شمیر پوهنه

(ریاضـي)

ستر کتاب

Ketabton.com

لومړی برخه

دویم غځېدلی چاپ

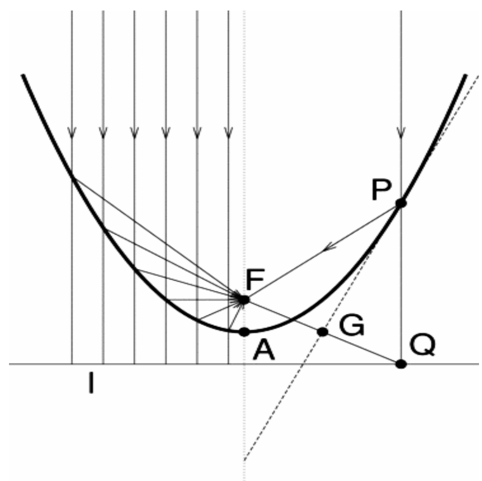
لیکونکی: ډاکتر ماخان (میږی) شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

(ریاضي)

سترکتاب



دویم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میړي شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوي ښښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

کتاب پېژندنه

د کتاب نوم: د شمیرپوهنه ستر کتاب(لومړی برخ)

لیکونکی: ډاکتر ماخان،، میری،، شینواری

makhanshinwari@gmail.com

د خپریدو لړی

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولته

جرمني

چاپ کال   ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندویې ټولنې تخنیکي څانګه

WWW.danishpress.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې لیکونکي یا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شمیرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیواولو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودریږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیې له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کته ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندي ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتوري ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندويانو او په تيره بيا د مشر تابه څخه زياته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه يې د دې ليکنو زياته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کليوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زياته مننه کوم:

د ښاغلي ډپلوم انجنير ريحان الدين حساس، ښاغلي ډپلوم انجنير محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترماڼوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بيان، ښاغلي ډپلوم انجنيرمحمد ايوب بيان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنير او ډپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانګې شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له ميرمن ښاپرۍ څخه ډېره زياته مننه، چې زما د ليکنو- نه دا چې مخه يې نه ده نيولې- پوره ملاتړ کړي.

بيا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

نوې سریزه

سریزه

افغاني، یوناني ، لاتین الف ب

شمیرپوهنیزې نخښې

۱ . ۰	د شمیرپوهنې سم اند یا منطق	۱
۱ . ۰ ۱	پوهنیزه ژبه او پیدایښت یا طبیعي ژبه	۱
۱ . ۰ ۲	د شمیرپوهنې سم اند بنستیزه کلیمې	۳
۱ . ۰ ۳ . ۰ ۱	ثابتې ، اووښتونې یا واریابلې ، ترمونه	۳
۱ . ۰ ۲ . ۰ ۲	وینا	۵
۱ . ۰ ۲ . ۰ ۳	د دوه ارزښتوالي اصول یا پرینځیپ	۷
۱ . ۰ ٤	وینا فورم یا ۰بڼه او کوانتورونه	۱۳
۱ . ۰ ۵	اړیین او پوره کیدونکي شرطونه	۲۸
۱ . ۰ ٦	د شمیرکلیمه یا د لغاتو	۳۱
۱ . ۰ ۷	برابرون او نابرابرون	۳۳
۱ . ۸	تمرینونه	۳۸
۲ . ۰	ډیر ی پوهنه	۳۹
۲ . ۰ ۱	د ډیری پوهنې کلیمه	۴۰
۲ . ۲	د ډېریو ترمنځ اړیکې	۴۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

	برخهېرۍ	۴۶
	د یوې ډېرۍ توان یا تواندېرۍ (توانسټ)	۴۸
۲ ۰ ۳	په ډیرۍ کې کارونې یا عملیې(۱)	۵۰
	غوڅدېرۍ یا متقاطعډېرۍ	۵۲
	د یوې ډېرۍ یا سټ کمپلیمنت	۵۷
۲ ۰ ٤	څیرونه	۵۸
	تمرینونه	۶۷
۳ ۰	د رییل ګڼونو سره د شمیرلو بنسټیزې...	۷۰
۳ ۰ ۱	د ګڼونو- یا اعدادو سیستم جوړښت	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ ۱	پیدایښتي یا طبیعي ګڼونه	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ الف	د پیدایښت یا طبیعي ګڼونو جوړښت	۷۱
۳ ۰ ۱ ۰ ب	د پیدایښت ګڼونو انځورونه او شمیرنه	۷۲
۳ ۰ ۱ ۰ پ	د شمیرنې بنسټیز قوان ین	۷۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	ټولګڼونه	۸۴
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	الف د ویش تیوري	۸۶
۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ب	غټ ګډ پرویشونی(بزګترین مقسوم علیه ...)	۸۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۳	راشنلګڼونه	۱۰۶
۳ ۰ ۱ ۰ ٤	رییلګڼونه	۱۰۸
۳ ۰ ۲ ۰ ۱	ماتشمیرنه	۱۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳	تمرینونه	۱۳۰
۰ ٤	پوتنځ یا توان ، ریښه یا جذر	۱۴۱
۱ ۰ ٤	توان د ټولګنیز په جګ یا اکسپوننت	۱۴۱
۲ ۰ ٤	ریښه او توان د راشنل اکسپوننت یا جګګن سره	۱۴۴
۳ ۰ ٤	توان د رییلګڼ اکسپوننت یا جګګڼ سره	۱۵۱
٤ ۰ ٤	ټولګه	۱۵۲
۰ ٥	لوګاریتم	۱۵۸
۱ ۰ ٥	د لوګاریتم کلیمه	۱۵۸
۳ ۰ ٥	ټولګه	۱۶۶
۰ ٦	ګونومتري	۱۶۹
۱ ۰ ٦	بنسټیزه ځمککچپوهنه یا هندسه	۱۶۹
٦ ۰ ۱ ۰ ۱	ټکی او کرښه	۱۶۹
٦ ۰ ۱ ۰ ۲	کونج	۱۷۱
٦ ۰ ۱ ۰ ۳	درېګوډئ	۱۷۴
٤ ۰ ۱ ۰ ٤	کونکروانیځ او ورته والی	۱۷۸
٦۰ ۱ ۰ ٥	ولاړکونجیز دریګوډئ	۱۸۴
۲ ۰ ٦	په ولاړکونجیز دریګوډئ کې د ...	۱۸۸
۳ ۰ ٦	په یوونګردئ کې د کونج بلواک ..	۱۹۰
٤ ۰ ٦	د ساین او کوساین جملې	۱۹۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ٠ ٥	تریگنومتریکي کټمټوالی	۲۰۵
۶ . ۵	تریگنومتریکي یا کونجکچیز فرمولونه	۲۱۵
۷ ٠	کمپلکس گڼونه	۲۲۲
۸ ٠	د ښوونې یا ثبوت متودونه	۲۳۵
۸ ٠ ۱	سیده ښوونه	۲۳۵
۸ . ۲	ناسیده ښوونه	۲۳۷
۸ ٠ ۳	د پوره اینډکشن له لارې ښوونه	۲۳۹
۹	لاینیز برابرون له یوې اوړیدونې یا ...	۲۴۳
۹ ٠ ۱	لاینیز برابرون	۲۴۴
۱۰	کومبیناترویک، د بینوم جمله	۲۶۶
۱۰ ٠ ۱	فاکولتیت یا فاکتوریل	۲۶۶
۱۰ ٠ ۲	د بینوم څله ونه	۲۶۷
۱۰ ٠ ۳	د بینوم جمله	۲۷۰
۱۰ ٠ ٤	کومبیناتوریک	۲۷۴
۱۰ ٠ ٤ ٠ ۱	پرموتیشن	۲۷۵
۱۰ ٠ ٤ ٠ ۲	واریيشن	۲۸۰
۱۰ ٠ ٤ ٠ ۳	کمبینیشن	۲۸۶
۱۰ ٠ ٤ ٠ ٤	د پرموتیشن، واریيشن او	۲۹۱
۱۱ ٠	لانیز الجبري برابرونونه	۲۹۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ ۰ ۱	لانیز برابرون له دوه اوړیدونو یا ...	۲۹۶
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۳	دویمه درجه دیترمینانت او د کرامر...	۳۰۷
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤	د ګاوس الګوریتم	۳۱۲
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٥	له دوه وو زیات برابرونونه له دوه ...	۳۱۶
۱۱ ۰ ۲	لاینیز برابرونونه له درې	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۱	یو برابرون له درې ناپیژندونو سره	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۲	دوه برابرونونه له درې ...	۳۱۸
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۳	دریمه درجه دیترمینانت او د ...	۳۱۹
۱۱ . ۲. ۴	د ګاوس لګوریتم	۳۲۲
۱۱ ۰ ۳	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳۲۵
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱	د n -م درجې دیترمینانت او د ...	۳۲۶
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۲	د ګاوس الګوریتم	۳۲۸
	تمرنونه	۳۳۳
۱۲	الجبري برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۱	نالاینیز برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۲	څلورځ ئیز یا مربع برابرونونه	۳۴۳
۱۲ ۰ ۲ . ۱	د دوه په جګ برابرونونه ، د ویيتا جمله	
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۲	څلورځ برابرونونه ، چې په نورمال	۳۵۰
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۳	د n -م درجې ځانګړي برابرو...	۳۵۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱۲	دریمه درجه برابرونونه	۳۵۷
٤ ۰ ۱۲	د ریښي برابرونونه	
۱۳	ترانسڅیندنت برابرونونه	۳۷۵
۱ ۰ ۱۳	لوګاریتم برابرونونه	۳۷۵
۲ ۰ ۱۳	اکسپوننشل- یا په جګګڼ برابرونونه	۳۸۰
۳ ۰ ۱۳	ګونومتریکي یا کنجکچیز برابرونونه	۳۸۵
۱٤	له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت ..	۳۹۶
۱ ۰ ۱٤	نابرابرونونه	۳۹۶
۱ ۰ ۱ ۰ ۱٤	بنستیزې کلیمې او شمیر قوانین	
۱ ۰ ۱٤ الف	اینتروال	۳۹۷
۲ ۰ ۱ ۰ ۱٤	نابرابرونونه له یوې ناپیژندونکی...	۴۰۰
۳ ۰ ۱ ۰ ۱٤	د نابرابرونونو سیستم ...	۴۰۹
٤ ۰ ۱ ۰ ۱٤	نابرابرونونه له دوه ناپیژندونکو سره	۴۱۱
۲ ۰ ۱٤	برابرونونه او نابرابرونونه	۴۱۴
۱ ۰ ۲ ۰ ۱٤	له مطلقه ارزښت سره شمیرنه	۴۱۴
۲ ۰ ۲ ۰ ۱٤	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۱۵
۳ ۰ ۲ ۰ ۱٤	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۲۰
۱۵	بلواک یا فنکشنونه یا طابع	۴۳۰
۱ ۰ ۱۵	د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه	۴۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ۱۵ د بلواک خویونه ۴۳۳

د ستر کتاب دویمه برخه

۱٦ د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ... ۴۶۶
۱ ۰ ۱٦ کرښه ۴۶۶
۲ ۰ ۱٦ ګردۍ ۴۷۵
۳ ۰ ۱٦ ایلیپسې ۴۸۲
٤ ۰ ۱٦ هیوپربول ۴۸۷
٥ ۰ ۱٦ پارابول ۴۹۲
٦ ۰ ۱٦ ټولګه ۴۹۴
۱۷ وکتور شمیرنه ۵۰۲
۱ ۰ ۱۷ د وکتور پیژند یا تعریف، ۵۰۲
په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه ۵۰۲
۲ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو سکالار ځل ۵۰۹
۳ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو وکتوري ځل ۵۱۲
٤ ۰ ۱۷ غبرګهواریز یا موازي الاضلاع ضرب ۵۱۷
٥ ۰ ۱۷ په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو ....
۱ ۰ ٥ ۰ ۱۷ د یوې کرښې وکتوري انځورونه ۵۲۱
۲ ۰ ٥ ۰ ۱۷ د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه ۵۲۴
٥ ۰ ۱۷ د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ۰بڼه ۵۲۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸	پرلپسې او پرلپسې لړۍ	۵۳۳
۱۸ ۰ ۱	پیل	۵۳۳
۱۸ ۰ ۲	د ګڼون - عددونوپرلپسې کلیمه	۵۳۴
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۱	مونوتوني پرلپسې	۵۴۲
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۲	اریتمیتیکي پرلپسې	۵۴۵
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۳	هندسي پرلپسې	۵۴۷
۱۸ ۰ ۲الف	لړۍ	۵۵۰
۱۸ ۰ ۲ الف ۰ ۱	هندسي لړۍ	۵۵۵
۱۸ ۰ ۲ الف ۲	اریتمیتیکي لړۍ	۵۵۷
۱۸ ۰ ٤	د پرلپسې او لړیو د پولې ...	۵۵۸
۱۹	د فنکشنونو پولې او ناپریکیدنه	۵۷۸
۱۹ ۰ ۱	بنسټیزې کلیمې	
	د پولو یا حدونو خویونه	۵۸۶
	د راشنل، کسري یا نسبتي	۵۹۲
	د مثلثاتي یا درېکوډي کچ توابعو پولې	۵۹۶
	ناپرېکیدنې	۶۰۴
۱۹ ۰ ۲	په پوله ارزښت او ناپریکیدنې څو جملې	
۱۹ ۰ ۳	د ناپریکیدونکو فنکشنونو خویونه	۶۱۰
۱۹ ۰ ٤	د بنسټیزو فنکشنونو ناپریکیدنه	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښېرکي ټولګه ۶۱۶
۲۰ دفرنښیالشمیرنه ۶۲۶
د تابع تغیرمنځ ارزښت(منځنی قیمت) ۶۲۶
په یوه ټکي کې د تابع ګراف ... ۶۲۸
د لحضوی(سترګورپ) تغیر... ۶۳۰
کمښتوېش (تقسیم تفاضل؟) ۶۳۱
دفرنشلوېش یا رابیلیدنه یا مشتق ۶۳۳
کمښتوېش او مشتق یا رابیلیدنه ۶۳۶
د x_o په ځای کې د فنکشن مشتق ۶۴۳
د تانجنت پیژند او خویونه ۶۴۷
د تانجنت او عمود یا ولاړ ټولیز مساوات ۶۵۰
په بیدیا کې جګوالی ۶۵۲
۲۰. ۱ ۰ ۱ الف : د تانجنت یا جګیدنې غوره والی
۲۰ ۰ ۲ د فرنښیال یا رابیلیدنې یا مشتق قاعدې ۶۵۶
د درېګوډېزو یا مثلثاتي ۶۶۲
د اکسپوننشل یا په جګ توابعو.... ۶۷۰
د مشتق استعمال په طبیعي پوهن کې ۶۷۶
د ایمپلیښیت توابعو مشتف ۶۸۳
د بنستیزو رابیلیدنو(مشتقونو) جدول ۶۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

	ټولګه	۶۸۸
	د يوې تابع د مشتق قابليت	۶۹۱
	د معکوس- - يا په څټ توابعو مشتق	۶۹۸
۲۰ .۳	د بنسټيزو بلواکو رابيليدنه	۷۰۱
	د رول قضيه	۷۱۰
	د وايرشتراس قضيه	۷۱۱
۲۰.٤۰	افراطي ارزښتونه او اوړونټکی	
	د دفرنشل منځ ارزښت قضيه	۷۱۲
	يوعړيزې توابع	۷۱۵
	ځای اړوند افراطي ټکي	۷۲۰
	د انعطاف – يا اوړونټکی	۷۲۴
	د کوږ يا منحني بحث يا خبرې	۷۳۳
	ناټاکلي حدونه يا پولې	۷۴۶
	د برنولي او د لو پيتال	۷۵۰
۲۰ ۰ ۵	د غټو ګټو پرابلم	۷۵۷
	تمرينونه	۷۶۷
	په ټوټه کسرونو ټوټه کونه	۷۷۸
۲۱	انتيګرالشميرنه	۷۸۷
	پيلراوړنه	۷۸۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۱	انتیګرالشمیرنه	۷۸۹
	د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال	۷۹۰
	بنستیزه یا لومړنی تابع	۷۹۴
	سطحه او لومړنی تابع	۷۹۶
	ناټاکلی انتیګرال	۷۹۹
	د ټاکلي انتیګرال شمیرنه	۸۱۲
	تکمیلیدونکي بنسټونه	۸۱۴
	د ټاکلي انتیګرال ځخه و ټاکلي ...	۸۱۵
	د انتیګرالوني قاعدې	۸۱۷
	د اکسپوننشل توابعو انتیګرال	۸۱۹
	د لوګاریتمي توابعو انتیګرال	۸۱۹
	بدلون قانون	۸۲۱
	توابع، چې بې د بدلون له لارې...	۸۲۷
	ټوټه انتیګرالونه	۸۳۲
	د ټوټه انتیګرالوني لار	۸۳۴
	د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال	۸۳۸
	ناپای(مبهم) انتیګرال	۸۴۱
	د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې	۸۵۲
	د انتیګرالشمیرنې استعمال	۸۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړي یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مهربان او بخښونکي خدای(ج) په نامه

سریزه

ګرانو هیوادوالو !
یو څه چې پیل لري نو پای هم باید ولري، د داسي یوه کار پیل او پای ته ځما هم لوړه او تنده دومره زیاته ده، چې مرښت یې زما لپاره هم ناشونی دی.

د هیواد په هراړخیزه بدبختیو یو سړی هلته نور هم پوره پوهیدلی شي، چې په یوه کار پیل وکړي، څکه چې سملاسي ورته څرګندیږي، چې په هیڅ شي کی څموږ په هیواد کی لاتراوسه څه نه دي شوي په جوړښتیزه لور، په وراني کی مو د نړی سرکښي ځانته ګټلی.
موږ ګورو چې په مسلکي چارو کی له پیل دا ستونځي موجود دي، چې تراوسه حتی هغه بنستیز مسلکي نومونه مو له خپلی ژبی نه دي را اخستلي، چې مسلك ته اسانتیاوې پیښوي. له کومه ځاي چې ماته روښانه ده، تر نن ورځی په دې هکله چا په شمیرپوهنه د ستونځوبیو لپاره کومی هځي هم نه دي کړي او ستتونځي یي نه دي ګاللي، چې دلته طبعآ افراد ملامت نه دې، بلکه څموږ دهیواد دتاریخ په اوږدو کی دولتني جوړښت، دپوهني او همدا ډول د کلتور او ژبي د ودې دنده د حکومتونو ده، چې څموږ په هیواد کی څموږ حکومتونو خپل ځانونه د دې کار جوګه نه دې ګڼلي، کیدی شي چی ووایو چې په ریښتیني یي ددې کار مخه هم نیولی ده، چې په افغاني ژزبه دې څه کار وشي.
ګرانو لوستونکو !
داکار څکه په افغانی او په ولسی افغاني لیکل شوی، چې زه په مسلکي اړخ کی یواځې، په علمي توګه په الماني ژبه پوهیږم، د انګلیسی سره هم بلد یم، نو دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

نومونه چی له دې دباندنیو ژبو را اړووم ، داچې په ښوونځي کي ځما لیك لوست په افغاني ژبه وو، په افغاني ژبه په ولسي پوهنیزه توګه اړولی شم. ماته دا کلیمي په مروجه افغاني ژبه نه دي معلومی او یا کومي چې ماته معلومی دي او زه ورسره بلد یم هغه همغه وخت ماته د پوهیدلو له امله د ستونځو ډکی ښکاریدلی .

شمیر پوهنه هم، د نورو پوهنو په څیر، یوه پراخه پوهنه ده او زیاتی ځانګکی لري. دا چی ځما په فکر دا متآسفانه نه یواځي زما لمړی کار دی، بلکه دا د افغاني ژبی په دې توګه یو لمړی علمي اثر دی، چی په دې بنسټیزه توګه په درسي او تمریني ډول سرته رسیږي.

نن نړی او د انسانانو فکر دومره پر مختګ کړی او دا نور هم په خورا چټکتیاوده کوي، چی پخپله انسان ورته د تعجب په سترګه ګوري، مګر موږ لا تراوسه په هغه بنسټیزو ستوځوبیو (د ستونځو حل باندې) پیل نه دی کړی ، که دا په هره ځانګه کی هم وي. ځموږ پرابلمونه هراړخیز دي او هراخیزو هڅو ته مو ضرورت شته.

شمیرپوهنه څه شی دی ؟

شمیرپوهنه یو مرستندویه پوهنه ده، چی په ټولو پوهنو کی نغښتي یا په بل عبارت : په ټولو پوهنو کی د پوهیدلو بنسټیزه ریښه جوړه وي، که دا پوهنی اجتماعي وي او که طبعي (پیدایښتی) یعنی که ساپوهنه وي که اقتصاد او که کیمیا وي یا فزیك، بیله شمیر پوهنی یی وده او په پوهیدنه ناشونی ده. شمیرپوهنه له بلی خوا یواځنی خپلواکه پوهنه هم ده. شمیر پوهنه بل څه ته اړ نه ده.

ددې کتاب لیکلو زما زیات وخت په بر کی ونیوه او لیکل یی د پوره ستونځو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول کار زما په غاړه وو او بل چا را سره متأسفانه چې مرسته هم نه شوه کولی.

د داسی یوه کتاب لیکنی مسئولیت باید د دولت په غاړه وي او مسلکي باید د داسی لیکنی ځخه خپل ژوند تآمین کړای شي. د همدې هدف لپاره د مسلك زدکړه کیږي. ما په دې کرښه غوښتل، چی څمونږ د هیواد ستنځي نوږې هم ګوته لك کړم.

زه غواړم چی خپلی د سر خبرې په لاندې توګه رالنډې کړم
-د لیکونکی راهڅونی دلیلونه یا د شوق رابیدارول
-دداسی کتاب لیکنه په هغه وخت کی شوني کیږي، چی د لیکونکي اقتصادي ژوند تآمین وي، زه د ټولنیزو مرستو پیسو څخه ژوند کوم، یعنی د نورو خلکو د مالیا پیسو باندې. کار نه پیداکیږي او اجازه یې هم نه لرم چې پیسی وګټم.

– وخت باید پوره موجود وي او داهم ما پوره لروده، چی له دې د مخه می په سیاسی هلو ځلو دا وخت تیر کړی او دا اوس می خپل مسلك ته رامخه شوه.

– ددې کتاب لیکلو لپاره باید یو لیکونکی د خپلی ټولنی او د خپلی ټولنی د خلکو سره مینه ولری او په همدې ډول، د خپلی ټولنی او د ټولنی د خلکو او د ټولو څخه د مخه د خپل ځان لپاره هم خوبونه ولري، خیالونه ولري، چی یواځی د خوبونو ریښتیا کولو لپاره په داسی کار بریالی کیدی شي. ما ددې کار ستونځی په پوره مینه په غاړ واخستلی او دا کار می په پوره مینه سر ته ورساوه.
-په دې برسیره لیکونکی دې وظیفی ته هم باید شعوري وي، چی دی ددې کار لپاره د ملت په پیسو تربیه شوی او د ملت پور هم باید ادا شي، د داسی لږ پور اداکولو هم ما ته پوره خوښي راو بخښله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په کور کی هم باید تر یوې ممکنه اندازې پورې یو تفاهم موجود وي یعنی یو غبروالی باید په کورنی کی وي، که داسی هم نه وي ، خو د داسی کار مخه باید ونه نیول شي ، د نورو ستونځوبیبو (ستونځو حل) په خاطر، چی موږ افغانان یی په ځانګړی توګه اقتصادی اړخ کی پوره لرو، چی نه یواځي د ځان لپاره بلکه د خپلوانو لپاره هم باید پام وي، مګر ما دا توان په خپل ځان کی ددې امله نه کوته چی امکانات یي ځما لپاره نه وو.

دوم : د کتاب د لیکنو ستونځی:

د داسی کتاب لیکنه د پوره ستونځو سره مل ده، چی زه دې ستونځو ته په لاندې توګه ګوته نیسم.

١ – دا کتاب په داسی ژبه لیکل کیږي چی له مری څخه نیول شوې، زیندۍ شوې، خپه شوي، خو د مرګ څخه بچ ده، له ښارونو شړل شوې، او یواځی په غرو او رغو کی ژوندۍ پاتی شوې.

دې ته باید ګوته ونیسم، چی دا کرښی دا مطلب نه لري، چی ګوندې زه به، خدای (ج) دې ونه کړي، د بلی ژبی په خلاف یم. دا زما کار نه دی او نه دا حق ځان ته ورکوم، خو دا حق لرم چی خپلی ژبی، د خپل ولس ژبی ته ، چی کړیدلی او وروسته پاتی ساتل شوې، ګوته ونیسم. موږ افغانانود افرادو په توګه هم افغاني ژبه پرېښوولی چی ولس یعنی د یوه هیواد د ژبی دپرېښوولو حق څوک نه لري، نه دولت او نه افراد . دا کار متاسفانه د افغاني ژبی په ضد او بیا د ټولو په سر کی پخپله د افغانانو څخه شوی دی، د بل ځا څخه څوك باید ګیله من نه وي.
افغاني ژبه، که څه هم پوهانو او د لیك لوست خاوندانو په زیات شمیر، نه ټولو، د لاسه ورکړې، خو بیا هم دا ژبه دا استعداد، د نورو ژبو په څیر لري، چی یوه پوهنیزه لیکنه وربانديې وشی یا بهتره پوهنیزه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ژبه یواځې د پوهولو او پوهیدلو اله نه ده، بلکه د ولس پوهنیزه وده کې پوره غوره رول لري او د کلتوري ودې لارښودې او بنسټ دی، په دې برسیره د پوهې د اسانوولو خورا غوره اله ده. د یوه ولس د پرمختګ او د ژبې پرمخوده یو بل باندې سیده او په ځېږ اغیز من دي، چې ولس وروسته پاتې وي، ژبه یې وروسته پاتې ده او که یوه ژبه وروسته پاتې وي، نو هغه ولس د نورو ولسونو سره په پوهه کې سیالي نه شي کولی او د ولس خلك د نورو ولسونو د خلکو سره د سیالی کولو استعداد ځان کی نه شي روزلی، که څه هم استعدادونه به موجود وي.

ما کوښښ کړی چې کم له کمه بنسټیزې کلیمې په افغاني واړوم، چې دا کار مې په پوره بریالیتوب، د پوره ستونځو سره سره سرته رسولی او په دې هکله مې زیات فکر هم په کار اچولی چې مسلکي بنسټیزې کلیمي په روانه افغاني راوړل شي. هغه نومونه چې ټاکل شوي، داسې نومونه دي، چې د هغه شي ماهیت په کې روښانه دی. دا کا د هرڅه لمړی ددې لپاره باید وشي، چې په پوهنیزو شیانو او نومونو پوهیدل باید ساده شي.

په پوهنه کی له بلی ژبې تیریدنه ناشونی ده او یا په بل عبارت په بله ژبه صرف نظر نه شي کیدی. دلته هم هدف دا نه دی چې افغاني ژبه دې د نورو ژبو د لغاتو څخه پاکه شي، دا کار یواځې هلته کیږي، چې یوه ژبه له پوهنې وروسته پاتې وي.

د پوهنیزې ودې سره ژبې ته د نورو ژبو لغات راننوځي او ضرور هم دي. ما کوښښ کړی چې که د کوم لغات لپاره د پښتو نوم یا نه وي او یا مناسب نه وي، هغه په جهاني مروجه لغاتو ولیکم.

دا چې افغاني د افغانستان ژبه او بیا هم زیندی شوې ژبه ده، دا د دولت کار وو او افغاني ژبې ته د تنفس ورکولو یا بهتره د افغاني ژبې د زیندی څخه خلاسون یا د افغاني ژبې څخه د لعنت د کړی لرې کولو دنده هم د دولت ده، خو ترهغې باید موږ هم دې ته پام ولرو او دا پاملرنه خپله دنده وګرځوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه ولس په ژبنیو ستونځو هلته پوهیدل ممکن کیږي، چې څوك د ژبې سره په پوهنیزه توګه مخامخ شي. په افغاني ژبه دلمړي ځل لپاره داسې یوه لیکنه د ستونځو سره مل ده، مګر ناشونې نه ده.
دلته غواړم چې دې ته هم ګوته ونیسم، چې د نومونو په ټاکلو کې ما کله کله دوه نومونو کارولي، چې هغه مې په ټول کتاب کې شاید اصلاح کړې نه وي، خو په دې باور لرم چې په هدف کې ستونځې نه پیښبوي لکه د بیلګې په توګه: ما لمړی ګنپوهنه لکیلې وه، چې وروسته مې شمیر پوهنې بانډې واړوله. شاید په ټولو ځایونو کې مې نه وي شمیرپوهنه کړې. درېګوډې ما لمړی دریکونجې لیکلی وو، چې دا هم شاید د کتاب په اوږدوکې نه وي اصلاح شوی، داسې نور څه به هم وي، خو دې ته بیا ګوته نیسم، چې د پوهیدلو لپاره دا کومې ستونځې ه پیښبوي.

۲ – تخنیکي ستونځې:
د ګرانو لوستونکو پام به دې ته راوګرځي، چې څمور لپاره د داسې کتاب لیکلوپه لار کې تخنیکې ستونځې هم خورا زیاتې دي. ما په کمپیوتر د شمیرپوهنې د فرمولونو لیکلو سره ستونځې لرودې، نو له دې امله مې د نورو کتابونو دکاپیو څخه بیاتې کړې او دلته مې سریښ کړې، چې کله کېږې هم سریښ شوې دې او په دې هم پوهیږم، چې دا یو غیر قانوني کار هم دی، خو هیله ده چې د رااخستلشووکتابونو لیکونکې او چاپوونکې به دې ته تفاهم ولري او زه له دوي د هرڅه له مخه د دوې له دې تفاهم څخه د خوښې څرګندونه کوم.

غواړم د ګرانو لوستونکو دې ته هم پام راوګرځوم چې املایي غلطۍ به شوې وي،، خو په پوهیدلو کې به ستونځې پیښبې نه کړې، د هغې بخښنه غواړم، زه نور دا کار نه شم ځنډولی، ځکه چې ډیر ورسره ستړی شوم.
ما هیڅ دا فکر نه کاوه، چې زه دې داسې یو کار سر ته ورسوم، خو خدای(ج) په

(c) ketabton.com: The Digital Library

حرکت کې برکت اېښوولی دی.
لنډه دا، چې ددې کتاب د چاپ پورې چمتووالي کار ټول زما په غاړه وو، چې زه ورسره همدومره ستړی شوی هم یم او نورې سهوې او د غلطیئو سمولو لپاره مې نور د زړه زور ختلی، که څه هم په دې اخرو ورځو کې د ملګرو په فشار ما ، څما په فکر ټولې سهوې لرې کړی.

دریم – کتاب د کومو لوستونکو لپاره دی؟

ګران لوستونکی به د را اخستلشوو کتابونو څخه دې ته پام راوګرځولی شي، چې دا کتاب د نوو څه ډول لیکنو څخه راټول شوی. ددې کتاب لوستونکی د پوهنتون د شمیرپوهنی، پیدایښتي پوهنو، اقتصاد او همداسی د نورو پوهنو زدکړي دي.
دا کتاب په ښوونځي کی هم کارول کیدی شي، خو ښوونکی باید دې ته پام وکړي، چي هغه څه، چی د کتاب په پیل کی هم دي، په پیل کی نه شي لوستل کیدی.
څنی څه په همدې لمړی برخه کی راغلي، چی نابلدو زدکوونکو ته به ستونځي پیدا کړي، خو دې ته د لږ پام وروسته، پام راګرځیدلی شي.

څلورم – دلوستلو وړاندیز

ما لږ ستونځي لرودې، چی دا کتاب په خپله خوښه ترتیب کړم. زه مجبور شوم چي یو کتاب د بنستیز کتاب په توګه ونیسم او د نورو کتابونو رااخستنی بیا په کی ځاي کړم.
ما د بنستیز کتاب په څیر د شیفر–جورج–تریپلر کتاب ونیوه. نو له دې امله می برخه ویش هم په همغه ډول کړی. ما غوښتل، چی د کتاب پیل په سمسوح یا بهتره سم اند (لنډ سمند) یعني منطق وکړم، خو هغه په اوومه برخه کي ځیړل شوی.
څما وړاندیز دادی، چی اوومه– اتمه او نهمه برخه دې د هرڅه لمړی ولوستل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

اومه اتمه او نهمه برخه څمونږ په هیواد کی زما په فکر ، چی نا اشنا وي. په هر صورت د اوومی برخی سریزه خو دي د هرڅه له مخه ولوستل شي او همداسی د ډیري پوهی سره اشناییینه هم خورا ضرور ده

شپیږم . مننه

ددې کتاب لیکلو کی ، که څما د دوستانو لخوا دې کار ته راهڅول نه وی، نو دا کار سرته نه شو رسیدلی، په تیره بیا په المان کي د « افغانستان کلتوري ودې ټولنی »دوستانو. زه له دې د ټولو د زړه له کومی خوښنه کوم. د دې ټولنی د غړو او پلویانو زیاته خوښتنه، چی ددې کتاب چاپ یی د ټولنی په چوکاټ کي په غاړه اخستی.

ډیر محترم پوهاند مجاوراحمد زیار څخه زیاته مننه، چی د لغاتو د نظر څخه تیریدنه او همدا ډول په ټولو ماناوو کي ماته خوراګټوره مشوره هم راکړې.

زما میرمن زما د ستونځو شاهده وه. په زړه ناروغه، خو په پراخه او لوي زړه او پوره حوسیله یی زما د دې لیکنی ملاتړ کاوه، چی بی ددې له ملاتړ به دا کار هم سرته نه وی رسیدلی، که څه هم دا به یی کله کله ویل، چی ګوندې پیسی می باید ګټلی وی ، خو په دې پوهیږې، چی ددې چانس نه شته، کله کله به، چی به تنګه شوه نو ویل به یې چی نور دا د چرګانو ټونګي باید بس کړم. له دې امله زما دمیرمن ښاپیری څخه هم د زړه له کومی خوښنه کوم او دا پراخه سینه او دا ناروغه زړه یی همداسی ښه تکړه ورته د لوي خداي(ج) څخه غواړم، چی زما د داسی کارونوملاتړ نور هم وکړي.

راتلونکی کارونه: د همدې کتاب سره سم ما یو د هندسی کتاب ژباړلی، چی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

المان د پنځم ټولګی ځخه هندسه په کی راغلی د څه نونورو شمیرپوهنیزو مضوعاتو سره. دا به هم په دې کتاب پسی ترلی چاپ ته ورکړي شي.
زه یو بل خوب هم لرم، چی همدا اوس دې د یوه بل الجبر کتاب لیکلو باندې پیل وکړم. موضوعات می په سر کی راګرځي.
که چیرې نور دوستان او شمیرپوهان د شمیر پوهنی په څانګه کی څه لیکل غواړي او په دې هکله ستونځي لري، او ستوځوبیو وړاندیزونه لري نو زه به ورسره وعده وکړم، چی دلته افغانان و ملاتړ ته راوهڅوم. د هغو دوستانو سره چي د شمیر پوهنی کوم کتاب ته یی د ژباړنی نیت وي او په افغانستان او پاکستان کی ژوند کوي نود هغو سره به وعده وکړم چی دلته ورته په دې ټولنه کی او یا د ټولنی دباندې د مرستی هلی ځلی وکړم. څما هدف دادی، چی موږ باید داسی کارونو ته ملا راوتړو. له ما څخه لټ بل څوک نه شته، دا چی ما دا کار سرته رسولی ، باور وکړي، چی هر بل افغان یی هم سرته رسولی شي،

په مینه ستاسو ماخان

(c) ketabton.com: The Digital Library

افغاني ، يوناني او الماني الف بی

ا	ب	پ	ت	ټ	ث	ج	ځ
څ	ځ	ځ	ح	خ	د	ډ	ذ
ر	ړ	ز	ژ	ږ	ص	ض	ط
ظ	ع	غ	ف	ك	ګ	ق	ل
م	ن	و	ه	ي	ى	ې	ئ ۍ

الماني الف بي

A a	𝒜 𝒶	𝔄 𝔞
B b	ℬ 𝒷	𝔅 𝔟
C c	𝒞 𝒸	ℭ 𝔠
D d	𝒟 𝒹	𝔇 𝔡
E e	ℰ ℯ	𝔈 𝔢
F f	ℱ 𝒻	𝔉 𝔣
G g	𝒢 ℊ	𝔊 𝔤
H h	ℋ 𝒽	ℌ 𝔥
I i	ℐ 𝒾	ℑ 𝔦
J j	𝒥 𝒿	𝔍 𝔧
K k	𝒦 𝓀	𝔎 𝔨
L l	ℒ 𝓁	𝔏 𝔩
M m	ℳ 𝓂	𝔐 𝔪
N n	𝒩 𝓃	𝔑 𝔫
O o	𝒪 ℴ	𝔒 𝔬
P p	𝒫 𝓅	𝔓 𝔭
Q q	𝒬 𝓆	𝔔 𝔮
R r	ℛ 𝓇	ℜ 𝔯
S s	𝒮 𝓈	𝔖 𝔰
T t	𝒯 𝓉	𝔗 𝔱
U u	𝒰 𝓊	𝔘 𝔲
V v	𝒱 𝓋	𝔙 𝔳
W w	𝒲 𝓌	𝔚 𝔴
X x	𝒳 𝓍	𝔛 𝔵
Y y	𝒴 𝓎	𝔜 𝔶
Z z	𝒵 𝓏	ℨ 𝔷

يوناني الف بی

Α α	*Α α*	Alpha
Β β	*Β β*	Beta
Γ γ	*Γ γ*	Gamma
Δ δ	*Δ δ*	Delta
Ε ε	*Ε ε*	Epsilon
Ζ ζ	*Ζ ζ*	Zeta
Η η	*Η η*	Eta
Θ ϑ	*Θ ϑ*	Theta
Ι ι	*Ι ι*	Iota
Κ κ	*Κ ϰ*	Kappa
Λ λ	*Λ λ*	Lambda
Μ μ	*Μ μ*	My
Ν ν	*Ν ν*	Ny
Ξ ξ	*Ξ ξ*	Xi
Ο ο	*Ο ο*	Omikron
Π π	*Π π*	Pi
Ρ ρ	*Ρ ϱ*	Rho
Σ σ	*Σ σ*	Sigma
Τ τ	*Τ τ*	Tau
Υ υ	*Υ υ*	Ypsilon
Φ φ	*Φ φ*	Phi
Χ χ	*Χ χ*	Chi
Ψ ψ	*Ψ ψ*	Psi
Ω ω	*Ω ω*	Omega

شمیرپوهنیزې نخښې

مساوي .... $=$

نامساوي (نوروکتابونو کې) $\neq$ ($=$)

کوچنی له .... $<$

لوي له........ $>$

کوچنی یا مساوي له .... $\leq$

لوي یا مساوي له .... $\geq$

ډیر کوچني .... $\ll$

ډیر لوي .... $\gg$

ورته یا متناسب........ $\sim$

کونګروانیځ .... $\cong$

همداسې یا ښایي یا په ګوره کوي

کتمټ........ $\equiv$

غبرګ .... $\parallel$

ناغبرګ........ $\parallel$

ولاړ په .... $\perp$

دریګوړی .... $\triangle$

ګردی .... $\bigcirc$

نیمی یا قطر........ $\oslash$

کونج .... $\angle$

د دوه کرښو g او h ترمنځ کونج $\angle(g,h)$

کرښه، له A و B ته .... $\overline{AB}$

له A و B ته لوریزه کرښه.... $\overrightarrow{AB}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیندہ.................... AB

مطلقه ارزښت د .... |a|

ایماجینار یوون (واحد)....... i

د اویلرګڼ = ...2,7182818 e

پې د لودولف ګڼ π = ...3, 14149

د په لور هڅیږي یا کونورجنت کیږي ->

ناپای.................... œ

د x فنکشن یا په واك چې بلواك مو بللی f(x)

(لوستل یې (f د x یا د f, x لنډ : fx)

د x څیرونه په f(x) : لیکو: f(x) ⟵ x   f: x →

دلته h د x فنکشن، g د x فنکشن h(x); g(x)

لیمس یا پوله............... lim

	ساین	sin
تریګونومتریکي	کوساین	cos
بلواك	تانجنت	tan
	کوتنجنت...........	cot
	ارکوس ساین.........	arc sin
څیکلومتریکي	ارکوس کوساین	arc cos
بلواك	ارکوس تانجنت	arc tan
	ارکوس کوتانجنت.....	arc cot

لوګاریتم و بنسټ a ته $\log_a$

لوګاریتم و بنسټ ۱۰ ته $\lg_{10}$

دیکادیکي لوګاریتم.....

لوګاریتم و بنسټ e ته ln

طبعي یا پیدایښتي لوګاریتم

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس ګڼونه........... $\mathbb{C}$

رییلګڼونه .... $\mathbb{R}$

ټولګڼونه .... $\mathbb{Z}$

نامنفي ټولګڼونه یا

طبعي ګڼونه د صفر سره $\mathbb{N}^*$

طبعي ګڼونه .... $\mathbb{N}$

تعریفډیرې .... $\mathbb{D}$

ارزښتډیرې........... $\mathbb{W}$

حلډیرې .... $\mathbb{L}$

د ډیرې A پوتنځډیرې $P(A)$

ډیرې............. M,N,A,B

تشډیرې .... $\emptyset$

برخه ډیرې...........

پورته یا لویډیرې (چې بل ډیرې خوندې لري)

ټولنډیرې............ $\cup$

غوځډیرې .... $\cap$

د A کومپلیمنت ..... $CA\ ,\ A'$

د ډیریو ورته والی ...... $A\sim B$

د ډیریو ځل.......... $A\times B$

لوستل B اتیران A یا - ځل -

توپیرډیرې : A بې له B ده $A\setminus B$

دلته: a د b پرویشونی ده یا b a ویشي $a\mid b$

د a او b غټ ګډ په ویشونی (لنډ : غ ګ و) $ggt(a,b)$

د a او b کوچني ګډ زیاتځله (لنډ : ك ګ ځ) $kgv(a,b)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته : a د M توکی دی .... $a \in M$

او a د M توکی نه دی .... $a \notin M$

ټولنخښه (د ټولو x لپاره باور لري) $\forall$

د موجودیت نخښه: یو x موجود دی $\exists$

کونیونکشن A او B لیکو $A \wedge B$

دیسینکشن A یا B لیکو $A \vee B$

(کله کله الترناتیو)

ایمپلیکاشن: له A څخه B لاس ته راځي $A \Rightarrow B$

نیګیشن یا نه والی $\neg$

د A او B ویناو ورته والی یا اکویوالنت $A \Leftrightarrow B$

له A څخه B لاس ته راځ او له B څخه A لاس ته راځي.

ماتریکس......... A نورو کتابونو کې $\|A\|$

دیترمینانت $|A|$

د a څخه n–امه ریښه $\sqrt[n]{a}$

د x اکسپوننشلبلواك

د n – فاکولتیت یعنی $n!=1.2.3....n$ $n!$

بینومخلوونی $\binom{n}{p}$

لوستل: n په p باندې

له a تر b واز اینتروال $]a,b[$

$= \{ x \mid a < x < b \}$

له a تر b بند اینتروال $[a,b]$

$= \{ x \mid a \leq x \leq b \}$

کیڼ واز اینتروال $]a,b]$

$= \{ x \mid a < x \leq b \}$

ښي واز اینتروال $[a,b[$

$= \{ x \mid a \leq x < b \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زياتون نخښبه (سيګما) $\sum_{i=1}^{n}$

که د زياتوننخښبه داسی وي

لوستل: له $i=1$ تر n پورې

څلنخښبه (پي) $\prod_{i=1}^{n}$

که داسی ليکل شوي وي

لوستل: له $i=1$ تر n پورې

پرموتيشن يا بدلون

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ ۰ د شمیرپوهنې سم اند (د ریاضیاتو منطق (logic))

سم اند (سماند) یا منطق (logic یونانی کلمه ده، چې اند(فکر) یا وی(لغات) ته وایی).

د وینا د ټیک یا کره فرمولولو لپاره د سم اند(منطق) څخه کاراخستل کیږي د فورمال سم اند، د سم اند پوهنی بنسټ، د فکر ډول او فکر کولوقوانینو په څیر یې څیړنه د اریستو تلس(۳۸٤ تر ۳۲۲ ز۰ ک۰ ا)) له خوا کینبول شوې۰

د ریاضیاتو منطق(د شمیرپوهنی سم اند) د شمیر پوهنې د یوې برخی په څیر پرمختګ یا وده وکړه۰ سم اند د شمیرپوهنی بنسټ دئ او د شمیر پوهنی په ټولو څانګو کی ننوتی۰

یادونه : سم اند په خپله خته کې په فلسفه پورې تړلی مسلک دئ نو له دې امله دا لیکنه د ټولو مینه والولپاره په زړه پورې خوندیونې(متن) لرودئ شي۰ هیله ده، چې ګڼ هیوادوال به یې وګوری او کمي به یې راپوره کړي، دلته او یا په ځانله لیکنه کی۰

۱ .۰۱ پوهنیزه ژبه او پیداینتي- یا طبیعي ژبه

اند (فکر) او ژبه یو له بل سره داسې تړلي، چې بیلیدنه یې ناشوني ده. په ورځني ژوند کی انسانان خپل اند یا فکر په طبیعي ژبه څرګندوي، مګر دا د مسلکي ژبی په څیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهنی(علم) لپاره بسیا نه کوي، ځکه چی د ځنو لغاتو مانا کره یا ټینګه نه ده ټاکل شوی، دا په دې مانا، چی په طبیعي ژبه کی یو لغات بیلی بیلې ماناوي لري لکه لور(د ریبلو لور) او لور(په کومه لور) او یا څو لغاتونه ، لکه شلغم، ټیپر او منګریتې، چی همغه یو څه یا شی په ګوته کوي.
په مسلکی نومونو کې یو څوترمینولوجي(Terminology لاتین، یونانی): په یوه مسلک کی شته(موجود دي) د مسلکي لغاتونو ټولګه او په همدې توګه د هغوي بنوونه ، منځ ته راوړل کیږي، چې د کلمو موخور(هدفمند) کره یاکلک ایښوولو (ځای پرځاي کولو) د نورمي ویناو استعمال او د هغوي او د ورځنی ژبی ویناودد څخه ګټه اخلي٠

په دې ډول په شمیرپوهنه یا ریاضیاتو کی هم یوه پوهنیزه ژبه منځ ته راغلې، چی له پیدایښتي یا طبیعي ژبې او یوې ځانګړی ترمینولوجي سره یوځاي شوې یا په بل ډول : د پوهنیزې ژبی او یوې ځانګړي ترمینولوژي ټولګه ده٠

له دې امله شمیرپوهنه په یوه لوړه کچه ټیکوالی(Exaktheit) ، په یوه لنډ، روښانه ، څرګند او له دې امله یو لیدوړ « وینا ډول» درلودی شي٠

شمیرپوهنه او سم اند یا منطق دواړه دیوې سمبولیک ژبی څخه د کارونی یا استعمال کار اخستی شي. د لغاتو په ځاي نخښی ایښوول کیږي، چی مصنوعي منځ ته راغلي او په ځانګړو ماناو سمبال دي٠

د شمیرپوهنی پوهنیزه ژبه کې غوښتنه داده، چې باید په کلکه او روښانه توګه د ریښتونو (Realität واقعیتونو) شیانوObjects ، د هغو شمیرنیزو څیرو او د دې لپاره پیدا یا منځ ته راغلو نخښو ترمنځ توپیر وکړي. شیان له انسانانو احساسیږي، د یوه ذهنیت (Abstruction ابسترکشن) له لارې په یوه کلیمه څیره (متصور؟) کیږي. او شته والی یې د یوې نخښې جوړښت construction ممکنوي. څیره کوونه یې د شمیرنې شیان دی او یوه «نخښونه» غوره کوي، چې دیوه نوم اوزیات وخت د یوې نخښې په څیر ځان نیسي، د بیلګې په توګه : لکه هر طبیعي ګڼ(عدد) د یوې نخښې داسي په نامه د عددنخښې (ګڼنخښې) له لارې انځوریږي. دا نخښه څیفر Ziffer یا ګڼنخښه(عددنخښه)، چې عربې همغۀ صفر دی, بلل کیږي. داسې نخښوني دبنسټیزو نخښۀ څخه منځ ته راغلي. په درسي ځاي سیستم کې بنسټیز څیفرونه یا ګڼنخښې په لاندی ډول دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ .

۱ ۰ ۲ د شمير پوهنى سم اند بنسټيزې کلمې

۱ ۰ ۲ ۰ ۱ ثابتی، متحولې او ترومونه(۱)

Constants, variables, terms

په شميرپوهنه کې شيان ، د شيانو ترمنځ اړيکې او د شيانو تړنې په نخښو(سومبولونو) انځوريږي.

۱ – شميرپوهنيزې نخښې

- د ثابتو(تل همغو) لپاره نخښې (علامې): دا د يوه کره ټاکلې مانا لپاره نخښې دي يانې تغير نه خوري، لکه ۷ ، ۱۲ ، π ، e, او داسې نور

- د اووښتونو يا واريابلو(متحولو) لپاره نخښې: دا د يوې ورکړ شوې ډيرى يا سټ (په ډيرى پوهنه کى روښانه کيږي) داسې په زړه پورې توکى لپاره يوه نخښه ده، کومه چى د اووښتونويا متحولو بنسټيز يا-ډيرى بلل کيږي، دا په لاتين تورو په نخښه کيږي او کله کله په اندکس(ز۰ ايندکسونو) يا پيژندنخښه index (ز۰ پيژندنخښې Indices) چې ايندکس د تورو پينو ته راځي په نخښه کيږي۰

لکه: $a_1; a_2; b_i; i = 1,2,3 \ldots$

- اړيکنخښې : دا د شيانو اوګڼونو يا اعدادو ترمنځ د اړيکو نخښې دي لکه $<$, $>$، $=$, $\leq$, $\geq$,

- د نښلونو،کارونو، تړنو يا عمليونخښې : لکه زياتون-(جمعه)، کمون-تفريق-) ، ځل-(ضرب-)، او ويش -يا تقسيم نخښې: / ، : +, -, *

(c) ketabton.com: The Digital Library

- تخنیکي نخښی : لکه سیمیکولوم (,, ,,)، نوکان ( ) او نور ډولونه یې او کوما ،

د نخښو لړی : که نوکان، واریابلی(اووښتونې), ثابتی او د هغوي يوځاي ايښودل د اړیکو- ، نښلونو- ، او تخنیکی نخښو يوځاي ايښوول موخه ور یا هدفمند یو په بل زیات شي، نو یوه د نخښو لړی ترې منځ ته راځی٠

(۱) ثابتې((تل) همغه یا تل همغه، همغه ارزښتیزې) ،

متحولې :اوښتونی یا اوړیدونی یا واریابلې او ترمونه

بیلګه :

الف : د 3.(1 + 2a) – a + 144 یوه د نخښو لړی (ترادف) ده

ب : 3a – 6= 11x).(12 – b) ، دا د نخښو لړی نه ده، ځکه چې د نخښو لړۍ موخه وره یا هدفمنده نه ده ایښوول شوې، د برابرنخښې پسې نوک نه شته، دا په دې مانا، چې له دې څخه څه نه پوهیږو.

۲ - ترمونه terms, Termen : که په یوه لړۍ کې، یواځې ثابتې (همغه)، اووښتونې(متحولې، واریابلې) نښلونې او تخنیکي نخښې کارول شوې وي، یانې اړیکې نه وي کارول شوي، نو دې ته ترم ویل کیږي. هر یو ترم پورې که واریابلی ولرې پیژنددیرۍ یا تعریفستې هم اړه لري، دا د داسي اووښتونو یا متحولو اصلی بنستستې یوه برخدیرۍ او یا هغې سره برابر برخه سټ یا - ډېرۍ ده، په کوم کې چې د ترم ارزښت بیرته د بنسټډېرۍ توکی دی. د ترم ارزښت شمیرل کیدی شي، که د مخه ټاکلشوې نارونې یا عملیې اجرا شي، که چېرې اووښتونې یا واریابلې د پیژنددېرۍ د توکو نخښونه غوره کړي. دا په لویو لاتین تورو(اکه: $(T, T_1, T_2$ په نخښه کیږي. که ترمونه اووښتونې ولري، نو د اووښتونو یوه ورزاته نخښه په نوکانو کې نیولکیږي، لکه :

T(x); T(x,y)

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : ترم 3/4 + 126 ، چې اووښتوني یا متحولې نه لري په T سره په نخښه کوو او

لیکو: $T=126 + 3/4$ یا $T = 126 + \frac{3}{4}$

ب : ترم 2x + 10 چې اووښتوني یا متحولې x لري یاني T(x) = 10 + 2x ۰ د
اووښتونو بنسټيزې یا ـدېرې دې یا د طبیعي اعدادو ډیرۍ N° وي

تعریفډیرۍ د بنسټیزې سره برابره ده، که په ترم کې د اووښتوني یا واريابلی x پۀ ځای

یو پیدایښتې ګڼ یا طبیعي عدد 2 کیږدو، نو د ترم ارزښت دی : T(2) = 14

پ : (x+2y)/x یا $\frac{x+2y}{x}$

ترم دی چې دوه متحولې لري او په T(x,y) سره یې په نخښه کوو ۰ د اووښتونو یا
متحولو بنسټيزې دې د پیدایښتي یا طبیعي اعدادو سټN وي, نو د x لپاره تعریفډیرۍ
N° ده۰ د y لپاره N (پیدایښتی ګڼونډیرۍ N° تعریفډیرۍ لپاره ترم نه دی تعریف
یاپیژند نه لري)

د x = 0 لپاره ترم نه دی تعریف یا پیژند ند لري

د ترم T(x,2y) = (x,y) /x یا $T(x,2y) = \frac{x+2y}{x}$

ارزښتشمیرنه د x=2 او y= 3 لپاره په دې ډول ده :4 = 2 / (2+6) = T(2,3)

یادونه: د ګڼونو لپاره دې دریمه او څلورمه برخه وکتل شي، چې هلته ګڼونډیرۍ ورکړ
شوي دي۰

Aussage وینا ۲۰۲۰۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې انسان د خپل چاپیریال د ټولو شیانو او پیدایښتونو سره لاس په ګریوان دی، نو پوښتنې او هیلې رامنځ ته کیږي،غوښتنې لري او ویناوې کوي، په کومو ویناو کې،

چې شیان او ریښتونی(واقعیتونه) بیرته هنداره (منعکس) کیږي یا په یوه څه یا شي، چی وینا کیږي، نو موخه ترې د هغه څه ریښتون حالت یا ځاننیونه ده٠ یوه وینا په واقعیت کې ټیک هلته ریښتیا ده، کله، چې په هغې کې شي حالت یا بهتره شي ځاننیونه په ریښتونې شته یا موجود وي، په بل حالت کې دا وینا ناریښتیا (غلطه) ده. موږ نیسو، چې دا څه دې په شمیرپوهنه کې کره ټاکلي وي او پریکړه دې پرې کیدی شي٠

پژند(تعریف) ۱ ٠ ۱ :

وینا د یوه شی ، څرنګوالي (چې ځنګه دی)، د هغهٔ بیرته هندارونه یا منعکسونه ده٠ (دا په دې مانا، چې وینا یو شی په وینا کې همهغسی ښایي لکه ځنګه چې دی له دې امله شي هندارونه یامنعکسونه)، چې د ژبی له لارې وړاندې کیږي یا په همدې ډول په نخښه کیږي٠

یا په بل عبارت وینا د کلیمو داسې هدفمند یوځایوالی یا یوځاي اینوول دي، چې د یوه شی حالت (ځاننیونه) یا شکل او د شیانو ریښتونې اړیکی بیرته هنداره یا منعکسوي او موخه وردی، چې د هغه دریښتیاوالي پوښتنه رامنځ ته کړای شي٠

یا په بل ډول :

د وینا لاندې سړی یو ژبنی یوون، یا یووالی (واحد unit ,Einheit)پوهیږي، کوم چې د شي اړیکی (د شي څرنګوالی) بیانوي٠ دلته دا مهمه نه ده، چې دا وینا په کومه ژبه، په پیدایښتي (طبیعي) او که په مصنوعي ژبه ویل شوې (افاده شوي) دا هم غوره نه ده، چې دا وینا د طبیعي پوهنو لپاره ده، د هوا حالاتو لپاره او که د بازار د نرخ لپاره ده٠

په بل او ورځني ډول: یوه وینا یوه جمله ده یا فرمول دی، چې یا رښتیا او یا نارښتیا ده٠ داسې هم ویل کیږي، چې وینا یو «رښتیاارزښت » ،، رښتیا یا نا رښتیا ،، لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعنې : د شمیرپوهنې سم اند لپاره پریکړی د وینا « ریښتیا ارزښت»(ربښنتیا یا نارښتیا) دی. نور خویونه په راتلونکی کې نه څیړل کیږي.

ویناوې د لاتین په لویو تورو A , A* په نخښه کوو او داسې نور.

۱ . ۲ . ۳ د دوه ارزښتوالی اصول یا پرینځیپ جمله

هره وینا یواځی یو ممکن « ریښتیا ارزښت» لرودی شي، دا په دې نامه، چی وینا یا ریښتیا ده او یا ناریښتیا. (د دریم نه والی اصول یا پرینځیپ).

دا په دې ماناو چې ددې دوه ارزښتونو تر منځ بل ارزښت ناشونی دی. دوه ارزښتوالی او د دریم نه والی باید سره بدل نه شي.

که یوه ژبنۍ افاده یا وییه د وینا په څیر ترتیبوو، دا بیا دلته ارزښتناکه ده، چی د ویناارزښت حتمآ باید څرګند یا معلوم نه وي. که بالاخره ټوله پوهنه د ربښتیا لور غوره کړي وي، بیاهم موږ څرګند ژبنیو موادو ته اړ یو، چی د هغه شي حالت (ځاننیونه) افاده کړاي شو یا وویلی شو، د کومو په شته والی یا نه شته والی، چی پریکړه وشي.

ټولې ویناوې له دې امله په دوه ټولګیو یا کلاسو ویشل کیږي، د رښتیا ویناو ټولګی او د نارښتیا ویناو ټولګی یا کلاس(صنف).

که وینا ریښتیا وي، نو ریښتیا ارزښت یې ریښتیادی او په w سره یې ښایو، که وینا ریښتیا ارزښت ناریښتیا ولري ، نو په f یا،، نه،، یې ښایواو وایو، چې د وینا ریښتیا ارزښت ناریښتیا دی

تکرار : هره جمله، چی « ریښتیا ارزښت» (ریښتیا یا نا ریښتیا) ولري، وینا بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

شميرپوهنيز سم اند(منطق) د ويناو سره سر او کار لري..

بيلګې:

غونډاله (جمله)

الف : » د کابل سين د کونړ له سين سره ګډيږي«رېښتيا وينا ده٠

ب : 3 + 4 = 7 رېښتيا وينا ده

پ : » ٦ لومړنی ګڼ دی« دا نارېښتيا- يا ناتيک وينا ده٠(د اعدادو په برخه کې لومړني اعداد ياګڼونه کتلکيدی شي)

پوښتنجملی : » ته د څو کالو يې ؟ « نه شي کيدی يو رېښتيا ارزښت باندې تنظيم شي٠ له دې امله وينا نه ده٠

نورې بيلګې :

يناوې دي:

(دپيتاګوراس (فيثاغورس) جمله٠

د کاتيتونو يا د يو بل سره ولاړو يا عمودو اړخونو يا ضلعو مربعګانو (څلوريو) زياتون(جمعه) د هيپوتينوزې(اوږده اړخ قايمې زاويې ته مخامخ ضلعه يا قطر) د څلورۍ يا مربع سره برابر دۍ.

نورې بيلګې :

سرک لوند دۍ

ټول سپي خطرناک دي

3 > 5

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې که یو کاربن له دوه اکسیجنه سره یوځاي یا زيات شي، نو کاربن دوه اکسيډ CO_2 وښايي

د دي پرڅېړ یا مخامخ یا پر خلاف یا برعکس : ويناوې نه دي:

د کابل ښار ;NaCl ; لمده کوڅه

د افغانستان د خلکو ژوند په ديرش کلن جنګ کې

لاندې ويناوې

کيميا یوه طبيعي یا پيدايښتي پوهنه (علم) ده

۷ پر دريو بی له پاتې (باقي) نه ويشل کيږي

د وينا «ريښتيا ارزښت » ريښتيا لري

لاندې ويناوې

برلين یو کوچنی ښار دی

3 < 5 پنځه له دريو کوچنی دی

ټول لومړني اعداد یاګنونه ناجوړه (طاق) دي

کابل د کونړ پر سين پروت دی

هره یوه له دې ويناو « ريښتيا ارزښت » نا ريښتيا لري

نومه ونې: پورته مې د جفت لپاره، چې ورسره بلد یو جوړه وليکه، نو طاق ته ناجوړه وايو ۰

په لاندې کې به وڅېرو، چې ويناوې شته، چې نورې ويناوې د خپلې برخې په څير په ځان کې خوندې(لنډ : خوندي) لري۰ داسې ويناوو ته یوځاېشوې یا یوځای ايښول شوې یا ځنځيري ويناوې وايو او که غواړئ ! مرکبې ويناوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره بيلګه راوړو » کۀ د کوم ګڼ(عدد)a پروت زياتون يا پرته جمعه په 3 ويشوړ وي، نو داعدد يا ګڼ په 3 ويشوړ دی، يانی که عدد 1521 ولرو ، نو د دې عدد پرته جمعه 1+5+2+1=9 په 3 ويشوړ ده له دې لاس ته راځي، چی پخپله ۱۵۲۱ هم په 3 ويشوړ دی٠

که کومه وينا په داسې ويناوو ويشوړ يا ټوټه کيدونکې نه وي، نو دې ته بيا ساده وينا ويل کيږي٠

لکه : سپين غر يوه خورا جګه څوکه لري

يوه بله بيلګه د يوځای شوې(ځنځيري) وينا لپاره

سپينغر خورا خواريکښ دی، هغه په دې پوهيږي، چی نور کار ته وهڅوي٠

څرګنده ده، چی دواړه ساده جملې د برخويناو په څير يوځاي شوي ويناوې دي: » سپينغر خورا خواريکښ دی« همدا ډول » هغه (سپيغر) پوهيږي، چی نور کارته وهڅوي«٠

دا ويناوې کيدی شي په نورو ډولونو هم يو له بل سره داسې وتړل شي، چې رښتياارزښت يې همغه پاتې شي٠

د بيلګي په توګه:

۱ - سپينغرخورا خواريکښ دی٠ يا هغه پوهيږي، چی نور کار ته وهڅوي

۲ - ځکه، چی هغه پوهيږي، نو کار ته وهڅوي، نو سپينغر خورا خواريکښ دی٠

۳ - دا چی سپينغر پوهيږي، چی نور کار ته وهڅوي ، نو سپيغر خورا خواريکښ دی٠

٤ – سره له دې، چی هغه پوهيږي، نور کار ته وهڅوي، هغه خورا خواريکښ دی٠

ګورو، چی په دې ډول يو له بل توپيريدونکی تړلې يا ځنځيري، يا يوځاي شوی ويناوې جوړيږي، چی په خپله رښتياارزښت کی يو له بل توپير کيدیَ نه شي٠ د دوي توپير د

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوي یو له بل سره تړلو ځرنګوالي له لارې مخ ته پروت دئ یا رامنځ ته شوی دئ٠ په لاندې کې به ممکنه« ویناتړنه» (یا نورهم ښه: ویناځنځیرونه) تر څیړنې لاندې ونیول شي.

پیژند ١ ٠ ٢ :

یوه «ویناتړنه» یا یو «ویناتړاو» (نوره هم ښه: «زنځیرونه») داسې ژبنۍ ویینې(افادې) دي، چې د هغوي په مرسته له یوې یا ډیرو ویناو څخه نوې ویناوې جوړیدی شي.

موږ د سم اند یا منطق سټیرینځیپ په لاس ته راوړنو سره ځانونه په داسې ویناو رابندوو، کومې چې داسې جوړې وي، چې رینتیا ارزښت یی یواځی او یواځی د «برخویناو» رینتیا ارزښت په واک کې وي٠

بیلګی

الف: سپین ډیر خواریکښ دئ، هغه په دی پوهیږي، چې نور کار ته وهځوي٠

ب : سپین یا راځی او یا لوبه نه کیږي٠

پ – د فوټبال په لوبه کې نه دباندې رفري او نه دننه رفري فاول یا ناسمي ولید٠

١ ٠ ٢ ٠ ٤ ویناتړنه یا وینابلواک (- فنکشن یا – تابع)

د ویناتړنو (عملیو)په هکله مو پورته بیلګو کې ولیدل، چې که څوک د تړنو لپاره « او » او یا « سره له دې» ونیسي تل یوه یوځاي شوې وینا منځ ته راځي. دا وینا هلته او فقط هلته رینتیا ده، چې دواړه «برخویناوې» رینتیا وي. دلته د خبرو پرځاي غواړو «رینتیا فنکشن یا رښتیا تابع» وپیژنو. موږ پریکړه کوو، چې د په زړه پورې ویناوو (ویناواریابلو یا وینا اووښتونو(وینا متحولو)) لپاره سومبولونه ...,p,q,r او یا ا ، ب پ، وکارول شي یا استعمال شي. موږ دا غواړو ساده پیل کړو، یانی د یوه یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځاینیونکی(یوځائیز یا یوګوني) بلواک یا فنکشن او که همغه پخوانی ډول تابع مو ښه راځي، له تابع څخه.

یادونه: د بلواک یا تابع کلمه وروسته څېړل کیږي، دلته د بلواک یا فنکشن پرځاي ویناترنه یا عملیه بسیا کوي. دا ځنی ویونه(لغات) ستونځی لري، چی د ښونځي زده کوونکي یې هغه ساده ډول فکر ته رابولم او د لوړو زده کړو خاوندانو ته دا کومې ستونځی نه لري.

نه والی(نفی)Negation

د وینا تړاو یا ویناترنی(عملیې) «نه والی»: دیوی ویناP نه والی هغه وینا ده، چې هلته او یوازې هلته د رېښتیا ارزښت ناریښتیا لري، چیP ریښتیا ارزښت رېښتیا ولري.

موږ د وینا P نه والی نفی په Pنه سره ښایو ، شمیرپوهنیزه نخښونه یې په لاندې توګه ده ¬p په یوه جدول کې ریښتیا فنکشن یا ریښتیابلواک کې داسی څرګند وو(دا چې زه کله کله هغه شمیرپوهنیز سومبول د نه p لپاره ¬p نه شم لیکلی، نو دا به همغسې p نه ولیکم.

P	¬p نه یا Pنه
w	F
f	w

د یوې وینا P تکرار نه والي یا بیا نه والي لاس ته راوړنه، لکه چې لاندې یې ګورو، هم خورا څرګنده ده .

p	¬p	¬¬p
w	f	w
f	w	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه واره نه والی د همغږي لومړنۍ وینا ربښتیاارزښت لري

په پیداینښتي ژبه کې نه والی په«نه» یا « نا » خپل ربښتینوالی مومي٠ «اباسین هغه خپل ټاکلی وخت ته را نه غی٠ دا د اباسین خپل ټاکلي وخت ته راغی « نه والی» دی٠

نه والی ته بیلګه : د وینا ¬A نه والی : "7 < 3 " وینا نهA ده: دا چی A ربښتیا ده، نو ¬A نا ربښتیا ده٠

ترنه(عملیه) یا کنجنکشن Conjunction (لاتین: ترنه، دلته د « او (and)» ترنه یا تړاو):

وینافورم یا – بڼه:

د وینا په څېر یا - مخامخ یا - برعکس وینا بڼه ربښتیا ارزښت نه لري، د وینافورم یا – بڼې لپاره بیلګې دي لکه پوښتنې، امرونه او نظرونه یاعقیدې:

۱ – هوا څنګه ده ؟

۲ - کورته لاړ شه

۳ – شین یو ښه رنګ دی٠

که په ترمونو کې، چې واریابلی یا اوښتونې لري، اړیکنښی ولیکل شي، یوه وینابڼه منځ ته راځي٠ یوه د نخښو لړۍ کم له کمه د یوې اووښتونې یا متحولې د بیلګې په توګه

3 + x <5 د بنسټیزورشو N کې نه ریښتیا ده او نه ناریښتیا٠ دا له دې امله وینا نه ده٠ که چیرې د واریابلې یا اووښتونې یا متحولې پر ځای ٠ او ۱ ولیکل شي، نو بیا یوه ربښتیا وینا ترې منځ ته راځي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې په ځاي يې نور د پيدايښتي ګڼونو توکی ځاي په ځاي شي، نو بيا ناريښتيا ويناوې منځ ته ترې راځي٠

دا چی اووښتوني یا متحولې د بنسټيزي یا بنسټ سټ ځخه په خوښه توکی اخستلی شي، نو له دې امله دا اووښتوني د خپلواک یا ازاده اووښتوني(متحولي) په نامه یادیږي٠

پیژند :

یوه وینابڼه د نخښو لړی ده، چې کم له کمه یوه خپلواکه اوښتوني(متحوله) لري او د

- د دې اووښتوني په ځاي د بنسټيزې ورشو یا ساحې او یا
- د دې اووښتوني تړلو ځخه د کوانتیفیکاتورونو(کوانتورونو) په مرسته یوه وینا جوړیدی شي.

یادونه :

که په لاندې کې د تړاو یا تړني کلمه منځ ته راځي، نو موخه ترې د « او » تړنه یاکنجنکشن conjunction دی٠ له ګرامر سره په توپیر، چې هلته تړنه یا تړاو یو « تړونتیکی، تړاولغات» ښايي په سم اند کې تړنه یو ځرګند(دوه ځایلرونکی یا دوه ځاییزیا نوره هم ښه دوه ګونی) جملې تړل یا په بل عبارت دوه ځاینیونکي (نوره هم ښه : دوه ییز یا دوه- ګونی) فنکشن یا تابع(بلواک) تعریفوي یا پیژنی٠

د « او» تړنه او نخښه یې $\wedge$

پیژند ۱ ۰ ۳ :

$p \wedge q$ دوه ويناوې p او q يانې د «او » يوځايوالیp او q يواځې او يواځې هلته يو رښتيا ارزښت رښتيا لري، چې p اوq دواړه رښتيا ارزښت رښتيا ولري٠ که له دې ځخه يوه وينا هم نارښتيا وي، نو بيا د « او » تړنه نارښتيا ده ٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترني نخښنه ددوه ويناو qاو p ترمنځ ليکل کيږي p∧q او ويل کيږي p اوp

موږ د « او » ترنه په لاندې جدول کې روښانه کوو يا انځوروو:

يادونه: په لاندې کې w رښتيا او f نارښتيا په معنا دي

p∧q	q	p
w	w	w
f	f	w
f	w	f
f	f	f

د « او » ترني ته بيلګه :

د دوه رښتينو ويناو د A وينا : ,, 7 > 3 ,, او د B وينا : 3 يو لومړنی ګڼ دی رښتيا وينا A ∧ B ده « ۳ له ۷ کوچنی او لومړنی ګڼ هم دی»٠

يادونه: موږ ګران لوستونکي به سره يوځاي فکر وکړو، چې دا پريمګنونه لومړي او که لومړني ګڼونه وبولو٠ زه فکر کوم، چې لومړي ګڼونه لومړنی نه دي٠ دا ځکه لومړي ګڼونه دي، چې له دوي له زياتون او يا کمون څخه لومړی ګڼونه جوړيږي٠ موږ به يي زياتون په پام کې راولو، چې : 3+5=8

د دوه ويناو دا ترنه يا کنجنکشن، چې مختلف رښتياارزښتونه ولري ياني د A وينا: 3 ,, 7 > ,, (رښتيا او د B وينا: « ۳ يو جوړه ګڼ دی (نارښتيا)، نو A∧B وينا : چې ۳ له ۷ کوچنی دی او جوړه ګڼ دی « (نارښتيا) ده٠ دا ويناترنه ويناارزښت نارښتيا لري٠

د دوه ويناو د « او» ترنه دA وينا: 7 > 3 او د B وينا « ۳ يو جوړه ګڼ يا جفتعدددی» يوه نارښتيا وينا ده : ۳ يو لومړنی ګڼ دی او له ۷ لوي دی٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

ومو لیدل، چی د « او » ترنه او یا کنجنکشن په ورسره بلده (عادې) توګه هلته جوړیږي، چې دوه ویناجملې په «او» سره وتړل شي:

غوتې «پټیدځاي» پیداکړ او دا پټیدنه یې پټه وساتله»۰ کیدی شي له «مګر» « سره له دې هم» « په همدې ډول » ترنه وویله – یا افاده شي۰

پورته ډول ، د بیلګی په توګه: په پټپټکي کې « که سپین پټ شي او هوسۍ د هغه د پټیدو ځاي پیدا کړي او دا چاته ونه ښایي»، نو داسې وایو « او » یا « هم »

هوسۍ د سپین د پټیدو ځاي پیدا کړ« او » دا پټیدځاي یې پټ واسته۰

۱) هلمند موړ(بډا) شو او هیواد یې پریښود ۰

۲) سره له دې، چی برلین کوچنیښار دیهلته د منی د المپیک لوبې کیږي

۳) ۱۵ ګڼ جوړه دي، د هغه پروت زیاتن په ۳ ویشونیدي

په ټولیزه توګه د « او » ترنه هلته رښتیا ارزښت رښتیا لري، چی د جملی ټولی برخې رښتیاارزښت ریښتیا ولري، اړین نه ده، چې نظم په پام کی ونیول شي۰ په وینا ترنه کې کیدی شي زیاتې وینابرخی سره په ترنه « او » وتړل شي لکه « هغه راغی، ویې لیدل او بری یې په برخه شو»

پیژند ۱ ۰ ٤ :

د« یا(or)» ترنه یا دیسجنکشن Disjunction (لاتین: ټاکنه یا پریکړه) Alternative الترناتیو یا د » یا « ترنه» دا په « یا » بیرته ورکړ شوې «جمله ترنه» تل ژوروالی ته راهڅوي: باید جوته شي، چی ترې تیریدنه یا صرف نظر په نه کیدونکی اوکه ترې نه تیریدونکی « یا » موخه ده۰ د دیسجنکشن یا د «یا»ترنی پیژند یا تعریف یواځنی دي او دا \/ د یا ترننخښه ده.

د دیسجنکشن نخښه د دوه ویناو p او q ترمنځ ځایول کیږي p\/q او ویل کیږي p یا q او

په لاندې ډول څرګندیږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

p	Q	p∨q
w	W	w
w	f	W
f	w	w
f	f	f

له دې پورته جدول څخه پوره جوتيږي، چې ديسجنکشن يا د « يا » تړنه p∨q يو داسې رښتياتابع (-بلواک يا- فنکشن) دئ، کوم چې هلته او هلته رښتيا فنکشن رښتيا اخلي، کله چې کم له کمه د « يا » تړنې يو غړی د رښتيا ارزښت رښتيا ولري يا واخلي٠ که د ديسجنکشن دواړه غړي نارښتيا وي نو p∨q هم نا رښتيا دئ٠ دا د رښتيا فنکشن کې د ځايونې « يا» څخه بل څه نه دي٠ يوه د «نه خونديکونې» يا « نه ځايونې» يا « په برکې نه نيونې» د « يا » وييڼه يا افاده ده، چې دا په نورو ژبو کې په بل ډول مګر په پښتو کې « يا٠٠٠ او يا ٠٠٠» ليکل کيږي٠

بيلګه (د « يا » تړنې ته):

د دوه رېښتينو ويناو د « يا» تړنه د A وينا: ,, 7 < 3,, اود B وينا: « ۳ د ٦ پرويشونی دئ» يوه رښتيا وينا A∨B ده : «۳ له ۷ کوچنی دئ او د ٦ پرويشونی هم دئ»٠

د دوه ويناو تړنه، چې مختلف ارزښتونه لري.

د A وينا ,, 7 < 3 ,, رښتيا او د B وينا: ,, 7= 3 ,, (نارښتيا) ، نو A ∨ B ده، چې 7 < 3 يا 7 = 3 دا وينا تړنه د رښتيا ارزښت رښتيا w لري٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه نارښتيا ويناو د « يا »(" Or") تړنه:

د A وينا : "7 > 3 " او د B وينا: ۳ یو جوړه ګڼ (جفتت عدد)دئ یوه نارښتيا وينا A∨B ده:

« ۳ له ۷ لوي او نا جوړه ګڼ (طاق عدد)دی»

الترناتيوAltenative يا انتيوالنځ Antivalenz ويناوې : دا د » يا « ويناتړنه بايد د « يا ... او يا سره بدله نه شي، ځکه چې دا هلته هم نارښتيا ده، که چيرې دواړه ويناوی رښتيا وي.

بيلګه : (دوه الترناتيو ويناو ته ، چې رښتيا وي)

د وينا 7 > 3 او« ۳ یو لومړی ګڼ دی» د الترناتيو په نامه داسې دئ « ۳ يا له ۷ کوچنئ دئ او يا يو لومړی ګڼ دی» نارښتيا دئ.

بيلګی : (نه والي، کنجنکشن، ديسجنکشن ته)

يادونه: په لاندې (Wahr) w د رښتيا او(Falsch)f د نارښتيا لپاره کارول شوي.:

ويناتړاو

A	π پي تولګڼ دئ	f
B	π ايراشنل ګڼ دی	W
C	صفر له پي π کوچنی دئ	W
D	π پي له دری کوچنی دئ	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

W	π ټولګڼ نه دی	<u>A</u>
F	π کوچنی برابر له صفر	<u>C</u>
f	π ټولګڼ او له صفر لوي دی	A∨C
W	π ایراشنل او له صفر لوي دی	B∧C
W	πپي ټولګڼ یا له صفر لوي دی	A∨C
f	π ټولګڼ یا له ۳ کوچنی دی	A∨D

بیلګه : له دې بیلګی دمخه هغۀ فرمول دی

یا کتاب لولم او یا فلم ګورم٠ په دې بیلګه کی الترناتیو یا بدیل شته دی، یانې د » او یا « امکان شته٠ دا د » او یا « کارونه یا استعمال د خرڅلاو شیانو باندې باید بند وي٠ یانې دوه نرخونه باید ورنه کړای شي٠

دا لاندې فزیکي بېلګه ده، چې ګران لوستونکي دې پخپله هم ورته پام وکړي او ځیره دې یې په پام کې راولی٠ په شالت یا سرکت الجبر کې د کجنکشن یا د »او« ترنې« رینتینوالی لپاره دوه پرلپسی(لړی) شالتونه ترل شوي دي،

Bild 7.1

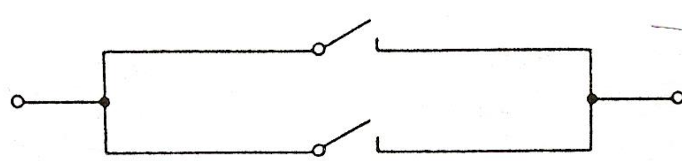


Bild 7.2

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس رښتیابلواک یا – فنکشنونه

دا وروستۍبیلګه په ګوته کوي، چې داسې یوځای شوې ویناوې جوړیدۍ شي، په کومو کې چې له یو زیات تړوني موجود وي٠

که دا ساده وینا که چې «په تیاتر کې نن لوبه کیږي» په p پس له دې جملې کمپلکس جوړخت دا نه تری تیریدونکی (رښتیا - بلواک یا رښتیا فنکشن » نهp∨ p دۍ٠ د دې لپاره هم د رښتیاارزښت فنکشن ورکول کیږي٠ د رښتیا ارزښت لپاره p له دې څخه نهp یا p نه (دا دواړه دې برابر ومنل شي) او بیا هم نهp∨p جوړیږي، چې جدول یې په لاندې ډول ورکړ شوی دۍ

د یوې وینا نه والی

p	Pنه	p∨pنه
w	f	W
f	w	w

لاس ته راوړنه یا نتیجه هکپک کوونکې نه ده یوه وینا نهp∨p تل رښتیا ده، بی له ځانګړې حالت او له دې خپلواک، چې p کوم رښتیاارزښت غوره کوي .

ویناسم اندیزې ویینې یا افادې، چې د هغې رښتیابلواک کټمټ یا identisch(identic) رښتیا دۍ(دا په دې مانا، چې که د ویناؤوښتونکې یا واریابلې ته هر رښتیاارزښت ورکړ شي یانې رښتیا یا نارښتیا تل د رښتیا ارزښت رښتیاغوره کوي)، وینا سم اندیزه قوانین بلل کیږي، یا ورته تاوتولوژي Tautologien

ویناسم اندیزې ویینې یا افادې، چې د هغو رښتیاارزښت بلواک کټمټ نارښتیا دۍ (دا په دې مانا چې د متحولې یا اووښتونې په هره وینا ارزښت وینا نارښتیا ارزښت غوره کوي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونترا-دیکتوریکي وینا بلل کیږي٠ورته ویناوې کونترادیکشنونه contradiction (د دوه ویناوو مخامخوالی یا – تضاد)

بیلګه :

ربښتیاارزښت دې د ویینې یا افادې نه(p\/q) لپاره وشمیرل شي په همدې وخت کې دې د نه$p\/q$ ربښتیاارزښت هم وشمیرل شي او له بل سره دې پرتله شي.

جمله : ښایو، چې $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$$
\begin{array}{l}
p...q....p \vee q....\neg(p \vee q)......\neg p...\neg q...\neg p \wedge \neg q \\
w...w......w.........f.............f.....f.........f \\
w...f.......w........f.............f......w........f \\
f...w........w........f............w......f.........f \\
f...f........f.........w............w........w.........w
\end{array}
$$

داچې د مخ ته پراته جدول څلورم او اوم درځ یو په بل پریوځي یا یو د بل سره برابر دي، نو ویېنې یا افادې $\neg(p \vee q)$ او $\neg p \wedge \neg q$ په څرګند ډول همغه ربښتیا بلواک یا –فنکشنونه دي. دا په دې معنا چې ،، جملې: دا نارښتیا ده، چې p یاq ،، او ،، نه q او نهp ،، همغه ربښتیا - (او په دې ډول همغه نارښتیا-) شرایط لري، که دp اوq په ځای بلې یوې لیدونکي جملې ځای نیولی وي. دا ډول دوه وینا تړاو -وینا تړنه) او تل همغه ارزښت ورکوي.

که په دې عملیو کې نوکان ځا په ځای شي، نو د عملیې ارزښت طبعاً همغه نه پاتیږي، لکه

د بې نوکانو عملیې.

ایمپلیکیشن implication (لاتین: ورراګډول، خورول):

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دوه ویناوې د خپل تړاو له لارې« که۰۰۰، نو سره تنظیم یا ترتیب شي ایپلیکیشن سومبول=> چې دا سومبول د دواړو ویناو Aاو B ترمنځ ولاړ دی: او دا مانا لري:

که A نو B یا په همدیډول «له A څخه B لاس ته راځي» وینا A ته پریمیس Prämisse (لاتین نیونه (فرضیه) وایي او وینا B ته کونکلوزیون Konklusion (لاتین: پاي لاس ته راوړنه) وایي۰ د دوه ویناو ایمپلیکیشن ټیک هلته نارښتیا دی، چې پریمیسس رښتیا او کونکلوزیون نارښتیا وي۰ په بل ډول رښتیا دی۰

د دوه ویناو لاس ته راوړنه یا تعقیب د لاندې جدول له لارې یواځنی څرگندیدی شي

د لاس ته راوړنې یا ایمپلیکیشن یا پسې راتلنی، په ځان پسې لرنې سومبول =>

P	q	p=> q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

دلته داسی یوه تړنه لرو، چې له دوه برخه ویناو A او B ټیک هلته یو نارښتیا یوځای شوې ویناچې په p=/>q سره ښایو)۰

کله چې لومړبرخه وینارښتیا او دومه برخه وینا نارښتیا وي په کمپیوتري یا پروگام ژبه کې داسی ویل کیږي: If….., then…..

کومې ژبنۍ افادې یا ویینې په دې رښتیا فنکشن بیرته اړول کیږي. بیرته یا په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځېدلی شي. په ښکاره ډول د بېلګې په توګه جمله: که پسرلی لوبه وګټي، نو ماښام د تلويزيون کتلو ته کورته راځي.

ناريښتيا ده، که د جملې لومړئ برخه رښتياوي او دويمه نارښتيا. که په جدول کې برخه جملو ارزښتونه لکه د بېلګې په توګه د جدول لومړئ همداسې ځلورمه کرښه سره يو د بل پرتله شي(که دواړه برخه جملې رښتيا همداسې نا رښتيا وي) پرابلمونه نه پيښوي، په دې حالت کې ټوله وينا رښتيا ده، که لومړئ برخه وينا نارښتيا او معکوس دويمه برخه رښتياوي، نو په دې حالت کې به د بېلګې په توګه جمله نارښتيا ونه ليدل شي(که پسرلی لوبه ونه ګټي او سره له دې هم تلويزيون ليدلو ته راشي)، نو بيا د دوه ارزښتوالي پرينځيپ له مخې يواځې دا ارزښت ،، رښتيا،، باقي پاتې کيږي. د پورته فنکشني پوره والي له مخې په ګوته کوو، چې هم $\neg p \vee q$ او هم $\neg (p \vee \neg q)$ ټيک بيرته بيا(بيرته) د ايمپليکيشن د رښتيا فنکشنونه ورکوي.

په بل ډول افادې يې: q که p، او يا هم p ، د q لپاره پوره کيدونکی شرط دی(په بل ډول يې: qد p لپاره اړيين شرط دی)

ورته والی :يوارزښتوالی(برابرارزښتوالی) Äquivalent

که دوه ويناوې qاو p خپله ترنه په » ټيک هلته ، که » په هم دې ډول « هلته او هلته، که» تنظيم کړي، دې ته ورته والی يا ايکويوالنت وايي. د ايکويوالنت سومبول دئ ≍ د دواړو ويناو pاو q ترمنځ دا سومبول پروت دئq ≍ p په دې مانا، چې p ټيک هلته که q . ايکويوالنت سومبول يې په دواړو خواو ايمپليکيشن لري: له p څخه q لاس ته راځي او له qڅخه p

د دوه ويناو ايکويوالنت ټيک هلته رښتيا دئ، که دواړه ويناوې رښتيا يا دواړه ويناوې نارښتيا وي.

دا شي ځرنګوالی يا شي حالت په لاندې جدول کې روښانوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

P⇔q	q	p
W	w	w
F	f	w
F	w	f
W	f	f

سیده او مخامخ یا په ځښ دي په دې مانا وي، چی له p څخه q لاس ته راځی او په ځښ، یا نی له q څخه p لاس ته راځی۰

۱ ۰ ۳ د ویناپلواکو یا ـفنکشنونو ترمنځ اړیکي

د دوه ویناو ترنه سم اندیزه یا منطقي برابرارزښته بلل کیږي، که د ویناو ربښتیاارزښت د ترنویناارزښت سره یو په بل وخوري یا یو بل سره برابر شي۰ دا د یو ویناارزښت جدول له لارې څرګندیدی شي۰ ومو لیدل، چی ایکویوالنت په دواړو لورو لاس ته راوړنه یا ایمپلیکیشن دئ۰ په لاندې جدول کی به وګورو، چې دریم او شپږم درځونه، متې یا ستنی څنګه یو بل سره ځان نیسی یا ګورو، چی سره یوارزښته دي۰

p	q	p ⇔ q	p=>q	q ⇒ p	(p ⇒ q) (q ⇒ p)
W	w	w	w	w	...........W
w	*f*	f	f	*w*	.... *f*
F	*w*	*f*	*w*	*f*	..........F
f	*f*	w	w	*w*	.........*w*

ورته والی اړیکی د ورته والی یا ایکویوالنت سومبول باندې هم ښوول کیږي

$$(p \Leftarrow\Rightarrow q) \Leftarrow\Rightarrow (p \Rightarrow q)(q \Rightarrow p)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا ورته والي ويناتړنه موږ ته دا اجازه راکوي، چې يو بل سره بدل کړو يانې د يوه ځاي د بل سره بدل کړو٠ له دې څخه پيچلو تړنو کې لکه د شالت الجبر کې کار اخستل کيږي٠

د دې ورته والی ويناتړنې غوره بيلګه د،،دي مورګان،، قاعده ده De Morgansche Regel

$$(1)......(\overline{p \wedge q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$$
$$(2)......(\overline{p \vee q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

د کنجنکشن او ديسجنکشن لپاره ديستريبوتيو قانون:

(3) [p/\(q\/r)] □ [(p/\q) \/ (p/\r)]

(4) [p\/(q/\r)] □ [(p\/q) /\ (p\/r)]

۱ ٠ ٤ وينافورم يا - بڼه او کوانتورونه

وينا سم اند په لاندې ډول ساده تولیز کيدی شي٠ د بيلګي په توګه که مختلف شيان همغه خويونه ولري، نو ضرور ده، چې دا فورمال وويلي - - يا افاده کړای شو: دلته د ويناو پر ځاي د وينافورم څخه خبري دي، يا غږيږو٠ دا داسی ژبنی ويينې يا افادې دي، چې د شيانو لپاره واريابلی يا اووښتونې لري او لومړی د مناسب انفرادې ځاي پرځاي وروسته يوه وينا شي٠ بيلګي يی په لاندی ډول دي

لومړی : x پر دوه ويشونی دی »

دويم : » z يو هوار څلورګوډی(ځلورضلعي) » دی٠

دريم : «u له v څخه لوي » دی او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترهر ځاي پرځاي کولو وروسته رښتيا يا نارښتيا وينا لاس ته راځي٠ که په دويم کی دz پرځاي «ډيرګوډی» (کثيرالاضلاع) ځاي پرځاي شي، نو يوه رښتيا وينا لاس ته راځي٠

که په لومړي کیx د7 پرځاي ځاي پرځاي شي، نو يوه نارښتيا وينا لاس ته راځی٠ دريم يوه اړيکه(ريليشن(ده، چې هلته د انفراديو د ايښولو ترتيب هم يو رول لري٠ دلته که د تورو پر ځاي ګڼونه ږدو، نو هلته دا رښتيا وينا ده که د لومړي توري پرځاي ستر ګڼ ځاي پرځاي شي٠د فورمال سم اند په ژبه د پريديکات په شکل٠(له دې امله دې د سم اند برخی ته د پري ديکات first-order logic سم اند يا منطق وايي٠

بيرته داسی ليکو P(x), Q(z), R(u,v)

يوه بله کارونه يا عمليه شته، چې له وينا بني څخه وينا جوړوي٠ چې کوانتيفيکيشن Quantifikationبلل کيږي٠ دا ويناهغه وخت منځ ته راځي، چې ټول د وينا بنی افراد همغه خويونه ولري، چې ټولوينا (Allaussage) ورته وايو٠ياچې په پوښتل شوي چاپريال کې داسي افراد شته وي، چې همغه خويونه ولري، دې ډول وينا ته موږ د شتون يا موجوديت وينا يا Existenzaussage وايو٠ زموږ په بيلګه کې يی استعمال لاندې را په ګوته وکي

څلورم : (پيداينښتی يا طبيعي) ګڼونه يا اعداد شته، چې په دوه ويشل کيږي

پنځم : ټولې څلوری (مربع) هوارې ډيرګوډی يا کثيرالاضلاع دي٠

د ټولکوانتور يا ټولوينا لپاره نخښه∀

د شتون- يا موجوديتکوانتور يا شتونوينا لپاره نخښه ∃

يادونه : د ټولکوانتور لپاره نخښه د سرچپه A په څير ده او د شته والي کوانتور لپاره نخښه د په څټ E په څير ده په پام کې دې وي، چې د کوانتورونو ورکونې وروسته اووښتونې (وياريابلی يا مجهولی) ورکول کيږي٠

څلور ۱ : $\exists x \in P(x)$

داسی يي لولو، چی يو x په P(x) کې شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځه ۱ : $\forall z \in Q(x)$

دا داسی لولو: د ټولوz لپاره ، چې په Q(x) کې پروت دئ (یا د ټولو۰۰ له ۰۰۰ څخه)

دا سومبول $\exists$ دا مانا لري،چې« کم له کمه یو ۰۰۰ شته»د وینابنۍ او په دې پورې اړوند واریابلو یا اووښتونو ډیریو جوړه، د دې سومبول سره یوه د« شتون- یا موجودیت وینا» ورکوي، په نامه د اووښتونو ساحه یا ډیرۍ کې، په کوم کې چې کم له کمه یوه داسې اووښتوني ځاي په ځایونه شته وي کومه چې وینابڼه رښتیا وینا کوي۰

بیلګی (د رښتیا شتون - موجودیت ویناوي)

اول - $\exists x \in R: x+1=0$

(لوستل : یو داسی رییل ګڼ یا عدد x له(په) (کې) R شته ،د کوم لپاره چې0 =x+1 باور لري) دلته x دا مانا لري، چې x د رییلګڼډیرۍ یا ریل ا عدادو سټ R توکی دئ او $\in$ په دې مانا دی، چې توکي له ۰۰۰ دی۰

دویم : $\exists x \in R:$

$$x^2 + 4x = 0$$

(لوستل: یو x له(په) R څخه(کې) شته د کوم لپاره ، چې $x^2+4x= 0$ باور لري)

دریم : $\exists x \in R: \quad x^2 - 4 = 0$

(په دې جمله کې حتی دوه رییلګڼونه شته دی، چې د هغې لپاره $x^2-4 = 0$ باور لري

: (2، -2)

جمله (د یوې شتونوینا یا موجودیتوینا نه والی یا نفی)

$$\exists x \notin R: x^2+1=0$$

لوستل: داسې رییلګڼ x نه شته، د کوم لپاره چې برابرون $x^2+1 = 0$ باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې وینابنې هم شته، د کومو لپاره، چې د اووښتونډیرئ یا واریابلډیرئ ټولو توکو لپاره رښتیا وینا شي٠

بیلګه: وینابنه « x په 2 ویشونی دئ » د جوړه ګڼونو هریوه لپاره رښتیا ارزښت لري په

دا سومبول ∀ په دې مانا دئ، چې « د ټولو x لپاره» د وینابنې او په همدې پورې اړوند د وینا متحولو ډېرئ یا سټ (ویناااووښتونډیرئ یا واریابلډیرئ) ترڼنه له دې سومبول سره یوه Universalaussage یونیورزالوینا یا ټولوینا منځ ته راځي٠ په دې مانا چې د دې متحولو ډېرئ(اووښتونډیرئ) هر توکی لپاره د وینابنې څخه یوه رښتیا وینا جوړیږي٠

جمله : (دUniversalaussage یونیورزال- یا ټولیزې وینا یا ټولوینا لپاره

$$(1)........\forall x \in G : 2 \mid x$$

(د ټولو جوړه ګڼونو (جفت اعدادو)لپاره باور لري، چې x په ۲ ویشونی دئ)

$$(2).......\forall \in R, x^2 > x$$

(د ټولو رییلاعدادو x لپاره, کوم چې له یوه لوي وي باور لري $x^2 > x$)

جمله : (د نارښتیا ټولیزې وینا لپاره)

$$\forall x \in R : x^2 > x$$

دا وینا نارښتیا ده، ځکه چې دا د $1 \leq x \leq 0$ لپاره باور نه لري، پس دا وینا د ټولو ریل عددونو لپاره باور نه لري٠

۱ ٠ ۵ اړین – یا ضروري- او پوره کیدونکي شرطونه

د ایمپلیکیکشن سومبولA=>B (« کهA نو B » « له A څخه Bلاس ته راځي»)یا په بل ډول : که A باور ولري، نو B هم باور لري»

(c) ketabton.com: The Digital Library

په شمیرپوهنه کې ځانګړي فرمولونه شته٠

الف) « A د B لپاره پوره کیدونکی شرط دئ»

ب) « B د A لپاره یو اړیین یا ضروري شرط دئ»

فرمولونه الف) وايي، چې د A رښتینوالی د B رښتینوالی ځان پسی لري یانی له آ څخه ب پوره کیږي یا له یوه څخه وبل ته رسیږو یا د A شرطونه د B د شرطونو پوره کیدنو لپاره نیونه(فرضیه) ده او ب شرط پوره کیدنه اړیینه یا ضرور ده، چی آ پوره شي٠

بیا : وینا باور لري٠

د B وینا د باور لرلو لپاره دا پوره دئ یا پوره کیدونکی دئ یا بسیا کوي، که د A وینا باور ولري

بیلګي د پوره کیدونکو شرطونو لپاره:

۱ – وینا A : « ګڼ n پر ٦ ویشونی دئ»

وینا B : « ګڼ n پر ۳ ویشونی دئ»

A => B

د دې لپاره پوره کیدونکی شرط دئ یا بسیا کوي، چې یو رییل ګڼ n پر ۳ ویشونی دئ، که دا پر ٦ ویشونی وي٠
که n پر ٦ ویشونی وي، نو پر ۳هم ویشونی دئ ٠ دا نو تراوسه دا مانا نه لري، چې ضرور دې ګڼ n که پر ۳ ویشونی وي، پر ٦ دې هم ویشونی وي٠ د بیلګي په توګه ګڼ ۹ پر ۳ ویشونی دئ ، مګر په ٦ نه دئ ویشونی٠

۲ - وینا A : “n > 7„

وینا B :وي دې :n > 6

A => B

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دا پوره کيدونکی دئ، چې يو رييلګې ن له ٦ څخه لوي دئ٠ که اړيکې، چې ن له ٦ لو دی، باور ولري

داسې رييلګنونه هم شته، چې له ٦ څخه لوي دي، مګر له۷ څخه لوي نه دي٠ د بيلګې په توګه ٥ ،٦، يا شپږنيم

د ب) فرمولبندې وايي، چې وينا ب باورلرل غوښتونکی يا اړيين يا ضرور دئ، د دې لپاره، چې وينا A باور ولري٠

که وينا B باور ونه لري نو وينا A هم باور نه لري ٠

بيلګی د اړيين(ضروري) شرطونو لپاره:

۱ – د دې لپاره، چې يوګې n پر 6 وويشل شي، اړين(ضرور) ده، چې دا ګې پر3 ويشونی وي٠ يو ګې، چې پر3 نه وي ويشونی، نو پر ٦هم ويشونی نه دئ٠

۲ - ويناA : » څلور ګوډی يوه څلوری يا مربع ده«

وينا B : » څلور ګوډئ څلور ولاړ کونجونه لري« A => B

د دې لپاره ضرور، چې يوه څلورګوډئ يوه مربع(څلوری) ده دا خويونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه ولري، که ټول ګونجونه يې ولاړ نه وي، نو مربع يا څلوری نه ده که يوه څلورګډی څلور ولاړکونجونه ولري اړين نه ده، چې څلوری يا مربع دې وي٠

د برابروالي يا برابرارزښتي (ايکويوالنت) سومبول«

A<=> B

(په دواړو لورو ايمپليکيشن) لپاره په شميرپوهنه کې هم فرمولبندي شته: دا وايي، چې A دB لپاره يو ضروري او پوره کيدونکی شرط دئ٠ « دا وايي، چېA ټيک هلته باور لري، کله چې B باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې : د پوره کیدونکی او ضروري شرطونو لپاره

۱ – ویناA : « ګڼ یا عدد n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « عدد n پر ۳ او ۲ ویشونی دی»

A <=> B

د دې لپاره ضرور او پوره کیدونکې دی، چې: n پر ٦ ویشونکی دی، که دا عدد پر۳ او ۲ ویشونکي وي٠

۲ – وینا A : » څلورګوډی یا څلورضلعي یوه څلوری یا مربع ده«

ویناB : « څلورګوډی څلور ولاړ کونجونه لري او څلو برابر اوږده اړخونه یا ضلعې»
A<=>B

ددې لپاره، چې څلورګوډی یو مربع دی ضرور او پوره کیدونکی دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه او څلو برابر اوږده اړخونه(ضلعې) ولري٠

۱ ٠ ٦ د شمیرکلمو یا ویو(لغاتونو) شمیرنیز مفهوم(ترې پوهیدنه)

پیژند (تعریف) څه شی دی؟

د کلیمی ټاکنه ده، چې تیک ټاکلي او له مخامخوالی(تضاد) ازاده وي٠ په عامو خبرو کی کله که کلیمی راځي ، چې په مختلفو اشکالو ترې ځانګړي ماناوي اخستل کیږي، خوپه شمیرپوهنه کې داسې نه ده٠

د شمیرنی ټاکنی یا پیژندونه (تعریفونه)د تیک څرګندې پوهنې یوه نه پرېښوونکی سمبال اله ده، یانې ترې تیریدل نه شي کیدای٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله څه شی دی ؟

تولې ربښتوني ويناوې په شميرپوهنه کې جملې بلل کيږي، چې د پيژندنې لپاره ښوونې يا ثبوت ته اړتيا لري .

اکسيوم Axium څه شی دی؟

بې ثبوته ربښتيني وينا ته اکسيوم وايي

شميرپوهنيزې يا د رياضي جملې زياتې نيونې(فرضيي) او ثابتول(غوښتنه،جوته ونه يا ښوونه) په بر کې- يا خوندي لري.

که دا وينا داسې وي، نو پس داسی به هم وي. دلته که دا وينا داسې وي نيونه يا فرضيه ده او نو داسې هم ده. دا غوښتنه ده، چې بايد ثبوت يا وښوول شي.

اکسيوم : ١ طبيعي عدد دی (پيانو Peano)

: ټکی هغه دی، چې پر ويشونی نه وي يانې په ټکی ويشل بند دي. (Euklid)

: حتمي پيښه د پيښې امکان ١ درجه لري.

جمله: که درېګوډی ولاړکونجيز وي، نو(پس) د پيتا ګوراس (pythagoras) درسې جمله باور لري

: يو لومړی ګڼ، چې له دوه لوي وي، بايد ناجوړه(طاق) وي

: په اخره جمله کې نيونه(فرضيه) ده (که يو پريم عدد له ٢ لوي وي...) او ثبوت يې (هر له دوه لوي عدد په دوه ويشل کيږي پس لومړی ګڼ نه شي کيدی، نو دا تل ناجوړه ياطاق دی)په ځتوالي يا تضاد کې پيژندل کيږي.
تل داسې نه ده، چې د جملې د ربښتينوالی ځخه دې د جملې په ځتوالی يا تضاد هم ربښتيا وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه:

جمله: که ٦٪ پس ۲٪ هم (رښتیا)

جمله: که ۲ ٪ پس ٦٪ هم (ناربښتیا)

۰۰۰۰۰تیک هلته ، چۀ که۰۰۰۰یوځاي راوړي

بیلګه : که چیرې غبرګ اړخیز کې هر دنننی کونج ۹۰ درجی وي، نو دا ولاړکونجیز(قام الزاویه) دئ۰

په څټ : که غبرګ اړخیز ولاړ کونجیز وي، نو دنننی کونجونه ۹۰ درجی لوي دي۰

یوځایراوړل :

یو غبرګ اړخیزتیک هلته(هلته او هلته یا بیا او بیا یا یواځني او یواځني ټاکلی یا یواځنی ټاکلی او په څټ) ولاړکونجیز دئ، کله چې دنننې کونجونه ۹۰ درجی لوي وي۰

۱ ۰ ۷ برابرونونه او نابرابرونونه (مساوات او نامساوات)

پیلبیلګه:

لمسی ، پلار او نیکه په ګډه ۱۱۳ کلن دي۰ پلار د ځوي د عمر یوکال کم اوه ځله عمر لري او نیکه د پلار د عمر له دوه برابره څخه ٦ کاله نور هم زیات عمر لري۰

پوښتنه : له دوي څخه هر یو څو کلن دئ؟

د ځوي عمر په x سره ښایو، نو د پلار عمر 7 x-1 دئ او د نیکه عمر 2(7x-1)+6 کاله کیږي، چې د دې ټولو زېږښت وختونو زیاتون یا جمع بیا ۱۱۳ کاله دئ یانی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x+7x-1+2(7x-1)+6 = 113$$

یو ډول ترمونه رامنځ ته کیږي او ساده کیږي:

$$x+7x-1+14x-2+6= 113 \;\; \backslash\!/ \;\; 22x +3 = 113$$

په کينې ۲۲ ځله د x ارزښت چې ۳ په ورزيات شوي او دا له ۱۱۳ سره برابر دئ

نو دا ګڼ ۲۲ ځله x بيا ۱۱۰ کيږي: $22x = 110$ او د x ساده ارزښت ۲۲ – مه برخه د ۱۱۰ ده ياني: په دې لاس ته راوړني سره زوي ٥ کلن پلار ۳٤ کلن او نيکه ۷٤ کلن دئ۰

که ترمونه $T^\wedge$ اوT° د برابروننخښی = باندې يو له بل سره وتړل شي، نولاندې برابرون پيداکيږي: $T^\circ = T^\wedge$ ۰

که چيرې ترمونه په دې نخښو $\leq$, $\geq$, $<$, $>$, $<$ او(نابرابروننخښه =|) يو له بل سره وتړل شي يو نابراون منځ ته راځې.

