د پوهنې وزارت

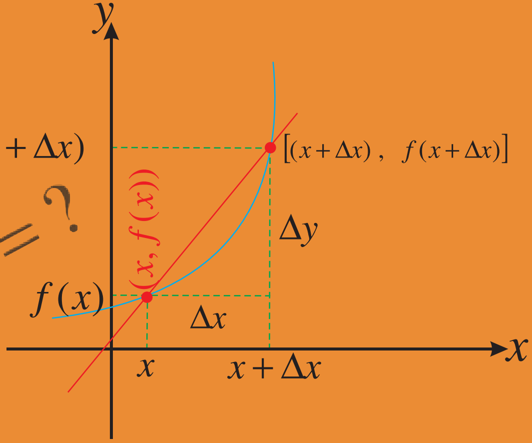
د تعليمي نصاب، د ښوونکو د روزنې او د ساينس د مرکز معينيت

د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف لوی رياست

رياضي ۱۲

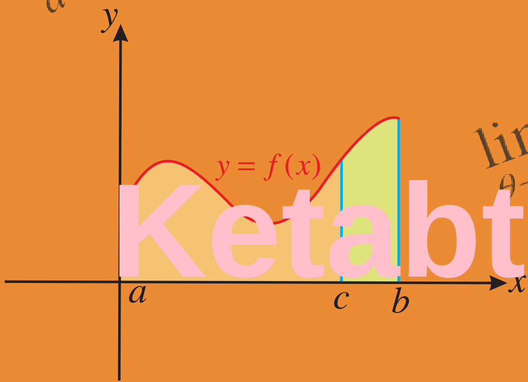
ټولګی

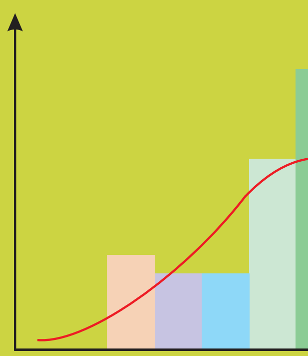
$$\lim_{x \to a} f(x) = ?$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = ?$$





Ketabton.com

د چاپ کال: ۱۳۹۰

رياضي ۱۲ ټولګی

د پوهنې وزارت

د تعليمي نصاب، د ښوونکو د روزنې او د ساينس د مرکز معينيت

د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف

لوی رياست

رياضي ۱۲

ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۰ هـ . ش.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکوالان:

- پوهیالی حمدالله شیرزی وردگ د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تألیف د پروژې غړی
- مؤلف مهناز توخي د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړې
- پوهنمل طلاباز حبیب زی د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تألیف د پروژې غړی
- پوهندوی خالقداد فیروزکوهي د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تألیف د پروژې غړی
- سرمؤلف میرنقیب الله د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی
- د مؤلف مرستیال محمد خالد ستوری(ځدراڼ) د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی

علمي او مسلکي ایډیټ:

- حبیب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعلیمي نصاب د پراختیا په لوی ریاست کې.
- سرمؤلف نظام الدین د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی
- د مؤلف مرستیال رحیمه هدایت‌زی د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړې

د ژبې ایډیټ:

- محمدقدوس ډکوخیل د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی

دیني، سیاسي او کلتوري کمیټه:

- مولوي عبدالوکیل د اسلامي تعلیماتو علمي غړی.
- حبیب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعلیمي نصاب د پراختیا په لوی ریاست کې.

د څارنې کمیټه:

- دکتور اسدالله محقق د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او د ساینس مرکز معین
- دکتور شېر علي ظریفي د تعلیمي نصاب د پراختیا د پروژې مسؤول
- د سرمؤلف مرستیال عبدالظاهر گلستاني د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی رئیس

طرح او ډیزاین:

ولید «نوید» نسیمي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحيم

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی — دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د توري — هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی — د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو — د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، ګوجر دي — پامېریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي — هم ایماق، هم پشه یان
دا هېواد به تل ځلیږي — لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به — لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر — وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهنې د وزير پېغام

ګرانو ښوونکو او زده کوونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختيا او پرمختګ بنسټ جوړوي. تعليمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم توکی دی چې د معاصر علمي پرمختګ او ټولنې د اړتياوو له مخې رامنځته کيږي. څرګنده ده چې علمي پرمختګ او ټولنيزې اړتياوې تل د بدلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعليمي نصاب هم علمي او رغنده انکشاف ومومي. البته نه ښايي چې تعليمي نصاب د سياسي بدلونونو او د اشخاصو د نظريو او هيلو تابع شي.

دا کتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې ارزښتونو چمتو او ترتيب شوی دی. علمي ګټورې موضوعګانې پکې زياتې شوې دي. د زده‌کړې په بهير کې د زده‌کوونکو فعال ساتل د تدريسي پلان برخه ګرځېدلې ده.

هيله من يم دا کتاب له لارښوونو او تعليمي پلان سره سم د فعالې زده‌کړې د ميتودونو د کارولو له لارې تدريس شي او د زده‌کوونکو ميندې او پلرونه هم د خپلو لوڼو او زامنو په باکيفيته ښوونه او روزنه کې پرله پسې ګډه مرسته وکړي چې د پوهنې د نظام هيلې ترسره شي او زده‌کوونکو او هېواد ته ښې برياوې ور په برخه کړي.

پر دې ټکي پوره باور لرم چې زموږ ګران ښوونکي د تعليمي نصاب په رغنده پلي کولو کې خپل مسؤوليت په ريښتوني توګه سرته رسوي.

د پوهنې وزارت تل زيار کاږي چې د پوهنې تعليمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دين له بنسټونو، د وطن دوستی د پاک حس په ساتلو او علمي معيارونو سره سم د ټولنې د څرګندو اړتياوو له مخې پراختيا ومومي.

په دې ډګر کې د هېواد له ټولو علمي شخصيتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده‌کوونکو له ميندو او پلرونو څخه هيله لرم چې د خپلو نظريو او رغنده وړانديزونو له لارې زموږ له مؤلفانو سره د درسي کتابونو په لا ښه تآليف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه چې د دې کتاب په چمتو کولو او ترتيب کې يې مرسته کړې، له ملي او نړيوالو درنو مؤسسو، او نورو ملګرو هېوادونو څخه چې د نوي تعليمي نصاب په چمتو کولو او تدوين او د درسي کتابونو په چاپ او وېش کې يې مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم.

ومن الله التوفيق

فاروق وردګ

د افغانستان د اسلامي جمهوريت د پوهنې وزير

(c) ketabton.com: The Digital Library

لړلیک

سرلیک | مخونه

لومړی څپرکي لېمیټ ۱-۴۰

- د لېمیټ مفهوم
- د ښي او کیڼي خوا لېمیټونه
- د لېمیټ خاصیتونه
- د نسبتي تابعگانو لېمیټونه
- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل
- د $\infty - \infty$ او $0 \cdot \infty$ مبهم شکلونه
- د $0^0, \infty^0, 1^\infty$ مبهم شکلونه
- د مثلثاتي تابعگانو لېمیټ
- د تابعگانو متمادیت
- د متمادي تابعگانو خاصیتونه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دویم څپرکی مشتقات ۴۱-۸۲

- د یوې تابع مشتق
- د مشتق هندسي تعبیر
- د مشتق قوانین
- د مرکبو تابعگانو مشتق
- د مثلثاتي تابعگانو مشتق
- ضمني مشتقات
- لوړې مرتبه مشتقات
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دریم څپرکی د مشتق د استعمال ځایونه ۸۳-۱۳۲

- د یوې تابع بحراني ټکی(اعظمي او اصغري)
- د انعطاف د ټکي ټاکل د دویم مشتق څخه په گټې اخېستنې سره
- د منحنيگانو رسمول
- د توابعو د گرافونو مجانبونه
- د هوموگرافیک تابعگانو گراف
- د دریمې درجې یو مجهوله تابع گراف
- د رول قضیه
- د متوسط قیمت قضیه
- د لوپیټال قاعده
- د بحراني ټکو تطبیق
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک	مخونه

څلورم څپرکی انتیګرال	۱۳۳-۱۷۲
• د ریمان مجموعه	
• د انتیګرال مفهوم	
• د غیرمعین انتیګرال خواص	
• معین انتیګرال	
• د معین انتیګرال خواص	
• د مشتق او انتیګرال اساسي قضیې	
• په تعویضي طریقې سره انتیګرال نیونه	
• قسمي انتیګرالونه	
• د څپرکي لنډیز او پوښتنې	
پنځم څپرکی د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانو مشتق او انتیګرال	۱۷۳-۱۹۸
• د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانو مشتق	
• د معکوسو تابعګانو مشتق	
• قسمي کسرونه	
• د اکسپوننشیل تابعګانو انتیګرالونه	
• د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال	
• د قسمي کسرونو په مرسته د انتیګرال محاسبه	
• د څپرکي لنډیز او پوښتنې	
شپږم څپرکی د انتیګرال تطبیقات	۱۹۹-۲۲۲
• د یوې منحني د محصور شوې سطحې د مساحت محاسبه	
• د دوو محصور شویو منحنيګانو ترمنځ د مساحت محاسبه	
• د دوراني جسمونو د حجم محاسبه	
• د قوس د اوږدوالي محاسبه	
• د څپرکي لنډیز او پوښتنې	
اووم څپرکی احصائیه	۲۲۳-۲٦۰
• د احتمال د تابع توزیع	
• د دوه جمله‌یي توزیع او د برنولي آزمایښت	
• د پواسن د احتمال توزیع	
• د نورمال توزیع	
• د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول	
• نمونه اخیستل	
• د نمونې د اوسط توزیع	
• د مرکزي لیمیټ قضیه	
• د نمونه‌یي توزیع نسبت	
• د څپرکي لنډیز او پوښتنې	
اتم څپرکی احتمالات	۲٦۱-۲۸۲
• پرېکړې او نښتي فضاګانې	
• هم چانسه پېښې	
• د نښتو یا پیوسته فضاګانو احتمال	
• مشروط احتمال	
• د حاصل ضرب اصل	
• د ناخاپه پېښو استقلالیت	
• د څپرکي لنډیز او پوښتنې	

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

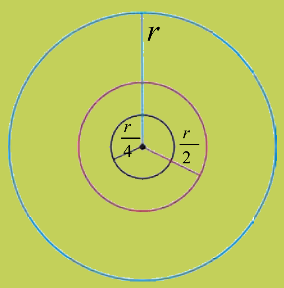
لومړی څپرکی

لیمیټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لېمیټ مفهوم

په یوه مستوي کې درې دایرې داسې رسم کړئ چې د O ټکي د دایرو متحد مرکز او شعاعګانې يې په ترتیب سره $r, \frac{r}{2}$ او $\frac{r}{4}$ وي، دې عملیې ته نور څو ځلې دوام ورکولای شئ؟



فعالیت

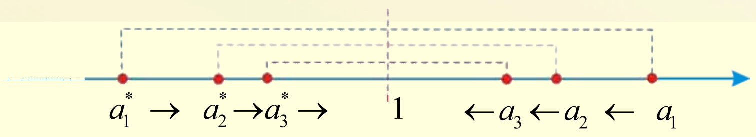
د $a_n = (1+\frac{1}{n})$ او $a_n^* = (1-\frac{1}{n})$ ترادفونه د $n \in IN$ لپاره په پام کې ونیسئ او لاندې فعالیت ترسره کړئ:

- د عددونو په محور باندې د a_1 او a_1^* موقعیت(ځای) وښیئ.
- ویلای شئ، چې د a_2 او a_2^* قیمتونه د $[a_1^*, a_1]$ د فاصلې دننه یا دباندې پراته دي.
- د a_1 ، a_1^* او a_2 ، a_2^* منحنی ټکي یو له بل سره پرتله کړئ.
- پورته پړاوونو ته په پاملرنې سره ویلای شئ، چې د a_3 او a_3^* د ټکو موقعیت د عددونو پر محور په کوم ځای کې واقع دي.
- آیا ویلای شئ، چې د n د تر ټولو لویو قیمتونو په اخیستلو سره د a_n او a_n^* ردیفونه کومو قیمتونو ته نږدې کېږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله: لیدل کېږي، چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کیڼ لوري څخه د 1 عدد ته د n په زیاتېدو سره نږدې کېږي، یعنې:

ـ د a_n ترادف کله چې n بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په (1) سره کېږي او همداشان د a_n^* د ترادف $n-$ام حد که n بې نهایت ته نږدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



ددې لپاره چې د لېمیټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړي پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څېړنې لاندې نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

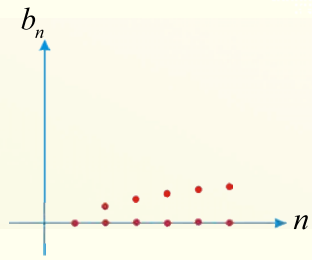
مثال: لاندې ورکړل شوي ردیفونه د n د تر ټولو لویو قیمتونو لپاره کوم قیمت ته تقرب کوي یا نږدی کېږي، موضوع په ګرافیکي ډول تشریح کړئ، په داسې حال کې چې:

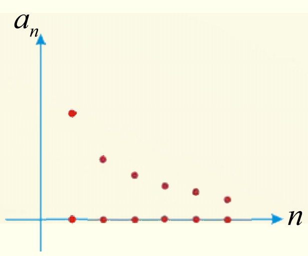
$$a_n = \left(\frac{2n+3}{n}\right) \ldots (i) \qquad b_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) \ldots (ii) \qquad c_n = (-1)^n \frac{1}{n} \ldots (iii)$$

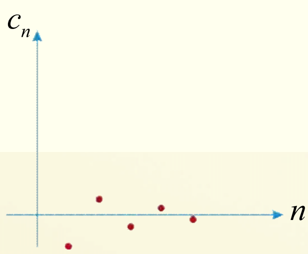
حل: پوهېږو چې د n د بېلابېلو قیمتونو لپاره ګرافیکي ښودنه په لاندې ډول ده.

n	1	2	3	4	5	$\to \infty$
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\to 1$

n	1	2	3	4	5	6	7	$\to \infty$
a_n	5	$\frac{7}{2}$	3	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{17}{7}$	$\to 2$







n	1	2	3	4	5	$\to \infty$
c_n	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$\to 0$

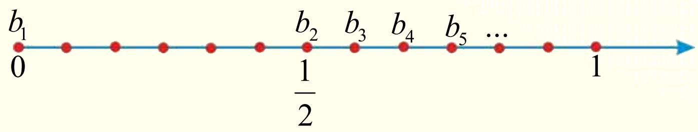
له پورتنیو ګرافونو څخه لیدل کېږي چې راکړل شوي ترادفونه د n د قیمتونو په زیاتېدو سره د ترادفونو قیمت یوه ټاکلې عدد ته نږدې کېږي، لکه د a_n ترادف د 2 عدد ته د b_n ترادف د 1 عدد ته او د c_n ترادف صفر ته تقرب کوي، چې ترادف ته د ډېرو لویو قیمتونو په ورکولو سره موضوع په آسانۍ سره روښانه کېږي.

د ترادف د قیمتونو له جدول څخه د لیمیټ قیمت څرګندېږي، د لیمیټ په شته والی کې ردیف یوه ټاکلي عدد ته نږدې کېږي. دغه ټاکلي عدد ته لیمیټ (limit) وایي. چې په lim سره ښودل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره د $b_n = \frac{n-1}{n}$ ترادف په پام کې نیسو، لرو چې:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$	...



او یــــا کــــه چیــــري $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}$ .... I ، $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}$ .... II او $2, 4, 6, \ldots, 2n$ .... (III) د عددونو ترادفونه په پام کې ونیسو، لیدل کېږي چې که n د بې نهایت لورې ته نږدې شي، نو د I ترادف صفر ته نږدې کېږي د II ترادف د (1) عدد ته نږدې کېږي د III ترادف د بې‌نهایت(∞) ته نږدې کېږي.

د متحول تقرب: ویل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختیاري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، یعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچنی دی یا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to a} x = a \quad \text{یا} \quad x \to a \quad \text{یا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چیرې د x د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدې شي.

$$x : a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$$

له کیڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چیرې د x د قیمتونو یو متزاید ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدې شي.

$$x : a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ یعنې:

$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

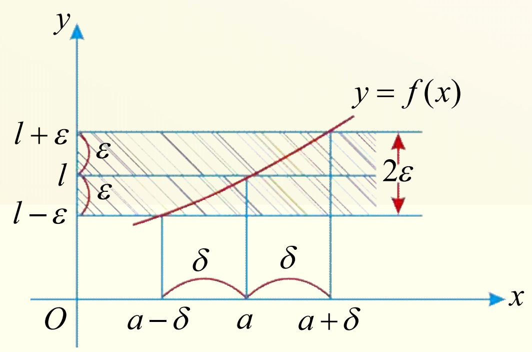
(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی بېلګه: د x متحول د 9 عدد ته نږدې کړئ یا په بل عبارت د $x \to 9$ مفهوم توضیح کړئ.

حل:

$$x: 9.1\ ,\ 9.01\ ,\ 9.001\ ,\ 9.0001\ ,\ \dots \to 9^+$$
$$x: 8.9\ ,\ 8.99\ ,\ 8.999\ ,\ 8.9999\ ,\ \dots \to 9^-$$

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر ترلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې ګډون لري کیدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوی. که چیرې د x متحول د a عدد ته نږدې شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نږدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ تابع لیمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي نو داسې یې لیکو: $\lim_{x\to a} f(x) = l$ یا $\begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = l \ \Leftrightarrow \ (|x-a| \to 0 \Rightarrow |f(x)-l| \to 0)$$

پوښتنه

د $f(x) = 2x$ تابع کې په ګرافیکي ډول وښیئ چې که x د (3) عدد ته نږدې شي $f(x)$ له (6) سره مساوي کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښي او کيڼ خوا لېمیټونه

مخامخ تصوير ته پاملرنه وکړئ وواياست چې مخامخ ونې ته له کومو خواوو څخه نږدې کېدای شو.

فعاليت

په لاندې جدول کې د $x \neq 1$ ، $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ته ځينې قيمتونه ورکړل شوي.

x	0.98	0.99	0.999	?	1.001	1.01	1.02
$f(x)$	1.98	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.02

$\longrightarrow \qquad \longleftarrow$

- د تابع ګراف رسم کړئ.
- که x د (1) عدد ته نږدې شي، نو $f(x)$ کوم عدد ته نږدې کېږي.

د پورتني فعاليت څخه لاندې پايله ليکلای شو:

د ښي خوا لېمټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د ښي لوري l_1 لېمیټ لري که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره يو کوچنی عدد د $\delta > 0$ موجود وي داسې چې که: $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon)$ يا

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l_1$$

د کيڼ خوا لېميټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د کيڼ لوري l_2 لېميټ لري که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره د $\delta > 0$ يو عدد پيدا شي داسې چې $x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) \in (l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon)$ يا

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l_2$$

د $f(x)$ تابع هغه وخت چې $x \to a$ ته نږدې شي د l لېميټ لري، يعني: $\lim_{x\to a} f(x) = l$ په دې شرط چې:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویمه بېلګه: و ښیئ چې $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ سره دی.

حل: د ښي او کیڼي خوا لیمیټونه تر څېړنې لاندې نیسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

لیدل کېږي چې د ښی خوا او کیڼې خوا لیمیټونه سره مساوي دي، نو $\lim_{x\to 3}=\frac{x^2-9}{x-3}=6$ دي.

دویمه طریقه: د لیمیټ د تعریف په پام کې نیولو سره فرضوو چې د هر اختیاري کوچني عدد ε لپاره یو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 : \ |x-a|<\delta \ \Rightarrow \ |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$|x-3|<\delta \ \Rightarrow \left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon=\delta$$

له پورتنی اړیکې څخه دا معلومېږي چې ε له δ سره اړیکه لري، که δ ته قیمت ورکړو ε قیمت اخلي او که ε ته قیمت ورکړو δ قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعریف چې د لیمیټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لیمیټ لري، یعني: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

پوښتنه

وښیئ چې د $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$ تابع کله چې $x\to 2$ لیمیټ نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیمیټ خاصیتونه (Properties of Limit)

د مخامخ مساوات دلیمیټونو دواړه خواوې کله چې $x \to -1$ وکړي، سره مساوي دي او که نه؟

$$\lim_{x\to -1}(x^2 \pm x) = \lim_{x\to -1} x^2 \pm \lim_{x\to -1} x$$

فعالیت

ددې فعالیت د سرته رسولو لپاره لاندې پوښتنو ته ځوابونه پیدا کړئ:

- که x د 2 عدد ته نږدې شي، نو د $f(x) = x + 2$ تابع لیمیټ به څو وي؟
- که $x \to 3$ ته تقرب وکړي، نو د $g(x) = 2x$ تابع لیمیټ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \pm \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \cdot \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \div \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې لیکلای شو:

که $\lim_{x\to a} f(x) = A$ او $\lim_{x\to a} g(x) = B$ وي، نو:

1) $\lim_{x\to a} Kf(x) = K \lim_{x\to a} f(x) = KA$

2) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$

3) $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$

4) $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}\ ,\ \lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$

5) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}\ ,\ \lim_{x\to a} f(x) = A \geq 0$

له پورتنیو خواصو څخه درې خاصیتونه ثبوتوو او پاتې یې د زده‌کوونکو کورنی دنده ده.

بې نهایت کوچنی تابعګانې: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نږدې شي بې نهایت کوچنی بللې کېږي، که چیرې $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- ددې لپاره چې $\lim_{x\to a} f(x)=b$ سره شي، لازم او کافي ده چې د $f(x)$ تابع د یوه ثابت عدد b او یوې بې نهایت کوچني تابع $\varepsilon(x)$ کله چې $x\to a$ د مجموعې په حیث وښودل شي، یعنې:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=b+\varepsilon(x) \\ \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=b$$

2- که چیرې $\varepsilon(x)$ ، $x\to a$ ته نږدې شي، بې نهایت کوچنۍ تابع وي، خو صفر نه وي، نو $\lim_{x\to a}\frac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$

د بې نهایت کوچنۍ تابعګانو مجموعه بیا هم یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

3- د بې نهایت کوچنیو تابعګانو د ضرب حاصل بیا هم یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

4- که چیرې $\varepsilon(x)$ یوه بې نهایت کوچنۍ تابع او $u(x)$ داسې یوه تابع وي چې لېمیټ یې صفر نه وي، نو د $v(x)=\frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ تابع یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

مثال:

I) د $\varepsilon(x)=x^2-9$ تابع کله چې $x\to 3$ ، یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده ځکه چې:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=0$$

II) $\varepsilon(x)=\frac{1}{2x}$ تابع کله چې $x\to\infty$ ته نږدې شي بې نهایت کوچنۍ تابع ده:

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$$

مثالونه: د تېرو خاصیتونو په مرسته لاندې سوالونه حل کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to 2}(2x^2-1)=\lim_{x\to 2}2x^2-\lim_{x\to 2}1=2\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}1=2\cdot 2^2-1=7$$

$$2)\ \lim_{x\to -3}(x-1)^2=\lim_{x\to -3}(x-1)\cdot\lim_{x\to -3}(x-1)=(-4)(-4)=16$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 0}4x-\lim_{x\to 0}3}{\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

د پورتنیو مثالونو له حل څخه د لېمیټ یو خاصیت داسې بیان او ثبوو:

1. د څو تابعګانو د مجموعې لېمیټ د نومړو هرې تابع د لېمیټونو له مجموعې سره مساوي دي، یعنې: که چیرې د $f(x_1), f(x_2)$ تابعګانې وي، نو لرو چې:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)$$

ثبوت: که $\lim_{x\to a}f(x_2)=b_2$ ، $\lim_{x\to a}f(x_1)=b_1$ او ε_1 او ε_2 بې نهایت کوچنۍ تابعګانې وي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1\ \ .....\ I \\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2\ \ .....\ II \end{array}\right\}\Rightarrow f(x_1)\pm f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)\pm(b_2+\varepsilon_2)=b_1\pm b_2+(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې $(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$ د بې نهایت کوچنیو تابعګانو مجموعه او تفاضل ده او د بې نهایت کوچنیو تابعګانو مجموعه او تفاضل بیاهم یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\pm\lim_{x\to a}f(x_2)$$

2. د دوو یا څو تابعګانو د ضرب د حاصل لیمیټ د نومړو تابعګانو د لیمیټونو د ضرب له حاصل سره مساوي دی:

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)=b_1\cdot b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1 \\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2 \end{array}\right\}\Rightarrow f(x_1)\cdot f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)(b_2+\varepsilon_2)$$

$$f(x_1)\cdot f(x_2)=b_1\cdot b_2+b_1\cdot\varepsilon_2+b_2\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$$

څرنګه چې ε_1 او ε_2 ډېر کوچنی عددونه دي، نو د ضرب حاصل یې د b_1 او b_2 سره او همداشان په خپلو کې بې‌نهایت کوچنی کیږي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=b_1\cdot b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)$$

3. د دوو تابعګانو د نسبت لیمیټ د هغو تابعګانو د لیمیټونو له نسبت څخه عبارت دی؛ لکه په لاندې ډول:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}\quad,\quad g(x)=b_2\neq 0$$

ثبوت:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=b_1+\varepsilon_1 \\ g(x)=b_2+\varepsilon_2 \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ تفریق کوو:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2b_1+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_1)}$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}\quad\Rightarrow\quad\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنگه چې ε_1 او ε_2 ډېرې کوچنی مثبت عددونه($0 < \varepsilon < 1$) دي، نو کله چې $x \to a$ وکړي صفر کېږي او په پایله کې په لاس راځي، چې:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{b_1}{b_2}$$

د ساندويچ قضيه: که چيرې د $f(x), g(x)$ او $h(x)$ تابعګانې د هر x لپاره په يوه غير ترلي انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x) \le g(x) \le h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim_{x\to a} f(x) = b = \lim_{x\to a} h(x)$ وي، نو $\lim_{x\to a} g(x) = b$ دی.

مثال: که د $u(x)$ تابع دغه خاصيت($1-\frac{x^2}{4} \le u(x) \le 1+\frac{x^2}{2}$) ولري، نو $\lim_{x\to a} u(x)$ په لاس راوړئ.

حل: ليدل کېږي چې $\lim_{x\to 0}(1+\frac{x^2}{2}) = 1 = \lim_{x\to 0}(1-\frac{x^2}{4})$ نو د ساندويچ د قضيې په پام کې نيولو سره لرو چې:

$$\lim_{x\to 0} u(x) = 1$$

قضيه: که چيرې $f(x)$ او $g(x)$ داسې تابعګانې وي چې $f(x) < g(x)$ نو د لېميټ د شتون په صورت کې يې لمېټ $\lim_{x\to a} g(x) \le \lim_{x\to a} f(x)$ سره دی.

مثال: د $f(x) = \frac{15x-4}{5x+6}$ او $g(x) = \frac{15x+4}{5x-6}$ تابعګانې په پام کې نيسو په واضح ډول معلوميږي چې $f(x) < g(x)$ دی، د $x > 1$ لپاره لرو:

حل:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{15x-4}{5x+6} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{15x+4}{5x-6} = \frac{15}{5} = 3$$

پوښتنې

لاندې لېميټونه د امکان په صورت کې پيدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 0} 6x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ 2) $\lim_{x\to -1} x^7 - 2x - 5$ 3) $\lim_{x\to 0}\frac{(9x+2)^2 - 4}{x}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2+7x}{(2x-5)^2-9}$ 5) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}$ 6) $\lim_{x\to 1}\frac{2x}{x^2-4x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نسبتي تابعګانو لېمیټونه

آیا پوهیږئ چې مخامخ اړیکې په څه نامه یادیږي؟

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

فعالیت

- د $y = x^2 - 1$ تابع لېمیټ هغه وخت پیداکړئ، چې $x \to -2$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ تابع لېمیټ هغه وخت پیداکړئ، چې $x \to 1$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ تابع لېمیټ هغه وخت پیداکړئ، چې $x \to \infty$ ته تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله

- د ځینو تابعګانو لېمیټ مستقیماً د قیمت په وضع کولو سره لاسته راځي.
- د ځینو تابعګانو لېمیټ مبهم شکلونه لري؛ لکه $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ ... چې د ابهام د له منځه وړلو څخه وروسته د تابع لېمیټ لاسته راځي، چې په لاندې ډول یې تر څېړنې لاندې نیسو:

I- د $\frac{0}{0}$ بڼه:

فعالیت

- د $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$ تابع قیمت د $x = -1$ په نقطه کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ تابع لېمیټ کله چې $x \to 1$ وي د ابهام کومه بڼه لري.
- آیا د $f(x)$ تابع په داسې ډول ساده کولای شو چې د $x = 1$ لپاره یو معین قیمت ولري؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چیرې یوه تابع د $\frac{0}{0}$ په شکل مبهمه بڼه ولري، د لېمیټ د پیداکولو لپاره یې لومړی تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو د ابهام عامل(خبیثه فکتور) له منځه وړو او بیا یې د لېمیټ قیمت په لاس راوړو.

مثال: لاندې لېمیټونه پیداکړئ.

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\quad,\quad 2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}\quad,\quad 3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

حل: لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو:

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$

څرنګه چې پاسنې لېمیټونه د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د تجزیې په مرسته یې وروسته له ساده کولو څخه د لېمیټ قیمت په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-12+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$

حل: بیا هم لېمیټ د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل لري:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

$$3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{0}{0}$$

حل: لیدل کېږي چې نوموړی لېمیټ بیا هم د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د لېمیټ د لاسته راوړلو لپاره د کسر صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{8}$$

پوښتنې

$$1)\ \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=?\qquad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=?\qquad 3)\ \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=?$$

$$4)\ \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}=?\qquad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}=?$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

II- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل

آیا د مخامخ تابع لېمیټ ټاکلی شئ؟

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+8}{2x^2-2}$$

فعالیت

- د $f(x)=2x^4+x^3-4x-1$ د تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وڅېړئ.
- د $g(x)=x^3-2x-4$ د تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وڅېړئ.
- د $y=\frac{5}{x-2}$ د تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وڅېړئ.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ د تابع لېمیټ هغه وخت په لاس راوړئ، چې $x\to 0$ وکړي.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ د تابع لېمیټ هغه وخت په لاس راوړئ، چې $x\to\infty$ وکړي.

له پاسنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: هغه توابع چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري د لېمیټ د پیداکولو لپاره یې داسې کړنه کوو:

د تابع صورت او مخرج په هغه متحول، چې تر ټولو لوی توان ولري وېشو، وروسته له ساده کولو څخه یې لېمیټ په لاس راځي.

لومړی مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}$ پیدا کړئ.

حل: لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنگه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج په x^2 باندې وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

دویم مثال: د $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}$ پیداکړئ.

حل:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

خرنگه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

دریم مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ پیداکړئ.

حل:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

خرنگه چې پوښتنه $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

یادونه: هغه تابعگانې چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري، پرته له دې چې عملیه پرې سرته ورسوو کولای شو، په لاندې

ډول د هغوی لیمیټ په لاس راوړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}$ تابع په پام کې ونیسئ که چیرې ($x\to\infty$) کړی وي؛ نو دلته درې حالتونه ممکن دي:

1- د $m=n$ لپاره د نوموړی کسر لیمیټ عبارت دی له $\dfrac{a_0}{b_0}$.

2- د $m<n$ لپاره د نوموړی کسر لیمیټ عبارت له صفر څخه دی.

3- د $m>n$ لپاره د نوموړی کسر لیمیټ عبارت له $\pm\infty$ څخه دی.

څلورم مثال: لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2}{x+1}$

حل:

1- څرنګه چې $m=n$ دی، نو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4}{-x^4}=-6$$

2- څرنګه چې $m<n$ دی، نو د نوموړی تابع لیمیټ صفر دی.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}=0$$

3- څرنګه چې $m>n$ دی، نو د نوموړي تابع لیمیټ مساوي له ∞ سره دی:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\infty$$

یادونه: زده‌کوونکي دې ورکړل شوي ځوابونه په کور کې د عملیې د سرته رسولو څخه وروسته په لاس راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

لاندې لمیتونه پیدا کړئ؟

1) $\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x^2-x}$

2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x+5}$

4) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}$

5) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

III- د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه

د مخامخ لیمیټونو قیمتونو پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}-\frac{x-1}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)\cdot\frac{2x^3-4}{x-3}$$

فعالیت

- د $a+1$ مزدوج ولیکئ.
- د $\sqrt{x}-1$ مزدوج ولیکئ.
- د $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x+1}$ لیمیټ پیدا کړئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د $f(x)=(2x-1)(x+1)$ تابع لیمیټ وټاکئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

د هغو تابعگانو چې د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه ولري، د لیمیټ د پیدا کولو لپاره یې د کسرونو له جمع کولو، ضرب او مزدوج څخه گټه اخلو او هغه داسې ساده کوو، تر څو چې د $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي، وروسته یې لیمیټ په لاس راوړو.

مثال: لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=?$ 2) $\lim_{x\to 1}(x-1)\left(\frac{1}{x^2+2x-3}\right)=?$

حل 1:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=\frac{9}{1-1}-\frac{8\cdot 1+10}{1^2-1}=\frac{9}{0}-\frac{18}{0}=\infty-\infty$$

څرنگه چې نومړی لیمیټ د $(\infty-\infty)$ بڼه لري نو لیکلای شو، چې:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{9x+9-8x-10}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

2) $\lim\limits_{x\to1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=?$

حل2:

$$\lim\limits_{x\to1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=(1-1)(\frac{1}{1^2+2-3})=0\cdot\frac{1}{3-3}=0\cdot\frac{1}{0}=0\cdot\infty$$

لیدل کېږي چې نوموړی لیمیټ د $(0\cdot\infty)$ شکل لري، نو:

$$\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+3)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{4}$$

پوښتني

لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

2) $\lim\limits_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^5-8x^3)$

4) $\lim\limits_{x\to5}\left[(x^2-25)\frac{1}{x-5}\right]$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

د $1^{\infty}, \infty^0, 0^0$ شکلونه

د مخامخ لیمیټ مبهم شکل وټاکئ؟

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = ?$$

فعالیت

- د $y = x^x$ تابع لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x \to 0$ وکړي.
- د $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ لیمیټ بیا په هغه صورت کې وټاکئ چې $x\to\infty$ وکړي.
- د کومې عملیې په مرسته کولای شو چې $1^{\infty}, \infty^0, 0^0$ شکلونه په ضرب بدل شو.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چیرې یوه تابع پورتني مبهم شکلونه ځانته غوره کړي هغه د طبیعي لوګاریتم په مرسته د $0\cdot\infty$ شکل ته د اړولو وړ دي، یعنې:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}(\ln f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]$$

یادونه:

I- که چیرې $n\to\infty$ وکړي د $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ ترادف $e=2.71828182$ عدد ته تقرب کوي.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

چې په لاندې جدول کې ښکاریږي:

n	$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1000	0.001	1.001	2.716923932
10000	0.0001	1.0001	2.718145926
100000	0.00001	1.00001	2.718268237
1000000	0.000001	1.000001	2.718280469
1000000000	10^{-9}	$1+10^{-9}$	2.718281828

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2.718281828$ دی چې ... $e = 2.71$ عدد ته د Euler عدد وايي.

II-

1) $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ 2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} = 1$ 4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

ثبوت: پوهېږو چې څلور واړه پوښتنې د 1^∞ مبهم شکلونه لري.

1) $x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x}\ ,\ \alpha \to 0 \Rightarrow x \to \infty \Rightarrow \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{u}\ ,\ x \to \infty \Rightarrow u \to 0$$

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}} = \lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta}$$

$$x = \frac{1}{u} \to u = \frac{1}{x}\ ,\ u \to 0 \Rightarrow x \to \infty$$

$$\lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta} = \lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})^x\right]^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}$$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]\ ,\ x = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{x}\ ,\ x \to 0 \Rightarrow u \to \infty$$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\left[\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u\right] = \ln e = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$4)\ y=e^x-1 \Rightarrow e^x=1+y \Rightarrow x=\ln(1+y)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}\ ,\ y=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{y}\ ,\ y\to 0 \Rightarrow x\to\infty$$

$$=\frac{1}{\ln\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x}=\frac{1}{\ln e}=\frac{1}{1}=1$$

د 1^∞ مبهم شکل عمومي حالت: که چیرې د اکسپوننشیل تابع لیمیټ یعني $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ د 1^∞ مبهم شکل ځانته غوره کړي په دې حالت کې $\alpha=u-1$ سره تعویضوو، په نتیجه کې:

$$\lim_{x\to a}u^v=\lim_{x\to a}[(1+u-1)]^{\frac{v}{u-1}u-1}=\lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\alpha}\right]=\lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}(v\alpha)}$$

څرنګه چې $\alpha=u-1$ دی که چیرې $u\to 1$ **نو** $\alpha\to 0$ **ته نږدې کېږي په پایله کې:**

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]}=e^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]}=e^P$$

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=e^P\quad,\quad P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

لومړی مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$ لیمیټ قیمت په لاس راوړئ.

حل: لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو معلومېږي چې لیمیټ د 1^∞ مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$u=1+\frac{2}{x}\quad,\quad v=x$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x=e^P\quad,\quad P=\lim_{x\to\infty}\left[x(1+\frac{2}{x}-1)\right]=2$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x=e^P=e^2$$

دویم مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}$ **قیمت محاسبه کړئ.**

حل: **لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو** $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=1^\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځرنګه چې معلومېږي نوموړی لېمیټ د 1^∞ مبهم شکل لري نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^P$$

$$u=1+\frac{1}{x}\quad,\quad v=\frac{x-5}{2}$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(1+\frac{1}{x}-1)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(\frac{1}{x})\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^P=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

دریم مثال: $\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل: د تېر په شان بیاهم لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو، $\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=1^\infty$

ځرنګه چې معلومېږي لېمیټ د 1^∞ مبهم شکل لري د فورمول په مرسته یې محاسبه کوو:

$$u=\cos x\quad,\quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^P$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}(\cos x-1)\right]=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$

$$\frac{\cos^2 x+\cos x-\cos x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x}{x(\cos x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=-1\cdot0=0$$

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^P=e^0=1$$

پوښتنې

لاندې لېمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+2}$

2) $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\ln x}$

3) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{x+2}$

4) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$

5) $\lim_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$

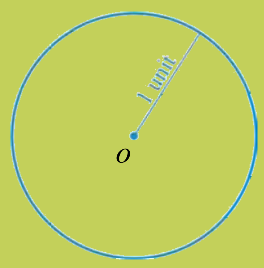
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي تابعګانو لیمیټ

Trigonometric functions limits

که د یوې دایرې شعاع یو واحد (1unit) وي، نوموړې دایرې ته څه ډول دایره وایي.



فعالیت

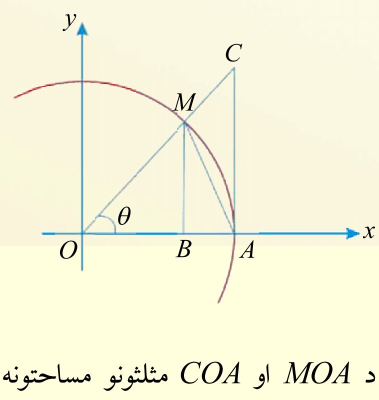
- دوضعیه کمیاتو په سیستم کې د $C(o,r)$ په مثلثاتي دایره کې د θ مرکزي زاویه رسم کړئ.
- د C له بهرني ټکي څخه په دایره باندې د ox پر محور د $\overline{CA}$ مماس او $\overline{MB}$ عمود رسم کړئ.
- د C ټکی د دایرې له مرکز سره وصل کړئ.
- د مرکزي زاویې د مقابل قوس د اندازه کولو واحد په ګوته کړئ.

له پورتني فعالیت څخه قضیه داسې بیان او ثبوتوو:

قضیه: د یوې زاویې د ساین او د هغې زاویې د نسبت لیمټ مساوي په (1) دي، کله چې زاویه صفر ته تقرب وکړي.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

ثبوت: په لاندې شکل کې د MOA او COA د مثلثونو او OMA د قطاع مساحتونه په لاس راوړو:



$$\text{مثلث مساحت } MOA \text{ د} = \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{BM}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{BM}=\frac{\overline{BM}}{2}\cdot r$$

$$\text{قطاع مساحت } O\overset{\frown}{A}M \text{ د} = \frac{1}{2}\theta r^2$$

د θ د زاویې پراخوالی باید په رادیان لاسته راوړو.

$$\text{مساحت } C\overset{\Delta}{O}A \text{ د} = \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{AC}=\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$

د MOA او COA مثلثونو مساحتونه د OMA د قطاع له مساحت سره پرتله کوو:

$$\frac{1}{2}r\,\overline{BM}<\frac{1}{2}\theta r^2<\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$

د نامساواتو دواړه خواوې په $\frac{2}{r^2}$ کې ضربوو:

$$\frac{\overline{BM}}{r}<\theta<\frac{\overline{AC}}{r} \Rightarrow \sin\theta<\theta<\tan\theta \Rightarrow 1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1 \Rightarrow \lim_{\theta\to0}\cos\theta\le\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}\le\lim_{\theta\to0}1$$

د ساندوېچ د قضيې پر بنسټ معلومېږي چې $\lim_{\theta\to0}\cos\theta=1$ او همدارنګه $\lim_{\theta\to0}1=1$ دی، نو $\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ دی.

پوهېږو چې د هرې زاويې ساين د (1) او (-1) د عددونو تر منځ تحول کوي:

$$-1\le\sin\theta\le1$$

$$-\frac{1}{\theta}\le\frac{\sin\theta}{\theta}\le\frac{1}{\theta}$$

$$-\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}\le\lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}\le\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}$$

د ساندوېچ د قضيې پر اساس ليکلای شو چې:

$$\left.\begin{aligned}-\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}=0\\ \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}=0$$

په پايله کې ويلای شو چې د يوې زاويې ساين او د هغې زاويې د نسبت لېميټ مساوي په صفر دی هغه وخت چې زاويه بې‌نهايت ته نږدې شي.

لومړی مثال: $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}$ پيدا کړئ.

حل: که $2x=\alpha$ نو $x=\frac{\alpha}{2}$ کېږي، څرنګه چې $x\to0$ کړی دی، نو $\alpha\to0$ کوي، نو ليکلای شو:

$$\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}}=2\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 2\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=2\cdot1=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}$ حل کړئ.

حل:

$$\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{5\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}=\frac{5\cdot 2x\frac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10\frac{\sin 2x}{2x}}{7\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{10}{7}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

دریم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$ حل کړئ.

حل: پوهیږو چې $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ سره دی، نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=2\cdot 1\cdot 0=0$$

څلورم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$ پیدا کړئ:

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x\frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3x}{5x}\frac{\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\frac{\frac{1}{1}}{1}=\frac{3}{5}$$

پنځم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$ په لاس راوړئ.

حل: پوهیږو چې $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $y = 5x$ سره وي، او $x \to 0$ نو $y \to 0$ کوي، نو:

$$= 10\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 10\cdot 1\cdot 1 = 10$$

پوښتني

لاندې لیمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}$ 2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$ 3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x}$ 5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$ 6) $\lim_{x\to 0}\sin 5x\cos 3x$

7) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}$ 8) $\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$ 9) $\lim_{x\to 1}(\cos^2 x + \sin^2 x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابعګانو متمادیت

Continuity of functions

شکلونو ته پام وکړئ.

لومړی او دویم پلونه څه توپیر لري، خپل نظر بیان کړئ.

د تابعګانو ګرافونه مختلف شکلونه لري، چې ځینې یې په یوه قلم پرته له دې چې د قلم څوکه له کاغذ څخه پورته شي رسمېږي، متصلې یا متمادي تابعګانې بلل کېږي او ځینې یې په یوه قلم نه شي رسمېدلای یعنې د رسم په وخت کې باید د قلم څوکه یو ځل یا څو ځلې د کاغذ څخه پورته شي، ځکه په یوه برخه کې یې ګراف غوڅ وي، دغه ډول تابعګانې په نوموړې ټکي کې غیر متصلې یا غیر متمادي تابعګانې بلل کېږي.

فعالیت

- د $f(x) = x^2 + 4x$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)$ د تابع لیمیټ د $x = 1$ په نقطه کې پیدا کړئ.
- د $f(x)$ د تابع قیمت د $x = 1$ په نقطه کې پیدا او وروسته داوړه اړیکې سره پرتله کړئ.

له پاسنې فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د $y = f(x)$ تابع د $x = a$ په ټکي کې متمادي بلله کېږي، چې لاندې شرطونه په کې صدق وکړي.

1- د $f(x)$ تابع د a په ټکي کې تعریف شوې وي.

2- راکړل شوې تابع د a په ټکي کې لیمیټ ولري.

3- د $f(a)$ قیمت باید د $f(x)$ له لیمیټ سره مساوي وي: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

لومړی مثال: وښيئ چې د $f(x)=x^2+2x-1$ تابع د $x_0=2$ په ټکي کې متمادي ده.

حل: څرنګه چې د تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي، نو د متماديت له شرطونو څخه ليکلای شو:

1) $2 \in Dom\ f(x) = IR$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ \lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-1)=4+4-1=7 \\ 3)\ f(2)=2^2+4-1=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=7$$

څرنګه چې د متماديت درې واړه شرطونه په کې حقيقت لري، بناءً تابع متمادي ده.

دويم مثال: د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ د تابع متماديت د $x_0=-1$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع د تعريف ساحه عبارت ده؛ له: $IR\setminus\{-1\}$

او $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{-3}{0}=\infty$ سره دی.

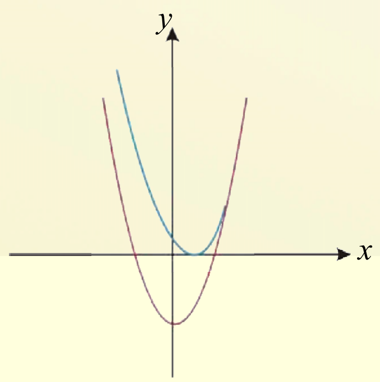
څرنګه چې ليدل کيږي -1 د تابع د تعريف په ساحه کې شامل نه دی، بناءً نوموړی تابع د -1 په ټکي کې متمادي نه ده.

دريیم مثال: د $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1\ ;\ x<2 \\ x^2-3\ \ \ \ \ \ \ ;\ x\geq 2 \end{cases}$ د تابع متماديت د $x=2$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د ښي او کيڼي خوا لېمتونه څېړو:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-3)=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-2x+1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x) \quad \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

په پايله کې ويلای شو چې تابع په نوموړي ټکي کې متمادي ده، لکه چې په شکل کې ليدل کيږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: که $f(x)=\begin{cases}2x+1 \; ; \; x\geq 1\\ 1-x \; ; \; x<1\end{cases}$ وي، نو د $x=1$ په ټکي کې د تابع متمادیت وڅېړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1-x=0\\ f(1)=0\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x+1=3\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

نو تابع په $x=1$ کې غیر متمادي ده.

پایله: که چیرې د $g(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې $f(x)$ په $x=g(a)$ کې متمادي وي، نو $f(g(x))$ په $x=a$ کې هم متمادي ده، یعنې:

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(g(a))$$

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\alpha}=(\lim\limits_{x\to a} f(x))^{\alpha} \quad , \quad \alpha\in IR$

2) $\lim\limits_{x\to a} a^{f(x)}=a^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

3) $\lim\limits_{x\to a}\log_a f(x)=\log_a(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

4) $\lim\limits_{x\to a}\sin f(x)=\sin(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

پنځم مثال: که $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ وي او $x\neq -3$ وي.

آیا د $f(x)$ تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي ده؟

حل: څرنګه چې تابع د $x=-3$ په نقطه کې نه ده تعریف شوې یا په بل عبارت د -3 عدد د تابع د تعریف په ساحه کې نه دی شامل، نوله دې امله تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي نه ده.

غیر متمادیت: که چیرې د $f(x)$ تابع په $x=a$ کې یو له لاندې درې شرطونو څخه و نه لري وایو چې f په a کې غیر متمادي ده او a یې د انفصال ټکی دی. انفصال په درې ډوله دی.

لومړی ډول: د f تابع د a په ټکي کې د ښي او کیڼ لوري لیمیټونه ولري خو مساوي نه وي.

دویم ډول: کم تر کمه یو له دوو لیمیټونو(د ښي او کیڼ لوري لیمیټونه) څخه موجود نه وي.

دریم ډول: که چیرې تابع د a په ټکي کې لیمیټ ولري خو a د f د تعریف په ساحه کې شامل نه وي.(یوازې یو خالي ټکی وي.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

په ورکړ شویو ټکو کې د تابع متمادیت وڅیړئ.

a) $f(x)=x^2+5(x-2)^7 \quad ; \quad x=3$

b) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5)} \quad ; \quad x=-1$

c) $h(x)=\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \quad ; \quad x=-2$

d) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^3} \quad ; \quad x=3$

e) $f(x)=|x-3| \quad ; \quad x=3$

f) $g(x)=\dfrac{|x|}{x} \quad ; \quad x=0$

g) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+x}{x} & ; \quad x\neq 0 \\ 3 & ; \quad x=2 \end{cases}$

h) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3} \quad ; \quad x=2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادي تابعگانو خاصيتونه

د مخامخ مساواتو په اړه سوچ وکړئ چې حقيقت لري او که نه؟

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \quad , \; g(x) \neq 0$$

فعاليت

- که $f(x) = x^2 - 1$ وي د تابع متماديت وڅېړئ.
- که $g(x) = x + 3$ وي د تابع متماديت وڅېړئ.
- د $f(x) + g(x)$ د تابعگانو متماديت وڅېړئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

پايله: که د $f(x)$ او $g(x)$ تابعگانې د $x = c$ په ټکي کې متمادي وي، نو له لاندې تابعگانو څخه يې هره يوه په $x = c$ يا يوه انټروال کې متمادي ده.

1- د تابعگانو جمع $f(x) + g(x)$

2- د تابعگانو تفريق $f(x) - g(x)$

3- د تابعگانو ضرب $f(x) \cdot g(x)$

4- د تابعگانو تقسيم $\dfrac{f(x)}{g(x)} \; ; \; g(x) \neq 0$

لومړی بېلگه: **که** $f(x) = x^2 + 3$ **او** $g(x) = x^2 + 3x - 2$ **وي، نو:**

1- f او g د $x = 1$ په ټکي کې متمادي دي او که نه؟

2- وڅېړئ، چې:

الف) $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ د $x = 1$ په نقطه کې متمادي ده او که غیر متمادي.

حل:لومړی هره یوه تابع بېلابېله څېړو چې متمادي ده که نه؟

1) $Df(x) = IR$

2) $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(x^2 + 3) = 4$

3) $f(1) = (1^2 + 3) = 4$

نو د f **تابع** د $x = 1$ په نقطه کې متمادي ده.

1) $D g(x) = IR$

2) $\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1}(x^2 + 3x - 2) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 2$

3) $g(1) = (1^2 + 3 \cdot 1 - 2) = 2$

په همدې شان د g تابع د $x = 1$ په ټکي کې هم متمادي ده.

2- اوس د تابعګانو د جمعې او ضرب د حاصل متمادیت څیړو:

الف)

$f(x) + g(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$

1) $D(f(x) + g(x)) = IR$

2) $\lim_{x \to 1}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to 1}(2x^2 + 3x + 1) = 6$

3) $f(1) + g(1) = (1 + 3 + 1 + 3 - 2) = 6$

$\lim_{x \to 1}[f(x) + g(x)] = f(1) + g(1) = 6$

$(f + g)(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$

1) $D[(f + g)(x)] = IR$

2) $\lim_{x \to 1}[(f + g)(x)] = \lim_{x \to 1}[2x^2 + 3x + 1] = 6$

3) $(f + g)(1) = (2x^2 + 3x + 1)(1) = 6$

$\lim_{x \to 1}[(f + g)(x)] = (f + g)(1) = 6$

په پایله کې د متمادي تابعګانو د جمعې حاصل د $x = 1$ په نقطه کې متمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب)

$$f(x)\cdot g(x)=(x^2+3)(x^2+3x-2)=x^4+3x^3+x^2+9x-6$$

1) $D(f\cdot g)(x)=IR$

2) $(f\cdot g)_{(1)}=1^4+3\cdot 1^3+1^2+9\cdot 1-6=8$

3) $\lim\limits_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=8$

$\lim\limits_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=(f\cdot g)(1)=8$

په پایله کې د متمادي تابعګانو د ضرب حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

دویمه بېلګه: که $g(x)=3x-2$ او $f(x)=x+1$ وي، وښېرئ، چې آیا $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په نقطه کې متمادي ده؟

حل:

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$

3) $f(2)=x+1=3$

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)=3$

1) $Dg(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=3x-2=3\cdot 2-2=4$

3) $g(2)=3x-2=3\cdot 2-2=4$

$\lim\limits_{x\to 2}g(x)=g(2)=4$

$$f(x)\cdot g(x)=(x+1)(3x-2)=3x^2-2x+3x-2=3x^2+x-2$$

$D(f\cdot g)(x)=IR$

$\lim\limits_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)]=3(4)+2-2=12$

$(f\cdot g)(2)=3(4)+2-2=12$

$\lim\limits_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)]=(f\cdot g)(2)=12$

په پایله کې لاس ته راځي چې $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په ټکي کې متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- وښيئ چې لاندې تابعگانې په ورکړ شويو نقطو کې متمادي دي او که نه؟

1) $f(x)=x^3-2(x+1)^5 \quad ; \quad x=2$

2) $g(x)=\dfrac{x^2+3}{(x^2-x+5)(x^2+2x)} \quad ; \quad x=-1$

3) $h(x)=\dfrac{x\sqrt{x}+1}{(x+2)^3} \quad ; \quad x=4$

2- تشريح کړئ، چې ولې د $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ تابع په $x=0$ کې غيرمتمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متحول تقرب: ویل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x پـه اختیـاري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، یعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچنی دی یا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to a} x = a \quad \text{یا} \quad x \to a \quad \text{یا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چیرې د x د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي پـه داسې حال کې چې په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدې شي.

$$x : a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \dots \to a^+$$

له کیڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چیرې د x د قیمتونو یو متزاید تـرادف موجـود وي پـه داسې حال کې چې x په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدې شي.

$$x : a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \dots \to a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ یعنې:

$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې شامل وي کیدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوی. که چیرې د x متحول د a عدد ته نږدې شـي نـو د $f(x)$ تـابع د l عـدد تـه نږدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ د تابع لیمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد تـه تقرب وکړي نو داسې یې لیکو: $\lim_{x \to a} f(x) = l$ یا $\begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$

د لیمیـــټ ځانګړتیـــاوې: کـــه f او g دوې تابعګـــانې وي، C,L او M حقیقـــي عددونـــه وي داسـې چې $\lim_{x \to c} f(x) = L$ او $\lim_{x \to c} g(x) = M$ ، نو لاندې رابطې لیکلای شو:

1) $\lim_{x \to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = L+M$

2) $\lim_{x \to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x) = L-M$

3) $\lim_{x \to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x) = L \cdot M$

4) $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}\ ,\quad M \neq 0\ ,\quad g(x) \neq 0$

5) $\lim_{x \to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to c} f(x)} = \sqrt{L}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بې نهايت کوچنی تابعګانې: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نږدې شي بې نهايت کوچنی بللې کېږي، کـه چيرې $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ وي.

د ساندوېچ قضيه: که چيرې د $g(x), f(x)$ او $h(x)$ تابعګانې د هر x لپاره په يوه غير تړلي انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim_{x\to a} f(x) = b = \lim_{x\to a} h(x)$ وي، نو $\lim_{x\to a} g(x) = b$ دی.

- که چېرې يوه تابع د $\frac{0}{0}$ بڼه ولري، د لېميټ د پيداکولو لپاره يې لومړی تابع د تجزيې په مرسته ساده کوو او بيا يې لېميټ په لاس راوړو.
- $f(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n}$ د تابع د لېميټ د پيداکولو لپاره چې $x \to \infty$ وکړي، عبارت دی له:

  1. د $m = n$ لپاره د نوموړي کسر ليميټ عبارت دی له $\frac{a_0}{b_0}$
  2. د $m < n$ لپاره د نوموړي کسر ليميټ عبارت له صفر څخه دی.
  3. د $m > n$ لپاره د نوموړي کسر ليميټ عبارت دی له $\pm\infty$
- د هغو تابعګانو چې $(\infty - \infty)$ او $(0 \cdot \infty)$ بڼه ولري د لېميټ د پيداکولو لپاره يې د کسرونو د جمعې، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو، تر څو د $\frac{0}{0}$ يا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي چې وروسته يې لېميټ په لاس راوړو.
- هغـــــه تابعګــــــانې چــــــې د 1^∞ مـــــبهم شـــــکلونه لـــــري لـــــه دې فورمـــــول څخه $P = \lim_{x\to a}[v(u-1)]$ ، $\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} \overset{1^\infty}{=} e^P$ يې د لېميټ د پيداکولو لپاره کار اخلو.
- لاندې رابطه کله چې $\theta \to 0$ وکړي همېشه سمه ده.

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

- د $y = f(x)$ تابع د $x = a$ په ټکی کې متمادي بلل کېږي، کله چې:
  1. a د $f(x)$ د تابع په دومين کې شامل وي.
  2. راکړل شوی تابع د a په نقطه کې لېميټ ولري.
  3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي سم ځواب په نښهٔ کړئ.

1- $\lim_{x\to 0} \frac{3x-\sin x}{x}$

a) 2 b) -2 c) 1 d) 3

2- $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$

a) $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) 1

3- $\lim_{x\to 1.4} (2x+0.3)$

a) 1 b) 3 c) 0 d) هیڅ یو

4- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x}$

a) 1 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

5- $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

a) $2+\sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

6- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

7- لاندې لیمیتونه پیداکړئ.

1) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x+5}{2x^2+1}$

2) $\lim_{x\to -1} \sqrt{3+x}$

3) $\lim_{x\to +\infty} \frac{6}{x^2-7}$

4) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

5) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2-2}{x+1}$

6) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3+5x-18}{x^2+3x-10}$

7) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x-4}{x-\sqrt{3x-2}}$

8) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}$

9) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x}$

10) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x\cos x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

11) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}$

12) $\lim_{x\to -2}\left(\frac{x+3}{x+2}+\frac{2}{x^2+2x}\right)$

13) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)+\sin(a-x)}{\tan(a+x)+\tan(a-x)}$

14) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+2}$

15) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-\tan x}{x^2\sin x}$

16) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x+\sin^2 x}{a x^2}$

17) $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\sin x+\sin^2 x}{x^2}$

18) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

19) $\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 3x\sin 2x}{x\tan 3x}$

20) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}$

21) $\lim_{u\to 0}\frac{\sin 3(\pi+u)}{\sin 8(\pi+u)}$

22) $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin \pi x}$

23) $\lim_{x\to \infty}\frac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}$

24) $\lim_{x\to \infty}\frac{8x+4}{4x+\sqrt{x}}$

25) $\lim_{x\to 2}\frac{9x^2-x+5}{\sqrt{9x^4+1}}$

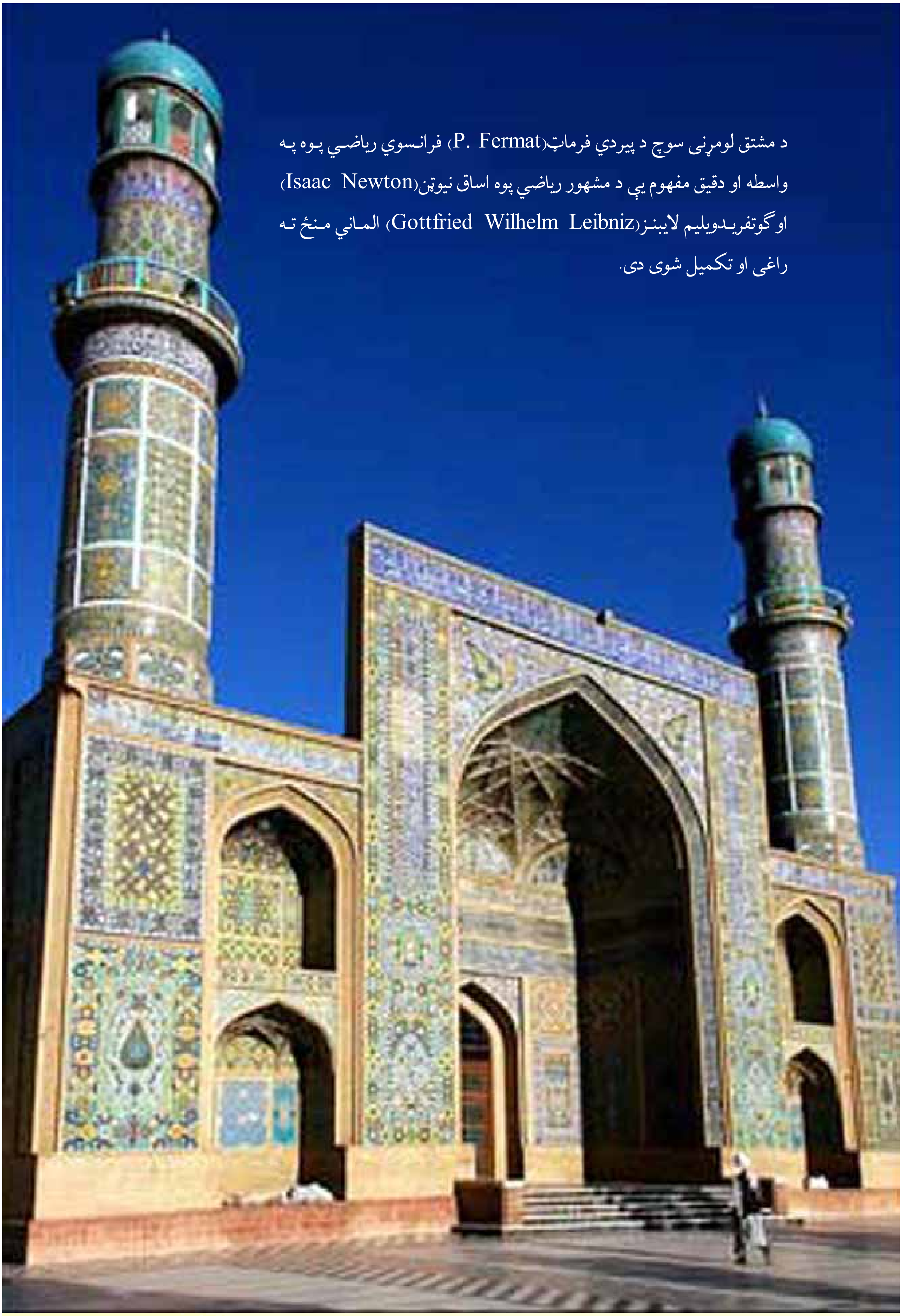
26) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم څپرکی

مشتق



د مشتق لومړنی سوچ د پیردي فرماټ(P. Fermat) فرانسوي رياضـي پـوه پـه واسطه او دقيق مفهوم يې د مشهور رياضي پوه اساق نيوټن(Isaac Newton) او ګوتفریدویلیم لايبنز(Gottfried Wilhelm Leibniz) الماني منځ ته راغی او تکميل شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتقات

Derivatives

د $f(x) = x^2 - 1$ تابع په پام کې ونیسئ د مخامخ کسر لیمیټ پیدا کړئ.

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = ?$$

د یوه منحني میل

- که د یوه مستقیم خط دوه ټکي $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ معلوم وي، نو د دې مستقیم خط میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي.
- آیا د یوه مستقیم خط میل ثابت او مساوي دي؟ که په یوه ځانګړې ټکي پورې اړه لري؟
- آیا د مستقیم خط میل د هغې زاویې سره اړه لري، چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت لوري سره جوړوي؟
- آیا د مستقیم خط او منحني میلونه یو شان پیداکیږي؟

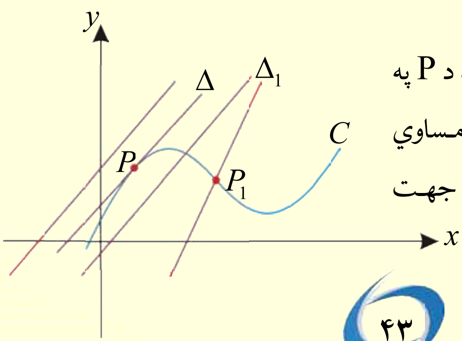
له پورتنیو پوښتنو څخه څرګندیږي چې د منحني میل په اسانی سره نشو پیداکولای ځکه چې منحني خط په هر ټکي کې خپل مسیر ته بدلون ورکوي او په مختلفو ټکوکې بېلابېل میلونه لري، نو له دې کبله لومړی د یوه منحني خط میل د هغه په یوه ټکي کې تعریفوو او بیا یې د محاسبې لپاره یو فورمول په لاس راوړو.

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د c منحني خط رسم او د P او P_1 دوه ټکي پرې وټاکئ.
- د P_1 په ټکي کې د Δ_1 قاطع او د p په ټکي کې د Δ مماس رسم کړئ.
- که د P_1 ټکی د C په منحني باندې داسې حرکت وکړي، چې د p ټکی ته نږدې شي، په پایله کې د Δ_1 مستقیم خط له Δ مستقیم خط سره څه اړیکه پیداکوي؟

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

د Δ د مستقیم خط میل چې د C له منحني سره د P په نقطه کې مماس دی د هغې زاویې له (tan) سره مساوي دی چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي.

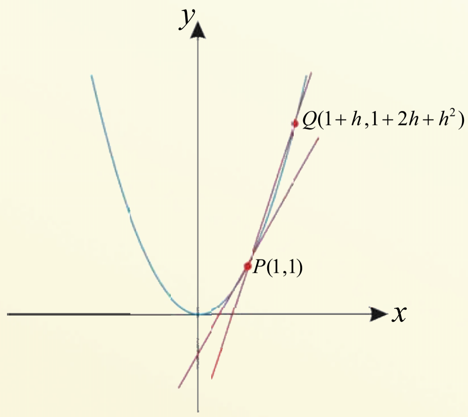


(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $y = f(x) = x^2$ د منحني سره د مماس میل د $P(1,1)$ په ټکي کې پیداکړئ.

حل: څرنګه چې د منحني میل د مماس له میل سره د P په ټکي کې برابر دي، نو ددې مماس میل له هغې فورمول څخه چې دوې نقطې یې معلومې وي، نشو پیدا کولای، ځکه دلته یوازې د یوې نقطې مختصات ورکړل شوي دي. ولې کولای شو د دې مماس د میل تخمیني قیمت د هغه قاطع خط له میل څخه چې د P او Q له ټکو څخه تیریږي، پیدا کړو، په هغه صورت کې چې د Q ټکي د P ټکي ته نږدې شي د PQ د مماس میل 2 ته تقرب کوي چې په لاندې جدول کې لیدل کیږي:

x	2	1.5	1.1	1.01	1.001
y	4	2.25	1.21	1.0201	1.002001
$m_{\overline{PQ}}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	3	2.5	2.1	2.01	2.001



په عمومي ډول هغه لومړی مختصه چې د $P(1,1)$ ټکي ته نږدې ده په $1+h$ ښودلای شو، چې h یو کوچنی مثبت یا منفي عدد دی، خو $h \neq 0$ دی نو لیکلای شو:

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1+2h+h^2$$

نو دا $(1+h\ ,\ 1+2h+h^2)$ ټکی د منحني پر مخ راکړل شوی پروت دی، نو په پایله کې هغه مستقم خط چې له $P(1,1)$ او $Q(1+h,1+2h+h^2)$ له ټکو څخه تیریږي، میل یې عبارت دی له:

$$m_{PQ}\frac{(1+2h+h^2)-1}{(1+h)-1} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

که چیرې په شکل کې $h \to 0$ نو $Q \to P$ کوي، قاطع خط د $P(1,1)$ په نقطه کې مماس کیږي چې د همدې مماس میل ته د تابع مشتق وایي؛ یعني: $\overline{PQ} = \lim\limits_{h\to 0}(2+h) = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لېميټ دا عمليه موږ ته دا امکان پـه لاس راکـوي چې د $y = x^2$ د تـابع د منحنـي ميـل پـه يـوه اختيـاري ټکـي $P(x, y)$ کې په لاس راوړو. که د Q د ټکي اختياري مختصات $\left[x+h, (x+h)^2\right]$ وي کـه د PQ ميـل تـه m او د P په ټکي کې د مماس ميل په m_T سره وښيو لرو، چې:

$$m = \frac{(x+h)^2 - x^2}{x+h-x} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

$$m_T = \lim_{h \to 0}(2x+h) = 2x$$

نو په عمومي بڼه ليکلای شو، که چېرې $Q[x+h\ , f(x+h)],\ P[x, f(x)]$ د نوموړي منحني دوې اختياري نقطې وي، نو لاندې خارج قسمت چې د Newton د رابطې په نامه مشهور دی، ليکلای شو:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

په حقيقت کې دا د هغه مستقيم خط ميل دی چې د P او Q له ټکو څخه تېرېږي.

او د منحني ميل د هغې په هر اختياري ټکي کې عبارت دی له:

$$m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

دويم مثال: د $f(x) = x - x^2$ د منحني سره د مماس ميل د $P(2,0)$ په ټکي کې پيدا کړئ.

حل: د Newton خارج قسمت تشکيل او د $x = 2$ په ټکي کې د منحني ميل حسابوو:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h) - (2+h)^2 - 2 + 2^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 + h - 4 - 4h - h^2 - 2 + 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h - 4h - h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(1 - 4 - h)}{h} = \lim_{h \to 0}(-3 - h) = -3$$

منځنی يا وسطي تعبير

که يو جسم د يوه مستقيم خط پر مخ د حرکت په حال کې وي، طبيعي ده چې وهل شـوی فاصـله د زمـان تـابع ده يعني $S = f(t)$ د t_1 او t_2 دوو وختونو خارج قسمت $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ د جسم د وسطي سرعت پـه نامـه يـادېږي او سرعت د t_0 پـه وخـت کې عبـارت لـه هغـه حـد يـا ليميـت څخـه دی چې لحظوي سرعت بلـل کيږي. $\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنۍ رابطې لېمیټ د t او t_0 په وخت کې داسې لیکو:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{S-S_0}{t-t_0}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

په پایله کې ویلای شو چې د تابع او متحول د زیاتوالی خارج قسمت ته متوسط تغییر وایي، یعنې:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(s_2)-f(s_1)}{t_2-t_1}$$

مثال: د $y=f(x)=x^2$ په تابع کې د f متوسط تغیرات د $[2,5]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $x_1=2$ او $x_2=5$ دی، نو د تعریف په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{5^2-2^2}{5-2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{25-4}{5-2}=\frac{21}{3}=7$$

پوښتنې

1) د لاندې تابعګانو د x د متحول لپاره د یو Δx او Δy تزاید په پام کې نیولو سره $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او میل یې په غوښتل شوو ټکو کې پیدا کړئ.

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=2x^2-4$, (0)

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=2x-x^2$, (3)

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=3x^2-5x+4$, $(2,-1)$

2) د $f(t)=5t^3-3t+1$ د تابع متوسط تغییرات د $[2,4]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

د يوې تابع مشتق

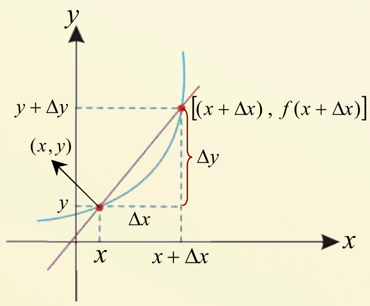
مخامخ لېميټ څه را ښيي آيا په بل ډول يې ليکلای شو؟

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

- که چیرې د $y=f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي، که د x متحول د Δx په اندازه زیاتوالی پیدا کړئ آیا تابع تزاید کوي په دې حالت کې، د متحول او تابع د زیاتوالي رابطه ولیکئ.
- د تابع تزاید د متحول پر تزاید $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$ داسې ولیکئ چې په مساوات کې بدلون رانشي.
- که له دواړو خواوو څخه لیمیټ ونیول شي، په هغه صورت کې چې Δx صفر ته تقرب وکړي، د دې حد یا لیمیټ د څه په نامه یادیږي؟

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

$$y=f(x)$$
$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-y$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\quad / \quad \div\Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$



تعریف: د تابع او د متحول د بدلون د لیمیټ نسبت ته کله چې د متحول تزاید صفر ته تقرب وکړي د تابع مشتق بلل کیږي؛ لکه: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او هغه په $f'(x)$ یا y' ، $\frac{df}{dx}$ ، $\frac{dy}{dx}$ ښودل کیږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=y'=f'(x)$$

لومړی مثال: که $f(x)=2x$ وي، د دې تابع مشتق پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مشتق د تعریف څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو، چې:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}\Rightarrow f'(x)=2$$

دویم مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2)}{\Delta x}=3x^2+3x(0)+0^2\quad\Rightarrow\quad f'(x)=3x^2$$

دریم مثال: د $x\geq 0$ ، $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق پیداکړئ.

حل: مخکې له حل څخه $x\geq 0$ حالت په پام کې نیسو:

الف: که $x>0$ وي؛ نو د مشتق د تعریف په مرسته لیکو:

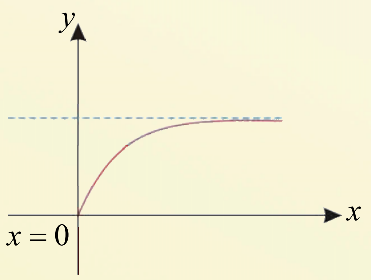
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\quad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ب: که $x=0$ شي نو $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$ موجود نه دی، نو د $y=\sqrt{x}$ تابع د $x=0$ په ټکي کې د اشتقاق وړ نه وي لکه چې په شکل کې لیدل کېږي؛ یعنې که x ډېر لوی شي، نو د مماس میل صفر ته نږدې کېږي او د $x=0$ په ټکي کې د مماس میل ډېر لوییږي، $(\frac{1}{2\sqrt{x}})$ چې مماس په یوه عمود خط بدلیږي.



پوښتنې

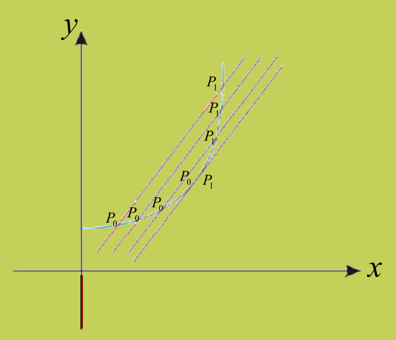
دلاندې توابعو مشتق د تعریف په مرسته پیداکړئ.

1) $f(x)=x-x^2$ 2) $f(x)=-2x^2$ 3) $f(x)=2x^2+x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

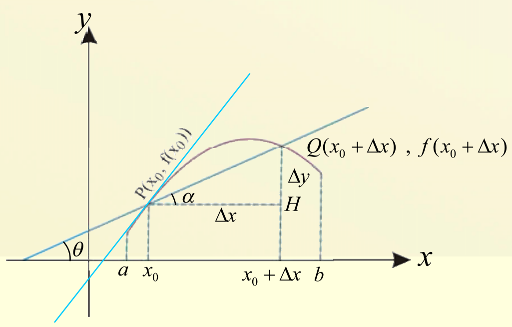
د مشتق هندسي تعبير

په مخامخ شکل کې څه وينئ د هغه پـه اړه مناقشه وکړئ.



فعالیت

- د وضعيه کمياتو په مستوي کې د C منحني يا د $f(x)$ تابع داسې چې د $[a,b]$ متمادي وي ګراف رسم او د $P(x_0, f(x_0))$ او $Q(x_0+\Delta x\ ,\ f(x_0+\Delta x))$ ټکي د منحني پرمخ وټاکئ.
- د Δ مستقيم خط داسې رسم کړئ، چې د منحني د P او Q له ټکو څخه تېر شي.
- آيا ويلای شئ چې د Δ مستقيم خط د x د محور له مثبت جهت سره څه ډول زاويه جوړوي؟
- ووايئ چې د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ يا $\frac{HQ}{HP}$ نسبت د څه په نامه يادېږي؟
- که د Q ټکی د P ټکي ته ډېر نږدې شي $(\Delta x \to 0)$، نو د Δ مستقيم خط په څه ډول کرښه بدلېږي په شکل کې يې وښيئ.
- لېميټ د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ کله چې $\Delta x \to 0$ وکړي، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې وخيږئ.



د پورتنی فعالیت پايله داسې بيانوو:

د $f(x)$ منحني د تابع مشتق، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له ميل سره برابر دی؛ يعني:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan\alpha = \tan\theta = m_{\Delta}$$

تعريف: د مماس ميل د منحني د تماس په ټکي کې د تابع د مشتق څخه په هغه ټکي کې عبارت دی، يا پـه بل عبارت د هغې زاويې د ټانجنټ څخه عبارت دی چې د Δ مستقيم خط يې د x د محور لـه مثبت جهت سره جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د هغه مماس میل او معادله چې د $f(x)=2x^3-1$ په منحني د $A(1,1)$ په ټکي کې رسمېږي پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $m=\tan\alpha=f'(x)$ دی، نو لیکلای شو؛ چې:

$$f(x)=2x^3-1$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)^3-1-(2x^3-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2[x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+(\Delta x)^3]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-1-2x^3+1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x[6x^2+6x\Delta x+2(\Delta x)^2]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[6x^2+6x(\Delta x)+(\Delta x)^2]=6x^2$$

بناءً د مماس د میل قیمت د $A(1,1)$ په ټکي کې مساوي دی په: $m=f'(x)=f'(1)=6x^2=6\cdot 1^2=6$

نو د مماس معادله په لاندې ډول ده:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-1=6(x-1)\Rightarrow\ y=6x-5$$

دویم مثال: د $y=x^2+1$ د تابع د مماسل میل قیمت د $x_0=2$ په ټکي کې په لاس راوړئ.

حل:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2+1-(x_0^2+1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2(\Delta x)x_0+(\Delta x)^2+1-x_0^2-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+(\Delta x))=2x_0$$

$$m=y'=2x_0=2\cdot 2$$

$$y'=m=4$$

دریم مثال: د $y=f(x)=x^2$ تابع ورکړل شوې ده، غواړو د $x=x_0$ په ټکي او په ځانګړي توګه د $x_0=2$ په ټکي کې د تابع مشتق پیدا کړو:

$$x=x_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$$

اوس د حد د لاس ته راوړلو له لارې لیکلای شو:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنگه چې $x_0 = 2$ دی، نو $f'(2) = 2\cdot 2 = 4$ يعنې د $x_0 = 2$ په ټکي کې د $y = f(x) = x^2$ د تابع لومړی مشتق له 4 سره برابر دی. دا په دې معنی چې د مستقیم خط میل د $x_0 = 2$ په ټکي کې 4 دی.

څلورم مثال: د $f(x) = x^3$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0^{\,3}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^{\,3} + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^{\,3}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2$$

نو $f(x)$ د تابع مشتق د x_0 په ټکي کې برابر دي له: $f'(x_0) = 3x_0^2$

پنځم مثال: د x_0 په ټکي کې د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

$$f(x_0) + \Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x} - f(x_0)$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}$$

$$\Delta y = \frac{x_0 - (x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx وېشو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x_0(x_0+\Delta x)} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$f'(x_0) = \frac{-1}{x_0(x_0+0)} = \frac{-1}{x_0^2}$$

نو $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ د x_0 په ټکي کې د $f(x)$ مشتق دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق تابع يې $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$

پوښتنې

1. په لاندې پوښتنو کې د تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = 5x^2 - 2$ 2) $f(x) = \frac{2}{x}$

2. په ورکړل شویو ټکو کې د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = 4x^2 \quad , \quad x_0 = \frac{1}{2}$ 2) $f(x) = 3x - 1 \quad , \quad x_0 = -1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق قوانین

آیا کولای شئ چې د مخامخ تابع مشتق پرته د تزاید له لارې په بله طریقه پیدا کړئ؟

$$f(x) = 2x^2$$

1- د یوه ثابت عدد مشتق:

فعالیت

د $y = C$ تابع(C ثابت عدد) په پام کې ونیسئ.

- تابع ته د Δx په اندازه بدلون(تزاید) ورکړئ، د تابع د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟
- د تابع او متحول د بدلون(تزاید) نسبت تشکیل کړئ.
- د پورته مساوتو له دواړو خواوو لیمیټ ونیسئ په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د هرې ثابتې $f(x) = C$ تابع مشتق له صفر سره مساوي دی، ځکه چې د هرې ثابتې تابع ګراف یوه افقي کرښه ده چې میل یې صفر دی.

ثبوت:

$$y = C$$
$$y + \Delta y = C$$
$$\Delta y = C - y$$
$$\Delta y = C - C$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x}$$
$$y' = 0$$

مثال: د $f(x) = \pi^4$ او $y = 100$ تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې π^4 او 100 ثابت عددونه دي؛ نو:

$$f(x) = C \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$
$$f(x) = \pi^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$
$$f(x) = 100 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د يوې طاقت لرونکي تابع مشتق:

فعاليت

د $y = x^n$ تابع چې $n \in IR$ او $n \geq 1$ وي، په پام کې ونيسئ.

- متحول ته د Δx په اندازه تزايد ورکړئ، آيا تابع هم تزايد کوي که تزايد کوي په کومه اندازه اړيکه يې وليکئ؟
- د پورته اړيکې څخه د Δy قيمت پيدا کړئ، د متحول او تابع د تزايد نسبت تشکيل کړئ.
- د پورته مساوات له اطرافو څخه په هغه صورت کې لېمټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

که چېرې $f(x) = x^n$ راکړل شوی وي، نو $f'(x) = nx^{n-1}$ سره کېږي.

ثبوت:

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^n \quad \Rightarrow \quad \Delta y = (x+\Delta x)^n - y$$

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x+\Delta x - x)[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\Delta y = \Delta x[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}\right]$$

$$y' = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1}}_{\text{خلې } n \text{ } x^{n-1}}$$

$$y' = nx^{n-1}$$

لومړی مثال: د $f(x) = x^5$ د تابع مشتق د $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې وټاکئ.

حل:

$$f(x) = x^5 \Rightarrow f(x)' = 5x^{5-1} \Rightarrow f'(x) = 5x^4$$

$$f(\frac{1}{2}) = 5\cdot(\frac{1}{2})^4 = 5\cdot\frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

پوښتنې

د لاندې تابعګانو مشتق پيدا کړئ.

1) $f(x) = x^{-2}$ 2) $x(t) = gt^2$ 3) $t(x) = x^8$

4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 5) $f(x) = 10^{10}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د حاصل جمع مشتق:

فعالیت

د u او v مشتق منوونکي تابعګاني په پام کې ونیسئ.

- آیا د $y = u + v$ تابع د مشتق وړ ده؟
- د $y = u + v$ په تابع کې $u(x)$ ته د Δu په اندازه او $v(x)$ ته د Δv په اندازه تزاید ورکړئ، د y د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟ د هغې اندازه ولیکئ.
- لومړی د تابع تزاید پیدا او بیا د رابطې دواړه خواوې په Δx وویشئ او وروسته یې لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ، چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

د یو حاصل جمع مشتق د حدونو د مشتقاتو د جمعې له حاصل سره مساوي ده:

$$y = u + v$$
$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - y$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$$
$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

څرنګه چې $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$ او $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$ دي، نو: $y' = u' + v'$

4- د حاصل تفریق مشتق

که $y = u - v$ وي، نو $y' = u' - v'$ دی.

ثبوت یې د زده‌کوونکو کورنی دنده ده.

لومړی مثال: د $y = 2x + 1$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې $u = 2x$ او $v = 1$ دي، نو:

$$u' = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0$$
$$u' = 2$$
$$v' = 0$$

بناءً: $y'=u'+v' \Rightarrow y'=(2x)'+(1)' \Rightarrow y'=2+0 \Rightarrow y'=2$

دویم مثال: د $f(x)=4x^2-3x+5$ د تابع مشتق پیداکړئ.

حل: په دې تابع کې $u=4x^2$, $v=3x$ او $w=5$ دی چې $u'=8x$, $v'=3$ او $w'=0$ کېږي، نو:

$$y'=u'+v'+w'$$
$$y'=(4x^2)'-(3x)'+(5)'$$
$$y'=8x-3$$

دریم مثال: د لاندې تابعګانو مشتقونه پیداکړئ:

1) $y=12x-7$
$y'=(12x)'-(7)'$
$y'=12$

2) $f(x)=9x^2-12x+4$
$f'(x)=(9x^2)'-(12x)'+(4)'$
$f'(x)=18x-12$

3) $f(x)=6x^3-2x^2+6x-1$
$f'(x)=(6x^3)'-(2x^2)'+(6x)'-(1)'$
$f'(x)=18x^2-4x+6$

5- د حاصل ضرب مشتق:

که د u او v توابع مشتق منونکي وي، نو $u\cdot v$ هم مشتق منونکي دي، د $y=u\cdot v$ تابع په پام کې ونیسئ.

- **په پورتنی تابع کې u ته Δu په اندازه، v ته Δv په اندازه تزاید ورکړئ او د تابع تزاید پیداکړئ.**
- د Δy د تزاید له پیداکولو وروسته د مساوات اطراف په Δx وویشئ.
- د پورتنی رابطې د دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لیمیټ ونیسئ، چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=u\cdot v$$
$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v) \quad \Rightarrow \quad \Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-y$$
$$\Delta y=u\cdot v+u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v-u\cdot v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}=v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y'=v\cdot u'+u\cdot v'+0\cdot v'$$
$$y'=u'v+v'u$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $y = x^3(x^2-3)$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل: پوهېږو، چې $y = u \cdot v$ شکل لري چې په دې صورت کې $y' = uv' + vu'$ دی.

$$\left.\begin{array}{l} u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2 \\ v = x^2 - 3 \Rightarrow v' = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y = x^3(x^2-3) \\ y' = 3x^2(x^2-3) + 2x(x^3) \\ y' = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2 \end{array}$$

دویم مثال: د $y = (5x-1)^2$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د y تابع کولای شو د فکتورونو د ضرب په شکل داسې ولیکو:

$$y = (5x-1)^2 = (5x-1)(5x-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 5x - 1 \Rightarrow u' = 5 \\ v = 5x - 1 \Rightarrow v' = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y' = 5(5x-1) + 5(5x-1) \\ y' = 25x - 5 + 25x - 5 = 50x - 10 \end{array}$$

6- د حاصل تقسیم مشتق:

که د u او v تابعګانې مشتق منونکی وي؛ نو $\frac{u}{v}$ کله چې $v \neq 0$ وي، هم مشتق منوونکی ده، اوس د $y = \frac{u}{v}$ تابع په پام کې ونیسئ.

- u او v ته په ترتیب سره Δu او Δv په اندازه تزاید ورکړي او د y تابع تزاید پیدا کړئ.
- د مساوات دواړه خواوې په Δx وویشئ.
- د پورتني رابطې له اطراف څخه په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي، لیمیټ ونیسي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبتوو:

ثبوت:

$$y=\frac{u}{v} \Rightarrow y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} \Rightarrow \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-y$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{uv+v\cdot\Delta u-uv-u\cdot v\Delta}{v(v+\Delta v)}$$

$$\Delta y=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}}{\Delta x}=\frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}\right)=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v+\Delta v)}$$

$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

لومړی مثال: د $y=\frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې تابع د $\frac{u}{v}$ بڼه لري چې مشتق یې عبارت دی له:

$$\left.\begin{array}{l} u=2+3x \Rightarrow u'=3 \\ v=1-2x \Rightarrow v'=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2} \\ y'=\frac{3(1-2x)-[-2(2+3x)]}{(1-2x)^2} \\ =\frac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2}=\frac{7}{(1-2x)^2} \end{array}$$

یادونه: که چیرې وغواړو چې د یوې تابع مشتق په یوه ټاکلې نقطه لکه په x_0 کې پیدا کړو وروسته د تابع د مشتق څخه ټاکلې قیمت په هغه کې وضع کوو چې د تابع مشتق په هغه نقطه کې پیدا کړو، لکه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $f(y)=\dfrac{2y^2-3}{1-3y}$ د تابع مشتق د $y=0$ په ټکي کې پيدا کړئ:

حل: د تابع د حاصل تقسيم د مشتق څخه لرو:

$$f'(y)=\frac{4y(1-3y)-[-3(2y^2-3)]}{(1-3y)^2}=\frac{4y-12y^2+6y^2-9}{(1-3y)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} u=2y^2-3 \Rightarrow u'=4y \\ v=1-3y \Rightarrow v'=-3 \end{array}\right\}$$

$$f'(y)=\frac{-6y^2+4y-9}{(1-3y)^2}$$

$$f(0)=\frac{-6(0)^2+4(0)-9}{1+0}$$

$$f(0)=-9$$

دريم مثال: د $f(t)=\dfrac{-3}{2t-1}$ د تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: پوهېږو چې تابع د $\dfrac{u}{v}$ بڼه لري نو د $y=\dfrac{u}{v}$ له فورمول څخه په ګټه اخيستنې سره داسې عمل کوو:

$$\left.\begin{array}{ll} y=\dfrac{u}{v} & \Rightarrow y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2} \\ u=-3 & \Rightarrow u'=0 \\ v=2t-1 & \Rightarrow v'=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(t)=\frac{0\cdot(2t-1)-2(-3)}{(2t-1)^2}=\frac{6}{(2t-1)^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پيدا کړئ:

1) $f(x)=\dfrac{3}{5}x(x-2)$ 2) $g(x)=(2x-3)(x-3)$ 3) $f(x)=(2x-1)^2$

4) $f(t)=\dfrac{t^2}{1-2t}$ 5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$ 6) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

7) $f(x)=3x^5-5x^2$ 8) $f(x)=7x+3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7- د یوې مربع جذري تابع مشتق:

فعالیت

د $y=\sqrt{x}$ تابع په پام کې ونیسي.

- د $y=\sqrt{x}$ تابع متحول ته د Δx په اندازه تزاید ورکړئ د تابع تزاید پیدا کړئ.
- د لاس راغلي رابطې له دواړو خواوو څخه لیمیټ په هغه صورت کې ونیسي، چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتو:

ثبوت:

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$$
$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{x+\Delta x-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x\to o}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to o}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\sqrt{x}(x^2-1)$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې تابع د $u\cdot v$ بڼه لري، نو:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt{x}\Rightarrow u'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v=x^2-1\Rightarrow v'=2x \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)+2x\cdot\sqrt{x} \\ f'(x)=\dfrac{x^2-1}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}=\dfrac{x^2-1+4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} \\ \qquad =\dfrac{x^2-1+4x^2}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5x^2-1}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

8- د $\sqrt{u}$ تابع د جذري مربع مشتق

- که چیرې y د u او u د x تابع او مشتق منوونکي وي د y اړیکه u ته او u ، x ته څه فکر کوئ.
- د u متحول ته د Δu په اندازه تزاید ورکړئ د Δy د تزاید په اړه څه فکر کوئ.
- د مساواتو له دواړه خواوو څخه لېمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$
$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u+\Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$
$$\Delta y = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx وېشو او بیا د مساوات له دواړو خواوو څخه لېمیټ نیسو چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$
$$y' = \frac{u'}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

د ویم مثال: د $h(x) = (x^2 + x)\sqrt{x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د $y = u \cdot v$ او $y = \sqrt{x}$ د فورمولونو له مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لرو:

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 + x \quad \Rightarrow u' = 2x + 1 \\ v = \sqrt{x} \quad \Rightarrow v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h'(x) = (2x+1)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x) \\ h'(x) = 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{x^2 + x}{2\sqrt{x}} \\ h'(x) = \frac{4x^2 + 2x + x^2 + x}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + 3x}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(x+3)$ د تابع د مشتق قیمت د $x=8$ په ټکي کې په لاس راوړئ.

حل: د $y=u\cdot v$ او $y=\sqrt[n]{u}$ د تابع د مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt[3]{x}-1\Rightarrow u'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ v=x+3\Rightarrow v'=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+3)+1(\sqrt[3]{x}-1) \\ f'(x)=\dfrac{x+3}{3\sqrt[3]{x^2}}+(\sqrt[3]{x}-1) \end{array}$$

اوس د تابع مشتق د $x=8$ نقطه کې پیداکوو:

$$f'(8)=\frac{8+3}{3\sqrt[3]{8^2}}+\sqrt[3]{8}-1=\frac{11}{12}+1=\frac{23}{12}$$

پوښتنې

1- د لاندې توابعو مشتقونه پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{1}{x+1}\quad,\quad y=3x^{-3}\quad,\quad f(x)=x^2+3$$

2- که $f(x)=x^2-3x$ او $g(x)=\sqrt{x}-1$ وي، د دې تابعګانو د جمعې، ضرب او تقسیم مشتقونه پیدا کړئ. $[(f+g)',(f\cdot g)',(f\div g)'\quad g\neq 0]$

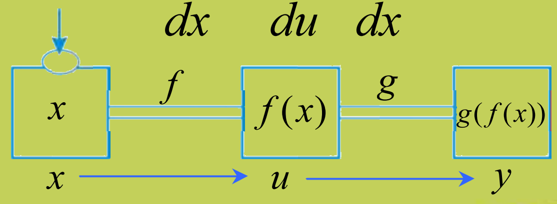
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکبو تابعګانو مشتق (زنځيري قاعده) Chain Rule

د مخامخ اړيکې او شکل په اړه خپل نظر بيـان کړئ.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$



فعاليت

که چيرې y د u او u د x تابع وي او د اشتقاق وړ وي.

- وواياست چې y د u او u له x سره څه اړيکه لري؟
- آيا د $\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$ مساوات حقيقت لري؟
- د پورتني مساوات دواړې خواوې په Δx وويشئ.
- که د ښي اړخ د کسرونو د مخرجونو ځايونه بدل شي، په پورتني رابطه کې بدلون راځي؟
- د پورتني مساوات له اطراف څخه په هغه صورت کې ليميټ ونيسي چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

د تابع، تابع مشتق ثبوت او پايله يې په لاندې ډول ده.

ثبوت:

$$\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

څرنګه چې $\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_{(u)}$ او $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_{(x)}$ دی، نو: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د دې زنځيري قاعدې پر بنسټ لاندې پايلې ليکلای شو:

1- که $y=u^n$ وي؛ نو $y=nu^{n-1}\cdot u'$ کېږي.

2- که $y=\sqrt[n]{u}$ وي؛ نو $y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ کېږي.

مثال: د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y=(2x^2-1)^3$ 2) $y=\sqrt{1-x^2}$ 3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$ 5) $y=(x^2-2)^{-3}$

حل: د زنځیري قاعدې په مرسته لیکلای شو؛ چې:

1) $y=\underbrace{(2x^2-1)}_{u}{}^3$

$$\left.\begin{array}{l} u=2x^2-1\Rightarrow u'_x=4x \\ y=u^3\Rightarrow y'_u=3u^2 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)} \\ y'=3(2x^2-1)^2\cdot 4x=3(4x^4-4x^2+1)\cdot 4x \\ \quad =(12x^4-12x^2+3)\cdot 4x=48x^5-48x^3+12x \\ \quad =12x(4x^4-4x^2+1)\quad =12x(2x^2-1)^2 \end{array}$$

2) $y=\sqrt{1-x^2}$

$$\left.\begin{array}{l} u=1-x^2\Rightarrow u'_{(x)}=-2x \\ y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}} \end{array}\right\}\Rightarrow y'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

لیدل کېږي چې تابع د ضرب د حاصل بڼه لري نو: $y=u\cdot v\Rightarrow y'=u'v+v'u$

3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

$$\left.\begin{array}{l} u=(x^2-3)^2 \\ u'_{(x)}=2(x^2-3)(2x) \\ v=2x^3\Rightarrow v'_{(x)}=6x^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y'=\left[(x^2-3)^2\right]'\cdot 2x^3+\left[2x^3\right]'(x^2-3)^2 \\ y'=\left[2(x^2-3)\cdot 2x\right]2x^3+6x^2(x^2-3)^2 \\ \quad =8x^4(x^2-3)+6x^2(x^2-3)^2 \\ \quad =8x^6-24x^4+6x^2(x^4-6x^2+9) \\ \quad =8x^6-24x^4+6x^6-36x^4+54x^2 \\ \quad =14x^6-60x^4+54x^2 \end{array}$$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$

$$\left.\begin{array}{l} u=x^2-2x^3 \\ u'_{(x)}=2x-6x^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=\sqrt[n]{u}\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \\ y'=\dfrac{2x-6x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x^3)^2}} \end{array}$$

5) $y=(x^2-2)^{-3}$

$$\left.\begin{array}{l} u=x^2-2 \\ u'_{(x)}=2x \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=u^n\Rightarrow y'=nu^{n-1}\cdot u' \\ y'=-3(x^2-2)^{-4}\cdot 2x=\dfrac{-6x}{(x^2-2)^4} \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه:

I. که چيرې د f تابع د (x_0) په ټکي کې مشتق ولري، نو $f'(x_0)$ د هغه مماس ميل دی چې د $((x_0)\ ,\ f(x_0))$ په نقطه کې له منحني يا د تابع له ګراف سره رسمېږي.

مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع ميل د $x_0=1$ په ټکي کې پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې $x_0=1$ دی؛ نو: $f(x_0)=1$ سره کېږي او $P(1,1)$ چې د تماس ټکی دی، ميل يې عبارت دی، له:

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3 \quad\Rightarrow\quad f'(1)=3$$

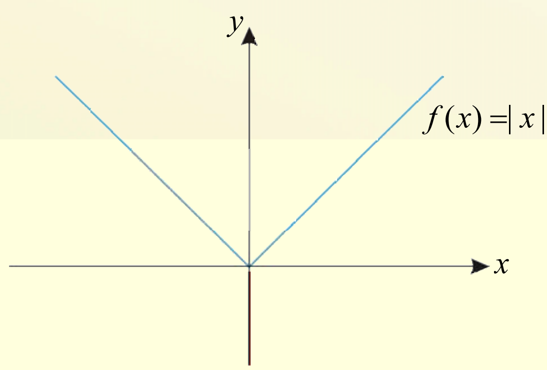
II. که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع د x_0 په ټکي کې پيوسته يا متمادي ده، خو برعکس يې ټيک نه ده، يعنې کيدای شي، يوه تابع په يوه ټکي کې متمادي يا پيوسته وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

مثال: د $f(x)=|x|$ د تابع مشتق د $x=0$ په ټکي کې پيدا کړئ.

حل: پوهېږو چې مشتق په حقيقت کې د نيوټن د نسبت د لېميټ محاسبه ده چې د ښي او کيڼ اړخ لېميټونه يې په صفر کې سره وڅېړل شي.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي، چې $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ دی، نو تابع په $x = 0$ کې د مشتق وړ نه ده، ولې تابع د صفر په ټکي کې پیوسته یا متمادي ده.

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

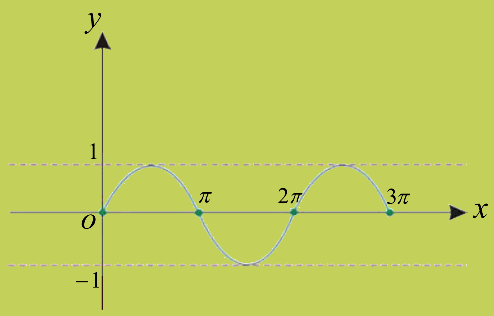
1) $y = (x^2+2)^2$ 2) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 1)^{-4}$ 3) $y = (1-2x^3)^4$

4) $h(z) = \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$ 5) $f(t) = \sqrt[3]{3t+1}$ 6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2+x^2+x^3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي تابعګانو مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع را ښيي؟



فعاليت

- مثلثاتي دايره او راديان تعريف کړئ.
- آيا دا $-1 \le \sin x \le 1$ اړيکه حقيقت لري او که نه؟
- د $y = \sin x$ تابع په پام کې ونيسئ متحول د Δx په اندازه بدلون ورکړئ او د تابع بدلون په پام کې ونيسئ.
- د $\sin(x + \Delta x) - \sin x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ؟
- وروسته د انکشاف له پورتني رابطې څخه $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت جوړ او د مساوات له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لېميټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورته فعاليت څخه پايله داسې ثبوتوو:

1- د $y = \sin x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \sin x$$

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

$$\Delta y = 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \Rightarrow y'(x) = \cos x \cdot 1$$

$$y' = \cos x$$

$$\boxed{y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې $f(x)=\sin u$ وي په داسې حال کې چې u د x تابع وي؛ نو لیکلای شو:

$$f(u)=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$$

لومړی مثال: د $f(x)=\sin 4x$ مشتق پیدا کړئ.

$$\left.\begin{aligned} &f(x)=\sin 4x\\ &u=4x\Rightarrow u'=4\\ &f(x)=\sin u\Rightarrow y'_u=\cos u\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}&f(x)=\sin u \Rightarrow f'(x)=u'\cos u\\ &f(x)=\sin 4x\Rightarrow f'(x)=4\cos 4x\end{aligned}$$

دویم مثال: د $f(x)=x^3\cdot\csc x$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{aligned} &f(x)=x^3\cdot\csc x=x^3\cdot\frac{1}{\sin x}\\ &u=x^3\Rightarrow u'=3x^2\\ &v=\frac{1}{\sin x}\Rightarrow v'=\frac{-uv'}{v^2}=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}&f(x)=x^3\cdot\csc x\\ &f'(x)=3x^2\cdot\csc x+\frac{-\cos x}{\sin^2 x}\cdot x^3\\ &\quad=3x^2\csc x-\cot x\cdot\csc x\cdot x^3\\ &\quad=3x^2\csc x-x^3\cot x\cdot\csc x\end{aligned}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق په لاس راوړئ:

$a)\ y=\sin 5x$ $\quad b)\ y=\dfrac{\sin x}{1+x}$

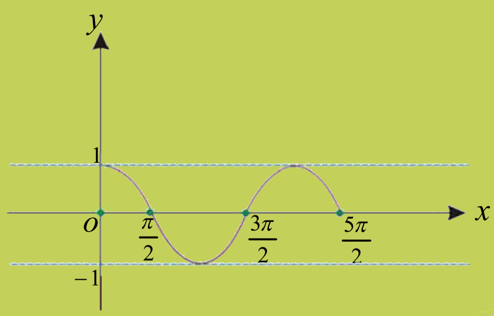
$c)\ y=\sqrt{1+\sin x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = \cos x$ تابع مشتق

مخامخ گراف څه ډول تابع را ښيي؟



فعاليت

- د $y = f(x) = \cos x$ په تابع کې متحول ته Δx او تابع ته د Δy په اندازه تزايد ورکړئ.
- د $\cos(x+\Delta x) - \cos x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ.
- د پورتنی انکشافي رابطې په مرسته د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت تشکيل او له اطرافو څخه لېميټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

2- د $y = \cos x$ تابع مشتق

ثبوت:

$$y = \cos x$$

$$y + \Delta y = \cos(x+\Delta x)$$

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x$$

$$\Delta y = -2\sin\frac{x+\Delta x + x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x - x}{2}$$

$$\Delta y = -2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x\cdot 1$$

$$\boxed{y=\cos x \quad\Rightarrow\quad y' = -\sin x}$$

یا په لنډ ډول هغه داسې ثبوتوو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$
$$(\cos x)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \cdot (-2\sin x \cos x)$$

پوهېږو $\sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$ چې سره دی، نو:

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos x}(-2\sin x \cdot \cos x)$$
$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

که $y = \cos u$ چیرې وي په داسې حال کې چې u د x تابع وي؛ نو لیکلای شو:

$$\boxed{y = \cos u \Rightarrow y' = -u - \cdot \sin u}$$

لومړی مثال: د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = \sin 2x = 2\sin x \cos x$ 2) $f(x) = x - \sin x \cos x$

حل: پوهېږو چې $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u'v + v'u$ دی، نو:

1) $f(x) = \sin 2x = 2\sin x \cos x$
$$f'(x) = (2\sin x)'\cos x + (\cos x)' \cdot 2\sin x = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$$
$$f'(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Rightarrow y' = 2\cos 2x$$

2) $f(x) = x - \sin x \cos x$
$$f'(x) = (x)' - (\sin x \cdot \cos x)' = (x)' - [(\sin x)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot \sin x]$$
$$f'(x) = (x)' - [\cos x \cos x + (-\sin x \sin x)] = 1 - \cos 2x$$

پوښتنې

د لاندې تابعګانو لومړی مشتق پیدا کړئ.

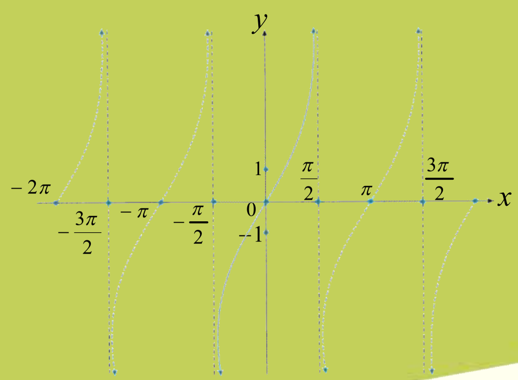
1) $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2$ 2) $f(x) = \sin^2 x$ 3) $f(x) = \sec x$

4) $f(x) = \csc x$ 5) $f(x) = \frac{5\sin^2 2x}{3\cos 5x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = \tan x$ تابع مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع راښيي.



فعالیت

- د $y = \tan x$ تابع د نسبت په شکل ولیکئ.
- د پورتني نسبت څخه مشتق ونیسئ، هغه له څه سره مساوي کېږي.

له پورته فعالیت څخه پایله داسې ثبوتوو:

3- د $y = \tan x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \tan x$$

$$y'_{(x)} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

پاتې فورمولونه زده کوونکو ته پرېږدو.

لومړی مثال: د لاندې مثلثاتي تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y = \tan^3 x$$

حل: پوهېږو چې که $y = u^n$ وي نو مشتق يې $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ سره دی، نو:

$$\left.\begin{array}{l} u = \tan^3 x \\ u' = \sec^2 x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = \tan^3 x \\ y' = 3\tan^2 x \sec^2 x \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $y=\sec x\cdot\cot x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې تابع شکل د $y=u\cdot v$ شکل لري، نو:

$$y=\sec x\cdot\cot x$$
$$u=\sec x \quad\Rightarrow\quad u'=\sec x\tan x$$
$$v=\cot x \quad\Rightarrow\quad v'=-\csc^2 x$$

د u,v,u' او v' قیمتونه د $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$ په فورول کې وضع کوو:

$$y'=\sec x\tan x\cdot\cot x+\sec x(-\csc^2 x)$$
$$=\sec x\tan x\frac{1}{\tan x}-\csc^2 x\sec x$$
$$=\sec x-\csc^2 x\sec x$$

پوښتنې

د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

$a)\ y=\tan x\cot x$

$b)\ y=(x^2+x-1)\tan^2 x$

$c)\ y=\dfrac{1}{\tan x}$

$d)\ y=\tan x\sec x-\cot x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ضمني مشتقات

مخامخ مساوات په عبارت سره ولیکئ.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

فعالیت

- د $y = 2x^2 - 4$ د تابع مشتق پیداکړئ.
- د $y^2 + xy = 1$ تابع څو متحوله تابع ده؟ او ګراف یې څه ډول شکل لري؟
- د پورتني تابع مشتق پیداکولای شئ.

د یوه منحني خط معادله د وضعیه کمیاتو په سیستم کې عبارت له $y = f(x)$ څخه ده، له دې ځایه $y - f(x) = 0$ کېږي او $y - f(x)$ یوه دوه متحوله تابع د x او y له جنسه ده، که $F(x,y) = y - f(x)$ تابع په پام کې ونیسو، نو د دې منحني معادله د $F(x,y)$ شکل غوره کوي؛ د مثال په ډول: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 25$ وي، نو د $F(x,y) = 0$ له معادلې څخه لیکلای شو، چې $x^2 + y^2 - 25 = 0$ یا $x^2 + y^2 = 25$ چې د دې دوو بېلا بېلو توابعو معادلې $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ دي. په عمومي ډول د $F(x,y) = 0$ معادله کیدای شي چې د څو تابع ګانو معادله د $y = f(x)$ په بڼه وي، پاملرنه وکړئ.

د $y = f(x)$ په تابع کې چې x او y یو له بل څخه جلا وي، نو مشتق یې په آسانی پیداکولای شو، ولې په ځینو رابطو کې y له x سره یو ځای بیان شوی وي لکه په $xy^2 - y + 1 = 0$ چې د مشتق په نیولو کې که د x له جنسه مشتق نیسو، نو y یو ثابت عدد فرضوو او که د y له جنسه مشتق نیسو x ثابت فرضوو لکه:

$$xy^2 - y + 1 = 0$$

$$(xy^2)' - (y)' + (1)' = 0 \Rightarrow 1y^2 + x(2y'y) - y' = 0 \Rightarrow y^2 = -2xyy' + y' = y'(-2xy + 1)$$

$$y' = \frac{y^2}{-2xy + 1}$$

په عمومي حالاتو کې که ضمني رابطه د $f(x,y)=0$ په شکل تعریف شوی وي؛ نو $y'(x)$ په لنډ ډول داسې محاسبه کېږي:

$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{\text{د تابع مشتق نظر } x \text{ ته (} y \text{ ثابت دی)}}{\text{د تابع مشتق نظر } y \text{ ته (} x \text{ ثابت دی)}}$$

لومړی مثال: د $y=\sin\frac{x}{y}+1$ ضمني تابع مشتق د $(\pi,1)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: د $y-\sin\frac{x}{y}-1=0$ رابطې څخه $y'_{(x)}=\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ پیداکوو.

$$y-\sin\frac{x}{y}-1=0$$

$$\left.\begin{aligned}f'_{(x)}&=y'_x-(\sin\frac{x}{y})'_x-(1)_x\\&=0-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}-0=\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}\\f'_{(y)}&=y'_y-(\sin\frac{x}{y})'_y-(1)_y\\&=1-\frac{x}{1}\cos\frac{x}{y}-0=1-x\cdot\cos\frac{x}{y}\end{aligned}\right\}\Rightarrow y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1-x\cdot\cos\frac{x}{y}}=\frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1-x\cdot\cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کې د x او y قیمتونه وضع کوو چې د $y'(\pi,1)$ په لاس راځي.

$$y'_{(\pi,1)}=\frac{\frac{1}{1}\cos\frac{\pi}{1}}{1+\pi\cos\frac{\pi}{1}}=\frac{\cos\pi}{1+\pi\cos\pi}=\frac{-1}{1-\pi}$$

دویم مثال: د $x^2y+2y^3=3x+2$ رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$x^2y+2y^3=3x+2$$
$$x^2y+2y^3-3x-2=0$$
$$f'_{(x)}=2xy+0-3-0=2xy-3$$
$$f'_{(y)}=x^2+6y^2-0-2=x^2+6y^2-2$$
$$f'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy-3}{x^2+6y^2-2}=\frac{3-2xy}{x^2+6y^2-2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم مثال: د $y^6 - y - x^2 = 0$ ضمني مشتق پيداکړئ.

حل:

$$f'_{(x)} = -2x$$

$$f'_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5-1} = \frac{2x}{6y^5-1}$$

او يا په بله طريقه:

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5y' - y' - 2x = 0$$

$$(6y^5 - 1)y' = 2x$$

$$y' = \frac{2x}{6y^5-1}$$

د تابع دويم ضمني مشتق

د ضمني رابطې د دويمې مرتبې د مشتق د پيداکولو لپاره د فورمول په مرسته لومړی د ضمني اړيکې لومړی مشتق پيداکوو او بيا له دې رابطې څخه مشتق نيسو.

لومړی مثال: د $x^2 - y^2 = 1$ رابطې دويمه مرتبه مشتق $y''_{(x)}$ پيداکړئ.

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = (x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x = 2x - 0 - 0 = 2x$$

$$f'_{(y)} = (x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y = 0 - 2y - 0 = -2y$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

او يا به بله طريقه:

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{(x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x}{(x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y} = -\frac{2x-0-0}{0-2y-0} = \frac{x}{y} \Rightarrow y'_{(x)} = \frac{x}{y}$$

اوس د $y' = \frac{x}{y}$ له رابطې څخه مشتق نيسو $y''_{(x)}$:

$$y''_{(x)} = \frac{(x)'y - y'x}{y^2} = \frac{y - y'x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y}\cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = \frac{-1}{y^3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ په معادله کې د y مشتق نسبت x ته د $(1,1)$ په ټکی کې پيدا او پر منحنی د مماس معادله يې وليکې.

حل: څرنګه چې د $(1,1)$ ټکی په معادله کې صدق کوي نو نوموړی ټکی د منحنی پرمخ واقع دی؛ د $y'_{(x)}$ د پيداکولو لپاره په ورکړ شوي معادلې کې ليکلای شو:

$$f'_{(x)} = 2x + y$$
$$f'_{(y)} = x + 2y$$
$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x+y}{x+2y} \quad , \quad x+2y \neq 0$$
$$y' = -\frac{2x+y}{x+2y} = -\frac{2+1}{1+2} = -1$$
$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -(x-1) \Rightarrow y = -x + 2$$

او يا په بله طريقه هم کولای شو د تابع ضمني مشتق په لاس راوړو:

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$
$$2x + y + x \cdot y' + 2yy' = 0$$
$$2x + y + (x+2y)y' = 0$$
$$(x+2y)y' + 2x + y = 0$$
$$(x+2y)y' = -2x - y$$
$$y' = \frac{-2x-y}{x+2y}$$

دريم مثال: د $x^2y^3 = 5y^3 + x$ ضمني تابع مشتق پيدا کړئ.

حل:

$$x^2y^3 - 5y^3 - x = 0$$
$$f'_{(x)} = 2xy^3 - 0 - 1 = 2xy^3 - 1$$
$$f'_{(y)} = 3x^2y^2 - 15y^2 - 0$$
$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2xy^3 - 1}{3x^2y^2 - 15y^2} = \frac{1 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 15y^2}$$

پوښتنې

1- د $x\sin y + y\cos x = 5$ د رابطې ضمني مشتق پيدا کړئ.

2- د $x^3 + xy^2 + y = 3$ رابطې څخه ضمني مشتق ونيسئ.

3- د $x^2 + y^2 = 4x + 4y$ رابطې څخه ضمني مشتق ونيسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوړې مرتبه(متوالي) مشتقات

د مخامخ تابع درې ځلې مشتق ونیسئ؟

د مخامخ تابع پنځه ځلې مشتق ونیسئ؟

$$f(x) = \sin x$$
$$f(x) = \cos x$$

فعالیت

- د $y = 2x^4 - 3x^3 - 2x - 1$ تابع مشتق پیداکړئ.
- د پورته تابع دویم مشتق پیدا کړئ.
- د پورتني مشتق د تابع دریم ځل مشتق ونیسئ.
- د پورتني تابع نور څو ځلې مشتق نیولی شو؟
- د پورتني تابع څووم مشتق له صفر سره مساوي دی؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که د $y = f(x)$ مشتق منونکی وي، لومړی مرتبه مشتق یې په $y' = f'_{(x)}$ ، دویمه مرتبه مشتق یې په $y'' = f''_{(x)}$ دریمه مرتبه مشتق یې په $y''' = f'''_{(x)}$ ... په کلي ډول $n-$ام مرتبه مشتق د $y = f(x)$ تابع په $y^{(n)} = f^{(n)}_{(x)}$ علامت ښیو.

لومړی مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ تابع دریم مشتق په لاس راوړئ.

