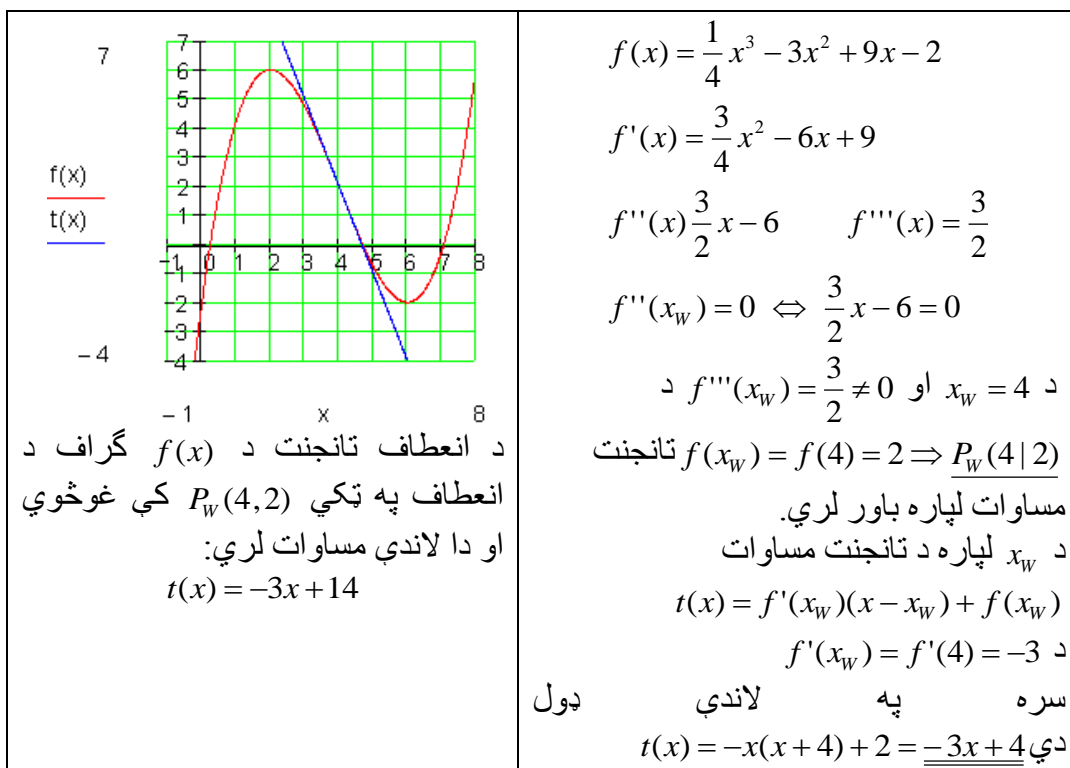
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1$$

سره $x=1$ د $\leq 1$ زینتکی	سره $x=1$ د $\leq 1$ انعطاف ټکی	$f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ $f'''(1) = 6$
-----------------------------	---------------------------------	---

د انعطاف ټکي لپاره شرایط پوره دي. دا چي د  $f''(1) = 0$  له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زینتکی دی.

د انعطاف ټکي پیداکونه:

د تابع گراف باندي انعطاف ټکي کي تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیري. د انعطاف تانجنت هم همداسي پیدا کیري لکه د تابع دگراف په یوه ټکي کي تانجنت، چي تانجنت مساوات ټاکل کیري.



د انعطاف- یا ورون ټکي تانجنت پیداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دگراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کېږي. د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کېږي، لکه د تانجنت مساوات د گراف په خوښه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه  $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0$  دلته تر څیړنې لاندي نه نیول کېږي.

د کړي یا منحنی بحث (Kurven Diskussion):

یوه تابع  $y = x^3 + x^2 - 3$  لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بیا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نڅېښه کړئ، رېښانه کړئ، چې انحنایېرته له کیني لور و ښی لوري ته او له ښی لوري و کیني لوري ته ده.

## فعالیت:

- تناظر تعریف کری.
  - لاندی توابع رسم کری، جگ تکی، تیت تکی او د انعطاف تکی یی پیدا اکرئ.
  - $x^3 + x$
  - $3x^3 + x + 2$
- ددی لپاره چي یوه تابع رسم کرای شو، ساده ده که د تابع غوره تکی و پیژنو. مور دي بحث ته د منحنی بحث وایو. مور په دا ډول خبرو اترو کي باید سیستماتیک مخ ته لار شو.
- په لاندی ډول تلنه گټوره بلل شوي.

دتعریف ساحه: د تابع څیرنه یواځي په همدې ورشو کي موخه وره ده. تناظر **Symetry**: باید وټاکل شي، چي تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده. د محوري تناظر لپاره باور لري:  $f(-x) = f(x)$  د مرکزي تناظر لپاره باور لري.  $f(-x) = -f(x)$  په پورته دواړو حالتونو کي دي فقط  $x \geq 0$  وڅیرل شي. یه ټولیزه توگه که ټول ریل تابع په پام کي ونیسو، نو گورو چي که توان (د پولینوم درجه) یی جفت (جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان (د پولینوم درجه) طاق (ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

بحراني تکی **Extrema**: د نسبي بحراني ټکو ټاکل (جگتکی، تیتتکی) د جگتکی یا نسبي جگ تکی پوره کي دونه کي شرطونه:

$$f'(x_1) = 0 \wedge f''(x_1) < 0$$

## انعطافتکی یا اورونتکی : Inflection Point

د انعطافتکو او همداسي زینتکي ټاکلو له پاره پوره کي دونه کي شرطونه:

$$f''(x_w) = 0 \wedge f'''(x_w) \neq 0$$

زینتکی انعطافتکی دی د افقي تانجنت سره.

د تابع تقاطع د  $x$  او  $y$  محورونوسره (د محورونو غوڅتکی):

$$P_x(x_i | 0) \Rightarrow (x) = 0$$

$$P_y(0 | y_s) \Rightarrow f(0) \text{ ټاکي (صفرخای) ټاکي}$$



دگراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې گراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځور پیري. دا راته په گوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمیرل کيږي.

د انحنای حالت او یو غبریزوالی:

د انعطاف په ټکي  $x_w$  کې د  $f(x)$  گراف تغیر خوري.

په خوښه یوه ټکي  $x_0$  کې د انحنای لپاره باور لري:

$f''(x_0) > 0$  په دې معنا، چې د  $f(x)$  تابع گراف کینه انحنای لري (کونوکس)

$f''(x_0) < 0$  په دې معنا، چې د  $f(x)$  تابع گراف ښی انحنای لري (کونکاو)

یو غبریزوالی

1- که د ټولو  $x \in I$  لپاره وي  $f'(x) \geq 0$ ، نو  $f(x)$  په انتروال  $I$  کې مونوتون جگپړي. که

د ټولو  $x \in I$  لپاره  $f'(x) \leq 0$  وي، نو  $f(x)$  په انتروال  $I$  کې مونوتون ټیټي-دونکی دی.

2- که د ټولو  $x \in I$  لپاره  $f'(x) > 0$  وي، نو  $f(x)$  تابع په انتروال  $I$  کې کره غښتلي مونوتون جگپړي-دونکی ده.

که د ټولو  $x \in I$  لپاره  $f'(x) < 0$  وي، نو  $f(x)$  تابع په انتروال  $I$  کې غښتلي مونوتون جگپړي-دونکی ده.

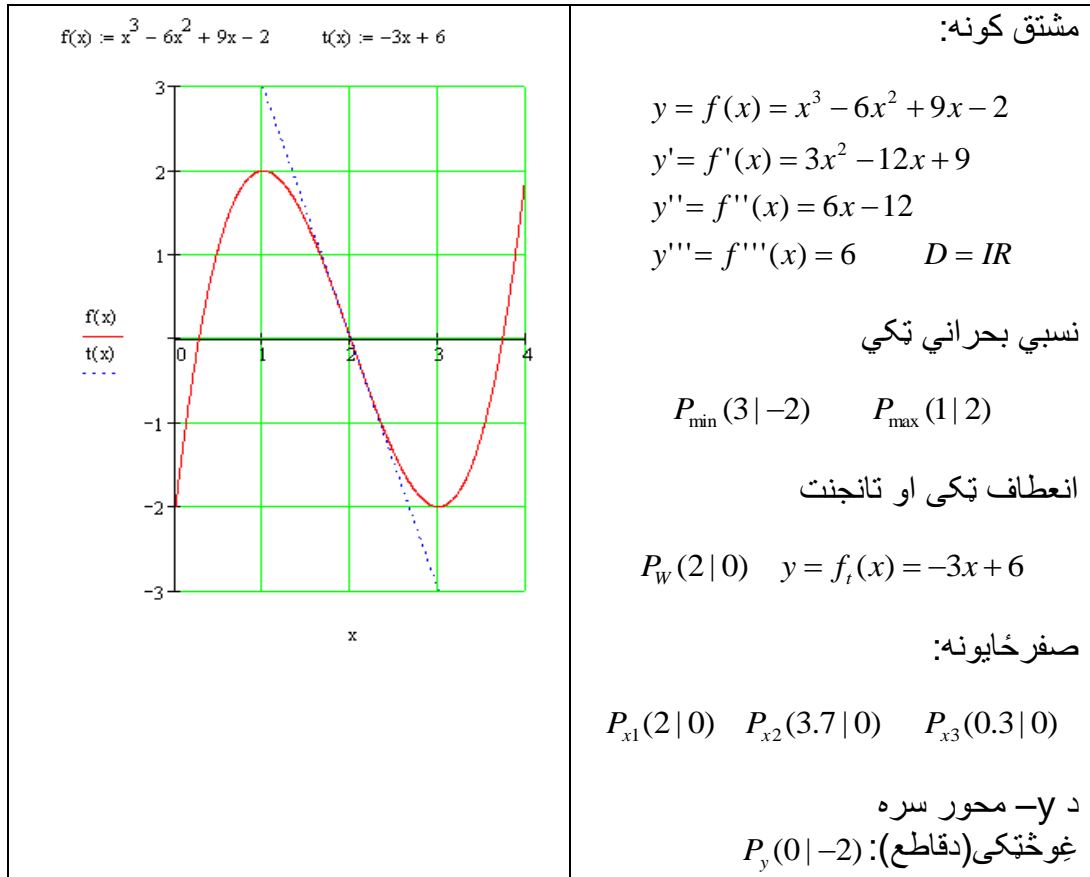
د پيژند ورشو ژي ټکي:

د تابع ژي ټکي کتنه په پيژند ورشو کې. که پيژند ورشو نامحدوده وي، نو ليميټ  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  او  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ټاکو.

بيلگه:

د  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$  تابع رسم کړئ.

.  
.
  
.
  
.



<p>د تابع حالت په <math>x \rightarrow -\infty</math> او <math>x \rightarrow \infty</math> کې</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left( 1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left( 1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = \infty$ <p>سیومتري: نه لري</p>	<p>یو غریزو والی (مونوتونی یا جگ - نیتوالی)</p> <p>په <math>I_1 = \{x \mid -\infty &lt; x \leq 1\}_{\mathbb{R}}</math> کې یو غریز جگیري.</p> <p>په <math>I_3 = \{x \mid 3 \leq x &lt; \infty\}_{\mathbb{R}}</math> کې یو غریز جگیري.</p>
--	--

د کبروالي يا انحناء حالت:

بنی کبروالي يا انحناء (محدب) :  $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کین کبروالي يا انحناء (مقعر) :  $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

د افراطي د جگ-تیت ټکو جملي يعني دا وروستي نومولی جملي اوس باید په یو لړ بیلگو استعمال شي.

دلته دې د ورکړ شوو توابعو، د پیژند سټ (- ډیری)، انعطاف‌کي، جگ-تیت‌کي (اکستریموم، قطبونه، اسیومپتوتی وینوول شي او په دې جوړ(ودان) دې د تابع تلنه وکینل شي. دې بنوونو یا څیړنو ته د کبرو خبرې اترې یا - مباحثه ویل کیږي، یعنی دلته د کبرو ( انحناء) د مختلفو ډولونو په څوونو غږیږو.

مور خپل تمرکز د افراطي ټکو(اکستریموم) او انعطاف‌کي( اړونټکو) رامعلومو یا روښانو څیړنوته متوجه کوو او د «انحناء- خبرې اترې) د انحناء(کبري)-چنون (« د لاندې شیمه له لارې مخ ته بیایو:

0 - د چمتووالي لپاره د تابع  $y = f(x)$  د دریمې درجې پورې مشتق پیدا کیږي، بیا له ټولو هغو ارزښتونو  $x_i$  څخه سټ M جوړیږي (۴ ټکی) چی وروسته باید ځانگړې تر څیړنی لاندې ونیول شي.

په سټ M کی لومړی د غاړو ټکو اېسټیز یا پراټه ارزښتونه نیول کیږي. په دې پورې په ځانگړي ډول بیا تشخایونه (لوکی Lücke نیمگرتیا) او هم قطبونه اړه لري. د M سټ به وروسته په نورو ارزښتونو تکمیل شي.

۱ - د  $f(x) = 0$  صفر ځایونو  $x_i$  سټ M0 لټول کیږي.

۲ - ټول ځایونه x لټول کیږي، چی هلته  $y = f(x)$  د مشتق قابلیت نه لري او په ډیری M کی یی نیسي. بیا د ټولو ارزښتونو  $x_j$  ډیری M1 لټول کیږي، چیرته چی  $f'(x) = 0$  وي، ( دا د بحراني ارزښتونو لپاره په پوښتنه کی راځي) ، او د  $y_j = f(x_j)$  تابع

ارزبنتونه یی. ورپسی سړی د ټولو  $x_j \in M_1$  ارزبنتونه د  $f(x_j)$  د دویم مشتق لپاره لټوي.

۳ - ټول هغه ارزبنتونه  $x$  چیرته چی  $y = f(x)$  دوه ځله مشتقور نه دی د  $M$  په سټ کی نیول کیږي.

ورپسی بیا سړی د ټولو  $x_k$  سټ  $M_2$  لټوي، چیرته چی  $f''(x) = 0$  وي (دلته نو د انعطاف ټکی پوښتنه کی راځي) او د هغه د تابع ارزبنتونه  $y_k = f(x_k)$ .

بیا د ټول  $x_k \in M_2$  لپاره دریم مشتق  $f'''(x)$  ازمائیل کیږي. د ټولو  $x_k \in M_2$  ارزبنتونو ډیری  $M_{21}$  د کومو لپاره چی  $f'''(x_k) < 0$  وي نو افقي (پراته) محور کین - بنی - انعطاف ټکی جوړوي. د ټولو  $x_k \in M_2$  ارزبنتونو ډیری، د کومو لپاره چی وي  $f'''(x_k) > 0$  نو د پراته - یا افقي محور د بنی - کین - انعطاف ټکی جوړوي. د ټولو  $x_k \in M_2$  ډیری د کومو لپاره چی  $f'''(x_k) = 0$  وي او یا دریم رابیلیدونکی نه وي موجود نو په ډیری  $M$  کی نیول کیږي.

۴ - د تیرو درسونو تعریفونو او جملو سره سم په افراطي ټکو او انعطاف ټکی یا ورونتکی باندي د ډیری  $M$  څیرنه د اصلي حالتونو لپاره اوس یو څو بیلگی راوړو

**بیلگه :** بلواک  $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$  هر چیرته پوره زیات مشتقور دی.

$$0 - f(x) = 3x^2 - 12x + 9, f'(x) = 6x - 12, f''(x) = 6$$

په سټ  $M$  کی یواځي  $-\infty, \infty$  نیول کیږي د حد - یا پولي تیریدنو په موخه یا هدف  
 $M = \{-\infty, \infty\}$

$$1 - f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$M_0 = \{x_1, x_2\} = \{0, 3\}.$$

$$2 - f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$M1 = \{x3, x4\} = \{1, 3\}, y3 = 4, y4 = 0$$

$$f''(x3) = f''(1) = -6 < 0, \text{ Minimum (}$$

$$) f''(x4) = f''(3) = 6 > 0, \text{ maximum (}$$

$$M11 = \{1\}, M12 = \{3\}.$$

$$3 - f''(x) = 6x - 12 = 0,$$

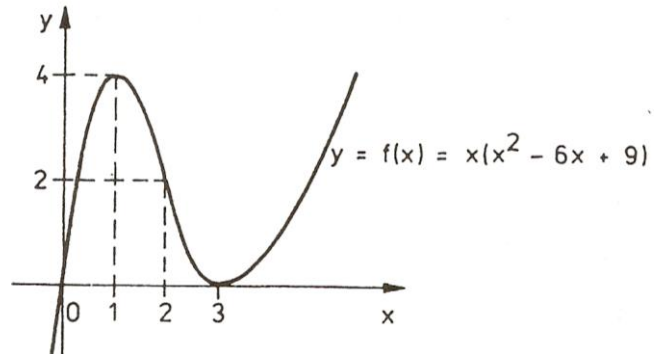
$$M2 = \{x5\} = \{2\}, y5 = 2$$

$$f'''(x5) = f'''(2) = 6 > 0 ($$

بسی - کین اوریدونتیکی.  $M22 = \{2\}$ .

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

په دي ډول د منحنی تگلار په لاندې څېره کې لاس ته راځي



بیلگه : تابع  $f(x) = x^4 - 4x^3$  پوره په خوښه مشتق ورده.

$$0 - f'(x) = 4x^3 - 12x^2, f''(x) = 12x^2 - 24x, f'''(x) = 24x - 24$$

په سټ  $M$  یواځي  $-\infty, \infty$  نیول کیري:  $M = \{-\infty, \infty\}$

$$1 - f(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x - 4) = 0$$

$$M_0 = \{x_1, x_2\} = \{0, 4\}.$$

$$2 - f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3) = 0$$

$$M_1 = \{x_3\} = \{3\}, \quad y_3 = -27$$

دا چی د  $x = 0$  لپاره دویم مشتق  $f''(0) = 0$  دی، دا ارزښت د ۳ - لاندې څیرل کیري

$$f''(x_3) = f''(3) = 36 > 0, \quad \text{Minimum, } M_{12} = \{3\}$$

$$3 - f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2) = 0$$

$$M_2 = \{x_4 - x_5\} = \{0, 2\}, \quad y_4 = 0, \quad y_5 = -16,$$

$$f'''(x_4) = f'''(0) = -24 < 0$$

انعطاف‌تکی (کین- بنی - انعطاف‌تکی)  $M_{21} = \{x_4\} = \{0\}$ ,

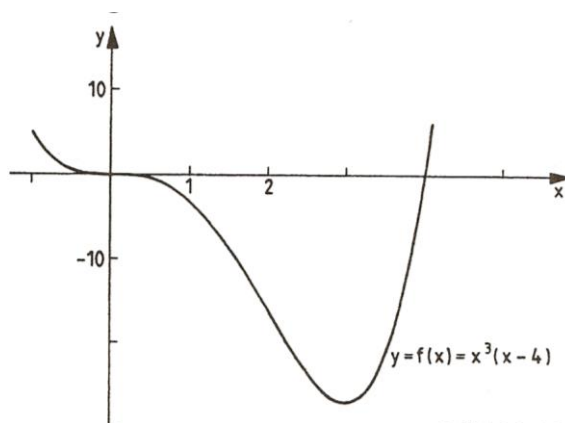
$$f'''(x_5) = f'''(2) = 24 > 0,$$

انعطاف‌تکی (بنی - کین - انعطاف‌تکی)

$$M_{22} = \{x_5\} = 2.$$

$$4 - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$$

د لاندې څیرې څخه د کرې تڼشکل لاس ته راځي



بیلگه : تابع  $y = f(x) = e^{x^3}$  پوره مشتق‌ور دی:

صفر:

$$f'(x) = 3x^2 e^{x^3}$$

$$f''(x) = 3x(3x^3 + 2)e^{x^3}$$

$$f'''(x) = 9x^3 e^{x^3} (3x^3 + 2) + 6e^{x^3} (6x^3 + 1),$$

$$M = \{\infty, -\infty\}$$

۱ - تابع کوم صفرځای نه لري

$$f'(x) = 3x^2 e^{x^3} = 0 \quad - ۲$$

یواځې د  $x_1 = 0$  لپاره ارزښت لري. مگر داچې  $f''(0) = 0$  دی، نو  $x_1 = 0$  د ۳ - لاندې څیرل کيږي

- ۳

$$f''(x) = 3x(3x^3 + 2)e^{x^3} = 0,$$

$$M_2 = \{x_2, x_3\} = \left\{0, -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = \frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}.$$

بنی - کین انعطافتکی:

$$f'''(x) = f'''(0) = 6 > 0$$

$$M_{21} = \{x_2\} = \{0\}$$

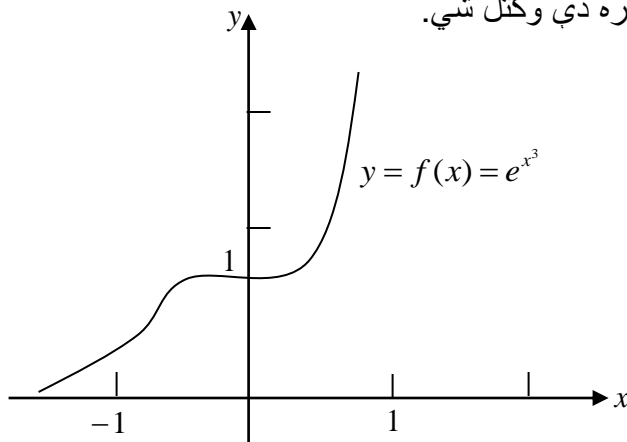
کین - بنی انعطافتکی:

$$f'''(x_3) = f'''(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}) = 0 + 6e^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-6\frac{2}{3} + 1\right) < 0,$$

$$M_{22} = (x_3) = \left\{-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^3} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^3} = +\infty. \quad - ۴$$

لاندي خېره دي وکتل شي.





بیلگه: تابع  $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2}$  د ټولو  $x$  لپاره تعریف دی، مگر یواځې د  $x = 0$  لپاره مشتقور دی

صفر - د  $x \neq 0$  لپاره باور لري یا صدق کوي

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}},$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

دلته  $f'''(x)$  ته اړتیا نه پېښیږي

د  $M$  سټ له  $x = \pm \infty$  او  $x = 0$  څخه جوړ دی

$$M = \{-\infty, 0, \infty\}$$

اول:  $f(x) = x + \sqrt[3]{x^2} = 0$

$$x = -\sqrt[3]{x^2}, x^3 = -x^2, x^3 + x^2 = 0$$

له امله د حل لپاره په پوښتنه کې  $x_1 = 0, x_2 = -1$  راځي. دواړه ارزښتونه، لکه ازماينه روښانه کوي، صفر ځایونه دي:

$$M_0 = \{x_1, x_2\} = (0, -1)$$

$$M_0 = \{x_1, x_2\} = \{0, -1\}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = 0. \text{ دویم:}$$

م - د دې مساواتو حلونه له لاندې لاس ته راوړني څخه لاس ته راځي:

$$1 + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = 0, \quad \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = -1, \quad \frac{8}{27x} = -1, \quad x = x_3 = -\frac{8}{27},$$

$$y_3 = f(x_3) = -\frac{8}{27} + \frac{4}{9} = \frac{4}{27}.$$

$$M_1 = \left(-\frac{8}{27}\right).$$

$$f''\left(-\frac{8}{27}\right) = -\frac{8}{9^3 x^4} < 0, \text{Maximum}$$

$$M_{11} = \left\{-\frac{8}{27}\right\}.$$

- ۳

$$f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} = 0$$

د کوم له پاره شوونی نه ده.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}\right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \quad - ۴$$

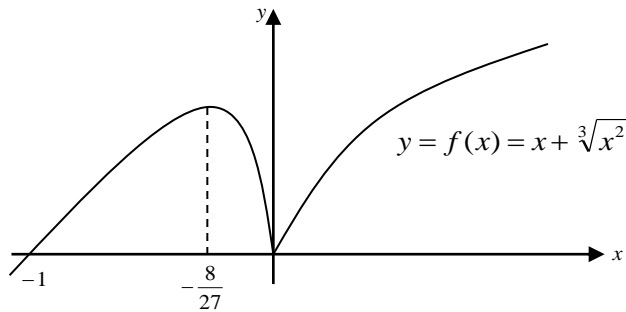
هغه خای  $x_1 = 0$  ، د کوم لپاره چی  $f(x)$  مشتقور نه دی او د کومی لپاره چی  $f(0) = 0$  لرو، باید تر اوس تر څیرنی لاندې و نیول شي

د  $x > 0$  لپاره  $f(x) > 0$  دی.

د  $-1 < x < 0$  لپاره صدق کوي (د  $x^2 > 0$  سره ضرب  $-x^2 < x^3 < 0$ ) په همدې ډول  
 $\Leftrightarrow$  لاس ته راځي او برعس) یعنی  $0 < -x^3 < x^2$  او له دې امله  $0 < \sqrt[3]{-x^3} < \sqrt[3]{x^2}$

$$f(x) = x + \sqrt[3]{x^2} > 0, \text{ او له دې سره: } 0 < -x < \sqrt[3]{x^2}$$

له دې امله د  $x_1 = 0$  سره یو نسبي ټیټکی (نقطه اصغري) مخ ته پروت دی. په دې توګه د کرې یا منحنی تلنلار د لاندې څیرې سره سم روښانه ده.



په لاندې بیلګه کې دې د  $x$  ارزښتونه د  $f''(x) = f''(x) = 0$  لپاره هم د  $M$  په سټ کې ونیول شي.

بیلګه : تابع  $y = f(x) = x^4 + x$  پوره زیات مشتق وړ دی.

صفر:

$$f'(x) = 4x^3 + 1,$$

$$f''(x) = 12x^2,$$

$$f'''(x) = 24x,$$

$$f^{(4)}(x) = 24,$$

$$f^{(5)}(x) = f^{(6)}(x) = \dots = 0$$

په  $M$  کې یواځې د اېسټیزي یعنی دېرته محور د غاړوټکې یعنی  $\pm\infty$  نیول کېدې شي:

$$M = \{-\infty, +\infty\}$$

$$1 \quad f(x) = x^4 + x = x(x^3 + 1)0, \quad M = (0 - 1)$$

$$2 \quad f'(x) = 4x^3 + 1 = 0$$

$$M_1 = \left\{ -1/3\sqrt[3]{4} \right\}, \quad y_3 = -3/4 \sqrt[3]{4} = \frac{3}{4 \sqrt[3]{4}}$$

$$f''(-1/3\sqrt[3]{4}) = 12(-1/3\sqrt[3]{4})^2 > 0. \text{Min}, \quad M_{12} = \left\{ -1/3\sqrt[3]{4} \right\}$$

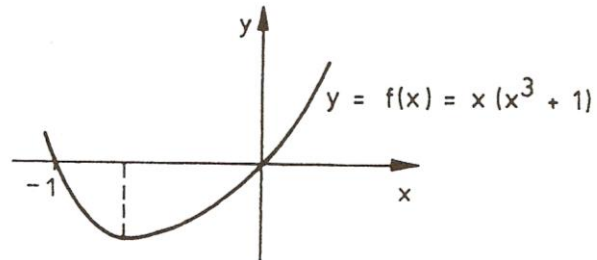
$$3 \quad f''(x) = 12x^2 = 0, \quad M_2 = \{0\}$$

$$f'''(x) = 0$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

د  $x=0$  سره هېڅ اوږونټکی مخ ته نه لرو، ځکه چې  $f'(x)$  هلته اکستريموم ارزښتونه نه لري، بلکې یو اوږونټکی  $y = x^3$  (په ۴ غزول شوی او د ۱ سره و پورته لور ته خوځول شوی یا پورته شوی).

دا د څیږي ۲۰، ۱۳ سره سم د کږي تله ورکوي.



ناتاکلي حدونه یا پولې

یا د ناتاکلو افادو (ویینو) حدونه یا پولې

که و لرو  $x \neq 5$ ;  $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$  ، ومو لیدل، چي د داسي توابعو حد پیداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلي افادي وايي، ځکه چي مشتق يي نیول کېدی شي، يعني د کمېنتونو ویش (د تفاضلونو ویش) حد يي ټاکل کېدی شي.

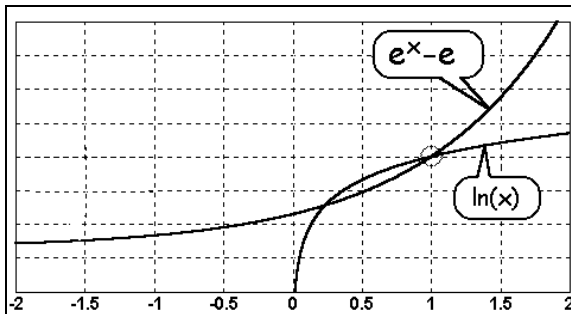
که  $\frac{\sin 2x}{5x}$  توابع و لرو، نود  $x=0$  لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توگه نه شو نیولی، چي له دې امله ناټاکلي افادي ورته وايو.

پیل خیرنه:

د  $\frac{0}{0}$  حالت

که پوله ارزښت جوړېدو کي يو کسر پیدا شي، چي صورت او مخرج يي دواړه د صفر په لور لار شي، نو دا پوله ارزښت،، ناټاکلي افاده،، بولو.

بیلگه: لاندي د الماني پښتو: صورت يا ماتباندي، مخرج يا ماتلاندي



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\text{Zähler} \rightarrow 0}{\text{Nenner} \rightarrow 0}$$

په څيره کي برخه توابع رسم شوي دي، يعني د صورت او همداسي د مخرج گرافونه.

گورو: د صورت او مخرج د توابعو ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱ په لور لار شي)

0 → صورت

0 → مخرج

لیکنود (لیکنډول): د افادی

لپاره په پوله شمیرنه کې لنډ لیکو:

$$\frac{0}{0}$$

دا په حقیقت کې دقیق نه دی، مگر په ټولېزه توګه داسې معمول دی

روښانه ونه :

ناتاکلي افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې دا ناتاکلي افاده خپل نوم له کومه ځایه اخلې. دا ، ، ناتاکلی، ، بلل کيږي، ځکه چې حدیې د عادي طریقو له لارې نه شي شمیرل کیدی. د لورې ریاضي سره دا کار شمیرنه شونی شوه (دبیلګې په توګه د لو پیتال قانون له مخې، چې پسي به وڅیړل شي).

روښانه ونو ته تشریح:

اوس ښایو، چې د داسې توابعو شمیرل ولې ناشوني دي.

مور بیا دا د تېر مخ بیلګه رانیسو:

$$\frac{\rightarrow 0}{\rightarrow 0} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\text{Zähler} \rightarrow 0}{\boxed{\text{مخرج}} \rightarrow 0}$$

۱ - که هڅه وشي، چې حد پیدا کړو، داسې چې د  $x=1$  په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده  $0:0$  به ترې لاس ته راشي. دا تعریف نه لري،  $u=f\left(\frac{1}{z}\right)$  ځکه په صفر ویش اجازه نه شته.

۲ - ترمخه مو د ناکلو افادو د شمیرلو لپاره یعنی د ناطق کسري توابعو پوله شمیرنه کې د چل یا د طریقي څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارولی، لکه په پورته بیلگه کې.

۳ - د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي لید کې دی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د ۱ په لور وخوزیږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001} = 1$$

$$\frac{0.000000001}{0.000000001} = 1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معنی ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نږدې برابر شي. دا دا معنی نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.000000100}{0.000000001} = 100$$

$$\frac{0.00000000100}{0.00000000100} = 100$$

لکه چې گورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نږدې برابر دي (دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مگر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعنی (100) دی،

## د برنولي او د دي لو، پیتال قاعده Brnoulli and de L,Hospital

د برنولي او د دو لو پیتال قاعدې د  $\frac{f(x)}{g(x)}$  ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانگړی رول لوبوي. دا حالت په ځانگړي ډول هلته رامنځ ته کېږي، چې مخرج او صورت ( ماتباندي او ماتلاندي) همغه صفر ځای  $x_0$  ولري. دا ناټاکلی افاده  $\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{0}{0}$  موخه وره (هدمفنده)

نه ده. کیدی شي چې د ویش حد  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  وڅیړل شي، په کومو کې چې صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د غوښتنلو دي. د بیلگې په توگه تابع

$$f: y = f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$$

صورت او مخرج همغه صفر ځای  $x_0 = -2$  لري، سره له دې هم پوله شته دی.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)^2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x + 2) = 0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شمیرل کیدی شي، چې د صورت او مخرج توابعو له نتيجي څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوي منځ ارزښتقضيي استعمال هم بلل کېږي.

### د برنولي او د دي لو، پیتال قاعده :

که توابع  $u = f(x)$  او  $v = g(x)$  د یوه  $U(x_0)$  چاپیریال د  $x_0$  په ځای کې مشتقور وي د  $g'(x) \neq 0$  سره او د ټولو  $x \in U(x)$  لپاره او  $f$  او  $g$  یو صفر ځای وي،

د  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  سره، نو باور لري:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ترڅو په بني لور حد شته وي. په ورته توگه لاس ته راځي.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



حل: تابع د پراخه شوې منح ارزښت قضي نیونی پوره کوي. د هر  $x \in U(x_0)$  لپاره  
یو  $x_m \in (x_0, x)$  سره موجود دی، په داسی ډول چی لرو

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د  $f(x_0) = 0 \wedge g(x_0) = 0$  له امله لرو:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچی د  $x \rightarrow x_0$  سره  $x_m \rightarrow x_0$  هم هڅه کوي.  
د  $x \rightarrow \infty$  په حالت کی  $x = 1/z$  په ځای په ځای کوو. د زنجیري قضي په مرسته لاس ته  
راځي:

$$u = f(1/z)$$

د مشتق  $du/dz = f(1/z) \cdot (-1/z^2)$  او مشتق  $dv/dz = g'(1/z) \cdot (-1/z^2)$  سره

، داسی چی لرو :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

یادونه : که په پورته حالت کی  $f(x_0) = g'(x_0) = 0$  هم وي ، نو په ویش بیاله سره دا قاعده  
استعمالیږي. که سړي  $n$ -پلونو (قدمونو) وروسته بریالی وي نو دا قاعده لرو:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چیرته چی  $f^{(n)}$  او  $g^{(n)}$  د تابع  $n$  - م مشتق په معنی دی.

۰ / ۰: ډول یا تیپ:

بیلگه:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

بیلگه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

بیلگه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = \frac{0}{1} = 1$$

تیپ یا ډول:  $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \quad \alpha > 0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان (جگعدد)  $\alpha$  لپاره یو په خوښه توان  $x^\alpha$  د  $x \rightarrow \infty$  لپاره په غښتلي توگه جگيري، نسبت لوگاریتم تابع  $\ln$  ته

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \alpha > 0$$

له دې  $f(x) = \frac{x^n}{e^x}$  تابع د لوپیتال د قواعدې د ډیر ځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

اکسپوننشل تابع  $e^x$  د  $x$  په هرتوان تابع څخه په غښتلي جگيري:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

نور حالتونه کیدی شي په بڼه يا تيپ  $\frac{0}{0}$  او يا  $\frac{\infty}{\infty}$  بيرته وارول شي

له تيپ يا بڼي  $\infty - \infty$  څخه و بڼي يا تيپ  $\frac{0}{0}$  ته

ددې لپاره لاندې تابع بیلگه کیدی شي:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$$

د  $x \rightarrow 0$  لپاره

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \cos x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

داچې دلته مشتق بيرته د بڼي تيپ  $\frac{0}{0}$  ده، نو د لويپتال قاعده استعمالیدی شي.