برابرونونه او نابرابرونونه چې ناټاکلي يا مجهولو سره يوځاي شي، هغې ته د وينافورم يا نوره هم ښه وينا بڼه ويل کيږي۰

دا يا رښتيا يا نارښتيا وينا کيدی شي۰ که ناټاکلي، چې اوښتوني يې هم بولو(د بيلګې په توګه z , x , y) پر ځاي د بنسټيزيری ګڼونه وليکل شي۰ په برابرونپوهنه کې له پيژند – يا تعريفيزيری ځخه هغه ګڼونه غوره دي، چې د ورکړ شوي فورم يا بڼې يو برابرون يا نابرابرون رښتيا وينا کړي۰

د يو برابرون يا نابرابرون (مساوات يا نامساوات) هر عدد ځاي پرځاي کول، چې وينابڼه پيژند - يا تعريفيزيری پورې اړوند وي او دا وينا ريښتيني کوي، اوبيزيری يا حلېزيری L کې پروت دئ يا د برابرون يا نابرابرون په ډکوونکو (پوره کوونکو) ډيريو پورې تړلې برابرون ته ، چې د ټولو ځاي پرځاي کولو لپاره ريښتوني وينا ورکوي کټمټ يا (identisch, identic) وينا وايي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې :

الف) $5x=4$ د $x = 0,8 = 4/5$ لپاره ربښتیا وینا ته ځی : یانې

$5.0,8=4$ نو $L=\{0,8\}$

ب) $3x^2 = 48$ د $x = 4$ لپاره او $x = -4$ لپاره ربښتیا وینا ته ځي

یانی $3.(-4)^2 = 48$ څخه لاس ته راځی او په څېر $3.4 = 48$ پس- $L = \{ -4;4\}$

٢ – نابرابرون الف) $2x > 1 \Rightarrow L= \{x \mid x> -1/2 \}$

ب) $x < 3 \Rightarrow L = \{ x \mid x > -3 \}$

٣ – کتمتوالی : الف) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

ب) $(a+b)^2 = a^2+b^2 +2ab$

دوه برابرونونه یا نابرابرونونه، چې په خپل پیژندډیرىکې سره برابر وي(یا یو پربل وخوري،

یانې یو د بل پرځاي اینښول کیدی شي) او همغه اوبی- یا حلډیرى ولري ایکویوالنت (Equivalent) یا «ځاي پرځاي کول برابر» یا ورته بلل کیږي٠

یادونه : دا لاندې د جدول په ډول دی، له پورته له ښي و کیڼ لور ته په درځ یانې ولاړ درځ لوستل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

	نابرابرون	براون
۱) وینافورم کې کیدی شي،چې خواوې سره بدلې شي	T° < T^ T^ > T° 2x < 6 6 > 2x	T°=T^ T^ = T° 3x=5y 5y = 3x
۲) که وینافورم په دواړو خواوو همغه ترم زیات یا کم شي او د یوې ورزیات ترم پیژنددیرۍ خوندې وساتل شي یا ځاي کړي	T^ < T° => T^ ± T° < T° ± T^	T^ = T°=> T^ ±T° = T°± T^
یا تغیر ونه خوري۰ مخامخ یا کینې لوربیلکه کې تفریفدیرۍ تغیر خوړلی	3y < 4x ⇔ ⇔ 4y±2x < 4x±2x	2z = 8 => 2z ± 3 = 8 ±3

پر ځنې بیلګه

2z=8 |=> 2z+3-z=8+3-z

دا چې z=4 دې نوي ورزیات شوي

ترم 3-zنه دی تعریف یا پیژندنه

لري، ځکه چې z - 3 یو پیدایښتي یا طبیعي ګڼ نه دی

۳) د وینافورم دواړه ⇔ T^=T° T^.T > T°.T ⇔ T^ <T°

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړخونه کیدی شي چې	$T^\wedge < T^\circ \Leftrightarrow$	$T^\wedge.T = T^\circ.T$
له همغه مثبت ترم سره	$T^\wedge:T > T^\circ:T$	$\Leftrightarrow T^\wedge:T = T^\circ : T$
ځل او یا په همغه ترم	$T > 0$ که	$T > 0$ که وي
وویشل شي	$3y - 12 < 30z - 90$	$4x + 2 = 10x - 6$
	$\Leftrightarrow y - 4 < 10z - 30$	$\Leftrightarrow 2x + 1 = 5x - 3$
	$\Leftrightarrow 4y - 16 < 40z - 120$	$\Leftrightarrow 2xc + 10 = 50x - 30$
٤) د یوه برابرون	$T^\wedge < T^\circ \Leftrightarrow T^\wedge.T > T^\circ.T$	$T^\wedge = T^\circ \Leftrightarrow$
دواړه خواوې کیدی شي،	$T^\wedge < T^\circ$	$T^\wedge.T = T^\circ.T$
چې له یوه منفي ترم سره	$\Leftrightarrow T^\wedge:T = T^\circ : T$	$\Leftrightarrow T^\wedge:T > T^\circ:T$
ځل شي یا دواړه خواوې په	$T < 0$	$T < 0$
همغه ترم وویشل شي.	$-2y < -4$	$3x = 12$
که په دې فورم کې	$\Leftrightarrow y > 2$	$\Leftrightarrow -9x = -36$
نابرابرونونه وي نو د	$\Leftrightarrow 10y > 20$	$\Leftrightarrow x = 4$

برابرون لورې بدلیږي، یا نخښه بدلیږي

یادونه :

په ټولیزه، چې په کتابونو کې لیکل شوي، ترمونه Tیو او T دوه په لاندڼ توګه د اینډکس سره په نخښه کوي: T_1, T_2

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . تمرنونه:

۱ – په ۱ . ۳ –مه برخه کې د رښتيا ارزښت ورتو الی له (۱) څخه تر (۴) پورې وښاياست.

۲ – د رښتيا ارزښت جدول له لارې وښاياست، چې لاندط ويناتړاو منطقي مساوي ارزښت دی.

الف - (A⇔B) او (B⇔A)

ب- (A=>B) او(AvB)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ډیرۍ پوهنه Die Mengenlehre, the set theory

ډیرۍ پوهنې یا سټ تیوري باید خپل ځاي په شمیرپوهنه او همدا ډول په نورو پیدایښتي- یا طبیعی پوهنو کې نیولي وي، نو له دې امله د لنډ تیر وخت را په دې خوا په پرمختللو هیوادونو او اوس هم په افغانستان کې د ښوونځیو په لیکلوست کې پیل شوه، ځکه چې بې له ډیریپوهنې یا سټ تیوري شمیرپوهنه بې مفهومه ده او ناشونې۰ دا به له دې لیکنې څخه همدا اوس څرګنده شي، چې پیدایښتي یا طبیعي ګڼونه یا - اعداد او هرڅه د ګڼونو په څیره کې ، چې موږ ته څرګند وي هغه ټولې ډیرۍ یا سټ دي او بل څه نه دي۰

ډیري پوهنې (سټ تیوري)په پرمختللو هیوادونو کې هم د شلمې پیړۍ په دویه نیمه کې د میندو او پلرونو لپاره ستونځې پیدا کړي، ځکه، چې دوي د ډیرۍ پوهنې سره بلد نه وو او د خپلو کوچنیانو سره یې مرسته نه شوه کولی۰

د ډیرۍ کلمه له عدددونو یا ګڼونو پخوانۍ ده، که څه هم پخوا انسانانو په خپله خوښه نه ښووله لکه اوس۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تراوس ورسره بلد ډول هم سټ يا ډېرۍ پيژندل کيږي، لکه د ښوونځی نجونې او هلکان، يا په يوه ټولګی کې ميزونه او چوکی، يا لکه هغه نيزوړي، چې نيز راوړي او د سپين په پټي کې يې ډيرۍ ډيرۍ اچولي يا د هسکې مينې د ښوونځي په لسم ټولګی کې د زده کوونکو، کتابونو، کتابچو پنسلونو، څوکيو او ميزونو سټ يا ډيرۍ٠

د ډېرۍ پوهنې کلمه: موږ په افغانستان کې هم د ډيرۍ له کليمې سره اوس بلد شوي يو که څه هم تربيلو بيلو پرديو نومونو لاندې، چی زما په اند به زده کوونکو او ښوونکو ته يواځې ذهني غوره والي لري، زه غواړم، چی د ډيرۍ څو مختلف پيژندونه يا تعريفونه ورکړم، چې ښه مو ورته پام راوګرځي، دا له دې امله هم، چی د ډيري پوهنې (سټ تيوري) غوره والی ته مو نور هم پام راوګرځي٠

ډيرۍ پوهنه د شميرپوهنې ستڼه جوړوي او د شميرپوهنې ټولې څانګې په ډيرۍ پوهنه

ودانې دي٠ نن شميرپوهنه بې له ډيرۍ پوهنې داسې وده نه شي کولی او ستڼه يې وزي٠

پيژند ۲ ۰ ۱

الف : ډيرۍ يا سټ د ټاکلو شيانو يا کلمو ټولګه (يوځايوالی، مجموعه) ده، چې

پخپله خوښه د يوې ټاکلې بنسټډيرۍ يا بنسټ سټ څخه ، چې د پيژندلشويو

اصولو يا کرکترييين له مخې ټاکل شوې وي

ب : د الماني شميرپوه کانتور(George Cantor 1845 – 1918) پيژند:

زموږ د خيال يا ليد څرګند ټاکلو ، ټيک يو له بل توپيرکيدونکو شيانو ټولګې

(يوځايټولولو يا مجموعې) ته ډيرۍ   وايي او هر شي ته، چې ډيرۍ يې جوړه

کړې يا ډيرۍ ترې جوړه شوې وي، د ډيرۍ – يا سټ توکی وايی٠

(Set and elements of set   ډيرۍ او د ډيرۍ توکی)

پ : د مختلفو شيانو ټولګې يوه يوون يا يووالی (واحد Einheit, unite)   ته په

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه کې ډیرۍ وایی

یادونه : د واحد لپاره، چې تراوسه ورسره بلد یو یوون یا یووالی ښه نومه ونې دي٠ دا که څو واره وویل شي، نو باورلرم، چې ورسره بلدیږو٠

ت : څرګند شیان د ګډو نخښو پربنسټ، چې تر څیړنې لاندې نیول کیږي او د دې نخښو له امله یوځاي ټولیږي یا ټولګه جوړوي، ډیرۍ یا سټ تشکیلوي٠ ګډې نخښې کیدی شي ښکلا، کوچنیوالی او داسې نور وي٠

یادونه: د ګرانو لوستونکو دې دې ته پام وي، چې په پورته پیژندونو کې یې غوره او د پام وړ پیژند یاتعریف د جورج کانتور پیژند دی.

بیلګه :

ګڼونه یا عددونه، نومونه، او توري کیدی شي د ډیریو بیلګو په توګه راوړل شي٠

ګورو، چې د ډیرۍ یا سټ کلمه په شمیرپوهنه کې بل ډول ده لکه په ولسي ژبه کې، چې دلته ډیرۍ د څنو شیانو زیات یوځاي کول موخه ده، د ځانګړو شرایطو لاندې.

په شمیرپوهنه کې ډیرۍ په لویو لاتین تورو لیکل کیږي لکه ..A,B, او یا M,N, X,Y,.... د ډیریو توکي د لاتین په کوچنیو تورو لیکل کیږي، لکه a,b,c,... او m,n,x,v,...

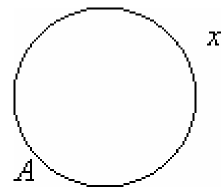
د دې لپاره، چې وپوهیږو، چې ایا توکی a د ډیرۍ A توکی دی که نه نو لیکو: $a \in A$

په پورته کې توکی a د ډیرۍ A توکی دی.

که a د A توکی نه وي ، نو لیکو: $a \notin A$ دلته a د ډیرۍ A توکی نه دی

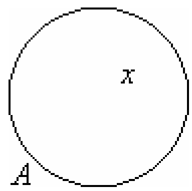
دا پورته لینکدود له ښی وکینې لور ته هم لیکلی شو، چې پرلپسی لړۍ یې ساتلې پاتې شي٠ زه یې په څټ لیکنو سره لیکنیزې ستونځی لرم٠دا لاندې یې دیاګرام دی، خو توکي یې بل ډول لیکل شوي دي، چې ګرانو ستونکو ته به د پوهیدلو ستونځ پیدا نه کړي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$a \in A$

(a د A توکی نه دی)



$a \notin A$

(a د A توکی دی)

ډیرۍ A دې له a,b,c,d,e,f,g,h, توکو جوړه وي، چې په لاندې توګه یې لیکو

$$A = \{ a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

ګورو، چې { } د ډیرۍ یا سټ نخښه ده

یادونه : دا د ډیرۍ کلمه موږ په افغانستان کې سټ set بولو ، چې انګریزي ده، په فارسي کې یې مجموعه بولي، چې ډیرۍ د شیانو مجموعه یا ټولګه ده او په الماني کې ورته مینګې Die Mengeوایي. هغه بنسټیزه خبره یې په پیژند یا تعریف کې ده، که موږ یې چې هرڅنګه وبولو، خو د یو بل څخه کره توپیرکیدونکو شیانو ټولګی ته ... وایو. د ټکو پر ځاي ، چې هر څه لیکی، خو موږ ګورو، چې په پښتو یې هغۀ مناسبه نوموه ونه ډیرۍ ده، دا د کوټې کوټې څخه یا راپنډ او داسې نورو څخه ماته ښه ښکاریږي او زموږ ولس د دې نامه سره بلد دی، چې په پوهنه او لا نور ښه په شمیرپوهنه کې باید وکارول شي. زه بیا په دې ټینګار کوم، چې دا خپل ، چې ما ټاکلی یا بل څوک یې که بل ډول بولی د انګریزي یا الماني یا بل پردي نوم څخه ښه او پوهوړ دی. د سټ مانا که په ډکشنري کی وګورۍ ،نو پوه به شو، چې له دې نوم څخه مو خپل د پښتو نوم ښه او مناسب دی. ګوروو‌چې دا نوم اوس ژورنالستان هم زیات کاروي او وایي، چې ډېرۍ یا ډېرۍ خلکو.... وکتل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ ۰ ۱

الف) M_1 (لوستل Mایندکس ۱ دا به په لاندې نخښونه کې روښانه شي پام دې وي، چې (index(indeces ایندکش پیژند نخښې ته وایې) دې د لومړیو ګڼونو ډیر ۍ (اعدادو سټ) وي، نو باور لري: $7 \in M_1, 8 \notin M_1$

ب) M_2 دې د لاندې برابرونونو یا مساواتو د اوبیونو(حلونو) ډیرۍ وي

$$(x+1)(x-2) = 0$$

نو باور لري : $-1 \in M_2, 2 \in M_2, 1 \notin M_2$

بیلګه ۲ ۰ ۲ :

الف) د مساوات $(x+1)(x-2) = 0$ حل ډیرۍ M_2 ده $M_2 = \{-1, 2\}$

ب) د جوړه (جفت) عددونو یاګڼونو ډیرۍ M_3 ده $M_3 = \{0, 2, -2, 4, -4, ...\}$

ډیرۍ لکه، چې ومو ویل د توکو د خویونو له لارې هم څرګندیدی شي یا ورکول کیدی شي۰

M = { x | ۰۰۰ سره x د خوویونو}

(لوستل: M د ټولو x ډیرۍ ده له خویونو ۰۰۰۰۰ سره)

بیلګه ۲ ۰ ۳

الف) { د ټولوx سټ ، چې هلته x یو لومړنی عدد یا ګڼ دی| M = { x

b) M = { x | (x+1)(x-2) = 0 }

$c)..........M = \{x \mid x \in R, 0 \le x \le 1\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تشديرۍ: ډيرۍ، چې کوم توکی ونه لري تشډيرۍ يا خالي سټ بلل کيږي او داسی يې
ليکو: θ يا $\{\}=\varnothing$
دا دې د يوې ډيرۍ يا سټ سره، چې يوازی له صفر څخه جوړه ده، نه بدليږي يانې

$$\{\} = \varnothing \neq \{0\}$$

بيلگه ۲ ۰ ٤

$$\{x \mid x \in Z, x^2 + x - \frac{3}{4} = 0\} = \theta$$

ځکه، چې د برابرون يا مساوات $x^2+x-3/4 = 0$ حلډيرۍ

$$\{x|x^2+x-/4= 0 \} = \{ 1 / 2 \ , -3/2\}$$

کوم ټولګڼ يا تام عدد خوندي نه لري۰

ټولګنونو پيژند ته دې پام وي، چې د راشنلګنونو برخډيرۍ ده۰دريمه برخه دې وکتلشي

بيلگه ۲ ۰ ٥ : د ز۰ کال د دويمې نيمايي مياشتو سټ يا ډيرۍ په Ju , aug sep ,
ok,no, de سره ښايو او ليکو: A= { jul,aug,sep.ok,no,de}

نو داسې لرو يا نوره هم ښه داسی ليکلی شو: $jul \in A, jun \notin A$

دا په دې مانا، چې جولای د A توکی دی او جون د A توکی نه دی

بيلگه ۲ ۰ ٦ : ټول منديزي، چې نن مازيګر لمانځه ته د غارخلي لمنځتون يا جماعت ته
ته راغلي۰

بيلگه ۲ ۰ ۷ : د هغو ميږو ، غواوو او وزو ډيرۍ، چې نن په نخاس کې خرڅې شوې.

بيلگه ۲ : ۸ د ټولو هغؤ ګڼونو ډيرۍ(عددونو سټ) M، چې ۳۰ ويشي يانې

۱ ، ۲ ، ۳ ، ٥ ، ٦ ، ۱۰ ، ۱٥ ، ۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې يې ليکو : $M = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$

دا سټ پاي سټ ده داسي وايو، چې ډيرۍ يا سټ M د ټولو هغو توکوx - لکه پورته - جوړ شوې، چې ۳۰ ويشي او داسي يې ليکو: $M = \{x \mid$ x د ۳۰ پرويشونی ګڼ$\}$

د ټولو پيداينتې يا طبيعي ګڼونو ډيرۍ(اعدادو سټ) N ټاکو او داسي يې ليکو:

$$N = \{1,2,3,4....\}$$

دا نه پای لرونکی يا لايتناهي ډيرۍ(سټ) ده ، چې په لاندې ډول يې نخښنه ده يا په لاندې ډول په نخښنه کيږي: ∞

ګورو، چې په شميرپوهنه کی موږ پر پای ګڼونو برسيره ناپای عددونو سره هم مخامخ يو۰

۲ ۰ ۲ د ډيريو ترمنځ اړيکې relation between sets

د سټونو ترمنځ غوره اړيکی د برابروالی او خونديونې يا خوندي لرنې (مساويوالی او يو په بل کې ځاي لرلو) اړيکې دي۰

پيژند ۲ ۰ ۲ دوه ډيري يا سټونه M_1 او M_2 يو د بل سره برابرې دي، يانې $M_1 = M_2$

که چيرې د ډيرۍ يا سټ M_1 هر توکی د ډيرۍ يا سټ M_2 توکی هم وي او پر ځټ يا برعکس هر د M_2 توکی د M_1 توکی هم وي۰

برابرې ډيرۍ برابر توکي هم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بيلګی په توګه

$$M_1 = \{x \mid (x+1)(x-2)(x+3)=0\}$$
$$M_2 = \{-1, 2, -3\}$$
$$\Leftrightarrow M_1 = M_2$$

ګورو، چې M_1 د M_2 سره برابر دئ

برخډيرۍ(سبسټ subset)

پيژند ۲ ۰ ۳ :

يوه سټ M_1 د سټ يا ډېرۍ M_2 برخډيرۍ (لاندې ډيرۍ، خوندي ډيرۍ يا سب سټ) بلل کيږي يا M_1 په M_2 کې ځای ده يا نوره هم ښه M_1 په M_2 کې خوندي ده، ليکندود يا ليکنډول:

$M_1 \subseteq M_2$ که د ډيرۍ M_1 هر توکی دسټ يا ډېرۍ M_2 توکی هم وي۰

کيدی شي، چې M_1 د M_2 سره برابر هم وي، که برابروالی يا مساوات نا شوني وي نو بيا د اصلي برخډيرۍ يا اصلي سب سټ څخه غږيږو۰

پيژند ۲ ۰ ٤ :

يوه ډيرۍ يا سټ M_1 د M_2 اصلي برخډيرۍ ده او داسې يې ليکو: $M_1 \subset M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

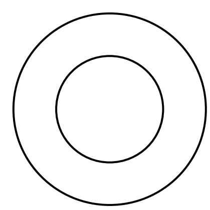
که $M_1 \subseteq M_2$ باور ولري او کم له کمه د M_2 يو توکی د M_1 توکی نه وي۰

بيلګې:

الف) که ولرو $M_1 = \{-1,1\}, M_2 = \{-1,0,1\}$ نو M_1 په M_2 کې اصلی خوندي دئ

ب) د ټولو څلوريو (مربعو) ډيرئ د ټولوڅلورګوډيو(څلور اضلاعو) اصلي برخډيرئ ده۰

پ) څيره ۱ ۰ ۱ په هواره يا سطحه کې ټکوډيرئ ښايي، د کومو لپاره چې باور لري، که M_1 او M_2 د ټکو ډيرئ يا-سټ وي $M_1 \subset M_2$



که په پورته څيره کې وګورو، نو يوه ګردئ (دايره) M_1 په بله لويه M_2 ګردئ کې خوندي ده۰

تشډيرئ په هره ډيرئ کې خوندي ده۰ هره ډيرئ په خپل ځان کې د نااصلي برخډيرئ په څير خوندي ده۰

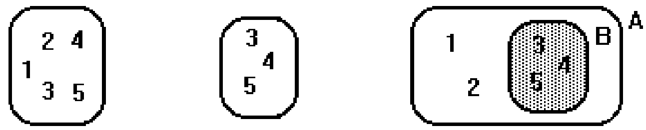
يا دا پيژند :

B⊆A که باور ولري : $x \Rightarrow A \in x \in B$

بيلګه:

A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B⊆A

(c) ketabton.com: The Digital Library



پيژند ۲ ۰ ۵ :

هغه ډيرۍ، چې هيڅ توکی ونه لري تشډيرۍ بلل کيږي او داسې يې ليکو: $M=\theta=\{\}$

يادونه : پام دې وي، چې صفر ډيرۍ او تشډيرۍ سره بدلې نه شي ياني لاندې ته:

$$\{\} = \theta \neq \{0\}$$

د يوې ډېرۍ توان يا توانډېرۍ (توانسټ)

پيژند ۲ ۰ ٦ :

د يوې ډيرۍ M د ټولو برخډيريو ډيرۍ پوټنځډيرۍ يا په توانډيرۍ(-سټ) بلل کيږي او داسې يې ليکو: $P(M)$ په توانډيرۍ توکي لري، چی هر يو يی بيا خپله ډيرۍ ده۰

بيلګه : د $M = \{ a,b.c\}$ ډيرۍ دا لاندې په توانډيرۍ لري

$$P(M) = \{ \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

هره ډيرۍ چې د توکو څخه جوړه وي هغه ټيک n جګ $2n$ توکی لري يانی : n^{2n}

دا پورته د جملې په څير د پوره ايندکشن له لارې اوبی (حل-) کيدی شي(لومړۍ برخه دې وکتل شي)۰ دا دنده د ګرانو لوستونکو د خوښې کار دی، که کوي يې۰

پيژند ۲ ۰ ۷ : د ډيرۍM زور $|M|$ لاندې د ډيرۍ د توکو تعداد ياګڼون پوهيږو۰ که دوه ډيرۍ M اوN همغه زور ولري هغه ته يوزوريزه – يا برابرزوريزه ډيرۍ وايو او داسې يې ليکو: $|M| = |N|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرونونو یا مساواتو او خوندي ساتنو خویونه

الف) رفلکسیو- یا د انعکاس(هندارونیزې) اړیکيreflexivity

هغه اړیکي، چې د هغه او د هغه دخپل ځان ترمنځ ریښتونې ویناوې ورکړ شوي وي رفلیکسیویا انعکاسي اړیکي بلل کیږي لکه: $M = M, M \subseteq M$

خوندي لرل اړیکې رفلکسیو نه دي $M \not\subset M$

دا په دې مانا، چې هیڅ ډېرۍ د خپل ځان اصلي برخډېرۍ یا برخسټ نه شي کیدی۰

ب) سیومتریکې اړیکي Symetric relation

هغه اړیکې سیومتریک بلل کیږي، چې د شیانو ترمنځ چې کارول کیږي یا استعمالیږي یو له بل سره بدلیدلی شي۰

لکه $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_2 = M_1$

خوندي لرل سیومتریکې اړیکې نه دي:

که وي $M_1 \subseteq M_2$ نو اړیکی $M_2 \subset M_1$ ناربښتیا یا ناټیک دي

دا هلته چې وي: $M_1 \neq M_2$

پ) ترانزیتیویتي Transitivity یا وړون اړیکې

ترانزیتیویتي هغه اړیکې دي، چې له یوه نه وبل ته یې د وړلو امکان شته یا موجود وي۰

له L = M او M = N څخه لاس ته راځي L = N

او

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_3 \Rightarrow M_1 \subseteq M_3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته داسې لولو: که M_1 د M_2 برخډيرۍ او M_2 د M_3 برخډيرۍ وي، نوله دې څخه لاس ته راځی، چې M_1 د M_3 برخډيرۍ ده

برابونونه يا مساوات او په بل کې ځايه ونه يا خوندي ساتنه ترانزيتيو اړيکې يا خويونه دي

۲ ۰ ۲ په ډيرۍ کې کارونې يا عمليې

ټولنډيرۍ (د اتحاد سټ)

پيژند۲ ۰ ۸ :

د دوه ډيريو M_1 او M_2 ټولنډيرۍ(unionاتحاد سټ)، چې د ډيريو ټولنه ورته وايو ده:

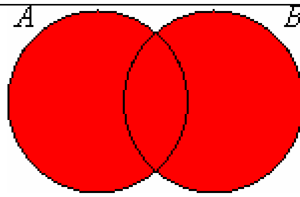
$$M = M_1 \cup M_2$$

دلته داسې پوهيږو، چې M د ټولو هغو توکو څخه جوړه شوې ډيرۍ يا سټ ده، چې لږ تر لږه د M_1 او M_2 توکې هم خوندي ولري٠

د ټولنې $M = M_1 \cup M_2$ هر توکی د M_1 يا M_2 توکی هم دی (پرتله ۱ ـمه برخه د يا سره پرتله) يانې دا د ټولنډيرۍ توکی د M_1 يا M_2 او يا د دواړو توکې دي٠

يا لاندې دياګرام

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$A ? B$ $A\cup B$ (B تولنه A) x) د A سره B اړيکې لري

بيلګې

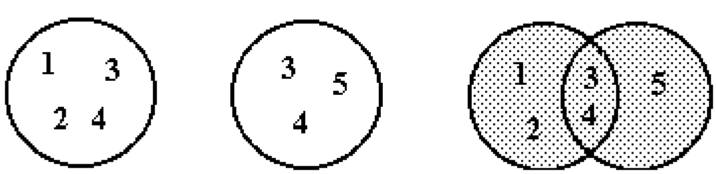
الف) M_1 دې د ځوانانو ډيرۍ وي، چې بکلوريا لري او M_2 دې د هغو ځوانانو ډيرۍ وي، چې مسلکي شهادتنامې لري، نو $M = M_1 \cup M_2$ د ټولو هغو ځوانانو ډيرۍ ده، چې بکلوريا او مسلکي شهادتنامې ولري او يا دواړه شهادتنامې ولري.

ب)

$$M_1 = \{k,a,r\}, M_2 = \{u,r,s,e,l\}$$
$$M_1 \cup M_2 = \{k,a,r,u,s,e,l\}$$

يا په لاندې توګه پيژند او بيلګه: A او B دې دوه ډيرۍ وي د دې ډيريو ټولنه داسې ليکو

A∪B = {x | x∈A ∨x∈B}
A={1,2,3,4} B={3,4,5} A∪
B={1,2,3,4,5}



تل په ټکو ټکي شوې ټکيډيرۍ ټولنديرۍ په ګوته کوي.

ب – خيره ۲ ۰ ۲ دوه په هواره کې ټکيډيرۍ په ګوته کوي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) ټکيپردۍ دي٠ ب) ګډ ټکی لري٠

پ) اړيکې $M_1 \subset M_2$ پوره کوي:

د دې لپاره ځيرې په لاندې کې په بيلګو کې راغلې دي٠

د ټولنې لپاره کموتاتيو قانون باور لري» $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ دا په دې مانا، چې د لړۍپرلپسې دلته(لنډ: لړۍ) د ډيريو په ټولنه کی رول نه لوبوي

يادونه : که ګڼونه ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ٠٠٠ ولرو، نو دا پرلپسې بولو او که بيا دا سره جمعه کړو لکۀ

1 , 1+2,1+2+3,1+2+3+4+,1+2+3+4++..+….

نو دا لړيپرلپسې یا لنډ: لړۍ بولو(پرلپسی برخه کې دې وکتل شي) دا په دې مانا، چې له دوو ځخه د زياتو ډيريو ټولنه لړۍپرلپسی(لنډ: لړۍ) رول نه لري٠

اسوځياتيو قانون باور لري٠

$$(M_1 \cup M_2) \cup M = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

غوڅډيرۍ (د ډيريو غوڅی یا –متقاطع سټ) intersection

يادونه : دا کړی شو، چې د ډيرو ګډغوڅی وبولو(دا د ګرانو لوستونکو خوښه ده،کوم ناټيکوالی په کې نه شته)

پيژند:

ډيرۍ M د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M_2 غوڅډيرۍ یا د تقاطع سټ ده(لوستل: M_1

غوڅ(پرې)په M_2 (لنډ: غوڅی): $M = M_1 \cap M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ډيرۍ M ټول توکي د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M_2 توکی وي٠

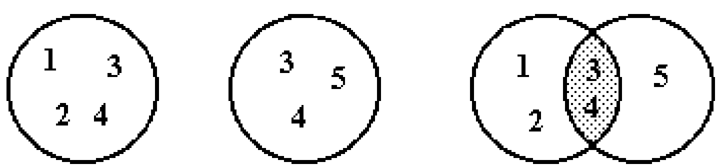
د غوڅډيرۍ $M = M_1 \cap M_2$ هرتوکی د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M_2 توکي دي (د ۱ ــمې برۍ د هم او هم په مانا يا د «او» په مانا)

يا دا پيژند :

د ډيريوA او B غوڅی $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

بيلګه:

A = { 1,2,3,4}, B = { 3,4,5} => $A \cap B = \{3, 4\}$



يادونه: دې پورته ډول دياګرام ته د ون دياګرام Venn-Diagram يا د Euler-Venn- Diagram وايی

بيلګې :

لومړۍ : يوه ډله زده کوونکي له ننګرهار او پکتيا ځخه راځي، چې په M_1 يې په نخښه کوو٠ يوه بله ډله ، چې په M_2يې په نخښه کوود کندهار او همغه د پکتيا زده کوونکي، چې په M سره يې ښايو، دي٠ د دې دواړو ډلو غوڅډيرۍ

$$M = M_1 \cap M_2$$

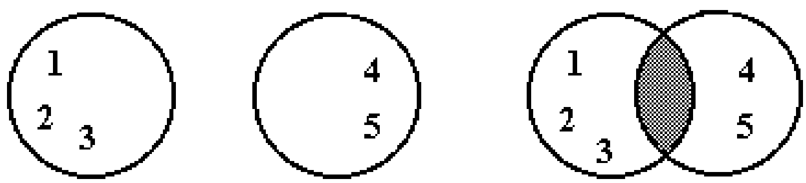
د پکتيا زده کوونکي دي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

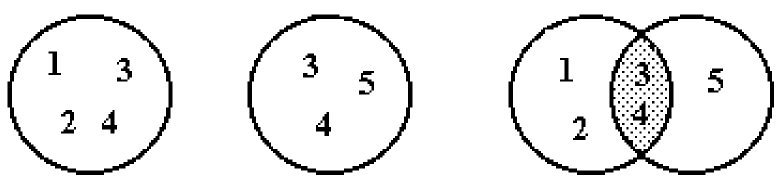
دويم:

$$M_1 = \{k,a,r\}, M_2 = \{u,r,s,e,l\},$$
$$M = M_1 \cap M \ = \{r,l\}$$

دريم ځيره ۲ ۰ ۳ په هواره يا سطحه کې ښايي، چې الف) ګنون پردي دي



ب) يو بل سره ګډ ټکی لري



پ) اړيکی

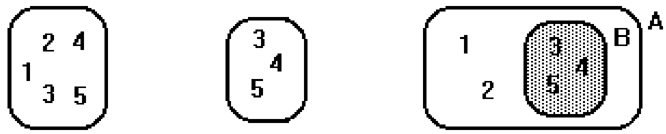
$$M_1 \subset M_2$$

پوره کوي

بيلګه:

A={1,2,3,4,5} B={3,4,5}   B⊆A

(c) ketabton.com: The Digital Library



هغه ټکو باندې ټکي شوې ډيرئ اصلي برخډيرئ ده

دوه ډيرئ، چې غوڅډيرئ يې تشډيرئ وي

$$M_1 \cap M_2 = \theta$$

لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونيوله پردئ بلل کيږي

د غوڅډيرئ لپاره ، لکه څنګه د ټولنډيرئ لپاره کموتاتيو قانون باور لري

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

او اسوڅياتيو قانون

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

ددواړو د ډيرئکارونو يا ډيرئ عمليو يانې ټولنډيرئ او غوڅډيرئ لپاره دواړه ديستريبوتيو قانونونه پوره کيږي يا باور لري

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

(د ګڼونو د شميرکارونو يا عمليو لپاره يوائې يو دستريبوتيو قانون شته والی لري:

$$a_1.(a_2 + a_3) = a_1.a_2 + a_1.a_3$$

مګر په ټوليزه توګه باور نه لري

$$a_1 + (a_2.a_3) = (a_1 + a_2).(a_1 + a_3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند :

کمونډيرۍ يا تفريق سټ M_2 د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M کموالی يا فرق دی او

داسې يې ليکو: $M_2 = M / M_1 = \{x \mid x \in M \wedge x \notin M_1\}$

له M څخه د M_1 ډيرۍ کمه شوې

يا کله چې د M_2 توکي د M هغه توکي وي، چې هغه د ډيرۍ M_1 توکي نه وي۰

ليکندود ياليکنډول :

$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

لوستل : د A او B توپيرډيرۍ ياکمونډيرۍ يا تفريقډيرۍ له ټولو هغو توکوx جوړه ده، د کومو لپاره، چې باور لري : x د A توکی دی او x د B توکی نه دی

بيلګې :

لومړۍ : په يوه ټولګي کې M_1 د ټولو نارينه وو زده کړو ډيرۍ ده او M_2 دټولو زده کړو ډيرۍ (د نارينه وو او ښځينه وو) ، چې په شميرپوهنه کې لس نمرې وړي۰

M_1 / M_2

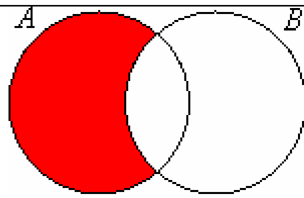
د هغو زده کړو ډيرۍ ده، چې ۲ ، ۳ ، ٤ ، ۵ ، ٦، ۷ ، ۸ ، ۹، نمرې وړي او ټول د هغو نجونو ډيرۍ ده، چې په شميرپوهنه کې يې لس نمرې وړي۰

که په ټولګي کې يواځې نارينه زده کړي وي، نو باور لري

$M_1 / M_2 = \theta$

يا دا لاندې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$A \backslash B$ (A بې له B) (x له A سره B اړيکې لري)

دويم :

$$M_1 = \{k,r,a,i\}, M_2 = u,r,s,e,l\}$$
$$M_1 / M_2 = \{k,a\}, M_2 / M_1 = \{u,s,a\}$$

لکه څنګه، چې د کمون يا تفريق پيژند او بيلګي را په ګوته کوي په ټوليزه توګه باور نه لري:

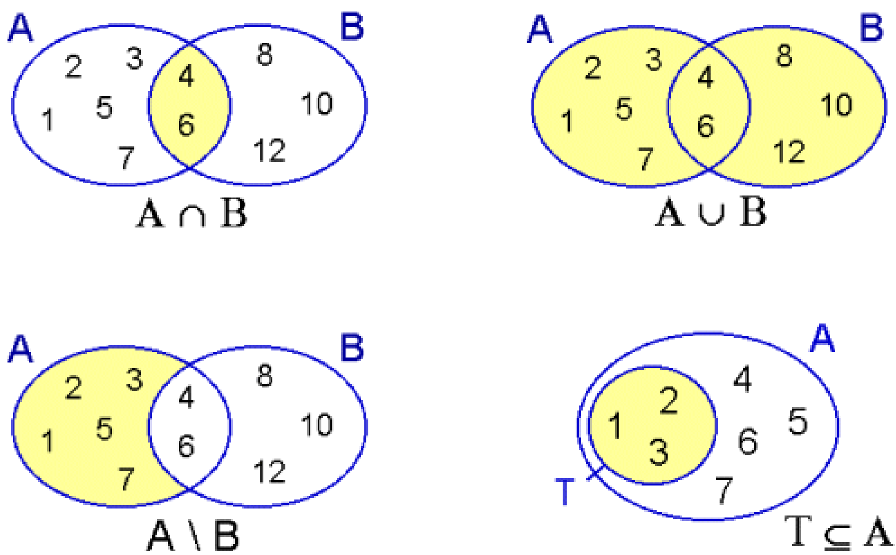
$$M_1 / M_2 \neq M_2 / M_1$$

د يوې ډيرۍ يا سټ کمپلمنت يا پوره کوونکی :

دا کارونه يا عمليه د نورو کارونو څخه توپير لري، چې په ډيرۍ کی مو څيړلي٠ دا يوه يوځايزه کارونه ده او دا نورې دوه ځايزې کارونی يا عمليې دي٠

مورږ بنسټډيرۍ په U او د ټولو هغو توکو ډيرۍ، چې U کې پراته دي يانې د U توکي دي او هغه په M کې نه دي پراته يانې د M توکي نه دي پوره ډيرۍ يا کمپليمنت بولو او د $\overline{M}$ سره يې په نخښه کوو٠

په لاندې څيره کې بيا د ډيرۍ غوڅې، - ټولنه او – کمون او برخډيرۍ ته د ګرانو لوستونکو لا زيات پام را اړوو٠



پيژند:

پوره کوونکی- یا تکمیلډیرۍ (یا د یوې ډیرۍ کمپلیمنت) د یوې ډیرۍ M پوره کوونکې ډیرۍ $\bar{M}$ ټیک هغه توکي لري(د بنسټډیرۍ U څخه) ، کوم چې د M توکي نه وي٠

دوه ځله کمپلیمنټډیرۍ جوړول خپلې لومړنی وینا ته ځي ، یاني $\bar{\bar{M}} = M$

دلته یواځې یوه ساده بیلګه راوړو: په یوه کلي کې دوه کورنی د توپیر او برګ کورنی اوسیږي٠ که دا دوه کورنی یو له بل سره خپلوي ونه لري، نو دوي یو له بل سره پوره ډیرۍ یا تکمیلډیرۍ بلل کیږي یاني دا کلی پوره کوي٠

۲ . ٤ خیرونه mapping یا اړیکې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : پام دې وي، چې دا هغه ورسره بلد تابع كلمه نه ده، چې وروسته به ورسره بلد شو۰

په دې برخه كې لومړۍ د ډيرۍ ضرب كلمه پيژنو يا تعريفوو او بيا د ضرب كلمې كارونه څيړو۰

پيژند ۲ ۰ ۹ : د دواړو ډيريو M يو او M 2 ډيريضرب(اتيرانضرب) هم ورته وايي، يانې په x سره ځليږي يا ضربيږي

$$M = M_2 \times M_2$$

د ټولو تنظيم يا ترتيب شويو توكو

$$x \in M_1, y \in M_2$$

جوړو (x,y) ډيرۍ ده۰

بيلګې

$$M_1 = (a,b\}, M_2 = \{1,2,3\}$$
$$M_1 \times M_2 = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

د جوړو د غوښتل شوي تنظيم له مخې ځل په ډيريو كې كموتاتيو نه دى دا په دې مانا، چې

په ټوليزه توګه باور نه لري: $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$

۲ – R دې د ټولو رييلګڼونو ډيرۍ وي۰ په هندسي مانا د كرښې د ټولو ټكو ډيرۍ۰ RxR د ټولو رييلګڼونو جوړو ډيرۍ ده، په هندسي مانا د هوارې يا سطحې د ټولو ټكو ډيرۍ ده۰

پيژند ۲ ۰ ۱۰ :

د څيرونې F لاندې د دوه ډيريو د ضربډيرۍ $M_2 \times M_2$ برخډيرۍ پوهيږو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس د جوړه تنظیم شوو توکو ډیرۍ، چې $x \in M_1$ له یوه یا ډیرو توکو $y \in M_2$ سره تنظیم

یا بهتره په باندې ځیره شي٠

داسی هم ویلی شو: د1 M توکي د2 M په یوه یا ډیرو توکو تنظیمیږي یا ځېره کیږي٠

که $(x.y) \in F \subseteq M_1 \times M_2$ وي، نو x اوریجنل یا اصلي توکی او y ځیره توکی بلل کیږي٠

د ټولو اصلي توکو ډیرۍ پیژندورشو یا تعریفورشو یا پیژنددیرۍ یا تعریفډیرۍ بلل کیږي او د ټولو ځېره توکو ډیرۍ د ځېروني ډېرۍ، ارزښتورشو یا ارزښتډیرۍ بلل کیږي٠

بیلګی

$$M_1 = \{a,b,c,d\}, M_2 = \{1,2,3,4\}$$

د جدول په توګه دM یو توکو ځېرونه ونه یا ځېره کوونه د M دوه په توکو

ځېره توکی اصلي توکه یا ځیره کوونکی توکی

a ------------------------→ 1 , 2 ,5

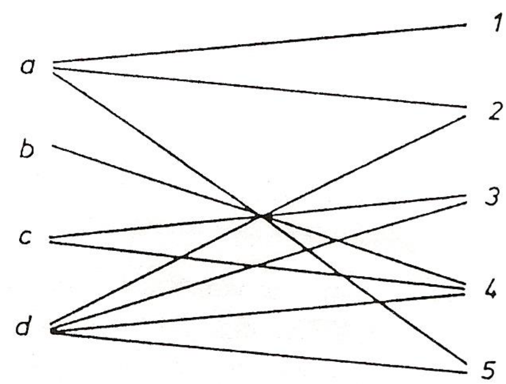
b ------------------------→ 4

c ------------------------→ 3,4

d ------------------------→ 2,3,4,5

یا دا لاندې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځيرونه:

F = { (a,1),(a,2),(a,5),(b,4),(c,3),(c,4),(d,2),(d,3),(d,4),(d,5)}

(د M يو او M دوه ډيريو د ټولو توکو جوړو ډيرۍ)

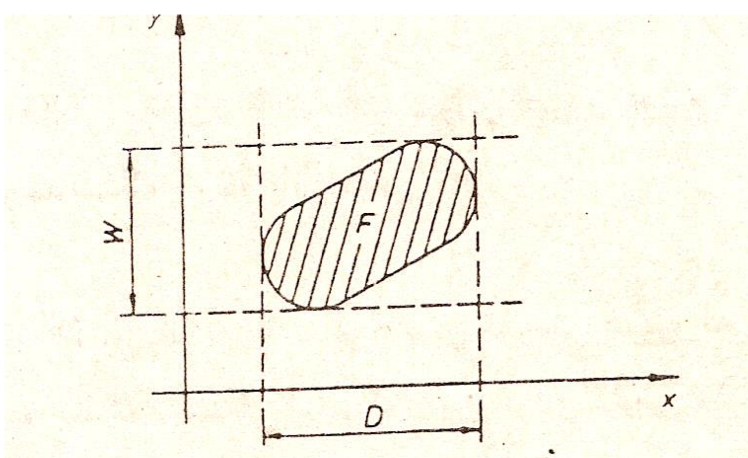


Bild 9.6 ځيره

دريم : هر پيدايښتي يا طبيعي ګڼ a د هغه په دوه ځله b=2a باندې ځيره کيږي۰ داسې پيژند شوې يا تعريف شوې ځيره ونه په لاندې بڼه هم انځوريدلی شي۰

$$F = \{(a,b) \mid a \in N, b = 2a\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم N د پيدايښتي يا طبيعي ګڼونو ډيرئ· پيژندډيرئ يا تعريف- د ټولو پيدايښتي ګڼونوډيرئ ده او ارزښتډيرئ د ټولو جوړه ګڼونو ډيرئ ده·

څلورم : که M يو په يوه ښوونځي کې د ښوونکو ډيرئ وي او M دوه په ښوونځي کې د ځانګړو ټولګيو ډيرئ وي نو ښوونکي، چې په ټولګيو کې درس ورکوي دا يوه څېرونه ده· د ښوونکو ډيرئ د ځانګړو ټولګيو په ډيرئ کې

موږ د څېره ونې څلور حالتونه توپيروو:

پيژندونه(دې ته دې ګران لوستونکي ښه پام وکړي):

لکه په لومړئ بيلګه کې په څيره ونه F کې د1 M ، چې تعريفډيرئ D سره برابر دئ او M2 ، چې له څيره ډيرئ , W سره برابر دئ ، توکي مو مخ ته پراته دي·

له يوې څيرونې Fغږيږو د1 M په M2 باندې· دلته دې « د » او « په » ته پام وي)

وي دې: $D \subset M_1, W \subset M_2$

لکه په دويمه بيلګه کې ، نو د يوې څيره ونې F غږيږو له M1 په M2 کې (دلته دې

« په » او ,په کې » ته پام ور واړول شي)

وي دې : $D = M_1 \wedge W \subset M_2$

دلته د يوې څيره ونې غږيږو د1 M په M2 کې دلته دې دريمه بيلګه په پام کې راوړل شي·

وي دې: $D \subset M_1 \wedge W = M_2$

نو د يوې څيره ونې غږيږو له M1 په M2 باندې· دلته څلورمه بيلګه د بيلګي په توګه راوړو· د دې نيونې لاندې چې ټول ښوونکی ځانګړي ټولګيو ته درس ورکوي·

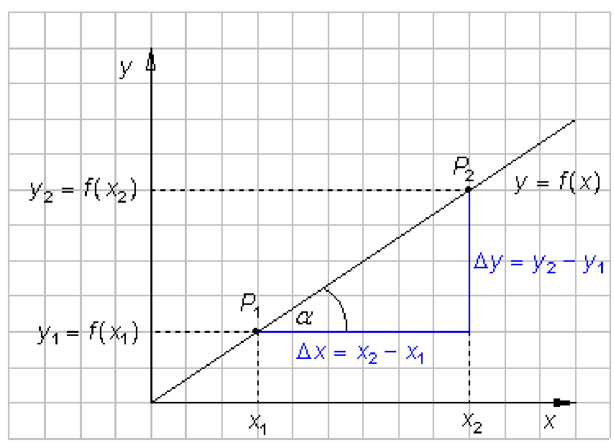
(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : دا لاندې برخه دې گران لوستونكي وگوري، خو د دې اوس وخت لپاره لږ ستونځمنه ده او شايد ځيرې هم رانه شي، خو كه لږ د شميرپوهنې سره بلد شو، بيا پرې پوهيدل ساده دي. زه مخ ته لرم، چې په دې هكله ليكلى كتاب، چې چاپ شوى نه دى دلته پر ليكه كړم، چې هلته بيا دا موضوع لږ غزيدلې ده.

بيلگه ۲ . ۵ : مورږ په هواره يا سطحه كې ځرگند شوي كړى د ډيريځل RxR په ځير د برابرونونو له لارې رانيسو(R د رييلگنونو ډيرى د گنكرښې تكي دي(گنونه دې وكتل شي)).

الف) $y = 2x$ يوه ځيره ونه ده د R په R باندې ، ځكه چې باور لري

$D=W=R$



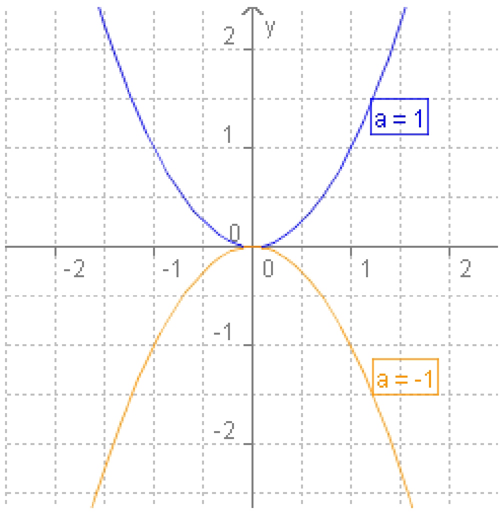
يادونه : په پورته ځيره كې برابرون $y = ax+b$ دى.

ب) $y = x^2$

يوه ځيره ونه ده د R په R كې ، ځكه چې باور لري

$D = R ,\ W = [0, \infty]$

(c) ketabton.com: The Digital Library



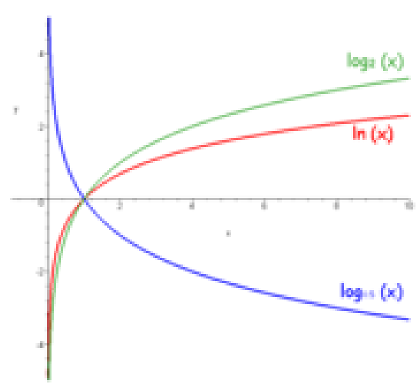
یادونه :

پوته بلواک د $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ډول دی، چې b = 0 , c = 0 او a = 1 , a = -1 اینول شوي دي۰

پ) y = log x

یوه خیره ونه ده له R په R باندې « ځکه چې باور لري۰

$$D = (0,\infty) \wedge W = R$$

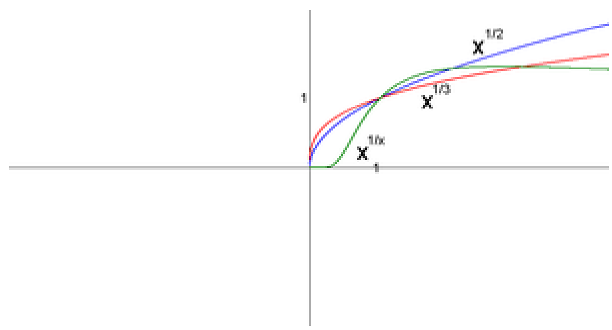


(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) $y = +\sqrt{x}$

یوه ښیرونه ده له R په R ، څکه چې باور لري

$D = W[0, \infty]$



یادونه : پورته د دویې ،دریمې او په x -مې ریښې په مانا دی

ښیرې له ویکي ښخه په مننه راکښته شوي دي٠

پیژند ۲ ٠

یوه ښیره ونه E یواځنی بلل کیږي٠ که هر $x \in D$ په ټیک یوه $y \in W$

باندې ښیره شي٠ دا په دې مانا، چې هر $x \in D$ ټیک یووار په $y \in W$

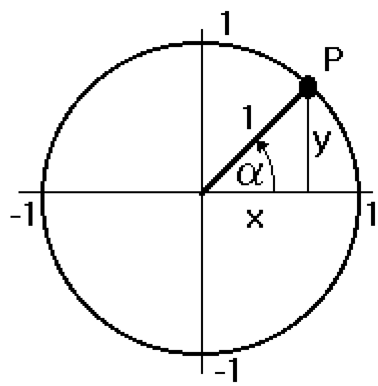
تنظیمدیرۍ یا جوړه ډیرۍ کې رامنځ ته کیږي٠ یوه یواځنی ښیره ونه فنکشن

یا« بلواک» بلل کیږي او یا لکه تراوسه ورسره بلد یو یوه تابع بلل کیږي٠

پام:

دا دې دلته کره په ګوته شوې وي، چې زه « یوازنی ښیره ونه » بلواک یا فنکشن بولم٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ۲ ۰ ٦ : په بیلګه ۲ ۰ ۵ کې له الف تر ت پورې ټولې څیروني فنکشنونه یا بلواک دي۰ د دې پر څنګ لاندې برابرون (یوونګردی یانې ګردی، چې وړانګه یې یو یوون یایووالی یا واحد وي څیره ۰) انځور شوې څیره ونه له R په R کې ([-1,1] D=W) فنکشن یا بلواک نه دی ، ځکه چې اصل دوه څیرې لري یانې که په تنظیمجوړه کې د څیره ونې لړي پرلپسې(لنډ:لړی) بدله شي، نو یوې پرڅنګ څیره ونې ته راځو:

پیژند ۲ : څیره ونې F ته پرڅنګ څیرونه F^{-1} د ټولو جوړو (x,y) ډیری ده له $(x,y)\in F$ سره ۰

پیژند ۳ ۰ یوه څیره ونه یویواځنۍ بلل کیږي، که یواځنۍF او F^{-1} یوازنۍ څیروه ونې وي، دا په دې مانا، چې که هر $x\in D$ او $y\in W$ ټیک یو ځل په تنظیم کې منځ ته راشي۰

یادونه : د څیروني نوم څخه باید ونه ډار شو دا څیره ونې څیرې کووني (که څوک یو کالی یا رخت څیرېکوي)او څیره کووني توپیر، ځکه سره کیدی شي، چې هغه منځپانګه یې یو له بل توپیر لري۰ موږ پښتو کې نږدې یو ډول لیکونکي ویونه (لغات) لرو، خو دا هغې منځپانګې له مخې توپیریږي۰
ډیری پوهنه د شمیرپوهنې ستنه ده، نو په راتلونکې کې به یې نوره هم ژوره وڅیړو او همدا اوس هم نور ګران هیوادوال دې ته رابولم، چې له ما سره ګډ کار یا خپلواک دې کار ته ملا راوتړي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ما دا برخه غزولې، چې په خپل شووني وخت کې به ګرانو لوستونکو ته په ځانله توګه د یوه کتاب په څېر هم وړاندې شي.

۲ . ۵ تمرینونه

۱ – د لاندې ډېږې یا سټ توکي د شمیرنې له لارې انځور کړئ

الف $\{x \mid x < 20$ او x لومړی عدد $\}$ (لوستل: د ټولو عددونو x ډېرې یا سټ، چې x لومړنی عدد او $x < 20$ دی).

ب- $\{x \mid x^2+x-6=0\}$

پ- $\{x \mid x > 0$ او $x^2+x-6=0\}$ دا په نوکانوکې ټول له کیڼ ښي لور ته لولو

ت) $\{x \mid x$ رییلګڼ او $x^2+1=0\}$ دا ټوټه له ښي و کیڼې لور ته ولولی

۲ – د توکو x, y, z اړلرونوالی و ډېري M ته وښیې!

الف) M د لمړنیو ګڼونو ډېری

$$x = 4,\ y = 5,\ z = 6$$

ب) M د لاندې مساواتو حلډېری (اوبیډیری)

$$x^3 + x^2 - 6x = 0$$

$$x = 0,\ y = 2,\ z = 3$$

پ) M د ریشنلګڼونو ډېری چي په اینتروال $[-3, 3]$ کی پراته دي

$$x = -2,\quad y = \sqrt{2},\quad z = 1/3$$

ت) M د رییلګڼونو ډېری چی په اینتروال $[-3, 3]$ کي پراته دي

$$x = -4,\quad y = \sqrt{2},\quad z = 3$$

۳ – د لاندې ډېریو ترمنځ کومی اسپیکی پرتی دي

الف) M_1 د ټول جفت ګڼونو ډېری

(c) ketabton.com: The Digital Library

او M_2 د ټولو ټولګنونو ډيرى

ب) د ټولو مساواتو $x^2 + 2x - 3 = 0$, حلونو (اوبیو) ډیرى

$M_2 = \{ -3 , 1 \}$

پ) M_1 د ټولو ګنو ډيرى چي پر ۶ ويشل کيږي.

او M_2د ټولو ګنونو ډيرى چي په ۳ ويشل کيږي !

او M_3د ټولو ګنو ډيرى چي په ۱۲ ويشل کيږي !

۴ – د ډيرى $\{ a,u,t,o \}$ ټول برخډيري ورکړی !

۵ – د لاندي ډيريو څخه ټولنډيرى ، غوڅډيري او دواړه ثوډيري جوړ کړی !

الف) $M_1 = \{ k,a,m,e,l \}$, $M_2 = \{m,a,u,l,t,i,e,r\}$

ب) $M_1 = \{ 2,4,6,.. \}$, $M_2 = \{ 3 ,6 ,9,. . . . \}$

پ) $M_1 = \{ x \mid x^2 + x +- 2 = 0\}$, $M_2 = \{x \mid x^2 -3x+2 = 0\}$

۶ – د يوه ډيرى M او د تشډيري $\emptyset$ ټولنډيرى، غوڅډيرى او توپيرډيرى جوړ کړی !

۷ – د يوه ډيرى M او خپل همدي ډيرى ټولنډيرى ، غوڅډيرى او توپيرډيرى جوړ کړی !

۸ – وي دي $M_1 = \{ 4 , 8 , 12 \}$ $M_2 = \{ 3 , 6 , 8\}$

$M_3 = \{0 , 2 ,4 ,6 \}$, $M_4 = \{ 6 , 12 , 18 \}$

جوړ کړی : $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3] \setminus M_4$!

۹ – جوړ کړی

الف) $M_1 \cup (M_1 \cap M_2)$ پ) $M \setminus \emptyset$

ب) $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$ ت) $\emptyset \setminus M$

۱۰ – وي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$M_1 \cup M_2 = \{1,2,3,4,5\},$$

$$M_1 \cap M_2 = 71,3,5\}$$

$$M_1 \backslash M_2 = \{2,4\}, M_1 \backslash M_2 = \varnothing$$

له دې پورته څخه M_1 او M_2 وټاکئ !

۱۱ – وي دې

الف) $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ ب) $M_1 \subset M_2$,

وټاکئ: $M_1 \backslash M_2$!

۱۲ – وي دی M_1 , M_2 (د نیمواز) اینتروال تکي ډیري:

$$M_1 = \{-3, 3\}, M_2 = [1, 7]$$

وټاکئ

الف) $M_1 \cup M_2$ ب) $M_1 \cap M_2$ پ) $M_1 \backslash M_2$

ت) $M_2 \backslash M_1$ ټ) $M_1 \times M_2$

۱۳ – وي دې $M_1 = \{1, 2, 3\}$, $M_2 = \{\{a, b\}$

الف) د $M_1 \times M_2$ ځل جوړ کړئ

ددې لاندې ب) تر ت) برخې تمرین لپاره دې ۹ الف برخه وکتل شي.

ب) دا لاندې کوم ډول ځیروني دي

$$F_1 = \{(1,a),(1,b)\}$$

$$F_2 = \{(1,a),(3,a)\},$$

$$F_3 = \{(1,a),(2,b),(3,b)\},$$

$$F_4 = \{(1,a),(2,a),3,a)\},$$

$$F_5 = \{(1,a),(2b)\}$$

په ټولو حلنونو (اوبیو) کی F_1 تر F_5 ورکړئ .

پ) په ځټ ځیرونه ورکړئ

ت) د ځیرونو F_1 څخه تر F_5 پورې، کوم یواځنی او کوم حتی یویواځني دي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . دحقیقي اعدادو (ګڼونو) سره د شمیرلو بنسټیزې نښلونې

(ترنی، کارونی یا عملیي)

۳ . ۱ د اعدادو د سیستم جوړښت

۳ . ۱ . ۱ طبیعی اعداد یا ګڼونه natürliche Zahlen

انسانانو له پخوا څخه اعدادو ته اړتیا درلوده۰ له دې امله یې پرمخ ودیینه کې هڅې وکړې، چی له ډیری (سیټ) (د لیکنې په دننه کې ډیری پوهنه هم څیرلشوې)) سره داسې لارغوره کړي، چی دا ډیری تشریح کړای شي او د انسانانو او چاپیریال(طبیعیت) د پرلپسې اخ او ډب په نتیجه کې د ګڼ یا عدد وی(کلمه یا لغات) راپیداشوی، چې د عدد یا ګڼ کلیمې پربنسټ د رینتینو شیانو څرګند څومره والي (کمیت)Quantitative ترلاسه کړي۰ د طبیعی اعداد و څخه په ګڼلو یا که غواړې شمیرلو کې ګټه اخستل کیږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ الف د طبيعي عددونو(پيدايښتي ګنونو) جوړښت

پيژند (تعريف)۳ ۰ ۱:

الف) ټول طبيعی اعداد د ډیری په څير يوه ټولګه جوړوي او د طبيعی اعدادو ډیری يا سټ په نامه ياديږي يا يې طبيعی اعداد بولو او په N او همداسې N° سره يې په نخښه کوو۰

ډير پای طبيعي اعداد شته ، ځکه چې په هر طبيعی عدد پسی راتلونکی طبيعی عدد هم شته دی (يعنی په هرڅومره لوي طبيعی عدد پسی راتلونکی طبيعی عدد شته دی، چې دا وروسته روښانه کيږي)۰

ب) دطبيعي ګڼونو(اعدادو) اکسيوماتيکيAxiomatic جوړښت

اکسيوم جمله ده، چې اوبيونه (حل) نه غواړي او همداسی منل کيږي۰ دا چې جمله ، اکسيوم څه دي په لومړی برخه يانې سم اند (منطق) کې دې وکتل شي۰

طبيعی عدد کلمه د جيوسيپې پيانو(Giuseppe Peano له ۱۸۵۸ – ۱۹۲ ز۰کال) اکسيومونو پر بنسټ لاندې پيژند لري يا په لاندې توګه تعريف کيږي:

۱ – د صفر ګڼ يو پيدايښتي ګڼ دی

۲ - د هرطبيعي عدد يا ګڼ m لپاره يو يوائځنی ټاکلی طبيعي عدد n شته، چې سملاسي(ترلی) د m پسی ګڼ دی، د کوم لپاره چی لرو: $m+1 = n = m^\wedge$

دلته $m^\wedge$ د m پسي سملاسې يا ترلی ګڼ يا عدد په ګوته کوي۰

۳ – هرطبيعي عدد زيات له زياته په يوه طبيعی عدد پسی سملاسي راتلونکی ګڼ دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ – هیڅ طبیعي عدد نه شته، چې پسی راتلونکی پیدایښي عدد یې صفر وي٠

٥ – که طبیعي عددو ډېرۍ M صفر د توکي په څیر ولري او که له هر طبیعي عدد m سره د هغه پسی تړلی راتلونکی عدد یا ګڼ `m هم د M توکی وي، نو M ټول

طبیعي عددونه خوندي لري یا په بل ډول » ټول طبیعي اعداد په کې ځاي دي٠

یادونه: ځنې ادبیاتو کې، د پیانو سیستم کې، د صفر په ځای ۱ لیکل شوی. په دې حالت کې بیا صفر ته د طبیعي عدد یا ګڼ په څیر نه کتل کیږي. که بیا صفر ورسره مل کړو، نو د صفر سره طبیعي ا عدادو ډېرۍ یا –سټ یې د صفر سره بولو.

۱ . ۱ ب : د طبیعی اعدادو یا ګڼونو انځورونه او سیستمونه:

طبیعي اعداد په نخښو (دې ته په الماني کې Zifferوایي، چه همغه د صفر په معنا دی، خو دلته ترې مطلب، چې دا څیرو، دی) انځوریږي. د دې لپاره چې دا لړ ځای ونیسي، نو د لویو او وړو اعدادو لپاره نخښې له کوچنیو سره یوځای کیښول شوې دي. دا چې څرنګه یوه د عدد یا ګڼ نخښه له بل توپیریږي، په لاندې ډول یې د زیاتون یا جمعي سیستم او ځای سیستم کې ښایو.

په زیاتون سیستم کې هر بنسټیز ،،ځای،، یو ،، ځای ارزښت،، لري. د څیفرونو زیاتون د یو په بل کې د ورزیاتشوي بنسټیز څیفر پخپله هغه عدد یا ګڼ ورکوي. بیلګه یې په رومي ګڼونو کې راړو. دا له بنسټیزو څیفرونو جوړ شوی(ترې لاندې لسیز د اعدادو سیستم دی). زه دلته د ضرورت په بنسټ ټول ضروري څیفرونه چې موخه ترې عددونه دي، له پیل راوړم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

رومي عددونه:	M	D	C	L	X	V	I
عربي عددونه:	1000	500	100	50	10	5	1

طبیعي عدونه له دې امله یو د بل ترڅنګ لیکو چې کم ځای ونیسي لکه د بیلګې په توګه: CXX په دې معنا چې C+X+X

په رومي ګڼونو کې، که بنسټیز کوچني ګڼنخښې لکه I , V , C د لوي ګڼنخښې و کیڼ لور ته ولیکل شي نو دا مانا لري چې دا کوچنی ګڼ له لوي ګڼ څخه کم شوی. د بیلګي په توګه: XC = C - X .

بیلګې: **الف:** MMDCCLXVIII په دې مانادی 2768

ب : MCMXXIX په دې مانا دی 1929

پ : CCCIV په دې مانا دی 304

ځایسیستم: په ځاي سیستم کې هره بنسټیزه نخښه یو «ځاي ارزښت نخښه ارزښت» لري.

لکه : g– ئیز ځاي سیستم(پوزیشن سیستم (Positionssystem)): د طبعي ګڼ n انځورونه په g– ئیزځای سیستم کی په دې ډول ده چی د یوه ورکړشوي ستې په بنسټ(g ∈N) $g \geq 2$ هر طبعي ګڼ n په لاندې ځانګړي ډول انځوریدلی شي:

$$n = a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + ... + a_1 g + a_0$$

دلته بنسټیزې ګڼنخښې a_i، g د $i = 0,1,2,...,k$ او $k \geq 0$ د $0 \leq a_i \leq g-1$ چی $a_k \neq 0$ وي په کار راځی یا اړتیا ورته شته.

لیکلی شو :

$$n = a_k a_{k-1} .....a_1 a_0$$

که د بدلیدلو (د بل څه سره) امکانات رامنځ ته کیږي، نو بهتره به وي چې په

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ډول ولیکل شي

$$n = [a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0]_g$$

نن په ټوله نړۍ کې ګڼل په لسیز سیستم (ګڼځای ارزښت) باندې کیږي، چې تل داسې نه وه، لکه په افغانستان کې چې دا اوس هم د ډوډۍ پور لپاره په لرګي کرښه را کاږي، چې څو ډوډۍ واخستل شوې.

په لسیز سیستم کې ګڼځای «ارزښت» لري چې انځور شي، مګر په لرګي کې ځای ارزښت نه لري چې کرښه چیرته کښل شوې، هلته د پور کرښو له ګڼون یا تعداد څخه پور څرګندیږي.

بل د ګڼلو سیستم . لکه د مخه مو چې تر پام لاندې ونیوه، د ګڼلو رومي سیستم دی چې نن هم د ارزښت وړ دی او همدارنګه د مفهوم ډك، زیاتونسیستم(جمعی –) څرګندیږي.

بیا هم غواړو چې دا په لاندې ډول ځانګړی کړو:

۱ – هره لاندې نخښه I, X, C کړای شي چې زیات ترزیاته ۳ ځله(۳ واری) په یو ګڼ کی پرله پسې یا څنګ تر څنګ راشی

۲ – هره، د ګڼ نخښه V, L, M, خورا زیاته یو ځل څنګ تر څنګ په یوه ګڼ کی راتلی شي.

۳ – که بنستیز نخښه I, X او یا ....___-- ددې نخښو د ارزښت نه لوړو ارزښت نخښو V, X, L, C, D یا M CXI تر مخ ځای په ځای شوې یا انځوروي نو د لوي ارزښت څخه کمیږي .

زیاتون او کمون (جمعه او منفي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – په هرګڼ انځورونې(Zahlendarstellung) کی کيدی شي چې يواځې يو بستيز ګڼ تر مخ ځای په ځای يا انځور شي لکه: MXCVII = 1098 مګر نه IMIC
۵ – د يو ګڼ لپاره د امکان په حال بايد کمی نخښی په کار واچول شي.

عربي ګڼونه : دا ګڼونه، چې موږ ورسره بلد يو، د لسيز سيستم ګڼونه دي، چې عربی ګڼونه بلل کيږي. دا د ګڼلو لسيز سيستم عربو د هند څخه راوړی چې په دولسمه پيړۍ کې يې اروپا ته يو وړ. دا اصلي ګڼونه له صفر(۰) تر ۹ پورې دي يا له 0 تر9 پورې، چې

څيفر ورته وای (همغه عربی صفر دی) چې دلته ترې بنستيز ګڼونه پوهيدل کيږي.

لکه چې ګوته مو ورته ونيوه زياتونسيستم نور ارزښت نه لري، څکه چې د يو ګڼ ارزښت د ګڼ نخښی زياتون باندې انځور کيږي. د ځای سيستم سره د ګڼونو انځورول ساده دي.

> **تعريف ۱ . ۱ ب** : په يو «ځاي ارزښت سيستم» کی همغه ګڼ لوي دی چې زيات ځايونه ولري، که چيرې د ګڼ د ځايونو شمير سره برابر وي(مساوي وي) نو همغه ګڼ ستر دی چې له کينی لورې يی نخښنه لويه وي.

لسيز – يا لسګونی سيستم: لسيز سيستم همغه ځای ارزښت سيستم دی چې له انځورونی يی څرګنديږي. په لسيز سيستم کی د ګڼ انځورولو نخښی، لکه د مخه مو چې انځور کړې، ۹،۸،۷،۶،۵،۴،۳،۲،۱،۰ دي. ۱۰ ګڼ د لسيز سيستم بنستيزه نخښنه ده. دا چې نور ګڼونه نه انځوريږي، نو ځای هلته ډك دی چې پرله پسی (ترتيب يانظم) د ۰ تر ۹ يعنی له 0 تر 9 ګڼونو پورې په ځای شوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول د پسی جګ ځای یوون (واحد) د په کار اچول شووګڼنخښنو ګڼون (تعداد یا شمیر) دی، څموږ په حالت کی ۱۰ .

لکه چی د مخه مو ګوته ورته ونیوله، د پای (نه لایتناهی) ډیري (set , die Menge ګڼلو لپاره لاندې ګڼونه کفایت کوي: ۱، ۲، ۳، ۴، او ۹ –امه برخه دې وکتل شي)) غږو ګڼلو لپاره لاندې ګڼونه کفایت کوي: ۱، ۲، ۳، ۴، او داسی نور. ټولودې ګڼونو ته چی دصفرګڼ ورسره مل شي د طبعي ګڼونو ډیری N ویل کیږي. ددې لپاره لیکو :

$$N = \{ 0, 1, 2, . 3 . 4 , 5 , 6,....\} ; \qquad N^* = \{ 1, 2, 3, 4, ...\}$$

موږ ګڼونه په کوچنیو لاتینی ټکو یا حروفو ښایو لکه a ,b,c, ... n . دا رینښتوني

(رینښتینوالی یا واقعیت) چی n دې یو طبعي ګڼ وي، داسی لیکل کیږي $n \in N$ یا $n \in N^*$ (ویل کیږي چی: n د طبعي ګڼونوډیري N یا*N توکی دی(لنډ n د N یا *N څخه دی)) په دې ځای کی دې دګڼ او ګڼځای (ځیفر) توپیر ته پام وي.

موږ دګڼونو ټاکلو لپاره بلډ یا اشنا د نخښنډیري لسیز سیستم په کار اچوو (استعمالوو)

$$N_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$$

د ګڼونو د نخښنو $a_i \in N_{10}$ پرله پسی، لکه د مخه مو چی په ګوته کړل، په لاندې ډول یو طبعي ګڼ انځوروي:

$$a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \dots a_2\, a_1 a_0 = a_n.10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}\,.10^{n-2} + ..+ a_2\,.10^2 + a_1.10 + a_0\, 10^0$$

$$a_i \in N.$$

ګڼونه په نورو ځیفرونو ډیري هم انځوریدی شي. د بیلګي په توګه په اینفورماتیك (Infrormatik) کی، چی د دوالسیستم (Dualsystem) (دوئیز سیستم) څخه کار اخستل کیږي. ددې لپاره دوه ګڼنخښنی (ځیفرونه) لیکل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$N = \{ 0,1 \}$

په لاندې جدول کې دلسيز او دوه ئيز سيستمونو لمړني ګڼونه يو د بل ترڅنګ ښکاره شوي:

دوه ئيز سيستم	لسيز سيستم
0	0
1	1
10	2
11	3
100	4

په ټوليزه توګه(عمومي توګه) دلته يو ځيفر پرلبسې(د عددون ترادف) $a_i \in N_2$ يو طبيعي عدد په لاندې ډول انځوروي،

$$a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0 = a_n.2^n + a_{n-1}.2^{n-1} + \ldots + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0 ,\ a_i \in N$$

بيلګه ۱ . ۱ : $59 = 1.32 + 1.16 + 1.8 + 0.4 + 1.2 + 1.1$

$= 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 111011$

يا دونه :: څه لنډ لنډيزونه

د طبيعي اعدادو ډيرۍ يا سټ داسې په نخښه کوو:

د پيدايښتي يا طبيعی ګڼونو ډيرۍ $N = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$

دپيدايښتي ګڼونو ډيرۍ د صفر سره $N° = \{ 0, 1, 2, \ldots \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ه کتابونو کی دا د صفر نخښه په لاندې برخه کی راځي٠

۳ ٠ ۱ ٠ ب د طبیعي اعدادو یا ګڼونو انځورونه:

طبیعي اعداد په نخښو انځوریږي٠ دا عددونه یا ګڼونه د ځان لپاره یو سیستم لري، چی هغه زیات یې موږ نه څیرو٠ زموږ لپاره غوره هغهٔ عربی اعداد یا ګڼونه دی٠

یا په بل ډول : دا عددونه چی موږ ورسره بلد یو د لسیز ځایستسم عددونه دي، چی دا مو د مخه په ګوته کړل٠ دا کورونه (خوني یا خانې) لري او په هر کور کی له صفر تر ۹ ځاي نیوی شي او بیا یې هر ځاي یو ارزښت لري، له دې امله دا » ځاي ارزښت سیستم« دی٠ لومړي کور ته یویز، دوم ته لسیز، دریم ته سلیز او همداسی ، چی دا مو د مخه لږ روښانه کړي٠

انځورونه یا څیفرونه یې دي : ٠ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ دا د بنسټیز ګڼونو نخښی دي، نور یې په کورونو یا ځایسیستم باندې روښانه کیدی شي٠

پیژند ۳ ٠ ۱ ٠ ب :

په یو» ځاي ارزښت سیستم « کې هغه ګڼ لوي دی، چی ډیر ځایونه ولري٠ که چیرې د ګڼ د ځایونو یا کورونو ګڼون (تعداد) سره برابر وي٠ نو بیا هغهٔ ګڼ لوي دی، چی کیڼ لور یې ګڼنخښه لویه وي٠

۳ ٠ ۱ ٠ پ : طبیعي اعدادو کي د شمیرنې بنسټیز قوانین

اوس په لاندې ډول د پیداینښت ګڼونو، په ټولیزه توګه د رییل ګڼونو لپاره او وروسته د کمپلکسو ګڼونو لپاره هم باوري(معتبر) بنسټیز د شمیرنې قوانین وړاندې کوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : د اندول (نظم یا ترتیب یا لوي واړه ترتیب(Anordnung) بنسټیز قوانین:

که > ولرو، نو دې ننوتي کونج کی یا د نخښی خوله کی عدد یا ګڼ لوي دئ او د وتلی کونج یا لوي کونج >که نخښه یا داسی کونجکی یا څټ یا ککره کې لیکل شوی عدد کوچنی دئ۰ که ګڼونه یا اعداد ۱۵ او ۲۳ ولرو نو د لویواړه اړیکی داسی لیکو، یانې که 23 > 15 ولرو نو ترې څرګندیږي، چی عدد۱۵ له عدد ۲۳ کوچنی دئ .

د دوه طبیعي اعدادو a اوb ترمنځ له لاندې اړیکو څخه ټیک یوه اړیکه باور لري»

$a < b \quad , a = b \quad , a > b$

۲ - ۲۱ =۲۱ که د ۲۱ په ځاي توری ولیکو هم a = a به وي اینه ونه یا هندارونه یا منعکسونه (ریفلیکسیویتي Reflexivity)

۳ – له a = b => (لاس ته راځي) b = a (سیومتري، اندول، ورته وايي (Symmetry

د انعکاسي (ایینه ونیز – یا هندارونیز) برابروالی یانی که چیري دا عددونه ورواینه یا هنداره یا انعکاس شي، نو دواړه عددونه په دا بل لور بیرته سره برابر دي یا برابريږي۰ که انعکاسي(اینه ونیز)برابر نوم ورته کيږدو، نو هم مناسب به وي، خو موږ به یې همغه سیومتري وبولو۰

٤ - له a = b او b = c => (لاس ته راځی) a = c(ترانزیتیوTransitivity)

ترانزیتیو ګورو، چی یو له بل اړوند مانا ته نزدی دی، څکه چی دا ګڼونه یو د بل سره په واکوالي تړلي یا له یو څخه وبل ته ځی یا وړل کیږي۰

۵ – له a < b اوb < c => (لاس ته راځی) یا a < c یا $a<b, b<c \Rightarrow a<c$

وړاندیز : که چیری دا پورته وي یا لغاتونه یا نومه ونی په همغه لاتین نومونو ولیکو ښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به وي، خو له شمیرپوهنی پرته مانا باندی یې هم پوهیدنه ښه او اړیینه ده٠

ب : د زیاتون (جمع) Addition n. بنسټیز قوانین

که چیرې له طبیعي اعدادو څخه یو ، دوه یا څو ګڼونه یو په بل زیات شي، نو یو پیدایښتي ګڼ ترې لاس ته راځی او دا کارونه(عملیه) «زیاتون یت جمعه » بولو، ځکه، چی ګڼونه یو په بل زیاتیږي٠

پیژند: د همغه ډول شیانو یا یو څه یو په بل زیاتیدلو ته زیاتون (جمع) وایو

که عدد ۱۰ په عدد ۱۸ ورزیات کړو نوعدد ۲۸ ترې لاس ته راځی یا

۲۸ = ۱۸ + ۱۰

په پورته کې ۱۰ او ۱۸ یو پر بل زیاتیږي، نو له دې امله یې «زیاتېدونی» (ما تراوسه زیاتووني بللي، خو فکر کوم،چې زیاتیدوني یې ښه نومه ونه ده) بولي، ۱۰ + ۱۸ جمعه او ۲۸ « جمع ارزښت» بلل کیږي ٠ چی په هغه پخوانی نوم مو ورته حاصل جمع وایه ٠ + زیاتوننخښه ده او = برابروننخښه (مساوات علامه) بولو

دجمعې یا زیاتون بنسټیز قوانین

۱ - د دوه طبیعي اعدادو a او b لپاره تل یو زیاتون (جمع) a + b شته دی

۲ - یواځنوالی : له a’ = a او b’ = b څخه لاس ته راځي: a’+b’ = a + b

۳ - COMMUTATIVE LAWکموتاتیو- یا بدلون قانون دی:a + b = b +a

۴ - assotiative law اسوځیاتیو - سره ګډېدنې قانون. لرو
(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c

۵ - Monotony law مونوتوني – یا همغږیزوالي قانون :

(c) ketabton.com: The Digital Library

له $a < b$ څخه لاس ته راځي $a+c < b+c$

يادونه : په $a+b=c$ کې a او b زياتېدونې $a+b$ زياتون او c زياتون ارزښت بلل کيږي

يادونه : په زياتون کې لاندې زياتونقوانين هم باوري دي:

ناپيلي توکی: په $N°$ کې يو توکی شته، چې که د هرپيدايښتي توکی سره په زياتون يا جمعه کی ور زيات شي همغه توکي ورکوي٠ دا توکی صفر دی: $a+0=a$

ناپيلي توکی کړی شو نالوريز وبولو ،ځکه،چې د کومې لور ګڼ باندې يې په زياتون کې بدلون نه راولی يا د زياتون ارزښت همغه پاتيږي، همداسې نااړونده او که بل څه مو په خوښه وي همغسې يې وبولی٠

پ : د کمون (تفريق)Subtraction بنسټيز قوانين

پيژند:د پيدايښتي ګڼونو a او b لپاره، چې $a>b$ وي، يواځی يو x شته دی، د کوم لپاره ، چې باور لري: $a - b = x$

که $x= a -b$ شته وي، نو ټيک يواځني شته دي(موخه x دی)

نومه ونې: b کميدونی يا مفروق (تراوسه مې کمونی بللی) a ترې کمونی يا مفروق منه $a+b$ کمون او x کمون- يا تفريق ارزښت بلل کيږي يا بولو :

موږ پورته د لاتين تورو لپاره طبيعي اعدادونخښی ليکو، چې ساده يې ونوموو:

$$20 - 10 = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کی مورږ له ۲۰ لس کم کړل، چی لاس ته راوړنه يي ۱۰ ده، نو له دی امله يي داسی نوموو:

تر مخ يادونه: په لاندې کې ع . د عربي په معنا دی

۲۰ «ترې کمونی »، ځکه، چی ترې کميږي(ع۰ مفروق منه)، ۱۰ «کموونی« يا کميدونی(ع۰ مفروق) دا بل لس يې «کمون ارزښت» يا د کمون لاس ته راوړنه(لنډ: لاس ته راوړنه يا کمون) (ع ۰ حاصل تفريق) ، – کموننخښه او = برابروننخښه ده۰

ت : د ځل (ضرب)Multiplication بنسټيز قوانين:

۱ - د دوه پيداينښتي ګڼونوa اوb لپاره د پيداينښتي ګڼونو په ډيری کې تل يو ځلa.b شته دی. د a.b لپاره داسي هم ليکوab په پورته کې aاوb ځلووني (ضريبونه) اوab=x « ځل ارزښت » يا ځل(حاصل ضرب) دی۰

وايي چی ضرب وهلو ته وايي او د جمع (که جمعې) لنډه طريقه، چی۰۰۰۰وي يا د زياتون لنډه لار ده۰ ګورو، چی دا پيژند، چی وهل او دربول دي زموږ لپاره دومره موخور نه دی او ځل د پېنتو ښه نوم دی، چی له دربولو مو ځانونه راويستلي وي۰

که ووايو، چی : د کابل او جلالاباد ترمنځ لار ۱۵۰ کيلو متره ده۰ زمری له کابل څخه جلال اباد ته ۸ ځله لاړ، نو زمري به جلال اباد ته د تګ ټوله څومره لار وهلی وي؟

ليکو: ۱۵۰ × ۸ = ۱۲۰۰ ، نو زمري به ټوله ۱۲۰۰ کيلو متره لار وهلي وي۰ ګورو، چی د ځل نومونه د ضرب لپاره ښه او اسانه ده، ځکه چی پښتو ده او له ضريبونو څخه به هم ځلوونی اسان وي، به ۰۰۰وي نه، بلکی اسان دي۰

۲ - له a =´a او b =´b څخه لاس ته راځي a´b´ = ab (يواځيتوب)

۳ - لرو ab = ba کموتاتيو – يا د بدلون قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ - لرو $(ab)c = a(bc)$ د ګډولو- اسوشیاتیو قانون

٥ – لرو $(a+b)c = ac + bc$ د ویشونې- یا دیستریبوتیو قانون
Distributive law

٦ - له $a < b$ او $c > 0$ لاسته راځي $ac < bc$

جګټیتوالي یا یوغږیزوالي قانونMonotony

ت – د ویش بنسټیز قانون Division

پیژند۳ ۰ ۲ :

که د دوه طبیعي عددونو a اوb لپاره، چې $a \neq b$ او $a \neq 0$ وي یانی صفر نه وي یو طبیعي عددx شته، چی برابرون (مساوات) $ax = b$ پوره کړي، نو

$x = \frac{b}{a}$ یا b/a د b او a ویش (تقسیم) بلل کیږي، چی ماتګې(کسر) یې هم بولو

۱ – که $a / b = x$ یا $x = \frac{a}{b} = a/b$ شته یا موجود وي ، نو یواځنی شته دی(یواځني په دې مانا، چې بل ګڼ x نه شته او یواځې همدا ګڼ x دی)

نومه ونې : په پورته برابرون کې a/b وېش x ویش ارزښت، b ویشونی یا ویشه وونی دی، ځکه چی په یوڅه ویشل کیږي او a پرویشونی بلل کیږي، ځکه، چی څه پر ویشل کیږي یا مقسوم، مقسوم علیه یا قاسم ، حاصل تقسیم ۰

ګورو چی له قاسم یا مقسوم او همداسی د مقسوم علیه او حاصل تقسیم څخه مو دا د پښتو نومه ونی پر- یا پرې ویشونی ، ویشه ونی اوویش ارزښت یا لاس ته راوړنه ساده او زر پوهوړ دي، خو په خواشینی به وه وایم، چی تراوسه په شمیرپوهنه کی ورسره نابلد یو ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ۱۲ کتابچې پر څلورو زده کوونکو وويشو، نو هر يوه ته درې کتابچې رسيږي. ګورو، چې ۱۲ په يو څه ويشلکيږي، نو ويشونی يې ښه نوم دی. دا ۱۲ په څلور ويشل کيږي پر ۰۰۰ ويشل کيږي، نو له دې امله څلور پر ويشونی بولو، درې يې لاس ته راوړنه ده لکه چې تراوسه مو ورته حاصل تقسيم وايه، له دې امله ورته ويش ارزښت وايو او دا کارونه يا عمليه خو ويش بلل شوی.

۳ . ۱ . ۲ ټولګنونه يا تام اعداد INTEGERs

د دووو طبيعي عددونوa او bکمون يا تفريق (x= b-a) ټيک او ټيک هلته يا هلته او هلته د طبيعي عددونو ډيری يا سټ کی شته، چې وي : $a \leq b$

د شميرپوهنې نخښنو باندې داسې ليکل کيږي:

$$x = b - a \Leftrightarrow a \leq b$$

انګريزي يې if and only if ټيک او ټيک هلته يا هلته او هلته(دا شننه يا وينه پورته د شميرپوهنې نخښې ته ده).

که هغی نخښی ته وګورو، نو هم لاندې ترې څرګنديږي، له ښی لور کيڼ لاس ته راځی او په څټ(برعکس) له کيڼ لور ښی لاس ته راځی. يا که۰۰۰ وي، نو ۰۰۰ لاس ته راځی او په څټ.

ټولګنونه يا تام اعداد هم د انسانانو د اړتياو پر بنسټ منځ ته راغلي ، يا منځ ته راوړل شوي.که چيرې سپين د خر ۱۰۰ افغانی‌پوروړی وي او سپين ورته اتيا افغانۍ ورکړي، نو سپين بيا هم شل افغانی پوروړی پاتيږي، دا په دی ما، چې ۸۰ + ۱۰۰ - = ۲۰ - ۰ ګورو، چې ۲۰ – يو پيداينتي ګڼ يا طبيعي عدد نه دی.يا 20- = 100 – 80

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هغه حالت کی، چی کموونی (مفروق) له تربکموني(مفروق منه) څخه لوي وي، نو لاس ته راوړنه يې طبيعي عدد نه دئ٠ اوس يوه د اعدادو بلې ډيرئ پيژند ته اړ کيږو، چې هغه د ټولګنونوډيرئ ده او دا د طبيعي عددونو او د طبيعي عددونو کمي(منفي) او صفر سره يوځاي کوو، چی ټولنه جوړوي(په ډيرئ کۀ به روښانه شي)، هغه څه، چې له دې ټولنې لاس ته راځي هغه د ټولګنونو ډيرئ ده او داسې يې ليکو:

$$Z = N \cup -N \cup 0$$
$$Z = \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots \}$$

د دې لپاره، چې ترې کمونی د کمېدونی کوچنی وي ، نو پيدايښتي ګڼونه په کمګڼونو غزوو يا پراخوو، دا په دې مانا، چی د پيدايښتي ګڼونو مخنخښه په کموننخښه يا منفي نخښه باندې سنبالوويانې (کيدی شي زموږ هيوادوال د څېړ نخښی په نامه ورسره بلدوي، خو هره نخښه، چې د ګڼ زياتی يا کمی ښايي د ګڼ کيڼ لور ته ليکل کيږي، چې دا ما مخنخښه ليکلې او بللی

هغه په برخه ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ کې ورکړ شوي شميرقوانين په Z کې هم باور لري

د ټولګڼونوډيرئ

} $Z = \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

د مخه مو شميرقوانين، چې د پيدايښتي ګڼونو لپاره ورکړل، هغۀ د ټولګڼونو لپاره هم باور لري

د کمون يا تفريق بنسټقوانين (پسی يا دوام):

۲ - د هرو دوو ټولګڼونو يا تام اعدادو a او b لپاره يو ټولګڼ x=b-a شته، د کوم لپاره، چیa+x=b برابرون باوري دئ

د ويش تيوري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ الف د ویش قاعدې ، لارې یا خویونه

د طبيعي عددونولپاره د نورو قاعدو ترڅنګ ، چې د لومړنيو ګڼونو د ټوټه ونې یا تجز يي لپاره خورا ګټور دئ باور لري

الف) یو ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ۱٦) ویشونی دی، که د اخر ځیفر یا کور (له اخره(موخه تری ښی لور دئ) دوه ، درې ، څلور ۰۰۰ بنستيزو ځيفرونو) څخه جوړ ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ۱٦ ۰۰۰ویشونی وي) په دوه ویشونی ګڼ جوړه (جفت) نومیږي او بل ډول یی ناجوړه(طاق) بلل کیږي۰ ګورو، چی دلته هم په جوړې او ناجوړه ښه پوهیدلی شو

ب) یو ګڼ په ٥ (۲٥ ، ۱۲٥ ، ٦۲٥ ، ۰۰) ویشونی دی، که د اخر(له ښي لور) بنستيز ځيفر (د اخر دوه، درې ، څلور ، ۰۰۰ بنستيز ځيفرونو) جوړ ګڼونه په ٥ (۲٥، ۱۲٥ ، ٦۲٥ ۰۰۰) ویشوني وي

یادونه : په لاتین کی هغه، چی ښي لور ته وي هغه ته اخر وایې او موږ یې شاید لومړی وبولو۰ زه کوښښ کوم، چې دا پوهوړ ولیکم، خو بیا دې هم ګران لوستونکی تری ټیک ناپوهیدنه ماته وبخښي او مشوری دې راکړي۰

پ) یو ګڼ په ۳ همداسی ۹ ویشونی دئ ، که د ګڼ پروت زیاتون پر دې ګڼونو ویشونی وي۰

د یوه ګڼ پروت زیاتون لاندې د هغه ګڼ بنستيز ه ګڼونخښو(ځيفرونو) زیاتون پوهیږو، بی له دې، چې د هغه ځاي ارزښت په پام کې ونیول شي۰

بیلګهٔ : د 126 پروت زیاتون یا پرته جمعه ده: 1+2+6=9

ت) یو ګڼ په 11 ویشونی دئ که د هغه ګڼ الترنيري(نخښه بدلونکی) پروت زیاتون۰ پر 11 ویشونی وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

الترنیري پروت زیاتون، چی پروت کمون هم ورته وایی له بنستیزو ځیفرونو ۱ ، ۳ ، ۵ زیاتون ځخه د ۲ ، ٤ ، ٦ ،۰۰۰ زیاتون کمون پو هیږو ، بی له دې، چی ځاي ارزښت یې په پام کی ونیول شي یا په بل ډول، که د ناجوړه کوږ زیاتون ځخه د جوړه د زیاتون کم کړو۰

بیلکه: ۱۷۳۸ په ۱۱ ویشوني دي، ځکه، چې : ۱۵= ۸+ ۷ او ٤ - = ۳ – ۱ -، چی الترنیري زیاتون یانی ۱۱ = ٤ – ۱۵ یې په ۱۱ ویشونی دی۰

ټ) یو ګڼ پ ه ۳۷ وېشوړ دی که (د ګڼ له اخر ځخه جړړشوي) د درېګوني ګڼونو زیاتون پر ۳۷ وېشونی وي.

بیلکه:

37|(448+352+216+20)⇔ 37|1036 ځکه چې 37| 20216352448

ث) یو ګڼ په ۷ همداسې په ۱۳ ویشوړ دی، که د هغه (د ګڼ له لخ ځخه جوړ) درېګونی الترنیري زیاتون پر ۷ همداسې پر ۱۳ وېشونی وي.

بیلکې : 37604 | 7 ځکه چې 7 | 567 ⇔(604-37)|7

13| (889-293+709-96) ⇔ 13|1209 ځکه ، چې 13 | 9679293889

ج) یو ګڼ په ۱۰۱ وېشونی دی، که (د ګڼ له اخر ځخه جړشوی) دوهګونی الترنیري زیاتون په ۱۰۱ وېشونی وي.

بیلکه:

101|(69-06+63-03+79)⇔ 101|202 ځکه چې 101|7930630669

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : که پيداښتي ګڼونه a او b ولرواو ولرو a : b ، نو a پر b وېشو، که وېش

ارزښت يې هر ګڼ وي او که پيداښتي ګڼونه a او b ولرو او ولرو b|a ، نو دا په دې مانه، چې ګڼ b ګڼ a ويشي بې له پاتي يانې ګڼ a په ګڼ b وېشوړ دی.

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ټ) خوراغټ ګډ پرويشونی او خورا کوچنی ګډ زياتځله

يا بزرگترين قاسم مشترک و کوچکترين مضرب مشترک(ذو الاضعافالاقل)

Great common divisor and small common multiple

ددې لپاره، چې دا په سرليک کې ورکړ شوي څه ښه و پېژندلی شو ، داسې مخ ته ځو:

لاندې ګڼونه دې ورکړ شوي وي، سملاسي يې په لومړنيو ګڼونو ټوټه کوو

$$260 = 2.130=2.2.65=2.2.5.13 = 2^2.5.13$$

$$468=2.234=2.2.117=2.2.3.39=2.2.3.3.13=2^2.3^2.13$$

له پورته دواړو ګڼونو د لومړنيوګڼونو ځله وونو هر يوه څخه هغه لومړنی ګڼ رانيسو او سره ځله وو بې، چې په دواړو ګڼونو کې ګډ وي او توان(په خپل ځای کې دې وکتل شي) يا جګګڼ بې ټيټ يا کم وي . يانې

$$22.13 = 2.26 = 52$$

دا پورته لاس ته راوړی ګڼ يانې ۵۲ پورته دواړه ګڼونه وېشي يانې د دواړو ګڼونو پرووېشونی

دی او خورا غټ پرووېشونی هم دی. يانې ۵۲ خورا غټ او ددواړو ګډ پرووېشونی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډ : ۵۲ د یورته ګڼونو خورا غټ ګډ پروېشونی دی.

داسې ګڼ , خوراغټ ګډ پروېشونی, بولو (لنډ ونه یې : غ ګ و)

هغه ګڼ، چې د دوه یا ډېرو ګڼونو ګډ پروشونی او خورا غټ هم وي، نو دې ګڼ ته ,,خورا

غټ ګډ پروېشونی ,, (لنډونه: غ ګ و) وایو. یا

(بزرګترین عامل (مقسوم علیه) مشترک)Greatest commom divisor(g c d)

اوس بیا داسې مخ ته ځو:

په پورته کې هغه د دواړو ګڼونو لومړني ځله ووني، له هر څخه یو چې په جګ توان وي

یاني خورا غټ جګګڼ ولري ، هغه د جګ توان رابېلوو او بیا یې سره خله وو، چې لاس ته

ترې راځي: $2^2.3^2.5.13=2340$

دا پورته ګڼ یاني ۲۳۴۰ د دواړو ورکړ شوو ګڼونو ګډ زیاتځله دی (یاني ګډ په دواړو

وېشل کیږي) او دا خورا کوچنی ګڼ هم دی. دا په دې مانا،چې له دې ګڼ بل کوچنی ګڼ نه

شته، چې د پورته ګڼونو دواړو ګډ زیاتځله(څو برابره) وي.:

لنډ : خورا کوچنی ګڼ دی. د دواړوګڼونو (یاني ګډ) زیاتځله (ګډ څو واره) دی

لنډ یې : خورا کوچنی ګډ زیاتځله (لنډونه یې: خ ګ ځ) یا
(کوچکترین مضرب مشترک یا ذوالاضعاف الاقل)Least common multiple(l.c.m.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران هیوادوال دې ورته پام وکړي، چې کوم نوم به زموږ لپاره زر یا بیخي پوهوړ او ساده وي.

وریپسې داسې مخ ته ځو:

دا چې موږ په پیدایښت یا طبیعي ګڼونو کې له شمیرلو سره بلد شو ، نو په لاندې ډول پیژند ورکوو:

پیژند(تعریف)۳ ۰ ۳ :

a او b دې ټولګڼونه وي۰ وایو چې « ګڼې a ګڼې bویشي» (او یا هم a د bپروېشونې دئ او یا همa د b څو برابره (زیاتځله) دئ) که یو ټولګڼې u شته یا موجود وي او دا باوري کړي$au=b$ ددې لپاره لیکو$a|b$ (وایو، چې ګڼې aګڼې b ویشي ، خو اړیین یا ضرور نه ده، چې کلمه ګڼې ورسره وویل شي۰

که a د bپروېشونی نه وي، نو د دې لپاره لیکو$a|/b$(دا نخښه /| دې د نه ویشونی لپاره ومنل شي)

بیا لیکو، چې : پیدایښتي ګڼونه، چې په ۲ ویشل کیږي جوړه (جفت) ګڼونه بلل کیږي او که نه نو ناجوړه (طاق) ګڼونه بلل کیږي۰ د صفر ګڼ د پیدایښتي ګڼونو په ډیری کې یو ځانګړی حالت لري۰

په لاندې جمله کې بې له ښوونې یا اوبیونې د دې ویشکلمی لپاره یو څو ساده شمیرقاعدې را یوځاي کوو، چې په راتلونکې کې ترې کار اخستل کیږي۰

جمله ۳ ۰ ۱ :

د په خوښه یا زړه پورې ټولګڼونو a,b,c,d لپاره باوري دي:

(۱) ± 1 او $\pm a$ ویش (دا په نامه « ساده» پروېشوني دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۲) د ۱ پرويشونی ۱ او ۱ - دي

(۳) تل باور لري، چې 0 | a او a | 0 يوائی په هغه حالت کې باور لري، چې a = 0 وي

(٤) له a|b او b|c <= a|c

(٥) له a|b لاس ته راځي: ac|bc ،که c |= 0 وي ، نو د دې په څټ هم باوري

دي. دا په دې مانا چې، که ac|bc وي، نو a|b هم باور لري. د ګڼونو

ليکدود له مخې، که نړيوالجال ته پورته شو داسې ليکو، که نه دا پورته بسيا

کوي: $c \neq 0, a|b \Rightarrow ac|bc$

(٦) له a|b او c|d څخه لاس ته راځي او په څټ ac| bd لنده ليکنه يې(که نج ته پورته شوه): $a|b, c|d \Leftrightarrow ac|bd$

(۷) له a | b او b| a لاس ته راځي a = $\pm$ b

(۸) له a |b او a|c څخه لاس ته راځي a|(bx+cy) د ټولو ټولګڼونو x او y لپار

(۹) تيک هلته a|b کله چی وي|b| | |a|،

(۱۰) که a | b او b = 0 نه وي نو باوري دي - | b| < a < |b|

حل (اوبی) : (۱) له a1 = (-a)(-1) = a لاس ته راځي

(۲) له a0 = 0 لرو a | 0 . که وي a | 0 , نو يو ټولګڼ u شته د کوم لپاره چی وي 0u = a

او له کومی چی لاس ته راځي a = 0 .

(۳) ساده دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۴) که $a \mid b$ او $b \mid c$, نو تهولګنونه u او v د $au = b, bv = c$ سره موجود دی . له دي لاس ته راځي $c = bv = a(uv)$ ، پس $a \mid c$.

(۵) که $a|b$ ، پس یو تهولګنې u د $au = b$ سره موجود دی، او هم د $(ac)u = bc$) سره، د کوم څخه چی لاس ته راځي $ac \mid bc$. د $c \mid= 0$ لپاره دا اخرنتخیر په څټ کیدی هم شي.

(۶) د $a|b$, $c|d$ او (۵) څخه لاس ته راځي چی $ac|bc$ او $bc|bd$ ، د (۴) له مخی $ac \mid bd$.

(۷) د $a \mid b$ او $b \mid a$ څخه د تهولګنونو u او v موجودیت لاس ته راځي د $au = b$ او $bv = a$ سره. برسیره پر دي لاس ته راځي $a(uv) = a$, پس $a=0$ یا $u=v=\pm1$. په لمړي حالت کی د $a \mid b$ له امله $b = 0$, پس $a = b$. په دوم حالت کی $a = \pm b$ دی.

(۸) د تهولګنونو u , v لپاره دي $au = b$ او $av = c$ ، نو له دي $a(ux+vy)=bx+cy$ لاس ته راځی، پس $a \mid (bx+cy)$ د تهولو تهولګنونو x او y لپاره.

(۹) وي دي $a|b$. له $a \mid b$ ، $a \mid |a|$ او $|b| \mid b$ څخه او د (۴) څو واره استعمال څخه لاس ته راځي، چی $|a| \mid |b|$. په څټ: که $|b| \mid |a|$ باورلری، نو د $|b| \mid |a|$ ، $|a| \mid a$ او $b \mid |b|$ څخه په ورته ډول لاس ته راځي $a \mid b$.

(۱۰) دی $a \mid b$ ، پس د (۹) هم $|a| \mid |b|$. که $b \mid= 0$ وي ، پس یو طبعي ګڼ u لاس ته راځي د $|a|u = |b|$ سره، له کوم چی $|a| \leq |b|$ لاس ته راځي.

که $b|a$ د تهولګنونو a,b لپاره د $b \mid=0$ سره، نو یو یواځنی معلوم ګڼ q شته (د a او همداسی د b «کومپلیمنت پرویشونی» بلل کیږي)، چی لرو $a = bq$.

په ټولیزه توګه لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۳ ۰ ۲ (د ویش الګوریتم): a اوb دې تولګنونه وي۰ د $b \neq 0$ سره ۰ نو یواځني ټاکلي، په پای پلونو(قدمونو) کی شمیرلکیدونکي تولګنونه q اوr (چې د a پرb ویش

څخه لاس ته راځي او «ویش» په همدې ډول « پاتی بلل کیږي، شته دي،د کومو لپاره چې باور لري: $a = bq + r \ \wedge\ |0| \leq r < b$

هر یو تولګڼ کم له کمه ساده پرویشونی لري یعنی ± 1 او پخپله د دې تولګڼ زیاتیز(مثبت) او کمیز(منفي)۰ دې پرویشؤنو ته «سادهٔ پرویشونی» وایو۰

پیژند ۳ ۰ ب :

هر یو تولګڼ، چې یواځی او یواځي ساده پرویشونی ولري موږ ورته لومړنی ګنونه وایو او دا لومړنی یا پریم ګنونهPrimzahlen په pسره په نخښه کوو، چې دا پریم یا لومړی ګڼ د پیدایښتي ګنونوتوکی دی۰

هریو تولګڼ، چې لومړنی ګڼ نه وي د لومړنیو ګنونو په ځلونو(ځله وونو)(ضریبونو) توته یا تجزیه کیدی شي۰

بیلګی :

$240 = 24 . 10 = 3 . 8 . 2 . 5 = 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 5 = 2^4 \cdot 3 . 5$ - 1

$2310 = 2 . 1155 = 2 . 3 . 385 = 2 . 3 . 5 . 77 = 2 . 3 . 5 . 7 . 11$ -2

$3750 = 25 . 15 . 10 = 5 . 5 . 3 . 5 . 2 . 5 = 2 . 3 . 5^4$

که پورته بیلګو ته په ځیر شو نو په ۱ او ۳ راغلو ګنونو کی ګڼ ۲ د دواړو پر ویشونی دی او همدا ډول ۳ هم د دواړوګنونو پرویشونی دی یانی $2.3 = 6$ برسیره پردې ګڼ ۵ هم نو $2.3.5 = 30$ دواړه ګنونه ویشي او شاید په دې ګنونو کی یو خورا غټ ګډ پرویشونی هم وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته درېواړو بیلګو کې ۲ ، ۳ ، ۵ د ځلوونو په څیر خوندي دي یانې دا ګڼونه ویش، چې له دې امله ګڼ ۳۰ د درجواړو ګڼونو غ۰ګ۰پ دئ

پیژند ۳ ۰ پ :

a او b دې ټولګڼونه وي او d دې یو مثبت یا زیاتونی ټولګڼ وي، د کومو لپاره، چې باور لري:

$$(1)\, d \mid a \wedge d \mid b$$
$$(2)\, t \mid a \wedge t \mid b \Rightarrow t \mid d$$

پس d د a او b خورا غټ ګډ پرویشونی(غ۰ګ۰پ) بلل کیږي d لپاره داسی لیکو:

$$d = (a,b)$$

نو d خورا غټ ګډ پرویشونی(لنډ: غ۰ګ۰پ) بلل کیږي۰

که باوري وي: $(a,b) = 1$ نو a او b پروېش پردي بلل کیږي یانې له ۱ پرته بل داسې ګڼ نه شته، چې دواړه ګڼونه پر ووېشل شي.

