شمیر پوهنه

(ریاضي)

ستر کتاب

Ketabton.com

دویمه برخه

دویم غځېدلی چاپ

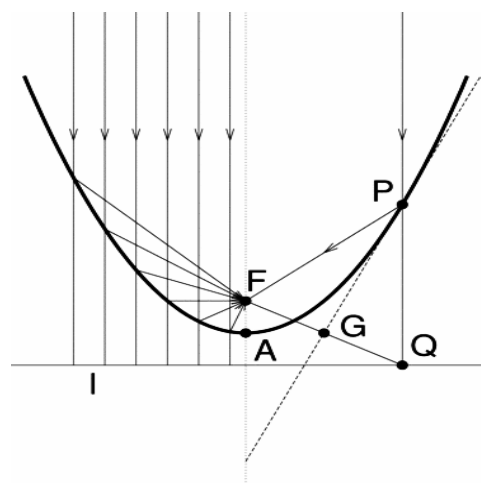
لیکونکی: ډاکتر ماخان (مېرې) شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

(ریاضي)

سترکتاب



دویم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میرې شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوي ښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونده اخستې وي.

makhanshinwari@gmail.com

کتاب پېژندنه

د کتاب نوم: د شمیرپوهنه ستر کتاب (دویمه برخه)

لیکونکی: ډاکتر ماخان،، میرړی،، شینواری

د خپریدو لړۍ

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندویې ټولنې تخنیکي څانګه

makhanshinwari@gmail.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې لیکونکي یا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شمیرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیواولو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودریږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیې له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کتّه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لرې. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندي ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتورې ودې ټولنه،، جرمني، د غړو، مرستندويانو او په تيره بيا د مشر تابه څخه زياته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه يې د دې ليکنو زياته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کليوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زياته مننه کوم:

د ښاغلي دپلوم انجنير ريحان الدين حساس، ښاغلي دپلوم انجنير محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترماڼوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بيان، ښاغلي دپلوم انجنيرمحمد ايوب بيان، همداسې زما د ملګري اروانښاد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنير او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانګې شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له ميرمن ښاپرۍ څخه ډېره زياته مننه، چې زما د ليکنو- نه دا چې مخه يې نه ده نيولې- پوره ملاتړ کړي.

بيا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

نوې سریزه

سریزه

افغاني، یوناني ، لاتین الف ب

شمیرپوهنیزې نخښې

لومړی برخه

۱ ۰	د شمیرپوهنې سم اند یا منطق	۱
۱ ۰ ۱	پوهنیزه ژبه او پیدایښت یا طبیعي ژبه	۱
۱ ۰ ۲	د شمیرپوهنې سم اند بنسټیزه کلیمې	۳
۱ ۰ ۳ ۰ ۱	ثابتې ، اووښتونې یا واریابلې ، ترمونه	۳
۱ ۰ ۲ ۰ ۲	وینا	۵
۱ ۰ ۲ ۰ ۳	د دوه ارزښتوالي اصول یا پرینځیپ	۷
۱ ۰ ٤	وینا فورم یا ۰بڼه او کوانتورونه	۱۳
۱ ۰ ٥	اړیین او پوره کیدونکي شرطونه	۲۸
۱ ۰ ٦	د شمیرکلیمه یا د لغاتو	۳۱
۱ ۰ ۷	برابرون او نابرابرون	۳۳
۱ . ۸	تمرینونه	۳۸
۲ ۰	ډیر ی پوهنه	۳۹
۲ ۰ ۱	د ډیری پوهنې کلیمه	٤۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . ۲ د ډېريو ترمنځ اړيکې ۴۵

ربخډېرۍ ۴۶

د يوې ډېرۍ توان يا تواندېرۍ (توانسټ) ۴۸

۲ ۰ ۳ په ډيرۍ کې کاروني يا عمليې(۱) ۵۰

غوځډېرۍ يا متقاطعډېرۍ ۵۲

د يوې ډېرۍ يا سټ کمپليمنت ۵۷

۲ ۰ ٤ ځيرونه ۵۸

تمرينونه ۶۷

۳ ۰ د رييل ګڼونو سره د شميرلو بنسټيزې... ۷۰

۳ ۰ ۱ د ګڼونو- يا اعدادو سيستم جوړښت ۷۰

۳ ۰ ۱ ۰ ۱ پيداينتي يا طبيعي ګڼونه ۷۰

۳ ۰ ۱ ۰ الف د پيداينت يا طبيعي ګڼونو جوړښت ۷۱

۳ ۰ ۱ ۰ ب د پيداينت ګڼونو انځورونه او شميرنه ۷۲

۳ ۰ ۱ ۰ پ د شميرنې بنسټيز قوان ين ۷۸

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ټولګڼونه ۸۴

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ الف د ويش تيوري ۸۶

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ب غټ ګډ پرويشونی(بزګترين مقسوم عليه ...) ۸۸

۳ ۰ ۱ ۰ ۳ راشنلګڼونه ۱۰۶

۳ ۰ ۱ ۰ ٤ رييلګڼونه ۱۰۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

١٠٢٠٣	ماتشمیرنه	١١٩
٣.٣	تمرینونه	١٣٠
٠٤	پوتنخ یا توان ، ریښه یا جذر	١۴١
١٠٤	توان د ټولګنیز په جګ یا اکسپوننت	١۴١
٢٠٤	ریښه او توان د راشنل اکسپوننت یا جګګن سره	١۴۴
٣٠٤	توان د ریيلګڼ اکسپوننت یا جګګڼ سره	١۵١
٤٠٤	ټولګه	١۵٢
٠٥	لوګاریتم	١۵٨
١٠٥	د لوګاریتم کلیمه	١۵٨
٣٠٥	ټولګه	١۶۶
٠٦	ګونومتري	١۶٩
١٠٦	بنسټیزه ځمککچپوهنه یا هندسه	١۶٩
١٠١٠٦	ټکی او کرښه	١۶٩
٢٠١٠٦	کونج	١٧١
٣٠١٠٦	درېګوډی	١٧۴
٤٠١٠٤	کونکروانیخ او ورته والی	١٧٨
٥٠١٦٠	ولاړکونجیز دریګوډی	١٨۴
٢٠٦	په ولاړکونجیز دریګوډی کې د ...	١٨٨
٣٠٦	په یوونګردی کې د کونج بلواک ..	١٩٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ . ٤	د ساین او کوساین جملې	۱۹۵
٦ . ٥	تریگنومتریکي کتمتوالی	۲۰۵
۶ . ۵	تریگنومتریکي یا کونجکچیز فرمولونه	۲۱۵
۷ .	کمپلکس گڼونه	۲۲۲
۸ .	د ښوونې یا ثبوت متودونه	۲۳۵
۸ . ۱	سیده ښوونه	۲۳۵
۸ . ۲	ناسیده ښوونه	۲۳۷
۸ . ۳	د پوره ایندکشن له لارې ښوونه	۲۳۹
۹	لاینیز برابرون له یوې اوړیدونې یا ...	۲۴۳
۹ . ۱	لاینیز برابرون	۲۴۴
۱۰	کومبیناترویک، د بینوم جمله	۲۶۶
۱۰ . ۱	فاکولتیت یا فاکتوریل	۲۶۶
۱۰ . ۲	د بینوم ځله ونه	۲۶۷
۱۰ . ۳	د بینوم جمله	۲۷۰
۱۰ . ٤	کومبیناتوریک	۲۷۴
۱۰ . ٤ . ۱	پرموتیشن	۲۷۵
۱۰ . ٤ . ۲	واریيشن	۲۸۰
۱۰ . ٤ . ۳	کمبینیشن	۲۸۶
۱۰ . ٤ . ٤	د پرموتیشن، واریيشن او	۲۹۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ ۰	لانیز الجبري برابرونونه	۲۹۵
۱۱ ۰ ۱	لانیز برابرون له دوه اوړیدونو یا ...	۲۹۶
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۳	دویمه درجه دیترمینانت او د کرامر...	۳۰۷
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤	د ګاوس الګوریتم	۳۱۲
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٥	له دوه وو زیات برابرونونه له دوه ...	۳۱۶
۱۱ ۰ ۲	لاینیز برابرونونه له درې	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۱	یو برابرون له درې ناپیژندونو سره	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۲	دوه برابرونونه له درې ...	۳۱۸
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۳	دریمه درجه دیترمینانت او د ...	۳۱۹
۱۱ . ۲. ۴	د ګاوس لګوریتم	۳۲۲
۱۱ ۰ ۳	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳۲۵
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱	د n -م درجې دیترمینانت او د ...	۳۲۶
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۲	د ګاوس الګوریتم	۳۲۸
	تمرنونه	۳۳۳
۱۲	الجبري برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۱	نالاینیز برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۲	ځلورئ ئیز یا مربع برابرونونه	۳۴۳
۱۲ ۲۰ . ۱	د دوه په جګ برابرونونه ، د وییتا جمله	
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۲	ځلورئ برابرونونه ، چې په نورمال	۳۵۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ ۰ ۲ ۰ ۳	د n -م درجې ځانګړي برابرو...	۳۵۱
۱۲ ۰ ۳	دریمه درجه برابرونونه	۳۵۷
۱۲ ۰ ٤	د ریښې برابرونونه	
۱۳	ترانسڅیندنت برابرونونه	۳۷۵
۱۳ ۰ ۱	لوګاریتم برابرونونه	۳۷۵
۱۳ ۰ ۲	اکسپوننشل- یا په جګګڼ برابرونونه	۳۸۰
۱۳ ۰ ۳	ګونومتریکي یا کنجکچیز برابرونونه	۳۸۵
۱٤	له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت ..	۳۹۶
۱٤ ۰ ۱	نابرابرونونه	۳۹۶
۱٤ ۰ ۱ ۰ ۱	بنستیزې کلیمې او شمیر قوانین	
۱٤ ۰ ۱ الف	اینتروال	۳۹۷
۱٤ ۰ ۱ ۰ ۲	نابرابرونونه له یوې ناپیژندونکی...	۴۰۰
۱٤ ۰ ۱ ۰ ۳	د نابرابرونونو سیستم ...	۴۰۹
۱٤ ۰ ۱ ۰ ٤	نابرابرونونه له دوه ناپیژندونکو سره	۴۱۱
۱٤ ۰ ۲	برابرونونه او نابرابرونونه	۴۱۴
۱٤ ۰ ۲ ۰ ۱	له مطلقه ارزښت سره شمیرنه	۴۱۴
۱٤ ۰ ۲ ۰ ۲	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۱۵
۱٤ ۰ ۲ ۰ ۳	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۲۰
۱۵	بلواک یا فنکشنونه یا طابع	۴۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

١٥ ٠ ١ د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه ۴۳۰

١٥ ٠ ٢ د بلواک خویونه ۴۳۳

د ستر کتاب دویمه برخه

١٦ د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ... ۴۶۶

١٦ ٠ ١ کرښه ۴۶۶

١٦ ٠ ٢ ګردۍ ۴۷۵

١٦ ٠ ٣ ایلیپسې ۴۸۲

١٦ ٠ ٤ هیوپربول ۴۸۷

١٦ ٠ ٥ پارابول ۴۹۲

١٦ ٠ ٦ ټولګه ۴۹۴

١٧ وکتور شمیرنه ۵۰۲

١٧ ٠ ١ د وکتور پیژند یا تعریف، ۵۰۲

په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه ۵۰۲

١٧ ٠ ٢ د دوه وکتورونو سکالار ځل ۵۰۹

١٧ ٠ ٣ د دوه وکتورونو وکتوري ځل ۵۱۲

١٧ ٠ ٤ غبرګهواریز یا موازي الاضلاع ضرب ۵۱۷

١٧ ٠ ٥ په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو ....

١٧ ٠ ٥ ٠ ١ د یوې کرښې وکتوري انځورونه ۵۲۱

١٧ ٠ ٥ ٠ ٢ د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه ۵۲۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۷ ۰ ۵ د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ۰بڼه ۵۲۵

۱۸ پرلپسې او پرلپسې لړۍ ۵۳۳

۱۸ ۰ ۱ پیل ۵۳۳

۱۸ ۰ ۲ د ګڼون - عددونوپرلپسې کلیمه ۵۳۴

۱۸ ۰ ۲ ۰ ۱ مونوتوني پرلپسې ۵۴۲

۱۸ ۰ ۲ ۰ ۲ اریتمیتیکي پرلپسې ۵۴۵

۱۸ ۰ ۲ ۰ ۳ هندسي پرلپسې ۵۴۷

۱۸ ۰ ۲الف لړۍ ۵۵۰

۱۸ ۰ ۲ الف ۰ ۱ هندسي لړی ۵۵۵

۱۸ ۰ ۲ الف ۲ اریتمیتیکي لړۍ ۵۵۷

۱۸ ۰ ٤ د پرلپسې او لړیو د پولې ... ۵۵۸

۱۹ د فنکشنونو پولې او ناپریکیدنه ۵۷۸

۱۹ ۰ ۱ بنسټیزې کلیمې

د پولو یا حدونو خویونه ۵۸۶

د راشنل، کسري یا نسبتي ۵۹۲

د مثلثاتي یا دریکوڼي کچ توابعو پولې ۵۹۶

ناپرېکیدنې ۶۰۴

۱۹ ۰ ۲ په پوله ارزښت او ناپریکیدنې څو جملې

۱۹ ۰ ۳ د ناپریکیدونکو فنکشنونو خویونه ۶۱۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ ٠ ١٩ د بنسټيزو فنکشنونو ناپرېکيدنه

د ځيرکي ټولګه ٦١٦

٢٠ دفرنځيالشميرنه ٦٢٦

د تابع تغيرمنځ ارزښت(منځنی قيمت) ٦٢٦

په يوه ټکي کې د تابع ګراف ... ٦٢٨

د لحضوی(سترګورپ) تغير... ٦٣٠

کمښتوېش (تقسيم تفاضل؟) ٦٣١

دفرنشلوېش يا رابيليدنه يا مشتق ٦٣٣

کمښتوېش او مشتق يا رابيليدنه ٦٣٦

د x_0 په ځای کې د فنکشن مشتق ٦٤٣

د تانجنت پيژند او خويونه ٦٤٧

د تانجنت او عمود يا ولاړ ټوليز مساوات ٦٥٠

په بيديا کې جګوالی ٦٥٢

٢٠. ١ ٠ ١ الف : د تانجنت يا جګيدني غوره والی

٢ ٠ ٢٠ د فرنځيال يا رابيليدنې يا مشتق قاعدې ٦٥٦

د درېګوډيزو يا مثلثاتي ٦٦٢

د اکسپوننشل يا په جګ توابعو.... ٦٧٠

د مشتق استعمال په طبيعي پوهن کې ٦٧٦

د ايمپليځيت توابعو مشتف ٦٨٣

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنسټيزو رابيليدنو(مشتقونو) جدول ۶۸۶

ټولګه ۶۸۸

د يوې تابع د مشتق قابليت ۶۹۱

د معکوس- - يا په ځټ توابعو مشتق ۶۹۸

۲۰ .۳ د بنسټيزو بلواکو رابيليدنه ۷۰۱

د رول قضيه ۷۱۰

د وايرشتراس قضيه ۷۱۱

۲۰.٤ افراطي ارزښتونه او اوړونټکی

د دفرنشل منځ ارزښت قضيه ۷۱۲

يوعړيزې توابع ۷۱۵

ځای اړوند افراطي ټکي ۷۲۰

د انعطاف – يا اوړونټکی ۷۲۴

د کوږ يا منحني بحث يا خبرې ۷۳۳

ناټاکلي حدونه يا پولې ۷۴۶

د برنولي او د لو پيتال ۷۵۰

۲۰ . ۵ د غټو ګټو پرابلم ۷۵۷

تمرينونه ۷۶۷

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ۷۷۸

۲۱ انتيګرالشميرنه ۷۸۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

	پیلراوړنه	۷۸۷
۲۱	انتیګرالشمیرنه	۷۸۹
	د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال	۷۹۰
	بنسټیزه یا لومړنی تابع	۷۹۴
	سطحه او لومړنی تابع	۷۹۶
	ناټاکلی انتیګرال	۷۹۹
	د ټاکلي انتیګرال شمیرنه	۸۱۲
	تکمیلیدونکي بنسټونه	۸۱۴
	د ټاکلي انتیګرال ځخه و ټاکلي ...	۸۱۵
	د انتیګرالونې قاعدې	۸۱۷
	د اکسپوننشل توابعو انتیګرال	۸۱۹
	د لوګاریتمي توابعو انتیګرال	۸۱۹
	بدلون قانون	۸۲۱
	توابع، چې بې د بدلون له لارې...	۸۲۷
	ټوټه انتیګرالونه	۸۳۲
	د ټوټه انتیګرالونې لار	۸۳۴
	د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال	۸۳۸
	ناپای(مبهم) انتیګرال	۸۴۱
	د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې	۸۵۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتيګرالشميرنې استعمال ۸۶۲

تمرينونه ۸۸۸

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ ته چمتو ليکنې او ژباړې

د ژباړې يا ليکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

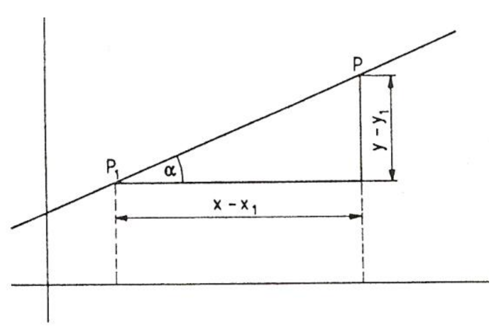
۱۶ - د سطحې شننیزه (تحلیلي) هندسه

په دې برخه کی یوڅود تحلیلي (شننیزې یا سپړنیزې) ځمککچپوهنې یا هندسي ټاکلي پرابلمونه څیړل کیږي.د تحلیلي هندسي بنستیزه تګلار به څرګندده (وښول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننیزې یا تحلیلي څرګندونویی د هندسي خویونو جوړښت ښایي.

۱۶ . ۱ کرښه

د هندسي ټاکندو ټوټو له لارې مختلف امکانات شته دی، چی یوه کرښه یواځنی کره تعین کړاي شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښبرابرونونو یا - مساواتو مختلفی بڼی شته دی. یوه کرښه د یوه ټکي او د هغه د لور(سمت) له لارې ټاکل کیدي شي . (ټکی او د ټکی میلان معلوم دی) .

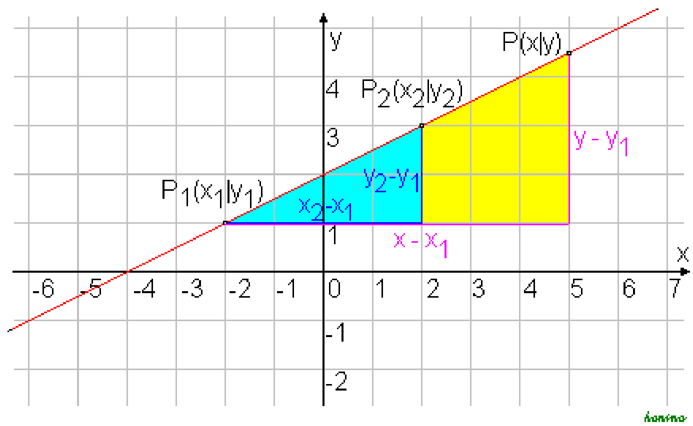
دلته دې(P1(x1 , y1 دا ټکي وي. $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ دې د جګیدو کونج،وي، چی د کرښی لور ټاکي (خ ۱۶ . ۱) او(P(x,y په کرښه یو اووښتونی (واریابل) ټکی دی۰



(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د کرښې د ميلان $\tan\alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته څېره دې وکتل شي(لاددې څېره هم په همدې موخه کښل شوې ده))



له دې څخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1);.....................(16,1)$$

پورته د کرښې ټکی لوربرابرون

که د y په محور P1وټاکل شي د کواوردیناتو x1= 0, y1 = b سره، نو له (۱۶ . ۱)سملاسي په لاس راځي: (y - b = m (x - 0 په همدې ډول(⇔)

$$y = mx + b \qquad (16 . 2)$$

دا پورته برابرون د کرښمساواتونورمال فورم (بڼه) بلل کيږي

يوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

دا دوه ټکي دې(P1(x1 , y1 او(P2 (x2 , y2 وي، د x1|=x2 سره ، (خيره ش ۱۶ . ۲) د جګيدونکی يا تنجنت $\tan\alpha = m$ لپاره داسی دي:

m = (y - y1) /(x -x1)

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

m = (y2-y1)/(x1-x2) = (y2-y1)/(x2-x1)

له کومو چې لاس ته راځي

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x \ - x_1}; .... (16,3)$$

پورته د کرښې دوه ټکيزبرابرون

ځيره ده

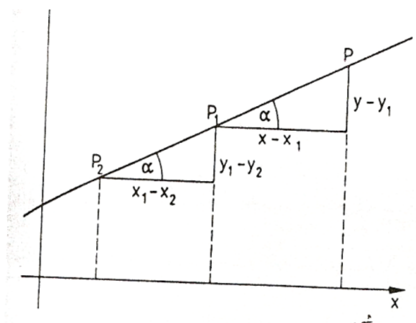


Bild 16.2 ځيره

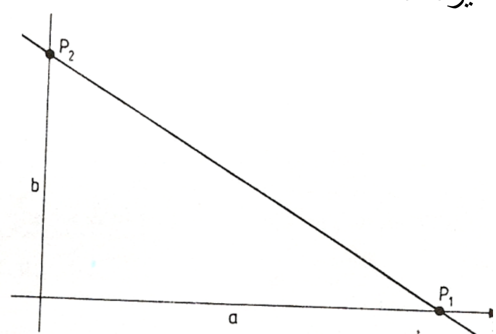


Bild 16.3 ځيره

که د x - محور باندې د P1 ټکی ، د کواوردينات x1 = a |= 0 , y1 = 0 سره وټاکو او ټکیP2 دy- محور باندې د کواوردينات x1= 0, y2 = b|= 0

سره وټاکو، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:

(y - 0) / (x - a) = (b - 0)/ (0 - a)

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a+y/b = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوځي برابرون

ځلور پورتنی کرښمساوات ټول په x او y کی لاینیز دي.د مساوات عمومي فورم)یا ټوليزه بڼه (داسی دی:

Ax + By + C = 0 (16 . 5)

د کرښبرابرونونو ټوليزه بڼه(عمومي فورم)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري يا په بر کی نيسي

$y = y_0$ (A = 0 ,B|=0)

او(x=x0(A|=0,B=0 چې د x - محور اوپه همدې ډول د y - محور ته غبرګي کرښي دي، په داسی حال کی چې تراوسه دومه لا نه ده څېړل شوې

بېلګه ۱۶ . ۱:

د کرښی برابرون يا لاينيز برابرون، چې له(P(-2 , 3 ټکي تيرېږي او د جګوالي

کونج $\alpha = 30°$ يی د $m = \tan\alpha \frac{1}{3}\sqrt{3}$ له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسی ليکل

کېږي $y - 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x+2)$

او نورمال فورم يي په لاندې ډول دی

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بېلګه ۱۶ . ۲ :

د لاينيزبرابرون يا دکرښوبرابرون په ټکو(P1 (3/2 ,-2 او(P2(1 , -4کی د (۱۶ . ۳)سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y+2}{x-\frac{3}{2}} = \frac{-y+2}{1-\frac{3}{2}}$$

له دې لاس ته راځي: $y + 2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x - \frac{3}{2})$

نو نورمال فورم y=4x-8 لرو(اته ناسم، په ځای يې شپږ دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۶ . ۳ :

کرښه د y =-(3/2)x+1 برابرون سره د y - محور په(P1(0,1 ټکي کی غوځوي او
جګوالی یی 2/3 - دی ، دا په دې مانا چی د x - ارزښت تغیریدل په یو دy - ارزښت
په 2/3 - تغیروي، په دې ډول دوم د کرښې ټکی لاس ته راځي. د بیلګی په توګه
p2 (0+1 , 1-(3/ 2)=p2(1,-1/2)

(ځیره ۱۶ . ۴ لاندې کښل شوې)

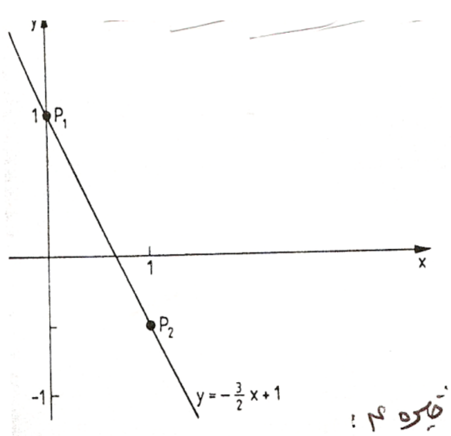
بیلګه ۱۶ . ۴ :

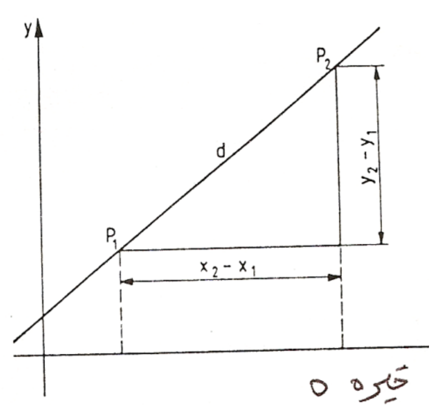
د کرښی د برابرونونو عمومي فورم x-2y-6 = 0 څخه دغوڅیدو فورم لاس ته راځي
x / 6 + y / 3 = 1
کرښه دکواوردینات محورونه په دې ټکو(P1(6 , 0), P2(o,-3 کې غوځوي۰
په یوه کرښه د دوه ټکو(P1(xx,y1),P2(x2,y2ترمنځ فاصله (که د کرښې واټن P1P2
وي د پیتاګوراس(فیساغورس) له جملی (ځیره . ۱۶ . ۵) داسی ده d =

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};..........................(16,6)$$

پورته د ټکو P1 او P2 ترمنځ واټن

ځیرې ۱۶ . ۴ او - ۵





(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه ۱۶ . ۵ :

د درېګوډي ABC د اړخونواوږدوالی، چی کونجټکي يی دادي(-)A(3,1),B

۱,۱)،C(2,5 په لاندې ډول دئ

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښي (نه کتمتی) چی (یو د بلی سره) غبرګي نه وي ټيك یو غوڅټکی لري. دا چی دا ټکی په دواړو کواور ديناتو پروت دی ، نو د دواړو کواورديناتو برابرون برابرون بايد پوره کړي . په دې حالت کي د غوڅټکي کواورديناتو، د دوه لاينيزو برابرونونو سره چی دوه اوښتونې يا

ناپيژندونکی (مجهولی) ولري، د يوه سيستم يوائځنی کره اوبيونه ترې لاس ته راځي. په ټوليزه توګه دا باور لري: که يو برابرونسيستم چی د دوه کرښو د برابرونونو څخه جوړ وي، او يو يوائځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښي يو بل په دې ټکي کی سره پرې کوي.

که ناپای ډيرې اوبيونې شته وي، نو په دې حالت کی برابرون همغه يوه کرښه ښايي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښي يوبل سره غبرګي ځغلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بېلګه ۱۶ . ۶ :

د g1 : y = 3x-2 کرښی پروتځاي (موقعيت) د لاندې کرښو

الف) g2: -2x+y = 1,

ب) g3: 3x -y=5, ,

پ) g4 : -x+(1/3)y=-2/3

سره څيرو

اوبيونه : د g1 برابرونونو څيره داسی بدليږي : 3x-y=2

الف) د برابرونونو سيستم 3x-y=2، -2x+y=1

ټيك يوه اوبونه لري: x1=3 , y1=7

ددې څخه څرګنديږي چی ټکی(S(3 , 7 د کرښو g1 او g2 غوڅټکی دئ .

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د برابرونونو سيستم

3x - y = 2

3 x - y = 1

اوبی نه لري : برابرونونه يو بل ردوي يه نه زغمي . د g1 او g2 کربنې يو د بل سره غبرګي دي

پ) د برابرونونو سيستم 3x-y=2

-x+(1/3)y=-2/3

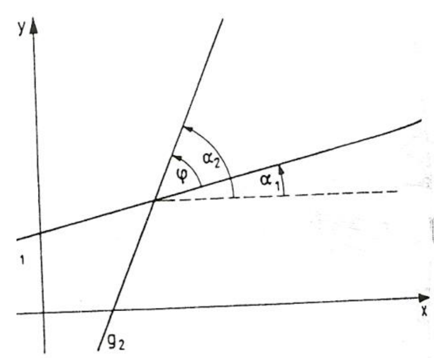
ناپای ډير ې اوبيوني يا حلونه لري. برابرونونه يو بل سره برابر يا يو بل ته ورته دي. که په ۳ ضرب شي يو همغه پورته برابرون ترې لاس ته راځي .

g1 او g2 دوه کټ مټ برابرونونه دي ۰

که د دوه کربنو

g 1 : y = m1x + b1 g2 : y = m2x + b2

غوځکونج ϕ ټاکو، نو د دواړو کربنو جګید کونجونو $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ کمون (کمښت يا توپير)جوړوو (ځ ۱۶ . ۶)



ځېره ۱۶ . ۶

د کربنې له برابرونونو پوهيږو $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$

د زياتون تيورم (بنستيزه جمله) (برخه ۶ . ۵) ځخه د $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ لپاره (پر تله برخه ۴ . ۵) باوري ده

$$\tan\phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan\alpha_2 - \tan_1)/(1 + \tan\alpha_1 . \tan\alpha_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم څخه چې د $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 . m_2};........................(16,7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج دی.

دا په دې پورې اړه لري چې ایا $\phi > 0 \vee \phi < 0$ د پورته څېړې ۱۶ . ۶ کونج پڅ او که تیره دی.

بیلګه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو g1:y=x-1 او g2:y=(7/4)x+1 غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) څخه لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{\frac{7}{4} - 1}{1 + 1.\frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255°$$

د g1 او g2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی : $180 - \phi = 164,745°$

د دوه کرښو یو بل ته ځانګړي حالتونه:

۱ – کرښې یوبل سره غبرګې ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180° \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 . m_2} = 0$$

ګورو چې د m2 - m1 = 0 لپاره باور لري، نو m2 = m1

(دلته باور لري : $m_1 . m_2 = m_1^2 \neq -1$)

۲ - کرښې یو په بل (نیغې) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90° \Rightarrow \tan\phi = (m - m)/(1 + m.m) = \infty$$

دا حالت د 1+m1.m2 = 0 لپاره منځ ته راځي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعنی د$m2= -1/m1$ لپاره $(m1|=0,m2|= 0)$

په کرښه($y=y0$ $(m1=0$ باندې کرښه($x=x0(m2=oe)$ نیغه ولاړه ده

د غبرګوالی لپاره شرطونه

$$m2 = m1 \qquad (16, 8)$$

د اورتوګونالیتی Orthogonalität(یو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

$$m2 = -1 / m1 \qquad (16 . 9)$$

بیلګه ۱۶ . ۸ : دکرښی g2 برابرون دې وټاکل شي چی له ټکي(P (2,-1 تیریږي، او له کرښی $g1 : y = -2x +1$ سره الف (غبرګه او ب(اورتوګونال (نیغه) ځغلي اوبوله:

الف) د g2 کرښی میلان (جګوالی $m2 = m1 = -2$)دی. پام (۱۶ . ۱) ته دکرښي g2برابرون لپاره باور لري : $y+1=-2(x-2$) همداسی $y = -2x +3$

ب) د g2 کرښي میلان یاجګیدنه ده $m2=-1/m1=1/2$ د(۱۶ . ۱) سره سم د g2 کرښي برابرون دی: $y+1=(1/2)(x-2) <=> y=(1/2)x-2$

بیلګه ۱۶ . ۹ :

د کرښی برابرون ټاکل کیږي چي د(P1(1/3,-1/6 ټکی تیریږي او په کرښه چی له ټکو(P2(-1,1 او(P3(-2,-1 تیریږي، ولاړه وي.

ځواب : کرښه چي له P2 ,P3 ټکو تیریږي، و (۱۶ . ۳) ته په پام لاندې برابرون لري $(y-1)/(x+1)=(-1-1)/(-2+1) = 2 <=> y = 2x +3$

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی میلان یا جګوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د p_1 څخه تیریدونکی کرښي برابرون د m_2 میلان سره د(۱۶ . ۱) له مخی دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y+(1/6)=-(1/2)(x-173) \Leftrightarrow y=-(1/2)x$

بيلګه ۱۶ . ۱۰ :

د $g1:2x-y-1=0$ او $g2: 3x+2y=5$ کرښو د غوځتکي S واټن له ټکي($P(6,13$ څومره دئ او د کرښي برابرون څنګه دئ چي د کواوردينات له سرچينی تيريږي او د S او P څخه تيريدونکی کرښه باندې ولاړه کرښه وي؟

ځواب : د غوځتکي کواوردينات د لاندې برابرونونو سيستم څخه لاس ته راځي

$2x-y=1$

$3x+2y=5$

يعنی: $x_S=1 , y_S=1$

د S او P ټکو ترمنځ واټن له (۱۶ . ۶) څخه لاس ته راځي

$$d=\sqrt{(1-6)+(1-13)^2}=13$$

د (۱۶ . ۳) له مخی د کرښي برابرونونه چی له S او P تيريږي دي

$(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1) \Leftrightarrow y=(12/5)x-7/5$

(جګوالی: $m = 12 / 5$)

له S او P ټکو تيريدونکی کرښه باندې د ولاړې کرښي ميلان

$m2 = -1/m = -5/12$

د ($P0 (0,0$ څخه تيريدونکی کرښه د $m2$ ميلان سره د (۱۶ . ۱) له مخی لاندې برابرون لري

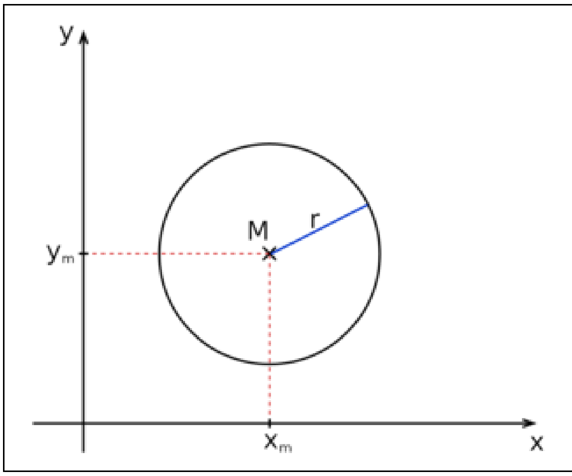
$y-0=-(5/12)(x-0) \Leftrightarrow y=-(5/12)x$

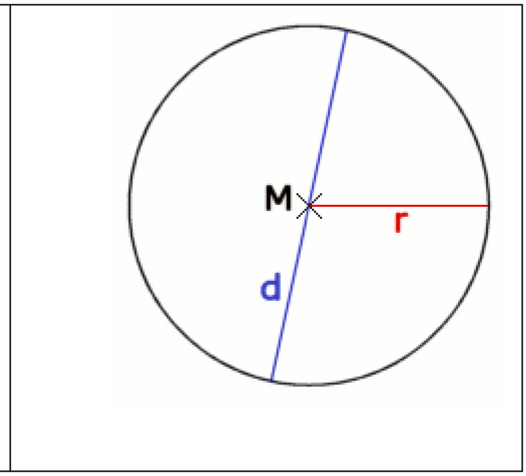
۱۶ . ۲ ګردۍ (داېره)

داېره(ګردۍ) د ټولو هغو ټکو ډيرۍ(سټ) ده، چی د يوه کره ځای په ځاي ټکي ، داسې په نامه منځټکی څخه ، همغه واټن ولری. واټن ته يی وړانګه وايو او په rيی په نخښه کوو.
فورمال داسې ويل کيږي يا دا پيژند ورکوو، چې داېره (ګردۍ) k د د سطحې (هوارې) E د ټولو ټکو ډيرۍ(سټ) ده،د کومو لپاره چې باور لري:

$$k=\left\{X\in E|\ |\overline{MX}|=r\right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





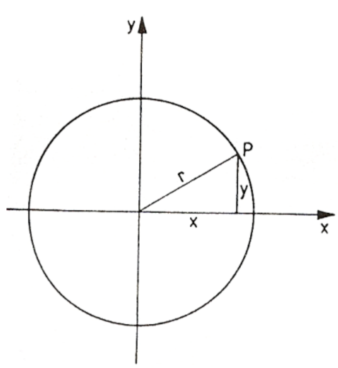


Bild 16.7

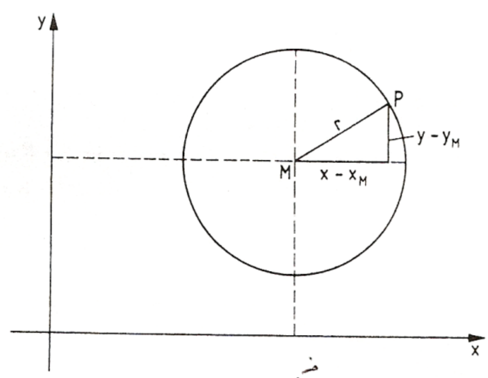


Bild 16.8

په شننیزه هندسه کې کیدی شي، چې کردی د منځټکي $M(x_m, y_m)$ او وړانګې r سره (په هواره کې) د لاندې برابرون له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د کردی ټولیز برابرون

دا برابرون د پېژند او پیتاګوراس له جملې سملاسي ورکوي
د یوې کردی ځانګړي حالت او د کواوردیناتسیستم سره، چې منځټکی یې د کواوردینات
په سرچینه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ګردۍ منځ ټکی د کواورديناتسيستم (شيره ۱۶ . ۷) په سرچينه پروت وي، نو د) پيوتاګوراس د جملی له مخی (د ګردي په خوښه ټکي P(x,y (لپاره باور لري

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16 . 10)$$

د ګردۍ منځټکي برابرون چی د ګردي منځټکی(M(0,0او وړانګه r ده.

که د ګردي منځټکی M کواوردينات (xM,yM) ولري (شيره ۱۶ . ۸) نو د ګردۍ د خوښی ټکي P(x) لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د ګردي د منځټکي برابرون وي د منځټکي $M(x_M,y_M)$ او وړانګي r سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بينوم مربع وې شميرو او برابرون په A|=0 فاکتور ځلوو (بی له دې چی د ګردي برابرون تغير ومومي) ، پس پيژندل کيږي چی د ګرديبرابرون د ځلورۍ يا مربع غړي په x اوy کی په فاکتور A لاينيز برابرون په x او y او ثابت غړي (چی يوه غړي په ځيري سره يوځاي شوي) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې ټوليز(عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2+Cx+Dy+E = 0 . A |= 0 \quad (16 . 12)$$

د ګردي برابرونونو(مساواتو) ټوليز فورم يا ټوليزه بڼه ٠
که د ګردي برابرون په ټوليزه بڼه يا عمومي فورم ورکړشوي او که منځټکی او وړانګه يی څرګنده کوو يا معلوموو نو د ګردي برابرون د منځټکي فورم باندې راوړو يا را اړوو. دا د ځلورۍ پوره کولو يا مربع تکميلولو په بنسټ صورت نيسي . دوه ځيرې پورته وګورۍ

بيلګه ۱۶ . ۱۱ :
د ګردۍ برابرون دې په ټوليزه - يا عمومي توګه وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2x^2+2y^2+4x-12y=0$

له دې لاس ته راځي، که په دوه وویشل شي $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

(د ځلوری پوره کونه یا مربع تکمیلونه) $x^2-4x+4+y^2-6y+9=3+4+9$

دبینوم د مربع له لارې انځورونه $(x+2)^2+(y-3)^2=16$
ګردۍ منځټکی($M(-2,3$ او وړانګه $r=4$ لري.

بیلګه ۱۶ . ۱۲ :
د ګردۍ برابرون ولیکی چې منځټکی یې($M(2;0$ وي او په کوم چې ټکی($P(6,4-3$ روت دی؟

اوبیونه : د($M(2,0$ سره (۱۶ . ۱۱) داسی دئ

$(x-2)^2+y^2=r^2$

د P ټکی د ګردۍ برابرون پوره کوي $(6-2)^2+(4-3)^2=r^2$

له دې څخه د ګردۍ وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: $r=8$ او له دې سره د ګردۍ برابرون:

$(x-2)^2+y^2=64$

ګردۍ او کرښه یو بل ته درې مختلف ځایونه لرودی شي

۱ - کرښه ګردی غوځوي، نو له دې امله غوځی ده(سیکانټې)

۲ – کرښه ګردۍ په یوه ټکي کی لمسوي یعنی مماس دی (تانجنت یا جګوالی)

۳ - کرښه ټوله له ګردۍ دباندې پرته ده (له ګردۍ تیریدونکی، لنډ : تیرېدونې)

د غوځټکي(د تقاطع ټکي) کواوردینات باید د ګردۍ اوکرښی برابرون پوره کړي سرې د کرښي برابرون د ګردۍ په برابرونونو کی ږدي(y یا x پسی حل یا اوبې شوي) او په روښانه ډول یو مربع مساوات (ځلوری برابرون) په x او y کی لاس ته راوړي، کوم چی په څرګند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ریل اوبیونې یا ځوابونه لري، یو رییل ډبل اوبی او یا هنځ رییل اوبی کیدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ څخه عبارت دي.

بیلګه ۱۶ . ۱۳:
کوم پروت ځایونه ګردی k چی راکړشوی: $(x-2)^2+(y-3)^2=5$ او لاندې کرښی و یو بل ته لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g1 : 2x+y=4 ,g2=2x+y=12 , g3: -x+y/2=3$

اوبی: $g1: y=-2x+4$ که د ګردیبرابرون کی ځاي کړو نو دا برابرون لاس ته راځي
$(x-2)^2+(-2x+4 -3)^2=5 <=> 5x-8x=0$
ددې ځوابونو $x=0 , y=4$ او $x=8/5 , y=4/5$ سره به $g1$ د ګردي غوڅوونی یا (Sekantسکانت) وي .
که $g2: y=-2x+12$ د ګردي مساواتو کی ځاي کړو نو لاندې لاس ته راځي
$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 <=> x^2-8x+16=0$
د ډبل اوبونې $x1,2 = 4 , y1,2 = 4$ سره $g2$ يو تانجنت دئ .
که $g3 : y=2x+6$ د ګردئ مساوات کی ځاي کړو، نو لاندې لاس ته راځي:
$(x-2)^2+(2x+6-3)^2 <=> 5x^2+x+8=0$
دا څلورئ برابرون یا مربعمساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه $g3$ له ګردئ k دباندې پرته ده، یعنی دباندنی یا دباندونی ده.

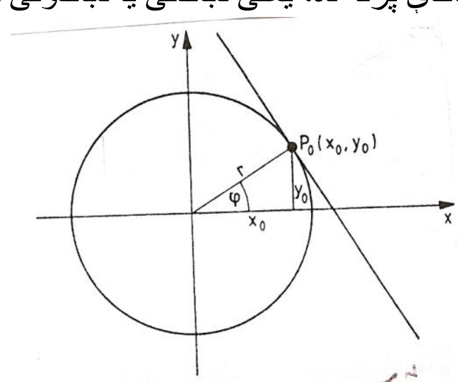


Bild 16.9

په ګردي $(x^2+y^2 = r^2)$ (څېره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرون په ټکی($P0(x0,y0$ د مساوات $x0^2+y0^2 = r^2 >0$ سره غوښتل کيږي. تنجنت د مماس په وړانګه نيغ ولاړ دئ

د مماسوړانګه دا ميلان يا جګوالی لري $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0}$ او

له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخی د تنجنت
$$m = 1/\tan\phi = -x_0 / y_0;..........(16,13)$$

د تنجنت يا جګي برابرون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

y-y=-(x0/y0)(x-x0) <=> xx0+yy0=x0²+y0²=r²

$$xx_0+yy_0 = r^2 \qquad (16.14)$$

د ګردۍ تنجنت باربرون په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ په ګردي
$x^2+y^2 = r^2$

(حالتونه(P0(±r,0)او(P0(0,±r په (۱۶ . ۱۴) کی ځاي (دننه) دي.
(څېره . ۱۶ . ۱۰)

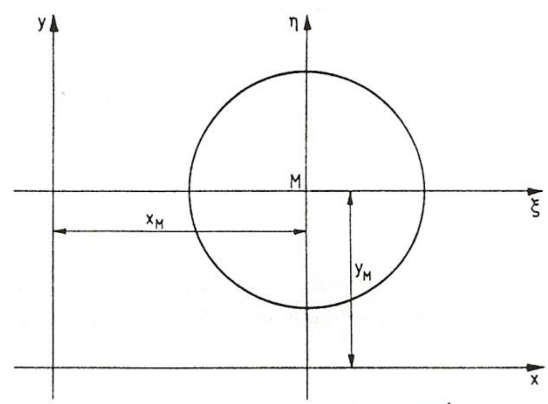


Bild 16.10 څېره

يادونه : که له دې مخ ته يا وروسته x0,y0 يا xM,yMاو x_0, y_0 يا x_M, y_M ګورو نو کېمټ دي

بيلګه ۱۶ . ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرون له ټکي(P1(-12,4 په ګردي x²+y²=r² په څه ډول دي؟
اوبيونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پيداکوو. دا بايد دګردۍ برابرون پوره کړي . ټکی P1 بايد په تنجنت پروت وي يعنی د تنجنت برابرون (۱۶ . ۱۴) بايد پوره کړي.
نو باور لري
x0 + 4y0 = 16 12- او x0²+y0² = 16

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا لاينيزبرابرون د y_0 په لور حل شي ، نو په x_0 کي يو ځلوری برابرون يا مربع مساوات لاس ته راځي

$$x_0^2+(3x_0+4)^2 = 16$$

همداسي $5x_0^2+12x_0=0$ د اوبيونو $x_{01}=0$, $x_{02}=-12/5$ سره. داهم په دې پورې اړه لري

$$y_{01}=4 , y_{02}=-16/5$$

د تنجنت مساوات په ګردې، په ټکو $P_{01}(0,4)$ او $P_{02}(-12/5,16/5)$ د (۱۶ . ۱۴) له مخی په لاندې ډول دي

$$0.x+4y=16 <=> y=4$$

او

$$(-12/5)x-(16/5)y=16 <=> y=(-3/4)x-5.$$

د ګردئ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځټکي $M(x_M,y_M)$ سره د ζ,η -کواوردينات سيستم کی ، چی سرچينه يي په M کی پرته ده)(؟ څيره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري٠

$$\zeta^2+\eta^2=r^2$$

د تنجنت مساوات په ټکي $P_0(\zeta_0,\eta_0)$ کی داسی دي

$$\zeta\zeta_0+\eta\eta_0=r^2;...................................(16,15)$$

د ζ,η -کواوردديناتسيستم د y,x - کواوردديناتسيستم يو غبرګ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کواوردديناتسيستم کی لاندې اړيکی پرتی دي ٠

$$\zeta=x-x_M,\eta=y-y_M;...........................(16,16)$$

که برابرون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو(۱۶. ۱۵)کی ځاي په ځاي شي، نو سړی بيا دا د y,x -کواوردينات سيستم ته ترانفورميرکوي(کشوي يا راکاږي) :

$$(x-x_M)(x_0-x_M)+(y-y_M)(y_0-y_M)=r^2 \quad (16.17)$$

په ټکي $P_o(x_0,y_0)$ کی د ګردئ تنجنت برابرو په ګردئ

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$$

بيلګه ۱۶ . ۱۵:

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ګردۍ چې برابرن $x^2+y^2+16x+4y+43 = 0$ لري، د x - محور باندې، په ټکو
$x1 = x2 =-5$
سره تنجنت وکا ږو(کيږدو). برابرون يې څنګه دي؟
اوبيونه : د ګردۍ برابرون د منځټکي فورم (۱۶. ۱۱) باندې بدليږي:
$$x^2 +16x+64+y^2-4y+4 = -43+64+4$$
$$(x+8)^2 +(y-2)^2 = 25$$
او له دې لاس ته راځي
$$xM = -8 , yM = 2 , r = 5$$
د ګردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه
$$x1 = x2 = -5$$
د دواړو ګردۍ ټکو په ګرديبرابرون کې ځايوو:
$$(-5+8)^2+(y-2)^2=25$$

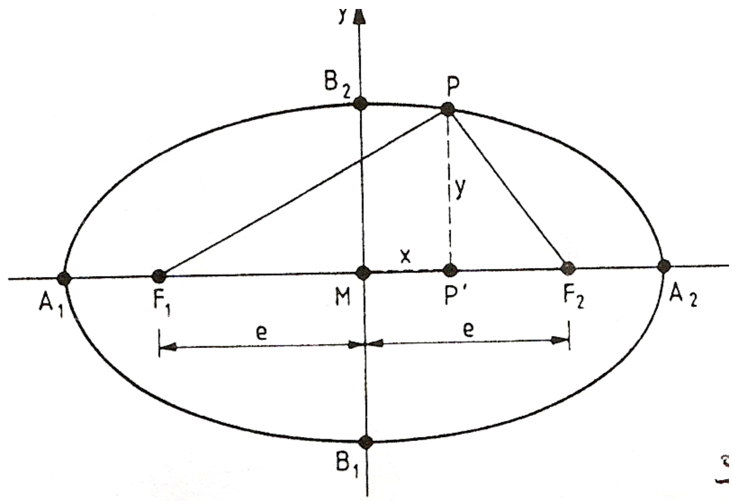
له دې داسې لاس ته راغلي دy لپاره څلوريبرابرون يا مربع مساواتو د دواړو اوردیناتو مماس ټکي لاس ته راځي : $y1 = 6 , y2 = -2$
د (۱۶ . ۱۷) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي
$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 \Leftrightarrow 3x+4y=9$$
او
$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 \Leftrightarrow 3x-4y=-7$$

۱۶ . ۳ بيضوي(هګۍ) يا ايليپسې Die Ellipse

بيضوي يا ايليپسې د ټولو هغو ټکو P ډيرۍ ده، د کومو واټن چې له دوه ټينګ په ځايټکو، داسې په نامه د ايليپسې د سوزونټکويا محراق F1 او F2 څخه ثابت وي. دا سوزونټکې د څيرې ۱۶ . ۱۱ سره سم د -y محور سره سيومتريك دx - محور باندې ځايوو يا ږدو او د ثابت واټنزياتون ليکو:
$$\underline{PF}1 + \underline{PF}2 = 2a \qquad (16. 18)$$

د سوزونټکو واټن دې وي:
$$\underline{F}1F2 = 2e;$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



څېره ۱۶ . ۱۱

دا e لاینې اکسڅننتریڅیتي(Exzentrizität دا یوناني کلیمه ده چې په الیپسی هوپربول او پارابول کی د همدغه تعریف لپاره ټاکل شوې) بلل کیږي .
د پیتاګوراس له جملی لاس ته راځي:

$$\underline{PF}_1 = \sqrt{(e+x)^2 + y^2}$$

او

$$\underline{PF}_2 = \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

او له دې سره له (۱۶ . ۱۸)

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

$$e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a.\sqrt{(e-x)^2 + y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2$$

(څلوری یا مربع ته جګیږي)

$$ex - a^2 = -a\sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$ (رېښه رابیلیږي

(څلوری یا مربع کوو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^2x^2 - 2exa^2 + a^4 = a^2(e^2 - 2ex + x^2 + y^2)$$

ترتیب اوړون $(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$

په ځاي کوو

$$a^2 - e^2 = b^2 \qquad (16.19)$$

او لاس ته راوړو

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad <=>$$

$$(x^2/a^2) + y^2/b^2) = 1 \qquad (16,20)$$

د منځټکي(M(0,0سره د ایلیپسی منځټکي مساوات

د y=0 لپاره دی x=±a، د x=0 لپاره دی .y=±b ایلیپسی (ځیره ۱۶ ، ۱۱)

د x - محور په ټکو A1(-a,0), A2(a,0) او د y - محور په ټکو

B1(0.-b), B2(0,b) کی پرې کوي، aاو b د دواړو نیمحورونو اوږدوالی دی

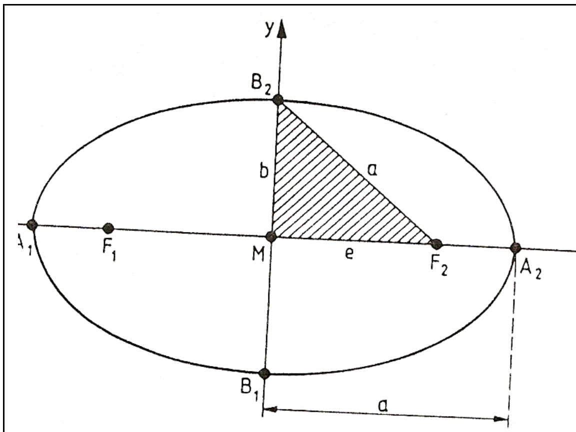


Bild 16.12

لکه د الیپسی د هرټکي لپاره، همداسی د Bلپاره هم اړیکی (۱۶ ، ۱۸) باور لري:

F1B2 + F2B2 = 2a

د F1B2 = F2B2 له امله له

دې لاس ته راځي F2B2 = a

(ځیره ۱۶، ۱۲)

له دې سره په دریګوټي MF2B2 کی د اړیکو (۱۶ ، ۱۹) هندسي ارزښت پیژندل کیږي.

که منځټکی M کواوردینات Mx ; My ولري او د ایلیپسی محورونه د کواوردیناتو سره غبرګ وځغلي، نو د ایلیپسی د یوه خوښې ټکي(P(x,yلپاره باور لري:

$$(x-xM)^2/a^2+(y-yM)^2/b^2=1 \qquad (16 , 2 1)$$

د ایلیپسی د منځټکي مساوات د منځټکي $M(x_M, y_M)$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته فرمول ځلولو وروسته د ایلیپسی تولیز(عمومي) جوړښت پیژندل کیږي.

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (16, 22)$$

د ایلپسی مساواتو تولیزه بڼه یا - فورم

د ګردې برابرون سره په توپیر(پرتله یا مقایسه ۱۶ . ۱۲) د x^2 او y^2 ځله وونی یا ضریبونه یو له بل توپیر لري، مګر همغه مخنخښه لري($A.B > 0$)

بیلګه ۱۶ . ۱۶ :

د د ایلیپسی منځټکی، نیممحور، او سوزونټکي لټول کیږي، که دا برابرن

$$9x^2 + 25y^2 - 54x + 100y - 719 = 0$$

مو مخ ته پروت وي.

اوبونه : د ایلپسي برابرون د منځټکي بڼه یا فورم (۱۶ . ۱۲) باندې اړول کیږي:

$$9(x^2-6x)+25(y^2+4y) = 719$$

خلوری پوره کونه یا مربعتکمیلونه

$$9(x^2-6x+9)+25(y^2+4y+4) = 719+9.9+25.4$$

$$9(x-3)^2 +25(y+2)^2 = 900$$

(په ۹۰۰ ویش)

$$(x-3)^2 / 100 + (y+2)^2 / 36 = 1$$

د لاس ته راوړلو مساواتو څخه منځټککواوردینات

$$xM = 3 , yM= -2$$

لوستلکیږي او د نیممحور لپاره $a^2=100$, $a=10$ او $b=6$, $b^2=36$ لوستل کیږي.

د (۱۶ . ۱۹) سره سم لاس ته راځي:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$$

او له دې سره منځټکي (پرتله څیره ۱۶ ، ۱۱)

$$F_1(x_M - e, y_M) = F_1(-5,-2), F_2(x_M + e, y_M) = F_2(11,-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۶ . ۱۷ :

د ايلپسي برابرون د منځټکي (M(-1,3 سره لټول کيږي، په کوم چې ټکي(P1(-3,3او $P_2(0,3+\frac{3}{2}\sqrt{3})$ پراته وي.

اوبونه : د (۱۶ ، ۲۱) سره سم د منځټکي(M(-1,3 سره د ايلپسي براورن داسې دي

$(x-1)^2 / a^2 + (y-3)^2 / b^2 = 1$

ټيکي P1 او P2 بايد د ايليپسي برابرون پوره کړي:

$$\frac{(-3+1)^2}{a^2}+\frac{\sqrt{(3-3)^2}}{b^2}=1, \frac{(0+1)^2}{a^2}+\frac{(3-3-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1$$

د دې برابرونونو له لومړئ څخه لاس ته راځي $4/a^2 + 0 = 1$ همداسې(< = >)

$a = 2$ او له دې سره د دويم برابرون څخههمداسې < = >

$$\frac{(0+1)^2}{4}+\frac{(-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{9}{4}.3}{b^2}=3/4 \Leftrightarrow b=3$$

د ايليپسی لټونکی برابون داسې دئ:

$(x+1)^2/4 + (y-3)^2/9 = 1$

بيلګه ۱۶ . ۱۸ :

د کربنو

الف) $y = x + 2$

او ب) $y = x - 2$

غوڅټکي د ايلپسی $9x^2+y^2+54x+72=0$ سره لټول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبيونه : كه الف) $y=x+2$ د ايلپسی برابرنونو کی خوندي شي، نو لاس ته راځي

$$9x^2+(x+2)^2+54x+72=0 \iff 10x^2+58x+76=0$$

د څلورى - يامربع برابرونونو اوبی :

$$x1 = -2 , x2 = -3,8$$

د غوڅېدنكي ابسځيز يا پروتمحور دی. په دې پورې اوردينات يا ولاړ محور

$$y1 = 0 , y2 = -1,8$$

اړه لري.

ب) دy رامدځ ته شوې څلورى(مربع) برابرون

$$9X^2+(x-2)^2+54x+72 \Leftrightarrow 10x^2+50x+76=0$$

رييل اوبيونه نه لري. كرښه $y = x-2$ د ايليپسې څخه دباندې پرته ده

Die Hyperbel ۱۶ . ۴ :هوپربول

پېژند:

هوپربول يا هيوپربل د ټولو هغو ټكو ډيرى ده، د كومو لپاره چی د كمون يا كمښت مطلقه ارزښت واټن، د دوه كره په ځاي ټكوF1 اوF2 ،دا په نامه د هوپربول سوزونټكو

يامحراقونو، څخه ثابت وي. دا سوزونټكي ، لكه په ايليپسی کی دلته هم موړ كره ټاكو (څيره ۱۶ . ۱۳) .

د ثابت واټنكمون يا واټنكمښت| $|\underline{PF1}-\underline{PF2}|= 2a$ او (ځيره ۱۶ . ۱۳)

د سوزونټكوواټن) $\underline{F1F2} = 2e$ (څيره ۱۶ . ۱۳)

$$e^2-a^2= b^2 \qquad (16.23)$$

په پورته كې يا بل چيرې، چې كوم څه لاندې كرښيز شوي وي، دا په زياتو ادبياتو كې پورته كرښيز شوي، دې ته دې پام وي، چې لاندې كرښيز شوي وي او كه پورته، توپير نه لري يا همغه څه دي۰

يو ايليپسی برابرون ته ورته تلنه (برخهٔ ۱۶ ، ۱۳) مو لاندې ته لاربښودوي:

$$(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1 \qquad (16 . 24)$$

د هوپربول منځټكي برابرون د منځټكي (M(0,0 سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

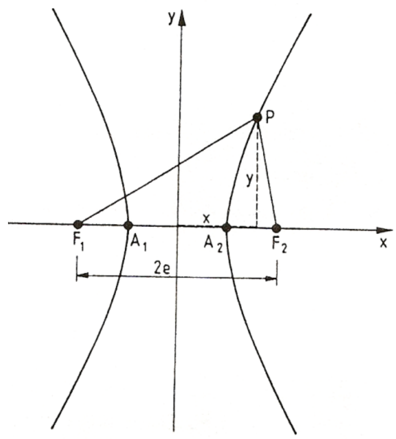


Bild 16.13 څېره

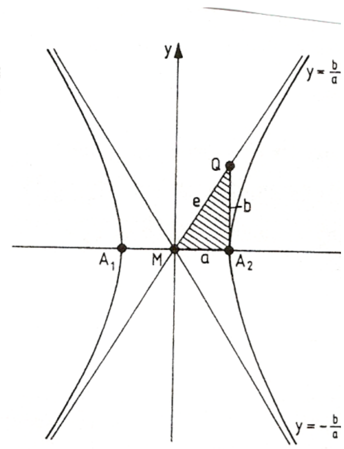


Bild 16.14 څېره

د y=0 لپاره x=±a دی ، دا په دې مانا چی هوپربول د x - محور په ټکي

(A1(-a,0 او(A2(a,0کی غوڅوي. دا ټکی ککری ټکی بلل کیږي٠ ګورو چی دا دککری ټکی دی .(د ناپای سره ځاننیونی په هکله: که (۱۶ . ۲۴) د y په لور حل شي، نولاس ته راځي:

$$y = \pm b.\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} = \pm\frac{b}{a}.x.\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

د x -> ± oe لپاره $-a^2/x^2$ له منځه ځي. پس هوپربول ځان کرښی $y = \pm(b/a).x$ ته نزدې کوي (څیره ۱۶ . ۱۴)

له دې امله لاندې برابرون

$y = \pm(b/a)x$ (16,25)

د هوپربول اسیمپتوتی بلل کېږي.

د (۱۶ . ۲۳) له امله $MQ = e$ دی .

که منځټکی M کواوردینات x_M ,y_M ولري او سیومتریك غبرګ د کوردیناتو محور ته ځغلي، نو د یوه په خوښه هوپربول ټکي(P(x,y لپاره باور لري:

$$(x-x_M)^2/a^2-(y-y_M)^2/b^2=1 \qquad (16,26)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هوپربول منځټکي برابرون ($M(xM, yM)$ سره.

د پورته مساوات د ځلولو وروسته، په لاندې ډول د هوپربولمساوات ټوليز جوړښت جوتيږي.

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (16,27)$$

دهيوپربول برابرون ټوليزه بنه يا فورم
دلته د ايليپسی سره په مخامخ (همدا برعکس دئ) يا په ځښ ډول د x^2 او y^2 ځلهووني بدله مخنښه لري
($A . B < 0$) ټوليز برابرون هم کولی شي چی موږ لاندې منځټکي برابرون ته لاربنود کړي،

$$(y-yM)^2/b^2-(x-xM)^2/a^2=1 \qquad (16,26')$$

د کومو څيره چی يو پورته لور او کښته لور ته واز هوپربول دئ.

بيلګه ۱۶ . ۱۹:
د لاندې هوپربول منځټکی او سوزونټکی لټول کيږي

$$-25x^2 -150x+144y^2 -188y +144 = 0$$

اوبيونه: د ورکړشوي هوپربولمساوات بنه په منځ ټکي (۱۶ . ۲۶) اوړي يعني فورم يی بدليږي:

$$-25(x^2+6x)+144(y^2+2y) = -144$$

(د څلورئ پوره کونه)

$$-25 (x^2+6x+9)+144(y^2-2y+1) =-144-225+144$$

$$-25(x+3)^2 + 144(y-1)^2 = -225$$

(په 225 - ويشنه)

$$-25(x+3)^2+144(y-1)^1 = -225$$

$$+(x+3)^2 / 9 -(y-1) /(25/16) = 1$$

د لاس ته راغلومساواتوڅخه لاندې لوستل کيږي:

$$xM = - 3 ,yM = 1 ,a^2 = 9 , a = 3 ,$$

$$b^2 = 25 /16 , b = 5/ 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د دې سره سم د (۱۶ . ۲۳) له امله لرو:

$$e=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{144/16+25/14}=13/4$$

د هوپربول منځټکی (M(-3,1دی ، سوزونټکي یی

(F1(xM-e,yM)=F1(-25/4,1 او (F2(xM+e,yM)=F2(1/4,1 دي.

بیلګه ۱۶ . ۲۰ :

د هوپربول $9x^2-4y^2=36$ اسیمپټوتي یو له بل سره کوم کونجونه تړي یعنی جوړوي یا اسیمپټوتی په کومو کونجونو کی یو بل پریکوي؟

اوبیونه : هوپربول د منځټکي بڼه (فورم) له (۱۶ . ۲۴) سره سم په لاندې ډول ده $x^2/4-y^2/9=1$ یا د $a=2\ ,b=3$ سره

له دې سره سم دواړه اسیمپټوتی د(۱۶ . ۲۵) له مخی $y=(3/2)x$

او $y=-(3/2).x$ دي.

د لومړی اسیمپټوتی او x - محور ترمنځ کونج φ د $\tan\varphi=3/2,\varphi=56,31°$ څخه لاس ته راځي.

له دې امله د اسیمپټوتو ترمنځ کونج ψ باور لري $\psi=2\varphi=112,62°$

داکونج کیدی شي د هوپربول د وازونکونج په نامه ونومول شي.

بیلګه ۱۶ . ۲۱ :

د ایلیپسی $x^2/64+y^2/16=1$ غوځټکي د هوپربول سره لټول کیږي چی منځ ټکي یی په سرچینه او ککرټګي یی د ایلیپسی په سوزونټکو پراته وي او همغه ارزښت b لکه ایلیپسی ولري.

اوبیونه : د ایلیپسی نیممحور په a1 او b1 سره او لاینیزه اکسڅینتریڅیتي یی په e1سره ښایو.

نو باور لري: $a1=8\ ,\ b1=4$ او د (۱۶ . ۱۹) سره سم دی.

$$e_1=\sqrt{a_1^2-b_1^2}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

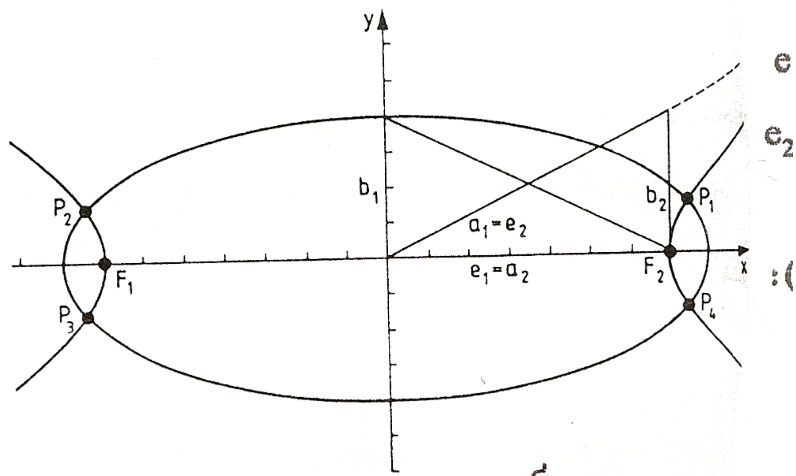


Bild 16.15 ځېره

د هوپربول لپاره نخبنى e_2, a_2, b_2
استعمالوو:
باورلري (پرتله ځيره ۱۶ . ۱۵) :

$$b_2 = b_1 = 4, a_2 = e_1 = 4\sqrt{3}$$

او د (۱۶ . ۲۳) سره سم دی

$$e_2^2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 8 = a_1$$

د هوپربولبرابرون داسی دی:

$$x^2 / 48 - y^2 / 16 = 1$$

د غوځتکو کواوردينات د ايلپسی- او هوپربولمساوات پوره کوي. که داوړه مساوات سره زيات شي نو لاس ته راځي

$$(\frac{1}{16} + \frac{1}{48})x^2 = 2, x^2 = 348/7, x_{1,2} = \pm 8\sqrt{\frac{6}{7}}$$

د ايليپسي او هوپربولبرابرونونو ځخه لاس ته راځي

$$y^2 = 16(1 - x^2/64) = 16/7 \Leftrightarrow y^2 = 16(x^2/48 - 1) = 16/7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pm 4\sqrt{1/7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د دې سره سم د دواړو کړو غوڅټکي دي:

$$P_1(8\sqrt{6/7}), P_2(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, 4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_3(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_4(8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}})$$

۱۶ . ۵ پارابول Die Parabel

پارابول د ټولو هغو ټکو P ډيرئ ده، چې واټن يې له يوه کلك په ځاي ټکی، د پارابول سوزون ټکیF، او يوې کلك په ځاي کرښی، د پارابول ترمخکرښی l (داپه ځيره کی جوته ده چې دا کومه کرښه ده) سره مساوي دي(ځيره ۱۶ . ۱۶) د سوزونټکی او مخکرښی ترمنځ واټن نيم پارامتر p بلل کيږي، Sککری ټکی دی،کرښه چې له S او F تيريږي د پارابول محور دی.

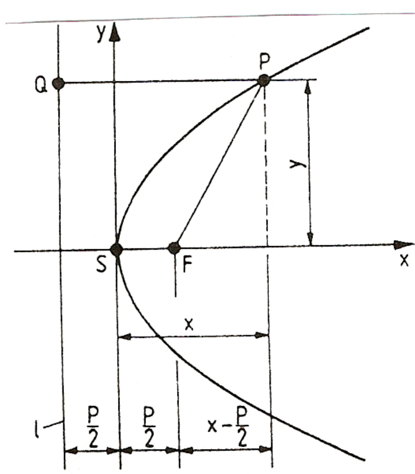


Bild 16.16 ځېره

له پيژند – يا تعريف برابرونونو = $\overline{PF}$ $\overline{PQ}$څخه لاس ته راځي

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{P}{2}$$

او له دې څخه د مربعکولو او د ټولګی څخه لاس ته راځي

$$(x-p/2)^2 + y^2 = (x+p/2)^2,$$

$$x^2-px+p^2/4+y^2 = x^2+px+p^2/4$$

پس لرو

$$y^2 = 2px \qquad (16,28)$$

د پارابول ککربېرابرون د ککرټکي S(0,0) سره، پورته لور ته واز ($x > 0$)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$y^2 = -2Px \qquad (16 , 29)$$

هغه وکېن لور ته واز پارابول دئ‌د واریابلو د بدلون څخه لاس ته راځي:

$$(16 . 30) \qquad x^2 = 2py$$

د پارابول ککرمساوات د ککرټکي(S(0,0سره، پورته واز پارابول ($y > 0$)

په همدې توګه:

$$x^2 = -2py \ (Y<0) \qquad (16.31)$$

پورته لور ته واز پارابول دئ.

که ککرټکي S کواوردينات xS , yS ولري او د پارابول محور د x - محور ته غبرګ ځغلی په همدې ډول د y - محور ته هم غبرګ ځغلي، نو د يوې په خوښه پارابول ټکی لپاره باور لري:

$$(16. 32) \qquad (y - yS)^2 = 2p(x-xS)$$

د پارابول ککرییرابرون د ککرۍ ټکی(S(xS,yS سره، چې ښۍ لور ته وازوي($x>xS$)

$$(x - xS)^2 = 2p(y - yS) \qquad (16.33)$$

د پارابول ککرییرابرون د ککرټکي(S(xS,yS سره، چی پورته لور ته واز وي ($y> yS$)٠

په همدې ډول:

$$(y - yS)^2 = -2p(x - xS) \quad (x<xS) \quad (16.34)$$

$$(x -xS)^2 = -2p(y - yS) \ (y<yS) \quad (16.35)$$

هغه کښې لور او همداسی کوزې یا لاندې لور ته واز پارابولونه دي

د فرمول (۱۶ . ۳۲) همداسی (۱۶ . ۳۳) ځله ونو څخه وروسته د پارابول ټولیز (عمومي) جوړښت پيژندل کيږي:

$$Ay^2+Bx+Cy+D= 0 \ , B |=0 \qquad ((16, 36)$$

همداسی(< = >)

$$Ax^2+Bx+Cy+D=0 , C|=0, \qquad (16 . 37)$$

د پارابولمساوات ټولیزه (عمومي) بڼه (فورم)

بیلګه ۱۶ . ۲۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پارابول برابرون دې له ککريټکی ، له نيمپارامتر او وازلورې څخه پيداشي:
الف $S(,0,0), P = 6$)کيڼ، ب $S(2,1) ;P= 0,5$) پورته
پ $S(-3,-5), P = 4$) لاندې ت $S(4,-2) ,P= 2 /3$) ښی

اوبيونه يا حل:
الف) $y^2 = -12x$ ب) $(x-2)^2 = y-1$
پ) $(x+3)^2 = -8(y+5)$ ت) $(y + 2)^2 = (4 /3) (x-4)$

بيلګه ۱۶ . ۲۳ :

د پارابول د لاندې مساوات سره دې د پارابول د ککرېټکي کواوردينات ، نيمپارامتر او د وازون لور وټاکل شي $a)\ (x^2 + 4y +20x + 10 = 0,\ b)\ y^2 -18x + 12 y -36 = 0$.

اوبيونه : د پارامترتوليزه بڼه (فورم) دې په ککريبرابرون (۱۶ ، ۳۲) همداسی(۱۶ ، ۳۳) همداسی (۱۶ ، ۳۴) همداسی (۱۶ ، ۳۵) کی وازمايل شي (څلوری پوره کيدنه يا مربع تکميليدنه) . د ککريبرابرون څخه ککريټکي ، نيم پارامتر او وازلور

لوستوړ دي.

a) $x^2 + 20x +100 = -4y -100 + 100$

$(x+10)^2 = -4y\ S(-10 , 0) , P = 2$

پارابول لاندې لور ته و از دی

b) $y^2 + 12y +36 = 18x +36 + 36$

$(y+6)^2 = 18(x+4)$

$S(-4,-6)\ , P = 9$

پارابول ښی لور ته واز دی

۱۶ . ۶ ټولګه:

دا له ۱۶ . ۱ نيولی تر ۱۶ . ۵ پورې څيرل شوې دهوارې کرېې (کرې په هوارې يا سطحه کی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

-کرښه
-ګردۍ
-ايليپسی چی د کواوردينات محور سره غبرګ ځغلي، ټول د لاندې مساوات
-هوپربول
-پارابول
په څير انځوريږي:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \qquad (16 , 38)$$

فاکتورونه، ضريبونه يا ځله ووني A او B د کږی د توکو لپاره پرېکنده دي.
برابرون (۱۶،۳۸) لاندې روښانوي
د $A.B > 0 , A \neq B$ لپاره ايليپسی ،
د $A = B$ لپاره ګردۍ
د $A.B < 0$ لپاره هوپربول، که $A > 0 , B < 0$ وي، نو کيڼ لور ته واز،
که $A < 0 , B > 0$ وي، نو پورته او لاندې لورته واز
د $A.B = 0 , A = 0 , B \neq 0$ لپاره يو پارابول، چی محور يی د x - محور سره غبرګ دی د $A \neq 0$ ، $B = 0$ يو پارابول ، چی محور يی د y - محور سره غبرګ دی
د $A = B = 0$ لپاره يوه کرښهکه په (۱۶ . ۳۸) يو بل ګډوله(يو د بل سره ګډ شوی) ځلوری توکي رامنځ ته شي، نو دا د کږې يو ځلوری برابرون يا مربع مساوات ښکاروي (توضيخ کوي) ، د کومو محورونه چی نور د کواورديناتو محورونو سره غبرګ نه دي.

بيلګه ۱۶ . ۲۴ :
له لاندې مساواتو سره کومی کږې انځوريدلی شي ؟
a) $x^2+y^2+4x-8y-5=0$ b) $3x^2+24x+15y+138=0$
c) $16x^2+y^2-96x=0$,d) $2x^2-2y^2+16x+10y-105/2=0$?

اوبيونه : (يادونه : لکه د نورو ځايونو په څير دلته هم الف د a په ځاي ليکم ، ځکه چی د پښتو لپاره کرښه په لاتين حروفو له ښي لور نه شي پيل کيدی)
الف يا a) که $A = B = 1$ وي ، نو ګردۍ
ب يا b)که $B=0$ پارابول چی محور يی د-y محور سره غبرګ وي
پ c)که $A \neq B$, $A.B > 0$، نو ايليپسی
ت d)که $A.B < 0$ ، نو هوپربول

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۶ . ۷ تمرينونه

۱ – د هغو کرښو مساوات و ټاکئ، کومې چې له P_1 ټکي تيريږي او د x–محور سره کونج α جوړوي

a) $P_1(2,-3)$, $= 30^o$, b) $P_1(-3,2)$ $= 45^o$

c) $P_1(-1,-4)$, $= 120^o$, d) $P_1(4,4)$, $= 0^o$

e) $P_1(0,0)$, $=150^o$, f) $P_1(1,-1)$, $= 90^o$

۲ –د ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو P_1 او P_2 تيريږي

a) $P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$, b) $P_1(-3,3)$, $P_2(0,0)$,

c) $P_1(1,4)$, $P_2(-3,-4)$, d) $P_1(1,2)$, $P_2(-1,1)$,

e) $P_1(0.1.-1)$, $P_2(-0,1,-3$, f) $P_1(1,-1)$, $P_2(4,-2)$!

۳ – د محورونو غوڅې (لنډ : محورغوڅې) a,b د کرښې مساوات په نورمالفورم وټاکئ او همداسې د غوڅټکو واټن d د محورغوڅټکو سره چې يو له بل يې لرې وټاکئ.

a) a = 5 , b = 2 , b) a = -1 , b =3 , c) a = 2 , b = -3 , d) a = -3 , b = -3

۴ – يو دريګوټ دا لاندې ګوټکي لري A(-4,-1) , B(2,-2), C(1,3) . د هغو کرښو مساوات ښکاره دي، په کومو چې د دريګوټيو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دريګوټي اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ – د لاندې کرښمساواتو نورمالفورم او برخنوټونه يا –فورم څنګه دئ؟

a) 3x -5y +15 = 0 , b) 4x -3y -18 = 0

c) -4x +2y -10 = 0 , d) -3x -4y +15 = 0 ?

۶ – د کرښې y = -(12 / 5)x +2 پروتخاي د کرښو

a) y+2,4x - 6 = 0 , b) 28x +10y = 0 , c) 8x + 5y =2,

d) 5y +12x -10 = 0 . e) y +(12/5)x = 3 , f) 6x +2,5y = 5

سره وڅيړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ – د لاندې کرښو د غوڅېدو کواوردیناتونه او غوڅکونج وټاکئ.

a) $2x + 3y = 7$ b) $y = (1/2)x + 1$ c) $y - x = 7$

$3x - y = 5$, $y = -2x + 6$, $y = 7$,

d) $x/3 - y/2 = 1$ e) $6x - 2y + 10 = 0$ f) $y = 4x - 1$

$-x/2 + y/3 = 1$, $y = 3x + 6$, $y = -3x + 5$!

۸ – کومه کرښه د کرښې $x - y = 4$ ، کرښې $3x + y = 8$ او برسیره پر دې له غوڅېدو P(0,5) څخه تیریږي ؟

۹ – د لاندې ګوټ A(-4,-1), B(2,-2), C (1,3) سره د درېګوټي دننه کونجونه څومره لوي دي ؟ (پیلونه: دریکونجي وکارئ)

۱۰ – د ولاړېرېوتي کرښې یا زوړندې مساوات له ټکي P(2,0) څخه په کرښه $y = 2x + 1$ څنګه دي؟

۱۱ – د ولاړکرښې مساوات په کرښه $y = 2x + 1$ باندې په ټکي P(-1,-2) څنګه د

۱۲ – د کرښې $y = 2x + 1$ سره د غبرګې کرښې مساوات چې له ټکي P(-1,-3) تیریږي، څنګه دي؟

۱۳ – د لاندې مساواتو سره ګردیمنځټکي او وړانګه وټاکئ:

a) $x^2 + y^2 = 20$ b) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

c) $x^2 + y^2\ 9y = 0$, d) $4x^2 + 4y^2 + 32x - 8y + 67 = 0$

e) $36x^2 + 36y^2 - 36x + 24y - 23 = 0$, f) $x^2 + 2x + y^2 + 2y = 16$!

۱۴ – د لاندې ګردیو مساوات وڅیړئ

الف) چې منځ ټکی M(-2,-1) لري او له سرچینې تیریږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) هغه چې دري ټکی $P_1(3,0)$, $P_2(5,\ 5 -3)$, $P_3(\ 5 +3,-1\ )$ يې د غاړو ټ

پ) چې وړانګه $r = 6$ لري او له ټکو $P_1(-1,11),P_2(5,5\ )$ څخه تيريږي.

ت) له ټکی $P_1(3,4)$ تيريږي او کرښه $y = -(4 / 3)x + 13$ په ټکي $P_2\ (\ 4,3)$ لمسوي.

ټ) چې منځ ټکی $M(2,2)$ لري او کرښه $y = -(4 / 3)x +13$ لمسوي.

ث) چې د هغې منځټکی په کرښه $y = 3x -19$ پروت دی او له ټکی $P_1(7,-2\ )$ او همداسی له ټکي $P_2(11,2)$ څخه تيريږي.

۱۵ – کوم پروتځايونه ګردی k چې فرمول لري $x^2+y^2-8x = 0$ او لاندې کرښې يو له بل سره لري:

a) $g : y = 2x + 1$, b) $g : y = x$, c) $g : y = x - 1$,

d) $g : y = 4$, e) $g : y = -x - 3$, f) $g: y = x - 3$?

۱۶ – کوم پروتځاي کرښه $3x + 4y = 25$ ګردی $x^2 + y^2 = 25$ ته لري؟

۱۷ – د تنجنت مساوات څنګه دی

الف) په ټکي $P_0(5,y_0\ )$ چې په ګردی $x^2+y^2 = 169$ پروت دی،

ب) په ټکی $P_0(x_0\ ,\ -2)$ چې په ګردی $(\ x - 1\ )^2 + (y-2)^2 = 25$ پروت دی؟

۱۸ – د هغو ګرديو منځټکي پيداکړی چې وړانګه يې $r = 5$ وي، کومې چې کرښه $3x +4y = 9$ په ټکی $P_0\ (-1\ ,\ 3\ )$ کی لمسوي!

۱۹ – په ګردی $x^2 + y^2 = 25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکی، کوم چې د کرښې $y = (4 /3)x +2$ سره غبرګ څغلي؟

۲۰ – د ايليپسې مساوات وټاکي، له

) $M(0,0)$, $a\ 11$, $c = 8$, B) $M(0,0)$, $b = 4$, $c = 6$,

) $M(-3,7)$, $c = 4$, $b = 5$, d) $M(4, -5)$, $e = 7$, $a = 10$!

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۱ – د لاندې ايليپسيمساواتوڅخه د نيممحورونو اوسوزونټکو منځټکی او اوردوالی راپيداکړی:

a) $x^2 / 100 + y^2/ 64 = 1$ b) $(x+3)^2 / 81 + (y-1)^2 / 56 = 1$

c) $3x^2 + 4y^2 -24x >= 0$, d) $5x^2 +9y^2 -10x + -90y + 50 = 0$,

e) $4x^2 -13y^2 -208 = 0$, f) $4x^2 +9y^2 +54y -227 = 0$!

۲۲ – د هغو ايليپسو مساوات راپيداکړی، کومې چې

الف) چې منځټکی M (0,0) او لايتي ايکسڅنتريځيتي e = 6 لري او
ټکی P(10.0) څخه تيرېږي،

ب) له منځټکی M (1,1) او لايني ايکسڅنتريځيتی e = 4 لري او له
ټکو څخه تيريږي،

پ) د نيممحور اوږدوالی a = 9, b = 6 لري او له ټکو $P_1(2,8)$, $P_2(2,-4)$ څخه
تيريږي!

ت) د نيممحوراوږدوالی a = 2 , b = 6 لري او له ټکو $P_1(-1,-4)$, $P_2(-5,-4)$
څخه تيريږي!

۲۳ – د لاندې ايليپسو او کرښو ترمنځ غوڅټکي پيدا کړی

a) $x^22 +4y^2 -20 = 0$, $x+2y-6 = 0$,

b) $3x^2 +4y^2 -24x =$, $y = 3 .x$,

c) $(x-3)^2/ 9 +(y-1)^2 / 4 = 1$, $y = x+1$,

d) $x^2 + 4y^2 +16y +12 = 0$, $y = x-2$!

۲۴ – د هوپربول مساوات له

الف) b M(0,0) , a = 4 , e = 5 , ب) M(-3,2), b = 4 , e = 6 ,

پ) M(1,1) او هوپربولټکو $P_1(-3,1)$, $P_2(6 , 7 /4)$!

ت) a = 3 , b = 2 , x = -1 او د هوپربولټکي P(-4,-2) وټاکی !

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۵ – د هوپربولونو

a) $x^2 / 144 - y^2 / 36 = 1$, b) $9x^2 - 64y^2 = 576$

نيممحورونواوږدوالی او اسيمپتوتي راپيدا کړی !

۲۶ – د لاندې هوپربولونو منځتکي او د نيممحور اوږدوالی پيداکړی

a) $9x^2 - 64y^2 - 36x - 540 = 0$, b) $x^2 - 9y^2 + 54y - 90 = 0$,

c) $x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 16 = 0$, d) $x^2 - y^2 - 2x + 10y - 28 = 0$!

۲۷ – د لاندې مساواتو سره دکړو غوځټکي وټاکی:

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$, $y = \frac{1}{5}x$,

b) $4x^2 - 9y^2 = 144$, $x^2 - 24y = -28$,

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, $y = -\frac{2}{3}x - 5$,

d) $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 68 = 0$, $9y^2 - 36y - 72x + 8 = 0$,

e) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$, $x^2 - y^2 = 16$!

۲۸ – د لاندې پارابولونو ککرټکو اوسوزونټکو کواوردينات وټاکی:

a) $5y^2 + 4x = 0$, b) $2y - (1/2)x^2 = 0$ c) $4y + (1/3)x = 0$,

d) $2y^2 - 12x = 0$, e) $y^2 - 2y - 10x - 9 = 0$, f) $x^2 - 7x - y + 12 = 0$

g) $y^2 - 6y + 6x - 3 = 0$. h) $x^2 + 4x + 12y\ 52 = 0$

۲۹ – د پارابولمساوات له لاندې ککرټکو او سوزونټکو وټاکی:

S (0,0), F(0,1) , b) S(0,0), F(-1,0), c) S(1,1) , F(2,1),

S(-1,-1), F(-2,-1), e) S(2,-3), F(2,-2), f) S(-2,3), F(-2,2)

۳۰ – يو پارابول د ککرې پروت ارزښت $x_s = 3$ لري، کرښه $y = 8$ د محور په ځ

ټکي P (7,4) تيريږي. ددې مساوات څنګه دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳۱ – يو پارابول د ککرکواوردينات $y_s = -3$ لري، کربنه $x = 2$ د محور په څير او له ټکي $P(4,-4)$ تيرېږي. د هغې مساوات څنګه دي؟

۳۲ – کوم پروتڅاي اړيکی د

الف) پارابول $y^2 = -4x$ او کربښی $y = x-1$

ب) پارابول $x^2 = 5y$ او کربښی $y = x-4$

پ) پارابول $x^2 = -3y$ او کربښې $y = x + 5/12$

ت) پارابول $y^2 - 6x - 2y + 7 = 0$ اوکربښې $y = x$

ټ) پارابول $y^2 = 7x$ او کربښې $9x + 12y + 28 = 0$

ترمنځ پرتی دي؟

که موجود وي ، نو غوڅټکی همداسې لمستکی يې ورکړی!