له تيپ يا بڼي  $0 \cdot (\pm\infty)$  څخه بڼي  $\frac{\pm\infty}{\infty}$  ته:

د تيپ  $0 \cdot (-\infty)$  حالت د بيلگي په توگه تابع  $f(x) = x \cdot \ln x$  د  $x \rightarrow 0^+$  لپاره بڼايي. په کوم کی چي ضرب د ویش په څیر انځور کړي، نو د لويپتال د قاعدې په استعمال دا لاندې لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0$$

له بڼي  $0^0$  څخه و بڼي  $e^0$  ته:

دلته د بيلگي په توگه تابع  $f(x) = x^x$  د  $x \rightarrow 0^+$  لپاره تر څيرنی لاندې نیول کيږي.

د بني بدلون يا فورم بدلون و بنسبت  $e$  ته د یوې انځورونې په مرسته په بریالی توګه لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \cdot \ln x} = e^0 = 1$$

له  $1^\infty$  بني څخه و  $e^{0.\infty}$  بني ته

د بنوونې، د بیلګې په توګه د تابع  $f(x) = (1 + \frac{\mu}{x})^x$  پوله ده د  $\mu \in \mathbb{R}^+$  لپاره او  $x$

د  $x \rightarrow \infty$  سره  $x \in \mathbb{R}^+$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\mu}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \cdot \ln\left(1 + \frac{\mu}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot \ln\left(1 + \frac{\mu}{x}\right))} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{\mu}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{\mu}{x}} \cdot \left(-\frac{\mu}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\mu}{1 + \frac{\mu}{x}}} = e^{-\mu} \end{aligned}$$

د  $\mu=1$  له پاره لاس ته راځي

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

له بني  $0^\infty$  و بني  $0^{(\pm\infty)}$  ته

دا کارونه په یوې بیلګې روښانه کوو:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow +0} e^{\sin x \cdot \ln \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} (\sin x \cdot \ln \frac{1}{x})} \\ \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\cos x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x - x \cdot \sin x} = 0 \end{aligned}$$

د  $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$  سره

باید لاندې جدول کې پام وشي. لري يا تي: شي

لاندې جدول د پورته بنوول شوو بنویا ډولونو د بنی بدلون ټولیزه کتنه ممکنوي

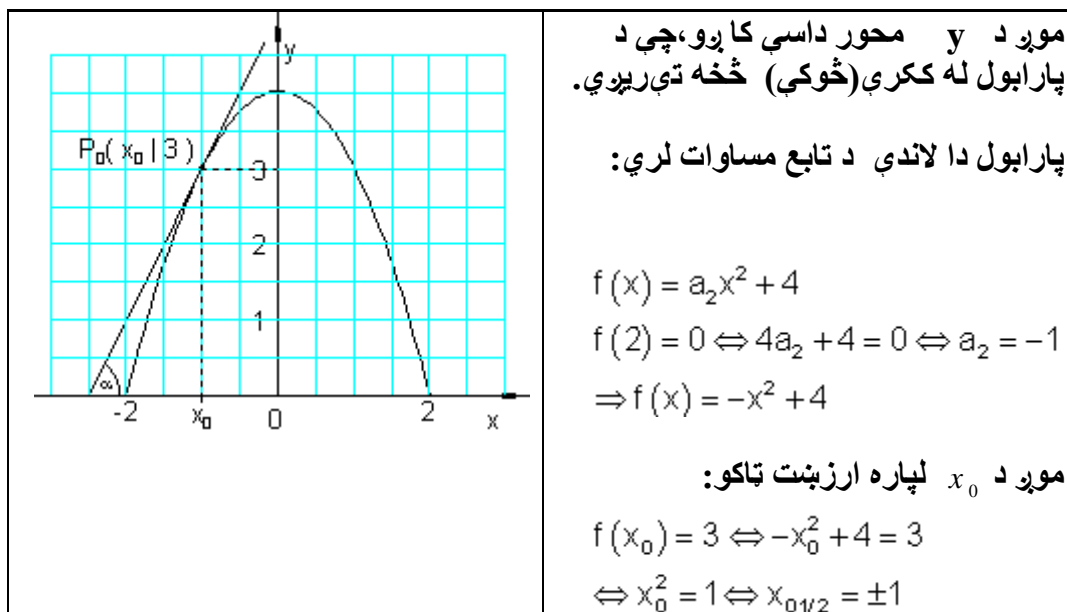
تیپ (ډول)	$f(x) \rightarrow$	$g(x) \rightarrow$	بڼه بدلون یا لنډ: بدلون
$-\infty$	0	0	$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x) - f(x)}{f(x) \cdot g(x)} \rightarrow \frac{0}{0}$
$\infty$	0		$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \rightarrow \frac{0}{0}$ $\wedge (Or)$ $f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$
$\infty$	0 1 0	0	$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x)g(x))} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \rightarrow e^{0 \cdot \infty}$ <p>د <math>f(x) &gt; 0</math> سره.</p>

د یوې تابع د استعمال بیلگه د تانجنت له پاره :

The diagram shows a parabolic haystack (Heuhaufen) with a base of 4m and a height of 3m. A ladder (Leiter) is leaning against the peak of the haystack. The point of contact is labeled 'Berührungspunkt P\_0'. The height from the ground to this point is 1m. The angle between the ladder and the ground is alpha. The distance from the left edge of the haystack to the point of contact is x.

له ځمکې څخه د وېشو په توپي يوه زينه ايښول کيږي. دا زينه په درې متره جگوالي توپي لم د وېشو توپي دی د يوه کيښکودي پارابول څيره ولري، چې بنسټ يې ۴ متره سرور دی او ۴ متره جگوالي لري. غواړو په دې يوه زينه کيږدو، چې د وېشو توپي سره تانجنت جوړ کړي. په کومه زاويه (کونج) بايد دا زينه کيښول شي؟

د وېشو توپي له بيخ څخه دې په کوم لږوالي په ځمکه دا زينه کيښول شي؟



شمیرنه :

د نورو شمېرنو لپاره ارزښت  $x_0 = -1$  کاروو. زینه توپې په  $P_0(-1, 3)$  ټکي کې لمسوي. مور په  $P_0(-1, 3)$  ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1 | 3) \Rightarrow x_0 = -1; f(x_0) = 3$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\text{د } f'(x) = -2x \text{ سره لاس ته راځي}$$

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

$$\tan \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha \approx \underline{\underline{63,4^\circ}}$$

جوړه زاویه:

د زینې او د وېنو ټوپې تر منځ واټن د  $f(x)$  د صفرځای او د تانجنټ  $t(x)$  د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځایونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$

$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2,5$$

د  $x$  ارزښتونو  $-2,5$  او  $-2$  ترمنځ واټن  $0,5$  دی.

زینه د وېنو د ټوپې له پښو څخه باید نیم متر لرې کېږي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنټ مساوات څنګه ټاکل کېږي، چې یو ګراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

### د سترې ګټې (غټو ګټو) مسئله یا قضیه

دا د سترې ګټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د یو څو بیلګو له لارې وڅیړل شي.

نزدې ټولو پروسو کې، چې په عمل کې کارول کېږي یا صورت نیسي، له تاثیر وونکو یا په همدې ډول د هغو ټاکلو لویو استعمال ته اړ دی، کومې چې مور په ځانګړو یا مخصوصو پولو کې په اختیار کې لروډی شو.

مور یواځې هغه پروسې تر څیړني لاندې نیسو چې د یوې واریابلی یا اووښتوني  $x$  په واک کې وي. دا د بل په واک کې د یوې تابع  $y = f(x)$  له لارې څرګندولی شو.

که  $y$  ټول لگښتونه یا مصارف په کوټه کړي، نو  $x$  باید داسی وټاکل شي چی  $f(x)$  مینیمال یا خورا کم شي.

که په څټ یا برعکس  $y$  گټه وي یا گټور تاثیر وي، نو  $x$  باید داسی لاس ته راوړل شي، چی  $f(x)$  ماکسیمال یا خورا لوي شي. په قاعده کی اغزمنه یا مؤثره لویه یا په بل عبارت، خپلواک واریابل یا اوښتونى  $x$  د  $-\infty$  او  $\infty$  پولو ترمنځ ازاده ټاکونکی نه ده، بلکه د تخنیک یا تخنیکپوهنی له امله، یواځی په ټاکلو پولو کی

$$a \leq x \leq b \quad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پوري د گټي مسئلی، په دې پوري اړه لري، چی ایا دا گټه ده او که لگښت.

$$y = f(x) = \max! \quad (a \leq x \leq b) \quad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \leq x \leq b) \quad ($$

دا د افراطي ارزښتونو برخی پرابلمونو سره خورا نزدې یا ټینگ تړلی دی. دلته ځمور علاقه په ځانگړې توگه د لاندې پرابلم د کارکولو سره ده:

۱ - د بلواکیزو  $y = f(x)$  گډو اړیکو راپیدا کول، د دندې یا وظیفې ورکولو سره سم ( مودالیتی پرابلم)

۲ - د تخنیکپوهنی پولو په پام کی لرل (\*)

دادي د دوه بیلگو له لاری وښول شي

بیلگه : یو د مندو (پټي ته په کلوکي د اغزو مندو کپښول کیري، چی مالونه ور وا نه وړي) سیم لرو چی ټول اوږدوالی یی  $L$  دی. له دې سیم سره باید یوه مربع سطحه (څلورگودیزه هواره)، چی د امکان تر حده باید لویه وي، مندو شي. دا وظیفه شوه یا په بل عبارت غوښتنه.



اوس د مودالیتی Art und Weise پر اېلم : غوښتنه مو د یوې څلور ضلعي (څلورگودی) پیدا کول دي. لکه چې معمول دي، ددې څلور ضلعي (-گودی) یو اړخ په  $a$  ښایو او بل اړخ یې په  $b$  ښایو، د څیرې  $۲۰$  .  $۱۴$  له مخی .

دا په سر کی دوه اغیزې لرونکي یا تاثیر اچونکی لویي  $a$  او  $b$  دي. د

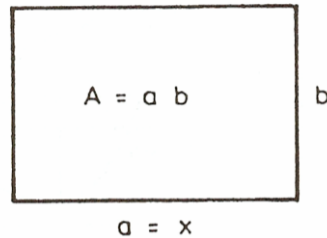
$$L = 2a + 2b, \quad b = (L/2) - a$$

له امله یواځي یوې اغیزمنې (تاثیر اچونکي) لویي ته اړیو د بیلگي په توگه  $a = x$  ، دا

$$A = ab = x((L/2) - x) \text{ داسي ده}$$

دا روښانه ده چی صدق کوي .  $0 \leq x \leq L/2$

له دې امله د ستري گتی پر اېلم داسی دی



$$y = f(x) = x((L/2) - x) = \text{Max!} \quad (0 < x < L/2)$$

د  $f(0) = f(L/2) = 0$  له امله باید ماکس د  $0$  او  $L/2$  ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره یواځي  $x = L/4$  په پوښتنه کی راځي.

د دې لپاره  $y'' = f''(x) = -2 < 0$  دی.

په ریښتیا چی یو ماکس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنیکپوهنیزې پولی 0 او  $L/2$  رول نه لوبوي. نو صدق کوي.  $a = b = L/4$ .

بیلگه: یوه بډای چی په یوه ټاکلي وخت کی ټولست (ټولډیری)  $M$  تولید کړي او دا تل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لگښتونه  $F$  ټرلي دي. کیدی شي چي سملاسی د دې تولید په ټولست (ټولډیری)  $M$  کی تولید کړي، په یوه زخیره ځاي (زېرمون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یی سملاسي ورسوي. دلته د زېرمون (زخیره کونې) لگښتونه راپید کیري (د دې د زخیرې لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چی تولید په لږه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته ورورل شي. دلته نو د زخیره کولو لگښتونه منځ ته نه راځي. مگر تل تولید په دې ډول تولید باندې درول، لگښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لگښتونه یی بولو. کومه ډیری  $x$  (ازاده لویه) باید تولید شي، چی د امکان تر پولې کم لگښتونه پرې وشي؟ د زخیرې لگښت د چمتووالی لگښت سره متناسب دی، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چي خرڅلاو ته چمتو کیري، په څت متناسب دی. که  $x$  لوي وي نو چمووالی ته کم اړتیا شته او که  $x$  کم وي نو چمتووالی بدلون تل باید تغیر وخوري یعنی. ټول لگښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$  دي، چیرته چی  $F$  ثابت (همغه) یا په کلکه اینول شوي لگښتونه دي،  $L$  د زخیرې لگښتونه او  $R$  د چمتووالی لگښتونه دي. دا ازاده لویه  $x$  د تولیدډیری  $M$  څخه نه شي سترېدلی، لویډلی یا غټیډلی. له دې امله صدق کوي  $0 \leq x \leq M$ . مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

$$y = f(x) = F + Lx + R/x = \text{Min!} \quad (0 \leq x \leq M)$$

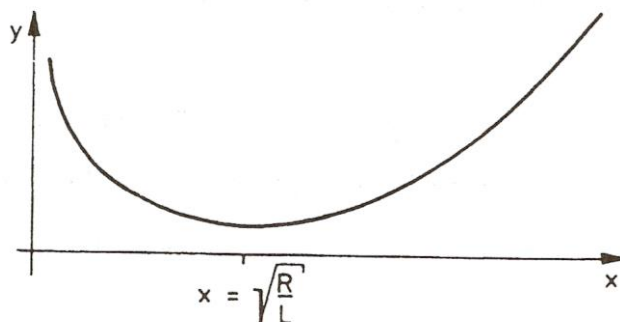
(لمړی  $f(x)$ ) دوه واره دیفرنځیال کیري یا یی دوه واره رابیلیدنه

نیول کیري:

$$f'(x) = L - R/x^2, \quad f''(x) = 2R/x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي:  $f'(x) = 0$ , پس لرو  $x = R/L$  ???

د  $x \geq 0$  له امله  $f''(x) \geq 0$  هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کړي تگلار په څیره ۲۰ . ۱۵ کی انځور شوي. څرگنده ده: که  $x = R/L < M$  صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که  $x = R/L > M$  وي، نو یو مینیموم په څنډه  $x = M$  لرو. نامساوت  $x = R/L < M$  دا مانا لري  $R/L < M^2$  په همدې ډول  $R^2 < M^2L$  پس مخ ته لرو:  $x = R/L$  د  $R < M^2L$  لپاره او  $x = M$  د  $R > M^2L$  لپاره

نو: که د چمتوالي لگښتونه  $R$ ، زخیرې لگښتونه  $L$  څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید  $x = M$  صورت ونیس. که د زخیرې لگښتونه د چمتوالي لگښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد  $x$  تولید شي.

ټاکلی بیلگه: د  $M = 10000, R = 1000, L = 10$  لپاره صدق کوي  $R = 1000 < M^2L = 109$ .  $x = R/L = 1000/10 = 100$  ستر یا غټ ازاد لگښت دی  $M^2L = 108$ .  $100 = 10$  ازاد  $a$  دلته  $10$  یوونه باید ورزیات شي، چی  $10000$  یوونه تولید کړي. د  $M = 10, R = 1000, L = 1$  لپاره صدق کوي  $R = 1000 > M^2L = 100$  غټ ازاده لویه له دې امله  $x = M = 10$  ده. یواځې یوه ازاده لویه دي تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

په تولید کي د مشتق استعمال

فعالیت : یوه فابریکه  $x$  تولید کوي. په دې تولید د لگښت کيږي، چې دا د تولید په واک کي دی، چې موږ ورته د لگښت تابع وایو او په  $K(x)$  سره ښایو.

څنگه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لگښت را ټیټ کړو؟

د لگښت تابع  $K(x)$  د تولید سټ (ډېری) او ټول لگښت تر منځ تړاو انځوروي.

که تولید د  $\Delta x$  شاو خوا کي زیات شي، نو لگښت هم د  $\Delta K$  په شاو خوا کي زیاتېږي.

کمښتویش (تقسیم تفاضل)  $\frac{\Delta K}{\Delta x}$  د منځني لگښت زیاتوالی ښایي، د یوه  $\Delta x$  تولید تغیر

سره (منځنی تغیر ارزښت)

د  $x_0$  ځای کي لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لگښت بلل کيږي. دا د پوله ارزښت

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$$

سره ټاکل کيږي، داپه دې معني، چې د لگښت د تابع  $K$  مشتق.

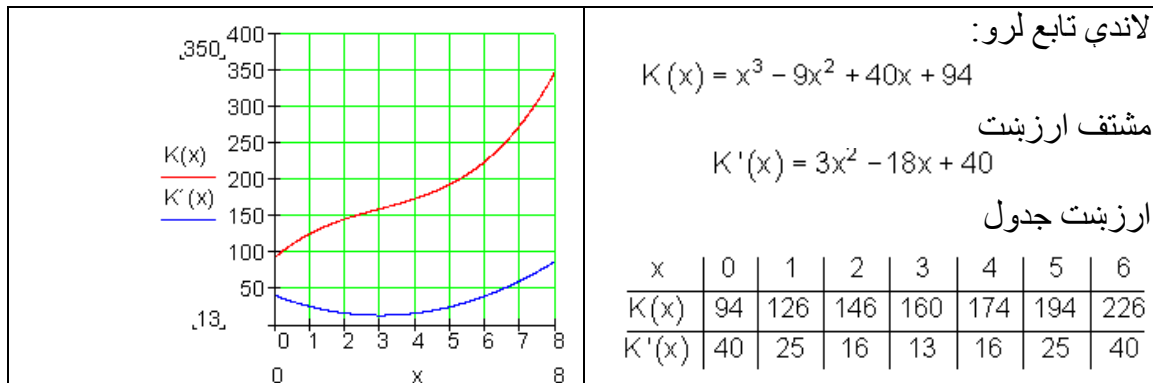
پيژند : د لگښتتابع  $K(x)$  مشتق د مشتقارزښت  $K'(x)$  په نامه یادوو یا يي پوله لگښت  $K'(x)$  هم بولو.

بیلگه: د لگښت تابع  $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$  دې ورکړ شوي وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکي، یو ارزښت جدول د  $K(x)$  او  $K'(x)$  لپاره وکارئ او په پروتولار سیستم یا کواوردیناتسیستم کي يي گراف وکارئ.

پوله ارزښت د  $I = [0; 6]$  لپاره په ۱ پل (قدو) پراخوالي سره.

ب : د ډېر کم لگښتزاوالی و ټاکي:

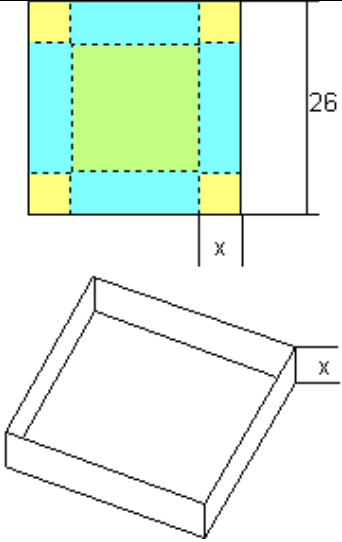


خورا کم د لگبنتز یاتوالی (لگبنتجگي دنه) د پارابول  $K'(x)$  په ککره (خوکه) کې پروت دی ، یعنی هلته چې تانجنت  $K'(x)$  پروت یا افقي دی ،

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

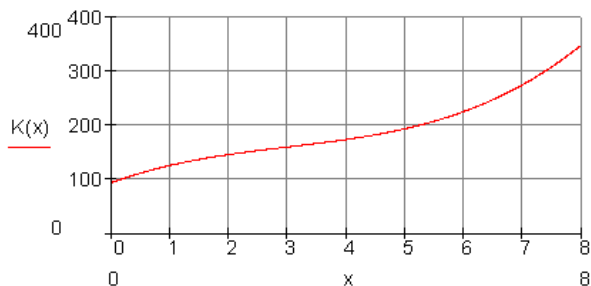
دد تانجنت د پروتوالی یا افقیت لپاره :

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{x = 3}$$

	<p>د ی، مربع کارتون (د کلک کاغذ څخه جوړ) څخه ، چې ۲۶ سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بی له سرپوښ، چې د <math>x</math> جگوالی لري.</p> <p>الف: د یوه تابع ترم وټاکي، چې د بکس حجم (دکی) <math>V</math> د <math>x</math> په واکوالی یا تابعیت کې ښایي.</p> <p>ب – گراف وکارئ او په نږدې توگه یې ماگسیم (خورا جگ) حجم وټاکي.</p>
--	---

- د یوه روغتون د نرختابع (مصرف تابع)  $K(x)$  د ناروغانو گڼه (تعداد)  $x$  او د ټول مصرف ترمنځ اړیکې انځوروي، داسې چې  $x = 1$  د 100 ناروغانو معنی او  $y = 1$  دی معنی چې  $1000 \text{ € / Tag}$  یوزر یورو په ورځ (  $1000 \text{ € / Tag}$  ) .

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



تولگه:

د رول (Rolle) قضیه:

یوه د  $f$  تابع دې په بند اینتروال  $[a, b]$  کې متمادي وي د  $f(a) = f(b)$  سره او په واز اینتروال  $(a, b)$  کې مشتقور، نو لږ تر لږه یوځای  $c \in (a, b)$  شته دی د  $f'(x_0) = 0$  سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قیمت) قضیه:

که  $y = f(x)$  تابع په بند اینتروال  $[a, b]$  کې متمادي او په واز اینتروال  $(a, b)$  کې د مشتق وړ وي، نو

نه ده کښل

هلته یوځای  $x \in (a, b)$  شته دی، د کوم لپاره چی

$$\text{لرو: } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

پراخه شوي منځقضية:

که  $u = f(x)$  او  $v = g(x)$  په بند اینتروال  $[a, b]$  کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال  $(a, b)$  کې مشتقور او  $g'(x) \neq 0$  باور ولري، نو د ټولو  $x \in (a, b)$  لپاره، کم له

$$\text{کمه یوځای } x_0 \in (a, b) \text{ وجودلري چی لاس ته ترې راځي: } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

قضیه:

د  $f(x)$  تابع دې په اینتروال  $I$  کې مشتقور وي.

1. که د  $f(x)$  تابع په اینتروال  $I$  کې مونوټون جگېدونکي وي، نو باور لري:  $f'(x) \geq 0$  د ټولو  $x \in I$  لپاره

- که  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې همغږیز ټیټېدونکي وي، نو باور لري:  $f'(x) \leq 0$  د ټولو  $x \in I$  لپاره.

- که  $f'(x) \geq 0$  وي، د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې همغږیز جگېدونکي ده.

۲۰ مشتق شمیرنه (رایبیلدنه) ۷۶۵ -

- که  $f'(x) \leq 0$  وي د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینټروال  $I$  کې همغریز ټیټېدونکې ده.  
 - که  $f'(x) > 0$  وي ، د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینټروال  $I$  کې په کلکه همغریز جگېدونکې ده.  
 - که  $f'(x) < 0$  وي د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینټروال  $I$  کې په کلکه مونوټون ټیټېدونې ده.

که د  $f(x)$  لپاره د  $x_0$  په ځای کې  $f'(x) = 0$  ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د  $f(x)$  لپاره د  $x_0$  په ځای کې  $f'(x) = 0$  او  $f''(x) > 0$  ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو:  $f'(x) = 0$  او  $f''(x) < 0$  ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي (ټیټ ټکي یا جگ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې  $f'(x) = 0$  وي، او د  $f''(x)$  مخ نښه ( + ، - )، په دې پریکړه کوي چی ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د  $x = x_0$  په چاپیریال کې د  $y = f(x)$  تعریف شوي تابع یو نسبي جگ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو  $x_0$  ته پوره نږدی  $x$  لپاره باور ولري:

$$f(x) > f(x_0) \text{ په همدې ډول } f(x) \leq f(x_0)$$

جمله: ( د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په  $x_0$  کې مشتق وړ تابع  $y = f(x)$  انحرافي ټکی لري نو لرو:  $f'(x) = 0$

دا جمله مور ته وایي: چیرته چې  $f'(x) \neq 0$  وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځې د  $x_0$  ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره لرو  $f'(x) = 0$ ، خو حتمي نه ده چې  $y = f(x)$  دې یواکستریموم ولري.

**جمله:** ( د یوه بحراني ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په  $x = x_0$  کې دوه واره مشتقور  $y = f(x)$  تابع لپاره ولرو:  $f'(x) = 0$ ،  $f''(x) \neq 0$ ، نو تابع  $y = f(x)$  هلته یو بحراني ټکی لري.

خو را ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي:  $f''(x) > 0$

خو را جگ ټکی مخ ته پروت دی، که وي:  $f''(x) < 0$

پېژند: په یوه چاپیریال  $x = x_0$  کې مشتق وړ تابع  $y = f(x)$  یو کین-بڼی-انعطاف ټکی په همدې ډول بڼی-کین-انعطاف ټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جگ ټکی (عظمي نقطه) په همدې توگه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

**جمله:** ( د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په  $x_0$  کې مشتق وړ تابع  $y = f(x)$  اکستریموم لري نو لرو:  $f'(x) = 0$

دا جمله مور ته وایي: چیرته چې  $f'(x) \neq 0$  وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره یواځې د  $x_0$  ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره  $f'(x) = 0$  وي، خو حتمي نه ده چې  $y = f(x)$  دې یو بحراني ټکی ولري.

د پورته جملې استعمال په  $y' = f'(x)$  څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

**جمله:** ( د اوړونټکي (انعطاف ټکي) لپاره اړین شرایط):

که په  $x = x_0$  کې دوه واره مشتق وړ تابع  $y = f(x)$  هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو

لاس ته ترې راځي:  $f''(x) = 0$



پیزند: د زینتکي (کله کله برنډې ټکی هم بلل کيږي) لاندې د انعطافټکي ځانگړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:

د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي. دا یو مانل (نه افقي) تانجنت لري

د برنولي او د دې لو، پیتال قاعده:

که توابع  $u = f(x)$  او  $v = g(x)$  د یوه  $U(x_0)$  چاپیریال د  $x_0$  په ځای کې مشتقور وي د  $g'(x) \neq 0$  سره او د ټولو  $x \in U(x)$  لپاره او  $f$  او  $g$  یوصفرځای وي،

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{د } f(x_0) = g(x_0) = 0 \text{ سره، نو باور لري:}$$

ترڅو په بني لور حد شته وي.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{په ورته توگه لاس ته راځي:}$$

تمرینونه:

۱- د لاندې لیکل شوو تحلیلي افادو مشتق د  $x_0$  په ځای کې وشمیرئ او د فرمول د اعتبار ورشو (ساحه) ورکړئ.

$$a) y = x^3 - 2x^2 + 1$$

$$b) y = \sqrt{x}$$

$$c) y = x \sqrt{x}$$

$$d) y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$e) y = \frac{x}{x-1}$$

$$f) y = \sin \frac{x}{2}$$

۲- د یوه تن یا جسم عمود پورته غورځونې د تن دروندټکي (د جسم د ثقل مرکز) د لار- وخت- مساوات په لاندې ډول دي:

$$s = f(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

پیلچتکتیا یا پیل سرعت  $v_0 = 30 \frac{m}{s}$  او د ځمکې بیرې (د ځمکې تعجیل)

سره. دا تن یا جسم کله خپل عظمي جگوالي ته رسیري؟  $g = 10 \frac{m}{s^2}$ .

دا جگوالی څومره لوي دی

۳- یو تن په برابر ډوله چتکتیا خوزي ( حرکت کوي)، داسې چې بیره (تعجیل) یې

$$a = 2 \frac{m}{s^2}$$

دی

په لاندې جدول کې د  $\{\Delta t\}_n$  لپاره یو صفر ترادف (- پرلپسې) کېردی (د بیلگې په توگه لکه په اوله مټه (ستن) کې) او جدول پوره کړی.

له  $t_0 = 3 s$  وروسته د تن یا بدن لحظوي چتکتیا څومره ده.

۴- د لاندې تحلیلي افادو مشتق ونیسی! پام وکړی، چې د مشتق نیولو کومه قاعده په کار وړی شی

a)  $y = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x} - 5$

b)  $y = a^2x^3 - \sqrt{bx^2} + \frac{1}{2}cx - 1$

c)  $y = -2x^{-5} + 3x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-2} + 4$

d)  $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{6 \cdot \sqrt[3]{x}}{x}$

e)  $y = (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{x})$

f)  $y = (1 - x^{-4})(x^{-1} + x^2)$

g)  $y = (x^2 + 2x\sqrt{x} + x)(x - \sqrt{x})$

h)  $y = (ax^2 - b)^2$

i)  $y = \frac{x^2 + x}{3x^3}$

j)  $y = \frac{2x^3 - 3}{x^2}$

k)  $y = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$

l)  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot (1 + \sqrt[4]{x})$

۵- د لاندې ورکړل شوو تحلیلي افادو مشتق ونیسی، او هغه ارزښتونه تری وباسی، د کومو له پاره چې مشتق شته (موجود) نه وي

- ۱ . ۵

a)  $y = (x - 1)(1 - x^3)$

c)  $y = (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x})(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt{x^3})$

b)  $y = (x^3 + 1)(1 - x - x^2)$

d)  $y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)(\sqrt[4]{x} - 2x)$

- ۲ . ۵

a)  $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 + x + 1}$

d)  $y = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^3 - 5}$

g)  $y = \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$

j)  $y = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 2\sqrt{x} + 1}$

b)  $y = 4x + \frac{1}{x^2 + 1}$

e)  $y = \frac{\sqrt{3}x - \sqrt{2}}{3x^2 - 2}$

h)  $y = \frac{2x - \sqrt[3]{x}}{x^2 - 2x - 1}$

c)  $y = \frac{x - 4}{4 - x}$

f)  $y = \frac{1}{1 + x} - \frac{1}{1 - x}$

i)  $y = \frac{x^3 + 3\sqrt[3]{x}}{2x^2 + x}$

- ۳ . ۵

a)  $y = \sqrt{x} \sin x$

d)  $y = x^3 \cos x$

g)  $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$

i)  $y = \tan x - \cot x - 2x$

b)  $y = 2 \sin x \cos x$

e)  $y = 2 \sin x (x - \cot x)$

h)  $y = \frac{x \sin x}{1 + \tan x}$

j)  $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

c)  $y = 1 - \cos^2 x$

f)  $y = \frac{\tan x}{\cot x}$

- ۴ . ۵

a)  $y = \frac{x}{e^x}$

c)  $y = e^x \tan x$

b)  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2x^2}$

d)  $y = \frac{5e^x}{\cos x}$

- ۵ . ۵

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= \frac{\ln x}{x} \\ \text{c) } y &= x^2 \ln x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y &= \sin x \ln x \\ \text{d) } y &= 10 \ln e \ln x \end{aligned}$$

- ۶ . ۵

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= 5^x + 2^x \\ \text{c) } y &= 2^x - 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y &= 3^x x^3 \\ \text{d) } y &= \frac{4^x}{2^x} \end{aligned}$$

- ۷ . ۵

$$\begin{aligned} \text{c) } y &= 2^x - 2x \\ \text{a) } y &= (2x+1)^4 \\ \text{c) } y &= \left(1 - \frac{1}{x}\right)^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } y &= \frac{4^x}{2^x} \\ \text{b) } y &= (1-x^4)^5 \\ \text{d) } y &= \left(2x^2 - \frac{4}{x} + 3\right)^6 \end{aligned}$$

- ۸ . ۵

$$\text{a) } y = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\text{b) } y = \sqrt{1 - 2x}$$

$$\text{c) } y = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$$

$$\text{d) } y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$$

$$\text{e) } y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$\text{f) } y = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$$

$$\text{g) } y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

$$\text{h) } y = \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$$

- ۹ . ۵

$$\text{a) } y = 5x^2 \sin 2x$$

$$\text{b) } y = \sin^2 x$$

$$\text{c) } y = \sin \sqrt{\frac{x}{2}}$$

$$\text{d) } y = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x$$

$$\text{e) } y = \cos \frac{1}{1+x}$$

$$\text{f) } y = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{g) } y = \cot(1 - 3x)$$

$$\text{h) } y = \cot \sqrt{1 - 2x}$$

$$\text{i) } y = \sqrt{\tan x}$$

-- ۷۷۱

۲۰ مشتقشمیرنه (رایبیلدنه)

j)  $y = \frac{\cos x^2}{\pi x}$

k)  $y = \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x}$

l)  $y = \left(3 + \frac{2}{\cos^2 x}\right) \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

m)  $y = \left(\frac{3}{\sin x} - 5\right) \frac{1}{\sin x}$

n)  $y = \tan \sqrt[3]{\frac{1-2x}{x}}$

o)  $y = 2 \sin \sqrt[3]{\frac{3}{x}}$

p)  $y = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$

- ۱۰ . ۵

a)  $y = \text{Arcsin} \frac{x}{a}$

b)  $y = \text{Arccos} \frac{a-x}{a}$

c)  $y = \text{Arctan} \frac{1}{x}$

d)  $y = \text{Arccos} \sqrt{1-x^2}$

e)  $y = \frac{1}{2} \text{Arctan} \frac{2x}{1-x^2}$

f)  $y = \text{Arctan} \sqrt{\frac{x}{x+a}}$

g)  $y = \text{Arcsin} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

h)  $y = \text{Arctan} \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$

i)  $y = \text{Arccot} \frac{1+x}{1-x}$

j)  $y = \text{Arcsin} 2x \sqrt{1-x^2}$

k)  $y = \text{Arctan} \frac{x-2}{2\sqrt{x^2+x-1}}$

l)  $y = a \cdot \text{Arc cos} \frac{a-x}{a} - \sqrt{2ax-x^2}$

- ۱۱ . ۵

g)  $y = \frac{e^{-\cos x}}{\sin x}$

h)  $y = \sqrt{1-e^{-x}}$

i)  $y = \frac{\sin \frac{x}{2}}{e^{2x}}$

j)  $y = e^x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

- ۱۲ . ۵

a)  $y = \ln 2x$

b)  $y = \ln x^2$

c)  $y = (\ln x)^2$

d)  $y = \ln \sqrt{x}$

e)  $y = \sqrt{\ln x}$

f)  $y = \ln \sqrt{1-x}$

g)  $y = \ln \tan x$

h)  $y = \ln \ln x$

i)  $y = \ln \cot \frac{x}{2}$

$$\begin{aligned} \text{j) } y &= \ln \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) & \text{k) } y &= \ln \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \\ \text{l) } y &= \ln (x + \sqrt{x^2 - a}) & \text{m) } y &= \ln \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + 1}} & \text{n) } y &= \ln \sqrt{\frac{2x-3}{2x+3}} \\ \text{o) } y &= \ln (a + x + \sqrt{2ax + x^2}) & \text{p) } y &= \ln \sqrt[4]{\sin^3 x \cos^3 x} \\ \text{q) } y &= \ln \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2} \cdot \sqrt[5]{(x-2)^3}}{\sqrt[4]{(x^2-4)^5}} \end{aligned}$$

- ۱۳ . ۵

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= |x| & \text{b) } y &= \sqrt{|x|} & \text{c) } y &= \ln |x| \\ \text{d) } y &= \sqrt{|\ln \cos x|} & \text{e) } y &= \ln |\ln |x|| \end{aligned}$$

- ۱۴ . ۵

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= \sqrt[x]{x} & \text{b) } y &= (x^x)^x & \text{c) } y &= x^{(x^x)} \\ \text{d) } y &= x^{\sin x} & \text{e) } y &= (\cos x)^{\sin x} & \text{f) } y &= a^x \cdot x^a \\ \text{g) } y &= x^{e^x} & \text{h) } y &= a^{e^x} & \text{i) } y &= (\text{Arc tan } x)^x \\ \text{j) } y &= (\tan x)^{\frac{1}{\cos x}} \end{aligned}$$

۶ - تانجنت په  $P_0(x_0, y_0)$  ټکي کې په منحنی  $f(x)$  د  $x$ -مخور سره کومه زاویه (کونج) جوړوي

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= \sqrt{x}, & x_0 &= 1 & \text{b) } y &= \sqrt[3]{x+1}, & x_0 &= 0 \\ \text{c) } y &= (x^2 - \sqrt[3]{x^2})^2, & x_0 &= 1 & \text{d) } y &= \sqrt{\frac{x^2-4}{9x^2-25}}, & x_0 &= 0 \\ \text{e) } y &= x\sqrt{x+1}, & x_0 &= 3 & \text{f) } y &= \frac{x}{x+\sqrt{x}}, & x_0 &= 1 \\ \text{g) } y &= \sqrt{x-\sqrt{x}}, & x_0 &= 1 & \text{h) } y &= \sqrt{1+\sqrt{x}}, & x_0 &= 1 \\ \text{i) } y &= \sin(2\pi - x), & x_0 &= \pi & \text{j) } y &= \sqrt{\sin 2x}, & x_0 &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$k) y = \sin\sqrt{2x}, \quad x_0 = \frac{1}{2} \quad l) y = (x-1)e^x, \quad x_0 = 0$$

۷ - په پروت تانجنت د -محور باندې پرته منحنی کوم ټکي کې غوڅوي، که زاویه او همداسې وي.

$$\begin{array}{lll} a) y = x^2 & b) y = x^3 & c) y = x \cdot |3 - x| \\ d) y = \frac{x^2 - 3}{2x} & e) y = \frac{x^2 + x + 14}{x + 2} & f) y = \frac{x^2(x-9)}{2(x-6)^3} \end{array}$$

۸ - د ورکړشوو تخليلي افادو لومړي درې مشتقونه جوړ کړئ! و آزمایې، چې ایا د مشتق قابلیت کې د یو گونو ورشو گانوو یا ساحو کې تغیر راځي!