یادونه : په زیاتو ادبیاتو کې لنډونه په درېتورو کیږي، خو که غواړی دا خورا غټ ګډ پرویشونی داسې رالنډوو : خ غ ګ پ

یادونه: ما د خورا غټ ګډ پرویشونی لپاره دا پورته درې توکي غوره کړي، که ګران لوستونکي بل وړاندیز لري، نو زه یې ضرور په پام کی په پوره خوښی نیسم۰ دې دوه کلمو ته په فارسي ادبیاتو کې بزرګترین قاسم مشترک او کوچکتریب مضرب مشترک وایي او ذوالاضعاف الاقل یې هم بولي۰

یادونه : که چیرېd او *d دواړه دa او b غ ګ پ وي، نو له پورته پیژند څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی $d \mid d^*$ او $d^* \mid d$ ، نو د $d \geq 0$, d^* له امله لرو $d^* = d$

لاندې جمله په وښايي ، چې داسې غ ګ و تل شته دی

جمله ۳ ۰ ۳ :
په خوښه تولګنونو a او b لپاره دې غ ګ پ d شته وي، نو تولګنونه x او y شته د کومو لپار، چې لرو: $d = ax + by$

حل(اوبې): که $a = b = 0$ وي ، نو 0 د a او b غ ګ و دی، نور ساده دی. د a او b د ممکنه بدلون (په پام کی دې وي چې د (a , b) تعریف په a او b کی سيومتريك دی) له امله اجازه لرو چې $b \neq 0$ ونيسو.
موږ اوس رکورسيف (rekursiv) (دا په دې مانا چې د مخه غړي څخه وروستی يعني وروستی غړی لاس ته راوړلکيږي)
تولګنونه $r_{-1}, r_0, r_1, r_2, \ldots$ او $\ldots\ldots\ldots q_1, q_2$ په لاندې ډول تعريفوو: وي دې , $r_{-1} = a$
$r_0 = b$ د $i \geq 1$ او $r_{i-1} \neq 0$ لپاره تولګنونه q_i , r_i داسې تعينوو چې $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$

او $0 \leq r_i < |r_{i-1}|$ کوم چې له جملې (۱ . ۳) څخه ممکن کيدی شي . بايد يو نه منفی ګڼ n ورکړ شوی وي، د کوم لپاره چې لرو $r_n \neq 0$ مګر $r_{n+1} = 0$, چې بې له دې بيا يوه نه پای د طبعي ګڼونو لويدونکې يا کميدونکی پرلپسی لاس ته راځي، کوم چې ناشونی(ناممکن) دی. دامو اوس ددې لاندې مساواتو شيما ته لاربشودوي

$$a = q_1 b + r_1$$

$$b = q_2 r_1 + r_2$$

....

....

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا مساوات د ښکته پورته وويل شي، نو په ترتيب (يو په بل پسې) لاس ته راځي:

$$r_n \mid r_{n-1} , r_n \mid r_{n-2} , \dots r_n \mid b , r_n \mid a$$

دا په دې مانا چې r_n د a او b يو غ ګ و دی. t دې د a او b يو بل غ ګ و وي، نو په دې حالت کې که دا پورته مساوات له پورته ښکته ولولو، نو يو په بل پسې لرو

$$t \mid r_0 , t \mid r_1 , t \mid r_2 , \dots , t \mid r_{n-1} , t \mid r_n$$

دا په دې مانا چې |r| د a اوb غ ګ و دی.

هر د دې ګڼونو r_i د ($-1 \leq i \leq n$) سره، په ځانګړي ډول r_n او ددې سره (a , b) يو د a او b لايني کمبينيشن دی ، په لاندې ډول $au + bv$, چې u او v تولګڼونه دي.

د $r_{-1} = a$

او $r_0 = b$ لپاره ساده دی. که د يوه i لپاره د $1 \leq i \leq n$ سره، که يو د a او b يو لايني کمبينشن ښوونه د r_{i-1} او r_{i-2} لپاره همدا سم د لاسه پيداشوي وي، نوله $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$ څخه د يوې داسې r_i د ځاي په ځاي کولو له لارې هم ، چې په دې ډول د ايندکشن له لارې غوښتنه لاس ته راځي. (پای)

يادونه : د غ ګ پ د ښوونې متود ، چې پورته او په لاندې بيلګه کې راوړل شي د اويکليد الګوريتم"Euklid Algorithmus„ د يوې ګڼيزې دندې يا کاروني (عمليې) شيماتيکي اوبيونې(حل) متود په نامه يادېږي، نو له دې سرهx او y هم له a څخه

$d = ax + by$ اکسپليځيتExplizit (لاتين: څرګند، واضح، روښانه) شميرل کيدی شي.

بيلګه:

غوښتنه (2124 , 1764) = d ۰ د اويکليد الګوريتم کاروني له لارې لرو:

$$2124 = 1 \,.\, 1764 + 360$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1764 = 4.360 + 323$$

$$360 = 1.324 + 36$$

$$324 = 9.36$$

$$\Rightarrow d=36$$

که پورته وګورو نو غ ک پ $d = 36$ دئ

د دې لپاره ، چې d له x او y سره په $d = ax+by$ ډول انځور کړی شو، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$36 = 360 - 1.324 = 360 - 1(1764 - 4.360) = (-1).1764 + 5.360$$

$$= (-1) . 1764 + 5.(2124 - 1764) = 2124 . 5 + 1764.(-6)$$

د پورته څخه د a او b لپاره لاندې مهمه پیژند نخښنه یا نخښونه لاس ته راځي

یادونه : ماته دا لاندې جملې ښه ښکاریږي، چې ګرانو لوستونکو ته یې بې له اوبیونې

وړاندې کړم، دا جملې په ختـه کې د ګنونوتیوري دنده ده، چې په ګنونتیوري کې بیا د ښوونې سره ښوول کیږي۰

جمله۳ ۰ ۹ :

a او b دې تولګنونه وي. د a او b یو ګډ پرویشونی $t \geq 0$ هلته او هلته د a او b ګ غ پ دئ کله چې دا شکل $t = ax + by$ د a او b تولګنونو سره انځور کړاي شو۰ په ځانګړي ډول a او b هلته او هلته ویشپردي دي، که تولګنونه x او y شته وي د کومو لپاره چې باور لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ax + by = 1$$

اوبیونه : د شرایطو ضرورت سم د لاسه له ۳ ېږ ۶ څخه لاس ته راځي. دا چې شرایط پوره کېدونکي هم دي، له دې لاس ته راځي، چې هر د او پروېشوني د پروېشوني هم دي..

څو جملې په لاندې کې روړو، ګنونتېري پورې اړه لر او دلته يې نه ښايو.

جمله : ۱۰ . ۳

a او b دې ټولګنونه وي۰ د a او b هر ګډ پرویشونی $t \geq 0$ لپاره باور لري:

$$(a/t, b/t) = (a,b) / t$$

په ځانګړي توګه t د a او b یو ګډ پرویشونی هلته اوهلته غ ګ پ دئ چې باور ولري

$$(a/t, b/t) = 1$$

لیما۳ ۰ ۱۱(جمله ګئ)(اویکلید): په خوښه ټولګنونو aاو b او c لپاره باور لري

له $a|bc$ او $(a,b) = 1$ لاس ته راځي $a|c$

تعریف۲ ت : $a_1, a_2, \ldots a_n$ دې ټولګنونه وي $(n \geq 1)$, او d دې یو نه منفي ټولګن وي د کوم لپاره چې باور لري :

لمړی : $d | a_i$ د ټولو $i = 1, \ldots, n$ لپاره

ب : له $t | a_i$ څخه د ټولو $i = 1, \ldots, n$ لپاره لاس ته راځي $t | d$.

نو d د $a_1, \ldots, a_n$ غ ګ و بلل کیږي او د d لپاره هم داسې لیکو $(a_1, \ldots, a_n)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د a_n , ... , a_1 لپاره د داسی غ ګ و یواختتوب په ۲ . ۵ کی کتل کیدی شي او د موجودیت لپاره یی لرو :

> **جمله ۲ . ۱۳** : د خوښې تولګنونو a_n , ... , a_1 لپاره ($n \geq 1$) غ ګ و موجود او d د a_n , ... , a_1 خطي (لاینې) کمبینیشن دی دا په دې مانا چی
>
> $$d = a_1x_1 + ... + a_nx_n$$
>
> د مناسبو تولګنونو x_n , ... , x_1 لپاره.

یادونه : له دې بیا لاس ته راوړل کیدی شي:

$$(a_1 , ... , a_n) = ((a_1 ,..., a_{n-1}), a_n)$$

د په خوښه تولګنونو a_n ,..., a_1 د ($n \geq 1$) لپاره. سړی کړی شي چی د a_1,...,a_n غ ګ و پل په پل د اویکلید الګوریتموس له لارې پیدا کړي، چی دلته یی د اوبی یا حل څخه تیریږو.

د اوبی یا حل لپاره یی د n په لور د پوره ایندکشن څخه کار اخستل کیږي چې په ۸ –امه برخه کې څیړل شوی دی.

بیلګې:

۱ - ګنونه 240 او3750 غ ګ پ 30 = 2.3.5 لري

۲ – لرو 408 او748

$$408 = 2^3.3.17, 748 = 2^2.11.17$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس غ ګ پ دی: 17 . 2^2 = (408,748) يا دا لاندې که ن ج پورته شول

$(408,748) = 2^2.17 = 68$

۳ – پ غ ګ پ د ګڼونو او غ ګ پ 6 = (30.66.114) دی، ځکه، چې
$30 = 2.3.5$

او $66 = 2.3.11$ او $114 = 2.3.19$ دي

٤ – ګڼونه 54 او 65 ګډ پرویشونی نه لري دا مو،ږ پرویشپردی بولو، ځکه، چې دي:

$65 = 5.13 \quad \wedge \quad 54 = 2.3.3.3$

خورا کوچنی ګډ زیاتځلی(کوچکترین مضرب مشترک)

موږ په لاندې کې د خورا کوچني ګډ زياتځله (لنډ: ک ګ ز) کليمې په څېړنه پيل کو٠ دا کلمه و غ ګ پ يوه دوه ييزه يا دوه ګونی يا غبرګه (دوال Dual) کلمه ده، موږ په لاندې ډول سملاسي تولیز پيژند ورکوو

تعريف ۲ . تې : $a_1 ,....., a_n$ دي ($n \geq 2$) تولګڼونه وي، او v دې يو داسی نه منفی تولګڼ وي، د کوم لپاره چی باور لري:

الف – $a_i \mid v$ د n , ... ,, $i = 1$ لپاره

ب – له $a_i \mid w$ څخه د n , ... , $i = 1$ لپاره لاس ته راځي $v \mid w$.

نو v د $a_1 , ... , a_n$ کوچنی ګډ زياتځله (لنډ : ك ګ ځ) بلل کيږي او داسې يې ليکو:

$$v = [a_1 , ... , a_n]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند (د دوه ګڼونو لپاره)

a او b دې تولګڼونه وي او v دې يو داسې نه کمیز یا نه منفی تولګڼ وي، د کوم لپاره، چې باور لري:

(۱) v|a او v|b

(۲) له a|w او b|w څخه لاس ته راځی v | w

نو v د a او b خورا کوچنی ګډ زياتځله (لنډ» ک ګ ز او که غواړی خ ک ګ ز) بلل کيږي او په لاندې توګه يې ليکو

$v = [a,b]$

جمله :

په خوښه تولګڼونو a,b,c,…,n لپاره ک ګ ز شته دئ او دا يواځنی دئ

$[a,b,c,…,n]$

يادونه: موږ لاندې مساوات هم د مختلفو جملو او د هغو له حلونو لاس ته راوړو :
دتولګڼونو ($n \geq 3$) $a_1 , \dots a_n$ لپاره لرو $[a_1,\dots\dots,a_n] = [[a_1 ,\dots,a_{n-1}], a_n]$
او هم $|a_1a_2| = [a_1 , a_2] (a_1 , a_2)$

لاس ته راوړنې (داهم په همدې مانا مګر د جملې په څير دی): د په خوښه تولګڼونو a , b , c لپاره باور لري: له $a | c , b | c$ او $(a,b) = 1$ څخه لاس ته راوړو $ab | c$

د ګڼتیوري بنسټيزه جمله:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژنده :

یو ټولګڼ$n > 1$ لومړی ګڼ (prime number) بلل کیږي، که له ساده پرویشونv بل پرویشونی ونه لري۰

لومړي ګڼونه لاندې غوه خویونه لري.:

لیما (لکه کوچنی جمله): که p یولمړی ګڼ وي او$p \mid a_1 \ldots a_n$ د ټولګڼونو $a_1, \ldots, a_n$ لپاره. نو $p \mid a_i$ د کم له کمه یوه i د $1 \leq i \leq n$ سره.
حل (اوبی): حل یی د ایندوکشن له لارې صورت نیسی، چی ددې لپاره باید ۸ - امه برخه کتل شوي وي.
د $n = 1$ لپاره ښوونه ساده ده . اوس دې $n > 1$ وي او لیما دې $n-1$ لپاره سملاسي باور ولري. نو لرو $p \mid a_n$ ، په بل ډول بیا له $p \nmid a_n$ څخه لاس ته راځی چې $(p, a_n) = 1$ دې . له مخکنه تیرې جملی لاس ته راځي، چې که $p \mid a_1 \ldots a_{n-1}$ وي , نو داسې دی $p \mid a_i$ د یو i لپاره چې $1 \leq i \leq n-1$ وي د ایندکشن د نیونې په بنسټ.

د لومړنیو ګڼونو غوره والی د « ګڼونتیوري بنسټیزی جملې» څخه لاس ته راځي

جلمه (د ګڼونتیوري بنسټیزه جمله):

هر یو پیدایښتي (طبیعي) ګڼ ،د ګڼونو تر تیب پورې، په یواځني او یواځني (یویواځنی (له دې کلمو څخه موخه داده، چې دا په یواځی یو ډول لیکل کیدی شي او بس۰ کیدی شي د ګڼونو پروتځاي بدل وي، خو ضریبونه همغه دي)) ډول د لومړنیو ګڼونو ځل په څیر لیکل کیدی شي۰

اوبی : ښوونه د n په لور ایندکشن له لارې مخ ته بیایو (برخه ۸ دې ودې کتل شي)
د $n = 1$ لپاره باور لري، که، لکه معمول ، 1 د طبعي ګڼونو د تش(خالي) ځل په څیر تعریف کړو. له دې امله دې $n > 1$ وي او جمله دې د ټولو طبعي ګڼونو $< n$ لپاره ښوول

(c) ketabton.com: The Digital Library

شوي وي. موږ اوس ټول د n پروېشوني $t > 1$ په نظر کي نيسو. کم له کمه يو داسې ګڼ شته لکه n . که p د دې پروېشونو کوچنی پروېشوني وي، نو p لمړی ګڼ دی. په بل ډول به نو بيا p يو پروېشوني q لرودی د $1 < q < p$ سره، او دا چې q د n پروېشوني وي، نو دا به د p تعريف رد کړي. دا چې $n / p < n$ د ايندونکشن نيوني په بنسټ $\frac{n}{p}$ د لمړي ګڼونو د څل په څير ليکل کيدی نو په همدې ډول پخپله n هم.

وي دې $n = p_1p_2..p_r = p'_1p'_2...p'_s$ د n دوه ډوله د لمړيو ګڼونو د څل په څيرليکنه . له $p_1 \mid p'_1...p'_s$ اوس لاس ته راځي $p_1 \mid p'_i$ د يو i د $1 \le i \le s$ سره . د نمړې بدلولو له لارې دې وي $p_1 \mid p'_1$. داچي بيا $p_1 = p'_1$ باور لري، نو لاس ته راځي $p_2...p_r = p'_2....p'_s$ ، له کومو چې د ايدکشن له نيوني لرو $r - 1 = s - 1$ ، پس $r = s$ او (او د ترتيب بدلون) هم $p_i = p'_i$ له $2 \le i \le r$ لاس ته راځي .

پای.

د بنسټيزې جملې د ګټور استعمال لپاره لاندې جمله ده

جمله : هر طبعي ګڼ n په ټيك يو ډول په لاندې فورم انځوريدلی شي $n = \prod_p p^{\nu_p}$ (لپاره p د پای ډيرو ν_p يواځي د $\nu_p = 0$ (ددې ν_p) . (ν نيولی شي ...)
چيرته چې p ټولو طبعي ګڼونو کې په جګيدونکې لړۍ پرلپسې کې ځغلي.

يادونه: د عملي شميرنې لپاره په هغو ګڼونو چې جګ يې صفر وي تيريدل کيدی شي، لکه : $n = 28 , n = 2^2.7$ د $n = 2^2 . 3^0 . 5^0 . 7$ لپاره
لاس ته راوړنې : $(a,b) = 1$ او $(a , bc) = 1$، نو هم $(a , bc) = 1$ ، د په خوښه ټولګڼونو a , b , c لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبی یا حل : نیولی دې وي چې $(a , bc) > 1$ ، نو بیا به یو لمړنی ګڼ p موجود وي د p/a او p / bc سره، د لیما ۲ . ۲ له مخې به یې باور لرودی p/b یا p/c داد (a,b)= (a,c) = 1 سره تضاد دی.

جمله : a او b دې له صفر مختلف ګڼونه وي او $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ او $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ د دوي مطلقه ارزښتونو لمړی فاکتورتجزیه د ۲ . ۴ له مخې ، نو a | b هلته او هلته باور لري که د ټولو لمړي ګڼونو p لپاره باور ولري $\alpha_p \le \beta_p$

لاس ته راوړني : وي دې a اوb له 0 مختلف ګڼونه، $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورټوټونه(تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a,b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)} , [a,b] = \prod_p p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p, \beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p, \beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړنې ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو ټولګنونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دي که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چې له هغه رینبه نیسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راوړني : وي دې a اوb له 0 مختلف ګنونه $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورونونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a,b)=\prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)}\ ,\ [a,b]=\prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p,\beta_p)$ د دواړو ګنونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p,\beta_p)$ خورا لوې په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړنې ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو تولګنونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګنونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګنونه موجود دي که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چې له هغه رینبه نیسي:

جمله: ناپاي ډیر لومړني ګنونه شته.

حل(اوبی) : موږ جمله ناسیده یا ناسمه ښایو (۸ -امه برخه دې وکتل شي) او نیسو چې پایډیر لمړی ګنونه $p_1 , p_2 , p_3 , ..., p_r$ موجود دي. ګڼ $N = p_1p_2...p_r+1$ له 1 لوې دی او له دې امله په یوه لمړي ګڼ p ویشونکی دی. د نیونی له مخې لرو $p = p_i$ د $1 \le i \le r$ سره . د $P|N$ او $p \mid p_1p_2....p_r$ له امله لاس ته راځي $p \mid 1$.کوم چې ناشونی دی (ناممکن) له دې امله باید ناپای زیات لمړي ګنونه موجود وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : د میلاد څخه پخوا د « اریتوتنس غلبیل» متود څرګندوو، چې موږ د 1 او 100 ترمنځ د لمړي ګڼونو معلومول دي متود له لارې په لاندې توګه څرګند وو

~~1~~ 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~
~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~
~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~
37 ~~38~~ ~~39~~ ~~40~~ 41 ~~42~~ 43 ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ 47 ~~48~~ ~~49~~ ~~50~~
~~51~~ ~~52~~ 53 ~~54~~ ~~55~~ ~~56~~ 57 ~~58~~ 59 ~~60~~ 61 ~~62~~ ~~63~~ ~~64~~
~~65~~ ~~66~~ 67 ~~68~~ ~~69~~ ~~70~~ 71 ~~72~~ 73 ~~74~~ ~~75~~ ~~76~~ ~~77~~
~~78~~ 79 ~~80~~ ~~81~~ ~~82~~ 83 ~~84~~ ~~85~~ ~~86~~ ~~87~~ ~~88~~ 89 ~~90~~ ~~91~~
~~92~~ ~~93~~ ~~94~~ ~~95~~ ~~96~~ 97 ~~98~~ ~~99~~ ~~100~~

۳ . ۱ . ۳ - راشنل ګڼونه Rational Nnumbers

(لاتین: عاقلانه یا هوښیار اعداد یا ګڼونه)

د افغانستان په دري ادبیاتو کې داسی ګڼونه او ایراشنلګڼونه کله ناطق د ګونګ اوداسې نورو ګڼونو په نامه یا دیږي، کله یې ماتګڼونه بللي، خوزه دا ښه بولم، چې دا همداسې یانې راشنلګڼونه وبلل شي، که څوک یې هوښیار ګڼونه بولی هم خوښه یی او یا مات ګڼونه ، خو دلته راځیو Ratio nهوښیار په معنا نه بلکه د نسبي په معنا دی۰

یادونه : که / ولرو یاني که ولرو a / b نو دا په دې مانا، چېa په b ویشل کیږي۰ که ولرو≠ نود نابرابرونځښنه ده۰ دا په دې مانا، چی b له 0 سره برابره نه ده۰ د دوه ګڼونود a او b ویش x = b / a د ټولګڼونو په ډیرۍ کې تل هلته شته دی، چې a د b ټولګنیز څو ځله وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره، چې بیا هم ویش$a : b$ (دلته هم b پر a ویشل کیږي) کیدونی شي» سره له دې، چې ویش تل په ټولګنونوکی پیژند نه لري یا تعریف نه دی یا صورت نه نیسي« باید د ټولګنونو ډیری ماتګنونو(کسر) ډیری‌ته پراخه شي، چې د لومړي ځل لپاره افاده یا ویینه b/a سومبولیک مانا لري، د نوو ګنونو په څیر نیسو او په ټولګنونو یې ور زیاتوو، نو هغۀ ګنونه، چې لاس ته راځی موږ ورته راشنلګنونه وایو۰ دلته دا راشنل ګڼ د جوړې په څیر ورکړ شوی دی

cb / ca هلته باور لري، چې$c \neq 0$ دټولګڼ او$a |b$ د ماتګڼ په څیر ورکړ شوي وي

د راشنلګنونو ډیری، چې په Q سره ښایو د ټولګنونو ماتګنو b/a چې $a \neq 0$ او a او b د ټولګنونو له ډیری وي، د ټولګنونوپراخوالی دی او ټول د مخه تیر بنسټیز قوانین په کې باور لري او د ویش بنسټیز قانون ته داسي پراخیدلی شي

ټ : د ویش(تقسیم) بنسټیز قانون(دوام)

۲ - د دوه راشنل ګنونوa ،$a \neq 0$ او b لپاره یواځنی راشنل ګڼ $x = b/a$ شته دی، چې برابرون یا مساوات$ax = b$ پوره کوي

راشنل ګنونه هم د ورځنیو اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلی

بیلګه :

که شپږ منه غنم په دولسو تنو وویشو، نو د هر تن نیم من غنم راسیږي، چې دا نیم یې

راشنلګڼ دی، یاني $6 : 12 = 1 / 2 = 1 : 2$ یا $\frac{1}{2}$

دا باید په ګوته کړو، چې راشنل ګنونه د پای یا ناپای لسمیز ګڼ په څیر لیکل کیدی شي

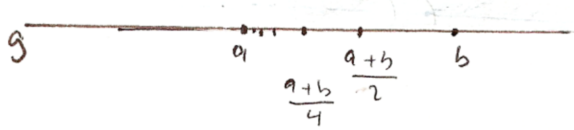
(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ٤ - رییل ګنونه(Real numbers (reele Zahlen

(فرانسوي: په ریښتوني شته یا موجود)

د ریشنلګڼ په بنسټ هغه ورځني تیوریکې اړتیاوې چې د شمیرعملیو بې بندیزه (نامحدود) په کار اچولو یا استعمال ته موجود وي حل یا اوبې شوې او همدارنګه عملي اړتیاوې چې اندازه کولو ته موجود وي هم حل شوې وي.

د ریشنلګڼ له لارې کیدی شي چې د کرښې اوږدوالی تیك ورکړ شي یا په همدې مانا : په هرخومره وړوکی ګڼونکربڼه انتروال کې هم ناپاې زیات ګڼونه، چې په ټکو یا نقطو انځور شوي، پراته دي.



ګڼونکربڼه چه ډیرا کوچنۍ کیدی شي

د ټولو دې امکاناتو سره سره هم بیا په یوه کرښه کې هر ټکی د ریشنلګڼ په ذریعه نه شي ښودل کیدی یا په بل عبارت د کرښې هر ټکی د ریشنلګڼ په مانا نه دی . دا ګڼونه چې د «ایریشنلګڼونو» په نامه یادیږي، کیدی شي د یوه پریودیکي(periodische) (د ګڼونو کړۍ نه شلیږي) ناپای لسیزمات له لارې وښوول شي.

د بیلګې په توګه د مربع د نیمي(قطر) x اندازه چې د مربع یو اړخ ۱ وي نه شي کیدی چې په ریشنلګڼ وښوول شي. د پیتاګوراس د جملې په بنسټ د x لپاره لاندې مساوات لرو : $x^2 = 1^2 + 1^2$, پس $x = \sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ريبلګڼ کليمه يوه ژوره کليمه ده چې د پوهيدلو لپاره يې «پولي» (ليمس lim) ته اړتيا موجود ده چې په ۱۸ –امه برخه کې به تر ښيړنې لاندې ونيول شي.

ډير اينتروالبنديدل چې په همغه يوه ټکي راټرخي مساوي(ورته) ارزښته (Äquivalent لاتين :مساوي ارزښته) ليدل کيږي

ريبلګڼډيرى R چې په ريشنلګڼډيري د ايريشنلګڼډيري ورزياتول دي چې له ۲ . ۱ . ۱ تر ۲ . ۱ . ۳ برخې پورې ټول بسټزقوانين په کې باور لري. د ريبلګڼ له لارې دکرښې ټول ټکي په بر کې نيول کيدی شي. په دې ډول ريبلګڼونه ټولې د شميرلو او اندازه کولو اړتياوې پوره کوي.

ګورو چې $x^2 + 1 = 0$ د ريبلګڼ حل يا اوبې نه لري. دلته د دې ګڼونو پراخوالي ته اړتيا پيښيږي چې کمپلکسګڼونو ته پراخ شي، او په ۵ –امه برخه کې به تر ښيړنې لاندې ونيول شي.

يا دا لاندې په لنډه توګه:

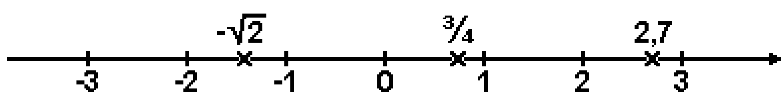
مورږ ګڼونه يا اعداد لرو، چې هغه راشنل ګڼونه نه دي ياني که مورږ د ۲ ګڼ ريښه(جذر) ونيسو، نو داسې يو ګڼ لاس ته راځي، چې هغه په لسميزه توګه پاي ته نه شي رسيدی ياني پريوديکی (تل بيرته راګرځيدونی يا پسی نور هم پراخيدونی) دي۰ داسې ګڼونو ته ايراشنل ګڼونه وايو۰

تل بيرته راګرځيدنيز (periodi(cal تل بيرته راګرځيدوني ,Period د ګڼونو ځنځير نه شليږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایراشنل – یا نانسبي عددونه یاګڼونهIrational numbers

د راشنل او ایراشنل ګڼونوټولنی ته رییل ګڼونه وایو(دا چې ټولنه څه شی دی، په ډیرۍ پوهنه یا سیټتیوري کې به ولوستل شي) .۰ موږ د ګڼونو د ښوولو لپاره لاندې ګڼونکرښه باسو په کومه کې چې له صفر سره پیداییښتي-، ټول- راشنل-،اراشنل ګڼونه کښل شوي دي یانې ریل ګڼونکرښه



۳ ۰ ۲ - رابیلشوی(له نورو -) د شمیر قواعد

په دې برخه کې د رییل ګڼونو لپاره رابیل شوي قوانین څیرو، چې د مخه تیرو قواعدو باندې ولاړ دي۰ دلته درانده ټکی دا لاندې دي:

- په رییلګڼونو کی څلور بنسټیز شمیرډولونه په ځانګړي توګه په لاندې ډول د نوکانو افادی (وییني) سره شمیرنه (نوکان اینسوول)۰ له زیاتون ګډ فاکتورونه یا ځلووني له نوکانو راوستل، د بینومیال فرمولونه۰

- پر صفر ویشنه د ناشونوالی په پام کی ساتنه

- له ماتو (کسرونو) سره شمیرل او په ځانګړي توګه لنډول (واړه کول) پراخول یا غزول او د اصلي ګډ ماتلاندي (مخرج المشترک) جوړول۰ د داسی ماتلاندی(مخرج) چې له ټاکلو او ناټاکلو ترمونو څخه جوړ وي۰

نومونې: کسر ته مات وایو او صورت او مخرج ته موږ ماتباندې او ماتلاندې وایو، چې سملاسي یې په مانا هم پوهیږو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۲ ۰ ۱ – جمعه او تفریق (زیاتون او کمون)

د زیاتون او کمون بنسټیزو قوانینو څخه لاندې لاس ته راځي

$$-(-a) = a\ ,\ .\quad a - b = a + (-b),$$

$$(a+b+c\ \ldots -c-d-\ldots) + (e+f+\ldots -g-h-\ldots) = a+b+\ldots -c-d-\ldots +e+f+\ldots -g-h-\ldots$$

دا دا مانا لري، چی که چیرې د نوکانو دباندې زیاتوننخښه (د جمع علامه) وي، نو د نوکانو څخه ویستلو کې ګڼې خپله مخنخښه نه بدلوي٠ که د نوکانو د باندی کموننخښه (منفي نخښه) وي، نو د ګڼونو له نوکانو ایستلو په حال کی د نوکانو دننه نخښی بدلیږي٠ یانی کموننخښه زیاتوننخښه او زیاتوننخښه کموننخښه کیږي٠ بیلګه یې لاندې ګورو

$$(a+b+\ldots -c-d-\ldots)-(e+f+\ldots -g-h-..)= a+b+\ldots -c-d-\ldots..-e-f-\ldots\ldots+g+h+\ldots$$

په همدې ترتیب کیدی شي نوکان هم ځاي پرځای شي٠

دلته باید مطلق ارزښت هم په ګوته شي ، چی په ګڼکرښه د صفر څخه د یوه ریيلګڼ واټن په ګوته کوي،

د کوم لپاره چی لیکو :

مطلق عدد یا - ګڼ یا بي اړیکو ګڼ (absolut number)

دا په دې مانا، چې د دې ګڼ سره زیاتیزه او کمیزه نخښه یا مثبت او منفي نه لیکل کیږي یا یون(واحد) هم ورسره نه وي، دا ټیک او ټیک یو ګڼ ښایج او بس٠

$$|a| = a\ ;\ a > 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a| = 0 \;\; ; a = 0$

$| a| = -a \; ; \;\; < 0$

ياني كه a زياتيزه يا مثبت وي،نو a پخپله ليكواو كه a كميزه يا منفي وي، نو a- ليكواو كه a صفر وي نو د هغه لپاره 0 ليكو

۳ ۰ ۲ ۰ ۲ ځل(ضرب)

د ځل لپاره لاندې د مخنخبنى قوانين باور لري:

$(+a)(+b) = +ab, (+a)(-b) = -ab \; , (-a)(-b) = + ab, (-a)(+b) = -ab$

كه چيرته ډير نوكبندونه راګرځيدلى وي، نو دا د ځل قانون پل په پل پر مخ ځى

بيلګه:

$$(a+b)(c-d)(e-f-g) = (ac – ad + bc –bd)(e-f-g)$$

$$= (ace-acf-acg-ade+adf+adg + bce-bcf-bcg-bde-) bdf+bdg$$

د ځانګړي حالت په توګه د بينوم پيژندل شوى فرمولونه راوړو:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a – b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a-b) = a^2 - b^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

گران لوستونکی کولی شي، چې پورته فرمولونه وښايي، چې ټيک دي.

دا په لاندې ډول کارولکيږي :

بېلګه ۱ . ۳ :

$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2$.

$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2 = (by - ax)^2$.

$16u^2 - 2v^2 = (4u + 2 \; v)(4u - 2 \; v)$

۳ ۰ ۲ ۰ ۳ ويش

په پام دې کې ولرو، چې b:a د $a = 0$ لپاره کوم مفهوم نه لري۰ پر صفر ويش ناشونی دی

په ويش کی نوکبندول د زياتون، کمون او ځل په څير ساده نه کيږي۰ په ويش کی د زياتون په ډول ليکل شوی هر توکی په ماتلاندې ويشل کيږي:

بېلګه ۳ ۰ ٤ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 12\,abc) : 3ab = a - 2b + 4c$$

يا داسې

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{12abc}{3ab} = a - 2b + 4c$$

د $ab \neq 0$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي لاس ته راوړني(نتيجي) ته سړی د ګډو څلوونو يا فاکتورونو يا خپلواکنوک څخه وتلو له لارې هم رسيدلی شي:

$$3a^2b - 6ab^2 + 12\,abc = 3ab(\,a - 2b + 4c)$$

له دې ځايه کيدی شي، چې د بولينوم ویش بيل شي

بيلګه ۳ . ۵ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 5c) : 3ab = a - 2b \ \text{Rest} \ 5c \ \text{باقي} \iff$$

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{5c}{3ab} = a - 2b + \frac{5c}{3ab} \ \text{لپاره} \ ab \neq 0,$$

د يوه زياتو يا چمعي وېش په يوه چمعه، کيدی شي د بينوم جکلې له لارې صورت ونيسي

بيلګه ۳ . ۶ :

$$(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b \iff \frac{(a+b)^2}{a+b} = a + b \ \text{لپاره} \ a \neq -b.$$

بيلګه ۳ . ۷ :

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b \iff \frac{a^2 - b^2}{a+b} = a - b \ \text{لپاره} \ a \neq -b.$$

بيلګه ۳ . ۸ :

$$\frac{(ax - by)^2}{by - ax} = \frac{(by - ax)^2}{by - ax} = by - ax \ \text{لپاره} \ ax \neq by,$$

دلته هم وېش د پاتې يا باقي سره شونی دی.

بيلګه ۳ . ۹ : $a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = [(a - b)^2 + b^2] : (a - b) = a - b$:

باقي يا پاتې b^2

له دې لاس ته راځی او په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{(a-b)^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}=a-b+\frac{b^2}{a-b}$$ پاتې $a \neq b$,

بیلګه ۱ . ۱۰

$(16u^2-v^2):(4u+\sqrt{2}\,v)=4u-\sqrt{2}\,v$ Rest v^2 باقي $\Leftrightarrow$

$$\frac{16u^2-v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}=\frac{16u^2-2v^2+v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}=\frac{16u^2-2v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}$$
$$=4u-\sqrt{2}\,v+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}$$

د $4u \neq -\sqrt{2}\,v$ لپاره

فورمال ور د دوه پولینومونو ویش دی (برخه ۱۲ دي اندول(پرتله) شي):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x^1+b_0}=P_n(x):Q_m(x),$$

که د ماتباندي پولینوم درجه د ماتلاندي پولینوم درجي لوي یا مساوي وي($n \geq m$).

مونږ نیسوچی: $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ او $Q_m(x) \neq 0$.

د دواړو ویشو« توټه ویشو» (پارخیالویش(Partialdivision)) دا دي چی دا

د $P_n(x):Q_n(x)$ ویش په لاندي ډول ولیکلی شو:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\text{Polynom }1+\frac{\text{Polynom }2}{Q_m(x)},$$

چیرته چی د پولینوم 2 درجه له $Q_m(x)$ درجي څخه کوچنی ده.

دي هدف ته په لاندي ډول رسیږو

۱ – سړی یواځی د جګ نظم غړي $a_nx^n : b_mx^m$ ویشي او له دي سره یوه

غلطي $F(x)$ کوي:

$$Q_{n(x)}:Q_m(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+F(x)$$ *

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – سړی (*) په ماتلاندې پولینوم $Q_m(x)$ ویشي

$$P_n(x) = (a_n / b_m)\, x^{n-m} Q_m(x) + F(x)$$

او له دې غلطی $F(x)$ ، په لاندې فورم یا ډول لاس ته راځي

$$F(x) = P_r(x) / Q_m(x)$$

د $P_r(x) = P_n(x) - (a_n / b_m)\, x^{n-m}\, Q_m(x)$ سره

چیرته چی د پولینوم $P_r(x) = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + .. + c_0$ درجه r د پیل پولینوم $P_n(x)$ له درجی n څخه کم له کمه په یوکوچنی وي . د ګڼونو شمیر په

تکیه ویلی شو، چی $P_r(x)$ پاتی پولینوم یا په ساده ډول پاتی (باقي) دی.

۳ – که لا تراوسه د $Q_m(x)$ درجه r له m کوچني وي نو د ټکو ۱ – او ۲ – تړنه ویش په $P_r(x) : Q_m(x)$ استعمالیږي، د لاندنی نتیجی سره

$$P_r(x) : Q_m(x) = (c_r / b_m)\, x^{r-m} + P_t(x)/Q_r(x)$$

چیرته چي د $P_t(x)$ درجه t کم له کمه په یو له $P_r(x)$ درجي کوچنی وي.

د تړنه ویش دا عملیه اخر ته رسیږي، که (د پای ډیرو پلونو (قدمونو) اخستلو وروسته د ماتباندې غلطی پولینوم درجه له m څخه کوچنی وي.

بیلګه ۲ . ۱۱ . لمړی دې د تړنه ویش ۱ او۲ پلونه (قدمونه، کدمونه) په پراخ ډول د لاندې ویش په بیلګه توضیح شي

$$P_n(x) : Q_m(x) = P_3(X):Q_1(x) = (6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$P_3(x)$: $Q_1(x) = (a_3 / b_1)x^2 + F(x)$
$(a_3 / b_1)x^2Q_1(x) = 2x^2(3x-2) =$	$(6x^3 + 5x^2-3x+1) : (3x-2) = 2x^2 + F(x)$ $6x^3 - 4x^2$
$P_2(x) = P_3(x) - (a_3 / b_1) x^2Q(x) =$	$9x^2 - 3x + 1$
$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) =$	$(9x^2 - 3x + 1) : (3x - 2)$

بیلگه ۱ . ۱۲ : د تیرې ویش بیلګه ۱ . ۱۱ د $F(x)$ غلطی ته دوام ورکوو، ترڅو چې د لیکنی شکل لنډ شي:

$F(x) = P_2(x):Q_1(x) = (9x^2-3x+1):(3x-2) = 3x+G(x)$

$3x.Q_1(x) = (9x^2-6x)$

یاباقي پاتي $= 3x+1$

$G(x) = (3x+1):(3x-2)$

له دې لاندې نتیجه لاس ته راځي :

$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)=2x^2+3x + G(x)$

$G(x) = (3x+1):(ex-2) = 11 + H(x)$

$Q_1(x) = 3x-2$

پاتی = یاباقي = 3

$H(x) = 3 : (3x-2)$

پس باور لري

$(6x^3+5x^2 - 3x+1) : (3x-2) = 2x^2+ 3x+1 + 3/(3x-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تول توته ویش کیدی شي په لاندي ډول مخ ته یوړ شي .

$$\begin{array}{llllll} & & (1) & (4) & (7) & (۱۰) \\ & (6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2) = & 2x^2 & +3x & +1 & +3/(3x-2) \\ (2) & \underline{6x^3-4x^2} & & & & \\ (3) & -9x^2-3x+1 & & & & \\ (5) & \underline{9x^2-6x} & & & & \\ (6) & 3x+1 & & & & \\ (8) & \underline{3x-2} & & & & \\ (9) & 3 & & & & \end{array}$$

دلته (i) د پرلپسی پل اخستلو په مانا ده.

جمله ۳ . ۱۳

$$\begin{array}{lllll} & & (1) & (4) & (7) \quad (10) \\ & (18x^4+15x^3+0x^2-2x+1):(3x^2+x-1) = & 6x^2 & +3x & +1+\dfrac{2}{3x^2+x-1} \\ (2) & \underline{18x^4+6x^3-6x^2} & & & \\ (3) & 9x^3+6x^2-2x+1 & & & \\ (5) & \underline{9x^3+3x^2-3x} & & & \\ (6) & 3x^2+x+1 & & & \\ (8) & \underline{3x^2+x-1} & & & \\ (9) & 2 & & & \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۲ . ٤ ماتشمیرنه (کسرشمیرنه)

د مات m/n کلمه د لومړي ځل لپاره د ټولګڼونو m,n څخه د ریشنلګڼونو انځورونو لپاره تعریف شوې. کیدی شي، چې دا کلمه a/b ته، چې a او b ریيل ګڼونه دي، وغزول شي.

باید په پام ې ور،چې ماتباندې صفر نه شي..

د بیلګي په توګه:

ویش a/(b-c) تیک هلته مفهوم لري، چې $b \neq c$ وي. ماتګڼ a/b همدا ګڼ ښایي

لکه a : b او یا $\frac{a}{b}$ ، دلته هم باید b |=0 وي.

په اخر کې باید په ګوته شي، چې مات لاندی – او همدارنګه ماتباندې ګڼ هم هر ماتګڼ کیدی شي او هم دواړه. دا باید دلته هم په پام کې وي، چې هیڅ یو ماتلاندې ګڼ باید صفر نه وي یانی دلته بی له اولنی ماتباندې نور یو ګڼ هم، چې ماتلاندې پورې اړه لري، نه شي صفر کیدی دا موږ د ماتو مات (کسرالکسر) بولو.

بیلګې:

a : (b/c) = a / (b/c) , b |=0 , c|= 0 ,

(a/b) : c = (a/b) / c b|=0, c|= 0

(a/b): (c/d) = (a/b) / (c/d), b |= 0 , c |= 0 , d |=0

یا په لاندې ډول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a}{b}:\frac{\frac{a}{b}}{c},b\neq 0,c\neq 0,...,\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}},b\neq 0,c\neq 0,d\neq 0$$

په ځو واره ماتګڼ کې باید اصلي ماتکرښه څرګنده پیژندونکي وي، چې په دې توګه د هر ډول ناټیکوالی مخه نیول شوي وي۰ په ټولیزه توګه باور لري

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}\neq\frac{\grave{a}}{\frac{b}{c}}$$

هریو ماتګڼ b|=0, a / b په یوه ګڼ c |= 0 پراخیدی او همداسې لنډیدی شي

یانې ماتلاندې او ماتباندې په یوه ګڼ c ځلیدی یا ویشل کیدی شي او دا کړنلار په اصلي

ګڼ کې تغیر نه راولي

$$\frac{a}{b}=\frac{a.c}{b.c}=\frac{a:c}{b:c},b\neq 0,c\neq 0$$

د ماتګڼ لنډوالی ددې لپاره ښه دی، چې ماتګڼ ساده کړي.

د بیلګې په توګه:

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3},\frac{ax-ab}{y-ac}=\frac{x-b}{y-c};a\neq 0,y\neq c$$

باید تل په پام کې ولرو، چې یواځنی فکتور یا ځلوونی یا ضریب لنډیدی شي او نه زیاتوونی د بیلګې په توګه لاندې ماتګڼ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(a+c):b+c)$ چې $b \neq -c$ وي نه شي لنډيدی دا $(a+c):(b+c) = a:b$

باور لري،چې $b \,|= 0, c = 0 \;\lor\; -c \,|= a, a = b$

پراخوالی يا غزول د دې لپاره اړيين دی، چې ډير ماتګنونه په ګډ ماتباندې (مخرج المشترک) راوستلی شي، ځکه چې يواځې هغهٔ مات يو په بل زياتيدی يا يو له بل کميدی شي، چې ګډ ماتلاندې ولري.

لکه : $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, c \neq 0$

که چيرې پرڅښ يا برعکس ماتګنونهa / b او c/d د نابرابر ماتلاندې لرونکی سره زياتوو او يا کموو ، نو دا په ګډ ماتلاندې بايد راولو۰ ګډ ماتلاندې د ټولو ماتلاندو څخه دی۰ د بيلګي په توګه لاندې باور ي دی:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}, b \neq 0, d \neq 0, f \neq 0 \Leftrightarrow bdf \neq 0$$

او دا لاندې

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bd \neq 0$$

تل بايد ماتګنونو ګنلو کې ماتلاندې سره ځل نه شي، چې ګډ ماتلاندې لاس ته راولو، دا د ښوونځي په څرګنده بيلګه باندې ښايو

بيلګه: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{15}-\frac{1}{36}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي، چې اصلي ماتلاندي)ا۰م۰ل (وټاکل شي

ا ۰ م ۰ ل ۰ 97200 =2.3.5.6.15.36 =

کيدی شي، چی ا۰م۰ل۰ د لومړنيو ګڼونو ځل په څير هم وليکو:

2 = 2

3= 3

5 = 5

6 = 2. 3

15= 3 .5

3۰. 3.۰2۰36 = 2

$2^2.3^2.5 = 4.9.5 = 180$

پس د ګډ ماتلاندې لپاره د لوړکې يا لوړ جګګې يا لوړ طاقت لومړي ځلووني رانيول کيږي۰ چې ګنل خورا ساده کوي۰

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36}$$

$$\frac{90 - 60 + 36 - 30 + 12 - 5}{180} = \frac{43}{180}$$

دا چې دا تګلار څنګه د ماتو په ټوليزه افاده استعماليدی شي لاندې بيلګه يی ښايي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ٣ ٠ ١٥ په لاندې بيلګه کې

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$$

چې يواځې د لاندې لپاره موخه ور دی $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

د اصلي ماتلاندې لپاره يانې

$$a.b(ab)(a^2b).(ab^2) = a^5.b^5$$

نه ټاکي، نو له دې امله دی

$$a = a$$

$$b = b$$

$$ab = a\ b$$

$$a^2.b = a^2\ b$$

$$ab^2 = a\ b^2$$

دا ا٠م٠ل٠ په لاندې توګه دی $= a^2\ b^2$

له دې امله لرو:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}=\frac{ab^2-a^2bab-b+a}{a^2b^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۳ ۰ ۱۶ : د وييني يا افادې

$$\frac{2}{a-2}+\frac{2}{a-1}-\frac{1}{a+1}-\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{a+6}{a^2-4}, a\neq 0, a\neq \pm 2$$

لپاره ټاکو

a-2 = (a-2)

a – 1 = (a-1)

a+1 = (a+1)

a + 2 = (a+2)

a^2 - 1 = (a-1)(a+1)

a^2-4 = (a-2) (a+2)

(a-2)(a-1)(a+1)(a+2) = (a^2-1)(a^2-4)

دا پورته لاس ته راوړنه ا۰م۰ل۰- چۀ دا په همدې وخت کې غ ک پ هم دی- په ګوته کوي او له پورته څخه د مخه ورکړشوې افادې لپاره لاس ته راځي:

$$\frac{2(a^2-1)(a+2)+2(a^2-4)-(a-1)(a^2-4)-(a-2)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

$$=\frac{(a+3)(a^2-4)+(a+6)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مات ماتباندې صفر دېپه دې ډول په پورته پيل کې ورکړ شوې افاده يا وينه د صفر پيچلې ليکلو بيلګه ده او بس۰

د ځل او ويش لپاره لاندې قاعدې باور دي:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, b\neq \wedge d\neq \Leftrightarrow bd\neq 0$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}; b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0 \Leftrightarrow bcd\neq 0$$

بيلګه ۳ ۰ ۱۷ الف)

$$1-\frac{1}{1-a\frac{1}{1-\frac{b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a}{\frac{a-b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a^2}{a-b}}=1-\frac{1}{\frac{a-b-a^2}{a-b}}$$

$$=1-\frac{a-b}{a-b-a^2}=\frac{a-b-a^2-a+b}{a-b-a^2}=\frac{-a^2}{a-b-a^2}=\frac{a^2}{a^2-a+b}$$

د $a\neq 0, a\neq b, a^2-a+b\neq 0$

لپاره۰ دا په دې مانا، چې

$$a\neq\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4b})$$

بيلګه ۳۰ء ۱۷ ب:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}=\frac{\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a^2-b^2)}\cdot\frac{(a^2-b^2)}{a(a-b)+b(a+b)}$$

$$=\frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-ab+ab+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1, \forall\, |a|\neq|b|$$

یادونه: په پورته لیکنه کې د ګڼونو موضوع لږ وغزول شوه، خو لږ څه نور هم باید راغلي وی۰ دلته اړیین د ګڼونو شمیرقوانین دي او د ګڼونو پیژندل۰ د ګڼؤنو اړیکې د خوندیونې له لارې

$N \subset Z \subset Q \subset R$

او په دې کنونو کې باوري د شمیر قوانین، چې هغه زیاتون ، کمون ، ځل ، ویش دئ او د ویش په بنسټ ماتشمیرنه۰ دا باید په همغه ساده ډول زده کړای شي۰

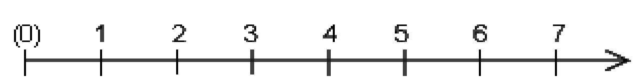
مورږ هغه د لومړي وار لپاره اړیین د ګڼونو شمیرنقوانین په لاندې توګه رالنډوو، چې د لومړي وار لپاره په همدې پوهیدنه بسیا کوي۰

ګڼونډیرئ (لنډه ټولګه)

پیدایښتي – یا طبیعي ګڼونډیرئ

N = {1, 2, 3, 4, 5, ... }.)

په وړانګه د پیدایښتي ګڼونو انځورونه

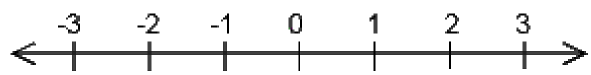


(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولګڼونو ډيری

Z = { ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... }

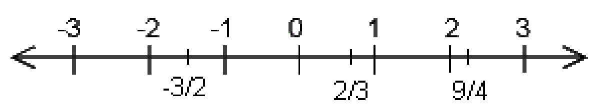
د ټولګڼونو ډيری انځورونه په يوه کرښه



د راشنلګڼونو ډيرئ

$$Q = \{\frac{p}{q} | p, q | Z \wedge q \neq 0\}$$

په ګڼونکرښه راشنلګڼونه د ټولګڼونو تر منځ پراته دي



هر راشنل ګڼ د لسميز يا پريوديکی ګڼ په څير ليکل کيدئ شي

د ماتو سره شميرنه

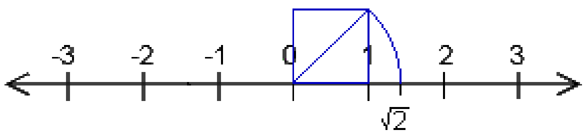
د دوه راشنلګڼونو ترمنځ تل ناپاي زيات نور راشنلګڼونه شته ، دا ګڼ پارته دي، مګر بيا يې هم ترمنځ نور ګڼونه يا ځايونه هم شته، چې ګڼونه په کې ځاي دی او دې ګڼونو ته مو ايراشنل ګڼونه وويل ۰ لکه چې يو راشنلګڼ نه دئ

راشنل او ايراشنلګڼونه رييل ګڼونه جوړوي

د رييل ګڼونوډيرئ يا حقيقي اعدادو سټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رييلګڼونو ډېرۍ د ګڼونکرښې ټولو ټکو څخه جوړه ده، لاندې ګڼونکرښه کې روښانه ده



په رييلګڼونوکې بې له بنديزونو شميرل کړى شو، خو په ماتلاندې کې بايد صفر نه وي او دا د هر ډول ګڼونولپاره باور لري

شميرډولونه لومړۍ پوړۍ

:Additionزياتون يا جمعه

زياتوونى +زياتونى = زياتون

د زياتون کموتاتيو قانون $a + b = b + a$

د زياتون اسوشياتيو قانون $(a + b) + c = a + (b + c)$

و زياتون ته د يوه بى اغيزه يا ناپيلى توکى شتون$a + 0 = a$

مخامخ – يا په څټ ګن يا برعکس عدد$a + (-a) = 0$

Subtraktion:کمون

د زياتون په څټ کارونه يا عمليه ٠ ترې کمه وونى – کمه ونى = کمون

$a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: $7 + x = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 7 = 3$

شمیرډولونه:

دویمه پوړی

ضرب یا ځل: فاکتور (ځله وونی ضریب) · فاکتور(ځله وونی) ځل
د زیاتون تکرار، بیلګه. $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$

د ضرب یا ځل کموتایتو قانون $a.b = b.a$

د ضرب یا ځل اسوشیاتیو قانون $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

دستریبوتیو قانون $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

و ضرب ته د یوه ناپیلي توکي شتون(بي اغیزه توکی یې که وبولو هم بده به نه وي)

$a \cdot 1 = a$

په څېټ ارزښت یا برعکس قیمت $a \cdot (1/a) = 1$

یو ضرب ټیک هلته صفر دئ، چې د صرب یو ضریب صفر وي $a \cdot 0 = 0$

ویش:
ویشونی : پرویشونی = ویش (لوستل یې له ښي وکیڼ لورته)

ویش د ضرب یا ځل په څېټ کارونه ده) $a:b=c$

$a \cdot x = b \Leftrightarrow x = b:a$

د بېلګې په توګه $z.B.: 4 \cdot x = 12 \Leftrightarrow x = 12:4 = 3$

په صفر ویش پیژند نه لري یا تعریف نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ تمرینونه

۱ – د اعدادو یا ګڼونو ډولونه او د د اعدادو انځورونه

۱ ، ۱ – په کوم د اعدادو ډېرئ یا سټ کې د عدد a او عدد b لپاره د شمیرلو څلور قاعدې یا لارې باور لري؟

یادونه: دلته دې ترې کمونې یا مفروق منه او وېشونش یا مقسوم تل a وي همداسې دې کمونې یا مفروق او پروېشونې یا مقسوم علیه تل b وي.

a) $a = 8, \quad b = 2$
b) $a = 5, \quad b = 8$
c) $a = 7, \quad b = 0$
d) $a = -6, \quad b = 1$

۱ . ۲ عددونه او یو له بل سره پرتله کړئ او ورکړئ، چې له دې دواړو کوم لو دی!

a) $a = \frac{13}{17}, b = \frac{169}{289}$
b) $a = \frac{11}{21}, b = \frac{121}{231}$
c) $a = \frac{888}{901}, b = \frac{896}{911}$
d) $a = -\frac{13}{12}, b = -\frac{143}{130}$

۱ . ۳ – د اعدادو یا ګڼونو او څخه تفرسق، ضرب او وېش جوړ کړئ! ورکړئ، چې دا نتیجې د اعدادو کومو ډولونو پورې اړه لري!

د پوښتنې ۱ ، ۱ یادونه دلته هم باور لري.

a) $a = \pi, \quad b = 5$
b) $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$
c) $a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{3}{2}$
d) $a = 0, \quad b = 1$

۱ . ۴- په دوه ییز سیستم کې لاندې ګڼونه یا اعداد انځور کړئ!

a) 28 b) 47 c) 73 d) 112

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۵ – لاندې ريښتوني يا راشنل اعداد د کوټيو کې اچوني يا کوټې وني له لارې په نږدې ۵ ځايونو ټيک پيدا کړئ.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲ . د زياتيزو او ځليزو (د جمعې او ضرب) نوکانو وازول

۲ . ۱ – لاندې نوکان واز کړئ

a) $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$
b) $5a + [7c - (2a - 3b)] - (4c - a + b)$
c) $7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b)$
d) $8a - \{a + [(3a - 2b) - (5a + 3b)] - [(-a + 6b)]\}$

2.2. a) $(-a)(b - a - c)$
b) $2a[a - (b - 3a)]$
c) $3(a + b + c) - 5(a + b) - c - 2(b - c - a)$
d) $|a| \cdot (b - 2a) - b \cdot (a + 2b)$

2.3. a) $(2a - b)(9a + 4b)$ b) $(9a - 2b)(7a - 3b)$
c) $(a + b - c)(a - b - c)$ d) $(3a + 2b)(4a - 3b)(5a - 7b)$

2.4. a) $(7a - 5b)(3a + 4b) - (5a - 9b)(4a - b)$
b) $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$
c) $(a + b)(c - d) - (a - b)(c + d)$
d) $(1 - a)(a - 1) - 2(a + 1)(a - 2)$

۳ – د بينوم فرولونه

۳ . ۱ – د بينوم فرمولونه وکاروئ يا استعمال کړئ او د شونتيا سره سم يې ساده کړئ

a) $(-a + 3b)^2$ c) $(-a - b)(a - b)$
b) $(-1 + a)(a + 1)$ d) $(-1 + a)^2 - (1 - a)^2$

3.2. a) $(4a^2 - 3)(4a^2 + 3) - (3a - 4)^2 + (5a + 1)^2$
b) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $(3a+2b-5c)^2$
d) $(a+b-c-d)^2$

3.3. a) $49a^2+42a+9$
b) $25a^2+40ab+16b^2$
c) $169a^2-130ab+25b^2$
d) $9a^4b^2+12a^2b+4$

3.4. a) $(8a-b)^2-16a^2$
b) $81a^2-16(4a-3b)^2$
c) $4a+12\sqrt{ab}+9b$
d) $(\sqrt{ab}-1)(-1-\sqrt{ab})$

3.5. a) $(a+b+1)(a+b-1)$
b) $(a+b)^2+2a+2b+1$
c) $a^2-2ab+b^2-2a+2b+1$
d) $a^2+2ab+b^2-4(a+b)+4$

۳ . ۶ لاندې وییني یا افادې ساده کړئ، داسې چې د مربع تکمیلوني له لارې پوره مربع وې جوړې کړئ!

a) $4a^2-12a+9b^2-24b=0$
b) $16a^2+25b^2-128a+50b=0$
c) $3a^2-2b^2-2\sqrt{6}\,a+2\sqrt{6}\,b=0$
d) $4x^2+12xy-9a^2+12ab=0$

۴ . د مناسبو ضریبونو له نوکانو راوسته له ۴ .
۱ تر ۴ . ۴ پورې پوښتنو کې ورکړ شوې وییني یا افادې په ضریبونو توټه کړئ او تر شوونتیا پورې یې ساده کړئ.

4.1. a) $a+a^2$
b) $-a^2-a$
c) $8ab+20b^2$
d) $ab+ac-ad$

4.2. a) $a^2b^2+ab+ab+1$
b) $ab-ac-b+c$
c) $3a+3-2a-2+4b(a+1)$
d) $8(7a-5b)-5c(7a-5b)$

4.3. a) $3ac-3bc-2ad+2bd+4ac-4bc-7ad+7bd$
b) $a^2b+ac-ab-c$
c) $15ab-5a-1+3b$
d) $4a^2+20ab+25b^2-a^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.4. a) $(a^3 - a^2)(2a - 2a^2)$
b) $(-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2$
c) $(-5a - 10b)(-3a + 6b)$
d) $(-a - 1)(a - 1) - (a^2 - 1)$

۴ . ۵ – هر ځل د n لوی توان (n=1,2,3,…) له نوکانو راوباسئ!

a) $n^2 + n + 1$
b) $3n^2 - n + 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$
c) $(1 - 2n)^3$
d) $(\frac{1}{4}n^2 + 3n - 1)^2$

۵ – د په نوکانو کې افادو وېش

لاندې وېش سره ته ورسوئ.

دا چې وېش په صفر ناشونی دی، په دې او لاندې ټولو تمرینونو کې دا ا رزښتونه له شمیره وباسئ، کوم چې a,b,… یې نه شي نیولی یا اخستلای.

5.1. a) $(10a^2 - 2ab + 16ac) : 2a$
b) $(25ab - 40b^2) : (-5b)$
c) $(28a^3 - 20a^2 + 32a) : (-4a)$
d) $(27a^2b - 63ab^2) : (-9ab)$

5.2. a) $(3a^2 + 5ab + 2b^2) : (a + b)$
b) $(a^2 - 2ab - 3b^2) : (a - 3b)$
c) $(3a^2 + 2a - 5) : (3a + 5)$
d) $(4a^2 - 7ab + 3b^2) : (4a - 3b)$

5.3. a) $(35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc) : (5a + 2b)$
b) $(15a^3 + 67ab^2 - 52a^2b - 28b^3) : (5a - 4b)$
c) $(21ax - 15bx + 9cx - 35ay + 25by - 15cy) : (7a - 5b + 3c)$
d) $(12a^2 + ab - 17ac - 20b^2 + 29bc - 5c^2) : (3a + 4b - 5c)$

5.4. a) $(a^3 + b^3) : (b + a)$
b) $(1536b^3 + 375a^3) : (25a^2 + 64b^2 - 40ab)$
c) $(144a^4 - 81b^2) : (27b + 36a^2)$
d) $(a^3 - b^3) : (a - b)$

5.5. a) $(9a^3 - 7ab^2 + 2b^3) : (3a + 2b)$
b) $(a^2 - 10a - 25) : (a - 5)$
c) $(a^3 - 2ab + b^3) : (a + b)$
d) $(24a^4 - 26a^3 - 76a^2 + 32a) : (4a^2 - 7a - 8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5.6. a) $(x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9)$
b) $(2x^2 - x + xy - y^2 + 2y - 2) : (2x - y + 1)$
c) $(13a^2b + 4b^3 - ab^2 + 10a^3) : (2a + 3b)$
d) $(3a^3 + 2a^2 - 7a^2b + 3a - 2ab + 4ab^2 - 4b + 3) : (3a - 4b + 2)$

۶ . ماتشميرنه يا كسرشميرنه

۶ . ۱ – لاندې كسرونه صورت او م خرج يعني د ماتباندي او ماتلاندي د خورا غټ ګډ پروېشوني سره د لومړنيو ضريبونو يا ځلوونو له لارې لنډ كړئ

a) $\frac{6\,732}{20\,196}$
b) $\frac{2\,730}{5\,005}$
c) $\frac{20\,520}{2\,280}$
d) $\frac{69\,069}{138\,138}$

۶ . ۲ – د لاندې اعداد خورا كوچنى ګډ زاتځلى (ذ الاضعافالاقل) پيدا كړئ

په لاندې كې und د او په معنا دى

a) 3, 6, 9, 18, 27, 54 und 81
b) 8, 12, 21, 42, 56 und 84
c) 5, 13, 16, 20, 26 und 42
d) 120, 252, 264, 315 und 616

۶ . ۳ . د برابر نوميزو يا برابرمخرج كسرونو شميرنه

6.3.1. a) $\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} - 4\frac{2}{3}$
b) $\frac{3}{7} - \frac{1-6}{7} + 2\frac{1}{7} - 7\frac{2}{7}$
c) $10\frac{1}{5} - \frac{4-5}{5} - 5 \cdot \frac{1}{5} + \frac{10-1}{5}$
d) $2\frac{2}{26} + \frac{5-3}{13} + 3\frac{33}{39} - 0 \cdot \frac{25}{65}$

6.3.2. a) $\frac{a+1}{a} - \frac{a-1}{a} - \frac{1-a}{a}$
c) $\frac{(a-b)^2}{ab} - \frac{1-2ab}{ab} - \frac{a^2+b^2}{ab}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) $\frac{a+1}{b}-\frac{a-b}{b}-\frac{b-a}{b}$ d) $\frac{(a-b)^3}{2ab}-\frac{(a+b)^3}{2ab}$

۶ . ۴ – د نا برابرنومیزو کسرونو جمعه او تفریق، په مخرج یا ماتلاندې کې ضربیونه

6.4.1. a) $5\frac{7}{12}+1\frac{41}{72}+2\frac{17}{24}+9\frac{5}{9}$ c) $\frac{5}{18}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{14}{27}+\frac{71}{81}$

b) $36\frac{14}{39}+19\frac{4}{13}+15\frac{5}{6}-2\frac{19}{72}$ d) $\frac{15}{64}-\frac{77}{96}+\frac{1}{243}-\frac{3-8}{24}+3\frac{1}{1296}$

6.4.2. a) $\frac{b+5c-a}{6}-\frac{3a-7b+6c}{4}+\frac{4a-5b+7c}{3}$

b) $\frac{a-9}{18}+\frac{a-2}{6}+\frac{5(2a-1)}{12}-\frac{3(a-1)}{8}-\frac{2(3a-4)}{9}$

c) $\frac{16b+3a}{48}+\frac{7a-8b+9c}{24}-\frac{9a+8b+12c}{32}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

6.4.3. a) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-\frac{a^2+b^2}{2b}-1$

b) $\frac{5a-6b}{30c^2}-\frac{b(5c^2-3a)}{15ac^2}-\frac{a}{4b}+\frac{a(3c^2-2b)}{12bc^2}+\frac{b}{3a}$

c) $\frac{3a^2+8b^2}{6ab}-\frac{a(4b-5c)}{10bc}+\frac{4a-5b}{10c}+\frac{b(3a-2c)}{6ac}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

۶ . ۵ - د نابرابر نومیزو ماتونو(کسرونو) جمعه او تفریق(زیاتون او کمون)، جمعه مخرج یا ماتلاندې کې.

۶ . ۵ . ۱: د a لپاره یو په بل پسې ورکړشوي ارزښت ځای په ځای کړۍاو دا داسې لاس ته راغلي ماتونه(کسرونه) سره یوځای کړۍ! بیا په ټولیزه توګه د ورکړ شوو کسرونو لاس ته راوړنې ورکړۍ او هغه ارزښتونه لرې کړي، چې د a د اخستلو یا نیولو اجازه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}$	د a=1,2,3 سره
b) $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}$	د a=3,4,5 سره
c) $\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a+1}-2$	د a=2,3,4 سره
d) $\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{1}{(a-1)^2}$	د a=2,3,4 سره

6.5.2. a) $\frac{3a-1}{4a-1}-\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{a+1}+\frac{4}{3a+2}-\frac{3}{a+1}$

b) $\frac{a-2}{a-3}-\frac{a-1}{a-2}$ d) $\frac{10}{2a-2}-\frac{6a}{3a^2-6a}-\frac{9b}{3ab-9b}$

6.5.3. a) $\frac{3ax-3by}{6x^2y-6xy^2}-\frac{5a^2x+5aby}{10ax^2y+10axy^2}$

b) $\frac{6ab+9b}{6ab-6b}-\frac{6ab-4b}{6ab+6b}-\frac{10b^2}{12a^2b^2-12b^2}$

c) $\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{2b^2}{2a^4-2a^2b^2}-\frac{b^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab}$

d) $\frac{24a^2b-72ab^2}{60a^2b+24ab^2}-\frac{49a^2b-28ab^2}{35a^2b+14ab^2}-\frac{20a-10b}{10a-5b}$

6.5.4. a) $\frac{3a+b}{2a^2+2ab}-\frac{a^2+b^2}{2a^2b+2ab^2}+\frac{2a-5b}{4ab+4b^2}$

b) $\frac{a+2b}{3a^2-3ab}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2ab-2b^2}$

c) $\frac{2a-5}{a+3}-\frac{3a-4}{a+2}+\frac{a^2+6a+10}{a^2+5a+6}$

d) $\frac{5a-2b}{3a+b}-\frac{88a^2+28ab+0,25b^2}{48a^2+7ab-3b^2}+\frac{24a+b}{16a-3b}$

6.5.5. a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2+ab}-\frac{a^2}{ab+b^2}$

b) $\frac{6a-5b}{8a^2+24ab+18b^2}-\frac{2a-b}{36a^2-81b^2}+\frac{3}{12a-18b}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{2a+3b}{2ab+b^2}-\frac{4a^2+b^2}{4a^2b+2ab^2}-\frac{5a-b}{4a^2+2ab}$

d) $\frac{9a-b}{6a^2-2ab}-\frac{6a+b}{3ab-b^2}+\frac{1}{2b}$

۶ . ۶: د ماتونو یا کسرونو ضربونه(یا څلونه):

6.6.1. a) $3\cdot\frac{1}{3}$ b) $b\cdot\frac{1}{a}$ c) $\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{5}$ d) $\frac{0}{b}\cdot\frac{b}{c}$

6.6.2. a) $\left(\frac{a}{3b}+\frac{3b}{a}\right)\cdot 3ab$ c) $\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)\cdot(2a-3b)$

b) $\left(\frac{5a}{6bc}-\frac{6b}{7ac}+\frac{2c}{3ab}\right)\cdot 84abc$ d) $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)$

6.6.3. a) $\frac{4a^2-9b^2}{21a^2b+14a^3}\cdot\frac{7a+5ab}{6b-4a}$ b) $\frac{16a^4-a^2}{24a^3+8a^2}\cdot\frac{36a^2+24a+4}{4a+1}$

c) $\frac{a^2+1}{(a+1)^2}\cdot\frac{a^3+a^2+a+1}{(a^2+1)^2}$ d) $\frac{4ab-3a}{9ab-3b^2}\cdot\frac{18a-6b}{4a^2+10ab}\cdot\frac{8ab-6a}{4ab+10b^2}$

۶ . ۷ . د ماتونو وېش:

6.7.1. a) $\frac{2}{3}:3$ b) $a:\frac{1}{b}$ c) $\frac{a}{b}:b$ d) $\frac{0}{a}:\frac{1}{b}$

۶ . ۷ . ۲ : د لاندې وېينو یا افادو برعکس یا په څټ ارزښتونه پیدا کړئ.

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{a+1}{b}$ c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ d) $\frac{1}{a+b}$

6.7.3. a) $\left(\frac{a}{2b}-\frac{2b}{a}\right):\frac{a}{a+2b}$ c) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

b) $\left(1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}\right):\frac{1-a^2}{a^2}$ d) $\left(\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.7.4. a) $\dfrac{1-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}}$

c) $\dfrac{\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}}$

b) $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1}{\frac{a^2+b}{b}-\frac{a+b^2}{a}}$

d) $\dfrac{\frac{a}{1-a}+\frac{a+1}{a}}{\frac{a-1}{a}-\frac{a}{a+1}}$

6.7.5. a) $\dfrac{\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}}$

c) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}$

b) $\dfrac{\frac{x^2}{ab}+x\cdot\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)-\frac{1}{ab}}{\frac{x}{a}-\frac{1}{b}}$

d) $\dfrac{\frac{1}{16a^2}+\frac{1}{2ab}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{8a}+\frac{1}{2b}}+\dfrac{\frac{1}{16a^2}-\frac{1}{2ab}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{8a}-\frac{1}{2b}}$

6.7.6. a) $\dfrac{a+\frac{1}{1-ab}}{1-\frac{1}{1-ab}}$

c) $1-\dfrac{1}{1-a\cdot\dfrac{1}{1+\frac{b}{a}}}$

b) $\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{1-\frac{a}{a-b}}}$

d) $\dfrac{\frac{a+\frac{1}{4}b}{a-\frac{1}{4}b}-\frac{a-\frac{1}{4}b}{a+\frac{1}{4}b}}{1+\frac{b^2}{16a^2-b^2}}$

۶ . ۸ . لاندې ماتونه يا کسرونه، که ممکن وي، ساده کړئ (که غواړئ د مخکني شکل بدلون څخه وروسته)

6.8.1. a) $\dfrac{35ac-50bc}{7a-10b}$

c) $\dfrac{34ax+51bx-119cx}{2a+3b-7c}$

b) $\dfrac{a-\sqrt{a}\cdot b}{b-\sqrt{a}}$

d) $\dfrac{a^2-ab+ac}{b-a-c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.8.2. a) $\frac{ax+bx+ay+by}{a+b}$ c) $\frac{91ab+7b+39a^2+3a}{13a+1}$

b) $\frac{ab+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}}{a+\frac{1}{2}}$ d) $\frac{ax+\frac{x}{b}-\frac{a}{y}-\frac{1}{by}}{\frac{1}{b}+a}$

6.8.3. a) $\frac{25a^2-130ab+169b^2}{25a-65b}$ c) $\frac{\frac{1}{4}a^2b^2+17ab+289}{\frac{17}{2}\left(\frac{1}{17}ab+2\right)}$

b) $\frac{2x^2+8xy+8y^2}{(x+2y)^2}$ d) $\frac{25a-20\sqrt{ab}+4b}{ab(\sqrt{a}-0{,}4\sqrt{b})}$

6.8.4. a) $\frac{a^4-b^4}{(a+b)^2(a-b)}$ c) $\frac{(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}$

b) $\frac{(a+b)^4-(a-b)^4}{a^2+b^2}$ d) $\frac{(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^2+2a^4b^4}{a^4+b^4}$

6.8.5. a) $\frac{(\frac{1}{9}a^2+b^2+\frac{2}{3}ab)(x^3-27y^3)}{(2b+\frac{2}{3}a)(x-3y)}$ c) $\frac{(80-40ab+5a^2b^2)(4-ab)}{64\cdot\left(\frac{ab}{4}-1\right)^3}$

b) $\frac{(2x^2-20x+50)(2a-1)(a+\frac{1}{2})}{(1-2a)(2a+1)(25-x^2)}$ d) $\frac{(32a^3b^2x-18ax^3y^2)\cdot 3by}{(12ab^2y+9bxy^2)\cdot 2ax}$

6.8.6. a) $\frac{(a+b+1)(a+b-1)+(a-b)^2-2\cdot\left(b^2+\frac{1}{2}\right)}{a+1}$

b) $\frac{\left(4a+\frac{1}{4}b-2\sqrt{ab}\right)\cdot\left(2\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}}$

c) $\frac{(a+1)^2-b^2}{a^2+2ab+b^2+2a+2b+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

d) $\frac{(a-1)^2-(b-1)^2}{a^2+b^2+2ab-4(a+b-1)}$

۶ . ۹ . د (-1) سره شميرنه

الف- ورکړشوی دې وي/ a(b-c) /c . a=-1ځای په ځای کړئ او داسې لاس ترې راغلي کسر یا مات لپاره مختلف ليکدودونه ورکړئ.

ب – ورکړي دې (5c -3b-a)/(1-a) وي په صورت او مخرج (ماتباندې او ماتلاندې) کې (-1) له نوکانو راوباسئ او دا عدد لنډ کړئ.

پ – کسر یا مات $(b^2 - a^2)$ /(-a-b) د (-1)سره پراخ کړئ او ساده يې کړئ.

ت- ورکړی دې وي $1-\frac{25a^2-36b^2}{6b-5a}$ په مخرج یا ماتلاندې کې (-1) له نوکانو راباسئ او دا وبينه یا افاده ساده کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ ۰ توان (پوتنخ) او ریښه (جذر) (Potenz , Wurzel Root)

په دې برخه کې د توان او جذر يا ريښي قوانين ترڅيرني لاندی نيسو، دلته غوره دا ده، چې د کارونې يا استعمال چټکتيا ته پرمختګ (تکامل) ورکړو۰ دا مشوره کيږي، چې ريښه دې په پوتنخ واړول شي، چې د اکسپوننت - يا جګعدد يې نسبي يا راشنل وي۰ د دې فورمال ټيک کره د ګڼلو قوانينو په څنګ کې د باوري کيدو لپاره بايد په نيونو(فرضيو) هم ژور فکر وشي۰

د ريښې پيژند د خلاف يا پر ځښ عمليو مخه بايد نيول شوي وي، چې د هغې له مخې راديکاند (ريښه ويستونی يعنی هغه ګڼ، چې ريښه يی وېستلکيږي يا نيول کيږي،د ريښی نخښې لاندی ګڼ او هم د ريښی ارزښت نامنفي اعداد (ناکميز ګڼونه) وي۰ د توان زړه پورې ريل اکسپوننت (په جګ) هلته کره دی يا باوري دی، چې د بنسټ لپاره د مثبت عددونو نيونه يا فرضيه شوي وي۰

٤ ۰ ۱ توان (پوتنخPotenz) په ټولګڼيز يا تام عدد په جګ يل اکشسپوننت

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ٤ ٠ ١:

د يوه په خوښه ريل ګڼ توان لاندې مورږ د a د خپل ځان سره n- م واره ځل

پوهيږو٠ د دې لپاره ليکو: $a^n = b$ دلته a بنسټ n = 1,2,3,…

اکسپوننت(جګګڼ، لنډ: جګ) اوb د پوتنخ يا توان ارزښت بلل کيږي٠

د بيلګي په توګه

a = a , a^2 = a . a , a^3 = a.a.a

(4,1) د n = 0 لپاره کره ټاکل کيږي $a^\circ = 1$ د a |= 0 سره

د پيژند يا تعريف پر بنسټ (اود څه بنديزونو په څلورديوالی کې، چې لاندې شوي) ښوول کيدی شي، چې د خوښی يا زړه پورې رييلګڼونو $a,b \in R$ او $m,n \in N*$ نامنفی ټولګڼونو اکسپوننت يا جګګڼ لپاره لاندې باورلري

$$a^n.b^n = (a.b)^n;.......................................(4,2)$$

$$a^n : b^b = (\frac{a}{b})^n = (a/b)^n; b \neq 0;................(4,3)$$

$$a^n.a^m = a^{n+m};...(4,4)$$

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0, n \geq m;............(4,5)$$

$$(a^n)^m = a^{n.m};...(4,6)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته د توان اړیکې د ټولګښز مثبت جګڼ یا اکسپوننت لپاره باور لري، کیدئ شي، چې ټولګښونو ته وغزول شي، که چیرې پیژند ورکړو یا تعریف کړو:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}; n = 1, 2, 3, ..., ..a \neq 0, ...(4,7)$$

دا پورته د توان قوانین د ټولګښز جګ(اکسپوننت) لپاره بی بندیزونو یواځې د نه ورکیدونکو رییل بنسټونو یانې د $a \mid = 0$ او $0 = \mid b$ لپاره باور ي دي . په (4,5) کې بیا بندیز $n \geq m$ اړیین نه دئ۰

د توان قوانین کیدئ شي په بڼه بدلونکو افادو یا وییڼو وکارول- یا استعمال شي۰

بیلګه4 .1

$$[\frac{4a^{-3}b^0}{x^2y^{-1}}]^{-2} = (4abx^{-2}y)^{-2} = 4^{-2}a^6x^4y^{-2} = \frac{a^6x^4}{16y^2}, abxy \neq 0$$

بیلګه 4 . 2

$$\frac{9^4(a^2\sqrt{ab})^2}{18^2.(3ab)^3} = \frac{3^8.a^4.a.b^2}{2^2.3^4.3^3.a^3.b^3} = \frac{3a^2}{4b}, a > 0, b \neq 0$$

بیلګه4 . 3

$$\frac{3-a}{a^{m-4}} + \frac{a^6 - a^5 + 2a^3 - 1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2+1}{a^{m-2}} =$$

$$= \frac{a^5(3-a) + a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - a^3(2a^2+1)}{a^{m+1}} =$$

$$= \frac{3a^5 - a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - 2a^5 - a^3}{a^{m+1}} = \frac{a^3-1}{a^{m+1}}, a \neq 0, m \in Z$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ---

پوتنځ زیاتون او کمون کې باید پام وي، چې یوازې د برابر پوتنځ ګڼونه یو له بل سره زیاتیدی او یو له بل کمیدی شي٠

بیلګه 4 . 4

$$3a^n + 2a^n = 5a^n$$

بیلګه4 . 5

$$4a^{n+1} + 2a^n + 5b^{n+1} - 3b^n - 3a^{n+1} + a^n - 4b^{n+1} + 3b^3 = a^{n+1} + 3a^n + b^{n+1}$$

دې ته بیا ګوته نیسو، چې د بنسټ - او پوتنځ مخنخښې کې دې توپیر وشي٠ پوتنځ له مثبت - یا زیاتونمخنخښې سره تل مثبت یا زیاتیز پوتنځ ارزښت لري، په دې ترځ کې، چې پوتنځ د منفي - یا کمیز بنسټ سره که اکسپوننت جوړه وي مثبت زیاتیز او که اکسپوننت ناجوړه وي نو منفي - یا کمون ارزښت لري٠

باور لري:

$$(2a)^{2n} = +a^{2n}, ..., (-a)^{2n} = +2a^{2n}$$
$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}, ..., (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, n \in Z, a > 0$$

٤ ٠ ٢ – ریښه او توان له ریشنل جګ عدد (اکسپوننت) سره

پیژند ٤ ٠ ٢

د یوه نامنفي ګڼ a لپاره n -مه ریښه هغه نامنفي ګڼ b دی، د کوم لپاره چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري: $b^n = a$

د دې لپاره لیکو:

$$b = \sqrt[n]{a}, n = 1, 2, 3, ... (4,8)$$
$$a \geq 0, b \geq 0 .... (4,9)$$

دلته a رادیکاند Radikand ، یا ګڼ، چې رېښه (جذر) یې نیولکېږي(موږ دا

رېښه نیووني یا رېښه ویستونی بولو) او n دریښې جګ(اکسپوننت) اوb د

رېښې ارزښت یا رېښه ارزښت بلل کېږي.

باید پردې تینګار وشي، چې رېښه یوائې د نامنفی رادیکاند یا رېښه ویستوني (رېښه نیوني) $a \geq 0$ راوستل کېږي یا نیول کېږي او پخپله په لاندې توګه یو نامنفي - یا ناکمیز ارزښت لري یانی

$$b = \sqrt[n]{a} \geq 0$$

د دې کره کوني لپاره لاندې یادونې شوي دي:

۱ – د جوړه ... ,n = 2,4,6 لپاره د a<0 سره رېښه b په ریېلګڼونو کې نه شته، کوم ، چې (4,8) پوره کړي

ځکه، چې د b جوړه په توان تل نامنفي یا ناکمیز یانې زیاتیز ګڼ دی.

۲ – د جوړه او مثبت - یا زیاتیز برابرون $b^n = a$

په ختېه په رېښتوني دوه رییل اوبیوني یاحلونه لري د بیلګي په توګه $b^2 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ياني $n = 2$ او $a = 4$ اوبيوني

$$b_1 = 2, b_2 = -2$$

دي۰ د دې لپاره، چې د راديکاند د شميرلو کارونې يواځنۍ سرته ورسولی شو، بايد د يوې اوبيونې لپاره پريکړه وکړو، نو له دې امله موږ مثبت ارزښت غوره بول

۳ – د ناجوړه . $n= 1 , 3 , 5$ او $a \geq 0$ لپاره

$$b^n = a$$

تل يواځني زياتيز(مثبت) اوبی يا حل لري ياني $b \geq 0$

٤ – د ناجوړه n او کيمز يا منفي a لپاره $b^n = a$

تل يواځني يو منفی اوبی يا حل لري۰ ياني $b < 0$ د بيلګي په توګه دا $b^3 = -8$ يواځې

اوبی $b = -2$ لري.

په هر صورت بايد د جوړه... $n=2,4,6$ ګڼونو لپاره $a \geq 0, b \geq 0$ وغوښتل شي، ځکه چې په بل صورت کې به يا ريښه شته نه وي او يا به يواځنی اوبی نه لري، ياني څو اوبی به شته وي

د ناجوړه يا طاقو, $n = 1,3,5,\ldots$ لپاره کيدی شي، چې له دواړو غوښتنو تير شو۰ دلته به يواځې تاوان يا زيان دا وي، چې د ټولو ممکن حالتونو لپاره به بيل بيل د ريښې د قوانينو غوره کولو ته اړ کيږو۰ له بلې خوا به ريښی د قوانينو ترتيبول د پوتنځ لپاره ، چې پورته ايښول شوي بنديزونه nقوانينو لپاره ستونځمن وي۰ له دې امله د ناجوړه ريښو

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننت غوره کوو او د یوائخني یو اوبی لپاره 2- د 8- = b^3 او نه $-2=\sqrt[3]{-8}$

بلکه $-2=-\sqrt[3]{8}$ لیکو· په دې اړوند او د یادو شوو نیونو په بنسټ دې دا لاندې اوبی په ګوته شوی وي

$$\sqrt{a^2}=a,..............(4,10)$$

څلوری ریښه یا مربع ریښه $\sqrt{a^2}$ د ټولو حقیقي اعدادو یا - ګڼونو a لپاره تعریف شوي· د نامثبت یا نازیاتیز ې a لپاره به (4,10) په داسی حال کې، چې د منفي a لپاره به بیا د (4,10) اوبی منفي یا متیز وي، کوم، چې نیونه $b\geq 0$ نفې کوي.

په ځانګړې حالتونوکې به د (4 , 10) ښول شویو حالتونو استعمال لاندې مخامخوالي یا مضاد لاس ته راولي، لکه :

$$\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2,\sqrt{4}=\sqrt{(-2)^2}=-2$$

یانې د 2- = 2 سره·

د (10 , 4) ټیک داسې لیکل کیدی شي:

$$\sqrt{a^2}=|a|=\{a, a\geq 0,..........................(4,11)$$

$$=\{-a \quad , a\leq 0 \qquad (4,11)$$

د ریښې یا جذر له پیژند (4 , 9) , (4 , 8) سره سم کیدی شي، چې لاندې باوري د ریښې قوانین ولیکل شي د....$n = 1,2,3$ او $a , b\geq 0$ لپاره

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}...............................(4,12)$$

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a/b}, b>0........(4,13)$$

$$\sqrt{a}.\sqrt[m]{a}=\sqrt[n.m]{a^{n+m}}..........................(4,14)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n.m]{a}................................(4,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته د (4,15),(414),(413,),(4.12). ترمنځ بايد لږ واټن وي، خو کومه ترې ناسمه پوهيدنه نه رامخ ته کوي ۰ دلته پيژندل کيږي، چې د ريښې قوانين د پوتنځقوانينو ته، چې په(4,2) تر (4,6)پورې ورکړ شوي،د پرتلې وړ دي۰ په ربښتيا چې دا د پوتنځقوانينو لاس ته راتلی شي، که پوتنځ د ريشنل اکسپوننت سره په لاندې ډول تعريف شي يا يې لاندې پيژند ورکړ شي۰

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m ....(4,16)$$

د... $a \geq 0$, $n = 1,2,3,\ldots$, $m = 1 , 2 , 3\ 4$ لپاره

د بيلګې په توګه (١٦ ، ٤) په لاندې ډول ليکل کيږي

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{(1/n)+(1/m)} = a^{(n+m)/n.m} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}}$$

دا اړيکې (4,16) کيدی شي منفي $m = -1,-2,-3,\ldots$ ته هم پراخه شي، چيرته، چې (4,17) په ټينګه - يا کره باور ولري

$$a^{-(m/n)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a > 0....................(4,17)$$

بې له بنديزونو د خوښې جګو n او m لپاره د پوتنځقوانين (4, 2) تر (4,6) باور لري، خو يوازې هلته، چې نه ورکيدونو بنسټونو يانې $a>0$, $b>0$ نيونه شوې وي۰

د ريښې شميرلو لپاره بايد اساساً د(4,16) له مخې ريشنل اکسپوننتونه واوړي او له (4,2) تر (4,6) استعمال کړي

اړتيا لرو، چې د پوتنځ او ريښې سره شميرلو د قوانينو استعمال نيونې تل و ازمايلی شو۰ په ځانګړي ډول د بنسټ نه منفيتوب کمونوالی يا نامنفيوالی يا مثبتتوب(مثبتوالی يا زياتونوالی) پريږدو، چې لاندې ناسم پاي کيدډول وښايو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{-a} = (-a)^{1/2} = (-a)^{2/4} = \sqrt[4]{(-a)^2} = \sqrt[4]{a^2} = a^{2/4} = a^{1/2} = \sqrt{a}$$

برابرون یوازې د دې ساده حالت0 = a لپاره شته دی یا باور لري، د 0=|a یا $a \neq 0$
لپاره a-او یا a منفي دي دا په دې مانا، چې a یاa- پیژند نه لري یا تعریف نه دی۰

د توان قوانین د توان سره شمیرلو، چې راشنل جګ لري، په لاندې بیلګو کې روښانه کوو:

پام: په لاندې بیلګو کې دا تراوسه د شمیر بنسټیز قوانین ټول راغلي، د نو ورسره بلدېدونکو ګرانو لوستونکو ته دې دا روښانه وي، چې د لږ فکر وروسته هرڅه روښانه کیدی شي۰ شمیرنه یې لږ وخت نیسي، که غواړی پخپله یې یو ځل وشمیری۰

بیلګه ٤ ۰ ٦

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \{(125)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} = (125)^{\frac{1}{6}} = (5^3)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = 2,2361$$

بیلګه ٤ ۰ ٧

$$\frac{a^2\sqrt{b}c^{-2}}{\sqrt[3]{a^2}b^{-3}} : \frac{d^2\sqrt{c}}{\sqrt[5]{d}a^{-5}} = \{a^{(2-\frac{2}{3})}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{-2}\}:\{a^5c^{-2}d^{(2-\frac{1}{5})}\} =$$

$$= a^{(2-\frac{2}{3}-5)}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{(-2-\frac{1}{2})}d^{(-2+\frac{1}{5})} = a^{-\frac{11}{3}}b^{\frac{7}{2}}c^{-\frac{5}{2}}d^{-\frac{9}{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{b^7}}{\sqrt[3]{a^{11}}.\sqrt{c^5}.\sqrt[5]{d^9}} = \frac{b^3.\sqrt{b}.c^2}{a^3.\sqrt[3]{a^2}.c^2.\sqrt{c}..d^5.\sqrt{d^4}}$$

بیلګه ٤ ۰ ٨

$$8.\sqrt[3]{343} - 4.\sqrt[3]{125} + 5\sqrt[3]{8} - 5\sqrt[3]{729}$$

$$= 8.\sqrt[3]{7^3} - 4\sqrt[3]{5^3} + 5.\sqrt[3]{2^3} - 5.\sqrt[3]{3^6} = 8.7 - 4.5 + 5.2 - 5.9 = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ٤ ۰ ۹

$$5.\sqrt{63}-2.\sqrt{175}-\sqrt{343}+3.\sqrt{28}$$
$$=5.\sqrt{7.3^2}-2.\sqrt{7.5^2}-\sqrt{7.7^2}+3.\sqrt{7.2^2}=$$
$$=5.3\sqrt{7}-2.5\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+3.2.\sqrt{7}=$$
$$=15.\sqrt{7}-10.\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+6.\sqrt{7}=4.\sqrt{7}$$

بیلګه ٤ ۰ ۱۰

$$\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{(a-\sqrt{a^2-b^2}).(a+\sqrt{a^2-b^2})}=$$
$$=\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2}=\sqrt{a^2-a^2+b^2}=|b|$$

د $|a| \geq |b|$ لپاره

د مختلفو شمیرلو لپاره موخور دی، چې مات لاندې کې منځ ته راغلې ریښې له منځه یوسو (د ماتلاندې ریشنل کول)۰

که په ماتلاندې کې یوه ریښه $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ د فاکتور یا ځلوونې په څیررامنځ ته شي، نو دا د وظیفې لپاره یوازې اړیین ده چې (m < n (m , n >0 او $m,n \in Z$ په پام کې راوړو

کارونه یا عملیه په لاندې ډول اجرا کیږي(N*|= 0 , a > 0)

$$Z/N=\frac{Z}{N}=\frac{Z}{N*\sqrt[n]{a^m}}=\frac{Z.a^{1-\frac{m}{n}}}{N*a^{\frac{m}{n}}.a^{1-\frac{m}{n}}}=\frac{Z.\sqrt[n]{a^{n-m}}}{N*a},..........(4,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ٤ . ١١

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{3}}=\frac{3}{2.3^{\frac{1}{3}}}=\frac{3.3^{\frac{2}{3}}}{2.3.3^{\frac{2}{3}}}=\frac{3^{1+\frac{2}{3}}}{2.3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}=\frac{3^{\frac{5}{3}}}{2.3}=\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{1}{2.\sqrt[3]{9}}$$

که په ماتلاندې کې د څلورۍ- يا مربع ريښې زياتون يا کمون وي $N=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ نو ماتلاندې له مات $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ سره غزوو او د بينوم فرمول استعمال سره له $a>0$ او $b>0$،چې $a\neq b$ وي لاس ته راځي:

$$\frac{Z}{N}=\frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}).(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{a-b},...(4,19)$$

بيلګه ٤ . ١٢

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

بيلګه ٤ . ١٣

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

۴ . ۳ توان(پوتنځ) د حقيقي – يا رييل جګ (اکسپوننت) سره

دلته دا په ګوته کوو يا دې دا ويل شوي وي، چې د توان ټول قوانين له (4,2) تر (4,7) دې په خوښه حقيقي اعدادو اکسپوننتونو(جګعددونو)m,n لپاره باور لري،طبعاً بې بنديزه ټيک د مثبت بنسټ لپاره. يعنې a,b>0 ، برسيره پردې دې بايد توان $a^{\alpha}; a>0$ د ناريښتوني يا ايراسنل عدد α لپاره تعريف شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که α يو ايراشنل – يا ريښتونی عدد وي، نو موږ د ۳ . ۱ . ۴ برخې سره سم انتروالونو بندولو په بنبټ لرو: $\propto = \{a_{n;} a'_n\}$. دلته $a_{n;} a'_n$ هوښيار يا راشنل اعداد دي.

بيا نو

$$\beta = \{a^{a_n} ; a^{a'_n}\} \qquad (4,20)$$

هم په انتورالونو بندول دي چې غږي يې (۴،۲) لاندې تعريف شوي توانونه دي د راشنل اکسپوننت سره. د هغه موجود په انتروالونو بندولو سره په دې توپير، چې

$$\begin{aligned} 2^1 &< 2^{\sqrt{2}} < 2^2 \\ 2^{1,4} &< 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5} \\ 2^{1,41} &< 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42} \\ 2^{1,414} &< 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415} \\ 2^{1,4142} &< 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143} \\ &\vdots \end{aligned}$$

اخرني مساوات په دې معنا دی

نو لرو $\sqrt[10000]{2^{1412} < 2^{\sqrt{2}} < \sqrt[10000]{2^{14143}}}$

٤ ، ٣ تولګه : د a>0, b>0 ريېل او $m, n \in N(n \neq 0)$

همدا ډول $m,n \in N(n \neq 0)$ ييلو لپاره باور لري

$$\alpha, \beta \in R$$

$$a^0 = 1, \frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}, \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} =$$

$$= (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته موضوع تر دې ځايه بسيا کوي، که نور څه مخته راتلل، چې اړيين وو، هغه به بيا په ګډه ورزياتوو

۴ . ۵ . تمرينونه

۱ . د توان کلمه، د توان جمعه او تفريق يا زياتون او کمون

۱ . ۱ – د توان په ځير يې وليکئ

a) $(-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1})$ b) $-\left(\frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}}\right)$

c) $-(b-a) \cdot (a-b) \cdot (a-b)$ d) $-(a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b)$

1.2. a) -3^{-4} b) $(-5)^3$ c) $(-2^{-1})^3$ d) $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

1.3. a) $12a^2b - 6ab^2 - 15a^2b + 6ab^2 - 7a^2b$

b) $(3a+2b)x^4 - x^4(2b-3a) + x^4(3a+2b)$

c) $4(a-b)^2 + 2(b-a)^2 - 3(a-b)^2$

d) $18(a-1)^3 - 3(1-a)^3 - 15(a-1)^3 + 4(1-a)^3 + 3(1-a)^3$

۲ – د توانو ضرب او وېش د برابر بنسټ سره

2.1. a) $\frac{3a^{n+1} \cdot 6x^{n+7} \cdot 9b^{x+1}}{3x^n \cdot 2b^{x+1} \cdot 3a}$ c) $\frac{a^{x+1} \cdot b^{x+3} \cdot a^{3x-1} \cdot b^{x+3}}{a^{x-2} \cdot b^{3-x} \cdot a^x \cdot b^{x+1}}$

b) $\frac{a^{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot a^n}{a^0 \cdot a^n \cdot a^{n-1}}$ d) $\frac{a^{3n-x} \cdot b^{2n+x}}{a^{n+2x} \cdot b^{2n-x}} \cdot \frac{x^{3n+2} \cdot y^{2n-1}}{x^{2n-3} \cdot y^{n+1}}$

2.2. a) $\frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}} : \frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}}$ c) $\frac{42a^2b^3 \cdot x^{n+1}}{36c^3 \cdot y^2 \cdot z^{n-3}} : \frac{70a^3b^2 \cdot x^{n+2}}{54c^2y^4 \cdot z^{n-2}}$

b) $\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} : \frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$ d) $\frac{45xa^3 \cdot 9y^n(a-1)^2}{9yb^3 \cdot 30x^n(a+1)^2} : \frac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲ . د توان ضرب او جمعه(زياتون) د همغه بنسټ سره:

2.3. a) $(x^{5n+3} + x^{4n+5} - x^{3n+4}) : x^{2n+3}$

b) $(143a^4b^5 - 221a^3b^5 - 247a^5b^4) : 13a^3b^4$

c) $(a^{n+1}b^{x-1} + a^nb^x + a^{n-1}b^{x+1}) : a^{n-2}b^{x-1}$

d) $(16a^8 - a^4b^2 + 9b^4) : (4a^4 - 5a^2b + 3b^2)$

د لوګاريتم بنسټ فرمولونو استعمال.

په لاندې کې x وشميرئ

۳ . د توان په توانونه، د توانونو ضرب او وېش د برابر جګګڼ يا جګعدد سره، د کميزو يا منفي اکسپوننتونو سره شميرنه

3.1. a) $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2$

b) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$

c) $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

3.2. a) $\dfrac{18^4(a^2b)^2}{27^3 \cdot (2a\sqrt{a} \cdot b)^2}$

b) $\dfrac{(6ab)^3 \cdot (5a^2b)^4}{2^4 \cdot 3ab^2 \cdot (25a\sqrt{b})^2}$

c) $\left(\dfrac{4b^2y^2}{6a^2x^2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{8a^3y^2}{6b^3x^3}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{18b^3x^6}{16a^3y^3}\right)^2$

d) $\left(\dfrac{45b^2y^3}{24a^3x}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{6bx^3}{9ay^3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{75b^3x^3}{36a^4y}\right)^2$

3.3. a) $\dfrac{(3a-9b)^2}{81b^2-9a^2}$

b) $\dfrac{(6a-12b)^2 \cdot (3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2}$

c) $\dfrac{(4a^2-9b^2)^2}{(3a^2-2ab)^2} \cdot \left(\dfrac{9a^2-4b^2}{2a^2+3ab}\right)^2$

d) $\left(\dfrac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 : \left(\dfrac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2$

3.4. a) $\dfrac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \dfrac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}}$

b) $\dfrac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} : \dfrac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\dfrac{(ax-ay)^m \cdot (3bx+3by)^n}{(cx^2-cy^2)^{m+n}}$

d) $\left(\dfrac{(x+y)^{3a-4}}{x^{a-1}y^2} : \dfrac{y^{2a-5}}{x^{4a-3}(x+y)^{3-2a}}\right)\dfrac{x^{4-3a}y^{3a-6}}{(x+y)^{a-2}}$

۴ . د کومو شرليطو لاندې کيدی شي لاندې عددونه د يوه مربع – يا څلوری ريښه وي؟

4.1. a) $+a, -a$ b) $+a^2, -a^2$ c) $+a^3, -a^3$ d) ab

4.2. a) $+(a-b), -(a-b)$ b) $+(a-b)^2, -(a-b)^2$ c) a^2-b^2 d) a^2+b^2

۵ - د ريښو جمعه او تفريق(زياتوناو کمون)

5.1. a) $6\sqrt{27}+2\sqrt{108}-7\sqrt{75}$

b) $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$

c) $3\sqrt[4]{256}-4\sqrt{49}-7\sqrt[3]{27}+2\sqrt[5]{32}$

d) $3\sqrt{50}-\sqrt{98}+4\sqrt{288}+14\sqrt{162}-\sqrt{25-9}\cdot\sqrt{2}$

5.2. a) $\dfrac{x(2r^2-4x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}-8x\sqrt{r^2-x^2}$

c) $2\sqrt{(x-k)^2+x^2}-\dfrac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}}$

b) $\dfrac{r(4r^2-3rH)}{\sqrt{4r^2-2rH}}-3r\sqrt{4r^2-2rH}$

d) $\dfrac{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2-\left(c+\frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2}}-\dfrac{h^2+2\cdot\frac{c^2}{4}}{\sqrt{h^2+\frac{c^2}{4}}}$

5.3. a) $\sqrt{1-x}+\dfrac{x+1}{2\sqrt{1-x}}$

b) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

d) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\dfrac{x}{(x+\sqrt{x^2+a^2})\cdot(\sqrt{x^2+a^2})}$

۶ – د ريښو يا جذرونو ضرب او ويش

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.1. a) $\sqrt{3\cdot 7}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sqrt{5\cdot 7}$ c) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} : \sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}}$

b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ d) $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2-2ab+a^2}{2}}$

6.2. a) $(3-\sqrt{2})(2+3\sqrt{2})$ c) $\sqrt{12x^2-12x}\cdot\sqrt{3x^2-3}$

b) $\sqrt{8+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{10}}$ d) $\sqrt{a^2+a}\cdot\sqrt{ab+b}$

6.3. a) $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$ c) $\frac{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}}{\sqrt{a+c}-\sqrt{b+c}}$

b) $\sqrt{6x^2-6}\cdot\sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$ d) $\frac{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}}$

۷ – د توان او ریښې ریښه وېستنه (حلونه)

.1. a) $\sqrt{0,04^5}$ b) $\sqrt[3]{4200}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}$ d) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

.2. a) $\sqrt[2n-1]{a^{4n^2-1}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6\cdot b^{12}}}$

b) $\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6\cdot b^8}}$

.3. a) $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^4}$ c) $\frac{4\pi r^3-8\pi r^3}{\sqrt{\left(4r^2-2r\cdot\frac{4}{3}\cdot r\right)^3}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}a^2+\sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2+\frac{a^4}{8}}}$ d) $\pm\sqrt{\left(\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}\right)^2-\frac{y_1^2x_0^2}{y_1^2-y_2^2}}-\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}$

.4. a) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$ c) $\sqrt{a\cdot\sqrt[8]{a^5\cdot\sqrt[3]{a}}} : \sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}$

b) $\sqrt[3]{a^3\cdot\sqrt{a^2\cdot\sqrt[5]{a^8\cdot\sqrt[4]{a^3}}}}$ d) $\frac{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[6]{a^4}}} : \frac{\sqrt{a^3\cdot\sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7\cdot\sqrt{a}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – لاندې ماتونه يا کسرونه داسې شکل ته واړوئ، چې مخرج رېښه نه وي.