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۷ وکتور شمیرنه او په ځمککچ کی د هغه په کارونه

۱۷ . ۱ د وکتور پیژند ،

په کارتیزي کواودینات سیستم کی د وکتور انځورونه

په پیدایښتي پوهنو یا طبیعي علومو او تخنيك کی مورږ لويی پیژنو چی د ريیل ارزښتونو په ورکولو سره یواځنی ټاکلي دي، لکه وخت، ګرمي، توان ، وزن . داډول لويو ته سکالار لويږ وايو .نوري لويی لکه زور ، چټکتيا(سرعت)، بيړه (تعجيل)، د برقي او مقناطيسي چاپيريالزور برسيره په ارزښت (مطلقه ارزښت) د لور ورکونه هم غواړي، په کومه چی تاسير اچوي. مورږ دې لويو ته وکتورونه وايو.
د وکتور له لارې کيدی شي چی دهندسي شيانو ځان نيونه هم تشريح کړای شو. په فضا هوا کی يو ټکی کيدی شي چی د هوا کواوردينات سيستم کی د سرچينی څخه د دې ټکي په لور لوريزشوې کرښه (په دې مانا چي مطلقه ارزښت او لوری لري) تشريح کړی شي يعنی له سرچينی څخه يی په دې ټکي بريد وي يا دا ټکی په نخښه کړای شي يا يې د غشي څوکه د دې ټکي په لور لوريزه وي.

يادونه : ما وکتورونه a,b, ښوولي، ښه به يې $\vec{a},\vec{b};....$ وای، ډيرو کتابونو کې پنډ **a,b,..** ليکل شوي، خو ما د وکتور سره تل د وکتور کلمه ياده کړې، چې د ناتيکپوهني څخه مو ژغوري۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۷ . ۱ : یوه لویه a چې د یوه مطلقه ارزښت (|a| چې داوږدوالي کچګڼ یی هم بولو) او یوې لورې له مخی ټاکل شوی وي، وکتور بلل کیږي۰

(لنډ: یوه لویه چې لور ولري، وکتور دی. موږ کړی شو چې دې لویي ته غشی هم ووابو. زه یی همدا وکتور بولم)

یو وکتور په هوا کې د یوه لور لرونکی کرښی(غشي) په څیر انځورکیدی شي. د تعریف ۱۷ . ۱ له مخی ټول مساوي اوږده او په یوه لور لوری-، لوریزې- یا لورونی کرښي همغه وکتور انځوروي، په یوه بریدټکي باندې ترل یی په نظر کې نه دي نیول شوي . سرې ویلی شي: یو وکتور کیدی شي په هوا کی په خوښه غبرګ (موازی) وخوځول شي یا راکښل شي، موږ په راټلونکي کی د داسی ازادو وکتورو سره سر او کار لرو. نورې په وکتور انځور شوې لویې، بر سیره په مطلقه ارزښت او لور، په نورو ټاکونټوټو هم اړه لري. د بیلګې په توګه یوه قوه یا زور د همغه خپل تاثیرلیکی یا بهتره برید لیکی په اوږدوالي له یوه ځایه بل ته راکښل کیدی شي(په غبرګ یا موازی راکښون یی تاثیر تغیر کوي) دلته په لیکه راکښونکو وکتورو باندې غږیږو. هغه یو ټکی انځورونکی وکتور په کواوردیناتسیستم په سرچینې (د برید - یا حملی ټکی) پورې ترلی. داسی وکتورونه ځای وکتورونه(په ځاي ترلي -) بلل کیږي .ځنی په لاندې کی د فرمول بندي شوې شمیرقاعدې له مخې کیدی شي دې ډول وکتورونو ته هم پراخه شي.

پیژند ۱۷ . ۲ :

دوه وکتورونه **a** او **b** برابر بلل کیږي $\mathbf{a} = \mathbf{b}$

که دواړه وکتورونه په مطلق ارزښت او لور یو په بل سر وخوري یا پریوځي.

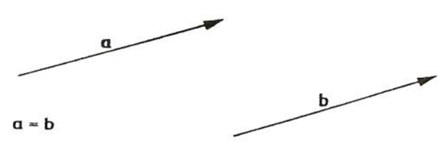


Bild 17.1 ځاکه

ټولې برابرې اوږدې او برابرې – یا همغه لوریزې کرښی، لکه چې وویل شو همغه وکتور ښایی.

پیژند ۱۷ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو وکتور **a** د مطلقه ارزښت 0=|**a**| سره 0 یا صفر وکتور بلل کيږي. صفر وکتور لور نه ټاکي یا تعینوي. یو وکتور **ea** چې د a لور او مطلقه ارزښت 1=|**e**|لري، نو په وکتور a پورې اړوند یوونوکتور(۱) بلل کيږي.

(1)Einheitsvektor,unit vector یوونوکتور یانې ارزښت يې یو یوون دی یا واحدوکتور(؟)

پیژند ۱۷ . ۴ :

دوه وکتوره اورتوګونال (Orthogonal) بلل کيږي، که دوي یو په بل نيغ ولاړ (عمود) ولاړ وي، کولینیار(kollinear) بلل کيږي، که دواړه د همغی یوې کرښې سره غبرګ وي، کومپلانار (komplanar) بلل کيږي ، که د همغي یوې هوارې سره غبرګ وي.

د وکتورونو سره شمیرلو لپاره باید مطلقه ارزښت او همدارنګه لور شمیرنیز ډوله لاس ته راوړل شي. ددې لپاره یوه نسبي سیستم ته اړتیا حس کيږي، دلته هوایي یا فضایي کارتیزي کواوردینات سیستم استعمالیدی شي. د کواوردینات سیستم انځورونولپاره لاندني روښانه ونې یا توضیحات یعنی د وکتور ځله ونه یاضرب د یوه ریيل ګڼ سره او د وکتورونو زیاتون مخ ته پراته دي.

پیژند ۱۷ . ۵ :

د یوه وکتور ځله ونه یا ځل د یوه سکالار سره:

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}, \lambda \in R$$

یو وکتور دی چې د $|\lambda|$ - ځله دa مطلقه ارزښت لري او د $0 < \lambda$ لپاره همغه لور لري لکه a، په ښځ یا برعکس که $\lambda < 0$ وي نو د a مخامخ لور یا په ښځ لور لري

جمله ۱۷ . ۱:

د ریيل ګڼ سره د وکتور د ځل د شمیرقاعدې

کوموتاتیف قاعده،اسوشیاتیو ضانون او د صفر وکتور سره ځل

$$\lambda.\vec{a} = \vec{a}.\lambda;....Kommutativ$$

$$\lambda(\mu.\vec{a}) = \eta(\lambda.\vec{a}) = \lambda\mu.\vec{a};....Ass.$$

$$|\lambda.\vec{a}| = |\lambda|.|\vec{a}|, 0.\vec{a} = \vec{0}, \vec{0} = 0$$

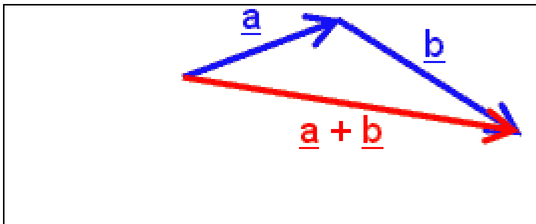
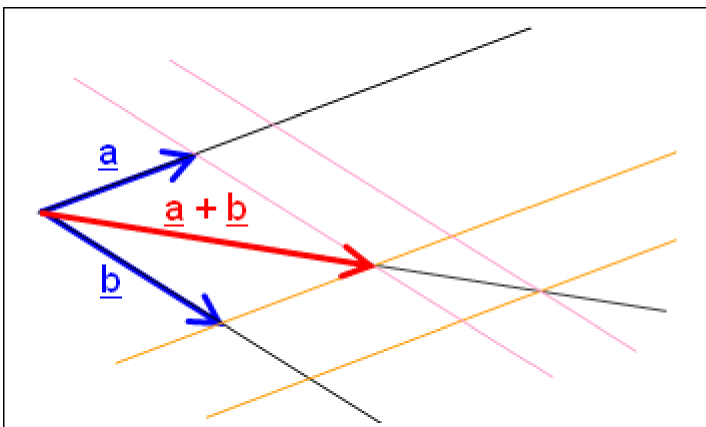
(c) ketabton.com: The Digital Library

ددي ځل یاضرب د پیژند سره ممکن کیږي چی هر وکتور a د یوه رییل ګڼ (ددي وکتور مطلقه ارزښت) او په هغه پورى تنظیم یا ترتیب شوی یوونوکتور د ځل په ډیر انځور کړو: $a = |a|.e_a$

پیژند ۱۷ . ۶ :

(د وکتورونو زیاتون)

د دوه وکتورونو a , b زیاتون (جمع) a+b د دواړو وکتورونو a او b څخه غزیدلی غبرګ اړخیزې(موازي الاضلاع) لوریز دوه کونجتړي (قطر) ده. ډیره . ۱۷ ۲)

د وکتورنو زیاتون (جمع) د قوو یا زورونو د زیاتون په څیر دی او دا د شمیر قاعده ساده د لیدو کیدی شي	
ډیره شته دغبرګ اړخیزه پورته نیمه یا له تعریف ۱۷ . ۶ څخه پورته ډیره یا مخامخ ډیره	

جمله ۱۷ . ۲ :

(د وکتورونو د جمع لپاره د شمیرقاعدې)

$a+b=b+a$ (کوموتاتیف قاانون)

$(a+b)+c=a+(b+c)$ (اسوسیاتیف قانون)

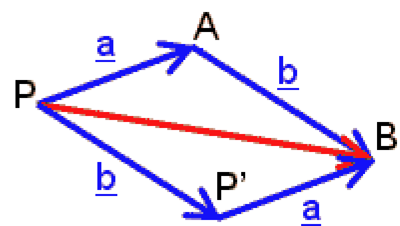
دیستریبوتیوو او وربسي یه لاندې نظم اړیکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

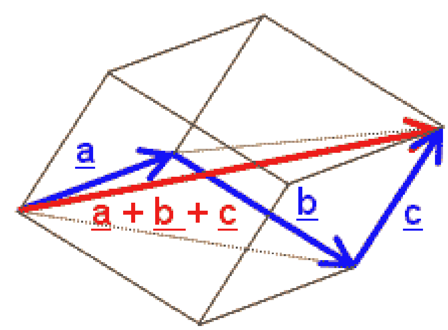
$$(\lambda+\mu).\vec{a} = \lambda.\vec{a} + \mu.\vec{a};............Distrib.$$

$$\mu(\vec{a}+\vec{b}) = \mu.\vec{a} + \lambda\vec{b};............Distr.$$

$$|\vec{a}+\vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$$



د زیاتون دې قانونو سره موږ ته ممکن کیږي چی هر وکتور، د بیلګي په توګه د وکتورونو د کواوردینات محور په لور ښودونکو وکتورونو د زیاتون په ځیر انځورکړای شو یا ولیکو. په دې ډول بریالي کیږو چی دواړه د وکتورونو لپاره موخه وره یا هدفمنده شمیرنه په کواوردینات سیستم کی انځور کړو



پورته ځیره کي د درې وکتورونو زیاتون

پیژند ۱۷ . ۷ :

په کواودینات سیستم کی د وکتور a انځورونی لاندې

a=(a1,a2,a3)   (17 . 1)

موږ په یوه ولاړکونجیز

-x1 , x2 , x3

کواوردینات سیستم کی د وکتور انځوره ونه پوهیږو، د نخښی یا مخ نخښی په نظر کي

نیولوسره او د ai پرویکشن یا پریوستون له لارې په هر xi - محور(i = 1 , 2 , 3)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرویکشن (Projection) د دوه اړخونو لپاره انځورونه (په ځيره ۱۷ . ۳ کی)
داسی ai د a وکتور i - م کواوردینات بلل کیږي

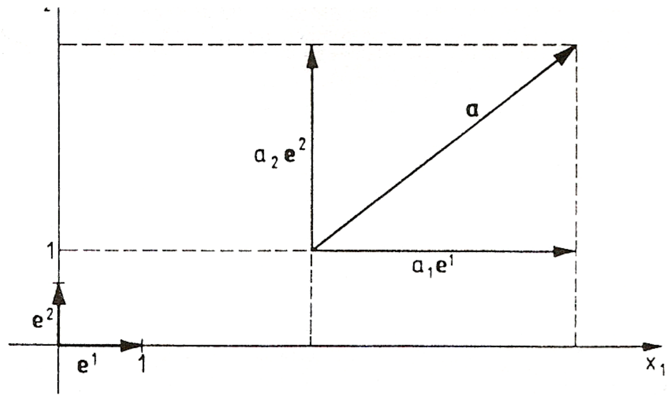


Bild 17.3 ځېره

یادونه:
موږ دلته که د وکتورونو پورته ځه لیکو نو هغه د وکتور پوتنځ په مانا نه دی بلکه هغه وکتور ښايي چی په کومه کواوردینات اړه لری. دلته د لیکنی له لورې پوره جوت دی. د xi- محورونو په لور په کواوردیناتشکل د یوونوکتورونو ځرګندونه په لاندې ډول ده

$$e^1 = (1, 0, 0)$$
$$e^2 = (0, 1, 0) \qquad (17.2)$$
$$e^3 = (0, 0, 1)$$

د وکتور aانځورونه د کواودیناتو $a^i; i = 1, 2, 3,$ او د یوونوکتورونو(۱۷ . ۲) د استعمال له لارې، د تعریفونو ۱۷ . ۵ او ۱۷ . ۶ په بنسټ د کمپوننتو له لارې یا مرسته لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۳: (د کمپوننتو (جوړختبرخو) له لارې د وکتور a انځورونه) لرو:

$$\vec{a} = a_1\vec{e^1} + a_2\vec{e^2} + a_3\vec{e^3}; \qquad (17,3)$$

د دوه پراخیدونې یا دوه بعدیز یا دوه دیمنزیون انځورونه. (ځېره . ۱۷ . ۳)
دلته, a^ie^i چی i=1,2,3 وي، د a وکتور i - م کمپوننت یا جوړخت برخه بللکیږي
د جملو ۱۷ . ۲ او ۱۷ . ۳ په مرسته کیدی شي لاندې جمله لاس ته راشی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۴:

د رییل ګڼ سره د یوه کتور ځله ونه او یا د وکتورونو زیاتون کواوردینات ډوله یا په ډیر صورت نیسي، دا په دې مانا چې لاندې باوري کیږي::

$a=(a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$

$\mu a = (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3)$ (17 . 4)

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.........................(17,5)

بیلګه ۱۷ . ۱ :

د(a=(-2,3,-5 , b=(1,-6,4) لپاره لرو

2a+3b=(2-2,3,-5)+3(1,-6,4)=(-1,-12,2).

د وکتورونو کمون د وکتورونو د زیاتون په ډیر (تعریف ۱۷ . ۶) صورت نیسي یا ځان نیسی

پیژند ۱۷ . ۸ :

د a - b کمون یا کمښت د وکتور a او وکتور b ته مخامخ - یا په ځټ وکتور یعني -b زیاتون دی: a-b=a+(-b) (ځېره۱۷ . ۴)

له تعریف ۱۷. . ۸ لاس ته راځي : وکتور a ، کوم چې له x1 ټکي x^2 ټکی ښايي (د دوه اړخؤنویا بعدونو انځورونی لپاره .ش ۱۷ . ۵) داسی دی (پاي ټکی تري کم پیل ټکی یاني د پایټکي او پیلټکی کمښت): $a = x^2 - x^1$

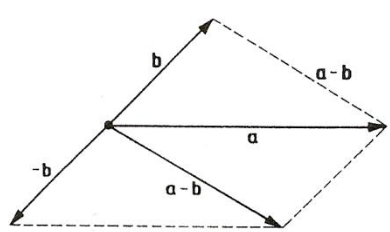


Bild 17.4 ځېره

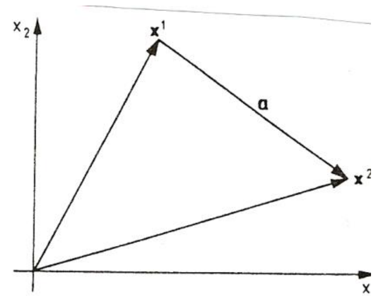


Bild 17.5 ځېره

بیلګه ۱۷ . ۲:

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه وکتور چی له $x^1 = (-1,-3,1)$ ټکي څخه($x^2=(2,-1,5$ ټکی ښايي(په ګوته کوی يه ګوتنيوونی کوي) داسی دی :

$$a = x^2 - x1 = (2,-1,5)-(-1,-3,1)=(3,2,4).$$

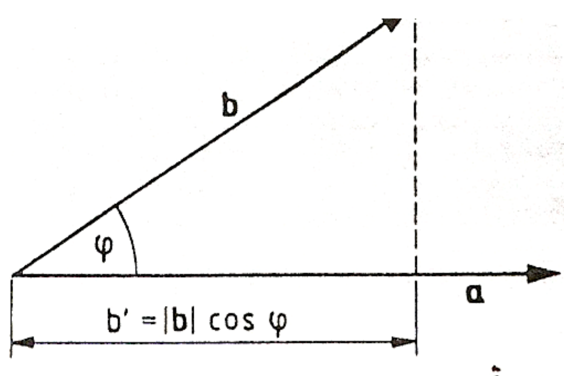
۱۷ . ۲ د دوه وکتورنو سکالار ځله ونه یا ضربونه

پيژند ۱۷ . ۹ :

د دوه وکتورونو a , b سکالار ځل a . b د دواړو وکتورنو د مطلقه ارزښت
او له دي دواړو وکتورونو منځ ته راغلی کونج کوساين ځل یا ضرب دی، یانې

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\varphi; ....(17,7)$$

د سکالار ځل یا ضرب نتیجه سکالار ده
په (۱۷ . ۷) کی فاکتور $\vec{b}' = |\vec{b}|.\cos\varphi$ په هندسی مانا د (مخ) نخښني ساتلو سره (د کوساين د پيژند له مخی) په وکتورa دوکتور b پرویکشن یا پریوتل یا پرييستل دي (ځیره ۱۷ . ۶)



په فزيك کی د سکالار ځل یا- ضرب بيلګه :
که a هغه لار وي چی د هغي په اوږدوالی د b زور تاثير اچوي، پس A = a. b له دې زور له لارې کړ شوی کار ښايي) د لار اوږدوالی چي د لار په لور د زور د پرویکشن سره ځل دی) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۵ : (د سکالار ځل شمیرقاعدې)

$a.b=b.a$ (کوموتاتیو قاون)

$a(b+c)=a.b+a.c$ (دیستریبوتیو قانون)

$a.b=0$ که a اوb یوپه بل اورتوګونال یا عمود وي (۱۷ ، ۸)

$a.a=|a|^2$ (17 . 9)

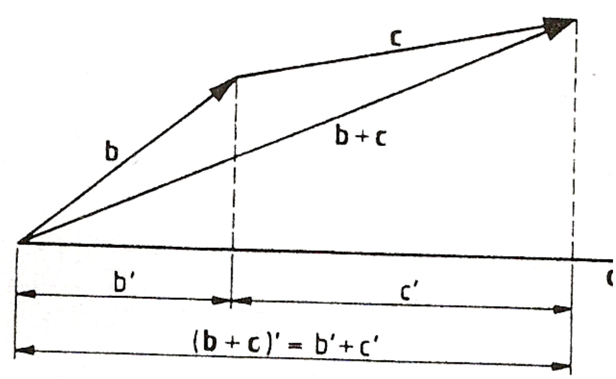
د پورته شمیرقاعدو جوتونه: کوموتایو قانون د (۱۷ . ۷) پسی ترلی لاس ته راځي.

دیستریبوریوقانون په (څیره ۱۷ . ۷) کی لیدل کیږي.

د اورتوګونالوکتورونو لپاره باور لري: که $a.b = 0$ نو $\cos\alpha = 0$ او(۱۷ . ۸)

له (۱۷ . ۷) څخه لاس ته راځي .

همداډول (۱۷ . ۹) له (۱۷ . ۷) او داچی $\alpha = 0°$ د a او a ترمنځ دی(، نو لاس ته راځي $\cos\alpha = 1$



پورته څېره ۱۷ . ۷

جمله ۱۷ . ۶ :

د دوه وکتورونو سکالار ځل کواوردیناتډوله صورت نیسي یعني د

$a = (a1 ,a2 ,a3), \quad b = (b1 ,b2 ,b3)$

د ځله ونی یا ضرب څخه لاس ته راځي :

$$a.b=a1b1+a2b2+a3b3 \qquad (17 . 10)$$

اوبیونه : د یوونوکتورونو (۱۷ . ۲) لپاره لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۹ . ۱۷) سره سمر د i = j لپاره $e^i.e^j = 1$ د(۹,۱۷) سره سم د j =|iلپاره $e^i.e^j = 0$ له دې لاس ته راځي:

$$\vec{a}.\vec{b} = (a_1e^1 + a_2e^2 + a_3e^3)(b_1e^1 + b_2e^2 + b_3e^3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

يادونه : د لته د وکتورونو په تواندول چی څه لیکل کیږي د توان مانا نه لري په یوونوکتورونو کي ددې لار ې ښوول کیږي چي دا دکوم کواودینات یوون وکتور دئ او د نورو وکتورنو لپاره دا مانا لري چي کوم یو وکتور مو مطلب دئ او نه چی په کوم توان . دې ته د مخه هم ګوته نیول شوې ده.

بیلګه ۱۷ . ۳ :

وکتور(a=(2,-3,1 دې له لاندې وکتورونو سره ځل شي

a) b1=(3,1,4),b) b^2=(3,2,-2), c) b^3=(3,3,3)

اوبنونه یا حل: بیا یا انینترنیت

a) a . b1 = 2.3 - 3.1 + 1.4 = 7

b) a . b^2 = 2.3 - 3.2 +1.(-2) = -2

c) a . b^3 = 2.3 - 3.3 +1.3 = 0

دلته c (په دې مانا ده چی وکتورونه a او b^3 اورتوګونال یا عمود دي ددې لپاره لیکو:

$a \perp b^3$

جمله ۱۷ . ۷:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};\ldots\ldots\ldots\ldots(17,11)$$

اوبیونه : له (۱۷ . ۱۰) لرو : $a . a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

بیلګه ۱۷ . ۴ :

د وکتورونو(a=(2,-3,1) , b=(3,0,-4 مطلقه ارزښت (اوږدوالی) دئ

$$|\vec{b}| = \sqrt{9+0+16} = 5; |\vec{a}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{4}$$

جمله ۱۷ . ۸ :

د دوه وکتورونو aاو b ترمنځ کونج په لاندې ډول ټاکل کیږي

$$\cos\phi = \frac{a.b}{|a|.|b|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}};\ldots\ldots\ldots\ldots(17,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبیونه یا حل : (۱۷ ، ۱۲) له (۱۷ . ۷) ، (۱۷ . ۱۰) او (۱۷ . ۱۱) څخه لاس ته راځی

بیلګه ۱۷ . ۵ :
په بیلګه ۱۷. . 3کی د $\vec{a} \wedge b^1, b^2, b^3$ تر منځ کونجونه د شمیرلو دي.
اوبیونه:

$$\phi_1 = \angle(\vec{a}, \vec{b^1}) = \frac{2.3-3.1+1.4}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+1+16}} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = 0,3669; \phi_1 = 68,48°$$

$$\phi_2 = \angle(\vec{a}.\vec{b^2}) = \cos\phi_2 = \frac{2.3-3.2+1(-2)}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+4+4}} = \frac{-2}{\sqrt{4}\sqrt{17}} = -0,1296, \phi_2 = 97,45°$$

$$\phi_3 = \angle(\vec{a}.\vec{b^3}) = \frac{2.3-3.3+1.3}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+9+9}} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{27}} == 0, \phi_3 = 90°$$

۱۷ . ۳ د دوه وکتورونو وکتوري ځلونه یا ځل

پیژند ۱۷ . ۱۰:

ددوه وکتورونوa,bکتورځل یا وکتوریز ځل یو وکتورc دی د کوم لپاره چی لیکو
a × b = c او لاندې خویونه لري:
۱ - د c مطلقه ارزښت دی

$$|c| = |a||b|.\sin\phi; ....(17,13)$$

دا دهندسي له مخی د a او b وکتورونو لخوا غزیدلي غبرګ اړخیز منځهواري په مانا دی.(خ. ۱۷ . ۸)
۲- د c وکتور a او b باندې نیغ ولاړ یا اورتوګونال دی.
۳– دلته a , b , c یو ښي سیستم جوړوي، دا په د مانا چی که دښي لاس غټه ګوته او د ښوولو ګوته د aاوbلور وښایي نو کونججوړونکي د منځ ګوته دوکتورc- لور ښايي (څیره ۱۷ . ۹)

(c) ketabton.com: The Digital Library

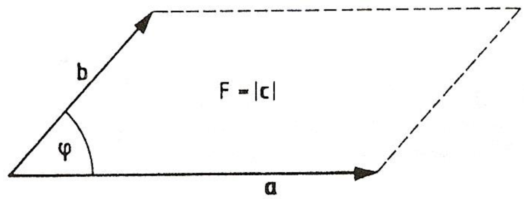


Bild 17.8

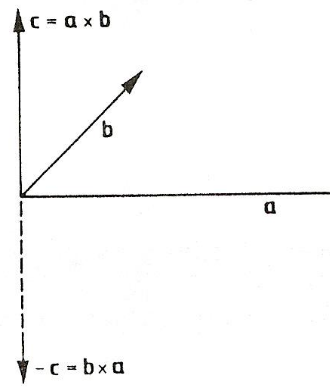


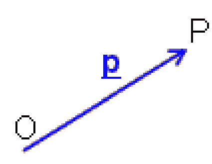
Bild 17.9

دا لاندې ښیرې د فرمولونو سره موږ ته ټکی، کرښه او هواره را په ګوته کوي او د یوه وکتور مطلقه ارزښت.

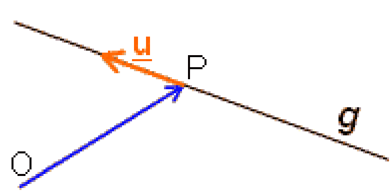
$$|\underline{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

ټکی $P(p_1|p_2|p_3)$

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$



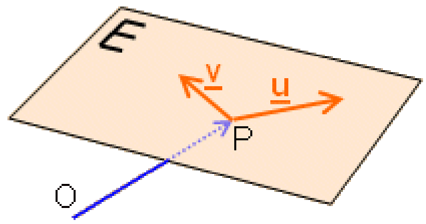
کرښه g



$$g: \underline{x} = \underline{p} + t \cdot \underline{u}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هواره E



E: **x** = **p** + r·**u** + s·**v**

وکتورځله ونه یا وکتور ځل یواځې د درې اړخیزې هوایا فضا لپاره تعریف دی.

د وکتورځل بیلګه په فزیك کې :

که F قوه یا زور وي چې په یوه کلك ځرخیدونکي بدن (جسم) د Q په ټکي د r په مړوند چې د r سره کونج جوړوي، برید یا حمله کوي او هغه د P په ټکي ځرخوي (ځیره ش.
۱۷ . ۱۰) نو ځرخون مومنتDrehmoment منځ ته راځي M = r × F

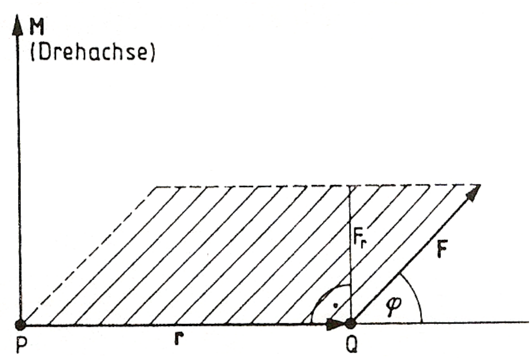


Bild 17.10

د مطلقه ارزښت له مخې د ځرخونمومنت د اوږدوالی | r | د اړم مټ او مطلقه ارزښت
$F_1 = |F| \sin\phi$

چې د اړم په مټ (نیغ) ولاړ د قدرت یا قوت زور کپوننت (جوړونکی) دی:
$M = |r||F| \sin\phi$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۹: (د وکتورضرب لپاره د شمیرقاعدې)

$$a \times b = - b \times a \qquad (17 . 14)$$

دیستریبوتیو قانون)

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c) \qquad (17.15)$$

$a \times b = 0$ د کولینیار وکتورونو لپاره) (16 . 17

د پورته شمیرقاعدو ښه څرگندونه یا توضیح : (۱۷ . ۱۴) د غوښتونکي ښي سیستم له مخې (پیژند .۱۷ ۱۰ ،ځ. ۱۷ . ۹)

د کولینیار وکتورونو لپاره $\phi = 0$ پس لرو: $\sin\phi = 0$ له دې سره د (۱۷ . ۱۳) له مخې (۱۷ . ۱۵) لاس ته راځي. په دیستریبوتیو قانون په لیدنوالي (پیچي دئ) دلته صرف نظر کیږي، لیدوړ والی یی نه څرگندوو. د وکتورځل شمیرلو لپاره د وکتورکواوردیناتډوله ښودنی سره د یوون وکتورونو e^1 , e^2 , e^3 وکتورځل ته اړیو.د (۱۷ . ۱۵) شمیر قانون له یوې خوا او له بلی خوا د وکتور ځل پېژند ۱۷ . ۱۰ څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۱۰ (د یوونوکتورونو وکتورځل)

$$e^i \times e^i = 0, i = 1,2,3; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17,16)$$

$$e^1 \times e^2 = e^3, e^2 \times e^3 = e^1, e^3 \times e^1 = e^2; \ldots\ldots\ldots\ldots (17,17)$$

$$e^2 \times e^1 = -e^3, e^3 \times e^2 = -e^1, e^1 \times e^3 = -e^2; \ldots\ldots\ldots\ldots (17,17)$$

د دریمی درجی دیترمینانت کلیمی لاندې (پېژند۱۱ . ۲) او که څوك یوون وکتورونه د دیترمینانت د توکو په څیر ومنلی شي، کیدی شي چی د وکتورځل $a\times b$ د a , b کواوردیناتو په څیر انځور شي

جمله ۱۷ . ۱۱ : د وکتورونو

$b =(b1,b2,b3),a=(a1,a2,a3)$

وکتوریز ځل یا وکتوري ځله ونه په لاندې کې د ماتریکس په توگه ده:

$$a \times b = \begin{bmatrix} e^1 e^2 e^2 \\ a_1 a_2 a_2 \\ b_1 b_2 b_3 \end{bmatrix}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبیونه یا حل : د وکتور $a=(a_1e^1+a_2e^2+a_3e^3)$ څل د وکتور

$$b=(b_1e^1+b_2e^2+b_3e^3)$$

د توکوډوله(توګي په توکي) وکتوري څل د جملی ۱۷ . ۱۰ کارونه، دا لاندې ورکوي

$$a\times b=e^1(a_2b_3-a_3b_2)+e^2(a_1b_3-a_3b_1)+e^3(a_1b_2-a_2b_1)$$

دا ضرب ارزښه یه دا لاس ته راوړنه یا نتیجه د دیترمینانت (۱۸ . ۱۷) د شمیرلواود پېژند ۱۱ . څخه هم ترلاس راځي

بیلګه ۱۷ . ۶:

a × b دې وشمیرل شي، که وي

الف) a=(-2,1/2,-1), b=(1/2,-2 ,1)

ب)

$$a=e^1-3e^2+e^3, b=-e^1-2e^2+3e^3$$

اوبیونه یا حل الف) ب) د دې بیلګې اوبیونه دې ګان لستونکي او مینه وال په غاړه واخلی، دا له مخه تیرې جملې له مخی پوره روښانه دی٠

وکتوري څل د خپل مطلقه ارزښت (۱۷ . ۱۳) هندسي اهمیت په بنسټ د وکتورونو a , bڅخه خورې شوې منځهوارې Fp غبرګ اړخیز ه همداډول د a او b څخه خورشوي یا غزیدلې دریګوډی منځهوارې FD شمیرلو لپاره خورا مساعد دی . باور لري

$$F_P=|a\times b|; F_D=\frac{1}{2}|a\times b|;......................(17,19)$$

بیلګه ۱۷ . ۷ :

د وکتورونو(a=(1,1,0) , b=(2,0,1 څخه خورې شوې هوارې منځ یا دننه په لاندې ډول ده

$$a\times b=\begin{vmatrix} e^1e^2e^3 \\ 110 \\ 201 \end{vmatrix}=(1,-1,-2), F_P=|a\times b|=\sqrt{1^2(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$$

بیلګه ۱۷ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دریګوډی ABC منځهواره (د هوارې دننه) دې وشمیرل شي چی کونجټکي يي وي :

A=(2,1,1) , B=(4,0,0) , C=(1,-1,2)

ابیونې :

دریګوډی له لاندې وکتورونو څخه غزیږي

a=B-C=(3,-1,-2),

b=A-C=(1,2,-1) او

د a او b وکتوري ځل په لاندې ډول دی

$$a \times b = \begin{vmatrix} e^1 e^2 e^3 \\ 31-2 \\ 12-1 \end{vmatrix} = 3e^1 + e^2 + 5e^3 = (3,1,5)$$

د درېګوډی ABC د هوارې دننه یا منځهواره په لاندې ډول ده

$$F_D = \frac{}{2} | a \times b | = \frac{1}{2} \sqrt{3^2 + 1 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{35}$$

۱۷ . ۴ شپات ضرب (غبرګهواریزځل موزی سطحیز ضرب)

یادونه : دا یو شپږ خواییز تن دی چی مخامخ هوارې یی سره غبرګی او یو په بل ضرور نیغ ولاړ نه وي . لاندې شکل ۱۷ ۱۱. یی بیلګه او د مسئلی دحل انځورونه ده

پیژند ۱۷ . ۱۱ :

د درې وکتورونو غبرکهواریز ځل یا شپاتځل[a , b , c] لاندې ځل یا ضرب دی

[a,b,c]=(a×b) (17 . 20)

دلته وکتورونه a او b وکتوریز ځل کیږي او نتیجه يي بیا د cسره سکالار ځل کیږي، یعنی لاس ته راوړنه یا نتیجه يي سکالار ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

غبرکهواریزځل ځمککچیز هندسي لیدونکی اهمیت لري. د سکالارځل (پیژند ۱۷ . ۹)
سره سم باور لري

$$[a,b,c]=(a\times b).c=|a\times b|.c=|a\times b|.|c|.\cos\alpha$$

دلته الفا د وکتورونو a × b او c څخه رابند شوی کونج دی .(څیره ۱۷ . ۱۱)

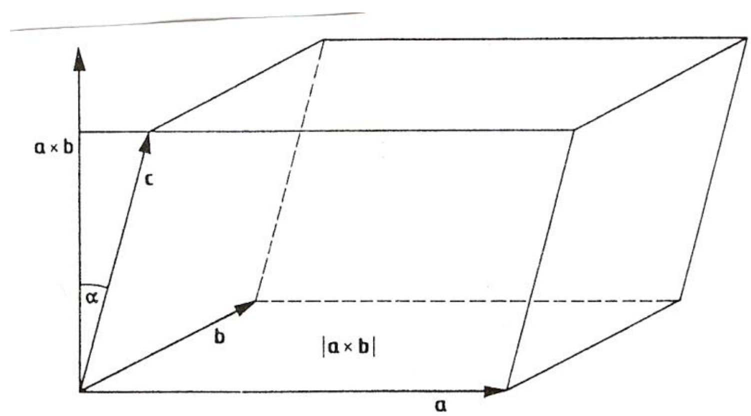


Bild 17.11

دلته د وکتورځل تعریف سره سم (پیژند ۱۷ . ۱۰) |a×b| د a اوb غزیدلي غبرګ اړخیز
دی . برسیره پر دې $|c|.\cos\alpha$ پرتله برخه ۱۷ . ۲ (په وکتور a×b باندې د وکتور c
پروجکشن یا پریوستون په مانا دی. یعني د a,b او c څخه غزیدلی غبرګهوارې یا

شپات جګوالی ښايي. پس[a,b,c] هندسي د وکتورونو a,b,c څخه غزیدلي غبرکهواریزې
ډکي (حجم) په مانا دی.
دغبرګهواریز په مطلقه ارزښت (د غبرګهواریز ډکي یا-حجم) کی تغیر نه راځي که
چیرې د وکتورونو پرلپسی ترتیب بدل شي. د غبرګهواریزې ډکی زیاتیز یا مثبت دی، که
ورکړ شوي ترتیب یو ښی- سیستم جوړ کړی٠

جمله ۱۷ ۰ ۱۲:

$$[a,b,c] =[b,c,a] = [c.a.b]=-[a,c,b]=$$
$$=-[c,b,a]=-[b,a,c] \quad (17 . 21$$

که وکتورنه په یوه هواره کی پراته وي)کومپلانار وي(نو یو شپات د صفر جګوالي سره
لاس ته راځي. نو بیا لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۷ . ۱۳:

(22 . 17) د کومپلانار وکتورونو لپاره باور لري$[a,b,c]=0$

د غبرګهواریز یا شپاټ ځل شمیرلو لپاره د وکتورونو په کواوردیناتتوګه انځورونه بیرته دیترمینانت انځورونه په کار اچول کیږي

جمله ۱۷ . ۱۴:

د وکتورونو
$a=(a1,a2,a3),b=(b1,b2,b3),c=(c1,c2,c3)$
غبرګهواریز ځل په لاندې ډول دی

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix};.........(17,23)$$

اوبیونه : وکتور ځل $a\times b$ د جملی ۱۷ . ۱۱ سره سم لاندې اوبیونه لري
$a.b=(a_2b_3-a_3b_2)e^1-(a_1b_3-a_3b_1)e^2+(a_1b_2-a_2b_1)e^3$
د $a \times b$ سکالارځل د c سره کواوردیناتدوله په لاندې توګه صورت نیسي.
$(a\times b).c=[a2b3-a3b2,-(a1b2-a2b1),a1b2-a2\ b1].(c1,c2,c3)$
$= c1(a2b3-a3b2)-c2(a1b3-a3b1)+c3(a1b2-a2b1)= a1(b2c3-b3c2)-a2(b3c1-b1c3)+a3(b1c2-b2c1)$
دا نتیجه د دیترمینات (۱۷ . ۲۳) شمیرلو له لارې هم لاس ته راځي.

بیلګه ۱۷ . ۹:

د وکتورنو$a=(0,1,2)$, $b=(2,0,1)$, $c=(1,1,0)$
غبرګهواریز - یا شپاتځل$[a,b,c]$ په لاندېډول دی:

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix} 012 \\ 201 \\ 110 \end{vmatrix}=0(0-1.1)-1(0-1.1)+2(2.1-0)=5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۷ . ۱۰:
وکتورونه(a=(1,2,3) ,b=(3,6,1), c=(0,0,1کومپلانار دې او شپاتځل يې په لاندې ډول دی(دا اوبیونه دې ګران لوستونکي او مینه وال په غاړه واخلي)

بیلګه ۱۷ . ۱۱ :
د تیترایدر(دریګوډي اړخیزه ، لاندې شکل دی) ډکی(حجم) دې وشمیرل شي
(ځیره. ۱۷ . ۱۲)

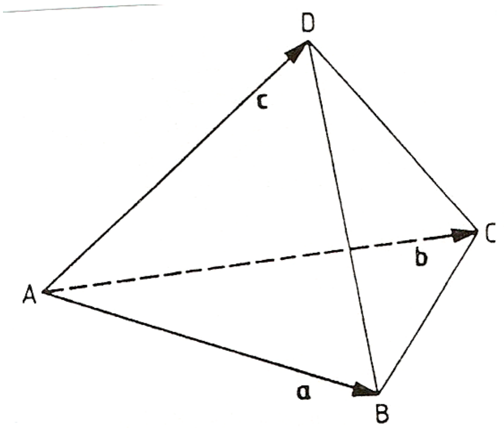


Bild 17.12

د لاندې کونجټکو یا ګوډټکو سره
A=(1,1,0) , B=(2,0,1)
C=(3,-1,2) , D=(1,0,3)

یادونه : دا پورته په ختّه کې ککرټکي دي، ځکه چې دا ځېره څلور ککرې لري
اوبیونه : دا غوښتونکی ډکی د لاندې وکتورونو څخه خور تیترید ۶/۱ برخه ده
a=B-A=(1,2,0),b=C-A=(2,1,0) , c=D-A=(0,1,2)
دا تیترئیدر یو اهرام دی چې ډکی یا حجم یی ۳/۱ ځل بنسټیزهواره ځل جګوالید تیترائند جګوالی د شپات جګوالي سره مساوي دی او د دریګوډیهواره یی د شپات نیم د وکتورونو a , b , cکمیز یا منفي دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[a,b,c] = \begin{vmatrix} 110 \\ 201 \\ 012 \end{vmatrix} = -5$$

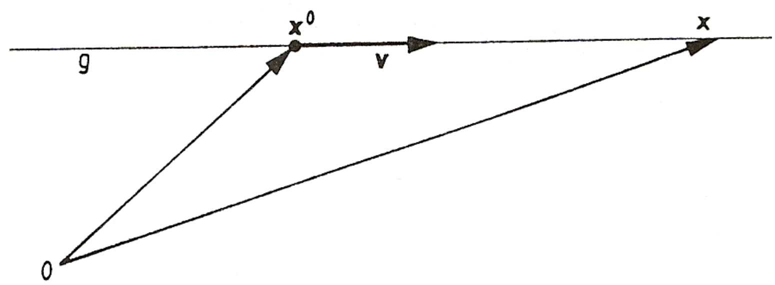
د کچکڼ لپاره مطلقه ارزښت نیول کیږي: V=(1/6).|[a,b,c]|=5/6

۱۷ . ۵ په شننیزه (تحلیلي) ځمککچ کی د وکتورونو کارونه

په دې برخه کی ځموږ هدف دئ چی وګورو چی د تحلیلي هندسی پرابلمونه او بیا په ځانګړي ډول تحلیلي هندسي په هوا کی وکتوري مطالعه) د ۱۶ -برخي سره په توپیر(څنګه کیږي۰

۱۷ . ۵ . ۱ د یوې کرښی وکتوریزه انځورونه

په فضا یا هوا کي د یوې کرښی ځای د یوه ټکي او لور له لاری یواځنی ټاکلی دئ. په کرښه gدې نښتی ټکی د ځاي وکتور x0 په مرسته (چی د کواوردینات سیستم د O څخه دا ټکی ښایي)، لور یي په وکتور V (څیرې۱۷ . ۱۳



څیره ۱۷ . ۱۳

که λ یو پارامتر وي چی د رییلګڼونو ډیری کی ځغلي، نو د کرښی g یو په زړه پور ټکی x د وکتور زیاتون یا - جمع له لارې په لاندې فورم (بڼه) ښوول کیږي

$$x = x^0 + \lambda.v, -\infty < \lambda < \infty; ....(17,24)$$

د وکتور v په لور په ټکي x0 کی د کرښی g برابرون (پارامتر فورم)

که پارامتر λ په ریل ګڼونو کی وځغلي نو x د کرښی ټولو ټکو کي یا د ټکو ترمنځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځغلي. د هر ټکي $x \in g$ لپاره یواځني یوه $\lambda \in R$ شته یا موجود دهوکتور مساوات (۱۷ ، ۲۴) لاندې درې سکالار برابرونونه نه دي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda.v, x_2 = x_2^0 + \lambda.v, x_3 = x_3^0 + \lambda.v; ....(17,25)$$

که کرښه g په دوه ټکو x^0, x^1 ورکړ شوي وي، نو د لور وکتوریی دی $v=x^1-x^0$ او په دې ډول یی د کرښي برابرونونه دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0); ....(17,26)$$

بیلګه ۱۷ . ۱۲ :

په لاندې ټکو($x^1=(1,3,2), x^0=(1,2,3)$ ورکړ شوې کرښه د $v=x^1-x^0 = (0,1,-1)$

له امله په لاندې توګه لیکل کیږي

$$x = x^0 + \lambda.v = (1,2,3) + \lambda(0,1,-1)$$

دا لاس ته راوړنه یا نتیجه موږ ته لاندې درې سکالار برابرونونه په ګوته کوي

$$x_1 = 1, x_2 = 2 + \lambda, x_3 = 3 - \lambda$$

دکرښی برابرونونو (۱۷ . ۲۴) پارامترفورم په هواره کی د کرښي ځانګړی حالت خوندي لري: x, x^0 او v وکتورونه دي، هر یو د دوه کومپوننتو سره.

بیلګه ۱۷ . ۱۳ :

په یوې هوارې کي د یوې کرښي د مساواتو فورم:

$x = (1,2) + \lambda(1,-1)$ سکلار برابرونونونه په ګوته کوي. $x_1 = 1 + \lambda, x_2 = 2 - \lambda$

له دې څخه سرې کولی شي چی پارامتر λ له منځه یوسي:

$$\lambda = x_1 - 1, x_2 = 2 - (x_1 - 1) = 3 - x_1$$

که د x1 په ځاي x او د x2 په ځاي y ولیکو نو لاس ته راځي$y=-x+3$ د

کرښي د برابرونونو نورمال فورم (16 . 2 .) که غواړو چی معلومه کړو چی ایا ټکی x^1 په کرښه g پروت دی، نو باید وڅیړو چي کواوردینات یی برابرون (۱۷ . ۲۵) پوره کوي، که نه. دا په دی مانا چی ایا دده لپاره یو د λ - ارزښت موجود دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۷ . ۱۴ :

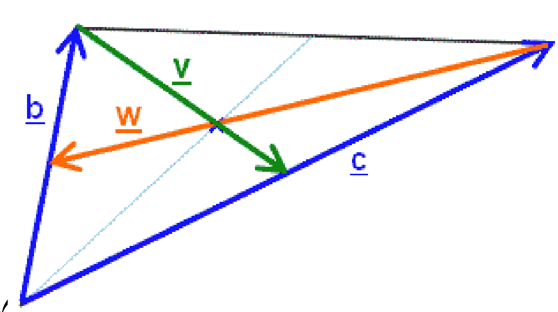
لاندې ټکي $1)...x^1=(-1,4,3), 2)...x^2(2,-2,1)$ په
کرښه $g: x=(1,0,1)+\lambda(-1,2,1)$ پراته دي که نه ؟

اوبیونه : ۱) د دې درې برابرونونو $-1=1-\lambda, 4=0+2\lambda, 3=1+\lambda$ له
جملې د دوهم څخه لاس ته راځي $\lambda=2$ او دا ارزښت لومړی او هم دریم مساوات ډکوي)
پوره کوي $-1=1-2, 3=1+2$ له دې امله ټکی x^1 په کرښه g پروت دی.
۲) ددې درې برابرونونو $2=1-\lambda, -2=0+2\lambda, 1=1+\lambda$ له دویم لرو $\lambda=-1$
دا ارزښت لمړي مساوات پوره کوي، مګر دریم مساوات نه: پس x^2 په کرښه g نه دی
پروت.

که د دوه کرښو $g_1: x=x^1+\lambda v; g_2: x=x^2+\mu w$ غوځټکی xS ، موجود وي باید
د دواړه کرښو مساوات پوره کړي. په دې مانا چې باید باوري شي:

$$x_S=x^1+\lambda v=x^2+\mu w$$

دا وکتوربرابرون درې سکالار برابرونونه دي چې د هغو له دوه وو څخه سرې
پارامتره $\mu \wedge \lambda$ شمیرلی شي. که لاس ته راغلي ارزښتونه دریم مساوات پوره کړي، نو یو
پریټکی مخ ته شته، که ناپای زیات حلونه مخ ته پراته وي ، نو دواړه کرښې یو په بل
پرتې دي.



بیلګه ۱۷ . ۱۵ : د لاندې کرښو
غوځټکی دې پیدا شي :

$$g_1: x=(1,1,0)+\lambda(1,3,-2), g_2: x=(1,2,2)+\mu(-1,-2,4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل یا اوبیونه : غوښتکي باید دواړه برابرونونه پوره کړي::

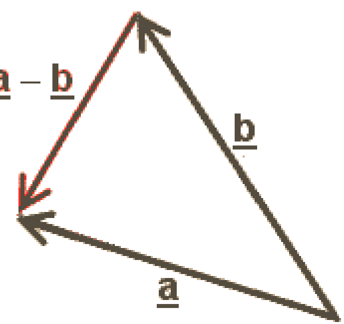
$$1+\lambda=1-\mu, 1+3\lambda=2-2\mu, -2\lambda=2+4\mu$$

د دري سکالار برابرونونو له لومړي مساوت څخه لرو $\lambda=-\mu$ ددې له مخې او له دوهم برابرون څخه لاس ته راځي : $\mu=-1$ نو لرو $\lambda=1$. په دې ډول دریم برابرون هم پوره کیږي د غوښتکي کواوردینات سیستم د کرښې g1 د $\lambda=1$ سره لاس ته راځي:

xs =(1,1,0)+1.(1,3,-2)=(2,4,-2).

۱۷ . ۵ . ۲ د هوارې یا سطحې وکتوریزه انځورونه

د یوې هوارې E ځای په هوا کی په یوه ټکي x0 او دوه نا غبرګو وکتورونو v او w یوائځنی ټاکلی دئ. د وکتورونو v او w پیلټکي کیدی شي په x0 پراته ونیول شي‌یا پراته فرض شي) ش؟؟ څیره شته . ۱۷ . ۱۴) .



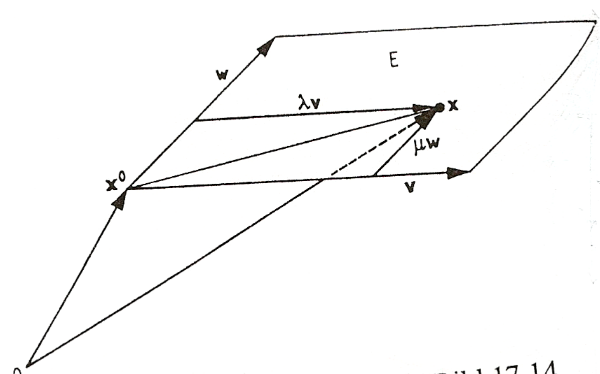


Bild 17.14

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $\lambda \wedge \eta$ پارامترونه وي چی یو له بل خپلواك د رییل گنونو ډیري کی ځغلي، نو کیدی شي د هوارې E په خوښه ټکی x په لاندې ډول انځور شي

$$x = x^0 + \lambda v + \mu w, -\infty < \lambda, \mu < \infty; ....(17,27)$$

د هوارې E مساوات چی د x0 ټکي کی، له وکتورونو v,w غزیدلي (پارامترفورم)

هر جوړه ارښت $\lambda, \mu \in R$ یواځنی یو $x \in E$ ښايي. وکتوربرابرون (۱۷ . ۲۷) لاندې سکالاربرابرون څرگندوي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda v_1 + \mu w_1, x_2 = x_2^0 + \lambda v_2 + \mu w_2, x_3 = x_3^0 + \lambda v_3 + \mu w_3; ....(17,28)$$

که چیرې هواره په درې ټکو x0 , x ¹ , x²

چي په یوه کرښه نه دې پراته ورکړ شوي وي، نو کیدی شي چی د هوارې غزوونکي وکتورونه په لاندې ډول انځورشي: v=x¹-x0 , w=x²-x0 له دې سره د هوارې مساوات داسی دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) + \mu(x^2 - x_0); ....(17,29)$$

بیلگه ۱۷ . ۱۶:

په درې ټکو x0 =(-1,2,5),x¹=(2 ,3,-6),x²=(1,-4,3) کې د هوارې E ورکړ شوي برارون د v=x¹-x0=(3 ,1,-11) ,w =x²-x0=(2,-6,-2) له امله په لاندې ډول دي:

$$x = x^0 + \lambda v + \mu w = (-1,2,5) + \lambda(3,1,-11) + \mu(2,-6,-2)$$

ددې نتیجی څخه لاندې سکالاربرابرون لاس ته راځي:

$$x_1 = -1 + 3\lambda + 2\mu, x_2 = 2 + \lambda - 6\mu, x_3 = 5 - 11\lambda - 2\mu$$

۱۷ . ۵ . ۳ :د هواروبرابرون یا- مساوات سکالارفورم(-بڼه)

یوه هواره د یوه ټکي x0 او یوه په هواره نیغ ولاړ وکتور n له پلوه یاله لارې هم یواځنی ټاکلی ده یا، چی عمودي یا نورمال وکتور (Normalvektor(يي بولي) ؟؟؟ ځیره شته ش . ۱۷ . ۱۵

په هواره E کی دې x یو په خوښه ټکی وي .نو دا له x0 و x ته بریدي وکتور x-x0 هم په دې هواره کی پروت دی او وکتورونه n او x-x0 یو په بل نیغ ولاړدي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

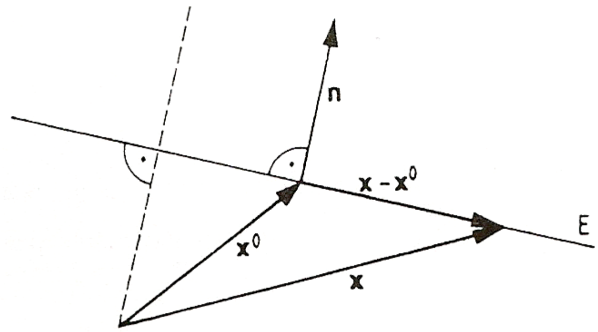


Bild 17.15

په یو بل نیغولاړو) اورتوګونال (وکتورونوڅخه جوړ شوي سکالارځل صفر دی څیره (ځ. ۱۷ . ۸ دې برتله شي) دا په دې مانا چی باوري کیږي :

n(x-x0)=0,nx=nx0= c (17 . 30)

دهوارې برابرونونو سکالار فورم ، n- عمودوکتور، د هوارې x0 په ټکی.

بیلګه ۱۷ . ۱۷ :

د هوارې برابرون چی ټکی(2,-1,5)= x0په پروت دئ او په هغه وکتور(n=(2,-2,1 (نیغ)ولاړ دی

د c=nx0=(2-2,1).(2,-1,5)=4+2+5=11 له مخې په لاندې ډول دئ:

(2,-2,1).x=11 <=> 2x1-2x2+x3=11.

د هوارې مساواتو پارامترفورم (۱۷ . ۲۷) په یوه سکالارفورم اړول بدلول (۱۷ . ۳۰) د پارامتر د له منځه وړلو له لارې لاس ته راځي.

بیلګه ۱۷ . ۱۸ :

د هوارې مساوات دې په پارامتر فورم وي:

$$x = (1,-2,4) + \lambda(0,1,-1) + \mu(1,-1,2)$$

دا وکتور برابرون لاندې درې سکالار برابرونونه خوندي لري یا په بر کي لري یا ځایوي:

$$x_1 = 1+\mu, x_2 = -2+\lambda-\mu, x_3 = 4-\lambda+2\mu$$

له لومړي لاس ته راځي: $\mu = x_1 - 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره دا نور دوه برابرونونه داسی دي

$$x_2 = -2+\lambda - x_1 + 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -1+\lambda \wedge$$
$$x_3 = 4-\lambda+2x_1-2 \Leftrightarrow -x_1+x_3 = 2-\lambda \Leftrightarrow$$
$$-x_1+x_2+x_3 = 1$$

د هوارې برابرونونو سکالار فورم: (-1,1,1)x=1

که غواړو چی څرګنده کړو چی ایا یو ټکی x1 په هواره E پروت دی چي برابرون یی په پارامتر فورم ورکړ شوي ، نو باید مطالعه شي چی ددې کواوردینات (۱۷ . ۲۸) برابرون پوره کوي که نه (بیلګه ۱۷ ، ۱۵ : د کرښی مساواتوته ورته) . او یا سړی پارامترفورم په سکالارفورم بدلوي او څیړي چی د ټکي کواوردینات دا مساوات پوره کوي، که نه .

بیلګه ۱۷ . ۱۹ :
ایا ټکی(x¹=(2,-2,5 په هواره $E: x=(1,-2,4)+\lambda(0,1,-1)+\mu(1,-1,2)$
پروت دی ؟
اوبیونه : : دلومړي دوه برابرونونو $2=1+0\lambda+\mu, -2=-2+\lambda-\mu, 5=4-\lambda+2\mu$
څخه لاس ته راځي$\lambda=1 \wedge \mu=1$

دا دواړه ارزښتونه دریم برابرون پوره کوي: 5=4-1+2.1 ، دا په دې مانا چي x1 په هواره E پروت دی. که د هوارې برابرون په سکالرفورم واړول شي: - (
x1+x2+x3=1بیلګه ۱۷ . ۱۸ دې وکتل شي (، نو د ټکي x¹ کواوردینات دې یواځي د x1,x2,x3لپاره ځاي په ځاي شي ، چی معلوم کړو چی x¹ په هواره E پروت دی : -
2+(-2)+5=1

د یوې هوارې: n.x=c:E او د یوې کرښی $g: x = x^0 + \lambda v$ ترمنځ غوڅټکی xs(که شته وي)(نو هم پهE پروت دی او هم په g .له دې امله د هوارې په برابرونونو کی د x لپاره $x^0+\lambda v$ ځاي په ځاي کوو(ږدو) او په دې ډول یو برابرون د λلپاره لاس ته راځي.که دا برابرون یواځنی یو اوبی ولري نو غوڅټکی موجود دی ، که اوبی شته نه وي یا موجود نه وي نو کرښه g د هوارې E سره غبرګه ځغلي، که ناپاي ډیر ې اوبیونې شته وي نو کرښه g په هواره E پرته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۷ . ۲۰ :

د کرښو $g: x=(1,0,1)+\lambda(-1,1,1)$ پروت ځاي يا موقعيت دې لاندې هوارو ته وټاکل شي:

$a).....x_1+2x_2+3x_3=4, b)...2x_1+x_2+x_3=3, c)...2x_1+x_2+x_3=4$

اوبيونه : دا چې لټونکی غوڅټکی xsد کرښي برابرون پوره کوي نو باوري دي:

$x_1=1-\lambda, x_2=\lambda, x_3=1+\lambda$

a) $x_1+2x_2+3x_3=(1-\lambda)+2\lambda+3(1+\lambda)=4\lambda+4=-4, \lambda=-2$

$x_S=(1+2,-2,1-2)=(3,-2,-1)$

b) $2x_1+x_2+x_3=2(1-\lambda)+\lambda+(1+\lambda)=0.\lambda+3=3$

لمدا λ په خوښه، gپه E پرته ده

c) $2x_1+x_2+x_3=2(1-\lambda)+\lambda+(1+\lambda)=0.\lambda+3=4$

حل نه شته ، نوکرښه gد سطحې E سره غبرګه ځغلي.

ددوه سطح

$n^1.x=c1$: E1

او E2 هوارې: $n^2.x=c2$ غوڅکرښه دواړه برابرونونه پوره کوي(دا دوه برابرونونه دي، هر يو د درې نامعلومو x1 ,x2 ,x3 سره). دوه امکانات شته دي چې کرښه g (که شته وي) را پيدا کړی شو.

۱ – سړی يوه واريابله يا اوښتونې په خوښه وټاکي $x_i=\lambda$ (ازاد پارامتر)، نور دواړه $x_j, j\neq i$ له دواړو هوارمساواتو څخه په λ کې د کرښيزو افادو يا وييو په څير راپيدا کوي. او په دې ډول کرښيز مساوات لاس ته راځي.

۲ – سړي د کرښې دوه مختلف ځانګړي ټکي x^0 او x^1 راپيدا کوي او په دې ډول د کرښې g مساوات لاس ته راولي: ($x=x_0+\lambda(x^1-x_0)$.

بيلګه ۱ ۷ . ۲۱ :

د دوه هوارو E_1 او E_2 پريکرښه g غواړو پيدا کړو. هوارې دې وي :

$E_1: x_1-x_2+x_3=3, \qquad E_2: 2x_1-x_2-3x_3=0$

حل ۱): $x_1=\lambda$ په خوښه

$E_1: -x_2+x_3=3-\lambda, E_2: -x_2-3x_3=-2\lambda.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمون یا تفریق : $4x_3 = 3 + \lambda$,

په E_1 کی دې ځای په ځای شي :- $-x_2+3/4 + \lambda/4 = 3 - \lambda$, $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$

نو لاس ته راځي $x_1 =$, $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$, $x_3 = (1/4)\lambda + 3/4$

په وکتور لیکدود : $x = (0,-9/4, 3/4) + \lambda(1, 5/4, 1/4)$

همداسی (<=>) له $\tilde{\lambda} = (1/4)\lambda$ سره لرو

$x = (0,-9/4, + \tilde{\lambda}(4,5,1)$

حل(اوبی) ۲ : په E_1 او E_2 ځاي په ځاي کوو: $x_3 = 0$, پس لاس ته

راځي $x_1 - x_2 = 3$, $2x_1 - x_2 = 0$ د لاندې حل سره $x_1 = -3$, $x_2 = -6$,

پس $x^0 = (-3, -6, 0)$ په هوار کې ځانګړی ټکی دی،که ولیکو $x_2 = 0$ پس

له $x_1 + x_2 = 3$, $2x_2 - 3x_3 = 0$ لاندې حل لرو: $x_1 = 9/5$, $x_3 = 6/5$ او په دې ډول د ه

کرښې g دوم ټکی : $x^1 = (9/5, 0, 6/5)$

په ټکو x^1 ، x^0 د کرښې g مساوات (مقایسه ۱۷ . ۲۶) داسې دي

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) = (-3, -6, 0) + \lambda(24/5, 6, 6/5)$$

<=> د $\tilde{\lambda} = (6/5)\lambda$ سره :

$$x = (-3,6,0) + \tilde{\lambda}(4,5,1)$$

دا په حل (اوبی) ۱ کی پیداشوې کرښې g یوبل ډول انځوردي، ځکه چی د لورو

وکتورونه یو بل ته ورته دي. : $v = (4, 5, 1)$ او د $\tilde{\lambda} = -3/4$ لپاره په حل ۱ کې د

کرښې ټکی د حل ۲ x^0 دا ټکی لاس ته راځي

$$x = (0, -9/4, 3/4) - (3/4)(4, 5, 1) = (-3, -6, 0)$$

تمرینونه؛

۱ – وکتورونه $a = (1,0,-2)$, $b = (-3,-5,0)$, $c = (4,-1,7)$ ورکړ شوي دي.

جوړکړی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-a$, $a+b$, $a-c$, $2a - b + 3c$!

۲ – وکتور a چې له ټکي $x^1 = (3,-5,7)$ څخه د ټکي $x^2 = (-2,4,-1)$ لور ته لاربښودوي، څنګه دی؟

۳ – وکتور $a = (3,21)$ دې پیلټکي $x^1 = (1,2,3)$ ولري. وڅیړۍ چې پایټکی x^2 یې کوم کواوردینات لري؟

۴ – لاندې وکتورونه کوم مطلقه ارزښت لري؟

$a = (4,-3,12)$, $b = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $c = (3,3,3,)$?

۵ – وکتورونو $a = (2,-1,3)$, $b = 7,0,0)$ پورې اړوند یا مربوط یوونوکتورنه کومې کواوردیناتې لري؟

۶ – د لاندې وکتورونو یو په بل ولاړوالی یا اورتوګونالیتي دې وښول شي ؟

$a= (1,2,3)$, $b = (3,0,-1)$!

۷ – دلته دې a_1 , b_1 او c_1 څومره لوي وي، چې وکتورونه

$a = (a_1,3,2)$, $b = (-4,b_1,2)$, $c = (3,-2,c_1)$

په وکتور $d = (2,1,-3)$ (نېغ) ولاړ وي؟

۸ – د

a) $a = (-2/3, 1/2, 5/4)$, $b = (3\ 74,-1/3, 2/3)$,

b) $a = e^1 - e^2 + e^3$, $b= 2e^1 + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره دې $a . b$ وشمیرل شي!

۹ – وکتورونه $a = (3,-4,12)$ او $b = (-6,8,0)$ یو له بل سره کوم کونج جوړوي!

۱۰ – د ګوډ – یاکونجټکو

$A = (-2,0,3)$, $B =(-6,4,-1)$, $C(4, -1,2)$

سره، د دریګوډي کونجونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۱ – وښايي چې وکتورونه $a = (2,4,-6)$ او $b = (-1,-2,3)$ يو بل ته کولايني دي!

۱۲ – د

a) $a = (-4,-1,3)$, $b = (5,-2,7)$

b) $a = e - e^2 + 2e^3$, $b = 2e + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره $a \times b$ وشميرئ!

۱۳ – د دريکونډي هواره څومره لويه ده، چې کونجونه يې په لاندې توګه راکړ شوي وي

$A = (-2,0,3)$, $B = (-6,4,-1)$, $C = (4,-1,2)$?

۱۴ – د هغه غبرګ اړخيز هواره څومره لويه ده چې له وکتورونو

$a = (-3,2,1)$, $b = (5,-3,2)$

څخه غزيدلي وي ؟

۱۵ – د وکتورونو

$a = (-2,1,-3)$, $b = (1,-3,6)$, $c = (1,2,-3)$

څخه غزولشوې غبرګهواري کوم ډکی يا حجم لري؟

دا نتيجه هندسي روښانه کړئ!

۱۶ – څلورګوډې د لاندې ګوډونو (يادونه: څلور اړخي [د اهرام تشکيلوله]

$P_1(2,1,4)$, $P_2(0,-1,2)$, $P_3(-3,6,4)$, $P_4(2,2,2)$

سره کوم ډکی ياحجم لري؟

۲۳ – د لاندې هوارو

الف) E_1 چې له ټکي $x^o = (0,1,2)$ تيريږي او د لاندې وکتورونو

لور لري: $v = (0,2,1)$, $w = (2.3,-5)$

ب) E_2 چې له ټکو $x^o = (o,1,2)$, $x^1 = (2,-3,4)$ او

ټکي $x^2 = (7,-9,-3)$ څخه تيريږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) E_3 چې د نورمال وکتور $n = (0,2,1)$ سره

له ټکي $x^o = (0,.1.2)$ تیریږي، مساوات څنګه دي؟

۲۴ – له تمرینو۲۳ الف او ب څخه د هوارې مساواتو سکالارینه څنګه ده؟

۲۵ – ودی ښیئل شي چې ایا ټکي $x^1 = (1.3.-6)$ همداسی $x^2 = (5,-5,4)$ په هواره

a) E_1: $\mathbf{x} = (0, 2, -1) + \lambda(1, -3, 5) + \mu(2, -2, 0)$,

b) E_2 : $2x_1 + x_2 - x_3 = 1$

پراته دي!

۲۶ – د کرښو

a) g_1: $\mathbf{x} = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 3, 1)$,

b) g_2: $\mathbf{x} = (-1, 1, 1) + \lambda(-1, -1, 1)$,

c) g_3: $\mathbf{x} = (3, -2, 0) + \lambda(-1, -1, 1)$

پروتخاي د هوارې $E: \; 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18$ سره وټاکئ!

۲۷ – د هوارو

الف) $E_1 : 2x_1 + x_2 - x_3 = -1$ او $E_2 : -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$

ب) $E_1 \; -5x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 4$ او $E_2 \; : x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -8$

غوڅکرښه دې راپیدا شي !

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ پرلپسی او لړۍ پرلپسی (لنډ: لړۍ) (sequences and series)

یا ترادف او د ترادف سلسله

۱۸ . ۱ پېل

د میلاد څخه دري سوه کاله د مخه یوه یوناني جنګسالار(نوم یې راڅخه هیر شوی، ددې بخښنه غواړم) د خپلو عسکرو څخه وپوښتل چې ، »دا د ده له مخه کیشپ چې سل متره یې ترمنځ واټن دی، کله نیولی شي، که دی له دې کیشپ سل ځله تیز ولاړشي؟« دې ته طبعاً د لوستونکو فکر شته چې وخت باید په نظر کې نه وي نیولشوی . ځوابولو ته دې ګران لوستونکی پخپله فکر وکړي.

موږ د دې برخې ځیرنی سره لوړې شمیرپوهنی ته راځو. داسی هم نه ده، ځکه چې موږ د رییل اعدادو یا ـ ګڼونو تعریف سره سم چې هلته مو د اینتروالبندولو باندې خبرې کړي او په دې توګه مو عدد تعریف کړی دی، د شمیرپوهني لوړه ځیرنه وه. همدا ډول د لاینیزو برابرونونو یا ـ مساواتو شمیرل او داسی نورې پوره دلوړې شمیرپوهني بیلګې لرو، خو دلته دا په ګوته کوو چې له دې ځایه د شمیرپوهنی هغه ځاي پیل کیږي چې شمیرپوهنیز فکر مو په پراخه توګه په کار اچولو ته راهڅوي او له دې امله مو د وړاند نیونه(لنډ: نیونه) یا فرضیه اړیینه وه چې دا برخه د لوړو شمیرپوهنو پیل په ځیر وښایو یا وبولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځايه هغه اعداد چی موږ ورسره مخ کيږو، ځموږ لپاره د څيړنی کيږي چی هغوي يوې پولی(حدLimit) ته هڅه کوي. دا قوانين هم پوره څيړل کيږي چی وروسته بيا په ديفرنځيال شميرنه کی کار اخستلو لپاره ترې تيريدنه ناشونی ده.

په راتلونکی برخه کی لاندې کنځيپتونه (خيال، چې يو څه څنګه وشي) ځموږ لپاره د هڅی وړ ګرځي

۱ - د کليمی ليدوړه يا په خيال کی لرودونکی پيلونه

۲ - د ليدوړوالي يا فکر کی راوړيدونکی د ټولو په غوره شننه (تحليل)

۳ - د شميرپوهنيزو پېژندو يا تعريفونو ټيکوالی،

۴ - هغو وړاندنيونو يافرضيو ته پاملرنه چی د شميرپوهنی قوانينو د باوريتوب (اعتبار)لپاره وي،

۵ - د پرلپسی شننه، چی پوله ارزښت يی په پام کي ونه نيول شي،

۶ - د ګڼو دندو حل ، په ځانګړي توګه د ديفرنځيالولو او اينتګرالولو

۷ - بالاخره د پرلپسی لړی چی په لنډه توګه ىی لړئ بولو څيړنه .

دلته هم د دې موضوع د پوره څيړلو ستونځي په کتاب کی د ځاي کموالي له امله شته. داچی دا برخه يوه بنسټيزه برخه ده، نو پيل يی د يوې ساده او پوهوړې بيلګې له لارې کوو چي ماته خورا په زړه پورې هم ښکاريږي.

۱۸ . ۲ دګڼونو پرلپسی (لنډ: پرلپسی) يا د اعدادو ترادف کلمه

پيلبيلګه :

پاي جمعه يا - زياتون $s = 3+7+11+...+395+399$ څنګه ټاکل کيدی شي؟
کيدی شي چي دا د پوره ستونځو سره د يوګونو ګڼونو يو د بل سره جمعې يا يو په بل زياتون له لارې وشميرل شي ترڅو چي د دې اعدادو د ترادف (ګڼونپرلپسی) قانونيت پيداشوی وي:
هر دوه ګاونډې توکي يوله بله په۴ + توپير کيږي يعنی کمون يا کمښت يي ۴ + دی.
کيدی شي چی دا کارونه (استعمال) په يوه شکلی او سپماوړ لاره هم مخ ته لاړه شی او دا په لاندې ډول :
که لومړی (۳) او اخر(۳۹۹) ، دويم (۷) او له اخر دويم (۳۹۵) دريم (۱۱) او له اخر دريم (۳۹۱) د جمعې اجزا يا زياتوني او داسی نور سره زيات شي. دا په

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې ټولو حالتونو کی همغه زیاتون ارزښت یا د جمع لاس ته راوړنه ورکوي یعنی ۴۰۲ .

اوس دې د یوګونو د جمعې اعزاوو د جمعې ارزښت(زیاتوونو زیاتون ارزښت) راپیداشي:

دویم غړی له لومړی غړي داسی لاس ته راځي چی لومړي غړي ته ۴ ور زیاتیږي او همداسی ورپسی تر n غړي پورې چی دلته و (n-1) ته 4 ور زیاتیږي ، یعنې:

.n = (n-1)+4:

که له دې لاس ته راوړنی لومړی غړی له اخر غړي کم کړو یعنی3- 399 = 396 ، نو ددې کمون سره د (n-1) دا 4 ځله ترې لاس ته راځي. داچی 99 = 396:4 دي، نو باید n او له دې امله د پرلپسي د غړو شمیر 100 وي. په دې لاس ته راوړنو سره باید 100 ګڼونه سره زیات شي. که چیرې په پورته توګه 2 زیاتووني یا د جمعې اجزاوې سره زیات شي، نو باید له دې سره 100:2 = 50 یعني 50 -ځله زیات 402 ترې لاس ته راشي« له دې امله د ټولو رامخ ته شوو د پرلپسی غړو زیاتون دا دی:

.20100 = 402 . 50

دا لوستونکو ته په روځنی ژوند کی هم ځرګنده ده لکه د یو ټولګي د زدکوونکو په ګڼه (نمره) ترتیب، یا په یوه سیالی یا مسابقه کی د بریالیو ترتیب او داسی نورموجود دي، موږ کوښښ کوو چی دا مسئلی د شمیرپوهنی له لارې وڅیړو او وګورو چی په شمیرپوهنه کی ترادف یا پرلپسی څه شی دي.

یادونه: موږ له دې وروسته د رادف په ځا یواځي ترادف لیکو.

موږ طبیعي اعداد یا ـ ګڼونه ۱، ۲، ۳، ۴، ..... لرو (دلته ټکي ټکي دا مانا لري چی دا پرلپسی ناپای اوږدیږي)

که چیرې دا هر پیدایښتي یا طبعي ګڼ په یواځنی یو رییل ګڼ ترتیب شي یا یواځنی ترتیب رییل ګڼ وښايي یعنی $a_1, a_2, a_3, ...$ ، نو د لته د طبعي اعدادو او حقیقي اعدادوتر منځ یو ترتیب منځ ته راځي. داچی دلته هر طبیعي عدد n په یواځنی حقیقي عدد a_n ترتیب شوی نو دا ترتیب یو فنکشن دی چی د فنکشن پیژندډېری (تعریفډیری یا تعریفسټ) دطبعي اعدادو ډیری N ده او ارزښتډیری یی د حقیقي اعدادو ډیری R ده.

دلته د پرلپسی هر توکی an د ځای ګڼې (نمرې) n په بنسټ یواځنی ټاکلی، چی n ته په مسلکي نړیواله پیژندل شوې ژبه ایندکس Index (زیات یې Indices)، چې مانا یې : پیژند نخښه ده ، وایي. (Index پیژند دخښه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند تعریف) :۱۸ . ۱ الف :

د پرلپسی غړو $a_1, a_2, a_3, ...a_k$ د یو ترتیب قانونیت یا قانونمندي $a_n = a(n)$ لاس ته راځي ، که دnلپاره پرلپسی طبعي اعداد1, 2,3 ...k,ځای په ځای شي.

پرلپسی کې a_1 د پرلپسی پیل غړی بلل کیږي. که د پرلپسی اخر غړي پای وي نو پرلپسی پای او که نه نو پرلپسی ناپای ده.

بیلګی

(دا ورپسې مخ کې بیلګې نورې هم روښانه دي)

$$I-;...a_n = n^2, a_1 = 1; a_2 = 4;....; a_{10} = 100,..; a_k = k^2;..$$

{چیرته چې a_n یو څلوری (مربع) ګڼ دی}D=N;W= a_n |

$$2-\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}; a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2};...a_{10} = \frac{1}{10};...\{a_k\} = \{\frac{1}{k}\}$$

$$3- \quad \{a_n\}=\{(-1)\} \Rightarrow a_n = (-1)^n; a_1 = -1; a_2 = 1;$$
$$a_3 = -1,...a_{17} = -1;...a_{22} = 1$$

د دې پرلپسی غړي بدلی نخښی لري، له دې امله پرلپسی بدلیدونکی Altrnating بلل کیږي

$$4-\{a_n\} = \{3+\frac{1}{n}\}; 4, 3+\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{3}, 3+\frac{1}{4},...a_k = 3+\frac{1}{k},..., a_n = 3+\frac{1}{n}$$

د ترتیب – یا نظمقاعدې څخه مختلفی ګڼونپرلپسی یا د اعدادو پرلپسې منځ ته راځي ۰ دا مو په لنډه توګه پرلپسی ونومولی. چی پیژند یی یو ځل بیا دلته په بل ډول رالنډوو.

پیژند (تعریف) ۱۸ . ۱ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

که هر یو طبیعي ګڼ..... n=1,2,3,4,5 په یوه یو یوائځني رییل ګن باندې ترتیب یا تنظیم شي، نو په ترتیب ګڼونه .... $a_1, a_2, a_3,.....$ یوه د ګڼونو پرلپسی جوړوي، چی لنډ پرلپسی یی نوموو او ددې لپاره سړی داسی لیکي: $\{a_n\}$.

دې a_n ته د پرلپسې $\{a_n\}$ n-م غړی ویل کیږي.

سړی کړی شي چی د رییلګڼونو یا اعدادو د نمره کولو یا ګڼې لپاره له 0 یا 2 او حتی له 1 - یا 2 - څخه پیل وکړي، یعني:
a-1,a0,a1,a2.....یا او a2,a3,a4.... یا....a0,a1,a2

ګورو چی د پرلپسی لیکلو لپاره ځانګړي متودونه په کار اچول کیږي، کله دا بسیا کوي چی د پرلپسی تعریف لپاره د پرلپسی لومړي څو غړي ولیکل شي

بیلګه ۱۸. ۱ : د بیلګي په توګه لیکو:

$$\{a_n\} = 1, 2, 3,...$$

او د طبعي اعدادو پرلپسی موخه یا مطلب دی، د جوړولوقانون an = n سره ، نو

$$\{a_n\} = \{n\}$$

$$\{an\}:1,4,9,16,25... \Rightarrow = \{a_n\} = \{n^2\}$$

دا په دې معنا چی(<=)

{an}:2,3/2,4/3,5/4,6/5 ....=>

یا په دې مانا چی{an}={(n+1)/n}

{an}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,1/6 ...=>

په دې مانا چی $\{a_n\} = \{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$

{an}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,.. =>

یانې په دې مانا {an}={(n+1)/n}

پیلبیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دشمیرپوهنی یوه ښوونکی لپاره په ښونځي کی یو ځاي تش یا خالي دئ. ددې ځاي لپاره دوه کسانو الف او ب ځانونه کاندید کړی. دوي ته لاندې پوښتنه ورکړ شوي چی اوبی یا حل یی کړي:

پنځه ګڼونه ۱،۳،۷،۱۵،۳۱ ورکړ شوي. درې نور ګڼونه باید داسی ور واچوی چی دا ګڼونپرلپسی موخه وره یا هدفمنده مخ ته ولاړه شي، یا مخودیزه شي.

دواړه کاندیدان دا دنده یا پوښتنه په بیلو ډولونو اوبی کوي ۰

کاندید الف داسی فکر کوي ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ کاندید ب داسی فکر کوي

لومړی ګڼ ۱ د۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ۰ لومړی ګڼ له ۲ څخه په ۱ کوچنی دئ: 1 - 2

دویم ګڼ لاس ته راځي، که د لومړي ۰۰۰۰۰۰۰ دوم ګڼ له ۴ څخه ۱ کوچنی دئ :

عدد دوه ځله ته ۱ ورزیات کړو : ۰۰۰۰۰۰۰۰ $2^2 -1 = 4 -1$

$2.1 + 1 = 3$

دریم ګڼ لاس ته راځي که د دوم ۰۰۰۰۰۰۰۰ دریم ګڼ له ۸ په ۱ کوچنی دی:

ګڼ دوه ځله ته ۱ ور زیات شي۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰$1-8=1-2^3$

$2.3 + 1 = 7$

۶- ام ګڼ لاس ته راځي که د پنځم۰۰۰۰۰ ۶ -ام ګڼ له ۶۴ څخه په ۱ کوچنی دئ :

ګڼ دوه برابره ته ۱ ور زیات کړو: ۰۰۰۰ $64-1=2^6-1=63$

$2.31 + 1 = 63$

اوم ګڼ دئ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ اوم ګڼ دئ: $2^7-1=128-1=127$

$2.63 + 1 = 127$

ګڼ ۸ دئ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ګڼ ۸ دئ

)...........2.127 -1 = 255 $2^8-1=256-1=255$

د شمرپوهنی له مخی دا پنځه له مخه ورکړشوي ګڼونه د یوې پرلپسی لومړني پنځه توکي دي. دا پنځه توکي له
a1 , a2 , a3 , a4 , a5,
سره ښایو.

اوس زموږ په دې بیلګه کی داسی لرو: a1=1,a2=3,a3=7,a4=15,a5=31

که وغوښتل شي چی د دې پرلپسی نور توکي دې هم ورکړ شي، نو دا به تصادفي توکي نه وي، بلکه یوه جوړه شوې قاعده یا لاس ته راوړې قاعده به ورکړي، لکه څنګه چی یو په بل پسی راتلونکی توکی د پخوانی او یا له وروستني توکي څخه د مخه توکی په لاس راځي.ددې تثبیت یا ازمویني وظیفی شمیرپوهنیزه فرمولبندې په لاندې ډول ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګڼونپرلپسی یا د اعدادو ترادف دې د a1=1,a2=3,a3=7,a4=15,a5=31 سره ورکړ شوي وي. یوجوړښتقانون یا قانونمندي او توکي a6,a7,a8 وټاکی.
د دواړو کاندیدانو د اوبیونې -یا حللارې کیدی شي چې په لاندې توګه انځور شي:

ب	الف
$a_1 = 2-1$	$a_1 = 1$
$a_2 = 4-1 = 2^{2-1} = 3$	$= 2.1+1=3a_2$
$a_3 = 8-1 = 2^3-1 = 7$	$a_3 = 2.3+1 = 7$
..	.
$a_6 = \quad 2^6-1 = 63$	.
	$a_6 = 2.31+1 = 63$

په تولیزه (عمومی) توګه لاس ته راځي

k -م غړی $(k \in N \wedge k \geq 2)$ k-م غړی $(k \in N)$
په کوم کې چې .... په کوم کې چې
د(k-1)- م غړي دوه برابره ته 1 زیات شي ..... 1 له $a_k = 2^k$ کم شي

$a_k = 2^k - 1$ $a_k = 2.a_{k-1} + 1$

دواړو کاندیدانو پرابلم سم حل یا اوبی کړ. کله چې د پرلپسی ۲۰ - م غړي پوښتنه وشوه ، نو کاندید ب په ګټه کی دی . ولی؟
دواړه کاندیدان کولی شي چې د پرلپسی هر په خوښه توکی پیداکړي، له دې امله دوي دا پرلپسی یواځنی وټاکله. کاندید الف دا پرلپسی داسی حل کوي چی تل باید له مخه غړي څخه وړپسی توکی لاس ته راوړي، یعني $a_k = 2.a_{k-1} + 1$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا باید هر د پرلپسی د مخه توکی وپیژني. دې ډول شمیرلو ته د پرلپسی رکورزیو(recursive لاتین، له recure په ځت ځغاسته) انځورونه وایی . مګر ب کاندید دا خورا ساده او زر شمیرلی شي، دی چې کوم توکي غواړي پیدا کړي، هغه سملاسي لاس ته راوړی شي یعني $a_k = 2^k - 1$

دې ډول ښوونلار ته ایکسپلیځیت explizite (لاتین خورول، روښانوول) یعنی روښانه انځورونه وایي.

د لوستونکو لپاره دې دا لاندې د کور کار وي:

د پرلپسی ۲۰ - ۱م غړی وشمیری ، رکورسیو او ایکسپلیځیت. یانی د الف او ب په ځیر.

بیلګه:

یوه پرلپسی د a1 = 5 او $a_{k+1} = a_k{}^2 + 1$ سره ورکړ شوې. ددې پرلپسی لومړنی پنځه توکي وشمیری.

حل:

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = a_1^2 + 1 = 25 + 1 = 26$$

$$a_3 = a_2^2 + 1 = 676 + 1 = 677$$

$$a_4 = a_3^1 + 1 = 458329 + 1 = 458330$$

بیلګه :

یوه پرلپسی د a1 = 1 او $a_{k+2} = a_{k+1}.a_k$ سره ورکړ شوې ده.

ددې پرلپسی لمړني پنځه غړي وشمیری .