د - مشتق لپاره یو عمومي فرمول ورکړئ، ترهغې چې شته وي.

$$\begin{array}{lll} a) y = x^n & b) y = \sqrt{x} & c) y = \sqrt[4]{x^3} \\ d) y = \sqrt{1-x^2} & e) y = \frac{x}{1-x} & f) y = \frac{1+x}{1-x} \\ g) y = \cos x & h) y = \frac{1}{2} \sin 2x & i) y = \sin(1-2x) \\ j) y = x^2 \sin 2x & k) y = \tan x & l) y = \tan^2 x \\ m) y = e^x \sin x & n) y = e^{mx} & o) y = e^{-x} + e^{-2x} \\ p) y = \ln x & q) y = \ln \sqrt[3]{1+x^2} & r) y = \text{Arcsin } x \end{array}$$

۹ - د تانجنت مساوات  $y = mx + n$  په  $y = f(x)$  کې کیدي.

- ۱ . ۹

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = x^2 + 1, & P_1(1, y_1) \text{ bzw. } P_2(-1, y_2) \\ b) f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1, & P_1(0, y_1) \text{ bzw. } P_2(2, y_2) \\ c) y^2 = 1 - x, & P_0(-3, y_0) \quad d) y^2 = x - 1, \quad P_0(5, y_0) \end{array}$$

-۲. ۹

a)  $f(x) = e^{-x}$ ,  $m = -1$

b)  $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 4$ ,  $m = 0$

c)  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ,  $m = 1$

d)  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $m = -1$

۱۰ - د لاندې توابعو  $y=f(x)$  په خټ تابع (برعکس تابع)  $f^{-1}(x)$  مشتق  $dx/dy$ په  $P_0(x_0, y_0)$  ټکي کې وشمیرئ (جوړ کړئ)

a)  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$ ,  $x_0 = -1$

b)  $y = x^2 - 2x - 1 + \frac{2}{x}$ ,  $x_0 = 1$

c)  $y = \frac{1}{2x^2 - 5x + 9}$ ,  $x_0 = \frac{5}{4}$

d)  $y = \frac{x+1}{x+2}$ ,  $x_0 = -3$

e)  $y = \sqrt{1-x}$ ,  $x_0 = 1$

f)  $y = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$ ,  $x_0 = \frac{a}{2}$

g)  $y = (x+1)\sqrt{1-x}$ ,  $x_0 = -1$

h)  $y = \sin x$ ,  $x_0 = 0$

i)  $y = \sin(2x + 3\pi)$ ,  $x_0 = -2\pi$

j)  $y = \sin^2 x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{4}$

k)  $y = x \cos x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{2}$

l)  $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$ ,  $x_0 = \frac{3\pi}{2}$

m)  $y = e^x \cos x$ ,  $x_0 = 0$

n)  $y = x e^{\cos x}$ ,  $x_0 = 2\pi$

o)  $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$ ,  $x_0 = 1$

p)  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ ,  $x_0 = x \in (-\infty, \infty)$ ,  $a \neq 0$

q)  $y = \ln(x+1)$ ,  $x_0 > -1$

r)  $y = \ln \sqrt{\frac{3x-4}{3x+4}}$ ,  $|x_0| > \frac{4}{3}$

s)  $y = x^{\frac{1}{x}}$ ,  $x_0 > 0$ ,  $x_0 \neq e$

۱۱ - لاندې تحلیلي افادي په متمادیت او مشتق والي باندې وځیوی،

a)  $y = \begin{cases} -a & \text{für } x \leq 0 \\ +a & \text{für } x > 0 \end{cases}$

b)  $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x \leq 2 \\ -2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$

c)  $y = |x - 1|$

d)  $y = |\sin x|$

e)  $y = -\frac{x^2}{2}$

f)  $y = -|x|$

g)  $y = \sqrt[3]{x^2}$

h)  $y = (x+1)^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

i)  $y = e^{\frac{1}{x}}$



j)  $y = e^{\frac{x}{x-1}}$

k)  $y = e^{\frac{x^4}{x^2-1}}$

l)  $y = \operatorname{Arccot} \frac{1}{x}$

m)  $y = \operatorname{Arcsin}(\sin x)$

n)  $y = \operatorname{Arctan}(\tan x)$

o)  $y^2 = \frac{x^3}{4-x}$

p)  $y^3 = 3x^2 - x^3$

q)  $y^2 = \frac{1-x}{x}$

۱۲ - لاندې منحنې چې د پسي برابر ونونو سره ورکړ شوي، د افراطي ټکو او اورونټکو (نقاط افراطي و انعطاف) له مخې وڅېړئ.

a)  $y = x^2 - 2x + 3$

b)  $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$

c)  $y = x^3(8-x)$

d)  $y = (x-a)^4 + b$

e)  $y = \frac{x}{x^2+1}$

f)  $y = \frac{x^2-7x+6}{x-10}$

g)  $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$

h)  $y = \frac{ax^2}{ax+b}$

i)  $y = \frac{a^2(a-x) + b^2x}{x(a-x)}$

j)  $y = \cos^2 x$

k)  $y = \sin x \cos x$

l)  $y = \sin 2x - 2 \sin x$

m)  $y = e^x \sin x$

n)  $y = x e^x$

o)  $y = x^n e^{-x}$

p)  $y = e^{-x} + e^{2x}$

q)  $y = e^{-x} - e^{-2x}$

r)  $y = x \ln x$

s)  $y = x \ln^2 x$

t)  $y = \frac{1}{2} \ln x - \operatorname{Arctan} x$

۱۳ - د دې لاندې برابر ونونو سره ورکړ شوي منحنې تر بحث لاندې ونیسئ:

13.1. a)  $y = x^2 - x - 2$

b)  $y = -(x+4)^2 + 4$

c)  $y = x^3 - x^2$

d)  $y = x^3 - 10x$

e)  $y = -x(x+3)^2$

f)  $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

g)  $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$

h)  $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

i)  $y = (x+2)(x^2 - 4x + 3)$

j)  $y = (1-x)(x^2 + 6x + 8)$

k)  $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$

l)  $y = |-x(x^2 - 16)|$

13.2. a)  $y = x^4 - 8x^2 - 9$

b)  $y = -x^4 + 5x^2 - 4$

c)  $y = x^4 - 10x^2 + 9$

d)  $y = (x-2)^2(x-4)(x+3)$

e)  $y = \frac{1}{24} x(x-1)(x-2)(x-3)$

f)  $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$



- 
- 13.5. a)  $y^2 = x^3 + x + 2$       b)  $y^2 = x^3 - 3x + 2$       c)  $y^2 = x^3 - 2x + 1$   
d)  $y^2 = x^4(x - 1)$       e)  $y^2 = x^2[x(1 - x)]$       f)  $y^2 = \frac{1-x}{x}$   
g)  $y^2 = \frac{x^2}{1+x}$       h)  $y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$       i)  $y^2 = \frac{x(1-x)}{(x+1)^2}$
- 13.6. a)  $y = 2 \sin^2 x$       b)  $y = \sin 2x \cos x$       c)  $y = \sin x \cos^2 x$   
d)  $y = \sin^2 x + 2 \cos^2 x$       e)  $y = x \sin x$       f)  $y = \frac{\sin x}{x}$   
g)  $y = \frac{\sin 2x}{\sin x}$       h)  $y = x^3 \cos x$   
i)  $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$       j)  $y = \sin^3 x + \cos^3 x$   
k)  $y = \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$       l)  $y = \cos 2x + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$
- 13.7. a)  $y = e^{-2x}$       b)  $y = xe^{-x}$       c)  $y = x e^{\sqrt{x}}$   
d)  $y = (x^2 - 1) e^x$       e)  $y = e^{\tan x}$       f)  $y = 2 e^{-x} \sin 2x$   
g)  $y = e^{2x} \sin 3x$
- 13.8. a)  $y = \ln 3x$       b)  $y = \ln(x^2 - 1)$       c)  $y = x^2 \ln x$

### په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرج يې مختلف کرښيز يا لاینيز ضریبونه لري.

بنسټ: که د یوه اصلي پولینوم  $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$  مخرجپولینوم  $P_n(x)$  په مختلفو کرښيزو (لایني)

ضریبونو  $P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)$  ټوټه کېدونکی وي، نو پولینوم

$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$  په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} \dots \frac{N}{x-x_n}$$

داسې یوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه، بلل کېږي، چې  $A, B, C, \dots, N$  حقیقي عددونه دي.

بیلگه:

اصلي پولینوم کسر  $\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$  په ټوټه کسر ټوټه کړی.

حل: د مساوات  $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$  لومړی حل  $x_1 = 1$  د ازمايننت له لارې پيدا کيږي.

د پولينوم ویش (لنډ: پولينومویش)  $(x-1) = x^2 - 3x - 10$ :  $(x^3 - 4x^2 - 7x + 10)$  مو ټوټه ونې ته بيايي  $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x^2 - 3x - 10)(x-1)$  مساوات  $x^2 - 3x - 10$  اوس  $x_2 = -2$  او  $x_3 = 5$  حلونه لري.

له دې امله  $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-1)(x+2)$  دی.

د اصلي کسر  $\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$  په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمېرنو قاعدې له مخې کېدی شي ورکړ شوی پولينوم په درې جمعې برخو ټوټه شي، چې مخرجونه يې لاینيز (کرښيز -) ضريبونه دي:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولينوم مخرج دی.

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} &= \frac{A(x-1)(x+2) + B(x-5)(x+2) + C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)} \\ \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} &= \frac{Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 - 3Bx - 10B + Cx^2 - 6Cx + 5C}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} \\ \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} &= \frac{(A+B+C)x^2 + (A-3B-6C)x + (-2A-10B+5C)}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} \end{aligned}$$

د صورتونو ارزښت  $A, B$  او  $C$  ټاکنه د ضريبونو (ځلوونو) د پرتلي له لارې:

د مساوي مخرجونو کسرکې بسيا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته بايد د مساوي توانونو ضريبونه، دا په دې مانا چې د  $x, x^2$  او  $x_0$  بايد مساوي وي.

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

۷۸۰

$$A + B + C = 4 \quad \text{I}$$

$$A - 3B - 6C = -1 \quad \text{II}$$

$$-2A - 10B + 5C = 39 \quad \text{III}$$

د فاکټور 2 سره د I او II مساوات ضربونه او د هر یوه جمع د III سره پورته درې مساوات سیستم و دوه مساواتسیستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$-8B = -72 \quad \text{V}$$

$$-16B - 7C = -41 \quad \text{IV}$$

د مساوات IV.V څخه لرو:  $B = 3$   $-24B = -72 \Rightarrow B = 3$

د  $B = 3$  په V کې ایښوونه:  $C = -1$   $-16.3 - 7C = -41 \Rightarrow C = -1$

د  $B = 3$  او  $C = -1$  په I کې ایښوونه:  $A = 2$   $A + 3 - 1 = 4 \Rightarrow A = 2$

په ټوټه کونې فرمول کې ایښوونې سره غوښتونکی ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x-5} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

ازماینت:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+2) + 3(x-5)(x+2) - 1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)} = \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$$

ب) اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج یې مساوي لاینیز (کربنیز) ضریبونه لري.

که د یوه اصلي پولینوم  $P_n(x)$  مخرج  $\frac{P(x)}{P_n(x)}$  د کرښیز فاکتور  $x - x_0$

توان  $\frac{A}{(x-x_0)} + \frac{B}{(x-x_0)^n} + \dots + \frac{N}{(x-x_0)^n}$  وي نو ددې کرښیزو فاکتورونو له

پاره پولینوم لاندې بڼه لري:  $\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کرښیزو فاکتورونو ټوټه کسرونه (ماتونه) په بلده بڼه ورکول کيږي.

بیلگه:

د اصلي پولینوم کسر  $\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$  لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کرښیزو فاکتورونو:

د پولینوم  $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$  لومړی حل  $x_1 = 1$  د ازمايښت له لارې پیدا کيږي.

پولینوم ویش  $(x-1) = x^2 + 3x + 2$ :  $(x^3 - 4x^2 + 4x - 2)$  مو لاندې ټوټه کوني ته لارښودوي:

$$x^3 - 4x^2 + 4x - 2 = (x^2 + 5x - 2)(x - 1)$$

مساوات  $x^2 - 3x + 2 = 0$  دا  $x_2 = 1$  او  $x_3 = 2$  حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره ډبل حل دی:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 2)(x - 1)^2$$

د ټوټه کسر پیل:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزوني له لارې:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{A(x-1)^2 + B(x-2)(x-1) + C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{(A+B)x^2 + (-2A-3B+C)x + (A+2B-2C)}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

د A, B او C صورتونو ارزښت د ضریبونو پرتله کونې له لارې.

$$\begin{array}{ll} A + B = 3 & \text{I} \\ -2A - 3B + C = -6 & \text{II} \\ A + 2B - 2C = 2 & \text{III} \end{array}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره گډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$\begin{array}{ll} A + B = 3 & \text{I} \\ -3A - 4B = -10 & \text{II} \end{array}$$

د ضرب د 4 سره او جمعه یې د IV سره:  $A = 2$

د  $A = 2$  ایښوونه په I کې:  $2 + B = 3 \Rightarrow B = 1$

د  $A = 2$  او  $B = 1$  ایښوونه په III کې:  $2 + 2 \cdot 2 - 2C = 2 \Rightarrow C = 1$

د ټوټه کونې فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$



پ ( اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج یې پوره په کرښیزو ضریبونو یا فاکتورونو نه ټوټه کیږي.

بنسټ:

که د یوه اصلي پولینوم کسر  $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$  مخرجپولینوم  $P_n(x)$  نور په یوه حقیقي ضریب نه ټوټه کېدونکي ضریب  $ax^2+bx+c$  مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کېدو کې دې د یو ټوټه کسر  $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$  په بڼه کېښودل شي یا راوړل شي

بیلگه:

د پولینوم کسر  $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$  له پاره دې په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرج ټوټه کونه په کرښیزو ضریبونو:

لومړی حل دې  $x_1 = -1$  وي مساوات  $x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 0$  د ازماښت له لارې پیدا کیږي.

پولینوم وېش  $(x+1) = x^2 + 2x + 4$ :  $(x^3 + 3x^2 + 6x + 4)$  مو لاندې ټوټه کوني ته بیایي:

$$x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = (x+1)(x^2 + 2x + 4)$$

دا چې مساوات  $x^2 + 2x + 4$  حقیقي حل نه لري، نو د حقیقي اعدادو په ورشو کې نوره ټوټه کونه ناشوني ده.

نو له دې امله پولینوم کسر لاندې بڼه لري:  $\frac{Ax}{x^2 + 2x + 4}$

د  $\frac{c}{x+1}$  بڼې کسر سره یوځای مو لاندې ټوټه کسر ټوټه کونې ته بیایي:

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 4} + \frac{C}{x + 1}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمع

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{(Ax + B)(x + 1) + C(x^2 + 2x + 4)}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4}$$

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{(A + C)x^2 + (A + B + 2C)x + (B + 4C)}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4}$$

د ضریبونو A, B, C ټاکنه د پرتله کولو له لارې:

$$A + C = 5 \quad \text{I}$$

$$A + B + 2C = 8 \quad \text{II}$$

$$B + 4C = 9 \quad \text{III}$$

د III کمښت (تفریق) له مساوات II څخه د I سره یې گډولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اووښتونې یا متحولې لري:

$$A - 2C = 5 \quad \text{IV}$$

$$A + C = 5 \quad \text{I}$$

مساوات III منفي مساوات II:  $-3C = -6 \Rightarrow C = 2$

د  $C = 2$  په ائښنولو سره:  $A + 4.2 = 9 \Rightarrow B = 1$

د  $C = 2$  په III اېښولو سره:  $B + 4.2 = 9 \Rightarrow B = 1$

که دا د ټوټه کونې فرمول کې کېږدو نو د ټوټه کسرونو ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 4} + \frac{2}{x + 1}$$

(ج) نا اصلي پولینوم کسرونه:

که د یوه پولینوم  $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$  د صورت درجه د پولینوم د مخرج له درجې څخه لویه وي، نو دا په پولینومویش له لارې په ټولناتق کسرونو او یوه اصلي کسرونو ټوټه کېدی شي.

بیلگه:

کسري پولینوم  $\frac{3x^3 - 6x^2 - 20x - 1}{x^2 - 2x - 8}$  په ټوټه کسري پولینومونو ټوټه کړئ .

د پولینوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو یو نا اصلي پولینومکسرخ ته پروت دی.

پولینوم وېش:

$$(3x^3 - 6x^2 - 20x - 1) : (x^2 - 2x - 8) = 3x + \frac{4x - 1}{x^2 - 2x - 8}$$

$$\frac{-(3x^3 - 6x^2 - 24x)}{4x - 1}$$

د پاتې - یا باقي کسرخ  $\frac{4x - 1}{x^2 - 2x - 8}$  له پاره د ټوټه کسرونو ټوټه کونې کارونه (عملیه)

مخ ته بیایو. مخرج په کرښیزو ضربونو ټوټه کړی:

د مساوات  $x^2 - 2x - 8 = 0$  له پاره حل  $x_1 = -2$  او  $x_2 = 4$  لرو.

نو  $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$  دی.

د ټوټه کسر ټوټه کونې لپاره ځای په ځای کوي:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمعه کول:

$$\begin{aligned} \frac{4x-1}{x^2-2x-8} &= \frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)} \\ \frac{4x-1}{x^2-2x-8} &= \frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8} \end{aligned}$$

د ضریبونو د پرتله کونې په مرسته د A او B ټاکل:

$$\begin{aligned} A+B &= 4 & \text{I} \\ 2A-4B &= 4 & \text{II} \end{aligned}$$

د I ضرب له 2 سره او له II څخه یې تفریق یا کول  $6B = 9 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$

په II کې ایښوول:  $2A - 4 \cdot \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow A = \frac{5}{2}$

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

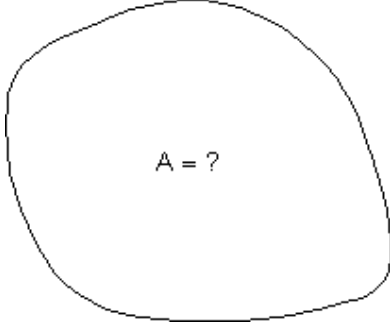
متحول (بښونکی) په ټوټه کسر ټوټه کونه لاندې بڼه غوره کوي:

$$\frac{3x^3 - 6x^2 - 20x - 1}{x^2 - 2x - 8} = 3x + \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

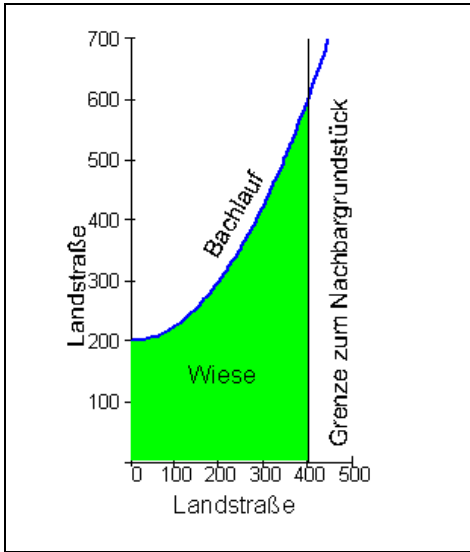
## د انتیگرال شمیرنه

د انتیگرال شمیرنې لپاره پیل راوړنې

مور د ځمکچپوهنې یا هندسې له لارې بلد یو چې د کرښو رابند تټونو یا جسمونو سطحه او ډکۍ یا حجم څنګه وشمیرو. که یوه سطحه له ګرڼې (کرښې) رابنده وي، نو څه باید وشي؟ دا مو انتیگرال شمیرنې ته رابولي.

 <p>A = ?</p>	<p>پخوانیو یونانیانو ته دا د منحنی څخه رابندې سطحې شمیرلو اصول معلوم وو. دا د مشتق شمیرنه، چې مور ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پېړۍ پای کې) د طبیعي علومو پوهانو لایبنیڅ او نیوتون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.</p>
--	--

پیلبلګه



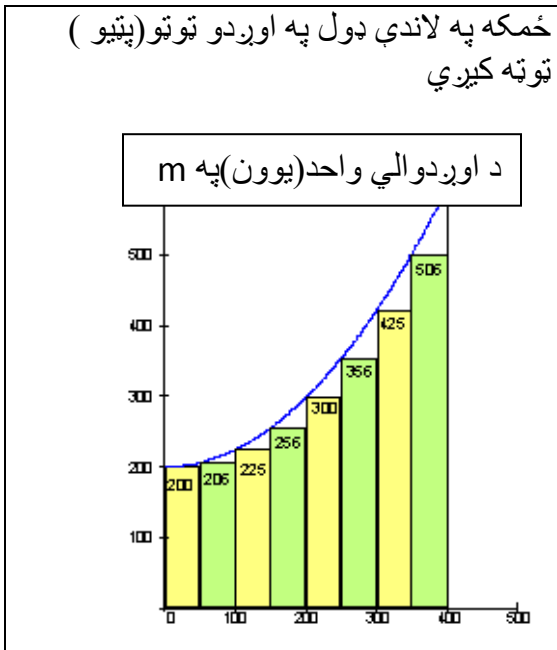
دا څېړه شوی چمن خرڅیږي. له پورته لور د ویالې را بند دی او له بڼې لور د گاونډي ځمکه ده او کین لور ته کوڅه او له کښته لور هم د یوې کوڅې را بند دی. ددی لپاره چې چمن وپلورل شي، باید سطحه وپېژندل شي.

د پلورونکی لپاره سطحه باید نزدې پوره مگر هیڅکله کمه ونه شمېرل شي. اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پیسې باید ورکړي، خو هیڅکله ځمکه د اصل څخه زیات ونه شمېرل شو.

وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

ویاله  $f(x) = \frac{1}{400}x^2 + 200$  د تابع مساوات لري.

د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

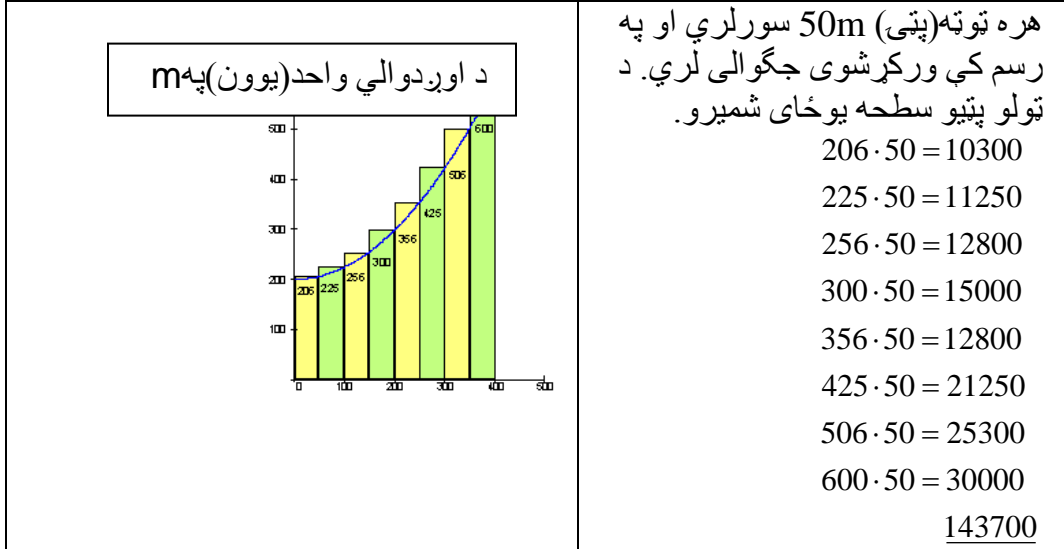


هره توتو (مستطیل پټی) 50m سره وره ده او په رسم کې ورکړ شوی جگوالی لري. د ټولو پټیو، سطحه یو ځای شمیرو.

- $200 \cdot 50 = 10000$
- $206 \cdot 50 = 10300$
- $225 \cdot 50 = 11250$
- $256 \cdot 50 = 12800$
- $300 \cdot 50 = 15000$
- $256 \cdot 50 = 12800$
- $425 \cdot 50 = 21250$
- $506 \cdot 50 = 25300$
- 123700

د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نزدې  $123700 m^2$  ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:



د د پلورونکي له پاره د ټولي سطحې مساحت نزدې  $143700 m^2$  دی. اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قیمتونو، منځ، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومنی. یعنې د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700 + 143700}{2} = 133700 \text{unt}^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انتیگرال برخه (په مخ) کې وشمېرو، چې ریښتونی ارزښت یې  $133333.3m^2$  دی.

د اخستونکي په بېلگه کې دا ډول شمېرنه لاندنۍ، جمعې جوړول، بلل کيږي.

د پلورونکي په بېلگه کې دا ډول شمېرنه، پورتنۍ جمعې، جوړول بلل کيږي.

دا د سطحې ریښتونی ارزښت یو چیرته په دا منځ کې پروت دی.

باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې رښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

د سطحې تابع له پاره تر مخ راوړنه:  
 دا دانتيگرال هندسي مفهوم هم دی.  
 په کارتيزي وضعيه قيمت سيستم کې د گراف په سرچينه کې يوه کرينه رسموو.  
 غواړو سطحه پيدا کړو، چې د تابع دگراف او  $x$  - محور ترمنځ د  $x$  په واکوالي کې  
 پرته وي (د  $x$  تابع وي).

### د ريمن (تاکلی) انتگرال

يادونه: انتیگرال څه شی دی؟

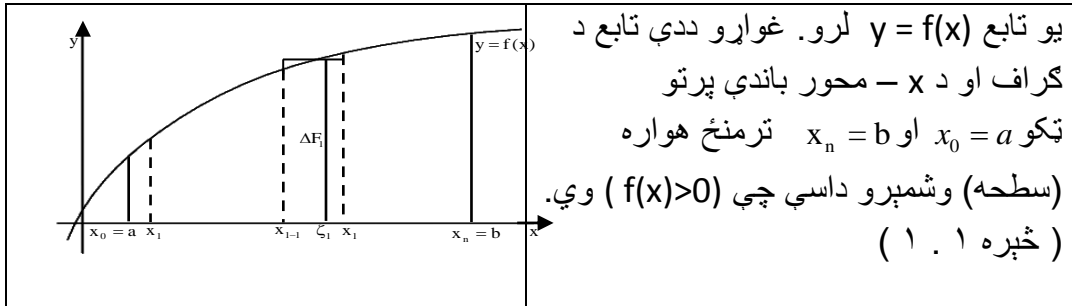
انتیگرال کونه Integration د ورگډېدلو په معنی دی ، لکه چې يو څوک يوې پردی  
 ټولني ته ورگډيږي يعني ددې پردی ټولني خويونه خپلوي، يعني دی په دې ټولنه  
 ورزياتيږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څېړلو ته وړاندې کيږي، چې څنگه د  
 يوې کوچنی درجې تابع و يوه جگ درجې فنکشن يا تابع ته ځي.

د انتیگرال هندسي تعريف:  
 لوريزه سطحه-د انتیگرال تعريف:که يوه  $f$  تابع ولرو، نو د  $x$  محور او تابع ترمنځ  
 سطحې شمېرل د انتیگرال له لارې کيږي. په دې سطحه کې د  $x$  محور پورته  
 لوري ته سطحه مثبتې مخنځېنه لري او د  $x$  محور کښته لوري ته سطحه منفي  
 مخنځېنځ لري.

تحليلي تعريف:  
 تعريف: د  $f$  يوه تابع ورکړ شوي، چې په يوه انتروال  $[a,b]$  باندې تعريف دی، نو  
 د  $a$  څخه تر  $b$  پورې د تابع د انتیگرال څخه د  $x$  په محور د  $f$  د گراف او د کرښې  
 $x=a$  او  $x=b$  تر منځ يوه يوه لوريزه سطحه پوهيږو.



په دې برخه کې غوارو، چې د انتگرال کلیمې ته وده ورکړو. د سطحې کچونې یا اندازه کوونې څخه کړی شو د انتگرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتگرال نیول د مشتق په څېر یا برعکس کارونه یا عملیه ده.



ددې دندې د حل لپاره د  $[a, b]$  اینټروال په  $n$  (نه اړین) برابرو برخو انټروالونو  
 $[x_{i-1}, x_i]$  ټوټه کوو.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اینټروال  $[x_{i-1}, x_i]$  کې په خوښه  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ټاکو.

د  $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$  ترمنځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطیل  
 سطحه (و لارکونجیزه هواره) ده:

$$\Delta F_i(x) = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i, \quad (4.2)$$

د ټولو پورته مستطیل ډوله کوچنیو سطحو د جمعي (زیاتون) له لارې غوښتونکي، نزدې  
 ټوله سطحه لاس ته راځي:

$$F_n = \sum_{i=1}^n \Delta F_i = \sum f(\xi_i) \Delta x_i; \dots \dots \dots (4,2)$$

دا نږدېوالی تر هغې بڼه کېږي څومره چې د اینټروال  $[a, b]$  ویش نری شي يعنې  $\max \Delta x \rightarrow 0$ ، هر څومره چې د زیاتیدونکو شمیر  $n \rightarrow \infty$  (شي).

که ( ۴ . ۲ ) تل همغه پوله ارزښت  $F$  ولري، په دې اړه نه چې اینټروال  $[a, b]$  څنګه ویشل شوی

او  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  څنګه ټاکل شوي، نو  $f(x)$  په اینټروال  $[a, b]$  کې اینټیګرال وړ دی. دا د بیلګې په

توګه د ټولو ټوټه، متمادی او محدودو توابعو  $y = f(x)$  حالت دی.

پیژند (تعریف) ۴ . ۱ : لیمیت (پوله)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F; (\Delta x \rightarrow 0), \dots \dots \dots (4,3)$$

که په اینټروال  $[a, b]$  کې موجود وي، نو دا د  $f(x)$  ټاکلی اینټیګرال بولو، یا د ریمن سطحه

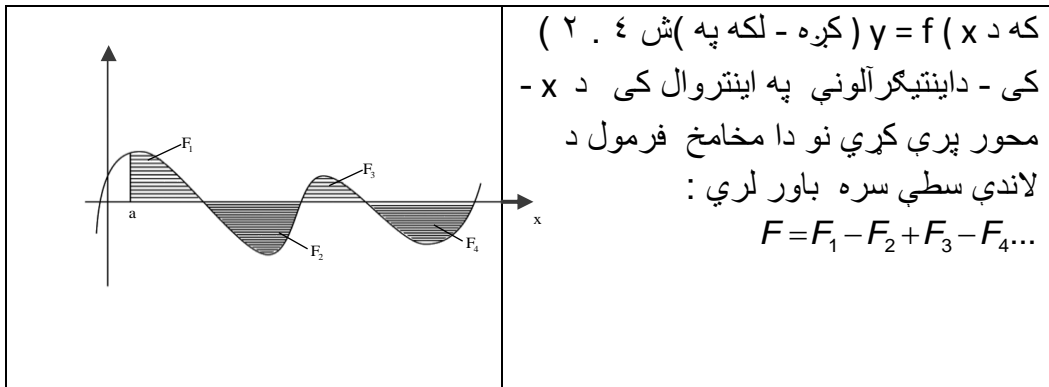
$F$ - Riemann . دلته  $a$  د اینټیګرال کېدونکې لاندې (کښته) پوله یا حد او  $b$  د اینټیګرال کېدونکې پورته پوله یا حد بلل کېږي او  $[a, b]$  د ایتیکرال کېدونکې اینټروال او (  $f(x)$  Integrand اینټیګرال کېدونکې) او  $x$  د اینټیګرال کېدونکې متحول ( Integrationsvariable ) بلل کېږي

یادونه ۱ : د ایتیکریشن واریابله یا اوښتونې کیدی شي په خپله خوښه په نخښه شي (مخخښه یا علامه یی په خوښه وټاکل شي).

$$\text{مور لرو: } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$$

یادونه ۲: دا پورته تعریف ۴. ۱ کیدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چیرته چی  $f(x) > 0$  باوري نه وي.