8.1. a) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{10}{3\sqrt{8}}$ d) $\frac{15}{\sqrt[11]{243}}$

8.2. a) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[9]{x^{13}}}$ c) $\frac{y^2x}{\sqrt{x^3y}}$ d) $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$

8.3. a) $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{5}+1}$ c) $\frac{15}{3-\sqrt{6}}$ d) $\frac{16}{3+\sqrt{5}}$

8.4. a) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$ b) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

8.5. a) $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ b) $\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ c) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{4\sqrt{10}-7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$

8.6. a) $\frac{7\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$

b) $\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}$ d) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ ۰ لوګاریتم یا لوګاریتموس Logarithmus

په دې برخه کې د لوکاریتم کلمه ترڅیرنې لاندې نیسو او د لوګاریتم د قوانینود استعمال اسانتیاوي، چې په کره یا په کلکه یې په نیونو (فرضیو) پاملرنه شوي وي څیړو ۰

۵ ۰ ۱ د لوګاریتم کلمه

موږ په دې برخه کې لوګاریتم تر څیړنې لاندې نیسو، د لوګاریتم د قوانینو اسانتیاوې څیړو ، چې په نیونو یا فرضیو کې باید پوره پاملرنه شوې وي ۰د لوګاریتم $c = \log_b a$
پیژند لپاره د یوه زیاتیز ـ یا مثبت عدد a یوه زیاتیز ـ یا مثبت عدد b ته چې $b \neq 1$
او د لوګاریتم بنسټ بلل کیږي له لاندې برابرون یا مساوات څخه مخ ته ځو د په خوښه
c لپاره

$$b^c = a\,;\, a > 0; b > 0; b \neq 1 \qquad (5,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که a او b له مخه ورکړ شوي وي، نو د برخی ٤ سره یواځنی ټاکلی دی۰ که a او b له مخه ورکړشوي وي، نودپورتنیو نیونو سره یواځنی رییل ګڼc شته دی، چې برابرون(4,1) پوره کوي۰ دې ته د a لوګاریتم وایود b پر بنسټ:

پیژند ۵ ۰ ۱:

د ریلل مثبت ګڼ a لوګاریتم لاندې، چې له یوه سره نابرابر بنسټ bولري، هغه ریلل ګڼ c پوهیږو , له کوم سره، چې bد هغه په توان یا پوتنځ کړو او ګڼ a ترې لاس ته راشي۰ لکه (5,1)

د دې لپاره لیکو:

$$c = \log_b a; a > 0; b > 0; b \neq 1, ...(5,2)$$

(5,1) او (۲ ۰ ۵) یو ارزښت لري د دې لپاره، چې د لوګاریتم قوانین له (5,2) سره سم لاس ته راوړو، نو د(5,1) ته بیرته ورګرځو۰ دا به په لاندې بیلګه کې روښانه شي،په کوم کې چې له a,b,c څخه تل دوه ګڼونه ورکړ شوي دي

بیلګه ۵ ۰ ۱

۵ ۰ ۱ الف : له $2^x = 16$ لرو x=4 ، ځکه، چې $16 = 2^4$

ب له $3^x = \frac{1}{9}$ څخه لرو x=-2 ، ځکه چې $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9 = \frac{1}{9}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۲ الف: $2 = \log_x 36$ د x²=36 سره یو ارزښت لري، نو لرو x=6

ب : $-6 = \log_x \frac{1}{36}$ د $x^{-6} = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$ سره یو ارزښت لري،

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو $x = 2$

۵ ۰ ۱ ۰ ۳ الف : $x = \log_5 125$ د $5^x = 125 = 5^3$ سره، یوارزښت لري،

نو $x = 3$

ب: $x = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{16})$ د $(\frac{1}{2})^x = 1/16 = (1/2)^4$

سره یو ارزښت لري، نو لرو $x= 4$

۳ ۰ ۱ ٤ الف $5 = \log_3 x$ د $3^5 = x$ سره یو ارزښت لري، نو $x=243$

ب : $-5 = \log_2 x$ د $2^{-5} = x$ سره یو ارزښت لري، نو لرو $x = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۵ الف $2 = \log_x(-6)$ تعریف نه دی یا پیژند نه لري۰

ب : $x = \log_{-5} 125$ پیژند نه لري یا تعریف نه دی

پ: $\log_1 x$ پیژند یا تعریف نه دی

له (5,1) او(5,2) څخه لاس ته راځي

$$a = b^{\log a}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,3)$$

$$\log_b 1 = 0, \log_b b = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,4)$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځانګړي بنسټ لپاره لاندې سومبول کارولکيږي

$b = e = 2,71828 \Leftrightarrow b = 10$

$$\log_{10} a = \log a, \log_e a = \ln a, ...(5,5)$$

د lga لوګاريم ته لسيز لوګاريتم وايي او lna ته پيداينتي يا طبيعي لوګاريتم وايي(e وروسته څيړو) زيات وخت د لشميز لوګاريتم لپره داسې هم ليکو:

$$c = \log a \qquad (5,6)$$

که سومبولlog څو واره رامنځ ته شي، نو په پام کې دې وي، چې په خوښه، مګر همغه بنسټ بايد وکارول شي۰

۵ ۰ ۲ د لوګاريتم قوانين

د لوګاريتم د پيژند سره سم د (5,1) او(5,2) له مخې کيدی شي د پوتنځ د قوانينو(5,3) تر(5,7) په مرسته لاندې لوګاريتم قوانين رابيل کړای شو، کوم چې په خوښه مګر همغه لوګاريتم بنسټ b |= 0 ، b>0 او د زياتيز(مثبت) x> 0 , y > 0 لپاره باور لري

$$\log(x.y) = \log x + \log y, ...(5,7)$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - loy, ...(5,8)$$

$$\log x^a = a \log x, a \in R, ...(5,9)$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log, n = 1, 2, ..., ...(5,10$$

د پوتنځ قوانينو له مخې د دې فرمولونو راوستل يو د وړانديز وړ د لوګاريتم ژورې څيرنې لپاره تمرين ښايي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې په توګه له (۷ ، ۵) همداسې

$$\log_b(x.y)=\log_b x+\log_b y, ...(5,11)$$

څخه په لاندې ډول او له (5,2)،(5,1) څخه لرو

$$c_1=\log\ x, c_2=\log_b y, c=\log_b(x+y), ...(5,12)$$

د لاندې سره یو ارزښت لري

$$b^{c_1}=x, b^{c_2}=y, b^c=x.y, ...(5,13)$$

له(5,13) او د پوتنځ قانون(4, 2) پر بنسټ لرو :

$$b^c=x.y=b^{c_1}.b^{c_2}=b, \Rightarrow c=c_1+c_2, ...(5,14)$$

او له (5,11) همداسې د(5,7) ښوونه د (5,12) له امله د لوګاریتم د (5,7) تر(5,10)

قوانینو کیدی شي د پیچلي لوګاریتم له افادې څخه د لوګاریتم ساده بنسټیزې افادې ته بیرته راوګرځو اوپه ښټ.

بیلګه ۵ . ۲

$$\log\frac{2\sqrt{a+b}\,a^3b^2}{\sqrt[3]{c}(a+c)^2}$$

$$=\log 2+\frac{1}{2}\log(a+b)+3\log a+2\log b-\frac{1}{3}\log c-2\log(a+c)$$

بیلګه ۵ . ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log(a+b)+2\log(a-b)-\frac{1}{2}\log(a^2-b^2)$$
$$=\log\frac{(a+b)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log[(a-b)\sqrt{a^2-b^2}]$$

اوس باید وښایو، چې تر کومو شرایطو لاندې دا اړیکې باور لري۰

په بیلګه ۵ ۰ ۲ کې په کینې اړخ کې لوګاریتم ځاي لري، چې د ټولو a,b,c تعریف دی او لاندې برابرون پوره کوي یا ډکوي:

وي دې a+b>0 (د دې لپاره ، چې ریښه تعریف وي او صفر نه شي، ځکه، چې بیا لوګاریتم اوبی یا حل نه لري۰

وي دې c > 0 (د دې لپاره چې ریښه تعریف او ماتلاندې صفر نه شي)

وي دې $a+b\neq 0$ (د دې لپاره، چې لوګاریتم تعریف وي)

وي دې $b\neq 0, a>0$ (د دې لپاره، لوګاریتم تعریف وي)

د کینې اړخ لوګاریتم په ځانګړي ډول د a = 2 . b = -1 , c = 1 لپاره تعریف دی۰ په ښي اړخ کې ولاړ برابرون شکلبدلون یا څیره بدلون ریښتونی کیدی نه شي، ځکه چې Log بې ځایه دی ۰ د دې لپاره، چې د څیرې بدلون ریښتونوالی ممکن شي، باید د $b\neq 0$ پر ځاي په ټینګه یا کره b>0, وغوښتل شي ۰

په بیلګه ۵ ۰ ۳ کې کینه خوا یواځې هلتهموخه وره ده، چې وي:

a+b>0, a-b>0

نو بیا a²-b² = (a+b)(a-b)> 0 او په دې بیلګ کې رامنځ ته شوي ټول لوګاریتمونه هم تعریف دي۰ دا اړیکې د ټولو a ، bلپاره هم باور لري،د کومو لپاره چېپورته نابرابرون ډک وي۰ دا کیدی شي a > - b , a > b له امله هم و|a >|b ته راغوند شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته دې هم ګوته نيولې وي، چې لوګاريتم په يوه بنسټ b يوه بل لوګاريتم يوه په خوښه بل بنسټd ته د شميراوړون د شميرنې اړول کيدی شي $(b > 0, b \neq 1, d > 0, d \neq 1, a > 0)$

د(۵،۳) له مخې باور لري $a = b^{\log_b a}$

د دې برابرون لوګاريتم نيول و بنسټd ته لرو:

د $\log_d a = \log_d b^{\log_b a} = (\log_b a)(\log_d b), ...(5,15)$

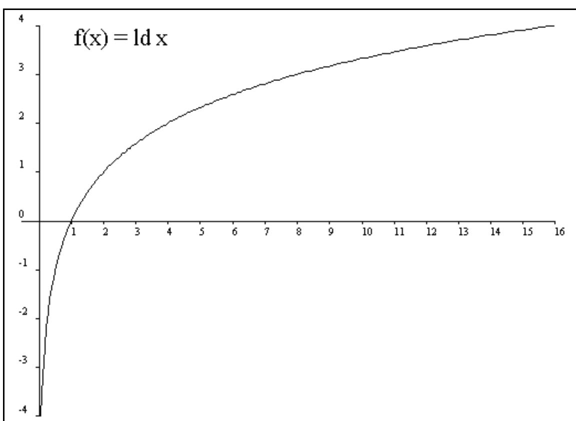
لسيز لوګاريتم اړول په پيداينتي يا طبيعي لوګاريتم او په څټ لپاره ليکو b=10, d = e همداسې b = e , d = 10 او لاس ته راځي :

Lga = (lge)(lna); …………………(16)

Lna=(ln10)(lga) = 2,30429lga;……(17)

$\lg a = (\lg e)(\ln a), ...(5,16)$
$\ln a(\ln 10)(\lg a) = 2,30429 \lg a, ...(5,17)$

د لوګاريتم فنکشن يا بلواک او دياګرام يې



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_b b^x = x$$

تکرار د نورو تورو سره

د يوه ځل لوګاريتم

$$\log_b (n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$$

$$\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m$$

د پوتنځ لوګاريتم

$$\log_b n^m = m \cdot \log_b n$$

د ريښي لوګاريتم

$$\log_b \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_b n$$

د لوګاريتم يو په بل بدليدل

$$\log_b n = \log_b d \cdot \log_d n$$

د کوما يا لسميزمات نخښۀ وروسته بينارځايونه ó او لسميزسيستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

	binär	dezimal
2^{-1}	0,1	0,5
2^{-2}	0,01	0,25
2^{-3}	0,001	0,125
2^{-4}	0,0001	0,062.5
2^{-5}	0,0000.1	0,031.25
2^{-6}	0,0000.01	0,015.625
2^{-7}	0,0000.001	0,007.812.5
2^{-8}	0,0000.0001	0,003.906.25
2^{-9}	0,0000.0000.1	0,001.953.125

۵ . ۳ ټولګه

لوګاریمتم د اکسپوننشل فنکشن یا بلواک په څېر بلواک دی

$x = \log_b n \iff b^x = n$

د $a,b,x,y,d, > 0$ رییل ګنونواو $a, b, d \neq 1$ لپاره باور لري:

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a, b^{\log_b a} = a, \log_b 1 = 0, \log_b b = 1, b \neq 1$$

$$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a, e = 2,71828.....$$

$$\log(x.y) = lox + \log y, \log \frac{x}{y} = lodx - \log y,$$

$$\log x^{\alpha} = \alpha, \alpha \in R, \log \sqrt[n]{x} \frac{1}{n} \log x, n = 1,2,3,....$$

$$\log_b a = (lod_b d)(.(\log_d a),$$

$$\lg a = (\lg e).(\ln a) = 0,43429 \ln a, \ln a = (\ln 10).(\lg a) = 2,30259 \lg a$$

۵ . ۴ – تمرینونه

۱ . د د لوګاریتم تعریف

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوګاريتم تعرف وکاروئ يا استعمالکړئ او x وټاکئ.

1.1. a) $\log_7 49 = x$ b) $\log_3 1 = x$ c) $\log_5 \sqrt[6]{25} = x$ d) $\log_{0,5} \frac{1}{32} = x$

1.2. a) $\lg \frac{1}{10} = x$ b) $\lg 10^{-\frac{1}{3}} = x$ c) $\lg \sqrt[3]{100} = x$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{10}} = x$

1.3. a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x 25 = 2$ c) $\log_x 243 = 5$ d) $\log_x 1024 = 10$

1.4. a) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$ b) $\log_x \frac{1}{5} = -1$ c) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ d) $\log_x \frac{1}{32} = -5$

1.5. a) $4^x = 64$ b) $64^x = 64$ c) $9^x = 3$ d) $8^x = 4$

1.6. a) $2^x = \frac{1}{8}$ b) $3^x = \frac{1}{27}$ c) $5^x = 0,04$ d) $10^x = 0,0001$

1.7. a) $\lg x = 3$ b) $\lg x = -2$ c) $\log_2 x = 6$ d) $\log_{0,5} x = 4$

1.8. a) $\ln x = 2$ b) $\ln x = \frac{1}{2}$ c) $\ln x = -1$ d) $\ln x = 0$

۲ . د لوګاريتم قوانينو استعمال دلوګاريتم
قوانيناستعمال کړئ دو د a,b,c,d,m,n باور لرلو ورشو کره وټاکئ.

2.1. a) $\lg 2^4$ b) $\lg \left(\frac{1}{2}\right)^3$ c) $\lg \sqrt{10}$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{100}}$

2.2. a) $\ln \left(\sqrt{e}\right)^3$ b) $\ln \sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}}$ c) $\ln \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$ d) $\ln \sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$

2.3. a) $\lg \sqrt[7]{a^5}$ b) $\lg \frac{a^2 b^3}{c}$ c) $\lg \sqrt[3]{\frac{ac^2}{bd}}$ d) $\lg \frac{a^2 \sqrt{b}}{\sqrt{a^5 b^3}}$

2.4. a) $\lg (a^4 - b^4)$ b) $\lg (a^2 + b^2)^2$ c) $\lg \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 - b^4}$ d) $\lg \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}$

2.5. a) $\log \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ c) $\ln \frac{\sqrt{a} \cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c} \cdot d^{-3}}$

b) $\lg \sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}$ d) $\log 2 \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b \cdot \sqrt[4]{ac^2}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $\frac{1}{3}\log(a+b)+\frac{1}{3}\log(a-b)^{-1}$

b) $\lg a + n\lg(a+b) + n\lg(a-b)$

c) $\lg a - \frac{1}{2}\lg b + \frac{4}{3}\lg c$

d) $\frac{1}{3}\lg(a^2-b^2)-\frac{1}{2}\lg(a-b)-\frac{1}{2}\lg(a+b)$

2.7. a) $\frac{1}{3}\lg a+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\lg(a+b)+\frac{1}{2}\lg(a-b)-\lg a-\lg b\right\}$

b) $\frac{1}{2}\lg(a^2+b^2)-\frac{1}{3}\{\lg(a-b)+\lg(a+b)\}$

c) $\frac{1}{3}(\lg a+3\lg b)-\frac{1}{2}(4\lg c-2\lg d)$

d) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{b-\sqrt{b^2-a^2}}+\ln\sqrt{a}$

۳ . د لوګاریتم بنسټیز فرمولونو استعمال.

x وشمیرئ.

3.1. a) $x = \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$ c) $x = 3\cdot 10^{-2\lg 3}$

b) $x = 2 \cdot 10^{2\lg 2}$ d) $x = \left(100^{\frac{1}{2}\lg 49}\right)^{\frac{1}{2}}$

3.2. a) $x = \sqrt{10^{2+\lg 9}}$ c) $x = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\lg 2+\lg 32)}}$

b) $x = \sqrt[3]{10^{4-\frac{1}{2}\lg 100}}$ d) $x = \sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}}$

3.3. a) $x = \ln\frac{7,63}{\sqrt{e^3}}$ c) $x = \left\{\left(\sqrt[3]{e}\right)^2\right\}^{\ln 8}$

b) $x = \ln\frac{0,23}{2e^2}$ d) $x = \left(\sqrt{e}\right)^{3\ln 5}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ٠ ګونومتري (کونجکچ یا مثلثات (Gonometry

دا برخه هم د ښوونځي له امله یو تکراري خوي لري. ددې وظیفه به داوي چی د کونجکچ چېکتیاته (ګونومتري شمیرنی ته) په ګراد- او لینده کچ، دکونجفنکشن په استعمال د ولاړکونجیز - او عمومي درېګوډیود تریګونومتري فرمولونو په استعمال د تریګونومتري افادو په ځیره بدلون ته پر مختګ ورکړي یا پر مخ بوزي. غواړم چی د بنسټیزې هندسي کلیمی او قوانین مو د هرڅه له مخه مخ ته پراته وي . خو سره له دې به هم ددې کتاب لوستونکی د بنسټیزې هندسی سره بلد وي ٠ زه به کوښښ وکړم چی ځنی هندسي کلیمی،کم له کمه په ځیره کی ګرانو لوستونکو ته، په مناسب ځاي کی وړاندې کړم یا بهتره په پښتو ونوموم .

١ ٠ ٦ بنسټیزه هندسه

٦ . ١ . ١ ټکی او کرښه point (stright) line

ټکی او کرښه د بنسټیزې هندسی مهمی بنسټیزې کلیمی دي. دا ابسترکټی(خیالي، فکري ، نه لیدیدونکی) کلیمي په خورا ټیك راوړوندود هم نه شي تعریف کیدی، مګر ددوي ترمنځ موجودې اړیکي کیدی شي په شمیرنه کی په خورا زیاتو ډولونو استعمال شي، ٦

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره له دې هم هڅه کیږي چې ټکی او کرښه لیدوړ وګرځول شي لکه څنګه چې په ۴ . ۱ - امه برخه کی پیښ شوي. دلته کرښي په g ښوول شوي او غشی یی ناپای پراخوالی په ګوته کوي. دا د غشي انځورونه دکرښی په انځورونه کی پریښول کیږي یعني نه انځوریږي، که دا مو و ناریښتیاو ته ونه هڅوي ۰ ټکی کیدی شي د دوه کرښو غوڅځاي په څیر ونیوله شي) څیرې په غور وګورئ

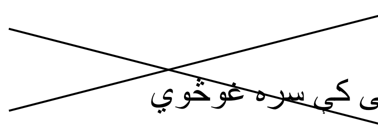
وړانګه ray A

کرښه g

(stright line

بند کرښه یا ټوټه کرښه Line segment

A —————— B



دوه کرښې په ټکی کې سره غوڅوي

د بیلګي په توګه لاندې ویناوې باور یا صدق لري

- ددوه ټکو له لارې یوه کرښه ټاکل کیږي(پورته څیره وګورئ)، چې دا کرښه دا ټکي خوندي ساتي یا پخپل بر کی لري .

- دوه ناغبرګي او په یوه هواره کی پرتی کرښی یو بل ټیك په یوه ټکي کی سره غوڅوي (پورته څیرو کې کتل کیږي)

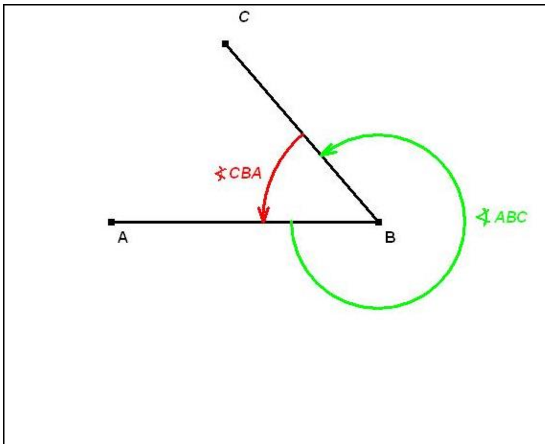
یوه وړانګه s_1 له یوې لور په یوه ټکي A بنده کرښبرخه ده) (او یوه پایکرښه له دوه ټکو A او B بنده یا راګیر کرښه ده)

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

٦ . ١ . ٢ کونج angle يا زاويه

که یوه وړانګه s_1 د خپل پیلځای څخه په S و خپل اخر ځاي s_2 (څیره ۴ . ۲الف) ته یووړه شي، نو دا وهل شوې هواره دننني هواره، s_1 او s_2 پښنی او په همدې ډول د S کونج α (الفا) ککره بلل کیږي.

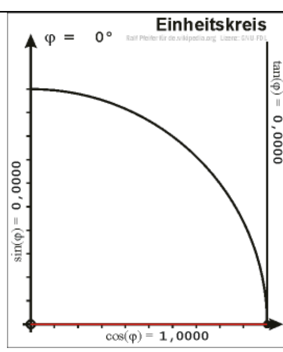


که څرخون د ساعت نخښي په څټ یا مخامخ وې نو دا څرخونلورمثبت یا زیاتیزه او همداسی کونج مثبت یا ز یاتیز کونج بولو او بل ډول څرخونلور یی منفي- یا کمیز کونج بلل کیږي.

په مخامخ ه کې سور په نخښه شوی کونج ننوتی او زرغون په نخښه شوی کونج وتلی کونج دی

کیدی شي چی یو کونج x په ګراد اندازه شي

$$x = a° \qquad (6.1)$$



په داسی حال کی چی ولاړکونج، کوم چی یو په بل ولاړې کرښي $g_1 \wedge g_2$ (او ته دې پام وي) یی جوړوي، له 90° سره مساوي وښایو(لاندې څیره ، که نوربڅیرې و نه کښل شوې) . کیدی شي چی کونج x (ایکس دلته د الفا په ځاي دی، توري پروانه لري، چې کوم وي)په لینده اندازه هم ورکړ شي

$$x = b \qquad (6.2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته یونګردۍ کې ګورو، چې هر ډول کوجونه کښل او ټاکل کیدی شي

په دې ډول ټاکل شوی ګردۍ لینده په وړانګه(شعاع) ویشل کیږي. له دې لارې x د یوه بې نومه ګڼ په څیر لاس ته راځي، چې د ډیرو ګڼلو لپاره ګټور دی. یوه په لینده اندازه ورکړ شوی کونج x په یوې یوونګردۍ) r = 1 (کی انځوروړ دی، چیرته چی دا د اړوند ګردیلیندې اوږدوالی ښاي (څیره په پورته کې کښل شوې)

په دې پسی یا ددې په تعقیب یو د 360° کونج د یوونګردۍ چاپیری) محیط(په ګوته کوي . له دې امله د ګرادGradmass (درجکچ (او)ګردي-) لیندې اندازې یا لیندیکچ یو په بل بدلون ممکن کیږي.

$$a^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} b = 57,296^\circ b, b = \frac{\pi}{180^\circ} a^\circ = 0,017453 a, ...(4,3)$$

پام : په پورته څیره کې هر ډول کونجونه که له ۳٦٠ درجو زیات هم وي کره کیدی ، که څیرې روښانه نه وو لیکل شوي، چې دا شپږمه برخه ده یا ٤ – مه برخه لیکل شوي وي،نو هغه دې ،نو ٤ دې په ٦ بدل شي٠.

د لاندې بیلګو له لارې دې د کونجورکولو یو څو امکاناته ونومول شي او په همدې ډول دې د »شمیراوړون اړیکی« یاپه ښه توګه د شمیر یو په بل بدلون اړیکی وڅیړل شي.

یادونه : زما شمیرونی یو ډول پرابلم لري او هغه دا چې د دقیقې او ثانیي نخښې هغهسې، چې ورسره بلد یو نه کاري، دا به راته ګران لوتونکي وبخښي٠

بیلګه .٦. ۱ :

کونج “a = 47°12'36 دې په لینده اندازه واړول شي. موږ لمړی کونج په دځیمالو یا لسیزو برخو اړوو، دا په دې مانا چې ورکړ شوې دقیقي او ثانیي دې په ورته لسیزمات افاده شي:

12’=720“

720 = '12 "

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس په ټولیزه توګه $720'+36'' = 756''$ له دې لاس ته راځی

$1'=(1/3600)°$ (<=)

له دې وروسته په همدې توګه $756.(1/3600)°=0,21°$

له دې لاس ته راځي : $a=47°12'36''=47,21°$

په عمومي توګه باور لري

$$\alpha' = (\frac{\alpha}{60})°, \beta'' = (\frac{\beta}{3600})$$

د(٦ . ٣) پسی باور لري $b=0.017453.47,21=0,826$

دلته څیرې راځي، خو د دې څیرو په ځاي به موږ په پورته څیرو بسیا وکړو، دا چې موږ تراوسه د لږ څه ځمککچ سره بلد یو (د دې لپاره دې زما د ځمککچ کتاب وکتل شي)، نو دا کومې ستونځې نه رامنځ ته کوي۰

بیلګه ٦ . ٢ :

کونج $\frac{\pi}{7}$ دې په درجه کچ یا -اندازه) لسیز او سکساګسیمال (لاتین :یوناني: د بابلیانو په ۶۰ اباد شوی ګڼیز سیستم(ځاي ارزښت سیستم) ویشنو (برخو) ورکړ شي. د (۳ . ۴) له

مخی لرو

$a° = 57,296°.(3,14/7)=25,701°$ د $0,701°$ اړولو په دقیقو او ثانیو ورکوي

$0,701° = 0,701.60' = 42,06',$ $0,06' = 0,06.60=3,6''$

پس داسی دی $\frac{\pi}{7} = 25,701° = 25°42'3,6''$

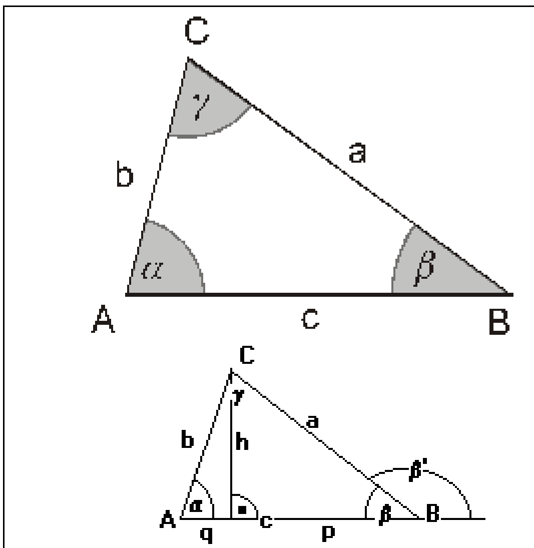
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته داسی لوستل کیږي ۲۵ درجي، ۴۲ دقیقي او ۶ ، ۳ ثانیي

۳ . ۱ . ٦ دریګوډی

یادونه: موږ دلته بیا د نومونو(نومه ونو) د ستونځو سره مخامخ کیږو. هغه هواره چی له کرښو راګیر وي دلته له درې کرښو یا هغه هواره، چې ګوډونه ، کونجونه یا ګوټونه ولري، موږ دا ۰۰۰ کونجي یا۰۰۰ ګوټي او یا ۰۰۰ګوډي بولو. ځموږ ژبه او الماني تر یوې ډیرې اندازی په ترکیبي نومونو کی او یا نورو نومونو ډولونوکی یو بل ته ورته دي او په الماني کی هم دې ته ځانګړي نومونه شته. ماته یو کونج چي له دباندې ورته کتل کیږي او د یوې بندې هواره وي ګوډ مناسب ښکاریږي. موږ په ورځنی یا مروجه ژبه کی وایو ، چی د هغه کلی په ګوډ کی .... دا تخنیکي هم درست دی، ځکه چی دا هم دلته مات دی یعنی ګوډ دی. که یو کونج له دننه وګورو نو هغی ته موږ تل کونج وییلی. که څوك په یوه ګوټه کی ناست وي نو وایي، چه په هغه کونج کی دلته نو بیا ګوډ نه وایي. ما د کتاب په اوږدو کی لمړی ځل د ټولو لپاره کونج کارولی، که ټول مو همغسی سم یا اصلاح نه کړل ، نو فکر کوم چی د ګرانو لوستونکو به ورته پام وي .

په ټولیزه توګه په یوه سطحه یا هواره کی له پرتو کرښو g2 , g2 , g1 څخه یو مثلث یا دریګوډی جوړیږي، چی ګوډونه یی C . B . A ، اړخونه یی c. b. a او کونجونه یی α,β,γ دي (د مثلث دننه کونجونه یا زا ویې او دباندې ګوډونه دي، چې موږ یط په پښتو کې همداسې بولو)) مخامخ ځیرې دې وکتل شي



(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې جملې باور لري چې بې له ښوونې دلته راوړل کېږي

- په دریګوڼي کې د کونجونو زیاتون 180° درجې دی یا π دی

- یو دباندنی کونج د په نه پراته دننني کونجونو د زیاتون سره مساوي ده، له دې امله د یوه دریګوڼي د دباندنیو کوجونو زیاتون 360° یا 2π دی۰

- د یوه دریګوڼي د اړخونو نیمي په یوه ټکي کې یو بل سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کې د دریګوڼي » دروندټکی یا دثقل مرکز « دی. اړخنیمي یو بل په تناسب د۱ : ۲ پرې کوي یا په پښتو:

د اړخونو ځاننیونه یې۱ :۲ ده) په ځیره کې وګوری) د یوه دریګوڼي منځولاړې

یو بل په یوه داسې ټکي کې سره غوڅوي، کوم چې په همدې وخت کې د چاپیر ګردي) هغه ګردۍ یا دایره چې دریګوڼی په خپل دننه کې نیسي یا بهتره، د دریګوڼي خوندیګردۍ(منځټکی دی)۰

د یوه دریګوڼی کونجنیمي یو بل په یوه ټکي کی سره پرې کوي، چی دا په همدې وخت کی د دننه ګردی) ګردۍ چی د دریګوڼي

په دننه کی ده یا ګردۍ یا دایره کې خوندي دریګوڼی (منځټکی دۍ) لاندې کې بې ځیره شته) د یوه دریګوڼي جګی یا د ارتفاع کرښی په یوه ټکی کی سره غوڅوي.) ځیرې ټولې لاندې کتل کیږي

د هوارې ځمککچ کې غوره ټکي دا لاندې دي :او په دوي پورې لاندې ځیرې اړه لري، چې تکرار راځی، خو پروا نه لري۰

د جګیو غوڅټکی Orthocenter **Höhenschnittpunkt** (*H*),

(c) ketabton.com: The Digital Library

Umkreismittelpunkt (*U*) circumcenter ·د دباندنۍ- يا په راتاو ګردی منځټکی

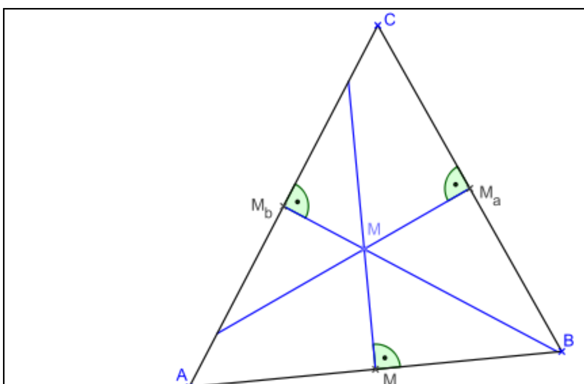
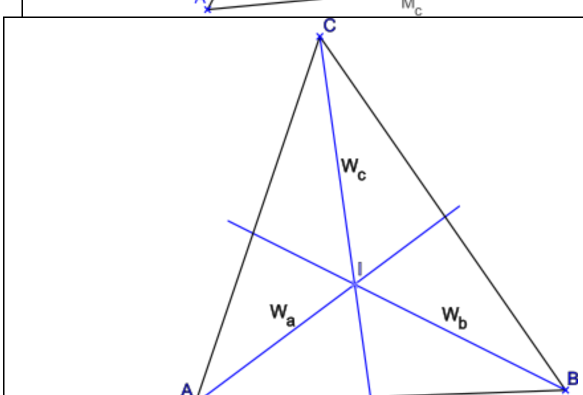
Seitensymmetralen), seid symetry ·د اړخسيومتريو غوڅټکی

Inkreismittelpunkt (*I*) inscribed circle, incircle den ·د دننه ګردی منځټکی

r Winkelsymmetralen · د کونجسيومتري

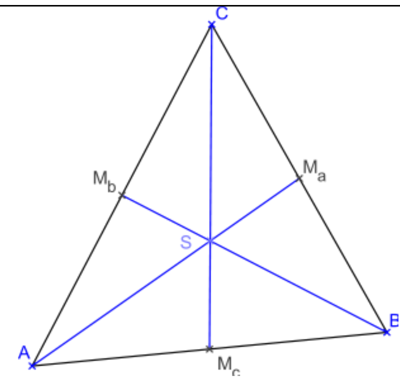
Schwerpunkt (*S*) r centroid · دروندټکی

Seitenhalbierenden) median ·اړخنيمی

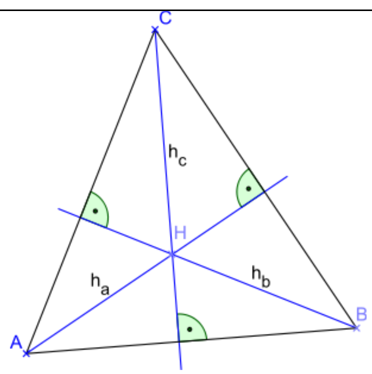
	مخامخ خيره کې مثلث ياد دريګوډي په منځ عمود يا - ولاړې کرښې ښايي
	دامخامخ مثلث هغه کرښې ښايي، چې کونج نيموي او موږ يې کونجنيمی (ناصف الزاويه) بولو (په پورته خيره په نيم اړخ ولاړې کرښې دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

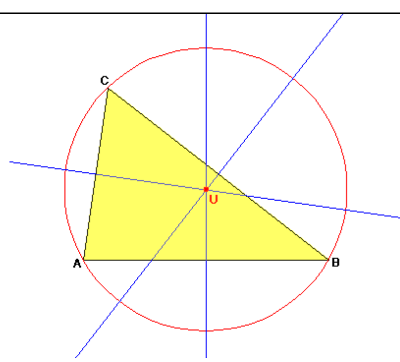
لاندې مثلث کې هغه کرښې دي، چې له
کونج څخه اړخ نيموي٠ موږ يې
اړخنيمی يا ناصف الاضلاع بولو٠

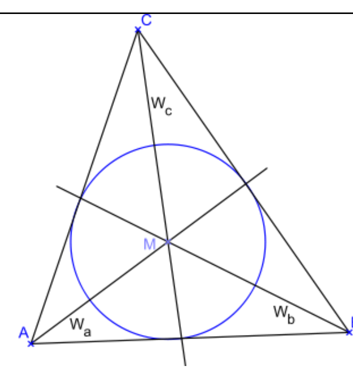


لاندې څېره کې د مثلث هغه کرښې دي، چې له
کونج په اړخ ولاړې دي٠ دا د اړخ جګوالی په
ګوته کوي، چې ما جګی يا ارتفاع بللي دي٠



په پورته څېره کې کونجنيمی دي ، چې منځ ټکی يې د خوندې ګردی يا دننه ګردی
منځټکی هم دی



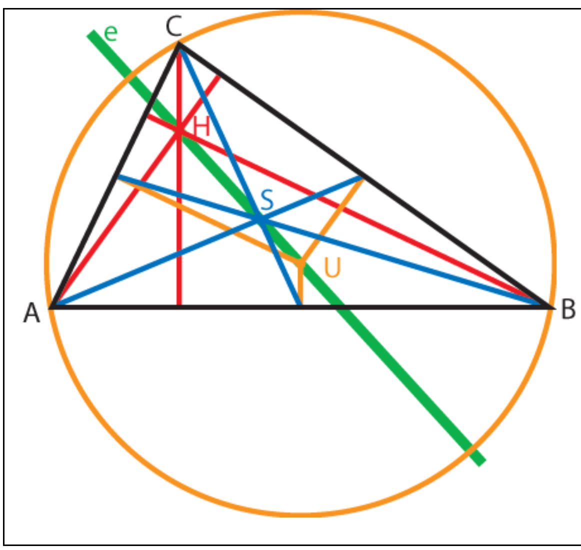


(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کينه ځيره کې د اړخ په نيمه ولاړې کرښې دي، چې غوځټکی يې د په راتاو ګردی يا چاپېرګردی منځټکی دی۰

دا په يو ډول درې کرښې هرې درې يې په يوه ټکی کې سره غوځوي۰

که د يوې درېګوډی د منځولاړو په غوځټکي يوه ګردی داسی ووهل شي، چې د ګردی کرِه درېګوډیځ له يوه ګوډ ځخه تيره شي، نو دا ګردی د درېګوډي له نورو دوه ګوډونو ځخه هم تيريږي۰ که درېګوډی تيره کونجيزه وي، نو د ګردی منځټکی د درېګوډي په دننه کې پروت دی ، که درېګوډی ولاړکونجيزه وي، نو کونج د ګردی په هيپوتينوز ې يا اوږده اړخ پروت دی (د تالس جمله دې وکتل شي) او که درېګوډی پڅکونجيزه وي، نو منځټکی له درېګوډی دباندې پروت دی۰



که درېګوډی ABC وي ، S دروندټکی، U د چاپيريالګردی منځپکی ، او H د جګيو غوځپکی وي، نو کرښه په لاندې ځاننيونه يا تناسب پراته دي :دا په لاندې ځيره کې کتل کيږي ۰

$$\overline{HS} : \overline{SU} = 2 : 1$$

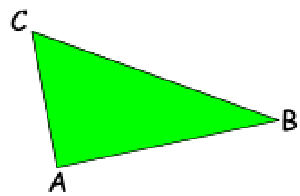
۶ . ۱ . ۴ برابرارزښتوالی او ورته والی يا مشابهت Congruence and Similarity

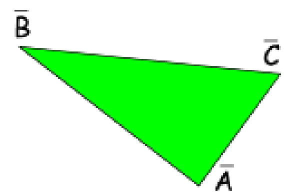
دوه دريګوډي ABC او A'B'C' يو بل سره کونګروانيڅ يا برابر پټووني دي يانې برابرارزښته دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$ABC \equiv A'B'C'$

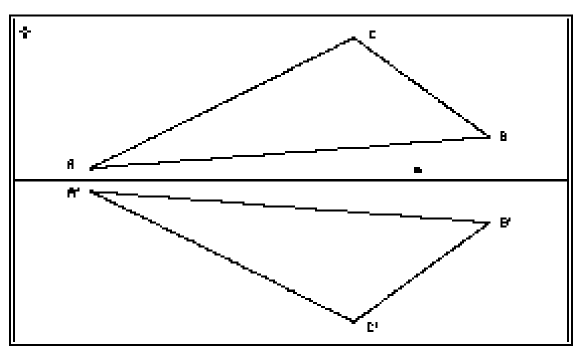
(4.4)   که وکښول شي یانې که هرې لورته یووړل شي(وکښول شي) او وڅرخول شي او اینه ونه یا هنداورنه یې یو بل پوره پټ کړي یا یو په بل پوره پریوځي (لاندې ځیر)





که دریګوډي سره کونګرواینڅ وي، نو باید کم له کمه په دري اصلي توټو (اړخونو او کونجونو) کی یو بل سره مساوي وي

.په ښت یی هم باور لري S   اړخ او W کونج په ګوته کوي



(c) ketabton.com: The Digital Library

جملې: دریکوډي ټیك هلته کونګروا اینځ دي چې یو بل سره مساوي شي په

۱ - درې اړخونو کی SSS

۲ - دوه اړخونو او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی SWS

۳ - دوه کوجونو او د لوي اړخ ته مخامخ کونج کی SSW

۴ - یوه اړخ او ددې اړخ دواړه خواو کونجونو کي ،WSW

د دې جملو په څېټ هم باور لري، دا په دې مانا چې که دریګوډي په کونګروا اینځ جملو کی ورکړشوو اصلي برخو کی سره برابر وي، نو دا کونګروا اینځ دي. د کونګروا اینځ جملو په بنسټ کیدی شي په ځانګړي توکه دریګوډیجوړښت سرته ورسول شي، کوم چې د کونګروا اینځ جملو کارونی په ځیر لیدل کیدای شي .

د دوه هوارو شکلونو ورته والی (Ähnlichkeit)هلته مخ ته پروت دی، کله چې په همغو یا اړوند درې کونجونو کی یو بل سره برابر وي او د همغو یا اړوند اړخونو تر منځ یی تناسب یا ځاننیونه موجود وي .

دا جملي هلته هم باور لري که د کونګروا اینځ له جملو ورته جملو ته ورشو

جمله:

دوه دریګوډي ټیك هلته یو بل ته ورته دي که یو دبل سره برابر وي، په :

۱ - درې اړخونود اوږدوالي ترمنځ ځان نیونی یا تناسب کی

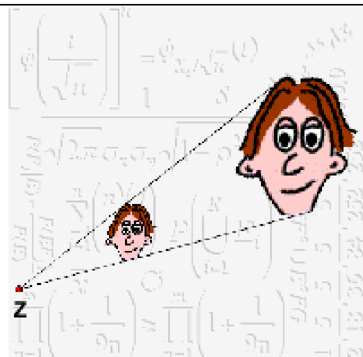
۲ - د دوه اړخونو د اوږدوالي ترمنځ تناسب او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی

۳ - د دوه اړخونو او د لوي اړخ مخامخ کونجونو ترمنځ تناسب یا ځاننیونه کی

۴ - دوه مساوي پرتو کونجونو کی

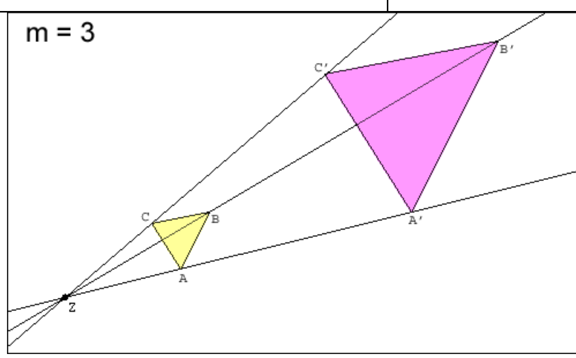
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا مخامخ څیرې ورته دي ، که د دې دوه کرښو پای سره په یوه کرښه وتړی او د یوه اړخ د د په خوښه ټکي سره د مخ ته کرښې سره غبګه کرښه وباسی، نو دوه ورته درېګودي لاس ته راځي

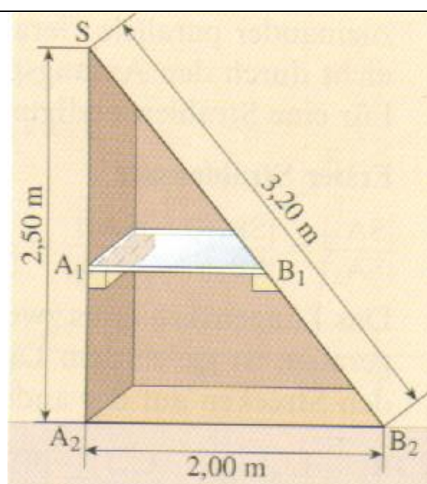


په لاندې څیره کې کښل شوي دریګودي ورته دي، دا په دې مانا چې باور لري:

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$



د ورته جملو سره خپلواني جملې د ورانګو جملې دي:



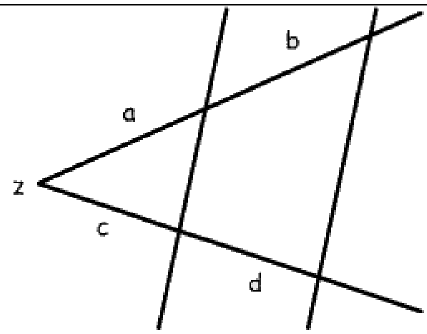
په دې پورته څیره کې درېګودي يو بل ته ورته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګې لومړۍ جمله:

دوه له یوه ټکی وتلې وړانګې ، که له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي نو ټوټې یې لاندې اړیکی سره لري۰

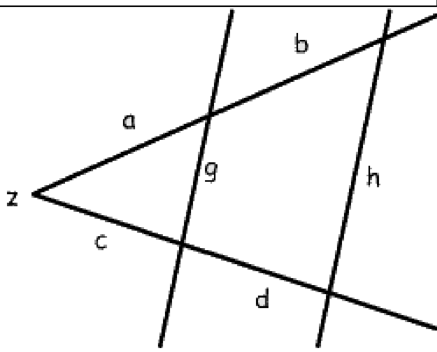
$$\frac{a}{(a+b)}=\frac{c}{(c+d)} \qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$



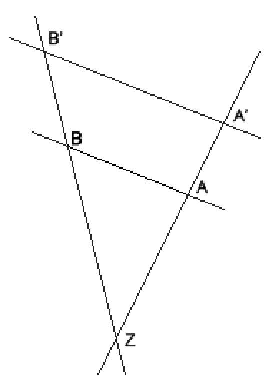
د وړانګې دویمه جمله:

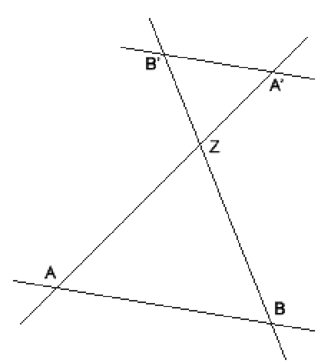
که له یوه ټکي دوه کرښې وکښل شي او دا بیا له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي، نو د ټوټو ترمنځ دا لاندې اړیکی لري، دا ته والي له جملو ده۰ ټکی چې څنګهدي په پام کې نیول کیدی شي او د دې او پورته جملې ترمنځ توپیر ته هم پام نیولی شو

$$\frac{g}{h}=\frac{c}{(c+d)} \qquad \frac{g}{h}=\frac{a}{(a+b)}$$



یا دالاندې، چې هرڅه یې روښانه دي





(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$
$$\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{AA'} = \overline{ZB'} : \overline{BB'}$$

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$

(دا لاندې د لیکنې له لارې روښانه شوې څیره دې ګران لوستونکي وکاږي)

که درې په یوه ټکي کی پریکیدونکی کرښي g1 , g2 او g3 د دوه غبرګو) موازی(کرښو g4 او g5 لخوا پرې شي، نو د بیلګي په توګه له ۴ . ۱۰ کښل شوي څیرې څخه لاندې اړیکي لاس ته راځي:

. 1 OA1 : OA2 = OB1 : OB2 , OA1 : OA2 = A1B1 : A2B2

دا په دې ماناچی په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب یا ځاننیوی سره پرتی دي:

. 2 A1A2 : B1B2 = OA1 : OB1 = OA2 : OB2

دا په دې مانا چی: په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي لکه اړونده، د ککری اندازه شوې برخي چی په وړانګه پرتی دي.

۳ - A1A2 : A2A3 = B1B2 : B2B3 , A1A2 : B1B2 = A2A3 : B2B3

دا په دې مانا چی: په غبرګو پرتی کرښي په همغه برخوکی یو له بل سره په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي

د وړانګو جملی هم باور لري، که د دوه غبرګو په څیر رامنځ ته شي یا که ککره د غبرګو ترمنځ پرته وي) په دې حالت کی دې وړانګي د کرښو په ځاي بدلی یا ولیکل شي   )

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ . ۳ : د اړخونو a او c او همداسی د کونج الفا څخه دې

یو دریګوڼی جوړ شي. لاندې حالتونه تر څیړنې لاندې نیسو

$a > c$ - 1

موړ کاږو $AB = c$ او په ټکي A کونج‌الف

د c په کچه کاږو. په B یو ګردښلینده کاږو د a

په کچه چی د الفا ازاده پښنه په ټکي C کې غوڅوي)

څیره دې ګران لوسونکی پخپله وکاږي، روښانه ده

$a < c$ - 2

دلته درې امکاناته شته دی(د دې درې امکاناتو څیره وکاږی)

۲ . ۱ : د ګردیلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښنه په دوه هغوټکو کي پرې کوي،
په کومو کی چی اوبی یواځنی نه دی٠

۲ . ۲ : ګردښلینده د α ازاده پښنه لمسوي٠

۲ . ۳ : ګردښلینده د α اندازه پښنه نه غوڅوي .

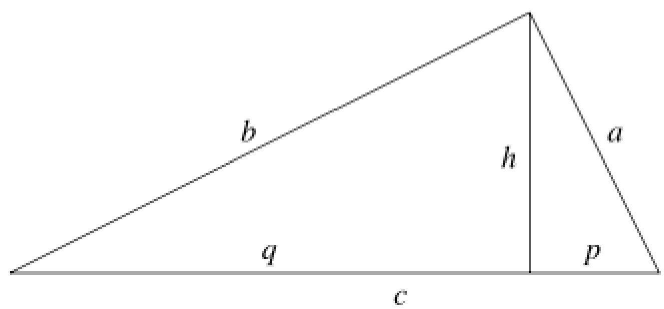
$a = c$ (۳

ګردښلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښنه په دوه ټکو ، په نامه A او C کي پرې
کوي. دې لپاره چی حالتونه ۲ - او ۳ - له منځه لرې او تل یواځنی حل ولرو، نو $a > c$
نیونه په دریم کونګروانیڅ جمله کی ضرور ده

۶ . ۱ . ۵ .ولاړکونجیز دریګوڼی مثلث قایم الزاویه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلفو دریګوډیو څخه موږ په لاندې برخه کی ولاړ کونجیز دریګوډی ترڅیرنی لاندې نیسو .په ولاړکونجیز دریګوډي کی د ولاړ کونج مخامخ اړخ هوپوتینوزې) Hypotinuse(بلل کیږي، نور دواړه اړخونه کاتیتونه یو: کاتیت (Katheten)بلل کیږي. هغه ولاړکونجیز دریګوډي ته روڅنی یا ورسره بلدې یا مروجی په نخښه کونه یا لنډ په نخښونه به له څیرې ۴ . ١٣ څخه واخلئ



په ولاړکونجیز دریګوډي کی دا لاندې راوړل شوې اړیکی باور لري چی دلته یی بی له اوبی)ښوونی(راوړو:

یادونه : په ولاړګوډیز کې د ولاړکونج مخامخ اړخ اوږد اړخ بولو او د ولاړ ګوډ پښې ولاړ اړخونه، چې غوښتوني کونج ته مخامخ مخامخ اړخ (پښه) او په موخه ور کونج پرته پښه په کونج پروت اړخ (- پښه) بولو او یا په دې لاتین نوموونو یانې مخامخ کاتېت او (په کونج) پروت کاتېت.

د پیتاګوراس (Pythagoras) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتینوزې مربع هواره د دواړو کاتیتو د مربع هوارو زیاتون سره برابر یا مساي ده:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (6.5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دکاتيتو(د ولاړاړخونو يا د مخامخ او په پراته اړخ(ضلع)) جمله:

په ولاړکونجيز دريګوډي کی د کاتيت مربع هواريزمساوي ده د ولاړ کونجي هوارې سره، چی له هيپوتينوزې او ددې کاتيت له پرويکشن يا پريوستون څخه لاس ته راځی:

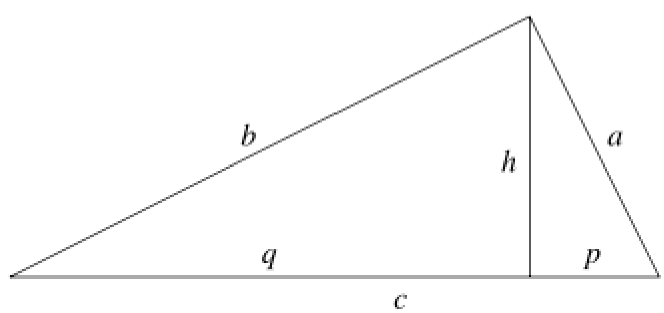
$$a^2 = p.c \ , \ b^2 = q.c \qquad (6,6)$$

جګجمله :

په ولاړکونجيز دريګوډي کی د هيپوتيزې په جګي مربع هواريزمساوي ده د هيپوتينوزې (لوي اړخ) برخو څخه منځ ته راغلې ولاړکونجي هوارې سره

$$h^2 = q \, . \, p \qquad (6.\ 7)$$

يا په لاندې کې لنډ بيا ورکړ شوي



لنډ: (ددې لپاره دې پورته څېره وکتل شي)

پيتاګوراس جمله : $c^2 = a^2 + b^2$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اویکلید د کاتیتونو(پروت – ،مخامخ اړخونو) جملې

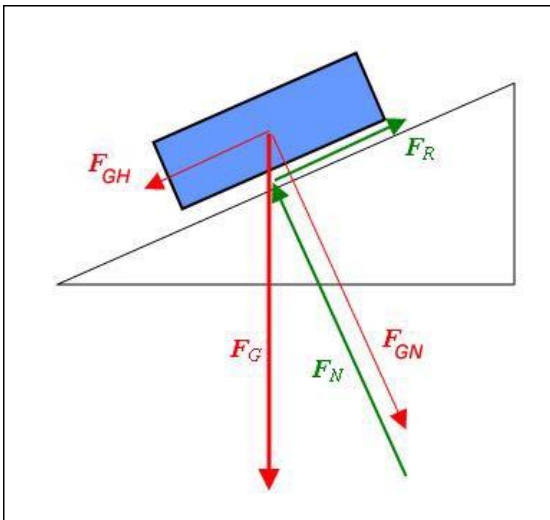
$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

$$c = p + q$$

د اویکلید جګجمله $h^2 = p \cdot q$

بیلګه ۴ . ۴ : (ځیره نه ده کښل شوې، د ې ته دې ګران لوستونکچ فکر وکړي۰ دا یوه فزیکي دنده هم ده(ځېره وکښل شوه، نخښې هم لږ بدلې دي)) د یوه بدن د وزن G تجزیه ځرګندوي (د بدن دروند تکی) دا د فزیك له مخی هغه تکی دی چی د بدن ټول وزن پرې پروت وي (KSP =)چی په یوه مائله هواره پروت دی، دا وزن مائلي هوارې سره غبرګ په یوه کښته کشونکی زور FH او په مائلی هوارې نیغ ولاړ ، ولاړ) عمودي(زور) قوه FN)تجزیه کیږي. د ښوولو ده چی، دریګوډي ABC د KSPاو FN او FH له خوا ټاکلي دریګوډي سره ورته دی

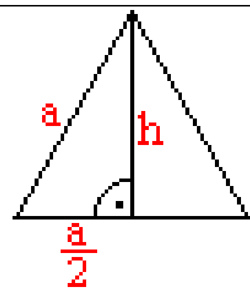
یادونه: په لیکنه کې زور یا توان د لاندې ځېرې سره داسې بدلوو:شین تنیا د مستطیل شکل G دی $F_H = F_{GH}, F_N = F_{GN}, G = F_G$ ګوډونه : له پورته ګوډ A کښته ښی لور ته ګوډ C کښته کیڼ لور ته ګوډ B په ګوډ A کونج α ، په ګوډ B کونج β	

(c) ketabton.com: The Digital Library

داچې G||AC ځغلي، نو FH او G يو کونج α جوړوي. دا چې $\beta = R - \alpha$ ده، نو FN او G کونج β جوړوي، دواړه دريګوډي په دې برسيره په ولاړکونج کې يو بل ته ورته دي.

يادونه : داسې بيلګې، چې ثيره يې نه شم ايستلی که وي هم بدې نه دي، ګران لوستونکي کړای شي،چې داسې ثيرې پخپله وباسي، دا دې يو تمرين وي. زما زړه نه شي، چې له ليکلو يې تير شم.

بيلګه ۴ . ۵ : په يوه مساوي اړخيز دريګوډي کې دې (لاندې ثيره) جګی و شميرل شي .د ٦ . ۴ (له مخی لرو) جګی په همدې وخت کې د مخامخ اړخ نيمی هم دی، دا په دې درېګوډي کې وکاړی)



$h^2 = a^2 - (a/2)^2$

$h^2 = a^2 - a^2/4$

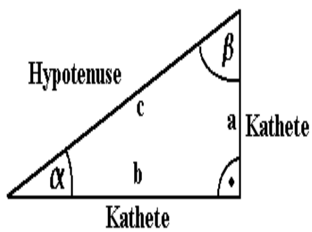
$h^2 = (3/4)a^2$

$h = (\sqrt{3}/2)a$

٦ . ۲ په ولاړکونجيز دريګوډي کی د اړخونو تناسب

د کونجکچ لپاره د اړخونو تناسب هم مساعد دی، چې يوه ولاړکونجيز دريګوډي کې جوړيږي(لاندې ثيره). که د کونج α مخامخ اړخ يا ـکاتيت a د gegkathete مخامخ اړخ په ثير وښايو، د b اړخ په β پروت اړخ ankathete او hypothenuse لوي اړخ وي، نو په ولاړکونجيز دريګوډي کی لاندې اړخځانييوني منځ ته راځي يا جوړيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{katheta}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{kathetb}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{opk}{ank}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{ank}{opk}$$

د وړانګو جملو له امله دا اړیکي یا تناسب یواځي د کونج په واك کی دی. که په پام کی ونیول شي چي $\beta = 90° - \alpha$ دی، نولاندې اړیکی لیکلی شو

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \tan(90-\alpha) = \cot\alpha$$

$$\cot\beta = \frac{a}{b} = \cot(90-\alpha) = \tan\alpha$$

له دې لیدل کیږي، چی د دې څلورو ارزښتونو د پیداکولو لپاره دوه ګنجدولونه پوره دي یا بسیا کوي .ورپسي یا ددې په تعقیب پیژندوړ دي

$$\tan\alpha = \frac{in\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,10)$$

برسیره پردې د پیتاګوراس د جملی په پام کی نیولو سره لرو

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,11)$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; 1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}; \ldots\ldots\ldots(6,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ . ۳. په یوونګردۍ کی د کونج فنکشنونه (-بلواك)

په ۴ . ۲ برخه کی $\sin\alpha; cis\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$ یواځي د لیدیدونکو (Konkrete اړختناسبونو لپاره په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی ځاي په ځاي دي. دا ویناوې یواځي یا په ځانګړې توګه د $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} (0 < \alpha < 90°)$ لپاره تعریف دي. که د α خپلواك واریابل په څیر ونیسو، نو $\sin\alpha$ او داسی نور فنکشنونه راپه ګوته کوي چی په برخه ۱۵ کی انځور دي او کوجنفنکشنونه بلل کیږي. په یاده شوې برخه کی) څیرې ۱۵ . ۲۰ الف او ب

ددې لپاره چی د دې تعریفونو پراخوالی په زړه پورې کونجونو لپاره ممکن شي، نودا مو د یوون ګردي باندې مخ نخښی په واك کی کرښو ته لاربنودوي .د لته ټولی کرښی) د لته به له کرښو څموږ مطلب پای کرښی وي(، چی پخپله او یایی پرویکشن یا پریوستون یا پریوتنه په وړانګو s1 او s2 پروت وي زیاتون مخنخښه) مثبت مخنخښه(لري، ټولی کرښي او یایي پرویکشنونه پریوستونونه چی په وړانګو s'1 او s'2 پرتی وي کمون مخنخښه (منفي مخنخښه) لري .د لاندې څیرو کښلو سره کیدی شي تعریفونه ۸ . ۴ (د په خوښه کونجونو لپاره پراخه شي

$$\sin\alpha = \overline{QP}, \cos\alpha = \overline{OP}, \tan\alpha = \overline{AD}, \cot\alpha = \overline{BE}; ....(6,13)$$

د کونج α لپاره چي په لومړي څلورمه یا کوادرانت Quadrant (لاتین: د کواوردیناتسیستم څلورمه کی پروت دی(لاندې څیره له کیڼ و ښی لورته کښته دا په فرمولونوکې کارول شي توري ساده ایښوول کیږي۰ په څیرو کې شنې کرښې د ساین دي او سرې کرښې کوساین دی او کونجونه ټول په ترتیب له یوه سره پهالف سره په نخښه کیږي، چې د دې لارې تانجنت او کوتانجنت هم پیدا دي او توري هم ایښوولی شو)، دا تعریفونه د هغو تعریفونو سره سر خوري، کوم چی په ولاړکونجیز دریګوډي کی تر څیرنی نیول شوي دي .په پام کی دې وي چی کونج α په لینده اندازه کی د ګردیلیندې اوږدوالي AP سره مساوي دی، چیرته چی په زیات څرخون له 2 څخه لوییدلی هم شي .برسیره پر دې له تعریفونو) ۱۳ . ۴ (څخه لاس ته راځي، چی ساین-او کوساین فنکشنونه، پریود :°360 (2) periode (تل تکراریدونکی ، بیرته

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځیدونکی(، تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونه پریود(180°) لري .

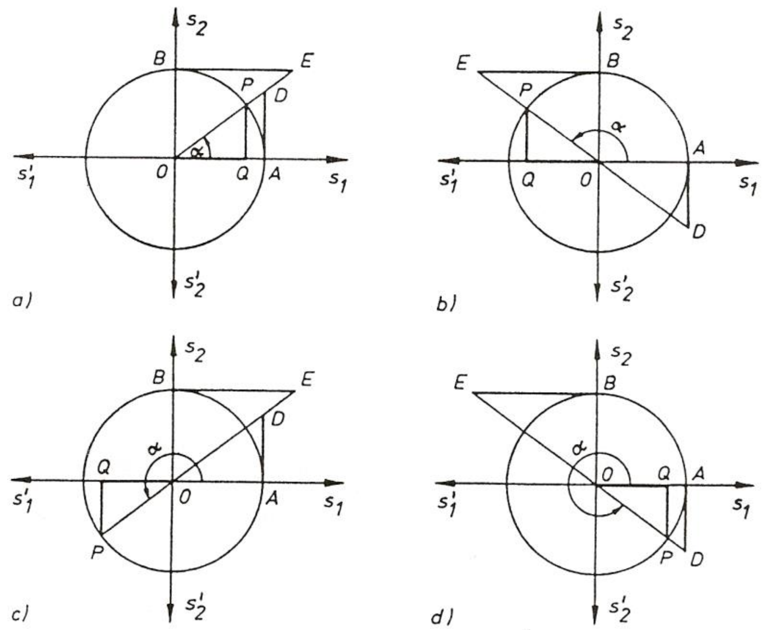


Bild 4.17

پس لرو

$$\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha+360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha+360°)=\cos\alpha; ....(6.14)$$
$$\tan(\alpha+2\pi=\tan(\alpha+360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2\pi)=\cot(\alpha+360°)=\cot\alpha$$

په

تیولیزه)عمومي(توګه لرو

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin(\alpha+k.360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos(\alpha+k.360°)=\cos\alpha; ....(6.15)$$
$$\tan(\alpha+2k\pi=\tan(\alpha+k.360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2k\pi)=\cot(\alpha+k.360°)=\cot\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو ټولګنونو ....3 , 2, 1,0,1-,2-,3-.. = k لپاره

يادونه :د کوادرانت لپاره څلورمه ليکلی شو خو دا بايد په پام کی وي چی دا په کواورديناتسيستم کی دی

جدول يا تخته ۴ . ۱ د کونج-يازاويو توبعو وخنخښه

	لومړۍ څلورمه $(0;\frac{\pi}{2})$	دويمه څلورمه $(\frac{\pi}{2};\pi)$	دريمه څلورمه $(\pi;\frac{3}{2}\pi)$	څلورمه څلورمه $(\frac{3}{2}\pi;2\pi)$
sinx	+	+	-	-
cosx	+	-	-	+
Tan x	+	-	+	-
cotx	+	-	+	-

برسيره پر دې لاندې اړيکی باور لري:

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \quad , \quad \cos(\pi-\alpha) = -\cos.\alpha$$

$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha \quad , \quad \cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha \qquad (4.16)$$

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \quad , \quad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha ,$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \quad , \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha \quad , \quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

بېلګه ۴ . ۶ : د جبشميروني سره د کونجفنکشن د $\alpha = 446°$ لپاره پيداکوو . دا چی α په درجی اندازه ورکړ شوي ده، نو اومشالتريا سويچ (بدون) دلته مطلب د

(c) ketabton.com: The Digital Library

جبشميري اړونه ده، پۀ غوښتل شوي فنکشن کی) په « DEG » سموو او بیا
لاندې ورکوني کوو.
په همدې ډول تکمي وهو

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونجفنکشنونو مخنخښه

دنده مو د لاندې مساوت حل یا اوبی دی

1. $\sin \alpha = a$, 2. $\cos \alpha = a$,
3. $\tan \alpha = a$, 4. $\cot \alpha = a$

دلته تمرینونه ۱ او ۲یواځي هلته موخه ور یا هدفمند ي، چې باور ولري$-1 \le a \le 1$

او په تمرین ۳ او ۴ کط په خوښه هر ارزښت نیولی شي.
یو «بنستهیزوبی یا بنستیز حل»α_0 د هر تمرین د جبشمیرني سره په لاندې ډول یا
همداسی تکموترتیب لاس ته راځي (دا په دې اړه لري چیα_0 په درجه اندازه یا لینده
اندازه کوو، نو په ورته ډول د سویچبدلون په "DEG" یا "RAD" باندې راولو)

1. [a] [F] [sin] 2. [a] [F] [cos]
3 [a] [F] [tan] 4. [a] [1/x] [F] [tan]

تکمه F د په ختې فنکشن ته تلنه ممکنوي.
دلته نو بیاد α_0 هر بنستهیزحل په درجه یا لینده کچ څرګندیږي.
د $a = -0,55$ لپاره لاندې بنستیزحلونه لاس ته راځي :

1. $\alpha_0 = -33,367013° = -0,58236$,
2. $\alpha_0 = 123,36701° = 2,1531606$,

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

3. $\alpha_0 = -28{,}810793° = -0{,}5028432,$
4. $\alpha_0 = -61{,}189206° = -1{,}0679531.$

د مخ ت ه تیرو په بنسټ لو

1. $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha) = \sin(\pi - \alpha),$
2. $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$

او په ورته توګه،، فرعي یا خنګیز حل یا اوبی،،

1. $\beta_0 = 180° - \alpha_0 = \pi - \alpha_0,$
2. $\beta_0 = -\alpha_0$

لاس ته راشي

د لیدیدونکي حالت $a = -0{,}55$ لپاره په دي مانا چې :

1. $\beta_0 = 213{,}367013° = 2{,}1531563,$
2. $\beta_0 = -123{,}36701° = -2{,}1531606.$

د α ټول حلونه د (۱۵ . ۴) له امله په لاندې فورم لاس ته راځي

1. und 2. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 360° = \alpha_0 + 2k\pi,$

$\alpha = \beta_0 + k \cdot 360° = \beta_0 + 2k\pi,$

3. und 4. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 180° = \alpha_0 + k\pi.$

بیلګه ۴ . ۹ : لرو $\sin x = 1/2\sqrt{3}$. ودې شمیرل شي $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pm\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ . ۱۰ : په بیلګه ۴ . ۴ کې ورکړشوی زور F_H او F_N څومره لویې دې، که په مایل هواره پروت بدن وزن $700\ N$ وي (دلته N د Newton لپاره دی چی وزن پرې اندازه کیږي) او مائلی هوارې مایلکونج $\beta = 28°$ وی؟

$$\sin\beta = \frac{F_H}{G}, \quad F_H = G \cdot \sin\beta = 700\ N \cdot \sin 28° = 700\ N \cdot 0{,}4695 = 328{,}65\ N.$$

$$\cos\beta = \frac{F_N}{G}, \quad F_N = G \cdot \cos\beta = 700\ N \cdot \cos 28° = 700\ N \cdot 0{,}8829 = 618{,}03\ N.$$

۴. ٦ دساین- او کوساین جملی

دا دواړه جملی ممکنوي چی په ټولیز یا عمومي دریګوډي کی شمیرنی پلی کړای شو

۱ . د ساین جملهد څیرې ۴ . ۱۸ له نخښوني سره لرو

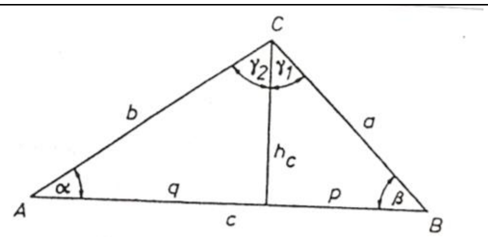


Bild 4.18

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}, \quad \sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

او له دې امله

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چی په عمومي توګه صدق کوي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (4.17)$$

څیره پورته او لاندې کښل شوي، دا یو ولاړکونجیز دریګوډی کښل کیږي(پورته او لاندې څیرې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چی په عمومي توګه صدق کوي

د ساین جمله کیدی شي استعمال شي، که د یوه دریګوړي -دوه اړخونه او لوي اړخ ته

مخامخ کونج - SSW یو اړخ او داړه پرې پراته کونجونه WSWورکړشوي وي

۲ . د کوساین جمله

د ځیرې ۴ . ۱۸ ځخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} h_c^2 &= b^2 - q^2 \\ h_c^2 &= a^2 - p^2 \\ \hline a^2 &= b^2 + p^2 - q^2, \quad p = c - q, \\ a^2 &= b^2 + (c - q)^2 - q^2, \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2, \quad q = b \cos \alpha, \end{aligned}$$

نو $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$ لرو او همداسې:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned} \qquad (4.18)$$

د کوساین جله استعمالیدی شي، که په یوه درېګوړي یا مثلث کې

- درې اړخونه یا ضلعې یا

- دوه ا ړخونه(ضلعې) او له هغو رابند کونج یا زاویه

ورړ شوي وي.

بیلګه ۴ . ۱۱ :د دوه قوو(زور F1)او F2 لاس ته راوړل شوې R1 چی په پراته لورد F1سره کونج جوړوي ، ځنګه شمیرل کیږي؟ د دې دوه قوو F1 او F2 برسیره له دوي جوړکونج هم معلوم دئ .د دې پوښتنی کولو د روښانولو لپاره ځیره ۴ . ۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- ------

وركړ شوې، له كومى څخه چى د دوي ترمنځ اړيكي هم معلوميږي .په دې پسى په ABCدريګوډي كى، $F1 = c, F2 = a$ او $ss = 180° - ss'$ معلوم دي، α

او $R = b$ لټوونكى يا غوښتونكى لويي دي؟

د كوساين جملى (١٨ . ۶) څخه لرو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosss$$

همداسى يا⇔

$$R^2 = F1^2 + F2^2 - 2F1F2\ cos(180° - ss')$$

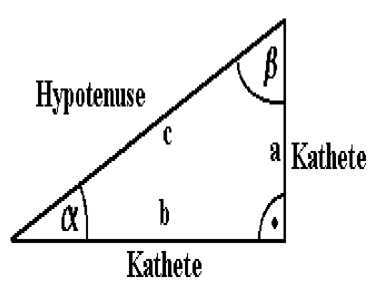
او د ساين له جملى (١٧ .۶) لاس ته راځي

له كومو چى α ټاكل كيدى شي .

لوي اړخ او ولاړ يا عمود اړخونه (هيپوتينوز او كاتيتونه يا مخامخ- او په پروت اړخ):

١ – په ولاړكونجيز دريګوډي كې ولاړ كونج ته مخامخ اړخ هيپوتينوز يا لوي اړخ بولو٠

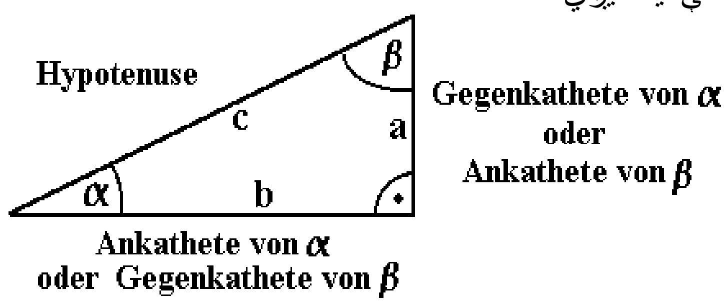
٢ - نور دواړه اړخونه غوښتوني – يا مطلوب كوج ته مخامخ اړخ او په مطلوب كونج پروت اړخ يا ولاړ اړخونه يا كاتيتونه بولو٠

	مخامخ دريګوډى دې وركړشوى وي: په لاندې دريګوډي كې كونجونه، او اړخونه جوت يا څرګند روښانه دي . د اړخونو نومونه: الفا كونج ته مخامخ مخامخ اړخ بولو او په الفا پروت اړخ په پروت يا پروت اړخ بولو. ولاړ كونج ته مخامخ لوى اړخ بولو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لند یا تکرار :پورته او په لاندې بیلګه کې دا اړخونه دغوښتوني کونج مخامخ او په پراته اړخونه بلل کیږي

بیلګه
بیا دې همغه پورته درېګوډی ورکړ شوی وي، چې په بیتا پروتاوخ یا کاتیت د الفا مخامخ اړخ یا کاتیت او په څنډ په الفا پرو اړخ یا ه کاتیت د بیتا مخامخ اړخ یا کاتیت ده، چې په څیره کې لیدلکیږي۰



د ساین جمله

په تریګونومتري کې ساینجمه د درېګوډي د یوه کونج او د دې کونج مخامخ اړخ ترمنځ اړیکی ښایي۰ دا له البتانی میندل شوي او ښوول شوي۰ د درېګوډي درې اړخونه او درې ګونجونه ، وړانګه او چاپیری ورکړ شوي (لکه په فرمول کې) نو باور لري:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

یادونه : دا پورته فرمول دې (6,14)وي ۰

زیات وخت د ساین جمله په داسې ډول هم ورکول کیږي:

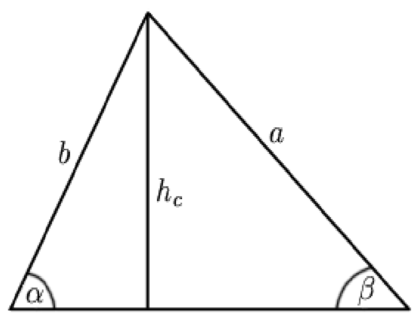
$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$$

که چیرې په درېګوډي کې د ساین جملي له لارې څه ښوول کیږي ، نو دې ته دې پام وي، چې په اینتروال [0°;180°] کې په ټولیزه توګه د همغه کونج دوه یو له بل بیل ارزښتونه لیدل کیږي، دا: دوه ګونوالی ګونګرواینځجمله په ګوته کوي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دې د کوساین جمله هم وکتل شي

ښوونه : (دا ځیره دې ٦ ، ١٨ وي او دا نا نومول شوي کونجونه دې x,y وي)

 	$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$ $\sin\beta = \frac{h_c}{a}$ په h_c پسې یې اوبې کوو $h_c = b\cdot\sin\alpha$ د برابراینوني له لارې لاس ته راځي $a\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\alpha$ که په $\sin\alpha\cdot\sin\beta$ وویشو، نو د غوښتنې لومړی برخه کې لاس ته $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ راځي

برابرون له $\frac{c}{\sin\gamma}$ سره په پیداینتي توګه ځګی h_a او یا h_b لاس ته راکوي

د کاروني بیلګه : درجګوډی ABC لارو او ورکړ شوي :

$$\alpha = 73° \text{ ، } b = 3,8\,\text{cm} \text{ ، } a = 5,4\,\text{cm}$$

دا نورې لویې دې په درېګوډي کی پیداشي

د β شمیرلو لپاره د ساین جمله کارول کیږي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{3{,}8\,\mathrm{cm} \cdot \sin 73^\circ}{5{,}4\,\mathrm{cm}} = 0{,}67$$

$$\beta = \underline{42^\circ}$$

لکه د خه مو، چې ګوته ورته ونیوله یو بل کونج هم د همدې ارزښت سضته شته ، یانې

$$\beta' = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

د دې اوبی په پوښتنه کې نه راځي، ځکه چې د درېګوډي د کونجونو زیاتون به له ۱۸۰ درجو څخه واوړي۰

او نو ګاما د کونج زیاتون جملې له لارې لاس ته ر اوړو

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 73^\circ - 42^\circ = \underline{65^\circ}$$

اړخ c هم داسې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{5{,}4\,\mathrm{cm} \cdot \sin 65^\circ}{\sin 73^\circ} = \underline{5{,}118\,\mathrm{cm}}$$

دکوساین جمله

په تریګونومتري کې کوساینجمله په درېګوډي کې د درېګوډي د اړخونو او کونجونو

ترمنځ اړیکې ښايي ، چې په لاندې توګه ورکړ شوي دي :

یادونه : دا لاندې فرمولونه دې (۱۸ ۰ ۹) وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

که ګاما ٩٠ درجې وي، نو دپیتاګوراس جملې له مخې لرو:

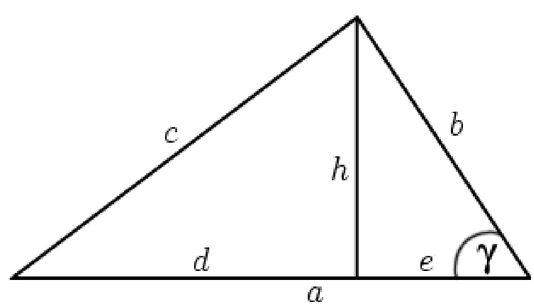
$$c^2 = a^2 + b^2$$

د کوساین جمله استعمالیدی شي، که په یوه دریګوډي کی

- درې اړخونه (SSS) یا
- دوه اړخونه او له هغو بند کونج (SWS) ورکړ شوي وي.

که له پورته څخه یې درې ورکړ شوي وي، نو څلورم یې پیداکولی شو

بنوونه :



د درېګوډي په کیڼ لور د پیتاګوراس قضیه استعمالوو، چې د c^2 لپاره یوه شمیرافاده یا – وبینه پیداکړو، د دې لپاره د دې خوا د ولاړاړخونو یا کاتیتو اوږدوالی څلورۍ یا مربع باید پیدا شي

$$h^2 = b^2 - e^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښي اړخ لپاره د پيتاګواراس قضيي استعمال څخه لرو

$$d^2 = (a-e)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot e + e^2$$

(د بينوم فرمول)

د پيتاګوراس جملې له مخې د کيڼ لور لپاره لرو:

$$c^2 = h^2 + d^2$$

اوس دواړه پورته پيداشوي شميروييني يا- افادې سره زياتوو:

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2\cdot a\cdot e + e^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot e$$

اوس باور لري $\cos\gamma = \frac{e}{b}\left(\frac{ankathet}{Hypotenuse}\right)$

له دې لاس ته راځي $e = b\cdot\cos\gamma$

دا پورته ځاي په ځاي کوو، نو د c^2 لپاره لاس ته راځي:

$$c^2 = \underline{\underline{a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}}$$

بيلګه:

يو درېګوډیABC ، چې اړخونه يې ځرګند دي، ورکړ شوی

$a = 4{,}9\ \text{cm}$،

$b = 2{,}8\ \text{cm}$

$c = 3{,}5\ \text{cm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج β لویوالی غواړو پیداکړو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{(4{,}9\,\mathrm{cm})^2 + (3{,}5\,\mathrm{cm})^2 - (2{,}8\,\mathrm{cm})^2}{2 \cdot 4{,}9\,\mathrm{cm} \cdot 3{,}5\,\mathrm{cm}} = 0{,}83$$

$$\beta = \underline{34^\circ}$$

دا پیژند ورکو یا داسې تعریفوو

$$\sin A = \frac{\mathrm{opp}}{\mathrm{hyp}} \qquad \cos A = \frac{\mathrm{adj}}{\mathrm{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\mathrm{opp}}{\mathrm{adj}} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\mathrm{hyp}}{\mathrm{adj}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\mathrm{adj}}{\mathrm{opp}} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\mathrm{hyp}}{\mathrm{opp}}$$

Common formularکډ وډ فرمولونه

Pythagorean identitiesد پیتاګوراس کتمتوالی

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Sum and difference identities زیاتون او کمون ګټمتوالی

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

Double-angle identities دوه برابره کونج کې ګټمتوالي

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\cot A}{\cot^2 A - 1} = \frac{2}{\cot A - \tan A}$$

Half-angle identities د نیم کونج ګټمتوالی

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

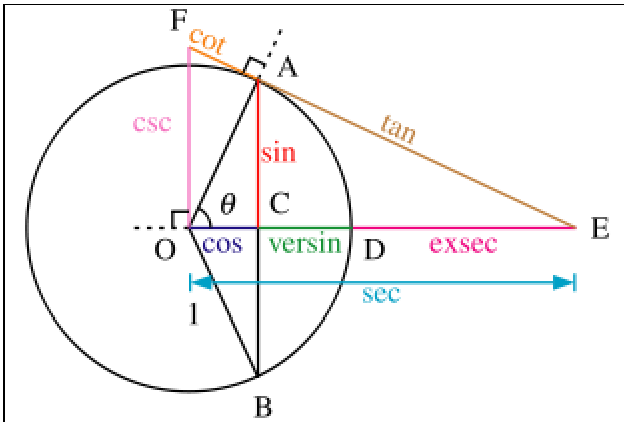
$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

د تريګونومتريکي کټمتوالي لیست List of trigonometric identities

نوره ژوره څیرنه دلته نه کېږو، دې ته ګوته نیسو، چې په لاندې څیره کې تريګونومتريکي فنکشنونه روښانه دي

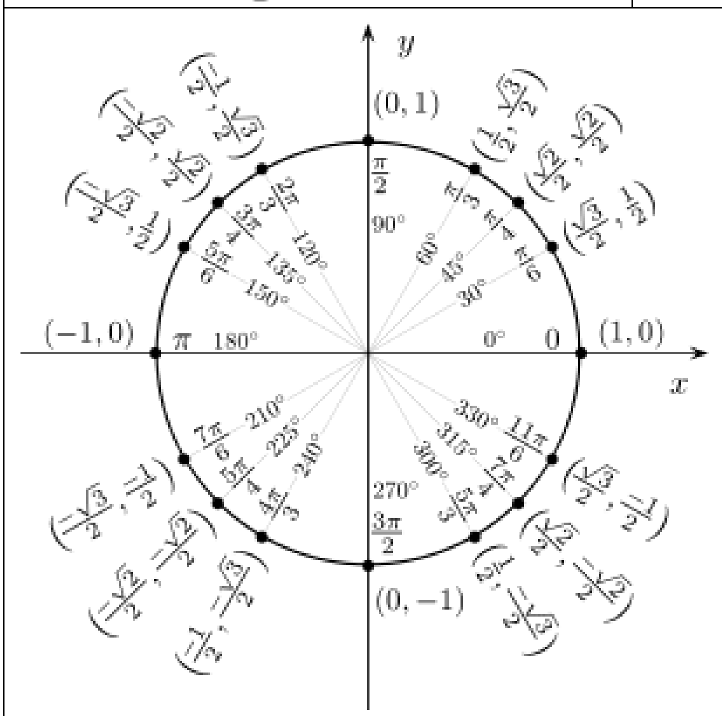


د يوه کونج θ تول تريګونومتريکي فنکشنونه په O باندې د یوې یونګردې ترم له لارې ورکول کیدی شي) یونګردی لاندې ورکړ شوي او کونجونه هم په نخښه شوي)

مخامخ:

یوونګردی(یووالي یا واحد ګردی)

The unit circle



(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکنبڼهNotation

دا لاندې لیکنبڼه یا - ډول د ټولو تریګونومتریکي – یا مثلثاتي فنکشنونو ساین، کوساین ، تانجنت ، کوتانجنت ، سیکانت، کوسیکانت لپاره باور لري، د لنډوني لپاره په لاندې جدول کې یواځې ساین او کوساین لیکل شوي دي

$\arcsin(x)$ کیدی شي$\sin^{-1}(x)$ ولیکل شي، خو د $(\sin(x))^{-1}$ سره باید بدل نه شي

پیژند:Definitions

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

تل بیرته راګرځیدنه ، سیومتري او بدلونPeriodicity, symmetry, and shifts .

:په یوون(یووالي-) ګردی یا دایره کې ساده لیدل کیږي

Periodicity تل بیرته راګرځیدنه

ساین ، کوساین ، سیکانت، کوسیکانت تل بیرته راګرځیدنه 2π ده(پوره ګردی) (تکرار دی)

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\sec(x) = \sec(x + 2k\pi)$$

$$\csc(x) = \csc(x + 2k\pi)$$

تانجنت ، کوتانجنت تلبیرته راګرځیدنه π لري(نیمګردی یا نیمدایره) :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi)$$

$$\cot(x) = \cot(x + k\pi)$$

Symmetry سیومتري

د تریګونومتریکي فنکشنونو لپاره سیومتري ، لکه لاندې کښل شوي

$x \to -x, x \to \pi/2 - x$ ، یا $x \to \pi - x$ په لاندي ډول ده

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin(x), & \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x), & \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\
\cos(-x) &= \cos(x), & \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x), & \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\
\tan(-x) &= -\tan(x), & \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cot(x), & \tan(\pi - x) &= -\tan(x) \\
\cot(-x) &= -\cot(x), & \cot\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \tan(x), & \cot(\pi - x) &= -\cot(x) \\
\sec(-x) &= \sec(x), & \sec\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \csc(x), & \sec(\pi - x) &= -\sec(x) \\
\csc(-x) &= -\csc(x), & \csc\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sec(x), & \csc(\pi - x) &= \csc(x)
\end{aligned}$$

بدلون : د $\pi/2$ او π بدلون دی

$$\begin{aligned}
\sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos(x), & \sin(x + \pi) &= -\sin(x) \\
\cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x), & \cos(x + \pi) &= -\cos(x) \\
\tan\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\cot(x), & \tan(x + \pi) &= \tan(x) \\
\cot\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\tan(x), & \cot(x + \pi) &= \cot(x) \\
\sec\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\csc(x), & \sec(x + \pi) &= -\sec(x) \\
\csc\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \sec(x), & \csc(x + \pi) &= -\csc(x)
\end{aligned}$$

د پیتاګوراس کتمتوالی Pythagorean identities

د دې بنسټ د پیتاګوراس قضیه ده

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج د زیاتون او کمون کتمتوالی Angle sum and difference identities

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

د کمون او زیاتوننخښي په ورته ترتیب راځي لکه په فرمولونو کي

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

که په کيڼ لور " + " وي، نو په ښي لور"-" راځي او په څټ

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

د کونج دوه ځلوالي فرمول Double-angle formulae

که $x = y$ کيږدو د پیتاګوراس یا موفریي فرمول له لارې لرو د $n = 2$ له امله ،

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \quad = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \quad = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot(x) - \tan(x)}{2}$$

د نیمکونج فرمول Half-angle formular

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \qquad (1)$$

که د ریښي لاندې ماتباندي او مات لاندي له $1 + \cos x$ سره ځل شي ، نو د پیتاګوراس جملې له مخه لرو:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1+\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

په ورته توګه که برابرون له (۱) له $1 - \cos x$ سره ځل شي، نو لور

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{(1-\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

د نیمکونج فرمولونه د تانجنت لپاره دي:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که کیږدو

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$$

نو لرو:

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

د ځل و زیاتون ته کېمتوالی Product-to-sum identities

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}$$

د زیاتون- و- ځل ته کېمتوالی (برابرون) Sum-to-product identities

که د x لپاره $(x+y)/2$ او y لپاره $(x-y)/2$ کیږدو نو لرو

$$\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x)-\cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

که $x, y,$ او z د کوم دریګوډي کونجونه وي یا په نورو کلیمو، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیمګردی یا نیمدایره $\text{if } x+y+z=\pi = \text{half circle},$ =که

$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x . \tan y . \tan z$ نو یا او

$\text{and } \sin(2x)+\sin(2y)+\sin(2z)=4\sin(x)\sin(y)\sin(z).$

تریګونومتریکي په څتوالی Trigonometric conversions

هر تریګونومتریکي فنکشن د بل تریګونومتریکي فنکشن سره سیده یا سیخي اړیکی لري۰ داسې اړیکی د په څښ اړیکو له لارې افاده یا ویل کیدی شي، لکه : که φ او ψ د تریګنومتریکي فنکشنونو د یوې جوړې نمایندکی وکړي ، او arcψ دې د ψ په څټ وي، داسې چې ψ(arcψ(*x*)) = *x* ۰ نو φ(arcψ(*x*)) کیدی شي د یو الجبري فنکشن ترم *x* په څیر وویلی شي یا افاده شي۰

داسې فرمولونه د لاندې جدول له لارې ښوول کیدی شي : موږ دا نوره نه روښانه کوو او په لاندې جدول پوهیدی شو

cot	sec	csc	Tan	cos	sin	φ \ ψ
$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}$	x	**sin**
$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	x	$\sqrt{1-x^2}$	**Cos**
$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	**Tan**
$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**sec**
x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	**cot**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 0 = \sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 = \cos 45^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

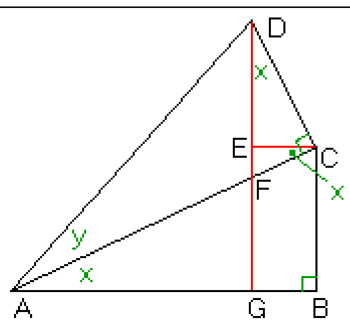
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 90^\circ = 1 = \cos 0^\circ = \cos 0$$

د طيلايي نسبت φ له امله لرو

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \varphi/2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\varphi-1}{2} = \frac{1}{2\varphi}$$

جيومتريکي غوښتنه (ثبوت)Geometric proofs



sin(*x* + *y*) = sin(*x*) cos(*y*) + cos(*x*) sin(*y*)

په مخامخ ښيره کي کونج x د ولاړکونجيز درېکودي ABC برخه ده، او کونج y د و لاړکوډيز درېکودي ACD برخه ده ۰ نو جوړښت DG و AB باندې ولاړ او CE و AB ته غبرګ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

BAC = Angle xکونج= ACE کونج

EG = BC. کونج CDE= x

$$\sin(x+y)$$

$$=\frac{DG}{AD}$$

$$=\frac{EG+DE}{AD}$$

$$=\frac{BC+DE}{AD}$$

$$=\frac{BC}{AD}+\frac{DE}{AD}$$

$$=\frac{BC}{AD}\cdot\frac{AC}{AC}+\frac{DE}{AD}\cdot\frac{CD}{CD}$$

$$=\frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC}{AD}+\frac{DE}{CD}\cdot\frac{CD}{AD}$$

$$=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y).$$

cos(*x* + *y*) = cos(*x*) cos(*y*) − sin(*x*) sin(*y*)

Using the above figure:د پورته ځيرې څخه کار اخلو

$$\cos(x+y)$$

$$=\frac{AG}{AD}$$

$$=\frac{AB-GB}{AD}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{AB - EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} - \frac{EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} - \frac{EC}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

د $\sin(x-y)$ او $\cos(x-y)$ فرمولونو ښوونه

د $\cos(x-y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه ساده ښوول کیږي، که د $\cos(x+y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه وپیژنو

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

که په فمرول $\sin(x+y)$ کې د y په ځاي -y کیږدو نو لرو

$$\sin(x+(-y)) = \sin(x)\cos(-y) + \cos(x)\sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجوړه فنکشنونه دي، نو لرو

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y).$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

موږ په پورته فرمول $\cos(x+y)$ کې د y په ځاي -y ږدو ، نو لرو

$$\cos(x+(-y)) = \cos(x)\cos(-y) - \sin(x)\sin(-y).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د فاکت څخه، چي ساین جوړه او کوساین ناجړه فنکشنونه دي، نو لاس ته راوړو

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y).$$

۶ . ۵ تریګونومتریکي یا کونجکچ فرمولونه

د کونجبلواك یا کونجفنکشن د شمیرلو لپاره، له دا اوس څرګند فرمولونو، یوه د اړیکو ډله شته) د زیاتون)جمع(تیوریم(، له کومو یی چی دلته یوڅو راوړل غواړو .د همغو فرمولتولګه) کتاب چي فرمولونه په کي راټول وي(کی لاندې فرمولونه پیدا کیدی شي

$$\sin(x \pm y) = \sin x.\cos y \pm \cos x.\sin a; ....(6,19)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x.\cos y \mp \sin x.\sin y; ....(6,20)$$

$$\sin 2x = 2\sin x.\cos x; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; ....(6,21)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x.\tan y}; ....(6.22)$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}; ....(6,23)$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2};$$

$$cox + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}; ....(6,24)$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$$

ددې اړیکو ښوونه یوه مهمه کورني دنده ده، خو څه به په دې لاندې بېلګه کې وښایو

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۶ . ۱۲ :

Cos(x+) = cosx.cosy –sinx.siny

مونږ له ځيرې ۴ . ۱۸ څخه مخ ته ځو، او ځاي په ځاي کوو $\gamma_2 = y$ ، $\gamma_1 = x$ ، نو لرو $\gamma = x + y$.

د کوساين له جملې لاس ته راځي

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2,\quad a^2 = p^2 + h_c^2,\quad b^2 = q^2 + h_c^2,\quad c^2 = (q+p)^2$$

$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - (q+p)^2,$$

$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - q^2 - 2qp - p^2$$

له $2ab\cos\gamma = 2h_c^2 - 2qp$ څخه لاس ته راځي

$$\cos\gamma = h_c^2/ab - qp/ab = (h/a).(h/b) - (q/b).(p/a),$$

$$\cos\gamma = \cos\gamma_1 . \cos\gamma_2 - \sin\gamma_1 . \sin\gamma_2$$

$$\cos(x+y) = \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$$

څه چې د ښوولو وو

يادونه: ځای په ځای بايد دې ته ګوته ونيسم، چې د ضرب او وېش تړاو نسبت و جمعې اړ تفريق يا زياتو او کمون تړاو ته کلک يا کلک نښتی دی.

بيلګه ۴ . ۱۳ – لاندې ويينې يا افادې دې ساده شي

$$a)\ y = \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

دې (۶ . ۲۳) پسې د مساوات(برابرون) ښی اړخ د لاندې سره يو- يا هم ارزښته ده.

$$2\sin\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} - \alpha - \frac{\pi}{4}}{2} = 2\sin\alpha\cos(-\frac{\pi}{4}) = 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له کوم چې $y = \sqrt{2}\ \sin\alpha$ لاس ته راځي

$$b)\ y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi)$$

د (۶ . ۲۰) پسې لرو

$$\cos(\frac{3}{2}x + \pi) = \cos\frac{3}{2}x \cdot \cos\pi - \sin\frac{3}{2}x \cdot \sin\pi.$$

دا چې $\cos\pi = -1, \sin\pi = 0$ دی، نو لاس ته راځي

$$y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi) = -\cos\frac{3}{2}x.$$

دې نتیجې ته د (۶ . ۱۶) استعمال وروسته هم رسیږو، له کومې چې لاس ته راځي

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \text{ ist.}$$

بیلګه ۶ . ۱۴ برابرون یا مسات $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi,$ دې وښوول شي

دی $1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او له دې سره

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} - (\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2})}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}} = |\sin\frac{\alpha}{2}| = \sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{(wegen } 0 \le \alpha \le 2\pi).$$

۶ . ۶ تمرینونه

۱ – بنستیزه هندسه یا ځمککچونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۱ – لاندې کونجونه دې په لینده اندازه همداسې په درجه اندازه(د څسیما یا دسیمال یا لسمیز او سمساګیسیمال (د ۶۰ په بنسټ جوړ شوي ګڼل(که غواړې شمیرل) برخو) ورکړ شوي دي،

1.1.1.a) $15°$	b) $225°$	c) $105°$	d) $277{,}5°$
1.1.2.a) $\frac{\pi}{8}$	b) $\frac{\pi}{12}$	c) $2\pi+\frac{\pi}{2}$	d) $\pi-\frac{\pi}{3}$
1.1.3.a) $4{,}24°$	b) $70{,}9°$	c) $31°\ 17'\ 20''$	d) $228{,}1923°$
1.1.4.a) 5,19	b) 0,22	c) 2,31	d) 1

۱ . ۲ – یو درېګوډی له $a = 4{,}5$ cm , $b = 12{,}2$ cm او $c = 11{,}7$ cm سره ورکړ شوی دی. دا دریګوډی جوړ کړی ! د اړخونو نیموونکی وکاږی، د منځ ولاړې ، کونجنیموونکي او جګې، همداسی یي ګردیخوندي او خوندیګردي ګردی(یعنی دباندې او دننه ګردی) رسم کړی.

۱ . ۳ – لاندې دریګوډی جوړ کړی

a) $a = 11{,}7$ cm , $b = 9{,}2$ cm , $\gamma = 43{,}5°$

b) $c= 16{,}1$ cm , $\alpha = 84{,}6°$ $\beta = 51{,}9°$

وښایي چی ولی دواړه دریګوډي ورته دي!

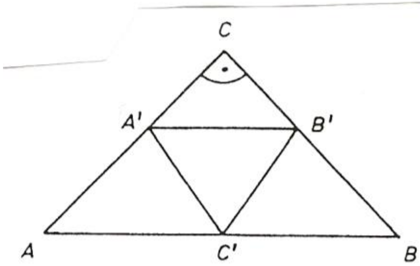


Bild 4.20 ځیره

۱ . ۴ – یو مساوي پښبیز، ولاړکونجیز درېګوډي ABC ته یو مساوي اړخیز دریګوډی A'B'C' داسی په دننه کی ورکړ شوی چی $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ څغلي او C' په $\overline{AB}$ پرته ده (ځیره ۴ . ۲۰ دې وکتل شي).

ورکړی $\overline{A'B'} = \overline{A'C'} = \overline{B'C'}$ د $\overline{AC} = \overline{BC}$ سره!

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی د خیري ۴ . ۲۱ سره سم په لیدوړ ډول په دننه کی یوه مربع ورکړ شوې. د مربع اړخونه وشمیری

الف) له کانتو څخه

ب) له هیوپوتینوزپېرخو څخه

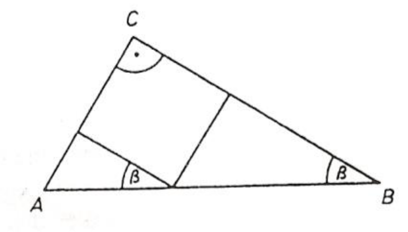


Bild 4.21

۲ . د جبشمیرنی سره د ارزښتونوټاکنه

۲ . ۱ – له لاندي کونجونو څخه د لاندېکونجونو لپاره فنکشن ارزښتونه پیداکړی:

a) $\alpha = 47{,}15°$, b) $\alpha = -390°$, c) $\alpha = 7{,}784$, d) $\alpha = 13{,}195$

۲ . ۲ – کونج β دې د $\sin\beta = a$, $\cos\beta = a$, $\tan\beta = a$, $\cot\beta = a$ څخه د

a) $a = 0{,}8290$, b) $a = -0{,}2907$, c) $a = -2{,}145$, d) $a = 0{,}8660$

لپاره وشمیرل شي (په اوبی کی دې د الفا په ځاي بیتا ولیکل شي !!!)

۳ . په ولاړکونجیز دریګوډي کې شمیرنې

۳ . ۱ – په ولاړکونجیز ($\gamma = 90°$) دریګوډي کې معلوم دي

الف) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm ، ب) $a = 5$ cm, $c = 12$ cm

کوم ارزښتونه $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ لري؟

۳ . ۲ – ولاړکونجیز دریګوډي کې ($\gamma = 90°$) نه ورکړشوي کونجونه او نه ورکړ شوي اړخونه وشمیری ، لاندې لوبي موږ ته معلومي دي:

a) $a = 50$cm, b) $a = 40$cm, c) $b = 70$ cm, d) $c = 65$ cm

$b = 78{,}1$ cm $\alpha = 43°36'$ $\alpha = 18°55'$ $\beta = 59°29'$

۳ . ۳ – وشمیری ! A , h_c او همداسی د ټاکلي مساوي پښېز دریګوډي ورکړ شوي پاتې کونجونه او اړخونه ($\beta = \alpha$, $a = b$):

a) $a = 66$cm, b) $c = 22{,}4$ cm, c) $a = 38{,}9$ cm, d) $c = 30{,}3$ cm

$c = 130$ cm $\alpha = 47{,}8°$, $\gamma = 33{,}3°$ $\gamma = 48{,}2°$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) درې قوې دې د زوريا قوت $F_1 = 167,5N$, $F_2 = 112\ N$ او $F_3 = 157\ N$ سره ورکړ شوې وي، چې په ګډه یو درېګوډی جوړوي. د دې درېګوډې کونجونه چې له اړخونو رابند دي، څومره لوی دی؟

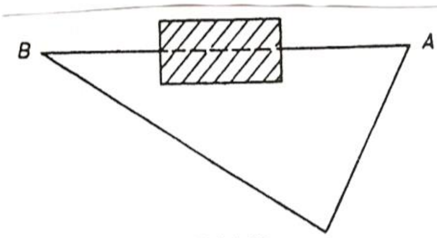


Bild 4.23 ځاکره

پ) دوه ټکي A او B چې يوه کور يې مخه پټه کړې وي، يو له بل څومره لرې دي، که $\overline{BC} = 75,25\ m$, $\overline{AC} = 51,75m$ او $\sphericalangle BCA = 71°15'\ 45''$ وي (ځيره ۴ . ۲۳)

ت) د دوه يخ هاکي لوبغاړو S_1 او S_2 ترمنځ يو د مخالف ټيم لوبغاړی G ولاړ دی. S_1 په داسی ډول توپ و S_2 ته وهي چې توپ په يوه ديوال ولږيږي. (ځيره ۴ ، ۲۳ وګوری). د دواړو لوبغاړو S_1 او S_2 لريوالی څومره دی؟ که د دوي واټن له ديوال $a_1 = 2,5m$ همداسی $a_2 = 6,5\ m$ وي او توپ د يوه دې ديوال سره په يوه کونج $\propto = 42°$ ولږيږي.؟

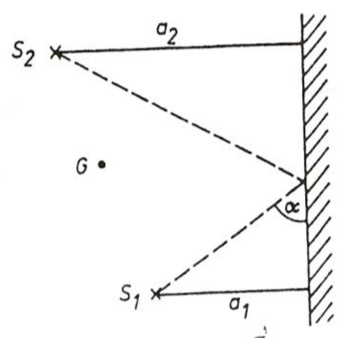


Bild 4.24 ځاکره

۵ . د تريګونومتريکي يا درېګوډيزو(مثلثاتي) فرمولونو استعمال

۵ . ۱ – بې له جبشميري او جدول دې نور دوه درې فنکشن ارزښتونه دې وشميرل شي، که ورکړ شوي وي: $(0 < \alpha < 2\pi)$:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ c) $\tan\alpha = \sqrt{3}$ d) $\cot\alpha = -\sqrt{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۵ . ۲ - لاندې مساوات وښايئ:

5.2.1. a) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ b) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

c) $\cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = 1$ d) $1 + 2 \cos \alpha = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$

5.2.2. a) $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$ b) $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$

c) $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$ d) $\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$

5.2.3. a) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ b) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

c) $\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$ d) $\cot 3\alpha = \frac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}$

5.2.4. a) $\cos 2\alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$ b) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 4 \sin^2\frac{\alpha}{2} \cos^2\frac{\alpha}{2}$

c) $\cos 2\alpha = 1 - 8 \sin^2\frac{\alpha}{2} \cos^2\frac{\alpha}{2}$ d) $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$

5.2.5. a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{4}\sin 4\alpha$

b) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = -(\cos \alpha + \sin \alpha)$

c) $\sin \alpha + \sin (\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \sin (\alpha + \frac{4\pi}{3}) = 0$

d) $\sin^2 (3\pi - \alpha) + \sin^2 (6,5\pi + \alpha) = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې څنګه یوه ګڼډیرۍ پر بله ګڼډیرۍ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \qquad (7,1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په رییلګڼونډیرۍ کې اوبی یا حل نه لري، نو له دې امله باید (7 , 1)د ګڼنو ډیرۍ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, ...(7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼې، چې د لومړي ځل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ...(7,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکو : دا پورته د لاندې سره

$$i^2 = -1 \qquad (7,4)$$

د (7,1) ځاي نیسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رییل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینارګڼ imaginär(لاتین: فقط خیالي)یوون(واحد)وایو.