اوبنونه:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2$$

$$a_3 = a_2.a_1 = 2.1 = 2$$

$$a_4 = a_3 \,.\, a_2 = 2.2=4$$

$$a_5=a_4.a_3 = 4.2=8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنی:
د هرې لاندنی پرلپسی لمړني ۱۰ غړي وشميرئ پرلپسې رکورزيو ورکړ شوې

a) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{a_k}$

b) $a_1 = 0,\ a_{k+1} = a_k^2 + 1$

c) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{a_k} + 1$

d) $a_1 = 1,\ a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k + 1$

e) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right)$

f) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$

g) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{k+2} = a_{k+1}^2 : a_k$

h) $a_1 = 1,\ a_2 = -2,\ a_{k+2} = a_k : a_{k+1}$

بيلګه :
یوه پرلپسی د $a_k = k^2/(k+1)$ سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی لومړني پنځه توکي وشميرئ
اوبی:

$$a_1 = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3} \qquad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5} \qquad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

بيلګه :
پرلپسی د $a_k = \frac{(-1)^k + 1}{k}$ سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی ۳ -م، ۸ -م ۱۵ -م او ۲۰ -م توکي وشميرئ
اوبی یا حل:

$$a_3 = \frac{(-1)^3 + 1}{3} = 0$$

$$a_8 = \frac{(-1)^8 + 1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$a_{15} = \frac{(-1)^{15} + 1}{15} = 0$$

$$a_{20} = \frac{(-1)^{20} + 1}{20} = \frac{1}{10}$$

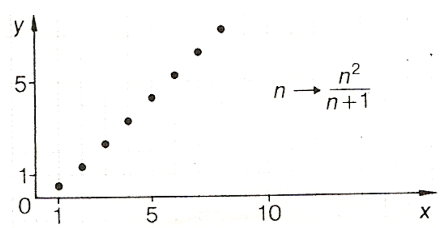
(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنی :
د لاندې پرلپسیو لومړني پنځه توکي ، ۲۰ -م او ۴۵ ـم توکي وشمیری

$$a)a_k = 2k+1; b)a_k = k^2+k; c)a_k = \frac{k^2+1}{k+1};$$

$$d)a_k = \frac{k^2-1}{k+1}; e)a_k = (-\frac{1}{10})^{k-1}; f)a_k = 1-(1/2)^k;$$

$$g)a_k = 1+(-1/2)^k; h)a_k = 1.2.3....k$$

په کارتیزي کواوردیناتسیستم کی د یوې پرلپسی د گراف انځورونه لاس ته راوړو، که هر توکی د x -کواوردینات باندې د پرلپسی هر توکی د توکي نمرې kسره کیښول شي او د y- کواوردینات باندې هر غړی د غړي د نمرې ak سره و کښل شي	 Bild 4

پوښتنی :
د لاندې پرلپسیو گراف په کارتیزي کواوردیناتسیستم کی وکاږئ.
له دې ځایه وروسته بیا پیل دئ

a) $a_k = \dfrac{5k}{k+2}$ b) $a_k = 3k+2$ c) $a_k = (-1)^{k-1} \cdot \dfrac{12}{k}$

d) $a_k = \sin\dfrac{k\pi}{2}$ e) $a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_{k+1} = 1-2a_k$ f) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{k+2} = a_{k+1} \cdot a_k$

۱۸ . ۲ . ۱ یوغږیزې یا مونوتونی پرلپسی

بیلگه : د غړو ak = 2k - 1
(ما کله کله توکی او کله کله غړی نومونه کارولی، په په پرلپسی کې یو غړی د پرلپسی غړی ،دئ او د یوې ډیری یو د هغې ډیری توکی دی، دې ته به د گرابو لوستونکو پام وي)
سره پرلپسی هر توکی د مخته تیرشوي توکي لوي دئ . دا باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a_{k+1} > a_k$ د ټولو $k \in N$ لپاه

حل یا ثبوت :

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 2^{k+1} - 1 \\
&= 2.2^k - 1 \\
&= 2^k + 2^k - 1 \\
&= 2^k + (2^2 - 1) \\
&= 2^k + a_k \\
&> a_k
\end{aligned}
$$

تعریف ۱۸ . ۲ الف:

یوه پرلپسی(strictly monotonic increasing)
په کلکه – یا کره مونوتون جګیدونکی ده یا کره مونوتون جګیږي، که دا لاندې باور ولري :

د ټولو $k \in N$ لپاره $a_{k+1} > a_k$

که د یوې پرلپسی لپاره باوري وي

د ټولو $k \in N^*$ لپاره $a_{k+1} \geq a_k$

نو دلته د مونوتون جګیدونکی monotonic increasingپرلپسی څخه غږیږو

بیلګه :

د پرلپسی د توکو

$a_k = 10 - 4k$

سره هر غړی د مخ ته تیر غړي څخه کوچنی دی.

لرو:

$a_{k+1} < a_k$ د ټولو $k \in N^*$ لپاره

اوبنونه::

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 10 - 4(k+1) \\
&= 10 - 4k - 4
\end{aligned}
$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$=(10-4k)-4$
$= a_k - 4$
$< a_k$

پیژند(تعریف) ۱۸ . ۳ :
یوه پرلپسی په کلکه مونوتونتیټېدونکی یا - لویدونکی strictlymonotonic decreasingده، که لاندې باور ولري:
د ټولو $k \in N$ لپاره $a_k < a_{k+1}$
که په یوه پرلپسی کي باور ولري(په پورته کي او همداسي که ورپسي داسي څه راشي کا د ان توکی دئ)
د ټولو $k \in N$ لپاره $a_1 \leq a_{k+1}$
نو دلته د یوغږیز-یا موتون لویدونکی- یا مونوتون ټیټېدونکی monotonicdecreasing پرلپسی څخه خبرې دي.

پوښتنه:
د یوې پرلپسي دوه ګاونډیو غړو توپیر یا کمون یاکمښت $a_{k+1} - a_k$، کوم شرطونه باید پوره کړي، چی دا لاندې صدق ولري
الف) کلکه مونوتون جګیدونکی وي
ب) کلکه مونوتون ټیټېدونکي یا –لویدونکې وي
پ) مونوتون جګیږي
ت) مونوتون لویږي؟
ددې دندې د اوبیونې په مرسته کیدی شي، چی د توکي $a_K=(k+1)/(k+2)$سره د پرلپسی مونوتونی په لاندې ډول وښوول شي:

$$a_{k+1} - a_k = \frac{(k+1)+1}{(k+1)+2} - \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+2}{k+3} - \frac{k+1}{k+2}$$
$$= \frac{(k+2)^2 - (k+1)(k+3)}{(k+3)(k+2)} = \frac{(k^2+4k+4)-(k^2+4k+3)}{(k+3)(k+2)}$$
$$= \frac{1}{(k+3)(k+2)} > 0 \quad k \in N^*$$

له $a_{k+1}-a_k>0$ همداسی(<=) $(a_{k+1})>a_k$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو $k \in N*$ لپاره لاس ته راځي، چی ورکړ شوې پرلپسی په کلکه مونوتون جګیږي.

۱۸ . ۲ . ۲ اریتمیتیکي پرلپسی

د پرلپسی ..... 14;11;8;5;2 هرغړی د خپل مخکښ غړي څخه په 3 لوي دی.
ددې پرلپسی لپاره ورکړی
الف(یوه رکوررزیف انځورونه
ب) (یوه اکسپلیڅیت انځورونه.

ځنی پرلپسي د ډیرې پاملرني ارزښت لري، په دې ډول چی د دوه په خوښه ګاونډیو غړو ak او ak+1 ترمنځ یو ثابت (تل همغه) بلواك یا تابع موجود دی
غواړو چی دداسی دوه مهمو پرلپسی تیپونه (ډولونه ، رقمونه) په ځانګړې توګه څرګند راوباسو یا بهتره تر څیرنی لاندې ونیسو:

پیژند (تعریف) ۱۸ . ۴ :
په یوه اریتمیتیکي- یا ګنونشمیرنیزې پرلپسي یالنډ: شمیرنیزې پرلپسی کي د درې توکو منځنی توکی د دواړو دباندنیو توکو اریتمیتیکي منځ دی:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

په یوې ځمککچیزې لپسی(ټاکونی یا پیژند وروسته راځي) کی د درې یو په بل پسی توکو منځ غړی د دوو نورو دباندنیو غړو ځمککچیز یا هندسي منځ دی:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}.a_{n+1}}$$

لومړی اریتمیتیکی یا شمیرنیزه پرلپسی څیړو:
غوښتنه(ثبوت): یوه پرلپسی ورکړی، چی لومړی توکی يي ۵ او هر ورپسی راتلونکی توکی یی له مخ غړي څخه په ۱۲ کوچنی وي
الف) ددې پرلپسی لومړي پنځه توکي وشمیری
ب) د پرلپسی رکوررزیف انځورونه ورکړی
پ) د پرلپسی اکسپلیڅیت انځورونه وکړی
ت) د پرلپسی ۲۰ -م (۲۵ ، ۳۵،۵۰، ۱۰۰) توکي وشمیری.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند یا تعریف ۱۸ . ۵ :

یوه پرلپسی an اریتمیتیکي پرلپسی بلل کیږي، که د دوه پرلپسی توکو کمون یاکمښت تل ثابت یا همغه وي: $a_{n+1}-a_n=d \Leftrightarrow a_{n+1}=a_n+d$

بیلګې:

۱ - لاندنی پرلپسي ...;2;5,8;11;14;...;29;32;35
یوه اریتمیتیکي Arithmeticپرلپسی ده چی لومړی توکی یی a1 = 2
او ثابت یا همغه کمون یا کمښت یا فرق یی d = 3 دی.
۲ - دا پرلپسی 10 ; -1 , -12 , -23, -34;... اریتمیتیکي پرله پسی ده چی لومړی توکی یي a1=10 دی او d=-11 ده

که په هر پل(قدم) کی فنکشن $n \in N$; n—>an په همغی زیاته وونې d زیاتیږي یا همداسی کمیږي d=0 (لپاره ثابت دی) نو باید اریتمیتیکي پرلپسی یو لاینیز فنکشن(لاینیز بلواك) وي (D = N) د d په جګوالي . دا د لاندی اند لاس ته راوړنه یا فکر لاس ته اوړنه ده:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$
$$.$$
$$.$$
$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1).d = a_1 + d.n - d$$
$$f(n) = d.n + (a_1-d)$$

د لاینیز فنکشن جګوالی d دی او ثابت یا همغه توکی a1 -d نومیږي(یادیږي یا بلل کیږي)
دلته an=2n+1 دلاینیز فنکشن په څیر دی، د d=2 په جګیدو او دy - محورغوځی a1-d=1

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د پرلپسی د هر توکي د شمیرلو امکانات ورکړ شوي دي:

تعریف ۱۸ . ۶ :

په اریتمیتیکي- یا شمیریزه پرلپسی کی n- م توکی د قاعدې له مخي داسي ورکړ شوی:

$a_n=a_{n-1}+d=a_1+(n-1).d$

بیلګی:

۱ - اریتمیتکي پرلپسی ... 53 , 2,19,36 ,ورکړ شوې.
غوښتونکي a_{20} ده.
داسی لرو: $a_1=2,d=17,n=20$
نو $a_n=a_1+(n-1).d \Leftrightarrow a_{20}=2+19.17=325$
۲ - ورکړ شوې دې وي
$a_1 = -o,5$ او $a_{10} = -44,5$
غوښتونکې d ده:
$a_n=a_1+(n-1).d \Leftrightarrow (a_n-a_1)/(n-1)=d \Rightarrow$
$d=(-44,5+0,5)/(10-1)=-44 /9$

۱۸ . ۲ . ۳ځمککچیزې – یا هندسي پرلپسی

اوس غواړو هغه د مخه ویل شوی ،د یوه ثابت ((تل) همغه ارزښتیز) فنکشن سره، د پرلپسی ۲ -م تیپ د دوه غړو ترمنځ تر څیړنی ونیسو

پیلبیلګه :

یو هوښیار زدکړی غواړي په رسختی کی یوه میاشت کار وکړي(۲۰ د کار ورځی(. دې کارورکوونکی ته وایي، چی دی ارزانه کار ورته کوي او لاندې وړاندیز ورته مخ ته کوی » د لمړی ورځي معاش دې 0,05 ډالره وي د دویمی دې دوه ځله د دریمی ورځی د دویمی ورځي دوه ځله څلورمه ورځ د دریمی ورځی دوه ځله او داسي نور، یعنی لمړی ورځ که 0,05 وي نو دومه ورځ 0,10، دریمه ورځ 0,20 او څلورمه ورځ 0,40 ډالره معاش کیږی او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه : د

الف) د ۱ –می یا لومړۍ ورځی
ب) د ۱۵ - می ورځی
پ) د ۲۰ - می ورځی
معاش څومره کیږي. اندازه ګڼ(عدد) که په ډالرو وشمیرل شي، لاندې پرلپسی جوړوي:

0,05;0,1; 0,2; 0,4;0,8; 1,6; 3,2,......

پوښتنه :

ددې پرلپسی لپاره
الف) رکورزیف انځورونه
ب) اکسپلیځیت انځورونه ورکړی

پیژند ۱۸ . ۷:

(ځمککچیزې یا هندسی پرلپسی) یوه پرلپسی an هندسي بلل کیږي، که د دوه یوبل پسی غړو ویش ثابت((تل) همغه) q وي:
یا په بل ډول یا په بل عبارت : یوه پرلپسی چې لومړی غړی $a_1 \neq 0$ وي اود همغه ګڼ یعنی ثابت ګڼ q سره د تل ځلونی څخه لاس ته راشي، ځمککچیزه یا هندسي پرلپسی بلل کیږي.

$$n \in N; q \in \{R\} \setminus \{0\} \quad \text{د ټولو} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = q; a_{n+1} = a_n.q \quad \text{لپاره}$$

یو ځل بیا یوځای +d +d +d +d
اریتمیتیکي پرلپسی ...a1 a2 a3 a4 a5
هندسي پرله پسی..... a1 a2 a3 a4 a5
.q .q .q . q

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هندسي پرلپسی دوهم غړی دلومړي غړي سره د q ځل یا ضرب څخه لاس ته راځي، او دا د ټولو وروسته راتلونکو غړو لپاره باوري دي. له دې امله هندسی پرلپسي n —‹ anاکسپونینشل فنکشن یا د جګګڼ بلواک ښايي چی q د بنسټ په توګه لري:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1.q$$

$$a_3 = a_2.q = a_1q^2$$

$$a_4 = a_3.q = a_1.q^3$$

.

.

.

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

$$f(n) = a_1.q^{n-1}$$

جمله ۱۸ :

په هندسي پرلپسی کی n- م توکی د لاندې قاعدې له مخي شمیرل کیږي

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

بیلګی:

1 - a1=3 , q=2 ,n=15 => $a_{15} = 3.2^{14} = 29152$

2 - a1=19,q=1,01,n=100 ;

= 50,8826363919.1,o1^{99} a100=

جمله :

یوه ځمککچیزه پرلپسی د زیاتیز یا مثبت پیلتوکي سره د 1 < q لپاره کلك مونوتون جګیدونکی ده د 0<q<1 لپاره کلك مونوتون لویدونکی ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوښتنه :

د لاندې پرلپسیو ۱۰ لومړني غړي وشمیرئ

a) $a_k = \frac{k-2}{k+2}$ b) $a_k = \sin\frac{k\cdot\pi}{6}$ c) $a_k = \frac{1}{2}[1+(-1)^k]$

d) $a_k = 1-\left(\frac{1}{10}\right)^k$ e) $a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ f) $a_k = \cos\frac{k\cdot\pi}{2}$

g) $a_k = k^k$ h) $a_k = (-1)^{k-1}\cdot k^2$

i) $a_1 = 3;\quad a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{4}{a_k}\right)$ k) $a_1 = 1;\quad a_2 = 2;\quad a_{k+2} = \sqrt{a_{k+1}\cdot a_k}$

l) $a_1 = 3;\quad a_{2n} = a_{2n-1} - 3;\quad a_{2n+1} = a_{2n} + 4\ (n \in \mathbb{N}^*)$

m) $a_k = 2k - 1 + \frac{1+(-1)^k}{2} + (-1)^{\frac{(k+3)(k+4)}{2}}$ n) $a_k = 3 - \frac{1}{2^{k-2}}$

غوښتنه :

پرلپسی د مونوتون خویونو له پلوه وڅیرئ

a) $a_k = \frac{k-2}{k}$ b) $a_k = \frac{k+4}{k}$ c) $a_k = \frac{3k}{2k-1}$

d) $a_k = \frac{1-k^2}{k}$ e) $a_k = 2^k$ f) $a_k = 1 - \sin\frac{\pi}{k+1}$

۱۸ . ۲ الف لړی

د هغه کارپلټونکی زدکړي وړاندیز ته بیرته پام راګرځوو، چې د لمړی ورځي 0,05 اجوره د دویمې ورځي 0,1 د دریمی ورځي 0,2 ، د څلورمی ورځي اجوره یی 0,4 ډالره وه او داسی نور.

په هغه وخت کی داسی پوښتنه رامنځ ته شوې:

دk - می ورځي لپاره زدکړی څومره اجوره اخلی ؟

دا مو یوې ځمککچیزې لړی ته لاربنودوي د $a_k = 0{,}05.2^{k-1}$ سره.

د هغي k - م توکی دk- می ورځي اندازه ګڼې یا د اجورې معیار دی.

دا په دې مانا چی زدکړی دk - می ورځي لپاره $0{,}05.2^{k-1}$ ډالره اجوره یا معاش اخلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که غواړو چی وښایو چی زدکړئ په لومړیو پنځو ورځو کی څومره اجوره اخلی ، نو باید د لومړیو ورځو اجورې ځککچیزه پرلپسی، د $a_k = 0{,}05.2^{k-1}$ سره، یو بل سره زیاته کړو

$$0{,}05+0{,}1+0{,}2+0{,}4+0{,}8 = 1{,}55$$

دا زدکړی د لومړیو پنځو ورځولپاره 1,55 ډالره معاش اخليکه د لومړیو n ورځو اجوره په Sn سره وښایو ، نو یوه لړئ د لاندې غړو سره لاس ته راځي :

$$s_1 = 0{,}05 .2^0 = 0{,}05$$
$$s_2 = s_1 + 0{,}05.2 = 0{,}05+0{,}1 = 0{,}15$$
$$s_3 = s_2 + 0{,}05.2^2 = 0{,}15+0{,}20 = 0{,}35$$
$$s_4 = s_3 + 0{,}05.2^3 = 0{,}35+0{,}40 = 0{,}75$$
$$s_5 = s_4 + 0{,}05.2^4 = 0{,}75 + 0{,}80 = 1{,}55$$
$$s_6 = s_5 + 0{,}05.2^5 = 1{,}55+0{,}160 = 3{,}15$$

غوښتنه:
پرلپسی ته د ۱۵ - م توکي پورې پر مخ وده ورکړی(مخ ودیزه کړی)۰ که د ورکړ شوې پرلپسی ، چی توکي یی a1,a2,a3 ....
دي، دتوکو یو په بل پسی جمعه یا زیاتون جوړ شي

$$s_1 = a_1 \qquad = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2 \qquad = s_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1+a_2+a_3 \qquad = s_2+a_3$$
$$.$$
$$s_{20}=(a_1+a_2+\dots+a_{19})+a_{20} \qquad =s_{19}+a_{20}$$
$$.$$
$$s_{n-1} =(a_1+a_2+..+a_{n-2})+a_{n-1} \qquad =s_{n-2} + a_{n-1}$$
$$s_n= (a_1+a_2+\dots+a_{n-1})+a_n \qquad =s_{n-1} +a_n$$
$$s_{n+1}=(a_1+a_2+\dots+a_n)+a_{n+1} \qquad =s_n +a_{n+1}$$
$$.$$
$$.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو یوه پرلپسی...,S1,S2,s3 لاس ته راځي۰

پیژند یا تعریف ۱۸ . ۸:

د یوې پرلپسی ...;a1; a2; a3 څخه جوړه شوې پرلپسی ...S1;S2;S3
د رکورزیف انځورونی $s_1 = a_1; s_n = s_n + a_{n+1}$
سره پرلپسې لړی (د پرلپسیو لړی) یا لنډ : لړی بلل کیږي.

بیلګه :
د ak = 2k سره جوړې شوې پرلپسی څخه جوړه شوې لړی په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 2^1 = 2$$

$$s_2 = s_1 + 2^2 = 2^1 + 2^2 = 6$$
$$s_3 = s_2 + 2^3 = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$$
$$s_4 = s_3 + 2^4 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$
$$\vdots$$
$$s_n = s_{n-1} + a_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

بیلګه :

د ak = (2+3k)/(k+1) سره جوړه پرلپسی څخه جوړه شوې لړی، په لاندې ډول ده:

$$s_1 = \tfrac{5}{2}$$

$$s_2 = s_1 + \tfrac{8}{3} = \tfrac{5}{2} + \tfrac{8}{3} = \tfrac{31}{6}$$
$$s_3 = s_2 + \tfrac{11}{4} = \tfrac{5}{2} + \tfrac{8}{3} + \tfrac{11}{4} = \tfrac{95}{12}$$
$$s_4 = s_3 + \tfrac{14}{5} = \tfrac{5}{2} + \tfrac{8}{3} + \tfrac{11}{4} + \tfrac{14}{5} = \tfrac{643}{60}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_n = s_{n-1} + \frac{2+3n}{n+1} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} + \dots + \frac{2+3n}{n+1}$$

پوښتنې:

د لاندې پرلپسیو څخه جوړه شوې لړۍ توکي Snورکړۍ

a) $a_k = 2 \cdot 5^{k-1}$ b) $a_k = -3 \cdot 2^{k-1}$

c) $a_k = 5 \cdot 0{,}2^{k-1}$ d) $a_k = 4 \cdot (-3)^{k-1}$

پیژند ۱۸ . ۹ :

د اریتمیتیکي پرلپسی توکو یو له بل سره زیاتون یا جمعه په پام کی نیسو، دا څه چی لاس ته راځي، هغه اریتمیتیکي لړۍ پرلپسي (لنډ: لړۍ) بولو:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

موږ دلته بیا پیل بیلګه را اخلو، چی د اریتمیتیکي لړۍ (داد پرلپسی زیاتون پرلپسی ده چی د لړۍ پرلپسي یی غواړو ونومو او په لنډه توګه یی له دې وروسته »لړۍ « و بولو) زیاتون او په ټولیزه توګه لړی زیاتون وشمیرو. ټاکونکی زیاتون له مختلفو لورو موږ دوه واره لیکو، چی دواړه هغي پسی زیات کړی شو یا یي زیاتون ونیولی شو:

$s_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n$	$s_{100} = 3+7+11+\dots +395 + 399$
$s_{100} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \dots + a_2 + a_1$	$s_{100} = 399+ 395+\dots + 11 + 7 + 3$

$$2s_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\dots+(a_n+a_1)$$

$$2s_n = (a_1+a_n) + (a_1+ d + a_{n-1}) + \dots + (a_1 + (n-1).d + a_1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2s_{100} = 402 + 402 + 402 + .. + 402 + 402$ $\qquad 2s_n = (a_1+a_n)+(a_1+a_n)...+(a_1+a_n)$

$2s_{100} = 100.402$ $\qquad 2s_n = n.(a_1+a_n)$

$s_{100} = 50.402$

$s_{100} = 20100$ $\qquad s_n = n(a_1 + a_n)/2$

د پورته شمیرني سره سم د اریتمیتیکي لړی زیاتون دی: $s_n = \frac{n(a_1 + a_2)}{2}$

که دلته د an=a1+(n-1)d ځاي په ځاي شي او د اسانتیا لپاره کموتاتیو قانون وکارل شي، دا په دې مانا چې n /2 ښي خوا ته راوړو، نو لاس ته راوړو:

$$s_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2} = n.a_1 + \frac{(n-1)dn}{2}$$

بیلګې:

لومړی: $a_a = 3; d = 7; n = 50 => s_{50}(2.3 + 49.7)50/2 = 8725$

کنترول: $a_{50} = +49.7 = 346$ او له دې

$$s_{50} = \frac{(3+346)50}{2} = 8725$$

دویم- یو میراث د شپږو ورونو ترمنځ داسی ویشل کیږي چی هر یو مشر د ورپسی مشر ورور ځخه 470 0افغاني زیاتي اخلي، د ځوان ورور 17000 افغانی رسیږي. معلوم کړئ چی میراث څومره دئ او هر یو ورور څومره میراث اخلي؟

a1=17000;d=4700 ,s6=6/2(2.17000+5.4700)=172500 افغانئ

ورونه په لاندې ډول پیسی اخلي

17000 افغانی ،21400 افغانی، 26400 افغانی ،

31100افغانی ، 35800 افغانی او 40500 افغانی.

لکه څنګه چی د اریتمیتیکي لړی زیاتون پیداکیږي، همداسی د هندسي لړی زیاتون هم پیداکیدی شي. عمومي فرمول به په پورتني ۱ - بیلګه کی ځانګړی یا ځانیزشي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(مشخص). د زیاتون فرمول لاس ته راوړلو لپاره د لړۍ sn څخه په q پراخه شوې لړۍ کموو. په دې ډول لړۍ لړو توکو ته لړیږي:

۱۸ . ۲ الف . ۱ څمککچیزې یا هندسي لړیپرلپسي (لنډ: لړۍ):

د څمککچیزې پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ څمککچیزه لړۍ بلل کیږي.
د هندسي پرلپسی د $a = 3.2^{k-1}$ څخه جوړه هندسي لړۍ په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 3.2^0 = 3$$
$$s_2 = s_1 + a_2 = 3.2^0 + 3.2^1 = 3+6 = 9$$
$$s_3 = s_2 + a_3 = 3.2^0+3.2^1 + 3.2^2 = 3+6+12=21$$
$$\vdots$$
$$s_n = s_{n-1} + a_n = 3.2^0+ 3.2+3.2^2+3.2^3+..+3.2^{n-1}$$
$$\vdots$$

جمله : (اکسپلیځیت انځورونه):

د څککچیزې پرلپسی د ak = a1 +(k- 1).d توکي سره جوړې پرلپسی څخه جوړې شوې هندسی لړۍ لپاره صدق کوي:

Sn = a1+a2q+a3q²+...+a1qn-1=a1(qn-1)/(q-1);

q|=0;Sn=n.a1 q = 1

اوبی: د $q \neq 1$ لپاره باور لري:

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$
$$s_n \cdot q = \quad a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$
$$s_n - s_n \cdot q = a_1 \qquad - a_1 q^n$$
$$s_n(1-q) = a_1 (1-q^n)$$
$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوښتنه: اوبی د $q = 1$ لپاره د ګرانو لوستونکو د کور کار دی.

دلته یو بل ډول ښوونه پلی کوو: پرلپسی د-n ام غړي $a_n = 3.2^{n-1}$ سره ورکړ شوې.
دلته په دې توګه د لړی غړي لړو غړو ته رالېږدو.

$s_{15} = 3 + 6 + 12 + \dots + 24576 + 49152$ $\qquad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_{n-1} + a_n$ $\quad +$

$s_{15} \cdot 2 = 6 + 12 + \dots + 49152 + 98304$ $\qquad s_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \dots a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$ $\quad -$

$s_{15} - s_{15} \cdot 2 = 3 - 98304$ $\qquad s_n - s_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q$

$s_{15}(1-2) = 3-98304$ $\qquad s_n(1-q) = a_1 - a_n \cdot q$

$s_{15} = (3-98304)/(-1)$ $\qquad s_n = (a_1 - a_n \cdot q)/(1-q) = (a_1 - a_1 \cdot q^n)/(1-q)$

$s_{15} = 98401$ $\qquad s_n = a^1 \cdot (1-q^n)/(1-q)$

له کمون یا کمښت وروسته د لړی په کښه لور تیك(یواځی) پورته لیکی لومړی توکی او د لاندې کرښی اخرنی توکی پاتیږي، نور ټول توکی یوبل سره لرې کوي، د بیلګي په توګه $a_2 - a_1 \cdot q = 0$ او یا $a_n - a_{n-1} \cdot q = 0$
دا روښانه ده چی q نه ارزښت صفر او نه ارزښت ۱ اخستلی شي ، په لومړي حالت که به مو پرلپسی
$a_1, 0, 0, 0, 0 \dots\dots$
لرودی او په دوهم حالت که مو د پرلپسي a_1, a_1, a_1, a_1 سره سر او کار وي

بیلګي:

$1 - 7 ; -21 ; 63 ; -189 : \dots\dots q = -3; a_1 = 7$
غوښتونکی s_7

$s_7 = 7 \cdot ((-3)^7 - 1) / -3 - 1 = -15316 / -4 = 3829$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کنترول:

$$a_7 = a_1 . q^6 = 7 . (-3)^6 = 5103 \quad , s_7 = 5103.(-3)^7 - 1/(-3)^7 - (-3)^6 :$$
$$= 5103.2188/2916 = 3829$$

۱۸ . ۲ الف ۲ اریتمیتیکي لړی

دلته غواړو چی یو ځل بیا لنډ مګر د یوه لوي سرلیك په څیر اریتمیتیکي لړۍ ته یو نظر واچوو .یوه د اریتمیتیکی پرلپسی منځ ته راغلی یا جوړه شوې لړی اریتمیتیکی لړی نوموو. د

$ak = 15 + (k - 1).4$

سره جوړه اریتمیتیکي پرلپسی څخه جوړه شوې لړی په لاندې ډول ده:

$$s_1 = a_1 = 15$$
$$s_2 = s_1 + a_2 = 15+(15+4)=15+19=34$$
$$s_3 = s_2 + a_3 = 15+(15+4)+(15+2.4) = 15+19+23=57$$
.
.
$$s_n = s_{n-1} + a_n = 15+(15+4)+(15+2.4)+..+(15+(n-2).2+(15+(n-1).4$$
.
.
.

جمله : (د اریتمیتیکی لړی اکسپلیڅیت انځورونه):

د $ak = a1+(k-1).d$
سره اریتمیتیکی پرلپسی څخه جوړه شوې لړی sn اریتمیتیکي لړی لپاره صدق کوي:

$$s_n = a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+..+(a_1+(n-1)d = (n /2) (2a_1 + (n-1)d)$$

اوبی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-3)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)$$
$$s_n = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-3)d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$
$$s_n + s_n = [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \ldots + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d]$$
$$2 \cdot s_n = n \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$$
$$s_n = \tfrac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$$

غوښتنه:

وښايي چې sn=(n/2)(2a1+(n-1)d د sn=(n /2)(a1+an)
سره په يوه مانا دي

۱۸ . ۶ د پرلپسی او لړیو پولی

موږ تراوسه داسی لړیو سره سراو کار لروده چی اخرنی توکي يی لاس ته راوړونکي وو. داسی لړی پايلړی بلل کيږي. داسي فکر هم کيدی شي چي د لړی اخرني غړي موجود نه وي، يعني لړی دې په خوښه دوام پيدا کولی شي. په عمل کی داسی پرابلمونو سره مخامخ کيږو چی دا مو ناپای لړيو ته هڅوي. دا څرګنده ده، چي داسی لړی اريتميتيکی لړی نه دي، کم له کمه به ی اخرنی غړی په پوښتنه کی راتلی او يا د پادېيرو غړو زياتون، په اريتميتيي لړی کی بي مفهومه دی، ځکه چي دواړه لويي د n د ارزښت سره په ټولو پولو لويږي په هندسی لړيو کی هم په يوه ناپای لړی کی د اخرني غړي او يا زياتون پوښتنه بي مفهومه ده. دا روښانه ده چی د پيل غړی د|q| سره ځل له امله تل جګيږي. دا د مثبت او همداډول د منفی q لپاره باور لري.

بيلګي:

۱ - اريتميتيکي لړی 2+3+4+5+..... يو لاس ته راوړونکی د زياتون يا جمعی ارزښت نه لري، ځکه چی هر راتلونکی زياته وونی د ټولو پولو لوييږي ياجګيږي٠

۲ – ځمککچيزه يا هندسي لړی 2+3+4,5+6,75+10,125+15,1875+...... د لومړي توکي a1 = 2 او د ويش q = 1,5 سره په ټولو پولو لوييږي. يا جګيږي نه اخر توکی او نه د جمع ارزښت معلوميدی شي. د پای توکوګڼ زياتون sn او اخرنی توکی an شميريدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - ناپای ځمککچیزه یا هندسي لړۍ
1,5-3+66-122+24-48+966-....... د a1 =1,5 او q= -2
سره پای ارزښت زیاتون نه لري، ځکه چی د توکو مطلقه ارزښت د هر مخکي پولی څخه جګیږي یا لوییږي .له دې سره به ځرګنده شوې وي چی کله د ناپای هندسي لړۍ د زیاتون ارزښت پای دی.

پیلبیلګه :
یو سخی سړی غواړي د معیوبو هستوګنځی ته بسپنه ورکړی . په لمړۍ میاشت کی دی ۱۰۰۰ افغانی بسپنه ورکوي او په نورو راتلونکو میاشتو کی د هغی د مخه میاشتی نیمایي یعنی په دومه میاشت کی ۵۰۰ افغانی او په دریمه کی ۲۵۰ افغانۍ او داسی نور.
دلته a1=1000او q=1/2دي. دوخت د کموالي له امله دا لړی باید پای لړۍ وي ، مګر موږ دې پوښتنی ته تیوریتیکي ځواب ورکوو.
د پای ځمککچیزو لړیو لپاره کیدی شي دلته د زیاتون له
فرمول $s_n = 1000(1\text{-}0,5^5)/(1\text{-}0,5)$ څخه کار واخستل شي، که چیرې n یو ناپاي لوي ارزښت نیولی شوی. که په دې فرمول کی موږ ته معلوم ارزښتونه کیښول شي، نو لاس ته راځي:

$$s_n = 1000(1\text{-}0,5^5)/(1\text{-}0,5)$$

اوس کیدی شي ولیکو $s = 1000(1\text{-}0,5^n)/(1\text{-}0,5) = 2000.(1\text{-}(1/2)^n)$

که n له ټولو پولو تیر شي، باید د $(1/2)^n$ له امله دا مات (1/2) تل کوچنی شي.
دې مات (1/2) باندې کیدی شي، چی د لویو n توکو لپاره، بالاخره صرف نظر وشي.
دلته روښانوي چی په دې توګه د زیاتون ارزښت یوه ناپای هندسي لړۍ
1000+500+250+125+65,50+32,75+......
جوړوي، کومه چی ځان و 2000 ته نزدي کوي او هغه ته هیڅ نه رسیږي. دا سړی زیات له زیاته کیدی شي 2000 افغانی خیرات ورکړي.

یادونه : هغه د دې برخې په سر کې پوښتنه هم په همدې توګه ځواب کیدی شي٠

پرلپسی او د پرلپسی لړۍ په لوړو شمیرپوهنوکی غوره رول لوبوي« ډیرې ښوونی (اوبښونې) په دې ولاړې دي، چی ایا یوه ټیك ټاکلی پرلپسی یوې معلومی یا ټاکلی پولی ته هڅه کوي او که نه؟ چی په اول حالت کی پرلپسی(konvergent لیمټ لرونکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یاپوله لرونکي(بلل لکیږي او په دوهم حالت کی پرلپسی (divergent لیمټ یا پوله نه لرونکی) بلل کیږي.

بیلګه :
د ... مخ په اول او په دریمې بیلګو کی راوړل شوې پرلپسی دیورګنت یا پوله نه لرونکی ، په ۲ –مه بیلګه کی پرلپسی کونورګنت یا پوله لرونکی ده او د صفر لور ته هڅه کوي یا صفر ته کونورګنت ده یعني ددې پرلپسي پوله صفردی. او ۴ -مه بیلګه کی پرلپسی پوله لري او د ۳ لور ته هڅه کوی، یعني پوله یی ۳ دی.

پرلپسی شته چی د جګیدو سره یوه ټاکلی ګڼ ته په خوښه ورنږدې کیدی شي.د دې پرلپسی د په خوښه لویو غړو او د دې ګڼ کمون ترمنځ بالاخره دومره کوچنی کیږي، چی په جبشمیرني باندې هم نه شي شمیرل کیدی .
موږ د پرلپسیو دا ډول ځاننیونی، بی له جب شمیرنی یا جبشمیري، په لاندې بیلګو کی څیړو.
د پرلپسیو غړي

1 ; 1 /2; 1 /3 ; 1 /4 ;....| 0 ; 1 / 3 ; 2 / 4 ; 3 /5 ; 4 /6;.. | 3 /29 /4 ; 15 /8 : 33 /16

1;1/2;1/3;1/4;..|0;1/3;2/4;3/5;4/6;..
|3/29/4;15/8;33/16

د لاندې سره

$a_k = 1/k$ | $a_k = (k-1)/(k+1)$ | $a_k = 2+(-1/2)^k$

د k د جګیدو سره تل دا پرلپسځانونه ځانونه لاندې ګڼونو ته نزدې کوي

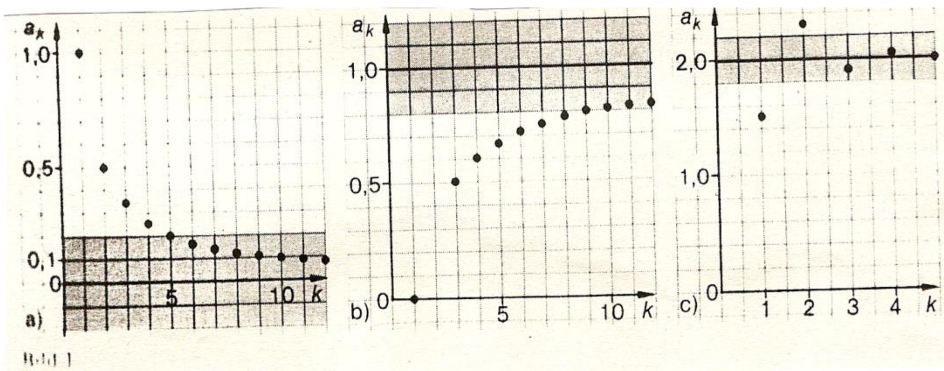
g = 0 | , g = 1 | g = 2

د ګراف ټکي یی تل د جګیدونکی غړی نمرې k سره د
دx - محور سره غبرګ | دx - محور سره غبرګ | x -محور ته
د y = 2 سره | د y=1 سره او په ریښتونی
له لاندې او پورته بدل | له لاندې راتلونکي
له پورته راتلونکي
راتلونکی
که په کرښه یو دواړو لورو ته پټی وکښل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = 2$ سره د $y = 1$ سره د $y = 0$ سره

نو د پوره لويي k نمره توکي سره د پرلپسی ټول غړی په دې پټی کی دننه پراته دي.



دا لاندې ديفرنڅ يا کمون

$\lvert a_k - 2 \rvert$	$\lvert 1 - a_k \rvert$	$\lvert a_k - 0 \rvert$

دا مانا لري، چی د جګيدونکی k نمرې توکيه خورا کوچنی کيدی شي. دا پوښتنه مو چی د کوم غړی ak لپاره دا کمون د بيلګي په توګه له 0,0001 کوچنی کيدی شي، لاندې ناسمساوات ته را هڅوي

$$|a_k - 0| < 0{,}0001$$
$$\left|\frac{1}{k} - 0\right| < 0{,}0001$$
$$\frac{1}{k} < 0.0001$$
$$k > 10000$$

$$|1 - a_k| < 0{,}0001$$
$$\left|1 - \frac{k-1}{k+1}\right| < 0{,}0001$$
$$\left|\frac{(k+1)-(k-1)}{k+1}\right| < 0{,}0001$$
$$\frac{2}{k+1} < 0.0001$$
$$\frac{2}{0{,}0001} < k+1$$
$$19999 < k$$

$$|a_k - 2| < 0{,}0001$$
$$\left|2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\right| < 0{,}0001$$
$$\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right| < 0{,}0001$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^k < 0{,}0001$$
$$k \cdot \lg\tfrac{1}{2} < \lg 0{,}0001 \| : \lg\tfrac{1}{2} < 0\ (!!)$$
$$k > \frac{\lg 0{,}0001}{\lg\frac{1}{2}}$$
$$k > \frac{-4}{-0{,}3010}$$
$$k > 13{,}29$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې مانا، : د ټولو پرلپسی غړو د

$k > 10000$ $k > 19999$ $k > 13$

سره کمون | a k - g | له 0,0001 کوچنی دی .
د گراف لپاره باور لري، چی دا ټول ټکي د یوې پټۍ یا تسمې په دننه کی پراته دي
سور یي 2.0,0001 په کرښه د مساوات

$y = 0$ | $y = 1$ | $y = 2$

y = 0 y = 1 y = 2

سره پروت وي .
که دا د 0,0001 په ځاي کی یو په خوښه کوچنی رییل گڼ ورکړ شي، او وله
دې وغوښتل شي چی کمون یی له دې گڼ کوچنی دی نو په ورته توگه مو
لاندېنامساواتو ته لارښودوي.

$\lvert a_k - 0\rvert < \varepsilon$	$\lvert a_k - 1\rvert < \varepsilon$	$\lvert a_k - 2\rvert < \varepsilon$
$\left\lvert \frac{1}{k} - 0\right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert \frac{k-1}{k+1} - 1\right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\right\rvert < \varepsilon$
$\frac{1}{k} < \varepsilon$	$\left\lvert \frac{(k-1)-(k+1)}{k+1}\right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\rvert < \varepsilon$
$k > \frac{1}{\varepsilon}$	$\left\lvert \frac{-2}{k+1}\right\rvert < \varepsilon$	$\left(\frac{1}{2}\right)^k < \varepsilon$
	$\frac{2}{k+1} < \varepsilon$	$k \cdot \lg\frac{1}{2} < \lg\varepsilon \,\Vert : \lg\frac{1}{2} < 0$ (!!)
	$\frac{2}{\varepsilon} < k+1$	$k > \frac{\lg \varepsilon}{\lg \frac{1}{2}}$
	$\frac{2}{\varepsilon} - 1 < k$	

دا په دې مانا چی : د ټولو پرلپسیو لپاره د

$k > 1/\varepsilon$ | $k > 2/\varepsilon - 1$ | $k > \log \varepsilon / (\log(1/2))$

سره کمون $\dfrac{q^n}{1-q}$ دی .

پرلپسی له دې خویونو سره کونورگنت بلل کیږي او گڼ g یی پوله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ۱۸ .۱ :

يوه پرله پسی کونورګنځ Konvergent (لاتين convergere يو د بل په لور ور ځغليدل يعني يو بل ته ورنزدېکيدل(بلل کيږي يعني د يوې ټاکلی پولی په لور هڅيږی، کله چی د هغی غړي د جګيدونکی ايندکس n سره يوې پولی ته په خوښه نزدې شي. يوه لړۍ کونورګنت يا پوله لرونکی بلل کيږي، کله چی د برخه زياتون پرلپسی د جګيدونکی n سره يوې پولی ته په خوښه نزدې شي.

هغه پرلپسی چی د صفر په لور هڅيږي صفرپرلپسی يی بولو هغه پرلپسی چی يوې ټاکلی پولی ته نه هڅيږي .ديورګنت بلل کيږی ») دا وروسته ه تر څيړنی لاندې نيول شوي دي.

جمله :

د ځمککچيزې يا هندسي لړی پولې تج ت لنې يا کونور ګنت لپاره شرطونه:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |q| < 1$$

که $|q|<1$ وي ، پس د پای ځمککچيزې لړی لپاره د زياتون فرمول داسی دی

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

د q^n ارزښت څخه تېرېدی شو يعنې ترې صرفنظر کيدی شي، که n پوره لوي وټاکل شي.

جمله :

دناپای ځککچيزې لړۍ ...+a1+a1.q+a1.q²+a1.q3 د زياتون sn سره پوله
s = a1 / (1-q) تيك هلته لري، کله چی|q|<1

$$n = n_0(\varepsilon); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18.7)$$

وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله :

هره پرلپسی د $(b \in R; n, k \in N)$ $a_k = \frac{b}{k^n}$ سره یوه صفر پرلپسی ده

جمله:

هره پرلپسی د $a_k = cq^n (c \in R$ سره د1>|q| لپاره یوه صفرپرلپسی ده۰

دلته غواړو چې دا د پرلپسی د پولی کلیمه لږ نوره هم زوره کړو.
د یوې پرلپسی د غړو an ځاننیونی څیړنه د تل جګیدونکي n لپاره،وایو چې:
که n د oe (ناپای) په لوروهڅیږي او یا لنډ n—›oe ، نو دا مو د پولی ارزښت کلیمي ته بیایي او یا کونورګنځ (convergence). موږ پرلپسی{ 1/n}={an} په پام کی نیسو، د جګیدونکي n سره، ګورو چې د پرلپسی غړي تل 0 ته په خوښه یا په زړه پورې ور نزدې کیږي .
که سړی هرڅومره کوچنی ګڼ ε >0 وټاکي د یوه معلوم($n = n_0(\varepsilon)$ د لته) $n_0(\varepsilon)$ د ε په واک کې دی) څخه وروسته ټول ګڼونه د0 په ε -چاپیریال کی پراته دي

$$|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall\, n > n_0(\varepsilon). \qquad (18.1)$$

سړي کړی شي چې دا n دلته په ساده ډول ورکړي. د) ۱۸ . ۱ (له امله دی

$$n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}. \qquad (18.2)$$

د
100 / 1 =
لپاره . n0 = 100 نو | an | < 1 / 100 د ټولو n > 100 لپاره، یعني د n = 101, n
=102 , n = 103........لپاره. د = 1 / 1000000 لپاره لرو = ( ) n0
1000000پس, | an | < 1/ 1000000 د ټول n > 1000000 لپاره

په لاندې حالت کی سړی وایي: چې پرلپسی
/n{ 1 {
کنورګنت ده. هغه د پولې a = 0 لور ته کونورګنت کیږي. د دې لپاره لیکو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ او یا په ساده ډول

$$\frac{1}{n}\to 0 \qquad (18.3)$$

(د 1/n لیمس د n—>oe لپاره په 0 مساوي دی او یا ساده 1/nد0 په لور ځي)

د $\{a_n\}=\{(-1)^n(1+\frac{1}{n})\}$ لاندې پرلپسی په څیړنه کره لاس ته راځي: د جوړه یا جفت n لپاره پرلپسی an د+1 لورته نزدې کیږي او د ناجوړه یا طاق n لپاره پرلپسی د-1 لورته نزدې کیږي. د لته سړی د دوه پولو +1 او -1 څخه نه غږیږي بلکې دپرلپسی ددوه ډیرۍ شوو ټکو یا ځاې راټولشوو ټکو څخه . پرلپسی کونورګنت نه ده بلکه دیورګنت (divergence(ټیګ : ناټاکلی دیورګنس)ده ۰

پرلپسی {an}={n2} هم دیورګنت ده. دا چي an د جګیدونکی n سره د oe یا ناپای لورته ځي پس د هرڅومره لوي ارزښت K څخه اوړي یا جګیږي، نو سړی د oeپه لور د ټاکلی دیورګنت څخه غږیږي.

$$\lim_{n\to 0} n^2 = +\infty \vee n^2 \to +\infty;.........................(18.4)$$

په پورته کي $\vee$ د یا لپاره ځای په ځای ده

له دې پیل یادونوڅخه اوس باید د پولو(حدونو) کلیمی کره وپیژندل شي:

پیژند ۱۸ . ۲ :

یو پرلپسی $\{a_n\}$ { an } پوله یا حد a لري

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n \to a;.............................(18.5)$$

که د هر یوه (هرڅومره کوچنی هم) $\varepsilon > 0$

< 0

لپاره یو $n_0 = n_0(\varepsilon)$

داسی موجود وي چی باوري وي

$$|a_n - a| < \varepsilon;............................(18.6)$$

د ټولو $n = n_0(\varepsilon);...(18.7)$

وایو چی پرلپسی { an } کونورګنت یا په بل عبارت پرلپسی { an } د پولی a په لور کونورګنت کیږي .که پرلپسی داسی پوله ونه لري، نو دیورګنت بللکیږي(یا دیورګنت کیږي) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

که یوې دیورګنتې پرلپسی } an { و هر (په خوښه لوی) ګن K لپاره یو
)n0 = n0(K
داسی موجود وي چی باوري وي

$a_n > K$ یا $a_n < -K$ (18 .8)

د ټول

$n > n_0 (K)$ (18 . 9)

نو د پرلپسی څرګند یا معلوم دیورګنت بلل کیږي د + oe په لور اویا - oe په لوراو
ددې لپاره لیکي

$\lim_{n\to\infty} a = +\infty \iff$ (په همدې ډول) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (18 . 10)

یا لنډ:

$a_n \longrightarrow +\infty \implies$ (یا په همدې ډول) $a_n \longrightarrow -\infty$ (18 . 11)

که یوه پرلپسی دیورګنت او ټاکلی دیورګنت نه وي، نو ناټاکلی دیورګنت بلل کیږي.
ددې پرلپس، $\{a_n\} = \{ n / n+1\}$ څخه او د لاندې فورم بدلولو

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

اتکل کیدی شي چی دا پرلپسی پوله $a = 1$ لري، یعني $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n/n+1) = 1$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $n/(n+1) < 1$ له امله لاس ته راځي :

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n/(n+1) = 1/(1/n) < 1/\varepsilon$$

د $n+1 > n \iff n > (1/\varepsilon) - 1 = n_0(\varepsilon)$ لپاره .

د $= 1/100$ لپاره لرو $n_0(\varepsilon) = 99$. نود ټولو $n > 99$ لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې پورته سره کيدی شي چې تصديق کړو چې: هر $\varepsilon>0$ ته يو $n_0(\varepsilon)= (1/\varepsilon)-1$

داسې موجود دی چې $|a_n - 1| < \varepsilon$ د ټولو $n > n_0(\varepsilon) = (1/\varepsilon)-1$ لپاره دی.

دا ساده بیلګه د تعریف ۱۸ . ۲. پرابلم په ګوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا نه وایي چې پوله څرنګه پیداکیدی شي .مخکي له دې چې پولې ته تګ (کونورګنځ Konvergenz) وښوولی شو، نو پولې a ته ضرورت دی . مخکي له دې چې کونورګنځ

اټکل کيدی شي چې دا پرلپسی پوله $a = 1$ لري، يعني

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n/n+1) = 1$$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $n/(n+1) < 1$ له امله لاس ته راځي:

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n/(n+1) = 1/(1/n) < \varepsilon$$

د $n+1 > n \Leftrightarrow n > (1/\varepsilon) - 1 = n_0(\varepsilon)$ لپاره .

د $= 1/100$ لپاره لرو $n_0(\varepsilon) = 99$. نود ټولو $n > 99$ لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

ددې پورته سره کيدی شي چې تصديق کړو چې: هر $\varepsilon>0$ ته يو $n_0(\varepsilon)= (1/\varepsilon)-1$

داسې موجود دی چې $|a_n - 1| < \varepsilon$ د ټولو $n > n_0(\varepsilon) = (1/\varepsilon)-1$ لپاره دی.

ددې پورته سره کيدی شي چې تصديق کړو چې: هر >0

$\varepsilon>0$ ته يو $n_0(\varepsilon)= (1/\varepsilon)-1$

داسې شته دی چې $|a_n - 1| < \varepsilon$ ،

د ټولو $n > n_0(\varepsilon) = (1/\varepsilon)-1$ لپاره دی .

دا ساده بیلګه د پیژند ۱۸ . ۲. پرابلم په ګوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا دا نه وايي چې پوله څرنګه پیداکیدی شي .مخکي له دې چې پولې ته تګ (کونورګنځ Konvergenz)وښوولی شو، نو پولې a ته اړتیا شته دی . مخکي له دې چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونورګنځ (ټولې تج تلنه) وښايو نو بايد پوله مو پيژندلي وي يا کم له کمه مو ګومان په راغلی وي.
په ټوليزه(عمومي) توګه د $n_0(\varepsilon)$ شميرل هم د ستونځو ډك دي. د پولی عملي شميرلو لپاره داسی عمليو يا کاره ونو ته اړتيا ده، چی بی د پيژند ۱۸ . ۲ د هر وار استعمال ځخه ټولی راپيدا کړی شو. له دې پرابلم سره ۱۸ . ٤ -امه برخه ځان مشغولوي.
کله کله دا بسوالی يا بسيا کوي چی سړی دومره پوه شي چی ايا پوله وجود لري يا شته دئ (ايا کونورګنت کيږی) بی له دې چی هغه وپيژني او يا يی وشميري. داسی د موجوديت ويناوي يواځي د کونورګنځ کريتيرين (- خويونه) کولی شي، له کومو ځخه چی لاندې يو ورکول کيږي. دې ته بايد ګوته ونيسو چی دا کريتيرين د مخه د پولی پو هيدل ضرور نه نيسي) دا د مخه نيونه نه ده يعني فرضيه نه ده) .

جمله ۱۸ . ۱:

هره بنده (محدوده) مونوتون پرلپسی an کونورګنت ده ٠

دا کريتيريوم ځرګند د ليدلو دی. که يوه پرلپسی تل جګيږي (کميږی ،ټيټيږي) او ټاکلی يا معلوم پای ارزښت K ځخه نه اوړي(K ځخه نه ټيټيږي) نو بايد an يوځاي کی راپنډ شي. دا د مونوتوني له امله يواځي په يوځاي کی کيدی شي.

يادونه : څه ګنونه چی په يوځاي کي سره ډير راټول شي ما ورته ډيری ليکلي، دا ښه نه ده، ځکه، چی ډيری مي د ډيری ياني د سيټ لپاره کارولی ، نو دلته ليکم، چې »راپنډ« شي٠

جمله ۱۸ . ۱ د بيلګي په توګه په دريمه برخه کی راوړلشوي، د طبعي لوګاريتم بنسټ په ځيرګڼ e سره اړيکو يا رابطو کی استعمال لري . سړی د يو ځه ستونځو سره ښوولی شي چی لاندې باوري دی

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3.$$

له دې امله دا پرلپسی

$$\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$$

مونوتون او بنده (محدوده) ده او د جملی ۱۸ . ۱ له امله کونورګنت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې پوله $e = 2,71828$ ده (پرتله یا مقایس برخه ۳ . ۱)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e. \qquad (18.12)$$

۱۸ . ۴ د پولی شمیرنه

په دې برخه کی غواړو چی قاعدې ورکړو د کومو په مرسته چی د پیږندلشوو پرلپسی د کونورګنت څخه د نورو کونورګنت لاس ته راوستی شو، او همداسی، چی د هغی په مرسته د پیژندلشوو پرلپسیو د پیژندل شوي پولی ارزښت په مرسته د نورو پرلپسیو پولی ارزښت شمیرل کیدی شي.
لاندې بنستیزه جمله ښاي چی د ځانګړو شرایطو لاندې د ګڼونو پرلپسیو سره همداسی شمیرل کیدی شي لکه پخپله د ګڼونو سره.

جلمه ۱۸ . ۲ :

که پرلپسی$\{a_n\}$ او $\{b_n\}$ (پای)پوله ارزښت a اوb ولري ، یانې

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b, \qquad (18.13)$$

وي، نو باوري دي

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b, \qquad (18.14)$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \qquad (18.15)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b},\ b_n \neq 0, b \neq 0, \qquad (18.16)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^{b},\ a_n > 0, a > 0, \qquad (18.17)$$

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = \log a,\ a_n > 0, a > 0. \qquad (18.18)$$

دا جمله دوه ګوني وینا کوي: که د پرلپسیو غړو an او bn د کونورګنت عددونو پرلپسي د جمعې، تفریق، ضرب (زیاتون کمون ، ځل) او ویش، پوتنځ یا لوګاریتم نیولو ، د يوې نوې پرلپسي یا ترادف غړي لاس ته راولي نو دا نوې پرلپسي (ترادف) کونورګنت ده او

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولی ارزښت یی په ترتیب د کونورګنتو پرلپسیو یا ترادفون جمعه،تفریق،ضرب(زیاتون، کمون، ځل)، ویش ، پوتنځ او لوګاریتم دی.
په لاندې کی غواړو یواځی اړیکی (۱۸ . ۱۴) وښایو. د ښوولو لپاره یی د پولی ارزښت پیژند ۱۸ . ۲ څخه غواړوکار واخلو (استعمال کړو) . نیونی (۱۸ . ۱۳) دا مانا لري، چی هر
< 0
ته یو
($n1$) او یو ($n2$)
داسی شته دی، چي باوري کوي $|a_n - a| < \varepsilon$ دتولو $n > n_1(\varepsilon)$, لپاره ،
$|b_n - b| < \varepsilon$ د ټولو $n > n_2(\varepsilon)$, لپاره‌پس معتبر دي
$|a_n - a| < \varepsilon$ او $|b_n - b| < \varepsilon$ د ټول $n > n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$
اوس باید یواځي وښایو چی د یوه ټاکلي n چه $|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)|$
د هر ε لاندې راټیټیدلی شي. لاندې باور لري

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

د ټولو $n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. لپاره
په دې توګه (۱۸ . ۱۴) وښوول شوه.
د جملی ۱۸ . ۲ استعمال کی باید برسیره په نیونو یا فرضیو، چی په (۱۸ . ۱۵) تر (۱۸ . ۱۸) پورې شوي ټیك په پام کی ونیول شي چی پرلپسی $\{a_n\}$ او $\{b_n\}$ څرګند پای پولی ارزښتونه a او b باید ولري. که د بیلګي په توګه $a_n \to \infty$, او $b_n \to \infty$, وي، نو فرمول (اجازه نه لرونکی استعمال !) (۱۸ ، ۱۴) په یوه په نامه ناټاکلي افادې په لورځی یعنی $\infty - \infty$,

$$(a_n - b_n) \to \infty - \infty. \tag{18.19}$$

که باور ولري $a_n \to 0, b_n \to \infty$, نو سړی د اجازې نه لرلو استعمال (۱۸ . ۱۵) یوه بله ناټاکلی افاده لاس ته راولي:

$$(a_n \cdot b_n) \to 0 \cdot \infty. \tag{18.20}$$

په لاندې کې bzw. د همداسې‌په معنا دی.

$$a_n \to 0,\ b_n \to 0 \quad \text{bzw.} \quad a_n \to \infty,\ b_n \to \infty,$$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{0} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{\infty}{\infty}. \tag{18.21}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۱۸ . ۱۷) استعمال مو د $a_n \to 0,\ b_n \to 0$ همداسي د $a_n \to \infty,\ b_n \to 0$ همداسي $a_n \to 1,\ b_n \to \infty$ حالتونو کي مو درې نورو ناټاکلو افادو ته لاربنود وي.

$$a_n^{b_n} \to 0^0 \ \ \text{bzw.} \ \ a_n^{b_n} \to \infty^0 \ \ \text{bzw.} \ \ a_n^{b_n} \to 1^\infty. \qquad (18.22)$$

په پورته انځورشوو اړیکو کی لاندې افادې

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty \qquad (18.23)$$

ناټاکلی افادې بلل کیږي.
داسي پرلپسی چی د جملي ۱۸ . ۲ فورمال استعمال ځخه ناټاکلو افادو ته لاښنودوي ، دیورګنت او یا به مختلفو ارزښتو ته کونورګنت وي. دا یوې ځانګړې ځیړنی ته اړ دي.

مخکی له دې چی داپوښتنی ځوابوو، نو باید یوڅو تیپیکي پرلپسی وځیړل شي، کومی مو چی په نامه ټاکلو افادو ته لاربنود وي، که څه هم د جملی ۱۸ . ۲ نیوني یا فرضیي پوره نه وي.
که an —>+oe او bn —>+oe باور ولري نو طبعآ لاس ته راځي

$a_n + b_n \to \infty + \infty = \infty$	.........(18.24)
$a_n . b_n \to \infty . \infty = \infty$	.........(18.25)
$a_n - b_n \to \infty - \infty = \infty$	.........(18.26)

دا اړیکي (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۲۵) طبعآ د ناڅرګندې پولی ارزښت - oe لپاره هم باوري دي.
که an —> a او bn —> oe وي، نو باور لري :

$a_n + b_n \to a + \infty = \infty,$	(18.27)
$a_n \cdot b_n \to a \cdot \infty = \infty, \ a > 0,$	(18.28)
$a_n \cdot b_n \to a \cdot \infty = -\infty, \ a < 0,$	(18.29)
$\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{\infty} = 0,$	(18.30)
$a_n^{b_n} \to a^\infty = \begin{cases} 0 \text{ für } 0 < a < 1, \\ \infty \text{ für } a > 1, \end{cases}$	(18.31)
$a_n^{-b_n} \to a^{-\infty} = \begin{cases} \infty \text{ für } 0 < a < 1, \\ 0 \text{ für } a > 1, \end{cases}$	(18.32)
$b_n^{a_n} \to \infty^a = \infty, \ a > 0.$	(18.33)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې لپاره باور لري :

$$a_n \to 0,\ b_n \to b, \tag{18.34}$$

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{b}{0} = \infty,\ b > 0, a_n > 0, \tag{18.35}$$

$$a_n^{b_n} \to 0^b = \begin{cases} 0 & \text{für } b > 0, \\ \infty & \text{für } b < 0,\ a_n > 0, \end{cases} \tag{18.36}$$

$$\log a_n \to \log 0 = -\infty, a_n > 0. \tag{18.37}$$

د $a_n \to 0$ او $b_n \to \infty$ لپاره باور لري یا صدق کوي.

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{\infty} = 0,\ a_n > 0, \tag{18.38}$$

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{\infty}{0} = \infty,\ a_n > 0, \tag{18.39}$$

$$a_n{}^{b_n} \to 0^\infty = 0,\ a_n > 0. \tag{18.40}$$

په دې همدا اوس ښوول شوي اړیکو کی لاندې افادې تاکلی افادی دي (نیونه د (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۴۰) پورې دی په پام کي ونیول شي) :

$$\begin{gathered}\infty + \infty = \infty,\ a + \infty = \infty,\ \infty \cdot \infty = \infty,\ a \cdot \infty = \infty, \\ \frac{a}{\infty} = 0,\ \frac{a}{0} = \infty,\ \frac{0}{\infty} = 0,\ \frac{\infty}{0} = \infty, \\ \infty^\infty = \infty,\ a^\infty = \infty\ (a > 1),\ a^\infty = 0\ (0 < a < 1), \\ 0^\infty = 0, 0^a = 0\ (a > 0),\ 0^a = \infty\ (a < 0), \\ \infty^a = \infty\ (a > 0),\ \infty^a = 0\ (a < 0),\ \log 0 = -\infty. \end{gathered} \tag{18.41}$$

په لاندې بیلګه کی به یو څو ګنونپرلپسی ورکړ شي، کومی چی د تاکلو افادې په لور لارښودوي) بیایي :)

بیلګه ۱۸ . ۳:

$$n^2 = n \cdot n \to \infty \cdot \infty = \infty, \qquad \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}} \to \infty^{\frac{1}{2}} = \infty, \qquad \frac{1}{n^2} \to \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$2^n \to 2^\infty = \infty, \qquad \frac{1}{n^n} = \left(\frac{1}{n}\right)^n \to 0^\infty = 0, \qquad \log\frac{1}{n} \to \log 0 = -\infty,$$

$$\frac{n}{\sin\frac{1}{n}} \to \frac{\infty}{\sin 0} = \frac{\infty}{0} = \infty, \qquad n \cdot \log\frac{1}{n} \to \infty \cdot (-\infty) = -\infty.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه پرلپسی چې د ناټاکلو افادو(۱۸ . ۲۳) . په لور مو لاربنودوي، څه ستونځي پيښوي. دا د هوښيارو فورمبدلولو يا ښه بدلون په بنسټ په داسی پرلپسو بدليږي چې څرګنده – يا ټاکلي افادی (۱۸ . ۴۱) په لور مو بيايي يا چې د هغي کونورګنتځاننيونې معلوم دي . لومړی دې يو څو ځانګړې پرلپسی وکتل شي:

پرلپسی مو د $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ غړو سره د نا ټاکلی افادې 1^∞ په لور بيايي او د (۱۸ . ۱۲) له مخی پوله ارزښت e لري. سړی ښوولی شي (دلته دې دا نه ښوول کيږی) ، چې دا پولی ځاننيونه ساتلي پاتی کيږي، که څوك د $an = 1/n$ په ځاي يوه په خوښه د صفر پرلپسی $a_n \to 0, a_n \neq 0$ وټاکي.

جمله ۱۸ . ۳ :

د هرې په خوښه صفر پرلپسی $\{a_n\}$،

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad a_n \neq 0, \tag{18.42}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e. \tag{18.43}$$

بيلګه ۱۸ . ۴ : د جملی ۱۸ . ۳ په مرسته د بيلګي په توګه لاس ته راځي:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n\cdot(-1)} = \left(\left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n}\right)^{-1} \to e^{-1} = \frac{1}{e},$$

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}\cdot a} = \left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a \to e^a, \quad \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{n}}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^n} \to \frac{e^2}{e^{-3}} = e^5,$$

$$\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{2n-3} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n-3}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n-3}} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-3}\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{-3}\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n}}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^3}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3}\cdot\frac{\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)^2}{\left(\left(1-\frac{3}{n}\right)^n\right)^2} \to \frac{1^3}{1^3}\cdot\frac{(e^2)^2}{(e^{-3})^2} = e^{10},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}}=\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\rightarrow e^0=1,$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot n}=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n\rightarrow e^\infty=\infty.$$

د $a_n\rightarrow 0$ لپاره پرلپسی sinxn)/n) د ناټاکلی افادې 0/0 په لور ځي.

لاندې باور لري :

جمله ۱۸ . ۴: د هرې په خوښه صفر پرلپسی

(18.44)	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0, a_n\neq 0,$

لپاره باور لري (د لندې الماني ژباړه= an په لینده کچ)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin a_n}{a_n}=1 \quad (a_n \text{ im Bogenmaß}). \qquad (18.45)$$

اوبنونه :د$\sin(-a_n)=-\sin a_n$له امله او لەدې امله

چې $\frac{\sin(-a_n)}{-a_n}=\frac{\sin a_n}{a_n}$ دی، دلته دې(۱۸ . ۴۵) یوائې د an> 0 لپاره وښوول شي.

موږ دلته د یوونګردی یا واحد داېرې د کونج بلواک څخه کته اخلو؟؟؟ خیره ش ۱۸ . ۱) د

درې ګوډي OAB منځهواره: $\frac{1\cdot\sin a_n}{2}$,

د ګردۍ سکتور یا ګردیبرخه OABمنځهوارې

څخەکوچنی ده، او دا بیرته د درېګوډي $\frac{1^2\cdot a_n}{2}$,

$\frac{1\cdot\tan a_n}{2}$

OACد منځهوارې.

څخه کوچنی دی. له دې امله باور لري

$\sin a_n<a_n$ او $a_n<\tan a_n=\frac{\sin a_n}{\cos a_n}$.

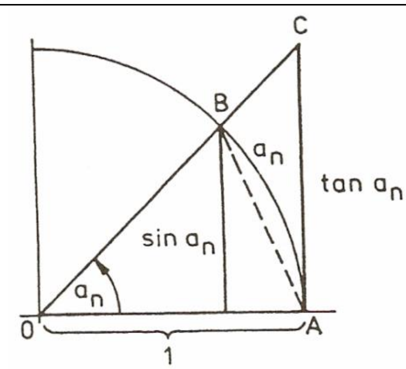


Bild 18.1

(c) ketabton.com: The Digital Library

او ښوونه :د $\sin(-a_n) = -\sin a_n$

له امله او له دې امله چې $\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$

دی، دلته دې(۱۸ . ۴۵) یوازې د $a_n > 0$ لپاره وښوول شي.

موږ دلته د یوونګردی یا واحد داېرې د کونج بلواک څخه ګټه اخلو؟؟؟ څیره ش ۱۸ .

۱) د درې ګوډي OAB منځهواره: $\frac{1 \cdot \sin a_n}{2}$,

د ګردۍ سکتور یا ګرديیرخه OAB

منځهوارې $\frac{1^2 \cdot a_n}{2}$,

څخه‌کوچنی ده، او دا بیرته د درېګوډي OAC د منځهوارې. $\frac{1 \cdot \tan a_n}{2}$

څخه کوچنی دی.

له دې امله باور لري $\sin a_n < a_n$ او $a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$.

او ورپسی

$$\frac{\sin a_n}{a_n} < 1, \ \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n}, \ \text{also} \ \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1.$$

د $\cos a_n \to 1$ له امله $a_n \to 0$ لپاره فرمول (۱۸ . ۴۵) باور لري۰

بیلګه ۱۸ . ۵ : د جملی ۱۸ . ۴ په مرسته د بیلګي په توګه لاس ته راځي:

$$n^2 \cdot \sin\frac{1}{n} = n\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to \infty \cdot 1 = \infty, \qquad n \cdot \sin\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1,$$

$$\sqrt{n} \cdot \tan\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}} \to \frac{1}{1} = 1.$$

بیلګه ۱۸ . ۶ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پرلپسی $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$، ،

چې د ناټاکلی افادې $\frac{\infty}{\infty}$ په لور مو هڅوي کوښښ کیږي چې د مات باندې او ماتلاندې په یوه ګڼ وویشل شي، چې یو ټاکلی وینه یا افاده ترې رامنځ ته شي.

$$\frac{3n^2-n+1}{2n^2-1}=\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}\to\frac{3}{2}, \qquad \frac{6n^3+n-1}{7n^4+n^2+1}=\frac{\frac{6}{n}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{7+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\to\frac{0}{7}=0,$$

$$\frac{6n^3+n-1}{2n^2-1}=\frac{6n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}\to\frac{\infty}{2}=\infty, \quad \frac{\sqrt{n^2-1}+n-1}{n+1}=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\to\frac{2}{1}=2.$$

بیلګه ۱۸ . ۷ : پرلپسې $\{a_n-b_n\}$ ، چې ناټاکلې افادې $\infty-\infty$ ته مو لاربښودوي، کید ی شي د نورو ترمنځ لاندې بڼه غوره کړې:

$$a_n-b_n=\frac{(a_n-b_n)(a_n+b_n)}{a_n+b_n}=\frac{a_n^2-b_n^2}{a_n+b_n}\to\frac{?}{\infty}.$$

که صورت پولې ته و هڅیږي، نو یوه ټاکلې افاده بیا مخ ته لرو.

$$\sqrt{4n^2+5n+2}-2n=\frac{4n^2+5n+2-4n^2}{\sqrt{4n^2+5n+2}+2n}=\frac{5+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}+2}\to\frac{5}{4},$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{2n-1}=\frac{n+1-2n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{\frac{2}{n}-1}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}\to\frac{-1}{+0}\to-\infty,$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\to\frac{2}{\infty}=0.$$

تمرینونه:

د ورکړ شوې پرلپسې $\{a_n\}$ یا ترادف پوله ارزښت a وشمیرئ (که شتون وري)! $n_0(\varepsilon)$ وټاکئ، داسې، چې د ټولو $n>n_0(\varepsilon)$ (18.6) لپاره باور ولري.

1. a) $a_n=\frac{n+1}{2n}$ b) $a_n=\frac{1}{n^2\sqrt{n}}+\frac{1}{n^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $a_n = n\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}} - n$

d) $a_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

د لاندې پرلپسیو $\{a_n\}$ پوله ارزښت وشمیرئ، که شتونولري.

.1. a) $a_n = \frac{2n+3}{3-4n}$

b) $a_n = \frac{4n-3}{2-5n+7n^2}$

c) $a_n = \frac{5n^2-6}{3n+4}$

d) $a_n = \frac{3n^3-2n^2+5n-6}{2n^3-4n^2-7n+9}$

e) $a_n = \left(\frac{3n-2}{3-6n}\right)^2$

f) $a_n = \frac{(2n-3)^2}{4n+1}$

g) $a_n = \frac{2-\sqrt[3]{n^2}}{n^2+5}$

h) $a_n = \frac{3+(-1)^n+2n}{1-3n}$

i) $a_n = \frac{4\sqrt{n}-10n}{n\sqrt{n}}$

j) $a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2}$

k) $a_n = n\left(1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}\right)$

l) $a_n = n\left(\sqrt[3]{n^2+2}-\sqrt[3]{n^2+1}\right)$

.2. a) $a_n = \left(1+\frac{4}{n}\right)^n$

b) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

c) $a_n = \left(\frac{cn+1}{cn}\right)^n$

d) $a_n = \left(\frac{2+n}{n-4}\right)^n$

e) $a_n = \left(\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)(n+3)}{n+2}\right)^n$

f) $a_n = \left(1-\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{4}+3}$

g) $a_n = \sqrt[n]{3}$

h) $a_n = \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$

2.3. a) $a_n = [2n^{-1}\cdot\sin(2n^{-1})]$

b) $a_n = n\cdot\sin\frac{1}{n}$

c) $a_n = n\cdot\tan\frac{1}{n}$

d) $a_n = \sqrt{n}\tan\frac{1}{\sqrt{n}}$

e) $a_n = 2n^2\cdot\cos\frac{1}{n^2}\cdot\tan\frac{1}{n^2}$

f) $a_n = \sin\frac{1}{n} - n\cdot\cos\frac{1}{n}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

19 پوله (حد)"The Limit"

لاندې د اعدادو ترادف (پرلپسې) لرو:

(1) 1 / 2 , 1 / 3 , 1 / 4 , ... ,1 / n

(2) 3 / 2 , 4 / 3 , 5 / 4, ..., (n+1) / n

(3) 2,4,6,...2n

که n د ناپای په لور یانې $n \to \infty$ ته لاړ شي، نو د پورته ترادفونو څخه (۱) د صفر په لور، (۲) د یو په لور او (۳) د ناپاي په لور ځي.

د Limit مانا پوله (حد) ده، چې له هغې تیرېدنه اجازه نه لري. په پخواني روم کې د یوه ښار د قلعې نوم هم Limitوو. په ریاضیاتو کې ، لکه په ترادفونو (پرلپسې) کې مو چې ولیدل لیمیټ د پولې یا حد مفهوم لري.

د پولې (حد) د استعمال مفهوم په دې کې پروت دی، چې د یوه فنکشن یا تابع سلوک یا کاروایي داسې وڅیړو لکه ځنګه ، چې د فنکشن یا تابع (بلواک) د افقي محور (پروت - x– محور (abscissa)) باندې پرلبپسې یا ترادفونه یوې پولې یا حد(تکي) ته ورنږدېکیدنه. دا لکه په پورته ننوتنه کې، چې پرلپسې یا ترادفونه په پروت محور یوې پولې ارزښت ته ځي. وبه ګورو، چې پوله یا حد په ریاضیاتو کې ددې لپاره کارول کیږي، چې مشتق وپیژنو

فعالیت :

-ایا تاسو په ورځني ژوند کې د پولې(حد) د کلمې سره بلد یاست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایا تاسو په ورځني ژوند کې یوه بیلګه راوړی شئ، چې یوې پولې ته له دواړو لورو، له ښی و کیڼ لورته او همداډول له کیڼ و ښې لورته نزدی شی یا لاړ شی؟

په یوه ټاکلي ځای کې د توابعو پوله :

یادونه: مونږ له دې وروسته د پولې په ځای پوله ارزښت لیکو، چې دا ټیک زمونږ غوښتنه په ګوته کوي.

فعالیت ۱ : یوه تابع $f(x) = x + 2$ په پام کې ونیسی، چې پروتولاړسیستم یا سیستم قیمت وضعیه کې ټکی $P(2,4)$ لري

۱ - د تابع جدول وکاږی.

۲ – د تابع ګراف وکاږئ

۳ - $f(2)$ پیداکړئ او د x خوزښت(حرکت) باندې بحث وکړی که x د 2 ارزښت ته دواړو لورونزدې شي

۴ - د x پولې ته تلنه په ګراف(څیره) کې روښانه کړی.

بیلګه ۱ :

یوه تابع $f(x)=2x$ او یوټکی P_0 دې ورکړ شوی وي، چې کواوردینات($3/6$) لري.

۱) د تابع جدول وکاږئ

۲) د تابع کراف یا څیره , وکاږئ

۳) $f(3)$ پیداکړی او د $f(x)$ تلنه باندې بحث وکړی که x د "3" ارزښت ته نزدې شي

۴) د $f(x)$ پولې ته تلنه په څېره کې روښانه کړی.

اوس غواړو دا پورته فعالیت روښانه کړو:

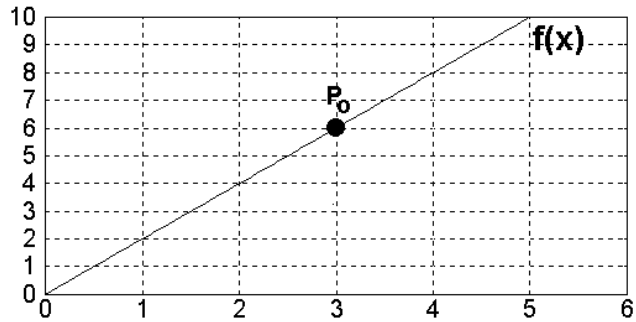
۱) د تابع جدول (دولی یې ګران لوستونکي پوره کوي)

x	-1	0	1	2
f(x)	-2	0	2	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۲) د تابع ښیره



۳) $f(3) = 6$ او غواړو د درې ارزښتونو څخه چې له ښې او کینې لور و ۳ ته ورنږدې کیکیږي و ګورو، چې په دې درې ارزښتونو کې چیرته ځي. ددې لپاره لاندې ارزښتونه په دوه جدولونو کې ښیرو

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې ګورو،چې له کینې لور وکښته ۲ ته نږدې کیږو او له ښې لور له کښته و پورته لورته هم ۲ ته نږدې کیږو. بل جدول پروت کاږو

له ښې و کینې لور ته له کینې و ښې لورته

⟶ 1 ⟵

x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6.002	6.02	6.04

------------→ 6 ←------------

(c) ketabton.com: The Digital Library

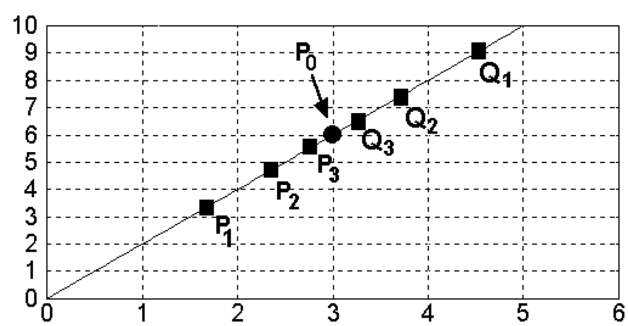
په درې پړاوونو کې د ،، f(3) " قیمت د "f(x) " قیمتونو سره پرتله کیږي. که "x" و "3" ته ورنږدې شي.

دا حالت موږ ته په ګوته کوي چې: که "x " و "3" ته ورنږدې شي، نو د f(x) ،،پوله (حد)،، برابر په 6 دئ او دا داسې لیکو: $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$

۴) اوس پورته ګراف په لاندې توګه رسموو او ښي او کیڼ لور ته موخه ور ټکي - لکه په پورته جدول کې - په نخښه کوو.

د لاندې څېړې له مخې ټکي ... $P_1, P_2, P_3,$ په پام کې نیسو، چې ټکي P_0 ته تل له کیڼ لور نږدې کیږي. او همداسې ټکي ... $Q_1, Q_2, Q_3,$ چې له ښی لور ټکي P_0 ته نږودې کیږي.

کتل کیږي: هرځومره، چې پورته ټکي و ټکي P_0 ته نږدې کیږي په همغه کچه د تابع ارزښتونه و ۶ نږدې کیږي (د ټکي $P_0(3,6)$ -قیمت له امله)



که په ګراف کې ځای x=3 ته نږدې شو، نو تابع ارزښت یا فنکشن ارزښت و قیمت(ارزښت) ۶ ته نږدې کیږي.

وایو: ۶ د فنکشن f(x) پوله ارزښت دئ د x-->3 لپاره (لوستل: x د 3 (درې) په لور تلنه).

د پوله ارزښت لپاره مو لیکډول لیکبڼه(په پرله پسې یا ترادف کې) پیژندلی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 6$$

یادونه: د تابع پوله یا حد په هغه ځای کې چې تابع تعریف نه وي هم کیدی شي شته وي:

په پورته کې مو د یوه تابع f(x) حد په x=3 ځای کې تر څېړنې لاندې ونیو . دلته تابع په x =3 کې پیژند یا تعریف درلود.

اړیین نه ده ، چې تابع د x=3 په ځای کې تعر یف وي، ځکه چې پوله ارزښت د x لپاره یواځې د x=3 په نزدې کې تشریح شوې.

پام : په ځنو فنکشونو یا توابعو کې ،،پوله یا حد ،، په داسې ساده ډول لاس ته نه شو راوړی - لکه د مخه - مګر د تابع د ساده بدلون له لارې دا کار سرته رسولی شو .

بیلګه ۱ :

تابع $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}; x \neq 1$ راکړ شوې

۱) د تابع جدول او ګراف وکاږی!

که صور د x-1 سره لنډ کړو، نو لرو :

$$f(x) = x + 1$$

د تابع "f(x) " خوزښت تر بحث لاندې ونیسی‌که "x" و "1" ته نزدې شي یا همداسې که $x \to 1$.
له دواړو یانې له ګراف او جدول ځخه موږ لیکو چې f(x) د ریل عدد‘‘1 ‘‘ په لور هڅېږي. نو

ښېره دې ګران
لوستونکي وباسي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

له دې امله روښانه ده چې تابع په هغه ټکي کې تعریف(پېژند) نه لري، په هغه کې چې پوله (حد) شمېرل شوی.

یادونه : په پورته ډول تابع به سملاسي پسې وڅېړل شي، خو د هر څه لومړی پېژند راوړو:

پیژند (تعریف) :

تابع $f(x)$ یوه پوله L لري ، که x د یوه ریل عدد د c په لورتړلی لاړ شي،او داسې یې لیکو: $\lim_{x \to c} f(x) = L$

فعالیت : ایا دا پیژند رښتیا دی، که $f(c) \neq L$ وي؟

فعالیت: که ولرو: $|x|$ ، چې تل مثبت دی.

- دا بې له دې مطلق ارزښت څنګه لیکو؟

- ایا دا هغو اعداو کارولی شو، چې یو ﷲ بل سره د شمېرنیزو نخښنو له لارې تړلي وي، یعني چې اعداد یو له بل سره د جمعې، تفریق ... له لارې سره تړلي وي؟

فعالیت: هغه توابع چې په یوه عدد د بېلګې په توګه صفر کې تعریف نه وي ، څه بلل کیږي

بیلګه 2 : تابع $x \neq 0$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$ راکړ شوی

1) تابع ولیکی، بې له دې، چې سومبول "| |" وکاروی:

2) د تابع ګراف وکاږی

3) د $f(x)$ ارزښت پیدا کړی، که x له ښي لور و 1 ته نزدې شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

4) دf(x) ارزښت پیدا کړی که "x" له کیڼ لور و1- ته نږدې شي

5) وښایاست چې تابع f(x) څو پوله ارزښتونه لري .

یادونه: که یوه تابع چې په صورت او مخرج کې داړونده ارزښت لپاره صفر ولري او دا صفرځایونه له منځه تلی شي، نو دا ډول تابع په صفر ځای کې بې تعریف ده (یا تشیا؟**functional gap**) لري.

بنوونه :

۱) تابع بې له سومبول "|" داسي لیکو:

$$f(x)=\begin{cases}1; x>0\\ -1; x<0\end{cases}$$

2) د تابع گراف انځوروو :

که څیره ونه کښل شوه ساده ده

3) د f(x) ارزښت که x له ښي لور و 1 ته نږدې شي ، لاندې پوله راکوي

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1$$

4) دf(x) پوله ارزښت که "x" له کیڼ لور 1- ته نږدې شي، په لاندې ډول دی.

$$\lim_{x\to -1} f(x)=-1$$

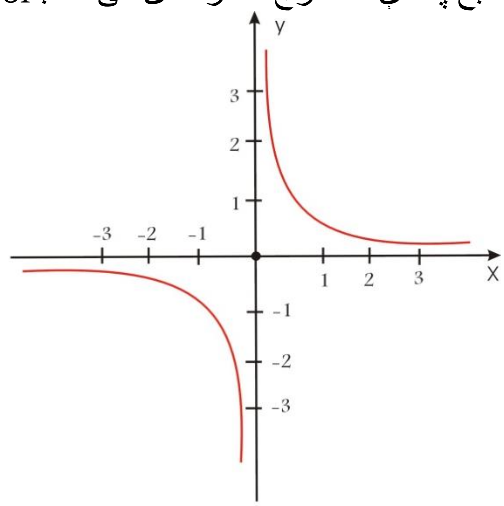
5) گورو چې x ،،دوه،، ارزښتونو (1) او (-1) ته نږدې شي ، نو دوه پوله ارزښتونه لري یعني $\lim_{x\to\pm 1} f(x)=\pm 1$، نو له دې امله f(x) پوله نه لري

بیلگه ۳ : تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ لرو، چې $X\neq 0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ په $x = 0$ ځای کي تابع ارزښت نه لري یاني په کي x=0 تعریف نه ده. دا په صفرځای کي قطب(Pol) لري(۱).لاندې ځېړه دې وکل شي.

(۱) یادونه : هغه تابع، چې مخرج یې صفر وي او صورت یې صفر نه وي، وایو چې تابع په دې د مخرج صفر ځای کی قطبPol لري.



و x=0 ته د نزدې کېدو لپاره ترادف (پرلپسې) $(x_n)=\frac{1}{n}$ ټاکو.

د اړونده تابع ارزښتونو ترادف (پرلپسې) $(x_n)=\left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right)=n$ دی.

دا د n>0 لپاره یو نامحدود سعودي ترادف دی،

او د n<0 لپاره نزولي- یا متناقص ترادف دی.

دا په دې معنی، چې تابع f(x) په 0 ځای کې حد نه لري. دا هلته یو قطب لري.

قضیه : که تابع " f(x) " همغه پوله (حد) "L" ولري که "x" له ښی یا کیڼ لورې وه "c" ته نزدې شي، نو پوله(حد) شته دی او د "L" سره برابره ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حدونو خويونه يا خواص : " **Properties of Limits** "

فعاليت :

په دې برخه کې د ثابتو – او کټمټ توابعو Identity function حدونه وشميرئ

د ليميټ خويونو څخه کار واخلئ

د پولينوم تابعو حد (پوله) پيدا کړئ

پوهيږو : په رياضياتو (شميرپوهنه) کې ټول توابع چې راځي د ساده توابعو ګډوله والی combination دی، لکه د توابعو جمع(زياتون، ضرب(څل) وېش او زنځيرونه compositon . دلته دوه غوره او ساده توابع $f(x) = c$ او $g(x) = (x)$ شته، که دواړه توابع سره يوځای ګړو، نو لاس ته ترې راځي:

$h(x) = x + C$, يا $L(x) = cx$, يا $m(x) = x^2$ او داسې نور

هڅه:د توابعو $f(x) = x, g(x) = x - 2,$ څخه کار واخلئ، چې درې نورې توابع ترې لاس ته راوړئ

فعاليت :

ايا د يوې تابع پوله کېدی شي د تابع له حل څخه پيدا شي؟

د بېلګې په توګه، که ولرو

$$f(x) = \lim_{x\to 2} 3 = 3\lim_{x\to 2}$$

نو دا تابع وليکئ.