که  $f(x) < 0$  وي نو دا ټاکلی اینتیگرال بیا د  $x$ -محور تر لاندې منفي هواره لري



د تعریف ۴. ۱ پسي ترلي دا لاندې جمله لرو:

جمله ۴. ۱: که  $f(x)$  په  $[a, b]$  کې اینتیگرالور وي او  $c \in [a, b]$  وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

ددې لپاره چی دا پورته مساوات د  $c$  ارزښتونو ته پراخه کړی شو، باید له اینتروال  $[a, b]$  د باندې نه وي پروت، یعنی ټکي  $a, b$  او  $c$  په یوه اینتروال کی باید پراته وي، په هغه کی چی تابع  $f(x)$  اینتیگرالور دی.

مور دا لاندې تعریف (پیژند) لرو :

پیژند یا تعریف ۴ . ۲ :  $f(x)$  په یوه بند انټروال  $[a, b]$  کې اینټیگرالور دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

د پیژند تعریف ۴ . ۱ له مخې تل باور لري:  $\int_a^a f(x) dx = 0$

### بنسټیز - یا لومړنی تابع

ددې لپاره چې د مشتقنیولو او اینټیگرال نیولو ترمنځ اړیکې لاس ته راوړو، د لومړنی تابع کلمه په لاندې توگه تعریفوو:

پیژند (تعریف): تابع  $y = f(x)$  دې په یوه واز اینټروال کې تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقور  $F(x)$  تابع چې  $F'(x) = f(x)$  شرایط پوره کړي، د  $f(x)$  بنسټیز - ، ساده - یا لومړنی تابع بلل کيږي

په ساده توگه لیدل کيږي چې د یوې  $f(x)$  تابع لپاره نه یواځې یو بنسټیز تابع  $F(x)$  موجود دی، د بیلگې په توگه  $F_0(x) = x^2$ ،  $F_1(x) = x^2 + 1$ ،  $F_2(x) = x^2 + 2$ ، بلکې په عمومي ډول

$F(x) = x^2 + C$ ، چې دا ټول مساوي مشتقونه  $f(x) = 2x$  لري.

د پورته بنوونو پایله، چی څنگه سری د یوه متمادي تابع  $f(x)$  لومړنی تابع پیدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

$y = f(x)$  دې په اینتروال  $I$  کی متمادي تابع وي، نو د  $a \in I$  لپاره

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{د } f(x) \text{ یوه لومړنی تابع ده، د ټولو } c \in I \text{ لپاره .}$$

د  $f(x)$  هر ه بله لومړنی (بنسټیزه) تابع لاندې بڼه لري:

$$F(x) = F_a(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

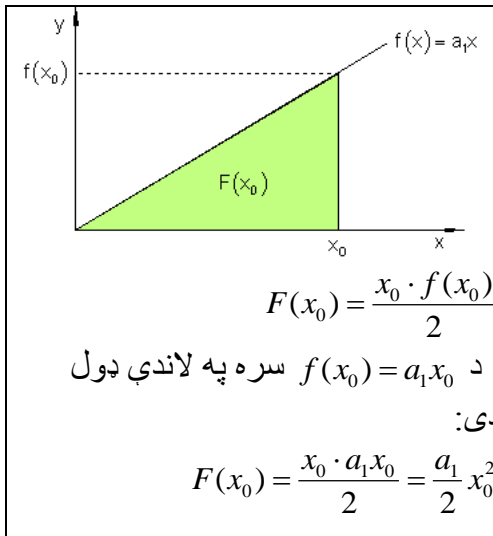
خواب:

بنايو چی  $F_a(x)$  د  $f(x)$  بنسټیز تابع ده. ددې د بنوولو لپاره بنايو چی د  $F_a(x)$  لپاره د پورته پېژند شرایط باور لري. د  $F_a(x)$  مشتق د  $x \in I$  او  $x \neq a$  لپاره په لاندې ډول ده.

$$\begin{aligned} F_a'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left[ \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_a^{x+h} f(t) dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\xi), \quad \xi \in [x, x+h] \end{aligned}$$

(د لیمیټ منځ ارزښت جملې له مخې داسې یوه  $\xi$  شته دی  
 (د متمادیت له امله  $(f(\xi) \rightarrow f(x))$ )  
 $= f(x)$ )

**سطحه او لومړنۍ تابع:**  
 سطحې تابع ته ترمنځ راورنه:



د تابع  $f(x) = a_1x$  گراف په کارټیزي وضعیه سیستم (پروت ولاریسیستم) په سرچینه کې یوه کرښه انځوروي. یو تابع غواړو پیدا کړو، چې د گراف او  $x$ -محور ترمنځ، د  $x_0$  په واکوالي یا تابعیت کې سطحه په گوته کوي. دا چې دا جوړه شوی سطحه یو مثلث دی، نو حل یې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته

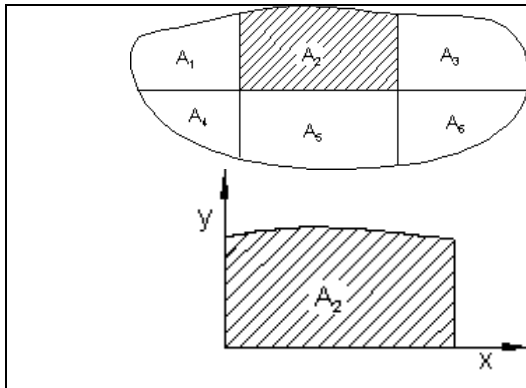
$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$

ساده پیدا کيږي:

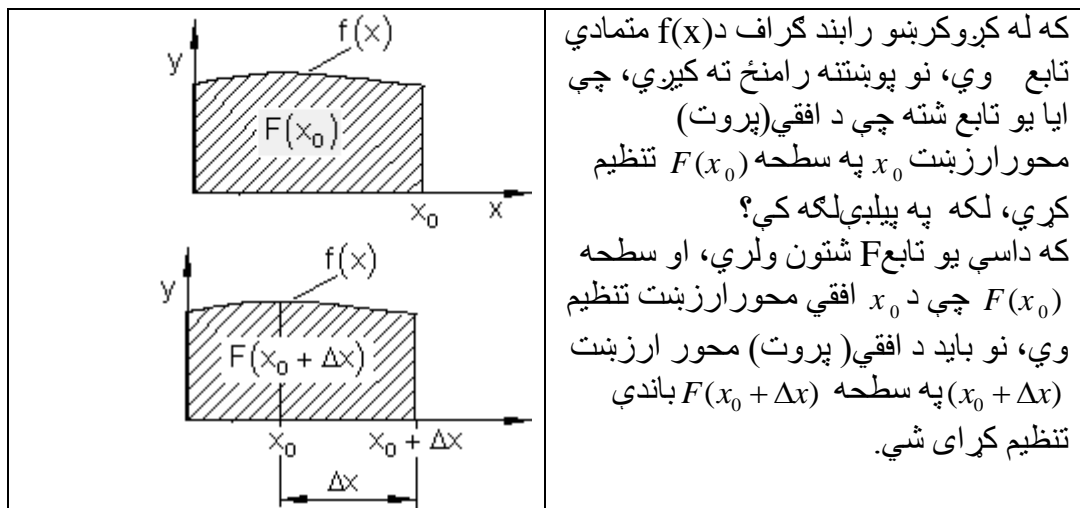
زموږ د مسألې لپاره متحوله داسې تغیروو:

$$A \rightarrow F(x_0); g \rightarrow x_0; h \rightarrow f(x_0) = a_1x_0$$

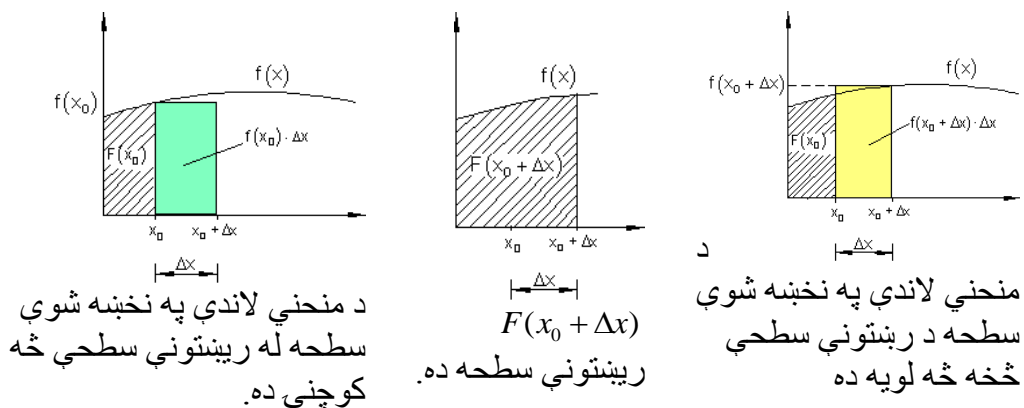
تابع  $F(x_0)$  د گراف او د  $x$ -محور ترمنځ سطحه د  $x_0$  په واکوالي (تابعیت) کې تشریح کوي یا ښایي. موږ دا تابع د **سطحې تابع** بولو. د سطحې پرابلم:



هره له کروکړښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو (قدمونو)، چې په هغې کې فقط یوه یوه کرښه رامنځ ته کيږي. نورې ټولې رابندونې سیده کرښیزې دي. هره یوه د سطحې برخه (د بېلگې په توګه دلته  $A_2$ ) کېدی شي د وضعیه قیمتونو سیستم کې د یوې سطحې په څېر انځور شي، چې د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.



په یوه څلورضلعي (مستطیل) کې د سطحې رابندول:



که د سطحې پټي (یا کوچني مستطیلونه یا ولارکوډیز) هرڅومره کوچني شي، په همغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه یې توپیر کميږي. دا اړودوالی د ریاضیاتو له مخې په لاندې توګه فرمول باندې کېدی شي:

$F(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta x$	$F(x_0 + \Delta x)$	$F(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x$
----------------------------------	---------------------	---

دا مو دې لاندې نابرابرونو نوي نامساواتو ته راهڅوي

$$\begin{aligned}
 F(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta x &\leq F(x_0 + \Delta x) \leq F(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x \quad | F(x_0) \\
 \Leftrightarrow f(x_0) \cdot \Delta x &\leq F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x \quad | : \Delta x \\
 \Leftrightarrow f(x_0) &\leq \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} \leq f(x_0 + \Delta x)
 \end{aligned}$$

لیمیت یی نیسو (پوله یی پیدا کوو):

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0) &\leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) \\
 f(x_0) &\leq F'(x_0) \leq f(x_0) \\
 f(x_0) &\leq F'(x_0) = f(x_0) \\
 \underline{F'(x_0) = f(x_0)} & \text{ نو لرو:}
 \end{aligned}$$

دا په دې معنا، چې د سطحې  $F(x)$  مشتق د کړې کړنې د تابع ارزښت  $f(x_0)$  سره په  $x_0$  ځای کې برابر دی. مور لیکو:

$$\boxed{F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)} \quad \text{یا} \quad F'(x_0) = \frac{dF(x_0)}{dx} = f(x_0)$$

که مور بریالی شو، داسې یو تابع  $F(x)$  پیدا کړو چې مشتق یې د رابندې کړې تابع  $f(x)$  تابع وي، نو  $F(x)$  د سطحې تابع دی. که مور یو تابع د لومړني تابع څخه رابیل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د یوې سطحې تابع پیدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی.

سری کړی شي فورمال ووايي:

د یوې سطحې مساحت تابع، چې پیدا کړو، دا معنا لري چې ورګډول یا انتیګرال یې شمېرو. د یوه ساده توان تابع په بیلګه د احساس له مخې یوه لار پیدا کیدی شي، چې دا څنګه ایتې کړلوي.

توانتابع:



$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په یو کمیري او پوتنختابع د زاړه پوتنخ سره ضربیږي.

انتیگرالونه (زیاتونه یا ورگډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په یو جگیري او پوتنختابع په نوي اکسپوننت وپشل کیږي.

دا همدا اوس ازمايو:

پوتنختابع:

$$f(x) = 3x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{3}{2+1} x^{2+1} = \underline{x^3}$$

تابع  $F(x)$  د  $f(x)$  بنسټتابع (لومړنی تابع یا ساده تابع) بلل کیږي، ځکه چې  $f(x)$  له  $F(x)$  څخه لاس ته اړخي یا را پیداکیږي یا راځیږي.

## ناټاکلی انتیگرال

و به گورو، چې ناټاکلی انتیگرال د لومړنی تابع لپاره بل نوم دی.

که دیوي ورکړ شوي  $f(x)$  تابع  $F(x)$  لومړنی تابع، یعنی  $F(x)$  وپېژنو، نو دیوي ثابتي  $c$  د ور جمع کولو سره د  $f(x)$  د ټولو لومړنیو توابعو سټ  $G$  لاسته راوړو ( $c$  په خوښه یو حقيقي عدد دی).

مور د  $f(x)$  تابع د  $F(x)$  لومړنی تابع ټاکنه یا اینتگرالونه هم بولو او ددې له پاره لیکو:

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \Leftrightarrow dF(x) = f(x)dx \Leftrightarrow F(x) = \int dF(x) = \int f(x)dx$$

$$F(x) = \int f(x)dx$$

دا تراوسه فورمال لیکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.

مور لومړنی توابع پلټو

بیلگه:

لومړنی تابع  $F(x)$  دې پیدا شي، چې مشتق یې  $f(x) = 2x$  دی.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int 2x dx$$

مور ازمایو:

$$F(x) = x^2 \quad \text{خکه چي } f(x) = 2x = F'(x)$$

$F(x) = x^2 + 2$  خکه چي  $f(x) = 2x = F'(x)$ . په تولیزه توگه باور لري:

$$F(x) = x^2 + C \quad \text{خکه چي په هر حالت کي لرو: } f(x) = 2x = F'(x)$$

دواړه توابع په ثابت غړي کې یو له بل توپیر لري. دوی همغه مشتق لري، خکه چي د مشتق سره

هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله باید دې خپلې لار ته تغیر ورکړو.

$$\boxed{\int f(x) dx = F(x) + C} \quad \text{قاعده(لار): باور لري:}$$

د لومړنیو توابعو سټ (ډېری)

بیلگه بنایي، چي د تابع  $f(x)$  لپاره نه یواځي یو لومړنی تابع بلکي ناپای ډېر توابع شته، چي یواځي ثابت عدد کي یو له بل سره توپیر لري، چي دا د  $f(x)$  د لومړنیو توابعو سټ بولو.

بیلگه

یو لومړنی تابع  $F(x)$  دي پیدا شي، چي د هغه مشتق  $f(x) = 3x^2 + 2$  وي.

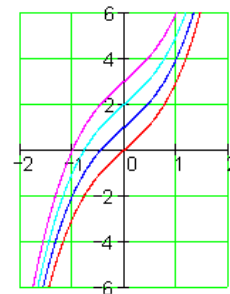
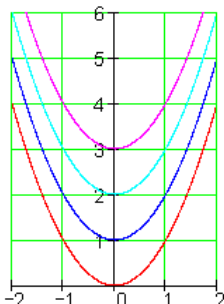
$$F(x) = x^3 + 2x + C \quad \text{، خکه چي } f(x) = 3x^2 + 2 = F'(x)$$

د ټولو لومړنیو توابعو ډېری دي د منحیو ډلې په څېر انځور شي، چي فقط ثابتو عددونو کي یو له بل توپیر لري.

د دې لپاره دي د گرافونو لاندې دوه بېلگي وکتل شي.

$$F(x) = x^2 + C$$

$$F(x) = x^3 + 2x + C$$



انتیگرالشمیرنه د مشتقشمیرني برعکس دی.

لاندې توابع په اړونده توگه په ،، برعکس مشتقولو،، له لارې. مور د مخه ځنې انتیگرال قاعدې لوستلي.

لکه چې ومو لیدل دواړه تمرینونه د همغه تیپ او اصولو له لارې اجرا کيږي، خو یواځې لیکنه یې توپیر لري

دویم (لاتین) د سطحې د شمېرلو لپاره د مشتق او انتیگرال اصلي جملې ته گوته نیسو.

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = |F(b) - F(a)|$$

د یوې ساده بیلگې له لارې د اصلي جملې په مرسته دا سي مخ ته څو

تمرین (چا چې ډېر کار کوی وي) شوی لیدونکی گوري یا پیژني، چې د سطحې مساحت په دې بیلگه کې بي له مطلق ارزښت شمیرل کېدای شي.، ځکه چې په دې بیلگه کې سطحه د  $x$ - محور پورته لور ته پرته ده .

د دې درس تکمیل - یا \*پوره کیدني لپاره بیلگي.

1. ټول تام کسري تابع د  $x$ -محور او د کرښو  $x = -2$  او  $x = 1$  سره یوه سطحه پوره رابندوي یا راتري. د سطحې مساحت وشمیرئ.

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 6$$

$$a = -2, b = 1$$

2. د دوه توابعو  $f(x)$  او  $F(x)$  مساوات ورکړ شوي دي (الف) صفرځایونه وشمیرئ او د  $f(x)$  گراف وکارئ. (ب) وښایئ، چې  $F(x)$  د  $f(x)$  لومړنی تابع دی. (پ) د  $f(x)$  او  $x$ - محور څخه پوره رابندي سطحې مساحت وشمیرئ.

:

$$f(x) = 3e^{-x} \cdot (2x - x^2 + 1)$$

$$F(x) = 3 \cdot (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$$

3. د ۴ - می درجی تاملراشل تابع د  $x$ - محور په درې ټکو کې غوڅوي او د هغې سره یوه سطحه مکمله رابندوي. د سطحې مطلقه مساحت وښایئ.

$$f(x) = x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3)$$

۴. د  $f(x)$  مثلثاتي تابع د -محور د  $a$  او  $b$  ټکو او همداسر نورو ټکو کې غوڅوي. د  $f(x)$  او  $x$ -محور تر منځ د  $x=a$  تر  $x=b$  په انټروال کې د سطحې مساحت وشمېرئ.

$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$

$$a = -\frac{\pi}{6}, \quad b = \frac{3}{2}\pi$$

5. دوه تاملراشل توابع  $f(x)$  او  $g(x)$  په ټکو  $A, B$  او  $C$  کې غوڅوي. (الف) د شي حالت رسم کړئ. (ب) د سطحو مساحت د  $f(x)$  او  $g(x)$  ترمنځ له  $x=a$  څخه تر  $x=b$  انټروال کې وشمېرئ.

$$f(x) = x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$$

$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$

$$A(a;0), \quad B(b;0)$$

6. د وضعیه قیمتسیستم په لومړئ او دویمه څلورمه (ربع) کې تابع  $f(x)$  او  $g(x)$  تابع ټیک په دوه ټکو کې غوڅوي. (الف) غوڅتکي یې وښایاست او انځور یې وکارئ. (ب) د دواړو گرافونو څخه کوم د سطحې مساحت رابندیري.

$$f(x) = x + \frac{1}{x+1} \quad (x \neq -1)$$

$$g(x) = 3\frac{1}{4}$$

7. د دوه توابعو  $f(x)$  او  $F(x)$  مساوات ورکړل شوي دي. (الف) صفرخایونه یې وشمېرئ او د  $f(x)$  گراف وکارئ. (ب) وښایئ، چې  $F(x)$  د  $f(x)$  لومړی تابع دی. (پ) د سطحې مساحت وشمېرئ، چې د  $f(x)$  له گراف د وضعیه سیستم له محورونو او د کرني  $x=4$  څخه رابنده وي.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

$$F(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

8. کسري راشنل تابع د -محور، کرني او کرني سره په دریمه څلورمه (ربع) یوه سطحه رابندوي.

د دې کچ عدد وښایئ.

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x}{4x - 2} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{11}{16} + \frac{11}{32x - 16}$$

حلونه.

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x + c$$

$$G(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + c$$

$$H(x) = \frac{1}{3}a \cdot x^3 - \frac{x^2}{6} + x + c$$

$$K(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + c$$

$$L(x) = \frac{x^5}{10} + \frac{2}{9}x^3 - 4x + c$$

- ۲

$$\int f(x) dx = x^2 + \frac{1}{4}e^{4x} + c$$

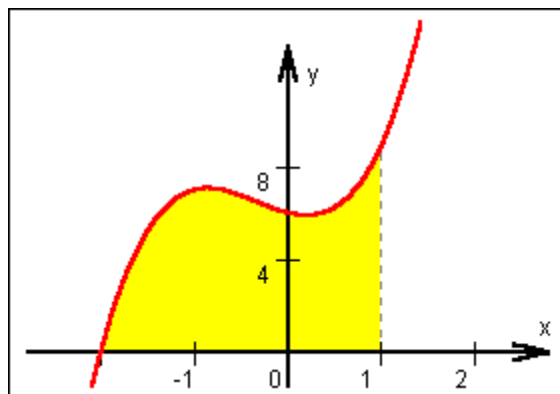
$$\int g(x) dx = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{0,5x} + c$$

$$\int h(x) dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \ln|x| + c$$

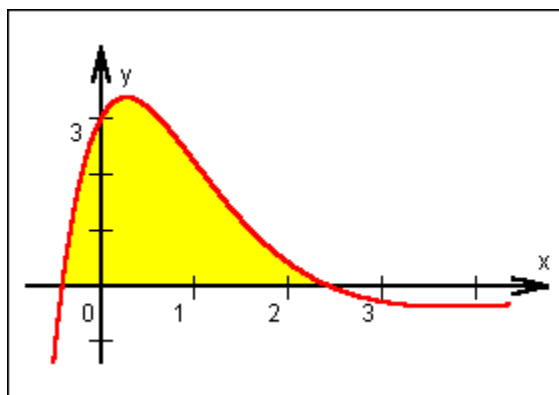
$$\int k(x) dx = -\cos x + \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

$$\int l(x) dx = 2\sqrt{x^3} + c$$

- ۱ . ۲



$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 (2x^3 + 2x^2 - x + 6) \cdot dx \\ &= \left[ \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_{-2}^1 \\ &= \left| 6\frac{2}{3} - \left(-11\frac{1}{3}\right) \right| = \underline{\underline{18FE}} \end{aligned}$$



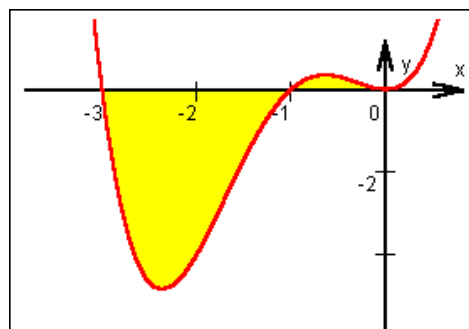
$$F'(x) = f(x)$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= 3 \cdot 2x \cdot e^{-x} + 3(x^2 - 1) \cdot e^{-x} \cdot (-1) \\ &= 3e^{-x} \cdot (2x - (x^2 - 1)) = f(x) \end{aligned}$$

$$A = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} f(x) \cdot dx = [F(x)]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A = [3 \cdot (x^2 - 1) \cdot e^{-x}]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A \approx |1,30 - (-3,76)| = \underline{\underline{5,06 FE}}$$



$$x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3) = x^4 + 4x^3 + 3x^2$$

$$A = \int_{-3}^{-1} (x^4 + 4x^3 + 3x^2) \cdot dx + \int_{-1}^0 (x^4 + 4x^3 + 3x^2) \cdot dx$$

$$A = \left[ \frac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3 \right]_{-3}^{-1} + \left[ \frac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3 \right]_{-1}^0$$

$$A = |0,2 - 5,4| + |0 - (-0,2)| = \underline{\underline{5,8FE}}$$

— ۴ . ۲

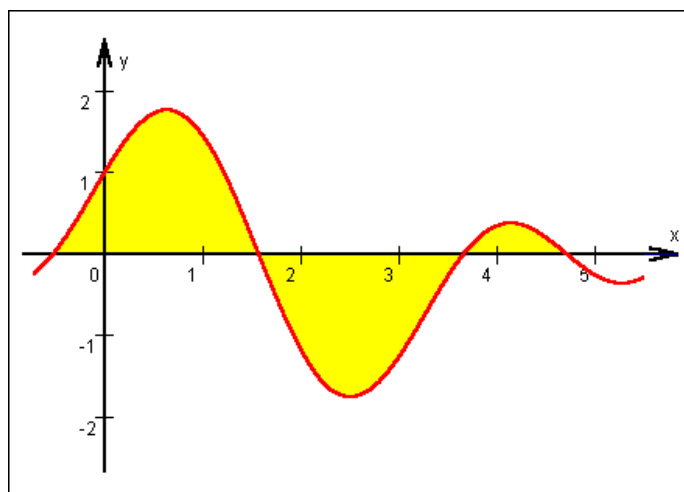
$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$

$$= 2 \sin x \cdot \cos x + \cos x$$

$$= \cos x \cdot (2 \sin x + 1)$$

$$0 = \cos x \rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \pi, x_2 = \frac{3}{2} \pi$$

$$0 = 2 \sin x + 1 \rightarrow x_3 = -\frac{1}{6} \pi, x_4 = \frac{7}{6} \pi$$





$$A = \int_{x_3}^{x_1} f(x) \cdot dx + \int_{x_1}^{x_4} f(x) \cdot dx + \int_{x_4}^{x_2} f(x) \cdot dx$$

$$A = \left[ -\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x \right]_{x_3}^{x_1} + \left[ \right]_{x_1}^{x_4} + \left[ \right]_{x_4}^{x_2}$$

$$A = 2,25FE + 2,25FE + 0,25FE = \underline{\underline{4,75FE}}$$

— ٥ . ٢

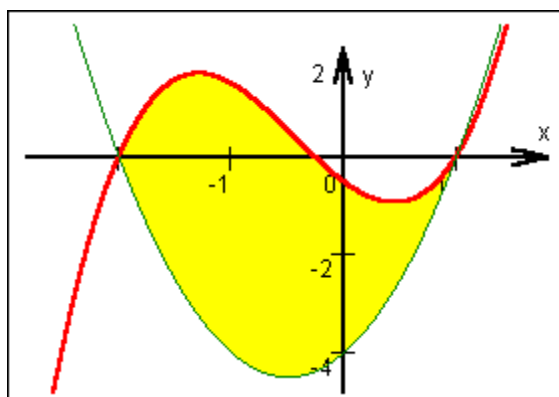
$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$

$$0 = x^2 + x - 2$$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{2,25}$$

$$\underline{\underline{x_1 = a = -2}}$$

$$\underline{\underline{x_2 = b = +1}}$$



$$A = \int_{-2}^{+1} (f(x) - g(x)) \cdot dx$$

$$= \int_{-2}^{+1} \left( x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 3\frac{3}{4}x + 3\frac{1}{2} \right) \cdot dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 1\frac{7}{8}x^2 + 3\frac{1}{2}x \right]_{-2}^{+1} \\
 &= \left[ 1\frac{5}{8} - \left(-8\frac{1}{2}\right) \right] = \underline{\underline{10\frac{1}{8} FE}}
 \end{aligned}$$

- ۶. ۲

$$x + \frac{1}{x+1} = 3\frac{1}{4}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x+1} = 3\frac{1}{4}$$

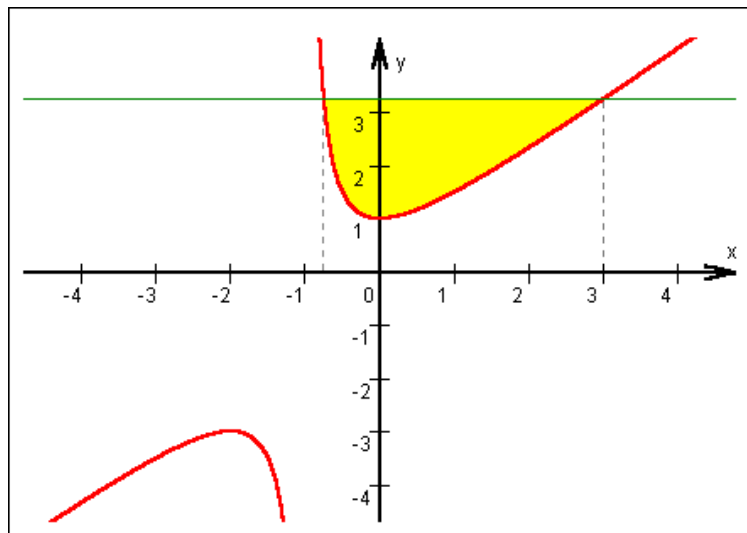
$$x^2 + x + 1 = 3\frac{1}{4}x + 3\frac{1}{4}$$

$$x^2 - 2\frac{1}{4}x - 2\frac{1}{4} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{9}{8} \pm \sqrt{\frac{81}{64} + \frac{144}{64}} = \frac{9}{8} \pm \frac{15}{8}$$

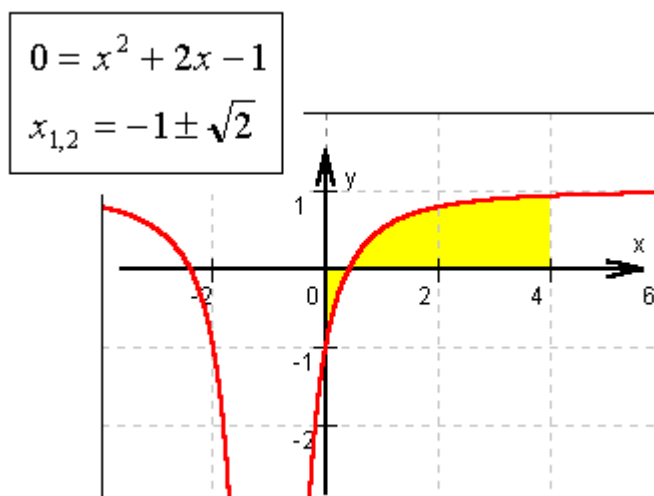
$$x_1 = a = -\frac{3}{4}$$

$$\underline{\underline{x_2 = b = 3}}$$



$$\begin{aligned}
 A &= \int_a^b (g(x) - f(x)) \cdot dx \\
 &= \int_{-\frac{3}{4}}^3 \left( 3\frac{1}{4} - x - \frac{1}{x+1} \right) \cdot dx \\
 &= \left[ 3\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(x+1) \right]_{-0,75}^{+3} \\
 &\approx |3,86 - (-1,33)| = \underline{\underline{5,19FE}}
 \end{aligned}$$

- ٧ . ٢

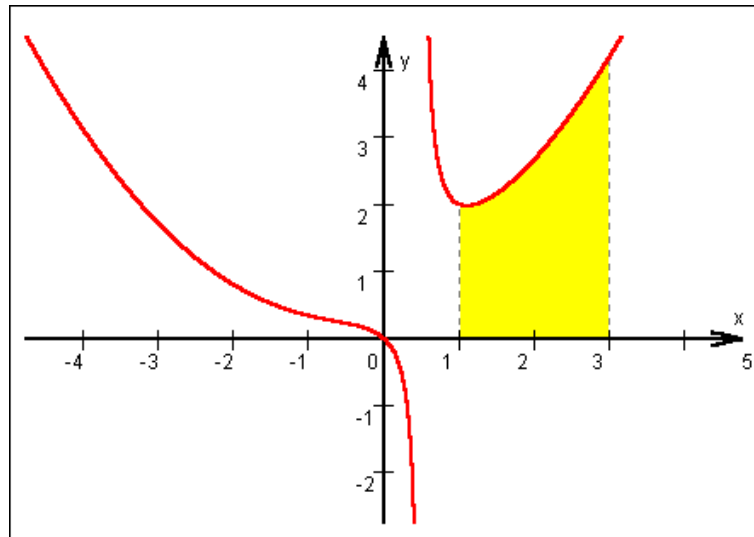


$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \frac{2x \cdot (x+1) - (x^2+1)}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1} = f(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{-1+\sqrt{2}} f(x) \cdot dx + \int_{-1+\sqrt{2}}^4 f(x) \cdot dx \\
 &= \left[ \frac{x^2+1}{x+1} \right]_0^{-1+\sqrt{2}} + \left[ \frac{x^2+1}{x+1} \right]_{-1+\sqrt{2}}^4 \\
 &= 0,17FE + 2,57FE = \underline{\underline{2,74FE}}
 \end{aligned}$$

په پورته کې  $FE$  د سطحې واحد (یون) په معنای

۲ . ۸ -



$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^3 \left( \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{11}{16} + \frac{11}{32x-16} \right) \cdot dx \\
 &= \int_1^3 \left( \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{11}{16} \right) \cdot dx + \int_1^3 \frac{11}{32x-16} \cdot dx
 \end{aligned}$$

$$A_1 = \left[ \frac{1}{12} x^3 + \frac{3}{16} x^2 + \frac{11}{16} x \right]_1^3 = 5 \frac{1}{24} FE$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 32x - 16 \\ \frac{dz}{dx} = 32 \Rightarrow dx = \frac{1}{32} dz \end{array} \right.$$

$$A_2 = \int_{16}^{80} \frac{11}{z} \cdot \frac{1}{32} dz = \frac{11}{32} \cdot [\ln z]_{16}^{80} \approx 0,55 FE$$

$$\underline{\underline{A \approx 5,59 FE}}$$

په پورته کې  $FE$  د سطحې واحد (یوون) په معنای

بیلگه:

مشتقور مگر نامتمادي (پرېکېدونکی) مشتقور تابع:

لرو:

$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ 0 \end{cases}$	<p>د <math>x \neq 0</math> لپاره</p> <p>د <math>x = 0</math> لپاره</p>
--	--

نو  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0$  د  $x \rightarrow 0$  لپاره، له امله

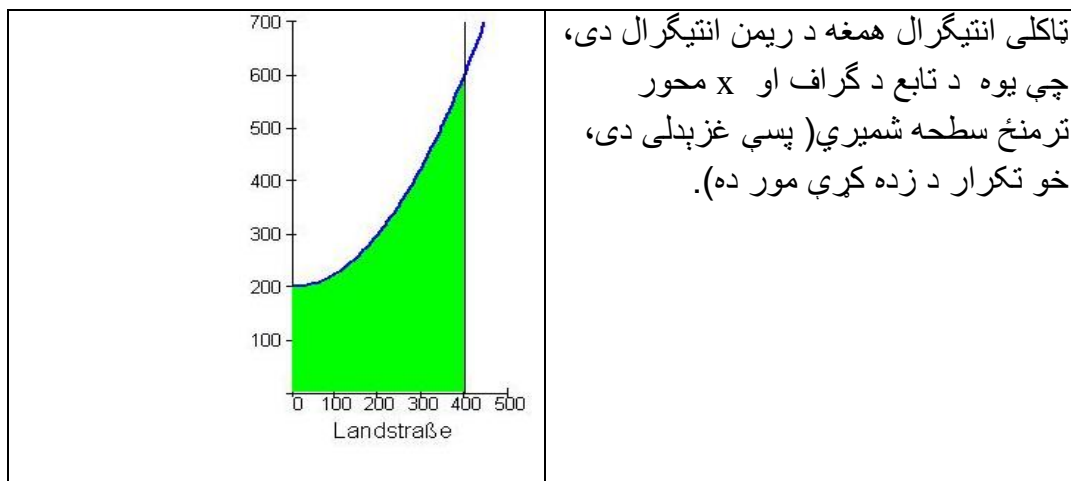
مشتق  $f'(0) = 0$  دی. او د  $\forall x \neq 0$  لرو:

، چېرې چې  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  ناشته دی. تابع  $f$

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

له دې امله مشتقور دی مگر نه ناپرېکېدونکی (متمادي) مشتقور.

