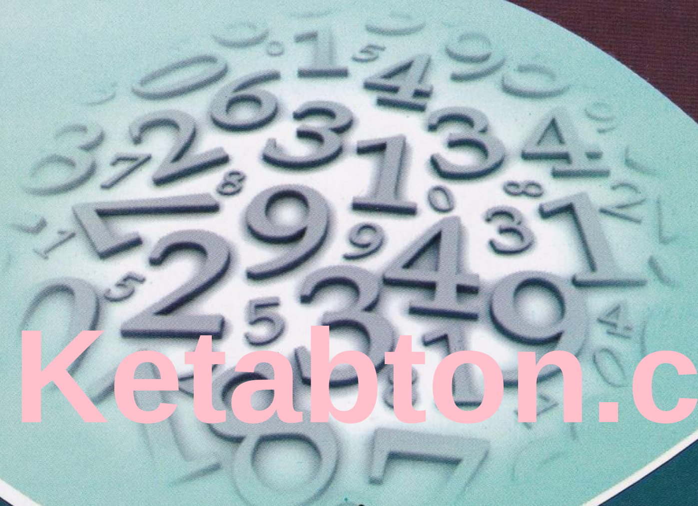
شمیر پوهنه

(ریاضي)

ستر کتاب



Ketabton.com

لومړی برخه

دویم غځیدلی چاپ

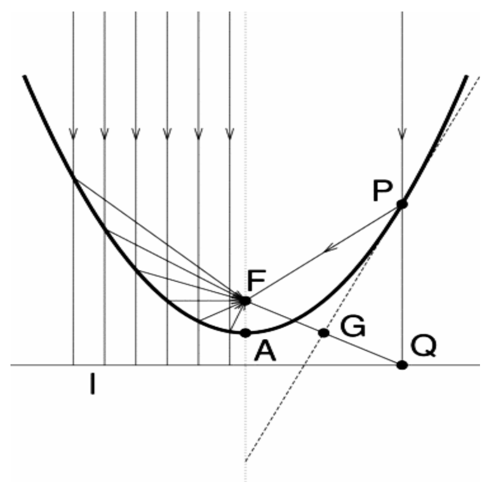
لیکونکی: ډاکتر ماخان (میږی) شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

(رياضي)

سترکتاب



دويم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میرې شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوي ښځو په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زمونږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونده اخستې وي.

کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: د شميرپوهنه ستر کتاب(لومړی برخ)

ليکونکی: ډاکتر ماخان،، ميرې،، شينواری

makhanshinwari@gmail.com

د خپريدو لړی

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندويې ټولنې تخنيکې څانګه

WWW.danishpress.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې ليکونکي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیواولو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودریږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیې له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کته ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتوري ودې ټولنه،، جرمني، د غړو، مرستندویانو او په تیره بیا د مشر تابه څخه زیاته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه یې د دې لیکنو زیاته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کلیوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زیاته مننه کوم:

د ښاغلي دپلوم انجنیر ریحان الدین حساس، ښاغلي دپلوم انجنیر محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترماڼوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بیان، ښاغلي دپلوم انجنیرمحمد ایوب بیان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنیر او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانګې شینواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسین شینواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له میرمن ښاپیری څخه ډېره زیاته مننه، چې زما د لیکنو- نه دا چې مخه یې نه ده نیولې- پوره ملاتړ کړي.

بیا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شینواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

نوې سريزه

سريزه

افغاني، يوناني ، لاتين الف ب

شميرپوهنيزې نخښې

١ . ٠	د شميرپوهنې سم اند يا منطق	١
١ . ٠ ١	پوهنيزه ژبه او پيدايښت يا طبيعي ژبه	١
١ . ٠ ٢	د شميرپوهنې سم اند بنسټيزه کليمې	٣
١ . ٠ ٣ . ٠ ١	ثابتې ، اووښتونې يا واريابلې ، ترمونه	٣
١ . ٠ ٢ . ٠ ٢	وينا	٥
١ . ٠ ٢ . ٠ ٣	د دوه ارزښتوالي اصول يا پرينځيپ	٧
١ . ٠ ٤	وينا فورم يا ٠بڼه او کوانتورونه	١٣
١ . ٠ ٥	اړيين او پوره کيدونکي شرطونه	٢٨
١ . ٠ ٦	د شميرکليمه يا د لغاتو	٣١
١ . ٠ ٧	برابرون او نابرابرون	٣٣
١ . ٨	تمرينونه	٣٨
٢ . ٠	ډير ۍ پوهنه	٣٩
٢ . ٠ ١	د ډيرۍ پوهنې کليمه	٤٠
٢ . ٢	د ډېريو ترمنځ اړيکې	٤٥

(c) ketabton.com: The Digital Library

	برخدېرى	۴۶
	د يوې ډېرى توان يا تواندېرى (توانسټ)	۴۸
۲ ۰ ۳	په ډيرى کې کارونې يا عمليې(۱)	۵۰
	غوڅدېرى يا متقاطعدېرى	۵۲
	د يوې ډېرى يا سټ کمپليمنت	۵۷
۲ ۰ ٤	ځيرونه	۵۸
	تمرينونه	۶۷
۳ ۰	د رييل ګڼونو سره د شميرلو بنسټيزې...	۷۰
۳ ۰ ۱	د ګڼونو- يا اعدادو سيستم جوړښت	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ ۱	پيدايښتي يا طبيعي ګڼونه	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ الف	د پيدايښت يا طبيعي ګڼونو جوړښت	۷۱
۳ ۰ ۱ ۰ ب	د پيدايښت ګڼونو انځورونه او شميرنه	۷۲
۳ ۰ ۱ ۰ پ	د شميرنې بنسټيز قوان ين	۷۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	ټولګڼونه	۸۴
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	الف د ويش تيوري	۸۶
۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ب	غټ ګډ پرويشونی(بزګترين مقسوم عليه ...)	۸۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۳	راشنلګڼونه	۱۰۶
۳ ۰ ۱ ۰ ٤	رييلګڼونه	۱۰۸
۳ ۰ ۲ ۰ ۱	ماتشميرنه	۱۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳	تمرينونه	۱۳۰
٤ ۰	پوتنځ يا توان ، رېښه يا جذر	۱۴۱
٤ ۰ ۱	توان د ټولګنيز په جګ يا اکسپوننت	۱۴۱
٤ ۰ ۲	رېښه او توان د راشنل اکسپوننت يا جګګن سره	۱۴۴
٤ ۰ ۳	توان د رييلګڼ اکسپوننت يا جګګڼ سره	۱۵۱
٤ ۰ ٤	ټولګه	۱۵۲
٥ ۰	لوګاريتم	۱۵۸
٥ ۰ ۱	د لوګاريتم کليمه	۱۵۸
٥ ۰ ۳	ټولګه	۱۶۶
٦ ۰	ګونومتري	۱۶۹
٦ ۰ ۱	بنسټيزه څمککچپوهنه يا هندسه	۱۶۹
٦ ۰ ۱ ۰ ۱	ټکی او کرښه	۱۶۹
٦ ۰ ۱ ۰ ۲	کونج	۱۷۱
٦ ۰ ۱ ۰ ۳	درېګوډئ	۱۷۴
٤ ۰ ۱ ۰ ٤	کونکروانيځ او ورته والی	۱۷۸
٦۰ ۱ ۰ ٥	ولاړکونجيز دريګوډئ	۱۸۴
٦ ۰ ۲	په ولاړکونجيز دريګوډئ کې د ...	۱۸۸
٦ ۰ ۳	په يوونګردئ کې د کونج بلواک ..	۱۹۰
٦ ۰ ٤	د ساين او کوساين جملې	۱۹۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ٠ ٥	تریګنومتریکي کټمټوالی	۲۰۵
۶ . ۵	تریګنومتریکي یا کونجکچیز فرمولونه	۲۱۵
۷ ٠	کمپلکس ګنونه	۲۲۲
۸ ٠	د ښوونې یا ثبوت متودونه	۲۳۵
۸ ٠ ۱	سیده ښوونه	۲۳۵
۸ . ۲	ناسیده ښوونه	۲۳۷
۸ ٠ ۳	د پوره اینډکشن له لارې ښوونه	۲۳۹
۹	لاینیز برابرون له یوې اوړیدونې یا ...	۲۴۳
۹ ٠ ۱	لاینیز برابرون	۲۴۴
۱۰	کومبیناترویک، د بینوم جمله	۲۶۶
۱۰ ٠ ۱	فاکولتیت یا فاکتوریل	۲۶۶
۱۰ ٠ ۲	د بینوم ځله ونه	۲۶۷
۱۰ ٠ ۳	د بینوم جمله	۲۷۰
۱۰ ٠ ٤	کومبیناتوریک	۲۷۴
۱۰ ٠ ٤ ٠ ۱	پرموتیشن	۲۷۵
۱۰ ٠ ٤ ٠ ۲	واریيشن	۲۸۰
۱۰ ٠ ٤ ٠ ۳	کمبینیشن	۲۸۶
۱۰ ٠ ٤ ٠ ٤	د پرموتیشن، واریيشن او	۲۹۱
۱۱ ٠	لانیز الجبري برابرونونه	۲۹۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ ۰ ۱	لانیز برابرون له دوه اوړیدونو یا ...	۲۹۶
۱۱ ۰ ۱ ۰ ۳	دویمه درجه دیترمینانت او د کرامر...	۳۰۷
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤	د ګاوس الګوریتم	۳۱۲
۱۱ ۰ ۱ ۰ ٥	له دوه وو زیات برابرونونه له دوه ...	۳۱۶
۱۱ ۰ ۲	لاینیز برابرونونه له درې	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۱	یو برابرون له درې ناپیژندونو سره	۳۱۷
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۲	دوه برابرونونه له درې ...	۳۱۸
۱۱ ۰ ۲ ۰ ۳	دریمه درجه دیترمینانت او د ...	۳۱۹
۱۱ . ۲. ۴	د ګاوس لګوریتم	۳۲۲
۱۱ ۰ ۳	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳۲۵
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱	د n -م درجې دیترمینانت او د ...	۳۲۶
۱۱ ۰ ۳ ۰ ۲	د ګاوس الګوریتم	۳۲۸
	تمرنونه	۳۳۳
۱۲	الجبري برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۱	نالاینیز برابرونونه	۳۴۰
۱۲ ۰ ۲	څلوریځ ئیز یا مربع برابرونونه	۳۴۳
۱۲ ۰ ۲۰ . ۱	د دوه په جګ برابرونونه ، د وییتا جمله	
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۲	څلوریځ برابرونونه ، چې په نورمال	۳۵۰
۱۲ ۰ ۲ ۰ ۳	د n -م درجې ځانګړي برابرو...	۳۵۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

١٢.٣ دريمه درجه برابرونونه ۳۵۷

١٢.٤ د ريښي برابرونونه

١٣ ترانسڅيندنت برابرونونه ۳۷۵

١٣.١ لوګاريتم برابرونونه ۳۷۵

١٣.٢ اکسپوننشل- يا په جګګڼ برابرونونه ۳۸۰

١٣.٣ ګونومتريکي يا کنجکچيز برابرونونه ۳۸۵

١٤ له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت .. ۳۹۶

١٤.١ نابرابرونونه ۳۹۶

١٤.١.١ بنستيزې کليمې او شمير قوانين

١٤.١ الف اينتروال ۳۹۷

١٤.١.٢ نابرابرونونه له يوې ناپيژندونکی... ۴۰۰

١٤.١.٣ د نابرابرونونو سيستم ... ۴۰۹

١٤.١.٤ نابرابرونونه له دوه ناپيژندونکو سره ۴۱۱

١٤.٢ برابرونونه او نابرابرونونه ۴۱۴

١٤.٢.١ له مطلقه ارزښت سره شميرنه ۴۱۴

١٤.٢.٢ برابرونونه له مطلقه ارزښت سره ۴۱۵

١٤.٢.٣ نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره ۴۲۰

١٥ بلواک يا فنکشنونه يا طابع ۴۳۰

١٥.١ د بلواک کليمه او د بلواک انځورونه ۴۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ۱۵ د بلواک خویونه ۴۳۳

د ستر کتاب دویمه برخه

۱٦ د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ... ۴۶۶
۱ ۰ ۱٦ کرښه ۴۶۶
۲ ۰ ۱٦ ګردۍ ۴۷۵
۳ ۰ ۱٦ ایلیپسې ۴۸۲
٤ ۰ ۱٦ هیوپربول ۴۸۷
٥ ۰ ۱٦ پارابول ۴۹۲
٦ ۰ ۱٦ ټولګه ۴۹۴
۱۷ وکتور شمیرنه ۵۰۲
۱ ۰ ۱۷ د وکتور پیژند یا تعریف، ۵۰۲
په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه ۵۰۲
۲ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو سکالار ځل ۵۰۹
۳ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو وکتوري ځل ۵۱۲
٤ ۰ ۱۷ غبرګهواریز یا موازي الاضلاع ضرب ۵۱۷
٥ ۰ ۱۷ په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو ....
۱ ۰ ٥ ۰ ۱۷ د یوې کرښې وکتوري انځورونه ۵۲۱
۲ ۰ ٥ ۰ ۱۷ د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه ۵۲۴
٥ ۰ ۱۷ د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ۰بڼه ۵۲۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸	پرلپسي او پرلپسي لړۍ	۵۳۳
۱۸ ۰ ۱	پيل	۵۳۳
۱۸ ۰ ۲	د ګنون - عددونوپرلپسي کليمه	۵۳۴
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۱	مونوتوني پرلپسي	۵۴۲
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۲	اريتميتيکي پرلپسي	۵۴۵
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۳	هندسي پرلپسي	۵۴۷
۱۸ ۰ ۲الف	لړۍ	۵۵۰
۱۸ ۰ ۲ الف ۰ ۱	هندسي لړۍ	۵۵۵
۱۸ ۰ ۲ الف ۲	اريتميتيکي لړۍ	۵۵۷
۱۸ ۰ ٤	د پرلپسي او لړيو د پولې ...	۵۵۸
۱۹	د فنکشنونو پولې او ناپريکيدنه	۵۷۸
۱۹ ۰ ۱	بنسټيزې کليمي	
	د پولو يا حدونو خويونه	۵۸۶
	د راشنل، کسري يا نسبتي	۵۹۲
	د مثلثاتي يا درېکوډي کچ توابعو پولې	۵۹۶
	ناپرېکيدنې	۶۰۴
۱۹ ۰ ۲	په پوله ارزښت او ناپريکيدني څو جملې	
۱۹ ۰ ۳	د ناپريکيدونکو فنکشنونو خويونه	۶۱۰
۱۹ ۰ ٤	د بنسټيزو فنکشنونو ناپريکيدنه	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښېرکي ټولګه ۶۱۶

۲۰ دفرنښيالشميرنه ۶۲۶

د تابع تغيرمنځ ارزښت(منځنی قيمت) ۶۲۶

په يوه ټکي کې د تابع ګراف ... ۶۲۸

د لحضوی(سترګورپ) تغير... ۶۳۰

کمښتوپش (تقسيم تفاضل؟) ۶۳۱

دفرنشلوپش يا رابيليدنه يا مشتق ۶۳۳

کمښتوپش او مشتق يا رابيليدنه ۶۳۶

د x_o په ځای کې د فنکشن مشتق ۶۴۳

د تانجنت پيژند او خويونه ۶۴۷

د تانجنت او عمود يا ولاړ ټوليز مساوات ۶۵۰

په بيديا کې جګوالی ۶۵۲

۲۰. ۱ ۰ ۱ الف : د تانجنت يا جګيدني غوره والی

۲۰ ۰ ۲ د فرنښيال يا رابيليدني يا مشتق قاعدې ۶۵۶

د درېګوډېزو يا مثلثاتي ۶۶۲

د اکسپوننشل يا په جګ توابعو.... ۶۷۰

د مشتق استعمال په طبيعي پوهن کې ۶۷۶

د ايمپليښيت توابعو مشتف ۶۸۳

د بنسټيزو رابيليدنو(مشتقونو) جدول ۶۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

	ټولګه	۶۸۸
	د یوې تابع د مشتق قابلیت	۶۹۱
	د معکوس- - یا په څټ توابعو مشتق	۶۹۸
۲۰ .۳	د بنسټیزو بلواکو رابیلیدنه	۷۰۱
	د رول قضیه	۷۱۰
	د وایرشتراس قضیه	۷۱۱
۲۰.٤۰	افراطي ارزښتونه او اوړونټکی	
	د دفرنشل منځ ارزښت قضیه	۷۱۲
	یوعړیزې توابع	۷۱۵
	ځای اړوند افراطي ټکي	۷۲۰
	د انعطاف – یا اوړونټکی	۷۲۴
	د کوې یا منحني بحث یا خبرې	۷۳۳
	ناټاکلي حدونه یا پولې	۷۴۶
	د برنولي او د لو پیتال	۷۵۰
۲۰ . ۵	د غټو ګټو پرابلم	۷۵۷
	تمرینونه	۷۶۷
	په ټوټه کسرونو ټوټه کونه	۷۷۸
۲۱	انتیګرالشمیرنه	۷۸۷
	پیلراوړنه	۷۸۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۱ انتیګرالشمیرنه ۷۸۹

د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال ۷۹۰

بنستیزه یا لومړنی تابع ۷۹۴

سطحه او لومړنی تابع ۷۹۶

ناټاکلی انتیګرال ۷۹۹

د ټاکلي انتیګرال شمیرنه ۸۱۲

تکمیلیدونکي بنسټونه ۸۱۴

د ټاکلي انتیګرال څخه و ټاکلي ... ۸۱۵

د انتیګرالوني قاعدې ۸۱۷

د اکسپوننشل توابعو انتیګرال ۸۱۹

د لوګاریتمي توابعو انتیګرال ۸۱۹

بدلون قانون ۸۲۱

توابع، چې بې د بدلون له لارې... ۸۲۷

ټوټه انتیګرالونه ۸۳۲

د ټوټه انتیګرالوني لار ۸۳۴

د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال ۸۳۸

ناپای(مبهم) انتیګرال ۸۴۱

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې ۸۵۲

د انتیګرالشمیرنې استعمال ۸۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړي یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مهربان او بخښونکی خدای(ج) په نامه

سریزه

ګرانو هیوادوالو !
یو څه چې پیل لري نو پاي هم باید ولري، د داسی یوه کار پیل او پای ته ځما هم لوړه او تنده دومره زیاته ده، چې مېښت یې زما لپاره هم ناشونی دی.

د هیواد په هراړخیزه بدبختیو یو سړی هلته نور هم پوره پوهیدلی شي، چې په یوه کار پیل وکړي، څکه چې سملاسی ورته څرګندیږي، چې په هیڅ شي کی څموږ په هیواد کی لاتراوسه څه نه دي شوي په جوړښتیزه لوړ، په ورانی کی مو د نړی سرکښي ځانته ګټلی.
موږ ګورو چې په مسلکي چارو کی له پیل دا ستونځي موجود دي، چې تراوسه حتی هغه بنستیز مسلکي نومونه مو له خپلی ژبی نه دي را اخستلي، چې مسلك ته اسانتیاوې پیښوي. له کومه ځاي چې ماته روښانه ده، تر نن ورځی په دې هکله چا په شمیرپوهنه د ستونځوبیو لپاره کومی هڅي هم نه دي کړي او ستونځي یي نه دي ګاللي، چې دلته طبعاً افراد ملامت نه دې، بلکه څموږ دهیواد دتاریخ په اوږدو کی دولتني جوړښت، دپوهنی او همدا ډول د کلتور او ژبي د ودې دنده د حکومتونو ده، چې څموږ په هیواد کی څموږ حکومتونو خپل ځانونه د دې کار جوګه نه دې ګڼلي، کیدی شي چی ووایو چي په ریښتیني یي ددې کار مخه هم نیولی ده، چی په افغاني ژزبه دې څه کار وشي.
ګرانو لوستونکو !
داکار څکه په افغانی او په ولسی افغاني لیکل شوی، چی زه په مسلکي اړخ کی یواځی، په علمي توګه په المانی ژبه پوهیږم، د انګلیسی سره هم بلد یم، نو دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

نومونه چی له دې دباندنیو ژبو را اړووم ، داچي په ښوونځي کي ځما لیك لوست په افغاني ژبه وو، په افغاني ژبه په ولسي پوهنیزه توګه اړولی شم. ماته دا کلیمي په مروجه افغاني ژبه نه دي معلومی او یا کومي چي ماته معلومی دي او زه ورسره بلد یم هغه همغه وخت ماته د پوهیدلو له امله د ستونځو ډکی ښکاریدلی .

شمیر پوهنه هم، د نورو پوهنو په څیر، یوه پراخه پوهنه ده او زیاتی ځانګکی لري. دا چی ځما په فکر دا متآسفانه نه یواځي زما لمړی کار دی، بلکه دا د افغاني ژبی په دې توګه یو لمړی علمي اثر دی، چی په دې بنسټیزه توګه په درسي او تمریني ډول سرته رسیږي.

نن نړی او د انسانانو فکر دومره پر مختګ کړی او دا نور هم په خورا چټکتیاوده کوي، چی پخپله انسان ورته د تعجب په سترګه ګوري، مګر موږ لا تراوسه په هغه بنسټیزو ستوځوبیو (د ستونځو حل باندې) پیل نه دی کړی ، که دا په هره ځانګه کی هم وي. ځموږ پرابلمونه هراړخیز دي او هراخیزو هځو ته مو ضرورت شته.

شمیرپوهنه څه شی دی ؟

شمیرپوهنه یو مرستندویه پوهنه ده، چی په ټولو پوهنو کی نغښتي یا په بل عبارت : په ټولو پوهنو کی د پوهیدلو بنسټیزه ریښه جوړه وي، که دا پوهنی اجتماعي وي او که طبعي (پیداینبتی) یعنی که ساپوهنه وي که اقتصاد او که کیمیا وي یا فزیك، بیله شمیر پوهنی یې وده او په پوهیدنه ناشونی ده. شمیرپوهنه له بلی خوا یواځني خپلواکه پوهنه هم ده. شمیر پوهنه بل څه ته اړ نه ده.

ددې کتاب لیکلو زما زیات وخت په بر کی ونیوه او لیکل یې د پوره ستونځو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول کار زما په غاړه وو او بل چا را سره متأسفانه چې مرسته هم نه شوه کولی.

د داسې يوه کتاب ليکنی مسئوليت بايد د دولت په غاړه وي او مسلکي بايد د داسی ليکنی څخه خپل ژوند تآمين کړای شي. د همدې هدف لپاره د مسلك زدکړه کيږي. ما په دې کرښه غوښتل، چې څمونږ د هيواد ستنځي نوزې هم ګوته لك کړم.

زه غواړم چې خپلی د سر خبرې په لاندې توګه رالنډې کړم
- د ليکونکی راهڅونی دليلونه يا د شوق رابيدارول
- د داسی کتاب ليکنه په هغه وخت کی شوني کيږي، چې د ليکونکي اقتصادي ژوند تآمين وي، زه د ټولنيزو مرستو پيسو څخه ژوند کوم، يعنی د نورو خلکو د ماليا پيسو باندې. کار نه پيداکيږي او اجازه يي هم نه لرم چې پيسی وګټم.

- وخت بايد پوره موجود وي او داهم ما پوره لروده، چی له دې د مخه می په سياسی هلو ځلو دا وخت تير کړی او دا اوس می خپل مسلك ته رامخه شوه.

- ددې کتاب ليکلو لپاره بايد يو ليکونکی د خپلی ټولنی او د خپلی ټولنی د خلکو سره مينه ولری او په همدې ډول، د خپلی ټولنی او د ټولنی د خلکو او د ټولو څخه د مخه د خپل ځان لپاره هم خوبونه ولري، خيالونه ولري، چې يواځی د خوبونو رينښتيا کولو لپاره په داسی کار بريالی کيدی شي. ما ددې کار ستونځی په پوره مينه په غاړ واخستلی او دا کار می په پوره مينه سر ته ورساوه.
- په دې برسيره ليکونکی دې وظيفی ته هم بايد شعوري وي، چې دی ددې کار لپاره د ملت په پيسو تربيه شوی او د ملت پور هم بايد ادا شي، د داسی لږ پور اداکولو هم ما ته پوره خوښي راو بخښله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په کور کی هم باید تر یوې ممکنه اندازې پورې یو تفاهم موجود وي یعنی یو غېروالی باید په کورنی کی وي، که داسی هم نه وي ، خو د داسی کار مخه باید ونه نیول شي ، د نورو ستونځوبیېو (ستونځو حل) په خاطر، چی موږ افغانان یی په ځانګړی توګه اقتصادی اړخ کی پوره لرو، چی نه یواځي د ځان لپاره بلکه د خپلوانو لپاره هم باید پام وي، مګر ما دا توان په خپل ځان کی ددې امله نه کوته چی امکانات یې ځما لپاره نه وو.

دوم : د کتاب د لیکنو ستونځی:

د داسی کتاب لیکنه د پوره ستونځو سره مل ده، چی زه دې ستونځو ته په لاندې توګه ګوته نیسم.

۱ – دا کتاب په داسی ژبه لیکل کیږي چی له مری ځخه نیول شوې، زیندی شوې، خپه شوي، خو د مرګ څخه بچ ده، له ښارونو شړل شوې، او یواځی په غرو او رغو کی ژوندی پاتی شوې.

دې ته باید ګوته ونیسم، چی دا کرښي دا مطلب نه لري، چی ګوندې زه به، خدای (ج) دې ونه کړي، د بلی ژبی په خلاف یم. دا زما کار نه دی او نه دا حق ځان ته ورکوم، خو دا حق لرم چی خپلی ژبی، د خپل ولس ژبی ته ، چی کړیدلی او وروسته پاتی ساتل شوې، ګوته ونیسم. موږ افغانانود افرادو په توګه هم افغاني ژبه پرینښوولی چی ولس یعنی د یوه هیواد د ژبی دپرینښوولو حق څوك نه لري، نه دولت او نه افراد . دا کار متاسفانه د افغاني ژبی په ضد او بیا د ټولو په سر کی پخپله د افغانانو څخه شوی دی، د بل ځا څخه څوك باید ګیله من نه وي.
افغاني ژبه، که څه هم پوهانو او د لیك لوست خاوندانو په زیات شمیر، نه ټولو، د لاسه ورکړې، خو بیا هم دا ژبه دا استعداد، د نورو ژبو په څیر لري، چی یوه پوهنیزه لیکنه ورباندې وشی یا بهتره پوهنیزه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ژبه یواځې د پوهولو او پوهیدلو اله نه ده، بلکه د ولس پوهنیزه وده کې پوره غوره رول لري او د کلتوري ودې لاربنودې او بنسټ دی، په دې برسیره د پوهې د اسانوولو خورا غوره اله ده. د یوه ولس د پرمختګ او د ژبې پرمخوده یو بل باندې سیده او په ټې اغیز من دي، چې ولس وروسته پاتې وي، ژبه یې وروسته پاتې ده او که یوه ژبه وروسته پاتې وي، نو هغه ولس د نورو ولسونو سره په پوهه کې سیالي نه شي کولی او د ولس خلك د نورو ولسونو د خلکو سره د سیالی کولو استعداد ځان کی نه شي روزلی، که څه هم استعدادونه به موجود وي.

ما کوښښ کړی چی کم له کمه بنسټیزې کلیمی په افغاني واړوم، چی دا کار می په پوره بریالیتوب، د پوره ستونځو سره سره سرته رسولی او په دې هکله می زیات فکر هم په کار اچولی چی مسلکي بنسټیزې کلیمي په روانه افغاني راوړل شي. هغه نومونه چی ټاکل شوي، داسی نومونه دي، چی د هغه شي ماهیت په کی روښانه دی. دا کا د هرڅه لمړی ددې لپاره باید وشي، چی په پوهنیزو شیانو او نومونو پوهیدل باید ساده شي.
په پوهنه کی له بلی ژبی تیریدنه ناشونی ده او یا په بل عبارت په بله ژبه صرف نظر نه شي کیدی. دلته هم هدف دا نه دی چی افغاني ژبه دې د نورو ژبو د لغاتو څخه پاکه شي، دا کار یواځې هلته کیږي، چی یوه ژبه له پوهنی وروسته پاتې وي.
د پوهنیزې ودې سره ژبی ته د نورو ژبو لغات راننوځي او ضرور هم دي. ما کوښښ کړی چی که د کوم لغات لپاره د پښتو نوم یا نه وي او یا مناسب نه وي، هغه په جهانی مروجه لغاتو ولیکم.
دا چی افغاني د افغانستان ژبه او بیا هم ژوندۍ شوې ژبه ده، دا د دولت کار وو او افغاني ژبی ته د تنفس ورکولو یا بهتره د افغاني ژبی د ژوندۍ څخه خلاسون یا د افغاني ژبی څخه د لعنت د کړی لرې کولو دنده هم د دولت ده، خو ترهغي باید موږ هم دې ته پام ولرو او دا پاملرنه خپله دنده وګرځوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه ولس په ژبنیو ستونځو هلته پوهیدل ممکن کیږي، چې څوك د ژبې سره په پوهنیزه توګه مخامخ شي. په افغاني ژبه دلمړي ځل لپاره داسې یوه لیکنه د ستونځو سره مل ده، مګر ناشونې نه ده.
دلته غواړم چې دې ته هم ګوته ونیسم، چې د نومونو په ټاکلو کې ما کله کله دوه نومونو کارولي، چې هغه مې په ټول کتاب کې شاید اصلاح کړي نه وي، خو په دې باور لرم چې په هدف کې ستونځې نه پیښوي لکه د بیلګې په توګه: ما لمړی ګنپوهنه لکیلې وه، چې وروسته مې شمیر پوهنې بانډې واړوله، شاید په ټولو ځایونو کې مې نه وي شمیرپوهنه کړي. درېګوډي ما لمړی دریکونجې لیکلې وو، چې دا هم شاید د کتاب په اوږدوکې نه وي اصلاح شوی، داسې نور څه به هم وي، خو دې ته بیا ګوته نیسم، چې د پوهیدلو لپاره دا کومې ستونځې ه پیښوي.

۲ – تخنیکي ستونځې:
د ګرانو لوستونکو پام به دې ته راوګرځي، چې څمور لپاره د داسې کتاب لیکلوپه لار کې تخنیکي ستونځې هم خورا زیاتې دي. ما په کمپیوتر د شمیرپوهنې د فرمولونو لیکلو سره ستونځې لرودي، نو له دې امله مې د نورو کتابونو دکاپیو څخه بیاتې کړې او دلته مې سریښ کړې، چې کله کېږې هم سریښ شوې دي او په دې هم پوهیږم، چې دا یو غیر قانوني کار هم دی، خو هیله ده چې د رااخستلشووکتابونو لیکونکې او چاپوونکې به دې ته تفاهم ولري او زه له دوي د هرڅه له مخه د دوي له دې تفاهم څخه د خوښې څرګندونه کوم.

غواړم د ګرانو لوستونکو دې ته هم پام راوګرځوم چې املایي غلطۍ به شوي وي،، خو په پوهیدلو کې به ستونځې پیښې نه کړي، د هغې بخښنه غواړم، زه نور دا کار نه شم ځنډولی، ځکه چې ډیر ورسره ستړی شوم.
ما هیڅ دا فکر نه کاوه، چې زه دې داسې یو کار سر ته ورسوم، خو خدای(ج) په

(c) ketabton.com: The Digital Library

حرکت کی برکت ایښوولی دی.
لنډه دا، چی ددې کتاب د چاپ پورې چمتووالي کار ټول زما په غاړه وو، چی زه ورسره همدومره ستړی شوی هم یم او نورې سهوې او د غلطیئو سمولو لپاره می نور د زړه زور ختلی، که څه هم په دې اخرو ورځو کی د ملګرو په فشار ما ، څما په فکر ټولی سهوې لرې کړی.

دریم – کتاب د کومو لوستونکو لپاره دی؟

ګران لوستونکی به د را اخستلشوو کتابونو څخه دې ته پام راوګرځولی شي، چی دا کتاب د نوو څه ډول لیکنو څخه راټول شوی. ددې کتاب لوستونکی د پوهنتون د شمیرپوهنی، پیدایښتي پوهنو، اقتصاد او همداسی د نورو پوهنو زدکړي دي.
دا کتاب په ښوونځي کی هم کارول کیدی شي، خو ښوونکی باید دې ته پام وکړي، چي هغه څه، چی د کتاب په پیل کی هم دي، په پیل کی نه شي لوستل کیدی.
ځنی څه په همدې لمړی برخه کی راغلي، چی نابلدو زدکوونکو ته به ستونځي پیدا کړي، خو دې ته د لږ پام وروسته، پام راګرځیدلی شي.

څلورم – دلوستلو وړاندیز

ما لږ ستونځي لرودې، چی دا کتاب په خپله خوښه ترتیب کړم. زه مجبور شوم چي یو کتاب د بنستیز کتاب په توګه ونیسم او د نورو کتابونو رااخستنی بیا په کی ځاي کړم.
ما د بنستیز کتاب په څیر د شیفر–جورج–تریپلر کتاب ونیوه. نو له دې امله می برخه ویش هم په همغه ډول کړی. ما غوښتل، چی د کتاب پیل په سمسوح یا بهتره سم اند (لنډ سمند) یعني منطق وکړم، خو هغه په اوومه برخه کي ځیړل شوی.
څما وړاندیز دادی، چی اوومه– اتمه او نهمه برخه دې د هرڅه لمړی ولوستل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

اومه اتمه او نهمه برخه څموږ په هیواد کی زما په فکر ، چی نا اشنا وي. په هر صورت د اوومی برخی سریزه خو دي د هرڅه له مخه ولوستل شي او همداسی د ډیري پوهی سره اشناییته هم خورا ضرور ده

شپیږم . مننه

ددې کتاب لیکلو کی ، که څما د دوستانو لخوا دې کار ته راهڅول نه وی، نو دا کار سرته نه شو رسیدلی، په تیره بیا په المان کي د « افغانستان کلتوري ودې ټولنی »دوستانو. زه له دې د ټولو د زړه له کومی خوښنه کوم. د دې ټولنی د غړو او پلویانو زیاته خوښتنه، چی ددې کتاب چاپ یی د ټولنی په چوکاټ کي په غاړه اخستی.

ډیر محترم پوهاند مجاوراحمد زیار څخه زیاته مننه، چی د لغاتو د نظر څخه تیریدنه او همدا ډول په ټولو ماناوو کي ماته خوراگټوره مشوره هم راکړې.

زما میرمن زما د ستونځو شاهده وه. په زړه ناروغه، خو په پراخه او لوي زړه او پوره حوسیله یی زما د دې لیکنی ملاتړ کاوه، چی بی ددې له ملاتړ به دا کار هم سرته نه وی رسیدلی، که څه هم دا به یی کله کله ویل، چی گوندې پیسی می باید گټلی وی ، خو په دې پوهیږي، چی ددې چانس نه شته، کله کله به، چی به تنگه شوه نو ویل به یي چی نور دا د چرگانو ټونگي باید بس کړم. له دې امله زما دمیرمن ښاپیری څخه هم د زړه له کومی خوښنه کوم او دا پراخه سینه او دا ناروغه زړه یی همداسی ښه تکړه ورته د لوي خداي(ج) څخه غواړم، چی زما د داسی کارونوملاتړ نور هم وکړي.

راتلونکی کارونه: د همدې کتاب سره سم ما یو د هندسی کتاب ژباړلی، چی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

المان د پنځم ټولګی ځخه هندسه په کی راغلی د څه نونورو شمیرپوهنیزو مضوعاتو سره. دا به هم په دې کتاب پسی ترلی چاپ ته ورکړي شي.
زه یو بل خوب هم لرم، چی همدا اوس دې د یوه بل الجبر کتاب لیکلو باندې پیل وکړم. موضوعات می په سر کی راګرځي.
که چیرې نور دوستان او شمیرپوهان د شمیر پوهنی په ځانګه کی څه لیکل غواړي او په دې هکله ستونځې لري، او ستوځوبیو وړاندیزونه لري نو زه به ورسره وعده وکړم، چی دلته افغانان و ملاتړ ته راوهڅوم. د هغو دوستانو سره چې د شمیر پوهنی کوم کتاب ته یی د ژباړنی نیت وي او په افغانستان او پاکستان کی ژوند کوي نود هغو سره به وعده وکړم چی دلته ورته په دې ټولنه کی او یا د ټولنی دباندې د مرستی هلی ځلی وکړم. ځما هدف دادی، چی موږ باید داسی کارونو ته ملا راوتړو. له ما ځخه لټ بل ځوک نه شته، دا چی ما دا کار سرته رسولی ، باور وکړي، چی هر بل افغان یی هم سرته رسولی شي،

په مینه ستاسو ماخان

(c) ketabton.com: The Digital Library

افغاني ، یوناني او الماني الف بی

ا ب پ ت ټ ث ج چ

څ ځ ځ ح خ د ډ ذ

ر ړ ز ژ ږ ص ض ط

ظ ع غ ف ك ګ ق ل

م ن و ه ي ی ې ئ ۍ

یوناني الف بی

Α	α	*Α*	*α*	Alpha
Β	β	*Β*	*β*	Beta
Γ	γ	*Γ*	*γ*	Gamma
Δ	δ	*Δ*	*δ*	Delta
Ε	ε	*Ε*	*ε*	Epsilon
Ζ	ζ	*Ζ*	*ζ*	Zeta
Η	η	*Η*	*η*	Eta
Θ	ϑ	*Θ*	*ϑ*	Theta
Ι	ι	*Ι*	*ι*	Iota
Κ	κ	*Κ*	*ϰ*	Kappa
Λ	λ	*Λ*	*λ*	Lambda
Μ	μ	*Μ*	*μ*	My
Ν	ν	*Ν*	*ν*	Ny
Ξ	ξ	*Ξ*	*ξ*	Xi
Ο	ο	*Ο*	*ο*	Omikron
Π	π	*Π*	*π*	Pi
Ρ	ρ	*Ρ*	*ϱ*	Rho
Σ	σ	*Σ*	*σ*	Sigma
Τ	τ	*Τ*	*τ*	Tau
Υ	υ	*Υ*	*υ*	Ypsilon
Φ	φ	*Φ*	*φ*	Phi
Χ	χ	*Χ*	*χ*	Chi
Ψ	ψ	*Ψ*	*ψ*	Psi
Ω	ω	*Ω*	*ω*	Omega

اومیګا د پښتو ډینه ↑ ↑ په الماني کې ډینه

الماني الف بي

A	a	𝒜	𝒶	𝔄	𝔞
B	b	ℬ	𝒷	𝔅	𝔟
C	c	𝒞	𝒸	ℭ	𝔠
D	d	𝒟	𝒹	𝔇	𝔡
E	e	ℰ	ℯ	𝔈	𝔢
F	f	ℱ	𝒻	𝔉	𝔣
G	g	𝒢	ℊ	𝔊	𝔤
H	h	ℋ	𝒽	ℌ	𝔥
I	i	ℐ	𝒾	ℑ	𝔦
J	j	𝒥	𝒿	𝔍	𝔧
K	k	𝒦	𝓀	𝔎	𝔨
L	l	ℒ	𝓁	𝔏	𝔩
M	m	ℳ	𝓂	𝔐	𝔪
N	n	𝒩	𝓃	𝔑	𝔫
O	o	𝒪	ℴ	𝔒	𝔬
P	p	𝒫	𝓅	𝔓	𝔭
Q	q	𝒬	𝓆	𝔔	𝔮
R	r	ℛ	𝓇	ℜ	𝔯
S	s	𝒮	𝓈	𝔖	𝔰
T	t	𝒯	𝓉	𝔗	𝔱
U	u	𝒰	𝓊	𝔘	𝔲
V	v	𝒱	𝓋	𝔙	𝔳
W	w	𝒲	𝓌	𝔚	𝔴
X	x	𝒳	𝓍	𝔛	𝔵
Y	y	𝒴	𝓎	𝔜	𝔶
Z	z	𝒵	𝓏	ℨ	𝔷

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنیزې نخښې

مساوي	$=$
نامساوي (نوروکتابونو کی)	$\neq$ (=)
کوچنی له	$<$
لوي له.................	$>$
کوچنی یا مساوي له	$\leq$
لوي یا مساوي له	$\geq$
ډیر کوچني	$\ll$
ډیر لوي	$\gg$
ورته یا متناسب............	$\sim$
کونګروائنغ	$\cong$
همداسی یا ښایي یا په ګوره کوي	
کتمت...................	$\equiv$
غبرګ	$\parallel$
ناغبرګ..................	$\nparallel$
ولاړ په	$\perp$
دریګوډی	$\triangle$
ګردی	$\bigcirc$
نیمی یا قطر...............	$\oslash$
کونج	$\angle$
د دوه کرښو g او h ترمنځ کونج	$\angle\,(g,h)$
کرښه، له A و B ته	$\overline{AB}$
له A و B ته لوریزه کرښه.....	$\overrightarrow{AB}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لینده.................... AB

مطلقه ارزښت د .... |a|

ایماجینار یوون (واحد)....... i

د اویلرګڼ = ...2,7182818 e

پي د لودولف ګڼ π = ...3, 14149

د په لور هڅیږي یا کونورجنت کیږي ->

ناپای.................... œ

د x فنکشن یا په واك چي بلواك مو بللی f(x)

(لوستل یي (f د x یا د f, x لنډ : fx)

د x ځیرونه په f(x) : لیکو: f(x) → x   f: x →

دلته h د x فنکشن، g د x فنکشن h(x); g(x)

لیمس یا پوله............... lim

	ساین	sin
تریګونومتریکي	کوساین	cos
بلواك	تانجنت	tan
	کوتنجنت...........	cot
	ارکوس ساین.........	arc sin
ځیکلومتریکي	ارکوس کوساین	arc cos
بلواك	ارکوس تانجنت	arc tan
	ارکوس کوتانجنت.....	arc cot

لوګاریتم و بنسټ a ته $\log_a$

لوګاریتم و بنسټ ۱۰ ته $\lg_{10}$

دیکادیکي لوګاریتم.....

لوګاریتم و بنسټ e ته ln

طبعي یا پیداینبتي لوکاریتم

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس گڼونه........... $\mathbb{C}$

رییلگڼونه .... $\mathbb{R}$

ټولگڼونه .... $\mathbb{Z}$

نامنفي ټولگڼونه یا

طبعي گڼونه د صفر سره $\mathbb{N}^*$

طبعي گڼونه .... $\mathbb{N}$

تعریفډیری .... $\mathbb{D}$

ارزښتډیری........... $\mathbb{W}$

حلډیری .... $\mathbb{L}$

د ډیري A پوتنځډیری $P(A)$

ډیري............. M,N,A,B

تشډیری .... $\emptyset$

برخه ډیری...........

پورته یا لویډیری (چې بل ډیری خوندي لري)

ټولنډیری............ $\cup$

غوځډیری .... $\cap$

د A کومپلیمنت ..... CA , A'

د ډیریو ورته والی ...... $A \sim B$

د ډیریو ځل.......... $A \times B$

لوستل B اتیران A یا - ځل -

توپیرډیری : A بې له B ده $A \setminus B$

دلته: a د b پرویشونی ده یاa b ویشي $a \mid b$

د a اوb غټ گډ په ویشونی(لنډ : غ گ و) $ggt(a,b)$

د a اوb کوچني گډ زیاتځله(لنډ : ك گ ځ) $kgv(a,b)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته : a د M توکی دی .... $a \in M$

او a د M توکی نه دی .... $a \notin M$

ټولنخښه (د ټولو x لپاره باور لري) $\forall$

د موجودیت نخښه: یو x موجود دی $\exists$

کونیونکشن A او B لیکو $A \wedge B$

دیسینکشن A یا B لیکو $A \vee B$

(کله کله الترناتیو)

ایمپلیکاشن: له A څخه B لاس ته راځي $A \Rightarrow B$

نیګیشن یا نه والی $\neg$

د A او B ویناو ورته والی یا اکویوالنت $A \Leftrightarrow B$

له A څخه B لاس ته راځ او له B څخه A لاس ته راځي.

ماتریکس......... A نورو کتابونو کي $\|A\|$

دیترمینانت $|A|$

د a څخه n–امه ریښه $\sqrt[n]{a}$

د x اکسپوننشلبلواك

د n – فاکولتیت یعنی $n!=1.2.3....n$ $n!$

بینومخلوونې $\binom{n}{p}$

لوستل: n په p باندې

له a تر b واز اینتروال $]a,b[$

$= \{ x \mid a < x < b \}$

له a تر b بند اینتروال $[a, b]$

$= \{ x \mid a \leq x \leq b \}$

کینې واز اینتروال $]a, b]$

$= \{ x \mid a < x \leq b \}$

ښی واز اینتروال $[a, b[$

$= \{ x \mid a \leq x < b \}$

د زیاتون نخښنه (سیګما)	$\sum_{i=1}^{n}$
که د زیاتوننخښنه داسې وي	
لوستل: له $i = 1$ تر n پورې	
څلنخښنه (پي)	$\prod_{i=1}^{n}$
که داسې لیکل شوي وي	
لوستل: له $i = 1$ تر n پورې	
پرموتیشن یا بدلون	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ ۰ د شمیرپوهنې سم اند (د ریاضیاتو منطق (logic))

سم اند (سماند) یا منطق (logic یونانی کلمه ده، چې اند(فکر) یا وی(لغات) ته وایی).

د وینا د ټیک یا کره فرمولولو لپاره د سم اند(منطق) څخه کاراخستل کیږي د فورمال سم اند، د سم اند پوهنی بنسټ، د فکر ډول او فکر کولوقوانینو په څیر یې څیړنه د اریستو تلس(۳۸٤ تر ۳۲۲ ز ۰ ک۰ ا)) له خوا کینبول شوې۰

د ریاضیاتو منطق(د شمیرپوهنی سم اند) د شمیر پوهنې د یوې برخی په څیر پرمختګ یا وده وکړه۰ سم اند د شمیرپوهنی بنسټ دئ او د شمیر پوهنی په ټولو څانګو کی ننوتی۰

یادونه : سم اند په خپله ختّه کې په فلسفه پورې تړلی مسلک دئ نو له دې امله دا لیکنه د ټولو مینه والولپاره په زړه پورې خوندیونې(متن) لرودئ شي۰ هیله ده، چې ګڼ هیوادوال به یې وګوری او کمي به یې راپوره کړي، دلته او یا په ځانله لیکنه کی۰

۱ .۰۱ پوهنیزه ژبه او پیداېښتي- یا طبیعي ژبه

اند (فکر) او ژبه یو له بل سره داسې تړلي، چې بیلیدنه یې ناشوني ده. په ورځني ژوند کی انسانان خپل اند یا فکر په طبیعي ژبه څرګندوي، مګر دا د مسلکي ژبی په څیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهنی(علم) لپاره بسیا نه کوي، ځکه چی د ځنو لغاتو مانا کره یا ټینګه نه ده ټاکل شوی، دا په دې مانا، چی په طبیعي ژبه کی یو لغات بیلی بیلې ماناوي لري لکه لور(د ریبلو لور) او لور(په کومه لور) او یا ځو لغاتونه ، لکه شلغم، ټیپر او منګړیتې، چی همغه یو څه یا شی په ګوته کوي.
په مسلکی نومونو کې یو ځوترمینولوجي(Terminology لاتین، یونانی): په یوه مسلک کی شته(موجود دي) د مسلکي لغاتونو ټولګه او په همدې توګه د هغوي ښوونه ، منځ ته راوړل کیږي، چې د کلمو موخور(هدفمند) کره یاکلک ایښوولو (ځای پرځاي کولو) د نورمي ویناو استعمال او د هغوي او د ورځنی ژبی ویناودد څخه ګټه اخلي٠

په دې ډول په شمیرپوهنه یا ریاضیاتو کی هم یوه پوهنیزه ژبه منځ ته راغلې، چی له پیدایښتي یا طبیعي ژبې او یوې ځانګړی ترمینولوجي سره یوځاي شوې یا په بل ډول : د پوهنیزې ژبی او یوې ځانګړي ترمینولوژي ټولګه ده٠

له دې امله شمیرپوهنه په یوه لوړه کچه ټیکوالی(Exaktheit) ، په یوه لنډ، روښانه ، څرګند او له دې امله یو لیدوړ « وینا ډول» درلودی شي٠

شمیرپوهنه او سم اند یا منطق دواړه دیوې سمبولیک ژبی څخه د کارونی یا استعمال کار اخستی شي. د لغاتو په ځاي نخښی ایښوول کیږي، چی مصنوعي منځ ته راغلي او په ځانګړو ماناو سمبال دي٠

د شمیرپوهنی پوهنیزه ژبه کې غوښتنه داده، چې باید په کلکه او روښانه توګه د ریښتونو (Realität واقعیتونو) شیانوObjects ، د هغو شمیرنیزو ځیرو او د دې لپاره پیدا یا منځ ته راغلو نخښو ترمنځ توپیر وکړي. شیان له انسانانو احساسیږي، د یوه ذهنیت (Abstruction ابسترکشن) له لارې په یوه کلیمه ځیره (متصور؟) کیږي. او شته والی یې د یوې نخښې جوړښت construction ممکنوي. ځیره کوونه یې د شمیرنې شیان دی او یوه «نخښونه» غوره کوي، چې دیوه نوم اوزیات وخت د یوې نخښې په ځیر ځان نیسي، د بیلګې په توګه : لکه هر طبیعي ګڼ(عدد) د یوې نخښې داسې په نامه د عددنخښې (ګڼنخښې) له لارې انځوریږي. دا نخښه ځیفر Ziffer یا ګڼنخښه(عددنخښه)، چې عربې همغهٔ صفر دی, بلل کیږي. داسې نخښونې دبنسټیزو نخښو څخه منځ ته راغلي. په درسي ځاي سیستم کې بنسټیز ځیفرونه یا ګڼنخښې په لاندې ډول دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ۹ .

۱ ۰ ۲ د شمیر پوهنی سم اند بنسټيزې کلمي

۱ ۰ ۲ ۰ ۱ ثابتی، متحولې او ترومونه(۱)

Constants, variables, terms

په شمیرپوهنه کې شیان ، د شیانو ترمنځ اړیکي او د شیانو تړني په نخښو(سومبولونو) انځوريږي.

۱ – شمیرپوهنیزې نخښې

- د ثابتو(تل همغو) لپاره نخښې (علامې): دا د یوه کره ټاکلي مانا لپاره نخښې دي یانې تغیر نه خوري، لکه ۷ ، ۱۲ ، π ، e, او داسې نور

- د اووښتونو یا واریابلو(متحولو) لپاره نخښې: دا د یوې ورکړ شوې ډیرۍ یا سټ (په ډیرۍ پوهنه کی روښانه کيږي) داسې په زړه پورې توکی لپاره یوه نخښه ده، کومه چی د اووښتونویا متحولو بنسټست یا-ډیرۍ بلل کيږي، دا په لاتین تورو په نخښه کيږي او کله کله په اندکس(ز۰ ایندکسونو) یا پيژندنخښه index (ز۰ پيژندنخښې Indices) چې ایندکس د تورو پښو ته راځي په نخښه کيږي۰

لکه: $a_1; a_2; b_i; i = 1,2,3 \ldots$

- اړیکنخښې : دا د شیانو اوګڼونو یا اعدادو ترمنځ د اړیکو نخښې دي لکه $<$, $>$، = , $\leq$, $\geq$,

- د نښلونو،کارونو، تړنو یا عملیونخښې : لکه زیاتون-(جمعه)، کمون-تفریق-) ، ځل-(ضرب-)، او ویش -یا تقسیم نخښې: / ، : +, -, *

(c) ketabton.com: The Digital Library

- تخنیکي نخښی : لکه سیمیکولوم (,, ,,)، نوکان ( ) او نور ډولونه یې او کوما ،

د نخښو لړۍ : که نوکان، واریابلی(اووښتونې), ثابتی او د هغوي یوځاي ایښودل د اړیکو- ، نښلونو- ، او تخنیکی نخښو یوځاي ایښوول موخه ور یا هدفمند یو په بل زیات شي، نو یوه د نخښو لړی ترې منځ ته راځی٠

(۱) ثابتې((تل) همغه یا تل همغه، همغه ارزښتیزې) ،

متحولې :اوښتونی یا اوړیدونی یا واریابلې او ترمونه

بیلګه :

الف : د 3.(1 + 2a) – a + 144 یوه د نخښو لړی (ترادف) ده

ب : 3a – 6= 11x).(12 – b) ، دا د نخښو لړی نه ده، ځکه چې د نخښو لړۍ موخه وره یا هدفمنده نه ده ایښوول شوې، د برابرنخښې پسې نوک نه شته، دا په دې مانا، چې له دې ځخه څه نه پوهیږو.

۲ - ترمونه terms, Termen : که په یوه لړۍ کې، یواځې ثابتې (همغه)، اووښتونې(متحولې، واریابلې) نښلونې او تخنیکي نخښې کارول شوې وي، یانې اړیکې نه وي کارول شوي، نو دې ته ترم ویل کیږي. هر یو ترم پورې که واریابلی ولرې پیژندډیرۍ یا تعریفسټ هم اړه لري، دا د داسي اووښتونو یا متحولو اصلی بنسټسټ یوه برخډیرۍ او یا هغې سره برابر برخه سټ یا - ډېرۍ ده، په کوم کې چې د ترم ارزښت بیرته د بنسټډیرۍ توکی دی. د ترم ارزښت شمیرل کیدی شي، که د مخه ټاکلشوې نارونې یا عملیې اجرا شي، که چېرې اووښتونې یا واریابلې د پیژندډیرۍ د توکو نخښونه غوره کړي. دا په لویو لاتین تورو(اکه: $(T, T_1, T_2$ په نخښه کیږي. که ترمونه اووښتونې ولري، نو د اووښتونو یوه ورزاته نخښه په نوکانو کې نیولکیږي، لکه :

T(x); T(x,y)

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : ترم 3/4 + 126 ، چې اووښتوني یا متحولي نه لري په T سره په نخښه کوو او

لیکو: T=126 + 3/4 یا $T = 126 + \frac{3}{4}$

ب : ترم 2x + 10 چې اووښتوني یا متحولي x لري یاني T(x) = 10 + 2x ۰ د اووښتونو بنسټډیرۍ یا ـډیرۍ دې یا د طبیعي اعدادو ډیرۍ N°وي

تعریفډیرۍ د بنسټډیرۍ سره برابره ده، که په ترم کې د اووښتوني یا واریابلی x پۀ ځاي

یو پیدایښتي ګڼ یا طبیعي عدد 2 کیږدو، نو د ترم ارزښت دئ : T(2) = 14

پ : (x+2y)/x یا $\frac{x+2y}{x}$

ترم دئ چې دوه متحولې لري او په T(x,y) سره یې په نخښه کوو۰ د اووښتونو یا متحولو بنسټډیرۍ دې د پیدایښتي یا طبیعي اعدادو سټN وي, نو د x لپاره تعریفډیرۍ N° ده۰ د y لپاره N (پیدایښتی ګڼونډیرۍN° تعریفډیرۍ لپاره ترم نه دئ تعریف یاپیژند نه لري)

د x = 0 لپاره ترم نه دئ تعریف یا پیژند ند لري

د ترم T(x,2y) = (x,y) /x یا $T(x,2y) = \frac{x+2y}{x}$

ارزښتشمیرنه د x=2 او y= 3 لپاره په دې ډول ده :4 = 2 / (2+6) = T(2,3)

یادونه: د ګڼونو لپاره دې دریمه او څلورمه برخه وکتل شي، چې هلته ګڼونډیرۍ ورکړ شوي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې انسان د خپل چاپیریال د ټولو شیانو او پیدایښتونو سره لاس په ګریوان دی، نو پوښتنې او هیلې رامنځ ته کیږي،غوښتنې لري او ویناوې کوي، په کومو ویناو کې،

چې شیان او رېښتونی(واقعیتونه) بیرته هنداره (منعکس) کیږي یا په یوه څه یا شي، چی وینا کیږي، نو موخه ترې د هغه څه رېښتون حالت یا ځاننیونه ده۰ یوه وینا په واقعیت کې ټیک هلته رېښتیا ده، کله، چې په هغې کې شي حالت یا بهتره شي ځاننیونه په رېښتونې شته یا موجود وي، په بل حالت کې دا وینا ناریښتیا (غلطه) ده. موږ نیسو، چې دا څه دې په شمیرپوهنه کې کره ټاکلي وي او پریکړه دې پرې کیدی شي۰

پژند(تعریف) ۱ ۰ ۱ :

وینا د یوه شی ، څرنګوالي (چې څنګه دی)، د هغهٔ بیرته هندارونه یا منعکسونه ده۰ (دا په دې مانا، چې وینا یو شی په وینا کې همهغسی ښایي لکه څنګه چې دی له دې امله شي هندارونه یامنعکسونه)، چې د ژبی له لارې وړاندې کیږي یا په همدې ډول په نخښه کیږي۰

یا په بل عبارت وینا د کلیمو داسې هدفمند یوځایوالی یا یوځاي اینښوول دي، چې د یوه شی حالت (ځاننیونه) یا شکل او د شیانو رېښتونې اړیکی بیرته هنداره یا منعکسوي او موخه وردی، چې د هغه دریښتیاوالي پوښتنه رامنځ ته کړای شي۰

یا په بل ډول :

د وینا لاندې سری یو ژبنی یوون، یا یووالی (واحد unit ,Einheit)پوهیږي، کوم چې د شي اړیکی (د شي څرنګوالی) بیانوي۰ دلته دا مهمه نه ده، چې دا وینا په کومه ژبه، په پیدایښتي (طبیعي) او که په مصنوعي ژبه ویل شوې (افاده شوي) دا هم غوره نه ده، چې دا وینا د طبیعي پوهنو لپاره ده، د هوا حالاتو لپاره او که د بازار د نرخ لپاره ده۰

په بل او ورځني ډول: یوه وینا یوه جمله ده یا فرمول دی، چې یا رښتیا او یا نارښتیا ده۰ داسې هم ویل کیږي، چې وینا یو «رښتیاارزښت » ،، رښتیا یا نا رښتیا ،، لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعني : د شمیرپوهنې سم اند لپاره پریکړی د وینا « رېښتیا ارزښت»(رښښتیا یا نارښتیا) دی٠ نور خویونه په راتلونکی کې نه څېړل کیږي٠

ویناوې د لاتین په لویو تورو A , A* په نخښه کوو او داسې نور٠

۱ ٠ ۲ ٠ ۳ د دوه ارزښتوالی اصول یا پرینڅیپ جمله

هره وینا یواځی یو ممکن « رېښتیا ارزښت» لرودی شي، دا په دې نامه، چی وینا یا رېښتیا ده او یا نارېښتیا. (د دریم نه والی اصول یا پرینڅیپ)٠

دا په دې ماناو چې ددې دوه ارزښتونو تر منځ بل ارزښت ناشونی دی. دوه ارزښتوالی او د دریم نه والی باید سره بدل نه شي.

که یوه ژبنۍ افاده یا وېینه د وینا په څېر ترتیبوو، دا بیا دلته ارزښتناکه ده، چی د وینا ارزښت حتمآ باید څرګند یا معلوم نه وي٠ که بالاخره ټوله پوهنه د رښتیا لور غوره کړي وي، بیاهم موږ څرګند ژبنیو موادو ته اړ یو، چی د هغه شي حالت (ځاننیونه) افاده کړاي شو یا وویلی شو، د کومو په شته والی یا نه شته والی، چی پریکړه وشي٠

ټولې ویناوې له دې امله په دوه ټولګیو یا کلاسو ویشل کیږي، د رښتیا ویناو ټولګی او د نارښتیا ویناو ټولګی یا کلاس(صنف)٠

که وینا رېښتیا وي، نو رېښتیا ارزښت یې رېښتیادی او په w سره یې ښایو، که وینا رېښتیا ارزښت نارېښتیا ولري ، نو په f یا،، نه،، یې ښایواو وایو، چې د وینا رېښتیا ارزښت نارېښتیا دی

تکرار : هره جمله، چی « رېښتیا ارزښت» (رېښتیا یا نا رېښتیا) ولري، وینا بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

شميرپوهنيز سم اند(منطق) د ويناو سره سر او کار لري..

بيلګې:

غونډاله (جمله)

الف : » د کابل سين د کونړ له سين سره ګډيږي« رينښتيا وينا ده٠

ب : $3 + 4 = 7$ رينښتيا وينا ده

پ : » ٦ لومړنی ګڼ دی« دا ناريښتيا- يا ناتيک وينا ده٠(د اعدادو په برخه کې لومړني اعداد ياګڼونه کتلکيدی شي)

پوښتنجملی : » ته د څو کالو يې ؟ « نه شي کيدی يو رينښتيا ارزښت باندې تنظيم شي٠ له دې امله وينا نه ده٠

نورې بيلګې :

ويناوې دي:

(دپيتاګوراس (فيثاغورس) جمله٠

د کاتيتونو يا د يو بل سره ولاړو يا عمودو اړخونو يا ضلعو مربعګانو (څلوريو) زياتون(جمعه) د هيپوتينوزې(اوږده اړخ قايمې زاويې ته مخامخ ضلعه يا قطر) د څلوری يا مربع سره برابر دی.

نورې بيلګې :

سرک لوند دی

ټول سپي خطرناک دي

$3 > 5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې که يو کاربن له دوه اکسيجنه سره يوځاي يا زيات شي، نو کاربن دوه اکسيډ CO_2وښايي

د دي پرڅېړ يا مخامخ يا پر خلاف يا برعکس : ويناوې نه دي:

د کابل ښار;NaCl ; لمده کوڅه

د افغانستان د خلکو ژوند په ديرش کلن جنګ کې

لاندې ويناوې

کيميا يوه طبيعي يا پيدايښتي پوهنه (علم) ده

۷ پر دريو بی له پاتې (باقي) نه ويشل کيږي

د وينا «ريښتيا ارزښت » ريښتيا لري

لاندې ويناوې

برلين يو کوچنی ښار دی

3 < 5 پنځه له دريو کوچنی دی

ټول لومړني اعداد ياګڼونه ناجوړه (طاق) دي

کابل د کونړ پر سين پروت دی

هره يوه له دې ويناو « ريښتيا ارزښت » نا ريښتيا لري

نومه ونې: پورته مې د جفت لپاره، چې ورسره بلد يو جوړه وليکه، نو طاق ته ناجوړه وايو.

په لاندې کې به وڅېرو، چې ويناوې شته، چې نورې ويناوې د خپلې برخی په څير په ځان کې خوندې(لنډ : خوندي) لري. داسې ويناوو ته يوځاېشوې يا يوځای ايښول شوې يا ځنځيري ويناوې وايو او که غواړئ ! مرکبې ويناوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره بیلګه راوړو » کهٔ د کوم ګڼ(عدد)a پروت زیاتون یا پرته جمعه په 3 ویشوړ وي، نو داعدد یا ګڼ په 3 ویشوړ دی، یانی که عدد 1521 ولرو ، نو د دې عدد پرته جمعه 1+5+2+1=9 په 3 ویشوړ ده له دې لاس ته راځي، چې پخپله ۱۵۲۱ هم په 3 ویشوړ دی٠

که کومه وینا په داسې ویناوو ویشوړ یا ټوټه کیدونکې نه وي، نو دې ته بیا ساده وینا ویل کیږي٠

لکه : سپین غر یوه خورا جګه څوکه لري

یوه بله بیلګه د یوځای شوې(ځنځیري) وینا لپاره

سپینغر خورا خواریکښ دی، هغه په دې پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي٠

څرګنده ده، چې دواړه ساده جملې د برخویناو په څیر یوځاي شوي ویناوې دي: » سپینغر خورا خواریکښ دی« همدا ډول » هغه (سپیغر) پوهیږي، چې نور کارته وهڅوي«٠

دا ویناوې کیدی شي په نورو ډولونو هم یو له بل سره داسې وتړل شي، چې رښتیاارزښت یې همغه پاتې شي٠

د بیلګي په توګه:

۱ - سپینغرخورا خواریکښ دی٠ یا هغه پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي

۲ - ځکه، چې هغه پوهیږي، نو کار ته وهڅوي، نو سپینغر خورا خواریکښ دی٠

۳ - دا چې سپینغر پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي ، نو سپیغر خورا خواریکښ دی٠

٤ – سره له دې، چې هغه پوهیږي، نور کار ته وهڅوي، هغه خورا خواریکښ دی٠

ګورو، چې په دې ډول یو له بل توپیریدونکی تړلې یا ځنځیري، یا یوځاي شوی ویناوې جوړیږي، چې په خپله رښتیاارزښت کی یو له بل توپیر کیدیٔ نه شي٠ د دوي توپیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوي یو له بل سره تړلو ځرنګوالي له لارې مخ ته پروت دئ یا رامنځ ته شوی دئ.
په لاندې کې به ممکنه« ویناتړنه» (یا نورهم ښه: ویناځنځیرونه) تر څیړنې لاندې ونیول شي.

پیژند ۱ ۰ ۲ :

یوه «ویناتړنه» یا یو «ویناتړاو» (نوره هم ښه: «زنځیرونه») داسې ژبنۍ ویینې(افادې) دي، چې د هغوي په مرسته له یوې یا ډېرو وېناو څخه نوې ویناوې جوړیدی شي.

موږ د سم اند یا منطق ستېرینځیپ په لاس ته راوړنو سره ځانونه په داسې وېناو رابندوو، کومې چې داسې جوړې وي، چې ریښتیا ارزښت یې یواځې او یواځې د «برخویناو» ریښتیا ارزښت په واک کې وي.

بیلګی

الف: سپین ډېر خواریکښ دی، هغه په دی پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي.

ب : سپین یا راځی او یا لوبه نه کیږي.

پ – د فوټبال په لوبه کې نه دباندې رفري او نه دننه رفري فاول یا ناسمي ولید.

۱ ۰ ۲ ۰ ٤ ویناتړنه یا وینابلواک (- فنکشن یا – تابع)

د ویناتړنو (عملیو)په هکله مو پورته بیلګو کې ولیدل، چې که څوک د تړنو لپاره « او » او یا « سره له دې» ونیسي تل یوه یوځاې شوې وینا منځ ته راځي. دا وینا هلته او فقط هلته ریښتیا ده، چې دواړه «برخویناوې» ریښتیا وي. دلته د خبرو پرځاې غواړو «ریښتیا فنکشن یا رښتیا تابع» وپیژنو. موږ پریکړه کوو، چې د په زړه پورې ویناوو (ویناواریابلو یا وینا اوښتونو(وینا متحولو)) لپاره سومبولونه p,q,r,... او یا ا ، ب پ، وکارول شي یا استعمال شي. موږ دا غواړو ساده پیل کړو، یانی د یوه یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځاینیونکی(یوځائیز یا یوګوني) بلواک یا فنکشن او که همغه پخوانی ډول تابع مو ښه راځي، له تابع څخه۰

یادونه: د بلواک یا تابع کلمه وروسته څیړل کیږي، دلته د بلواک یا فنکشن پرځاي ویناتړنه یا عملیه بسیا کوي. دا ځنی ویونه(لغات) ستونځی لري، چی د ښونځي زده کوونکي یې هغه ساده ډول فکر ته رابولم او د لوړو زده کړو خاوندانو ته دا کومې ستونځی نه لري.

نه والی(نفی)Negation

د وینا تړاو یا ویناتړنی(عملیې) «نه والی»: دیوی ویناP نه والی هغه وینا ده، چې هلته او یوازې هلته د رینښتیا ارزښت ناریښتیا لري، چیP رینښتیا ارزښت رینښتیا ولري۰

موږ د وینا P نه والی نفی په Pنه سره ښایو ، شمیرپوهنیزه نخښونه یې په لاندې توګه ده ¬p په یوه جدول کې رینښتیا فنکشن یا ریښتیابلواک کې داسی څرګند وو(دا چې زه کله کله هغه شمیرپوهنیز سومبول د نه p لپاره ¬p نه شم لیکلی، نو دا به همغسې p نه ولیکم.

P	Pنه یا ¬p
w	F
f	w

د یوې وینا P تکرار نه والي یا بیا نه والي لاس ته راوړنه، لکه چې لاندې یې ګورو، هم خورا څرګنده ده .

p	¬p	¬¬p
w	f	w
f	w	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه واره نه والى د همغي لومړنۍ وينا رښتياارزښت لري

په پيداييښتي ژبه کى نه والى په«نه» يا « نا » خپل رښتينوالى مومي٠ «اباسين هغه خپل ټاکلى وخت ته را نه غی٠ دا د اباسين خپل ټاکلي وخت ته راغی « نه والی» دی٠

نه والى ته بيلګه : د وينا ¬A نه والى : "7 < 3 ,, وينا نهA ده: دا چی A رښتيا ده، نو ¬A نارښتيا ده٠

ترنه(عمليه) يا کنجنکشن Conjunction (لاتين: ترنه، دلته د « او (and)» ترنه يا تړاو):

وينافورم يا – بڼه:

د وينا په څېر يا - مخامخ يا - برعکس وينا بڼه رښتيا ارزښت نه لري، د وينافورم يا – بڼې لپاره بيلګی دي لکه پوښتني، امرونه او نظرونه ياعقيدې:

١ – هوا څنګه ده ؟

٢ - کورته لاړ شه

٣ – شين يو ښه رنګ دی٠

که په ترمونو کې، چې واريابلی يا اوښتونې لري، اړيکنخښی وليکل شي، يوه وينابڼه منځ ته راځي٠ يوه د نخښو لړۍ کم له کمه د يوې اووښتونې يا متحولې د بيلګې په توګه

3 + x <5 د بنسټيزورشو N کې نه ريښتيا ده او نه ناريښتيا٠ دا له دې امله وينا نه ده٠ که چيرې د واريابلې يا اووښتونې يا متحولې پر ځاي ٠ او ١ وليکل شي، نو بيا يوه رښتيا وينا ترې منځ ته راځي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې په ځاي يې نور د پیدایښتي ګڼونو توکی ځاي په ځاي شي، نو بیا ناريښتيا ویناوې منځ ته ترې راځي۰

دا چی اووښتوني یا متحولي د بنسټيزی یا بنسټ سټ څخه په خوښه توکی اخستلی شي، نو له دې امله دا اووښتوني د خپلواک یا ازاده اووښتوني(متحولي) په نامه یادیږي۰

پيژند :

یوه وينابڼه د نخښو لړی ده، چې کم له کمه یوه خپلواکه اوښتوني(متحوله) لري او د

- د دې اووښتوني په ځاي د بنسټيزې ورشو یا ساحې او یا
- د دې اووښتوني تړلو څخه د کوانتیفیکاتورونو(کوانتورونو) په مرسته یوه وینا جوړيدی شي.

یادونه :

که په لاندې کې د تړاو یا تړني کلمه منځ ته راځي، نو موخه ترې د « او » تړنه یاکنجنکشن conjunction دی۰ له ګرامر سره په توپیر، چې هلته تړنه یا تړاو یو « تړونتیکی، تړاولغات» ښایي په سم اند کې تړنه یو څرګند(دوه ځایلرونکی یا دوه ځاییزیا نوره هم ښه دوه ګونی) جملې تړل یا په بل عبارت دوه ځاینیونکې (نوره هم ښه : دوه ییز یا دوه- ګونی) فنکشن یا تابع(بلواک) تعریفوي یا پیژنی۰

د « او» تړنه او نخښه یې $\wedge$

پيژند ۱ ۰ ۳ :

$p\wedge q$ دوه ویناوې p او q یانې د «او » یوځایوالیp او q یواځې او یواځې هلته یو رښتیا ارزښت رښتیا لري، چې p اوq دواړه رښتیا ارزښت رښتیا ولري۰ که له دې څخه یوه وینا هم نارښتیا وي، نو بیا د « او » تړنه نارښتیا ده ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترني نخښه ددوه ويناو qاو p ترمنځ ليکل کيږي p∧q او ويل کيږي p او p

موږ د « او » ترنه په لاندې جدول کې روښانه کوو يا انځوروو:

يادونه: په لاندې کې w رښتيا او f نارښتيا په معنا دي

p	q	p∧q
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

د « او » ترني ته بيلګه :

د دوه رښتينو ويناو د A وينا : ,, 3 < 7 ,, او د B وينا : 3 يو لومړنی ګڼ دی رښتيا وينا A ∧ B ده « ۳ له ۷ کوچنی او لومړنی ګڼ هم دی»۰

يادونه: موږ ګران لوستونکي به سره يوځاي فکر وکړو، چې دا پريمګنونه لومړي او که لومړني ګڼونه وبولو۰ زه فکر کوم، چې لومړي ګڼونه لومړني نه دي۰ دا ځکه لومړي ګڼونه دي، چې له دوي له زياتون او يا کمون څخه لومړی ګڼونه جوړيږي۰ موږ به يې زياتون په پام کې راولو، چې : 3+5=8

د دوه ويناو دا ترنه يا کنجنکشن، چې مختلف رښتياارزښتونه ولري ياني د A وينا: 3 ,, 7 < ,, (رښتيا او د B وينا: « ۳ يو جوړه ګڼ دی (نارښتيا)، نو A∧B وينا : چې ۳ له ۷ کوچنی دی او جوړه ګڼ دی « (نارښتيا) ده۰ دا ويناترنه ويناارزښت نارښتيا لري۰

د دوه ويناو د « او» ترنه دA وينا: 3 < 7 او د B وينا « ۳ يو جوړه ګڼ يا جفتعدددی» يوه نارښتيا وينا ده : ۳ يو لومړنی ګڼ دی او له ۷ لوي دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ومو لیدل، چی د « او » ترنه او یا کنجنکشن په ورسره بلده (عادي) توګه هلته جوړیږي، چې دوه ویناجملې په «او» سره وتړل شي:

غوټې «پټیدځاي» پیداکړ او دا پټیدنه یې پټه وساتله»۰ کیدی شي له «مګر» « سره له دې هم» « په همدې ډول » ترنه وویله – یا افاده شي۰

پورته ډول ، د بیلګی په توګه: په پټپټکي کې « که سپین پټ شي او هوسۍ د هغه د پټیدو ځاي پیدا کړي او دا چاته ونه ښايي»، نو داسې وایو « او » یا « هم »

هوسۍ د سپین د پټیدو ځاي پیدا کړ« او » دا پټیدځاي یې پټ واسته۰

۱) هلمند موړ(بډا) شو او هیواد یې پریښود ۰

۲) سره له دې، چی برلین کوچنیښار دیهلته د منی د المپیک لوبي کیږي

۳) ۱۵ ګڼ جوړه دي، د هغه پروت زیاتن په ۳ ویشونیدی

په ټولیزه توګه د « او » ترنه هلته رښتیا ارزښت رښتیا لري، چی د جملی ټولی برخې رښتیاارزښت ریښتیا ولري، اړین نه ده، چې نظم په پام کی ونیول شي۰ په وینا ترنه کې کیدی شي زیاتې وینابرخی سره په ترنه « او » وتړل شي لکه « هغه راغی، ویې لیدل او بری یې په برخه شو»

پیژند ۱ ۰ ٤ :

د« یا(or)» ترنه یا دیسجنکشن Disjunction (لاتین: ټاکنه یا پریکړه) Alternative الترناتیو یا د » یا « ترنه» دا په « یا » بیرته ورکړ شوې «جمله ترنه» تل ژوروالی ته راهڅوي: باید جوته شي، چی ترې تیریدنه یا صرف نظر په نه کیدونکی اوکه ترې نه تیریدونکی « یا » موخه ده۰ د دیسجنکشن یا د «یا»ترنی پیژند یا تعریف یواځنی دی او دا \/ د یا ترننخښه ده.

د دیسجنکشن نخښه د دوه ویناو p او q ترمنځ ځایول کیږي p\/q او ویل کیږي p یا q او

په لاندې ډول څرګندیږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

p	Q	p∨q
w	W	w
w	f	W
f	w	w
f	f	f

له دې پورته جدول څخه پوره جوتيږي، چې ديسجنکشن يا د « يا » ترنه p∨q يو داسې رښتياتابع (-بلواک يا- فنکشن) دی، کوم چې هلته او هلته رښتيا فنکشن رښتيا اخلي، کله چې کم له کمه د « يا » ترنې يو غړی د رښتيا ارزښت رښتيا ولري يا واخلي٠ که د ديسجنکشن دواړه غړي نارښتيا وي نو p∨q هم نا رښتيا دی٠ دا د رښتيا فنکشن کې د ځايونې « يا» څخه بل څه نه دي٠ يوه د «نه خونديکونې» يا « نه ځايونې» يا « په برکې نه نيونې» د « يا » وينه يا افاده ده، چې دا په نورو ژبو کې په بل ډول مګر په پښتو کې « يا٠٠٠ او يا ٠٠٠» ليکل کيږي٠

بيلګه (د « يا » ترنې ته):

د دوه رېښتينو ويناو د « يا» ترنه د A وينا: ,, 7 > 3,, او د B وينا: « ۳ د ٦ پرويشونى دی» يوه رښتيا وينا A∨B ده : «۳ له ۷ کوچنى دی او د ٦ پرويشونى هم دی»٠

د دوه ويناو ترنه، چې مختلف ارزښتونه لري.

د A وينا ,, 7 > 3 ,, رښتيا او د B وينا: ,, 7 =3 ,, (نارښتيا) ، نو A ∨ B ده، چې 7 > 3 يا 7 = 3 دا وينا ترنه د رښتيا ارزښت رښتيا w لري٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه نارښتیا ویناو د « یا »(" Or") تړنه:

د A وینا : "7 > 3 " او د B وینا: ۳ یو جوړه ګڼ (جفتت عدد)دئ یوه نارښتیا وینا A∨B ده:

« ۳ له ۷ لوي او نا جوړه ګڼ (طاق عدد)دی»

الترناتیوAltenative یا انتیوالنځ Antivalenz ویناوې : دا د » یا « ویناتړنه باید د « یا ... او یا سره بدله نه شي، ځکه چې دا هلته هم نارښتیا ده، که چیرې دواړه ویناوی رښتیا وي۰

بیلګه : (دوه الترناتیو ویناو ته ، چې رښتیا وي)

د وینا 7 > 3 او« ۳ یو لومړی ګڼ دئ» د الترناتیو په نامه داسې دئ « ۳ یا له ۷ کوچنئ دئ او یا یو لومړی ګڼ دی» نارښتیا دئ۰

بیلګی : (نه والي، کنجنکشن، دیسجنکشن ته)

یادونه: په لاندې (Wahr) w د رښتیا او(Falsch)f د نارښتیا لپاره کارول شوي.:

ویناتړاو

A	π پي تولګڼ دئ	f
B	π ایراشنل ګڼ دی	W
C	صفر له پي π کوچنی دئ	W
D	π پي له دری کوچنی دئ	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

A	π ټولګڼ نه دی	W
C	π کوچنی برابر له صفر	F
A∨C	π ټولګڼ او له صفر لوي دی	f
B∧C	π ایراشنل او له صفر لوي دی	W
A∨C	πپي ټولګڼ یا له صفر لوي دی	W
A∨D	π ټولګڼ یا له ۳ کوچنی دی	f

بیلګه : له دې بیلګی دمخه هغۀ فرمول دی

یا کتاب لولم او یا فلم ګورم٠ په دې بیلګه کی الترناتیو یا بدیل شته دی، یانې د » او یا « امکان شته٠ دا د » او یا « کارونه یا استعمال د خرڅلاو شیانو باندې باید بند وي٠ یانې دوه نرخونه باید ورنه کړای شي٠

دا لاندې فزیکي بېلګه ده، چې ګران لوستونکي دې پخپله هم ورته پام وکړي او ځیره دې یې په پام کې راولی٠ په شالت یا سرکټ الجبر کې د کجنکشن یا د »او« ترڼې« ریښتینوالی لپاره دوه پرلپسی(لړی) شالتونه تړل شوي دي،

Bild 7.1

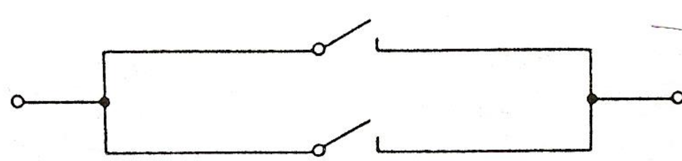


Bild 7.2

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس رښتيابلواک يا – فنکشنونه

دا وروستىبيلګه په ګوته کوي، چې داسې يوځاي شوي ويناوې جوړيدئ شي، په کومو کې چې له يو زيات تړوني موجود وي٠

که دا ساده وينا که چې «په تياتر کې نن لوبه کيږي» په p پس له دې جملې کمپلکس جوړخت دا نه ترى تيريدونکى (رښتيا - بلواک يا رښتيا فنکشن » نهp p\/ دئ٠ د دې لپاره هم د رښتياارزښت فنکشن ورکول کيږي٠ د رښتيا ارزښت لپاره p له دې څخه نهp يا p نه (دا دواړه دې برابر ومنل شي) او بيا هم نهp\/p جوړيږي، چې جدول يې په لاندې ډول ورکړ شوى دئ

د يوې وينا نه والى

p	Pنه	p\/pنه
w	f	W
f	w	w

لاس ته راوړنه يا نتيجه هکپک کوونکي نه ده يوه وينا نهp\/p تل رښتيا ده، بى له ځانګړي حالت او له دې خپلواک، چې p کوم رښتياارزښت غوره کوي .

ويناسم انديزې ويينې يا افادې، چې د هغې رښتيابلواک کټمټ يا identisch(identic) رښتيا دئ(دا په دې مانا، چې که د ويناؤوښتونکې يا واريابلې ته هر رښتياارزښت ورکړ شي ياني رښتيا يا نارښتيا تل د رښتيا ارزښت رښتياغوره کوي)، وينا سم انديزه قوانين بلل کيږي، يا ورته تاوتولوژي Tautologien

ويناسم انديزې ويينې يا افادې، چې د هغو رښتياارزښت بلواک کټمټ نارښتيا دئ (دا په دې مانا چې د متحولې يا اووښتونې په هره وينا ارزښت وينا نارښتيا ارزښت غوره کوي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونترا-دیکتوریکي وینا بلل کیږي٠ورته ویناوې کونترادیکشنونه contradiction (د دوه ویناوو مخامخوالی یا – تضاد)

بیلګه :

رښتیاارزښت دې د وییني یا افادې نه(p∨q) لپاره وشمیرل شي په همدې وخت کې دې د نهp∨q رښتیاارزښت هم وشمیرل شي او له بل سره دې پرتله شي.

جمله : ښایو، چې $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$$
\begin{array}{l}
p...q....p \vee q....\neg(p \vee q)......\neg p...\neg q...\neg p \wedge \neg q \\
w...w......w.........f.............f.....f.........f \\
w...f.......w.........f.............f......w.........f \\
f...w........w.........f............w.......f.........f \\
f...f........f.........w............w........w.........w
\end{array}
$$

داچې د مخ ته پراته جدول څلورم او اوم درځ یو په بل پریوځي یا یو د بل سره برابر دي، نو ویېني یا افادې $\neg(p \vee q)$ او $\neg p \wedge \neg q$ په څرګند ډول همغه رښتیا بلواک یا –فنکشنونه دي. دا په دې معنا چې ،، جملې: دا نارښتیا ده، چې p یاq ،، او ،، نه q او نهp ،، همغه رښتیا - (او په دې ډول همغه نارښتیا-) شرایط لري، که دp اوq په ځای بلې یوې لیدونکې جملې ځای نیولی وي. دا ډول دوه وینا تړاو -وینا تړنه) او تل همغه ارزښت ورکوي.

که په دې عملیو کې نوکان ځا په ځای شي، نو د عملیې ارزښت طبعاً همغه نه پاتیږي، لکه د بې نوکانو عملیې.

ایمپلیکیشن implication (لاتین:ورراګډول، خورول):

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دوه ویناوې د خپل تړاو له لارې« که۰۰۰، نو سره تنظیم یا ترتیب شي اپیلیکیشن سومبول=> چې دا سومبول د دواړو ویناو AاوB ترمنځ ولاړ دئ: او دا مانا لري:

که A نوB یا په همدیډول «له A څخه B لاس ته راځي» وینا A ته پریمیس Prämisse (لاتین نیونه (فرضیه) وایي او وینا B ته کونکلوزیون Konklusion (لاتین: پاي لاس ته راوړنه) وایي۰ د دوه ویناو ایمپلیکیشن ټیک هلته نارښتیا دئ، چې پریمیسس ربښتیا او کونکلوزیون نارښتیا وي۰ په بل ډول رښتیا دی۰

د دوه ویناو لاس ته راوړنه یا تعقیب د لاندې جدول له لارې یواځنی څرګندیدی شي

د لاس ته راوړنې یا ایمپلیکیشن یا پسې راتلنی، په ځان پسې لرنې سومبول =>

P	q	p=> q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

دلته داسی یوه تړنه لرو، چې له دوه برخه ویناو A اوB ټیک هلته یو نارښتیا یوځاي شوې ویناچې په p=/>qسره ښایو)۰

کله چې لومړبرخه ویناربښتیا او دومه برخه وینا نارښتیا وي په کمپیوتري یا پروګام ژبه کې داسی ویل کیږي: If….., then…..

کومې ژبنۍ افادې یا ویینې په دې رښتیا فنکشن بیرته اړول کیږي. بیرته یا په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځیدلی شي. په ښکاره ډول د بیلګې په توګه جمله: که پسرلی لوبه وګټي، نو ماښام د تلویزیون کتلو ته کورته راځي.

ناریښتیا ده، که د جملې لومړئ برخه رښتیاوي او دویمه نارښتیا. که په جدول کې برخه جملو ارزښتونه لکه د بیلګې په توګه د جدول لومړئ همداسې څلورمه کرښه سره یو د بل پرتله شي(که دواړه برخه جملې رښتیا همداسې نا رښتیا وي) پرابلمونه نه پیښوي، په دې حالت کې ټوله وینا رښتیا ده، که لومړئ برخه وینا نارښتیا او معکوس دویمه برخه رښتیاوي، نو په دې حالت کې به د بیلګې په توګه جمله نارښتیا ونه لیدل شي(که پسرلی لوبه ونه ګټي او سره له دې هم تلویزیون لیدلو ته راشي)، نو بیا د دوه ارزښتوالي پرینځیپ له مخې یواځې دا ارزښت ،، رښتیا،، باقي پاتې کیږي. د پورته فنکشني پوره والي له مخې په ګوته کوو، چې هم $\neg p \vee q$ او هم $\neg (p \vee \neg q)$ ټیک بیرته بیا(بیرته) د ایمپلیکیشن د رښتیا فنکشنونه ورکوي.

په بل ډول افادې یې: q که p، او یا هم p ، د q لپاره پوره کیدونکی شرط دی(په بل ډول یې: qد p لپاره اړیین شرط دی)

ورته والی :یوارزښتوالی(برابرارزښتوالی) Äquivalent

که دوه ویناوې qاو p خپله ترڼه په » ټیک هلته ، که » په هم دې ډول « هلته او هلته، که»، تنظیم کړي، دې ته ورته والی یا ایکویوالنت وایي٠ د ایکویوالنت سومبول دئ ≈ د دواړو ویناو pاوq ترمنځ دا سومبول پروت دیq ≈ p په دې مانا، چې p ټیک هلته که q ٠ ایکویوالنت سومبول یې په دواړو خواو ایمپلیکیشن لري: له p څخه q لاس ته راځي او له qڅخه p

د دوه ویناو ایکویوالنت ټیک هلته رښتیا دی، که دواړه ویناوې رښتیا یا دواړه ویناوې نارښتیا وي٠

دا شي څرنګوالی یا شي حالت په لاندې جدول کې روښانوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

p	q	P⇔q
w	w	W
w	f	F
f	w	F
f	f	W

سیده او مخامخ یا پہ ځنې دې پہ دې مانا وي، چی له p څخه q لاس ته راځی او په ځنې، یا نی له q څخه p لاس ته راځی۰

۱ ۰ ۳ د وینابلواکو یا ــفنکشنونو ترمنځ اړیکي

د دوه ویناو ترنه سم اندیزه یا منطقي برابرارزښته بلل کیږي، که د ویناو رښتیاارزښت د ترنویناارزښت سره یو په بل وخوري یا یو بل سره برابر شي۰ دا د یو ویناارزښت جدول له لارې ځرګندیدی شي۰ ومو لیدل، چی ایکویوالنت په دواړو لورو لاس ته راوړنه یا ایمپلیکیشن دئ۰ په لاندې جدول کی به وګورو، چې دریم او شپږم درځونه، متې یا ستنی څنګه یو بل سره ځان نیسی یا ګورو، چی سره یوارزښته دي۰

p	q	p ⇔ q	p=>q	q ⇒ p	(p ⇒ q) (q ⇒ p)
W	w	w	w	w	..........W
w	*f*	f	f	*w*	.........*f*
F	*w*	*f*	*w*	*f*	.........F
f	*f*	w	w	*w*	........*w*

ورته والی اړیکی د ورته والی یا ایکویوالنت سومبول باندې هم ښوول کیږي

$$(p <=> q) <=> (p => q)\ (q => p)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا ورته والي ويناتړنه موږ ته دا اجازه راکوي، چې يو بل سره بدل کړو يانی د يوه ځاي د بل سره بدل کړو٠ له دې څخه پيچلو تړنو کې لکه د شالت الجبر کې کار اخستل کيږي٠

د دې ورته والی ويناتړنې غوره بيلګه د،،دي مورګان،، قاعده ده De Morgansche Regel

$$(1)......(\overline{p \wedge q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$$
$$(2)......(\overline{p \vee q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

د کنجنکشن او ديسجنکشن لپاره ديستريبوتيو قانون:

$$(3) \quad [p\wedge(q\vee r)] \quad \square \quad [(p\wedge q) \vee (p\wedge r)]$$

$$(4) \quad [p\vee(q\wedge r)] \quad \square \quad [(p\vee q) \wedge (p\vee r)]$$

۱ ٠ ٤ وينافورم يا - بڼه او کوانتورونه

وينا سم اند په لاندې ډول ساده تولیز کيدی شي٠ د بيلګي په توګه که مختلف شيان همغه خويونه ولري، نو ضرور ده، چې دا فورمال وويلي - - يا افاده کړای شو: دلته د ويناو پر ځاي د وينافورم څخه خبري دي، يا غبرېږو٠ دا داسی ژبنی ويينې يا افادې دي، چې د شيانو لپاره واريابلی يا اووښتوني لري او لومړی د مناسب انفرادې ځاي پرځاي وروسته يوه وينا شي٠ بيلګي يی په لاندی ډول دي

لومړی : x پر دوه ويشونی دی »

دويم : » z يو هوار څلورګوډی(ځلورضلعي) » دی٠

دريم : «u له v څخه لوي » دی او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترهر ځاي پرځاي کولو وروسته رښتيا یا نارښتيا وینا لاس ته راځي٠ که په دويم کی دz پرځاي «ډیرګوډی» (کثیرالاضلاع) ځاي پرځاي شي، نو یوه رښتيا وینا لاس ته راځي٠

که په لومړي کیx د7 پرځاي ځاي پرځاي شي، نو یوه نارښتيا وینا لاس ته راځی٠ دريم یوه اړیکه(ریلیشن(ده، چې هلته د انفرادیو د ایښولو ترتیب هم یو رول لري٠ دلته که د تورو پر ځاي ګڼونه ږدو، نو هلته دا رښتيا وینا ده که د لومړي توري پرځاي ستر ګڼ ځاي پرځاي شي٠د فورمال سم اند په ژبه د پریدیکات په شکل٠(له دې امله دې د سم اند برخی ته د پري دیکات first-order logic سم اند یا منطق وايي٠

بیرته داسی لیکو P(x), Q(z), R(u,v)

یوه بله کارونه یا عملیه شته، چې له وینا بڼي څخه وینا جوړوي٠ چې کوانتيفيکيشن Quantifikationبلل کیږي٠ دا ویناهغه وخت منځ ته راځي، چې ټول د وینا بڼی افراد همغه خویونه ولري، چې ټولوینا (Allaussage) ورته وایو٠یاچې په پوښتل شوي چاپریال کې داسي افراد شته وي، چې همغه خویونه ولري، دې ډول وینا ته موږ د شتون یا موجودیت وینا یا Existenzaussage وایو٠ زموږ په بیلګه کې یی استعمال لاندې را په ګوته وکي

څلورم : (پیدایښتی یا طبیعي) ګڼونه یا اعداد شته، چې په دوه ویشل کیږي

پنځم : ټولې څلوری (مربع) هوارې ډیرګوډی یا کثیرالاضلاع دي٠

د ټولکوانتور یا ټولوینا لپاره نخښه∀

د شتون- یا موجودیتکوانتور یا شتونوینا لپاره نخښه ∃

یادونه : د ټولکوانتور لپاره نخښه د سرچپه A په څیر ده او د شته والي کوانتور لپاره نخښه د په څټ E په څیر ده په پام کې دې وي، چې د کوانتورونو ورکونې وروسته اووښتونې (ویاریابلی یا مجهولی) ورکول کیږي٠

څلور ۱ : $\exists x \in P(x)$

داسی يي لولو، چی یوx په P(x) کې شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځه ۱ : $\forall z \in Q(x)$

دا داسی لولو: د ټولوz لپاره ، چې په Q(x) کې پروت دئ (یا د ټولو۰۰ له ۰۰۰ څخه)

دا سومبول $\exists$ دا مانا لري،چې« کم له کمه یو ۰۰۰ شته»د وینابنی او په دې پورې اړوند واریابلو یا اووښتونو ډېریو جوړه، د دې سومبول سره یوه د« شتون- یا موجودیت وینا» ورکوي، په نامه د اووښتونو ساحه یا ډېرئ کې، په کوم کې چې کم له کمه یوه داسې اووښتوني ځاي په ځایونه شته وي کومه چې وینابڼه رښتیا وینا کوي۰

بیلګی (د رښتیا شتون - موجودیت ویناوي)

اول - $\exists x \in R: x+1=0$

(لوستل : یو داسی رییل ګڼ یا عدد x له(په) (کې) R شته ،د کوم لپاره چې$x+1= 0$ باور لري) دلته x دا مانا لري، چې x د رییلګڼډیرئ یا ریل ا عدادو سټ R توکی دئ او $\in$ په دې مانا دی، چې توکي له ۰۰۰ دی۰

دویم : $\exists x \in R:$

$$x^2 + 4x = 0$$

(لوستل: یو x له(په) R څخه(کې) شته د کوم لپاره ، چې $x^2+4x= 0$ باور لري)

دریم : $\exists x \in R: \quad x^2 - 4 = 0$

(په دې جمله کې حتی دوه رییلګڼونه شته دی، چې د هغې لپاره $x^2-4 = 0$ باور لري

: (-2 ،2)

جمله (د یوې شتونوینا یا موجودیتوینا نه والی یا نفی)

$$\exists x \notin R: x^2+1=0$$

لوستل: داسې رییلګڼ x نه شته، د کوم لپاره چې برابرون $x^2+1 = 0$ باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې وینابنې هم شته، د کومو لپاره، چې د اووښتونډیری یا واریابلډیری ټولو توکو لپاره ربښتیا وینا شي۰

بیلګه: وینابنه « x په 2 ویشونی دی » د جوړه ګڼونو هریوه لپاره ربښتیا ارزښت لري په

دا سومبول ∀ په دې مانا دی، چې « د ټولو x لپاره» د وینابنې او په همدې پورې اړوند د وینا متحولو ډېرئ یا سټ (ویناااووښتونډیری یا واریابلډیری) ترڼه له دې سومبول سره یوه Universalaussage یونیورزالوینا یا ټولوینا منځ ته راځي۰ په دې مانا چې د دې متحولو ډېرئ(اووښتونډیری) هر توکی لپاره د وینابنې څخه یوه ربښتیا وینا جوړیږي۰

جمله : (دUniversalaussage یونیورزال- یا ټولیزې وینا یا ټولوینا لپاره

$$(1)........\forall x \in G : 2 \mid x$$

(د ټولو جوړه ګڼونو (جفت اعدادو)لپاره باور لري، چې x په ۲ ویشونی دی)

$$(2).......\forall \in R, x^2 > x$$

(د ټولو رییلاعدادو x لپاره, کوم چې له یوه لوي وي باور لري $x^2 > x$)

جمله : (د نارښتیا ټولیزې وینا لپاره)

$$\forall x \in R : x^2 > x$$

دا وینا نارښتیا ده، ځکه چې دا د $1 \leq x \leq 0$ لپاره باور نه لري، پس دا وینا د ټولو ریل عددونو لپاره باور نه لري۰

۱ ۰ ۵ اړین – یا ضروري- او پوره کیدونکي شرطونه

د ایمپلیکیکشن سومبولA=>B («کهA نوB » « له A څخه Bلاس ته راځي»)یا په بل ډول : که A باور ولري، نوB هم باور لري»

(c) ketabton.com: The Digital Library

په شمیرپوهنه کې ځانګړي فرمولونه شته٠

الف) « A د B لپاره پوره کیدونکی شرط دی»

ب) « B د A لپاره يو اړيين يا ضروري شرط دی»

فرمولونه الف) وايي، چې د A رښتینوالی د B رښتینوالی ځان پسی لري یانی له آ څخه ب پوره کیږي یا له یوه څخه وبل ته رسيږو يا د A شرطونه د B د شرطونو پوره کیدنو لپاره نیونه(فرضیه) ده او ب شرط پوره کیدنه اړيينه یا ضرور ده، چی آ پوره شي٠

بيا : وينا باور لري٠

د B وينا د باور لرلو لپاره دا پوره دی یا پوره کیدونکی دی یا بسيا کوي، که د A وينا باور ولري

بيلګي د پوره کیدونکو شرطونو لپاره:

۱ – ويناA : « ګڼ n پر ٦ ويشونی دی»

وينا B : « ګڼ n پر ۳ ويشونی دی»

A => B

د دې لپاره پوره کیدونکی شرط دی یا بسيا کوي، چې يو رییل ګڼ n پر ۳ ويشونی دی، که دا پر ٦ ويشونی وي٠
که n پر ٦ ويشونی وي، نو پر ۳هم ويشونی دی ٠ دا نو تراوسه دا مانا نه لري، چې ضرور دې ګڼ n که پر ۳ ويشونی وي، پر ٦ دې هم ويشونی وي٠ د بيلګي په توګه ګڼ ۹ پر ۳ ويشونی دی ، مګر په ٦ نه دی ويشونی٠

۲ - وينا A : “n > 7„

وينا B :وي دې n > 6

A => B

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دا پوره کيدونکی دی، چې يو رييلګړ ن له ٦ څخه لوي دی٠ که اړيکې، چې ن له ٦ لو دی، باور ولري

داسې رييلګڼونه هم شته، چې له ٦ څخه لوي دي، مګر له٧ څخه لوي نه دي٠ د بيلګې په توګه ٥ ،٦ يا شپږنيم

د ب) فرمولبندې وايي، چې وينا ب باورلرل غوښتونکی يا اړيين يا ضرور دی، د دې لپاره، چې وينا A باور ولري٠

که وينا B باور ونه لري نو وينا A هم باور نه لري ٠

بيلګی د اړيين(ضروري) شرطونو لپاره:

١ – د دې لپاره، چې يوګڼ n پر 6 وويشل شي، اړين(ضرور) ده، چې دا ګڼ پر3 ويشونی وي٠ يو ګڼ، چې پر3 نه وي ويشونی، نو پر ٦هم ويشونی نه دی٠

٢ - ويناA : » څلور ګوډی يوه څلوری يا مربع ده«

وينا B : » څلور ګوډی څلور ولاړ کونجونه لري« A => B

د دې لپاره ضرور، چې يوه څلورګوډی يوه مربع(څلوری) ده دا خويونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه ولري، که ټول ګونجونه يې ولاړ نه وي، نو مربع يا څلوری نه ده که يوه څلورګډی څلور ولاړکونجونه ولري اړين نه ده، چې څلوری يا مربع دې وي٠

د برابروالي يا برابرارزښتي (ايکويوالنت) سومبول«

A<=> B

(په دواړو لورو ايمپليکيشن) لپاره په شميرپوهنه کې هم فرمولبندي شته: دا وايي، چې A دB لپاره يو ضروري او پوره کيدونکی شرط دی٠ « دا وايي، چېA ټيک هلته باور لري، کله چې B باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی : د پوره کیدونکی او ضروري شرطونو لپاره

۱ – ویناA : « ګڼ یا عدد n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « عدد n پر ۳ او ۲ ویشونی دی»

A <=> B

د دې لپاره ضرور او پوره کیدونکې دی، چې: n پر ٦ ویشونکی دی، که دا عدد پر۳ او ۲ ویشونکي وي٠

۲ – وینا A : » څلورګوډی یا څلورضلعي یوه څلوری یا مربع ده«

ویناB : « څلورګوډی څلور ولاړ کونجونه لري او څلو برابر اوږده اړخونه یا ضلعې»

A<=>B

ددې لپاره، چې څلورګوډی یو مربع دی ضرور او پوره کیدونکی دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه او څلو برابر اوږده اړخونه(ضلعې) ولري٠

۱ ٠ ٦ د شمیرکلمو یا ویو(لغاتونو) شمیرنیز مفهوم(ترې پوهیدنه)

پیژند (تعریف) څه شی دی؟

د کلیمی ټاکنه ده، چې تیک ټاکلي او له مخامخوالی(تضاد) ازاده وي٠ په عامو خبرو کی کله که کلیمی راځي ، چې په مختلفو اشکالو ترې ځانګړي ماناوي اخستل کیږي، خوپه شمیرپوهنه کي داسي نه ده٠

د شمیرنی ټاکنی یا پیژندونه (تعریفونه)د تیک څرګندې پوهنې یوه نه پریښوونکی سمبال اله ده، یانې ترې تیریدل نه شي کیدای٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله څه شی دی ؟

ټولي ربښتوني ويناوې په شميرپوهنه کې جملې بلل کيږي، چې د پيژندني لپاره ښووني يا ثبوت ته اړتيا لري ٠

اکسيوم Axium څه شی دی؟

بې ثبوته ربښتيني وينا ته اکسيوم وايي

شميرپوهنيزې يا د رياضي جملې زياتې نيونې(فرضيي) او ثابتول(غوښتنه،جوته ونه يا ښوونه) په بر کې- يا خوندي لري٠

که دا وينا داسې وي، نو پس داسی به هم وي٠ دلته که دا وينا داسې وي نيونه يا فرضيه ده او نو داسې هم ده٠ دا غوښتنه ده، چې بايد ثبوت يا وښوول شي٠

اکسيوم : ١ طبيعي عدد دئ (پيانو Peano)

: ټکی هغه دی، چې پر ويشونی نه وي يانې په ټکی ويشل بند دي٠ (Euklid)

: حتمي پيښه د پيښي امکان ١ درجه لري٠

جمله: که درېګوډی ولاړکونجيز وي، نو(پس) د پيتا ګوراس (pythagoras) درسي جمله باور لري

: يو لومړی ګڼ، چې له دوه لوي وي، بايد ناجوړه(طاق) وي

: په اخره جمله کې نيونه(فرضيه) ده (که يو پريم عدد له ٢ لوي وي٠٠٠) او ثبوت يې (هر له دوه لوي عدد په دوه ويشل کيږي پس لومړی ګڼ نه شي کيدی، نو دا ټل ناجوړه ياطاق دئ)په څنوالي يا تضاد کې پيژندل کيږي٠
ټل داسی نه ده، چې د جملی د ربښتينوالی څخه دې د جملی په څنوالی يا تضاد هم ربښتيا وي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه:

جمله: که ٦٪ پس ۲٪ هم   (رښتیا)

جمله: که ۲ ٪ پس ٦٪ هم   (ناربښتیا)

۰۰۰۰۰تیک هلته ، چۀ که۰۰۰۰یوځاي راوړي

بیلګه : که چیرې غبرګ اړخیز کې هر دننني کونج ۹۰ درجې وي، نو دا ولاړکونجیز(قام الزاویه) دئ۰

په ځټ : که غبرګ اړخیز ولاړ کونجیز وي، نو دننني کونجونه ۹۰ درجې لوي دي۰

یوځایراوړل :

یو غبرګ اړخیزتیک هلته(هلته او هلته یا بیا او بیا یا یواځنې او یواځنې ټاکلی یا یواځنی ټاکلی او په ځټ) ولاړکونجیز دئ، کله چې دننني کونجونه ۹۰ درجې لوي وي۰

۱ ۰ ۷ برابرونونه او نابرابرونونه (مساوات او نامساوات)

پیلبیلګه:

لمسی ، پلار او نیکه په ګډه ۱۱۳ کلن دي۰ پلار د ځوي د عمر یوکال کم اوه ځله عمر لري او نیکه د پلار د عمر له دوه برابره ځخه ٦ کاله نور هم زیات عمر لري۰

پوښتنه : له دوي ځخه هر یو ځو کلن دئ؟

د ځوي عمر په x سره ښایو، نو د پلار عمر 7 x-1 دئ او د نیکه عمر 2(7x-1)+6 کاله کیږي، چې د دې ټولو زیږښت وختونو زیاتون یا جمع بیا ۱۱۳ کاله دئ یانې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x+7x-1+2(7x-1)+6 = 113$$

یو ډول ترمونه رامنځ ته کيږي او ساده کيږي:

$$x+7x-1+14x-2+6= 113 \quad \vee \quad 22x +3 = 113$$

په کينې ۲۲ ځله د x ارزښت چې ۳ په ورزيات شوي او دا له ۱۱۳ سره برابر دئ

نو دا ګڼ ۲۲ ځله x بيا ۱۱۰ کيږي: $22x = 110$ او د x ساده ارزښت ۲۲ – مه برخه د ۱۱۰ ده يانې: په دې لاس ته راوړنې سره زوي ٥ کلن پلار ۳٤ کلن او نيکه ۷٤ کلن دئ۰

که ترمونه $T^\wedge$ اوT° د برابروننخښنی = باندې يو له بل سره وتړل شي، نولاندې برابرون پيداکيږي: $T^\circ = T^\wedge$ ۰

که چيرې ترمونه په دې نخښو $\leq$, $\geq$, $<$, $>$ او(نابرابروننخښه =|) يو له بل سره وتړل شي يو نابراون منځ ته راځي.