يادونه: د پورته کارونې په څير همدا څه د هرې ثابتې تابع لپاره رښتيا دئ

د يوې ثابتې پوله ارزښت: که a او b ثابتې وي، نو $\lim_{x\to a} c = c$ باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول کتمټ یا ایډنټیک تابعو $f(x) = I(x) = x$ لپاره هم لرو ، که " c " کوم حقیقي عدد وي، نو x و c ته نږدې کیږي. دا ،، ټیک داسې ده لکه،، چې $f(x) = I(x)$ وc ته نږدې شي

فعالیتونه:

1)که $f(x) = x$، $g(x) = 2$ وي ، نو لرو :

1) $\lim_{x\to1} f(x) = 1$, $\lim_{x\to1} g(x) = 2$

2) که وي $h(x) = f(x) + g(x)$ لرو

$h(x) = x + 2$

3) د$h(x)$ ګراف

رسم دې ګران لوستونکي د ځانونو لپاره وکاږي
4)

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

تاسو په یاد ولرئ یا ولیکئ

$\lim_{x\to1} h(x) =$	$\lim_{x\to1} x + 2 = 3$

او $\lim_{x\to1} h(x) = \lim_{x\to1} f(x) + \lim_{x\to1} g(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هځې

۱) که $f(x) = -2$ ، $h(x) = x$ وي، پیداکړی

a) $f(x) \pm h(x)$

b) $f(x) . h(x)$

۲) وهڅیرئ، چې د پورته توابعو د a) او b)لپاره پولې وټاکئ، که x عدد3 ته نږدې شي.

۳) که $g(x) = x$ وي،نو پیداکړی $\lim_{x \to 4} 4x$.

۴) که $h(x) = x$ ، $f(x) = -2$ وي پیدا کړی

(a $f(x) + h(x)$

(b $\lim_{x \to 2} (f(x) + h(x))$

(c $\lim_{x \to 2} h(x) + \lim_{x \to 2} f(x)$

بیلګه ۳ : د $g(x) = \sqrt{3-x}$ ګراف وکاږئ او پیدا کړی

a) $\lim_{x \to 2} f(x)$, b) $\lim_{x \to -1} g(x)$; c) $\lim_{x \to 3^-} g(x)$

حل:

دلته دې ګراف وکښل شي....

له ګراف څخه

$\lim_{x \to 2} g(x) = 1,$

الف- په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x \to 2} (3-x)} = \sqrt{1} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) له ګراف څخه $\lim_{x\to -1} g(x) = 2$

یادونه : $\lim_{x\to -1} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to -1}(3-x)} = \sqrt{4} = 2$

c) $\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to 3^-}(3-x)} = \sqrt{0} = 0$

ګڼ دلا یل شته چې پولې شمیرنه ساده کوي، موږ. به دا لاندې بې له ثبوته ومنو که f او g توابع وي C او L او M رییل عددونه وي، داسې چې باور ولري :

نو $\lim_{x\to c} f(x) = L$, او $\lim_{x\to c} g(x) = M$,

1) $\lim_{x\to c} (f+g)(x) = \lim_{x\to c} ((f(x) + g(x))$

$= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$

2) $\lim_{x\to c} (f-g)(x) =$

$\lim_{x\to c} ((f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$

3) $\lim_{x\to c} (f.g)(x) = \lim_{x\to c} (f(x) . g(x))$

$= \lim_{x\to c} f(x) . \lim_{x\to c} g(x) = L . M$

4) $\lim_{x\to c} (\frac{f}{g})(x) = \lim_{x\to c} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{L}{M}$; $(M\neq 0)$

5) $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

(د $f(x) \geq 0$ لپاره او د ټولو x ارزښتونو لپاره چې c ته نږدې کیږي.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه : موږ لاندې تابع لرو:

$f(x) =$	$x^2 -1$	$x \leq 0$
	$x -1$	$o < x < 2$
	$2x +1$	$x \geq 2$

پیدا کړی

$$c)\ \lim_{x\to 4} f(x) \quad b)\ \lim_{x\to 0} f(x) \quad a)\ \lim_{x\to -2} f(x)$$

$$e)\ \lim_{x\to 1} f(x) \qquad d)\ \lim_{x\to 2} f(x)$$

حل :

$$a)\ \lim_{x\to -2} (f(x) = \lim_{x\to -2} (x^2-1) = (-2)^2 -1 = 3$$

$$b)\ \lim_{x\to 0} f(x);\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-1) = -1$$

$$= \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2-1) = -1$$

حد شته او $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$ دی:

$$c)\ \lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} (2x+1) = 2\times 4 + 1 = 9$$

$$d)\ \lim_{x\to 2} f(x)\ ;$$

له ښي لور $\lim_{x\to 2^+} (2x + 1) = 2\times 2 + 1 = 5$

له کيڼ لور $\lim_{x\to 2^-} (x-1) = 2 – 1 = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله پوله (حد) نه شته

e) $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} (x-1) = 0$

بیلګه: $\lim_{x\to2} f(x)$ ، پیدا کړی، که $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ وي

حل:

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} (2x^2 - 3x + 5)$$

$$= \lim_{x\to2} 2x^2 - \lim_{x\to2} 3x + \lim_{x\to2} 5$$

$$= 2\lim_{x\to2} x^2 - 3\lim_{x\to2} x + \lim_{x\to2} 5$$

2 + 5 = 7× 4 - 3 ×= 2

فعالیت : که $\lim_{x\to-2} f(x) = 3$ نو پیدا کړی $\lim_{x\to-2} (f(x))^n$

یادونه:

د یوه پولینوم لیمیټ ټیک داسې شمیرل کیږي، لکه د یوه فنکشن لیمیټ

بیلګه ۶ :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$ وي دې

$\lim_{x\to3} f(x)$ ، پیدا کړی

حل : $f(x)$ د دوه توابعو $g(x) = x^2 - 2x + 5$ او $L(x) = 2x^2 + 1$ وېش دی

که x و 3 نږدې شي پوله یا حد کیدی شي د تابع د حل له لارې په $x = 3$ کې پیدا شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 3}(x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x\to 3}(2x^2 + 1)}$$

$$= \frac{3^2 - 2\times 3 + 5}{2\times 3^2 + 1} = \frac{8}{19}$$

د راشنل- نسبتي- يا کسري فنکشنونو پولې

مورږ دا لاندې د پولينومونو ويش لرو

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0}{b_m x^m + b_{n-1}x^{m-1} + ... + b_0} \;; b_0 \neq 0$$

په پورته پولينوم ويش کې که x=o وي، نو $\frac{a_0}{b_0}$ ترې لاس ته راځي د $b_0 \neq 0$ سره.

که n<m وي او x ناپای ته لاړ شي، پولينومويش صفر ته ځي

که n>m وي او x ناپای ته لاړ شي، د پولينوم ويش د ناپای په لور ځي.

که n = m وي، نو $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n}{b_m}$ لرو

پام : د نسبتي يا کسري فنکشنونو (ناطقو توابعو) پوله ارزښت (حد) غواړو پيداکړو.

ددې لپاره چې د ،،ويياندو،، توابعو پولې پيداکړو، که شته وي، نو د مختلو لارو يا متودونو څخه کار اخلو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهیږو، چې د پولینومي توابعو پوله (حد) - د یوه ورکړ شوي x ارزښت لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېر ، چې د جمعې . تفریق،ضرب او وېش په څېر ورکړ شوي دي وشمیرو.

که ولرو : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ نو د تابع خواص د $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$ لپاره ساده

کو چې د پورته پولینوم وېش، چې ګویاتابع ده پوله یا حد وشمېرو.

بیلګه ۱ : پیداکړئ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}$.

که $x = 1,$ وي، نو تابع تعریف ده او لرو

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}=\frac{(1)^2+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

)Substitue(ځاي په ځای کړو$(x = 1)$ که

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ نو لاس ته راځي

بیلګه ۲ : پیدا کړئ $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}$

حل : تابع په $x = 0$ کې تعریف دی، نو لرو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}=\frac{0-1}{0+3}=-\frac{1}{3}$$

بیلګه ۳ ؛ پیداکړئ : $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : تابع په $x = 1$ کې تعریف ده، نو لرو

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x+1}=0=\frac{0}{2}=\frac{1^2+1-2}{1+1}=$$

که په یوه ځای یا عدد کې تابع تعریف نه وي، نو د مختلفو متودونو څخه کار اخلو، چې پوله(حد) پیداکړو، که شته وي.

بیلګه ۴ : پیداکړئ $\lim_{x\to1}\frac{x^2-6x+8}{x-2}$

حل : دا چې تابع $f(x)$ په $x=2$ کې تعریف نه ده، نو پوله(حد) د تابع د حل له لارې نه شي پیداکېدی. دا کېدی شي داسې پیدا کړو، چې تابع په ضریبونو تجزیه کړو .

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}\ \frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)}\lim_{x\to2}=$$

د تابع پوله (حد) که x و 2 ته نزدې شي، دا مانا لري، چې $x \ddagger 2$ دی.

دا راشنل فنکشن (ګونګه؟ تابع) رالنډیږي: $(x-4)$ $\lim_{x\to2}$ او لاندې پوله لري:

$$\lim_{x\to2}(x-4) = 2-4 = -2$$

بیلګه ۵: پیداکړئ $\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

ګور، چې تابع په $x = 16$ کې تعریف نه ده یانې $x \neq 16$.

په یاد ولرئ چې : $\sqrt{a}\ \sqrt{b}$ - د $\sqrt{a}\ \sqrt{b}$ + جوړه(مزدوج) دی او بر عکس.

حل: د جوړې(مزدوج) سره یې ضرب کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\times\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

$$= \lim_{x\to16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$= \lim_{x\to16}\frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{\sqrt{16}+4} = \frac{1}{8}$$

بیلګه ۶ : پیدا کړی $\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل : تابع په $x=3$ کې تعریف نه ده ، نو مخرج او صورت د محرج په مزدوج ضربوو او لرو:

$$= \lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}\times\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)}$$

$$= \lim_{x\to3} -1(\sqrt{x+1}+2)\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$= -(\sqrt{3+1}+2) = -4$$

بیلګه ۷ : پیداکړی $\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

حل : تابع په $x = 1$ کې تعریف نه ده، نو په لاندې توګه مخ ته ځو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to1}\frac{\frac{5+10x-15}{2x-3}}{x^2-1}\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to1}\ \frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)}$$

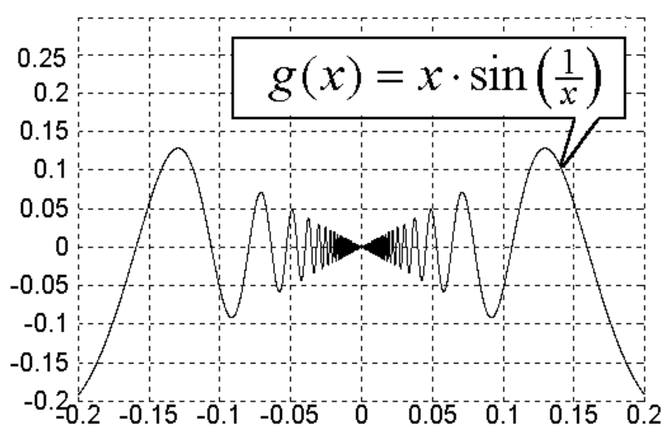
$$= \lim_{x\to1}\ \frac{10(x-1)}{(2x-3)(x^2-1)}$$

$$= \lim_{x\to1}\ \frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to1}\ \frac{10}{(2x-3)(x+1)} = \frac{10}{(2(1)-3)(1+1)}$$

$$= \frac{10}{-2} = -5$$

د مثلثاتي توابعو پولې



بیلګه:

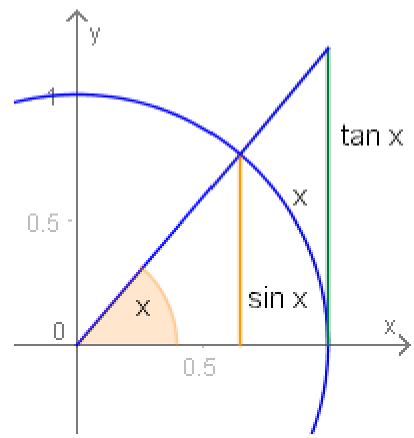
(c) ketabton.com: The Digital Library

قضيه ؛ كه x په راديان وركړ شوی وي ، نو $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ غواړو وتاكو.

يادونه : تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ ناجوړه(طاق) دی

د دې لپاره چې $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ پيدا كړو، غواړو مخ له مخه لږ فكر په كار واچوو.

د ښووني لپاره ترې كار اخستلو په موخه دا مخامخ ځېره باسو او په لاندې توګه مخ ته ځو:



په يوه انټروال $x\epsilon[0, \frac{\pi}{2}[$ كې د رسم له حالته سملاسي لاندې نا برابرون يا نامسوات باور لري

$$\sin x \le x \le \tan x$$

موږ له دې سره لرو $\sin x \le x \le \frac{\sin x}{\cos x}$ او $x > 0$ سره لاس ته راځي:

$$\frac{\cos x}{\sin x} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{\sin x}$$

او د $\sin x$ سره ضرب (ځل) له امله لاندې نامساوات لاس ته راځي

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$

د پولې ته تګ له امله لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\le \lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} \le 1 \quad , \quad 1 = \lim_{x\to +0} \cos x$$

دا په دې معنا دی، چې **غوښتونکې پوله ارزښت** 1 **دی.**

د دې ښوونې سره موږ ښې پوله ارزښت پېداکړ، د کيڼ پوله ارزښت لپاره په ورته توګه مخ ته ځو او پوله ارزښت د $x < 0$ لپاره پيدا کوو، يعنې له دې ځخه هم لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

که $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ او $x = -\alpha$ و ليکو ، نو دا لاندې لاس ته راوړنه هم لرو

$$= \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad \frac{\sin x}{x}$$

..............(4

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

د مساواتو (4) + (3) څخه غوښتنه لاس ته راځي

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

بېلګه ۱ : حل کړی $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

حل : وي دې $2x = \alpha$ که $x \to 0$ نو $\alpha \to 0$ او

$$= \frac{2\sin 2x}{2x} = 2\frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad \frac{\sin 2x}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي :

$$= \quad 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2\times 1 = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$$

بیلګه ۲ : وښایاست $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$

که $y = 5x$ وي ; او $x\to 0$ ، نو $y\to 0$ هم

$$\text{او}\frac{\sin 5x}{5x} \quad = \frac{5}{2}\,\frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)} \quad = \frac{5}{2}\,\frac{\sin 5x}{2x}$$

$$= \frac{5}{2}\,\frac{\sin y}{y}$$

له دې امله لرو $\quad \lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{5}{2}\,\frac{\sin y}{y} = \frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}$

$$1 = \frac{5}{2}\times = \frac{5}{2}$$

قضیه : په درېګوډي ګچ یا مثلثاتو کې بل غوره پوله ارزښت دا لاندې دی.

$$\frac{\tan x}{x}\lim_{x\to 0}$$

بیلګه : وښایاست : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}$

حل : وي دې $3x=\theta$، نو $x=\theta/3$ ، که $\theta\to 0$ نو $x\to 0$

$$\text{له دې امله} = \frac{3\tan 3x}{(3x)} = 3\,\frac{\tan\theta}{\theta}\quad\frac{\tan 3x}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $3 = 1 \quad 3\times =$

بیلګه : حل کړی $\lim_{x\to 0} \frac{5\tan 2x}{7x}$

حل : وي دې $2x = y$ ، نو $x = \frac{y}{2}$ دی

که $x\to 0$ وي،نو $y\to 0$ دی

له دې امله

$$\frac{5\tan 2x}{7x} \; \frac{2\tan 2x}{2x} \cdot \frac{5}{7} =$$

$$\frac{\tan 2x}{2x} \; \frac{10}{7} =$$

$$\frac{10}{7} \; \frac{\tan y}{y} =$$

نو

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan y}{y} \; \frac{10}{7} \; \lim_{y\to 0} = \frac{5\tan 2x}{7x}$$

$$= \frac{10}{7} \lim_{y\to 0} \frac{\tan y}{y}$$

$$1 = \frac{10}{7}\times \quad = \frac{10}{7}$$

پای

وهخیری ، چې وبنایاست:

(c) ketabton.com: The Digital Library

که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

الف) تانجنت tan x د sin x او cos x په ترمونو ولیکئ

ب) $\frac{\tan x}{x}$ د sin x او cos x په ترمونو و لیکئ

پ) پوله پیدا کړئ

ت) ایا قضیه رښتیا یا ټیک ده؟

په یاد ولرئ:

$$\cos^2 x + \text{sim}^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = \quad 1 - 2 \sin^2 x$$

$$2 \cos^2 x - 1$$

بیلګه ۵ : حل کړئ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$

حل : $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x$$

$$0 = 0 \times 1 \times = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ : وشمیرئ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

حل : شمیرو

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3\tan 3x}{3x}}{\frac{5\sin 5x}{5x}}$$

$$=\frac{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{3x}}{5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\tan}{\theta}}{3\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{1}{1}=\frac{3}{4}$$

بیلګه ۷ : وشمیرئ ؛ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$

حل : شمیرنه

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin -x}{x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 5x \sin x}{x^2}$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \times \quad = 2 \lim_{x\to 0} \frac{5\sin 5x}{5x}$$

$$= 10 \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \quad (y = 5x)$$

$$1 = 10 \times 1 \times \quad = 10$$

بیلگه ۸ : پیدا کړې $\lim_{x\to\alpha} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x-\alpha}$

حل :

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{2\cos 3(x+\alpha)\sin 3(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

$$= 2 \lim_{x\to\alpha} \cos 3(x+a) \lim_{x\to\alpha} \frac{\sin 3(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

$$= 2\cos 6\alpha \lim_{x\to\alpha} \frac{3\sin 3(x-\alpha)}{3(x-\alpha)}$$

وي دې $x - \alpha = y,\ x \to \alpha \Rightarrow y \to 0$ نو لاس ته راځي

$$= 2\cos 6\alpha\ (3) \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}$$

$$= 6\cos 6\alpha \cdot 1 = 6\cos 6\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یاد ولرئ : مثلثاتي کتمتوالی

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\,\sin\frac{a-b}{2}$$

$$2\cos\frac{a+b}{2}\,\sin\frac{a-b}{2}$$

بیلګه ۹ : حل کړئ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\tan x|}{x}$

حل : $x > o$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\tan x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} + \frac{\tan x}{x}$$

$$= 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|\tan x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} - \frac{\tan x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{x}$$

$$= -1$$

لرو $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|\tan x|}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|\tan x|}{x}$

ګورو، چې د پورته تابع پوله یا لیمیټ نه شته

ناپرېکیدنه(متمادیت)"Continuity"

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې برخه کې لولو ، چې يو فنکشن يا يو تابع په يوه ټکي يا يوه اينتروال کې څنګه ځان نيسي يا کوم حالت غوره کوي. ايا دا تابع په کوم ځای کې ټوب وهي، يا پرې کيږي او که يا په نه پرېکيدني توګه د اينتروال په دننه کې ځغلي.

د تابعو ناپرېکيدنه Continuous functions

په دې موضوع کې مورږ د د يوې تابع د ناپرېکيدنې(متماديت) په هکله څېړنه کوو او د ناپرېکيدنې يا متماديت پيژند(تعريف) ورکوو.

// رسمه //   // رسمه //   // رسمه //

(3)   (2)   (1)

$f(x) = x^2 - 1$ $f(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = \frac{|x|}{x}$

دا رسمونه دې هم ګران زده کوونکي وکاږي، زه د رسم کولو ستونځې لرم(تمرين)

b دې د تابع f په پيژندورشو يا تعريفساحه کې يو حقيقي(رييل) عدد وي. تابع f په bکې ناپرېکيدونکې (متمادي) ،بلل کيږي، که د ټکي ((b.f(b)) نږدې د f ګراف وکښل شي، بې له دې، چې پنسل له کاغذ پورته کړی شي.

له دې امله تابع $f(x) = x^2 - 1$ او تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ په ټکي x=b کې ناپرېکيدونکې دي.

تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ په x=o کې ناپرېکيدونکې نه ده يانې پرېکيدونکې ده يا ټوپ وهې.

تابع په x=a کې پرېکيدونکې ده، که پرې شي(تشيا ولري)، ټوپ ووهې او يا ماته شي.

لرو $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ او $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ نو له دې امله $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ په x = o کې نه شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱ : وي دې $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 \; ; & x \geq 1 \\ 1 - x \; ; & x < 1 \end{cases}$

الف) ګراف وکاږی ګراف

ب) پیدا کړی $\lim_{x \to 3} f(x)$

پ) پیداکړی $\lim_{x \to 1} f(x)$

که تابع په x=3 او x=1 کې نابرېکیدونکې وي

حل :

الف) ګراف کینې لور ته کښل شوی دی

ب) $\lim_{x \to 3} f(x) = (2x + 1) = 7$

$f(3) = 7$

پ)

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 1 - x = 0$$

له ب) او پ) څخه لرو

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

له دې امله تابع په x = 3 ناپرېکیدونکې او x =1کې پرېکیدونکې ده یا نامتمادي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ : وي دي $f(x) = \frac{x^3 + x}{x};\quad x \neq 0$

$=3 \quad ;$

// رسمه // الف) فنکشن رسم کړی

ب) بحث وکړی، چې تابع په $x = 2$ او $x = 0$ کې ناپرېکیدونکې ده او که نه

حل : الف) د تابع ګراف لپاره

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	5	2	1	2	5

ب) $\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{x\to2} (x^2+1) = 2^2+1 = 5$

$$f(2) = \frac{2^3 + 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دې امله د f پوله (حد) شته او $\lim_{x\to2} f(x) = f(2)$ ، نو تابع په $x = 2$ کې متمادي یا نه پرېکیدونکې دی

وي دې $x = 0$

$$f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x^3 + x}{x} = 1 \lim_{x\to0^+}$$

$$f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{x3 + x}{x} = 1 \lim_{x\to0^-}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دا مانا لري چې $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ په دې مانا دی چې $f(0) = 3$.

دا دا مانا لري، چې $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(o)$

تابع په $x = 0$ کې پرېکیدونکې(نامتمادي) ده

که له دې شرطونو کوم یو شرط پوره نه وي نو تابع پرېکدونکې(نامتمادي) ده

بیلګه ۳: **وي دې**

$f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ ، $x \neq -3$

ایا تابع په $x = -3$ کې ناپرېکېدونکې ده؟

حل) تابع $f(-3)$ تعریف نه دی، له دې امله تابع په $x = -3$ کې متمادي نه دی

پیژند(تعریف) :

f دې یوه تابع وي، چې د ټولو x لپاره په همغه واز اینتروال کې چې $x=c$ لري تعریف وي.

تابع f په $x = c$ کې ناپرېکیدونکی بلل کیږي، که دا لاندې شرایطو پوره وي.

۱) $f(x)$ تعریف دی ۲) که $\lim_{x\to c} f(x)$ شته وي (موجود وي)

۳) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

که تابع د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره متمادي وي ، نو تابع په وازاینتروال (a, b) کې هم متمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه ۴ : وي دې $f(x) = 2x^2 + 1 \quad ; \quad x \le 1$

$= 4+x \quad ; \quad x > 1$,

وګورئ، چې تابع چېرته ناپرېکېدونکې ده او چېرته پرېکېدونکې.

حل : په $x = 1$ کې f تعریف دی

$f(1) = 3.$

$$\lim_{x\to^-1} f(x) = \lim_{x\to^-1} (2x^2 + 1) = 3$$

$$\lim_{x\to^+1} f(x) = \lim_{x\to^+1} (4+x) = 5$$

$$\lim_{x\to^-1} f(x) \neq \lim_{x\to^+1} f(x)$$

له دې امله تابع په $x = 1$ کې پرېکېدونکې (نامتمادي) ده

بیلګه ۵ : وي دې

$=2x^2 + 1 \; ; \; x < 2$

$f(x) = 3 \quad x = 2$

$=x + 3 \; ; \; x > 2$

د تابع $f(x)$ متمادیت په $x = 2$ کې تر بحث لاندې ونیسی

حل : تابع $f(x)$ په $x = 2$ کې تعریف ده او لرو $f(2) = 3$

$$\lim_{x\to^+2} f(x) = \lim_{x\to^+2} (x + 3) = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$\lim_{x\to^{+}2} f(x) = \lim_{x\to^{-}2} f(x)$$

$$\lim_{x\to^{-}2} f(x) = \lim_{x\to^{-}2} (x^2 + 1) = 5 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 5$$

دا چې $f(x) = 3$ دی، نو له دې امله $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$)

دا په دې مانا دی، چې تابع په $x = 2$ کې پرېکېدونکې(نامتمادي) ده

د ناپرېکېدونکو یا متمادي توابعو خویونه

فعالیت:

۱) د توابعو f او g جمع (زیاتون) پیداکړی

$$(f+g)(x) = \ldots\ldots$$

۲) د f او g توابع په $x=2$کې متمادي(ناپرېکېدونکي= دي، نو :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ldots\ldots.. \ \& \ \lim_{x\to a} g(x) = \ldots\ldots$$

۳) د پوله ارزښتونو (حدونو) ارزښتونه وکاروی

$$\lim_{x\to a} (f + g)(x) = \lim_{x\to a} (f(x) + g(x))$$

$$\ldots : \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (f + g)$$

(a)

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله (f+g) په x=a کې متمادي دي.

که تابع f اوg په x=c کې متمادي وي، نو د لاندې توابعو څخه یې هره یوه په x=cکې متمادي ده

۱) د توابعو جمع $f+g$

۲) د توابعو تفریق(کمون) $f-g$

۳) د توابعو ضرب(ځل) $f.g$

د توابعو وېش $\frac{f}{g}; g \neq 0$

بیلګه ۱ : وي دې

$$f(x) = \sin x + 1,$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 2$$

نو ۱) f او g په x=1 کې متمادي دي.

۲) وښیۍ، چې الف) $\sin x + x^2 + 3x - 1$

ب) $(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2)$

په x=1کې متمادي که نامتمادي دي

حل :

$$1)\ \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \sin 1 + 1$$

$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) = 2;$ نو f په x = 1کې متمادي دی

نوg په x = 1 کې متمادي دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم خوي وڅیړئ

$$2)\ a)\ \sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2)$$

۲) الف)

$$= f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

د متمادي توابعو جمع په $x = 1$ کې‌متمادي ده

(ب　$b)\ (\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x).\ g(x)$

$$= (f.g)(x)$$

نو د ناپرېکیدونکو- یا متمادي توابعو ضرب (حَل) په $x = 1$ کې متمادي دئ

بیلګه ۲ : وي دې

$$f(x) = x + 1, \qquad g(x) = 3x - 2;$$

وڅیړئ، چې ایا $f(x).\ g(x)$ په $x = 2$ کې متمادي ده

حل :

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 3$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 4 = g(2)$$

$$f(x)\ .\ g(x) = 3x^2 + x - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 2} f(x).\ g(x) = 3(4) + 2 -2 = 12$$

$$= \lim_{x\to 2} f(x).\ \lim_{x\to 2} g(x)$$

$$= f(2)\ .\ g(2)$$

له پورته څخه لاس ته راځي، چې $f(x).g(x)$ متمادي دی.

په کېن لور بند ایتروال $[a,b]$ کې ګراف متمادي تابع په ګوته کوي یا ښايي، چیرته چې $f(a) \neq f(b).$ دی.

که ولرو $f(a) < k < f(b)$ نو ګراف له ټکي $(b, f(b))$ څخه نه شي انځورېدلی تر څو پرته (افقي)کرښه $y = k$ د ثابتې k سره غوڅه نه کړي .

(انځور راځي)

له پورته څخه لیکلی شو:

که تابع f په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي(ناپرېکېدونکي) اوk د b او ترمنځ پروت وي، نو هلته کم له کمه یو عددc د $f(a)$ او$f(b)$ ترمنځ شته داسې چې $f(c) = k$ دی

بیلګه ۳ : وي دې $f(x) = x^3 + 4x\ ,\ \ x \in [1,2]$

وښايی، چې یو $c \in (1,2)$ شته داسې،چې $f(c) = 11$ **وي.**

حل : $f(x)$ یو پولینوم دی نو f په بند اینتروال $[1,2]$ کې متمادي دی. لرو

$$f(1) =1^3 + 4\ (1) = 5;\ f(2) = 8 + 4\ (2) = 16$$

$f(1) \neq f(2)$ او $5 < 11 < 16$

له دې امله یو عدد $c \in (1,2)$ شته، داسې چې $f(c) = 11$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ : وي دې

$f(x) = \; 2x + 4; \;\; -1 \le x < 2$

$; \quad 2 \le x \le 20 |x - 10| \; =$

نو

الف) و ازمایی، چې تابع متمادي ده   ب) و ازمایی، چې یو $c \in (-1, 20)$ شته داسې چې $f(c) = 6$ دی او د c ارزښت پیدا کړی.

حل :

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2x^2 + 4 = 8$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 10 - 2 = 8$

له دې امله لرو

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 8$

$f(x) = 10 - 2 = 8$

ګورو چې تابع په $[-1, 20]$ کې متمادي دی

b) $f(-1) = 2x - 1 + 4 = 2$

$f(20) = |20 - 10| = 10 \quad \Rightarrow \; f(-1) \ne f(20)$

په دې اساس لرو $2 < 6 < 10$

له دې امله لرو $c \in (-1, 20): \; f(c) = 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x + 4 = 6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1, 2).$$

$$= 6 \Rightarrow |x - 10|$$

$$x - 10 = 6 \Rightarrow x = 16 \in (-2, 20)$$

یا $10 - x = 6 \Rightarrow x = 4 \in (-2, 20)$

د c ارزښت دی $1, 4, 16$

بیلګه ۵ : وي دې

$$f(x) = 2\sin x + 3;\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

وښایی چې $c \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ شته د کومې لپاره چې باور لري $f(c)=4$ او c پیداکړی.

حل : د تابع f د ساین تابع ده، نو له دې امله f متمادي(ناپرېکېدونکی) دی

$$f(-\frac{\pi}{2}) = 2\sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin \frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$$

نو موږ لرو $f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$:

تابع f متمادي ده او لرو $1 < 4 < 5$

دا په دې مانا چې $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ شته، د کوم لپاره چې $f(c) = 4$ صدق کوي

د دې لپاره چې c پیدا کړو نو لرو

$$f(c) = 2\sin c + 3 = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2 \sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

د ګراف څخه څرګندیږي، چې f په ایتروال [a,b] متمادي دی ، f(a) او f(b) متضادې مخنخښې(علامې) لري، نو c د f(a) او f(b) ترمنځ د منځ ارزښت جملې له مخې د K=0 سره کم له کمه یو C د a او b ترمنځ شته، چې لاس ته ترې راځي f(c) = 0 .

دا په دې مانا چې x=c د f(x) = 0 مساواتو یو حل دی . انځور شته

بیلګه ۶ : وي دې $f(x) = x^3 + 5x - 23$

وښایئ، چې تابع f د x -محور په اینتروال (2.3) کې غوڅوي.

حل : f پولینومتابع ده ، نو f په اینتروال کې [2,3] متمادي دی.

$$f(2) = 2^3 + 5(2) - 23 = -5$$

$$f(3) = 3^3 + 5(3) - 23 = 19$$

اود متضادو مخنخښو(عالمو) سره $f(2) \neq f(3)$

له دې امله د $c \in (2,3)$ لرو چې $f(c) = 0$ دی

د څپرکي تولګه " Chapter Summary "

پیژند: تابع f(x) یو حد L لري، که x ترلیي یو حقیقي عدد c ته لاړ شي. دا په دې معني چې د f(x) لپاره، چې ترلی و L ته ځي دا دی، چې x ترلیclose to و c ته لاړشي او داسې یې لیکو : $\lim_{x \to c} f(x) = L$

(c) ketabton.com: The Digital Library

قصيه : كه $f(x)$ همغه پوله ارزښت L ولري ،كه x د ښى يا كينې لور و c ته نزدې شي، نو پوله ارزښت شته او د L سره برابر دى.

د پوله ارزښت يا حد خويونه :

كه f اوg توابع وي، c;L او M حقيقي اعداد وي داسې چې $\lim_{x \to c} f(x) = L$

او $\lim_{x \to c} g(x) = M$ ، نو لاندې لرو:

$$1)\ \lim_{x\to c}(f+g)(x) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$$

$$2)\ \lim_{x\to c}(f-g)(x) = \lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$$

$$3)\ \lim_{x\to c}(f \cdot g)(x) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = L \cdot M$$

$$4)\ \lim_{x\to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M};\ (M \neq 0)$$

$$5)\ \lim_{x\to c}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

(د $f(x) \geq 0$ او د x د ټولو ارزښتونو لپاره ، چې c ته ور نزدې كيږي.

قضيه : كه x په راديان وركړ شوى وي، نو لرو : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

قضيه : كه x په راديان وركړ شوى وي، نو لر: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$

پيژند : f دې يو تابع وي، چې د ټولو x لپاره په يو واز انټروال كې چې x = c ولري ،تعريف وى، نو وايو چې f په x = c كې متمادي، د لاندې شرايطو لاندې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

1) f (x) تعریف دی 2) $\lim_{x\to c} f(x)$ شته دی

3) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

که تابع د ټول (a, b) $x \in$ لپارره متمادي وي، نو تابع په ټول انتروال (a, b) کې متمادي ده.

پېژند : وايو چې يو تابع په يوه بند انتروال [a, b]کې متمادي ده، که تابع له ښي لور په x = a ې متمادي وي او له کينې لور په x = b کې او د واز انتروال (a, b) په هر ارزښت کې متمادي وي.

د متمادي توابعو خويونه : که f او g په x = c کې متمادي وي، نو دا لاندې توابع هر يو په x = c کې متمادي دي.

اول) د جمعي f+g تابع

دويم) د تفريق f-g تابع

دريم) د ضرب f.g تابع

څلورم) د ويش تابع

د منځني ارزښت قضيه: که تابع f په بند انتروال [a,b]کې متمادي وي او k د f(a) او f(b) ترمنځ يو عدد وي، نو کم له کمه د a او b ترمنځ يو عدد c شته، د کوم لپاره چې f(c)=k باور لري.

ترنه

د $x \to \pm\infty$ لپاره پوله ارزښت (حد)

اول : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{\pm\infty} = 0^{\pm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ۵ وېشنه په یوه ډېر لوی (ناپای) مثبت(منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یانې □□ .

ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نزدې کیږي.

دویم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x+1}=\frac{-3}{\pm\infty}=0^{\mp}$$

د3- وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت(منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یانې □□ .

ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نزدې کیږي.

دریم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^2-2x}=\frac{5}{+\infty}=0^{+}$$

په مخرج کې فقط x^2 ستر رول لوبوي. د مربع کونې له لارې هر عدد مثبت کیږي.که ۵ په یوه ډېر لوی مثبت عدد ووېشل شي، نو یو خورا کوچنی مثبت عدد ترې لاس ته راځي، یانې
ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط له پورته لور ور نزدې کېدنې سره .

څلورم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x^2-2}=\frac{-3}{+\infty}=0^{-}$$

د مخرج مربع کونې سره منفي عددونه هم مثبت میږي.. د3- وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت عدد باندې یو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي یانې □ -.

ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط کښته ګراف ته ور نزدې کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پرېښودنې - یا ترې صرفنظر کونې اصول

اول :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}= \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0^{\pm}$$

په صورت کې د x توانونه، په مخرج کې د x^2 توانه په پام کې نیسو او همداسې له ټولو ثابتو تېرېږو (ټولې ثابتې پرېښول کیږي،صرف نظر ترې کیږي) او بیا x لنډیږي.
که ۱ په ډېر لوی مثبت(منفي) عدد ووېشل شي. نو □□ ترې لاس ته راځي.

څېره G_f پروت اسیمپتوت(مجانب) $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ورنږدې کیږي.

دویم

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{x+2}= \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$$

- په صورت کې د x^2 او په مخرج کې د x له ټولو توانونو په پام کې نیونو او له ټولو ثابتو تریږو (صرفدظر ترې کوو) او بیا یې د x سره لنډوو. په روښانه توګه ټول پوله ارزښتونه □□ لاس ته راځي.

څېره G_f مایله اسیمپتوتي راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د ۱ په اندازه ستره ده.

دریم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}= \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$$

په صورته او مخرج کې د x^2 ټول توانونه په پام کې نیسو او له ټولو ثابتو تېرېږو او بیایې د x^2 سره لنډوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولې پولې په روښانه توګه 2/3- راکوي.

څيره G_f پرته اسيمپټوت راکوي ، چې $y=-2/3$ ده.

خلورم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3x}=\frac{-2}{\pm\infty}=0^{\mp}$$

په صورت کې د x^2 څخه کوچنيو ټولو توانونو او په مخرج کې د x^3 له ټولو کوچنيو توانونو او همداسې له ثابتو تېرېږو (صرف دظر پرې کوو) . که په ووېشل شي ، نو يو کوچنې مثبت يا منفي عدد يانې$\mathbf{0}^{\mp}$ ترې لاس ته راځي.

څېره $\mathbf{G_f}$ يو پروت اسيمتوت$y = 0$ لري،چې له پورته او کښته لور ورنزدې کيږي.

شميرنيز حلونه

دويم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{0^{\pm}}{1}=0^{\pm}$$

په صورت او مخرج x^2 له نوکانو(قوسونو) راوستني او بيا د x^2 سرره لنډوني وروسته مخرج د ۱ په لور ځي او صورت د $+\infty$ په لور ، نو

ترمونه $2/x$ او$1 / x$ و صفر ته نزدې کيږي.

څيره G_f يوه مايله اسيومپټوت لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په ۱ لويه ده.

دريم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(-2-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2-\frac{2}{x^2}}{3+\frac{2}{x}}=-\frac{2}{3}$$

- که x^2 له نوکانو راووېستل شي او بيا لنډ شي،نو صورت د صفر په لور ځي يا صفر ته نزدې کيږي;مخرج ,۱ ته نزدې کيږي، ځکه ټول ترمونه د او و صفر ته ځي په صورت فقط ترم د صفر مخنخښه ټاکي.

خېره پرته اسيمپتوت لري له پورته او کښته نزدې کيدنې سره.

ځلورم: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}=$

په صورت او مخرج کې هغه د لوی توان x يعنې x^4 له نوکانو دباندې نيسو او بيا په ترتيب شمېرنيزه عمليه مخ ته بياوو ، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0^-}{1}=0^-$$

ټوليز خويونه :

اول : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\quad\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3x-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته بېلګه کې داسي مخ ته تللي ي،چې په صورت کې له ټولو عددونو تېرېږو، چې د خپلواکې متحولې توان له ۱ کوچنی یعنې صفر وي او په صورت کې له ټولوأه ۲ څخه کوچنې توان څخه تېرېږو. ګورو، چې په صورت کې پاتېکیږی، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي ناباې په لور ځي.

دویم : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=0^{\pm}$

په پورته بېلګه کې په صورت کې له ۱ او مخرج کې له ۲ څخه تېرېږو او ببیا صورت او مخرج په x ویشو، چې لاس ته رانه یې یو یې د یوه ثابت عدد وېشل وي په x . چې د x سره تابع و $0^{\pm}$ ته ځي.

بیلګه ۳ : لرو : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=$

په صورت کې له ۲ او مخرج کې له 2x څخه تېرېږو او د x^2 سره لنډوني وروسته د x^2 سره لنډېږي او په دې ډول لاندې پایله لرو :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=-\frac{2}{3}$$

بیلګه ۴ : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}=0^{-}$

په صورت کې له ۱ او مخرج کې له اوو څخه تېرېږو او بیا له لنډوني وروسته یو ثابت عدد په ناپای وېشل کیږي، چې پایله یې 0^{-} دی، یعنې لرو :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}=0^{-}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۹ . ۵ تمرینونه

۱ . د بلواکو پولی

۱ . ۱ لاندې پولې وټاکئ

1.1.1. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{2x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

1.1.2. a) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{27-x^3}{x-3}$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-1}{1+x}$ d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2+x}{32+x^5}$

1.1.3. a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x-6}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

1.1.4. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

1.1.5. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\dfrac{\cos x}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{1-\cot x}$ j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

k) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \cos\frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}$

l) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$

۱.۲ په ورکړشوو ځایونو کی د لاندې بلواکو کینې او ښی پولې وټاکې

a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$

b) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$

c) $f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}$ für $x = 1$

d) $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ für $x = 0$

e) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ für $x = 0$

f) $f(x) = \dfrac{x}{2x + e^{\frac{1}{x-1}}}$ für $x = 1$

g) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ für $x = 1$

h) $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}} + 3}{3^{\frac{1}{x}} + 2}$ für $x = 0$

i) $f(x) = \dfrac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x-1}}}$ für $x = 1$

j) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ für $x = 1$

k) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ für $x = -1$

l) $f(x) = \dfrac{x+1}{|x+1|}\, x$ für $x = -1$

۲ . ناپریکیدونکی بلواك : لاندې بلواك د کوم لپاره پریکیدونکی ځایونه لري، دا د کوم ډول دي او که ممکن وي، په کومه توګه دا له منځه وړ لکیدی شي.

a) $y = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

b) $y = \dfrac{x+2}{|x+2|} \cdot x$

c) $y = \dfrac{1-x}{1-|x|}$

d) $y = \dfrac{x+2}{x+2} + \dfrac{1}{x+1}$

e) $y = \dfrac{x-3}{\sqrt{1+x} - 2}$

f) $y = \dfrac{x-4}{\sqrt{x} - 2}$

g) $y = \sin\dfrac{1}{x}$

h) $y = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$

i) $y = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$

j) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

k) $y = x \cdot 2^{\frac{|x|}{x}}$

l) $y = \ln 2^{\frac{1}{x-1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

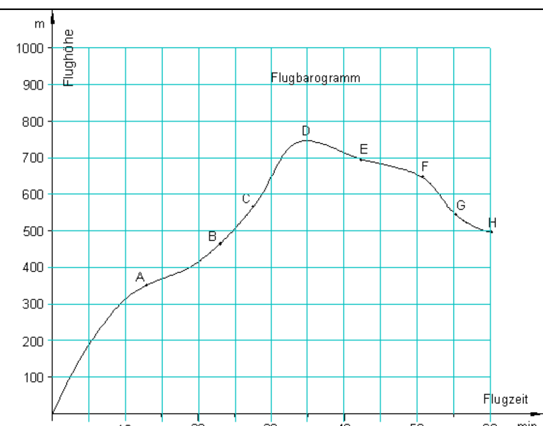
۲۰ . مشتقشمیرنه(رابیلیدنه)

II.1.د تابع تغیر منځ ارزښت (منځنی قیمت) Average rate of change

دکتاب په دې برخه کې موږ د ریاضیاتو یوه غوره برخه، چې د ریاضیاتو زړی ورته ویلی شو ، تر څېړنې لاندې نیسو، نو له دې امله لازم ګڼم، چې په دې هکله داسې مهم څه د یوه یادښت په څېر راوړم:

که له یوه ځای څخه وبل ځای ته د تابع د تغیر منځ ارزښت Averagerate of change څخه غږیږو ، نو موخه ترې په یوه ټکي یا دوه ټکو کې د تابع جګوالی ، میل اویا تانجنت دی او دا دریواړه کلمې د ریاضیاتو له مخې په همغه یوه معنا دي او وبه ګورو، چې همداسې د تفاضل وېش(Difference quotient) هم.

په یوه ټکي کې د تابع د ګراف میل(جګېدنه)

په الوتکوکې د الوتنېدلیک(الوتنلیک) الې (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل د الوتنې جګوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت تابعیت کې رسموي او په هر جګوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پښتو واړوو، نو د لیک بکس به ورته ووایو.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته ګراف کې د يوې الوتکې د الوتنې د بيلا بيلو وختونوجګوالی ښوول شوی.

-ايا فکر کوئ، چې په ټکي B کې نسبت و ټکي A ته جګوالی زيات دی؟

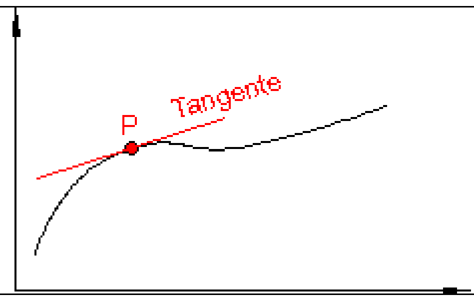
-ايا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جګوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جګوالی زيات دی نسبت د G ټکي ته؟

-ايا د يوې کرښې او منحني جګوالی هرچېرته توپير لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه :
۱ - ګورو، چې په يوه منحني کې د ګراف جګوالی هرچېرته برابر نه دی، نو له دې امله بايد ټکی په ګوته کړو، چې هلته ميل څېړل کيږي.

۲ - په لاندې بيلګه کې به روښانه کړو، چې تنها د يوې (سيده)کرښې ميل هرچېرته برابر دی، نو له دې امله دلته د يوې کرښې د ميل يا جګوالي څخه غږيږو.

بريښي چې لاندې پېژند يا تعريف عاقلانه دی:

پيژند (تعريف): د يوې تابع ګراف ميل (جګوالی) د P په يوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د ميل د ګراف سره برابر دی	

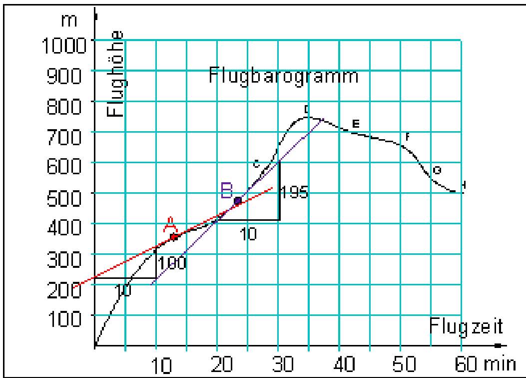
ليدل کيږي چې دلته يو تانجنت د کرښې تعريف لري، چې د لمسټکي(مماس) په چاپېريال کې د امکاناتو سره سم لمسټکي(مماس) ته ښه ور نږدې کيږي.

ددې پېژند يا تعريف له مخې په يوه ټکي کې د يوه ګراف ميل د يوې کرښې ميل دی.

د ګراف د جګيدنې ټاکلو لپاره د A او B په ټکو هر يوه کې يوه کرښه (تانجنت) انځوروو، چې ګراف ته خورا زياته نږدې کيږي.

د ميل يا جګيدنې مثلث په مرسته جګېدنه په شډل يا ساده ډول شميرل کېدی شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د A په ټکي کي جګیدنه :

$$\frac{100\ \text{m}}{10\ \text{min}} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

د B په ټکي کي جګیدنه :

$$\frac{195\ \text{m}}{10\ \text{min}} = 19{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

زموږ د بیلګي لپاره میل یا جګیدنه په یوه ټاکلي ټکي کي د لحظوي (سملاسي) میل د چټکتیا (سرعت) په معنا دی.

دA په ټکی کي : د الوتني وخت نږدې 12,5 min ، د میل یاجګیدني چټکتیا(سرعت) نږدې $10\frac{m}{\text{min}}$ ده

د B په ټکی کي : د الوتني وخت نږدې 23,0 min ، د جګیدني چټکتیا(سرعت) نږدې $19,5\frac{m}{\text{min}}$ ده.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدني له مخي تعریف شوی ، چي د لمستکي چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دي امله ممکن وه، چي د ګراف میل د A اوB په ټکو کي هم یواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کي د قناعت وړ نه دی.

II.2 په یوه ټکي کي د تابع دګراف میل (جګیدنه):

معلومه ده ، چي یو ریلګاډی د تمځای څخه له خوزېدو(حرکت)وروسته خپله چټکتیا(سرعت) په ورو ورو (کراره کراره) زیاتوي.وهلې لار(د تمځای څخه لرېوالی) تل زیاتیږي. د تمځای څخه لریوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کي ده .

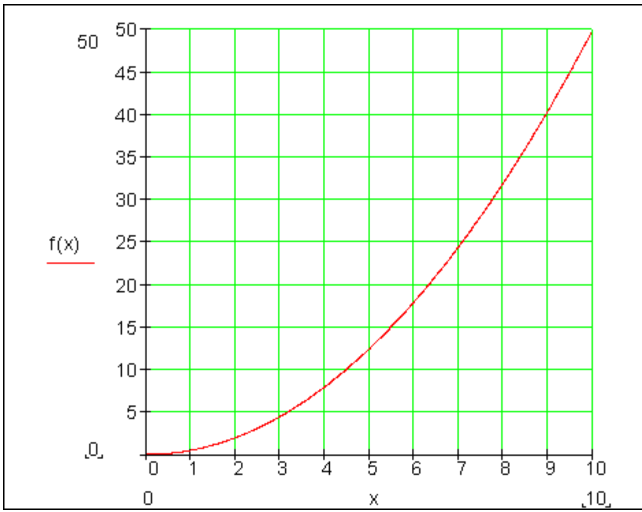
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا عمل د لاندې تابعمساوات له لارې ليکلی شو.

دلته د x وخت د ثانيې او د s لار د متر لپاره ليکو

$s = f(x) = 0,5x^2$

مخامخ : د تابع ګراف



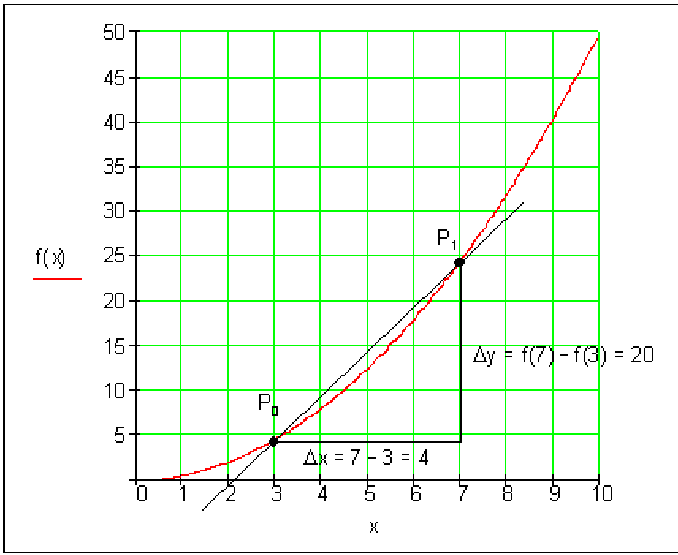
اوس بايد منځنی ارزښت(منځنی چګوالی) Averagerat of change د ۳ ــمې او ۷ ــمې ثانيې ترمنځ وشمېرل شي.

ددې لپاره اړونده سيکانت انځوروو او د هغې چګوالی شميرو.

اوس دې د تغير ارزښت (منځنی چګوالی) د ۳ ــمې او ۴ ــمې ثانيو ترمنځ وشميرل شي.

په دريمه ثانيه کې د ارزښت تغير يا چګوالی څومره دی؟

د منځنی چګوالي داسې مخ ته بوزی، چې د ټکو P_1 او P_0 ترمځ واټن تل کوچنی شي،داسې چې ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوزيږي.



د ۳ ــمې او ۷-مې دقيقې ترمنځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځنی تغیرارزښت (جګوالی)دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(7)-f(3)}{7-3} = \frac{24,5-4,5}{7-3} = \frac{20}{4} = 5$$

د ۳ ـمې او ۴ ـمې دقیقې ترمنځ

منځنی تغیرارزښت(منځنی جګوالی) دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4)-f(3)}{4-3} = \frac{8-4,5}{4-3} = \frac{3,5}{1} = 3,5$$

دریمې دقیقې ته د ورنږدې کیدنې شمیرنه

Intervall $[3;x]$	$[3;4]$	$[3;3,1]$	$[3;3,01]$	$[3;3,001]$
$\Delta x = x-3$	1	0,1	0,01	0,001
$\Delta y = f(x)-f(3)$	3,5	0,305	0,03005	0,0030005
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3,5	3,05	3,005	3,0005

پورته شمیرنه په ګووته کوي، چې که ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوزیږي یا ورنږدې شي، نو د تغیر ارزښت(جګېدنه) تل زیاته و ارزښت ۳ ته ورنږدې کیږي.

موږ په دې توګه یو ارزښت لاس ته راوړو، چې لحظوي تغېرارزښت (لحظوي جګیدنې) ته تل ورنږدې کیږي.
که موږ فیزیکي لویي (واحدونه) په خپله بېلګه کې وکاروو، نو د تغیرارزښت (جګوالي) لپاره m/s باور لري . دا د چټکتیا لپاره یوون(واحد) دئ

دا په دې مانا دی،چې د لار-وخت دیاګرام چټکتیا (سرعت) په ګوته کوي.

II.3 د لحضوي(د سترګو رپ) تغیرارزښت شمیرلو ته شمیرنیزه تګلار

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = 0,5x^2$ لپاره په اینتروال $[3 ; \Delta x]$ کې منځنی تغیر ارزښت
جګوالی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{0,5(3+\Delta x)^2 - 0,5 \cdot 3^2}{\Delta x} = \frac{0,5\left[9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2\right] - 0,5 \cdot 9}{\Delta x}$$

$$= \frac{0,5 \cdot 9 + 3\Delta x + 0,5(\Delta x)^2 - 0,5 \cdot 9}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3 + 0,5\Delta x)}{\Delta x} = 3 + 0,5\Delta x$$

دا $3+0,5\Delta x$ د منځنی تغیرارزښت دی

که اوس Δx تل کوچنی شي، موږ وایو که Δx د صفر په لور وهڅیږي ($\Delta x \to 0$)، نو د منځنی تغیر ارزښت $3+0,5\Delta x$ د3 به لور هڅیږي.

دا نو اوس لحظوي (د سترګو رپ) تغیرارزښت دی د x_0 په ځای کې.

د دې لپاره لیکو : د $\Delta x \to 0$ لپاره باور ري: $3+0,5\Delta x \to 3$

یا

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(3+0,5\Delta x) = 3$$

II.4کمښت ویش(د تفاضل(؟) ویش) Difference quotient

په ورته توګه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څېړنې لاندې نیسو.

د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي:

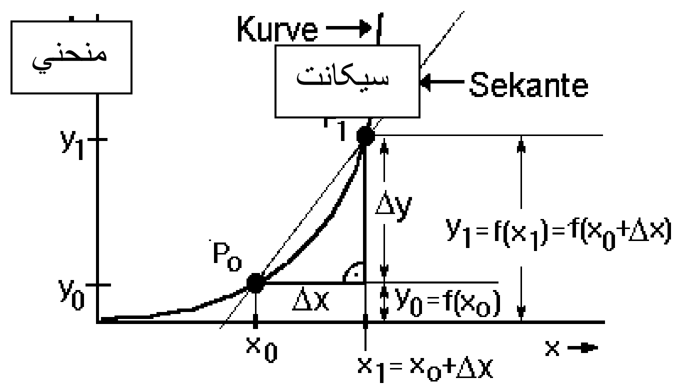
کرښه $y=f(x) = mx+a$ لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې کرښې د جګيدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د قاطع (seconce) پیژند : قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي(لاندې څېره وګورئ)



پایله : د قاطع(غوڅوونيsecant) میل یا جګیدنه(جګوالی): دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو ،،میل (جګوالی) ،، یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمېرل کیږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$m_S = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

پیژند(تعریف)

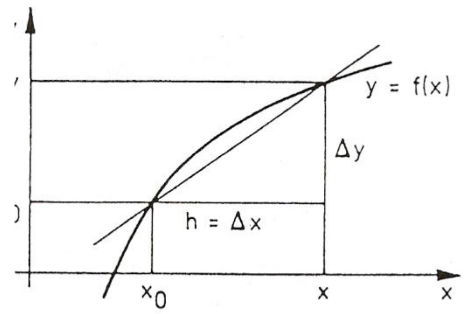
د $y = f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څیره دې وکتل شي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د تفاضل – یا کمښتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



د پیژند لپاره خیره

د f تابع لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمېرنه ده. دا ټکي د $x-$ محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.
د کمښت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.

بیلګه:
د $y=f(x)=3x^2-5x+4$ تابع دې ورکړ شوې وي. د دې تابع کمښت ویش(دتفاضل وېش) پیدا کړئ.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3(x+h)^2-5(x+h)+4-(3x^2-5x+4)}{h}$$

$$=\frac{3x^2+6xh+3h^2-5x-5h+4-3x^2+5x-4}{h}$$

$$=\frac{6xh+3h^2-5h}{h}$$

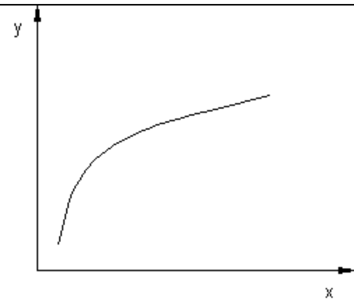
$$=6x+3h-5$$

II .2 مشتق Diffrentialquotient

(c) ketabton.com: The Digital Library

II.2.1 د غوڅوونې(تقاطع) ځګوالي څخه و د تانجنت ځګوالي یا ځګیدنې ته

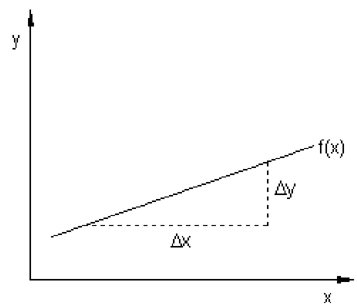
یو تابع $y = f(x)$ او اړونده ګراف دې ورکړ شوی وي.



که د تابع ځګیدنې حالت په پام کې ونیسو ،نو ګورو چې د تابع ځګیدنه په نزدې ټولو ټکو کې توپیر لري.

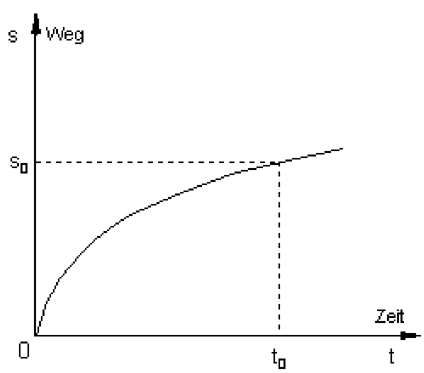
یوه ثابته ځګیدنه، لکه په لانیز تابع $f(x) = a_1x + a_0$ کې د

$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{konstant}$$



په زیاتو وختونو اړیینه ده ، چې د تغیرحالت(د ځګیدنې حالت) کې د تابع د تلنې حالت و څیړو.

نو له دې امله لحظوی چټکتیا(همغه وختیزه – یا سملاسي) $v(t_0)$ په لار-وخت دیاګرام کې وڅېړو.



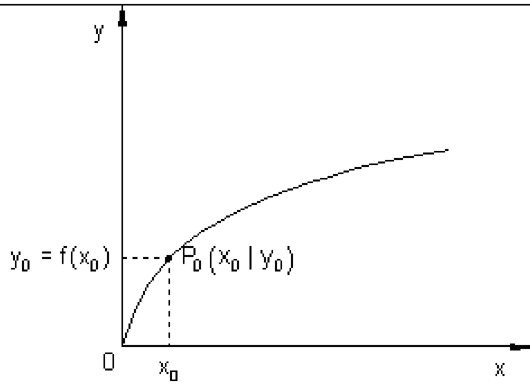
د مشتقشمیرنې په مرسته دا پرابلم حل کیدی شي.

په پام کې نیولی سترګو رپ	$t_0 \triangleq$
تر دې سترګو رپ پورې وهلې لار	$s_0 \triangleq$

د یوه تابع د ځګېدنې ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې differenzieren د مشتق نیونه بلل کیږي.

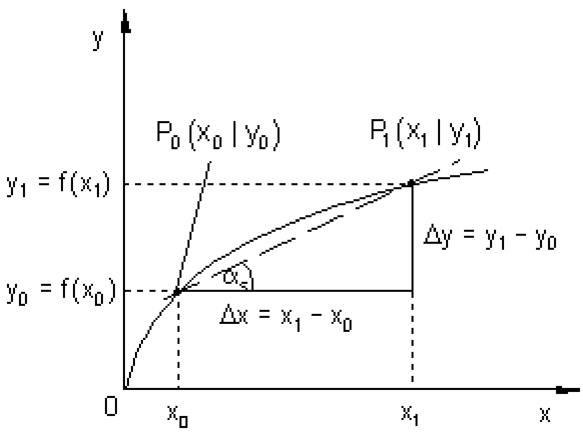
(c) ketabton.com: The Digital Library

يو تابع $y = f(x)$ او د هغه ګراف دي ورکړ شوی. په ټکي $P_0(x_0 | y_0)$ کي ورکړ شوی وي. ددي جګوالی پيداکړی شي.



ددي پرابلم د حل لپاره داسي مخ ته ځو، چي لومړی جګوالی په نزدي توګه (تقريبي) پيدا کوو.

ددي لپاره يو بل ټکی $P_1(x_1 | y_1)$ د P_0 ټکي په نزدې کي ټاکو.



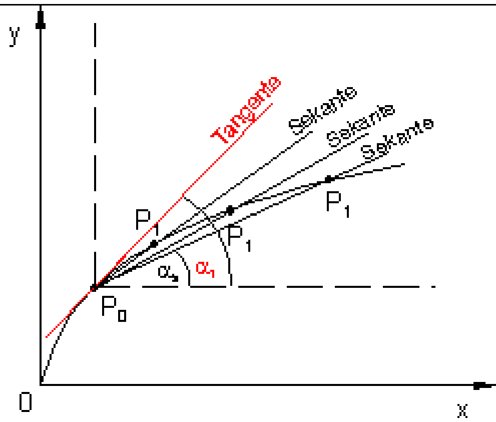
کربنه، چي دواړه ټکي سره تړي ،يعني سيکانت، يو جګوالی ښايي، چي د تکو P_1 او P_0 ترمنځ د تابع ،،منځنی جګوالی،، په ګوته کوي.

$$\tan \alpha_s = a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

دا د جګواليمثلث له لاري ټاکل کيږي.

د سيکانت د جګېدو کونج	$\alpha_s \triangleq$
د سيکانت د جګېدوضريب	$a_s \triangleq$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ټکی P_1 د ټکي P_0 په نزدې کې وټاکو یا ځای په ځا ی کړو، نو دا په ټکي P_0 کې د تابع دنوي سیکانت جګوالی دی چې باید پیدا شي. که دا کار (تلنه) تل مخ ته بوزو، او ټکی P_1 تل و ټکي P_0 ته ورنزدې کړو، نو د پولي حالت په څېر یوه کربنه منځ ته راځي، چې د تابع ګراف په ټکي P_0 کې لمسوي. د تانجنت جګېدنه په ټکي P_0 کې ټیک د تابع د ګراف جګېدنه په ټکي P_0 کې ښايي.	 α_t = د تانجنت د جګوالي (میلان -) کونج; a_t = د تنجنت د جګوالي ضریب
داحالت یا تلنلار کیدی شي د ریاضي له لارې د پوله ارزښت په څېر افاده شي.	$\lim_{P_1 \to P_0} \alpha_s = \alpha_t \quad \lim_{P_1 \to P_0} a_s = a_t$

II.2.2.کمښتویش او مشتق Diference quotient and diferentialquotien

د سیکانت جګیدنه (منځنی تغیر

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ارزښت)

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

د x لپاره د مساوات ښی خوا ځای په ځای کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

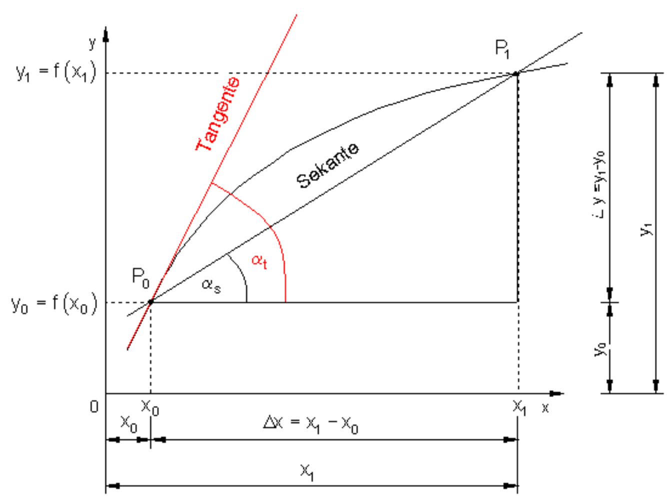
$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د تنجنت جګېدنې سره د حد (پوله ارزښت) له لارې لرو

$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

دا مشتق يا لحظوي – يا د سترګو رپ تغير ارزښت دی

يا لنډ:
$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$



په ورته توګه د کمښت ويش يا د تفاضل ويش Difference quotient تر څېرنې لاندې نيسو:

د يوې کرښې ميل يا جګيدنه يې له مشتق نيونې ټاکلکيدی شي.

کرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې کرښې د جګيدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

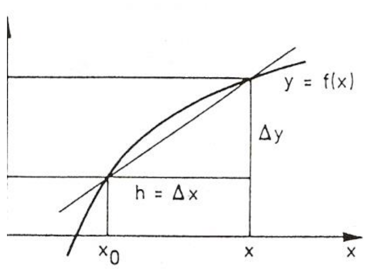
II.6 د غوڅوونې(قاطع seconce) پيژند:

قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي.

پايله: د قاطع ميل يا جګيدنه(جګوالیsecant): دا چې قاطع هم يوه کرښه ده نو ميل(جګوالی) يې هم د يوې کرښې ميل په ډول شمېرل کيږي.

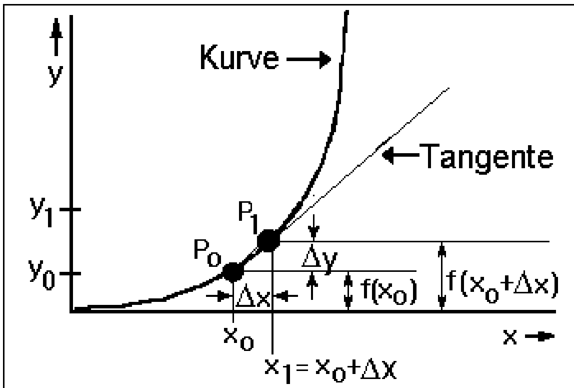
په لاندې کې m_S د جګوالي لپاره ليکل کيږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

پېژند(تعريف): د $y = f(x)$ تابع دې د x_0 په يوه چاپيريال او په x_0 کې پخپله تعريف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بيل خو د چاپيريال په يوه خوښه يا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څيره دې وکتل شي). نو د تفاضل يا کمښتويش Difference qutient د قاطع ميل شته دی، چې په لاندې ډول يې ليکو: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$	د پيژند لپاره څيره 

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f تابع غوڅي میل لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمیرنه ده. ټکي د $x-$ محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.
د کمښت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.
د یوه تابع د میل یا ځګیدنې ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې د تابع د مشتق نیونه بلل کیږي.

مشتق شمیرنه = د یوې منحنې میل Differential caculation) تانجنت: که د P_1 او P_0, ټکي یو بل ته نږدې شي، نو له قاطع څخه تانجنت جوړیږي.	

پایله : د تانجنت ځګیدنه : د تانجنت ځګېدنه د قاطع د ځګېدنې ،،حد ،،دی.

$$m_t = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

پام: لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله، د derivativeکلمه نوې ده، نو له دې امله دا څو ټکي په پام کې نیسو : derivative د رابیلیدنې په مانا دی، چې موږ یې تراوسه مشتق بولو،چې همدا معنا لرییعنط له اشتقاق سره تړاو لري.

تعریف: که د تابع دا کمښتویش (د تفاضل وېش) x- > x0 او(همداسې)⇔ (x->0)او یا په (همدې ډول⇔)
h- > 0 لپاره یو حد ولري , نو د y = f(x) تابع د $x = x_0$ په ځای کې د مشتق قابلیت لري اود دې لپاره لیکو:

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h};...$$

دا حد یا پوله داسې ښایو

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{x=x_0} = f'(x);$$

د x_0 ځاي کی د $y = f(x)$ تابع له مشتق(Derivativ,) یا رابیلدنې) څخه یوه بله سیده یا بل ډول کړه لار رابیله وو.

د مشتق ساده شمیرنې لپاره یوه بېلګه:

د $f(x) = x^2 - 3x + 2$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ددې کمښتوېش په لاندې ډول دی:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{((x_0+\Delta x)^2 - 3(x_0+\Delta x)+2)-(x_0^2-3x_0+2)}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-3x_0-3\Delta x+2-x_0^2+3x_0-2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0\Delta x+\Delta x^2-3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 2x_0+\Delta x-3$$

او د لیمیټ $\Delta x \to 0$ سره یې مشتق لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x-3) = 2x_0-3.$$

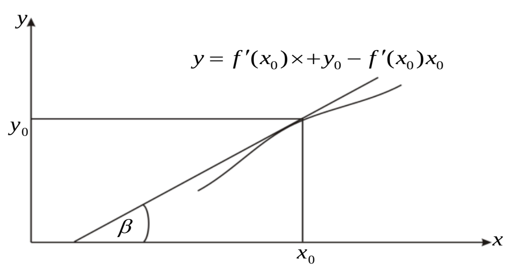
د دې لپاره دا لاندې پېژند ورکوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند :2
که یو د $y=f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړوي، نو هغه لاندنۍ کرښه چی د (x_0,y_0)
ټکي څخه تیریږي او میل یا جګوالی یې $f'(x)=\tan\beta$ دۍپه لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f^{'}(x)\Leftrightarrow y=f'(x_0)x+y_0-f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0,y_0) په ټکي کی د ورکړ شوې منحني
$y=f(x)$ تانجنت بلل کیږي(پرتله مخامخ شکل)



موږ اوس د څو بنسټیزو توابعو مشتق شمیرنه تر څیړنې لاندې نیسو.

بیلګه ۱:

د یوې ثابتي مشتق :

موږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت یې یوثابت دۍ
ثابت $y=f(x)=c=Const$

نو د هر x_0ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{c-c}{h}=0$$

$$\Rightarrow(\frac{dy}{dx})_{x=x_0}=f'(x_0)=0$$

بیلګه ۲:

یوه $f(x)=x$ خطي(کرښیزه)تابع لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x_0 په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$
$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=\underline{\underline{1}}$$

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعني یوه ثابته ده.

بیلګه ۳ : د $y=f(x)=c.u(x)$ دوله تابع مشتق د c=ثابتې سره.

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلې وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې=c) سره ضرب شوې وي. یعنې

له $y=f(x)=c.u(x)$ څخه لرو:

$$\Rightarrow f'(x)=c\cdot u'(x)$$

ثبوت:

$f(x_0)=c.u(x_0)$ $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x_0+\Delta x)-c\cdot u(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}c\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim\limits_{\Delta x\to 0}c}_{c}\cdot\underbrace{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$ $\Leftrightarrow f'(x_0)=\underline{\underline{c\cdot u'(x_0)}}$

پیژند (تعریف): دفرنځیالوېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

Der Differentialquotient $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$
heißt Ableitung der Funktion f (x) an der Stelle x_0

د x_0 په ځای کې د تابع f(x) مشتق یا رابیلیدنه بل کیږي

تعریف (پیژند): د تاپع لومړی مشتق یا رابېلېدنه دx_0 په ځای کې دتانجنت جګېدنه ورکوي، چې د تابع ګراف یې په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې لمسوي او له دې سره غبرګ د تابع د ګراف جګېدنه ده په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې. دا سړی د تابع جګېدنه هم بولي.

تانجنتجګېدنه په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې

Tangentensteigung in $P_0(x_0 \mid y_0)$
$a_t = f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بېلګې څخه کار اخلو

بیلګه:
تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي.
غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانګړې توګه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمښتویش(د تفاضل وېش) پیداکوو.

$x = x_0:$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

نو $f'(x_0)=2x_0$ لرو او د $x_0=2$ لپاره $f'(2)=2\cdot 2=4$ باور لري.

د په ځای کې د تابع لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

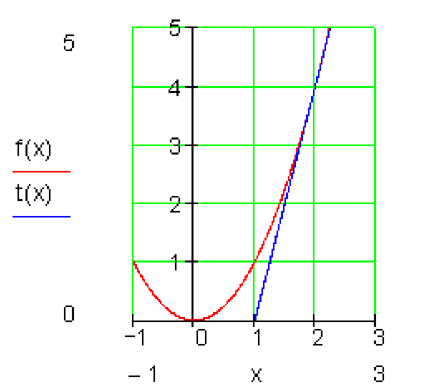
اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

نو $f'(x_0)=2x_0$ لرو او د $x_0=2$ لپاره $f'(2)=2\cdot 2=4$ باور لري.

د $x_0=2$ په ځای کې د تابع $y=f(x)=x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0=2$ په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یې:



پایله یې کېدی شي، د تابع د ګراف له لارې و ازمایل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0\,|\,y_0)=P_0(2\,|\,4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د میل د مثلث له لارې جګېدنه لاس ته راوړو.

لکه پورته بېلګه کې: $y=f(x)=x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداکوو:

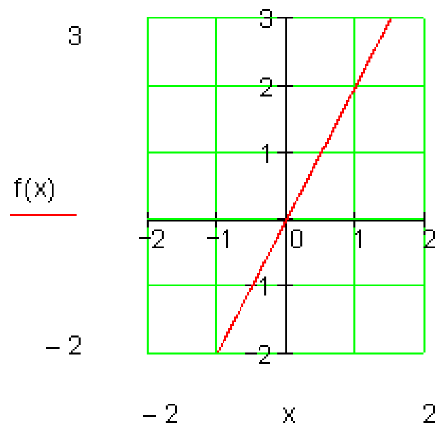
$$y=f(x)=x^2\Rightarrow f'(x_0)=2x_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	2

ګراف یوه کرښه $f'(x)=2x$ انځوروي، چې د تابع مشتق بلل کيږي:
پام: كه د يوې تابع مشتق ونيول شي، نو بيرته يوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکيږي.

د مشتق تابع: د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنسټ تابع انځوروي، له دې امله دا د ميل تابع هم بلل کيږي.



بيلګه: د $f(x)=x^3$ تابع دې ورکړ شوی دی.

فعاليت: ګران لوستونکي دې د $f(x)=x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.

موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پيدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0{}^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2))}{\Delta x}$$

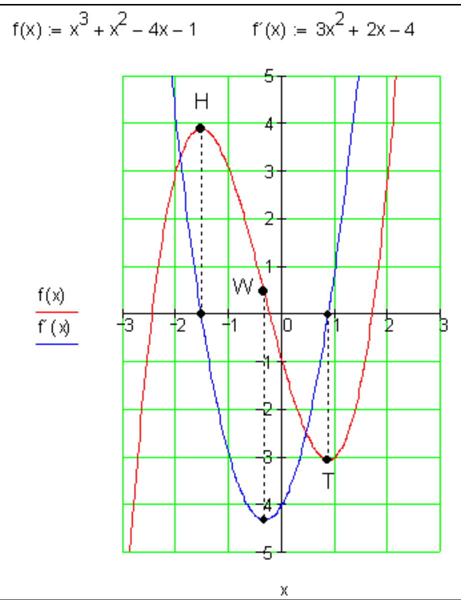
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2)$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2=3x_0^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0)=3x_0^2$ د تابع $f(x)=x^3$ مشتق دی په ځای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسي ده: $f'(x_0)=3x_0^2$

د وضعیه کمیاتو – یا پروتولاړ سیستم کي تابع او د تابع مشتق: مخامخ څیره وګوری: تابع(سور): $f(x)=x^3+x^2-4x-1$ د تابع مشتق(شین رنګه): $f'(x)=3x^2+2x-4$ ، چی بیرته د مشتق یا د میل تابع ده.	

بیلګه ۴ : یوه تابع $f(x)=\sqrt{x}$ دې ورکړ شوې وي.

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق پیداکړی او د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د x_0 په ځای کې د پورته تابع مشتق دی

او د مشتق تابع $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ده

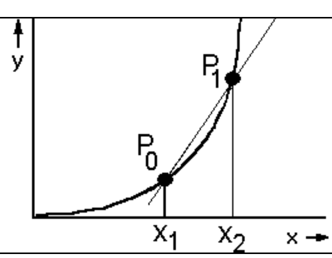
د شمیرنې په بنسټ مو تر اوسه دا لاندې تر لاسه کړي:

	د مشتق تابع	تابع
$f'(x)=1\cdot x^0$	$f'(x)=1$	$f(x)=x$
$f'(x)=2\cdot x^1$	$f'(x)=2\cdot x$	$f(x)=x^2$
$f'(x)=3\cdot x^2$	$f'(x)=3\cdot x^2$	$f(x)=x^3$
$f'(x)=-x^{-2}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$f(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$
$f'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

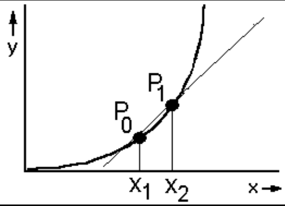
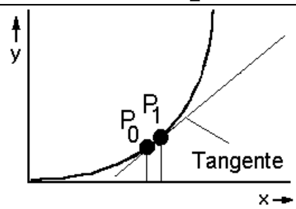
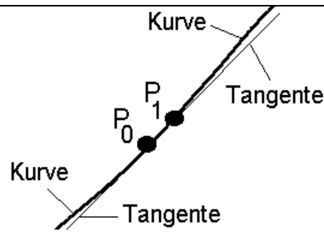
که دا پورته پنځه قوانین یو د بل سره پرتله شي، نو ګومان ترې لاس ته راځي، چې دا لاندې قوانین به باور ولري.

بیلګه: $f(x)=\dfrac{1}{x^2}=x^{-2}\Rightarrow f'(x)=-2x^{-3}=-\dfrac{2}{x^3}$

د تانجنت تعریف او خویونه:

	مخامخ څېره یو منحني او یوه قاتع په ټکو P_0 او P_1 کې ښایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	اوس غواړو، چې ټکی P_0 د ټکي P_1په لور و خوځيږي. پام : ددې سره قاطع خپل ميل تغيروي
	بالاخره غواړو، چېP_1 ټکی وP_0 ټکي ته ناپای ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کيږي
	چې دا پوره وپېژندلی شو د ټکو P_1 اوP_0 په شاو خواْ زوو يا لويه وو: که د P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای نږدې شي، نو کتل کيږي، چې تانجنت په ټکي P_0کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحني په P_0 ټکي کې.

د دې خويونو غوره غوره والی يا لاس ته راوړنه(پايله):
ومو ليدل، چې د تانجنت ميل پهP_0 ټکي کې په همدې ټکي کې د منحني ميل هم دی. له دې دا پايله لرو، چې که څوک غواړي د منحني ميل په P_0 ټکي پيدا کړي، بسيا کوی، چې د تانجنت جګوالی يا ميل په P_0 ټکي کې پيدا کړي.

د تانجنت او عمود عمومي فرمولونه:

پيل: تانجنت دې د $f(x)$ ګراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ ګراف د په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود يا ولاړ غوڅ کړي.

د تانجنت مساوات: :

د سره ليکو:

دا چې $P(x_0), f(x_0))$ تانجنت يو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0)\cdot x + b_t = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x) = f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0 = f'(x_0)\cdot x_0 + f(x_0)$$
$$= f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال):

د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود ځغلي.

د عمود میل:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

بیلګه:

د $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پیدا کړئ:

حل:په لاندې توګه د تابع مشتق نیسو او ګراف یې(څېړه لاندې کښل شوې) کاږو:

x	-4	-1	0	1.5	3
$f'(x)$	4	2.5	2	1.25	0.5

لرو: $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت میل **په ټکي** x_0 **کې د میل ارزښت** 3 **لري.**

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2\cdot(-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \qquad , P(2, f(2))$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ په ځاي کې دا لاندې لرو:

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4-1=3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2-1=1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x-2)+3 = x-2+3 = \underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \ , \ \ P(2\,|\,f(2))$$

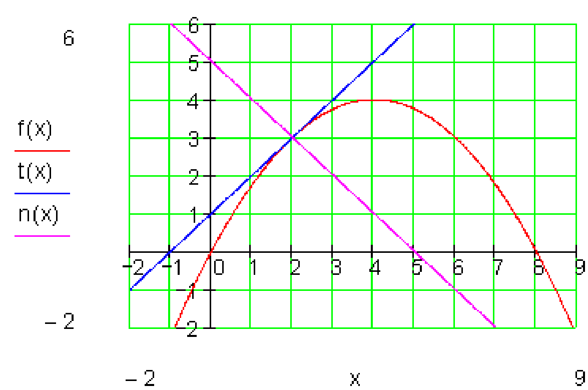
$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x) = \frac{1}{f'(2)}(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4-1=3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2-1=1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x-2)+3 = -x+2+3 = \underline{\underline{-x+5}}$$



د تانجنت او عمود عمومي مساوات

بیلګه: تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت میل: د یوه تابع د گراف میل په ټکي $P(x_0 \mid f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

موږ $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ مربع تابع لرو

د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

ارزښتجدول:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککرئ ټکی دی:

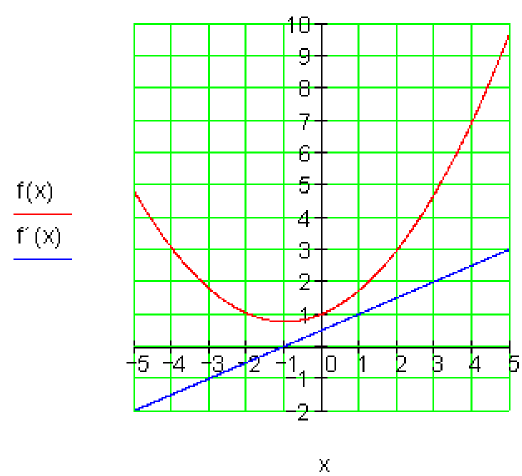
$S(-1,\ 0.75)$ د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د میل تابع ارزښت دی:

دا دا معنی لري، چې په ککرئ ټکي کې د $f'(x)$ میل صفر دی.

تانجنت په s کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت(افقي) څغلي؛ یعنې د $x-$ محور سره غبرگ څغلي.

گرافونه:

$f(x) := \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ $\qquad$ $f'(x) := \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: تابع لرو: $f(x)=2x^3+7x^2+x-7$

تانجنت دې پیداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

$$f(x)=2x^3+7x^2+x-7 \Rightarrow f'(x)=6x^2+14x+1 \quad P(-2\,|\,f(2)) \Rightarrow x_0=-2$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x_0)f'(-2)=24-28+1=-3$$

$$f(x_0)=f(-2)=-16+28-2-7=3$$

$$\Rightarrow t(x)=-3(x+2)+3=-3x-6+3=\underline{\underline{-3x-3}}$$

لاس ته راوړنه(پایله):

د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0\,,f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري**.**

د تانجنت مساوات

$$t(x)=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}(x-x_0)+f(x_0)$$

د عمود مساوات

$$n(x)=-\underbrace{\frac{1}{f'(x_0)}}_{\text{جګیدنه}}(x-x_0)+f(x_0)\ ;\quad f'(x_0)\neq 0$$

پە بیدیا کې جګوالی **Steigungen in der Landschaft**

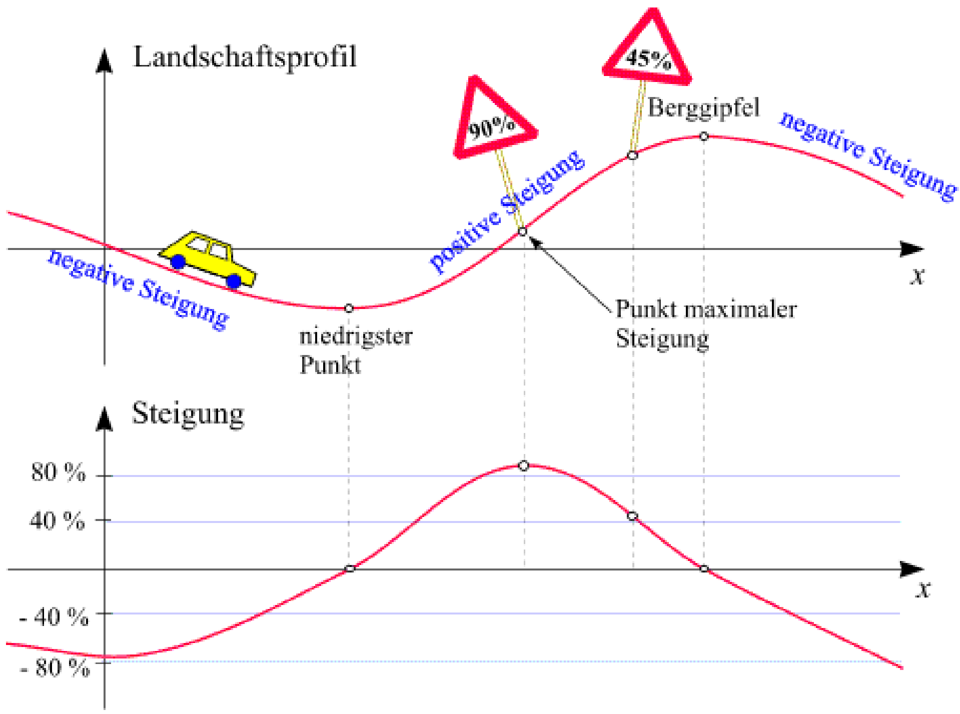
لاندې د د تابع ګراف د سرک پە څیر پە فکر کې راولو، چې پە بیدیا کې جګ او ټیټېږي یا

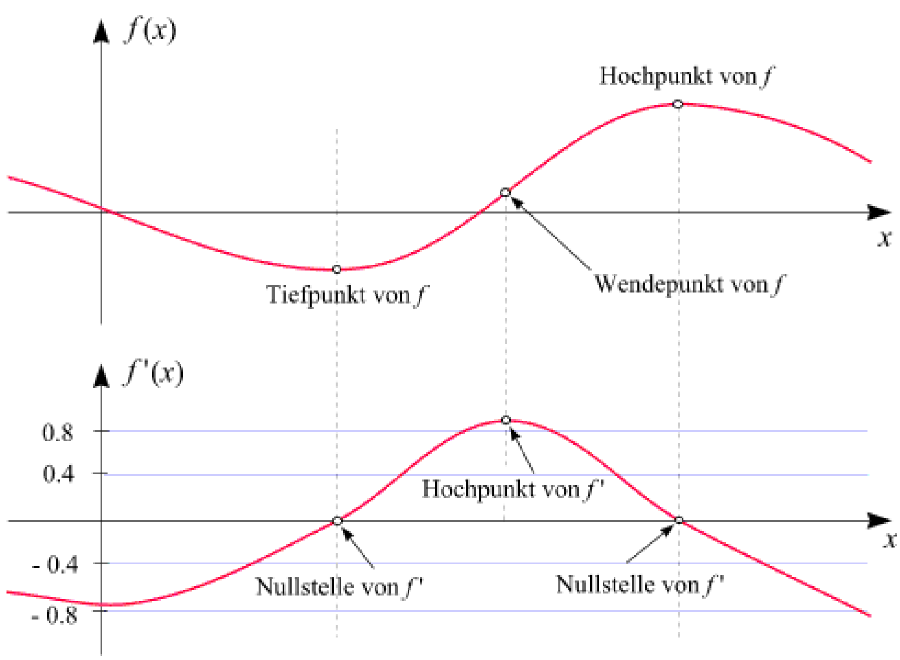
کښتپورتە ځغلي، نو پە ښە توګە یې رسمولی شو، چې د ګراف خویونە د مشتق سره پە اړیکو کې راځي:

دپورته څیرو پښتو: له کیڼ لور کښته ښي لور ته: بیدیا یا کرونده، منفي جګوالی، جګوالی،(بله کربښه) خورا ټیټ ټکی،(شي لورته بله کربښه(مثبته جګیدنه، (پسې کربښه) د غره څوکه، د خورا جګې جګیدنې ټکی، (اخره(کمیز یا منفي جګیدنه.