## د ټاکلي انتیگرال شمیرنه



## ټاکلي انتیگرال:

که  $f$  یو حقيقي تابع وي، نو د ټاکل انتیگرال  $\int_a^b f(x) dx$  (لوستل: د  $f(x)$  انتیگرال د پولې (حد)  $a$  تر پولې (حد)  $b$  پا د  $a$  او  $b$  حدونو ترمنځ یا انتیگرال په  $f(x)$  باندې له  $a$  تر  $b$ ) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د  $f$  گراف لاندې د  $a$  او  $b$  تر منځ.

$G$  دې په بند انټروال  $a \leq x \leq b$  کې د  $g(x)$  لومړنی انتیگرال وي، د

$$\int_a^x f(t) dt = g(x) \text{ سره، نو باور لري: } \int_a^t f(t) dt = G(b)$$

دا چې د دوه لومړنیو توابعو  $F$  او  $G$  تر منځ یو ثابت  $C$  توپیر شته، نو  $G(x) = F(x) + C$  باور لري. د  $x=b$  لپاره لاسته راوړو:  $G(b) = F(b) + C$

دا چې  $G(x) = \int_a^x f(t) dt = 0$  دی او  $G(a) = F(a) + C$  دی، نو  $C = -F(a)$  ده.

دا په دې معنا، چې  $G(b) = F(b) - F(a)$  همداسې  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ .

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتیگرال جمله لاس ته راوړه

یا دا وینا د مشتق - او انتیگرال شمېرنې بنسټیزه جمله بلل کېږي:

تعریف:  $f$  په انټروال  $a \leq x \leq b$  کې متمادي تابع ده او  $F$  د  $f$  لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیگرال دی:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

د  $F(b) - F(a)$  لپاره زیات وخت  $[F(x)]_a^b$  لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتیگرال شمېرنه په لومړني انتیگرال بېرته واپوله او د مشتق او انتیگرال تر منځ مو اړیکې رامنځ ته کړې.

بیلګې:

$$a) \int_1^2 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$b) \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx = \int_2^4 x^{-2} dx = \left[ \frac{x^{-1}}{-1} \right]_2^4 = \left[ -\frac{1}{x} \right]_2^4 = \frac{1}{4}$$

$$c) \int_1^3 \sqrt{x} dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^3 = \frac{2}{3} [\sqrt{x^3}]_1^3 (\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3})$$

$$= \frac{2}{3} (3\sqrt{3} - 1) = 2(\sqrt{3} - \frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتیگرالونو لپاره لاندې جملې رښتیا دي:

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx +$$

تکمیلیدونکي بنسټونه:

د  $F(b) - F(a)$  له امله د انتگرالونې ثابته  $c$  له منځه ځي. له دې امله کولې شو د انتیگرال ثابتې ټاکلو لپاره  $c=0$  ولیکو.

بیلگه:

د ټاکلي انتیگرال  $\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x dx$  ارزښت و ټاکي.

ښوونه: مور په دا لاندې ډول ښایو:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x dx = [\sin x]_{-\pi}^{+0.5\pi} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1 - 0 = 1$$



یادونه : دا چې په دې برخه کې یواځې د ټاکلي انتیگرال ارزښت غوښتل شوي دي او نه د یوې منحنې لاندې سطحه، نو باید نه دي چې صفرخایونه په پام کې ونیول شي. عوره یادونه: دادي په یاد وي، چې ناپاکلی انتیگرال تابع ده او ټاکلی انتیگرال یو عدد.

د ناپاکلي انتیگرال څخه و ټاکلي انتیگرال ته

ترمنځ راوړنه یا وړاندراوړنه

مور و لیدل، چې څنگه یو تابع  $f(x)$  ته لومړنی تابع  $F(x)$  منځ ته راوړی شو، نو ناپای دېر لومړني توابع شته دي، چې فقط د یوې ورجمع کونکې ثابتې له امله یو له بل توپیر لري.

لرو: تابع  $f(x) = 3x^2 + 2$  او د دې د لومړنیو توابعو سټ  $f(x) = x^3 + 2x + C$

پېژند: د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع  $f(x)$  ته ،، ناپاکلی انتیگرال ،، بلل

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

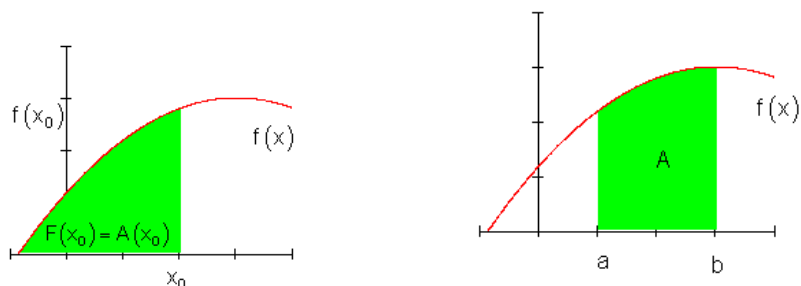
کیري او ددې له پاره لیکو:

د مشتق- او انتیگرالشمیرني ترمنځ اړیکې کېدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

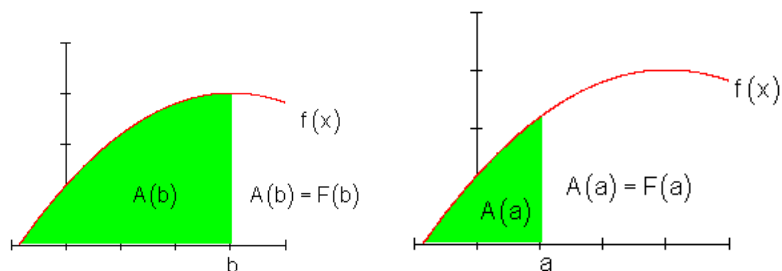
جمله(قضیه): د ناپاکلی انتیگرالشمیرنه د مشتقشمیرني برعکس انځوروي

$$\frac{d[f(x)] + C}{dx} = [F(x) + C]' = f(x)$$

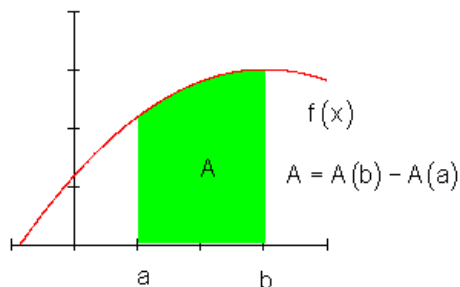
د تابع د گراف لاندې او د انټروال  $[a; b]$  تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم مور تر اوسه لاس ته راوړي زده کړي کاروو.



د یوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لارښوده وي:  
 د یوې سطحې، چې د یوې په پام کې نیولې  $f(x)$  تابع گراف لاندې ده تر  $x_0$  ځای پورې او یوې  $F'(x)$  تابع، چې د  $F(x)$  تابع مشتق د  $x_0$  ځای د  $f$  تابع د تابع ارزښت سره د  $x_0$  په ځای کې برابر وي، ترمنځ اړیکې شته دی، یعنې  $F'(x) = f(x)$



د انټروال  $[a, b]$  حدونو ترمنځ سطحې پیدا کول د تابع د گراف سطحو د کمښت څخه په ځای  $A(b)$  او سطحې په  $A(a)$  ځای کې، یعنې  $A = A(b) - A(a)$  په همدې توگه  $F = F(b) - F(a)$  لاس ته راځي.



په انټروال  $[a, b]$  کې د تابعگراف لاندې سطحه د لومړنیو توابعو تفریق دی:

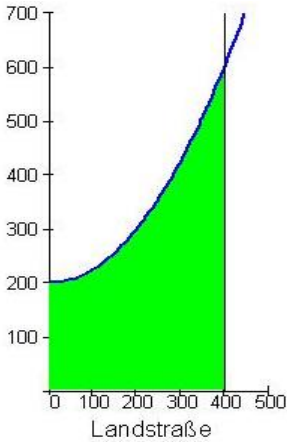
$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x) dx$$

دا انتیگرال ټاکلی انتیگرال هم بلل کیږي.

جمله :

دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پیل بېلگه کې راوړي د چمن سطحه وشمیرو.

ثابته له تفریق سره لرې کیږي. په عمل کې د دې مسألې د حل لپاره یوه بله لار ګټوره راوستلې یا ګټوره بڼوولي:



$$\begin{aligned} A &= \int_0^{400} \left( \frac{1}{400} x^2 + 200 \right) dx = \frac{1}{1200} x^3 + 200 \cdot x \Big|_0^{400} \\ &= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 \left[ \frac{1}{1200} 0^3 + 200 \cdot 0 \right] \\ &= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 = \underline{\underline{133333.3}} \end{aligned}$$

## د انتیگرالونې قاعدې

د ناټاکلي ایتیکرال انتیگرالونې قاعدې: په لاندې ایتیکریشن قاعدو کې د ایتیکریشن ثابته باندې صرف نظر کیږي دلته مساوات تر یوې ورجع شوي ثابتې C پورې مساوات دی ، په دې معنا چې د مساواتو تر منځ یواځې یوه ثابته کیدی شي زیاته یا کمه وي. دا قاعده

کیدۍ شي چی په ټاکلي انتیگرال کې بنوولي جملی سره سم ټاکلي انتیگرال ته نقل شي يعني په ټاکلي انتیگرال استعمال شي . دا قاعدې کیدۍ شي چی د تېرو درسونو سره سم د دواړو خواو د مشتق نیولو سره وینول شي.

جمله :

د یوې ثابتې سره ضرب : که تابع  $f(x)$  په یوه اینتروال کې متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad a \in R$$

جمله: د جمعی (تفریق) قاعده که  $f_1(x)$  او  $f_2(x)$  په یوه اینتروال کې نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

بیلگې:

لاندې انتیگرالونه کیدۍ شي چی د مخ ته تېرو جملو په استعمالیدو او ساده څیره بدلون بیرته په بنسټیزو انتیگرالونو بدلکرای شي

$$a) \int \frac{dx}{3x^4} = \frac{1}{3} \int x^{-4} dx = \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{3} \right) x^{-3} + C = -\frac{1}{9x^3} + C,$$

$$b) \int (3x^2 + 4x - 1) dx = 3 \int x^2 dx + 4 \int x dx - \int dx = 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 4 \cdot \frac{1}{2} x^2 - x + C \\ = x^3 + 2x^2 - x + C,$$

$$c) \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{x^3}{\sqrt{x}} dx - 3 \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx = 2 \int x^{\frac{5}{2}} dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx \\ = 2 \cdot \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{7} x^3 \cdot \sqrt{x} - 2x \cdot \sqrt{x} + C$$

## د اکسپوننشل توابعو انتیگرالونه

بنسټ:

د طبیعي اکسپوننشل تابع  $f(x) = e^x$  لپاره لرو:  $\int e^x dx = e^x + C$  ( $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$ )

د تولیز اکسپوننشل تابع  $a^x$  لپاره لرو:  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

بیلگه:

دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع  $\int 2^{x-3} dx$  غواړو پیداکړو

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8} 2^x \quad \text{بڼه بدون: د توان قانون سره سم لرو}$$

د فاکتورونې قانون سره سم لرو:  $\int \frac{1}{8} 2^x dx = \frac{1}{8} \int 2^x dx$

$$\frac{1}{8} \int 2^x dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + c = \frac{2^x}{8 \cdot \ln 2} + c = \frac{2^{x-3}}{\ln 2} + c \quad \text{انتیگرال یې ونیسئ:}$$

## د لوگاریتمي توابعو انتیگرالونه

بنسټ:

د طبیعي لوگاریتم تابع  $f(x) = \ln x (x \in \mathbb{R}^+)$  لپاره  $\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x + c$  دی.

د تولیز لوگاریتم تابع  $f(x) = \log_a x, a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$

$$\int \log_a x dx = \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln a} + c \quad \text{لپاره دی.}$$

بیلگه :

ناتکلی انتیگرال  $\int \ln 3x dx$  غاړو پیدا کړو:

بڼه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx + \int \ln x dx = x \cdot \ln 3 + x \cdot \ln x - x + c$$

$$\int \ln 3x dx = x \cdot (\ln 3 + \ln x - 1) + c$$

بنسټیز اینټیگرالونه په یوه جدول کې

د اینټیگرالولو او مشتق نیول د اړیکو په بنسټ کېدی شي چې د بنسټیزو اینټیگرالونو یو جدول ترتیب شي. دا په مشتق جدول کې راوړل شوو بنسټیزو توابعو پر عکس څرگندېږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x) = \int f(x) dx$	نیونه یا فرضیه
1	$x^n$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln x  + C$	$x \neq 0$
3	$x^a$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$	$a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x > 0$
4	$a^x$	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$	$a > 0, a \neq 1$
5	$e^x$	$e^x + C$	

6	$\sin x$	$-\cos x + C$
7	$\cos x$	$\sin x + C$
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C \quad x \neq n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$
9	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

بیلگه :

د جدول او تېرو جملو څخه په گټه لاندې اېټیگرالونه په لاندې ساده ډول په بنسټیز توابعو بدلیدلی شي

- a)  $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = -\frac{1}{4} x^{-4} + C, \dots\dots\dots 1,$
- b)  $\int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0), \dots\dots\dots 3,$
- c)  $\int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x} dx = \int \left( x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x > 0), \dots\dots\dots 3,$
- d)  $\int \frac{\sin 2x}{2 \sin x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin x} dx = \int \cos x dx = \sin x + C, \dots\dots\dots (4,21) \quad 6,$
- e)  $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad \left( x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \right), \quad (4,11) \quad 9,$
- f)  $\int (1 + \cot^2 x) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi) \quad (4,12) \quad 8,$
- g)  $\int \frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3} dx = \int \frac{1-x^2}{x(1-x^2)} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1, x \neq 0), \quad Nr.2,$
- h)  $\int_{-1}^0 e^x dx = e^x \Big|_{-1}^0 = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}, \dots\dots\dots 5$

Substitutionlaw بدلون قانون

تراوسه پورې مو فقط انتیگرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنیو توابعو په انتیگرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتیگرالونو د نورو انتیگرالولو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنۍ انتیگرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به ولیدل شي.

جمله :

د ،، بدلون ( قاعده ) ،، ( Substitution لاتین د  $f(g(x))$  یوه ارزښت په ځای د همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لنډ: بدلون ) د نیونو یا فرضیو له مخې، چې  $u = g(x)$  نه برېکېدونکې یا متمادي او مشتقور دی او  $y = f(u)$  متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

حل : د بني اړخ مشتق د تېرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx} \int f(u) du = \frac{d}{du} \int f(u) du \cdot \frac{du}{dx} = f(u) \cdot u' = f[g(x)] \cdot g'(x),$$

دا د کین اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتیگرالېډو لپاره مساعده ده، په کوم کې چې یو فاکتور زنجیري تابع  $f[g(x)]$  وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق  $g'(x)$  وي. سری د دننه تابع لپاره په دې توگه متحولې بدلوي یا ځای په ځای کوي  $u = g(x)$  :

$$\text{مشتق } \frac{du}{dx} = G'(x) \text{ جوړوي په همدې ډول } du = g'(x) dx$$

د بريالي انتیگرالېډو وروسته بدلون بیرته راگرځول کيږي.

بیلگه a :

لرو :  $I = \int 2 \cos(2x-1) dx$  د دې انتیگرال وشمېرئ.



بدلون یا په ځای کونه:  $2x - 1 = u$

مشتق  $2 = du/dx$  همداسی  $2dx = du$

$$I = \int \cos u \, du = \sin u + C = \sin(2x - 1) + C$$

بیلگه b: لرو  $I = \int 3 \cos(2x + 1) dx$

بدلوو:  $2x = u - 1$ , مشتق  $2 = du/dx$  همداسی  $dx = (1/2) du$

$$I = \int 3 \cos u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{3}{2} \int \cos u \, du = \frac{3}{2} \sin(2x - 1) + C$$

ومولیدل چی ځنځیري تابع د لایني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیگرال کیدی شي، ځکه چی د لایني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تېرې جملې سره سم د اینتیگرال تر مخ (موخه کین لور ده) لیکل کیږي.

بیلگه: لرو  $I = \int \sqrt{-3x + 5} \, dx$

بدلون:  $-3x + 5 = u$

را بیلیدنه:  $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

$$I = \int \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) du = -\frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9} \cdot \sqrt{(-3x + 5)^3} + C.$$

$$b) I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx.$$

$$-2x - 3 = u, \quad \Rightarrow \quad -2 = \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{1}{2} du,$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4} \int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C.$$

$$c) I = \int \frac{2dx}{x+2}.$$

$$x+2 = u, \quad 1 = \frac{du}{dx} \quad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln|u| + C = 2 \ln|x+2| + C.$$

د بنسټیزو اینټیگرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱. ۱) متحولې  $x$  یواځې په جگ یا مټ د دوه منځ ته راځي. له دې امله داسې اینټیگرال، کومو کی چې د  $x^2$  په ځای لاینې ترم (Term) پروت دی، کیدی شي چې د لاینې بدلولو له لارې په بنسټیز اینټیگرالو ۱۰ او ۱۱ بیرته واپرول شي. ډیروخت یو د فورم بدلون ته هم اړتیا موجود وي، چې د اینټیگراند فورم ته راشو.

بیلگه 5.2:

$$a) I = \int \frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2 = (\sqrt{2}x)^2, \quad d \cdot h \cdot I = \int \frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x = u, \quad \sqrt{2} = \frac{du}{dx} \quad dx = \frac{1}{\sqrt{2}} du,$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arctan } u + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arctan}(\sqrt{2}x) + C.$$

$$b) I = \int \frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2 = 9(1-4x^2) = 9(1-(2x)^2), \quad d \cdot h \cdot$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

$$2x = u, \quad 2 = \frac{du}{dx} \quad dx = \frac{1}{2} du$$

$$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{6} \operatorname{Arcsin} u + C = \frac{1}{6} \operatorname{Arcsin}(2x) + C.$$

اینٹیگریشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لایني نه وي، نو د اینٹیگراند دوم فاکتور (تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چې د (۲ . ۱۳) له لارې سړی بنسټیز اینٹیگرال ته راشي. دلته هم سړی بیا دنننی تابع په نوې متحولې یا واریابلی بدلوي.

بیلگه 6.21: الف:

$$I = \int 4x\sqrt{x^2-1} dx$$

بدلون: د  $x^2-1 = u$  مشتق  $2x = du/dx$  دی، همداسې لرو:  $x dx = 1/2 du$

$$I = \int 4\sqrt{u} \cdot 1/2 du = 2 \int u^{1/2} du = 2 \cdot 2/3 u^{3/2} + C = 4/3 \sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

$$I = \int \sin^3 x \cdot \cos x dx \quad (\text{ب})$$

بدلون:  $\sin x = u$  را بیل شوي  $\cos x = du/dx$  همداسې  $\cos x dx$

$$I = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4$$

$$\text{c) } I = \int \frac{1}{x} \cdot \ln^2 x dx$$

$$\ln x = u, \quad \frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \quad \frac{1}{x} dx = du,$$

$$I = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} \ln^3 x + C$$

$$\text{d) } I = \int \tan x dx.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d \cdot h. \quad I = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x \, dx,$$

$$\cos x = u, \quad -\sin x = \frac{du}{dx} \quad \sin x \, dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u} \, du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

$$e) \quad I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3} \, dx.$$

$$2 - x^3 = u, \quad -3x^2 = \frac{du}{dx} \quad x^2 \, dx = -\frac{1}{3} \, du,$$

$$I = -\frac{1}{3} \int_0^1 \frac{2 \, du}{u} = -\frac{2}{3} \ln|u| \Big|_0^1 = -\frac{2}{3} \ln|2-x^3| \Big|_0^1 = -\frac{2}{3} (\ln 1 - \ln 2) = \frac{2}{3} \ln 2.$$

۲۱ د بدلونقاعده ( ۲۱ . ۱۳ ) دې په چپه ( یعنی د بنی وکین) لور هم استعمال شي .  
 اینتیگرال  $f(x) \, dx$  کیدی شي چی په بل وارول شي چی  $x$  په یو مناسب بلواک (  $t$  ) بدل شي ( ۲۱ . ۱۴ )  
 دا:  $f(x) \, dx = f[g(t)] \cdot g(t) \, dt.$   
 افاده « مناسب » بلواک دې دلته داسی وپوهیدی شي چی سری د بدلون وروسته یو ساده او ممکن یو بنسټیز اینتیگرال لاس ته راوړي. د ( ۲۱ . ۱۴ ) استعمال په قاعده کی داسی دی چی په یوه بلواک  $f(x)$  ( کی موجود « پیچلی » ترم  $h(x)$  د  $t = h(x)$  ) په بدلون له منځ څخه وړي او بیا ( که ممکن وي ) د  $x$  په لوری حلوي

$$x = g(t) = h^{-1}(t)$$

بیلگه 7.21: الف:

$$a) \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$\sqrt{x-1} = t, \quad x; \quad x = (t+1)^2, \quad dx = 2(t+1) \, dt :$$

$$I = \int \frac{2(t+1)}{t} dt = 2 \cdot \left[ \int 1 dt + \int \frac{1}{t} dt \right] = 2(t + \ln|t|) + C = 2(\sqrt{x} - 1) + 2 \ln|\sqrt{x} - 1| + C$$

مناسب تابع، چې ورکړ شوی اینتگرال د دوه ایتکوالو جمعی ته بیایي، دلته

$$x = g(t) = (t+1)^2 \text{ وو.}$$

$$\text{b) } I = \int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}.$$

$$\sin x \cdot \cos^3 x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^4 x = \tan x \cdot \cos^4 x.$$

نو لرو:

$$I = \int \frac{dx}{\tan x \cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx,$$

$$\tan x = t, \quad \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt,$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2 \cdot \sqrt{\tan x} + C.$$

توابع، چې بی د بدلون له لارې حل کیري لکه لاندې بلگه:

بیلگه:

عوارو د  $f(x) = e^x$  مشتق پیدا کرو. دا مشتق په ساده ډول پیدا کولی شو، یعنی لرو:

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^x dx = e^x + C$$

گورو، چې  $F'(x) = e^x = f(x)$  دی.

که ولرو:  $f(x) = e^{2x}$  او د پورته په څېر لار شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx \neq e^{2x} + C$$

$$F(x) = e^{2x} + C \text{ که دی، } F'(x) = 2e^{2x} \neq f(x) \text{ وي}$$

له دې امله د بدلون قانون ته اړیو:

بیلگه:

د  $f(x) = e^{2x}$  تابع انتیگرال ونیسی

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = ?$$

بدلون:  $u(x) = 2x = u$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\int f(x) dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C$$

$$\frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C \text{ د بدلون برعکس:}$$

$$F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C \text{ نو لرو:}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} = f(x) \text{ ازمایینت:}$$

بیلگه:

وښایې چې باور

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x+1)^2 dx \text{ لري.}$$

بدلون  $u(x) = x+1 = u$

جوړ کړی

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

$$\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C \text{ : بېرته- يا په څټ بدلون:}$$

$$\int (x)dx = \int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^2}{3} + C \text{ نو:}$$

بېلگه :

و بنسايي چې باور لري:

$$f(x) = (3x + 6)^3 \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int (3x + 6)^3 dx$$

$$u(x) = 3x + 6 = u \text{ بدلون:}$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3} \text{ جوړوو:}$$

$$\int f(x)dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^3 du = \frac{u^4}{12} + C$$

$$\frac{u^4}{12} (3x + 6)^4 + C \text{ بېرته بدلون:}$$

$$\int (x)dx = \int (3x + 6)^3 dx = \frac{1}{12} (3x + 6)^4 + C \text{ نو لرو:}$$

بېلگه :

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = ?$$

$$u(x) = x^2 = u \text{ بدلون:}$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du \text{ جوړوو:}$$

$$\int f(x) dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int \ln(u) du = \frac{1}{2} [u \cdot \ln(u) - u + C] = \frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C$$

$$: \frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C$$

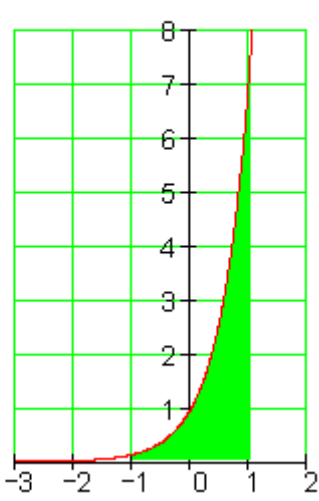
بیرته بدلون:

$$\int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C}}$$

نولرو:

د ټاکلو انتیگرالونو حل د بدلون له لارې:

ټاکلی انتیگرالونه هم د بدلون له لارې حل کیري.

<p><math>f(x) := e^{2 \cdot x}</math></p> 	<p>بیلگه:</p> <p>وینایاست:</p> $f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^1 e^{2x} dx$ <p>د انتیگرال حل د بدلون له لارې:</p> <p>۱ - بدلون <math>u(x) = 2x</math></p> <p>۲ - د <math>dx</math> په ځای کیردی</p> $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$ <p>۳ - د پولو بدلون</p> <p>- لاندې پوله <math>u(-1) = -2</math></p> <p>- پورته پوله <math>u(1) = 2</math></p> <p>۴ - په انتیگرال کې څا په ځای کړی</p> $\frac{1}{2} \int_{-2}^2 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_{-2}^2 = \frac{1}{2} [e^2 - e^{-2}] = \underline{\underline{3.627}}$
---	--



بیلگه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2) dx$$

د انتیگرال حل د بدلون له لارې

$$۱ - بدلون  $u(x) = x^2$$$

۲ - د  $u$  په په  $x$  کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳ - د پولي بدلون

$$- \text{ لاندې پوله } u(1) = 1$$

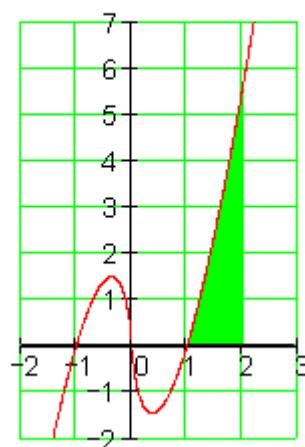
$$- \text{ پورته پوله } u(2) = 4$$

۴ - په انتیگرال کې  $u$  په  $x$  کړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u) du = [u \cdot \ln(u) - u]_1^4$$

$$= [4 \cdot \ln(4) - 4] - [1 \cdot \ln(1) - 1] \approx \underline{2.545}$$

$$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$$



بیلگه :

$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 & x < 2 \\ (e^2 - 2)e^{-(x-2)} & x \geq 2 \end{cases}$	د $x < 2$ له پاره د $x \geq 2$ له پاره
--	---

$$A = \underbrace{\int_1^2 (e^x - 2) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^4 (e^2 - 2) e^{-(x-2)} dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_1^2 (e^x - 2) dx = [e^x - 2x]_1^2 = e^2 - e - 2$$

$$I_2 = (e^2 - 2) \int_2^4 e^{-(x-2)} dx$$

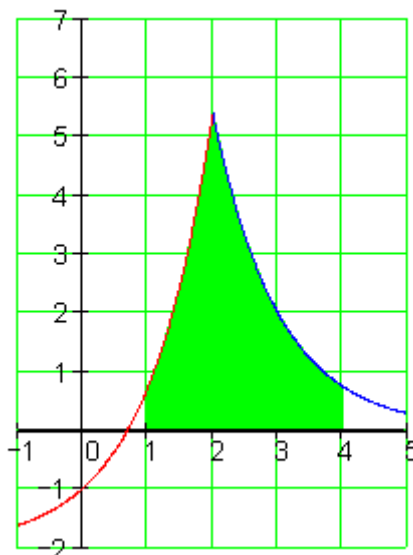
$$u(x) = -(x-2) = -x + 2$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du; u(2) = 0; u(4) = -2$$

$$I_2 = -(e^2 - 2) \int_0^{-2} e^u du = (e^2 - 2) \int_{-2}^0 e^u du$$

$$= (e^2 - 2) \cdot [e^u]_{-2}^0 = e^2 + 2e^{-2} - 3$$

$$I = I_1 + I_2 = e^2 - e - 2 + e^2 + 2e^{-2} - 3 = \underline{\underline{7,331}}$$



## توتیه انتیگرالونه Partialy Integration

توتیه انتیگرالونه، چې ضرب انتیگرالونه هم بلل کیږي، په انتیگرال شمیرنه کې د لومړنیو توابعو ټاکلو یا شمیرلو لپاره امکان دی. دا کېدی شي د مشتق شمیرني د برعکس کونې په څیر وگنل شي.

د توتیه انتیگرالونې له پاره لاندې قانون کارول کیږي، چې د متمدني (نه پرېکېدونکي) توابعو  $f$  او  $g$  له پاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

دا قانون ټیک هلته گټور دی، که  $f$  مشتق نیولو سره یو ساده تابع منځ ته راځي. پیل

د ضرب قانون (د ضرب مشتق نیونې) څخه لرو:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتیگرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$$

یا همدغسې، لکه په زیاتو ریاضي کتابونو کې چې پیدا کیږي.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره گټور دی، چې لومړی ځان په ناټاکلي انتیگرال محدود کړو، چې دا نا اړینو حدونو څخه چې لید مو رابندوي، ازاد یو.

بیلگه:

د بیلگې په توگه لاندې انتیگرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x) dx$$

یو ساده انتیگرالیدونکې تابع  $g'(x)$  او همداسې یو ساده مستقیمې دونکې تابع  $f(x)$  لټوو. نیسو چې  $f(x) = \ln(x)$  او  $g'(x) = x$ ، ځکه چې د  $\ln(x)$  انتیگرالونه نوي  $\ln(x)$  راکوي. اوس د  $f(x)$  مشتق نیسو (مشتق کوو) او انتیگرالوو، نو لرو:

$$g(x) = \frac{x^2}{2} \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

$$\int x \cdot \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکبڼه:

اوس دی  $u$  او  $v$  په خوبڼه توابع وي.  $U$  او  $V$  دې د  $u$  او  $V$  لومړني توابع وي، او همداسې دې  $u'$  او  $v'$  د  $u$  او  $v$  مشتقونه وي.  $u$  تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري،  $v$  تابع ده چې د انتیگرالونې له پاره لومړیتوب لري. نو باورلري:

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x) \cdot v(x) dx &= u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x) dx \\ &= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x) dx \end{aligned}$$

د ټوټه انتیگرالونې لار (طریقه)

د ټوټه انتیگرالونې گټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلگه: کله کله کېدی شي گټور وي، جی د مساوات بنی لور ته ټوټه انتیگرال د څو واره انتیگرالونې وروسته بېرته راوگرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کین لور انتیگرال سره یوځای کولی شي.

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx$$

که کېږدو  $f(x) = \cos(x)$  او  $g'(x) = \sin(x)$ ، نو ترې لرو:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx.$$

که دواړو لورو ته وتون انتیگرال ورزیات کړو، نو راځي:

$$2 \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = -\cos^2(x)$$

که واره لورې په 2 ووېشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$+ C \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = -\frac{1}{2} \cdot \cos^2(x)$$

بیلگه ۲ :

د ځنو انتیگرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د  $g'(x)$  له پاره یو ترم وټاکو چې په انتیگرالونې کې هېڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بېلگې په توګه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کېدی شي دا بل ترم ،، له منځه یووړل شي،،.

$$\int e^x \cdot (2 - x^2) dx$$

که هر ځل  $g'(x) = e^x$  کېږدو او د  $f(x)$  له پاره، د انتیگرال لاندې ترم ، نو ترې لاس ته راځي:

.

$$\begin{aligned}
 \int e^x \cdot (2 - x^2) dx &= [e^x \cdot (2 - x^2)] - \int e^x \cdot (-2x) dx \\
 &= [e^x \cdot (2 - x^2)] + [e^x \cdot 2x] - \int 2 \cdot e^x dx \\
 &= [e^x \cdot (2 - x^2)] + [e^x \cdot 2x] - [2 \cdot e^x] \\
 &= [e^x \cdot (2 - x^2 + 2x - 2)] \\
 &= [e^x \cdot (2x - x^2)] + C
 \end{aligned}$$

بیلگه ۳ :

که تر انتیگرال لاندې فقط یو ترم ولرو، چې د هغه لومړنۍ تابع بی له جدول ارزښت څخه پاي ته نه رسیري (نه پایول کیري) (نه ختمیري) کېدی شي کله د ورزیاتونې له لارې (ناڅرگند شته) ضریب "1" توتېه انتیگرال شي.

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx = \int g'(x) \cdot \ln(x) dx$$

که  $f(x) = \ln(x)$  او  $g'(x) = 1$  کیردو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\begin{aligned}
 \int 1 \cdot \ln(x) dx &= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= x \cdot \ln(x) - \int 1 dx \\
 &= x \cdot \ln(x) - x + C
 \end{aligned}$$

$$\int x \cos(x) dx$$

جمله : مور د دې لاندې انتیگرال نیسو:

ردو  $u = x$  ، نو لرو :  $du = dx$

ردو  $dv = \cos(x) dx$  ، نو  $v = \sin(x)$  لرو

په لاندې توگه مخ ته څو:

$$\begin{aligned}
 \int x \cos(x) dx &= \int u dv \\
 &= uv - \int v du
 \end{aligned}$$

$$= x \sin(x) - \int \sin(x) dx$$

$$= x \sin(x) + \cos(x) + C.$$

C د انتیگرالونې یوه په خوبه ثابتې ده

د ټوټه انتیگرالونې د استعمال سره د انتیگرالونو لکه

$$\int x^2 e^x dx \text{ او } \int x^3 \sin(x) dx$$

کیده شي په همدې لار حل شي:

یوه په زړه پورې بیلگه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x) dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولري.