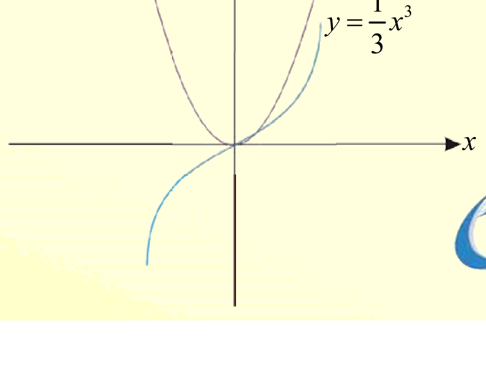
حل:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$
$$y' = 3x^2 - 6x + 4$$
$$y'' = 6x - 6$$
$$y''' = 6$$

دویم مثال: د $y = \frac{1}{3}x^3$ د تابع ګراف او د هغې د لومړی مرتبې مشتق تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

$$y = \frac{1}{3}x^3$$
$$y' = \frac{3}{3}x^2 = x^2$$
$$y' = x^2$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: که $y=\sin x+\cos x$ وي، د $(y^{(9)})^2+y^2$ قیمت پیداکړئ.

حل: لومړی د تابع نهمه مرتبه مشتق یا $(y^{(9)})$ په لاس راوړو:

$$y=\sin x+\cos x$$
$$y'_{(x)}=\cos x+(-\sin x)=\cos x-\sin x$$
$$y''_{(x)}=-\sin x-(\cos x)=-\sin x-\cos x$$
$$y'''_{(x)}=-\cos x-(-\sin x)=\sin x-\cos x$$
$$\vdots$$
$$f'^{(9)}_{(x)}=\cos x-\sin x$$
$$(y^{(9)})^2+y^2=(\cos x-\sin x)^2+(\sin x+\cos x)^2$$
$$=\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$$
$$=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2$$

څلورم مثال: د $y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$ د تابع پنځه ځلې مشتق پیداکړئ.

$$y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$$
$$y'=12x^5-15x^4-6x^2-6x$$
$$y''=60x^4-60x^3-12x-6$$
$$y'''=240x^3-180x^2-12$$
$$y^{(4)}=720x^2-360x$$
$$y^{(5)}=1440x-360$$

یادونه: که چیرې $n-$ام درجه‌یي څو جمله‌یي تابع $f_{n(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ \dots\ +c_nx^n \quad c_n\neq 0$ راکړی شوی وي $n-$ام مشتق یې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$f_{n(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ \dots\ +c_nx^n \qquad c_n\neq 0$$
$$f'_{n(x)}=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ \dots\ +nc_nx^{n-1}$$
$$f''_{n(x)}=2c_2+6c_3x+\ \dots\ +n(n-1)c_nx^{n-2}$$
$$f'''_{n(x)}=6c_3+12c_4x+\ \dots\ +n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}$$
$$f^{n}_{n(x)}=n(n-1)(n-2)x\ \dots\ c_n=n!c_n$$

په عمومي ډول که $k>n$ وی، نو: $f^{k}_{n(x)}=0$

پوښتنې

د لاندې تابعګانو تر هغې مشتق پیداکړئ چې د مشتق تابع له صفر سره مساوي شي.

1) $y=4x^4-3x^3-2x$ 2) $y=(5x-2)^3$

3) $y=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$ 4) $y=\sin x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

– که چېرې د $P(x, f(x))$ او $Q(x+h, f(x+h))$ ټکي د $f(x)$ تابع دوه اختياري ټکي وي، نو لاندې اړيکه د Newton خارج قسمت په نامه يادېږي:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د منحني ميل په يوه اختياري ټکي کې عبارت دی، له:

$$m_T=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د يوې تابع مشتق: د تابع او متحول د تزايد، د نسبت لېميټ کله چې $\Delta x\to 0$ وکړئ، د مشتق په نامه يادېږي او په $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=y'$$

که چېرې د $f(x)$ تابع د (x_0) په يوه ټکي کې د مشتق وړ وي، نو $f'(x)$ د مماس ميل د منحني سره د $(x_0, f(x))$ په ټکي کې دی.

که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع په x_0 کې متمادي ده، خو ددې برعکس سمه نه ده؛ يعنې کېدای شي يوه تابع په يوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه دی.

د $f(x)$ د تابع مشتق د C پر منحني $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له ميل سره برابر دی.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\tan\alpha=\tan\theta=m_\Delta$$

د تماس په ټکي کې د يوه منحني سره د مماس ميل د هغې تابع د مشتق په نوم يادېږي.

که د يوې تابع مشتق ونيول شي، نو يوه تابع په لاس راځي چې دا د مشتق تابع بلل کېږي.

که د f تابع د (x_0-r, x_0+r) په فاصله کې($x_0=x$ په شاوخوا) کې تعريف شوې وي او د هغې لېميټ موجود وي، په دې حالت کې کولای شو چې يو مماس خط د $f(x)$ د تابع په منحني د $x=x_0$ په ټکي کې رسم کړو، د دې مماس ميل عبارت دی له: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق قوانین:

1) $f(x)=C \quad \Rightarrow f'(x)=0$

2) $f(x)=x^n \quad \Rightarrow f'(x)=n\cdot x^{n-1}$

3) $f(x)=u\pm v \quad \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$

4) $f(x)=u\cdot v \quad \Rightarrow f'(x)=u'v+v'u$

5) $f(x)=\frac{u}{v} \quad , \quad v\neq 0 \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

6) $f(x)=\sqrt{x} \quad \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

7) $f(x)=\sqrt{u} \quad \Rightarrow f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

8) $f(x)=\sqrt[n]{u} \quad \Rightarrow f'(x)=\frac{u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

د مرکبو توابعو مشتق: $y'_{(x)} = y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د مثلثاتي تابع گانو مشتق:

1) $y=\sin x \quad \Rightarrow y'=\cos x \quad , \quad y=\sin u \quad \Rightarrow y'=u'\cos u$

2) $y=\cos x \quad \Rightarrow y'=-\sin x \quad , \quad y=\cos u \quad \Rightarrow y'=-u'\sin u$

که د $y=f(x)$ تابع مشتق منونکی وي، په بشپړ ډول n-ام ځلي مشتق يې $y^{(n)}=f^{(n)}_{(x)}$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دویم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتو ته څلور ځوابونه درکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1- $f(x)=x^2-x$ منحنی میل د $P(3,0)$ په ټکی کې عبارت دی له:

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 5$ $d)\ -5$

2- د $f(x)=2x^2$ په تابع کې د f متوسط بدلون د $[3,4]$ په انتروال کې عبارت دی له:

$a)\ 18$ $b)\ 14$ $c)\ -14$ $d)\ 32$

3- د $y=2x^2-3x^{-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=4x^2+3$ $b)\ y'=4x+\frac{1}{2}x$ $c)\ y'=4x+\frac{3}{x^2}$ $d)\ y'=4x$

4– د $f(x)=\sqrt{x-1}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ 0$ $b)\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ $c)\ \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$ $d)\ \frac{-1}{2\sqrt{x-1}}$

5– د $f(x)=2x^2+x$ تابع د $x=1$ په ټکی کې د مماس خط معادله عبارت دی له:

$a)\ y=5x-5$ $b)\ y=x-3$ $c)\ y=5$ $d)\ y=5x$

6- د $y=\frac{2x}{-x+4}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-4x+8$ $b)\ y'=-2$ $c)\ y'=\frac{4x+8}{(-x+4)}$ $d)\ y'=\frac{8}{(-x+4)^2}$

7– د $y=(2-x^2)^3$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-6x^5+2x^3-24x$ $b)\ y'=3(2-x^2)^2$ $c)\ y'=3(-2x)^2$ $d)$ هیڅ یو

8– د $y=\sin x$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\sin x$ $b)\ y'=\cos x$ $c)\ y'=-\sin x$ $d)\ y'=-\cos x$

9– د $y=(1+x^4)^{\frac{-1}{5}}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-\frac{4}{5}x^3(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$ $b)\ y'=-\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$

$c)\ y'=-4x^3$ $d)$ هیڅ یو

10– د $y=\frac{\cos}{1-\cos x}$ د تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $b)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)}$ $c)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $d)$ هیڅ یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې پوښتنې مفصل حل کړئ.

1. د $f(x)=\dfrac{2\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟
2. د $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟
3. د $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ د تابع مشتق پیدا کړئ.
4. د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+4)$ د تابع مشتق پیدا کړئ.
5. د $f(x)=\sin x\cdot\cos x$ د تابع مشتق د $\dfrac{\pi}{4}$ په ټکي کې پیدا کړئ.
6. د $f(x)=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{1+\sin 2x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.
7. د $y=\cos x$ تابع اتمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.
8. د $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ تابع نهمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.
9. د $x^2+xy+y^2=3$ تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

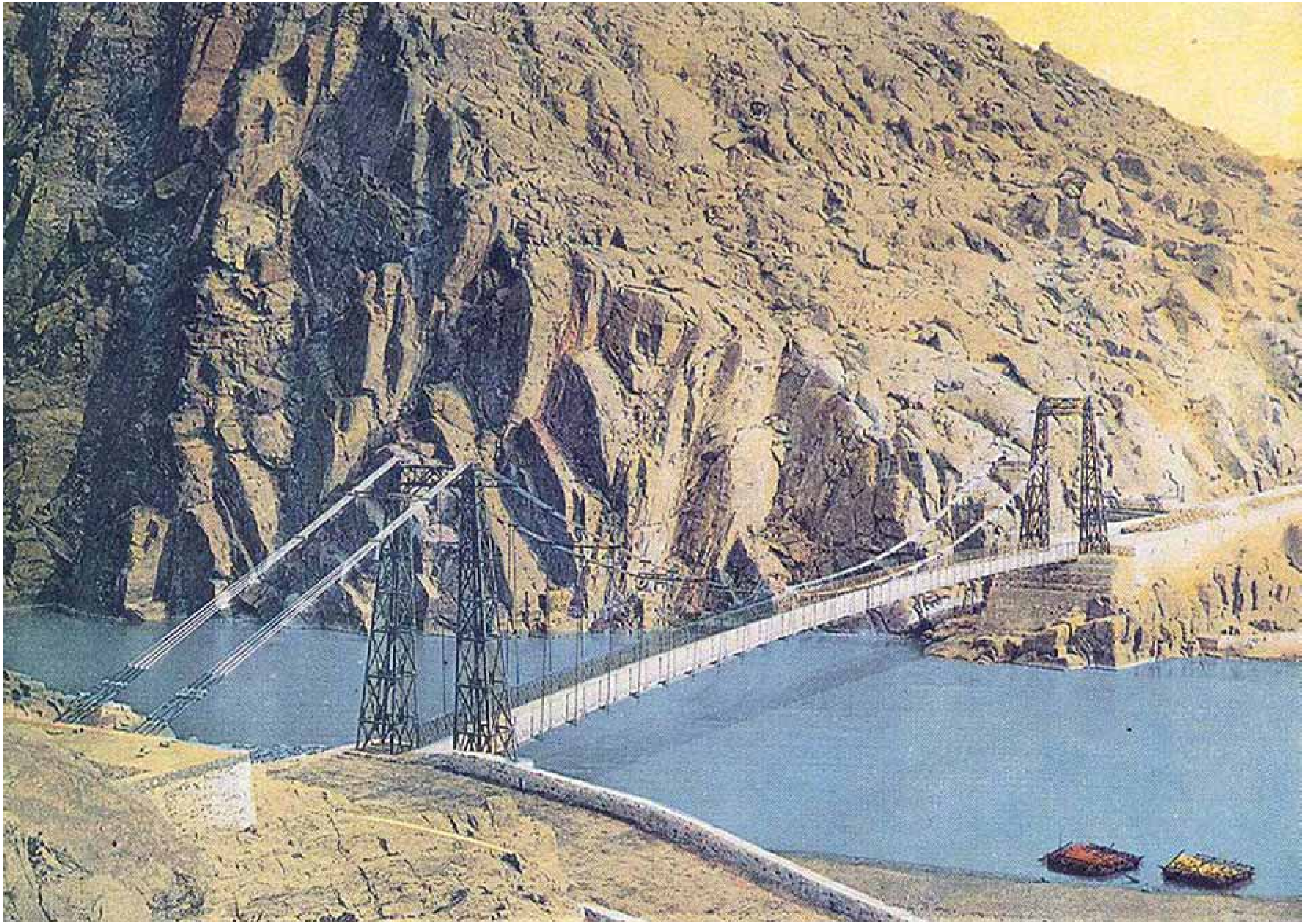
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم څپرکی

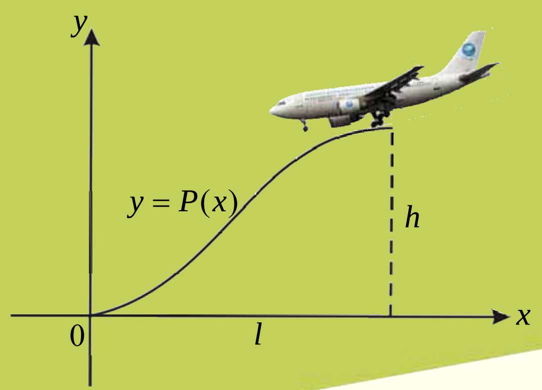
د مشتق د استعمال ځایونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



د مشتق د استعمال ځايونه

د مخامخ شکل د ارتفاع په اړه خپل نظر بيان کړئ.

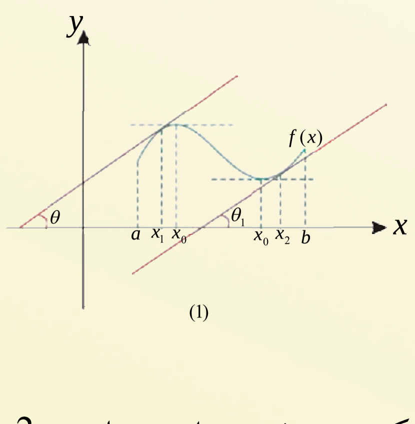


له مشتق څخه په ډېرو ځايونو کې لکه: (په فزيك کې د حرکت، سرعت او تعجيل اړوند معادلې د مشتق څخه په ګټه اخېستنې سره حلېږي همدارنګه په کيمياکې هم، د تابع د تحولات، د ځينو ليميټونو په پيدا کولو کې) کار اخيستل کيږي چې ځينې ځايونه يې دلته تر څېړنې لاندې نيسو.

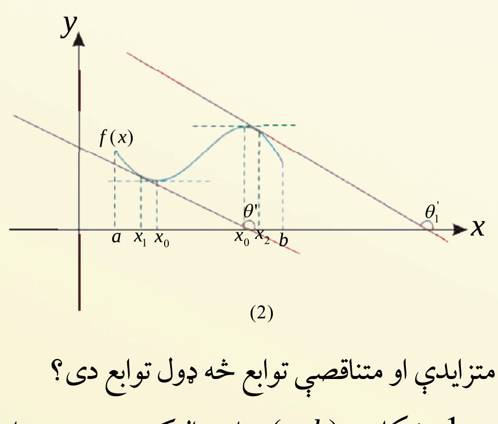
I- د يوې تابع تحولات:

فعاليت

لاندې شکلونو ته پاملرنه وکړئ:



(1)



(2)

- متزايدې او متناقصې توابع څه ډول توابع دي؟
- په (1) شکل د (a,b) په انټروال کې د x_0، x_1 او x_2 په ټکوکې د رسم شويو مماسونو ميلونه د (2) شکل له مماسونو سره پرتله کړئ.
- په (1) او (2) شکلونوکې تر ټولو جګ ټکی او تر ټولو ټيټ ټکی په ګوته کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- په پورته شکلونو کې وښيي چې کومه تابع په کومه ساحه کې متزايده او په کومه ساحه کې تابع متناقصه ده؟
- په متزايده، متناقصه او ثابته تابع کې مشتق و څيړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او په (a,b) انتروال کې د مشتق وړ وي، نو که چيرې په ورکړل شوي انټروال کې $f'(x)>0$ وئ، تابع په هغه انتروال کې متزايده بلل کېږي.

2- که چيرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او د (a,b) په انتروال کې د مشتق وړ وي که به ورکړ شوي انټروال کې $f'(x)<0$ وي، نو تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي.

يادونه: د تابع له تزايد څخه مطلب دا دی چې د x د متحول قيمت په زياتېدو سره د تابع قيمت زيات او د تابع د تناقص څخه مطلب دا دی چې د x د متحول د قيمت په زياتېدو سره د y يا تابع قيمت کم يا ثابت پاتې شي.

لومړی مثال: وښيئ چې د $f(x)=x^3+3x+1$ تابع ګراف متزايد ده.

حل: څرنګه چې تابع کسري بڼه نه لري نو ټول حقيقي عددونه د تعريف ساحه کيدای شي او هم پوهېږو چې د تابع د تزايد شرط $f'(x)>0$ دی، نو لازمه ده چې د تابع مشتق تر مطالعې لاندې ونيسو:

$$f(x)=x^3+3x+1$$

$$f'(x)=3x^2+3$$

ليدل کېږي چې د مشتق لومړی حد تام مربع دی نو د x د ټولو قيمتونو لپاره همېشه مثبت دی. کله چې (+3) ورسره جمع شي بيا هم قيمت يې مثبت دی، نو د $f'(x)>0$ دی نو تابع متزايده ده.

دويم مثال: د $f(x)=x^3-3x+5$ تابع په کوم انتروال کې متناقصه ده؟

حل: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په هره انتروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو د متناقص تابع لپاره لرو $f'(x)<0$ دی، يعنې:

$$f'(x)=3x^2-3<0$$

$$f'(x)=0$$

$$3x^2-3=0$$

$$3x^2=3$$

$$x=\pm1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انټروال کې منفي دی نو تابع په همدې انټروال کې $(-1,1)$ متناقصه ده.

دریم مثال: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د تعریف ساحه پیدا او وروسته د تابع د تزاید شرط په کې څېړو:

$$D_f \to IR$$
$$f(x) = 5x - 4$$
$$f'(x) = 5 > 0$$

څرنګه چې $f'(x) > 0$ نو د ټولو قیمتونو لپاره همېشه مثبت دی. نو تابع متزایده ده.

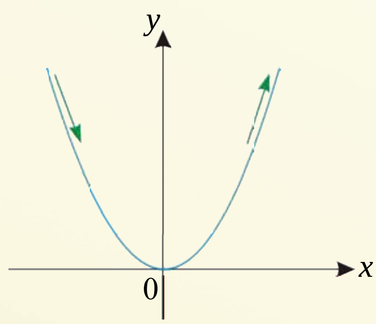
څلورم مثال: د $y = x^2$ د تابع ګراف ته ځیر شئ او وښیئ چې ورکړل شوي تابع په کوم انټروال کې متزایده او په کوم انټروال کې متناقصه ده.

حل: پوهېږو چې که تابع متناقصه وي $y' < 0$ او که تابع متزایده وي $y' > 0$ څخه دی، نو لیکلای شو چې:

$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$

د تناقص شرط $y' < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$

د تزاید شرط $y' > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$



x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	$+$	
y	$+\infty \searrow$	$4 \searrow$	$1 \searrow$	$0 \nearrow$	$1 \nearrow$	$4 \nearrow$	$+\infty$

د تابع له ګراف څخه لیدل کېږي چې تابع د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې متناقصه او د $(0, +\infty)$ په انټروال کې متزایده ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د $f(x)=ax+b$ د تابع تحولات وښئ؟

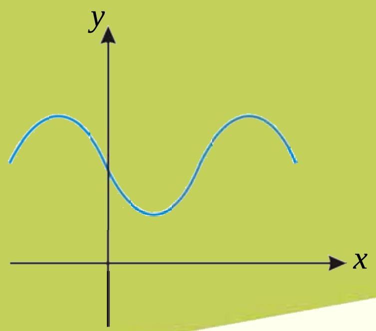
2- د $y=\frac{-3}{4}x-1$ د تابع تحولات وښيئ؟

3- وښيئ چې د $f(x)=2x^2+3x+1$ تابع د $x=1$ په نقطه کې متزايده ده؟

4- د $y=x^2+3x+2$ د تابع د تزايد انتروال و ټاکئ؟

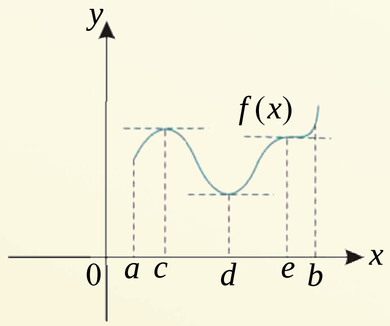
د يوې تابع بحراني (Extreme) ټکي (اعظمي Maximum او اصغري Minimum)

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټيټ ټکی وښيئ او ووايئ چې دا ټکي د څه په نامه ياديږي؟



فعاليت

که په لاندېني شکل کې د $f(x)$ تابع د (a,b) په انټروال کې د مشتق وړ وي.



- د متحول د قيمت په زياتوالي په کوم انټروال کې د تابع قيمت لوييږي.
- د متحول د قيمت په کموالي په کوم انټروال کې د تابع قيمت کميږي.
- د تابع تحولات په (c,d) او (d,e) انټروال کې وڅيړئ.
- د $f(x)$ د تابع مشتق په کومو ټکو کې له صفر سره مساوي دی.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

د يوې تابع په ګراف کې د y پر محور تر ټولو جګې نقطې ته اعظمي (maximum) او تر ټولو ټيټې نقطې ته د تابع اصغري (minimum) وايي، د x د هغو قيمتونو لپاره چې تابع اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د بحراني (Extreme) نقطو په نامه ياديږي.

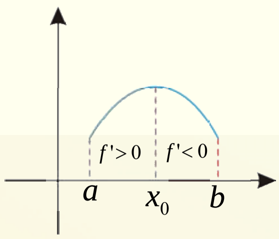
(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف:

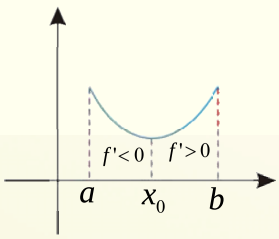
1- **ثابته تابع**: که چیرې د یوې تابع لومړی مشتق همیشه له صفر سره مساوي وي تابع ته ثابته تابع وایي.

2- **متزایده تابع**: که چیرې د یوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې مثبت وي تابع په هغه فاصله کې متزایده بلل کېږي، یعنې $y'>0$ چې په لاندې شکلونو کې لیدل کېږي.

3- **متناقصه تابع**: که چیرې د یوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې منفي وي یعنې $y'<0$ وي، تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي چې په لاندې شکلونو کې لیدل کېږي.



(1)



(2)

1- **اعظمي ټکی**: که چیرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معین ټکي کې د تزاید له حالت څخه د تناقص حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د x_0 په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له مثبت څخه منفي ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قیمت د اعظمي (maximum) په نامه یادېږي.

2- **اصغري ټکی**: که چیرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معین ټکي کې د تناقص له حالت څخه تزاید حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د x_0 په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له منفي څخه مثبت ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قیمت د اصغري (minimum) په نامه یادېږي.

3- **د انعطاف ټکی**: که چیرې مشتق خپله اشاره د x_0 په یوه معین ټکي کې له مثبت څخه صفر ته او بیا مثبت ته یا له منفي څخه صفر او بیا منفي ته بدله کړي x_0 د انعطاف د نقطې په نامه یادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $f(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2+2x$ راکړل شوی ده دا تابع څو د (Extreme) ټکي لري.

حل: د تابع لومړی مشتق پیداکوو بیا هغه مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمتونه په لاس راوړو.

$$f'_{(x)}=3x^2-7x+2$$

$$f'(x)=0$$

$$3x-1=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{3}$$

$$x-2=0\Rightarrow x_2=2$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−		−	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{17}{54}$ Max	↘	−2	↘	−2 Min	↗ $+\infty$

په پایله کې ویلای شو چې اصلي تابع دریمه درجه ده نو د $f(x)$ د تابع مشتق د $(\frac{1}{3})$ او (2) په دوو نقطو کې خپله علامه بدلوي، نو دوه بحراني (Extreme) ټکي لري.

دویم مثال: د $f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع موضعی Extreme ټکي یا نسبتي ټکي مشخص کړي.

حل: لومړی د تابع مشتق په لاس راوړو، وروسته یې علامې ټاکو:

لیدل کیږي چې تابع د $y=\frac{u}{v}$ شکل لري، نو $y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-(2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

دیوه کسر قیمت هغه وخت له صفر سره مساوي دی چې د تابع صورت مساوي له صفر سره وي.

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; -x^2-2x+2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=12$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{-2}=-2.73$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{-2}=0.73$$

x		−3		−2.73		−1		0.73		1	
$f'(x)$	−		−	0	+		+	0	−		−
$f(x)$	↘	$-\frac{2}{15}$	↘	Min	↗	0	↗	Max	↘	−2	↘

(c) ketabton.com: The Digital Library

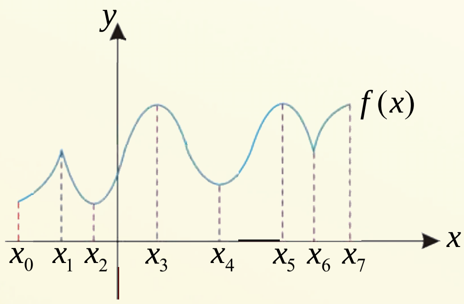
په جدول کې ښکاري چې f' د x_1 او x_2 دواړو خواوو ته خپله علامه بدلوي، نو تابع دوه د Extreme ټکي لري، یعنې تابع اعظمي او اصغیر ټکي لري.

اعظمي او اصغري مطلق ټکي

کیدای شي یوه تابع په یوه انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي ولري، خو په یوه ټاکلي انټروال کې تابع یوازې یوه مطلقه اعظمي او یوه مطلقه اصغري نقطه لري. په شکل کې یې وښیئ؟

فعالیت

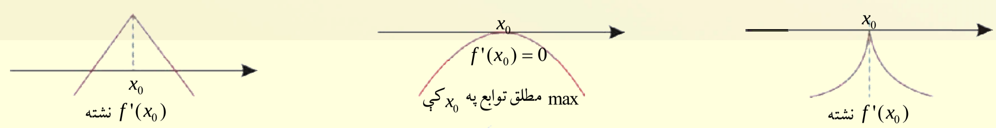
لاندیني شکل ته ځیر شي:



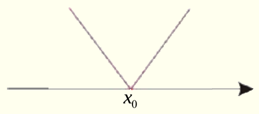
- د $f(x)$ په تابع کې اعظمي او اصغري ټکي وښیئ.
- د $f(x)$ تابع بحراني ټکي په ګوته کړئ.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي لري.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو اصغري او اعظمي لري.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

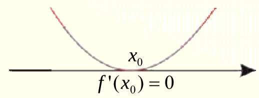
مطلق اعظمي *Maximum*: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ ټکي مطلق اعظمي بلل کیږي، که چیرې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \leq f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلق اعظمي وایي لاندې شکلونه وګورئ.



مطلق اصغري ***Minimum***: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کيږي، کـه چيـرې د f د تعريف په ساحه کې د هر x لپـاره $f(x) \geq f(x_0)$ وي، نـو پـه دې حالـت کـې $f(x_0)$ تـه مطلقـه اصغري وايي، د x هغه قيمتونه چې د هغوی لپـاره تـابع يـا اعظمـي او يـا اصـغري قيمتونـه اخلـي د x دغـه قيمتونه د Extreme په نامه يادېږي.

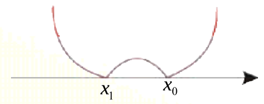


نشته $f'(x_0)$



$f'(x_0)=0$

min مطلق توابع په x_0 کې



$f'(x_0)$ او $f'(x_1)$ نشته

لومړی مثال: د $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$ د تابع مطلق اصغري پيداکړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع مشتق نيسو او د مشتق د تابع حلونه په لاس راوړو:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=x+3$$

$$f'(x)=0$$

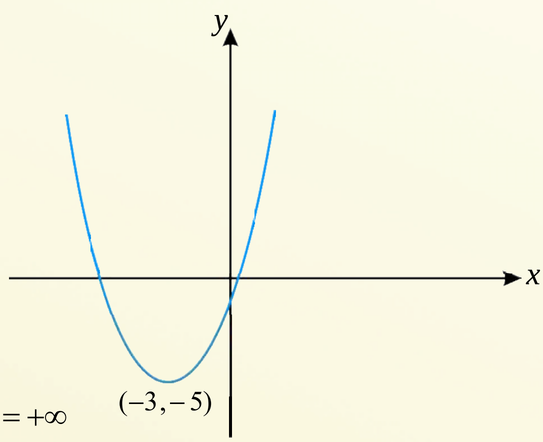
$$x+3=0$$

$$x=-3$$

$$f(-3)=-5$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2})=+\infty$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}x^2+3\lim_{x\to\infty}x-1\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{2}=+\infty$$



x	$-\infty$	-4	-3	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\frac{9}{2}$ ↘	-5 (Min) ↗	3 ↗	$\frac{15}{2}$ ↗	$+\infty$

په پايله کې د $x=-3$ په ټکي کې چې د تابع قيمت (-5) دی او تابع په $(-3,-5)$ ټکي کې مطلق اصغري لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $f(x)=x^3-3x+2$ د تابع اعظمي او اصغري ټکي پيدا او رسم يې کړئ.

حل: د اعظمي او اصغري ټکو د پيداکولو لپاره لومړی د تابع لومړی مشتق پيدا او بيا د مشتق د تابع صفري ټکي په لاس راوړو.

$f(x)=x^3-3x+2$

$f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0$

$3x^2-3=0$

$3x^2=3$

$x^2=1$

$x_1=1 \quad , \quad x_2=-1$

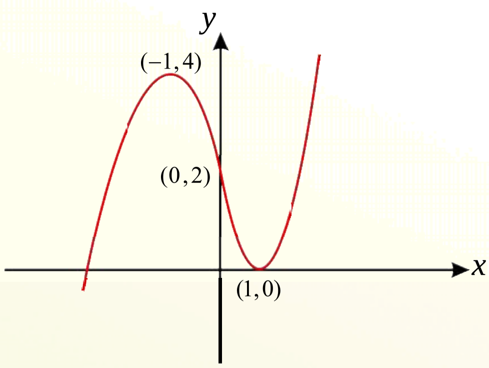
$f(1)=1^3-3\cdot1+2=1-3+2=0$

$f(0)=0-3\cdot0+2=2$

$f(2)=2^3-3\cdot2+2=4$

$f(1)=0 \quad , \quad f(0)=2 \quad , \quad f(2)=4$

$Max\ f(2)=4 \qquad Min\ f(1)=0$



x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0 −	−	0 +	+	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$-\frac{5}{6}$ ↗	4 ↘ (Max)	2 ↘	0 ↗ (Min)	4 ↗	$+\infty$

له جدو څخه ليدل کېږي چې تابع د $(-\infty,-1)$ او $(1,+\infty)$ په انټروالونوکې مطلقه متزايده او $(-1,1)$ په انټروال کې متناقصه ده، نو د $(1,0)$ نقطخ اصغري او د $(-1,4)$ نقطه اعظمي ده.

د يوې تابع د ګراف رسمولو لپاره لاندې ټکي بايد په پام کې ونيسو:

1. د تابع متماديت او نامتماديت مطالعه کړو.
2. د قايمو محوراتو سره د ګراف تقاطع.
3. د لومړي مشتق د اشارې مطالعه د تابع د تزايد او تناقص لپاره.
4. د تابع د اعظمي او اصغري ټکو لپاره د مشتق صفري ټکي پيداکول.
5. د مجانبونو ټاکل.
6. د جدول ترتيبول او د هغوی په مرسته د ګراف رسمول.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ تابع گراف رسم کړئ؟

حل: لیدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده.

1- ددې تابع د تقاطع ټکی د x او y له محورونو سره پیداکؤو:

د y له محور سره دگراف تقاطع د ټکو د پیداکولو لپاره په ورکړشوي تابع کې $x = 0$ وضع کوو:

$x = 0 \qquad y = 2 + 0 - 0 = 2$

نو پورتنی گراف د y محور په $(0,2)$ نقطه کې قطع کوي.

د x د محور سره دگراف د پرېکړې د ټکو دپیدا کولو لپاره y مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمت پیداکوو:

$y = 0 \ , \ 2 + x - x^2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{-2} = -\frac{-1 \pm 3}{2}$$

$x_1 = -1 \ , \ x_2 = 2$

نو پورتنی گراف د x محور په $(-1,0)$ او $(2,0)$ نقطو کې قطع کوي.

2- د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیداکوو، ددې کار لپاره دتابع اول او دویم مشتق څیړو.

$y = 2 + x - x^2$

څرنگه چې د تابع په اعظمي او اصغري په نقطوکې د تابع لومړی مشتق صفر دی نو $y' = 0$ سره وضع کوو:

$y' = 1 - 2x$

$y' = 0 ، \quad 1 - 2x = 0$

$-2x = -1 \ \Rightarrow \ 2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

تابع په $x = \frac{1}{2}$ نقطه کې یو اعظمي یو یا اصغري قیمت لري، دهغې دپېژندنې له پاره دتابع دویم مشتق پـه $x = \frac{1}{2}$ ټکو کې څیړو:

$y'' = -2 < 0$

څرنگه چې y'' تل منفي دی نو په $x = \frac{1}{2}$ کې هم منفي دی څکه نو تابع په $x = \frac{1}{2}$ ټکی کې یو اعظمي قیمت لري څرنگه چې د $x = \frac{1}{2}$ لپاره $y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$ کېږي، نو د تابع اعظمي نقطه داده: $(\frac{1}{2} ، 2\frac{1}{4})$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دامنحني دانعطاف نقطه نه لري ځکه چې دهر x لپاره $y'' < 0$ دی.

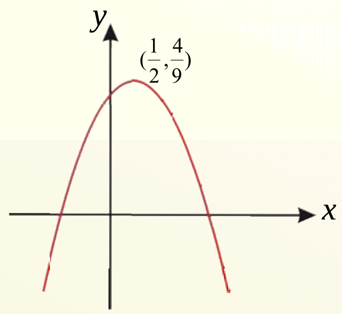
-3 په $\pm\infty$ کې دګراف څېړل:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}(2+x-x^2) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}(2+x-x^2) = -\infty$$

د زياتې روښانتيا لپاره لاندې جدول ترتيب شوی، او دتابع ټول بدلونو نه په هغو کې په ګوته کوو او وروسته نوموړی ګراف رسموو.

x		-1		$\frac{1}{2}$		2	
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	↗	0	↗	$2\frac{1}{4}$	↘	0	↘



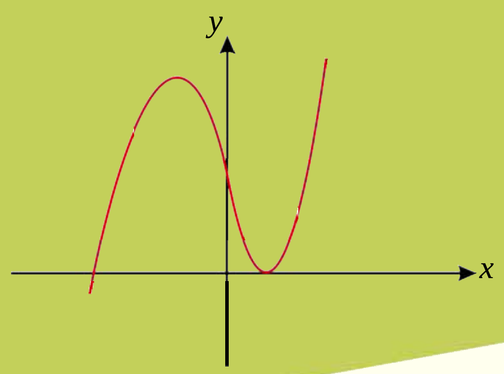
پوښتنې

-1 د لاندې توابعو موضعي Extreme و ټاکئ.

$a)\ f(x) = x^2 - 3x + 2$ $\quad b)\ f(x) = \frac{x+1}{x^2}$ $\quad c)\ y = 3x^2 - 4x + 1$

-2 د $f(x) = 3x^3 - 4x^2$ د تابع مطلقه min پيدا کړئ.

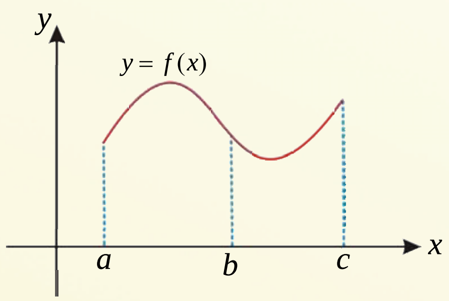
د انعطاف د نقطې ټاکل



هغه ټکي چې د يوې تابع گراف په هغې کې خپل محدبيت، مقعريت ته او يا ددې پر عکس بدلوي د څه په نامه يادېږي؟ آيا په دې ټکي کې د دويم مشتق علامه او قيمت څېړلای شئ؟

فعاليت

لاندينی شکل په پام کې ونيسی.



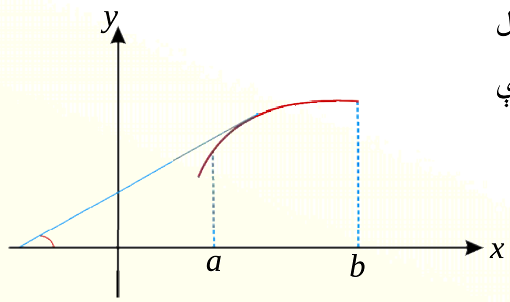
- د $y = f(x)$ د تابع منحني د (a,b) په انټروال کې څه ډول منحني بلل کيږي؟
- د $y = f(x)$ د تابع منحني د (b,c) په انټروال کې څه ډول منحني بلل کيږي؟
- د (a,b) په انټروال کې په منحني يو مماس رسم کړئ او له هغه مماس سره يې پرتله کړئ چې د (b,c) په انټروال کې په منحني رسمېږي.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

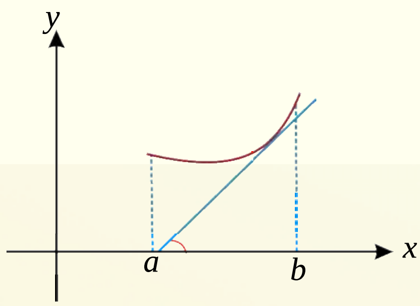
1. د $y = f(x)$ د تابع منحني په يوه انټروال کې پرسيدلی يا محدب بلل کېږي، که چيرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني له پاسه يا پورته خواته پروت وي، په دې صورت کې د تابع دويم مشتق منفي $y'' < 0$ په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول که د $y = f(x)$ د تابع دويم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې منفي وي، نو د تابع ګراف يا منحني په دې انټروال کې محدب پاتې کيږي.



2. د $y = f(x)$ د تابع منحني په يوه انټروال کې ننوتې يا مقعره بلل کيږي، که چيرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني نه لاندې يا ښکته خوا پروت وي، که د $y = f(x)$ د تابع دويم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې مثبت $y''>0$ وي، منحني په دې انټروال کې مقعر بلل کيږي.



تعريف: هغه ټکي چې تابع له مقعريت څخه محدبيت ته او يا ددې پر عکس په کې جهت بدلوي، د انعطاف (Inflection) نقطه بلل کيږي.

که د $y = f(x)$ تابع د $x = x_0$ په ټکي کې چې د تابع دويم مشتق صفر شي($f''(x_0)=0$) وي تابع د $x = x_0$ په ټکي کې د انعطاف نقطه لري او ددې پر عکس تابع د انعطاف نقطه نه لري.

لومړی مثال: د $f(x) = x^2 - 5x + 4$ د تابع ګراف رسم محدبيت او مقعريت يې وڅيړئ.

حل: تابع د متحول د ټولو قيمتونو لپاره معينه ده.

1- د y له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,4)$$

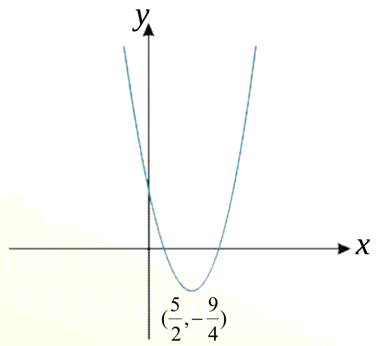
2- د x له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x^2-5x+4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-5x+4=(x-4)(x-1) \Rightarrow x_1=4 \quad , \quad x_2=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x له محور سره د تقاطع ټکي $(4,0)$ او $(1,0)$ دي.

x	$-\infty$	0	1	$\frac{5}{2}$	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$ 4	$\searrow$ 0	$\searrow$ $-\frac{9}{4}$ min	$\nearrow$ 0	$\nearrow +\infty$	



د ګراف، مقعریت او محدبیت د څیړلو لپاره د تابع دویم مشتق په لاس راورو:

$f(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow y'=2x-5$

$f''(x)=2>0$

څرنګه چې $y''>0$ دی، نو په پایله کې ویلای شو چې منحني ننوتي یا مقعر دی.

دویم مثال: هغه انټروالونه وټاکی چې په هغې کې د $y=x^3+9x^2-6x+1$ تابع ګراف محدب یا مقعر وي.

حل:

$y=x^3+9x^2-6x+1$

$y'=3x^2+18x-6 \Rightarrow y''=6x+18$

$y''<0 \Rightarrow 6x+18<0$

$6x<-18 \Rightarrow x<-3$

$y''>0 \Rightarrow 6x+18>0$

$6x\geq-18$

$x>-3$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$ محدب	انعطاف	$\cup$ مقعر

څرنګه چې لیدل کیږي د تابع دویم مشتق په $(-\infty,-3)$ انټروال کې منفي او د $(-3,+\infty)$ انټروال کې مثبت دي نو دا ډول ګراف په لومړی انټروال کې محدب او په دویم کې مقعر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $f(x)=x^5-5x^3$ د تابع د انعطاف ټکی و ټاکئ؟

حل:

$$f(x)=x^5-5x^3 \Rightarrow f'(x)=5x^4-15x^2$$
$$f''(x)=20x^3-30x$$
$$f''(x)=0$$
$$20x^3-30x=0$$
$$x(20x^2-30)=0$$
$$x_1=0$$
$$20x^2-30=0$$
$$x^2=\frac{3}{2} \Rightarrow x_2=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad , \quad x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\cap$	-13.65	$\cup$		$\cap$	$-6\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\cup$	

لیدل کیږي چې په $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$، $x=0$ او $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ کې د تابع دویم مشتق صفر دی یا $f''(x)=0$ علامه بدلوي او په دې ټکو کې مماس رسمیدلی شي، چې هغه ټکی د انعطاف ټکی دی.

پوښتني

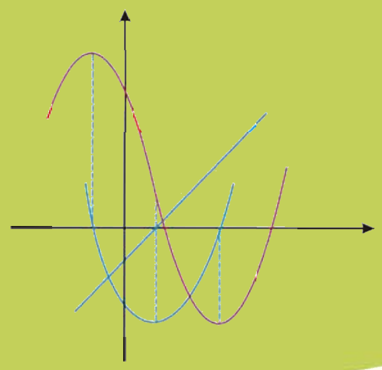
1. د $f(x)=x^2-4$ د تابع محدبیت او مقعریت وټاکئ.
2. د $f(x)=-2x^2-1$ د تابع د انعطاف نقطه وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منحني‌ګانو رسمول

د دویمې درجې تابعګانو ګراف

د مخامخ شکل په اړه خپل نظر بیان کړئ.



فعالیت

- د $f(x)=x+1$ د تابع ګراف د $f(x)=-x+1$ د تابع له ګراف سره پرتله کړئ.
- د $y=ax^2+bx+c$ د تابع د تعریف ساحه و ټاکئ آیا دا تابع متمادي ده؟
- د نوموړې تابع لومړی مشتق پیدا او د Maximum او Minimum ټکي او د تناظر محور یې وټاکئ.
- د تابع لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x\to\pm\infty$ وکړي.
- له محورونو سره د تقاطع ټکي و ټاکئ.
- د تحولاتو جدول ترتیب او نوموړی منحني رسم کړئ.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

1- د تابع د تعریف ساحه: لیدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره ټاکلې ده، یعنې:

$$D_f\to(-\infty,+\infty)$$

نو تابع د خپل تعریف په ساحه کې متمادي ده.

2- د تابع د بحراني ټکو او د تناظر محور ټاکل:

$$f'(x)=2ax+b=0$$
$$f'(x)=0$$
$$2ax+b=0$$
$$2ax=-b$$
$$x=\frac{-b}{2a}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x = \frac{-b}{2a}$ قیمت په اصل تابع کې وضع کوو:

$$y = a(-\frac{b}{2a})^2 + b(-\frac{b}{2a}) + c \Rightarrow a\cdot\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

$$y = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow \frac{4ac - b^2}{4a}$$

د $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکی بحراني یعنې اعظمي یا اصغري دی.

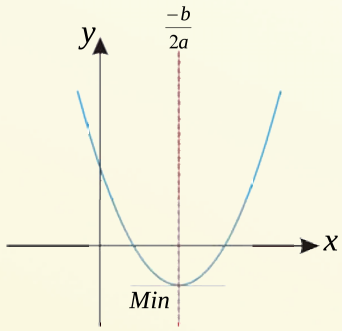
الف: که $a > 0$ وي، نو: $a > 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

تابع په $(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې Min لري.

ب: که $a < 0$ وي، نو: $a < 0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

تابع په $(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې Max لري.

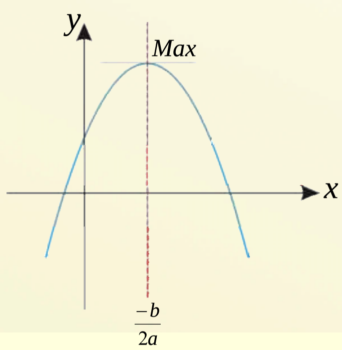
3- د ګراف د رسمولو لپاره جدول ترتیب او ګراف یې رسموو:



$a > 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗	$-\infty$

خرنګه چې $a > 0$ د منحني خوله(جهت) پورته خواته او د $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4})$ اصغري نقطه ده.



$a < 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗	$-\infty$

خرنګه چې $a < 0$ د منحني خوله(جهت) پورته خواته او د $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4})$ اعظمي نقطه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $f(x)=x^2-4x+3$ د تابع تحولات مطالعه او گراف يې رسم کړئ.

حل:

1- د تابع د تعریف ساحه $(-\infty,+\infty)$ تابع د ټولو حقيقي قیمتونو لپاره تاکلي ده، نو تابع په دې انټروال کې متمادي ده.

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x^2-4x+3=0 \\ (x-1)(x-3)=0 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{array}\right\} (1,0) \quad , \quad (3,0)$$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

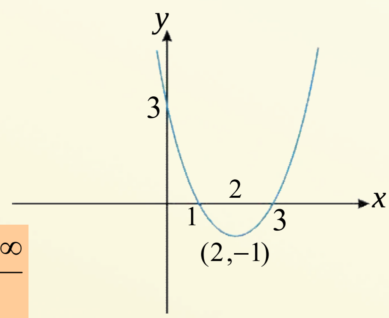
$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0-4\cdot 0+3 \\ y=3 \end{array}\right\} (0,3)$$

4- د تابع د extreme ټکو د پیداکولولپاره د لومړی مشتق صفري ټکي پیدا او جدول يې ترتیبوو:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2 \\ f(2)=2^2-4\cdot 2+3=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow V(2,-1)\min$$

$$x\to\pm\infty \Rightarrow f(x)\to\pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x^2-4x+3\right]=+\infty$$



x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
y'		−		−		−		+		+	
y	$-\infty$	↘	3	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	$+\infty$
							Min				

دويم مثال: د $f(x)=-x^2+2x$ د تابع تحولات مطالعه او گراف يې رسم کړئ.

حل: ليدل کيږي چې تابع د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوې ده، نو:

1- د تابع د تعريف ساحه عبارت دی له: $(-\infty,+\infty)$ چې په دې ساحه کې تابع متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د تابع د منحني د تقاطع ټکی د x له محور سره:

$f(x)=0$

$-x^2+2x=0$

$x(-x+2)=0$ — د تقاطع ټکی

$x_1=0$ $(0,0)$

$-x+2=0$

$x_2=2$ $(2,0)$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$x=0$

$f(x)=-x^2+2x$

$f(x)=0+2\cdot 0$

$f(x)=0$ $(0,0)$

4- د تابع د extreme نقطو د پیداکولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیداکوو او جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

$D_f \to (-\infty,+\infty)$

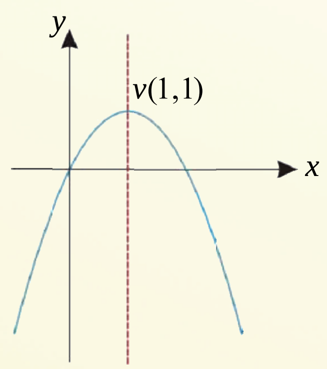
$f(x)=-x^2+2x$

$f'(x)=-2x+2=0$

$-2x+2=0$

$-2x=-2$

$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ f(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow V(1,1)Max$



x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	−	−	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	1 (Max) ↘	0 ↘	$-\infty$

په جدول کې لیدل کیږي چې د مشتق علامه د مثبت څخه منفي ته او یا د تزاید حالت څخه تناقص ته شکل بدلوي نو تابع د $(1,1)$ په ټکي کې اعظمي ده.

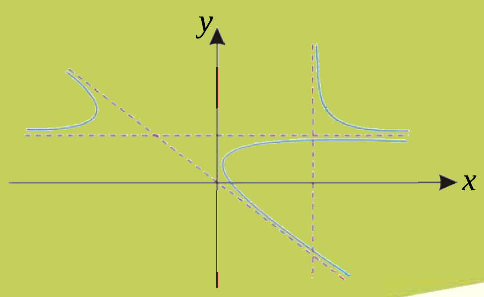
پوښتنې

1. د $f(x)=2x^2-x-1$ د تابع ګراف رسم کړئ.
2. د $f(x)=x^2-x-2$ د تابع د ګراف بدلونونه وڅیړئ او ګراف یې رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توابعو د گرافونو مجانبونه

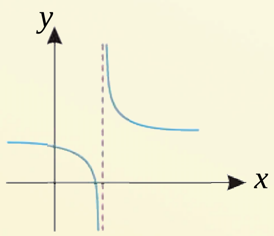
شکل ته پام وکړئ ټکی ټکی کرښې د څه په نامه یادېږي، نومونه یې واخلئ.



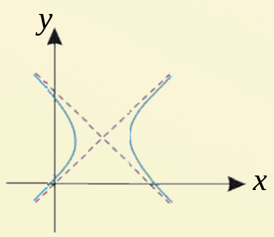
- مجانبونه څه دول کرښې دي؟
- مجانبونه، منحنيګان په کومو ټکو کې قطع کوي؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

مجانبونه: هغه مستقیمې کرښې دي چې د منحني لپاره د لاربنود حیثیت لري او د منحني کرښه غوځه کړي، هغه تابعګانې چې د متحول د ځینو قیمتونو لپاره غیر متمادي وي مجانبونه لري او په درې ډوله دي.



1- **عمودي مجانب**: د $y = f(x)$ تابع هغه عمودي مجانب لري چې $x \to a$ او $y \to \infty$ وکړي، یعنې $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ شي یا په بل عبارت په کسري تابعګانو کې که چیرې د کسر مخرج مساوي په صفر شي نوموړې تابع بې‌نهایت خوا ته تقرب کوي، نو ددې ډول مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج له صفر سره مساوي وضع کوو.

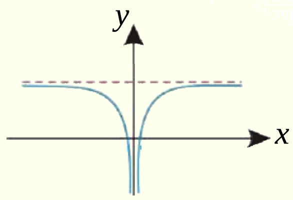


2- **مایل مجانب**: د $y = f(x)$ کسري تابع کله چې د صورت او مخرج د تقسیم حاصل د یوه مستقیم خط په شکل ($y = ax + b$) لاسته راشي داسې چې $a \neq 0$ وي په لاس راځي او دا هغه وخت امکان لري چې تابع د مایل مجانب لرونکې وي، یعنې د متحول د صورت درجه او د متحول د مخرج درجه له درې څخه لوړه وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یاد ولرئ چې که یوه تابع د افقي مجانب لرونکي وي، مایل مجانب نه لري او بر عکس که چیرې مایل مجانب ولري افقي مجانب نه لري.

3- **افقي مجانب**: یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده، چې که $x \to \infty$ وکړي د تابع قیمت یو ثابت مقدار شي او یا په بل عبارت یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې کـه $x \to \infty$ وکـړي، نـو $y \to c$ ته تقرب کوي، یعنې $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = c$ شي.



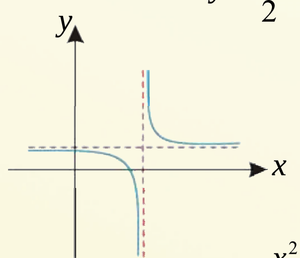
لومړی مثال: د $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-4}$ تابع عمودي مجانب پیداکړئ.

حل: د عمودي مجانب د پیداکولو لپاره د کسر مخرج مساوي په صفر وضع کوو، لرو چې:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x+1}{2x-4}\right) = \frac{1}{2}$$

افقي مجانب عبارت دی له: $y = \dfrac{1}{2}$

x	-1	0	$+1$
y	0	$-\frac{1}{4}$	-1



دویم مثال: د $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$ د تابع د منحني مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- مایل مجانب: ددې مجانب د پیداکولو لپاره د تابع صورت د تابع پر مخرج وېشو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} = x+2-\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y = x+2$$

2- عمودي مجانب: د دې مجانب د پیداکولو لپاره د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

3- افقي مجانب: څرنګه چې تابع مایل مجانب لري، نو افقي مجانب نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $f(x)=\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- عمودي مجانب: د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\left.\begin{matrix} x+1=0 \\ x_1=-1 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} x-2=0 \\ x_2=2 \end{matrix}$$

نو $x=2$ او $x=-1$ د تابع عمودي مجانبونه دي.

2- افقي مجانب: د افقي مجانب د پیداکولو لپاره د تابع لیمیټ په لاس راوړو:

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=1$$

نو $y=1$ د تابع افقي مجانب دی.

3- څرنګه چې د تابع د صورت له وېش څخه پر مخرج د $y=ax+b$ خطي معادله پیدا نه شوه، نو تابع مایل مجانب نه لري.

د مجانبو د ټاکلو عمومي لاره:

که چیرې د $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ په ناطقه تابع کې m او n په ترتیب سره د صورت او مخرج درجې وي، نو:

الف: که $m<n$ وي، نو د x محور افقي مجانب دی.

ب: که $m=n$ وي، نو $y=b$ افقي مجانب دی، داسې چې b د m او n د درجو د حدودو د ضریبونو نسبت دی.

ج: که چیرې $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري، ولې د مایل مجانب احتمال یې شته.

د: که چیرې $m=n+1$ وي(که د صورت درجه د یوه واحد په اندازه له مخرج څخه لویه وي) تابع هرو مرو مایل مجانب لري، په دې حالت کې افقي مجانب نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

د لاندې توابعو مجانبونه وټاکئ.

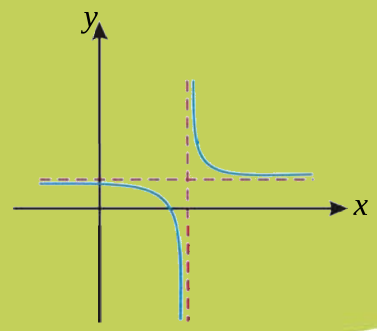
1) $f(x)=\dfrac{3x-6}{x^2-x-2}$ 2) $f(x)=\dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

3) $f(x)=\dfrac{8}{x^2-4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هوموګرافیک تابع ګانو ګراف

شکل تـه پاملرنـه وکـړئ دا شـکل د څـه ډول تـابع ګـراف دی؟ افقي او عمودي مجانبونه يې وښيئ.



- هوموګرافیک تابع څه ډول تابع ده، په يوه مثال کې يې واضح کړئ.
- د $y=\frac{1}{x}$ د تابع ګراف رسم کړئ.
- د نوموړي تابع مجانبونه لومړی پیدا او بیا يې رسم کړئ.
- د تابع دګراف تقاطع د x او y له محورونو سره پیدا کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسي بیانوو:

هغه تابعګاني چې د $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ شکل ولري، هوموګرافیک تابعګاني بلل کېږي، داسې چې $c \neq 0$ وي. دا ډول توابع دوه مجانبونه لري چې:

1- افقي مجانب يې:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax}{x}+\frac{b}{x}}{\frac{cx}{x}+\frac{d}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} \Rightarrow y=\frac{a}{c}$$

2- عمودي(قایم) مجانب يې:

$$cx+d=0 \Rightarrow cx=-d \Rightarrow x=-\frac{d}{c}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\frac{2x-1}{x-3}$ د تابع بدلونونه وڅېړئ او ګراف يې رسم کړئ.

حل:

$$x-3=0$$
$$x=3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. څرنګه چې د تابع مخرج د $x=3$ په قیمت کې صفر کېږي نو تابع پرته د $x=3$ څخه د متحول په ټولو قیمتونو کې معینه ده، یعني د تابع د تعریف ساحه ټاکو: $Domin = IR \setminus \{3\}$

2. د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=0 \\ 2x-1=0 \\ 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{array}\right\} (\frac{1}{2},0)$$

3. د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{2\cdot 0-1}{0-3}=\frac{1}{3} \quad \Big\} (0,\frac{1}{3})$$

4. د مجانبونو ټاکل:

الف- افقي مجانب: $y=2$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-3}=2$ یا $f(x)=\frac{a}{c}=\frac{2}{1}=2$

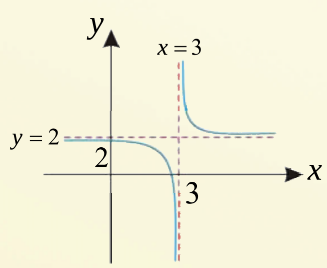
ب- عمودي مجانب: $x=3 \Rightarrow x-3=0$ یا $x=-\frac{d}{c}=-\frac{-3}{1}=3$

5. د تابع د extreme ټکي پیدا کوو او جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

$$f'(x)=\frac{2(x-3)-(2x-1)}{(x-3)^2}=\frac{-5}{(x-3)^2}<0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x-3)^2-(-5)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10}{(x-3)^3}$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↘	نه دی تعریف شوی	$+\infty$ ↘



دویم مثال: د $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ د تابع د ګراف بدلونونه و څېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

-1 د تابع د تعریف ساحه $D_f \to IR\setminus\{-1\}$ یعني تابع په $x=-1$ ټکي کې تعریف شوې نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره: $y=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره: $x=0 \Rightarrow y=\frac{0-1}{0+1}=-1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$

4- د مجانبونو ټاکل:

الف- عمودی مجانب: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

ب- افقي مجانب: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(x)=y=1$

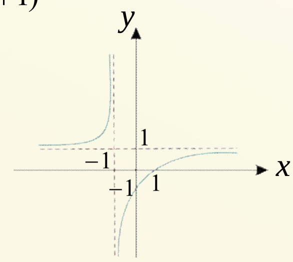
5- د تابع extreme نقطې پیدا کوو، جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}>0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x+1)^2-2\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

x	$-\infty$	-1	
$f'(x)$	$+$		$+$
$f''(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$1 \nearrow$	نه دی تعریف شوی	$\nearrow 1$



دریم مثال: غواړو د $f(x)=\frac{2x-5}{x}$ تابع ګراف رسم کړو.