برابرونونه او نابرابرونونه چې ناټاکلي يا مجهولو سره يوځاي شي، هغې ته د وينافورم يا نوره هم ښه وينا بڼه ويل کيږي۰

دا يا رښتيا يا نارښتيا وينا کيدی شي۰ که ناټاکلي، چې اوښتوني يې هم بولو(د بيلګې په توګه z , x , y) پر ځاي د بنسټيزې ګڼونه وليکل شي۰ په برابرونپوهنه کې له پيژند – يا تعريفدېرئ څخه هغه ګڼونه غوره دي، چې د ورکړ شوي فورم يا بڼې يو برابرون يا نابرابرون رښتيا وينا کړي۰

د يو برابرون يا نابرابرون (مساوات يا نامساوات) هر عدد ځاي پرځاي کول، چې وينابڼه پيژند - يا تعريفدېرئ پورې اړوند وي او دا وينا ريښتينې کوي، اوبيډيرئ يا حلډيرئ L کې پروت دئ يا د برابرون يا نابرابرون په ډکوونکو (پوره کوونکو) ډيريو پورې تړلی برابرون ته ، چې د ټولو ځاي پرځاي کولو لپاره ريښتونې وينا ورکوي کټمټ يا (identisch, identic) وينا وايي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې :

الف) $5x= 4$ د $x = 0,8 = 4/5$ لپاره ربښتیا وینا ته ځی : یانې

$5.0,8=4$ نو $L=\{0,8\}$

ب) $3x^2 = 48$ د $x = 4$ لپاره او $x = -4$ لپاره ربښتیا وینا ته ځې

یانی $3.(-4)^2 = 48$ څخه لاس ته راځی او په څېټ $3.4 = 48$ پس- $L = \{ -4;4\}$

۲ – نابرابرون الف) $2x > 1 \Rightarrow L= \{x \mid x> -1/2 \}$

ب) $x < 3 \Rightarrow L = \{ x \mid x > -3 \}$

۳ – کتمتوالی : الف) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

ب) $(a+b)^2 = a^2+b^2 +2ab$

دوه برابرونونه یا نابرابرونونه، چې په خپل پیژندډیریکې سره برابر وي(یا یو پربل وخوري،

یانې یو د بل پرځاي اینبول کیدی شي) او همغه اوبی- یا حلډیرۍ ولري ایکویوالنت (Equivalent) یا «ځاي پرځاي کول برابر» یا ورته بلل کیږي۰

یادونه : دا لاندې د جدول په ډول دی، له پورته له ښي و کیڼ لور ته په درځ یانې ولاړ درځ لوستل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

	نابرابرون	براون
١) وینافورم کې کیدی شي،چې خواوې سره بدلې شي	$T^{\circ} < T^{\wedge} \quad T^{\wedge} > T^{\circ}$ $2x < 6 \qquad 6 > 2x$	$T^{\circ}=T^{\wedge} \quad T^{\wedge} = T^{\circ}$ $3x=5y \qquad 5y = 3x$
٢) که وینافورم په دواړو خواووهمغه ترم زیات یا کم شي او د یوې ورزیات ترم پیژندډیری خوندې وساتل شي یا ځاي کړي	$T^{\wedge} < T^{\circ} \quad =>$ $T^{\wedge} \pm T^{\circ} < T^{\circ} \pm T^{\wedge}$	$T^{\wedge} = T^{\circ} =>$ $T^{\wedge} \pm T^{\circ} = T^{\circ} \pm T^{\wedge}$
یا تغیر ونه خوري٠ مخامخ یا کینې لوربیلګه کې تفریفډیری تغیر خوړلی	$3y < 4x \quad \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\ 4y \pm 2x \quad < 4x \pm 2x$	$2z = 8 \quad =>$ $2z \pm 3 = 8 \pm 3$

پر څټ بیلګه

$2z=8 \ |=> \ 2z+3-z=8+3-z$

دا چې $z=4$ دې نوي ورزیات شوي

ترم $3-z$ نه دی تعریف یا پیژندنه

لري، ځکه چې $3 - z$ یو پیدایښتي یا طبیعي ګڼ نه دی

٣) د وینافورم دواړه $T^{\wedge}=T^{\circ} \Leftrightarrow \quad T^{\wedge}.T > T^{\circ}.T \quad T^{\wedge} < T^{\circ} \Leftrightarrow$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړخونه کيدی شي چې	$T^\wedge < T^\circ \Leftrightarrow$	$T^\wedge.T = T^\circ.T$
له همغه مثبت ترم سره	$T^\wedge:T > T^\circ:T$	$\Leftrightarrow T^\wedge:T = T^\circ : T$
ځل او يا په همغه ترم	که $T > 0$	که $T > 0$ وي
وويشل شي	$3y - 12 < 30z - 90$	$4x+2 = 10x-6$
	$\Leftrightarrow y - 4 < 10z - 30$	$\Leftrightarrow 2x + 1 = 5x - 3$
	$\Leftrightarrow 4y - 16 < 40z - 120$	$\Leftrightarrow 2xc + 10 = 50x - 30$
٤) د يوه برابرون	$T^\wedge < T^\circ \Leftrightarrow T^\wedge.T > T^\circ.T$	$T^\wedge = T^\circ \Leftrightarrow$
دواړه خواوې کيدی شي،	$T^\wedge < T^\circ$	$T^\wedge.T = T^\circ.T$
چې له يوه منفي ترم سره	$\Leftrightarrow T^\wedge:T = T^\circ : T$	$\Leftrightarrow T^\wedge:T > T^\circ:T$
ځل شي يا دواړه خواوې په	$T < 0$	$T < 0$
همغه ترم وويشل شي٠	$-2y < -4$	$3x = 12$
که په دې فورم کې	$\Leftrightarrow y > 2$	$\Leftrightarrow -9x = -36$
نابرابرونونه وي نو د	$\Leftrightarrow 10y > 20$	$\Leftrightarrow x = 4$

برابرون لورې بدليږي، يا نخښه بدليږي

يادونه :

په تولیزه، چې په کتابونو کې ليکل شوي، ترمونه T يو او T دوه په لاندڼ توګه د اينډکس سره په نخښه کوي: T_1, T_2

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . تمرنونه:

۱ – په ۱ . ۳ –مه برخه کي د رښتیا ارزښت ورتو الی له (۱) څخه تر (۴) پورې وښایاست.

۲ – د رښتیا ارزښت جدول له لارې وښایاست، چې لاندط ویناتړاو منطقي مساوي ارزښت دی.

الف - (A⇔B) او (B⇔A)

ب- (A=>B) او(AvB)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ډيرۍ پوهنه Die Mengenlehre, the set theory

ډيرۍ پوهنې يا سټ تيوري بايد خپل ځاي په شميرپوهنه او همدا ډول په نورو پيدايښتي- يا طبيعی پوهنو کې نيولي وي، نو له دې امله د لنډ تير وخت را په دې خوا په پرمختللو هيوادونو او اوس هم په افغانستان کې د ښوونځيو په ليکلوست کې پيل شوه، ځکه چې بي له ډيريپوهنې يا سټ تيوري شميرپوهنه بي مفهومه ده او ناشونې۰ دا به له دې ليکنې څخه همدا اوس څرګنده شي، چې پيدايښتي يا طبيعي ګڼونه يا - اعداد او هرڅه د ګڼونو په څيره کې ، چې موږ ته څرګند وي هغه ټولې ډيرۍ يا سټ دي او بل څه نه دي۰

ډيري پوهنې (سټ تيوري)په پرمختللو هيوادونو کې هم د شلمې پيړۍ په دويه نيمه کې د ميندو او پلرونو لپاره ستونځې پيدا کړي، ځکه، چې دوي د ډيرۍ پوهنې سره بلد نه وو او د خپلو کوچنيانو سره يې مرسته نه شوه کولی۰

د ډيرۍ کلمه له عدددونو يا ګڼونو پخوانۍ ده، که څه هم پخوا انسانانو په خپله خوښه نه ښووله لکه اوس۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تراوس ورسره بلد ډول هم سټ یا ډېرۍ پیژندل کیږي، لکه د ښوونځی نجونې او هلکان، یا په یوه ټولگی کې میزونه او چوکی، یا لکه هغه نیزوړي، چې نیز راوړي او د سپین په پټي کې یې ډیرۍ ډیرۍ اچولي یا د هسکې مینې د ښوونځي په لسم ټولگی کې د زده کوونکو، کتابونو، کتابچو پنسلونو، څوکیو او میزونو سټ یا ډیرۍ.

د ډېرۍ پوهنې کلمه: موږ په افغانستان کې هم د ډیرۍ له کلیمې سره اوس بلد شوي یو که څه هم تربیلو بیلو پردیو نومونو لاندې، چی زما په اند به زده کوونکو او ښوونکو ته یوائې ذهني غوره والي لري، زه غواړم، چی د ډیرۍ څو مختلف پیژندونه یا تعریفونه ورکړم، چې ښه مو ورته پام راوگرځي، دا له دې امله هم، چی د ډیري پوهنې (سټ تیوري) غوره والی ته مو نور هم پام راوگرځي.

ډیرۍ پوهنه د شمیرپوهنې سټه جوړوي او د شمیرپوهنې ټولې څانگې په ډیرۍ پوهنه ودانې دي. نن شمیرپوهنه بې له ډیرۍ پوهنې داسې وده نه شي کولی او سټه یې وزي.

پیژند ۲ ۰ ۱

الف : ډیرۍ یا سټ د ټاکلو شیانو یا کلمو ټولگه (یوځایوالی، مجموعه) ده، چې پخپله خوښه د یوې ټاکلې بنسټډیرۍ یا بنسټ سټ څخه ، چې د پیژندلشویو اصولو یا کرکترییین له مخې ټاکل شوې وي

ب : د الماني شمیرپوه کانتور(George Cantor 1845 – 1918) پیژند:

زموږ د خیال یا لید څرگند ټاکلو ، ټیک یو له بل توپیرکیدونکو شیانو ټولگې (یوځایټولولو یا مجموعې) ته ډیرۍ وایي او هر شي ته، چې ډیرۍ یې جوړه کړې یا ډیرۍ ترې جوړه شوې وي، د ډیرۍ – یا سټ توکی وایی.

(Set and elements of set ډیرۍ او د ډیرۍ توکی)

پ : د مختلفو شیانو ټولگې یوه یوون یا یووالی (واحد Einheit, unite) ته په

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه کې ډیرۍ وایی

یادونه : د واحد لپاره، چې تراوسه ورسره بلد یو یوون یا یووالی ښه نومه ونې دي۰ دا که څو واره وویل شي، نو باورلرم، چې ورسره بلدیږو۰

ت : څرګند شیان د ګډو نخښو پربنسټ، چې تر څیړنې لاندې نیول کیږي او د دې نخښو له امله یوځاي ټولیږي یا ټولګه جوړوي، ډیرۍ یا سټ تشکیلوي۰ ګډې نخښې کیدی شي ښکلا، کوچنیوالی او داسې نور وي۰

یادونه: د ګرانو لوستونکو دې دې ته پام وي، چې په پورته پیژندونو کې یې غوره او د پام وړ پیژند یاتعریف د جورج کانتور پیژند دی.

بیلګه :

ګڼونه یا عددونه، نومونه، او توري کیدی شي د ډیریو بیلګو په توګه راوړل شي۰

ګورو، چې د ډیرۍ یا سټ کلمه په شمیرپوهنه کې بل ډول ده لکه په ولسي ژبه کې، چې دلته ډیرۍ د څنو شیانو زیات یوځاي کول موخه ده، د ځانګړو شرایطو لاندې.

په شمیرپوهنه کې ډیرۍ په لویو لاتین تورو لیکل کیږي لکه ..A,B, او یا M,N,
X,Y,.... د ډیریو توکي د لاتین په کوچنیو تورو لیکل کیږي، لکه a,b,c,…
او m,n,x,v,…

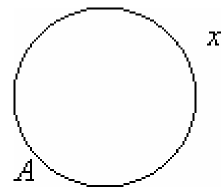
د دې لپاره، چې وپوهیږو، چې ایا توکی a د ډیرۍ A توکی دی که نه نو لیکو: $a \in A$

په پورته کې توکی a د ډیرۍ A توکی دی.

که a د A توکی نه وي ، نو لیکو: $a \notin A$ دلته a د ډیرۍ A توکی نه دی

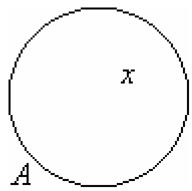
دا پورته لینکدود له ښی وکیڼ لور ته هم لیکلی شو، چې پرلپسی لړۍ یې ساتلې پاتې شي۰ زه یې په څټ لیکنو سره لیکنیزې ستونځی لرم۰دا لاندې یې دیاګرام دی، خو توکي یې بل ډول لیکل شوي دي، چې ګرانو ستونکو ته به د پوهیدلو ستونځ پیدا نه کړي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$a \in A$

(a د A توکی نه دی)



$a \notin A$

(a د A توکی دی)

ډیری A دې له a,b,c,d,e,f,g,h, توکو جوړه وي، چې په لاندې توګه یې لیکو

$$A = \{ a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

ګورو، چې { } د ډیری یا سټ نخښه ده

یادونه : دا د ډیری کلمه موږ په افغانستان کې سټ set بولو ، چې انګریزي ده، په فارسي کې یې مجموعه بولي، چی ډیری د شیانو مجموعه یا ټولګه ده او په الماني کې ورته مینګې Die Mengeوایي. هغه بنسټیزه خبره یې په پیژند یا تعریف کې ده، که موږ یې چې هرڅنګه وبولو، خو د یو بل څخه کره توپیرکیدونکو شیانو ټولګی ته ... وایو. د ټکو پر ځاي ، چی هر څه لیکی، خو موږ ګورو، چې په پښتو یې هغۀ مناسبه نوموه ونه ډیری ده، دا د کوټې کوټې څخه یا راپنډ او داسې نورو څخه ماته ښه ښکاریږي او زموږ ولس د دې نامه سره بلد دی، چې په پوهنه او لا نور ښه په شمیرپوهنه کې باید وکارول شي. زه بیا په دې ټینګار کوم، چې دا خپل ، چې ما ټاکلی یا بل څوک یې که بل ډول بولی د انګریزي یا الماني یا بل پردي نوم څخه ښه او پوهوړ دی. د سټ مانا که په ډکشنري کی وګوری ،نو پوه به شو، چې له دې نوم څخه مو خپل د پښتو نوم ښه او مناسب دی. ګورووچې دا نوم اوس ژورنالستان هم زیات کاروي او وایي، چې ډېری یا ډېری خلکو.... وکتل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۲ ۰ ۱

الف) M_1 (لوستل M اينډکس ۱ دا به په لاندې نخښونه کې روښانه شي پام دې وي، چې (index(indeces اينډکش پيژند نخښې ته وايي) دې د لومړيو ګڼونو ډير ی (اعدادو سټ) وي، نو باور لري: $7 \in M_1, 8 \notin M_1$

ب) M_2 دې د لاندې برابرونونو يا مساواتو د اوبيونو(حلونو) ډيرۍ وي

$$(x+1)(x-2) = 0$$

نو باور لري : $-1 \in M_2, 2 \in M_2, 1 \notin M_2$

بيلګه ۲ ۰ ۲ :

الف) د مساوات $(x+1)(x-2) = 0$ حل ډيرۍ M_2 ده $M_2 = \{-1, 2\}$

ب) د جوړه (جفت) عددونو ياګڼونو ډيرۍ M_3 ده $M_3 = \{0, 2, -2, 4, -4, ...\}$

ډيرۍ لکه، چې ومو ويل د توکو د خويونو له لارې هم څرګنديدی شي يا ورکول کيدی شي.

M = { x | x د خوويونو ۰۰۰ سره }

(لوستل: M د ټولو x ډيرۍ ده له خويونو ۰۰۰۰۰ سره)

بيلګه ۲ ۰ ۳

الف) { د ټولو x سټ ، چې هلته x يو لومړنی عدد يا ګڼ دی| M = { x

b) M = { x | (x+1)(x-2) = 0 }

$c)..........M = \{x \mid x \in R, 0 \le x \le 1\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تشديرۍ: ډيرۍ، چې کوم توکی ونه لري تشډيرۍ يا خالي سټ بلل کيږي او داسی يې
ليکو: θ يا $\{\}=\varnothing$
دا دې د يوې ډيرۍ يا سټ سره، چې يوائې له صفر څخه جوړه ده، نه بدليږي يانې

$$\{\} = \varnothing \neq \{0\}$$

بيلګه ۲ ۰ ٤

$$\{x \mid x \in Z, x^2 + x - \frac{3}{4} = 0\} = \theta$$

ځکه، چې د برابرون يا مساوات $x^2+x-3/4 = 0$ حلډيرۍ

$$\{x|x^2+x-/4= 0\} = \{1/2, -3/2\}$$

کوم ټولګڼ يا تام عدد خوندي نه لري۰

ټولګڼونو پيژند ته دې پام وي، چې د راشنلګڼونو برخډيرۍ ده۰دريمه برخه دې وکتلشي

بيلګه ۲ ۰ ٥ : د ز۰ کال د دويمې نيمايي مياشتو سټ يا ډيرۍ په Ju , aug sep , ok,no, de سره ښايو او ليکو: A= { jul,aug,sep.ok,no,de}

نو داسې لرو يا نوره هم ښه داسی ليکلی شو: $jul \in A, jun \notin A$

دا په دې مانا، چې جولای د A توکی دی او جون د A توکی نه دئ

بيلګه ۲ ۰ ٦ : ټول منديزي، چې نن مازيګر لمانځه ته د غارخلي لمنځتون يا جماعت ته راغلي۰

بيلګه ۲ ۰ ۷ : د هغو ميرو ، غواوو او وزو ډېرئ، چې نن په نخاس کې خرڅې شوې.

بيلګه ۲ : ۸ د ټولو هغؤ ګڼونو ډيرۍ(عددونو سټ) M، چې ۳۰ ويشي يانې

۱ ، ۲ ، ۳ ، ٥ ، ٦ ، ۱۰ ، ۱٥ ، ۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې يې ليکو : $M = \{ 1,2,3,5,6,10,15,30\}$

دا سټ پاي سټ ده داسې وايو، چې ډیرۍ یا سټ M د ټولو هغو توکوx - لکه پورته - جوړ شوی، چې ۳۰ ویشي او داسې يې لیکو: $M = \{ x \mid x$ د ۳۰ پرویشونی ګڼ$\}$

د ټولو پیدایښتي یا طبیعي ګڼونو ډیرۍ(اعدادو سټ) N ټاکو او داسې يې لیکو:

$N = \{ 1,2,3,4 \ldots . \}$

دا نه پای لرونکی یا لایتناهي ډیرۍ(سټ) ده ، چې په لاندې ډول يې نخښه ده یا په لاندې ډول په نخښه کيږي: ∞

ګورو، چې په شمیرپوهنه کی موږ پر پای ګڼونو برسیره ناپای عددونو سره هم مخامخ یو.

۲ ۰ ۲ د ډیریو ترمنځ اړیکې relation between sets

د سټونو ترمنځ غوره اړیکی د برابروالی او خوندیوني یا خوندي لرنې (مساویوالی او یو په بل کې ځاي لرلو) اړیکې دي.

پیژند ۲ ۰ ۲ دوه ډیري یا سټونه M_1 او M_2 یو د بل سره برابرې دي، یانې $M_1 = M_2$

که چیرې د ډیرۍ یا سټ M_1 هر توکی د ډیرۍ یا سټ M_2 توکی هم وي او پر ښټ یا برعکس هر د M_2 توکی د M_1 توکی هم وي.

برابرې ډیرۍ برابر توکي هم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګی په توګه

$$M_1 = \{x \mid (x+1)(x-2)(x+3) = 0\}$$
$$M_2 = \{-1, 2, -3\}$$
$$\Leftrightarrow M_1 = M_2$$

ګورو، چې M_1 د M_2 سره برابر دئ

برخډیری(سبسټ subset)

پیژند ۲ ۰ ۳ :

یوه سټ M_1 د سټ یا ډېری M_2 برخډیری (لاندې ډیری، خوندي ډیری یا سب سټ) بلل کیږي یا M_1 په M_2 کې ځای ده یا نوره هم ښه M_1 په M_2 کې خوندي ده، لیکندود یا لیکنډول:

$M_1 \subseteq M_2$ که د ډیری M_1 هر توکی دسټ یا ډېری M_2 توکی هم وي۰

کیدی شي، چې M_1 د M_2 سره برابر هم وي، که برابروالی یا مساوات نا شوني وي نو بیا د اصلي برخډیری یا اصلي سب سټ څخه غږیږو۰

پیژند ۲ ۰ ٤ :

یوه ډیری یا سټ M_1 د M_2 اصلي برخډیری ده او داسې یې لیکو: $M_1 \subset M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

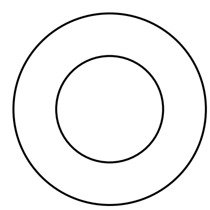
که $M_1 \subseteq M_2$ باور ولري او کم له کمه د M_2 یو توکی د M_1 توکی نه وي۰

بیلګې:

الف) که ولرو $M_1 = \{-1,1\}, M_2 = \{-1,0,1\}$ نو M_1 په M_2 کې اصلی خوندي دی

ب) د ټولو څلوریو (مربعو) ډیرۍ د ټولوڅلورګوډیو(څلور اضلاعو) اصلي برخډیرۍ ده۰

پ) څیره ۱ ۰ ۱ په هواره یا سطحه کې ټکوډیرۍ ښایي، د کومو لپاره چې باور لري، که M_1 او M_2 د ټکو ډیرۍ یا-سټ وي $M_1 \subset M_2$



که په پورته څیره کې وګورو، نو یوه ګردۍ (دایره) M_1 په بله لویه M_2 ګردۍ کې خوندي ده۰

تشډیرۍ په هره ډیرۍ کې خوندي ده۰ هره ډیرۍ په خپل ځان کې د نااصلي برخډیرۍ په څیر خوندي ده۰

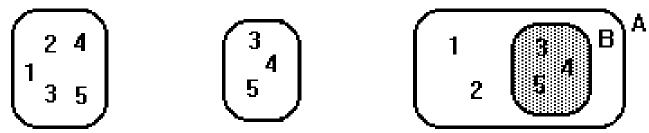
یا دا پیژند :

B⊆A که باور ولري : x ⇒ A∈ x ∈ B

بیلګه:

A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B⊆A

(c) ketabton.com: The Digital Library



پیژند ۲ ۰ ۵ :

هغه ډیرۍ، چې هیڅ توکی ونه لري تشډیرۍ بلل کیږي او داسې یې لیکو: $M=\theta=\{\}$

یادونه : پام دې وي، چې صفر ډیرۍ او تشډیرۍ سره بدلې نه شي یانې لاندې ته:
$\{\} = \theta \neq \{0\}$

د یوې ډېرۍ توان یا تواندېرۍ (توانسټ)

پیژند ۲ ۰ ٦ :

د یوې ډیرۍ M د ټولو برخډیریو ډیرۍ پوتنځډیرۍ یا په تواندیرۍ(-سټ) بلل کیږي او داسې یې لیکو:P(M) په تواندیرۍ توکي لري، چې هر یو یی بیا خپله ډیرۍ ده۰

بیلګه : د $M = \{ a,b.c\}$ ډیرۍ دا لاندې په تواندیرۍ لري

$$P(M) = \{ \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

هره ډیرۍ چې د توکو څخه جوړه وي هغه ټیک n جګ 2n توکی لري یانی : n^{2n}

دا پورته د جملې په څیر د پوره ایندکشن له لارې اوبی (حل-) کیدی شي(لومړۍ برخه دې وکتل شي)۰ دا دنده د ګرانو لوستونکو د خوښې کار دی، که کوي یې۰

پیژند ۲ ۰ ۷ : د ډیرۍM زور |M| لاندې د ډیرۍ د توکو تعداد یاګڼون پوهیږو۰ که دوه ډیرۍ M اوN همغه زور ولري هغه ته یوزوریزه – یا برابرزوریزه ډیرۍ وایو او داسې یې لیکو: $|M| = |N|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرونونو یا مساواتو او خونديږ ساتنو خویونه

الف) رفلکسیو- یا د انعکاس(هندارونیزې) اړیکېreflexivity

هغه اړیکي، چې د هغه او د هغه دخپل ځان ترمنځ رېښتونې وېناوې ورکړ شوي وي رفلیکسیویا انعکاسي اړیکي بلل کیږي لکه: $M = M, M \subseteq M$

خوندي لرل اړیکې رفلکسیو نه دي $M \not\subset M$

دا په دې مانا، چې هیڅ ډېرۍ د خپل ځان اصلي برخډېرۍ یا برخسټ نه شي کیدی٠

ب) سیومتریکې اړیکې Symetric relation

هغه اړیکې سیومتریک بلل کیږي، چې د شیانو ترمنځ چې کارول کیږي یا استعمالیږي یو له بل سره بدلیدلی شي٠

لکه $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_2 = M_1$

خوندي لرل سیومتریکې اړیکي نه دي:

که وي $M_1 \subseteq M_2$ نو اړیکی $M_2 \subset M_1$ نارښتیا یا ناټیک دي

دا هلته چې وي: $M_1 \neq M_2$

پ) ترانزیتیویتي Transitivity یا وړون اړیکې

ترانزیتیویتي هغه اړیکې دي، چې له یوه نه وبل ته یې د وړلو امکان شته یا موجود وي٠

له $L = M$ او $M = N$ څخه لاس ته راځي $L = N$

او

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_3 \Rightarrow M_1 \subseteq M_3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته داسې لولو: که M_1 د M_2 برخډيرۍ او M_2 د M_3 برخډيرۍ وي، نوله دې څخه لاس ته راځی، چې M_1 د M_3 برخډيرۍ ده

برابونونه يا مساوات او په بل کې ځايه ونه يا خوندي ساتنه ترانزيتيو اړيکې يا خويونه دي

۲ ۰ ۲ په ډيرۍ کې کارونې يا عمليې

ټولنډيرۍ (د اتحاد سټ)

پيژند۲ ۰ ۸ :

د دوه ډيريو M_1 او M_2 ټولنډيرۍ(unionاتحاد سټ)، چې د ډيريو ټولنه ورته وايو ده:

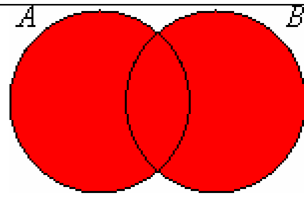
$$M = M_1 \cup M_2$$

دلته داسې پوهيږو، چې M د ټولو هغو توکو څخه جوړه شوې ډيرۍ يا سټ ده، چې لږ تر لږه د M_1 او M_2 توکې هم خوندي ولري۰

د ټولنې $M = M_1 \cup M_2$ هر توکی د M_1 يا M_2 توکی هم دی (پرتله ۱ –مه برخه د يا سره پرتله) يانې دا د ټولنډيرۍ توکی د M_1 يا M_2 او يا د دواړو توکې دي۰

يا لاندې دياګرام

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$A ? B$ $A\cup B$ (B تولنه A) x) د A سره B اړیکې لري

بیلګې

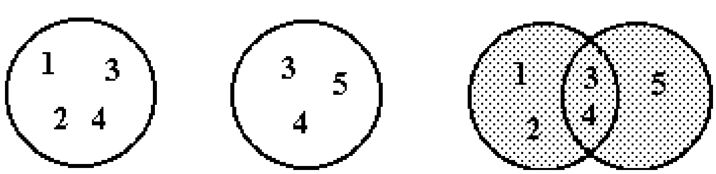
الف) M_1 دې د ځوانانو ډیرۍ وي، چې بکلوریا لري او M_2 دې د هغو ځوانانو ډیرۍ وي، چې مسلکي شهادتنامې لري، نو $M = M_1 \cup M_2$ د ټولو هغو ځوانانو ډیرۍ ده، چې بکلوریا او مسلکي شهادتنامې ولري او یا دواړه شهادتنامې ولري.

ب)

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\}$$
$$M_1 \cup M_2 = \{k, a, r, u, s, e, l\}$$

یا په لاندې توګه پیژند او بیلګه: A او B دې دوه ډیرۍ وي د دې ډیریو ټولنه داسې لیکو

$A\cup B = \{x \mid x\in A \vee x\in B\}$
$A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{3,4,5\}$ $A\cup$
$B=\{1,2,3,4,5\}$



تل په ټکو ټکي شوې ټکیدیرۍ ټولندیرۍ په ګوته کوي.

پ – خیره ۲ ۰ ۲ دوه په هواره کې ټکیدیرۍ په ګوته کوي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) ټکيپردۍ دي٠ ب) ګډ ټکی لري٠

پ) اړيکې $M_1 \subset M_2$ پوره کوي:

د دې لپاره ځيرې په لاندې کې په بيلګو کې راغلې دي٠

د ټولنې لپاره کموتاتيو قانون باور لري» $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ دا په دې مانا، چې د لړۍپرلپسې دلته(لنډ: لړۍ) د ډيريو په ټولنه کی رول نه لوبوي

يادونه : که ګڼونه ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ٠٠٠ ولرو، نو دا پرلپسې بولو او که بيا دا سره جمعه کړو لکۀ

1 , 1+2,1+2+3,1+2+3+4+,1+2+3+4++..+….

نو دا لړيپرلپسې يا لنډ: لړۍ بولو(پرلپسی برخه کې دې وکتل شي) دا په دې مانا، چې له دوو څخه د زياتو ډيريو ټولنه لړۍپرلپسی(لنډ: لړۍ) رول نه لري٠

اسوڅياتيو قانون باور لري٠

$$(M_1 \cup M_2) \cup M \;= M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

غوڅډيرۍ (د ډيريو غوڅی يا –متقاطع سټ) intersection

يادونه : دا کړی شو، چې د ډيرو ګډغوڅی وبولو(دا د ګرانو لوستونکو خوښه ده،کوم ناټيکوالی په کې نه شته)

پيژند:

ډيرۍ M د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M_2 غوڅډيرۍ يا د تقاطع سټ ده(لوستل: M_1

غوڅ(پرې)په M_2 (لنډ: غوڅی): $M = M_1 \cap M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ډیرۍ M ټول توکي د ډیرۍ M_1 او ډیرۍ M_2 توکی وي.

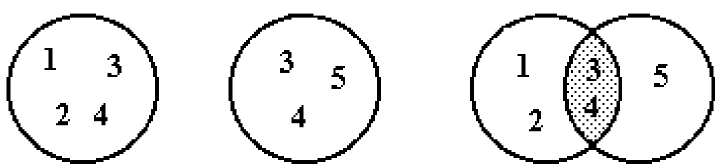
د غوڅډیرۍ $M = M_1 \cap M_2$ هرتوکی د ډیرۍ M_1 او ډیرۍ M_2 توکي دي (د ۱ –مې برۍ د هم او هم په مانا یا د «او» په مانا)

یا دا پیژند :

د ډیریو A او B غوڅی $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

بیلګه:

A = { 1,2,3,4}, B = { 3,4,5} => $A \cap B = \{3, 4\}$



یادونه: دې پورته ډول دیاګرام ته د ون دیاګرام Venn-Diagram یا د Euler-Venn- Diagram وایی

بیلګې :

لومړۍ : یوه ډله زده کوونکي له ننګرهار او پکتیا څخه راځي، چې په M_1 یې په نخښه کوو. یوه بله ډله ، چې په M_2 یې په نخښه کوود کندهار او همغه د پکتیا زده کوونکي، چې په M سره یې ښایو، دي. د دې دواړو ډلو غوڅډیرۍ

$$M = M_1 \cap M_2$$

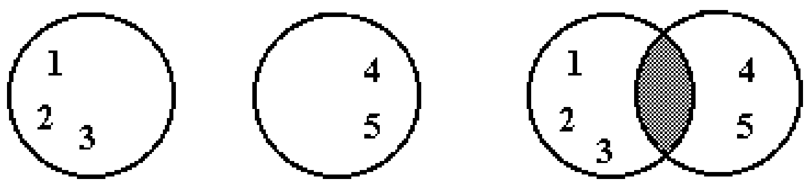
د پکتیا زده کوونکي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

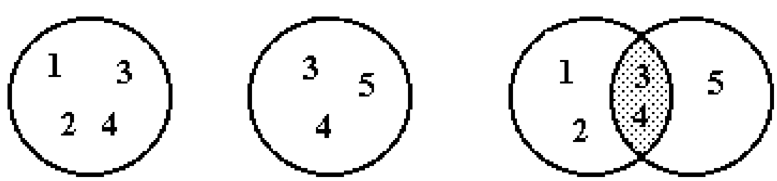
دویم:

$$M_1 = \{k,a,r\}, M_2 = \{u,r,s,e,l\},$$
$$M = M_1 \cap M \quad = \{r,l\}$$

دریم ځیره ۲ ۰ ۳ په هواره یا سطحه کې ښایي، چې الف) ګنون پردي دي



ب) یو بل سره ګډ تکی لري



پ) اړیکی

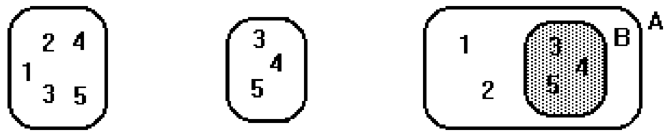
$$M_1 \subset M_2$$

پوره کوي

بیلګه:

$A=\{1,2,3,4,5\}$ $B=\{3,4,5\}$ $B \subseteq A$

(c) ketabton.com: The Digital Library



هغه ټکو باندې ټکي شوې ډېرۍ اصلي برخډېرۍ ده

دوه ډېرۍ، چې غوځډېرۍ یې تشډېرۍ وي

$$M_1 \cap M_2 = \theta$$

لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله پردۍ بلل کیږي

د غوځډېرۍ لپاره ، لکه څنګه د ټولنډېرۍ لپاره کموتاتیو قانون باور لري

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

او اسوځیاتیو قانون

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

ددواړو د ډېرۍکارونو یا ډېرۍ عملیو یانی ټولنډېرۍ او غوځډېرۍ لپاره دواړه دیستریبوتیو قانونونه پوره کیږي یا باور لري

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

(د ګڼونو د شمیرکارونو یا عملیو لپاره یواځې یو دستریبوتیو قانون شته والی لري:

$$a_1.(a_2 + a_3) = a_1.a_2 + a_1.a_3$$

مګر په ټولیزه توګه باور نه لري

$$a_1 + (a_2.a_3) = (a_1 + a_2).(a_1 + a_3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند :

کمونډیرئ یا تفریق سټ M_2 د ډیرۍ M_1 او ډیرۍ M کموالی یا فرق دئ او

داسې یې لیکو: $M_2 = M / M_1 = \{x \mid x \in M \wedge x \notin M_1\}$

له M څخه د M_1 ډیرۍ کمه شوې

یا کله چې د M_2 توکي د M هغه توکي وي، چې هغه د ډیرۍ M_1 توکي نه وي٠

لیکندود یالیکنډول :
$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

لوستل : د A او B توپیرډیرۍ یاکمونډیرۍ یا تفریقډیرۍ له ټولو هغو توکو x جوړه ده، د کومو لپاره، چې باور لري : x د A توکی دی او x د B توکی نه دئ

بیلګې :

لومړۍ : په یوه ټولګي کې M_1 د ټولو نارینه وو زده کړو ډیرۍ ده او M_2 دټولو زده کړو ډیرۍ (د نارینه وو او ښځینه وو) ، چې په شمیرپوهنه کې لس نمرې وړي٠

M_1 / M_2

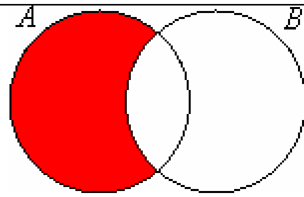
د هغو زده کړو ډیرۍ ده، چې ۲ ، ۳ ، ٤ ، ۵ ، ٦، ۷ ، ۸ ، ۹، نمرې وړي او ټول د هغو نجونو ډیرۍ ده، چې په شمیرپوهنه کې یې لس نمرې وړي٠

که په ټولګي کې یواځې نارینه زده کړي وي، نو باور لري

$M_1 / M_2 = \theta$

یا دا لاندې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A\backslash B$ (A بې له B) (x له A سره B اړیکې لري)	

دویم :

$$M_1 = \{k, r, a, i\}, M_2 = u, r, s, e, l\}$$
$$M_1 / M_2 = \{k, a\}, M_2 / M_1 = \{u, s, a\}$$

لکه څنګه، چې د کمون یا تفریق پیژند او بیلګي را په ګوته کوي په ټولیزه توګه باور نه لري:

$$M_1 / M_2 \neq M_2 / M_1$$

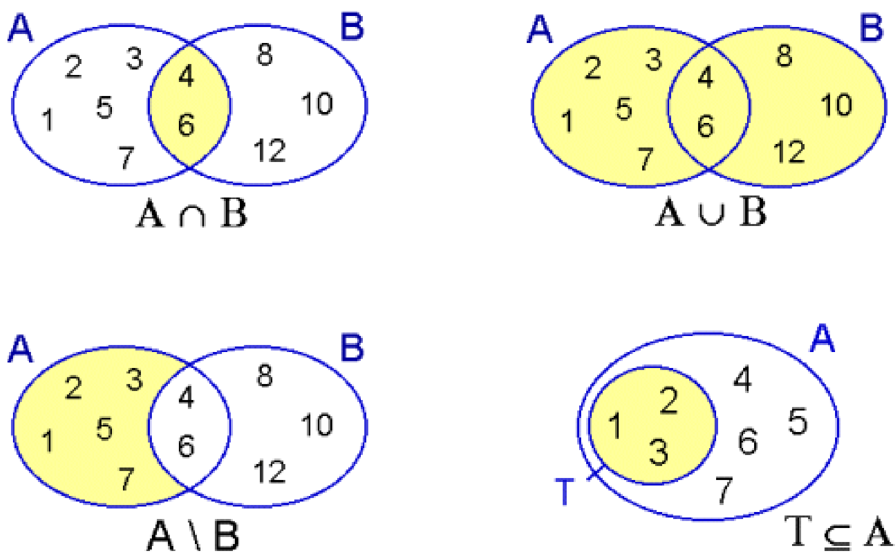
د یوې ډیرۍ یا سټ کمپلمنت یا پوره کوونکی :

دا کارونه یا عملیه د نورو کارونو څخه توپیر لري، چې په ډیرۍ کی مو څیړلي۰ دا یوه یوځاییزه کارونه ده او دا نورې دوه ځایزې کارونی یا عملیې دي۰

مورږ بنسټډیرۍ په U او د ټولو هغو توکو ډیرۍ، چې U کې پراته دي یانې د U توکي دي او هغه په M کې نه دي پراته یانې د M توکي نه دي پوره ډیرۍ یا کمپلیمنت بولو او د $\bar{M}$ سره یې په نخښه کوو۰

په لاندې څیره کې بیا د ډیرۍ غوڅې، - ټولنه او – کمون او برخډیرۍ ته د ګرانو لوستونکو لا زیات پام را اړوو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



پيژند:

پوره كوونكى- يا تكميلډيرى (يا د يوې ډيرى كمپليمنټ) د يوې ډيرى M پوره كوونكې ډيرى $\bar{M}$ ټيک هغه توكي لري(د بنسټډيرى U څخه) ، كوم چې د M توكي نه وي.

دوه ځله كمپليمنټډيرى جوړول خپلې لومړنى وينا ته ځي ، يانې $\bar{\bar{M}} = M$

دلته يواځې يوه ساده بيلګه راوړو: په يوه كلي كې دوه كورنى د توپير او برګ كورنى اوسيږي. كه دا دوه كورنى يو له بل سره خپلوي ونه لري، نو دوي يو له بل سره پوره ډيرى يا تكميلډيرى بلل كيږي يانې دا كلى پوره كوي.

۲ . ٤ ځيرونه mapping يا اړيكې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : پام دې وي، چې دا هغه ورسره بلد تابع كلمه نه ده، چې وروسته به ورسره بلد شو ۰

په دې برخه كې لومړۍ د ډيرۍ ضرب كلمه پيژنو يا تعريفوو او بيا د ضرب كلمې كارونه څيړو ۰

پيژند ۲ ۰ ۹ : د دواړو ډيريو M يو او M 2 ډيريضرب(اتيرانضرب) هم ورته وايي، يانې په x سره څليزي يا ضربيزي

$$M = M_2 \times M_2$$

د ټولو تنظيم يا ترتيب شويو توكو

$$x \in M_1, y \in M_2$$

جوړو (x,y) ډيرۍ ده۰

بيلګې

$$M_1 = (a,b\}, M_2 = \{1,2,3\}$$
$$M_1 \times M_2 = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

د جوړو د غوښتل شوي تنظيم له مخې څل په ډيريو كې كموتاتيو نه دی دا په دې مانا، چې

په ټوليزه توګه باور نه لري: $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$

۲ – R دې د ټولو رييلګڼونو ډيرۍ وي۰ په هندسي مانا د كرښې د ټولو ټكو ډيرۍ۰ RxR د ټولو رييلګڼونو جوړو ډيرۍ ده، په هندسي مانا د هوارې يا سطحې د ټولو ټكو ډيرۍ ده۰

پيژند ۲ ۰ ۱۰ :

د څيرونې F لاندې د دوه ډيريو د ضربډيرۍ $M_2 \times M_2$ برخډيرۍ پوهيږو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس د جوړه تنظیم شوو توکو ډیری، چې $x \in M_1$ له یوه یا ډیرو توکو $y \in M_2$ سره تنظیم یا بهتره په باندې ځیره شي٠

داسی هم ویلی شو: د1 M توکي د2 M په یوه یا ډیرو توکو تنظیمیږي یا ځېره کیږي٠

که $(x.y) \in F \subseteq M_1 \times M_2$ وي، نو x اوریجنل یا اصلي توکی او y ځیره توکی بلل کیږي٠

د ټولو اصلي توکو ډیری پیژندورشو یا تعریفورشو یا پیژنددیری یا تعریفډیری بلل کیږي او د ټولو ځېره توکو ډیری د ځېروني ډېری، ارزښتورشو یا ارزښتډیری بلل کیږي٠

بیلګی

$$M_1 = \{a,b,c,d\}, M_2 = \{1,2,3,4\}$$

د جدول په توګه دM یو توکو ځېرونه ونه یا ځېره کوونه د M دوه په توکو

ځېره توکی اصلي توکه یا ځیره کوونکی توکی

a ------------------------→ 1 , 2 ,5

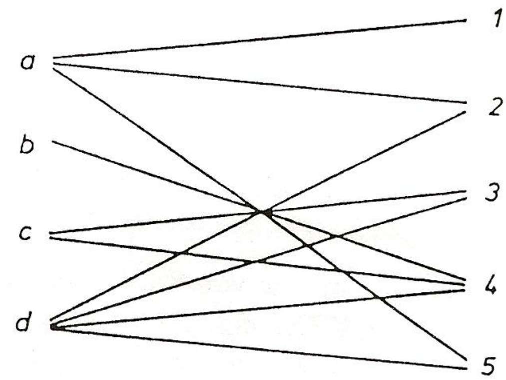
b ------------------------→ 4

c ------------------------→ 3,4

d ------------------------→ 2,3,4,5

یا دا لاندې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیرونه:

F = { (a,1),(a,2),(a,5),(b,4),(c,3),(c,4),(d,2),(d,3),(d,4),(d,5)}

(د M یو او M دوه ډیریو د ټولو توکو جوړو ډیرۍ)

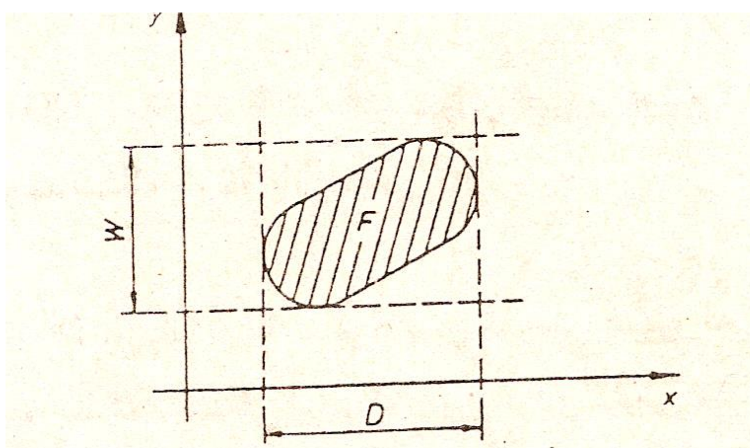


Bild 9.6 ځیره

دریم : هر پیدایښتي یا طبیعي ګڼ a د هغه په دوه ځله b=2a باندې ځیره کیږي۰ داسې پیژند شوې یا تعریف شوې ځیره ونه په لاندې بڼه هم انځوریدلی شي۰

$$F = \{(a,b) \mid a \in N, b = 2a\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم N د پیدایښتي یا طبیعي ګڼونو ډیرۍ. پیژندډیرۍ یا تعریف- د ټولو پیدایښتي ګڼونوډیرۍ ده او ارزښتډیرۍ د ټولو جوړه ګڼونو ډیرۍ ده.

څلورم : که M یو په یوه ښوونځي کې د ښوونکو ډیرۍ وي او M دوه په ښوونځي کې د ځانګړو ټولګیو ډیرۍ وي نو ښوونکي، چې په ټولګیو کې درس ورکوي دا یوه څېرونه ده. د ښوونکو ډیرۍ د ځانګړو ټولګیو په ډیرۍ کې

موږ د څېره ونې څلور حالتونه توپیروو:

پیژندونه(دې ته دې ګران لوستونکي ښه پام وکړي):

لکه په لومړۍ بیلګه کې په څیره ونه F کې د1 M ، چې تعریفډیرۍ D سره برابر دی او M2 ، چې له څیره ډیرۍ , W سره برابر دی ، توکي مو مخ ته پراته دي.

له یوې څیرونې Fغږیږو د1 M په M2 باندې. دلته دې « د » او « په » ته پام وي)

وي دې: $D \subset M_1, W \subset M_2$

لکه په دویمه بیلګه کې ، نو د یوې څیره ونې F غږیږو له M1 په M2 کې (دلته دې « په » او ,په کې » ته پام ور واړول شي)

وي دې : $D = M_1 \wedge W \subset M_2$

دلته د یوې څیره ونې غږیږو د1 M په M2 کې دلته دې دریمه بیلګه په پام کې راواړل شي.

وي دې: $D \subset M_1 \wedge W = M_2$

نو د یوې څیره ونې غږیږو له M1 په M2 باندې. دلته څلورمه بیلګه د بیلګي په توګه راوړو. د دې نیونې لاندې چې ټول ښوونکی ځانګړي ټولګیو ته درس ورکوي.

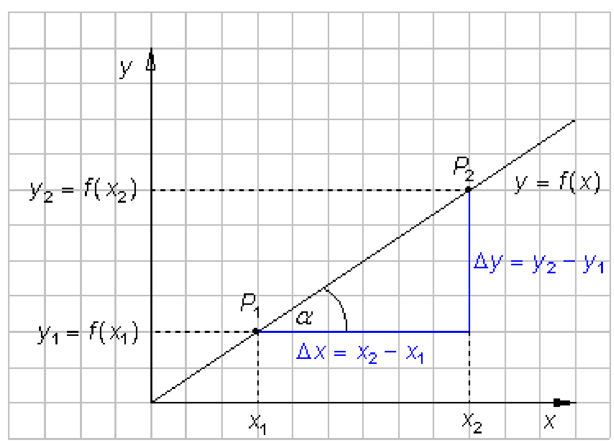
(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : دا لاندې برخه دې ګران لوستونکي وګوري، خو د دې اوس وخت لپاره لږ ستونځمنه ده او شايد خيرې هم رانه شي، خو که لږ د شميرپوهنې سره بلد شو، بيا پرې پوهيدل ساده دچ۰ زچ مخ ته لرم، چې په دې هکله ليکلى کتاب، چې چاپ شوى نه دى دلته پر ليکه کړم، چې هلته بيا دا موضوع لږ غزيدلې ده۰

بيلګه ۲ ۰ ۵ : موږ په هواره يا سطحه کې څرګند شوي کړى د ډيريځل RxR په څير د برابرونونو له لارې رانيسو(R د ريبلګنونو ډيرى د ګنکربنې تکي دي(ګنونه دې وکتل شي))۰

الف) $y = 2x$ يوه څيره ونه ده د R په R باندې ، څکه چې باور لري

$$D=W=R$$



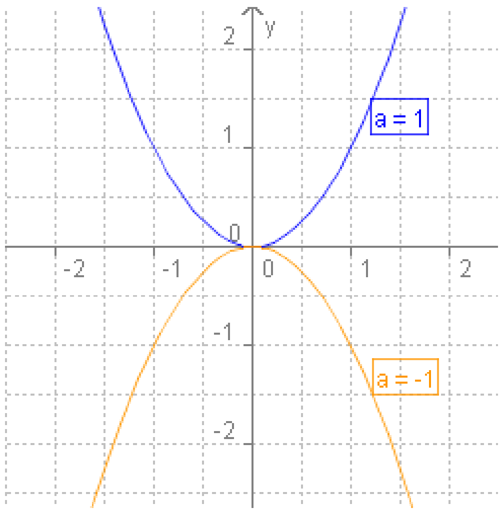
يادونه : په پورته څيره کې برابرون $y = ax+b$ دى.

ب) $y = x^2$

يوه څيره ونه ده د R په R کې ، څکه چې باور لري

$$D = R\ ,\ \ W = [0, \quad] \quad \infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



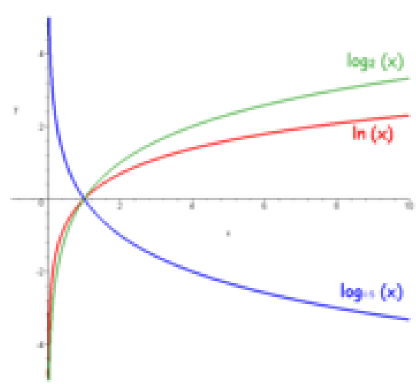
یادونه :

پوته بلواک د $x \mapsto ax^2 + bx + c$ دول دى، چې b = 0 , c = 0 او a = 1 , a = -1 اینبول شوي دي.

پ) y = log x

یوه خیره ونه ده له R په R باندې » ځکه چې باور لري.

$D = (0, \infty) \wedge W = R$

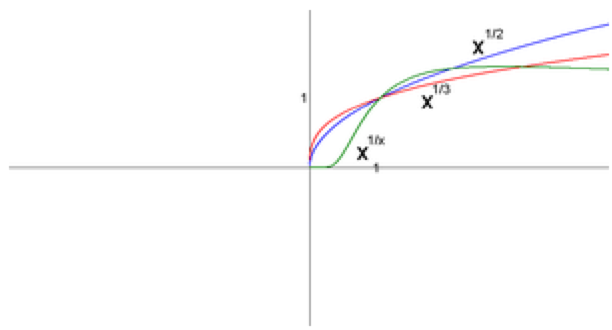


(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) $y = +\sqrt{x}$

یوه څیرونه ده له R په R ، ځکه چې باور لري

$D = W[0, \infty]$



یادونه : پورته د دویي ،دریمي او په x -مې ریښې په مانا دی

څیرې له ویکي څخه په مننه راکښنه شوي دي٠

پیژند ۲ ٠

یوه څیره ونه E یواځنی بلل کیږي٠ که هر $x \in D$ په ټیک یوه $y \in W$

باندې څیره شي٠ دا په دې مانا، چې هر $x \in D$ ټیک یووار په $y \in W$

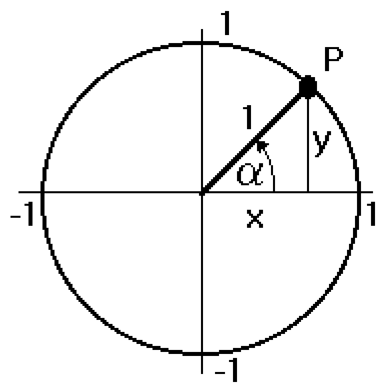
تنظیمډیرۍ یا جوړه ډیرۍ کې رامنځ ته کیږي٠ یوه یواځنی څیره ونه فنکشن

یا« بلواک» بلل کیږي او یا لکه تراوسه ورسره بلد یو یوه تابع بلل کیږي٠

پام:

دا دې دلته کره په ګوته شوې وي، چې زه « یوازنۍ څیره ونه » بلواک یا فنکشن بولم٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



بيلګه ۲ ۰ ٦ : په بيلګه ۲ ۰ ٥ کې له الف تر ت پورې ټولې څيروني فنکشنونه يا بلواک دئ۰ د دې پر څنګ لاندې برابرون (يوونګردئ ياني ګردئ، چې وړانګه يې يو يوون يايووالى يا واحد وي څيره ۰) انځور شوې څيره ونه له R په R کې [-1,1]) D=W) فنکشن يا بلواک نه دئ ، ځکه چې اصل دوه څيرې لري ياني که په تنظيمجوړه کې د څيره ونې لړي پرلپسې(لنډ:لړئ) بدله شي، نو يوې پرڅنګ څيره ونې ته راځو:

پيژند ۲ : څيره ونې F ته پرڅنګ څيرونه F^{-1} د ټولو جوړو (x,y) ډيرئ ده له $(x,y)\in F$ سره ۰

پيژند ۳ ۰ يوه څيره ونه يويواځنئ بلل کيږي، که يواځنئF او F^{-1} يوازنئ څيروه ونې وي، دا په دې مانا، چې که هر $x\in D$ او $y\in W$ ټيک يو ځل په تنظيم کې منځ ته راشي۰

يادونه : د څيروني نوم څخه بايد ونه ډار شو دا څيره ونې څيرې کووني (که څوک يو کالى يا رخت څيرېکوي)او څيره کووني توپير، ځکه سره کيدئ شي، چې هغه منځپانګه يې يو له بل توپير لري۰ مونږ پښتو کې نږدې يو ډول ليکونکي ويونه (لغات) لرو، خو دا هغې منځپانګې له مخې توپيريږي۰
ډيرئ پوهنه د شميرپوهنې ستنه ده، نو په راتلونکې کې به يې نوره هم ژوره وڅيړو او همدا اوس هم نور ګران هيوادوال دې ته رابولم، چې له ما سره ګډ کار يا خپلواک دې کار ته ملا راوتړي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ما دا برخه غزولې، چې په خپل شووني وخت کې به ګرانو لوستونکو ته په ځانله توګه د یوه کتاب په څیر هم وړاندې شي٠

۲ . ۵ تمرینونه

۱ – د لاندې ډېې یا سټ توکي د شمیرنې له لارې انځور کړی

الف {x لومړی عدد او$20 > x$ | x }(لوستل: د ټولو عددونوx ډېرۍ یا سټ، چې xلومړنی عدد او $20 > x$ دی).

ب- $\{x|x^2+x-6=0\}$

پ-$\{x^2+x-6=0$ او$x>0$ |$x\}$ دا په نوکانوکې ټول له کیڼ ښي لور ته لولو

ت) $\{x \mid x$ ریېلګڼ او $x^2+1=0\}$ دا ټول له ښي و کیڼي لور ته ولولی

۲ – د توکو x, y, z اړلرونوالی و ډیري M ته وڅیړی !

الف) M د لمړنیو ګڼونو ډیرۍ

$x = 4 , y = 5 , z = 6$

ب) M د لاندې مساواتو حلډیرۍ (اوبیډیرۍ)

$x^3 + x^2 - 6x = 0$

$x = 0 , y = 2 , z = 3$

پ) M د ریشنلګڼونو ډیرۍ چې په اینتروال [3 ,3-] کې پراته دي

$x = -2 , \quad y = \sqrt{2} , \quad z = 1/3$

ت) M ډ ریېلګڼونو ډیرۍ چې په اینتروال [3 ,3-] کې پراته دي

$x = -4 , \quad y = \sqrt{2} , \quad z = 3$

۳ – د لاندې ډیریو ترمنځ کومې اسړیکې پرتې دي

الف) M_1د ټول جفت ګڼونو ډیرۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

او M_2 د ټولو ټولګنونو ډيرى

ب) د ټولو مساواتو $x^2 + 2x - 3 = 0$, حلونو (اوبيو) ډيرى

$M_2 = \{ -3 , 1 \}$

پ) M_1 د ټولو ګنو ډيرى چي پر ۶ ويشل کيږي.

او M_2 د ټولو ګنونو ډيرى چي په ۳ ويشل کيږي !

او M_3 د ټولو ګنو ډيرى چي په ۱۲ ويشل کيږي!

۴ – د ډيرى $\{ a,u,t,o \}$ ټول برخډيري ورکړى!

۵ – د لاندې ډيريو څخه ټولنډيرى ، غوڅډيري او دواړه ټوډيري جوړ کړى !

الف) $M_1 = \{ k,a,m,e,l \}$, $M_2 = \{ m,a,u,l,t,i,e,r \}$

ب) $M_1 = \{ 2,4,6,.. \}$, $M_2 = \{ 3,6,9,.... \}$

پ) $M_1 = \{ x \mid x^2 + x +- 2 = 0 \}$, $M_2 = \{ x \mid x^2 - 3x + 2 = 0 \}$

۶ – د يوه ډيرى M او د تشډيري $\emptyset$ ټولنډيرى، غوڅډيرى او توپيرډيرى جوړ کړى!

۷ – د يوه ډيرى M او خپل همدې ډيرى ټولنډيرى ، غوڅډيرى او توپيرډيرى جوړ کړى!

۸ – وي دې $M_1 = \{ 4 , 8 , 12 \}$ $M_2 = \{ 3 , 6 , 8 \}$

$M_3 = \{ 0 , 2 , 4 , 6 \}$, $M_4 = \{ 6 , 12 , 18 \}$

جوړ کړى : $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3] \setminus M_4$!

۹ – جوړ کړى

الف) $M_1 \cup (M_1 \cap M_2)$ پ) $M \setminus \emptyset$

پ) $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$ ت) $\emptyset \setminus M$

۱۰ – وي دې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$M_1 \cup M_2 = \{1,2,3,4,5\},$$
$$M_1 \cap M_2 = 71,3,5\}$$
$$M_1 \setminus M_2 = \{2,4\}, M_1 \setminus M_2 = \varnothing$$

له دې پورته څخه M_1 او M_2 وټاکی !

۱۱ – وي دې

الف) $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ ب) $M_1 \subset M_2$,

وټاکی: $M_1 \setminus M_2$!

۱۲ – وي دی M_1 , M_2 (د نیمواز) اینتروال تکي ډیري:

$$M_1 = \{-3, 3\}, M_2 = [1, 7]$$

وټاکی

الف) $M_1 \cup M_2$ ب) $M_1 \cap M_2$ پ) $M_1 \setminus M_2$

ت) $M_2 \setminus M_1$ ټ) $M_1 \times M_2$

۱۳ – وي دې $M_1 = \{1, 2, 3\}$, $M_2 = \{\{a, b\}$

الف) د $M_1 \times M_2$ څل جوړ کړی

ددې لاندې ب) تر ت) برخی تمرین لپاره دې ۹ الف برخه وکتل شي.

ب) دا لاندې کوم ډول څیرونی دي

$$F_1 = \{(1,a),(1,b)\}$$
$$F_2 = \{(1,a),(3,a)\},$$
$$F_3 = \{(1,a),(2,b),(3,b)\},$$
$$F_4 = \{(1,a),(2,a),3,a)\},$$
$$F_5 = \{(1,a),(2b)\}$$

په ټولو حلنونو (اوبیو) کی F_1 تر F_5 ورکړی .

پ) په څټ څیرونه ورکړی

ت) د څیرونو F_1 څخه تر F_5 پورې، کوم یواځنی او کوم حتی یویواځني دي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . دحقيقي اعدادو (-ګڼونو) سره د شميرلو بنسټيزې نښلونې

(تړنی، کارونی يا عمليي)

۳ ۰ ۱ د اعدادو د سيستم جوړښت

۳ ۰ ۱ ۰ ۱ طبيعی اعداد يا -ګڼونه natürliche Zahlen

انسانانو له پخوا څخه اعدادو ته اړتيا درلوده۰ له دې امله يې پرمخ وديينه کې هڅې وکړې، چې له ډيری (سيټ) (د ليکنې په دننه کې ډيری پوهنه هم څيرلشوې)) سره داسې لارغوره کړي، چې دا ډيری تشريح کړای شي او د انسانانو او چاپيريال(طبيعيت) د پرلپسې اخ او ډب په نتيجه کې د ګڼ يا عدد وی(کلمه يا لغات) راپيداشوی، چې د عدد يا ګڼ کليمې پربنسټ د ريښتينو شيانو څرګند څومره والي (کميت)Quantitative ترلاسه کړي۰ د طبيعی اعداد و څخه په ګڼلو يا که غواړې شميرلو کې ګټه اخستل کيږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ الف د طبيعي عددونو(پيدايښتي ګڼونو) جوړښت

پيژند (تعريف)۳ ۰ ۱:

الف) ټول طبيعی اعداد د ډيری په څير يوه ټولګه جوړوي او د طبيعی اعدادو ډيری يا سټ په نامه ياديږي يا يې طبيعی اعداد بولو او په N او همداسې N° سره يې په نخښه کوو ۰

ډير پای طبيعي اعداد شته ، ځکه چې په هر طبيعی عدد پسی راتلونکی طبيعی عدد هم شته دی (يعنی په هرڅومره لوي طبيعی عدد پسی راتلونکی طبيعی عدد شته دی، چې دا وروسته روښانه کيږي)۰

ب) دطبيعي ګڼونو(اعدادو) اکسيوماتيکيAxiomatic جوړښت

اکسيوم جمله ده، چی اوبيونه (حل) نه غواړي او همداسی منل کيږي۰ دا چی جمله ، اکسيوم څه دي په لومړی برخه يانې سم اند (منطق) کې دې وکتل شي۰

طبيعی عدد کلمه د جيوسيپې پيانو(Giuseppe Peano له ۱۸۵۸ – ۱۹۲ ز۰کال) اکسيومونو پر بنسټ لاندې پيژند لري يا په لاندې توګه تعريف کيږي:

۱ – د صفر ګڼ يو پيدايښتي ګڼ دی

۲ - د هرطبيعي عدد يا ګڼ m لپاره يو يوائنی ټاکلی طبيعي عدد n شته، چې سملاسي(ترلی) د m پسی ګڼ دی، د کوم لپاره چی لرو: $m+1 = n = m^\wedge$

دلته $m^\wedge$ د m پسې سملاسې يا ترلی ګڼ يا عدد په ګوته کوي۰

۳ – هرطبيعي عدد زيات له زياته په يوه طبيعی عدد پسی سملاسي راتلونکی ګڼ دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ – هیڅ طبیعي عدد نه شته، چې پسی راتلونکی پیداېښي عدد یې صفر وي٠

٥ – که طبیعي عددو ډېرۍ M صفر د توکي په څیر ولري او که له هر طبیعي عدد m سره د هغه پسی تړلی راتلونکی عدد یا ګڼ `m هم د M توکی وي، نو M ټول

طبیعي عددونه خوندي لري یا په بل ډول » ټول طبیعي اعداد په کې ځاي دي٠

یادونه: ځنې ادبیاتو کې، د پیانو سیستم کې، د صفر په ځای ۱ لیکل شوی. په دې حالت کې بیا صفر ته د طبیعي عدد یا ګڼ په څیر نه کتل کیږي. که بیا صفر ورسره مل کړو، نو د صفر سره طبیعي ا عدادو ډېرئ یا –سټ یې د صفر سره بولو.

۱ . ۱ ب : د طبیعی اعدادو یا ګڼونو انځورونه او سیستمونه:

طبیعي اعداد په نخښو (دې ته په الماني کې Zifferوایي، چه همغه د صفر په معنا دی، خو دلته ترې مطلب، چې دا څیرو، دی) انځوریږي. د دې لپاره چې دا لړ ځای ونیسي، نو د لویو او وړو اعدادو لپاره نخښې له کوچنیو سره یوځای کیښول شوې دي. دا چې څرنګه یوه د عدد یا ګڼ نخښه له بل توپیریږي، په لاندې ډول یې د زیاتون یا جمعې سیستم او ځای سیستم کې ښایو.

په زیاتون سیستم کې هر بنسټیز ،،ځای،، یو ،، ځای ارزښت،، لري. د څیفرونو زیاتون د یو په بل کې د ورزیاتشوي بنسټیز څیفر پخپله هغه عدد یا ګڼ ورکوي. بیلګه یې په رومي ګڼونو کې راړو. دا له بنسټیزو څیفرونو جوړ شوی(ترې لاندې لسیز د اعدادو سیستم دی). زه دلته د ضرورت په بنسټ ټول ضروري څیفرونه چې موخه ترې عددونه دي، له پیل راوړم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

رومي عددونه:	M	D	C	L	X	V	I
عربي عددونه:	1000	500	100	50	10	5	1

طبیعي عدونه له دې امله یو د بل ترڅنګ لیکو چې کم ځای ونیسي لکه د بیلګې په توګه:
CXX په دې معنا چې C+X+X

په رومي ګڼونو کې، که بنسټیز کوچني ګڼنخښې لکه I , V , C د لوي ګڼنخښې و کیڼ لور ته ولیکل شي نو دا مانا لري چې دا کوچنی ګڼ له لوي ګڼ څخه کم شوی.
د بیلګي په توګه: XC = C - X .

بیلګې: **الف:** MMDCCLXVIII په دې مانادی 2768
ب : MCMXXIX په دې مانا دی 1929
پ : CCCIV په دې مانا دی 304

ځایسیستم: په ځاي سیستم کې هره بنسټیزه نخښه یو «ځاي ارزښت نخښه ارزښت» لري.

لکه : g– ئیز ځاي سیستم(پوزیشن سیستم ((Positionssystem)): د طبعي ګڼ n انځورونه په g– ئیزځای سیستم کې په دې ډول ده چې د یوه ورکړشوي ستې په بنسټ(g ∈N) g ≥ 2 هر طبعي ګڼ n په لاندې ځانګړي ډول انځوریدلی شي:

$$n = a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + \dots + a_1 g + a_0$$

دلته بنسټیزې ګڼنخښې a_i، g د $i = 0,1,2,\dots,k$ او $k \geq 0$ د $0 \leq a_i \leq g-1$ چې $a_k \neq 0$ وي په کار راځي یا اړتیا ورته شته.
لیکلی شو :

$$n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$$

که د بدلیدلو (د بل څه سره) امکانات رامنځ ته کیږي، نو بهتره به وي چې په

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ډول ولیکل شي

$$n = [a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0]_g$$

نن په ټوله نړۍ کي ګڼل په لسیز سیستم (ګڼځای ارزښت) باندې کیږي، چې تل داسی نه وه، لکه په افغانستان کي چی دا اوس هم د ډوډۍ پور لپاره په لرګي کرښه را کاږي، چی څو ډوډۍ واخستل شوې.

په لسیز سیستم کی ګڼځای «ارزښت» لري چی انځور شي، مګر په لرګی کی ځای ارزښت نه لري چی کرښه چیرته کښل شوې، هلته د پور کرښو له ګڼون یا تعداد څخه پور ځرګندیږي.

بل د ګڼلو سیستم . لکه د مخه مو چی تر پام لاندې ونیوه، د ګڼلو رومي سیستم دی چی نن هم د ارزښت وړ دی او همدارنګه د مفهوم ډك، زیاتونسیستم(جمعی -) ځرګندیږي.

بیا هم غواړو چی دا په لاندې ډول ځانګړی کړو:

۱ - هره لاندې نخښه I, X, C کړای شي چی زیات ترزیاته ۳ ځله(۳ واری) په یو ګڼ کی پرله پسی یا څنګ تر څنګ راشی

۲ - هره، د ګڼ نخښه V, L, M, خورا زیاته یو ځل څنګ تر څنګ په یوه ګڼ کی راتلی شي.

۳ - که بنستیز نخښه I, X او یا ....__-- ددې نخښو د ارزښت نه لوړو ارزښت نخښو V, X, L, C, D یا M CXI تر مخ ځای په ځای شوې یا انځوروي نو د لوي ارزښت څخه کمیږي .

زیاتون او کمون (جمعه او منفي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – په هرګڼ انځورنې(Zahlendarstellung) کی کیدی شي چې یواځې یو بستیز ګڼ تر مخ ځای په ځای یا انځور شي لکه: 1098 = MXCVII مګر نه IMIC
۵ – د یو ګڼ لپاره د امکان په حال باید کمی نخښې په کار واچول شي.

عربي ګڼونه : دا ګڼونه، چې موږ ورسره بلد یو، د لسیز سیستم ګڼونه دي، چې عربی ګڼونه بلل کیږي. دا د ګڼلو لسیز سیستم عربو د هند څخه راوړی چې په دولسمه پیړۍ کې یې اروپا ته یو وړ. دا اصلي ګڼونه له صفر(٠) تر ٩ پورې دي یا له 0 تر9 پورې، چې

څیفر ورته وای (همغه عربی صفر دی) چې دلته ترې بنستیز ګڼونه پوهیدل کیږي.

لکه چې ګوته مو ورته ونیوه زیاتونسیستم نور ارزښت نه لري، څکه چې د یو ګڼ ارزښت د ګڼ نخښی زیاتون باندې انځور کیږي. د ځای سیستم سره د ګڼونو انځورول ساده دي.

تعریف ١ . ١ ب : په یو «ځاي ارزښت سیستم» کی هغه ګڼ لوي دی چی زیات ځایونه ولري، که چیرې د ګڼ د ځایونو شمیر سره برابر وي(مساوي وي) نو هغه ګڼ ستر دی چی له کینی لورې یی نخښه لویه وي.

لسیز – یا لسګونی سیستم: لسیز سیستم هغه ځای ارزښت سیستم دی چي له انځورونی یی څرګندیږي. په لسیز سیستم کی د ګڼ انځورولو نخښی، لکه د مخه مو چی انځور کړې، ٠،١،٢،٣،۴،۵،۶،٧،٨،٩ دي. ١٠ ګڼ د لسیز سیستم بنستیزه نخښه ده. دا چی نور ګڼونه نه انځوریږي، نو ځای هلته ډك دی چی پرله پسی (ترتیب یانظم) د ٠ تر ٩ یعنی له 0 تر 9 ګڼونو پورې په ځای شوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول د پسی جګ ځای یوون (واحد) د په کار اچول شووګڼنخښو ګڼون (تعداد یا شمیر) دی، څموږ په حالت کی ۱۰ .

لکه چی د مخه مو ګوته ورته ونیوله، د پای (نه لایتناهی) ډیري (set , die Menge ګڼو ګڼلو لپاره لاندې ګڼونه کفایت کوي: ۱، ۲، ۳، ۴، او ۹ –امه برخه دې وکتل شي)) غږو داسی نور. تولودې ګڼونو ته چی دصفرګڼ ورسره مل شي د طبعي ګڼونو ډیری N ویل کیږي. ددې لپاره لیکو :

$$N = \{ 0, 1, 2, . 3 . 4 , 5 , 6,....\} ; \qquad N^* = \{ 1, 2, 3, 4, ...\}$$

موږ ګڼونه په کوچنیو لاتینی تکو یا حروفو ښایو لکه a ,b,c, ... n . دا ریښتوني

(ریښتینوالی یا واقعیت) چی n دې یو طبعي ګڼ وي، داسی لیکل کیږي $n \in N$ یا $n \in N^*$ (ویل کیږي چی: n د طبعي ګڼونوډیري N یا*N توکی دی(لنډ n د N یا *N څخه دی)) په دې ځای کی دې دګڼ او ګڼځای (ځیفر) توپیر ته پام وي.

موږ دګڼونو ټاکلو لپاره بلد یا اشنا د تخښډیري لسیز سیستم په کار اچوو (استعمالوو)

$$N_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$$

د ګڼونو د نخښو $a_i \in N_{10}$ پرله پسی، لکه د مخه مو چی په ګوته کړل، په لاندې ډول یو طبعي ګڼ انځوروي:

$$a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_2\, a_1 a_0 = a_n.10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}\,.10^{n-2} + ..+ a_2\,.10^2 + a_1.10 + a_0\, 10^0$$
$$a_i \in N.$$

ګڼونه په نورو ځیفرونو ډیري هم انځوریدی شي. د بیلګي په توګه په اینفورماتیك (Infrormatik) کی، چی د دوالسیستم (Dualsystem) (دوئیز سیستم) څخه کار اخستل کیږي. ددې لپاره دوه ګڼنخښي (ځیفرونه) لیکل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$N = \{ 0,1 \}$

په لاندې جدول کې دلسيز او دوه ئيز سيستمونو لمړني ګڼونه يو د بل ترڅنګ کښل شوي:

دوه ئيز سيستم	لسيز سيستم
0	0
1	1
10	2
1 1	3
100	4

په ټوليزه توګه(عمومي توګه) دلته يو څيفر پرلبسې(د عددون ترادف) $a_i \in N_2$ يو طبيعي عدد په لاندې ډول انځوروي،

$$a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0 = a_n.2^n + a_{n-1}.2^{n-1} + \ldots + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0 , \; a_i \in N$$

بيلګه ۱ . ۱ :

$$59 = 1.32 + 1.16 + 1.8 + 0.4 + 1.2 + 1.1$$
$$= 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 111011$$

يا دونه :: څه لنډ لنډيزونه

د طبيعي اعدادو ډيرئ يا سټ داسې په نخښه کوو:

د پيدايښتي يا طبيعی ګڼونو ډيرئ $N = \{ 1, 2 , 3 , \ldots \}$

دپيدايښتي ګڼونو ډيرئ د صفر سره $N° = \{ 0, 1 , 2 , \ldots \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ه کتابونو کی دا د صفر نخښنه په لاندې برخه کی راځي٠

۳ ٠ ۱ ٠ ب د طبيعي اعدادو يا ګڼونو انځورونه:

طبيعي اعداد په نخښو انځوريږي٠ دا عددونه يا ګڼونه د ځان لپاره يو سيستم لري، چی هغه زيات يې موږ نه ځيرو٠ زموږ لپاره غوره هغۀ عربی اعداد يا ګڼونه دی٠

يا په بل ډول : دا عددونه چی موږ ورسره بلد يو د لسيز ځايستسم عددونه دي، چی دا مو د مخه په ګوته کړل٠ دا کورونه (خوني يا خانې) لري او په هر کور کی له صفر تر ۹ ځاي نيوی شي او بيا يې هر ځاي يو ارزښت لري، له دې امله دا » ځاي ارزښت سيستم« دی٠ لومړي کور ته يويز، دوم ته لسيز، دريم ته سليز او همداسی ، چی دا مو د مخه لږ روښانه کړي٠

انځورونه يا ځيفرونه يې دي : ٠ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ دا د بنسټيز ګڼونو نخښی دي، نور يې په کورونو يا ځايسيستم باندې روښانه کيدی شي٠

پيژند ۳ ٠ ۱ ٠ ب :

په يو» ځاي ارزښت سيستم « کې هغه ګڼ لوي دی، چی ډير ځايونه ولري٠ که چيرې د ګڼ د ځايونو يا کورونو ګڼون (تعداد) سره برابر وي٠ نو بيا هغۀ ګڼ لوي دی، چی کيڼ لور يې ګڼنخښه لويه وي٠

۳ ٠ ۱ ٠ پ : طبيعي اعدادو کي د شميرنې بنسټيز قوانين

اوس په لاندې ډول د پيداينت ګڼونو، په ټوليزه توګه د رييل ګڼونو لپاره او وروسته د کمپلکسو ګڼونو لپاره هم باوري(معتبر) بنسټيز د شميرنې قوانين وړاندې کوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : د انډول (نظم یا ترتیب یا لوي واړه ترتیب(Anordnung) بنسټيز قوانين:

که > ولرو، نو دې ننوتي کونج کی یا د نخښی خوله کی عدد یا ګڼ لوي دی او د وتلی کونج یا لوي کونج >که نخښه یا داسی کونجکی یا څټ یا ککره کې لیکل شوی عدد کوچنی دی٠ که ګڼونه یا اعداد ١٥ او ٢٣ ولرو نو د لویواړه اړیکی داسی لیکو، یانې که 23 > 15 ولرو نو ترې څرګندیږي، چی عدد١٥ له عدد ٢٣ کوچنی دی .

د دوه طبيعي اعدادو a اوb ترمنځ له لاندې اړیکو څخه ټیک یوه اړیکه باور لري»

$a < b \quad , a = b \quad , a > b$

٢ - ٢١ =٢١ که د ٢١ په ځاي توری ولیکو هم $a = a$ به وي اینه ونه یا هندارونه یا منعکسونه (ریفلیکسیویتي Reflexivity)

٣ – له $a = b$ => (لاس ته راځي) $b = a$ (سیومتري، انډول، ورته وايي (Symmetry

د انعکاسي (ایینه ونیز – یا هندارونیز) برابروالی یانی که چیري دا عددونه ورواینه یا هنداره یا انعکاس شي، نو دواړه عددونه په دا بل لور بیرته سره برابر دي یا برابریږي٠ که انعکاسي(اینه ونیز)برابر نوم ورته کیږدو، نو هم مناسب به وي، خو موږ به یې همغه سیومتري وبولو٠

٤ - له $a = b$ او $b = c$ => (لاس ته راځی) $a = c$ (ترانزیتیو Transitivity)

ترانزیتیو ګورو، چی یو له بل اړوند مانا ته نزدی دی، ځکه چی دا ګڼونه یو د بل سره په واکوالي تړلي یا له یو څخه وبل ته ځی یا وړل کیږي٠

٥ – له $a < b$ او $b < c$ => (لاس ته راځی) یا $a < c$ یا $a < b, b < c \Rightarrow a < c$

وړاندیز : که چیری دا پورته وي یا لغاتونه یا نومه ونی په همغه لاتین نومونو ولیکو ښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به وي، خو له شمیرپوهنی پرته مانا باندی يې هم پوهیدنه ښه او اړیینه ده۰

ب : د زیاتون (جمع) Addition n. بنسټیز قوانین

که چیرې له طبیعي اعدادو څخه یو ، دوه یا څو ګڼونه یو په بل زیات شي، نو یو پیدایښتي ګڼ ترې لاس ته راځی او دا کارونه(عملیه) «زیاتون یت جمعه » بولو، ځکه، چی ګڼونه یو په بل زیاتیږي۰

پیژند: د همغه ډول شیانو یا یو څه یو په بل زیاتیدلو ته زیاتون (جمع) وایو

که عدد ۱۰ په عدد ۱۸ ورزیات کړو نوعدد ۲۸ ترې لاس ته راځی یا

$$۱۰ + ۱۸ = ۲۸$$

په پورته کې ۱۰ او ۱۸ یو پر بل زیاتیږي، نو له دې امله يې «زیاتېدونی» (ما تراوسه زیاتووني بللي، خو فکر کوم،چې زیاتیدوني يې ښه نومه ونه ده) بولي، ۱۰ + ۱۸ جمعه او ۲۸ « جمع ارزښت» بلل کیږي ۰ چی په هغه پخوانی نوم مو ورته حاصل جمع وایه ۰ + زیاتوننخښه ده او = برابروننخښه (مساوات علامه) بولو

دجمعې یا زیاتون بنسټیز قوانین

۱ - د دوه طبیعي اعدادو a او b لپاره تل یو زیاتون (جمع) a + b شته دی

۲ - یواځنوالی : له a' = a او b' = b څخه لاس ته راځي: a'+b' = a + b

۳ - COMMUTATIVE LAW کموتاتیو- یا بدلون قانون دی: a + b = b +a

۴ - assotiative law اسوځیاتیو - سره ګډېدني قانون. لرو
(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c

۵ - Monotony law مونوتوني – یا همغږیزوالي قانون :

(c) ketabton.com: The Digital Library

له $a < b$ څخه لاس ته راځي $a+c < b+c$

يادونه : په $a+b=c$ کې a او b زياتېدوني $a+b$ زياتون او c زياتون ارزښت بلل کيږي

يادونه : په زياتون کې لاندی زياتونقوانين هم باوري دي:

ناپيلی توکی: په N° کی يو توکی شته، چی که د هرپيدايښتي توکی سره په زياتون يا جمعه کی ور زيات شي همغه توکي ورکوي٠ دا توکی صفر دی: $a+0=a$

ناپيلی توکی کړی شو ناالوريز وبولو،څکه،چې د کومې لور ګڼ باندې يې په زياتون کې بدلون نه راولی يا د زياتون ارزښت همغه پاتيږي، همداسې نااړونده او که بل څه مو په خوښه وي همغسې يې وبولی٠

پ : د کمون (تفريق)Subtraction بنستيز قوانين

پيژند:د پيدايښتي ګڼونو a او b لپاره، چې $a>b$ وي، يواځی يو x شته دی، د کوم لپاره ، چې باور لري: $a - b = x$

که $x= a -b$ شته وي، نو ټيک يواځني شته دي(موخه x دیٓ)

نومه ونې: b کميدونی يا مفروق (تراوسه مې کمونی بللی) a ترې کمونی يا مفروق منه $a +b$ کمون او x کمون- يا تفريق ارزښت بلل کيږي يا بولو :

موږ پورته د لاتين تورو لپاره طبيعي اعدادونخښی ليکو، چی ساده يې ونوموو:

$$20 - 10 = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کی موږ له ۲۰ لس کم کړل، چی لاس ته راوړنه يې ۱۰ ده، نو له دی امله يې داسی نوموو:

تر مخ يادونه: په لاندې کې ع . د عربي په معنا دی

۲۰ «ترې کمونی »، څکه، چی ترې کمیږي(ع۰ مفروق منه)، ۱۰ «کمووني« يا کميدونی(ع۰ مفروق) دا بل لس يې «کمون ارزښت» يا د کمون لاس ته راوړنه(لنډ: لاس ته راوړنه يا کمون) (ع ۰ حاصل تفريق) ، – کموننخښه او = برابروننخښه ده۰

ت : د څل (ضرب)Multiplication بنسټيز قوانين:

۱ - د دوه پيداينتي ګڼونوa اوb لپاره د پيداينتي ګڼونو په ډيری کې تل يو څلa.b شته دی. د a.b لپاره داسې هم ليکوab په پورته کې aاوb څلووني (ضريبونه) اوab=x « څل ارزښت » يا څل(حاصل ضرب) دی۰

وايي چی ضرب وهلو ته وايي او د جمع (که جمعې) لنډه طريقه، چی۰۰۰۰وي يا د زياتون لنډه لار ده۰ ګورو، چی دا پيژند، چی وهل او دربول دي زموږ لپاره دومره موخور نه دی او څل د پښتو ښه نوم دی، چی له دربولو مو څانونه راويستلي وي۰

که ووايو، چی : د کابل او جلالاباد ترمنځ لار ۱۵۰ کيلو متره ده۰ زمری له کابل څخه جلال اباد ته ۸ څله لاړ، نو زمري به جلال اباد ته د تګ ټوله څومره لار وهلی وي؟

ليکو: ۱۵۰ × ۸ = ۱۲۰۰ ، نو زمري به ټوله ۱۲۰۰ کيلو متره لار وهلي وي۰ ګورو، چی د څل نومونه د ضرب لپاره ښه او اسانه ده، څکه چی پښتو ده او له ضريبونو څخه به هم څلوونی اسان وي، به ۰۰۰وي نه، بلکی اسان دي۰

۲ - له $a = a'$ او $b = b'$ څخه لاس ته راځي $a'b' = ab$ (يواځيتوب)

۳ - لرو $ab = ba$ کموتاتيو – يا د بدلون قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ - لرو $(ab)c = a(bc)$ د ګډولو- اسوشیاتیو قانون

٥ – لرو $(a+b)c = ac + bc$ د ویشونې- یا دیستریبوتیو قانون
Distributive law

٦ - له $a < b$ او $c > 0$ لاسته راځي $ac < bc$

جګتیتوالي یا یوغړیزوالي قانونMonotony

ټ – د ویش بنسټیز قانون Division

پیژند۳ ۰ ۲ :

که د دوه طبیعي عددونو a او b لپاره، چې $a \neq b$ او $a \neq 0$ وي یانی صفر نه وي یو طبیعي عددx شته، چې برابرون (مساوات) $ax = b$ پوره کړي، نو

$x = \frac{b}{a}$ یا b/a د b او a ویش (تقسیم) بلل کیږي، چې ماتګې(کسر) یې هم بولو

۱ – که $a / b = x$ یا $x = \frac{a}{b} = a/b$ شته یا موجود وي ، نو یواځنی شته دی(یواځني په دې مانا، چې بل ګڼ x نه شته او یواځې همدا ګڼ x دی)

نومه ونې : په پورته برابرون کې a/b وېش x ویش ارزښت، b ویشونی یا ویشه وونی دی، ځکه چې په یوڅه ویشل کیږي او a پرویشونی بلل کیږي، ځکه، چې څه پر ویشل کیږي یا مقسوم، مقسوم علیه یا قاسم ، حاصل تقسیم ۰

ګورو چې له قاسم یا مقسوم او همداسې د مقسوم علیه او حاصل تقسیم څخه مو دا د پښتو نومه ونی پر- یا پرې ویشونی ، ویشه ونی اوویش ارزښت یا لاس ته راوړنه ساده او زر پوهېږ دي، خو په خواشینی به وه وایم، چې تراوسه په شمیرپوهنه کی ورسره نابلد یو ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ۱۲ کتابچي پر څلورو زده کوونکو وويشو، نو هر يوه ته درې کتابچي رسيږي٠ گورو، چي ۱۲ په يو څه ويشلکيږي، نو ويشونی يي ښه نوم دی٠ دا ۱۲ په څلور ويشل کيږي پر ۰۰۰ ويشل کيږي، نو له دې امله څلور پر ويشونی بولو، درې يې لاس ته راوړنه ده لکه چي تراوسه مو ورته حاصل تقسيم وايه، له دې امله ورته ويش ارزښت وايو او دا کارونه يا عمليه خو ويش بلل شوی٠

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ټولگڼونه يا تام اعداد INTEGERs

د دووو طبيعي عددونوa او bکمون يا تفريق ($x= b-a$) ټيک او ټيک هلته يا هلته او هلته د طبيعي عددونو ډيری يا سټ کی شته، چي وي : $a \leq b$

د شميرپوهنې نخښنو باندې داسې ليکل کيږي:

$$x=b-a \Leftrightarrow a \leq b$$

انگريزي يي if and only if ټيک او ټيک هلته يا هلته او هلته(دا ښننه يا وينه پورته د شميرپوهنې نخښې ته ده)٠

که هغی نخښی ته وگورو، نو هم لاندې ترې څرگنديږي، له ښی لور کیڼ لاس ته راځی او په څټ(برعکس) له کیڼ لور ښی لاس ته راځی٠ يا که۰۰۰ وي، نو ۰۰۰ لاس ته راځی او په څټ٠

ټولگڼونه يا تام اعداد هم د انسانانو د اړتياو پر بنسټ منځ ته راغلي ، يا منځ ته راوړل شوي٠که چيرې سپين د خړ ۱۰۰ افغانیپوروړی وي او سپين ورته اتيا افغانۍ ورکړي، نو سپين بيا هم شل افغانی پوروړی پاتيږي، دا په دی ما، چي ۸۰ + ۱۰۰ - = ۲۰ - ۰ گورو، چی ۲۰ – يو پيداينښتي گڼ يا طبيعي عدد نه دی٠يا $80 - 100 = -20$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هغه حالت کی، چی کموونی (مفروق) له ترېکموني(مفروق منه) څخه لوي وي، نو لاس ته راوړنه يې طبيعي عدد نه دی٠ اوس يوه د اعدادو بلې ډيرۍ پيژند ته اړ کيږو، چی هغه د ټولګڼونوډيرۍ ده او دا د طبيعي عددونو او د طبيعي عددونو کمي(منفي) او صفر سره يوځاي کوو، چی ټولنه جوړوي(په ډيرۍ کۀ به روښانه شي)، هغه څه، چې له دې ټولنې لاس ته راځې هغه د ټولګڼونو ډيرۍ ده او داسې يی ليکو:

$$Z = N \cup -N \cup 0$$
$$Z = \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots \}$$

د دې لپاره، چې ترې کمونی د کمېدونی کوچنی وي ، نو پيدايښتي ګڼونه په کمګڼونو غزوو يا پراخوو، دا په دې مانا، چی د پيدايښتي ګڼونو مخنخښه په کموننخښه يا منفي نخښه باندې سنبالوويانې (کيدی شي زموږ هيوادوال د څټ نخښی په نامه ورسره بلدوي، خو هره نخښه، چې د ګڼ زياتی يا کمی ښايي د ګڼ کيڼ لور ته ليکل کيږي، چې دا ما مخنخښه ليکلې او بللی

هغه په برخه ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ کې ورکړ شوي شميرقوانين په Z کې هم باور لري

د ټولګڼونوډيرۍ

Z = { …. -3, -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , …. }

د مخه مو شميرقوانين، چې د پيدايښتي ګڼونو لپاره ورکړل، هغۀ د ټولګڼونو لپاره هم باور لري

د کمون يا تفريق بنسټقوانين (پسی يا دوام):

۲ - د هرو دوو ټولګڼونو يا تام اعدادو a او b لپاره يو ټولګڼ x=b-a شته، د کوم لپاره، چیa+x=b برابرون باوري دی

د ويش تيوري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۱ . ۲ الف د ويش قاعدې ، لارې يا خويونه

د طبيعي عددونولپاره د نورو قاعدو ترڅنګ ، چې د لومړنيو ګڼونو د ټوټه ونې يا تجز يي لپاره خورا ګټور دی باور لري

الف) يو ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦) ويشونی دی، که د اخر څيفر يا کور (له اخره(موخه تری ښی لور دی) دوه ، درې ، څلور ۰۰۰ بنستيزو څيفرونو) څخه جوړ ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦ ۰۰۰ويشونی وي) په دوه ويشونی ګڼ جوړه (جفت) نوميږي او بل ډول يی ناجوړه(طاق) بلل کيږي۰ ګورو، چی دلته هم په جوړې او ناجوړه ښه پوهيدلی شو

ب) يو ګڼ په ٥ (۲٥ ، ۱۲٥ ، ٦۲٥ ، ۰۰) ويشونی دی، که د اخر(له ښي لور) بنستيز څيفر (د اخر دوه، درې ، څلور ، ۰۰۰ بنستيز څيفرونو) جوړ ګڼونه په ٥ (۲٥، ۱۲٥ ، ٦۲٥ ۰۰۰) ويشوني وي

يادونه : په لاتين کی هغه، چی ښي لور ته وي هغه ته اخر وايي او موږ يې شايد لومړی وبولو۰ زه کوښښ کوم، چې دا پوهوړ وليکم، خو بيا دې هم ګران لوستونکی تری ټيک ناپوهيدنه ماته وبخښي او مشوری دې راکړي۰

پ) يو ګڼ په ۳ همداسی ۹ ويشونی دی ، که د ګڼ پروت زياتون پر دې ګڼونو ويشونی وي۰

د يوه ګڼ پروت زياتون لاندې د هغه ګڼ بنستيز ه ګڼونخښو(څيفرونو) زياتون پوهيږو، بی له دې، چې د هغه ځاي ارزښت په پام کې ونيول شي۰

بيلګۀ : د 126 پروت زياتون يا پرته جمعه ده: 1+2+6=9

ت) يو ګڼ په 11 ويشونی دی که د هغه ګڼ الترنيري(نخښنه بدلونکی) پروت زياتون۰ پر 11 ويشونی وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

الترنیري پروت زیاتون، چې پروت کمون هم ورته وایی له بنستیزو ځیفرونو ۱ ، ۳ ، ۵ زیاتون څخه د ۲ ، ٤ ، ٦ ،۰۰۰ زیاتون کمون پوهیږو ، بی له دې، چې ځاي ارزښت یي په پام کی ونیول شي یا په بل ډول، که د ناجوړه کور زیاتون څخه د جوړه د زیاتون کم کړو۰

بیلکه: ۱۷۳۸ په ۱۱ ویشوني دي، ځکه، چې : ۱۵= ۸+ ۷ او ٤ - = ۳ – ۱ -، چې الترنیري زیاتون یانی ۱۱ = ٤ – ۱۵ یې په ۱۱ ویشونی دی۰

ټ) یو ګڼ پ ه ۳۷ وېشوړ دی که (د ګڼ له اخر څخه جړړشوي) د درېګوني ګڼونو زیاتون پر ۳۷ وېشونی وي.

بیلکه:

37|(448+352+216+20)⇔ 37|1036 ځکه چې 37|20216352448

ث) یو ګڼ په ۷ همداسې په ۱۳ ویشوړ دی، که د هغه (د ګڼ له لخ څخه جوړ) درېګونی الترنیري زیاتون پر ۷ همداسې پر ۱۳ وېشونی وي.

بیلکې : 37604 | 7 ځکه چې 7 | 567 ⇔(604-37)|7

13| (889-293+709-96) ⇔ 13|1209 ځکه ، چې 13 | 9679293889

ج) یو ګڼ په ۱۰۱ وېشونی دی، که (د ګڼ له اخر څخه جړشوی) دوهګونی الترنیري زیاتون په ۱۰۱ وېشونی وي.

بیلکه:

101|(69-06+63-03+79)⇔ 101|202 ځکه چې 101|7930630669

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : که پيداښتني ګڼونه a او b ولرواو ولرو a : b ، نو a پر b وېشو، که وېش

ارزښت يې هر ګڼ وي او که پېداښتني ګڼونه a او b ولرو او ولرو b|a ، نو دا په دې مانه، چې ګڼ b ګڼ a ويشي بې له پاتې یانې ګڼ a په ګڼ b وېشوړ دی.

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ټ) خوراغټ ګډ پرویشونی او خورا کوچنی ګډ زیاتځله

یا بزرگترین قاسم مشترک و کوچکترین مضرب مشترک(ذو الاضعافالاقل)

Great common divisor and small common multiple

ددې لپاره، چې دا په سرليک کې ورکړ شوي څه ښه و پېژندلی شو ، داسې مخ ته ځو:

لاندې ګڼونه دې ورکړ شوي وي، سملاسي يې په لومړنيو ګڼونو ټوټه کوو

$$260 = 2.130=2.2.65=2.2.5.13 = 2^2.5.13$$

$$468=2.234=2.2.117=2.2.3.39=2.2.3.3.13=2^2.3^2.13$$

له پورته دواړو ګڼونو د لومړنيوګڼونو ځله وونو هر يوه څخه هغه لومړنی ګڼ رانيسو او سره ځله وو بې، چې په دواړو ګڼونو کې ګډ وي او توان(په خپل ځای کې دې وکتل شي) يا جګګڼ بې ټيټ يا کم وي . یانې

$$22.13 = 2.26 = 52$$

دا پورته لاس ته راوړی ګڼ یانې ۵۲ پورته دواړه ګڼونه وېشي یانې د دواړو ګڼونو پروېشونی

دئ او خورا غټ پروېشونی هم دئ. یانې ۵۲ خورا غټ او ددواړو ګډ پروېشونی دئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډ : ۵۲ د يورته ګڼونو خورا غټ ګډ پروېشونی دی.

داسې ګڼ , خوراغټ ګډ پروېشونی, بولو (لنډ ونه يې : غ ګ و)

هغه ګڼ، چې د دوه یا ډېرو ګڼونو ګډ پروشونی او خورا غټ هم وي، نو دې ګڼ ته خورا,,

غټ ګډ پروېشونی ,, (لنډونه: غ ګ و) وایو. یا

(بزرګترین عامل (مقسوم علیه) مشترک)Greatest commom divisor(g c d)

اوس بیا داسې مخ ته ځو:

په پورته کې هغه د دواړو ګڼونو لومړني ځله وونې، له هر څخه يو چې په جګ توان وي

یانې خورا غټ جګګڼ ولري ، هغه د جګ توان رابېلوو او بیا يې سره خله وو، چې لاس ته

ترې راځي: $2^2.3^2.5.13=2340$

دا پورته ګڼ یانې ۲۳۴۰ د دواړو ورکړ شوو ګڼونو ګډ زیاتځله دی (یانې ګډ په دواړو

وېشل کیږي) او دا خورا کوچنی ګڼ هم دی. دا په دې مانا،چې له دې ګڼ بل کوچنی ګڼ نه

شته، چې د پورته ګڼونو دواړو ګډ زیاتځله(څو برابره) وي.:

لنډ : خورا کوچنی ګڼ دی. د دواړوګڼونو (یانې ګډ) زیاتځله (ګډ څو واره) دی

لنډ يې : خورا کوچنی ګډ زیاتځله (لنډونه يې: خ ګ ځ) یا
(کوچکترین مضرب مشترک یا ذوالاضعاف Least common multiple(l.c.m.)
الاقل)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران هیوادوال دې ورته پام وکړي، چې کوم نوم به زموږ لپاره زر یا بیخي پوهوړ او ساده وي.