دا بیلگه د دوه واره ټوټه انتیگرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی :  $u = \cos(x)$  داسې چې  $du = -\sin(x) dx$

$$v = e^x \text{ داسې چې } dv = e^x dx$$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیگرال حل شي، نو د ټوټه انتیگرالونې قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$$u = \sin(x); du = \cos(x) dx$$

$$v = e^x; dv = e^x dx$$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته زاڅي:

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیگرال لرو(بي له مخ نڅیښي)، نو د بڼي لور انتیگرال که کین لور ته یوسو ، لاس ته تری راڅي:

$$2 \int e^x \cos(x) dx = e^x (\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x (\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیگرالونې یوه په خوښه ثابتې ده

د ټوټه راشنل کسرونو انتیگرال

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x} \quad \text{د انتیگرال نیول}$$

نیول تر واده ورسره بلده لار شونې دی، که څنگه؟

بیلگه :

$$\int \left[ \frac{7x-12}{x^2-6x+8} \right] dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفرځایونو  $x_1 = -2$  او  $x_2 = -4$  سره د کرښیزو توابعو په ضریبونو تجزیه کیږي:

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$$



د ټوټه کسرونو ټوټه ونې له پاره لاندې پیل کوو:

$$\int \left[ \frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)} \right] dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعی له پاره په اصلي مخرج ورغزیري او لاس ته ترې راځي:

$$\frac{[A(x-4) + B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[Ax-4A + Bx-2B]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[(A+B)x - 4A-2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضربونو د پرتلي څخه لاس ته راځي، چې د  $x$  له مخه یعنې کین لور ته  $(A+B)$  افاده باید پرته وي

$$7x-12 = (A+B)x \quad \text{او} \quad (-4A-2B) \quad \text{، چې} \quad ۱۲ - \text{ورکوي (وټون مساوات وگورئ):} \quad 7x-12 = (A+B)x$$

له دې څخه لاندې مساواتسیستم لاس ته راځي:

$$7 = A + B$$

$$-12 = -4A - 2B$$

بدلون یې د  $A$  او  $B$  پسې :  $A = (7-B)$

$$-12 = -4(7-B) - 2B$$

$$-12 = -28 + 4B - 2B + 28$$

$$+16 = 2B$$

$$B = 8$$

$$A = (7-8) = -1$$

لیکلی شو :

$$\int \left[ \frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)} \right] dx = \int \left[ \frac{-1}{(x-2)} \right] dx = \int \left[ \frac{8}{(x-4)} \right] dx$$

لومړني تابع جوړه کړئ:  $F(x) = \ln x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$  . دا چې طبیعي لوگایتم فقط له مثبت اعدادو شمېرل کیږي، نو یواځې ازبنتونه نیسو.

$$\int \left[ \frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)} \right] dx = -1 \ln |x-2| + 8 \ln |x-4| + c$$

نا اصلي ماتراشنل توابع باید لومړی په پول راشنل تابع او اصلي مات راشنلمبع ټرټه شي. دا د ټوټه کسرونو ټوټه کوونې له لارې کيږي يا صورت نيسي. بیلگه :

$$\int \left[ \frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)} \right] dx$$

په مخرجکي مربع تابع په صفرځایونو  $x_1 = -2$  او  $x_2 = +3$  کې په کنبیزو فاکتورونو تحزیه کيږي :

$$x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه کونې له پاره اصلي مخرج غزوو او بیا یې ضربوو :

$$\int \left[ \frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)} \right] dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعي له پاره په اصلي مخرج غزیزې او بیا سره ضربیږي:

$$\frac{[A(x+3) + B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A + Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x + 3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضربیونو پرتلې کونې له امله، چې د  $x$  ترمخه یعنی کین لور ته له  $(A+B)$  افادې څخه باید اوه لاس ته راشي او  $(+3A-2B)$  او یا ورته ۱۲ (وتونمساوات وگورئ) :

$$-5x+9 = (A+B)x + (3A-2B)$$

لاندې مساواتسیستم لاس ته راځي:

$$-5 = A + B$$

$$9 = 3A - 2B$$

د  $A$  او  $B$  پسي یې حل کړئ:

$$9 = 3(-5-B) - 2B$$

$$9 = -15 - 3B - 2B + 15$$

$$24 = -5B \quad | :(-5)$$

$$\underline{B = -4.8}$$

$$\underline{A = (-5 + 4.8) = -0.2}$$

نو لیکلی شو :

$$\int \left[ \frac{-5x+9}{x^2+x-6} \right] dx = \int \left[ \frac{-0.2}{x-2} \right] dx + \int \left[ \frac{-4.8}{x+6} \right] dx$$

لومړی تابع جوړ کړی :

$$F(x) = \ln x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

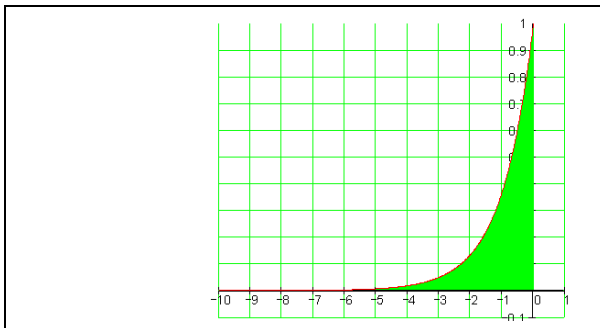
دا چې طبیعي لوگاریتم فقط له طبیعي اعدادو شمیرل کېدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نیسو.

$$\int \left[ \frac{-5x+9}{x^2+x-6} \right] dx = -0.2 \ln |x-2| - 4.8 \ln |x+3| + C$$

### ناپايي (مبھوم) انتیگرال

تعریف : که په یوه ټاکلي انتیگرال کې لږ تر لږه یو حد د مثبت یا منفي ناپايي لور ته لارښي یا د انتیگرال ساحه ناپايي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپايي انتیگرال څخه غږیږو. په یوه مناسب ډول ناپا انتیگرال د عادي انتیگرال د حد په څېر تعریفیږي. په دې توګه په زړه پورې پوهېدنې لاس ته راځي د بېلګې په توګه، چې څنګه د منفي تواند پوټنڅ د ګراف لاندې ناپايي ته رسېدونکې په زړه پورې سطحې. نو باور لري

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \quad \text{او} \quad \int_1^{\infty} x^{-2} dx = 1$$



هم او د دې معکوس انتیګرالونه

$$\int_1^{\infty} x^{-1} dx$$

$$\int_0^1 x^{-1} dx$$

حدونو اوږي

یعني د ناپای په لور ځي..

د  $f(x) = e^x$  ګراف او  $x$ -محور ترمنځ دې په انټروال  $(-\infty; 0]$  کې ټوله سطحه و شمیرل شي، یعنی

$$A = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx$$

تراوسه د یوه ټاکلي انتیگرال د پورته همداسي کښته (لاندې) پولې عددونه وو. د انتیگرالونې ورشو یا ساحه محدود وه. په دې حالت کې یا اوس د انتیگرالولو ورشو محدوده نه ده، داسې انتیگرال یو نامحدود انتیگرال بولو، د انتیگرالونې نامحدودې ورشو سره. انتیگرالونه د دې لاندې څخه په یوې بڼې منځ ته راځي:

$\int_a^{\infty} f(x) dx$	$\int_{-\infty}^b f(x) dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$
---------------------------	----------------------------	-----------------------------------

د دې انتیگرال شمیرني له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

لومړی د یوه پای انټروال  $[a; b]$  له پاره انتیگرال  $\int_a^b f(x) dx$  شمېرو، بیا پسي د ورته افادو  $a \rightarrow -\infty$  یا  $a \rightarrow \infty$  همداسې،  $b \rightarrow -\infty$  یا  $b \rightarrow \infty$  له پاره پولې جوړوو.

فورمال دا په لاندې ډول برېښي:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx$$

زموږ د سطحې شمېرلو له پاره دا په لاندې ډول برېښي:

$$f(x) = e^x$$

$$A = \int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^x]_a^0$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^0 - e^a] = \lim_{a \rightarrow -\infty} \underbrace{e^0}_1 - \lim_{a \rightarrow -\infty} \underbrace{e^a}_0 = 1$$

بیلگه:

دا د  $y$  په محور هنداره شوي د  $e$  تابع دي د  $f(x) = e^{-x}$  سره په انتروال  $[0, \infty)$  کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

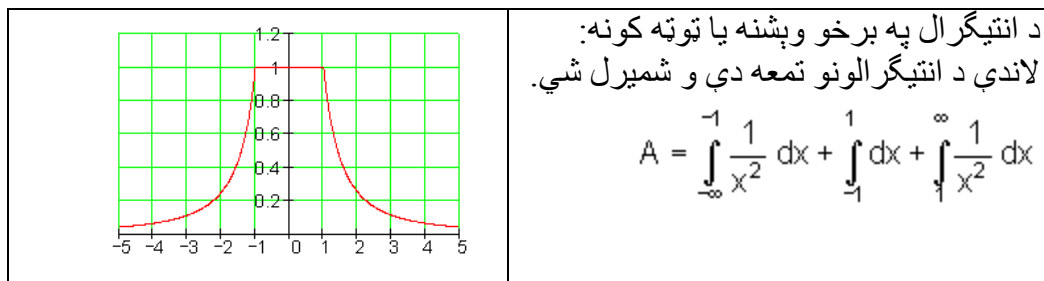
$$u(0) = 0; u(b) = -b$$

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{-b} e^u \frac{du}{-1} &= - \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{-b} e^u du = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^0 e^u du \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [e^u]_{-b}^0 = \lim_{b \rightarrow \infty} [e^0 - e^{-b}] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} e^0 - \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

بیلگه:

د یوه یوځای ایښول شوي یا یو ځای شوي تابع بیلگه لرو:

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ 1 \\ \frac{1}{x^2} \end{cases}$	د $x < -1$ لپاره
	د $-1 \leq x \leq 1$ لپاره
	د $x > 1$ لپاره
$A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	



لومړنی اند یا تر مخه فکرکونه:

د تناظر دلایلو له مخې لرو :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

داسې، چې دا انتیگرال باید فقط یوځل وشمیرل شي.

$$\int_{-1}^1 dx = [x]_{-1}^1 = [1] - [-1] = 1 + 1 = 2$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{b} \right] - \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{1} \right] = 0 - (-1) = 1$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx}_1 + \underbrace{\int_{-1}^1 dx}_2 + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx}_1 = 1 + 2 + 1 = 4$$

ټولگه

د انتیگرال هندسي تعريف

لوریزه سطحه-د انتیگرال تعريف:که یوه  $f$  تابع ولرو، نو د  $x$  محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیگرال له لارې کېږي. په دې سطحه کې د  $x$  محور پورته لوري ته سطحه مثبتېه مخنځېنه لري او د  $x$  محور کښته لوري ته سطحه منفي مخنځېنه لري.

تحليلي تعريف: د  $f$  یوه تابع ورکړ شوي، چې په یوه انتروال  $[a, b]$  باندې تعريف دی، نو د  $a$  څخه تر  $b$  پورې د تابع د انتیگرال څخه د  $x$  په محور د  $f$  د گراف او د کرښې  $x=a$  او  $x=b$  تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

پیژند (تعریف) ۴. ۱ : لیمیت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F; (\max \Delta x \rightarrow 0), \dots \dots (4,3)$$

که په اینتروال  $[a, b]$  کی موجود وي، نو دا د  $f(x)$  ټاکلی اینتیگرال بولو، یا

F- Riemann (د ریمان سطحه). دلته  $a$  د اینتیگراله ونې لاندې (کښته) پوله او  $b$  د اینتیگرالونې پورته پوله بلل کیږي او  $[a, b]$  د اینتیگرالونې اینتروال او  $f(x)$  (Integrand)  $x$  (اینتیگرالېدونکی) او  $x$  د اینتیگرالونې (Integrationsvariable) متحول بلل کیږي

جمله ۴. ۱ : که  $f(x)$  په  $[a, b]$  کې اینتیگرالور وي او  $c \in [a, b]$  وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

پیژند یا تعریف ۴. ۲ :  $f(x)$  په یوه بند انتروال  $[a, b]$  کې اینتیگرالور دی، نو باور

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{لري:}$$

پیژند تعریف 3.2: تابع  $y = f(x)$  دې په یوه واز اینتروال  $I$  کې تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقور  $F(x)$  تابع چې  $F'(x) = f(x)$  شرایط پوره کړي، د  $f(x)$  (بنسټیز-، ساده - یا لومړنی تابع بلل کیږي)

ټاکلی اینتیگرال:

که  $f$  یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل اینتیگرال  $\int_a^b f(x) dx$  (لوستل: د  $f(x)$  اینتیگرال د  $a$  تر  $b$  او په پولو یا حدونو یا اینتیگرال په  $f(x)$  باندې له  $a$  تر  $b$ ) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږود او  $a$  تر  $b$  منح او د  $f$  گراف لاندې.

تعریف:

$f$  په انټروال  $a \leq x \leq b$  کې متمادي تابع ده او  $F$  د  $f$  لومړنی تابع ده، نو ټاکلی

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \quad \text{انتیگرال دی:}$$

د  $F(b) - F(a)$  لپاره زیات وخت  $[F(x)]_a^b$  لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

جمله:

د یوې ثابتې سره ضرب: که تابع  $f(x)$  په یوه اینټروال کې متمادي وي، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad a \in \mathbb{R}$$

جمله:

د جمعې (تفریق) قاعده که  $f_1(x)$  او  $f_2(x)$  په یوه اینټروال کې نه پریکېدونکي وي، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

جمله:

د بدلون (قاعده)،، (Substitution) لاتین: د یوه ارزښت په ځای د هماغه ارزښت بله لویه ایښوول، لاندې بدلون (د نیونو لاندې چې  $u = g(x)$  متمادي او مشتقور دی او  $y = f(u)$  متمادي، نو باور لري:



$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

د ضربونو انتیگرالونه

که د دوه توابعو د ضرب انتیگرال د ورسره بلدو متودونو یا لارو شمېرو، نو زیات وخت دا ناشوني وي.

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = ?$$

بدلون Substitution

د ناټاکلي انتیگرال حل د بدلون له لارې (ننوتنه راځي)

تراوسه پورې مو فقط د انتیگرالونه او جملې حل کړي، چې د لومړنیو توابعو په انتیگرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتیگرالونو د نورو انتیگرالولو حل جملې راکوي. د لومړنی انتیگرالونو سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې گوته ورته نیول کيږي.

جمله ۲ . ۶ : د ،، بدلون (قاعده) ،، ( Substitution لاتین : د یوه ارزښت په ځای د همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لنډ: بدلون ) د نیونو لاندې چې  $u = g(x)$  متمادي او مشتقوردی او  $y = f(u)$  متمادي، نو باور لري: ( کتاب کنل که لاندی بی د انتیگرال له نخبې)

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(u)du$$

حل : د ( ۲۱ . ۱۳ ) د بني اړخ مشتق د ځنځیرقاعدي ( جمله ۲ . ۶ ) له مخی داسی دی

$$\frac{d}{dx} \int f(u) du = \frac{d}{du} \int f(u) du \cdot \frac{du}{dx} = f(u) \cdot u' = f[g(x)] \cdot g'(x),$$

دا د کین اړخ د رابیلیدنی سره سر خوري ( ۲۱ . ۱۳ ) قاعده د ضرب اینتگرالېدو ( اینتگریشن ) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور ځنځیری بلواک  $f[g(x)]$  وي

او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق  $g'(x)$  وي. سری د دننه تابع لپاره متحولی یا واریابل بدلوي یا ځای په ځای کوي  $u = g(x)$ : جوړوي  $du / dx = g'(x)$  په همدې ډول  $du = g'(x) dx$

د بريالي ایتگرالېدو (اینټیکریشن) کیدو ورسته بدلون بیرته راگرځول کيږي.

بیلگه ۲۱. ۳: a

$$I = \int 2 \cos(2x - 1) dx \quad \text{لرو}$$

بدلون یا په ځای کونه:  $2x - 1 = u$

مشتق  $2 = du / dx$  همداسی  $2 dx = du$

$$I = \int \cos u \, du = \sin u + C = \sin(2x - 1) + C$$

بیلگه ۲۱. ۳: b لرو  $I = \int 3 \cos(2x + 1) dx$

بدلوو:  $2x = u - 1$ , کشتق  $2 = du / dx$  همداسی  $dx = (1/2) du$

$$I = \int 3 \cos u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{3}{2} \int \cos u \, du = \frac{3}{2} \sin(2x - 1) + C$$

ومولیدل چی ځنځیری تابع د لایني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینټیگرال کیدی شي، ځکه چی د لایني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د جملی ۲۱. ۴ سره سم د اینټیگرال تر مخ (موخه کین لور ده) لیکل کيږي.

بیلگه 4.2: لرو  $I = \int \sqrt{-3x + 5} \, dx$

بدلون:  $-3x + 5 = u$

را بیلیدنه:  $-3 = du / dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

$$I = \int \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) du = -\frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9} \cdot \sqrt{(-3x+5)^3} + C.$$

$$\text{b) } I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx.$$

$$-2x - 3 = u, \quad -2 = \frac{du}{dx} \quad dx = -\frac{1}{2} du,$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4} \int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C.$$

$$\text{c) } I = \int \frac{2dx}{x+2}.$$

$$x + 2 = u, \quad 1 = \frac{du}{dx} \quad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln|u| + C = 2 \ln|x+2| + C.$$

بیلگه:

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^x dx = e^x + C$$

**خکه چی**  $F'(x) = e^x = f(x)$

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx \neq e^{2x} + C$$

**مکر:**

**خکه چی**  $F'(x) = 2e^{2x} \neq f(x)$  **وی.**  $F(x) = e^{2x} + C$

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

بیلگه: د  $f(x) = e^{2x}$  تابع انتیگرال ونیسی

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = ?$$

$$u(x) = 2x = u \quad \text{بدلون:}$$

$$\therefore u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2} \quad \text{جوړ کړی:}$$

$$\int f(x) dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C$$

$$\frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C \quad \text{د بدلون برعکس:}$$

$$\therefore F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C \quad \text{نو:}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} = f(x) \quad \text{ازماینت:}$$

بیلکه:

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x+1)^2 dx = ? \quad \text{وښایی چې}$$

باور لري

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x+1)^2 dx = ?$$

$$u(x) = x+1 = u \quad \text{بدلون:}$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{1} \quad \text{جوړ کړی:}$$

$$\int f(x) dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

$$\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

بیرته - یا په څټ بدلون:

$$\int f(x) dx = \int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

نو:

بیلگه:

$$f(x) = (3x+6)^3 \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (3x+6)^3 dx = ?$$

$$u(x) = 3x+6 = u \quad \text{بدلون:}$$

$$\Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

جوړوو:

$$\int f(x) dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^3 du = \frac{u^4}{12} + C$$

$$\frac{u^4}{12} + C = \frac{1}{12} (3x+6)^4 + C$$

بیرته بدلون:

$$\int f(x) dx = \int (3x+6)^3 dx = \frac{1}{12} (3x+6)^4 + C$$

نو لرو:

بیلگه:

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = ?$$

$$u(x) = x^2 = u \quad \text{بدلون :}$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du \quad \text{جوړوو:}$$

$$\int f(x) dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int \ln(u) du = \frac{1}{2} [u \cdot \ln(u) - u + C] = \frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C$$

$$: \frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C \quad \text{بیرته بدلون:}$$

$$\int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2} x^2 + C}} \quad \text{نولرو:}$$

د ټاکلو انتیگرالونو حل د بدلون له لارې

ټاکلي انتیگرالونه هم د بدلون له لارې حل کيږي.

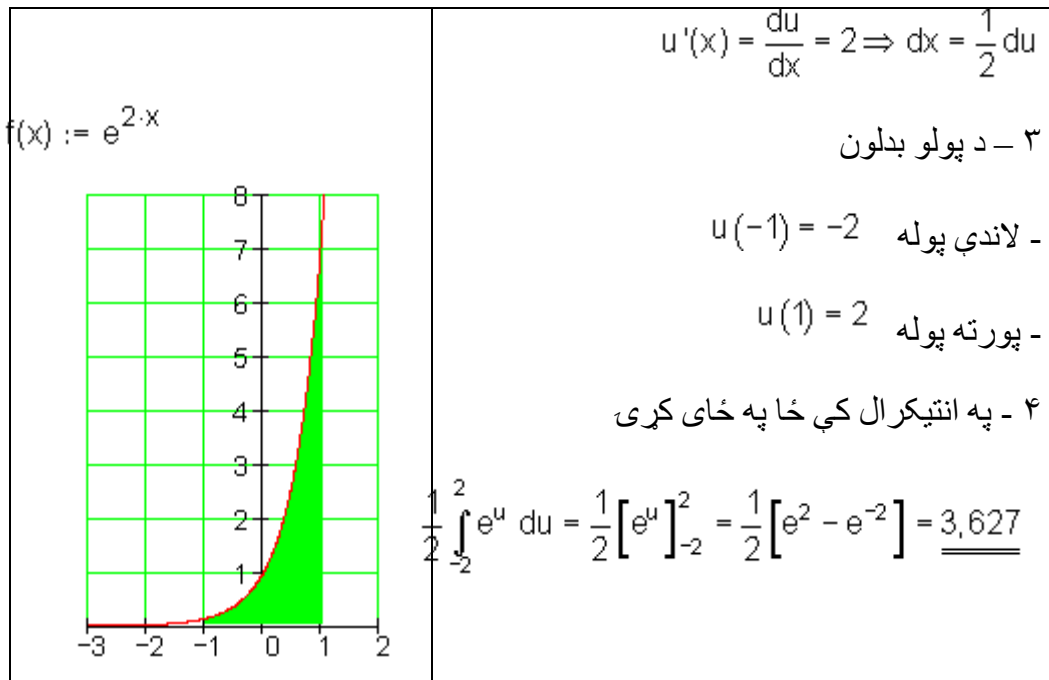
بیلگه :

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^1 e^{2x} dx$$

د انتیگرال حل د بدلون له لارې:

$$u(x) = 2x \quad \text{۱ - بدلون}$$

۲ - د  $dx$  په ځای کېږدی



بیلگه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int 2x \cdot \ln(x^2) dx$$

د انتیگرال حل د بدلون له لارې

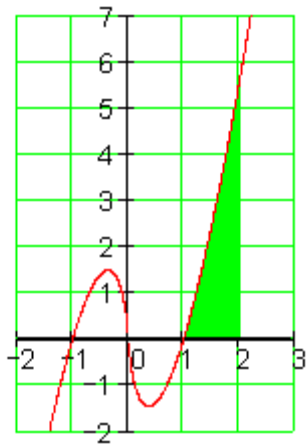
$$u(x) = x^2 \quad \text{۱- بدلون}$$

۲- د ځای په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳- د پولې بدلون

$$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$$



$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int_1^x 2x \cdot \ln(x^2) dx$$

د انتیگرال حل د بدلون له لارې

$$u(x) = x^2 \quad ۱ - بدلون$$

۲ - د خای په خای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳ - د پولې بدلون

$$u(1) = 1 \quad - \text{لاندې پوله}$$

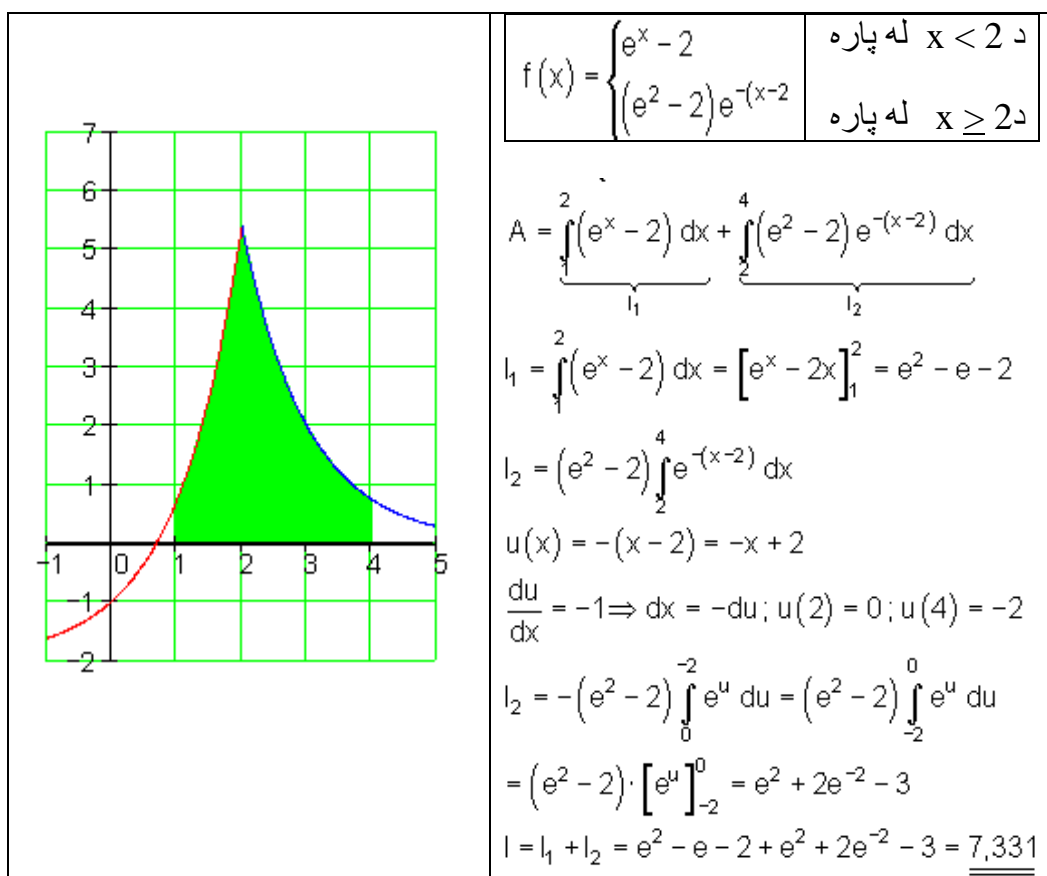
$$u(2) = 4 \quad - \text{پورته پوله}$$

۴ - په انتیگرال کې خای په خایکړی

$$\begin{aligned} \int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du &= \int_1^4 \ln(u) du = [u \cdot \ln(u) - u]_1^4 \\ &= [4 \cdot \ln(4) - 4] - [1 \cdot \ln(1) - 1] \approx \underline{\underline{2,545}} \end{aligned}$$

بیلگه :





جمله ۲ . ۶:

د ،، بدلون،، (Substitution) لاتین: د یوه ارزښت په ځای د هماغه ارزښت بله لویه ایښوول، لاند: بدلون) قاعده: د نیونو لاندې چی  $u = g(x)$  متمادي (نه پریکړدونکی) او د مشتق قابلیت لري او  $y = f(u)$  متمادي دی، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(u)du$$

حل: د (۲ . ۱۳) د بنی اړخ مشتق د ځنځیر قاعدې (جمله ۲ . ۶) له مخی داسی دی

$$\frac{d}{dx} \int f(u) du = \frac{d}{du} \int f(u) du \cdot \frac{du}{dx} = f(u) \cdot u' = f[g(x)] \cdot g'(x),$$

دا د کین اړخ د رابیلیدنی سره سره خوري ( ۲۱. ۱۳ ) قاعده د ضرب اینتگرالېدو ( اینتگریشن ) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور خنخیري بلواک  $f [ g ( x ) ]$  وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق  $g' ( x )$  وي. سری د دننه تابع لپاره متحولی یا واریابل بدلوي یا خای په خای کوي  $u = g ( x )$  : جوړوي  $du / dx = g' ( x )$  په همدې ډول  $du = g' ( x ) dx$

د بریالی اینتگرالېدو ( اینتگریشن ) کیدو ورسته بدلون بیرته راگرخول کیري.

$$I = \int 2 \cos(2x - 1) dx \quad \text{لرو : a ( ۲۱ . ۳ ) بیلگه}$$

بدلون یا په خای کونه:  $2x - 1 = u$

مشتق  $2 dx = du$  همداسی  $2 = du / dx$

$$I = \int \cos u du = \sin u + C = \sin(2x - 1) + C$$

$$I = \int 3 \cos(2x + 1) dx \quad \text{لرو : b ( ۲۱ . ۳ ) بیلگه}$$

بدلوو :  $2x = u - 1$  , کشتق  $2 = du / dx$  همداسی  $dx = (1/2) du$

$$I = \int 3 \cos u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{3}{2} \int \cos u du = \frac{3}{2} \sin(2x - 1) + C$$

ومولیدل چی خنخیري تابع د لایني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتگرال کیدی شي، خکه چی د لایني تابع مشتق ثابت دی او ثابت فاکتور د **جملی ۲ . ۴** سره سم د اینتگرال تر مخ ( موخه کین لور ده ) لیکل کیري.

د بنسټیزو اینتگرالو سره ۱۰ او ۱۱ ) جدول ۲۱ . ۱ ( متحولی  $x$  یواځي په جگ یا مټ د دوه منخ ته راځي. له دې امله داسی اینتگرال، کومو کی چی د  $x^2$  په خای لایني ترم

(Term) پروت دی، کیدی شي چی د لایني بدلولو له لارې په بنسټیز اینتیگرالو ۱۰ او ۱۱ بیرته وارول شي. ډیروخت یو د فورم بدلون ته هم اړتیا موجود وي، چی د اینتیگراند فورم ته راشو.

بیلگه 5.2:

$$a) I = \int \frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2 = (\sqrt{2}x)^2, \quad d \cdot h \cdot I = \int \frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x = u, \quad \sqrt{2} = \frac{du}{dx} \quad dx = \frac{1}{\sqrt{2}} du,$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arctan } u + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arctan}(\sqrt{2}x) + C.$$

$$b) I = \int \frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2 = 9(1-4x^2) = 9(1-(2x)^2), \quad d \cdot h \cdot$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

$$2x = u, \quad 2 = \frac{du}{dx} \quad dx = \frac{1}{2} du$$

$$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{6} \text{Arcsin } u + C = \frac{1}{6} \text{Arcsin}(2x) + C.$$

اینټیگریشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لایني نه وي، نو د اینټیگراند دوم فاکتور (تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سری بنسټیز اینټیگرال ته راشي. دلته هم سری بیا دنننی تابع په نوي متحولی یا واریابلی بدلوي.

بیلگه 6.21 الف:  $I = 4x\sqrt{x^2 - 1} dx$

بدلون:  $u = x^2 - 1 = u$  مشتق  $2x = du/dx$  دی، همداسی لرو:  $x dx = \frac{1}{2} du$

$$I = \int 4\sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} du = 2 \int u^{1/2} du = 2 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{4}{3} \sqrt{(x^2 - 1)^3} + C$$

ب)  $I = \int \sin^3 x \cdot \cos x dx$

بدلون:  $\sin x = u$  را بیل شوی  $\cos x = du/dx$  همداسی  $\cos x dx$

$$I = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{4} \sin^4 x$$

c)  $I = \int \frac{1}{x} \cdot \ln^2 x dx$

$$\ln x = u, \quad \frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \quad \frac{1}{x} dx = du,$$

$$I = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} \ln^3 x + C$$

d)  $I = \int \tan x dx.$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d \cdot h. \quad I = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x dx,$$

$$\cos x = u, \quad -\sin x = \frac{du}{dx} \quad \sin x dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

e)  $I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3} dx.$

$$2 - x^3 = u, \quad -3x^2 = \frac{du}{dx} \quad x^2 dx = -\frac{1}{3} du,$$

$$I = -\frac{1}{3} \int_0^1 \frac{2du}{u} = -\frac{2}{3} \ln|u| \Big|_0^1 = -\frac{2}{3} \ln|2-x^3| \Big|_0^1 = -\frac{2}{3} (\ln 1 - \ln 2) = \frac{2}{3} \ln 2.$$

۲۱ د بدلونقاعده ( ۲۱ . ۱۳ ) دې په چپه ( یعنی د بنی وکین ) لور هم استعمال شي .  
 اینتیگرال  $f(x) dx$  کیدی شي چی په بل وارول شي چی  $x$  په یو مناسب بلواک (  $t$  ) بدل شي ( ۲۱ . ۱۴ )  
 دا:  $f(x) dx = f[g(t)] \cdot g'(t) dt$ .  
 افاده « مناسب » بلواک دې دلته داسي وپوهیدی شي چی سری د بدلون وروسته یو ساده او ممکن یو بنسټیز اینتیگرال لاس ته راوړي. د ( ۲۱ . ۱۴ ) استعمال په قاعده کی داسی دی چی په یوه بلواک  $f(x)$  کی موجود « پیچلی » ترم  $h(x)$  د  $t = h(x)$  په بدلون له منځ څخه وړي او بیا ( که ممکن وي ) د  $x$  په لوری حلوي

$$x = g(t) = h^{-1}(t)$$

بیلگه 7.21: الف:  $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$  a)

$$\sqrt{x-1} = t, \quad x; x = (t+1)^2, \quad dx = 2(t+1)dt :$$

$$I = \int \frac{2(t+1)}{t} dt = 2 \cdot \left[ \int 1 dt + \int \frac{1}{t} dt \right] = 2(t + \ln|t|) + C = 2(\sqrt{x-1}) + 2 \ln|\sqrt{x-1}| + C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اینتیگرال د دوه ایتکوالو جمعی ته بیایي، دلته

$$x = g(t) = (t+1)^2 \text{ وو.}$$

$$b) I = \int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}$$

$$\sin x \cdot \cos^3 x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^4 x = \tan x \cdot \cos^4 x.$$

نو لرو:

$$I = \int \frac{dx}{\tan x \cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx,$$

$$\tan x = t, \quad \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt,$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2 \cdot \sqrt{\tan x} + C.$$

مور د دې لاندې انتیگرال نیسو:

ردو  $u = x$ ، نو لرو:  $du = dx$

ردو  $dv = \cos(x) dx$ ، نو  $v = \sin(x)$  لرو

په لاندې تریکه مخ ته خو:

$$\begin{aligned} \int x \cos(x) dx &= \int u dv \\ &= uv - \int v du \\ &= x \sin(x) - \int \sin(x) dx \\ &= x \sin(x) + \cos(x) + C. \end{aligned}$$

C د انتیگرالوونې یوه په خوښه ثابتې ده

انتیگرالوونې **Integrand** د  $x$  توان یا  $e^x$  سره

د توپه انتیگرالوونې د استعمال سره د انتیگرالوونو لکه

$$\int x^2 e^x dx \text{ او } \int x^3 \sin(x) dx$$

کېده شي په مدې لا حل شي:

يوه په زړه پورې پلگه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x) dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولي.

دا بېلگه د دوه واړه ټوټه انتیگرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی :  $u = \cos(x)$  داسې چې  $du = -\sin(x) dx$

$v = e^x$  داسې چې  $dv = e^x dx$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیگرال حل شي، نو د ټوټه انتیگرالونې قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x); du = \cos(x) dx$

$v = e^x; dv = e^x dx$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته زاځي:

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx.$$

که فکر وکړو، نو د پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیگرال لرو (بی له مخ نڅنښی)، نو د ښي لور انتیگرال که کین لور ته یوسو، لاس ته ترې راځي:

$$2 \int e^x \cos(x) dx = e^x (\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x (\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیگرالونې یوه په خوښه ثابتې ده

### د اینتیگرال شمیرنی استعمال

د سطحو مساحت، چې د  $f(x)$  د گراف او  $x$  محور ترمنځ پرتې وي.

$$\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a) \quad \text{په څلورم څپرکي کی وویل شو چی ټاکلی اینتیگرال}$$

سطحې مساحت A ښایي، چې له منحنې  $y=f(x)$ ، د  $x$ -محور  $y=0$  او د کرښې  $x=a$  او  $x=b$  له خوا رابند وي. موږ له دې څخه مخ ته تللي یو چې  $y=f(x)$  د اینتیگرال اینتروال په دننه کی د  $x$ -محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدی شي د محور کښته لور ته هم لاړ شي..