برابرون

$$x^2+a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a \quad , a > 0 \qquad (7,5)$$

کیدی شي په لاندې ډول ولیکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}.i, ...(7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a}.i$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, ...(5,7)$$

اوس د ایماجینار ګڼ یوون(واحد) تولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, ...(5,8)$$

ایماجیناریوون(واحد)z= i یو ځانګړی ایماجینارګڼ b=1 دی

د تولیزې څلوری (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, ...(7,9)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې ډول د څلورئ پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2 / 4$$

=>لاس ته راځی یالرو

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 = +(q - p^2/4) \qquad (7, 10)$$

$$(x+p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7, 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x+p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$$

نو لرو

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \ldots\ldots\ldots\ldots (7,12)$$

د$p^2 = 4q$ لپاره رییل «ډبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رییل اوبیوني یا حلونه منځ ته راوړي٠

که $P^2 < 4q$ وي، نو رییل اوبی نه شته دئ

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a, b \in R$$

د دې فورم یا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کیږي

$$z = a+bi\ ,\ i^2 = -1;\ a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډیرۍ په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z} = a - bi, ... (7,14)$$

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګیري کمپلکس ګڼ بلل کیږي۰ لنډ کنجوګیري کمپلکس ګڼ یا اوښتی ګڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, ... (5,15)$$

د دې مطلقه یا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې ریيل همدا رنګه ایماجینار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کیږي، که دوي په ریيل او ایماجینار برخه کې یو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ تل په پام کې لرو، چې $i^2 = -1$ اېښنول شوې

ګډوله يا کمپلکس عدد کيدی شي په سطحه يا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سرې د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شميرنه کوي، لکه د حقيقي اعدادو سره او په پام کې نيسي چې: $i^2 = -1$

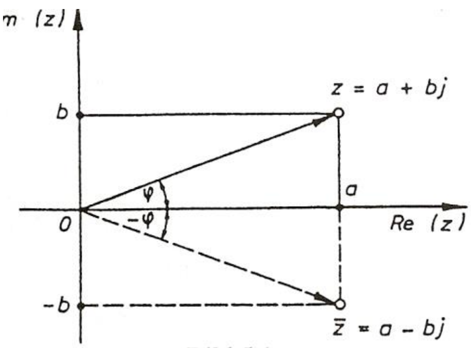


Bild 5.1

موږ دې سيستم ته پروت ولاړ سيستم وايو يا کواورديناتسيستم Koordinaten systm

پورته څېره دې وکتل شي

پروتولاړ سيستم ته د (x,y) - سيستم هم وايي په پروتولاړ سيستم کې پروت څرخون(محور) د x - محور ته د هوارې ياسطڅي ريبلبرخه او ولاړ محور يا د y – محور ته بېاېماجينار برخه وايي لکه څنګه، انځور شوي دي۰ په دې توګه په پروتولاړ سيستم کې يو ټکی منځ ته ر اځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي۰(موږ دا اوس دا برخه نوره نه څېړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځورېږي او کاروني يا عملي يې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) يادونه : هغه ګران هيوادوال، چې نوي د شميرپوهنی د دې برخې سره بلديږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل څنې وييونه يا لغاتونه ياکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته يا لاندې څېرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زياتون او کمون څنګه دی

۷ ۰ ۱ زياتون او کمون:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې څیرو ته دې پام وي او ګورو، چې رییل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), ...(7,17)$$

بیلګه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$
$$\Rightarrow$$
$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13}$$
$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعنې د(-z2) په زیاتون)کیدی شي د څېرې ۵ (په همدې توګه د څېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

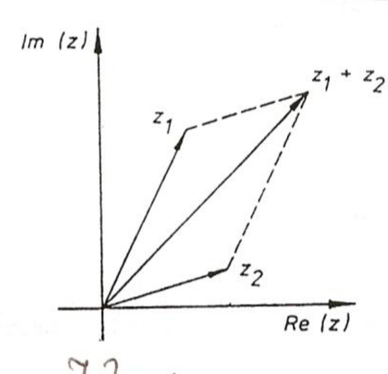


Bild 7.2 څېره

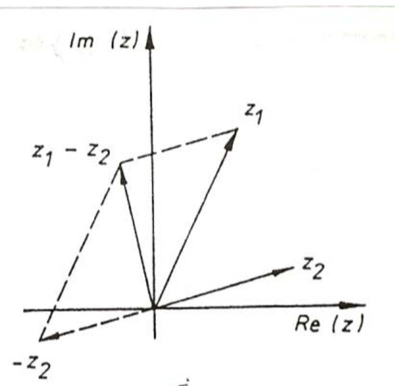
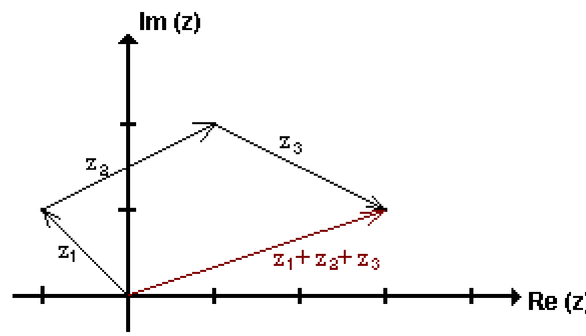


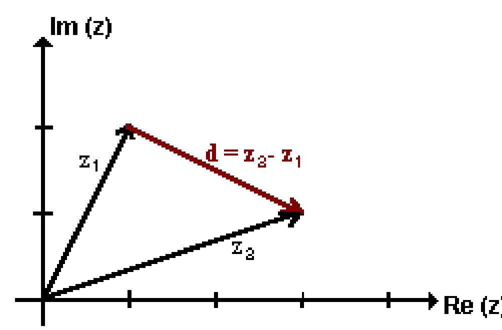
Bild 7.3 څېره

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا لاندې:



په پورته او لاندې څیرو کې د کملپکس ګڼونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیږي٠



دکملپکس ګڼونو ارزښت

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کیيږي٠

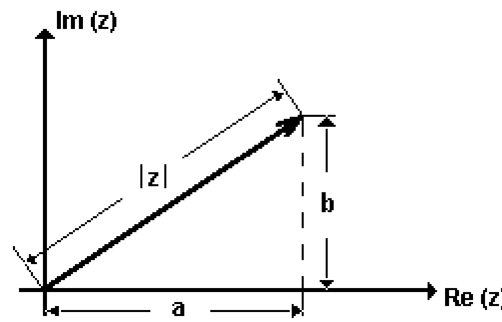
دا د په |z| سره ښایو او د پیتاګوراس(فئثاغورث) د جملې

سره ښوول کیږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی لیکه

هم وکتل شي٠ مخامخ څیره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښایي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

په درې ګوډي کې د اړخونو ځانونيونه يا تباسب له امله باور لري

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, ...(7,18)$$

برسيره پر دې باور لري:

$$z_1 + z_2 = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

۷ . ۲ د کمپلکس ګڼونوځل:

د ورسره بلد نوک ايښوولو له لارې لاس ته راځي

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$$
$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 (-1)$$
$$\Rightarrow$$

نو بارورل ري

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \qquad (7, 20)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکې وي،دا به راته ګران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي۰ دا لاندې هم ساده ازمایل کیدی شي

$$\overline{z_1.z} = z_1.z_2 \quad , \quad |z_1 .z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بیلګه ۷ ۰ ۲

د $z.\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2+(-ab+ab)i = a^2+b^2$

او (۱۵ ، ۷) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7, 22)$$

۷ ۰ ۳ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1 i):(a_2+b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{\bar{z_2}}}{z_1\bar{\bar{z_2}}} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} i \qquad (7,23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسې لاس ته راځي

$$|\frac{Z_1}{Z_2}|=\frac{|Z_1|}{|Z_2|},\left(\overline{\frac{Z_1}{Z_2}}\right)=\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوهمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}=\frac{\overline{Z}_1.Z_2}{\overline{Z}_2.Z_2}=\frac{(a_1-b_1i)(a_2+b_2i)}{(a_2-b_2i)(a_2+b_2i)}=$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2-a_2b_1)i}{a_2^2+b_2^2}=$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}-\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i=\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ ۰ ٤ :د Z1 او Z2 لپاره له سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1:Z_2=\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{2-3i}{3+2i}=\frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)}=\frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2}=\frac{13}{13}i=-i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z=1-i$ b) $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

c) $z=2(1-\sqrt{3}i)$ d) $z=-1-i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای وټاکئ، د کومو لپاره چې باور لري:

a) $|z| = \sqrt{2}$ b) $|z| < \sqrt{2}$ c) $|z| > \sqrt{2}$ d) $|z| = r$

۲ – جمعه او تفریق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(1+2i)+(2+i)$ b) $(-2+i)+1-2i)$

c) $(1-2i)-(1-2i)$ d) $(-1-2i)+(2-i)$

۲ . ۲ - د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(22 + 5i) + (2 + i)$ b) $(3 + 2i) - (5+2i)$

c) $(1+2i) - (1+2i)$ d) $i -(1-2i)$

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقیقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(2 + \sqrt{3}\,i) . (3-2i)$ b) $(3 + 2\sqrt{2}\,i) . (3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1 + \sqrt{5}\,i).(1 - \sqrt{5}\,i).(13 - 12i))$ d) $\sqrt{3 + \sqrt{7}i} . \sqrt{3 - \sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(x + y\,i)\,(2x + yi)$ b) $(\sqrt{x} + \sqrt{y}\,i)(\sqrt{x} - \sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a - 3bi\right) \cdot \left(\frac{4}{3}a + 5bi\right)$ d) $(c - \sqrt{d}\,i)(-c - 2\sqrt{d}\,i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج یا ماتلاندې حقیقي ورګرځوئ (a ، b حقیقي دي)

3.3.1. a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\frac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{56+33i}{12-5i}$ d) $\frac{63 + 16i}{4 + 3i}$

3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\,(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رايوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګڼونه يا اعداد ورکړ شوي.

$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2 = -\frac{1}{4}-\sqrt{3}\,\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاريتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرينونوکې x وشمرئ.

$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2 = -\frac{1}{4}-\sqrt{3}\,\frac{i}{4}.$

وشميرئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.1. a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1 + z_2|$ b) $|z_1 - z_2|$ c) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1| \cdot |z_2|$ b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1 \cdot z_2|$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

a) $x^2 + (1 + i)\,x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\,x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\,\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

d) $16\,x^2 + 8\,(i + 1)\,x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ - د ښوونې(ثبوت) متودونه

په شمیرپوهنه کې داسې مخ په وړاندې ځو، چې د ځینو نیونو یا فرضیو په فرمولولو سره، غوښتنو یا ښوونو او یا لکه تراوسه د ثبوتولو پرابلم (د ګڼپوهنې جملې په څیر) منځ ته راځي، چې دا نیونې او غوښتنې ویناوې دي. په جملو کېږد دې ماتماتیکي یا شمیرپوهنیزه تړنه بیا ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه ده(مخ ته دې وکتل شي)یانې A => B دا غوښتنه د ربښتیا ارزښت w غوښتنه B کې نغښتې او دا اوبې یا حل B له V او د دې تراوسه اوبې- یا حل شوو جملو لاس ته راځي. د دې لاس ته راوړنو لپاره بیلابیلې لارې شته ، چې په لاندې کې یې څیړو

۸ . ۱ سیده یاسیخه (مستقیمه) ښوونه

په سیده ښوونه (ثبوت) کې سړی له یوې وینا A څخه مخ ته ځي، چې ربښتیاارزښت یې څرګند دی او په دې لاس ته راوړنې پسې د B وینا لاس ته راوړي.

دا وینا B هم ربښتیا ده، ځکه چې له یوې ربښتیا پریمیسې Prämisse (نیونې یا فرضیې) څخه ربښتیا کونکلوزیون Konklusion (لاس ته راوړنه یا نوره هم ښه ښوونه یا ثبوت)(د اینمپلیکیشن ۱ او ۲ لیکه د ربښتیاارزښت په جدول کې) له یوې ربښتیا پریمیسې څخه د نارښتیا کونکلوزیون لاس ته راوړنې نارښتیا دي (ایمپلیکیشن ربښتیا ارزښت ۲ ـم جدول).

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه : سيده اوبيونه يا حل:

نيونه V : $x \geq 1$

غوښتنه B : $6x+3 \geq 3x + 6$

اوبی : وينا A ، چې رښتيا ارزښت w يې جوت دی، نيونه يې $x \geq 1$ ده۰ له 3 سره ځل له امله لاس ته راوړنې لرو چې په لاندې ډول دی$3x \geq 3$: د 3 زياتون له لارې لرو: $3x + 3 \geq 6$ د 3x زياتون له امله لاس ته راځي:

$$6x + 3 \geq 3x+6.$$

بيلګه:

د يوه ناټيک اوبيونې يا حل کارونه (متود)

د ښوونې دی $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$

د ښوونې وړ وينا څخه لاندې لاس ته راوړنې لرو:

$$(a+b)^2 \geq ab$$

$$a^2+b^2+2ab \geq 4ab$$

$$a^2 -2ab+b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

لاس ته راوړل شوې ويناوې $(a-b)^2 \geq 0$ بې بنديزه رښتيا دي۰ مګر دا د ښوولو وينا يواځې د شرايطو$a \geq 0$, $b \geq 0$ لاندې باور لري۰ له دې امله که له رښتيا وينا څخه غوښتل شوې يا د ښوولو ويناو ته نه شي راتلی(سيده ښوونه) او په ناسداٍه يا غيرمستقيم ه ښوونه يا اوبيونه باندې استعمال شي نو ګټوره به وي، چې په لاندې توګه تر څېړنې لاندې ونيول شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ ۰ ۲ ناسیده ښوونه یا - ثبوت:

په ناسیده ښوونه کې له یوه نفي یا نیګیشن یا نه والي څخه مخ ته ځو، چې A « ناغوښتنه» او له دې یوه وینا B لاس ته راوړل کیږي، کومه چې نارښتیا ده۰ وینا یعنې نفیې غوښتنه یا ثبوت هم نارښتیا دی، ځکه چې له یوې نارښتیا نیونې څخه یوه نارښتیا ښوونه یا ثبوت لاس ته راتلی شي(د ایمپلیکیشن څلورمه کرښه).

له یوې رښتیا نیونې څخه د یوې نارښتیا ثبوت لاس ته راوړنه نارښتیا ده۰ (د ثبوت د

رښتیا جدول څخه) که د غوښتنو نفی نارښتیا وي، نو غوښتنه بیا په دې اوبیونې یا حل کې رښتیا ده۰

بیلګه : ناسیده ښوونه یا ثبوت

نیونه V : a , b دې رییل ګڼونه وي او وي دې: $a \geq 0, \quad b \geq 0$

ښوونه یا غوښتنه B :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

اوبیونه : د غوښتنو نفیې ده $\frac{a+b}{2} \prec \sqrt{a.b}$

د پورته نابرابرون له څلورې یا مربع کولو له امله لاس ته راوړنه لرو:

$$(a+b)^2/4 < a.b$$

دواړه لورې له څلورو سره ضربوو، نو لاس ته راځی

$$(a+b)^2 < 4a.b$$

له څلورې وتنې یامربعوتنې څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^2+b^2+2ab < 4ab$$

په دواړو لورو د 4ab کموني څخه لاس ته راځي

$$a^2-2ab+b^2 < 0$$

د نابرابرون کينه لور د څلورۍ ۰ مربع په بڼه ليکل کيدی شي او هيڅکله له صفر څخه نه شي کوچنی کيدی۰ دا په دې مانا، چې $(a+b)^2 < 0$ نارښتيا دی يا غلط دی، نو له دې سره $(a+b) < ab$ نارښتيا دی يانې

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

رښتيا دی ۰

۲ – غوښتنه B :د ۲ ريښه يا جذر $\sqrt{2}$ ايرشنل دی

اوبيونه يا حل : د غوښتنې نفيې ده، چې : د ۲ ريښه $\sqrt{2}$ ريشنل ګڼ دی (د ريشنل ګڼونو لپاره دې برخه ۳ وکتل شي)، نو بايد بيا دوه ټولريشنل ګڼونه q, p, د $q\neq0$ سره شته وي، چې دا باوري شي:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

له دې پورته برابرون سره p^2 يو جوړه((جفت) ګڼ دی۰ نو له دې امله p هم يو جوړه ګڼ دی، ځکه چې يواځې د جوړه ګڼ مربع يا څلورۍ جوړه کيدی شي $p=2p'$ له مربع يا څلورۍ کولو او پر ځاي اينوولو لاس ته راځي:

$$P^2 = 4p'^2$$ ،

$$2q^2 = 4p'^2$$

$$q^2 = 2p'^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له اخرنی برابرون لاس ته راځي، چې q هم یو ځلوری یا مربع ګڼ دی٠ په دې پسې لرو p او q پر ۲ ویشونی دی، یانې پرویشپردی نه دی٠ که پرویشپردي ټول ګنونه p او q له $\sqrt{2}$

سره شته نه وي، نو دا ډول ټولګنونه نه شي کیدی، چې شته یا موجود وي٠

۸ ۰ ۳ د پوره ایندکشن له لارې ښوونه

د پوره ایندکشن ثبوت یا حل د هغو غوښتنو لپاره کارول کیږي، چې د یوه ټاکلي ګڼ (n0 صفر باید لږ. د ن د پښی لاندې ولیکل شي) څخه د ټولو پیدایښتي ګڼونو لپاره باوري کیدی شي٠ یانې دلته نوینه داده، چې یوه وینا د لپاره که باور ولري، نو دا بیا د ټولو پیدایښت ګڼونو لپاره باور ي کیدی شي٠

بیلګه ۱ :

د ټولو $n \geq 0$ لپاره ۲ په توان دn له صفر لوي یا له صفر بسره برابر دي یعنې باور لري: $2^n \geq 0$

بیلګه : د ټولو $n \geq 0$ لپاره باور لري 1+3+5+… 2n+1)= n²

د پوره ایندکشن د ښوونې لپاره د « پوره ایندکشن پرینځیپ بنسټ» مخ ته پروت دی:

که یوه وینا دn =n0 یا(په لاندې، که ن،ج، ته پورته شو،نو صفر په پښه کېلیکل شوی)

$n = n_0$ لپاره باور ولري او که د دې وینا د یوه په خوښه پیدایښتي ګڼ n = k لپاره اور لرلو څخه د n = k+1 لپاره باوریوالی ترې لاس ته راشي، نو دا وینا د ټولو پیدایښتي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ریښتونې ده ٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسې په ترتیب د ایندکشن ښوونه په دوه پلونو یا قدمونو سرته رسیږي

۱ - د ایندکشن پیل

ښوول کیږي، چې دا وینا د $n \geq n_0$ لپاره باور لري

۲ – د ایندکشن پل

اوس باید یو ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه وښوول شي۰ له دې امله د ایندکشن پل یا له برخه پلونو جوړ دئ

۲ الف: د ایندکشن نیونه :

نیول کیږي، چې وینا د $n = k \geq 0$ لپاره باور لي او دا نیونه په V فرمولبند کیږي

یادونه V د نیونې لپاره ځاي پرځاي کیږي یا راوړل کیږي۰

۲ ب – د ایندکشن غوښتنه:

غوښتل کیږي، چې دا وینا د $n = k+1$ لپاره باور لري او دا غوښتنه په B فرمولبندي کوو۰ دا په ګوته کوو، چې B دلته د غوښتنې پرځاي لیکو

۲ ج – د ایندکشن ښوونه :

ښوول کیږي، چې B له A څخه لاس ته راځي: A=>B

بیلګه ۱ :

۱ – د $n = 0$ لپاره باور لري $2^{\circ} = 1 > 0$

۲ ۰ ۱ ۰ V ته :

$2^k > k$

و ۲ ۰ ۲ B ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2^{k+1} > k+1$

۲ ۰ ۳ له B <= V : له $2^k > k$ او $2 > 1$ څخه د زياتون له امله لاس ته راځي :

$2 + 2^k > k+1$

او له دې لاس ته راځي: $2.2^k > k+1, 2^{k+1} > k+1$

بيلګه ۲ :

۱ ۰ د $n = 1$ لپاره باور لري $1 = 1° = 1$

و ۲ ۰ ۱ V ته: $1+3+5++\ldots+(2k-1) = k^2$

و ۲ ۰ ۲ B ته:

و ۲ ۰ ۳ B <= V ته: له نيونې څخه د زياتوون $2k+1$ زياتونې او له دې د ښي خوا د يوه بينومځلورى(-مربع) په څير انځورونې څخه لاس ته راځي:

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1=k^2+2k+1$

او له دې د ښى خوا انځورونې څخه د بينوم ځلورى(-مربع) لاس ته راځى :

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)= (2k+1)^2$

يادونه : د V او B پر ځاي کړى شو، چې نيونه او غوښتنه وليکو، يانې موږ درې څه لرو، چې نيونه غوښتنه او ښوونه ده۰ په هغه ورسره بلد ډول يې ښوونه د يوه پارابلم حل دى، چې ما اوبى يا اوبيونه بللى(اوبي پښتو ده او ښه کره، همدې وي يا لغات ته مناسب خپل د پښتو نوم دى، چې ورسره بلد هم يو، لکه ملګوبى، خړوبى، چې موخه ترې همدا اوبى دى او په نورو ژبو کې هم همداسې دى)

دلته د شميرپوهنې سم اند درس ته د پاى ټکى ږدو، کۀ نور څه مو ښه مخ ته راغله هغه به بيا د ترنې په ډول ورسره مل کړو۰ ستاسو وړانديزونو ته هم سترګى په لار يم۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ . ۴ تمرینونه

۱ – سیده وښایي

الف) له $a + 1/a = b$ څخه لاس ته راځي $a^3 + 1/a^3 = b^3 - 3b$

ب) د دوه تیرو کونجونو α ، β لپاره صدق کوي

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$$

۲ – ناسیده وښایي :

الف) د ټولو x لپاره ، چې وي $0 < x < \infty$ ، صدق کوي

$$(3x - 4) / (2x + 4) > 1$$

ب) $\sqrt{2}$ یو ایریشنل کن دی

۳ – د پوره اندکشن له لارې یې وښایئ

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(n+1)\,n}{2}.$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{(2n+1)(n+1)\,n}{6}.$

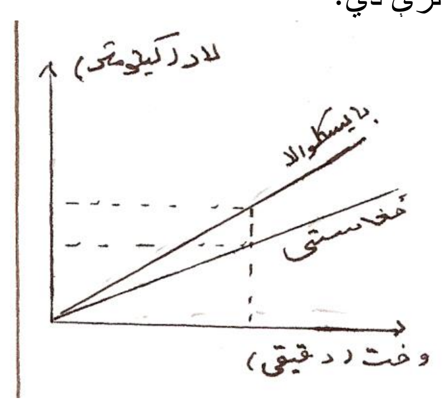
c) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۹ ۰ کرښیز- یا خطي-یا لاینیز مساوات د یوې متحولې سره

پیل بیلګه

یو بایسکل ځغلوونکی او یو پلی له یوه ځایه په همغه وخت خوزي یا حرکت کوي، کوم چې په ګراف کې ښکاره شوی دی(که د ګراف ښکاره راته ناشوني شول بخښنه غواړم۰ که بل چا دا کار وکولی شو نو دا به یې هم مرسته وي، خو پرې پوهیدل کومې ستونځې نه لري) بایسکل په ګړۍ کې ۱۵ کیلومتره ځغلي او پلی ۱۰ کیلو متره په ګړۍ کې ځغلي. دوي پس له یونیم ساعت سره یوځاي کیږي. هر یو څومره لار وهي او یو له بل څومره لرې دي؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا موږ دلته، لکه په ځنو کتابونو کی چی د فنکشن د نامه لاندې یادیږي، په همغه نامه نه یادوو خو هدف به همغه وي که دا د برابرون یا مساوات په نامه وبولو .
وخت) په دقیقه (په t ښایو لار) کیلومتر(په s ښایو د لارانځورونی ځخه په ګراف کی څرګندیږي چی بایسکلځغلوونکی له ۶۰ دقیقو وروسته ۱۵ کیلو متره ځغلیدلي یعني 15km /h او پلی ۱۰ کیلو متره یعني 10km/h
غواړود هرڅه لمړی وښایو چی هر یو له یونیم ساعت وروسته څومره لار وهلي او بیا دویمي پوښتني ته ځواب ورکوو.
بایسکل ځغلوونکی به له دوه ساعته وروسته 2.15km = 30 km ځغلیدلی وي او پلی به 2.10km=20km ځغلیدلی وي بایسکل ځغلونکی به له tوخته وروسته t.15km
15.tkm=لار وهلي وي. دلته وخت t خپلواك اوړیدونی یا نا پژندونکی او لار s بلواك اوړیدونی یا ناپیژندونکی یعني د t په واك کی دئ. دا کلیمي به بیا د فنکشن او څیرونو په برخو کی پوره تر څیړني لاندې ونیول شي. د بایسکل ځغلوونکي وهلې لار، چی په r یې ښایو برابرون داسی لیکو:

$$S_r = 15.t; t \in Q_0^+$$

د بایسکل ځغلونکی وهلی لار، tچی د بایکلځغلولو وخت دی طبعآ زیاتیز یا مثبت دئ ورته دپلي چی په lیې ښایو وهلي لار هم تاکل کیږي،یعني د l وهلی لار:

$$S_l = 10.t; t \in Q_0^+$$

له دې سره مو وښوول چی دواړه له پیل تکي له 1,5 ساعته یو له بل څومره لرې دي. وهل شوې لار :

د بایسکل ځغلوونکي $S_r = 15.1,5 = 22,5km$

د پلي $S_l = 10.1,5 = 15,0km$

ددې په تعقیب له 1,5 ساعته وروسته دواړه یو له بل 7,5 km لرې دي .

۹ . ۱ لاینیز- یا کرښیز مساوات :

د کرښیز مساوات فرمول د یوې اوښتونې یا مجهولې x سره داسی دئ

$$Ax = a \qquad (9.1)$$

دلته A , a حقیقي اعداد دي. د (۱ . ۶) برابرون اوبیونه (حل) دا مانا لري چی ټول هغه حقیقي اعداد وښوول شي چی که په پورته (۱ . ۹) برابرون یا مساوات کې ځای په ځای شي، د مساوات شرایط پوره کړي. د حقیقي اعداد و بنسټیز قانون (۳ – مجه

(c) ketabton.com: The Digital Library

برخه دې وکتل شي) په بنسټ کیدی شي چې د حقیقي عددد مساوات دواړه خواوي په یوه عدد سره ځل یا ضرب کړو. بی له دې چې مساوت زخمي شي. داچی ویش په د $\frac{1}{A}; A \neq 0$ ځل سره برابر دی نو لیکل کیږي

$$x = \frac{a}{A}; A \neq 0; ....(9,2)$$ ....

دا د (۱ . ۹) یواځنی ممکن حل دی۰که په ځڼ یا برعکس A = 0 وي، نو دلته دوه حالتونه یو د بل توپیروو

۱ – که $a \neq 0$ وي: دا مساوات بیا داسی دي $0.x = a; a \neq 0$

دا یو مخامخوالی یا تضاد یا نوره هم ښه په څټوالی تشکیلوي ، نو په دې حالت کی حقیقي عدد x شته نه دی چی دا(۱ . ۹) مساوات پوره کړي.

۲ - که a = 0 وي، نو بیا برابرون (۱ . ۹) لاندې شکل نیسي

0.x = 0

دا برابرون بیا د ټولو ریيلګڼونو xلپاره پوره (ډك) دی. یا برابرون پوره کوي.

دا بیا داسی هم لیکل کیږي : (په خوښه bel) = xپس دا لاندې باور لري:

برابرون (۱. ۹ .) د $A \neq 0$ لپاره یواځنی ټاکلي اوبیونه (۹ .۲) لريږد A = 0 او $a \neq 0$ لپاره اوبیونه نه لري د A = 0 او a = 0 لپاره هر ریيلګڼ x اوبیونه یا حل دی.

په دې لاس ته راوړنوکی، د یوې اووښتونې یا مجهولی سره د ریيل برابرونونو د ګڼلو ټوله تیورې خوندي ده .

یو لاینیز برابرون (مساوات) (یو برابرن، چی د برابرونونو په دواړو خواوکی د لاینیزو برابرونونو ترمونو زیاتون $a_i + x_i + b_i$ پرت وي) دا مخکني نورمالفورم (۹ . ۱) مو له مخه مخ ته نه دی پروت، پس سړی په دواړو خواو د لاینیزو ترمونو د هدف په لور زیاتون (همداسی کمون) له لارې همغه مخکني نورمالفورم ته بیرته رااړوي، دا د II . 2 بنسټیز قانون له مخی یو ورته فورمبدلون یا بڼه بدلون دی)(د اوبي یا حل ډیری تغیر نه دی خوړلی) د بیلګي په توګه لاندې مساوات ورکړ شوی

$$a_1x - b_1x + c_1 - d_1 = a_2x - b_2x + c_2 - d_2$$

پس کیدی شي چی په دواړو خوا $b_2x + d_1$ ور زیات کړو او $a_2x + c_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترې کم کړو، نو لاس ته راځي

$$a_1x - b_1x - a_2x + b_2x = c_2 - d_2 - c_1 + d_1; ....(9.3)$$

دلته هغه د x لرونکی غړي د مساوات په کیڼ لور او ثابت د برابرون په ښي لورپراته دي. داسې لیکو

$$A = a_1 - b_1 - a_2 + b_2; a = c_2 - d_2 - c_1 + d_1$$

نو دا برابرون (۳ . ۹) د برابرون (۱ . ۹) سره (ته) کټمټ (ورته) دی، که په لاندې فورم یا بڼه یو مساوات ورکړ شوی وی

$$\frac{a_1}{a_2}x = \frac{b_1}{b_2}$$

(دا ټیك هلته موخه ور یا هدفمند دی چې $a \neq 0; b \neq 0$ وي) . نو برابرون د x په لور حل کیدلی شي ، که دا په a2 ځل شي او د 0=| a1 په حالت کی په a1 وویشل شي:

$$x = \frac{a_2b_1}{a_1b_2}$$

بیلګه ۹ . ۱ :

برابرون $\frac{a^2x - b^2}{a} - \frac{a(b - ax)}{b} + \frac{b^2}{a}$ هلته موخه ور دی چې $a \neq 0; b \neq 0$ وي. ددې لپاره چې د ماتلاندې څخه ځانونه خلاص کړو، نو پورته ورکړ شوي برابرون د ګډماتلاندي a.b سره ځل کوو:

$$b(a^2x - b^2) - a^2(b - ax) + b^2 = a^2b$$

$$a^2bx - b^3 - a^2b + a^2x + b^3 = a^2b$$

اوس برابرون ترتیبیږي او راټولیګی، xله نوکانو څخه راوځي

$$a^2bx + a^3x = a^2b + b^3 + a^2b - b^3$$

$$a^2(ax + b) = 2a^2b$$

د $a \neq 0$ له امله کیدی شي په a^2 وویشل شي (a+b)x=2b

دا د لاینیز برابرونونو بنسټیزه بڼه (فورم) (۱ . ۹) ده

که ($a + b \neq 0, (a \neq -b)$ وي ، نو(x = 2b /(a + b

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوګونی یا یواځنی اوبیونه یا حل دی

که(a = -b) a + b = 0 ، نو د $b \neq 0$ له امله اوبیون شته نه ده .

هغه حالت چی ناپاي زیاتې اوبیونې یا حلونه منځ ته راځي(د x =په خوښه) ، د نیونی یا فرضیي له امله چی باید $b \neq 0$ وي، موجود نه دی.

پام:

په دې هکله زیاتې بیلګی کیدی شي راوړل شي، چې ضریب یا ځله ووني په مختلفو توانونو وي۰ زه دلته یواځې دومره یادونه کوم، چې په مساواتو کې، چې اوښتونی یا متحولې ولري، همغهسی شمیرل کیږي، لکه په رییلعددونو کې۰

دلته هم باید دې ته پام وي، چې ماتلاندې صفر نه شي۰ که چیرې اړیینې وې او یا ګرانو لوستونکو یې راوړل وغوښتل، نو زه به بیا دا کار سرته ورسوم او بیلګي به هم راوړم او که چیرې کوم د شمیرپوهنې مینه وال په دې هکله د پوښتنو ځوابونه غوښتل، زه به وهڅیږم او دا کار به هم سر ته ورسوم، که لوي څښتن غوښتل۰ زه دومره یادونه کوم، چې په دې هکله زما د شمیرپوهنې بنستیز کتاب کې زیاتې بیلګي راوړل شوي، خو نه پوهیږي، چې دا کتاب به چا ته ورسیږي او که نه

بیلګه 9 . ۲ :

برابرون $(x/a)-((a-x)/2bc)+(a-x)/3c = 1$ یواځې

د $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ لپاره موخه ور دی.

ددې لپاره چی مات لاندې له منځه یوسو، نو مساوات د ا.م.ل. 6abc ا(صلي ماتلاندې)

سره ځل کوو: $6bcx-3a(a-x)+2ab(a-x) = 6abc$

ورپسی نور، په لاندې ډول، د څرګندو شمیرلارو یا - قاعدو له لارې لاس ته راځي:

$$6bcx-3a^2+3ax+2a^2b-2abx=6abc$$

$$(6bc+3a-2ab)x=6abc+3a^2-2a^2b,$$

$$(6bc+3a-2ab)x=a(6bc+3a-2ab)$$

دا بیرته د لاینې مساوات (۹ . ۱) بنسټیزه ده، او له دې امله صدق کوي:

د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره x=a د مخ ته پراته مساوات یواځنی حل دی.

د $6bc+3a-2ab = 0$ لپاره د $0x = 0$ له امله هر رییل کڼ x اوبیونه ده.

نو لرو x=a د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره د $6bc+3a-2ab = 0$ لپاره x په خوښه

دلته د ځیرل شوو برابرونونو، چی په ساده ډول یی لاینیزوالی یا لاینیزتوب پیژندل کیږي، په څنګ کی برابرون شته چی په اصل (پرینځیپ) کی کرښیز یا لاینیز نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

مگر په لاینیز مساوات یا برابرونونو اړول کیدی شي. دلته ددې غوښتنو په څنګ کی چی د ناپیژندونکو ضریبونو a,b,c ..... لپاره شوي، زیات وخت په x هم شرطونه ایښول کیږي.
ددې لپاره لاندې کی درې ساده بیلګي راوړو:

بیلګه ۹ . ۳ :
برابرون $(8x - 9)(3x - 4) - (5x - 6)^2 = (4 + x)(3 - x) - 9$
د لومړي حل لپاره څلوری برابرڼ یا مربع مساوات دی، ځکه چی څلوری(مربع) غړي لري. د یو له بل څلولو یا ضربولو وروسته څلوری غړي له منځه ځي. یو لاینی مساوات د یوې ځانګړي سره سره پاتي کیږي:

$$24x^2 -32x-27x+36 - (25x^2 - 60x + 36) = 12 - 4x +3x -x^2 -9$$

$$-x^2 + x = 3 - x - x^2$$

$$2x = 3$$

$$x = 3 / 2$$

بیلګه ۹ . ۴ : برابرون $(2x -a) / (x-b) = 1$ یواځي هلته هدفمند دی که حل x دا شرط $x \neq b$ پوره کړي. نو بیا لرو: $2x-a=x-b \Rightarrow x=a-b$
د $x \neq b$ له امله باید باوري وي $a - b \neq b$ له دې امله لرو $a \neq 2b$ پس ورکړ شوی مساوات د $a \neq 2b$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a-b$ لري او پرته له دې ($a = 2b$) حل نه لري.

بیلګه ۹ . ۵ :
مساوات $(a / x) + (b / x) - (c / x) = 1$
یواځي هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري . $x = a + b -c$
دا نو د $x \neq 0$ له امله یواځي هلته حل دی، کله
چی $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځي د $a + b \neq c$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a + b -c$ لري، په غیر له دې ($a+b=c$) حل یا اوبیونه نه لري

بیلګه ۹ . ۶ : د لاندې مساوات څیړنه:

$$\frac{b^3c^2x-\frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3}-\frac{a^2x-\frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc}+\frac{abcx-\frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2}=0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی ټيك د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ك.ګ.ځ. تکرار شي

$$12150ab^4c^3 = 2^2.3^5.5^3.a.b^4.c^3$$
$$2880a^3bc = 2^6.3^2.5.a^3.b.c$$
$$5400(abc)^2 = 2^3.3^3.5^2.a^2.b^2.c^2$$

$$................ = 2^6.3^5.5^3.a^3.b.c^3 = 64.243.125.a^3bc^3$$

دا پورته ګڼ اصلي ماتلاندې (ا.م.ل) دئ

که برابرون د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي:

$$16a^2(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}) - 225b^3c^2(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}) + 120c.(abcx - \frac{1}{ab^2c}) = 0$$

د نوکانو یو له بل ځلولو راتول، ترتیبونه او ویشنه د x تر ځنګ ولاړو فاکتورونو یا ضریبونو $(A = 89a^2b^3c^2 \neq 0)$ څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2, \; abc \neq 0$$

د دې وظیفي لپاره د حل نور امکانات نه شته.
تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چی مات لاندې يي له ځلونو جوړ وو، غواړو چی اوس داسی ماتونه وڅیړو چي مات لاندې يي له زیاتونونو جوړ وي، چی د نوکانو له لارې په ځلوونو ټوټه کیدلي یا تجزیه کیدلی شي .

بیلګه ۹ . ۷ :
برابرون

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2b+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4x^2x^2-b^2} - 1$$

ټيك د دې نیونو سره صدق کوي $ab \neq 0$, $|x| \neq 1 / a^2$. :

(c) ketabton.com: The Digital Library

اصلي مات لاندې) ا م ل (په لاندې ډول پیداکوو

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 -1)$$
$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$
$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$
$$a^2bx - b = b. (a^2x-1)$$

$$b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a4x^2 - 1 =$$

اصلي ماتلاندی)ا م ل
د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو) چي یو یا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بندیږي(، لنډونو او ځلوونو له لارې لاس ته راځي

$$.....a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1)$$
$$2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 = a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 - b^2$$
$$.............2a^2bx - 2ab^2x = a^2 - b^2$$
$$.................2ab(a-b)x = (a+b)(a-b)$$
$$..................................x = \frac{a+b}{2ab}$$

د $b \neq a$ او $0 \neq ab$ لپاره(دا د نیونو له لارې تل پوره دی)که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بی له هغو چی په بنسټیزو نیونو کی له نیونو د باندې ساتل شوي وي) یعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي(. په دې حالت کی د xمطلقه ارزښت د کیونو $a = b$ د په څټ ارزښت سره نه شي مساوي کیدی .د x لپاره نیول شوې نیونی د حل ورکولو کی باید په پام کی نیول شوي وي دا په دې مانا چي باید تل پوره وي:

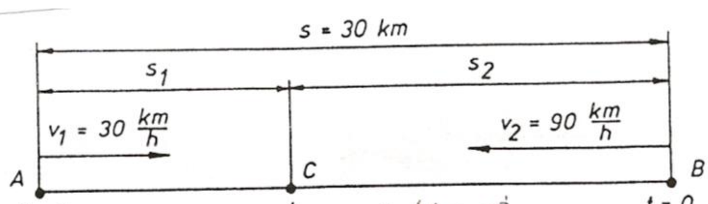
$$\pm 1 / a^2 \neq \frac{a+b}{2ab}$$

بیلګه ۹ . ۸ :

دوه ګاډې تمځایونه Aاو B یو له بل 30km لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکتیا باندې د B په لور

(c) ketabton.com: The Digital Library

خوزیږي. د Bڅخه یو تیز ګاډی D د 90km/h ثابت سرعت سره دA په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟دلته درې فزیکي لویي یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو t , s او vسره وښول شي. ددې شي ځاننیوني لپاره ځیره ځېره وکاږئ



ځېره ۱۰۷

پوښتنه » چیرته « د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي(د بار کاډي لارs1) یا د Bلریوالي وC څخه(د تیزګاډي D لار s2) سره وشمیرل شي. پوښتنه »کله« د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دئ کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو. دلته درې اوړېدوني یا مجهولی مخ ته لرو s1 , s2 او t .

د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باورې ارزښتونو ماروني یا استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\ t \ \ , s_2 = 90\ t \ \ , s_1 + s2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه(واحدونه) پرېښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو)!

دا درې مجهولی s1 , s2 او t دی د دې برابرونونو یا مساواتو سره چی حل به یی په همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دي چي د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چی دا مساوات په یوې مجهولی مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کیدی شي s1 , s2 او t وټاکل شي .

که ولیکو s1 = x ، نو د اخري برابرون څخه لاس ته راځي .s2 = 30 - x دا په لمړنیو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلوو:

$$t = s1 / 30 = s2 / 90 = x / 30 = (30 -x) / 90$$

نو لرو: $x / 30 = (30-x) / 90$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاينيز ټاکنبرابرون يا ټاکنبرابرون د x لپاره دی، چی ساده حل کيدی شي:

$30x = 30 - x , 4x = 30 \quad x = 7,5$

نو لرو

$s_1 = 7,5 \text{ km} , s_2 = 22 , 5 \text{ km} , t = (7,5 / 30)h = 1h/4 = 15 \text{ min}$

که وليکو $s2 = x$ ، نو شميرنه لاندې لار غوره کوي يا بهير نيسي:

$s_1 = 30 - x \;, t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = (30 - x)/ 90$

$3(30 - x) = x$

$90 = 4x$

$x = 22,5$,

$s_2 = 22,5\text{km} , s_1 = 7,5 \text{ km} , t = (22,4/90)h = 1h/4 = 15 \text{ min}$

که بالاخره وخت $t = x$ د اووښتونې يا ناپيژندونی په څير وټاکو، نو بار لري يا صدق کوي: $s1 + s2 = 30x + 90 x = 30$

$20x = 30$

$x = 30 / 120 = 1/ 4 , t = (1 /4)h = 15 \text{ min}$

$s1 = 30t = 30 /4 \text{ km} = 7,5\text{km}$

$s2 = 90 t = 22,5 \text{ km}$

دواړه ګاډي له ټکی A څخه د $0,25 h = 15 \text{ min}$ حرکت وروسته په 7 , 5 km لريوالی يو بل سره مخامخ کيږي

بيلګه ۹ . ۵ – مساوات $(a/x)+(b/x)-(c/x)=1$

يواځي هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نيونو لاندې باور لري $x = a + b - c$. دا نو د $x \neq 0$ له امله يواځې هلته حل دی، کله چې $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات يواځې د $a + b \neq c$ لپاره يواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غير له دې $(a+b=c)$ حل نه لري.

بيلګه۹ . ۶ – د لاندې مساواتو څيړنه

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې تیك د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ك.گ.ځ. تکرار شي.

$$121500ab^4c^3 = 2^2 . 3^5 . 5^3 . a . b^4 . c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6 . 3^2 . 5 . a^3 . b . c$$

$$5400\ a^2b^2c^2 = 2^3 . 3^3 . 5^2 . a^2b^2c^2$$

اصلي ماتلاندې لنډ «ا م ل» $= 2^6 . 3^5 . 5^3 . a^3b . c^3 = 64.243.124.a^3bc^3$

که مساوات د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي

$$16a^2 \cdot \left(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}\right) - 225b^3c^2 \cdot \left(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}\right) + 120ab^2c \cdot \left(abcx - \frac{1}{ab^2c}\right) = 0.$$

د نوکانو یو له بل ځلولو راټول، ترتیبونه او ویشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونویا ضریبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2 \quad , \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفي لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چې مات لاندې یې له ځلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅیړو چې مات لاندې یې له زیاتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې په ځلونو توټه کیدلي یا تجزیه کیدلی شي.

بیلګه ۹ . ۷ :

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2bx+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4b^2x^2-b^2} - 1$$

تیك د دې نیونو سره صدق کوي: $|x| \neq 1 / a^2 \quad , \quad ab \neq 0$.

اصلي مات لاندې(ا م ل) په لاندې ډول پیداکوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$
$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$
$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$
$$a^2bx - b = b. \quad (a^2x-1)$$

اصلي ماتلاندی(ا م ل) $(a^4x^2 - 1) = b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2$

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو (چې یو یا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بندیږي) ، لندونو او خلوونو له لارې لاس ته راځي:

$$a^2 (2bx - 1) + b^2 (a^2 x - 1) = a^2 b^2 x(a^2 x + 1) + b^2 (2ax - 3) - b^2 (a^4 x^2 - 1)$$
$$2a^2 bx - a^2 + a^2 b^2 x - b^2 = a^4 b^2 x^2 + a^2 b^2 x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4 b^2 x^2 + b^2$$
$$2a^2 bx - 2ab^2 x = a^2 - b^2$$
$$2ab (a - b) x = (a + b) (a - b)$$
$$x = \frac{a+b}{2ab}$$

د $a \neq b$ او $ab \neq 0$ لپاره (دا د نیونو له لارې تل پوره دی)

که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$ له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بې له هغو چې په بنستیزو نیونو کې له نیونو د باندې ساتل شوي وي(یعني په مساوات کی ځای ورته نه وي). په دې حالت کی د x مطلقه ارزښت د کنونو $a = b$ د په څټ ارزښت سره نه شي مساوي کیدی.

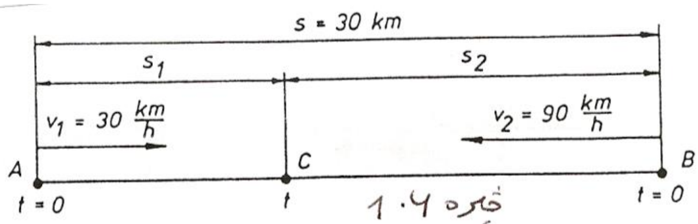
د x لپاره نیول شوې نیونې د حل ورکولو کې باید په پام کې نیول شوي وي؛ دا په دې مانا چې باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq (a+b) / 2ab$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ . ۸ : دوه ګاډي تمځایونه A او B یو له بل 30 km لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30 km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکی باندې د B په لور حرکت کوي. دB څخه یو تیز ګاډی D د 90km / h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟

دلته درې فزیکي لویې یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو t , s اوv سره وښول شي. ددې شي ځانتیوني لپاره څېره ۶ . ۱ ورکړ شوې.



څېره ۶ . ۱

پوښتنه « چیرته » د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي (د بار ګاډي لار s_1) یا د B لریوالي و C څخه (د تیزګاډي D لار s_2) سره وشمیرل شي.

پوښتنه «کله» د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو.

دلته درې مجهولی مخ ته لرو s_2 , s_1 او t . د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باوری ارزښتونو استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\,t \ , \ s_2 = 90\,t \quad , s_1 + s_2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه پرینښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو!)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا درې مجهولې s_2 , s_1 او t دی د درې مساواتو سره چې حل به یې په ۶ الف او یا همداسي په برخه ۱۱ کې ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چې د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چې دا مساوات په یوې مجهولې مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولې x په ځای کیدی شي s_2 , s_1 او t وټاکل شي. که ولیکو $s_1 = x$ ، نو د اخرې مساوات څخه لاس ته راځي $s_2 = 30 - x$. دا په لمړنیو دوه مساواتو کې ځای په ځای کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 -x) / 90$$

نو لرو

$$x / 30 = (30-x) / 90$$

لاینې ټاکنمساوات د x لپاره دي، چې ساده حل کیدی شي:

$$30x = 30 - x\ ,\ 4x = 30$$

$$x = 7{,}5$$

$$s_1 = 7{,}5\ \text{km},\quad s_2 = 22{,}5\ \text{km},\quad t = \frac{7{,}5}{30}\text{h} = \frac{1}{4}\text{h} = 15\,\text{min}.$$

نو باور لري:

که s2=x کیږدو،نو شمیرنه په لانې ډول ځغلي یا لاندې لار غوره کوي:

$$s_1 = 30 - x,\quad t = \frac{s_1}{30} = \frac{s_2}{90} = \frac{30 - x}{30} = \frac{x}{90}\ ,$$

$$3\,(30 - x) = x,$$
$$90 = 4x,$$
$$x = 22{,}5,$$

$$s_2 = 22{,}5\ \text{km},\ s_1 = 7{,}5\ \text{km},\quad t = \frac{22{,}5}{90}\ \text{h} = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15\,\text{min}.$$

که بالاخره وخت د نامعلومې په څیر وټاکل شي، یعني x=t ، نو باور لري:

$$s_1 + s_2 = 30x + 90x = 30,$$
$$20\ x = 30,$$
$$x = \frac{30}{120} = \frac{1}{4},\quad t = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15\ \text{min}.$$
$$s_1 = 30\ t = \frac{30}{4}\ \text{km} = 7{,}5\ \text{km},$$
$$s_2 = 90\ t = 22{,}5\ \text{km}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړه ګاډي له ټکي A څخه د 0,25h=15min خوزښت(حرکت) وروسته په 17,5km کې یو بل سره مخامخ کیږي.

۹ . ۲ تمرینونه

۱ . ناکرښیز یا نالاینیز مساوات د یوې مجهولې سره

لاندې مساوات حل کړئ او a او b نتیجه یې د ازمایئ! د مجهولو ضریبونو سره ارزښتونه راوباسئ; چې a او b یې نه شي غوره کولی یا نیولی.

دا ورکړئ چې مساوات د کومو a او b لپاره یواځنی حل لري، حل نه لري او یا ناپای ډېر حلونه لري.

همداسې تلنه طا رویه د نورو مجهولو ضریبونوسره هم وکړئ، چې په نورو برخو کې منځ ته راځي.

۱ . ۱ –بې له کسرونو یا ماتونو مساوات حل کړئ.

1.1.1. a) $8\left(\frac{1}{2}x-1\right)-2(x-1)=0$

b) $(3-x)(x+4)-9=(3x-4)(8x-9)-(5x-6)^2$

c) $2a(x+3)=(3+x)(5+2a)$

d) $3a-(7b+11a)-(3x-12b-9c)=(3x-8a)+5b-(3c-6x)$

1.1.2. a) $(a-x)(x+c)=2c(a-x)-(b-x)(c-x)$

b) $a(x+1)(ax+b)+b(a+bx)(1-x)=x^2(a-b)(a+b)$

c) $(x+a)(a-x)-b(b-a)=(x+a)(b-x)$

d) $a^2(x-a)+ab^2=b^2(x+b)-a^2b$

۱ . ۲ – کسري مساوات په مخرج کې د ټاکلو ضریبونو او فاکتورونو سره .

1.2.1. a) $\frac{3x-16}{3}+\frac{2x-10}{5}=3-\frac{x+1}{15}$ b) $4-\frac{10-3x}{5}=3-\frac{10-7x}{10}+\frac{x}{2}$

c) $\frac{2x+1}{2}+\frac{3x+1}{4}+\frac{5x+1}{8}=1-\frac{7x+1}{8}$ d) $\frac{4x+1}{3}+\frac{6x-1}{2}=5+5\cdot\frac{8x-10}{9}$

1.2.2. a) $\frac{4x-3}{20}-\frac{1}{12}(4x-5)=1-\frac{3}{5}(2x+11)$

b) $3(6\frac{1}{2}+x)-\frac{7}{3}(2x-\frac{19}{2})-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}=0$

c) $\frac{7x-16}{3}-\frac{4}{5}(x+1)+6=\frac{3x}{2}$ d) $\frac{3x}{4}-\frac{4}{3}(x-4)=3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.2.3. a) $\frac{3x-7}{5}-\frac{7-4x}{7}=\frac{5x-11}{10}-\frac{19-10x}{14}$

b) $\frac{17+4x}{10}-\frac{7+x}{5}=\frac{7x+13}{25}-\frac{5+x}{20}$

c) $\frac{2x-11}{15}-\frac{x}{5}+\frac{59}{40}=\frac{8x-59}{30}-\frac{16x-145}{24}$

d) $\frac{4x+4}{5}-\frac{5x-4}{55}=\frac{2x+9}{4}-\frac{12x-3}{44}$

1.2.4. a) $\frac{5x+17}{3}-\left(\frac{3x+8}{2}-3\right)=\frac{3x+12}{2}-\left(\frac{x+4}{6}+3\right)$

b) $2-\left(\frac{3x+8}{4}-\frac{2x+2}{3}\right)=1-\left(\frac{7x+20}{8}-\frac{2x-7}{3}\right)$

c) $\frac{4-x}{2}-\left(\frac{8-x}{3}-\frac{x+2}{4}\right)+\left(\frac{8-x}{6}-\frac{3(2+x)}{8}\right)+x=1$

d) $\frac{10-14x}{8x}-\left(\frac{6}{5}+\frac{4}{2x}\right)=\frac{5}{8x}-\left(\frac{12}{5}+\frac{14x+1}{10x}\right)$

۱ . ۳ – کسري – يا ماتمساوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړشوي وي.

1.3.1. a) $\frac{ax-1}{bcx}+\frac{bx-1}{acx}+\frac{cx-1}{abx}=0$ b) $\frac{ax-b}{bcx}+\frac{bx-c}{acx}+\frac{cx-a}{abx}=0$

c) $\frac{3(x-b)}{a}-\frac{2(x-a)}{b}-1=0$ d) $\frac{a-b^2}{x}-\frac{c-b^2}{x}-b=0$

1.3.2. a) $\frac{bx-a}{a}+b=bx-1$ b) $\frac{x-a}{a}-a=\frac{x-b}{b}-b$

c) $\frac{a+b}{x}-a=ab-\frac{a-b}{x}$ d) $\frac{ax^2-bx+1}{a}=\frac{bx^2-ax+1}{b}$

1.3.3. a) $\frac{bx-a^2}{a}+\frac{ax-b^2}{b}=\frac{b-ab}{a}+\frac{a-ab}{b}$

b) $\frac{20a-x}{5a}+\frac{6b-cx}{2b}=10-\frac{9c-ax}{3c}$

c) $\frac{a^3}{b}(x-1)-\frac{b+c}{b}(1-2x)=b^2(1-x)+\frac{b+c}{b}$

d) $\frac{x(b-a)}{ab}+\frac{b(c-x)}{ac}=\frac{x+b}{a}-\left(\frac{b}{c}+\frac{x}{b}\right)$

۱ . ۴ - کسري – يا ماتمساوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړشوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.4.1. a) $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{2(x+2)}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2(x+2)}$ b) $\frac{12x+5}{16x-15}-\frac{16x+1}{15}=\frac{3-2x}{5}-\frac{2x-1}{3}$

c) $\frac{10-2x}{3}+\frac{13+2x}{7}=\frac{14x+26}{2x+21}-\frac{17+8x}{21}$

d) $\frac{2x^n+7x^{n-1}}{9}+\frac{7x^n-44x^{n-1}}{5x-14}=\frac{4x^n+27x^{n-1}}{18}$

1.4.2. a) $\frac{8x+7}{9x^2-4}=\frac{16}{15x-10}$ b) $\frac{24-5x}{6-2x}-5=\frac{34-14x}{9-3x}$

c) $\frac{x+4}{12x+4}-\frac{x-4}{3x+1}=5$ d) $\frac{10x-11}{12x+18}=\frac{3}{2}-\frac{4x+1}{6x-9}$

e) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{3x-6}=\frac{1}{6}$ f) $\frac{8-x}{5-10x}=2-\frac{5}{3-6x}$

g) $\frac{12x}{10x+5}+\frac{6x-10}{2x+1}-\frac{2x+25}{12x+6}+\frac{10x-1}{8x+4}=2$

h) $\frac{3x-2}{5x+10}-10=\frac{2x+1}{3x+6}+\frac{2(1-4x)}{x+2}$ i) $\frac{6x-1}{4x-6}+\frac{10x-7}{6x-9}=11-\frac{14x+1}{8x-12}$

j) $\frac{3x}{2x-\frac{1}{2}}-\frac{16x^2}{3(4x-1)}=\frac{4(1-x)}{3}-\frac{4}{12x-3}$

1.4.3. a) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+4}{x-2}=2\frac{x-38}{x^2-4}$ b) $\frac{12}{x+4}-\frac{x+4}{x-4}+\frac{x^2}{x^2-16}=0$

c) $\frac{5x^2-120}{10-x}+\frac{3x^2+80x}{10+x}=\frac{2x^3+160}{100-x^2}$

d) $\frac{15x+2}{5x-2}+\frac{25x-2}{5x+2}=\frac{200x^2-25x+18}{25x^2-4}$

e) $\frac{16x^2-20x+4}{4x^2-16}=\frac{2x-1}{2x-4}+\frac{3(2x+1)}{2(x+2)}$

f) $\frac{7x^2+8}{2(x^2-1)}=\frac{2(x+1)}{x-1}+\frac{3x-4}{2x+2}$

g) $\frac{16x^2-6x}{2x+1}-\frac{6x}{1-2x}=\frac{32x^3-16x^2+4x+16}{4x^2-1}$

۱ . ۴ . ۴ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $\frac{2x-5}{x-5}+\frac{3x-5}{x-9}=\frac{5x^2-39x+30}{x^2-14x+45}$

b) $\frac{2x-9}{x-12}+\frac{x-6}{x-24}=\frac{3x^2-87x-36}{x^2-36x+288}$

c) $\frac{11x+6}{x^2-3x-54}=\frac{3x-14}{2x-18}-\frac{3(x+2)}{2x+12}$

d) $\frac{7x-15}{3x-6}+\frac{8x-21}{3x-3}+\frac{10x+21}{3x^2-9x+6}=5$

e) $\frac{1}{3x+21}+\frac{1}{3(x-5)}-\frac{x+6}{4(x^2+2x-35)}=0$

f) $\frac{136x^2-4x-266}{48x^2-32x+5}=\frac{14x-19}{4x-1}-\frac{8x+25}{12x-5}$

g) $\frac{8x-3}{6x-4}+\frac{6x-4}{10x-6}=\frac{116x^2+10x-34}{60x^2-76x+24}$

۱ . ۴. ۵ -

a) $\frac{5x-12}{2}=\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)}{x+1}-\frac{7x-10}{2x-10}$ b) $\frac{28}{45-7x}=\frac{5}{x-9}-\frac{9}{x-5}$ ؛

c) $\frac{x+6}{x-2}+\frac{3x-8}{x-4}=\frac{6(x+9)}{x+6}$ d) $\frac{x-13}{x+3}+\frac{8x+45}{x+5}=\frac{9x+7}{x+2}$

۱ . ۵ – کسري مساوات، چې په مخرج يا مات لاندې کې يې ناټکلي ضريبونه او فکتورونه ورکړ شوي وي.

۱ . ۵ . ۱ –

a) $\frac{2a+x}{2a-x}=\frac{a+b}{a-b}$ b) $\frac{a-b}{2c-x}=\frac{a+b}{2c+x}$

c) $\frac{a}{a-2x}-\frac{b}{b-2x}=0$ d) $\frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}}-\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}}=0$

۱ . ۵ . ۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $\frac{a}{x+b}-1=1+\frac{b}{x+b}$ b) $a-\frac{ax}{x-1}=\frac{1}{a}-\frac{x}{ax-1}$

c) $a+b+\frac{x}{a+b}=a-b+\frac{x}{a-b}$ d) $\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{x}=\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x}$

e) $\frac{x}{ab}+ab=\frac{1}{a+b}+(a+b)x$ f) $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2x}{ab}$

g) $\frac{a+1}{b}x+\frac{b+1}{a}x+\frac{2ab}{a+b}=a+b+1$

1.5.3. a) $\frac{2(6x^2-11a^2)}{4x^2-9a^2}=5-\frac{4x+a}{2x+3a}$ b) $\frac{a}{1-x}-\frac{b}{x+1}=\frac{(a-b)(ab+1)}{1-x^2}$

c) $\frac{2a}{2-x}-\frac{2b}{x+2}=\frac{4(a^2b+ab^2+a-b)}{4-x^2}$

d) $\frac{b-x}{a+x}+\frac{1-x}{a-x}=\frac{a(1-2x)}{a^2-x^2}$ e) $\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

f) $\frac{2a+ab^2x}{a+ab^2x}-\frac{a^2(3-2bx)}{a^2-a^2b^4x^2}=\frac{b^2(2ax-1)}{a^2-a^2b^4x^2}-\frac{ab^2x}{a-ab^2x}$

۶،۱ – کسرمساوات یا ماتبرابرون له دوه کسرونو سره

a) $\frac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}$ b) $\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{x}}-\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+1}$

c) $\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\frac{1}{a}}{x+\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}$ d) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}=\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}$

۱ . ۷ .   شي تمرینونه

۱ . ۷ ۱ – که د یوه ګڼ څلور څله او ۱۴ زیاتون ۴۰ وي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

۱ ۷ . ۲ – که د یوه ګڼ څلورڅله او ۴ زیاتون ددې ګڼ او ۱۴ زیاتون سره برابر وي ، نو هغه ګڼ کوم دی ؟

۱ . ۷ . ۳ – د یوه ګڼ څلورمه برخه او پنځه څله ۴۲ ګڼ ورکوي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . ۴ – که د یوه ګڼ څلوربرابره څخه ۲ کم شي او په یوه ګڼ وویشل شي چی ۴
تري کم شوی او ۱۱ لاس ته تري راشي، نو دا ګڼ به کوم وي؟

۱ . ۷ . ۵ – د یوه ګڼ پنځه څله او د ۳ زیاتو دوه څله لوي دی. لکه د د ي ګڼ دري
څله او ۱ کمون. دا ګڼ کوم دی؟

۱ . ۷ . ۶ – د یوه ګڼ څلورڅله او ۱۴ کمون نیم دومره لوي دی لکه ددې ګڼ دوه څل
او ۸ . دا ګڼ څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۷ – د یوه ګڼ شپږ څله او د ۵ کمون یا توپیر چی ددې ګڼ په څلور څله او ۵
زیاتون وویشل شي، ۱ ور کوي. دا ګڼ څه نومیږي؟

۱. ۷ . ۸ – د یوه مات ماتباندې په ۵ له ماتلاندې کوچنی دی. که ماتباندې په ۲۳ او
مات لاندې په ۸ لوي شي، نو د ورکړشوي مات په څېر ارزښت لاس ته
تري راځي. دا ګڼ څه نومیږي.

۱ . ۷ . ۹ – ۲۵ داسی په دوه ګڼونو بیل کړی یا تجزیه یا ټوټه کړی، چی د مربع توپیر
یی ۱۲۵ شي.

۱ . ۷ . ۱۰ – د دوه ګڼونو توپیر یا کمون ۶ او مربع یی ۱۸۰ دی . ګڼونه څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۱۱ – دوه ګڼونه داسي تناسب کی دي، یا یو بل ته داسي ځانونه نیسی .
که دوم په لمړی وویشل شي، نو ۲ لاس ته راځي او پاتی یي ۷ دي.
دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۷ . ۱۲ – د دوه ځاینیونکي ګڼ پروت زیاتون ۱۲ دی. که له دې ګڼ ۱۸ کم شي،
نو یو دوه ځاینیونکی ګڼ لاس ته راځي، د همغه ځایګڼونو سره مګر په
څېر ترتیب سره.

۱ . ۷ . ۱۳ – یو زدکړی غواړي د یوه ګڼ څخه مربع رینښه د یو په بل کی بندولو
پرینځیپ یا اصول له لارې پیدا کړي. دی لمړی یو ګڼ د رینښی په څیر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکي، چې مربع يې په ۲۷ کوچنی دی. بيا يوه ريښنه ټاکي ، کومه چې دوه له هغه لوي دی چې لمړی ټاکل شوی. ددې ريښني مربع په ۳۳ لوي دی ، هغه ګڼ کوم دی چې مربع ريښنه يې غواړو پيدا کړو ؟

۱ . ۷ . ۱۴ – يو د سپورت ملګرو ټولنه له څلورو ډلو جوړه ده. لمړی ډله ۳۷ دملګرو غړي لري، په داسی حال کی چې نورو ډلی 1 / 4 , 1 / 5 په همدې ډول 2 / غړي په بر کی نيسي. د غړو شمير څومره دی او د هرې ډلی څومره دي

۱ . ۷ . ۱۵ – يو نفر په درې ورځو کی مجلی په داسی شمير خرڅوي: په لمړی ورځ 1 / 9، دومه ورځ 1 / 6 او په دريمه ورځ 1 / 4 د مجودو لوټو که .

دی اوس له هغومجلو د نيمايي دوه کمي د ځان سره لري. هغه څومره مجلی د خرڅلاو لپاره لرودې؟

۱ . ۷ . ۱۶ – يوه ميلمه د يوه زدکوونکی څخه د هغه د عمر پوښتنه وکړه. زدکوونکي په ټوکه ځواب ورکړ« ځما پلار چی درې مياشتی پخوا يی خپله ۵۵ کلنی ولمانځله، ځما د عمر څلورواره څخه 1 / 4 زيات زوړ دی.» زدکوونکی څومره عمر لري؟

۱ . ۷ . ۱۷ – د يوه زدکوونکي پلار څلورنيم ځله زوړ دی لکه د هغه ځوي. دواړه ۲۷ کاله د هغه د يو اوياکلن نيکه څخه ځوان دي، پلار او ځوي څومره زاړه دي؟

۱ . ۷ . ۱۸ – په يوه معما کی يو زدکوونکی د ې بل ته وايي: « که زه لما سره بټوه کی پيسو سره ۵،۲ افغانی ور زياتي کړم ، زياتون يی له ۵ سره ځل يا ضرب کړم او له دې ځل څخه ۱۲ کمی کړم او دا لاس ته راغلی کمون يا توپير په 11 وويشم نو نتيجه يی ۸ افغانی ده. » هغه زدکوونکی په خپله بټوه کی څومره پيسی لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . ۱۹ – په یو په بل پسی تړلو مقاومتونو کی لمړی او دوهم یو ډول لوي دي، دریم دوه ځله او څلورم دریځله دومره لوي دي لکه لمړی دوه یاد شوي مقامتونه، ټول مقاومت ۱۰۵۰ (اومیگا)، په دې پروت شپانونك ۱۱۰ ولټه دی. اوس الف) یوگوني مقاومتونه څومره لوي دي، ب برققوه، برخه مقاومتونه ؟

۱ . ۲۰.۷ – د دوه غبرگ چالان عمومي مقاومت (ماته متأسفانه په افغانسان کی د فزیك مروج نومونه دې معلوم، خو فکر کوم چي په هدف به پوه شو) دی

a) $1000\,\Omega$, b) $2000\,\Omega$

یو مقاومت $4000\,\Omega$ دی، هغه بل څومره لوي دی؟

۱ . ۷ . ۲۱ . د دریې غبرك قاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم . هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت a) $12\,k\Omega$, b) $300\,\Omega$ وي؟

. ۲۱ . د درې غبرگو مقاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت الف) $12\,k\Omega$
ب) $300\,\Omega$ وي؟

. ۲۲ په اوبو کي یو د لرگي منډه باید څومره لوي وي، چې د لمبیدو استعداد یی ۷۵۰ نیوټونه وي او د لرگي خاص وزن یا کلکوالی (د فرمول څخه معلومیږي چی دا څه شی دی) $4\,\frac{N}{dm^3}$ وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ . ۲۳ د سونګموادو ټانك د دوم ماشین لپاره ۴۰ لیتره ګډوډ د سونګ مواد لري.
څومره تیل او څومره بنزین په ټانك کې موجوددي که ګډونه یې وي؟

۷ . ۲۴ د ښار د ښکلا لپاره د ښارمنځ د سرك په اوږدوالي ۸۵ ونې کینول کیږي.
دا چې د مخه خرکې شوی او تل همغه واټن په یوه متر کوچنی شي ، نو په
سرك بیا ۲۰ ونې زیاتې کیښنول کیدی شي. د دې هرې ونې واټن وبلی ته
څومره لویې دی؟

۷ . ۲۵ د بایسکلځغلونکو ډله له سر څخه ۵۰ متره اوږدوالی لري. هغه ۴۵
کیلومتره په ساعت کی سرعت لري، چې په یوه پله چې اوږدوالی یې
متره دی ، څومره وخت ته ضرورت لري، چې له پله پورې لاړ شي.

۷ . ۲۶ واوورومنډه کې ، دا وروسته وړونکې د پروسېږکلني وړونکې څخه یوه نیمه
دقیقه وروسته په ځغاسته پیل کوي. د څو کیلو متره وروسته دی کړی
چې لمړني ځغلیدونکي څخه مخ ته شي، که د ده منځنی سرعت ۵ متره
ثانیه کی وي او د لمړي ۸ ، ۴ متره په ثانیه کی وي ؟

۷ . ۲۷ د تامنځي د دز سره د سپورت میله کې ۲۰۰ متره ځغاستی د منډې ډله په
ځغاسته پیل کوي. ځغلیدونکی د پیل کرښي څخه لس متره شا ته ولاړدي.
برخه نیوونکی په منډه پیل کوي ، چې د تومانچې د ډز کرد وګوري دو
وخت توپیر څومره دی، که غږ رسیدنه په نظر کی ونه نیول شي او د غږ
سرعت ۳۴۰ متره په ثانیه کی وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ كومبيناتوريك - د بينوم جمله

كومبيناتريک څخه په شميرپوهنه کې د دې لپاره کار خلي، چې يو ګڼ ، پل ځاي بدلو
ځومره والبښاي او که څو ګنونهخپل ځاي بدل کړې دا څنګه ليکل کيږي۰ د ځای بدلون
شميرنه ده
او د هغې ډولونه۰
په ۰ ۱ ۰ ۱ ۱و ۰ ۱ ۰ ۲ برخو کی به د شميرپوهنی مرستندوي مواد د بينوم
جملی(۳.۱۰)
برخه(او كومبيناتوريك (۱۰ . ۴ برخه) د فاكولتيت كليمي او بينوميالكوايفيڅينت
(بينوم ځلوني) پيل شي .

۱۰ . ۱ فاكولتيت Die Fakultät, factorial

پيژند ۱۰ . ۱ :
د n!سومبول (ويل کيږی n « فاكولتيت «) لاندې سړی له1 تر n پورې ګڼونو ضرب
پوهيږي، يعنی $n! = 1.2....(n-2).(n-1).n$ برسيره پر دې تعريفوو: $0! = 1$

د فاكولتيت له پيژند څخه څرګنديږي، چی $(n+1)! = n!.(n+1)$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه:
په افغاني ادبياتو کی تر هغي چی ماته معلومات شته د فاکولتيت په ځاي فاکتوريال ليکل شوی. ما په دې کتاب کی دا د الماني کليمه يا پښتو ، ځله ووني،، زيات کاره ولی، هيله ده چی تاسو به يی په خپله خوښه وټاکی. په دې کی کومه سهوه منځ ته نه شي راتلی۰

بيلګی :

الف $n!$: د $n = 5$ لپاره په دې ډول دی: $5! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120$

ب : په دې ډول دی : $0!.2!.4! = 1.(1.2).(1.2.3.4) = 48$

پ: په دې ډول دی: $5!/3! = 1.2.3.4.5 / 1.2.3 = 4.5 = 20$

ت : په دې ډول دی

$$(n+2)!/(n-1)! = 1.2.3....(n-1)(n).(n+1).(n+2)/1.2.3...(n-1)$$
$$= n.(n+1).(n+2)$$

ټ: داسی دی

$$2.n! = 2.(1.2....n),$$
$$(2.n)! = 1.2....n.(n+1)....2n.$$

۱۰ . ۲ د بينوم ځلووني يا ضريبونه

پيژند: ۱۰ . ۲

د سيمبول $\binom{n}{k}$ (وييل کيږي n « پر » k لاندې د دوه ځله ونو ويش پوهيدل کيږي چی هر يو k ځله ووني يا ضريبونه يا فاکتورونه لري :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

برسيره پر دې دا هم په کلکه کره کيدلی شي:

$$\binom{0}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{1} = n$$

د k ګڼ يو پيدايښتي يا طبعي ګڼ دئ او د ماتلاندي او مات باندې ګڼونو ګڼون يا تعداد ښايي،په مات لاندې کې د لومړيو k پيدايښت يا طبيعي ګڼونو فاکتورونه دي. دn ګڼ رييل دی او د مات پورته لومړنی فاکتور دی. دوم فاکتور1 - n ، دريم n-2 ترk –م فاکتور n-k+1 پورې . دا $\binom{n}{k}$ سومبول د اويلر(leo nard Euler له ۱۷۰۷ - ۱۷۸۳سويسي ګڼپوه، فزيکپوه او استرولوګ) لخوا د لومړې ځل لپاره پيل شو، له دې امله ورته د اويلر سومبول وايي پرتله يا مقايسه برخه ۱۰ . ۳ (. که ځوك ديوه بينوم پوتنځ يا توان شميري) ۱۰ . ۳ برخه(، نو سيمبول $\binom{n}{k}$ لاس ته راځي چې د يوا- ځنيو زياتونونو ځلونه دي، او له دې امله ورته بينوم ضريب يا بينوم ځله ووني ويل کيږي.

بيلګې :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{49}{6} = 13.983.816 \text{ ،} \binom{3}{5} = 0$$

$$\binom{2}{1/3}$$

تعريف نه دی ، ځکه چې 3 / 1 پيدأيښتي يا طبعي ګڼ نه دی.

د بينوم ضريبونو يا ځلونوخويونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ - د n<k ، $n,k \in N$ لپاره باور لري $\binom{n}{k} = 0$

که n يو طبعي ګڼ وي او لهk کوچنی وي، نو صفر په ماتباندې کی يوځله وونی

يا ضيرب دی

۲ - د $n > k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اوبيونه (حل): سړی د n-k)! سره د مات $\binom{n}{k}$ پراخوالي له امله لاس ته راوړي

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

دا پورته برابرون له $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$ سره ځلوو، نو لاس ته راځي

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

له دې نور لاس ته راځي، که د k په ځاي n - k وليکل شي

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۳ - باور لري

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

حل (اوبی) : د کښ اړخ زياتون ښخه دا لاندې لاس ته راوړل کيدی شي، که د بينوم ضريبونه يا ځلووني د ماتو په ښير وليکل شي ، ماتونه ور زيات کړي او د زياتونون ګډ فاکتورونه چې په ماتباندې کی دی په نوکانو کی ونيسي اوپاتی ساده کړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)+n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)[k+1+n-k]}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!}$$

که په پورته ۱ افاده یا وبینه کې د مات پورته اخرنی فاکتور د لومړي ځله وونې په څیر ولیکل شي، لاندې بینومیال یا بینوم ځلوونی (ضریب) تعریفوي:

$$\binom{n+1}{k+1}$$

۱۰ . ۳ د بینوم جمله

د بینوم لاندې سرې د دوه توکو (ګڼونو) زیاتون پوهیږي. یعني: x+y
د بیونم جمله موږ ته ښایي چې څنګه د یو بینوم

$$(x+y)^n$$

پوتنځ، چې پیداینښتي ګڼ n یې ایکسپوننت یا جکګڼ یا لنډ جګ وي، د زیاتون په څیر پر مخ بیول کیږي. که د x + y بینوم پوتنځ د n = 0,1,2,3,4,5,6 اکسپوننت لپاره شمیرو، نو لاندې نتیجه لاس ته راوړو :
پاسکال دریګوډی

$$(x+y)^0=\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$
$$(x+y)=\ldots\ldots\ldots\ldots x+y$$
$$(x+y)^2=\ldots\ldots\ldots x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3=\ldots\ldots\ldots x^3+3x^2x+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4=\ldots\ldots x^4+4xy+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$
$$(x+y)^5=\ldots x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$
$$(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې د زیاتونونو پرمخبیولوکی یو قانونیت لیدل کیږي. د زیاتونو ګڼون(شمیر، تعداد)
د بینوم د اکسپوننت څخه په یو لوي دئ . ټول زیاتونی د x او y پوتنځ ځل لري، په
داسی ډول چی د x اوy پوتنځ زیاتون په n برابریږي او په دې ډول د x پوتنځ په
کمیدلو) د y پوتنځ په زیاتیدلو دx په اکسپوننت په ترتیب پرلپسی

n , n-1, ...1 , 0

د yاکسپوننت په ترتیب 0,1 n-1,n..,دي. د بینوم پوتنځ کوایفځینتونه داسی په
نامه پاسکال Blaise Pascal(۱۶۲۳ - ۱۶۶۲ فرانسوي شمرنپوه(ګڼوندریګوډی
جوړوي .

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

په دې کی هر ګڼ د دواړو پورته کیڼ-ښي پرتوګڼونوزیاتون دئ، چی بي له کړاو د نورو
اکسپوننتویا په ځګو n = 7,8,... .. لپاره پرمخ بیول کیدی شي. د ډیرو لویو
اکسپوننتو n لپاره بیا هم دالار له کړاو ډکه ده لیونارد اویلرLeonhard Euler
د کومبیناتوریك فکرونو کی د کوایفیځینتونو یووني یا یوونوالي یا بهتره یوونوالیز
ستروکتورونه یا جوړښتونه وپیژندل. په n -م n (د بینوم جګ یا اکسپوننت (لیکه
اوK- م ځای، n ,.... , 1 , 0 = k کی ولاړ ضریب دفورم څخه دئ) له
کومه امله چی په ۱۰ . ۲ برخه کی د اویلر سومبول په نوم داسی بلل شوي د بینوم
ضریب په
ځیر رامنځ ته شو)که د پاسکال ګڼونو دریګوډی د اویلر سومبول استعمال په ځیرولیکل
شي نو لاس ته راځي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cdots\cdots\binom{0}{0}$$

$$\cdots\cdots\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\cdots\cdots\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{1}$$

$$\cdots\cdots\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

$$\cdots\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

$$\cdots\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$

داویلر سومبول کی د فاکتور پرځاي ، چې ګڼونه دی ، سومبول $\binom{n}{k}$ لیکل کیږي.

یادونه : ما کله a,b او کله بیا x,y لیکلي، دا په یو ډول لیکنه ښکلې ښکاریږي،
خو زه کله کله داسې ستونځې لرم .
په ۱۰ . ۲ برخه کی د بینومیالکوایفیځینت لپاره ښوول شوو خویونو۲ په بنسټ د پاسکال دریکوډي منځنی محور ته سیومتري پراته کوایفیځینته سره مساوي دي. داچی هر کو- ایفیځینت ورباندې پورته کوایفیځینتونو زیاتون سره مساوي دی په ۳ کی وښوول شو)
د تمرین وظیفه ۱۰ . ۴ دې هم ورسره پر تله) مقایسه(شي) د اویلر سیمبول په استعمال
د یوه بینوم $(a+b)^n$ د پوتنځ د زیاتون پرمختک د یوه طبیعي ګڼ n لپاره په لاندې ډول لیکلو ته اجازه راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۱ (د بينوم جمله)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

اوبونه (حل): د پوره ايندكشن له لارې:

د ايندوكشن پيل : (n = 0)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0 = 1$$

د ايندكشن نيونه : (n = k)

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^{n-1} + \binom{k}{k}b^k$$

د اندكشن غوښتنه: (n = k + 1)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n$$

$$+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

دايندكشن ښوونه:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b)$$

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k}ab^k$$

$$+\binom{k}{0}a^{k+1}b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^k + + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که یو د بل سره (یو د بل لاندې په څنګ یا کږې پرتی) برابر پوتنځ یا توان ځلونه د اویلر فرمول یا سومبول د زیاتونخویونو د استعمال له لارې سره راټول (یوځای) شي

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

$$\binom{k}{1}+\binom{k}{0}=\binom{k+1}{1},\binom{k}{2}+\binom{k}{1}=\binom{k+1}{2},\ldots,\binom{k}{k}+\binom{k}{k-1}=\binom{k+1}{k}$$

لومړي او اخر زیاتون ضریبونه ولیکل شي نو غوښتل شوې اړیکی لاس ته راځي

$$\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0},\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}$$

د (a-b)=a+(-b) له امله د بینوم له جملی د یوه n -م پوتنځ دکمون څخه لاس ته راځي

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots \pm \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}(-b)^i$$

بیلګې:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2(-y) + \binom{3}{2}x(-y)^2 + \binom{3}{3}(-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

۱۰ . ۴ کومبیناتوریك:

کومبیناتوریك د یوې ډیرۍ د پای غړو یوځای درولو یا راوړلو ترتیب قوانینو سره سر او کارلري. کیدی شي د ټولو غړو یا یوې برخي یوځاییولو په څیر راوړل شي، په یوځاییولو کی کیدی شي د غړو ترتیب یو رول ولوبوي او یا هم نه، او همدارنګه په راټوځاییولو کی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي د غړو تکرار راشی او یا هم نه. له دې امله د یوځاییولو یا ټولګی درې ډولونه توپیروو(Komplexion هم ورته وایي)، په نامه پرموتیشن، واریشن، کمبینیشن (Permutation, Variation, Kmobination) کوم چې په لاندې برخو کی یو په بل پسی څیړل کیږي او په اخرنی جدول کی به لیدیدونکی څرګند شي یا لیدوړو ښوول شي

۱۰ . ۰ ٤ . ۱۱ **پرموتیشن**Permutare
(لاتین: ..سره بدلول، دلته دا اصلاً ځاي بدلون دی. لنډ: بدلون)

پیژند ۱۰ . ۳ :

د n غړو یو پرموتیشن (ځاي بدلون)بې له تکرار داسی »یوځاي درول« دي، په کوم کی
چې n غړي په یوه د زړه پورې ترتیب کی څنګ په څنګ ولاړ وي. د n غړو مختلفه ترتیبونه
تل د مختلفو پرموتیشنونو یا ځاییدلونونو په مانا ده
بیلګی:

۱ - د دوه غړو پرموتیشن

الف : 1 2 دی 12 21

ب : a , m دی am ma

۲ - د درې غړو پرموتیشنونه
الف : ۱ ، ۲ ، ۳ دي:

۱۲۳ ۲۱۳ ۳۱۲

۱۳۲ ۲۳۱ ۳۲۱

ب : a,m,s دی:

ams mas sam

asm msa sma

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د څلور غړو پرموتیشنونه

الف :   1,2,3,4 دي:

4123	3124	2134	1234
4132	3142	2143	1243
4213	3214	2314	1324
4231	3241	2341	1342
4312	3412	2413	1423
4321	3421	2431	1432

دا پورته پرموتیشنونه له پورته وکښته لور ته لیکسیکایي ترتیب دي، دې ته به د کرانو لوستونکو پام وي، وروسته هم همداسی دي، که دا توري وي او که گڼونه ۰ په گڼونو کی پیدایښتي ده، چې د پښتو لیکسیکایې ترتیب پجه [ام کی نیول شوی۰له ښي لور کښته بیا بیرته گین لور خوزښت دی۰

ب :   a,m,s,u   دي:له کښن کښته لور ته بیا بیرته پورته

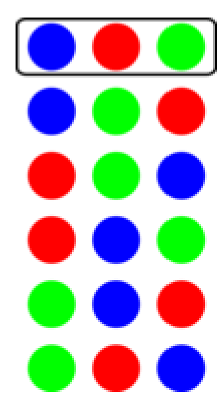
uams	samu	masu	amsu
uasm	saum	maus	amus
umas	smau	msau	asmu
umsa	smua	msua	asum
usam	suam	muas	aums
usma	suma	musa	ausm

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب (ا ت ج ک   دي:دلته طبعاً له بنې وکيڼ لورته ترتيبيږي(

اتجک	تاجک	جاتک	کاتج
اتکج	تاکج	جاکت	کاجت
اجتک	تجاک	جتاک	کتاج
اجکت	تجکا	جتکا	کتجا
اکتج	تکاج	جکات	کجات
اکجت	تکجا	جکتا	کجتا

د ټولو پرموتيشنونود ليکلو لپاره مرستندوی مواد، د بيلګی په ډول له څلورو غړو څخه د ۲۴ پرموتيشنونو، ليکسيکني ترتيب، دا په دې مانا چی د ليکسکا لغاتو ترتيب ته »کتب متب« (ورته) دی، چی د غړو پيدايښتي لړی مخته پرته وي (په تورو، په ګنونوکنطبعی يو په بل پسي). دبيلګي په توګه د غړو a , m , s , u ۲۴ پرموتيشنونه په لکسيکا ترتيب ورکړ شوي. د دې غړو) يا تورو(جوړ شوي پرموتيشنونه) لغاتونه(maus همدا رنګه saum په دې ترتيب کی ۸ -ام همدا ډول په ۱۴ -ام ځاي کی ولاړ دي. همدا ډول په ب (کی د څلورو تورو ا ، ت ، ج ، ک پرموتيشن ورکړ شوی چی ۸ -۱م ځا ي کی يي تاکج ولاړ او په ۱۵ – م ځای کی يي جتاک ولاړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته درې غونډارو لپاره نظم یا ترتیب ۲ ۰ ۳ = ٦ دی۰

که لیکو ، چې 1.2.3.4.5.6نو ددې پرځاي لیکو : $6! = 720$

جمله ۱۰ . ۲ :

د پرموتیشنونو Pn ګڼون (شمیر یا تعداد) ، د n یوله بل مختلفو غړو، په لاندې

ډول دی : $n = Pn!$

اوبنونه : د پوره ایندکشن له لارې :

داېندکشن پیل : $(n = 1):\quad P_1 = 1! = 1$

د ایدکشن نیونه : $(n = k):\quad P_k = k!$

د ایندکشن غوښتنه : $(n = k+1):\quad P_{k+1} = (k+1)!$

د ایندکشن ښوونه : k غړو ته په !k پرموتیشنونو کی د ځل په څیر یو(k+1) -ام غړی راځي. دا (k+1) - ام غړی کیدی شي له لومړې تر (k+1) - ام ځاي پورې ودریږي، داسی چی د (k+1) -ام غړي ورنیولو د هر k غړو پرموتیشن k+1 پرموتیشنونه د k+1 غړو پرموتیشنونه شي. له دې امله باور لري

$$P_{k+1} = P_k\,(k+1) = k!(k+1) = (k+1)!$$

بیلګه :

په څومره مختلفو لړیو پرلپسی (دا مړضوع په ۱۸ برخه کې کتلی شئ) کی لس زدکوونکی په یوه لیست کی خپل نومونه لیکلی شي ؟

اوبی یا حل : $P_{10} = 10! = 3628800$ ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۰ . ۴ :

هر د k غړو ترتیبونه، د کومو څخه چی i-ام غړی ni - ځله رامنځ ته کیږي، د $i = 1 , 2 , ... ,k$ لپاره، نو پرموتیشن د تکرار) د تکرارسره پرموتیشن(سره نومیږي . د غړو شمیر په پرموتیشن کی بیا داسی دی $n = n_1 + n_2 + ... +n_k$

بیلگی :

۱ - د دوه غړو a , b پرموتیشن په کوم کی چی غړی a یو ځل او غړی b دوه ځله رامنځ ته کیږي،

$(k = 2 ; n_1 = 1; n_2 = 2; n = n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3)$

په دي ډول دی: abb bab bba

۲ - د غړو a , b پرموتیشن، په کوم کی چی a دوه ځله، غړی b دري ځله رامنځ ته کیږي $(k = 2 ; n_1 = 2; n_2 = 3; n = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5)$ په لاندې ډول دی

abbba abbab ababb aabbb
babba babab baabb
bbbaaa bbaba bbaab

جمله ۱۰ . ۳ : د k غړو د پرموتیشن ګنون یا تعداد $P_n^{(n_1,n_2,...,n_k)}$ ، له کومو چی i-ام غړی ni -ځله رامنځ ته کیږي ، په لاندې ډ ول دی:

$$P_n^{(n_1,n_2,...,n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$$

حلونه یا اوبیونه: که په پرموتیشن کی $n = n1 + n2 + ...+ nk$ (دلته دې ګنونه دn ایندکس کې ومنل شي) غړو یو له بل توپیر لرودی (مختلف وي) ، نو n! پرموتیشنونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به موجود وی، که i - ام غړی ni -ځله رامنځ ته شي، داچی د ni غړو لپاره ni! پرموتیشنونه موجود دي، نو ni پرموتیشنونه د یوه پرموتیشن په څیر راپو ځاي کیږي،

دا په دې مانا چی د!n شمیر په $n_i!$ باید وویشل شي (i = 1 . ..., k)

بیلګی :

۱ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتیشن، په کوم کی چی لومړی (n_1-1) - ځله او دویم (n_1-2) - ځله رامنځ ته کیږي، دی:

$$P_3^{(1,2)} = \frac{(1+2)!}{1!2!} = \frac{3!}{1!.2!} = 3$$

۲ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتیشن، په کومو کی چی لومړی (n1=2) -ځله او دویم (n2 = 3) -ځله رامنځ ته شي، دیٔ

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$$

۱۰ . ۴ . ۲ واریيشن اوښتنه یا بدلیدنه Variation :

تعریف ۱۰ . ۵:

د n غړو واریشن (بدلیدنه یا اووښتنه Variation) لاتین(بدلونه اووښتنه تغیرونه یا بیا تغیرونه) و k -ام ټولګي ته(وهرې k ټوټی ته، n ≤ k) هر له k غړو یوځانکول (بوځاي درول، یوځاي لیکل) دی، کوم چی د n غړو د لړی پرلپسی په نظر کی نیولو سره جوړیږي..

بیلګي:

۱ - د درې غړوa,b,c واریيشن و دویم ټولګي ته دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

ab	ba	ca
ac	bc	cb

۲ - د څلورو غړو d , a , b , c واریېشنونه و۲ - م ټولګي ته دي:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

د څلورو غړو d , a , b , c واریېشنونه و ۳ - ۱م ټولګي ته دې

abc	bac	cab	dab
abd	bad	cad	dac
acb	bca	cba	dba
acd	bcd	cbd	dbc
adb	bda	cda	dca
adc	bdc	cdb	dcb

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3 ,4, 5 واریېشنونه و ۲ - ۱م ټولګي ته دي

12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو واریشنونه و n -ام ټولګي ته د n غړو پرموتیشن سره یو شی یا براابر کیږي

جمله ۱۰ ۰ ٤ :

د n غړو و k -ام ټولګي ته د واریشنونو ګڼون (تعداد) $V_n^{(k)}$ دی :

$$V_n^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اوبړونه : د مکلمل (پوره یا بشپړ اینډکشن له لارې) اینډکشن په k اړه لري، n ځاي په ځاي دی یا ځاي په ځاي کلك ولاړ دی

اینډکشن پیل :(k = 1)

$$V_n^{(1)} = n!/(n-1)! = n$$

ټیك (صحیح) دی ، ځکه چی له n غړوکیدی چی له یوه غړی جوړ واریشنونه جوړکړی شي.

اینډکشن نیونه : (k = k0) :

$$V_n^{(k_0)} = n!/(n-k_0)!$$

اینډکشن غوښتنه(ثبوت:):(k0 +1 = k)

$$V_n^{(k_0+1)} = n!/(n-k_0-1)!$$

داینډکشن ښوونه : د k0 - م درجی هر واریښن لپاره، په دې واریښن کی نه رامنځ ته کیدونکو پاتی n - k0
غړو شمیر دی .که په ترتیب یو له دې n - k0 غړو د دې k -م ټولګی واریشنونو $V_n^{(k)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرکی ځاي په ځاي شي، نو له دې يو دk+1 ټولګي n - k0 واريشنونه لاس ته راځي، او که دا کار په ټولو واريشنونو $v_n^{(k)}$ وشي، نو لاندې واريشنونه لاس ته راځي:

$$\frac{n!}{(n-k_0)!}(n-k_0) = \frac{n!}{(n-k_0-1)!}$$

(که چيرې يود n - k0 غړو ورزيات په يو بل ځای کيښوولی وی، نو يودk+1 ټولګي واريیشن به يی لاس ته راوړی وی، کوم چی همدا اوس موجود دی. دا سړی په بيلګه ۲ (3= n = 4, k = 2 , k) باندې ليدوړ کولی شي)

بيلګي:

۱ - د درې غړو واريیشنونو شمير و دوم ټولګي ته دی : $v_3^{(2)} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

۲ - د څلور غړو واريیشنونو شمير و دوم ټولکی ته دی: $v_4^{(2)} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$

د څلور غړو واريیشنونو شمير ودريم ټولګي ته دی: $v_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$

۳ - د پنځه غړو واريیشنونو شمير ودوم ټولګي ته دی: $v_5^{(2)} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$

پيژند ۱۰ . ۶ :

د n غړو واريیشنونه و k - ام ټولګي ته په کوم کی چی يوګونی غړي تر k-ځله تکرار وي نو واريیشنونه د تکرار سره نوميږي يا بلل کيږي.

بيلګی: ۱ - د درې غړو a , b , c واريیشنونه و دوم ټولګي د تکرار سره دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

aa	ba	ca
ab	bb	cb
ac	ba	cc

۲ - څلور غړو a , d , c , b د دويم تولګی واريېشنونه د تکرار سره دي:aa

	ba	ca	da
ab	bb	cb	db
ac	bc	cc	dc
ad	bd	cd	dd

۳ - د درې غړو 1 , 2 , 3 د دريم ټولګي واريېشنونه دي(دا لاندې ولاړ ترتيب له کيڼ وښي لور ته دی، خو په لاندې کې په څنګ شوی)

111	211	311
112	212	312
113	213	313
121	221	321
122	222	322
123	223	323
131	231	331
132	232	332
133	233	333

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۵ : د n غړو د k -ام توکلي د واریشنونو شمیر $V_{W_n}^{(k)}$

$V_{W_n}^{(k)} = n^k$:د تکرار سره دی $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

حل)اوبی): په k د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندکشن پیل (k = 1) :

د $V_{W_n}^{(1)} = n^1$ لپاره صحیح دی، ځکه چې له n غړو څخه n واریشنونه،چې هر یوله یوه غړي جوړ دی، جوړیږي.

د ایندکشن نیونه (k0 = k) : $V_{W_n}^{(k_0)} = n^{k_0}$

د ایندکشن غوښتنه (k0+ 1 = k): $V_{W_n}^{(k_0+1)} = n^{k_0+1}$

د ایندکشن ښوونه : د (k0 + 1) -ام درجې واریشنونه د nk واریشنونو چې k0 – امه درجه واریشنونو څخه لاس ته راځي، په کوم کې چې له دوي هر یو په ترتیب د n غړو اخر ته یو ور واچوي یا ورزیات (علاوه) کړي (یادونه دې، چې په واریشنونو بې له تکرار شوې ، وکتل شي) .

له دې امله د دې شمیر $n^{k_0}.n = n^{k+1}$ واریشنونه دی.

بیلګې :

۱ - د درې غړو و دوم توکلي ته د واریشنونوشمیر له تکرار سره دی

$V_{W_3}^{(2)} = 3^2 = 9$

۲ - د څلور غړو و دوم توکلی ته د واریشنونو شمیر له تکرار سره دی

$V_{W_4}^{(2)} = 4^2 = 16$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د درې غړو و دریم ټولګي ته ض واریيشنونو شمير له تکرار سره دی

$$V_{W3}^{(3)} = 3^2 = 27$$

۴ - د مورس نخښه (Morsezeichen) له دوه غړو ، ټکی او لنډې کرښې یوځای کیږي.

د یوه ، دوه درې او څلورو غړو جوړه نخښنو شمیر دی

$$V_{W2}^{(1)} + V_{W2}^{(2)} + V_{W2}^{(3)} + V_{W2}^{(4)} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

۱۰ . ۴ . ۳ کمبینیشن (Kombination (لاتین: یو بل سره تړل)

تعریف ۱۰ . ۷ :

د n غړو و k-ام ټولګي ته (n > k) یو کمبنیشن هغه دی چی هر یو له k غړو یوځاي دروولو څخه ، کوم چی له n غړو، بی د غړو له نظم په پام کی نیولو سره، جوړوي.

کمبینیشن له واریيشن منځ ته راځي، که چیری نظم په پام کی ونه نیول شي.

بیلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دوم ټولګي ته کمبینیشن په لاندې ډول دی:

ac bc

۰۰۰۰۰ ac

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دوم ټولګي ته کمبینیشن په لاندې ډل دی

ab bc cd

۰۰۰۰۰ ac bd

۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ad

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې ځلو غړو ودریم تړولګي ته کمبینیشنونه په لاندې ډول دي:

abc bcd

acd

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3, 4 , 5 و دریم تړولګي ته کمبینیشنونه په لاندې ډول دي(لاندی هم باید له کینې لاندې لورته په ښی لور لیکل شوي وی)

123 234 345

124 235

125 245

134

135

145

جمله ۱۰ . ۶ : د n غړو و k -م تړولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی $C_n^{(k)}$

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$$

اوبی (حل): د n غړو و k-ام تړولګي ته د اوریيشنونو شمیر دی:

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{n-k}$$

کمبینیشنونه له واریيشنونو په دې توپیریږي، چی ترتیب په نظر کی نه نیول کیږي، دا بیا دا مانا لري چی تړول د k غړو k! پرموتیشنونه په یو کمبینیشن کی یوه ته یوځاي کیږي

له دې امله لرو : $C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \binom{n}{k}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی :

۱ - و دوم ټولګي ته د درې غړو کمبینشنونو شمیریا ګڼون دی

$$C_3^{(2)} = \binom{3}{2} = 3$$

۲ - و څلورم ټولګي ته د څلور غړو کمبینیشنونو شمیر دی‌د څلورو غړو و دریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(2)} = \binom{4}{2} = 6$$

۳ - د پنځه غړو ودریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(3)} = \binom{4}{3} = 4$$

۴ - په لاټري (۶ له ۴۹ څخه) د امکاناتو لپاره شمیر دی

الف (یو شپږ $C_{49}^{(6)} = \binom{49}{6} = 13983816$

ب : یو څلور $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

۶ تیپ عددونه د یوه ۴ عددونوګروپ څخه بوځاي کیږي، چی له ایستل شوو شپږ عددونو (۴ تیک یا صحیح) او دوه عددونه(۲ پاتی عددونه) دي .

پیژند ۱۰ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو و k-ام ټولګي ته کمبینیشن، په کوم چې یواځني غړي k - ځله تکراروي، کمبینیشنونه د تکرار سره نومیږي.

بیلګي:

۱ - د درې غړوc , b , a و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینشنونه دي.

aa ....

bb ab ......

cc bc ac

۲ - د ځلور غړو c , b , a , d و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي

aa ....

bb ab ....

cc bc ac ....

dd cd bd ad

۳- د درې غړو 1 , 2 , 3 و دریم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي(لاندي لیکنه باید له کینې لور پیل وی، خو دلته له ښی لور پیل شوی وکینې لور ته)

331 221 111

332 222 112

333 223 113

123

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۷ : د n غړو و k - ام ټولګي ته د تکرار سره د کمبینیشنونو شمیر یا ګڼون دی:

$$C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

دلته دې له ښوونی(چی په kد پوره ایندکشن له لار ې صورت نیسی) تیر شو.

بېلګې: ۱ - د درې غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(2)} = \binom{3+2-1}{2} = 6$$

۲ - دڅلورو غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_4}^{(2)} = \binom{4+2-1}{2} = 10$$

۳ - د درې غړو و دریم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(3)} = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

۴ - د څلورو مکعبونو ، چې اړخونه یې د یوه تر شپږ نخښنه وي . (نخښنه شپږ اړخیز ممکن مختلف اچول ، په دې مانا چې کومې سترګې سره لوېږي لاندې دي.

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ . ۴ . ۴ د برموتییشن،وارییشن،کمبینیشن ټولګه

داا	د په پا یوې برخی راټولونه م کی نیولو شوو غړو		د ټولو په پام کی نیول شوو غړو راټولونه یا ټولګه
	له نظم تیریدنه	نظم په پام کی نیونه	
	کمبینیشن	وارییشن	پرموتیشن
د ټول غړي یوله بل توپیر لري	د n غړو کمبینیشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $C_n^{(k)}=\binom{n}{k}$	د n غړو وارییشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $V_n^{(k)}=\frac{n!}{(n-k)!}$	دn غړو پرموتیشن شمیر یا ګڼون $P_n=n!$
له تکرار سره	د n غړو دکمبینیشن شمیر وk -ام ټولګي د تکرار سره $C_{W_n}^{(k)}=\binom{n+k-1}{k}$	د n غړوواریيشن شمیر د تکرار سره $V_{W_n}^{(k)}=n^k$	د k غړو پرموتیشن د ni غړو سره په k -م ګروپ کی $P_n^{(n_1,n_2,...n_k)}=$ $=\frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ . ۵ تمرینونه

۱ – لاندې فاکولتی وشمیرۍ

الف) 7! ، ب) 3!.5! ، پ) 6! / 4!.I0!

۲ – لاندې ویشونه ساده کړی

a) (n+1)! / (n-2)!   b) (2n)! / n!   c) n! / 2n!

۳ – لاندې افادې وشمیرۍ!

a) $\binom{6}{4}$ b) $\binom{1,5}{3}$ c) $\binom{-1}{6}$ d) $\binom{4}{1}$ e) $\binom{4}{0}$

f) $\binom{8}{8}$ g) $\binom{5}{4}\cdot 4!$ h) $\binom{7}{6}\cdot 3!$ i) $\binom{6}{7}\cdot 3!$ j) $\frac{\binom{7}{6}}{3!}$

۴ – لاندې زیاتونونه وشمیرۍ!

a) $\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$ b) $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}$ c) $\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$

d) $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}$ e) $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$ f) $\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

۵ – لاندې افادې د بینوم د فرمول کارونی(استعمال) په بنسټ وګټی!

a) $(x+y)^7$ b) $(a-6)^6$ c) $(5a+4y)^3$

d) $(x/2 - y/3)^4$ e) $(2\ \ a+3\ \ b)^2$ f) $(x^2+y^2)^3$

۶ – لاندې افادې ساده کړی!

a) $(-1+a)^2-(1-a)^2$ b) $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$

c) $(\ \ ab-1)(-a-\ \ ab)+ab$

۷ – د بینوم په یو ځل یی بیل (تجزیه) کړی!

a) $25a^2+10\,ab+b^2$ b) $(49a^2-42a+9$

c) $169a^2-130\,ab+25b^2$ d) 2x+2.   6xy +3y

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – الف) د غړو ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ پرموتیشنونه په لکسیکوګرافي نظم ولیکی!
ب) د a,e,f,h,n پرموتیشنونو په څو ځایونو کی« fahne » او« hafen » ولاړ دي؟ دا الماني کلیمي دي چی دپښتو اړونه یی « بیرغ» او« بندر» دي.

۹ – الف) په څو ځایترتیب یا تنظیم کیدی شي ، شپږ کسه ځاي ونیسی؟
ب) څومره پنځهٔ ځیفري ګڼونه د پنځه ځیفرونو4, 3, 2, 1, 0 سره کیدی شي ولیکل شي، که هغه ګڼونه چی په صفر پیل کیږي ونه لیکل شي ؟
پ) د غړوa,b,c,d,f څومره پرموتیشنونه په c ، په de ، په cdef پیل کیږي؟

۱۰ – الف) د غړو a , b , c ټول پرموتیشنونه ولیکی، په کومو کي چي a او b هره یوځل، غړی c دوه ځله رامنځ ته کیږي.
ب) د دې پرموتیشنونو ګڼون یا شمیر وګڼی!

۱۱ – څومره تنظیم شوي جوړې د الفبا د۲۶ (لاتین توري) تورو څخه جوړیدلی شي ؟

۱۲ – د څلورم ټولګي څومره مختلف وارییشنونه د
الف) بې له تکرار
ب) له تکرار سره د غړو 8 , 6 , 4, 2, 0 موجود دي؟

۱۳ – یوه سوری کارت له ۸۰ سوریدرځونو چي هریو لس سوري لري، جوړ دی. څومره د سوریو یوځایلیکل ممکن دي، که هر درځ ټیك یو ځل سوری شي؟

۱۴ – له شپږ غړو جوړ کمبینیشن ګڼون و څلورم ټولګي ته او پنځم ټولګي ته څومره لوي دي،
الف) بې له تکرار
ب) له تکرار سره؟

۱۵ – یادونه : دا د کارتو لوبولپاره تمرین نه دی لیکل شوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۶ – څومره مختلفی ازمایني ممکن دي که په یوه تولید کی له هر ۲۰ یوه وازمایل شي؟

۱۷ – په موټرو ترافیك نخښی په لاندې توګه یوځای شوی : یوه د ځاي نښونه ډله د نخښی الف بی پسی څلور ګروپ یا ډله راځي، چی له ځیفرونو ۰ تر ۹ څخه جوړ وي. د یوې کره ټاکلی الف بی پیژندنښی یا ترافیکی نخښی ممکن دي؟

۱۸ – د مختلفو اندازو او د خامموادو جوړ نلونه ، د رنګونی له لارې یو له بل تو‌پیریدی شي ، که څلور رنګ نښونی ولرو؟

۱۹ – د منډې یوه میچ په اخرکی شپږ پاتی منډې وهونکی برخه اخلي. د منډو څومره امکانات موجود دي؟

۲۰ – په څومره ډوله

الف) اته مختلفی مرغلرې،

ب) درې سرې، څلور شنی، یوه زرغونه مرغلره

ترتیبیدلی شي؟

۲۱ – څومره تلفونونه کیدی شي وتړل شي کی یواځي پنځه ځایزه نمره موجود وي؟ څومره تلفون تړل ممکن دي که تلفون نمرې شپږځایزې وي او په 0 پیلکیدنه یی اجازه ونه لري؟

۲۲ – د درې شپږسترګیو (یا –اړخیزو) سره (څیره مکعب دی اومخونه له یوې تر شپږ سترګو باندې په نخښه دي، ماته یې د پښتو نوم نه راځي او االماني یی Würfel دی) څومره مختلفی اچونی ممکن دي، چی ټولې شپږسترګې مختلفې سترګې ګڼون وښایي؟

څومره مختلفې اچونې له درې شپږسترګیو سره ممکن دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ کرښیز-، خطي – یا لاینیز الجبر

یادونه : د لته دې هم د هرڅه له مخه بیا دې ته ګوته نیول شوي وي ، چې څه به تکرار وي، خو هغه لاتین متل دی، چې » تکرار د زدکړې مور ده .«
لاندې مخ ته پرته اصلي برخه دm برابرونونو ځوابونو ته چې n اووښتونې یا مجهولی یا ناپیژندونکی لري، وقف ده، چیرته چې m د برابرونونو ګڼون یا تعداد n د ناپیژندونکو یا مجهولو ګڼون (تعداد) سره برابر او همدا ډول لوي او یا کوچنی کیدی شي
په ۱۱ . ۱ برخه کی د دوه ناپیژندونکو یا مجهولو سره د برابرونونو سیستمونه تر څیړنی لاندې نیول کیږي، چې د ښوونځي شمیرپوهنی تکرار دی، مګر دلته د برابرونونو سیستمونه د ناټاکلوځلونو یا ضریبونو یا فاکتورونو سره هم راوړل کیږي، چې د حالتونو توپیریدنه یي اړیینه ده٠
دا راوړنی به په ۱۱ . ۲ برخه کی درې ناپیژندونکو یا نامعلومو او په ۱۱ . ۳ برخه کی په خوښه زیاتوناپیژندونکو ته وغزیږي، په ټولو برخو کی پل په پل د دیترمینانت کلیمه او د ګاوس الګوریتم د کار ډګر ته را اچول کیږي .
په ۱۱ . ۴ برخه د هوموجینو برابرونونو سیستم ځانګړي ځوابونه په بر کی نیسي٠
یادونه : ولې لاینیز برابرونونه او نه کریز یا بندکرښیز یا خطی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ د برابرونونو له ځيري پوهيږو، چۀ دا يوه کرښه ورکوي، چې لاتين يا کۀ غواړئ انګريزي يې لاين نومولی۰ د کرښو اوبندکرښو نومونه هم شته، خو د دې لپاره، چې د نورو درسي منځپانګی سره يې توپير وي،نو موږ هم ورته له دې امله لاينيز وايو ۰

۱۱ . ۱ . لاينيز برابرون د دوه ناپيژندونکو سره

داسی يو مساوات د دوه ناپيژندونکو سرهکيدي چی په لاندې ډول انځور شي

$$ax + by = c \qquad (11 . 1)$$

دلته کيدی شي چی ناپيژندونکی لويي x او y په خوښه رييل ګڼونه وي چی يو له بل سره په ورکړ شوي بڼه تړلي. يا په بل عبارت : x او y واريابلی(اووښتونکی يا لنډ: اووښتوني) دي، برابرون (۱۱ . ۱) لاينيز فنکشن(بلواك) برابرون په ګوته کوي چی د هغي ځيره په y,x کواوردينات کی ناپای کرښه ده(۱۶ - امه برخه دی وکتل شي)

ځانګړی حالت : a = 0 يا b = 0 په ځانګړې توګه کرښه انځوروي يا په ګوته کوي چی د y - محوراو همداسی د x - محور سره غبرګه د ه .