حل:

1- د تابع د تعریف ساحه تر څېړنې لاندې نیسو لیدل کېږي چې تابع پرته د $x=0$ څخه نور د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده، یعنې: $D_f \to IR\setminus\{0\}$

2- د محورونو سره د تقاطع ټکي

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x-5}{x}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x-5=0 \\ 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (2.5,0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب- د y له محور سره تقاطع: د $x=0$ لپاره د $f(x)$ تابع تعریف شوي نه ده، نو د y محور سره تقاطع نه لري.

3- **مجانبونه**:

الف- عمودي مجانب: څرنګه چې په مخرج کې یوازې x موجود دی، نو $x=0$ یې عمودي مجانب دی چې د y محور کېږي.

ب- افقي مجانب: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x-5}{x}\right]=2$ نو $y=2$ د تابع افقي مجانب دی.

4- د بحراني ټکو پیداکول: د بحراني ټکو د پیداکولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیداکوو

$$f(x)=\frac{2x-5}{x}$$

$$f'(x)=\frac{2\cdot x-(2x-5)}{x^2}=\frac{2x-2x+5}{x^2}$$

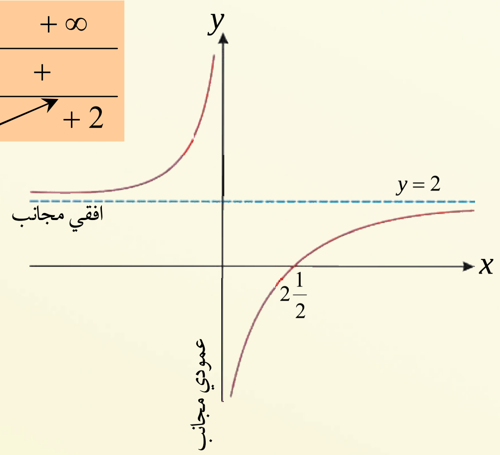
$$f'(x)=\frac{5}{x^2}>0$$

څرنګه چې $f'(x)>0$ دی، نو تابع متزایده ده.

د ګراف د رسمولو لپاره د تابع تحولات په جدول کې ترتیبوو:

x	$-\infty$		0		2.5	$+\infty$
$f'(x)$		+		+		+
$f(x)$	2	↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗	0	↗ $+2$

نه دی تعریف شوی



پوښتنې

1. د $f(x)=\frac{x-1}{x+3}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.

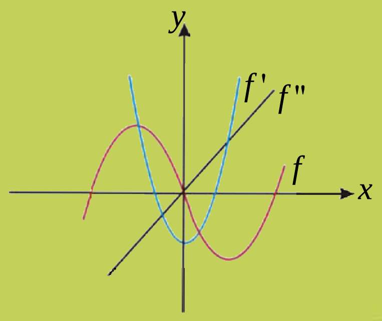
2. د $f(x)=\frac{x}{x-4}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دريمې درجې يو مجهوله تابع ګراف $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، $a \neq 0$

مخامخ شکل د ځينو توابعو ګرافونه راښيي تاسې د هرې تابع د ګراف په هکله خپل نظر بيان کړئ.



- د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع په اړه فکر وکړئ او ووايئ چې تابع څومه درجه تابع ده؟
- د نوموړې تابع ضريبونه او ثابت حد وليکئ.
- د نوموړې تابع دويم مشتق پيدا کړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

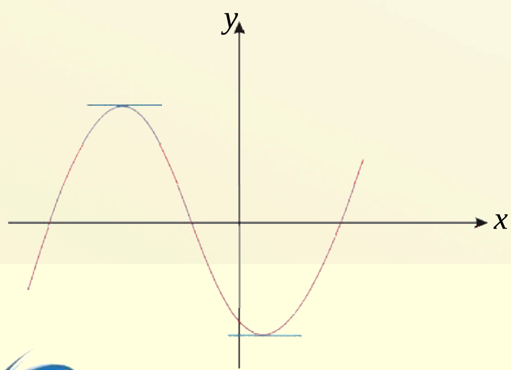
1. د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، په دريمه درجه تابع کې چې $a > 0$ وي داسې په پام کې نيسو که چيرې د تابع لومړی مشتق پيدا کړو دويمه درجه تابع په لاس راځي، نو د $f'(x) = 0$ لپاره د دويمې درجې د معادلې حل په پام کې نيسو او Δ يې مطالعه کوو که چيرې د معادلې Δ له صفر څخه لوی $(\Delta f' > 0)$ وي، نو معادله(د تابع مشتق) دوه حله لري، که چيرې $a > 0$ وي منحني له کين لوري څخه ښي لوري ته يوه نسبي اعظمي نقطه(Maximum) او يوه نسبي اصغري(Minimum)لري.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$a > 0 \Rightarrow \Delta f' > 0$

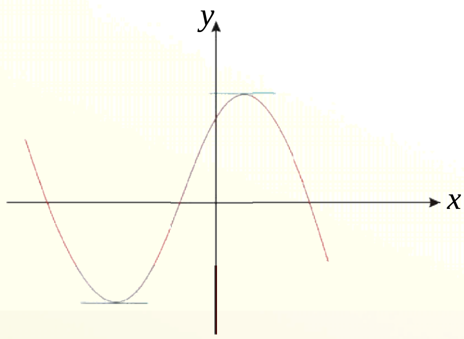
x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗		↘		↗ $+\infty$



2. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، په تابع کې چې $a<0$ ، $f'(x)=0$ او $\Delta f'(x)>0$ معادله دوه جذرونه لري، که چيرې $\Delta f'>0$ نو منحنی د کين لوري څخه ښی لوري ته يوه نسبي اصغری(Minimum) او يوه نسبي اعظمي(Maximum) نقطه لري.

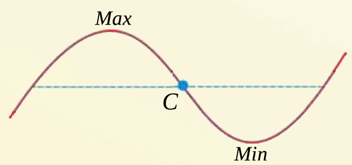
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$
$$a<0 \Rightarrow \Delta f'>0$$

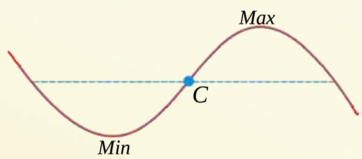
x		x_1		x_2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↘		↗		↘ $+\infty$



3. که د دريمې درجې تابع منحني نسبي بحراني Extreme ولري، د Extreme دټکو د منځني ټکي يا د انعطاف د نقطې مختصات يې:

$$I(x_c,y_c)=\left(\frac{x_{max}+x_{min}}{2},\frac{y_{max}+y_{min}}{2}\right)$$





4. د دريمې درجې تابع د تناظر ټکی د تابع د انعطاف ټکی:

$$f'(x)=0$$
$$3ax^2+2bx+c=0$$

چې د تناظر ټکي يې وروسته د نوموړي معادلې د حل څخه د تناظر مرکز $x=-\dfrac{b}{3a}$ په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

5. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ په تابع کې که $a<0$ وي او $f'(x)=0$ سره وضع شي او $\Delta f'(x)=0$ نو معادله یو یا دوه مساوي جذرونه لري په هغه صورت کې چې $f'(x)\le 0$ وي، نو په دې صورت تابع متناقصه ده او که چیرې $f'(x)\ge 0$ وي نو په دې صورت کې تابع متزایده ده.

(2) (1)

لومړی مثال: د $f(x)=(x-1)(x+2)^2$ د تابع تحولات وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل: لومړی د تابع Extreme ټکو مختصات په لاس راوړو، وروسته د لومړي مشتق په مرسته ګورو چې تابع په کومه برخه کې متزایده او په کومه برخه کې متناقصه ده د محورونو سره د تقاطع ټکي پیداکوو او د اعظمي او اصغري نقطو د تشخیص او د انعطاف نقطو د پیداکولو لپاره د تابع دویم مشتق په کار وړو د تحولاتو جدول یې ترتیبوو او بیا یې ګراف رسموو: $f(x)=x^3+3x^2-4$

$f'(x)=3x^2+6x$

$3x^2+6x=0$

$x(3x+6)=0$

$x_1=0 \quad , \quad 3x+6=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=-2$

$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad , \quad x_2=-2$

$f(0)=0^3+3\cdot 0^2-4=-4$

$f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-4$

$\quad =-8+12-4=0$

$f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 6x+6=0$

$6x=-6$

$x=-1$

د انعطاف د نقطې د لاسته راوړلو لپاره $x=-1$ په اصلي تابع کې وضع کوو چې د $f(x)$ قیمت لاسته راځي:

$f(-1)=(-1-1)(-1+2)^2=-2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف ټکی: $I(-1,-2)$

د محورونو سره تقاطع:

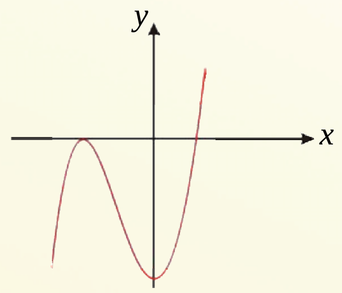
الف- د x له محور سره تقاطع:

$$y=0$$
$$(x-1)(x+2)^2=0$$
$$\left.\begin{array}{l}x-1=0\\x=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(x+2)^2=0\\x+2=0\\x_2=-2\end{array}\right\} \Rightarrow (1,0)\ ,\ \ (-2,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

$$x=0$$
$$y=0^3+3\cdot 0^2-4=-4 \ \ \Rightarrow (0,-4)$$

x	$-\infty$	-2		-1		0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$
$f''(x)$	$-$		$-$		$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 (max)	↘	-2	↘	-4 (min)	↗ $+\infty$



دویم مثال: د $f(x)=-x^3+3x^2$ د تابع تحولات وڅېړئ او ګراف رسم کړئ.

حل: د تابع لومړی مشتق پیداکوو او وروسته یې صفري نقطې ټاکو او د تابع اعظمي او اصغري نقطې په لاس راوړو.

-1

$$f(x)=-x^3+3x^2$$
$$f'(x)=-3x^2+6x$$
$$f'(x)=0 \ \Rightarrow \ -3x^2+6x=0 \ \Rightarrow \ x(-3x+6)=0$$
$$x_1=0 \ \ , \ \ -3x+6=0 \ \Rightarrow \ -3x=-6 \ \Rightarrow \ x_2=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اعظمي او اصغري ټکي عبارت دي له:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-0^3+3\cdot 0^2=0 \\ f(2)=-2^3+3\cdot 2^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)\ ,\ \ (2,4)$$

2- د محورونو سره تقاطع:

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ -x^3+3x^2=0 \\ x^2(-x+3)=0 \\ x_1=0\ \ ,\quad -x+3=0 \\ \qquad\qquad x_2=3 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)\quad ,\qquad (3,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

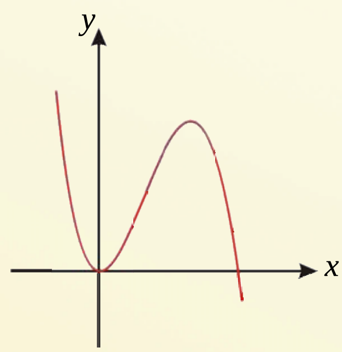
$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=-0^3+3\cdot 0^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)$$

3- د انعطاف د نقطې د پیداکولو لپاره $f''(x)$ مطالعه کوو:

$$f''(x)=-6x+6=0$$
$$x=1$$
$$f(x)=-x^3+3x^2$$
$$f(1)=2\ \ \Rightarrow\ I(1,2)$$

4- اوس يې جدول ترتيبوو او ګراف يې رسموو:

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$-$
$f''(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗	2	↗	4	↘ $-\infty$
		نسبي Min				نسبي Max	



(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ د تابع د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې د تناظر مرکز د $x = \frac{-b}{3a}$ له رابطې څخه لاسته راځي، نو:

$$x = \frac{-b}{3a} = \frac{-(-3)}{3\cdot 1} = 1 \Rightarrow f(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 1 + 1 = 0$$

$C(1,0)$ د تناظر د مرکز مختصات

پوښتنې

1. د لاندې تابعګانو د تحولاتو جدول ترتیب او ګرافونه یې رسم کړئ.

$a)\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1 \quad , \quad b)\ f(x) = -(x-1)^3$

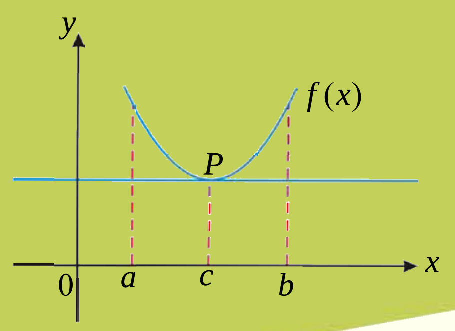
2- د $f(x) = -2x^2 + 6x - 3$ د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

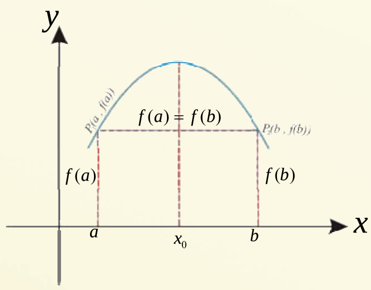
(c) ketabton.com: The Digital Library

د رول قضيه

Rolle Theorem

په مخامخ شکل کې د $f(x)$ تابع او د Δ مستقیم خط یو له بل سره څه اړیکې لري او $f'(c)$ له څه سره مساوي دی.





- په مخامخ شکل کې د (a,b) په انټروال کې د $f(x)$ په منحني داسې ټکي شته چې له هغو څخه په منحني داسې مماس رسم شي چې د x له محور سره موازي وي.
- د $f(x)$ تابع په کوم انټروال کې متمادي او په کومه فاصله کې د مشتق وړده.
- که چیرې $f(a)=f(b)$ وي، نو د x_0 ټکی په (a,b) انټروال کې وخیرئ.

د پورتني فعالیت څخه لاندې قضیه بیانولای شو:

قضیه: که چیرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a<x<b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a)=f(b)$ وي، نو لږ تر لږه د x_0 یو ټکی په $a<x<b$ انټروال کې شته چې د $f'(x_0)=0$ شي.

ثبوت: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په ورکړل شوی انټروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو بحراني Extreme ټکی لري.

1- که $f(x)=c$ ثابته تابع وي، نو واضح ده چې $f'(x)=0$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که د $f(x)$ تابع ثابته نه وي، او $x_2, x_1 \in (a,b)$ او $f(x_1) > 0$ وي، نو تابع په $[a,b]$ کې یو $x_0 \in [a,b]$ کې یو Maximum قیمت لري چې $f(x_0) \geq f(x_1) > 0$ شي او همدا راز که $f(x_2) < 0$ وي، نو تابع یو اصغري Minimum قیمت لري.

څرنګه چې په Extreme نقطو کې د تابع مشتق صفر دی، نو $f'(x_0) = 0$ کیږي.

لومړی مثال: د رول قضیه د $f(x) = \cos x$ د تابع لپاره په $[a,b] = (\pi, 5\pi)$ فاصله کې تطبیق کړئ.

حل: څرنګه چې $f(\pi) = f(5\pi) = -1$ سره وي نو د $f(x)$ تابع د هر x لپاره د مشتق وړ ده نو د $(\pi,5\pi)$ په انټروال کې متمادي او په $(\pi,5\pi)$ په انټروال کې مشتق منونکی ده چې د Rolle د قضیې مطابق په $(\pi,5\pi)$ کې لږ تر لږه یو x_0 موجود دی چې د هغه قیمت لپاره $(\cos x)' = 0$ شي. څرنګه چې $(\cos x)' = -\sin x$ دی، نو باید $-\sin x = 0$ معادلې لږ تر لږه یو حل په $(\pi,5\pi)$ کې موجود وي.

$-\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ دا معادله په $(\pi,5\pi)$ کې درې ځله $4\pi, 3\pi, 2\pi$ قیمتونه اخېستلای شي.

دویم مثال: د رول قضیه د $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ تابع په $[a,b] = [-1,1]$ فاصله کې تطبیق کړی.

حل: لیدل کیږي چې تابع د پیل او پای په ټکو کې د مشتق وړ نه ده، ولې د رول د قضیې د تطبیق وړ ده ځکه $f(-1) = f(1) = 0$ دی $f(0)$ تابع په $[-1,1]$ کې متمادي ده او په $[-1,1]$ کې د x_0 یو عدد شته چې $f'(x_0) = 0$ شي او هغه $x_0 = 0$ دی.

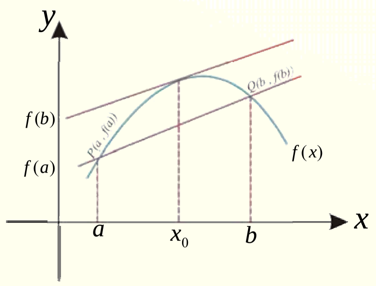
د $y'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$ فورمول څخه په ګټه اخېستنې سره مشتق په لاس راوړو:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$$

د متوسط قیمت قضیه (لاگرانژ قضیه):

فعالیت

مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:



- د یوې مستقیمې کرښې میل لـه کـومې رابطې څخه پـه لاس راځي؟
- د $\overline{PQ}$ د مستقیمې کرښې میل پیداکړئ.
- د $\overline{PQ}$ د کرښې میل د $f(x)$ د تابع له مشتق سره څه اړیکه لري؟

له پورتنۍ فعالیت څخه قضیه داسې بیانوو:

قضیه: که چیرې $f(x)$ د $[a,b]$ په فاصله کې متمادي او د (a,b) پـه فاصـله کـې د مـشتق وړ وي د (a,b) د انتـروال څخـه د c یـو عـدد شـته دی داسـې چـې: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

یعني: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی.

ثبوت: یوه مرستندویه تابع په پام کې نیسو، لیدل کیږي چې:

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$$

$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad \text{......... I}$$

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad \text{......... II}$$

نو $g(a)=g(b)$ سره دی د رول د قضیې پر بنسټ سره د c عـدد د (a,b) انتروال کې شته دی چې $g'(c)=0$ دی نو:

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow g'(x)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $f(x)=2x^3-8x+1$ په تابع کې د متوسط قیمت قضیه په $[a,b]=[1,3]$ کې وڅیړئ.

حل: لیدل کېږي چې د $f(x)$ تابع په $[1,3]$ کې متمادي او په $(1,3)$ کې د مشتق وړ ده، نو د متوسط قیمت له قضیې سره سم په $(1,3)$ کې یو x_0 شته داسې چې:

$$f(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{36}{2}=18$$

د c د پیداکولو لپاره لرو:
$$f'(x_0)=6x^2-8=18 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{26}{6}}$$

څرنګه چې $x=\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ کې ګډون لري، نو $x_0=\sqrt{\frac{13}{3}}$ دی.

او $x=-\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ فاصله کې واقع نه ده، نو د قبول وړ نه ده.

پوښتنې

1- که چیرې د $f(x)=\sqrt{x(4-1)}$ تابع د $[0,4]$ په انټروال کې راکړل شوې وي د x_0 قیمت داسې پیداکړئ چې د رول قضیه په پورتني تابع کې صدق وکړي.

2- که د $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ تابع راکړل شوې وي د x_0 قیمت د $[0,3]$ په فاصله کې داسې وټاکئ چې د رول قضیه په هغې کې صدق وکړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د هوپیتال قاعده (L' Hopitall)

مخامخ مساوات څه بیانوي؟

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

فعالیت

- د $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$ د تابع لېمیټ په هغه صورت کی پیدا کړئ چې $x\to 1$ ته تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لېمیټ سره یې پرتله کړئ.
- د $f(x)=\frac{3x^4-3x^2-4x-1}{2x^2-4x^3+2x^4}$ د تابع لېمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لېمیټ سره یې پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه دا قاعده بیانو:

د هوپیتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې د (a,b) په انتروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چیرې $\frac{f(x)}{g(x)}$ د لېمیټ نسبت $x\to a$ قیمت کې د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل او په $x\to\infty$ کې د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي په دې حالت کې د تابع د لېمیټ د پیدا کولو لپاره د $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پیدا کوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي مشتق نیولو ته ادامه ورکوو ...n تر څو د ابهام شکل ختم شي د مثال په ډول:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\frac{2\cdot 2^2+2-10}{2^2-4}=\frac{0}{0}=0$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{4x+1}{2x}=\frac{4\cdot 2+1}{2\cdot 2}=\frac{9}{4}$$

یا

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2}=\frac{2\cdot 2+5}{2+2}=\frac{9}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د لوپیتال له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره د لاندې توابعو لیمیټونه پیدا کړی.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}$ 2) $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}$ 3) $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}$

لومړی ځواب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x-\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

دویم ځواب:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=\frac{4\cdot 3^3}{1}=108$$

دریم ځواب:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{6x-4}{14x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

پوښتنې

د لوپیتال د قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

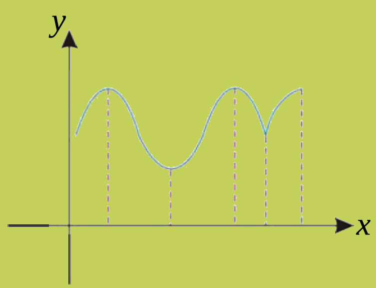
$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, $b)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}$

$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}$, $d)\ \lim_{x\to \infty}\frac{x^5}{3x^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بحراني ټکو تطبیق

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی وښیئ او دا ټکی د څه په نامه یادیږي.



1- دوه عددونه پیدا کړئ چې مجموعه یې 20 او د ضرب حاصل یې لوی ممکن قیمت ولري.

حل: که لومړی عدد ته x وویل شي، نو دویم عدد $20-x$ دی او د ضرب حاصل یې د تابع په شکل داسې: $f(x)=x(20-x)$ لیکو، څرنګه چې د x عدد په $[0,20]$ انټروال کې تحول کوي، نو د تابع مطلق اعظمي قیمت په $[0,20]$ کې لټوو:

$$f(x)=20x-x^2$$
$$f'(x)=0$$
$$20-2x=0$$
$$-2x=-20$$
$$x=10$$
$$f(10)=20\cdot10-10^2=200-100=100$$
$$f(0)=20\cdot0-0^2=0$$
$$f(20)=20\cdot20-20^2=400-400=0$$

لیدل کیږي چې (10 ، 100) د تابع اعظمي نقطه ده، نو مطلوب عددونه $x_1=10$ او $x_2=10$ چې د ضرب حاصل یې 100 دی.

2- د یوه خوځنده جسم د حرکت معادله د $x=(t-2)(t-3)$ په بڼه راکړل شوې ده، د جسم متوسط سرعت د $t_1=3$ او $t_2=4$ د وخت په واټنو کې پیدا کړئ.

حل: د منځنی سرعت د تعریف په مرسته لیکلای شو چې:

$$\text{منځنی سرعت} = \frac{x_{(t_2)}-x_{(t_1)}}{t_2-t_1}=\frac{x_{(4)}-x_{(3)}}{4-3}=\frac{2-0}{4-3}=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- دکرې د حجم او سطحې تر منځ منځنۍ نسبت پیداکړئ.

حل:

$$\text{دکرې حجم} = v_{(x)} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3x^2 = 4\pi x^2$$

$$\text{دکرې مساحت} = S_{(x)} = 4\pi x^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 4\pi \cdot 2x = 8\pi x$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4\pi x^2}{8\pi x} \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}x$$

4- د سانتي ګراد(C) او فارنهایت (F) د حرارت تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ اړیکه شته، تاسې د (C) او (F) تر منځ منځنۍ نسبت وټاکئ.

حل: د منځنۍ سرعت د تعریف $(V_m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x})$ په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F) - C(F)}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32) - \frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5- یوه ځمکه چې مستطیلي شکل لري، محیط یې $200m$ دی، کېدای شي اعظمي Maximum مساحت یې پیداکړئ.

حل: په ورکړل شوي محیط سره کولای شو، ډېر مستطیلونه رسم کړو، ولې شرط دا دی چې هغه مستطیل زموږ مطلوب دی چې مساحت یې تر ټولو زیات وي، نو که د مستطیل اوږدوالی په x او سور یې په y وښیو، نو لیکلای شو:

$\text{میحط} = 2x + 2y = 200$

$\text{میحط} = x + y = 100 \quad \Rightarrow y = 100 - x$

$\text{مساحت} = x \cdot y$

$S = x(100-x) = 100x - x^2 \quad , \quad D_s = IR$

$x > 0 \quad , \quad y > 0 \Rightarrow 100 - x > 0 \quad \Rightarrow x < 100$

اوس د $S = 100x - x^2$ په تابع کې $0 < x < 100$ انټروال کې د تابع اعظمي مساحت داسې پیدا کوو:

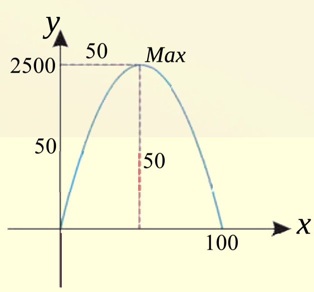
$S' = 100 - 2x$

$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2x = 0 \quad \Rightarrow x = 50 \quad \Rightarrow S_{(50)} = 2500$

$\lim_{x \to 0^+} S(x) = 0$

$\lim_{x \to 0^-} S(x) = 0$

x	0		50		100
S'		+	0	−	
S	0	↗	2500	↘	0



(c) ketabton.com: The Digital Library

په پایله کې له شکل څخه هم لیدل کېږي چې تر ټولو لوی مساحت هغه وخت لاسته راځي چې د مستطیل طول 50 واحده وي، نو مساحت 2500 واحد مربع کېږي.

6- که د دوو عددونو مجموعه 200 وي، هغه عددونه داسې وټاکئ چې د مربعاتو مجموعه یې اصغري شي.

حل: که چیرې دا عددونه x او y وي، نو $x+y=200$ او که x ، $x^2+y^2=T_{(x)}$ فرض کړو، نو:

$$T_{(x)}=x^2+y^2$$
$$=x^2+(200-x)^2$$
$$=x^2+x^2-400x+(200)^2$$
$$=2x^2-400x+40000$$
$$T'_{(x)}=4x-400$$
$$T'_{(x)}=0$$
$$4x-400=0$$
$$x=100$$

په پایله کې ویلای شو چې د مربعاتو تر ټولو کوچنۍ مجموعه عبارت دی له: $T_{(100)}=20000$

7- د A ټکی د $y=\frac{2}{x}$ د منحني له پاسه حرکت کوي، تر ټولو کوچنی انتروال د A د نقطې او د مختصاتو د مبدې ترمنځ لاسته راوړو.

حل: د $y=\frac{2}{x}$ د تابع منحني پر مخ د A د نقطې مختصات $A(x,\frac{2}{x})$ دي، نو:

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2{}_{(A)}+y^2{}_{(A)}}=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}$$
$$\overline{OA}^2=x^2+\frac{4}{x^2}=d^2 \Rightarrow d'_{(x)}=(x^2)'+(\frac{4}{x^2})'=2x-\frac{8x}{x^4}=2x-\frac{8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=\frac{2x^4-8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=0$$
$$2x^4=8$$
$$x_1=\sqrt{2} \quad , \quad x_2=-\sqrt{2}$$
$$d_{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2+\frac{4}{(\sqrt{2})^2}=2+\frac{4}{2}=\frac{8}{2}=4$$
$$d_{-\sqrt{2}}=4$$

په پایله کې تر ټولو کوچنی فاصله له مبدا څخه 2 واحد مربع ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

8- یو مکعب مستطیل چې قاعده يې مربع ده، په پام کې نیسو، که د درېو واړو بعدونو مجموعه 24 وي، د مکعب تر ټولو لوی حجم پیدا کړئ.

حل: که د مکعب مستطیل د قاعدې ضلعې ته x او جګوالي ته يې y وویل شي، نو:

$$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$$

څرنګه چې $y \geq 0$ دی، نو $0 \leq x \leq 12$ کېږي او د مکعب مستطیل حجم عبارت دی له:

$$V = x^2 \cdot y \Rightarrow V = x^2(24-2x) = 24x^2 - 2x^3$$

$V = 24x^2 - 2x^3$	$V(0) = 24\cdot 0^2 - 2\cdot 0^3$
$V'(x) = 48x - 6x^2$	$= 0 - 0 = 0$
$V'(x) = 0$	$V'(0) = 0$
$48x - 6x^2 = 0$	$V(8) = 24\cdot(8)^2 - 2\cdot(8)^3$
$x(48-6x) = 0$	$=1536 - 1024 = 512$
$x_1 = 0$	$V(8) = 512$
$48 - 6x = 0$	$V(12) = 24\cdot(12)^2 - 2\cdot(12)^3 = 3456 - 3456 = 0$
$-6x = -48$	$V(12) = 0$
$x = 8$	

نو د مکعب مستطیل تر ټولو لوی حجم $512cm^3$ دی.

پوښتنې

1- د $y = x^3 + x^2 + x + 1$ د تابع تحولات پیدا او منحني يې رسم کړئ.

2- دوه داسې عددونه پیدا کړئ چې د جمعې حاصل يې 20 او د ضرب حاصل يې تر ټولو لوی ممکن قیمت ولري.

3- که د اوسپنې له یوې تختې څخه چې هره ضلعه يې $1m$ طول لري یو سر خلاص بکس جوړېږي د هغه له څلورو کنجونو څخه څلور مساوي مربعګانې پرې کړئ او بیا هغه قاط کړئ کوچنۍ مربعګانې په کومه اندازه پرې شي چې نوموړی بکس ممکن اعظمي حجم ولري.

4- د $y = x^2$ ګراف ته ډېره نژدې نقطه له $A(0,3)$ نقطې سره پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متزایده بلل کېږي، چې د $[a,b]$ په انټروال کې پیوسته او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ وي.
- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متناقصه بلل کېږي، چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ وي.
- د تابع له تزاید څخه مطلب دا دی چې د x د متحول په زیاتېدو سره د تابع قیمت زیات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د x متحول په زیاتېدو سره د تابع قیمت کم شي.
- په یوه تابع کې تر ټولو جګې نقطې ته موضعي اعظمي(Local Maximum) او تر ټولو ټیټې نقطې ته موضعي اصغري(Local Minimum) وایي، د x هغه قیمتونه چې د هغوی لپاره تابع یا اعظمي او یا اصغري قیمتونه اخلي د Extreme په نامه یادېږي.
- مطلق Maximum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اعظمي بلل کېږي، که چیرې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اعظمي وایي.
- مطلق Minimum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چیرې $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \ge f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وایي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې محدب بلل کېږي، که چیرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني پورته خواته پروت وي او د تابع دویم مشتق منفي په لاس راځي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې مقعر بلل کېږي، که چیرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني ښکته خوا پروت وي، او د تابع دویم مشتق مثبت په لاس راځي.
- هغه ټکی چې د تابع له مقعریت څخه محدبیت ته او یا برعکس خپل لوری بدلوي، د انعطاف(Inflection) ټکی بلل کېږي.
- هغه تابعګانې چې د $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ بڼه ولري، د هوموګرافیک تابعګانو په نامه یادېږي، په دې شرط چې $c \ne 0$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که چیرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ او $f(a) = f(b)$ وي، نو لږ ترلږه د x_0 یو ټکی په $a < x < b$ په انټروال کې شته چې $f'(x_0) = 0$ دی، دا قضیه د رول د قضیې په نامه یادېږي.
- که چیرې $f(x)$ په $[a,b]$ فاصله کې متمادي او د (a,b) په خلاصه فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي د x_0 یو عدد د a او b ترمنځ شته چې $f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی دا د متوسط قیمت قضیه بلل کېږي.

د هوپیتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې د (a,b) په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چیرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لېمیټ نسبت کله چې $x \to a$ د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په هغه صورت کې چې $x \to \infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي په دې حالت کې د تابع د لېمیټ د پیدا کولو لپاره د $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پیدا کوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي مشتق نیولو ته دوام ورکوو ...n تر څو د ابهام شکل ختم شي.

د دریم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1 – که یوه تابع په $[0,b]$ انټروال کې متمادی او د مشتق وړ وي، نو هغه وخت متزاید ده چې :

$a)\ f'(x)=0 \quad b)\ f'(x)<0 \quad c)\ f'(x)>0 \quad d)\ f'(x)\ge 0$

2- په یوه تابع کې تر ټولو جگې نقطې ته:

a) Minimum وایي b) Infliction وایي c) Maximum وایي d) هیڅ یو

3- د $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$ په تابع کې د Extreme ټکی عبارت دی له:

a) دوه ټکي b) یو ټکی c) درې ټکي d) نه لري

4 – هغه ټکی چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته بدلوي:

a) د اعظمی ټکی دی b) دانعطاف ټکی دی c) اصغری ټکی دی d) هیڅ یو

5- د $f(x)=ax^2+bx+c$ د تابع د تعریف ساحه عبارت له :

$a)\ (-\infty,+\infty) \quad b)\ (-\infty,0) \quad c)\ (0,-\infty)$ d) هیڅ یو

6- د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ تابع عمودی مجانب عبارت دی له:

$a)\ x=1 \quad b)\ x=2 \quad c)\ x=-1 \quad d)\ x=-2$

7- د هوموگرافیک تابع عمودی مجانب عبارت دی له:

$a)\ y=\dfrac{a}{c} \quad b)\ x=-\dfrac{d}{c} \quad c)\ y=\dfrac{c}{a} \quad d)\ y=-\dfrac{c}{d}$

8- د $g(x)=\dfrac{4x^2-6x}{x^2-4}$ تابع افقی مجانب عبارت دی له:

$a)\ 4 \quad b)\ 6 \quad c)\ -6 \quad d)\ -4$

9- لاندې کومه الجبري اړیکه حقیقت لري:

$a)\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \quad b)\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f'(x) \quad c)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ d) هیڅ یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

1. د $f(x)=x^2-x$ د تابع د منحني میل د $P(3,0)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

2. د $f(x)=-x^2$ په تابع کې د $[3,4]$ په انټروال کې د منحنی د بدلون ټکي پیدا کړئ.

3. د نیوټن د خارج قسمت په مرسته د لاندنیو تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x$ 2) $f(x)=3x^2-1$ 3) $f(x)=\sqrt{2}x$

4. د لاندنیو تابعګانو په ورکړل شوو نقطو کې مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-1$, $x_0=-1$ 2) $f(x)=x^2$, $x_0=2$

5. د لاندې تابعګانو د مشتق تابع پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-4x^2$ 2) $f(x)=3x^3-1$ 3) $f(x)=\sqrt{2}x$

6. په ورکړل شوو ټکو کې د تابعګانو مشتق محاسبه کړئ.

1) $f(x)=7x^2-3x$, $x_0=-1$

2) $f(x)=6x^2-2x-1$, $x_0=\frac{1}{2}$

7. د $f(x)=3x^5-4x^2-3x$ د تابع څلور ځلې مشتق ونیسئ او د هغې ګراف رسم کړئ.

8. د $x^2y+6y^3=x-3$ د تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

9. د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=x^3\sec x$ 2) $f(x)=\sin(3x-1)$ 3) $f(x)=\cos^2 2x$

10. کوم مثبت عدد دی چې د خپل معکوس سره جمع شي د جمعې حاصل یې تر ټولو کوچنی شي؟

11. د $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.

12. د $f(x)=\frac{4x^2}{x^2+1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

13. د $f(x)=\sin x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

14. د $f(x)=\tan x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

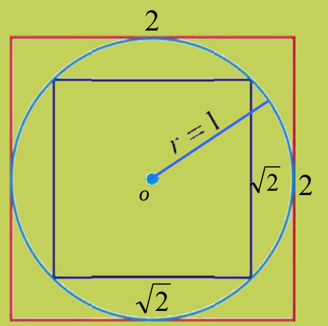
څلورم څپرکی

انتيگرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

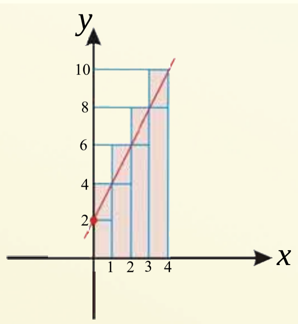
د ریمان مجموعه

Riemann's Sum



په مخامخ شکل کې چې د دايرې شعاع يو واحد دی، د دايرې د محيطي او محاطي څلور ضلعي ګانو مساحت حساب کړئ او وواياست چې ددې دايرې مساحت له مخامخ څلور ضلعي ګانو سره څه اړيکه لري؟

فعالیت



- هغه مساحت چې د x د محور او $f(x)=2x+2$ د تابع د ګراف په منځ کې د$[0,4]$ په انټروال کې محصور شوی دی، خط خط کړئ.
- د $y=2x+2$ تابع په ګراف کې د څلورو لاندينيو او پورتنيو مستطيلونو مساحتونه چې په شکل کې ښودل شوي دي پيدا کړئ.
- د پورتنيو مستطيلونو د مساحت مجموعه، او د لاندينيو مستطيلونو د مساحت مجموعه د تابع د ګراف د لاندينۍ مساحت سره په ورکړ شوي واټن کې څه اړيکه لري؟
- د پورته په څېر فعاليت د اتو مساوي لاندينيو مستطيلونو او د اتو مساوي پورتنيو مستطيلونو لپاره تکرار کړئ او پايله يې د ګراف د لاندې مساحت سره په نوموړي واټن کې پرتله کړئ.
- که چيرې د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه او لاندينيو مستطيلونو[1] د جوړولو لپاره د تابع په ګراف کې د فاصلې ويش زيات کړو د پورتنيو او لاندينيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه کوم قيمت ته نږدې کيږي.

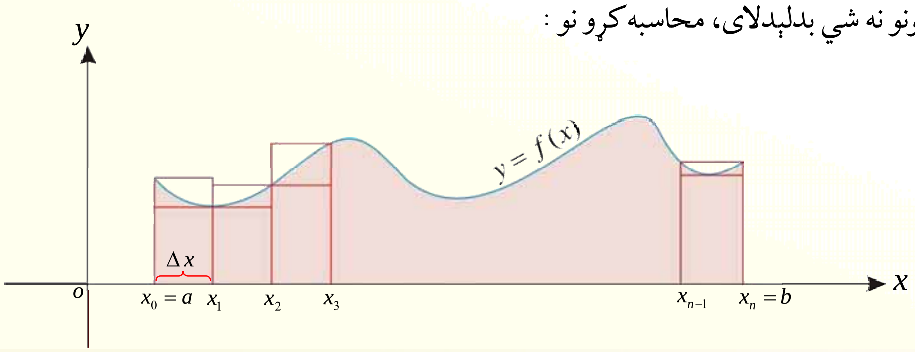
---

[1] - که چيرې د x په محور د فاصلو تقسيمات زيات کړو او يا که چيرې په يوه فاصله کې د مستطيلونو شمير زيات شي په هم هغه اندازه د ګراف لاندنې مساحت دقيق په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف لاسته راځي:

تعریف: فرضوو چې د $y = f(x)$ تابع د $[a,b]$ په ترلي انټروال کې متمادي او تعریف شوی وي که چیرې د ناحیې مساحت چې د x د محور او $y = f(x)$ د تابع د ګراف ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو نو:



د $[a,b]$ ترلې انټروال چې په n مستطیلو نو وېشو، څرنګه چې د هر مستطیل عرض د $(\Delta x = \frac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطیلونو طول عبارت دی تابع قیمت په هماغه نقطه کې دی.

او د مستطیلونو د هر انټروال اوږدوالی د $i = 1,2,3, \ \dots \ , n$ لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x \dots, x_i = a + i\Delta x, \ \dots \ , x_n = b$$

$$[x_0, x_1] \ , \ [x_1, x_2] \ , \ [x_2, x_3], \ \dots \ , [x_{i-1}, x_i], \ \dots \ , [x_{n-1}, x_n]$$

که په شکل کې د لاندینیو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي، نو لرو چې:

$$\text{د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ \dots \ + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ \dots \ + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

که چیرې محصور شوی مساحت په A وښیو نو: $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

که چیرې د رابطې له اطراف څخه لیمیټ ونیسو نو لرو چې:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \le \lim_{n\to\infty} A \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساندوېچ د قضيې پر بنسټ ليکلای شو؛ چې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = A$$

نو $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ تـه د ريمـان مجمـوع او ددې مجمـوعې لېمـېټ يعنې $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ تـه د ريمـان د مجموعې لېمېټ وايي.

لومړی مثال: د $[0,2]$ انټروال په څلـور مـساوي برخـو وويشئ، د $y = x^2 + 1$ منحنـي، او x محـور تـر منځ مساحت پيدا کړئ.

حل: که چيرې $[0,2]$ انټروال په څلورو مساوي برخو وويشو؛ نو د مستطيلونو عرض داسې په لاس راځي:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

ددې مستطيلونو دهر انټروال اوږدوالی عبارت دي له:

$x_0 = a = 0 \quad , \quad x_1 = a + \Delta x = \frac{1}{2}$

$x_2 = a + 2\Delta x = 1 \quad , \quad x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$

$x_4 = 2$

$[x_0, x_1] \ , \ [x_1, x_2] \ , \ [x_2, x_3], \ldots\ldots\ldots, [x_{n-1}, x_n]$

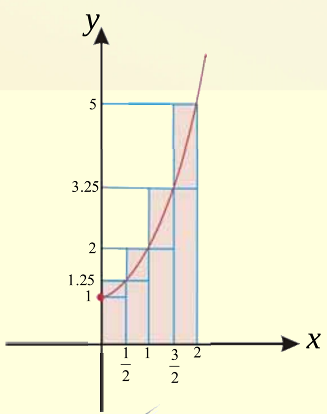
$[0, \frac{1}{2}] \ , \ [\frac{1}{2}, 1] \ , \ [1, \frac{3}{2}] \ , \ [\frac{3}{2}, 2]$

د تابع د ګراف د رسمولو لپاره تابع ته قيمتونه ابږدو او د مستطيلونو طول لاس ته راځي:

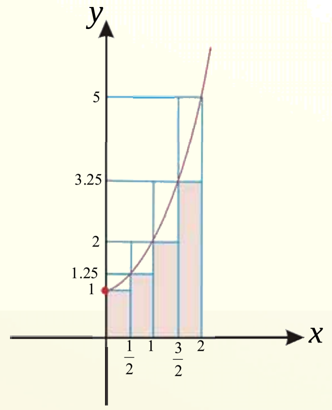
$f(x) = x^2 + 1 \ , \ f(0) = 1$

$f(\frac{1}{2}) = 1.25 \ , \ f(1) = 2$

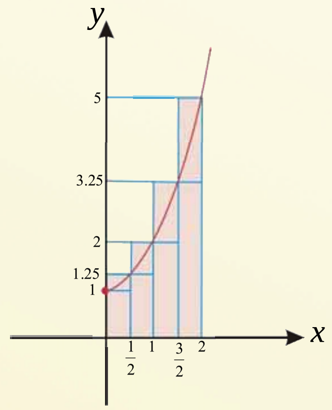
$f(\frac{3}{2}) = 3.25 \ , \ f(2) = 5$



(c) ketabton.com: The Digital Library



د لاندينيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه $= 1\times\frac{1}{2}+1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}=3.75$



د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه $= 1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{2}=5.75$

$$3.75 < A < 5.75$$

دويم مثال: د $f(x)=1+x$ تابع د ريمان د مجموعې لېميټ په $[1,10]$ انټروال کې پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

باید یه یاد ولرو:

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x i = 1 + [\frac{9}{n}]\, i \quad , \quad i = 0,1,2,\ \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} [\sum_{i=1}^{n} (1+x_i)\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\Delta x \sum_{i=1}^{n} (1+x_i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\Delta x \sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n} x_i]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n} (a + \Delta x i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} (1 + \frac{9}{n} i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} (\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\frac{9}{n} \cdot n + \frac{9}{n} (n + \frac{9}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{9}{n} (n + \frac{9n^2 + 9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{9}{n} (\frac{2n^2 + 9n^2 + 9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{9}{n} (\frac{11n^2 + 9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{99n^2 + 81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n}]$$

$$= 9 + \frac{99}{2} = 58.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

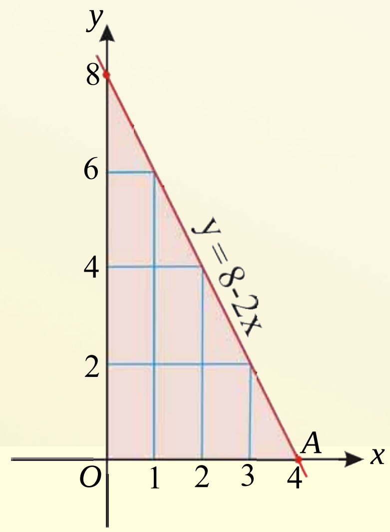
پوښتنې

1. د $[0,3]$ انټروال په بشپړو مساوي برخو له ویشلو څخه وروسته د $y=3x$ مستقیم خط او د x د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ.

2. د $\Delta x = 0.5$ قیمت لپاره او د لاندې جدول د قیمتونو په پام کې نیولو سره ګراف رسم، د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه او پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه پیدا کړئ.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	14	20	26	32	38	44	50

3. د $y=8-2x$ تابع ګراف د لاندې OA مثلث مساحت د $[0,4]$ په انټروال کې د ریمان د مجموعې د لیمیت څخه په ګټه اخیستنې سره پیدا کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیگرال مفهوم
Concept of Integral

خرنګه چې پوهېږئ د شکلونو لاندېني او پورتني مساحتونه د انتیګرال په واسطه محاسبه کېږي.
آیا کولای شو چې د مخامخ شکل پورتنی مساحت په لاس راوړو.

د هغې تابع انتیګرال چې مشتق يې معين وي او يا په بل عبارت د ريمان مجموعې لېمیټ ته انتیګرال وايي دا($\int$) د انتیګرال علامه ده، د sum د کليمې يا د ريمان د مجموعې د S توري غزېدلې حالت دی، لکه: $\int f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ چې دلته $f(x)$ تابع او dx د $f(x)$ تابع د انتیګرال متحول نظر x ته دی.

انتیګرالونه عموماً په دوه ډوله دي. معين او غیر معين انتیګرالونه، هغه انتیګرالونه چې په ترتيب سره يې تر څېړنې لاندې نيسو:

I- غیرمعین انتیګرال *Indefinite Integral*

- که د $F(x) = 2x^2 - 1$ تابع وي له دې تابع څخه مشتق ونیسئ.
- ددې تابع له مشتق څخه انتیګرال ونیسئ.
- په لاس راغلی انتیګرال له لومړنی تابع سره پرتله کړئ او ووایئ چې (-1) په نوموړي تابع کې د څه په نامه يادېږي.
- که په پورتني تابع کې (-1) په C ونوموو د $f(x)$ تابع له څه سره مساوي ده؟
- پورتنی فعالیت د $F(x) = x^6 + 1$ تابع لپاره تکرار کړئ او ووایئ چې $f(x)$ له څه سره مساوي ده.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعريف په لاس راځي:

تعریف: که چيرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په ترلی انټروال کې تعريف او $F(x)$ د $f(x)$ یوه لومړنی تابع وي. د $F(x)+C$ تابعګانو سټ په داسې حال کې چې C يو ثابت عدد وي د $f(x)$ تابع غیرمعين انتیګرال په نامه يادېږي او داسې ليکل کېږي:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

لومړی مثال: $\int x\,dx$ پیدا کړئ.

حل: $\int x\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$

دویم مثال: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\,dx$ حساب کړئ.

حل: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\,dx = \int x^{-\frac{3}{7}}\,dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + C$

دریم مثال: $\int x^{\frac{3}{2}}\,dx$ پیدا کړئ.

حل: $\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

پوښتني

لاندې انتیګرالونه محاسبه کړئ:

$a)\ \int \sqrt[5]{x^3}\,dx$

$b)\ \int \frac{1}{x^4}\,dx$

$c)\ \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$d)\ \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{x^2}}$

$e)\ \int \sqrt[8]{x^4}\cdot x\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د غیرمعین انتیګرال خواص

Properties of indefinite integral

تاسي د لېمیټ او مشتق خواص مخکي مطالعه کړي؟ آیا کیدای شي چي ورته خواص په غیر معین انتیګرال کې هم وي؟

$$\left.\begin{array}{l}\int \quad dx \\ \int [f(x) \pm g(x)]\, dx \\ \int [f(x) \cdot g(x)]\, dx \\ \int \dfrac{f(x)}{g(x)} dx \quad , g(x) \neq 0\end{array}\right\} = ?$$

فعالیت

د مشتقاتو د خواصو څخه په کار اخیستنې د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

$$f(x) = 3x^4$$

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راوړو:

څرنګه چي د تابعګانو د مشتق د پیداکولو لپاره له ځانګړو قوانینو څخه ګټه اخېستل کېږي، غیرمعین انتیګرالونه هم د داسي خواصو لرونکي دي چي هغه پرته له ثبوت څخه قبلوو:

1- که یو ثابت عدد وي، نو لرو چي: $\int \quad dx = \quad \int dx = \quad x + C$

مثال: د $\int 5dx$ انتګرال پیدا کړئ.

حل: $\int 5dx = 5 \int dx = 5x + C$

2- که چیرې $n \neq -1$ وي، نو: $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $\int x^4dx$ **انتیګرال** پیدا کړی.

حل: $\int x^4dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$

3- که چیرې a یو ثابت عدد او $f(x)$ تابع وي، **نو**:

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$$

مثال: **د** $\int 2x^2\, dx$ **انتیګرال** محاسبه کړئ.

حل: $\int 2x^2dx = 2\int x^2dx = 2\frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{3}x^3 + C$

4- که چیرې $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابعګانې وي په دې صورت کې د تابعګانو د جمع او تفریق د حاصل انتیګرال مساوی دی په:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثالونه:

$a)\quad \int (2x^2+3)dx = \int 2x^2dx + \int 3dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + C$

$b)\quad \int (8-2x)dx = 8\int dx - 2\int xdx = 8x - x^2 + C$

5- که چیرې دتابعګانو ترادف تر انتیګرال لاندې وي، په دی صورت کې د دوی انتیګرال مساوی دی په:0

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + ... + \int f_n(x)dx$$

مثال:

$$\int [x^3 - 6x^2 + 9x + 1]dx = \int x^3dx - \int 6x^2dx + \int 9xdx + \int dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + C$$

6- که $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابعګانې وي، په دې حالت کې د تابعګانو د ضرب د حاصل انتیګرال مساوی نه دی د انتیګرالونو د ضرب له حاصل سره په جلا توګه، یعنې:

$$\int[f(x)\cdot g(x)]dx \neq \int f(x)dx\cdot\int g(x)dx$$

مثال: که چېرې $f(x)=x+1$ او $g(x)=x-2$ وي، نو:

حل الف: لومړی په تابع ګانو د ضرب عملیه تطبیق کوو او وروسته یې انتیګرال په لاس راوړو:

$$\int[f(x)\cdot g(x)]\,dx=\int[(x+1)(x-2)]dx=\int(x^2-2x+x-2)\,dx$$
$$=\int(x^2-x-2)\,dx$$
$$=\int x^2dx-\int x\,dx-\int 2\,dx$$
$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C$$

حل ب:اوس د هرې تابع انتیګرال بېل بېل محاسبه کوو او وروسته یې سره ضربوو په لاس راغلې قیمتونه سره پرتله کوو.

$$\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx=\int(x+1)\,dx\cdot\int(x-2)\,dx=(\int x\,dx+\int dx)(=\int x\,dx-\int 2\,dx)$$
$$=(\frac{x^2}{2}+x+C)(\frac{x^2}{2}-2x+C)=(\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C$$
$$\Rightarrow\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C\neq(\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C$$

په پایله کې څرګنده شوه، چې نوموړی مساوات حقیقت نه لري.

7- که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابعګانې وي په دې صورت کې د توابعو د تقسیم د حاصل انتیګرال مساوی نه دی د هرې تابع د انتیګرال له حاصل تقسیم سره، یعنې: $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx\neq\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

مثال: که چېرې $f(x)=x^2+2x$ او $g(x)=x$ وي، نو لرو:

د الف جزء حل: لومړی د تابع ګانو د تقسیم د حاصل انتیګرال په لاس راوړو.

$$\int[f(x)\cdot g(x)]\,dx=\int[(x+1)(x-2)]dx=\int(x^2-2x+x-2)\,dx$$
$$=\int(x^2-x-2)\,dx$$
$$=\int x^2dx-\int x\,dx-\int 2\,dx$$
$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ب جزء حل: اوس د صورت او مخرج د تابعگانو انتیگرالونه بېل بېل په لاس راوړو او وروسته يې سره پرتله کوو.

$$\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx=\int(x+1)\,dx\cdot\int(x-2)\,dx=\left(\int x\,dx+\int dx\right)\left(\int x\,dx-\int 2\,dx\right)$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+x+C\right)\left(\frac{x^2}{2}-2x+C\right)=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)+C$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C\neq\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)+C$$

په پایله کې څرگنده شوه چې مساوات حقیقت نه لري.

پوښتنې

د انتیگرال د خاصیتونو څخه په گټه اخیستنې سره لاندې انتیگرالونه محاسبه کړئ:

a) $\int -17\,dx=?$

b) $\int \frac{(1+x)^2}{1+x}\,dx=?$

c) $\int 2x^4\,dx=?$

d) $\int \frac{1}{x^5}\,dx=?$

e) $\int (2x^2+4x^3-5x+9)\,dx=?$

f) $\int (2x+3)^6\,dx=?$

g) $\int \frac{x^3+2x^2}{x^2}\,dx=?$

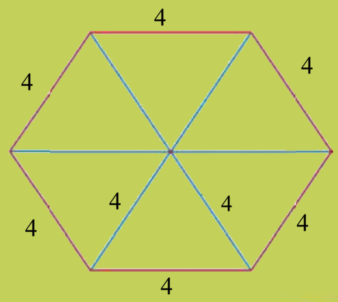
h) $\int (2+x)\,dx=?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

معین انتیګرال

Definite Integral

د شپږ ضلعي دننه مثلثونو د مساحتونو مجموعه پیدا او د شپږ ضلعي له مساحت سره يې پرتله کړئ.



فعالیت

- د $f(x)=2x$ **د تابع ګراف د $[2,5]$ په انټروال کې د $n=5$ لپاره رسم کړئ او د ګراف لاندینی مساحت پیدا کړئ**
- په شکل کې د ګراف لاندینی مساحت د کومو دوو عددونو ترمنځ پروت دی.

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وی نو د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعې لېمیټ ته کله چې n بې‌نهایت ته نږدی شی او د فرعي انټروالونو (Δx) لوی اوږدوالی صفر ته نږدی شي، د $f(x)$ تابع له $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې د معین انتیګرال په نوم یادېږي، یعنې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

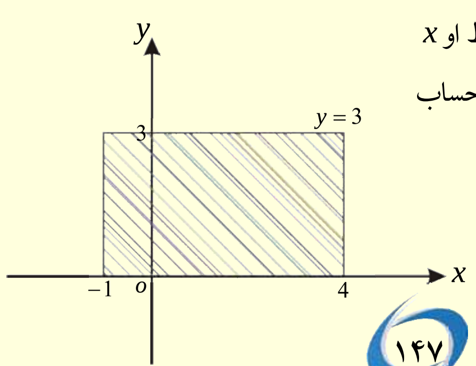
چې a ته د انتیګرال لاندیني سرحد او b ته د انتیګرال پورتني سرحد وايي.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2\,dx$ ټاکلي انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

حل: لومړی د $F(x)$ لومړنی تابع پیدا کوو او بیا د مطلوب انتیګرال قیمت ټاکو:

$$\int_1^3 x^2dx=[\frac{x^3}{3}]_1^3=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{27-1}{3}=\frac{26}{3}$$

دویم مثال: هغه مساحت چې د $y=3$ خط او x محور ترمنځ په $[-1,4]$ انټروال کې محصور دی حساب کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د $\int_{-1}^{4} 3\,dx$ معین انتیګرال د یوه مستطیل مساحت رابښیي چې په تېر شکل کې لیدل کېږي.

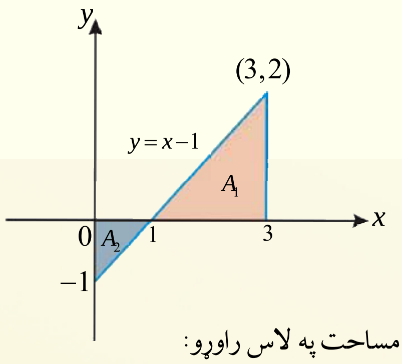
ددې مستطیل مساحت د مستطیل د عرض او طول د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

د مستطیل مساحت $=3[4-(-1)]=3\cdot 5=15$

د انتیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره د مستطیل مساحت په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$\int_{-1}^{4} 3\,dx=[3x]_{-1}^{4}=3[4-(-1)]=15$$

دریم مثال: هغه مساحت چې د $y=x-1$ مستقیم خط او x محور ترمنځ په $[0,3]$ انتروال کې محصور دی په لاس راوړئ.