## فعالیت:

--د یوې په خوبه تابع د منحنی یا کرني او د  $x$  محور ترمنځ او یا د دوه توابعو د سطحی شمیرلو لپاره وړ اندیزونه وکړئ.

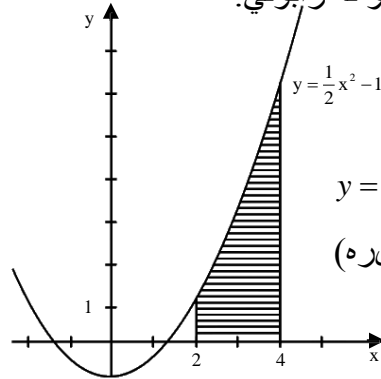
- دا هم د شمیرلو لپاره په پام کې ونیسئ، که منحنی یا د تابع کرينه د  $x$  د محور لاندې لور ته پراته وي.

- یوه په خوبه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکارئ او د تابع انتیگرال د  $x$  محور په ټاکلو پولو کې وشمیرئ.

- یوه په خوبه تابع ولیکئ، چې د انټروال په دننه کې د  $x$  محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم وکارئ او دا تابع به کومه منخښه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د منحنی په ورکولو کې دا بیا وڅیړئ، چې ولې؟

یادونه: که موږ د سطحی مساحت شمیرلو کې هغه عدد ولیکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونیول شي، چې د سطحی واحد (یون) ور سره شته دی. که دا ورسره لیکل شوی نه وي، خو باید تل په پام کې وي.

دا پورته فعالیتونه مو دې لاندې بېلگو ته رابولي:



بیلگه ۱.۵:

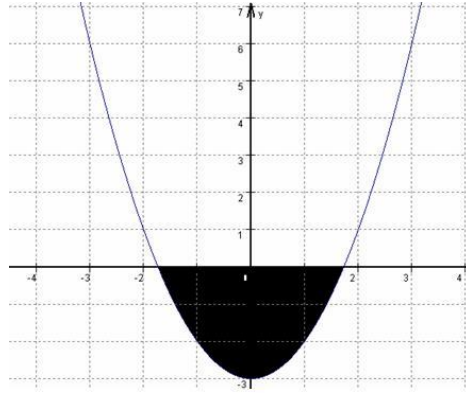
د سطحی مساحت

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 1, \quad y = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 4$$

ترمنځ په لاندې ډول دی (مخامخ څیره)

$$\begin{aligned} A &= \int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) dx = \left(\frac{1}{6}x^3 - x\right) \Big|_2^4 \\ &= \frac{1}{6} \cdot 64 - 4 - \frac{1}{6} \cdot 8 + 2 \\ &= \frac{22}{3} \end{aligned}$$

که د تابع  $y=f(x)$  سطحی د منحنی تلنه د  $-x$  محور لاندې لور ته وي، نو دا ټاکلی اینټیگرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحی تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینټیگرال مطلقه ارزښت نیسو یعنی منفي اینټیگرال.



بېلگه ۵ . ۲ :

د  $f(x) = x^2 - 3$  گراف د  $x$

محور سره یوه

سطحه رابندويي د گراف او

$x$  محور ترمنځ

د ټولې سطحې مساحت

و شمېری.

تگلار:

۱ - د دې لپاره چې دا مسئله راته ښه روښانه شوي وي، نو دا پورته رسم کارو.

۲ - د دې لپاره چې د انتیگرال حدونه لاس ته اړوری شو، باید صفرخایونه و شمېرو.

$$0 = x^2 - 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

۳ - اوس د سطحې د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انتیگرال لیکو.

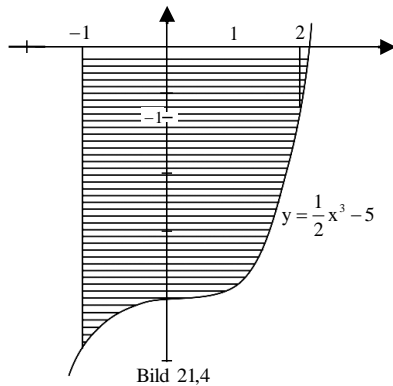
د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر  $\sqrt{3}$  پورې انتیگرال شمېرو او نتیجه یې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3) dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2) dx - 3 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} 1 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^{\sqrt{3}} - 3x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{3} = |-2 \cdot \sqrt{3}|$$

$$A = 2 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot \sqrt{3}$$

بیلگه:

د سطحې مساحت د  $y = \frac{1}{2}x^3 - 5$ ,  $y = 0$ ,  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$  ترمنځ دی: (لاندې څیره)



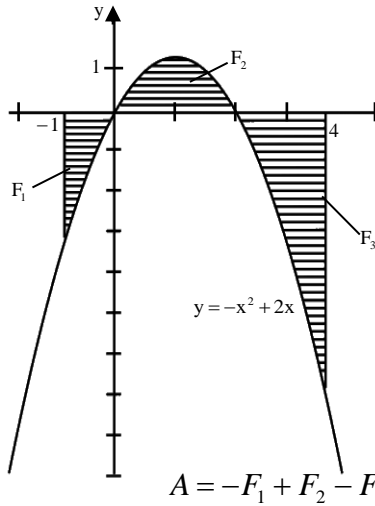
$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-1}^2 \left( \frac{1}{2}x^3 - 5 \right) dx \right| \\ &= - \int_{-1}^2 \left( \frac{1}{2}x^3 - 5 \right) dx \\ &= \left( -\frac{1}{8}x^4 + 5x \right) \Big|_{-1}^2 \\ &= (-2 + 10 + 1/8 + 5) = \frac{105}{8} \end{aligned}$$

بیلگه:

د لاندې پولو  $x_1 = -1$  تر

$x_2 = 4$  او د منحنی  $y = -x^2 + 2x$  او  $y = 0$

ترمنځ د  $x$ -محور پورته او کښته پرته سطحه (په مخامخ څیره کې نښانه شوي ده) دې وشمیرل شي



حل: د تابع  $y = -x^2 + 2x$  د  $x=0$

صفر ځایونو  $x_1 = 0$  او  $x_2 = 2$  ترمنځ پرته

غوښتونکي سطحه د  $x$ -محور پورته، نوره

کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$\begin{aligned} A &= -F_1 + F_2 - F_3 \\ &= \int_{-1}^0 (-x^2 + 2x) dx + \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx - \int_2^4 (-x^2 + 2x) dx \\ &= - \left( -\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) \Big|_{-1}^0 - \left( -\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) \Big|_0^2 - \left( -\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) \Big|_2^4 = \frac{28}{3} \end{aligned}$$

د لاندې پولو  $x = -1$  تر  $x = 4$  او د کبري  $y = -x^2 + 2x$

او  $y = 0$  ترمنځ (د  $x$  - محور پورته او کښته)

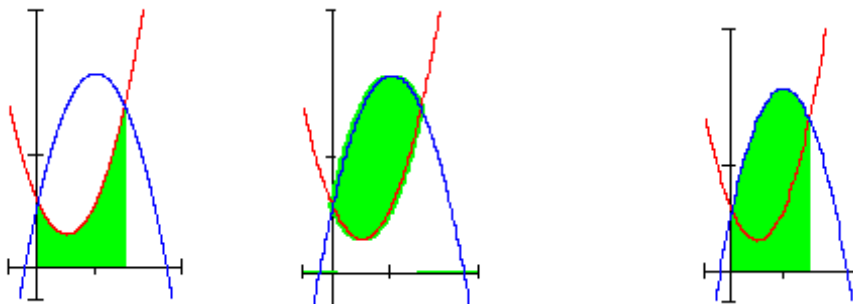
له دوه گرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شمېرنه:

ننوتنه د یوه ډنډ یا یوه بند څپره دې دلته راوړل شي یا دیوه پټې چې له گڼو پولو را بند وي.

فعالیت:

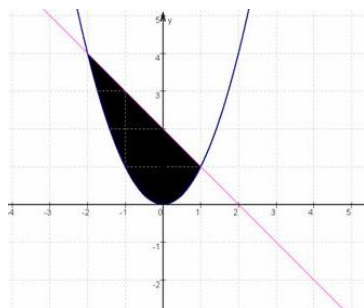
- که داسې یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنگه وشمېرو؟

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمیرل کېږي، چې د دوه توابعو گرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدې شي د ټاکلو اینټگرالونو د کمښت له لارې و شمیرل شي. که دواړه گرافونه د  $x$ -محور پورته لور ته پراته وي، نو د لاندې شپا څخه مخ ته ځو:



## د انتیگرالشمیرن ۸۶۷

$$A = A_1 - A_2$$



بیلگه . ۵ . ۵ :

د  $f(x) = x^2$  او  $g(x) = -x + 2$  دوه توابعو ترمنځ رابند د سطحې مساحت غواړو وشمېرو:

د تگلارې لار: دلته هم یو شکل یا گراف رسموو، چې دا حالت راته روښانه شي.

۲ - د دې لپاره چې انتیگرال وشمېرو، د گرافونو د قاطع ټکي ټاکو.

$$x^2 = -x + 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

فرمول - P;q

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

۳ - په ساده توگه لیدل کیږي.

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

پس باور لري

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^{-2} (-x + 2) dx - \int_1^{-2} x^2 dx = \\
 &= -1 \cdot \left( \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - 6 - \left( \frac{(-2)^3}{3} \right) - \frac{1}{3} \\
 &= -1,5 - 6 + + = -4,5 \\
 A &= 4,5
 \end{aligned}$$

جمله :

که د ټولو  $x$  لپاره ، د  $a < x < b$  سره  $f(x) > g(x)$  وي، دا په دې معنا چې د  $f$  گراف د  $a$  او  $b$  تر منځ د  $g$  پورته لور ته ځغلي، نو د دواړو گرافونو په انټروال کې رابندې سطحې مساحت لپاره بارور لري.

$$\boxed{A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx}$$

بیلگه ۵ . ۶ :

د توابعو  $f(x) = x^2 - 2x + 2$  او  $g(x) = -x^2 + 4x + 2$  گرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پیدا کړو.  
د دواړو گرافونو د  $x$ -ارزښتونو غوڅتکي (د تقاطع ټکي) د اینټیگرال حدونه جوړوي.

د غوڅتکو د  $x$  - کواردیناتو ټاکل:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 4x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$x_1 = 0$  او  $x_2 = 3$  د اینټیگرال لیمیتونه یا پولې دي.

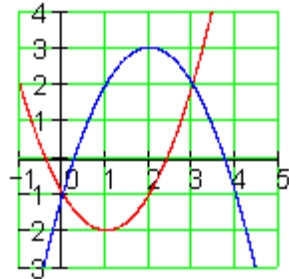
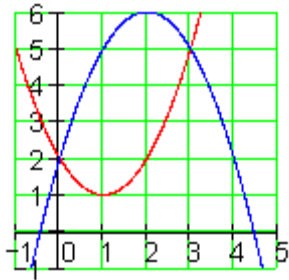
د اینتگرال جوړونه:

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x \right]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot 27 - 9 + 2 \cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

$$\int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2) dx = \left[ -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x \right]_0^3 = -\frac{1}{3} \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 = -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه گرافونو ترمنځ سطحه باید تل مثبت وي، نو له لوي ارزښت څخه کوچنی ارزښت باید کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x) dx - \int_0^3 f(x) dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$



لکه چې پوهیږو، د یوې سطحې مخنښه ددې په واک کې ده، چې ایا سطحه د  $x$  - محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. مورځی ورو، چې ایا دا تاثیرات په پورتنۍ بیلگه کې پراته دي او که نه. مور سطحه د  $y$  - محور په درې واحدونو (یوونونو) کښته لورته بیایو او سطحې نوې شمیرو.

که د لید له مخې قضاوت وکړو، نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د  $x$ —ارزښت غوڅتکي هم او له دې سره د انتیگرال حدونه یې تغیره پاتیري.

$$g(x) = -x^2 + 4x - 1 \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 - 2x - 1$$

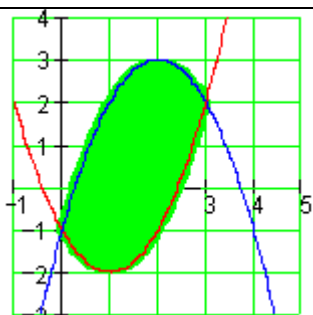
$$A = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx \quad \text{ځای په ځای کونه:}$$

$$\text{د } f(x) - g(x) = 2x^2 - 6x \text{ سره کیري:}$$

$$A = \int_0^3 (2x^2 - 6x) dx = \left[ \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 \right]_0^3 = \frac{2}{3} \cdot 27 - 3 \cdot 9 = 18 - 27 = \underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنیو ترمنځ سطحه فزیکي سطحه ښايي، باید لاس ته راوړنه یو مثبت عدد وي. دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A = \left| \int_0^3 (2x^2 - 6x) dx \right| = \left| \left[ \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 \right]_0^3 \right| = \left| \frac{2}{3} \cdot 27 - 3 \cdot 9 \right| = |18 - 27| = |-9| = \underline{\underline{9}}$$



د دې متود ټولیزه ونه (عمومیت):

د دوه گرافونو ترمنځ سطحه:

که یوه سطحه د یوې پورته او یوې کښته منحنی څخه رابنده وي، چې تابع  $f(x)$  او تابع  $g(x)$  پورې اړه ولري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شمیرل کیري.

$$A = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$



د انتیگرالونې حدونه  $a$  او  $b$  د  $x$  - محور د دواړو گرافونو د وضعیه قی متونو غوڅتکي دي

-- د منحنیو  $y=f_1(x)$  او  $y=f_2(x)$

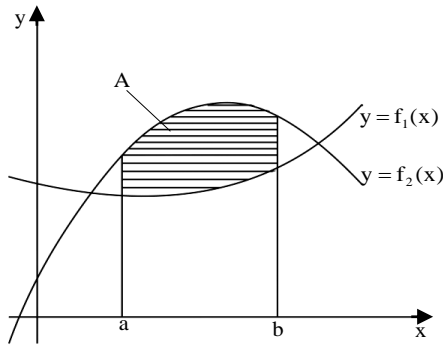


Bild 21,6

تر منځ پرته سطحې مساحت په لاندې پولو کې له  $x=a$  تر  $x=b$  پورې او  $y=f_1(x)$  او  $y=f_2(x)$

اینٹیگرال وړ او  $f_1(x) < f_2(x)$

په  $[a, b]$  اینتروال کې (ش ۱ . ۶) داسې لاس ته راوړل کېږي چې دتابع  $y=f_2(x)$  لاندې سطحې مساحت څخه د  $y=f_1(x)$  تابع لاندې سطحې مساحت کم کړئ.

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

سړی په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواک چې  $f_1(x)$  او  $f_2(x)$  په اینتروال  $[a, b]$  کومه یوه مخنښه ځان ته غوره کوي باوري دی.

بیلگه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشمیرو  $y=x^2-1$  او  $y=-x^2+1$

حل: د اینٹیگرال پولې (حدونه) د افقي (پراته) محور غوڅتکي (د تقاطع ټکي) دي

$$x^2-1 = -x^2+1$$

$$2x^2=2$$

$$x^2=1$$

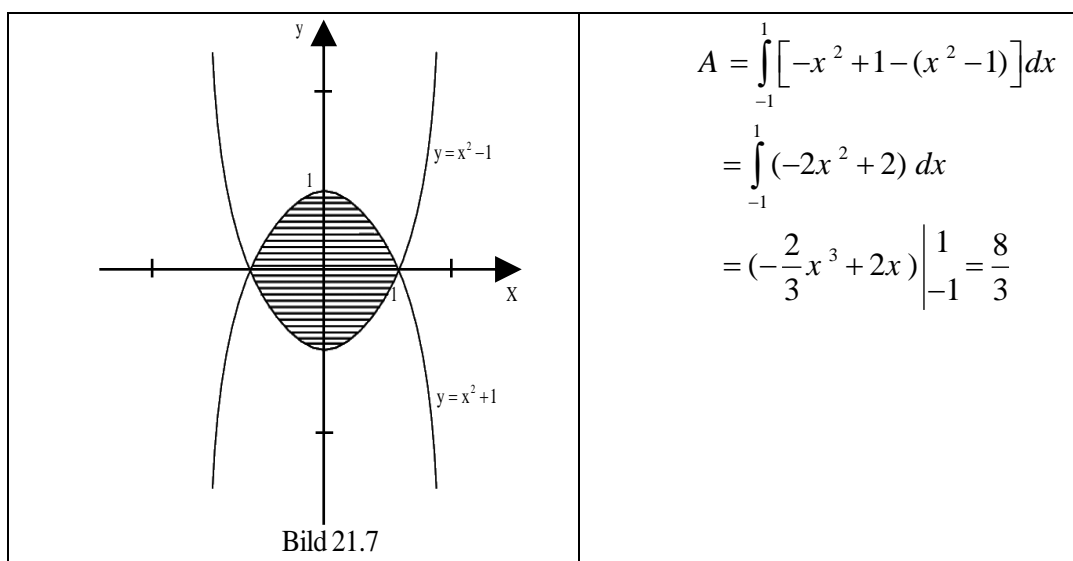
$$x_1 - a = 1, x_2 = b = -1$$

د اینٹیگرالولو په اینتروال  $[-1, 1]$  کې لرو  $-x^2+1 > x^2-1$

(که چېرې په اینتروال  $[a, b]$  او په (۲ . ۱) کې  $f_2(x) > f_1(x)$  په نظر کې ونه نیول

شي، نو د څرگند اینٹیگرال به منفي شي او سړی (لکه د مخه چې ویل شوي) بیا

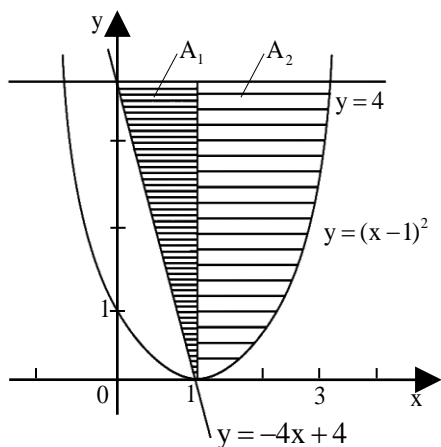
د اینٹیگرال مطلقه ارزښت نیسي. له دې امله لرو:



بیلگه ۵ . ۸ :

د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ  
سطحه شمیرل کیري.

$$y=(x-1)^2, y=-4x+4, y=4$$



حل : دا د شمیرلو سطحه، د منحنیو ترمنځ د دوه  
سطحو  $A_1$  او  $A_2$  له یوځای کیدو څخه لاس  
ته راځي.

$A_1$  د منحنیو  $y=4$  او  $y=-4x+4$  ترمنځ  
پروت دی. د اینتیگرال پولی (حدونه) د لومړي

کو او رینات ( $x$ -محور) غوڅتکی دی،  
د  $y=4$  او  $y=-4x+4$  ترمنځ.

لرو  $4 = -4x + 4, x_1 = 0$  په همدې ډول د

بني غوڅتکي لومړی وضعیه ارزښت (کو او ر دینات)

د  $y = -4x + 4$  او  $y = (x - 1)^2$  ترمنځ

$$-4x + 4 = (x - 1)^2, x^2 + 2x - 3 = 0$$

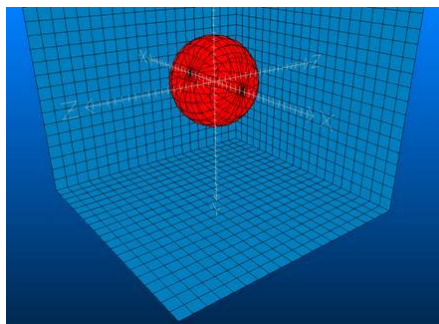
$$x_{2,3} = -1 \pm 2, x_3 = 1.$$

گورو چې  $A_2$  د  $y = -4$  او  $y = (x - 1)^2$  ترمنځ پرته ده، د اینتیگرال حدونه (پولی)  $x_1 = 1$  او د لومړي وضعیه قیامت د بني غوڅتکي د  $y = 4$  او  $y = (x - 1)^2$ .

غوښتوني سطحه داسي ده:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_0^1 [4 - (-4x + 4)] dx + \int_0^1 [4 - (x - 1)^2] dx \\ &= \int_0^1 4x dx + \int_0^1 (-x^2 + 2x + 3) dx = 2x^2 \Big|_0^1 + (1/3x^3 + x + 3x) \Big|_0^1 = 7 \frac{1}{3} \end{aligned}$$

د څرخیدونکو بدنونو (جسمونو) ډکي (حجم)



فعالیت:

- په ورسره بلده توگه د مستطیل حجم ولیکئ.

- د کړي، استوانې او د مخروط حجمونه، چې تراوسه مو لوستلي و لیکي.

یادونه: دا دې تل په پام کې ونیول شي: که د انتیگرال شمیرني له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د یوه جسم حجم ښایي. مور ددې لپاره لیکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

### څرخ د دونکي تنونه:

څرخي دونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په یوه څرخي دونکي محور باندې د یوې کرښې یا منحنې څرخي دني له لارې منځ ته راځي. کرښه یا منحنې په یوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحنې محور نه غوڅوي، او یا زیات له زیاته یې ممکن لمس کړي. چې غوره بې لگې به یې په لاندې کې و څیړل شي.

د  $x$  په محور څرخېدنه (څرخون)

لکه د مخه مو چې وویل، حجم هم یو انتیگرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که یوه تابع د  $X$  په محور و څرخول شي.

د یوه څرخي دونکي جسم (بدن یا تن) حجم (دکې)

د یوه څرخي دونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخي دنه د  $x$  په محور په انتروال  $[a, b]$  کې د  $f$  تابع له گراف، د  $x$  له محور او له دواړو کرښو  $x = a$  او  $x = b$  ترمنځ جوړیږي، رابنده وي.

د حجم شمیرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

د  $y$  په محور څرخېدنه

د یوې سطحې په څرخي دني (د  $y$  په محور)، چې په  $[a, b]$  انتروال د  $f$  تابع گراف  $y = f(x)$  محور او دواړو کرښو  $y = f(a)$  او  $y = f(b)$  له خوا رابند وي باید د

بڼه بدله شي و  $x = f^{-1}(y)$  معکوس تابع ته. دا شتون لري، که  $f$  متمادی او غښتلی یو غریز وي. که نه (لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي، چې  $f$  په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادی او غښتلی یو غریز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمیرل کيږي او سره جمعه کيږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a), f(b))}^{\max(f(a), f(b))} (f^{-1}(y))^2 dy$$

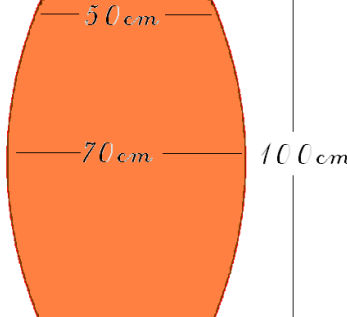
که دلته  $x = f^{-1}(y)$  بدل کړو، نو د  $x$  په محور په لاندې توګه حجم لاس ته راوړو:

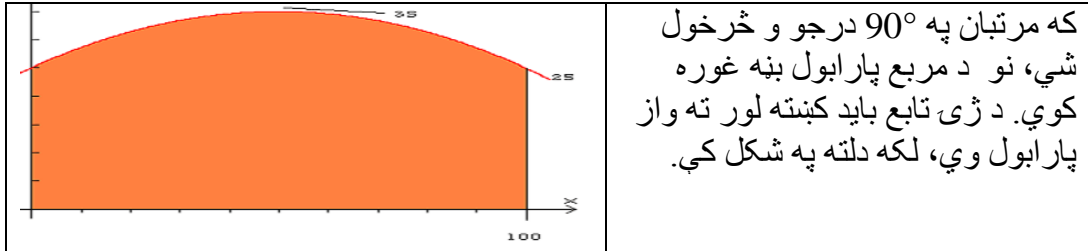
$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a), f(b))}^{\max(f(a), f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)| dx$$

د  $f'$  مطلق ارزښت او د انتیګرال په حدونو کې خورا جګ – ټیټ (min/max) توابع یو مثبت انتیګرال تضمینوي.

د سطحې په څرخولو (د  $y$  په محور)، چې د  $f$  تابع له ګراف او دواړو کرښو  $x = a$  او  $x = b$  څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f(x))^2 dx$$

	<p>د یوه مرتبان حجم:</p> <p>د یوه مرتبان حجم غواړو پیدا کړو چې جګوالی یې 1 متر، وړانګه یې 25 سنتي متره په پای او 35 سانتیمتره په منځ کې ده.</p>
---	---



حل: د پارابول د تابع لیکبڼه کېدی شي ساده په ککرتکي یا راس باندې ولیکل شي.

ټولیز باور لري:

$$f(x) = -a \cdot (x-5)^2 + 3.5 \text{ ( dm ارزښت په دسیمتر )}$$

په څرگند دول 5- د راس راکښنه د  $x+$  په لور ورکوي او 3,5 د  $y+$  په لور. د غزوني ضریب  $a$  په لور اړین دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضریب  $a$  نه شته. که په فرمول کې یو معلوم ټکی کیدو، کېدی شي  $a$  وشمیرل شي. دا ټکی  $(0/2,5)$  دی.

$$f(x) = -a \cdot (x-5)^2 + 3.5$$

$$-a \cdot (0-5)^2 + 3.5 \quad \text{د } x \text{ ارزښت } \chi \text{ په } \chi \text{ کونو لرو}$$

$$\frac{2.5-3.5}{25} = -0.04 \quad \text{له دې } a \text{ دی:}$$

$$f(x) = -0.04 \cdot (x-5)^2 + 3.5 \quad \text{او مساوات پوره بلل کیري.}$$

د ساده والي لپاره د راس ټکي فرمول په نورمال یا عمودي فورم بدلوو:

$$f(x) = -0.04x^2 + 0.4x + 2.5$$

$$f(x) = (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2 \quad \text{تابع مربع کړی}$$

$$f(x) = 0.0016x^2 - 0.032x^3 - 0.04x^2 + 2x + 6.25 \quad \text{نو دی}$$

لومړنی تابع

$$f(x) = \frac{0.0016x^2}{5} \cdot x^5 - \frac{0.032x^3}{4} \cdot \frac{-0.04x^2}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x$$

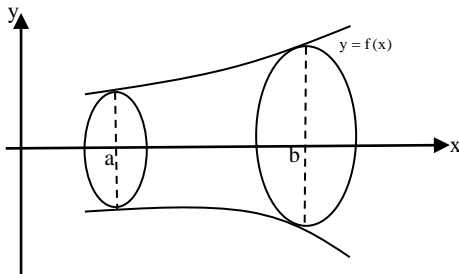
د حجم شمېرلو لپاره ټاکلی انتیگرال دی؛

$$\begin{aligned} \pi \cdot \int_0^{10} (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2 dx &= \pi \cdot \int_0^{10} (-0.0016x^2 - 0.032x^3 - 2x + 6.25) dx \\ &= \pi \left[ \frac{0.0016}{5} \cdot 10^5 - \frac{0.032}{4} \cdot x^4 - \frac{0.04}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x \right]_0^{10} \\ &= \pi \left[ 32 - 80 - 13\frac{1}{3} + 100 + 62.5 \right]_0^{10} \\ &= \pi \cdot 101.167 \end{aligned}$$

د حجم واحدونه (یوونونه)

دا چې مور له پبله په دیکسیمتر شمېرنه کړې، نو طبعاً دا په لیتر شمېرل کېږي.

$$= 317.824 \text{ liter}$$

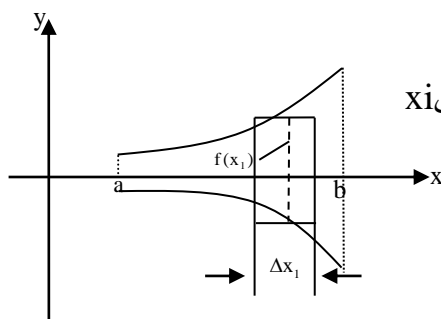


د تابع  $y=f(x), y=0, x=a, x=b$  ترمنځ  
سطحه چې د  $x$ -محور باندې څرخي (ش ۵ . ۹).  
دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوي  
یا- راغلي د څرخیدونکي بدن ډکي (حجم) دی.

لاندېجمله باوري ده

جمله ۵. ۸) د څرخیدونکي بدن ډکۍ (حجم):  
په اینتروال  $[a, b]$  کې د  $y=f(x)$  متماذي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چې د سطحو  
 $y=f(x), y=0, x=a, x=b$  ترمنځ، راپیدا کيږي داسې دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



ښونه:  $V$  د توتو (استوانو) د جمعې له  
لارې چې وړانګه یې  $f(x_i)$ ، جگوالی یې  $x_i$   
د  $i=1, 2, 3, \dots, n$  لپاره لری.

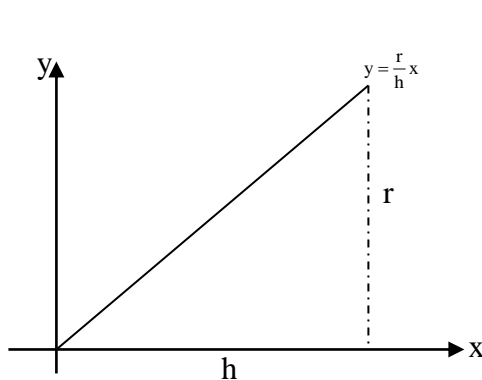
(ش: ۵. ۱۰) د  $i$ -مې توتي  
(سلیندر ډکۍ) (حجم) دی.

$$\Delta_i V = \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د ټولو  $n$  سلیندرونو یا توتو زیاتون

$$V_n = \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \pi [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه ( $n \rightarrow \infty, \Delta x_i \rightarrow 0$ ) د بنسټ اینتیگرال د تعریف سره سم



حجم (ډکۍ) را کوي.  $V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$

بیلګه ۵. ۹) د مخروط یا کیګل ډکۍ

(حجم) د  $y = \frac{r}{h}x$  کرښې (د سرچینې

تیره کرښه د  $\frac{r}{h}$  جگوالی سره) او د  $x$ -محور

( $y=0$ ) د حدونو  $x=0$  تر  $x=h$



پوری (ش . ۱۱)

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[ \frac{r}{h} x \right]^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

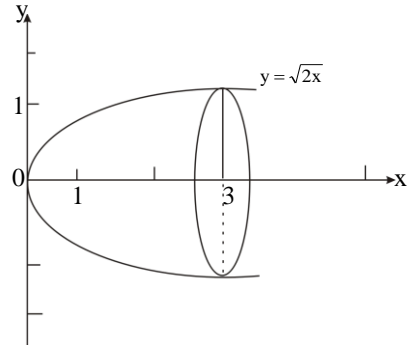
دا له بنسټیزې شمېرنې (د اساساتو) څخه معلومه نتیجه ده.

بیلگه ۵ . ۱۰:

$$y = \sqrt{2x}, y = 0, x = 0, x = 3$$

ترمنځ د  $x$ -محور باندې څرخېدلو جوړ (تولید) شوی جسم څرخېدلی پارابولویډ دی (څ  
۵ پ ۱۲)

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^3 \left[ \sqrt{2x} \right]^2 dx \\ &= 2\pi \cdot \int_0^3 x dx \\ &= 2\pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = 9\pi. \end{aligned}$$



### د ارشمیدس جمله Archimedischer Satz

د توتې، غونډارې (کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

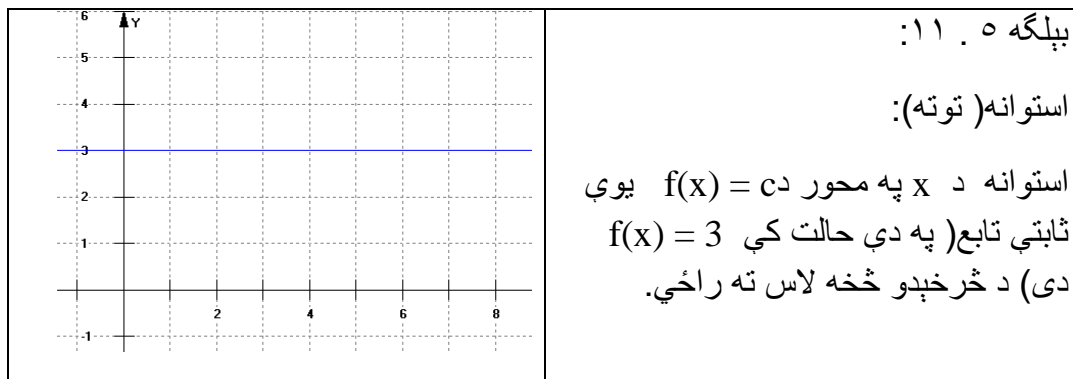
$$V_{\text{توته (استوتنه)}} : V_{\text{غونډارې (کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$$

د 1886 زک یوه درسي کتاب څخه



د پورته الماني پښتو: ارنیمیډس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب یې ومونده، له دې امله دا دلته راغلي جمله د ارنیمیډس جلي په نامه نومول شوي.

د څرخېدونکي بدن(حسم) حجم.



د یوې استوانې حجم (دکې) شمېرنه:

اوس دې په  $[0;5]$  انټروال کې د توتي حجم وشمېرل شي. د استوانې د حجم د شمېرلو لپاره  $V = \pi r^2 \cdot h$  عمومي فرمول دی. په دې حالت کې  $r=3$  او  $h=5$  دی. د هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

لومړی له هرڅه غواړو  $V = \pi r^2 \cdot h$  څخه فقط  $r^2 \cdot h$  تر څپرني لاندې و نیسو او غواړو یوه لار پیدا کړو، چې د هغې لارې د انتیگرال په مرسته حجم وشمېرلای شو. د سطحې مساحت د لاندې انتیگرال په مرسته وشمېرل شو:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x) dx$$

که د دې ناپايي ډبرو مستطیلونو (د  $f(x)$  د مربع مساحت او د صفر په لور ځغېلېدونکي پنډوالي  $dx$  سره) انتیگرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 [f(x)]^2 dx$$

دا په دې معنا چې دا انتیگرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتنی فرمول څخه دد یوې توتې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راځوي:

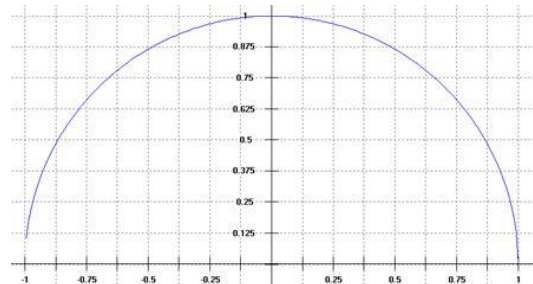
$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx$$

د دې ورکړ شوي استوانې د حجم شمېرنه:

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^5 [9(x)]^2 dx = \pi \int_0^5 [45 - 0] dx = 45\pi$$

د پرتلي لپاره:  $\pi r^2 h = 45\pi$

کره (غونډاری یا غنډوسکه(توپ)):



د  $x$  په محور د  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  تابع څرخېدني څخه غونډاری یا کره منځ ته راځي (پورته د ننوتني شکل).