وروسته داسې مخ ته ځو:

دا چې موږ په پیدایښت یا طبیعي ګڼونو کې له شمیرلو سره بلد شو ، نو په لاندې ډول پیژند ورکوو:

پیژند(تعریف)۳ ۰ ۳ :

a او b دې تولګڼونه وي۰ وایو چې « ګڼ a ګڼ bویشي» (او یا هم a د bپرویشوني دئ او یا همa د b څو برابره (زیاتځله) دئ) که یو تولګڼ u شته یا موجود وي او دا باوري کړيau=b ددې لپاره لیکوa|b (وایو، چې ګڼ aګڼ b ویشي ، خو اړیین یا ضرور نه ده، چې کلمه ګڼ ورسره وویل شي۰

که a د bپرویشونی نه وي، نو د دې لپاره لیکوa|/b(دا نخښنه /| دې د نه ویشونی لپاره ومنل شي)

بیا لیکو، چې : پیدایښتي ګڼونه، چې په ۲ ویشل کیږي جوړه (جفت) ګڼونه بلل کیږي او که نه نو ناجوړه (طاق) ګڼونه بلل کیږي۰ د صفر ګڼ د پیدایښتي ګڼونو په ډیرۍ کې یو ځانګړی حالت لري۰

په لاندې جمله کې بې له ښوونې یا اوبیونې د دې ویشکلمی لپاره یو څو ساده شمیرقاعدې را یوځاي کوو، چې په راتلونکې کې ترې کار اخستل کیږي۰

جمله ۳ ۰ ۱ :

د په خوښه یا زړه پورې تولګڼونو a,b,c,d لپاره باوري دي:

(۱) ± 1 او $\pm a$ ویش (دا په نامه « ساده» پرویشوني دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۲) د ۱ پرويشونی ۱ او ۱ - دي

(۳) تل باور لري، چې 0 | a او a | 0 يوائې په هغه حالت کې باور لري، چې a = 0 وي

(٤) له a|b او b|c <= a|c

(٥) له a|b لاس ته راځي: ac|bc ۰که 0 =| c وي ، نو د دې په څېټ هم باوري دي۰ دا په دې مانا چې، که ac|bc وي، نوa|b هم باور لري۰د ګڼونو ليکدود له مخې، که نړيوالجال ته پورته شو داسې ليکو، که نه دا پورته بسيا کوي: $c \neq 0, a|b \Rightarrow ac|bc$

(٦) لهa|b او c|d څخه لاس ته راځي او په څېټ ac| bd لنده ليکنه يې(که نج ته پورته شوه): $a|b, c|d \Leftrightarrow ac|bd$

(۷) له a | b او b| a لاس ته راځي a = ± b

(۸) له a |b اوa|c څخه لاس ته راځي a|(bx+cy) د ټولو ټولګڼونو x او y لپار

(۹) تيک هلته a|b کله چې وي|b| | |a|،

(۱۰) که a | b او b = 0 نه وي نو باوري دي |b| > a > |b| -

حل (اوبی) : (۱) له a1 = (-a)(-1) = a لاس ته راځي

(۲) له 0 = a0 لرو 0 | a . که وي a | 0 , نو يو ټولګڼ u شته د کوم لپاره چې وي 0u = a او له کومې چې لاس ته راځي a = 0 .

(۳) ساده دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۴) که $a \mid b$ او $b \mid c$, نو تهولګنونه u او v د $au = b, bv = c$ سره موجود دی . له دې لاس ته راځي $c = bv = a(uv)$ ، پس $a \mid c$.

(۵) که $a|b$ ، پس یو تهولګنې u د $au = b$ سره موجود دی، او هم د $(ac)u = bc$ سره، د کوم څخه چې لاس ته راځي $ac \mid bc$. د $c \mid= 0$ لپاره دا اخرختځیر په څټ کیدی هم شي.

(۶) د $a|b$, $c|d$ او (۵) څخه لاس ته راځي چې $ac|bc$ او $bc|bd$ ، د (۴) له مخې $ac \mid bd$.

(۷) د $a \mid b$ او $b \mid a$ څخه د تهولګنونو u او v موجودیت لاس ته راځي د $au = b$ او $bv = a$ سره . برسیره پر دې لاس ته راځي $a(uv) = a$, پس $a=0$ یا $u=v=\pm1$. په لمړي حالت کی د $a \mid b$ له امله $b = 0$, پس $a = b$. په دوم حالت کی $a =\pm b$ دی.

(۸) د تهولګنونو u , v لپاره دې $au = b$ او $av = c$ ، نو له دې $a(ux+vy)=bx+cy$ لاس ته راځي، پس $a \mid (bx+cy)$ د ټولو تهولګنونو x او y لپاره.

(۹) وي دې $a|b$. له $a \mid b$ ، $a| \mid |a|$ او $|b| \mid b$ څخه او د (۴) څو واره استعمال څخه لاس ته راځي، چې $|a| \mid |b|$. په څټ: که $|a| \mid |b|$ باورلری، نو د $|a| \mid |b|$ ، $a \mid |a|$ او $|b| \mid b$ څخه په ورته ډول لاس ته راځي $a \mid b$.

(۱۰) دی $a \mid b$ ، پس د (۹) هم $|a| \mid |b|$. که $b \mid= 0$ وي ، پس یو طبعي ګڼ u لاس ته راځي د $|a|u = |b|$ سره، له کوم چې $|a| \leq |b|$ لاس ته راځي.

که $b|a$ د تهولګنونو a,b لپاره د $b \mid=0$ سره، نو یو یواځنی معلوم ګڼ q شته (د a او همداسی د b «کومپلیمنت پرویشونی» بلل کیږي)، چی لرو $a = bq$.

په تهولیزه توګه لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۳ ۰ ۲ (د ویش الګوریتم): a او b دې ټولګڼونه وي۰ د $b \neq 0$ سره ۰ نو یوائځني ټاکلي، په پای پلونو(قدمونو) کی شمیرلکیدونکي ټولګڼونه q او r (چې د a پر b ویش

څخه لاس ته راځي او «ویش» په همدې ډول « پاتی بلل کیږي، شته دی،د کومو لپاره چې باور لري: $a = bq + r \quad \wedge \quad |0| \leq r < b$

هر یو ټولګڼ کم له کمه ساده پرویشونی لري یعنی ± 1 او پخپله د دې ټولګڼ زیاتیز(مثبت) او کمیز(منفي)۰ دې پرویشؤنو ته «سادهٔ پرویشونی» وایو۰

پیژند ۳ ۰ ب :

هر یو ټولګڼ، چې یوائځی او یوائځي ساده پرویشونی ولري موږ ورته لومړنی ګڼونه وایو او دا لومړنی یا پریم ګڼونهPrimzahlen په pسره په نخښه کوو، چې دا پریم یا لومړی ګڼ د پیدایښتي ګڼونوتوکی دی۰

هریو ټولګڼ، چی لومړنی ګڼ نه وي د لومړنیو ګڼونو په ځلونو(ځله وونو)(ضربیونو) ټوټه یا تجزیه کیدی شي۰

بیلګی :

$$240 = 24 \,.\, 10 = 3 \,.\, 8 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 = 2^4 \cdot 3 \,.\, 5 \qquad - \; 1$$

$$2310 = 2 \,.\, 1155 = 2 \,.\, 3 \,.\, 385 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 77 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11 \qquad -2$$

$$3750 = 25 \,.\, 15 \,.\, 10 = 5 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5^4$$

که پورته بیلګو ته په ځیر شو نو په ۱ او ۳ راغلو ګڼونو کی ګڼ ۲ د دواړو پر ویشونی دی او همدا ډول ۳ هم د دواړوګڼونو پرویشونی دی یانی $2.3 = 6$ برسیره پردې ګڼ ۵ هم نو $2.3.5 = 30$ دواړه ګڼونه ویشي او شاید په دې ګڼونو کی یو خورا غټ ګډ پرویشونی هم وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته درېواړو بيلګو کې ۲ ، ۳ ، ۵ د ځلوونو په څير خوندي دي ياني دا ګڼونه ويش، چې له دې امله ګڼ ۳۰ د درجواړو ګڼونو غ۰ګ۰پ دئ

پيژند ۳ ۰ پ :

a او b دې ټولګڼونه وي او d دې يو مثبت يا زياتونی ټولګڼ وي، د کومو لپاره، چې باور لري:

$$(1) d \mid a \wedge d \mid b$$
$$(2) t \mid a \wedge t \mid b \Rightarrow t \mid d$$

پس d د a او b خورا غټ ګډ پرويشونی(غ۰ګ۰پ) بلل کيږي d لپاره داسی ليکو:

$$d = (a,b)$$

نو d خورا غټ ګډ پرويشونی(لنډ: غ۰ګ۰پ) بلل کيږي۰

که باوري وي: $(a,b) = 1$ نو a او b پروېش پردي بلل کيږي ياني له ۱ پرته بل داسې ګڼ نه شته، چې دواړه ګڼونه پر ووېشل شي.

يادونه : په زياتو ادبياتو کې لنډونه په درېتورو کيږي، خو که غواړی دا خورا غټ ګډ پرويشونی داسې راالنډوو : خ غ ګ پ

يادونه: ما د خورا غټ ګډ پرويشونی لپاره دا پورته درې توکي غوره کړي، که ګران لوستونکي بل وړانديز لري، نو زه يي ضرور په پام کی په پوره خوښی نيسم۰ دې دوه کلمو ته په فارسي ادبياتو کي بزرګترين قاسم مشترک او کوچکتريب مضرب مشترک وايي او ذوالاضعاف الاقل يي هم بولي۰

يادونه : که چيرې d او *d دواړه د a او b غ ګ پ وي، نو له پورته پيژند څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی $d \mid d^*$ او $d^* \mid d$ ، نو د $d \geq 0$, d^* له امله لرو $d^* = d$

لاندې جمله په وښايي ، چې داسې غ ګ و تل شته دی

جمله ۳ ۰ ۳ :
په خوښه تولګنونو a اوb لپاره دې غ ګ پ d شته وي، نو تولګنونه x او y شته د کومو لپار، چې لرو: $d = ax + by$

حل(اوبي): که $a = b = 0$ وي ، نو 0 د a او b غ ګ و دی، نور ساده دی. د a او b د ممکنه بدلون (په پام کی دې وي چې د (a , b) تعريف په a او b کی سيومتريك دی) له امله اجازه لرو چی $b \neq 0$ ونيسو.
موږ اوس رکورسيف (rekursiv (دا په دې مانا چې د مخه غړي څخه وروستی يعني وريسی غړی لاس ته راوړلکيږي)
تولګنونه......., r_{-1}, r_0, r_1, r_2 .... او q_1, q_2 .... په لاندې ډول تعريفوو : وي دې , $r_{-1} = a$
$r_0 = b$ د $i \geq 1$ او $r_{i-1} \neq 0$ لپاره تولګنونه q_i , r_i داسې تعينوو چې $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$

او $o \leq r_i < |r_{i-1}|$ کوم چې له جملې (۱ . ۳) څخه ممکن کيدی شي . بايد يو نه منفی ګڼ n ورکړ شوی وي، د کوم لپاره چی لرو $r_n \neq 0$ مګر $r_{n+1} = 0$, چی بی له دې بيا يوه نه پای د طبعي ګنونو لويدونکی يا کميدونکی پرلپسی لاس ته راځي، کوم چې ناشونی(ناممکن) دی. دامو اوس ددې لاندې مساواتو شيما ته لارښودوي

$$a = q_1 b + r_1$$

$$b = q_2 r_1 + r_2$$

....

....

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا مساوات د ښکته پورته وویل شي، نو په ترتیب (یو په بل پسې) لاس ته راځي:

$$r_n \mid r_{n-1} , r_n \mid r_{n-2} , \dots r_n \mid b , r_n \mid a$$

دا په دې مانا چې r_n د a او b یو غ گ و دی. t دې د a او b یو بل غ گ و وي، نو په دې حالت کې که دا پورته مساوات له پورته ښکته ولولو، نو یو په بل پسې لرو

$$t \mid r_0 , t \mid r_1 , t \mid r_2 ,\dots, t \mid r_{n-1} , t \mid r_n$$

دا په دې مانا چې $|r|$ د a اوb غ گ و دی.

هر د دې ګڼونو r_iد ($-1 \le i \le n$) سره، په ځانګړي ډول r_n او ددې سره (a , b) یو د a او b لاینې کمبینیشن دی ، په لاندې ډول $au + bv$, چې u او v ټولګڼونه دي.

$r_{-1} = a$ د

او $r_0 = b$ لپاره ساده دی. که د یوه i لپاره د $1 \le i \le n$ سره، که یو د a او b یو لاینې کمبینشن ښوونه د r_{i-1} او r_{i-2} لپاره همدا سم د لاسه پیداشوي وي، نوله $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$ څخه د یوې داسې r_i د ځاي په ځاي کولو له لارې هم ، چې په دې ډول د ایندکشن له لارې غوښتنه لاس ته راځي. (پای)

یادونه : د غ گ پ د ښوونې متود ، چې پورته او په لاندې بیلګه کې راوړل شي د اویکلید الګوریتم"Euklid Algorithmus„ د یوې ګڼیزې دندې یا کارونې (عملیې) شیماتیکي اوبیونې(حل) متود په نامه یادیږي، نو له دې سره x او y هم له a څخه

d = ax + by اکسپلیځیتExplizit (لاتین: ځرګند، واضح، روښانه) شمیرل کیدی شي.

بیلګه:

غوښتنه (2124 , 1764) = d . د اویکلید الګوریتم کارونې له لارې لرو:

$$2124 = 1 \,.\, 1764 + 360$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1764 = 4.360 + 323$$

$$360 = 1.324 + 36$$

$$324 = 9.36$$

$$\Rightarrow d=36$$

که پورته وګورو نو غ ک پ $d = 36$ دئ

د دې لپاره ، چې d له x او y سره په $d = ax+by$ ډول انځور کړی شو، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$36 = 360 - 1.324 = 360 - 1(\ 1764 - 4.360) = (-1).1764 + 5.360$$

$$= (\ -1)\ .\ 1764 + 5.(2124 - 1764) = 2124\ .\ 5 + 1764.(-6)$$

د پورته څخه د a او b لپاره لاندې مهمه پيژند نخښنه يا نخښنونه لاس ته راځي

يادونه : ماته دا لاندې جملې ښه ښکاريږي، چې ګرانو لوستونکو ته يې بې له اوبيونې

وړاندې کړم، دا جملې په ختيه کې د ګڼونوتيوري دنده ده، چې په ګڼونتيوري کې بيا د ښوونې سره ښوول کيږي.

جمله۳ ۰ ۹ :

a او b دې ټولګڼونه وي. د a او b يو ګډ پرويشونی $t \geq 0$ هلته او هلته د a او b ګ غ پ دئ کله چې دا شکل $t = ax + by$ د a او b ټولګڼونو سره انځور کړاي شو۰ په ځانګړي ډول a او b هلته او هلته ويشپردي دي، که ټولګڼونه x او y شته وي د کومو لپاره چې باور لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ax + by = 1$$

اوبیونه : د شرایطو ضرورت سم د لاسه له ۳ ړ ۶ څخه لاس ته راځي. دا چې شرایط پوره کېدونکي هم دي، له دې لاس ته راځي، چې هر د او پروبشوني د پروبشوني هم دي..

څو جملې په لاندې کې روړو، ګڼونتېري پورې اړه لر او دلته يې نه ښايو.

جمله : ۱۰ . ۳

a او b دې ټولګنونه وي٠ د a او b هر ګډ پرويشونی $t \geq 0$ لپاره باور لري:

$$(a/t, b/t) = (a,b) / t$$

په ځانګړي توګه t د a او b يو ګډ پرويشونی هلته اوهلته غ ک پ دئ چې باور ولري

$$(a/t, b/t) = 1$$

ليما۳ ۰ ۱۱(جمله ګئ)(اويکليد): په خوښه ټولګنونو a او b او c لپاره باور لري

له $a|bc$ او $(a,b) = 1$ لاس ته راځي $a|c$

تعریف ۳/۱ ت : $a_1, a_2, \ldots, a_n$ دې ټولګنونه وي $(n \geq 1)$, او d دې يو نه منفي ټولګڼ وي د کوم لپاره چې باور لري :

لمړی : $d \mid a_i$ د ټولو $i = 1, \ldots, n$ لپاره

ب : له $t \mid a_i$ څخه د ټولو $i = 1, \ldots, n$ لپاره لاس ته راځي $t \mid d$.

نو d د $a_1, \ldots, a_n$ غ ګ و بلل کيږي او د d لپاره هم داسې ليکو $(a_1, \ldots, a_n)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د a_n , ... , a_1 لپاره د داسی غ ګ و یواځتتوب په ۲ . ۵ کی کتل کیدی شي او د موجودیت لپاره یی لرو :

جمله ۳ . ۱۳ : د خوښې تولګنونو a_n , ... , a_1 لپاره ($n \geq 1$) غ ګ و موجود او d د a_n , ... , a_1 خطي (لاینې) کمبینیشن دی دا په دې مانا چی

$$d = a_1x_1 + ... + a_nx_n$$

د مناسبو تولګنونو x_n , ... , x_1 لپاره.

یادونه : له دې بیا لاس ته راوړل کیدی شي:

$$(a_1 , ... , a_n) = ((a_1 ,..., a_{n-1}), a_n)$$

د په خوښه تولګنونو a_n ,...,a_1 د ($n \geq 1$) لپاره. سړی کړی شي چی د a_1,...,a_n غ ګ و پل په پل د اویکلید الګوریتموس له لارې پیدا کړي، چی دلته یی د اوبی یا حل ځخه تیرېږو.

د اوبی یا حل لپاره یی د n په لور د پوره ایندکشن څخه کار اخستل کیږي چې په ۸ –امه برخه کې څېړل شوی دی.

بیلګې:

۱ - ګنونه 240 او 3750 غ ګ پ $30 = 2.3.5$ لري

۲ – لرو 408 او 748

$$408 = 2^3.3.17, 748 = 2^2.11.17$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس غ ګ پ دی: $(408,748) = 2<2> . 17$ یا دا لاندې که ن ج پورته شول

$$(408,748) = 2^2.17 = 68$$

۳ – پ غ ګ پ د ګڼونو او غ ګ پ $6 = (30.66.114)$ دی، ځکه، چې
$30 = 2.3.5$

او $66 = 2.3.11$ او $114 = 2.3.19$ دي

٤ – ګڼونه 54 او 65 ګډ پرویشونی نه لري دا موږ پرویشپردی بولو، ځکه، چې دي:

$$65 = 5.13 \quad \wedge \quad 54 = 2.3.3.3$$

خورا کوچنی ګډ زیاتځلی(کوچکترین مضرب مشترک)

موږ په لاندې کې د خورا کوچني ګډ زیاتځله (لنډ: ک ګ ز) کلیمې په ځیرنه پیل کو۰ دا کلمه و غ ګ پ یوه دوه ییزه یا دوه ګونی یا غبرګه (دوال Dual) کلمه ده، موږ په لاندې ډول سملاسي ټولیز پیژند ورکوو

تعریف ۲ . ټ : $a_1 ,...., a_n$ دې ($n \geq 2$) ټولګڼونه وي، او v دې یو داسې نه منفي ټولګڼ وي، د کوم لپاره چې باور لري:

الف – $a_i | v$ د n , ... ,, $i = 1$ لپاره

ب – له $a_i | w$ څخه د n , ... , $i = 1$ لپاره لاس ته راځي $v | w$.

نو v د $a_1 , ... , a_n$ کوچنی ګډ زیاتځله (لنډ : ك ګ ځ) بلل کیږي او داسې یې لیکو:

$$v = [a_1 , ... , a_n]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند (د دوه ګڼونو لپاره)

a او b دې ټولګڼونه وي او v دې یو داسې نه کمیز یا نه منفي ټولګڼ وي، د کوم لپاره، چې باور لري:

(۱) $v|a$ او $v|b$

(۲) له $a|w$ او $b|w$ څخه لاس ته راځی $v \mid w$

نو v د a او b خورا کوچنی ګډ زیاتځله (لنډ» ک ګ ز او که غواړی خ ک ګ ز) بلل کیږي او په لاندې توګه یې لیکو

$$v = [a,b]$$

جمله :

په خوښه ټولګڼونو $a,b,c,\ldots,n$ لپاره ک ګ ز شته دئ او دا یواځنی دئ

$$[a,b,c,\ldots,n]$$

یادونه: موږ لاندې مساوات هم د مختلفو جملو او د هغو له حلونو لاس ته راوړو :

دټولګڼونو ($n \geq 3$) $a_1, \ldots a_n$ لپاره لرو $[a_1,\ldots,a_n] = [[a_1,\ldots,a_{n-1}], a_n]$

او هم $|a_1 a_2| = [a_1, a_2] (a_1, a_2)$

لاس ته راوړني (داهم په همدې مانا مګر د جملی په څیر دی): د په خوښه ټولګڼونو a, b, c لپاره باور لري: له $a|c$, $b|c$ او $(a,b) = 1$ څخه لاس ته راوړو $ab|c$

د ګڼتیوري بنسټیزه جمله:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژنده :

یو ټولګڼ$n > 1$ لومړی ګڼ (prime number) بلل کیږي، که له ساده پرویشونv بل پرویشونی ونه لري٠

لومړي ګڼونه لاندې غوه خویونه لري.:

لیما (لکه کوچنی جمله): که p یولمړی ګڼ وي او$p \mid a_1 \ldots a_n$ د ټولګڼونو $a_1, \ldots, a_n$ لپاره. نو $p \mid a_i$ د کم له کمه یوه i د $1 \le i \le n$ سره.
حل (اوبی): حل یی د ایندوکشن له لارې صورت نیسی، چی ددې لپاره باید ۸ ـ امه برخه کتل شوي وي.
د $n = 1$ لپاره ښوونه ساده ده . اوس دې $n > 1$ وي او لیما دې $n-1$ لپاره سملاسي باور ولري. نو لرو $p \mid a_n$ ، په بل ډول بیا له $p \nmid a_n$ څخه لاس ته راځي چې $(p, a_n) = 1$ دې . له مختنه تیرې جملی لاس ته راځي، چې که $p \mid a_1 \ldots a_{n-1}$ وي ، نو داسې دی $p \mid a_i$ د یو i لپاره چې $1 \le i \le n-1$ وي د ایتدکشن د نیونې په بنسټ.

د لومړنیو ګڼونو غوره والی د « ګڼونتیوري بنسټیزی جملې» څخه لاس ته راځي

جلمه (د ګڼونتیوري بنسټیزه جمله):

هر یو پیداینتي (طبیعي) ګڼ ،د ګڼونو تر تیب پورې، په یواځني او یواځني (یویواځنی (له دې کلمو څخه موخه داده، چې دا په یواځی یو ډول لیکل کیدی شي او بس٠ کیدی شي د ګڼونو پروتځاي بدل وي، خو ضریبونه همغه دي)) ډول د لومړنیو ګڼونو ځل په څیر لیکل کیدی شي٠

اوبی : ښوونه د n په لور ایندکشن له لارې مخ ته بیایو (برخه ۸ دې ودې کتل شي)
د $n = 1$ لپاره باور لري، که، لکه معمول ، 1 د طبعي ګڼونو د تش(خالي) ځل په څیر تعریف کړو. له دې امله دې $n > 1$ وي او جمله دې د ټولو طبعي ګڼونو $< n$ لپاره ښوول

(c) ketabton.com: The Digital Library

شوي وي. موږ اوس ټول د n پروېشونی $t > 1$ په نظر کي نیسو. کم له کمه یو داسی ګڼ شته لکه n . که p د دې پروېشونو کوچنی پروېشونی وي، نو p لمړی ګڼ دی. په بل ډول به نو بیا p یو پروېشونی q لرودی د $1 < q < p$ سره، او دا چی q د n پروېشونی وي، نو دا به د p تعریف رد کړي. دا چی $n / p < n$ د ایندونکشن نیوني په بنسټ $\frac{n}{p}$ د لمړي ګڼونو د څل په څېر لیکل کیدی نو په همدې ډول پخپله n هم.

وي دې $n = p_1p_2..p_r = p'_1p'_2...p'_s$ د n دوه ډوله د لمړیوګڼونو د څل په څېرلیکنه . له $p_1 \mid p'_1...p'_s$ اوس لاس ته راځي $p_1 \mid p'_i$ د یو i د $1 \leq i \leq s$ سره . د نمرې بدلولو له لارې دې وي $p_1 \mid p'_1$. داچي بیا $p_1 = p'_1$ باور لري، نو لاس ته راځي $p_2...p_r = p'_2....p'_s$ ، له کومو چی د ایدکشن له نیونی لرو $r - 1 = s - 1$ ، پس $r = s$ او (او د ترتیب بدلون) هم $p_i = p'_i$ له $2 \leq i \leq r$ لاس ته راځي .

پای.

د بنسټیزي جملی د ګټور استعمال لپاره لاندې جمله ده

جمله : هر طبعی ګڼ n په ټیك یو ډول په لاندې فورم انځوریدلی شي $n = \prod_p p^{\nu_p}$ (لپاره p د پای ډیرو ν_p یواځي د $\nu_p = 0$ (دې). (ν نیولی شکل کیږي) چیرته چی p ټولو طبعي ګڼونو کې په جګیدونکې لړۍ پرلپسې کې ځغلي.

یادونه: د عملي شمیرنې لپاره په هغو ګڼونو چې جګ یې صفر وي تیریدل کیدی شي، لکه : $n = 28 , n = 2^2.7$ د $n = 2^2 . 3^0 . 5^0 . 7$ لپاره

لاس ته راوړنې : $(a,b) = 1$ او $(a , bc) = 1$ ، نو هم $(a , bc) = 1$ ، د په خوښه ټولګڼونو a , b , c لپاره

اوبی يا حل : نيولی دي وي چې $(a , bc) > 1$ ، نو بيا به يو لمړنی ګڼ p موجود وي د p/a او p / bc سره، د ليما ۲ . ۲ له مخې به يې باور لرودی p/b يا p/c داد $(a,c)= (a,b)= () = 1$ سره تضاد دی.

جمله : a او b دې له صفر مختلف ګڼونه وي او $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ او $|b|= \prod_p p^{\beta_p}$ د دوي مطلقه ارزښتونو لمړی فاکتورتجزيه د ۲ . ۴ له مخی ، نو $a \mid b$ هلته او هلته باور لري که د ټولو لمړي ګڼونو p لپاره باور ولري $\alpha_p \le \beta_p$

لاس ته راوړنې : وي دې a او b له 0 مختلف ګڼونه، $|a|= \prod_p p^{\alpha_p}$ همداسی $|b|= \prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورتوټونه(تجزيه) وي. نو باور لري

$$(a,b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)} , [a,b] = \prod_p p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$$

چيرته چې $\min(\alpha_p, \beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p, \beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بيلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

يادونه : د لاس ته راوړنې ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زياتو ټولګڼونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعماليدی شي.

يو څو په لمړيو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ايا ناپای زيات لمړي ګڼونه موجود دي که نه اويکليد لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې يو ښکلي ځواب دی چې له هغه رينښه نيسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راوړني : وي دې a اوb له 0 مختلف ګنونه $|a|=\prod_p p^{\gamma_p}$ همداسې $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورېږونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a,b)=\prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)}, \quad [a,b]=\prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p,\beta_p)$ د دواړو ګنونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p,\beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بېلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$
او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړنې ۲ ځخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو تولګنونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګنونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپاى زیات لمړي ګنونه موجود دي که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چې له هغه ربښه نیسي:

جمله: ناپاي ډېر لومړني ګنونه شته.

حل(اوبی) : موږ جمله ناسیده یا ناسمه ښایو (۸ –امه برخه دې وکتل شي) او نیسو چې پایډیر لمړی ګنونه $p_1 , p_2 , p_3 , ..., p_r$ موجود دي. ګڼ $N = p_1p_2...p_r+1$ له 1 لوي دی او له دې امله په یوه لمړي ګڼ p ویشونکی دی. د نیونی له مخی لرو $p = p_i$ د $1 \le i \le r$ سره . د $P|N$ او $p | p_1p_2....p_r$ له امله لاس ته راځي $p |1$.کوم چې ناشونی دی (ناممکن) له دې امله باید ناپای زیات لمړي ګنونه موجود وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : د میلاد څخه پخوا د « اریتوتنس غلبیل» متود څرګندوو، چې موږ د 1 او 100 ترمنځ د لمړي ګڼونو معلومول دځي متود له لارې په لاندې توګه څرګند وو

~~1~~ 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~
~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~
~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~
37 ~~38~~ ~~39~~ ~~40~~ 41 ~~42~~ 43 ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ 47 ~~48~~ ~~49~~ ~~50~~
~~51~~ ~~52~~ 53 ~~54~~ ~~55~~ ~~56~~ 57 ~~58~~ 59 ~~60~~ 61 ~~62~~ ~~63~~ ~~64~~
~~65~~ ~~66~~ 67 ~~68~~ ~~69~~ ~~70~~ 71 ~~72~~ 73 ~~74~~ ~~75~~ ~~76~~ ~~77~~
~~78~~ 79 ~~80~~ ~~81~~ ~~82~~ 83 ~~84~~ ~~85~~ ~~86~~ ~~87~~ ~~88~~ 89 ~~90~~ ~~91~~
~~92~~ ~~93~~ ~~94~~ ~~95~~ ~~96~~ 97 ~~98~~ ~~99~~ ~~100~~

۳ ۰ ۱ ۰ ۳ - راشنل ګڼونه Rational Nnumbers

(لاتین: عاقلانه یا هوښیار اعداد یا ګڼونه)

د افغانستان په دري ادبیاتو کې داسې ګڼونه او ایراشنلګڼونه کله ناطق د ګونګ اوداسې نورو ګڼونو په نامه یا دیږي، کله یې ماتګڼونه بللي، خوزه دا ښه بولم، چې دا همداسې یانې راشنلګڼونه وبلل شي، که څوک یې هوښیار ګڼونه بولی هم خوښه یی او یا مات ګڼونه ، خو دلته راځیو Ratio nهوښیار په معنا نه بلکه د نسبي په معنا دی۰

یادونه : که / ولرو یانې که ولرو a / b نو دا په دې مانا، چېa په b ویشل کیږي۰ که ولرو≠ نود نابرابرونخښه ده۰ دا په دې مانا، چې b له 0 سره برابره نه ده۰ د دوه ګڼونود a او b ویش x = b / a د تولګڼونو په ډیرۍ کې تل هلته شته دی، چې a د b تولګنیز څو ځله وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره، چې بیا هم ویش$a : b$ (دلته هم b پرa ویشل کیږي) کیدونی شي» سره له دې، چې ویش تل په ټولګڼونوکی پیژند نه لري یا تعریف نه دی یا صورت نه نیسي« باید د ټولګڼونو ډیری ماتګڼونو(کسر) ډیریځته پراخه شي، چې د لومړي ځل لپاره افاده یا وبینه b/a سومبولیک مانا لري، د نوو ګڼونو په څیر نیسو او په ټولګڼونو یې ور زیاتوو، نو هغهٔ ګڼونه، چې لاس ته راځی موږ ورته راشنلګڼونه وایو۰ دلته دا راشنل ګڼ د جوړې په څیر ورکړ شوی دی

cb / ca هلته باور لري، چې$c \neq 0$ دټولګڼ اوa |b د ماتګڼ په څیر ورکړ شوي وي

د راشنلګڼونو ډیری، چې په Q سره ښایو د ټولګڼونو ماتګڼو b/a چې $a \neq 0$ اوa او b د ټولګڼونو له ډیری وي، د ټولګڼونوپراخوالی دی او ټول د مخه تیر بنسټیز قوانین په کې باور لري او د ویش بنسټیز قانون ته داسې پراخیدلی شي

ټ : د ویش(تقسیم) بنسټیز قانون(دوام)

۲ - د دوه راشنل ګڼونوa ،$a \neq 0$ او b لپاره یواځنی راشنل ګڼ $x = b/a$ شته دی، چې برابرون یا مساوات$ax = b$ پوره کوي

راشنل ګڼونه هم د ورځنیو اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلی

بیلګه :

که شپږ. منه غنم په دولسو تنو وویشو، نو د هر تن نیم من غن, راسیږي، چې دا نیم یې

راشنلګڼ دی، یاني $6 : 12 = 1 / 2 = 1 : 2$ یا $\frac{1}{2}$

دا باید په ګوته کړو، چې راشنل ګڼونه د پای یا ناپای لسمیز ګڼ په څیر لیکل کیدی شي

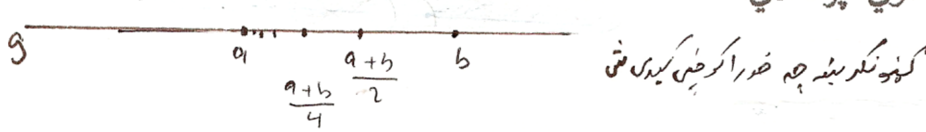
(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ٤ - رییل گنونه(Real numbers (reele Zahlen

(فرانسوي: په ريښتوني شته يا موجود)

د ريشنلګڼ په بنسټ هغه ورځنی تیوریکی اړتیاوي چې د شمیرعملیو بی بندیزه (نامحدود) په کار اچولو یا استعمال ته موجود وي حل یا اوبی شوې او همدارنګه عملي اړتیاوي چی اندازه کولو ته موجود وي هم حل شوې وي.

د ريشنلګڼ له لارې کیدی شي چې د کرښی اوږدوالی تیك ورکړ شي یا په همدې مانا : په هرخومره وړوکی ګنونکرښه انتروال کی هم ناپای زیات ګنونه، چې په ټکو یا نقطو انځور شوي، پراته دي.



د ټولو دې امکاناتو سره سره هم بیا په یوه کرښه کی هر ټکی د ريشنلګڼ په ذريعه نه شي ښودل کیدی یا په بل عبارت د کرښی هر ټکی د ريشنلګڼ په مانا نه دی . دا ګنونه چې د «ایريشنلګنونو»په نامه یادیږي، کیدی شي د یوه پریودیکي(periodische) (د ګنونو کړی نه شلیږي) ناپای لسیزمات له لارې وښوول شي.

د بیلګي په توګه د مربع د نیمي(قطر) x اندازه چې د مربع یو اړخ ۱ وي نه شي کیدی چي په ريشنلګڼ وښوول شي. د پیتاګوراس د جملی په بنسټ د x لپاره لاندې مساوات لرو : $x^2 = 1^2 + 1^2$, پس $x = \sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رييلګڼ کليمه يوه ژوره کليمه ده چې د پوهيدلو لپاره يې «پولې» (ليمس lim) ته اړتيا موجود ده چې په ۱۸ –امه برخه کې به تر څيړنې لاندې ونيول شي.

ډير اينتروالبنديدل چې په همغه يوه ټکي راځرځي مساوي(ورته) ارزښته Äquivalent) لاتين :مساوي ارزښته) ليدل کيږي

رييلګڼيرى R چې په ريشنلګڼيري د ايريشنلګڼيري ورزياتول دي چې له ۲ . ۱ . ۱ . ۱ تر ۲ . ۱ . ۳ برخې پورې ټول بستزقوانين په کې باور لري. د رييلګڼ له لارې دکرښې ټول ټکي په بر کې نيول کيدی شي. په دې ډول رييلګڼونه ټولې د شميرلو او اندازه کولو اړتياوې پوره کوي.

ګورو چې $x^2 + 1 = 0$ د رييلګڼ حل يا اوبې نه لري. دلته د دې ګڼونو پراخوالي ته اړتيا پيښيږي چې کمپلکسګڼونو ته پراخ شي، او په ۵ –امه برخه کې به تر څيړنې لاندې ونيول شي.

يا دا لاندې په لنډه توګه:

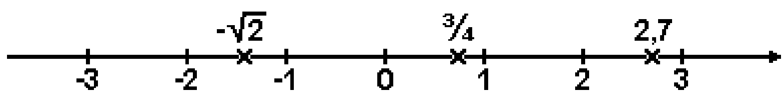
مورږ ګڼونه يا اعداد لرو، چې هغه راشنل ګڼونه نه دي يانی که مورږ د ۲ ګڼ رېښه(جذر) ونيسو، نو داسی يو ګڼ لاس ته راځي، چې هغه په لسميزه توګه پاي ته نه شي رسيدی يانی پريوديکی (تل بيرته راګرځيدونی يا پسی نور هم پراخيدونی) دي۰ داسی ګڼونو ته ايراشنل ګڼونه وايو۰

تل بيرته راګرځيدنيز (periodi(cal تل بيرته راګرځيدوني ,Period د ګڼونو ځنځير نه شليږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایراشنل – یا نانسبي عددونه یاګڼونهIrational numbers

د راشنل او ایراشنل ګڼونوټولنی ته رییل ګڼونه وایو(دا چې ټولنه څه شی دی، په ډیری پوهنه یا سیټتیوري کې به ولوستل شي) .۰ موږ د ګڼونو د ښوولو لپاره لاندې ګڼونکرښه باسو په کومه کې چې له صفر سره پیدایښتي-، ټول- راشنل-،اراشنل ګڼونه کښل شوي دي یانې ریل ګڼونکرښه



۳ ۰ ۲ - رابیلشوی(له نورو -) د شمیر قواعد

په دې برخه کې د رییل ګڼونو لپاره رابیل شوي قوانین څیرو، چې د مخه تیرو قواعدو باندې ولاړ دي۰ دلته درانده ټکی دا لاندې دي:

- په رییلګنونو کی څلور بنسټیز شمیرډولونه په ځانګړي توګه په لاندې ډول د نوکانو افادی (وییني) سره شمیرنه (نوکان اینسوول)۰ له زیاتون ګډ فاکتورونه یا ځلووني له نوکانو راوستل، د بینومیال فرمولونه۰

- پر صفر ویشنه د ناشونوالی په پام کی ساتنه

- له ماتو (کسرونو) سره شمیرل او په ځانګړي توګه لنډول (واړه کول) پراخول یا غزول او د اصلي ګډ ماتلاندي (مخرج المشترک) جوړول۰ د داسی ماتلاندی(مخرج) چې له ټاکلو او ناټاکلو ترمونو څخه جوړ وي۰

نوموني: کسر ته مات وایو او صورت او مخرج ته موږ ماتباندې او ماتلاندې وایو، چې سملاسي یې په مانا هم پوهیږو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۲ ۰ ۱ – جمعه او تفریق (زیاتون او کمون)

د زیاتون او کمون بنسټیزو قوانینو څخه لاندې لاس ته راځي

$$- (-a) = a , \quad a – b = a + (-b),$$

$$(a+ b + c \ldots -c –d- \ldots) + (e+f +\ldots -g-h-\ldots) = a+b+\ldots -c-d-\ldots +e+f+\ldots -g-h-\ldots$$

دا دا مانا لري، چې که چیرې د نوکانو دباندې زیاتوننخښه (د جمع علامه) وي، نو د نوکانو څخه ویستلو کې ګڼ خپله مخنخښه نه بدلوي٠ که د نوکانو د باندی کموننخښه (منفي نخښه) وي، نو د ګڼونو له نوکانو ایستلو په حال کی د نوکانو دننه نخښی بدلیږي٠ یانی کموننخښه زیاتوننخښه او زیاتوننخښه کموننخښه کیږي٠ بیلګه یې لاندې ګورو

$$(a +b+\ldots -c-d-\ldots)-(e+f+\ldots -g-h-..)= a+b+\ldots - c-d-\ldots..-e-f-\ldots\ldots+g+h+\ldots$$

په همدې ترتیب کیدی شي نوکان هم ځاي پرځاى شي٠

دلته باید مطلق ارزښت هم په ګوته شي ، چې په ګڼکرښه د صفر څخه د یوه رییلګڼ واټن په ګوته کوي،

د کوم لپاره چی لیکو :

مطلق عدد یا - ګڼ یا بي اړیکو ګڼ (absolut number)

دا په دې مانا، چې د دې ګڼ سره زیاتیزه او کمیزه نخښه یا مثبت او منفي نه لیکل کیږي یا یون(واحد) هم ورسره نه وي، دا ټیک او ټیک یو ګڼ ښایج او بس٠

$$|a| = a \ ; \ a > 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|a| = 0 \;\; ; a = 0$

$| a| = -a \; ; \;\; < 0$

یاني که a زیاتیزه یا مثبت وي،نو a پخپله لیکواو که a کمیزه یا منفي وي، نو a- لیکواو که a صفر وي نو د هغه لپاره 0 لیکو

۳ ۰ ۲ ۰ ۲ ځل(ضرب)

د ځل لپاره لاندې د مخنخښی قوانین باور لري:

$(+a)(+b) = +ab, (+a)(-b) = -ab , (-a)(-b) = + ab, (-a)(+b) = -ab$

که چیرته ډیر نوکبندونه راګرځیدلی وي، نو دا د ځل قانون پل په پل پر مخ ځی بیلګه:

$$(a+b)(c-d)(e-f-g) = (ac – ad + bc –bd)(e-f-g)$$

$$= (ace-acf-acg-ade+adf+adg + bce-bcf-bcg-bde-) bdf+bdg$$

د ځانګړي حالت په توګه د بینوم پیژندل شوی فرمولونه راوړو:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a – b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a-b) = a^2 - b^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی کولی شي، چې پورته فرمولونه وښايي، چې تیک دي.

دا په لاندې ډول کارولکیږي :

بیلګه ۱ . ۳ :

$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2$.

$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2 = (by - ax)^2$.

$16u^2 - 2v^2 = (4u + 2\ v)(4u - 2\ v)$

۳ ۰ ۲ ۰ ۳ ویش

په پام دې کې ولرو، چې b:a د $a = 0$ لپاره کوم مفهوم نه لري۰ پر صفر ویش ناشونی دی

په ویش کی نوکبندول د زیاتون، کمون او ځل په څیر ساده نه کیږي۰ په ویش کی د زیاتون په ډول لیکل شوی هر توکی په ماتلاندې ویشل کیږي:

بیلګه ۳ ۰ ٤ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 12\ abc) : 3ab = a - 2b + 4c$$

یا داسې

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{12abc}{3ab} = a - 2b + 4c$$

د $ab \neq 0$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي لاس ته راوړني(نتيجې) ته سړی د ګډو څلوونو يا فاکتورونو يا خپلواکنوک څخه وتلو له لارې هم رسيدلی شي:

$$3a^2b - 6ab^2 + 12\,abc = 3ab(a - 2b + 4c)$$

له دې ځايه کيدی شي، چې د بولينوم وېش بيل شي

بيلګه ۳ . ۵ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 5c) : 3ab = a - 2b \text{ Rest } 5c \text{ باقي} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{5c}{3ab} = a - 2b + \frac{5c}{3ab} \text{ لپاره } ab \neq 0,$$

د يوه زياتو يا چمعي وېش په يوه چمعه، کيدی شي د بينوم جکلې له لارې صورت ونيسي

بيلګه ۳ . ۶ : $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{a+b} = a + b$ لپاره $a \neq -b.$

بيلګه ۳ . ۷ : $(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{a+b} = a - b$ لپاره $a \neq -b.$

بيلګه ۳ . ۸ : $\frac{(ax - by)^2}{by - ax} = \frac{(by - ax)^2}{by - ax} = by - ax$ لپاره $ax \neq by,$

دلته هم وېش د پاتې يا باقي سره شونی دی.

بيلګه ۳ . ۹ : $a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = [(a - b)^2 + b^2] : (a - b) = a - b$:

باقي يا پاتې b^2

له دې لاس ته راځی او په ځتبت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{(a-b)^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}=a-b+\frac{b^2}{a-b}$$ بیا $a \neq b$,

بیلګه ۱ . ۱۰

$(16u^2 - v^2) : (4u + \sqrt{2}\,v) = 4u - \sqrt{2}\,v$ Rest v^2 باقي $\Leftrightarrow$

$$\frac{16u^2-v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}=\frac{16u^2-2v^2+v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}=\frac{16u^2-2v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}$$
$$=4u-\sqrt{2}\,v+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}$$

د $4u \neq -\sqrt{2}\,v$ لپاره

فورمال ور د دوه پولینومونو ویش دی (برخه ۱۲ دې اندول(پرتله) شي):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x^1+b_0}=P_n(x):Q_m(x),$$

که د ماتباندې پولینوم درجه د ماتلاندې پولینوم درجې لوې یا مساوي وي($n \geq m$).

مور نیسوچی: $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ او $Q_m(x) \neq 0$.

د دواړو ویشو« ټوټه ویشو» (پارخیالویش(Partialdivision)) دا دی چی دا

د $P_n(x) : Q_n(x)$ ویش په لاندې ډول ولیکلی شو:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\text{Polynom 1}+\frac{\text{Polynom 2}}{Q_m(x)},$$

چیرته چی د پولینوم 2 درجه له $Q_m(x)$ درجی څخه کوچنی ده.

دې هدف ته په لاندې ډول رسیږو

۱ – سړی یواځی د جګ نظم غړي $a_nx^n : b_mx^m$ ویشي او له دې سره یوه

غلطي $F(x)$ کوي:

$$Q_{n(x)}:Q_m(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+F(x) \qquad *$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – سړی (*) په ماتلاندې پولينوم $Q_m(x)$ ويشي

$$P_n(x) = (a_n / b_m)\, x^{n-m} Q_m(x) + F(x)$$

او له دې غلطی $F(x)$ ، په لاندې فورم یا ډول لاس ته راځي

$$F(x) = P_r(x) / Q_m(x)$$

د $P_r(x) = P_n(x) - (a_n / b_m)\, x^{n-m}\, Q_m(x)$ سره

چیرته چی د پولينوم $P_r(x) = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + .. + c_0$ درجه r د پیل پولينوم $P_n(x)$ له درجی n څخه کم له کمه په یوکوچنی وي . د ګنونو شمير په

تکيه ويلی شو، چی $P_r(x)$ پاتی پولينوم یا په ساده ډول پاتی (باقي) دی.

۳ – که لا تراوسه د $Q_m(x)$ درجه r له m کوچني وي نو د ټکو ۱ – او ۲ – تويته ويش په $P_r(x) : Q_m(x)$ استعماليږي، د لاندنی نتيجی سره

$$P_r(x) : Q_m(x) = (c_r / b_m)\, x^{r-m} + P_t(x)/Q_r(x)$$

چيرته چي د $P_t(x)$ درجه t کم له کمه په یو له $P_r(x)$ درجي کوچنی وي.

د تویته ويش دا عمليه اخر ته رسيږي، که (د پای ډيرو پلونو (قدمونو) اخستلو وروسته د ماتباندې غلطی پولينوم درجه له m څخه کوچنی وي.

بيلګه ۲ . ۱۱ . لمړی دې د تویته ويش ۱ او۲ پلونه (قدمونه، کدمونه) په پراخ ډول د لاندې ويش په بيلګه توضيح شي

$$P_n(x) : Q_m(x) = P_3(X):Q_1(x) = (6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$P_3(x)$: $Q_1(x) = (a_3 / b_1)x^2 + F(x)$
	$(6x^3 + 5x^2-3x+1) : (3x-2) = 2x^2 + F(x)$
$(a_3 / b_1)x^2Q_1(x) = 2x^2 (3x-2) =$	$6x^3 -4x^2$
$P_2(x) = P_3(x) -(a_3 /b_1) x^2Q(x) =$	$9x^2 -3x +1$
$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) =$	$(9x^2 - 3x +1) : (3x - 2)$

بیلگه ۱ . ۱۲ : د تیرته ویش بیلگه ۱ . ۱۱د $F(x)$ غلطی ته دوام ورکوو، ترڅو چې د لیکنی شکل لنډ شي:

$$F(x) = P_2(x):Q_1(x) = (9x^2-3x+1):(3x-2) = 3x+G(x)$$

$$3x.Q_1(x) = (9x^2-6x)$$

یاباقي پاتي $= 3x+1$

$$G(x)= (3x+1):(3x-2)$$

له دې لاندې نتجه لاس ته راځي :

$$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)=2x^2+3x + G(x)$$

$$G(x) = (3x+1):(ex-2) = 11 +H(x)$$

$$Q_1(x) = 3x-2$$

پاتی = یاباقي = 3

$$H(x) = 3 : (3x-2)$$

پس باور لري

$$(6x^3+5x^2 - 3x+1) : (3x-2) = 2x^2+ 3x+1 + 3/(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تول توته ويش كيدى شي په لاندې ډول مخ ته يووړ شي .

(1) (4) (7) (۱۰)

$$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2) = 2x^2 + 3x + 1 + 3/(3x-2)$$

(2) $\underline{6x^3-4x^2}$

(3) $-9x^2-3x+1$

(5) $\underline{9x^2-6x}$

(6) $3x+1$

(8) $\underline{3x-2}$

(9) 3

دلته (i) د پرلپسى پل اخستلو په مانا ده.

جمله ۳ . ۱۳

(1) (4) (7) (10)

$$(18x^4 + 15x^3 + 0x^2 - 2x + 1) : (3x^2 + x - 1) = 6x^2 + 3x + 1 + \frac{2}{3x^2 + x - 1}$$

(2) $\underline{18x^4 + 6x^3 - 6x^2}$

(3) $9x^3 + 6x^2 - 2x + 1$

(5) $\underline{9x^3 + 3x^2 - 3x}$

(6) $3x^2 + x + 1$

(8) $\underline{3x^2 + x - 1}$

(9) 2

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۲ . ٤ ماتشمیرنه (کسرشمیرنه)

د مات m/n کلمه د لومړي ځل لپاره د ټولګڼونو m,n څخه د ریشنلګڼونو انځورونو لپاره تعریف شوې٠ کیدی شي، چې دا کلمهa/b ته، چې a او b رییل ګڼونه دي، وغزول شي٠

باید په پام ې ور،چې ماتباندې صفر نه شي..

د بیلګي په توګه:

ویش(a/(b-c تیک هلته مفهوم لري، چې b≠c وي٠ ماتګڼ a/b همدا ګڼ ښایي

لکه a : b او یا $\frac{a}{b}$ ، دلته هم باید b |=0 وي.

په اخر کې باید په ګوته شي، چې مات لاندی – او همدارنګه ماتباندې ګڼ هم هر ماتګڼ کیدی شي او هم دواړه٠ دا باید دلته هم په پام کې وي، چې هیڅ یو ماتلاندې ګڼ باید صفر نه وي یانی دلته بی له اولنی ماتباندې نور یو ګڼ هم، چې ماتلاندې پورې اړه لري، نه شي صفر کیدی دا موږ د ماتو مات (کسرالکسر) بولو٠

بیلګي:

$$a : (b/c) = a / (b/c) , b |=0 , c|= 0 \quad ,$$

$$(a/b) : c = (a/b) / c \quad b|=0, c|= 0$$

$$(a/b): (c/d) = (a/b) / (c/d), b |= 0 , c |= 0 , d |=0$$

یا په لاندې ډول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a}{b}:\frac{\frac{a}{b}}{c}, b\neq 0, c\neq 0, ..., \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0$$

په ځو واره ماتګڼ کې باید اصلي ماتکرښه څرګنده پيژندونکي وي، چې په دې توګه د هر ډول ناټيکوالی مخه نيول شوي وي۰ په ټوليزه توګه باور لري

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}\neq\frac{\grave{a}}{\frac{b}{c}}$$

هريو ماتګڼ b|=0, a / b په يوه ګڼ c |= 0 پراخيدی او همداسې لنډيدی شي

يانې ماتلاندې او ماتباندې په يوه ګڼ c ځليدی يا ويشل کيدی شي او دا کړنلار په اصلي

ګڼ کې تغير نه راولي

$$\frac{a}{b}=\frac{a.c}{b.c}=\frac{a:c}{b:c}, b\neq 0, c\neq 0$$

د ماتګڼ لنډوالی ددې لپاره ښه دی، چې ماتګڼ ساده کړي.

د بيلګې په توګه:

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}, \frac{ax-ab}{y-ac}=\frac{x-b}{y-c}; a\neq 0, y\neq c$$

بايد تل په پام کې ولرو، چې يواځنی فکتور يا ځلوونی يا ضريب لنډيدی شي او نه زياتوونی د بيلګې په توګه لاندې ماتګڼ

(c) ketabton.com: The Digital Library

(a+c):b+c) چې $b \neq -c$ وي نه شي لنډیدی دا (a+c) : (b+c) = a:b

باور لري،چې b |= 0, c = 0 \/ -c |= a, a = b

پراخوالی یا غزول د دې لپاره اړیین دی، چې ډیر ماتګنونه په ګډ ماتباندې (مخرج المشترک) راوستلی شي، ځکه چې یواځې هغهٔ مات یو په بل زیاتیدی یا یو له بل کمیدی شي، چې ګډ ماتلاندې ولري.

لکه :
$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, c \neq 0$$

که چیري پرځښ یا برعکس ماتګنونهa / b او c/d د نابرابر ماتلاندې لرونکی سره زیاتوو او یا کموو ، نو دا په ګډ ماتلاندې باید راولو۰ ګډ ماتلاندې د ټولو ماتلاندو څخه دی۰ د بیلګي په توګه لاندې باور ي دی:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}, b \neq 0, d \neq 0, f \neq 0 \Leftrightarrow bdf \neq 0$$

او دا لاندې

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bd \neq 0$$

تل باید ماتګنونو ګڼلو کې ماتلاندې سره ځل نه شي، چې ګډ ماتلاندې لاس ته راولو، دا د ښوونځي په څرګنده بیلګه باندې ښایو

بیلګه:
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي، چې اصلي ماتلاندې)ا۰م۰ل (وټاکل شي

= 2.3.5.6.15.36= 97200 ا ۰ م ۰ ل ۰

کیدی شي، چی ا۰م۰ل۰ د لومړنیو ګڼونو ځل په ځیر هم ولیکو:

2 = 2

3= 3

5 = 5

6 = 2. 3

15= 3 .5

3۰. 3.۰2۰36 = 2

$2^2.3^2.5 = 4.9.5 = 180$

پس د ګډ ماتلاندې لپاره د لوړګڼ یا لوړ جګګڼ یا لوړ طاقت لومړي ځلووني رانیول کیږي۰ چې ګڼل خورا ساده کوي۰

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36}$$

$$\frac{90 - 60 + 36 - 30 + 12 - 5}{180} = \frac{43}{180}$$

دا چې دا تګلار څنګه د ماتو په ټولیزه افاده استعمالیدی شي لاندې بیلګه یې ښایي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۳ ۰ ۱۵ په لاندې بيلګه کې

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$$

چې يوائی د لاندې لپاره موخه ور دی $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

د اصلي ماتلاندې لپاره يانې

$$a.b(ab)(a^2b).(ab^2) = a^5.b^5$$

نه ټاکي، نو له دې امله دی

$$a = a$$

$$b = b$$

$$ab = a \quad b$$

$$a^2 . b = a^2 \quad b$$

$$ab^2 = a \quad b^2$$

دا ا۰م۰ل۰ په لاندې توګه دی $= a^2 \quad b^2$

له دې امله لرو:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}=\frac{ab^2-a^2bab-b+a}{a^2b^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۳ ۰ ۱٦ : د ویيني یا افادې

$$\frac{2}{a-2}+\frac{2}{a-1}-\frac{1}{a+1}-\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{a+6}{a^2-4}, a\neq 0, a\neq \pm 2$$

لپاره ټاکو

a-2 = (a-2)

a – 1 = (a-1)

a+1 = (a+1)

a + 2 = (a+2)

a^2 - 1 = (a-1)(a+1)

a^2-4 = (a-2) (a+2)

(a-2)(a-1)(a+1)(a+2) = (a^2-1)(a^2-4)

دا پورته لاس ته راوړنه ا٠م٠ل٠- چۀ دا په همدې وخت کې غ ک پ هم دی- په ګوته کوي او له پورته ځخه د مخه ورکړشوې افادې لپاره لاس ته راځي:

$$\frac{2(a^2-1)(a+2)+2(a^2-4)-(a-1)(a^2-4)-(a-2)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

$$=\frac{(a+3)(a^2-4)+(a+6)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مات ماتباندې صفر دیپه دې ډول په پورته پیل کې ورکړ شوې افاده یا وینه د صفر پیچلې لیکلو بیلګه ده او بس۰

د ځل او ویش لپاره لاندې قاعدې باور دي:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, b\neq \wedge d \neq \Leftrightarrow bd\neq 0$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}; b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0 \Leftrightarrow bcd\neq 0$$

بیلګه ۳ ۰ ۱۷ الف)

$$1-\frac{1}{1-a\frac{1}{1-\frac{b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a}{\frac{a-b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a^2}{a-b}}=1-\frac{1}{\frac{a-b-a^2}{a-b}}$$

$$=1-\frac{a-b}{a-b-a^2}=\frac{a-b-a^2-a+b}{a-b-a^2}=\frac{-a^2}{a-b-a^2}=\frac{a^2}{a^2-a+b}$$

د $a\neq 0, a\neq b, a^2-a+b\neq 0$

لپاره۰ دا په دې مانا، چې

$$a\neq\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4b})$$

بیلګه ۳۰ء ۱۷ ب:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}=\frac{\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a^2-b^2)}\cdot\frac{(a^2-b^2)}{a(a-b)+b(a+b)}$$

$$=\frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-ab+ab+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1, \forall\, |a|\neq|b|$$

يادونه: په پورته ليکنه کې د ګڼونو موضوع لږ وغزول شوه، خو لږ څه نور هم بايد راغلي وی٠ دلته اړيين د ګڼونو شميرقوانين دي او د ګڼونو پيژندل٠ د ګڼؤنو اړيکې د خونديونې له لارې

$N \subset Z \subset Q \subset R$

او په دې کنونو کې باوري د شمير قوانين، چې هغه زياتون ، کمون ، ځل ، ويش دئ او د ويش په بنسټ ماتشميرنه٠ دا بايد په همغه ساده ډول زده کړای شي٠

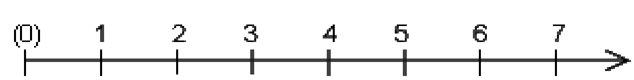
موږ هغه د لومړي وار لپاره اړيين د ګڼونو شميرنقوانين په لاندې توګه رالنډوو، چې د لومړي وار لپاره په همدې پوهيدنه بسيا کوي٠

ګڼونډيرئ (لنډه ټولګه)

پيدايښتي – يا طبيعي ګڼونډيرئ

N = {1, 2, 3, 4, 5, ... }.)

په وړانګه د پيدايښتي ګڼونو انځورونه

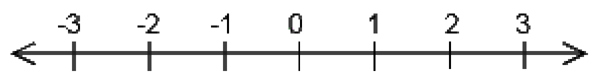


(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولګڼونو ډيرى

Z = { ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... }

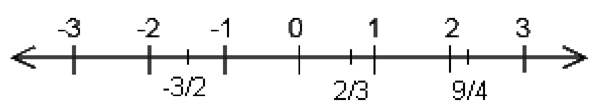
د ټولګڼونو ډيرئ انځورونه په يوه کرښه



د راشنلګڼونو ډيرئ

$$Q=\{\frac{p}{q} | p,q | Z \wedge q \neq 0\}$$

په ګڼونکرښه راشنلګڼونه د ټولګڼونو تر منځ پراته دي



هر راشنل ګڼ د لسميز يا پريوديکى ګڼ په څير ليکل کيدئ شي

د ماتو سره شميرنه

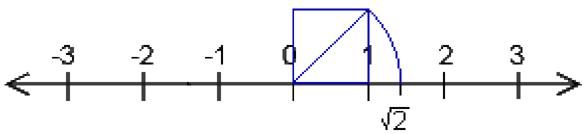
د دوه راشنلګڼونو ترمنځ تل ناپاي زيات نور راشنلګڼونه شته ، دا ګڼ پارته دي، مګر بيا يې هم ترمنځ نور ګڼونه يا ځايونه هم شته، چې ګڼونه په کې ځاي دى او دې ګڼونو ته مو ايراشنل ګڼونه وويل ۰ لکه چې يو راشنلګڼ نه دئ

راشنل او ايراشنلګڼونه رييل ګڼونه جوړوي

د رييل ګڼونوډيرئ يا حقيقي اعدادو سټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریيلګڼونو ډیرۍ د ګڼونکرښی تولو ټکو څخه جوړه ده، لاندې ګڼونکرښه کي روښانه ده



په ریيلګڼونوکي بی له بندیزونو شمیرل کړی شو، خو په ماتلاندې کي باید صفر نه وي او دا د هر ډول ګڼونولپاره باور لري

شمیرډولونه لومړی پوړۍ

:Additionزیاتون یا جمعه

زیاتوونی +زیاتونی = زیاتون

د زیاتون کموتاتیو قانون $a + b = b + a$

د زیاتون اسوشیاتیو قانون $(a + b) + c = a + (b + c)$

و زیاتون ته د یوه بی اغیزه یا ناپیلی توکی شتون $a + 0 = a$

مخامخ – یا په ښټ ګن یا برعکس عدد $a + (-a) = 0$

کمون:Subtraktion

د زیاتون په ښټ کارونه یا عملیه ، ترې کمه وونی – کمه ونی = کمون

$a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: $7 + x = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 7 = 3$

شمیرډولونه:

دویمه پوړی

ضرب یا ځل: فاکتور (ځله وونی ضریب) · فاکتور(ځله وونی) ځل د زیاتون تکرار، بیلګه. $4 + 4 + 4 = 3\cdot4 = 12$

د ضرب یا ځل کموتایتو قانون $a.b = b.a$

د ضرب یا ځل اسوښیاتیو قانون $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

دستریبوتیو قانون $a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c$

و ضرب ته د یوه ناپیلي توکي شتون(بي اغیزه توکی یې که وبولو هم بده به نه وي)

$a\cdot1 = a$

په ځېټ ارزښت یا برعکس قیمت $a\cdot(1/a) = 1$

یو ضرب ټیک هلته صفر دئ، چې د صرب یو ضریب صفر وي $a\cdot0 = 0$

ویش:
ویشونی : پرویشونی = ویش (لوستل یې له ښي وکیڼ لورته)

ویش د ضرب یا ځل په ځېټ کارونه ده) $a:b=c$

$a\cdot x = b \Leftrightarrow x = b:a$

د بېلګې په توګه z.B.: $4\cdot x = 12 \Leftrightarrow x = 12:4 = 3$

په صفر ویش پیژند نه لري یا تعریف نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ تمرینونه

۱ – د اعدادو یا ګڼونو ډولونه او د د اعدادو انځورونه

۱ ، ۱ – په کوم د اعدادو ډېرئ یا سټ کې د عدد a او عدد bلپاره د شمیرلو څلور قاعدې یا لارې باور لري؟

یادونه: دلته دې ترې کمونې یا مفروق منه او وېشونش یا مقسوم تل a وي همداسې دې کمونې یا مفروق او پروېشونې یا مقسوم علیه تل b وي.

a) $a = 8, \quad b = 2$
b) $a = 5, \quad b = 8$
c) $a = 7, \quad b = 0$
d) $a = -6, \quad b = 1$

۱ . ۲ عددونه او یو له بل سره پرتله کړئ او ورکړئ، چې له دې دواړو کوم لو دی!

a) $a = \frac{13}{17}, b = \frac{169}{289}$
b) $a = \frac{11}{21}, b = \frac{121}{231}$
c) $a = \frac{888}{901}, b = \frac{896}{911}$
d) $a = -\frac{13}{12}, b = -\frac{143}{130}$

۱ . ۳ – د اعدادو یا ګڼونو او څخه تفرسق، ضر ب او وېش جوړ کړئ! ورکړئ، چې دا نتیجې د اعدادو کومو ډولونو پورې اړه لري!

د پوښتنې ۱ ، ۱ یادونه دلته هم باور لري.

a) $a = \pi, \quad b = 5$
b) $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$
c) $a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{3}{2}$
d) $a = 0, \quad b = 1$

۱ . ۴- په دوه ییز سیستم کې لاندې ګڼونه یا اعداد انځور کړئ!

a) 28 b) 47 c) 73 d) 112

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۵ – لاندې ريښتوني يا راشنل اعداد د کوټيو کې اچوني يا کوټی وني له لارې په نږدې ۵ ځايونو ټيک پيدا کړئ.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲ . د زياتيزو او ځليزو (د جمعي او ضرب) نوکانو وازول

۲ . ۱ – لاندې نوکان واز کړئ

a) $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$
b) $5a + [7c - (2a - 3b)] - (4c - a + b)$
c) $7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b)$
d) $8a - \{a + [(3a - 2b) - (5a + 3b)] - [(-a + 6b)]\}$

2.2. a) $(-a)(b - a - c)$
b) $2a[a - (b - 3a)]$
c) $3(a + b + c) - 5(a + b) - c - 2(b - c - a)$
d) $|a| \cdot (b - 2a) - b \cdot (a + 2b)$

2.3. a) $(2a - b)(9a + 4b)$ b) $(9a - 2b)(7a - 3b)$
c) $(a + b - c)(a - b - c)$ d) $(3a + 2b)(4a - 3b)(5a - 7b)$

2.4. a) $(7a - 5b)(3a + 4b) - (5a - 9b)(4a - b)$
b) $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$
c) $(a + b)(c - d) - (a - b)(c + d)$
d) $(1 - a)(a - 1) - 2(a + 1)(a - 2)$

۳ – د بينوم فرولونه

۳ . ۱ – د بينوم فرمولونه وکاروئ يا استعمال کړئ او د شوننتيا سره سم يې ساده کړئ

a) $(-a + 3b)^2$ c) $(-a - b)(a - b)$
b) $(-1 + a)(a + 1)$ d) $(-1 + a)^2 - (1 - a)^2$

3.2. a) $(4a^2 - 3)(4a^2 + 3) - (3a - 4)^2 + (5a + 1)^2$
b) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $(3a + 2b - 5c)^2$
d) $(a + b - c - d)^2$

3.3. a) $49a^2 + 42a + 9$
b) $25a^2 + 40ab + 16b^2$
c) $169a^2 - 130ab + 25b^2$
d) $9a^4b^2 + 12a^2b + 4$

3.4. a) $(8a - b)^2 - 16a^2$
b) $81a^2 - 16(4a - 3b)^2$
c) $4a + 12\sqrt{ab} + 9b$
d) $(\sqrt{ab} - 1)(-1 - \sqrt{ab})$

3.5. a) $(a + b + 1)(a + b - 1)$
b) $(a + b)^2 + 2a + 2b + 1$
c) $a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1$
d) $a^2 + 2ab + b^2 - 4(a + b) + 4$

۳ . ۶ لاندې وييني يا افادې ساده کړئ، داسې چې د مربع تکميلوني له لارې پوره مربع وې جوړې کړئ!

a) $4a^2 - 12a + 9b^2 - 24b = 0$
b) $16a^2 + 25b^2 - 128a + 50b = 0$
c) $3a^2 - 2b^2 - 2\sqrt{6}\,a + 2\sqrt{6}\,b = 0$
d) $4x^2 + 12xy - 9a^2 + 12ab = 0$

۴ . د مناسبو ضريبونو له نوکانو راوسته له ۴ .
۱ تر ۴ . ۴ پورې پوښتنو کې ورکړ شوې وييني يا افادې په ضريبونو ټوټه کړئ او تر شوونتيا پورې يې ساده کړئ.

4.1. a) $a + a^2$
b) $-a^2 - a$
c) $8ab + 20b^2$
d) $ab + ac - ad$

4.2. a) $a^2b^2 + ab + ab + 1$
b) $ab - ac - b + c$
c) $3a + 3 - 2a - 2 + 4b(a + 1)$
d) $8(7a - 5b) - 5c(7a - 5b)$

4.3. a) $3ac - 3bc - 2ad + 2bd + 4ac - 4bc - 7ad + 7bd$
b) $a^2b + ac - ab - c$
c) $15ab - 5a - 1 + 3b$
d) $4a^2 + 20ab + 25b^2 - a^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.4. a) $(a^3 - a^2)(2a - 2a^2)$
b) $(-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2$
c) $(-5a - 10b)(-3a + 6b)$
d) $(-a - 1)(a - 1) - (a^2 - 1)$

۴ . ۵ – هر ځل د n لوی توان (n=1,2,3,...) له نوکانو راوباسئ!

a) $n^2 + n + 1$
b) $3n^2 - n + 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$
c) $(1 - 2n)^3$
d) $(\frac{1}{4}n^2 + 3n - 1)^2$

۵ – د په نوکانو کې افادو وېش

لاندې وېش سره ته ورسوئ.

دا چې وېش په صفر ناشونی دی، په دې او لاندې ټولو تمرینونو کې دا ا رزښتونه له شمیره وباسئ، کوم چې ...,a,b يې نه شي نیولی یا اخستلای.

5.1. a) $(10a^2 - 2ab + 16ac) : 2a$
b) $(25ab - 40b^2) : (-5b)$
c) $(28a^3 - 20a^2 + 32a) : (-4a)$
d) $(27a^2b - 63ab^2) : (-9ab)$

5.2. a) $(3a^2 + 5ab + 2b^2) : (a + b)$
b) $(a^2 - 2ab - 3b^2) : (a - 3b)$
c) $(3a^2 + 2a - 5) : (3a + 5)$
d) $(4a^2 - 7ab + 3b^2) : (4a - 3b)$

5.3. a) $(35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc) : (5a + 2b)$
b) $(15a^3 + 67ab^2 - 52a^2b - 28b^3) : (5a - 4b)$
c) $(21ax - 15bx + 9cx - 35ay + 25by - 15cy) : (7a - 5b + 3c)$
d) $(12a^2 + ab - 17ac - 20b^2 + 29bc - 5c^2) : (3a + 4b - 5c)$

5.4. a) $(a^3 + b^3) : (b + a)$
b) $(1536b^3 + 375a^3) : (25a^2 + 64b^2 - 40ab)$
c) $(144a^4 - 81b^2) : (27b + 36a^2)$
d) $(a^3 - b^3) : (a - b)$

5.5. a) $(9a^3 - 7ab^2 + 2b^3) : (3a + 2b)$
b) $(a^2 - 10a - 25) : (a - 5)$
c) $(a^3 - 2ab + b^3) : (a + b)$
d) $(24a^4 - 26a^3 - 76a^2 + 32a) : (4a^2 - 7a - 8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5.6. a) $(x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9)$
b) $(2x^2 - x + xy - y^2 + 2y - 2) : (2x - y + 1)$
c) $(13a^2b + 4b^3 - ab^2 + 10a^3) : (2a + 3b)$
d) $(3a^3 + 2a^2 - 7a^2b + 3a - 2ab + 4ab^2 - 4b + 3) : (3a - 4b + 2)$

۶ . ماتشمیرنه یا کسرشمیرنه

۶ . ۱ – لاندې کسرونه صورت او م خرج یعني د ماتباندې او ماتلاندې د خورا غټ ګډ پروېشوني سره د لومړنیو ضریبونو یا ځلوونو له لارې لنډ کړی

a) $\frac{6\,732}{20\,196}$
b) $\frac{2\,730}{5\,005}$
c) $\frac{20\,520}{2\,280}$
d) $\frac{69\,069}{138\,138}$

۶ . ۲ – د لاندې اعداد خورا کوچنی ګډ زاتځلی (ذ الاضعافالاقل) پیدا کړی

په لاندې کې und د او په معنا دی

a) 3, 6, 9, 18, 27, 54 und 81
b) 8, 12, 21, 42, 56 und 84
c) 5, 13, 16, 20, 26 und 42
d) 120, 252, 264, 315 und 616

۶ . ۳ . د برابر نومیزو یا برابرمخرج کسرونو شمیرنه

6.3.1. a) $\frac{1}{3}+3\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}-4\frac{2}{3}$
b) $\frac{3}{7}-\frac{1-6}{7}+2\frac{1}{7}-7\frac{2}{7}$
c) $10\frac{1}{5}-\frac{4-5}{5}-5\cdot\frac{1}{5}+\frac{10-1}{5}$
d) $2\frac{2}{26}+\frac{5-3}{13}+3\frac{33}{39}-0\cdot\frac{25}{65}$

6.3.2. a) $\frac{a+1}{a}-\frac{a-1}{a}-\frac{1-a}{a}$
c) $\frac{(a-b)^2}{ab}-\frac{1-2ab}{ab}-\frac{a^2+b^2}{ab}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) $\frac{a+1}{b}-\frac{a-b}{b}-\frac{b-a}{b}$ d) $\frac{(a-b)^3}{2ab}-\frac{(a+b)^3}{2ab}$

۶ . ۴ – د نا برابرنومیزو کسرونو جمعه او تفریق، په مخرج یا ماتلاندې کې ضربیونه

6.4.1. a) $5\frac{7}{12}+1\frac{41}{72}+2\frac{17}{24}+9\frac{5}{9}$ c) $\frac{5}{18}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{14}{27}+\frac{71}{81}$

b) $36\frac{14}{39}+19\frac{4}{13}+15\frac{5}{6}-2\frac{19}{72}$ d) $\frac{15}{64}-\frac{77}{96}+\frac{1}{243}-\frac{3-8}{24}+3\frac{1}{1296}$

6.4.2. a) $\frac{b+5c-a}{6}-\frac{3a-7b+6c}{4}+\frac{4a-5b+7c}{3}$

b) $\frac{a-9}{18}+\frac{a-2}{6}+\frac{5(2a-1)}{12}-\frac{3(a-1)}{8}-\frac{2(3a-4)}{9}$

c) $\frac{16b+3a}{48}+\frac{7a-8b+9c}{24}-\frac{9a+8b+12c}{32}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

6.4.3. a) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-\frac{a^2+b^2}{2b}-1$

b) $\frac{5a-6b}{30c^2}-\frac{b(5c^2-3a)}{15ac^2}-\frac{a}{4b}+\frac{a(3c^2-2b)}{12bc^2}+\frac{b}{3a}$

c) $\frac{3a^2+8b^2}{6ab}-\frac{a(4b-5c)}{10bc}+\frac{4a-5b}{10c}+\frac{b(3a-2c)}{6ac}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

۶ . ۵ - د نابرابر نومیزو ماتونو(کسرونو) جمعه او تفریق(زیاتون او کمون)، جمعه مخرج یا ماتلاندې کې.

۶ . ۵ . ۱: د a لپاره یو په بل پسې ورکړشوي ارزښت ځای په ځای کړئاو دا داسې لاس ته راغلي ماتونه(کسرونه) سره یوځای کړئ! بیا په ټولیزه توګه د ورکړ شوو کسرونو لاس ته راوړنې ورکړئ او هغه ارزښتونه لرې کړي، چې د a د اخستلو یا نیولو اجازه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}$	د a=1,2,3 سره
b) $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}$	د a=3,4,5 سره
c) $\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a+1}-2$	د a=2,3,4 سره
d) $\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{1}{(a-1)^2}$	د a=2,3,4 سره

6.5.2. a) $\frac{3a-1}{4a-1}-\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{a+1}+\frac{4}{3a+2}-\frac{3}{a+1}$

b) $\frac{a-2}{a-3}-\frac{a-1}{a-2}$ d) $\frac{10}{2a-2}-\frac{6a}{3a^2-6a}-\frac{9b}{3ab-9b}$

6.5.3. a) $\frac{3ax-3by}{6x^2y-6xy^2}-\frac{5a^2x+5aby}{10ax^2y+10axy^2}$

b) $\frac{6ab+9b}{6ab-6b}-\frac{6ab-4b}{6ab+6b}-\frac{10b^2}{12a^2b^2-12b^2}$

c) $\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{2b^2}{2a^4-2a^2b^2}-\frac{b^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab}$

d) $\frac{24a^2b-72ab^2}{60a^2b+24ab^2}-\frac{49a^2b-28ab^2}{35a^2b+14ab^2}-\frac{20a-10b}{10a-5b}$

6.5.4. a) $\frac{3a+b}{2a^2+2ab}-\frac{a^2+b^2}{2a^2b+2ab^2}+\frac{2a-5b}{4ab+4b^2}$

b) $\frac{a+2b}{3a^2-3ab}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2ab-2b^2}$

c) $\frac{2a-5}{a+3}-\frac{3a-4}{a+2}+\frac{a^2+6a+10}{a^2+5a+6}$

d) $\frac{5a-2b}{3a+b}-\frac{88a^2+28ab+0,25b^2}{48a^2+7ab-3b^2}+\frac{24a+b}{16a-3b}$

6.5.5. a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2+ab}-\frac{a^2}{ab+b^2}$

b) $\frac{6a-5b}{8a^2+24ab+18b^2}-\frac{2a-b}{36a^2-81b^2}+\frac{3}{12a-18b}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{2a+3b}{2ab+b^2}-\frac{4a^2+b^2}{4a^2b+2ab^2}-\frac{5a-b}{4a^2+2ab}$

d) $\frac{9a-b}{6a^2-2ab}-\frac{6a+b}{3ab-b^2}+\frac{1}{2b}$

۶ . ۶: د ماتونو یا کسرونو ضربونه(یا ځلونه):

6.6.1. a) $3\cdot\frac{1}{3}$ b) $b\cdot\frac{1}{a}$ c) $\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{5}$ d) $\frac{0}{b}\cdot\frac{b}{c}$

6.6.2. a) $\left(\frac{a}{3b}+\frac{3b}{a}\right)\cdot 3ab$ c) $\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)\cdot(2a-3b)$

b) $\left(\frac{5a}{6bc}-\frac{6b}{7ac}+\frac{2c}{3ab}\right)\cdot 84abc$ d) $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)$

6.6.3. a) $\frac{4a^2-9b^2}{21a^2b+14a^3}\cdot\frac{7a+5ab}{6b-4a}$ b) $\frac{16a^4-a^2}{24a^3+8a^2}\cdot\frac{36a^2+24a+4}{4a+1}$

c) $\frac{a^2+1}{(a+1)^2}\cdot\frac{a^3+a^2+a+1}{(a^2+1)^2}$ d) $\frac{4ab-3a}{9ab-3b^2}\cdot\frac{18a-6b}{4a^2+10ab}\cdot\frac{8ab-6a}{4ab+10b^2}$

۶ . ۷ . د ماتونو وېش:

6.7.1. a) $\frac{2}{3}:3$ b) $a:\frac{1}{b}$ c) $\frac{a}{b}:b$ d) $\frac{0}{a}:\frac{1}{b}$

۶ . ۷ . ۲ : د لاندې وېينو یا افادو برعکس یا په څېټ ارزښتونه پیدا کړئ.

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{a+1}{b}$ c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ d) $\frac{1}{a+b}$

6.7.3. a) $\left(\frac{a}{2b}-\frac{2b}{a}\right):\frac{a}{a+2b}$ c) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

b) $\left(1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}\right):\frac{1-a^2}{a^2}$ d) $\left(\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.7.4. a) $\dfrac{1-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}}$ c) $\dfrac{\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}}$

b) $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1}{\frac{a^2+b}{b}-\frac{a+b^2}{a}}$ d) $\dfrac{\frac{a}{1-a}+\frac{a+1}{a}}{\frac{a-1}{a}-\frac{a}{a+1}}$

6.7.5. a) $\dfrac{\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}}$ c) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}$

b) $\dfrac{\frac{x^2}{ab}+x\cdot\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)-\frac{1}{ab}}{\frac{x}{a}-\frac{1}{b}}$ d) $\dfrac{\frac{1}{16a^2}+\frac{1}{2ab}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{8a}+\frac{1}{2b}}+\dfrac{\frac{1}{16a^2}-\frac{1}{2ab}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{8a}-\frac{1}{2b}}$

6.7.6. a) $\dfrac{a+\frac{1}{1-ab}}{1-\frac{1}{1-ab}}$ c) $1-\dfrac{1}{1-a\cdot\dfrac{1}{1+\frac{b}{a}}}$

b) $\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{1-\frac{a}{a-b}}}$ d) $\dfrac{\dfrac{a+\frac{1}{4}b}{a-\frac{1}{4}b}-\dfrac{a-\frac{1}{4}b}{a+\frac{1}{4}b}}{1+\dfrac{b^2}{16a^2-b^2}}$

۶ . ۸ . لاندې ماتونه يا کسرونه، که ممکن وي، ساده کړئ (که غواړئ د مخکني شکل بدلون څخه وروسته)

6.8.1. a) $\dfrac{35ac-50bc}{7a-10b}$ c) $\dfrac{34ax+51bx-119cx}{2a+3b-7c}$

b) $\dfrac{a-\sqrt{a}\cdot b}{b-\sqrt{a}}$ d) $\dfrac{a^2-ab+ac}{b-a-c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.8.2. a) $\dfrac{ax+bx+ay+by}{a+b}$ c) $\dfrac{91ab+7b+39a^2+3a}{13a+1}$

b) $\dfrac{ab+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}}{a+\frac{1}{2}}$ d) $\dfrac{ax+\frac{x}{b}-\frac{a}{y}-\frac{1}{by}}{\frac{1}{b}+a}$

6.8.3. a) $\dfrac{25a^2-130ab+169b^2}{25a-65b}$ c) $\dfrac{\frac{1}{4}a^2b^2+17ab+289}{\frac{17}{2}\left(\frac{1}{17}ab+2\right)}$

b) $\dfrac{2x^2+8xy+8y^2}{(x+2y)^2}$ d) $\dfrac{25a-20\sqrt{ab}+4b}{ab(\sqrt{a}-0{,}4\sqrt{b})}$

6.8.4. a) $\dfrac{a^4-b^4}{(a+b)^2(a-b)}$ c) $\dfrac{(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}$

b) $\dfrac{(a+b)^4-(a-b)^4}{a^2+b^2}$ d) $\dfrac{(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^2+2a^4b^4}{a^4+b^4}$

6.8.5. a) $\dfrac{(\frac{1}{9}a^2+b^2+\frac{2}{3}ab)(x^3-27y^3)}{(2b+\frac{2}{3}a)(x-3y)}$ c) $\dfrac{(80-40ab+5a^2b^2)(4-ab)}{64\cdot\left(\frac{ab}{4}-1\right)^3}$

b) $\dfrac{(2x^2-20x+50)(2a-1)(a+\frac{1}{2})}{(1-2a)(2a+1)(25-x^2)}$ d) $\dfrac{(32a^3b^2x-18ax^3y^2)\cdot 3by}{(12ab^2y+9bxy^2)\cdot 2ax}$

6.8.6. a) $\dfrac{(a+b+1)(a+b-1)+(a-b)^2-2\cdot\left(b^2+\frac{1}{2}\right)}{a+1}$

b) $\dfrac{\left(4a+\frac{1}{4}b-2\sqrt{ab}\right)\cdot\left(2\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}}$

c) $\dfrac{(a+1)^2-b^2}{a^2+2ab+b^2+2a+2b+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

d) $\frac{(a-1)^2-(b-1)^2}{a^2+b^2+2ab-4(a+b-1)}$

۶ . ۹ . د (1-) سره شميرنه

الف- ورکړشوی دې وي/ a(b-c) c . 1-=aځای په ځای کړئ او داسې لاس ترې راغلي کسر يا مات لپاره مختلف ليکدودونه ورکړئ.

ب – ورکړي دې (5c -3b-a)/(1-a) وي په صورت او مخرج (ماتباندې او ماتلاندې) کې (1-) له نوکانو راوباسئ او دا عدد لنډ کړئ.

پ – کسر يا مات (b-a-)/ (b² - a²) د (1-)سره پراخ کړئ او ساده يې کړئ.

ت- ورکړی دې وي $1-\frac{25a^2-36b^2}{6b-5a}$ په مخرج يا ماتلاندې کې (1-) له نوکانو راباسئ او دا وبينه يا افاده ساده کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ ۰ توان (پوتنځ) او ریښه (جذر) Potenz , Wurzel (Root)

په دې برخه کې د توان او جذر یا ریښې قوانین ترڅیړنې لاندې نیسو، دلته غوره دا ده، چې د کارونې یا استعمال چټکتیا ته پرمختګ (تکامل) ورکړو۰ دا مشوره کیږي، چې ریښه دې په پوتنځ واړول شي، چې د اکسپوننت - یا جګعدد یې نسبي یا راشنل وي۰ د دې فورمال ټیک کره د ګڼلو قوانینو په څنګ کې د باوري کیدو لپاره باید په نیونو(فرضیو) هم ژور فکر وشي۰

د ریښې پیژند د خلاف یا پر ځنډ عملیو مخه باید نیول شوي وي، چې د هغې له مخې رادیکاند (ریښه ویستونی یعنی هغه ګڼ، چې ریښه یې وېستلکیږي یا نیول کیږي،د ریښې نخښې لاندې ګڼ او هم د ریښې ارزښت نامنفي اعداد (ناکمیز ګڼونه) وي۰ د توان زړه پورې ریل اکسپوننت (په جګ) هلته کره دی یا باوري دی، چې د بنسټ لپاره د مثبت عددونو نیونه یا فرضیه شوي وي۰

٤ ۰ ۱ توان (پوتنځPotenz) په ټولګڼیز یا تام عدد په جګ یل اکشسپوننت

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ۱۰٤:

د يوه په خوښه ريل ګڼ توان لاندې موږ د a د خپل ځان سره n- م واره ځل

پوهيږو۰ د دې لپاره ليکو: $a^n = b$ دلته a بنسټ n = 1,2,3,...

اکسپوننت(جګګړ، لنډ: جګ) اوb د پوتنښ يا توان ارزښت بلل کيږي۰

د بيلګي په توګه

$$a = a\ ,\ a^2 = a\ .\ a\ ,\quad a^3 = a.a.a$$

(4,1) د n = 0 لپاره کره ټاکل کيږي $a^\circ = 1$ د $a \neq 0$ سره

د پيژند يا تعريف پر بنسټ (اود څه بنديزونو په څلورديوالى کې، چې لاندې شوي) ښوول کيدى شي، چې د خوښى يا زړه پورې رييلګڼونو $a,b \in R$ او $m,n \in N^*$ نامنفى ټولګڼونو اکسپوننت يا جګګړ لپاره لاندې باورلري

$$a^n.b^n = (a.b)^n;...(4,2)$$

$$a^n : b^b = (\frac{a}{b})^n = (a/b)^n; b \neq 0;.................(4,3)$$

$$a^n.a^m = a^{n+m};..(4,4)$$

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0, n \geq m;............(4,5)$$

$$(a^n)^m = a^{n.m};..(4,6)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته د توان اړيکې د ټولګنيز مثبت جګڼ يا اکسپوننت لپاره باور لري، کيدئ شي، چې ټولګڼونو ته وغزول شي، که چيرې پيژند ورکړو يا تعريف کړو:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}; n = 1, 2, 3, ..., ..a \neq 0, ...(4,7)$$

دا پورته د توان قوانين د ټولګنيز جګ(اکسپوننت) لپاره بی بنديزونو يوائې د نه ورکيدونکو رييل بنسټونو يانې د $a \neq 0$ او $b \neq 0$ لپاره باور ي دي . په (4,5) کې بيا بنديز $n \geq m$ اړيين نه دئ.

د توان قوانين کيدئ شي په بڼه بدلونکو افادو يا ويينو وکارول- يا استعمال شي.

بيلګه 4 .1

$$[\frac{4a^{-3}b^0}{x^2y^{-1}}]^{-2} = (4abx^{-2}y)^{-2} = 4^{-2}a^6x^4y^{-2} = \frac{a^6x^4}{16y^2}, abxy \neq 0$$

بيلګه 4 . 2

$$\frac{9^4(a^2\sqrt{ab})^2}{18^2.(3ab)^3} = \frac{3^8.a^4.a.b^2}{2^2.3^4.3^3.a^3.b^3} = \frac{3a^2}{4b}, a > 0, b \neq 0$$

بيلګه 4 . 3

$$\frac{3-a}{a^{m-4}} + \frac{a^6 - a^5 + 2a^3 - 1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2+1}{a^{m-2}} =$$

$$= \frac{a^5(3-a) + a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - a^3(2a^2+1)}{a^{m+1}} =$$

$$= \frac{3a^5 - a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - 2a^5 - a^3}{a^{m+1}} = \frac{a^3-1}{a^{m+1}}, a \neq 0, m \in Z$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوتنځ زیاتون او کمون کې باید پام وي، چې یوازې د برابر پوتنځ ګڼونه یو له بل سره زیاتیدی او یو له بل کمیدی شي۰

بیلګه 4 . 4

$$3a^n + 2a^n = 5a^n$$

بیلګه4 . 5

$$4a^{n+1} + 2a^n + 5b^{n+1} - 3b^n - 3a^{n+1} + a^n - 4b^{n+1} + 3b^3 = a^{n+1} + 3a^n + b^{n+1}$$

دې ته بیا ګوته نیسو، چې د بنسټ - او پوتنځ مخنخښي کې دې توپیر وشي۰ پوتنځ له مثبت - یا زیاتونمخنخښي سره تل مثبت یا زیاتیز پوتنځ ارزښت لري، په دې ترځ کې، چې پوتنځ د منفي - یا کمیز بنسټ سره که اکسپوننت جوړه وي مثبت زیاتیز او که اکسپوننت ناجوړه وي نو منفي - یا کمون ارزښت لري۰

باور لري:

$$(2a)^{2n} = +a^{2n}, ..., (-a)^{2n} = +2a^{2n}$$
$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}, ..., (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, n \in Z, a > 0$$

٤ ۰ ۲ – ریښه او توان له ریشنل جګ عدد (اکسپوننت) سره

پیژند ٤ ۰ ۲

د یوه نامنفي ګڼ a لپاره n -مه ریښه هغه نامنفي ګڼ b دی، د کوم لپاره چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري: $b^n = a$

د دې لپاره ليکو:

$$b = \sqrt[n]{a}, n = 1, 2, 3, ...(4,8)$$
$$a \geq 0, b \geq 0..............................(4,9)$$

دلته a راديکاند Radikand ، يا ګڼ، چې ريښه (جذر) يې نيولکيږي(موږ دا

ريښه نيووني يا ريښه ويستونى بولو) او n دريښې جګ(اکسپوننت) اوb د

ريښې ارزښت يا ريښه ارزښت بلل کيږي٠

بايد پردې تينګار وشي، چې ريښه يوائې د نامنفى راديکاند يا ريښه ويستوني (ريښه نيوني) $a \geq 0$ راوستل کيږي يا نيول کيږي او پخپله په لاندې توګه يو نامنفي - يا ناکميز ارزښت لري يانى

$$b = \sqrt[n]{a} \geq 0$$

د دې کره کوني لپاره لاندې يادونې شوي دي:

۱ – د جوړه $n = 2,4,6,...$ لپاره د $a<0$ سره ريښه b په رييلګڼونو کې نه شته، کوم ، چې (4,8) پوره کړي

ځکه، چې د b جوړه په توان تل نامنفي يا ناکميز يانې زياتيز ګڼ دى٠

۲ – د جوړه او مثبت - يا زياتيز برابرون $b^n = a$

په خته په ريښتوني دوه رييل اوبيوني ياحلونه لري د بيلګي په توګه $b^2 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یانې $n = 2$ او $a = 4$ اوبیونې

$$b_1 = 2, b_2 = -2$$

دي۰ د دې لپاره، چې د رادیکاند د شمیرلو کارونې یواځنۍ سرته ورسولی شو، باید د یوې اوبیونې لپاره پریکړه وکړو، نو له دې امله موږ مثبت ارزښت غوره بول

۳ – د ناجوړه . $n= 1 , 3 , 5$ او $a\geq 0$ لپاره

$$b^n = a$$

تل یواځني زیاتیز(مثبت) اوبی یا حل لري یانې $b\geq 0$

٤ – د ناجوړه n او کیمز یا منفي a لپاره $b^n = a$

تل یواځنې یو منفی اوبی یا حل لري۰ یانې $b < 0$ د بیلګې په توګه دا $b^3= -8$ یواځې

اوبی $b = -2$ لري.

په هر صورت باید د جوړه...$n=2,4,6$ ګڼونو لپاره $a\geq 0,b\geq 0$ وغوښتل شي، ځکه چې په بل صورت کې به یا رېښه شته نه وي او یا به یواځنی اوبی نه لري، یانې څو اوبی به شته وي

د ناجوړه یا طاقو $n = 1,3,5,\ldots$ لپاره کیدی شي، چې له دواړو غوښتنو تیر شو۰ دلته به یواځې تاوان یا زیان دا وي، چې د ټولو ممکن حالتونو لپاره به بیل بیل د رېښې د قوانینو غوره کولو ته اړ کیږو۰ له بلې خوا به رېښی د قوانینو ترتیبول د پوتنځ لپاره ، چې پورته ایښول شوي بندیزونه nقوانینو لپاره ستونځمن وي۰ له دې امله د ناجوړه رېښو

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننت غوره کوو او د يوائځني يو اوبی لپاره 2- د 8- = b^3 او نه $-2 = \sqrt[3]{-8}$

بلکه $\sqrt[3]{8}$-=2- ليکو٠ په دې اړوند او د يادو شوو نيونو په بنسټ دې دا لاندې اوبی په ګوته شوی وي

$$\sqrt{a^2} = a, \ldots\ldots\ldots\ldots(4,10)$$

څلوری ريښه يا مربع ريښه $\sqrt{a^2}$ د ټولو حقيقي اعدادو يا - ګڼونو a لپاره تعريف شوي٠ د نامثبت يا نازياتيز ې a لپاره به (4,10) په داسی حال کې، چې د منفي a لپاره به بيا د (4,10) اوبی منفي يا متيز وي، کوم، چې نيونه $b \geq 0$ نفې کوي.

په ځانګړي حالتونوکې به د (10 , 4) بنول شويو حالتونو استعمال لاندې مخامخوالي يا مضاد لاس ته راولي، لکه :

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2, \sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = -2$$

ياني د 2- = 2 سره٠

د (10 , 4) ټيک داسې ليکل کيدی شي:

$$\sqrt{a^2} = |a| = \{a, a \geq 0, \ldots\ldots\ldots\ldots(4,11)$$

$$= \{-a \quad , a \leq 0 \qquad (4,11)$$

د ريښې يا جذر له پيژند (9 , 4) , (8 , 4) سره سم کيدی شي، چې لاندې باوري د ريښې قوانين وليکل شي د....n = 1,2,3 او $a, b \geq 0$ لپاره

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \ldots\ldots\ldots\ldots(4,12)$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b}, b > 0 \ldots\ldots(4,13)$$

$$\sqrt{a}.\sqrt[m]{a} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}} \ldots\ldots\ldots\ldots(4,14)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a} \ldots\ldots\ldots\ldots(4,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته د (4,15),(414),(413,).(4.12) ترمنځ بايد لږ واټن وي، خو کومه ترې ناسمه پوهيدنه نه رامخ ته کوي ۰ دلته پيژندل کيږي، چې د ريښې قوانين د پوتنځقوانينو ته، چې په(4,2) تر (4,6)پورې ورکړ شوي،د پرتلې وړ دي۰ په رښتيا چې دا د پوتنځقوانينو لاس ته راتلی شي، که پوتنځ د ريشنل اکسپوننت سره په لاندې ډول تعريف شي يا يې لاندې پيژند ورکړ شي۰

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m ....(4,16)$$

لپاره $a \geq 0$, $n = 1,2,3,\ldots$, $m = 1 , 2 , 3\ 4 \ldots$ د

د بيلګې په توګه (۱٦ ، ٤) په لاندې ډول ليکل کيږي

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{(1/n)+(1/m)} = a^{(n+m)/n.m} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}}$$

دا اړيکې (4,16) کيدی شي منفي $m = -1,-2,-3,\ldots$ ته هم پراخه شي، چيرته، چې (4,17) په تينګه - يا کره باور ولري

$$a^{-(m/n)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a > 0....................(4,17)$$

بې له بنديزونو د خوښې جګو n او m لپاره د پوتنځقوانين (2 ,4) تر (4,6) باور لري، خو يوائې هلته، چې نه ورکيدونو بنسټونو يانې $a>0, b>0$ نيونه شوې وي۰

د ريښې شميرلو لپاره بايد اساساً د(4,16) له مخې ريشنل اکسپوننتونه واوړي او له (4,2) تر (4,6) استعمال کړي

اړتيا لرو، چې د پوتنځ او ريښې سره شميرلو د قوانينو استعمال نيونې تل و ازمايلې شو۰ په ځانګړي ډول د بنسټ نه منفيتوب کمونوالی يا نامنفيوالی يا مثبتتوب(مثبتوالی يا زياتونوالی) پريږدو، چې لاندې ناسم پاي کيدډول وښايو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{-a}=(-a)^{1/2}=(-a)^{2/4}=\sqrt[4]{(-a)^2}=\sqrt[4]{a^2}=a^{2/4}=a^{1/2}=\sqrt{a}$$

برابرون يوازې د دې ساده حالت0 = a لپاره شته دی يا باور لري، د 0=|a| يا $a\neq 0$ لپاره a- او يا a منفي دي دا په دې مانا، چې a يا-a پيژند نه لري يا تعريف نه دی۰

د توان قوانين د توان سره شميرلو، چې راشنل جګ لري، په لاندې بيلګو کې روښانه کوو:

پام: په لاندې بيلګو کې دا تراوسه د شمير بنسټيز قوانين ټول راغلي، د نو ورسره بلدېدونکو ګرانو لوستونکو ته دې دا روښانه وي، چې د لږ فکر وروسته هرڅه روښانه کيدی شي۰ شميرنه يې لږ وخت نيسي، که غواړی پخپله يې يو ځل وشميری۰

بيلګه ٤ ۰ ٦

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}}=\{(125)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}=(125)^{\frac{1}{6}}=(5^3)^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}=2,2361$$

بيلګه ٤ ۰ ٧

$$\frac{a^2\sqrt{b}c^{-2}}{\sqrt[3]{a^2}b^{-3}}:\frac{d^2\sqrt{c}}{\sqrt[5]{d}a^{-5}}=\{a^{(2-\frac{2}{3})}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{-2}\}:\{a^5c^{-2}d^{(2-\frac{1}{5})}\}=$$

$$=a^{(2-\frac{2}{3}-5)}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{(-2-\frac{1}{2})}d^{(-2+\frac{1}{5})}=a^{-\frac{11}{3}}b^{\frac{7}{2}}c^{-\frac{5}{2}}d^{-\frac{9}{5}}=$$

$$=\frac{\sqrt{b^7}}{\sqrt[3]{a^{11}}.\sqrt{c^5}.\sqrt[5]{d^9}}=\frac{b^3.\sqrt{b}.c^2}{a^3.\sqrt[3]{a^2}.c^2.\sqrt{c}..d^5.\sqrt{d^4}}$$

بيلګه ٤ ۰ ٨

$$8.\sqrt[3]{343}-4.\sqrt[3]{125}+5\sqrt[3]{8}-5\sqrt[3]{729}$$

$$=8.\sqrt[3]{7^3}-4\sqrt[3]{5^3}+5.\sqrt[3]{2^3}-5.\sqrt[3]{3^6}=8.7-4.5+5.2-5.9=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ٤ ۰ ۹

$$5.\sqrt{63}-2.\sqrt{175}-\sqrt{343}+3.\sqrt{28}$$
$$=5.\sqrt{7.3^2}-2.\sqrt{7.5^2}-\sqrt{7.7^2}+3.\sqrt{7.2^2}=$$
$$=5.3\sqrt{7}-2.5\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+3.2.\sqrt{7}=$$
$$=15.\sqrt{7}-10.\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+6.\sqrt{7}=4.\sqrt{7}$$

بيلګه ٤ ۰ ۱۰

$$\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{(a-\sqrt{a^2-b^2}).(a+\sqrt{a^2-b^2})}=$$
$$=\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2}=\sqrt{a^2-a^2+b^2}=|b|$$

د $|a| \geq |b|$ لپاره

د مختلفو شميرلو لپاره موخور دی، چې مات لاندې کې منځ ته راغلي ريښې له منځه يوسو (د ماتلاندې ريشنل کول)۰

که په ماتلاندې کې يوه ريښه $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ د فاکتور يا ځلوني په څيررامنځ ته شي، نو دا د وظيفې لپاره يوازې اړيين ده چې (m < n (m , n >0 او $m,n \in Z$ په پام کې راوړو

کارونه يا عمليه په لاندې ډول اجرا کيږي(N*|= 0 , a > 0)

$$Z\Big/N=\frac{Z}{N}=\frac{Z}{N*\sqrt[n]{a^m}}=\frac{Z.a^{1-\frac{m}{n}}}{N*a^{\frac{m}{n}}.a^{1-\frac{m}{n}}}=\frac{Z.\sqrt[n]{a^{n-m}}}{N*a},..........(4,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ٤ ۰ ۱۱

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{3}}=\frac{3}{2.3^{\frac{1}{3}}}=\frac{3.3^{\frac{2}{3}}}{2.3.3^{\frac{2}{3}}}=\frac{3^{1+\frac{2}{3}}}{2.3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}=\frac{3^{\frac{5}{3}}}{2.3}=\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{1}{2.\sqrt[3]{9}}$$

که په ماتلاندې کې د څلورې- یا مربع ریښې زیاتون یا کمون وي $N=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ نو ماتلاندې له مات $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ سره غزوو او د بینوم فرمول استعمال سره له $a > 0$ او $b > 0$، چې $a \neq b$ وي لاس ته راځي:

$$\frac{Z}{N}=\frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}).(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{a-b},...(4,19)$$

بیلګه ٤ ۰ ۱۲

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

بیلګه ٤ ۰ ۱۳

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

۴ . ۳ توان(پوتنخ) د حقیقي – یا ریيل جګ (اکسپوننت) سره

دلته دا په ګوته کوو یا دې دا ویل شوي وي، چې د توان ټول قوانین له (4,2) تر (4,7) دې په خوښه حقیقي اعدادو اکسپوننتونو(جګعددونو)m,n لپاره باور لري،طبعاً بې بندیزه ټیک د مثبت بنسټ لپاره. یعنې a,b>0 ، برسیره پردې دې باید توان $a^{\alpha}; a > 0$ د ناریښتوني یا ایراسنل عدد α لپاره تعریف شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

كه α يو ايراشنل – يا ريښتونی عدد وي، نو موږ د ۳ . ۱ . ۴ برخې سره سم انتروالونو بندولو په بنبټ لرو: $\alpha = \{a_{n;} a'_n\}$. دلته $a_{n;} a'_n$ هوښيار يا راشنل اعداد دي.