حل:

له شکل څخه په ګټه اخیستنې سره لومړی د ښي خوا د لوی مثلث مساحت په لاس راوړو:

$$A_1=\frac{1}{2}(2\cdot 2)=\frac{1}{2}\cdot 4=2$$

د کوچنی مثلث مساحت عبارت دی له:

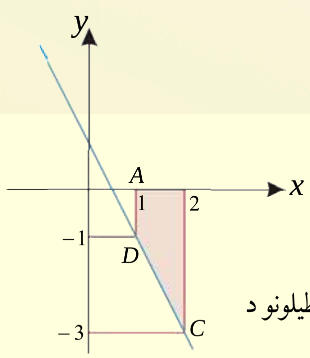
$$A_2=\frac{1}{2}[1(-1)]=\frac{1}{2}(-1)=-\frac{1}{2}$$

د A_1 او A_2 د مساحتونو مجموعه عبارت ده له:

$$A_1+A_2=2-\frac{1}{2}=1.5$$

په پایله کې د نوموړي انتیګرال قیمت عبارت دی له: $\int_{0}^{3}(x-1)\,dx=[\frac{x^2}{2}-x]_0^3=[\frac{3^2}{2}-3]-0=\frac{9}{2}-3=1.5$

پوښتنې



1. د مخامخ شکل څخه په کار اخیستنې سره هغه مساحت چې د $y=-2x+1$ د مستقیم خط او د x د محور ترمنځ محصور دی په لاس راوړئ.

2. د $f(x)=x^2$ تابع د لاندینیو مستطیلونو د مساحت مجموعه او پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه په $[0,1]$ انتروال کې د $n=4$ لپاره په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معین انتیګرال خواص

Properties of definite integral

آیا کولای شو چې د غیرمعین انتیګرال د ځانګړونو څخه په ګټه اخیستنې سره مخامخ اړیکې پوره کړو.

$$\left.\begin{array}{l}\int_a^b c\,dx\\ \int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx\\ \int_a^a f(x)\,dx\end{array}\right\}=?$$

فعالیت

- د $\sum_{=1}^{4} 3^{\ 2}$ مجموعه حساب کړئ.
- د $\int_a^b x\,dx$ د انتیګرال قیمت د $[-1,1]$ په انټروال کې پیدا کړئ.
- د $\int_0^2 (1+3x)\,dx$ ټاکلی انتیګرال محاسبه کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د ځینو انتیګرالونو محاسبه د قیمت په وضع کولو سره امکان لري او ځینې یې امکان نه لري، دې ته اړتیا پیدا کېږي، ترڅو ټاکلي انتیګرال ثبوت کړو.

1. د ثابتې تابع انتیګرال د $[a,b]$ په انټروال کې یعني $\int_a^b Cdx$ عبارت دی، له:

$$\int_a^b C\,dx = C\int_a^b dx = C[x]_a^b = C(b-a)$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال په n مساوي برخو یعني $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ ویشو او د هر x_i لپاره د i - ام انټروال څخه لرو: $i=0,1,2,\ldots,n$ $\qquad f(x_i)=C$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} C\,\Delta x_i = C(\Delta x_1+\Delta x_2+\ldots+\Delta x_n)=C(\frac{b-a}{n}+\frac{b-a}{n}+\ldots+\frac{b-a}{n})$$

$$=C(b-a)(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n})=C(b-a)\frac{n}{n}=C(b-a)\Rightarrow \int_a^b Cdx = C(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $\int_{3}^{4} dx$ ټاکلی انتیګرال حساب کړئ.

حل: $\int_{3}^{4} dx = [x]_3^4 = 4-3=1$

2. که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې انتیګرال منونکی وی او   یو ثابت حقیقي عدد وي، نو لرو چې:

$$\int_a^b \quad f(x)dx = \quad \int_a^b f(x)dx$$

ثبوت: که چیري د $[a,b]$ انټروال د x_i ، $i=1,2,...,n$ په n مساوي برخو وویشو نو د ریمان د مجموعې او انتیګرال د تعریف له مخې لیکلای شو:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \quad f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \quad \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \quad \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b \quad f(x)dx = \quad \int_a^b f(x)dx$$

مثال: د $\int_{-2}^{2} 4\, dx$ ټاکلي انتیګرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_{-2}^{2} 4dx = 4\int_{-2}^{2} dx = 4[x]_{-2}^{2} = 4(2-(-2)) = 4\cdot 4 = 16$

3. که د $F(x)$ تابع یوه لومړنی تابع د $f(x)$ او په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = -(-F(b)+F(a))$$

$$= -(F(a)-F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

مثال: د $\int_{2}^{3} 2x\,dx = -\int_{3}^{2} 2x\,dx$ انتیګرال مساوات پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: لومړی دکېڼ لوری انتیګرال او وروسته د ښيي خوا انتیګرال محاسبه کوو:

$$\int_2^3 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2} = \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2} = \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

د لاسته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره پایله په لاس راځي:

$$\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$$

4- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي په هغه صورت کې لرو، چې: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

ثبوت: **څرنګه چې** $\Delta x = 0$ دی، نو:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

مثال: د $\int_3^3 3x^2\,dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_3^3 3x^2 dx = [\frac{3x^3}{3}]_3^3 = [x^3]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$

5- که $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې په $[a\ ,b]$ انټروال کې انتیګرال منونکي وي، نو:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\ dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) \pm g(x_i)]\ \Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثالونه:

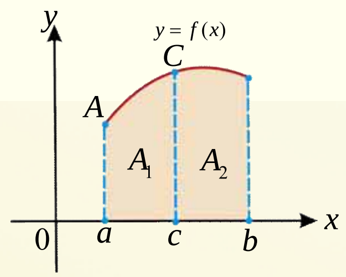
حل:

$$a)\ \int_0^1 (4+3x^2)\,dx=\int_0^1 4\,dx+\int_0^1 3x^2\,dx=4\int_0^1 dx+3\int_0^1 x^2\,dx=4[x]_0^1+3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=4+1=5$$

$$b)\ \int_0^3 (x^2-1)\,dx=\int_0^3 x^2dx-\int_0^3 dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3-[x]_0^3=\frac{27}{3}-3=\frac{27-9}{3}=\frac{18}{3}=6$$

6. که چیرې د $f(x)$ تابع په یوه ترلې انټروال کې چې د a, b او c ټکي پکې شامل دي انټیګرال منونکې وي، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$



ثبــوت: دلتـه د $[a,b]$ انټـروال پـه دوو انټروالونـو د $[a,c]$ او $[c,b]$ تقسیموو، وروسته د $f(x)$ تـابع انټیګـرال پـه نومـوړي انټروالونو کې په پام کې نیسو.

د انټیګرال اصلي مفهوم ته په پام $A=\int_a^b f(x)dx$ په حقیقت کې د هغې سطحې مساحت دی چې د $f(x)$ د تابع د ګراف او x د محور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کې محصوره ده. په داسې حال کې چې د هغه سطحې مساحتونه چې د $f(x)$ ګراف او د x د محور ترمنځ د $[a,c]$ او $[c,b]$ په انټروالونو کې محصوره ده او په شکل کې واضح لیدل کېږي عبارت ده له:

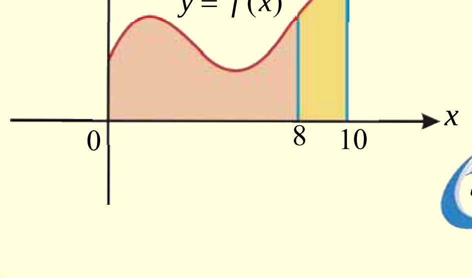
$$A_1=\int_a^c f(x)\,dx \text{ ،} \quad A_2=\int_c^b f(x)\,dx$$

په پایله کې ویلای شو چې:

$$A=A_1+A_2 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

مثال: که چیرې $\int_0^{10} f(x)dx=17$ او $\int_0^8 f(x)dx=12$ وي، نو د $\int_8^{10} f(x)dx$ انټیګرال قیمت محاسبه کړئ.

حل:



$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^{10} f(x)\,dx=\int_0^8 f(x)\,dx+\int_8^{10} f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د $\int_8^{10} f(x)\,dx$ انتیگرال قیمت په لاس راوړو:

$$\int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx - \int_0^{8} f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$$

7. که چیرې د $f(x) \le g(x)$ تابعګانې په $[a,b]$ انټروال کې انتیګرال منومنکي وي؛ نو لرو:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[g(x) - f(x)]\,\Delta x$$

نو څرنګه $g(x) - f(x) \ge 0$ او $\Delta x \ge 0$ دی نو د سلسلې هر حد مثبت دی، نو د هغې لېمیټ هم منفي نه دی یعنې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[g(x_i) - f(x_i)]\,\Delta x \ge 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx \ge 0$$

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \ge 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \ge \int_a^b f(x)\,dx$$

مثال: که چیرې $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي، نو د $x > 1$ لپاره وښایاست چې $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ دی.

حل:

$$\int_a^b (1 - \frac{x^2}{4})\,dx \le \int_a^b (1 + \frac{x^2}{2})dx$$

$$\int_a^b 1\,dx - \int_a^b \frac{x^2}{4}\,dx \le \int_a^b 1\,dx + \int_a^b \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \le [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهېږو چې $(b-a)>0$ دی، نو:

$$(b-a)-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le(b-a)+\frac{1}{6}(b^3-a^3)\qquad /\div(b-a)$$

$$1-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le 1+\frac{1}{6}(b^3-a^3)$$

$$-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le+\frac{1}{6}(b^3-a^3)\qquad /\div(b^3-a^3)$$

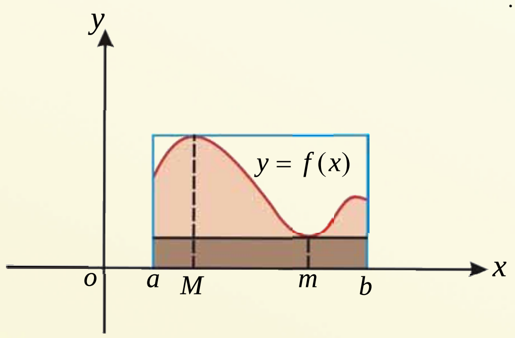
$$-\frac{1}{12}<\frac{1}{6}\ \Rightarrow\ -1<2$$

8. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او M, m قیمتونه په ترتیب سره د تابع مطلق اعظمي او مطلق اصغري قیمتونه په نوموړي انټروال کې وی، نو $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

ثبوت: څرنګه چې $m\le f(x)\le M$ دی نو لرو چې:

$$\int_a^b m\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$



چې دا وروستنی اړیکه د انټیګرال د تخمیني قضیې په نامه یادېږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ انټیګرال په تخمیني توګه حساب کړئ.

حل: څرنګه چې د $f(x)=e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انټروال کې متمادي ده او $M=f(0)=e^0=1$ مطلق اعظمي او $m=f(1)=e^{-1}$ مطلق اصغري دی، نو لرو چې:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$e^{-1}(1-0)\le\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\le 1(1-0)$$

$$e^{-1}\le\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\le 1$$

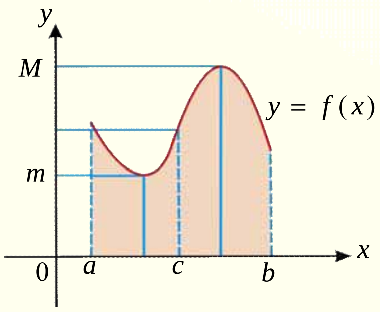
$$e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0,3679\Rightarrow 0.3679\le\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\le 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پایله کې د انتیګرال تخمیني قیمت د 1 او 0.3679 قیمتونو ترمنځ قرار لري.

9. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو د c یو حقیقي عدد شته چې: $a \le c \le b$ دی، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$



ثبوت: د $a<b$ لپاره m او M قیمتونه په ترتیب د تابع مطلق اصغري او اعظمي قیمتونه د $[a,b]$ په انټروال کې وي، لکه مخامخ شکل د انتیګرال د تخمیني قضیې څخه په کار اخیستني د $c\in[a,b]$ لپاره لرو چې:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \quad \Rightarrow\quad m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

فرضوو $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx =$ وي، نو $\le M$ $m \le$ دی او د هر c حقیقي عدد لپاره، $a \le c \le b$

لرو چې: $f(c) =$ نو: $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

چې دا وروستی اړیکه د متوسط قیمت د قضیې په نامه یادېږي خرنګه چې $f(c)$ د تابع متوسط قیمت په $[a,b]$ انټروال کې دی.

مثال: د $f(x)=x^2$ تابع په $[1,4]$ انټروال کې په پام کې ونیسئ آیا کولای شئ $\int_1^4 x^2\,dx = [\frac{x^3}{3}]_1^4 = [\frac{64}{3}-\frac{1}{3}] = [\frac{64-1}{3}] = \frac{63}{3} = 21$ دی.

حل: خرنګه چې $f(x)=x^2$ تابع ده اوس که د x په ځای د c قیمت په تابع کې وضع کړو نو: $f(c)=c^2$ سره کېږي چې دلته د متوسط قیمت د قضیې د فورمول څخه د c قیمت داسې په لاس راځي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس په پورتنی رابطه کې یې قیمت ایږدو، لرو چې:

$$\int_1^4 x^2\,dx = c^2(4-1)$$

$$21 = 3c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{21}{3} \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$= f(c) \quad , \quad f(c) = c^2 = (\sqrt{7})^2 = 7 \Rightarrow f(c) = 7 \quad , \qquad = 7$$

ښکاره شوه چې د تابع یو قیمت مساوي په   او $1 < \sqrt{7} < 4$ دی.

له مخکې څخه پوهېږو چې د مستطیل مساحت د طول او عرض د اوږدوالي د ضرب سره برابر دی نو د متوسط قیمت په فورمول کې $f(c)$ طول او $b-a$ عرض دی نو د منحني لاندې مساحت په $[1,4]$ انټروال کې مساوي له هغه مستطیل سره دی چې اضلاع یې 7 او 3 دی.

پوښتني

1. لاندې معین انتیګرالونه محاسبه کړئ.

$a)\ \int_{-1}^{1}(x^3+2)\,dx = ?$

$b)\ \int_{2}^{5}7x\,dx = ?$

$c)\ \int_{-2}^{4}(-x)\,dx = ?$

$d)\ \int_{-1}^{3}(2|x|-3x)\,dx = ?$

$e)\ \int_{-2}^{3}3x\,dx$

$f)\ \int_{-1}^{2}(x^3-\frac{1}{2}x^4)\,dx = ?$

$g)\ \int_{-4}^{4}(2x^2-\frac{1}{8}x^4)\,dx = ?$

$h)\ \int_{1}^{3}\sqrt{x}\,dx$

2. د $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$ انتیګرال قیمت د $[-1,4]$ په انټروال کې داسې پیدا کړئ، چې $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5$ او $\int_{1}^{4} f(x)dx = -2$ وي.

3. د $f(x) = x$ تابع په $[0,2]$ انټروال کې په نظر کې ونیسئ او د c قیمت په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

10- د انتیګرال او مشتق اساسي قضیې

یو موټر په $72\frac{m}{\sec}$ چټکتیا سره په حرکت کې دی، دریور برک ته فشار ورکوي او موټر وروسته له 6 ثانیو ودرېږي په دې وخت کې وهل شوی فاصله پیدا کړئ.

$$S(t) = v_0 \cdot t$$

فعالیت

- د مشتق د تعریف څخه په ګټې اخیستنې سره د $f(x) = x^2$ د تابع مشتق د $h = 0$ په ټکي کې پیداکړئ.
- د په لاس راغلی تابع انتیګرال په $[0,1]$ انټروال کې محاسبه کړئ.
- د په لاس راغلو دواړو حالتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه په لاس راځي، چې:

د انتیګرال او مشتق تر منځ یوه منطقي اړیکه شته چې له دې اړیکې څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د انتیګرال اصلي او اساسي قضیې په لاندې ډول ثبوت کړو:

1- د انتیګرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چیرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او x په دی انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکې ده، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ دی.

ثبوت: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي ده، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره د $f(x)$ تابع په $[a,x]$ انټروال کې متمادي ده په پایله کې د $f(x)$ تابع په دې انټروال کې انتیګرال منوونکې هم ده.

اوس د $F(x)$ تابع مشتق د تعریف مطابق لیکو او بیا د x متحول ته د h په اندازه تزاید ورکوو، لکه په لاندې ډول:

$$F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(a)+F(a)-F(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(a)-(F(x)-F(a))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x)\Big|_a^{x+h} - F(x)\Big|_a^{x}}{h}$$

اوس د $f(x)$ تابع په $f(t)$ عوض کوو:

$$F'(x)=\lim_{h\to0}\frac{F(t)\Big|_a^{x+h}-F(t)\Big|_a^{x}}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

نظر دریم خاصیت ته لرو چې: $\int_a^b f(t)\,dt=-\int_b^a f(t)\,dt$

$$F'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\int_x^{a} f(t)\,dt+\int_a^{x+h} f(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیې څخه $f(c)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ چې c د x او $x+h$ تر منځ واقع دی، نو کله چې h صفر ته تقرب وکړي c ، x ته تقرب کوي، همدارنګه د f تابع له متمادیت څخه لرو:

$$F'(x)=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt=\lim_{c\to x} f(c)=f(x)$$

په پایله کې: $F'(x)=f(x)$

مثال: د $f(x)=\int_2^{x^2+1}\frac{1}{t^2+1}$ مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \text{ یا } F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

$$u=g(x)=x^2+1$$

$$f(t)=\frac{1}{t^2+1}$$

د زنځیري قاعدې له مخې لرو:

$$F'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$$

$$F'(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$F'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د انتیگرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:

که چیرې $F(x)$ د $f(x)$ تابع لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

ثبـــوت: د مخکینـــی قـــضیې څخـــه پـــوهېږو چـــې کـــه $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ دی لـــه دې ځایـــه د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ نو د دې دوو مقدارونو خلاف یو ثابت مقدار شته چې:

$$f(x) - F(x) = \quad \Rightarrow f(x) = F(x) +$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^x f(t)dt = f(x) = F(x) +$$

$$\int_a^x f(t)\ dt - F(x) =$$

که د x په ځای په پورتنی رابطه کې a وضع کړو، نو:

$$\int_a^a f(t)\ dt - F(a) = \qquad , \qquad 0 - F(a) = \quad \Rightarrow \quad = -F(a)$$

که د قیمت په لومړی رابطه کې وضع کړو، نو: $\int_a^x f(t)dt - F(x) = -F(a)$

که د x په ځای په دې رابطه کې b وضع شي، نو: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

چې اخیرى رابطـه پـه $\int_a^b f(t)\,dt = [F(x)]_a^b$ پـه شـکل ښـودل کېـږي دغـه وروسـتی اړیکـه د لـومړنی تـابع او $\int_a^b f(t)\,dt$ انتیګـــرال تـــرمنځ اړیکـــه ښـــیي، چـــې د نیوټن "لایبنز" رابطې په نوم هم یادیږي.

یادونه:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$
$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$$
$$\int \cos ec^2 x\,dx = -\cot x + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $\int_0^1 x^2dx$ انتیګرال حاصل پیداکړئ.

حل: $$\int_0^1 x^2dx = F(1)-F(0) = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

پوښتنې

1. **لاندې مشتقات پیداکړئ.**

$a)\ F(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2}dx$

$b)\ F(t) = \int_{0}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2}dx$

$c)\ F(t) = \int_{-\pi}^{t} \frac{\cos y}{1+y^2}dy$

$d)\ F(x) = \int_{1}^{x} \frac{\sin t}{t}dt$

2. **که په** $f(t)=t$ **تابع کې** $F(0)=2$ **وي، د** $F(b)$ مقدار په $0, 0.2, 0.4, \dots, 1$ ټکوکې پیداکړئ.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

11- په تعویضي طریقې سره انتیګرال نیونه

ـ آیا کولای شئ چې مخامخ انتیګرال د نامعین انتیګرال له خواصو څخه په کار اخېستنې سره حل کړئ.

ـ که نه شی کولای، نو د جذر لاندې افاده په یوه متحول سره عوض کړئ او بیا هغه حساب کړئ او ووایئ چې په انتیګرال کې د وضع کولو دا طریقه په څه نوم یادېږي.

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

- د $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ انتیګرال کې د جذر لاندې افاده په u سره عوض کړئ.
- د u مشتق ونیسي او د dx قیمت پیدا کړئ.
- څرنګه چې نوموړی انتیګرال یو معین انتیګرال دی، نو د $u = 2x+1$ په معادله کې د $x = 0$ او $x = 4$ قیمتونه وضع او د انتیګرال سرحدونه د u له جنسه په لاس راوړی، وروسته د انتیګرال قیمت محاسبه کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکی وي، $u = g(x)$ او $F'(x) = f(x)$ سره تعویض شي، څرنګه چې $du = g'(x)dx$ دی، له زنځیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

لومړی مثال: د $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو:

$$u = 3 - 5x \ , \quad du = -5\,dx \qquad dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow u = 3 - 5\cdot 1 = -2 \Rightarrow u = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow u = 3 - 5\cdot 2 = 3 - 10 \Rightarrow u = -7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2}\left(-\frac{1}{5}\right) du = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \left[\frac{1}{5u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{7} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{14}$$

دويم مثال: د $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$ انتيګرال حساب کړئ.

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو.

$$u = 1 + 2x^3 \quad , \quad du = 6x^2\,dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{6} du$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 1 + 2x^3 \Rightarrow u = 1 + 2\cdot 0 = 1 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 1 + 2x^3 \Rightarrow u = 1 + 2\cdot 1 = 3 \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx = \int_1^3 u^5 \frac{1}{6}\cdot du = \frac{1}{6}\int_1^3 u^5 du = \frac{1}{6}\left[\frac{u^6}{6}\right]_1^3 = \frac{1}{6}\left[\frac{3^6}{6} - \frac{1}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{729}{6} - \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{728}{6}\right]$$

$$= \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\overline{2}$$

فعاليت

- د $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ انتيګرال کې د جذر لاندې افاده د u په متحول سره تعويض کړئ.
- له u څخه مشتق ونيسئ او په لاس راغلې قيمت په لومړنۍ انتيګرال کې وضع او هغه حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د پورته څخه د $F(x)+C$ په لاس راغلي تابع څخه مشتق ونیسئ او د هغې څخه لومړنی تابع په لاس راوړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که د $F(u)$ تابع د $f(u)$ لومړنی تابع وي، د $u=g(x)$ د متحول په تعویض سره یوه بله تابع چې مستقل متحول یې x او متمادي مشتق ولري له زنځیري قاعدې څخه په کاراخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

لومړی مثال: $\int\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتیګرال حساب کړئ.

حل: د جذر لاندې افاده په u سره عوض کوو.

$$u=1-4x^2\ ,\ du=-8x\,dx$$

$$xdx=-\frac{1}{8}du$$

$$\int\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx=\int\frac{1}{\sqrt{u}}(-\frac{1}{8})\,du=-\frac{1}{8}\int\frac{1}{\sqrt{u}}du=-\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du=-\frac{1}{8}\,(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1})+C$$

$$=-\frac{1}{8}(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}})+C=-\frac{1}{8}(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}})+C=-\frac{1}{8}(2\sqrt{u})+C=-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C$$

دویم مثال: $\int x^3\cos(x^4+2)dx$ حساب کړئ.

حل: که چېرې $u=x^4+2$ وضع کړو په لاس راځي:

$$u=x^4+2\ ,\ du=4x^3dx\ ,\ x^3dx=\frac{1}{4}du$$

$$\int x^3\cos(x^4+2)\,dx=\int\cos u\cdot\frac{1}{4}du$$

$$=\frac{1}{4}\int\cos u\,du$$

$$=\frac{1}{4}\sin u+C$$

$$=\frac{1}{4}\sin(x^4+2)+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

لاندې انتیګرالونه د تعویض له لارې محاسبه کړئ.

$a)\ \int \cos 3x\, dx = ?$

$b)\ \int_1^2 x\sqrt{x-1}\, dx = ?$

$c)\ \int_0^7 \sqrt{4+3x}\, dx = ?$

$d)\ \int 2\sqrt[5]{(1-4x)^2}\, dx = ?$

$e)\ \int 2x(x^2+3)^4\, dx = ?$

$f)\ \int_0^5 \frac{x\, dx}{x^2+10} = ?$

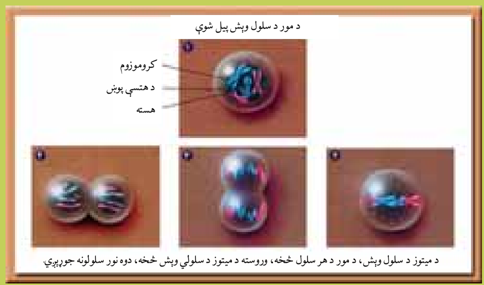
$g)\ \int \sqrt{\cos x}\, \sin x\, dx = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

12- قسمي انتيگرالونه

د حجروي وېش په وخت کې يوه حجره په دوو يا څو حجرو وېشل کېږي. ايا کولای شئ دا لاره(روش) په نورو شيانو کې لکه: تېره، شګه او نورو کې ووينو که څواب هو وي، نو دا لاره د څه په نامه يادېږي.



فعاليت

- د $\int \frac{xdx}{x^2+1}$ انتيگرال په تعويضي طريقه حل کړئ.
- د $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ انتيگرال قيمت په تعويضي طريقه پيدا کړئ.
- **آيا کولای شی چې د** $\int x^2 \sin xdx$ انتيگرال په تعويضي طريقه وشمېرئ.

له پورتني فعاليت څخه دې پايلې ته رسېږو:

د $\int f(x)g(x)\,dx$ په انتيگرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکې تابعګانې دي چې يوه له بلې سره د ضرب ور وي يا نه وي، خو د انتيگرال محاسبه يې اسانه کار نه دی، که چيرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ وضع کړو، د ضرب حاصل مشتق يې مساوي په: $(u\cdot v)'=u'v+v'u$ دی.

له پورتنی رابطې څخه $v'u$ په لاس راوړو اوله اطراف څخه انتيگرال نيسو:

$$v'\cdot u=(u\cdot v)'-u'\cdot v$$

$$\int v'\cdot u\;dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\;dx \quad \text{يا} \quad \int udv=u\cdot v-\int vdu$$

چې پورتنی رابطې ته د غيرمعين انتيگرال فورمول په قسمي طريقه وايي.

که د u او v تابعګانې په $[a,b]$ انټروال کې تعريف شوې وي، لاندې فورمول د معين انتيگرال فورمول په قسمي لاره(طريقه) بلل کېږي.

$$\int_a^b v'u\,dx=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vu'\,dx \quad \text{يا} \quad \int_a^b udv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

لومړی مثال: د $\int x\sin x\,dx$ انتیگرال پیداکړئ.

حل:

$$u = x \quad , \quad du = dx$$
$$dv = \sin x\,dx \quad , \quad v = -\cos x$$
$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$
$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int -\cos x\,dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

دویم مثال: د $\int_0^1 -xe^x\,dx$ انتیگرال حساب کړئ.

حل:

$$u = -x \quad , \quad du = -dx \quad , \quad -du = dx$$
$$dv = e^x dx \quad , \quad v = e^x$$
$$\int_a^b v'\cdot u\,dx = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot u'\,dx$$
$$\int_0^1 -xe^x\,dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$
$$= -e^1 + 0\cdot e^0 + [e^x]_0^1$$
$$= -e^1 + e^1 - e^0 = -e^0$$
$$= -1$$

یادونه:
$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

پوښتني

لاندې انتیگرالونه حساب کړئ.

a) $\int \theta\cos\theta\,d\theta = ?$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx = ?$

c) $\int x^5\cos(x^3)\,dx = ?$

d) $\int_0^1 xe^x\,dx = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي مهم ټکي

د ريمان مجموعه: فرضوو د $y = f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او تعريف شوې وي او د ناحيې مساحت چې د x محور او د $y = f(x)$ منحني ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدليدلای، محاسبه کړو.

د $[a,b]$ انټروال چې په n مستطيلو نو تقسيموو خرنګه چې د هر مستطيل عرض د $(\Delta x = \frac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطيلونو طول عبارت دی د تابع قيمت په هم هغه ټکي کې، دا فاصلې په لاندې ډول دي:

او د مستطيلونو انټروالونه د n, ... $i = 1,2,3,$ لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0 = a \quad , \quad x_1 = a + \Delta x \quad , \quad x_2 = a + 2\Delta x, \; \dots \; , x_i = a + i\Delta x, \; \dots \; , x_n = b$$

$$[x_0, x_1] \; , \; [x_1, x_2] \; , \; [x_2, x_3], \; \dots \; , [x_{i-1}, x_i], \; \dots \; , [x_{n-1}, x_n]$$

که د لانديني مستطيلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتني مستطيلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي او د محصور شوې سطحې مساحت په A وښيو، نو لرو چې:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

نامعين انټيګرالونه: که چيرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې تعريف او $F(x)$ د $f(x)$ يوه لومړنۍ تابع وي. د $F(x) + C$ توابعو سټ چې c يو ثابت عدد وي د غيرمعين انټګرال په نامه يادېږي او داسې ليکل کېږي: $\int f(x)dx = F(x) + C$

د نامعين انټيګرالونو خواص(ځانګړتياوې):

$$\int dx = \int dx = x + C$$

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

$$\int [f(x) \cdot g(x)]\, dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx} \quad , \; g(x) \neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

معین انتیګرال: د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعې لېمیټ ته په $[a,b]$ انټروال کې کله چې n بې‌نهایت ته نږدې شي د Δx فرعي انټروالونو اوږدوالی صفر ته نږدی کېږي، چې د $f(x)$ تابع ټاکلی انتیګرال د $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې په نوم یادېږي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

a ته د انتیګرال لاندینی سرحد او b ته د انتیګرال پورتنی سرحد وايي.

د معین انتیګرال خواص(ځانګړتیاوی):

$$\int_a^b C\,dx = C(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$f(x)\le g(x) \quad\Rightarrow\quad \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \quad\Rightarrow\quad f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

د انتیګرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چیرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي او x په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې د مشتق وړ ده، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ دی.

د انتیګرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:

- که چیرې $F(x)$ تابع د $f(x)$ لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

- که $F(u)$ د $f(u)$ لومړنی تابع وي او د $u = g(x)$ متحول سره تعویض شي چې مستقل متحول یې x او متمادي مشتق ولري. د زنځیری قاعدې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

- که $F(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې د مشتق منونکي وي، او $u = g(x)$ همدارنګه $F'(x) = f(x)$ سره تعویض شي، څرنګه چې $du = g'(x)dx$ دی، له زنځیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

- د $\int f(x)g(x)dx$ انتیګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکي تابعګانې وي چې په خپل منځ کې قابل د ضرب وي او یا نه وي، خو د انتیګرال محاسبه یې آسانه کار نه دی، که چیرې $f(x) = u$ او $g(x) = v$ سره عوض شي، د هغوی د حاصل ضرب مشتق عبارت دی له:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني اړيکې څخه $v'\cdot u$ په لاس راوړو او له دواړو خواوو څخه انتيگرال نيسو:

$$\int v'\cdot u\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx \quad \text{يا} \quad \int u dv = u\cdot v - \int v du$$

چې اخيرى اړيکې ته د غير معين انتيگرال فورمول په قسمي طريقه وايي.

- که د u او v تابگانې په $[a,b]$ انتروال کې تعريف شوې وي لاندې فورمول، د معين انتيگرال فورمول په قسمي لاره(طريقه) بلل کيږي:

$$\int_a^b v'u\,dx = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vu'\,dx \quad \text{يا} \quad \int_a^b u dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې ټاکلو انتيګرالونو قيمت پيدا کړئ.

$a)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}dx$　　$b)\ \int_{-4}^{4}[2x^2 - \frac{1}{8}x^4]dx$　　$c)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx$

$d)\ \int_0^3 4dx$　　$e)\ \int_1^3 \sqrt{x}\ dx$　　$f)\ \int_1^2 (x^2 - x^5)dx$

$g)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$　　$h)\ \int_{-2}^{0}[\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3}]dx$　　$i)\ \int_2^3 (x^3 + x^2)dx$

$)\ \int_{-2}^{2}[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4]dx$　　$)\ \int_0^{\pi} \sin x dx$　　$l)\ \int_1^2 x^2\ dx$

2- لاندې غير معين انتګرالونه حل کړئ.

$a)\ \int[\sin x + 8x^3]dx$　　$b)\ \int[x^5 + \frac{4}{x^4} + x^3 + \frac{2}{x^2} + x]dx$

$c)\ \int x(1-2x^2)dx$　　$d)\ \int \sin x\, dx$

$e)\ \int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx$　　$f)\ \int \frac{(1-x)^2}{1-x}dx$

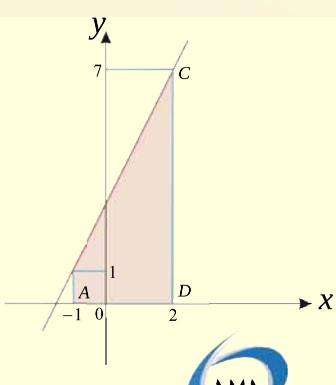
$g)\ \int \sqrt[5]{x^3}\ dx$　　$h)\ \int \frac{3x^2+8x}{x}dx$

$i)\ \int (2x^2+3)\,dx$　　$)\ \int \frac{1}{\sqrt{x^3+2}}dx$

$)\ \int \frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3}dx$　　$l)\ \int (3x^2+4x-1)\ dx$

3- د لاندې محصور شوې سطحې مساحت د شکل له مخې پيدا کړئ.

$\int_{-1}^{2}(2x+3)dx$



(c) ketabton.com: The Digital Library

4- لاندي انتیګرالونه د تعویضي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ \int 3\cos(2x+1)\,dx$

$b)\ \int \sqrt{3x+5}\,dx$

$c)\ \int \frac{2\,dx}{x+2}$

$d)\ \int (3x+6)^3\,dx$

$e)\ \int x^3\sqrt{x^4+2}\,dx$

$f)\ \int (x^3+2)^2 3x^2 dx$

$g)\ \int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2}$

$h)\ \int_0^2 x^2\cdot\sqrt{9-x^3}\,dx$

$i)\ \int \frac{1}{(x-10)^7}dx$

$)\ \int_0^1 (1-x^2)^3 x dx$

$)\ \int (4-3x)^7 dx$

$l)\ \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

5- لاندي انتیګرالونه د قسمي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ \int x\cos x\,dx$

$b)\ \int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx$

$c)\ \int e^x\cdot\cos x\,dx$

$d)\ \int_0^{2\pi} x\cos 3x\,dx$

$e)\ \int xe^{-x}dx$

$f)\ \int x\sqrt{1+x}\,dx$

$g)\ \int x^2\cdot e^{2x}dx$

$h)\ \int e^{2x}\sin 3x\,dx$

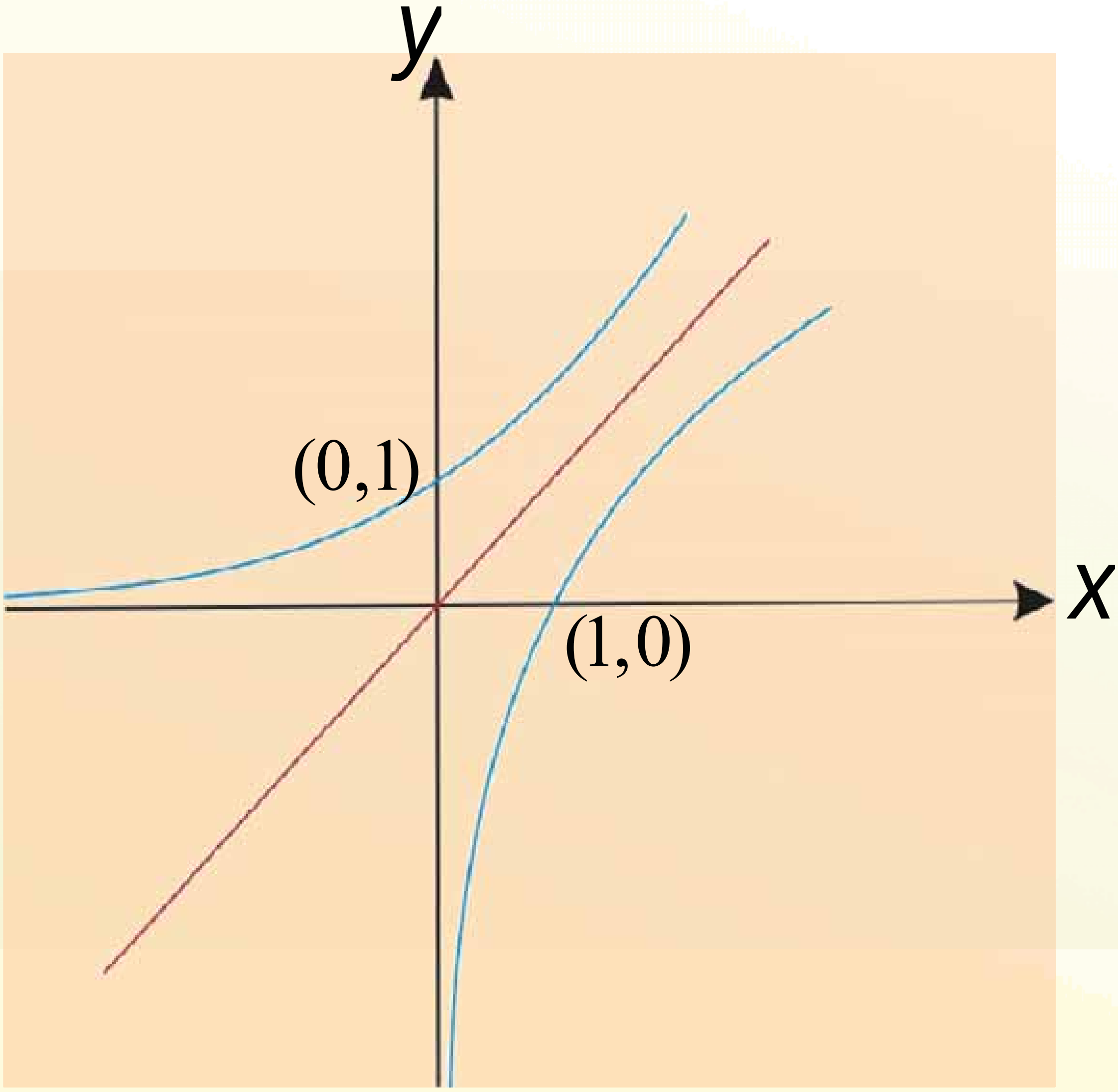
$i)\ \int x^2\cdot e^{-x}\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم څپرکی

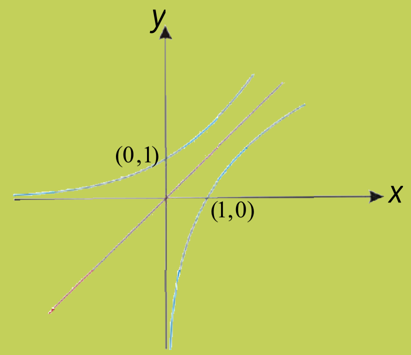
د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانو مشتق او انتیګرال



(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابعګانو ګراف راښيي، نومونه يې واخلئ.



فعالیت

- لوګاریتم تعریف او خواص يې ولیکئ.
- لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانې یوه له بلې سره څه اړیکې لري.
- که $\log_b x$ یوه متصله تابع وي، نو $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ له کوم عدد سره مساوي ده.
- د $y=f(x)$ د تابع له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسئ، اړیکه يې ولیکئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

په عمومي ډول که $f(x)=\ln x$ او $g(x)=a^x$ وي؛ نو $g'(x)=a^x\ln a$ او $f'(x)=\frac{1}{x}$ دی.

ثبوت:

1-

$$y=g(x)=a^x$$
$$\ln y=\ln a^x=x\ln a$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه نظر x ته مشتق نیسو:

$$\frac{y'}{y}=x'\ln a+x(\ln a)'$$
$$\frac{y'}{y}=\ln a+0$$
$$\frac{1}{y}y'=\ln a$$
$$y'=y\ln a \quad\Rightarrow\quad g'(x)=a^x\ln a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-2

$$f(x)=\ln x$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(\frac{x+h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{x})\ =\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln(1+\frac{h}{x})$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

که $u=\frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{1}{u}=\frac{h}{x}$ دی خرنګه چې $h\to 0$ تقرب وکړي نو $u\to\infty$ ته نږدی کېږي، لیکلای شو چې:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\ln(1+\frac{1}{u})^{u}=\frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}$$

پوهېږو چې $\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=e$ دی، نو: $(\ln x)'=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$

قضیه

1. که د $f(x)=\log_a x$ تابع مشتق منوونکی وي؛ نو مشتق یې $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$

2. که $f(x)=\log_a g(x)$ او $g(x)$ مشتق منوونکی وي، نو $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

ثبوت:

-1

$$f(x)=\log_a x \quad\Rightarrow\ f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

اوس که $\frac{x}{h}=u$ وضع شي نو $\frac{1}{u}=\frac{h}{x}$ کېږي، که $h\to 0$ صفر ته تقرب وکړي، نو $u\to\infty$ کوي، یعنې:

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=\frac{1}{x}\log_a e$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- غواړو ثبوت کړو چې: $(\log_a g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$

د زنځيري قاعدې له مخې:

$$f'(x) = (\log_a g(x))' = (\log_a g(x))' \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)} \log_a e \cdot g'(x)$$

$$= \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$$

که $a = e$ وضع شي؛ نو لرو: $(\log_a g(x))' = (\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$

پايله:

1- د Exponential تابعګانو مشتق د لوګاريتم په مرسته کولای شو په اسانی سره په لاس راوړو.

که $y = e^x$ وي ددې تابع مشتق $y' = e^x$ دی ځکه که د $y = e^x$ رابطې څخه طبيعي لوګاريتم ونيسو، په لاس راځي:

$$y = e^x \Rightarrow \ln y = x \ln e = x$$

$$(\ln y)' = (x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow y' = y \cdot 1 = e^x$$

2- که $y = e^u$ او u تابع د x وي، نو: $y' = u'e^u$

3- که $y = a^u$ کله چې $a > 0$ او $a \neq 1$ وي، نو: $y' = u'a^u \ln a$

4- د لوګاريتمي تابعګانو د مشتق پيداکولو لپاره په بېلابېلو قاعدو سره له دې اړيکې څخه ګټه اخلو:

$$y = \log_a u \Rightarrow y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u} \log_a e$$

$$y' = \frac{u'}{u} \log_a e = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\log_e a} \Rightarrow y' = \frac{(\ln u)'}{\ln a} = \frac{u'}{u \ln a}$$

لومړی مثال: د $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: که $g(x) = x^2 + 1$ وضع کړو، نو لرو:

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$g'(x) = 2x$$

$$(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$(\ln(x^2 + 1))' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \Rightarrow f'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $f(x)=\ln(x^2-5x+4)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln(x^2-5x+4) \\ g(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow g'(x)=2x-5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\ln g(x))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)} \\ (\ln(x^2-5x+4))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+4} \end{array}$$

دریم مثال: د $f(x)=\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ او $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ تابعگانو مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهیږو چې $\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو، چې:

$$\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_a\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))$$

$$(\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))'$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}\log_a e-\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)}\log_a e]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1}\log_a e-\frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right]=\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left[\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}\right]$$

$$=\frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

حل: پوهیږو چې $\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو، چې:

$$\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1))$$

$$(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)]'=\frac{1}{2}[(\ln(x^2+1))'-(\ln(x^2-1))']$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1})=\frac{-2x}{x^4-1}$$

خلورم مثال: د $y=e^{(x^2+1)}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې که $y=e^u$ وي نو $y'=u'e^u$

$$y=e^{(x^2+1)} \Rightarrow y'=(x^2+1)'\cdot e^{x^2+1}=2x\cdot e^{x^2+1}$$

پنځم مثال: د $y=\sqrt[x]{2}$ تابع مشتق په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې که چیرې $y=a^u$ وي نو $y'=u'a^u\ln a$ سره دی، نو:

$$y=\sqrt[x]{2}=(2)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y'=(\frac{1}{x})'\cdot 2^{\frac{1}{x}}\ln 2=\frac{-1}{x^2}\cdot 2^{\frac{1}{x}}\cdot\ln 2$$

شپږم مثال: د $y=x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که د معادلې له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسو، په لاس راځي چې:

$$y=x^{2x}$$
$$\ln y=\ln x^{2x}$$
$$\ln y=2x\ln x$$
$$(\ln y)'=(2x\ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y}=2\ln x+2x\cdot\frac{1}{x}$$
$$y'=2(\ln x+1)\cdot y \Rightarrow y'=2(\ln x+1)\cdot x^{2x}$$

اووم مثال: د $y=10^x$ تابع مشتق حساب کړئ.

حل: پوهېږو چې $y=a^x \Rightarrow y'=a^x\ln a$ دی، نو:

$$y=10^x$$
$$y'=10^x\cdot\ln 10$$

اتم مثال: د $y=e^{3x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که $u=3x$ وضع شي، نو: $u'(x)=3$

$$y=e^u$$
$$y'=e^u\cdot u'=e^{3x}\cdot 3$$
$$y'=3e^{3x}$$

نهم مثال: د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y=\log(x^4+1)$ 2) $y=\log_3(\log_2 x)$ 3) $y=\log_{x^2-1}x^2+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: پوهېږو چې د لوګارتمي توابعو مشتق په مختلفو قاعدو سره د لاندې قضيې څخه په ګټه اخيستنې سره په لاس راوړو:

$$y = \log_a u$$

$$y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u}\log_a e = \frac{u'}{u\log_e a} = \frac{u'}{u\ln a}$$

1) $y = \log(x^4+1) \Rightarrow y' = \dfrac{4x^3}{(x^4+1)\ln 10}$

2) $y = \log_3(\log_2 x) \Rightarrow y' = \dfrac{(\log_2 x)'}{\ln 3 \log_2 x} = \dfrac{\frac{1}{x\ln 2}}{\ln 3\log_2 x} = \dfrac{1}{(\ln 2)(\ln 3)x\log_2 x}$

$$= \frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\log_e x}{\log_e 2}} = \frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\ln x}{\ln 2}} = \frac{1}{\ln 3\, x\ln x}$$

3) $y = \log_{x^2-1} x^2+1 = \dfrac{\log_e(x^2+1)}{\log_e(x^2-1)} = \dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2-1)}$

پوهېږو چې $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ دی؛ نو لرو:

$$y' = \frac{\frac{2x}{x^2+1}\cdot\ln(x^2-1) - \frac{2x}{x^2-1}\ln(x^2+1)}{[\ln(x^2-1)]^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پيدا کړئ:

a) $f(x) = \ln\sin 3x$

b) $f(x) = \ln\sqrt{3x^2+7}$

c) $f(x) = \ln(5x^2-6x+5)$

d) $f(x) = \log_{10} 3x^2$

e) $f(x) = y = x^x$

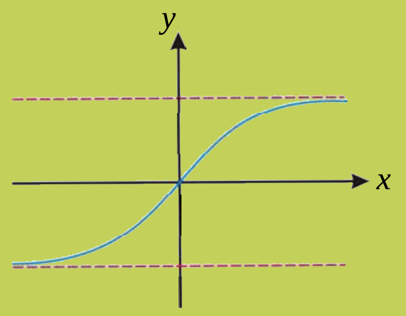
f) $y = \dfrac{(x+1)^2(\sqrt{x}-1)}{(x+4)^3 e^x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معکوسو تابعګانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابع ګراف راښيي؟



کــه چيــرې f او g يــوه د بلــې دوې معکوســې تابعګــانې وې، يعنــې $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ وي، نــو: $\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{dy}{dx}$ يا $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ دی، ځکه چې د تابع او ضمني تابعګانو له مشتق څخه ليکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = g(y) \end{array}\right\} \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = y'_y \quad \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = 1 \quad \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

مثال: د $y = a^x$ تابع مشتق د هغې د معکوسې تابع په مرسته پيدا کړئ.

حل:

$$y = a^x \quad \Rightarrow x = \log_a y$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a = y\log_e a$$

$$y' = a^x \ln a$$

د مثلثاتي معکوسو تابعګانو مشتق

د مثلثاتي معکوسو تابعګانو مشتق د لاندې اړيکو په مرسته لاسته راوړو:

1) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 2) $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ 4) $(arc\cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

ثبوت:

1) $y = arc\sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$

$(arc\sin x)' = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $y = arc\cos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$

$(arc\cos x)' = ?$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $y = arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y$

$$\Rightarrow (arc\tan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

د کسر صورت او مخرج په $\cos^2 y$ ویشو:

$$(arc\tan x)' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4) $y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$

$(arc\cot x)' = ?$

$$(arc\cot x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}}$$

$$= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

د کسر صورت او مخرج په $\sin^2 y$ وېشو:

$$= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

لومړی مثال: د $y = (\arctan x)^5$ تابع مشتق پيدا کړئ.

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1+x^2}$$

دويم مثال: د $y = \log_5(\arctan x)$ تابع مشتق پيدا کړئ.

$$y' = [\log_5(\arctan x)]' = \log_5 u = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x \ln 5} = \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x \ln 5)}$$

دريم مثال: د $y = arc\tan e^x$ تابع د مشتق مقدار د $x = 0$ ټکي کې پيدا کړئ.

$$y' = [arc\ \tan e^x]' = (arc\tan u)' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$y'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. د لاندې تابعگانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = (arc\sin x)^3$

2) $y = \log_2(arc\cos x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

قسمي کسرونه

د يو کسر تجزيه کول په قسمي کسرونو:

پوهېږو چې د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ د جمعې حاصل $\frac{2x-1}{x^2-1}$ دی، آيا کولای شئ چې له دې کسر څخه د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ کسرونه لاسته راوړئ.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{2x-1}{x^2-1}$$

فعالیت

- د $\frac{7}{x+1}$, $\frac{5}{x-2}$ او $\frac{2}{x-5}$ کسرونه سره جمع کړئ.
- د پورته کسرونود جمعې حاصل، بېرته په لومړنيو کسرونو واړوئ.
- واقعي کسرونه څه ډول کسرونه دي، تعريف يې کړئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

تعريف: د يوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل ليکل شوی وي، که چېرې هغوی سره جمع کړو، راکړل شوی واقعي کسر په لاس راشي، نو دا جمع شوي لومړني کسرونه د قسمي کسرونو په نامه يادېږي.

د يوه واقعي کسر د تجزيه کولو لپاره لاندې حالتونه په پام کې نيسو:

لومړی حالت:

که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ ناطق کسر مخرج ($P_n(x)$) له خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړ شوی وي او تکرار نه وي په لاندې بڼه بدلېدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{}{x-x_n}$$

(A, C, ... حقيقي عددونه دي)

لومړی مثال: د $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ کسر په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

حل: د مخرج پولينوم په لومړنيو ضربي عواملو تجزيه کوو، نو په لاس راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$

لیدل کېږي، چې نوموړی کسر له دریو قسمي کسرونو څخه جوړ شوی دی، صورتونه یې A, C, ټاکو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+\ (x-5)(x+2)+C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+\ x^2-3\ x-10\ +Cx^2-6Cx+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+\ +C)x^2+(A-3\ -6C)x+(-2A-10\ +5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

لیدل کېږي، چې د دواړو خواوو د کسرونو مخرجونه سره برابر دي، نو باید صورتونه هم سره برابر وي، نو د مطابقت د خواصو(د ورته حدونو ضریبونه سره مساوي وي) څخه په ګټه اخستنې سره لیکو:

$$\begin{cases}A+\ \ +C=4\\ A-3\ \ -6C=-1\\ -2A-10\ \ +5C=-39\end{cases}$$

د پورته سیستم له حل څخه وروسته $=3, A=2$ او $C=-1$ په لاس راځي، نو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

دویم مثال: د $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل: لومړی نوموړی کسر په واقعي کسر بدلوو او بیا پورتنی طریقه پرې تطبیقوو:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}\ \Rightarrow\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{}{x+2}$$

$$=\frac{A(x+2)+\ (x-4)}{(x-4)(x+2)}=\frac{(A+\ )x+(2A-4\ )}{x^2-2x-8}$$

$$\left.\begin{matrix}A+\ \ =4\\ 2A-4\ \ =-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow A=\frac{5}{2}\quad,\quad =\frac{3}{2}$$

$$\frac{3x^2-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

دویم حالت:

که د کسر د مخرج ضربي عوامل لومړی درجه پولینوم وي چې ځینې یې تکرار راغلی وي، یعنې که د $x-x_0$ عامل n ځلې په مخرج کې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو؛ چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{\quad}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{\quad}{(x-x_0)^n}$$

لومړی مثال: د $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ واقعي کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ:

حل: د مخرج د پولینوم ضربي عوامل په لاس راوړو:

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x-2)(x-1)$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{3x^2-6x+2}{(x-2)(x-1)^2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{\quad}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{A(x-1)^2+\quad(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$=\frac{(A+\quad)x^2+(-2A-3\quad+C)x+(A+2\quad-2C)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\left.\begin{aligned}A+\quad&=3\\-2A-3\quad+C&=-6\\A+2\quad-2C&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}A&=2\\&=1\\C&=1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

دریم حالت:

که د مخرج ضربي عوامل دریمه درجه پولینوم چې د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولینوم د یو قسمي کسر $\frac{Ax+\quad}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.

لومړی مثال: د $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مخرج پولینوم ضربي عوامل عبارت دي له:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

څرنگه چې د x^2+2x+4 درې جمله يي د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، نو په دې ساحه کې د تجزيې وړ نه ده له دې امله ليکو:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}=\frac{(Ax+\quad)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(A+\quad+2C)x+(\quad+4C)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l}A+C=5\\ A+\quad+2C=8\\ \quad+4C=9\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}A=3\\ \quad=1\\ C=2\end{array}\Rightarrow\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

پوښتنې

لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

-1

a) $\frac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ b) $\frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$ c) $\frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-9x+3}$

-2

a) $\frac{1}{x^4(x+1)}$ b) $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ c) $\frac{x^4+1}{x^2(x-1)}$

d) $\frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ e) $\frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

-3

a) $\frac{3x+7}{(x^2+x+1)(x^2-4)}$ b) $\frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$

c) $\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$ d) $\frac{x^5}{x^4-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل تابعګانو انتیګرالونه

مخامخ اړیکې سره پرتله کړئ.

$$\log_a b = x$$

$$a^x = b$$

فعالیت

- د $f(x) = a^x$ تابع څه ډول تابع ده، نوم يې واخلئ.
- د لوګاریتمي تابع یوه بېلګه ولیکئ.
- د $\log_a x = C$ اړیکه په اکسپوننشیل ډول ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لیکلای شو چې:

د $f(x) = e^x$ طبیعي اکسپوننشیل تابع لپاره لرو $\int e^x dx = e^x + C$ نو په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \; a \neq 1 \quad , \; a \in IR^+$$

ثبوت:

$$\int a^x dx$$

$$u = 1 \quad \Rightarrow du = 0 \cdot dx$$

$$dv = a^x \quad \Rightarrow v = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a} \cdot 0 \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

لومړی مثال: د $f(x) = 2^{x-3}$ اکسپوننشیل تابع انتیگرال غواړو پیدا کړو:

د توان له قانون څخه لرو:

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8}2^x$$

$$\int 2^{x-3}dx = \int \frac{1}{8}2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx$$

$$\frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + C$$

دویم مثال: دلاندې اکسپوننشیل تابعګانو انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 3^{x+1}\,dx = ?$ 2) $\int 6^{x-1}\,dx = ?$

حل:

1) $\int 3^{x+1}\,dx = ?$

$$3^{x+1} = 3^x \cdot 3$$

$$\int 3^x \cdot 3\,dx = 3\int 3^x\,dx = 3\cdot\frac{3^x}{\ln 3} + C$$

2) $\int 6^{x-1}\,dx = ?$

$$6^{x-1} = \frac{6^x}{6} = \frac{1}{6}\cdot 6^x$$

$$\int \frac{1}{6}6^x\,dx = \frac{1}{6}\int 6^x\,dx = \frac{1}{6}\cdot\frac{6^x}{\ln 6} + C$$

پوښتنې

د لاندې اکسپوننشیل تابعګانو انتیګرالونه محاسبه کړئ.

$a)\ \int 3^{x-1}dx$ $b)\ \int 2^{-x}dx$ $c)\ \int a^{x+b}dx$

$d)\ \int \frac{1}{a^x}dx$ $e)\ \int 2^x \cdot 3^x dx$ $f)\ \int \frac{2^x}{3^x}dx$

$g)\ \int \frac{4^{x+3}}{2^x}dx$ $h)\ \int \frac{5^x + 3^x}{2^x}dx$ $i)\ \int (1+2^x)dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال

وښیئ چې د تابع په کوم حالت کې نزولي او په کوم حالت کې صعودي ده.

$$y = a^x$$

$$\int a^x dx = ?$$

- لوګاریتم په څو ډوله دی، د هر ډول عمومي رابطه ولیکئ.
- د $x = a^y$ او $y = \log_a x$ معادلې یو له بل سره څه اړیکه لري.
- د $x = b^y$ او $y = \log_b x$ تابعګانو ګراف رسم کړئ.
- آیا کولای شو چې د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال ونیسو؟

د پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

که $(x \in IR^+)$ $f(x) = \ln x$ وي د طبیعي لوګاریتم د تابع لپاره لیکلای شو: $\int \ln dx = x \cdot \ln x - x + C$

که $(x, a \in IR^+, a \neq 1)$ $f(x) = \log_a x$ وي د معمولي لوګاریتم تابع لپاره لیکلای شو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شي، نو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x\, dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e)$$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-2

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x \ , \quad du = \frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$dv = dx \ , \quad v = x$$

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \int x\frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$= x\log_a x - \log_a e\int dx$$

$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x\,dx = x\ \log_a \frac{x}{e} + C$$

مثال: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیګرال غواړو پیدا کړو:

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3\,dx + \int \ln x\,dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x$$

$$= x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

یادونه:

(I) د تعویض Substitution له لارې کولای شو د غیرمعین انتیګرال حل پیدا کړو.