د سرک کښته یا لاندې لور ته د ځانګړي دیاګرام سره د سرک جګیدنه پە هر ټکي کې انځور ده، د کومې سره چې یوه دویمه منحني ورکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library





(c) ketabton.com: The Digital Library

دپورته پښتو: له پورته کښته له کيڼ وښي لور ته: د f جګ ټکی، د f ټيټ ټکی، د f اوړونټکی یا د انعطاف ټکی، د 'f جګ ټکی، د 'f صفرځای، د 'f صفرځای.

دیاګرامونه په کره توږه وګوری او وهڅیږئ، چې د دویمې منحني خویونه د لومړی منحني له خویونو را برسیره کړی.

چیرته چې سرک خورا ټیټ ټکی لري، هلته د جګیدني ارزښت %0 دی. دا په دې معنا چې که موټر له دې ځایه تیرېږي په افقي ئا پراته ډول ځغلي او په همدې توږه که موټر د غره په څوکه هم و ځغلي.دا ټیک هغه ټکي دي، د کومو په چاپیریال کې چې منفي او مثبته جګیدنه یوبل سره رابندوي یا پولې لري.

د دې په منځ کې یو چیرته یو ټکی شتون لري، چې هلته جګیدنه ماکزیمال یا خورا لویه ده (په دې بیلګه کې %90) .

همدې ته ورته په دویمه منحني (کږې) کې یو ه څوکه لري، مګر دا په دې بیدیا کې هغه ستره ،،څوکه،، نه ده، مګر که څوک غواړي، نو یوه د ،،جګیدنې څوکه،، ده.

اوس دا دواړه کږې یا منحني په ورسره بلده یا معمول ریاضیکي ډول لاندې شکلونه لري:

لومړی منحني د f(x) ګراف دی، دویمه منحني یا کږه د مشتق تابع f'(x) ګراف دی.

دا دواړه ګرافونه بیا هم ټیک وګوری او وهځdړی، چې وپوهdږی، چې دا په هره برخه کې یو د بل سره څنګه اړیکې لري.

د f(x) ګراف دوه ځانګړي ټکي مو سترګو ته راځي: په یوه کې f(x) مینیمال (خورا ټیټ ټکی) په بل کې f(x) ماکسیمال (خورا جګ ټکی) دی.

په دې ځایونو کې f(x) صفرځایونه لري.

هغه ټکی چې هلته د f(x) ګراف خورا ستوغ دی، هغه، هغه د انعطاف ټکی یا اوړونټکی بلل کیږي.

دا چې په دې ټکي کې د f(x) مشتق خورا جګ دی (په دې بیلګه کې 0,9)، دا د(f'(x عظمي نقطه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ازادې سترګې سره د هغه ځاي له لاندې منحني څخه ښه څرګندېږي، نسبت و پورته منحني ته.

مونږ د دې بیلګې څخه همدا اوس اټکل کولای شو یا ګومان راوړی شو:
که یوه تابع $f(x)$ ولرو، نو د دې $f(x)$ تابع په هکله د $f(x)$ له مشتق څخه ارزښناک معلومات په لا س روړی شو.
دا مونږته د ماکسیما او مینیما په هکله (چې دا دواړه د افراتي ارزښت تر نامه یادیږي) او په دې هکله چې ګراف چیړته خور یا ستوغ دی، پوره کټور معلومات راکوي.

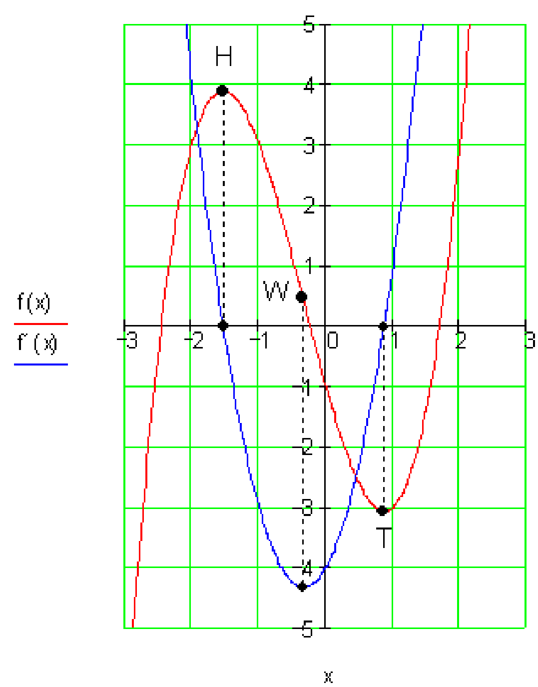
په کواوردینات (یوه پروت -ولاړ)- سیستم کې تابع اود تابع مشتق:

تابع : $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$

مشتق: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

د یوه تابع مشتق بیرته تابع دی. مونږدا د مشتق تابع او یا د جګیدنې (میلان) تابع بولو

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \qquad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دواړو توابعو ګراف په یوه قیمتي وضعیه (پروت ولاړ سیستم) کې و کښل شو.

هلته چې تابع f(x) یو جګ ټکی (H) همداسې ټیټ ټکی (T) لري ګراف د مشتق تابع x -محور کې غوځوي،په دې مانا چې د تابع ارزښت دلته صفر دی.

دا روښانه دی، ځکه چې په H او T کې تابع f(x) پروت یا افقي تانجنت لري، دا دا معنا لري، چې په دې ټکي کې د f(x) جګېدنه صفر ده.

د مشتق تابع f'(x) هلته مینیموم لري، چېرته چې د f(x) جګېدنه د H او T ترمنځ په پام ونیول شي د مطلق قیمت له مخې خورا لویه ده.

II.3.د مشتق شمیرني قوانین

قضیه (د جمعې یا زیاتون قاعده یا لار):
که یو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعې څخه جوړ وي، نو مشتق یې هم د هر تابع د مشتق د جمعې څخه جوړ دی، یعني:

$$f(x)=u(x)+v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x)=u'(x)+v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0)=u(x_0)+v(x_0)$$
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]+[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]}{\Delta x}+\frac{[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)}+\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x)=\underline{\underline{u'(x_0)+v'(x_0)}}$$

بیلګه:
د دې ورکړ $f(x)=5x^2+3x$, $u(x)=5x^2$, $v(x)=3x$ توابعو شتق وشمیرئ.
ښوونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

د جمعي قاعدې تولیزه کونه:

که چیرې f_1، f_2،......، f_n توابع او k_1، k_2،....، k_n ثابت عددونه وي نو لرو(بې له ښوونې):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+.....+k_n f_n(x)]'$$
$$=k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+.....+k_n f_n'(x)$$

قضیه (د ضرب قاعده یا لار):

که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښایو:

$$(f(x)\cdot g(x))'=f(x)'\cdot g(x)\cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعني په صورت کې د $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ ورزیاتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي، یعني که د دواړو لورو لیمیت نیسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

بیلګه:

که $g(x)=x^2-1$ او $h(x)=\sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x)=g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ښوونه: په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x},\; f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د وېش قانون):

f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښایو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښایو(ثبوت کړو).

لومړۍ لار:

لومړۍ لار یا طریقه یې په لاندې ډول ښایو او دویمه لار دې ګران زده کوونکي وښایي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}\quad,\quad g(x)\neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زیات کړو، نو لرو:.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to 0}g(x)\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

یعني لرو: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

دویمه لار: د $\frac{1}{g(x)}$: مشتق غواړو پیدا کړو او ښایوچي دی:

$$(\frac{1}{g(x)})'=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\qquad (*)\ (f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

که $f(x)=\frac{1}{g(x)}$ کېږدو نو لرو:

$$(f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x).h}$$

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{-\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

که دا $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$ وبش ولرو او وغواړو چي مشتق یې پیدا کړو،نو له پورته ښوونې ، د **(*)** اړیکي او د ضرب قاعدې له مخې لرو:

$$[\frac{f(x)}{g(x)}]' = [f(x)\frac{1}{g(x)}]'$$

$$= f(x)(\frac{1}{g(x)})' + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= f(x)(\frac{g'(x)}{(g(x))^2}) + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= \frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} + \frac{f'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

بیلګه:

د $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ تابع (د $x^2-4\neq 0$ سره) مشتق غواړو پیدا کړو.

حل: که چیرې $g(x) = x^2$ او $h(x) = x^2 - 4$

وضع شي نو لرو:

$$g'(x) = 2x$$
$$h'(x) = 2x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د ویش قانون له مخې لرو:

$$f'(x) = \left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$= \frac{2x(x^2-4) - x^2.2x}{[x^2-4]^2}$$

$$= \frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$

بیلګه:

د $y = \sin x^2$ تابع یوه په لاندې توګه ورکړ شوی ځنځیري تابع ده:

$$y = \sin z \quad , \quad z = x^2$$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق وړدي. له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d\sin x^2}{dx} = \frac{d\sin z}{dz} . \frac{dx^2}{dx} = \cos z .2x = 2x.\cos x^2$$

بیلګه:

د $y = \sin^2 x$ تابع په لاندې ډول تړلی ورکړ شوی.

$$y = z^2 \ , z = \sin x$$

دلته هم دواړه توابع هرچیرته مشتقوړ دي. نو له دې امله هرچیرته باور لري:

$$\frac{d\sin^2 x}{dx} = \frac{dz^2}{dz} . \frac{d\sin x}{dx} = 2z.\cos x = 2\sin x.\cos x = \sin 2x$$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=(x^5+4)^8$ تابع مشتق وشمیرئ!

حل: هرکله چې $g(x)=x^8$ او $h(x)=x^5+4$ وضع کوو نو لرو:

$$f(x)=g(h(x))$$

$$f'(x)=(g(h(x))'=g'(h(x)).h'(x)$$

$g'(x)=8x^7 \quad h'(x)=5x^4$ دی، نو لرو:

$$f(x)=8(h(x))^7 5x^4=40(x^5+4)^7.x^4$$

د مثلثاتي فنکشنتابعګانو مشتق

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \; I$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \; II$$

قضیه :د ساین تابع $y=f(x)=\sin x$ مشتق غواړو وښایوو چې $f'(x)=(\sin x)'=\cos x$ دی:

ددې قضیې د ښوولو له پاره پورتني په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي.

د $y=f(x)=\sin x$ ساین تابع د هر x لپاره تعریف ده، نو د x_0 په خوښه ټاکلوڅخه لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}$$

$$=\frac{2}{h}\cos\frac{2x_0+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}=\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\ .$$

د لیمیټ د برخي په پام کی لرلو سره لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{h\to 0}\left(\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)=\cos x_0.$$

د ساين تابع په هر ځاي کی، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري یا مشتقوړ ده:

$$\left(\frac{d\sin x}{dx}\right)_{x=x_0}=f\,'(x_0)=\cos x_0\,,$$ (Xپه لینده کچ یا رادیان)

قضیه :

همداسي بنوول کيږي چی کوساین تابع هم په هرځاي کی مشتقوړ ده، دلاندې مشتق سره:

$$\left(\frac{d\cos x}{dx}\right)_{x=x_0}=f\,'(x_0)=-\sin x_0,$$ Xپه لینده کچ یا رادیان

ثبوت: لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f\,(x+h)-f\,(x_0)}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x_0}{h}$$

په پورته ننوتنه کي د دويم فرمول له مخي لرو:

$$=\frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}.\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$=\frac{-2\sin(x+\frac{h}{2}).\sin\ \frac{h}{2}}{h}$$

$$=-[\sin(x+\frac{h}{2}).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د د پولې او د پولې یا حد د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي :

$$-\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2})\ .\ \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\sin x\cdot 1=-\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنډه توګه لیکو:

$$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

قضیه : غواړو وښایو چې د تانجنت تابع $f(x) = \tan x$ مشتقوړ ده او د مشتق تابع یې $f\,'(x)=\frac{d\tan x}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$ ده.

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{d}{dx}(\frac{\sin x}{\cos x})$$

$$=\frac{\cos x\frac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos x.\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=1+\tan^2 x\ ,x\neq(2k+1).\frac{\pi}{2}$$

بیلګه: غواړو د $y=\cos\frac{\pi x}{180}$ تابع مشتق پیدا کړو.

حل: ږدو : $f(x)=\cos x$ او $g(x)=\frac{\pi x}{180}$ ، نو y په لاندې توګه لیکلی شو:

$y=f(g(x))$ ، نو د زنځیري قاعدې په بنسټ لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$
$$= \cos'(g(x))\cdot(\frac{\pi}{180}\cdot x)'$$
$$= -\sin(g(x))\cdot\frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180}\cdot\sin\frac{\pi x}{180}$$

بیلګي :

۱ - د $f(x) = \sin x$ تابع لومړي څلور مشتقونه دې پیدا شي.

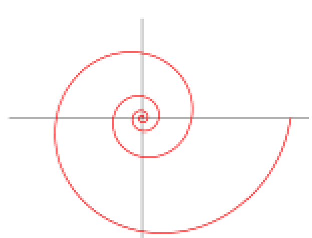
$f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f'''(x) = -\cos x$; $f^{(4)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$

۲ - د $f(x) = x.\sin x$ تابع مشتق پیداکړئ
د ضرب قانون ځخه کار واخلئ.
$f'(x) = 1.\sin x + x\cos x = \sin x + x.\cos x$

۳ – د $f(x) = \sin\frac{1}{x}; x \neq 0$ تابع مشتق پیداکولو له پاره د ځنځیر قونو ن ځخه نار اخلو.

ږدو $z = \frac{1}{x^2}$ او $u(z) = \sin z$ لا س ته راځي: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$

د لوګاریتم مشتق



(c) ketabton.com: The Digital Library

قضیه :

د لوګاریتم تابع مشتق:

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b\neq 0, x>0$ سره، مشتقوړ دی

او صدق کوي: $f'(x)=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x.\ln b}$

ثبوت: دا چې تابع $y=f(x)=\log_b x$ یواځې د$x>0$ لپاره پیژند لري یا تعریف دی. په هر ځاي کی چی$x>0$ وي، نودا لاندې باوري دی :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\log_b(x_0+h)-\log_b x_0}{h}=\frac{1}{h}\log_b\frac{x_0+h}{x_0}=\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}$$

د (لومړۍ برخې) له مخی دا لاس ته راځي:

$$\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right]^{\frac{1}{x_0}}\to e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\log_b e^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\log_b e$$

د لوګاریتم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پیژند سټ کی د مشتق قابلیت لري.

$f'(x)=\frac{1}{x}\log_b e$ همداسې $f'(x)=\frac{1}{x}.\frac{\ln e}{\ln b}$ داچې $\ln e = 1$ نو صدق کوي:

$f'(x)=\frac{1}{x.\ln b}$. خه چې د ښوولو وو.

په ځانګړي ډول دا لاندې باور لري:

$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$ پای.

بیلګه:

د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ مشتق وشمېرئ.

ښوونه: په لاندې توګه مخ تخ ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\log\sqrt{x^3}=\log_{10}x^{3/2}=\frac{3}{2}\log_{10}x$$
$$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 10}$$
$$=0.6514\cdot\frac{1}{x};\ D(f')=IR^{>0}$$

بیلګه:

د $y=\ln\frac{x-2}{x+2}$ تابع مشتق پیداکړئ

حل:

مورږ لیکلاي شو :

$$y=\ln\frac{x-2}{x+2}$$
$$=\ln(x-2)-\ln(x+2)$$

دا چې $(\ln(x-2))'=\frac{1}{x-2}$ او $(\ln(x+2))'=\frac{1}{x+2}$ دی، نو لرو:

$$y'=(\ln(x-2))'-(\ln(x+2))'$$
$$=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{4}{x^2-4}$$

بیلګه:

لرو: $f(x)=\log_2(x)$

غواړو پیدا کړو: ۱. مشتق $f'(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق د $x_0=16$ په ځاي کې

حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو: $f'(x) = 1/(x\cdot\ln 2$

اوس د $x_0=16$ په ځاي کې مشتق ټاکو:

$f'(x_0)= 1/(16\cdot\ln 2)= 1/(16\cdot 0.69)= \underline{0.09}$

پای

اوس دې یوه بله د دیفرنسیشن قاعده ورکړل شي کومه چې په جدول 1-20 کې غیر مستقیم خوندې یا په بل عبارت دننه ده.

مورږ غواړو د لاندې شکل تابع یا بلواك مشتق ونیسو

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

د ځنځیرقاعدې له مخې ترخیرني نیول کیدی شي، $y = e^z, z = g(x)\ln(f(x))$ د
لاندې بلواك $u = \ln f(x) = \ln v, v = f(x)$ مشتق هم د ځنځیری قاعدې له مخی را پیداکیدی
شي. دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot = \frac{1}{v}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

او

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = e^z\cdot(g'(x)\ln f(x) + g(x)u')$$
$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

د ځنځیری قاعدې د نیونو په نظر کی نیولو سره او د جملی 20-10 له مخی لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله 20-10 که $f(x)$ او $g(x)$ د $f(x) > 0$ سره د مشتق قابلیت لري ، نو
$y = f(x)^{g(x)}$

هم د لاندې مشتق سره مشتقوړ دي

بیلګه : تابع یا بلواك $y = x^x$ د $x > 0$ لپاره مشتقوړ دی. دا دې په (20-57) کې داسی $f = x,\ g = x$ ځاي په ځاي شي او له دې سره $f' = 1, g' = 1$. له دې امله اوس د $x > 0$ لپاره لرو: $dx^x / dx = x^x(\ln x + 1)$

(دا وروسته د ایمپلیخیت توابعو مشتق کې هم په همغه توګه رواړول شوې ده)

بیلګه: د $y = (x^2 - 1)\ln x$ د مشتق سره باید د $g = \ln x$ له امله وغوښتل شي چی $x > 0$ او د $f = (x^2 - 1) > 0$ له امله باید باور ولري $x^2 > 1$ او له همدې امله $|x| > 1$
پس کیدی شي چی فرمول(20-57) د $x > 1$ لپاره د $f = x_2 - 1$ او $g = \ln x$ سره استعمال شي:

بیلګه: د $f(x) = x^3.\ln 4x (x > 0)$ مشتق دې پیدا شي

د $u(x) = x^3$ د $u'(x) = 3x^2$ سره، $v(x) = \ln 4x$ د ځنزیري قانون له امله لرو:

$$v(x) = 4.\frac{1}{4x}\ \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 3x^2.\ln 4x + x^3.\frac{1}{x} = 3x^2.\ln 4x + x^2 = x^2(3\ln 4x + 1)$$

بیلګه: د $f(x) = (x^2+2).\lg x\ (x>0)$ مشتق غواړو پیداکړو

د ضرب قانون: $u(x) = x^2+2\ ;\ v(x) = \lg x$ د $u'(x) = 2x$ او

$v'(x) = 1 / x.l\,10$ سره

$$f'(x) = 2x \cdot \lg x + (x^2 + 2)\frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \cdot (2x \cdot \ln x + x + \frac{2}{x})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل توابعو مشتق

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y=b^x,(b>0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'=b^x\ln b$

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\qquad ,\ f(x)=b^x$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{b^x-b^{x_0}}{x-x_0}$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{b^{x-x_0}-1}{x-x_0}\qquad ,\ x-x_0=h$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}$$

له پورته لرو $\begin{cases}b^h-1=k\\ h=\log_b(1+k)\end{cases}$ او لا س ته تري راځي

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{1}{\frac{1}{k}\cdot\log_b(1+k)}$$

د لوګاریتم قانون څخه لرو: $n\cdot\log x=\log x^n$ او لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{k}{\log_b (1+k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b [\lim_{k \to 0} (1+k)^{\frac{1}{k}}]} \quad , \lim_{k \to 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = e$$

له پورته لاس ته راځي

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b e} \quad , \ \log_b e = \frac{1}{\ln b}$$

$$= b^{x_0} \cdot \ln b \ ; \quad x_0 \in IR \ ; b \in IR^{>0}$$

$$\Rightarrow f\ ' : f\ '(x) = b^x \cdot \ln b \ ; \ D\ '(f) = IR \ ; b \in IR^{>0}$$

$$f\ '(x) = b^x \cdot \ln b$$

قضيه : د $y = f(x) = e^x$ مشتق پيدا کړئ.

حل:

$$y = f(x) = e^x$$

$$f\ '(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

موږ دا لرلي په پام کې نيسو: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

موږ د تل کوچنيکيدونکي Δx ارزښت لپاره خيرو $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Δx

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ موږ لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1$$

زموږ د شمیرنې په پنسټ دا دا مهنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که x_0 د xپه ځای ځای په ځای کړو، نو لرو:

$$f(x) = e^x \text{ und } f'(x) = e^x$$

اکسپوننشل فنکشن e^x تیک $y' = f'(x) = e^x$ مشتق لري

لرو:

اکسپوننشلفنکشن یو فنکشن دی، په کوم کې چې فنکشن او د تابع مشتق سره برابر دي

e - تابع بیرته د مشتق له لارې تولیدیږي یا لاس ته راځي.

بل بدیل یا الترناتیو: که ولرو $y = f(x) = e^x$ ، نو $y' = f'(x) = e^x$ لاس ته راځي.

په پورته جمله کې مو وښووول: که ولرو $y = b^x$ دو $y' = y \cdot \ln b = b^x \cdot \ln b$ دی.

که b=e کړدو، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x) = b^x . \ln e \quad = e^x \cdot \ln e \quad \Rightarrow \ln e = 1$$
$$= \underline{\underline{e^x \; ; x \in IR}}$$
$$f \; : f\,(x) = e^x \; ; \, D(f\,) = IR$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{f\,' : f\,'(x) = e^x \; ; \, D(f\,) - IR}}$$

گورو چې $f\,(x) = e^x \; ; D(f\,) = IR$ یواځنی تابع دی، چې مشتق یې پخپله $\underline{\underline{f\,'(x) = e^x \; ; D(f\,) - IR}}$ دی

$$f(x) = \log_a x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

د $a \in R^+ \setminus \{1\}$ $x \in R^+$ سره.

فرمول

$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)|$$

کیدی شي د $y = g(x)^{h(x)}$ بنې تابع چې $g(x) > 0$ دی، د مشتق لپاره وکارول شي

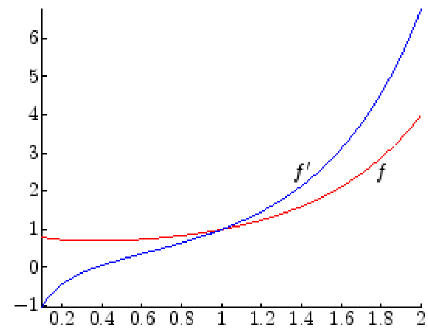
لاس ته ترې راځي:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx} \left(h(x) \ln g(x) \right) .$$

لیکونکی:(App/Höllig) اپپ ، هیولیک

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- -------



د $0 \rightarrow x$ لپاره $\ln f(x) = x \ln x$ د 0 په لور هڅیږي، پس f د 0 په لور. نو تابع په صفر کې ښي لوریزه متمادي ده. د مشتق لپاره یې دا حالت ده دی.

د $1 \rightarrow x^x$ او د $\ln x + 1 \rightarrow -\infty$ له امله د $0 \rightarrow x$ لپاره د f تابع په صغر کې یو عمود تآنجنت لري.

د $g(x) = x^{\ln x}$ لپاره لاس ته راځي:

$$g'(x) = x^{\ln x} \frac{d}{dx} (\ln x)^2 = 2x^{\ln x} \frac{\ln x}{x} .$$

)لیکونکي اپپ او هیولیګ

په طبیعت کې یې څیرنه:

د اکپوننشل توابعو مشتق

د تابع مساواتو جوړښت

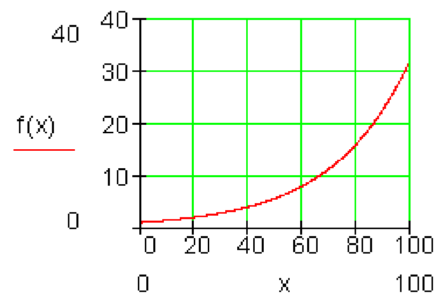
کولي باکتریا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوټې ویش (حجره وېش) له لارې زیاتیږي. و مساعدو شرایطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقیقو

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې ځان تجزیه کوي. د غه عملیيې لپاره یو ارزښت جدول :اړ، او گراف يې کاږو. دلته
د x اووښتوني (متغیره) په دقیقو د وخت لپاره ده.
د y متحوله د باکتریا گانو د تعداد لپاره ده.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100	دقیقې
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32	د بکتریاگانو تعداد

پورته جدول کې : x = دقیقې y = د بکتریاو تعداد



بیلگه: لرو : $f: f(x) = b^{3x^2-10};\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}$

د پورته تابع مشتق ونیسئ.

$$D'(f) = D(f) = IR \quad \Rightarrow D(f') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2-10} = g[h(x)]$$

$$g(z) = b^z \ \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b};\ z \in IR$$

$$h(z) = 3x^2 - 10 \ \Rightarrow h'(x) = \underline{6x};\ x \in IR$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$

$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \ \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$

$$= b^{3x^2-10} \cdot \ln b \cdot 6x;\ x \in IR$$

$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2};\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}}}$$

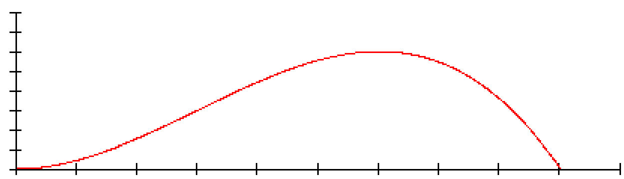
(c) ketabton.com: The Digital Library

- د مشتق استعمال په طبيعي علومو

په رياضياتو کې زيات وخت توابع راوړل کيږي، چې د يوې متحولې(اووښتونې) x په واک کې وي.

په طبيعي پوهنو کې زيات وخت توابع څيرو، چې د وخت په واک کې وي.

لکه په شکل کې د يوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کيږي)



بيلګه: د يوه په برابرډوله بيره (تعجيل) غورځول شوي شي لپاره د پيل چټکتيا (لومړنۍ سرعت) $v_0=4\frac{m}{s}$ او $a=1,8\frac{m}{s^2}$ بيرې(تعجيل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

$$\boxed{s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t}$$

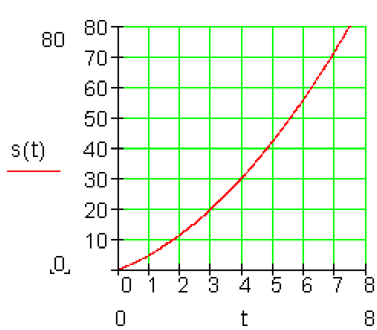
حل: د پورته ورکړشوي د v_0 ارزښت لپاره

باور لري: $S(t) = 0{,}9t^2+4t$

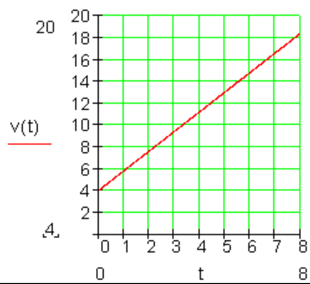
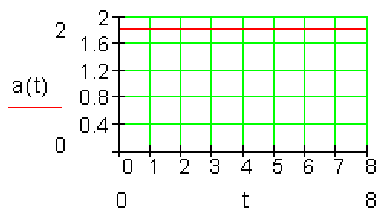
(tپه s (ثانيه) ، s(t) په m (متر))

منځنۍ چټکتيا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ده)

لحظوی(سملاسي) چټکتيا په لاندې ډول ده:



(c) ketabton.com: The Digital Library

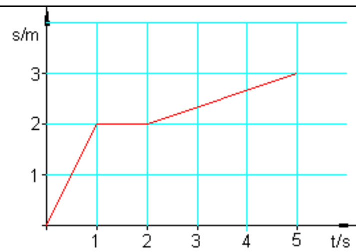
$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=v$ $v=s'(t)=1,8t+4$	
په v-t - ډیاګرام کې یوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتیا په برابر ډول زیاتیږي. دا دلته ثابته جګېدنه $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ده او $a=1,8\frac{m}{s^2}$ بیړه(تعجیل) ده.	
د بیړې یا تعجیل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي: $v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=a$	

پام : د یوه برابرډوله په بیړه (تعجیلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

$a(t)=v'(t)=a$ $\quad v(t)=s'(t)=at+v_0$ $\quad s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t$

د یوې چټکتیا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره v(t)=s'(t) لرو. د s'(t) لپاره داسې $v(t)=s'(t).$ هم لیکو.

فعالیت:

۱) د یوه خوزنده تن یا جسم د لار-وخت-دیاګرام ورکړ شوی. الف: دا خوزښت تشریح کړی. ب : دې پورې اړونده د چټکتیا – وخت – دیا ګرام وکاږی.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

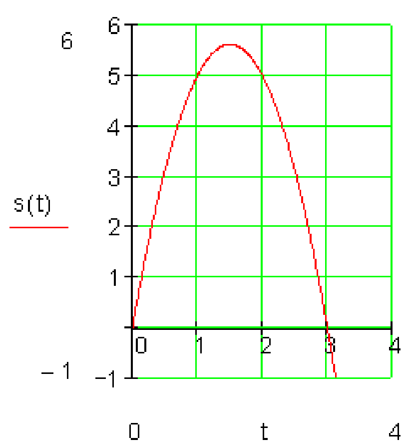
۲) یوه تیره د پیل چټکتیا $v_0 = 7\frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\frac{m}{s^2}$ (را ټولې (؟؟کردي شوې)سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تیرې چټکتیا (سرعت) صفر دی؟

ب) خورا جګ د میل جګوالی وشمیرئ.

۳) تابع د یوه خوزښت د لار-وخت-دیاګرام ښایي.



الف) د ورځني ژوند څخه یوه بېلګه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ټیک وي.

د منحني تلنه د $t > 3$ لپاره فزیکي څه مفهوم لري؟

ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-دیاګرام $s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ په لاندې ډول دی.

a او v_0 وټاکئ

پ) د اړونده بیرې – وخت-دیاګرم وکاږئ او دا تشریح کړئ. یوه منفي چټکتیا (سرعت) څه معنا لري؟

۴) یوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي ،چې د t وخت کې $S(t)= 5.t^2$ لار وهي.

په وختونو $t=1;2;3$ کې لحظوي چټکتیا(سرعت) وښایئ.

۴ – حل:

لحضوي چټکتیا د سملاسي تغیرارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t = 1:\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1+\Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $10 + 5\Delta x \to 10$

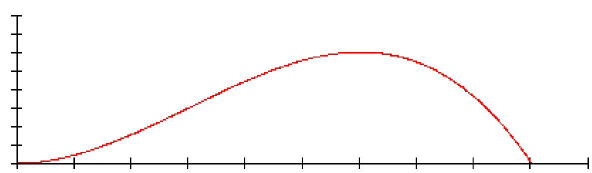
$$t = 2:\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2+\Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow 1$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري:: $20 + 5\Delta x \to 20$

$$t = 3:\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3+\Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow f$$

د $\Delta x \to 0$ ***لپاره باور لري*** $30 + 5\Delta x \to 30$

تمرين : لاندې د $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2\ ;\ x > 0$ تابع گراف او په ورنزدي توگه د فوټبال ميدان کې د توپ الوتنې منحني ښايي، چې لاندې ځيره لري.



لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

الف:توپ کوم خورا جگ(ماکسيمال) جگوالی لري او د وهلټکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟
ب : د توپ وهلټکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لرې بېرته ځمکې ته راځي؟

پ : د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهنې ځای څخه ۹ متره لرې او ۲ متره جگ دی. ايا توپ له دې څخه جگ الوزي؟

ت : توپ د تور لاين(د x محور) څخه په ۲ متره جگوالي الوزي. له گول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوی دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جګو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چي د ورپسي مشتق له لارې لاسته راځي

د $f'(x)$ بیا مشتق نیوني سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چي د دویم مشتقتابع په نامه یادیږي.

بیلګه:

$$f(x)=x^3+x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2x+1 \Rightarrow f''(x)=6x+2$$

د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور

$$f(x)=x^3+x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2x+1 \Rightarrow f''(x)=6x+2 \Rightarrow f'''(x)=6$$

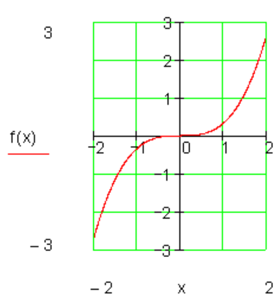
د $f(x)=\frac{x^3}{3}$ تابع دې ۴ واره مشتق ونیول شي

$$f(x)=\frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{3}=x^2 \Rightarrow f''(x)=2x \Rightarrow f'''(x)=2 \Rightarrow f''''(x)=0$$

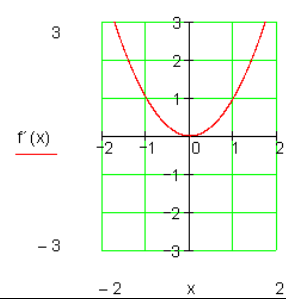
د تابع ګراف :

د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

$$f(x)=\frac{x^3}{3}$$

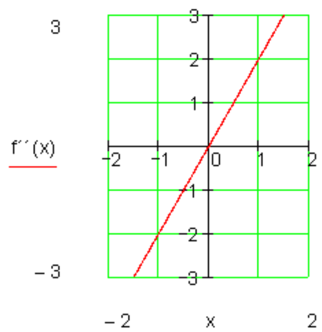


$$f(x)=\frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x)=x^2$$

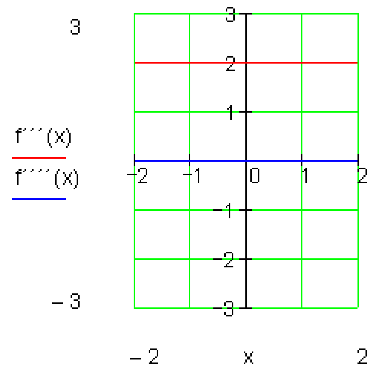


(c) ketabton.com: The Digital Library

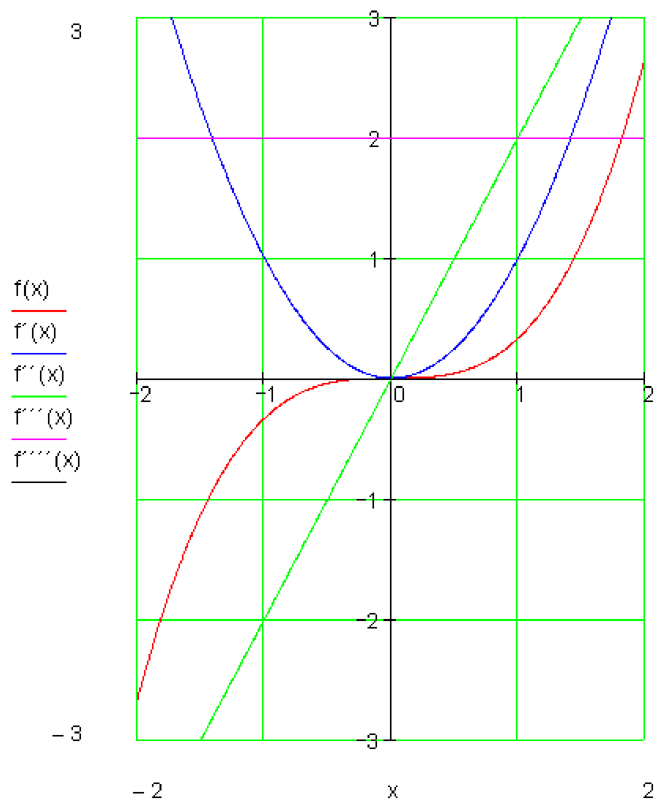
$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$



$f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$



د ټولو توابعو گراف په يوه پروت ولاړ سيستم



کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې:

اول :

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$$
$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$$
$$f''(x) = 24x - 4$$
$$f'''(x) = 24$$

دویم:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$$
$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 24x + \frac{1}{4}$$
$$f''(x) = \frac{9}{2}x - 24$$
$$f'''(x) = \frac{9}{2}$$

ټولګه: د f(x) لومړی مشتق دf(x) مشتق تابع $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ده :

دf(x) دویم مشتق د f'(x) مشتق تابع $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د f(x)دریم مشتق د f''(x) مشتق تابع $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: ییو په خوښه ویاند تابعf(x) په خوښه د مشتق قابلیت لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- - د ایمپلیڅیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د f(x) تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیڅیتExplicit ډول، که تابع متحوله د برابرون په یوه اړخ ځانله شوې وي:

یا داسې: که یوه تابع $y = y(x)$ په ایمپلیڅیته توګه ورکړ شوې وي، دا په دې معنا چې په د x او y کې یوه مساوات له لارې ورکړ شوې، نو کیدی شي دا مساوات پل برابرون تړلی یې په x پسې مشتق ونیول شي. دلته په ځانله توګه کیدی شي په $y = y(x)$ ځنزیرې قاونو وکارول شي.

د دې لپاره لاندې بیلګې راوړو:

بیلګه: $Y = 3x^2+7x$

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړه انځورنه د تابع د مساوات له مخې دی، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیځیت Implicit دول د بیلګې په توګه $Ex^2+7x+y=0$

فعالیت: که $Ex^2+7x+y=0$ولرو، ښنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟

قضیه: یوه تابع په ایمپلیڅیته بڼه $x^2+xy-y^2 = 1$ لرو، غواړو dy / dx پیدا کړو.:

ښوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2+xy-y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+(1\cdot y+x\frac{dy}{dx})-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}(2y-x)$$

$$\frac{2x+y}{2y-x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{-x+2y}\quad\vee\quad\frac{2x+y}{2y-x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایمپلیڅیټ مشتق د یوې تابع مشتقنیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیڅیت یعنې د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیڅیت یعنې د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي. دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیڅیت یا څرګند ډول ورکړ شوې وې، خو د دې مشتقنیول ستونځمن وي.

بیلګه : د $f(x) = x^x$ تابع مشتق په ورسره بلدو مشتققوانینو نه شي نیول کیدی، ځکه چی په بنسټ او جګ اکسپوننت کې یې متحولې پرتې دي. د لوګاریتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منحه وړل کېدی شي: $\ln f(x) = x \ln x$

اوس ایمپلځیت دا حل کوو، داسې چې دواړو لورو ته یې د x پسې مشتق نیسو:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln f(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځیرقانون له لارې صورت نیسي:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}y} f'(x) = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

دلته $y = f(x)$. دی. د لوګاریتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y} f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x}$$

که په $f'(x)$ پسې حل شي او د y له پاره بېرته $f(x) = x^x$ ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x) = y\left(\ln x + 1\right) = x^x\left(\ln x + 1\right)$$

بیلګه: دایره د r وړانګې سره مساوات $x^2 + y^2 = r^2$. لري. له دې ځنې برخې د $y =$ $f(x)$ تابع د ګراف په څېر لیکل کېدی شي. د دې مشتق د ایمپلیڅیت مشتق له لارې په لاندې توګه حل کېدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تعریف شوي مساوات کې $y = f(x)$ ځاي په ځای کوو:

$$x^2 + f(x)^2 = r^2$$

د دې مساوات د مشتق له لار لرو : $2\,x + 2\,f(x)\,f'(x) = 0$

د $f'(x)$ پسې د حل له لارې لاس ته راځي:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$$

د دې مساوات سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي، چې په داېرېتانجنت په ټکي (x,y) کې جګوالی $-\frac{x}{y}$ لري.

بیلګه: د بیلګیپه توګه د $E:\ x^2 + 3y^2 = 7$
له لارې ورکړ شوې ایلیپسې (هګئ یا بیضوي) له لارې لرو:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

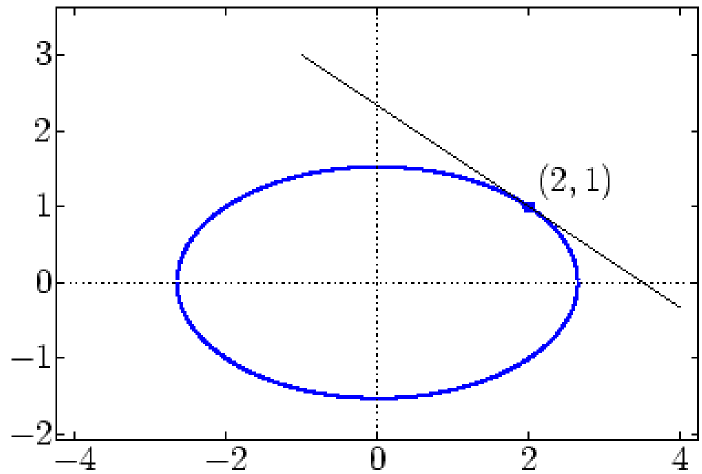
همداسې $y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$. له

دې سره کیدی شي په E باندې په یوه ټکي د $y \neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي. د بیلګې په توګه د $(2,1)$ لپاره لاس ته راځي

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه کیدی شي لوړ یا جګ مشتقونه هم وشمیرل شي. د yy' لپاره د ضرب قانون کارول یا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx}\left(2x + 6yy'\right) = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

.

بیرته په E د یوه ټکي د کواوردینات اینوولو او همدا اوس د $y'(x)$ ټاکلي ارزښت له لارې څرګند ارزښتونه وټاکل شي.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د بسټیزو مشتقونو جدول

(c) ketabton.com: The Digital Library

Nr	$f(x)$	$f'(x)$	نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	x تول عدد او $x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \quad x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \ a \ reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \ a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \ a \neq 1, \ x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته جدول په مرسته کيدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوښه د هرې شننيزې يا سپړنيزې(تحليلي) وييني يا افادې مشتق په شننيزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم بايد سړی همغه نيونی په نظر کې ونيسي.

تولګه

کمبنتويش Differenzenquotient (د سيکانت جګيدنه) يا منځنی تغيېر ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(fx_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق Differetialquotient (د تانجنت چګوالی يا لحضوي تغير ارزښت)

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتي قانون

$$f(x)=c\cdot u(x) mit\ c=cons\tan t$$

$$\Rightarrow f'(x)=c\cdot u'(x)$$

$$\boxed{f'=c\cdot u'}$$

د جمعي قانون

$$f(x)=u(x)+v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x)=u'(x)+v(x)$$

$$\boxed{f'=u'+v'}$$

د ضرب قانو

$$f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

$$\boxed{f'=u'\cdot v+u\cdot v'}$$

د ويش قانون

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)}{[v(x)]^2}$$

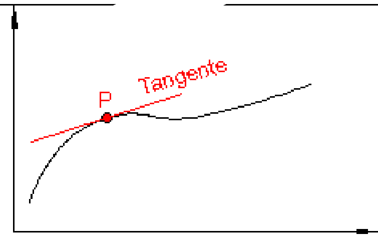
$$\boxed{f=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځنځیر قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$
$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

دا پورته الماني په پښتو شي(دا کمپيتريست سرته رسوم)

پيژند (تعريف): د يوه تابع ګراف ميل (جګوالی) په يوه ټکي P کې په همغه ټکي کې د تانجنت د ميل يا جګوالي ګراف سره برابر دی	

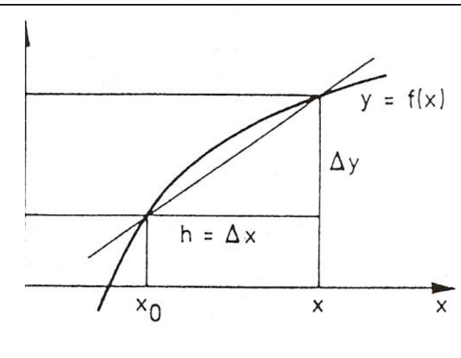
د کمښت ويش يا د تفاضل ويش **Difference quotient**

د يوې کرښې جګېدنه بې له مشتق نيونې ټاکلکېدی شي:

کرښه y=f(x) = mx+a لرو

د دې کرښې د جګيدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

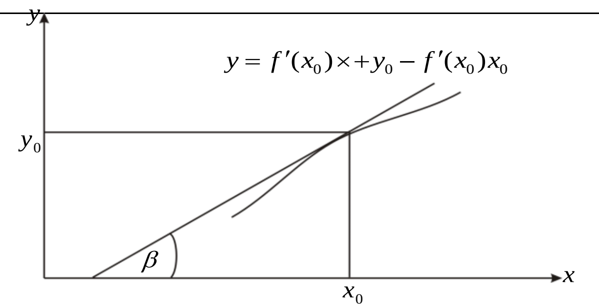
پيژند(تعريف2-1 y = f(x) دې د x_0 په يوه چاپيريال او په x_0 کې پخپله تعريف شوی تابع وي، x د x_0 څخه بيل خو د چاپيريال يو په خوښه يا په زړه پورې ځای دی(مخامخ ښيره دې وکتل شي). پس د تفاضل _ يا کمښتويش Differenc equtient د سيکانتی ميلان يا جګوالی شته دی، چې په لاندې ډول يې ليکو:	 د پيژند لپاره ښيره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

پیژند:که یو تابع یابلواك $y=f(x)$ د x_0 په ځاي کی د مشتق وړ(قابل اشتقاق،رابیلیدوړ) وي، نو هغه لاندنی کرښه چی د (x_0,y_0) څخه تیریږي او میلان یا جګوالی $f'(x)=\tan\beta$ یی دی په لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x)\ \Leftrightarrow\ f'(x_0)x+y_0-f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0,y_0) په ټکي کی د ورکړ شوې منحني یا کږی $y=f(x)$ تانجنت بلل کیږي(پرتله یامقایسه لاندې ځیره)	

لومړی د تیرو جملو له مخې ددیفرنسیشن قاعدې د فورمال قاعدو په څیر بیا راټولوو یا رایوځاي کوو، بی له دې چی نیونی ورکړو. په استعمال کي یی بایددا نیوني کلکی تر پام لاندې ونیول شي. د لته د $f(x)$ او $g(x)$ بلواك په f او g لنډیږي.

د مشتق نیونو یا رابیلدنومشتق قاعدو جدول

ګڼه د قاعدې نوم	فرمول
١ د ثابتې سره ځل(ضرب) قاعده	$(cf)'=cf'$
٢ د زیاتون – کمون قاعده	$(f\pm g)'=f'\pm g'$
٣ د ځل (ضرب) قاعده	$(f\cdot g)'=f'\cdot g'$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګڼه د قاعدې نوم	
۴ – وېشقاعده	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$
۵ – د زنځیروني قاعده	$y = f(z)\,;\quad z = g(x);\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$
د په څټ یا برعکس قاعده	$y = f(x)\,;\quad x = f^{-1}(y);\ \frac{dx}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y = b^x, (b > 0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f' = b^x \ln b$

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b > 0, b \neq 0, x > 0$ سره، مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'(x) = \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x.\ln b}$

--- د یوې تابع د مشتق قابلیت

موږ ولیدل، چې یوه تابع په هر ځاي کې تعریف نه ده، په هر ځاي کې حد نه لري اوهمداسې په هرځاي کې متمادي یا ناپرېکیدونکې نه ده. په همدې توګه یوه تابع هر چیرته د مشتق قابلیت هم نه لري.

تابع $f(x) = |x|$ په 0ځای کې تعریف نه ده:

د ټولو $x > 0$ له پاره باور لري $f(x) = x$

او له دې سره $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0} = 1$

د ټولو $x < 0$ لپاره د پورته په برعکس $f(x) = -x$ باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0} = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې کيږ- او ښی اړخيز حد يو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راوړل شوي ځای کې مشتقوړ نه ده.

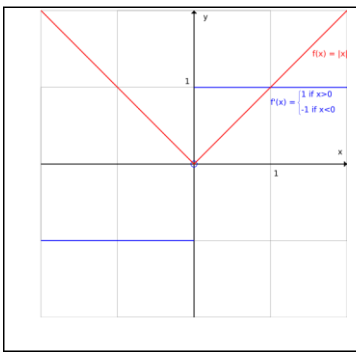
د تابع مشتق کېدنه په نورو ټولو ځايونو کې تر اوسه تل ورکړ شوې.

په صفر ځای کې سره له دې يو ښي اړخيز مستق ورکړ شوی، يعني لرو:

$$f'+(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=1$$

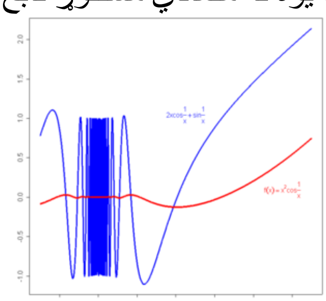
او يو کيڼ اړخيز مشتق هم:

$$f'-(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$



که مخامخ گراف ته وگورو، نو وبه پوهيږو، چې يوه مشتقوړ تابع بايد گوډه نه وي يا په کوم ځای کې ماته نه وي يا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.

د يوه نه متمادي مشتقوړ تابع لپاره بېلگه:



يو تابع متمادي مشتقوړ بلل کيږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که يوه تابع هرچېرته مشتقوړ وي، بايد نه دی چې مشتق دې يې هم متمادي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې په توګه:

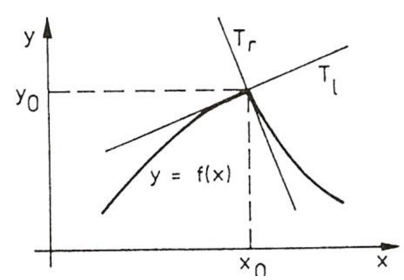
$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

تابع په هر ټکي کې حتي د $x=0$ سره مستقوړ دی. مشتق

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

یې ددې په خلاف په 0 ځای کې متمادي نه دی
مشتق د ټاکلو نیونویا فرضیو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چی لیمیټ (پولی) ته تګ ممکن وي یعنې چیرته چی د تفاضل ویش یو لیمیټ د $x\to 0$ لپاره ولري.

که کومه منحني چیرته راماته وي (څېره 4)، ګورو چی هلته تانجنت نه شته او همدارنګه جګیدل او هم د تفاضل ویش نه شته. پس د مشتق قابلیت د متمادیت په څیر د یوې تابع ځانګړي خوي دی.

	که په مخامخ څیره کی انځور شوې منحني د x_0 په ځاي کی یواځنی تانجنت هم ونه لري او له دې امله مشتق هم ونه لري، خو دلته یو کیڼ تانجنت T_1 یا کیڼ جګوالی لري اوپه دې ډول کیڼ مشتق لري او په همدې ډول یو ښی تنجت T_r او ښی جګوالی او په دي ډول ښی د تابع مشتق موجو د دی.

یوه نامتمادي(پرېکیدونکې) تابع کی د تانجنت یا مشتق پوښتنه بی معناده.

اړیین یا ضروري شرطونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دلته انځور شوی پرابلم یا مسأله اوس د شمیرنې د ټیك فرمول لاندې راوړو.

ولیدل شو چې په یوه ځای x_0 کی چی تابع متمادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نیسو چی دا دې ښوول شوی وی. دا څرگنده ده چې هره متمادي تابع باید ضرور مشتقوړنه وي. د بیلگي په توگه که تابع زاویه یا کونج ولري.

دې ته اړتیا ده چې وښایو، چې یوائي متمادي (نه پرېکیدونکې)توابع د مشتق قابلیت لري، دا بیا دا معنا لري چې هره تابع چې مشتقوړ وي باید لږ تر لگه متمادي(نه پرېکیدونکې) وي او په دې ډول مشتق متمادیت په بر کی لري یا خوندي لري، په دې معنا چی متمادیت د مشتقوړوالی لپاره اړیین یا ضروري شرطونه دي

جمله:

که د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي ده.

ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی حد شته دی.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

لیمیټ یاپوله یوائې هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د $x \to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې $f(x) - f(x_0) -> 0$ لاړ شي.
نو باور لري: $f(x) -> f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.
دا د متمادیت یا ناپرېکیدنې پیژند دی.
دا تفاضل یا کمښت وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:
دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توگه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یوائې په ځای (lokal) پورې اړ خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دی. لکه څنګه چی په متمادیت کی(لومړي څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف: د $y=(x)$ یوه تابع په واز اینتروال (a,b) کې، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کېږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=f'(x)\ ;\ a<x<b$$

که داد $x=x_0\in(a,b)$ په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره. دا په بند اینتروال $[a,b]$ کې مشتق وړ بلل کېږي، که دا سربېره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلګه: د توان تابع $y = x^n,\ n = 1 , 2 , 3,.....$ په هرځاي کی د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$$

د ساین تابع $y=\sin x$ او کوساین تابع $y=\cos x$ په هرځاي کی مشتقوړده، د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\sin x}{dx}=\cos x,\ \frac{dy}{dx}=\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

په یوه واز انتروال کی $y=f(x)$ مشتقوړ تابع مشتق بیرته $y'=f'(x)$ تابع ده ، نو په دې ډول یي د مشتق قابلیت اود متمادیت قابلیت پوښتنه کیدی شي.

پیژند: په یو د $x=x_0$ چاپیریال کي د مشتق قابل تابع (رابیلیدوړ بلواك) $y=f(x)$ په $x=x_0$ کې دوه واره د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ دی)، که د هغي اشتقاق(رابیلیدنه) $y'=f'(x)$ هلته د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ وي). سرې د $f'(x)$ مشتق د تابع(رابیلیدنه د بلواك) $y=f(x)$ دویمه رابیلیدنه بولي او لیکي:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0}=f''(x_0)=\left(\frac{df'(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو په یوه واز اینتروال کې مشتق کېدونکې تابع $y=f(x)$ هلته دوه واره مشتقوړ بلل کیږي، که د هغه مشتق $y'=f'(x)$ په دې اینتروال کې مشتق وړ وي.

ددې لپاره لیکل کېږي:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=\frac{df'(x)}{dx}$$

بیلګه ۲ . ۷ :

لاندې توابع $y=c; y=x^n; y=\sin x; y=\cos x$

هر چیرته دوه واره مشتقوړ دي، د لاندې مشتقونو سره:

$$\frac{d^2c}{dx^2}=0,\qquad \frac{d^2x^n}{dx^2}=n(n-1)x^{n-2},\ n\geq 2,$$

$$\frac{d^2\sin x}{dx^2}=-\sin x,\qquad \frac{d^2\cos x}{dx^2}=-\cos x\ .$$

دا په ۲ . ۴ کی تعریف شوي کیلمی کیدی شي چی په ساده ډول په خوښه پراخه شي یعنی داکسپوننت مشتقونو ته واړول شي(n – م مستق (رابیلیدنه) یی وشمیرل شي) .

د $y=f(x)$ تابع دلته n –واره مشتقوړ ده، که n – م مشتق ولري یعنی

$$\frac{d^ny}{d^nx}=\frac{d^nf(x)}{d^nx}=f^{(n)}(x)=\frac{df^{(n-1)}(x)}{dx};..$$

جمله:

که د$y=f(x)$ تابع د x0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي یا ناپرېکیدونکي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی پوله یا حد شته دی

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

پوله یا حد یواځی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د$x \to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانی$f(x)-f(x_0) \to 0$ لاړ شي.
نو باور لري: $f(x) \to f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.
دا د ناپرېکیدنې یا متمادیت تعیف یا پیژند دی.

دا کمښت-یا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:

دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یواځی په ځای (lokal) پورې اړوند یا تړلی خوي دی یعنی په یو ځاي $x=x_0$ کی تعریف دی. لکه څنګه چی په ناپرېکیدنه یا متمادیت کی(۱۹ - څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف :

د $y=f(x)$ یوه تابع په واز اینتروال(a,b) کی، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کیږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x); a < x < b$$

که داد$x = x_0 \in (a,b)$ په هر ځاي کی د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره.
دا په بند اینتروال[a,b] کی مشتقوړ بلل کیږي، که دا سربیره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتقوړ هم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

--- د معکوس تابع مشتق invers funktion

د یوه ګراف به مرسته تابع او د هغه په څټ تابع د بیلګی به توکه یوه مربع تابع.

اوس دې معکوسه تابع تر څیرني لاندې ونیول شي . دلته دې ونیول شي،چې $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې د $f(x) = 0$ سره او په یوه د x_0 چاپیریال کې جګیدونکی دی $f'(x_0) > 0$ او یا په کلکه لوېدونکی $f'(x_0 < 0$ او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعني $x = f^{-1}(y)$ ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې $x -> x_0$ او $f(x)$ د متمادیت له امله هم $y -> y_0$ او باورلري.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}}$$

که په د لاندې تکي ځای $x = x_0$ لپاره ساده بیرته x ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د $y = f(x)$ لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

د پورته ورکړ شوو نیونوسره سړی بیرته یو د تفاضل یا کمښت ویش لاس ته راوړي چې د هغه سره د

مروج ویش په څیر شمیرنه کیدی شي، لکه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

جمله:

د معکوس تابع مشتق : که (y = f(x د x په یوه چاپیریال کی د $x=f^{-1}(y)$ سره معکوس او همله د 0 =| (f’ (x سره مشتقوړ وي، نو معکوس تابع د (y = f (x سره مشتقوړ دی او باوري دی

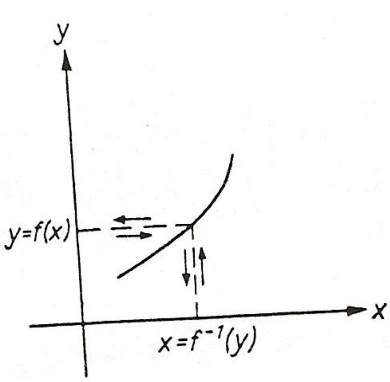
$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

حل: کیدی چی د f تابع د مشتق څخه د f^{-1} معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له 0<- x اوهم 0<-y او معکوس څخه، د (y = f(x+ x)-f(x سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

بالاخره لرو:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: د $y = f(x) = x^n; n = 1,2,3,4.....$ تابع لپاره که $x \geq 0$ وټاکل شي او په دې $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}; y \geq 0$ توګه معکوس تابع، نو لرو:

$\frac{dy}{dx} = f'(x)nx^{n-1}$ د $x>0$ لپاره. له دې امله د $y > 0$ لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\sqrt[n]{y}}{dy} = \frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{1-n} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{y}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي

$$dx^{1/n} / dx = (1/n).x^{n-1}$$

بیلګه: دا $y = x^{\frac{m}{n}}$ تابع د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره یعنې د خوښي کسري اکسپوننت یا په«جګ عدد» کیدی شي چی د مخه ځېړلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق نیول شي، چې د $x > 0$ لپاره باور لري.

$$y = x^{m/n} = z^m \quad , \quad z = x^{1/n}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} = m.z^{m-1}.\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}.x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبیعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې جدول کې لاندې د بنسټتابع مشتق ځاي په ځاي شوی. له کيڼ و ښي لور ته اول درځ نمره ده دويم درځ يی تابع $f(x)$ ښاى او په دريم درځ کی يی مشتق $f'(x)$ ځاي په ځاى دي او په څلورم درځ کی د راپيداشوې پارامتر او د متحولې x نيونی ځاى په ځاي شوي. که چيرې د واريابلی يا پارامتر لپاره نيونی نه وي شوي نو په خوښه نيول کيدی شي.

جدول د بنسټتابعو مشتق

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	وړاند نيونه يا فرضيه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	$n \;\; ganz, \;\; x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \;\; x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \;\; a \;\; reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \;\; a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \;\; a \neq 1, \;\; x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$
14	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$	$x \neq k\pi,\ k\ \ k \in z\ (Z)$
15	$Arc\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
16	$Arc\cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
17	$Arc\tan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
18	$Arc\cot$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

د جدول 20-2 او همدارنګه د جدول20-1په مرسته کيدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوښه د هرې شننيزې يا سپړنيزېې(تحليلي) ويينې يا افادې مشتق په شننيزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم بايد سړی همغه نيونی په نظر کي ونيسي.

بيلګه20-18: د زياتون قاعده کيدی شي د ځل قاعدې په مرسته د يوې ثابتی سره يوځاي يا ګډه شي او ډيرو زياتونکو يا د جمعې اعضاو باندې استعمال شي. لکه لاندې

$$y = f(x) = 3\sin x + 4e^x - 7tanx - 6\sqrt{x^3}$$

$$= 3\sin x + 4e^x - 7tanx - 6x^{\frac{3}{2}}$$

دلته tan x يواځي د $x \neq (2k+1)$ او د x^3 له امله يواځي د $x > o$ لپاره رابيليدوړ دی او ددې بنديزونو (محدوديتونو) له امله لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dy/dx = f'(x) = 3\cos x + 4e^{x} - 7 - 7\tan^{2} x - 6.(3/2).x^{)3/2)-1}$$
$$= 3\cos x + 4e^{x} - 7 - 7\tan^{2} x - 9\sqrt{x}$$

لکه چی بنسټيز بلواك او له دوي تولی راجوړې شوي سپړنيزې افادې هرچيرته متمادي يا ناپريکيدونکی وې، چيرته چي تعريف شوي وې. نو د جدول 20-2 له مخی بنسټيز بلواك يواځي تعريف ډيري کی رابيليدوړدی، په دې کي کوم تغير نه راځي که په دې بلواکو ځلور بنسټيزې عملي استعمال شي. يعني لاندې جمله باوري ده .

جمله20-8: د بنسټيز بلواکو د ځلورو بنسټيزو عمليو له لارې جوړې شوي شننيزې (تحليلي) افادې د دوي تعريفډيري په دننه کی رابيليدوړ ده.

که څوك ځنځيري بلواك جوړوي نو دا وينا بايد نوره هم رابنده يا محدوده شي

بيلګه20-19: دا بلواك $y = \sqrt{(x-1)^2(x+1)} = (x^3 - x^2 - x + 1)^{1/2}$

د $(x-1)^2(x+1) > 0$ ، پس د $x+1 > 0$ يعني$x > -1$ تعريف دی او هلته هم نه پريکيدونکی يا متمادي (د$x = -1$ په غاړه طبعآ ښی اړخيز) ده.

دا په ځانګړې توګه د $x = 1$ لپاره هم ناپريکيدونکی يا متمادي دی(20-7دې وکتل شي)د پيژنددېرئ يا تعريف ډيرئ دننه $x > -1$ دئ، او هلته تابع يا بلواك په واقعيت کی نه پريکيدونکی يا متمادي دئ .اوس نو مخ ته پروت تابع يا بلواك تړلی(ځنځيري) ورکړ شوی:

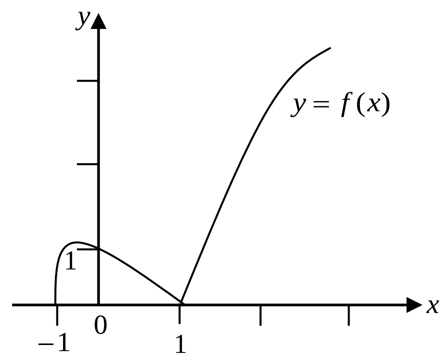
$$y = f(z) = \sqrt{2} = z^{1/2}$$
$$z = g(x) = (x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$z = g(x) = (x-1)2(x+1) = x3 - x2 - x + 1$$

بلواك $z = g(x)$ د ټولو x لپاره مشتقوړ يا رابيليدوړ دئ، تابع $y = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ له دې امله ځنځيري قاعده يواځی د $z > 0$ لپاره صدق کوي، پس د $x > -1,\ x \neq 1$ لپاره. هلته باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 - 2x - 1) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{2 \cdot \sqrt{(x-1)^2 (x+1}}$$



د یو ځنځیري تابع مشتقوړوالی د هغه- x ارزښتونو لپاره باور لري یاهلته ډاډوړ دی، کوم چي د د ننني تابع یا بلواك په دننه کی پراته دي او په هغو کی د دننني تابع ارزښت د دباندني تابع د د تعریف ډیرئ په دننه کي پروت وي. که د - x ارزښتونو ډیری د بند تعریفډیري دننه وښایي ، نو لاندې جمله باور لري.

جمله 20-9: هره یوه شننیزه یا تحلیلي افاده د خپل بند(محدود) تعریفډیري په دننه کی رابیلدوړ ده.

بیلګه 20-20: ځنځیري قاعده هم استعمالیدونکی ده، که په یوه تړلي بلواك کی د ننني بلواك پخپله یو تړلی بلواك وي، پس (د لازمه وړاند نیونو لاندې) باور لري

$$y = f(z),\ \ z = g(u),\ \ u = h(x)$$

پس د $y = f(g(h(x)))$

ځنځیري قاعده

$$dy/dx = (dy/dz)(dz/du)(du/dx)$$

فنکشن یا بلواك یا تابع

$$y = Arc\sin\sqrt{1 - x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو داسې تابع دئ. دلته لرو:

$$y = f(z) = Arc\sin z, \qquad z = g(u) = u^{1/2}, u = h(x) = 1 - x^2$$

دلته h(x) رابیلیدوړ دی، g(u) یواځی د $u > 0$ لپاره رابیلید وړ دی، پس د 1- ، $x_2 > 0$ او یا $x_2 < 0$ یاد $|x| < 1$ ، او $f(z`)$ د $|z| < 1$ لپاره، پس د $1 - x_2 < 1$ لپاره پس د $-x_2 < 11$ 1 لپاره په دې مانا چې $x_2 > 0$ د $|x| > 0$ لپاره.

رابیلیدوړوالی یواځې د لاندې چاپریال لپاره تضمین دی

$0 < |x| < 1 <=> -1 < x < 0$ او یا

$$0 < x < 1 <=> |x| < 1 \qquad x |= 0 \qquad (20.53)$$

دپيژنددېرئ پا تعر يفدېرئ دننه $|x| < 1$ دی. د تعريفدېري محدوديت(20-53 = دی.

فنکشن یا بلواك (20-52) یواځی همدلته تعریف او د (20-51) له مخی باور لري:

$$\frac{dArc\sin\sqrt{1-x^2}}{dx} = \frac{dArc\sin z}{dz}\cdot\frac{du^{\frac{1}{2}}}{du}\cdot\frac{d(1-x^2)}{dx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\cdot\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & fur \quad 0 < x < 1, \\ +\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & fur \ -1 < x < 0 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس دې یوه بله د دیفرنسیشن قاعده ورکړل شي کومه چې په جدول 20-1 کې غیر مستقیم خوندې یا په بل عبارت دننه ده. دا د لاندې شکل بلواك دیفرنځیشن دی

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

د ځنځیرقاعدې له مخې ترځیرني نیول کیدی شي، د $y = e^z, z = g(x)\ln(f(x))$ لاندې بلواك $u = \ln f(x) = \ln v, v = f(x)$ مشتق هم د ځنځیری قاعدې له مخې را پیداکیدی شي.

دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot = \frac{1}{v}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{او}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = e^z\cdot(g'(x)\ln f(x) + g(x)u')$$

$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

د ځنځیری قاعدې د نیونو په نظر کی نیولو سره او د جملی 20-10 له مخی لاس ته راځي

جمله : که $f(x)$ او $g(x)$ د $f(x) > 0$ سره د مشتق قابلیت لري ، نو $y = f(x)^{g(x)}$ هم د لاندې مشتق سره مشتقوړ دی.

بیلګه : تابع $y = x^x$ د $x > 0$ لپاره رابیلیدوړ دی. دا دې داسی ځای په ځای شي او له دې سره $f' = 1, g' = 1$ له دې امله اوس د $x > 0$ لپاره لرو:

$$dx^x / dx = x^x(\ln x + 1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: د $y=(x^2-1)^{\ln x},\ x>1$ دیفرنسیشن سره باید د $g=\ln x$ له امله وغوښتل شي چی $x>0$ او د $f=(x^2-1)>0$ له امله باید باور ولري $x^2>1$ او له همدې امله $|x|>1$ پس کیدی شي چی د $x>1$ لپاره د $f=x^2-1$ او $g=\ln x$ سره استعمال شي:

$$\frac{dy}{dx}=(x^2-1)^{\ln x}\cdot\left(\frac{1}{x}\ln(x^2-1)+\frac{(\ln x)\cdot(2x)}{x^2-1}\right)$$
$$=(x^2-1)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(x^2-1)}{x}+\frac{2x\ln x}{x^2-1}\right),\quad x>1$$

بیلګه یا تمرین: د $y=f(x)=x^n;n=1,2,3,4......$ تابع لپاره که $x\geq 0$ وټاکل شي او په دې توګه $x=\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}};y\geq 0$ یې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

، نو لرو : $\frac{dy}{dx}=f'(x)nx^{n-1}$ د $x>0$ لپاره له دې امله د $y>0$ لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d\sqrt[n]{y}}{dy}=\frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{n\cdot x^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot x^{1-n}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1}{n}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي.

$$\frac{dx^{\frac{1}{n}}}{dx}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

بیلګه -- د $y=x^{\frac{m}{n}}$, $m,n\in N$ تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره یعني د خوښي کسري اکسپوننت

یا په«جګ عدد» کیدی شي چی د مخه څېړلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق ونیول شي، چې د $x>0$ لپاره باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = x^{\frac{m}{n}} = z^m \quad , \quad z = x^{\frac{1}{n}}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = m.z^{\,m-1}.\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}.x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبيعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

بیلګه : یوه بډای چی په یوه ټاکلي وخت کی ټولسټ (ټولډیری) M تولید کړي او دا ټل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي.
کیدې شي چي سملاسی د دې تولید په ټولسټ (ټولډیری) M کی تولید کړي ، په یوه زخیره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یی سملاسي ورسوي. دلته د زېمتون (زخیره کونې) لګښتونه راپید کیږي(ددې د زخیرې لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چی تولید په لږه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخیره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر ټل تولید په دې ډول تولید باندې درول، لګښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لګښتونه یی بولو.
کومه ډیری x (ازاده لویه) باید تولید شي، چی د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟
د زخیرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چي خرڅلاو ته چمتو کیږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتیا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون ټل باید تغیر وخوري یعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چیرته چی F ثابت(همغه) یا په کلکه اېښول شوي لګښتونه دي، Lد زخیرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لویه x د

(c) ketabton.com: The Digital Library

تولیدډیری M څخه نه شي ستربډلی ، لوئیدلی یا غټیدلی. له دې امله صدق کوي_0 $\leq x \leq M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

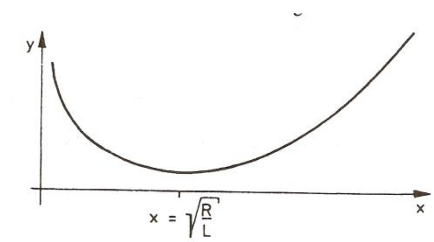
$$y = f(x) = F + Lx + R/x = Min! \quad (0 \leq x \leq M$$

(لمړی $f(x)$ دوه واره دیفرنځیال کیږي یا یي دوه واره رابیلیدنه نیول کیږي:

$$f'(x) = L - R/x^2 , \qquad f''(x) = 2R / x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$, پس لرو $x = R / L$ ؟؟؟

د $0 \geq x$ له امله $f''(x) \geq 0$ هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کرږې تګلار په څیره ۲۰ . ۱۵ کی انځور شوې.

څرګنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = (R / L) > M$وي، نو یو منیموم په څنډه $x = M$ لرو.

نامساوت $x = R / L < M$ دا مانا لري $R / L < M^2$ په همدې ډول $R^2 < M^2L$.

پس مخ ته لرو: $x = R/ L$ د $R < M^2L$ لپاره او$x = M$ د $R > M^2L$ لپاره

نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکلی بیلګه : د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي:

$R = 1000 < M^2L = 108 . 10 = 109$ ستر یا غټ ازاد لګښت دی

$x = R / L = 1000 / 10 = 100 = 10$ ازاد a دلته 10 یوونه باید
ورزیات شي ، چې 10000 یوونه تولید کړيږد $M = 10 , R = 1000 , L = 1$ لپاره
صدق کوي $R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده .
یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

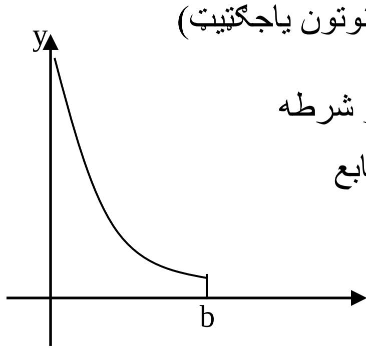
د رول قضیه (Rolle)

ننوتنه :
که د f یوه تابع په بند اینتروال [a,b] کې متمادي اوc د a او b ترمنځ پروت وي، نو هلته
لږ تر لږه یو عددk د f(a) اوf(b) ترمنځ شته، داسي چې f(c) = k دی

د وایرشتراس قضیهWeierstrass

که د fیوه تابع په بند اینتراوال[a,b]کې متمادي یا ناپرېکیدونکې وي، نوfپه دېاینتراوال
کې لږ تر لږه یو جګ ارزښت(اعظمي قیمت) او یو ټیټ ارزښت(اصغري قیمت) نیسی

دلته شننیز یا تحلیلي ځواب نه ورکول کیږي، دا وینا د لیدلو له مخې معقوله برېښي.
کیدی شي چې یو یوغږیز (monoton مونوتون یاجګتیټ)
ارزښت د اینتروال په غاړه هم پروت وي.
د اینتروال محدودوالی (بندوالی) بی قید او شرطه
حتمي دی. د بیلګې په توګه د $y=f(x)=\frac{1}{x}$ تابع
په نیم بنداینتروال [0,b)کی متمادي ده،
مګر پورته لور ته بنده نه ده، چې په دې



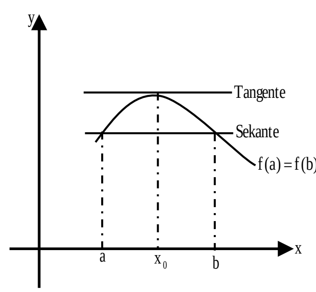
(c) ketabton.com: The Digital Library

توګه اعظمي ټکی نه لري.

٣. د مشتق منځ ارزښت قضیي

د تانجنت او قاطع ترمنځ او په همدې ډول د مشتق – اوتفاضل ویش ترمنځ داسی نږدې اړیکي وجود لري، کومې چی د انالیوزې په منځ ارزښت قضیو کی تشریح کیږي.
د تابع او انحرافي ارزښتونوخویونو څخه لومړی پسی ترلې لاندې د رول قضیه لاس ته راځي

د رول (Rolle) قضیه:



یوه د f تابع دې په بند اینتروال[a,b] کې متمادي وي د f(a)=f(b)سره او په واز ایتروال(a,b) کی مشتقوړ، نو لږ تر لږه یوځاي $c \in (a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.
حل :

١) کهf ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$
٢) که f ثابت نه وي، نو د وایرشتراس د قضی له مخی لږ تر لږه د تابع یوخورا لوي او یوخورا کوچنی ارزښت موجود دئ. دا ارزښتونه توپیر لري، ځکه چیfثابت نه دی. نو له دئ کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د (f(a)=f(b سره نامساوي دی . په دې اساس د اینتروال په دننه کی یو مونوتون (جګټیټ) ځای x_0 موجود دی. د مشتقوړ توابعو مونوتوني (جګټیټ ارزښت) شتون د اړیین یا ضروري شرطونوقضي له مخی لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$

تر اوسه مو وښوول، چی د لازمو شرایطو لاندې یوې افقي قاطع ته یو افقي تانجنت هم شته دئ.
دا هندسي پرابلم کیدی شي چی عمومي شي.

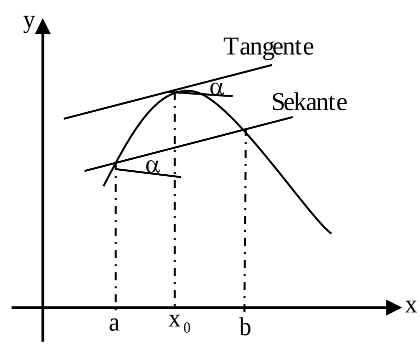
(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې ایا یوې مایئلی قاطع ته په همغه ډول تانجنت د همغه میل (جګوالي) سره جوړیدلی شي؟

ځواب یی لاندې قضیه راکوي

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قیمت) قضیه:
که y=f(x) تابع په بند اینتروال[a,b]کی متمادي او په واز اینتروال (a,b)کی د مشتق وړ وي ، نو هلته یوځاي $x \in (a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چی لرو:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$



(خیره ښه نه ده انځور شوې تیک دې
د الفا د کونج لاندې ضلعې باید د x محور سره غبرګې وي)
حل:
دا پرابلم په یوه مرستندوې تابع داسی تعریفیږي، چی د رول قضیه وکارول شي. د دې لپاره د قاطع مساوات رامخ ته کوو:

$$y=g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

د مرستندوې تابع په څیر د مشتق تابع جوړیږي:

$$h:\ h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو باور لري:$h(a)=h(b)=0$. برسيره پر دې h په (a,b) کې د مشتق وړوالی لري او په [a,b]کې متمادي ده. له دې سره د رول د قضيې وړاند نيونه(فرضيه) ورکړ شوې، دا په دې معنا چې يو ځاي $x \in (a,b)$شته دی د $h'(x)=0$ سره، چې له هغې لرو:

$$h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0, \text{ يعني } f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

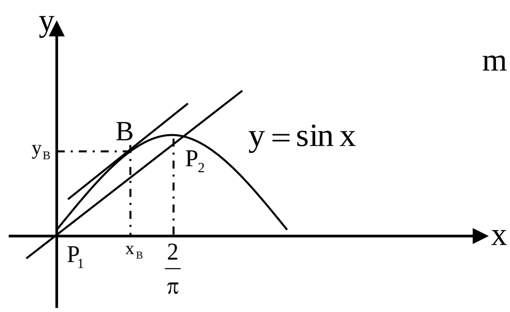
پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بېلګې نوره هم روښانه کړي.

بيلګه :

د $f(x)=\sin x$ يوه تابع دې داسې ورکړشوي وي،چې په يوه ټکي $B(X_B, Y_B)$کی تانجنت د منحني مماس وي، اوکوم چه په $P_1(0,0)$ او $P_2(\frac{\pi}{2},1)$ټکو کی همغه ميل يا جګوالی لري لکه قاطع.

ځواب: د قاطع (غوڅي) ميل ياجګوالی:

$$m = \frac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{2}{\pi}$$



د منحني ميل د $B(x_B : y_B)$ په ټکی کې $f'(x_B) = \cos x_B = \frac{2}{\pi}$

له دې څخه لاس ته راځي: $x_B = \arccos\frac{2}{\pi} = 0{,}88$ او $f(x_B) = f(0{,}88) = 0{,}77$

لمس ټکی: $B(0{,}88 : 0{,}77)$

د تانجنت مساوات: $y = \frac{2}{\pi}(x - 0{,}88) + 0{,}77$

د منځ قضی د عموميت څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پراخه شوې یا غزېدلې منځقضیه :

که $u = f(x)$ او $v = g(f)$ په بند اینتروال[a,b]کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال (a,b)د مشتقوړاو $g'(x) \neq 0$ باور ولري ، نو د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځاي $x_0 \in (a,b)$وجودلري چی لاس ته ترې راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: د $g'(x) \neq 0$ له امله g معکوس کېدونکی ده او v=g(x) مساوات دx په لور معکوس کیدنه ورکوي، یعنې $x = g^{-1}(v)$

که دf په تابع کی هم نوې متحوله ځاي پر ځاي شي، نو یوه زنځیري تابع لاس ته ترې راځي:

$$u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

د زنځیرې قاعدې له مخې یې دا مشتق لاس ته راځي:

که په u=h(x) تابع د $v_1 = g(a)$او $v_2 = g(b)$ سره د وسطي قیمت قضیه استعمال شي، نو د ځای $v_0 \in (v_1;v_2)$ په لاندې ډول موجود دی:

$$\frac{h(v_2)-h(v_1)}{v_2 - v_1} = h'(v_0)$$

له دې څخه د h(v)=f(x),v=g(x) او $x_0 = g^{-1}(v_0)$سره لاس ته راځي:

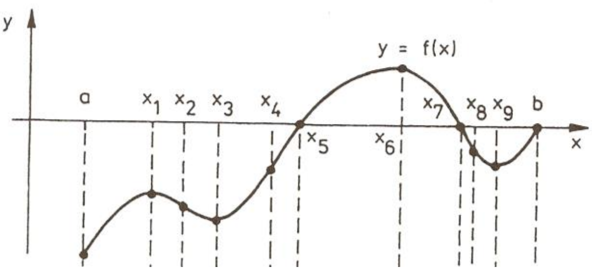
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

-
-
-
-
-

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوغږیزې توابع(Monotony (یوناني: یوغږیز، برابرېوله)

جګیدونکي(متزاید)، ټیټېدونکي(متناقص) توابع(جګ-ټیټېدونکې توابع)



که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره دf یوه تابع په یوه اینتروال کې $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$ وي، نو تابع په دې اینتروال کې مونوتون جګیدونکې(- ټیټیدونکې) بلل کیږي، که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري، نو دا $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ کره یا ټینګه مونوتون جګیدونکې (همغږیز ټیټیدونکې) بلل کیږي.

لاندې قواعد، چې له همغږیزوالي په لاس راځي، د همغږیزوالي حالت لپاره ګټور دي.

دf یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې مونوتون جګیدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \ne x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

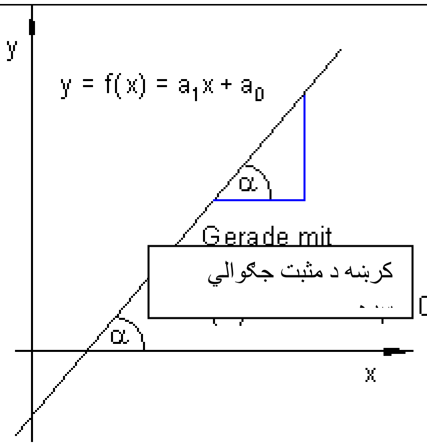
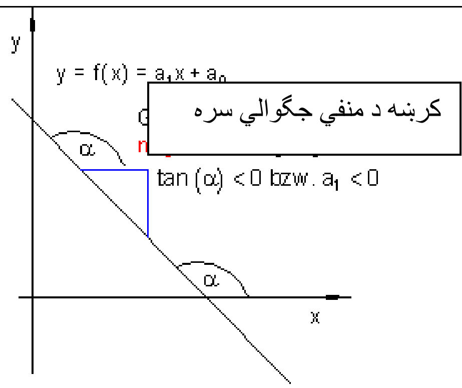
د f یو تابع ټیک هلته په D کې مونوتون ټیټېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \ne x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوغږیزوالی (یکنواخت) Monotony جګیتوالی، د جګتیتوالی جملې

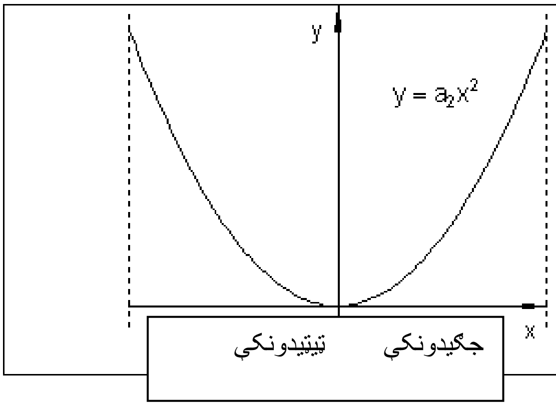
دا $f(x) = a_1x + a_0$ کرښیز(خطي) تابع خورا ساده تابع ده، چې انحناء لري. ددې لپاره مسئول يې ثابته جګېدنه یا ثابت میل $a_1 = \tan(\alpha)$, د دی، چېرته چې α د کرښې او مثبت لوریز د x -محور ترمنځ زاویه(کونج) ده. په مخامخ شکل کې :کرښه د مثبت میل سره $\tan\alpha > 0 \Leftrightarrow a_1 > 0$	
که $0 < \alpha < 90^0$ یا $0 < a_1 < \infty$ وي ، دا په دې مانا چې $\alpha > 0 \vee a_1 > 0$ همداسې(⇔)، نو کرښه جګیږي. دا دا معنی لري، چې د جګېدونکي x سره د تابع f(x) ارزښت هم جګیږي. په مخامخ شکل کې: کرښه د منفي جګېدنې سره: $\tan\alpha < 0$ همداسې(⇔ $a_1 < 0$)	 داپورته داسې دی: $\tan\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$

که $90^0 < \alpha < 180^0$ یا $-\infty < a_1 < 0$ وي، دا په دې معنی، چې $\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$ ، نو کرښه ټیټیږي یا لویږي. دا په دې معنی، چې د جګېدونکي x سره د تابع ارزښت f(x) کوچنی کیږي.