دا تابع هم کېدی شي په گردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکي تابع يې  $q(x) = \pi[f(x)]^2$  ده. د دې ټوټو د انتیگرالولو له لارې دې بیا حجم وشمېرل شي.

په دې بېلگه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځاي څخه و صفر ځاي ته د  $x$  په محور باندې

د  $f(x) = \sqrt{1^2 - x^2}$  تابع څرخېدنو له لارې منځ ته راځي، يعنې په انټروال  $[-1; 1]$  کې.

$$\pi \int_{-1}^1 [f(x)]^2 dx = \pi \left[ x - \frac{1}{3} x^3 \right] = \pi \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi$$

### Kegel (Geometrie) مخروط

دا هم ممکن ده، چې یو مخروط د

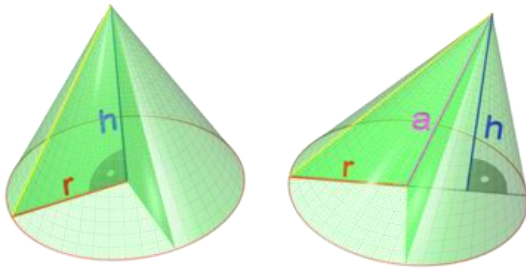
یوه منظم  $n$  زاویو

(اړخيزي) (کونجيز) څخه رابندي

بنسټيزې سطحې (د  $n$  لپاره چې ناپا

ي ته ځي) اهرام ته ور نژدې کړو.

د مخروط حجم:



د انتیگرال په مرسته د یوه مستقیم

مخروط د حجم د شمېرلو یوه بله

مرستندویه لار. یو د کارتيزي

وضعيه ارزښت (قيمت) سيستم په کار اچول کيږي، د هغه سره چې د مخروط څوکه په

سرچینه  $(0|0)$  او منځ ټکی په ټکي  $(h|0)$  کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنیو توتو (استوانو) رايوځاي شوی په پام کې ونيسو، چې جگوالی (پندوالی) يې  $dx$  دی. داچې د داسې يوې توتې يا استوانې گردې توتې (کترې) واټن د مخروط له څوکي د وضعيه قيمت سيستم په  $x$  سره ور کړ شوی دی، د وړانگي جملې له مخې (دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوي) باور لري.

د يوه ناپاي کوچنی توتې (استوانې) وړانگه:

$$r z(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

د يوې ناپاي کوچنی توتې (استوانې) حجم:

$$\left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx$$

د ټول څرخي دوني مخروط د ټولو داسې کوچنیو توتو حجم دی. د شمېرلو لپاره يې ټاکلی انتیگرال جوړوو، د انتیگرال حدونو  $0$  او  $h$  سره:

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[ \frac{x^3}{3} \right]^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left( \frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

یو مخروط د  $x$  په محور د  $f(x) = mx$  یو کرښیز (خطي) تابع (د بېلگې په توګه  $f(x) = 0,5x$ ) څرخېدنه (څرخون) ده.

د یوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولای چې لومړی د کوارډر حجم وشمېرو. دلته د دې ګراف لاندې په ډېرو کترو کترو کول دي د  $dx$  پندوالي سره. د دې کترو د سطحو مساحت وشمېری، چې وړانګه  $f(x)$  لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بیا یې انتیګرال په ورکړ شوي  $[0;5]$  انټروال کې ونیسئ.

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi \left[ \frac{1}{12} x^3 \right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلي لپاره دی د یوه مخروط د حجم معیاري (ستاندارد) بڼه وکتل شي.

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h = 32.72$$

لنډ:

که یوه منحنی د  $x$  یا  $y$  په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې مور دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پندوالي  $x$  همداسې  $y$  سره او دا په ورته نږدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نږدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$$

$$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$$

بېلګه ۵. ۱۲:

د  $y = x^2/4$  تابع گراف په  $[0, 2]$  انټروال کې د وضعیه قیمتونو په محورونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دی؟

د  $x$  په محور څرخېدنه:  $y^2 = x^4/16, x_1 = 0, x_2 = 2$

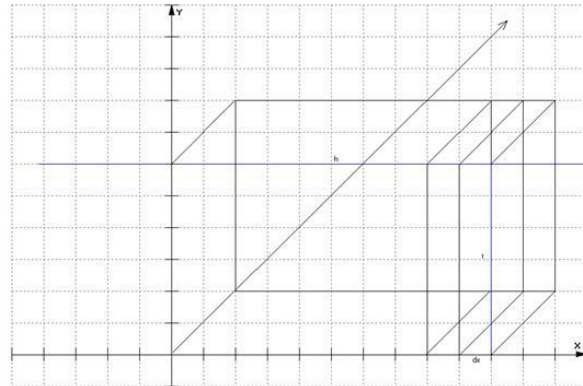
$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16} dx = 0.4\pi$$

د  $y$  په محور څرخېدنه:  $x^2 = 4y, y_1 = 0, y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y dy = 2\pi$$

د ناڅرخېدونکي جسم حجم.

شپږ اړخیز جسم یا مکعبډوله - 2.1 Quader



دا لید شکل د استوانې څخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه څرخي. حجم یې کېدی شي د عادي کوارډ په څېر وشمیرل شي ( $V = r^2h$ ) او یا د صفر په لور تلونکي  $dx$  سرورې مربع وي توتیه شي. د دې لپاره دې د پروت غوڅي (قاطع) سطحه وشمیرل شي، یعنې  $q(x)$  د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بیا باید انتیگرال ونیول شي.

په ټولیزه توګه دا معنا لري:  $V = \int_a^b q(x) dx$

په دې بېلګه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژۍ تابع مربع ده:  $q(x) = [f(x)]^2$

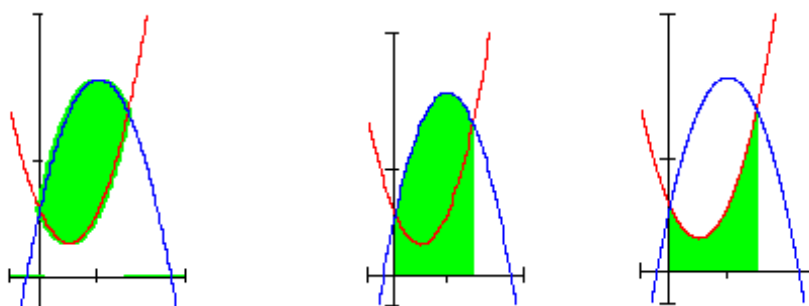
که موږ  $f(x) = 3$  تابع له 0 تر 5 انټروال کې د پروتقاطع تابع سره انټیګرال کړو،

$$\int_0^5 q(x) dx = [9x]_0^5 = 45 \text{ لاس ته راشي. } V = r^2 h = 45$$

ټولګه

که د تابع  $y=f(x)$  سطحې د منحنی ټلنه د  $-x$  محور لاندې لور ته وي، نو دا ټاکلی اینټیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې ټل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینټیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعنې منفي اینټیګرال.

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کېږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدې شي د ټاکلو اینټیګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د  $-x$  محور پورته لور ته پراته وي، نو د لاندې شپا څخه مخ ته ځو:



$A, A_1$

$A_2$

$$A = A_1 - A_2$$

د منحنیو  $y=f_1(x)$  او  $y=f_2(x)$



تر منځ پرته سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له  $x=a$  تر  $x=b$  پورې او  $y=f_1(x)$  او  $y=f_2(x)$ .

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د  $x$  په محور په انټروال  $[a,b]$  کې د  $f$  تابع له گراف، د  $x$  له محور او له دواړو کرښو  $x=a$  او  $x=b$  ترمنځ جوړېږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

د  $y$  په محور څرخېدنه

د یوې سطحې په څرخېدني (د  $y$  په محور)، چې په  $[a,b]$  انټروال د  $f$  تابع گراف د  $y$  محور او د دواړو کرښو  $y=f(a)$  او  $y=f(b)$  له خوا رابند وي باید د  $y=f(x)$  بڼه بدله شي و  $x=f^{-1}(y)$  معکوس تابع ته. دا شتون لري، که  $f$  متمادي او غښتلي یو غږیز وي. که نه (لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي، چې  $f$  په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلي یو غږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کېږي او سره جمعه کېږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a), f(b))}^{\max(f(a), f(b))} (f^{-1}(y))^2 dy$$

جمله ۵. ۸) د څرخېدونکي بدن ډکۍ (حجم):

په اینټروال  $[a,b]$  کې د  $y=f(x)$  متمادي وي، د څرخېدونکي بدن حجم چې د سطحو  $y=f(x)$ ،  $y=0$ ،  $x=a$ ،  $x=b$  ترمنځ، راپیدا کېږي داسې دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

د توتې، غونډاري(کري) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$$V \text{ توتې (استوتته) } : V \text{ غونډاري (کره) } : V \text{ مخروط } = 3 : 2 : 1$$

يو مخروط د  $x$  په محور د  $f(x) = mx$  یوې کرښيزې (خطي) تابع (د بېلگې په توگه  $f(x) = 0,5x$ ) څرخېدنه (څرخون) ده.

که یوه منحنی د  $x$  یا  $y$  په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې مور دا جسم په نریو کترو یا زونونو توتې کوو، د پندوالي  $x$  همداسې  $y$  سره او دا په ورته نژدې توگه په استوانو بدلوو، نو په نژدې توگه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

$$V_x \text{ د } x \text{ په محور څرخونه: } \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$$

$$V_y \text{ د } y \text{ په محور څرخونه: } \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$$

د  $x$  په محور د  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  تابع څرخېدني څخه کره منځ ته راځي (پورته د ننوتني شکل).

دا تابع هم کېدی شي په گردو توتو توتې شي، پرته غوڅوونکي تابع یې  $q(x) = \pi[f(x)]^2$  ده. د دې توتو د انتیگرالولو له لارې دې بیا حجم وشمیرل شي.

تمرینونه

د بن

ستیز انتیگرال د جدول په کارونه یا استعمال لاندې انتیگرالونه وشمیری

$$a) \int (x^3 - 5x^2 + 7x - 2) dx, \quad b) \int (2/x^3) dx, \quad c) \int (1/3) \sqrt[3]{x} dx$$

$$d) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx, \quad e) \int \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} dx, \quad f) \int (\sqrt[3]{x^4} + 1) dx,$$

$$\begin{array}{lll}
 \text{g) } \int \sqrt[3]{x^{-3}} dx, & \text{h) } \int \frac{ax^2 + bx + cx^{-1}}{x^4} dx, & \text{i) } \int 3 \cdot 2^x dx, \\
 \text{j) } \int \frac{1}{2 \sin^2 x} dx, & \text{k) } \int \frac{1}{3 + 3x^2} dx, & \text{l) } \int \cos \phi \cdot s ds, \\
 \text{m) } \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}, & \text{n) } \int \sqrt{t} \cdot \sqrt{t} \cdot \sqrt{t} dt, & \text{o) } \int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} du.
 \end{array}$$

۱. ۲ - د بیرته په اګلي انتیګرال وروسته یې انتیګرال ونیسی

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \int \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2(1+x)^2} dx, & \text{b) } \int \frac{2 \sin 2x}{3 \cos x} dx, & \text{c) } \int \frac{7 \cos 2x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx, \\
 \text{d) } \int \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos^2 x} dx, & \text{e) } \int (-2 - 2 \tan^2 x) dx, & \text{f) } \int \frac{2t^3 - 8t}{(t-2)(t+2)} dt.
 \end{array}$$

۳ - لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیری

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \int_0^1 \frac{1}{2} e^x dx, & \text{b) } \int_{\pi}^{2\pi} \cos x dx, & \text{c) } 2 \int_2^3 dt, \\
 \text{d) } \int_0^{\pi} \cos \pi \sin x dx, & \text{e) } \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}, & \text{f) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + 1}{\sin^2 x} dx, \\
 \text{g) } \int_{x_1}^{x_2} (2x-1) dx, & \text{h) } \int_0^8 (\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x}) dx, & \text{i) } \int_{\ln 2}^{\ln 3} e \cdot e^t dt, \\
 \text{j) } \int_0^1 \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}} du, & \text{k) } \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}} dx, & \text{l) } \int_a^b a^x dx.
 \end{array}$$

۴ - د بدلون یا سبستچیشن له لارې یې انتیګرال وشمیری.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \sqrt[3]{2x-7} dx, & \text{b)} \int \frac{dx}{-x+1}, & \text{c)} \int 2^{3x+6} dx, \\ \text{d)} \int \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right) dx, & \text{e)} \int \frac{dx}{1+(x+1)^2}, & \text{f)} \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)} dt, \\ \text{g)} \int x \cdot \sqrt[3]{x^2-7} dx, & \text{h)} \int \frac{3x dx}{-x^2+1}, & \text{i)} \int x \cdot e^{2x^2+3} dx, \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{j)} \int 7 \cos^7 x \sin x dx, & \text{k)} \int (1-2 \sin x)^3 \cos x dx, & \text{l)} \int \frac{\sin x}{\cos^n x} dx, \\ \text{m)} \int \cot t dt, & \text{n)} \int \frac{4x-5}{2x^2-5x+3} dx, & \text{o)} \int \frac{\text{Arc sin } u}{2 \cdot \sqrt{1-u^2}} du, \\ \text{p)} \int \frac{\sqrt{2 \ln x + 3}}{3x} dx, & \text{q)} \int e^x \cdot \cos e^x dx, & \text{r)} \int e^{\cos x} \cdot \sin x dx. \end{array}$$

۵. د تر زیرینو فورمیدلون وروسته او په بنسټیز اینټیگرال ۱۰ او ۱۱ د

بدلون له لارې یې اینټیگرال وشمیری،

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \frac{dx}{1+4x^2}, & \text{b)} \int \frac{dx}{2+4x^2}, & \text{c)} \int \frac{dx}{3+5x^2}, \\ \text{d)} \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}, & \text{e)} \int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}}, & \text{f)} \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}, \\ \text{g)} \int \frac{dx}{x^2-10x+34}, & \text{h)} \int \frac{dx}{3x^2-6x+30}, & \text{i)} \int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}. \end{array}$$

۶ لاندې ټاکلي اینټیگرالونه وشمیری

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(4x-1)^3}, & \text{b)} \int_{-1}^0 e^{3x} dx, & \text{c)} \int_0^2 2^{2x+1} dx, \\ \text{d)} \int_{-1}^1 \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5} dx, & \text{e)} \int_{e^3}^e \frac{1}{x} \ln x dx, & \text{f)} \int_2^4 \frac{e^t}{1+e^t} dt, \\ \text{g)} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x} \cos x dx, & \text{h)} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2}, & \text{i)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \cos x dx. \end{array}$$

۷. د جملې ۲۱. ۸ استعمال په بنسټ یې (ټوټه اینټیگرالونه) اینټیگرال کړی

- a)  $\int 0,2x \cdot \sin x \, dx$ ,      b)  $\int 4x^3 \cdot \ln x \, dx$ ,      c)  $\int \cos^2 x \, dx$ ,  
 d)  $\int \cos x \cdot \sin x \, dx$ ,      e)  $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$ ,      f)  $\int x \cdot (\cos x + 1) \, dx$ ,  
 g)  $\int x^3 \cdot e^x \, dx$ ,      h)  $\int \text{Arc sin } x \, dx$ ,      i)  $\int x^{\frac{1}{3}} \cdot \ln x \, dx$ ,  
 j)  $\int \text{Arc tan } x \, dx$ .

لاندي ټاکلي انتیگرالونه وشمیری

- a)  $\int_{-1}^1 x \cdot e^x \, dx$ ,      b)  $\int_1^2 \ln x \, dx$ ,      c)  $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ ,  
 d)  $\int_0^{\pi} e^x \cdot \sin x \, dx$ ,      e)  $\int_0^{\pi} x^3 \cdot \sin x \, dx$ ,      f)  $\int_0^{\pi} x^4 \cdot \sin x \, dx$ .

د هغې هواری دننه وشمیری، چې د وګر شوو مساواتو ګڼو څخه رابنده شوي وي

- a)  $y = e^{0,5x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$ ;  
 b)  $y = \frac{1}{2}x^3$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$ ;  
 c)  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $y = 0$ ,  $y = 9$ ,  $x = -3$ ,  $x = 3$ ;  
 d)  $y = \cos x$ ,  $y = 0$ .  
 e)  $y = \cos x$ ,  $y = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{5\pi}{6}$ ;  
 f)  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$ ,  $x = 4$ ;  
 g)  $y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$ ;  
 h)  $y = x^3 + 7$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ;  
 i)  $y = x^3 + 7$ ,  $y = x^3 - x^2 + 3x + 5$ ;  
 j)  $y = 3 - \frac{1}{2}x^4$ ,  $y = 3 - 4x$ ;

k)  $y = \frac{1}{x}$ ,  $3y + 3x = 10$ ;

l)  $y = \cos x$ ,  $y = \sin x$  ;

m)  $y = \sqrt{3x+1}$ ,  $y = 1$ ,  $x = 8$ ;

n)  $y = \frac{x^2}{4}$ ,  $y = \frac{8}{4+x^2}$ ;

o)  $y = x^2$ ,  $x = y^2$ ;

p)  $y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x^3}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$ ;

q)  $y = 2\sin x$ ,  $y = \sqrt{3} \tan x$ ,  $x = [0, \pi/2)$

f)  $y = \tan x$

کریښه چې په کې  $y = \tan x$  پرتو تکیو  $(0,0)$  او  $(\pi/4, 1)$  تیرېږي د  $x$ -محور باندې د ورکړ شویو مساواتو سره د گېرو ترمنځ هواره څرخي د راپورته شوي څرخیدونکي بدن یا جسم ډکي یا حجم وشمیري. پام دې وي، چې په ورکړ شوي حالت کې ورکړ شوي هواره د دوه کېرو څخه رابنده ده، نو له دې امله د لوي کېرې ډکي څخه د کوچني کېرې ډکي کمېږي.

a)  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = h$ ;      b)  $y = \sqrt[3]{x^2} + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$

c)  $y = e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ ; d)  $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ ;

e)  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $y = 2x$ ;      f)  $y = 4x - x^2$ ,  $y = 0$ ;

g)  $y = \sin x$ ,  $y = 0$ ,  $x \in [0, \pi]$ .

تراپخ (خلورگودی، چې تیک دوه اړخونه یو غبرگ وي) د کونجونو

$(1,0), (5,0), (1,3), (5,5)$  د  $x$ -محور باندې څرخي، وشمیري

الف) د جوړې شوي هوارې دننه

ب) د څرخیدونکي بدن ډکي

د کپرو  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $y = -x + 6$  ترمنځ هواره د  $-x$  محور

باندې څرخي، وشمیري.

الف) د کپري غوڅتکو د پروت محور سره

ب) د کپرو ترمنځ هواره

پ) د څرخیدونکي بدن ډکي

د هغه څرخیدونکي بدن ډکي وشمیري، کوم چی په اینتروال  $[\frac{\pi}{4}, \pi]$

کی د  $-x$  محور پورته خواته د کپرو  $y = \sin x$  او  $y = \cos x$  ترمنځ

پرت هواره، چی د  $-x$  محور باندې څرخیري!

۱۴ نیمگردی  $y = \sqrt{9-x}$  د  $-x$  محور باندې څرخیري. د گودیبرخی ډکي

وشمیري د پولو  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$  او ترمنځ!

۱۵ د څرخیدونکي ایلیپسوئید ډکي څومره لوي دي، کوم چی د  $-x$  محور

پورته خواته پرت هواره د ایلیپسی نیمی هوارې د رابندونکی  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

کپري سره د  $-x$  محور باندې تولیدوي؟

د څپرکي نور تمرینونه:

a)  $\frac{x^3 + 7x^2 + 9x - 5}{x + 5}$

b)  $\frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2 - 2}$

c)  $\frac{x^3 - 2x^2 + x - 5}{x^3 + 1}$

d)  $\frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$

e)  $\frac{x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 3}{x - 2}$

f)  $\frac{x^5 - x^4 + 1}{x^2 + 2}$

۱ - لاندې ناصلي پولینومونه دي د یوه ټول کسري پولینومونو او یوه اصلي پولینوم د جمعي په څېر ولیکل شي.

۲ - لاندې پولینومونه د جمعي په څېر ولیکئ

a)  $\frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$

b)  $\frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$

c)  $\frac{4x + 10}{x^2 + 6x + 8}$

d)  $\frac{-3x^2 + 19x - 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$

e)  $\frac{4x^2 + 6x - 20}{x^3 - 4x}$

f)  $\frac{14}{x^2 + 20x + 51}$

۳ - د لاندې اصلي پولینومونو په توپه کسرونو توپه ونه وکاروئ.

a)  $\frac{3x^2 + 5x + 10}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$

b)  $\frac{3x^2 - 18x + 36}{x^3 - 6x^2 + 9x}$

c)  $\frac{x^2 + 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1}$

d)  $-\frac{x^2 + 13x + 10}{x^3 - 5x^2}$

۴ - د لاندې اصلي پولینومونو په توپه کسرونو توپه گونه ورکړئ.

a)  $\frac{x^2 + 2x - 12}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5}$

b)  $\frac{4x^2 - 3x + 8}{x^3 - 2x + 4}$

c)  $\frac{8x^2 - 16x + 10}{x^3 - 4x^2 + 5x}$

d)  $\frac{x}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$

۵ - د لاندې پولینوم کسرونو په توپه کسرونو توپه گونه ورکړئ.

a)  $\frac{x^3 + 7x^2 + 17x + 17}{x^2 + 6x + 8}$

b)  $\frac{2x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 4}{x^2 - 4x + 3}$

c)  $\frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1}$

d)  $\frac{4x^3 + 16x^2 - 7x - 49}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$

۶ - و بنایئ، چې د F تابع د f تابع لومړنی تابع ده.

a)  $f(x) = 2x^2 + 4x - 7$  ,  $f(x) = 4x + 4$

b)  $F(x) = (x^2 - x)^3$  ,  $f(x) = 3 \cdot (2x - 1) \cdot (x^2 - x)^2$



$$c) F(x) = \sqrt{2x+1} \quad , \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$d) F(x) = 1 + \sin x \quad , \quad f(x) = 3x \cdot \cos 3x$$

$$e) F(x) = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \frac{4}{9}x^3 \quad , \quad f(x) = x^2 \cdot (\ln x - 1)$$

۷ - وینایې، چې د F او G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$$a) F(x) = x^3 + x + 4 \quad , \quad G(x) = x^3 + x + 1$$

$$b) F(x) = (x-3)^2 \quad , \quad G(x) = x^2 - 6x + 4$$

$$c) F(x) = \frac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x) = \frac{3x+5}{x+2}$$

$$d) F(x) = 1 + \sin x \quad , \quad G(x) = \sin x$$

۱۳ - لاندې ناکلې انتیگرالونه پیدا کړئ او تیکوالی یې وازمایې.

$$a) \int x^3 dx \quad b) \int 7 dx \quad c) \int x dx \quad d) \int (1-x^2) dx$$

$$e) \int (x + \frac{1}{x}) dx \quad f) \int (e^x + \cos x) dx \quad g) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx \quad h) \int \frac{5}{\cos^2 x} dx$$

$$i) \int u dx \quad k) \int (2 + e^x) dx \quad l) \int (1 + \ln x) dx \quad m) \int (\sqrt{x} + \sin) dx$$

۱۴ - د لاندې ټاکلو انتیگرالونو ارزښت وشمېرئ

$$a) \int_0^3 4 dx$$

$$b) \int_{-3}^{-1} x dx$$

$$c) \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

$$d) \int_1^e (2 + \frac{1}{x}) dx$$

$$e) \int_{-1}^0 e^x dx$$

$$f) \int_0^\pi \sin x dx$$

$$g) \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4 dx$$

$$h) \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$i) \int_{-2}^2 x^3 dx$$

$$j) \int_2^6 (1+x) dx$$

$$k) \int_1^2 (x^2 - x^5) dx$$

$$l) 0 \int_{-2}^2 (\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3}) dx$$

۱۷ د لاندې ټاکلو انتیگرالونو ارزښت وشمېری او ارزښتونه یې سره پرتله کوی.

$$a) \int_{-3}^1 3dx \text{ und } - \int_{-3}^1 3dx \qquad b) \int_0^1 (1+e^x) dx \quad \wedge \quad - \int_0^1 (1+e^x) dx$$

$$c) \int_{-\pi}^0 \sin x dx \quad \wedge \quad - \int_{-\pi}^0 \sin x dx$$

۱۷- هر دوه انتیگرالونه د یوه انتیگرال سره انځور کړی.

$$a) \int_0^{0.5\pi} \cos x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi} \cos x dx \qquad b) \int_{-1}^0 (x+e^x) dx + \int_0^1 (x+e^x) dx$$

$$c) \int_2^3 3x^2 dx + \int_3^5 3x^2 dx \qquad d) \int_{-2}^1 (2+x) dx - \int_4^1 (2+x) dx$$

۱۸- د لاندې ټاکلو انتیگرالونو لپاره ارزښت تخمین کړی.

$$a) \int_{-4}^{-2} e^{x+3} dx \qquad b) \int_0^8 \sqrt{1+x} dx$$

$$c) \int_3^5 2^{4-x} dx \qquad d) \int_0^{0.5\pi} \sin^2 x dx$$

۱۹- د کومو  $x$  ارزښتونو لپاره لاندې انتیگرالونه ورکړ شوي ارزښتونه لري؟

$$a) \int_1^x 5t^4 dt, \quad la(x) = 31 \qquad b) \int_0^x e^t dt, \quad la(x) = e - 1$$

۲۰- لاندې انتیگرالونه توابع ته د انتیگرال توابع وټاکي.

$$a) f(x) = x^2, \quad a = 3 \qquad b) f(x) = 2 + e^x, \quad a = 0$$

$$c) f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad a = 0 \qquad d) f(x) = 2, \quad a \in \mathbb{R}$$

۲۱- د لومړني انتیگرال په استعمال سره لاندې انتیگرالونه وشمېری.

$$\begin{aligned}
 d) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx, \quad e) \int \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}} dx, \quad f) \int (\sqrt[3]{x^4} + 1) dx, \\
 g) \int \sqrt[3]{x^{-3}} dx, \quad h) \int \frac{ax^2 + bx + cx^{-1}}{x^4} dx, \quad i) \int 3 \cdot 2^x dx, \\
 j) \int \frac{1}{2 \sin^2 x} dx, \quad k) \int \frac{1}{3 + 3x^2} dx, \quad l) \int \cos \varphi \cdot s \, ds, \\
 m) \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}, \quad n) \int \sqrt{t} \cdot \sqrt{t} \cdot \sqrt{t} dt, \quad o) \int (1-u^2)^{\frac{1}{2}} du. \text{ -----}
 \end{aligned}$$

۲۲ - د بیرته په بنسټیز اینټیگرال بدلون وروسته یې اینټیگرال ونیسئ:

$$\begin{aligned}
 a) \int \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2(1+x)^2} dx, \quad b) \int \frac{2 \sin 2x}{3 \cos x} dx, \quad c) \int \frac{7 \cos 2x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx, \\
 d) \int \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos^2 x} dx, \quad e) \int (-2 - 2 \tan^2 x) dx, \quad f) \int \frac{2t^3 - 8t}{(t-2)(t+2)} dt.
 \end{aligned}$$

۲۳ -- لاندې ټاکلی اینټیگرالونه وشمیرئ:

$$\begin{aligned}
 a) \int_0^1 \frac{1}{2} e^x dx, \quad b) \int_{\pi}^{2\pi} \cos x \, dx, \quad c) \int_2^3 dt, \\
 d) \int_0^{\pi} \cos \pi \sin x \, dx, \quad e) \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}, \quad f) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + 1}{\sin^2 x} dx, \\
 g) \int_{x_1}^{x_2} (2x-1) dx, \quad h) \int_0^8 \left( \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} \right) dx, \quad i) \int_{\ln 2}^{\ln 3} e \cdot e^t dt, \\
 j) \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}} du, \quad k) \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}} dx, \quad l) \int_a^b a^x dx.
 \end{aligned}$$

۲۴ - د بدلون یا سبټیچوشن قاعدې استعمال له لارې یې اینټیگرال وشمیرئ:

$$\begin{aligned}
 a) \int \sqrt[3]{2x-7} dx, \quad b) \int \frac{dx}{-x+1}, \quad c) \int 2^{3x+6} dx, \\
 d) \int \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right) dx, \quad e) \int \frac{dx}{1+(x+1)^2}, \quad f) \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)} dt,
 \end{aligned}$$

$$g) \int x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 7} dx, \quad h) \int \frac{3x dx}{-x^2 + 1}, \quad i) \int x \cdot e^{2x^2 + 3} dx,$$

۲۵- د تر زیریوني فورمبدلون وروسته او په بنسټیز اینتیگرال 10 او 11 د بدلون له لارې یې اینتیگرال وشمیری

$$\begin{aligned} a) \int \frac{dx}{1+4x^2}, \quad b) \int \frac{dx}{2+4x^2}, \quad c) \int \frac{dx}{3+5x^2}. \\ d) \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}, \quad e) \int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}}, \quad f) \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}, \\ g) \int \frac{dx}{x^2-10x+34}, \quad h) \int \frac{dx}{3x^2-6x+30}, \quad i) \int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}. \end{aligned}$$

۲۶- لاندې ټاکلی اینتیگرالونه وشمیری:

$$\begin{aligned} a) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(4x-1)^3}, \quad b) \int_{-1}^0 e^{3x} dx, \quad c) \int_0^2 2^{2x+1} dx, \\ d) \int_{-1}^1 \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5}, \quad e) \int_e^{e^x} \frac{1}{x} \ln x dx, \quad f) \int_2^4 \frac{e^t}{1+e^t} dt, \\ g) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x} \cos x dx, \quad h) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2}, \quad i) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \cos x dx. \end{aligned}$$

۲۷- لاندې ټوټه اینتیگرالونه اینتیگرال کړي:

$$\begin{aligned} a) \int_0^1 2x \cdot \sin x dx, \quad b) \int 4x^3 \cdot \ln x dx, \quad c) \int \cos^2 x dx \\ d) \int \cos x \cdot \sin x dx \quad e) \int x^2 \cdot \sin x dx \quad f) \int x \cdot (\cos x + 1) dx \\ g) \int x^3 \cdot e^x dx, \quad h) \int x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x dx, \end{aligned}$$

---

د ډاکتر ماخان شینواری لیکني او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواری چاپ شوي لیکني:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :  
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .  
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,  
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهني پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له  
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهني ستر کتاب : د شمیرپوهني برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد  
لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ  
او دا نوي لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځني ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

خلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د کټي – او کټي د کټي شمیرنه ، د احتمالي شمیرنه کتاب د بنوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انگرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرېون ( دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولگه

*Mathematical Formulas*

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،، د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکټر ماخان شینواري د ،، د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکټر ماخان ،، میری،، شینواري لیکني او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برینکن لیکني چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دویم ټوک

۳ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالي شمیرنه د بنوونځي لپاره

۵ - احصایه یا ستاتیسټیک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - انالیزی ۱

۷ - انالیزی ۲

۸ - کرنبیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ - فنکشنل انالیز

۱۲ - وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له [www.grundstudium.info/linearealgebra](http://www.grundstudium.info/linearealgebra) څخه: کرنبیز الجبر

۱۴ - Georg Gutenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره: دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره، همداسې د بنوونکو او زده‌کوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېری پوهنه یا ست تیوري

۱۹ - د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)



- ۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک
- ۲۱ - د شمیر پوهنې گډې وډې لیکنې
- ۲۲ - داهم ژباړه ده، خو لیکونکې یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیگرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې
- ۲۳ - د شمیرپوهنې انگریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري
- ۲۴ - د شمیرپوهنې پښتو انگریزي ډکشنري
- ۲۵ - د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه
- ۲۶ - د زره له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)
- ۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې و به غزیري.
- نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي
- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوتونو څخه ، چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:
- د گروپونو تیوري
- د بنوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه
- له پنځم ټولگي څخه تر اومم ټولگي پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره بڼه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېشي)

## د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميروي شينواری د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ هـ لمریز کې د شينواریو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترگې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړني ښوونځي (د لومړنيو زده کونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسې له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې (ښوونځي له لومړي ټولگي پیل او د دویم ټولگي څخه گام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپټمبر د کابل طب پوهنځي. له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د ۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فیروزي تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر (صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانگه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

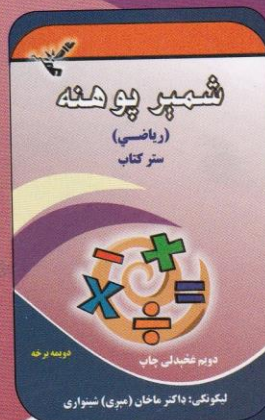
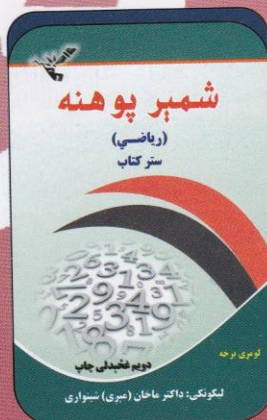
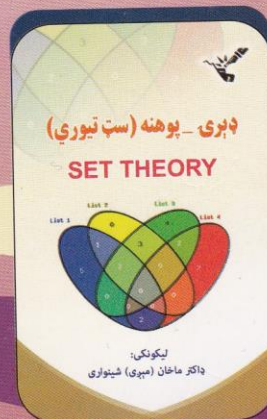
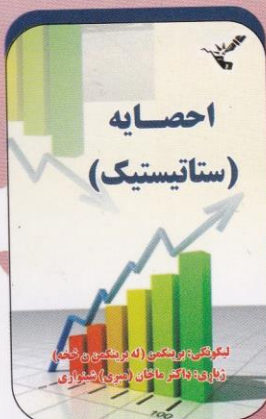
ماخان ميروي په ۱۹۷۲ کې له لري د ميرمن ښاپيري سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له ميرمن ښاپيري سره په ۱۹۶۳ ز کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ويانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز کې دوه بچيان وڅښل، چې څانگه او اباسين نوميري. څانگه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکټره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه ساپکولوژي لوستلي.

ماخان شينواري بي کاره نه دی او لږ تر لږه له ۱۹۹۷ څخه همدا د کتابونو ليکلو اوو د ژباړې دنده يې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شوني پولې تازه وساتي.



ډاکټر ماخان (مېرې) شینواری



د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه - جرمني

VEREIN ZUR FORDERUNG DER AFGHANISCHEN KULTUR E.V

د خپرونو لړ (۱۳۰)

**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**