لومړی مثال: لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

حل:

$$a)\quad I = \int \frac{1}{2}e^{-2x-3}dx$$

$$-2x - 3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \ , \quad dx = -\frac{1}{2}du$$

$$I = \int \frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{4}\int e^{u}du = -\frac{1}{4}e^{u} + C = -\frac{1}{4}e^{-2x-3} + C$$

$$b)\quad I = \int \frac{2dx}{x+2}$$

$$x + 2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ:

حل:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

$$u=2x \Rightarrow du=2dx$$

$$dx=\frac{du}{2}$$

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{u}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du$$

$$\int e^{2x}dx=\frac{e^{u}}{2}+C=\frac{e^{2x}}{2}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

آزمايښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

دریم مثال: د $f(x)=x\cdot\ln x^{2}$ انتیګرال حساب کړئ.

حل:

$$f(x)=x\cdot\ln x^{2} \Rightarrow \int f(x)dx=\int(x\cdot\ln x^{2})dx=?$$

$$u=x^{2}$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\int f(x)\,dx=\int x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\frac{1}{2}\int\ln u\,du=\frac{1}{2}[u\cdot\ln u-u+C]=\frac{1}{2}u\cdot\ln u-\frac{1}{2}u+C$$

$$=\frac{1}{2}x^{2}\cdot\ln x^{2}-\frac{1}{2}x^{2}+C$$

(II) معین انتیګرالونه هم د بدلون(تعویض) له لارې حل کیږي.

لومړی مثال: د $\int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx$ انتیګرال پیدا کړئ.

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx$$

$$u=2x \Rightarrow du=2\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\left.\begin{aligned}x=-1,\ u=2x &\Rightarrow u=2(-1)=-2\\ x=1,\ u=2x &\Rightarrow u=2(1)=2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}e^{u}\,du=\frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2}=3.627$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $f(x)=\int_1^2 2x\cdot\ln x^2dx$ انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

$$u=x^2$$

$$du=2x\,dx\Rightarrow dx\frac{1}{2x}du$$

$$\left.\begin{matrix}x=1\ ,\ u=x^2=1\\ x=2\ ,\ u=x^2=4\end{matrix}\right\}\Rightarrow\int_1^2 2x\cdot\ln x^2dx=\int_1^4 2x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\int_1^4\ln u\,du$$

$$=\left[u\cdot\ln u-u\right]_1^4=\left[4\cdot\ln4-4\right]-\left[1\cdot\ln1-1\right]\approx2.545$$

پوښتني

لاندي انتیګرالونه حل کړئ.

$a)\ \int\ln2x^3dx$　　$b)\ \int\ln\sqrt{x}dx$　　$c)\ \int\log\frac{x}{2}dx$

$d)\ \int3\log\frac{1}{x}dx$　　$e)\ \int_1^2\frac{4}{e^{2x-4}}dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قسمي کسرونو په مرسته د انتيګرال محاسبه

د مخامخ کسر قسمي کسرونه پيدا کړئ.

$$\frac{5}{x^2-3x+2}=\frac{?}{(x-2)}+\frac{?}{(x-1)}$$

مخکې مو د قسمي کسرونو تجزيه مطالعه کړه اوس غواړو چې د هغو تابعګانو انتيګرالونه د قسمي کسرونو په واسطه تر څېړنې لاندې ونيسو.

لومړی مثال: $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx$ محاسبه کړئ.

حل: د قسمي کسرونو د تجزيې په مرسته ليکلای شو:

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\frac{A}{(x-2)}+\frac{\quad}{(x-4)}$$

$$\frac{A(x-4)+\quad(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\frac{Ax-4A+\quad x-2\quad}{(x-2)(x-4)}=\frac{(A+\quad)x-4A-2\quad}{(x-2)(x-4)}$$

$$A+\quad=7$$

$$-4A-2\quad=-12$$

$$A=7-\quad$$

$$-4(7-\quad)-2\quad=-12$$

$$-28+4\quad-2\quad=-12$$

$$-28+2\quad=-12$$

$$2\quad=16 \Rightarrow \quad=8$$

$$A=7-8=-1$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$

نو ليکلای شو چې:

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int\frac{-1}{x-2}dx+\int\frac{8}{x-4}dx$$

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int\frac{1}{x-2}dx+8\int\frac{1}{x-4}dx$$

$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$

$$=\ln\left[(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\right]=\ln\left[\frac{(x-4)^8}{x-2}\right]+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6}dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

حل: مخرج په فکټورو تجزیه کوو: $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

نو:

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-5x+9}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{\ }{x+3}$$

$$\frac{A(x+3)+\ \ (x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{Ax+3A+\ \ x-2}{(x-2)(x+3)}=\frac{(A+\ \ )x+3A-2}{(x-2)(x+3)}$$

$$(A+\ \ )x+3A-2\ \ =-5x+9$$

$$A+\ \ =-5\Rightarrow A=-5-$$

$$3A-2\ \ =-5x+9$$

د A او عددي قیمتونه عبارت دي له:

$$3(-5-\ \ )-2\ \ =9$$

$$-15-5\ \ =9$$

$$-5\ \ =24$$

$$=-\frac{24}{5}$$

$$A=-5+\frac{24}{5}=\frac{-25+24}{5}=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}-\frac{\frac{24}{5}}{x+3}$$

$$\int\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\int\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}dx-\int\frac{\frac{24}{5}}{x+3}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{24}{5}\int\frac{1}{x+3}dx$$

$$=-\frac{1}{5}\ln(x-2)-\frac{24}{5}\ln(x+3)$$

$$=\ln(x-2)^{-\frac{1}{5}}+\ln(x+3)^{-\frac{24}{5}}=\ln\left[(x-2)^{-\frac{1}{5}}\cdot(x+3)^{-\frac{24}{5}}\right]+C$$

پوښتنې

لاندې انتیګرالونه د قسمی کسرونو په طریقه حل کړئ.

$a)\ \int\frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}dx$ $\quad b)\ \int\frac{x-2}{x^2-6x+13}dx$ $\quad c)\ \int\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

- که $f(x)=e^x$ وي، نو ددې تابع مشتق عبارت له $f'(x)=e^x$ دی.
- که $f(x)=a^x$ وي، د دې تابع مشتق $f'(x)=a^x\cdot\ln a$ دی.
- که $f(x)=\log_a x$ وي، نو د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$ دی.
- $f(x)=\log_a g(x)$ وي، نو د تابع مشتق $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$ دی.
- **قسمي کسرونه**: د یوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوی دی که هغوی جمع کړو، راکړل شوي واقعي کسر په لاس راځي، قسمي کسرونه بلل کېږي.
- که چیرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د کسري پولینوم مخرج ($P_n(x)$) د خطي بیلابیلو ضربي عواملو څخه جوړ چې تکرار نه وي راغلی په لاندې بڼه بدلیدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{}{x-x_n}$$

- که د لومړي درجه پولینوم مخرج ضربي عوامل چې ځینې یې تکرار راغلي وي، یعنې که د $x-x_0$ عامل n ځلې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو؛ چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{}{(x-x_0)^n}$$

- که د مخرج ضربي عوامل دویمه درجه پولینوم د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی نو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولینوم یو توټه کسر $\frac{Ax+}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.
- د اکسپوننشیل تابعګانو انټیګرال لپاره لیکلای شو:

$$\int e^x dx=e^x+C \quad , \quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \quad , \quad (a\in IR^+ \ , \ a\neq 1)$$

- د لوګارتمي توابعو د انټیګرال لپاره لیکلای شو:

$$\int \ln dx=x\ln x-x+C \quad , \quad \int \log_a x\,dx=x\log_a\frac{x}{e}+C$$

- ځینې تابعګانې چې پرته د بدلون له لارې حل کېږي، لیکو:

$$f(x)=e^x \Rightarrow \int f(x)\,dx=\int e^x\,dx=e^x+C$$

د پنځم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. د $f(x)=\ln(\frac{x-2}{x+2})$ د تابع مشتق پیدا کړئ.
2. د $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
3. د $y=2x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
4. د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
5. لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

1) $\frac{x+1}{x^2-x-6}$ 2) $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$ 3) $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$

6. لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 5t^7dt$ 2) $\int \frac{x^3-3}{x^2}dx$

3) $\int (2\cos x-5\sin x+e^x)dx$ 4) $\int \sqrt{\cos x}\sin x dx$

5) $\int xe^{-x}dx$ 6) $\int (\frac{5}{(2x+1)(x-2)})dx$

7) $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$

7 – د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ.

a) $y=\ln(x^2+x+1)$ b) $y=\ln(\sin x)$

c) $y=e^{x^2+1}$ d) $y=\sqrt[x]{2}$

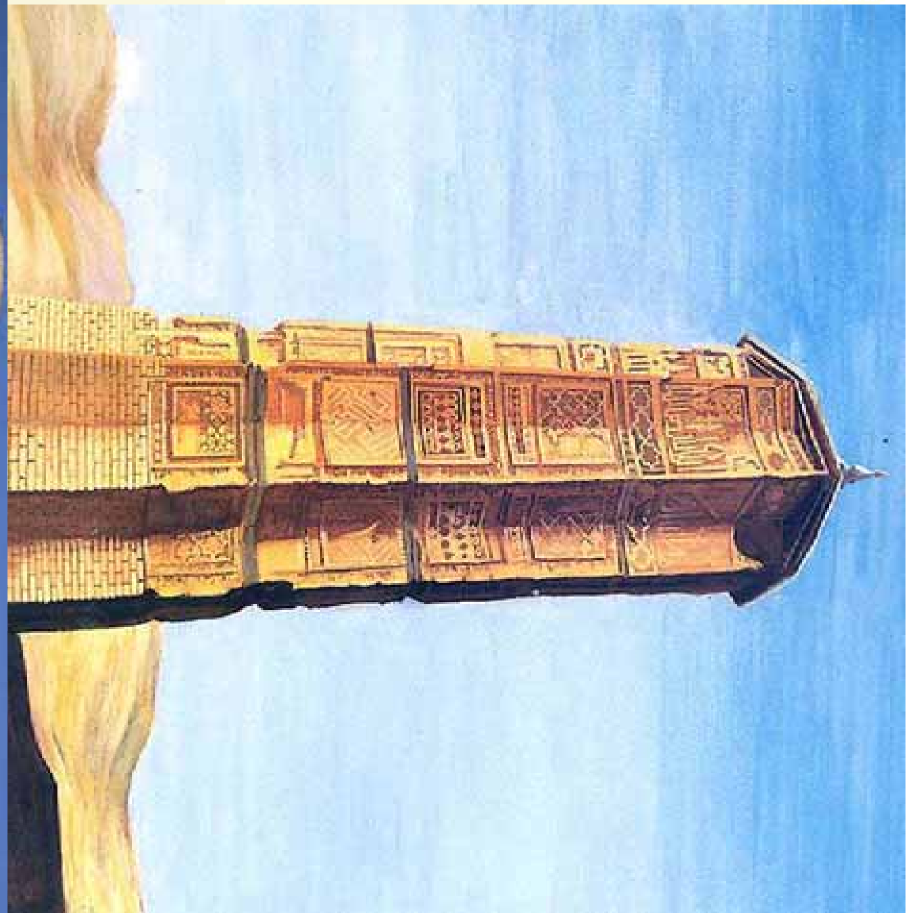
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی

د انتیگرال تطبیقات

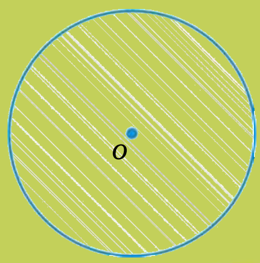
(c) ketabton.com: The Digital Library



د يوې منحني د محصور شوي سطحې د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by one curve

د مخامخ شکل مساحت چې يوه سطحه د يوې منحني په واسطه ترل شوې دايره ده د مساحت فورمول يې ووياست.



فعاليت

د $y=1-x^2$ تابع په پام کې ونيسئ.

- د تابع بحراني (*Critical Point*) ټکي او د x محور سره د تقاطع ټکي پيدا او گراف يې رسم کړئ.
- د $y=1-x^2$ تابع او x محور تر منځ د سطحې د مساحت قيمت د انتيگرال په مرسته پيداکړئ.
- پورتنی فعاليت د $y=-x^2+2x$ تابع لپاره تکرار کړئ او د منحني او د x د محور تر منځ محصور شوی مساحت محاسبه کړئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايلې لاسته راځي:

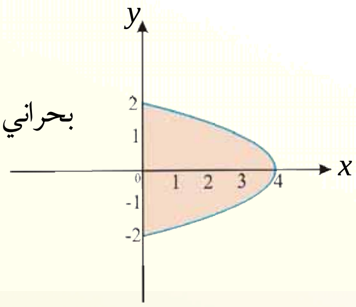
ـ $\int_a^b f(x)\,dx = F(a)-F(b)$ انتيگرال د يوې سطحې د مساحت قيمت راښيي چې د $y=f(x)$ منحني او د x محور او د $x=a$, $x=b$ د کرښو له خوا رابند (محصور) دی.

ـ که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ ترلی انټروال کې مثبت او متمادي وي، يعنې $y=f(x)\geq 0$ په دې صورت کې $f(x)$ تابع گراف تل د x محور پورته خواته او که $y=f(x)\leq 0$ وي، په دې حالت کې $f(x)$ تابع گراف د x محور لاندې خواته واقع ده او منفی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $x=4-y^2$ تابع د منحني او د y د محور تر منځ محصور شوی مساحت پیدا کړئ.

حل: لومړی د تابع بحراني ټکي او د y محور سره د پرېکړې ټکي پیدا کوو، وروسته یې شکل رسموو، د بحراني ټکي د پیدا کولو لپاره لومړی د تابع مشتق نیسو او له صفر سره یې مساوي کوو او د محورو سره د پرېکړې ټکو د په لاس راوړلو لپاره تابع له صفر سره برابروو.



$x=4-y^2 \Rightarrow x'=-2y=0$

$x'=0 \Rightarrow y=0$

$y=0,\quad x=4-y^2 \Rightarrow x=4-0 \Rightarrow x=4 \quad \Rightarrow (4,0)$ بحراني ټکی

$x=0,\quad 4-y^2=0 \Rightarrow y^2=4$

$y=\pm 2 \Rightarrow (0,2)\ ,\ (0,-2)$ د محورونو سره د پرېکړې ټکي

څرنګه چې د $x=4-y^2$ معادله په $[-2,2]$ انټروال کې نظر x محور ته دواړه ټکي متناظر دي، نو د نمايي مساحت په پام کې نیولو سره، د انټیګرال د مساحت سرحدات په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$A=\int_{-2}^{2}(4-y^2)\,dy=2\int_{0}^{2}(4-y^2)dy=2[4y-\frac{y^3}{3}]_0^2$$

$$A=2\,[(4\cdot 2-\frac{2^3}{3})-0]=2\,(8-\frac{8}{3})=2\,(\frac{24-8}{3})=2\,(\frac{16}{3})=\frac{32}{3}$$

دویم مثال: د x محور او د $y=1-\frac{1}{2}x^2$ تابع منحنی د محصور شوی سطحې مساحت محاسبه کړئ.

حل: د محصور شوی سطحې د مساحت ټاکلو لپاره لومړی بحراني ټکی او د x محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو.

$y=1-\frac{1}{2}x^2\ ,\ y'=-x$

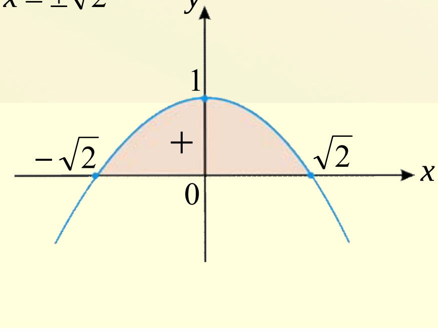
$y'=0 \Rightarrow x=0$

$x=0,\ y=1-\frac{1}{2}x^2=1 \Rightarrow y=1-\frac{1}{2}0^2 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (0,1)$ بحراني ټکی

$y=0, 1-\frac{1}{2}x^2=0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2=-1 \Rightarrow x^2=2,\ x=\pm\sqrt{2}$

$x_1=\sqrt{2}\quad ,\quad x_2=-\sqrt{2}$

$(\sqrt{2},0)\ ,\ (-\sqrt{2},0)$ د محورونو سره د پرېکړې ټکي



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2\int_0^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2([x-\frac{1}{6}x^3]_0^{\sqrt{2}})$$

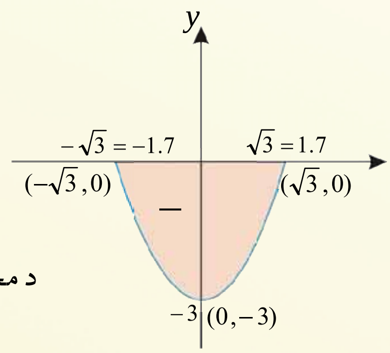
$$A=2(\sqrt{2}-\frac{(\sqrt{2})^3}{6}-0)=2(\frac{6\sqrt{2}-(\sqrt{2})^3}{6})=2(\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{8}}{6})$$

$$=(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{3})=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$A=1.8853$$

دریم مثال: د $y=x^2-3$ تابع گراف د x له محور سره یوه سطحه رابند وي، د دې سطحې مساحت پیدا کړئ.

حل: لومړی د سطحې د ټاکلو لپاره د تابع گراف رسموو او د تابع بحراني ټکی او د تقاطع ټکی په لاس راوړو:



$$y=x^2-3\Rightarrow y'=2x$$
$$y'=0\Rightarrow x=0$$
$$x=0\,,\ y=x^2-3\Rightarrow y=0^2-3$$
$\Rightarrow y=-3\Rightarrow(0,-3)$ بحراني ټکی

$$y=0\ ,\ \ x^2-3=0\Rightarrow x^2=3$$
$x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow(\sqrt{3},0)\ ,\ (-\sqrt{3},0)$ د محورونو سره د پرېکړې ټکي

څرنګه چې د $y=x^2-3$ تابع په $[\sqrt{3},-\sqrt{3}]$ انټروال کې د محور سره د پرېکړې ټکي متناظر قیمتونه لري نو گراف يې د x محور څخه لاندې دی او انټیگرال يې منفي دی، نو د ټول مساحت څخه د انټیگرال د سرحدونو نیمايي مساحت پیدا کوو اوبه 2 کې يې ضربوو:

$$A_1=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2\int_0^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2(\int_0^{\sqrt{3}}x^2\,dx-3\int_0^{\sqrt{3}}dx)=-2([\frac{1}{3}x^3]_0^{\sqrt{3}}-[3x]_0^{\sqrt{3}})$$

$$=-2(\frac{1}{3}[(\sqrt{3})^3-0]-3[\sqrt{3}-0])=-2(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3-3\sqrt{3})$$

$$=-\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3+6\sqrt{3}=-\frac{2}{3}(1.7)^3+6(1.7)=-\frac{2}{3}(4.913)+10.2=-\frac{9.826}{3}+10.2$$

$$=-3.2753+10.2=6.9247$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ تابع ګراف رسم د منحني او x محور تر منځ د سطحې مساحت په $[-1,4]$ انټروال کې وټاکئ.

حل: لومړی د منحني بحراني ټکی او له محورونو سره د پرېکړې ټکي پیدا کوو:

$$y = x^2 - 3x$$

$$y' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \,,\; x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \,,\quad y = x^2 - 3x \Rightarrow y = (\frac{3}{2})^2 - 3(\frac{3}{2})$$

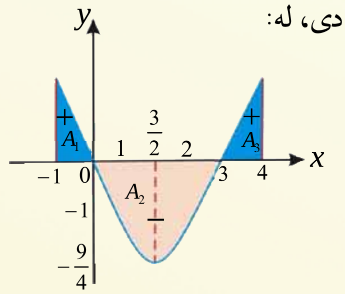
$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4}$, $(x,y) = (\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ بحراني ټکی

څرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو د $(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ ټکي د تابع مطلق اصغري ټکی دی او د تقاطع ټکي یې د x له محور سره عبارت دي، له:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 3$$



$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^{0} (x^2 - 3x)\,dx - \int_{0}^{3} (x^2 - 3x)\,dx + \int_{3}^{4} (x^2 - 3x)\,dx$$

$$A = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{0}^{3} + [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{3}^{4}$$

$$A = [(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0) - (\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2)] - [(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2) - (\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0)] +$$

$$[(\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot(4)^2) - (\frac{1}{3}\cdot(3)^3 - \frac{3}{2}\cdot(3)^2)]$$

$$= -(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9) + (\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{3}{2}\cdot 16) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{65 - 54}{3} + \frac{57 - 48}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

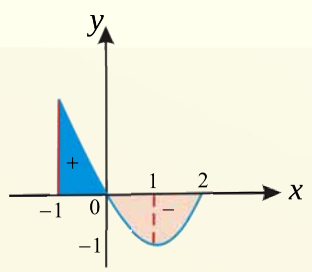
پنځم مثال: د $y=x^2-2x$ منحني د x محور او $x=2$ ، $x=-1$ کرښو تر منځ مساحت پيدا کړئ.

حل: لومړی بحراني ټکي وروسته د x محور سره د تقاطع ټکی په لاس راوړو:

$$y=x^2-2x \Rightarrow y'=2x-2=0$$
$$2x=2 \Rightarrow x=1$$
$$x=1\ ,\quad y=x^2-2x=1^2-2(1)=-1 \Rightarrow (1,-1)$$ بحراني ټکی

څرنگه چې $y''=2>0$ دی، نو تابع د $(1,-1)$ په ټکي کې مطلق اصغري لري او د x محور سره يې تقاطع په لاندې ډول ده.

$$y=0 \quad , \quad x^2-2x=0$$
$$x(x-2)=0$$
$$x_1=0 \quad , \quad x_2=2$$



څرنگه چې منحني د $[-1,2]$ په انټروال کې له مبدأ څخه تيرېږي او د منحني يوه برخه د $[-1,0]$ په انټروال کې د x محور پورته خواته او بله برخه يې د $[0,2]$ په فاصلې کې د x محور ښکته خواته پرته ده انتيگرال يې منفي دی:

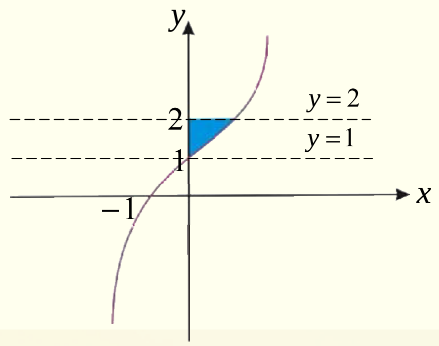
$$A=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)dx-\int_{0}^{2}(x^2-2x)\,dx=[\frac{1}{3}x^3-x^2]_{-1}^{0}-[\frac{1}{3}x^3-x^2]_{0}^{2}$$
$$=(0-(-\frac{1}{3}-1))-((\frac{8}{3}-4)-0)=-(-\frac{1}{3}-1)-(\frac{8}{3}-4)=-(\frac{-1-3}{3})-(\frac{8-12}{3})$$
$$=-(\frac{-4}{3})-(\frac{-4}{3})=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د $f(x) = \sin x$ منحني او د x محور تر منځ مساحت په $[-2\pi, 2\pi]$ انټروال کې حساب کړئ.

2- د $y = x^3 + 1$ تابع منحني او $y = 1$ ، $y = 2$ کرښو تر منځ مساحت وټاکئ.



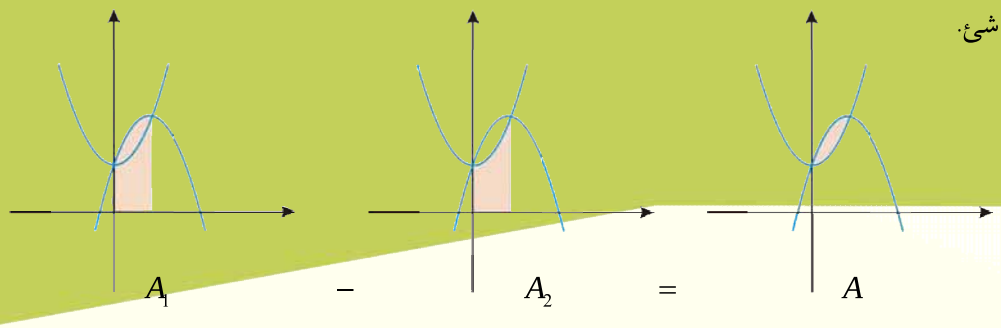
3- د $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1} + x}$ منحني او د $x = 0$ او $x = 1$ کرښو تر منځ مساحت حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوو محصور شویو منحني ګانو تر منځ د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by tow curves

لاندې شکلونه په پام کې ونیسئ د $A = A_1 - A_2$ اړیکې د سموالي په اړه خبره وکړئ.



که د $y_1 = 1 - x^2$ او $y_2 = x^2 - 1$ تابعګانې راکړل شوي وي.

- د $y_1 = y_2$ رابطې څخه د x قیمت په لاس راوړئ.
- د لاس ته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره د هغوی ګراف رسم کړئ.
- څرنګه چې د y_1 تابع ګراف د y_2 تابع د ګراف څخه لوړ دی نو د تابعګانو د انتیګرال د تفریق حاصل $(y_1 - y_2)$ د x په ټاکل شوی انټروال کې حساب کړئ.
- نوموړی فعالیت د $y = x^2$ تابع د منحني او $y = x + 2$ د کرښې لپاره تکرار کړئ او د محصورې شوي سطحې مساحت حساب کړئ.

د پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لاسته راځي:

_ که چیرې د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوو منحني ګانو د محصور شوي سطحې د محاسبې لپاره په هغه صورت کې چې $f(x) > g(x)$ وي، یعنې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع د پاسه واقع وي نو لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي پیدا کوو وروسته د پاسني او لاندیني منحني د x د محور سره مساحت په $[a,b]$ انټروال کې محاسبه کوو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$$

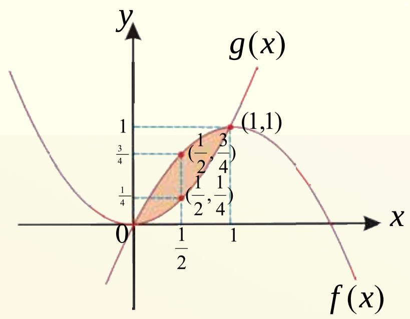
(c) ketabton.com: The Digital Library

ـ که چیرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع د ګراف دپاسه واقع وي، نو لرو چې:

$$A=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx=\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$$

لومړی مثال: د $f(x)=2x-x^2$ او $g(x)=x^2$ منحنې ګانو د ګرافونو ترمنځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل: لومړی د دواړو منحنې ګانو د تقاطع ټکی پیدا کوو:



$f(x)=2x-x^2\quad,\quad g(x)=x^2$

$f(x)=g(x)\Rightarrow 2x-x^2=x^2$

$2x-x^2-x^2=0$

$2x-2x^2=0$

$2x(1-x)=0$

$2x=0\quad\Rightarrow x_1=0$

$1-x=0\quad\Rightarrow x_2=1$

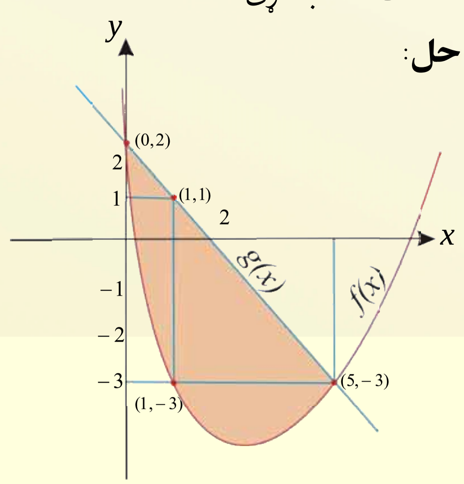
لیدل کېږي چې ددواړو منحنې ګانو تقاطع (1،1) او (0،0) ده اوس د محصور شوي سطحې مساحت پیداکوو.

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]=\int_0^1[2x-x^2-x^2]dx=\int_0^1[2x-2x^2]=[\frac{2x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}]_0^1$$

$$=[x^2-\frac{2}{3}x^3]_0^1=(1-\frac{2}{3})-0=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$$

دویم مثال: د $f(x)=x^2-6x+2$ تابع او $g(x)=2-x$ کرښې د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل:



$$\left.\begin{aligned}f(x)&=x^2-6x+2\\ g(x)&=2-x\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x)=g(x)$$

$x^2-6x+2=2-x\Rightarrow x^2-6x+2-2+x=0$

$x^2-5x=0\Rightarrow x(x-5)=0$

$x_1=0\quad,\quad x_2=5$

$\Rightarrow(0,2)\ ,\ (5,-3)$ د کرښې او منحنې د تقاطع ټکي

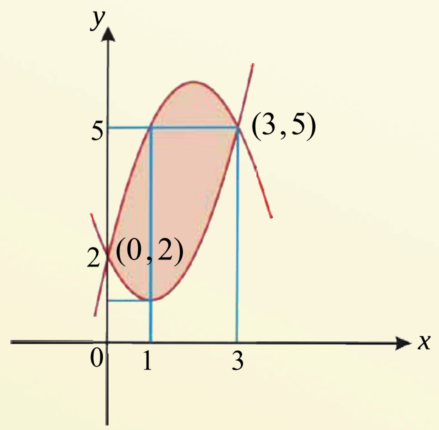
(c) ketabton.com: The Digital Library

له شکل ښخه ښکاري چې د $g(x)$ کرښې ګراف د $f(x)$ ګراف پورتـه خـوا تـه واقع دی، پـه دې معنـی چې $g(x) > f(x)$

$$A=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx=\int_0^5 (2-x-x^2+6x-2)dx$$
$$=\int_0^5 (-x-x^2+6x)\,dx=\int_0^5 (-x^2+5x)\,dx$$
$$=[-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}]_0^5=(-\frac{125}{3}+5\cdot\frac{25}{2})-0=-\frac{125}{3}+\frac{125}{2}$$
$$=\frac{-250+375}{6}=\frac{125}{6}$$

دریم مثال: د $f(x)=-x^2+4x+2$ او $g(x)=x^2-2x+2$ تابعګانو د ګرافونـو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دواړو ګرافونو د تقاطع ټکي د انتیګرال حدونه جوړوي، نو د دې ټکو د پیدا کولـو لپـاره $f(x)=g(x)$ وضع کوو:



$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+4x+2 \\ g(x)=x^2-2x+2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=g(x)$$
$$-x^2+4x+2=x^2-2x+2$$
$$\Rightarrow -x^2+4x+2-x^2+2x-2=0$$
$$-2x^2+6x=0 \Rightarrow x(-2x+6)=0$$
$$\Rightarrow x_1=0 \quad , \quad -2x=-6 \Rightarrow x_2=3$$

د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي $(3,5)$, $(0,2)$

د x محور سره د تقاطع ټکي عبارت لـه $(5،3)$، $(2،0)$ دی اولـه شکل ښخه لیـدل کېږي چې د $g(x)$ ګراف د $f(x)$ له ګراف ښخه پورته واقع دی نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_0^3(-x^2+4x+2)dx-\int_0^3(x^2-2x+2)dx$$
$$=[-\frac{x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+2x]_0^3-[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+2x]_0^3$$
$$=-\frac{1}{3}\cdot 27+2\cdot 9+6-0-\frac{1}{3}\cdot 27+9-6+0$$
$$=-9+18-9+9$$
$$=9$$

پوښتني

1- د $y=x^2$ او $y=-x^2+4x$ منحني ګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پيدا کړئ.

2- د $y^2=2x-2$ پارابول او $y=x-5$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت حساب کړئ.

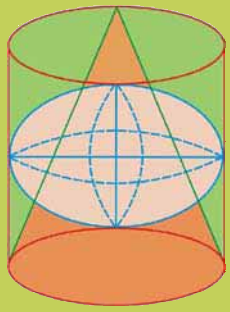
3- د $y^2=2x+6$ منحني او $y=x-1$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوراني جسمونو د حجمونو محاسبه

Accounting of rounding things Volume

د مخامخ شکل د جسمونو د حجمونو تر منځ نسبت پیدا کړئ.



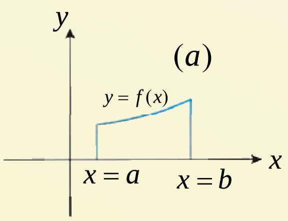
په مخکنیو ټولګیو کې مو د جسمونو حجم پیدا کړی وو پرته له دې چې د هغوی فورمولونه ثبوت شي منلي مو وو، خو اوس د جسمونو د حجم فورمولونه د معین انټیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره ثبوتوو.

فعالیت

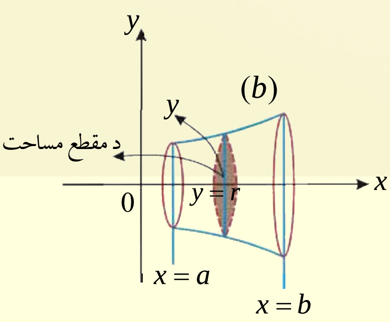
- یو ټکی او یوه کرښه په فضا کې داسې په پام کې ونیسئ چې ټکی د کرښې په منځ کې واقع وي.
- هغه جسم چې د یوې مستقیمې کرښې له دوران څخه د یوه ټکي په شاوخوا له څرخېدو وروسته جوړېږي نوم یې واخلئ.
- د نوموړي جسم د حجم فورمول ولیکئ او ووایئ چې هغه څنګه ثبوتوو.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

- که چیرې د $y = f(x)$ متمادي تابع د منحني مساحت نظر (a) شکل



د $x = a$ او $x = b$ کرښو او منحني په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع د منحني له دوران څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه یې شکل لري، لکه د (b) شکل.

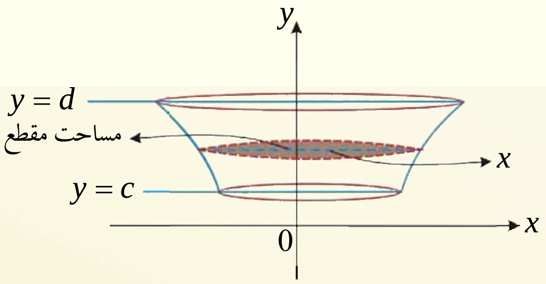


(c) ketabton.com: The Digital Library

چې ارتفاع يې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دايروي شکل په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وايي او پوهېږو چې د دايرې مساحت نظر x محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع شکل ته په کتو سره د y محور سره موازي ده؛ نو $y = r$ کېږي او د حجم فورمول يې نظر ريمان مجموع ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi r^2\, dx = \int_a^b \pi y^2\, dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2\, dx$$

- که د $x = f(y)$ تابع د منحني مساحت $y = c$ او $y = d$ کرښــو تــرمنځ محــصور شــوی وي دداسې استوانې د مقطع مساحت نظر y محور تـــه $A(y) = \pi r^2$ دی چـــې ارتفـــاع يې $\Delta y = d - c$ او شعاع يې $x = r$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:



$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi r^2\, dy = \int_a^b \pi x^2\, dy = \int_a^b \pi [f(y)]^2\, dy$$

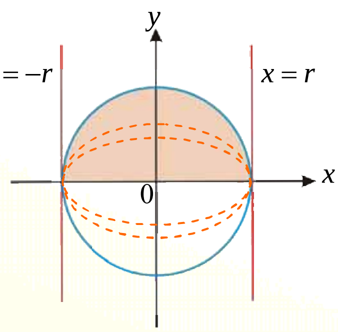
د دوراني جسمونو حجم د انتيگرال په مرسته په لاس راځي لکه:

1- د انتيگرال په مرسته د کرې حجم پيدا کړئ.

ثبوت: پوهېږو چې که چيرې نيمه دايره د خپل قطر په شاوخوا وڅرخي کره لاس ته راځي او د دايرې معادله $x^2 + y^2 = r^2$ ده، اوس د نيمې دايرې حجم له څرخېدو وروسته په لاس راوړو او هغه دوه برابره کوو، چې د دايرې بشپړ حجم په لاس راشي

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$V=\int_{-r}^{r}\pi y^2dx=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{r}(r^2-x^2)\,dx=2\pi[r^2x-\frac{x^3}{3}]_0^r$$

$$=2\pi[(r^3-\frac{r^3}{3})-0]$$

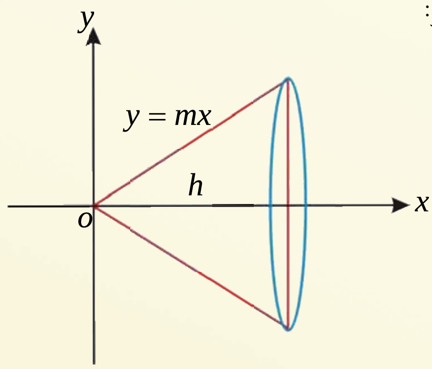
$$=2\pi(\frac{3r^3-r^3}{3})$$

$$=2\pi(\frac{2r^3}{3})$$

V (د کرې حجم) $=\frac{4}{3}\pi r^3$

2- د انتیګرال په مرسته د مخروط حجم پیداکړئ.

ثبوت: څرنګه چې مخروطي سطح د $y=mx$ کرښې له دوران څخه د x د محور په چاپیریال په لاس راځي نو:



$$V=\int_0^h\pi y^2dx$$

$$=\int_0^h\pi m^2x^2dx=\pi m^2\int_0^h x^2dx$$

$$=\pi m^2[\frac{x^3}{3}]_0^h=\pi m^2(\frac{h^3}{3})$$

$$=\frac{\pi h}{3}(mh)^2$$

له پورته شکل څخه لیدل کیږي چې د مخروط قاعده دایروي بڼه لري اوشعاع یې د h محور سره موازي ده، یعنې $y//r$ او همدا رنګه د مخروط ارتفاع (h) د x په محور باندې منطبق ده، $(x=h)$ نو د $y=mx$ په اړیکه کې یې قیمت وضع کوو:

$$y=mx\quad\Rightarrow\quad r=mh$$

$$=\frac{\pi h}{3}\;r^2$$

$$V=\pi r^2\times\frac{h}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

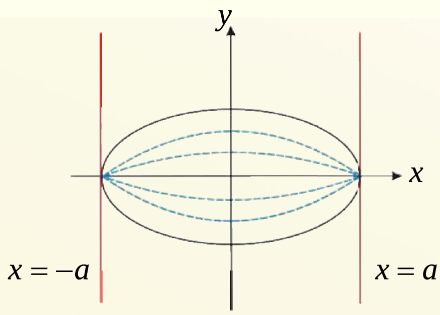
خرنګه چې د مخروط قاعده دايروي ده، د دايرې مساحت πr^2 دی، لرو چې:

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$V(\text{د مخروط حجم}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

3- د الپس حجم چې د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ د منحني او x محور په چاپير د لوی قطر په شاوخوا له دوران وروسته جوړېږي، په لاس راوړئ.

ثبوت: د الپس د نيمايي حجم د لوی قطر په شاوخوا په لاس راوړو او هغه دوه چنده کوو، چې د بشپړ الپس حجم په لاس راشي.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2\,dx = \pi\int_{-a}^{a}[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2]dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{a}[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2]dx = 2\pi[b^2x-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}]_0^a$$

$$=2\pi[(b^2a-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3})-0]=2\pi[b^2a-\frac{b^2a}{3}]$$

$$=2\pi[\frac{3b^2a-b^2a}{3}]=2\pi[\frac{2b^2a}{3}]$$

$$V=\frac{4}{3}\pi b^2 a \Rightarrow \text{د الپس دوران د لوی قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi b^2 a$$

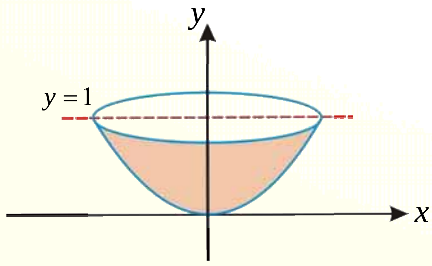
که چيرې د الپس محراقونه د y په محور پراته وي او د هغه انتګرال حساب کړو د الپس د کوچني قطر په شاوخوا حجم په لاندې ډول په لاس راځي:

$$\text{د الپس دوران د کوچني قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د هغه جسم حجم چې د $y = x^2$ او $y = 1$ کرښې تر منځ پرتې مستوي مساحت د دوران څخه د y په محور په لاس راځي، پیدا کړئ.

حل: لومړی شکل رسمو وروسته یې مساحت حسابوو:

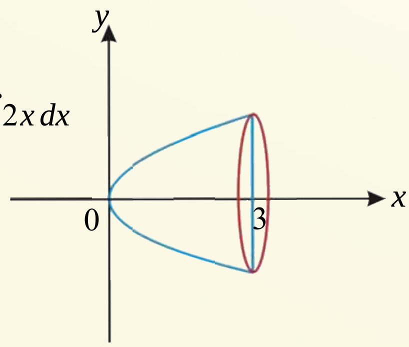


$$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y\, dy = \frac{1}{2}\pi y^2 |_0^1 = \frac{1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{2}$$

دویم مثال: د $y = \sqrt{2x}$ تابع او $y = 3$ کرښې ترمنځ د څرخیدلی جسم مساحت پیدا کړئ.

حل:



$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^3 \pi[\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 [\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 2x\, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x\, dx = 2\pi [\frac{x^2}{2}]_0^3$$

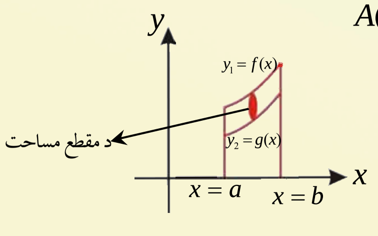
$$V = 9\pi$$

یادونه: که د $y_1 = f(x)$ او $y_1 = g(x)$ تابعګانې په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وی د هغه دوراني جسم حجم د $f(x)$ او $g(x)$ منحنيګانو او د $x = a$ ، $x = b$ کرښو تر منځ جوړېږي له لاندې رابطې څخه لاسته راځي:

$\Delta x =$ د استوانې ارتفاع

$A(x) =$ (د استوانې د مقطع مساحت) $= \pi y_1 - \pi y_2 = \pi(y_1 - y_2)$

د هغې استوانې د حجم فورمول چې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع ګراف څخه پورته قرار لري.



$$V = \int_a^b \pi(y_1^2 - y_2^2)\, dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\, dx$$

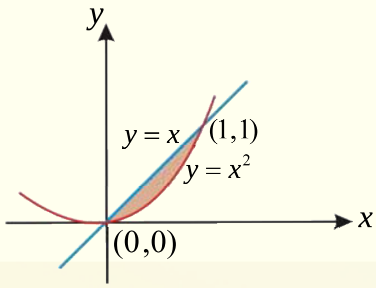
(c) ketabton.com: The Digital Library

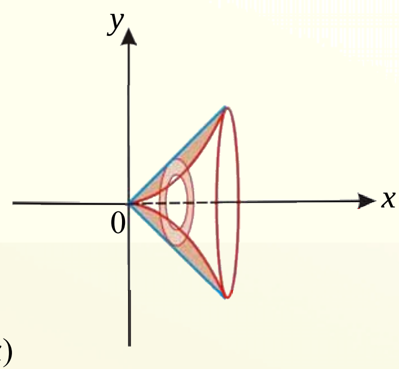
د هغې استواني د حجم فورمول چې د $g(x)$ تابع گراف ، د $f(x)$ گراف څخه پورته واقع وي.

$$V=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\pi\int_a^b(y_2^2-y_1^2)\,dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د $y=x^2$ منحني او $y=x$ کرښې تر منځ د پرتې سطحې مساحت له دوران څخه د x محور په شاوخوا په لاس راځي، محاسبه کړئ.

حل:





$$\left.\begin{array}{l} y_1=x^2=f(x)\\ y_2=x=g(x)\end{array}\right\}\Rightarrow y_2>y_1\ ,\ g(x)>f(x)$$

$$=\int_a^b\pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\int_0^1\pi(x^2-(x^2)^2)dx$$

$$=\pi\int_0^1(x^2-x^4)\,dx=\pi[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}]_0^1$$

$$=\pi[(\frac{1}{3}-0)-(\frac{1}{5}-0)]=\pi[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}]$$

$$V=\pi[\frac{5-3}{15}]=\pi[\frac{2}{15}]=\frac{2\pi}{15}$$

پوښتنې

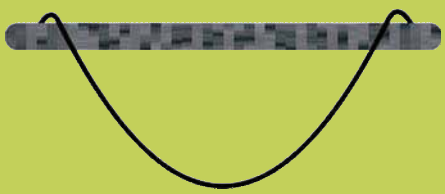
1. د هغه جسم حجم چې د $y=\sin x$ تابع او د $x=0$ او $x=\pi$ دوو کرښو تر منځ محصور شوی مساحت له دوران څخه د x د محور په چاپیر جوړېږي پیدا کړئ.
2. د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د $y=x^3$ منحني او $y=8$ ، $x=0$ کرښو ترمنځ محصور شوی مساحت له دوران څخه د y د محور په چاپیر جوړېږي حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قوس د اوږوالی محاسبه

Accounting the Length of Arc

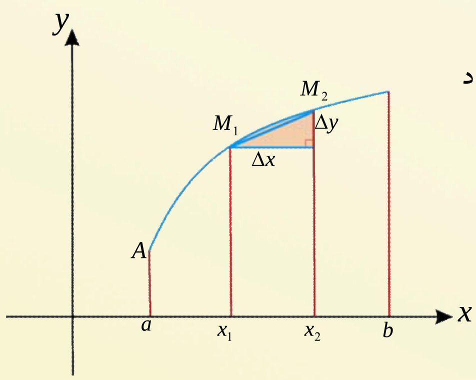
څرنګه کولای شو چی د مخامخ پري اوږدوالی پیداکړو؟



فعالیت

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $y = f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال پـه پـام کې ونیسـئ او هغې تـه $\overset{\frown}{A}$ ووایې، داسې چې تابع په نوموړې فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي.
- د $[a,b]$ انټروال په دریو مساوي برخو ویشو او د x_1 او د x_2 د قوس اوږدوالی په M_1 او M_2 ښیو.
- د M_1 له ټکي څخه یوه ټوټه کرښه د M_2 په ټکي او یوه بله کرښه، د هغې پـه مخامخ کرښـه رسـمو او د دوارو ټوټه کرښو، د تقاطع ټکی ونوموئ.
- د M_1 د کرښې فاصلې ته Δx او M_2 ته Δy وایې او د M_2 M_1 د قایم الزاویه مثلث د مخامخ قوس اوږوالی د فیثاغورث د قضیې په مرسته حساب کړئ.

له پورتني فعالیت څخه کولای شو، چې د M_1 M_2 مثلث د مخامخ قوس اوږدوالی داسې ثبوت کړو.



ثبوت:

له قایم‌الزاویه M_2 M_1 مثلث څخه په‌ګټې اخیستنې سره لرو چې:

$$(M_1 M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1 M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق له تعریف څخه پوهېږو:

$$f'(t)=\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad g'(t)=\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = f'(t)\cdot\Delta t \quad , \quad \Delta y = g'(t)\cdot\Delta t$$

$$M_1M_2=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{[f'(t)\cdot\Delta t]^2+[g'(t)\cdot\Delta t]^2}$$

$$M_1M_2=\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

نو د ریمان له مجموعې څخه لرو:

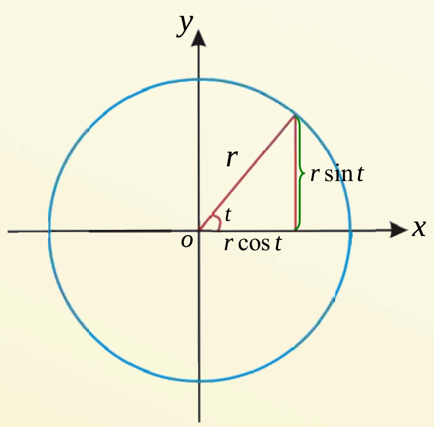
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

$$=\int_a^b\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$$

لومړی مثال: د $x^2+y^2=r^2$ د دایرې محیط محاسبه کړئ:

حل: څرنګه چې د دایرې پارامتري معادله په دې ډول $\begin{cases}x=r\cos t\\ y=r\sin t\end{cases}$ ده.

که چیرې $0\le t\le\pi$ وي، نو د دایرې نمایي محیط پیدا کړئ.



$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

$$x'=-r\sin t \quad , \quad y'=r\cos t$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2}\,dt$$

$P=[rt]_0^{\pi}=(r\cdot\pi-r\cdot 0)=\pi r$ د دایرې نیمایي محیط

د دایرې مکمل محیط $=2\pi r$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه:

1- د $y = f(x)$ منحني معادله په $a \le x \le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د x د پارامتر په پام کې نیولو سره د منحنی د قوس اوږدوالی داسی محاسبه کوو:

$$= \int_a^b \sqrt{1+ f'^{\,2}(x)}\; dx$$

مثال: د $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالي په $0 \le x \le 4$ فاصله کې حساب کړئ.

حل: $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$= \int_a^b \sqrt{1+ f'^2(x)}\; dx = \int_0^4 \sqrt{1+(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2} \cdot dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\; dx = \int_0^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9}du = \frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$u = 1+\frac{9}{4}x$$

$$du = \frac{9}{4}dx$$

$$dx = \frac{4}{9}du$$

$$= \frac{4}{9}[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}]_0^4 = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_0^4 = \frac{8}{27}[\sqrt{u^3}\,]_0^4$$

$$= \frac{8}{27}[\sqrt{(1+\frac{9}{4}x)^3}]_0^4 = \frac{8}{27}[\sqrt{(1+\frac{9}{4}\cdot 4)^3} -1] = \frac{8}{27}(\sqrt{10^3} -1)$$

$$= \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$$

2- د $x = f(y)$ منحني په $a \le y \le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د y د پارامتر د په پام کې نیولو سره لرو، چې:

$$= \int_a^b \sqrt{f'^2(y)+1}\;\; dy$$

مثال: د $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالي په $1 \le y \le 4$ انټروال کې حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$f(y)=y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(y)=\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$=\int_a^b\sqrt{f'^2(y)+1}\,dy=\int_1^4\sqrt{(\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}})^2+1}\,dy$$

$$=\int_1^4\sqrt{\frac{9}{4}y+1}\,dy=\int_1^4\sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du \qquad u=\frac{9}{4}y+1$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_1^4=\frac{8}{27}[\sqrt{(\frac{9}{4}y+1)^3}]_1^4 \qquad du=\frac{9}{4}dy$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{(10)^3}-\sqrt{(\frac{9}{4}+1)^3}] \qquad dy=\frac{4}{9}du$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{1000}-\sqrt{(\frac{13}{4})^3}]=\frac{8}{27}[10\sqrt{10}-\sqrt{\frac{2197}{64}}]$$

پوښتنې

1. د $x=t^2$ او $y=t^3$ د منحنيګانو د قوس اوږدوالی د $1\le x\le 2$ د فاصلې تر منځ پيداکړئ.

2. د $f(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ د منحني د قوس اوږدوالی د $0\le x\le 1$ د فاصلې تر منځ پيداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي مهم ټکي

- د $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ انتیګرال د یوې سطحې د مساحت اندازه یا پراخوالی راښیي چې د $y=f(x)$ منحني او د x د محور او د $x=a$ او $x=b$ کرښو له خوا رابند دی.
- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې $y=f(x)\geq 0$ په دې صورت کې د $f(x)$ تابع ټل د x د محور پورته خواته او که $y=f(x)\leq 0$ وي، په دې حالت کې د $f(x)$ د x د محور لاندې خواته واقع او انتیګرال یې منفي دی.

د دوو منحني ګانو په واسطه د محصور شوی مساحت محاسبه:

- که چیرې د $f(x)$ تابع د $g(x)$ تابع د ګراف په پورتنی برخه کې واقع وي، نو لرو:

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$$

- که چیرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع په پاسنی برخه کې واقع وی؛ لرو چې:

$$A=\int_a^b[g(x)-f(x)]dx=\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx$$

د دوراني جسمونو د حجم مساحت:

- که چیرې د $y=f(x)$ متمادي تابع مساحت د $x=a$ او $x=b$ کرښو په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع له منحني د دوران څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه‌یي شکل لري .

چې ارتفاع یې $\Delta x=b-a$ ده او د دې استوانې سطح د دایروي سطحو په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وایي او پوهیږو چې د دایرې مساحت نظر د x محور ته $A(x)=\pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع نظر شکل ته د y له محور سره موازي دی؛ نو $y=r$ کیږي او د حجم فورمول یې نظر د ریمان مجموعې ته په لاندې ډول دی:

$$v=\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}A(x)\Delta x=\int_a^b\pi r^2\,dx=\int_a^b\pi y^2\,dx=\pi\int_a^b[f(x)]^2\,dx$$

- که د $x=f(y)$ تابع مساحت د $y=c$ ، $y=d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې مقطع نظر y محور ته $A(y)=\pi r^2$ چې ارتفاع یې $\Delta x=d-c$ او شعاع یې $x=r$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران د مساحت څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v=\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}A(y)\Delta y=\int_a^b\pi r^2\,dy=\int_a^b\pi x^2\,dy=\pi\int_a^b[f(y)]^2\,dy$$

د قوس د اوږدوالی محاسبه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قوس د اوږدوالی د محاسبې فورمول: $= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$

1) $= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$

2) $= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(y)}\, dy$

د شپږم څپرکي پوښتنې

1. د $y^2 - x - 5 = 0$ منحني او د y د محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت محاسبه کړئ.
2. د هغې سطحې مساحت چې د $y = \sin x$ منحني په $[0, 2\pi]$ انټروال کې او د x د محور تر منځ پرته ده، پیدا کړئ.
3. د $y = x^2 - 2x$ او $y = 6x - x^2$ منحنيګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.
4. د $y = -x^2 + 4x - 3$ منحني او x محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
5. د $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ او $y = x^2 - 4x$ منحنيګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
6. د هغه جسم حجم وټاکئ چې د $y = \sin x - \cos x$ منحني او $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ کرښو د x محور په شاوخوا له دوران څخه په لاس راځي، حساب کړئ.
7. د هغې سطحې حجم چې د $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ منحني د تابع له دوران څخه د x د محور پرشاوخوا په $[0, 4]$ انټروال کې جوړ شوي وي.
8. د هغې رابندې شوې مسطحې د جسم حجم چې د $y = x^2$ منحني او د $x^2 + y^2 = 2$ دایرې له دوران څخه د x محور په شاوخوا جوړ شوې وي پیدا کړئ.
9. د هغه جسم حجم چې د $y = \frac{1}{2}x + 1$ کرښې دوران او د x محور په $[2, 6]$ انټروال کې جوړېږي، په لاس راوړئ.
10. د $y = -x + 4$ منحني د قوس اوږدوالی په $-2 \le x \le 2$ انټروال کې حساب کړئ.
11. د $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$ تابع د منحني د قوس اوږدوالی په $2 \le x \le 5$ انټروال کې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم څپرکی

احصائیه

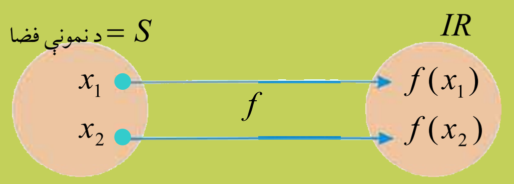
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ ټول افغانان یو.

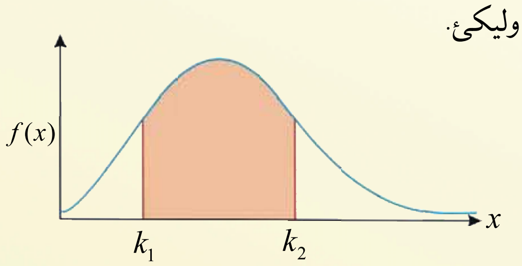
د احتمال د تابع توزیع

د تصادفي ازمایښت، نمونه‌يي فضا او ناځاپه متحول کلمې ستاسو په ذهن کې څه څه را ژوندي کوي.



فعالیت

- هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالاتو کې ترې ګټه اخلي، له هغه متحول سره چې په الجبر کې مو لوستي دی څه توپیر لري؟
- که $x_1, x_2 \ldots x_n$ د یوه سټ عناصر او $P(x = x_i) = f(x_i)$ تابع ولرو، هغه مرتبې جوړې چې د نوموړی تابع څخه په لاس راځي، جوړې او بیا یې ولیکئ.
- مخامخ شکل ته په کتنې سره د k_1 او k_2 مقدارونو ترمنځ او د $f(x)$ منحنی لاندینی محدود شوی مساحت د انتیګرال په شکل وښیئ.



- د لاندې جدول په پام کې نیولو سره د $\left[E(x = x_i)\right] = \sum_{i=1}^{2} x_i f(x_i)$ ، $\left[x_i - E(x_i)\right]^2$ او $\left[x_i - E(x_i)\right]^2 f(x_i)$ مجموعه په لاس راوړئ.

x_i	0	1
$f(x_i)$	0.5	0.5

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

ـ هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالاتو کې تر څېړنې لاندې نیول کېږي عبارت له هغه تابع څخه دی، چې د تعریف ناحیه یې نمونه‌یي فضا او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي اعداد دي.

ـ که $P(x=x_i)=f(x_i)$ ولرو نو د $[x_1,\ f(x_1)],\ [x_2,f(x_2)],\ \dots,[x_n,f(x_n)]$ مرتبو جوړو ته د مجزا(گسسته) احتمال تابع وایي.