بيا نو

$$\beta = \{a^{a_n}; a^{a'_n}\} \qquad (4,20)$$

هم په انتورالونو بندول دي چې غږي يې (۴،۲) لاندې تعريف شوي توانونه دي د راشنل اكسپوننت سره. د هغه موجود په انتروالونو بندولو سره په دې توپير، چې

$$\begin{aligned} 2^1 &< 2^{\sqrt{2}} < 2^2 \\ 2^{1,4} &< 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5} \\ 2^{1,41} &< 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42} \\ 2^{1,414} &< 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415} \\ 2^{1,4142} &< 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143} \\ &\vdots \end{aligned}$$

اخرني مساوات په دې معنا دی

نو لرو

$$\sqrt[10000]{2^{1412} < 2^{\sqrt{2}} < \sqrt[10000]{2^{14143}}}$$

٤ ، ۳ تولګه : د a>0, b>0 ريیل او $m, n \in N(n \neq 0)$

همدا ډول $m, n \in N(n \neq 0)$ پيلو لپاره باور لري

$$\alpha, \beta \in R$$

$$a^0 = 1, \frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}, \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} =$$

$$= (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته موضوع تر دې ځايه بسيا کوي، که نور څه مخته راتلل، چې اړيين وو، هغه به بيا په ګډه ورزياتوو

۴ . ۵ . تمرينونه

۱ . د توان کلمه، د توان جمعه او تفريق يا زياتون او کمون

۱ . ۱ – د توان په څير يې وليکئ

a) $(-a^{-1})\cdot(-a^{-1})\cdot(-a^{-1})\cdot(-a^{-1})$ b) $-\left(\frac{1}{a^{-2}}\cdot\frac{1}{a^{-2}}\cdot\frac{1}{a^{-2}}\right)$

c) $-(b-a)\cdot(a-b)\cdot(a-b)$ d) $-(a^0 b)\cdot(a^0 b)\cdot(a^0 b)\cdot(a^0 b)$

1.2. a) -3^{-4} b) $(-5)^3$ c) $(-2^{-1})^3$ d) $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

1.3. a) $12a^2b-6ab^2-15a^2b+6ab^2-7a^2b$

b) $(3a+2b)x^4-x^4(2b-3a)+x^4(3a+2b)$

c) $4(a-b)^2+2(b-a)^2-3(a-b)^2$

d) $18(a-1)^3-3(1-a)^3-15(a-1)^3+4(1-a)^3+3(1-a)^3$

۲ – د توانو ضرب او وېش د برابر بنسټ سره

2.1. a) $\frac{3a^{n+1}\cdot 6x^{n+7}\cdot 9b^{x+1}}{3x^n\cdot 2b^{x+1}\cdot 3a}$ c) $\frac{a^{x+1}\cdot b^{x+3}\cdot a^{3x-1}\cdot b^{x+3}}{a^{x-2}\cdot b^{3-x}\cdot a^x\cdot b^{x+1}}$

b) $\frac{a^{n+1}\cdot a^{n+1}\cdot a^n}{a^0\cdot a^n\cdot a^{n-1}}$ d) $\frac{a^{3n-x}\cdot b^{2n+x}}{a^{n+2x}\cdot b^{2n-x}}\cdot\frac{x^{3n+2}\cdot y^{2n-1}}{x^{2n-3}\cdot y^{n+1}}$

2.2. a) $\frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}}:\frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}}$ c) $\frac{42a^2b^3\cdot x^{n+1}}{36c^3\cdot y^2\cdot z^{n-3}}:\frac{70a^3b^2\cdot x^{n+2}}{54c^2y^4\cdot z^{n-2}}$

b) $\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}}:\frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$ d) $\frac{45xa^3\cdot 9y^n(a-1)^2}{9yb^3\cdot 30x^n(a+1)^2}:\frac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲ . د توان ضرب او جمعه(زیاتون) د همغه بنسټ سره:

2.3. a) $(x^{5n+3} + x^{4n+5} - x^{3n+4}) : x^{2n+3}$

b) $(143a^4b^5 - 221a^3b^5 - 247a^5b^4) : 13a^3b^4$

c) $(a^{n+1}b^{x-1} + a^nb^x + a^{n-1}b^{x+1}) : a^{n-2}b^{x-1}$

d) $(16a^8 - a^4b^2 + 9b^4) : (4a^4 - 5a^2b + 3b^2)$

د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال.

په لاندې کې x وشمیرئ

۳ . د توان په توانونه، د توانونو ضرب او وېش د برابر جګګڼ یا جګعدد سره، د کمیزو یا منفي اکسپوننتونو سره شمیرنه

3.1. a) $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2$

b) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$

c) $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

3.2. a) $\frac{18^4(a^2b)^2}{27^3 \cdot (2a\sqrt{a} \cdot b)^2}$

b) $\frac{(6ab)^3 \cdot (5a^2b)^4}{2^4 \cdot 3ab^2 \cdot (25a\sqrt{b})^2}$

c) $\left(\frac{4b^2y^2}{6a^2x^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{8a^3y^2}{6b^3x^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{18b^3x^6}{16a^3y^3}\right)^2$

d) $\left(\frac{45b^2y^3}{24a^3x}\right)^2 \cdot \left(\frac{6bx^3}{9ay^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{75b^3x^3}{36a^4y}\right)^2$

3.3. a) $\frac{(3a-9b)^2}{81b^2-9a^2}$

b) $\frac{(6a-12b)^2 \cdot (3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2}$

c) $\frac{(4a^2-9b^2)^2}{(3a^2-2ab)^2} \cdot \left(\frac{9a^2-4b^2}{2a^2+3ab}\right)^2$

d) $\left(\frac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 : \left(\frac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2$

3.4. a) $\frac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \frac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}}$

b) $\frac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} : \frac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\dfrac{(ax-ay)^m \cdot (3bx+3by)^n}{(cx^2-cy^2)^{m+n}}$

d) $\left(\dfrac{(x+y)^{3a-4}}{x^{a-1}y^2} : \dfrac{y^{2a-5}}{x^{4a-3}(x+y)^{3-2a}}\right)\dfrac{x^{4-3a}y^{3a-6}}{(x+y)^{a-2}}$

۴ . د کومو شرليطو لاندې کيدی شي لاندې عددونه د يوه مربع – يا څلوری ريښه وي؟

4.1. a) $+a, -a$ b) $+a^2, -a^2$ c) $+a^3, -a^3$ d) ab

4.2. a) $+(a-b), -(a-b)$ b) $+(a-b)^2, -(a-b)^2$ c) a^2-b^2 d) a^2+b^2

۵ - د ريښو جمعه او تفريق)زياتوناو کمون)

5.1. a) $6\sqrt{27}+2\sqrt{108}-7\sqrt{75}$

b) $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$

c) $3\sqrt[4]{256}-4\sqrt{49}-7\sqrt[3]{27}+2\sqrt[5]{32}$

d) $3\sqrt{50}-\sqrt{98}+4\sqrt{288}+14\sqrt{162}-\sqrt{25-9}\cdot\sqrt{2}$

5.2. a) $\dfrac{x(2r^2-4x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}-8x\sqrt{r^2-x^2}$

b) $\dfrac{r(4r^2-3rH)}{\sqrt{4r^2-2rH}}-3r\sqrt{4r^2-2rH}$

c) $2\sqrt{(x-k)^2+x^2}-\dfrac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}}$

d) $\dfrac{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2-\left(c+\frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2}}-\dfrac{h^2+2\cdot\frac{c^2}{4}}{\sqrt{h^2+\frac{c^2}{4}}}$

5.3. a) $\sqrt{1-x}+\dfrac{x+1}{2\sqrt{1-x}}$

b) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

d) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\dfrac{x}{(x+\sqrt{x^2+a^2})\cdot(\sqrt{x^2+a^2})}$

۶ – د ريښو يا جذرونو ضرب او وېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.1. a) $\sqrt{3\cdot 7}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sqrt{5\cdot 7}$ c) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}:\sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}}$

b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ d) $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2-2ab+a^2}{2}}$

6.2. a) $(3-\sqrt{2})(2+3\sqrt{2})$ c) $\sqrt{12x^2-12x}\cdot\sqrt{3x^2-3}$

b) $\sqrt{8+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{10}}$ d) $\sqrt{a^2+a}\cdot\sqrt{ab+b}$

6.3. a) $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$ c) $\frac{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}}{\sqrt{a+c}-\sqrt{b+c}}$

b) $\sqrt{6x^2-6}\cdot\sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$ d) $\frac{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}}$

۷ – د توان او ريښې ريښه وېستنه (حلونه)

.1. a) $\sqrt{0,04^5}$ b) $\sqrt[3]{4200}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}$ d) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

.2. a) $\sqrt[2n-1]{a^{4n^2-1}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6\cdot b^{12}}}$

b) $\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6\cdot b^8}}$

.3. a) $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^4}$ c) $\frac{4\pi r^3-8\pi r^3}{\sqrt{\left(4r^2-2r\cdot\frac{4}{3}\cdot r\right)^3}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}a^2+\sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2+\frac{a^4}{8}}}$ d) $\pm\sqrt{\left(\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}\right)^2-\frac{y_1^2x_0^2}{y_1^2-y_2^2}}-\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}$

.4. a) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$ c) $\sqrt{a\cdot\sqrt[8]{a^5\cdot\sqrt[3]{a}}}:\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}$

b) $\sqrt[3]{a^3\cdot\sqrt{a^2\cdot\sqrt[5]{a^8\cdot\sqrt[4]{a^3}}}}$ d) $\frac{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[6]{a^4}}}:\frac{\sqrt{a^3\cdot\sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7\cdot\sqrt{a}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ – لاندې ماتونه یا کسرونه داسې شکل ته واړوئ، چې مخرج رېښه نه وي.

8.1. a) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{10}{3\sqrt{8}}$ d) $\frac{15}{\sqrt[11]{243}}$

8.2. a) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[9]{x^{13}}}$ c) $\frac{y^2x}{\sqrt{x^3y}}$ d) $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$

8.3. a) $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{5}+1}$ c) $\frac{15}{3-\sqrt{6}}$ d) $\frac{16}{3+\sqrt{5}}$

8.4. a) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$ b) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

8.5. a) $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ b) $\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ c) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{4\sqrt{10}-7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$

8.6. a) $\frac{7\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$

b) $\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}$ d) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ ۰ لوګاریتم یا لوګاریتموس Logarithmus

په دې برخه کې د لوکاریتم کلمه ترڅیړنې لاندې نیسو او د لوګاریتم د قوانینود استعمال اسانتیاوې، چې په کره یا په کلکه یې په نیونو (فرضیو) پاملرنه شوې وي څیړو ۰

۵ ۰ ۱ د لوګاریتم کلمه

موږ په دې برخه کې لوګاریتم تر څیړنې لاندې نیسو، د لوګاریتم د قوانینو اسانتیاوې څیړو ، چې په نیونو یا فرضیو کې باید پوره پاملرنه شوې وي ۰د لوګاریتم $c = \log_b a$ پیژند لپاره د یوه زیاتیز - یا مثبت عدد a یوه زیاتیز - یا مثبت عدد b ته چې $b \neq 1$ او د لوګاریتم بنسټ بلل کیږي له لاندې برابرون یا مساوات څخه مخ ته ځو د په خوښه c لپاره

$$b^c = a\ ; a > 0; b > 0; b \neq 1 \qquad (5,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که a او b له مخه ورکړ شوي وي، نو د برخی ٤ سره یواځنی ټاکلی دی۰ که a او b له مخه ورکړشوي وي، نودپورتنیو نیونو سره یواځنی رییل ګڼc شته دی، چې برابرون(4,1) پوره کوي۰ دې ته د a لوګاریتم وایود b پر بنسټ:

پیژند ۵ ۰ ۱:

د ریلل مثبت ګڼ a لوګاریتم لاندې، چې له یوه سره نابرابر بنسټ bولري، هغه ریلل ګڼ c پوهیږو , له کوم سره، چې bد هغه په توان یا پوتنځ کړو او ګڼ a ترې لاس ته راشي۰ لکه (5,1)

د دې لپاره لیکو:

$$c=\log_b a; a>0; b>0; b\neq 1,.............(5,2)$$

(5,1) او (۲ ۰ ۵) یو ارزښت لري د دې لپاره، چې د لوګاریتم قوانین له (5,2) سره سم لاس ته راوړو، نو د(5,1) ته بیرته ورګرځو۰ دا به په لاندې بیلګه کې روښانه شي،په کوم کې چې له a,b,c څخه تل دوه ګڼونه ورکړ شوي دي

بیلګه ۵ ۰ ۱

۵ ۰ ۱ الف : له $2^x=16$ لرو x=4 ، ځکه، چې $16=2^4$

ب له $3^x=\frac{1}{9}$ څخه لرو x=-2 ، ځکه چې $3^{-2}=1/3^2=1/9=\frac{1}{9}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۲ الف: $2=\log_x 36$ د x²=36 سره یو ارزښت لري، نو لروx=6

ب : $-6=\log_x \frac{1}{36}$ د $x^{-6}=\frac{1}{64}=\frac{1}{2^6}=2^{-6}$ سره یو ارزښت لري،

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو $x = 2$

۵ . ۱ . ۳ الف : $x = \log_5 125$ د $5^x = 125 = 5^3$ سره، يوارزښت لري،

نو $x = 3$

ب: $x = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{16})$ د $(\frac{1}{2})^x = 1/16 = (1/2)^4$

سره يو ارزښت لري، نو لرو $x= 4$

۳ . ۱ ٤ الف $5 = \log_3 x$ د $3^5 = x$ سره يو ارزښت لري، نو $x=243$

ب : $-5 = \log_2 x$ د $2^{-5} = x$ سره يو ارزښت لري، نو لرو $x = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

۵ . ۱ . ۵ الف $2 = \log_x(-6)$ تعريف نه دی يا پيژند نه لري.

ب : $x = \log_{-5} 125$ پيژند نه لري يا تعريف نه دی

پ: $\log_1 x$ پيژند يا تعريف نه دی

له (5,1) او(5,2) څخه لاس ته راځي

$$a = b^{\log a}, \ldots\ldots\ldots\ldots(5,3)$$

$$\log_b 1 = 0, \log_b b = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots(5,4)$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځانګړي بنسټ لپاره لاندې سومبول کارولکیږي

$b = e = 2,71828 \Leftrightarrow b = 10$

$$\log_{10} a = \log a, \log_e a = \ln a, ...(5,5)$$

د lga لوګاریم ته لسیز لوګاریتم وایي او lna ته پیدایښتي یا طبیعي لوګاریتم وایي(e وروسته څیړو) زیات وخت د لشمیز لوګاریتم لپره داسې هم لیکو:

$$c = \log a \qquad (5,6)$$

که سومبولlog څو واره رامنځ ته شي، نو په پام کې دې وي، چې په خوښه، مګر همغه بنسټ باید وکارول شي۰

۵ ۰ ۲ د لوګاریتم قوانین

د لوګاریتم د پیژند سره سم د (5,1) او(5,2) له مخې کیدی شي د پوتنځ د قوانینو(5,3) تر(5,7) په مرسته لاندې لوګاریتم قوانین رابیل کړای شو، کوم چې په خوښه مګر همغه لوګاریتم بنسټ b |= 0 ، b>0 او د زیاتیز(مثبت) x> 0 , y > 0 لپاره باور لري

$$\log(x.y) = \log x + \log y, ...(5,7)$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - loy, ...(5,8)$$

$$\log x^a = a \log x, a \in R, ...(5,9)$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log, n = 1, 2, ..., ...(5,10$$

د پوتنځ قوانینو له مخې د دې فرمولونو راوستل یو د وړاندیز وړ د لوګاریتم ژورې څیړنې لپاره تمرین ښایي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بيلګې په توګه له (۷ ، ۵) همداسې

$$\log_b (x.y) = \log_b x + \log_b y, \text{..........................}(5,11)$$

څخه په لاندې ډول او له (5,2)،(5,1) څخه لرو

$$c_1 = \log \ \ x, c_2 = \log_b y, c = \log_b (x+y), \text{.................}(5,12)$$

د لاندې سره يو ارزښت لري

$$b^{c_1} = x, b^{c_2} = y, b^c = x.y, \text{.............................}(5,13)$$

له(5,13) او د پوتنځ قانون(4, 2) پر بنسټ لرو :

$$b^c = x.y = b^{c_1}.b^{c_2} = b, \Rightarrow c = c_1 + c_2, \text{.....................}(5,14)$$

او له (5,11) همداسې د(5,7) ښوونه د (5,12) له امله د لوګاريتم د (5,7) تر(5,10)

قوانينو کيدی شي د پيچلي لوګاريتم له افادې څخه د لوګاريتم ساده بنسټيزې افادې ته بيرته راوګرځو اوپه ځنې۰

بيلګه ۵ ۰ ۲

$$\log \frac{2\sqrt{a+b}\, a^3 b^2}{\sqrt[3]{c}(a+c)^2}$$

$$= \log 2 + \frac{1}{2}\log(a+b) + 3\log a + 2\log b - \frac{1}{3}\log c - 2\log(a+c)$$

بيلګه ۵ ۰ ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log(a+b)+2\log(a-b)-\frac{1}{2}\log(a^2-b^2)$$
$$=\log\frac{(a+b)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log[(a-b)\sqrt{a^2-b^2}]$$

اوس باید وښایو، چې تر کومو شرایطو لاندې دا اړیکې باور لري۰

په بیلګه ۵ ۰ ۲ کې په کینې اړخ کې لوګاریتم ځاي لري، چې د ټولو a,b,c تعریف دئ او لاندې برابرون پوره کوي یا ډکوي:

وي دې a+b>0 (د دې لپاره ، چې ریښه تعریف وي او صفر نه شي، ځکه، چې بیا لوګاریتم اوبی یا حل نه لري۰

وي دې 0 < c (د دې لپاره چې ریښه تعریف او ماتلاندې صفر نه شي)

وي دې $a+b\neq 0$ (د دې لپاره، چې لوګاریتم تعریف وي)

وي دې $b\neq 0, a>0$ (د دې لپاره، لوګاریتم تعریف وي)
د کینې اړخ لوګاریتم په ځانګړي ډول د a = 2 . b = -1 , c = 1 لپاره تعریف دئ۰ په ښي اړخ کې ولاړ برابرون شکلبدلون یا ځیره بدلون ریښتونی کیدی نه شي، ځکه چې Log بې ځایه دئ ۰ د دې لپاره، چې د ځیرې بدلون ریښتونوالی ممکن شي، باید د $b\neq 0$ پر ځاي په ټینګه یا کره b>0, وغوښتل شي ۰

په بیلګه ۵ ۰ ۳ کې کینه خوا یواځې هلتهموخه وره ده، چې وي:

a+b>0,   a-b>0

نو بیا a²-b² = (a+b)(a-b)> 0 او په دې بیلګ کې رامنځ ته شوي ټول لوګاریتمونه هم تعریف دي۰ دا اړیکې د ټولو a ، b لپاره هم باور لري،د کومو لپاره چېپورته نابرابرون ډک وي۰ دا کیدی شي a > - b , a > b له امله هم و|a >|b ته راغونډ شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته دي هم ګوته نیولې وي، چې لوګاریتم په یوه بنسټ b یوه بل لوګاریتم یوه په خوښه بل بنسټd ته د شمیراوړون د شمیرنې اړول کیدی شي $(b>0, b\neq 1, d>0, d\neq 1, a>0)$

د(۵،۳) له مخې باور لري $a = b^{\log_b a}$

د دې برابرون لوګاریتم نیول و بنسټd ته لرو:

$$\log_d a = \log_d b^{\log_b a} = (\log_b a)(\log_d b), ...(5,15)$$

د

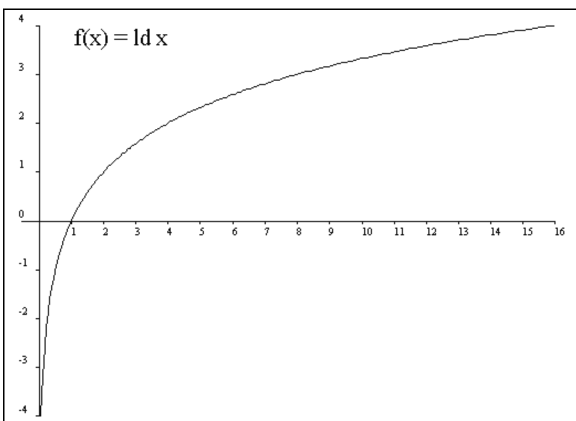
لسیز لوګاریتم اړول په پیداینتي یا طبیعي لوګاریتم او په څټ لپاره لیکو b=10, d = e همداسې b = e , d = 10 او لاس ته راځي :

Lga = (lge)(lna); …………………(16)

Lna=(ln10)(lga) = 2,30429lga;……(17)

$$\lg a = (\lg e)(\ln a), ...(5,16)$$

$$\ln a(\ln 10)(\lg a) = 2,30429 \lg a, ...(5,17)$$

	د لوګاریتم فنکشن یا بلواک او دیاګرام یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_b b^x = x$$

تکرار د نورو تورو سره

د یوه ځل لوګاریتم

$$\log_b (n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$$

$$\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m$$

د پوتنځ لوګاریتم

$$\log_b n^m = m \cdot \log_b n$$

د ریښې لوګاریتم

$$\log_b \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_b n$$

د لوګاریتم یو په بل بدلیدل

$$\log_b n = \log_b d \cdot \log_d n$$

د کوما یا لسمیزمات نخښهٔ وروسته بینارځایونه ó او لسمیزسیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

	binär	dezimal
2^{-1}	0,1	0,5
2^{-2}	0,01	0,25
2^{-3}	0,001	0,125
2^{-4}	0,0001	0,062.5
2^{-5}	0,0000.1	0,031.25
2^{-6}	0,0000.01	0,015.625
2^{-7}	0,0000.001	0,007.812.5
2^{-8}	0,0000.0001	0,003.906.25
2^{-9}	0,0000.0000.1	0,001.953.125

۵ . ۳ ټولګه

لوګاریمتم د اکسپوننشل فنکشن یا بلواک په څېړ بلواک دی

$x = \log_b n \iff b^x = n$

د $a,b,x,y,d, > 0$ رییل ګڼونواو $a, b, d \neq 1$ لپاره باور لري:

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a, b^{\log_b a} = a, \log_b 1 = 0, \log_b b = 1, b \neq 1$$

$$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a, e = 2,71828.....$$

$$\log(x.y) = lox + \log y, \log \frac{x}{y} = lodx - \log y,$$

$$\log x^{\alpha} = \alpha, \alpha \in R, \log \sqrt[n]{x} \frac{1}{n} \log x, n = 1,2,3,....$$

$$\log_b a = (lod_b d)(.(\log_d a),$$

$$\lg a = (\lg e).(\ln a) = 0,43429 \ln a, \ln a = (\ln 10).(\lg a) = 2,30259 \lg a$$

۵ . ۴ – تمرینونه

۱ . د د لوګاریتم تعریف

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوګاریتم تعرف وکاروئ یا استعمالکړئ او x وټاکئ.

1.1. a) $\log_7 49 = x$ b) $\log_3 1 = x$ c) $\log_5 \sqrt[6]{25} = x$ d) $\log_{0,5} \frac{1}{32} = x$

1.2. a) $\lg \frac{1}{10} = x$ b) $\lg 10^{-\frac{1}{3}} = x$ c) $\lg \sqrt[3]{100} = x$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{10}} = x$

1.3. a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x 25 = 2$ c) $\log_x 243 = 5$ d) $\log_x 1024 = 10$

1.4. a) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$ b) $\log_x \frac{1}{5} = -1$ c) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ d) $\log_x \frac{1}{32} = -5$

1.5. a) $4^x = 64$ b) $64^x = 64$ c) $9^x = 3$ d) $8^x = 4$

1.6. a) $2^x = \frac{1}{8}$ b) $3^x = \frac{1}{27}$ c) $5^x = 0{,}04$ d) $10^x = 0{,}0001$

1.7. a) $\lg x = 3$ b) $\lg x = -2$ c) $\log_2 x = 6$ d) $\log_{0,5} x = 4$

1.8. a) $\ln x = 2$ b) $\ln x = \frac{1}{2}$ c) $\ln x = -1$ d) $\ln x = 0$

۲ . د لوګاریتم قوانینو استعمال دلوګاریتم قوانیناستعمال کړئ دو د a,b,c,d,m,n باور لرلو ورشو کره وټاکئ.

2.1. a) $\lg 2^4$ b) $\lg \left(\frac{1}{2}\right)^3$ c) $\lg \sqrt{10}$ d) $\lg\sqrt{\frac{1}{100}}$

2.2. a) $\ln \left(\sqrt{e}\right)^3$ b) $\ln\sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}}$ c) $\ln \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$ d) $\ln \sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$

2.3. a) $\lg \sqrt[7]{a^5}$ b) $\lg \frac{a^2 b^3}{c}$ c) $\lg \sqrt[3]{\frac{ac^2}{bd}}$ d) $\lg \frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a^5 b^3}}$

2.4. a) $\lg (a^4 - b^4)$ b) $\lg (a^2 + b^2)^2$ c) $\lg \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 - b^4}$ d) $\lg \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}$

2.5. a) $\log \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ c) $\ln \frac{\sqrt{a} \cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c} \cdot d^{-3}}$

b) $\lg \sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}$ d) $\log 2 \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b \cdot \sqrt[4]{ac^2}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $\frac{1}{3}\log(a+b)+\frac{1}{3}\log(a-b)^{-1}$

b) $\lg a+n\lg(a+b)+n\lg(a-b)$

c) $\lg a-\frac{1}{2}\lg b+\frac{4}{3}\lg c$

d) $\frac{1}{3}\lg(a^2-b^2)-\frac{1}{2}\lg(a-b)-\frac{1}{2}\lg(a+b)$

2.7. a) $\frac{1}{3}\lg a+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\lg(a+b)+\frac{1}{2}\lg(a-b)-\lg a-\lg b\right\}$

b) $\frac{1}{2}\lg(a^2+b^2)-\frac{1}{3}\{\lg(a-b)+\lg(a+b)\}$

c) $\frac{1}{3}(\lg a+3\lg b)-\frac{1}{2}(4\lg c-2\lg d)$

d) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{b-\sqrt{b^2-a^2}}+\ln\sqrt{a}$

۳ . د لوگاریتم بنسټیز فرمولونو استعمال.

x وشمیرئ.

3.1. a) $x=\lg 5\cdot\lg 20+(\lg 2)^2$ c) $x=3\cdot 10^{-2\lg 3}$

b) $x=2\cdot 10^{2\lg 2}$ d) $x=\left(100^{\frac{1}{2}\lg 49}\right)^{\frac{1}{2}}$

3.2. a) $x=\sqrt{10^{2+\lg 9}}$ c) $x=\sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\lg 2+\lg 32)}}$

b) $x=\sqrt[3]{10^{4-\frac{1}{2}\lg 100}}$ d) $x=\sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}}$

3.3. a) $x=\ln\frac{7{,}63}{\sqrt{e^3}}$ c) $x=\left\{\left(\sqrt[3]{e}\right)^2\right\}^{\ln 8}$

b) $x=\ln\frac{0{,}23}{2e^2}$ d) $x=\left(\sqrt{e}\right)^{3\ln 5}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ٠ ګونومتري (کونجکچ یا مثلثات (Gonometry

دا برخه هم د ښوونځي له امله یو تکراري خوي لري. ددې وظیفه به داوي چی د کونجکچ چېکتیاته (ګونومتري شمیرنی ته) په ګراد- او لینده کچ، دکونجفنکشن په استعمال د ولاړکونجیز - او عمومي درېګوډیود تریګونومتري فرمولونو په استعمال د تریګونومتري افادو په څیره بدلون ته پر مختګ ورکړي یا پر مخ بوزي. غواړم چی د بنسټیزې هندسي کلیمی او قوانین مو د هرڅه له مخه مخ ته پراته وي . خو سره له دې به هم ددې کتاب لوستونکی د بنسټیزې هندسی سره بلد وي ٠ زه به کوښښ وکړم چی ځنی هندسي کلیمی،کم له کمه په څیره کی ګرانو لوستونکو ته، په مناسب ځاي کی وړاندې کړم یا بهتره په پښتو ونوموم .

١ ٠ ٦ بنسټیزه هندسه

٦ . ١ . ١ ټکی او کرښه point (stright) line

ټکی او کرښه د بنسټیزې هندسی مهمی بنسټیزې کلیمی دي. دا ابسترکتی(خیالي، فکري ، نه لیدیدونکی) کلیمي په خورا ټیك راوړوندود هم نه شي تعریف کیدی، مګر ددوي ترمنځ موجودې اړیکي کیدی شي په شمیرنه کی په خورا زیاتو ډولونو استعمال شي، ٦

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره له دې هم هڅه کیږي چی ټکی او کرښه لیدوړ وګرځول شي لکه څنګه چی په ۴ . ۱ - امه برخه کی پیښ شوي. دلته کرښي په g ښوول شوي او غشی یی ناپای پراخوالی په ګوته کوي. دا د غشي انځورونه دکرښی په انځورونه کی پرېښول کیږي یعني نه انځوریږي، که دا مو و ناریښتیاو ته ونه هڅوي ۰ ټکی کیدی شي د دوه کرښو غوځځاي په څیر ونیوله شي) څیرې په غور وګوری

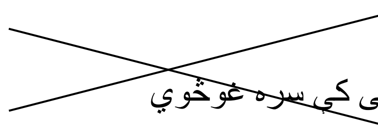
ورانګه ray A

کرښه g

(stright line

بند کرښه یا ټوټه کرښه Line segment

A B



دوه کرښې په ټکی کې سره غوځوي

د بیلګي په توګه لاندې ویناوې باور یا صدق لري

- ددوه ټکو له لارې یوه کرښه ټاکل کیږي(پورته څیره وګوری)، چی دا کرښه دا ټکي خوندي ساتي یا پخپل بر کی لري .

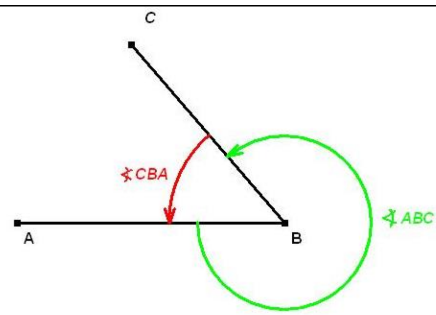
- دوه ناغبرګي او په یوه هواره کی پرتی کرښی یو بل ټیك په یوه ټکي کی سره غوځوي (پورته څیرو کي کتل کیږي)

یوه ورانګه s_1 له یوې لور په یوه ټکي A بنده کرښبرخه ده) (او یوه پایکرښه له دوه ټکو A او B بنده یا راګیر کرښه ده)

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ . ١ . ٢ کونج angle یا زاویه

که یوه وړانګه s_1 د خپل پیلځاي څخه په S و خپل اخر ځاي s_2 (څیره ۴ . ۲الف) ته یووړه شي، نو دا وهل شوې هواره دننني هواره، s_1 او s_2 پښې او په همدې ډول S د کونج α (الفا) ککره بلل کیږي.

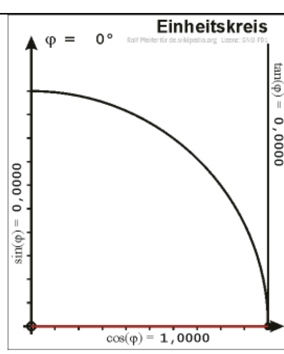


که څرخون د ساعت نخښي په څټ یا مخامخ وې نو دا څرخونلورمثبت یا زیاتیزه او همداسې کونج مثبت یا ز یاتیز کونج بولو او بل ډول څرخونلور یی منفي- یا کمیز کونج بلل کیږي.

په مخامخ ه کې سور په نخښه شوی کونج ننوتی او زرغون په نخښه شوی کونج وتلی کونج دی

کیدی شي چی یو کونج x په ګراد اندازه شي

$$x = a° \qquad (6.1)$$



په داسی حال کی چی ولاړکونج، کوم چی یو په بل ولاړې کرښې $g_1 \wedge g_2$ (او ته دي پام وي) یی جوړوي، له 90° سره مساوي وښایو(لاندې څیره ، که نورېڅیرې و نه کښل شوې) . کیدی شي چی کونج x (ایکس دلته د الفا په ځاي دی، توري پروانه لري، چې کوم وي)په لینده اندازه هم ورکړ شي

$$x = b \qquad (6.2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته یونګردۍ کې ګورو، چې هر ډول کوجونه کښل او ټاکل کیدی شي

په دې ډول ټاکل شوی ګردۍ لینده په وړانګه(شعاع) ویشل کیږي. له دې لارې x د یوه بې نومه ګڼ په څیر لاس ته راځي، چې د ډیرو ګڼلو لپاره ګټور دی. یوه په لینده اندازه ورکړ شوی کونج x په یوې یوونګردۍ) r = 1 (کې انځورورړ دی، چیرته چې دا د اړوند ګردیلیندې اوږدوالی ښاي (څیره په پورته کې کښل شوې)

په دې پسې یا ددې په تعقیب یو د 360° کونج د یوونګردۍ چاپیرې) محیط(په ګوته کوي . له دې امله د ګرادGradmass (درجکچ (او)ګردي-) لیندې اندازې یا لیندیکچ یو په بل بدلون ممکن کیږي.

$$a^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} b = 57,296^\circ b, b = \frac{\pi}{180^\circ} a^\circ = 0,017453a, ...(4,3)$$

پام : په پورته څیره کې هر ډول کونجونه که له ۳٦۰ درجو زیات هم وي کره کیدی ، که څیرې روښانه نه وو لیکل شوي، چې دا شپږمه برخه ده یا ٤ – مه برخه لیکل شوي وي،نو هغه دې ،نو ٤ دې په ٦ بدل شي۰.

د لاندې بیلګو له لارې دې د کونجورکولو یو څو امکاناته ونومول شي او په همدې ډول دې د »شمیراوړون اړیکی« یاپه بنه توګه د شمیر یو په بل بدلون اړیکی وڅیړل شي.

یادونه : زما شمیرونی یو ډول پرابلم لري او هغه دا چې د دقیقې او ثانیي نخښې هغهسې، چې ورسره بلد یو نه کاري، دا به راته ګران لوتونکي وبخښي۰

بیلګه .٦. ۱ :

کونج a = 47°12'36" دې په لینده اندازه واړول شي. موږ لمړی کونج په دڅیمالو یا لسیزو برخو اړوو، دا په دې مانا چې ورکړ شوې دقیقې او ثانیي دې په ورته لسیزمات افاده شي:

12'=720"

720 = '12 "

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس په ټولیزه توګه 720’+36“ = 756“ له دې لاس ته راځی

1’=(1/3600)° (<=)

له دې وروسته په همدې توګه 756.(1/3600)°=0,21°

له دې لاس ته راځي : a=47°12’36“=47,21°

په عمومي توګه باور لري

$$\alpha' = (\frac{\alpha}{60})°, \beta'' = (\frac{\beta}{3600})$$

د(٦ . ٣) پسی باور لري b=0.017453.47,21=0,826

دلته ځیرې راځي، خو د دې ځیرو په ځاي به موږ په پورته ځیرو بسیا وکړو، دا چې موږ تراوسه د لږ څه ځمککچ سره بلد یو (د دې لپاره دې زما د ځمککچ کتاب وکتل شي)، نو دا کومې ستونځې نه رامنځ ته کوي۰

بیلګه ٦ . ٢ :

کونج $\frac{\pi}{7}$ دې په درجه کچ یا ـاندازه) لسیز او سکساګسیمال (لاتین :یوناني: د بابلیانو په ۶۰ اباد شوی ګنیز سیستم(ځاي ارزښت سیستم) ویشنو (برخو) ورکړ شي. د (۳ . ۴) له

مخی لرو

اړولو په دقیقو او ثانیو ورکوي 0,701° د a° = 57,296°.(3,14/7)=25,701°

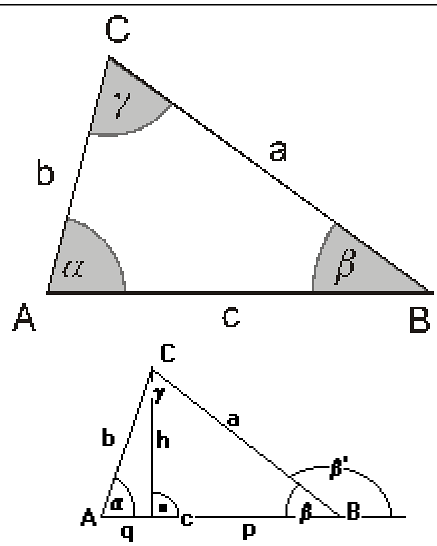
0,701° = 0,701.60' = 42,06', 0,06' = 0,06.60=3,6“

پس داسی دی $\frac{\pi}{7} = 25,701° = 25°42'3,6''$

دا پورته داسی لوستل کیږي ۲۵ درجي، ۴۲ دقیقي او ۶ ، ۳ ثانیي

٦ . ١ . ٣ دریګوډی

یادونه: موږ دلته بیا د نومونو(نومه ونو) د ستونځو سره مخامخ کیږو. هغه هواره چی له کرښو راګیر وي دلته له دري کرښو یا هغه هواره، چې ګوډونه ، کونجونه یا ګوټونه ولري، موږ دا ۰۰۰ کونجي یا۰۰۰ ګوټي او یا ۰۰۰ګوډي بولو. ځموږ ژبه او الماني تر یوې ډیرې اندازی په ترکیبي نومونو کی او یا نورو نومونو ډولونوکی یو بل ته ورته دي او په الماني کی هم دې ته ځانګړي نومونه شته. ماته یو کونج چي له دباندې ورته کتل کیږي او د یوې بندې هواره وي ګوډ مناسب ښکاریږي. موږ په ورځنی یا مروجه ژبه کی وایو ، چی د هغه کلی په ګوډ کی .... دا تخنیکي هم درست دی، ځکه چی دا هم دلته مات دی یعنی ګوډ دی. که یو کونج له دننه وګورو نو هغی ته موږ تل کونج وییلی. که څوك په یوه ګوټه کی ناست وي نو وایي، چه په هغه کونج کی دلته نو بیا ګوډ نه وایي. ما د کتاب په اوږدو کی لمړی ځل د ټولو لپاره کونج کارولی، که ټول مو همغسی سم یا اصلاح نه کړل ، نو فکر کوم چی د ګرانو لوستونکو به ورته پام وي .



په ټولیزه توګه په یوه سطحه یا هواره کی له پرتو کرښو g2 , g2 , g1 څخه یو مثلث یا دریګوډی جوړیږي، چی ګوډونه یی C . B . A ، اړخونه یی c. b. a او کونجونه یی α,β,γ دي (د مثلث دننه کونجونه یا زا ویې او دباندې ګوډونه دي، چې موږ یط په پښتو کې همداسې بولو)) مخامخ څیرې دې وکتل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې جملې باور لري چې بې له ښوونې دلته راوړل کېږي

- په دريګوډي کې د کونجونو زياتون 180° درجې دئ يا π دئ
- يو دباندنى کونج د په نه پراته دننني کونجونو د زياتون سره مساوي ده، له دې امله د يوه دريګوډي د دباندنيو کوجونو زياتون 360° يا 2π دئ٠
- د يوه دريګوډي د اړخونو نيمي په يوه ټکي کې يو بل سره پري کوي، چې دا په همدې وخت کې د دريګوډي » دروندټکى يا دثقل مرکز « دئ. اړخنيمي يو بل په تناسب د۱ : ۲ پرې کوي يا په پښتو:

د اړخونو ځاننيونه يې۱ :۲ ده) په ځيره کې وګورئ) د يوه دريګوډي منځولاړې يو بل په يوه داسې ټکي کې سره غوڅوي، کوم چې په همدې وخت کې د چاپير ګردي) هغه ګردئ يا دايره چې دريګوډى په خپل دننه کې نيسي يا بهتره، د دريګوډي خونديګردئ(منځټکى دئ)٠

د يوه دريګوډى کونجنيمي يو بل په يوه ټکي کى سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کى د دننه ګردئ) ګردئ چې د دريګوډي

په دننه کى ده يا ګردئ يا دايره کې خوندي دريګوډى (منځټکى دئ) لاندې کې ىې ځيره شته) د يوه دريګوډي جګى يا د ارتفاع کرښې په يوه ټکى کى سره غوڅوي.) ځيرې ټولې لاندې کتل کيږي

د هوارې ځمککچ کې غوره ټکي دا لاندې دي :او په دوي پورې لاندې ځيرې اړه لري، چې تکرار راځي، خو پروا نه لري٠

د جګيو غوڅټکى Orthocenter **Höhenschnittpunkt** (*H*),

(c) ketabton.com: The Digital Library

Umkreismittelpunkt (*U*) circumcenter د· دباندنۍ- یا په راتاو ګردی منځټکی

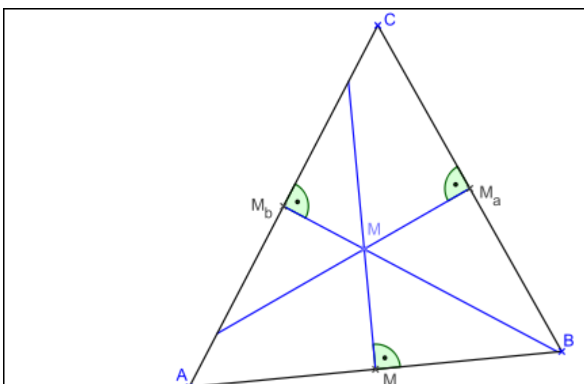
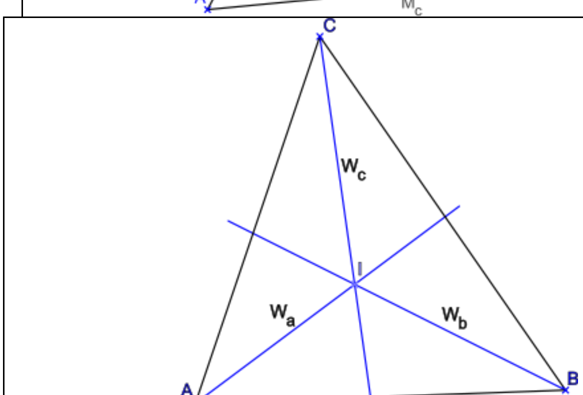
Seitensymmetralen), seid symetry د· اړخسیومتریو غوښتکی

den **Inkreismittelpunkt** (*I*) inscribed circle, incircle د· دننه ګردی منځټکی

r Winkelsymmetralen · د کونجسیومتري

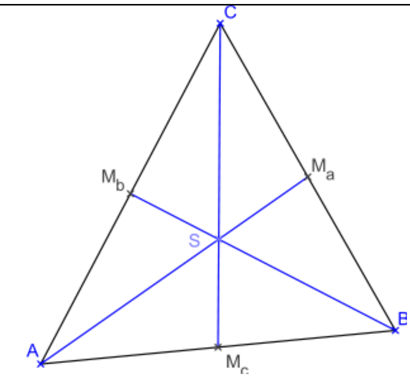
r **Schwerpunkt** (*S*) centroid · دروندټکی

Seitenhalbierenden) median اړخنیمی·

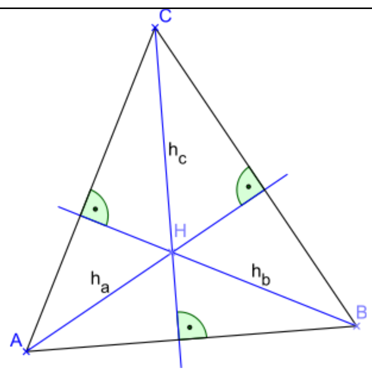
	مخامخ خیره کې مثلث یاد دریګوډي په منځ عمود یا - ولاړې کرښې ښایي
	دامخامخ مثلث هغه کرښې ښایي، چې کونج نیموي او موږ یې کونجنیمی (ناصف الزاویه) بولو (په پورته خیره په نیم اړخ ولاړې کرښې دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

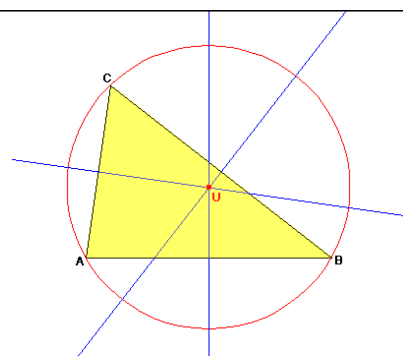
لاندې مثلث کې هغه کرښې دي، چې له کونج څخه اړخ نیموي. موږ یې اړخنیمی یا ناصف الاضلاع بولو.

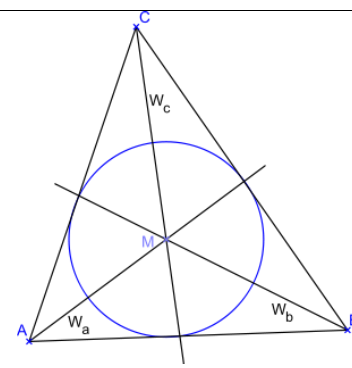


لاندې ځېره کې د مثلث هغه کرښې دي، چې له کونج په اړخ ولاړې دي. دا د اړخ جګوالی په ګوته کوي، چې ما جګی یا ارتفاع بللي دي.



په پورته ځیره کې کونجنیمی دي ، چې منځ ټکی یې د خونديې ګردی یا دننه ګردی منځټکی هم دی



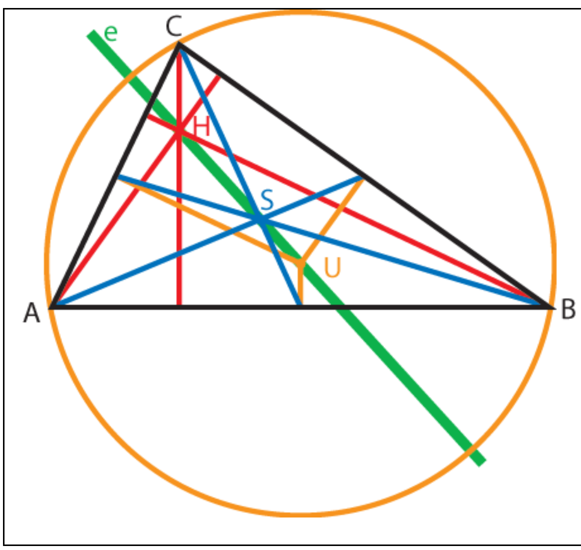


(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کینه څیره کې د اړخ په نیمه ولاړې کرښې دي، چې غوڅټکی یې د په راتاو ګردی یا چاپېرګردی منځټکی دی.

دا په یو ډول درې کرښې هرې درې یې په یوه ټکی کې سره غوڅوي.

که د یوې درېګوډی د منځولاړو په غوڅټکي یوه ګردی داسې ووهل شي، چې د ګردی کږه درېګوډیځ له یوه ګوډ څخه تیره شي، نو دا ګردی د درېګوډي له نورو دوه ګوډونو څخه هم تیریږي. که درېګوډی تیره کونجیزه وي، نو د ګردی منځټکی د درېګوډي په دننه کې پروت دی ، که درېګوډی ولاړکونجیزه وي، نو کونج د ګردی په هیپوتینوز ې یا اوږده اړخ پروت دی (د تالس جمله دې وکتل شي) او که درېګوډی پڅکونجیزه وي، نو منځټکی له درېګوډی دباندې پروت دی.



که درېګوډی ABC وي ، S دروندټکی، U د چاپیریالګردی منځپکی ، او H د جګیو غوڅپکی وي، نو کرښه په لاندې ځانښونه یا تناسب پراته دي :دا په لاندې څیره کې کتل کیږي .

$$\overline{HS} : \overline{SU} = 2 : 1$$

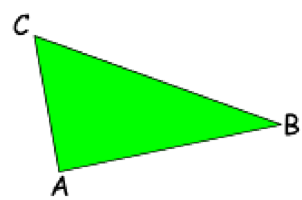
٦ . ۱ . ۴   برابرارزښتوالی او ورته والی یا مشابهت Congruence and Similarity

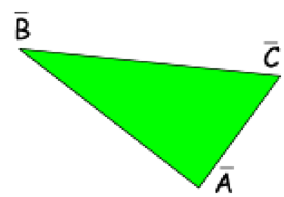
دوه دریګوډي ABC او A'B'C' یو بل سره کونګروانیڅ یا برابر پټووني دي یاني برابرارزښته دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ABC ≡ A'B'C'

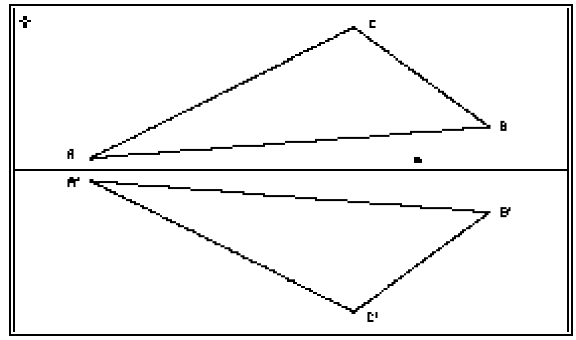
(4.4) که وکښول شي یانې که هرې لورته یووړل شي(وکښول شي) او وڅرخول شي او اینه ونه یا هندارونه یې یو بل پوره پټ کړي یا یو په بل پوره پریوځي (لاندې ځیر)





که دریګوډي سره کونګروانیځ وي، نو باید کم له کمه په دري اصلي ټوټو (اړخونو او کونجونو) کی یو بل سره مساوي وي

په ځښ یی هم باور لري S اړخ او W کونج په ګوته کوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

جملې: دریکوډي ټیك هلته کونګروانیخ دي چې یو بل سره مساوي شي په

۱ - درې اړخونو کې SSS

۲ - دوه اړخونو او ددې اړخونو ترمنځ کونج کې SWS

۳ - دوه کوجونو او د لوي اړخ ته مخامخ کونج کې SSW

۴ - یوه اړخ او ددې اړخ دواړه خواو کونجونو کي ،WSW

د دې جملو په څټ هم باور لري، دا په دې مانا چې که دریګوډي په کونګروانیخ جملو کې ورکړشوو اصلي برخو کې سره برابر وي، نو دا کونګروانیخ دي. د کونګروانیځ جملو په بنسټ کیدی شي په ځانګړي توکه دریګوډیجوړښت سرته ورسول شي، کوم چې د کونګروانیخ جملو کارونی په ځیر لیدل کیدای شي .

د دوه هوارو شکلونو ورته والی (Ähnlichkeit)هلته مخ ته پروت دی، کله چې په همغو یا اړوند درې کونجونو کې یو بل سره برابر وي او د همغو یا اړوند اړخونو تر منځ یې تناسب یا ځاننیونه موجود وي .

دا جملې هلته هم باور لري که د کونګروانیخ له جملو ورته جملو ته ورشو

جمله:

دوه دریګوډي ټیك هلته یو بل ته ورته دي که یو دبل سره برابر وي، په :

۱ - درې اړخونود اوږدوالي ترمنځ ځان نیونی یا تناسب کې

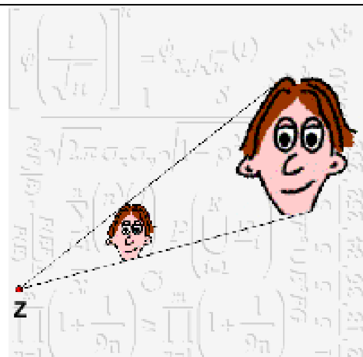
۲ - د دوه اړخونو د اوږدوالي ترمنځ تناسب او ددې اړخونو ترمنځ کونج کې

۳ - د دوه اړخونو او د لوي اړخ مخامخ کونجونو ترمنځ تناسب یا ځاننیونه کې

۴ - دوه مساوي پرتو کونجونو کې

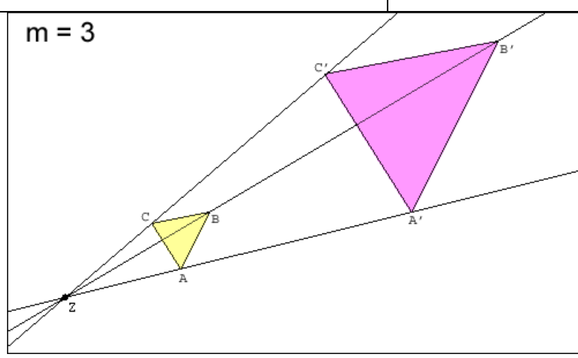
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا مخامخ څيرې ورته دي ، که د دې دوه کرښو پای سره په يوه کرښه وتړی او د يوه اړخ د د په خوښه ټکي سره د مخ ته کرښې سره غبګه کرښه وباسی، نو دوه ورته درېګودي لاس ته راځي

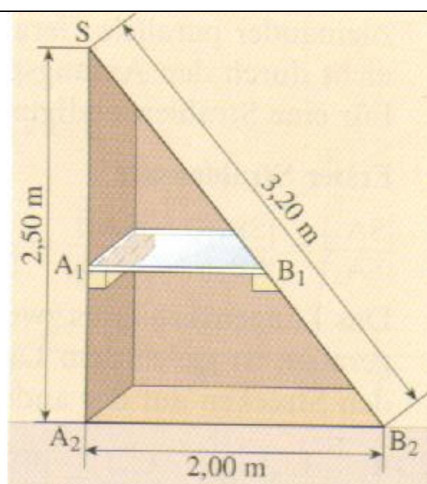


په لاندې څيره کې کښل شوي دريګودي ورته دي، دا په دې مانا چي باور لري:

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

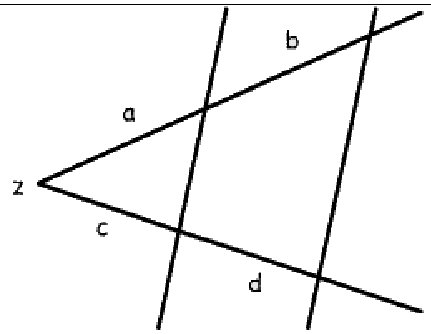


د ورته جملو سره خپلواني جملی د وړانګو جملی دي:



په دې پورته څيره کې درېګودي يو بل ته ورته دي٠

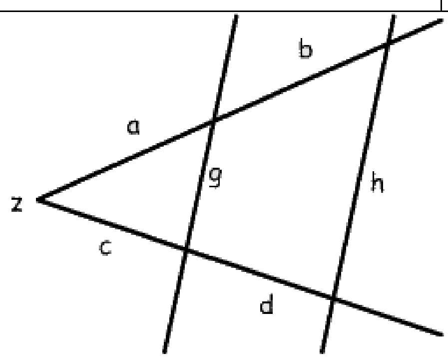
(c) ketabton.com: The Digital Library



د وړانګې لومړی جمله:

دوه له یوه ټکی وتلې وړانګې ، که له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي نو ټوټې یې لاندې اړیکی سره لري۰

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad \frac{a}{(a+b)}=\frac{c}{(c+d)}$$

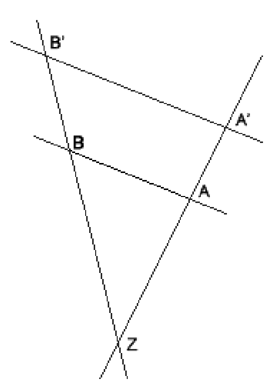


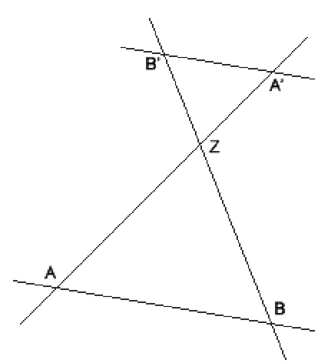
د وړانګې دویمه جمله:

که له یوه ټکي دوه کرښې وکښل شي او دا بیا له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي، نو د ټوټو ترمنځ دا لاندې اړیکی لري، دا ته والي له جملو ده۰ ټکی چې ځنګهدي په پام کې نیول کیدی شي او د دې او پورته جملې ترمنځ توپیر ته هم پام نیولی شو

$$\frac{g}{h}=\frac{a}{(a+b)} \qquad \frac{g}{h}=\frac{c}{(c+d)}$$

یا دالاندې، چې هرڅه یې روښانه دي





(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$
$$\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{AA'} = \overline{ZB'} : \overline{BB'}$$

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$

(دا لاندې د لیکنې له لارې روښانه شوې څیره دې ګران لوستونکي وکاږي)

که درې په یوه ټکي کی پریکیدونکی کرښي g1 , g2 او g3 د دوه غبرګو) موازی(کرښو g4 او g5 لخوا پرې شي، نو د بیلګي په توګه له ۴ . ۱۰ کښل شوي څیرې څخه لاندې اړیکي لاس ته راځي:

. 1 OA1 : OA2 = OB1 : OB2 , OA1 : OA2 = A1B1 : A2B2

دا په دې ماناچی په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب یا ځاننیوںی سره پرتی دي:

. 2 A1A2 : B1B2 = OA1 : OB1 = OA2 : OB2

دا په دې مانا چی: په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي لکه اړونده، د ککری اندازه شوې برخي چی په وړانګه پرتی دي.

۳ - A1A2 : A2A3 = B1B2 : B2B3 , A1A2 : B1B2 = A2A3 : B2B3

دا په دې مانا چی: په غبرګو پرتی کرښي په همغه برخوکی یو له بل سره په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي

د وړانګو جملی هم باور لري، که د دوه غبرګو په څیر رامنځ ته شي یا که ککره د غبرګو ترمنځ پرته وي) په دې حالت کی دې وړانګي د کرښو په ځاي بدلی یا ولیکل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ . ۳ : د اړخونو a او c اوهمداسی د کونج الفا څخه دې

یو دریګوډی جوړ شي. لاندې حالتونه تر څیړنې لاندې نیسو

- 1 $a > c$

موږ کاږو $AB = c$ او په ټکي A کونجالف

د c په کچه کاږو. په B یو ګردسلینده کاږو د a

په کچه چی د الفا ازاده پښه په ټکې C کې غوڅوي)

څیره دې ګران لوسونکی پخپله وکاږي، روښانه ده

- 2 $a < c$

دلته درې امکاناته شته دی(د دې درې امکاناتو څیره وکاږئ)

۲ . ۱ : د ګردیلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه هغوټکو کي پرې کوي،
په کومو کی چی اوبی یواځنی نه دی٠

۲ . ۲ : ګردسلینده د α ازاده پښه لمسوي٠

۲ . ۳ : ګردسلینده د α اندازه پښه نه غوڅوي .

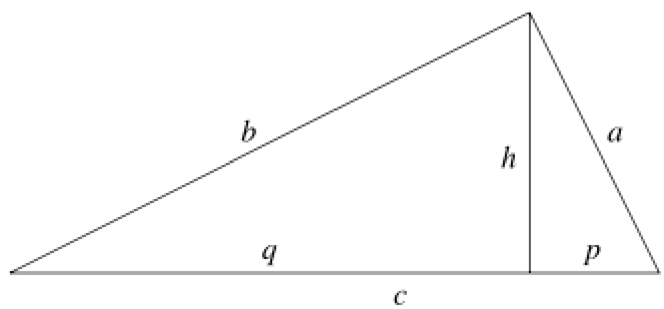
۳) $a = c$

ګردسلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه ټکو ، په نامه A او C کي پرې
کوي. دې لپاره چی حالتونه ۲ - او ۳ - له منځه لرې او تل یواځنی حل ولرو، نو $a > c$
نیونه په دریم کونګرواینځ جمله کی ضرور ده

۶ . ۱ ٠ ۵ .ولاړکونجیز دریګوډی مثلث قایم الزاویه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلفو دریګوډیو څخه موږ په لاندې برخه کی ولاړ کونجیز دریګوډی ترڅیرنی لاندې نیسو .په ولاړکونجیز دریګوډي کی د ولاړ کونج مخامخ اړخ
هوپوتینوزې) Hypotinuse(بلل کیږي، نور دواړه اړخونه کاتیتونه یو: کاتیت (Katheten)بلل کیږي. هغه ولاړکونجیز دریګوډي ته روځنی یا ورسره بلدې یا مروجی په نخښه کونه یا لنډ په نخښونه به له څیرې ۴ . ۱۳ څخه واخلئ



په ولاړکونجیز دریګوډي کی دا لاندې راوړل شوې اړیکی باور لري چې دلته یی بی له اوبی)ښوونی(راوړو:

یادونه : په ولاړګوډیز کې د ولاړکونج مخامخ اړخ اوږد اړخ بولو او د ولاړ ګوډ پښې ولاړ اړخونه، چې غوښتوني کونج ته مخامخ مخامخ اړخ (پښه) او په موخه ور کونج پرته پښه په کونج پروت اړخ (- پښه) بولو او یا په دې لاتین نوموونو یانې مخامخ کاتېت او (په کونج) پروت کاتېت.

د پیتاګوراس (Pythagoras) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتینوزې مربع هواره د دواړو کاتیتو د مربع هوارو زیاتون سره برابر یا مساي ده:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (6.5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دکاتیتو(د ولاړاړخونو یا د مخامخ او په پراته اړخ(ضلع)) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د کاتیت مربع هواریزمساوي ده د ولاړ کونجي هوارې سره، چی له هیپوتینوزې او ددې کاتیت له پرویکشن یا پریوستون څخه لاس ته راځی:

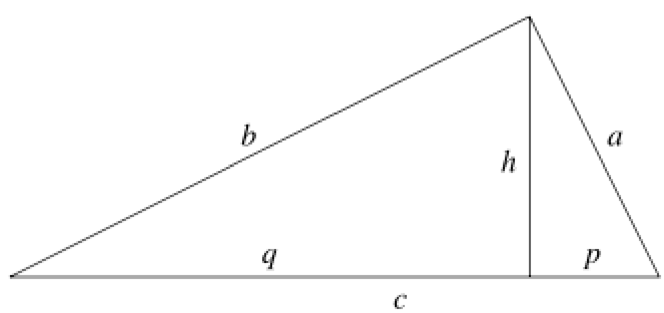
$$a^2 = p.c \, , \, b^2 = q.c \qquad (6,6)$$

جګجمله :

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتیزې په جګي مربع هواریزمساوي ده د هیپوتینوزې (لوي اړخ) برخو څخه منځ ته راغلې ولاړکونجي هوارې سره

$$h^2 = q \, . \, p \qquad (6.\ 7)$$

یا په لاندې کې لنډ بیا ورکړ شوي



لنډ: (ددې لپاره دې پورته څېره وکتل شي)

پیتاګوراس جمله : $c^2 = a^2 + b^2$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اویکلید د کاتیتونو(پروت – ،مخامخ اړخونو) جملې

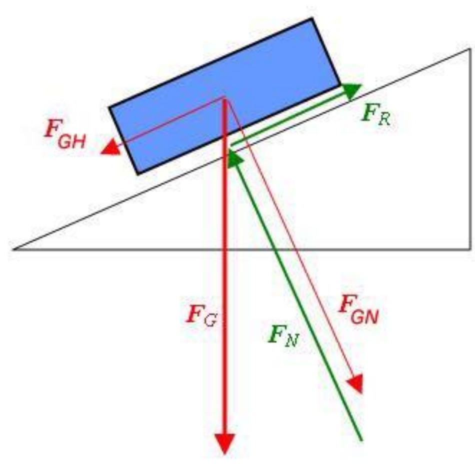
$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

$$c = p + q$$

د اویکلید جګجمله $h^2 = p \cdot q$

بیلګه ۴ . ۴ : (ځیره نه ده کښل شوې، د ې ته دې ګران لوستونکج فکر وکړي٠ دا یوه فزیکي دنده هم ده(ځېره وکښل شوه، نخښې هم لږ بدلې دي)) د یوه بدن د وزن G تجزیه څرګندوي (د بدن دروند ټکی) دا د فزیك له مخی هغه ټکی دی چی د بدن ټول وزن پرې پروت وي) KSP =)چی په یوه مائله هواره پروت دی، دا وزن مائلي هوارې سره غبرګ په یوه کښته کشونکی زور FH او په مائلی هوارې نیغ ولاړ ، ولاړ) عمودي(زور) قوه FN)تجزیه کیږي. د ښوولو ده چی، دریګوډي ABC د KSPاو FN او FH له خوا ټاکلي دریګوډي سره ورته دی

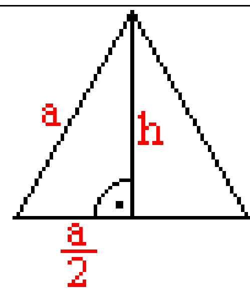
	یادونه: په لیکنه کې زور یا توان د لاندې ځېرې سره داسي بدلوو:شین تنیا د مستطیل شکل G دی $F_H = F_{GH}, F_N = F_{GN}, G = F_G$ ګوډونه : له پورته ګوډ A کښته ښی لور ته ګوډ C کښته کیڼ لور ته ګوډ B په ګوډ A کونج α ، په ګوډ B کونج β

(c) ketabton.com: The Digital Library

داچې G||AC څغلي، نو FH او G یو کونج α جوړوي. دا چې $\beta = R - \alpha$ ده، نو FN او G کونج β جوړوي، دواړه دریګوډي په دې برسیره په ولاړکونج کی یو بل ته ورته دي.

یادونه : داسې بیلګې، چې ښیره یې نه شم ایستلی که وي هم بدې نه دي، ګران لوستونکي کړای شي،چې داسې ښیرې پخپله وباسي، دا دې یو تمرین وي. زما زړه نه شي، چې له لیکلو یې تیر شم.

بیلګه ۴ . ۵ : په یوه مساوي اړخیز دریګوډي کی دې (لاندې ښیره) جګی و شمیرل شي .د ٦ . ۴ (له مخی لرو(جګی په همدې وخت کې د مخامخ اړخ نیمی هم دی، دا په دې درېګوډي کې وکاږی)



$$h^2 = a^2 - (a/2)^2$$

$$h^2 = a^2 - a^2/4$$

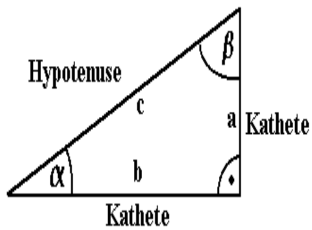
$$h^2 = (3/4)a^2$$

$$h = (\sqrt{3}/2)a$$

٦ . ۲ په ولاړکونجیز دریګوډي کی د اړخونو تناسب

د کونجکچ لپاره د اړخونو تناسب هم مساعد دی، چی یوه ولاړکونجیز دریګوډي کي جوړیږي(لاندې ښیره). که د کونج α مخامخ اړخ یا -کاتیت a gegkathete د مخامخ اړخ په ښیر وښایو، د b اړخ په β پروت اړخ ankathete او hypothenuse لوي اړخ وي، نو په ولاړکونجیز دریګوډي کی لاندې اړخځانیوني منځ ته راځي یا جوړیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{katheta}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{kathetb}{c}$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{opk}{ank}$$
$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{ank}{opk}$$

د وړانګو جملو له امله دا اړيکي يا تناسب يوائې د كونج پہ واك كی دی. كه پہ پام كی ونيول شي چي $\beta = 90° - \alpha$ دی، نولاندې اړيکی ليكلی شو

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \tan(90-\alpha) = \cot\alpha$$
$$\cot\beta = \frac{a}{b} = \cot(90-\alpha) = \tan\alpha$$

له دې ليدل كيږي، چی د دې څلورو ارزښتونو د پيداكولو لپاره دوه كنجدولونه پوره دي يا بسيا كوي .وروسي يا ددې په تعقيب پيژندوړ دي

$$\tan\alpha = \frac{in\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,10)$$

برسيره پردې د پيتاګوراس د جملی په پام كی نيولو سره لرو

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,11)$$
$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; 1+\cot^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}; \ldots\ldots\ldots\ldots(6,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳.۰٦ په یوونګردۍ کی د کونج فنکشنونه (-بلواك)

په ۴ . ۲ برخه کی $\sin\alpha; cis\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$ یواځي د لیدیدونکو)Konkrete(
اړختناسبونو لپاره په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی ځاي په ځاي دي. دا ویناوې یواځي
یا په ځانګړې توګه د $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} (0 < \alpha < 90°)$ لپاره تعریف دي. که α د
خپلواك واریابل په څیر ونیسو، نو $\sin\alpha$ او داسی نور فنکشنونه راپه ګوته کوي چی په
برخه ۱۵ کی انځور دي او کوجنفنکشنونه بلل کیږي. په یاده شوې برخه کی) څیرې ۱۵ .
۲۰ الف او ب

ددې لپاره چی د دې تعریفونو پراخوالی په زړه پورې کونجونو لپاره ممکن شي، نودا مو
د یوون ګردي باندې مخ نخښی په واك کی کرښو ته لاربښودوي .د لته ټولی کرښی) د
لته به له کرښو ځمورږ مطلب پای کرښی وي(، چی پخپله او یایی پرویکشن یا پریوستون
یا پریوتنه په وړانګو s1 او s2 پروت وي زیاتون مخنخښه) مثبت مخنخښه(لري، ټولی
کرښي او یایي پرویکشنونه پریوستونونه چی په وړانګو s'1 او s'2 پرتی وي کمون
مخنخښه (منفي مخنخښه) لري .د لاندې څیرو کښلو سره کیدی شي تعریفونه ۸ . ۴ (د
په خوښه کونجونو لپاره پراخه شي

$$\sin\alpha = \overline{QP}, \cos\alpha = \overline{OP}, \tan\alpha = \overline{AD}, \cot\alpha = \overline{BE}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6,13)$$

د کونج α لپاره چي په لومړي څلورمه یا کوادرانت Quadrant (لاتین: د
کواوردیناتسیستم څلورمه کی پروت دی(لاندې څیره له کیڼ و ښی لورته کښته دا په
فرمولونوکي کارول شي توري ساده ایښوول کیږي۰ په څیرو کې شني کرښې د ساین دي
او سرې کرښې کوساین دی او کونجونه ټول په ترتیب له یوه سره پهالف سره په نخښه
کیږي، چې د دې لاړې تانجنت او کوتانجنت هم پیدا دي او توري هم ایښوولی شو)، دا
تعریفونه د هغو تعریفونو سره سر خوري، کوم چی په ولاړکونجیز دریګوډي کی تر
څیرنی نیول شوي دي .په پام کی دې وي چی کونج α په لیندہ اندازہ کی د
ګردیلیندې اوږدوالي AP سره مساوي دی، چیرته چی په زیات څرخون له 2 څخه
لوییدلی هم شي .برسیره پر دې له تعریفونو) ۱۳ . ۴ (څخه لاس ته راځي، چی ساین-او
کوساین فنکشنونه، پریود :°360) 2 (periode (تل تکراریدونکی ، بیرته

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځیدونکی(، تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونه پریود(180°) لري .

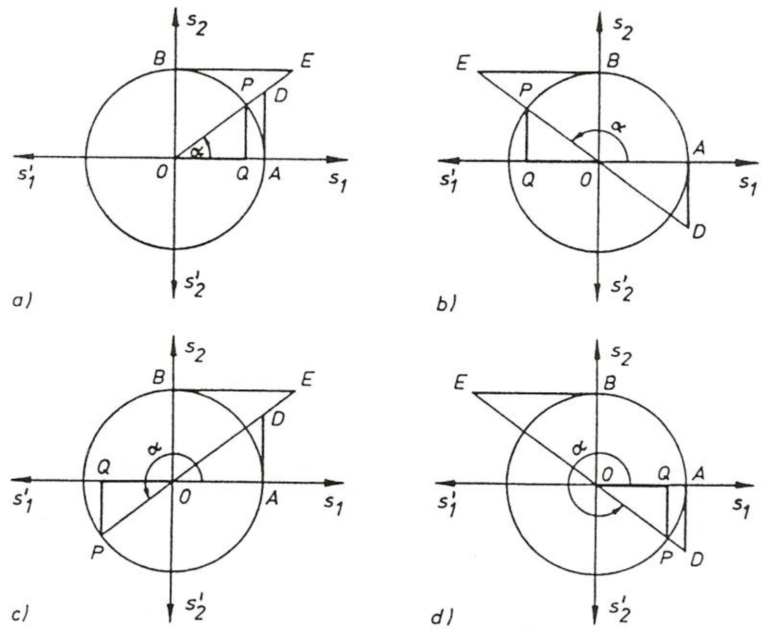


Bild 4.17 ځیره

پس لرو

$$\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha+360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha+360°)=\cos\alpha;......................(6.14)$$
په
$$\tan(\alpha+2\pi=\tan(\alpha+360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2\pi)=\cot(\alpha+360°)=\cot\alpha$$

تولیزه)عمومي(توګه لرو

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin(\alpha+k.360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos(\alpha+k.360°)=\cos\alpha;......................(6.15)$$
$$\tan(\alpha+2k\pi=\tan(\alpha+k.360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2k\pi)=\cot(\alpha+k.360°)=\cot\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو ټولګټونو $k = ..-3,-2,-1,0,1 ,2 , 3....$ لپاره

یادونه :د کوادرانت لپاره څلورمه لیکلی شو خو دا باید په پام کی وي چی دا په کواوردیناتسیستم کی دی

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونج-یازاویو توبعو وخنخښه

څلورمه څلورمه $(\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$	دریمه څلورمه $(\pi; \frac{3}{2}\pi)$	دویمه څلورمه $(\frac{\pi}{2}; \pi)$	لومړۍ څلورمه $(0; \frac{\pi}{2})$	
-	-	+	+	sinx
+	-	-	+	cosx
-	+	-	+	Tan x
-	+	-	+	cotx

برسیره پر دې لاندې اړیکی باور لري:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \quad , \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos.\alpha$$
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha \quad , \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha \qquad (4.16)$$
$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \quad , \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha ,$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \quad , \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha \quad , \quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

بیلګه ۴ . ۶ : د جبشمیروني سره د کونجفنکشن د $\alpha = 446°$ لپاره پیداکوو. دا چی α په درجی اندازه ورکړ شوي ده، نو اومشالتریا سویچ بدون (دلته مطلب د

(c) ketabton.com: The Digital Library

جبشميري اړونه ده، پۀ غوښتل شوي فنکشن کی) په « DEG » سموو او بيا لاندې ورکوني کوو.

په همدې ډول تکمي وهو

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونجفنکشنونو مخنخښه

دنده مو د لاندې مساوت حل یا اوبی دی

$$1.\quad \sin\alpha = a \quad , \quad 2.\quad \cos\alpha = a,$$

$$3.\quad \tan\alpha = a \quad , \quad 4.\quad \cot\alpha = a$$

دلته تمرینونه ۱ او ۲یواځي هلته موخه ور یا هدفمند ي، چې باور ولري$-1 \le a \le 1$

او په تمرین ۳ او ۴ کط په خوښه هر ارزښت نیولی شي.

یو «بنستیزوبی یا بنستیز حل»α_0 د هر تمرین د جبشميرني سره په لاندې ډول یا همداسی تکموترتیب لاس ته راځي (دا په دې اړه لري چېα_0 په درجه اندازه یا لیندده اندازه کوو، نو په ورته ډول د سویچبدلون په "DEG" یا "RAD" باندې راولو)

1 . [a] [F] [sin] 2 . [a] [F] [cos]

3 [a] [F] [tan] 4 . [a] [1/ x] [F] [tan]

تکمه F د په ځتې فنکشن ته تلنه ممکنوي.

دلته نو بیاد α_0 هر بنستیزحل په درجه یا لیندده کې څرګندیږي.

د $a = -0,55$ لپاره لاندې بنستیزحلونه لاس ته راځي :

$$1.\ \alpha_0 = -33,367013° = -0,58236,$$

$$2.\ \alpha_0 = 123,36701° = 2,1531606,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

3. $\alpha_0 = -28{,}810793° = -0{,}5028432,$
4. $\alpha_0 = -61{,}189206° = -1{,}0679531.$

د مخ ت ه تیرو په بنسټ لو

1. $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha) = \sin(\pi - \alpha),$
2. $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$

او په ورته توګه،، فرعي یا ځنګیز حل یا اوبی،،

1. $\beta_0 = 180° - \alpha_0 = \pi - \alpha_0,$
2. $\beta_0 = -\alpha_0$

لاس ته راشي

د لیدیدونکي حالت $a = -0{,}55$ لپاره په دې مانا چې :

1. $\beta_0 = 213{,}367013° = 2{,}1531563,$
2. $\beta_0 = -123{,}36701° = -2{,}1531606.$

د α ټول حلونه د (۱۵ . ۴) له امله په لاندې فورم لاس ته راځي

1. und 2. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 360° = \alpha_0 + 2k\pi,$

$\alpha = \beta_0 + k \cdot 360° = \beta_0 + 2k\pi,$

3. und 4. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 180° = \alpha_0 + k\pi.$

بیلګه ۴ . ۹ : لرو $\sin x = 1/2\sqrt{3}$. ودې شمیرل شي $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pm\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۴ . ۱۰ : په بیلگه ۴ . ۴ کې ورکړشوی زور F_H او F_N څومره لویې دي، که په مایل هواره پروت بدن وزن $700\ N$ وي (دلته N د Newton لپاره دی چې وزن پرې اندازه کیږي) او مائلی هوارې مایلکونج $\beta = 28°$ وي؟

$$\sin\beta = \frac{F_H}{G}, \qquad F_H = G \cdot \sin\beta = 700\ N \cdot \sin 28°$$
$$= 700\ N \cdot 0{,}4695 = 328{,}65\ N.$$
$$\cos\beta = \frac{F_N}{G}, \qquad F_N = G \cdot \cos\beta = 700\ N \cdot \cos 28°$$
$$= 700\ N \cdot 0{,}8829 = 618{,}03\ N.$$

۴. ٦ دساین- او کوساین جملی

دا دواړه جملی ممکنوي چی په ټولیز یا عمومي دریګوډي کی شمیرنی پلی کړای شو

۱ . د ساین جملهد څیرې ۴ . ۱۸ له نخښوني سره لرو

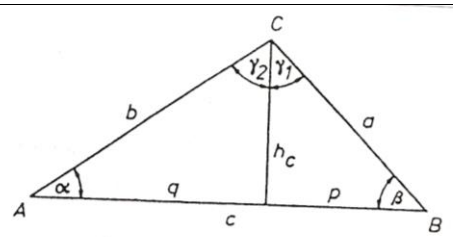


Bild 4.18

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}, \qquad \sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

او له دې امله

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چې په عمومي توګه صدق کوي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (4.17)$$

څیره پورته او لاندې کښل شوي، دا یو ولاړکونجیز دریګوډی کښل کیږي(پورته او لاندې څیرې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چی په عمومي توګه صدق کوي

د ساین جمله کیدی شي استعمال شي، که د یوه دریګوډي -دوه اړخونه او لوي اړخ ته

مخامخ کونج - SSW یو اړخ او داړه پرې پراته کونجونه WSWورکړشوي وي

۲ . د کوساین جمله

د څیرې ۴ . ۱۸ څخه لاس ته راځي

$$\frac{\begin{aligned}h_c^2 &= b^2 - q^2\\ h_c^2 &= a^2 - p^2\end{aligned}}{\begin{aligned}a^2 &= b^2 + p^2 - q^2, \quad p = c - q,\\ a^2 &= b^2 + (c-q)^2 - q^2,\\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2, \quad q = b\cos\alpha,\end{aligned}}$$

نو $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$ لرو او همداسې:

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,\\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,\\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.\end{aligned} \qquad (4.18)$$

د کوساین جله استعمالیدی شي، که په یوه درېګوډي یا مثلث کې

- درې اړخونه یا ضلعې یا

- دوه ا ړخونه(ضلعې) او له هغو رابند کونج یا زاویه

ورړ شوي وي.

بیلګه ۴ . ۱۱ :د دوه قوو(زور F1)او F2 لاس ته راوړل شوې R1 چی په پراته لورد F1سره کونج جوړوي ، څنګه شمیرل کیږي؟ د دې دوه قوو F1 او F2 برسیره له دوي جوړکونج هم معلوم دئ .د دې پوښتنی کولو د روښانولو لپاره څیره ۴ . ۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړ شوي، له کومی څخه چی د دوي ترمنځ اړیکي هم معلومیږي .په دې پسی په

ABCدریګوډي کی، $F1 = c, F2 = a$ او$ss = 180° - ss'$ معلوم دي، α

او $R = b$ لتوونکی یا غوښتونکی لویي دي؟

د کوساین جملی (۱۸ . ۶) څخه لرو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosss$$

همداسی یا⇔

$$R^2 = F1^2 + F2^2 - 2F1F2\ \cos(180° - ss')$$

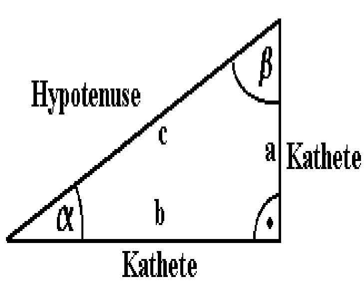
او د ساین له جملی (۱۷ .۶) لاس ته راځي

له کومو چی α تاکل کیدی شي .

لوي اړخ او ولاړ یا عمود اړخونه (هیپوتینوز او کاتیتونه یا مخامخ- او په پروت اړخ):

۱ – په ولاړکونجیز دریګوډي کې ولاړ کونج ته مخامخ اړخ هیپوتینوز یا لوي اړخ بولو٠

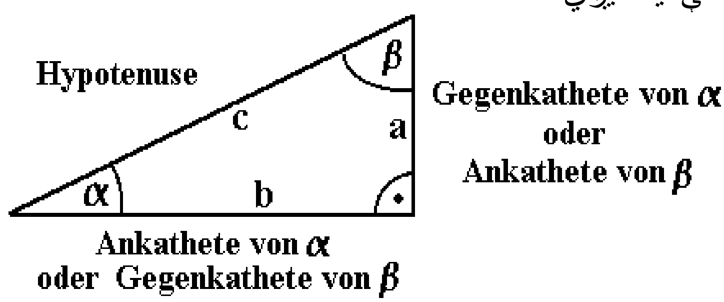
۲ - نور دواړه اړخونه غوښتوني – یا مطلوب کوج ته مخامخ اړخ او په مطلوب کونج پروت اړخ یا ولاړ اړخونه یا کاتیتونه بولو٠

	مخامخ دریګوډی دې ورکړشوی وي: په لاندې درېګوډي کې کونجونه، او اړخونه جوت یا څرګند روښانه دي . د اړخونو نومونه: الفا کونج ته مخامخ مخامخ اړخ بولو او په الفا پروت اړخ په پروت یا پروت اړخ بولو. ولاړ کونج ته مخامخ لوی اړخ بولو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لند یا تکرار :پورته او په لاندې بیلګه کې دا اړخونه دغوښتوني کونج مخامخ او په پراته اړخونه بلل کیږي

بیلګه
بیا دې همغه پورته درېګوډې ورکړ شوی وي، چې په بیتا پروتاوخ یا کاتیت د الفا مخامخ اړخ یا کاتیت او په څنګ په الفا پرو اړخ یا ه کاتیت د بیتا مخامخ اړخ یا کاتیت ده، چې په څیره کې لیدلکیږي۰



د ساین جمله

په ټریګونومتري کې ساینجمه د درېګوډي د یوه کونج او د دې کونج مخامخ اړخ ترمنځ اړیکی ښایي۰ دا له البتانی میندل شوي او ښوول شوي۰ د درېګوډي درې اړخونه او درې ګونجونه ، وړانګه او چاپیری ورکړ شوي (لکه په فرمول کې) نو باور لري:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

یادونه : دا پورته فرمول دې (6,14)وي ۰

زیات وخت د ساین جمله په داسې ډول هم ورکول کیږي:

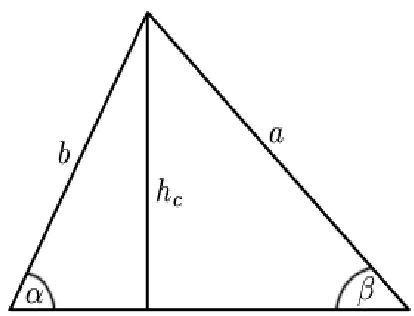
$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$$

که چیرې په درېګوډي کې د ساین جملي له لارې څه ښوول کیږي ، نو دې ته دې پام وي، چې په اینتروال [0°;180°] کې په ټولیزه توګه د همغه کونج دوه یو له بل بیل ارزښتونه لیدل کیږي، دا: دوه ګونوالی ګونګرواینڅجمله په ګوته کوي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دې د کوساین جمله هم وکتل شي

ښوونه : (دا ځيره دې ٦ ، ١٨ وي او دا نا نومول شوي کونجونه دې x,y وي)

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

په h_c پسې يې اوبی کوو

$$h_c = b \cdot \sin\alpha$$

د برابراينوني له لارې لاس ته راځي

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$

که په $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ وويشو، نو د غوښتني لومړی برخه کې لاس ته

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

راځي</td>
</tr>
</table>

برابرون له $\frac{c}{\sin\gamma}$ سره په پيداينتي توګه جګی h_a او يا h_b لاس ته راکوي

د کارونې بيلګه : درجګوړی ABC لارو او ورکړ شوي :

$$a = 5,4\,\mathrm{cm}\ ،\ b = 3,8\,\mathrm{cm}\ ،\ \alpha = 73°$$

دا نورې لويې دې په درېګوړي کی پيداشي

د β شميرلو لپاره د ساين جمله کارول کيږي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{3{,}8\,\mathrm{cm} \cdot \sin 73^\circ}{5{,}4\,\mathrm{cm}} = 0{,}67$$

$$\beta = \underline{42^\circ}$$

لکه د خه مو، چې ګوته ورته ونیوله یو بل کونج هم د همدې ارزښت سضته شته ، یاني

$$\beta' = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

د دې اوبی په پوښتنه کې نه راځي، ځکه چې د درېګوډي د کونجونو زیاتون به له ۱۸۰ درجو څخه واوړي۰

او نو ګاما د کونج زیاتون جملې له لارې لاس ته ر اوړو

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 73^\circ - 42^\circ = \underline{65^\circ}$$

اړخ c هم داسې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{5{,}4\,\mathrm{cm} \cdot \sin 65^\circ}{\sin 73^\circ} = \underline{5{,}118\,\mathrm{cm}}$$

دکوساین جمله

په تریګونومتري کې کوساینجمله په درېګوډي کې د درېګوډي د اړخونو او کونجونو

ترمنځ اړیکې ښایې ، چې په لاندې توګه ورکړ شوي دي :

یادونه : دا لاندې فرمولونه دې (۱۸ ۰ ۹) وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

که ګاما ۹۰ درجې وي، نو دپيتاګوراس جملې له مخې لرو:

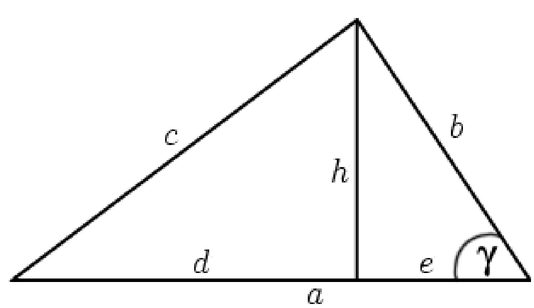
$$c^2 = a^2 + b^2$$

د کوساين جمله استعماليدی شي، که په يوه دريګوډي کی

- درې اړخونه (SSS) يا
- دوه اړخونه او له هغو بند کونج (SWS) ورکړ شوي وي.

که له پورته څخه يې درې ورکړ شوي وي، نو څلورم يې پيداکولی شو

ښوونه :



د درېګوډي په کيڼ لور د پيتاګوراس قضيه استعمالوو، چې د c^2 لپاره يوه شميرافاده يا – وبينه پيداکړو، د دې لپاره د دې خوا د ولاړاړخونو يا کاتيتو اوږدوالی څلوری يا مربع بايد پيدا شي

$$h^2 = b^2 - e^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښي اړخ لپاره د پیتاګوراس قضيي استعمال څخه لرو

$$d^2 = (a-e)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2$$

(د بینوم فرمول)

د پیتاګوراس جملې له مخې د کیڼ لور لپاره لرو:

$$c^2 = h^2 + d^2$$

اوس دواړه پورته پیداشوي شمیرویینې یا- افادې سره زیاتوو:

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot e$$

اوس باور لري $\cos\gamma = \frac{e}{b} \left(\frac{ankathet}{Hypotenuse}\right)$

له دې لاس ته راځي $e = b \cdot \cos\gamma$

دا پورته ځاي په ځاي کوو، نو د c^2 لپاره لاس ته راځي:

$$c^2 = \underline{\underline{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}}$$

بیلګه:

یو دریګوډیABC ، چې اړخونه یې څرګند دي، ورکړ شوی

$a = 4{,}9 \text{ cm}$ ،

$b = 2{,}8 \text{ cm}$

$c = 3{,}5 \text{ cm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج β لویوالی غواړو پیداکړو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{(4{,}9\,\mathrm{cm})^2 + (3{,}5\,\mathrm{cm})^2 - (2{,}8\,\mathrm{cm})^2}{2 \cdot 4{,}9\,\mathrm{cm} \cdot 3{,}5\,\mathrm{cm}} = 0{,}83$$

$$\beta = \underline{34^\circ}$$

دا پیژند ورکو یا داسې تعریفوو

$$\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$$

Common formularکډ وډ فرمولونه

Pythagorean identitiesد پیتاګوراس کتمیوالی

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Sum and difference identities زیاتون او کمون کتمتوالی

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

Double-angle identities دوه برابره کونج کې ګتمتوالي

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\cot A}{\cot^2 A - 1} = \frac{2}{\cot A - \tan A}$$

Half-angle identities د نیم کونج ګتمتوالی

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

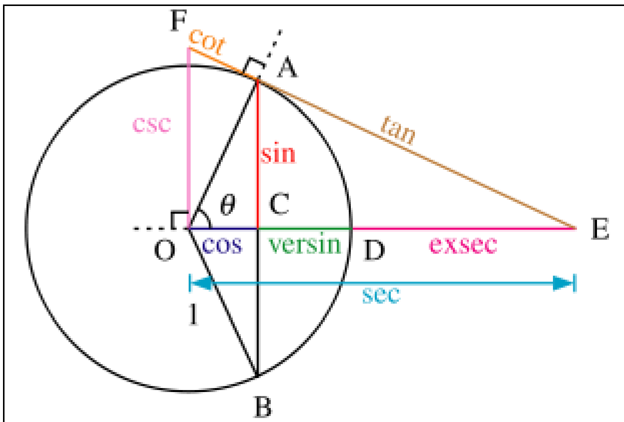
$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

د تریګونومتریکي کتمتوالي لیست List of trigonometric identities

نوره ژوره څېرنه دلته نه کړو، دې ته ګوته نیسو، چې په لاندي څېره کې تریګونومتریکي فنکشنونه روښانه دي

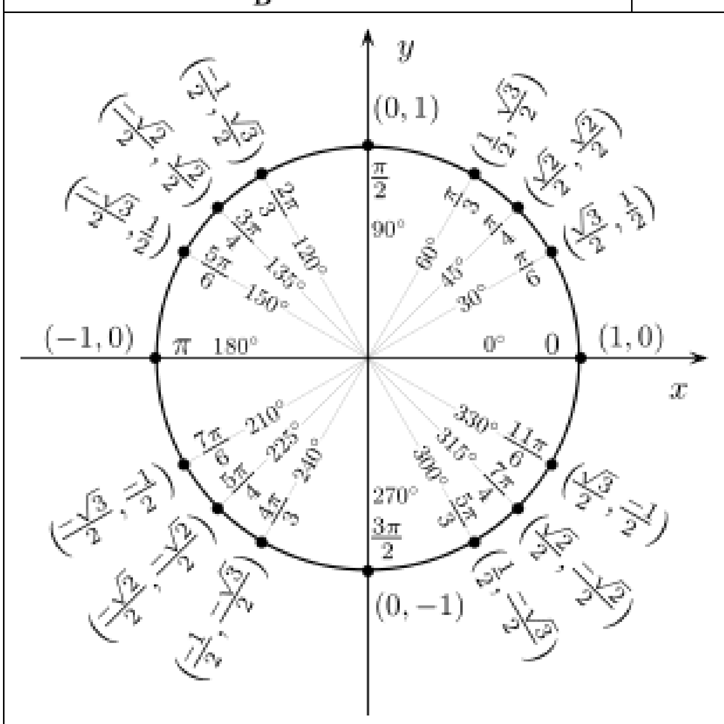


د یوه کونج θ تول تریګونومتریکي فنکشنونه په O باندې د یوې یونکردی ترم له لارې ورکول کیدی شي (یونکردی لاندې ورکړ شوي او کونجونه هم په نخښنه شوي)

مخامخ:

یوونکردی(یووالي یا واحد ګردی)

The unit circle



(c) ketabton.com: The Digital Library

Notationلیکنبڼه

دا لاندې لیکنبڼه یا - ډول د ټولو تریګونومتریکي – یا مثلثاتي فنکشنونو ساین، کوساین ، تانجنت ، کوتانجنت ، سیکانت، کوسیکانت لپاره باور لري، د لنډوني لپاره په لاندې جدول کې یواځې ساین او کوساین لیکل شوي دي

$\arcsin(x)$ کیدی شي$\sin^{-1}(x)$ ولیکل شي، خو د $(\sin(x))^{-1}$ سره باید بدل نه شي

Definitionsپیژند:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

تل بیرته راګرځیدنه ، سیومتري او بدلونPeriodicity, symmetry, and shifts .

:په یوون(یووالي-) ګردی یا دایره کې ساده لیدل کیږي

Periodicity تل بیرته راګرځیدنه

ساین ، کوساین ، سیکانت، کوسیکانت تل بیرته راګرځیدنه 2π ده(پوره ګردی) (تکرار دی)

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\sec(x) = \sec(x + 2k\pi)$$

$$\csc(x) = \csc(x + 2k\pi)$$

تانجنت ، کوتانجنت تلبیرته راګرځیدنه π لري(نیمګردی یا نیمدایره) :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi)$$

$$\cot(x) = \cot(x + k\pi)$$

Symmetry سيومتري

د تريګونومتريکي فنکشنونو لپاره سيومتري ، لکه لاندې کښل شوي

$x \to -x,\ x \to \pi/2 - x$ ،يا $x \to \pi - x$ په لاندې ډول ده

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin(x), & \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x), & \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\
\cos(-x) &= \cos(x), & \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x), & \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\
\tan(-x) &= -\tan(x), & \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cot(x), & \tan(\pi - x) &= -\tan(x) \\
\cot(-x) &= -\cot(x), & \cot\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \tan(x), & \cot(\pi - x) &= -\cot(x) \\
\sec(-x) &= \sec(x), & \sec\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \csc(x), & \sec(\pi - x) &= -\sec(x) \\
\csc(-x) &= -\csc(x), & \csc\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sec(x), & \csc(\pi - x) &= \csc(x)
\end{aligned}$$

بدلون : د $\pi/2$ او π بدلون دئ

$$\begin{aligned}
\sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos(x), & \sin(x + \pi) &= -\sin(x) \\
\cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x), & \cos(x + \pi) &= -\cos(x) \\
\tan\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\cot(x), & \tan(x + \pi) &= \tan(x) \\
\cot\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\tan(x), & \cot(x + \pi) &= \cot(x) \\
\sec\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\csc(x), & \sec(x + \pi) &= -\sec(x) \\
\csc\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \sec(x), & \csc(x + \pi) &= -\csc(x)
\end{aligned}$$

د پيتاګوراس کتمتوالی Pythagorean identities

د دې بنسټ د پيتاګوراس قضيه ده

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج د زياتون او کمون کتمتوالى Angle sum and difference identities

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

د کمون او زياتوننخښي په ورته ترتيب راځي لکه په فرمولونو کي

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

که په کيڼ لور " + " وي، نو په ښي لور"-" راځي او په څټ

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

د کونج دوه ځلوالي فرمول Double-angle formulae

که $x = y$ کيږدو د پيتاګوراس يا موفريي فرمول له لارې لرو د $n = 2$ له امله ٠

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \quad = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \quad = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot(x) - \tan(x)}{2}$$

د نيمکونج فرمول Half-angle formular

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \qquad (1)$$

که د ريښي لاندې ماتباندي او مات لاندې له $1 + \cos x$ سره ځل شي ، نو د پيتاګوراس جملې له مخه لرو:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1+\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

په ورته توګه که برابرون له (۱) له $1 - \cos x$ سره ځل شي، نو لور

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{(1-\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

د نيمکونج فرمولونه د تانجنت لپاره دي:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که کيږدو $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$

نو لرو: $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

د ځل و زياتون ته کټمتوالی Product-to-sum identities

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}$$

د زياتون- و- ځل ته کټمتوالی (برابرون) Sum-to-product identities

که د x لپاره $(x+y)/2$ او y لپاره $(x-y)/2$ کيږدو نو لرو

$$\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x)-\cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

که $x, y,$ او z د کوم دريګوډي کونجونه وي يا په نورو کليمو، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیمګردی یا نیمدایره $\text{if } x + y + z = \pi = \text{half circle},$ =که

او یا نو $\tan x + \tan y + \tan z = \tan x . \tan y . \tan z$

$$\text{and } \sin(2x) + \sin(2y) + \sin(2z) = 4\sin(x)\sin(y)\sin(z).$$

Trigonometric conversions تریګونومتریکي په څتوالی

هر تریګونومتریکي فنکشن د بل تریګونومتریکي فنکشن سره سیده یا سیخي اړیکی لري۰ داسې اړیکی د په ښت اړیکو له لارې افاده یا ویل کیدی شي، لکه : که φ او ψ د تریګنومتریکي فنکشنونو د یوې جوړې نمایندکی وکړي ، او arcψ دې د ψ په ښت وي، داسې چې ψ(arcψ(*x*)) = *x* ۰ نو φ(arcψ(*x*)) کیدی شي د یو الجبري فنکشن ترم *x* په څیر وویلی شي یا افاده شي۰

داسې فرمولونه د لاندې جدول له لارې ښوول کیدی شي : مونږ دا نوره نه روښانه کوو او په لاندې جدول پوهیدی شو

φ \ ψ	sin	cos	Tan	csc	sec	cot
sin	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$
Cos	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
Tan	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{x}$
sec	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
cot	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 0 = \sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 = \cos 45^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

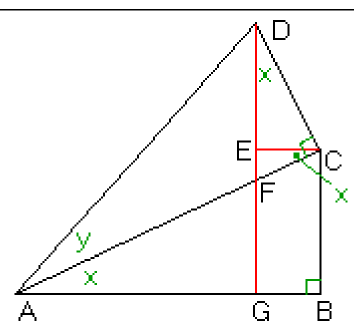
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 90^\circ = 1 = \cos 0^\circ = \cos 0$$

د طیلایي نسبت φ له امله لرو

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \varphi/2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\varphi-1}{2} = \frac{1}{2\varphi}$$

جیومتریکي غوښتنه (ثبوت)Geometric proofs



sin(*x* + *y*) = sin(*x*) cos(*y*) + cos(*x*) sin(*y*)

په مخامخ ښیره کې کونج x د ولاړکونجیز درېکوډي ABC برخه ده، او کونج y د و لاړکوډیز درېکوډي ACD برخه ده ۰ نو جوړښت DG و AB باندې ولاړ او CE و AB ته غبرګ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونج ACE =کونجBAC = Angle x

EG = BC. کونج CDE= x

$$\sin(x+y)$$

$$= \frac{DG}{AD}$$

$$= \frac{EG+DE}{AD}$$

$$= \frac{BC+DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD} + \frac{DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} + \frac{DE}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} + \frac{DE}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$

$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

Using the above figure:د پورته څيرې څخه کار اخلو

$$\cos(x+y)$$

$$= \frac{AG}{AD}$$

$$= \frac{AB-GB}{AD}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{AB - EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} - \frac{EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} - \frac{EC}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

د $\sin(x-y)$ او $\cos(x-y)$ فرمولونو ښوونه

د $\cos(x-y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه ساده ښوول کیږي، که د $\cos(x+y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه وپیژنو

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

که په فمرول $\sin(x+y)$ کې د y په ځاي -y کیږدو نو لرو

$$\sin(x+(-y)) = \sin(x)\cos(-y) + \cos(x)\sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجوړه فنکشنونه دي، نو لرو

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y).$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

موږ په پورته فرمول $\cos(x+y)$ کې د y په ځاي -y ږدو ، نو لرو

$$\cos(x+(-y)) = \cos(x)\cos(-y) - \sin(x)\sin(-y).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجړه فنکشنونه دي، نو لاس ته راوړو

$$\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y).$$

۶ . ۵ تریګونومتریکي یا کونجکچ فرمولونه

د کونجبلواك یا کونجفنکشن د شمیرلو لپاره، له دا اوس څرګند فرمولونو، یوه د اړیکو ډله شته) د زیاتون)جمع(تیوریم(، له کومو یی چی دلته یوڅو راوړل غواړو .د همغو فرمولتولګه) کتاب چي فرمولونه په کي راټول وي(کی لاندې فرمولونه پیدا کیدی شي

$$\sin(x\pm y)=\sin x.\cos y\pm\cos x.\sin a;\text{........................}(6,19)$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x.\cos y\mp\sin x.\sin y;\text{........................}(6,20)$$

$$\sin 2x=2\sin x.\cos x;\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x;\text{....................}(6,21)$$

$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x.\tan y};\text{.....................}(6.22)$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};\text{..........................}(6,23)$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2};$$

$$cox+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};\text{.............................}(6,24)$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$$

ددې اړیکو ښوونه یوه مهمه کورني دنده ده، خو څه به په دې لاندې بېلګه کې وښایو

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۶ . ۱۲ :

$\mathrm{Cos}(x+) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$

موږ له ځيرې ۴ . ۱۸ څخه مخ ته ځو، او ځاي په ځاي کوو $\gamma_1 = x$ ، $\gamma_2 = y$ ،
نو لرو $\gamma = x + y$.

د کوساين له جملې لاس ته راځي

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2, \quad a^2 = p^2 + h_c^2, \quad b^2 = q^2 + h_c^2, \quad c^2 = (q+p)^2$$
$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - (q+p)^2,$$
$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - q^2 - 2qp - p^2$$

له $2ab\cos\gamma = 2h_c^2 - 2qp$ څخه لاس ته راځي

$$\cos\gamma = h_c^2 / ab - qp / ab = (h/a).(h/b) - (q/b).(p/a),$$
$$\cos\gamma = \cos\gamma_1 . \cos\gamma_2 - \sin\gamma_1 . \sin\gamma_2$$
$$\cos(x+y) = \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$$

څه چې د ښوولو وو

يادونه: ځای په ځای باید دې ته ګوته ونيسم، چې د ضرب او وېش تړاو نسبت و جمعې اړ تفريق يا زياتو او کمون تړاو ته کلک يا کلک نښتی دی.