په پورته دواړو حالتونو کې د همغږيزي تابع (یا د جګ-ټیټېدونکي تابع) غږیږو او له یوه مونوتون جګېدونکي تابع څخه، که $a_1 > 0$ وي. له یوې مونوتون ټیټیدونکي تابع څخه ، که $a_1 < 0$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کیږي، چې د منحنیو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټولیزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي تانجنت اینبول کېدی شي.



له دې امله د تابع $f(x)=a_2x^2$ لپاره باور لري:

په اینتروال $I_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ کې تابع f(x) مونوتون تیټیږي. او په اینتروال $I_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې f(x) مونوتون جګیږي.

لکه د کرښې په ګراف کې، چې جګېدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعنې جګېدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحني له یوه ټکي څخه بل ټکي ته تغیر خوري.

د تانجنت جګېدنه >0 ← منحني مونوتون جګیږي

د تانجنت جګېدنه < 0 ← منخني مونوتون تیټیږي

د تانجنت جګېدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کیږي.

روښانه ده چې د$f(x)$ تابع لومړی مشتق $f'(x)$ د تابع میل (جګوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتونی قضیه په لاندې ډول فرمولوو .

قضیه: د$f(x)$ تابع دې په اینتروال Iکې مشتقوړ وي.

۱ که د $f(x)$ تابع په اینتروال Iکې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in I$لپاره

که $f(x)$ په اینتروال I کې مونوتون تیټیدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in I$ له پاره.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

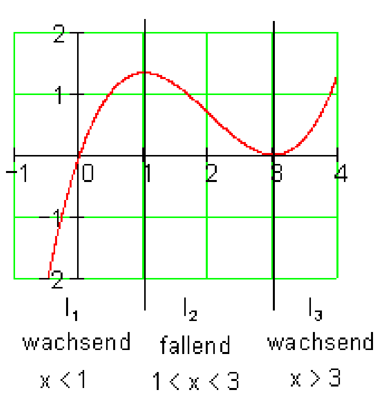
۲ . که $f'(x) \geq 0$ وي، دټولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په اینټروال I کې مونوتون جګېدونکې ده.

که $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په ایټروالI کې مونوتون ټيټېدونکې ده.

۳ که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in I$ لپاره، نو$f(x)$ په اینټروال Iکې په کلکه مونوتون جګېدونکې ده

که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره،نو $f(x)$ په اینټروال Iکې په کلکه مونوتون ټيټيدونې ده.

د مونوتوني پيژند ورشو (تعريفساحو) ټاکنه:

بلګه: د تابع ګراف څخه زيات وخت کېدی شي د مونوتوني ساحې لږ يا زيات ټيک و لوستل شي. لاندې ګراف لرو: مخامخ له بنې – وکيڼ لور ته:جګېدونکي، ټيټيدونکي ،جګيدونکي	$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ 

د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکی دی.

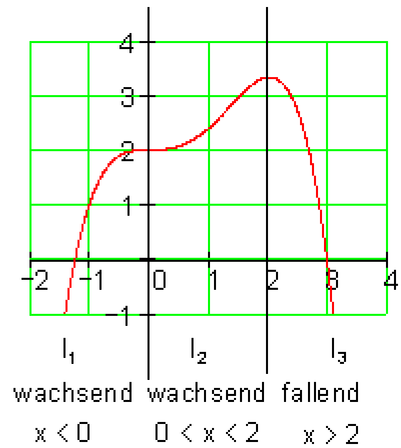
د $I_2 = \{1 < x < 3\}_{\mathbb{R}}$ له پاره $f(x)$ مونوتون ټيټېدونکې ده.

د $I_3 = \{3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکې ده.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) := \frac{-1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2$$



بيلكه:

پورته له ښي – وكيڼ لور ته: جګيدونكي، جګيدونكي، ټيټيدونكي

له ګراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل كيږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په كلكه مونوتونج ګېدونكي ده.

د $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$ له پاره $f(x)$په كلكه مونوتونجګېدونكي ده.

د $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په كلكه مونوتون ټيټېدونكي ده.

ځاى اړونده افراطي ټكي

يادونه: كه په ليكنه انحرافي ټكي ګورئ،نو هغه افراپي ټكي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د f(x) لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x) = 0 ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مخ ته لرو.

که دf(x) لپاره د x_0په ځاي کی f' (x)=0اوf''(x)>0 ولرو نویو نسبي ټیټ ټکمو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: f ' (x) = 0 او f '' (x) < 0 ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جگ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چی f ' (x) = 0 وي، او د f '' (x) مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چی ایا یو ټیټ ټکی(اصغریټکی)او که جګ ټکی(اعظمي ټکی) مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

۱ – دا اړیکي یواځي د x_0 لپاره ارزښت لري چی د تعریف ست په دننه کی پروت وي او هلته د y = f (x) تابع پوره څو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څنډو) او د هغوځایونو له پاره چی هلته f (x) تابع کم یا هیڅ مشتقوړ نه وي، ځانګړو څیړنو ته اړتیا ده.

۲ - شرایط چی f ' (x) = 0 وي (مشتقوړ تابع) یواځی د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی (ضروري یا اړین شرایط) .

۳– شرایط f ' (x) = 0 او f '' (x) ≠0 د بحراني ټکي لپاره یواځی پوره کیدونکی دی او نه ضروري)

بیلګه :

د f(x) = x^2 + 2 تابع ګراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د ګراف او د مشتق له لارې وټاکئ.

حل: د بیلګې له ګراف څخه روښانه ده، چې تابع د x=0 په ځاي کې خورا ټیټ ټکی(اصغري-) لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

گراف: که گراف دې ګران لوستونکي وباسي

د انحراف ټکي له پاره اړيين شرطونه:

۱ – د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x) = 2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 له پاره صفرځاي لري، يعنې دلته يو بحراني ټکي پروت دی.

۲ – د تابع دويم مشتق: $f(x)'' = 2$. دا چې $f''(x) > 0$ دی، نو يو نسبي ټيټ ټکي مخ ته لرو.

بيلګه : د $y = x^4$ تابع د $x = x_0 = 0$ لپاره نسبي ټيټ ټکی لري او باوري دي

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

ګورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوي دی.

د پورته شنني څخه لاندې پيژند ته راځو:

پيژند : د $x = x_0$ په چاپيريال کې د $y = f(x)$ تعريف شوې تابع يونسبي جګټکی په همدې ډل نسبي ټيټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري:

$$f(x) > f(x_0) \quad \text{په همدې ډول} \quad f(x) \le f(x_0)$$

جمله : (د يوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کی مشتقوړ تابع $y = f(x)$ انحرافي لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي (يادونه ۲دې مقايسه شي): چيرته چې $f'(x) \neq$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځې د x_0 ځاې په پوښتنه کې راځي، چې د هغي لپاره لرو$f'(x) = 0$ ، خو حتمي نه ده چې $y = f(x)$دې يواکستريموم و لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : (د یوه افراطي ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0 \quad , \quad f''(x) \neq 0$$

نو تابع $y = f(x)$ هلته یو افراطي ټکی لري. خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي:

$$f''(x) < 0$$

خورا جگ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي:

$$f''(x) > 0$$

له ښی لور انحنا یا کوږوالی اوله کیڼ لور انحنا یا کوږوالی (مقعر او محدب)

که په یوه اینټروال کې د مشتقوړ تابع f دویم مشتق $f''>0$ وي، نو په دې اینټروال کې گراف کیڼ کوږ شوی یا کینه انحنا لري او که دویم مشتق $f'' < 0$ وي، نو د تابع گراف ښی کوږ یا ښی انحنا لري.

دوه ځیرې (د لاندې بېلگې څیره و باسی ؟-)

بیلگه:

ټول گونگتابع (راشنل تابع) f د $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کې کینکوږدی(کینه انحنا لري(ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشوکې ښی کوږ دی(ښی انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (لومړی مشتق(

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f''(x) = 6x-4$

د $6x-4>0 \Rightarrow x > 2/3$ لپاره کيڼ ګوږوال (کينه انحنا (ننوتی یامقعر)

د $6x-4<0 \Rightarrow x < 2/3$ لپاره ښی کوږوالی(ښی انحنا(وتلی یامحدب))

بیلګه: د مات راشنل تابع $f(x) = \frac{1}{x+2}$ ګراف یو های پاررابول دی. د های پارابول کومه څانګه کینه کږه ده یا کینه انحنا لري(مقعر)، او کومه یوه یې ښی کوږوالی - یا ښی انحنا لري(محدب)؟

دویم مشتق : $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$; $f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$

صورت تل مثبت دی.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د های بارابول څانګه ښی کوږوالی یا انحنا لري (وتلی یا مخدب).

د لپاره $x > -2$ مخرج او همداسې ټول کسر(مات) مثبت دی.

های بارابول کینکوږ دی یا کینه انحنا لري(ننوتی یامقعر).

بیلګه : د دواړو توابعو $f(x) = \sqrt{x}$ او $g(x) = \sqrt{x^3}$ کوږوالی(انحنا) دې یو د بل سره پرتله شي.

دواړه توابع د لپاره تعریف دي.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad g'' = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

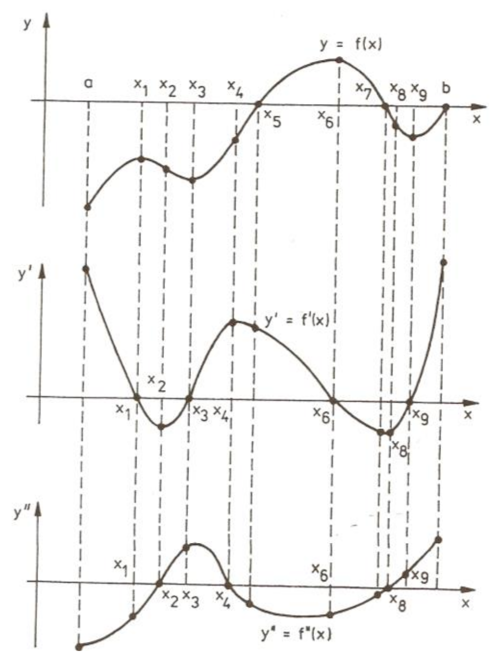
(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مشتقونه د $x \in R^{+}$ پاره تعریف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف ښی کوږوالی یا انحنا لري، دا یو شي لور ته واز پارابول ښايي.

په همدې ساحه کې $f''(x) > 0$ دی. اړونده ګراف کيڼ کوږ دی یا کينه انحنا لري. اړونده ګراف یو کيڼ کوږوالی یا کينه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د انعطاف ټکي(اوړونټکي)



یادونه: ولې اوړنټکی؟

وبه ګورو، چې په دې ټکي کې ګراف خپله لور اړوي، نو ...... موږ له پورته خیرې اټکل کولی شو چې : که د x_0 ځاي کی دا لاندې ولړو$f''(x) = 0$ او $f'''(x) > 0$، نو یو ښی-کيڼ- انعطاف ټکی (اوړونټکی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

مو مخ ته پروت دی.

برعکس(په څټ):

که وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) > 0$ نو یو کینې - ښی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

د ا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چی $f''(x) = 0$ وي ، داچی دا ښی -کینې - او که کینې- ښی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f''(x)$ مخ نښه یی ټاکي.

۴ - شرایط $f''(x) = 0$ د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړیین یاضروري دي.

د $y = x^4$ لپاره $f''(0) = 0$ دی، مگر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

۵ – شرایط $f''(x_0) = 0$ او $f'''(x_0) \neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکي دي.

گورو چی $y = f(x) = x^5$ تابع د $x = x_0 = 0$ ځاي کی یو انعطافټکی لري او باوري دي:

$$f'(x) = 5x^4 \quad , \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 20x^3 \quad , f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 60x^2 \quad , f'''(x) = 0$$

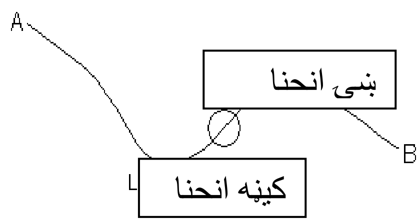
گورو چي دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

ترمخ راوړني او د کلمې روښانه وني:

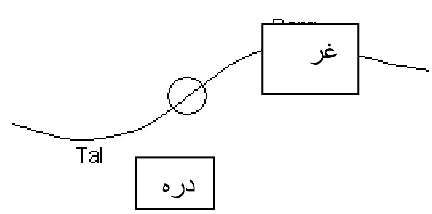
د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توگه مخ ته ځو:

.

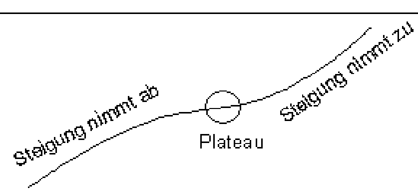
(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr>
<td>د بايسکل ځغاستي چي له A څخه ځغلي د منحنی څخه تېرېږي او B ته رسيږي.
د همغه وخت د بايسکل ځغاستي د انډل حالت د ځغاستي په وخت کي په پام کي ولری. د کيني منحني(د کيڼ لوري د انډل حالت) څخه وروسته د ښی لورې منحني کي ځغلي.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

د کيني- او ښی منحني(کرږې) ترمنځ بايد د بايسکل انډل سيده ولاړ وي(عمود وي)، چي دا د انډل بدلون دی له کيني لوري و ښی لوري ته. دا د کيني او ښی منحني ترمنځ اوړيدنه ياد انعطاف ټکی بلل کيږي.

<table>
<tr>
<td>تاسو له بايسکل سره په يوه غونډی ځغلی. وروسته له هغي، چي له تالي څخه تېرېږي، نو لار په جګيدو پيل کوي. په لومړي سر کي نرم او بيا په نيغه جګيږي، بيا په دي پسي جګوالی بېرته کميږي، چي پاس د غونډی په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. يو چېرته په غونډيپورته صفرارزښت ته رسيږي. يو چېرته په لار جګيدنه خورا لويه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>د بايکل ځغلونکي بل حالت، چي له ښنګ دياګرام څخه يي رانيسو:

په غره د بايسکل ځغاستميل ياجګيدنه لومړی کميږي، چي له سره بېرته جګه شي.

ددي ترمنځ يوه ساحه شته، د کم جګوالي سره (يوه نسبتاًهواره).ˇ دي نسبتاً هوار ځای کي د ټوټه کرښي جګيدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونټکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.</td>
<td>

له کيڼ و ښي لور ته: جګيدنه کميږي، هواره ، جګيدنه زياتيږي</td>
</tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهیږو، چې د یوې تابع لومړی مشتق د تابع د جګوالی تابع دی، چې له ګراف څخه یې جګوالی لوستل کیږي.دا چې د انعطاف ټکی خورا لوي یا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پیدا کیږي، چې د مشتق تابع انخرافي ارزښتونه پیدا کړو.

دا تلنلار همهغسې ده، لکه د پیل تابع **f(x)** لپاره مو ټاکلې. اوس د مشتق تابع **f'(x)** باندې دا کار یا عمل اجرا کیږي.

مخکی له دې چی یو لړ جملی د بحراني(جګ – ټیټ -) ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څیړو، غواړو چی دا کلیمی تعریف کړو .

دواړه کلمې به د نسبې بحراني ټکي په بڼه کی سره را غونډې شي.

پیژند ۲۰ . ۶ : په یوه چاپیریال x = x0 کی مشتقوړ تابع y = f (x) یو کیڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کیڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله ۲۰ . ۱۱ : (د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):
که په x0 کی مشتقوړ تابع y = f (x) اکستریموم لري نو لرو: f ' (x) = 0

دا جمله موږ ته وایي (یادونه ۲دې پرتله شي): چیرته چی f ' (x)≠ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکولپاره یوازې د x0 ځاي په پوښتنه کی راځي، چی د هغې لپاره0 = f ' (x) وي ، خو حتمي نه ده چی y = f (x)دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په y′ = f' (x) څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله ۲ . ۱۲ : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط):
که په x = x0 کی دوه واره مشتق وړ تابع y = f (x) هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: f '' (x) = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم باور لري (یادونه ۴ دې پرتله شي): چیرته چې $f''(x)\neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کیدی چې اوړونتکي موجود وي. مګرچیرته چې f '' (x) = 0 وي ، اوړونتکی شته کېدلی شي، خو اړیین یا ضرور نه ده چې هلته انعطاف ټکی شته وي.

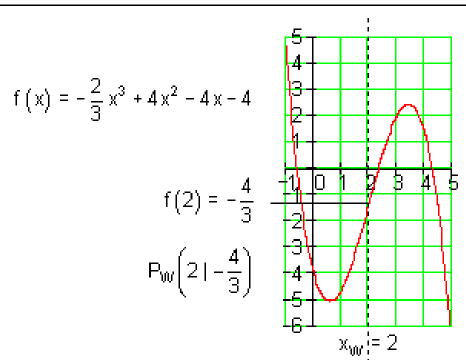
له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۲۰ ، ۱۳:(د اوړونتکي یا انعطافټکي لپاره پوره کیدونکی شرطونه)که په x x0 =کی دریوار مشتقوړ تابع y = f (x) لپاره وي: f '' (x) = 0 , او $f'''(x)\neq 0$ نو هلته یو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که f ''' (x) < 0 وي، نو یو کیڼ- ښي – انعطاف ټکي مخ ته پروت دئ او د f ''' (x) > 0لپاره یو ښی-کیڼ-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

شننیزه یا تحلیلي بیلګه:

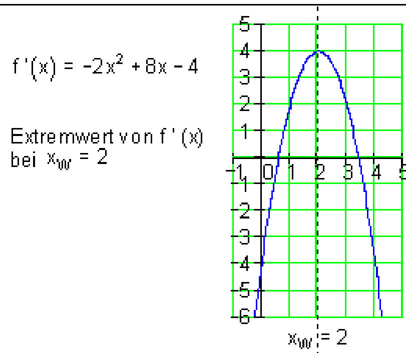
یادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښنه کوو او د x_W سره د انعطاف – یا اوړون ټکی په نښنه کوو.

1- تابع مساوات د مشتق سره

	$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$ $f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$ $f''(x) = -4x + 8$ $f'''(x) = -4$

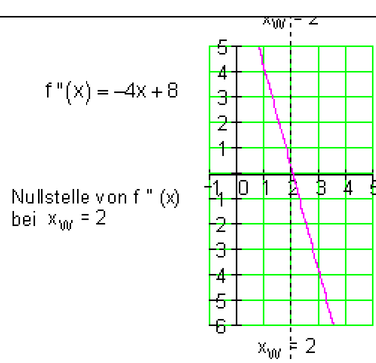
(c) ketabton.com: The Digital Library

۲- دويم مشتق صفر کړئ.

 د المانی پښو: د f‘(x) ضفرځای په xw=2 کې	$f''(x)=0 \Leftrightarrow -4x+8=0$ $\Rightarrow x_W = 2$

3- د انعطاف ټکي له مخې ښوونه، چې ايا د انعطاف ټکی شته دی؟

	$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$ 4- په $f(x)$ د انعطاف ځايونه ځای په کولو له لارې د انعطاف ټکي ټاکنه

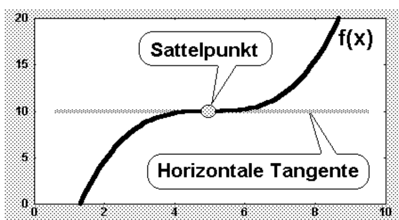
 د المانی پښو: د f‘‘(x) ضفرځای په x_W=2 کې	$f(x_W) = f(2) =$ $-\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$ $\Rightarrow P_{W\left(2\mid -\frac{4}{3}\right)}$ $P_W(21-1.33)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

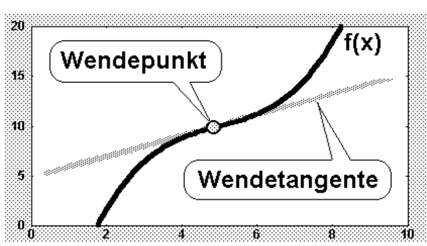
پام: په انعطاف ځای x_Wکې د $f(x)$ گراف کږېږي.

په یوه په خوښه ټکي x_0کې د کږوني(انحنا) لپاره باور لري:
$f''(x) > 0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کیڼ لور ته کږیږي(انحنا لري) دی.
$f''(x) < 0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ گراف ښی لور ته کږېږي(انحنا کوي)
یو زینټکی <u>Der Sattelpunkt</u> څه شی دی؟

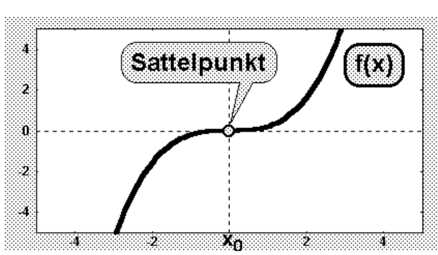
پیزند: د زینټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانگړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:



د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري



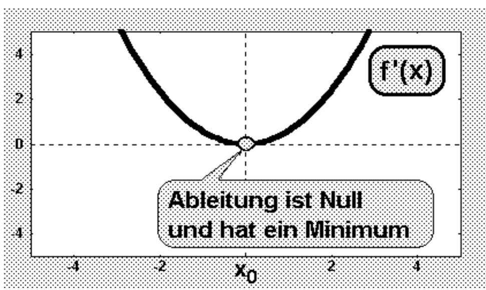
توضیح: اوس فکر کوو، چې یو زینټکی څنگه د شمېرلو له مخې پېژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانگړي توگه دا مخ ته لرو، چې یو زینټکی له ښي ـــو کیڼه انحنا و شمېرو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جگوالی په پام کې نیسو، یعنې لومړی مشتق: د زینتکي د مخه د $f(x)$ جگوالي کميږي، په زینتکي کې صفر ارزښت لري، او له زینتکي څخه وروسته بېرته جگيږي.

یو زینتکی (د ښي – کيڼ – بدلون سره) په دې پېژندل کيږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ یې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي تیټتکی (مینیموم) ولري.



د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

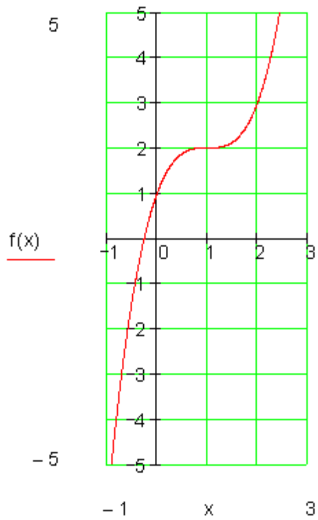
لومړی شرط دی، چې مشتق یعنې $f'(x)$ په زینتکي کې د صفر سره مساوي دی.

زینتکی(ښی-کيڼ-بدلون) $f'(x_0)=0$ دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته یو نسبي مینیموم لري.

دا په دې معنادی، چې بل جگ مشتق $f''(x)$ باید په صفر مساوي وي او مخنښه له منفي و مثبت ته بدلېږي.
له دې سره سم د زینتکي لپاره پوره کېدونکي قضیه ومیندل شوه:
د زینتکي لپاره جمله(خوي ټاکنه)(د ښي –کيڼ- انعطاف سره)
الف:د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$
ب : د x_0 په ځا ي کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ یو مینیموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، یعنې $f''(x)=0$ دوم مشتق مخنخښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.
بل بدیل(د گرانو دوستانو وړاندیز)
؟
\.
،

(c) ketabton.com: The Digital Library

زينتکی**Der Sattelpunkt**



د انعطاف ټکي يو ځانګړی حالت زينتکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر ځگيدني سره.که د کيڼ لور ورنږدې شو فکر کيږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی

که ښوک د ښي لور ور نږدې شي فکر کوي، چې يو نسبي ټيټټکی مخ ته لرو.

اوس دا حالت د رياضياتو له لورې ځيږرو: مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = 1$$

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ $f'''(1) = 6$	1=> $x=1$ دسره د انعطاف ټکی	1=> $x=1$ د سره زينتکی

د انعطاف ټکي لپاره شرايط پوره دي.

دا چې د $f''(1) = 0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زينتکی دی.

د انعطاف ټکي پيداکونه:

د تابع ګراف باندې انعطاف ټکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کيږي. د انعطاف تانجنت هم

همداسې پيدا کيږي لکه د تابع دګراف په يوه ټکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات ټاکل کيږي.

.

.

،

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x-2$$

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-6x+9$$

$$f''(x)\frac{3}{2}x-6 \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

$$f''(x_W)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-6=0$$

د $x_W=4$ او $f'''(x_W)=\frac{3}{2}\neq 0$ د

تانجنت $f(x_W)=f(4)=2\Rightarrow P_W(4|2)$

مساوات لپاره باور لري.

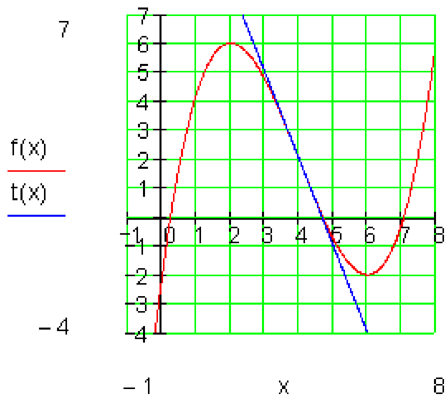
د x_W لپاره د تانجنت مساوات

$$t(x)=f'(x_W)(x-x_W)+f(x_W)$$

د $f'(x_W)=f'(4)=-3$

سره په لاندې ډول

دي $t(x)=-x(x+4)+2=-3x+4$



د انعطاف تانجنت د $f(x)$ ګراف د انعطاف په ټکي $P_W(4,2)$ کې غوڅوي او دا لاندې مساوات لري:

$$t(x)=-3x+14$$

د انعطاف- یا وړون ټکي تانجنت پیداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دګراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي.

د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کیږي، لکه د تانجنت مساوات د ګراف په خوښه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=0$ دلته تر څیړنی لاندې نه نیول کیږي.

د کرړې یا منحني بحث (Kurven Diskusion):

یوه تابع $y=x^3+x^2-3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بیا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نخښه کړئ، رښانه کړئ، چې انحنا چیړته له کینې لور و ښی لورې ته او له ښی لورې و کینې لورې ته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

- تناظر تعریف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جګ ټکي، ټیټ ټکي او د انعطاف ټکي یې پیدا اکړئ.
- $x^3 + x$
- $3x^3 + x + 2$

ددې لپاره چې یوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پېژنو. موږ دې بحث ته د منحني بحث وایو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې باید سیستماتیک مخ ته لاړ شو.

په لاندې ډول تلنه ګټوره بلل شوې.

دتعریف ساحه: د تابع څېړنه یواځې په همدې ورشو کې موخه وره ده.

تناظر **Symetry** : باید وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.

د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x) = f(x)$

د مرکزي تناظر لپاره باور لري. $f(-x) = -f(x)$

په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط $x \geq 0$ وڅېړل شي.

په ټولیزه توګه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو ګورو چې که توان(د پولینوم درجه)یې جفت(جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان(د پولینوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

بحراني ټکي**Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جګټکی، ټیټټکی)

د جګټکی یا نسبي جګ ټکي پوره کېدونکي شرطونه:

$$f'(x_1) = 0 \;\wedge\; f''(x_1) < 0$$

انعطافټکی یا اوړونټکی Inflection Point :

د انعطافټکواو همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کېدونکي شرطونه:

$$f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$$

زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.

د تابع تقاطع د x او y محورونوسره(د محورونوِغوځټکی):

د $x-$ محور سرهِ غوځټکی: $P_{xi}(x_i \mid 0) \;\Rightarrow\; (x) = 0$

د y محور سره غوځټکی(صفرځای) ټاکي $f(0)$ $P_y(0 \mid y_s) \;\Rightarrow$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دگراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې گراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځوریږي. دا راته په گوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمېرل کیږي.

د انحنا حالت او یوغږیزوالی:
د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ گراف تغیر خوري.
په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:
$f''(x_0) > 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع گراف کینه انحنا لري (کونوکس)
$f''(x_0) < 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع گراف ښی انحنا لري (کونکاو)
یوغږیزوالی

1- که د ټولو $x \in I$ لپاره وي $f'(x) \geq 0$ ، نو $f(x)$ په انټروال I کې مونوټون جگیږي. که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) \leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انټروال I کې مونوټون ټیټېدونکی دی.
2- که د ټولو $x \in I$لپاره$f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروالI کې کره غښتلې مونوټون جگېدونکی ده.
که د ټولو $x \in I$ لپاره$f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې غښتلې مونوټون جگېدونکی ده.
د پېژند ورشو ژی ټکي:
د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشوکې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ او $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلگه :
د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.
.
.
.
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق کونه:

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$
$$y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$$

نسبي بحراني ټکي

$$P_{min}(3|-2) \qquad P_{max}(1|2)$$

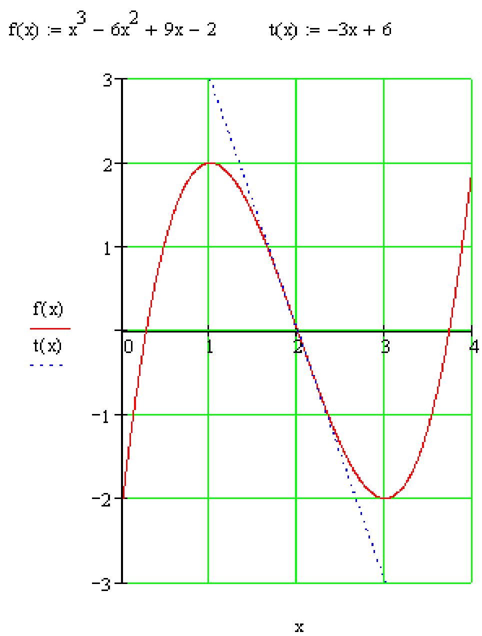
انعطاف ټکی او تانجنت

$$P_W(2|0) \quad y = f_t(x) = -3x + 6$$

صفرځايونه:

$$P_{x1}(2|0) \quad P_{x2}(3.7|0) \quad P_{x3}(0.3|0)$$

د y– محور سره غوځتکی(دقاطع): $P_y(0|-2)$



يوغږيزوالی(مونوتوني ياجگ - ټيټوالی)

په $I_1 = \{x \mid -\infty < x \le 1\}_{\mathbb{R}}$

کې يوغږيز جګيږي.

په $I_3 = \{x \mid 3 \le x < \infty\}_{\mathbb{R}}$

کې يوغږيز جګيږي.

د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$ کې

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \infty$$

سيومتري: نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کږوالي یا انحنا حالت:

ښی کږوالی یا انحنا(محدب) : $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کیڼ کږوالی یا انحنا (مقعر) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

د افراطي د جګ-ټیټ ټکو جملې یعني دا وروستي نومولی جملی اوس باید په یو لړ بیلګو استعمال شي.

دلته دې د ورکړ شوو توابعو، د پیژند سټ (- ډیری)، انعطافټکي ، جګ-ټیټټکي (اکستریموم، قطبونه، اسیومپتوتی وښوول شي او په دې جوړ(ودان) دې د تابع تلنه وکښل شي. دې ښوونو یا څیړنو ته د کږو خبرې اترې یا – مباحثه ویل کیږي، یعنی دلته د کږو (انحنا) د مختلفو ډولونوپه خویونو غږیږو.

موږ خپل تمرکز د افراطي ټکو(اکستریموم) او انعطافټکو(اړونټکو) رامعلومو یا روښانو څیرنوته متوجه کوو او د »انحنا- خبرې اترې) د انحنا(کږې)-چڼون (« د لاندې شیما له لارې مخ ته بیایو:

0 - د چمتووالي لپاره د تابع y = f (x) د دریمي درجی پورې مشتق پیدا کیږي، بیا له ټولو هغو ارزښتونو xiڅخه سټ M جوړیږي (۴ ټکی) چی وروسته باید ځانګړې تر څیړنی لاندې ونیول شي.

په سټ M کی لومړی د غاړو ټکو ابسڅیز یا پراته ارزښتونه نیول کیږي. په دې پورې په ځانګړي ډول بیا تشځایونه (لوکی Lücke نیمګړتیا) او هم قطبونه اړه لري. د M سټ به وروسته په نورو ارزښتونو تکمیل شي.

۱ – د f (x) = 0 صفر ځایونو xi سټ M0 لټول کیږي.

۲ – ټول ځایونه x لټول کیږي، چی هلته y = f (x) د مشتق قابلیت نه لري او په ډیری Mکی یی نیسي. بیا د ټولو ارزښتونو xj ډیری M1 لټول کیږي، چیرته چی f′ (x) = 0 وي، (دا د بحراني ارزښتونو لپاره په پوښتنه کی راځي) ، او د yj = f (xj) تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارزښتونه یی. ورپسې سړی د ټولو $x_j \in M_1$ ارزښتونه د f (xj) د دویم مشتق لپاره لټوي.

۳ - ټول هغه ارزښتونه x چیرته چی y = f (x) دوه ځله مشتقوړ نه دی د M په‌سټ کي نیول کیږي.

ورپسې بیا سړی د ټولو xk سټ M2 لټوي، چیرته چی f''(x) = 0 وي (دلته نو د انعطاف ټکي پوښتنه کی راځي) او د هغه د تابع ارزښتونه yk = f (xk) .

بیا د ټول $x_k \in M_2$ لپاره دریم مشتق f '''(x) ازمائیل کیږي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری M_{21} د کومو لپاره چی f'''(xk) < 0 وي نو افقي(پراته) محور کیڼ - ښی-ااعطافتکی جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری ، د کومو لپاره چی وي f'''(xk) > 0نو د پراته- یا افقي محور د ښي - کیڼ - انعطافتکي جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ډیری د کومو لپاره چی f'''(xk) = 0وي او یا دریم رابیلیدونکی نه وي موجود نو په ډیری M کی نیول کیږي.

۴ – د تیرو درسونو تعریفونو او جملو سره سم په افراطي ټکو او انعطافتکي یا ا وړونټکي باندې د ډیري M ځیرنه د اصلي حالتونو لپاره اوس یو ځو بیلګی راوړو

بیلګه : بلواك y = f (x) = x³- 6x² + 9x هرچیرته پوره زیات مشتقوړ دی.

0 - f (x) = 3x² - 12 x + 9 , f (x) = 6x - 12, f (x) = 6

په سټ M کي یواځي $-\infty, \infty$ نیول کیږي د حد –یا پولي تیریدنو په موخه یا هدف $: M = \{-\infty, \infty\}$

1 - f (x) = x³ - 6x² +9x = x (x² - 6x + 9) = 0

M0 = {x1 , x2 } = { 0 , 3 }.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

2 - f ' (x) = 3 x2 - 12x + 9 = 0

M1 = {x3 , x4 } = {1 , 3 }, y3 = 4 , y4 = 0

f '' (x3) = f (1) = -6 < 0 , Minimum (مینیموم

f '' (x4) = f (3) = 6 > 0 , maximum (ماکسیموم)

M11 = {1} , M12 = { 3 }.

3 - f'' (x) = 6x - 12 = 0 ,

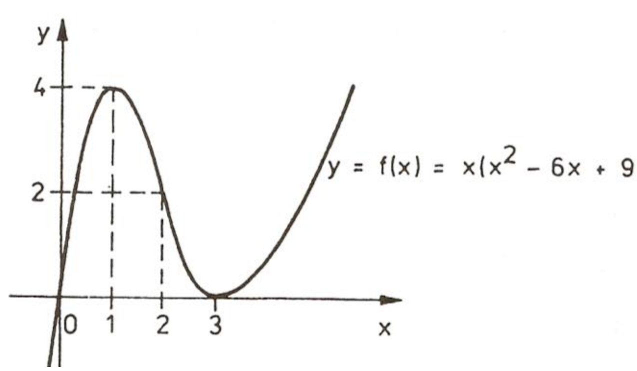
M2= { x5 } = { 2 } , y 5 = 2

f '''(x5) = f '''(2) = 6 > 0 (

بنی - کیڼ اوړیدونټکی M 22 = { 2 }.

4 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

په دې ډول د منحني تګلار په لاندې ښېره کې لاس ته راځي



بیلګه : تابع $f(x) = x^4 - 4x^3$ پوره په خوښه مشتقوړده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

0 - f' (x) = $4x^3 - 12x^2$, f '' (x) = 12 x^2 - 24x , f ''' (x) = 24x - 24

په سټ M يواځي $-\infty,\infty$ نیول کیږي: $M=\{-\infty,\infty\}$

1 - $f(x)=x^4-4x^3$ = x3 (x - 4) = 0

M0 = { x1 , x2 } = { 0 , 4 }.

2 - f ' (x) = 4x3 - 12 x2 = 4x2 (x - 3) = 0

M1 = { x3 } = { 3 } , y3 = -27

دا چی د 0 = x لپاره دویم مشتق 0 = (0) '' f دی، دا ارزښت د ۳ - لاندې ځیړل کیږي

f '' (x3) = f '' (3) = 36 > 0 , Minimum, M12 = { 3 } .

3 - f '' (x) = 12x2 - 24x = 12x (x - 2) = 0

M2 = { x4 - x5 } = { 0 , 2 }, y4 = 0 , y5 = -16,

f ''' (x4) = f ''' (0) = -24 < 0

M21 = { x4 } = { 0 }, انعطاټکی(کیڼ- ښی -انعطاټکی

f ''' (x5) = f ''' (2) = 24 > 0 ,

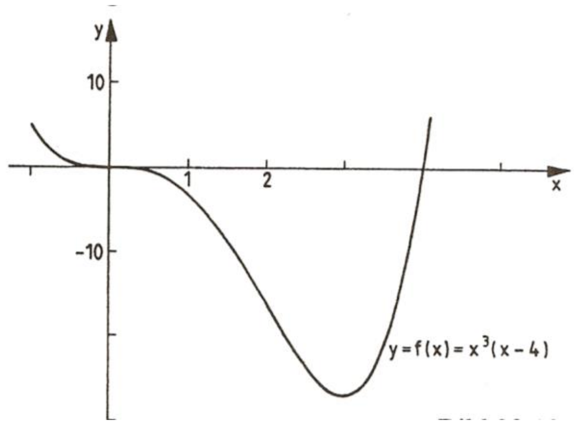
انعطافټکی(ښی - کیڼ – انعطافټکی)

M22 = { x5 } = 2 .

4– $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې څيرې ځخه د کرږې تلنشکل لاس ته راځي .



بيلګه : تابع $y = f(x) = e^{x^3}$ پوره مشتقوړ دی:

صفر:

$$f'(x) = 3x^2 e^{x^3}$$
$$f''(x) = 3x(3x^3 + 2)e^{x^3}$$
$$f'''(x) = 9x^3 e^{x^3}(3x^3 + 2) + 6e^{x^3}(6x^3 + 1),$$

$M = \{\infty, -\infty\}$

۱ – تابع کوم صفرځای نه لري

$$f'(x) = 3x^2 e^{x^3} = 0 \qquad - ۲$$

يواځې د $x_1 = 0$ لپاره ارزښت لري. مګر داچي f''(0) = 0 دئ ، نو x1 = 0 د ۳ - لاندې څيرل کيږي

– ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f''(x) = 3x(3x^3+2)e^{x^3} = 0,$$

$$M_2 = \{x_2, x_3\} = \left\{0, -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}, \; y_2 = 1, \; y_3 = \frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}.$$

بنې – کيږ انعطافټکي:

$$f'''(x) = f'''(0) = 6 > 0$$
$$M_{21} = \{x_2\} = \{0\}$$

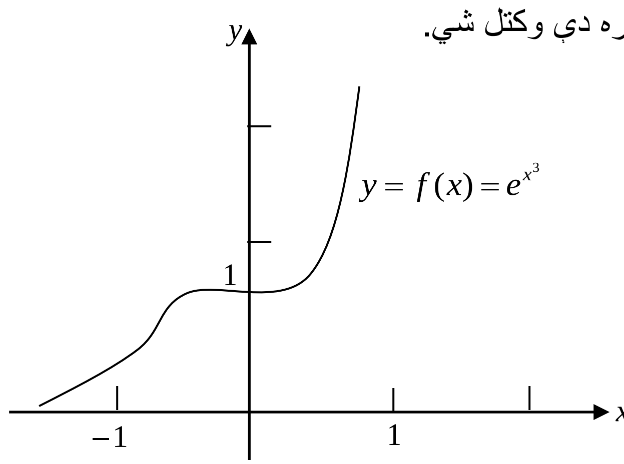
کيږ- بنې انعطافټکي:

$$f'''(x_3) = f'''\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) = 0 + 6\,e^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-6\frac{2}{3}+1\right) < 0,$$

$$M_{22} = (x_3) = \left\{-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}.$$

۴ - $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x^3} = 0, \; \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x^3} = +\infty.$

لاندې ګراف يې وکتل شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: تابع $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}$ د ټولو x لپاره تعریف دی، مګر یواځې د = | x
$x\neq 0$ لپاره مشتقوړ دی

صفر - د $x\neq 0$ لپاره باور لري یا صدق کوي.

$$f'(x)=1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}},$$
$$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

دلته (f'''(x ته اړتیا نه پیښیږي

د M سټ له x = ± oe او x = 0 څخه جوړ دی

$$M=\{-\infty,0,\infty\}$$

اول: $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}=0$

د $x=-\sqrt[3]{x^2},\ x^3=-x^2,\ x^3+x^2=0$

له امله د حل لپاره په پوښتنه کی x1= 0 , x2 = -1 راځي. دواړه ارزښتونه ، لکه ازماینه روښانه کوي، صفرځایونه دي:

$$M_0=\{x_1,x_2\}=(0,-1)$$

M0 = { x1 , x2 } = {0 , -1}

دویم : $f'(x)=1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=0.$

م - د دې مساواتو حلونه له لاندې لاس ته راوړني څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=0,\quad \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=-1,\ \frac{8}{27x}=-1,\ x=x_3=-\frac{8}{27},$$

$$y_3=f(x_3)=-\frac{8}{27}+\frac{4}{9}=\frac{4}{27}.$$

$$M_1=(-\frac{8}{27}).$$

$$f''\left(-\frac{8}{27}\right)=-\frac{8}{9^3x^4}<0, Maximum$$

$$M_{11}=\left\{-\frac{8}{27}\right\}.$$

۳ -

$$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}=0$$

د کوم له پاره شوونې نه ده.

۴ - $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}+\left(1+\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}\right)=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

هغه ځاي$x1 = 0$ ، دکوم لپاره چی $f(x)$ مشتقوړ نه دی او د کومی لپاره چی $f(0) =$ 0لرو، باید تر اوس تر څیرني لاندې ونیول شي

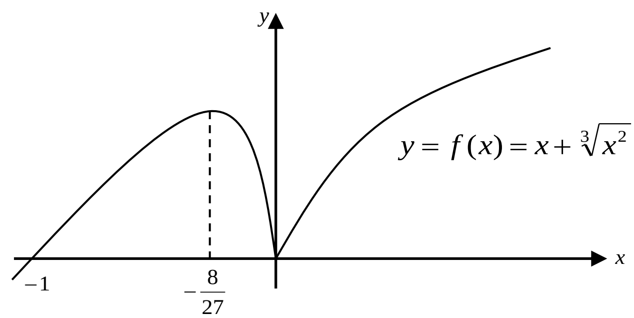
د $x > 0$ لپاره $f(x) > 0$ دی.

د $-1<x<0$ لپاره صدق کوي(د $x^2 > 0$ سره ضرب $-x^2 < x^3 < 0$) په همدې ډول(⇔ لاس ته راځي او برعس) یعني $0<-x^3<x^2$ او له دې امله $0<\sqrt[3]{-x^3}<\sqrt[3]{x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

، نو $0<-x<\sqrt[3]{x^2}$ او له دې سره: $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}>0,$

له دې امله د $x1 = 0$ سره يو نسبي ټيټتکی (نقطه اضغري) مخ ته پروت دی. په دې توګه د کږې یاا منحني تلنلار د لاندې ځيرې سره سم روښانه ده.



په لاندې بيلګه کی دې د x ارزښتونه د $f''(x) = f''(x) = 0$ لپاره هم د M په ست کی ونيول شي.

بيلګه : تابع $y=f(x)=x^4+x$ پوره زيات مشتق وړ دی.

صفر:

$$f'(x)=4x^3+1,$$
$$f''(x)=12x^2,$$
$$f'''(x)=24x,$$
$$f^{(4)}(x)=24,$$
$$f^{(5)}(x)=f^{(6)}(x)=\ldots=0$$

په M کی يواځې د ابسځيزی يعنی دپراته محور د غاړوتکی يعنی $\pm\infty$ نيول کيدي شي:

$$M=\{-\infty,+\infty\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

1 $f(x) = x^4 + x = x(x3+1)0, \quad M = (0-1)$

2 $f'(x) = 4x + 1 = 0$

$M_1 = \{-1/3\sqrt{4}\}, \; y_3 = -3/\,4\sqrt[3]{4}. = \dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$

$f''(-1/\sqrt[3]{4}) = 12(-1/\sqrt[3]{4})^2 > 0.Min, \; M_{12} = \{-1/\sqrt[3]{4}\}$

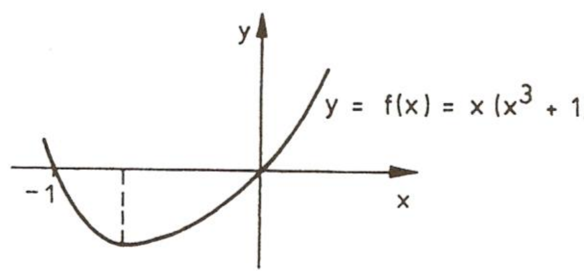
3 $f''(x) = 12x^2 = 0, \qquad M_2 = \{0\}$

$f'''(x) = 0$

4 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

د x=0 سره هيڅ اوړونتکی مخ ته نه لرو، ځکه چی f'(x) هلته اکستريموم ارزښتونه نه لري، بلکې يو اوړونتکی $y = x^3$ (په ۴ غزول شوی او د ۱ سره و پورته لور ته خوځول شوی يا پورته شوی) .

دا د ځيري ۲۰ ، ۱۳ سره سم د کږې تلنه ورکوي.



ناټاکلي حدونه یا پولې

یا د ناټاکلو افادو(ويينو) حدونه یا پولې

(c) ketabton.com: The Digital Library

که و لرو $x \neq 5$; $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$ ، ومو لیدل، چې د داسې توابعو حد پیداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وایې، ځکه چې مشتق یې نیول کېدی شي، یعنې د کمښتونو ویش(د تفاضلونو ویش) حد یې ټاکل کیدی شي.

که $\frac{\sin 2x}{5x}$ توابع ولرو،نود x=0 لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توګه نه شو نیولی، چې له دې امله ناټاکلې افادې ورته وایو.

پیل خیرنه:

د $\frac{0}{0}$ حالت

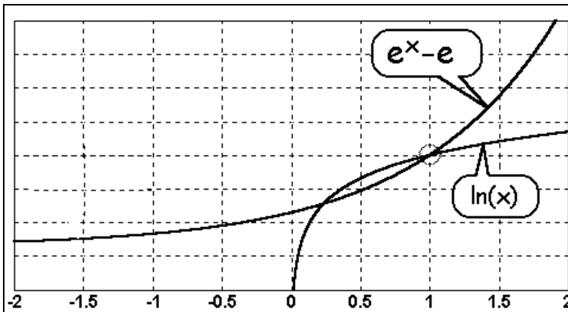
که پوله ارزښت جوړېدو کې یو کسر پیدا شي، چې صورت او مخرج یې دواړه د صفر په لور لاړ شي، نو دا پوله ارزښت،، ناټاکلې افاده،، بولو.

بیلګه: لاندې د الماني پښتو: صورت یا ماتباندې، مخرج یا ماتلاندې

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$$

په خیره کې برخه توابع رسم شوي دي، یعنې د صورت او همداسې د مخرج ګرافونه.

ګورو: د صورت او مخرج د توابعو ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱ په لور لاړشي)



(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکندود(لیکنډول): د افادې $\frac{\text{صورت} \to 0}{\text{مخرج} \to 0}$

لپاره په پوله شمیرنه کې لنډ لیکو:

$$\frac{0}{0}$$

دا په حقیقت کې دقیق نه دی، مګر په ټولېزه توګه داسې معمول دی

روښانه ونه :

ناټاکلې افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې دا ناټاکلې افاده خپل نوم له کومه ځایه اخلي. دا ،، ناټاکلی،، بلل کیږي، ځکه چې حدیې د عادي طریقو له لارې نه شي شمیرل کیدی. د لوړې ریاضي سره دا کار شمیرنه شونی شوه(دبیلګې په توګه د لو پیتال قانون له مخې، چې پسې به وڅیړل شي).

روښانه ونو ته تشریح:

اوس ښایو، چې د داسې توابعو شمیرل ولې ناشوني دي.

مورږ بیا دا د تېر مخ بیلګه رانیسو:

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \qquad \frac{\to 0}{\to 0}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{\text{مخرج} \to 0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ – که هڅه وشي، چې حد پیدا کړو، داسې چې د x=1 په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده 0:0 به ترې لاس ته راشي. دا تعریف نه لري، $u=f(\frac{1}{z})$ ځکه په صفرویش اجازه نه شته.

۲ – ترمخه مو د ناټاکلو افادو د شمیرلو لپاره یعني د ناطق کسري توابعو پوله شمیرنه کې د چل یا د طریقې څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارولی، لکه په پورته بیلګه کې.

۳ – د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي لید کېدی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د ۱ په لور وخوزیږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001}=1$$

$$\frac{0.000000001}{0.000000001}=1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معني ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نزدې برابر شي.دا معني نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.000000100}{0.000000001}=100$$

$$\frac{0.00000000100}{0.00000000100}=100$$

لکه چې ګورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نزدې برابردي(دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مګر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعني (100) دی،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برنولي او د دې لو، پیتالقاعده Brnoulli and de L,Hospital

د برنولي او د دو لو پیتال قاعدې د $\frac{f(x)}{g(x)}$ ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانګړی رول لوبوي. داحالت په ځانګړي ډول هلته رامنځ ته کیږي، چي مخرج او صورت (ماتباندې او ماتلاندې) همغه صفرځای x_0 ولري. دا ناټاکلی افاده $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{0}{0}$ موخه وره (هدفمنده) نه ده. کیدی شي چی د ویش حد $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ وڅیړل شي، په کومو کی چی صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د غوښتلو دي. د بیلګي په توګه تابع

$$f:\quad y=f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}$$

صورت او مخرج همغه صفرځای x0=-2لري، سره له دې هم پوله شته دی.

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^2}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x+2)=0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شمیرل کیدی شي، چی د صورت او مخرج توابعو له نتیجي څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوي منځ ارزښتقضیي استعمال هم بلل کیږي.

د برنولي او د دې لو، پیتال قاعده :

که توابع u=f(x) اوv=g(x) د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځای کی مشتقوړ وي د $g'(x)\neq 0$ سره او د تولو $x\in U(x)$ لپاره او x_0 دfاوgیوصفرځای وي،

د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: تابع د پراخه شوې منځ ارزښت قضي نيونی پوره کوي. د هر $x \in U(x_0)$ لپاره یو xmد $x_m \in (x_0, x)$ سره موجود دی، په داسی ډول چی لرو

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د $f(x_0)=0 \wedge g(x_0)=0$ له امله لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچی د x->x0 سره xm->x0 هم هڅه کوي.
دx->oe په حالت کی x=1/z ځاي په ځاي کوو. د زنځيري قضيي په مرسته لاس ته راځي:

u=f(1/z)

د مشتق $du/dz = f(1/z)\cdot(-1-z^2)$ او مشتق $\frac{dv}{dz}=g'(\frac{1}{z}).(\frac{-1}{z^2})$ سره

، داسې چې لرو :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

يادونه : که په پورته حالت کی $f'(x_0)=g'(x_0)=0$ هم وي ، نو په ويش بیاله سره دا قاعده استعماليږي. که سړي دn-پلونو(قدمونو) وروسته بريالی وي نو دا قاعده لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چيرته چی $f^{(n)}$ او $g^{(n)}$ د تابع n - م مستق په معني دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډول یا تیپ: $0/0$

بیلګه:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2x-4}{1}=\frac{0}{1}=0$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1}=\frac{0}{1}=1$$

تیپ یا ډول: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان(ځګعدد) α لپاره یو په خوښه توان x^{α} د x->oe لپاره په غښتلې توګه ځګیږي، نسبت لوګاریتم تابع lnته

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0$$

له دې $f(x)=\frac{x^n}{e^x}$ تابع د لوپیتال د قاعدې د ډیرځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننشل تابع e^x دx په هرتوان تابع څخه په غښتلې جګېږي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 \qquad n\in N$$

نور حالتونه کیدی شی په بنه یا تیپ $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بیرته واړول شي

له تیپ یا بڼې $\infty-\infty$ څخه و بڼې یا تیپ $\frac{0}{0}$ ته

ددې لپاره لاندې تابع بیلګه کیدی شي:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$$

د $x\to 0$ لپاره

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

داچی دلته مشتق بیرته د بڼې تیپ $\frac{0}{0}$ ده، نو د لوپیتال قاعده استعمالیدی شي.

له تیپ یا بڼې $0.(\pm\infty)$ څخه بڼې $\frac{\pm\infty}{\infty}$ ته:

د تیپ $0.(-\infty)$ حالت د بیلګې په توګه تابع $f(x)=x.\ln x$ د $x\to 0$ لپاره ښایي. په کوم کی چې ضرب د ویش په ځیر انځور کړي، نو د لوپیتال د قاعدې په استعمال دا لاندې لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to +0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +0}(-x)=0$$

له بڼې 0^0 څخه وبڼې e^0 ته:

دلته د بیلګې په توګه تابع $f(x)=x^x$ د $x\to 0$ لپاره تر ځیرنی لاندې نیول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بڼي بدلون یا فورم بدلون و بنسټe ته د یوې انځورونی په مرسته په بریالی توګه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to+0} e^{x\cdot\ln x} = e^0 = 1$$

له 1^∞ بڼې څخه و $e^{0.\infty}$ بڼې ته

د ښوونی ، د بیلګي په توګه د تابع $f(x)=(1+\frac{\mu}{x})^x$ پوله ده د $\mu\in R^+$ لپاره او x

د$x\to\infty$ $x\in R^+$سره:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{x})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{2}))}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\eta}{2}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\mu}{2}}\cdot\frac{-\mu}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mu}{1+\frac{\mu}{x}}} = e^\mu$$

د   μ=1 له پاره لاس ته راځي

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

له بڼې ∞^0 و بڼې $e^{0.(\pm\infty)}$ ته

دا کارونه په یوې بیلګي روښانه کوو:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \lim_{x\to+0} e^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+0}(\sin x\cdot\ln\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to+0}\frac{x\cdot(\frac{-1}{x^2}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x} = \lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x - x\cdot\sin x} = 0$$

د $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$ سره

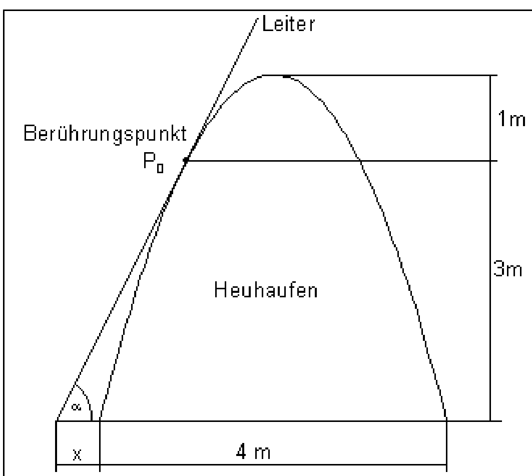
(c) ketabton.com: The Digital Library

باید لاندې جدول کې پام وشي. لرې یا تې: شي

لاندې جدول د پورته ښوول شوو ښویا ډولونو د بنې بدلون تولیزه کتنه ممکنوي

تیپ(ډول)	$f(x) \to$	$g(x) \to$	بڼه بدلون یا لنډ: بدلون
$-\infty$	0	0	$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x) - f(x)}{f(x) \cdot g(x)} \to \frac{0}{0}$
∞	0		$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \to \frac{0}{0}$ $\wedge (Or)$ $f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \to \frac{\infty}{\infty}$
∞	0 1 0	0 0	$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \to e^{0 \cdot \infty}$ د f(x)>0 سره.

د یوې تابع د استعمال بیلګه د تانجنت له پاره :



له څمکې څخه د وښو په توپۍ یوه زینه اینبول کیږي. دا زینه په درې متره جګوالي توپۍ لم د وښو توپی دې د یوه کینکودي پارابول څېره ولري، چې بنسټ یې ۴ متره سرور دی او ۴ متره جګوالی لري. غواړو په دې یوه زینه کیږدو، چې د وښو توپۍ سره تانجنت جوړ کړي.
په کومه زاویه(کونج)باید دا زینه کېښول شي؟
د وښو توپۍ له بیخ څخه دې په کوم لرېوالي په څمکه دا زینه کینبول شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

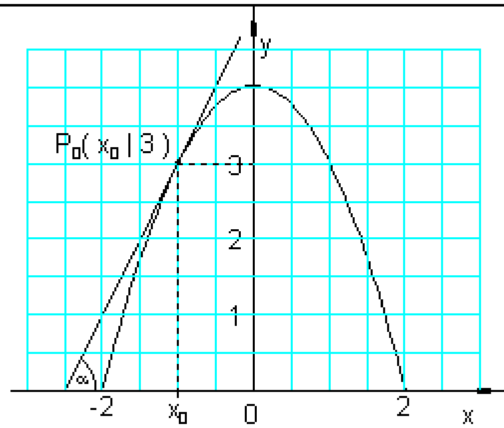
موږ د y محور داسي کا ږو،چي د پارابول له ککرې(څوکې) څخه تېرېږي.

پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$
$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$
$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

موږ د x_0 لپاره ارزښت تاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$
$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$



شمیرنه :

د نورو شمېرنو لپاره ارزښت $x_0 = -1$ کاروو. زینه توپی په $P_0(-1,3)$ ټکي کې لمسوي.موږ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات تاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1|3) \Rightarrow \bar{x}_0 = -1;\ \bar{f}(x_0) = 3$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $f'(x) = -2x$ سره لاس ته راځي

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2\cdot(-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2\left[x - (-1)\right] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جوړه زاویه: $\tan\alpha = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 63{,}4^{0}}}$

د زینې او د وښو ټوپۍ تر منځ واټن د **f(x)** د صفرځای او د تانجنت**t(x)** د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځایونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$
$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2{,}5$$

د x ارزښتونو 2,5- او 2- ترمنځ واټن 0,5 دی.

زینه د وښو د ټوپۍ له پښو څخه باید نیم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کیږي، چې یو ګراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

د سترې ګټې(غټو ګټو) مسئله یا قضیه

دا د سترې ګټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د یو څو بیلګو له لارې وڅیړل شي.

نږدې ټولو پروسو کې ، چې په عمل کې کارول کیږي یا صورت نیسي، له تاثیروونکو یا په همدې ډول د هغو ټاکلو لویو استعمال ته اړ دی، کومې چې مونږ په ځانګړو یا مخصوصو پولو کې په اختیار کې لرودی شو.

مونږ یواځې هغه پروسې تر څیړنې لاندې نیسو چې د یوې واریابلې یا اووښتونې x په واک کې وي. دا د بل په واک کې د یوې تابع $y = f(x)$, $x \in D$له لارې څرګندولی شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که y تول لګښتونه یا مصارف په کوته کړي، نو x باید داسی وټاکل شي چی f(x) مینیمال یا خورا کم شي.

که په څټ یا برعکس y ګټه وي یا ګټور تاثیر وي، نو x باید داسی لاس ته راوړل شي، چې f(x) ماکسیمال یا خورا لوي شي. په قاعده کی اغزمنه یا مؤثره لویه یا په بل عبارت، خپلواك واریابل یا اووښتونی x د $-\infty$ او ∞ پولو ترمنځ ازاده ټاکونکی نه ده، بلکه د تخنیك یا تخنیکپوهنی له امله ، یوائی په ټاکلو پولو کی

$$a \le x \le b \qquad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پورې د ګټې مسئلی ، په دې پورې اړه لري، چی ایا دا ګټه ده او که لګښت.

$$y = f(x) = \max! \qquad (a \le x \le b \qquad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \le x \le b) \qquad ($$

دا د افراطي ارزښتونو برخی پرابلمونو سره خورا نزدې یا ټینګ تړلی دی. دلته ځموږ علاقه په ځانګړې توکه د لاندې پرابلم د کارکولو سره ده:

۱ - د بلواکیزو (y = f(x ګډو اړیکو راپیداکول، د دندې یا وظیفي ورکولو سره سم(د مودالیټي پرابلم)

۲ - د تخنیکپوهنی پولو په پام کی لرل (*)

دادې د دوه بیلګو له لارې وښول شي

بیلګه : یو د منډو(پټي ته په کلوکې د اغزو منډو کېښول کیږي، چې مالونه ور وا نه وړي) سیم لرو چي تول اوږدوالی یې L دی. له دي سیم سره باید یوه مربع سطحه (څلورګوډیزه هواره)، چی د امکان ترحده باید لویه وي، منډو شي. دا وظیفه شوه یا په بل عبارت غوښتنه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د موداليټيArt und Weise پرابلم : غوښتنه مو د يوې څلور ضلَعي(څلورګوډی) پيداکول دي. لکه چې معمول دي، ددې څلورضلعي (-ګوډی) يو اړخ په a ښايو او بل اړخ يې په b ښايو، د څيرې ۲۰ . ۱۴ له مخې) .

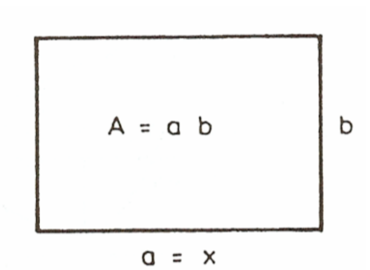
دا په سر کی دوه اغيزې لرونکي يا تاثيراچونکی لويي a او b دي. د

$$L = 2a + 2b, \quad b = (L/2) - a$$

له امله يواځي يوې اغيزمنې(تاثيراچوونکي) لويي ته اړيو د بيلګي په توګه $a = x$ ، دا ګټه (ستحه A)داسي ده $A = ab = x((L/2)-x)$

دا روښانه ده چې صدق کوي . $0 \le x \le L/2$

له دې امله د سترې ګټې پرابلم داسی دی



$$y = f(x) = x((L/2)-x) = Max! \quad (0 < x < L/2)$$

د $f(0) = f(L/2) = 0$ له امله بايد ماکس د 0 او $L/2$ ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره يواځي $x = L/4$ په پوښتنه کی راځي.

د دې لپاره $y'' = f''(x) = -2 < 0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ريښتيا چې يو ماكس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنيكپوهنيزې پولی 0 او L / 2 رول نه لوبوي. نو صدق كوي. $a = b = L/4$

بيلګه : يوه بډای چې په يوه ټاكلي وخت كی ټولسټ (ټولډډيرۍ) M توليد كړي او دا ټل اخستونكو ته ورسوي، نو له دې سره فيكس يا كره ټاكلی لګښتونه F تړلي دي.
كيدې شي چې سملاسی د دې توليد په ټولسټ (ټولډيرۍ) M كی توليد كړي ، په يوه زخيره ځاي(زېرمتون؟) كی ځاي په ځاي كړي او اخستونكو ته يی سملاسي ورسوي.
دلته د زېمتون (زخيره كوني) لګښتونه راپيد كيږي(ددې د زخيرې لپاره ځاي او هلته بيا اچول او وړل). يا هم كيدی شي چې توليد په لږه كچه يا اندازه توليد شي او سملاسی اخستونكو ته وروړل شي. دلته نو د زخيره كولو لګښتونه منځ ته نه راځي.
مګر ټل توليد په دې ډول توليد باندې درول، لګښتونه منځ ته راولي، چې د چمتووالی لګښتونه يی بولو. كومه ډيرۍ x (ازاده لويه) بايد توليد شي، چې د امكان تر پولي كم لګښتونه پرې وشي؟ د زخيرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابيدو ارزښت د چمتووالي يا توليد ارزښت سره يعنی چې خرڅلاو ته چمتو كيږي، په څټ متناسب دی. كه x لوي وي نو چمووالی ته كم اړتيا شته او كه x كم وي نو چمتووالی بدلون ټل بايد تغير وخوري يعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چيرته چی F ثابت(همغه) يا په كلكه اينول شوي لګښتونه دي، Lد زخيرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لويه x د توليدډيرۍ M څخه نه شي ستريدلی ، لوئيدلی يا غټيدلی. له دې امله صدق كوي $0 \leq x \leq M$. مخ ته پروت د ستريدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

$$y = f(x) = F + Lx + R/x = \text{Min!} \quad (0 \leq x \leq M$$

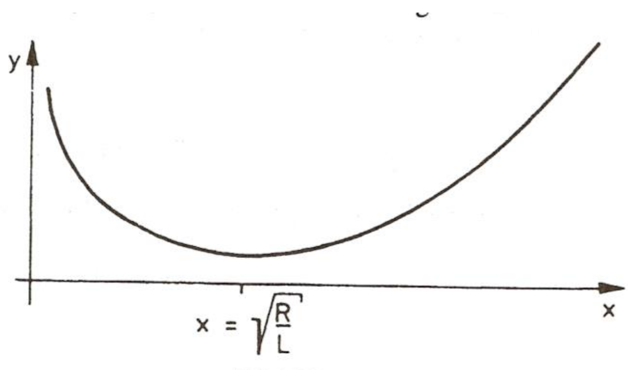
(لمړی f(x) دوه واره ديفرنځيال كيږي يا يي دوه واره رابيليدنه نيول كيږي:

$$f'(x) = L - R/x^2 , \qquad f''(x) = 2R / x^3$$

د مينيوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$, پس لرو $x = \;\; R / L$ ؟؟؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $0 \geq x$ له امله $0 \geq (x)$ '' f هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کرېږ تګلار په څیره ۲۰ . ۱۵ کی انځور شوی. څرګنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = R / L>M$ وي، نو یو منیموم په څنډه $x = M$ لرو. نامساوت $x = R / L < M$ دا مانا لري $R / L < M^2$ په همدې ډول . $R^2< M^2L$ پس مخ ته لرو: $x = R/ L$ د $R < M^2L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2L$لپاره

نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې تول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

ټاکلی بیلګه : د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي > $R = 1000$ $M^2L = 108 . 10 = 109$ستر یا غټ ازاد لګښت دی $x = R / L = 1000 / 10$ $10 = 100$ = ازاد a دلته 10 یوونه باید ورزیات شي ، چی 10000 یوونه تولید کړېد $M = 10 , R = 1000 , L = 1$ لپاره صدق کوي $R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده .یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تولید کې د مشتق استعمال

فعالیت : یوه فابریکه x تولید کوي. په دې تولید د لګښت کیږي، چې دا د تولید په واک کې دی، چې موږ ورته د لګښت تابع وایو او په K(x) سره ښایو.

څنګه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لګښت را ټیټ کړو؟

د لګښت تابع K(x) د تولید سټ(ډېری) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.

که تولید د Δx شاو خوا کې زیات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زیاتیږي.

کمښتویش (تقسیم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځني لګښت زیاتوالی ښايي، د یوه Δx تولید تغیر سره(منځنی تغیر ارزښت)

د x_0 ځای کې لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لګښت بلل کیږي. دا د پوله ارزښت $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کیږي، داپه دې معني، چې د لګښت د تابعK مشتق.

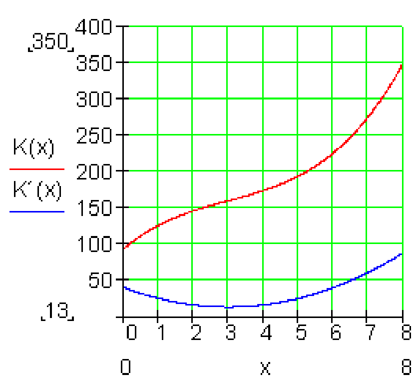
پیژند : د لګښتتابع **K(x)** مشتق د مشتفارزښت**K'(x)** په نامه یادوو یا یې پوله لګښت**K'(x)** هم بولو.

بېلګه: د لګښت تابع $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$ دي ورکړ شوي وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکی، یو ارزښت جدول د **K(x)** او **K'(x)** لپاره وکاږۍاو په پروتولاړ سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یې ګراف وکاږی.

پوله ارزښت د **I = [0 ; 6]** لپاره په ۱ پل(قدو) پراخوالي سره.

ب : د ډېر کم لګښتزاتوالی و ټاکی:



لاندي تابع لرو:

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

مشتف ارزښت

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزښت جدول

x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

(c) ketabton.com: The Digital Library

خورا کم د لګښتزیاتوالی(لګښتجګېدنه) د پارابول **K'(x)** په ککره(څوکه) کې پروت دی ، یعني هلته چې تانجنت **K'(x)** پروت یا افقي دی

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

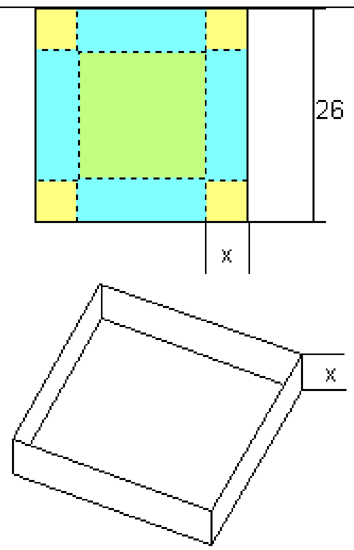
دد تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره :

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

د ي، مربع کارتون(د کلک کاغذ څخه جوړ)څخه ، چې ۲۶ سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، جې د x جګوالی لري.

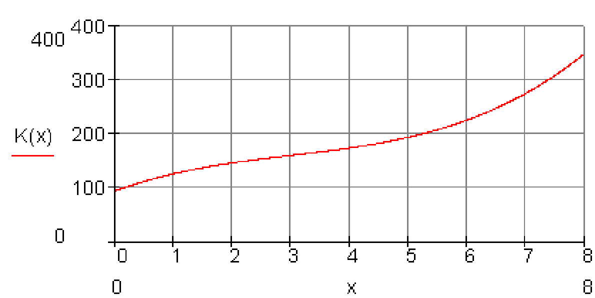
الف: د یوه تابع ترم وټاکئ، چې د بکس حجم(ډکی) V د x په واکوالي یا تابعیت کې ښایي.

ب – ګراف وکاږئ او په نږدې توګه یې ماکسیما(خورا جګ) حجم و ټاکئ.



- د یوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع)K(x) د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړیکي انځوروي، داسي چې x = 1 د 100 ناروغانو معنی او y = 1 دی معنی چې 1000 € / Tag. یوزر یورو په ورځ (1000 € / Tag.) .

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

تولګه:

د رول(Rolle) قضیه:
یوه د f تابع دې په بند اینټروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز اینټروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه یوځای $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قیمت) قضیه:
که $y=(x)$ تابع په بند اینټروال $[a,b]$ کې متمادي او په واز اینټروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته یوځای $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې

لرو: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$

خېږه په نوټ کې ده، دا بنه نه ده کښل شوي

پراخه شوې منځقضیه:
که $u=f(x)$ او $v=g(f)$ په بند اینټروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اینټروال (a,b) کې مشتقوړاو $g'(x)\neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځای $x_0\in(a,b)$ وجودلري چې لاس ته ترې راځي: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

قضیه:
د $f(x)$ تابع دې په انتروال Iکې مشتقوړ وي.
1. که د $f(x)$ تابع په اینټروال Iکې مونوټون جګېدونکي وي، نو باور لري: $f'(x)\geq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره
- که $f(x)$ په اینټروال کې همغږیزټیټېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\leq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره.
- که $f'(x)\geq 0$ وي، دټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینټروال I کې همغږیز جګېدونکې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که $f'(x) \le 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په ایتروالI کې همغږیز ټیټېدونکې ده.
- که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې په کلکه همغږیزجګېدونکې ده.
- که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اینتروال Iکې په کلکه مونوتون ټیټېدونې ده.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x) = 0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x) = 0$ او $f''(x) > 0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x) = 0$ او $f''(x) < 0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x) = 0$ وي، او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د $x = x_0$په چاپیریال کې د $y = f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0ته پوره نږدې x لپاره باور ولري:

$f(x) > f(x_0)$ په همدې ډول $f(x) \le f(x_0)$

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چي $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځې د x_0 ځای په پوښتنه کی راځي، چی د هغي لپاره لرو $f'(x)=0$ ، خو حمتي نه ده چي $y=f(x)$ دې يواکستريموم و لري.

جمله : (د يوه بحراني ټکي لپاره پوره کيدونکی شرايط):

که په $x=x_0$ کی دوه واره مشتقوړ $y=f(x)$ تابع لپاره ولرو: $f'(x)=0$, $f''(x)\neq 0$ نو تابع $y=f(x)$ هلته يو بحراني ټکی لري.

خورا ټيټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x)>0$

خورا جگ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x)<0$

پيژند: په يوه چاپيرېال $x=x_0$ کي مشتق وړ تابع $y=f(x)$ يو کيڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کيڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته يو نسبي جگټکی(عظمي نقطه) په همدې توگه يو نسبي ټيټ ټکی ولري.

جمله: (د يوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کي مشتق وړ تابع $y=f(x)$ اکستريموم لري نو لرو: $f'(x)=0$

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چي $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره يواځې د x_0 ځای په پوښتنه کي راځي، چي د هغي لپاره $f'(x)=0$ وي ، خو حمتي نه ده چي $y=f(x)$ دې يوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په $y'=f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړيين شرايط):

که په $x=x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y=f(x)$ هلته يو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x)=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیزند: د زینتکي(کله کله برندې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:

د پرتلې لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري

د برنولي او د دې لو، پیتال قاعده:

که توابع $u=f(x)$ او $v=g(x)$ د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x)\neq 0$ ســـره او د ټولـــو $x\in U(x)$ لپـــاره او x_0 د f ا و g یوصـــفرځاي وي، د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

تمرینونه:

۱ – د لاندې لیکل شوو تحلیلي افادو مشتق د x0 په ځای کې وشمېرئ او د فرمول د اعتبار ورشو(ساحه) ورکړئ.

a) $y=x^3-2x^2+1$ b) $y=\sqrt{x}$ c) $y=x\sqrt{x}$

d) $y=\frac{x^2+1}{x}$ e) $y=\frac{x}{x-1}$ f) $y=\sin\frac{x}{2}$

۲– د یوه تن یا جسم عمود پورته غورځونې د تن دروندټکي (د جسم د ثقل مرکز) د لار- وخت- مساوات په لاندې ډول دي:

$$s=f(t)=v_0\,t-\frac{1}{2}gt^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلچټکتیا یا پیل سرعت $v_0 = 30 \frac{m}{s}$ او د ځمکې بیړې(د ځمکېتعجیل) $g = 10 \frac{m}{s^2}$. سره. دا تن یا جسم کله خپل عظمي جګوالي ته رسیږي؟

دا جګوالی څومره لوی دی

۳ – یو تن په برابر ډوله چټکتیا خوزي(حرکت کوي)، داسې چې بیړه(تعجیل) یې $a = 2 \frac{m}{s^2}$ دی

په لاندې جدول کې د $\{(\Delta t)_n\}$ لپاره یو صفرترادف(- پرلپسې) کېږدی(د بیلګې په توګه لکه په اوله متېه(ستن) کې) او جدول پوره کړی.

له $t_0 = 3\ s$? وروسته د تن یا بدن لحظوي جټکتیا څومره ده.

۴ – د لاندې تحلیلي افادو مشتق ونیسی! پام وکړی، چې د مشتقنیولو کومه قاعده په کار وړی شي

a) $y = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x} - 5$

b) $y = a^2x^3 - \sqrt{b}x^2 + \frac{1}{2}cx - 1$

c) $y = -2x^{-5} + 3x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-2} + 4$

d) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{6 \cdot \sqrt[3]{x}}{x}$

e) $y = (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{x})$

f) $y = (1 - x^{-4})(x^{-1} + x^2)$

g) $y = (x^2 + 2x\sqrt{x} + x)(x - \sqrt{x})$

h) $y = (ax^2 - b)^2$

i) $y = \frac{x^2 + x}{3x^3}$

j) $y = \frac{2x^3 - 3}{x^2}$

k) $y = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$

l) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \left(1 + \sqrt[4]{x}\right)$

۵ – د لاندې ورکړل شوو تحلیلي افادو مشتق ونیسی، او هغه ارزښتونه ترې وباسی، د کومو له پاره چې مشتق شته (موجود) نه وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۱ ـ

a) $y = (x-1)(1-x^3)$

b) $y = (x^3+1)(1-x-x^2)$

c) $y = \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt{x^3}\right)$

d) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)\left(\sqrt[4]{x} - 2x\right)$

۵ . ۲ -

a) $y = \frac{x^3+1}{x^2+x+1}$

b) $y = 4x + \frac{1}{x^2+1}$

c) $y = \frac{x-4}{4-x}$

d) $y = \frac{x^3-2x+1}{2x^3-5}$

e) $y = \frac{\sqrt{3}x - \sqrt{2}}{3x^2-2}$

f) $y = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$

g) $y = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$

h) $y = \frac{2x - \sqrt[3]{x}}{x^2-2x-1}$

i) $y = \frac{x^3 + 3\sqrt[3]{x}}{2x^2+x}$

j) $y = \frac{\sqrt{x}-1}{x - 2\sqrt{x} + 1}$

۵ . ۳ ـ

a) $y = \sqrt{x}\sin x$

b) $y = 2\sin x \cos x$

c) $y = 1 - \cos^2 x$

d) $y = x^3 \cos x$

e) $y = 2\sin x\,(x - \cot x)$

f) $y = \frac{\tan x}{\cot x}$

g) $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$

h) $y = \frac{x\sin x}{1+\tan x}$

i) $y = \tan x - \cot x - 2x$

j) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

۵ . ۴ ـ

a) $y = \frac{x}{e^x}$

b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2x^2}$

c) $y = e^x \tan x$

d) $y = \frac{5e^x}{\cos x}$

۵ . ۵ ـ

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $y = \frac{\ln x}{x}$ b) $y = \sin x \ \ln x$
c) $y = x^2 \ln x$ d) $y = 10 \ln e \ln x$

- ۶ . ۵

a) $y = 5^x + 2^x$ b) $y = 3^x x^3$
c) $y = 2^x - 2x$ d) $y = \frac{4^x}{2^x}$

– ۷ . ۵

c) $y = 2^x - 2x$ d) $y = \frac{4^x}{2^x}$

a) $y = (2x+1)^4$ b) $y = (1-x^4)^5$
c) $y = \left(1-\frac{1}{x}\right)^8$ d) $y = \left(2x^2 - \frac{4}{x} + 3\right)^6$

- ۸ . ۵

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ b) $y = \sqrt{1-2x}$ c) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$

d) $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$ e) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ f) $y = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$

g) $y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ h) $y = \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$

– ۹ . ۵

a) $y = 5x^2 \ \sin 2x$ b) $y = \sin^2 x$ c) $y = \sin\sqrt{\frac{x}{2}}$

d) $y = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x$ e) $y = \cos\frac{1}{1+x}$ f) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$

g) $y = \cot(1 - 3x)$ h) $y = \cot\sqrt{1-2x}$ i) $y = \sqrt{\tan x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

j) $y=\frac{\cos x^2}{\pi x}$ k) $y=\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}$

l) $y=\left(3+\frac{2}{\cos^2 x}\right)\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ m) $y=\left(\frac{3}{\sin x}-5\right)\frac{1}{\sin x}$

n) $y=\tan\sqrt[3]{\frac{1-2x}{x}}$ o) $y=2\sin\sqrt[3]{\frac{3}{x}}$ p) $y=\frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

۵ . ۱۰ -

a) $y=\text{Arcsin}\frac{x}{a}$ b) $y=\text{Arccos}\,\frac{a-x}{a}$ c) $y=\text{Arctan}\frac{1}{x}$

d) $y=\text{Arccos}\,\sqrt{1-x^2}$ e) $y=\frac{1}{2}\text{Arctan}\frac{2x}{1-x^2}$ f) $y=\text{Arctan}\,\sqrt{\frac{x}{x+a}}$

g) $y=\text{Arcsin}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ h) $y=\text{Arctan}\,\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$ i) $y=\text{Arccot}\,\frac{1+x}{1-x}$

j) $y=\text{Arcsin}\,2x\sqrt{1-x^2}$ k) $y=\text{Arctan}\frac{x-2}{2\sqrt{x^2+x-1}}$

l) $y=a\cdot\text{Arc}\cos\frac{a-x}{a}-\sqrt{2ax-x^2}$

۵ . ۱۱ –

g) $y=\frac{e^{-\cos x}}{\sin x}$ h) $y=\sqrt{1-e^{-x}}$ i) $y=\frac{\sin\frac{x}{2}}{e^{2x}}$

j) $y=e^x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

۵ . ۱۲ -

a) $y=\ln 2x$ b) $y=\ln x^2$ c) $y=(\ln x)^2$

d) $y=\ln\sqrt{x}$ e) $y=\sqrt{\ln x}$ f) $y=\ln\sqrt{1-x}$

g) $y=\ln\tan x$ h) $y=\ln\ln x$ i) $y=\ln\cot\frac{x}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

j) $y = \ln \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ k) $y = \ln \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

l) $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a}\right)$ m) $y = \ln \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}$ n) $y = \ln \sqrt{\frac{2x-3}{2x+3}}$

o) $y = \ln\left(a+x+\sqrt{2ax+x^2}\right)$ p) $y = \ln \sqrt[4]{\sin^3 x \cos^3 x}$

q) $y = \ln \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2} \cdot \sqrt[5]{(x-2)^3}}{\sqrt[4]{(x^2-4)^5}}$

۵ . ۱۳ –

a) $y = |x|$ b) $y = \sqrt{|x|}$ c) $y = \ln |x|$

d) $y = \sqrt{|\ln \cos x|}$ e) $y = \ln |\ln |x||$

۵ . ۱۴ -

a) $y = \sqrt[x]{x}$ b) $y = (x^x)^x$ c) $y = x^{(x^x)}$

d) $y = x^{\sin x}$ e) $y = (\cos x)^{\sin x}$ f) $y = a^x \cdot x^a$

g) $y = x^{e^x}$ h) $y = a^{e^x}$ i) $y = (\operatorname{Arc}\tan x)^x$

j) $y = (\tan x)^{\frac{1}{\cos x}}$

۶ – تانجنت په $P_0(x_0, y_0)$ ټکي کې په منحني $f(x)$ د x–محور سره کومه زاویه (کونج) جوړوي

a) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$ b) $y = \sqrt[3]{x+1}$, $x_0 = 0$

c) $y = \left(x^2 - \sqrt[3]{x^2}\right)^2$, $x_0 = 1$ d) $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{9x^2-25}}$, $x_0 = 0$

e) $y = x\sqrt{x+1}$, $x_0 = 3$ f) $y = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$

g) $y = \sqrt{x-\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$ h) $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$

i) $y = \sin(2\pi - x)$, $x_0 = \pi$ j) $y = \sqrt{\sin 2x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

k) $y=\sin\sqrt{2x}$, $x_0=\frac{1}{2}$ l) $y=(x-1)e^x$, $x_0=0$

۷ - په پروت تانجنت د -محور باندې پرته منحني کوم ټکي کې غوځوي، که زاويه او همداسې وي.

a) $y=x^2$ b) $y=x^3$ c) $y=x\cdot|3-x|$
d) $y=\frac{x^2-3}{2x}$ e) $y=\frac{x^2+x+14}{x+2}$ f) $y=\frac{x^2(x-9)}{2(x-6)^3}$

۸ – د ورکړشوو تخليلي افادو لومړي درېِ مشتقونه جوړ کړئ! و ازمايې، چې ايا د مشتق قابليت کې د يو ګونو ورشو ګانوو يا ساحو کې تغير راځي!

د -م مشتق لپاره يو عمومي فرمول ورکړئ، ترهغې چې شته وي.

a) $y=x^n$ b) $y=\sqrt{x}$ c) $y=\sqrt[4]{x^3}$
d) $y=\sqrt{1-x^2}$ e) $y=\frac{x}{1-x}$ f) $y=\frac{1+x}{1-x}$
g) $y=\cos x$ h) $y=\frac{1}{2}\sin 2x$ i) $y=\sin(1-2x)$
j) $y=x^2\sin 2x$ k) $y=\tan x$ l) $y=\tan^2 x$
m) $y=e^x\sin x$ n) $y=e^{mx}$ o) $y=e^{-x}+e^{-2x}$
p) $y=\ln x$ q) $y=\ln\sqrt[3]{1+x^2}$ r) $y=\text{Arcsin } x$

۹ - د تانجنت مساوات $y = mx + n$ په $y = f(x)$ کيږدی.