- د تجمعي او پیوسته احتمال تابع کولای شو، په دې بڼه $F(x)=P(X\le x)$ وښیو.
- که چیرې $f(x)$ د احتمال تابع او x تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د دې احتمال چې x د k_1 او k_2 په منځ کې وي برابر دی له:

$$P(k_1\le x\le k_2)=\int_{k_1}^{k_2}f(x)\,dx$$

- که چیرې x پیوسته ناڅاپه (تصادفي) متحول او $k_1<k_2$ څخه وي، په دې صورت کې:

$$P(k_1\le x\le k_2)=F(k_2)-F(k_1)$$

- که چیرې x ناڅاپه مجزا متحول وي، په دې حالت کې اوسط (*Expected Value*) د x تصادفي مجزا متحول چې د $E(x)$ په بڼه ښودل کېږي، برابر دی له:

$$E(x)=x_1f(x_1)+x_2f(x_2)+\dots\dots\dots+x_nf(x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_if(x_i)$$

$E(x)$ د x اوسط هم بلل کېږي چې هغه په $\bar{x}$ ښیي همدارنگه که چیرې x گسسته تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د x وریانس چې د S^2 په شکل ښودل کېږي برابر دی له:

$$S^2=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i-E(x_i)\right]^2 f(x_i)$$

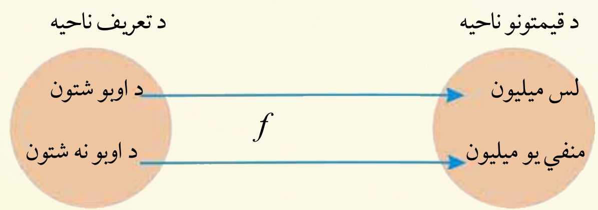
(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: یو شخصي شرکت غواړي د یوې غونډۍ پر سر د اوبو یوه څاه وکني، د اوبو څاه په یو میلیون افغانۍ تمامېږي که نوموړې څاه اوبه ورکړي د شرکت مالك لس میلیونه افغانۍ اجوره اخلي، پرته له هغې بـه د څاه د کېندلو یو میلیون افغانۍ مصرف په زیان ورکړي.

الف_ دا موضوع د یوې تابع په بڼه وښیئ.

ب_ که د دې احتمال چې کیندل شوی څاه اوبه ورکړي 0.2 او د نه ورکولو احتمال یې 0.8 وي، په دې صورت کې د احتمال تابع، اوسط (*Expected Value*)، وریانس او د x تصادفي متحول معیاري انحراف پیدا کړئ.

د الف حل:



د ب حل: د تصادفي متحول احتمال تابع، اوسط، وریانس او معیاري انحراف په لاندې جدول کې ښودل شوي دي:

انحراف معیار	واریانس	د تصادفي متحول د مربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	اوسط	د تابع احتمال	تصادفي متحول
S	$S^2=[x_i-E(x)]^2 f(x_i)$	$[x_i-E(x)]^2$	$E(x)=\sum x_i f(x_i)$	$f(x_i)$	x_i
4.4	$4.84\cdot 0.8=3.872$	$(-1-1.2)^2=4.84$	$-1\cdot 0.8=-0.8$	0.8	-1
	$77.44\cdot 0.2=15.488$	$(10-1.2)^2=77.44$	$10\cdot 0.2=2$	0.2	10
	$\sum S^2=19.360$		1.2	0.1	

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

فرض کوو چې د یوه موټر پلورنځي د 100 ورځو خرڅلاو په لاندې ډول دی:

د ورځو شمېر	60	30	8	2
د پېرودل شوو موټرو شمېر	0	1	2	3

د x تصادفي متحول د احتمال تابع او د تجمعي احتمال تابع پیدا کړي.

د تجمعي احتمال له تابع څخه په ګټه اخېستنې سره ووایئ چې په یوه ورځ کې حداکثر احتمال د (2) موټرونو او حداقل احتمال د دوو موټرونو په کومه کچه ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جمله‌يي توزيع او د برنولي ازمويښت

يو ګڼ‌شمېر کوونکي د پوهنتون د کانکور په آزموينه کې د 160 سؤالونو څخه 100 سؤالونه حل کړل. تاسې څه سوچ کوئ چې دا ګډون‌کوونکی په آزموينه کې بريالی کېږي او يا بې نتيجه پاتې کېږي؟

د احتمال دوه جمله‌يي توزيع يوه مجزا توزيع ده چې د مختلفو پېښو د توصيف لپاره په کار وړل کېږي اکثراً پېښې چې په نړۍ کې منځ ته راځي دوه حالتونه لري.

فعاليت

د لاندې آزموينتي پېښو د شرطونو څخه څه ډول پايلې په لاس راوړلای شئ.

- څو ځلې دوه سکې واچول شي چې سمدلاسه دواړه شېر راشي.
- څو ځلې دوه تاسه واچول شي چې د شمېرو مجموعه يې له 7 څخه کوچنۍ شي.
- د يوې جعبې څخه څو ځلې د يوې مرۍ(مهره) اخېستل چې د تورو او سپينو مرۍ لرونکې ده.
- د يوې جعبې څخه چې د تورو او سپينو مريو لرونکې ده څو ځلې يوه مرۍ واخېستل شي چې اخېستل شوې مرۍ سپينه وي(چې اخېستل شوې مرۍ بيا په جعبه کې واچول شي)
- که چېرې m بريالیتوب د n آزمايښت څخه($m < n$) چې ترتيب په کې مهم نه دی دا ټاکنه د څه په نامه يادېږي او فورمول يې وليکئ.
- که د m شکلونو د بريالیتوب احتمال د n ازمايښت څخه په P او $n-m$ شکلونو د ناکامې احتمال د n آزمايښت څخه په q وښودل شي نو د m کاميابې احتمال د آزمايښت د n شکلونو څخه به څو وي؟
- زده‌کوونکي له پنځو څلور ځوابه آزمويني د پوښتنو سره مخامخ کېږي. هغوی په ناځاپه ډول پوښتنو ته ځوابونه ورکوي، فرض وکړئ که د (سم ځواب) بريالیتوب په T او (ناسم ځواب) نه بريالیتوب د F په توری وښودل شي په دې صورت کې د هر يوه سم او ناسم ځواب احتمال به څومره وي؟

له پورتني فعاليت څخه څرګندېږي چې د برنولي آزمايښت يو ناځاپه ازمايښت دی، چې کولای شو پايله يې په دوو حالتونو بريالیتوب او نابريالیتوب دسته بندي کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برنولي توزيع کولای شو چې په $P(x=m)=P^m(1-P)^{1-m}=P^m\cdot q^{1-m}$ په بڼه وښيو په داسې حال کې چې P د برياليتوب احتمال او $q=1-p$ د نابرياليتوب احتمال دی.

که چيرې يو ازمايښت n ځلې تکرار کړو، يو ترادف په لاس راځي، داسې چې که د هر آزمايښت د برياليتوب احتمال P او نابرياليتوب احتمال q وي، په دې صورت کې د n ځلې آزمايښت څخه د m ځلې برياليتوب احتمال عبارت دی له: $0\le m\le n$ $\quad P(X\le m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$

پورتني اړيکه کولای شو چې په دې ډول $B(m,n,p)$ هم وښيو،

د پورتنی فورمول په پام کې نيولو سره کولای شو، د دوه جمله‌يي د توزيع اوسط په $\bar{x}=np$ او د دوی توزيع معياري انحراف د $S=\sqrt{npq}$ په بڼه وښيو.

مثال: د يوه ناروغ د ښه کېدو احتمال د شکرې له ناروغی څخه 0.4 دی، که چيرې 15 تنه په دې ناروغی اخته وي، ددې خومره احتمال شته چې پنځه تنه ښهٔ شي او همدا شان پيداکړی چې له 3 څخه تر 4 تنو پورې جوړ شي.

حل: څرنگه چې $n=15$, $m=5$, $q=0.6$, $P=0.4$ دی نو:

$$P(m=5)=\binom{n}{m}P^m\cdot q^{n-m}=\binom{15}{5}(0.4)^5(0.6)^{10}$$
$$=\frac{15!}{5!(15-5)!}\cdot 0.01024\cdot 0.0060466176\text{0}=\frac{360360}{120}\cdot 0.00006191$$
$$=\frac{22.3098876}{120}=0.1859$$
$$P(3\le m\le 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}(0.4)^i(0.6)^{15-i}=(3^{15})(0.4)^3(0.6)^{15-3}+(4^{15})(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$
$$=\frac{15!}{3!(15-3)!}(0.064)(0.6)^{12}+\frac{15!}{4!(15-4)!}(0.0256)(0.6)^{11}$$
$$=\frac{2730}{6}(0.000139264)+\frac{3270}{24}(0.0000928512)$$
$$=\frac{0.38019072}{6}+\frac{0.3036}{24}=0.063365+0.012650$$
$$P(3\le m\le 4)=0.076015$$

پوښتني

په يوه کلي کې 200 کورنی اوسېږي که هره کورنی 4 ماشومان ولري ددې احتمال پيداکړئ چې هره کورنی

- حد اقل يو زوی لري.
- يوازې دوه زامن لري.
- يوه يا دوې لوڼې ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پواسن د احتمال توزیع

که چیرې د برنولي دوه جمله‌يي توزیع فورمول په پام کې ونیسو، ایا ویلای شئ که چیرې د برنولي په دوه جمله‌يي توزیع کې د P قیمت صفر ته تقرب وکړي او د n قیمت لایتناهي ته تقرب وکړي؛ نو د برنولي دوه جمله‌يي توزیع څه سره مساوي کېږي.

$$1)\ b(x,n,p)=\binom{x}{n}p^x q^{n-x}$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} b(x,n,p)=\frac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$$3)\ P(x,\lambda)=\frac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

فعالیت

کــه $p=0.1, n=5$ او $m=2$ وي د $P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$ قیمتونــه پــه داســې حــال کــې چــې $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$ او $\lambda=np$ وي محاسبه کړئ او له پاسنیو توابع قیمتونه سره یې پرتله کړئ، ویلای شي چې د کوم فورمول په کار وړل، ساده دی؟

د پواسن فورمول کولای شي، چې د m شکلونو د کامیابي احتمال د n آزمایښتونو څخه کله چې n لوی او د کامیابي احتمال P کوچنی وي، د تقریبي محاسبې لپاره وکارول کېږي.

دا فورمول عبارت دی له: $P(X=m)=\frac{e^{-x}\lambda^m}{m!}$

چې $\lambda=np$ او $e=2.71828$ دی.

په یاد ولرئ چې د پواسن په توزیع کې اوسط او هم وریانس له λ سره برابر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: 200 تنو مسافرينو د يوې الوتکې ټکټ اخيستلی دی د مخکنيو تجاربو په اساس که د هغه مسافرينو چې ټکټ يې رانيولی دی د نه راتگ احتمال 0.01 وي. ددې احتمال چې 3 تنه مسافرين واپس را نه شي څومره دی.

حل: په دې مسئله کې د(نه راتلل) کاميابي ده او همدارنگه ليدل کيږي چې $n = 200$ ډير لوی او $P = 0.01$ يعنې د کاميابی احتمال کوچنی دی، نو لرو:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{m}}{m!} \qquad \lambda = n\,p = 200\cdot 0.01 = 2$$

$$P(3)=\frac{(2.71828)^{-2}\cdot 2^{3}}{3!}=\frac{\frac{1}{(2.71828)^{2}}\cdot 8}{6}=\frac{\frac{1}{7.3890461584}\cdot 8}{6}$$

$$=\frac{0.13533\cdot 8}{6}=\frac{1.08268}{6}=0.1804$$

اوس که چيرې دا احتمال د دو جمله‌يي په فورمول محاسبه کړو،لرو چې:

$$P(X=m)=\binom{n}{m}P^{m}\;q^{n-m}$$

$$\left.\begin{aligned} n &= 200 \\ p &= 0.01 \end{aligned}\right\} \Rightarrow q = 0.99$$

$$P(3)=P(X=3)=\binom{200}{3}(0.01)^{3}(0.099)^{200-3}$$

$$=\frac{200!}{3!\cdot 197!}(0.01)^{3}(0.099)^{197}=0.1814$$

څرنگه چې ليدل کيږي دواړه ځوابونه سره معادل دي نو واضح ده چې د پواسن د فورمول له لارې احتمال محاسبه ساده ده.

یادونه:

د پواسن د فورمول په واسطه کولای شو چې په یوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال په لاندې ډول وښیو:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

په پورتني فورمول کې t د بدل شوی وخت نسبت پر ټول وخت چې اوسط هغې ته ورکړل شوی وي m د ورتللو شمېر د t په واحد وخت کې د λ د ورتګ شمېر اوسط په واحد د وخت کې دی.

مثال: که په یوه ساعت کې د یوه بانک د مراجعینو شمېر په متوسط ډول 60 تنه وي، ددې احتمال چې څلور تنه په لومړیو دریو دقیقو کې راغلی وي څومره دی.

حل:

$$\lambda=60 \qquad , \qquad t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$$

$$m=4 \qquad , \qquad \lambda t=60\cdot\frac{1}{20}=3$$

$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}=\frac{e^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{\frac{1}{(2.71828)^3}\cdot 81}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=\frac{\frac{1}{20.0854}\cdot 81}{24}=\frac{4.03278}{24}=0.168032$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

د چاپ د یوه ماشین د جوړولو لپاره په یوه کال کې په متوسط ډول ورتګ دوه ځلې ده، فرض کوو چې د پواسن توزیع په دې اړه صدق کوي.

الف: د ماشین د جوړولو لپاره د ورتګ د احتمال توزیع په یوه کال کې حساب کړئ.

ب: د توزیع اوسط او معیار انحراف څومره دی؟

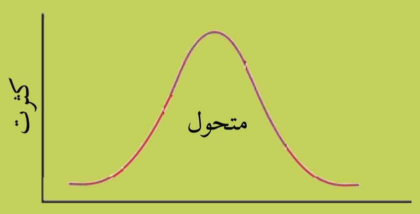
ج: فرض کړئ که د هر ورتګ مصرف 100 افغانۍ وي، د هر ماشین د جوړولو مصرف پیدا کړئ؟

د: ددې احتمال چې په هر کال کې دیوه ماشین د جوړولو مصرف له 300 افغانیو څخه زیات وي، څومره دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورمال توزیع

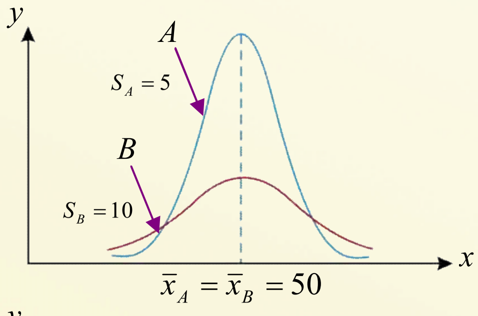
پوهېږو چې د نورمال منحني شکل مشابه او متناظر له زانګولی سره ده، په نورمال منحني کې د پراګندګی مرکزي شاخصونه(معیاري انحراف او اوسط) څه ډول ځایونه(موقعیتونه) نیولی شي.



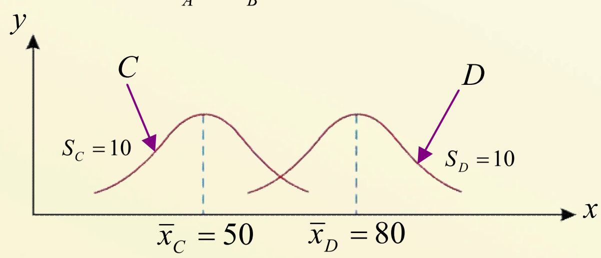
فعالیت

د نورمال بېلابېل توزیعات د بېلابېلو اوسط او معیار انحرافونو لرونکی دی.

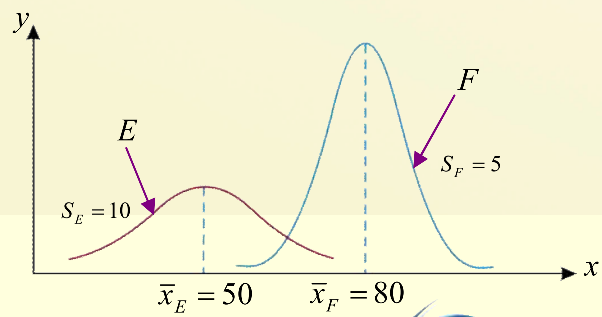
څو د نورمال توزیع له بېلابېلو اوسطحو او معیار انحرافونو سره په لاندې شکلونو کې ورکړل شوي دي.



الف شکل



ب شکل



ج شکل

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندینی فعالیت له پورتنیو شکلونو څخه په ګټه اخیستنې سره په شفاهي ډول بیان کړئ؟

- د الف په شکل کې د A او B د تصادفي متحول توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکې ده؟
- د ب په شکل کې C او D توزیع د څه ډول معیار انحراف او اوسط لرونکی دی؟
- د ج په شکل کې د E او F توزیع د څه ډول معیار انحراف اوسط لرونکی دی؟
- د نورمال منحني شکل دواړو خواوو ته ترکوم ځایه غزیدلي دي؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه داسې پایله په لاس راځي چې:

د نورمال منحني توزیع کیدای شي چې په څلورو طریقو یو له بل سره توپیر ولري. د نورمال توزیع ریاضیکي معادله چې د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکی ده، په لاندې ډول ښوول کېږي.

$$f(x)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

او یا

$$f(x)=N(x,\bar{x},s)$$

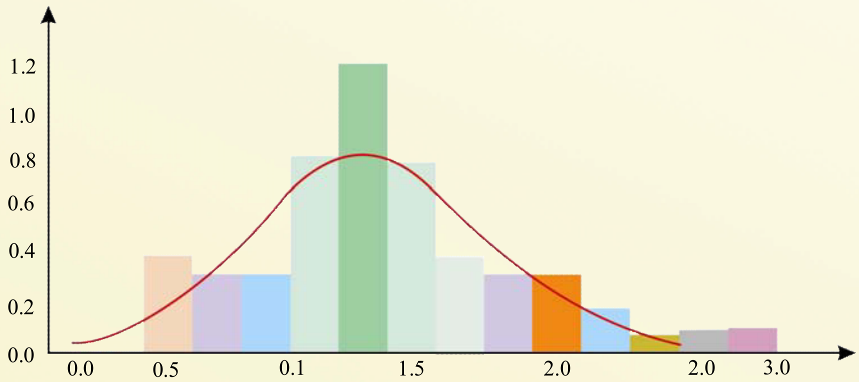
په داسې حال کې چې $e=2.71828$ او π هم ثابت عدد 3.14189 دی $\bar{x}$ اوسط، s معیار انحراف، x پیوسته تصادفي مقدار او $f(x)$ د منحني جګوالی راښیي.

د نورمال توزیع له پیوسته توزیعګانو څخه ده. د نورمال توزیع په واسطه کولای شو، د اندازه کولو توپیر په ښه توګه سره نږدې کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د موټرونو ماشين د تيلو سوزولو په وخت کې يوه اندازه مضر لوګی توليدوي، د هغه مضر لوګي مقدار چې له 46 موټرونو توليدېږي، چې د يوه تن په واسطه چې لورنزن نومېده په 1980 کال کې وڅېړل شو.يوه اندازه لوګی د نايتروجن اوکسايدونه لري. لاندې مستطيلي ګراف د نايتروجن اوکسايد ميزان د ($\frac{gr}{mil}$) د 46 موټرونو د نورمال احتمال توزيع اوسط او وريانس چې د نوموړی کس له خوا تر څېړنې لاندې نيول شوی. ددې مستطيلي ګراف د ستونونو مساحت متناسب دی له هغو 46 نمونه‌يي شمېر له اندازه‌ګيری سره چې ددې ستون د افقي ټکو تر منځ قرار لري.

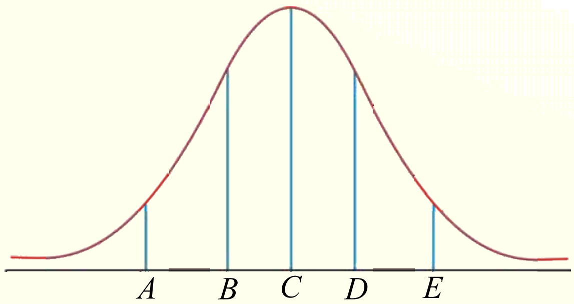
د مثال په ډول په څلورم ستون کې(چې له 1 څخه تر 1.2 پورې په افقي محور قرار لري) د $0.870 \cdot 0.2 = 0.174$ مساحت لرونکی دی چې د $\frac{4}{46}$ سره برابر دی ځکه 8 ديتا له 1 څخه تر 1.2 پورې پراته دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه

لاندیني شکل په پام کې ونیسئ د A, B, C, D او E ټکو موقعیت د معیار انحراف د اوسط له جنسه پیداکړئ.



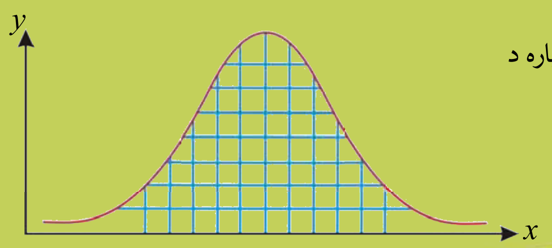
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت او د هغې ستنډرډ کول

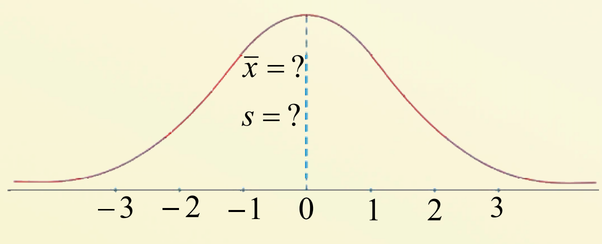
مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:

د $y = f(x)$ د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د څه ډول لارو وړاندیز کوئ.

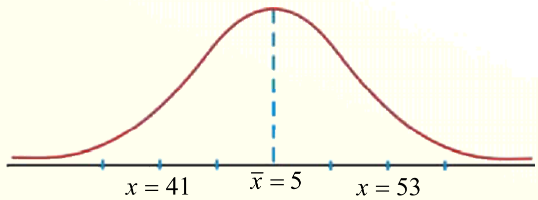


فعالیت

- که چیرې د x تصادفي پیوسته متحول د احتمال نورمال توزیع چې اوسط یې $\bar{x}$ او معیار انحراف یې s وي، ددې احتمال چې دا تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ کمیت غوره کړي د انتیګرال په بڼه یې ولیکئ.
- سوچ کولای شئ چې د احتمال نورمال توزیع د ریاضي شکل انتیګرال محاسبه به ساده کار وي.
- که چیرې د نورمال تصادفي متحول په $z = \dfrac{x - \bar{x}}{s}$ ډول ولیکو، د $f(x)$ تابع د احتمال توزیع برابر له څه سره ده؟
- ویلای شئ چې اوسط او معیار انحراف په لاندې شکل کې له کومو عددونو سره برابر دي؟



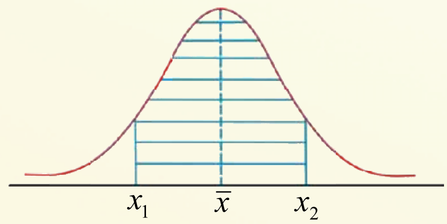
- کـه پـه لانـدې شـکل کـې چـې د $x = 41$ او $x = 53$ قیمتونـه پـه نورمـال ډول د $\bar{x} = 50$ اوسـط او $S = 5$ معیار انحراف ښودل شوی دی نو د $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ مقدار په لاس راوړئ.



له پورتنی فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي چې د احتمال د محاسبې لپاره داسې چې د x پیوسته تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ یو کمیت ونیسئ، نو باید د x د احتمال د توزیع له تابع څخه انتګرال ونیسو او د منحنې لاندې سطحه د x_1 او x_2 فاصلو ترمنځ په لاندې ډول محاسبه کړو:

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \bar{x}, s)dx$$



د نورمال توزیع احتمال محاسبه ساده کار نه دی، د نورمال توزیع‌ګانو د منحنې لانـدې مـساحت محاسبه اوږدو جـدولونو تـه اړتیـا لـري چې عمـلاً دا کـار ګران دی، کولای شـو چې د جـدول د جوړولـو شـکل د احصائیوي data د سټنډرډ کولو په واسطه حل کړو.

په دې معنا چې کولای شو په x پورې اړوند تـصادفي متحـول چې د نورمـال توزیـع لرونکـی دی، د لانـدې اړیکې په واسطه سټنډرډ کړو.

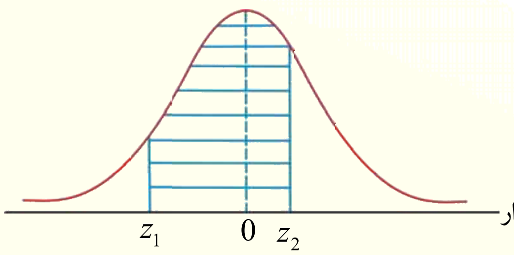
$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

دلته z د سټنډرډ نورمال متحول په نامه او منحني ته د سټنډرډ نورمـال منحنـي پـه نامـه یـا د نورمال احتمـال منحني نومول کېږي، په یاد ولـرئ چې د z سټنډرډ وي، متحول تـل د صفر اوسـط لرونکـی او یـو معیـار انحراف یې دی، همدرانګه د نورمال منحني او افقي محور ترمنځ مساحت له ټاکل شـوي واحـد سـره برابـر وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

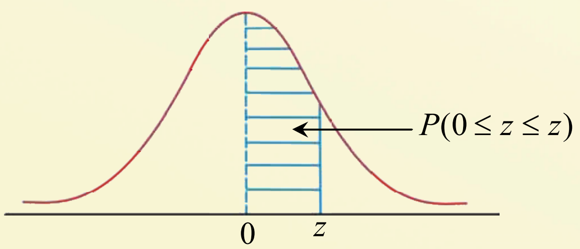
لاندې مساحت د يوه منحني يوه برخه د نورمال احتمال چې له احتمال سره مستقيم تناسب لري او کولای شو چې د $z=\frac{x-\bar{x}}{s}$ بدلولو سره يې په لاندې ډول وښيو.

$$f(z_1<z<z_2)=\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}dz=\int_{z_1}^{z_2}N(z,0,1)\,dz$$



د x متحول منحني لاندې مساحت چې د $x=x_1$ او $x=x_2$ ترمنځ واقع دی، د z متحول له منحني مساحت سره چې د $z=z_1$ او $z=z_2$ ترمنځ پراته مساوي دي. په پايله کې کولای شو چې د نورمال د توزيع سټنډرډ د جدول په لرلو سره د نورمال توزيع احتمال د ناڅاپه متحول د هر ممکنه قيمت لپاره په لاس راوړای شو.

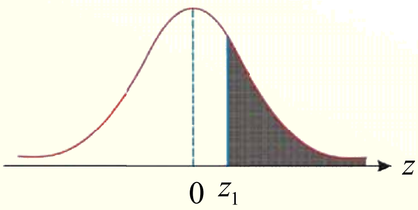
د سټنډرډ نورمال د توزيع احتمال د جدول د استعمال له لارې کولای شو، په لنډ ډول توضيح کړو. هغه جدول چې ددې لوست په پای کې راغلی دی، د سټنډرډ نورمال توزيع اړوند په احتمالاتو کې ګډون لري. لاندې جدول ددې لوست يوه برخه د جدول پای راښيي، هغه ارقام چې د جدول دپاسه ليکل شوی دی، راښيي چې z د مثبتو مقدارونو لپاره تنظيم شوی دی چې د منحني لاندې مساحت له صفر ټکی څخه تر z پورې راښيي.



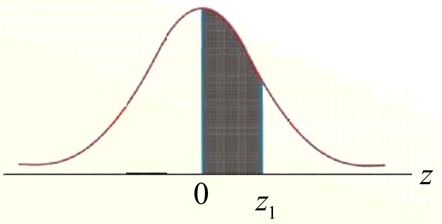
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

جدول(1)



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9268	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997



جدول(2)

z	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۰/۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۴۰	۰/۰۰۸۰	۰/۰۱۲۰	۰/۰۱۶۰	۰/۰۱۹۹	۰/۰۲۳۹	۰/۰۲۷۹	۰/۰۳۱۹	۰/۰۳۵۹
۰/۱	۰/۰۳۹۸	۰/۰۴۳۸	۰/۰۴۷۸	۰/۰۵۱۷	۰/۰۵۵۷	۰/۰۵۹۶	۰/۰۶۳۶	۰/۰۶۷۵	۰/۰۷۱۴	۰/۰۷۵۴
۰/۲	۰/۰۷۹۳	۰/۰۸۳۲	۰/۰۸۷۱	۰/۰۹۱۰	۰/۰۹۴۸	۰/۰۹۸۷	۰/۱۰۲۶	۰/۱۰۶۴	۰/۱۱۰۳	۰/۱۱۴۱
۰/۳	۰/۱۱۷۹	۰/۱۲۱۷	۰/۱۲۵۵	۰/۱۲۹۳	۰/۱۳۳۱	۰/۱۳۶۸	۰/۱۴۰۶	۰/۱۴۴۳	۰/۱۴۸۰	۰/۱۵۱۷
۰/۴	۰/۱۵۵۴	۰/۱۵۹۱	۰/۱۶۲۸	۰/۱۶۶۴	۰/۱۷۰۰	۰/۱۷۳۶	۰/۱۷۷۲	۰/۱۸۰۸	۰/۱۸۴۴	۰/۱۸۷۹
۰/۵	۰/۱۹۱۵	۰/۱۹۵۰	۰/۱۹۸۵	۰/۲۰۱۹	۰/۲۰۵۴	۰/۲۰۸۸	۰/۲۱۲۳	۰/۲۱۵۷	۰/۲۱۹۰	۰/۲۲۲۴
۰/۶	۰/۲۲۵۸	۰/۲۲۹۱	۰/۲۳۲۴	۰/۲۳۵۷	۰/۲۳۸۹	۰/۲۴۲۲	۰/۲۴۵۴	۰/۲۴۸۶	۰/۲۵۱۸	۰/۲۵۴۹
۰/۷	۰/۲۵۸۰	۰/۲۶۱۲	۰/۲۶۴۲	۰/۲۶۷۳	۰/۲۷۰۴	۰/۲۷۳۴	۰/۲۷۶۴	۰/۲۷۹۴	۰/۲۸۲۳	۰/۲۸۵۲
۰/۸	۰/۲۸۸۱	۰/۲۹۱۰	۰/۲۹۳۹	۰/۲۹۶۷	۰/۲۹۹۶	۰/۳۰۲۳	۰/۳۰۵۱	۰/۳۰۷۸	۰/۳۱۰۶	۰/۳۱۳۳
۰/۹	۰/۳۱۵۹	۰/۳۱۸۶	۰/۳۲۱۲	۰/۳۲۳۸	۰/۳۲۶۴	۰/۳۲۸۹	۰/۳۳۱۵	۰/۳۳۴۰	۰/۳۳۶۵	۰/۳۳۸۹
۱/۰	۰/۳۴۱۳	۰/۳۴۳۸	۰/۳۴۶۱	۰/۳۴۸۵	۰/۳۵۰۸	۰/۳۵۳۱	۰/۳۵۵۴	۰/۳۵۷۷	۰/۳۵۹۹	۰/۳۶۲۱
۱/۱	۰/۳۶۴۳	۰/۳۶۶۵	۰/۳۶۸۶	۰/۳۷۰۸	۰/۳۷۲۹	۰/۳۷۴۹	۰/۳۷۷۰	۰/۳۷۹۰	۰/۳۸۱۰	۰/۳۸۳۰
۱/۲	۰/۳۸۴۹	۰/۳۸۶۹	۰/۳۸۸۸	۰/۳۹۰۷	۰/۳۹۲۵	۰/۳۹۴۴	۰/۳۹۶۲	۰/۳۹۸۰	۰/۳۹۹۷	۰/۴۰۱۵
۱/۳	۰/۴۰۳۲	۰/۴۰۴۹	۰/۴۰۶۶	۰/۴۰۸۲	۰/۴۰۹۹	۰/۴۱۱۵	۰/۴۱۳۱	۰/۴۱۴۷	۰/۴۱۶۲	۰/۴۱۷۷
۱/۴	۰/۴۱۹۲	۰/۴۲۰۷	۰/۴۲۲۲	۰/۴۲۳۶	۰/۴۲۵۱	۰/۴۲۶۵	۰/۴۲۷۹	۰/۴۲۹۲	۰/۴۳۰۶	۰/۴۳۱۹
۱/۵	۰/۴۳۳۲	۰/۴۳۴۵	۰/۴۳۵۷	۰/۴۳۷۰	۰/۴۳۸۲	۰/۴۳۹۴	۰/۴۴۰۶	۰/۴۴۱۸	۰/۴۴۲۹	۰/۴۴۴۱
۱/۶	۰/۴۴۵۲	۰/۴۴۶۳	۰/۴۴۷۴	۰/۴۴۸۴	۰/۴۴۹۵	۰/۴۵۰۵	۰/۴۵۱۵	۰/۴۵۲۵	۰/۴۵۳۵	۰/۴۵۴۵
۱/۷	۰/۴۵۵۴	۰/۴۵۶۴	۰/۴۵۷۳	۰/۴۵۸۲	۰/۴۵۹۱	۰/۴۵۹۹	۰/۴۶۰۸	۰/۴۶۱۶	۰/۴۶۲۵	۰/۴۶۳۳
۱/۸	۰/۴۶۴۱	۰/۴۶۴۹	۰/۴۶۵۶	۰/۴۶۶۴	۰/۴۶۷۱	۰/۴۶۷۸	۰/۴۶۸۶	۰/۴۶۹۳	۰/۴۶۹۹	۰/۴۷۰۶
۱/۹	۰/۴۷۱۳	۰/۴۷۱۹	۰/۴۷۲۶	۰/۴۷۳۲	۰/۴۷۳۸	۰/۴۷۴۴	۰/۴۷۵۰	۰/۴۷۵۶	۰/۴۷۶۱	۰/۴۷۶۷
۲/۰	۰/۴۷۷۲	۰/۴۷۷۸	۰/۴۷۸۳	۰/۴۷۸۸	۰/۴۷۹۳	۰/۴۷۹۸	۰/۴۸۰۳	۰/۴۸۰۸	۰/۴۸۱۲	۰/۴۸۱۷
۲/۱	۰/۴۸۲۱	۰/۴۸۲۶	۰/۴۸۳۰	۰/۴۸۳۴	۰/۴۸۳۸	۰/۴۸۴۲	۰/۴۸۴۶	۰/۴۸۵۰	۰/۴۸۵۴	۰/۴۸۵۷
۲/۲	۰/۴۸۶۱	۰/۴۸۶۴	۰/۴۸۶۸	۰/۴۸۷۱	۰/۴۸۷۵	۰/۴۸۷۸	۰/۴۸۸۱	۰/۴۸۸۴	۰/۴۸۸۷	۰/۴۸۹۰
۲/۳	۰/۴۸۹۳	۰/۴۸۹۶	۰/۴۸۹۸	۰/۴۹۰۱	۰/۴۹۰۴	۰/۴۹۰۶	۰/۴۹۰۹	۰/۴۹۱۱	۰/۴۹۱۳	۰/۴۹۱۶
۲/۴	۰/۴۹۱۸	۰/۴۹۲۰	۰/۴۹۲۲	۰/۴۹۲۵	۰/۴۹۲۷	۰/۴۹۲۹	۰/۴۹۳۱	۰/۴۹۳۲	۰/۴۹۳۴	۰/۴۹۳۶
۲/۵	۰/۴۹۳۸	۰/۴۹۴۰	۰/۴۹۴۱	۰/۴۹۴۳	۰/۴۹۴۵	۰/۴۹۴۶	۰/۴۹۴۸	۰/۴۹۴۹	۰/۴۹۵۱	۰/۴۹۵۲
۲/۶	۰/۴۹۵۳	۰/۴۹۵۵	۰/۴۹۵۶	۰/۴۹۵۷	۰/۴۹۵۹	۰/۴۹۶۰	۰/۴۹۶۱	۰/۴۹۶۲	۰/۴۹۶۳	۰/۴۹۶۴
۲/۷	۰/۴۹۶۵	۰/۴۹۶۶	۰/۴۹۶۷	۰/۴۹۶۸	۰/۴۹۶۹	۰/۴۹۷۰	۰/۴۹۷۱	۰/۴۹۷۲	۰/۴۹۷۳	۰/۴۹۷۴
۲/۸	۰/۴۹۷۴	۰/۴۹۷۵	۰/۴۹۷۶	۰/۴۹۷۷	۰/۴۹۷۷	۰/۴۹۷۸	۰/۴۹۷۹	۰/۴۹۷۹	۰/۴۹۸۰	۰/۴۹۸۱
۲/۹	۰/۴۹۸۱	۰/۴۹۸۲	۰/۴۹۸۲	۰/۴۹۸۳	۰/۴۹۸۴	۰/۴۹۸۴	۰/۴۹۸۵	۰/۴۹۸۵	۰/۴۹۸۶	۰/۴۹۸۶
۳/۰	۰/۴۹۸۷	۰/۴۹۸۷	۰/۴۹۸۷	۰/۴۹۸۸	۰/۴۹۸۸	۰/۴۹۸۹	۰/۴۹۸۹	۰/۴۹۸۹	۰/۴۹۹۰	۰/۴۹۹۰
۳/۱	۰/۴۹۹۰	۰/۴۹۹۱	۰/۴۹۹۱	۰/۴۹۹۱	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۲	۰/۴۹۹۳	۰/۴۹۹۳
۳/۲	۰/۴۹۹۳	۰/۴۹۹۳	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۴	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵
۳/۳	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۵	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۶	۰/۴۹۹۷
۳/۴	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۷	۰/۴۹۹۸
۳/۵	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸
۳/۶	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۸	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹
۳/۷	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹
۳/۸	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹	۰/۴۹۹۹
۳/۹	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثال په ډول که چیري $z = 1.56$ وي لومړی هغه سطر پیدا کړئ چې په هغه کې z د 1.5 معادل دی، که چیرې ددې کرښې په اوږدوالي پرمخ لاړ شو، تر څو هغه ستون ته ورسېږو چې له پاسه 0.06 لیکل شوی دی له 0.9406 عدد سره مخامخ کېږو چې د منحنې د لاندې اړوندې سطحې د $z = 0$ څخه تر $z = 1.56$ پورې دی، نو لیکلای شو چې: $P(0 \le Z \le 1.56) = 0.9406$

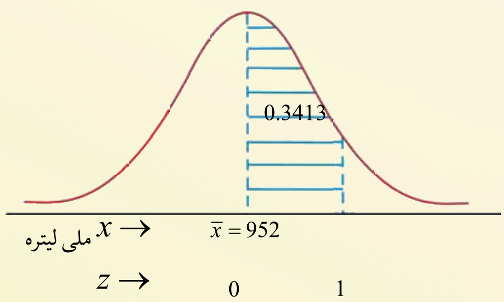
لومړی مثال: د څښلو(نوشابې) د بوتلونو د ډکولو دستگاه داسې تنظیم شوې ده، که 952 ملي‌لیتر نوشابه په بوتل کې واچوي ددې نوشابې میزان چې د نورمال توزیع اوسط یې 952 ملي‌لیتره او معیاري انحراف یې 4 ملي‌لیتره دی. ددې احتمال چې بوتل د 952 او 956 ملي‌لیترو ترمنځ نوشابه ولري، څومره دی.

حل: لومړی z د x له جنسه پیدا کوو:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{952 - 952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956 - 952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نو پر دې اساس د x د تعریف ناحیه له 952 څخه تر 956 د z تعریف د ناحیې له صفر څخه تر 1 بدلېږي.
د لوست د پیل له جدول(2) څخه په ګټه اخیستنې سره لرو $P(0 \le z \le 1) = 0.3413$ احتمال داسې دی چې هغه بوتل چې له 952 څخه تر 956 ملي‌لیترو نوشابه ولري، یا په بل عبارت 34.13 فیصده ډک شوي بوتلونه له 952 څخه تر 956 ملي‌لیتره نوشابه لري؛ یعنې:



$$P(0 \le z \le 1) = P(z_2) - P(z_1)$$
$$= P(1) - P(0)$$
$$= 0.3413 - 0$$
$$= 0.3413$$

دویم مثال: په یوه خاص مضمون کې د زده‌کوونکو د نمبرو د نورمال توزیع اوسط 70 او معیاري انحراف یې 8 دی له نورمال ستندرډ جدول څخه په ګټه اخیستنې سره له 54 څخه تر 84 نمبرو ترمنځ فیصدي پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مسألې حل په لاندې ډول په ترسيمي بڼه ښودل شوی دی.

د $x = 54$ لپاره لرو: $z_1 = \frac{54-70}{8} = -2$

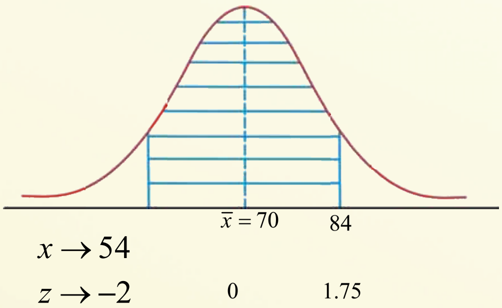
د $x = 84$ لپاره لرو: $z_2 = \frac{84-70}{8} = 1.75$

څرنګه چې د سټنډرډ نورمال منحني لاندې مساحت په يو محدود انټروال کې په پام کې نيول شوی دی؛ نو له نورمال سټنډرډ جدول(2) څخه لرو:

$$P(-2 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 2) = 0.9772$$
$$P(0 \le z \le 1.75) = 0.9599$$

د ټاکل شوي مساحت د پام وړ احتمال دی.

$$P(-2 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 1.75) = 0.4772 + 0.4599$$
$$= 0.9371$$



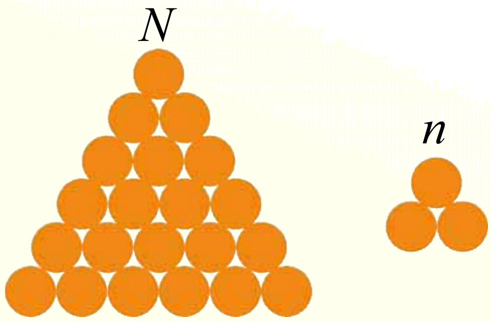
پوښتنې

د لومړي مثال په پام کې نيولو سره محاسبه کړئ چې د بوتلونو څو فيصده له 948 څخه تر 956 ملي‌ليټرو پورې نوشابه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نمونه اخېستل

پـه دي متـل کـې((مـوټې د خـروارو نمونـه ده)) څرنګـه تحلیلوئ.



$N =$ **جامعه** $\Rightarrow n = ?$

فعالیت

- که چیرې وغواړئ چې د افغانستان د 12 ټولګي د زده‌کوونکو ونې(قد) اندازه کړئ ددې کار لپاره څه ډول لارې وړاندیز کوئ.
- نمونـه پـه دوو ډولونـو وېـشل کېـږي، سـاده نمونـه او ناڅاپـه نمونـه، تاسـې ددې نمونـو کـومې يـوې تـه غوره‌والی ورکوئ؟ ولې؟
- د نمونه‌ګیرۍ لپاره ښکاره خپل دلایل شته ایا کولای شي یو یا دوه دلیلونه یې ووایئ.
- سوچ کولای شي چې د اوسط او معیار انحراف عددي ځانګړنې چې د ټولنې د توزیع او د نمونې د توزیع لپاره ورڅخه ګټه اخېستل کېږي، یو شان وي.
- ایا د نمونه‌ګیرۍ او لیدل شویو ناڅاپه متحولینو د مقدارونو ترمنځ توپیر شته؟

له پورتنې فعالیت څخه پوهېږو چې د نمونه اخېستنې بیلې بیلې لارې شته دی.

ـ ناڅاپه نمونه اخېستنه: د ټولنې ټول عناصر په ټاکل کېدو کې هم چانس دی.

ـ سیستماټیک نمونه اخېستنه: د ټولنې عناصر په منظم ډول کود وهل شوی دی.

ـ طبقه‌یي نمونه اخېستنه: ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

ـ خوشه‌یي نمونه اخېستنه: که ټولنه ډېره لویه وي، هغه په بېلابېلو ځانګو وېشو او له هرې ځانګې څخه یوه نمونه ټاکو.

ـ د هرې ټولنې عددي ځانګړنې(اوسط معیار انحراف) ته د ټولنې پارامتر وایي.

ـ د هرې ټولنې د عددي نمونه‌ګیرۍ ځانګړنې(اوسط معیار انحراف) ته آماره وایي.

ـ د نمونې پایلې د مشاهدې د مقدارونو په عنوان د ناڅاپه متحولینو په بڼه په پام کې نیسو.

ـ د $x_1, x_2 \ldots x_n$ ناڅاپه متحولونو یوه ناڅاپه نمونه د x تصادفي متحول ویل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې تابع یې په دې ډول تعریف شوې وي.

$$f(x_1, x_2)..., x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) ... f(x_n)$$

مثال: فرض کوو چې په یوه قطی کې 5 سپینې او 7 تورې ګلولې وي، د قطی له منځ څخه 5 ګلولې یوه یوه ځای په ځای کول(د یوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز) ټاکو.

د ټاکل شوی ناخاپه نمونې تصادفي متحولین په ژبه بیان کړئ او اړونده توزیع یې پیدا کړئ.

حل: د x_1, x_2 او x_3 ناخاپه متحولونو په پام کې ونیسئ په لومړي پړاو کې د x_1 ناخاپه متحول لپاره د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپینې ګلولې ټاکلو په لومړي پړاو کې ځانته غوره کړئ. او د x_2 متحول هم د صفر عدد د تورې ګلولې او د (1) عدد سپینه ګلوله لپاره په دویم پړاو کې ځانته غوره کوي په همدې بڼه د x_3 ناخاپه متحول په دویم پړاو کې هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره ټاکو چې په دې پړاو کې (1) عدد سپینه ګلوله ځانته غوره کوي، په دې حالت کې د x_1, x_2 او x_3 ناخاپي متحولونه د برنولي ناخاپه متحولین دي. د $p = \frac{5}{12}$ له پارامتر او د $i = 1, 2, 3$ مقدارونو څخه لرو:

$$f(x_i) = (\frac{5}{12})^{x_i} (1 - \frac{5}{12})^{1-x_i}$$

څرنګه چې نمونه اخیستنه ناخاپه ده، نو د x_1, x_2 و x_3 ناخاپه متحولین یو له بل څخه بېل دی نو تابع یې عبارت دی له:

$$f(x_1, x_2, x_3) = P(x_1 = x_1 \;,\; x_2 = x_2 \;,\; x_3 = x_3)$$

په یاد ولرئ چې د عناصرو هره ناخاپه نمونې له مجهول پارامترونو سره تړلې نه دي، هغې ته آماره وایي.

پوښتنې

1. که $N = 25$ د یوې ټولنې حجم وي که وغواړو چې پنځه ګونه ناخاپه نمونه یې پیدا کړو، د هغو نمونو شمېر چې په لاس راځي څومره ده؟
2. ساده او ناخاپه نمونې سره له مثال بیان کړئ؟
3. فرض کوو چې د یوې ټولنې څخه مو ناخاپه نمونه رانیولی ده څه سوچ کوئ چې ددې نمونې سره به څه وکړو؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نمونې د اوسط توزیع

دولت غواړي ویوهېږي چې د یوه ښار د وګړو متوسطه ګټه(سپما) څومره ده؟

ددې کار لپاره ناڅاپه نمونه ټاکي او د نمونې اوسط محاسبه کوي.

اوس باید ددې محاسبه شوې مقدار څخه کوم کمیت تخمین کړئ؟

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = ?$$

فعالیت

- د لاندې data د دریو زده‌کوونکو د ورزشي لوبو د نمبرو پایله راښیي:

نوم	داود	سلیمان	پژواک
نمبرې	2	3	4

- د نمبرو د احتمال توزیع یې ولیکئ.
- د زده‌کوونکو د نمبرو اوسط او معیار انحراف حساب کړئ.
- راکړل شوی نمبرې د مرتبو جوړو په مرسته(ممکنې دوه ګونې نمونې د ځای په نیولو) ارایه او د هرې نمونې اوسط د جدول په بڼه وښیئ.
- د نمونو د اوسط د احتمال توزیع جدول(د $\bar{x}$ دکثرت د تو زیع جدول) ولیکئ.
- د $\bar{x}$ دکثرت توزیع جدول مستطیلي ګرام رسم کړئ.
- د اوسط د $\bar{x}$ متحول د زده‌کوونکو د نمبرو د اوسط سره پرتله کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي:

که $x_1, x_2, \ldots x_n$ د یوې ټولنې د $f(x)$ احتمال تابع ناڅاپه نمونه وي په دې صورت کې د ناڅاپه نمونې احتمال توزیع عبارت دی له:

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\ldots$	

د $\bar{x}_n$ متحول د اوسط، $E(\bar{x}_n) = \mu$

د $\bar{x}_n$ متحول وریانس، $U(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$

د نمونې وریانس $S_n^{\ 2} = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

د نمونه‌یي وریانس اوسط، $E(S^2) = \delta^2$

په داسې حال کې چې $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ نمونه‌یي اوسط، μ د ټولنې اوسط δ^2 د ټولنې وریانس S^2 د نمونې وریانس دی.

مثال: د لاندې ټولنه، ټولې دوه ګونې ممکنه ناڅاپه نمونې د ځای په ځای کولو سره ټاکو:

$$f(x) = \frac{1}{3} \quad , \quad x = 1, 2, 3$$

الف: د x د احتمال توزیع ولیکئ.

ب: د ټولنې اوسط او وریانس حساب کړئ.

ج: د $\bar{x}$ د توزیع جدول تشکیل او مستطیلي ګراف یې رسم کړي.

د: $E(\bar{x})$ او $V(\bar{x})$ حساب کړئ.

حل:

الف:

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب:

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^{3} x f(x) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^{3} x^2 f(x) = \frac{1}{3}(1^2+2^2+3^3) = \frac{14}{3}$$

$$\delta_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}$$

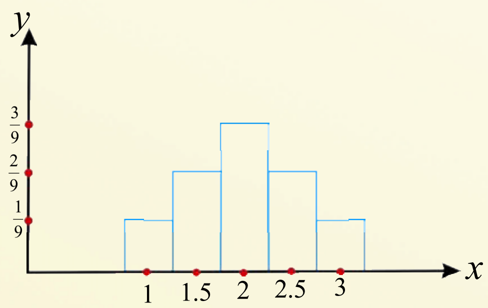
ج: لاندې جدول ټولې دوه‌ګونې ممکنو نمونو د ځای نیول، د سره او هر یوه اوسط راښيي:

نمونه	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
$\bar{x}$	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

د $\bar{x}$ د توزیع د کثرت جدول په لاندې ډول ښودل کېږي:

$\bar{x}$	1	1.5	2	2.5	3
$f(\bar{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

د $\bar{x}$ مستطیلي ګراف په لاندې ډول رسمېږي:



د:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = 1\cdot\frac{1}{9} + 1.5\cdot\frac{2}{9} + 2\cdot\frac{3}{9} + 2.5\cdot\frac{2}{9} + 3\cdot\frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(\bar{x}^2) = \sum \bar{x}^2 f(\bar{x}) = 1^2\cdot\frac{1}{9} + (1.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 2^2\cdot\frac{3}{9} + (2.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 3^2\cdot\frac{1}{9} = \frac{13}{3}$$

$$\delta_{\bar{x}}^2 = V(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - (E(\bar{x}))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$E(x) = E(\bar{x}) = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو ليدل کېږي چې:

$$V(\bar{x}) = \frac{\delta_x^{\ 2}}{n} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

پوښتنه

1. فرض کوو چې یوه ټولنه د $6,4,2$ او 8 څلورو عددونو څخه جوړه شوې وي، په دې صورت کې توزیع، اوسط او وریانس ددې ټولنې محاسبه او وروسته ددې ټولنې څخه دوه ګوني ناځاېه نمونه د ځاى په نیولو سره وټاکئ او د نمونې توزیع اوسط یعنې $\bar{x}$ په لاس راوړئ. د کثرت څو ضلعي ګراف یې رسم کړئ، د $\bar{x}$ اوسط او وریانس حساب کړې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکزي لېميټ قضيه

پوهېږو چې د ټولنې کميت ته د ټولنې پارامتر او د نمونې کميت ته نمونه يي اوسط ويل کېږي د $S_{\bar{x}}$ او $\bar{x}$ د نمونو احصائيه د کوم پارامتر په اړه اطلاعات زموږ په اختيار کې ږدي.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = ?$$

فعاليت

- که د لويې ټولنې حجم په $\frac{S}{\sqrt{n}}$ و، د کوچنی ټولنې حجم په $\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ (چې N د ټولنې عناصر شمېر، n د نمونه عناصرو شمېر او S معيار انحراف دی) وښيو څه وخت کېدای شي چې د لويې ټولنې حجم له کوچنی ټولنې سره برابر شي؟
- که د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نورمال توزيع يو له بل څخه بېل وي آيا د هغوی د جمع حاصل د نورمال توزيع لرونکی ده؟
- که $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ناخاپه ځانګړي متحولونه په يو شان توزيع شوی وي او د μ اوسط لرونکی وي او ς^2 وريانس وي ويلای شو چې د $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ د توزيع وريانس او اوسط څو دی؟

د پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

که چيرې N د يوې لويې ټولنې د μ متناهي اوسط او δ^2 متناهي وريانس لرونکی يوه ناخاپه n ګونه نمونه وټاکو، په دې صورت کې د نمونې اوسط يعنې $\bar{x}$ د تقريبي نورمال توزيع د $\mu_{\bar{x}} = \mu$ اوسط $\delta_{\bar{x}}^2 = \frac{\delta^2}{n}$ وريانس دی او $Z = \frac{\bar{x} - M}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ ناخاپه متحول د نورمال سټنډرډ توزيع دی. په داسې حال کې چې $\frac{N-n}{N-1}$ ضريب د N د لويو قيمتونو لپاره (1) ته نږدې کېږي. په حقيقت کې يې لېميټ هغه وخت چې $n \to \infty$ وکړي، برابر له (1) سره دی.

مثال: د یوه لوی ټولګی څخه چې د زده‌کوونکو د ریاضي مضمون نمبرو نورمال توزیع د 71 اوسط او معیار انحراف یې 9 دی. یوه 9 تایي نمونه ټاکو، ددې احتمال چې ددې نمونې د نمبرو اوسط له 80 څخه زیات وي حساب کړئ. همدارنګه که چیرې په تصادفي ډول یو زده‌کوونکی وټاکو، په دې صورت کې احتمال ددې چې نمبرې یې له 80 څخه زیاتې وي محاسبه کړئ.

حل: څرنګه چې $\bar{x}$ د نورمال توزیع د μ په اوسط او معیار انحراف لرونکی دی، نولرو:

$$P(\bar{x}>80)=P\left(z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}>\frac{80-71}{\frac{9}{\sqrt{n}}}\right)=P(z>3)$$

$$=1-P(z)\leq 3=1-0.9987=0.0013$$

همدارنګه د $n=1$ لپاره لرو:

$$P(\bar{x}>80)=P\left(z=\frac{\bar{x}-\mu}{\delta}>\frac{80-71}{9}\right)=P(z>1)$$

$$=1-P(z)\leq 1=1-0.8413=0.1587$$

پاملرنه:

د $P(z)$ قیمت له (2) جدول څخه په لاس راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه

1- د هغو جعبو وزن چې د یوه ماشین په واسطه ترل کېږي، د نورمال توزیع اوسط یې $\mu = 250gr$ او معیاري انحراف یې $\delta = 20gr$ وي مطلوب دی، د هغې احتمال محاسبه چې د ناڅاپه نمونې د اوسط وزن $n = 16$ تایي د جعبو کوچنی له $240gr$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نمونه‌یي توزیع نسبت

د A په یوه ښارکې n کسان غواړي د B یوکس د ښاروال په صفت وټاکي، که دا کسان تر پوښتنې لاندې راشي او x د موافقو کسانو شمېر وښيئ ددې کسانو نسبي کثرت مساوي په څه دي.

فعالیت

- که چیرې x د دوو جملو توزیع لرونکی وي، کولای شو ولیکو چې:

$$f(x)=\binom{n}{x}P^{x}(1-p)^{n-x} \qquad x=0,1,2,\ \ldots\ldots\ldots$$

که چیرې $x=n\hat{P} \Leftarrow \hat{P}=\frac{x}{n}$ وي د x قیمت په تعویض سره په پورتنی فورمول کې $f(\hat{P})$ ولیکئ.

- د $\hat{P}=\frac{x}{n}$ په فورمول کې که د x تصادفي متحول د n ناڅاپه متحولینو د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ له مجموع څخه تشکیل شوی وي، $\hat{P}$ د نمونې اوسط سره څه اړیکه لري؟

که چیرې x ناڅاپه متحول، n د برنولي د آزمایښتونو مجموعه، P د هر آزمایښت بریالیتوب احتمال وي په دې صورت کې $\hat{P}$ د نمونې د نسبت آماره $E(x)=n\,p$ اوسط $V(x)=n\,p\,q$ د x ناڅاپه متحول وریانس وي.

د دوه جمله‌یي د توزیع په پاملرنې سره د $\hat{P}$ توزیع په دې فورمول سره کولای شو.

$$f(n\hat{P})=\binom{n}{n\hat{P}}p^{n\hat{p}}(1-p)^{n(1-\hat{p})} \qquad \hat{P}=0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots\ldots,1$$

د $\hat{P}$ ناڅاپه متحولینو اوسط $(Expected\ Value)$ او وریانس په لاندې صورت لیکلای شو:

$$\mu_p=E(\hat{P})=P$$

$$\delta^2\hat{P}=V(\hat{P})=\frac{p\,q}{n}=\frac{p(1-p)}{n}$$

د نورمال سټنډرډ توزیع یې عبارت دی له:

$$z=\frac{x-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p\,q}{n}}}$$

مثال: د کاليو د ښه والي احتمال $P = 0.3$ دی، يوه ساده ناځاپه نمونه $n = 6$ ګونه ټاکو که چيرې x د ناقصو کاليو ښودونکی وي، د x او $\hat{P}$ احتمال توزيع وليکئ.