بيلګه ۴ . ۱۳ – لاندې وينې يا افادې دې ساده شي

$$a)\ y = \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

دې (۶ . ۲۳) پسې د مساوات(برابرون) ښی اړخ د لاندې سره يو- يا هم ارزښته ده.

$$2\sin\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} - \alpha - \frac{\pi}{4}}{2} = 2\sin\alpha\cos(-\frac{\pi}{4}) = 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له کوم چې $y = \sqrt{2}\ \sin\alpha$ لاس ته راځي

$$b)\ y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi)$$

د (۶ . ۲۰) پسې لرو

$$\cos(\frac{3}{2}x+\pi) = \cos\frac{3}{2}x\cdot\cos\pi - \sin\frac{3}{2}x\cdot\sin\pi.$$

دا چې $\cos\pi = -1, \sin\pi = 0$ دی، نو لاس ته راځي

$$y = \cos(\frac{3}{2}x+\pi) = -\cos\frac{3}{2}x.$$

دې نتیجې ته د (۶ . ۱۶) استعمال وروسته هم رسیږو، له کومې چې لاس ته راځي

$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha \text{ ist.}$$

بیلګه ۶ . ۱۴ برابرون یا مسات $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad 0 \le \alpha \le 2\pi,$ دې وښوول شي

دی $1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او له دې سره

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}-(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2})}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}} = |\sin\frac{\alpha}{2}| = \sin\frac{\alpha}{2} \quad (\text{wegen } 0 \le \alpha \le 2\pi).$$

۶ . ۶ تمرینونه

۱ – بنستیزه هندسه یا څمککچونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۱ – لاندې کونجونه دې په لینده اندازه همداسې په درجه اندازه(د څسیما یا دسیمال یا لسمیز او سمساګیسیمال (د ۶۰ په بنسټ جوړ شوي ګڼل(که غواړئ شمیرل) برخو) ورکړ شوي دي،

1.1.1.a) 15°	b) 225°	c) 105°	d) 277,5°
1.1.2.a) $\frac{\pi}{8}$	b) $\frac{\pi}{12}$	c) $2\pi+\frac{\pi}{2}$	d) $\pi-\frac{\pi}{3}$
1.1.3.a) 4,24°	b) 70,9°	c) 31° 17' 20"	d) 228,1923°
1.1.4.a) 5,19	b) 0,22	c) 2,31	d) 1

۱ . ۲ – یو درېګوډی له a = 4,5 cm , b = 12,2 cm او c = 11,7 cm سره ورکړ شوی دی. دا درېګوډی جوړ کړی ! د اړخونو نیموونکی وکاږی، د منځ ولاړې ، کونجنیموونکي او جګې، همداسی یې ګردیخوندي او خوندیګردي ګردی(یعنی دباندې او دننه ګردی) رسم کړی.

۱ . ۳ – لاندې درېګوډی جوړ کړی

a) $a = 11,7$ cm , $b = 9,2$ cm , $\gamma = 43,5°$

b) $c = 16,1$ cm , $\alpha = 84,6°$ $\beta = 51,9°$

وښایي چی ولی دواړه درېګوډي ورته دي!

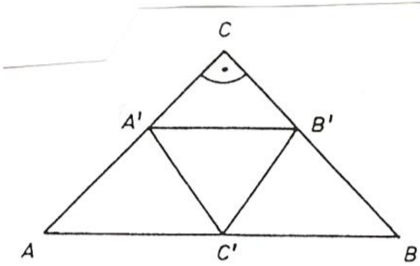


Bild 4.20 ځیره

۱ . ۴ – یو مساوي پښنیز، ولاړکونجیز درېګوډي ABC ته یو مساوي اړخیز درېګوډی A'B'C' داسی په دننه کی ورکړ شوی چی $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ څغلي او C' په $\overline{AB}$ پرته ده (ځیره ۴ . ۲۰ دې وکتل شي).

ورکړی $\overline{B'C'} = \overline{A'C'} = \overline{A'B'}$ د $\overline{AC} = \overline{BC}$ سره!

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوړي کی د خیرې ۴ . ۲۱ سره سم په لیدوړ ډول په دننه کی یوه مربع ورکړ شوې. د مربع اړخونه وشمیرئ
الف) له کاتتو څخه
ب) له هیپوتینوزبیرخو څخه

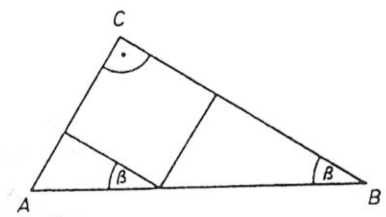


Bild 4.21

۲ . د جبشمیرنی سره د ارزښتونوتاکنه

۲ . ۱ – له لاندې کونجونو څخه د لاندېکونجونو لپاره فنکشن ارزښتونه پیداکړئ:

a) $\alpha = 47{,}15°$, b) $\alpha = -390°$, c) $\alpha = 7{,}784$, d) $\alpha = 13{,}195$

۲ . ۲ – کونج ß دې د $\sin ß = a$, $\cos ß = a$, $\tan ß = a$, $\cot ß = a$ څخه د

a) $a = 0{,}8290$, b) $a = -0{,}2907$, c) $a = -2{,}145$, d) $a = 0{,}8660$

لپاره وشمیرل شي (په اوبی کی دې د الفا په ځای بیتا ولیکل شي !!!)

۳ . په ولاړکونجیز دریګوړي کې شمیرنې

۳ . ۱ – په ولاړکونجیز ($\gamma = 90°$) دریګوړي کې معلوم دي

الف) $a = 3$ cm , $b = 4$ cm ، ب) $a = 5$ cm , $c = 12$ cm

کوم ازښتونه $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ لري؟

۳ . ۲ – ولاړکونجیز دریګوړي کې ($\gamma = 90°$) نه ورکړشوي کونجونه او نه ورکړ شوي اړخونه وشمیرئ ، لاندې لوېي موږ ته معلومې دي:

a) $a = 50$cm , b) $a = 40$cm , c) $b = 70$ cm , d) $c = 65$ cm

$b = 78{,}1$ cm $\alpha = 43°36'$ $\alpha = 18°55'$ $ß = 59° 29'$

۳ . ۳ – وشمیرئ ! h_c , A او همداسی د تاکلي مساوي پښیز دریګوړي ورکړ شوي پاتې کونجونه او اړخونه ($\alpha = ß$, $a = b$):

a) $a = 66$cm , b) $c = 22{,}4$ cm , c) $a = 38{,}9$ cm , d) $c = 30{,}3$ cm

$c = 130$ cm $\alpha = 47{,}8°$, $\gamma = 33{,}3°$ $\gamma = 48{,}2°$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) درې قوې دې د زوريا قوت $F_1 = 167{,}5N$, $F_2 = 112\ N$ او $F_3 = 157\ N$ سره ورکړ شوې وي، چې په ګډه يو درېګوټی جوړوي. د دې درېګوټي كونجونه چې له اړخونو رابند دي، څومره لوي دي؟

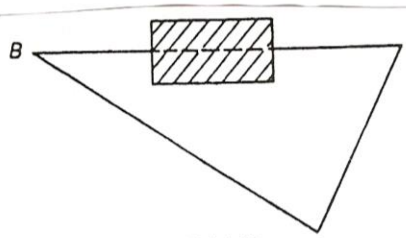


Bild 4.23 ځېره

پ) دوه ټكي A او B چې يوه كور يې مخه پټه کړې وي، يو له بل څومره لرې دي، كه $\overline{BC} = 75{,}25\ m$, $\overline{AC} = 51{,}75m$ او $\sphericalangle BCA = 71°15'45"$ وي (ځېره ۴ . ۲۳)

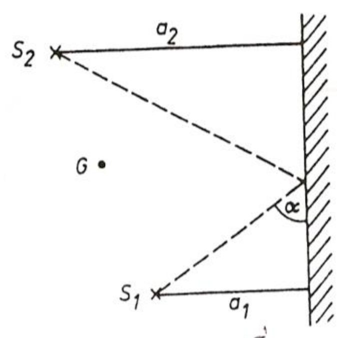


Bild 4.24 ځېره

ت) د دوه يخ هاكي لوبغاړو S_1 او S_2 ترمنځ يو د مخالف ټيم لوبغاړی G ولاړ دی. S_1 په داسې ډول توپ و S_2 ته وهي چې توپ په يوه ديوال ولږېږي. (ځېره ۴ ، ۲۳ وګورئ).

د دواړو لوبغاړو S_1 او S_2 لرېوالی څومره دی؟ كه د دوي واټن له ديوال $a_1 = 2{,}5m$ همداسې $a_2 = 6{,}5\ m$ وي او توپ د يوه دې ديوال سره په يوه كونج $\propto = 42°$ ولږېږي .؟

۵ . د تريګونومتريکي يا درېګوډيزو(مثلثاتي) فرمولونو استعمال

۵ . ۱ – بې له جبشميري او جدول دې نور دوه درې فنكشن ارزښتونه دې وشميرل شي، كه وركړ شوي وي: $(0 < \alpha < 2\pi)$:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ c) $\tan \alpha = \sqrt{3}$ d) $\cot \alpha = -\sqrt{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ . ۲ - لاندې مساوات وښايي:

5.2.1. a) $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ b) $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

c) $\cos\alpha\cdot\sqrt{1+\tan^2\alpha}=1$ d) $1+2\cos\alpha=4\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$

5.2.2. a) $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ b) $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

c) $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ d) $\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

5.2.3. a) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ b) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

c) $\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$ d) $\cot 3\alpha=\frac{\cot^3\alpha-3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha-1}$

5.2.4. a) $\cos 2\alpha=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$ b) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$

c) $\cos 2\alpha=1-8\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$ d) $\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

5.2.5. a) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha=\frac{1}{4}\sin 4\alpha$

b) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=-(\cos\alpha+\sin\alpha)$

c) $\sin\alpha+\sin(\alpha+\frac{2\pi}{3})+\sin(\alpha+\frac{4\pi}{3})=0$

d) $\sin^2(3\pi-\alpha)+\sin^2(6{,}5\pi+\alpha)=1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې څنګه یوه ګڼډیرۍ پر بله ګڼډیرۍ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \qquad (7, 1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په رییلګڼونډیرۍ کې اوبی یا حل نه لري، نو له دې امله باید (7 , 1)د ګڼنو ډیرۍ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, ...(7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي ځل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ...(7,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکو : دا پورته د لاندې سره

$$i^2 = -1 \qquad (7,4)$$

د (7,1) ځاي نیسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رییل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینارګڼ imaginär(لاتین: فقط خیالي)یوون(واحد)وایو.

برابرون

$$x^2 + a = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; x^2 = -a \;\; , a > 0 \qquad (7,5)$$

کیدی شي په لاندې ډول ولیکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}.i, ...(7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a}.i$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, ...(5,7)$$

اوس د ایماجینار ګڼ یوون(واحد) ټولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, ...(5,8)$$

ایماجیناریوون(واحد)i =z یو ځانګړی ایماجینارګڼ b=1 دی

د ټولیزې څلورۍ (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, ...(7,9)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې ډول د څلورې پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2/4$$

=> لاس ته راځی یالرو

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 = +(q - p^2/4) \qquad (7, 10)$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7, 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x+p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$$

نو لرو

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7,12)$$

د $p^2 = 4q$ لپاره رییل «ډبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رییل اوبیوني یا حلونه منځ ته راوړي٠

که $P^2 < 4q$ وي، نو رییل اوبی نه شته دئ

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a, b \in R$$

د دې فورم یا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کیږي

$$z = a+bi\ ,\ i^2 = -1;\ a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډیرئ په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z} = a - bi, ...(7,14)$$

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګیري کمپلکس ګڼ بلل کیږي۰ لنډ کنجوګیري کمپلکس ګڼ یا اوښتی ګڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, ...(5,15)$$

د دې مطلقه یا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رییل همدا رنګه ایماجینار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کیږي، که دوي په رییل او ایماجینار برخه کې یو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ تل په پام کې لرو، چې$i^2 = -1$ اېښول شوې

ګډوله یا کمپلکس عدد کېدی شي په سطحه یا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سرې د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شمېرنه کوې، لکه د حقيقي اعدادو سره او په پام کې نيسي چې:$i^2 = -1$

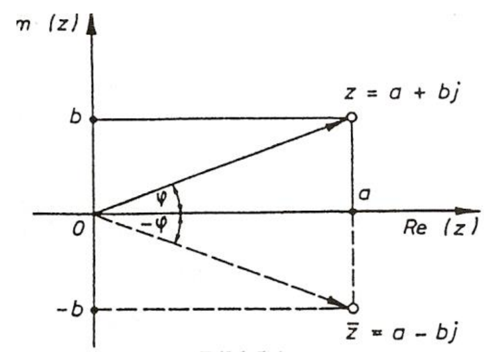


Bild 5.1

موږ دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وایو یا کواوردیناتسیستم Koordinaten systm

پورته ځیره دې وکتل شي

پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وايي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون(محور) د x - محور ته د هوارې یاسطځي ریيلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته بېايماجينار برخه وايي لکه ښنګه، انځور شوي دي۰ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر اځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي۰(موږ دا اوس دا برخه نوره نه ځیرو، خو دا د وکتورونو په ډول انځورېږي او کاروني یا عملي يې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) يادونه : هغه ګران هيوادوال، چې نوي د شمېرپوهنی د دې برخې سره بلدیږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځني وييونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې ځیرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون ښنګه دی

۷ ۰ ۱ زیاتون او کمون:

لاندې ځیرو ته دې پام وي او ګورو، چې رییل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), ...(7,17)$$

بیلګه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$
$$\Rightarrow$$
$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13}$$
$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعنې د(z2-) په زیاتون)کیدی شي د ځیرې ۵ (په همدې توګه د ځیرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

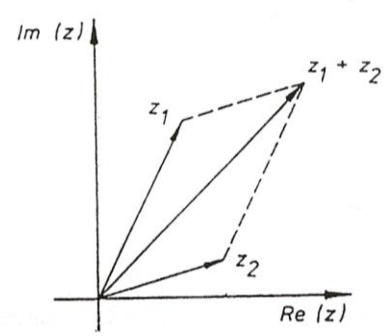


Bild 5.2

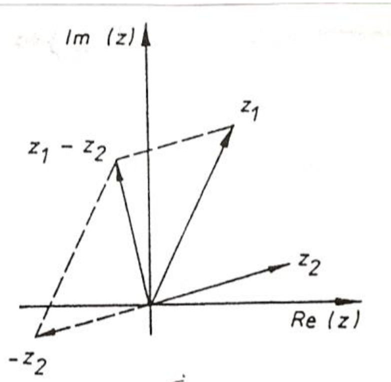
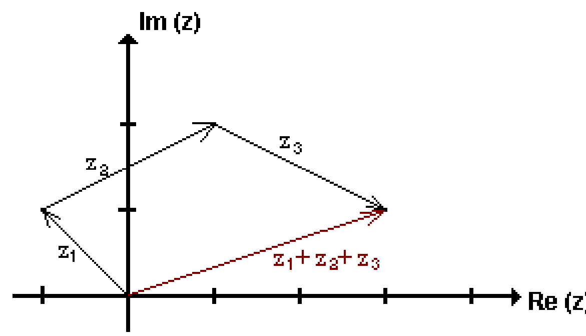


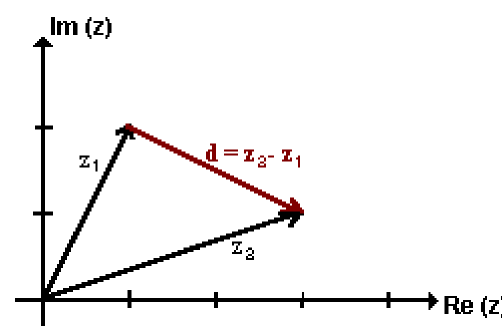
Bild 5.3

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا لاندې:



په پورته او لاندې ځیرو کې د کملپکس ګڼونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیږي۰



دکملپکس ګڼونو ارزښت

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کیږي۰

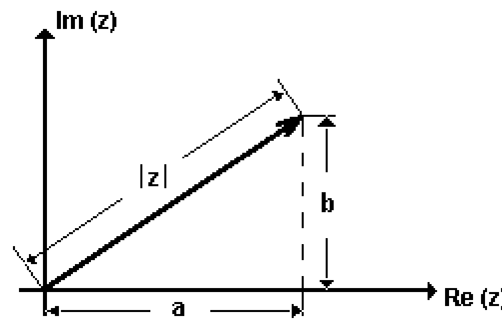
دا د په |z| سره ښایو او د پیتاګوراس(فیثاغورث) د جملې

سره ښوول کیږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی لیکه

هم وکتل شي۰ مخامخ ځیره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښایي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

په دري ګوډي کې د اړخونو ځانتیونه یا تباسب له امله باور لري

$$||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,18)$$

برسیره پر دې باور لري:

$$z_1 + z_2 = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

۷ . ۲ د کمپلکس ګڼونوځل:

د ورسره بلد نوک اینوولو له لارې لاس ته راځي

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2i^2$$
$$= a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2(-1)$$
$$\Rightarrow$$

نو بارورل ري

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i \qquad (7, 20)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکې وي،دا به راته ګران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي٠ دا لاندې هم ساده ازمایل کیدی شي

$$\overline{z_1 . z} = z_1 . z_2 \quad , \quad |z_1 . z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بیلګه ۷ ٠ ۲

د $z.\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2+(-ab+ab)i = a^2+b^2$

او (۱۵ ، ۷) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7, 22)$$

۷ ٠ ۳ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1 i):(a_2+b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{\bar{z}}_2}{z_1 \bar{\bar{z}}_2} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2+b_1 b_2)+(a_2 b_1-a_1 b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \frac{a_1 a_2+b_1 b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2 b_1-a_1 b_2}{a_2^2+b_2^2} i \qquad (7,23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسې لاس ته راځي

$$|\frac{Z_1}{Z_2}|=\frac{|Z_1|}{|Z_2|},\left(\overline{\frac{Z_1}{Z_2}}\right)=\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوهمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}=\frac{\overline{Z}_1.Z_2}{\overline{Z}_2.Z_2}=\frac{(a_1-b_1i)(a_2+b_2i)}{(a_2-b_2i)(a_2+b_2i)}=$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2-a_2b_1)i}{a_2^2+b_2^2}=$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}-\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i=\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ ۰ ٤ :د Z1 او Z2 لپاره له سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1:Z_2=\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{2-3i}{3+2i}=\frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)}=\frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2}=\frac{13}{13}i=-i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سبحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z=1-i$ b) $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

c) $z=2(1-\sqrt{3}i)$ d) $z=-1-i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

a) $|z|=\sqrt{2}$ b) $|z|<\sqrt{2}$ c) $|z|>\sqrt{2}$ d) $|z|=r$

۲ – جمعه او تفریق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شمیرنې او کارنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(1+2i)+(2+i)$ b) $(-2+i)+1-2i)$

c) $(1-2i)-(1-2i)$ d) $(-1-2i)+(2-i)$

۲ . ۲ - د شمیرنې او کارنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(22+5i)+(2+i)$ b) $(3+2i)-(5+2i)$

c) $(1+2i)-(1+2i)$ d) $i-(1-2i)$

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقیقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(2+\sqrt{3}\,i).(3-\sqrt{2}i)$ b) $(3+2\sqrt{2}\,i).(3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1+\sqrt{5}\,i).(1-\sqrt{5}\,i).(13-12i))$ d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i}.\sqrt{3-\sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(x+y\,i)\,(2x+yi)$ b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a-3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a+5bi\right)$ d) $(c-\sqrt{d}\,i)(-c-2\sqrt{d}\,i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج یا ماتلاندې حقیقي ورګرځوئ (a ، b حقیقي دي)

3.3.1. a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\frac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{56+33i}{12-5i}$ d) $\frac{63\ +\ 16i}{4\ +\ 3i}$

3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\ (6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رایوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګڼونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\,\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکې x وشمرئ.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\,\frac{i}{4}.$

وشمیرئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.1. a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1 + z_2|$ b) $|z_1 - z_2|$ c) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1| \cdot |z_2|$ b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1 \cdot z_2|$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

a) $x^2 + (1 + i)\,x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\,x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

d) $16\,x^2 + 8\,(i + 1)\,x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ - د ښووني(ثبوت) متودونه

په شمیرپوهنه کې داسې مخ په وړاندې ځو، چې د ځینو نیونو یا فرضیو په فرمولولو سره، غوښتنو یا ښوونو او یا لکه تراوسه د ثبوتولو پرابلم (د کڼپوهنې جملې په څېر) منځ ته رااچوو، چې دا نیونې او غوښتنې ویناوې دي٠ په جملو کېد دې ماتماتیکې یا شمیرپوهنیزه تړنه بیا ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه ده(مخ ته دې وکتل شي)یانې A => B دا غوښتنه د ربښتیا ارزښت w غوښتنه B کې نغښتې او دا اوبی یا حل B له V او د دې تراوسه اوبی- یا حل شوو جملو لاس ته راځی٠ د دې لاس ته راوړنو لپاره بیلابیلې لارې شته ، چې په لاندې کې یې څیړو

۸ ۰ ۱ سیده یاسیخه (مستقیمه) ښوونه

په سیده ښوونه (ثبوت) کې سړی له یوې وینا A څخه مخ ته ځي، چې ربښتیاارزښت یې ځرگند دی او په دې لاس ته راوړنې پسې د B وینا لاس ته راوړي٠

دا وینا B هم ربښتیا ده، ځکه چې له یوې ربښتیا پریمیسې Prämisse (نیونې یا فرضیې) څخه ربښتیا کونکلوزیون Konklusion (لاس ته راوړنه یا نوره هم ښه ښوونه یا ثبوت)(د اینمپلیکیشن ۱ او ۲ لیکه د ربښتیاارزښت په جدول کې) له یوې ربښتیا پریمیسې څخه د نارښتیا کونکلوزیون لاس ته راوړنې نارښتیا دي (ایمپلیکیشن ربښتیا ارزښت ۲ ـم جدول)٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه : سیده اوبیونه یا حل:

نیونه V : $x \geq 1$

غوښتنه B : $6x+3 \geq 3x + 6$

اوبی : وینا A ، چې ربنتیا ارزښت w یې جوت دی، نیونه یې $x \geq 1$ ده۰ له 3 سره ځل له امله لاس ته راوړنې لرو چې په لاندې ډول دی$3x \geq 3$: د 3 زیاتون له لارې لرو: $3x + 3 \geq 6$ د 3x زیاتون له امله لاس ته راځي:

$$6x + 3 \geq 3x+6.$$

بیلګه:

د یوه ناټیک اوبیونې یا حل کارونه (متود)

د ښوونې دی $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$

د ښوونې وړ وینا څخه لاندې لاس ته راوړنې لرو:

$$(a+b)^2 \geq ab$$

$$a^2+b^2+2ab \geq 4ab$$

$$a^2 -2ab+b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

لاس ته راوړل شوې ویناوې $(a-b)^2 \geq 0$ بې بندیزه ربنتیا دي۰ مګر دا د ښوولو وینا یواځې د شرایطو$0 \geq$ b ,$a \geq 0$ لاندې باور لري۰ له دې امله که له ربنتیا وینا څخه غوښتل شوې یا د ښوولو ویناو ته نه شي راتلی(سیده ښوونه) او په ناسداږه یا غیرمستقیم ه ښوونه یا اوبیونه باندې استعمال شي نو ګټوره به وي، چې په لاندې توګه تر څېړنې لاندې ونیول شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ ۰ ۲ ناسیده ښوونه یا ـ ثبوت:

په ناسیده ښوونه کې له یوه نفي یا نیګیشن یا نه والي څخه مخ ته ځو، چې A « ناغوښتنه» او له دې یوه وینا B لاس ته راوړل کیږي، کومه چې نارښتیا ده۰ وینا یعنې نفیې غوښتنه یا ثبوت هم نارښتیا دئ، ځکه چې له یوې نارښتیا نیونې څخه یوه نارښتیا ښوونه یا ثبوت لاس ته راتلی شي(د ایمپلیکیشن خلورمه کرښه).

له یوې رښتیا نیونې څخه د یوې نارښتیا ثبوت لاس ته راوړنه نارښتیا ده۰ (د ثبوت د

رښتیا جدول څخه) که د غوښتنو نفی نارښتیا وي، نو غوښتنه بیا په دې اوبیونې یا حل کې رښتیا ده۰

بیلګه : ناسیده ښوونه یا ثبوت

نیونه V : a , b دې رییل ګڼونه وي او وي دې: $a \geq 0, \quad b \geq 0$

ښوونه یا غوښتنه B :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

اوبیونه : د غوښتنو نفیې ده $\frac{a+b}{2} \prec \sqrt{a.b}$

د پورته نابرابرون له څلورئ یا مربع کولو له امله لاس ته راوړنه لرو:

$$(a+b)^2/4 < a.b$$

دواړه لورې له څلورو سره ضربوو، نو لاس ته راځی

$$(a+b)^2 < 4a.b$$

له څلورئ وتنې یامربعوتنې څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^2+b^2+2ab < 4ab$$

په دواړو لورو د 4ab کموني څخه لاس ته راځي

$$a^2-2ab+b^2 < 0$$

د نابرابرون کينه لور د ځلورى ۰ مربع په بڼه ليکل کيدى شي او هيڅکله له صفر څخه نه شي کوچنئ کيدى۰ دا په دې مانا، چې $(a+b)^2 < 0$ نارښتيا دئ يا غلط دئ، نو له دې سره $(a+b) < ab$ نارښتيا دئ يانې

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

رښتيا دئ ۰

۲ – غوښتنه B :د ۲ رېښه يا جذر $\sqrt{2}$ ايرشنل دئ

اوبيونه يا حل : د غوښتنې نفيې ده، چې : د ۲ رېښه $\sqrt{2}$ ريشنل ګڼ دئ (د ريشنل ګڼونو لپاره دې برخه ۳ وکتل شي)، نو بايد بيا دوه ټولريشنل ګڼونه q, p, د q≠0 سره شته وي، چې دا باوري شي:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

له دې پورته برابرون سره p^2 يو جوړه((جفت) ګڼ دئ۰ نو له دې امله p هم يو جوړه ګڼ دئ، ځکه چې يواځې د جوړه ګڼ مربع يا ځلورى جوړه کيدى شي $p=2p´$ له مربع يا ځلورئ کولو او پر ځاي اېښوولو لاس ته راځي:

$$P^2 = 4p`^2،$$

$$2q^2 = 4p`^2$$

$$q^2 = 2p´^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له اخرنی برابرون لاس ته راځي، چې q هم يو ځلوری يا مربع ګڼ دی۰ په دې پسې لرو p او q پر ۲ ويشونی دی، يانې پرويشپردی نه دی۰ که پرويشپردي ټول ګنونه p او q له $\sqrt{2}$

سره شته نه وي، نو دا ډول ټولګنونه نه شي کيدی، چې شته يا موجود وي۰

۸ ۰ ۳ د پوره ايندکشن له لارې ښوونه

د پوره ايندکشن ثبوت يا حل د هغو غوښتنو لپاره کارول کيږي، چې د يوه ټاکلي ګڼ (n0 صفر بايد لږ د ن د پښی لاندې وليکل شي) څخه د ټولو پيدايښتي ګڼونو لپاره باوري کيدی شي۰ يانې دلته نوينه داده، چې يوه وينا د لپاره که باور ولري، نو دا بيا د ټولو پيدايښت ګڼونو لپاره باور ي کيدی شي۰

بيلګه ۱ :

د ټولو $n \geq 0$ لپاره ۲ په توان دn له صفر لوي يا له صفر بسره برابر دي يعنې باور لري: $2^n \geq 0$

بيلګه : د ټولو $n \geq 0$ لپاره باور لري 1+3+5+… 2n+1)= n²

د پوره ايندکشن د ښوونې لپاره د « پوره ايندکشن پرينځيپ بنسټ» مخ ته پروت دی:

که يوه وينا دn =n0 يا(په لاندې، که ن،ج، ته پورته شو،نو صفر په پښه کېليکل شوی)
$n = n_0$ لپاره باور ولري او که د دې وينا د يوه په خوښه پيدايښتي ګڼ n = k لپاره اور لرلو څخه د n = k+1 لپاره باوريوالی ترې لاس ته راشي، نو دا وينا د ټولو پيدايښتي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ريښتونې ده ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسې په ترتيب د اينډکشن ښوونه په دوه پلونو يا قدمونو سرته رسيږي

١ - د اينډکشن پيل

ښوول کيږي، چې دا وينا د $n \geq n_0$ لپاره باور لري

٢ – د اينډکشن پل

اوس بايد يو ايمپليکيشن يا لاس ته راوړنه وښوول شي٠ له دې امله د اينډکشن پل يا له برخه پلونو جوړ دئ

٢ الف: د اينډکشن نيونه :

نيول کيږي، چې وينا د $n = k \geq 0$ لپاره باور لي او دا نيونه په V فرمولبند کيږي

يادونه V د نيونې لپاره ځاي پرځاي کيږي يا راوړل کيږي٠

٢ ب – د اينډکشن غوښتنه:

غوښتل کيږي، چې دا وينا د $n = k+1$ لپاره باور لري او دا غوښتنه په B فرمولبندي کوو٠ دا په ګوته کوو، چې B دلته د غوښتنې پرځاي ليکو

٢ ج – د اينډکشن ښوونه :

ښوول کيږي، چې B له A څخه لاس ته راځي: A=>B

بيلګه ١ :

١ – د $n = 0$ لپاره باور لري $2° = 1 > 0$

٢ ٠ ١ ٠ V ته :

$2^k > k$

و ٢ ٠ ٢ B ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2^{k+1} > k+1$

۲ ۰ ۳ له B <= V : له $2^k > k$ او $2 > 1$ څخه د زیاتون له امله لاس ته راځي :

$2 + 2^k > k+1$

او له دې لاس ته راځي: $2.2^k > k+1, 2^{k+1} > k+1$

بیلګه ۲ :

۱ ۰ د $n = 1$ لپاره باور لري $1 = 1^{\circ} = 1$

و ۲ ۰ ۱ V ته: $1+3+5++\ldots+(2k-1) = k^2$

و ۲ ۰ ۲ B ته:

و ۲ ۰ ۳ B <= V ته: له نیونې څخه د زیاتوون 2k+1 زیاتونې او له دې د ښي خوا د یوه بینومځلوری(-مربع) په څیر انځورونې څخه لاس ته راځي:

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1=k^2+2k+1$

او له دې د ښی خوا انځورونې څخه د بینوم ځلوری(-مربع) لاس ته راځی :

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)= (2k+1)^2$

یادونه : د V او B پر ځاي کړی شو، چې نیونه او غوښتنه ولیکو، یانې موږ درې څه لرو، چې نیونه غوښتنه او ښوونه ده۰ په هغه ورسره بلد ډول یې ښوونه د یوه پارابلم حل دی، چې ما اوبی یا اوبیونه بللی(اوبي پښتو ده او ښه کره، همدې وي یا لغات ته مناسب خپل د پښتو نوم دی، چې ورسره بلد هم یو، لکه ملګوبی، خړوبی، چې موخه ترې همدا اوبی دی او په نورو ژبو کې هم همداسې دی)

دلته د شمیرپوهنې سم اند درس ته د پای ټکی ږدو، کۀ نور څه مو ښه مخ ته راغله هغه به بیا د ترڼې په ډول ورسره مل کړو۰ ستاسو وړاندیزونو ته هم سترګی په لار یم۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ . ۴ تمرینونه

۱ – سیده وښایي

الف) له $a + 1/a = b$ څخه لاس ته راځي $a^3 + 1/a^3 = b^3 - 3b$

ب) د دوه تیرو کونجونو α ، β لپاره صدق کوي

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$$

۲ – ناسیده وښایي :

الف) د ټولو x لپاره ، چې وي $0 < x < \infty$ ، صدق کوي

$$(3x - 4) / (2x + 4) > 1$$

ب) $\sqrt{2}$ یو ایریشنل کڼ دی

۳ – د پوره اندکشن له لارې یې وښایئ

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{(n+1)\,n}{2}.$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{(2n+1)\,(n+1)\,n}{6}.$

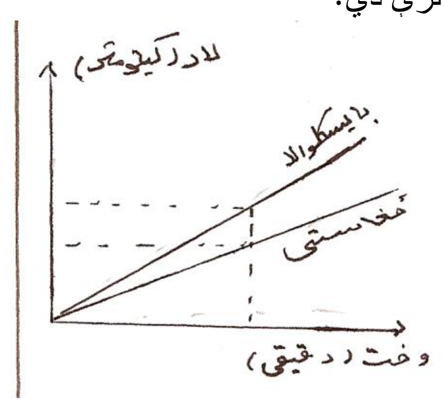
c) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۹ ۰ کرښيز- یا خطي-یا لاینیز مساوات د یوې متحولې سره

پيل بيلګه

يو بايسکل ځغلوونکی او يو پلی له يوه ځايه په همغه وخت خوزي يا حرکت کوي، کوم چی په ګراف کی کښل شوی دی(که د ګراف کښل راته ناشوني شول بخښنه غواړم۰ که بل چا دا کار وکولی شو نو دا به يې هم مرسته وي، خو پرې پوهيدل کومې ستونځې نه لري) بايسکل په ګړی کی ۱۵ کيلومتره ځغلي او پلی ۱۰ کيلو متره په ګړی کي ځغلي. دوي پس له يونيم ساعت سره يوځاي کيږي. هر يو څومره لار وهي او يو له بل څومره لرې دي؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا موږ دلته، لکه په ځنو کتابونو کی چی د فنکشن د نامه لاندې یادیږي، په همغه نامه نه یادوو خو هدف به همغه وي که دا د برابرون یا مساوات په نامه وبولو .
وخت) په دقیقه (په t ښایو لار) کیلومتر(په s ښایو د لارانځورونی څخه په گراف کی څرگندیږي چی بایسکلځغلوونکی له ۶۰ دقیقو وروسته ۱۵ کیلو متره ځغلیدلي یعني 15km /hاو پلی ۱۰ کیلو متره یعني 10km/h
غواړود هرڅه لمړی وښایو چی هر یو له یونیم ساعت وروسته څومره لار وهلي او بیا دویمي پوښتني ته ځواب ورکوو.
بایسکل ځغلوونکی به له دوه ساعته وروسته 2.15km = 30 km ځغلیدلی وي او پلی به 2.10km=20km ځغلیدلی وي بایسکل ځغلونکی به له tوخته وروسته t.15km =15.tkm لار وهلي وي. دلته وخت t خپلواك اوړیدونی یا نا پژندونکی او لار s بلواك اوړیدونی یا ناپیژندونکی یعني د t په واك کی دی. دا کلیمي به بیا د فنکشن او څیرونو په برخو کی پوره تر څیړني لاندې ونیول شي. د بایسکل ځغلوونکي وهلې لار، چی په r یې ښایو برابرون داسی لیکو:

$$S_r = 15.t; t \in Q_0^+$$

د بایسکل ځغلونکی وهلی لار، tچی د بایکلځغلولو وخت دی طبعآ زیاتیز یا مثبت دی ورته دپلي چی په lيي ښايو وهلي لار هم ټاکل کیږي،یعني د l وهلی لار:

$$S_l = 10.t; t \in Q_0^+$$

له دې سره مو وښوول چی دواړه له پیل ټکي له 1,5 ساعته یو له بل څومره لرې دي. وهل شوې لار :

د بایسکل ځغلوونکي $S_r = 15.1,5 = 22,5km$

د پلي $S_l = 10.1,5 = 15,0km$

ددې په تعقیب له 1,5 ساعته وروسته دواړه یو له بل 7,5 km لرې دي .

۹ . ۱ لاینیز- یا کرښیز مساوات :

د کرښیز مساوات فرمول د یوې اوښتونې یا مجهولې x سره داسی دی

$$Ax = a \qquad (9.1)$$

دلته A , a حقیقي اعداد دي. د (۱ . ۶) برابرون اوبیونه (حل) دا مانا لري چی ټول هغه حقیقي اعداد وښوول شي چی که په پورته (۱ . ۹) برابرون یا مساوات کې ځای په ځای شي، د مساوات شرایط پوره کړي. د حقیقي اعداد و بنسټیز قانون (۳ – مجه

(c) ketabton.com: The Digital Library

برخه دې وکتل شي) په بنسټ کيدی شي چی د حقيقي عددد مساوات دواړه خواوي په يوه عدد سره ځل يا ضرب کړو. بی له دې چی مساوات زخمي شي. داچی ويش په د $\frac{1}{A}; A \neq 0$ ځل سره برابر دی نو ليکل کيږي

$$x = \frac{a}{A}; A \neq 0; ....(9,2)$$ ....

دا د (۱ . ۹) يواځنی ممکن حل دی٠که په څټ يا برعکس A = 0 وي، نو دلته دوه حالتونه يو د بل توپيروو

۱ – که $a \neq 0$ وي: دا مساوات بيا داسی دي $0.x = a; a \neq 0$

دا يو مخامخوالی يا تضاد يا نوره هم ښه په څټوالی تشکيلوي ، نو په دې حالت کی حقيقي عدد x شته نه دی چی دا(۱ . ۹) مساوات پوره کړي.

۲ - که a = 0 وي، نو بيا برابرون (۱ . ۹) لاندې شکل نيسي

0.x = 0

دا برابرون بيا د ټولو رييلګڼونو xلپاره پوره (ډك) دی. يا برابرون پوره کوي.

دا بيا داسی هم ليکل کيږي : (په خوښه bel) = xپس دا لاندې باور لري:

برابرون (۱. ۹ .) د $A \neq 0$ لپاره يواځنی ټاکلي اوبيونه (۹ .۲) لريږد A = 0 او $a \neq 0$ لپاره اوبيونه نه لري د A = 0 او a = 0 لپاره هر رييلګڼ x اوبيونه يا حل دی.

په دې لاس ته راوړنوکی، د يوې اووښتونې يا مجهولی سره د رييل برابرونونو د ګڼلو ټوله تيورې خوندي ده .

يو لاينيز برابرون (مساوات) (يو برابرن، چی د برابرونونو په دواړو خواوکی د لاينيزو برابرونونو ترمونو زياتون $a_i + x_i + b_i$ پرت وي) دا مخکني نورمالفورم (۹ . ۱) مو له مخه مخ ته نه دی پروت، پس سرې په دواړو خواو د لاينيزو ترمونو د هدف په لور زياتون (همداسی کمون) له لارې همغه مخکني نورمالفورم ته بيرته رااړوي، دا د II . 2 بنستيز قانون له مخی يو ورته فورمبدلون يا ښه بدلون دی)(د اوبي يا حل ډيری تغير نه دی خوړلی) د بيلګي په توګه لاندې مساوات ورکړ شوی

$$a_1x - b_1x + c_1 - d_1 = a_2x - b_2x + c_2 - d_2$$

پس کيدی شي چی په دواړو خوا $b_2x + d_1$ ور زيات کړو او $a_2x + c_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترې کم کړو، نو لاس ته راځي

$$a_1x - b_1x - a_2x + b_2x = c_2 - d_2 - c_1 + d_1; \qquad (9.3)$$

دلته هغه د x لرونکی غړي د مساوات په کیڼ لور او ثابت د برابرون په ښي لورپراته دي. داسی لیکو

$$A = a_1 - b_1 - a_2 + b_2; a = c_2 - d_2 - c_1 + d_1$$

نو دا برابرون (۳ . ۹) د برابرون (۱ . ۹) سره (ته) کټمټ (ورته) دی، که په لاندې فورم یا بڼه یو مساوات ورکړ شوی وی

$$\frac{a_1}{a_2}x = \frac{b_1}{b_2}$$

(دا ټیك هلته موخه ور یا هدفمند دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي) . نو برابرون د x په لور حل کیدلی شي ، که دا په a2 ځل شي او د 0=| a1 په حالت کی په a1 وویشل شي:

$$x = \frac{a_2b_1}{a_1b_2}$$

بیلګه ۹ . ۱ :

برابرون $\frac{a^2x - b^2}{a} - \frac{a(b - ax)}{b} + \frac{b^2}{a}$ هلته موخه ور دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي.
ددې لپاره چی د ماتلاندې څخه ځانونه خلاص کړو، نو پورته ورکړ شوي برابرون د ګډماتلاندي a.b سره ځل کوو:

$$b(a^2x - b^2) - a^2(b - ax) + b^2 = a^2b$$

$$a^2bx - b^3 - a^2b + a^2x + b^3 = a^2b$$

اوس برابرون ترتیبیږي او راټولیګی، xله نوکانو څخه راوځي

$$a^2bx + a^3x = a^2b + b^3 + a^2b - b^3$$

$$a^2(ax + b) = 2a^2b$$

د $a \neq 0$ له امله کیدی شي په a^2 وویشل شي (a+b)x=2b

دا د لاینیز برابرونونو بنسټیزه بڼه (فورم) (۱ . ۹) ده

که ($a + b \neq 0, (a \neq -b)$ وي ، نو) x = 2b /(a + b

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوګونی يا يواځنی اوبيونه يا حل دئ
که(a = -b) a + b = 0 ، نو د $b \neq 0$ له امله اوبيون شته نه ده .
هغه حالت چی ناپاي زياتي اوبيوني يا حلونه منځ ته راځي(د x =په خوښه) ، د نيونی يا فرضيي له امله چی بايد $b \neq 0$ وي، موجود نه دی.
پام:
په دې هکله زياتې بيلګی کيدی شي راوړل شي، چې ضريب يا ځله ووني په مختلفو توانونو وي۰ زه دلته يواځې دومره يادونه کوم، چې په مساواتو کې، چې اوښتونی يا متحولې ولري، همغهسی شميرل کيږي، لکه په ريبلعددونو کې۰
دلته هم بايد دې ته پام وي، چې ماتلاندې صفر نه شي۰ که چيرې اړيينې وې او يا ګرانو لوستونکو يې راوړل وغوښتل، نو زه به بيا دا کار سرته ورسوم او بيلګي به هم راوړم او که چيرې کوم د شميرپوهنې مينه وال په دې هکله د پوښتنو ځوابونه غوښتل، زه به وهڅيږم او دا کار به هم سر ته ورسوم، که لوي ځښتن غوښتل۰ زه دومره يادونه کوم، چې په دې هکله زما د شميرپوهنې بنستيز کتاب کې زياتې بيلګې راوړل شوي، خو نه پوهيږي، چې دا کتاب به چا ته ورسيږي او که نه

بيلګه 9 . ۲ :
برابرون $(x/a)-((a-x)/2bc)+(a-x)/3c=1$ يواځې
د $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ لپاره موخه ور دی.
ددې لپاره چی مات لاندې له منځه يوسو، نو مساوات د ا.م.ل. 6abc ا(صلي ماتلاندې) سره ځل کوو: $6bcx-3a(a-x)+2ab(a-x)=6abc$
ورپسی نور، په لاندې ډول، د څرګندو شميرلارو يا ـ قاعدو له لارې لاس ته راځي:

$$6bcx-3a^2+3ax+2a^2b-2abx=6abc$$
$$(6bc+3a-2ab)x=6abc+3a^2-2a^2b,$$
$$(6bc+3a-2ab)x=a(6bc+3a-2ab)$$

دا بيرته د لايني مساوات (۹ . ۱) بنسټيزه ده، او له دې امله صدق کوي:
د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره x=a د مخ ته پراته مساوات يواځنی حل دی.
د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره د $0x=0$ له امله هر ريبل کې x اوبيونه ده.
نو لرو x=a د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره x په خوښه
دلته د ځيرل شوو برابرونونو، چی په ساده ډول يی لاينيزوالی يا لاينيزتوب پيژندل کيږي، په ځنګ کی برابرون شته چی په اصل (پرينځيپ) کی کرښيز يا لاينيز نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

مګر په لاينيز مساوات يا برابرونونو اړول کيدی شي. دلته ددې غوښتنو په څنګ کې چې د ناپيژندونکو ضريبونو a,b,c ..... لپاره شوي، زيات وخت په x هم شرطونه ايښول کيږي.
ددې لپاره لاندې کې درې ساده بيلګي راوړو:

بيلګه ۹ . ۳ :
برابرون $(8x - 9)(3x - 4) - (5x - 6)^2 = (4 + x)(3 - x) - 9$
د لومړي حل لپاره څلوری برابرڼن يا مربع مساوات دی، ځکه چې څلوری(مربع) غړي لري. د يو له بل څلولو يا ضربولو وروسته څلوری غړي له منځه ځي. يو لايني مساوات د يوې ځانګړي سره سره پاتي کيږي:

$$24x^2 -32x-27x+36 - (25x^2 - 60x + 36) = 12 - 4x +3x -x^2 -9$$

$$-x^2 + x = 3 - x - x^2$$

$$2x = 3$$

$$x = 3 / 2$$

بيلګه ۹ . ۴ : برابرون $(2x -a) / (x-b) = 1$ يواځي هلته هدفمند دی که حل x دا شرط $x \neq b$ پوره کړي. نو بيا لرو: $2x-a=x-b \Rightarrow x=a-b$
د $x \neq b$ له امله بايد باوري وي $a - b \neq b$ له دې امله لرو $a \neq 2b$ پس ورکړ شوی مساوات د $a \neq 2b$ لپاره يواځنی ټاکلی حل $x = a-b$ لري او پرته له دې ($a = 2b$) حل نه لري.
بيلګه ۹ . ۵ :
مساوات $(a / x) + (b / x) - (c / x) = 1$
يواځي هلته هدفمند دی چې $x \neq 0$ وي. ددې نيونو لاندې باور لري . $x = a + b -c$ دا نو د $x \neq 0$ له امله يواځي هلته حل دی، کله
چې $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات يواځي د $a + b \neq c$ لپاره يواځنی ټاکلی حل $x = a + b -c$ لري، په غير له دې ($a+b=c$) حل يا اوبيونه نه لري

بيلګه ۹ . ۶ : د لاندې مساوات څيرنه:

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی ټيك د $abc \neq 0$ لپاره يو هدف لري، بايد د اصلي مات لاندې پيدا كولو لپاره د مات لاندې ك.ګ.ځ. تكرار شي

$$12150ab^4c^3 = 2^2.3^5.5^3.a.b^4.c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6.3^2.5.a^3.b.c$$

$$5400(abc)^2 = 2^3.3^3.5^2.a^2.b^2.c^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2^6.3^5.5^3.a^3.b.c^3 = 64.243.125.a^3bc^3$$

دا پورته ګڼ اصلي ماتلاندې (ا.م.ل) دئ

كه برابرون د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي:

$$16a^2(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}) - 225b^3c^2(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}) + 120c.(abcx - \frac{1}{ab^2c}) = 0$$

د نوكانو يو له بل ځلولو راټول، ترتيبونه او ويشنه د x تر څنګ ولاړو فاكتورونو يا ضريبونو $(A = 89a^2b^3c^2 \neq 0)$ څخه د نيونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړكيږي

$x = 1 / a^2b^3c^2,\ abc \neq 0$

د دې وظيفي لپاره د حل نور امكانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅيړل چې مات لاندې يي له ځلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅيړو چې مات لاندې يي له زياتونونو جوړ وي، چې د نوكانو له لارې په ځلوونو ټوټه كيدلي يا تجزيه كيدلی شي .

بيلګه ۹ . ۷ :

برابرون

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2b+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4x^2x^2-b^2} - 1$$

ټيك د دې نيونو سره صدق كوي $ab \neq 0$, $|x| \neq 1 / a^2$:

(c) ketabton.com: The Digital Library

اصلي مات لاندې) ا م ل (په لاندې ډول پيداکوو

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 -1)$$

$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$

$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$

$$a^2bx - b = b.(a^2x-1)$$

$$b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a4x^2 - 1 =$$

اصلي ماتلاندی)ا م ل

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو) چي يو يا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بنديږي(، لندېونو او ځلوونو له لارې لاس ته راځي

$$.....a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1)$$

$$2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 = a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 - b^2$$

$$.............2a^2bx - 2ab^2x = a^2 - b^2$$

$$.................2ab(a-b)x = (a+b)(a-b)$$

$$..................................x = \frac{a+b}{2ab}$$

د $b \neq a$ او $0 \neq ab$ لپاره(دا د نيونو له لارې تل پوره دی)که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$له امله په خوښه ارزښتونه نيولی شي، بی له هغو چی په بنسټيزو نيونو کی له نيونو د باندې ساتل شوي وي) يعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي(. په دې حالت کی د xمطلقه ارزښت د کېونو $a = b$ د په څېر ارزښت سره نه شي مساوي کيدی .د x لپاره نيول شوې نيونی د حل ورکولو کی بايد په پام کی نيول شوي وي دا په دې مانا چي بايد تل پوره وي:

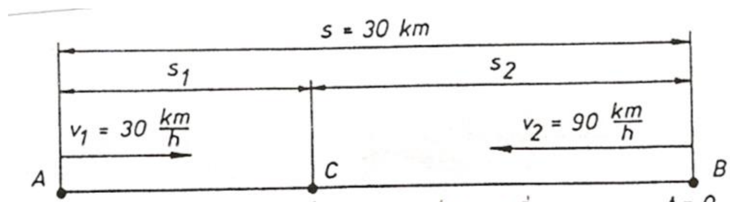
$$\pm 1 / a^2 \neq \frac{a+b}{2ab}$$

بيلګه ۹ . ۸ :

دوه ګاډې تمځايونه Aاو B يو له بل km30 لرې دي. د A څخه يو بارګاډی په ساعت کی د ديرش کيلومتره 30km/h په يوه ثابت سرعت يا چټکتيا باندې د B په لور

(c) ketabton.com: The Digital Library

خوزیږي. د Bڅخه یو تیز ګاډی D د 90km/h ثابت سرعت سره دAپه لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟دلته درې فزیکي لویې یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو t , s او vسره وښول شي. ددې شي ځاننیوني لپاره څیره څېره وکاږئ



څیره ۱۰۴

پوښتنه » چیرته « د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي(د بار کاډي لارs1) یا د Bلریوالي وC څخه(د تیزګاډي D لار s2) سره وشمیرل شي. پوښتنه »کله« د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دئ کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو. دلته درې اوړېدوني یا مجهولی مخ ته لرو s1 , s2 او t .

د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باورې ارزښتونو ماروني یا استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\ t \ , s_2 = 90\ t \ , s_1 + s2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه(واحدونه) پرېښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو)!

دا درې مجهولی s1 , s2 او t دی د دې برابرونونو یا مساواتو سره چی حل به یی په همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چي د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چی دا مساوات په یوې مجهولی مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کیدی شي s1 , s2 او t وټاکل شي .

که ولیکو s1 = x ، نو د اخري برابرون څخه لاس ته راځي .s2 = 30 - x دا په لمړنیو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s1 / 30 = s2 / 90 = x / 30 = (30 -x) / 90$$

نو لرو: $x / 30 = (30-x) / 90$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاينيز ټاکنبرابرون يا ټاکنبرابرون د x لپاره دی، چی ساده حل کيدی شي:

$30x = 30 - x , 4x = 30 \quad x = 7,5$

نو لرو

$s_1 = 7,5 \text{ km} , s_2 = 22 , 5 \text{ km} , t = (7,5 / 30)h = 1h/4 = 15 \text{ min}$

که وليکو $s2 = x$ ، نو شميرنه لاندې لار غوره کوي يا بهير نيسي:

$s_1 = 30 - x \ , t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = (30 - x)/ 90$

$3(30 - x) = x$

$90 = 4x$

$x = 22,5$,

$s_2 = 22,5\text{km} , s_1 = 7,5 \text{ km} , t = (22,4/90)h = 1h/4 = 15 \text{ min}$

که بالاخره وخت $t = x$ د اووښتونې يا ناپيژندونی په څير وټاکو، نو بار لري يا صدق کوي: $s1 + s2 = 30x + 90 x = 30$

$20x = 30$

$x = 30 / 120 = 1/ 4 , t = (1 /4)h = 15 \text{ min}$

$s1 = 30t = 30 /4 \text{ km} = 7,5\text{km}$

$s2 = 90 t = 22,5 \text{ km}$

دواړه ګاډي له ټکی A څخه د $0,25 h = 15 \text{ min}$ حرکت وروسته په 7 , 5 km لريوالی يو بل سره مخامخ کيږي

بيلګه ۹ . ۵ – مساوات $(a/x)+(b/x)-(c/x)=1$

يواځي هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نيونو لاندې باور لري $x = a + b - c$. دا نو د $x \neq 0$ له امله يواځې هلته حل دی، کله چې $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات يواځې د $a + b \neq c$ لپاره يواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غير له دې $(a+b=c)$ حل نه لري.

بيلګه۹ . ۶ – د لاندې مساواتو څيړنه

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې تیك د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ك.ګ.خ. تکرار شي.

$$121500ab^4c^3 = 2^2 . 3^5 .5^3 .a . b^4 .c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6 .3^2 .5.a^3.b . c$$

$$5400\ a^2b^2c^2 = 2^3 .3^3.5^2.a^2b^2c^2$$

اصلي ماتلاندې لنډ «ا م ل» $= 2^6 . 3^5 .5^3 .a^3b.c^3 = 64.243.124.a^3bc^3$

که مساوات د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي

$$16a^2 \cdot \left(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}\right) - 225b^3c^2 \cdot \left(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}\right) + 120ab^2c \cdot \left(abcx - \frac{1}{ab^2c}\right) = 0.$$

د نوکانو یو له بل څلولو راټول، ترتیبونه او ویشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونویا ضریبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2 \quad , \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفي لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چې مات لاندې یې له څلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅیړو چې مات لاندې یې له زیاتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې په څلونو توټه کیدلي یا تجزیه کیدلی شي.

بیلګه ۹ . ۷ :

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2bx+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4b^2x^2-b^2} - 1$$

تیك د دې نیونو سره صدق کوي: $ab \neq 0$, $|x| \neq 1 / a^2$.

اصلي مات لاندې(ا م ل) په لاندې ډول پیداکوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$
$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$
$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$
$$a^2bx - b = b. \quad (a^2x-1)$$

اصلي ماتلاندی(ا م ل) $= b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a^4x^2 - 1)$

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو(چې يو يا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بندیږي) ، لندونو او خلوونو له لارې لاس ته راځي:

$$a^2 (2bx - 1) + b^2 (a^2 x - 1) = a^2 b^2 x(a^2 x + 1) + b^2 (2ax - 3) - b^2 (a^4 x^2 - 1)$$
$$2a^2 bx - a^2 + a^2 b^2 x - b^2 = a^4 b^2 x^2 + a^2 b^2 x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4 b^2 x^2 + b^2$$
$$2a^2 bx - 2ab^2 x = a^2 - b^2$$
$$2ab (a - b) x = (a + b) (a - b)$$
$$x = \frac{a+b}{2ab}$$

د $b \neq a$ او $ab \neq 0$ لپاره (دا د نیونو له لارې تل پوره دی)

که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$ له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بې له هغو چې په بنستیزو نیونو کې له نیونو د باندې ساتل شوي وي(یعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي). په دې حالت کی د x مطلقه ارزښت د کنونو $a = b$ د په ځتې ارزښت سره نه شي مساوي کیدی.

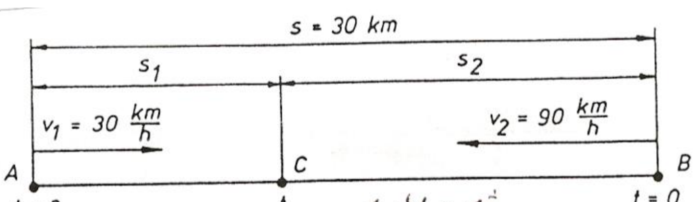
د x لپاره نیول شوې نیونې د حل ورکولو کې باید په پام کې نیول شوي وي؛ دا په دې مانا چې باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq (a+b) / 2ab$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۶ . ۸ : دوه ګاډي تمځایونه A او B یو له بل 30 km لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30 km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکی باندې د B په لور حرکت کوي. دB څخه یو تیز ګاډی D د 90km / h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟

دلته درې فزیکي لویې یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو s , t او v سره وښول شي. ددې شي ځانتیوني لپاره څیره ۶ . ۱ ورکړ شوې.



څېره ۶ . ۱

پوښتنه « چیرته » د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي(د بار کاډي لار s_1) یا د B لریوالي و C څخه (د تیزګاډي D لار s_2) سره وشمیرل شي.

پوښتنه «کله» د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو.

دلته درې مجهولی مخ ته لرو s_2 , s_1 او t . د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باوری ارزښتونو استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\,t \ , \ s_2 = 90\,t \quad , s_1 + s_2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه پریښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو!)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا درې مجهولې s_2 , s_1 او t دی د درې مساواتو سره چې حل به یې په ۶ الف او یا همداسي په برخه ۱۱ کې ورکړشوي وي، مگر دا دومره ساده دې چې د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چې دا مساوات په یوې مجهولې مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولې x په ځای کیدی شي s_2 , s_1 او t وټاکل شي. که ولیکو $s_1 = x$ ، نو د اخري مساوات څخه لاس ته راځي $s_2 = 30 - x$. دا په لمړنیو دوه مساواتو کې ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نو لرو

$$x / 30 = (30 - x) / 90$$

لاینې ټاکنمساوات د x لپاره دي، چې ساده حل کیدی شي:

$$30x = 30 - x\ ,\ 4x = 30$$

$$x = 7{,}5$$

$$s_1 = 7{,}5\ \text{km},\quad s_2 = 22{,}5\ \text{km},\quad t = \frac{7{,}5}{30}\text{h} = \frac{1}{4}\text{h} = 15\,\text{min}.$$

نو باور لري:

که s2=x کيږدو،نو شميرنه په لانې ډول ځغلي يا لاندې لار غوره کوي:

$$s_1 = 30 - x,\quad t = \frac{s_1}{30} = \frac{s_2}{90} = \frac{30 - x}{30} = \frac{x}{90}\ ,$$

$$3\,(30 - x) = x,$$
$$90 = 4x,$$
$$x = 22{,}5,$$
$$s_2 = 22{,}5\ \text{km},\ s_1 = 7{,}5\ \text{km},\quad t = \frac{22{,}5}{90}\ \text{h} = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15\,\text{min}.$$

که بالاخره وخت د نامعلومې په څير وټاکل شي، يعنې x=t ، نو باور لري:

$$s_1 + s_2 = 30x + 90x = 30,$$
$$20\ x = 30,$$
$$x = \frac{30}{120} = \frac{1}{4},\quad t = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15\ \text{min}.$$
$$s_1 = 30\ t = \frac{30}{4}\ \text{km} = 7{,}5\ \text{km},$$
$$s_2 = 90\ t = 22{,}5\ \text{km}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړه ګاډي له ټکي A څخه د 0,25h=15min خوزښت(حرکت) وروسته په 17,5km کې یو بل سره مخامخ کیږي.

۹ . ۲ تمرینونه

۱ . ناکرښیز یا نالاینیز مساوات د یوې مجهولې سره

لاندې مساوات حل کړئ او a او b نتیجه یې د ازمایئ! د مجهولو ضریبونو سره ارزښتونه راوباسئ; چې a او b یې نه شي غوره کولی یا نیولی.

دا ورکړئ چې مساوات د کومو a او b لپاره یواځنی حل لري، حل نه لري او یا ناپای ډېر حلونه لري.

همداسې تلنه طا رویه د نورو مجهولو ضریبونوسره هم وکړئ، چې په نورو برخو کې منځ ته راځي.

۱ . ۱ ـبې له کسرونو یا ماتونو مساوات حل کړئ.

1.1.1. a) $8\left(\frac{1}{2}x-1\right)-2(x-1)=0$

b) $(3-x)(x+4)-9=(3x-4)(8x-9)-(5x-6)^2$

c) $2a(x+3)=(3+x)(5+2a)$

d) $3a-(7b+11a)-(3x-12b-9c)=(3x-8a)+5b-(3c-6x)$

1.1.2. a) $(a-x)(x+c)=2c(a-x)-(b-x)(c-x)$

b) $a(x+1)(ax+b)+b(a+bx)(1-x)=x^2(a-b)(a+b)$

c) $(x+a)(a-x)-b(b-a)=(x+a)(b-x)$

d) $a^2(x-a)+ab^2=b^2(x+b)-a^2b$

۱ . ۲ ـ کسري مساوات په مخرج کې د ټاکلو ضریبونو او فاکتورونو سره .

1.2.1. a) $\frac{3x-16}{3}+\frac{2x-10}{5}=3-\frac{x+1}{15}$ b) $4-\frac{10-3x}{5}=3-\frac{10-7x}{10}+\frac{x}{2}$

c) $\frac{2x+1}{2}+\frac{3x+1}{4}+\frac{5x+1}{8}=1-\frac{7x+1}{8}$ d) $\frac{4x+1}{3}+\frac{6x-1}{2}=5+5\cdot\frac{8x-10}{9}$

1.2.2. a) $\frac{4x-3}{20}-\frac{1}{12}(4x-5)=1-\frac{3}{5}(2x+11)$

b) $3\left(6\frac{1}{2}+x\right)-\frac{7}{3}\left(2x-\frac{19}{2}\right)-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}=0$

c) $\frac{7x-16}{3}-\frac{4}{5}(x+1)+6=\frac{3x}{2}$ d) $\frac{3x}{4}-\frac{4}{3}(x-4)=3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.2.3. a) $\frac{3x-7}{5}-\frac{7-4x}{7}=\frac{5x-11}{10}-\frac{19-10x}{14}$

b) $\frac{17+4x}{10}-\frac{7+x}{5}=\frac{7x+13}{25}-\frac{5+x}{20}$

c) $\frac{2x-11}{15}-\frac{x}{5}+\frac{59}{40}=\frac{8x-59}{30}-\frac{16x-145}{24}$

d) $\frac{4x+4}{5}-\frac{5x-4}{55}=\frac{2x+9}{4}-\frac{12x-3}{44}$

1.2.4. a) $\frac{5x+17}{3}-\left(\frac{3x+8}{2}-3\right)=\frac{3x+12}{2}-\left(\frac{x+4}{6}+3\right)$

b) $2-\left(\frac{3x+8}{4}-\frac{2x+2}{3}\right)=1-\left(\frac{7x+20}{8}-\frac{2x-7}{3}\right)$

c) $\frac{4-x}{2}-\left(\frac{8-x}{3}-\frac{x+2}{4}\right)+\left(\frac{8-x}{6}-\frac{3(2+x)}{8}\right)+x=1$

d) $\frac{10-14x}{8x}-\left(\frac{6}{5}+\frac{4}{2x}\right)=\frac{5}{8x}-\left(\frac{12}{5}+\frac{14x+1}{10x}\right)$

۱ . ۳ – کسري – يا ماتمساوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

1.3.1. a) $\frac{ax-1}{bcx}+\frac{bx-1}{acx}+\frac{cx-1}{abx}=0$ b) $\frac{ax-b}{bcx}+\frac{bx-c}{acx}+\frac{cx-a}{abx}=0$

c) $\frac{3(x-b)}{a}-\frac{2(x-a)}{b}-1=0$ d) $\frac{a-b^2}{x}-\frac{c-b^2}{x}-b=0$

1.3.2. a) $\frac{bx-a}{a}+b=bx-1$ b) $\frac{x-a}{a}-a=\frac{x-b}{b}-b$

c) $\frac{a+b}{x}-a=ab-\frac{a-b}{x}$ d) $\frac{ax^2-bx+1}{a}=\frac{bx^2-ax+1}{b}$

1.3.3. a) $\frac{bx-a^2}{a}+\frac{ax-b^2}{b}=\frac{b-ab}{a}+\frac{a-ab}{b}$

b) $\frac{20a-x}{5a}+\frac{6b-cx}{2b}=10-\frac{9c-ax}{3c}$

c) $\frac{a^3}{b}(x-1)-\frac{b+c}{b}(1-2x)=b^2(1-x)+\frac{b+c}{b}$

d) $\frac{x(b-a)}{ab}+\frac{b(c-x)}{ac}=\frac{x+b}{a}-\left(\frac{b}{c}+\frac{x}{b}\right)$

۱ . ۴ - کسري – يا ماتمساوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.4.1. a) $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{2(x+2)}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2(x+2)}$ b) $\frac{12x+5}{16x-15}-\frac{16x+1}{15}=\frac{3-2x}{5}-\frac{2x-1}{3}$

c) $\frac{10-2x}{3}+\frac{13+2x}{7}=\frac{14x+26}{2x+21}-\frac{17+8x}{21}$

d) $\frac{2x^n+7x^{n-1}}{9}+\frac{7x^n-44x^{n-1}}{5x-14}=\frac{4x^n+27x^{n-1}}{18}$

1.4.2. a) $\frac{8x+7}{9x^2-4}=\frac{16}{15x-10}$ b) $\frac{24-5x}{6-2x}-5=\frac{34-14x}{9-3x}$

c) $\frac{x+4}{12x+4}-\frac{x-4}{3x+1}=5$ d) $\frac{10x-11}{12x+18}=\frac{3}{2}-\frac{4x+1}{6x-9}$

e) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{3x-6}=\frac{1}{6}$ f) $\frac{8-x}{5-10x}=2-\frac{5}{3-6x}$

g) $\frac{12x}{10x+5}+\frac{6x-10}{2x+1}-\frac{2x+25}{12x+6}+\frac{10x-1}{8x+4}=2$

h) $\frac{3x-2}{5x+10}-10=\frac{2x+1}{3x+6}+\frac{2(1-4x)}{x+2}$ i) $\frac{6x-1}{4x-6}+\frac{10x-7}{6x-9}=11-\frac{14x+1}{8x-12}$

j) $\frac{3x}{2x-\frac{1}{2}}-\frac{16x^2}{3(4x-1)}=\frac{4(1-x)}{3}-\frac{4}{12x-3}$

1.4.3. a) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+4}{x-2}=2\frac{x-38}{x^2-4}$ b) $\frac{12}{x+4}-\frac{x+4}{x-4}+\frac{x^2}{x^2-16}=0$

c) $\frac{5x^2-120}{10-x}+\frac{3x^2+80x}{10+x}=\frac{2x^3+160}{100-x^2}$

d) $\frac{15x+2}{5x-2}+\frac{25x-2}{5x+2}=\frac{200x^2-25x+18}{25x^2-4}$

e) $\frac{16x^2-20x+4}{4x^2-16}=\frac{2x-1}{2x-4}+\frac{3(2x+1)}{2(x+2)}$

f) $\frac{7x^2+8}{2(x^2-1)}=\frac{2(x+1)}{x-1}+\frac{3x-4}{2x+2}$

g) $\frac{16x^2-6x}{2x+1}-\frac{6x}{1-2x}=\frac{32x^3-16x^2+4x+16}{4x^2-1}$

۱ . ۴ . ۴ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

a) $\frac{2x-5}{x-5}+\frac{3x-5}{x-9}=\frac{5x^2-39x+30}{x^2-14x+45}$

b) $\frac{2x-9}{x-12}+\frac{x-6}{x-24}=\frac{3x^2-87x-36}{x^2-36x+288}$

c) $\frac{11x+6}{x^2-3x-54}=\frac{3x-14}{2x-18}-\frac{3(x+2)}{2x+12}$

d) $\frac{7x-15}{3x-6}+\frac{8x-21}{3x-3}+\frac{10x+21}{3x^2-9x+6}=5$

e) $\frac{1}{3x+21}+\frac{1}{3(x-5)}-\frac{x+6}{4(x^2+2x-35)}=0$

f) $\frac{136x^2-4x-266}{48x^2-32x+5}=\frac{14x-19}{4x-1}-\frac{8x+25}{12x-5}$

g) $\frac{8x-3}{6x-4}+\frac{6x-4}{10x-6}=\frac{116x^2+10x-34}{60x^2-76x+24}$

۱ . ۴. ۵ -

a) $\frac{5x-12}{2}=\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)}{x+1}-\frac{7x-10}{2x-10}$; b) $\frac{28}{45-7x}=\frac{5}{x-9}-\frac{9}{x-5}$

c) $\frac{x+6}{x-2}+\frac{3x-8}{x-4}=\frac{6(x+9)}{x+6}$ d) $\frac{x-13}{x+3}+\frac{8x+45}{x+5}=\frac{9x+7}{x+2}$

۱ . ۵ – کسري مساوات، چې په مخرج يا مات لاندې کې يې ناټکلي ضريبونه او فکتورونه ورکړ شوي وي.

۱ . ۵ . ۱ –

a) $\frac{2a+x}{2a-x}=\frac{a+b}{a-b}$ b) $\frac{a-b}{2c-x}=\frac{a+b}{2c+x}$

c) $\frac{a}{a-2x}-\frac{b}{b-2x}=0$ d) $\frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}}-\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}}=0$

۱ . ۵ . ۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $\frac{a}{x+b}-1=1+\frac{b}{x+b}$ b) $a-\frac{ax}{x-1}=\frac{1}{a}-\frac{x}{ax-1}$

c) $a+b+\frac{x}{a+b}=a-b+\frac{x}{a-b}$ d) $\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{x}=\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x}$

e) $\frac{x}{ab}+ab=\frac{1}{a+b}+(a+b)x$ f) $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2x}{ab}$

g) $\frac{a+1}{b}x+\frac{b+1}{a}x+\frac{2ab}{a+b}=a+b+1$

1.5.3. a) $\frac{2(6x^2-11a^2)}{4x^2-9a^2}=5-\frac{4x+a}{2x+3a}$ b) $\frac{a}{1-x}-\frac{b}{x+1}=\frac{(a-b)(ab+1)}{1-x^2}$

c) $\frac{2a}{2-x}-\frac{2b}{x+2}=\frac{4(a^2b+ab^2+a-b)}{4-x^2}$

d) $\frac{b-x}{a+x}+\frac{1-x}{a-x}=\frac{a(1-2x)}{a^2-x^2}$ e) $\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

f) $\frac{2a+ab^2x}{a+ab^2x}-\frac{a^2(3-2bx)}{a^2-a^2b^4x^2}=\frac{b^2(2ax-1)}{a^2-a^2b^4x^2}-\frac{ab^2x}{a-ab^2x}$

۱،۶ – کسرمساوات یا ماتبرابرون له دوه کسرونو سره

a) $\frac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}$ b) $\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{x}}-\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+1}$

c) $\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\frac{1}{a}}{x+\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}$ d) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}=\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}$

۱ . ۷ . شي تمرینونه

۱ . ۷ ۱ – که د یوه گڼ څلور څله او ۱۴ زیاتون ۴۰ وي ، نو هغه گڼ کوم دی؟

۱ ۷ . ۲ – که د یوه گڼ څلورڅله او ۴ زیاتون ددې گڼ او ۱۴ زیاتون سره برابر وي ، نو هغه گڼ کوم دی ؟

۱ . ۷ . ۳ – د یوه گڼ څلورمه برخه او پنځه څله ۴۲ گڼ ورکوي ، نو هغه گڼ کوم دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . ۴ – که د یوه ګڼ څلوربرابره څخه ۲ کم شي او په یوه ګڼ وویشل شي چی ۴ تري کم شوی او ۱۱ لاس ته تري راشي، نو دا ګڼ به کوم وي؟

۱ . ۷ . ۵ – د یوه ګڼ پنځه ځله او د ۳ زیاتو دوه ځله لوي دی لکه د د ي ګڼ دري ځله او ۱ کمون. دا ګڼ کوم دی؟

۱ . ۷ . ۶ – د یوه ګڼ څلورځله او ۱۴ کمون نیم دومره لوي دی لکه ددې ګڼ دوه ځل او ۸ . دا ګڼ څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۷ – د یوه ګڼ شپږ ځله او د ۵ کمون یا توپیر چی ددې ګڼ په څلور ځله او ۵ زیاتون وویشل شي، ۱ ور کوي. دا ګڼ څه نومیږي؟

۱. ۷ . ۸ – د یوه مات ماتباندې په ۵ له ماتلاندې کوچنی دی. که ماتباندې په ۲۳ او مات لاندې په ۸ لوي شي، نو د ورکړشوي مات په څېر ارزښت لاس ته تري راځي. دا ګڼ څه نومیږي.

۱ . ۷ . ۹ – ۲۵ داسی په دوه ګڼونو بیل کړی یا تجزیه یا ټوټه کړی، چی د مربع توپیر یی ۱۲۵ شي.

۱ . ۷ . ۱۰ – د دوه ګڼونو توپیر یا کمون ۶ او مربع یی ۱۸۰ دی . ګڼونه څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۱۱ – دوه ګڼونه داسي تناسب کی دي، یا یو بل ته داسي ځانونه نیسی . که دوم په لمړی وویشل شي، نو ۲ لاس ته راځي او پاتی یي ۷ دي. دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۷ . ۱۲ – د دوه ځاینیونکي ګڼ پروت زیاتون ۱۲ دی. که له دې ګڼ ۱۸ کم شي، نو یو دوه ځاینیونکی ګڼ لاس ته راځي، د همغه ځایګڼونو سره مګر په څېر ترتیب سره.

۱ . ۷ . ۱۳ – یو زدکړی غواړي د یوه ګڼ څخه مربع ریښه د یو په بل کی بندولو پرینځیپ یا اصول له لارې پیدا کړي. دی لمړی یو ګڼ د ریښی په څیر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکي، چې مربع يې په ۲۷ کوچنی دی. بيا يوه ريښه ټاکي ، کومه چې دوه له هغه لوي دی چې لمړی ټاکل شوی. ددې ريښې مربع په ۳۳ لوي دی ، هغه ګڼ کوم دی چې مربع ريښه يې غواړو پيدا کړو ؟

۱ . ۷ . ۱۴ – يو د سپورت ملګرو ټولنه له څلورو ډلو جوړه ده. لمړی ډله ۳۷ دملګرو غړي لري، په داسی حال کی چې نورو ډلی 1 / 4 , 1 / 5 په همدې ډول 2 / غړي په بر کی نيسي. د غړو شمير څومره دی او د هرې ډلی څومره دي

۱ . ۷ . ۱۵ – يو نفر په درې ورځو کی مجلی په داسی شمير خرڅوي: په لمړی ورځ 1 / 9، دومه ورځ 1 / 6 او په دريمه ورځ 1 / 4 د مجودو لوټوکه .

دی اوس له هغومجلو د نيمايي دوه کمي د څان سره لري. هغه څومره مجلی د خرڅلاو لپاره لرودې؟

۱ . ۷ . ۱۶ – يوه ميلمه د يوه زدکوونکی څخه د هغه د عمر پوښتنه وکړه. زدکوونکي په ټوکه څواب ورکړ« څما پلار چی درې مياشتی پخوا يی خپله ۵۵ کلنی ولمانځله، څما د عمر څلورواره څخه 1 / 4 زيات زوړ دی.» زدکوونکی څومره عمر لري؟

۱ . ۷ . ۱۷ – د يوه زدکوونکي پلار څلورنيم ځله زوړ دی لکه د هغه څوي. دواړه ۲۷ کاله د هغه د يو اوياکلن نيکه څخه څوان دي، پلار او څوي څومره زاړه دي؟

۱ . ۷ . ۱۸ – په يوه معما کی يو زدکوونکی د ې بل ته وايي:« که زه لما سره بټوه کی پيسو سره ۵،۲ افغانی ور زياتي کړم ، زياتون يی له ۵ سره ځل يا ضرب کړم او له دې ځل څخه ۱۲ کمی کړم او دا لاس ته راغلی کمون يا توپير په 11 وويشم نو نتيجه يی ۸ افغانی ده. » هغه زدکوونکی په خپله بټوه کی څومره پيسی لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . ۱۹ – په يو په بل پسې تړلو مقاومتونو کې لمړی او دوهم يو ډول لوي دي،
دريم دوه ځله او څلورم دريځله دومره لوي دي لکه لمړی دوه ياد شوي
مقامتونه، ټول مقاومت ۱۰۵۰ (اوميګا) ، په دې پروت شپانونك
۱۱۰ ولټه دی. اوس الف) يوګوني مقاومتونه څومره لوي دي، ب
برققوه، برخه مقاومتونه ؟

۱ . ۷.۲۰ – د دوه غبرګ چالان عمومي مقاومت (ماته متأسفانه په افغانسان کی د
فزيك مروج نومونه دې معلوم، خو فکر کوم چې په هدف به پوه شو) دی
a) 1000Ω , b) 2000Ω
يو مقاومت4000Ω دی، هغه بل څومره لوي دی؟

۱ . ۷ . ۲۱ . د دريې غبرك قاومتونو څخه يی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی
او دا دريم يی درېواره دومره لوي دی لکه دوم . هر مقاومت څومره لوي
دی، که عمومي مقاومت a) 12kΩ, b) 300Ω وي؟

. ۲۱ . د درې غبرګو مقاومتونو څخه يی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی
او دا دريم يی درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي
دی، که عمومي مقاومت الف) 12kΩ
ب) 300Ω وي؟

. ۲۲ په اوبو کي يو د لرګي منده بايد څومره لوي وي، چې د لمبيدو استعداد
يی ۷۵۰ نيوټونه وي او د لرګي خاص وزن يا کلکوالی (د فرمول څخه
معلوميږي چی دا څه شی دی) $4\frac{N}{dm^3}$ وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ . ۲۳ د سونگموادو ټانك د دوم ماشين لپاره ۴۰ ليتره گډوډ د سونگ مواد لري.
څومره تيل او څومره بنزين په ټانك كې موجوددي كه گډونه يې وي؟

۷ . ۲۴ د ښار د ښكلا لپاره د ښارمنځ د سرك په اوږدوالي ۸۵ ونې كينول كيږي.
دا چې د مخه خركړ شوې او تل همغه واټن په يوه متر كوچنى شي ، نو په
سرك بيا ۲۰ ونې زياتې كينښول كيدی شي. د دې هرې ونې واټن وبلې ته
څومره لويې دی؟

۷ . ۲۵ د بايسكلځغلونكو ډله له سر څخه ۵۰ متره اوږدوالى لري. هغه ۴۵
كيلومتره په ساعت كې سرعت لري، چې په يوه پله چې اوږدوالى يې
متره دی ، څومره وخت ته ضرورت لري، چې له پله پورې لاړ شي.

۷ . ۲۶ واورومنډه كې ، دا وروستنه وړونكى د پروسبړكلني وړونكى څخه يوه نيمه
دقيقه وروسته په ځغاسته پيل كوي. د څو كيلو متره وروسته دی كړی
چې لمړني ځغليدونكي څخه مخ ته شي، كه د ده منځنى سرعت ۵ متره
ثانيه كې وي او د لمړي ۴ ، ۸ متره په ثانيه كې وي ؟

۷ . ۲۷ د تامنځې د دز سره د سپورت ميله كي ۲۰۰ متره ځغاستى د منډې ډله په
ځغاسته پيل كوي. ځغليدونكى د پيل كربني څخه لس متره شا ته ولاړدي.
برخه نيوونكى په منډه پيل كوي ، چې د تومانچې د ډز كرد وگوري دو
وخت توپير څومره دی، كه غږ رسيدنه په نظر كې ونه نيول شي او د غږ
سرعت ۳۴۰ متره په ثانيه كې وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ کومبیناتوریك - د بینوم جمله

کومبیناتریک څخه په شمیرپوهنه کې د دې لپاره کار خلي، چې یو ګڼ ، پل ځاي بدلو
څومره والبښاې او که څو ګنونهخپل ځاي بدل کړې دا څنګه لیکل کیږي۰ د ځای بدلون
شمیرنه ده
او د هغې ډولونه۰
په ۰ ۱ ۰ ۱ ۱ او ۰ ۱ ۰ ۲ برخو کی به د شمیرپوهنی مرستندوي مواد د بینوم
جملی(۳.۱۰)
برخه(او کومبیناتوریك (۱۰ . ۴ برخه) د فاکولتیت کلیمي او بینومیالکوایفیڅینت
(بینوم ځلوني) پیل شي .

۱۰ . ۱ فاکولتیت Die Fakultät, factorial

پیژند ۱۰ . ۱ :
د !nسومبول (ویل کیږی n « فاکولتیت «) لاندې سرې له1 تر n پورې ګڼونو ضرب
پوهیږي، یعنی $n ! = 1.2....(n-2).(n-1).n$ برسیره پر دې تعریفوو: $0! = 1$

د فاکولتیت له پیژند څخه څرګندیږي، چی $(n+1)! = n!.(n+1)$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه:
په افغاني ادبياتو کی تر هغي چی ماته معلومات شته د فاکولتيت په ځاي فاکتوريال ليکل شوی. ما په دې کتاب کی دا د الماني کليمه يا پښتو ، ځله وونی،، زيات کاره ولی، هيله ده چی تاسو به يی په خپله خوښه وټاکی. په دې کی کومه سهوه منځ ته نه شي راتلی۰

بيلګی :

الف $n!$: د $n = 5$ لپاره په دې ډول دی: $5! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120$

ب : په دې ډول دی : $0!.2!.4! = 1.(1.2).(1.2.3.4) = 48$

پ: په دې ډول دی: $5!/3! = 1.2.3.4.5 / 1.2.3 = 4.5 = 20$

ت : په دې ډول دی

$$(n+2)!/(n-1)! = 1.2.3....(n-1)(n).(n+1).(n+2)/1.2.3...(n-1)$$
$$= n.(n+1).(n+2)$$

ټ: داسی دی

$$2.n! = 2.(1.2....n),$$
$$(2.n)! = 1.2....n.(n+1)....2n.$$

۱۰ . ۲ د بينوم ځلووني يا ضريبونه

پيژند: ۱۰ . ۲

د سيمبول $\binom{n}{k}$ (وييل کيږي n « پر » k لاندې د دوه ځله ونو ويش پوهيدل کيږي چی هر يو k ځله وونی يا ضريبونه يا فاکتورونه لري :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

برسيره پر دې دا هم په کلکه کره کيدلی شي:

$$\binom{0}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{1} = n$$

د k ګڼ یو پیدایښتي یا طبعي ګڼ دی او د ماتلاندي او مات باندې ګڼونو ګڼون یا تعداد ښایي،په مات لاندې کي د لومړیو k پیدایښت یا طبعي ګڼونو فاکتورونه دي. دn ګڼ رییل دی او د مات پورته لومړنی فاکتور دی. دوم فاکتور1 - n ، دریم n-2 تر k –م

فاکتور n-k+1 پورې . دا $\binom{n}{k}$ سومبول د اویلر(leo nard Euler له ۱۷۰۷ - ۱۷۸۳سویسي ګڼپوه، فزیکپوه او استرولوګ) لخوا د لومړي ځل لپاره پیل شو، له دې امله ورته د اویلر سومبول وایي پرتله یا مقایسه برخه ۱۰ . ۳ (. که څوك دیوه

بینوم پوتنځ یا توان شمیري) ۱۰ . ۳ برخه(، نو سیمبول $\binom{n}{k}$ لاس ته راځي چې د یوا-
ځنیو زیاتونونو ځلونه دي، او له دې امله ورته بینوم ضریب یا بینوم ځلهووني ویل کیږي.

بیلګی :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{49}{6} = 13.983.816 \text{ ،} \binom{3}{5} = 0$$

$$\binom{2}{1/3}$$

تعریف نه دی ، ځکه چې 3 / 1 پیدأیښتي یا طبعي ګڼ نه دی.

د بینوم ضریبونو یا ځلونوخویونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ - د n<k ، $n,k \in N$ لپاره باور لري $\binom{n}{k} = 0$

که n یو طبعي ګڼ وي او له k کوچنی وي، نو صفر په ماتباندې کی یوځله وونی

یا ضیرب دی

۲ - د $n > k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اوبیونه (حل): سرِی د !(n-k) سره د مات $\binom{n}{k}$ پراخوالي له امله لاس ته راوړي

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

دا پورته برابرون له $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$ سره ځلوو، نو لاس ته راځي

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

له دې نور لاس ته راځي، که د k په ځاي n - k ولیکل شي

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۳ - باور لري

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

حل (اوبی) : د کښې اړخ زیاتون څخه دا لاندې لاس ته راوړل کیدی شي، که د بینوم ضریبونه یا ځلووني د ماتو په څیر ولیکل شي ، ماتونه ور زیات کړي او د زیاتونون ګډ فاکتورونه چی په ماتباندې کی دی په نوکانو کی ونیسي اوپاتی ساده کړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)+n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)[k+1+n-k]}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!}$$

که په پورته ا افاده یا ویینه کې د مات پورته اخرنی فاکتور د لومړي ځله ووني په څیر ولیکل شي، لاندې بینومیال یا بینوم ځلوونی (ضریب) تعریفوي:

$$\binom{n+1}{k+1}$$

۱۰ . ۳ د بینوم جمله

د بینوم لاندې سرې د دوه توکو (ګنونو) زیاتون پوهیږي. یعني: x+y
د بیونم جمله موږ ته ښايي چی څنګه د یو بینوم

$$(x+y)^n$$

پوتنځ، چی پیدایښتي ګڼ n یی ایکسپوننت یا جکګڼ یا لنډ جګ وي، د زیاتون په څیر پر مخ بیول کیږي. که د x + y بینوم پوتنځ د n = 0,1,2,3,4,5,6 اکسپوننت لپاره شمیرو، نو لاندې نتیجه لاس ته راوړو :
پاسکال دریګوډی

$$(x+y)^0=.....................1$$
$$(x+y)=....................x+y$$
$$(x+y)^2=...............x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3=.............x^3+3x^2x+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4=.........x^4+4xy+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$
$$(x+y)^5=....x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$
$$(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې د زیاتونونو پرمخبیولوکی یو قانونیت لیدل کیږي. د زیاتونو ګڼون(شمیر، تعداد) د بینوم د اکسپوننت څخه په یو لوي دئ . ټول زیاتونی د x او y پوتنخ ځل لري، په داسی ډول چی د x اوy پوتنخ زیاتون په n برابریږي او په دې ډول د x پوتنخ په کمیدلو) د y پوتنخ په زیاتیدلو دx په اکسپوننت په ترتیب پرلپسی

n , n-1, ...1 , 0

د yاکسپوننت په ترتیب 0,1 n-1,n..,دي. د بینوم پوتنخ کوایفځینتونه داسی په نامه پاسکال Blaise Pascal(۱۶۲۳ - ۱۶۶۲ فرانسوي شمرنپوه(ګڼوندریګوډی جوړوي .

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

په دې کی هر ګڼ د دواړو پورته کیڼ-ښي پرتوګڼونوزیاتون دئ، چی بي له کړاو د نورو اکسپوننتویا په جګو n = 7,8, ... لپاره پرمخ بیول کیدی شي. د ډیرو لویو اکسپوننتو n لپاره بیا هم دالار له کړاو ډکه ده لیونارد اویلرLeonhard Euler د کومبیناتوریك فکرونو کی د کوایفیځینتونو یووني یا یوونوالي یا بهتره یوونوالیز ستروکتورونه یا جوړښتونه وپیژندل. په n -م n (د بینوم جګ یا اکسپوننت (لیکه اوK- م ځای، n ,.... , 1 , 0 = k کی ولاړ ضریب دفورم څخه دئ) له کومه امله چی په ۱۰ . ۲ برخه کی د اویلر سومبول په نوم داسی بلل شوي د بینوم ضریب په

ځیر رامنځ ته شو)که د پاسکال ګڼونو دریګوډئ د اویلر سومبول استعمال په ځیرولیکل شي نو لاس ته راځي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\binom{0}{0}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

$$\ldots\ldots\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

$$\ldots\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$

داویلر سومبول کی د فاکتور پرځاي ، چې ګڼونه دی ، سومبول $\binom{n}{k}$ لیکل کیږي.

یادونه : ما کله a,b او کله بیا x,y لیکلي، دا په یو ډول لیکنه ښکلې ښکاریږي، خو زه کله کله داسې ستونځې لرم .

په ۱۰ . ۲ برخه کی د بینومیالکوایفیڅینت لپاره ښوول شوو خویونو۲ په بنسټ د پاسکال دریکوډي منځنی محور ته سیومتري پراته کوایفیڅینته سره مساوي دي. داچی هر کو- ایفیڅینت ورباندې پورته کوایفیڅینتونو زیاتون سره مساوي دی په ۳ کی وښوول شو) د تمرین وظیفه ۱۰ . ۴ دې هم ورسره پر تله) مقایسه(شي) د اویلر سیمبول په استعمال

د یوه بینوم $(a+b)^n$ د پوتنځ د زیاتون پرمختک د یوه طبیعي ګڼ n لپاره په لاندې ډول لیکلو ته اجازه راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۱ (د بينوم جمله)

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

اوبونه (حل): د پوره ايندكشن له لارې:

د ايندوكشن پيل : (n = 0)

$$(a+b)^{k+1}=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\binom{k+1}{1}a^kb+\binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2+\ldots+\binom{k+1}{k}ab^n+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^0=\binom{0}{0}a^0=1$$

د ايندكشن نيونه : (n = k)

$$(a+b)^k=\binom{k}{0}a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\binom{k}{2}a^{k-2}b^2+\ldots+\binom{k}{k-1}ab^{n-1}+\binom{k}{k}b^k$$

د اندكشن غوښتنه: (n = k + 1)

$$(a+b)^{k+1}=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\binom{k+1}{1}a^kb+\binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2+\ldots+\binom{k+1}{k}ab^n$$

$$+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

دايندكشن ښوونه:

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)^k(a+b)$$

$$=\binom{k}{0}a^{k+1}+\binom{k}{1}a^kb+\binom{k}{2}a^{k-1}b^2+\ldots+\binom{k}{k}ab^k$$

$$+\binom{k}{0}a^{k+1}b+\binom{k}{1}a^{k-1}b^2+\binom{k}{2}a^{k-2}b^3+\ldots+\binom{k}{k-1}ab^k++\binom{k}{k}b^{k+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که يو د بل سره (يو د بل لاندې په څنګ يا کرږې پرتی) برابر پوتنځ يا توان څلونه د اويلر فرمول يا سومبول د زياتونخويونو د استعمال له لارې سره راټول (يوځاي) شي

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

$$\binom{k}{1}+\binom{k}{0}=\binom{k+1}{1},\binom{k}{2}+\binom{k}{1}=\binom{k+1}{2},\ldots,\binom{k}{k}+\binom{k}{k-1}=\binom{k+1}{k}$$

لومړي او اخر زياتون ضريبونه وليکل شي نو غوښتل شوې اړيکی لاس ته راځي

$$\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0},\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}$$

د (a-b)=a+(-b) له امله د بينوم له جملی د يوه n -م پوتنځ دکمون څخه لاس ته راځي

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots \pm \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}(-b)^i$$

بيلګې:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2(-y) + \binom{3}{2}x(-y)^2 + \binom{3}{3}(-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

۱۰ . ۴ کومبيناتوريك:

کومبيناتوريك د يوې ډيرۍ د پای غړو يوځای درولو يا راوړلو ترتيب قوانينو سره سر او کارلري. کيدی شي د ټولو غړو يا يوې برخي يوځاييولو په څير راوړل شي، په يوځاييولو کی کيدی شي د غړو ترتيب يو رول ولوبوي او يا هم نه، او همدارنګه په راټوځاييولو کی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي د غړو تکرار راشی او يا هم نه. له دې امله د يوځاييولو يا ټولګی دريږ ډولونه توپيروو(Komplexion هم ورته وايي)، په نامه پرموتيشن، واريیشن، کمبينيشن (Permutation, Variation, Kmobination) کوم چی په لاندې برخو کی يو په بل پسی څيړل کيږي او په اخرنی جدول کی به ليديدونکی څرګند شي يا ليدوړو ښوول شي

۱۰ . ۰ ٤ . ۱۱ **پرموتيشن** Permutare

(لاتين: ..سره بدلول، دلته دا اصلاً ځاي بدلون دی. لنډ: بدلون)

پيژند ۱۰ . ۳ :

د n غړو يو پرموتيشن (ځاي بدلون)بې له تکرار داسی »يوځاي درول« دي، په کوم کی

چي n غړي په يوه د زړه پورې ترتيب کی څنګ په څنګ ولاړ وي. د n غړو مختلفه ترتيبونه

تل د مختلفو پرموتيشنونو يا ځايبدلونونو په مانا ده

بيلګی:

۱ - د دوه غړو پرموتيشن

الف : 1 2 دی 12 21

ب : a , m دی am ma

۲ - د درې غړو پرموتيشنونه

الف : ۱ ، ۲ ، ۳ دي:

۱۲۳ ۲۱۳ ۳۱۲

۱۳۲ ۲۳۱ ۳۲۱

ب : a,m,s دی:

ams mas sam

asm msa sma

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ ـ د څلور غړو پرموتیشنونه

الف : 1,2,3,4 دي:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

دا پورته پرموتیشنونه له پورته وکښته لور ته لیکسیکایي ترتیب دي، دې ته به د کرانو لوستونکو پام وي، وروسته هم همداسی دي، که دا توري وي او که ګڼونه ۰ په ګڼونو کی پیداینټي ده، چې د پښتو لیکسیکایي ترتیب پچه [ام کی نیول شوی۰له ښي لور کښته بیا بیرته ګین لور خوزښت دی۰

ب : a,m,s,u دي:له کښ کښته لور ته بیا بیرته پورته

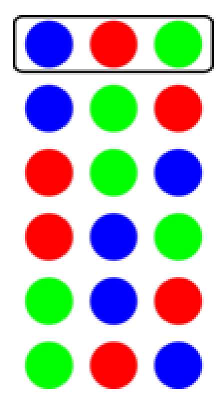
amsu	masu	samu	uams
amus	maus	saum	uasm
asmu	msau	smau	umas
asum	msua	smua	umsa
aums	muas	suam	usam
ausm	musa	suma	usma

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ (ا ت ج ګ دي:دلته طبعاً له ښي وکیڼ لورته ترتیبیږي(

اتجګ	تاجګ	جاتګ	ګاتج
اتګج	تاګج	جاګت	ګاجت
اجتګ	تجاګ	جتاګ	ګتاج
اجګت	تجګا	جتګا	ګتجا
اګتج	تګاج	جګات	ګجات
اګجت	تګجا	جګتا	ګجتا

د ټولو پرموتیشنونود لیکلو لپاره مرستندوی مواد، د بیلګی په ډول له څلورو غړو څخه د ۲۴ پرموتیشنونو، لیکسیکني ترتیب، دا په دې مانا چی د لیکسکا لغاتو ترتیب ته »کتِ مټ« (ورته) دی، چی د غړو پیدایښتي لړی مخته پرته وي (په تورو، په ګڼونوکتطبعی یو په بل پسي). دبیلګي په توګه د غړو a , m , s , u ۲۴ پرموتیشنونه په لکسیکا ترتیب ورکړ شوي. د دې غړو) یا تورو(جوړ شوي پرموتیشنونه) لغاتونه(maus همدا رنګه saum په دې ترتیب کی ۸ -ام همدا ډول په ۱۴ -ام ځاي کی ولاړ دي. همدا ډول په پ (کی د څلورو تورو ا ، ت ، ج ، ګ پرموتیشن ورکړ شوی چی ۸ -۱م ځا ي کی یي تاګج ولاړ او په ۱۵ – م ځای کی یي جتاګ ولاړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته درې غونډارو لپاره نظم یا ترتیب ۲ ۰ ۳ = ٦ دی۰

که لیکو ، چې 1.2.3.4.5.6نو ددې پرځاي لیکو :$6! = 720$

جمله ۱۰ . ۲ :

د پرموتیشنونو Pn ګڼون (شمیر یا تعداد) ، د n یوله بل مختلفو غړو، په لاندې

ډول دی : $n = Pn!$

اوښونه : د پوره ایندکشن له لارې :

داپندکشن پیل : $(n = 1):\quad P_1 = 1! = 1$

د ایدکشن نیونه : $(n = k):\quad P_k = k!$

د ایندکشن غوښتنه : $(n = k+1):\quad P_{k+1} = (k+1)!$

د ایندکشن ښوونه : k غړو ته په k! پرموتیشنونو کی د ځل په څیر یو(k+1) -ام غړی راځي. دا (k+1) - ام غړی کیدی شي له لومړې تر (k+1) - ام ځاي پورې ودریږي، داسی چی د (k+1) -ام غړي ورنیولو د هر k غړو پرموتیشن k+1 پرموتیشنونه د k+1 غړو پرموتیشنونه شي. له دې امله باور لري

$$P_{k+1} = P_k\,(k+1) = k!(k+1) = (k+1)!$$

بیلګه :

په څومره مختلفو لړیو پرلپسی (دا مړضوع په ۱۸ برخه کې کتلی شئ) کی لس زدکوونکی په یوه لیست کی خپل نومونه لیکلی شي ؟

اوبی یا حل : $P_{10} = 10! = 3628800$ ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۰ . ۴ :

هر د k غړو ترتیبونه، د کومو څخه چی i-ام غړی ni - ځله رامنځ ته کیږي، د i = 1 , 2 , ... ,k لپاره، نو پرموتیشن د تکرار) د تکرارسره پرموتیشن(سره نومیږي . د غړو شمیر په پرموتیشن کی بیا داسی دئ $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$

بیلګی :

۱ - د دوه غړو a , b پرموتیشن په کوم کی چی غړی a یو ځل او غړی b دوه ځله رامنځ ته کیږي،

$(k = 2; n_1 = 1; n_2 = 2; n = n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3)$

په دي ډول دی: abb bab bba

۲ - د غړو a , b پرموتیشن، په کوم کی چی a دوه ځله، غړی b دري ځله رامنځ ته کیږي $(k = 2; n_1 = 2; n_2 = 3; n = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5)$ په لاندې ډول دی

abbba	abbab	ababb	aabbb
	babba	babab	baabb
	bbbaaa	bbaba	bbaab

جمله ۱۰ . ۳ : د k غړو د پرموتیشن ګنون یا تعداد $P_n^{(n_1,n_2,...,n_k)}$ ، له کومو چی i-ام غړی ni -ځله رامنځ ته کیږي ، په لاندې ډ ول دی:

$$P_n^{(n_1,n_2,...,n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$$

حلونه یا اوبیونه: که په پرموتیشن کی n = n1 + n2 + ...+ nk (دلته دې ګنونه دn ایندکس کې ومنل شي) غړو یو له بل توپیر لرودی (مختلف وي) ، نو n! پرموتیشنونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به موجود وی، که i - ام غړی ni -ځله رامنځ ته شي، داچی د ni غړو لپاره ni!
پرموتيشنونه موجود دي، نو ni پرموتيشنونه د يوه پرموتيشن په ځير رايو ځاي کيږي،

دا په دې مانا چی د!n شمير په $n_i!$ بايد وويشل شي (i = 1 . ..., k)

بيلګی :

۱ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتيشن، په کوم کی چی لومړی (n_1-1)- ځله او دويم (n_1-2)- ځله رامنځ ته کيږي، دی:

$$P_3^{(1,2)} = \frac{(1+2)!}{1!2!} = \frac{3!}{1!.2!} = 3$$

۲ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتيشن، په کومو کی چی لومړی (n1=2) -ځله او دويم (n2 = 3) -ځله رامنځ ته شي، دی

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$$

۱۰ . ۴ . ۲ واريیشن اوښتنه يا بدليدنه Variation :

تعريف ۱۰ . ۵:

د n غړو واريشن (بدليدنه يا اووښتنه Variation) لاتين(بدلونه اووښتنه تغيرونه يا بيا تغيرونه) و k -ام ټولګي ته(وهرې k ټوټی ته، $n \le k$) هر له k غړو يوځانکول (نوځاي درول، يوځاي ليکل) دی، کوم چی د n غړو د لړی پرلپسی په نظر کی نيولو سره جوړيږي..

بيلګي:

۱ - د درې غړوa,b,c واريیشن و دويم ټولګي ته دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

ab	ba	ca
ac	bc	cb

۲ - د څلورو غړو d , a , b , c واریيشنونه و ۲ - م ټولګي ته دي:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

د څلورو غړو d , a , b , c واریيشنونه و ۳ - ۱م ټولګي ته دې

dab	cab	bac	abc
dac	cad	bad	abd
dba	cba	bca	acb
dbc	cbd	bcd	acd
dca	cda	bda	adb
dcb	cdb	bdc	adc

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3 ,4, 5 واریيشنونه و ۲ - ۱م ټولګي ته دي

51	41	31	21	12
52	42	32	23	13
53	43	34	24	14
54	45	35	25	15

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو واريشنونه و n -ام تولګي ته د n غړو پرموتيشن سره يو شی يا براابر کيږي

جمله ۱۰ ۰ ٤ :

د n غړو و k -ام تولګي ته د واريشنونو ګڼون (تعداد) $V_n^{(k)}$ دی :

$$V_n^{(k)} = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اوبنونه : د مکلمل (پوره يا بشپړ ايندکشن له لارې) ايندکشن په k اړه لري، n ځاي په

ځاي دی يا ځاي په ځاي کلك ولاړ دی

ايندکشن پيل :(k = 1)

$$V_n^{(1)} = n!/(n-1)! = n$$

تيك (صحيح) دی ، ځکه چی له n غړوکيدی چی له يوه غړی جوړ واريشنونه جوړکړی شي.