۹ . ۱ -

a) $f(x)=x^2+1$, $P_1(1,y_1)$ bzw. $P_2(-1,y_2)$
b) $f(x)=x^3-3x^2+x+1$, $P_1(0,y_1)$ bzw. $P_2(2,y_2)$
c) $y^2=1-x$, $P_0(-3,y_0)$ d) $y^2=x-1$, $P_0(5,y_0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۹ . ۲-

a) $f(x) = e^{-x}$, $m = -1$ b) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 4$, $m = 0$

c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $m = 1$ d) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $m = -1$

۱۰ – د لاندې توابعو $y=f(x)$ په څټ تابع (برعکس تابع) $f^{-1}(x)$ مشتق dx/dy په $P_0(x_0, y_0)$ ټکي کې وشمېرئ(جوړ کړئ)

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$, $x_0 = -1$ b) $y = x^2 - 2x - 1 + \frac{2}{x}$, $x_0 = 1$

c) $y = \frac{1}{2x^2 - 5x + 9}$, $x_0 = \frac{5}{4}$ d) $y = \frac{x+1}{x+2}$, $x_0 = -3$

e) $y = \sqrt{1-x}$, $x_0 = 1$ f) $y = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, $x_0 = \frac{a}{2}$

g) $y = (x+1)\sqrt{1-x}$, $x_0 = -1$ h) $y = \sin x$, $x_0 = 0$

i) $y = \sin(2x + 3\pi)$, $x_0 = -2\pi$ j) $y = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

k) $y = x\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ l) $y = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$

m) $y = e^x \cos x$, $x_0 = 0$ n) $y = x\,e^{\cos x}$, $x_0 = 2\pi$

o) $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$, $x_0 = 1$

p) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$, $x_0 = x \in (-\infty, \infty), a \neq 0$

q) $y = \ln(x+1)$, $x_0 > -1$ r) $y = \ln\sqrt{\frac{3x-4}{3x+4}}$, $|x_0| > \frac{4}{3}$

s) $y = x^{\frac{1}{x}}$, $x_0 > 0$, $x_0 \neq e$

۱۱ – لاندې تحلیلي افادې په متمادیت او مشتق والي باندې و څیږئ،

a) $y = \begin{cases} -a & \text{für } x \le 0 \\ +a & \text{für } x > 0 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x \le 2 \\ -2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$ c) $y = |x - 1|$

d) $y = |\sin x|$ e) $y = -\frac{x^2}{2}$ f) $y = -|x|$

g) $y = \sqrt[3]{x^2}$ h) $y = (x+1)^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ i) $y = e^{\frac{1}{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

j) $y = e^{\frac{x}{x-1}}$ k) $y = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ l) $y = \text{Arccot}\,\frac{1}{x}$

m) $y = \text{Arcsin}(\sin x)$ n) $y = \text{Arctan}(\tan x)$ o) $y^2 = \frac{x^3}{4-x}$

p) $y^3 = 3x^2 - x^3$ q) $y^2 = \frac{1-x}{x}$

۱۲ - لاندې منحني چې د پسې برابرونونو سره ورکړ شوي، د افراطي ټکو او اوړونټکو(نقاط افراطي و انعطاف) له مخې وڅېړئ.

a) $y = x^2 - 2x + 3$ b) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$ c) $y = x^3(8-x)$

d) $y = (x-a)^4 + b$ e) $y = \frac{x}{x^2+1}$ f) $y = \frac{x^2-7x+6}{x-10}$

g) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ h) $y = \frac{ax^2}{ax+b}$

i) $y = \frac{a^2(a-x)+b^2x}{x(a-x)}$ j) $y = \cos^2 x$ k) $y = \sin x \cos x$

l) $y = \sin 2x - 2\sin x$ m) $y = e^x \sin x$ n) $y = x\,e^x$

o) $y = x^n e^{-x}$ p) $y = e^{-x} + e^{2x}$ q) $y = e^{-x} - e^{-2x}$

r) $y = x \ln x$ s) $y = x \ln^2 x$ t) $y = \frac{1}{2}\ln x - \text{Arctan}\,x$

۱۳ - د دې لاندې برابرونونو سره ورکړ شوې منحني تر بحث لاندې ونیسئ:

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$ b) $y = -(x+4)^2 + 4$

c) $y = x^3 - x^2$ d) $y = x^3 - 10x$

e) $y = -x(x+3)^2$ f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$ h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

i) $y = (x+2)(x^2 - 4x + 3)$ j) $y = (1-x)(x^2 + 6x + 8)$

k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$ l) $y = |-x(x^2 - 16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$

c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$ d) $y = (x-2)^2(x-4)(x+3)$

e) $y = \frac{1}{24}x(x-1)(x-2)(x-3)$ f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

(c) ketabton.com: The Digital Library

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$
b) $y = -(x+4)^2 + 4$
c) $y = x^3 - x^2$
d) $y = x^3 - 10x$
e) $y = -x\,(x+3)^2$
f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$
g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$
h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$
i) $y = (x+2)\,(x^2 - 4x + 3)$
j) $y = (1-x)\,(x^2 + 6x + 8)$
k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$
l) $y = |-x\,(x^2 - 16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$
b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$
c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$
d) $y = (x-2)^2\,(x-4)\,(x+3)$
e) $y = \frac{1}{24}x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$
f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$
g) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$
h) $y = (x+2)^2(x-1)^3$
i) $y = x^2(x^2-1)^2$
j) $y = (x-4)^4(x+3)^3$

13.3. a) $y = \frac{1}{1+x^2}$
b) $y = \frac{3x-1}{2x+1}$
c) $y = \frac{5}{(2x+1)^2}$
d) $y = \frac{2x+x^2+25}{1+x^2+2x}$
e) $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$
f) $y = \frac{x^2+2x+1}{2x}$
g) $y = \frac{x^2-5x+4}{x-5}$
h) $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2-2x+1}$
i) $y = x - \frac{4}{x-1}$
j) $y = \frac{x^3+2}{2x}$
k) $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$
l) $y = \frac{2x^2-6x}{x^3-3x^2+x-3}$
m) $y = \frac{x^3}{x^2-2x+1}$
n) $y = \frac{5(3x^2-4)-13x}{\frac{1}{8}(2x-1)(4x+7)}$

13.4. a) $y = x\sqrt{9x-x^2}$
b) $y = x^2\sqrt{25-x^2}$
c) $y = x\sqrt{14+8x-x^2}$
d) $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$
e) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
f) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} - 2$
g) $y = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$
h) $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
i) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$
j) $y = \sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}$
k) $y = \sqrt{(x+1)^2 - x} - \sqrt{(x-1)^2 + x}$
l) $y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x+1)^2 - x} + \sqrt{(x-1)^2 + x}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

13.5. a) $y^2 = x^3 + x + 2$ b) $y^2 = x^3 - 3x + 2$ c) $y^2 = x^3 - 2x + 1$

d) $y^2 = x^4(x-1)$ e) $y^2 = x^2[x(1-x)]$ f) $y^2 = \frac{1-x}{x}$

g) $y^2 = \frac{x^2}{1+x}$ h) $y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$ i) $y^2 = \frac{x(1-x)}{(x+1)^2}$

13.6. a) $y = 2\sin^2 x$ b) $y = \sin 2x \cos x$ c) $y = \sin x \cos^2 x$

d) $y = \sin^2 x + 2\cos^2 x$ e) $y = x \sin x$ f) $y = \frac{\sin x}{x}$

g) $y = \frac{\sin 2x}{\sin x}$ h) $y = x^3 \cos x$

i) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$ j) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

k) $y = \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ l) $y = \cos 2x + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

13.7. a) $y = e^{-2x}$ b) $y = xe^{-x}$ c) $y = x e^{\sqrt{x}}$

d) $y = (x^2 - 1)e^x$ e) $y = e^{\tan x}$ f) $y = 2e^{-x}\sin 2x$

g) $y = e^{2x}\sin 3x$

13.8. a) $y = \ln 3x$ b) $y = \ln(x^2 - 1)$ c) $y = x^2 \ln x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرج يې مختلف کرښيز يا لاينيز ضريبونه لري.

بنسټ: که د يوه اصلي پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ په مختلفو کرښيزو(لايني) ضريبونو $P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ ...\ (x-x_n)$ ټوټه کېدونکی وي، نو پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3}\ ...\ \frac{N}{x-x_n}$$

داسې يوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه،، بلل کېږي، چې A,B,C,...,N حقيقي عددونه دي.

بيلګه:

اصلي پولينوم کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسر ټوټه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مساوات $x^3-4x^2-7x+10=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمايښت له لارې پيداکيږي.

د پولينوم ويش(لنډ: پولينومويش) $(x^3-4x^2-7x+10):(x-1)=x^2-3x-10$ مو ټوټه ونې ته بيايي $x^3-4x^2-7x+10=(x^2-3x-10)(x-1)$ مساوات $x^2-3x-10$ اوس $x_2=-2$ او $x_3=5$ حلونه لري.

له دې امله $x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$ دی.

د اصلي کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمېرنو قاعدې له مخې کېدی شي ورکړ شوی پولينوم په درې جمعی برخو ټوټه شي، چې مخرجونه يې لاينيز (کرښيز-)ضريبونه دي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولينوم مخرج دی.

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{x^3-4x^2-7x+10}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{x^3-4x^2-7x+10}$$

دصورتونو ارزښت A ,B او C ټاکنه د ضريبونو(څلوونو) د پرتلې له لارې:

د مساوي مخرجونو کسرکې بسيا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته بايد د مساوي توانونو ضريبونه، دا په دې مانا چې د x^2, x او x_0 بايد مساوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A+B+C=4 \qquad I$$
$$A-3B-6C=-1 \qquad II$$
$$-2A-10B+5C=39 \qquad III$$

د فاکټور 2 سره د I او II مساوات ضربونه او د هر یوه جمع د III سره پورته درې مساوات سیستم و دوه مساواتسیستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$-8B=-72 \qquad V$$
$$-16B-7C=-41 \qquad IV$$

د مساوات IV.V څخه لرو: $-24B=-72 \Rightarrow B=3$

د $B=3$ په V کې اېښوونه: $-16.3-7C=-41 \Rightarrow C=-1$

د $B=3$ او $C=-1$ په I کې اېښوونه: $A+3-1=4 \Rightarrow A=2$

په ټوټه کونې فرمول کې اېښوونې سره غوښتونکی ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

ازمايښت:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=$$

$$=\frac{(x-1)(x+2)+3(x-5)(x+2)-1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)}=\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$$

ب) اصلي پولينوم کسرونه، چې مخرج یې مساوي لاینيز(کرښيز) ضریبونه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د يوه اصلي پولينوم $P_n(x)$ مخرج $\frac{P(x)}{P_n(x)}$ د کرښيز فاکتور $x-x_0$ توان $\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^n}+...+\frac{N}{(x-x_0)^n}$ وي نو ددې کرښيزو فاکتورونو له پاره پولينوم لاندې بڼه لري: $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کرښيزو فاکتورونو ټوټه کسرونـه (ماتونه) په بلده بڼه ورکول کيږي.

بيلګه:

د اصلي پولينوم کسر $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کرښيزو فاکتورونو:

د پولينوم $x^3-4x^2+5x-2=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمايښت له لارې پيدا کيږي.

پولينوم ويش $(x^3-4x^2+4x-2):(x-1)=x^2+3x+2$ مو لاندې ټوټه کونې ته لاربښودوي:

$$x^3-4x^2+4x-2=(x^2+5x-2)(x-1)$$

مساوات $x^2-3x+2=0$ دا $x_2=1$ او $x_3=2$ حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره ډبل حل دی:

$$x^3-4x^2+5x-2)=(x-2)(x-1)^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه کسر پیل:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزونې له لارې:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{x^3-4x+5x-2}$$

د A,B او C صورتونو ارزښت د ضریبونو پرتله کونې له لارې.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-2A-3B+C=-6 \qquad \text{II}$$
$$A+2B-2C=2 \qquad \text{III}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره ګډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-3A-4B=-10 \qquad \text{II}$$

دا ضرب د 4 سره او جمعه يې د IV سره : A = 2

د A = 2 اينسوونه په I کې: $2+B=3 \Rightarrow B=1$

د A = 2 او B = 1 اینسونه په III کې: $2+2.2-2C=2 \Rightarrow C=1$

د ټوټه کونې فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ) اصلي پولينوم کسرونه، چې مخرج يې پوره په کرښيزو ضريبونو يا فاکتورونو نه ټوټه کيږي.

بنسټ:

که د يوه اصلي پولينوم کسر $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ نور په يوه حقيقی ضريب نه ټوټه کېدونکي ضريب ax^2+bx+c مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کېدو کې دې د يو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ په بڼه کېښول شي يا راوړل شئ

بيلګه:

د پولينوم کسر $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ له پاره دې په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرج ټوټه کونه په کرښيزو ضريبونو:

لومړی حل دې $x_1=-1$ وي مساوات $x^3+3x^2+6x+4=0$ د ازماېښت له لارې پيدا کيږي.

بولينوم وېش $(x^3+3x^2+6x+4):(x+1)=x^2+2x+4$ مو لاندې ټوټه کونې ته بيايي:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

دا چې مساوات x^2+2x+4 حقيقي حل نه لري، نو د حقيقي اعدادو په ورشو کې نوره ټوټه کونه ناشونې ده.

نو له دې امله پولينوم کسر لاندې بڼه لري: $\frac{Ax}{x^2+2x+4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\frac{c}{x+1}$ بنې کسر سره یوځای مو لاندې ټوټه کسر ټوټه کونې ته بیایي:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمع

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

د ضریبونو A,B,C ټاکنه د پرتله کولو له لارې:

A+C = 5 I

A + B + 2C = 8 II

B + 4C = 9 III

د III کمښت (تفریق) له مساوات II څخه د I سره یې ګډولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اووښتونې یا متحولې لري:

A − 2C = 5 IV

A + C = 5 I

مساواتIII منفي مساواتII : $-3C=-6\Rightarrow C=2$

د C = 2 په I ائښوولو سره : $A+4.2=9\Rightarrow B=1$

د C = 2 په III ایښوولو سره: $B+4.2=9\Rightarrow B=1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا د ټوټه کونې فرمول کې کېږدو نو د ټوټهکسر ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

ج) نا اصلي پولینوم کسرونه:

که د یوه پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د صورت درجه د پولینوم د مخرج له درجې څخه لویه وي، نو دا په پولینوموېش له لارې په ټولناطق کسر او یوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بیلګه:

کسري پولینوم $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ په ټوټه کسري پولینومونو ټوټه کړئ .

د پولینوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو یو نا اصلي پولینومکسر مخ ته پروت دئ.

پولینوم وېش:

$$(3x^3-6x^2-20x-1):\ (x^2-2x-8)=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$$

$$\frac{-(3x^3-6x^2-24x)}{4x-1}$$

د پاتې – یا باقي کسر $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$ له پاره د ټوټه کسر ټوټه کونې کارونه (عملیه) مخ ته بیایو.مخرج په کربنیزو ضربیونو ټوټه کړی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات x² - 2x -8 = 0 له پاره حل $x_1 = -2$ او $x_2 = 4$ لرو.

نو $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$ دی.

د ټوټه کسر ټوټه کونې لپاره ځای په ځاي کوو:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمعه کول:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

د ضريبونو د پرتله کوونې په مرسته د A او B ټاکل:

$$A + B = 4 \qquad \text{I}$$

$$2A - 4B = 4 \qquad \text{II}$$

د I ضرب له 2 سره او له II څخه يې تفريق يا کول $6B = 9 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$

په II کې اېښوول: $2A - 4\frac{3}{2} = -1 \Rightarrow A = \frac{5}{2}$

منځنی لاس ته راوړنه $\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{(2(x+2)}$

متحول (بنتونکی) په ټوټه کسر ټوټه کونه لاندې بڼه غوره کوي:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8} = 3x + \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

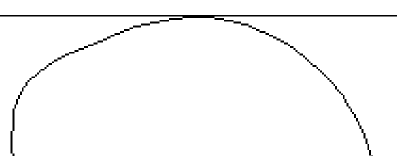
(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتيګرالشميرنه

د انتيګرالشميرنې لپاره پيل راوړنې

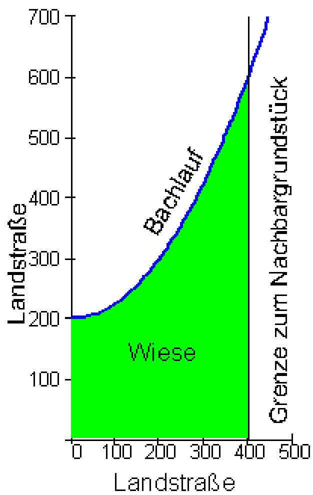
موږ د ځمککچپوهنې يا هندسې له لارې بلد يو چې د کرښو رابند تنونو يا جسمونوسطحه او ډکې يا حجم څنګه وشميرو.
که يوه سطحه له ګرږط(-کرښې) رابنده وي، نو څه بايد وشي؟
دا مو انتيګرال شمېرنې ته رابولې.

پخوانيو يونانيانو ته دا د منحنې څخه رابندې سطحې شميرلو اصول معلوم وو.
دا دمشتق شميرنه، چې موږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پيړۍپاي کې) د طبيعي علومو پوهانو لايبنيځ او نيوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.



پيلبيلګه

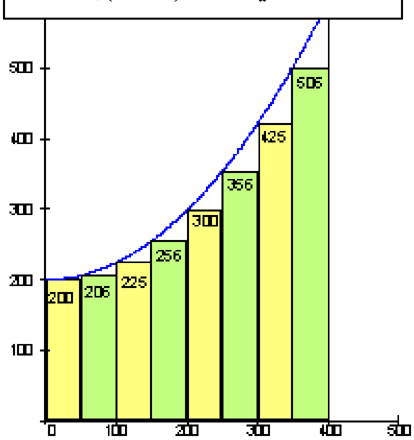
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا ځېراه شوی چمن خرځیږي. له پورته لور د ویالې را بند دی او له ښي لور د ګاونډي ځمکه ده او کیڼ لور ته کوڅه او له کښته لور هم د یوې کوڅې را بند دی. ددی لپاره چې چمن وپلورل شي، باید سطحه وپیژندل شي. د پلورونکی لپاره سطحه باید نژدي پوره مګر هیڅکله کمه ونه شمېرل شي. اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پیسي باید ورکړي، خو هیڅکله ځمکه د اصل څخه زیات ونه شمېرل شو.	

وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

ویاله $f(x)=\frac{1}{400}x^2+200$ د تابع مساوات لري.

د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

هره توټه(مستطیل پټی) 50m سره وره ده او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو، سطحه یو ځای شمیرو. $200\cdot50=10000$ $206\cdot50=10300$ $225\cdot50=11250$ $256\cdot50=12800$ $300\cdot50=15000$ $256\cdot50=12800$ $425\cdot50=21250$ $506\cdot50=25300$ $\underline{123700}$	ځمکه په لاندې ډول په اوږدو توټو(پټیو) توټه کیږي د اوږدوالي واحد(یوون)په m 

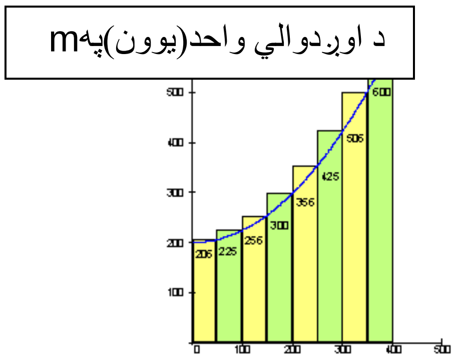
(c) ketabton.com: The Digital Library

د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نژدې $123700\ m^2$ ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره ټوټه(پټۍ) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یوځای شمیرو.

$$206 \cdot 50 = 10300$$
$$225 \cdot 50 = 11250$$
$$256 \cdot 50 = 12800$$
$$300 \cdot 50 = 15000$$
$$356 \cdot 50 = 12800$$
$$425 \cdot 50 = 21250$$
$$506 \cdot 50 = 25300$$
$$600 \cdot 50 = 30000$$
$$\underline{143700}$$



د د پلورونکي له پاره د ټولي سطحي مساحت نږدې $143700\ m^2$ دی.
اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قیمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعني د سطحي منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700+143700}{2} = 133700unt^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انتیګرال برخه (په مخ) کې وشمیږرو، چې ریښتونی ارزښت یې $133333.\bar{3}m^2$ دی.
د اخستونکي په بېلګه کې دا ډول شمیږنه **لاندنی** ،،**جمعي جوړول**،، بلل کیږي.
د پلورونکي په بېلګه دا ډول شمیږنه،، **پورتنی جمعي**،، **جوړول** بلل کیږي.
دا د سطحې ریښتونی ارزښت یو چیږته په دا منځ کې پروت دی.
باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې رښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

انتیګرالشمیرنه Integralcalculation

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحې تابع له پاره تر مخ راوړنه:
دا دانتیګرال هندسي مفهوم هم دئ.
په کارتیزي وضعیه قیمت سیستم کې د ګراف په سرچینه کې یوه کرښه رسمو.
غواړو سطحه پیداکړو، چې د تابع دګراف او x - محور ترمنځ د x په واکوالي کې پرته وي(د x تابع وي).

د ریمن (ټاکلی) انتګرال

یادونه: انتیګرال څه شی دی؟

آنتېګرال کونه Integration د ورګډېدلو په معنی دی ، لکه چې یو ځوک یوې پردئ ټولنې ته ورګډیږي یعنې ددې پردئ ټولنې خویونه خپلوي، یعنې دی په دې ټولنه ورزیاتیږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څېړلو ته وړاندې کیږي، چې څنګه د یوې کوچنی درجې تابع و یوه جګ درجې فنکشن یا تابع ته ځي.

د انتیګرال هندسي تعریف:

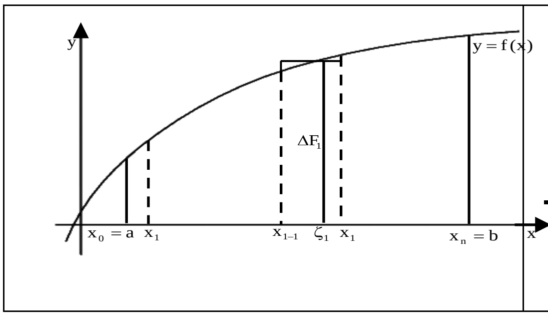
لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:که یوه f تابع ولرو، نو دx محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښ لري.

تحلیلي تعریف:

تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انتروال [a,b] باندې تعریف دی، نو دa څخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=a او x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې برخه کې غواړو، چې د انتګرال کليمې ته وده ورکړو. د سطحې کچونې يا اندازه کوونې څخه کړی شو د انتګرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتګرالنيول د مشتق په څېر يا برعکس کارونه يا عمليه ده.



يو تابع $y = f(x)$ لرو. غواړو ددې تابع د ګراف او د x – محور باندې پرتو ټکو $x_0 = a$ او $x_n = b$ ترمنځ هواره (سطحه) وشمېرو داسې چې $(f(x)>0)$ وي. (څېره ۱ . ۱)

ددې دندې د حل لپاره د [a,b] اينتروال په n (نه اړيين) برابرو برخو انتروالونو $[x_{i-1}, x_i]$ټوټه کوو.

$$a = x_0 < x_1 <...< x_{i-1}x_i <...< x_n = b$$
$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اينتروال $[x_{i-1}, x_i]$ کې په خوښه$\xi_l \in [x_{i-1}, x_i]$ ټاکو.

د $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$ تر منځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطيل سطحه (و لاړکونجيزه هواره) ده:

$$\Delta F_i(x) = f(\xi_l).\Delta x_i \ , \qquad (4.2)$$

د ټولو پورته مستطيل ډوله کوچنيو سطحو د جمعې (زياتون) له لارې غوښتونکې، نزدې ټوله سطحه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum f(\xi)\Delta x_i ;..............................(4,2)$$

دا نړدیوالی تر هغي ښه کیږي څومره چی د اینتروال [a , b] ویش نری شي یعني $\max \Delta x \to 0$ ،هرڅومره چی د زیاتیدونکو شمیر ($n \to \infty$) شي.

که (٤ . ٢) تل همغه پوله ارزښت F ولري، په دې اړه نه چی اینتروال [a , b] څنګه ویشل شوی

او $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ څنګه ټاکل شوي، نو f (x) په اینتروال [a,b] کی اینتیګرالوړ دی. دا د بیلګي په

توګه د ټولو ټوټه، متمادی او محدودو توابعو y = f (x) حالت دی .

پیژند (تعریف) ٤ . ١ : لیمیت   (پوله)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F;(\Delta x \to 0),........(4,3)$$

که په اینتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینتیګرال بولو، یا د ریمن سطحه

F- Riemann . دلته a د اینتیګرال کېدونکي لاندې(کښته)پوله یا حد او b د ایتیګرال کېدونکي پورته پوله یا حد بلل کیږي او [a,b] د ایتیګرال کېدونکي اینتروال او((f (x (Integrand اینتیګرالېدونکی) او xد اینتیګرال کېدونکي متحول (Integrationsvariable) بلل کیږي

یادونه ۱ : د ایتیګریشن واریابله یا اووښتونی کیدی شي په خپله خوښه په نخښه شي(مخنخښه یا علامه یی په خوښه وټاکل شي).

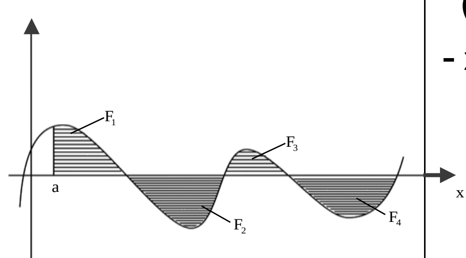
(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ لرو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$

يادونه ۲ : دا پورته تعريف ٤ . ۱ کيدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چيرته چی f (x) 0 > باوري نه وي .

که f (x) < 0 وي نو دا ټاکلی اينتيګرال بيا د x -محور تر لاندې منفي هواره لري

.

که د y = f (x) کږه - لکه په)ش ٤ . ۲ (کی - داينتيګرآلونې په اينتروال کی د x - محور پرې کړي نو دا مخامخ فرمول د لاندې سطې سره باور لري : $F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 \dots$	

د تعريف ٤ . ۱ پسې ترلې دا لاندې جمله لرو:

جمله٤ .۱ : که f (x) په [a , b] کې اينتيګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ددې لپاره چی دا پورته مساوات د c ارزښتونو ته پراخه کړی شو، بايدc له اينتروال [a,b]د باندې نه وي پروت، يعنې ټکي a,b او c په يوه اينتروال کی بايد پراته وي، په هغه کی چی تابع f (x) اينتيګرالوړ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ دا لاندې تعریف(پیژند) لرو :

پیژند یا تعریف ٤ . ۲ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$

د پیژند تعریف ٤ . ۱ له مخی تل باور لري: $\int_a^a f(x)\ dx = 0$

بنسټیز- یا لومړنی تابع

ددې لپاره چی د مشتقنیولو او اینتیګرال نیولو ترمنځ اړیکی لاس ته راوړو، د لومړنی تابع کلمه په لاندې توګه تعریفوو:

پیژند (تعریف): تابع y = f (x) دې په یوه واز اینتروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ (x) F تابع چی F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x) بنسټیز- ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

په ساده توګه لیدل کیږي چی د یوې f (x) تابع لپاره نه یوازې یو بنسټیز تابع F (x) موجود دی، د بیلګي په توګه $F_0(x) = x^2,\ F_1(x) = x^2 + 1,\ F_2(x) = x^2 + 2$ تابع، بلکي په عمومي ډول

$F (x) = x^2 + C$، چې دا ټول مساوي مشتقونه f (x) = 2x لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته ښوونو پایله، چې څنګه سړی د یوه متمادي تابع f (x) لومړنۍتابع پیدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

y = f (x) دې په اینتروال I کې متمادي تابع وي، نو د $a \in I$ لپاره

$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ د f (x)، یوه لومړنۍتابع ده، دټولو $c \in I$ لپاره .

د f (x) هره بله لومړنۍ(بنسټیزه) تابع لاندې بڼه لري:

$F(x) = F_a(x) + C,\ \ C \in R$

ځواب :

ښایو چې Fa (x)د f (x) بنسټیز تابع ده. ددې د ښوولو لپاره ښایو چې د Fa (x) لپاره د پورته پېژند شرایط باور لري. د Fa (x) مشتق د $x \in I$ او $x \neq a$ لپاره په لاندې ډول ده.

$$F_a^{'}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \int_a^{x+h} f(t)dt$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\xi),\ \ \xi \in [x, x+h]$$

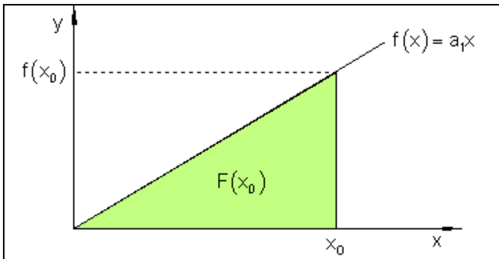
(c) ketabton.com: The Digital Library

(د لیمیټ منځ ارزښت جملې له مخې داسې یوه ξ شته دی
(د متمادیت له امله $(f(\xi) \to f(x))$
$= f(x)$

سطحه او لومړنی تابع:

سطحي تابع ته ترمخ راوړنه:

د تابع $f(x) = a_1 x$ ګراف په کارتېزي وضعیه سیستم (پروت ولاړسیستم) په سرچینه کې یوه کرښه انځوروي.
یو تابع غواړو پیدا کړو، چې د ګراف او x -محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي یا تابعیت کې سطحه په ګوته کوي.
دا چې دا جوړه شوې سطحه یو مثلث دی، نو حل یې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته $A = \frac{g \cdot h}{2}$ ساده پیدا کېږي:
زموږ د مسألې لپاره متحوله داسې تغیروو:
$A \to F(x_0);\ g \to x_0;\ h \to f(x_0) = a_1 x_0$



$$F(x_0) = \frac{x_0 \cdot f(x_0)}{2}$$

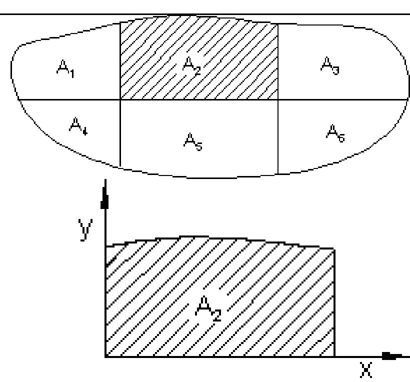
د $f(x_0) = a_1 x_0$ سره په لاندې ډول دی:

$$F(x_0) = \frac{x_0 \cdot a_1 x_0}{2} = \frac{a_1}{2} x_0^2$$

تابع $F(x_0)$ د ګراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي(تابعیت) کې تشریح کوي یا ښایي. موږ دا تابع د **سطحې تابع** بولو.

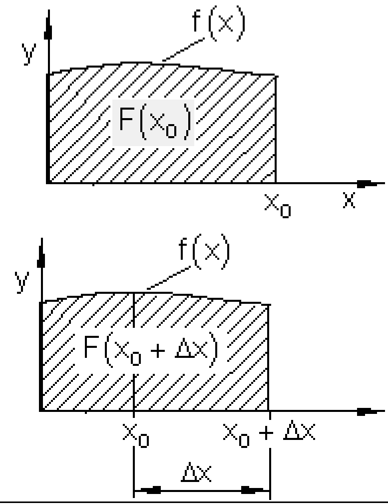
د سطحې پرابلم:

هره له کږوکرښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو(قدمونو)، چې په هغې کې فقط یوه یوه کږه کرښه رامنځ ته کیږي.
نورې ټولې رابندونې سیده کرښیزې دي.
هره یوه د سطحې برخه(د بېلګې په توګه دلته A_2) کېدی شي د وضعیه قیمتونو سیستم کې د یوې سطحې په څېر انځور شي، چې د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.

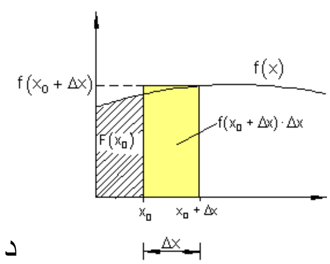


(c) ketabton.com: The Digital Library

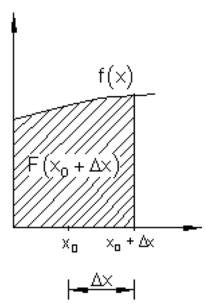
که له کږوکږښو رابند ګراف د f(x) متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ايا يو تابع شته چې د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظيم کړي، لکه په پيلبيځګه کې؟
که داسي يو تابعF شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محورارزښت تنظيم وي، نو بايد د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$ په سطحه $F(x_0+\Delta x)$ باندي تنظيم کړای شي.



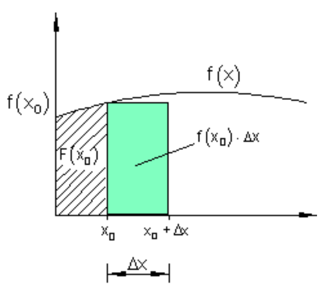
په يوه څلورضلعي(مستطيل) کې د سطحي رابندول:



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه د ربښتوني سطحې څخه څه لويه ده



$F(x_0+\Delta x)$ رينتوني سطحه ده.



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه له رينتوني سطحې څه کوچنۍ ده.

که د سطحې پټې (يا کوچنې مستطيلونه يا ولاړکوډيز)هرڅومره کوچني شي، په همغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه يې توپير کميږي.
دا اړودوالی د رياضياتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کېدی شي:

$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$

دا مو دې لاندې نابرابرونونويا نامساواتو ته راهڅوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x) \le F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad | F(x_0)$$
$$\Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \le f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |: \Delta x$$
$$\Leftrightarrow f(x_0) \le \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \le f(x_0+\Delta x)$$

لیمیټ يې نیسو(پوله يې پیدا کوو):

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$$
$$f(x_0) \le F'(x_0) \le f(x_0)$$
$$f(x_0) \le F'(x_0) = f(x_0)$$

نو لرو: $F'(x_0)=f(x_0)$

دا په دې معنا، چې د سطحې F(x) مشتق د کږې کرښې د تابع ارزښت($f(x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی.
موږ لیکو:

$$\boxed{F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)} \quad \text{يا} \quad F'(x_0)=\frac{dF(x_0)}{dx}=f(x_0)$$

که موږ بریالي شو، داسې یو تابع F(x) پیداکړو چې مشتق يې د رابندې کږې f(x)تابع وي، نو F(x) د سطحې تابع دی.
که موږ یو تابع د لومړني تابع ځخه رابیل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د یوې سطحې تابع پیدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی.

سږی کړی شي فورمال ووایي:
د یوې سطحې مساحت تابع، چې پیداکړو، دا معنا لري چې ورګډول یا انتیګرالول يې شمېرو.
د یوه ساده توان تابع په بیلګه د احساس له مخې یوه لار پیداکیدی شي، چې دا ځنګه ایتېګرالوي.

توانتابع :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=x^3 \quad \Rightarrow f'(x)=3\cdot x^{3-1}=3x^2$$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په يو کميږي او پوتنځتابع د زاړه پوتنځ سره ضربيږي.
انتيګرالونه (زياتونه ياورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په يو جګيږي اوپوتنځتابع په نوي اګسپوننت وېشل کيږي.
دا همدا اوس ازمايو:

پوتنځتابع:

$$f(x)=3x^2 \quad \Rightarrow F(x)=\frac{3}{2+1}x^{2+1}=\underline{\underline{x^3}}$$

تابع F(x) د f(x) بنسټتابع (لومړنۍ تابع يا ساده تابع) بلل کيږي، ځکه چې f(x) له F(x) څخه لاس ته ارځي يا را پيداکيږي يا راځيږي.

ناټاکلی انتيګرال

و به ګورو، چې نا ټاکلی انتيګرال د لومړنۍ تابع لپاره بل نوم دی.

که ديوې ورکړ شوې f(x) تابع F(x) لومړنۍ تابع، يعنې F(x) وپېژنو، نو د يوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د f(x) د ټولو لومړنيو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه يو حقيقي عدد دی).
مونږ د f(x) تابع د F(x) لومړنۍ تابع ټاکنه يا اينتګرلونه هم بولو او ددې له پاره ليکو:

$$\frac{dF}{dx}=f(x) \quad \Leftrightarrow \quad dF(x)=f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad F(x)=\int dF(x)=\int f(x)dx$$

نو لرو : $F(x)=\int f(x)\,dx$

دا تراوسه فورمال ليکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.
مونږ لومړنۍ توابع پلټو

بيلګه: لومړنۍ تابع F(x) دې پيدا شي، چې مشتق يې f(x) = 2x دی. قاعده داسې ده $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ ازمایو:

$F(x)=x^2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$

$F(x)=x^2+2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$. په ټولیزه توګه باور لري:

$F(x)=x^2+C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x)=2x=f(x)$

دواړه توابع په ثابت غړي کې يو له بل توپير لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره
هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله بايد دې خپلي لار ته تغير ورکړو.

قاعده(لار): باور لري: $\boxed{\int f(x)d\,x=F(x)+C}$

د لومړنيو توابعو سټ(ډېرى)

بيلګه ښايي، چې د تابع f(x) لپاره نه يواځې يو لومړنى تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې يواځې ثابت عدد کې يو له بل سره توپېر لري، چې دا د f(x) د لومړنييو توابعو سټ بولو.

بيلګه

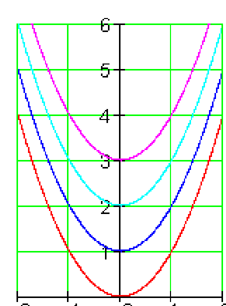
يو لومړنىتابع F(x) دې پيدا شي، چې د هغه مشتق f(x) = 3x² + 2 وي.

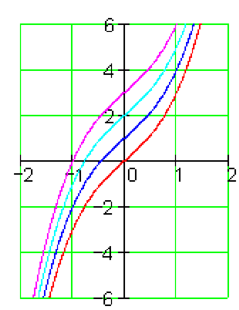
$F(x)=x^3+2x+C$ ، ځکه چې $F'(x)=3x^2+2=f(x)$

د ټولو لومړنيو توابعو ډېرى دې د منحنيو ډلې په ځېر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې يو له بل توپېر لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بېلګې وکتل شي.

$F(x)=x^2+C$ $\qquad$ $F(x)=x^3+2x+C$





(c) ketabton.com: The Digital Library

انتیګرالشمېرنه د مشتقشمېرنې برعکس دی.

لاندې توابع په اړونده توګه په ،، برعکس مشتقولو،، له لارې. موږ د مخه ځنې انتیګرال قاعدې لوستلې.

لکه چې ومو لیدل دواړه تمرینونه د همغه تیپ او اصولو له لارې اجرا کیږي، خو یواځې لیکنه یې توپیر لري

دویم(لاتین) د سطحې د شمېرلو لپاره د مشتق او انتیګرال اصلي جملې ته ګوته نیسو.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = \left|F(b) - F(a)\right|$$

د یوې ساده بیلګې له لارې د اصلي جملې په مرسته دا سې مخ ته ځو

تمرین (چا چې ډېر کار کوی وي) شوی لیدونکی ګوري یا پیژني، چې د سطحې مساحت په دې بیلګه کې بې له مطلق ارزښت شمیرل کېدای شي.، ځکه چې په دې بیلګه کې سطحه د x- محور پورته لور ته پرته ده .

د دې درس تکمیل – یا *پوره کیدنې لپاره بیلګې.

1 . تول تام کسري تابع د x -محور او د کرښو x = -2 او x = 1 سره یوه سطحه پوره رابندوي یا راتړي. د سطحې مساحت وشمیرئ.

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 6$$
$$a = -2 \;,\;\; b = 1$$

2 . د دوه توابعو *f(x)* او *F(x)* مساوات ورکړ شوي دي (الف) صفرځایونه وشمېرئ او د *f(x)* ګراف وکاږئ. (ب) وښایئ، چې *F(x)* د *f(x)* لومړنی تابع دی. (پ) د *f(x)* اوx - محور ځخه پوره رابندې سطحې مساحت وشمیرئ.

:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 3e^{-x} \cdot \left(2x - x^2 + 1\right)$$
$$F(x) = 3 \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot e^{-x}$$

3 . د ٤ – مې درجې تامراشنل تابع د x- محور په درې ټکو کې غوڅوي او د هغې سره يوه سطحه مکمله رابندوي. د سطحې مطلقه مساحت وښايئ.

$$f(x) = x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3)$$

٤ . د *f(x)* مثلثاتي تابع د -محور د a او b ټکو او همداسر نورو ټکو کې غوڅوي. د *f(x)* او x -محور تر منځ د x=a تر x=b په انتروال کې د سطحې مساحت وشمېرئ.

$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$
$$a = -\frac{\pi}{6}\ ,\ \ b = \frac{3}{2}\pi$$

5 . دوه تامراشنل توابع *f(x)* او *g(x)* په ټکو A, B او C کې غوڅوي. (الف) د شي حالت رسم کړئ. (ب) د سطحو مساحت د *f(x)* او *g(x)* ترمنځ له x=a څخه تر x=b انتروال کې وشمېرئ.

$$f(x) = x^3 + \tfrac{5}{4}x^2 - \tfrac{7}{4}x - \tfrac{1}{2}$$
$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$
$$A(a;0)\ ,\ \ B(b;0)$$

6 . د وضعيه قبمتسيستم په لومړئ او دويمه څلورمه(ربع) کې تابع *f(x)* او *g(x)* تابع ټيک په دوه ټکو کې غوڅوي. (الف) غوڅټکي يې وښاياست او انځور يې وکاږئ. (ب) د دواړو ګرافونو څخه کوم د سطحې مساحت رابنديږي.

$$f(x) = x + \frac{1}{x+1}\quad (x \neq -1)$$
$$g(x) = 3\tfrac{1}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7 . د دوه توابعو $f(x)$ او $F(x)$ مساوات ورکړل شوي دي. (الف) صفرځایونه یې وشمېرئ او د $f(x)$ ګراف وکاږئ. (ب) وښایئ، چې $F(x)$ د $f(x)$ لومړی تابع دی.

(پ) د سطحې مساحت وشمېرئ، چې د $f(x)$ له ګراف د وضعیه سیستم له محورونو او د کرښې x=4 خخه رابنده وي.

$$f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1}$$

$$F(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$$

8 . کسري راشنل تابع د -محور ، کرښې او کرښې سره په دریمه څلورمه(ربع) یوه سطحه رابندوي.

د دې کچ عدد وښایئ.

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+2x}{4x-2}=\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{8}x+\tfrac{11}{16}+\frac{11}{32x-16}$$

حلونه.

$$F(x)=\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{4}{3}x^3+2x+c$$

$$G(x)=\tfrac{1}{20}x^5-\tfrac{1}{2}x^4+\tfrac{4}{3}x^3+c$$

$$H(x)=\frac{1}{3}a\cdot x^3-\frac{x^2}{6}+x+c$$

$$K(x)=\tfrac{1}{2}x^4-4x^2+c$$

$$L(x)=\frac{x^5}{10}+\frac{2}{9}x^3-4x+c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۲ -

$$\int f(x)\,dx = x^2 + \tfrac{1}{4}e^{4x} + c$$

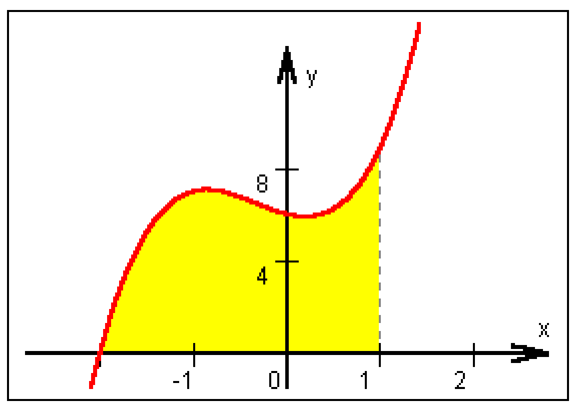
$$\int g(x)\,dx = \tfrac{1}{2}e^{x} - \tfrac{1}{2}e^{0,5x} + c$$

$$\int h(x)\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln|x| + c$$

$$\int k(x)\,dx = -\cos x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$\int l(x)\,dx = 2\sqrt{x^3} + c$$

۲ . ۱ –



$$A = \int_{-2}^{1}\left(2x^3 + 2x^2 - x + 6\right)\cdot dx$$

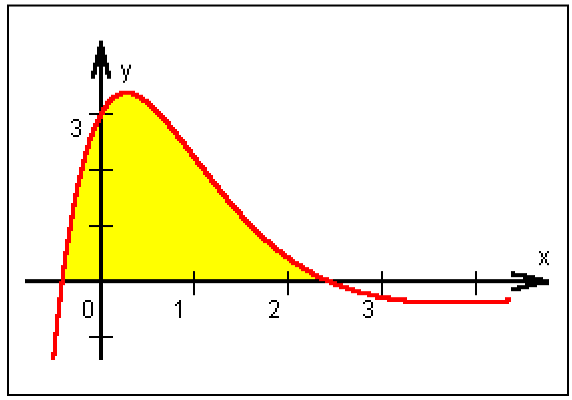
$$= \left[\tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^{+1}$$

$$= \left|6\tfrac{2}{3} - \left(-11\tfrac{1}{3}\right)\right| = \underline{\underline{18FE}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۲ : ۲ –



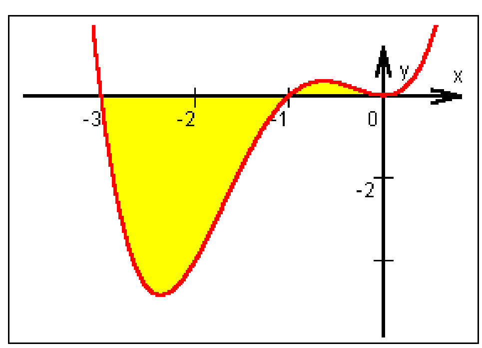
$$F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = 3 \cdot 2x \cdot e^{-x} + 3(x^2 - 1) \cdot e^{-x} \cdot (-1)$$
$$= 3e^{-x} \cdot (2x - (x^2 - 1)) = f(x)$$

$$A = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} f(x) \cdot dx = [F(x)]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A = \left[3 \cdot (x^2 - 1) \cdot e^{-x}\right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$

$$A \approx |1{,}30 - (-3{,}76)| = \underline{\underline{5{,}06\,FE}}$$



۲ : ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3) = x^4 + 4x^3 + 3x^2$$

$$A = \int_{-3}^{-1} \left(x^4 + 4x^3 + 3x^2\right) \cdot dx + \int_{-1}^{0} \left(x^4 + 4x^3 + 3x^2\right) \cdot dx$$

$$A = \left[\tfrac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3\right]_{-3}^{-1} + \left[\tfrac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3\right]_{-1}^{0}$$

$$A = \left|-0{,}2 - 5{,}4\right| + \left|0 - (-0{,}2)\right| = \underline{\underline{5{,}8\,FE}}$$

۲ . ٤ –

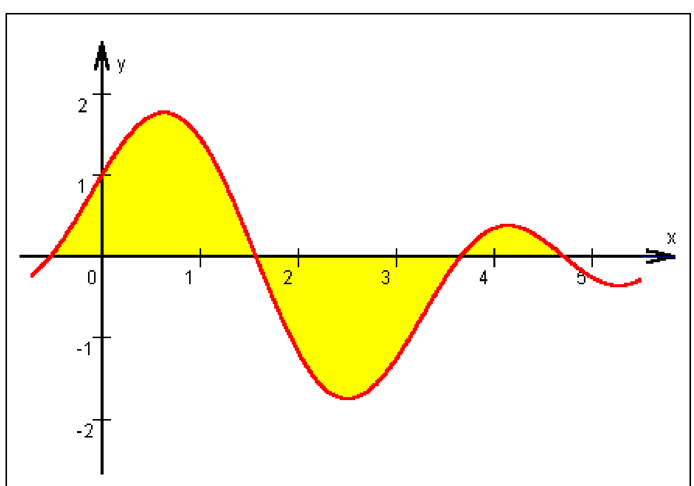
$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$

$$= 2\sin x \cdot \cos x + \cos x$$

$$= \cos x \cdot (2\sin x + 1)$$

$$0 = \cos x \;\rightarrow\; x_1 = \tfrac{1}{2}\pi\,,\; x_2 = \tfrac{3}{2}\pi$$

$$0 = 2\sin x + 1 \;\rightarrow\; x_3 = -\tfrac{1}{6}\pi\,,\; x_4 = \tfrac{7}{6}\pi$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_{x_3}^{x_1} f(x)\cdot dx + \int_{x_1}^{x_4} f(x)\cdot dx + \int_{x_4}^{x_2} f(x)\cdot dx$$

$$A = \left[-\tfrac{1}{2}\cos 2x + \sin x\right]_{x_3}^{x_1} + [\ ]_{x_1}^{x_4} + [\ ]_{x_4}^{x_2}$$

$$A = 2{,}25FE + 2{,}25FE + 0{,}25FE = \underline{\underline{4{,}75FE}}$$

۲ . ۵ ـ

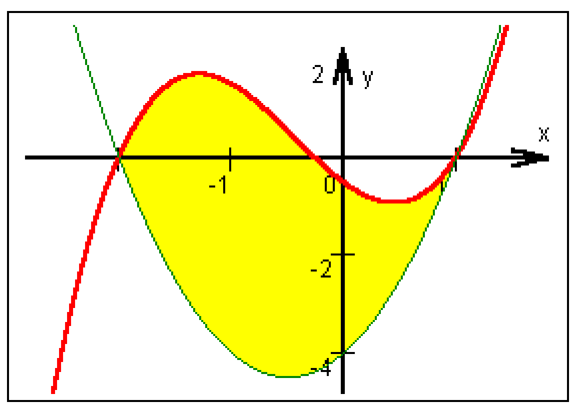
$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$

$$0 = x^2 + x - 2$$

$$x_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{2{,}25}$$

$$\underline{\underline{x_1 = a = -2}}$$

$$\underline{\underline{x_2 = b = +1}}$$



$$A = \int_{-2}^{+1} \left(f(x) - g(x)\right)\cdot dx$$

$$= \int_{-2}^{+1} \left(x^3 - \tfrac{3}{4}x^2 - 3\tfrac{3}{4}x + 3\tfrac{1}{2}\right)\cdot dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}x^3 - 1\tfrac{7}{8}x^2 + 3\tfrac{1}{2}x\right]_{-2}^{+1}$$

$$= \left|1\tfrac{5}{8} - \left(-8\tfrac{1}{2}\right)\right| = \underline{\underline{10\tfrac{1}{8}\ FE}}$$

٢ . ٦ –

$$x + \frac{1}{x+1} = 3\tfrac{1}{4}$$

$$\frac{x^2+x+1}{x+1} = 3\tfrac{1}{4}$$

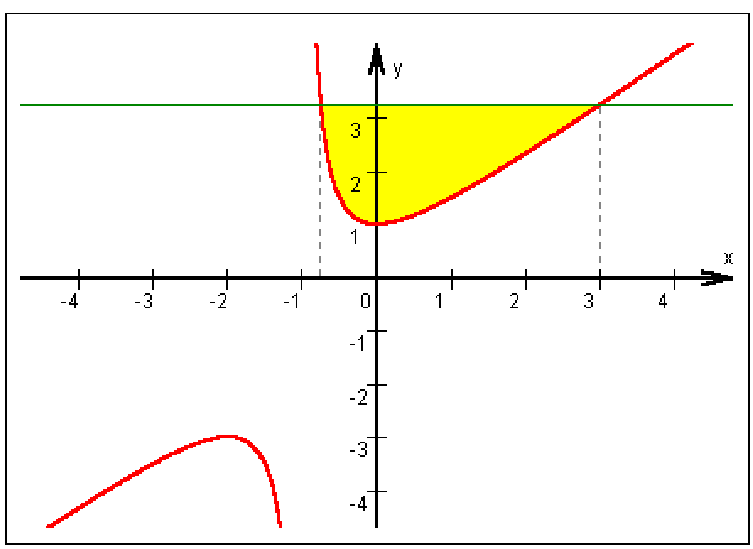
$$x^2 + x + 1 = 3\tfrac{1}{4}x + 3\tfrac{1}{4}$$

$$x^2 - 2\tfrac{1}{4}x - 2\tfrac{1}{4} = 0$$

$$x_{1,2} = \tfrac{9}{8} \pm \sqrt{\tfrac{81}{64} + \tfrac{144}{64}} = \tfrac{9}{8} \pm \tfrac{15}{8}$$

$$x_1 = a = -\tfrac{3}{4}$$

$$\underline{\underline{x_2 = b = 3}}$$

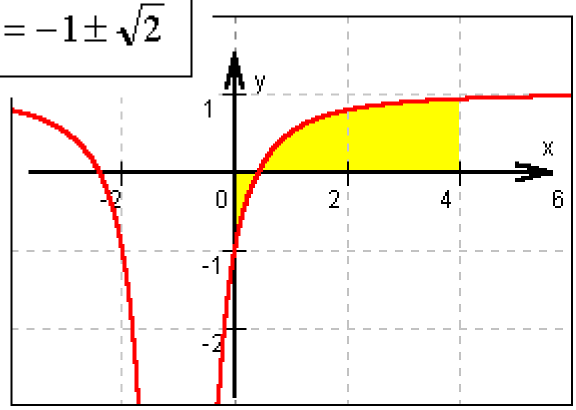


(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)\cdot dx$$
$$=\int_{-\frac{3}{4}}^{3}\left(3\tfrac{1}{4}-x-\frac{1}{x+1}\right)\cdot dx$$
$$=\left[3\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{2}x^2-\ln(x+1)\right]_{-0,75}^{+3}$$
$$\approx\left|3{,}86-(-1{,}33)\right|=\underline{\underline{5{,}19FE}}$$

٢ . ٧ ــ

$$0=x^2+2x-1$$
$$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$$



$$F'(x)=\frac{2x\cdot(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1}=f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

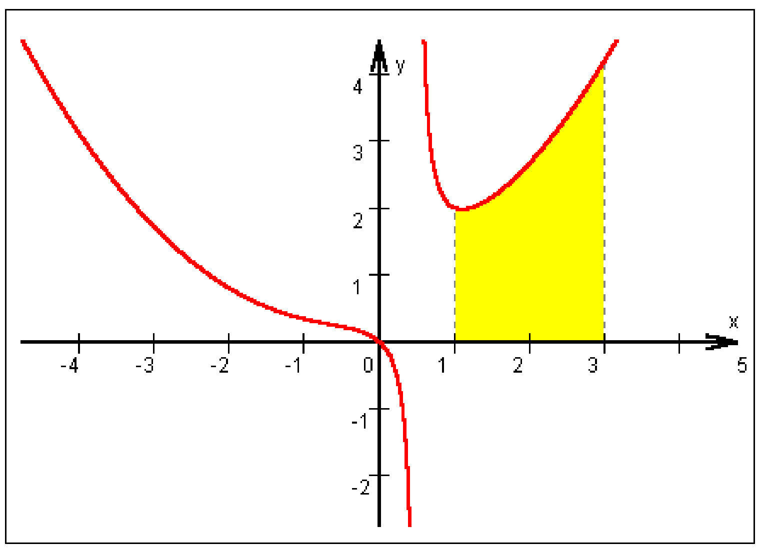
$$A=\int_{0}^{-1+\sqrt{2}} f(x)\cdot dx+\int_{-1+\sqrt{2}}^{4} f(x)\cdot dx$$

$$=\left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]_0^{-1+\sqrt{2}}+\left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]_{-1+\sqrt{2}}^{4}$$

$$=0{,}17\,FE+2{,}57\,FE=\underline{\underline{2{,}74\,FE}}$$

په پورته کي FE د سطحي واحد(يوون) په معنادى

۲ . ۸ _



$$A=\int_{1}^{3}\left(\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{8}x+\tfrac{11}{16}+\frac{11}{32x-16}\right)\cdot dx$$

$$=\int_{1}^{3}\left(\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{8}x+\tfrac{11}{16}\right)\cdot dx+\int_{1}^{3}\frac{11}{32x-16}\cdot dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_1=\left[\tfrac{1}{12}x^3+\tfrac{3}{16}x^2+\tfrac{11}{16}x\right]_1^3=5\,\tfrac{1}{24}\,FE$$

$$z=32x-16$$

$$\frac{dz}{dx}=32\ \Rightarrow\ dx=\tfrac{1}{32}\,dz$$

$$A_2=\int_{16}^{80}\frac{11}{z}\cdot\tfrac{1}{32}\,dz=\tfrac{11}{32}\cdot\left[\ln z\right]_{16}^{80}\approx 0{,}55\,FE$$

$$\underline{\underline{A\approx 5{,}59\,FE}}$$

په پورته کي FE د سطحي واحد(یوون) په معنادی

بیلګه:

مشتقوړ مګر نامتمادي (پرېکیدونکی) مشتقوړ تابع:

لرو:

د $x\neq 0$ لپاره د $x=0$ لپاره	$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\\ 0\end{cases}$

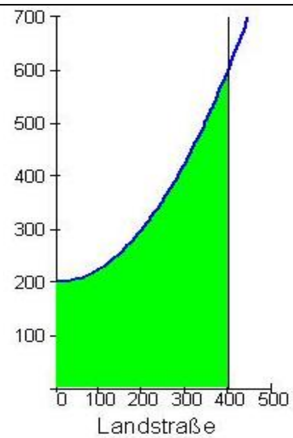
نو $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\to 0$ د $x\to 0$ لپاره ، له امله مشتق$f'(0)=0$ دی. او د $\forall x\neq 0$ لرو:

$f'(x)=2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ، جبرې چې $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ ناشته دی. تابع f له دې امله مشتقوړ دی مګر نه ناپرېکېدونکی(متمادي) مشتقوړ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټاکلي انتيګرال شميرنه

ټاکلی انتیګرال همغه د ريمن انتيګرال دی، چې یوه د تابع د ګراف او x محور ترمنځ سطحه شميري(پسې غزېدلی دی، خو تکرار د زده کړې مور ده).



ټاکلی انتیګرال:

که f يو حقيقي تابع وي، نو د ټاکل انتيګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د پولې(حد) a تر پولې(حد) b پا د a او b حدونو ترمنځ يا انتيګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوريزه سطحه پوهيږو د f ګراف لاندې د a او b تر منځ.

G دې په بند انتروال $a \le x \le b$ کې د g(x) لومړنی انتیګرال وي، د $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ سره، نو باور لري: $\int_a^t f(t)dt = G(b)$

دا چې د دوه لومړنیو توابعو F او G تر منځ يو ثابت C توپیر شته، نو G(x) = F(x) + C باور لري. د x=b لپاره لاسته راوړو: G(b) = F(b) + C

دا چې $G(x)=\int_a^a f(t)dt = 0$ دی او G(a)=F(a)+ C دی، نو C = -F(a) ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې G(b) = F(b) – F(a) همداسې $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتیګرال جمله لاس ته راوړه

یا دا وینا د مشتق - او انتیګرالشمېرنې بنسټیزه جمله بلل کیږي:

تعریف: f په انتروال a ≤ x ≤ b کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)_a^b = F(b) - F(a).$$

د F(b) – F(a) لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتیګرال شمېرنه په لومړني انتیګرال بېرته واړوله او د مشتق او انتیګرال تر منځ مو اړیکې رامح ته کې.

بیلګې:

$$a)\ \int_1^2 x^2dx = \left[\frac{x^3}{x}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$b)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx = \int_2^4 x^{-2}dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^4 = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^4 = \frac{1}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c)\ \int_1^3 \sqrt{x}\,dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}[\sqrt{x^3}]_1^3(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}$$

$$= \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 1) = 2(\sqrt{3} - \frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لاندې جملې رښتیا دي:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx +$$

تکمیلیدونکي بنسټونه:

د F(b) – F(a) له امله د انتګرالونې ثابته c له منځه ځي. له دې امله کولي شو د انتیګرال ثابتي ټاکلو لپاره c=0 ولیکو.

بیلګه:

: د ټاکلي انتیګرال $\int_{-\pi}^{+0,5\pi} \cos x dx$ ارزښت و ټاکی.

ښوونه: موږ په دا لاندې ډول ښایو:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x\,dx = [\sin x]_{-\pi}^{0.5\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1 - 0 = 1$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : دا چې په دې برخه کې یوازې د ټاکلي انتیګرال ارزښت غوښتل شوي دی او نه د یوې منحني لاندې سطحه، نو باید نه دی چې صفرځایونه په پام کې ونیول شي.

عوره یادونه: دادې په یاد وي، چې ناټاکلی انتیګرال تابع ده او ټاکلی انتیګرال یو عدد.

د ناټاکلي انتیګرال څخه و ټاکلي انتیګرال ته

ترمخ راوړنه یا وړاندراوړنه

موږ ولیدل، چې څنګه یو تابع f(x) ته لومړنی تابع F(x) منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د یوې ورجمع کوونکي ثابتې له امله یو له بل توپیر لري.

لرو: تابع $f(x)=3x^2+2$ او د دې د لومړنیو توابعو سټ $f(x)=x^3+2x+C$

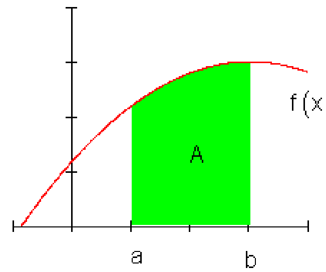
پېژند : د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع f(x) ته ،،ناټاکلی انتیګرال ،، بلل کیږي او ددې له پاره لیکو: $\int f(x)dx=F(x)+C$

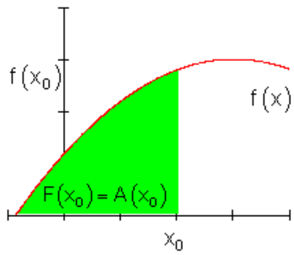
د مشتق- او انتیګرالشمېرنې ترمنځ اړیکي کېدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

جمله(قضیه) : د ناټاکلی انتیګرالشمېرنه د مشتقشمېرنې برعکس انځوروي $$\frac{d\left[f(x)\right]+C}{dx}=\left[F(x)+C\right]'=f(x)$$

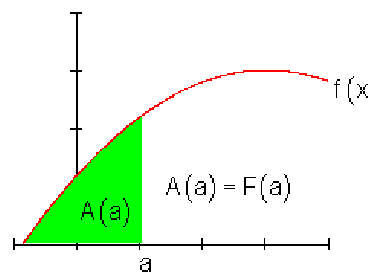
د تابع د ګراف لاندې او د انتروال [a ; b] تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.

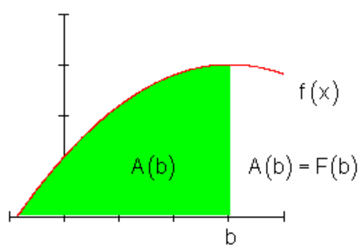
(c) ketabton.com: The Digital Library



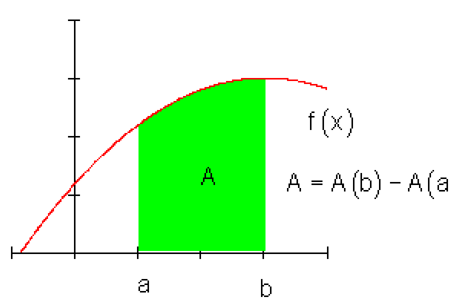


د یوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لاربنوده وي:
د یوې سطحې، چې د یوې په پام کې نیولې f(x) تابع ګراف لاندې ده تر x_0 ځای پورې او یوې F'(x) تابع، چې دF(x) تابع مشتق د x_0 ځای د f تابع د تابع ارزښت سره د x_0 په ځای کې برابر وي، ترمنځ اړیکې شته دی، یعني $F'(x)=f(x)$





د انتروال [a,b] حدونو ترمنځ سطحې پیداکول د تابع د ګراف سطحو د کمښت څخه په ځای (A(b)) b او سطحې په (A(a)) a ځای کې ،. یعني
A= A(b) – A(a)په همدې توګه F= F(b) – F(a) لاس ته راځي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

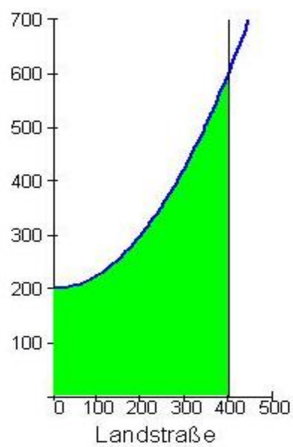
په انتروال [a,b] کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنیو توابعو تفریق دی:

$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx$$

دا انتیګرال ټاکلی انتیګرال هم بلل کیږي.

جمله :
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پیل بېلګه کې راوړې د چمن سطحه وشمېږو.

ثابته له تفریق سره لرې کیږي. په عمل کې د دې مسألې د حل لپاره یوه بله لار ګتوره راوستلې یا ګټوره ښوولې:



$$A = \int_0^{400}\left(\frac{1}{400}x^2 + 200\right)dx = \frac{1}{1200}x^3 + 200\cdot x\,|_0^{400}$$

$$= \frac{1}{1200}\cdot 400^3 + 200\cdot 400\left[\frac{1}{1200}0^3 + 200\cdot 0\right]$$

$$= \frac{1}{1200}\cdot 400^3 + 200\cdot 400 = 133333.\bar{3}$$

د انتیګرالوني قاعدی

د ناټاکلي اینتیګرال انتیګرالوني قاعدې: په لاندې اینتیګریشن قاعدوکې د اینتیګریشن ثابته باندې صرف نظر کیږيدلته مساوات تر یوې ورجمع شوې ثابتې C پورې مساوات دی ، په دې معنا چې دمساواتو تر منځ یواځې یوه ثابته کیدی شي زیاته یا کمه وي. دا قاعده

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي چی په ټاکلي انتیګرال کي ښوولي جملی سره سم ټاکلي ایتیګرال ته نقل شي یعني په ټاکلي ایتیګرال استعمال شي . دا قاعدې کیدی شي چی د تېرو درسونو سره سم د دواړو خواو د مشتق نیولو سره وښول شي.

جمله :

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع (f (x په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,, \qquad a \in R$$

جمله: د جمعي (تفریق) قاعده که $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په یوه ایتروال کی نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

بیلګې:

لاندې ایتیګرالونه کیدی شي چی د مخ ته تېرو جملو په استعمالیدو او ساده څیره بدلون بیرته په بنسټیزو اینتیګرالونو بدلګړای شي

$$a)\quad \int \frac{dx}{3x^4} = \frac{1}{3}\int x^{-4}dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-3} + C = -\frac{1}{9x^3} + C,$$

$$b)\quad \int 3x^2 + 4x - 1)\,dx = 3\int x^2dx + 4\int xdx - \int dx = 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 4\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + C$$
$$= x^3 + 2x^2 - x + C,$$

$$c)\quad \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx - 3\int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int x^{\frac{5}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$= 2\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{7}x^3\cdot\sqrt{x} - 2x\cdot\sqrt{x} + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل توابعو انتیګرالونه

بنسټ :

د طبیعي اکسپوننشل تابع $f(x)=e^x$ لپاره لرو: $(a\in IR^+, a\neq 1)\int e^x dx = e^x + C$

د ټولیز اکسپوننشل تابع a^x لپاره لرو: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

بیلګه :

دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع $\int 2^{x-3} dx$ غواړو پیداکړو

بنه بدون:د توان قانون سره سم لرو $2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8} 2^x$

د فاکتوروني قانون سره سم لرو: $\int \frac{1}{8} 2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx$

انتیګرال یې ونیسئ: $\frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + c = \frac{2^x}{8\cdot\ln 2} + c = \frac{2^{x-3}}{\ln 2} + c$

د لوګاریتمي توابعو انتیګرالونه

بنسټ:

د طبیعي لوګاریتم تابع $f(x)=\ln x (x\in IR^+)$ لپاره $\int \ln x dx = x\cdot\ln x - x + c$ دی .

د ټولیز لوګاریتم تابع $f(x)=\log_a x, a\in IR^+, a\neq 1)$

لپاره $\int \log_a x dx = \frac{x\cdot\ln x - x}{\ln a} + c$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه :

ناټکلی انتیګرال $\int \ln 3xdx$ غواړو پیدا کړو:

بنه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3xdx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3dx \div \int \ln xdx = x \cdot \ln 3 + x \cdot \ln x - x + c$$
$$\int \ln 3xdx = x \cdot (\ln 3 + \ln x - 1) + c$$

بنسټیز اینتیګرالونه په یوه جدول کې

د اینتیګرالولو او مشتق نیول د اړیکو په بنسټ کیدی شي چی د بنسټیزو اینتیګرالونو یو جدول ترتیب شي. دا په مشتق جدول کی راوړل شوو بنسټیزو توابعوبرعکس څرګندیږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x) = \int f(x)dx$	نیونه یا فرضیه
1	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$n \in Z \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
3	x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$	$a \in R \setminus \{-1\},\ x > 0$
4	a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x + C$	$a > 0,\ a \neq 1$
5	e^x	$e^x + C$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

6	$\sin x$	$-\cos x + C$	
7	$\cos x$	$\sin x + C$	
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n \cdot \pi, \quad n \in Z$
9	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in Z$

بیلگه :

د جدول او تېرو جملو ځخه په ګټه لاندې ایتیګرالونه په لاندې ساده ډول په بنستیز توابعو بدلیدلی شي .

$$a)\quad \int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = -\frac{1}{4}x^{-4} + C, \text{..............................}1,$$

$$b)\quad \int \frac{\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0), \text{ ....}3,$$

$$c)\quad \int \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}\,dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}dx = \int x^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x > 0), \text{ ....}3,$$

$$d)\quad \int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{2\sin x}dx = \int \cos x\, dx = \sin x + C, \text{ ....}(4{,}21) \quad 6,$$

$$e)\quad \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi), \qquad (4{,}11) \quad 9,$$

$$f)\quad \int (1 + \cot^2 x)\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi) \quad (4{,}12) \qquad 8,$$

$$g)\quad \int \frac{(1+x)(1-x)}{x - x^3}dx = \int \frac{1-x^2}{x(1-x^2)}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1,\ x \neq 0), \quad Nr.2,$$

$$h)\quad \int_{-1}^{0} e^x dx = e^x \Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2}, \text{ ....}5$$

<u>Substitutionlaw</u> بدلون قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

تراوسه پورې مو فقط انتیګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنیو توابعو په انتیګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنۍ انتېګرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به ولیدل شي.

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution) لاتین :د $f(g(x))$ یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لنډ: بدلون) د نیونو یا فرضیو له مخې، چې u = g (x)نه برېکېدونکی یا متمادي او مشتقوړدۍ او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

حل : د ښي اړخ مشتق د تېرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کيڼ اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتیګرالېدو لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور زنځیري تابع [f [g (x وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق (g ' (x وي. سړی د دننه تابع لپاره په دې توګه متحولې بدلوي یا ځاي په ځاي کوي u = g (x) :

مشتق $\frac{du}{dx} = G'(x)$ جوړوي په همدې ډول du = g ' (x) dx

د بریالي انتیګرالېدو وروسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه a :

لرو : $I = \int 2\cos(2x-1)dx$. د دې انتیګرال وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون يا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2=du/dx$ همداسی $2dx=du$

$$I=\int \cos u\, du=\sin u+C=\sin(2x-1)+C$$

بیلګه b : لرو $I=\int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : , $2x = u-1$ مشتق $2= du / dx$ همداسی $dx = (1/2)\, du$

$$I=\int 3\cos u\cdot\frac{1}{2}du=\frac{3}{2}\int \cos u\, du=\frac{3}{2}\sin(2x-1)+C$$

وموليدل چی څنځيري تابع د لايني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اينتيګرال کيدی شي، څکه چی د لايني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تېرې جملی سره سم د اينتيګرال تر مخ(موخه کيږ لور ده) ليکل کيږي.

بیلګه: لرو $I=\int\sqrt{-3x+5}\;dx$

بدلون: $-3x+5=u$

را بيليدنه: $-3=du/dx \Leftrightarrow dx=-1/3\cdot du$

$$I=\int\sqrt{u}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)du=-\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3}+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{1}{2}e^{-2x-3}dx.$$

$$-2x-3=u,\quad\Rightarrow\quad -2=\frac{du}{dx}\quad\Rightarrow\quad dx=-\frac{1}{2}du,$$

$$I=\int\frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du=-\frac{1}{4}\int e^{u}du=-\frac{1}{4}e^{u}+C=-\frac{1}{4}e^{-2x-3}+C.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c)\quad I=\int\frac{2dx}{x+2}.$$

$$x+2=u,\qquad 1=\frac{du}{dx}\qquad dx=du$$

$$I=\int\frac{2du}{u}=2\int\frac{du}{u}=2\ln|u|+C=2\ln|x+2|+C.$$

د بنسټیزو اینتیګرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱ . ۱ (متحولې x یواځي په جګ یا مټ د دوه منخ ته راځي. له دې امله داسی اینتیګرال، کومو کی چی د x2 په ځاي لاینې ترم (Term(پروت دی، کیدی شي چی د لاینې بدلولو له لارې په بنسټیز اینتیګرالو ۱۰ او ۱۱ بیرته واړول شي. ډیروخت یو د فورم بدلون ته هم اړتیاموجود وي، چی د اینتیګراند فورم ته راشو.

بیلګه 5.2:

$$a)\quad I=\int\frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2=\left(\sqrt{2}x\right)^2,\quad d\cdot h\cdot\ I=\int\frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x=u,\qquad \sqrt{2}=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{\sqrt{2}}du,$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x)+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2=9(1-4x^2)=9(1-(2x)^2),\ d\cdot h\cdot$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x = u, \qquad 2 = \frac{du}{dx} \qquad dx = \frac{1}{2}du$$

$$I = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{6}\text{Arcsin}\,u + C = \frac{1}{6}\text{Arcsin}(2x) + C.$$

اینتیګریشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لایني نه وي، نو د اینتیګراند دوم فاکتور(تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سړی بنسټیز اینتیګرال ته راشي. دلته هم سړی بیا دننني تابع په نوې متحولې یا واریابلی بدلوي.

بیلګه 6.21: الف:

$$I = \int 4x\sqrt{x^2-1}\; dx$$

بدلون:د $x^2-1=u$ مشتق $2x = du/dx$ دی ،همداسې لرو: $xdx = \frac{1}{2}du$

$$I = \int 4\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}du = 2\int u^{1/2}du = 2\cdot 2/3\,u^{3/2} + C = 4/3\sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

ب) $$I = \int \sin^3 x\cdot\cos x\; dx$$

بدلون: $\sin x = u$ را بیل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x\;dx$

$$I = \int u^3du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4$$

$$c)\; I = \int\frac{1}{x}\cdot\ln^2 x\; dx$$

$$\ln x = u, \qquad :\frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \qquad \frac{1}{x}dx = du,$$

$$I = \int u^2du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

$$d)\; I = \int \tan x\, dx.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}, d\cdot h.\quad I=\int\frac{1}{\cos x}\cdot\sin x\,dx,$$

$$\cos x=u,\qquad -\sin x=\frac{du}{dx}\qquad \sin x\,dx=-du,$$

$$I=-\int\frac{1}{u}du=-\ln|u|+C=-\ln|\cos x|+C.$$

$$e)\ I=\int_0^1\frac{2x^2}{2-x^3}dx.$$

$$2-x^3=u,\qquad -3x^2=\frac{du}{dx}\qquad x^2dx=-\frac{1}{3}du,$$

$$I=-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{2du}{u}=-\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}\ln|2-x^3|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}(\ln 1-\ln 2)=\frac{2}{3}\ln 2.$$

۲۱د بدلونقاعده) ۲۱ . ۱۳ (دې په چپه) یعني د ښی وکیڼ(لور هم استعمال شي .
اینتیگرال f (x) dx کیدی شي چی په بل واړول شي چی x په یو مناسب بلواك (
g (t بدل شي (21 . 14) f (x) dx = f [g(t)]. g(t)dt. دا:
افاده » مناسب« بلواك دې دلته داسي وپوهیدی شي چی سړی د بدلون وروسته یو ساده
او ممکن یو بنسټیز اینتیګرال لاس ته راوړي. د) ۲۱ . ۱۴ (استعمال په قاعده کی داسی
دی چی په یوه بلواك f (x) کی موجود » پیچلی « ترم h (x)د t = h (x) په بدلون
له منځ څخه وړي او بیا) که ممکن وي (د x په لوریی حلوي

$$x=g(t)=h^{-1}(t)$$

بیلګه 7.21: الف:

$$: a)\ I=\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$\sqrt{x}-1=t,\qquad x;x=(t+1)^2,\qquad dx=2(t+1)dt:$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\frac{2(t+1)}{t}dt=2\cdot\left[\int 1dt+\int\frac{1}{t}dt\right]=2(t+\ln|t|)+C=2(\sqrt{x}-1)+2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اینتګرال د دوه ایتکرالو جمعې ته بیایي، دلته

$x=g(t)=(t+1)^2$ وو.

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}.$$

$$\sin x\cdot\cos^3 x=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^4 x=\tan x\cdot\cos^4 x.$$

نو لرو:

$$I=\int\frac{dx}{\tan x\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx,$$

$$\tan x=t,\qquad\qquad \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt,$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\cdot\sqrt{\tan x}+C.$$

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کیږي لکه لاندې بلګه:

بیلګه:

عواړو د $f(x)=e^x$ مشتق بیدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پیدا کولي شو، یعنې لرو:

$$f(x)=e^x\Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^x dx=e^x+C$$

ګورو، چې $F'(x)=e^x=f(x)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ولرو: $f(x)=e^{2x}$ او د پورته په څېر لاړ شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx \neq e^{2x}+C$$

وي $F(x)=e^{2x}+C$ **که، دی** $F'(x)=2e^{2x} \neq f(x)$

له دې امله د بدلون قانون ته اړیو:

بیلګه:

د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسی

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

بدلون : $u(x)=2x=u$

جوړ کړئ: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{du}{2}$

$$\int f(x)dx=\int e^{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

نو لرو: $F(x)=\int (x)dx=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

ازمايينت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بیلګه :

وښایی چې باور

لري. $f(x)=(x+1)^{2} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int (x+1)^{2}dx$.

بدلون $u(x)=x+1=u$

جوړ کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \quad \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

بیرته- یا په ځت بدلون: $\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C$

نو: $\int (x)dx = \int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^2}{3} + C$

بیلګه :

و بنایي چې باور لري:

$$f(x) = (3x+6)^3 \quad \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int (3x+6)^3 dx$$

بدلون: $u(x) = 3x + 6 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \quad \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$

$$\int f(x)dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^3 du = \frac{u^4}{12} + C$$

بېرته بدلون: $\frac{u^4}{12}(3x+6)^4 + C$

نو لرو: $\int (x)dx = \int (3x+6)^3 dx = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$

بیلګه :

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(x \cdot \ln(x^2)\right) dx = ?$$

بدلون : $u(x) = x^2 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$

(c) ketabton.com: The Digital Library

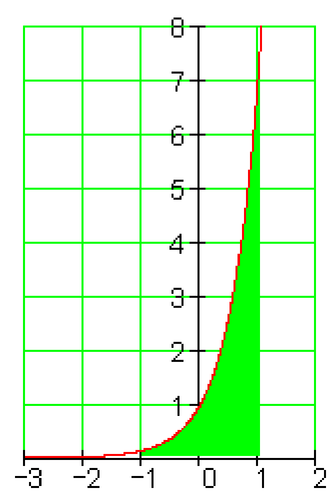
$$\int f(x)\,dx = \int x\cdot \ln(u)\cdot \frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u\cdot \ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u\cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

بېرته بدلون: $\frac{1}{2}u\cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2\cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$

نو لرو: $\int (x)\,dx = \int\left(x\cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2\cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې:

ټاکلي انتیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کیږي.

بیلګه : **وبنایاست:** $f(x) = e^{2x} \quad \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}dx$ د انتیګرال حل د بدلون له لارې: ۱ – بدلون $u(x) = 2x$ ۲ – د dx په ځای کېږدی $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$ ۳ – د پولو بدلون - لاندې پوله $u(-1) = -2$ - پورته پوله $u(1) = 2$ ۴ - په انتیګرال کې ځا په ځای کړی $\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^u du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^2 - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3.627}}$	$f(x) := e^{2\cdot x}$ 

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه :

$$f(x)=2x\cdot\ln(x^2)\quad\Rightarrow F(x)=\int_1^2 2x\cdot\ln(x^2)dx$$

د انتيګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x)=x^2$

۲ – د ځاى په ځاى كونه

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=2x\quad\Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

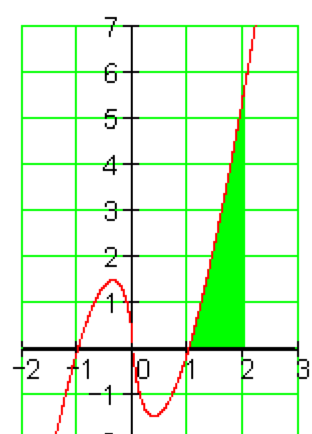
- لاندې پوله $u(1)=1$
- پورته پوله $u(2)=4$

۴ – په انتيګرال كې ځاى په ځاى كړى

$$\int_1^4 2x\cdot\ln(u)\cdot\frac{1}{2x}du=\int_1^4\ln(u)du=[u\cdot\ln(u)-u]_1^4$$

$$=[4\cdot\ln(4)-4]-[1\cdot\ln(1)-1]\approx\underline{\underline{2.545}}$$

$f(x):=2x\cdot\ln(x^2)$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه :

$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 \\ (e^2-2)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x < 2$ له پاره د $x \geq 2$ له پاره

$$A = \underbrace{\int_1^2 (e^x - 2)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^4 (e^2-2)e^{-(x-2)}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_1^2 (e^x - 2)\,dx = \left[e^x - 2x\right]_1^2 = e^2 - e - 2$$

$$I_2 = (e^2-2)\int_2^4 e^{-(x-2)}\,dx$$

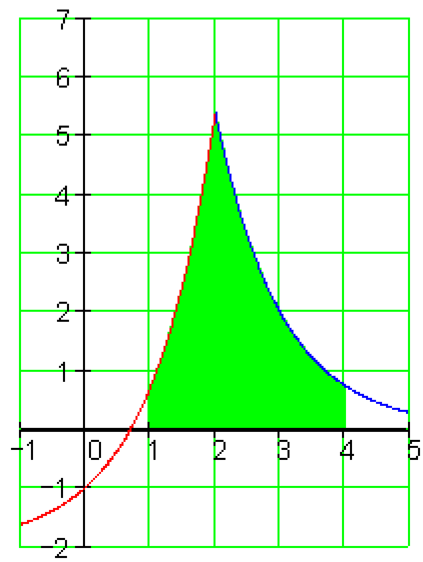
$$u(x) = -(x-2) = -x+2$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du;\ u(2) = 0;\ u(4) = -2$$

$$I_2 = -(e^2-2)\int_0^{-2} e^u\,du = (e^2-2)\int_{-2}^0 e^u\,du$$

$$= (e^2-2)\cdot\left[e^u\right]_{-2}^0 = e^2 + 2e^{-2} - 3$$

$$I = I_1 + I_2 = e^2 - e - 2 + e^2 + 2e^{-2} - 3 = \underline{\underline{7,331}}$$



توټه انتيګرالونه Partialy Integration

توټه انتيګرالونه، چې ضرب انتيګرالونه هم بلل کيږي، په انتيګرالشمېرنه کې د لومړنيو توابعو تاکلو يا شمېرلو لپاره امکان دی. دا کېدی شي د مشتقشمېرنې د برعکسکونې په خير وکتل شي.

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه انتیګرالوني له پاره لاندې قانون کارول کیږي، چې د متمادي (نه پرېکېدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري.:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

دا قانون ټیک هلته ګټور دی، که د f مشتقنیولو سره یو ساده تابع منځ ته راځي. پیل

د ضرب قانون (د ضرب مشتقنیوني) څخه لرو:

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$u'\cdot v = (u\cdot v)' - u\cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u'\cdot v = \int (u\cdot v)' - \int u\cdot v'$$

$$\int u'\cdot v = u\cdot v - \int u\cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتیګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

یا همدغسې، لکه په زیاتو ریاضي کتابونو کې چې پیداکیږي.

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره ګټور دی، چې لومړی ځان په ناټاکلي انتیګرال محدود کړو، چې دا نا اړینو حدونو څخه چې لید مو رابندوي، ازاد یو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:
د بیلګې په توګه لاندې انتیګرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

یو ساده انتیګرالیدونکي تابع $g'(x)$ او همداسې یو ساده مستقکېدونکي تابع $f(x)$ لټوو. نیسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د ln(x) انتیګرالونه نوې ln(x) راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نیسو)مشتق کوو) او انتیګرالوو، نو لرو:

$$g(x) = \frac{x^2}{2} \text{ او } f'(x) = \frac{1}{x}$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکبڼه:
اوس دی u اوv په خوبڼه توابع وي.U او V دې د u اوV لومړني توابع وي ، او همداسې دې ’u او ’v دu او v مشتقونه وي.
u تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري، v تابع ده چې د انتیګرالونې له پاره لومړیتوپ لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

د ټوټه انتیګرالونې لار(طریقه)

د ټوټه انتیګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلګه : کله کله کېدی شي ګټور وي، چې د مساوات بنې لور ته ټوټه انتیګرال د څو واره انتیګرالونې وروسته بېرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کیڼ لور انتیګرال سره یوځای کولی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

که کېږدو f(x) = cos(x) او g'(x) = sin(x) ، نو ترې لرو:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

که دواړو لورو ته وتون انتیګرال ورزیات کړو، نو راکوي:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که واړه لورې په 2 ووېشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\cos^2(x) + C$$

بیلګه ۲ :

د ځنو انتیګرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د g'(x) له پاره یو ترم وټاکو چې په انتیګرالونې کې هیڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بېلګې په توګه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کېدی شي دا بل ترم ،،له منځه یووړل شي،،.