حل: د x ناځاپه متحول د دوه جملهيي توزيع د $P = 0.3$ او $n = 6$ پارامترونه وي.

$$f(x) = P(X = x) = B(x,6,0.3) \qquad x = 0,1,\ldots,6$$

د دوه جملهيي توزيع جدول څخه په ګټه اخيستنې سره لاندې احتمالونه محاسبه او د توزيع د جدول احتمال يې ليکو:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.1176	0.3025	0.3241	0.1852	0.0595	0.0102	0.0007

د $\hat{P}$ ناځاپه متحول د $0,\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6}$ او 1 قيمتونه نيسي:

$$P(\hat{P} = 0) = P(X = 0) = 0.1176$$

$$P(\hat{P} = \frac{1}{6}) = P(X = 1) = 0.3025$$

او پاتې نور په مشابه ډول محاسبه کېږي، پام وکړئ چې:

$$P(\hat{P} = \frac{x}{n}) = P(X = x)$$

او د $\hat{P}$ د احتمال توزيع عبارت دی:

$\hat{P}$	0	1.6	2.6	3.6	5.6	1
$f(\hat{P})$	0.1176	0.3025	0.3241	0.0595	0.0102	0.0007

په پورتني مثال کې:

$$P(\hat{P} \le 0.6) = P(x \le 3.6) = P(x \le 3) = \sum_{x=0}^{3} B(x,6,0,3) = 0.9294$$

اويا:

$$P(\hat{P} \le 0.27) = P(x \le 1.62) = P(x \le 3) = 0.1176 + 0.3025 = 0.4201$$

پوښتنې

1. ددې احتمال چې د يوه تن د غوښتنليک فرم په پوره ډول پرته له غلطی(تېروتنې) څخه ډک کړي $P = 0.7$ وي، يوه نمونه د $n = 200$ ګونه د استخدام ډک شوی فارمونه مو ټاکلي وي.

- ددې احتمال محاسبه کړئ چې $\hat{P}$ د ± 00.05 داخلي فاصله کې د ټولنې له بنسټ څخه ولوېږي.
- ددې احتمال محاسبه کړئ چې $\hat{P}$ د 0.6 څخه زيات وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

- ناڅاپه متحول هغه اصطلاح ده چې د يوې تابع په عنوان په احصائيه او احتمالاتو کې ترې نه ګټه اخيستل کيږي.
- د يوه مجزا ناڅاپه متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې هغه عددونه دي چې ناڅاپه متحول کولای شي هغه غوره کړي او د قيمتونو ناحيه سره د تعريف د ناحيې د عناصرو اړونده احتمالونه ګڼون لري.
- د تجمعي احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه کې هغه عددونه ګډون ولري چې د x ناڅاپه متحول يې ځانته غوره کوي او د قيمتونو ناحيه يې د $f(x)$ ټول تصويرونه موجود دي.
- د يوه پيوسته(متمادي) متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې د x ټول پيوسته(متمادي) مقدارونه غوره کړي او دقيمتونو ناحيه يې $F(x)$ ټول تصويرونه وي.
- د x مجزا ناڅاپه متحول اوسط Expected value او وريانس په وار سره عبارت دي له:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)=\bar{x}$$

$$V(x)=S^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x_i))^2 f(x_i)$$

- د برنولي توزيع، $P(X=m)=P^m(1-P)^{1-m}$
- د دوه جمله‌يي توزيع، $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m\ q^{n-m}$
- د دوه جمله‌يي توزيع اوسط او معياري انحراف عبارت له: $S=\sqrt{n\,p\,q}$, $\bar{x}=n\,p$
- د پواسن د احتمال توزيع يو مجزا احتمال توزيع ده چې فورمول يې عبارت دی له:

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\ \lambda^m}{m!}$$

- که N له يوې نورمالې جامعې څخه د n خلې(تايي) ناڅاپه نمونه وټاکو د $\bar{x}$ د نمونه‌يي اوسط آماره د نورمال توزيع لرونکی له $\mu_{(\bar{x})}=\mu$ اوسط سره او $\delta^2_{\bar{x}}=\frac{\delta^2}{n}$ او $z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ د سټنډرډ نورمال توزيع سره ده.
- د نورمال توزيع: د نورمال توزيع شکل له زنګولی سره مشابه او متناظر دی، په نورمال توزيع کې مرکزي شاخصونه يو له بل سره برابر دي او د پيوسته ناڅاپه متحولونو د ناحيې تعريف محدود دی چې د احتمال توزيع يې عبارت ده له: $f(x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{\delta})^2}$

چې μ د ټولنې اوسط او δ د ټولنې معياري انحراف دی.

- د $f(x)$ تابع د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د a او b په فاصلو کې کولای شو له دې انتيګرال څخه ګټه واخلو:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\delta})^2}$$

- که چيرې x د دوه جملهيي توزيع د n شمېرد برنولي پر له پسې ازمايښتونه، P د کاميابی احتمال او $q=1-p$ د هر ازمايښت د نابرياليتوب احتمال وي، په دې صورت کې د احصائيه د اوسط نمونه او د x ناخاپه متحول وريانس په ترتيب سره عبارت دی له: $\overset{\frown}{P}=\frac{x}{n}$, $E(x)=np$ او $V(x)=npq$

همدارنګه د دوه جملهيي توزيع، اوسط، وريانس او د سټنډرډ توزيع او $\overset{\frown}{P}$ ناخاپه متحول په ترتيب سره عبارت دی له:

$$E(\overset{\frown}{P})=P \quad , \quad f(\overset{\frown}{P})=\binom{n}{n\overset{\frown}{P}}P^{n\overset{\frown}{P}}\,q^{(1-P)}$$

$$z=\frac{\overset{\frown}{P}-P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \quad , \quad V(\overset{\frown}{P})=\frac{pq}{n}$$

- ددې $z=\frac{x-\mu}{\delta}$ اړيکې په واسطه کولای شو چې هره احصائيوي مجموعه يې د نورمال توزيع لرونکی وي هغه په سټنډرډ نورمال بدل کړو.
- نمونه په دوو برخو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناخاپه نمونه.
- د نمونه ګيری طريقې په عمومي ډول عبارت دي له: ناخاپه نمونهګيري، منظمه نمونهګيري، ګروپي نمونهګيري، خوشهيي نمونه ګيري.
- د x نمونې ناخاپه متحولونو اړوند تابع په دې صورت تعريفېږي.

$$f(x_1, x_2, x_3, \,\dots\dots\dots\, , x_n) = f(x_1), f(x_2), \,\dots\dots\dots\, , f(x_n)$$

- که چيرې x د ټولنې يوه ناخاپه نمونه د $f(x)$ د احتمال تابع په لرلو سره وي $E(\overline{x}_n)=\mu$ اوسط، $V(\overline{x}_n)=\frac{1}{n}\delta$ د اوسط وريانس، δ^2 د ټولنې وريانس او S^2 ته د نمونو وريانس وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1. دوه سکې څلور ځلې پورته واچوئ او د خط راتللو شمېر په پام کې ونیسئ:
   - ناڅاپه متحولونه د تابع په بڼه وښیئ.
   - د هر ځل د پورته اچونې احتمال نمونه‌یي فضا سره نسبت ورکړئ.
   - د تابع د تجمعي او مجزا احتمال ولیکئ.

2. که چیرې د یوې جوړې بوټونو د نقیصي احتمال $P = 0.1$ وي، د ناقصو بوټونو اوسط او معیار انحراف په یوه نمونه کې $n = 400$ جوړو بوټونو پیدا کړئ.

3. د یوه شرکت په ګدام کې 500 پایې کمپیوټرونه شته چې د هغې له جملې څخه یې 50 پایې نقص لري، یو اخېستونکی له هغې څخه 10 پایې کمپیوټرونه اخلي، ددې احتمال څومره دی چې هغې 8 پایې جوړ اخېستی وي؟

4. لاندې اطلاعات چې اوسط او معیار انحراف د دوو پارامترونو په اړوند دی د نورمال توزیع د رسمولو لپاره ترې ګټه واخلئ. لومړی یو افقي محور رسم کړئ او د $\bar{x}$, $\bar{x}+s$, $\bar{x}-s$, $\bar{x}+2s$ او $\bar{x}-2s$ ټکي پرې وټاکئ وروسته یو ټکی د h اختیاري جګوالی په اندازه د $\bar{x}$ له پاسه په پام کې ونیسئ او $\bar{x}+s$ له پاسه یو ټکی د $0.6h$ په جګوالي وټاکئ، یعنې یو ټکی چې مختصات یې $(\bar{x}+s, 0.6h)$ څرنګه چې د نورمال منحني متناظر دی، همدا عمل په ځانګړې توګه په $\bar{x}-s$ هم سرته ورسوئ. اوس د $\bar{x}+2s$, $\bar{x}-2s$ د پاسه دوه ټکي د h او $0.15h$ په جګوالي په پام کې ونیسئ، پام وکړئ چې د نورمال منحني د دقیق رسمولو لپاره د $0.6067h$ او $0.1354h$ په ځای له $0.6h$ او $0.15h$ څخه ګټه واخلئ. په پایله کې دا ټکي د یوه منحني په واسطه وصل او وواییئ چې دا منحني په کومو فاصلو کې محدب او په کومو فاصلو کې مقعره ده.

5. په یوه روغتون یوه څېړنه راښیي چې د مراجعینو شمېر د شنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ترمنځ 25 تنه دی. فرض کړئ چې د پواسن د احتمال توزیع په دې حالت کې صدق وکړي.
   - د روغتون د مراجعینو د احتمال توضیح د دوشنبې له ورځې، وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو تر منځ پیدا او ګراف یې رسم کړئ؟ آیا دا توزیع خمېده ده؟
   - ددې توزیع د اوسط او معیار انحراف مقدار په لاس راوړئ.
   - آیا دا ممکنه ده چې د دوشنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو ترمنځ به له 7 تنو څخه زیات روغتون ته مراجعه کړې وي؟ ولې؟

6. فرض کوو چې د یوه کتاب د یوه مخ د تېروتنو شمېر د پواسن د توزیع یا $\lambda = \frac{1}{2}$ پارامتر لرونکی دی د محاسبې احتمال یې مطلوب دی داسې چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

- حد اقل یوه ټایپي تېروتنه په هغه مخ کې وي.
- دقیقاً 5 ټایپي تېروتنې په هغه مخ کې دي.
- د 3 او 6 ترمنځ ټایپي تیروتنې په هغه کې وي.

7. فرض کړو چې د هغه پستون قطر چې د یوه اتوماتیکي ماشین په واسطه جوړېږي په نورمال یا اوسط ډول 25 ملي متر او معیار انحراف یې 0.5 ملي متره توزیع شوی وي.
- کله چې د پستون قطر د 25.2 او 25.9 ترمنځ وي احتمال یې څومره دی.
- د پستونونو کوم نسبت د 25 ملي قطر لرونکی او له هغې څخه کم دی.
- که چیرې 1000 پستونه جوړ شي، له هغوی څخه څو دانې ددې وړ دی چې 24.07 ملي مترو څخه کم قطر ولري.
- د تولید شویو پستونونو څو فیصده د 24.56 ملي متره معادل قطر یا له هغه څخه زیات لري.

8. که چیرې $x_1, x_2, \ldots, x_n$ د x ناڅاپه متحول یوه تصادفي نمونه وي ایا د $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ، $\frac{x_1+x_2}{x_4}$ او $x_1+3x_2-x_3$ تابع آماره دی.

9. که چیرې x یو ناڅاپه متحول او د μ او δ^2 پارامترونه وي آیا د $\frac{3x_1-2x_3-\delta}{8\mu+x_2}$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$ او $x_1+x_3-\mu$ توابع μ او δ^2 مجهول وي آیا پورتنیو تابعګانو ته احصائیه ویلی شو؟

10. ټولنه د برق په څلورو ډلو کې ګڼون لري، که د عمرونـو اوږدوالـی یـې د ساعتونو پـه حساب سره عبارت لـه 108 104 112 103 دي یوه ډله ناڅاپه ټاکو، فرض کړو چې د x ناڅاپه متحول ټاکل شوی د ډلو د عمر اوږدوالی راوښيئ:
- د x د احتمال توزیع ولیکئ.
- $E(x)$ او $V(x)$ محاسبه کړئ.

11. د یوه ښار د وګړو د ګټې اندازه چې د غیرنورمال توزیع $\mu = 90$ افغانۍ اوسط او د 25 افغانۍ معیار انحراف سره دی که چیرې د 225 کسیز د وګړو د یوې نمونې د ګټې مجموعه لـه 2100 افغانیو څخه زیاتـه وي، احتمال یې څومره دی؟

12. پوهېږو چې 56% وګړي د A نوماند طرف دار دی، څومره ددې احتمال شته چې $n = 50$ دوه‌ګونې یـوه نمونه کې حداقل 60% وګړي د A نوماند طرفدار وي.

13. پـه 12 مثـال کـې کـه چیـرې $P = 0.4$ وي، یعنـې ددې احتمـال چـې یـو وګـړی د A کاندیـد طرفـدار وي 0.4 دی، یوه $n = 200$ ګونه نمونه وټاکو نو څومره ددې احتمال شته چې لااقل 100 وګـړي د A کاندیـد طرفدار وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم څپرکی

احتمالات

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلې شوې(غیرمتمادي) او نښتې(متمادي) فضاګانې

په مخامخ شکلونو کې د لومړي او دویم نـل څخه پـه وار سره اوبه په څمکه توییږي ویـلای شـئ چې لـه دې نلونـو څخه په څمکه د اوبو د څاڅکو د توییدو توپیر په څه کې دی؟

فعالیت

- د یو رمل په اچولو سره ویلای شي چې د نمونه یې فضا ټولې ممکنې پایلې کومې دي؟
- آیا د ونې څخه د یو یې پخې منې د لویدلو وخت وړاندوینه کولای شئ چې وروسته له څو ثـانیو، دقیقـو او یـا ساعتونو څخه پر ځمکه ولوېږي؟
- نظر وخت ته د منې د لویدلو نمونه یې فضا ولیکې.
- د رمل دانې د اچولو تجربې نمونه یې فضا د عناصرو شمېر او له ونې څخه د منې د لوېدلو وخت څنګه پرتله کولای شې.

د پورتنی فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

د یوې ناڅاپه تجربې نمونه یې فضا عبارت له هغه ټاکلې او یا نـا ټاکلي سټ یـا مجموعې څخه ده، چې د ځینـې عناصرو یې د شمېر وړ، او ځینې یې د شمېر وړ نه وي.

هغه نمونه یې فضاګانې چې عناصر یې د شمېر(countable) او تشخیص وړ وي د پرېکړې یـا ګسـسته(شـلیدلې) نمونه یې فضا یا متصل په نامه یادېږي او هغه نمونه یې فضاګانې چې عناصر یې د شمېر وړ نه وي د نښتې(پیوسته) یا متمادي نمونه یې فضا په نامه یادیږي.

لومړی مثال: له لاندې نمونه یې فضاګانو څخه کومه یوه نښتې(پیوسته) او کومه یوه پرېکړې(ګسسته) ده.

الف: د دوو رمل دانو اچول

ب: د 8 او 12 ترمنځ د یوه حقیقي عدد ټاکل.

ج: له 30 زده کوونکو څخه د 3 تنو ټاکل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د: د يوې کُرې د حرارت د يوې درجې لوړېدل د 100 درجو د سانتي ګرېډ څخه تر 1000 درجود سانتي ګرېډ پورې.

هـ: د $30°$ او $45°$ زاويو ترمنځ يوه زاويه ټاکل.

حل: څرنګه چې (الف او ج) نمونه‌يي فضاګانې د محدودو غړو له شمېر څخه جوړ شوې، نو پرېکړې يا ګسسته فضا ولې (ب، د او هـ) له نامحدود حقيقي عددونو څخه تشکيل(جوړ) چې د شمېر وړ نه دي، نو نبتي يا پيوسته فضاګانې دي.

دويم مثال: خيبر د کور د ګلانو د اوبولو لپاره يو واټرپمپ اخيستي دي.

که چېرې د واټرپمپ عمرد ساعت له مخې په پام کې ونيسو، په دې حالت کې د واټرپمپ د عمر د اوږدوالی نمونه-يي فضا چې کېدای شي هر مثبت حقيقي عدد د واټرپمپ د ورانېدو په صورت کې د کار د مودې قيمت شي، په دې ډول د داسې ناڅاپه حادثې پېښېدل صفر هر حقيقي عدد کېداې شي چې دا نمونه‌يي فضا يوه غير متمادی، نبتي يا پيوسته نمونه يې فضا ده؛ يعنې { t د واټرپمپ د ورانېدو وخت، $S = \{t \in IR : t \geq 0$ چې په پورتنی نمونه يې فضا کې t د واټرپمپ د عمر اوږدوالی راښيي.

يادونه:

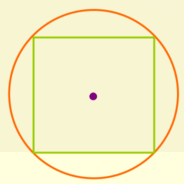
1- د لومړي مثال الف او ج جزونه کې محدودې نمونه‌يي فضاګانو څخه بحث شوی چې عناصر يې د شمېر وړ دي، د ب او د جزونو کې نامحدودې نمونه‌يي فضاګانې ذکر شوي چې عناصر يې د شمېر وړ نه دي، نو څکه ټول مثبت حقيقي عددونه اخېستلای شي.

2- په دويم مثال کې نمونه‌يي فضا متصل يا غير محدوده ده چې د حقيقي عددونو د انټروال په توګه ښودل کېږي.

پوښتنې

1- يو غشي وېشتونکی د يوه دايروي د سک په دننه چې ورانګه يې r ده، په پام کې ونيسي. د غشي د لګېدو ځای د دايرې په دننه کې چې مرکز ته نږدې ولګېږي، د هغې نمونه يې فضا ارايه کړې. وواياست چې دا څنګه يوه نمونه يې فضا ده.

2- په مخامخ شکل کې په ناڅاپي يا تصادفي ډول د دايرې په دننه کې يو ټکي و ټاکئ، احتمال ددې شته چې مطلوب ټکې د مربع په دننه کې وي.



3- يو طبيعي دوه رقمی عدد و ټاکئ، هغه احتمال پيداکړي چې عدد د 4 مضرب وي.

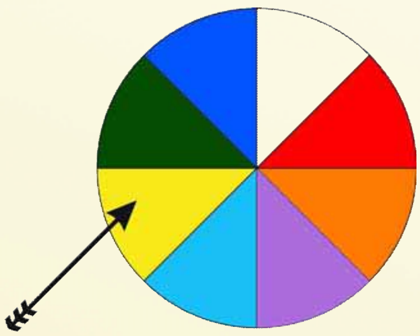
(c) ketabton.com: The Digital Library

هم چانسه پېښې

د يوې نورمال رمل دانې په اچولو کې د (1) او يا (5) شمېرې مخ ته راتللو لپاره شرط څه دي؟
د 2 او 5 شمېرې د راتللو چانس يو له بل سره څه اړيکه لري؟

فعالیت

د مخامخ شکل په څېر يوه دايره په پام کې ونيسئ، که چېرې په راکړې شوې دايره کې يو ښکاري غشي وولي لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- په سور رنګه ناحيه او شين رنګه ناحيه کې د غشي لګېدل يو له بل سره څه اړيکه لري؟
- د غشي د لګېدو چانس د کچه په اړه د نارنجي او سپينو رنګونو سره په پرتله باندې څه ويلای شي؟
- د غشي د لګېدو د چانس کچې په تور رنګ څومره ده؟
- د تجربې، نمونه‌يې فضا يې وليکئ.
- لومړني ناځاپه پېښې لست کړي او د هر يو احتمال پيدا کړی دي؟
- د لومړنيو پېښو د احتمالونو د مجموع په برخه کې څه ويلای شي؟

د پورتنی فعاليت له اجرا کولو څخه لاندې پايله په لاس راوړو:

هغه لومړنی ساده پېښې چې د هغوی د پېښېدلو چانس په يوې تجربې په اجرا کولو کې سره برابر وي، د هم چانسه پېښو په نامه يادېږي. لکه:

که چېرې $S=\{e_1,e_2 ,...e_n\}$ يوه نمونه يې فضا وي، نو $\{e_i\}$ د هر $i=1,2...n$ لپاره يوه ناځاپه لومړني پېښه ده که $0 \le P(\{e_i\}) \le 1$ ، $i=1,2,...n$ دي.

سربېره پر دې د لومړنيو پېښو د احتمالونو مجموع مساوي له يوه سره ده.

$$P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+...+P(\{e_n\})=\sum_{i=1}^{n} P(e_i)=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: څلور تنه په يوه لوبه کې ګډون کوي. تاسې د هر يوه د ګټلو احتمال پيداکړئ په داسې حال کې چې نمونه‌يي فضا هم چانسه وي.

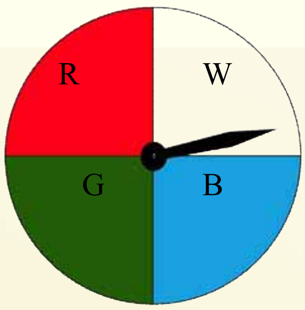
حل: که چېرې $S = \{a, b, c, d\}$ نمونه يي فضا وي، نو د هرې ناخاپه لومړنۍ پېښې احتمال $\frac{1}{4}$ دی.

لرو چې: $$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

پاسنۍ لومړنۍ پېښې سره هم چانسه دی.

پوښتنې

1- مخامخ شکل په پام کې ونيسي ، که چېرې د عقربې(ستنې) د درېدلو احتمال په آسماني او سپين رنګ 0.30 او د سره رنګ پرمخ 0.26 وي، د شنه رنګ پرمخ د درېدلو احتمال به څومره وي؟



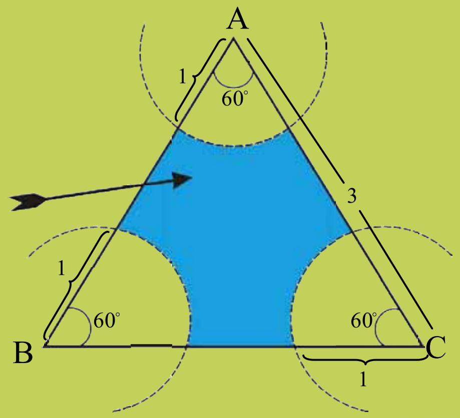
2- لاندې د کثرت جدول د رمل يوې دانې د اچولو لپاره په پام کې ونيسي. هغه احتمال پيداکړئ، چې د رمل دانه (5) شميره راشي.

د رمل شميره	1	2	3	4	5	6
کثرت	7	9	8	7	3	10

3- د رمل يوه دانه داسې ډکه شوې چې د جفت شميرو د راتللو احتمال د طاق شميرو دوه برابره وي، که يو څا په شرط وهلو کې(5) شميره ټاکلې وي، د هغې احتمال پيداکړئ.

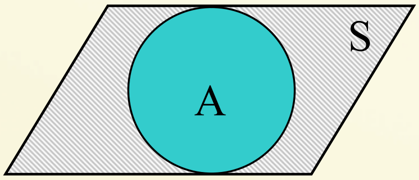
د نښتي یا پیوسته(متمادي) فضاګانو احتمال

د یوه متساوي الاضلاع مثلث دننه چې هره ضلعه یې 3 واحده ده، یو غشي ولو، ددې احتمال چې د غشي د لګېدلو ټکې د مثلث د هر رأس نه د یو واحد په اندازه لوی وي، څو دی؟



فعالیت

- آیا ویلای شي چې د یوې ټوټه کرښې، د یوې مستوي د یوې برخې او یا د فضا د حجم څو ټکې یو پر بل پسې موجود دي؟
- د هغو ټکو د پېښېدلو احتمال چې د A په برخه کې چې د S د لویې برخې فرعي مساحت دی، لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي د A او S د ساحو د مساحتونو د نسبت سره څه اړیکه لري؟



- آیا کولای شئ دا مسئله په فضا د یوه جسم حجم د یوې برخې د احتمال د محاسبې لپاره عمومیت ورکړئ؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله لاسته راځي.

پیوسته(متمادي) نمونه‌یي فضا د نامعینو ټکو مجموعه ده، چې شکل یې د اعدادو په محور، په مستوي کې لکه سطح او یا په فضا کې لکه حجمونه دی، څرنګه چې ددې ټکو شوونه ممکن نه ده، نو د احتمال د نسبت پیدا کولو لپاره د ټوټه کرښو د اوږدوالي، د اشکالو سطحو او یا د جسمونو له حجم څخه استفاده کوو.

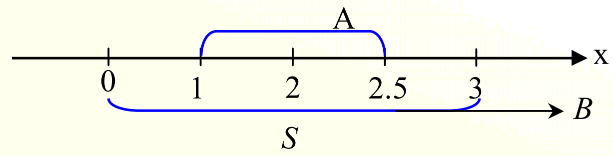
معمولاً د اعداد له محور څخه په ګټه اخیستنې سره د x یو متحول، د یوه مساحت د یوې برخې لپاره د دوو متحولونو لکه x او y او په همدې ترتیب د حجمونو لپاره له دریو متحولونو لکه x, y او z څخه ګټه اخلو.

لومړی مثال: د اعدادو په محور د $(0,3)$ په انټروال کې د x یو ټکې په ناڅاپي یا اتفاقي ډول ټاکو پیدا کړئ ددې احتمال چې $1 < x < 2.5$ وي؟

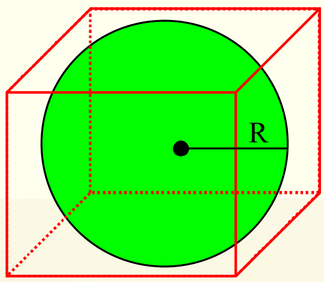
(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د حقیقي اعدادو محور رسم کړئ د S او A فاصلې د هغې پر مخ ټاکو، د شکل په پام کې نیولو سره د A پېښې د پېښېدو احتمال څخه لرو:

$$P(A)=\frac{\text{د A ټوټه کرښې اوږدوالی}}{\text{د B ټوټه کرښې اوږدوالی}}=\frac{2.5-1}{3-0}=\frac{1.5}{3}=\frac{1}{2}$$



دویم مثال: په ناڅاپه ډول یو ټکی د یوه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې 2 واحده وي ټاکو پیدا کړئ ددې احتمال چې نوموړي ټکي د مکعب د محاطي کُرې په دننه کې وي.



حل: که چېرې کره د هغه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې a واحده ده، محاطه وي، نو د کرې شعاع $r=\frac{a}{2}$ کیداې شي نو:

A ناڅاپه پېښه د کرې د حجم او S نمونه یې فضا سره مساوي چې د مکعب حجم دی، نو لرو:

$$r=\frac{a}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$P(A)=\frac{\text{د کرې حجم}}{\text{د مکعب حجم}}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3}=\frac{\frac{4}{3}\pi(1)^3}{2^3}=\frac{\pi}{6}$$

پوښتنې

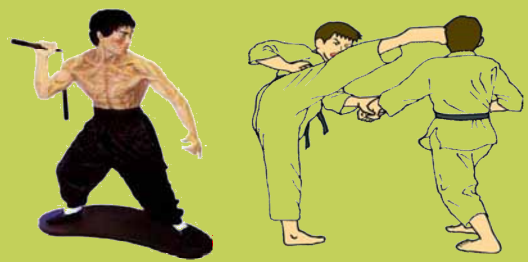
1- د حقیقي اعدادو په محور د A او B دوه ټکي په ناڅاپي یا تصادفي ډول داسې ټاکو چې $0\le A\le 3$ او $-2\le B\le 0$ وي، ددې احتمال پیدا کړئ چې د d واټن د A او B ترمنځ وي او 3 واحدو څخه لوی وي.

2- که چېرې یو ټکي په ناڅاپي یا تصادفي ډول د دایرې د سطحې پرمخ وټاکو، ددې احتمال پیدا کړئ، چې نوموړي ټکي نظر د دایرې محیط ته د دایرې مرکز ته نږدې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشروط احتمال

له یوه ولایت څخه (20) تنه نارینه او ښځینه زده کوونکي د کانکور په آزموینه کې د طب پوهنځي ته بریالي شوي دي، د هغوی له جملې څخه یې 5 تنه ښه کاراته بازان دي: که په 15 تنو بریالیو نارینه وو کې 4 تنه یې ښه کارته بازان وي. د نومړو محصلینو له مینځ څخه په اتفاقي ډول یو تن ټاکو احتمال د دې پیدا کړئ، چې:



- ټاکل شوی محصل یوه کارته بازه نجلې وي؟
- په پورتني سوال کې هغه نجلې په کوم شرط سره د طب پوهنځي ته بریالي شوي؟

فعالیت

له 2500 زده کوونکو څخه 1600 تنه یې په مطالعه کولو عادت لري.

چې له 80% زده کوونکو څخه یې 70% نارینه زده کوونکي وي او په مطالعه کولو عادت ولري، که د ټولو زده کوونکو لپاره احتمال یو شان وي، د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره د یوه تن زده کوونکي ټاکل د ښوونځي له زده کوونکو څخه:

R: له مطالعې سره عادت لري.

M : نارینه زده کوونکي دی.

F: یوه ښځینه زده کوونکې ده.

د لاندې پوښتنو په حل فکر وکړئ:

- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوي زده کوونکی نارینه وي؟
- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوی تن یوه ښځینه وي؟
- ددې احتمال پیدا کړئ چې ټاکل شوي زده کوونکي یو نارینه وي په دې شرط چې په مطالعه عادت وي.

د پورته فعالیت د سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

په حقیقت کې د هغه نارینه زده کوونکی د ټاکلو احتمال په دې شرط چې په مطالعه عادت ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

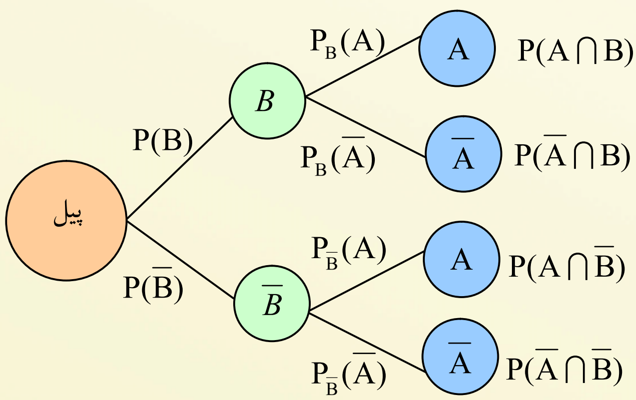
د لاندې احتمالات وېش له حاصل څخه عبارت دی که چیرې Ω ټوله نمونه‌یي فضا او $|\Omega|$ نمونه‌یي فضا د عناصرو شمیر وي، نو لرو:

$$P_R(M)=\frac{P(M\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{|M\cap R|}{|\Omega|}}{\frac{|R|}{|\Omega|}}=\frac{|M\cap R|}{|R|}=$$ د هغه نارینه زده‌کوونکو د ټاکلو احتمال چې په مطالعه عادت وي.

$P_R(M)$ د هغې پیښې له احتمال څخه عبارت دي چې ټاکلي زده‌کوونکي نارینه وي، په دې شرط چې هغه په مطالعه عادت وي.

تعریف: که چیرې S نمونه‌یي فضا A او B د نمونه‌یي فضا دوې ناڅاپي پیښې وي، په داسې حال کې چې $P(B)\neq 0$ وي. په دې حالت کې نوموړی احتمال یعنې $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ چې د A ناڅاپي پیښې احتمال نظر د B ناڅاپي پیښې ته مشروط احتمال بلل کېږي.

د پورته تعریف په پام کې نیولو سره نظر د مسیر لومړي قاعدې ته د ونه‌ییز دیاګرام په مرسته هم په لاس راوړای شو.



د مشروط احتمال له فورمول څخه لاندې مهمې پایلې په لاس راځي:

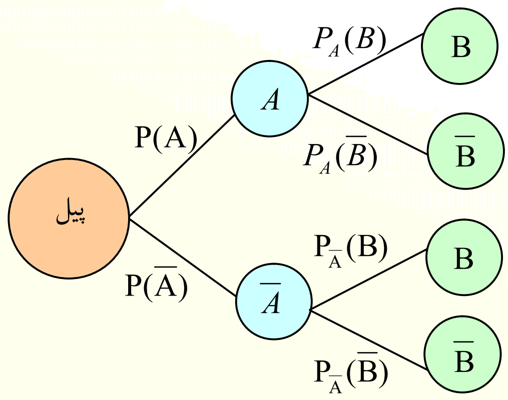
1- د مسیر د لومړۍ قاعدې څخه لرو: $P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$

مسیر له دویمې قاعدې د څخه په‌ګټه اخیستنې سره لرو: $P(A\cap\bar{B})=P(\bar{B})\cdot P_{\bar{B}}(A)$

$$P(A)=P(B)\cdot P_B(A)+P(\bar{B})\cdot P_{\bar{B}}(A)$$

2- ونه‌ییزه(درختي) دیاګرام له مخې $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

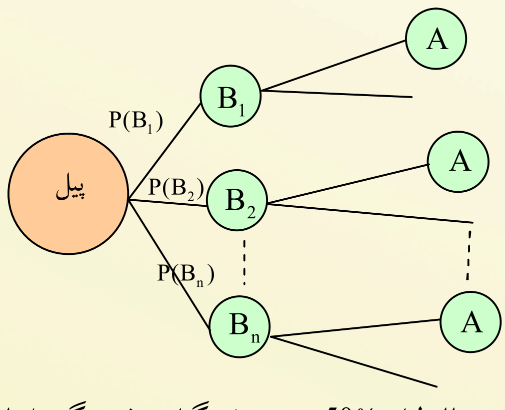
(c) ketabton.com: The Digital Library



له لومړي پایلې څخه په لاس راځي چې: $P_A(B)=\dfrac{P_B(A)\cdot P(B)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$

3- که چیرې نوموړی حالت د Ω نمونه یي فضا ناخاپي پیښو د $B_1, B_2, ..., B_n$ اختیاري ویش لپاره عمومیت ورکړو د ونې په ډول د دیاګرام د په پام کې نیولو سره کولای شو، لاندې فورمول په لاس راوړو.

$$P_A(B_i)=\frac{P_{B_i}(A)\cdot P(B_i)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}=\frac{P(A\cap B_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)} \qquad i=1,2,...,\ n$$



لومړی مثال: یو زده کوونکي ښوونځي ته د تللو لپاره 50% هره ورځ د ګادي څخه ګټه اخلي چې 70% په ټاکلي وخت ښوونځي ته رسیږي. په منځني ډول نوموړی 60% په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضریږي که چیرې پیښې:

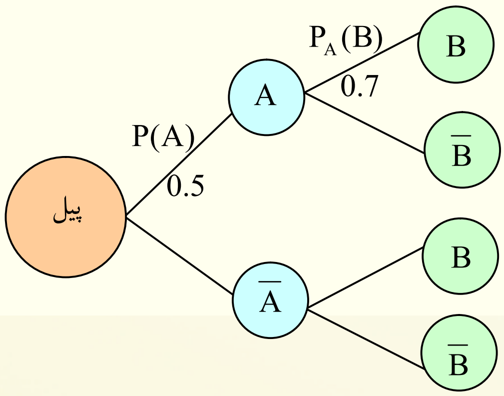
A: د ګادي په واسطه راتلل B: په ټاکلي وخت رسیدل

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي په دي صورت کې د A مشروط احتمال نظر B ته يعني $P_B(A)$ مطلوب دي؟

حل: د نومړي احتمال د پيداکولو لپاره د ونهييز يا درختي دياګرام په پام کې نيولو سره نظر فورمول ته په لاندې ډول په لاس راځي:

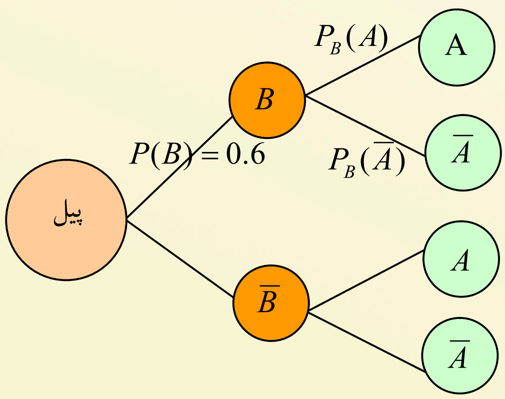
$$P_B(A)=\frac{P(A)\cdot P_A(B)}{P(B)}=\frac{0.5\cdot 0.7}{0.6}=0.5833=58.33\%$$



نو په دې اساس د ګاډي په واسطه د رسېدلو احتمال په دې شرط چې په ټاکلي وخت په ښوونځي کې وي 58.33% سلنې سره برابر دی.

پوښتني

له لاندې دياګرام څخه په ګټه اخيستني سره د مشروط احتمال په ټاکلي وخت رسېدل ښوونځي ته په دې شرط چې د ګاډي په واسطه سرته رسيدلي وي، يعني $P_A(B)$ د ناڅاپه پيښې احتمال ښوونځي ته په ټاکلي وخت رسيدل، په دې شرط چې د ګاډي په واسطه نه وي راغلي يعني $P_A(B)$ مطلوب دي.

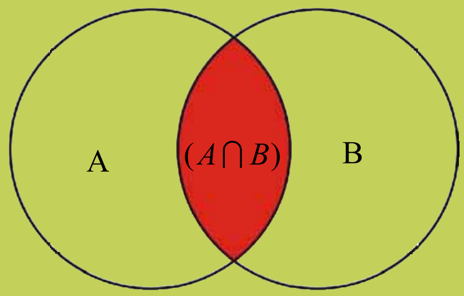


(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حاصل ضرب اصل

د A ناخاپه پیښې مشروط احتمال په B ، د A او B ناخاپه پیښې احتمال یو له بل سره څه اړیکه لري؟



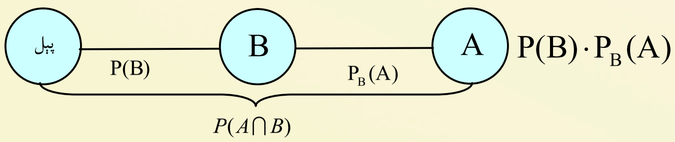
فعالیت

- که چیرې A او B دوې ناخاپه پیښې د S په نمونه یي فضا کې وي.
- د A ناخاپه پیښې مشروط احتمال B ته ولیکئ.
- د ونه‌ییز دیاګرام څخه په ګټه اخیستنې سره د $P(B)\cdot P_B(A)$ قیمت په لاس راوړئ.
- د $(A\cap B)$ ناخاپه پیښو احتمال د A او B ناخاپه پیښو څخه او یا د A مشروط له B څخه په ګټه اخیستنې سره ولیکئ.
- د فعالیت د دوو پورتنیو بندونو د محاسبې پایلې یو له بل سره پرتله کړې.
- آیا کولای شو چې موضوع د ډیرو ناخاپه پیښو لپاره عمومیت ورکړو.

د پورتنې فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو.

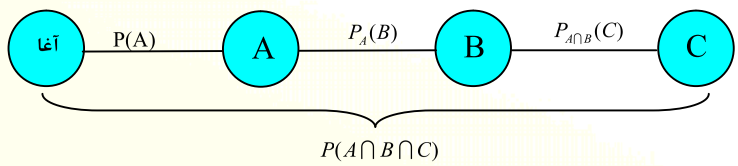
د S په یوه نمونه یي فضا کې د A او B د دوو ناخاپه پیښو لپاره د مشروط احتمال د تعریف په پام کې نیولو سره لرو: $P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$

دا مسئله کولای شو چې د ونه‌ییز دیاګرام په مرسته هم په لاس راوړو:



$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$$

دا مطلب د دریو A، B او C پیښنو لپاره په لاندې ډول پراخوو.



$$\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A\cap B}(C)$$

پورتنی قاعده د حاصل ضرب په نامه یادېږي او کولای شو، هغه د یو شمېر اختیاري ناخاپي پیښنو لپاره هم پـه لاس راوړو.

مثال: د B_1, B_2 او B_3 دریو ولایتونو په پارلماني ټاکنو کې چې د هر یوه لپاره د ټاکنو دګډون کوونکـو فیـصدي او د جمهوري ګوند برخه فیصدي ورکړل شوې ده؟

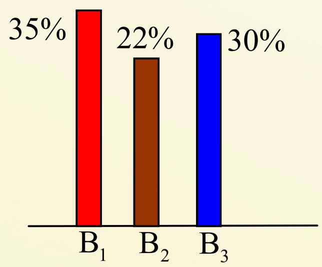
په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکي او یا رایې اچوونکي جمهوري ګوند ټاکلی وي.

حل: په لاندې ډول ناخاپي پیښې تعریف او نوموو:

V : هغه رایې ورکوونکي چې د جمهوري ګوند یې ټاکلي دي.

B_i : د ولایت رایې ورکوونکي B_i- (i-ام) ... i=1,2,3 لاندې ارقام ورکړل شوي وي.

ولایت	راي ورکوونکي فیصدي	جمهوري ګوند ته رایې ورکوونکي
B_1	33.2%	35
B_2	46.5%	22
B_3	20.3%	30



د $B_i\ (i=1,2,3)$ ناخاپه پیښې په حقیقت کې یې د S نمونه یي فضا یـو ویـش جوړ کـړي چې د هغـوی لپـاره صورت نیسي.

1- B_i یو له بل سره دوه په دوه مستقل او ګډ عناصر نه لري.

2- د S نمونه یي فضا لپاره $\bigcup_{i=1}^{3}B_i=B_1\cup B_2\cup B_3=S$ دی، نو $(i=1,2,3)$ $B_i\cap V$ پیښنه یو له بل سره یو په یو مستقل د هغوی لپاره صورت نیسي. $V=\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې اړيکې څخه کولای شو، د دواړو خواوو د احتمال لپاره وليکو:

$$P(V)=P\left(\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)\right)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i\cap V)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P_{B_i}(V)$$
$$=P(B_1)\cdot P_{B_1}(V)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(V)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(V)$$
$$=0.332\cdot 0.35+0.465\cdot 0.22+0.203\cdot 0.3=0.1162+0.1023+0.0609$$
$$=0.2794=27.94\%$$

تعريف: که چيرې د $B_1, B_2, ..., B_n$ خرنگه چې $P(B_i)\neq 0$ وی $i=1,...n$ پيښېو عمومي حالت د S په نمونه‌يي فضاکې يوه پيښه وي، نو $P(A)$ د کامل احتمال په نامه ياد او د A اختياري ناڅاپه پيښې لپاره لرو:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$$

د مشروط احتمال د تعريف، د اصل حاصل ضرب له قضيې څخه د کامل احتمال د مسئلې په پام کې نيولو څخه لاندې فورمول چې د بائيز(Baye's) د فورمول په نامه يادېږي، په آسانۍ سره په لاس راځي، داسې چې B_i چې $i=1,...n$ د S نمونه يي فضا يو پيښې لپاره چې $P(B_i)\neq 0$، $i=1,...n$ د A د ناڅاپه پيښې احتمال چې $P(A)\neq 0$ سره وي، لرو:

د بائيز (Bayex)فورمول:

$$\boxed{P_A(B_i)=\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}}$$

د بائيز فورمول ډېر استعمال لري لکه د $n=2$ لپاره $B_1=\overline{B}, B_2=\overline{B}$ په پام کې ونيسو، په حقيقت کې B_1 او B_2 د S نمونه يي فضا پيښې وي لرو:

$$P_A(B)=\frac{P(B)\cdot P_B(A)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$$

پورتنی فورمول د $n=2$ د بائيز له فورمول څخه عبارت دي.

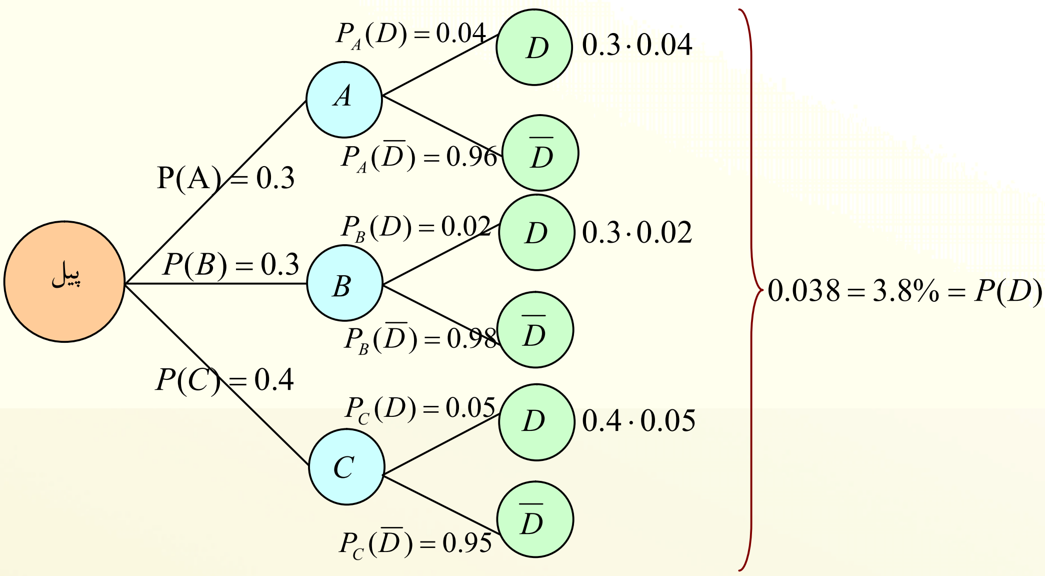
مثال: په يوه فابريکه کې د A، B او C درې ماشينونه په ترتيب سره %30 ، %30 او %40 برخه د برق گروپونه توليدوي. که چيرې په ماشينونو کې د گروپونو د خرابېدو کچه په ترتيب سره %4، %2 او %5 وي او نوموړي گروپونه په گډه سره خرڅ شي، مطلوب دي:

a) ددې احتمال چې يو اخېستل شوي گروپ وران يا خراب وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) په کوم احتمال خراب خرڅ شوی ګروپ د C ماشین پورې اړه لري.

c) یو نوی تولید شوی ګروپ لرو، په کوم احتمال سره به د B ماشین پورې مربوط وي.



د b جز:

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

د c جز:

$$P_{\overline{D}}(B) = \frac{P(\overline{D} \cap B)}{P(\overline{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95}$$

$$= \frac{0.294}{0.288 + 0.294 + 0.38} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$

پوښتنې

1- د 1000 دانو رملونو په منځ کې د یوې دانې په شپږ واړه مخونه یوازې د 6 شمیره وهل شوې ده. د هغوی له منځ څخه یوه ناځاپه د رمل دانه ټاکل شوې او درې ځلې اچول شوې ده. درې ځلې 6 راغلې. پیدا کړئ، هغه احتمال چې په ټاکل شوې دانه په سم ډول شمیرې وهل شوې وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناځاپه پېښو استقلالیت

له مشروط احتمال څخه پوهیږو چې د A او B دوو ناځاپو پېښو یا حادثو د B د پېښې پېښدل د A په پېښه تاثیر اچوي په دې سبب لازمه ده چې د احتمال د محاسبې په وخت کې د A او B پېښه په پام کې ونیسو.

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

د هغه حالت لپاره چې د A ناځاپه پېښې پېښدل پر B ناځاپه پېښې اغېزه ونه لري او بر عکس.

د A او B د ضرب د حاصل احتمال د $A\cap B$ پېښې له احتمال سره څه اړیکه لري.

تعریف: د A او B دوې ناځاپه پېښې چې یوه پر بله اغیزه لرونکې نه وي د ناځاپه مستقلو پېښو په نامه یادیږي.

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

- د S نمونه یي فضا او د A او B دوې یوه له بلې څخه مستقلې پېښې چې د S نمونه یي فضا کې شامل وي، په پام کې ونیسئ.
- د مشروط احتمال فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B یوه له بلې څخه مستقلې دوې پېښې وي د $P(A)$ او $P_B(A)$ احتمالونه یو له بل څخه څه توپیر لري؟
- د $P(A\cap B)$ ناځاپه پېښې احتمال له څه سره مساوي دي؟
- د $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ د پېښو د احتمال د فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B ګډ ټکی ونه لري څه پایله اخلې؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

1: د A او B دوې پېښې مستقلې بلل کېږي که چیرې:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)\ \text{(د ضرب د حاصل اصل)}$$

2: که چیرې A او B پېښې د ګډو ټکو لرونکې نه وي، نو

$$A\cap B=\emptyset\Rightarrow P(A\cap B)=0$$
$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)\ \text{(د جمع د حاصل اصل)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که چېرې د یوه ښوونځي د زده کوونکو د سترګو رنګ او ذکاوت یو پر بل پرته له اغېزې فرض شوي وي. د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره په ناڅاپه ډول د یوه زده کوونکي ټاکلو لپاره:

H: ټاکل شوي تن یو هوښیار ذکي زده کوونکي وي.

B: ټاکل شوي زده کوونکي تورې سترګې ولري.

پیدا کړئ هغه احتمال چې ټاکل شوي زده کوونکي په ناڅاپه توګه هوښیار ذکي او تورې سترګې ولري.

حل: ددې لپاره چې ټاکل شوي زده کوونکي هوښیار او تورې سترګې ولري لیکلای شو:

څرنګه چې $P_B(H)=P(H)$ بر سیره پردې $P_B(H)=\dfrac{P(B\cap H)}{P(B)}$ نو:

$$P(B\cap H)=P(H)\cdot P(B)$$

عمومي حالت: د A_1 , A_2 , A_n..... , $(n\geq 2)$ ناڅاپه پېښې احتمالاً یو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو یا څو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې احتمالاً یوه له بلې سره تړلې نومول کېږي.

پایله:

1: پاملرنه باید وشي چې د ضرب د حاصل له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره په لاندې متقاطع جدول کې هم کولای شو چې $A\cap B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{B}\cap\overline{A}$ او $\overline{B}\cap A$ ناڅاپه پېښو احتمالي پایلې د A او B پېښو لپاره چې احتمالونه یې a او b وي، په آسانۍ په لاس راوړو. د A او B د مستقل والی څخه پوهېږو چې د A او $\overline{B}$ ، $\overline{A}$ او B په پای کې $\overline{A}$ او $\overline{B}$ هم یوه له بلې څخه مستقلې دي؛ نو لرو:

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A\cap B)=a\cdot b$	$P(A\cap\overline{B})=a(1-b)$	a
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=b(1-a)$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=(1-a)(1-b)$	$1-a$
	b	$1-b$	1

2: د A ، B او C درې ناڅاپه پېښې چې یوه له بلې څخه مستقلې دي، لرو:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: په یوه کڅوړه کې دوې سپینې او دوې تورې مرۍ پرتې دي. دوې مرۍ یوه له بلې پسې له کڅوړې څخه پورته کوو، په داسې حال کې چې:

a- د لومړۍ مرۍ د پورته کولو نه وروسته هغه بېرته په کڅوړه کې ږدو.

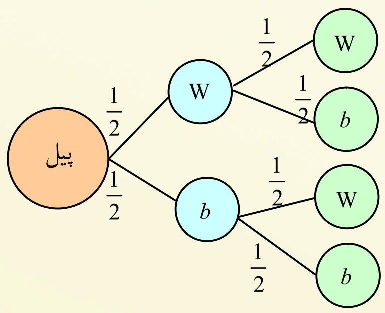
b- پرته له دې چې مرۍ واپس کېښودل شي.

د A پېښه: په لومړي ځل سپینه مرۍ راووزي. B: دویم ځل مرۍ سپینه وي.

له یوې بلې څخه مستقلې یا تړلي (وابسته) دي.

حل:

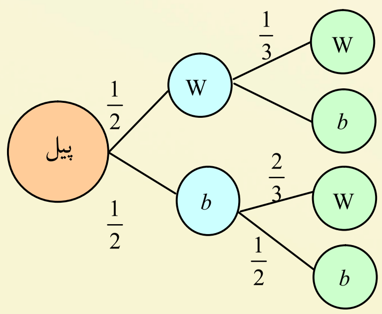
a) څرګنده ده چې $P(A)=\frac{1}{2}$ او $P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ وي او $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}$ دي نو A او B یوه له بلې څخه مستقلې دي.



b) څرنګه چې:

$$P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2},\quad P(A)=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$$

نو A او B یوه له بلې څخه تړلې یا وابسته دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د لاندې متقاطع جدول خالي ځایونه چې په نښه شوي دي ډک یې کړئ:

	B	$\overline{B}$	
A	0.12	$P(A\cap\overline{B})=?$	?
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=?$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=?$	?
	?	0.6	

حل: څرنګه چې $P(\overline{B})=0.6$ دي نو لرو:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.6=0.4$$
$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.4}=0.30$$
$$\Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.3=0.70$$

او د پېښو د تقاطع څخه لرو چې:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})=0.3\cdot0.6=0.18$$
$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P(B)=0.7\cdot0.4=0.28$$
$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.7\cdot0.6=0.42$$

په همدې ترتیب په جدول کې د قیمتونو په وضع کولو سره مسئله تکمیلیږي.

پوښتنې

یو سټ چې عناصر یې 5,3,2 او 30 دی د یوه رقم د انتخاب احتمال یې 0.25 دی په ناڅاپي ډول له نوموړي سټ څخه یو رقم انتخابوو، که چیرې A_k ناڅاپه پېښه د هغه رقم چې انتخاب شوي او د تقسیم قابلیت په k ولري، آیا A_2 , A_3 او A_5 ناڅاپي پېښې دوه په دوه مستقل دي او که نه؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

بېلې شوې(غیرمتمادي) نمونه یي فضا:

هغه نمونه یي فضا چې عناصر یې د شمېر او تشخیص وړ وي، د **پرېکړې یا** گسسته نمونه‌یي فضا په نامه یادېږي؛ لکه د رمل یا د سکې اچولو تجربي نمونه‌یي فضا.

نښتي(متمادي) نمونه یي فضا:

هغه نمونه یي فضا چې عناصر یې د شمېر وړ نه وی د پیوسته یا متمادی نمونه‌یي فضا په نامه یادېږي چې د حقیقي اعدادو پر محور د فاصلې په بڼه او یا په فضاکې د هندسي شکلونو یا حجمونو په ډول ښرگندېږي.

هم چانس پېښې:

د یوې نمونه یي فضا لومړني پیښې چې د هغوي پېښې د تجربې په پای کې په برابر احتمال پېښېږي، هم چانسه پېښې بلل کېږي. د هم چانس پېښو د احتمال مجموع له یوه سره مساوي ده.

د نښتی(پیوسته) فضا احتمال:

د ټوټه کرښو، سطحو او حجمونو مساعد حالتونه د یوې پام وړ ناڅاپي پیښې لپاره په یوه تجربي نمونه‌یي فضاکې شامل ټوټه کرښو، سطحو او حجمونه عبارت دی د متصلې فضا له احتمال څخه.

مشروط احتمال:

که چیرې A او B د S، د نمونه‌یي فضا دوې ناڅاپه پېښې چې $P(B) \neq 0$ وي په دې حالت کې $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ته د A ناڅاپه پیښې د مشروط احتمال په نامه یادېږي په دې شرط چې د B پېښه له مخکې پېښه شوې وي.

یوه له بلې څخه مستقلې پېښې:

د A او B دوه ناڅاپه پېښې یوه له بلې څخه مستقلې بلل کېږي، که چیرې:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

د څېړکي پوښتنې

1. د لاندې نمونه یي فضاګانو څخه کومه یوه سره نښتې یا پیوسته او کومه یوه پرېکړې یا ګسسته دی؟

الف: د یوې رمل دانې اچولو تجربه

ب: د یوې سکې د اچولو تجربه

ج: د یو غشي لګېدل په یوه دایره

د: د یوې فلزي میلي د اوږدوالي زیاتېدلو تجربه نظر حرارت ته

2. د یو چارتراش چې اوږدوالي یې L دي په ناڅاپه ډول په سور اره کوو، تر څو دوه برخې شي څومره احتمال ددې شته دي چې د کین اړخ اره شوي برخه د ښي اړخ له درې برابره څخه کوچنی وي.

3. د یوه خصوصي شرکت یو کارګر هره ورځ د 8 او 8:50 ساعتونو په منځ کې کورته نږدې تم ځای کې چې د مامورینو په ګاډي کې د کارته د تګ لپاره ګډون وکړي او پـه 8:15 ، 8:30 او 8:45 وختونـو تـم ځـای تـه رسېږئ څومره احتمال ددې شته چې نوموړي تن له 5 دقیقو څخه لږ منتظر پاتې شي.

4. د $[0.3]$ ترلې فاصلې څخه په ناڅاپه ډول دوه عددونه ټاکو، پیدا کړې ددې احتمال چې د اعدادو مجموعه د 5 څخه کوچنی او د 2 څخه لویه وي.

5. په ناڅاپه ډول یو ټکي د مخروط دننه چې د قاعدې وړانګې یا شعاع یې R او جګوالی $R\sqrt{3}$ دي ټاکو، پیدا کړې ددې احتمال چې ټکي د محاطي کرې دننه په دې مخروط کې قرار لري.

6. د یو خودکار قلم خرابېدل دوه دلیلونه لري:

1- د میخانیکیت خرابېدل

2- د خودکار د نیچې خرابېدل

که چېرې د یو خودکار قلم د خرابېدو احتمال 0.088 او ددې احتمال چې د خرابېدو دلیل (1) ،شمیره وي مساوي په 0.05 او د دویم نقص احتمال مساوي په 0.002 وي وښیئ: چې دوه پورتنی دلایل مستقلې او یا غیر مستقلې پېښې دي؟

7. خیبر غواړي هغه څلور کلیګانې چې په جیب کې یې لري او سره یو شان دي د کورد دروازې قلف خلاص کړي په کوم احتمال سره وروسته د دریمې کلي له آزمویلو سره چې له جیب څخه یې را باسي د قلف اړوند کلي وي، په هغه صورت کې چې:

a) هره آزمویل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي دوباره په همغه جیب کې اچوي.

b) هره آزمویل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي په بل جیب کې اچوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library