ايندکشن نيونه : (k = k0) :

$$V_n^{(k_0)} = n!/(n-k_0)!$$

ايندکشن غوښتنه(ثبوت:):(k0 +1 = k)

$$V_n^{(k_0+1)} = n!/(n-k_0-1)!$$

دايندکشن ښوونه : د k0 - م درجی هر واريیشن لپاره، په

دې واريیشن کی نه رامنځ ته کيدونکو پاتی n - k0

غړو شمير دی .که په ترتيب يو له دې n - k0 غړو د دې k -م تولګی واريشنونو $V_n^{(k)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرکی ځاي په ځاي شي، نو له دې یو دk+1 تولګي n - k0 واریشنونه لاس ته راځي، او که دا کار په ټولو واریشنونو $v_n^{(k)}$ وشي، نولاندې واریشنونه لاس ته راځي:

$$\frac{n!}{(n-k_0)!}(n-k_0)=\frac{n!}{(n-k_0-1)!}$$

(که چیرې یود n - k0 غړو ورزیات په یو بل ځای کیښوولی وی، نو یودk+1 ټولګي واریښن به یی لاس ته راوړی وی، کوم چی همدا اوس موجود دی. دا سړی په بیلګه ۲ (k =3 n = 4, k = 2 , (باندې لیدوړ کولی شي)

بیلګي:

۱ - د درې غړو واریښنونو شمیر و دوم ټولګي ته دی : $v_3^{(2)}=\frac{3!}{(3-2)!}=6$

۲ - د څلور غړو واریښنونو شمیر و دوم ټولکی ته دی: $v_4^{(2)}=\frac{4!}{(4-2)!}=12$

د څلور غړو واریښنونو شمیر ودریم ټولګي ته دی: $v_4^{(3)}=\frac{4!}{(4-3)!}=24$

۳ - د پنځه غړو واریښنونو شمیر ودوم ټولګي ته دی: $v_5^{(2)}=\frac{5!}{(5-2)!}=20$

پیژند ۱۰ . ۶ :

د n غړو واریښنونه و k - ام ټولګي ته په کوم کی چی یوګونی غړي تر k-ځله تکرار وي نو واریښنونه د تکرار سره نومیږي یا بلل کیږي.

بیلګی: ۱ - د درې غړو a , b , c واریښنونه و دوم ټولګي د تکرار سره دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

ca ba aa

cb bb ab

cc ba ac

۲ - څلور غړو a , d , c , b د دويم تېولګی واريېشنونه د تكرار سره دي:aa

da ca ba

db cb bb ab

dc cc bc ac

dd cd bd ad

۳ - د درې غړو 1 , 2 , 3 د دريم تېولګي واريېشنونه دي(دا لاندې ولاړ ترتيب له كيڼ وښي لور ته دی، خو په لاندې كې په څټ شوی)

311 211 111
312 212 112
313 213 113

321 221 121

322 222 122

323 223 123

331 231 131

332 232 132

333 233 133

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۵ : د n غړو د k -ام تپولګي د واریيشنونو شمیر $V_{W_n}^{(k)}$

$V_{W_n}^{(k)} = n^k$ د تکرار سره دی: $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

حل)اوبی): په k د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندکشن پیل (k = 1) :

د $V_{W_n}^{(1)} = n^1$ لپاره صحیح دی، ځکه چی له n غړو څخه n واریيشنونه،چی هر یوله یوه غړي جوړ دی، جوړیږي.

د ایندکشن نیونه (k0 = k) : $V_{W_n}^{(k_0)} = n^{k_0}$

د ایندکشن غوښتنه (k0+ 1 = k): $V_{W_n}^{(k_0+1)} = n^{k_0+1}$

د ایندکشن ښوونه : د (k0 + 1) -ام درجی واریيشنونه د nk واریيشنونو چی k0 – امه درجه واریيشنونو څخه لاس ته راځي، په کوم کی چی له دوي هر یو په ترتیب د n غړو اخر ته یو ور واچوي یا ورزیات (علاوه) کړي (یادونه دې، چی په واریشنونو بی له تکرار شوې ، وکتل شي) .

له دې امله د دې شمیر $n^{k_0}.n = n^{k+1}$ واریيشنونه دی.

بیلګي :

۱ - د درې غړو و دوم تپولګي ته د واریيشنونوشمیر له تکرار سره دی

$V_{W_3}^{(2)} = 3^2 = 9$

۲ - د څلور غړو و دوم تپولګی ته د واریيشنونو شمیر له تکرار سره دی

$V_{W_4}^{(2)} = 4^2 = 16$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د درې غړو و دريم ټولګي ته ض واريیشنونو شمير له تکرار سره دی

$$V_{W_3}^{(3)} = 3^2 = 27$$

۴ - د مورس نخښه (Morsezeichen) له دوه غړو ، ټکی او لنډې کربښی يوځای کيږي.

د يوه ، دوه درې او څلورو غړو جوړه نخښنو شمير دئ

$$V_{W_2}^{(1)} + V_{W_2}^{(2)} + V_{W_2}^{(3)} + V_{W_2}^{(4)} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

۱۰ . ۴ . ۳ کمبينيشن (Kombination (لاتين: يو بل سره تړل)

تعريف ۱۰ . ۷ :

د n غړو و k-ام ټولګي ته (n > k) يو کمبنيشن هغه دئ چی هر يو له k غړو يوځاي دروولو څخه ، کوم چی له n غړو، بی د غړو له نظم په پام کی نيولو سره، جوړوي.

کمبينيشن له واريیشن منځ ته راځي، که چيری نظم په پام کی ونه نيول شي.

بيلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دوم ټولګي ته کمبينيشن په لاندې ډول دئ:

ac bc

۰۰۰۰۰ ac

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دوم ټولګي ته کمبينيشن په لاندې ډل دی

ab bc cd

۰۰۰۰۰ ac bd

۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ad

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې څلو غړو ودریم ټولګي ته کمبینیشنونه په لاندې ډول دي:

abc bcd

acd

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3, 4 , 5 و دریم ټولګي ته کمبینیشنونه په لاندې ډول دي(لاندی هم باید له کېڼ لاندې لورته په ښیی لور لیکل شوي وی)

123 234 345

124 235

125 245

134

135

145

جمله ۱۰ . ۶ : د n غړو و k -م ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی $C_n^{(k)}$

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$$

اوبی (حل): د n غړو و k-ام ټولګي ته د اوریيشنونو شمیر دی:

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{n-k}$$

کمبینیشنونه له واریيشنونو په دې توپیریږي، چی ترتیب په نظر کی نه نیول کیږي، دا بیا دا مانا لري چی ټول د k غړو k! پرموتیشنونه په یو کمبینیشن کی یوه ته یوځاي کیږي

له دې امله لرو :. $C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \binom{n}{k}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی :

۱ - و دوم ټولګي ته د درې غړو کمبینشنونو شمیریا ګڼون دی

$$C_3^{(2)} = \binom{3}{2} = 3$$

۲ - و څلورم ټولګي ته د څلور غړو کمبینیشنونو شمیر دی‌د څلورو غړو و دریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(2)} = \binom{4}{2} = 6$$

۳ - د پنځه غړو ودریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(3)} = \binom{4}{3} = 4$$

۴ - په لاتري (۶ له ۴۹ څخه) د امکاناتو لپاره شمیر دی

الف (یو شپږ $C_{49}^{(6)} = \binom{49}{6} = 13983816$

ب : یو څلور $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

۶ تیپ عددونه د یوه ۴ عددونوګروپ څخه بوځاي کیږي، چی له ایستل شوو شپږ عددونو (۴ تیک یا صحیح) او دوه عددونه(۲ پاتی عددونه) دي .

پیژند ۱۰ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو و k-ام ټولګي ته کمبینیشن، په کوم چی یواځني غړي k - ځله تکراروي، کمبینیشنونه د تکرار سره نومیږي.

بیلګي:

۱ - د درې غړوc , b , a و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینشنونه دي.

aa ....

bb ab ......

cc bc ac

۲ - د ځلور غړو c , b , a , d و دویم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي

aa ....

bb ab ....

cc bc ac ....

dd cd bd ad

۳- د درې غړو 1 , 2 , 3 و دریم ټولګي ته د تکرار سره کمبینیشنونه دي(لاندي لیکنه باید له کینې لور پیل وی، خو دلته له ښی لور پیل شوی وکینې لور ته)

331 221 111

332 222 112

333 223 113

123

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۷ : د n غړو و k - ام ټولګي ته د تکرار سره د کمبینیشنونو شمیر یا ګڼون دی:

$$C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

دلته دې له ښوونی(چی په kد پوره ایندکشن له لار ې صورت نیسی) تیر شو.

بېلګې: ۱ - د درې غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(2)} = \binom{3+2-1}{2} = 6$$

۲ - دڅلورو غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_4}^{(2)} = \binom{4+2-1}{2} = 10$$

۳ - د درې غړو و دریم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(3)} = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

۴ - د څلورو مکعبونو ، چې اړخونه یې د یوه تر شپږ نخښنه وي . (نخښه شپږ اړخیز ممکن مختلف اچول ، په دې مانا چې کومې سترګې سره لویږي لاندې دي.

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۱۰ . ۴ . ۴ د برموتییشن،وارییشن،کمبینیشن ټولګه

دااا	د په پا یوې برخی راټولونه م کی نیولو شوو غړو		د ټولو په پام کی نیول شوو غړو راټولونه یا ټولګه
	له نظم تیریدنه	نظم په پام کی نیونه	
	کمبینیشن	وارییشن	پرموتیشن
د ټول غړي یوله بل توپیر لري	د n غړو کمبینیشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$	د n غړو وارییشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$	دn غړو پرموتیشن شمیر یا ګڼون $P_n = n!$
له تکرار سره	د n غړو دکمبینیشن شمیر وk -ام ټولګي د تکرار سره $C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$	د n غړوواریيشن شمیر د تکرار سره $V_{W_n}^{(k)} = n^k$	د k غړو پرموتیشن د ni غړو سره په k -م ګروپ کی $P_n^{(n_1,n_2,\dots n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ . ۵ تمرینونه

۱ – لاندې فاکولتی وشمیرئ

الف) $7!$ ، ب) $3!.5!$ ، پ) $6! / 4!.10!$

۲ – لاندې ویشونه ساده کړئ

a) $(n+1)! / (n-2)!$ b) $(2n)! / n!$ c) $n! / 2n!$

۳ – لاندې افادې وشمیرئ!

a) $\binom{6}{4}$ b) $\binom{1,5}{3}$ c) $\binom{-1}{6}$ d) $\binom{4}{1}$ e) $\binom{4}{0}$

f) $\binom{8}{8}$ g) $\binom{5}{4}\cdot 4!$ h) $\binom{7}{6}\cdot 3!$ i) $\binom{6}{7}\cdot 3!$ j) $\dfrac{\binom{7}{6}}{3!}$

۴ – لاندې زیاتونونه وشمیرئ!

a) $\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$ b) $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}$ c) $\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$

d) $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}$ e) $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$ f) $\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

۵ – لاندې افادې د بینوم د فرمول کارونی (استعمال) په بنسټ وګڼئ!

a) $(x+y)^7$ b) $(a-6)^6$ c) $(5a+4y)^3$

d) $(x/2 - y/3)^4$ e) $(2\ \ a+3\ \ b)^2$ f) $(x^2+y^2)^3$

۶ – لاندې افادې ساده کړئ!

a) $(-1+a)^2-(1-a)^2$ b) $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$

c) $(\ \ ab-1)(-a-\ \ ab)+ab$

۷ – د بینوم په یو خل یی بیل (تجزیه) کړئ!

a) $25a^2+10\,ab+b^2$ b) $(49a^2-42a+9$

c) $169a^2-130\,ab+25b^2$ d) $2x+2.\ \ 6xy+3y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ – الف) د غړو ۱ ، ۲، ۳ ، ۴ پرموتیشنونه په لکسیکوگرافي نظم ولیکئ!
ب) د a,e,f,h,n پرموتیشنونو په څو ځایونو کی« fahne » او «hafen » ولاړ دي؟ دا الماني کلیمي دي چی دپښتو اړونه یی « بیرغ» او« بندر» دي.

۹ – الف) په څو ځایترتیب یا تنظیم کیدی شي ، شپږ کسه ځاي ونیسی؟
ب) څومره پنځۀ ځیفري ګڼونه د پنځه ځیفرونو4, 3, 2, 1, 0 سره کیدی شي ولیکل شي، که هغه ګڼونه چی په صفر پیل کیږي ونه لیکل شي ؟
پ) د غړوa,b,c,d,f څومره پرموتیشنونه په c ، په de ، په cdef پیل کیږي؟

۱۰ – الف) د غړو a , b , c ټول پرموتیشنونه ولیکئ، په کومو کي چي a او b هره یوځل، غړی c دوه ځله رامنځ ته کیږي.
ب) د دې پرموتیشنونو ګڼون یا شمیر وګڼئ!

۱۱ – څومره تنظیم شوي جوړې د الفبا د۲۶ (لاتین توري) تورو څخه جوړیدلی شي ؟

۱۲ – د څلورم ټولګي څومره مختلف وارییشنونه د
الف) بې له تکرار
ب) له تکرار سره د غړو 8 , 6 , 4, 2, 0 موجود دي؟
۱۳ – یوه سوری کارت له ۸۰ سوریدرځونو چي هریو لس سوري لري، جوړ دی. څومره د سوریو یوځایلیکل ممکن دي، که هر درځ ټیك یو ځل سوری شي؟
۱۴ – له شپږ غړو جوړ کمبینیشن ګڼون و څلورم ټولګي ته او پنځم ټولګي ته څومره لوي دي،
الف) بې له تکرار
ب) له تکرار سره؟
۱۵ – یادونه : دا د کارتو لوبولپاره تمرین نه دی لیکل شوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۶ – څومره مختلفی ازمایینی ممکن دي که په یوه تولید کی له هر ۲۰ یوه وازمایل شي؟

۱۷ – په موټرو ترافیك نخښی په لاندې توګه یوځای شوی : یوه د ځای نښونه ډله د نخښی الف بی پسی څلور ګروپ یا ډله راځي، چی له ځیفرونو ۰ تر ۹ څخه جوړ وي. د یوې کره ټاکلی الف بی پیژندنښی یا ترافیکی نخښی ممکن دي؟

۱۸ – د مختلفو اندازو او د خاممرادو جوړ نلونه ، د رنګونی له لارې یو له بل توپیریدی شي ، که څلور رنګ نښونی ولرو؟

۱۹ – د منډې یوه میچ په اخرکی شپږ پاتی منډې وهونکی برخه اخلي. د منډو څومره امکانات موجود دي؟

۲۰ – په څومره ډوله

الف) اته مختلفی مرغلرې،

ب) درې سرې، څلور شنی، یوه زرغونه مرغلره

ترتیبیدلی شي؟

۲۱ – څومره تلفونونه کیدی شي وټړل شي کی یواځي پنځه ځایزه نمره موجود وي؟ څومره تلفون ټړل ممکن دي که تلفون نمرې شپږځایزې وي او په 0 پیلکیدنه یی اجازه ونه لري؟

۲۲ – د درې شپږسترګیو (یا –اړخیزو) سره (څیره مکعب دی اومخونه له یوې تر شپږ سترګو باندې په نخښه دي، ماته یي د پښتو نوم نه راځي او االماني یی Würfel دی) څومره مختلفی اچونی ممکن دي، چی ټولې شپږسترګي مختلفې سترګې ګڼون وښايي؟

څومره مختلفې اچونې له درې شپږسترګیو سره ممکن دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ کرښیز-، خطي – یا لاینیز الجبر

یادونه : د لته دې هم د هرڅه له مخه بیا دې ته ګوته نیول شوي وي ، چې څه به تکرار وي، خو هغه لاتین متل دی، چې » تکرار د زدکړې مور ده .«
لاندې مخ ته پرته اصلي برخه دm برابرونونو ځوابونو ته چې n اووښتونې یا مجهولی یا ناپیژندونکی لري، وقف ده، چیرته چې m د برابرونونو ګڼون یا تعداد n د ناپیژندونکو یا مجهولو ګڼون (تعداد) سره برابر او همدا ډول لوي او یا کوچنی کیدی شي
په ۱۱ . ۱ برخه کی د دوه ناپیژندونکو یا مجهولو سره د برابرونونو سیستمونه تر څیړنی لاندې نیول کیږي، چې د ښوونځي شمیرپوهنی تکرار دی، مګر دلته د برابرونونو سیستمونه د ناټاکلوځلونو یا ضریبونو یا فاکتورونو سره هم راوړل کیږي، چې د حالتونو توپیریدنه یي اړیینه ده۰
دا راوړنی به په ۱۱ . ۲ برخه کی درې ناپیژندونکو یا نامعلومو او په ۱۱ . ۳ برخه کی په خوښه زیاتوناپیژندونکو ته وغزیږي، په ټولو برخو کی پل په پل د دیترمینانت کلیمه او د ګاوس الګوریتم د کار ډګر ته را اچول کیږي .
په ۱۱ . ۴ برخه د هوموجینو برابرونونو سیستم ځانګړي ځوابونه په بر کی نیسي۰
یادونه : ولې لاینیز برابرونونه او نه کریز یا بندکرښیز یا خطی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ د برابرونونو له څيرې پوهيږو، چۀ دا يوه کرښه ورکوي، چې لاتين يا کۀ غواړئ انګريزي يې لاين نوموليـ۰ د کرښو اوبندکرښو نومونه هم شته، خو د دې لپاره، چې د نورو درسي منځپانګې سره يې توپير وي،نو موږ هم ورته له دې امله لاينيز وايو۰

۱۱ . ۱ . لاينيز برابرون د دوه ناپيژندونکو سره

داسې يو مساوات د دوه ناپيژندونکو سرهکيدي چې په لاندې ډول انځور شي

$$ax + by = c \qquad (11.1)$$

دلته کيدی شي چې ناپيژندونکی لويي x او y په خوښه رييل ګڼونه وي چې يو له بل سره په ورکړ شوي بڼه تړلي. يا په بل عبارت : x او y واريابلی(اووښتونکی يا لنډ: اووښتوني) دي، برابرون (۱۱ . ۱) لاينيز فنکشن(بلواك) برابرون په ګوته کوي چې د هغي څيره په y,x کواوردينات کی ناپای کرښه ده(۱۶ - امه برخه دی وکتل شي)
ځانګړی حالت : a = 0 يا b = 0 په ځانګړې توګه کرښه انځوروي يا په ګوته کوي چې د y - محوراو همداسی د x - محور سره غبرګه د ه .
که دا (۱ . ۱۱) برابرون د دواړو نايژندونکو يا مجوهولو x اوy لپاره ټاکنمساوات يا ټاکنبرابرون ونيول شي، نو دا پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ددې مسئلی د حل (اوبی) لاندې به څه پوهيدل غوښتونکی وي.
د (.۱۱ ۰ ۱) برابرون اوبيونه په څرګند ډول د ټولو ارزښتجوړو (x ,y) ډيری ده، چې(۱۱.۱) برابرون پوره کوي. که اصلي حالت a , b |= 0 ته پام وکړو نو برابرون (۱ . ۱۱) د y په لور داسی ځوابوو.

$$y = - (a/b)\, x + c/b \qquad (11.2)$$

کيدی شي چې x په خوښه وټاکل شي اوy له (۲ . ۱۱) برابرون څخه لاس ته راولو. ګورو چې ناپاي ډيرې اوبيوني يا حلونه لاس ته راځی يعني د اوبيوني ډيری يا اوبيډيری L په لاندې ډول ده

$$L = \{ (x, y) \mid y = - (a/b)\, x + c/b \} \qquad (11.3)$$

داسې لوستل کيږي: L د ټولو (x,y) جوړو ډيری ده ،داسې چې..... (ورپسې هغه برابرون)۰
ددې لپاره لنډ ليکل کيږي: د (۱ . ۱۱) برابرون اوبی يا حل $y = -(a/b)x+c/b$ ،د خوښی x ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

طبعآ کیدی شي چي برابرون د x په لور هم اوبی شي. دلته y په خوښه نیسو، نو د لته د برابرون (۱۱ . ۱) ځواب داسی دی x = -(b/a)y + c/b , په خوښهy ۰

دا چي په لاندې کی مورږ د درېو یا ډیرو ناپیژندونکو یا نامعلومو برابرونونو سره سر او کار لرو، نو موخه ور بولو که ناپیژندونکي د x, y , z .... سره په نخښه نه کړو بلکه د $x_1, x_2, x_3, ...$ سره .

ددې په نخښونو سره کیدی شي چی په څرګند ډول وښایو:

لاندې برابرون د دوه ناپیژندونکو x_1, x_2 سره

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, ...(11,4)$$

د a |= 0 لپاره

∞^i

ځوابونه لري

∞^i

په دې مانا چی i = 1 , 2, 3۰۰۰ ناپیژندونکو یا نامعلومی لپاره په خوښه r ازښتونه کیښوول کیدی شي.

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 + \frac{b}{a_1}, ...(11,5)$$

په خوښه x_2

د

$a_2 \neq 0$

لپاره

∞

ځوابونه

$$x_2 = -\frac{a}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}; ....(11,6)$$

x_1

په خوښه

د a1 =a2 = b = 0 (0.x1+ 0.x2= b = 0(لپاره ناپای ډیر ځوابونه

د په خوښه

$$x_1, x_2, ...(11,7)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د
$$a_1 = 0; a_2 = 0; b \neq 0$$
لپاره
$$0.x_1 + 0.x_2 = b \neq 0$$

په ښتوالی یا تضاد یا مخامخوالی دی، له دې امله ځواب نه شته.
نوټ : دلته
$$\infty^i$$
دا مانا لري چی د ناپیژندونې یا مجهولی
$$x_i$$
لپاره $i = 1,2..$ په خوښه ناپای ارزښتونه نیول کیدی شي.

۱۱ . ۱ . ۲ – دوه لاینیز برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سره

د دوه برابرونونو سیستم د دوه ناپیژندونکو سره لاندې عمومي شکل لري

$$I............a_{11}x_1 a_{12}x_2 = a_1$$
$$II..........a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2;..................(11,8)$$

دا ټاکلي برابرونونه کیدی شي چی په اووښتونو یا واریابلو x 1 اوx2کی د بلواکبرابرون یا فنکشنمساوات په څیر ونیول شي او په x1 , x2 - کواوردیناتسیستم کی د کرښو په ډول انځور شي. که کرښي یو بل غوڅي کړي نو دا د مساواتو په سیستم (۸ . ۱۱) کی د کرښو یوګونی(بهتره : یوګونی، یواځنی د بل څه لپاره کارول شوی) اوبیونه ده یا حل دی.
که دواړه کرښي یو په بل پریوځي نو دا په دې مانا دي چې II همغه مساوات لکه I انځوروي. دلته دا بسیاکوي، چی د ۱۱ . ۱ . ۱ . له مخي ټیك یا فقط مساوات I یا مساوات II حل شي. دلته ناپاي ډیر
$$\infty^1$$
ځوابونه موجود دي.
داسي هم کیدی شي چی فورمال
$$\infty^2$$
رامنځ ته شي، که ټول
$$a_{ik} \wedge a_i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفر سره برابر ي. موږ دلته دا حالت نه څيړو. دا څيړو چې، که دا برابرون اوبيونه ونه لري. دا حالت هغه وخت رامنځ ته کيږي، چي کرښه I اوکرښه II غبرګي ځغلي مګر يو په بل نه وي پرتې.

په دوه برابرونونو کي، د دوه ناپيژندونکو يا اووښتونو سره، کيدي شي لاندې حالتونه را منځ ته شي

۱ - يو يواځني ټاکلی ځواب مو مخ ته پروت دئ (اصلي حالت)

۲ - کوم ځواب مو و مخ ته نه دئ پروت (سيستم مخامخوالی يا تضاد لري)

۳ - ناپاې ډير ځوابونه موجود دی II (برابرون برابر په I مساوات او يا د هغه څو برابره دی)

۴ - ناپاي ډير ځوابونه موجود دي.

(ټول $a_{ik} = 0$ او ټول $a_i = 0$ دي)

د دوه برابرونونو له مخی چې دوه ناپيژندونکی لري، کيدی شي په اسانتيا وپيژندل شي، چی د برابرونونو کوم حالت مو مخ ته پروت دئ.

په سيستمونو کی چې درې يا زياتي واريابلی يا اووښتونې لري ورته حالتونه په ساده ډول نه شو پيژندلی چې کوم حالت تر مخ لرو. دلته بايد فورمال پرمخ لاړ شو، دا چې څنکه دا کار سرته رسولی شو غواړو چې د پوښتنو په فورمال ځواب پيل وکړو او د برابرونونو پوښتنو ته ځواب پيدا کړو. دلته بايد دري بنسټيز د مساواتسيستم د ځواب کاردودونه)متودونه(تکرار شي:

۱ . د برابر يا مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

دواړه برابرونونه د يوې نامعلومی په لور اوبی کيږي(د بيلګي په توګه د x دوه په لور(، دواړه برابرې ليکي او په دې ډول يو برابرون د يوې نامعلومي سره منځ ته راځي٠

۲ - يو د بل پر ځاي کيښولو متود:

برابرون يا مساوات د يوې ناپيژندونکې (د بيلګي په توګهx دوه) په لور ځواب کيږي او دا لاس ته راوړنه په بل برابرون کی ځاي په ځاي کيږي، په دې ډول د يوې ناپيژندونې برابرون منځ ته راځي (د بيلګي په توګه دx يو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۳ - د زیاتون کارونه (جمع کولو عملیه):

سرۍ یو ټاکلی څو برابره (کیدی شي چی کمیز یا منفي هم وي) د II برابرون د I برابرون یوه ټاکلي څو برابره سره زیاتوي، داسی چي یوه ناپیژندونی بیا مخ ته نه راځی یا له منځه ولاړه شي. د نیتجي سره بیا دا بله ناپیژندوني څیړي. دا د داوړو نامعلومو(ناپیژندونو) لپاره کیداي شي . دا متود دبرابرونونو د سیستم لپاره بنسټیز دی چی د دیترمینانتو (die Determinanten) له لارې د برابرونونو ځواب لاس ته راوړو .
دا متود په درې ځانګړو برابرونسیستمونو باندې باید وکارول شي، ټول ځلورځلوني(ځله ووني یا ضریبونه) بایدله صفر توپیر ولري یعني $a_{ik} \neq 0$ که چیرې یو $a_{ik} = 0$ د بیلګي په توګه $a_{21} = 0$ نو بیا به مساواتو په لاندې ډول د درېګوډي جوړښت لرودی:

$$I............a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1;......a_{11} \neq 0$$
$$II....................a_{22}x_2 = a_2,.......a_{22} \neq 0;..........(11,9)$$

دلته نو
$a_{21} = 0$

بیا له II سیده راویستل کیدی شو او د نتیجي څخه یي چی په I کی کښیښودل شوې وی x_1 هم معلومیدی شو. دلته دا په ګوته کوو چی د ګاوس الګوریتم په استعمال بیا برابرون د درېګوډي شکل باندې اړول کیږي .دا درې څرګند حالتونه په لاندې ډول دي :

سیستم ۱

I 2x1 + 3x2 = 4

II x1 - 2x2 = -5

دا سیستم یواځنی یوځواب لر II برابرون د I برابرون سره اړیکی نه لري

سیستم ۲

2x1 + 3x2 = 4

II 4x1 + 6x2 = 8

په اسانۍ ګورو چی دلته II برابرون په ۲ ځل شوی I برابرون دی . دواړه برابرونونه همغه کرښه وښایی او په دې ډول د مساواتو اوبیونې ناپای دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳:

I $2x1 + 3x2 = 4$

II $4x1 + 6x2 = 10$

دلته بي ډیله څرګنده ده چی برابرونونه یو د بل تضاد یا یو د بل په څټ دي .د Iبرابرون دوه برابره په لاندې ډول دی:

$4x1 + 6x2 = 8$

په دې توګه ناممکن ده چی II هم باوري وي، نو له دې امله دا سیستم ۳ اوبیونه نه لري.

بیلګه ۱۱ . ۱ :

سیستم۱ دې په پورته درې ورکړ شوو متودونو ځواب شي .

الف: مساوي اینوولوکارونه یا عملیه

$I':.....x_1 = 2-(3/2)x_2;.......;II':.....x_1 = 2x_2 - 5$

$2-(3/2)x_2 = x_2 - 5$

$-(7/2)x_2 = -7$

$x_2 = 2;\Rightarrow$

$x_1 = 2-(3/2).2$

$x_1 = -1$

ب) د بل په ځاي کینولوکاروونه (عملیه) : II د x1 په لور ځواب کیږي او بیا په I کی ځاي په ځاي کیږي٠

$II':;.........x_1 = 2x_2 - 5$

$2(2x_2 - 5) + 3x_2 = 4$

$4x_2 - 10 + 3x_2 = 4$

$7x_2 = 14$

$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2.2 - 5 \Rightarrow x_1 = -1$

پ) د زیاتونکاروونه: x_1 له منځه ځي، که (-2) ځله د II برابرون و I ته زیات شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I:................2x_1+3x_2=4$$
$$(-2)II:........-2x_1+4x_2=10$$
$$I-2II:....................7x_2=14$$
$$..................................x_2=2$$

کیدی شي، ود بیلګي په توګه، له II څخه x1 وشمیرل شي:

$$x_1=2x_2-5=4-5=-1$$

د زیاتون کاروونی په کلکه یا تل استعمال څخه کیدی شي

x2

له منځه یو وړل شي، په دې شکل چی د II درې برابره د I دوه ځله ته ورزیات کړی شي.

$$2.I:............4x_1+6x_2=8$$
$$3.II:............3x_1-6x_2=-15$$
$$-----------------$$
$$2.I+3.II:........7x_1..........=-7$$
$$........................x_1..............=-1$$

یادونه : په پورته کې یا نورو کومو ځایونو کې ، چې ټکی چیرته اینسول کیږي، پوهیږو، چې چیرته ټکی د ځاي غزونې او چیرته د ځل لپاره ځاي په ځاي شوي دي

بیلګه ۱۱ . ۲ :

سیسم ۲ دې په پورته درې متودو ځواب شي:

الف (مساوي اینوولو:

I' : x1 = 2 -(3/2).x2

II': x1 = 2 -(3/2)x2

2- (3/2)x2 = 2 - /3/2)x

0.x2 = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته
x2
په خوښه. دا په دي مانا چې
x2
هر ارزښت نيوی شي ۰ له I' څخه ناپاى ډير ځوابونه لاس ته راځي
x1 = 2 - (3/2)x2 او x2 په خوښه.

ب) د بل په ځاي ايښوولومتود: I' x1 = 2-(3/2)x2 ,
په II کې ايښول کيږي

II' 4.(2-(3/2)x2) + 6x2 = 8
8-6x2+6x2 = 8
0.x2 = 0 x2
په خوښه له II' لاس ته راځي
I' : x1 = 2 - 3/2 x2 x2 په خوښه

پ) د زياتون متود يا لار يا طريقه:
2.I 4x1 + 6x2 = 8
II 4x1 + 6x2 = 8

II - 2.I : 0x1 + 0x2 = 0
که يواځې دا مساوات په نظر کي ونيول شي ، نو x1 او x2په خوښه ټاکل کيدی شي، دا چې د x1 او x2 ترمنځ په I يا II کې ورکړ شوي اړيکي دي ، نو يواځي يوه ناپيژندونکو په خوښه ټاکل کيدی شي . ځواب داسی دی:
x1 = 2-(3/2)x2
x2په خوښه
په همدې ډول:
x2 = 4/3 -(2/3)x1 ,
دلته x1 په خوښه ټاکل کيږي

بيلګه ۱۱ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳ دې په پورته درې ورکړشوومتودونو ځواب شي.

الف (مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

$$I' : \quad x1 = 2 -(3/2)x2$$
$$II' : \quad x1 = 5/2 -(3/2)x2$$
$$2-(3/2)x2 = 5/2 -(3/2)x2$$
$$0.x2 = 1/ 2$$

دا یو په څتوالی یا تضاد دی، ځکه چی هیڅ یو رییل ګڼ x2 نه شته چی دا مساوات پوره کړي، نو له دې امله کوم ځواب نه شته یا وجود نه لري.

ب) د بل په ځاي لیکلو عملیه: $I' : \quad x1 = 2 - (3/2)x2 \quad ,$

په II کی دی په ځای شي

$$II': 4.(2-(3/2)x2)+6x2 = 10$$
$$8 - 6x2 + 6x2 = 10$$
$$0.x2 = 2$$

دا مخامخوالی یا په څتوالی یا تضاد دی ، پس ځواب نه شته.

پ) د زیاتون متود:

$$2 . I \qquad 4x + 6x = 8$$
$$II \qquad 4x + 6x = 10$$

$$2.I - II \qquad 0.x + 0.x = -2$$

په څتوالی یا تضا د دی ، ځواب وجود نه لري

د لاندې بیلګو سره غواړو د منځ ته راتللو پښتنو ځوابونو لپاره اړوند لارښوونه ګوته لك کړو.

بیلګه ۱۱ ۰ ٤ : په لاندې فورم یا بڼه برابرونسیستم ورکړ شوی:

$$I \qquad x /(a+b) +y/(a-b)$$
$$II \qquad x /(a-b) +y/(a+b)$$

دا ټیك هلته موخه ور یا هدفمند دی چی $a =| b$ او $-a =| b$ وي، یعنی $|b| =| |a|$ وي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي چی دا سیستم د پورتنیو متودونو څخه په یوه متود ترلی ځواب کړي، د یوه د مخه ورکړ شوي فورم یا بڼې اوړون له لارې هم ځواب کیدی شي.
لمړی د جمعی متود څخه کار اخلو:
د I ځل له (a+b)/ 1 او II ځل له (a-b)/ 1- څخه وروسته دا لرو:

$x/(a+b)^2+y/(a^2-b^2)=1/(a+b)$

$-x/(a-b)^2-y/(a^2-b^2)=-1/(a-b)$

له دې سره د y دواړه ځله ووني یاضریبونه یو د بل مخامخ (یا په بل عبارت یو د بل په څټ) نخښی لري او له دې امله د زیاتون په حالت کی له منځه ځي، نو په دې توگه مو یو برابرون د یوې ناپیژندونکی سره مخ ته پروت دی:

$$\frac{x}{(a+b)^2}-\frac{x}{(a-b)^2}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}x=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}x=\frac{a-b-a-b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}x=-2b$$

$$2abx=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$x=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

که I له (a+b)/ 1 او IIله (a-b)/ 1- سره ځل شي کیدی شي: چی y په ورته ډول وشمیرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a-b)^2}=\frac{1}{a-b}$$

$$-\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a+b)^2}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2}y=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}y=\frac{a+b-a+b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}y=2b$$

$$2aby=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$y=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

دلته مو ځانګړی حالت مخ ته پروت دی، چی دواړه ناپیژندونکی مساوي دي، کومی چی ځموږ د ځیړنی لپاره بي مفهومه دی.

دا د x , y لپاره شمیرل شوي ارزښتونه په هغه حالت کی باوري دی چی ab |= 0 وي.

نو ځیړو چی کوم حالت توپیر د ab = 0 لپاره منځ ته راځي. . دلته مساوات) * (تر ځیړنی لاندې نیسو او درې حالته توپیروو:

.1 a = 0 , b |= 0

مساوات)*(داسی دي

0.x = -2b3, 0 . y = -2b3

په دې حالت کی برابرون سیستم ځواب نه لري.) تضاد مخ ته پروت دی

. 2 a |= 0 , b = 0

برابرون(*)(په دې حالت کی داسی دی.

0 . x = 0 ; 0 . y = 0

دلته مخامخوالی یا په ځتوالی یا تضاد نه شته (له I او هم له II لاس ته راځي

x/a+y/a=1 <=> x+y=a

که y خپلواك وټاکل شي، نو لرو x=a-y دلته y په خوښه ټاکل کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بل حالت کی لرو , y = a - x دلته x په خوښه دی

3 . a=b=0

دا حالت د نیونی له مخی بند ، ناشونی یا ناممکن دی.

بیلګه ۱۱ . ۵:

$$\frac{11}{2x-3y}+\frac{18}{3x-2y}=13$$

$$\frac{27}{3x-2y}-\frac{2}{2x-3y}=1$$

که دا سیستم د (3x-2y)(2x-3y) سره ځلوني په بنسټ فورم بدل کړي، نو لرو:

$$69x-76y=78x^2-169xy+78y^2$$

$$48x-77y=6x^2-13xy+6y^2$$

او کتل کیږي چی په دې ډول لاینیز برابرونتسیستم د x او y لپاره منځ ته نه راځي . دا چی په دې هر یو سیستم کی دوه ماتلاندې سره برابر دي نو کیدی شي چی نوې ناپیژندونکی u , v و لیکو. دا وشمیرو او بیا له دې وروسته لویي x , y راپیدا کړو . موږ ځاي پر ځاي کو

---

u=1/(2x-3y) ,v=1/(3x-2y)

او لاس ته راوړو:

11u+18v=13 <=> 11u+18v=13

27v-2u=1 -2u+27v=1

موږ د زیاتون یا جمعی متود کاروو

33u+54v=39

4u-54v=-2

37u=37

u=1 => v=1/9

له دې سره کیدی شي x او y وشمیرل شي:

1=1/(2x-3y)<=> 2x-3y=1

1/9=1/(3x-2y) <=> 3x-2y=9

له دې څخه غوښتونکی ځواب x = 5 , y = 3 لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ . ۱ . ۳ دویمه درجه دیترمیناتې او د کرامر قاعده

که په ټولیزسیستم(11.8) باندې د زیاتون متود استعمال شي، نودx2د له منځه وړلو په لار لاس ته راځي

$$I' = a_{22}.I - a_{22}.II$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

پورته برابرون دی) ۱۱،۱۰ (وي

اود x1 د له منځه وړلو:

$$II' = a_{11}.II - {}_{21}.I:$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = (a_{11}a_2 - a_1a_{21})$$

دا پورته برابرون دې (۱۱،۱۱) وي

که 0 =| (a11a22 -a12a21) وي، نو له دې یواځنی ټاکلی ځواب لاس ته راځي

$$x_1 = \frac{a_1a_{22} - a_{12}a_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}};\ x_2 = \frac{a_{11}a_2 - a_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\dots\dots\dots(11,12)$$

که د ارزښتونه په (11 . 8) کی ځای په ځای شي نو تصدیقیږي، چې(11 . 12) په ریښتیني د (11, 8) ځواب دی. له (11 . 10) تر (11 . 12) سړی په واقعیت یا ربنتونی کی د دیترمینانت کلیمی په لور لاروی کوي(لارښودوي.)

پیژند ۱۱ . ۱: د یو منظم سیستم دوه ځله دوه ریپلو ګنونو $a_{ik}, (i, k = 1, 2)$ د د ۲ -امه درجه دیترمینانت لاندې ، لاندینی ګڼ پوهیږو:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};\dots\dots\dots\dots(11,13)$$

د اصلي دوه کونجتړي یا دیاګونال (قطر) د توکوځل، ترې کم(منفی) د څنګ یا فرعی دوه کوجنتړي(قطر) د توکو ځل(یا) د اصلي دوه کونجتړې یا قطر د توکو ځل څخه د څنګ یا فرعي دوه کونجتړې د توکو ځل کمیږي یا منفی کیږي)

یادونه : دا اوس او وروسته دیترمینانت بڼه د ماتریکس په څیره لیکل شوی، په دیترمینانت کې کرښی سمې دي، خو کومه ناسمپوهنه په کې نه راځي.

په (11 . 13) کی د xi ځله ووني یا ضریبونه داسی لیکل شوي لکه په (11 . 8) سیستم کی . د (11.13) دیترمینانت له دې امله د (11 8) (له ماڅخه دانوکانو کې دننه ګڼونه کله کله بدلیږي، دې ته دې د ګرانو لوستونکو پام وي، دا شمیرپوهنیزه ناسمي منځ ته نه راولي) سیستم د ځلونو (ضریبونو) دیترمینانت بلل کیږي.

که په (11. 13) کی لومړی (درز، ستن یا مته یا ولاړه لیکه یا-کیله) د دیترمینانت ولاړه لیکه(په ځای) چی د xi ځله ووني یا ضریبونه دی د (11 . 8) برابرونسیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښي اړخ (مطلقه توکی) توکي a1 , a2 وليکل شي نو(په x1 اړونده) لاندې
ديترمينانت لاس ته راځي:

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_1 a_{12} - a_{12} a_2$$

د پورته برابرون ګڼه يا نمره دې) ۱۱،۱٤ (وي‌په همدې ډول که د) 11 . 13 (
ديترمينانت دوهم درز بدل کړی شي، نو دx2 پورې اړوند لاندې ديترمينانت لاس ته
راځي

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{pmatrix} = a_{11} a_2 - a_1 a_{21}; \ldots\ldots\ldots\ldots (11,15)$$

که له (11 . 10) تر(11 . 12) پورې له (11 . 13) تر (11 . 15) پرتله
يامقايسه شي نو لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۱ (د کرامر قاعده):
که د ځله وونو يا ضريبونو ديترمينانت لپاره په (11. 13) کی

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11,16)$$

باوري وي نو د مساواتو سيستم (11 . 8) يوائځنی ټاکلی ځواب لري
x1=D1/D ; x2 = D2/D /11,17)
په داسی حال چی D1 او D2 د (11 . 14) او (11 . 15) له مخی شميرل کيږي.
د (11 . 10) او (11 . 11) له امله لرو

جمله ۱۱ . ۲ :
که په (۱۱ . ۱۳) کی د ځلونو ديترمينانت D لپاره باوري وي
(11,18) 0 = D
او د کم له کمه يو ډيترمينانتD1 يا D2 لپاره په (11 ,14) يا (11 , 15) باوري
وي
D1|=0 V D2 |=0 (11,19)
نو (11 . 8) سيستم ځواب نه لري، ځکه چي برابرون يی يو د بل سره مخامخ دي (
تضاد کی دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله۱۱ . ۳ :
باوري دي

$$D=D1=D2=0 \quad (11 . 20)$$

نو يو له برابرونونو I يا II زياتي دئ) دواړه برابرونونه يو بل ته اړ دی يا د بل په
واك کی دي(او د ۱۱ . ۱ . ۱ . برخی متود استعماليدلی شي يا کار ترې اخستل کيدی
شي.
د ښوونبيلگو په څير دې اوس د ۱۱ . ۱ تر ۱۱ . ۳ پورې بيلگي (۱۱ . ۱ . ۲ برخه)
کارول شوي سيستمونه ۱ ، ۲ او۳ گران لستونکي په ديترنمنانتو ځواب کړي، که چيرې
ما دا کار سرت ونه رساوه۰.
بيلگه ۱۱ . ۶ : د سيستم لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-4-3=-7\neq 0$$

پس يواځنی تاکلی ځواب لري. پسی باور لري

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & 3\\ -5 & -2\end{vmatrix}=-8+15=7\neq 0; D_2=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -5\end{vmatrix}=-10-4=-14$$

له دې امله باوري دی

$$x1=D1/D=7/-7 , x2=D2/D=-14/-7= 2 ,$$

بيلگه۱۱ . ۷ :

د سيستم ۲ لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=12-12=0$$

او ورپسی

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 8 & 6\end{vmatrix}=24-24=0; D_2=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & 8\end{vmatrix}=16-16=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله ناپای ډېر ځوابونه موجود دي) بيلګه۱۱ . ۲ دې وګتل شي.)

بيلګه ۱۱ . ۸ : د سيستم ۳ لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

D = 2 3 =12 -12 = 0

او ورپسی

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 30 \neq 0$$

همدلت روښانه ده، چی ځواب نه شته(د D2 = 4 |=0 له شميرلوكيدی شي، چی تيرشو)

بيلګه ۱۱ . ۹ :

مونږ بالاخره غواړو چي په بيلګه ۱۱ . ۴ کی ورکړ شوی مساواتسيستم ته د ديترمينانت له لارې ځواب ورکړواو ددې لپاره لومړی D , D1 او D2 شميرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b} \\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a+b)^2} - \frac{1}{(a-b)^2} = \frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$........................ = \frac{a^2-2ab+{}^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2} = -\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2};$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a-b} \\ 1 & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} = \frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)} = -\frac{2b}{a^2-b^2};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & 1 \\ \frac{1}{a-b} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} = \frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)} = -\frac{2b}{a^2-b^2}$$

لومړی حالت $ab \mid= 0$:

دلته دیترمینانت $D \mid= 0$ او دا د برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب دی

$$x = \frac{D_1}{D} = \left(-\frac{2b}{a^2-b^2}\right) : \left(-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2}\right) = \frac{2b}{a^2-b^2} . \frac{(a^2-b^2)^2}{4ab} = \frac{a^2-b^2}{2a}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{a^2-b^2}{2a}$$ (د $D1 = D2$ له امله)

دوم ۱ حالت $a=0, b \mid=0$: دلته $D = 0$ مگر

$D1 = D2 \mid= 0$

او د مساواتسیستم ځواب نه لري

دوم ۲

دلته $D = D1 = D2 = 0$

او ناپای ډیر ځوابونه موجود دي چی په بیلگه ۱۱ . ۴ کي ښوول شوي .

دوم ۳ حالت $a = b = 0$:

دلته مساواتسیستم هدفمند نه دی (په صفر ویش مخ ته پروت دی) مشوره کیږي چی

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندی د برابرونونو سیستم دې د لاندې بریالي فورم بدلولو وروسته دبیلا بیلو لارو ځواب شي او د ځواب متودونه دې یو د بل سره پرتله یا مقایسه شي.

$$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$$
$$(a+b)x+(a-b)y=a^2-b^2$$

۱۱ . ۱ . ٤ د ګاوس الګوریتم

په ۱۱ . ۱ . ۲ . برخه کي څیړل شوو متودو ټیك په نظر نیولو سره (برابرو لیکلو- په ځاي - او د زیاتون عملیه) ، کره پوهیدلی شو چی ددې په مرسته ټولیز د برابرونسیستم (8 . 11)

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=a_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=a_2$$

په یوه درېګوډیز جوړ سیتسم

$$a_{11}x_1+a_{22}x_2=a_1$$
$$\ldots\ldots\ldots a_{22}x_2=a_2$$

بدلولي شو، کوم چی بیا خورا ساده ځواب کیدی شي

۱ . که a22 |= 0 وي، نو لاس ته راځي:

الف) x2=a2/a22

ب) برسیره پر دې که $a_{11}\neq 0$ وي، نو لاس ته راځي:

x1=(a1/a11)-(a12/a11)x2=
(a1/a11)-(a12/a11).(a2/a22)

۲ . که a22 = 0 او a2 |= 0 وي نو ځواب موجود نه دئ یا نه شته

۳ . که a22 =0 او a2 = 0 وي، نو ۲- م برابرون بی هوده دی (د ضرورت وړ نه دی)، او سړی بیا ا. برابرون د ۱۱ . ۱ . ۱ برخی متود په مرسته ځوابولی شي.

د (11 . 8) سیستم د ځواب پرابلم په دې ډول کمیږي، چی دا سیستم په دریګوډئ بڼه یا – څیره واړوي . هغه الګوریتم چی دا په هر حالت کی ځواب کولی شي، د ګاوس الګوریتم دی. یا (11 . 8) سیستم دریګوډئ څیره لري او یا ټول aik د صفر سره برابر نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی (11 . 8) سیستم په روځنی - یا مروج ډول او هم شیماتیکي ډول لیکل کیږي.

		x1	x2	RS
I	a11x1+a12x2= a1	a11	a12	a1
II	a21x1+a22x2= a2	a21	a22	a2

(دلته RS د مساواتو د ښي خوا (ښ خ) یا ښی لور یا ښی اړخ مانا ورکوي)، که I په ځای پرېښودل شي اود II برابرون a11 / a21 - ځله له I برابرون څخه کم شي ، نولرو

		x_1	x_2	Rs
I	$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = a_1$	a_{11}	a_{12}	a_1
II'	$0.x_1+(a_{12}-a_{11}.a_{22}/a_{21})x_2=a_1-a_{11}.a_2/a_{21}$	0	$a_1- a_{11}.a_{22}/a_{21}$	$a_1-a_{11}.a_2/ a_{21}$

که II' لنډ په دی فورم ولیکل شي

نو ټول سیستم لاندې شکل غوره کوي :

		x1	x2	RS
I	a11x1+a12x2= a1	a11	a12	a1
II'	b22x2 = b2		b22	b2

اوس بیرته باید زیات حالتونه یو له بل توپیر شي:

-که b22 |= 0 وي ، نو x2 له II' او x1 له I لاس ته راځي.
-که b22 = 0 , b2 |=0 وي، نو ځواب وجود نه لري.
-که b22 = b2 = 0 وي، نو ناپای زیات ځوابونه موجود دي، چی له I
او ۱۱ . ۱ . ۱ برخی ته ورته را څرګندیدی شي (معلومیدلی شي.)

سیستمونه ۱ ، ۲ ، ۳ د ګاوس په الګوریتم ښوول کیږي

بیلګه ۱۱ . ۱۰ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سیستم داسی لیکل او شیماتیك کیږی:

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II	$x_1 - 2x_2 = -5$	1	-2	-5

که غوښتونکی دریګوډیځیره غواړو لاس ته راولو نو Iهمداسی پرېږدو او له II څخه دI یو یو په دوه ځله کموو :

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II'	$0.x_1 - (7/2)x_2 = -5$	0	-7/2	-5

له 'II لاس ته راځي x2 = 2
او له I څخه لاس ته راځي. x1 = 2 -(3/2) x2 = -1

بیلګه ۱۱ . ۱۱:

دلته سیستمونه ۲ او ۳ یواځي په شیماتیکي ډول (جدول په شکل (ځیړو. دلته د لمړی لیکی دوه ځله د دوهمی لیکی کمیږي

سیستم ۳

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	10
II'=II-2.I	0	0	2

سیستم۲

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	8
II'=II-2.I	0	0	0

په سیستم ۲ کی ګورو چی لمړی برابرون د دوم برابرون په مخامخ څه نوی نه لري (0 = 0 تضاد یا مخامخوالی نه شته). له دې امله یو برابرون (د بیلګي په توګه I) موجود دی چی د ۱۱ . ۱ . ۱ برخي او یا ۱۱ . ۲ په ځیر ځواب کیږي. په سیستم ۳ کی تضاد همدا اوس لیدل کیږي" 0 = 2 " ، نو له دې امله ځواب نه شته.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۱ . ۱۲ :

سیستم I دې په څلور ډوله یا واریانتو د ګاوس الګوریتم په مرسته وڅیړل شي

اول واریانت　　　　دوم واریانت

x1 x2 RS　　　　x1 x2 RS

I 2 3 4　　　　I 2 3 4

II 1 -2 -5　　　　II 1 -2 -5

II'=II-(1/2).I 0 -7/2 -7　　　　II'=II+(2/3).I 7/3 0 -7/3

2. -1 2. 2　　　　1. 2 1 -1

دریم واریانت　　　　څلورم وایانت

x1 x2 RS　　　　x1 x2 Rs

I 2 3 4　　　　I 2 3 4

II 1 -2 -5　　　　II 1 -2 -5

I'= I+(3/2).II 7/2 0 -7/2　　　　I=I-2.II 0 7 114

2. 2 2. -1　　　　1. -1 1. 2

دا دلته د یو ګڼ په چوکات یا څلورګوډیز کی نیول دا مانا لري چی د هغی د پاسه ناپیژندونکي د مساوات څخه شمیرل کیږي، کومه چی په هغه لیکه کی پرته ده چی چوکاټ شوي، دا په یواځني ډول دا مانا لري :

واریانت ۱:

ا) له I څخه دې x1 و شمیرل شي

ب) له II' څخه دې x2 وشمیرل شي

پ) په 1 کی x2 له II' شمیرل کیږي:

$x2= -7 / (-7/ 2) =2$

ت) په 2 کی x1 له I شمیرل کیږي:

$x = (1/ 2)(4 - 3.2) = -1$

واریانت ۲ :

ا) له I څخه دې x2 وشمیرل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) له II' څخه دې x1 وشميرل شي

پ (له II' لرو: 1- = x1

ت) له I څخه لرو: x2 = 2

واريانت (امکان) ۳

ا) له II څخه دې x2 وشميرل شي

ب) له I' څخه دې x1 وشميرل شي

پ) له I' لرو 1- = x1

ت (له II لرو 2 = x2

واريانت (امکان) ۴

ا) له II دې x1 و شميرل شي

ب) له I' څخه دې x2 وشميرل شي

پ (له I' لر x2 = 14 / 7 = 2

ت) له II لرو:

x1 = -5+2.2 = -1

ټولی څلور واريانتی يا امکانت برابر ارزښتونه لری، خو دا چی په څلورمه واريانت کی په ټولګټونو شميرنه کيږي، »مخته وونه« يا مخوونه(برتري) يا نوره هم ښه وړاندې توب ورکول کيږي.

۱۱ . ۱ . ۵ له دوه وو زيات برابرونونه د دوه ناپيژندونکو سرهره

که څوك له دوه زيات برابرونونه د دوه اوښتونو يا ناپيژندونکو سره ځواب کوي، په ټوليزه (عمومي) توګه بايد په نخښه شي چی لومړي دوه برابرونونه x1, x2 ځوابونه لري. که دا ځوابونه په نورو برابرونونو کی ځای په ځای شي تضاد ته رسيږو. د دوه ناپيژندونکو سره له دوه زيات مساوات په ټوليزه توګه حل نه لري. يوائې په ځانګړی حالت کی دا سيستم ځواب لرودی شي. موږ دا پروسه اول په عمومي ښوونلارې څيړو او بيا د ګاوس الګوريتم له لارې.

بيلګه ۱۱ . ۱۳: لاندني دوه سيستمونه ورکړ شوي دي

$$a)\ \ I \quad x1 + 2x2 = 3 \qquad b)\ \ I \quad x1 + 2x2 = 3$$

$$II \quad 2x1 - x2 = 1 \qquad II \quad 2x1 - x2 = 1$$

$$III \quad 3x1 + x2 = 2 \qquad III \quad 3x1 + x2 = 4$$

له I او II څخه د څرګندو يا معلومومتودونو له لارې په دواړو سيستمونو کی لاندې، په لومړی ځل يوائنی پيژندل شوی، ځواب لاس ته راځي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

له) a او)b څخه لرو1 = x1 + 2x2 که دا ارزښتونه په IIIکی ځاي په ځاي شي نو لرو:

په (a) کې :1.1+3.1 = 4 |= 2, په (b) کی : 1.1 + 3.1 = 4

نو سيستم (a) ځواب نه لري او سيستم ($\hat{b}$) يواځني ټاکلی ځواب لري

يعني x1=x2=1

بيلګه ۱۱ . ۱۴ :

په بيلګه ۱۱ . ۱۳ کي ورکړ شوي مساوات اوس د ګاوس د الګوريتم له لارې ځواب کوو.

a)	x1	x2	RS	b)	x1	x2	RS
I	1	2	3	I	1	2	3
II	2	-1	1	II	2	-1	1
III	3	1	3	III	3	1	4
II'=II-2.I	0	-5	-5	II'=II-2.I	0	-5	-5
III'=II-3.I	0	-5	-7	III=III-3.I	0	-5	-5
III''=III'-II'	0	0	-2	III=III'-II'	0	0	0

په (a) کی تضاد پيژندلکيږي (III':0.x1+0.x2=-2) ځواب نه شته يا وجود نه لري .

په (b) کی تضاد مخ ته نه دئ پروت .(III':0.x1+0.x2=0) لهII' څخه لرو:

x2 = 1 او له I څخه لاس ته راځی : x1=3-2.1=1

۱۱ . ۲ لاينيزبرابرونتسيستم د درې ناپيژندونکو سره

۱۱. ۱ ۰ ۲ ۰ يو برابرون د دري ناپيژندونکو سره

مو ږ يو مساوات د دري ناپيژندونکو سره تر څيړني لاندې نيسو:

$$a11x1 + a12x2 + a13x3 = a1 \quad (11 . 21)$$

دوه مختلف حالتونه ۱ او ۲ او نورمال فورم ۳ ممکن دي

$$I . \quad a11=a12=a13=0 \qquad (11 . 22)$$

دلته x1 , x2 او x3 يو له بل پوره خپلواك ټاكل کيدی شي. ويل کيږي چی ناپاي ډير ځوابونه مخ ته پراته دي (x1 په خوښه، x2په خوښه او x3په خوښه)

$$2. \quad a11=a12= a13= 0 ,a1|=0 \quad (11 . 23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته تضاد مخ ته پروت دی

$0x1+0.x2+0.x3 = a1 \neq 0$

اوبیونه نه شته.

۳- د کم له کمه یوه ځلجوړي i , k لپار دي aik |= 0 وي. (بي د ټولیز وبندیزونو یا عمومیت د محدود والی دې a11|= 0 وي (. کیدی شي چی x2 او x3 په خوښه وټاکل شي (ناپاي ډیر ځوابونه)، او لاس ته راځي

x1=(1/a11)(a1-a12x2-a13x3) په خوښهx1 او x3 (11,24)

۱۱ . ۲ . ۲ دوه برابرونونه د درې ناپیژندونکو سره

لاندې د دوه برابرونسیستمونه د درې اوښتونو یا ناپیژندونکو سره

$a11x1+a12x2+a13x3=a1$ (11,25)

$a21x1+a22x2+a23x3= a2$ (11,25)

موږ دا را ویستلي حالتونه ، چیرته چی د ټولو i, kلپاره aik= 0 ، په پام کی نه نیسو. دا حالت هم په پام کي نه نیسو چی دوم برابرون د لومړي په څیر وي (ناپاي ډیر ځوابونه. او یا دوهم برابرون د لمړي سره په مخامخوالي یا ښتوالي یا تضاد کی وي (ځواب نه وي) . دا ټول حالتونه اسان پیژندونکي دي. موږ په یوه بیلګه کی دا اصلي حالت څیړو چی یو ناپیژندونکي یا نامعلوم (د بیلګي په توګه x3) په خوښه ټاکل کیږي او دا نورې دوه ناپیژندونکی یا اووښتونې (x1 او x2) یواځنی لاس ته راځي، او یا یواځنی ورکول کیدی شي (ناپاي ډیر ځوابونه).

بیلګه ۱۱ . ۱۵:

			x1	x2	x3	RS
I	x1+x2+x3=3		1	1	1	3
II	x1+2x2+3x3=6		1	2	3	6
II'=II-I	0.x1+x2+2x3=3		0	1	2	3

له II' لاس ته راځي

$x2 = 3 -2x3$

له I څخه لاس ته راځي

$x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3, x1= x3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې لاس ته راځي

,x1=x3,x2 = 3 -2x3 x3 په خوښه.

۱۱ . ۲ . ۳ دریمه درجه دیترمینانت او د کرامر قاعده

اوس درې برابرونونه یا معادلې یا مساوات د درې ناپیژندونکو سره څیړو

I a11x1+a12x2+a13x3= a1 (11 . 26)

II a21x1+a22x2+a23x3= a2 (11,26)

III a31x1+a32x2+a33x3= a3 (11,26)

له دې سیستم څخه کیدی شي چی د ۱۱ . ۱ . ۲ برخی د برابر لیکلو او یو د بل په ځای لیکلو متودونه په ساده ډول استعمال شي. د زیاتونتیورم (-قضیه) فکر غواړي او د دریمي درجي دیترمینانت او د کرامر قاعدې په لور مو د (۱۱ . ۲۶) سیستم ځواب پیدا کولو لپاره هڅوي

پیژند ۱۱ . ۲:

رییل ګڼونو aik (i,k = 1,2,3 (یو درې درجه منظم د دیتمرمینانت سیستم

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};..................................(11,27)$$

لاندې سرې لاندنی رییلګڼ پوهیدلی شي):

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}-a_{12}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}+a_{13}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}=$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32)})-a_{12}(a_{1}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{33});............(11,28)$$

له دې سره د دریمی درجي دیترمینانت شمیرنه د دوهمی درجی دیترمینانت په شمیرنه بدله شوه. . ۱۱ . ۲ تعریف او په ځانګړې توګه) 11 .28 (فرمول په لاندې ډول توضیح کیدی شي:

پیژند ۱۱ . ۳ : په (11 . 27) کی د دیترمینانت D لاندېدیترمینانت Aik لاندې هغه دومه درجه دیترمینانت پوهیدلی شو، چی د D دیترمینانت i- می لیکی او k - م درځ یا متې د لرې کولو یا د منځه وړلو له لارې منځ ته راځي(زه د ماتریکس په دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې دا لیکې او مټې یا ستې له منځه نه شم وړلی، خو دا کومې ستونځې نه پیښوی ، ځکه، چې لاس ته راوړنه یې پسې لیکل شوې)

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

په دې ډول کیدی شي چې د ۱۱ . ۲ دیترمینانت په دې فورم ولیکل شي

پیژند ۱۱ . ۴ :
د دریمې درجې دیترمینانت D لاندې، چې په (11 . 27) کی ورکړ شوی دی، دا لاندې ګڼ پو هیدل کیږي:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

د زیاتون عملیي څخه، چې دلته نسبت د دوه ناپیژندونکو مساواتو ته چې دوه ناپیوندونکی لري، روښانه ده، د (11 . 26) څخه لاس ته راوړل کیږي:

$$Dx1 = D1 \, , \, Dx2 = D2 \, , \, Dx3 = D3 \quad (11 . 29)$$

په داسی حالت کی چې Di داسي لاس ته راځي چې د ځله وونودیترمینانت (11 . 28) کی سړی i - م درځ یا ستن یا مټه د (11. 26) برابرون ښي لور ته ځای په ځای کړي.

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{pmatrix}; D_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{pmatrix}; \ldots\ldots (11,30)$$

موږ دا نتیجه بي له ښووني ورکوو.
له (۱۱ . ۲۹) څخه لاندې جملی لاس ته راځي:

جمله ۱۱ . ۴ (د کرامر قاعده) :
که د (۱۱ . ۲۶) د ځله وونودیترمینانتو(۱۱). ۲۷ ،په همدې ډول (۱۱ . ۲۸) لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D \neq 0 \qquad (11 . 31)$$

با وري وي ، نو (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم یواځنی ځواب لري

$$x1=D1/D \quad ; x2=D2 /D \quad ; x3=D3/D \qquad 11,32)$$

جمله ۱۱ . ۵ :

که $D = 0$ مګر $0 =| Di$ کم له کمه د یوه i ($i = 1,2,3$) لپاره وي، نو د (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم ځواب نه لري (په (۱۱ . ۲۹ کی تضاد دی)

جمله ۱۱ . ۶ :

که $D = D1 = D2 = D3 = 0$ وي، نو په (۱۱ . ۲۶) کی کم له کمه یو برابرون له ضرورته زیات دی او دا (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم کیدي شي چي د ۱۱ . ۲ . ۲ متودونو باندې ځواب شي (وړاندیز دئ چی د ګاوس الګوریتم له متود ; چی په ۱ . ۲ . ۴ برخه کی ورکړ شوي ځواب شي.)

بیلګه ۱۱ . ۱۶ :

په لاندې سیستم

I x1 -x3 = -2

II x1 +x2 -x3 = 0

III 2x1 - x2 = 0

کی دئ

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 0.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (-1).\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -1-0-1.(-1-2) = 2$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2;$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - (-2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 1.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 4;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو یواځنی تاکلی ځواب موجود دئ.

$x1=D1/D=2/2=1,\ x2=D2/D=4/2=2,\ x3=D3/D=6/2=3$

بیلګه ۱۱ . ۱۷ :

په لاندې سیستم

I $x1 + x2 + x3 = 0$

II $x1 \quad -x3 = 0$

III $2x1 + x2 \quad =1$

کي دئ.

دا بیلګه دې ګران لوستونکی پخپله وښایي ، چي اوبیونه نه شته ۰ دې ته باید ګوته ونیسم، $D = 0$ او $D1= -1 |=0$ ، چې ځواب نه لري۰

۱۱ . ۲ . ۴ د ګاوس الګوریتم

د ګاوس الګوریتم لومړی د (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم لپاره استعمالیږي. دا د دوه مساواتو لپاره چی درې ناپیژندونکي لري او همدارنګه د زیاتو مساواتو سیستم لپاره چی درې ناپیژندونکي لري د استعمال وړ دی.

د ګاوس د الګوریتم موخه په دې کی پرته ده چی (11 . 16) سیستم د ورته بدلونفورم له لارې په دریګوډیفورم را اوړي.

I $a11x1+a12x2+a13x3=a1$ (11 . 34)

II $b22x2+b23x3=b2$

III $c33x3=c3$

بنسټیز حالت : که $a11|=0, b11|=0, c11|=0$ وي نو یو په بل پسی سرړی کړی شي چی له III $x3$, او له II $x2$, وشمیري. مګر په (11 . 34) کی ځانګړي حالتونه هم پیژندل کیږي:

-که $c3|=0, c33=0$ وې، نو یو په ځتوالی یا تضاد مخ ته پروت دی، ځواب وجود نه لري

- که $c3=c33=0$ وی، نو III له ضرورتزیات دی سرړی یواځی I او II څیړي.

- که $c33=c3=0$ او برسیره پر دې $a11|=0, b11|=0$ وي، نو $x3$ په خوښه ټاکل کیدی شي او $x2$ له II او $x1$ له I چی $x3$ ته اړ وي، شمیرلکیدی شي (ناپای ډیر ځوابونه)

-برسیره پر دې که $b22=b23=0$, $b2|=0$ وي، نو ځواب وجود نه لري

-که نور هم ولرو چی $c33=c3=0$ او $b22=b23=b3=0$ وي ، نو II له ضرورت زیات دی او له $a11|=0$ کیدی شي چی $x2$ او $x3$ په خوښه وټاکل شي، او $x1$ له I لاس

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته راځي چی $x2$ او $x3$ ته اړ (په واك کی يا تابع) وي (ناپاي ډير ځوابونه ځوابونه) .
که ټول ځلونه او د مساواتو ښی خوا صفر وي ، نو ناپاي ځوابونه موجود دی.
د ګاوس الګوريتموس د دريږ ناپيژندونکو(11 . 26) سره له دوه پلونو(قدم) جوړ دئ
لومړی پل (قدم) : نيسو چی په (11 . 2 6)کی $a11 |= 0$ دی. دا د نمرې بدلولو په بنسټ هميشه لاس ته راوړی شو) بي له ورکړ شووحالتونو) چی ټول $aik = 0$ وي) .
دلته I ورکول کيږي، او له II د I دا $a21/a11$ - ځله او له III دا $a31 / a11$ - ځله د I کموي. ددې څخه لاندې سيستم لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} &I \quad a11x1+a12x2+a13x3=a1 \quad (11 . 35)\\ &II \quad b22x2+b23x3=b2\\ &III \quad c33x3=c3 \end{aligned}$$

دويم پل (قدم) : د $b22 |=0$ نيوني سره په 'II او 'III باندې د ۱۱ . ۱ . ۴ برخي سره سم د ګاوس الګوريتم استعماليږي : سرې 'II بي تغيره پريږدي اوله'III دا $b32/b22$-ځله د 'II کموي، له دې راپيداکيږي

$$\begin{aligned} &I \quad a11x1+a12x2+a13x3=a1 \quad (11 . 37)\\ &II \quad b22x2+b23x3=b2\\ &III \quad c33x3=c3 \end{aligned}$$

د ګاوس د شيما فورماليتي سره سم بيا دا شکل غوره کي

	x1	x2	x3	RS
I	a11	a12	a13	a1
II	a21	a22	a23	a2
III	a31	a32	a33	a3
II' = II-(a21/a11)I		b22	b23	b2
III' = III-(a31/a11)I		b32	b33	b3
III'' = III' - (b32/b22)II'			c33	c3

$$x3 = c3 / c33$$
$$x2=(1/b22)(b2-b23x3)$$
$$x1=(1/a1)(a1-a12x2-a13x3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۱ . ۱۸ : دا سیستم ۰(مقایسه بیلګه ۱۱ . ۱۶)

I $x1 \quad -x3 = -2$

II $x1 + x2 - x3 = 0$

III $2x1 \quad -x2 \quad = 0$

د ګاوس الګوریتم سره په لاندې ډول حل کیږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	0	-1	-2
II	1	1	-1	0
III	2	-1	0	0
II'= II - I	0	1	0	2
III'= III - 2.I	0	-1	2	4
III'' = III' + II'	0		2	6

$x3=6/2=3$

$x2=2$……………………

$x1=-2+x3=-2+3=1$

بیلګه۱۱ . ۱۹: (پرتله بیلګه ۱۱ . ۱۷) دا سیستم

I $x1 + x2 - x3 = 0$

II $x1 \quad -x3 = 0$

III $2x1 + x2 \quad = 1$

د ګاوس د الګوریتم په مرسته په لاندې ډول حل کیږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	0
II	1	0	-1	0
III	2	1	0	1

(c) ketabton.com: The Digital Library

II'=II-I	0	-1	-2	0
III'=III-2.I	0	-1	-2	1
III''=III'-II'	0	0	0	1

دلته دی "0 = 1 " تضاد. سيستم نه اوبی کيږي يا حل نه لري.

بيلګه ۱۱ . ۲۰: (مقايسه يا پرتله بيلګه ۱۱ . ۱۷) دا سيستم

I x1 +x2+x3 =3

II x1+2x2+3x3=6

III 2x1+3x2+4x3=9

په لاندې ډول د ګاوس په الګوريتم اوبيونه ده

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	3
II	1	2	3	6
III	2	3	4	9
II'=II-I	0	1	2	3
III'=III-2I	0	1	2	3
III'' = III'-II'	0	0	0	0

=x3 په خوښه

x2 = 3 -2x3

x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3=x3

۱۱ ۰ ۳ په خوښه ډير مساوات ، په خوښه ډير ناپيژندونکو سره

موږ په عمومي ډول د لاينيز سيستم برابرونونو په لار ښونی پيل کوو m (برابرون د nناپيژندونکو سره)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+....+a_{1n}x_n=a1..................(11,37)$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}+....+a_{2n}x_n=a_2$$
$$..$$
$$..$$
$$a_{nm}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+.....+a_{mn}x_n=a_m$$

دا په خوبنه یا ازاد پریږدو چی د برابرونونو ګڼون (تعداد) m د ناپیژندونکو n د ګڼون (تعداد) څخه لوي، کوچنی او که برابر دی. په څرګندو دندو یا وظایف موږ دلته له څلور ناپیژندونکو څخه نه پورته کیږو او یواځی لاندې دوه متودونه څیړو

۱۱ ۰ ۳ . ۱ د n - م درجی دیترمینانت او د کرامر قاعده

پیژند ۱۱ . ۵ :

د n رییل ګڼونو aik یوه منظم سیستم n- م درجي دیترمینانت

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};........................(11,38)$$

لاندې سرى لاندنى رییل ګڼ پوهیږي:

$$D=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}-a_{14}A_{14}+...\pm a_{1n}A_{1n}.....(11,39)$$

دلته aik غړي پورې مربوطه لاندې دیترمینانت Aik د (n-1) - م درجی دیترمینانت ده، چی پاتیږي، که په Dکی i - مه لیکه او k - م درځ ، مټه یا ستن (لیکه او درځ چی aikپه کی ولاړ وی) په کربنه لرې کړي یا کربنه پرې تیره کړي، یعنی ووهي.

په دې ډول د-n ام درجی دیترمینانت شمیرل و- (n-1)-ام درجی دیترمینانت شمیرلو ته راتیتیږي .

په ځانګړي توږه د څلورمی درجی دیترمینانت لپاره دا لرو

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix}; A_{12}=\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};....A_{1n}\,etc$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که n برابرونونه د n ناپیژندونکو سره مخ ته ولرو) په) 11 . 37 (کی لرو) n=m د جمع تیورم په مرسته داسی سیستمونو لپاره لاندې نتیجه لاس ته راوړو

$$Dx_1=D_1, Dx_2=D_2, \ldots Dx_n= D_n \qquad (11.42)$$

د Di دیترمینانت داسی لاس ته راځي چی د ځله وونویا ضریبونو په دیترمینانت) ۱۱ . ۳۸ (کی د-i ام درځ متي یا ستن د برابرونسیستم د ښي لاس سره بدل کړي .
د بیلګی په توګه یوسیستم د ۴ مساواتو او۴ ناپیژندونکو سره (پرتله مقایسه ۱۱ . ۴۰)

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_2 a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_3 a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_4 a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} a_1 a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_2 a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_3 a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_4 a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11,43)$$

له(11 . 42) څخه لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۷ (د کرامر Cramer قاعده):
د ځله ووني یا ضریب دیترمینانت (۳۸.۱۱) لپاره د یوه مساوات سیستم د n مساواتو د nناپیژندوکو سره په (۱۱ . ۳۷) د m = n سره) باوري دی

$D \,|= 0$ (اصلي حالت) (11 . 44)

نو دا برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب لري(حل لري

$$x_1=D_1/D, x_2=D_2/D, \ldots, x_n=D_n/D. \quad (11.45)$$

برعکس که , D = 0 مګر D1 |= 0 کم له کمه د یوه i لپاره نو دا سیستم حل نه لري .
که D=D1=D2=...=Dn=0 وي، نو کم له کمه یو مساوات غیر ضروري دی (دلته د اوبیوني لپاره د ګاوس الګوریتم وړاندیز کوو)

بیلګه ۱۱ . ۲۱:
لا ندې سیستم دې حل شي

$$\begin{array}{lllll} \text{I} & x_1 & & +x_3 & = 0 \\ \text{II} & 2x_1+x_2 & & +x_4 & =0 \\ \text{III} & & x_2 & -x_4 & = 4 \\ \text{IV} & x_1 & -x_2 & -x_3 \; +x_4 & = -2 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix}1010\\2102\\010-1\\1-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\10-1\\-1-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}212\\01-1\\1-11\end{vmatrix}=-3-3=-6$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0010\\0102\\410-1\\-2-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}012\\41-1\\-2-11\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2-1\\-21\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}41\\-2-1\end{vmatrix}=-2-4=-6$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1010\\2002\\040-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}002\\40-1\\-2-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}202\\04-1\\1-21\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}40\\-2-1\end{vmatrix}+\left|2\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}\right|+2\begin{vmatrix}04\\1-2\end{vmatrix}=$$

$$=2.(4)+.2+2.(-4)=-12$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1000\\2102\\014-1\\1-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\14-1\\-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}+\left|2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}=4-2+2(-2+4)=6\right|$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1010\\2100\\0104\\1-1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}100\\104\\-1-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}210\\014\\1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}04\\-1-2\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}01\\1-2\end{vmatrix}=$$

$$=4+2.2-(-4)=12;$$

$$x_1=\frac{-6}{-6}=1;x_2=\frac{-12}{-6}=2;x_3=\frac{6}{-6}=-1;x_4=\frac{12}{-6}=-2$$

۱۱ .۳ . ۲ د ګاوس الګوریتم:

موږ وليدل چې د ګاوس الګوريتم له لارې د مساوتو يو دريکوجشکل سيستم لاس ته راوستی شو، چې د هغي له مخی څرګندولی شو چې کوم حل)ځواب(مخ ته پروت دی .

دا په لاندې بيلګه څرګندوو

بيلګه ۱۱ . ۲ ۲ :

که په بيلګه ۱۱ . ۲۱ کی ورکړ شوی سيستم د ګاوس الګوريتم له لارې حل کړو، نو لاندني شيما لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	x1	x2	x3	x4	Rs
I	1	0	1	0	0
II	2	1	0	2	0
III	0	1	0	-1	4
IV	1	-1	-1	1	-2
II'=II -2.I	0	1	-2	2	0
4III' = III	0	1	0	-1	4
IV' = IV-I	0	1	-2	1	-2
III'' = III' - II'	0	0	2	-3	4
IV'' = IV' +II'	0	0	-4	3	-2
IV''' = IV'' + 2.II''	0	0	0	-3	6

x4 = -2
x3=1/2(4+3.(-2))= -1
x2=0+(-1)(-2)= 2......
x1 = -(-1) = 1 ....

بیلګه ۱۱ . ۲۳:
دا برابرونسیستم

I x1 +x2 +x3 +x4=4
II x1 -x2 -x3 +x4=0
III 3x1 -x2 -x3 +x4=2

حل یا اوبیونه ی نه لري، لکه د ګاوس له شیما څخه چی لیدل کیږي:

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	2
II' = II-I	0	-2	-2	0	-4
III' = III-3.I	0	-4	-4	0	-10
III'' = III' - 2.II'	0	0	0	0	-2

دلته "III په ښتوالی یا تضاد خوندي لري " 0 = -2 "

بیلګه ۱۱ . ۲۴:

لاندې سیستم د ۵ برابرونونو او ۴ ناپیژندونکو سره

I x1 +x2 +x3 +x4= 4

II x1 -x2 -x3 +x4= 0

III 3x1 -x2 -x3 +3x4= 4

IV x1 +2x2 +3x3 +4x4=10

V 3x1 +x2 + x3 +3x4= 8

ګورو چی oe1 (ناپای ډیر) اوبیوني لري

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4
II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	4
IV	1	2	3	4	10
V	3	1	1	3	8
II' = II-I	0	2	- 2	0	-4
III'= III-3.I	0	-4	-4	0	-8
IV' = IV -I	0	1	2	3	6
V' = V-3.I	0	-2	-2	0	-4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II"= II'+2.IV'	0	0	2	6	8
III'=III'+4.IV'	0	0	4	12	16
V" = V' +2.IV'	0	0	2	6	8
III''' = III"-2.II'	0	0	0	0	0
V'''=V"-II	0	0	0	0	0

ګورو چی III''' او V''' تضاد نه لري. سړی کړي شي چی x4 په خوښه وټاکي او لاس ته راوړي

له , x3=4-x4 "II له x2=6-2(4-3x4)-3x4=-2+3x4 'IV او لهI

x=4-x2-x3-x4=4-(-2+3x4)-(4-3x4)-x4=2-x4

نو x1=2-x4   په خوښه x4 ټاکو

او x2=-2+3x4   ، په خوښه x4 ټاکو

او x3=4-3x4   په خوښه x4 ټاکو

یادونه : هغه کښ یا نوره هم ښه هغه ځله ووني، چې غواړو صفر شي یا له منځه وړو هغه مو شنه کړي٠

سړی د ګاوس شیما په دوم بلاك کی پیژندلی شي، مساوات، کوم چی په 'III او 'V پورې اړه لري، بل څه نه افاده کوي په غیر له هغی چی په 'II اړه لرونکي دي. کیدی شو چی په 'III او 'V لیکو مو کرښه تیره کړې وی) له منځه وړې وی (. دریم بلا ك به یواځي له کرښی 'II جوړ وی، او د ګاوس الګوریتم به له دې سره پاي میندلی وی.

۱۱ . ۴ هوموژین مساواتسیستم:

د n مساواتو یو سیستم د n نامعلومو سره چی د ټولو مطلقه غړي ورك شي، هموګین مساواتسیسمتم بلل کیږي   .

د n = 3 لپاره دا د مثال په توګه هوموګېن سیستم بلل کیږي

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad a11x1+a12x2+a13x3= 0.............\\ &\text{II} \quad a21x1+a22x2+a23x3= 0 \quad (11.\ 46\\ &\text{III} \quad a31x1+a32x2+a33x3= 0.................................\end{aligned}$$

یو داسی هموژینسیستم تل یوه اسانه اوبیونه یا اسان حل لري

$$x1=x2=x3=...=xn=0 \qquad (\ 11.\ 47\ )$$

که د ځلوونو د یترمینانت (۱۱ . ۳۸) لپاره D |= 0 باور ولري، نو د جملی ۱۱ . ۷ شیما څخه یواځي اسان trivial اوبیونه یاحل موجود دی او باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۱. ۸ : يو هوموګين مساواتسيستم يواځ هلته سخت حل لري، که D = 0 باوري
وي بيلګه ۱۱ . ۲۵ :
دا هوموژين برابرونسيستم

$$\begin{array}{ll} I & x_1 + x_3 = 0 \\ II & x_1 - x_2 = 0 \\ III & x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array}$$

د

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + (1+1) \neq 0$$

له امله يواځنی ساده اوبيونه $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ لري.
بيلګه ۱۱ . ۲۶:
دا هموګين مساواتسيستم

$$\begin{array}{ll} I & x_1 + x_3 = 0 \\ II & x_1 + x_2 = 0 \\ III & x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

د

له امله ناساده اوبنونه هم لري دا په لاندې ډول د ګاوس د الګوريتموس څخه لاس ته
راځي: په لاندې کې RS د پاتې- يا باقي سيستم په معنا دی.

	x1	x2	x3	RS
I	1	0	1	0
II	1	-1	0	0
III	0	1	1	0
II'=II-I	0	-1	-1	0
III' = III	0	1	1	0
II'' = II + III'	0	0	0	0

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو چې II"تضاد نه لري x3په خوښه ټاکو، او له III' لاس ته راځيx3-=x2 او له I ځخه لاس ته راځي x3-=x1نوx3- =x1نو X3 په خوښه او x3- = x2 نوx3 په خوښه

. تمرينونه

د نامعلومو لپاره ـلکه له ښوونځي چې ورسره بلد يو-پوهيږو او يا هم

۱ – کرښيز مساواتسيستم له دوه مجهولو سره.

مشوره مو داده، چې د دې تمرينونو د حل لپاره د مختلفو تګلارو ځخه کار اخستلس شي، چې بيايې و ازمايو. د لته دي د زياتون يا جمعي قانون او همداسې د ګاوس الګوريتم ته لومړيتوب ورکړ شي ا و د ديترمينانت سره شميرنه دې يوه بله د استعمال لار وي.

۱ . ۱ – مساوتسيستم د ټاکلو ضريبونو سره

1.1.1. a) $2x_1 + 3x_2 = 8$, $3x_1 - 6x_2 = -30$

b) $x_1 = 3x_2 - 14$, $x_2 = 3x_1 - 22$

c) $51x - \frac{3}{20y} = 3$, $48x - \frac{1}{10y} = 2$

d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$, $\frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4$

1.1.2. a) $5(x_2 + 2) - 3(x_1 + 1) = 23$, $3(x_2 - 2) = 19 - 5(x_1 - 1)$

b) $3(2x_1 - x_2) + 4(x_1 - 2x_2) = 87$, $2(3x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2) = 82$

c) $4 - \frac{1}{3}(2x - y - \frac{9}{2}) = \frac{1}{8}(3x - 6 - 4y)$, $4 - \frac{x - \frac{1}{2}y + 3}{3} = \frac{2y - x - 6}{8}$

d) $3y - \frac{3(4x - 3y)}{2} = 2x - 3y - 1$, $3x - \frac{3(3x - 2y)}{5} = 5x - 3y - 1$

1.1.3. a) $\frac{1}{\frac{7}{2}x - 3} = \frac{1}{4y - 3}$, $\frac{1}{\frac{5}{2}x + 4} = \frac{1}{3y + 1}$

b) $\frac{1}{3x - 5} = \frac{4}{7y - 13}$, $\frac{1}{y - x} = \frac{8}{3x + y}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{1}{y-10} = \frac{25}{12x+19}$
$\frac{1}{45-x} = \frac{8}{15y+1}$

d) $4+y = x$
$\frac{2}{5-3x} = \frac{3}{7-2y}$

1.1.4. a) $(x-1)(2y+5) = (y+1)(2x-1)$
$(2x+7)(y-2) = (2y-3)(x+2)$

b) $4(5y-3)(2x+1) = (10x+7)(4y-3)$
$2(2y+1)(x+4) = (2x+5)(2y+3)$

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{x}-\frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

d) $\frac{3}{x}+\frac{8}{y} = 3$
$\frac{15}{x}-\frac{4}{y} = 4$

1.1.5. a) $\frac{9x_1}{2}+\frac{3x_2}{2} = 3$
$3x_1+x_2 = 2$

b) $\frac{2x_2-5x_1}{6}+\frac{x_1}{6} = \frac{x_2-2x_1}{3}$
$\frac{5-3x_1}{3}-\frac{4x_2-1}{4} = \frac{6x_1+23}{12}-\frac{3x_1-4x_2}{2}$

c) $\frac{12}{4x_1+3x_2}-\frac{1}{3(3x_1-2x_2)} = \frac{1}{6}$
$\frac{5}{3x_1-2x_2}+\frac{6}{4x_1+3x_2} = 5{,}25$

d) $3(x_1-2)+4(2x_2+\frac{3}{2}) = 0$
$5(x_1+3)-3(x_2-\frac{1}{3}) = 16$

1.1.6. a) $3x_1+4x_2 = 8$
$5x_1-2x_2 = 9$
$7x_1-8x_2 = 10$

b) $6x_1-x_2 = 1$
$9x_1+2x_2 = 5$
$3x_1-x_2 = 1$

c) $5x_1-3x_2 = -3$
$3x_1+5x_2 = 5$
$3x_1-1{,}8x_2 = -1{,}8$
$0{,}9x_1+1{,}5x_2 = 1{,}5$

d) $2x_1-3x_2 = 10$
$-\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{2}x_2 = -\frac{5}{3}$
$x_1-1{,}5x_2 = 5$
$0{,}5x_1-0{,}75x_2 = 2{,}5$

۱ ، ۲ – مساواتسیستم د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x_1+x_2 = a$
$ax_1-x_2 = b$

b) $3x_1-2x_2 = 5a$
$2x_1-3x_2 = 5b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

c) $10x + 6y = 4a + b$
$6x + 10y = 4a - b$

d) $14x - 15y = 24a$
$10x - 21y = 24b$

1.2.2. a) $\frac{x_1}{2a+b} - \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8ab}{b^2 - 4a^2}$
$\frac{x_1}{2a+b} + \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8a^2 + 2b^2}{4a^2 - b^2}$

b) $-(a+b)x_1 + (a-b)x_2 = 0$
$(a-b)x_1 + (a+b)x_2 - 4ab = 0$

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \cdot x - \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2 \cdot y = a^2$
$\frac{a^2+b^2}{2b} \cdot x + \frac{b^2-a^2}{2b} \cdot y = b$

d) $\frac{x}{b+c} - \frac{y}{a+c} = a - c$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{b+c} = b - a$

1.2.3. a) $x + y = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$
$x - y = \frac{4ab}{a^2-b^2}$

b) $x + y = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
$2x + 3y = \frac{2a^2+ab+3b^2}{a^2-b^2}$

c) $ax + by = 2a$
$a^2x - b^2y = a^2 + b^2$

d) $ax + by = a^3 + 2a^2b + b^3$
$bx + ay = a^3 + 2ab^2 + b^3$

1.2.4. a) $ax + by = 2a$
$x + y = \frac{a^2+b^2}{ab}$

b) $(a-b)x + (a+b)y = a + b$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$

c) $\frac{x-a}{y-a} = \frac{a-b}{a+b}$
$\frac{x}{y} = \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$

d) $(a-b)x + y = \frac{a+b+1}{a+b}$
$x + (a+b)y = \frac{a-b+1}{a-b}$

۱ . ۳ – شي شمیرنه

۱. ۳. ۱ کوم دوه اعداد لاندې خويونه لري؟ که هرعدد په ۵ لوی شي، د مربع یا څلورئ کمون(تفریق) یې په ۱۰۰ لوییږي، په داسي حا لي جي ضرب يې په۳۲۵ زیاتیږي.

۱ . ۳ . ۲ د دوه عددونو جمعه یا زیاتون دومره لوي دی، لکه د تفریق مربع یې.

که ۴ لومړي عدد تع ورزیات شي او له دویم عدد کم شي، نو د مربع کمون د یا تفریق یې ۹۹ دی، وښایئ چې عددونه څومره لوی دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۳ . ۳ د هرو دوه ګنونو څخه هر یو یې په 2 لوېږي، نو ګڼونه څانونه نیسي لکه: 4 : 3 . که له هر یوه ددې دوه ګڼونو څخه 3 کم شي ، نو داسې لاس ته راغلي ګڼ ځان نیسي لکه : 3 : 2 . دواړه ګنونه کوم دي؟

۱ . ۳ . ۴ د دوه ګنونو زیاتون 999 دی. که لمړی ګڼ په 9 وویشل شي او دوم په 6 ، نو د ویشونکو زیاتون 138 دی . هر یو ددې دوه ګنونو څومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۵ د دوه ګنونو زیاتون 1000 دی. که لمړی له 2 او دوم له 3 سره څل یا ضرب شي، نو د څلونو زیاتون بی 2222 دی. هر یو له دې ګنونوڅومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۶ په دوه ګنونو کې یو له بل په 0,909 لوي دی، زیاتون یې 3,191 دی. دواړه ګنونه څه نومیږي یا کوم دي؟

۱ . ۳ . ۸ . د یوه دریکونجي د دوه اړخونواوږدوالي زیاتون 8,4 cm دی او پړیکشن یا پریوستون یې د دریکونجي په دریم اړخ 4 cm او 1,6 cm دی. د دریګوډي اړخونه څومره لوي دي؟

۱ . ۳ . ۹ . د یوه لوي ښار ترمخ دوه کلي X او Y د ښار له مرکز Z سره یو دریګوډی جوړوي . له X څخه چې له Z څخه تیریږي ، Y ته اوږدوالي 12 cm دی، Y له مرکز Z څخه 2 km زیات لرې دی نسبت و X ته ، دواړه مخ کلي X او Y له مرکز Z څخه څومره لرېدي؟

۱ . ۳ . ۱۰ . د یوه فوټبال میدان څخه د څلورکونجي شکله د لرګیو راګرځیدلې دیوال، چې 420 m اوږد دی ، باید په اغزیو سیمانو بدل کړي. دلته یوه خوا په 5 m کوچنی کیږي، که بل اړخ په 10 m اوږده شي. له دې سره د سیمګرځي اوږده د هوارې دننه په $100\ m^2$ زیاتیږي. د څلورکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۱۱ . د یوه موټر ماشین یخی ۸ لیټره اوبه خوندي کوي او دوه وتللارې لري، دا کیدی شي خالي شي، که د بیلګي په توګه لمړی 5 دقیقی او دوم 2 دقیقی واز کړي او یا دوم 6 دقیقي او لمړی 3 دقیقي واز شي. په هرنل کي څومره اوبه په یوه دقیقه کی وزي؟

۱ . ۳ ۱۲ . یو پلار له خوي څخه ۳۶ کاله زوړ دی په ۵ کاله کی پلارد خوي 1 / 4 عمرڅخه ور زیات 3 برابره د خوي عمر لري اوس پلار او خوي هر یو څومره عمر لري؟

۱ . ۳ . ۱۳ د شربت د ګهولو لپاره دوه ډوله شربتونه سره ګډیږي. که له لمړي دري بوتله واخستل شي او له دوم ۷ بوتله نو د یوه بوتل ارزښت دې ۲ مارکه وشمیرل شي. مګر که له لمړي ۷ بوتله او له دوم دري بوتله سره ګډ شي، د یوه بوتل ارزښت 40 , 2 الماني مارکه(DM) کیږي. د په کارونو شربتونو بوتل به څومره ارزښت ولري؟

۱ . ۳ . ۱۴ . یود $450\ m^3$ اوبو اوبه ډکی یا اوبه ساتی (بیلر) له دوه نلونو ډکیږي. که لمړی نل دري دقیقي او دوم یوه دقیه واز وي،نو په اوبه ساتي کی $40\ m^3$ اوبه جریان لرودی شي. مګر که لمړی یوه دقیقه او دوم نل ۷ دقیقي وازې وي، نو اوبه ساتي ته $60 m^3$ اوبه جریان لري. هر نل په یوه دقیقه کی څومره اوبه اوبه ساتي ته غورځوي؟ څومره باید هر نل له همغه یوه وخته واز وي چی اوبه ساتی ډك شي؟

۱ . ۳ . ۱۵ . دوه کارګرو ته د کندنی کار ور په غاړه کیږي. که دواړه یوځاي کار وکړي، نو ۱۲ ورځو ته ضرورت دی. که لمړی دوه ورځي او دوم دري ورځي کار وکړي، نو په دې وخت کی یواځي 1 / 5 برخه د کار کړه کیږي. څومره ورځی به له دوي هر یو ځانله د دې کار لپاره ضرورت ولري ؟ ا پرتا ودری؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۱۶ . د يوې گردی په چاپيري چی ۱۰۰ متره اوږد دی، دوه بدنونه په حرکت راځي. هغوي هر ۲۰ دقيې حرکت کوي، که هغوي په همغه لور حرکت وکړي او هر ۴ دقيې، که هغوي يو د بل په خپ لور حرکت وکړي، هر بدن په يوه ثانيه کی څومره واټن تی کوي يا وهي؟

۱ . ۳ . ۱۷ . په يوه گردی چی چاپری يي ۹۹۹ متره اوږد دی دوه بدنونه په همغه لور حرکت کوي او دا حرکت په هرو ۳۷ ثانيوکی. دواړو بدنونو سرعت څومره دی، که د لمړي سرعت څلور واره لوي لکه د دوم وی ؟

۲

. کرښيز مساوات سيستمونه د درې مجهولو سره ۲ .

۱ – مساواتسيستم د ټاکلو ضريبونو سره

a) $\begin{aligned} x + y &= 14 \\ x + z &= 15 \\ y + z &= 16 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 4 \\ x_1 + x_3 &= 18 \\ x_2 - x_3 &= 6 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6{,}6 \\ x_1 - x_3 &= 2{,}6 \\ x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x + y + z &= 25 \\ 3x - 2z &= 1 \\ 20y - 16z &= 0 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 2x + 3z &= 13 \\ 3x - 4y &= 3 \\ 5y - 6z &= 9 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 12x + 24y - 42z &= 30 \\ 4x + 8y - 14z &= 10 \\ 6x + 12y - 21z &= 15 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} 5x + 3y + 2z &= 207 \\ 5x - 3y &= 37 \\ 3y - 2z &= 19 \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 14 \end{aligned}$

i) $\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 11 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 6 \\ 6x_1 - 16x_2 + 10x_3 &= 39 \end{aligned}$

j) $\begin{aligned} 4x + 4\tfrac{1}{2}y - 6\tfrac{3}{4}z &= 20 \\ 2\tfrac{1}{5}x - 2\tfrac{1}{3}y + 1\tfrac{1}{2}z &= 5\tfrac{2}{3} \\ 1\tfrac{2}{3}x + 1\tfrac{3}{4}y - 4\tfrac{1}{2}z &= 3\tfrac{1}{3} \end{aligned}$

k) $\begin{aligned} \tfrac{2}{5}x - y &= 0 \\ \tfrac{2}{3}x - z &= 1 \\ -\tfrac{2}{3}y + z &= 2 \end{aligned}$

۲ . ۲ – مساوات سيستمونه د ناټاکلو ضريبونو سره

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2c \\ x_1 + x_3 &= 2b \\ x_2 + x_3 &= 2a \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2(a + b) \\ x_1 + x_3 &= 2(a + c) \\ x_2 + x_3 &= 2(b + c) \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} ax + by - z &= 1 \\ ax - by + z &= b \\ -ax + by + z &= a \end{aligned}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

d) $ax + y - cz = 2a$
$-ax + y + cz = 2c$
$ax - y + cz = 2ac$

e) $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2a$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 2b$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0$

f) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{a}$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{2}{b}$

g) $x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = a$
$y + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = b$
$z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c$

h) $\frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} = a + b$
$\frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} = b + c$
$\frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} = c + a$

۳ . په خوښه زيات مساوات د په خوښي زياتو مجهولو سره

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ 0{,}5x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 - 0{,}5x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 &= 1 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 &= 10 \\ 6x_1 + 0{,}5x_2 + 5x_3 + x_4 &= 9 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 4 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 21 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 1 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 &= 19 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 - 7x_6 &= -24 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 3 \end{aligned}$$

هوموجين مساوات سيستمونه:

a)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 20x_1 - 10x_2 + 15x_3 &= 0 \\ -12x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 0 \\ 8x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 9x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ . الجبري مساوات یا - برابرونونه

۱۲ . ۱ نالاینیز- یا ناکرښیز- یا ناخطي برابرونونه

ټول مساوات چی د نورمالفورم

$$A . x = a \qquad (12.1)$$

سره یوارزښته (اکویوالنت) نه وي ، نالاینیز – یا ناکرښیز مساوات بلل کیږي او عمومي فورم یی په لاندې ډول دی

$$F(x) = 0 \qquad (12 . 2)$$

دلته F (x) په x کی یوه ناکرښیزه یا ناخطي وییینه یا افاده ده . د (12 . 2) حل دا مانا لري چی ټول د xارزښتونه پیدا شي د کومو لپاره چی (12 . 2) باوري وي. باید په پام کی ونیول شي چی ایا یواځي رییل ارزښتونه پیدا کوو او که کمپلس ارزښتونه هم غواړو چی پیدا کړو. د بیلګی په توګه لاندې ناکرښیز یا لاینیز مساوات

$$x^2 - x - 2 = 0$$

لاندې دواړه رییل ځوابونه لري

$$x1 = -1 , x2 = 2$$

چی د ارزښتونو ځاي په ځاي کولو سره بي مساوات باوري کیږي .ددې په ځنډ یا برعکس دا برابرون $x^2 + 1 = 0$ رییل ځواب نه لري (۵ -مه برخه دي وکتل شي)، بلکه لاندې ایماګینار ځوابونه لري : $x1= i , x2 = -i$

د دې حالت د ښه روښانولو لپاره دې (۱۵ برخه دې وکتل شي) د برابرون او فنکشن ترمنځ اړیکو ته پاملرنه وشي: اړیکو $y=F(x)$ ته فنکشنبرابرون او x ته متحوله

(c) ketabton.com: The Digital Library

وایي، چې زه یې کله اووښتونی او کله ناپیژندونې بولم(ښه نومه ونه یې اوښتوني ده) په څېټ یا برعکس (2 . 12) یو ټاکنمساوات دی او x هلته یوه ناپیژندونکی یا اوښتونی دی.
د (2 . 12) برابرون یا مساوات اوبیوني یا حل ته د برابرون د F (x) صفرځای یا د مساوات F(x)=0 جذر یا ریښه هم وایي.
هغه برابرون یا مساوات چې په (۱۲ . ۲) فورم نه دئ ورکړ شوی کیدی شي چې په دې لاندې فورم واړول شي. د بیلګي په توګه د دې برابرون لپاره :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$ او f(x)=g(x)

نورمال فورم په لاندې ډول لاس ته راوړل کیږي

F(x)=f(x)-a.g(x)=0 او F(x)= f(x)-g(x)= 0

د نالاینیزو برابرونونو لپاره د لاینیزو برابرونونو په څیر راغونډه (اختمامیه، رابنده، راتړلی) تیوري نه شته. په پولیزه یا عمومي ډول څوك نور فرمول نه شي ورکولی، د کوم له مخی چې د صفرځاي معلومیدی شي. باید په نومریکو (numerischen Methoden) متودونو یا ورپسې ګڼ متودونو په ورنزدې یا تقریبي ډول پیداشي

نالاینییز برابرونونه په دوه ټولګیو ویشل کیږی: الجبري او تراسڅندنت چې په دې او راتلونکی څپرکي یا لکه چې ما استعمال کړې برخه کی یی څیړو، چې اوبیونې یی روښانه افاده شوې (explizit لاتین: واضح یا روښانه ، افاده شوی، اکسپلیڅټ) دي.

له ۱۲ . ۲ څخه تر ۱۲ . ۴ پورې الجبري برابرونونه څیړل کیږي چې په لاندې نورمال فورم یا – بڼه اړول کیدی شي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0 ....(12,3)$$

دلته په (2 . 12) کی یو نالاینیز بلواک یا – فنکشن (F (x د یوه n - م درجی پولینوم په څیر مخ ته پروت دی . موږ په (۱۲ . ۲) کی د ضریبونو(ځله وونو) لپاره یواځی رییل ګڼونه پریږدو (په دې مانا چې ځلونه یواځي رییل وي، یواځی رییل ګڼونو ته اجازه ورکوو) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په (۱۲ . ۳) کی کیږ اړخ ته n - م درجه پولینوم

$$F(x) = P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0 ....(12,4)$$

ته ټول ریشنل (- ریښتونی) بلواک یا فنکشن هم وايي، ځکه چی د ریشنل شمیرله عملیو زیاتون، کمون، او ځل له لاري او نه په x واریابلی او ai د رییل ضریبونو، ځلونو یا فاکتورونو باندې د ویش کارونی کارولو (عملي استعمال) له لارې منځ ته راځي .ټولیز برانرون یا

$$b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0 = 0; b_n \neq 0 ....(12,5)$$

کیدي شي په bn|= 0 ویش باندې په (۱۲ . ۳) نورمال فورم واړول شي .

که دا نه لاینیزفنکشن یا ۰ بلواک (F (x په (۱۲ . ۲) باندې په واریابلي یا اوښتوني x او ځلونو باندې ټول د شمیر کاروني یا عملیي او بالاخره دویش کارونه وکارول شي یا اجرا شي او رییل پارامتر (Parameterپه شمیرپوهنه کې ثابت (همغۀ) او یا مرستندویه لوي ده) تشکیل شي نو فنکشنونو ته بیا مات ریشنل فنکشنونه ویل کیږي.
دا تل د دوه پولینومونو یا ریشنل فنکشنونو د ویش په څیر انځوروړ دي

$$F(x) = R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0}{c_mx^m + c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{n-2} + ... + c_1x + c_0}; .....(12,6)$$

په همدې ډول برابرون

$$F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0; ....(12,7)$$

تل په (۱۲ . ۵) یا (۱۲ . ۳) برابرون اړول وړ دي . دا باید په پام کی وي چی د (۱۲ . ۳) لپاره یواځنی هغه ځواب په پوښته کی راځي، د کوم لپاره چی باوري وي:

$$Q_m(x) \neq 0$$

که چیرې د نالاینیزبلواک یا - فنکشن جوړولو کی د ریشنل شمیرعملیو تر څنګ د توان (مټ، په جګ) یا پوتنځ کول او جذر نیولوته هم اجازه ورکړل شي نو بیا سرې د الجري فنکشنونو څخه غږیږ. یعني داسي فنکشنونو ته الجبري فنکشنونه ویل کیږي او (۱۲ . ۲) برابرون بیا الجبري برابرون بلل کیږي ، دا ډول مساوات هم کیدی شي چی په (۱۲ . ۳) فورم واړول شي.