که دا (۱ . ۱۱) برابرون د دواړو نايژندونکو يا مجوهولو x اوy لپاره ټاکنمساوات يا ټاکنبرابرون ونيول شي، نو دا پوښتنه رامنځ ته کيږي، چی ددې مسئلی د حل (اوبی) لاندې به څه پوهيدل غوښتونکی وي.

د (۱۱. ۱) برابرون اوبيونه په څرګند ډول د ټولو ارزښتجوړو (x ,y) ډيری ده، چی(۱۱.۱) برابرون پوره کوي. که اصلي حالت a , b |= 0 ته پام وکړو نو برابرون (۱ . ۱۱) د y په لور داسی ځوابوو.

$$y = - (a/b)\ x + c/b \qquad (11 . 2)$$

کيدی شي چی x په خوښه وټاکل شي اوy له (۲ . ۱۱) برابرون څخه لاس ته راولو. ګورو چی ناپاي ډيرې اوبيوني يا حلونه لاس ته راځی يعني د اوبيوني ډيری يا اوبيډيری L په لاندې ډول ده

$$L = \{ (x, y) \mid y = - (a/b)\ x + c/b \} \quad (11 . 3)$$

داسې لوستل کيږي: L د ټولو (x,y) جوړو ډيری ده ،داسې چې..... (ورپسې هغه برابرون)۰

ددې لپاره لنډ ليکل کيږي: د (۱۱ . ۱) برابرون اوبی يا حل $y = -(a/b)x+c/b$ ،د خوښی x ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

طبعآ کیدی شي چي برابرون د x په لور هم اوبی شي. دلته y په خوښه نیسو، نو د لته
د برابرون (۱۱ . ۱) ځواب داسی دی , x = -(b/a)y + c/b په خوښهy ۰

دا چي په لاندې کی موږ د درېو یا ډیرو ناپیژندونکو یا نامعلومو برابرونونو سره سر
او کار لرو، نو موخه ور بولو که ناپیژندونکي د x, y , z .... سره په نخښه نه کړو بلکه
د $x_1, x_2, x_3, ...$ سره .
ددې په نخښونو سره کیدی شي چی په څرګند ډول وښایو:
لاندې برابرون د دوه ناپیژندونکو x_1, x_2 سره

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, ...(11,4)$$

د a |= 0 لپاره

∞^i

ځوابونه لري

∞^i

په دې مانا چی i = 1 , 2, 3۰۰۰ ناپیژندونکو یا نامعلومی لپاره په خوښه r ازښتونه
کیښوول کیدی شي.

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 + \frac{b}{a_1}, ...(11,5)$$

په خوښه x_2

د

$a_2 \neq 0$

لپاره

∞

ځوابونه

$$x_2 = -\frac{a}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}; ....(11,6)$$

x_1

په خوښه

د a1 =a2 = b = 0 (0.x1+ 0.x2= b = 0 لپاره ناپای ډیر ځوابونه)

د په خوښه

$$x_1, x_2, ...(11,7)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$a_1 = 0; a_2 = 0; b \neq 0$

لپاره

$0.x_1 + 0.x_2 = b \neq 0$

په ځتوالی یا تضاد یا مخامخوالی دی، له دې امله ځواب نه شته.

نوټ : دلته

∞^i

دا مانا لري چې د ناپیژندونې یا مجهولی

x_i

لپاره i = 1,2.. په خوښه ناپای ارزښتونه نیول کیدی شي.

۱۱ . ۱ . ۲ – دوه لاینیز برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سره

د دوه برابرونونو سیستم د دوه ناپیژندونکو سره لاندې عمومي شکل لري

$$I............a_{11}x_1 a_{12}x_2 = a_1$$
$$II..........a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2;..................(11,8)$$

دا ټاکلي برابرونونه کیدی شي چې په اووښتونو یا واریابلو x 1 اوx2کی د بلواکبرابرون یا فنکشنمساوات په څیر ونیول شي او په x1 , x2 - کواوردیناتسیستم کی د کرښو په ډول انځور شي. که کرښې یو بل غوڅې کړي نو دا د مساواتو په سیستم (۸ . ۱۱) کی د کرښو یوګونی(بهتره : یوګونی، یواځنی د بل څه لپاره کارول شوی) اوبیونه ده یا حل دی.

که دواړه کرښي یو په بل پریوځي نو دا په دې مانا دي چې II همغه مساوات لکه I انځوروي. دلته دا بسیاکوي، چې د ۱۱ . ۱ . ۱ . له مخي ټیك یا فقط مساوات I یا مساوات II حل شي. دلته ناپای ډېر

∞^1

ځوابونه موجود دي.

داسي هم کیدی شي چې فورمال

∞^2

رامنځ ته شي، که ټول

$a_{ik} \wedge a_i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفر سره برابر ي. مور دلته دا حالت نه څیړو. دا څیړو چې، که دا برابرون اوبیونه ونه لري. دا حالت هغه وخت رامنځ ته کیږي، چي کرښه I اوکرښه II غبرګي ځغلي مګر یو په بل نه وي پرتی.

په دوه برابرونونو کي، د دوه ناپیژندونکو یا اووښتونو سره، کیدي شي لاندې حالتونه را منځ ته شي

۱ - یو یواځني ټاکلی ځواب مو مخ ته پروت دئ (اصلي حالت)

۲ - کوم ځواب مو و مخ ته نه دئ پروت (سیستم مخامخوالی یا تضاد لري)

۳ - ناپای ډیر ځوابونه موجود دی II (برابرون برابر په I مساوات او یا د هغه څو برابره دی)

۴ - ناپاي ډیر ځوابونه موجود دي.

(ټول $a_{ik} = 0$ او ټول $a_i = 0$ دي)

د دوه برابرونونو له مخی چی دوه ناپیژندونکی لري، کیدی شي په اسانتیا وپیژندل شي، چی د برابرونونو کوم حالت مو مخ ته پروت دئ.
په سیستمونو کی چي درې یا زیاتي واریابلی یا اووښتونې لري ورته حالتونه په ساده ډول نه شو پیژندلی چي کوم حالت تر مخ لرو. دلته باید فورمال پرمخ لاړ شو، دا چی څنګه دا کار سرته رسولی شو غواړو چی د پوښتنو په فورمال ځواب پیل وکړو او د برابرونونو پوښتنو ته ځواب پیدا کړو. دلته باید دري بنسټیز د مساواتسیستم د ځواب کاردودونه)متودونه(تکرار شي:

۱ . د برابر یا مساوي ځاي په ځاي کولو متود:
دواړه برابرونونه د یوې نامعلومی په لور اوبی کیږي(د بیلګي په توګه د x دوه په لور(، دواړه برابرې لیکي او په دې ډول یو برابرون د یوې نامعلومي سره منځ ته راځي٠

۲ - یو د بل پر ځاي کینولو متود:
برابرون یا مساوات د یوې ناپیژندونکې (د بیلګي په توګهx دوه) په لور ځواب کیږي او دا لاس ته راوړنه په بل برابرون کی ځاي په ځاي کیږي، په دې ډول د یوې ناپیژندونې برابرون منځ ته راځي (د بیلګي په توګه دx یو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د زیاتون کارونه (جمع کولو عملیه):

سړی یو ټاکلی څو برابره (کیدی شي چی کمیز یا منفي هم وي) د II برابرون د I برابرون یوه ټاکلي څو برابره سره زیاتوي، داسی چي یوه ناپیژندونی بیا مخ ته نه راځی یا له منځه ولاړه شي. د نیتجي سره بیا دا بله ناپیژندوني څیړي. دا د داوړو نامعلومو(ناپیژندونو) لپاره کیداي شي . دا متود دبرابرونونو د سیستم لپاره بنسټیز دی چی د دیترمینانتو (die Determinanten) له لارې د برابرونونو ځواب لاس ته راوړو .
دا متود په درې ځانګړو برابرونسیستمونو باندې باید وکارول شي، ټول ځلورځلوني(ځله ووني یا ضریبونه) بایدله صفر توپیر ولري یعني $a_{ik} \neq 0$ که چیرې یو $a_{ik} = 0$ د بیلګي په توګه $a_{21} = 0$ نو بیا به مساواتو په لاندې ډول د درېګوډي جوړښت لرودی:

$$I.............a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1;......a_{11} \neq 0$$
$$II.....................a_{22}x_2 = a_2,.......a_{22} \neq 0;..........(11,9)$$

دلته نو
$a_{21} = 0$

بیا له II سیده راویستل کیدی شو او د نتیجي څخه یي چی په I کی کښیښودل شوې وی x_1 هم معلومیدی شو. دلته دا په ګوته کوو چی د ګاوس الګوریتم په استعمال بیا برابرون د درېګوډي شکل باندې اړول کیږي .دا درې څرګند حالتونه په لاندې ډول دي :

سیستم ۱

I 2x1 + 3x2 = 4

II x1 - 2x2 = -5

دا سیستم یواځنی یوځواب لر II برابرون د I برابرون سره اړیکی نه لري

سیستم ۲

2x1 + 3x2 = 4

II 4x1 + 6x2 = 8

په اسانۍ ګورو چی دلته II برابرون په ۲ ځل شوی I برابرون دئ . دواړه برابرونونه همغه کرښه وښایی او په دې ډول د مساواتو اوبیونې ناپای دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳:

$$I \qquad 2x1 + 3x2 = 4$$
$$II \qquad 4x1 + 6x2 = 10$$

دلته بې ډيله ځرګنده ده چې برابرونونه یو د بل تضاد یا یو د بل په څټ دي .د Iبرابرون دوه برابره په لاندې ډول دی:

$$4x1 + 6x2 = 8$$

په دې توګه ناممکن ده چې II هم باوري وي، نو له دې امله دا سیستم ۳ اوبیونه نه لري.

بیلګه ۱۱ . ۱ :

سیستم۱ دې په پورته درې ورکړ شوو متودونو ځواب شي .

الف: مساوي اینوولوکارونه یا عملیه

$$I':.....x_1 = 2-(3/2)x_2;......;II':.....x_1 = 2x_2 - 5$$
$$2-(3/2)x_2 = x_2 - 5$$
$$-(7/2)x_2 = -7$$
$$x_2 = 2;\Rightarrow$$
$$x_1 = 2-(3/2).2$$
$$x_1 = -1$$

ب) د بل په ځاي کینولوکاروونه (عملیه) : II د x1 په لور ځواب کیږي او بیا په I کی ځاي په ځاي کیږي۰

$$II'::.........x_1 = 2x_2 - 5$$
$$2(2x_2 - 5) + 3x_2 = 4$$
$$4x_2 - 10 + 3x_2 = 4$$
$$7x_2 = 14$$
$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2.2 - 5 \Rightarrow x_1 = -1$$

پ) د زیاتونکاروونه: x_1 له منځه ځي، که (-2) ځله د II برابرون و I ته زیات شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I : ....2x_1 + 3x_2 = 4$$
$$(-2)II : .... - 2x_1 + 4x_2 = 10$$
$$I - 2II : ....7x_2 = 14$$
$$..................................x_2 = 2$$

کیدی شي، ود بیلګي په توګه، له II څخه x1 وشمیرل شي:

$$x_1 = 2x_2 - 5 = 4 - 5 = -1$$

د زیاتون کاروونی په کلکه یا تل استعمال څخه کیدی شي
x2
له منځه یو وړل شي، په دې شکل چی د II درې برابره د I دوه ځله ته ورزیات کړی شي.

$$2.I : ....4x_1 + 6x_2 = 8$$
$$3.II : ....3x_1 - 6x_2 = -15$$
$$-----------------------$$
$$2.I + 3.II : ....7x_1.......... = -7$$
$$........................x_1............. = -1$$

یادونه : په پورته کې یا نورو کومو ځایونو کې ، چې ټکی چیرته اینسول کیږي، پوهیږو، چې چیرته ټکی د ځاي غزونې او چیرته د ځل لپاره ځاي په ځاي شوي دي

بیلګه ۱۱ . ۲ :
سیسم ۲ دې په پورته درې متودو ځواب شي:

الف (مساوي اینوولو:

I' : x1 = 2 -(3/2).x2

II': x1 = 2 -(3/2)x2

2- (3/2)x2 = 2 - /3/2)x

0.x2 = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته
x2
په خوښه. دا په دي مانا چی
x2
هر ارزښت نیوی شي ۰ له I' څخه ناپای ډیر ځوابونه لاس ته راځي
x1 = 2 - (3/2)x2 او x2 په خوښه.

ب) د بل په ځاي ایښوولومتود: I' x1 = 2-(3/2)x2 ,
په II کی ایښول کیږي

II' 4.(2-(3/2)x2) + 6x2 = 8
8-6x2+6x2 = 8
0.x2 = 0 x2
په خوښه له II' لاس ته راځي
I' : x1 = 2 - 3/2 x2 x2 په خوښه

پ) د زیاتون متود یا لار یا طریقه:
2.I 4x1 + 6x2 = 8
II 4x1 + 6x2 = 8

II - 2.I : 0x1 + 0x2 = 0
که یواځی دا مساوات په نظر کي ونیول شي ، نو x1 او x2په خوښه ټاکل کیدی شي، دا چی د x1 او x2 ترمنځ په I یا II کی ورکړ شوي اړیکي دي ، نو یواځي یوه ناپیژندونکو په خوښه ټاکل کیدی شي . ځواب داسی دی:
x1 = 2-(3/2)x2
x2په خوښه
په همدې ډول:
x2 = 4/3 -(2/3)x1 ,
دلته x1 په خوښه ټاکل کیږي

بیلګه ۱۱ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳ دې په پورته درې ورکړشوومتودونو ځواب شي.

الف (مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

$$I': \quad x1 = 2 -(3/2)x2$$
$$II': \quad x1 = 5/2 -(3/2)x2$$
$$2-(3/2)x2 = 5/2 -(3/2)x2$$
$$0.x2 = 1/ 2$$

دا یو په ځتوالی یا تضاد دی، ځکه چی هیڅ یو رییل ګڼ x2 نه شته چی دا مساوات پوره کړي، نو له دې امله کوم ځواب نه شته یا وجود نه لري.

ب) د بل په ځاي ليکلو عمليه: $I': \quad x1 = 2 - (3/2)x2$,

په II کی دی په ځای شي

$$II': 4.(2-(3/2)x2)+6x2 = 10$$
$$8 - 6x2 + 6x2 = 10$$
$$0.x2 = 2$$

دا مخامخوالی یا په ځتوالی یا تضاد دی ، پس ځواب نه شته.

پ) د زیاتون متود:

$$2 . I \quad 4x + 6x = 8$$
$$II \quad 4x + 6x = 10$$

$$2.I - II \quad 0.x + 0.x = -2$$

په ځتوالی یا تضا د دی ، ځواب وجود نه لري

د لاندې بیلګو سره غواړو د منځ ته راتللو پښتنو ځوابونو لپاره اړوند لاربښوونه ګوته لك کړو.

بیلګه ۱۱ ۰ ٤ : په لاندې فورم یا بڼه برابرونسیستم ورکړ شوی:

$$I \quad x /(a+b) +y/(a-b)$$
$$II \quad x /(a-b) +y/(a+b)$$

دا ټیك هلته موخه ور یا هدفمند دی چی $a =| b$ او $-a =| b$ وي، یعنی $|b| =| |a|$ وي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي چی دا سیستم د پورتنیو متودونو څخه په یوه متود ترلی ځواب کړي، د یوه د مخه ورکړ شوي فورم یا بڼې اوړون له لاريِ هم ځواب کیدی شي.
لمړی د جمعی متود څخه کار اخلو:
د I ځل له $1/(a+b)$ او II ځل له $-1/(a-b)$ څخه وروسته دا لرو:

$$x/(a+b)^2+y/(a^2-b^2)=1/(a+b)$$

$$-x/(a-b)^2-y/(a^2-b^2)=-1/(a-b)$$

له دې سره د y دواړه ځله وونې یاضریبونه یو د بل مخامخ (یا په بل عبارت یو د بل په څټ) نخښی لري او له دې امله د زیاتون په حالت کی له منځه ځي، نو په دې توګه مو یو برابرون د یوې ناپیژندونکی سره مخ ته پروت دی:

$$\frac{x}{(a+b)^2}-\frac{x}{(a-b)^2}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}x=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}x=\frac{a-b-a-b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}x=-2b$$

$$2abx=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$x=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

که I له $1/(a+b)$ او IIله $-1/(a-b)$ سره ځل شي کیدی شي: چی y په ورته ډول وشمیرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a-b)^2}=\frac{1}{a-b}$$

$$-\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a+b)^2}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2}y=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}y=\frac{a+b-a+b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}y=2b$$

$$2aby=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$y=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

دلته مو ځانګړی حالت مخ ته پروت دی، چې دواړه ناپیژندونکی مساوي دي، کومې چې څمورږ د څېړنې لپاره بي مفهومه دی.

دا د x , y لپاره شمیرل شوي ارزښتونه په هغه حالت کې باوري دی چې ab |= 0 وي.

نو څیړو چې کوم حالت توپیر د ab = 0 لپاره منځ ته راځي. . دلته مساوات) * (تر څیړنې لاندې نیسو او درې حالته توپیروو:

.1 a = 0 , b |= 0

مساوات)*(داسې دي

0.x = -2b3, 0 . y = -2b3

په دې حالت کې برابرون سیستم ځواب نه لري.) تضاد مخ ته پروت دی

. 2 a |= 0 , b = 0

برابرون(*)(په دې حالت کې داسې دی.

0 . x = 0 ; 0 . y = 0

دلته مخامخوالی یا په ښتوالی یا تضاد نه شته (له I او هم له II لاس ته راځي

x/a+y/a=1 <=> x+y=a

که y خپلواك وټاکل شي، نو لرو x=a-y دلته y په خوښه ټاکل کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بل حالت کی لرو , $y = a - x$ دلته x په خوښه دی

3 . $a=b=0$

دا حالت د نیونی له مخی بند ، ناشونی یا ناممکن دی.

بیلګه ۱۱ . ۵:

$$\frac{11}{2x-3y}+\frac{18}{3x-2y}=13$$

$$\frac{27}{3x-2y}-\frac{2}{2x-3y}=1$$

که دا سیستم د $(3x-2y)(2x-3y)$ سره ځلوني په بنسټ فورم بدل کړي، نو لرو:

$$69x-76y=78x^2-169xy+78y^2$$

$$48x-77y=6x^2-13xy+6y^2$$

او کتل کيږي چی په دې ډول لاينيز برابرونتسيستم د x او y لپاره منځ ته نه راځي . دا چی په دې هر یو سیستم کی دوه ماتلاندې سره برابر دي نو کیدی شي چی نوې ناپيژندونکی u , v و ليکو. دا وشميرو او بيا له دې وروسته لويي x , y راپيدا کړو . موږ ځاي پر ځاي کو

$u=1/(2x-3y)$,$v=1/(3x-2y)$

او لاس ته راوړو:

$$11u+18v=13 \iff 11u+18v=13$$

$$27v-2u=1 \qquad -2u+27v=1$$

موږ د زیاتون یا جمعی متود کاروو

$$33u+54v=39$$

$$4u-54v=-2$$

$$\overline{\qquad\qquad}$$

$$37u=37$$

$$u=1 \Rightarrow v=1/9$$

له دې سره کیدی شي x او y وشميرل شي:

$$1=1/(2x-3y) \iff 2x-3y=1$$

$$1/9=1/(3x-2y) \iff 3x-2y=9$$

له دې څخه غوښتونکی ځواب $x = 5$, $y = 3$ لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ . ۱ . ۳ دویمه درجه دیترميناتې او د کرامر قاعده

که په ټولیزسیستم(11.8) باندې د زیاتون متود استعمال شي، نودx2د له منځه وړلو په لار لاس ته راځي

$$I' = a_{22}.I - a_{22}.II$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

پورته برابرون دی) ۱۱،۱۰ (وي

اود x1 د له منځه وړلو:

$$II' = a_{11}.II - {}_{21}.I:$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = (a_{11}a_2 - a_1a_{21})$$

دا پورته برابرون دې (۱۱،۱۱) وي

که 0 =| (a11a22 -a12a21) وي، نو له دې یواځنی ټاکلی ځواب لاس ته راځي

$$x_1 = \frac{a_1a_{22} - a_{12}a_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; x_2 = \frac{a_{11}a_2 - a_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, ...(11,12)$$

که د ارزښتونه په (11 . 8) کی ځای په ځای شي نو تصدیقیږي، چې(11 . 12) په ریښتینی د (11, 8) ځواب دی. له (11 . 10) تر (11 . 12) سړی په واقعیت یا ربتونی کی د دیترمینانت کلیمی په لور لاروی کوي(لاربښودوي.)

پیژند ۱۱ . ۱: د یو منظم سیستم دوه ځله دوه ریيلو ګڼونو $a_{ik}, (i, k = 1, 2)$ د د ۲ -امه درجه دیترمینانت لاندې ، لاندینی ګڼ پوهیږو:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; ....(11,13)$$

د اصلي دوه کونجتړي یا دیاګونال (قطر) د توکوځل، ترې کم(منفی) د څنګ یا فرعی دوه کوجنتړي(قطر) د توکو ځل(یا) د اصلي دوه کونجتړې یا قطر د توکو ځل څخه د څنګ یا فرعي دوه کونجتړې د توکو ځل کمیږي یا منفی کیږي)

یادونه : دا اوس او وروسته دیترمینانت بڼه د ماتریکس په څیره لیکل شوی، په دیترمینانت کې کربښی سمې دي، خو کومه ناسمپوهنه په کې نه راځي.

په (11 . 13) کی د xi ځله وونی یا ضریبونه داسی لیکل شوي لکه په (11 . 8) سیستم کی . د (11.13) دیترمینانت له دې امله د (11 8) (له ماڅخه دانوکانو کې دننه ګڼونه کله کله بدلیږي، دې ته دې د ګرانو لوستونکو پام وي، دا شمیرپوهنیزه ناسمي منځ ته نه راولي) سیستم د ځلونو (ضریبونو) دیترمینانت بلل کیږي.

که په (11. 13) کی لومړی (درز، ستن یا متِه یا ولاړه لیکه یا-کیله) د دیترمینانت ولاړه لیکه(په ځای) چی د xi ځله وونې یا ضریبونه دی د (11 . 8) برابرونسیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښي اړخ (مطلقه توکی) توکي a1 , a2 وليکل شي نو(په x1 اړونده) لاندې دیترمینانت لاس ته راځي:

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_1 a_{12} - a_{12} a_2$$

د پورته برابرون ګڼه يا نمره دې) ۱۱،۱٤ (وېپه همدې ډول که د) 11 . 13 (دیترمینانت دوهم درز بدل کړی شي، نو دx2 پورې اړوند لاندې دیترمینانت لاس ته راځي

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{pmatrix} = a_{11} a_2 - a_1 a_{21}; \ldots\ldots\ldots\ldots (11,15)$$

که له (11 . 10) تر(11 . 12) پورې له (11 . 13) تر (11 . 15) پرتله يامقايسه شي نو لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۱ (د کرامر قاعده):
که د ځله وونو يا ضريبونو دیترمینانت لپاره په (11. 13) کی

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11,16)$$

باوري وي نو د مساواتو سيستم (11 . 8) يوائځنی ټاکلی ځواب لري

$x_1 = D_1/D$; $x_2 = D_2/D$ /11,17)

په داسی حال چی D1 او D2 د (11 . 14) او (11 . 15) له مخی شمیرل کيږي.
د (11 . 10) او (11 . 11) له امله لرو

جمله ۱۱ . ۲ :
که په (۱۱ . ۱۳) کی د ځلونو دیترمینانت D لپاره باوري وي

$D = 0$ (11,18)

او د کم له کمه يوې ډيترمینانتD1 يا D2 لپاره په (14, 11) يا (11 , 15) باوري وي

$D_1 |= 0 \lor D_2 |= 0$ (11,19)

نو (11 . 8) سیستم ځواب نه لري، ځکه چي برابرون يی يو د بل سره مخامخ دي (تضاد کی دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله۱۱ . ۳ :
باوري دي
D=D1=D2=0 (11 . 20)
نو یو له برابرونونو I یا II زیاتي دئ) دواړه برابرونونه یو بل ته اړ دی یا د بل په واك کی دي(او د ۱۱ . ۱ . ۱ . برخی متود استعمالیدلی شي یا کار ترې اخستل کیدی شي.
د ښوونبیلګو په څیر دې اوس د ۱۱ . ۱ تر ۱۱ . ۳ پورې بیلګي (۱۱ . ۱ . ۲ برخه) کارول شوي سیستمونه ۱ ،۲ او۳ ګران لستونکي په دیترنمنانتو ځواب کړي، که چیرې ما دا کار سرت ونه رساوه۰.
بیلګه ۱۱ . ۶ : د سیستم لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-4-3=-7\neq 0$$

پس یواځنی ټاکلی ځواب لري. پسی باور لري

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & 3\\ -5 & -2\end{vmatrix}=-8+15=7\neq 0; D_2=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -5\end{vmatrix}=-10-4=-14$$

له دې امله باوري دی

x1=D1/D=7/-7 , x2=D2/D=-14/-7= 2 ,

بیلګه۱۱ . ۷ :

د سیستم ۲ لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=12-12=0$$

او ورپسی

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 8 & 6\end{vmatrix}=24-24=0; D_2=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & 8\end{vmatrix}=16-16=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله ناپاي ډير ځوابونه موجود دي) بيلګه۱۱ . ۲ دې وکتل شي.)

بيلګه ۱۱ . ۸ :   د سيستم ۳ لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

D =   2   3   =12 -12 = 0

او ورپسی

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 30 \neq 0$$

همدلت روښانه ده، چی ځواب نه شته(د D2 = 4 |=0 له شمیرلوکیدی شي، چی تیرشو)

بيلګه ۱۱ . ۹ :

موږ بالاخره غواړو چي په بيلګه ۱۱ . ۴ کی ورکړ شوی مساواتسيستم ته د ديترمينانت له لارې ځواب ورکړواو ددې لپاره لومړی D , D1 او D2 شميرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix}\frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b}\\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b}\end{vmatrix}=\frac{1}{(a+b)^2}-\frac{1}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{a^2-2ab+{}^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}=-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2};$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{a-b}\\ 1 & \frac{1}{a+b}\end{vmatrix}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2};$$

$$D_2=\begin{vmatrix}\frac{1}{a+b} & 1\\ \frac{1}{a-b} & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2}$$

لومړی حالت ab |= 0 :

دلته دیترمینانت D |= 0 او دا د برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب دی

$$x=\frac{D_1}{D}=\left(-\frac{2b}{a^2-b^2}\right):\left(-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2}\right)=\frac{2b}{a^2-b^2}.\frac{(a^2-b^2)^2}{4ab}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$ (د D1 = D2 له امله)

دوم ۱ حالت a=0,b|=0 : دلته D = 0 مگر

D1 = D2 |= 0

او د مساواتسیستم ځواب نه لري

دوم ۲

دلته D = D1 = D2 = 0

او ناپای ډیر ځوابونه موجود دي چې په بیلگه ۱۱ . ۴ کي بنوول شوي .

دوم ۳ حالت a = b = 0 :

دلته مساواتسیستم هدفمند نه دی (په صفر ویش مخ ته پروت دی) مشوره کیږي چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندی د برابرونونو سیستم دې د لاندې بریالي فورم بدلولو   وروسته دبیلا بیلو لارو ځواب شي او د ځواب متودونه دې یو د بل سره پرتله یا مقایسه شي.

$$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$$
$$(a+b)x+(a-b)y=a^2-b^2$$

۱۱ . ۱ . ٤ د ګاوس الګوریتم

په ۱۱ . ۱ . ۲ . برخه کي ځيرل شوو متودو ټيك په نظر نیولو سره (برابرو لیکلو- په ځاي - او د زیاتون عملیه) ، کره پوهیدلی شو چی ددې په مرسته ټولیز د برابرونسیستم (8 . 11)

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=a_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=a_2$$

په یوه درېګوډیز جوړ سیتسم

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=a_1$$
$$\ldots\ldots\ldots a_{22}x_2=a_2$$

بدلولي شو، کوم چی بیا خورا ساده ځواب کیدی شي

۱ . که $a22 |= 0$ وي، نو لاس ته راځي:

الف) $x2=a2/a22$

ب) برسیره پر دې که $a_{11} \neq 0$ وي، نو لاس ته راځي:

$$x1=(a1/a11)-(a12/a11)x2=$$
$$(a1/a11)-(a12/a11).(a2/a22)$$

۲ . که $a22 = 0$ او $a2 |= 0$ وي نو ځواب موجود نه دی یا نه شته

۳ . که $a22 =0$ او $a2 = 0$ وي، نو   ۲- م برابرون بی هوده دی (د ضرورت وړ نه دی)، او سړی بیا ا. برابرون د ۱۱ . ۱ . ۱ برخی متود په مرسته ځوابولی شي.

د (11 . 8) سیستم د ځواب پرابلم په دې ډول کمیږي، چی دا سیستم په دریګوډی بڼه یا – ځیره واړوي . هغه الګوریتم چی دا په هر حالت کی ځواب کولی شي، د ګاوس الګوریتم دی. یا (11 . 8) سیستم دریګوډی ځیره لري او یا ټول aik د صفر سره برابر نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی (11 . 8) سیستم په روځنی - یا مروج ډول او هم شیماتیکي ډول لیکل کیږي.

		x1	x2	RS
I	a11x1+a12x2= a1	a11	a12	a1
II	a21x1+a22x2= a2	a21	a22	a2

(دلته RS د مساواتو د ښي خوا (ښ خ) یا ښی لور یا ښی اړخ مانا ورکوي)، که I په ځای پریښودل شي اود II برابرون a11 / a21 - ځله له I برابرون ځخه کم شي ، نولرو

		x_1	x_2	Rs
I	$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = a_1$	a_{11}	a_{12}	a_1
II'	$0.x_1+(a_{12}-a_{11}.a_{22}/a_{21})x_2=a_1-a_{11}.a_2/a_{21}$	0	$a_1- a_{11}.a_{22}/a_{21}$	$a_1-a_{11}.a_2/ a_{21}$

که II' لنډ په دی فورم ولیکل شي

نو ټول سیستم لاندې شکل غوره کوي :

		x1	x2	RS
I	a11x1+a12x2= a1	a11	a12	a1
II'	b22x2 = b2		b22	b2

اوس بیرته باید زیات حالتونه یو له بل توپیر شي:

-که b22 |= 0 وي ، نو x2 له II' اوx1 لهI لاس ته راځي.
-که b22 = 0 , b2 |=0 وي، نو ځواب وجود نه لري.
-که b22 = b2 = 0 وي، نو ناپای زیات ځوابونه موجود دي، چی لهI او ۱۱ . ۱ . ۱ برخی ته ورته را څرګندیدی شي (معلومیدلی شي.)

سیستمونه ۱ ، ۲ ، ۳ د ګاوس په الګوریتم ښوول کیږي

بیلګه ۱۱ . ۱۰ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سیستم داسی لیکل او شیماتیك کیږی:

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II	$x_1 - 2x_2 = -5$	1	-2	-5

که غوښتونکی دریګوډیځیره غواړو لاس ته راولو نو Iهمداسی پرېږدو او له II څخه دI یو یو په دوه ځله کموو :

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II'	$0.x_1 - (7/2)x_2 = -5$	0	-7/2	-5

له II' لاس ته راځي $x2 = 2$
او له I څخه لاس ته راځي. $x1 = 2 -(3/2)\ x2 = -1$

بیلګه ۱۱ . ۱۱:

دلته سیستمونه ۲ او ۳ یواځي په شیماتیکي ډول (جدول په شکل (ځیږو. دلته د لمړۍ لیکی دوه ځله د دوهمی لیکی کمیږي

سیستم ۳

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	10
II'=II-2.I	0	0	2

سیستم۲

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	8
II'=II-2.I	0	0	0

په سیستم ۲ کی ګورو چی لمړی برابرون د دوم برابرون په مخامخ څه نوی نه لري (0 = 0 تضاد یا مخامخوالی نه شته). له دې امله یو برابرون (د بیلګي په توګه I) موجود دی چی د ۱۱ . ۱ . ۱ برخي او یا ۱۱ . ۲ په ځیر ځواب کیږي. په سیستم ۳ کی تضاد همدا اوس لیدل کیږي" 0 = 2 " ، نو له دې امله ځواب نه شته.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۱ . ۱۲ :
سیستم I دې په څلور ډوله یا واریانتو د ګاوس الګوریتم په مرسته وڅیړل شي

دوم واریانت | x1 x2 RS

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
II'=II+(2/3).I	7/3	0	-7/3
1.	2	1	-1

اول واریانت | x1 x2 RS

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
II'=II-(1/2).I	0	-7/2	-7
2.	-1	2.	2

څلورم وایانت | x1 x2 Rs

	x1	x2	Rs
I	2	3	4
II	1	-2	-5
I=I-2.II	0	7	114
-1 1.	-1	1.	2

دریم واریانت | x1 x2 RS

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
I'= I+(3/2).II	7/2	0	-7/2
2.	2	2.	

دا دلته د یو ګڼ په چوکات یا څلورګوډیز کی نیول دا مانا لري چی د هغی د پاسه ناپیژندونکي د مساوات څخه شمیرل کیږي، کومه چی په هغه لیکه کی پرته ده چی چوکاټ شوي، دا په یواځني ډول دا مانا لري :
واریانت ۱:
ا)   له I څخه دې x1 و شمیرل شي
ب) له 'II څخه دې x2 وشمیرل شي
پ) په 1 کی x2 له 'II شمیرل کیږي:
$$x2= -7 / (-7/ 2) =2$$
ت) په 2 کی   x1 له I شمیرل کیږي:
$$x = (1/ 2)(4 - 3.2) = -1$$
واریانت ۲ :
ا) له I څخه دې x2 وشمیرل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) له 'II څخه دې x1 وشمیرل شي

پ (له 'II لرو: 1- = x1

ت) له I څخه لرو: x2 = 2

واریانت (امکان) ۳

ا) له II څخه دې x2 وشمیرل شي

ب) له 'I څخه دې x1 وشمیرل شي

پ) له 'I لرو 1- x1 = -1

ت (له II لرو x2 = 2

واریانت (امکان) ۴

ا) له II دې x1 و شمیرل شي

ب) له 'I څخه دې x2 وشمیرل شي

پ (له 'I لر x2 = 14 / 7 = 2

ت) له II لرو:

x1 = -5+2.2 = -1

ټولی څلور واریانتی یا امکانت برابر ارزښتونه لری، خو دا چی په څلورمه واریانت کی په ټولګټونو شمیرنه کیږي، »مخته وونه« یا مخوونه(برتري) یا نوره هم ښه وړاندې توب ورکول کیږي.

۱۱ . ۱ . ۵ له دوه وو زیات برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سرهره

که څوك له دوه زیات برابرونونه د دوه اوښتونو یا ناپیژندونکو سره ځواب کوي، په ټولیزه (عمومي) توګه باید په نخښه شي چی لومړي دوه برابرونونه x1, x2 ځوابونه لري. که دا ځوابونه په نورو برابرونونو کی ځای په ځای شي تضاد ته رسیږو. د دوه ناپیژندونکو سره له دوه زیات مساوات په ټولیزه توګه حل نه لري. یوائې په ځانګړی حالت کی دا سیستم ځواب لرودی شي. موږ دا پروسه اول په عمومي ښوونلاري څیړو او بیا د ګاوس الګوریتم له لارې.

بیلګه ۱۱ . ۱۳: لاندني دوه سیستمونه ورکړ شوي دي

$$a)\ \begin{array}{ll} I & x1 + 2x2 = 3 \\ II & 2x1 - x2 = 1 \\ III & 3x1 + x2 = 2 \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{ll} I & x1 + 2x2 = 3 \\ II & 2x1 - x2 = 1 \\ III & 3x1 + x2 = 4 \end{array}$$

له I او II څخه د څرګندو یا معلومومتودونو له لارې په دواړو سیستمونو کی لاندې، په لومړی ځل یوائنی پیژندل شوی، ځواب لاس ته راځي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

له) a او)b څخه لرو1 = x1 + 2x2 که دا ارزښتونه په IIIکی ځاي په ځاي شي نو لرو:

په (a) کې :4 = 1.1+3.1 |= 2, په (b) کی : 4 = 1.1 + 3.1

نو سيستم (a) ځواب نه لري او سيستم ($\hat{b}$) يواځني ټاکلی ځواب لري

يعني x1=x2=1

بيلګه ۱۱ . ۱۴ :

په بيلګه ۱۱ . ۱۳ کي ورکړ شوي مساوت اوس د ګاوس د الګوريتم له لارې ځواب کوو.

a)

	x1	x2	RS
I	1	2	3
II	2	-1	1
III	3	1	3
II'=II-2.I	0	-5	-5
III'=II-3.I	0	-5	-7
III''=III'-II'	0	0	-2

b)

	x1	x2	RS
I	1	2	3
II	2	-1	1
III	3	1	4
II'=II-2.I	0	-5	-5
III=III-3.I	0	-5	-5
III=III'-II'	0	0	0

په (a) کی تضاد پيژندلکيږي (III':0.x1+0.x2=-2) ځواب نه شته يا وجود نه لري .

په (b) کی تضاد مخ ته نه دی پروت .(III':0.x1+0.x2=0) لهII' څخه لرو:

x2 = 1 او له I څخه لاس ته راځی : x1=3-2.1=1

۱۱ . ۲ لاينيزبرابرونتسيستم د درې ناپيژندونکو سره

۱۱. ۱ ۰ ۲ ۰ يو برابرون د دري ناپيژندونکو سره

مو ږ يو مساوات د دري ناپيژندونکو سره تر څيړني لاندې نيسو:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \quad (11 . 21)$$

دوه مختلف حالتونه ۱ او ۲ او نورمال فورم ۳ ممکن دي

$$I . \quad a_{11}=a_{12}=a_{13}=0 \quad (11 . 22)$$

دلته x1 , x2 او x3 يو له بل پوره خپلواك ټاکل کيدی شي. ويل کيږي چی ناپاي ډير ځوابونه مخ ته پراته دي (x1 په خوښه، x2په خوښه او x3په خوښه)

$$2. \quad a_{11}=a_{12}= a_{13}= 0 ,a_1|=0 \quad (11 . 23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته تضاد مخ ته پروت دی

$0x1+0.x2+0.x3 = a1 \neq 0$

اوبيونه نه شته.

۳- د کم له کمه يوه ځلجوړې i, k لپار دې $aik \neq 0$ وي. (بې د ټوليز وبنديزونو يا عموميت د محدود والی دې $a11 \neq 0$ وي (. کيدی شي چی $x2$ او $x3$ په خوښه وټاکل شي (ناپاې ډير ځوابونه)، او لاس ته راځي

$x1=(1/a11)(a1-a12x2-a13x3)$ په خوښه$x1$ او $x3$ (11,24)

۱۱ . ۲ . ۲ دوه برابرونونه د درې ناپيژندونکو سره

لاندې د دوه برابرونسيستمونه د درې اوښتونو يا ناپيژندونکو سره

$a11x1+a12x2+a13x3=a1$ (11,25)

$a21x1+a22x2+a23x3= a2$ (11,25)

موږ دا را ويستلي حالتونه ، چيرته چی د ټولو i, kلپاره$aik= 0$ ، په پام کی نه نيسو. دا حالت هم په پام کي نه نيسو چی دوم برابرون د لومړي په څير وي (ناپاې ډير ځوابونه. او يا دوهم برابرون د لمړي سره په مخامخوالي يا ښتوالي يا تضاد کی وي (ځواب نه وي) . دا ټول حالتونه اسان پيژندونکي دي. موږ په يوه بيلګه کی دا اصلي حالت څيرو چی يو ناپيژندونکي يا نامعلوم (د بيلګي په توګه $x3$) په خوښه ټاکل کيږي او دا نورې دوه ناپيژندونکی يا اووښتونې ($x1$ او $x2$) يواځنی لاس ته راځي، او يا يواځنی ورکول کيدی شي (ناپاې ډير ځوابونه).

بيلګه ۱۱ . ۱۵:

x1 x2 x3 RS

---

1 1 1 3 I $x1+x2+x3=3$

II $x1+2x2+3x3=6$ 1 2 3 6

II'=II-I $0.x1+x2+2x3=3$ 0 1 2 3

له 'II لاس ته راځي

$x2 = 3 -2x3$

له I څخه لاس ته راځي

$x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3, x1= x3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې لاس ته راځي
,x1=x3,x2 = 3 -2x3 x3 په خوښه.

۱۱ . ۲ . ۳ دریمه درجه دیترمینانت او د کرامر قاعده

اوس درې برابرونونه یا معادلې یا مساوات د درې ناپیژندونکو سره څیړو

I a11x1+a12x2+a13x3= a1 (11 . 26)

II a21x1+a22x2+a23x3= a2 (11,26)

III a31x1+a32x2+a33x3= a3 (11,26)

له دې سیستم څخه کیدی شي چې د ۱۱ . ۱ . ۲ برخې د برابر لیکلو او یو د بل په ځای لیکلو متودونه په ساده ډول استعمال شي. د زیاتونتیورم (-قضیه) فکر غواړي او د دریمي درجي دیترمینانت او د کرامر قاعدې په لور مو د (۱۱ . ۲۶) سیستم ځواب پیدا کولو لپاره هڅوي

پیژند ۱۱ . ۲:

رییل ګڼونو aik (i,k = 1,2,3 (یو درې درجه منظم د دیتمرمینانت سیستم

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11,27)$$

لاندې سرې لاندنی رییلګڼ پوهیدلی شي):

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}-a_{12}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}+a_{13}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}=$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32)})-a_{12}(a_{1}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{33});\ldots\ldots\ldots\ldots(11,28)$$

له دې سره د دریمی درجي دیترمینانت شمیرنه د دوهمی درجی دیترمینانت په شمیرنه بدله شوه. . ۱۱ . ۲ تعریف او په ځانګړې توګه) 11 .28 (فرمول په لاندې ډول توضیح کیدی شي:

پیژند ۱۱ . ۳ : په (11 . 27) کی د دیترمینانت D لاندېدیترمینانت Aik لاندې هغه دومه درجه دیترمینانت پوهیدلی شو، چی د D دیترمینانت i- می لیکی او k - م درځ یا متې د لرې کولو یا د منځه وړلو له لارې منځ ته راځي(زه د ماتریکس په دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې دا لیکې او مټی یا ستې له منځه نه شم وړلی، خو دا کومې ستونځې نه پیښوی ، ځکه، چې لاس ته راوړنه یې پسې لیکل شوې)

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

په دې ډول کیدی شي چې د ۱۱ . ۲ دیترمینانت په دې فورم ولیکل شي

پیژند ۱۱ . ۴ :
د دریمی درجي دیترمینانت D لاندې، چې په (11 . 27) کی ورکړ شوی دی،
دا لاندې ګڼ پو هیدل کیږي:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

د زیاتون عملیي څخه، چې دلته نسبت د دوه ناپیژندونکو مساواتو ته چې دوه ناپیوندونکی لري، روښانه ده، د (11 . 26) څخه لاس ته راوړل کیږي:

$$Dx1 = D1 , Dx2 = D2 , Dx3 = D3 \quad (11 . 29)$$

په داسی حالت کی چې Di داسي لاس ته راځي چې د ځله وونودیترمینانت (11 . 28) کی سړی i - م درځ یا ستن یا مټه د (11. 26) برابرون ښي لور ته ځای په ځای کړي.

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{pmatrix}; D_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{pmatrix}; ......(11,30)$$

موږ دا نتیجه بې له ښووني ورکوو.
له (۱۱ . ۲۹) څخه لاندې جملی لاس ته راځي:

جمله ۱۱ . ۴ (د کرامر قاعده) :
که د (۱۱ . ۲۶) د ځله وونودیترمینانتو(۱۱). ۲۷ ،په همدې ډول (۱۱ . ۲۸) لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D \neq 0 \qquad (11\ .\ 31)$$

با وري وي ، نو (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم یواځنی ځواب لري

$$x1=D1/D \quad ;x2=D2\ /D \quad ;x3=D3/D \qquad 11,32)$$

جمله ۱۱ . ۵ :

که $D = 0$ مګر $Di\ |= 0$ کم له کمه د یوه $i\ (i = 1,2,3)$ لپاره وي، نو د (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم ځواب نه لري (په (۱۱ . ۲۹ کی تضاد دی)

جمله ۱۱ . ۶ :

که $D = D1 = D2 = D3 = 0$ وي، نو په (۱۱ . ۲۶) کی کم له کمه یو برابرون له ضرورته زیات دی او دا (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم کیدي شي چې د ۱۱ . ۲ . ۲ متودونو باندې ځواب شي (وړاندیز دئ چی د ګاوس الګوریتم له متود ; چی په ۱ . ۲ . ۴ برخه کی ورکړ شوي ځواب شي.)

بیلګه ۱۱ . ۱۶ :

په لاندې سیستم

$$\begin{aligned} &\text{I} && x1 \quad -x3 = -2 \\ &\text{II} && x1 + x2 - x3 = 0 \\ &\text{III} && 2x1 - x2 \quad = 0 \end{aligned}$$

کی دئ

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 0.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (-1).\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 0 - 1.(-1-2) = 2$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2;$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - (-2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 1.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 4;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو یواځنی ټاکلی ځواب موجود دئ.

$x_1=D_1/D=2/2=1,\ x_2=D_2/D=4/2=2,\ x_3=D_3/D=6/2=3$

بیلګه ۱۱ . ۱۷ :

په لاندې سیستم

$$\begin{aligned} &I \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ &II \quad x_1 \quad -x_3 = 0 \\ &III \quad 2x_1 + x_2 \quad =1 \end{aligned}$$

کي دئ.

دا بیلګه دې ګران لوستونکی پخپله وښايي ، چې اوبیونه نه شته ۰ دې ته باید ګوته ونیسم، $D = 0$ او $D_1= -1 \neq 0$ ، چې ځواب نه لري۰

۱۱ . ۲ . ۴ د ګاوس الګوریتم

د ګاوس الګورتیم لومړی د (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم لپاره استعمالیږي. دا د دوه مساواتو لپاره چې درې ناپیژندونکي لري او همدارنګه د زیاتو مساواتو سیستم لپاره چې درې ناپیژندونکي لري د استعمال وړ دی.

د ګاوس د الګوریتم موخه په دې کی پرته ده چی (11 . 16) سیستم د ورته بدلونفورم له لارې په دریګوډیفورم را اوړي.

$$\begin{aligned} &I \quad a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=a_1 \quad (11\ .\ 34) \\ &II \quad b_{22}x_2+b_{23}x_3=b_2 \\ &III \quad c_{33}x_3=c_3 \end{aligned}$$

بنسټیز حالت : که $a_{11}\neq 0, b_{11}\neq 0, c_{11}\neq 0$ وي نو یو په بل پسی سړی کړی شي چی له x_3 III, او له x_2, II, وشمیري. مګر په (11 . 34) کی ځانګړي حالتونه هم پیژندل کیږي:

-که $c_3\neq 0, c_{33}=0$ وې، نو یو په ښتوالی یا تضاد مخ ته پروت دی، ځواب وجود نه لري

- که $c_3=c_{33}=0$ وی، نو III له ضرورتزیات دی سړی یواځی I او II څیړي.

- که $c_{33}=c_3=0$ او برسیره پر دې $a_{11}\neq 0, b_{11}\neq 0$ وي، نو x_3 په خوښه ټاکل کیدی شي او x_2 له II او x_1 له I چی x_3 ته اړ وي، شمیرلکیدی شي (ناپای ډیر ځوابونه)

-برسیره پر دې که $b_{22}=b_{23}=0$, $b_2\neq 0$ وي، نو ځواب وجود نه لري

-که نور هم ولرو چی $c_{33}=c_3=0$ او $b_{22}=b_{23}=b_3=0$ وي ، نو II له ضرورت زیات دی او له $a_{11}\neq 0$ کیدی شي چی x_2 او x_3 په خوښه وټاکل شي، او x_1 له I لاس

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته راځي چی x2 او x3 ته اړ (په واك کی یا تابع) وي (ناپاي ډیر ځوابونه ځوابونه) .
که ټول ځلونه او د مساواتو ښی خوا صفر وي ، نو ناپاي ځوابونه موجود دی.

د ګاوس الګوریتموس د دریِ ناپیژندونکو(26 . 11) سره له دوه پلونو(قدم) جوړ دی
لومړی پل (قدم) : نیسو چی په (11 . 2 6)کی 0 =| a11 دی. دا د نمرېِ بدلولو په بنسټ همیشه لاس ته راوړی شو) بي له ورکړ شووحالتونو) چی ټول aik = 0 وي) .
دلته I ورکول کیږي، او له II د I دا a21/a11 - ځله او له III دا a11 / a31 - ځله د I کموي. ددې ځخه لاندې سیستم لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad a11x1+a12x2+a13x3=a1 \quad (11.35) \\ &\text{II} \quad b22x2+b23x3=b2 \\ &\text{III} \quad c33x3=c3 \end{aligned}$$

دویم پل (قدم) : د b22 |=0 نیوني سره په II' او III' باندې د ۱۱ . ۱ . ۴ برخي سره سم د ګاوس الګوریتم استعمالیږي : سړی II' بي تغیره پریږدي اولهIII' دا b32/b22-ځله د II' کموي، له دې راپیداکیږي

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad a11x1+a12x2+a13x3=a1 \quad (11.37) \\ &\text{II} \quad b22x2+b23x3=b2 \\ &\text{III} \quad c33x3=c3 \end{aligned}$$

د ګاوس د شیما فورمالیتي سره سم بیا دا شکل غوره کي

	x1	x2	x3	RS
I	a11	a12	a13	a1
II	a21	a22	a23	a2
III	a31	a32	a33	a3
II' = II-(a21/a11)I		b22	b23	b2
III' = III-(a31/a11)I		b32	b33	b3
III'' = III' - (b32/b22)II'			c33	c3

$$x3 = c3 / c33$$

$$x2=(1/b22)(b2-b23x3)$$

$$x1=(1/a1)(a1-a12x2-a13x3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۱ . ۱۸ : دا سیستم ۰(مقایسه بیلګه ۱۱ . ۱۶)

I $x_1 - x_3 = -2$

II $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

III $2x_1 - x_2 = 0$

د ګاوس الګوریتم سره په لاندې ډول حل کیږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	0	-1	-2
II	1	1	-1	0
III	2	-1	0	0
II'= II - I	0	1	0	2
III'= III - 2.I	0	-1	2	4
III'' = III' + II'	0		2	6

$x_3=6/2=3$

$x_2=2$.......................

$x_1=-2+x_3=-2+3=1$

بیلګه۱۱ . ۱۹: (پرتله بیلګه ۱۱ . ۱۷) دا سیستم

I $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

II $x_1 - x_3 = 0$

III $2x_1 + x_2 = 1$

د ګاوس د الګوریتم په مرسته په لاندې ډول حل کیږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	0
II	1	0	-1	0
III	2	1	0	1

(c) ketabton.com: The Digital Library

--- ---------------------

II'=II-I	0	-1	-2	0
III'=III-2.I	0	-1	-2	1
III''=III'-II'	0	0	0	1

دلته دی "0 = 1 " تضاد. سیستم نه اوبی کیږي یا حل نه لري.

بیلګه ۱۱ . ۲۰: (مقایسه یا پرتله بیلګه ۱۱ . ۱۷) دا سیستم

I x1 +x2+x3 =3

II x1+2x2+3x3=6

III 2x1+3x2+4x3=9

په لاندې ډول د ګاوس په الګوریتم اوبیونه ده

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	3
II	1	2	3	6
III	2	3	4	9
II'=II-I	0	1	2	3
III'=III-2I	0	1	2	3
III'' = III'-II'	0	0	0	0

=x3 په خوښه

x2 = 3 -2x3

x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3=x3

۱۱ ۰ ۳ په خوښه ډیر مساوات ، په خوښه ډیر ناپیژندونکو سره

موږ په عمومي ډول د لاینیز سیستم برابرونونو په لار ښونی پیل کوو m (برابرون د nناپیژندونکو سره)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+....+a_{1n}x_n=a1..................(11,37)$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}+....+a_{2n}x_n=a_2$$
$$...$$
$$...$$
$$a_{nm}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+.....+a_{mn}x_n=a_m$$

دا په خوښه یا ازاد پرېږدو چی د برابرونونو ګڼون (تعداد) m د ناپیژندونکو n د ګڼون (تعداد) څخه لوي، کوچنی او که برابر دی. په څرګندو دندو یا وظایف مونږ دلته له څلور ناپیژندونکو څخه نه پورته کیږو او یواځی لاندې دوه متودونه څیړو

۱۱ ۰ ۳ . ۱ د n - م درجی دیترمینانت او د کرامر قاعده

پیژند ۱۱ . ۵ :

د n رییل ګڼونو aik یوه منظم سیستم n- م درجي دیترمینانت

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};.........................(11,38)$$

لاندې سرې لاندنې رییل ګڼ پوهیږي:

$$D=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}-a_{14}A_{14}+...\pm a_{1n}A_{1n}.....(11,39)$$

دلته aik غړي پورې مربوطه لاندې دیترمینانت Aik د (n-1) - م درجی دیترمینانت ده، چی پاتیږي، که په Dکی i - مه لیکه او k - م درځ ، متِه یا ستن (لیکه او درځ چی aikپه کی ولاړ وی) په کرښه لرې کړي یا کرښه پرې تیره کړي، یعنی ووهي.

په دي ډول د-n ام درجی دیترمینانت شمیرل و- (n-1)-ام درجی دیترمینانت شمیرلو ته راتیټیږي .

په ځانګړي توره د څلورمی درجی دیترمینانت لپاره دا لرو

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};A_{12}=\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};....A_{1n}\,etc$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که n برابرونونه د n ناپیژندونکو سره مخ ته ولرو) په) 11 . 37 (کی لرو) n=m د جمع تیورم په مرسته داسی سیستمونو لپاره لاندې نتیجه لاس ته راوړو

$$Dx1=D1,Dx2=D2, ...Dxn= Dn \qquad (11 . 42)$$

د Di دیترمینانت داسی لاس ته راځي چی د ځله وونویا ضریبونو په دیترمینانت) ۱۱ . ۳۸ (کی د-i ام درځ متې یا ستن د برابرونسیستم د ښي لاس سره بدل کړي .

د بیلګی په توګه یوسیستم د ۴ مساواتو او۴ ناپیژندونکو سره (پرتله مقایسه ۱۱ . ۴۰)

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1 a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_2 a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_3 a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_4 a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; D_2=\begin{vmatrix} a_{11} a_1 a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_2 a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_3 a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_4 a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11,43)$$

له(11 . 42) څخه لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۷ (د کرامر Cramer قاعده):

د ځله وونې یا ضریب دیترمینانت (۳۸.۱۱) لپاره د یوه مساوات سیستم د n مساواتو د nناپیژندوکو سره په (۱۱ . ۳۷) د m = n سره) باوري دی

D |= 0 (اصلي حالت) (44 . 11)

نو دا برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب لري(حل لري

$$x1=D1/D,x2=D2/D,...,xn=Dn/D. \quad (11 . 45)$$

برعکس که , D = 0 مګر D1 |= 0 کم له کمه د یوه i لپاره نو دا سیستم حل نه لري .

که D=D1=D2=...=Dn=0 وي، نو کم له کمه یو مساوات غیر ضروري دی (دلته د اوبیونې لپاره د ګاوس الګوریتم وړاندیز کوو)

بیلګه ۱۱ . ۲۱:

لا ندې سیستم دې حل شي

I	$x_1 \quad +x_3 \quad = 0$
II	$2x_1+x_2 \quad +x_4 =0$
III	$x_2 \quad -x_4 = 4$
IV	$x_1 \; -x_2 \; -x_3 \; +x_4 = -2$

$$D=\begin{vmatrix}1010\\2102\\010-1\\1-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\10-1\\-1-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}212\\01-1\\1-11\end{vmatrix}=-3-3=-6$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0010\\0102\\410-1\\-2-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}012\\41-1\\-2-11\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2-1\\-21\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}41\\-2-1\end{vmatrix}=-2-4=-6$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1010\\2002\\040-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}002\\40-1\\-2-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}202\\04-1\\1-21\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}40\\-2-1\end{vmatrix}+\left|2\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}\right|+2\begin{vmatrix}04\\1-2\end{vmatrix}=$$
$$=2.(4)+.2+2.(-4)=-12$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1000\\2102\\014-1\\1-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\14-1\\-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}+\left|2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}=4-2+2(-2+4)=6\right|$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1010\\2100\\0104\\1-1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}100\\104\\-1-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}210\\014\\1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}04\\-1-2\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}01\\1-2\end{vmatrix}=$$
$$=4+2.2-(-4)=12;$$
$$x_1=\frac{-6}{-6}=1;x_2=\frac{-12}{-6}=2;x_3=\frac{6}{-6}=-1;x_4=\frac{12}{-6}=-2$$

١١ .٣ . ٢ د ګاوس الګوریتم:

موږ ولیدل چی د ګاوس الګوریتم له لارې د مساوتو یو دریکوجشکل سیستم لاس ته راوستی شو، چی د هغي له مخی ځرګندولی شو چی کوم حل)ځواب(مخ ته پروت دی .

دا په لاندې بیلګه ځرګندوو

بیلګه ١١ . ٢ ٢ :

که په بیلګه ١١ . ٢١ کی ورکړ شوی سیستم د ګاوس الګوریتم له لارې حل کړو، نو لاندني شیما لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	x1	x2	x3	x4	Rs
I	1	0	1	0	0
II	2	1	0	2	0
III	0	1	0	-1	4
IV	1	-1	-1	1	-2
II'=II -2.I	0	1	-2	2	0
4III' = III	0	1	0	-1	4
IV' = IV-I	0	1	-2	1	-2
III" = III' - II'	0	0	2	-3	4
IV" = IV' +II'	0	0	-4	3	-2
IV"' = IV" + 2.II"	0	0	0	-3	6

$x_4 = -2$

$x_3=1/2(4+3.(-2))= -1$

$x_2=0+(-1)(-2)= 2$......

$x_1 = -(-1) = 1$ ....

بیلګه ۱۱ . ۲۳:

دا برابرونسیستم

I $x_1 + x_2 + x_3 + x_4=4$

II $x_1 - x_2 - x_3 + x_4=0$

III $3x_1 - x_2 - x_3 + x_4=2$

حل یا اوبیونه ی نه لرې، لکه د ګاوس له شیما څخه چی لیدل کیږي:

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	2
II' = II-I	0	-2	-2	0	-4
III' = III-3.I	0	-4	-4	0	-10
III'' = III' - 2.II'	0	0	0	0	-2

دلته III''   په ښتوالی یا تضاد خوندي لري " 0 = -2   "

بیلګه ۱۱ . ۲۴:

لاندې سیستم د ۵ برابرونونو او ۴ ناپیژندونکو سره

I x1 +x2 +x3 +x4= 4

II x1 -x2 -x3 +x4= 0

III 3x1 -x2 -x3 +3x4= 4

IV x1 +2x2 +3x3 +4x4=10

V 3x1 +x2 + x3 +3x4= 8

ګورو چی oe1 (ناپای ډیر) اوبیوني لري

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4
II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	4
IV	1	2	3	4	10
V	3	1	1	3	8
II' = II-I	0	2	- 2	0	-4
III'= III-3.I	0	-4	-4	0	-8
IV' = IV -I	0	1	2	3	6
V' = V-3.I	0	-2	-2	0	-4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II"= II'+2.IV'	0	0	2	6	8
III'=III'+4.IV'	0	0	4	12	16
V" = V' +2.IV'	0	0	2	6	8
III''' = III"-2.II'	0	0	0	0	0
V'''=V"-II	0	0	0	0	0

ګورو چی III''' او V''' تضاد نه لري. سړی کړي شي چی x4 په خوښه وټاکي او لاس ته راوړي

له , x3=4-x4 II" له x2=6-2(4-3x4)-3x4=-2+3x4 IV' او لهI

x=4-x2-x3-x4=4-(-2+3x4)-(4-3x4)-x4=2-x4

نو x1=2-x4   په خوښه x4 ټاکو

او x2=-2+3x4   ، په خوښه x4 ټاکو

او x3=4-3x4   په خوښه x4 ټاکو

یادونه : هغه کڼ یا نوره هم ښه هغه ځله ووني، چې غواړو صفر شي یا له منځه وړو هغه مو شنه کړي٠

سړی د ګاوس شیما په دوم بلاك کی پیژندلی شي، مساوات، کوم چی په III' او V' پورې اړه لري، بل څه نه افاده کوي په غیر له هغی چی په II' اړه لرونکي دي. کیدی شو چی په III' او V' لیکو مو کرښه تیره کړې وی) له منځه وړې وی (. دریم بلا ك به یواځي له کرښی II' جوړ وی، او د ګاوس الګوریتم به له دې سره پاي میندلی وی.

۱۱ . ۴ هوموژین مساواتسیستم:

د n مساواتو یو سیستم د n نامعلومو سره چی د ټولو مطلقه غړي ورك شي، هموګین مساواتسیسمتم بلل کیږي .

د n = 3 لپاره دا د مثال په توګه هوموګېن سیستم بلل کیږي

$$\text{I}\quad a11x1+a12x2+a13x3= 0.............$$

$$\text{II}\quad a21x1+a22x2+a23x3= 0 \quad (11.\ 46$$

$$\text{III}\quad a31x1+a32x2+a33x3= 0..............................$$

یو داسی هموژینسیستم تل یوه اسانه اوبیونه یا اسان حل لري

$$x1=x2=x3=...=xn=0 \qquad (\ 11.\ 47\ )$$

که د ځلوونو د یترمینانت (۱۱ . ۳۸) لپاره D |= 0 باور ولري، نو د جملی ۱۱ . ۷ شیما څخه یواځي اسان trivial اوبیونه یاحل موجود دی او باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۱. ۸ : يو هوموگين مساواتسيستم يواځ هلته سخت حل لري، که D = 0 باوري وي

بيلګه ۱۱ . ۲۵ :

دا هوموژين برابرونسيستم

$$\begin{aligned} I \quad & x_1 \quad +x_3=0 \\ II \quad & x_1 \; -x_2 \quad =0 \\ III \quad & x_1 \; +x_2 +x_3=0 \end{aligned}$$

د

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + (1+1) \neq 0$$

له امله يواځنی ساده اوبيونه $x_1=x_2=x_3=0$ لري.

بيلګه ۱۱ . ۲۶:

دا هموګين مساواتسيستم

$$\begin{aligned} I \quad & x_1 \quad +x_3 = 0 \\ II \quad & x_1 +x_2 \quad = 0 \\ III \quad & x_1 +x_2 +x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

د

له امله ناساده اوبيونه هم لري دا په لاندې ډول د ګاوس د الګوريتموس څخه لاس ته راځي: په لاندې کې RS د پاتې- يا باقي سيستم په معنا دی.

x1 x2 x3 RS

---

0 0 1 I 1

0 II 1 -1 0

0 III 0 1 1

II'=II-I 0 -1 -1 0

III' = III 0 1 1 0

II'' = II + III' 0 0 0 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو چې II"تضاد نه لري x3په خوښه ټاکو، او له III' لاس ته راځيx3-=x2 او له I ځخه لاس ته راځي x3-=x1نوx3- =x1نو X3 په خوښه او x3- = x2 نوx3 په خوښه

. تمرینونه

د نامعلومو لپاره ـلکه له ښوونځي چې ورسره بلد یو-پوهیږو او یا هم

۱ – کربنیز مساواتسیستم له دوه مجهولو سره.

مشوره مو داده، چې د دې تمرینونو د حل لپاره د مختلفو تګلارو ځخه کار اخستلس شي، چې بیایې و ازمایو. د لته دې د زیاتون یا جمعې قانون او همداسې د ګاوس الګوریتم ته لومړیتوب ورکړ شي ا و د دیترمینانت سره شمیرنه دې یوه بله د استعمال لار وي.

۱ . ۱ – مساوتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

1.1.1. a) $2x_1 + 3x_2 = 8$, $3x_1 - 6x_2 = -30$

b) $x_1 = 3x_2 - 14$, $x_2 = 3x_1 - 22$

c) $51x - \frac{3}{20y} = 3$, $48x - \frac{1}{10y} = 2$

d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$, $\frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4$

1.1.2. a) $5(x_2 + 2) - 3(x_1 + 1) = 23$, $3(x_2 - 2) = 19 - 5(x_1 - 1)$

b) $3(2x_1 - x_2) + 4(x_1 - 2x_2) = 87$, $2(3x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2) = 82$

c) $4 - \frac{1}{3}(2x - y - \frac{9}{2}) = \frac{1}{8}(3x - 6 - 4y)$, $4 - \frac{x - \frac{1}{2}y + 3}{3} = \frac{2y - x - 6}{8}$

d) $3y - \frac{3(4x - 3y)}{2} = 2x - 3y - 1$, $3x - \frac{3(3x - 2y)}{5} = 5x - 3y - 1$

1.1.3. a) $\frac{1}{\frac{7}{2}x - 3} = \frac{1}{4y - 3}$, $\frac{1}{\frac{5}{2}x + 4} = \frac{1}{3y + 1}$

b) $\frac{1}{3x - 5} = \frac{4}{7y - 13}$, $\frac{1}{y - x} = \frac{8}{3x + y}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

c) $\frac{1}{y-10} = \frac{25}{12x+19}$

$\frac{1}{45-x} = \frac{8}{15y+1}$

d) $4+y = x$

$\frac{2}{5-3x} = \frac{3}{7-2y}$

1.1.4. a) $(x-1)(2y+5) = (y+1)(2x-1)$

$(2x+7)(y-2) = (2y-3)(x+2)$

b) $4(5y-3)(2x+1) = (10x+7)(4y-3)$

$2(2y+1)(x+4) = (2x+5)(2y+3)$

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{x}-\frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

d) $\frac{3}{x}+\frac{8}{y} = 3$

$\frac{15}{x}-\frac{4}{y} = 4$

1.1.5. a) $\frac{9x_1}{2}+\frac{3x_2}{2} = 3$

$3x_1+x_2 = 2$

b) $\frac{2x_2-5x_1}{6}+\frac{x_1}{6} = \frac{x_2-2x_1}{3}$

$\frac{5-3x_1}{3}-\frac{4x_2-1}{4} = \frac{6x_1+23}{12}-\frac{3x_1-4x_2}{2}$

c) $\frac{12}{4x_1+3x_2}-\frac{1}{3(3x_1-2x_2)} = \frac{1}{6}$

$\frac{5}{3x_1-2x_2}+\frac{6}{4x_1+3x_2} = 5{,}25$

d) $3(x_1-2)+4(2x_2+\frac{3}{2}) = 0$

$5(x_1+3)-3(x_2-\frac{1}{3}) = 16$

1.1.6. a) $3x_1+4x_2 = 8$

$5x_1-2x_2 = 9$

$7x_1-8x_2 = 10$

b) $6x_1-x_2 = 1$

$9x_1+2x_2 = 5$

$3x_1-x_2 = 1$

c) $5x_1-3x_2 = -3$

$3x_1+5x_2 = 5$

$3x_1-1{,}8x_2 = -1{,}8$

$0{,}9x_1+1{,}5x_2 = 1{,}5$

d) $2x_1-3x_2 = 10$

$-\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{2}x_2 = -\frac{5}{3}$

$x_1-1{,}5x_2 = 5$

$0{,}5x_1-0{,}75x_2 = 2{,}5$

۱ ، ۲ – مساواتسیستم د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x_1+x_2 = a$

$ax_1-x_2 = b$

b) $3x_1-2x_2 = 5a$

$2x_1-3x_2 = 5b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $10x + 6y = 4a + b$
$6x + 10y = 4a - b$

d) $14x - 15y = 24a$
$10x - 21y = 24b$

1.2.2. a) $\frac{x_1}{2a+b} - \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8ab}{b^2 - 4a^2}$
$\frac{x_1}{2a+b} + \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8a^2 + 2b^2}{4a^2 - b^2}$

b) $-(a+b)x_1 + (a-b)x_2 = 0$
$(a-b)x_1 + (a+b)x_2 - 4ab = 0$

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \cdot x - \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2 \cdot y = a^2$
$\frac{a^2+b^2}{2b} \cdot x + \frac{b^2-a^2}{2b} \cdot y = b$

d) $\frac{x}{b+c} - \frac{y}{a+c} = a - c$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{b+c} = b - a$

1.2.3. a) $x + y = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$
$x - y = \frac{4ab}{a^2-b^2}$

b) $x + y = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
$2x + 3y = \frac{2a^2+ab+3b^2}{a^2-b^2}$

c) $ax + by = 2a$
$a^2x - b^2y = a^2 + b^2$

d) $ax + by = a^3 + 2a^2b + b^3$
$bx + ay = a^3 + 2ab^2 + b^3$

1.2.4. a) $ax + by = 2a$
$x + y = \frac{a^2+b^2}{ab}$

b) $(a-b)x + (a+b)y = a + b$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$

c) $\frac{x-a}{y-a} = \frac{a-b}{a+b}$
$\frac{x}{y} = \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$

d) $(a-b)x + y = \frac{a+b+1}{a+b}$
$x + (a+b)y = \frac{a-b+1}{a-b}$

۱ . ۳ – شي شميرنه

۱ . ۳ . ۱ کوم دوه اعداد لاندې خوبونه لري؟ که هرعدد په ۵ لوی شي، د مربع یا څلورئ کمون(تفریق) یې په ۱۰۰ لوییږي، په داسي حا لي جې ضرب یې په۳۲۵ زیاتیږي.

۱ . ۳ . ۲ د دوه عددونو جمعه یا زیاتون دومره لوي دی، لکه د تفریق مربع یې.

که ۴ لومړي عدد تع ورزیات شي او له دویم عدد کم شي، نو د مربع کمون د یا تفریق یې ۹۹ دی، وښايئ چې عددونه څومره لوی دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۳ . ۳ د هرو دوه ګڼونو څخه هر یو یې په 2 لویوي، نو ګڼونه څانونه نیسي لکه: 4 : 3 . که له هر یوه ددې دوه ګڼونوڅخه 3 کم شي ، نو داسې لاس ته راغلي ګڼ ځان نیسي لکه : 3 : 2 . دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۳ . ۴ د دوه ګڼونو زیاتون 999 دی. که لمړی ګڼ په 9 وویشل شي او دوم په 6 ، نو د ویشونکو زیاتون 138 دی . هر یو ددې دوه ګڼونو شومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۵ د دوه ګڼونو زیاتون 1000 دی. که لمړی له 2 او دوم له 3 سره ځل یا ضرب شي، نو د ځلونو زیاتون بی 2222 دی. هر یو له دې ګڼونوشومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۶ په دوه ګڼونو کې یو له بل په 0,909 لوي دی، زیاتون یې 3,191 دی. دواړه ګڼونه څه نومیږي یا کوم دي؟

۱ . ۳ . ۸ . د یوه دریکونجي د دوه اړخونواوږدوالي زیاتون 8,4 cm دی او پړیکشن یا پریوستون یې د دریکونجي په دریم اړخ 4 cm او 1,6 cm دی. د دریګوډي اړخونه شومره لوي دي؟

۱ . ۳ . ۹ . د یوه لوي ښار ترمنځ دوه کلي X او Y د ښار له مرکز Z سره یو دریګوډی جوړوي . له X څخه چې له Z څخه تیریږي ،Y ته اوږدوالي 12 cm دی، Y له مرکز Z څخه 2 km زیات لري دی نسبت و X ته ، دواړه منځ کلي X او Y له مرکز Z څخه شومره لرېدي؟

۱ . ۳ . ۱۰ . د یوه فوټبال میدان څخه د څلورکونجي شکله د لرګیو راګرځیدلي دیوال، چې 420 m اوږد دی ، باید په اغزیو سیمانو بدل کړي. دلته یوه خوا په 5 m کوچنۍ کیږي، که بل اړخ په 10 m اوږده شي. له دې سره د سیمګرځي اوږده د هوارې دننه په $100\ m^2$ زیاتیږي. د څلورکونجیز اړخونه شومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۱۱ . د یوه موټر ماشین یخی ۸ لیتره اوبه خوندي کوي او دوه وتللاري لري، دا کیدی شي خالي شي، که د بیلګي په توګه لمړی 5 دقیقی او دوم 2 دقیقی واز کړي او یا دوم 6 دقیقي او لمړي 3 دقیقي واز شي. په هرنل کي څومره اوبه په یوه دقیقه کی وزي؟

۱ . ۳ ۱۲ . یو پلار له خوي څخه ۳۶ کاله زوړ دی په ۵ کاله کی پلارد خوي 1/4 عمرڅخه ور زیات 3 برابره د خوي عمر لري اوس پلار او خوي هر یو څومره عمر لري؟

۱ . ۳ . ۱۳ د شربت د ګډولو لپاره دوه ډوله شربتونه سره ګډیږي. که له لمړي دري بوتله واخستل شي او له دوم ۷ بوتله نو د یوه بوتل ارزښت دي ۲ مارکه وشمیرل شي. مګر که له لمړي ۷ بوتله او له دوم دري بوتله سره ګډ شي، د یوه بوتل ارزښت 40 , 2 الماني مارکه(DM) کیږي. د په کارونو شربتونو بوتل به څومره ارزښت ولري؟

۱ . ۳ . ۱۴ . یود $450\ m^3$ اوبو اوبه ډکی یا اوبه ساتی (بیلر) له دوه نلونو ډکیږي. که لمړی نل دري دقیقي او دوم یوه دقیه واز وي،نو په اوبه ساتي کی $40\ m^3$ اوبه جریان لرودی شي. مګر که لمړی یوه دقیقه او دوم نل ۷ دقیقي وازې وي، نو اوبه ساتي ته $60m^3$ اوبه جریان لري. هر نل په یوه دقیقه کی څومره اوبه اوبه ساتي ته غورځوي؟ څومره باید هر نل له همغه یوه وخته واز وي چی اوبه ساتی ډك شي؟

۱ . ۳ . ۱۵ . دوه کارګرو ته د کندنی کار ور په غاړه کیږي. که دواړه یوځاي کار وکړي، نو ۱۲ ورځو ته ضرورت دی. که لمړی دوه ورځي او دوم دري ورځي کار وکړي، نو په دي وخت کی یواځي 1 / 5 برخه د کار کړه کیږي. څومره ورځی به له دوي هر یو ځانله د دې کار لپاره ضرورت ولري ؟ اړتیا ولري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۱۶ . د يوې ګردۍ په چاپيري چې ۱۰۰ متره اوږد دی، دوه بدنونه په حرکت راځي. هغوي هر ۲۰ دقيقې حرکت کوي، که هغوي په همغه لور حرکت وکړي او هر ۴ دقيقې، که هغوي يو د بل په خټ لور حرکت وکړي، هر بدن په يوه ثانيه کې څومره واټن تې کوي يا وهي؟

۱ . ۳ . ۱۷ . په يوه ګردۍ چې چاپېرې يې ۹۹۹ متره اوږد دی دوه بدنونه په همغه لور حرکت کوي او دا حرکت په هرو ۳۷ ثانيوکې. د دواړو بدنونو سرعت څومره دی، که د لمړي سرعت څلور واره لوي لکه د دوم وی ؟

۲

۲ . كربنيز مساوات سيستمونه د درې مجهولو سره

۱ – مساواتسيستم د ټاکلو ضريبونو سره

a) $\begin{aligned} x + y &= 14 \\ x + z &= 15 \\ y + z &= 16 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 4 \\ x_1 + x_3 &= 18 \\ x_2 - x_3 &= 6 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6{,}6 \\ x_1 - x_3 &= 2{,}6 \\ x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x + y + z &= 25 \\ 3x - 2z &= 1 \\ 20y - 16z &= 0 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 2x + 3z &= 13 \\ 3x - 4y &= 3 \\ 5y - 6z &= 9 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 12x + 24y - 42z &= 30 \\ 4x + 8y - 14z &= 10 \\ 6x + 12y - 21z &= 15 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} 5x + 3y + 2z &= 207 \\ 5x - 3y &= 37 \\ 3y - 2z &= 19 \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 14 \end{aligned}$

i) $\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 11 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 6 \\ 6x_1 - 16x_2 + 10x_3 &= 39 \end{aligned}$

j) $\begin{aligned} 4x + 4\tfrac{1}{2}y - 6\tfrac{3}{4}z &= 20 \\ 2\tfrac{1}{5}x - 2\tfrac{1}{3}y + 1\tfrac{1}{2}z &= 5\tfrac{2}{3} \\ 1\tfrac{2}{3}x + 1\tfrac{3}{4}y - 4\tfrac{1}{2}z &= 3\tfrac{1}{3} \end{aligned}$

k) $\begin{aligned} \tfrac{2}{5}x - y &= 0 \\ \tfrac{2}{3}x - z &= 1 \\ -\tfrac{2}{3}y + z &= 2 \end{aligned}$

۲ . ۲ – مساوات سيستمونه د ناټاکلو ضريبونو سره

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2c \\ x_1 + x_3 &= 2b \\ x_2 + x_3 &= 2a \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2(a + b) \\ x_1 + x_3 &= 2(a + c) \\ x_2 + x_3 &= 2(b + c) \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} ax + by - z &= 1 \\ ax - by + z &= b \\ -ax + by + z &= a \end{aligned}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

d) $ax + y - cz = 2a$
$-ax + y + cz = 2c$
$ax - y + cz = 2ac$

e) $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2a$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 2b$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0$

f) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{a}$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{2}{b}$

g) $x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = a$
$y + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = b$
$z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c$

h) $\frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} = a + b$
$\frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} = b + c$
$\frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} = c + a$

۳ . په خوبنه زيات مساوات د په خوبني زياتو مجهولو سره

a) $2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 7$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$
$0{,}5x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 - 0{,}5x_4 = 3$
$3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$

b) $3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6$
$x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 = 1$
$7x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 = 10$
$6x_1 + 0{,}5x_2 + 5x_3 + x_4 = 9$

c) $x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 1$
$-2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 3$
$-2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 5$
$3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 2$
$x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 4$

d) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 21$
$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 1$
$6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 = 0$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 = 19$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 - 7x_6 = -24$
$-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 3$

هوموجين مساوات سيستمونه:

a) $3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0$
$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$
$-2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0$

b) $-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0$
$5x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

c) $20x_1 - 10x_2 + 15x_3 = 0$
$-12x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0$
$8x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0$

d) $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$
$9x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ . الجبري مساوات يا - برابرونونه

۱۲ . ۱ نالاينيز- يا ناکربنيز- يا ناخطي برابرونونه

ټول مساوات چې د نورمالفورم

$$A . x = a \qquad (12.1)$$

سره يوارزښته (اکويوالنت) نه وي ، نالاينيز – يا ناکربنيز مساوات بلل کيږي او عمومي فورم يې په لاندې ډول دی

$$F(x) = 0 \qquad (12 . 2)$$

دلته F (x) په x کې يوه ناکربنيزه يا ناخطي وېينه يا افاده ده . د (12 . 2) حل دا مانا لري چې ټول د xارزښتونه پيدا شي د کومو لپاره چې (12 . 2) باوري وي. بايد په پام کې ونيول شي چې ايا يواځې رييل ارزښتونه پيدا کوو او که کمپلس ارزښتونه هم غواړو چې پيدا کړو. د بېلګې په توګه لاندې ناکربنيز يا لاينيز مساوات

$$x^2 - x - 2 = 0$$

لاندې دواړه رييل ځوابونه لري

$$x1 = -1 , x2 = 2$$

چې د ارزښتونو ځاي په ځاي کولو سره بې مساوات باوري کيږي .ددې په څېټ يا برعکس دا برابرون $x^2 + 1 = 0$ رييل ځواب نه لري (۵ -مه برخه دې وکتل شي)، بلکه لاندې ايماګينار ځوابونه لري : $x1= i , x2 = -i$

د دې حالت د ښه روښانولو لپاره دې (۱۵ برخه دې وکتل شي) د برابرون او فنکشن ترمنځ اړيکو ته پاملرنه وشي: اړيکو y=F(x) ته فنکشنبرابرون او x ته متحوله

(c) ketabton.com: The Digital Library

وایي، چې زه یې کله اووښتونی او کله ناپیژندونې بولم(ښه نومه ونه یې اوښتوني ده) په څېټ یا برعکس (2 . 12) یو ټاکنمساوات دی او x هلته یوه ناپیژندونکی یا اوښتونی دی.

د (2 . 12) برابرون یا مساوات اوبیوني یا حل ته د برابرون د F (x) صفرځای یا د مساوات F(x)=0 جذر یا ریښه هم وایي.

هغه برابرون یا مساوات چې په (۱۲ . ۲) فورم نه دئ ورکړ شوی کیدی شي چې په دې لاندې فورم واړول شي. د بیلګي په توګه د دې برابرون لپاره :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0 \quad \text{او} \quad f(x)=g(x)$$

نورمال فورم په لاندې ډول لاس ته راوړل کیږي

F(x)=f(x)-a.g(x)=0 او F(x)= f(x)-g(x)= 0

د نالاینیزو برابرونونو لپاره د لاینیزو برابرونونو په څیر راغونده (اختمامیه، رابنده، راتړلی) تیوري نه شته. په پولیزه یا عمومي ډول څوك نور فرمول نه شي ورکولی، د کوم له مخې چې د صفرځاي معلومیدی شي. باید په نومریکو (numerischen Methoden) متودونو یا ورپسې ګڼ متودونو په ورنزدې یا تقریبي ډول پیداشي

نالاینییز برابرونونه په دوه ټولګیو ویشل کیږي: الجبري او تراسځندنت چې په دې او راتلونکی څپرکي یا لکه چې ما استعمال کړې برخه کې یې څیړو، چې اوبیونې یې روښانه افاده شوې (explizit لاتین: واضح یا روښانه ، افاده شوی، اکسپلیځټ) دي.

له ۱۲ . ۲ څخه تر ۱۲ . ۴ پورې الجبري برابرونونه څیړل کیږي چې په لاندې نورمال فورم یا – بڼه اړول کیدی شي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,3)$$

دلته په (2 . 12) کی یو نالاینیز بلواک یا – فنکشن (F (x د یوه n - م درجې پولینوم په څیر مخ ته پروت دی . موږ په (۱۲ . ۲) کی د ضریبونو(ځله وونو) لپاره یواځی رییل ګڼونه پریږدو (په دې مانا چې ځلونه یواځي رییل وي، یواځی رییل ګڼونو ته اجازه ورکوو) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په (۱۲ . ۳) کی کیږ اړخ ته n - م درجه پولینوم

$$F(x) = P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0 ....(12,4)$$

ته ټول ریشنل (- ریښتونی) بلواک یا فنکشن هم وایي، ځکه چی د ریشنل شمیرله عملیو زیاتون، کمون، او ځل له لاري او نه په x واریابلی او ai د رییل ضریبونو، ځلونو یا فاکتورونو باندې د ویش کارونی کارولو (عملي استعمال) له لارې منځ ته راځي .ټولیز برانرون یا

$$b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0 = 0; b_n \neq 0 ....(12,5)$$

کیدي شي په bn|= 0 ویش باندې په (۱۲ . ۳) نورمال فورم واړول شي .

که دا نه لاینیزفنکشن یا ۰ بلواک (F (x په (۱۲ . ۲) باندې په واریابلي یا اوونتوني x او ځلونو باندې ټول د شمیر کاروني یا عملیي او بالاخره دویش کارونه وکارول شي یا اجرا شي او رییل پارامتر (Parameterپه شمیرپوهنه کې ثابت (همغځ) او یا مرستندویه لوي ده) تشکیل شي نو فنکشنونو ته بیا مات ریشنل فنکشنونه ویل کیږي.
دا تل د دوه پولینومونو یا ریشنل فنکشنونو د ویش په څیر انځوروړ دي

$$F(x) = R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0}{c_mx^m + c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{n-2} + ... + c_1x + c_0}; .....(12,6)$$

په همدې ډول برابرون

$$F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0; ....(12,7)$$

تل په (۱۲ . ۵) یا (۱۲ . ۳) برابرون اړول وړ دي . دا باید په پام کی وي چی د (۱۲ . ۳) لپاره یواځنی هغه ځواب په پوښته کی راځي، د کوم لپاره چی باوري وي:

$$Q_m(x) \neq 0$$

که چیرې د نالاینیزبلواک یا - فنکشن جوړولو کی د ریشنل شمیرعملیو تر څنګ د توان (مټ، په جګ) یا پوتنځ کول او جذر نیولوته هم اجازه ورکړل شي نو بیا سرې د الجري فنکشنونو څخه غږیږ. یعني داسي فنکشنونو ته الجبري فنکشنونه ویل کیږي او (۱۲ . ۲) برابرون بیا الجبري برابرون بلل کیږي ، دا ډول مساوات هم کیدی شي چی په (۱۲ . ۳) فورم واړول شي.

هره n - مه ریښه یا جذر $\sqrt{G(x)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (G(x افادې یا ویینې له منځه وړل کیدی شي, که چیرې ځوك دا برابرون په یوه خوا راوړي او بیا د برابرونونو دواړه خواوې دn په توان کړي یا د n پوتنځ یا مټ ته جګ کړي . دا په ۱۲ . ۴ برخه کی په ځرګندو یا معلومو بیلګوڅیړل کیږي . په نومولو تګلارو د الجبري مساواتو ځینه د (۱۲ . ۳) فورم برابرونونو ته راکښته کیدلی شي. د الجبري مساواتو دا نورمال فورم د n - می درجي برابرون هم بلل کیږي. ټول نالاینیز برابرونونه چی الجبري برابرون نه دي، ترانسځیندنت برابرون بلل کیږي . د ترانسځیندنت رابرونونو درې تیوپونه، په نامه ، اکسپوننشل برابرونونه ، لوګاریتمي برابرونونه ، او ګونومتریکي برابرونونه دي چي په برخه ۱۳ کی به تر ځیرني لاندې ونیول شي.

۱۲ . ۲ ځلوری(مربع-) مساوات په توان(مټ، جګ) د ۲

۱۲ . ۲ . ۱ په جګ د ۲ مساوات په نورماله بڼه

د نالاینیزو الجبري برابرونونو ساده بڼه د ۲ په توان یا مټ (په جګ ۲ هم ویل کیږي) برابرونونه دي چی ځلوری یا مربع برابرونونه بلل کیږي .د دې ټولیزه بڼه (عمومي فورم) داسی ده ۰ دی

$$b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = 0; b_2 \neq 0; ....(12,8)$$

په b2 یي ویش په لاندې ډول یو ورته ارزښته (اکویوالنت äquivalent) نورمالبڼه یا نورمالفورم ورکوي

$$x^2 + a_1 x + a_0 = 0; (a_1 \neq b_1 / b_b; a_0 \neq b_0 / b_2); ....(12,9)$$

ددې حل د ځلوری پوره کونې یا مربعتکمیل څخه په ګټه د بینوم په فورمل ودې کتل شي: ۱ . ۲ . ۲) ولاړ دی.

$$[x + a_a / 2]^2 = x^2 + a_1 x + \frac{a^2{}_1}{4}; ....(12,10)$$

په دې ډول کیدی شي چی (۱۲ . ۹) برابرون په لاندې فورم داسی واړول شي:

$$x^2+a1x+a0=(x+a1/2)^2+a0-a1^2/4 = 0 <=>$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[x+a_1/2]^2=(a_1^2/4)-a_0 \qquad (12,11)$$

که وي

$$(a_1^2/4)-a_0>0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0>0 \Leftrightarrow a_1^2>4a_0 \quad (12,12)$$

نو دوه امکانات شته دی، چی (۱۲ . ۱۱) برابرون پوره کړي:
داصدق کوي

$$x+\frac{a_1}{2}=\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,13)$$

يا

$$x+\frac{a_1}{2}==-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,14)$$

دا دواړه خواو په توان د ۲ څخه، د (۱۲ . ۱۳) او همداسی د (۱۲ . ۱۴) څخه (۱۲ ۱۲)برابرون او په دې ډول (۱۲ . ۹) برابرون لاس ته راځي (په پام کی دې وي چی a د ۲ اصلي برخی په بينا تل نا کميز يا نامنفي ګڼ پوهيدل کيږي، چی څلوری يا مربع يی a ده) . له (۱۲ . ۱۳) په همدې ډول له (۱۲ . ۱۴) څخه رييل ځوابونه لاس ته راځي،

$$x_1=-\frac{a_1}{2}+\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\, x_2=-\frac{a_1}{2}-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,15)$$

او ددې لپاره دا هم ليکلی شو

$$x_{1,2}=-\frac{a_1}{2}\pm\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,16)$$

په (۱۲ . ۹) کی د (۱۲ . ۱۵) په همدې توګه (۱۲ . ۱۶) ځاي پر ځاي کولو څخه پوهيدل کيږي چی دواړه ارزښتونه
x1 او x2
په رېښتونی څلوری برابرون يا مربع مساوات پوره کوي.
په لاندې حالت کی

$$(a_1^2/4)-a_0=0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0=0 \Leftrightarrow a_1^2=4a_0;.............(12,17)$$

د (۱۲ . ۱۶) له لارې تيك يو رييل اوبی لرو:

$$x_{1,2}=x_1=x_2=-(a_1/2)\pm 0=-a\ \ /2;.................................(12,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۵) همداسی په (۱۲ . ۱۶) باندې په تکیه دا اوبی دوه واره دی یا په بل عبارت دوه واره رامنځ ته کیږي او په دې ډول د یوه دوه واره اوبیوني (۱۲ . ۱۸)څخه غږیږو.

که وي

$$(a_1^2/4)-a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2<4a_0;................/12,19)$$

نو (۱۲ . ۱۱) همداسی (۱۲ . ۹) رییل حل نه لري. که په کمپلس ګڼونو شمیرنه وکړو نو له ۵ - برخی څخه لاندې لاس ته راوړو

$$x+a_1/2=\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i} \wedge x+a_1/2=-\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

او په دې ډول د کونجوګیرت کمپلکس حل جوړه لاس ته راځي:

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i};...................(12,20)$$

له دې څخه هم چی په (۱۲ . ۹) ځای په ځای شي څرګندیږي چی د x1 او x2 ارزښتونه پیل برابرون یا مساوات پوره کوي.

که په (۱۲ . ۱۹) حالت کی لاندې څرګندونی ته پام وي

$$\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}=\pm\sqrt{(a_1^2/4)i-a_0};...................(12,21)$$

نو لاندې جمله ىی راغونډه داسی فرمولولی شو

جمله ۱۲ . ۱: (د څلوری یا مربع) په توان یا جګ د ۲) برابرونونو د اوبیوني فرمول) د څلوری- یا مربع برابرونونو(مساواتو) $x^2+a1x+a0=0$

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

ټیک دوه ځوابونه لري

د $a_1^2>4a_0$

په حالت کی دوه مختلف رییل حلونه دی، د $a_1^2=4a_0$ په حالت کی یو رییل دوه برابره(ډبل) حل دی او د $a_1^2<4a_0$ په حالت کی یو جوړه کونیوګیرت - کنجوګیریکمپلکس حل شته شته دي.

په ساده ډول لاندې د وییتا جمله هم د مربع مساوتو لپاره ښوول کیدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۲ (د ویيتا(Vieta)جمله) :

که x1 او x2 د ځلورئ - یا مربع برابرونونو (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) اوبیوني وي نو باوري دی

$$a_1 = b_0 / b_1 = x_1.x_2; \qquad (12,22)$$

$$a_2 = b_1 / b_2 = -(x_1 + x_2); \qquad (12,23)$$

حل : (۱۲ . ۲۳) فرمول په دریواړو حالتونو کی سم د لاسه له لاندي ځخه لاس ته راځي:

$$-(x_1 + x_2) = \left[\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] + \left[\frac{a_1}{4} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = a_i$$

د (۱۲ . ۲۲) فرمول د تصدیق لپاره د بینوم دریم فرمول او $i^2 = -1$ استعمال ځخه په په (۱۲ . ۱۲) حالت کی باور لري :

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right]^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_0 = a_0$$

په (۱۲ . ۱۷) حالت کی لاس ته راځي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + 0\right]\left[-\frac{a_1}{2} - 0\right] = \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

په (۱۲ . ۱۹) حالت کی باوري دي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\, i\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\, i\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\right]^2 i^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - [a_0 - \frac{a_1^2}{4}].(-1) = \frac{a_1^2}{4} + a_0 - \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ویېتا جملې په مرسته لاندې جمله باوري کيږي يا تصديقيږي

جمله ۱۲ . ۳ :

يو ۲ درجبيز پولينوم کيدی شي چی په دوه لايني فاکتورونو يا ضريبونو يا ځله وونو بيل يا ټوټه يا تجزيه شي:

$$x^2+a_1x+a_0=(x-x_1)(x-x_2);.................(12,24)$$

په همدې ډول

$$b_2x^2+b_1x+b_0=b_2(x-x_1)(x-x_2);.................(12,25)$$

چيرته چي $x1$ او $x2$ د څلورې برابرونونو يا مربع مساواتو (۱۲ . ۹) په همدې ډول د (۱۲ . ۸) دواړه ځوابونه دي

اوبيونه : له (۱۲ . ۲۲) ، (۱۲ . ۲۳) څخه د (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) په پام کي نيولو سره لرو

$$(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2+a_1x+a_0=$$

$$=\frac{1}{b_2}(b_2x^2+b_1x+b_0)$$

د جملی ۱۲ . ۳ څخه دې ته راڅول کيږو چی د (۱۲ . ۱۷) حالت کی د دوه برابره ريېل اوبيو څخه خبرې وکړو(وغږيږو). د $x1 = x2$ له امله لاس ته راځي

$$x^2+a_1x+a_0=(x-x_1)^2;a_1^2=4a_0;.................(12,26)$$

دا دري حالتونه(۱۲ . ۱۲) .(۱۲ . ۱۷) او (۱۲ . ۱۹) کيدی شي چی د فنکشن

$$y=p_2(x)=x^2+a_1x+a_0$$

ځيرو يا شکلونو (ګراف) په مرسته د کتلو شي.

ګراف په بنسټيزه توګه پارابول انځوروي، چی پورته خوا ته سرواز دی. ځکه چی که xهرڅومره کوچنی شي)که x د کميز ناپای په جګ يا توان شي) او همدارنګه x هرڅومره لوي شي (که x د ∞ (ناپای) په جګ شي y لوييږي (ستريږي يا غټيږي) ، ځکه چیx^2 نسبت و x ته په توان يا قوي جګيږي له ټولو پولو(yد ناپای لور ته ځي)۰ د دې ډول پولو کره پيژند يا تعريف په ۱۹ - برخه کي لوستل کيدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۲) حالت کی د x - محور په داړو رييلو ځايونو x1 او x2 کی غوڅيږي؛ په (۱۲ . ۱۷) حالت کی په x1 = x2 ځای کی يي لمسوي او په (۱۲ . ۱۹) حالت کی ګډ ټکي ورسره نه لري يا نه وررسيږي (پرتله ځيره . ۱۲ . ۱)

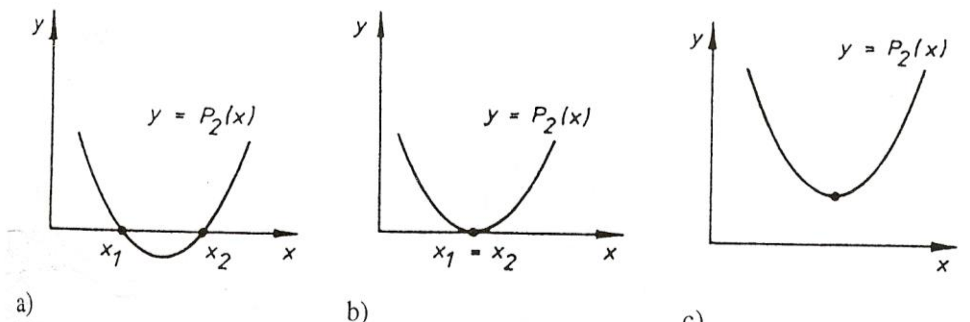


Bild 12.1

له جملی ۱۲ . ۱ تر ۱۲ . ۳ پورې به په درې ساده ډوله د (۱۲ . ۱۲) ، (۱۲ ، ۱۷ ، (۱۲ . ۱۹) سره مناسبو بيلګو روښانه شي.

بيلګه ۱۲ . ۱ :

په برابرون $x^2 - x - 6 = 0$ کی لرو

$a1 = -1 , a0 = -6$ او $a_1^2 - 4a_0 1 + 24 = 25 > 0$ د

له امله (۱۲ ، ۱۲) حالت مخ ته پروت دی.
دواړه له صفر مختلف ځايونه د جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندې فورم لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 24/4} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -2$$

جمله ۱۲ . ۲ :

له لاندې لاس ته راوړنی ياتعقيب څخه باوري کيږي

$$a_0 = -6 = x_1 x_2 = 3(-2) = -6$$

$$a_1 = -1 = -(x_1 + x_2) = -(3-2) = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له جملی ۱۲ . ۳ څخه لاس ته راځي: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

بیلګه ۱۲ . ۲ :

له مساواتو $x^2-4x+4=0$ لرو $a1=-4,a0=4$ او د $a_1^2-4a_0=16-4.4=0$

له امله (۱۲ . ۱۷) حالت مخ ته لرو۰ دوه ئیز ریبل حل په لاندې ډول له جملی ۱۲ . ۱

څخه لاس ته راځي $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}=2$ نو لرو $x1=x2=2$

جمله ۱۲ . ۳ :

په لاندې ډول باوري کیږي

$$a_0=4=x_1.x_2=2.2=4$$
$$a_1=-4=-(x\ \ +x_2)=-(2+2)=-4$$

د جملی ۱۲ . ۳ له مخی لرو $x^2-4x+4=(x-2)^2$

بیلګه ۱۲ . ۳ :

له مساواتو $x^2-4x+13=0$ څخه لرو , $a1=-4$,$a0=13$ او د $a_1^2-4a_0=16-52-36$

له امله حالت (۱۲ ، ۱۹) مخ ته لرو.

د کونیوګیرت(کنجوګیري) کمپلکس جوړه اوبیونو یا حلونو له جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندې بڼه یا فورم لاس ته راولو

$$x_{1,2}=2\pm\big)4-13=2\pm\sqrt{-9}=2\pm 3i$$
$$\Rightarrow x\ \ =2+3i;x_2=2-3i$$

د جملی ۱۲ . ۲ سره سم باور لري

$$a_0=-4=-(x_1+x_2)=-(2+3i+2-3i)=-4$$
$$a_1=13=x_1.x\ \ =(2+3i)(2-3i)=4-9i^2=4+9=13$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د جملی ۱۲ . ۳ له مخې داسی دی

$$x^2-4x+13=(x-2-3i)(x-2+3i)$$

د مربع مساوات (۱۲ . ۸) همداسی (۱۲. ۹) اوبی په ښکاره ډول ساده کیږي، که یو ځلی a0 اویا a1 ورك شي:

د a0 = 0 لپاره لرو $x(x+a_1)=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=-a_1$

د a1=0 لپاره لرو

$$x^2+a_0=0$$

$$\Rightarrow x^2=-a_0; x_{,2}=\pm\sqrt{a_0}$$

۱۲ . ۲ . ۲ څلوری(مربع-)برابرون چی په نورمالبڼه

مخ ته نه دي پراته

که یو مربع مساوات په نورمال فورم (۱۲ . ۹) مخ ته نه وي پروت، له دې د مخه چی جمله ۱۲ . ۱ وکارول شي، نو باید په دې بڼه واړول شي.

بلیګه ۱۲ . ۴ :

$$2x-(x+2)^2=(x-2)^2-4(x+1)$$

$$2x-x^2-4x-4=x^2-4x+4-4x-4$$

$$-x^2-2x-4=x^2-8x$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$x_{1,2}=3/2\pm\sqrt{9/4-2}=3/2\pm\sqrt{9/4-8/4}=3/2\pm\sqrt{3/2}\pm\sqrt{1/4}=3/2\pm1/2$$

$$\Rightarrow x_1=2; x_2=1$$

که مجهول یا ناپیژندلی یا اوړیدونې x د مات لاندې رامنځ ته شي، نو باید په صفر ویش ناممکن یا ناشونوالی په پام کې ونیول شي.

بیلګه ۱۲ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

برابرون $(x^2+2x)/(2x^2+2x-4)=1$

تیك هلته مانا لري، چې وي $2x^2+2x-4 \neq 0$

لومړی ورکړشوی برابرون اوبی کیږي او بیا ازمائل کیږي، چې ایا د ماتلاندې شرایط پوره دی، که نه.

$$x^2+2x=2x^2+2x-4$$

$$-x^2 = -4$$

$$x_{,2} = \pm 2; x \; = 2; x_2 = -2$$

د $x=x1=-2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8 + 4 - 4 = 8 \neq 0$$

او $x = x2 = - 2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8-4-4 = 0$$

له دې امله $x1 = 2$ د پیل برابرون اوبی دی

۱۲ . ۲ . ۳ د n - م درجې ځانګړي برابرونونه ، چی په څلوری یا مربع برابرونونو بیرته بدلیدلی شي

د n - مي درجی مساواتو(۱۲ . ۳) یو څو ځانګړي حالتونه کیدی شي چی د څلوری برابرونونو یا مربع مساواتو په مرسته ځواب شي یا اوبی شي۰ دا ځانګړی حالت موجود دی یا شته دی که باور ولري

$$a_1 = a_1 = ... = a_{n-3} = 0 \qquad (12 , 27)$$

دn- می درجی برابرون بیا داسی دي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,28)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^{n-2}(x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}) = 0$$

$$\Rightarrow x^{n-2} = 0 \vee x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots (12,30)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : په پورته کې له (۱۲ ، ۳۰) پورته برابرون (۱۲،۲۹) دئ
د دې برابرونونو دوهم برابرون یو څلورئ - یا مربع برابرون دی، چې د جملي ۱۲ . ۱ په بنسټ لاندې ځواب لري

$$x_{1,2} = -\frac{a_{n-1}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{n-1}^2}{4} - a_{n-2}}$$

لومړی برابرون دا اوبی یا حل لري $x = 0$ چې دا (n-2)- ځله رامنځ ته کیږي $x_3 = x_4 = ... = x_n = 0$

بیلګه ۱۲ . ۶:

برابرون $x^6 + 2x^5 - 3x^4$ د $x^6 + 2x^5 - 3x^4 = x^4(x^2 + x - 3)$
او $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$
لاندې اوبیونې لرو

$$x_1 = 1, x_2 = -3; x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

نور هم هغه حالت ساده دی، که $a_{n-2} = 0$ وي، او باور ولري

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} = 0; x^{n-1}(x + a_{n-1}) = 0 \Rightarrow$$
$$x_1 - a_{n-1}, x_2 = x_3 = ... = x_n = 0; ....(12,32)$$

یو بل ځانګړی حالت مخ ته لرو، که د برابرون (۱۲ ، ۳) درجه n جوړه ګڼ یا جفت - وي

$$n = 2k \qquad (12 . 33)$$

او فقط (ټیك) ځله وونې یا کوایفیڅینتونه a0 او ak له صفر سره برابر نه وي:

$$x^{2k} + a_k x^k + a_0 = 0; ....(12,34)$$

دلته داسی ځاې په ځاې کوو

$$y = x^k; ....(12,35)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې سره د y لپاره ځلورۍ برابرون یا مربع مساوات لاس ته راځي:

$$y^2 + a_k y + a_0 = 0 \qquad (12, 36)$$

د لاندې ځوابونو سره (پرتله : جمله ۱۲ ، ۱)

$$y_{1,2} = -(a_k/2) \pm \sqrt{\frac{a_k^2}{4} - a_0}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,37)$$

د(۱۲ ، ۳۵) له امله دې د لاندې دوه برابرونونو

$$x^k = y_2 \wedge x^k = y_1; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,38)$$

ټولې اوبیونې وځیرلی شي، چی د $k = 1$ لپاره ساده دی، د $k = 2$ لپاره(بیکوادرات برابرون) (د ځلورۍ ځلورۍ یا د مربع مربع) یا د ریبلو y1 او y2 لپاره د تراوسه څرګندو میتودو سره تل کیدونکی دی . نور حالتونه ددې اوس وخت لپاره په ټولیزه توګه ستونځی لري.

بیلګه ۱۲ . ۷ :

لاندې بیکوادرات برابرون $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$ کیدی د سوبستیچیوشن یعني بدلون له لارې $y = x^2$ په ځلورۍ برابرون $y^2+5y-36=0$ باندې بدل شي. د جملی ۱۲ . ۱ په بنسټ لرو

$$y_{,2} = -5/2 \pm \sqrt{25/4+36} = -5/2 \pm \sqrt{25/4+144/4}$$

$$= -5/2 \pm \sqrt{169/4} = -5/2 \pm 13/2$$

$$\Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -9$$

دواړه برابرونونه ، چی د بیرته بدلون(-سوبستیچیوشن) له امله لاس ته راوړو

$$x^2 = 4 , x^2 = -9$$

لاندې اوبی یا حل لري

$$x1 = 2 , x2 = -2 , x3 = 3i , x4 = -3i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ . ۲ . ۴ د برابرونسيستمونه چی بيرته په ځلوری برابرونونو بد ليد لی شي

يوه د نالاينيزو مساواتسيستمونو لړۍ کيدی شي چی په ځلوری برابرون يا مربع مساواتو بيرته واړول شي. ددې لپاره دوه ساده بيلګي راوړو.