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

که هر ځل g'(x) = ex کېږدو او د f(x) له پاره، د انتیګرال لاندی ترم ، نو تری لاس ته راځي:

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^x \cdot (2 - x^2)\,dx = [e^x \cdot (2 - x^2)] - \int e^x \cdot (-2x)\,dx$$
$$= [e^x \cdot (2 - x^2)] + [e^x \cdot 2x] - \int 2 \cdot e^x\,dx$$
$$= [e^x \cdot (2 - x^2)] + [e^x \cdot 2x] - [2 \cdot e^x]$$
$$= [e^x \cdot (2 - x^2 + 2x - 2)]$$
$$= [e^x \cdot (2x - x^2)] + C$$

بیلګه ۳ :

که تر انتیګرال لاندې فقط یو ترم ولرو، چې د هغه لومړنی تابع بې له جدول ارزښت ځخه پاي ته نه رسیږي(نه پایول کیږي)(نه ختمیږي) کېدی شي کله کله د ورزیاتوني له لارې(ناڅرګند شته) ضریب "1" توته انتیګرال شي.

$$\int \ln(x)\,dx = \int 1 \cdot \ln(x)\,dx = \int g'(x) \cdot \ln(x)\,dx$$

که $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = 1$ کیږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\int 1 \cdot \ln(x)\,dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx$$
$$= x \cdot \ln(x) - \int 1\,dx$$
$$= x \cdot \ln(x) - x + C$$

جمله : مورږ د دې لاندې انتیګرال نیسو: $\int x\cos(x)\,dx$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\int x\cos(x)\,dx = \int u\,dv$$
$$= uv - \int v\,du$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx$$
$$= x\sin(x) + \cos(x) + C.$$

C د انتیګرالونی یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انتیګرالوني د استعمال سره د انتیګرالونو لکه

$$\int x^2 e^x\,dx \text{ او } \int x^3 \sin(x)\,dx$$

کیده شي په همدې لار حل شي:

یوه په زړه پورې بیلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\,dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولري.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتیګرالوني استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x\,dx$ داسې چې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیګرال حل شي، نو د ټوټه انتیګرالوني قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x);\ du = \cos(x)\,dx$

$v = e^x;\ dv = e^x\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتیګرال که کیڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیګرالونې یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال

د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ انتیګرال نیول

نیول تر واسه ورسره بلده لار شونی دی، که څنګه؟

بیلګه :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفرځایونو **x1 = 2-** او **x2 = -4** سره د کرښیزو توابعو په ضربیونو تجزیه کیږي:

$$x^2-6x+8 = (x-2)\ (x-4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټه کسرونو ټوټه ونې له پاره لاندې پیل کوو:

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج ورغزيږي او لاس ته ترې راځي:

$$\frac{[A(x-4)\ +\ B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[Ax-4A\ +\ Bx-2B]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[(A+B)x\ \ -4A-2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضريبونو د پرتلې څخه لاس ته راځي، چې د x له مخه يعني کيڼ لور ته (A+B) افاده بايد پرته وي

او (-4A-2B) ، چې ۱۲ - ورکوي (وتون مساوات وګورئ) : 7x-12 = (A+B)x (-4A-2B)

له دې ځ**خه لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:**

7= A+ B

-12=-4A-2B

بدلون يې دA او B پسې : **A= (7-B)**

-12=-4(7-B)-2B

-12=-28 +4B -2B |+28

+16= 2B

B=8

A= **(7-8)= -1**

ليکلی شو :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \int [\frac{-1}{(x-2)}]dx = \int [\frac{8}{(x-4)}]dx$$

لومړني تابع جوړه کړئ: $F(x)=\ln x \quad \rightarrow \quad f(x)=\frac{1}{x}$. دا چې طبيعي لوګاریتم فقط له مثبت اعدادو شمېرل کيږي، نو يواځې ازښتونه نيسو.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \left[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}\right]dx = -1 \ln |x-2| + 8 \ln |x-4| + c$$

نا اصلي ماتراشنل توابع بايد لومړی په پول راشنل تابع او اصلي مات راشنلمبع ته تېرته شي.
دا د ټوټه کسرونو ټوټه کووني له لارې کيږي يا صورت نيسي.
بيلګه :

$$\int \left[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}\right]dx$$

په مخرجکي مربع تابع په صفرځايونو **x1 = -2** او **x2 = +3** کي په کښيزو فاکتورونو تحزيه کيږي :

$$x^2+x-6 = (x-2)\ (x+3)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه کوني له پاره اصلي مخرج غزوو او بيا يې ضربوو :

$$\int \left[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}\right]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعي له پاره په اصلي مخرج غزيږي او بيا سره ضربيږي:

$$\frac{[A(x+3)\ +\ B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A\ +\ Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x\ +3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضريبونو پرتلې کوني له امله، چې د x ترمخه يعني کيڼ لور ته له (A+B) افادي څخه بايد اوه لاس ته راشي او (+3A-2B) او يا ورته ۱۲ (وتونمساوات وګورئ) :

-5x+9 = (A+B)x (+3A-2B)

لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:

-5= A+ B

9= 3A-2B

د A او B پسې يې حل کړئ:

9= 3(-5-B)-2B

9=-15 -3B -2B |+15

24=-5B |:(-5)

<u>B=-4.8</u>

<u>A= (-5+4.8)= -0.2</u>

نو ليکلی شو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx=\int[\frac{-0.2}{(x-2)}]dx+\int[\frac{-4.8}{(x+6)}]dx$$

لومړی تابع جوړ کړی :

$$F(x)=\ln x\rightarrow f(x)=\frac{1}{2}$$

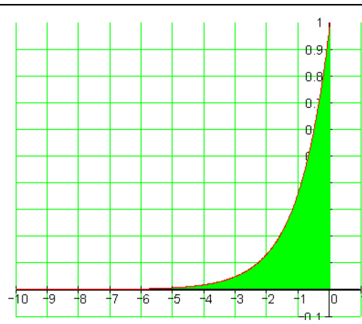
دا چې طبيعي لوګاريتم فقط له طبيعي اعدادو شمېرل کېدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نيسو.

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx=-0.2\ln|x-2|-4.8\ln|x+3|+C$$

ناپاي(مبهوم) انتيګرال

تعريف : که په يوه ټاکلي انتيګرال کې لږ تر لږه يو حد د مثبت يا منفي ناپاي لور ته لاړشي يا د انتيګرال ساحه ناپاي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپاي انتيګرال څخه غږيږو. په يوه مناسب ډول ناپا انتيګرال د عادي انتګيګرال د حد په څېر تعرفيږي.
په دې توګه په زړه پورې پوهېدني لاس ته راځي د بېلګې په توګه، چې څنګه د منفي تواند پوتنځ د ګراف لاندې ناپاي ته رسېدونکې په زړه پورې سطحې. نو باور لري

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=2 \quad \text{او} \quad \int_1^\infty x^{-2}dx=1$$

هم او د دې معکوس انتيګارلونه $\int_1^\infty x^{-1}dx$ او $\int_0^1 x^{-1}dx$ ناپاي ته ځې يا له ټولو حدونو اوړي يعني د ناپای په لور ځي..	

د $f(x)=e^x$ ګراف او x-محور ترمنځ دې په انټروال $(-\infty;0]$ کې ټوله سطحه و شميرل شي، يعنې
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx$$

تراوسه د یوه ټاکلي انتیګرال د پورته همداسې کښته(لاندې) پولې عددونه وو.
د انتیګرالونې ورشو یاا ساحه محدود وه.
په دې حالت کې یا اوس د انتېګرالولو ورشو محدوده نه ده،
داسې انتیګرال یو نامحدود انتیګرال بولو، د انتیګرالونی نامحدودې ورشو سره.
انتیګرالونه د دې لاندې بڼو څخه په یوې بڼې منځ ته راځي:

$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

د دې انتیګرال شمیرنې له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

لومړی د یوه پای انتروال $[a;b]$ له پاره انتیګرال $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ شمېرو، بیا پسې د ورته افادو $a \to -\infty$، یا $a \to \infty$ همداسې، $b \to -\infty$. یا $b \to \infty$، له پاره پولې جوړوو.

فورمال دا په لاندې ډول برېښي:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{x} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

زموږ د سطحې شمېرلو له پاره دا په لاندې ډول برېښي:

$$f(x) = e^{x}$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \left[e^{x}\right]_{a}^{0}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^{0}-e^{a}\right] = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^{0}}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^{a}}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:

دا د y په محور هنداره شوې د e تابع دې د $f(x)=e^{-x}$ سره په انتروال $[0,\infty)$ کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}\,dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0\,;\,u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^{u}\,\frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^{u}\,du = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^{u}\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^{u}\right]_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty}\left[e^{0}-e^{-b}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} e^{0} - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1-0 = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:

د یوه یوځای اینبول شوې یا یو ځای شوې تابع بېلګه لرو:

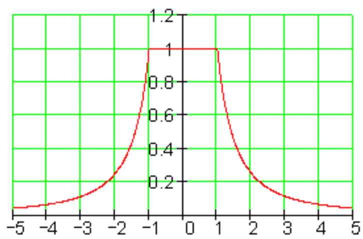
د x<-1 لپاراه د 1- ≤ x 1 لپاره د x > 1 لپاره	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ 1 \quad f \\ \frac{1}{x^2} \end{cases}$ $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

.

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د انتيګرال په برخو وېشنه يا ټوټه کونه: لاندې د انتيګرالونو تمعه دې و شمېرل شي. $A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

لومړنی اند يا تر مخه فکرکونه:
د تناظر دلايلو له مخې لرو :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

داسې، چې دا انتيګرال باید فقط يوځل وشمېرل شي.

$$\int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = [1]-[-1] = 1+1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{b} = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0} - \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1} = 0-(-1) = \underline{\underline{1}}$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{2} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} = 1+2+1 = \underline{\underline{4}}$$

تولګه
د انتيګرال هندسي تعريف

لوريزه سطحه-د انتيګرال تعريف:که يوه f تابع ولرو، نو دx مخور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتيګرال له لارې کيږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښ لري.

تحليلي تعريف: د f يوه تابع ورکړ شوې، چې په يوه انتروال [a,b] باندې تعريف دی، نو دa څخه تر b پورې د تابع د انتيګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ يوه يوه لوريزه سطحه پوهيږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند (تعریف ٤ . ١ : لیمیټ

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F; (\max \Delta x \to 0), \ldots\ldots..(4,3)$$

که په اینتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینتیګرال بولو، یا

F- Riemann (د ریمن سطحه). دلته a د اینتیګراله ونې لاندې(کښته)پوله او b د اینتیګرالونې پورته پوله بلل کیږي او [a,b] د اینتیګرالونې اینتروال او(f (Integrand) x)اینتیګرالېدونکی) او x د اینتیګرالونې (Integrationsvariable) متحول بلل کیږي

جمله٤ . ١ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

پیژند یا تعریف ٤ . ٢ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

پیژند تعریف 3.2: تابع y = f (x) دې په یوه واز اینتروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x (بنسټیز- ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

ټاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د a تر b او په پولو یا حدونو یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د a او b تر منځ او د f ګراف لاندې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعريف:

f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتيګرال دی : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$

د F(b) – F(a) لپاره زيات وخت $[F(x)]_a^b$ ليکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

جمله:

د يوې ثابتي سره ضرب : که تابع f (x) په يوه اينتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,, \qquad a \in R$$

جمله :

د جمعي (تفريق) قاعده که f1 (x) او f 2 (x) په يوه ايتروال کی نه پريکيدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتين :د يوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لويه اينبوول ، لنډ: بدلون) د نيونو لاندې چی u = g (x) متمادي اوو مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f\left[g(x)\right]g'(x)dx = \int f\left[f(u)\right]du$$

د ضربونو انتیګرالونه
که د دوه توابعو د ضرب انتیګرال د ورسره بلدو متودونو یا لارو شمېرو، نو زیات وخت دا ناشوني وي.

$$f(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = ?$$

بدلون Substitution

د ناټاکلي انتیګرال حل د بدلون له لارې(ننوتنه راځي)

تراوسه پورې مو فقط د انتیګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنیو توابعو په انتیګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې راکوي. د لومړنی انتېګرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې ګوته ورته نیول کیږي.

جمله ۲ . ۶ : د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځای د همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لنډ: بدلون) د نیونو لاندې چې u = g (x) متمادي اوو مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:)(کتاب کتل که لاندی بې د انتیګرال له نخښې)

$$\int f\,[g(x)]\,g'(x)dx = \int f\,(u)du$$

حل : د (۲۱ . ۱۳) د ښي اړخ مشتق د ځنځیرقاعدې (جمله۲ . ۶) له مخی داسی دی

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u) \cdot u' = f\left[g(x)\right] \cdot g'(x),$$

دا د کیڼ اړخ د رابیلیدنی سره سر خوري (.۲۱ . ۱۳) قاعده د ضرب اینتګرالېدو(اینتیګریشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چې یو فاکتور ځنځیري بلواك [f [g (x) وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق $g'(x)$ وي. سړی د دننه تابع لپاره متحولې یا واریابل بدلوي یا ځاي په ځاي کوي $u = g(x)$: جوړوي $du/dx = g'(x)$ په همدې ډول $du = g'(x)\,dx$

د بریالي ایتګرالپدو(اینتیګریشن) کیدو ورسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه ۲۱ . ۳) a :

لرو $I = \int 2\cos(2x-1)\,dx$

بدلون یا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بیلګه ۲۱ . ۳) b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x = u-1$, کشتق $2 = du/dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\,du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

ومولیدل چی ځنځیري تابع د لاینی دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیګرال کیدی شي، ځکه چی د لایني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د جملی ۲۱ . ۴ سره سم د اینتیګرال تر مخ(موخه کیڼ لور ده) لیکل کیږي.

بیلګه 4.2: لرو $I = \sqrt{-3x+5}\,dx$

بدلون: $-3x+5=u$

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\sqrt{u}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)du=-\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3}+C.$$

b) $I=\int\frac{1}{2}e^{-2x-3}dx.$

$-2x-3=u,\qquad -2=\frac{du}{dx}\qquad dx=-\frac{1}{2}du,$

$$I=\int\frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du=-\frac{1}{4}\int e^{u}du=-\frac{1}{4}e^{u}+C=-\frac{1}{4}e^{-2x-3}+C.$$

c) $I=\int\frac{2dx}{x+2}.$

$x+2=u,\qquad 1=\frac{du}{dx}\qquad dx=du$

$$I=\int\frac{2du}{u}=2\int\frac{du}{u}=2\ln|u|+C=2\ln|x+2|+C.$$

بیلګه:

$f(x)=e^{x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int e^{x}\,dx=e^{x}+C$

ځکه چې $F'(x)=e^{x}=f(x)$

مګر: $f(x)=e^{2x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int e^{2x}\,dx\neq e^{2x}+C$

ځکه چې $F'(x)=2e^{2x}\neq \bar{f}(x)$ **که** $\bar{F}(x)=e^{2x}+C$ ؛ **وی.**

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

بیلګه: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int e^{2x}\,dx = ?$$

بدلون : $u(x) = 2x = u$

جوړ کړی: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

$$\int f(x)\,dx = \int e^{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u} + C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u} + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

نو: $F(x) = \int (x)\,dx = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

ازمایښت : $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2 = e^{2x} = f(x)$

بیلګه :

وښایئ چې $f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = ?$ باور لري .

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = ?$$

بدلون: $u(x) = x + 1 = u$

جوړ کړی: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(x)\,dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C$$

بیرته ـ یا په ځتب بدلون:

$$\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

نو:

$$\int (x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

بیلګه :

$$f(x) = (3x+6)^3 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (3x+6)^3\,dx = ?$$

بدلون:

$$u(x) = 3x + 6 = u$$

جوړوو:

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

$$\int f(x)\,dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^3\,du = \frac{u^4}{12} + C$$

بیرته بدلون:

$$\frac{u^4}{12} + C = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$$

نو لرو:

$$\int (x)\,dx = \int (3x+6)^3\,dx = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$$

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right) dx = ?$$

بدلون : $u(x) = x^2 = u$

جوړوو: $u'(x) = \dfrac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \dfrac{1}{2x}\,du$

$$\int f(x)\,dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u \cdot \ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

بېرته بدلون: $\dfrac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \dfrac{1}{2}u + C = \dfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \dfrac{1}{2}x^2 + C$:

نو لرو: $\int (x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right) dx = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \dfrac{1}{2}x^2 + C}}$

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې

ټاکلي انتیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کیږي.

بیلګه :

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې:

۱ – بدلون $u(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کېږدئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

۳ – د پولو بدلون

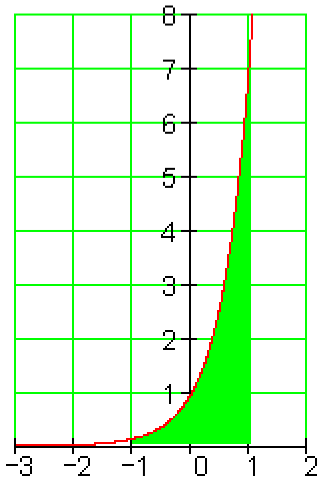
- لاندې پوله $u(-1) = -2$

- پورته پوله $u(1) = 2$

۴ - په انتیګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}\,du = \frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^{2} - e^{-2}\right] = 3,627$$

$f(x) := e^{2 \cdot x}$



بیلګه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln\left(x^{2}\right) \Rightarrow F(x) = \int_{1}^{2} 2x \cdot \ln\left(x^{2}\right) dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^{2}$

۲ – د ځای په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2)\, dx$$

د انتيګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^2$

۲ – د ځاى په په ځاى کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳ – د پولې بدلون

- لاندې پوله $u(1) = 1$

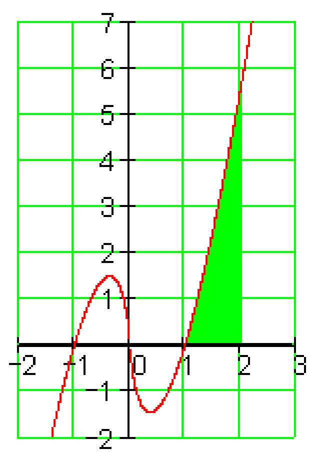
- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ – په انتيګرال کې ځاى په ځايګړى

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u)\, du = \left[u \cdot \ln(u) - u\right]_1^4$$

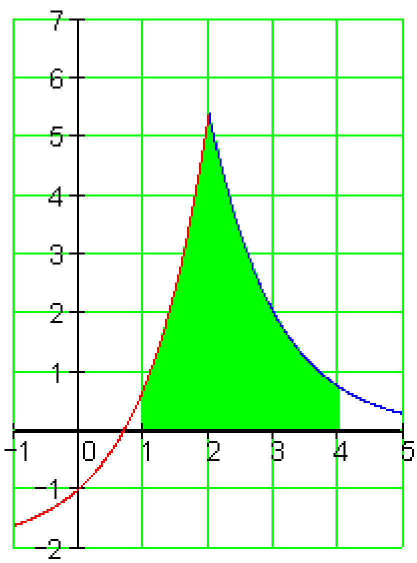
$$= \left[4 \cdot \ln(4) - 4\right] - \left[1 \cdot \ln(1) - 1\right] \approx 2{,}545$$

$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$



بيلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x)=\begin{cases} e^x-2 \\ (e^2-2)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x<2$ له پاره د $x\geq 2$ له پاره

$$A=\underbrace{\int_1^2 (e^x-2)\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_2^4 (e^2-2)e^{-(x-2)}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1=\int_1^2 (e^x-2)\,dx=\left[e^x-2x\right]_1^2=e^2-e-2$$

$$I_2=(e^2-2)\int_2^4 e^{-(x-2)}\,dx$$

$$u(x)=-(x-2)=-x+2$$

$$\frac{du}{dx}=-1\Rightarrow dx=-du\,;\,u(2)=0\,;\,u(4)=-2$$

$$I_2=-(e^2-2)\int_0^{-2} e^u\,du=(e^2-2)\int_{-2}^{0} e^u\,du$$

$$=(e^2-2)\cdot\left[e^u\right]_{-2}^{0}=e^2+2e^{-2}-3$$

$$I=I_1+I_2=e^2-e-2+e^2+2e^{-2}-3=\underline{\underline{7,331}}$$

جمله ۲ . ۶:

د ،،بدلون،، (Substitution لاتين :د يوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لويه اينښول ، لنډ: بدلون)قاعده: د نيونو لاندې چې $u = g(x)$ متمادي (نه پريکيدونکی) او د مشتق قابليت لري او $y = f(u)$ متمادي دی، نو باور لري:

$$\int f\,[g(x)]\,g'(x)dx=\int f\,(u)du$$

حل : د (۲ . ۱۳) د بني اړخ مشتق د ځنځيرقاعدې (جمله۲ . ۶) له مخې داسې دی

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کين اړخ د رابيليدنی سره سر خوري (۲۱ . ۱۳) قاعده د ضرب اینتګرالېدو(اینتيګريشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی يو فاکتور ځنځيري بلواك f [g (x)] وي او دا بل فاکتور (ضريب) يی د دننه تابع مشتق g ' (x) وي. سړی د دننه تابع لپاره متحولې يا واريابل بدلوي يا ځاي په ځاي کوي u = g (x) : جوړوي du / dx = g ' (x) په همدې ډول du = g ' (x) dx

د بريالي ايتګرالېدو(اينتيګرېشن) کيدو ورسته بدلون بيرته راګرځول کيږي.

بيلګه ۲۱ . ۳) a : لرو $I = \int 2\cos(2x-1)\,dx$

بدلون يا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(2x-1)+C$$

بيلګه ۲۱ . ۳) b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : , 2x = u-1 کشتق 2= du / dx همداسی dx = (1/2) du

$$I = \int 3\cos u\cdot\frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\,du = \frac{3}{2}\sin(2x-1)+C$$

وموليدل چی ځنځيري تابع د لاينې دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اينتيګرال کيدی شي، ځکه چی د لاينې تابع مشتق ثابت دی او ثابت فاکتور د جملی ۲ . ۴ سره سم د اينتيګرال تر مخ(موخه کيڼ لور ده) ليکل کيږي.

د بنستيزو اينتيګرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱ . ۱ (متحولې x يواځي په جګ يا متځ د دوه منخ ته راځي. له دې امله داسی اينتيګرال، کومو کی چی د x2 په ځاي لاينې ترم

(c) ketabton.com: The Digital Library

(Term) پروت دی، کیدی شي چی د لايني بدلولو له لارې په بنستيز اينتيګرالو ۱۰ او ۱۱ بيرته واړول شي. ډيروخت يو د فورم بدلون ته هم اړتياموجود وي، چی د اينتيګراند فورم ته راشو.

بيلګه 5.2:

$$a)\quad I=\int\frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2=\left(\sqrt{2}x\right)^2,\quad d\cdot h\cdot\ I=\int\frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x=u,\qquad \sqrt{2}=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{\sqrt{2}}du,$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x)+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2=9(1-4x^2)=9(1-(2x)^2),\ d\cdot h\cdot$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

$$2x=u,\qquad 2=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{2}du$$

$$I=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{6}\operatorname{Arcsin}u+C=\frac{1}{6}\operatorname{Arcsin}(2x)+C.$$

اينتيګريشن قاعدې، که دننه تابع خطي يا لايني نه وي، نو د اينتيګراند دوم فاکتور(تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سړی بنستيز اينتيګرال ته راشي. دلته هم سړی بيا دننی تابع په نوې متحولې يا واريابلی بدلوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه 6.21: الف: $I = 4x\sqrt{x^2-1}\ dx$

بدلون:د $x^2-1=u$ مشتق $2x = du/dx$ دی ،همداسې لرو: $xdx = \frac{1}{2}du$

$$I = \int 4\sqrt{u}\cdot \tfrac{1}{2}du = 2\int u^{\frac{1}{2}}du = 2\cdot 2/3\, u^{3/2} + C = 4/3\sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

ب) $I = \int \sin^3 x \cdot \cos x\ dx$

بدلون: $\sin x = u$ را بيل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x\ dx$

$$I = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4$$

$$c)\ I = \int \frac{1}{x}\cdot \ln^2 x\ dx$$

$$\ln x = u, \qquad : \frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \qquad \frac{1}{x}dx = du,$$

$$I = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

$$d)\ I = \int \tan x\, dx.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d\cdot h.\quad I = \int \frac{1}{\cos x}\cdot \sin x\ dx,$$

$$\cos x = u, \qquad -\sin x = \frac{du}{dx} \qquad \sin x\ dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u}du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

$$e)\ I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3}dx.$$

$$2-x^3 = u, \qquad -3x^2 = \frac{du}{dx} \qquad x^2 dx = -\frac{1}{3}du,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{2du}{u}=-\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}\ln\left|2-x^3\right|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}(\ln 1-\ln 2)=\frac{2}{3}\ln 2.$$

۲۱د بدلونقاعده) ۲۱ . ۱۳ (دې په چپه) يعني د بنى وكيڼ(لور هم استعمال شي . اينتيګرال f (x) dx كيدى شي چى په بل واړول شي چى x په يو مناسب بلواك (g (t وبدل شي (21 . 14) f (x) dx = f [g(t)]. g(t)dt. :دا افاده » مناسب« بلواك دې دلته داسي وپوهيدى شي چى سړى د بدلون وروسته يو ساده او ممكن يو بنستيز اينتيګرال لاس ته راوړي. د) ۲۱ . ۱۴ (استعمال په قاعده كى داسى دى چى په يوه بلواك f (x) كى موجود » پيچلى « ترم h (x)د h (x) t = h (x په بدلون له منځ څخه وړي او بيا) كه ممكن وي (د x په لوريى حلوي

$$x=g(t)=h^{-1}(t)$$

بيلګه 7.21: الف: $a)\ \ I=\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

$$\sqrt{x}-1=t,\qquad x;\,x=(t+1)^2,\qquad dx=2(t+1)dt:$$

$$I=\int\frac{2(t+1)}{t}dt=2\cdot\left[\int 1dt+\int\frac{1}{t}dt\right]=2(t+\ln|t|)+C=2(\sqrt{x}-1)+2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوى اينتګرال د دوه ايتګرالو جمعي ته بيايي، دلته

$x=g(t)=(t+1)^2$ وو.

$$b)\ \ I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}.$$

$$\sin x\cdot\cos^3 x=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^4 x=\tan x\cdot\cos^4 x.$$

نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I=\int\frac{dx}{\tan x\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx,$$

$$\tan x=t,\qquad \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt,$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\cdot\sqrt{\tan x}+C.$$

موږ د دې لاندې انتیګرال نیسو: $\int x\cos(x)\,dx$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې ترګه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= \int u\,dv\\ &= uv-\int v\,du\\ &= x\sin(x)-\int \sin(x)\,dx\\ &= x\sin(x)+\cos(x)+C.\end{aligned}$$

:

C د انتیګرالوني یوه په خوښه ثابته ده

انتیګرالوونی Integrand د x توان یا e^x سره

د توته انتیګرالوني د استعمال سره د انتیګرالونو لکه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x^2 e^x \, dx \quad \text{او} \quad \int x^3 \sin(x) \, dx$$

کېده شي په مدې لا حل شي:

يوه په زړه پورې بېلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x) \, dx$$

که په پوره سختوالي ونيسو ونيسو، نو په ورسره بلده لار اړين نه دی، چې دا دې حل ولي.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتيګرالوني استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x\,dx$ داسې جې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x) \, dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) \, dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتيګرال حل شي، نو د ټوټه انتيګرالوني قاعده بيا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x)$; $du = \cos(x)\,dx$

$v = e^x$; $dv = e^x\,dx$

نو لرو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره يوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو د پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتيګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتيګرال که کيڼ لور ته يوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتيګرالوني يوه په خوښه ثابته ده

د اينتيګرال شميرنی استعمال

د سطحومساحت، چې د f(x) دګراف او x محور ترمنځ پرتې وي.

په ځلورم ځپرکي کی وويل شو چی ټاکلی اينتيګرال $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$ د

سطحي مساحتA ښايي ، چي له منحنيy=f(x)، د x- محور y=(0) او د کرښیx=a اوx=b له خوا رابند وي. موږ له دې څخه مخ ته تللي يو چي y=f(x) د اينتيګرال اينتروال په دننه کی دx-محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدی شي د محور کښته لور ته هم لاړ شي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

--د یوې په خوښه تابع د منحني یا کرښې او د x محور ترمنځ او یا د دوه توابعو د سطحې شمیرلو لپاره وړاندیزونه وکړئ.

- دا هم د شمیرلو لپاره په پام کې ونیسئ، که منحني یا د تابع کرښه د x د محور لاندې لور ته پراته وي.

- یوه په خوښه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکاږئ او د تابع انتیګرال د x محور په ټاکلو پولو کې وشمېرئ.

- یوه په خوښه تابع ولیکئ، چې د انتروال په دننه کې د x محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم و کاږئ او دا تابع به کومه محنخښه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د محنښې په ورکولو کې دا بیا وڅېړئ، چې ولې؟

یادونه: که موږ د سطحې مساحت شمېرلو کې هغه عدد ولیکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونیول شي، چې د سطحې واحد(یوون) ور سره شته دی. که دا ورسره لیکل شوی نه وي، خو باید تل په پام کې وي.

دا پورته فعالیتونه مو دې لاندې بېلګو ته رابولي:

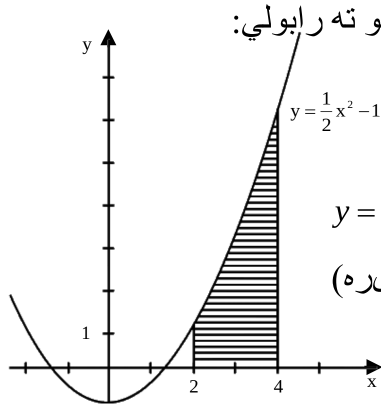


Bild 21,3

بیلګه ۵ . ۱ :

د سطحې مساحت د

$$y=\frac{1}{2}x^2-1\ ,\ y=0\ ,\ x_1=2\ ,\ x_2=4$$

ترمنځ په لاندې ډول دی(مخامخ څېړه)

$$A=\int_2^4\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)dx=\left(\frac{1}{6}x^3-x\right)\Big|_2^4$$

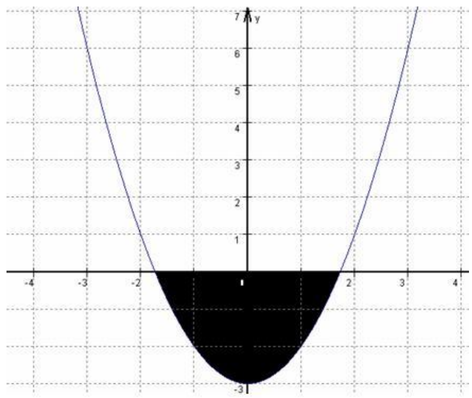
$$=\frac{1}{6}.64-4-\frac{1}{6}.8+2$$

$$=\frac{22}{3}$$

که د تابع y=f(x) سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



بېلګه ۵ . ۲ :

د $f(x)=x^2-3$ ګراف د x محور سره یوه

سطحه رابندوي.د ګراف او x محور ترمنځ

د ټولې سطحې مساحت وشمېرئ.

تګلار:

۱ - د دې لپاره چې دا مسئله راته ښه روښانه شوې وي، نو دا پورته رسم کاږو.

۲ - د دې لپاره چې د انتيګرال حدونه لاس ته اروړی شو، باید صفرځایونه وشمېرو.

$$0 = x^2 - 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

۳ – اوس د سطحې د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انتيګرال لیکو.

د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر $\sqrt{3}$ پوري انتيګرال شمېرو او نتيجه يې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2-3)dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2)dx - 3\cdot\int_0^{\sqrt{3}} 1dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\sqrt{3}} - 3.x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 3\cdot\sqrt{3} = |-2\cdot\sqrt{3}|$$
$$A = 2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3} = 4\cdot\sqrt{3}$$

بېلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحي مساحت د $y=\frac{1}{2}x^3-5\ ,\ \ y=0\ \ ,\ \ x_1=-1\ \ ,\ \ x_2=2$ ترمنځ دی: (لاندې ځیره)

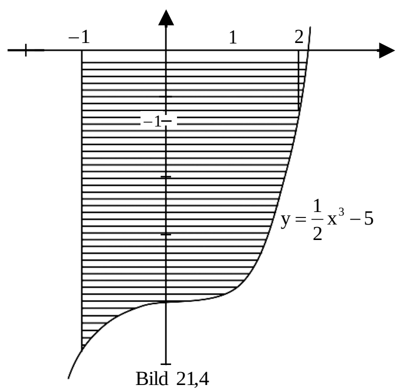


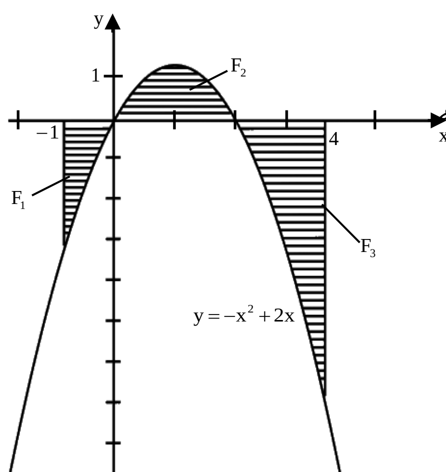
Bild 21,4

$$A=\left|\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}x^3-5)dx\ \right|$$
$$=-\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}x^3-5)dx$$
$$=(-\frac{1}{8}x^4+5x\ )\Big|_{-1}^{2}$$
$$=(-2+10+1/8+5)=\frac{105}{8}$$

بیلګه:

د لاندې پولو x_1=-1 تر $x_2=4$ اودمنحني y=-x²+2x او y=0

ترمنځدx- محور پورته او کښته پرته سطحه (په مخامخ ځېره کي نښانه شوې ده) دې وشمیرل شي



حل : د تابع ,y=-x²+2x د x1=0د

صفرځایونو x_1=0 او x_2=2 تر منځ پرته

غوښتونکي سطحه دx-محور پورته، نوره

کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$A=-F_1+F_2-F_3$$
$$=\int_{-1}^{0}(-x^2+2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx-\int_{2}^{4}(-x^2+2x)dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{0}^{2}-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{2}^{4}=\frac{28}{3}$$

د لاندې پولو $x=-1$ تر $x=4$ او د کږې $y=-x^2+2x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $y = 0$ ترمنځ (د $x-$ محور پورته او کښته)

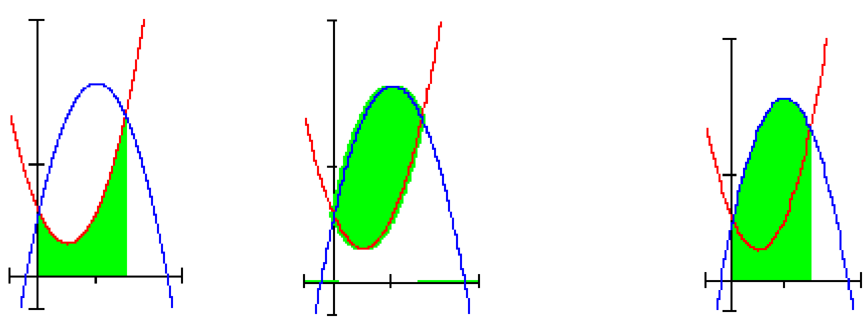
له دوه ګرافونو څخه رابندي سطحې د مساحت شمرنه:

ننوتنه د یوه ډنډ یا یوه بند څېره دې دلته راوړل شي یا دیوه پټيږچې له ګړو پولو را بند وي.

فعالیت:

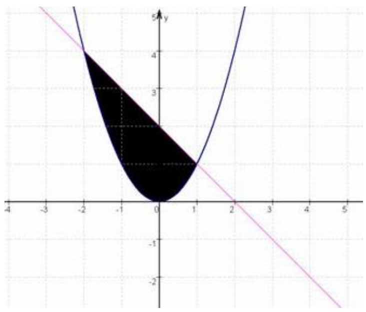
- که داسي یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چي د دې ډنډ مساحت څنګه وشمېرو؟

په څنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمیرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمیرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = A_1 - A_2$$



بیلګه ۵ . ۵ :

د $f(x) = x^2$ او $g(x) = -x+2$ دوه توابعو ترمنځ رابند د سطحې مساحت غواړو وشمېرو:

د تګلارې لار: دلته هم یو شکل یا ګراف رسموو، چې دا حالت راته روښانه شي.

۲ - د دې لپاره چې انتیګرال وشمېرو، د ګرافونو دقاطع ټکي ټاکو.

$x^2 = -x+2$

$x^2+x-2= 0$

P;q - فرمول

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

۳ – په ساده توګه لیدل کیږي.

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس باور لري

$$A = \int_{1}^{-2} (-x+2)dx - \int_{1}^{-2} x^2 dx =$$

$$-1\cdot\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-6-\left(\frac{(-2)^3}{3}\right)-\frac{1}{3}$$

$$= -1,5-6++=-4.5$$

$$A = 4,5$$

جمله :

که د ټولو x لپاره ، د a<x<b سره f(x)>g(x) وي، دا په دې معنا چې د f ګراف د a او b تر منځ دg پورته لور ته ځغلي, نو د دواړو ګرافونو په انتروال کې رابندې سطحې مساحت لپاره بارور لري.

$$A = \int_{a}^{b} (f(x)-g(x))\,dx$$

بېلګه ۵ . ٦ :

د توابعو $f(x) = x^2 -2x +2$ او $g(x) = -x^2+4x +2$ ګرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پیداکړو.
د دواړو ګرافونو د x–ارزښتونو غوښتکي(د تقاطع ټکي) د اینتیګرال حدونه جوړوي.

د غوښتکو د x - کواوردیناتو ټاکل:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 -2x+2 = -x^2 +4x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x =0 \quad \Leftrightarrow$$

$x_1 = 0$ او $x_2 = 3$ د اینتېګرال لیمیټونه یا پولې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

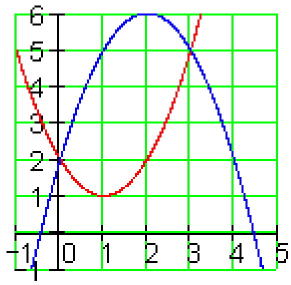
د اینتګرال جوړونه:

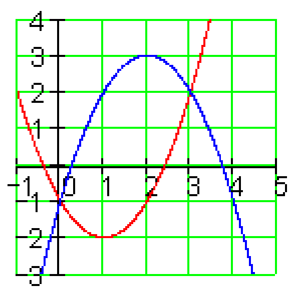
$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$
$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه باید تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت څخه کووچنی ارزښت باید کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$





لکه چې پوهیږو، د یوې سطحې مخنخښه ددې په واک کې ده، چې ایا سطحه د **x** - محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ ځېړو، چې ایا دا تاثیرات په پورتنی بیلګه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د **y** -محور په دری واحدونو(یوونونو) کښته لورته بیایو او سطحې نوې شمیرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د لید له مخې قضاوت وکړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوښتکي هم او له دې سره د انتیګرال حدونه بې تغیره پاتېږي.

$g(x) = -x^2 + 4x - 1$ و $f(x) = x^2 - 2x - 1$

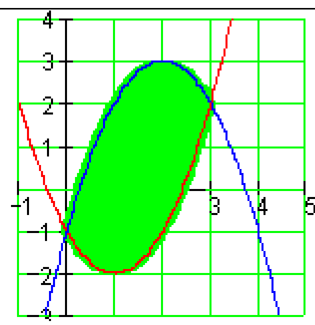
ځای په ځای کونه: $A = \int_0^3 f(x)dx - \int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (f(x) - g(x))\,dx$

د $f(x) - g(x) = 2x^2 - 6x$ سره کیږي:

$$A = \int_0^3 (2x^2 - 3x^2)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_0^3 = \frac{2}{3}\cdot 27 - 3\cdot 9 = 18 - 27 = \underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنيو ترمنځ سطحه فزیکي سطحه ښایي، باید لاس ته راوړنه یو مثبت عدد وي. دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A = \left|\int_0^3 (2x^2 - 6x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{2}{3}x^3 - 3x^2\right]_0^3\right| = \left|\frac{2}{3}\cdot 27 - 3\cdot 9\right| = |18 - 27| = |-9| = \underline{\underline{9}}$$



د دې متود ټولیزه ونه(عمومیت) :

د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه:

که یوه سطحه د یوې پورته او یوې کښته منحني څخه رابنده وي، چې تابع $f(x)$ او تابع $g(x)$ پورې اړه و لري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شمیرل کیږي.

$$A = \left|\int_a^b [f(x) - g(x)]dx\right|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیکرالوني حدونه a او b د x – محور د دواړو ګرافونو د وضعیه قیمتونو غوڅتکي دي

-- د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

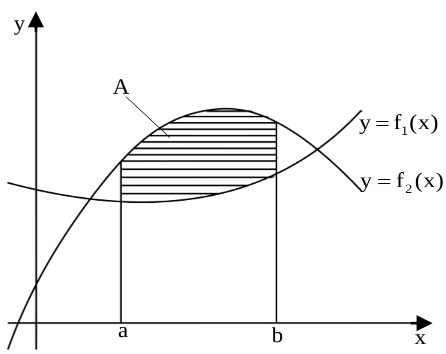


Bild 21,6

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې له x=a تر x=b پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

اینتیګرالوړاو $f_1(x) < f_2(x)$
په [a,b] اینتروال کی (ش ۱ . ۶) داسی لاس ته راوړل کیږي چې دتابع $y=f_2(x)$ لاندې سطحې مساحت څخه د $y=f_1(x)$ تابع لاندې سطحې مساحد کم کړئ.

$$A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

سړی په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواك چې $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په اینتروال [a,b] کومه یوه مخنخبنه ځان ته غوره کوي باوري دی.

بیلګه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشمیرو $y=x^2-1$ او $y=-x^2+1$

حل : د ایتیګرال پولې(حدونه) د افقي(پراته) محور غوڅتکي(د تقاطع ټکي) دي

$$x^2-1=-x^2+1$$

$$2x^2=2$$

$$x^2=1 \qquad x_1-a=1\,,\ x_2=b=-1$$

د اینتیګرلولو په اینتروال [1 , 1 -] کی لرو $-x^2+1>x^2-1$
(که چیرې په اینتروال [a,b] او په (۲ . ۱) کی $f2(x)>f1(x)$ په نظر کي ونه نیول شي، نو د څرګند اینتیګرال به منفی شي او سړی(لکه د مخه چې ویل شوي) بیا داینتیګرال مطلقه ارزښت نیسي. له دې امله لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

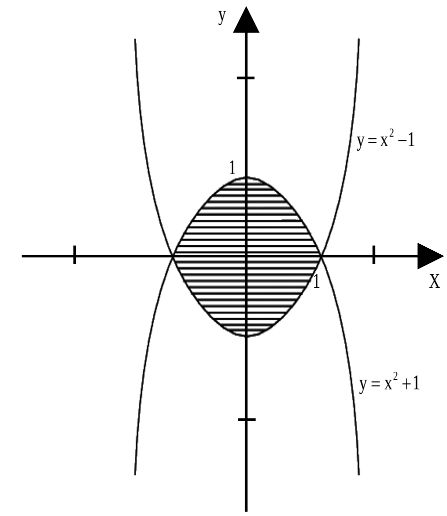


Bild 21.7

$$A = \int_{-1}^{1}\left[-x^2+1-(x^2-1)\right]dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(-2x^2+2)\,dx$$

$$= (-\frac{2}{3}x^3+2x)\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

بیلګه ۵ . ۸ :

د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ سطحه شمیرل کیږي.

y=(x-1)²,y=-4x+4,y=4

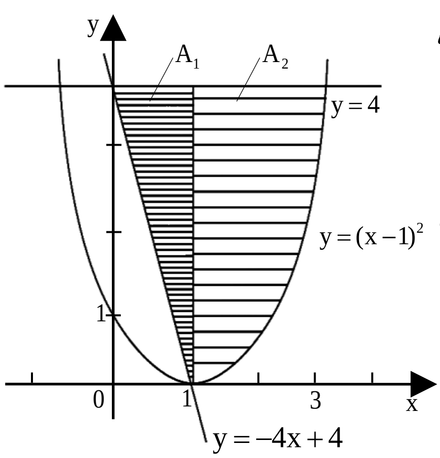


Bild 21.8

حل : دا د شمیرلو سطحه، د منحنیو ترمنځ د دوه سطحوA1 او A2 له یوځای کیدو څخه لاس ته راځي.

A1د منحنیو y=4 او y=-4x+4 ترمنځ پروت دی. د اینتیګرال پولی(- حدونه) د لومړي

کواور ینات(x –محور) غوڅټکی دی، د y=4 او y=-4x+4 ترمنځ.

لرو $4=-4x+4,\ x_1=0$ په همدې ډول د

بنې غوڅټکي لومړی وضعیه ارزښت (کواور دینات)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y=-4x+4$ او $y=(x-1)^2$ ترمنځ

$$-4x+4=(x-1)^2,\ x^2+2x-3=0$$

$$x_{2,3}=-1\pm 2,\ x_3=1.$$

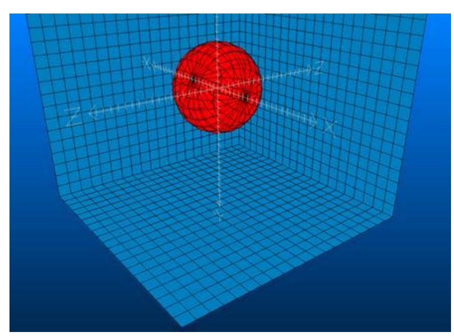
ګورو چیA2د y=-4 او$y=(x-1)^2$ تر
منځ پرته ده ، د اینتیګرال حدونه(پولی)x1=1 او د لومړي
وضعیه قیمت د ښي غوڅیکي د y=4 او $y=(x-1)^2$.

غوښتوني سطحه داسې ده:

$$A=A_1+A_2=\int_0^1[4-(-4x+4)]dx+\int_0^1\left[4-(x-1)^2\right]dx$$

$$=\int_0^1 4x\,dx+\int_0^1(-x^2+2x+3)\,dx=2x^2\Big|_0^1+(1/3x^3+x+3x)\Big|_4^3=7\frac{1}{3}$$

د څرخیدونکو بدنونو(جسمونو) ډکي(حجم)



فعالیت:

- په ورسره بلده توګه د مستطیل حجم ولیکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د کرې، استواني او د مخروط حجومونه، چې تراوسه مو لوستلي و لیکئ.

یادونه: دا دې تل په پام کې ونیول شي: که د انتیګرال شمېرنې له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د یوه جسم حجم ښايي. موږ ددې لپاره لیکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

څرخdدونکي تنونه:

څرخېدونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په یوه څرخېدونکي محور باندې د یوې کرښې یا منحني څرخېدنې له لارې منځ ته راځي. کرښه یا منحني په یوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحني محور نه غوڅوي، اویا زیات له زیاته یې ممکن لمس کړي. چې غوره بېلګې به یې په لاندې کې و څېړل شي.

د xپه محور څرخېدنه(څرخون)

لکه د مخه مو چې وویل، حجم هم یو انتیګرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که یوه تابع د X په محور و څرخول شي.

د یوه څرخېدونکي جسم (بدن یا تن) حجم(ډکی)

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال [a,b] کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او$x = b$ ترمنځ جوړېږي، راښنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخیدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انتروال دf تابع ګراف دy محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بڼه بدله شي و $x=f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغرېز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغرېز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V=\pi\cdot\int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))}(f^{-1}(y))^2\ dy$$

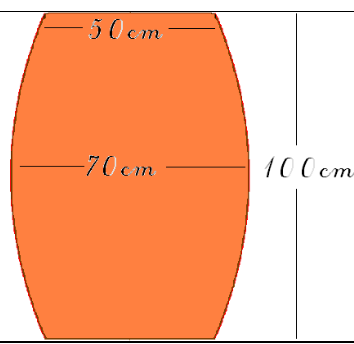
که دلته $x=f^{-1}(y)$ بدل کړو، نو د x په محور په لاندې توګه حجم لاس ته راوړو:

$$V=\pi\cdot\int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))}x^2dy=\pi\cdot\int_a^b x^2\cdot|f'(x)|dx$$

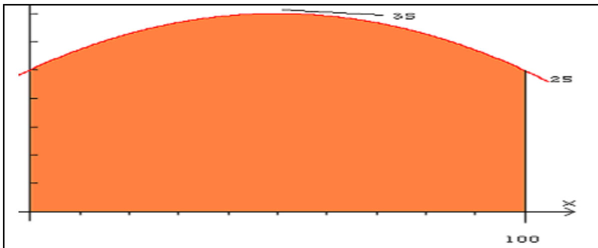
د f' مطلق ارزښت او د انتیګرال په حدونو کې خورا جګ – ټیټ(min/max) توابع یو مثبت انتیګرال تظمینوي.

د سطحي په څرخولو(د y په محور)، چې د f تابع له ګراف او دواړو کرښو $x=a$ او $x=b$ څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

$$V=\pi\cdot\int_a^b(x\cdot f))^2\ dx$$

د یوه مرتبان حجم: د یوه مرتبان حجم غواړو پیدا کړو چې جګوالی یې 1 متر، وړانګه یې 25 سنتي متره په پاې او 35 سانتیمتره په منځ کې ده.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

که مرتبان په 90° درجو و څرخول شي، نو د مربع پارابول بڼه غوره کوي. د ژئ تابع باید کښته لور ته واز پارابول وي، لکه دلته په شکل کې.	

حل: د پارابول د تابع لیکښه کېدی شي ساده په ککرټکي یا راس باندې ولیکل شي.

ټولیز باور لري:

$f(x)-a\cdot(x-5)^2+3.5$ ارزښت په دیسیمتر (dm)

په څرګند دول 5- د رآس راکښنه د x+ په لور ورکوي او 3,5 د y+ په لور. د غزونې ضریب a په لور اړین دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضریب a نه شته. که په فرمول کې یو معلوم ټکی کیږدو، کېدی شي a وشمېرل شي. دا ټکی (0/2,5) دی.

$$f(x)=-a\cdot(x-5)^2+3.5$$

د x ارزښت ځا په ځاي کوونو لرو $-a\cdot(0-5)^2+3.5$

له دې a دی: $\dfrac{2.5-3.5}{25}=-0.04$

او مساوات پوره بلل کیږي. $f(x)=-0.04\cdot(x-5)^2+3.5$

د ساده والي لپاره د رآس ټکي فرمول په نورمال یا عمودې فورم بدلوو:
$f(x)=-0.04x^2+0.4x+2.5$

تابع مربع کړئ $f(x)=(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دی $f(x) = 0.0016x^2 - 0.032x^3 - 0.04x^2 + 2x + 6.25$

لومړنۍ تابع

$$f(x) = \frac{0.0016x^2}{5} \cdot x^5 - \frac{0.032x^3}{4} \cdot \frac{-0.04x^2}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x$$

د حجم شمېرلو لپاره ټاکلی انتیګرال دی؛

$$\pi \cdot \int_0^{10} (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^{10} (-0.0016x^2 - 0.032x^3 - 2x + 6.25) \; dx$$

$$= \pi \left[\frac{0.0016}{5} \cdot 10^5 - \frac{0.032}{4} \cdot x^4 - \frac{0.04}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x \right]_0^{10}$$

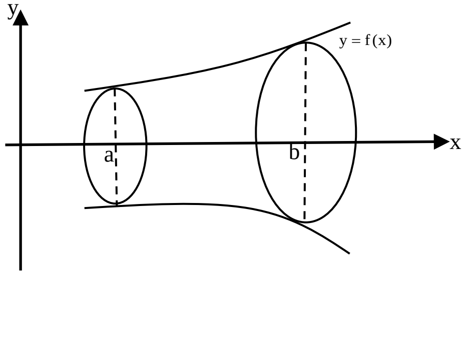
$$= \pi \left[32 - 80 - 13\frac{1}{3} + 100 + 62.5 \right]_0^{10}$$

$$= \pi \cdot 101.167$$

د حجم واحدونه (یوونونه)

دا چې موږ له پیله په دیڅیمتر شمېرنه کړې، نو طبعآ دا په لیتر شمېرل کیږي.

$$= 317.824 \; liter$$



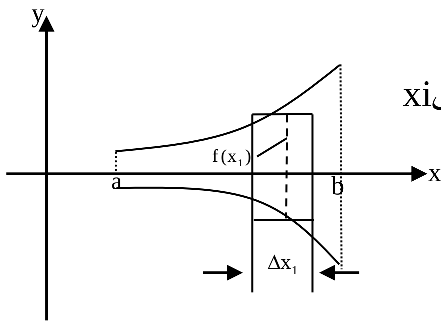
د تابع y=f(x),y=0,x=a,x=b ترمنځ سطحه چې دx-محورباندې څرخي(ش ۵ . ۹). دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوې یا- راغلي دڅرخیدونکي بدن ډکی(حجم) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندېجمله باوري ده

جمله ۵ . ۸) د څرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینتروال[a,b]کي دی $y=f(x)$ متمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چی د سطحو $y=f(x),y=0,x=a,x=b$ترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V=\pi\cdot\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$$



ښونه: V د توتو(استوانو)د جمعې له لارې چی وړانګه يې(f(xi، جګوالی يېxi د i=1,2,3,...n لپاره لری.
(ش: 5. 10) دi-مې توتې (سلیندر ډکی(حجم) دی.

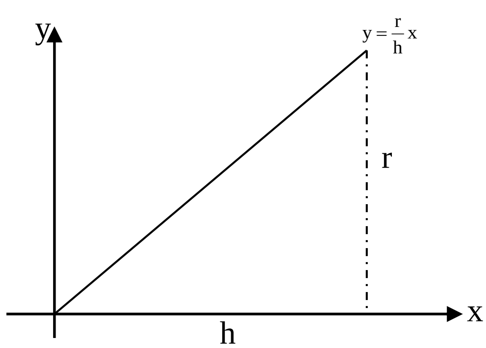
$$\Delta_iV=\pi\cdot\left[f(x_i)\right]^2\cdot\Delta x_i$$

د ټولو n سلیندرونو یا توتو زیاتون

$$V_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i=\sum_{i=1}^{n}\pi\left[f(x_i)\right]^2\cdot\Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه) n->oe, xi->0 (د بنسټ اینتیګرال د تعریف سره سم

$V=\pi\cdot\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$ حجم (ډکی) راکوي.



بیلګه ۵ . ۹ :) دمخروط یا کیګل ډکی

(حجم) د $y=\frac{r}{h}x$ کرښي (د سرچیني تیره کرښه د $\frac{r}{h}$جګوالي سره) او دx- محور (y =0) د حدونو$x=0$ تر $x=h$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورې(ش . ۱۱)

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[\frac{r}{h}x\right]^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

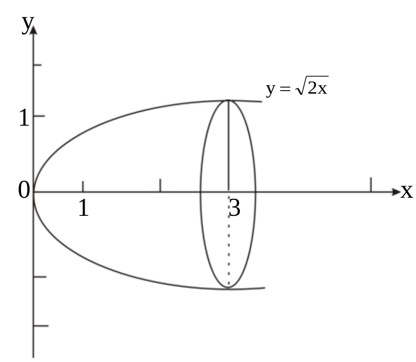
دا له بنسټیزې شمېرنې(د اساساتو) څخه معلومه نتیجه ده.

بیلګه ۵ . ۱۰:

د $y = \sqrt{2x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$

ترمنځ د x-محور باندې څرخېدلو جوړ(تولید) شوی جسم څرخېدلی پارابولویید دی (ځ ۵ ړ ۱۲)

$$V = \pi \cdot \int_0^3 \left[\sqrt{2x}\right]^2 dx$$
$$= 2\pi \cdot \int_0^3 x dx$$
$$= 2\pi \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 = 9\pi.$$



د ارښیمیدس جمله Archimedischer Satz

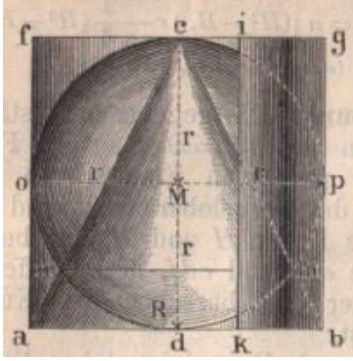
د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{\text{توته(استوتنه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 1886 زکې يوه درسي کتاب څخه

Figur 120.



Die Volumen der drei Körper verhalten sich wie die Ausdrücke unter 1), 2) und 3); man hat somit die Proportion:

$$Cyl. : Kugel : Kegel = 2r^3\pi : \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2r^3\pi}{3}$$

oder: „ : „ : „ $= 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3}$

„ : „ : „ $= 6 : 4 : 2$

„ : „ : „ $= 3 : 2 : 1$

Archimedes **war der erste, welcher dieses Verhältnis fand, daher heisst der hierdurch ausgedrückte Satz der Archimedische Satz.**

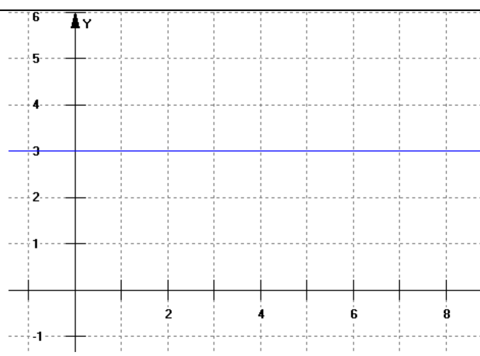
د پورته الماني پښتو:ارښيمېدس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب يې ومونده، له دې امله دا دلته راغلې جمله د ارښيمېدس جلې په نامه نومول شوې.

د څرخېدونکي بدن(حسم) حجم.

بېلګه ۵ . ۱۱:

استوانه(توته):

استوانه د x په محور د $f(x) = c$ يوې ثابتې تابع(په دې حالت کې $f(x) = 3$ دی) د څرخېدو څخه لاس ته راځي.



د يوې استوانې حجم (ډکی) شمېرنه:

اوس دې په [0;5] انټروال کې د توتې حجم وشمېرل شي. د استوانې د حجم د شمېرلو لپاره $V = \pi r^2 \cdot h$ عمومي فرمول دی. په دې حالت کې $r=3$ او $h=5$ دی. دx هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی له هرڅه غواړو $V = \pi r^2 \cdot h$ څخه فقط $r^2 \cdot h$ تر څېړنې لاندې و نیسو او غواړو یوه لار پیدا کړو ، چې د هغې لارې د انتیګرال په مرسته حجم وشمېرلای شو.
د سطحې مساحت د لاندې انتیګرال په مرسته وشمېرل شو :

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x)\, dx$$

که د دې ناپای ډېرو مستطیلونو(د f(x) د مربع مساحت ا د صفر په لور ځغلېدونکې پنډوالي dx سره) انتیګرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 [f(x)]^2\, dx$$

دا په دې معنا چې دا انتیګرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتني فرمول څخه دد یوې توتې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راکوي:

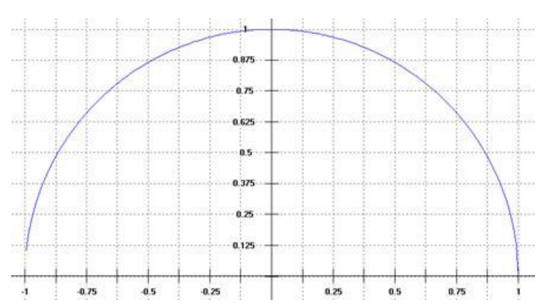
$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 [f(x)]^2\, dx$$

د دې ورکړ شوې استوانې د حجم شمېرنه:

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2\, dx = \pi \int_0^5 [9(x)]_0^5 = \pi \int_0^5 [45-0]_0^5 = 45\pi$$

د پرتلې لپاره: $\pi r^2 h = 45\pi$

کره (غونډارې یا غنډوسکه(توپ)):



(c) ketabton.com: The Digital Library

د x په محور د $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ تابع څرخېدني څخه غونډاری یا کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکي تابع يې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتیګرلولو له لارې بیا حجم وشمېرل شي.

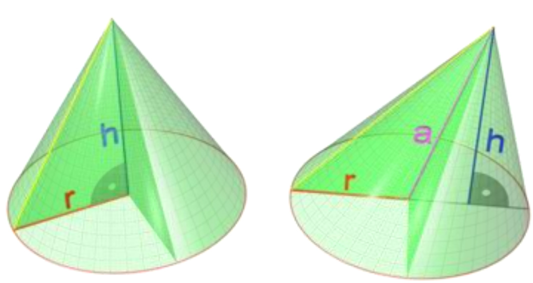
په دې بېلګه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځاي څخه و صفر ځاي ته د x په محور باندې

د $f(x)=\sqrt{1^2-x^2}$ تابع څرخېدنو له لارې منځ ته راځي ، يعنې په انټروال [-1;1] کې .

$$\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

مخروطKegel (Geometrie)

دا هم ممکن ده، چې یو مخروط د یوه منظمn زاویو (اړخیزې(کونجیز) څخه رابندې بنستیزې سطحې(د n لپاره چې ناپاي ته ځي) اهرام ته ور نژدې کړو.



د مخروط حجم:

د انتیګرال په مرسته د یوه مستقیم مخروط د حجم د شمېرلو یوه بله مرستندویه لار. یو د کارتیزي وضعیه ارزښت (قیمت) سیستم په کار اچول کیږي، د هغه سره چې د مخروط څوکه په

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرچینه $(0|0)$ او منځ ټکی په ټکي $(0|h)$کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاې کوچنیو توتو(استوانو) رایوځاي شوی په پام کې ونیسو، چې جګوالی(پنډوالی) یې dx دی. داچې د داسې یوې توتې یا استوانې ګردې توتې(کترې) واټن د مخروط له څوکې د وضعیه قېمت سیستم په x سره ور کړ شوی دی، د وړانګې جملې له مخې(دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوې) باور لري.

د یوه ناپاې کوچنۍ توتې(استوانې) وړانګه:

$$r\,z\,(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

د یوې ناپاې کوچنۍ توتې(استوتنې) حجم:

$$(\frac{r}{h} \cdot x)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2\, dx$$

دټول څرخېدوني مخروط د ټولو داسې کوچنیو توتو حجم دی. د شمېرلو لپاره یې ټاکلی انتیګرال جوړوو، د انتیګرال حدونو 0 او h سره:

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخېدنه(څرخون) ده.

د یوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولاي چې لومړی د کوادر حجم وشمېرو. دلته د دې ګراف لاندې په ډېرو کترو کتره کول دي د dx پنډوالې سره . د دې کترو د سطحو مساحت وشمېرئ، چې وړانګه f(x) لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بیا یې انتیګرال په ورکړ شوي [0;5] انتروال کې ونیسئ.

$$\pi\int_0^5 \left[f(x)\right]^2 dx = \pi\left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلې لپاره دی د یوه مخروط د حجم معیاري (ستاندارد) بڼه وکتل شي.

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 32.72$$

لنډ :

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرڅونه: $V_x = \pi\cdot\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi\cdot\int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

بېلګه ۵ . ۱۲:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = x^2/4$ تابع ګراف په $[0, 2]$ انتروال کې د وضعیه قیمتونو په محوررونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دی؟

د x په محور څرخېدنه: $y^2 = x^4/16,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2$

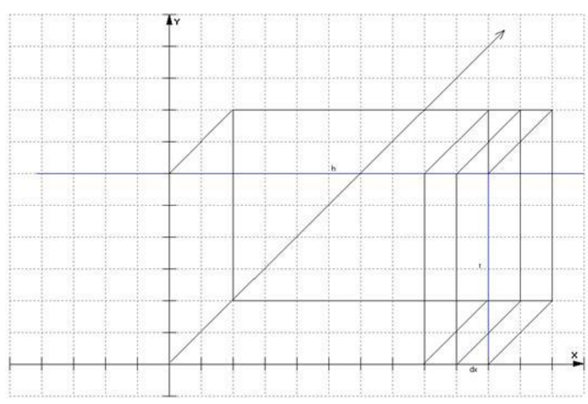
$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16}\, dx = 0.4\pi$$

د y په محور څرخېدنه: $x^2 = 4y,\ y_1 = 0,\ y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y\, dy = 2\pi$$

د ناڅرخیدونکي جسم حجم.

شپږ اړخیز جسم یا مکعبډوله - 2.1 Quader



دا لید شکل د استواني څخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه څرخي. حجم یې کېدی شي د عادي کوادر په څېر وشمېرل شي $(V = r^2h)$ او یا د صفر په لور تلونکې dx سرورې مربع وې ټوټه شي. د دې لپاره دې د پروت غوڅې (قاطع) سطحه وشمیرل شي، یعنې $q(x)$ د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بیا باید انتیګرال ونیول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولیزه توګه دا معنا لري: $V = \int_a^b q(x)dx$

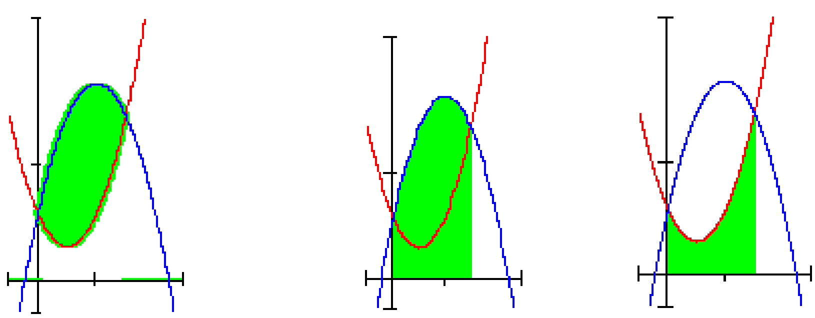
په دې بېلګه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژې تابع مربع ده: $q(x) = [f(x)]^2$

که موږ $f(x) = 3$ تابع له 0 تر 5 انتروال کې د پروتقاطع تابع سره انتیګرال کړو، نو باید $V = r^2h = 45$ لاس ته راشي. $\int_0^5 q(x)dx = [9x]_0^5 = 45$

ټولګه

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



A، A_1 ،A_2

$$A = A_1 - A_2$$

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له$x=a$ تر $x=b$ پورې‌او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$.

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال $[a,b]$ کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x=a$ او$x=b$ ترمنځ جوړېږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V=\pi\cdot\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

د y په محور څرخیدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په $[a,b]$ انتروال دf تابع ګراف دy محور او د دواړو کرښو $y=f(a)$ او $y=f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y=f(x)$ بڼه بدله شي و $x=f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V=\pi\cdot\int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))}(f^{-1}(y))^2\ dy$$

جمله ۵ . ۸) د څرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینتروال$[a,b]$کي دی $y=f(x)$ متمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چی د سطحو $y=f(x),y=0,x=a,x=b$ترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V=\pi\cdot\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توتي، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{\text{توته(استوانه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخېدنه(څرخون) ده.

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرخونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع څرخېدنې څخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکي تابع یې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتیګرلولو له لارې دې بیا حجم وشمېرل شي.

تمرینونه

د بن

ستیز انتیګرال د جدول په کارونه یا استعمال لاندې انتیګرالونه وشمیرۍ

a) $\int (x^3 - 5x^2 + 7x - 2)dx$, b) $\int (2/x^3)\,dx$, c) $\int (1/3)\sqrt[3]{x}\,dx$

d) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, e) $\int \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}\,dx$, f) $\int (\sqrt[3]{x^4} + 1)\,dx$,

(c) ketabton.com: The Digital Library

g) $\int \sqrt[3]{x^{-3}}\, dx$, h) $\int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}\, dx$, i) $\int 3\cdot 2^x\, dx$,

j) $\int \frac{1}{2\sin^2 x}\, dx$, k) $\int \frac{1}{3+3x^2}\, dx$, l) $\int \cos\varphi \cdot s\, ds$,

m) $\int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}$, n) $\int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\, dt$, o) $\int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\, du$.

۱ . ۲ – د بیرته په اکلي انتیګرال وروسته یې انتیګرال ونیسی

a) $\int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}\, dx$, b) $\int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}\, dx$, c) $\int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\, dx$,

d) $\int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\, dx$, e) $\int (-2-2\tan^2 x)\, dx$, f) $\int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}\, dt$.

۳ – لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int_0^1 \frac{1}{2}e^x\, dx$, b) $\int_\pi^{2\pi} \cos x\, dx$, c) $2\int_2^3 dt$,

d) $\int_0^\pi \cos\pi \sin x\, dx$, e) $\int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}$, f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}\, dx$,

g) $\int_{x_1}^{x_2} (2x-1)\, dx$, h) $\int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}\right) dx$, i) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\, dt$,

j) $\int_0^1 \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}\, du$, k) $\int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}\, dx$, l) $\int_a^b a^x\, dx$.

۴ – د بدلون یا سبستچیشن له لارې یې انتیګرال وشمیرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\int \sqrt[3]{2x-7}\,dx$, b) $\int \frac{dx}{-x+1}$, c) $\int 2^{3x+6}\,dx$,

d) $\int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx$, e) $\int \frac{dx}{1+(x+1)^2}$, f) $\int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}\,dt$,

g) $\int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx$, h) $\int \frac{3x\,dx}{-x^2+1}$, i) $\int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx$,

j) $\int 7\cos^7 x\sin x\,dx$, k) $\int (1-2\sin x)^3\cos x\,dx$, l) $\int \frac{\sin x}{\cos^n x}\,dx$,

m) $\int \cot t\,dt$, n) $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+3}\,dx$, o) $\int \frac{\operatorname{Arc}\sin u}{2\cdot\sqrt{1-u^2}}\,du$,

p) $\int \frac{\sqrt{2\ln x+3}}{3x}\,dx$, q) $\int e^x\cdot\cos e^x\,dx$, r) $\int e^{\cos x}\cdot\sin x\,dx$.

۵ . د تر زیرنیونی فورمیدلون وروسته او په بنسټیز اینټیګرال ۱۰ او ۱۱ د بدلون له لارې یې اینټیګرال وشمیرۍ ،

a) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$, b) $\int \frac{dx}{2+4x^2}$, c) $\int \frac{dx}{3+5x^2}$,

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$, e) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}}$, f) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$,

g) $\int \frac{dx}{x^2-10x+34}$, h) $\int \frac{dx}{3x^2-6x+30}$, i) $\int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}$.

۶ لاندې ټاکلي اینټیګرالونه وشمیرۍ

a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4x-1)^3}$, b) $\int_{-1}^{0} e^{3x}\,dx$, c) $\int_{0}^{2} 2^{2x+1}\,dx$,

d) $\int_{-1}^{1} \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5}\,dx$, e) $\int_{e}^{e^3} \frac{1}{x}\ln x\,dx$, f) $\int_{2}^{4} \frac{e^t}{1+e^t}\,dt$,

g) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\,dx$, h) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2}$, i) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cdot\cos x\,dx$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ . د جملی ۲۱ . ۸ استعمال په بنسټ یی (ټوټه اینتیګرالونه) اینتیګرال کړی

a) $\int 0{,}2x \cdot \sin x \, dx$, b) $\int 4x^3 \cdot \ln x \, dx$, c) $\int \cos^2 x \, dx$,

d) $\int \cos x \cdot \sin x \, dx$, e) $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$, f) $\int x \cdot (\cos x + 1) \, dx$,

g) $\int x^3 \cdot e^x \, dx$, h) $\int \mathrm{Arc}\sin x \, dx$, i) $\int x^{\frac{1}{3}} \cdot \ln x \, dx$,

j) $\int \mathrm{Arc}\tan x \, dx$.

لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int_{-1}^{1} x \cdot e^x \, dx$, b) $\int_{1}^{2} \ln x \, dx$, c) $\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$,

d) $\int_{0}^{\pi} e^x \cdot \sin x \, dx$, e) $\int_{0}^{\pi} x^3 \cdot \sin x \, dx$, f) $\int_{0}^{\pi} x^4 \cdot \sin x \, dx$.

د هغې هوارې دننه وشمیرئ، چې د وکړ شوو مساواتو کړو څخه راښنده شوي وي

a) $y = e^{0,5x}$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

b) $y = \frac{1}{2}x^3$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

c) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $y = 9$, $x = -3$, $x = 3$;

d) $y = \cos x$, $y = 0$

e) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6}$;

f) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$;

g) $y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

h) $y = x^3 + 7$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

i) $y = x^3 + 7$, $y = x^3 - x^2 + 3x + 5$;

j) $y = 3 - \frac{1}{2}x^4$, $y = 3 - 4x$;

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

k) $y = \frac{1}{x}, \quad 3y + 3x = 10;$

l) $y = \cos x, \quad y = \sin x$

m) $y = \sqrt{3x+1}, \quad y = 1, \quad x = 8;$

n) $y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{8}{4+x^2};$

o) $y = x^2, \quad x = y^2;$

p) $y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3;$

q) $y = 2\sin x, \quad y = \sqrt{3}\tan x \quad , x = [0, \pi/2)$

f) $y = \tan x$

کرښه چې په کېږي $y = \tan x$ پرتو ټکو (0,0) او ($\pi/4$,1) تیریږي
د x –محور باندې د ورکړ شوو مساواتو سره د ګږو ترمنځ هواره څرخي
د راپورته شوي څرخیدونکی بدن یا جسم ډکی یا حجم وشمیری. پام
دې وي، چې په ورکړشوي حالت کې ورکړشوې هواره د دوه کږو څخه
رابنده ده، نو له دې امله د لوي کږې ډکی څخه د کوچنی کږې ډکی
کمیږي.

a) $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = h;$

b) $y = \sqrt[3]{x^2} + 1, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2$

c) $y = e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2;$

d) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2;$

e) $y = 2\sqrt{x}, \quad y = 2x;$

f) $y = 4x - x^2, \quad y = 0;$

g) $y = \sin x, \quad y = 0, \quad x \in [0, \pi].$

تراپیځ (څلورګوډی، چې ټیك دوه اړخونه یو د بل غبرګ وي) د کونجونو
(1,0),(5,0),(1,3),(5,5) د x–محور باندې څرخي، وشمیری
الف) د جوړې شوې هوارې دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د څرخیدونکی بدن ډکی

د کږو $y=\sqrt{x},\quad y=0,\ y=-x+6$ ترمنځ هواره د x− محور

باندې څرخی، وشمیری.

الف) د کږې غوڅتکو د پروت محور سره

ب) د کږو ترمنځ هواره

پ) د څرخویدونکی بدن ډکی

د هغهٔ څرخیدونکی بدن ډکی وشمیری، کوم چی په اینتروال $[\frac{\pi}{4},\pi]$

کی د x−محور پورته خواته د کږو $y=\sin x$ او $y=\cos x$ ترمنځ

پرته هواره، چی د x−محور باندې څرخیږي!

۱۴ نیمګردی $y=\sqrt{9-x}$ د x−محور باندې څرخیږي. د ګوډیبرخی ډکی

وشمیرې د پولو $x_1=1\ ,\ x_2=3$ او ترمنځ !

۱۵ د څرخیدونکی ایلیپسوئید ډکی څومره لوي دی، کوم چی د x−محور

پورته خوا ته پرته د ایلیپسی نیمی هوارې د رابندوونکی $x^2/a^2+y^2/b^2=1$

کږې سره د x−محور باندې تولیدوي؟

د څپرکي نور تمرینونه:

$$a)\ \frac{x^3+7x^2+9x-5}{x+5}\qquad b)\ \frac{x^4-3x^2+1}{x^2-2}$$

$$c)\ \frac{x^3-2x^2+x-5}{x^3+1}\qquad d)\ \frac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}$$

$$e)\ \frac{x^4+2x^3-6x^2-5x+3}{x-2}\qquad f)\ \frac{x^5-x^4+1}{x^2+2}$$

۱ - لاندې نااصلي پولینومونه دې د یوه ټول کسري پولینومونو او یوه اصلي پولینوم د جمعې په څېر ولیکل شي.

۲ - لاندې پولینومونه د جمعې په څېر ولیکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \dfrac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x-6}$ $b)\ \dfrac{x^2+1}{x^3-x}$

$c)\ \dfrac{4x+10}{x^2+6x+8}$ $d)\ \dfrac{-3x^2+19x-10}{x^3-2x^2-5x+6}$

$e)\ \dfrac{4x^2+6x-20}{x^3-4x}$ $f)\ \dfrac{14}{x^2+20x+51}$

۳ – د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

$a)\ \dfrac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $b)\ \dfrac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

$c)\ \dfrac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$ $d)\ -\dfrac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$

٤ - د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ګونه ورکړئ.

$a)\ \dfrac{x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $b)\ \dfrac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$

$c)\ \dfrac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x}$ $d)\ \dfrac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$

۵ - د لاندې پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$a)\ \dfrac{x^3+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8}$ $b)\ \dfrac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$

$c)\ \dfrac{2x^3+x^2}{x^3-1}$ $d)\ \dfrac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$

٦ – و ښایئ، چې د F تابع د f تابع لومړنی تابع ده.

$a)\ f(x)=2x^2+4x-7 \quad , \quad f(x)=4x+4$

$b)\ F(x)=(x^2-x)^3 \quad , \quad f(x)=3\cdot(2x-1)\cdot(x^2-x)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$c)\ F(x)=\sqrt{2x+1} \quad , \quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad f(x)=3x\cdot\cos 3x$

$e)\ F(x)=\dfrac{1}{3}x^3\cdot\ln x-\dfrac{4}{9}x^3 \quad , \quad f(x)=x^2\cdot(\ln x-1)$

۷ - وښايئ، چې د F او G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$a)\ F(x)=x^3+x+4 \quad , \quad G(x)=x^3+x+1$

$b)\ F(x)=(x-3)^2 \quad , \quad G(x)=x^2-6x+4$

$c)\ F(x)=\dfrac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x)=\dfrac{3x+5}{x+2}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad G(x)=\sin x$

۱۳ ــ لاندې ناټاکلي انتیګرالونه پیداکړئ او ټیکوالی یې و ازمایئ.

$a)\ \int x^3dx \qquad b)\ \int 7dx \qquad c)\ \int xdx \qquad d)\ \int(1-x^2)dx$

$e)\ \int(x+\dfrac{1}{x})dx \qquad f)\ \int(e^x+\cos x)dx \qquad g)\ \int\dfrac{1}{\sin^2 x}dx \qquad h)\ \int\dfrac{5}{\cos^2 x}dx$

$i)\ \int udx \qquad k)\ \int(2+e^x)dx \qquad l)\ \int(1+\ln x)dx \qquad m)\ \int(\sqrt{x}+\sin)dx$

۱٤ ــ د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښت وشمېرئ

$a)\ \int_0^3 4dx \qquad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx \qquad c)\ \int_1^e \dfrac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e(2+\dfrac{1}{x})dx \qquad e)\ \int_{-1}^0 e^xdx \qquad f)\ \int_0^\pi \sin xdx$

$g)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4dx \qquad h)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi}\dfrac{1}{\sin^2 x}dx \qquad i)\ \int_{-2}^2 x^3dx$

$j)\ \int_2^6(1+x)dx \qquad k)\ \int_1^2(x^2-x^5)dx \qquad l)\ 0\int_{-2}^2(\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{x^2}{3})dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۷ د لاندې ټاکلو انتيگرالونو ارزښت وشمېرئ او ارزښتونه يې سره پرتله کوئ.

$$a)\ \int_{-3}^{1} 3dx und - \int_{-3}^{1} 3dx \qquad b)\ \int_{0}^{1}(1+e^{x})dx \ \wedge\ -\int_{0}^{1}(1+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{-\pi}^{0} \sin x dx \ \wedge\ -\int_{-\pi}^{0} \sin x dx$$

۱۷ــ هر دوه انتيگرالونه د يوه انتيگرال سره انځور کړئ.

$$a)\ \int_{0}^{0.5\pi} \cos x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi} \cos x dx \qquad b)\ \int_{-1}^{0}(x+e^{x})dx + \int_{0}^{1}(x+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{2}^{3} 3x^{2}dx + \int_{5}^{3} 3x^{2}dx \qquad d)\ \int_{-2}^{1}(2+x)dx - \int_{4}^{1}(2+x)dx$$

۱۸- د لاندې ټاکلو انتيگرالونو لپاره ارزښت تخمين کړئ.

$$a)\ \int_{-4}^{-2} e^{x+3} \qquad b)\ \int_{0}^{8}\sqrt{1+x}\,dx$$

$$c)\ \int_{3}^{5} 2^{4-x}dx \qquad d)\ \int_{0}^{0.5\pi}\sin^{2} x dx$$

۱۹ ــ د کومو x ارزښتونو لپاره لاندې انتيگرالونه ورکړشوي ارزښتونه لري؟

$$a)\ \int_{1}^{x} 5t^{4}dt\ ,\quad la(x)=31 \qquad b)\ \int_{0}^{x} e^{t}dt\ ,\quad la(x)=e-1$$

۲۰ - لاندې انتيگراند توابع ته د انتيگرال توابع وټاکئ.

$$a)\ f(x)=x^{2}\ ,\ a=3 \qquad b)\ f(x)=2+e^{x}\ ,\ a=0$$

$$c)\ f(x)\frac{1}{\cos^{2} x}\ ,\ a=0 \qquad d)\ f(x)=2\ ,\ a\in IR$$

۲۱ - د لومړني انتيگرال په استعمال سره لاندې انتيگرالونه وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d)\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx,\quad e)\ \int \sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx,\quad f)\ \int (\sqrt[3]{x^4}+1)\ dx,$$

$$g)\ \int \sqrt[3]{x^{-3}}dx,\quad h)\ \int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}dx,\quad i)\ \int 3\cdot 2^x\,dx,$$

$$j)\ \int \frac{1}{2\sin^2 x}dx,\quad k)\ \int \frac{1}{3+3x^2}dx,\quad l)\ \int \cos\varphi\cdot s\quad ds,$$

$$m)\ \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}},\quad n)\ \int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\,dt,\quad o)\ \int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}du.$$ --------

۲۲ - د بیرته په بنستیز اینتیګرال بدلون وروسته یي اینتیګرال ونیسئ:

$$a)\ \int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}dx,\quad b)\ \int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}dx,\quad c)\ \int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx,$$

$$d)\ \int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\ dx,\quad e)\ \int (-2-2\tan^2 x)dx,\quad f)\ \int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}dt.$$

۲۳-- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیرئ:

$$a)\ \int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx,\quad b)\ \int_\pi^{2\pi} \cos x\ dx,\quad c)\ 2\int_2^3 dt,$$

$$d)\ \int_0^\pi \cos\pi\sin x\ dx,\quad e)\ \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2},\quad f)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx,$$

$$g)\ \int_{x_1}^{x_2} (2x-1)\,dx,\quad h)\ \int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2+2\sqrt{x}}\right)dx,\quad i)\ \int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\ dt,$$

$$j)\ \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}du,\quad k)\ \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}\ dx,\quad l)\ \int_a^b a^x\ dx.$$

۲٤- د بدلون یا سیتیچیوشن قاعدې استعمال له لارې یي اینتیګرال وشمیري:

$$a)\ \int \sqrt[3]{2x-7}\ dx,\quad b)\ \int \frac{dx}{-x+1},\quad c)\ \int 2^{3x+6}\ dx,$$

$$d)\ \int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx,\ e)\ \int \frac{dx}{1+(x+1)^2},\ f)\ \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}dt,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g)\ \int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx,\quad h)\ \int\frac{3x dx}{-x^2+1},\qquad i)\ \int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx,$$

۲۵- د تر زیرنیوني فورمبدلون وروسته او په بنستیز اینتیګرال 10 او 11 د بدلون له لارې یي اینتیګرال وشیمرئ

$$a)\ \int\frac{dx}{1+4x^2},\qquad b)\ \int\frac{dx}{2+4x^2},\qquad c)\ \int\frac{dx}{3+5x^2}.$$

$$d)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}},\qquad e)\ \int\frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}},\quad f)\ \int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},$$

$$g)\ \int\frac{dx}{x^2-10x+34},\quad h)\ \int\frac{dx}{3x^2-6x+30},\quad i)\ \int\frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}.$$

۲٦- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیري:

$$a)\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(4x-1)^3},\qquad b)\ \int_{-1}^{0}e^{3x}dx,\qquad c)\ \int_{0}^{2}2^{2x+1}dx,$$

$$d)\ \int_{-1}^{1}\frac{4x^2}{(3+2x^3)^5},\qquad e)\ \int_{e}^{e^x}\frac{1}{x}\ln\times dx,\quad f)\ \int_{2}^{4}\frac{e^t}{1+e^t}dt,$$

$$g)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{\sin x}\cos x\ dx,\qquad h)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{2+8x^2},\quad i)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cdot\cos x\ dx.$$

۲۷-- لاندې توټه اینتیګرالونه اینتیګرال کړي:

$$a)\ \int 0,2x\cdot\sin x\ dx,\qquad b)\ \int 4x^3\cdot\ln x\ dx,\qquad c)\ \int\cos^2 x\ dx$$

$$d)\ \int\cos x\cdot\sin x\ dx\qquad e)\ \int x^2\cdot\sin x\ dx\qquad f)\ \int x\cdot(\cos x+1)\,dx$$

$$g)\ \int x^3\cdot e^x\ dx,\qquad h)\ \int x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln x\ dx,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د احتمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولي اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې څانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې گډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیگرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انگریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انگرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د گروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولگې څخه تر اومم ټولگې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميرې شينواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمريز کې د شينوارو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مينې د لومړنې ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پيل او د دويم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتريش برس، چې هلته يې د شميرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

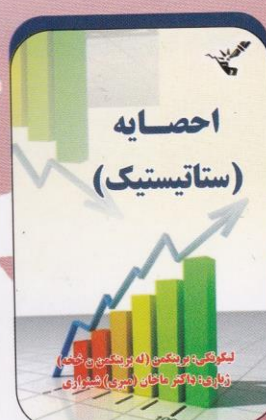
ماخان ميرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د ميرمن ښاپيرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتريش ته راغی. ده له ميرمن ښاپيری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

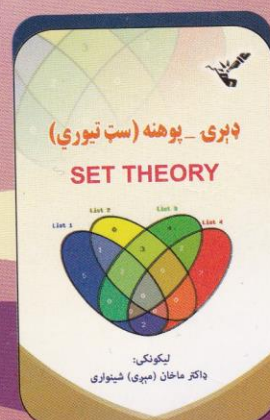
دوي ته لوي څښتن په اتريش ويانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چې څانګه او اباسين نوميږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمې همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سايکولوژي لوستلې.

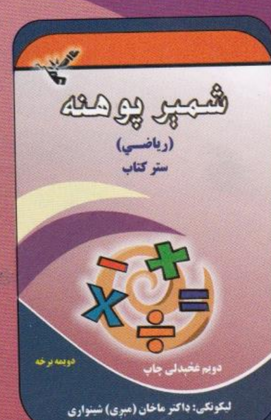
ماخان شينواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۱۹ ۹۷ څخه همدا د کتابونو ليکلو اوو د ژباړې دنده يې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډاکتر ماخان (مېړی) شینواری







د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه _ جرمني
VEREIN ZUR FORDERUNG DER
AFGHANISCHEN KULTUR E.V
د خپرونو لړ (۱۳۰)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library