هره n - مه ریښه یا جذر $\sqrt{G(x)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (x)G افادې یا وییني له منځه وړل کیدی شي, که چیرې څوك دا برابرون په یوه خوا راوړي او بیا د برابرونونو دواړه خواوې دn په توان کړي یا د n پوتنځ یا متې ته جګ کړي . دا په ۱۲ . ۴ برخه کی په څرګندو یا معلومو بیلګوڅیړل کیږي . په نومولو تګلارو د الجبري مساواتو ځینه د (۱۲ . ۳) فورم برابرونونو ته راکښته کیدلی شي. د الجبري مساواتو دا نورمال فورم د n - می درجي برابرون هم بلل کیږي. ټول نالاینیز برابرونونه چی الجبري برابرون نه دي، ترانسڅیندنت برابرون بلل کیږي . د ترانسڅیندنت رابرونونو درې تیوپونه، په نامه ، اکسپوننشل برابرونونه ، لوګاریتمي برابرونونه ، او ګونومتریکي برابرونونه دي چي په برخه ۱۳ کی به تر څیړني لاندې ونیول شي.

۱۲ . ۲ څلوری(مربع-) مساوات په توان(متې، جګ) د ۲

۱۲ . ۲ . ۱ په جګ د ۲ مساوات په نورماله بڼه

د نالاینیزو الجبري برابرونونو ساده بڼه د ۲ په توان یا متې (په جګ ۲ هم ویل کیږي) برابرونونه دي چی څلوری یا مربع برابرونونه بلل کیږي .د دې ټولیزه بڼه (عمومي فورم) داسی ده ۰ دی

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0; b_2 \neq 0;..........................(12,8)$$

په b2 یي ویش په لاندې ډول یو ورته ارزښته (اکویوالنت äquivalent) نورمالبڼه یا نورمالفورم ورکوي

$$x^2 + a_1x + a_0 = 0; (a_1 \neq b_1 / b_b; a_0 \neq b_0 / b_2);..........................(12,9)$$

ددې حل د څلوری پوره کونې یا مربعتکمیل ځخه په ګټه د بینوم په فورمل ودې کتل شي: ۱ . ۲ . ۲) ولاړ دی.

$$[x + a_a / 2]^2 = x^2 + a_1x + \frac{a^2{}_1}{4};.....................(12,10)$$

په دې ډول کیدی شي چی (۱۲ . ۹) برابرون په لاندې فورم داسی واړول شي:

$$x^2+a1x+a0=(x+a1/2)^2+a0-a1^2/4 = 0 <=>$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[x+a_1/2]^2=(a_1^2/4)-a_0 \qquad (12,11)$$

که وي

$$(a_1^2/4)-a_0>0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0>0 \Leftrightarrow a_1^2>4a_0 \quad (12,12)$$

نو دوه امکانات شته دی، چی (۱۲ . ۱۱) برابرون پوره کړي:
داصدق کوي

$$x+\frac{a_1}{2}=\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,13)$$

یا

$$x+\frac{a_1}{2}==-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,14)$$

دا دواړه خواو په توان د ۲ څخه، د (۱۲ . ۱۳) او همداسی د (۱۲ . ۱۴) څخه (۱۲ ۱۲)برابرون او په دې ډول (۱۲ . ۹) برابرون لاس ته راځي (په پام کی دې وي چی a د ۲ اصلي برخی په بینا تل نا کمیز یا نامنفي ګڼ پوهیدل کیږي، چی څلوری یا مربع یی a ده) . له (۱۲ . ۱۳) په همدې ډول له (۱۲ . ۱۴) څخه ریېل ځوابونه لاس ته راځي،

$$x_1=-\frac{a_1}{2}+\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\ x_2=-\frac{a_1}{2}-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,15)$$

او ددې لپاره دا هم لیکلی شو

$$x_{1,2}=-\frac{a_1}{2}\pm\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,16)$$

په (۱۲ . ۹) کی د (۱۲ . ۱۵) په همدې توګه (۱۲ . ۱۶) ځاي پر ځاي کولو څخه پوهیدل کیږي چی دواړه ارزښتونه
x_1 او x_2
په ریښتونی څلوری برابرون یا مربع مساوات پوره کوي.
په لاندې حالت کی

$$(a_1^2/4)-a_0=0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0=0 \Leftrightarrow a_1^2=4a_0;\ldots\ldots\ldots(12,17)$$

د (۱۲ . ۱۶) له لارې تیك یو ریېل اوبی لرو:

$$x_{1,2}=x_1=x_2=-(a_1/2)\pm 0=-a\ \ /2;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۵) همداسی په (۱۲ . ۱۶) باندې په تکیه دا اوبی دوه واره دی یا په بل عبارت دوه واره رامنځ ته کیږي او په دې ډول د یوه دوه واره اوبیوني (۱۲ . ۱۸)ځخه غږیږو.

که وي

$$(a_1^2/4)-a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2<4a_0;................/12,19)$$

نو (۱۲ . ۱۱) همداسی (۱۲ . ۹) رییل حل نه لري. که په کمپلس ګڼونو شمیرنه وکړو نو له ۵ - برخی څخه لاندې لاس ته راوړو

$$x+a_1/2=\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i} \wedge x+a_1/2=-\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

او په دې ډول د کونجوګیرت کمپلکس حل جوړه لاس ته راځي:

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i};...................(12,20)$$

له دې څخه هم چی په (۱۲ . ۹) ځای په ځای شي څرګندیږي چی د x1 او x2 ارزښتونه پیل برابرون یا مساوات پوره کوي.

که په (۱۲ . ۱۹) حالت کی لاندې څرګندونی ته پام وي

$$\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}=\pm\sqrt{(a_1^2/4)i-a_0};...................(12,21)$$

نو لاندې جمله ىی راغونډه داسی فرمولولی شو

جمله ۱۲ . ۱: (د څلورئ یا مربع) په توان یا جګ د ۲) برابرونونو د اوبیوني فرمول) د څلورئ- یا مربع برابرونونو(مساواتو) $x^2+a1x+a0=0$

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

ټیک دوه ځوابونه لري

د $a_1^2>4a_0$

په حالت کی دوه مختلف رییل حلونه دی، د $a_1^2=4a_0$ په حالت کی یو رییل دوه برابره(ډبل) حل دی او د $a_1^2<4a_0$ په حالت کی یو جوړه کونیوګیرت - کنجوګیریکمپلکس حل شته شته دي.

په ساده ډول لاندې د وییتا جمله هم د مربع مساوتو لپاره ښوول کیدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۲ (د ویيتا(Vieta)جمله) :

که x1 او x2 د خلورئ - یا مربع برابرونونو (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) اوبیوني وي نو باوري دی

$$a_1 = b_0 / b_1 = x_1.x_2; ....(12,22)$$

$$a_2 = b_1 / b_2 = -(x_1 + x_2); ....(12,23)$$

حل : (۱۲ . ۲۳) فرمول په دریواړو حالتونو کی سم د لاسه له لاندې ښخه لاس ته راځي:

$$-(x_1 + x_2) = \left[\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] + \left[\frac{a_1}{4} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = a_i$$

د (۱۲ . ۲۲) فرمول د تصدیق لپاره د بینوم دریم فرمول او i ² = -1 استعمال ښخه په په (۱۲ . ۱۲) حالت کی باور لري :

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right]^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_0 = a_0$$

په (۱۲ . ۱۷) حالت کی لاس ته راځي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + 0\right]\left[-\frac{a_1}{2} - 0\right] = \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

په (۱۲ . ۱۹) حالت کی باوري دي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\, i\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\, i\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\right]^2 i^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - [a_0 - \frac{a_1^2}{4}].(-1) = \frac{a_1^2}{4} + a_0 - \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وییتا جملی په مرسته لاندې جمله باوري کیږي یا تصدیقیږي

جمله ۱۲ . ۳ :

یو ۲ درجییز پولینوم کیدی شي چې په دوه لاینی فاکتورونو یا ضریبونو یا ځله وونو بیل یا ټوټه یا تجزیه شي:

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,24)$$

په همدې ډول

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = b_2(x - x_1)(x - x_2); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,25)$$

چیرته چي x1 او x2 د څلوری برابرونونو یا مربع مساواتو (۱۲ . ۹) په همدې ډول د (۱۲ . ۸) دواړه ځوابونه دي

اوبیونه : له (۱۲ . ۲۲) ، (۱۲ . ۲۳) څخه د (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) په پام کې نیولو سره لرو

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + a_1x + a_0 =$$
$$= \frac{1}{b_2}(b_2x^2 + b_1x + b_0)$$

د جملی ۱۲ . ۳ څخه دې ته راځول کیږو چې د (۱۲ . ۱۷) حالت کی د دوه برابره ریبل اوبیو څخه خبرې وکړو(وغږیږو). د x1 = x2 له امله لاس ته راځي

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)^2; a_1^2 = 4a_0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,26)$$

دا دري حالتونه(۱۲ . ۱۲) .(۱۲ . ۱۷) او (۱۲ . ۱۹) کیدی شي چې د فنکشن

$$y = p_2(x) = x^2 + a_1x + a_0$$

څیرو یا شکلونو (ګراف) په مرسته د کتلو شي.

ګراف په بنسټیزه توګه پارابول انځوروي، چې پورته خوا ته سرواز دی. ځکه چې که xهرڅومره کوچنی شي)که x د کمیز ناپای په جګ یا توان شي) اوهمدارنګه x هرڅومره لوي شي (که x د ∞ (ناپای) په جګ شي y لوییږي (ستریږي یا غټیږي) ، ځکه چیx² نسبت و x ته په توان یا قوي جګیږي له ټولو پولو(yد ناپای لور ته ځي)۰ د دې ډول پولو کره پیژند یا تعریف په ۱۹ - برخه کي لوستل کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۲) حالت کی د x - محور په داړو ریيلو ځايونو x1 او x2 کی غوڅيږي؛ په (۱۲ . ۱۷) حالت کی په x1 = x2 ځای کی يي لمسوي او په (۱۲ . ۱۹) حالت کی ګډ ټکي ورسره نه لري یا نه وررسيږي (پرتله څیره . ۱۲ . ۱)

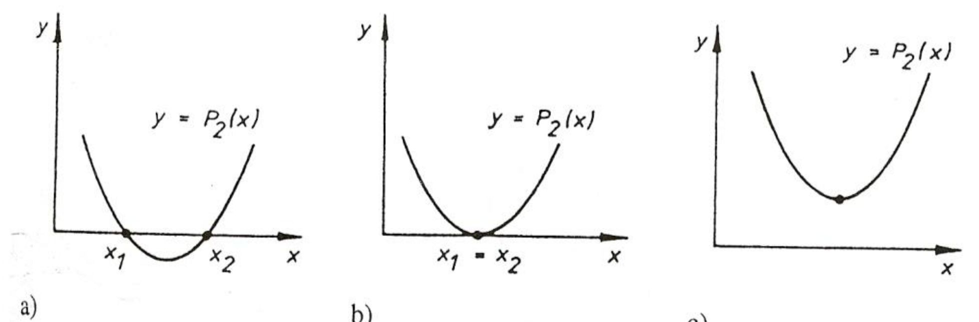


Bild 12.1

له جملی ۱۲ . ۱ تر ۱۲ . ۳ پورې به په درې ساده ډوله د (۱۲ . ۱۲) ، (۱۲ ، ۱۷ ، (۱۲ . ۱۹) سره مناسبو بیلګو روښانه شي.

بیلګه ۱۲ . ۱ :

په برابرون $x^2 - x - 6 = 0$ کی لرو

$a_1 = -1$, $a_0 = -6$ او د $a_1^2 - 4a_0 1 + 24 = 25 > 0$

له امله (۱۲ ، ۱۲) حالت مخ ته پروت دی.
دواړه له صفر مختلف ځایونه د جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندې فورم لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6} = 1/2 \pm \sqrt{1/4+24/4} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -2$$

جمله ۱۲ . ۲ :

له لاندې لاس ته راوړنی یاتعقیب څخه باوري کيږي

$$a_0 = -6 = x_1 x_2 = 3(-2) = -6$$

$$a_1 = -1 = -(x_1 + x_2) = -(3-2) = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له جملی ۱۲ . ۳ څخه لاس ته راځي: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

بیلګه ۱۲ . ۲ :

له مساواتو $x^2-4x+4=0$ لرو $a1=-4,a0=4$ او د $a_1^2-4a_0=16-4.4=0$

له امله (۱۲ . ۱۷) حالت مخ ته لرو ۰ دوه ئیز ریبل حل په لاندې ډول له جملی ۱۲ . ۱
څخه لاس ته راځي $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}=2$ نو لرو $x1 = x2 = 2$

جمله ۱۲ . ۳ :
په لاندې ډول باوري کیږي

$$a_0=4=x_1.x_2=2.2=4$$
$$a_1=-4=-(x\ \ +x_2)=-(2+2)=-4$$

د جملی ۱۲ . ۳ له مخی لرو $x^2-4x+4=(x-2)^2$

بیلګه ۱۲ . ۳ :

له مساواتو $x^2-4x+13=0$ څخه لرو , $a1=-4$,$a0=13$ او د $a_1^2-4a_0=16-52-36$

له امله حالت (۱۲ ، ۱۹) مخ ته لرو.

د کونیوګیرت(کنجوګیري) کمپلکس جوړه اوبیونو یا حلونو له جملی ۱۲ . ۱ څخه په
لاندې بڼه یا فورم لاس ته راولو

$$x_{1,2}=2\pm\big)4-13=2\pm\sqrt{-9}=2\pm3i$$
$$\Rightarrow x\ \ =2+3i;x_2=2-3i$$

د جملی ۱۲ . ۲ سره سم باور لري

$$a_0=-4=-(x_1+x_2)=-(2+3i+2-3i)=-4$$
$$a_1=13=x_1.x\ \ =(2+3i)(2-3i)=4-9i^2=4+9=13$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د جملی ۱۲ . ۳ له مخې داسی دئ

$$x^2-4x+13=(x-2-3i)(x-2+3i)$$

د مربع مساوات (۱۲ . ۸) همداسی (۱۲ . ۹) اوبی په ښکاره ډول ساده کیږي، که یو ځلی a0 اویا a1 ورك شي:

د a0 = 0 لپاره لرو

$$x(x+a_1)=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=-a_1$$

د a1=0 لپاره لرو

$$x^2+a_0=0$$

$$\Rightarrow x^2=-a_0; x_{,2}=\pm\sqrt{a_0}$$

۱۲ . ۲ . ۲ څلوری(مربع-)برابرون چی په نورمالبڼه مخ ته نه دي پراته

که یو مربع مساوات په نورمال فورم (۱۲ . ۹) مخ ته نه وي پروت، له دې د مخه چی جمله ۱۲ . ۱ وکارول شي، نو باید په دې بڼه واړول شي.

بلیګه ۱۲ . ۴ :

$$2x-(x+2)^2=(x-2)^2-4(x+1)$$

$$2x-x^2-4x-4=x^2-4x+4-4x-4$$

$$-x^2-2x-4=x^2-8x$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$x_{1,2}=3/2\pm\sqrt{9/4-2}=3/2\pm\sqrt{9/4-8/4}=3/2\pm\sqrt{3/2}\pm\sqrt{1/4}=3/2\pm1/2$$

$$\Rightarrow x_1=2; x_2=1$$

که مجهول یا ناپیژندلی یا اوړیدونې x د مات لاندې رامنځ ته شي، نو باید په صفر ویش ناممکن یا ناشونوالی په پام کي ونیول شي.

بیلګه ۱۲ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

برابرون $(x^2+2x)/(2x^2+2x-4)=1$

ټيك هلته مانا لري، چې وي $2x^2+2x-4\ |=0$

لومړی ورکړشوی برابرون اوبی کيږي او بيا ازمائل کيږي، چي ايا د ماتلاندي شرايط پوره دی، که نه.

$$x^2+2x=2x^2+2x-4$$

$$-x^2 = -4$$

$$x_{,2} = \pm 2; x = 2; x_2 = -2$$

د $x=x1=-2$ لپاره په ماتلاندي کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8 + 4 - 4 = 8 \neq 0$$

او $x = x2 = - 2$ لپاره په ماتلاندي کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8-4-4 = 0$$

له دي امله $x1 = 2$ د پيل برابرون اوبی دی

۱۲ . ۲ . ۳ د n - م درجي ځانګړي برابرونونه ، چی په څلوری یا مربع برابرونونو بيرته بدليدلی شي

د n - مي درجی مساواتو(۱۲ . ۳) يو څو ځانګړي حالتونه کيدی شي چی د څلوری برابرونونو يا مربع مساواتو په مرسته ځواب شي يا اوبی شي۰ دا ځانګړی حالت موجود دی يا شته دی که باور ولري

$a_1 = a_1 = ... = a_{n-3} = 0$ (12 , 27)

دn- می درجی برابرون بيا داسی دي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} = 0; ....(12,28)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^{n-2}(x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}) = 0$$

$$\Rightarrow x^{n-2} = 0 \vee x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0; ....(12,30)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : په پورته کې له (۱۲ ، ۳۰) پورته برابرون (۱۲،۲۹) دئ
د دې برابرونونو دوهم برابرون يو ځلورئ - يا مربع برابرون دی، چی د جملي ۱۲ . ۱ په بنسټ لاندې ځواب لري

$$x_{1,2} = -\frac{a_{n-1}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{n-1}^2}{4} - a_{n-2}}$$

لومړی برابرون دا اوبی يا حل لري x = 0 چی دا (n-2)- ځله رامنځ ته کيږي x3 = x4 = ... = xn=0

بيلګه ۱۲ . ۶:

برابرون $x^6 + 2x^5 - 3x^4$ د $x^6 + 2x^5 - 3x^4 = x^4(x^2 + x - 3)$
او $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$
لاندې اوبيونې لرو

$$x_1 = 1, x_2 = -3; x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

نور هم هغه حالت ساده دی، که $a_{n-2} = 0$ وي، او باور ولري

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} = 0; x^{n-1}(x + a_{n-1}) = 0 \Rightarrow$$
$$x_1 - a_{n-1}, x_2 = x_3 = ... = x_n = 0; .... (12,32)$$

يو بل ځانګړی حالت مخ ته لرو، که د برابرون (۱۲ ، ۳) درجه n جوړه ګڼ يا جفت - وي
n = 2k (12 . 33)

او فقط (ټيك) ځله ووني يا كوايفيڅينتونه a0 او ak له صفر سره برابر نه وي:

$$x^{2k} + a_k x^k + a_0 = 0; .... (12,34)$$

دلته داسی ځاي په ځاي کوو

$$y = x^k; .... (12,35)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې سره د y لپاره څلورې برابرون یا مربع مساوات لاس ته راځي:

$$y^2 + a_k y + a_0 = 0 \qquad (12, 36)$$

د لاندې ځوابونو سره (پرتله : جمله ۱۲ ، ۱)

$$y_{1,2} = -(a_k / 2) \pm \sqrt{\frac{a_k^2}{4} - a_0};......................(12,37)$$

د(۱۲ ، ۳۵) له امله دې د لاندې دوه برابرونونو

$$x^k = y_2 \wedge x^k = y_1;.........................(12,38)$$

ټولې اوبیونې وخیرلی شي، چی د $k = 1$ لپاره ساده دی، د $k = 2$ لپاره(بیکوادرات برابرون) (د څلورې څلورې یا د مربع مربع) یا د رییلو y1 او y2 لپاره د تراوسه څرګندو میتودو سره تل کیدونکی دی . نور حالتونه ددې اوس وخت لپاره په ټولیزه توګه ستونځی لري.

بیلګه ۱۲ . ۷ :

لاندې بیکوادرات برابرون $x4 + 5x^2 -6 = 0$ کیدی د سوبستیچیوشن یعني بدلون له لارې $y = x^2$ په څلورې برابرون $y^2+5y-36=0$ باندې بدل شي. د جملی ۱۲ . ۱ په بنسټ لرو

$$y_{,2} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 36} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 144/4}$$

$$= -5/2 \pm \sqrt{169/4} = -5/2 \pm 13/2$$

$$\Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -9$$

دواړه برابرونونه ، چی د بیرته بدلون(-سوبستیچیوشن) له امله لاس ته راوړو

$$x^2 = 4 \,,\; x^2 = -9$$

لاندې اوبی یا حل لري

x1 = 2 , x2 = -2 , x3 = 3i , x4 = -3i

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۲ . ۲ . ۴ د برابرونسیستمونه چی بیرته په ځلوری برابرونونو بد لید لی شي

یوه د نالاینیزو مساواتسیستمونو لړۍ کیدی شي چې په ځلوری برابرون یا مربع مساواتو بیرته واړول شي. ددې لپاره دوه ساده بیلګې راوړو.

بیلګه ۱۲ . ۸:

$$x + y = 1 \qquad (12, 39)$$

$$x^2 + y^2 = 13 \qquad (12, 40)$$

لومړی برابرون د y په لور حل کیږي، $y = 1 - x$، او دا حل په دوم برابرون کی اینوول کیږي:

$$x^2 + (1-x)^2 = 13$$

$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 13$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 6} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2 \Leftrightarrow$$

$$x = 3, x_2 = -2$$

د (۱۲ ، ۴۰) له مخی په دې لاندې د y - ارزښتونه اړه لري

$$y1 = -2 , y2 = 3$$

نو دا نه لاینیز برابرون لاندي اوبیونې لري

$x1 = 3 , y1 = -2$ او $x2 = -2 , y2 = 3$

بیلګه ۱۲ . ۹ :

د لاندې مساواتو سیستم کی

$$ax + y = 1; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې يواځي د $x \neq 0, y \neq 0$ لپاره موخه وريا هدفمند دی، دوم برابرون په xy ځلولو(ضربولو)سره په لاندې بڼه اړول کيږي:

$$y+x=xy \qquad (12,42)$$

لومړی برابرون د y په لور ځواب کيږي

$$y=1-ax \qquad (12,43)$$

او په (۱۲ . ۴۲) کی ايښول کيږی يا ځای په ځای کيږي

$$1-ax+x=x(1-ax)=x-ax^2$$

$$, ax^2-ax+1=0 \qquad (12,44)$$

د $a = 0$ په حالت کی (۱۲ . ۴۴) برابرون مخامخوالی لري يا په ښتوالی لري يا تضاد لاس ته راکوي » $1 = 0$ « نو ځواب نه شته

د $a \neq 0$ لپاره د(۱۲ . ۴۴) ښخه لاس ته راځی $x^2 - x + 1/a = 0$

او د جملی ۱۲. ۱ له امله لرو $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} - \frac{1}{a}$

د

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots(12.45)$$

لپاره مو (۱۲ . ۱۲) حالت مخ ته پروت دی . دوه برخی حالتونه بايد په پام کی ونيول شي:

د $a > 0$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) ښخه لرو , $a > 4$ او د $a < 0$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) ښخه لرو . $a < 4$ له دې امله د

$$a < 0 \text{ او } a > 4 \quad (12, 46)$$

لپاره د (۱۲ ، ۴۴) دوه مختلف ريل ځوابونه موجود دي:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}, x_2 = 1/2 - \sqrt{1/4 - 1/a}; \ldots\ldots\ldots\ldots(12.47)$$

په دې پوروې د (۱۲ ، ۴۶) له مخی دواړه دy - ارزښتونه هم اړه لري

$$y_1 = 1 - a/2 - a.\sqrt{1/4 - 1/a}; y_2 = 1 - a/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}; \ldots\ldots\ldots(12.48)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باید وازمایيل شي چی د (۱۲ ، ۴۶) په حالت کی x1 , x2 , y1 ,y2 (ټول) نابرابر په صفر دي . تل $x1 > 1/2$ دی. که $x2 = 0$ وی، نو باوري به وی

$$1/2 = \sqrt{1/4 - 1/a}; 1/4 = 1/4 - 1/a$$

دا د هيڅ a لپاره ممکن نه دی. له دې امله $x_2 \neq 0$ دی که $y1 = 0$ یا $y2 = 0$ وی، نو لاندې به باور لرودی:

$$1 - a + a^2/4 = a^2/4 - 1 \Leftrightarrow 1 = 0$$

دا هم ناشونی یا ناممکن دی، نو دلته هم لرو. $y_1 \neq 0;\ y_2 \neq 0.$
په (۱۲ ، ۴۶) حالت کی د (۱۲ ، ۴۱) د (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) سر ه سم، دوه

مختلف ربيل ځوابونه شته دی - غواړی- موجود دي
د x1 , y1 او . x2, y2

(12 , 49) $1/4 - 1/a = 0 \Leftrightarrow a = 4$

لپاره(۱۲ ، ۱۷) حالت مخ ته پروت دی، او برابرون (۱۲ ، ۴۴) ډبل ربيل حل لري

(12,50) $x1 = x2 = 1/2$

په دې پورې د (۱۲ ، ۴۳) له مخې هغه y - ارزښت ډبل ګڼ اوبی پورې هم اړه لري.

$$y1 = y2 = 1 - 4.(1/2) = -1$$

د (۱۲ ، ۴۹) په حالت کی پس د (۱۲ . ۱۹) یو ريل، ډبل ګڼلی حل موجود دی

(12 , 51) $x1 = x2 = 1/2,\ y1 = y2 = -1$

د

(12 , 52) $1/4 - 1/a < 0 \Leftrightarrow 1/a > 1/4$

لپاره (۱۲ ، ۱۹) حالت مخ ته پروت دی. د $a > 0$ لپاره (۱۲ ، ۵۲) د $a<4$ کټمټ (ورته) دی، او د $a < 0$ لپاره د$a>4$ سره کټمټ دی (له دې امله په ښتوالی یا تضاد) .

نو د(۱۲ ،۵۲) باور لري، د

(12 , 53) $0 < a < 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره . په دې حالت کی (۱۲ ، ۴۴) کونجوګیري کمپلکس اوبیونې لري:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i;\ x_2 = 1/2 - \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12.54$$

د (۱۲ ، ۴۳) له مخی په دې پورې د y - ارزښتونه اړه لري:

$$y_1 = 1 - a/2 - a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i;\ y_2 = 1 - a/2 + a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; \ldots\ldots\ldots\ldots (12,55)$$

له دې ارزښتونو هیڅ هم صفر کیدی نه شي .پس په یوځاي شوي یا راټوله توګه لرو:
برابرونسیستم (۱۲ ، ۴۱) د $a = 0$ لپاره اوبی نه لري، د $a < 0$, په همدې ډول $a >$ 4لپاره دواړه ریل اوبي (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) ، د $a = 4$ لپاره رییل ډبل ګڼلي اوبۍ (۱۲ ، ۵۱) او د $0 < a < 4$ لپاره دوه کونجوګیري کمپلکس اوبي (۱۲ ، ۵۴) ، (۱۲ ، ۵۵) لري.

۱۲ . ۳ دریمه درجه مساوات یا - برابرونونه

ددې لپاره چی په زړه پورې -n (ام (درجي مساواتو حلول ساده کړای شو نو لکه د مساواتو مربع سیستم جملو ته ورته جملی د دریمی درجی مساوات لپاره څیړو.
د دریمی درجی مساواتو نورمال فورم په د (۱۲ . ۳) سره سم په لاندې ډول دی.

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=0 \qquad (12,56)$$

دا پولینوم

$$y=P3(x)=x^3+ a2x^2+a1x +a0 \qquad (12 , 57)$$

لاندې بنستیز خویونه لري: که x ډیر لوي شي یعني ناپای په لور لاړشي $x \to \infty$ نو y هم د ناپای په لور ځي، ځکه چی د x^3 ارزښت نسبت د x^2 ارزښت ته په بیړه جګیږي او بیا همداسي و x ته هم . که a1 او a2 کمیز یا منفي هم وي نو y به د لویو x- ارزښتونو لپاره زیاتیز یا مثبت وي. داچي x^3 د کمیز x - ارزښت لپاره له صفر کوچنی دی، نو په همدې ډول

x->-o د y -> -o

لپاره .د دې ډول »پولوارزښت یا لیمس« لپاره کره تعریفونه بیا په ۱۹ برخه کی په پراخه توګه څیړل کیږي .د یو-x ارزښت) خورا کوچنی هم کیدی شي (شته چی د هغه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره $y < 0$ وي اود يو x - ازښت) چې خورا لوي هم کيدی شي) ، د کوم لپاره چې $y>0$ دی. ددې دواړو ارزښتونو تر منځ بايد د مساوات (۱۲ . ۵۶) يو ريښل اوبی پروت وي.

په ډيرو لاندې بيلګو کی سړی کړی شي چې په ساده ډول د جدول په مرسته ازمائيلي حلونه پيدا کړي، په عمومي توګه بيا هم بايد وشميرل شي.

ددې لپاره يو څو بيلګی:

بيلګه ۱۲ ، ۱۰ الف:
د پولينوم

$$y = x^3 - 3x^2 -4x + 12 \qquad (12, 58)$$

لپاره لاندې د ارزښت جدول لاس ته راځي

$X = 0 , 1 , -1 , 2$

$Y = 12 , 6 , 12 , 0$

په دې توګه يو ريښل صفرځاي پيدا شو

$$x_1 = 2 \qquad (12, 59)$$

په ۱۵-مه برخه کی به د هورنر شيما په بنسټ يو متود ورکړ شي ، دکومی له لار ې چې بيا د مټ(توان= لوړولو ته اړتيا نه پيدا کيږي او پولينومونو د فنکشن ارزښت ساده پيدا کيدی شي يا شميرل کيدی شي

بيلګه ۱۲ . ۱۱ الف:
دا برابرون

$$2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0 \qquad (12,60)$$

لاندې نورمال فورم يا -بڼه لري

$$x^3 +(11 / 2) x^2 + 6x - 9/2 = 0 \qquad (12 . 61)$$

د صفرځاي پيداکولو لپاره دې د (۱۲ . ۶۰)مساوات لپاره د ارزښت جدول جوړ شي)ترتيب شي وشميرل شي (، څکه چې هلته ماتونه منځ ته نه راځي:

$X = 0 , 1 ,1 / 2$

$Y = -9 , 16 , \quad 0$

نو

$$x_1=1/2 \qquad (12, 62)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات (۱۲ . ۶۰) په همدې ډول (۱۲ . ۶۱) یو رییل صفرځای دئ

بیلګه ۱۲ . ۱۲ الف:

د لاندې برابرون لپاره

$$x^3-9x^2+27x-27=0 \qquad (12, 63)$$

د ارزښت جدول

X = 0 , 1 , -1 ; 2 , -2, 3

Y = -27 , -8 , -64 , -1 , -25, 0

له لارې لاندې رییل صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 3 \qquad (12, 64)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۳ الف :

د برابرون

$$x^3 -9x^2 +27x -27 =0 \qquad (12, 65)$$

لپاره د جدول

X = 0 , 1

Y = -3 ; 0

سره لاندې صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 1 \qquad (12, 66)$$

په ټولیزه توګه کیدی شي په کلکه څرګند شي ، چې د دریم درجې برابرونسیستم (۱۲ . ۵۶) لپاره تل یو رییل اوبی یاحل x1 شته دی. دا یو واقعیت دی چې بي له شوونې یی لیکو، چې دا پولینوم (۱۲، ۵۷) بي له پاتي په لاینیز فاکتور (x - x1) ویشل کیدی شي او یو دومه درج پولینوم ترې لاس ته راځي:

$$(x^3+a2x^2+a1x+a0):(x-x1)=x^2+b1x+b0$$

له دې امله داسی دئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۴ :

هر دریمه درجه برابرون (۱۲ . ۵۶) کم له کمه یو رییل اوبی x1لري او دا لاندې باوري دي

$$P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x^2 + b_1x + b_0);.............(12,67)$$

دلته نو بیا نور د دریمي درجي مساواتو (۱۲ . ۵۶) دوه حلونه x2 او x3لاس ته راځي که څلورې برابرون یا مربع مساوات $x^2 + b1x + b0 = 0$ اوبی شي، او د جملو ۱۲ . ۱او ۱۲ . ۳ سره کیدی شي چې لاندې جمله فرمولبندې کړی شو

جمله ۱۲ . ۵ :

هر دریمه درجه برابرون دري اوبیوني یا اوبي x1 , x2,x3 لري او دا باور لري

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=(x-x1)(x-x2)(x-x3) \quad (12 , 68)$$

دلته دا لاندني حالتونه ممکن دي

۱ - دري رییل مختلف حلونه x1 , x2 او x3 شته دی (موجود دي)

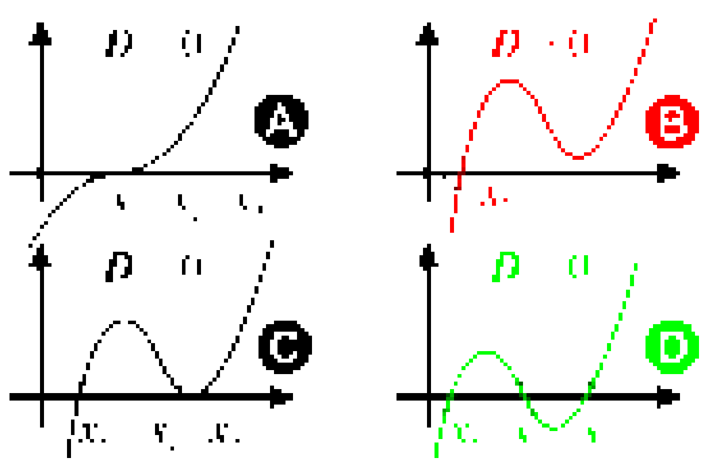
۲ - یو رییل حل x1 او ددې سره مختلف یو دبل رییل حل x2=x3شته دی .

۳ - یو رییل درېګونی حل شته دی

$$x1 = x2 = x3$$

۴ - یو رییل حل x1 او یوه جوړه کونجوګیرت کملکس اوبیوني یا اوبي $x_2 = \overline{x_3}$ شته دی

دا لاندې څیره د ټولو راشنل فنکشنونو(۱۲ . ۵۷) تیپیکي تلنه د جملی ۱۲ . ۵ څلورو حالتونو کی ښايي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۱۲ . ۶۸) فرمول په مرسته د بني اړخ په ځلولواو فاکتورونو(ځله وونو) پرتلې یا انډول له لارې کيدی شي د دريمی درجي پولينومو لپاره د وييتا جمله تصديق کړي چې د جملی ۱۲ . ۲ سره سر خوري

جمله ۱۲ . ۶ :

که x1 , x2 او x3 د دريمي درجي برابرون (۱۲ . ۵۶) اوبيوني وي ، نو لاندې باوري دي

$$a0=-x1.x2.x3 \qquad (12,69)$$

$$a1=x1x2+x1x3+x2x3 \qquad (12,70)$$

$$a2=-(x1+x2+x3) \qquad (12,71)$$

جملی ۱۲ . ۴ په مرسته دې اوس د بيلګو ۱۲ . ۱۰ الف، تر ۱۲ . ۱۳ الف پورې د نورو دواړوx2 او x3 اوبيوني ولټول شي.

بيلګه ۱۲ . ۱۰ ب :

(۱۲ . ۵۸) برابرون د (۱۲ . ۵۹) برابرون له مخی x1 = 2 حل لري. سړی دا ځواب د ۱ . . ۴۲ . برخي له مخي د پارشل Partial -(ټوټه-(ويش په بنسټ لاس ته راوړي.

$$(x^3-3x^2-4x+12):(x-2)=x^2-x-6$$

$$..\underline{x^3+2x^2}$$

$$........-x^2-4x+12$$

$$.........\underline{-x^2+2x.........}$$

$$..............-6x+12$$

$$..............-6x+12$$

له x² - x - 6 = 0 څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3}=1/2\pm\sqrt{1/4+6}=1/2\pm\sqrt{1/4+24/4}=1/2\pm5/2,$$

$$x2=3, x_3=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته د جملی ۱۲ . ۵ لومړی حالت لرو، د لاندې مختلفو ریيلو ځوابونو سره

، $x1 = 2 , x2 = 3 , x3 = -2$

او داسی دی:

$$x^3-3x^2-4x+12 = (x-2)(x-3)(x+2)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۱ ب :

(۱۲ . ۶۰) برابرون د (۱۲ . ۶۲) برابرونونو له مخی اوبی

$x1 = 1/2$

لري او داسی دی:

$$(2x^3+11x^2+12x-9):(x-1/2)=2x^2+12x+18$$

او له $2x^2 + 12x + 18 = 0$

په همدې ډول یا (□) له $x^2+6+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3 \Leftrightarrow x_2 = x_3 = -3$$

دلته د جملي ۱۲. ۵ دوم حالت مخ ته پروت دی د یوه ریيل حل او یو بل له دې حل مختلف ډبل ریيل حل سره، یعنی لرو , $x1=1/2 , x2=x3=-3$ او داسی دی

$$x^3+(1/2)x^2+6x-9/2)=(x-1/2)(x+3)^2$$

بیلګه ۱۲ . ۱۲ب :

(۱۲ . ۶۳) برابرون د(۱۲ . ۶۴) له مخی $x1 = 3$ ځواب لري. دلته باور لري

$$(x^3-9x^2+27x-27):(x-3)=x^2-6x+9$$

له $x^2-6x+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$$

نو دلته مو د جملی ۱۲ . ۵ د دریم حالت درې برابره ځواب مخ ته پروت دی یعنی

$$x_1 = x_2 = x_3 = 3$$

او داسی دی

$$x^3+-9x^2+27x-27=(x-3)^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۳ ب : (۱۲ . ۶۵) برابرون د (۱۲ . ۶۶) برابرونونو له مخی ځواب $x1 = 1$ لري، او داسی دی

$$(x^3 -5x^2 +17x-13):(x-1) = x^2-4x+13$$

له $x^2-4x+13 = 0$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

دلته د جملی ۱۲ . ۵ څلورم حالت د یوه ریښل حل او یوه جوړه کونیوګیرت کملکس ځوابونوسره مخ ته پروت دي.

$$x1 = 1 , x2 = 2+3i , x3 = 2 - 3i,$$

او دا باوري دي

$$x^3-5x^2+17x-13=(x-1)(x-2-3i)(x-2+3i) \qquad =(x-1)(x^2-4x+13)$$

۱۲ . ۴ د ریښی (جذر) برابرون

په ۱۲ . ۱ برخه کی د ریښی رابرون وڅیړل شو. او دا هم څرګند شو چی ځنګه د ریښی برابرون په ریښنل برابرونو اوله دې سره n- می درجي برابرونو بدلیدلي شي. دا دې دلته د بیلګو په څیر پاتي وي. یواځي ریښل اوبیونې به و څیړل یا و پلټل شي.

جمله ۱۲ . ۱۴ :
د ریښي برابرون

$$7+3\sqrt{2x+4}=16;..........................(12,72)$$

ډیر ساده کیدی شي چی په لاینیزو برابرونونو واړول شي

$$3\sqrt{2x+4}=9; \sqrt{2x+4}=3; 2x+4=9; 2x=5; x=5/2;........(12,73)$$

د ازمایلو لپاره که (۱۲ . ۷۳) برابرون په (۱۲ . ۷۲) برابرونونو کی خوندي شي، نو څرګندیږي چی دا دx-ارزښتونه په ریښتیا د مخه ورکړ شوي ارزښتونه پوره کوي

$$7+3\sqrt{5+4}=7+3.3=16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۵:

د ریښی برابرون یا مساوات

$$\sqrt{2x+19}+5=0;..........(12,74)$$

کیدی شي په ساده بڼه واړول شي

$$\sqrt{2x+19}=-5; 2x+19=5; x=3;.........................(12,75)$$

د ازمایني لپاره، که (۱۲ . ۷۵) د پیل په برابرون (۱۲ . ۷۴) کی خوندي شي، نو دا برابرون ورکوي

$$\sqrt{2x+19}=10\neq 0$$

له دې امله ارزښت $x = 3$ د برابرون (۱۲ . ۷۴) ځواب نه دی . په دې لاس ته راوړنو سره یا په دې تعقیب د پیل برابرون ځواب نه لري.) داسي کیدی هم نه شي، ځکه چي تل $0<2x+19$ دی)۰

دا ساده بیلګی موږ. ته را ښایي چي باید د ریښی مساواتو حل تل وازمایل شي چي ایا په ریښتوني دا ځواب دی او که نه، او دا په داسی ډول چی شمیرل شوي ارزښتونه په پیل مساوات کی کیږدي چی ایا مساوات پوره کوي که نه . دا عمل یواځي د ازمایلو لپاره نه دئ چي ګوندې تیك یا صحیح شمیرنه شوې او که نه، بلکه دا ځواب یو اړیین سما ندیز پل یا ضروری منطقي پل دئ .

په ټولیزه توګه باور لري: که برابرون:

$$f(x)=g(x) \qquad (12,76)$$

په یو ې نوي بڼه واړول شي

$$F(x)=G(x) \qquad (12,77)$$

چی د برابرون دواړو لورو ته یا یو څه ور زیات شي ، یا تری کم شي، یاداوړه خواوې په یوه ګڼ ځل (ضرب) شي او یا وویشل شي (په دې حال کی باید پرویشونی صفر نه وي، ځکه چی په صفر ویشل اجازه نه لرو) که دواړه خواوی د ریښی لاندې راشي او یایه توان پورته شي نود پیل برابرون (۱۲ ، ۷۶) هر ابی بدل شوي برابرون (۱۲ . ۷۷) ځواب هم دی ، مګر نه په ښټ (برعکس، مخامخ). کیدی شي چی اړول شوی برابرون (۱۲ . ۷۷) زیات ځوابونه ولري نسبت و پیل برابرون (۱۲ ، ۷۶) ته . دا به په لاندې بیلګه کي روښانه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۶:

د ريښې يا جذر برابرون يا مساوات

x-x-1=2x-1 (12 . 78)

څلورى يا مربع ته د جګولو له لارې دا بڼه غوره ګوي

$$x+(x-1)-2\sqrt{x(x-1)}=2x-1$$

x+(x-1)-2x(x-1)=2x-1 ,

نو $\sqrt{x(x-1)}=0$

په بيا څلورى يا مربع كولو سره سرى يو مربعمسوات لاس ته راوړي

x(x-1) = 0 (12 , 79)

چې لاندې اوبى يا ځواب لري :

x1 = 0, x2 = 1 (12 . 80)

دا د (۱۲ . ۷۹) اوبيونې دي، مګر بايد و ازمايل شي چې ايا دا د (۱۲ . ۷۸) اوبيونې هم دي كه نه.

د x = 0 لپاره په (۱۲ . ۷۸) كې دوه ريښى نه دې تعريف يا ددوه ريښو پيژند نه شته، نو x = 0 د (۱۲ . ۷۸) اوبيونه نه ده .

د x = 1 لپاره لاس ته راځي 1 - 0 = 1

له دې امله x = 1 د پيل بيلګى (۱۲ . ۷۸) يوګونى ځواب يا اوبى دى .

بیلګه ۱۲ . ۱۷:

د ريښى برابرون

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}-\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-7x+3}=0,............(12,81)$$

كيدى شي چې په ورته ډول لكه (۱۲ . ۷۸) بڼه واړول شي:

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{2x^2-7x+3} =>$$

$$x(x-3)=(x^2-4x+3)+(2x^2-7x+3)+2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)} =>$$

$$-2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)}=2x^2-8x+6$$

$$(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)=(x^2-4x+3)^2;.........(12.82)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برابرون یا مساوات پوره دی، که $x^2-4x+3=0$ باور ولري، نو د لاندې لپاره

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-3}=2\pm1, x_1=3, x_2=1, ...(12,83)$$

د ټولونورو x لپاره $x^2-4x+3|=0$ دی ، او (۱۲ . ۸۲) کیدی شي چي په لاندې فاکتور وویشل شي:

$$2x^2-7x+3=x^2-4x+3$$

$$x^2-3x=0$$

$$x(x-3)=0$$

$$x3=0, x4=x1=3$$

او په (۱۲ . ۸۱) کی ځاي په ځاي کولو سره ازمایل کیږي، چی کوم له لاندې ارزښتونو

$$x_1=3, x_2=2, x_3=0$$

پیل برابرون ډکوي.(باوري کوي، پوره کوي)

د $x = 3$ لپاره باور لري:

$$\sqrt{3}.\sqrt{0}-\sqrt{9-12+3}-\sqrt{18-21+3}=0$$

له دې امله $x = 3$ د پیل برابرون یا مساوات (۱۲ ۸۱) اوبی یا حل دی . د

$x3 = 0$ او $x2 = 1,$

لپاره ریښي پیژند نه لري یا تعریف نه دی، نو له دې امله د پیل برابرون (۱۲ . ۸۱)
اوبی حل $x = 3$ (12 . 85)
یواځني حل دی

۱۲ – تمرینونه

۱ – مربع مساوات

۱,۱- مربع مساواتدټاکلو ضریبونو سره

1.1.1. a) $x^2-4=0$ b) $3x^2+27=0$

c) $x^2-9x=0$ d) $5x^2=125\,x$

1.1.2. a) $(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})=\frac{7}{12}$ b) $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})=\frac{5}{16}$

c) $(x-6)(x+5)=0$ d) $(x-\sqrt{7})(x-\sqrt{5})=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.1.3. a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^2 + 4x + 2 = 0$

c) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ d) $x^2 + 27\frac{1}{12} = 10\frac{7}{12}x$

1.1.4. a) $3x^2 - 20 = x$ b) $7x^2 + 23x = 84$

c) $(43 + 10x)^2 + (66 + 10x)^2 = (79 + 14x)^2$

d) $(3x - 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$

1.1.5. a) $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$ b) $3x - \frac{3x-10}{9-2x} = 2 + \frac{6x^2-40}{2x-1}$

c) $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x+12} - \frac{3x+8}{4x^2-9} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{x-2} - \frac{8}{4-3x} = \frac{19}{2x+1}$

۱ . ۲ – مربع مساوات د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x^2 - a^2 = 0$ b) $x^2 - ax = 0$

c) $x^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{1}{3}a^2 = 0$ d) $x^2 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}b^2 = 0$

1.2.2. a) $8x^2 - 10bx - 3b^2 = 0$ b) $12x^2 - 34ax + 10a^2 = 0$

c) $16x^2 - 8ax + a^2 - b^2 = 0$ d) $ax^2 + bx + c = 0$

1.2.3. a) $a^2 - x^2 = (a - x)(b + c - x)$

b) $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$

c) $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$

d) $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0$

1.2.4. a) $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$ b) $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$

c) $a^2(a - x)^2 = b^2(b - x)^2$

d) $(a - x)^2 - (a - x)(x - b) + (x - b)^2 = (a - b)^2$

1.2.5. a) $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$ b) $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

c) $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$ d) $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$

۱ . ۳ – مساوات سیتم، کوم مو مربع مساوتو ته لاربنبنودوي یا بیایي

1.3.1. a) $3x + 2y = 3$, $xy = 3$ b) $10x + y = 10$, $5x(15x + y) = 75$

c) $3x + 7y = 21$, $3x^2 - 7y = \frac{21}{2}$ d) $x^2 + xy + y^2 = 1372$, $2x - y = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.3.2. a) $x + y = a$, $xy = b$

b) $xy = a$, $\frac{x}{y} = b$

c) $x^2 + y^2 = c^2$, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$

d) $ax^2 - \frac{b}{y^2} = 2(a^2 - b^2)$, $bx^2 - \frac{a}{y^2} = a^2 - b^2$

۱ . ۴ – د n-مې درجې ځانګړي مساوات، چېپه مربع مساوات بيرته اړول کيدی شي

۱ . ۴ . ۱ – بې مربع مساوات د ثابتو یا معلومو ضریبونو سره

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$

c) $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$

d) $10x^4 - 21 = x^2$

۱ . ۴ . ۲ - بې مربع مساوات د ناثابتو یا نامعلومو ضریبونو سره

a) $x^4 + a^4 + b^4 = 2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2b^2$

b) $(a^2x^2 + b^4)(x^2 - a^2) = b^2(x^4 - a^4)$

c) $\frac{a^2b^2x^2}{a^3b + ab^3x^2} + \frac{ab - x^2}{x^2 - 1} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2x^2}$

d) $\frac{(a-b)x^4}{a^2 - b^2} + \frac{4x^2}{a+b} = x^2 + 4$

۱ . ۴ . ۳ – د n-مې رجې مساوات د $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-3} = 0$ سره

a) $x^{10} + 6x^9 + 5x^8 = 0$

b) $\frac{5}{2}x^5 + 7x^4 = -20x^3$

c) $abx^8 - (a^2 + b^2)x^7 = -abx^6$

d) $ax^{22} - a^2x^{11} + a^2 - a = 0$

۱ . ۵ – لاندې مساوات هم د xاو هم د a پسې حل کړئ!

a) $x^2 + \sqrt{a}\,x - a = 0$

b) $x^2 - 2bx + 2(ab - \frac{1}{2}a^2) = 0$

c) $x^2 + 9ab = (a + b)(x + 2a + 2b)$

d) $(x + b)(x - b) = a(2x - a)$

۱ . ۶ . – شي شوالونه

۱ . ۶ شي سوالونه

۱ . ۶ . ۱ الف دوه ګنهونه ځان داسې نیسي لکه 1 : 3 . ددې ګنهونو د مربع زیاتون ۱۵۶۰ دی. دا ګنهونه څه نومیږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د درې يو په بل پسې گنونو د لوي گڼ مربع دومره ده ، لکه د دوه کوچنيو گنونو د مربعو زياتونون. دا گنونه څه نوميږي يا کوم دي؟

پ) د کوم مثبت گڼ لسرځله د هغه د مربع څخه ۹۹۹ کوچنی دی؟

ت) مات 1/4 په دوه فاکتورونو a او b داسې تجزيه کړی، چې لاندې زياتون $(a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$ يې لاس ته راشي.

. ۶ . ۲ . الف) په يوه برابر برقجريان کی مقاومت په ديرش اوم Ω 30 لوييږي، په کوم کې چې د برققوه په همغه د 220 V (وولټه) شپانونگ په پنځه امپير (1,65A) کوچنی شي . مقاومت او برققوه څومره دي؟

ب) دوه سيخونه چې مقاومت يې Ω 60 يو له بل توپير لري، چې يوه د غبرگ چالانولوعمومي مقاومت Ω 22,5 کړي. دواړه برخه مقاومتونه څومره لوي دي؟

. ۶ . ۳ . الف) يوه د بايسکلځغلونی لار چې ۲۲۵ کيلو متره اوږده ده، د يوه موادو موټر څخه په درينيم ساعته لنډ وخت کې وهل کيږي، چې د موټر په منځني سرعت چې 26, 25 km/h نسبت و بايسکلځغلونکي ته د موادو موټر او بايسکل ځغلونکي سرعت او د وهلو وخت څومره دی؟

ب) د سپورت جشن کې يو سپورتي چې له A و B ته په 5km/h سرعت ځغلي، له خپل منډپيل څخه يونيم ساعت وروسته له يوه بايسکلسپورتي څخه وروسته کيږي، کوم چې له مخامخ کيدو, نيم ساعت وروسته B ته رسيږي، او سملاسي بيرته گرځي او په همغه وخت کې A ته رسيږي په کوم کې چې ځغاستی و B ته رسيږي، د $\overline{AB}$ کرښه څومره لرې ده؟

پ) دوه ډبډبي ځغاستي، يوبل باندې نيغ ولاړو سرکونو د څلورلاري په لوري په ډبډبيو ځغلي. د لمړي سرعت ۵ متره په ثانيه کی، دوم څلور متره په ثانيه کی دي دوي له ۳ ثانيو وروسته يو ۳۵ متره لريوالی يو له بل لري، دوي يو

(c) ketabton.com: The Digital Library

له بل په سرچینه کې د څلور لارې څومره لرېوالی لرووده، که لمړی له دوم ۴ متره ورته نژدې وو؟

ت) د ګاډي يو لاين د موټرڅغاست سرك لمړي برخې سره غبرګ غزیدلی. د یوه موټر څغاستي پیل کې د یو مخته راتلونکي ګاډي واټن ۲۲۵ متره لرې دی. کله دوه ماشینونه په همغه جګوالي دي، که موټرڅغاستی منظم تعجیل او یو تعجیل د $10m/s^2$ کی لري، په داسی حال کی چی د ګاډی سرعت ثابت او $72\ km / h$ دی؟

ټ) په منځنی سرعت $v_m = 18km/h$ په ۶ بجو له لاییخیږ څخه د دیساو په لور بایسکل څغلیدونکی په ۸ بجو ، په همغه وخت کی له دیساو څخه د لاییخیږ په لور راتلونکی بایسکل څغاستی سره مخامخ کیږي. ورستنی ۱۰۰ دقیق د مخه دیساو ته راځي لکه دوم ولاییخیږ ته. د دیساو او لاییخیږ ترمنځ لرېوالی یا واټن څومره دی؟

۱ . ۶ . ۴ . الف) په ولاړنجیز دریګوډي کې ، کاتیتې څانونه داسې یوبل سره نیسي لکه 3:4 ، هیپوتینوزې ۵۰ سانتي متره ده ، کاتیتې څومره اوږدې دي؟

ب) د یوه ولاړکونجیز دریګوډي اړخونه څومره لوي دي ، که د دواړو کاتیتو زیاتون یې ۱۷ سانتیمتره اود یوې کاتیتې او هیپوتینوزې زیاتون ۱۸ سانتي متره وي ؟

پ) د یوه سمکونجیز (ولاړکونجیز) دریګوډي کاتیتې څومره لويي دي، که د هغوي زیاتون ۴۲ سانتیمتره وي ، د دریګوډي هواردننه ۲۱۶ مربع سانتي متره وي ؟

ت) د یوه ولاړګوډي نیمی (قطر) ۳۵ سانتي متره اوږد دی، که د ولاړ ګوډي اوږد اړخ ۸ سانتي متره وغزول شي او لنډ اړخ ۶ سانتي متره وغزول شي، د نیمي اوږدوالی ۱۰ سانتیمتره لویږي. د سمکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) که د مربع یوه خوا ۷ سانتي متره وغزوي او بل اړخ په همدې ارزښت لنډ کړي،نو مربع او سمکونجیز دواړه د هوارې دننه ۴۹۵۱ مربع سانتي متره لري.
د سم اړخیز اړخونه څومره لوي دي؟ (یا ولاړ اړخ)

ټ) د یوې ګردۍ وړانګه ۱۶ سانتي متره اوږده ده. په ګردۍ کې دننځاي مربع اړخ څومره لوي دی؟ (یا څوندې مربع اړخ)

ج) د یوې ګردۍ نیمی باید څومره لوي، کهچ دننهمنځشوې مربع اړخ ۱ سانتي متره د هغه د وړانګي څخه لوي وي؟

ح) که د یو ې ګردۍ نیمی (قطر) ۳ سانتي متره لوي شي ،نو د ګردۍ هواره دوه برابره کیږي. د ګردۍ سرچینې نیمی څومره لویه ده؟

خ) د یوه نیمغونډي نیمی څومره دی، که د هغه د دیوال لویوالی ۳ سانتیمتره او او تشه کې یي ۵۰۱۶ مکعبسانتي متره وي؟

۲ – د درېمي او څلورمي درجې مساوات

2.1 a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ b) $x^3 + x^2 - 5x - 84 = 0$

c) $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$ d) $x^3 + x - 2 = 0$

12.5 Übungsaufgaben 1

2.2. a) $4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = 0$ b) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

c) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = 0$ d) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

۳ . ریښه مساوات:

ټول ارزښتونه x وشمیرئ، چې د لاندې مساااتو حلونه یا اوبیونې دي. د هرې پوښتنې د ټیکاوي لپاره ازماېښت وکړئ!

۳ . ۱ – ریښه مساوات د ټاکلو ضریبونو یا څلوونو سره:

3.1.1. a) $\sqrt{x} = 3$ b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} + 7 = 2\sqrt{x}$

c) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \frac{3}{5}\sqrt{15x} - 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$

d) $\sqrt[3]{x} = 5$

3.1.2. a) $(3\sqrt{x} - 5)(5\sqrt{x} - 3) = 5(3x - 31)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) $(5\sqrt{x}-2)^2+(12\sqrt{x}-9)^2=(13\sqrt{x}-9)^2$

c) $\dfrac{5\sqrt{x}+12}{7\sqrt{x}+15}=\dfrac{4}{5}$ d) $\dfrac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3}=7$

3.1.3. a) $\dfrac{\sqrt{x}-3}{7}-\dfrac{\sqrt{x}-25}{5}=7-\dfrac{2+\sqrt{x}}{4}$ b) $\dfrac{16-\sqrt{x}}{2}-\dfrac{10-\sqrt{x}}{3}=\sqrt{x}$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=1$ d) $2\sqrt{x}-\sqrt{2x}=2+\sqrt{2}$

3.1.4. a) $10-\sqrt{x-2}=3$ b) $\sqrt{3x-5}+4=5$

c) $\sqrt[3]{7x-6}+6=10$ d) $4\sqrt[3]{5x-8}=3\sqrt[3]{9x+1}$

3.1.5. a) $9\sqrt{5x+1}=20+4\sqrt{5x+1}$ b) $\sqrt{7x+2}=\dfrac{5x+6}{\sqrt{7x+2}}$

c) $3\sqrt{4x-3}-\dfrac{10x}{\sqrt{4x-3}}=\dfrac{1}{\sqrt{4x-3}}$ d) $\dfrac{9x}{\sqrt{10x-9}}-\sqrt{10x-9}=\dfrac{2}{\sqrt{10x-9}}$

3.1.6. a) $\sqrt{9x^2-10x-55}=3x-5$ b) $x+1=\sqrt{2x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}}$

c) $17-4\sqrt{\dfrac{3x+5}{x-7}}=1$ d) $24-7\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4x-1}{x-6}}=3$

3.1.7. a) $\sqrt{52-3\sqrt{5x+6}}=2\sqrt{10}$ b) $\sqrt{x+1-\sqrt{2x+3}}=1$

c) $\sqrt{37-7\sqrt{5x+4}}=4$ d) $\sqrt[4]{19-3\sqrt[3]{5x-9}}=2$

3.1.8. a) $\sqrt{9x-17}-3\sqrt{x-4}=1$ b) $2\sqrt{9x+4}-3\sqrt{4x-11}=1$

c) $\sqrt{x+9}-\sqrt{x+2}=\sqrt{4x-27}$ d) $\sqrt{9x+10}-\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+9}$

3.1.9. a) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-8}+\sqrt{x-3}-\sqrt{x+13}=0$

b) $\sqrt{x+9}+\sqrt{x-12}=\sqrt{x}+\sqrt{x-7}$

c) $\sqrt[3]{9x+10}-\sqrt{3x+4}=0$ d) $\left|\sqrt{3x+7}\right|+\left|\sqrt{4-x}\right|=3$

3.1.10. a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\dfrac{2x}{9}$ b) $\sqrt[3]{76+x}+\sqrt[3]{76-x}=8$

c) $\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}$ d) $\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+x=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ . ۲ – ريښه مساوات د نامعلومو ضريبونو سره

3.2.1. a) $\sqrt{x}=a$ b) $\sqrt[3]{x}=b$

c) $a-\sqrt[3]{x}=b$ d) $a\sqrt{x}-b=c\sqrt{x}-d$

3.2.2. a) $\sqrt{x-a}=b$ b) $\sqrt[3]{a-x}=b$

c) $\sqrt[4]{a^4+x}=a$ d) $\sqrt[6]{a^6-x}=b$

3.2.3. a) $(\sqrt{ax}+\sqrt{b})(\sqrt{ax}-\sqrt{b})=(a+1)(a-1)b$

b) $(a-\sqrt{x})(b-\sqrt{x})=(c+\sqrt{x})(d+\sqrt{x})$

c) $\dfrac{\sqrt{ax}-b}{\sqrt{ax}+b}=\dfrac{3\sqrt{ax}-2b}{3\sqrt{ax}+5b}$ d) $\dfrac{2a+3\sqrt{bx}}{3a+2\sqrt{bx}}=\dfrac{3b+2\sqrt{ax}}{2b+3\sqrt{ax}}$

3.2.4. a) $\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}-\left|\dfrac{(x+a)^2}{a(x-a)}\right|$

c) $\dfrac{a+b\sqrt{x}}{a+b}=\dfrac{c+d\sqrt{x}}{c+d}$ d) $\dfrac{a+b\sqrt{x}}{a\sqrt{x}+b}=\dfrac{c+d\sqrt{x}}{c\sqrt{x}+d}$

3.2.5. a) $x+\sqrt{x^2-a^2}=a$ b) $x-\sqrt{ax(1+x)+1-x}=1$

c) $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$ d) $\sqrt{x+a^2}-\sqrt{x}=b$

3.2.6. a) $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\dfrac{b}{\sqrt{b-x}}$ b) $\sqrt{x+a}-\sqrt{5x-3a-4b}=\dfrac{2b}{\sqrt{x+a}}$

c) $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}=\dfrac{x+a-b}{\sqrt{x+a}}$

d) $\sqrt{3a-2b+2x}-2\sqrt{3a-2b-2x}=\dfrac{a+2b+2x}{\sqrt{3a-2b+2x}}$

3.2.7. a) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{a}{b}$ b) $\dfrac{\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3x^2-1}-\sqrt{3-x^2}}=\dfrac{a}{b}$

c) $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{2a}$ d) $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ ، ۳ – مساوات سيستمونه، چې ريښه مساوات خوندي لري

3.3.1 a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=8$, $\sqrt{xy}=15$

b) $x+y=58$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=10$

c) $\sqrt{x-5}+\sqrt{y+2}=5$, $x+y=16$

d) $\sqrt{5-3x+x^2}+\sqrt{5-3y+y^2}=6$, $x+y=3$

3.3.2 a) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $xy=(a^2-b^2)^2$

b) $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $x^3-c^3=c^3-y^3$

c) $x\sqrt{x+y}=a$, $y\sqrt{x+y}=b$

d) $x\sqrt[3]{x^2+y^2}=a$, $y\sqrt[3]{x^2+y^2}=b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ ترانسځندنت برابرونونه یا ـ مساوات

لکه څنګه چی په ۱۲ . برخه کی دې ته ګوته نیول شوې وه، چی دلته یواځي هغه ترانسځندنت مساوات څېړل کېږي، کوم چی بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي.
دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ریښه مساواتوکی، په خوښه په بل شکل اړول کیږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چی اړولی فرمول زیاتې اوبیونې یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون ټولې اوبیونې په پیل برابرون کی ځاي په ځاي یا کیښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ریښه یي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځی رییل اوبیونې پلټل کیږي.

۱۳ . ۱ لوګاریتمي مساوات

د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چی د یو عدد(ګڼ) aلوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅیرو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 ....(13,1)$$

د بنسټ b = 10 لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کیدی شي (۱۳ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیده د جبشمیري له لارې پیداشي. په ځت یا برعکس د 10 =| e|= b لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کیږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b .... (13.2)$$

د لوګاریتمي مساواتو یو ساده ډول یا شکل (تیپ) دا دئ

$$l\log_b x = c .... (13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱) ، (7. ۲) له مخی لاندې ته ورته دئ:

$$x = b^c .... (13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشمیري سره شمیرل کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۱ $: \log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بڼې اوبیونه په لاندې ټولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c .... (13,5)$$

دلته (f(x یوه الجبري وېینه یا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کتمټ (ورته) دئ

$$f(x) = b^c .... (13,6)$$

ټولې د (۱۳ . ۶) اوبیونې د (۱۳ . ۵) اوبیونې هم دي

بیلګه ۱۳ . ۲ : لوګاریتمیز برابرون

$$\log_2 (x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کتمټ دي

$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$ (همداسی) $x^2+x+6=2^3= 8$

او لاندې اوبیونې لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; x_1 = -2; x_2 = 1$$

یو د (۱۳ . ۵) ډول (تیپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کینې لور (ارخ) ته یود لوګاریتم ریشنل لاینیز کمبینشن الجبري وییینه یا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x) + r_2.\log_2(x) + r_3.\log_b g_3(x) + ... = c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاریتم قوانینو (۷. ۷) ، (۷. ۹) کاروني یا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x) = \{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}..................................(13,8)$$

بیلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له 2 = $\log_3(x-1)+\frac{1}{2}\log_3 x - \frac{1}{2}\log_3(x-1)$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log\,[(x-1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې څخه رېښه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1} = 9$ ،

د کوم له څلوری یا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ یعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{324}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{325}{4}} = \frac{1}{2} \pm (\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1 = 9,515; x_2 = -8,515$$

تیك دا $x1 = 9,515$ پیل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پیژند نه لري یا تعریف نه دي.

بیلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)] = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$
$b+3=x(b-2)$
$x=(b+3)/b-1)$

پیل وینه یا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني
که $1<(b+3)/b-2)$ وي.
د $b>2$یعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$
له دې لرو $-2<3$دا د ټولو b لپاره پوره دئ
د. $b \le 2$ لپاره د $b+3 \le b-2$ $b+3 < b-2$ څخه $2 \le 3$ لاس ته راځي اودا د هیڅ b
لپاره باور نه لري .
له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دئ. د $b \le 2$ لپاره اوبیونه نه شته دئ.

د لاندې لوګاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13 . 9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې ویینې یا افادې دي. د بدلون کاروایي یا عملیه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x)..................................(13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13 . 11)$$

ددې اوبیونه ..$y1,y2$ په (۱۳/۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تیپ (۱۳/۵)
لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i; \quad i = 1,2,3,......... \qquad (13 . 12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13 . 13)$$

ددې لپاره چی و ازمائیلی شو چی ایادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو
اوبیونې یا ځوابونه باید په پیل برابرون (۱۳/۹) کی کینوول شي یا ځاي په ځای شي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2x-\lg x-2=0$ د سبستیځیوشن(بدلون) $y=\lg x$ سره په
څلورئ برابرون $y^2-y-2=0$ بدلیږي .
د $y_1 = 2$ او $y_2 = -1$ ځوابونو سره
له $\lg x=2$ او $\lg x=-1$ لاس ته راځي.

$$x_1 = 10^2=100 \text{ او } x_2 =10^{-1}= \frac{1}{10}$$

دواړه ځوابونه د پیل برابرون ځوابونه دي.

بیلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6 /(\lg x +1)) + (8 / (\lg x -1)) = 3$
د $x>0$, مګر ($x \neq 1/10, x \neq 10$) چی د اصلي ماتلاندې ($\lg x-1$)($\lg x+1$) سره
حل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x-1)+8(\lg x+1)=3(\lg^2 -1)$$

$$6\lg x-6+8\lg x+8=3\lg^2x–3 \text{ ,}$$

$$0=3\lg^2x-14\lg x-5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې څلورئ بڼې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2-14y-5=0 \text{ , } y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9}+\frac{15}{9}} = \frac{7}{3} \pm \frac{8}{3}; y_1 = lox_1 = 5; y_2 = \lg x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = 10^5; x_2 = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه برابرون کی لوګاریتمونه د مختلفو بنسټونو bسره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1) + \log_4(x-1) - 1 = 0$

څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{2}\log_2(x-1) - 1 = 0,\ \log_2(x-1) = \frac{2}{3},\ x-1 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4},$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2 \sqrt[3]{4} + \log_4 \sqrt[3]{4} - 1 = \frac{1}{3}\log_2 4 + \frac{1}{3}\log_4 4 - 1 = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په جګ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x = b; a > 0, a \neq 1, b > 0 ....(13,14)$$

کیدی شي چی د لوګاریتم نیولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x = \log_a b = \lg_b / \lg_a = \ln b / \ln a \qquad (13, 15)$$

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تیوپ) برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2) + 3^x(3^2-3) = 0,\ \text{bzw.}\ 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x,\ \text{bzw.}\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg\frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري وييني يا افادي(f (x اکسپوننتونه ياجګګڼونه وي، نو:

$a^{f(x)}=b, a>0, a|=1, b>0$ (13 . 16)

په دې ډول د لوګاریتمولو له لارې يو الجبري برابرون لاس ته راځي

$f(x)=\log_a b$..............................(13,17)

د کومو ځوابونه چې د) ۱۳ . ۱۶ (ځوابونه هم دی.

بیلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4} = 4$

مو لاندې څلوری برابرون یا مربع مساوات ته بیایي (لاربنودوي)

$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$

د $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چې د پیل برابرون اوبیونې یا ځوابونه هم دي۰

بیلګه ۱۳ . ۱۰ :

په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کی د یوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څټ ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې څخه لاس ته راځي

$x_1 + 1 = -3$, $x_2 = -4$

بیلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کې کیدی شي چې ناپیژندونکي د اکسپوننت یا په جګ څخه د دوه واره لوګاریتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \qquad \text{یا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = 1.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ یا ډوی مساوات دي، څکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې امله

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کیڼ اړخ د اکسپوننشل افادو څلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چی د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c; ....(13,18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + ... - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - .... = \lg c \qquad (13 . 19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وبینه یا افاده F د الجبري اکسپوننت(f(x)سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)}) = 0 ;...................................(13,20$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13 . 21)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبیونو y_1, y_2, y_3;............... لپاره باید

$$a^{f(x)} = y_i; i = 1,2,3....... \qquad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1, 2, 3 .... \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بیلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x} + 3^x = 2$ کیدی شي چی د بدلون $y = 3^x\ (y^2 = 3^{2x})$ سره په څلوری

برابرون یا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بیرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1.\lg 3 = \lg 1 = 0,\ x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2.\lg 3 = \lg(-2)$ اوبیونه نه لري

بیلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1} - 1} = \sqrt{2e^{x^2-1} - 1} ....(13,25)$$

کې داسی بدلوو:

$$y = e^{x^2-1} ....(13,26)$$

او لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};..............................(13,27)$$

له دې ځخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0 => y(y-1)=0$$
$$y_1=0; y_2=1$$

ټيك $y_2=1$ (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1;...(13,28)$$

حل اوبی . د لوگاريتمولو ځخه تعقيبيږي:

$x^2-1=\ln 1=0,$

$x1 = 1$, $x2 =-1$

دواړه ارزښتونه پيلبراړون پوره کوي٠

برسيره پر دې بايد وښوول شي، چې په برخی ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره يوه د مساواتو ټوله لړی حل کيدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوگاريتم يوځای رامنځ ته کيږي.

بيلگه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ ځخه د بيلگي په توگه د بنسټ 2 لوگاريتموولو له لارې لاس ته راځي

$\ln^2 x-\ln x+1=\log_2 8 = 3$

که کيږدو $y = \ln x$ ، نو دا ځلوری برابرون يا مربع مساوات $y^2-y-2=0$ لاس ته راځي،د ځوابونو

$y1 = -1$, $y2 = 2$

سره او له دې بيا لاس ته راځي:

$\ln x=-1$, $\ln x=2$, $x1=e^{-1}=1/e$, $x2=e^2$

۱۳ . ۳ گونومتريکي- يا کونجکچ برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګونومتري ساده برابرون لاندې څيره لري

sinx=a , cosx=a (13 . 29)

tanx=a , cotx=a, (13 . 30)

دلته فقط دواړه لومړي برابرونونه (۱۳ . ۲۹) ځوابونه لري ، که $-1 \leq a \leq 1$ باور ولري، نور ارزښتونه sin x او cos x نه شي غوره کولی(پرتله برخه ۶ . ۳) د جبشميرني سره د تکمو يا ګوټکونو په پرلپسی د (۱۳ . ۲۹) همداسی (۱۳ . ۳۰) يو ځواب لاس ته راځي

د(۱۳، ۲۹) لپاره

a F sin a F cos

د (۱۳،۳۰) لپاره

a F tan a 1/x tan

دا چي tan x او cotx پريودې همداسی 180°لري او په يوه اينتروال کی چي اوږدوالی همداسی 180°لري د(۱۳ ۳۰) ټيك يو ځواب پروت دی، لاندې جمله صدق کوي

جمله ۱۳ . ۱ :که x0 د(۱۳ . ۳۰) يو ځواب وي) چی د بيلګي په توګه د جبشميرنی په مرسته لاس ته راځي)، نو د (۱۳ . ۳۰) د لاندې بڼی ټول ځوابونه تر لاسه کوو

$$x_k = x_0 + k\pi = x_0 + k.180°; k = ... -3, -2, -1, 0 1, 2, 3, ...; .... (13, 31)$$

په همدې ډول دې دلته هم د هندسی برخه په پام کی وي. چی د هغو له مخې په (۱۳ ، ۳۱) کی د بيلګي په توګه باور لري

$$x_k = \frac{\pi}{6} + k\pi = 30° + k.180°$$

د کونجونو فنکشنونه sin x او cos x پريودې(تل بېرته راګرځېدنه يا دوران)

$$2\pi = 380°$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لري. مساوات (۲۹.۱۳) ددې اوږدوالی اینتروال کی دوه حلونه لري. که چیرته د جبشمیرني سره یوه اوبیونه x_0 پیداشي، نو د sin x = a په حالت کی $x = -x_0$ هم یو حل دی، او $x = -x_0$ د cos x = a په حالت کی یو بل اوبی یا حل دی. پس لرو:

جمله ۱۳ . ۲ : که x0 د (۱۳ ، ۲۹) یو هغه اربیونه یا حل وي، چی د بیلګي په توګه په جبشمیروني لاس ته راځي، نو د sin x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....;..................(13,32)$$

$$\bar{x} = \pi - x_0 + 2k\pi = 180° - x_0 + k.360°;...(13,33)$$

او د cos x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځی

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....;..................(13,34)$$

$$\bar{x} = -x_0 + 2k\pi = -x_0 + k.360°;...(13,35)$$

بیلګه ۱۳ . ۱۶: د مساوات sin x = 0,23910 لپاره د جبشمیرني سره لاندې حلونه لاس ته راځي: (په درجه کچ یا ګراد اندازه) x0 =13,833427º
(په لینده کچ)0,24143 = 0,017453. 3,833427
د) ۱۳ . ۳۲ (،) ۱۳ ، ۳۳ (له امله په لاندې سره ټولې اوبیونې راکړ شوي دي

$$x_k = 13,833427 + k.360º = 0,24143 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = 166,16657º + k.360 = 2,9001 + k .6,28318.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۷ : د برابرون cos x = -0,682000 اوبیونه د جبشمیروني سره مومو

$$x0 = 133,00013º = 133º = 2,32125.$$

د (۱۳ ، ۳۴) او (۱۳ . ۳۵) له مخی ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = 133° + k .360° = 2,32125 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = -133° + k.360° = -2,34125 + k.6,28318$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۱۸:

د برابرون $\tan x = -\sqrt{3} = 4{,}843000$ حل په جبشمیرني پیداکوو

$x_0 = -59{,}999988° = -60° = -1{,}04718$

له دې امله د) ۱۳ . ۳۱ (له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$x_k = -60° + k.180° = -1{,}04718° + k.3{,}14159$

بیلګه۱۳ . ۱۹:

د برابرون $\cot x = 4{,}843000$ ټولې اوبیونې یا حلونه د جبشمیرني سره داسی

$x_0 = 11{,}666677° = 11{,}67° = 0{,}203675$

لاس ته راځي. په دې توګه د (۱۳ . ۳) له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لرو:

$x_k = 11{,}67° + k.180° = 0{,}203675 + k.3{,}14159$

بیلګه ۱۳ . ۲۰ : مساوات $\sin x = \sqrt{2}$ د $1 < 2$ له امله اوبیونه ل نه لري .

د ګونومتري مساواتو نور تیپونه یا ډولونه، کوم چې تراوسه په څرګندومتودو یا لارو ځوابوړ دي، لاندې بڼه لري

$$\sin f(x) = a , \quad \cos f(x) = a \qquad (13 . 36)$$

$$\tan f(x) = a \quad , \cot f(x) = a \qquad (13 . 37)$$

دلته کیدی شي چې $f(x)$ الجبري او یا ترانسښیندنته افاده وي‌که بدل (سوبستیتوتي) شي

$$y=f(x) \qquad (13.38)$$

نو لاندې مساواتونه لاس ته راځي

$$\sin y= a , \cos y = a \qquad (13 . 39)$$

$$\tan y= a , \cot y = a \qquad (13 . 40)$$

دا کیدی شي د جملی ۱۳ . ۱ سره سم اوبی کړای شي. ددې اوبیونې یا حلونه دې

$y_1, y_2, y_3, \ldots$ وي .

د (۱۳ ، ۳۷) سره سم د $f(x) = y_i , \ i = 1,2,3,\ldots$ ټولې اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي ددې لپاره دې بیلګه ورکړ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۲۱: $\sin(x-120°)/3=1/2$

د سبستیچیوشن یا بدلون $y=(x-120°)/3$ سره لاس ته راځي $\sin y=1/2$ د لاندې اوبیوني (حل) سره

$$y_k = 30° + k.360° \ , \ k = ...,-3,-2,-1, 0,1,2,3...$$

$$\overline{y}_k = 150° + k.360°$$

ټول د $(x - 120°)3 = y_k$, $(x - 120°)/3 = y_k$ اوبوني (حلونهو په توګه لاس ته راځي:

$$x_k = 3y_k + 120 = 90° + 3k.360° + 120° = 210° + 3k.360°$$

$$\overline{x}_k = 3y_k + 120° = 450° + 3k \,.\, 360° + 120° = 570° + 3k.360°$$

د ګونومتري فنکشنونو یو بل تیپ یا ډول ، له لاندې څخه لاس ته راځي

$$f(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sin 2x,\cos 2x,\tan 2x,\cot 2x, \sin 3x,\cos 3x,\tan 3x,\cot 3x, ...) \qquad (13 \,.\, 42)$$

دلته که د بیلګي په توګه بدل شي

$$y = \sin x \qquad (13 \,.\, 43)$$

د ۴ . ۵ برخی تریګونومتري فرمولونو په مرسته ټول په (۴۲ ، ۱۳) رامنځ ته شوي کونجفنکشنونه په y سره افاده کولی شو:

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-y^2} \,,$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y}{\pm\sqrt{1-y^2}} \,, \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y} \,, \qquad (13.44)$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = \pm 2y\sqrt{1-y^2} \,, \ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2y^2 \quad \text{usw.}$$

له دې سره برابرون (۴۲ . ۱۳)، پهy ، یو برابرون بدلیږي:

$$F(y) = 0 \qquad (13 \,,\, 45)$$

دا دې په همغه ډول حلیدونکي وي او حلونه دې ....y_1 , y_2 .y_3 وي. نو بیاد(۱۳.۴۳)سره مناسب لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\sin x=y_i, i=1,2,3...$ (13 . 46)

اوبی کړي او د ټولو اوبیونو سره، کوم چی په (۱۳ . ۴۲) کي ښول شي ، وازمایل شي، چی ایا دا هم پوره کوي، که نه په (۱۳ . ۴۲) کیدی د x په ځاي یوه افاده g(x) هم ولیکلی شي.

$$f(\sin g(x), \cos g(x), ...) = 0 \quad (13 . 47)$$

نو بیا سرِی بدلوي

$$y = \sin g(x) \qquad (13 . 48)$$

د پورته متود تشریح لپاره په لاندې ډول دوه ساده بیلګي ورکول کیږي

بیلګه ۱۳ . ۲۲:

برابرون

$$\sin x+\cos x=1 \qquad (13 . 49)$$

د (۱۳ . ۴۲) ، (۱۳ . ۴۴) سره ځان په ریښه ببرابرون بدلوي

$$y \pm \sqrt{1-y^2} = 1 \Leftrightarrow \pm \sqrt{1 - y^2} = 1-y \Leftrightarrow 1-y^2 =1 + y^2 -2y \qquad (13.50)$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2y^2 - 2y = 2y(y-1)$$

$$y_1 = 0 , y_2 = 1 \qquad (13 . 51)$$

اوس دې په یاد شي ، چی د y2=1 لپاره برابرون (۱۳ . ۵۰) او له دې سره سم برابرون (۱۳ . ۴۹) تل پوره دي. د دې په څټ یا خلاف y1 فقط د (۱۳ .۵۰) حل دی ، که د
ریښی له مخه زیاتیز یا مثبت نخښه وي. دا حالت یوائې هلته مخ ته پروت دی، چی $\cos x>0$وي.

دا هلته هم پام ته راځي، که د برابرون (۱۳ . ۵۱) سره برابرون (۱۳ . ۴۶)حل یا اوبی شي او
حل یا اوبونه یی په (۱۳ . ۴۹) کی کیښول شي:

$$\sin x=y_1= 0 , x_k = k\pi ; \; k=...-3,-2,-1,0,1,2,3... \qquad (13.52)$$

$$\sin x=y_2 =1 , x_k = \pi/2 + 2k ; k = ..,-3,-2,-1,0,1,2,3,... \qquad (13.53)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (۱۳ . ۵۲) په (۱۳ . ۴۹) کینووول شي، نو لاس ته راځي:

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 + 1$

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 - 1$

د پیلمساوات د زیاتځله حلونه یواځي جفت ګڼونه دي($x\pi = 2k\pi$) که(۱۳ . ۵۳) په (۱۳ . ۴۹) کینوول شي، نو لاس ته راځي

$\sin x_k + \cos x_k = \sin(\pi/2 + 2k) + \cos(\pi/2 + 2k) = \sin\pi/2 + \cos\pi/2 = 1 + 0 = 1$

له دې وروسته ټول xk پیلبرابرون پوره کوي .

نو د (۱۳ . ۴۹) ټولې اوبیوني په لاندې بڼه لاس ته راځي

$$x_k = 2k\ ,\ x_k = \pi/2 + 2k\ ;\ k = ..-3,-2,-1,o,1,2,3,... \quad (13\ .\ 54)$$

بیلګه ۱۳ . ۲۳ : د برابرون $\cos x + \cos 2x = 0 \quad (13.55)$

سره کیدی شي د ریښی مساوات څخه لار واړوو یت تیرشو. که چیرته $y = \cos x$ بدل کړي. د

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = y^2 - (1 - y^2) = 2y^2 - 1 \quad (13.57)$$

له امله له څخه (۱۳,۵۵) مربع مساوات لاس ته راوړو.

$$2y^2 + y - 1 = 0 \quad (13.58)$$

د دې حل سره : $y_{1;2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4},$

$$y_1 = \frac{1}{2}\ ,\ \ y_2 = -1. \quad (13.59)$$

په (۱۳ . ۵۶) کې ایښوولو له لارې لاس ته راځي

$$\cos x = y_1 = \frac{1}{2}\ ,\ x_k = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\overline{x}_k = 300° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad (13.60)$$

$$\cos x = y_2 = -1,\quad \overline{\overline{x}}_k = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi, \quad (13.61)$$

$$x = \begin{Bmatrix} 60° \\ 180° \\ 300° \end{Bmatrix} + k \cdot 360° = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{Bmatrix} + 2k\pi. \quad (13.62)$$

تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول ارزښتونه x وشميرئ، چې لاندې برابرونونه پوره کوي! پام دې وي، چې د هرې پ،ښتنې سره يې ازمايل يا ازماېښت اړيندی.

۱ - لوګاريتمي مساوات يا برابرونونه

1.1. a) $\log_4 (x + 1) = -3$ b) $4 - 3\lg 2x = 10$

c) $\lg \sqrt{2x} = 1{,}314$ d) $\ln (x - 1)^2 = 2$

1.2. a) $\lg (2x + 5) - \lg (3x + 1) = 2$ b) $\lg 4x + \lg 2x + \lg x = 6$

c) $\frac{1}{3}\ln x^6 = \frac{1}{2}\ln 81$ d) $\lg (x - 1)^2 = 6 \lg 2$

1.3. a) $\lg (x - 1) + \lg 3 = \lg (x^2 - 1)$

b) $\lg (x + 1)^2 = \lg 2 + \lg (x + 1) + \lg (x - 1)$

c) $\lg x - \lg 4 = \lg 35 - \lg (x + 4)$

d) $\lg (x - 2) - \frac{1}{2} \lg 4 = \frac{1}{3} \lg 125 - \lg (x + 1)$

1.4. a) $\lg x + \lg (x + 1) + \lg (x - 1) = \lg 24$

b) $\lg 3 + 2 \lg x = \lg (4 + x^3)$ c) $\lg (152 + x^3) - 3 \lg (x + 2) = 0$

d) $2 \lg^2 x^3 - 3\lg x - 1 = 0$

1.5. a) $\lg x + \lg (a - \frac{1}{a}) = \lg (1 - \frac{1}{a}) + \lg (1 + \frac{1}{a})$

b) $\lg (ax) - \lg a + \lg \frac{b}{a} = \lg b + \lg \frac{x}{a}$

c) $\lg x - \lg \frac{x}{abx - 1} = \lg (a - 1) + \lg (a + 1)$

d) $\log_a (2x + 1) = \log_a (x - 1) + 1$

1.6. a) $\frac{10}{\lg x - 2} - \frac{5}{\lg x + 1} = 4$ b) $\frac{1}{\lg x + 1} - \frac{3}{\lg x - 3} = 2$

c) $\frac{2}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{\log_2 x - 5} = 1$ d) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$

1.7. a) $\lg (x^2 + 1) = 2 \lg^{-1} (x^2 + 1) - 1$ b) $(\log_5 x - 2) \log_5 x = 25^{\log_5 \sqrt{3}}$

c) $\lg^2 x^3 - 10 \lg x + 1 = 0$ d) $\sqrt{\lg(1 - x)} + 5 \lg (1 - x) = 6$

1.8. a) $2\lg \lg x = \lg (3 - 2 \lg x)$ b) $\log_2 (x - 14) = 1 + \frac{1}{2} \log_2 (3x - 26)$

c) $4 \log_3^3 5x - 7 \log_3 15 x + 7 = 0$ d) $3 \lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.9. a) $x^{\lg x+2} = 1000$ b) $x = 10^{1-0,25 \lg x}$

c) $x^{\log_5(5x)-4} = 625$ d) $x^{\log_a x} = a^2 x$

1.10. a) $x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$ b) $\log_2(4 \cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$

c) $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$ d) $x(\lg 5 - 1) = \lg(2^x + 1) - \lg 6$

1.11. a) $\log_2[2 + \log_3(x+3)] = 0$ b) $\log_5[\log_2(\log_4 x)] = 0$

c) $2\log_x 27 - 3\log_{27} x = 1$ d) $\dfrac{\lg x}{\lg(x+1)} = -1$

۲ - اکسپوننشل مساوات

2.1. a) $(a^{x-2})^{x+2} = (a^{x+3})^{x-4}$ b) $a(a^{x-3})^{x+2} = a^{3x+5}(a^x)^{x-6}$

c) $\sqrt[3]{a^{2x+9}} = \sqrt[4]{a^{3x+5}}$ d) $\sqrt[x-2]{a^{11-x}} = \sqrt[9-x]{a^{x+3}}$

2.2. a) $10^{5x} = 3^{10}$ b) $0,375^x = 2576$

c) $\sqrt[x]{6,325} = 1500$ d) $\sqrt[x]{10,27} = \sqrt[4]{5}$

2.3. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x+5}$ b) $\left(\frac{6}{7}\right)^{3x+10} = \left(\frac{7}{6}\right)^{2x-3}$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{3x+4}$ d) $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

2.4. a) $\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{x}} = 24,24^{\frac{1}{10}}$ b) $\sqrt[2x]{3^{3x+2}} = \sqrt[3x]{2^{2x+3}}$

c) $3^{(2^x)} = 2^{(3^x)}$ d) $8^{(5^x)} = 4^{(7^x)}$

2.5. a) $4^{x^2-x+1} = 8^x$ b) $3^{9x+1} = 9^{3x-1}$

c) $\sqrt{9^{x(x-1)-0,5}} = \sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[x-1]{3^{10x+5}}} = \sqrt[3x-9]{27^{3x-7}}$

e) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$ f) $2^{x^2-7,7x+16,5} = 8\sqrt{2}$

g) $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$ h) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $7^{2x+1}-3^{x-1}=7^{2x+3}-3^{x+1}$ b) $2^{x+1}-3^{x}=2^{x+3}-3^{x+2}$

c) $3^{2x-1}-5^{3x-2}=3^{2x+1}-5^{3x+2}$ d) $5^{2x}-3\cdot 5^{x}+2=0$

e) $5^{4\sqrt{x}}-6\cdot 5^{2\sqrt{x}}+5=0$ f) $2^{\frac{3}{\sqrt{x}}}-2^{\frac{2}{\sqrt{x}}+1}+2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-2=0$

g) $3^{x+1}-2=9^{x}$

h) $3^{x+1}+3^{x-1}+3^{x-2}=5^{x}+5^{x-1}+5^{x-2}$

i) $2\cdot 3^{x+3}+7\cdot 3^{x-2}=493$ j) $3^{\sqrt{x}}-3^{1-\sqrt{x}}=\frac{26}{3}$

k) $33\cdot 2^{x-1}-4^{x+1}=2$ l) $3^{x}+3^{x+1}+3^{x+2}=5^{x}$

2.7. a) $5^{x-3}+2\cdot 5^{x-2}=5{,}08$ b) $5^{\sqrt{x}}-5^{3-\sqrt{x}}=20$

c) $9^{\sqrt{x^2+3x}}+0{,}5+9=28\cdot 3^{\sqrt{x^2+3x}}$ d) $2^{-2x}-17\cdot 2^{-(x+2)}+1=0$

e) $2^{x^2}+2^{1-x^2}=\frac{9}{2}$ f) $12\sqrt[2x]{3}-\sqrt[x]{3}=27$

g) $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1}+2=9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$ h) $\sqrt{3^{x-56}}-7\cdot\sqrt{3^{x-60}}=162$

i) $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$

2.8. a) $\frac{3^{x}+3^{-x}}{3^{x+1}-1}=\frac{5}{12}$ b) $\frac{2^{x}+1}{2^{x}-4^{x}}=6$

c) $4+\frac{2}{3^{x}-1}=\frac{5}{3^{x-1}}$ d) $\frac{2^{x}+10}{4}=\frac{9}{2^{x-2}}$

e) $x^{x}=x$

۳ – گونومتریکي – یا کونجکچیز مساوات

3.1. a) $\tan x=\frac{1}{2}$ b) $\sin x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\cot x=\frac{2}{5}$ d) $\tan x=-1$

3.2. a) $\sin(2x-\frac{\pi}{2})=0{,}309$ b) $\cos(2x-\frac{\pi}{3})=0{,}342$

c) $\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{10})=0{,}809$ d) $\cos(x+\frac{\pi}{3})=0{,}471$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3.3. a) $5\sin^2 x - 10\cos^2 x - 1 = 0$ b) $\cos^2 x + \frac{1}{3}\sin x\cos x + \frac{2}{3}\sin^2 x = 1$

c) $\cos^2 x + 2\cos x - \sin^2 x + 1 = 0$ d) $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

e) $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 0$ f) $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

g) $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$ h) $\sqrt{1+\cos x} = \sin x$

i) $\sqrt{1+\sin x} + \cos x = 0$ j) $\sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$

k) $\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{2}\sin x = 0$ l) $1 - \cos x = \sin x$

3.4. a) $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$ b) $\cos 2x = \cos x$

c) $\sin 2x \cdot \tan x = 1$ d) $\cos 2x + 3\cos x = 1$

e) $\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$ f) $2\sin\frac{x}{2} - \cos x + 1 = 0$

g) $\cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$

h) $2\sin x\cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$

i) $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$ j) $\sin 2x + 2\cot x = 0$

k) $3\cos 2x - 20\sin x = 9$ l) $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 0$

3.5. a) $2\sin^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 0$ b) $2\cos^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 1$

c) $\tan x - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ d) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$

e) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ f) $3 - 2\sin^2 2x = 2\sin^2 x$

g) $5\cos 2x + 16\sin x + 14\sin^2 x + 7 = 0$

h) $3\cos 2x - 6\cos x + 4\sin^2 x = -3$

i) $2\cos x + 3 = 4\cos\frac{x}{2}$ j) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 0$

k) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$

3.6. a) $\cos x\cos 2x = \cos 3x$ b) $\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}\sin 8x - 0{,}5$

c) $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$ d) $(\cos 8x)^2 \cdot 2 + \sin 16x = 1$

e) $2\cos^2 4x + \sin 10x = 1$ f) $2 - 6\sin x\cos x = \cos 4x$

g) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$ h) $\sin x\cos 5x = \sin 9x\cos 3x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

i) $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2} = \sin\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}$ j) $\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{9x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

k) $\sin x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x = 0$ l) $\cos x + \cos 3x = \cos 5x + \cos 7x$

3.7. a) $2\sin^3 x - 3\sin x\cos x = 0$ b) $4\sin^3 x - 8\sin^2 x - \sin x + 2 = 0$

c) $\tan^3 x + \tan^2 x \;\; 3\tan x - 3 = 0$ d) $\tan^3 x - \tan^2 x + \tan x = 1$

3.8. a) $\sqrt{3}\sin x + 3\cos x = 0$ b) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = 1$ d) $\sqrt{2\sin 2x} + 2\sin x = 0$

e) $1 - \sin x = \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$ f) $2\sin^2\frac{x}{2} = \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2})$

g) $1 - \cos 2x + \cos 6x - \cos 8x = 0$ h) $\cos x - 2\cos 3x + \cos 5x = 0$

i) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$ j) $1 - \sin x\cos x + \sin x - \cos x = 0$

k) $\cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sin x$ l) $\sin x\cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0$

m) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$ n) $(\cos x)^{\sin x} = 1$

o) $\frac{1+\cos 2x}{2\cos x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴. د نامساواتو یا نابرابرونونو او مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

۱۴ . ۱:نابرابرون(نامساوات)

۱۴ . ۱ . ۱ بنسټیزې کلیمی او شمیرقوانین

یو نابرابرون لاس ته راځي، که دوه ترمونه T1 او T2 د یوې اړیکنخښی<, ≥,> او ≤ له لارې یو د بل سره تړلي وي.
په لاندې کی به نابرابرونونه تر څیړنی لاندې ونیول شي، چی یوه یا دوه ریيلی واریابلی یا اوښتونی ولري . یو نابرابرون د دوه واریابلو(اووښتونو) سره د وینامنطق په بنسټ یو د وینا شکل ښايي، د هغو سره چی واریابلی هر ارزښت غوره کولی شي، د کومو لپاره چی ترمونه T1 او T2 څرګنددي . یو اوبی یا حل هر هغه ارزښت دی ، په همدې توګه هغه ارزښت جوړه ده، چی واریابل یا اووښتونې یی غوره کولی شي او په ترم کی د هغي ځاي په ځاي کیدو سره نابرابرون یوه ریښتونی وینا وي . د ټولو اوبیونو یا ځوابونو ټولګه په حلډیري L کی سره راټولیګي.
په لاندې برخه کی به ډیر د وینامنطق(ویناسم اندیز) سومبولونه چی په برخه ۱ ۰ ۲ (او د ډیري عملیو سومبولونه) چی په برخه ۲ . ۳ راغلي په کار واچول شي. د دې سومبولونو د اهمیت یا غوره والي سره دې سړی بیا هم ځان اشنا کړي.
د نابرابرونونو سره شمیرنه کی دې لاندې قاعدې په پام کي ونیول شي(مقایسه برخه ۳)، دلته دې a , b , c او dرییل ګڼونه وي. لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a<b \Leftrightarrow a \pm c<b \pm c, \qquad (14,1)$$
$$a<b \wedge c>0 \Rightarrow a.c<b.c \qquad (14,2)$$
$$a:b<b:c \qquad (14,2)$$
$$a<b \wedge c<0 \Rightarrow a.c>a.c \qquad (14,3)$$
$$a:c>b:c \qquad (14,3)$$
$$a<b \wedge c=0 \Rightarrow a.c=b.c \qquad (14,4)$$

د برابرونونو شمیرنی سره انډول کی دې دلته (۱۴ . ۳) قاعده ځانګړې تر پام لاندې وي.د منفی یا کمیز ګڼ سره ځل یا ویش عملیه کی دا د نابرابرون نخښه راکرځي یا را په شڼ کیږي یا که غواړئ برعکس کیږي. د بیلګي په توګه $3 < 4$ مګر که داوړه خواوې د $1-$ سره ځل شي نو لاس ته راځي $-3 > -4$

ټول د شمیرلو لپاره ورکړ شوي قواعد د نابرابرون لپاره په ورته ډول د اړیکنخښو > سره باور لري دا په دې مانا چې$a \le b$ دا چی په څرګند ډول د دوه ګڼونو ځل او ویش هلته زیاتیز (مثبت)دی چی دواړه ګڼونه همغه مخنخښه ولري او کمیز (منفي) که چیری مخنخښي یی توپیر ولري، او لاندې اړیکی باور لري:

$$a.b>0 \Leftrightarrow \qquad (14,5)$$
$$\Leftrightarrow a:b>0\ (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0), \qquad (14,5)$$
$$a.b<0 \Leftrightarrow \qquad (14,6)$$
$$\Leftrightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0). \qquad (14,6)$$

دبرابرونونو شریکولو کی، په ځانګړي ډول د ویش لپاره، باید ونیول شي چی $b \mid= 0$ یعني د ځل او ویش لپاره دې توییریدونکو قاعدو ته پام وي . د بیلګي په توګه دي:

$$a.b \ge 0 \Leftrightarrow (a \ge \wedge (a \ge 0) \vee (a<0 \wedge b<0) \qquad (14,7)$$
$$a:b \ge 0 \Leftrightarrow (a \ge 0 \wedge b>0) \vee (a \le 0 \wedge b<0) \qquad (14,8)$$

۱۴ . ۱ ۱الف اینتروال

د واریابلو د څیړنو لپاره باید ټول معتبر ډیري ورکړل شي، د بیلګي په توګه د یوه فنکشن یا بلواك تعریف - او ارزښت ډیري.

پیژند ۴ . ۱ الف :
یو اینتروال یو د یوبل سره اړوند د رییلګڼونوR برخه ډیر) ده۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو اینتروال له دې امله، بې له تشوالي یا تشي ، د ګڼکرښې یوه ټاکلی برخه ده، چې له دوه ګڼونو a او b رابندیږي. که د غاړې ټکي په اینتروال کی دننه وي یا خونديږ وي نو د بند

اینتروال څخه غږیږو او که اینتروال پورې اړه ونه لرې، واز اینتروال دی، او په همدې ډول نیمبند او نیم واز اینتروالونه.
د اوبیډیری په ورکولو سره په ګڼکرښی باندې، لاندې د انیتروال انځورونه په کار اچول کیږي.

لاندې ۱۱ د اینتروال مختلف تیپونه دي یا نې ، چې a او b له R دي او $a < b$ ده٠

1. $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$ واز اینتروا ، اخر تخري په اینترول اړه نه لیر
2. $[a,b] = \{x \mid a \le x \le b\}$ بند اینتروال ، اخر توري په اینتروال ئورې اړه لري
3. $[a,b) = \{x \mid a \le x < b\}$ ښی واز اینتروال
4. $(a,b] = \{x \mid a < x \le b\}$ کیڼ واز اینتروال
5. $(a,\infty) = \{x \mid x > a\}$ ښې لورته ناپاي او کیڼ لور ته واز اینتروال
6. $[a,\infty) = \{x \mid x \ge a\}$ ښې لور ته ناپای او کیڼ لور ته بند اینترال
7. $(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$ ښې لور ته واز او کیڼ ورته ناپاي اینتروال
8. $(-\infty,b] = \{x \mid x \le b\}$ ښې لور ته بند او کیڼ لورت ناپاي اینتروال
9. $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ ناپای اینتروال ، ټول رییلګڼونه
10. $\{a\}$ د دې یوه توري ډیری
11. $\varnothing$ تشډیری

لاندې اینتروالونه د ناپای په لور هم رابند دي یانې په دې مانا، چې د ناپای ډیری هم په اینتروال پورې اړه لري، یانې ناپای ډیری ټولنه ورسره جوړوي٠

1. $[-\infty,b] = \{x \mid x \le b\} \bigcup \{-\infty\}$
2. $[-\infty,b) = \{x \mid x < b\} \bigcup \{-\infty\}$
3. $[a,\infty] = \{x \mid x \ge a\} \bigcup \{\infty\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a,\infty] = \{x \mid x > a\} \bigcup \{\infty\}$$

4. $[-\infty,\infty] = \mathbb{R}^+$

Alternative notationپورته ته الترناتيو يا بديلي ليکنښه

په نړيواله توګه يو بل ډول ليکنښۀ په لاندې ډول ورکو لکيږي

$]a,b[= \{ x \mid a < x < b \}$

$[a,b] = \{ x \mid a \le x \le b \}$

$[a,b[= \{ x \mid a \le x < b \}$

$]a,b] = \{ x \mid a < x \le b \}$

يادونه : داپورته د اينتروال ډولونه د نړيوال جال څخه راکښته شوي، دا مې هم وغوښتل ګرانو لوستونکو ته وړاندی کړم

بند انيتروال : ۰۰۰۰ $[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$

نيم و از اينتروال :۰۰۰۰۰ $(a,b]=\{x|a<x\le b\}$

نيم واز اينتروال :۰۰۰۰۰۰ $[a,b)=\{x|a\le x<b\}$

واز اينتروال : ۰۰۰۰۰ $(a,b)=\{x|a<x<b\}$

ښی بند ناپای اينتروال : $(-oe,b]=\{x|x\le b\}$

کښ بند ناپای اينتروال : $[a,oe)=\{x|x\ge a\}$

ښی واز ناپای اينتروال :۰ $(-oe,b)=\{x|x<b\}$

کيڼ واز ناپای اينتروال :۰ $(a,oe)=\{x|x<b\}$

ناپای اينتروال : {x د ګڼکرښی ټکی دی|x}=(-oe، oe)

بيلګه ۱۴ . ۱الف:

په بنستيزه ډيرۍ Rکی د لاندې برابرون پيژنددیرۍ غوښتنه منځ ته رااچوو.

$x - 2 = 1 + 7 - x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : د دې ترم $T1(x) = x - 2$ پېژندډیرى ده:

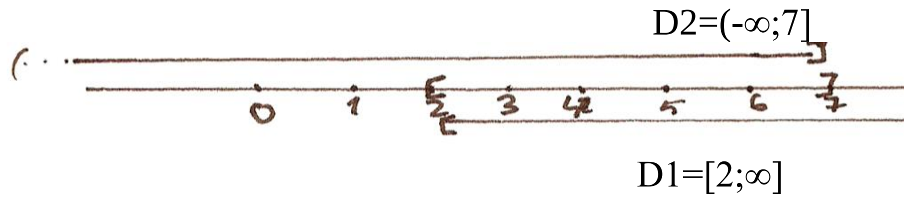
D1 = [2 , oe)

په همدې توګه د ترم $T2(x)=1+7-x$ پېژندډیرى ی ده: D2 =(-oe,7)

د برابرون دپېژندډیرۍ لپاره لاس ته راوړو:

$$D = D_1 \cap D_2 = [2,\infty) \cap (-\infty,7] = [2,7]$$

لاندې ځیره وګورې(متاسفانه، چې ښه ځېره نه شم کښلی)



۱۴ . ۱ ۲ .نابرابرون د یوې مجهولی سره

د شمیرقاعدې لومړی د هغونابرابرونونو لپاره په کار اچول کیږي چې یوه اوښتونې یا مجهوله ولري، او اوبیونې یی په ټولیزه توګه د اینټروالونو له لارې انځوریږي.
(۱۴ . ۱) قاعده د په خوښه ترمونو د زیاتون او کمون داسی اجازه راکوي، لکه په برابرونونو کی.