بيلګه ۱۲ . ۸:

$$x + y = 1 \qquad (12, 39)$$

$$x^2 + y^2 = 13 \qquad (12, 40)$$

لومړی برابرون د y په لور حل کيږي، $y = 1-x$، او دا حل په دوم برابرون کی اينوول کيږي:

$$x^2 + (1-x)^2 = 13$$

$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 13$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 6} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2 \Leftrightarrow$$

$$x = 3, x_2 = -2$$

د (۱۲ ، ۴۰) له مخی په دې لاندې د y - ارزښتونه اړه لري

$$y1 = -2, \; y2 = 3$$

نو دا نه لاينيز برابرون لاندي اوبيونې لري

$x1 = 3, y1 = -2$ او $x2 = -2, y2 = 3$

بيلګه ۱۲ . ۹ :

د لاندې مساواتو سيستم کی

$$ax + y = 1; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې یوائې د $x \neq 0, y \neq 0$ لپاره موخه وریا هدفمند دی، دوم برابرون په xy ځلولو(ضربولو)سره په لاندې بڼه اړول کیږي:

$$y + x = xy \qquad (12,42)$$

لومړی برابرون د y په لور ځواب کیږي

$$y = 1 - ax \qquad (12,43)$$

او په (۱۲ . ۴۲) کی ایښول کیږی یا ځای په ځای کیږي

$$1 - ax + x = x(1 - ax) = x - ax^2$$

$$, ax^2 - ax + 1 = 0 \qquad (12,44)$$

د $a = 0$ په حالت کی (۱۲ . ۴۴) برابرون مخامخوالی لري یا په ښتوالی لري یا تضاد لاس ته راکوي » $1 = 0$ « نو ځواب نه شته

د $a \neq 0$ لپاره د(۱۲ . ۴۴) ښخه لاس ته راځی $x^2 - x + 1/a = 0$

او د جملی ۱۲. ۱ له امله لرو $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} - \frac{1}{a}$

د

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{4} \text{........................} (12.45)$$

لپاره مو (۱۲ . ۱۲) حالت مخ ته پروت دی . دوه برخی حالتونه باید په پام کی ونیول شي:

د $a > 0$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) ښخه لرو , $a > 4$ او د $a < 0$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) ښخه لرو . $a < 4$ له دې امله د

$$a < 0 \text{ او } a > 4 \qquad (12, 46)$$

لپاره د (۱۲ ، ۴۴) دوه مختلف ریل ځوابونه موجود دي:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}, x_2 = 1/2 - \sqrt{1/4 - 1/a}; \text{.....................} (12.47)$$

په دې پوروې د (۱۲ ، ۴۶) له مخی دواړه دy - ارزښتونه هم اړه لري

$$y_1 = 1 - a/2 - a.\sqrt{1/4 - 1/a}; y_2 = 1 - a/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}; \text{.................} (12.48)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باید وازمایيل شي چې د (۱۲ ، ۴۶) په حالت کی x1 , x2 , y1 ,y2 (ټول) نابرابر په صفر دي . تل 1 /2 < x1 دی. که 0 = x2 وی، نو باوري به وی

$$1/2 = \sqrt{1/4 - 1/a}; 1/4 = 1/4 - 1/a$$

دا د هیڅ a لپاره ممکن نه دی. له دې امله $x_2 \neq 0$ دی

که 0 =y1 یا 0 = y2 وی، نو لاندې به باور لرودی:

$$1 - a + a^2/4 = a^2/4 - 1 \Leftrightarrow 1 = 0$$

دا هم ناشونی یا ناممکن دی، نو دلته هم‌لرو. $y_1 \neq 0;\ y_2 \neq 0.$

په (۱۲ ، ۴۶) حالت کی د (۱۲ ، ۴۱) د (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) سر ه سم، دوه

مختلف ریيل ځوابونه شته دی - غواړی- موجود دي

د x1 , y1 او . x2, y2

1/4-1/a=0 <=> a=4 (12 , 49)

لپاره(۱۲ ، ۱۷) حالت مخ ته پروت دی، او برابرون (۱۲، ۴۴) ډبل ریيل حل لري

x1 = x2 = 1 /2 (12,50)

په دې پورې د (۱۲ ، ۴۳) له مخې هغه y - ارزښت ډبل ګڼ اوبی پورې هم اړه لري.

y 1 = y2 = 1 - 4. (1 /2) = -1

د (۱۲ ، ۴۹) په حالت کی پس د (۱۲ . ۱۹) یو ریل، ډبل ګڼلی حل موجود دی

د x1=x2=1/2 , y1=y2= -1 (12 , 51)

1/4-1/a < 0 <=> 1/a > 1/4 (12 , 52)

لپاره (۱۲ ، ۱۹) حالت مخ ته پروت دی. د a > 0 لپاره (۱۲ ، ۵۲) د a<4 کتمټ (ورته) دی، او د a< 0 لپاره دa>4 سره کتمټ دی (له دې امله په ځتوالی یا تضاد) .

نو د(۱۲ ،۵۲) باور لري، د

0 < a < 4 (12 , 53)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره . په دې حالت کی (۱۲ ، ۴۴) کونجوګیري کمپلکس اوبیونې لري:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\,i;\ x_2 = 1/2 - \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\,i;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12.54)$$

د (۱۲ ، ۴۳) له مخی په دې پورې د y - ارزښتونه اړه لري:

$$y_1 = 1 - a/2 - a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\,i;\ y_2 = 1 - a/2 + a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\,i;\ldots\ldots\ldots\ldots(12,55)$$

له دې ارزښتونو هیڅ هم صفر کیدی نه شي .پس په یوځای شوي یا راټوله توګه لرو:
برابرونسیستم (۱۲ ، ۴۱) د $a = 0$ لپاره اوبی نه لري، د $a < 0$, په همدې ډول $a >$ 4 لپاره دواړه ریل اوبي (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) ، د $a = 4$ لپاره رییل ډبل ګنلي اوبۍ (۱۲ ، ۵۱) او د $0 < a < 4$ لپاره دوه کونجوګیري کمپلکس اوبي (۱۲ ، ۵۴) ، (۱۲ ، ۵۵) لري.

۱۲ . ۳ دریمه درجه مساوات یا - برابرونونه

ددې لپاره چی په زړه پورې n- (ام (درجي مساواتو حلول ساده کړای شو نو لکه د مساواتو مربع سیستم جملو ته ورته جملی د دریمی درجی مساوات لپاره ځیږو.
د دریمی درجی مساواتو نورمال فورم په د (۱۲ . ۳) سره سم په لاندې ډول دی.

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=0 \qquad (12,56)$$

دا پولینوم

$$y=P3(x)=x^3+ a2x^2+a1x +a0 \qquad (12 , 57)$$

لاندې بنستیز خویونه لري: که x ډیر لوي شي یعني ناپای په لور لاړشي $x \to \infty$ نو y هم د ناپای په لور ځي، ځکه چی د x^3 ارزښت نسبت د x^2 ارزښت ته په بیړه جګیږي او بیا همداسي و x ته هم . که a1 او a2 کمیز یا منفي هم وي نو y به د لویو x- ارزښتونو لپاره زیاتیز یا مثبت وي. داچي x^3 د کمیز x - ارزښت لپاره له صفر کوچنی دی، نو په همدې ډول

x->-o د y -> -o

لپاره .د دې ډول »پولوارزښت یا لیمس« لپاره کره تعریفونه بیا په ۱۹ برخه کی په پراخه توګه څیړل کیږي .د یو-x ارزښت) خورا کوچنی هم کیدی شي (شته چی د هغه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره 0 > y وي اود یو x - ازښت) چی خورا لوي هم کیدی شي) ، د کوم لپاره چې y>0 دی. ددې دواړو ارزښتونو تر منځ باید د مساوات (۱۲ . ۵۶) یو ریښل اوبی پروت وي.

په ډیرو لاندې بیلګو کی سړی کړی شي چی په ساده ډول د جدول په مرسته ازمائیلي حلونه پیدا کړي، په عمومي توګه بیا هم باید وشمیرل شي.

ددې لپاره یو څو بیلګی:

بیلګه ۱۲ ، ۱۰ الف:

د پولینوم

$$y = x^3 - 3x^2 -4x + 12 \qquad (12, 58)$$

لپاره لاندې د ارزښت جدول لاس ته راځي

X = 0 , 1 , -1 , 2

Y = 12 , 6 , 12 , 0

په دې توګه یو ریښل صفرځاي پیدا شو

$$x_1 = 2 \qquad (12, 59)$$

په ۱۵-مه برخه کی به د هورنر شیما په بنسټ یو متود ورکړ شي ، دکومی له لار ې چی بیا د مټ(توان= لوړولو ته اړتیا نه پیدا کیږي او پولینومونو د فنکشن ارزښت ساده پیدا کیدی شي یا شمیرل کیدی شي

بیلګه ۱۲ . ۱۱ الف:

دا برابرون

$$2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0 \qquad (12,60)$$

لاندې نورمال فورم یا -بڼه لري

$$x^3 +(11 / 2)\, x^2 + 6x - 9/2 = 0 \qquad (12 . 61)$$

د صفرځاي پیداکولو لپاره دې د (۱۲ . ۶۰)مساوات لپاره د ارزښت جدول   جوړ شي)ترتیب شي وشمیرل شي (، ځکه چی هلته ماتونه منځ ته نه راځي:

X = 0 , 1 ,1 / 2

Y = -9 , 16 ,   0

نو

$$x_1=1/2 \qquad (12, 62)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات (۱۲ . ۶۰) په همدې ډول (۱۲ . ۶۱) یو رییل صفرځای دئ

بیلګه ۱۲ . ۱۲ الف:

د لاندې برابرون لپاره

$$x^3-9x^2+27x-27=0 \qquad (12, 63)$$

د ارزښت جدول

X = 0 , 1 , -1 ; 2 , -2, 3
Y = -27 , -8 , -64 , -1 , -25, 0

له لارې لاندې رییل صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 3 \qquad (12, 64)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۳ الف :

د برابرون

$$x^3 -9x^2 +27x -27 =0 \qquad (12, 65)$$

لپاره د جدول

X = 0 , 1
Y = -3 ; 0

سره لاندې صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 1 \qquad (12, 66)$$

په ټولیزه توګه کیدی شي په کلکه ځرګند شي ، چی د دریم درجی برابرونسیستم (۱۲ . ۵۶) لپاره تل یو رییل اوبی یاحل x1 شته دی. دا یو واقعیت دی چی بي له شوونی یی لیکو، چی دا پولینوم (۱۲، ۵۷) بي له پاتي په لاینیز فاکتور (x - x1) ویشل کیدی شي او یو دومه درج پولینوم ترې لاس ته راځي:

$$(x^3+a2x^2+a1x+a0):(x-x1)=x^2+b1x+b0$$

له دې امله داسی دئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۴ :

هر دریمه درجه برابرون (۱۲ . ۵۶) کم له کمه یو رییل اوبی x1لري او دا لاندې باوري دي

$$P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x^2 + b_1x + b_0);.............(12,67)$$

دلته نو بیا نور د دریمي درجي مساواتو (۱۲ . ۵۶) دوه حلونه x2 او x3لاس ته راځي که څلورى برابرون یا مربع مساوات $x^2 + b1x + b0 = 0$ اوبى شي، او د جملو ۱۲ . ۱او ۱۲ . ۳ سره کیدى شي چی لاندې جمله فرمولبندې کړی شو

جمله ۱۲ . ۵ :

هر دریمه درجه برابرون دريږ اوبیوني یا اوبي x1 , x2,x3 لري او دا باور لري

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=(x-x1)(x-x2)(x-x3) \quad (12 , 68)$$

دلته دا لاندني حالتونه ممکن دي

۱ - دريږ رییل مختلف حلونه x1 , x2 او x3 شته دی (موجود دي)

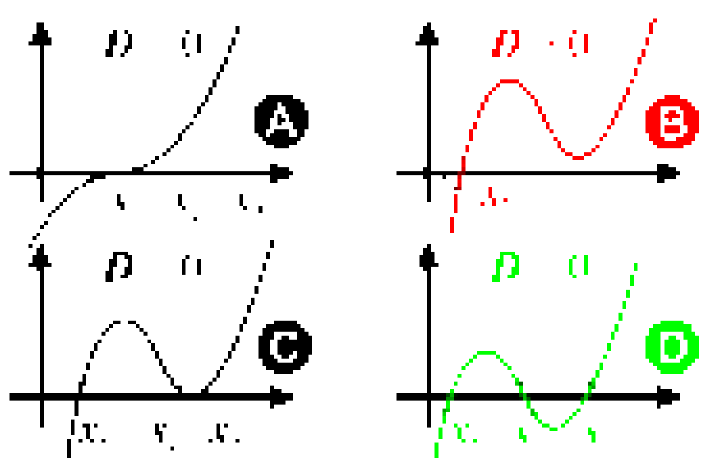
۲ - یو رییل حل x1 او ددې سره مختلف یو ډبل رییل حل x2=x3شته دی .

۳ - یو رییل دریګونی حل شته دی

$$x1 = x2 = x3$$

۴ - یو رییل حل x1 او یوه جوړه کونجوګیرت کملکس اوبیوني یا اوبي $x_2 = \overline{x_3}$ شته دی

دا لاندې څیره د ټولو راشنل فنکشنونو(۱۲ . ۵۷) تیپیکي تلنه د جملی ۱۲ . ۵ څلورو حالتونو کی ښایي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۱۲ . ۶۸) فرمول په مرسته د بنې اړخ په ځلولواو فاکتورونو(ځله وونو) پرتلی یا انډول له لارې کیدی شي د دریمی درجي پولینومو لپاره د وییتا جمله تصدیق کړي چی د جملی ۱۲ . ۲ سره سر خوري

جمله ۱۲ . ۶ :

که x1 , x2 او x3 د دریمي درجي برابرون (۱۲ . ۵۶) اوبیونې وي ، نو لاندې باوري دي

a0=-x1.x2.x3 (12,69)

a1=x1x2+x1x3+x2x3 (12,70)

a2=-(x1+x2+x3) (12,71)

جملی ۱۲ . ۴ په مرسته دې اوس د بیلګو ۱۲ . ۱۰ الف، تر ۱۲ . ۱۳ الف پورې د نورو دواړوx2 او x3 اوبیونې ولټول شي.

بیلګه ۱۲ . ۱۰ ب :

(۱۲ . ۵۸) برابرون د (۱۲ . ۵۹) برابرون له مخی x1 = 2 حل لري. سړی دا ځواب د ۱ . . ۲ ۴ . برخي له مخي د پارشل Partial -(ټوټه-(ویش په بنسټ لاس ته راوړي.

$$(x^3-3x^2-4x+12):(x-2)=x^2-x-6$$
$$..\underline{x^3+2x^2}$$
$$........-x^2-4x+12$$
$$.........\underline{-x^2+2x.........}$$
$$..............-6x+12$$
$$..............-6x+12$$

له x² - x - 6 = 0 څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3}=1/2\pm\sqrt{1/4+6}=1/2\pm\sqrt{1/4+24/4}=1/2\pm5/2,$$
$$x2=3, x_3=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته د جملی ۱۲ . ۵ لومړی حالت لرو، د لاندې مختلفو ریيلو ځوابونو سره

، $x1 = 2 , x2 = 3 , x3 = -2$

او داسی دئ:

$$x^3-3x^2-4x+12 = (x-2)(x-3)(x+2)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۱ ب :

(۱۲ . ۶۰) برابرون د (۱۲ . ۶۲) برابرونونو له مخی اوبی

$$x1 = 1/2$$

لري او داسی دئ:

$$(2x^3+11x^2+12x-9):(x-1/2)=2x^2+12x+18$$

او له $2x^2 + 12x + 18 = 0$

په همدې ډول یا (□) له $x^2+6+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3 \Leftrightarrow x_2 = x_3 = -3$$

دلته د جملي ۱۲. ۵ دوم حالت مخ ته پروت دی د یوه ریيل حل او یو بل له دې حل مختلف ډبل ریيل حل سره، یعنی لرو $x1=1/2 , x2=x3=-3$ او داسی دئ

$$x^3+(1/2)x^2+6x-9/2)=(x-1/2)(x+3)^2$$

بیلګه ۱۲ . ۱۲ب :

(۱۲ . ۶۳) برابرون د(۱۲ . ۶۴) له مخی $x1 = 3$ ځواب لري. دلته باور لري

$$(x^3-9x^2+27x-27):(x-3)=x^2-6x+9$$

له $x^2-6x+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$$

نو دلته مو د جملی ۱۲ . ۵ د دریم حالت درې برابره ځواب مخ ته پروت دی یعنی

$$x_1 = x_2 = x_3 = 3$$

او داسی دئ

$$x^3+-9x^2+27x-27=(x-3)^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۳ ب : (۱۲ . ۶۵) برابرون د (۱۲ . ۶۶) برابرونونو له مخې ځواب $x1 = 1$ لري، او داسې دی

$$(x^3 -5x^2 +17x-13):(x-1) = x^2-4x+13$$

له $x^2-4x+13 = 0$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

دلته د جملې ۱۲ . ۵ څلورم حالت د یوه ریبل حل او یوه جوړه کونیوګیرت کملکس ځوابونوسره مخ ته پروت دي.

$$x1 = 1 , x2 = 2+3i , x3 = 2 - 3i,$$

او دا باوري دي

$$x^3-5x^2+17x-13=(x-1)(x-2-3i)(x-2+3i) \qquad =(x-1)(x^2-4x+13)$$

۱۲ . ۴ د ریښې (جذر) برابرون

په ۱۲ . ۱ برخه کې د ریښې رابرون وڅېړل شو. او دا هم څرګند شو چې څنګه د ریښې برابرون په ریښنل برابرونو اوله دې سره n- مې درجې برابرونو بدلیدلي شي٠ دا دې دلته د بیلګو په څیر پاتي وي. یواځې ریبل اوبیونې به و څیړل یا و پلټل شي.

جمله ۱۲ . ۱۴ :

د ریښي برابرون

$$7+3\sqrt{2x+4}=16;............................(12,72)$$

ډېر ساده کیدی شي چې په لاینیزو برابرونونو واړول شي

$$3\sqrt{2x+4}=9; \sqrt{2x+4}=3; 2x+4=9; 2x=5; x=5/2;........(12,73)$$

د ازمایلو لپاره که (۱۲ . ۷۳) برابرون په (۱۲ . ۷۲) برابرونونو کې خوندي شي، نو څرګندیږي چې دا دx-ارزښتونه په ریښتیا د مخه ورکړ شوي ارزښتونه پوره کوي

$$7+3\sqrt{5+4}=7+3.3=16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۵:

د ریښی برابرون یا مساوات

$$\sqrt{2x+19}+5=0;..........(12,74)$$

کیدی شي په ساده بڼه واړول شي

$$\sqrt{2x+19}=-5; 2x+19=5; x=3;..........................(12,75)$$

د ازمایني لپاره، که (۱۲ . ۷۵) د پیل په برابرون (۱۲ . ۷۴) کی خوندي شي، نو دا برابرون ورکوي

$$\sqrt{2x+19}=10\neq 0$$

له دې امله ارزښت $x = 3$ د برابرون (۱۲ . ۷۴) ځواب نه دی . په دې لاس ته راوړنو سره یا په دې تعقیب د پیل برابرون ځواب نه لري.) داسي کیدی هم نه شي، ځکه چي تل $2x + 19 > 0$ دی)۰

دا ساده بیلګی موږ ته را ښایي چی باید د ریښی مساواتو حل تل وازمایل شي چی ایا په ریښتوني دا ځواب دی او که نه، او دا په داسی ډول چی شمیرل شوي ارزښتونه په پیل مساوات کی کیږدي چی ایا مساوات پوره کوي که نه . دا عمل یواځي د ازمایلو لپاره نه دئ چي ګوندې تیك یا صحیح شمیرنه شوې او که نه، بلکه دا ځواب یو اړیین سما ندیز پل یا ضروری منطقي پل دئ .

په ټولیزه توګه باور لري: که برابرون:

$$f(x) = g(x) \qquad (12,76)$$

په یو ې نوي بڼه واړول شي

$$F(x) = G(x) \qquad (12,77)$$

چی د برابرون دواړو لورو ته یا یو څه ور زیات شي ، یا تری کم شي، یاداوړه خواوې په یوه ګڼ ځل (ضرب) شي او یا وویشل شي (په دې حال کی باید پرویشونی صفر نه وي، ځکه چی په صفر ویشل اجازه نه لرو) که دواړه خواوی د ریښی لاندې راشي او یاپه توان پورته شي نود پیل برابرون (۱۲ ، ۷۶) هر ابی بدل شوي برابرون (۱۲ . ۷۷) ځواب هم دی ، مګر نه په ښټ (برعکس، مخامخ). کیدی شي چی اړول شوی برابرون (۱۲ . ۷۷) زیات ځوابونه ولري نسبت و پیل برابرون (۱۲ ، ۷۶) ته . دا به په لاندې بیلګه کي روښانه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۶:

د ریښې یا جذر برابرون یا مساوات

$\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1}$ (12 . 78)

څلوری یا مربع ته د جګولو له لارې دا بڼه غوره ګوي

$$x+(x-1)-2\sqrt{x(x-1)}=2x-1$$

x+(x-1)-2x(x-1)=2x-1 ,

نو $\sqrt{x(x-1)}=0$

په بیا څلوری یا مربع کولو سره سړی یو مربعمسوات لاس ته راوړي

x(x-1) = 0 (12 , 79)

چې لاندې اوبې یا ځواب لري :

$x_1 = 0, x_2 = 1$ (12 . 80)

دا د (۱۲ . ۷۹) اوبیونې دي، مګر باید و ازمایل شي چې ایا دا د (۱۲ . ۷۸) اوبیونې هم دي که نه.

د x = 0 لپاره په (۱۲ . ۷۸) کې دوه ریښې نه دې تعریف یا ددوه ریښو پېژند نه شته، نو x = 0 د (۱۲ . ۷۸) اوبیونه نه ده .

د x = 1 لپاره لاس ته راځي $\sqrt{1}-\sqrt{0}=\sqrt{1}$

له دې امله x = 1 د پیل بیلګې (۱۲ . ۷۸) یوګونی ځواب یا اوبې دی .

بیلګه ۱۲ . ۱۷:

د ریښې برابرون

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}-\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-7x+3}=0,\text{............}(12,81)$$

کیدی شي چې په ورته ډول لکه (۱۲ . ۷۸) بڼه واړول شي:

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{2x^2-7x+3} \Rightarrow$$
$$x(x-3)=(x^2-4x+3)+(2x^2-7x+3)+2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)} \Rightarrow$$
$$-2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)}=2x^2-8x+6$$
$$(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)=(x^2-4x+3)^2;\text{.........}(12.82)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برابرون یا مساوات پوره دی، که $x^2-4x+3=0$ باور ولري، نو د لاندې لپاره

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1, x_1 = 3, x_2 = 1, ...(12,83)$$

د ټولونورو x لپاره $x^2-4x+3| = 0$ دی ، او (۱۲ . ۸۲) کیدی شي چي په لاندې فاکتور وویشل شي:

$$2x^2 - 7x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x3 = 0, x4 = x1 = 3$$

او په (۱۲ . ۸۱) کی ځای په ځاي کولو سره ازمایل کیږي، چی کوم له لاندې ارزښتونو

$$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0$$

پیل برابرون ډکوي.(باوري کوي، پوره کوي)

د $x = 3$ لپاره باور لري:

$$\sqrt{3}.\sqrt{0} - \sqrt{9-12+3} - \sqrt{18-21+3} = 0$$

له دې امله $x = 3$ د پیل برابرون یا مساوات (۱۲ ۸۱) اوبی یا حل دی . د

$x3 = 0$ او $x2 = 1,$

لپاره ریښي پیژند نه لري یا تعریف نه دی، نو له دې امله د پیل برابرون (۱۲ . ۸۱)
اوبی حل $x = 3$ (12 . 85)
یواځني حل دی

۱۲ – تمرینونه

۱ – مربع مساوات

۱,۱- مربع مساواتدټاکلو ضریبونو سره

1.1.1. a) $x^2 - 4 = 0$ b) $3x^2 + 27 = 0$

c) $x^2 - 9x = 0$ d) $5x^2 = 125\,x$

1.1.2. a) $(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}) = \frac{7}{12}$ b) $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$

c) $(x - 6)(x + 5) = 0$ d) $(x - \sqrt{7})(x - \sqrt{5}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.1.3. a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^2 + 4x + 2 = 0$

c) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ d) $x^2 + 27\frac{1}{12} = 10\frac{7}{12}x$

1.1.4. a) $3x^2 - 20 = x$ b) $7x^2 + 23x = 84$

c) $(43 + 10x)^2 + (66 + 10x)^2 = (79 + 14x)^2$

d) $(3x - 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$

1.1.5. a) $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$ b) $3x - \frac{3x-10}{9-2x} = 2 + \frac{6x^2-40}{2x-1}$

c) $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x+12} - \frac{3x+8}{4x^2-9} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{x-2} - \frac{8}{4-3x} = \frac{19}{2x+1}$

۱ . ۲ – مربع مساوات د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x^2 - a^2 = 0$ b) $x^2 - ax = 0$

c) $x^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{1}{3}a^2 = 0$ d) $x^2 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}b^2 = 0$

1.2.2. a) $8x^2 - 10bx - 3b^2 = 0$ b) $12x^2 - 34ax + 10a^2 = 0$

c) $16x^2 - 8ax + a^2 - b^2 = 0$ d) $ax^2 + bx + c = 0$

1.2.3. a) $a^2 - x^2 = (a - x)(b + c - x)$

b) $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$

c) $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$

d) $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0$

1.2.4. a) $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$ b) $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$

c) $a^2(a - x)^2 = b^2(b - x)^2$

d) $(a - x)^2 - (a - x)(x - b) + (x - b)^2 = (a - b)^2$

1.2.5. a) $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$ b) $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

c) $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$ d) $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$

۱ . ۳ – مساوات سیتم، کوم مو مربع مساوتو ته لاربنبنودوي یا بیایي

1.3.1. a) $3x + 2y = 3$, $xy = 3$ b) $10x + y = 10$, $5x(15x + y) = 75$

c) $3x + 7y = 21$, $3x^2 - 7y = \frac{21}{2}$ d) $x^2 + xy + y^2 = 1372$, $2x - y = 2$

1.3.2. a) $x + y = a$, $xy = b$ b) $xy = a$, $\frac{x}{y} = b$

c) $x^2 + y^2 = c^2$, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ d) $ax^2 - \frac{b}{y^2} = 2(a^2 - b^2)$, $bx^2 - \frac{a}{y^2} = a^2 - b^2$

۱ . ۴ – د n-مي درجې ځانګړي مساوات، چېپه مربع مساوات بيرته اړول کيدی شي

۱ . ۴ . ۱ – بې مربع مساوات د ټاکلو يا معلومو ضريبونو سره

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$

c) $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$ d) $10x^4 - 21 = x^2$

۱ . ۴ . ۲ - بې مربع مساوات د ناټاکلو يا نامعلومو ضريبونو سره

a) $x^4 + a^4 + b^4 = 2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2b^2$

b) $(a^2x^2 + b^4)(x^2 - a^2) = b^2(x^4 - a^4)$

c) $\frac{a^2b^2x^2}{a^3b + ab^3x^2} + \frac{ab - x^2}{x^2 - 1} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2x^2}$

d) $\frac{(a-b)x^4}{a^2 - b^2} + \frac{4x^2}{a+b} = x^2 + 4$

۱ . ۴ . ۳ – د n-مي رجې مساوات د $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-3} = 0$ سره

a) $x^{10} + 6x^9 + 5x^8 = 0$ b) $\frac{5}{2}x^5 + 7x^4 = -20x^3$

c) $abx^8 - (a^2 + b^2)x^7 = -abx^6$ d) $ax^{22} - a^2x^{11} + a^2 - a = 0$

۱ . ۵ – لاندې مساوات هم د xاو هم د a پسې حل کړئ!

a) $x^2 + \sqrt{a}\,x - a = 0$ b) $x^2 - 2bx + 2(ab - \frac{1}{2}a^2) = 0$

c) $x^2 + 9ab = (a + b)(x + 2a + 2b)$ d) $(x + b)(x - b) = a(2x - a)$

۱ . ۶ . – شي شوالونه

---

۱ . ۶ شي سوالونه

۱ . ۶ . ۱ الف دوه ګڼونه ځان داسې نيسي لکه 3 : 1 . ددې ګڼونو د مربع زياتون ۱۵۶۰ دی. دا ګڼونه څه نوميږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د درې يو په بل پسې گټونو د لوي گڼ مربع دومره ده ، لکه د دوه کوچنيوګټونو د مربعو زياتونونږ. دا ګټونه څه نوميږي يا کوم دي؟

پ) د کوم مثبت گڼ لسرځله د هغه د مربع څخه ۹۹۹ کوچنی دی؟

ت) مات 1/4 1 په دوه فاکتورونو a او b داسې تجزيه کړی، چې لاندې زياتون $(a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$ يې لاس ته راشی.

۶ . ۲ . الف) په يوه برابر برقجريان کی مقاومت په ديرش اوم $30\ \Omega$ لوييږي، په کوم کې چی د برققوه په همغه د 220 V (وولته) شپانونګ په پنځه امپير (1,65A) کوچنی‌شي . مقاومت او برققوه څومره دي؟

ب) دوه سيخونه چی مقاومت يی $60\ \Omega$ يو له بل توپير لري، چې يوه د غبرگ چالانولوعمومي مقاومت $22,5\ \Omega$ کړي. دواړه برخه مقاومتونه څومره لوي دي؟

۶ . ۳ . الف) يوه د بايسکلځغلونی لار چې ۲۲۵ کيلو متره اوږده ده، د يوه موادو موټر څخه په درينيم ساعته لنډ وخت کې وهل کيږي،چې د موټر په منځني سرعت چې 26, 25 km/h نسبت و بايسکلځغلونکي ته د موادو موټر او بايسکل ځغلونکي سرعت او د وهلو وخت څومره دی؟

ب) د سپورت جشن کې يو سپورتي چې له A و B ته په 5km/h سرعت ځغلي، له خپل منډپيل څخه يونيم ساعت وروسته له يوه بايسکلسپورتي څخه وروسته کيږي، کوم چې له مخامخ کيدو, نيم ساعت وروسته B ته رسيږي، او سملاسي بيرته ګرځي او په همغه وخت کې A ته رسيږي په کوم کې چې ځغاستی و B ته رسيږي، د $\overline{AB}$ کرښه څومره لرې ده؟

پ) دوه ډبډبي ځغاستي،يوبل باندې نيغ ولاړو سرکونو د څلورلاري په لور،په ډبډبيو ځغلي. د لمړي سرعت ۵ متره په ثانيه کی، دوم څلور متره په ثانيه کی دي. دوي له ۳ ثانيو وروسته يو ۳۵ متره لريوالی يو له بل لري، دوي يو

(c) ketabton.com: The Digital Library

له بل په سرچینه کې د څلور لارې څومره لرېوالی لروده، که لمړی له دوم ۴ متره ورته نژدې وو؟

ت) د ګاډي يو لاین د موټرځغاست سرك لمړی برخې سره غبرګ غزیدلی. د یوه موټر ځغاستي پیل کې د یو مخته راتلونکي ګاډي واټن ۲۲۵ متره لرې دی. کله دوه ماشینونه په همغه جګوالي دي، که موټرځغاستی منظم تعجیل او یو تعجیل د $10 m/s^2$ کی لري، په داسې حال کې چې د ګاډی سرعت ثابت او $72\ km / h$ دی؟

ټ) په منځنی سرعت $v_m = 18 km/h$ په ۶ بجو له لايپخیږ څخه د دیساو په لور بایسکل ځغلیدونکی په ۸ بجو ، په همغه وخت کی له دیساو څخه د لايپخیږ په لور راتلونکی بایسکل ځغاستی سره مخامخ کیږي. ورستنی ۱۰۰ دقیق د مخه دیساو ته راځي لکه دوم ولايپخیږ ته. د دیساو او لايپخیږ ترمنځ لریوالی یا واټن څومره دی؟

۱ . ۶ . ۴ . الف) په ولاړنجیز دریڅګوډي کې ، کاتیتې ځانونه داسې یوبل سره نیسي لکه 3:4 ، هیپوتینوزې ۵۰ سانتي متره ده ، کاتیتې څومره اوږدې دي؟

ب) د یوه ولاړکونجیز دریګوډي اړخونه څومره لوي دي ، که د دواړو کاتیتو زیاتون يي۱۷ سانتیمتره اود یوې کاتیتې او هیپوتینوزې زیاتون ۱۸ سانتي متره وي ؟

پ) د یوه سمکونجیز (ولاړکونجیز) دریګوډي کاتیتې څومره لويې دي، که د هغوي زیاتون ۴۲ سانتیمتره وي ، د دریګوډي هواردننه ۲۱۶ مربع سانتي متره وي ؟

ت) د یوه ولاړګوډي نیمی (قطر) ۳۵ سانتي متره اوږد دی، که د ولاړ ګوډي اوږد اړخ ۸ سانتي متره وغزول شي او لنډ اړخ ۶ سانتي متره وغزول شي، د نیمي اوږدوالی ۱۰ سانتیمتره لویږي. د سمکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) که د مربع یوه خوا ۷ سانتي متره وغزوي او بل اړخ په همدې ارزښت لنډ کړي،نو مربع او سمکونجیز دواړه د هوارې دننه ۴۹۵۱ مربع سانتي متره لري.
د سم اړخیز اړخونه څومره لوي دي؟ (یا ولاړ اړخ)

ټ) د یوې ګردۍ وړانګه ۱۶ سانتي متره اوږده ده. په ګرد کې دننه ځاي مربع اړخ څومره لوي دی؟ (یا څونډې مربع اړخ)

ج) د یوې ګردۍ نیمی باید څومره لوي، که ۵ دننه منځشوې مربع اړخ ۱ سانتي متره د هغه د وړانګې څخه لوي وي؟

ح) که د یوې ګردۍ نیمی (قطر) ۳ سانتي متره لوي شي ،نو د ګردۍ هواره دوه برابره کیږي. د ګردۍ سرچیني نیمی څومره لویه ده؟

خ) د یوه نیمغونډي نیمی څومره دی، که د هغه د دیوال لویوالی ۳ سانتیمتره او او تشه کې یې ۵۰۱۶ مکعبسانتي متره وي؟

۲ – د درېمې او څلورمې درجې مساوات

2.1 a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ b) $x^3 + x^2 - 5x - 84 = 0$

c) $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$ d) $x^3 + x - 2 = 0$

12.5 Übungsaufgaben 1

2.2. a) $4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = 0$ b) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

c) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = 0$ d) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

۳ . ریښه مساوات:

ټول ارزښتونه x وشمیرئ، چې د لاندې مساواتو حلونه یا اوبیونې دي. د هرې پوښتنې د ټیکاوي لپاره ازماېښت وکړئ!

۳ . ۱ – ریښه مساوات د ټاکلو ضریبونو یا څلوونو سره:

3.1.1. a) $\sqrt{x} = 3$ b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} + 7 = 2\sqrt{x}$

c) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \frac{3}{5}\sqrt{15x} - 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$

d) $\sqrt[3]{x} = 5$

3.1.2. a) $(3\sqrt{x} - 5)(5\sqrt{x} - 3) = 5(3x - 31)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

b) $(5\sqrt{x}-2)^2+(12\sqrt{x}-9)^2=(13\sqrt{x}-9)^2$

c) $\frac{5\sqrt{x}+12}{7\sqrt{x}+15}=\frac{4}{5}$ d) $\frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3}=7$

3.1.3. a) $\frac{\sqrt{x}-3}{7}-\frac{\sqrt{x}-25}{5}=7-\frac{2+\sqrt{x}}{4}$ b) $\frac{16-\sqrt{x}}{2}-\frac{10-\sqrt{x}}{3}=\sqrt{x}$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=1$ d) $2\sqrt{x}-\sqrt{2x}=2+\sqrt{2}$

3.1.4. a) $10-\sqrt{x-2}=3$ b) $\sqrt{3x-5}+4=5$

c) $\sqrt[3]{7x-6}+6=10$ d) $4\sqrt[3]{5x-8}=3\sqrt[3]{9x+1}$

3.1.5. a) $9\sqrt{5x+1}=20+4\sqrt{5x+1}$ b) $\sqrt{7x+2}=\frac{5x+6}{\sqrt{7x+2}}$

c) $3\sqrt{4x-3}-\frac{10x}{\sqrt{4x-3}}=\frac{1}{\sqrt{4x-3}}$ d) $\frac{9x}{\sqrt{10x-9}}-\sqrt{10x-9}=\frac{2}{\sqrt{10x-9}}$

3.1.6. a) $\sqrt{9x^2-10x-55}=3x-5$ b) $x+1=\sqrt{2x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

c) $17-4\sqrt{\frac{3x+5}{x-7}}=1$ d) $24-7\cdot\sqrt[3]{\frac{4x-1}{x-6}}=3$

3.1.7. a) $\sqrt{52-3\sqrt{5x+6}}=2\sqrt{10}$ b) $\sqrt{x+1-\sqrt{2x+3}}=1$

c) $\sqrt{37-7\sqrt{5x+4}}=4$ d) $\sqrt[4]{19-3\sqrt[3]{5x-9}}=2$

3.1.8. a) $\sqrt{9x-17}-3\sqrt{x-4}=1$ b) $2\sqrt{9x+4}-3\sqrt{4x-11}=1$

c) $\sqrt{x+9}-\sqrt{x+2}=\sqrt{4x-27}$ d) $\sqrt{9x+10}-\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+9}$

3.1.9. a) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-8}+\sqrt{x-3}-\sqrt{x+13}=0$

b) $\sqrt{x+9}+\sqrt{x-12}=\sqrt{x}+\sqrt{x-7}$

c) $\sqrt[3]{9x+10}-\sqrt{3x+4}=0$ d) $\left|\sqrt{3x+7}\right|+\left|\sqrt{4-x}\right|=3$

3.1.10. a) $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\frac{2x}{9}$ b) $\sqrt[3]{76+x}+\sqrt[3]{76-x}=8$

c) $\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}$ d) $\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+x=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ . ۲ – ریښه مساوات د نامعلومو ضریبونو سره

3.2.1. a) $\sqrt{x}=a$ b) $\sqrt[3]{x}=b$

c) $a-\sqrt[3]{x}=b$ d) $a\sqrt{x}-b=c\sqrt{x}-d$

3.2.2. a) $\sqrt{x-a}=b$ b) $\sqrt[3]{a-x}=b$

c) $\sqrt[4]{a^4+x}=a$ d) $\sqrt[6]{a^6-x}=b$

3.2.3. a) $(\sqrt{ax}+\sqrt{b})(\sqrt{ax}-\sqrt{b})=(a+1)(a-1)b$

b) $(a-\sqrt{x})\,(b-\sqrt{x})=(c+\sqrt{x})\,(d+\sqrt{x})$

c) $\dfrac{\sqrt{ax}-b}{\sqrt{ax}+b}=\dfrac{3\sqrt{ax}-2b}{3\sqrt{ax}+5b}$ d) $\dfrac{2a+3\sqrt{bx}}{3a+2\sqrt{bx}}=\dfrac{3b+2\sqrt{ax}}{2b+3\sqrt{ax}}$

3.2.4. a) $\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}-\left|\dfrac{(x+a)^2}{a(x-a)}\right|$

c) $\dfrac{a+b\sqrt{x}}{a+b}=\dfrac{c+d\sqrt{x}}{c+d}$ d) $\dfrac{a+b\sqrt{x}}{a\sqrt{x}+b}=\dfrac{c+d\sqrt{x}}{c\sqrt{x}+d}$

3.2.5. a) $x+\sqrt{x^2-a^2}=a$ b) $x-\sqrt{ax(1+x)+1-x}=1$

c) $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$ d) $\sqrt{x+a^2}-\sqrt{x}=b$

3.2.6. a) $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\dfrac{b}{\sqrt{b-x}}$ b) $\sqrt{x+a}-\sqrt{5x-3a-4b}=\dfrac{2b}{\sqrt{x+a}}$

c) $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}=\dfrac{x+a-b}{\sqrt{x+a}}$

d) $\sqrt{3a-2b+2x}-2\sqrt{3a-2b-2x}=\dfrac{a+2b+2x}{\sqrt{3a-2b+2x}}$

3.2.7. a) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{a}{b}$ b) $\dfrac{\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3x^2-1}-\sqrt{3-x^2}}=\dfrac{a}{b}$

c) $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{2a}$ d) $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ ، ۳ – مساوات سيستمونه، چې ريښه مساوات خوندي لري

3.3.1 a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=8$, $\sqrt{xy}=15$

b) $x+y=58$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=10$

c) $\sqrt{x-5}+\sqrt{y+2}=5$, $x+y=16$

d) $\sqrt{5-3x+x^2}+\sqrt{5-3y+y^2}=6$, $x+y=3$

3.3.2 a) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $xy=(a^2-b^2)^2$

b) $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $x^3-c^3=c^3-y^3$

c) $x\sqrt{x+y}=a$, $y\sqrt{x+y}=b$

d) $x\sqrt[3]{x^2+y^2}=a$, $y\sqrt[3]{x^2+y^2}=b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ ترانسڅندنت برابرونونه یا ـ مساوات

لکه څنګه چی په ۱۲ . برخه کی دې ته ګوته نیول شوې وه، چی دلته یواځي هغه ترانسځندنت مساوات څېړل کیږي، کوم چی بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي.
دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ریښه مساواتوکی، په خوښه په بل شکل اړول کیږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چی اړولی فرمول زیاتې اوبیونې یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون ټولې اوبیونې په پیل برابرون کی ځاي په ځاي یا کیښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ریښه یي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځی رییل اوبیونې پلټل کیږي.

۱۳ . ۱ لوګاریتمي مساوات

د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چی د یو عدد(ګڼ) aلوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅېړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,1)$$

د بنسټ b = 10 لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کیدی شي (۱۳ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیده د جبشمیري له لارې پیداشي. په څټ یا برعکس د 10 =| b =|e لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کیږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b .... (13.2)$$

د لوګاریتمي مساواتو یو ساده ډول یا شکل (تیپ) دا دئ

$$l\log_b x = c .... (13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱) ، (7. ۲) له مخی لاندې ته ورته دئ:

$$x = b^c .... (13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشمیري سره شمیرل کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۱ $: \log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بنې اوبیونه په لاندې تولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c .... (13,5)$$

دلته (f(x یوه الجبري وبینه یا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کتمټ (ورته) دئ

$$f(x) = b^c .... (13,6)$$

ټولې د (۱۳ . ۶) اوبیونې د (۱۳ . ۵) اوبیونې هم دي

بیلګه ۱۳ . ۲ : لوګاریتمیز برابرون

$$\log_2(x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کتمټ دي

$x^2+x+6=2^3= 8$ (همداسی) ⇔ $x^2+x-2=0$

او لاندې اوبیونې لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}; x_1=-2; x_2=1$$

یو د (۱۳ . ۵) ډول (تیپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کیڼې لور (ارخ) ته یود لوګاریتم ریشنل لاینیز کمبینشن الجبري وییڼه یا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x)+r_2.\log_2(x)+r_3.\log_b g_3(x)+...=c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاریتم قوانینو (۷. ۷) ، (۷. ۹) کاروني یا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x)=\{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}.....................................(13,8)$$

بیلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x-1)+\frac{1}{2}\log_3 x-\frac{1}{2}\log_3(x-1)=2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log[(x-1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې څخه رېښه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1}=9$ ،

د کوم له څلورئ یا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ یعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{324}{4}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{325}{4}}=\frac{1}{2}\pm(\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1=9,515; x_2=-8,515$$

تیك دا $x1=9,515$ پیل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پیژند نه لري یا تعریف نه دي.

بیلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)]=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$
$b+3=x(b-2)$
$x=(b+3)/b-1)$

پیل وینه یا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني که $1<(b+3)/b-2)$ وي.

د $b>2$یعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$

له دې لرو $2- <3$دا د ټولو b لپاره پوره دی

د. $b \le 2$ لپاره د $b+3 \le b-2$ $b+3 < b-2$ څخه $2 \le 3$ لاس ته راځي اودا د هیڅ b لپاره باور نه لري .

له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $b \le 2$ لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوګاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13 . 9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې ویینې یا افادې دي. د بدلون کاروایي یا عملیه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x)......................................(13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13 . 11)$$

ددې اوبیونه ..$y1,y2$ په (۱۳/۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تیپ (۱۳/۵) لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i; \quad i = 1,2,3,......... \qquad (13 . 12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13 . 13)$$

ددې لپاره چی و ازمائیلی شو چی ایادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبیونې یا ځوابونه باید په پیل برابرون (۱۳/۹) کی کیښوول شي یا ځاي په ځای شي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2 x - \lg x - 2 = 0$ د سبستیځیوشن(بدلون) $y = \lg x$ سره په خلوری برابرون $y^2 - y - 2 = 0$ بدلیږي .
د $y_1 = 2$ او $y_2 = -1$ ځوابونو سره
له. $\lg x = 2$ او $\lg x = -1$ لاس ته راځي

$$x_1 = 10^2 = 100 \text{ او } x_2 = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

دواړه ځوابونه د پیل برابرون ځوابونه دي.

بیلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6 / (\lg x + 1)) + (8 / (\lg x - 1)) = 3$

د,$x>0$ مګر $(x \neq 1/10,\ x \neq 10)$ چی د اصلي ماتلاندې ($\lg x - 1$)($\lg x + 1$) سره حل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x - 1) + 8(\lg x + 1) = 3(\lg^2 - 1)$$
$$,\quad 6\lg x - 6 + 8\lg x + 8 = 3\lg^2 x - 3$$
$$0 = 3\lg^2 x - 14\lg x - 5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې خلوری بڼې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2 - 14y - 5 = 0\ ,\ y^2 - (14/3)y - 5/3 = 0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{15}{9}} = \frac{7}{3} \pm \frac{8}{3};\ y_1 = lox_1 = 5;\ y_2 = \lg x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = 10^5;\ x_2 = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه برابرون کی لوګاریتمونه د مختلفو بنسټونو bسره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1) + \log_4(x-1) - 1 = 0$

څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{2}\log_2(x-1) - 1 = 0,\ \log_2(x-1) = \frac{2}{3},\ x-1 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4},$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2\sqrt[3]{4} + \log_4\sqrt[3]{4} - 1 = \frac{1}{3}\log_2 4 + \frac{1}{3}\log_4 4 - 1 = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په جګ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x = b; a > 0, a \neq 1, b > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13,14)$$

کیدی شي چی د لوګاریتم نیولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x = \log_a b = \lg_b / \lg_a = \ln b / \ln a \qquad (13,15)$$

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تیوپ) برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2) + 3^x(3^2-3) = 0,\ \text{bzw.}\ 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x,\ \text{bzw.}\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg\frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري ويیني یا افادي(f (x اکسپوننتونه یاجګګڼونه وي، نو:

$$a^{f(x)}=b, a>0, a|=1, b>0 \qquad (13 . 16)$$

په دې ډول د لوګاریتمولو له لارې یو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b ....(13,17)$$

د کومو ځوابونه چی د) ۱۳ . ۱۶ (ځوابونه هم دی.

بیلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4} = 4$

مو لاندې څلوری برابرون یا مربع مساوات ته بیایي (لاربنودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1= 2 , x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چی د پیل برابرون اوبیونې یا ځوابونه هم دي۰

بیلګه ۱۳ . ۱۰ :

په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کی د یوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څټ ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3 , x_2 = -4$$

بیلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کې کیدی شي چې ناپیژندونکي د اکسپوننت یا په جګ څخه د دوه واره لوګاریتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \quad \text{یا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad x = 1.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ یا ډوی مساوات دي، ځکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې امله

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کيڼ اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چې د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c;..................................(13,18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + ... - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - .... = \lg c \qquad (13.19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وینه یا افاده F د الجبري اکسپوننت(f(x)سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)})=0\ ;....................................(13,20$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13.21)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرون

F(y) (13 . 22)

د ټولواوبیونو y_1 , y_2 , y_3;............... لپاره باید

$a^{f(x)} = y_i ; i=1,2,3.......$ (13 . 23)

په همدې ډول

$f (x) = \log_a y_i \quad ; i = 1 , 2 , 3 ....$ (13 . 24)

اوبی شي

بیلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x}+3^x = 2$ کیدی شي چی د بدلون $y = 3^x (y^2 = 3^{2x})$ سره په څلوری

برابرون یا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بیرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$x_1.\lg3 = \lg1 = 0, x_1 = 0$

دا برابرون $x_2.\lg3 = \lg(-2)$ اوبیونه نه لري

بیلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1} - 1} = \sqrt{2e^{x^2-1} - 1} ....(13,25)$$

کې داسې بدلوو:

$$y = e^{x^2-1} ....(13,26)$$

او لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};..............................(13,27)$$

له دې ځخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow-2\sqrt{y(y-1)}=0=>y(y-1)=0$$

$$y_1=0; y_2=1$$

$y_2=1$ټیك (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1;...(13,28)$$

حل اوبی . د لوګاریتمولو ځخه تعقیبیږي:

x^2-1=ln1=0,

x1 = 1 , x2 =-1

دواړه ارزښتونه پیلبراروڼ پوره کوي۰

برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخی ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړی حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوګاریتم یوځای رامنځ ته کیږي.

بیلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ ځخه د بیلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاریتموولو له لارې لاس ته راځي

$\ln^2 x-\ln x+1=\log_2 8=3$

که کیږدو y = lnx ، نو دا ځلوری برابرون یا مربع مساوات $y^2-y-2=0$ لاس ته راځي،د ځوابونو

y1 = -1 , y2 = 2

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

lnx=-1 , lnx=2, x1=e-1=1/e , x2=e^2

۱۳ . ۳ ګونومتریکي- یا کونجکچ برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګونومتري ساده برابرون لاندې څیره لري

sinx=a , cosx=a (13 . 29)

tanx=a , cotx=a, (13 . 30)

دلته فقط دواړه لومړي برابرونونه (۱۳ . ۲۹) ځوابونه لري ، که $-1 \leq a \leq 1$ باور ولري، نور ارزښتونه sin x او cos x نه شي غوره کولی(پرتله برخه ۶ . ۳) د جبشمیرني سره د تکمو یا ګوټکونو په پرلپسی د (۱۳ . ۲۹) همداسی (۱۳ . ۳۰) یو ځواب لاس ته راځي

د(۱۳، ۲۹) لپاره

a F sin a F cos

د (۱۳،۳۰) لپاره

a F tan a 1/x tan

دا چي tan x او cotx پریودې همداسی 180°لري او په یوه اینتروال کی چي اوږدوالی همداسی 180°لري د(۱۳ ۳۰) ټیك یو ځواب پروت دی، لاندې جمله صدق کوي

جمله ۱۳ . ۱ :که x0 د(۱۳ . ۳۰) یو ځواب وي) چی د بیلګي په توګه د جبشمیرنی په مرسته لاس ته راځي)، نو د (۱۳ . ۳۰) د لاندې بڼی ټول ځوابونه تر لاسه کوو

$$x_k = x_0 + k\pi = x_0 + k.180°; k = ...-3, -2, -1, 01, 2, 3, ...; ....(13, 31)$$

په همدې ډول دې دلته هم د هندسی برخه په پام کی وي. چی د هغو له مخې په (۱۳ ، ۳۱) کی د بیلګي په توګه باور لري

$$x_k = \frac{\pi}{6} + k\pi = 30° + k.180°$$

د کونجونو فنکشنونه sin x او cos x پریودې(تل بېرته راګرځېدنه یا دوران)

$$2\pi = 380°$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لري. مساوات (۲۹.۱۳) ددې اوږدوالی اینتروال کی دوه حلونه لري. که چیرته د
جبشمیرني سره یوه اوبیونه x_0 پیداشي، نو د sin x = a په حالت کی $x = -x_0$
هم یو حل دی، او $x = -x_0$ د cos x = a په حالت کی یو بل اوبی

یا حل دی. پس لرو:

جمله ۱۳ . ۲ : که x0 د (۱۳ ، ۲۹) یو هغه اربیونه یا حل وي، چی د بیلګي په توګه
په جبشمیروني لاس ته راځي، نو د sin x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....; ....(13,32)$$

$$\bar{x} = \pi - x_0 + 2k\pi = 180° - x_0 + k.360°; ....(13,33)$$

او د cos x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځی

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....; ....(13,34)$$

$$\bar{x} = -x_0 + 2k\pi = -x_0 + k.360°; ....(13,35)$$

بیلګه ۱۳ . ۱۶: د مساوات sin x = 0,23910 لپاره د جبشمیرني سره لاندې حلونه
لاس ته راځي: (په درجه کچ یا ګراد اندازه) x0 =13,833427º
(په لینده کچ)0,24143 = 0,017453. 3,833427
د) ۱۳ . ۳۲ (،) ۱۳ ، ۳۳ (له امله په لاندې سره ټولې اوبیونې راکړ شوي دي

$$x_k = 13,833427 + k.360º = 0,24143 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = 166,16657º + k.360 = 2,9001 + k .6,28318.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۷ : د برابرون cos x = -0,682000 اوبیونه د جبشمیروني سره مومو

$$x0 = 133,00013º = 133º = 2,32125.$$

د (۱۳ ، ۳۴) او (۱۳ . ۳۵) له مخی ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = 133° + k .360° = 2,32125 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = -133° + k.360° = -2,34125 + k.6,28318$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۱۸:

د برابرون $\tan x = -\sqrt{3} = 4,843000$ حل په جبشمیرني پیداکوو

$x_0 = -59,999988° = -60° = -1,04718$

له دې امله د) ۱۳ . ۳۱ (له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$x_k = -60° + k.180° = -1,04718° + k.3,14159$

بیلګه۱۳ . ۱۹:

د برابرون $\cot x = 4,843000$ ټولې اوبیونې یا حلونه د جبشمیرني سره داسې

$x_0 = 11,666677° = 11,67° = 0,203675$

لاس ته راځي. په دې توګه د (۱۳ . ۳) له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لرو:

$x_k = 11,67° + k.180° = 0,203675 + k.3,14159$

بیلګه ۱۳ . ۲۰ : مساوات $\sin x = \sqrt{2}$ د $1 < 2$ له امله اوبیونه ل نه لري .

د ګونومتري مساواتو نور ټیپونه یا ډولونه، کوم چې تراوسه په څرګندومتودو یا لارو ځوابوړ دي، لاندې بڼه لري

$$\sin f(x) = a , \quad \cos f(x) = a \qquad (13 . 36)$$

$$\tan f(x) = a \quad , \cot f(x) = a \qquad (13 . 37)$$

دلته کیدی شي چې $f(x)$ الجبري او یا ترانسځیندنته افاده وېکه بدل (سوبستیتوتي) شي

$$y=f(x) \qquad (13.38)$$

نو لاندې مساواتونه لاس ته راځي

$$\sin y= a , \cos y = a \qquad (13 . 39)$$

$$\text{Tan } y= a , \cot y = a \qquad (13 . 40)$$

دا کیدی شي د جملې ۱۳ . ۱ سره سم اوبی کړای شي. ددې اوبیونې یا حلونه دې $y3, y2, y1 , ...$ وي .

د (۱۳ ، ۳۷) سره سم د $f(x) = y_i , \ i = 1,2,3,...$ ټولې اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي ددې لپاره دې بیلګه ورکړ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۲۱: $\sin(x-120°)/3=1/2$

د سبستیچیوشن یا بدلون $y=(x-120°)/3$ سره لاس ته راځي $\sin y=1/2$ د لاندې اوبیوني (حل) سره

$$y_k = 30° + k.360° , k = ...,-3,-2,-1, 0,1,2,3...$$

$$\overline{y}_k = 150° + k.360°$$

ټول د $(x - 120°)3 = y_k$, $(x - 120°)/3 = y_k$ اوبوني (حلونهو په توګه لاس ته راځي:

$$x_k = 3y_k +120 = 90°+3k.360°+120° = 210° +3k.360°$$

$$\overline{x_k} = 3y_k +120° = 450° + 3k . 360° + 120° = 570°+3k.360°$$

د ګونومتري فنکشنونو یو بل تیپ یا ډول ، له لاندې څخه لاس ته راځي

$$f(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sin 2x,\cos 2x,\tan 2x,\cot 2x, \sin 3x,\cos 3x,\tan 3x,\cot 3x, ...) \qquad (13 . 42)$$

دلته که د بیلګي په توګه بدل شي

$$y = \sin x \qquad (13 . 43)$$

د ۴ . ۵ برخی تریګونومتري فرمولونو په مرسته ټول په (۴۲ ، ۱۳) رامنځ ته شوي کونجفنکشنونه په y سره افاده کولی شو:

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-y^2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y}{\pm\sqrt{1-y^2}}, \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}, \qquad (13.44)$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = \pm 2y\sqrt{1-y^2}, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1-2y^2 \quad \text{usw.}$$

(او نور

له دې سره برابرون (۴۲ . ۱۳)، په y ، یو برابرون بدلیږي:

$$F(y) = 0 \qquad (13 , 45)$$

دا دې په همغه ډول حلیدونکي وي او حلونه دې ....y3. y2 , y1 وي. نو بیاد(۱۳.۴۳)سره مناسب لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\sin x = y_i, i = 1,2,3...$ (13 . 46)

اوبی کړي او د ټولو اوبیونو سره، کوم چی په (۱۳ . ۴۲) کي ښول شي ، وازمایل شي، چی ایا دا هم پوره کوي، که نه په (۱۳ . ۴۲) کیدی د x په ځاي یوه افاده g(x) هم ولیکلی شي.

$$f(\sin g(x), \cos g(x), ...) = 0 \quad (13 . 47)$$

نو بیا سړی بدلوي

$$y = \sin g(x) \quad (13 . 48)$$

د پورته متود تشریح لپاره په لاندې ډول دوه ساده بیلګي ورکول کیږي

بیلګه ۱۳ . ۲۲:

برابرون

$$\sin x + \cos x = 1 \quad (13 . 49)$$

د (۱۳ . ۴۲) ، (۱۳ . ۴۴) سره ځان په رېښه ببرابرون بدلوي

$$y \pm \sqrt{1-y^2} = 1 \iff \pm \sqrt{1 - y^2} = 1-y \iff 1-y^2 = 1 + y^2 -2y \quad (13.50)$$

$$\iff 0 = 2y^2 - 2y = 2y(y-1)$$

$$y_1 = 0 , y_2 = 1 \quad (13 . 51)$$

اوس دې په یاد شي ، چی د y2=1 لپاره برابرون (۱۳ . ۵۰) او له دې سره سم برابرون (۱۳ . ۴۹) تل پوره دي. د دې په څټ یا خلاف y1 فقط د (۱۳ .۵۰) حل دی ، که د
رېښی له مخه زیاتیز یا مثبت نخښه وي. دا حالت یوائې هلته مخ ته پروت دی، چی $\cos x>0$وي.

دا هلته هم پام ته راځي، که د برابرون (۱۳ . ۵۱) سره برابرون (۱۳ . ۴۶)حل یا اوبی شي او
حل یا اوبونه یی په (۱۳ . ۴۹) کی کیښول شي:

$$\sin x = y_1 = 0 , x_k = k\pi ; \; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3... \quad (13.52)$$

$$\sin x = y_2 = 1 , x_k = \pi/2 + 2k ; \; k = ..,-3,-2,-1,0,1,2,3,... \quad (13.53)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (۵۲ . ۱۳) په (۴۹ . ۱۳) کېښوول شي، نو لاس ته راځي:

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 + 1$

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 - 1$

د پیلمساوات د زیاتځله حلونه یواځي جفت ګڼونه دي($x\pi = 2k\pi$) که(۱۳ . ۵۳) په (۱۳ . ۴۹) کېښوول شي، نو لاس ته راځي

$$\sin x_k + \cos x_k = \sin(\pi/2 + 2k) + \cos(\pi/2 + 2k) = \sin\pi/2 + \cos\pi/2 = 1 + 0 = 1$$

له دې وروسته ټول xk پیلبرابرون پوره کوي .

نو د (۱۳ . ۴۹) ټولې اوبیونې په لاندې بڼه لاس ته راځي

$$x_k = 2k\ ,\ x_k = \pi/2 + 2k\ ;\ k = ..-3,-2,-1,o,1,2,3,... \quad (13\ .\ 54)$$

بیلګه ۱۳ . ۲۳ : د برابرون $\cos x + \cos 2x = 0 \quad (13.55)$

سره کیدی شي د ریښی مساوات څخه لار واړوو یت تیرشو. که چیرته $y = \cos x$ بدل کړي. د

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = y^2 - (1 - y^2) = 2y^2 - 1 \qquad (13.57)$$

له امله له څخه (۱۳,۵۵) مربع مساوات لاس ته راوړو.

$$2y^2 + y - 1 = 0 \qquad (13.58)$$

د دې حل سره : $y_{1;2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4},$

$$y_1 = \frac{1}{2}\ ,\quad y_2 = -1. \qquad (13.59)$$

په (۱۳ . ۵۶) کې ایښوولو له لارې لاس ته راځي

$$\cos x = y_1 = \frac{1}{2}\ ,\quad x_k = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\bar{x}_k = 300° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \qquad (13.60)$$

$$\cos x = y_2 = -1,\quad \bar{\bar{x}}_k = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi, \qquad (13.61)$$

$$x = \begin{Bmatrix} 60° \\ 180° \\ 300° \end{Bmatrix} + k \cdot 360° = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{Bmatrix} + 2k\pi. \qquad (13.62)$$

تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول ارزښتونه x وشمیرئ، چې لاندې برابرونونه پوره کوي! پام دې وي، چې د هرې پ،ښتنې سره یې ازمایل یا ازماېښت اړیندی.

۱ - لوګاریتمي مساوات یا برابرونونه

1.1. a) $\log_4(x+1) = -3$ b) $4 - 3\lg 2x = 10$
c) $\lg\sqrt{2x} = 1{,}314$ d) $\ln(x-1)^2 = 2$

1.2. a) $\lg(2x+5) - \lg(3x+1) = 2$ b) $\lg 4x + \lg 2x + \lg x = 6$
c) $\frac{1}{3}\ln x^6 = \frac{1}{2}\ln 81$ d) $\lg(x-1)^2 = 6\lg 2$

1.3. a) $\lg(x-1) + \lg 3 = \lg(x^2-1)$
b) $\lg(x+1)^2 = \lg 2 + \lg(x+1) + \lg(x-1)$
c) $\lg x - \lg 4 = \lg 35 - \lg(x+4)$
d) $\lg(x-2) - \frac{1}{2}\lg 4 = \frac{1}{3}\lg 125 - \lg(x+1)$

1.4. a) $\lg x + \lg(x+1) + \lg(x-1) = \lg 24$
b) $\lg 3 + 2\lg x = \lg(4+x^3)$ c) $\lg(152+x^3) - 3\lg(x+2) = 0$
d) $2\lg^2 x^3 - 3\lg x - 1 = 0$

1.5. a) $\lg x + \lg(a - \frac{1}{a}) = \lg(1 - \frac{1}{a}) + \lg(1 + \frac{1}{a})$
b) $\lg(ax) - \lg a + \lg\frac{b}{a} = \lg b + \lg\frac{x}{a}$
c) $\lg x - \lg\frac{x}{abx-1} = \lg(a-1) + \lg(a+1)$
d) $\log_a(2x+1) = \log_a(x-1) + 1$

1.6. a) $\frac{10}{\lg x - 2} - \frac{5}{\lg x + 1} = 4$ b) $\frac{1}{\lg x + 1} - \frac{3}{\lg x - 3} = 2$
c) $\frac{2}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{\log_2 x - 5} = 1$ d) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$

1.7. a) $\lg(x^2+1) = 2\lg^{-1}(x^2+1) - 1$ b) $(\log_5 x - 2)\log_5 x = 25^{\log_5\sqrt{3}}$
c) $\lg^2 x^3 - 10\lg x + 1 = 0$ d) $\sqrt{\lg(1-x)} + 5\lg(1-x) = 6$

1.8. a) $2\lg\lg x = \lg(3 - 2\lg x)$ b) $\log_2(x-14) = 1 + \frac{1}{2}\log_2(3x-26)$
c) $4\log_3^3 5x - 7\log_3 15x + 7 = 0$ d) $3\lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.9. a) $x^{\lg x+2} = 1000$ b) $x = 10^{1-0,25\lg x}$
c) $x^{\log_5(5x)-4} = 625$ d) $x^{\log_a x} = a^2 x$

1.10. a) $x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$ b) $\log_2(4\cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$
c) $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$ d) $x(\lg 5 - 1) = \lg(2^x + 1) - \lg 6$

1.11. a) $\log_2[2 + \log_3(x+3)] = 0$ b) $\log_5[\log_2(\log_4 x)] = 0$
c) $2\log_x 27 - 3\log_{27} x = 1$ d) $\dfrac{\lg x}{\lg(x+1)} = -1$

۲ ـ اکسپوننشل مساوات

2.1. a) $(a^{x-2})^{x+2} = (a^{x+3})^{x-4}$ b) $a(a^{x-3})^{x+2} = a^{3x+5}(a^x)^{x-6}$
c) $\sqrt[3]{a^{2x+9}} = \sqrt[4]{a^{3x+5}}$ d) $\sqrt[x-2]{a^{11-x}} = \sqrt[9-x]{a^{x+3}}$

2.2. a) $10^{5x} = 3^{10}$ b) $0,375^x = 2576$
c) $\sqrt[x]{6,325} = 1500$ d) $\sqrt[x]{10,27} = \sqrt[4]{5}$

2.3. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x+5}$ b) $\left(\frac{6}{7}\right)^{3x+10} = \left(\frac{7}{6}\right)^{2x-3}$
c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{3x+4}$ d) $16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

2.4. a) $\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{x}} = 24,24^{\frac{1}{10}}$ b) $\sqrt[2x]{3^{3x+2}} = \sqrt[3x]{2^{2x+3}}$
c) $3^{(2^x)} = 2^{(3^x)}$ d) $8^{(5^x)} = 4^{(7^x)}$

2.5. a) $4^{x^2-x+1} = 8^x$ b) $3^{9x+1} = 9^{3x-1}$
c) $\sqrt{9^{x(x-1)-0,5}} = \sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[x-1]{3^{10x+5}}} = \sqrt[3x-9]{27^{3x-7}}$
e) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$ f) $2^{x^2-7,7x+16,5} = 8\sqrt{2}$
g) $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$ h) $4^{\sqrt{x+1}} = 64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $7^{2x+1} - 3^{x-1} = 7^{2x+3} - 3^{x+1}$ b) $2^{x+1} - 3^{x} = 2^{x+3} - 3^{x+2}$

c) $3^{2x-1} - 5^{3x-2} = 3^{2x+1} - 5^{3x+2}$ d) $5^{2x} - 3 \cdot 5^{x} + 2 = 0$

e) $5^{4\sqrt{x}} - 6 \cdot 5^{2\sqrt{x}} + 5 = 0$ f) $2^{\frac{3}{\sqrt{x}}} - 2^{\frac{2}{\sqrt{x}}+1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 2 = 0$

g) $3^{x+1} - 2 = 9^{x}$

h) $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^{x} + 5^{x-1} + 5^{x-2}$

i) $2 \cdot 3^{x+3} + 7 \cdot 3^{x-2} = 493$ j) $3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} = \frac{26}{3}$

k) $33 \cdot 2^{x-1} - 4^{x+1} = 2$ l) $3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^{x}$

2.7. a) $5^{x-3} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5{,}08$ b) $5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} = 20$

c) $9^{\sqrt{x^2+3x}} + 0{,}5 + 9 = 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2+3x}}$ d) $2^{-2x} - 17 \cdot 2^{-(x+2)} + 1 = 0$

e) $2^{x^2} + 2^{1-x^2} = \frac{9}{2}$ f) $12\sqrt[2x]{3} - \sqrt[x]{3} = 27$

g) $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$ h) $\sqrt{3^{x-56}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-60}} = 162$

i) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

2.8. a) $\frac{3^{x} + 3^{-x}}{3^{x+1} - 1} = \frac{5}{12}$ b) $\frac{2^{x} + 1}{2^{x} - 4^{x}} = 6$

c) $4 + \frac{2}{3^{x} - 1} = \frac{5}{3^{x-1}}$ d) $\frac{2^{x} + 10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$

e) $x^{x} = x$

۳ – گونومتريكي – يا كونجكچيز مساوات

3.1. a) $\tan x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\cot x = \frac{2}{5}$ d) $\tan x = -1$

3.2. a) $\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = 0{,}309$ b) $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 0{,}342$

c) $\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{10}) = 0{,}809$ d) $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0{,}471$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3.3. a) $5\sin^2 x - 10\cos^2 x - 1 = 0$ b) $\cos^2 x + \frac{1}{3}\sin x\cos x + \frac{2}{3}\sin^2 x = 1$

c) $\cos^2 x + 2\cos x - \sin^2 x + 1 = 0$ d) $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

e) $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 0$ f) $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

g) $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$ h) $\sqrt{1+\cos x} = \sin x$

i) $\sqrt{1+\sin x} + \cos x = 0$ j) $\sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$

k) $\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{2}\sin x = 0$ l) $1 - \cos x = \sin x$

3.4. a) $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$ b) $\cos 2x = \cos x$

c) $\sin 2x \cdot \tan x = 1$ d) $\cos 2x + 3\cos x = 1$

e) $\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$ f) $2\sin\frac{x}{2} - \cos x + 1 = 0$

g) $\cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$

h) $2\sin x\cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$

i) $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$ j) $\sin 2x + 2\cot x = 0$

k) $3\cos 2x - 20\sin x = 9$ l) $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 0$

3.5. a) $2\sin^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 0$ b) $2\cos^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 1$

c) $\tan x - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ d) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$

e) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ f) $3 - 2\sin^2 2x = 2\sin^2 x$

g) $5\cos 2x + 16\sin x + 14\sin^2 x + 7 = 0$

h) $3\cos 2x - 6\cos x + 4\sin^2 x = -3$

i) $2\cos x + 3 = 4\cos\frac{x}{2}$ j) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 0$

k) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$

3.6. a) $\cos x\cos 2x = \cos 3x$ b) $\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}\sin 8x - 0{,}5$

c) $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$ d) $(\cos 8x)^2 \cdot 2 + \sin 16x = 1$

e) $2\cos^2 4x + \sin 10x = 1$ f) $2 - 6\sin x\cos x = \cos 4x$

g) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$ h) $\sin x\cos 5x = \sin 9x\cos 3x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

i) $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2} = \sin\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}$

j) $\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{9x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

k) $\sin x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x = 0$

l) $\cos x + \cos 3x = \cos 5x + \cos 7x$

3.7. a) $2\sin^3 x - 3\sin x\cos x = 0$

b) $4\sin^3 x - 8\sin^2 x - \sin x + 2 = 0$

c) $\tan^3 x + \tan^2 x \;\; 3\tan x - 3 = 0$

d) $\tan^3 x - \tan^2 x + \tan x = 1$

3.8. a) $\sqrt{3}\sin x + 3\cos x = 0$

b) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = 1$

d) $\sqrt{2\sin 2x} + 2\sin x = 0$

e) $1 - \sin x = \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$

f) $2\sin^2\frac{x}{2} = \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2})$

g) $1 - \cos 2x + \cos 6x - \cos 8x = 0$

h) $\cos x - 2\cos 3x + \cos 5x = 0$

i) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$

j) $1 - \sin x\cos x + \sin x - \cos x = 0$

k) $\cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sin x$

l) $\sin x\cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0$

m) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$

n) $(\cos x)^{\sin x} = 1$

o) $\frac{1+\cos 2x}{2\cos x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴. د نامساواتو یا نابرابرونونو او مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

۱۴ . ۱:نابرابرون(نامساوات)

۱۴ . ۱ . ۱ بنسټيزې کليمی او شميرقوانين

یو نابرابرون لاس ته راځي، که دوه ترمونه T1 او T2 د یوې اړیکنخښنی$<, \geq, >$ او $\leq$ له لارې یو د بل سره تړلي وي.
په لاندې کی به نابرابرونونه تر څيرنی لاندې ونیول شي، چی یوه یا دوه ریيلی واريابلی یا اوښتونی ولري . یو نابرابرون د دوه واريابلو(اووښتونو) سره د وینامنطق په بنسټ یو د وینا شکل ښايي، د هغو سره چی واريابلی هر ارزښت غوره کولی شي، د کومو لپاره چی ترمونه T1 او T2 څرګنددي . یو اوبی یا حل هر هغه ارزښت دی ، په همدې توګه هغه ارزښت جوړه ده، چی واريابل یا اووښتوني یی غوره کولی شي او په ترم کی د هغي ځاي په ځاي کیدو سره نابرابرون یوه ریښتونی وینا وي . د ټولو اوبیونو یا ځوابونو ټولګه په حلډيري L کی سره راټوليګي.
په لاندې برخه کی به ډير د وینامنطق(ویناسم اندیز) سومبولونه چی په برخه ۱ ۰ ۲ (او د ډيري عمليو سومبولونه) چی په برخه ۲ . ۳ راغلي په کار واچول شي. د دې سومبولونو د اهمیت یا غوره والي سره دې سړی بیا هم ځان اشنا کړي.
د نابرابرونونو سره شميرنه کی دې لاندې قاعدې په پام کي ونیول شي(مقایسه برخه ۳)، دلته دې a , b , c او dریيل ګڼونه وي. لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a<b \Leftrightarrow a \pm c<b \pm c, \qquad (14,1)$$
$$a<b \wedge c>0 \Rightarrow a.c<b.c \qquad (14,2)$$
$$a:b<b:c \qquad (14,2)$$
$$a<b \wedge c<0 \Rightarrow a.c>a.c \qquad (14,3)$$
$$a:c> b:c \qquad (14,3)$$
$$a<b \wedge c=0 \Rightarrow a.c=b.c \qquad (14,4)$$

د برابرونونو شمیرنی سره انډول کی دې دلته (۱۴ . ۳) قاعده ځانګړې تر پام لاندې وي.د منفی یا کمیز ګڼ سره ځل یا ویش عملیه کی دا د نابرابرون نخښه راکرځي یا را په څټ کيږي یا که غواړئ برعکس کيږي. د بیلګي په توګه $3 < 4$ مګر که داوړه خواوې د 1 - سره ځل شي نو لاس ته راځي $-3 > -4$

ټول د شمیرلو لپاره ورکړ شوي قواعد د نابرابرون لپاره په ورته ډول د اړیکنخښنو > سره باور لري دا په دې مانا چې $a \leq b$ دا چی په څرګند ډول د دوه ګڼونو ځل او ویش هلته زیاتیز (مثبت)دی چی دواړه ګڼونه همغه مخنخښه ولري او کمیز (منفي) که چیری مخنخښي یی توپیر ولري، او لاندې اړیکی باور لري:

$$a.b>0 \Leftrightarrow \qquad (14,5)$$
$$\Leftrightarrow a:b>0\ (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0), \qquad (14,5)$$
$$a.b<0 \Leftrightarrow \qquad (14,6)$$
$$\Leftrightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0). \qquad (14,6)$$

دبرابرونونو شریکولو کی، په ځانګړي ډول د ویش لپاره، باید ونیول شي چی $b \mid= 0$ یعني د ځل او ویش لپاره دې توپیریدونکو قاعدو ته پام وي . د بیلګي په توګه دي:

$$a.b \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq \wedge (a \geq 0) \vee (a<0 \wedge b<0) \qquad (14,7)$$
$$a:b \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b>0) \vee (a \leq 0 \wedge b<0) \qquad (14,8)$$

۱۴ . ۱ ۱الف اینتروال

د واریابلو د څیړنو لپاره باید ټول معتبر ډیري ورکړل شي، د بیلګي په توګه د یوه فنکشن یا بلواك تعریف - او ارزښت ډیري.

پیژند ۴ . ۱ الف :
یو اینتروال یو د یوبل سره اړوند د رییلګڼونوR برخه ډیر) ده۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو اینتروال له دې امله، بي له تشوالي یا تشي ، د ګڼکرښی یوه ټاکلی برخه ده، چی له دوه ګڼونو a او b رابندیږي. که د غاړې ټکي په اینتروال کی دننه وي یا خوندې وي نو د بند

اینتروال څخه غږیږو او که اینتروال پورې اړه ونه لرې، واز اینتروال دی، او په همدې ډول نیمبند او نیم واز اینتروالونه.
د اوبیډیری په ورکولو سره په ګڼکرښی باندې، لاندې د انیتروال انځورونه په کار اچول کیږي.

لاندې ۱۱ د اینتروال مختلف تیپونه دي یا نې ، چې a او b له R دي او $a < b$ ده۰

1. $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$ واز اینتروا ، اخر تخري په اینترول اړه نه لیر
2. $[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ بند اینتروال ، اخر توري په اینتروال ئورې اړه لري
3. $[a,b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ ښی واز اینتروال
4. $(a,b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ کیڼ واز اینتروال
5. $(a,\infty) = \{x \mid x > a\}$ ښي لورته ناپاي او کیڼ لور ته واز اینتروال
6. $[a,\infty) = \{x \mid x \geq a\}$ ښي لور ته ناپای او کیڼ لور ته بند اینترال
7. $(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$ ښي لور ته واز او کیڼ ورته ناپاي اینتروال
8. $(-\infty,b] = \{x \mid x \leq b\}$ ښي لور ته بند او کیڼ لورت ناپاي اینتروال
9. $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ ناپای اینتروال ، ټول رییلګڼونه
10. $\{a\}$ د دې یوه توري ډیری
11. $\varnothing$ تشډیری

لاندې اینتروالونه د ناپای په لور هم رابند دي یانې په دې مانا، چې د ناپای ډیری هم په اینتروال پورې اړه لري، یانې ناپای ډیری ټولنه ورسره جوړوي۰

1. $[-\infty,b] = \{x \mid x \leq b\} \bigcup \{-\infty\}$
2. $[-\infty,b) = \{x \mid x < b\} \bigcup \{-\infty\}$
3. $[a,\infty] = \{x \mid x \geq a\} \bigcup \{\infty\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a,\infty] = \{x \mid x > a\} \bigcup \{\infty\}$$

4. $[-\infty,\infty] = \mathbb{R}^+$

Alternative notation پورته ته الترناتیو یا بدیلي لیکنښه

په نړیواله توګه یو بل ډول لیکنښهٔ په لاندې ډول ورکو لکیږي

$]a,b[= \{ x \mid a < x < b \}$

$[a,b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \}$

$[a,b[= \{ x \mid a \leq x < b \}$

$]a,b] = \{ x \mid a < x \leq b \}$

یادونه : داپورته د اینتروال ډولونه د نړیوال جال څخه راکښته شوي، دا می هم وغوښتل ګرانو لوستونکو ته وړاندی کړم

بند انیتروال : ۰۰۰۰ [a,b]={x|a≤x≤b}

نیم و از اینتروال :۰۰۰۰۰ (a,b]={x|a<x≤b}

نیم واز اینتروال :۰۰۰۰۰۰ [a,b)={x|a≤x<b}

واز اینتروال : ۰۰۰۰۰ (a,b)={x|a<x<b}

ښی بند ناپای اینتروال : (-oe,b]={x|x≤b}

کښ بند ناپای اینتروال : [a,oe)={x|x≥a}

ښی واز ناپای اینتروال :۰ (-oe,b)={x|x<b}

کیڼ واز ناپای اینتروال :۰ (a,oe)={x|x<b}

ناپای اینتروال : {x د ګڼکرښی ټکی دیٔ|x}=(oe، -oe)

بیلګه ۱۴ . ۱الف:

په بنستیزه ډیرۍ Rکی د لاندې برابرون پیژنددیرۍ غوښتنه منځ ته رااچوو.

x - 2 =1 + 7 - x

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : د دې ترم T1(x) = x - 2 پیژندډیری ده:
D1 = [2 , oe)
په همدې توګه د ترم T2(x)=1+7-x پیژندډیری ی ده: D2 =(-oe,7)
د برابرون دپیژندډیری لپاره لاس ته راوړو:
$$D = D_1 \cap D_2 = [2,\infty) \cap (-\infty, 7] = [2,7]$$

لاندې ځیره وګورې(متاسفانه، چې ښه ځېره نه شم کښلی)

۱۴ . ۱ ۲ .نابرابرون د یوې مجهولی سره

د شمیرقاعدې لومړی د هغونابرابرونونو لپاره په کار اچول کیږي چې یوه اوښتوني یا مجهوله ولري، او اوبیونې یی په ټولیزه توګه د اینتروالونو له لارې انځوریږي.
(۱۴ . ۱) قاعده د په خوښه ترمونو د زیاتون او کمون داسی اجازه راکوي، لکه په برابرونونو کی.

بیلګه ۱۴ . ۱:

لرو 5x-6<4+9x دواړو لورو ته 6 + 9x- ورزیاتوو، نو لرو 10 > 4x-
دواړه خواوې په 4 - ویشو.

د (۱۴ . ۳) له مخې لاس ته راځي x > -5/2
د اوبیونې ډیر یا اوبیډیری : L=(-5/2,oe)
که په یوه غوښتونکی ځل یا ویش کی ځله وونی، همداسي پرویشونی یو واریابل یا اووښتونی ترم وي، نو باید د (۱۴ . ۲) تر (۱۴ . ۴) سره سم ددې ترم د مخنخښي په واك والي کی د حالت توپیرونه(ښه يې : توپیره ونه) تر پام لاندې ونیول شي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوګونو اوبیډیریو پیداکولوپه هکله، په هر ډول چی وي، باید په پام کی ولرل شي، چی یواځي هغه د نابرابرون شمیرل شوي دx - ارزښتونه اوبیونې دي، چي ټول ـی سملاسي (په همدې وخت کی) هغه نیول شوی (فرض شوی) شرایط پوره کړي.

هر برخ اوبیډېری یا برخحلډیری کیدی شي چی د غوځډیری په څیر له همغه هرپورتني نماینده برخساحویا-ورشو(یا نوره هم ښه : -برخچاپیریالونو) واریابلی (اووښتونی) او د نابرابرون ډیری شمیرل شوو واریابلو یا اووښتونکو ارزښتونو جوړ شي. د غوځډیری جوړښت، کیدی شي چی د یوګونو ډیریو د ګرافیکی انځورونو په څیر په ګنوړانګه ساده شي. د نامساوتو ټولې اوبیډیری د برخ اوبیډیري یوه د یوګونو حالتونو ټولنډیری ده .

بیلګه ۱۴ . ۲:

$$(3x-5)(x-2)<4(x-2)$$

که په (x-2) باندې وویشل شي، نو باید د شرایطو په پام کی لرلو سره سم

د $x > 2$ لپاره $(x-2)>0$

د $x = 2$ لپاره $(x-2)=0$

د $x <2$ لپاره $(x-2)<0$

نابرابرن دې په درې برخه ساحو کی یو له بل بیل وڅیړل شي.

لومړی حالت:

$$x > 2 <=> x \in (2,\infty)$$

دلته د مخ ته پراته نامساوت لاندې ورته بڼه بدلون څخه لاس ته راځي

$$3x-5 \le 4 <=> 3x \le 9 \Leftrightarrow x \le 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty,3]$$

له دې x - ارزښتونو څخه یواځي هغه د مخه ورکړ شوي نابرابرون ، چي په لومړي حالت کی راوړل شوي اوبیونې دي ، یواځي هغه x د

$$x \in (2,\infty)$$

سره د اوبیو یا اوبیونو په څیر نیسو. له دې امله د لومړي حالت اوبیډیري لرو:

$$L_1 = (2,\infty)\bigcap(-\infty,3] = (2,3]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم حالت:

$$x = 2 \Leftrightarrow x \in \{2\}$$

د لته په (x -2) باندې ویشل کیدی نه شي.

د x = 2 ارزښت لیکلو رښتیا وینا $0 \geq 0$ لاس ته راځي او له دې امله

L2 = {2 }

دریم حالت:

$$x < 2 \Leftrightarrow x \in \{-\infty, 2\}$$

د 0 > 2 - x له امله د (۳ . ۱۴) له مخی پخپله د مخه ورکړ شوي نابرابرون لاندې ورته فورمونه ورکوي

$$3x - 5 \geq 4 \Leftrightarrow 3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$$

له دې x - ارزښتونو کوم یو نه شي کیدی چې په دریم حالت کی راوړل شي:

$$L_3 = (-\infty, 2) \cap [3, \infty) = \varnothing$$

د برخه اوبیډیریو ټولنی ځخه ټول اوبیډیر) لاس ته راځي:

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,3] \cup \{2\} \cup \varnothing = [2,3]$$

نو ټولې اوبیونې هغه x د ي د کومو لپاره چې لرو: 2< x < 3
په لاندې بیلګو کې نور دومره زیات توضیحات نه ورکول کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۳ :

(3x-1)/(2x+4)<2

د شرایطو 0=|2x+4له مخی، دا په دې مانا چی 2=| x د مات لاندې سره ځله ونې له امله

د x>-2 لپاره (2x+4)>0

د x<-2 لپاره (2x+4)<2

سره سم یواځې دوه حالتونه توپیروو:

لومړی حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2, \infty)$$
$$3x - 1 < 4x + 8 \Leftrightarrow x > -9 \Leftrightarrow x \in (-9, \infty)$$
$$L_1 = (-2, \infty) \cap (-9, \infty) = (-2, \infty)$$

ځیره ۱۴ ۱ الف: دا ځېره لاندې کښل شوی، په هغې کې چې بیا دا اوبیډیری روښانه شو۰

دوم حالت:

$$x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$3x - 1 > 4x + 8 \Leftrightarrow x < -9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$L_2 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -9) = (-\infty, -9)$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -9)$$

پورته اخر د نابرابرون یا نامساوات حل یا اوبی دئ۰

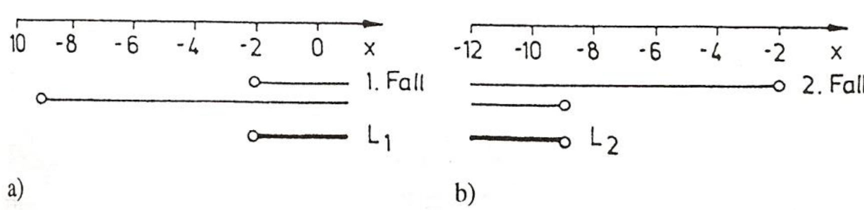


Bild 14 1

ځیره ۱۴ ا ب : دلته هم ګڼونوکربښې شته، چۀ په هغې کې دا اوبیډیرئ روښانه کاړل شوي دي۰ ، که ځیره مې ونه کاړله، نو داکار بچ ګران لوستونکی هم وکولای شي۰

د مخنخښی راوړلو په بنسټ د نابرابرن یوه ځانګړي بڼه یا فورم، چی په (۵.۱۴) تر (۱۴ . ۸) اړیکو کی استعمال شوي، اوبیونه ګټوره وښایي.

نابرابرونونه

دلته هم څو بیلګې راوړل کیږي، چې نابرابرونونه په کې اوبی شوي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برخه د نړیوالجال څخه راکښنته شوي، له دې امله یې لیکښه د مخکنۍ لیکښې سره توپير لري۰ دا لاندې لرو .

$$ax + b \;;\; > 0, \qquad a \neq 0$$

$$< 0 \;;\; x^2 - 5$$

$$\leq x + 10 \;;\; |2x - 5|$$

دلته اوبیونې اینتروالونه دي۰ ښول کیږي، چې اوبیډیرۍ څنګه پیداکیږي او د دې لپاره

اړیین شرایط کوم دي۰

- په دواړو لورو همغه ګڼ زیاتیدلی یا کمیدلی شي
- که دواړه خواي د کمیز ګڼ سره ځل شي یا په کمیز ګڼ وویشل شي، نو مخنخښه تغیر خوري۰ که زیاتیز وي، نو دواړه خوا په توان کیدی شي او ریښنج یې وستل کیدی شي، پام دې وي، چې برابرون بیا زیاتیزه او که کمیزه مخ نخښه غوره کوي او یا دواړه
- موږ (1.9:1 اوبی کوو

د $a > 0$ سره لورو

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

د لاندې حلست یا اوبیډیرۍ

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\} = (-\frac{b}{a}, \infty).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a < 0$ سره لرو

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

د لاندې اوبيډيرئ سره

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\} = (-\infty, -\frac{b}{a}).$$

موږ (1.9:2 اوبی کوو :

$$x^2 - 5 < 0 \Longleftrightarrow x^2 < 5 \Longleftrightarrow |x| < \sqrt{5}$$

په اخرنې پل کې دې دې ته پام وي $\sqrt{x^2} = |x|.)$ د روابـه تشیرح لپاره یا شننې لپاره
یو د حالت توپیر رامنځ ته کوو :

په حالته $x \geq 0$ کې $|x| = x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ په ساده ډول $x < \sqrt{5}.$ مانا لري

په حالت ist $x < 0$ کې $|x| = -x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ د , $-x < \sqrt{5}$ په مانا یا
ورته $x > -\sqrt{5}.$ نو لرو

$$|x| < \sqrt{5} \Longleftrightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

او اوبيډيرئ

$$\mathcal{L} = (-\sqrt{5}, 0) \cup [0, \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ <u>1.9:3</u> اوبی کوو د یوه حالت تو[پر سره

$$2x - 5 \le x + 10 \quad x \le 15, \quad \Longleftrightarrow$$

$$2x - 5 \ge 0 \quad x \ge \frac{5}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x \ge 5 \quad \Longleftrightarrow$$

(i) که وي $2x - 5 \ge 0;$ نو دی $|2x - 5| = 2x - 5,$ او موږ لرو

له دې لاس ته راځي

$$\frac{5}{2} \le x \le 15.$$

$2x - 5 < 0.$ (ii)نو دی $|2x - 5| = -(2x - 5)$ او لرو

$$-2x + 5 \le x + 10 \quad \Longleftrightarrow \quad -3x \le 5 \quad \Longleftrightarrow x \quad \ge -\frac{5}{3},$$

$$2x - 5 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x < 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x < \frac{5}{2}.$$

له دې لاس ته راځي:

$$-\frac{5}{3} \le x < \frac{5}{2}.$$

د نابرابرون اوبیونډیری له دې امله ده

$$\mathcal{L} = [-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}) \cup [\frac{5}{2}, 15] = (-\frac{5}{3}, 15].$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې یو څو تمرینونه ورکړ شوي، کۀ ګران مینه وال یې غواړې تمرین کړي۰

لاندې نابرارونونه اوبی کړئ

(i) $\frac{3}{x+5} < 2$,

(ii) $\sqrt{x^2+x+2} > x$,

(iii) $|x+5| > |x-2|$.

بیلګه ۱۴ . ۴:

$1/(3-x)>2/(x+6)$, $x|=-6$; $x |= 3$

د اصلي ماتلاندې $(3-x)(x+6)$ سره د حُل له امله باید بیا هم د هغه مخنخښه په پام کی ونیول شي. شرایط، د کوموله مخی چی مات لاندې مثبت د ی، کیدی شي د (۱۴ . ۵) له لارې ومیندل شي:

$(3-x)(x+6)>0 \Leftrightarrow (3-x)>0 \wedge x+6> \vee (3-x)<0 \wedge x+6<0$

$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x>-6) \vee (x>3 \wedge x<-6) \Leftrightarrow -6<x<3$

نو (۱۴ . ۶) شووني کوي یا ممکنه وي، چی هغه ورشو(ساحه یا ډیری یا نه هم شهچاپیریال) پیدا کړو چیرته چی اصلي مات لاندې کمیز یا نفي دئ:

$(3-x)(x+6)<0 \Leftrightarrow (3-x)>0 \wedge x+6><0 \vee (3-x)<0 \wedge x+6>0$

$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x<-6) \vee (x>3 \wedge x>-6) \Leftrightarrow x < -6 \vee x>3$

له دې امله د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) په پام کي لرلو سره شمیرنه لاس ته راځي:

لمړی حالت :

$-6 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-6 , 3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتیز ځله ووني یا مثبت فاکتور $(3-x)(x+6)$ سره ځلولو له امله د اړیکو نخښه ساتلی پاتیږي:

$$x+6 \geq 6-2x \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0,\infty),$$

$$L_2 = (-6,3) \cap [0,\infty) = [0,3)....(mape(zirah)14.2a)$$

دوم حالت : $x < -6 \vee x > 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty,-6) \cup (3,\infty)$

دا چې د لته اصلي مات لاندې منفی دی، نو ځل د اړیکو نخښه باندې راګرځیدونی یا په څټ (چپه یا برعکس(تاسیر لري:

$$x+6 \leq 6-2x \Leftrightarrow x \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)$$

$$L_2 = [(-\infty,-6) \cup (3,\infty)] \cap (-\infty,0) = (-\infty,-6)....(mape(zirah)14.2b)$$

اوبیډیری $: L = L_1 \cup L_2 = [0,3) \cup (-\infty,-6) = (-\infty,-6) \cup [0,3)$

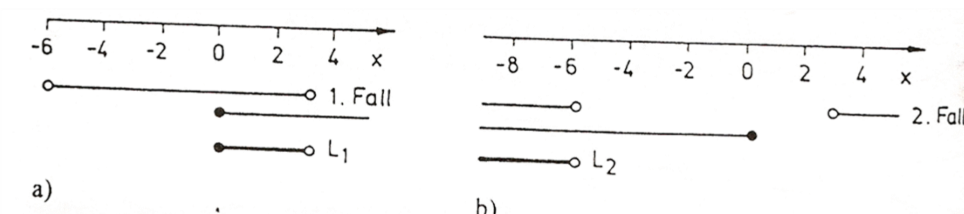


Bild 14.2 ځیره

د څلوری برابرون یا مربع نامساوات حل لپاره کیدی شي د څلوری ترم ځل انځورونی څخه کار واخستل شي.

بیلګه ۱۴ . ۵ : $-x^2+9x<0$

لومړی د (۱۴ . ۳) په پام کې نیولو سره دx^2 د مخ (کیڼ لور) کمیز- یا منفي ځلو,وونوباندې ویشل کیږي:

$$x^2 - (9/2)x + 2 > 0$$

ددې لپاره چې دا نامساوات د ځل په ځیر ولیکلی شو، د مربع مساواتو حل شمیرو، کومه چې د اړیکنخښې په ځای د مساواتنخښی ځای په ځای کولووروسته منځ ته راځي.

$$x^2-(9/2)x+2=0 \Rightarrow x_1=4 , x_2=1/2$$

$$x^2-\frac{9}{2}x+2>0 \Leftrightarrow (x-4)(x-\frac{1}{2})>0 \Leftrightarrow (x>4 \wedge x>\frac{1}{2}) \vee (x<4 \wedge x<\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow x>4 \vee x<\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د (۱۴ . ۵) په کارولو د نابرابرون حل لاس ته راځي:

حلډېری : $L=(-\infty;\frac{1}{2})\cup(4;\infty)=R\setminus\{\frac{1}{2};4\}$

په دې برسیره دې په یاد وي چی داډول نامساوات د مشهور مربع فنکشن د کرږي کښنلو له مخی هم حل کیدی شي، په ځانګړي ډول هلته، چی اړوند مربع شکل رییل حل نه لري۰ بالاخره پهپای کې د وېش د مخنښي راوړلو یوه بیلګه ښایو.

بیلګه ۱۴ . ۶ : $\frac{x+5}{3x-2} \le 0,\ x \ne \frac{2}{3}$.

حل (۱۴,۸) ته ورته دی

$$\frac{x+5}{3x-2} \le 0 \Leftrightarrow (x \ge -5 \ \wedge \ x < \frac{2}{3}) \ \vee \ (x \le -5 \ \wedge \ x > \frac{2}{3}) \Leftrightarrow -5 \le x < \frac{2}{3}.$$

د سیستم حل ډېری یا حل سټ: $L=[-5, \frac{2}{3})$.

۱۴ . ۱ . ۳ د نابرابرونسیستم د یوې ناپیژندونکی یا مجهولی یا اوښتونې سره

د یوه نابرابرون سیستم اوبیډیری L د یوګونو نابرابرونونو اوبیډیریو غوڅډیری ده . ګټور یا موخه وربه وي (دا هدفمند دی)، که نابرابرون لکه په یوه برابرونسیستم کی په نمره کړی شي ، ددې لپاره چی دا یوګوني (دا په دې مانا چی یو یو) اوبی کړی شو.

بیلګه ۱۴ . ۷

$$5-2x \ge 3-x$$
$$x^2-5x-6<0$$
$$I.5-2x \ge 3-x \Leftrightarrow x \le 2 \Rightarrow L_I=(-\infty,2]$$
$$II.x^2-5x<0 \Leftrightarrow (+1)(x-6)<0 \Leftrightarrow -1<x<6 \Rightarrow L_{II}=(-1,6)$$
$$\Rightarrow L=L_I \cap L_{II}=(-\infty,2]\cap(-1,6)=(-1,2]$$

د سیستم اوبیډیری: Lدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۱۴ . ۸

$$-2<\frac{4x-10}{x-1}<3, x\neq 1$$

د داسی نابرابرون ځنځیرونه یا یو بل سره تړنه د دواړو نابرابرونونو د سیستم سره په یوه مانا دئ:

$$I.-2<\frac{4x-10}{x-1}$$

$$II.\frac{4x-10}{x-1}<3$$

د همغه فاکتور(x-1) سره د ځل اړیین یا ضروری حالت توپیریدنه کیدی شي د دواړو نابرابرونونو لپاره غبرگ د لیدوړ بنی سره وڅیړل شي (مخ په وړاندې یووړ شي) :
(یادونه: په لاندې کې دې Fall(1) لومړې حالت او Fall(2) دویم حالت وي)

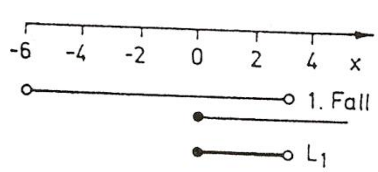
....I...II

	I	II
$1.Fall^{(1)}$ $x\in(1,\infty)$	$-2x+2<4x-10$ $\Leftrightarrow x>2\Leftrightarrow x\in(2,\infty).$ $L_{I_1}=(1,\infty)\cap(2,\infty)=(2,\infty)$	$4x-10<3x-3$ $\Leftrightarrow x<7\Leftrightarrow x\in(-\infty,7).$ $L_{II_1}=(1,\infty)\cap(-\infty,7)=(1,7)$
$2.Fall^{(2)}$ $x\in(-\infty,1)$	$-2x+2>4x-10$ $\Leftrightarrow x<2\Leftrightarrow x\in(-\infty,2).$ $L_{I_2}=(-\infty,1)\cap(-\infty,2)=(-\infty,1)$	$4x-10>3x-3$ $\Leftrightarrow x>7\Leftrightarrow x\in(7,\infty).$ $L_{II_2}=(-\infty,1)\cap(7,\infty)=\varnothing$
	$L_I=L_{I_1}\cup L_{I_2}=(-\infty,1)\cup(2,\infty)$	$L_{II}=L_{II_1}\cup L_{II_2}=(1,7)$

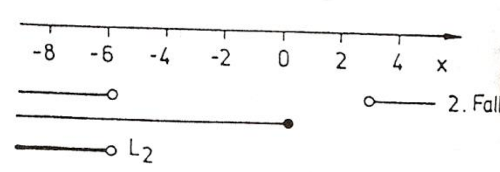
د LI او LII غوڅېدیرئ جوړول بیرته کیدی شي چي د یوگونو اوبیدیریوگنوړانگه باندې د لیدنی شي)(څیره ۱۴ . ۳

د سیستم اوبیدیری:

$$L=L_I\cap L_{II}=(2,7)$$



a)



b)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۴ . ۱ . ۴ نابرابرون د دوه اووښتونو یا مجهولو(ناپیژندونکو) سره

د دوه نابرابرون - یا نابرابرونسیستمونو اوبیډیرئ د یوه اوبیډیرئ $R^2 = R\times R$ برخډیرئ ده، چی د هوارۍ په څیر د لیدنی کیدی شي. له دې امله ګرافیکي ښوونه د ټکو ډیري په ځیر په یوه کواوردینات سیستم کی مساعد دئ. په دې برخه کی به موږ یواځي د لاندې ډول لاینیزنابرابرون::

$$ax + by + c > 0 \; (\geq 0 \;, <0, \leq 0 \;) \qquad (14.9)$$

واریابلو یا اوښتونو x , y او ثابتو ځله وونو(ضریبونو)

$a,b,c \in R$

سره د شرایطو $a|=0 \vee b |=0$ سره سم تر څیړنی لاندې ونیسو.

که ددې اړیکو نخښه د برابرون سره بدله کړو نو د یوې کرښي برابرون $ax+by+c=0$ لاس ته راځي، کومه چی د پروتولاړ - یا کواوردینات سیستم په دوه نیمو هوارویا ستحو ویشي. د نابرابرونسیستم (۱۴ . ۹) ، چی ټیك په یوه له دې دوه هوارو کی باور لري، په راتلونکي بیلګه ۱۴ . ۹ کی ښوول کیږي. د اوبیډیرئ په هواره کی د کرښونو یا کرښو کرښو کولو(د ډیرو کرښو کښلو) له لارې په نخښه کیدی شي. که په نابرابرون کي برابرون نه وي پریښوول شوي یعني برابرون په کی نه وي ځاي شوي، نو راتلونکی کرښه د اوبیډیرئ پورې اړه نه لري او کیدی شي یواځي ټوټه ټوټه کرښی (پرې لاین یا غوڅکرښو) په څیر په نخښه شي، لکه څنګه چی د ډیرئ ګرافیکي ښوونه ورځنی یا بلده یا معمول ده. که برابرون ورپورې اړه ولري، نو کرښه د اوبیډیرئ پورې اړه لرونکی برخی په څیر په نخښه کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۹ :

$$2x+5y-10>0$$

که نابرابرون د y په لور اوبی شي، نو دې ته ورته نابرابرون $y>-(2/5).x+2$ لاس ته راځي، کوم چی په یوه کره نیولي x په روښانه توګه د لویو y - ارزښتونو لپاره پوره دئ نسبت ورته برابرون ته . له دې امله دهوارې چی د کرښې $y=-(2/5).x+2$ څخه پورتنی نیمی هوارې ټول ټکی اوبیډیرئ L جوړوي ش که څیره ون کښل شوه، نو پل په پل داکار ګران د شمیرپوهنې مینه وال کولی شوي ۱۴ . ۴)

دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی تشریح تګلار په نابرابرون (۱۴ . ۹) کی د مخه نیسي چي $b|=0$ دئ. په ټولیزه توګه یا عمومي ډول دا متود د استعمال وړ دئ، چی د کواوردینات سیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه په خوښه ټاکلي ټکی ځای په ځاي کولو کی ، چی په کرښه ax+bx+c=0 نه وي پروت۰

ازمایو چي ایا دا نابرابرون په اړونده نیمه هواره کی باور لري او یا نه.که ممکن وي نو د شمیرنی د ساده والي له امله ځانګړی ټکی(0.0) ټاکو. دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی ددې ټکی بدلون وروسته نا ریښتیا وینا 10 - > 0 لاس ته راکوي او په دې ډول د اوبیډیری پیداشوی ځاي (ښه به پروتځاي وي خو د لنډونی له امله ځاي بسیا کوي) تصدیقوي.
دلته یوه ځیره کښل کیږي دلته د اوښتونو پرځاي ګڼونه ړدو او بیا کرښه باسو۰ په کواوردینات کي د هوارې هغه برخه، چې اوبیډیری ده کرښ کرښه کوو، دا په دې مانا، چې د کرښی هغه دکرښونو لور ته ابیډیری ده۰

د یوه نابرابرونسیستم چی دوه مجهولی ولري، نو هر نابرابرون ځانله ځانله اوبی کیږی او بالاخر ه بي د یوګونو اوبیډیریو غوځډیری نیول کیږي یا جوړیږي.

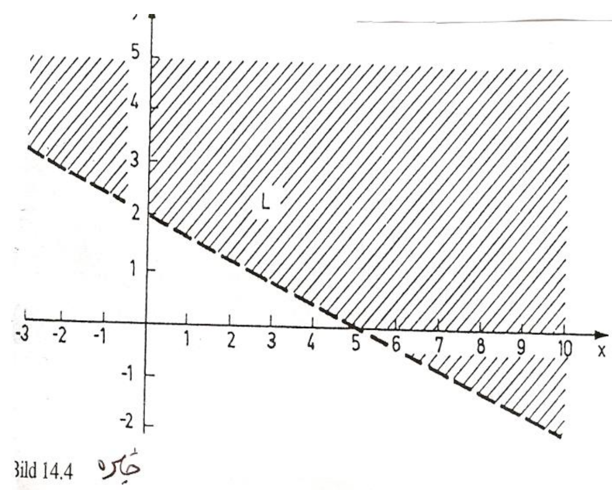


Bild 14.4 ځاېره

بیلګه ۱۴ . ۱۰:

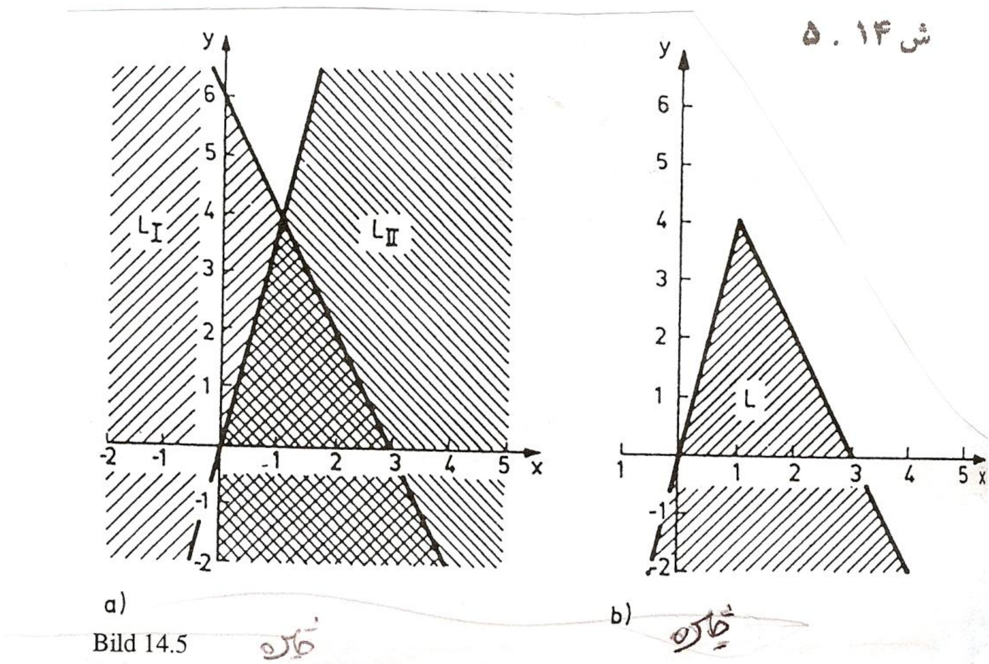
I . $2x+y<6$

II. $4x-y>0$

(0,0) نابرابرون I پوره کوي او له دې امله په اړونده اوبیډیري LI کی پروت دی. دا چی په نابرابرون II کی د (0 , 0) سیده برابرون باوري دي، نو دلته باید یو بل ټکی د بیلګي په توګه (1 , 0) کیښنول شي، کوم چی د په ځنوالي یا تضاد په لور ځي، او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې امله اوبيډيرئ LII کی نه دئ پروت. (؟؟؟ش ۱۴ . ۵ الف(. ش ۱۴ . ۵ ب دسيستم حلډيری L ښايي چې له دوه نيمکرښو بنديږي يا له دوه نيم کرښومحدوديږي.
د وړانديزارزښت لري چی د تمرينونو په خپلواك كار كولو کی د غوښتونكو اوبيډيريو L د يوگونو نيمهوارو غوځډيرى حتي تر غاړې پورې رنگينه يا کرښی کرښی راوکښل شي، چی په دې ډول يی يو کواورديناتسيستم د انځورولو لپاره بسيا وکړي .ش ۱۴ . ۵



بيلگه ۱۴ . ۱۱:

I . $x-3y-6<0$ II. $-x+y+1<0$

III. $x-6<0$

دا اوبيډيرئ په ش ۱۴ . ۶ کی انځور ۱۲ کرښي
د پورته نابرابرونسيستم له مخهٔ د هر نابرابرون لپاره کرښه کشل کيږي، په يوه کواوردينات سيستم کې او بيا د هوارې هغه برخه، چې درېواړه کرو کې رابنده منهواره وي، هغه يې اوبی دئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

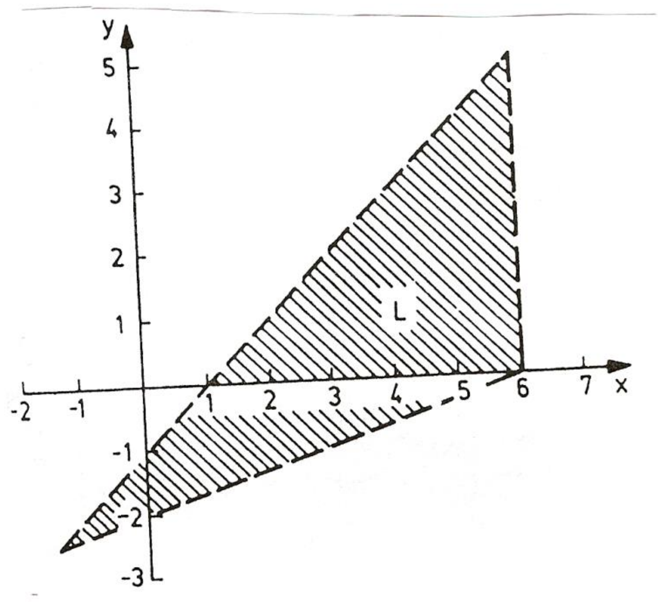


Bild 14.6 خاکه

۱۴ . ۲ برابرون او نابرابرون د مطلقه ارزښتونو سره

۱۴ . ۲ ۱ د مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

که په یوه براورن یا نابرابرون کی د ترمونو مطلقه ارزښتونه د مجهولی په څیر رییلي واریابلي یا اووښتونی وي، نو د مجهول په لور له ابیولو د مخه باید یو د مطلقه ارزښت خپلواك فورم پیداشي. داچي له برخی ۳ څخه ځرګنده ده چی د یوه رییل ګڼ مطلقه ارښت د

مخنخښی په واك په توپیري ډول جوړیږي نو د یوه ترم لیکل بي له مطلقه ارزښت، په پرینځیپ کی دوه حالتونه توپیریږي٠
داسی دئ:

T(x) = T(x) لپاره T(x) ≥ 0 د (14,10)
T(x) = -T(x) لپاره T(x) <0 د (14,10)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که مطلقه ارزښت د صفر لوي یا په صفر برابر وي، نو کیدی شي چی د مطلقه ارزښت لرې پریښول شي، یا د نورو ترمونو سره په تړلو په نوکانو بدل شي. که مطلقه ارزښت متن منفي وي یعني د مطلقه ارزښت دننه، نو د مطلقه ارزښت نخښو په ځاي نوکان لیکل کیږي او دا نوکان بیا په (۱ -) ځلیږي. هغه ټکي چي په (۱۴ ، ۱۰) کی ورکړ شوي شرایط پوره کوي، نو پریښول کیږي چی ځانونه په قاعده کي په اینتروال وښایي، کوم چی دیسیونکت(پردي) برخه ډیری د اوښتونوچاپیریالونه دي، د کوم لپاره چی (T(x ښوول شوی دی. د دواړو برخه چاپیریالونو تولنډیري، باید بیرته د ټول هغه واریابلچاپیریال ورکړي، کوم چی د کنترول لپاره باید و ازمایل شي. په دې ځاي کی دې د ځله وونی او ویش مطلقه ارزښتونو لپاره قواعد ورکړ شي، چی د بدلون لپاره د ارزښت وړ دي.

که a اوb رییل ګڼونه وي ، نو لاندې باور لري کیږي۰

$|a . b| = |a| . |b|$

$|a : b| = |a| : |b|$ د $b \neq 0$ لپاره

۱۴ . ۲ . ۲ برابرون د مطلقه ارزښت سره

د یوه مطلقه ارزښت مساوات حل لکه چی د حالت توپیرولوکی توضیح شوی ، باید په هر حالت کی وازمایل شي چی ایا دا اوبیونې په نیول شوي یا فرض شوي اینتروال کي پراته دی او که یوائې د اوبې په څیر ښکاریدونکي رامنځ ته کیږي . یوګوني اوبیونې اوبیډیري L کی رایوځاي کیږي. د مقایسي یا انډول یا پرتلی لپاره د برابرونونو هغه کرافیکي اوبیونې شونی یا ممکن دی، په کوم کی چی هره لور یا اړخ د یو فنکشن تنظیم عملیي راوړل کیږي یا رانیول کیږي او په x , y - پروت ولاړ – یا کواوردینات سیستم
کی انځوریږي .
د دواړو فنکشنونو غوځټکي x - کواوردیناتونه په همدې وخت کی د برابرونونو اوبیونې دي.

بیلګه ۱۴ . ۱۲:

$$|x+1|=(x/2)+2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري:

$(x+1) \geq 0$ د $x > -1$ لپاره

$(x+1) < 0$ د $x < -1$ لپاره

(14,11) د $x \geq -1$ لپاره $|x+1| = x+1$

(14,11) د $x < -1$ لپاره $|x+1| = -x-1$

لومړی حالت

$$x \in [-1, \infty)$$

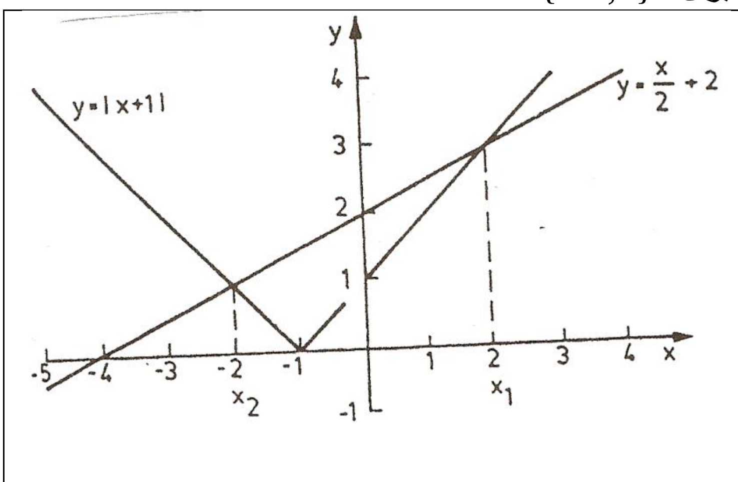
$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow x+1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1, \infty] \Rightarrow x_1 = 2$$

دوم حالت:

$$x \in [-1, \infty)$$

$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow -x-1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = -2 \in [-\infty, -1] \Rightarrow x_2 = -2$$

د برابرون یا مساوات اوبیدیری $L = \{-2, 2\}$



په داسی حال کی چی د ښی اړخ د ورکړشوي برابرون، $y = x/2 + 2$, ګرافیکی انځورونه، په څرګند ډول یوه کرښه ده، کيڼ اړخ، $y = |x+1|$ د (۱۴ . ۱۱) سره د دوه نیموکرښو په څیر منځ ته راځي.
اوبی : کیدی شي په ځ. ۱۴ . ۷ کی ولوستل شي

که یو برانرون د لاینیزو ترمونو زیات مطلقه ارزښتونه ولري، نو شووني یا مساعد ده چی لومړی د هغه ګنوړانګه په هغه ځاي کی وویشل شي، چیرته چی د ترمونو مخنخښنه د مطلقه ارزښت په دننه کی تغیر خوري او د هر یوه مطلقه ارزښت څرګندونه په داسی لاس ته راغلو برخه اینټروالونو کی د لیدلو وړ یوځاي راټول کړي.

بیلګه ۱۴ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

|1- x|-|2x+3|=1

د (۱۴ . ۱۰) پسی لرو:

د x<1 لپاره |1-x|=1-x

د x>1 لپاره =-1+x

او(لاندې او پورته هم لومړی له کیڼ وښی لو رته لوستل کیږي

د x>-3/2 لپاره |2x+3|=2x+3

د x<-3/2 لپاره =-1x-3

یوځاي راټول یا د ګډ فرمولولو لاندې تر پام یا تر تظر

	x<-3/2	-3/2<x <1	x>1
|-1+x|	1-x	1-x	−1+x
|2x+3|	2x+3	-2x-3	|2x+3|

له دې امله د برابرون اوبې کی درې حالتونه توپیروو. برسره پر دې باید کمیزه – یا منفي نخښه د دویم مطلقه ارزښت د مخه په پام کی ونیول شي:

لمړی حالت:

$$x \in (-\infty, -3/2)$$

$$1 - x - (-2x - 3) = 1 \Leftrightarrow x + 4 = 1 \Leftrightarrow x = -3 \in (-\infty. -3/2) \Rightarrow x_1 = -3$$

دم حالت:

$$x \in [-3/2, 1]$$

$$1 - x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -3x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \in (-\infty. -3/2) \Rightarrow x_2 = -1$$

دریم حالت:

$$x \in (1, \infty)$$

$$-1 + x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = -5 \notin (1, \infty)$$

په وروستی حالت کی شمیرل شوی ارزښت د نیونی سره په ځټ یا تضادکی دی، چی

x3 = -5

یواځي ښکارندډوله اوبی دی(دا په دې مانا چی یواځی د اوبي په څیر یا - غوندې ښکاریږي) .

اوبډیری : L = {-3,-1}

د ښکارندډوله اوبي منځ ته راتګ کیدی شي، چی د ګراف اوبي – یا حللارې له لارې

څرګند

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي. د کينږ اړخ يا لور مطلقه ارزښت خپلواك يا ازاد ښودل کيدی شی چی ټوټه ټوټه د مخه تيرشوي شميرنو په ښوګونوحالتونو کی لاس ته راځی. له دې امله تعقيبيږي:

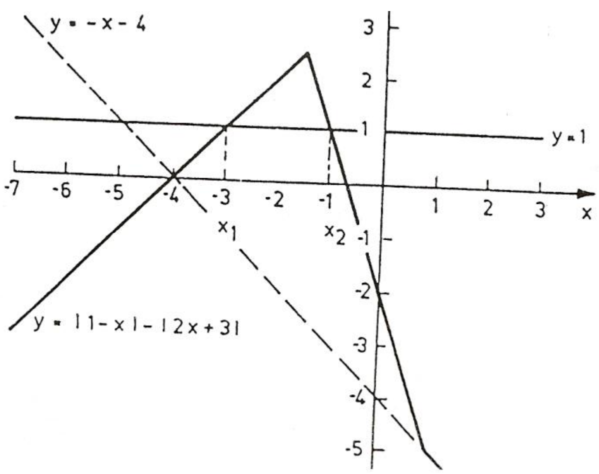
د $x > -3/2$ لپاره $=x+4$

د $-2/3< x < 1$ لپاره $|1- x|-|2x+3|=-3x-2$

د $x > 1$ لپاره $=-x-4$

ښی لور همغه - يا ثابت فنکشن $y = 1$ دی . د مخه شميرل شوو اوبيونو پرتلې له پرتلې مقايسي ځيره شته، خو زما په ستونځو ګرانلوستونکی اوس بلد دي ۱۴ . ۸ ښايي، چی دواړه کرښې ريښتيا د $x < -3/2$ او $-3/2< x < 1$-لپاره رښتيا هره يوه بله يوځل پرې کوي، مګر د $x > 1$ لپاره يو بل نه پريکوي. په دريم حالت کی د اړوند کرښی ټوټی $y = -x-4$ د اوږدوالی پرټکی راکوي، د کرښي $y = 1$ د حل په ځير حل د نيول شوي اينتراوال د باندې دی ځيره (شايد داځيره هم ځيره نه شي، کۀ کرانو مينه والو داکار پخپله وکړ ، نو نور به هم ګټور به وي)ش . ۱۴ . ۸

دلته هغه ځيره بايد ريښی او يا راغلی وي، يا راغلې وی۰



که د مطلقه ازښت نخښی په يوه ځلوري - يا مربع ترم کی له منځه وړل کيږي، نو کيدی شي چی د مخنخښي غوښتل شوي ځيرنی چي په برخه .۱۴. ۱ . ۲. کی تر ځيرني نيول شوې د مربع نامساوات د حل متود ګټه ترې واخستل شي.) بيلګه ۱۴ . ۵ دې مقايسه شي)

بيلګه ۱۴ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|x^2 -6x + 5 | = 3$

د $x^2-6x+5>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)>0 \Leftrightarrow x<1 \vee x>5$

او $x^2-6x+5<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)<0 \Leftrightarrow 1<x<5$

سره لاس ته راځي

(14,12) د $x<1 \vee x>5$ لپاره $|x^2-6x+5|=x^2-6x+5$

(14,12) د $1<x < 5$ لپاره $|x^2-6x+5|=-x^2+6x-5$

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-1] \cup [5,\infty)$

$x^2-6x+5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+2 = 0,$

$L \Rightarrow x_1=3+\sqrt{7}=5,65 \in [5, \infty)$, $x_2= 3 - \sqrt{7} = 0,35 \in (-oe , 1]$

دوم حالت $x \in (1,5)$:

$-x^2+6x-5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0,$

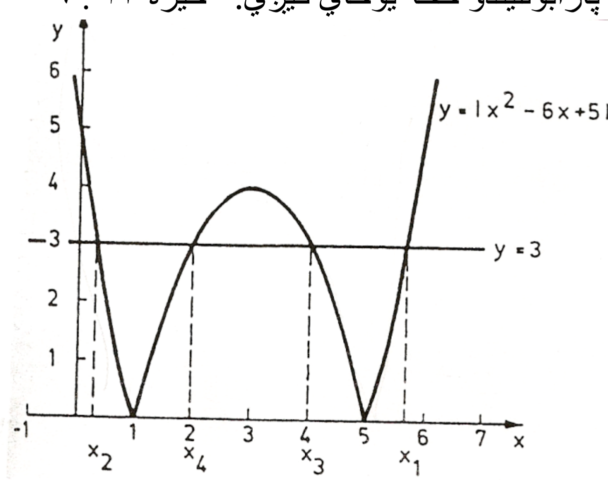
$L \Rightarrow x_3=4 \in (1 , 5)$, $x_4= 2 \in (1 , 5)$

پام : که چیرې حل یا اوبی مو نه وو لیکلی او L مو لیکلی وو ، نو دا د اوبی په مانا دی المانی Lösung ورته وایي چی لند په L لیکل کیږي .

اوبیدیری: $L = \{3 - \sqrt{7}); 2;4;3;3+\sqrt{7}\}$

ځیره ۱۴ . ۹ د ګراف له لاری اوبی بنایي. کېن لور $y=|x^2-6x+5|$

د (۱۴ . ۱۲) له امله د پارابوللیندو څخه یوځاي کیږي. ځیره ۱۴ . ۹



ځیره ۱۴. ۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولیزه توګه د یوه برابرون اوبي کی ، په کوم کی چی n مختلف ارزښتوییني یا - افادې یعني $|T_i(x)|$, i = 1,2,...n منځ ته راځي، 2^n حالتونه یو له بل توپیر کیږي. دا د هغه کیدونکو کیدنو یا ممکن امکاناتو ګڼون یا تعداد دئ ، کوم چی موجود دی ، چی د ترم $T_i(x)$ د تیپ یا بڼی وي چی یا

$T_i(x)>0$ او یا $T_i(x)<0$ راکوي، یعنی د دوه توکو د واریيشن امکاناتو ټولګي ته (پرتله ۱۰ . ۴ . ۲ برخه) د ارزښت نخښی د له منځه وړلو له امله د (۱۴ ، ۱۰) قاعدې سره سم 2^n برابرونونه منځ ته راځي، چي په ټولیزه یا عمومي توګه دې اوبیونې $x_1,x_2,x_3,......$ ولرودئ شي. یوازی دا باید وازمایل شي ، چی ایا دا اوبي xi پیلبرابرون پوره کوي که نه.

د دې ټولیزې تګلار پسی موږ په بیلګي ۱۴ . ۱۳ کی د

T1(x)=1-x, T2=(2x+1)

سره، په لاندې $2^2 = 4$ حالتونو باندې کار کوو:

$$1.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) \geq 0: \quad (1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_1=-1.$$

$$2.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) < 0: \quad (1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_2=-3.$$

$$3.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) \geq 0: -(1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_3=-5.$$

$$4.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) < 0: -(1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_4=-\frac{1}{3}.$$

پیلبرابرون د3- = x1=1, x2لپاره پوره دي مګر د x3 اوx4لپاره پوره نه دي.

۱۴ . ۲ . ۳ نابرابرون دمطلقه ارزښت سره

که په نابرابرونو کی مطلقه ارزښتونه منځ ته راشی، نو داسی دي لکه په برخه. ۱۴ .۲ ۲ کی د حالتونو توپیر سره ونیسی یعني د کارپیل په وکړي، کوم چی بي له مطلقه ارزښتنخښو د انځوروني لپاره ضرر یا غوښتونکي دي. د واریابلو یا اووښتونکو اړونده برخه چاپیریال په دننه بیا مختلف نابرابرون ۱۴ .۱ سره سم حل کوو، د کوم سره چي بیرته د حالت توپیر اړیین دئ

بیلګه ۱۴ . ۱۵ : |7-3x|>2

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی حالت:

$$7-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 7/3]$$
$$7-3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 5/3]$$
$$L_1 = (-\infty, 7/3] \cap (-\infty, 5/3) = (-\infty, 5/3]$$

دویم حالت:

$$7-3x < 0 \Leftrightarrow x \in (7/3, \infty)$$
$$-7+3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [, \infty)$$
$$L_2 = (7/3, \infty) \cap [3, \infty) = [3, \infty)$$
$$\Rightarrow$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 5/3] \cup [3, \infty) = R \setminus (5/3, 3)$$

په پورته کې دې د غشي څوکه له پامه کې نه راړل کیږي:

بیلګه ۱۴ . ۱۶: |x-5|<|x+1|

د یوګونو ترمونو انځورونه بي له ارزښتنخښی:

د x > 5 لپاره |x-5|= x–5

د x < 5 لپاره |x-5|=-x+5

او

د x ≥ 1 لپاره |x+1|=x+1

د x ≤ -1 لپاره |x + 1| = -x - 1

په یوه لید وړ توګه په لاندې توګه راټولیګي رایوځاي کیږي یا راغونډیږي :

	X > -1	-1≤ x<5	x≥ 5
|x-5| =	-x+5	-x+5	x-5
|x+1|=	-x-1	x+1	x+1

لومړی حالت: $x \in (-\infty, -1)$

|x-5|<|x+1|<=>-x+5<-x-1 <=> 0<-6

د هر x<-1 نابرابرون یوې ناریښتیا وینا ته لارښودوي، چی په دې حالت کی کوم اوبه وي ، دا په دې مانا چي: L1 = Ø

دوم حلات $x \in [-1, 5)$:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|x-5|<|x+1| <=> -x+5<-x-1 <=> x>2 <=>$

$x \in [2,\infty]$

$L_2 = [-1,5) \cap (2,5) = (2,5)$

دريم حالت: $x \in [5,\infty)$

$|x-5| < |x + 1| <=> x - 5 < x + 1 <=> 0<6$

هر $x \geq 5$ نابرابرون پوره کوي، دا په دې مانا چې: $L3 = [5 , oe)$

حلډيرى: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,5) \cup ([5,\infty) = (2,\infty)$

بيلګه ۱۴ . ۱۷: $|x^2-4x-21|<24$

د $x^2-4x-21 \geq 0 <=> x<-3 \text{ v } x \geq 7$

او $x^2-4x-21<0 <=> -3<x<7$

څخه لاس ته راځي:

د $x<-3 \text{ v } x \geq 7$ لپاره $|x^2-4x-21|=x^2-4x-21$

د $-3<x<7$ لپاره $= -x^2+4x+21$

لومړى حالت: $x \in (-\infty,-3] \cup [7,\infty)$

$|x^2-4x-21|<24 <=> x^2-4x-21<24 <=> x^2-4x-45<0$

$<=> -5 < x < 9 <=>$

$x \in (-5,9)$

$L_1 = [(-\infty,-3] \cup [7,\infty)] \cap (-5,9) = (-5,-3] \cup [7,9)$

دويم حالت: $x \in (-3,7)$

$|x^2-4x-21|<24 <=> -x^2+4x+21<24 <=> x^2-4x+3>0$

$<=> x < 1 \text{ v } x > 3 <=>$

$x \in (-\infty,1) \cup (3,\infty),$

$L_2 = (-3,7) \cap [(-\infty,1)] \cup (3,\infty) = (-3,1) \cup (3,7)$

اوبيډيرى:

$L = L_1 \cup L_2 = (-5,1) \cup (3,9)$

دا بيلګې د دې درس لپاره بسيا کوي، دا بيا دلته هم تکرار ليکم، که په کومه موضوع کې ګرانو لوستونکو څه زيات غوښتل هغه هم په پام کې نيول کيږي او کړى شو، چې په ګډه هره موضوع وغزوو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې به په یوه بیلګه کې داسې نامساوات وڅیړو، په کومه کې چې مجهوله په مطلقه ارزښت افاده شوي وي او هم مات لاندې کې منځ ته راشي.

بیلګه ۱۴ . ۱۸: $|1+2x| / (1-x) < 1 , x \neq 1$

د (۱۴ ، ۱۰) له مخې د مطلقه ارزښت له منځه وړلاو د مات لاندې سره د نابرابرون ځله ونه د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) له مخې په هر وخت کې د همغه ترم مخنخښه باید په پام کې ونیول شي. باور لري یا صدق کوي:

د $x \geq -1/2$ لپاره $|1+2x| = 1+2x$

د$x<-1/2$ لپاره $|1+2x|=-1-2x$

او

د $x< 1$ لپاره $(1-x)>0$

د $x > 1$ لپاره $(1-x) < 0$

دلته هم په همغه دوه تیریدونکو ځایونو کې ګنوړانګه سره بیله یا توټه کیږي، داسې چې په راتلونکو ګڼلو کې یا ځانیزه توګه درې حالتونه یو له بل توپیریږي.

	$X<-1/2$	$-1\leq x<1$	$x>1$
$\|1+2x\|$	$-1-2x>$	$1+2x$	$1+2x$
$=1-x$	>0	>0	<0

لومړی حالت: $x \in (-oe, -1/2)$

$$-1-2x\leq 1-x \iff x\geq -2 \iff$$

$$x \in [-2 , oe)$$

$$L_1 = (-oe, -1/2) \cap [-2 , oe) = [-2 , -1/2)$$

دویم حالت $x \in [- 1/2,1)$:

$$1+2x < 1- x \iff x<o \iff x \in (-oe,0]$$

$$L_2 = [-1/2 ,1] \cap (-oe,0] = [-1/2, 0)$$

دریم حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x \in (1, oe)$

$1+2x \geq 1-x \iff x \geq 0 \iff x \in [0, oe)$

$L_3 = (1, oe) \cap [0, oe) = (1, oe)$

د حلونو سټ(اوبيډيرى):

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-2;0] \cup (1,oe)$

د دوه ناپيژندونکو سره د يوه نامساوات ارزښت حلډيري پيدا کولو لپاره هم بايد لمړى ارزښت له منځه ولاړ شي. مساوات (۱۴ . ۱۰) ته ورته د واريابلو يا اوښتونکو x او y سره، د يوه لايني ترم ارزښت سره، باور لري:

(14,13) د $ax+by+c \geq 0$ لپاره $= ax+by+c$

(۱۴ ، ۱۳) د $ax+by+c < 0$ لپاره $|ax+by+c| = -(ax+by+c$

د نيونو يا فرضيو سره $a \neq 0 \ v \ b \neq 0$

دواړه بني ليکل شوي شرطونه په برخه ۱۴ . ۱ . ۴ کی د کارول شوې بڼی(۱۴ . ۹) نابرابرون
هم کارول شوي . له دې امله بايد يو نامساوات د ارزښت افادي (۱۴ . ۹) سره، د کرښی $ax + by + c = 0$ له لارې ورکړ شوې، يو له بل بيلی يا جدا، د x,y-هوارې نيمه هوارې يو له بل بيلی اوبی کړی شي.

بيلګه ۱۴ . ۱۹:

$|x-y+1|>x-2x-4$

د (۱۴ . ۱۳) اړيکو باور لري :

د $-x-y+1 \geq 0$ لپاره $|-x-y+1| = -x-y+1$

د $x-y+1<0$ لپاره $= x + y - 1$

لومړی حالت: $-x -y +1 > 0$

$|-x-y+1|>x-2y-4 \iff -x-y+1>x-2y-4 \iff -2x+y+5>0$

$L1=\{(x,y)|-x-y+1 \geq 0, -2x+y+5>0\}$

دوم حالت: $x-y+1<0$

$|-x-y+1|>x-2y-4 \iff x+y-1>x-2y-4 \iff 3y+3>0 \iff y<-1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$L2=\{(x;y)|-x-y+1<0 ,y>-1\}$

له دې سره L1 او L2 د اوبیدیرۍ دوه نابرابرونونو غوڅدیرۍ ده او کیدی شي، لکه څنګه یو نابرابرون د یوه ګراف سره انځور شي (څیره دلته هم په پوښتنه کې ده ۱۴ . ۱۰ الف) اوبیدیرۍ بیرته د ورکړ شوو نابرابرونونو برخ اوبیدیریو ټولندیرۍ ده٠ (څیره ۱۴ . ۱۰ ب) دلته هم همغه د مخه پام لرنه)٠

که په یوه نابرابرون کی دوه ارزښت افادې یا – وییني د (۱۴ . ۱۳) بڼی رامنځ ته شي، نو د ارزښت ترپام نیولو سره څلور حالتونه یو له بل توپیر کیدی شي.

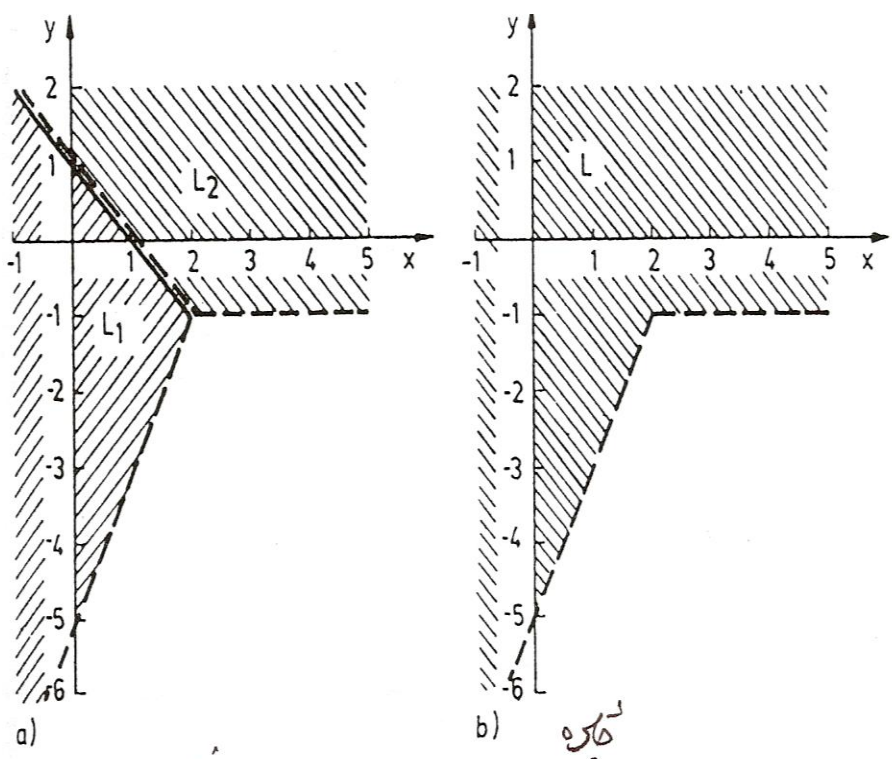


Bild 14.10

تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې نامساواتو حلډېرې پیدا کړئ

1. a) $8x-3<2x+9$ b) $5-7x\le 3x-10$

c) $\frac{x}{2}-\frac{2}{3}>\frac{1}{2}+\frac{x}{9}$ d) $3(3x-2)\ge 4(3-2x)$

e) $\frac{8x-5}{5}\le\frac{2x+5}{3}$ f) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}x>\frac{5}{4}x+\frac{1}{6}$

g) $\frac{8}{9}+6x\ge 2(\frac{5}{6}+3x)$ h) $\frac{1}{3}(\frac{x}{8}-6)<\frac{x}{6}-\frac{x}{8}+1$

2. a) $(3x+1)(2x-1)<(5x-3)(2x-1)$

b) $(8x-9)(3x+2)\ge(2+7x)(2+3x)$

c) $(7x-3)(5-7x)>(3-7x)(5x+3)$

d) $(5+2x)(7-5x)\le(10+4x)(2-3x)$

e) $x^2-x-6\le 2x+4$ f) $x^2+5x-6>3-3x$

g) $x^2+3x\ge -2x-6$ h) $x^2-4x+4<4x-8$

3. a) $\frac{3}{2x-4}\le 2$ b) $\frac{3x-4}{2-3x}\ge 4$

c) $\frac{2x-2}{2x+2}<2$ d) $\frac{5x+3}{x}<-2$

e) $\frac{4x+1}{3x-2}>5$ f) $\frac{9-3x}{x-3}>-3$

g) $\frac{4x+6}{2x+3}<3$ h) $\frac{3(4x-1)}{x-1}\ge 12-\frac{2(4x-5)}{x-1}$

4. a) $\frac{3}{4x-4}\le\frac{2}{x-6}$ b) $\frac{1}{5-3x}>\frac{1}{5x+4}$

c) $\frac{x+1}{x-3}<\frac{x-1}{x+2}$ d) $\frac{4x-3}{2x+1}\le\frac{2x+3}{x+2}$

e) $\frac{2x-1}{2x+1}+\frac{3x+1}{x-2}>4$ f) $\frac{x-3}{1-6x}-\frac{2x+1}{4x+3}\ge-\frac{2}{3}$

g) $\frac{2x+1}{2x-2}+\frac{2x-3}{3x-3}\ge 1$ h) $\frac{2-5x}{3-x}-\frac{2-6x}{1-3x}<\frac{3}{8}\cdot 27^{\log_3 2}$

5. a) $(2x-3)(3x-2)<0$ b) $(x+3)(7-x)\le 0$

c) $x^2+4x+3\ge 0$ d) $x^2-8x+7\le 0$

e) $x^2+4x+5<0$ f) $x^2-6x+10>0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

g) $x^2-2x+1>\frac{5}{2}x-1$ h) $2x^2-3x-3<3(x-1)$

6. a) $(x^2-6x+5)(x^2+1)<0$ b) $(x^2-4x+5)(x^2+1)\le 0$

c) $(x^2-2x+2)(x^2+4)>0$ d) $(9-x^2)(x^2+3x+2)\ge 0$

e) $(x^2+4x-5)(x^2-4)>0$ f) $2x^4-x^3+10x^2-5x>0$

g) $-x^3-3x^2+16x+48\le 0$ h) $\frac{x^3}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\,x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}<0$

7. a) $\frac{x+4}{x+3}>0$ b) $\frac{x+3}{x-7}<0$

c) $\frac{2x+3}{3x-4}\le 0$ d) $\frac{x-2}{5x+1}\ge 0$

e) $\frac{6+9x}{4+6x}<0$ f) $\frac{2x-1}{8x-4}>0$

g) $\frac{3x-12}{x^2-4x}\ge 0$ h) $\frac{x^2-25}{2x+10}\le 0$

8. a) $x-8+\frac{7}{x}<0$ b) $x+3-\frac{4}{x+3}>0$

c) $8(x-2)\ge\frac{20}{x+1}+3(x-7)$ d) $\frac{3x-24}{4}-(2x-6)>-\frac{5}{x}$

د لاندې نامساواتسیستمونو حل ډېرۍ وټاکئ

9. a) $2+x\ge 2x-7$, $5(x-3)\ge 2(x-3)$ b) $x+6<14-3x$, $6+7x\ge 3x+5$

c) $\frac{2}{3}-\frac{x}{2}>\frac{x}{3}+\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x<\frac{8-x}{3}$ d) $x+\frac{1}{3}\le 2x-\frac{7}{6}$, $5(x-\frac{3}{2})\le 2x-3$

10. a) $x^2-3x<0$, $2(x+2)<4x-1$ b) $x^2+6x+8<0$, $2(x+2)>x+3$

c) $x^2-9<0$, $x+2>2(x-1)$ d) $x^2-3x+3>0$, $4(x-1)<2(x+1)$

11. a) $x^2-4x-5\le 0$, $x^2+6x-16<0$ b) $x^2+2x-8<0$, $x^2-3x-4>0$

c) $x^2-5x>0$, $x^2-9>0$ d) $x^2-6x+5<0$, $x^2+8x+15<0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

12. a) $3x+2>2x+1>3(x-4)$ b) $-1<\frac{7x-3}{8x-5}<1$

c) $2<\frac{5x+1}{2x-1}<5$ d) $1<\frac{x^2+4x+5}{x+1}<4$

13. a) $3-x<2-4x$
$x+3<\frac{1}{2}(x+1)$
$\frac{x}{2}>x+\frac{1}{2}$

b) $x+5>\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}$
$4(x-1)<13-\frac{1}{4}x$
$2x-1>x+6$

د لاندې نامساواتو او همداسې د نامساواتسیستمونو حاوېرۍ په کارتیزې کواوردینات – یاپروتولاړ سیستم کې ګرافیکې انځور کړۍ.

14. a) $y\geq-\frac{3}{2}x+3$ b) $y<-\frac{2}{3}x+2$

c) $x<2y+2$ d) $x>-y+3$

e) $4x-5y>12$ f) $-3x-8y\leq24$

g) $2(y-3)\leq6(x-1)$ h) $5x-y+2>3y-3x-10$

15. a) $2x+3y>-6$
$x-y<2$

b) $3x-y>3$
$x+y>4$

c) $x>1$
$x+2y<4$
$y+3>x$

d) $x-4y-6\leq0$
$2x+y-3\leq0$
$y-5\leq0$

16. a) $-2<x+y<2$
$-2<x-y<2$

b) $x>2$
$-3<y<2+x$
$x+y<5$

c) $x^2-y^2\leq0$ d) $(2x+y+1)(3y-x-1)>0$

د لاندې نامساواتو حاوېرۍ د شمیرلو او همداسې ګرافیکې لارې پیداکړۍ.

17. a) $|x-3|=5$ b) $|x+2|=7$

c) $|1-\frac{x}{2}|=x+\frac{5}{2}$ d) $|x+3|=|3x-4|$

e) $|x-4|=|2x+3|$ f) $|9-3x|-|2x-1|=4-2x$

g) $|2-3x|-|x+1|+|2x+2|=3$ h) $|x-3|-|3x-4|+|2x+1|=6$

18. a) $|x^2-2x-8|=7$ b) $|8-2x^2|=6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $|2x - x^2| = 8$ d) $|x^2 + 6x + 5| = 5$

e) $|x^2 - 4x + 3| = 1$ f) $|x^2 - 2x - 3| = 1$

g) $|4x^2 + 4x + 4| = 3$ h) $|x^2 - 3x + 7| = 4$

19. a) $\left|\frac{2x+4}{x-3}\right| = 1$ b) $\left|\frac{2x-4}{x+3}\right| = 2$

د لاندې نامساتو حلدېرى پيدا کړئ

20. a) $|x - 2| < 3$ b) $|2 - 4x| \geq 1$

c) $2 - |1 - x| \geq 1 + x$ d) $|2x - 3| < x + 3$

e) $|3x - 5| > 2|x + 2|$ f) $|3x + 3| \geq \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$

g) $|x - 4| + |2 - x| \leq 2$ h) $|3 - x| < 2 - |x - 5|$

21. a) $|x^2 + 2x - 3| \leq 12$ b) $|x^2 - 6x + 8| \geq 3$

c) $|x^2 + 4x - 5| > 2$ d) $|15 + 2x - x^2| < 7$

e) $|x^2 - 6x + 11| < 1$ f) $|x^2 + 4x + 7| > 2$

g) $|3 + 6x + 3x^2| > 0$ h) $|x^2 + 4x| < 4$

22. a) $\left|\frac{x+3}{1-x}\right| > 3$ b) $\left|\frac{1-4x}{2-x}\right| > 4$

c) $\frac{2x+3}{|x+4|} \leq 1$ d) $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}}{\left|\frac{3}{4} + \frac{x}{2}\right|} \leq \frac{5}{6}$

e) $\frac{|3x-2|}{x+2} \geq 2$ f) $\frac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$

د

لاندې نامساواتو حلدېرى په يوه په يوه كواورديناتسيستم كې انځور كړئ او ا نځور يې وكاږئ

23. a) $x + y < |3x + 2|$ b) $y + |x + 2| \leq 4$

c) $x + |y - 2| < 3$ d) $|2x + y - 3| \geq 2y - 3x + 4$

e) $|x + 3| + |y - 5| \leq 3$ f) $|x + y - 2| > |y - x + 1|$

g) $|x + y + 1| \leq |x - y - 1|$ h) $|x - y| > |x - 2y - 2|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ فنکشنونه(بلواك یا تابع)

۱۵ . ۱ د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پیل کی دی کلیمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنی څیرونی، چی په هندسه کی خورا ډیره کارول کیږي یا استعمالیږي ، کله د تابع(بلواك) او بیا زیاته د فنکشن په نامه ځموږ په دې کار کی بلل شوې چی موږ ورسره تراوسه د تابع تر نامه لاندې هم بلد یو، ځما په اند یا فکر که دا موږ بلواك وبولو، نو هدفمند به مو نومولی وي. په لاندې کي به وګور چی خپلواکی او بلواکی ناپیوندونکی ځموږ د څیړلو متن جوړوی

پیژند ۱۵ . ۱:

د یوې ریيلی واریابلی ریيل ارزښته فنکشن(لنډ: فنکشن) د ریيلو ګڼونو ډیری باندې ، د یوې ډیری $D \subseteq R$ یوه یواځنی څیرونه ده. D دپیژند ډیری نومیږي .

د ټولو ارزښتونو ډیریَ چي y یی د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پیژنددیریَ یا تعریف ډیري په دننه کی وځغلي، د ارزښت ډیری W بلل کیږي .

د ي وې قانونمندیَ f له مخی هر $x \in M$ یواځني یوه $y \in W$ باندې تنظیمیږي:

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واریابل یا اووښتونی یا مجهوله بلل کیږي یا نومیږي او y بلواك واریابل یا اووښتونی بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن مختلف انځورډولونو ترمنځ سړی توپيروي. د فنکشن »کليمه انځورونه« يوه په خوله ويونکی يا يو اعلانونکی ، له ماتماتيکي يا شميريز سومبوليك ښځه تيريدونکی يا په شميريز سومبوليك صرف نظر کوونکی، مګر ددې لپاره يو پيچلی، د تشريح شکل دی، چی په لاندې کي به ورسره بلد شو.

بيلګه ۱۵ . ۱ : هر رييل ګڼ د همغه رييلګڼ په نيم ور زيات ۱ باندې تنظيميدل.

بيلګه ۱۵ . ۲ : هر يو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر يو مثبت ګن او صفر به د هغه په مربع تنظيم شي.

د شميرپوهی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحليلي (شننيزه) انځورونه د بلواک يا فنکشن تشريح ده. دلته x او y د نورو رييلو ګڼونو سره د بنسټيزو کارونو يا عمليو ، زياتون، کمون ، ځل ، ويش ، او د بنسټيزو فنکشنونو له لارې تړل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴).

بيلګی ۱۵ . ۱ ته: $y=(x/2)+1, D=R , W=R$

بيلګی ۱۵ . ۲ ته : د $x<0$ لپاره $y=|x|$
دلته $D=R,W = [0,\infty)$ د $x>0$ لپاره $y=x^2$
پام دې وي چی په داسی حالت کي له کيڼ و ښي لور ته يا ګډوډلوستل کيږی يعنی داسی لولو: y د x مطلقه ارزښت سره مساوي دئ ، که چيرې x له 0 کوچنی وي. داسی ليکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کيږو) . تحليلي(شننيزه) انځورونه اکسپليځيت(واضح)روښانه و ځرګند) explizit نوميږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بيلګو ۱۵ ، ۱ ۱و ۱۵ . ۲ چی په يوه د yپه لور حلکيدونکي فورم مخ ته پروت وي: $y =f(x)$ که چيرې داسي نه وي نو د تحليلي - يا شننيزې انځوروني شکل $F(x,y)=0$ دی او فنکشن ايمپليځيت (ورسره ځای شوي يا وراسره تړلی implizit) بلل کيږي يا نوميږي . د بيلګی په توګه به $2y-x-1=0$ $D=R,W=R$,فنکشن د بيلګي ۱۵ . ۱ يو ايمپيليځيت انځورونه وی. ديوه فنکشن نه هره ايمپليځيت شنينيزه بڼه (ايمپليځيت تحليلي فورم) کيدی شي په

اکسپليځيت شننيزه يا سپړنيزه بڼه (تحليلي فورم) واړول شي. د بيلګی په توګه : که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپليځيت حل کيدونکی نه دئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزې انځورونی ځانګړې بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتوني یا واریابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لاربښودیږي. هر پارامتر (له یوه پارامتر ساحی څخه)

$x = \varphi (t) \;, y = \Psi (t)$

په یو ارزښتجوړې x,y تنظیمیږي.

بیلګه ۱۵ . ۱ ته: $x=2t ,y=t+1; -oe< t <oe$ به یوه پارامتري انځورونه وی او $x = t , y = t/2 + 1$ به یوه بله پارامتري انځورونه وي.

زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیږي

بیلګي ۱۵ . ۱ته:

X ....-2	-1	0	1	2	
Y 2	0,5	1	1,5	2	

بیلګي ۱۵ ، ۲ ته:

X....-3	2	-1	0	1	2	3 ...	
Y....3	2	1	0	1	4	9 ...	

د فنکشن ګرافیکی انځورونه (د یوې ټوټې) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کږې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی څخه عبارت ده ، چی د واریابلو

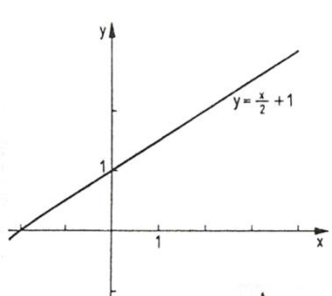


Bild 15.1 څېره

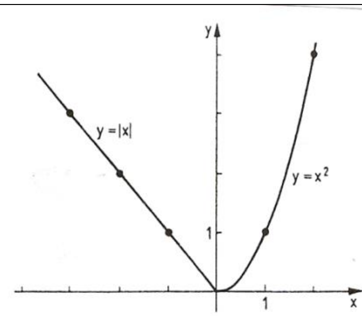


Bild 15.2 څېره

یا اووښتونوجوړې د x,y - هواره یا سطحه کی یواځني او یواځني ټکي باندې تنظیمیږي .

څیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲) بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایټروال] a,b[کی هلته او هلته یا تیك هلته مونوتون جګیدونکی
(مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو
$x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري:
$f(x1) \leq f(x2) \quad (f(x1)>f(x2))$
که د برابروننخښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غړیږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دئ

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینټروال) [oe,0] کي مونوتون ټیټېدونکی یا -لویدونکی
او په اینټروال [oe,0) کی مونوتون جګیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

په یوه اینټروال] -a,a[کی یو تعریف شوی فنکشن $y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت) یا سیومتریك symetrisch,(ناجوړه (طاق) یا نا- یا انټیسیومتریكantisymetrisch بلل کیږي چی باوري وي
$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$
د جوړه فنکشنونو څیرې اکسیال یا محوري سیومتریك و y - محور ته ځغلي) دلته هم څیره شته ، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳ (، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریك ځغلي) بیا هم څیره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

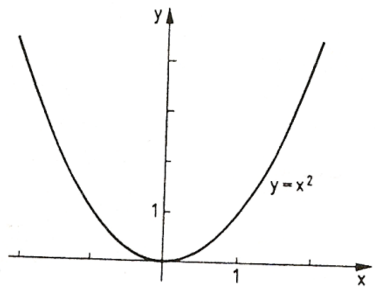
بیلګه ۱۵ . ۴
فنکشن $y= x^3 ,D= R$
یو ناجوړه یا طاق فنکشن دی :

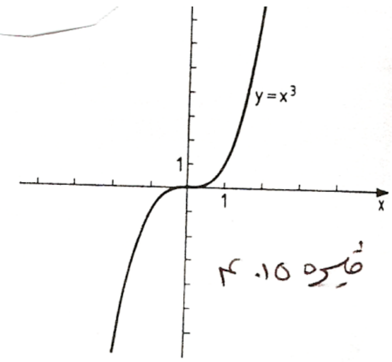
$(-x^3) = -x^3$

بیلګه ۱۵ . ۳ :
فنکشن $y=x^2,D=R$
یو جوړه یا جفت فنکشن دئ:

$(-x)^2 = x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



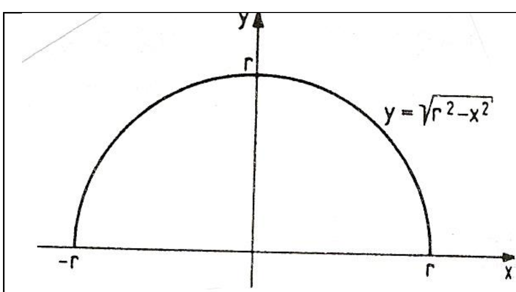


د بیلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

پیژند ۱۵ . ۴:

$y = f(x)$ تیك هلته په D (پیژنددیری ده) بند یا رابند(محدود)بلل کیږي که
یو $k > 0$ داسی شته وي چي دا باور ولري :
$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$

بیلګه ۱۵ . ۵:

	فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r, r]$ بند یا راګیر(محدود)(زه به دا له دي وروسته بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم یوونګردی ځیره ده ش . ۱۵ . ۵ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \le r$

پیژند ۱۵ . ۵:
$y = f(x)$ پریودیکي(دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل
کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:
$f(x + p) = f(x)$
د دورانی یا تل راګځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي
فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۶ :

ټول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کیږي۰

د فنکشن صفرځایونه د مساوات $f(x) = 0$ د حل له لارې پیدا کیږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرښې د غوڅټکو x - ارزښتونه دي.

بیلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\ x + 1$ صفرځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دئ (ځیره ۱۵ . ۱)

بیلګه۰ ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:

$$x^2 - 4 = 0 \iff x_1 = 2\ ,\quad x_2 = -2$$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري.) بیا هم ځیر ۱۵ . ۶)

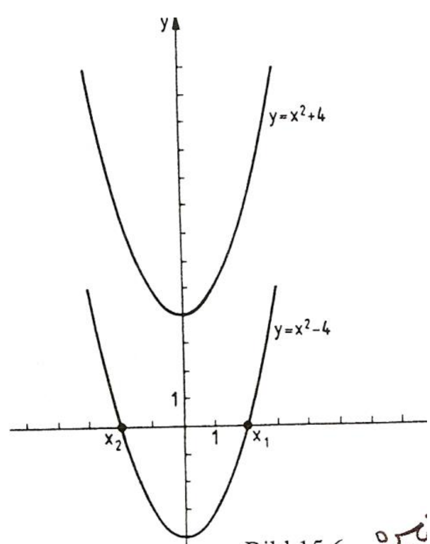


Bild 15.6 ځیره

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D \quad , \quad y \in W \quad y = f(x),$

یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ ځیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: (= y
f(x)یو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په ځتکیدونکی دی ، دا په دې مانا چي دا یو فنکشن (x = g(y تعریفوي، یعني په ځټ یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا واریابلو د نخښی(نخونی) سره بدلی شي، نو د په ځټ فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا د فنکشن روځنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه ځیره ده، چی x خپلواك اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیزندونکی دي د y=f(x) په ځټ یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په ځټ فنکشن سره کټمټ(- ورته) identic دی٠ د په ځټ یا برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$
کرافیکی ځیره y = x په کرښه د y =f(x)(هندارونه) یعنی په هنداره کی ځیرونه او لنډ یی: هندارونه) ده٠

بیلګي ۱۵ ، ۱ ته :

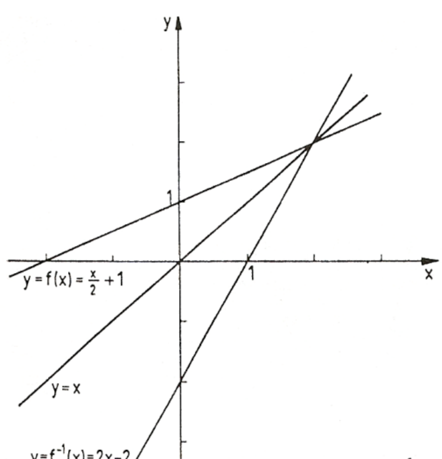


Bild 15.7a ځایره

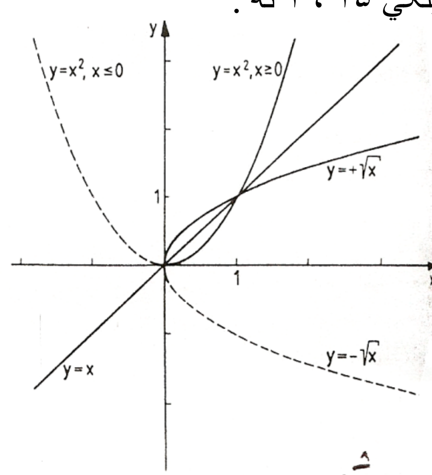


Bild 15.7b ځایره

د فنکشن y = f(x)= x/2 +1 چپه یا په ځټ فنکشن داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$

سړی $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x=2y-2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(ځیره. ۱۵ ۷ الف)

بیلګي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن

$x \in D$ $y = x^2$,

ځیرره ش ۱۵ . ۳) په څټکیدونکی دي یا په څټکیدونکی نه دی.

هر $y \in W$ =[0,oe] پورې دوه[-oe,oe] = $x \in D$ اړه لري، یعنی x=+yاو x=-y

مګر $y= x^2$کلك مونوتون جګیدونکی دی (او په دې ډول یواځنی او یواځنی).

د $0 \geq x$ لپاره او کلك مونوتون لویدونکی د $0 < x$ لپاره. $y=x^2,x\geq0$

ته چپه- یا په څټ فنکشن $y=+x$ دی، او $y = x^2 , x < 0$ ته چپه- یا په څټ فنکشن $y = -x$ دی. (ځیره ۱۵ . ۷ ب) .

په ټولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که $y = f(x)$کلك مونوتون جګیدونکی) لویدونکی (وي ،نو په څټ فنکشن $y = f^{-1}(x)$ موجود دئ او دا هم کلك مونوتون جګیدونکی (لویدونکی) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کې بنسټیز فنکشنونه تعریفیږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنځ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوګاریتم فنکشنونه، تریګونومتري فنکشنونه او ځیکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د ځپلوځانګړدوله خویونو له مخی وځیرل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا تړلي فنکشنونه) وځیرل شي. د فنکشنونو ځیرل به د هغو ځانګړدوله یا کرکتریستیکي خویونو له مخی هلته هم دوام ومومي، که د دیفرنشل شمیرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پیژند ۱۵ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن

$$y=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a^2 x^2 + a_1 x + a_0, n \in N; a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in R$ لپاره تعریف دئ او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه(یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه (n = 1) یالایني فنکشن په لاندې ډول دئ:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کی پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لایني فنکشنونو ځیره(ګراف) یوه کرښه ده چي په y = n کی دy - محور غوځوي (x = 0) او جګوالی $m = \tan\alpha$

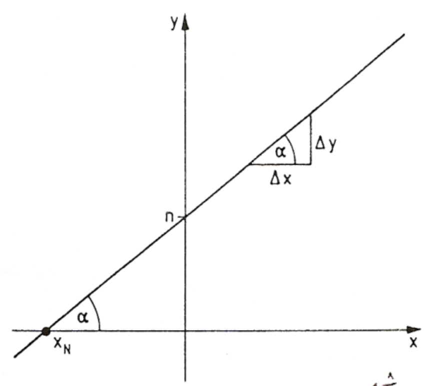


Bild 15.8 ځيره

لري (ځېره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره متناسب دی: $m = \Delta y / \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

کرښه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي، دx - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که $|m| = 0$ نیول شوی وي، ټیك یو صفرځاي (y = 0) لري: $x_N = - n/m$

که را په غاړه شي چی د یوې کرښی برابرون، چی له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تیریږي، پیدا کړو چي پو په بل نیغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرتټکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا نوره ښه غږښتکی n په y - محور د برابرونسیستم

$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$

له مخی پیدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو

$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$

په بل پل)قدم(کی موږ ۲ -امه درجه تولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په (۱۵ . ۱) کي $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$y=ax^2+bx+c , a \,|= 0$ (15 .3)

د مربع فنکشنونو څیره) ګراف (پارابول دئ چی د هغي سیومتري محور و y - محور ته غبرګ ځغلي. کوایفیځینت) ځله ووني یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او بڼه)فورم(ټاکی.

موږ د مربع فنکشن یو څو ځانګړي حالتونه تر څېرنې لاندې نیسو.

1. $y=x^2(a=1 ,b=0,c=0)$ (15 . 4)

نورمال پارابول، د ککرې کواوردینات: $x_s = 0 , y_s = 0$

(خ . ۱۵ . ۹)

2. $y=x^2+px+q$ (a=1 , b=p , c=q) (15 . 5)

او $x^2 + px$ ته د څلورئ - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:

$y=x^2+px (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2$ (15,5)

یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په $q - p^2 /4$ راکښل (راښکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول د ی ، دا په دې مانا چی په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لري:

$x_s = -p/2 , y_s =q - p^2/4$

بیلګه ۱۵ . ۷:

$y=x^2+6x+10, xs=-6/2=-3,ys=10-6^2/2=1$

(خ،۱۵ . ۹)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

3. $y = ax^2$ (a|=0,b=0, c = 0)

د ککرۍ (سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$, $y_s = 0$

پارابول د $1 < |a|$لپاره خور، د $|a|<1$ لپاره پرسیدلی،د $a > 0$ لپاره پورته لور ته او د $a < 0$لپاره کښته لورته واز دی (خلاص دی)

بیلګه ۱۵ . ۸:

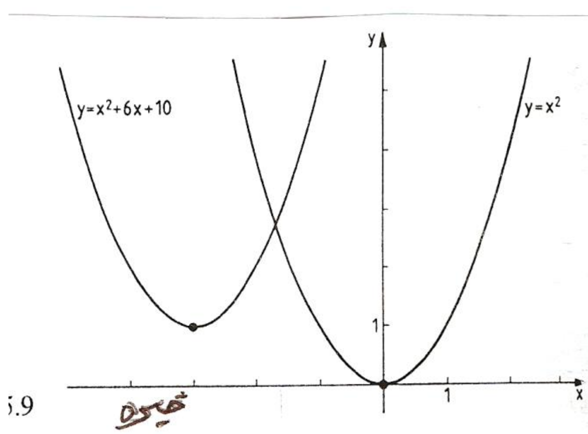
$y = 2x^2$, $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$

(خ . ۱۵ . ۱۰)

4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرۍ (رأس) کواوردینات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)

$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$



.9

بیلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$,(a=-1/2, b=1, c=4)

دککرۍ کواوردینات:

$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4 - 12/(4.(-1/2)) = 9/2$

دا چي $a = -1/2$ دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

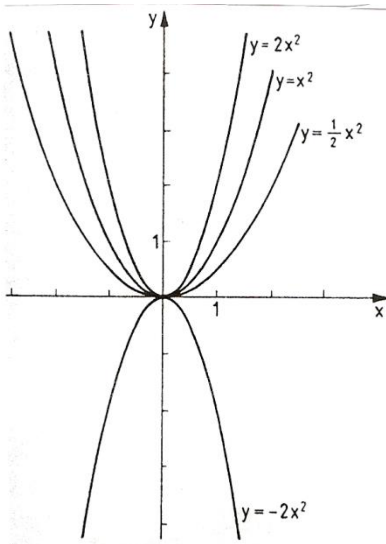


Bild 15.10 ځیره

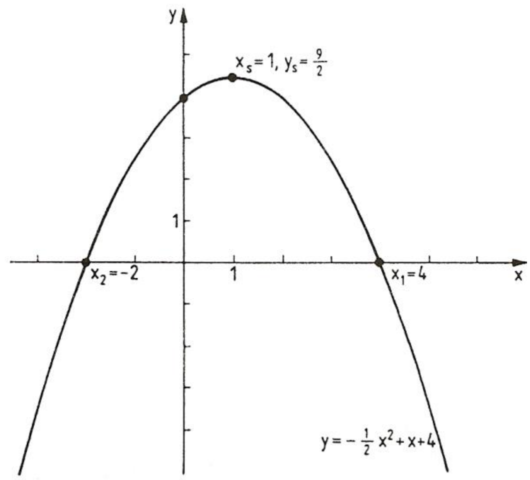


Bild 15.11 ځایره

د فنکشن y=ax²+bx+c د صفرځایونه د برابرون ax²+bx+c=0 اوبیونـي دي.
وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (خ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : −(1/2)x²+x+4=0 ، چې دلته $x_1 = 4, x_2 = -2$ دي.

و بیلګي ۱۵ . ۷ (ځیره ۱۵ . ۹) ته :
د x²+6x+10=0 یاني $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$ څخه لاس ته راځي چې برابرون رییل صفرځایونه نه لري .

فنکشن y = x² غبرګ یا جوړه(ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2} = 0$ دي
د تولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دتولریشنلفنکشنونو بیلګي له مخې، دریمه درجه تولریشنل فنکشن راوړو
چې د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Hornerschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.

$$x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

$$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه ورکړ شوي خپلواك x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کیدی شي له دې بڼی سره په لاندې ډول وشمیرل شي:

a3 له x1 سره ځل کیږي، دې سره a2 زیاتیږي، زیاتون یی له x1 سره ځل، او a1 ور زیاتوو، زیاتون د x1 سره ځل او a0 ور زیاتوو. دا د عملیوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شیما (د هورنرشیما) له لارې په لیدوړ ډول مخ ته بیایو (ځرکندوو)

	a_2	a_1	a_0	ځلونه یا ضریبونه
	a_3x_1	$(a_3x_1+a_2)x_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$	منځنی ځلونه
a_3	$a_3x_1+a_2$	$(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 = f(x_1)$	منځنی زیاتون

ددې شیما پوهیدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بیلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x_1 = -2$ او $x_2 = 5$ څخه شمیرل کیږي.
یادونه: دا د هورنر شیمت زما په دې اوسنی د برینکمن ژباړه کې مفصل شته(ژباړی).
اوبیونه) :

	1	-2	-14	-5
$x_1 = -2$		-2	8	12
	1	-4	-6	$7 = f(-2)$
$x_2 = 5$		5	15	5
	1	3	1	$0=f(5)$

لرو $f(-2) = 7$ او $f(5) = 0$ (صفرځایونه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چېرې ددريمې درجې ريشنلفنکشن يو صفرځاي ولري، نو کړی شو چې د پولينوم ويش له لارې دا لايني فاکتور بيل کړو(پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بيلګي ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5):(x-5)=x^2+3x+1$ له دې امله لرو:

$$y = x^3-2x^2-5 = (x^2+3x+1)(x-5)$$

د ويش پولينومونو ځلووني ، يعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشيما په اخره ليکه کی ولاړ دی. د هورنرشيما له لاری د صفرځاي شميرلو سره په همغه وخت يا دمګړۍ کی د پولينوم ويش صورت نيسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او$f(x1)=0$ چی د$(x-x_1)$سره د ځلونې له لارې دا تصديقيدلی شي. پاتی صفر ځايونه د ځلورۍ – يا مربع برابرنی د اوبيونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0;\ x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دريمی درجې فنکشن د درې لايني فنکشنونو د ځلونې په څير ليکل کيدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

$$y=x^3-2x^2-14x-5=(x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وينا په عمومي توګه د ټولوn- م درجو ريشنل فنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ريشنلفنکشن n صفرځايونه لري . کيدي شي دا ټول يو له بل توپير ولري او يادا صفرځايونه څوځله هم رامنځ ته شي، رييل او يا جوړه کونجوګيري کملکس کيدی شي.

که $x_1, x_2, ,..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځايونه وي

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیڅینت یا ځله وونې لپاره دې صفر ولیکل شي .

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :
5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن $y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$ درې صفرځایونه $x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$ لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلونې په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

	2	0	-6	-20	-8	80
$x_1 = 2$		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
$x_2 = 2$		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
$x_3 = -2$		-4	-8	-20		.
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتی پولینوم $(2 \; x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5$ د $0 = x^2+2x+5$ له امله
د $x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$
لپاره لاندې د ځل فورم لري- $2x^2+4x+10 = 2(x+1-$
$2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي

$$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چی د دريمي او جګو درجو د ټول ريشنلفنکشنونو يوه څيره يا تصوير ولرودی شو، نور کرکتريستيکی يا د خويونو ټکی يی د ديفرنځيالشميرني له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چی د دفيرنځيالشمير له مرستي کار واخلو ، کيدی شي چی د هغه د ناپای په هکله وينا وي وکړی شو. موږ په ليديدونکی ډول د فنکشن د پولی کليمه په کار اچوو، کومه به چی په برخه ۱۹ کی ټيټك تعريف شي. دا د بيلګي په توګه دا مانا لري چی $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$ سره (f(x)تل ارزښت g ته نزدې کيږي، که x د oe يانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty}[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چی

xn -> oe

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي

او xn ->±oe د±oe<- x لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زياتيز يا مثبت وي، نو لرو $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty; \lim\limits_{x\to-\infty} y = \infty$

(کږه له oe - څخه دoe په لور ځي) .

که n جوړه او a_nکميز يا منفي وي، نو لرو: $\lim\limits_{x\to\infty} y = -\infty; \lim\limits_{x\to-\infty} y = \infty -$

کږه د oe - څخه د oe - په لور ځي) .

که n ناجوړه او a_n کميز يا مثبت وي ، نو لرو: $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty; \lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$

کږه له oe - څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او a_nکميز وي ، نو لرو: $\lim\limits_{x\to\infty} y = -\infty; \lim\limits_{x\to-\infty} y = \infty$

کږه لهoe څخه د oe - په لور ځي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0};..........(15,7)$$
$$n, m \in N_0; a_k, b_i \in R; Q_m \neq 0$$

مات ریشنلفنکشن بلل کیږي او د ټولو x د $Q_m(x) \neq 0$ لپاره تعریف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نومیږي، که n<m وي او نااصلي مات دی که n ≥ m ۰ نااصل مات فنکشن کیدی شي چي د پولینوم ویش له لارې تجزیه (ټوټه) شي او د یوه ټول ریشنلفنکشن او یوه ریښتونی ماتی برخی د زیاتون په څیر ولیکل شي.

بیلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y = \frac{2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{x^3 - 4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې
فنکشن باندې دماتباندې فنکشن ویش څخه لاس ته راځي:
$(2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6) : (x^3 - 4x) = 2x - 3$

د $2x^2+x-6$پاتی (باقي) سره. پس لرو:
$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x).$

فنکشن (۱۵ . ۷) د x = x0 لپاره یو صفرځاي لري، که x = x0وي نو باور لري:
$P_n(x_0) = 0$ مګر $Q_m(x) \neq 0$

دا د $x = x_L$لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0) = 0$ او $Q_m(x)=0$
د $x = x_P$لپاره یو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P) \neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بیلګه ۱۵ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن ($y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$ د ماتباندې- او ماتلاندې فکشنونو ټوټې کولو وروسته په لاندې فورم د لايني فاکتورونوپه توګه ليکل کيږي.

$$y = \frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندې صفر دی، مګر مات لاندې صفر نه دئ (صفرځای)مات لاندې- او مات باندې فنکشنونه د $x = xL = -2$ لپاره صفر دې (تشځای)
د $x = x_{P1} = 0$ او $x = x_{P2} = 0$ لپاره ماتلاندې صفر او مات باندې صفر نه دئ (قطب)
که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چې د قطبځای (ټيك ناپای ځای بللکيږي) xpکی کږه داسيمپتوتي کرښي $x = xP$ ته نزدې کيږي .د يوه تشځای xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې $0 / 0$ شکل غوره کوي، له دې امله د $x = xL$ لپاره تعريف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نيونی ته:

د اصل ماتفنکشن ($n<m$) د x په جګ پوتنځ يعنی x^m د ماتباندې او ماتلاندې د ويش څخه لاس ته راځی:

$$y = \frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}} + \frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}} + \ldots + \frac{a_1}{x^{-1+m}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{0}{b_m} = 0$$

داچی د x ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x ټول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن څيره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کيږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نيسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه يی د صفر په لور ځي، لکه ټولريشنل برخه .
د نااصل مات فنکشن څيره د x -> ±oe سره ، ځان خپل ټولريشنلبرخی ته نزدې کوي.

بيلګه ۱۵ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف: $y = x/(x^2+1)$ د $x0 = 0$ په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول یا قطب نه لري ربیل اوبیونه نه لري) او د$x \to \pm oe$لپاره دx- محور ($y = 0$) د اسیمپتوتی په څیر لري (څیره. ۱۵ . ۱۲)

ب: $y=(x^2+2x-3)/(x+2)=x-3/(x+2)$ صفرځایونه($x^2+2x-3 =0$) په $x1 =-3$ او $x1=1$ کی لري . تشځای نه لري او په $x3 = -2$ کی قطب لري دا په دې مانا چی $x = -2$-اسیمپتوتی دی، او د $x \to \pm oe$ لپاره فنکشن $y = x$ اسیمپتوتي کيږي)دا سیمپتوتی کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي ټول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو: فنکشن

$$y = x^n; n \in Z \setminus \{0,1\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15,8_a)$$

یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی(د پوتنځ پیژند 6 ۰ ۱)

(15.8)د زیاتیززیاتیز یا مثبت ټولګې n لپاره یو ټولرشنل فنکشن دی. د جوړه ټولګې nلپاره ټولریشنل فنکشن دی. د ټولګې n لپاره ټولی کرې د تعریف ډیری(-) = D oe,oe، د ارزښت ډیری(W=(0,oeاو ګډ ټکی (1,1)، (0,0),(1,1) لري. (څیره ۱٤ الف ۱۵) د ناجوړه ګڼ د n لپاره(D = (-oe,oe او(W = (-oe,oe دي او (-1,-1) , (0,0). (1,1) ګډ ټکي دي (څیره ۱۵ . ۱۴ ب)۰

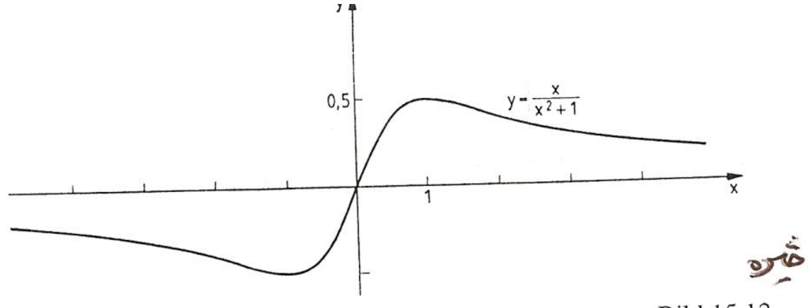


Bild 15.12

(c) ketabton.com: The Digital Library

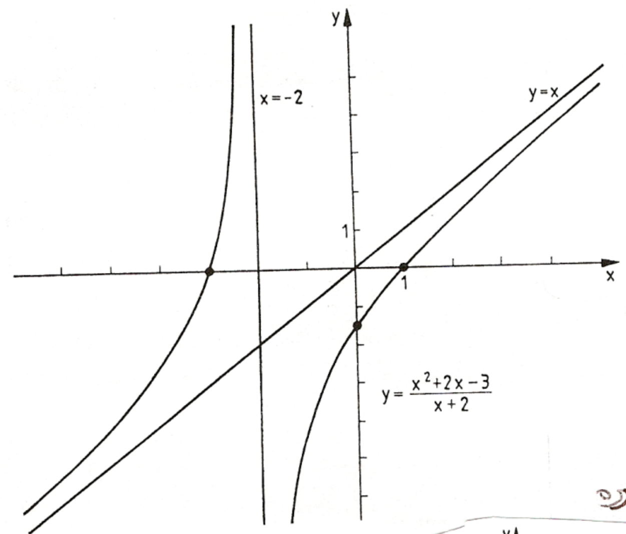


Bild 15.13

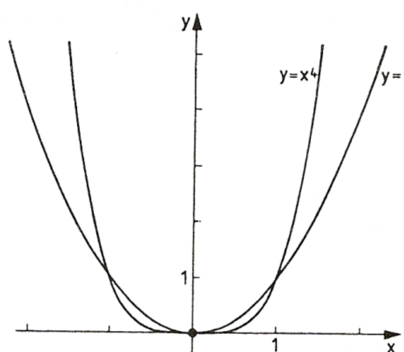


Bild 15.14a

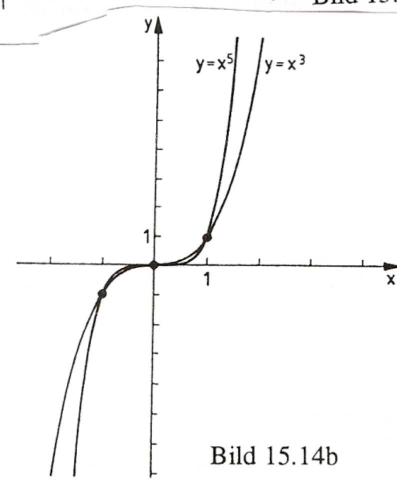


Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دئ په x = 0 کی
د یوه قطب او y = 0 کی یوې اسیمپټوتی په ځیر. د جوړه ګڼون یا تعداد (کمیز n
لپاره ټولی کرږ د پیژند ډیري
D = (-oe,oe)\{0} د ارزښت ډیري(W = (0,oe لري اوګډټکي (1,1), (-1,1)
؟؟؟ ځیره ش. ۱۵/۱۵الف) .
د ناجوړه ګڼون (کمیز n)لپاره{ D = (-oe,oe)\{0 او(W=(-oe,oe او(1-،1-) (
1,1) ګډ ټکی دی (ځیره »۱۵ . ۱۵ ب) .
دوه ځیرې دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

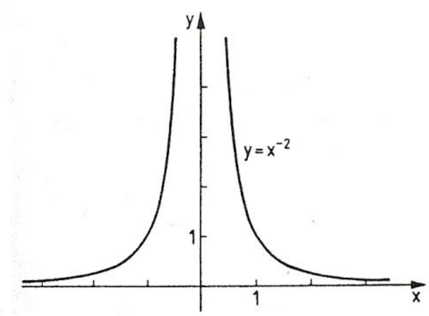


Bild 15.15a

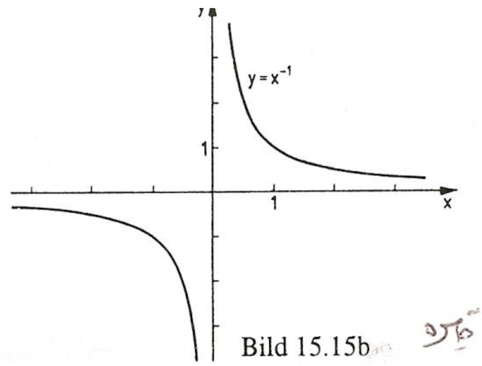


Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر ښت بلواک لپاره دې د مونوتوني اينتروال په پام کی ونيول شي.(پرتله بيلګه(بيلګه ۱۵ .۳)
د فنکشن) لوستل له کيڼ وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- يا پر ښت فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}\ , n \in N \setminus \{1\}\ , D = [0,\infty), W = [0,\infty) ....(15,8_b)$$

او رينه فنکشن نوميږي (پيژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کيدی شي و ريشنل ايکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ريشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n\ , a \in Q\ , x > 0 \qquad (15.8c)$$

نو د رينښي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دې د پوتنځ فنکشن په ځير وپوهيدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرښت بيرته پوتنځ فنکشن دی.
ټوليز پوتنځ فنکشن پيژند د رييل ايکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د رييلګڼونو کليمه دې وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

پيژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha} \quad , \quad \alpha \in R\ , x > 0 \qquad (15.8d)$$

پوتنځ فنکشن نوميږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن

$y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}, x \geq 0$

$y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}, x \geq 0$ لاندې چپه - یا پر ښۍ فنکشن لرو

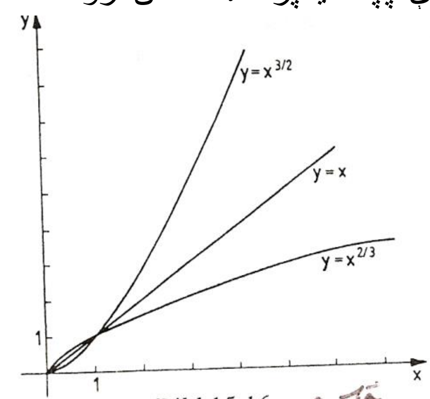


Bild 15.16a ښکلاره ب)

(ښیره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$

ښیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$y = x^{-2} = 1/x^2, x > 0$

یادونه : په پیژند ٤ . ۲ کی مو وویل چی یوائی د ناکمیز رادیکاندو ریښه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرښې فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په
پام کی وي. د بیلګي په توګه فنکشن
$y=x^3$ په ټول تعریفدیري کي مونوتون پورته کیدونکی وی او له دې امله ټول په ښې کیدونکی وی، $y = \sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژنددیری($D = [0,\infty$ کی پر ښې فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د$y= x^3$ پرښې فنکشن د] $D= (-\infty,0$
سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) .

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

$y=a^x, a > 0, a \neq 1$..................................(15,9)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ(لنډ »جګ«) بلواك بلل کیږي۰
(د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پیژند ۴ . ۱ وکتل شي)

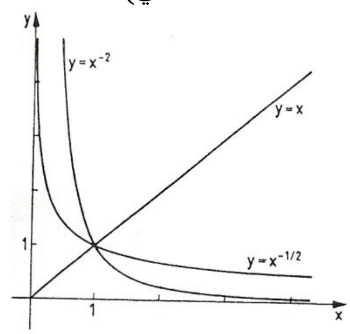


Bild 15.16b

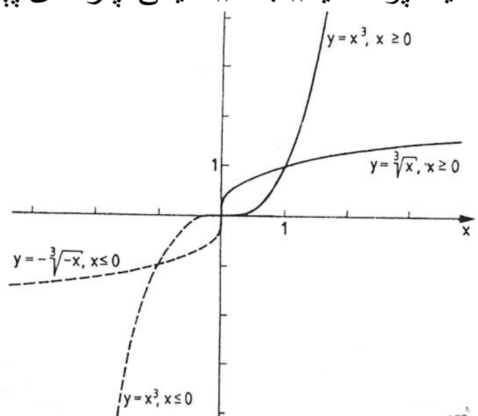


Bild 15.17

پورته دوه څیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې پیژندډیری(D=(-oe,oe او ارزښتډیری(W=(o,oe
لري. د $a^0 = 1$ له امله ټکی(0,1 () د ټولو کږو ګډ ټکی دی

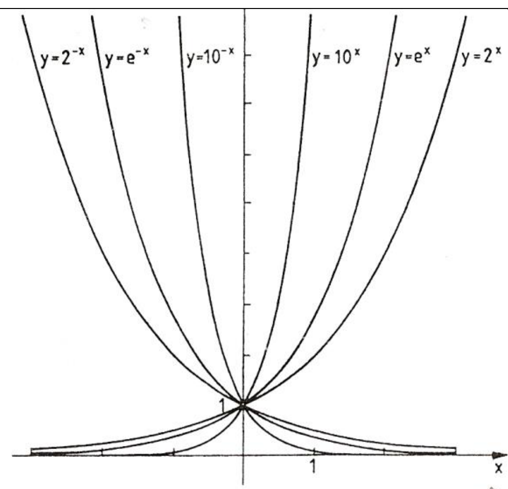


Bild 15.18

د a>0 لپاره (۱۵ . ۹)
په کلکه یو غږیز- یا مونوتونجګیدونکی
دی اود x->oe سره د x - محور ته
اسیمپوتیك ورنزدې کیږي .د 0<a<1
لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه   مونوتون لویږي
او ځان د oe <- x سره   د x -محور ته
اسیمپتوتیك نزدې کوي .

د اکسپوننشل فنکشنونو یو څو بیلګې
(a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/10)
په څیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي

پیژند ۱۵ . ۱۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څېر فنکشن دی

$$y = \log_a x \, , \, a > 0 \, , \, a \,|= 1 \qquad (15.10)$$

او لوګاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوګاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وګوری) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پیژنددیری $D = (0.oe \ )$ او د ارزښتدیری($W=(-oe,oe \ )$ لري.

د $y = \log_a x$ کرږې د ګرږو $y=a^x$ هنداورنه ده، په کرښه $y=x$ ۰ ټکی$(1,0)$ د ټولوکرږو ګډ ټکی دی (ځیره شته دی)

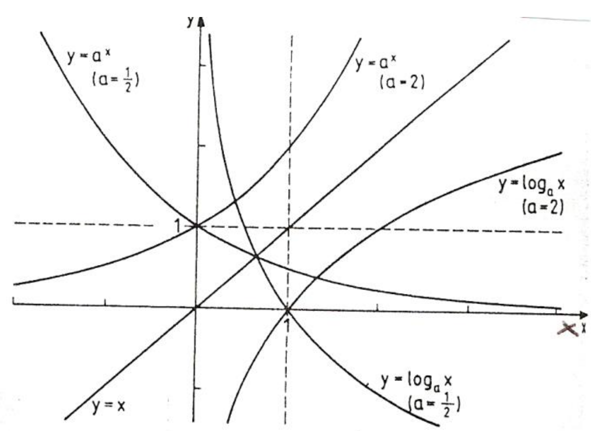


Bild 15.19 ځېره

د $a>1$لپاره(۱۵ . ۱۰) کلك مونوتونجګیدونکی اود $x\to 0$لپاره اسیومپتوتیك د کمیز y - محور ته نزدې کیږي. د $0<a<1$لپاره (۱۵ . ۱۰) کلك مونوتون لویدونکی دی او د $x>0$لپاره اسیمپتوتیك د زیاتیز y - محور ته نزې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په څېر یی یعني $y = \log_a x$

د $a=2$ او $a=1/2$ لپاره انځوریږي .

په ځانګړې توګه لیکل کیږي $y = \log_{10} x = \lg x \, , \, y = \log_e x = \ln x$ ۰

پیژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تریګونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کیږي یا راوړل کیږي.

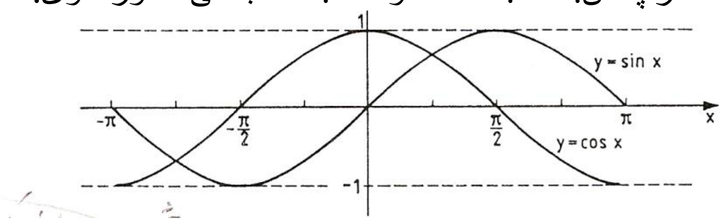
$$y=\sin x ;D=R,W=[1,1]........................(15,11_a)$$

$$y=\cos x; D=R, W=[-1,1]........................(15,11_b)$$

$$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z....(15,11_c)$$

$$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z..........(15,11_d)$$

د دې ګروتګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریګونومتریکی فنکشنونه y = sin x, y = tan x , y = cotx ناجوړه فنکشنونه، او y = cos x یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تریګونومتریکي فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي(مقایسه ۱۵ . ۵)
فنکشنونه y=sinx , y= cosx پریودې 2π لري، دا په دې مانا چی لرو:

$$\sin (x+2k\pi) = \sin x ; \cos(x+2k\pi)= \cos x , k\in Z$$

لاندې فنکشنونه پریود π لري
y=tanx , y=cotx .دا په دې مانا چي

$$\tan (x + k\pi) = \tan x, \ \cot (x + k\pi) = \cot x , k\in Z$$

د تریګونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k = k\pi, k\in Z$

د y=tanx , $k\in Z$, $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ y=sinx لپاره او د y = cot x , y = cos x

لپاره تانجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه) لري یعني y = tan x

په $k\in Z$, $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ او y = cot x په $k\in Z$, $x_k = k\pi$ کی.

د تریګونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلګي په توګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

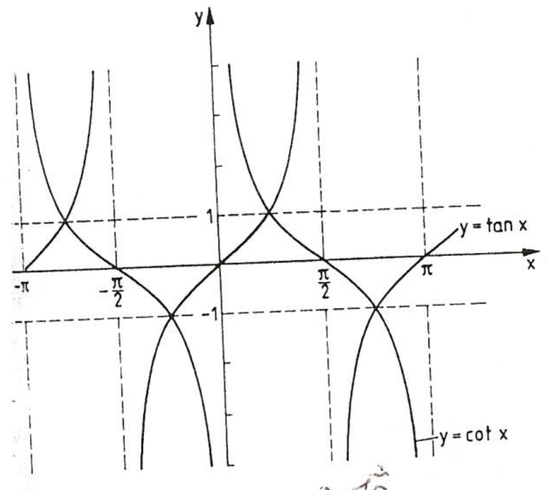


Bild 15.20b

فنکشن y = sin x په ایتروال $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جګیدونکی دئ او په انتروال $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودې کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ لپاره y = sin x جګیدونکی یا پورته کیدونکی دئ

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کیدونکی دی٠

د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لویدونکی دئ

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګیدونګی دئ

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګیدونکی دی ،

په تنجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي.د ساین فنکشنونه د بیلګي په توګه د وخت په پریوديکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوینګونګ: رپیدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واریابل په t نخښه کیږي .فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) \qquad (15 . 11e)$$

هارموني فنکشن بلل کيږي.

يادونه: فنکشن (۱۵ . ۱۱ټ) د پيژند (۱۵ . ۱۵) له مخی تړلی يا ځنځيري فنکشن دی. موږ ترڅيرني لاندې نيسو چي د ساين فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واريابل t او زياتوونکی د ساين فنکشن په خپلواك)Argoment(د کږېڅيره باندې څه تاسير اچوي.

۱ - د فاکتور a تاثير په فنکشن y = a . sin t د y = sin t فنکشن ارزښت باندې غزول يا راکشول دی که (|a| > 1)او يا پړسول دي که
|a| < 1)وي y= a.sin x فنکشن ارزښت a - ځله د فنکشن ارزښت
y = sin t دی، چيرته چی برسيره پردې د a < 0 لپاره په t - محور يوه
اينه څيرونه هم منځ ته راولي (څره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2)
په فنکشن کی a امپليتودې Amplitude(جګوالی(نوميږي او د
شوينګنګ Schwingungرپيدنی پراخوالی يا ښه : سور باندې تاثير اچوي.
څيره شته

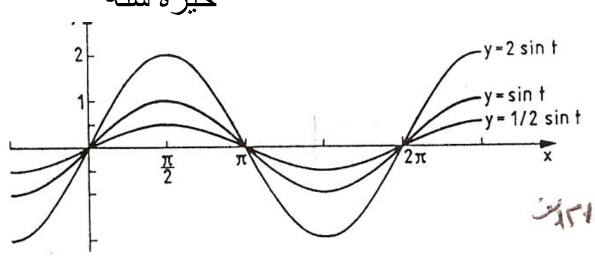


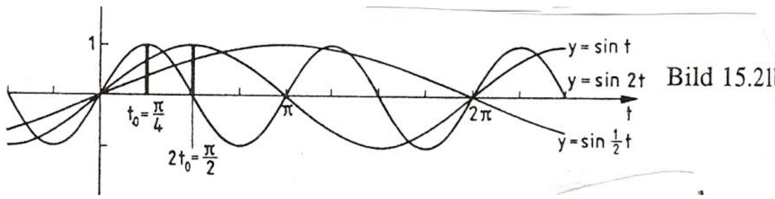
Bild 15.21a

۲ - په فنکشن $y = \sin\omega t$ کی فاکتور ω په فنکشن y = sin t باندې يو وختني غزول که $|\omega| < 1$ يا پړسول که $|\omega| > 1$ وي تاثير اچوي.چيرته چی د $\omega < 0$ لپاره برسيره پردې يو په y- محور اينونه هم ده.

د يوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin\omega t$ يوه فنکشن ارزښت، د y = sin t خپلواك ω -ځله ، يعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (څيره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).

ګردی فرکونخ (Kreisfrequenz) بلل کيږي، دا په پريودې تاثير اچوي او $y = \omega t$ پريودې $P = \dfrac{2\pi}{\omega}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



۳ – زياتيدونکی φ په فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې ديوې راکښنې تاثير په $|\varphi|$ له کينی لور $\varphi 0>$ او يا له ښي لور $\varphi 0<$ اچوي .

د يوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ سره يو فنکشن ارزښت، چې د $y=\sin t$ لپاره۰

د φ په کچه راکښل شوی (يعنی د يوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، يعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(څيره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

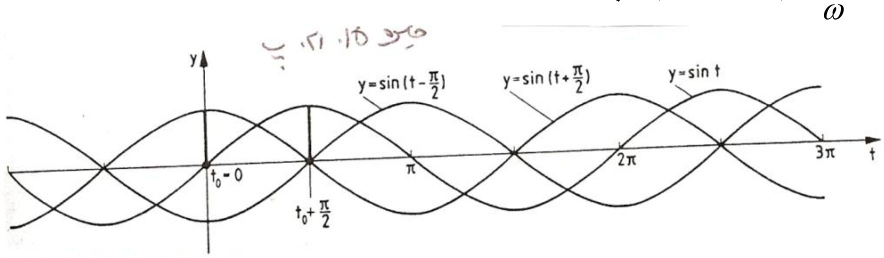
$$(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2})$$

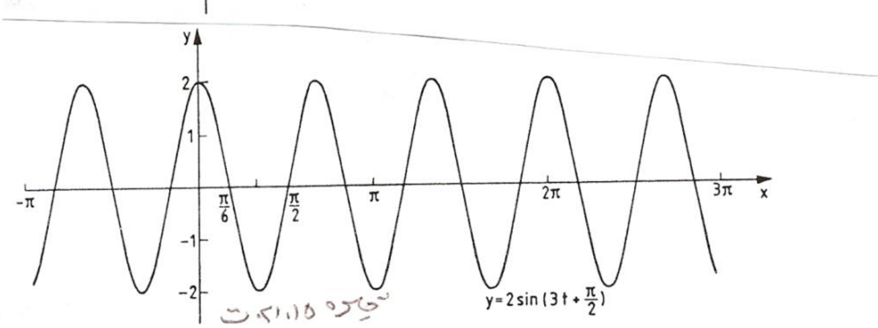
په فنکشن

$$y = a.\sin(\omega t + \varphi) = a . \sin\omega (t+\frac{\varphi}{\omega})$$

کی φ چې فازې نوميږي يو د راکښلو تاثير په کره $y = a.\sin\omega t$

د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.





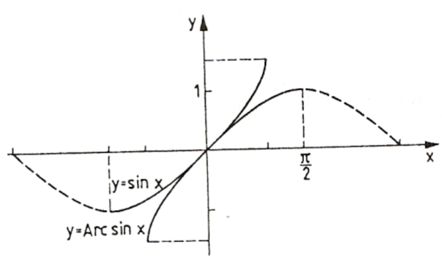
(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2 . \sin (3t+\frac{\pi}{2})$ انځوردی. هغه امپليتود a = 2 لري، پريودې يی $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$ کې د sint و کيڼ لورته راکښل شوی دی.

خبره ۱۵ . ۲ پ $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$

د تريګونومتري فنکشنونو(يواځني) په معکوسوالي يا په ښتوالي کی موږ په ځانګړو يوغږيزو يا مونوتوني اينتروالونو تکيه کوو، د لاندې تعريف سره مناسب

پيژند .۱۵ ۰ ۱۴ :
(پام: ښيرې له تشريح د مخه راغلې، بله لار نه وه)



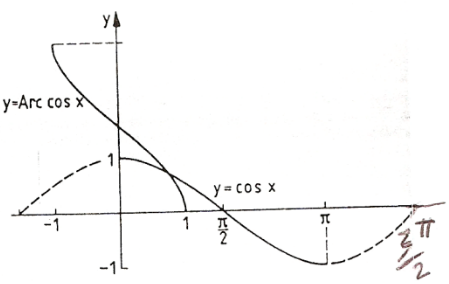
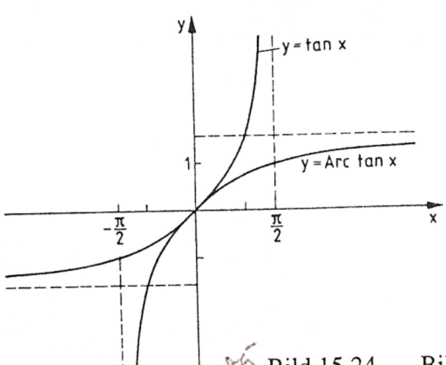


Bild 15.22 Bild 15.23



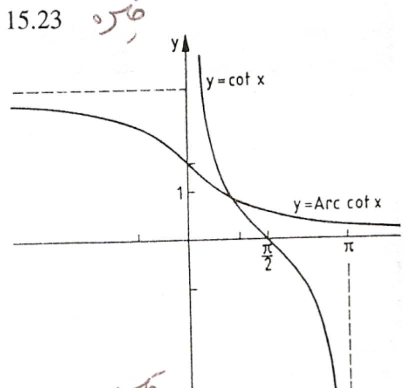


Bild 15.24 Bild 15.25

د لاندې فنکشنونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

1. $y = \sin x$,	$D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,	$W = [-1, 1]$	(15.12a)
2. $y = \cos x$,	$D = [0, \pi]$,	$W = [-1, 1]$	(15.12b)
3. $y = \tan x$,	$D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,	$W = \mathbf{R}$	(15.12c)
4. $y = \cot x$,	$D = (0, \pi)$,	$W = \mathbf{R}$	(15.12d)

پرڅې یا چپه فنکشنونه لاندې څیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

1. $y = \operatorname{Arc}\sin x$,	$D = [-1, 1]$,	$W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	(15.13a)
2. $y = \operatorname{Arc}\cos x$,	$D = [-1, 1]$,	$W = [0, \pi]$	(15.13b)
3. $y = \operatorname{Arc}\tan x$,	$D = \mathbf{R}$,	$W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	(15.13c)
4. $y = \operatorname{Arc}\cot x$,	$D = \mathbf{R}$,	$W = (0, \pi)$	(15.13d)

د تریګونومتري فنکشنونو برخی په مونوتوني ایترووالونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په ځیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

۱۵ . ۴ ځنځیري (ترړلي) فنکشنونه

پیژند ۱۵ . ۱۵ :

د $x \in D$ لپاره یو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتدیري W سره ورکړ شوی او برسیره پر دې د $z \in W$ لپاره یو فنکشن $y = f(z)$ ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15.14)$$

د x ترړلی (ځنځیري) فنکشن بلل کیږي.

یادونه : یو ترړلی فنکشن کیدی شي چی زیاتو ځنځیرونو سره هم رامنځ ته شي: د بیلګي په توګه $z = f(x$

د $x \in D, z \in W$ لپاره او $w = h(z)$ د $z \in W, w \in W^*$ لپاره

او $y = f(w)$ د $W^* \in W$ لپاره لرو،

نو $y = f[h(g(x))]$ هم د x یو ترړلی فنکشن دئ

بیلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره ترړلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب : په ترلي فنکشن $y = \sin x^2$ کی $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی.
په ترلي فنکشن $y = \sin^2 x= (\sin x)^2$ کي $z = \sin x$ د نننی - او $y=z^2$ دباندنی فنکشن دی

پ : د

$$, y = \cos w \quad w = \sqrt{z} \quad , \quad z = 2x + 4,$$

سره ترلي فنکشن $y = \cos \sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي

ت : په ترلي فنکشن $y=\mathrm{Arctan}1/(x-1)$ کی $z=x-1$ دننني، $w=1/z$ منځنی او $y=\mathrm{Arctan}\, w$ دباندنی فنکشن دی .

یادونه : د یوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځیري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شمیرنی

له » دننه « پیل کیږي .

بیلګي ۱۵ . ۱۶ ته :

ب) د $x = 0.5$ لپاره دی

$$z=x^2=0,5^2=0,25; y=\sin x^2=\sin z=\sin 0,25=0,24740$$

او

$$z=\sin x=\sin 0,5=0,47942; y=\sin^2 x=z^2=0,47942^2=0,22984$$

پ) د $x = 2$ لپاره دی $z=x-1=2-1=1 \; ; \; w=1/z=1/1=1$

$$y=\mathrm{Arctan}w=\mathrm{Arctan}1=\frac{\pi}{4}$$

روښانونه، تشریح:

$y=f(x)$ تحلیلي(شننیزه) وینا بلل کیږي، که $f(x)$ له رییل ګڼونواو بسټیزو فنکشنونوڅخه د زیاتون، کمون،ځل، ویش، له لارو ترلی یا ناترلي(ځنځیري یا نا ځنځیري) جوړیږي

د بیلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنځ بنسټ او همداډول رادیکاند منفی نه شي کیدلی، او یا باید مثبت وي، چی د لوګاریتم نومروس باید

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثبت وي او(Arc sin f(x همداډول(Arc cosf(x تيك د $x \in [-1,1]$ لپاره پېژند لري يا تعريف دي

بيلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحليلي ويناو لپاره دې تعريفېدېري پيداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

راديکاند بايد کميز يا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 <=> x^2 \geq 3<=>|x| \geq 3$ ($x \geq \sqrt{3}$ v $x \leq -\sqrt{3}$)

نو لرو D =(-oe , - 3]∪[3 ,oe]

ب)(y=lg(x+2)+1/(3+2x-x² له لمړي زياتونی کی بايد Numerus > 0 نومروس وي دا په دې مانا چی : $x +2 >0 <=> x >-2$ ،

پس(D1=(-2,oe

په دوم زياتوني کی بايد مات لاندې په صفر برابر نه وي (=| 0) وي . د مات لاندې صفرځايونه

له $3-2x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي .x1=2,x2=-1

نو (D2=R\(2;-1 دی

د فنکشن تعريفېدېری بايد دا اول زياتونی او همداسی د دوم زياتونی تعريفېدېري وي يعنی د D1 او D2

غوڅېدېری: $D=D_1 \cap D_2$ = (2 ,oe) \ {2; -1}

پ) y = Arc sin (x-1)/5 د ارکوس ساين-فنکشن د تعريفېدېري په پام کی نيولو سره بايد باور ولري-

$-1\leq(x-1)/5\leq1<=>-5\leq x-1\leq5 <=>-4\leq x\leq6 => D=[-4,6]$

ت $(y = 1 /\sqrt{(x^2 - 4)}$

راديکاند بايد له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$x^2-4>0<=> x^2<4<=> x>2$ يا $x<-2$

نو دی $D=(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیڅیت توابعو ایکسپلیڅیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y - 8 = 0$

۲ - لاندې فنکشنونه په پارامترانځورونی ورکړ شوي

a) $x = 2t \quad y = -t^2 + 3t$ b) $x = \sqrt{t} \quad y = 2t+1$

c) $x = 1/t \quad y = 2(t-3)$ d) $x (/2)t - 1 \quad y = t^2$

پارامتر له منځه یوسی او په دې سره ورکړی $y = f(x)$

۳ - لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅیړی، او که ممکن وي نو مونوتونې اینتروالونه په تعریفډیریو بیل (تجزیه) کړی، یا لو ته کړی.

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -2x + 3$ c) $y = x^2$

d) $y = -2x^2$ c) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = |x|$

۴ – پریکړه وکړی چې لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = x - 1$

d) $y = 2x^2$ e) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = (x-1)^2$

g) $y = x^2/2$ h) $y = x^5$ i) $y = |x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $y = -2x + 3$ b) $y = (x-1)(x+2)$ c) $y = x^2-x-2$

d) $y = 2x^2 -12x +18$ e) $y = x^2 + 1$ f) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشونونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1$, $D = [0, \infty)$, $W = [0,\infty)$

c) $y = (x+1)^2$, $D = [-1,\infty)$, $W = [0,\infty)$, d) $y = x^3 /2$, $D = [0,\infty)$, $W = [0,\infty)$

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

a) $y = 0,4x -1,6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1/5)(3x +1,5)$

d) $y = 2$ e) $3x -3y -7 = 0$ f) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي. جګوالي کونج $\propto$ دې پیدا شي. او صفرځایونه x_N و ګنی!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږي

a) (2,3) (5,5)   b) (1,1) او (3,7)   c) (-1,0) او (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 -4x +3$ b) $y = x^2-8x+16$ c) $y = x^2 -6x +10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$ e) $2x^2 -10x+12$ f) $y = 3x^2 +6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2} + x + 4$ h) $y = x^2/4 + x + 2$ i) $y = 5x^2 +45$

د ککرې کواوردینات دې پیداشي. صفرځایونه دې وګنل شي او پارابول دې انځور شي

۱۰ – د لاندې تولریشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وګنل شي. فنکشنونه دې د خلفورم باندې انځور شي

a) $y = f(x) = x^3 -6x +5$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

b) $y = f(x) = (1/2)x^3 -x^2 -(13/2)x -5$; $x_1 = 1/5$ $x_2 = 5$

c) $y = f(x) = x^3 +2x + 2x$; $x_1 = -2$ $x_2 = 0,2$

d) $y = f(x) = x^4 -x^3 -28x^2\ 32x +40$; $x_1 = 2$ $x_2 = 5$

e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 -6x^2 +5x +6$; $x_1 = 1,5$ $x_2 = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۱۱ – مات ریشنل فنکشنونه وړکړ شي :

a) $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$ b) $y = \frac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 5x + 6}$

c) $y = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^4 - 13x^2 + 36}$ d) $y = \frac{x}{(x^3 + 6x^2 + 9x)(x^2 - 4x + 4)}$

e) $y = \frac{2x^3 - x^2 + 6x - 3}{x^2 + 3}$.

صفرځایونه دې وګنل شي، پول. تشځایونه او د ± 8 <- x لپاره ځان نیونه!

۱۲ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y = 2^{x-1}$, D = R , W=(0,œ) b) $y = 2^x - 1$, D = R , W =(-1,œ)

c) $y = \log_3 x$, D = (0,œ), W = R d) y = ln(x-1) , D =(1,œ), W = R

۱۳ – لاندې فنکشنونو ته مونوتوني اینتروالونه ورکړی او برخه په څپ فنکشتونه:

a) $y = (x-1)^2$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = (x+1)^2 + 1$

d) $y = x^2 - 4x + 5$ e) $y = 4x^2$ f) $y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$

۱۴ – تړلي فنکشتونه y = f[h(g(x))] په دننه او دباندې فنکشتونو

$y = f(w)$, $w = h(z)$, $z = g(x)$

بیل (تجزیه) کړی(د تعریف–او ارزښتدیریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو)

a) $y = e^{(x+1)^2}$ b) $y = (e^{x+1})^2$ c) $y = \lg\sqrt{2x-3}$

d) $y = \sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y = \tan\sqrt{x-3}$ f) $y = \sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y = \sqrt{\tan x - 3}$ h) $y = \tan\sqrt{x} - 3$ i) $y = \mathrm{Arc}\sin x^2 +$

j) $y = [\mathrm{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y = \ln\sin\frac{x}{3}$ l) $y = \sin\ln(x + \frac{1}{3}$

m) $y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y = \frac{1}{\sin\sqrt{x}}$

p) $y = \mathrm{Arc}\cot e^{2x+1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ - ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندې او دننه فنکشنونو

$y = f(v),\ v = h(w),\ w = (g(z)),\ z = k(x)$

بیل کړی(د تعریف– او ارزښتدیري باندې تیرونه کیدی شي)

a) $y = \left[\operatorname{Arc}\cot\left(e^{x}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\operatorname{Arccot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^{2}$

d) $y = \sqrt{5-\tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln\left(x^{2}-1\right)+1\right]$ f) $y = \log_{3}\left[\sqrt{2^{x}+1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ - د لاندې شننیزویا سیرنیز (تحلیلي) افادو لپاره تعریفدیري پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3-x^{2}}$ c) $y = \sqrt{x^{2}-9}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^{2}-9}}$ e) $y = \frac{1}{x^{2}+x-6}$ f) $y = \ln(2x+5)$

g) $y = \operatorname{Arc}\cos(2x-4)$ h) $y = \sqrt{x}+\frac{1}{x}$ i) $y = \ln x+\frac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شميرنه، د کتې – او کتې د کتې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنستونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې څانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې چې همدا اوس چاپ شوې دي:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برينککن ليکنې چې له پرينمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي، را ژباړل شوي دي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې : همدا اوس ځنې چاپ شوي او ځنې چاپ ته چمتو دي.

<u>Bonn (Germany):</u>

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره :

دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلې

کتب په دوه برخو کې چاپ شوی دی

الف . لومړۍ برخه

ب . دويمه برخه

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزۍ پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میړي شینواری د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپټبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

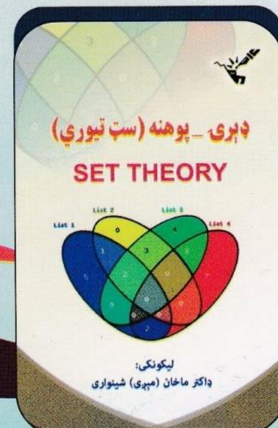
ماخان میړي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډاکتر ماخان (مېږى) شینواری



د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه _ جرمني

VEREIN ZUR FÖRDERUNG DER
AFGHANISCHEN KULTUR E.V

د خپرونو لړ (۱۳۰)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library