بیلګه ۱۴ . ۱:

لرو $5x-6<4+9x$ دواړو لورو ته $-9x + 6$ ورزیاتوو، نو لرو $-4x < 10$
دواړه خواوې په 4 - ویشو.

د (۱۴ . ۳) له مخې لاس ته راځي $x > -5/2$
د اوبیونې ډیر یا اوبیډیری : L=(-5/2,oe)
که په یوه غوښتونکی ځل یا ویش کی ځله وونی، همداسي پرویشونی یو واریابل یا اووښتونی ترم وي، نو باید د (۱۴ . ۲) تر (۱۴ . ۴) سره سم ددې ترم د مخنخښې په واك والي کی د حالت توپیرونه(ښه یې : توپیره ونه) تر پام لاندې ونیول شي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوګونو اوبیډیریو پیداکولوپه هکله، په هر ډول چی وي، باید په پام کی ولرل شي، چی یواځي هغه د نابرابرون شمیرل شوي دx - ارزښتونه اوبیونې دي، چي ټول ىی سملاسي (په همدې وخت کی) هغه نیول شوی (فرض شوی) شرایط پوره کړي.

هر برخ اوبیډېرئ یا برخحلډیرئ کیدی شي چی د غوځډیرئ په ځیر له همغه هرپورتني نماینده برخساحویا-ورشو(یا نوره هم ښه : -برخچاپیریالونو) واریابلی (اووښتونی) او د نابرابرون ډیرئ شمیرل شوو واریابلو یا اووښتونکو ارزښتونو جوړ شي. د غوځډیرئ جوړښت، کیدی شي چی د یوګونو ډیریو د ګرافیکی انځورونو په ځیر په ګڼوړانګه ساده شي. د نامساوتو ټولې اوبیډیرئ د برخ اوبیډیري یوه د یوګونو حالتونو ټولنډیرئ ده .

بیلګه ۱۴ . ۲:

$(3x-5)(x-2)<4(x-2)$

که په $(x-2)$ باندې وویشل شي، نو باید د شرایطو په پام کی لرلو سره سم

د $x > 2$ لپاره $(x-2)>0$

د $x = 2$ لپاره $(x-2)=0$

د $x < 2$ لپاره $(x-2)<0$

نابرابرن دې په درې برخه ساحو کی یو له بل بیل وڅیړل شي.

لومړی حالت:

$x > 2 <=> x \in (2,\infty)$

دلته د مخ ته پراته نامساوت لاندې ورته ښه بدلون ځخه لاس ته راځي

$3x-5 \le 4 <=> 3x \le 9 \Leftrightarrow x \le 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty,3]$

له دې x - ارزښتونو ځخه یواځي هغه د مخه ورکړ شوي نابرابرون ، چي په لومړي حالت کی راوړل شوي اوبیونې دي ، یواځي هغه x د

$x \in (2,\infty)$

سره د اوبیو یا اوبیونو په ځیر نیسو. له دې امله د لومړي حالت اوبیډیري لرو:

$L_1 = (2,\infty) \bigcap (-\infty,3] = (2,3]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم حالت:

$$x = 2 \Leftrightarrow x \in \{2\}$$

د لته په (x -2) باندې ویشل کیدی نه شي.

د x = 2 ارزښت لیکلو رښتیا وینا $0 \geq 0$ لاس ته راځي او له دې امله

L2 = {2 }

دریم حالت:

$$x < 2 \Leftrightarrow x \in \{-\infty, 2\}$$

د 0 > x - 2 له امله د (۳ . ۱۴) له مخې پخپله د مخه ورکړ شوي نابرابرون لاندې ورته فورمونه ورکوي

$$3x - 5 \geq 4 \Leftrightarrow 3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$$

له دې x - ارزښتونو کوم یو نه شي کیدی چې په دریم حالت کی راوړل شي:

$$L_3 = (-\infty, 2) \cap [3, \infty) = \varnothing$$

د برخه اوبیډیریو ټولنی څخه ټول اوبیډیر) لاس ته راځي:

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,3] \cup \{2\} \cup \varnothing = [2,3]$$

نو ټولې اوبیوني هغه x د ي د کومو لپاره چي لرو: 2< x < 3
په لاندې بیلګو کي نور دومره زیات توضیحات نه ورکول کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۳ :

(3x-1)/(2x+4)<2

د شرایطو 0=|2x+4له مخی، دا په دې مانا چی 2=| x د مات لاندې سره ځله ونې له امله

د x>-2 لپاره (2x+4)>0

د x<-2 لپاره 2<(2x+4)

سره سم یواځي دوه حالتونه توپیروو:

لومړی حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2, \infty)$$
$$3x - 1 < 4x + 8 \Leftrightarrow x > -9 \Leftrightarrow x \in (-9, \infty)$$
$$L_1 = (-2, \infty) \cap (-9, \infty) = (-2, \infty)$$

څیره ۱۴ ۱ الف: دا څېره لاندې کښل شوی، په هغې کې چې بیا دا اوبیدیری روښانه شو٠

دوم حالت:

$$x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$3x - 1 > 4x + 8 \Leftrightarrow x < -9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$L_2 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -9) = (-\infty, -9)$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -9)$$

پورته اخر د نابرابرون یا نامساوات حل یا اوبی دی٠

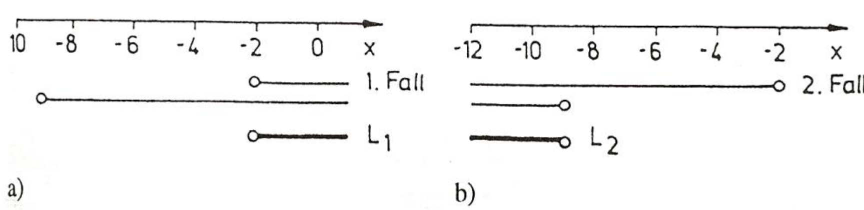


Bild 14 1

څیره ۱۴ ا ب : دلته هم ګنونوکربښي شته، چۀ په هغې کي دا اوبیدیری روښانه کارړل شوي دي٠ ، که څیره مي ونه کارړله، نو داکار بج ګران لوستونکی هم وکولای شي٠

د مخنخښی راوړلو په بنسټ د نابرابرن یوه ځانګړي بڼه یا فورم، چی په (۵.۱۴) تر (۸ . ۱۴) اړیکو کی استعمال شوي، اوبیونه ګټوره وښايي.

نابرابرونونه

دلته هم څو بیلګي راوړل کیږي، چې نابرابرونونه په کې اوبی شوي دي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برخه د نړیوالجال څخه راکښنته شوي، له دې امله یې لیکښه د مخکنۍ لیکښنې سره توپیر لري. دا لاندې لرو .

$$ax + b \; ; > 0, \qquad a \neq 0$$

$$< 0 \; ; \; x^2 - 5$$

$$\leq x + 10 \; ; \; |2x - 5|$$

دلته اوبیونې اینتروالونه دي. ښول کیږي، چې اوبیډیرۍ څنګه پیداکیږي او د دې لپاره

اړیین شرایط کوم دي.

- په دواړو لورو همغه ګڼ زیاتیدلی یا کمیدلی شي
- که دواړه خواي د کمیز ګڼ سره ځل شي یا په کمیز ګڼ وویشل شي، نو مخنخښه تغیر خوري. که زیاتیز وي، نو دواړه خوا په توان کیدی شي او ریښنج یې وستل کیدی شي، پام دې وي، چې برابرون بیا زیاتیزه او که کمیزه مخ نخښه غوره کوي او یا دواړه
- موږ (1.9:1 اوبی کوو

د $a > 0$ سره لورو

$$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x > -\frac{b}{a}$$

د لاندې حلسټ یا اوبیډیرۍ

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\} = (-\frac{b}{a}, \infty).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a < 0$ سره لرو

$$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x < -\frac{b}{a}$$

د لاندې اوبيډيرى سره

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\} = (-\infty, -\frac{b}{a}).$$

موږ (1.9:2 اوبى كوو :

$$x^2 - 5 < 0 \iff x^2 < 5 \iff |x| < \sqrt{5}$$

په اخرنې پل كې دې دې ته پام وي $\sqrt{x^2} = |x|.)$ د روابنه تشيرح لپاره يا شننې لپاره يو د حالت توپير رامنځ ته كوو :

په حالته $x \geq 0$ كې $|x| = x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ په ساده ډول $x < \sqrt{5}.$ مانا لري

په حالت ist $x < 0$ كې $|x| = -x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ د , $-x < \sqrt{5}$ په مانا يا $x > -\sqrt{5}.$ ورته نو لرو

$$|x| < \sqrt{5} \iff -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

او اوبيډيرى

$$\mathcal{L} = (-\sqrt{5}, 0) \cup [0, \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ 1.9:3 اوبی کوو د یوه حالت تو[پر سره

$$2x - 5 \leq x + 10 \quad x \leq 15, \quad \Longleftrightarrow$$

$$2x - 5 \geq 0 \quad x \geq \frac{5}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x \geq 5 \quad \Longleftrightarrow$$

(i) که وي $2x - 5 \geq 0;$ نو دی $|2x - 5| = 2x - 5,$ او موږ لرو

له دې لاس ته راځي

$$\frac{5}{2} \leq x \leq 15.$$

(ii) $2x - 5 < 0.$ نو دی $|2x - 5| = -(2x - 5)$ او لرو

$$-2x + 5 \leq x + 10 \quad \Longleftrightarrow \quad -3x \leq 5 \quad \Longleftrightarrow x \quad \geq -\frac{5}{3},$$

$$2x - 5 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x < 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x < \frac{5}{2}.$$

له دې لاس ته راځي:

$$-\frac{5}{3} \leq x < \frac{5}{2}.$$

د نابرابرون اوبیونډیری له دې امله ده

$$\mathcal{L} = [-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}) \cup [\frac{5}{2}, 15] = (-\frac{5}{3}, 15].$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې یو څو تمرینونه ورکړ شوي، کۀ ګران مینه وال یې غواړې تمرین کړي۰

لاندې نابراورونونه اوبی کړئ

(i) $\frac{3}{x+5} < 2$,

(ii) $\sqrt{x^2 + x + 2} > x$,

(iii) $|x+5| > |x-2|$.

بیلګه ۱۴ . ۴:

$1/(3-x)>2/(x+6)$, $x|=-6$; $x |= 3$

د اصلي ماتلاندې $(3-x)(x+6)$ سره د حٔل له امله باید بیا هم د هغه مخنخښه په پام کی ونیول شي. شرایط، د کوموله مخی چی مات لاندې مثبت د ی، کیدی شي د (۱۴ . ۵) له لارې ومیندل شي:

$$(3-x)(x+6)>0 \Leftrightarrow (3-x)>0 \wedge x+6> \vee (3-x)<0 \wedge x+6<0$$
$$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x>-6) \vee (x>3 \wedge x<-6) \Leftrightarrow -6<x<3$$

نو (۱۴ . ۶) شوونې کوي یا ممکنه وي، چی هغه ورشو(ساحه یا ډیری یا نه هم شهچاپیریال) پیدا کړو چیرته چی اصلي مات لاندې کمیز یا نفي دئ:

$$(3-x)(x+6)<0 \Leftrightarrow (3-x)>0 \wedge x+6><0 \vee (3-x)<0 \wedge x+6>0$$
$$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x<-6) \vee (x>3 \wedge x>-6) \Leftrightarrow x<-6 \vee x>3$$

له دې امله د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) په پام کي لرلو سره شمیرنه لاس ته راځي:

لمړی حالت :

$$-6 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-6 , 3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتیز ځله ووني یا مثبت فاکتور $(3-x)(x+6)$ سره ځلولو له امله د اړیکو نخښه ساتلی پاتیږي:

$$x+6 \ge 6-2x \Leftrightarrow x \ge 0 \Leftrightarrow x \in [0,\infty),$$

$$L_2 = (-6,3) \cap [0,\infty) = [0,3)....(mape(zirah)14.2a)$$

دوم حالت : $x < -6 \vee x > 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty,-6) \cup (3,\infty)$

دا چی د لته اصلي مات لاندې منفی دی، نو ځل د اړیکو نخښه باندې راګرځیدونی یا په څټ (چپه یا برعکس(تاسیر لري:

$$x+6 \le 6-2x \Leftrightarrow x \le 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)$$

$$L_2 = [(-\infty,-6) \cup (3,\infty)] \cap (-\infty,0) = (-\infty,-6)....(mape(zirah)14.2b)$$

اوبیږدیری $: L = L_1 \cup L_2 = [0,3) \cup (-\infty,-6) = (-\infty,-6) \cup [0,3)$

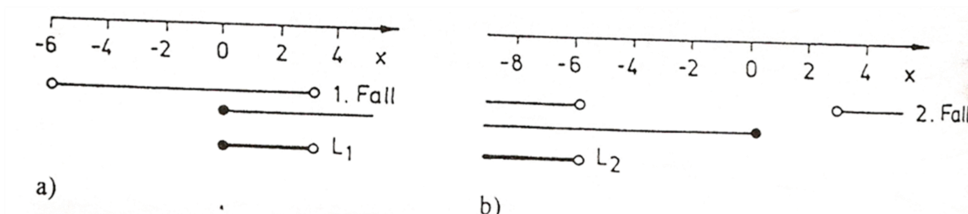


Bild 14.2 ځاکره

د څلوری برابرون یا مربع نامساوات حل لپاره کیدی شي د څلوری ترم ځل انځورونی څخه کار واخستل شي.

بیلګه ۱۴ . ۵ : $-x^2+9x<0$

لومړی د (۱۴ . ۳) په پام کي نیولو سره دx^2 د مخ (کیڼ لور) کمیز- یا منفي ځلو,وونوباندې ویشل کیږي:

$$x2 - (9/2)x + 2 > 0$$

ددې لپاره چی دا نامساوات د ځل په ځیر ولیکلی شو، د مربع مساواتو حل شمیرو، کومه چی د اړیکنخښي په ځاي د مساواتنخښی ځاي په ځاي کولوروسته منځ ته راځي.

$$x^2-(9/2)x+2=0 \Rightarrow x1=4 , x2=1/2$$

$$x^2-\frac{9}{2}x+2>0 \Leftrightarrow (x-4)(x-\frac{1}{2})>0 \Leftrightarrow (x>4 \wedge x>\frac{1}{2}) \vee (x<4 \wedge x<\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow x>4 \vee x<\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د (۱۴ . ۵) په کارولو د نابرابرون حل لاس ته راځي:

حلډېرى : $L=(-\infty;\frac{1}{2})\cup(4;\infty)=R\setminus\{\frac{1}{2};4\}$

په دې برسيره دې په ياد وي چې داډول نامساوات د مشهور مربع فنكشن د كرېږ كښلو له مخې هم حل كيدى شي، په ځانګړي ډول هلته، چې اړوند مربع شكل رېيل حل نه لري٠ بالاخره پهپاى كې د وېش د مخنښي راوړلو يوه بيلګه ښايو.

بيلګه ۱۴ . ۶ : $\frac{x+5}{3x-2}\le 0,\ x\ne\frac{2}{3}$.

حل (۱۴,۸) ته ورته دى

$$\frac{x+5}{3x-2}\le 0 \Leftrightarrow (x\ge -5 \wedge x<\frac{2}{3}) \vee (x\le -5 \wedge x>\frac{2}{3}) \Leftrightarrow -5\le x<\frac{2}{3}.$$

د سيستم حل ډېرى يا حل سټ: $L=[-5,\frac{2}{3})$.

۱۴ . ۱ . ۳ د نابرابرونسيستم د يوې ناپيژندونكى يا مجهولى يا اوښتونې سره

د يوه نابرابرون سيستم اوبيډيرى L د يوګونو نابرابرونونو اوبيډيريو غوڅډيرى ده . ګټور يا موخه وربه وي (دا هدفمند دى)، كه نابرابرون لكه په يوه برابرونسيستم كى په نمره كړى شي ، ددې لپاره چې دا يوګوني (دا په دې مانا چې يو يو) اوبى كړى شو.

بيلګه ۱۴ . ۷

$$5-2x\ge 3-x$$
$$x^2-5x-6<0$$
$$I.5-2x\ge 3-x \Leftrightarrow x\le 2 \Rightarrow L_I=(-\infty,2]$$
$$II.x^2-5x<0 \Leftrightarrow (+1)(x-6)<0 \Leftrightarrow -1<x<6 \Rightarrow L_{II}=(-1,6)$$
$$\Rightarrow L=L_I\cap L_{II}=(-\infty,2]\cap(-1,6)=(-1,2]$$

د سيستم اوبيډيرى: Lدى

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۴ . ۸

$$-2<\frac{4x-10}{x-1}<3, x\neq 1$$

د داسی نابرابرون ځنځیرونه یا یو بل سره تړنه د دواړو نابرابرونونو د سیستم سره په یوه مانا دی:

$$I. -2<\frac{4x-10}{x-1}$$

$$II. \frac{4x-10}{x-1}<3$$

د همغه فاکتور(x-1) سره د ځل اړیین یا ضروری حالت توپیریدنه کیدی شي د دواړو نابرابرونونو لپاره غبرګ د لیدوړ بنی سره وځیرل شي (مخ په وړاندې یووړ شي) :
(یادونه: په لاندې کې دې Fall(1) لومړې حالت او Fall(2) دویم حالت وي)

....I..II

$1.Fall^{(1)}$ $x\in(1,\infty)$

$$-2x+2<4x-10 \quad\quad 4x-10<3x-3$$

$$\Leftrightarrow x>2 \Leftrightarrow x\in(2,\infty). \quad\quad \Leftrightarrow x<7 \Leftrightarrow x\in(-\infty,7).$$

$$L_{I_1}=(1,\infty)\cap(2,\infty)=(2,\infty) \quad\quad L_{II_1}=(1,\infty)\cap(-\infty,7)=(1,7)$$

$2.Fall^{(2)}$ $x\in(-\infty,1)$

$$-2x+2>4x-10 \quad\quad 4x-10>3x-3$$

$$\Leftrightarrow x<2 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2). \quad\quad \Leftrightarrow x>7 \Leftrightarrow x\in(7,\infty).$$

$$L_{I_2}=(-\infty,1)\cap(-\infty,2)=(-\infty,1) \quad\quad L_{II_2}=(-\infty,1)\cap(7,\infty)=\varnothing$$

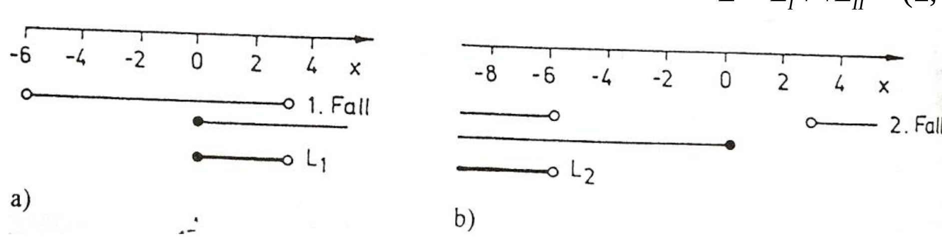
$$L_I=L_{I_1}\cup L_{I_2} \quad\quad L_{II}=L_{II_1}\cup L_{II_2}$$

$$=(-\infty,1)\cup(2,\infty) \quad\quad =(1,7)$$

د LI او LII غوښتیری جوړول بیرته کیدی شي چي د یوګونو اوبیدیریوګنوړانګه باندې د لیدنی شي)(ځیره ۱۴ . ۳

د سیستم اوبیدیری:

$$L=L_I\cap L_{II}=(2,7)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۴ . ۱ . ۴ نابرابرون د دوه اووښتونو یا مجهولو(ناپیژندونکو) سره

د دوه نابرابرون - یا نابرابرونسیستمونو اوبیډیری د یوه اوبیډیری $R^2 = R \times R$ برخډیری ده، چی د هوارې په څیر د لیدنی کیدی شي. له دې امله ګرافیکي ښوونه د ټکو ډیري په ځیر په یوه کواوردینات سیستم کی مساعد دی. په دې برخه کی به موږ یوائځي د لاندې ډول لاینیزنابرابرون::

$$ax + by + c > 0 \; (\geq 0 \; , <0, \leq 0 \;) \qquad (14.9)$$

واریابلو یا اوښتونو x , y او ثابتو ځله وونو(ضریبونو)

$a, b, c \in R$

سره د شرایطو $a|=0$ v b |=0 سره سم تر څیړنی لاندې ونیسو.
که ددې اړیکو نخښه د برابرون سره بدله کړو نو د یوې کرښي برابرون $ax+by+c=0$ لاس ته راځي، کومه چی د پروتولاړ - یا کواوردینات سیستم په دوه نیمو هوارویا ستحو ویشي. د نابرابرونسیستم (۱۴ . ۹) ، چی ټیك په یوه له دې دوه هوارو کی باور لري، په راتلونکي بیلګه ۱۴ . ۹ کی ښوول کیږي. د اوبیډیری په هواره کی د کرښونو یا کرښو کولو(د ډیرو کرښو کښلو) له لارې په نخښه کیدی شي. که په نابرابرون کي برابرون نه وي پریښوول شوي یعني برابرون په کی نه وي ځاي شوي، نو راتولونکی کرښه د اوبیډیری پورې اړه نه لري او کیدی شي یوائځي ټوټه ټوټه کرښی (پرې لاین یا غوڅکرښو) په څیر په نخښه شي، لکه څنګه چی د ډیری ګرافیکي ښوونه ورځنی یا بلده یا معمول ده. که برابرون ورپورې اړه ولري، نو کرښه د اوبیډیری پورې اړه لرونکی برخی په څیر په نخښه کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۹ :

$$2x+5y-10>0$$

که نابرابرون د y په لور اوبی شي، نو دې ته ورته نابرابرون $y>-(2/5).x+2$ لاس ته راځي، کوم چی په یوه کره نیولي x په روښانه توګه د لویو y - ارزښتونو لپاره پوره دی نسبت ورته برابرون ته . له دې امله دهوارې چی د کرښې $y=-(2/5).x+2$ څخه پورتنی نیمی هوارې ټول ټکی اوبیډیری L جوړوي ش که څیره ون کښل شوه، نو پل په پل داکار ګران د شمیرپوهنې مینه وال کولی شوي ۱۴ . ۴)

دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی تشریح تګلار په نابرابرون (۱۴ . ۹) کی د مخه نیسي چي $b|=0$ دی. په ټولیزه توګه یا عمومي ډول دا متود د استعمال وړ دی، چی د کواوردینات سیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه په خوښه ټاکلي ټکی ځای په ځاي کولو کی ، چی په کرښه ax+bx+c=0 نه وي پروت٠

ازمایو چي ایا دا نابرابرون په اړونده نیمه هواره کی باور لري او یا نه.که ممکن وي نو د شمیرنی د ساده والي له امله ځانګړی ټکی(0.0) ټاکو. دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی ددې ټکی بدلون وروسته نا ریښتیا وینا 10 - > 0 لاس ته راکوي او په دې ډول د اوبیډیری پیداشوی ځاي (ښه به پروتځاي وي خو د لنډونی له امله ځاي بسیا کوي) تصدیقوي.
دلته یوه څیره کښل کیږي دلته د اوښتونو پرځاي ګڼونه ړدو او بیا کرښه باسو٠ په کواوردینات کي د هوارې هغه برخه، چې اوبیډیری ده کرښ کرښه کوو، دا په دې مانا، چې د کرښی هغه دکرښونو لور ته ابیډیری ده٠

د یوه نابرابرونسیستم چی دوه مجهولی ولري، نو هر نابرابرون ځانله ځانله اوبی کیږی او بالاخر ه بي د یوګونو اوبیډیریو غوڅډیری نیول کیږي یا جوړیږي.

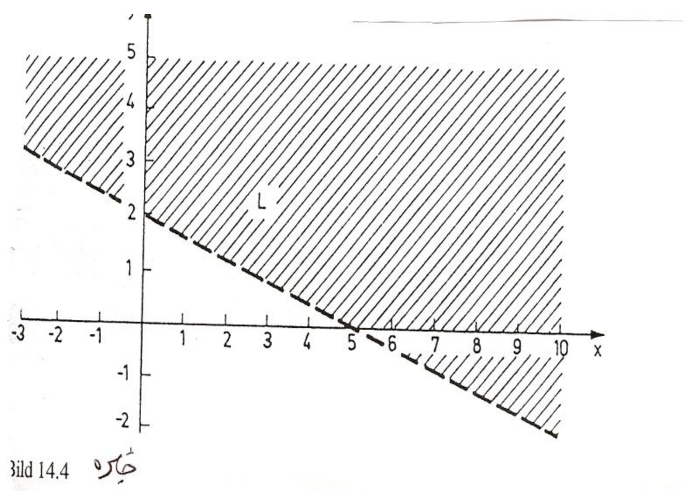


Bild 14.4 ځاېره

بیلګه ۱۴ . ۱۰:
I . 2x+y<6
II. 4x-y>0

(0,0) نابرابرون I پوره کوي او له دې امله په اړونده اوبیډیري LI کی پروت دی. دا چی په نابرابرون II کی د (0 , 0) سیده برابرون باوري دي، نو دلته باید یو بل ټکی د بیلګي په توګه (0 , 1) کیښول شي، کوم چی د په څنوالي یا تضاد په لور ځي، او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې امله اوبيډيرئ LII کی نه دئ پروت. (؟؟؟ش ۱۴ . ۵ الف(. ش ۱۴ . ۵ ب دسيستم حلډيرئ L ښايي چي له دوه نيمکرښو بنديږي يا له دوه نيم کرښومحدوديږي.
د وړانديزارزښت لري چی د تمرينونو په خپلواك كار كولو کی د غوښتونكو اوبيډيريو L د يوگونو نيمهوارو غوڅډيرئ حتي تر غاړې پورې رنگينه يا كرښی كرښی راوكښل شي، چی په دې ډول يی يو كواورديناتسيستم د انځورولو لپاره بسيا وكړي .ش ۱۴ . ۵

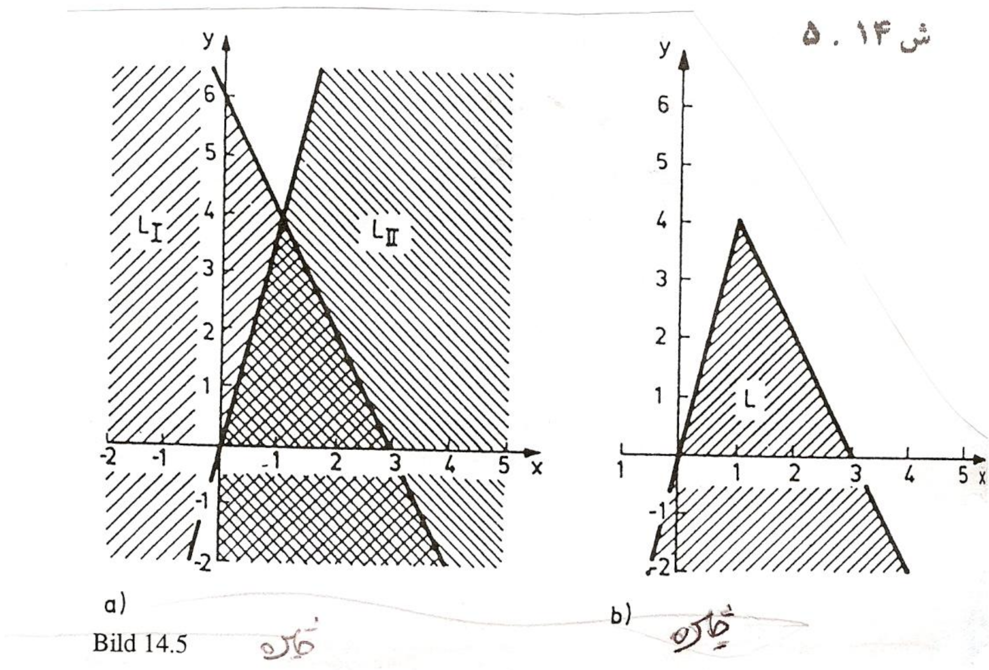


Bild 14.5

بيلگه ۱۴ . ۱۱:

I . x-3y-6<0　　II. -x+y+1<0
III. x-6<0

دا اوبيډيرئ په ش ۱۴ . ۶ کی انځور ۱۲ كرښي
د پورته نابرابرونسيستم له مخۀ د هر نابرابرون لپاره كرښه كشل كيږي، په يوه كواوردينات سيستم کې او بيا د هوارې هغه برخه، چې دريواړه كرو کې رابنده منهواره وي، هغه يې اوبی دئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

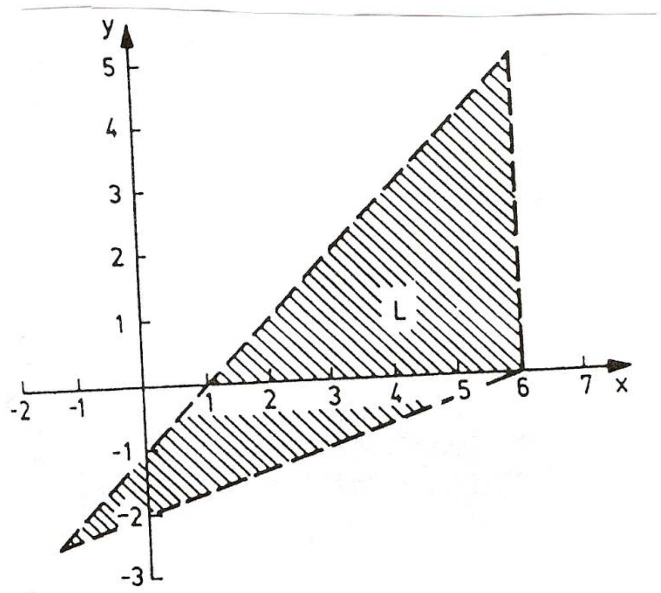


Bild 14.6 خاکره

۱۴ . ۲ برابرون او نابرابرون د مطلقه ارزښتونو سره

۱۴ . ۲ . ۱ د مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

که په یوه براورن یا نابرابرون کی د ترمونو مطلقه ارزښتونه د مجهولی په څیر رییلي واریابلي یا اووښتونی وي، نو د مجهول په لور له ابیولو د مخه باید یو د مطلقه ارزښت خپلواك فورم پیداشي. داچي له برخی ۳ څخه څرګنده ده چی د یوه رییل ګڼ مطلقه ارښت د

مخنخښی په واك په توپیري ډول جوړیږي نو د یوه ترم لیکل بي له مطلقه ارزښت، په پرینخیپ کی دوه حالتونه توپیریږي٠
داسی دي:

$T(x) = T(x)$ لپاره $T(x) \geq 0$ د (14,10)
$T(x) = -T(x)$ لپاره $T(x) < 0$ د (14,10)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که مطلقه ارزښت د صفر لوي یا په صفر برابر وي، نو کیدی شي چې د مطلقه ارزښت لرې پریښول شي، یا د نورو ترمونو سره په ترلو په نوکانو بدل شي. که مطلقه ارزښت متن منفي وي یعني د مطلقه ارزښت دننه، نو د مطلقه ارزښت نخښو په ځاي نوکان لیکل کیږي او دا نوکان بیا په (۱ -) ځلیږي. هغه ټکي چې په (۱۴ ، ۱۰) کی ورکړ شوي شرایط پوره کوي، نو پریښول کیږي چې ځانونه په قاعده کي په اینتروال وښایي، کوم چې دیسیونکت(پردي) برخه ډیرې د اوښتونوچاپیریالونه دي، د کوم لپاره چې (T(x ښوول شوی دی. د دواړو برخه چاپیریالونو تولنديږي، باید بیرته د ټول هغه واریابلچاپیریال ورکړي، کوم چې د کنترول لپاره باید و ازمایل شي. په دې ځاي کی دې د ځله وونی او ویش مطلقه ارزښتونو لپاره قواعد ورکړ شي، چې د بدلون لپاره د ارزښت وړ دي.

که a اوb رییل ګڼونه وي ، نو لاندې باور لري کیږي۰

$$|a\ .\ b| = |a|\ .\ |b|$$

$$|a : b| = |a| : |b| \qquad \text{د } b \neq 0 \text{ لپاره}$$

۱۴ . ۲ . ۲ برابرون د مطلقه ارزښت سره

د یوه مطلقه ارزښت مساوات حل لکه چې د حالت توپیرولوکی توضیح شوی ، باید په هر حالت کی وازمایل شي چې ایا دا اوبیونې په نیول شوي یا فرض شوي اینتروال کي پراته دی او که یواځې د اوبې په څیر ښکاریدونکي رامنځ ته کیږي . یوګوني اوبیونې اوبیدیري L کی رایوځاي کیږي. د مقایسي یا انډول یا پرتلی لپاره د برابرونونو هغه کرافیکي اوبیونې شونی یا ممکن دی، په کوم کی چې هره لور یا اړخ د یو فنکشن تنظیم عملیي راوړل کیږي یا رانیول کیږي او په x , y - پروت ولاړ – یا کواوردینات سیستم
کی انځوریږي .
د دواړو فنکشنونو غوځټکي x - کواوردیناتونه په همدې وخت کی د برابرونونو اوبیونې دي.

بیلګه ۱۴ . ۱۲:

$$|x+1|=(x/2)+2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري:

$(x+1) \geq 0$ د $x > -1$ لپاره

$(x+1) < 0$ د $x < -1$ لپاره

$(14,11)$ د $x \geq -1$ لپاره $|x+1| = x+1$

$(14,11)$ د $x < -1$ لپاره $|x+1| = -x-1$

لومړی حالت

$$x \in [-1, \infty)$$

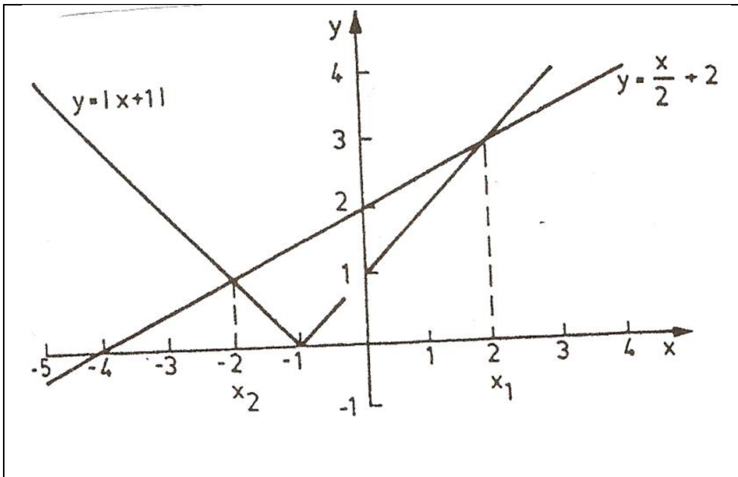
$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow x+1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1, \infty] \Rightarrow x_1 = 2$$

دوم حالت:

$$x \in [-1, \infty)$$

$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow -x-1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = -2 \in [-\infty, -1] \Rightarrow x_2 = -2$$

د برابرون یا مساوات اوبیډیری $L = \{-2, 2\}$



په داسی حال کی چی د ښی اړخ د ورکړشوي برابرون، $y = x/2 + 2$, ګرافیکی انځورونه، په څرګند ډول یوه کرښه ده، کینڼ اړخ، $y = |x+1|$ د (۱۴ . ۱۱) سره د دوه نیموکرښو په څیر منځ ته راځي.

اوبی : کیدی شي په ځ. ۱۴ . ۷ کی ولوستل شي

که یو برانرون د لاینیزو ترمونو زیات مطلقه ارزښتونه ولري، نو شوونې یا مساعد ده چی لومړی د هغه ګنوړانګه په هغه ځاي کی وویشل شي، چیرته چی د ترمونو مخنخښنه د مطلقه ارزښت په دننه کی تغیر خوري او د هر یوه مطلقه ارزښت څرګندونه په داسی لاس ته راغلو برخه اینتروالونو کی د لیدلو وړ یوځاي راټول کړي.

بیلګه ۱۴ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|1-x|-|2x+3|=1$

د (۱۴ . ۱۰) پسی لرو:

د $x<1$ لپاره $|1-x|=1-x$

د $x>1$ لپاره $=-1+x$

او(لاندې او پورته هم لومړی له کیڼ وښی لو رته لوستل کیږي

د $x>-3/2$ لپاره $|2x+3|=2x+3$

د $x<-3/2$ لپاره $=-1x-3$

یوځاي راټول یا د ګډ فرمولولو لاندې تر پام یا تر تظر

	$x<-3/2$	$-3/2<x<1$	$x>1$
$\|-1+x\|$	$1-x$	$1-x$	$-1+x$
$\|2x+3\|$	$2x+3$	$-2x-3$	$\|2x+3\|$

له دې امله د برابرون اوبې کی درې حالتونه توپیروو. برسره پر دې باید کمیزه – یا منفي نخښه د دویم مطلقه ارزښت د مخه په پام کی ونیول شي:

لمړی حالت:

$$x \in (-\infty, -3/2)$$

$$1-x-(-2x-3)=1 \Leftrightarrow x+4=1 \Leftrightarrow x=-3 \in (-\infty.-3/2) \Rightarrow x_1=-3$$

دم حالت:

$$x \in [-3/2, 1]$$

$$1-x-(2x+3)=1 \Leftrightarrow -3x-2=1 \Leftrightarrow x=-1 \in (-\infty.-3/2) \Rightarrow x_2=-1$$

دریم حالت:

$$x \in (1, \infty)$$

$$-1+x-(2x+3)=1 \Leftrightarrow -x-4=1 \Leftrightarrow x=-5 \notin (1,\infty)$$

په وروستی حالت کی شمیرل شوی ارزښت د نیونی سره په خټ یا تضادکی دی، چی $x3 = -5$

یواځي ښکارندډوله اوبی دی(دا په دې مانا چی یواځی د اوبي په ځیر یا - غوندې ښکاریږي) .

اوبډیری : $L = \{-3,-1\}$

د ښکارندډوله اوبي منځ ته راتګ کیدی شي، چی د ګراف اوبي – یا حللارې له لارې ځرګند

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي. د کينږ اړخ یا لور مطلقه ارزښت خپلواك یا ازاد ښودل کیدی شی چی ټوټه ټوټه د مخه تیرشوي شمیرنو په بوګونوحالتونو کی لاس ته راځی. له دې امله تعقیبیږي:

د $x > -3/2$ لپاره $=x+4$

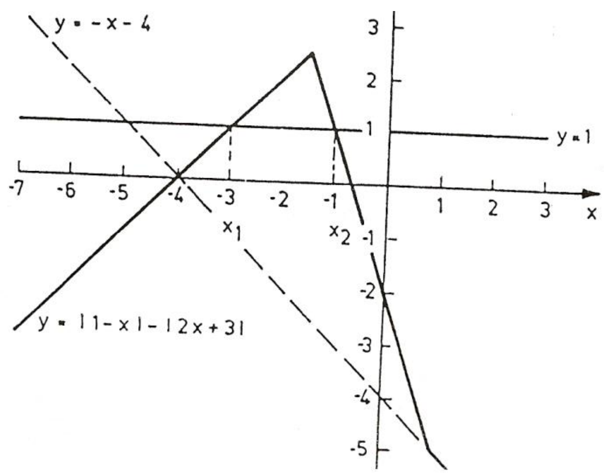
د $-2/3 < x < 1$ لپاره $|1-x|-|2x+3|=-3x-2$

د $x > 1$ لپاره $=-x-4$

ښی لور همغه - یا ثابت فنکشن $y = 1$ دی . د مخه شمیرل شوو اوبیونو پرتلې له پرتلې مقایسي ځیره شته، خو زما په ستونځو ګرانلوستونکی اوس بلد دي ۱۴ . ۸ ښايي، چی دواړه کږي ریښتیا د $x < -3/2$

او $-3/2 < x < 1$-لپاره رښتیا هره یوه بله یوځل پرې کوي، مګر د $x > 1$ لپاره یو بل نه پریکوي. په دریم حالت کی د اړوند کرښی ټوټی $y = -x-4$ د اوږدوالی پرتکی راکوي، د کرښي $y = 1$ د حل په ځیر حل د نیول شوي اینتراوال د باندې دی ځیره (شاید داځیره هم ځیره نه شي، کهٔ کرانو مینه والو داکار پخپله وکړ ، نو نور به هم ګټور به وي)ش . ۱۴ . ۸

دلته هغه ځیره باید ریشی او یا راغلی وي، یا راغلي وی٠



که د مطلقه ازښت نخښی په یوه ځلوري - یا مربع ترم کی له منځه وړل کیږي، نو کیدی شي چی د مخنخښي غوښتل شوي ځیرنی چي په برخه ۱۴. ۱ . ۲ کی تر ځیړني نیول شوې د مربع نامساوات د حل متود ګټه ترې واخستل شي.) بیلګه ۱۴ . ۵ دې مقایسه شي)

بیلګه ۱۴ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|x^2 -6x + 5 | = 3$

د $x^2-6x+5>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)>0 \Leftrightarrow x<1 \vee x>5$

او $x^2-6x+5<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)<0 \Leftrightarrow 1<x<5$

سره لاس ته راځي

(14,12) د $x<1 \vee x>5$ لپاره $|x^2-6x+5|=x^2-6x+5$

(14,12) د $1<x < 5$ لپاره $|x^2-6x+5|=-x^2+6x-5$

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-1] \cup [5,\infty)$

$x^2-6x+5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+2 = 0,$

$L \Rightarrow x_1=3+\sqrt{7}=5,65 \in [5, \infty)$, $x_2= 3 - \sqrt{7} = 0,35 \in (-oe , 1]$

دوم حالت $x \in (1,5)$:

$-x^2+6x-5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0,$

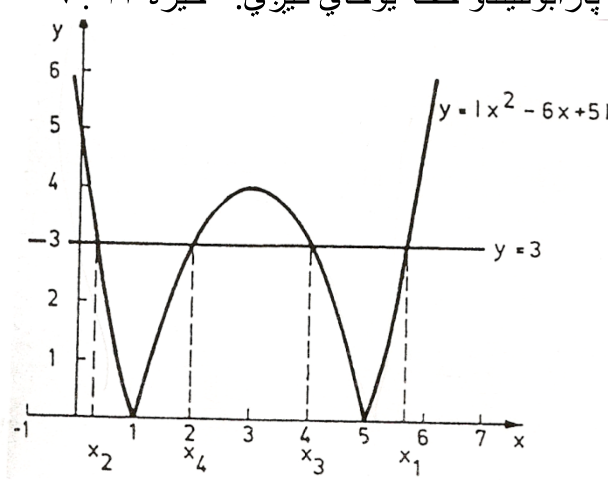
$L \Rightarrow x_3=4 \in (1 , 5)$, $x_4= 2 \in (1 , 5)$

پام : که چیرې حل یا اوبی مو نه وو لیکلی او L مو لیکلی وو ، نو دا د اوبی په مانا دی المانی Lösung ورته وايي چی لند په L لیکل کیږي .

اوبیدیری: $L = \{3 - \sqrt{7}); 2;4;3;3+\sqrt{7}\}$

ځیره ۱۴ . ۹ د ګراف له لاری اوبی بنايي. کیڼ لور $y=|x^2-6x+5|$

د (۱۴ . ۱۲) له امله د پارابوللیندو څخه یوځای کیږي. ځیره ۱۴ . ۹



ځیره ۱۴. ۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولیزه توګه د یوه برابرون اوبي کی ، په کوم کی چی n مختلف ارزښتوییني یا - افادې یعني $|T_i(x)|$, i = 1,2,...n منځ ته راځي، 2^n حالتونه یو له بل توپیر کیږي. دا د هغه کیدونکو کیدنو یا ممکن امکاناتو ګڼون یا تعداد دئ ، کوم چی موجود دی ، چی د ترم $T_i(x)$ د تیپ یا بڼی وي چی یا

$T_i(x)$ <0 او یا $T_i(x)$ 0< راکوي، یعنی د دوه توکو د واریېشن امکاناتو ټولګي ته (پرتله ۱۰ . ۴ . ۲ برخه) د ارزښت نخښی د له منځه وړلو له امله د (۱۴ ، ۱۰)

قاعدې سره سم 2^n برابرونونه منځ ته راځي، چي په ټولیزه یا عمومي توګه دې اوبیونې $x_1,x_2,x_3,......$ ولرودئ شي. یوائی دا باید وازمایل شي ، چی ایا دا اوبي xi پیلبرابرون پوره کوي که نه.

د دې ټولیزې تګلار پسی موږ په بیلګي ۱۴ . ۱۳ کی د

T1(x)=1-x, T2=(2x+1)

سره، په لاندې $4 = 2^2$ حالتونو باندې کار کوو:

$$1.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) \geq 0:\quad (1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_1=-1.$$

$$2.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) < 0:\quad (1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_2=-3.$$

$$3.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) \geq 0: -(1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_3=-5.$$

$$4.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) < 0: -(1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_4=-\frac{1}{3}.$$

پیلبرابرون د3- = x1=1, x2لپاره پوره دي مګر د x3 اوx4لپاره پوره نه دي.

۱۴ . ۲ . ۳ نابرابرون دمطلقه ارزښت سره

که په نابرابرونو کی مطلقه ارزښتونه منځ ته راشی، نو داسی دي لکه په برخه. ۱۴ .۲ ۲ کی د حالتونو توپیر سره ونیسی یعني د کارپیل په وکړي، کوم چی بي له مطلقه ارزښتنخښو د انځوروني لپاره ضرر یا غوښتونکي دي. د واریابلو یا اووښتونکو اړونده برخه چاپیریال په دننه بیا مختلف نابرابرون ۱۴ .۱ سره سم حل کوو، د کوم سره چي بیرته د حالت توپیر اړیین دئ

بیلګه ۱۴ . ۱۵ : |7-3x|>2

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی حالت:

$$7-3x\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,7/3]$$
$$7-3x\geq 2 \Leftrightarrow x\in(-\infty;5/3]$$
$$L_1=(-\infty,7/3]\cap(-\infty,5/3)=(-\infty,5/3]$$

دویم حالت:

$$7-3x<0 \Leftrightarrow x\in(7/3,\infty)$$
$$-7+3x\geq 2 \Leftrightarrow x\in[,\infty)$$
$$L_2=(7/3,\infty)\cap[3,\infty)=[3,\infty)$$
$$\Rightarrow$$
$$L=L_1\cup L_2=(-\infty,5/3]\cup[3,\infty)=R\setminus(5/3,3)$$

په پورته کې دې د غشي څوکه له پامه کې نه راړل کیږي:

بیلګه ۱۴ . ۱۶: |x-5|<|x+1|

د یوګونو ترمونو انځورونه بي له ارزښتنخښی:

د x > 5 لپاره |x-5|= x–5

د x < 5 لپاره |x-5|=-x+5

او

د x ≥ 1 لپاره |x+1|=x+1

د x ≤ -1 لپاره |x + 1| = -x - 1

په یوه لید وړ توګه په لاندې توګه راټولیګي رایوځاي کیږي یا راغونډیږي :

	X > -1	-1≤ x<5	x≥ 5
|x-5| =	-x+5	-x+5	x-5
|x+1|=	-x-1	x+1	x+1

لومړی حالت: $x\in(-\infty,-1)$

|x-5|<|x+1|<=>-x+5<-x-1 <=> 0<-6

د هر x<-1 نابرابرون یوې ناریښتیا وینا ته لاربنودوي، چی په دې حالت کی کوم اوبه وي ، دا په دې مانا چي: L1 = Ø

دوم حلات $x\in[-1,5)$:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|x-5|<|x+1| \iff -x+5<-x-1 \iff x>2 \iff$

$x \in [2,\infty]$

$L_2 = [-1,5) \cap (2,5) = (2,5)$

دریم حالت: $x \in [5,\infty)$

$|x-5| < |x+1| \iff x-5 < x+1 \iff 0<6$

هر $x \geq 5$ نابرابرون پوره کوي، دا په دې مانا چې: $L3 = [5, oe)$

حلډیری: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,5) \cup ([5,\infty) = (2,\infty)$

بیلګه ۱۴ . ۱۷: $|x^2-4x-21|<24$

د $x^2-4x-21 \geq 0 \iff x<-3 \vee x \geq 7$

او $x^2-4x-21<0 \iff -3<x<7$

څخه لاس ته راځي:

د $x<-3 \vee x \geq 7$ لپاره $|x^2-4x-21| = x^2-4x-21$

د $-3<x<7$ لپاره $= -x^2+4x+21$

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-3] \cup [7,\infty)$

$|x^2-4x-21|<24 \iff x^2-4x-21<24 \iff x^2-4x-45<0$

$\iff -5 < x < 9 \iff$

$x \in (-5,9)$

$L_1 = [(-\infty,-3] \cup [7,\infty)] \cap (-5,9) = (-5,-3] \cup [7,9)$

دویم حالت: $x \in (-3,7)$

$|x^2-4x-21|<24 \iff -x^2+4x+21<24 \iff x^2-4x+3>0$

$\iff x < 1 \vee x > 3 \iff$

$x \in (-\infty,1) \cup (3,\infty),$

$L_2 = (-3,7) \cap [(-\infty,1)] \cup (3,\infty) = (-3,1) \cup (3,7)$

اوبیډیری:

$L = L_1 \cup L_2 = (-5,1) \cup (3,9)$

دا بیلګې د دې درس لپاره بسیا کوي، دا بیا دلته هم تکرار لیکم، که په کومه موضوع کې ګرانو لوستونکو څه زیات غوښتل هغه هم په پام کې نیول کیږي او کړی شو، چې په ګډه هره موضوع وغزوو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی به په یوه بیلګه کی داسی نامساوات وڅیړو، په کومه کی چی مجهوله په مطلقه ارزښت افاده شوي وي او هم مات لاندې کی منځ ته راشی.

بیلګه ۱۴ . ۱۸: $|1+2x| / (1-x) < 1 , x \neq 1$

د (۱۴ ، ۱۰) له مخی د مطلقه ارزښت له منځه وړلاو د مات لاندې سره د نابرابرون ځله ونه د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) له مخی په هر وخت کی د همغه ترم مخنخښه باید په پام کی ونیول شي. باور لري یا صدق کوي:

د $x \geq -1/2$ لپاره $|1+2x| = 1+2x$

د$x<-1/2$ لپاره $|1+2x|=-1-2x$

او

د $x< 1$ لپاره $(1-x)>0$

د $x > 1$ لپاره $(1-x) < 0$

دلته هم په همغه دوه تیریدونکو ځایونو کی ګنوړانګه سره بیله یا توټه کیږي، داسی چي په راتلونکو ګڼلو کی یا ځانیزه توګه دري حالتونه یو له بل توپیریږي.

	$X<-1/2$	$-1\leq x<1$	$x>1$
$\|1+2x\|$	$-1-2x>$	$1+2x$	$1+2x$
$=1-x$	>0	>0	<0

لومړی حالت: $x \in (-oe, -1/2)$

$$-1-2x\leq 1-x \iff x\geq -2 \iff$$

$$x \in [-2 , oe)$$

$$L_1= (-oe, -1/2) \cap [-2 , oe) = [-2 , -1/2)$$

دویم حالت $x \in [- 1/2,1)$:

$$1+2x < 1- x \iff x<o \iff x \in (-oe,0]$$

$$L_2= [-1/2 ,1] \cap (-oe,0] = [-1/2, 0)$$

دریم حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x \in (1, oe)$

$1+2x \geq 1 - x \iff x \geq 0 \iff x \in [0, oe)$

$L_3 = (1, oe) \cap [0, oe) = (1, oe)$

د حلونو سټ(اوبیډیری):

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-2;0] \cup (1,oe)$

د دوه ناپیژندونکو سره د یوه نامساوات ارزښت حلډیري پیدا کولو لپاره هم باید لمړی ارزښت له منځه ولاړ شي. مساوات (۱۴ . ۱۰) ته ورته د واریابلو یا اوښتونکو x او y سره، د یوه لایني ترم ارزښت سره، باور لري:

(14,13) د $ax+by+c \geq 0$ لپاره $= ax+by+c$

(۱۴ ، ۱۳) د $ax+by+c < 0$ لپاره $|ax+by+c| = -(ax+by+c$

د نیونو یا فرضیو سره $a \neq 0 \; v \; b \neq 0$

دواړه بنې لیکل شوي شرطونه په برخه ۱۴ . ۱ . ۴ کی د کارول شوې بڼی(۱۴ . ۹) نابرابرون
هم کارول شوي . له دې امله باید یو نامساوات د ارزښت افادي (۱۴ . ۹) سره، د کرښی $ax + by + c = 0$ له لارې ورکړ شوې، یو له بل بیلی یا جدا، د x,y-هوارې نیمه هوارې یو له بل بیلی اوبی کړی شي.

بیلګه ۱۴ . ۱۹:

$|x-y+1|>x-2x-4$

د (۱۴ . ۱۳) اړیکو باور لري :

د $-x-y+1 \geq 0$ لپاره $|-x-y+1| = -x-y+1$

د $x-y+1<0$ لپاره $= x + y -1$

لومړی حالت: $-x -y +1 > 0$

$|-x-y+1|>x-2y-4 \iff -x-y+1>x-2y-4 \iff -2x+y+5>0$

$L1=\{(x,y)|-x-y+1 \geq 0 , -2x+y+5>0\}$

دوم حالت: $x-y+1<0$

$|-x-y+1|>x-2y-4 \iff x+y-1>x-2y-4 \iff 3y+3>0 \iff y<-1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$L2=\{(x;y)|-x-y+1<0 ,y>-1\}$

له دې سره L1 او L2 د اوبيډيرۍ دوه نابرابرونونو غوځديرۍ ده او کيدی شي، لکه ځنګه يو نابرابرون د يوه ګراف سره انځور شي (ځيره دلته هم په پوښتنه کې ده ۱۴ . ۱۰ الف) اوبيډيرۍ بيرته د ورکړ شوو نابرابرونونو برخ اوبيډيريو ټولنديرۍ ده۰ (ځيره ۱۴ . ۱۰ ب) دلته هم همغه د مخه پام لرنه)۰

که په يوه نابرابرون کې دوه ارزښت افادې يا – ويينې د (۱۴ . ۱۳) بڼی رامنځ ته شي، نو د ارزښت ترپام نيولو سره ځلور حالتونه يو له بل توپير کيدی شي.

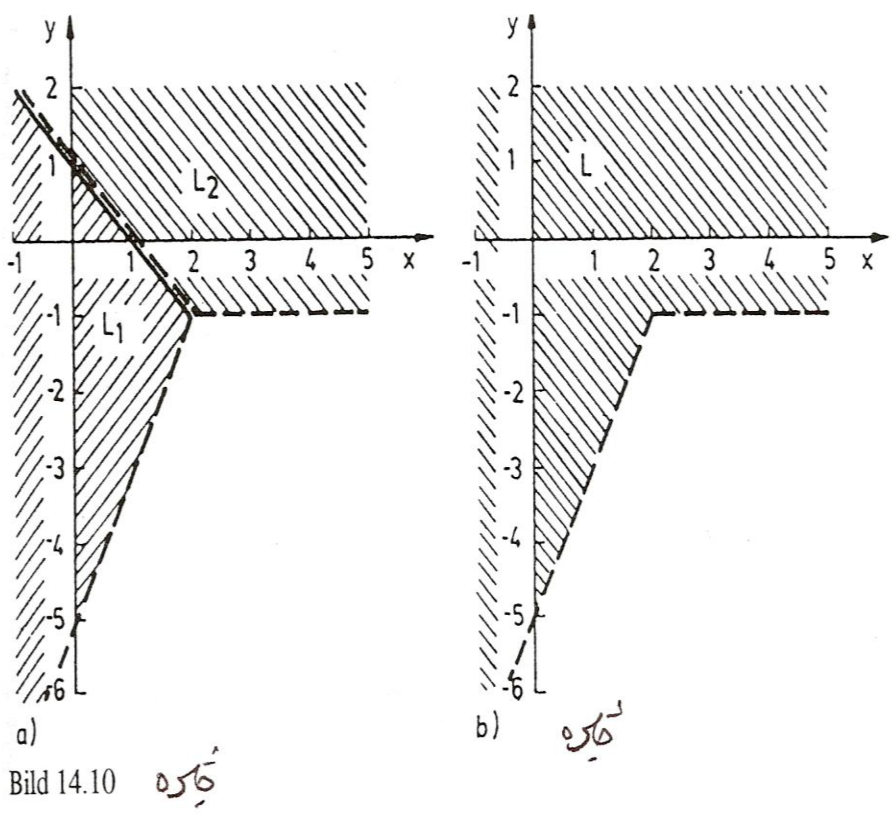


Bild 14.10

تمرينونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې نامساواتو حلډېرې پیدا کړی

1. a) $8x - 3 < 2x + 9$ b) $5 - 7x \leq 3x - 10$

c) $\frac{x}{2} - \frac{2}{3} > \frac{1}{2} + \frac{x}{9}$ d) $3(3x - 2) \geq 4(3 - 2x)$

e) $\frac{8x-5}{5} \leq \frac{2x+5}{3}$ f) $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}x > \frac{5}{4}x + \frac{1}{6}$

g) $\frac{8}{9} + 6x \geq 2(\frac{5}{6} + 3x)$ h) $\frac{1}{3}(\frac{x}{8} - 6) < \frac{x}{6} - \frac{x}{8} + 1$

2. a) $(3x + 1)(2x - 1) < (5x - 3)(2x - 1)$

b) $(8x - 9)(3x + 2) \geq (2 + 7x)(2 + 3x)$

c) $(7x - 3)(5 - 7x) > (3 - 7x)(5x + 3)$

d) $(5 + 2x)(7 - 5x) \leq (10 + 4x)(2 - 3x)$

e) $x^2 - x - 6 \leq 2x + 4$ f) $x^2 + 5x - 6 > 3 - 3x$

g) $x^2 + 3x \geq -2x - 6$ h) $x^2 - 4x + 4 < 4x - 8$

3. a) $\frac{3}{2x-4} \leq 2$ b) $\frac{3x-4}{2-3x} \geq 4$

c) $\frac{2x-2}{2x+2} < 2$ d) $\frac{5x+3}{x} < -2$

e) $\frac{4x+1}{3x-2} > 5$ f) $\frac{9-3x}{x-3} > -3$

g) $\frac{4x+6}{2x+3} < 3$ h) $\frac{3(4x-1)}{x-1} \geq 12 - \frac{2(4x-5)}{x-1}$

4. a) $\frac{3}{4x-4} \leq \frac{2}{x-6}$ b) $\frac{1}{5-3x} > \frac{1}{5x+4}$

c) $\frac{x+1}{x-3} < \frac{x-1}{x+2}$ d) $\frac{4x-3}{2x+1} \leq \frac{2x+3}{x+2}$

e) $\frac{2x-1}{2x+1} + \frac{3x+1}{x-2} > 4$ f) $\frac{x-3}{1-6x} - \frac{2x+1}{4x+3} \geq -\frac{2}{3}$

g) $\frac{2x+1}{2x-2} + \frac{2x-3}{3x-3} \geq 1$ h) $\frac{2-5x}{3-x} - \frac{2-6x}{1-3x} < \frac{3}{8} \cdot 27^{\log_3 2}$

5. a) $(2x - 3)(3x - 2) < 0$ b) $(x + 3)(7 - x) \leq 0$

c) $x^2 + 4x + 3 \geq 0$ d) $x^2 - 8x + 7 \leq 0$

e) $x^2 + 4x + 5 < 0$ f) $x^2 - 6x + 10 > 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

g) $x^2-2x+1>\frac{5}{2}x-1$ h) $2x^2-3x-3<3(x-1)$

6. a) $(x^2-6x+5)(x^2+1)<0$ b) $(x^2-4x+5)(x^2+1)\le 0$

c) $(x^2-2x+2)(x^2+4)>0$ d) $(9-x^2)(x^2+3x+2)\ge 0$

e) $(x^2+4x-5)(x^2-4)>0$ f) $2x^4-x^3+10x^2-5x>0$

g) $-x^3-3x^2+16x+48\le 0$ h) $\frac{x^3}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\,x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}<0$

7. a) $\frac{x+4}{x+3}>0$ b) $\frac{x+3}{x-7}<0$

c) $\frac{2x+3}{3x-4}\le 0$ d) $\frac{x-2}{5x+1}\ge 0$

e) $\frac{6+9x}{4+6x}<0$ f) $\frac{2x-1}{8x-4}>0$

g) $\frac{3x-12}{x^2-4x}\ge 0$ h) $\frac{x^2-25}{2x+10}\le 0$

8. a) $x-8+\frac{7}{x}<0$ b) $x+3-\frac{4}{x+3}>0$

c) $8(x-2)\ge\frac{20}{x+1}+3(x-7)$ d) $\frac{3x-24}{4}-(2x-6)>-\frac{5}{x}$

د لاندې نامساواتسیستمونو حل ډېری وټاکئ

9. a) $2+x\ge 2x-7$, $5(x-3)\ge 2(x-3)$ b) $x+6<14-3x$, $6+7x\ge 3x+5$

c) $\frac{2}{3}-\frac{x}{2}>\frac{x}{3}+\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x<\frac{8-x}{3}$ d) $x+\frac{1}{3}\le 2x-\frac{7}{6}$, $5(x-\frac{3}{2})\le 2x-3$

10. a) $x^2-3x<0$, $2(x+2)<4x-1$ b) $x^2+6x+8<0$, $2(x+2)>x+3$

c) $x^2-9<0$, $x+2>2(x-1)$ d) $x^2-3x+3>0$, $4(x-1)<2(x+1)$

11. a) $x^2-4x-5\le 0$, $x^2+6x-16<0$ b) $x^2+2x-8<0$, $x^2-3x-4>0$

c) $x^2-5x>0$, $x^2-9>0$ d) $x^2-6x+5<0$, $x^2+8x+15<0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

12. a) $3x + 2 > 2x + 1 > 3(x - 4)$ b) $-1 < \frac{7x-3}{8x-5} < 1$

c) $2 < \frac{5x+1}{2x-1} < 5$ d) $1 < \frac{x^2+4x+5}{x+1} < 4$

13. a) $3 - x < 2 - 4x$ b) $x + 5 > \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$

$x + 3 < \frac{1}{2}(x+1)$ $4(x-1) < 13 - \frac{1}{4}x$

$\frac{x}{2} > x + \frac{1}{2}$ $2x - 1 > x + 6$

د لاندې نامساواتو او همداسې د نامساواتسیستمونو حاوړی په کارتیزې کواوردینات – یاپروتولاړ سیستم کې ګرافیکي انځور کړئ.

14. a) $y \geq -\frac{3}{2}x + 3$ b) $y < -\frac{2}{3}x + 2$

c) $x < 2y + 2$ d) $x > -y + 3$

e) $4x - 5y > 12$ f) $-3x - 8y \leq 24$

g) $2(y - 3) \leq 6(x - 1)$ h) $5x - y + 2 > 3y - 3x - 10$

15. a) $2x + 3y > -6$, $x - y < 2$ b) $3x - y > 3$, $x + y > 4$

c) $x > 1$, $x + 2y < 4$, $y + 3 > x$ d) $x - 4y - 6 \leq 0$, $2x + y - 3 \leq 0$, $y - 5 \leq 0$

16. a) $-2 < x + y < 2$, $-2 < x - y < 2$ b) $x > 2$, $-3 < y < 2 + x$, $x + y < 5$

c) $x^2 - y^2 \leq 0$ d) $(2x + y + 1)(3y - x - 1) > 0$

د لاندې نامساواتو حاوړی د شمیرلو او همداسې ګرافیکي لارې پیداکړئ.

17. a) $|x - 3| = 5$ b) $|x + 2| = 7$

c) $|1 - \frac{x}{2}| = x + \frac{5}{2}$ d) $|x + 3| = |3x - 4|$

e) $|x - 4| = |2x + 3|$ f) $|9 - 3x| - |2x - 1| = 4 - 2x$

g) $|2 - 3x| - |x + 1| + |2x + 2| = 3$ h) $|x - 3| - |3x - 4| + |2x + 1| = 6$

18. a) $|x^2 - 2x - 8| = 7$ b) $|8 - 2x^2| = 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $|2x - x^2| = 8$ d) $|x^2 + 6x + 5| = 5$

e) $|x^2 - 4x + 3| = 1$ f) $|x^2 - 2x - 3| = 1$

g) $|4x^2 + 4x + 4| = 3$ h) $|x^2 - 3x + 7| = 4$

19. a) $\left|\frac{2x+4}{x-3}\right| = 1$ b) $\left|\frac{2x-4}{x+3}\right| = 2$

د لاندې نامساتو حلډېرۍ پیدا کړی

20. a) $|x - 2| < 3$ b) $|2 - 4x| \geq 1$

c) $2 - |1 - x| \geq 1 + x$ d) $|2x - 3| < x + 3$

e) $|3x - 5| > 2|x + 2|$ f) $|3x + 3| \geq \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$

g) $|x - 4| + |2 - x| \leq 2$ h) $|3 - x| < 2 - |x - 5|$

21. a) $|x^2 + 2x - 3| \leq 12$ b) $|x^2 - 6x + 8| \geq 3$

c) $|x^2 + 4x - 5| > 2$ d) $|15 + 2x - x^2| < 7$

e) $|x^2 - 6x + 11| < 1$ f) $|x^2 + 4x + 7| > 2$

g) $|3 + 6x + 3x^2| > 0$ h) $|x^2 + 4x| < 4$

22. a) $\left|\frac{x+3}{1-x}\right| > 3$ b) $\left|\frac{1-4x}{2-x}\right| > 4$

c) $\frac{2x+3}{|x+4|} \leq 1$ d) $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}}{\left|\frac{3}{4} + \frac{x}{2}\right|} \leq \frac{5}{6}$

e) $\frac{|3x-2|}{x+2} \geq 2$ f) $\frac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$

د

لاندې نامساواتو حلډېرۍ په یوه په یوه کواوردیناتسیستم کې انځور کړی او ا نځور یې وکاږی

23. a) $x + y < |3x + 2|$ b) $y + |x + 2| \leq 4$

c) $x + |y - 2| < 3$ d) $|2x + y - 3| \geq 2y - 3x + 4$

e) $|x + 3| + |y - 5| \leq 3$ f) $|x + y - 2| > |y - x + 1|$

g) $|x + y + 1| \leq |x - y - 1|$ h) $|x - y| > |x - 2y - 2|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ فنکشنونه(بلواك يا تابع)

۱۵ . ۱ د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پیل کی دی کلیمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنی څیرونی، چی په هندسه کی خورا ډیره کارول کیږي یا استعمالیږي ، کله د تابع(بلواك) او بیا زیاته د فنکشن په نامه ځموږ په دې کار کی بلل شوې چی موږ ورسره تراوسه د تابع تر نامه لاندې هم بلد یو، ځما په اند یا فکر که دا موږ بلواك وبولو، نو هدفمند به مو نومولی وي. په لاندې کي به وګور چی خپلواکی او بلواکی ناپیوندونکی ځموږ د څیړلو متن جوړوی

پیژند ۱۵ . ۱:

د یوې ریيلی واریابلی ریيل ارزښته فنکشن(لنډ: فنکشن) د ریيلو ګڼونو ډیری باندې ، د یوې ډیری $D \subseteq R$ یوه   یواځنی څیرونه ده. D دپیژند ډیری نومیږي .

د ټولو ارزښتونو ډیری چي y یی د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پیژنددیری یا تعریف ډیري په دننه کی وځغلي، د ارزښت ډیری W بلل کیږي .

د ي وې قانونمندی f له مخی هرx $\in$ Mیواځني یوه y $\in$ W باندې تنظیمیږي:

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واریابل یا اووښتونی یا مجهوله بلل کیږي یا نومیږي او y بلواك واریابل یا اووښتونی بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن مختلف انځورډولونو ترمنځ سړی توپیروي. د فنکشن »کلیمه انځورونه« یوه په خوله ویونکی یا یو اعلانونکی ، له ماتماتیکي یا شمیریز سومبولیك څخه تیریدونکی یا په شمیریز سومبولیك صرف نظر کوونکی، مګر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چی په لاندې کي به ورسره بلد شو.

بیلګه ۱۵ . ۱ : هر رییل ګڼ د همغه رییلګڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل.

بیلګه ۱۵ . ۲ : هر یو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت ګن او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x او y د نورو رییلو ګڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو ، زیاتون، کمون ، ځل ، ویش ، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې تړل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴).

بیلګی ۱۵ . ۱ ته: $y=(x/2)+1, D=R , W=R$

بیلګی ۱۵ . ۲ ته : د $x<0$ لپاره $y=|x|$
دلته $D=R,W = [0,\infty)$ د $x>0$ لپاره $y=x^2$
پام دې وي چی په داسی حالت کي له کیڼ و ښي لور ته یا ګډوډلوستل کیږی یعنی داسی لولو: y د x مطلقه ارزښت سره مساوي دی ، که چیرې x له 0 کوچنی وي. داسی لیکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کیږو) . تحلیلي(شننیزه) انځورونه اکسپلیځیت(واضح)روښانه و څرګند) explizitنومیږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بیلګو ۱۵ ، ۱ او ۱۵ . ۲ چی په یوه د yپه لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: $y =f(x)$ که چیرې داسي نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځوروني شکل $F(x,y)=0$ دی او فنکشن ایمپلیځیت (ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی implizit) بلل کیږي یا نومیږي . د بیلګی په توګه به $2y-x-1=0$ $D=R,W=R$,فنکشن د بیلګي ۱۵ . ۱ یو ایمپیلیځیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیځیت شنینیزه بڼه (ایمپلیځیت تحلیلي فورم) کیدی شي په

اکسپلیځیت شننیزه یا سپړنیزه بڼه (تحلیلي فورم) واړول شي. د بیلګی په توګه :
که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیځیت حل کیدونکی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزې انځورونی ځانګړې بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتوني یا واریابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لاربښودیږي. هر پارامتر (له یوه پارامتر ساحی ځخه)

$x = \varphi (t)\ , y = \Psi\ (t)$

په یو ارزښتجوړې x,y تنظیمیږي.

بیلګه ۱۵ . ۱ ته: x=2t ,y=t+1; -oe< t <oeبه یوه پارامتري انځورونه وی او x = t , y = t/2 + 1 به یوه بله پارامتري انځورونه وي.

زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیږي

بیلګي ۱۵ . ۱ته:

X ....-2	-1	0	1	2 ....
Y 2	0,5	1	1,5	2 .....

بیلګي ۱۵ ، ۲ ته:

X....-3	2	-1	0	1	2	3 ...
Y....3	2	1	0	1	4	9 ...

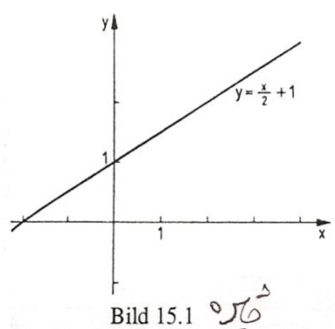


Bild 15.1 ځاره

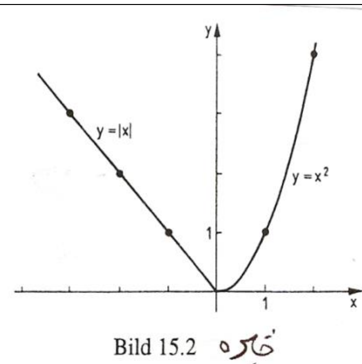


Bild 15.2 ځاره

د فنکشن ګرافیکی انځورونه (د یوې ټوټې) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کرږې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی ځخه عبارت ده ، چې د واریابلو یا اووښتونوجوړې د x,y - هواره یا سطحه کی یواځني او یواځني ټکي باندې تنظیمیږي .

څیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲) بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایترووال]a,b[کی هلته او هلته یا ټیك هلته مونوتون جګیدونکی
(مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو
$x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري:
$f(x1) \leq f(x2) \quad (f(x1)>f(x2))$
که د برابرووننخښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دئ

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینتروال) [oe,0] کي مونوتون ټیټېدونکی یا -لویدونکی
او په اینتروال [oe,0) کی مونوتون جګیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

په یوه اینتروال] -a,a[کی یو تعریف شوی فنکشن $y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت) یا سیومتریك symetrisch,(ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتیسیومتریكantisymetrisch بلل کیږي چی باوري وي
$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$
د جوړه فنکشنونو څیرې اکسیال یا محوري سیومتریك و y - محور ته ځغلي) دلته هم څیره شته ، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳ (، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریك ځغلي) بیا هم څیره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

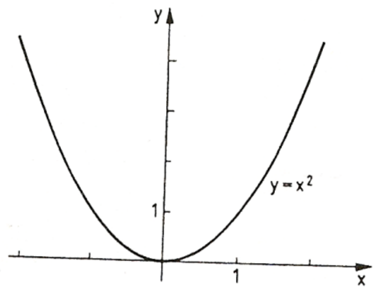
بیلګه ۱۵ . ۴
فنکشن $y= x^3$,$D= R$
یو ناجوړه یا طاق فنکشن دی :

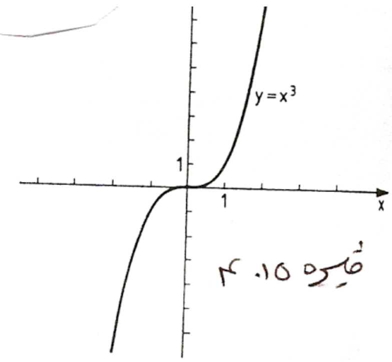
$(-x^3) = -x^3$

بیلګه ۱۵ . ۳ :
فنکشن $y=x^2$,$D=R$
یو جوړه یا جفت فنکشن دئ:

$(-x)^2 = x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



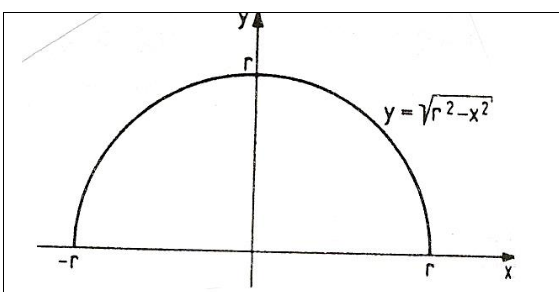


د بیلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

پیژند ۱۵ . ۴:

$y = f(x)$ تیك هلته په D (پیژندډیرۍ ده) بند یا رابند(محدود)بلل کیږي که
یو $k > 0$ داسی شته وي چې دا باور ولري :
$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$

بیلګه ۱۵ . ۵:

فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r, r]$ بند یا راګیر(محدود)(زه به دا له دې وروسته بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم یوونګردی ځیره ده ش . ۱۵ . ۵ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \leq r$	

پیژند ۱۵ . ۵:
$y = f(x)$ پریودیکي(دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:
$f(x + p)= f(x)$
د دورانی یا تل راګځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۶ :

ټول D ∈ x د f(x)=0 سره، د فنکشن f(x) صفر ځایونه بلل کیږي۰

د فنکشن صفرځایونه د مساوات f (x) = 0 د حل له لارې پیدا کیږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرږې د غوڅېټکو x - ارزښتونه دي.

بیلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\,x + 1$ صفرځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دی (ځیره ۱۵ . ۱)

بیلګه۰ ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:

$x^2 - 4 = 0 \iff x_1 = 2, \quad x_2 = -2$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري.) بیا هم ځیر ۱۵ . ۶)

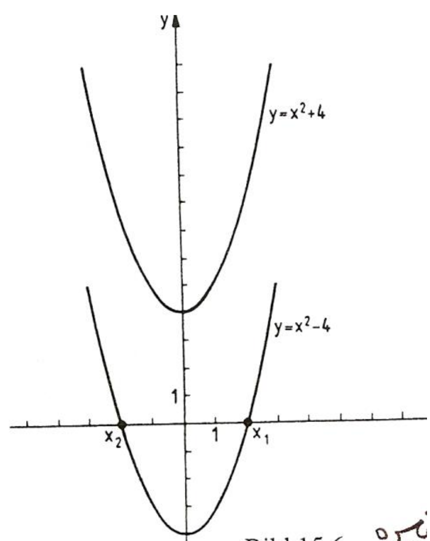


Bild 15.6 ځیره

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D$, $y \in W$ y =f(x),

یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ ځیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: (y = f(x)یو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په ځټکیدونکی دی ، دا په دې مانا چي دا یو فنکشن (x = g(y تعریفوي، یعني په ځټ یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا واریابلو د نخښی(نخونی) سره بدلی شي، نو د په ځټ فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا د فنکشن روځنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه ځیره ده، چی x خپلواك اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیژندونکی دي د y=f(x) په ځټ یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په ځټ فنکشن سره کټمټ(- ورته) identic دی٠ د په ځټ یا برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$
کرافیکی ځیره y = x په کرښه د y =f(x)(هندارونه) یعنی په هنداره کی ځیرونه او لنډ یی: هندارونه) ده٠

بیلګي ۱۵ ، ۱ ته :

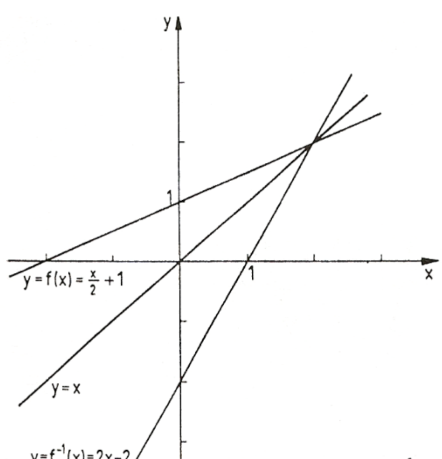


Bild 15.7a ځایره

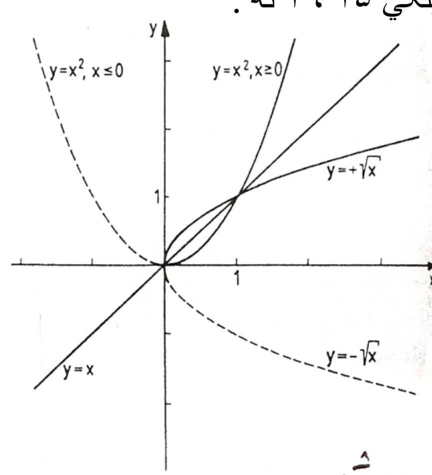


Bild 15.7b ځایره

د فنکشن y = f(x)= x/2 +1 چپه یا په ځټ فنکشن داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$

سرې $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x=2y-2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(ځیره. ۱۵ ۷ الف)

بیلګي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن
$x \in D$ $y = x^2$,
ځیرره ش ۱۵ . ۳) په څټکیدونکی دي یا په څټکیدونکی نه دی.
هر $y \in W$ =[0,oe] پورې دوه[-oe,oe] = $x \in D$ اړه لري، یعنی x=+yاو x=-y
مګر $y= x^2$کلك مونوتون جګیدونکی دی (او په دې ډول یواځنی او یواځنی).

د $0 \geq x$ لپاره او کلك مونوتون لویدونکی د $0 < x$ لپاره. $y=x^2,x\geq 0$
ته چپه- یا په څټ فنکشن $y=+x$ دی، او $0 > x$, $y = x^2$ ته چپه- یا په څټ فنکشن $y =$
x- دی. (ځیره ۱۵ . ۷ ب) .
په ټولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که ($y = f(x)$کلك مونوتون جګیدونکی) لویدونکی (وي ،نو په څټ فنکشن
$y = f^{-1}(x)$ موجود دی او دا هم کلك مونوتون جګیدونکی (لویدونکی) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کي بنسټیز فنکشنونه تعریفیږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنځ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوګاریتم فنکشنونه، تریګونومتري فنکشنونه او څیکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د خپلوځانګړدوله خویونو له مخی وڅیړل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا تړلي فنکشنونه) وڅیړل شي. د فنکشنونو څیړل به د هغو ځانګړدوله یا کرکتریستیکي خویونو له مخی هلته هم دوام ومومي، که د دیفرنشل شمیرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پیژند ۱۵ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن

$$y=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a^2 x^2 + a_1 x + a_0, n \in N; a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in R$ لپاره تعریف دی او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه(یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه (n = 1) یالاینې فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کې پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لاینې فنکشنونو ښیره(ګراف) یوه کرښه ده چې په y = n کې د y - محور غوڅوي (x = 0) او جګوالی $m = \tan\alpha$

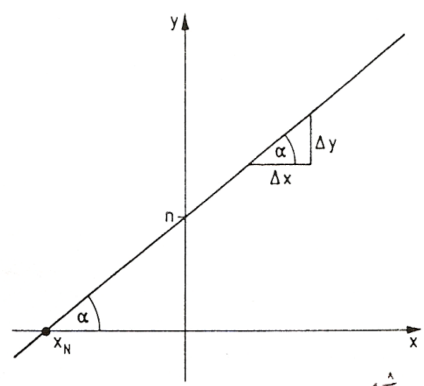


Bild 15.8 ځاکره

لري (ښېره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره متناسب دی: $m = \Delta y / \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

کرښه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي، دx - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که $|m| = 0$ نیول شوی وي، ټیټ یو صفرځاي (y = 0) لري: $x_N = - n/m$

که را په غاړه شي چې د یوې کرښې برابرون، چې له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تیریږي، پیدا کړو چې یو په بل نیغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرنټکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا نوره ښه غږڅېکی n په y - محور د برابرونسیستم

$$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$$

له مخی پیدا کوو او په دې توگه لاس ته راوړو

$$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$$

په بل پل)قدم(کی موږ ۲ -امه درجه ټولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په (۱۵ . ۱) کې $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$$y=ax^2+bx+c , a \;|= 0 \qquad (15 .3)$$

د مربع فنکشنونو څیره) گراف (پارابول دئ چی د هغي سیومتري محور و y - محور ته غبرگ ځغلي. کوایفیڅینت) ځله وونې یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او بڼه)فورم(ټاکی.

موږ د مربع فنکشن یو څو ځانگړي حالتونه تر څیړنې لاندې نیسو.

$$1. \quad y=x^2(a=1 ,b=0,c=0) \qquad (15 . 4)$$

نورمال پارابول، د ککرې کواوردینات: $x_s = 0 , y_s = 0$

(ځ . ۱۵ . ۹)

$$2. \; y=x^2+px+q \;\; (a=1 , b=p , c=q) \qquad (15 . 5)$$

او $x^2 + px$ ته د څلورئ - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:

$$y=x^2+px \; (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2 \quad (15,5)$$

یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په $q - p^2 /4$ راکښل (راښکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول د ی ، دا په دې مانا چی په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لري:

$$x_s = -p/2 , y_s =q - p^2/4$$

بیلگه ۱۵ . ۷:

$$y=x^2+6x+10, xs=-6/2=-3,ys=10-6^2/2=1$$

(ځ،۱۵ . ۹)

(c) ketabton.com: The Digital Library

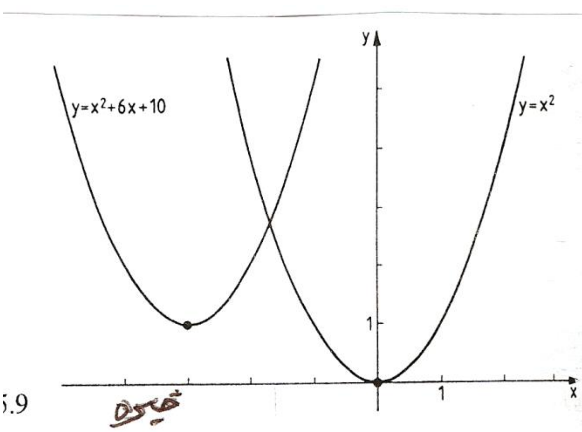
---

3. $y = ax^2$ (a|=0,b=0, c = 0)
د ککرۍ (سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$, $y_s = 0$

پارابول د $|a| > 1$ لپاره خور، د $|a|<1$ لپاره پرسیدلی،د $a > 0$ لپاره پورته لور ته او د $a < 0$ لپاره کښته لورته واز دی (خلاص دی)

بیلګه ۱۵ . ۸:
$y = 2x^2$, $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$
(خ . ۱۵ . ۱۰)
4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرۍ (رأس) کواوردینات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)
$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$



.9

بیلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$,(a=-1/2, b=1, c=4)
دککرۍ کواوردینات:
$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4 - 12/(4.(-1/2)) = 9/2$
دا چي $a = -1/2$ دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

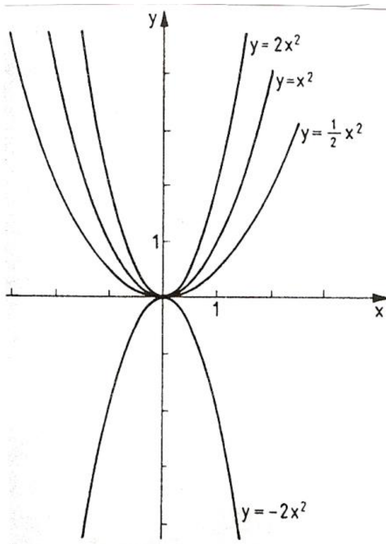


Bild 15.10 ځېره

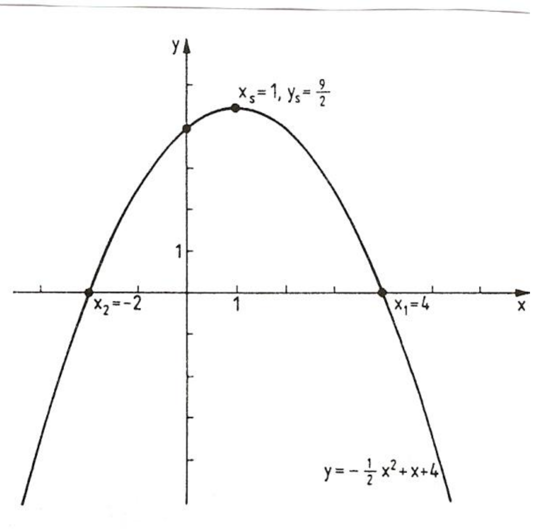


Bild 15.11 ځاړه

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$ د صفرځایونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبیونـي دي.
وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (خ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چی دلته $x_1 = 4, x_2 = -2$ دي.

و بیلګي ۱۵ . ۷ (ځیره ۱۵ . ۹) ته :
د $x^2+6x+10=0$ یاني $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$ څخه لاس ته
راځي چی برابرون رییل صفرځایونه نه لري .

فنکشن $y = x^2$ غبرګ یا جوړه(ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2} = 0$ دي
د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو
بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چي د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Horne
rschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.

$$x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

$$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه ورکړ شوي خپلواك x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کیدی شي له دې بڼی سره په لاندې ډول وشمیرل شي:
a3 له x1 سره ځل کيږي، دې سره a2 زیاتیږي، زیاتون یی له x1 سره ځل، او a1 ور زیاتوو، زیاتون د x1 سره ځل او a0 ور زیاتوو. دا د عملیوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شیما (د هورنرشیما) له لارې په لیدوړ ډول مخ ته بیایو (ځرکندوو)

ځلونه یا ضریبونه	a_0	a_1	a_2	
منځنی ځلونه	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$	$(a_3x_1+a_2)x_1$	a_3x_1	
منځنی زیاتون	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 = f(x_1)$	$(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$	$a_3x_1+a_2$	a_3

ددې شیما پوهیدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بیلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x1 = -2$ او $x2 = 5$ څخه شمیرل کيږي.
یادونه: دا د هورنر شیمت زما په دې اوسنۍ د برینکمن ژباړه کې مفصل شته(ژباړی). اوبیونه) :

	1	-2	-14	-5
$x_1 = -2$		-2	8	12
	1	-4	-6	$7 = f(-2)$
$x_2 = 5$		5	15	5
	1	3	1	$0=f(5)$

لرو $f(-2) = 7$ او $f(5) = 0$ (صفرځایونه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چېرې ددریمی درجی ریشنلفنکشن یو صفرځاي ولري، نو کړی شو چی د پولینوم ویش له لارې دا لاینې فاکتور بیل کړو(پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بیلګي ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5):(x-5)=x^2+3x+1$ له دې امله لرو:

$$y = x^3-2x^2-5 = (x^2+3x+1)(x-5)$$

د ویش پولینومونو ځلووني ، یعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشیما په اخره لیکه کی ولاړ دی. د هورنرشیما له لاری د صفرځاي شمیرلو سره په همغه وخت یا دمګړۍ کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او0 = (x1) f چی د $(x-x_1)$ سره د ځلونې له لارې دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر ځایونه د ځلورۍ – یا مربع برابرنی د اوبیونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0;\ x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دریمی درجي فنکشن د درې لاینې فنکشنونو د ځلونې په څیر لیکل کیدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

$$y=x^3-2x^2-14x-5 = (x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وینا په عمومي توګه د ټولوn- م درجو ریشنل فنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ریشنلفنکشن n صفرځایونه لري . کیدي شي دا ټول یو له بل توپیر ولري او یادا صفرځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، رییل او یا جوړه کونجوګیري کملکس کیدی شي.

که $x_1, x_2, ,..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځایونه وي

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دا د لاینیز فاکتورونو د څلوني په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیڅینت یا ځله ووني لپاره دې صفر ولیکل شي .

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :
5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن $y=2x^5-6x^3-20x^2-8x+80$ درې صفرځایونه $x_1=x_2=2, x_3=-2$
لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د څلوني په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

	2	0	-6	-20	-8	80
x_1 = 2		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
x_2 = 2		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
x_3 = -2		-4	-8	-20		.
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتی پولینوم $2x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5)$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5}= -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$

لپاره لاندې د ځل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي

$$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې د دريمي او جګو درجو د ټول ريشنلفنکشنونو يوه څيره يا تصوير ولرودی شو، نور کرکتريستيکی يا د خويونو ټکی يې د ديفرنځيالشميرنې له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بې له دې چې د دفيرنځيالشمير له مرستي کار واخلو ، کيدی شي چې د هغه د ناپای په هکله وينا وي وکړی شو. موږ په ليديدونکی ډول د فنکشن د پولی کليمه په کار اچوو، کومه به چې په برخه ۱۹ کی ټيك تعريف شي. دا د بيلګي په توګه دا مانا لري چې $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره (f(x تل ارزښت g ته نزدې کيږي، که x د oe يانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty} [a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چې

xn -> oe

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي

او xn ->±oe د±oe<- x لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زياتيز يا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

(کږه له oe - څخه دoe په لور ځي) .

که n جوړه او a_nکميز يا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$

کږه د oe - څخه د oe - په لور ځي) .

که n ناجوړه او a_n کميز يا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$

کږه له oe - څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او a_nکميز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

کږه لهoe څخه د oe - په لور ځي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ۱۵ . ۹ :

فنکشن

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0};.........(15,7)$$
$$n,m\in N_0;a_k,b_i\in R;Q_m\neq 0$$

مات ريشنلفنکشن بلل کيږي او د ټولو x د $Q_m(x)\neq 0$ لپاره تعريف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نوميږي، که n<m وي او نااصلي مات دی که n ≥ m ۰ نااصل مات فنکشن کيدی شي چي د پولينوم ويش له لارې تجزيه (ټوټه) شي او د يوه ټول ريشنلفنکشن او يوه ريښتونی ماتی برخی د زياتون په څير وليکل شي.

بيلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y=\frac{2x^4-3x^3-6x^2+13x-6}{x^3-4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې

فنکشن باندې دماتباندې فنکشن ويش څخه لاس ته راځي:

$$(2x^4-3x^3-6x^2+13x-6):(x^3-4x)=2x-3$$

د 2x²+x-6پاتی (باقي) سره. پس لرو:

$$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x).$$

فنکشن (۱۵ . ۷) د x = x0 لپاره يو صفرځاي لري، که x = x0وي نو باور لري:

$P_n(x_0)=0$ مګر $Q_m(x)\neq 0$

دا د $x=x_L$لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0)=0$ او $Q_m(x)=0$

د $x=x_P$لپاره يو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P)\neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بيلګه ۱۵ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن ($y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$ د ماتباندې- او ماتلاندې فکشنونو ټوټي کولو وروسته په لاندې فورم د لاینې فاکتورونوپه توګه لیکل کیږي.

$$y=\frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندې صفر دی، مګر مات لاندې صفر نه دی (صفرځای)مات لاندې- او مات باندې فنکشنونه د $x = xL = -2$ لپاره صفر دې (تشځای)
د $x = x_{P1} = 0$ او $x = x_{P2} = 0$ لپاره ماتلاندې صفر او مات باندې صفر نه دی (قطب)
که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپاى په لور ځي چې د قطبځاى (ټیك ناپاى ځاى بللکیږي) xpکی کږه داسیمپتوتي کرښي $x = xP$ ته نزدې کیږي .د یوه تشځاى xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې $0 / 0$ شکل غوره کوي، له دې امله د $x = xL$ لپاره تعریف نه دی.

په ناپاى کی د فنکشن ځان نیونی ته:

د اصل ماتفنکشن ($n<m$) د x په جګ پوتنخ یعنی x^m د ماتباندې او ماتلاندې د ویش ښخه لاس ته راځی:

$$y=\frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}}+\frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}}+\ldots+\frac{a_1}{x^{-1+m}}+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0}{b_m}=0$$

داچی د x ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x ټول پوتنځونه د ناپاى په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن ښیره د $x\to\pm oe$ لپاره د x - محور ته نزدې کیږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د $x\to\pm oe$ لپاره داسی ځانونه نیسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه یی د صفر په لور ځي، لکه ټولریشنل برخه .
د نااصل مات فنکشن ښیره د $x \to \pm oe$ سره ، ځان خپل ټولریشنلبرخی ته نزدې کوي.

بیلګه ۱۵ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف: ($y = x /(x^2+1)$ د $x0 = 0$ په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول یا قطب نه لري ربیل اوبیونه نه لري) او د $x \to \pm oe$ لپاره دx- محور ($y = 0$) د اسیمپتوتی په څیر لري (ځیره. ۱۵ . ۱۲)

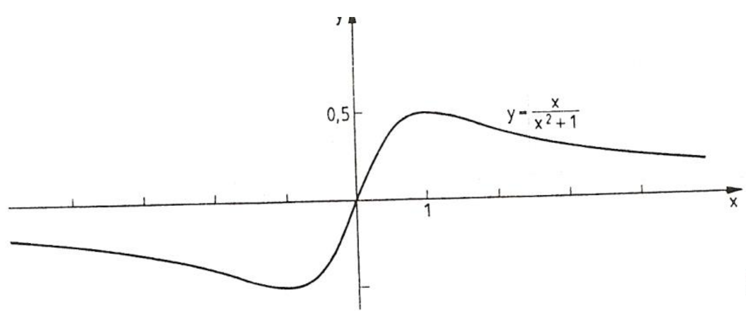
ب: ($y=(x^2+2x-3)/(x+2)=x- 3/(x+2)$ صفرځایونه($x^2+2x-3 =0$) په $x1 =-3$ او $x1=1$ کی لري . تشځای نه لري او په $x3 = -2$ کی قطب لري دا په دې مانا چی $x = -2$اسیمپتوتی دی، او د $x \to \pm oe$ لپاره فنکشن $y = x$ اسیمپتوتي کیږي)دا سیمپتوتی کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي ټول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو: فنکشن

$$y = x^n ; n \in Z \setminus \{0,1\} ....(15,8_a)$$

یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی(د پوتنځ پیژند 6 ۰ ۱)

(15.8)د زیاتیززیاتیز یا مثبت تولګې n لپاره یو تولرشنل فنکشن دی. د جوړه تولګې nلپاره ټولریشنل فنکشن دی. د تولګې n لپاره ټولی کړې د تعریف ډیری(-) = D oe,oe، د ارزښت ډیری(W=(0,oe او ګډ ټکی (1,1)، (0,0),(1,1) لري. (ځیره ۱٤ الف ۱۵) د ناجوړه ګڼ د n لپاره(D = (-oe,oe او(W = (-oe,oe دي او (-1,-1) , (0,0). (1,1) ګډ ټکي دي (ځیره ۱۵ . ۱۴ ب)۰



ځیره

Bild 15.12

(c) ketabton.com: The Digital Library

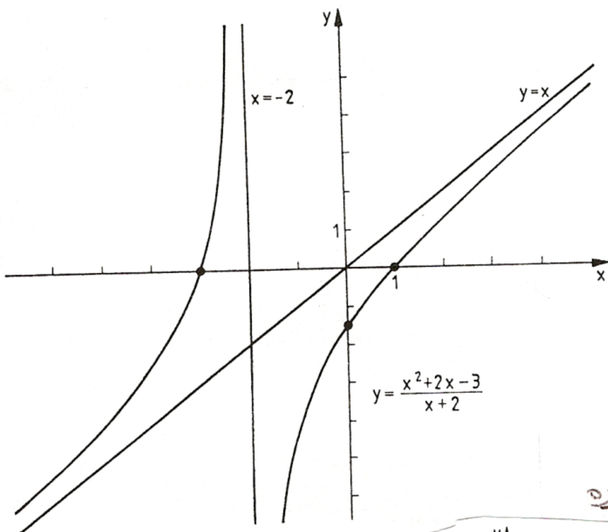


Bild 15.13

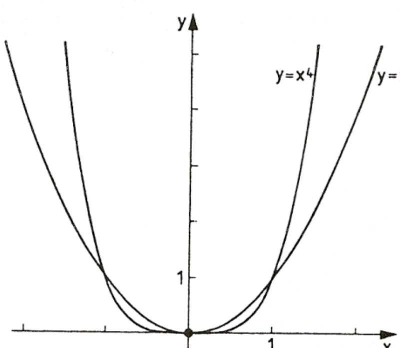


Bild 15.14a

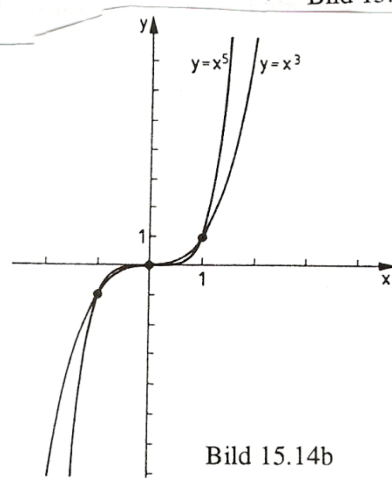


Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دی پهٔ $x = 0$ کی د یوه قطب او $y = 0$ کی یوې اسیمپټوتی په څیر. د جوړه ګڼون یا تعداد (کمیز) n لپاره ټولی کرې د پیژند ډیري

D = (-oe,oe)\{0} د ارزښت ډیري(W = (0,oe لري اوګډټکي (1,1), (-1,1)

؟؟؟ څیره ش. ۱۵/۱۵الف) .

د ناجوړه ګڼون (کمیز n)لپاره{ D = (-oe,oe)\{0 او(W=(-oe,oe او(-1،-1) (1,1) ګډ ټکی دی (څیره »۱۵ . ۱۵ ب) .

دوه څیرې دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

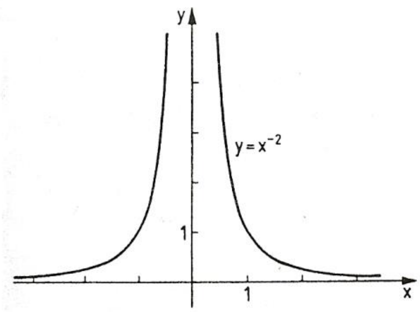


Bild 15.15a

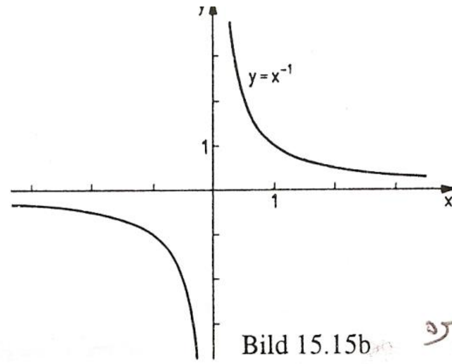


Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر څنډ بلواک لپاره دي د مونوتوني اینتروال په پام کی ونیول شي.(پرتله بیلګه(بیلګه ۱۵ .۳)
د فنکشن) لوستل له کیڼ وښي لور ته

$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$

چپه- یا پر څنډ فنکشن په لاندي ډول دی.

$y = \sqrt[n]{x}\ , n \in N \setminus \{1\}\ , D = [0,\infty), W = [0,\infty)$...............$(15,8_b)$

او ریښه فنکشن نومیږي (پیژند ۶ . ۲ دي وکتل شي) پوتنځ فنکشن کیدی شي و ریشنل ایکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ریشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$y = x^n\ , a \in Q\ , x > 0$ (15 . 8c)

نو د ریښي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دي د پوتنځ فنکشن په څیر وپوهیدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرڅنډ بیرته پوتنځ فنکشن دی.
ټولیز پوتنځ فنکشن پیژند د رییل ایکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د رییلګڼونو کلیمه دي وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

پیژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$y = x^{\alpha}\quad , \quad \alpha \in R\ , x > 0$ (15. 8d)

پوتنځ فنکشن نومیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن

$y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}, x \geq 0$

لاندې چپه - یا پر ښۍ فنکشن لرو $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}, x \geq 0$

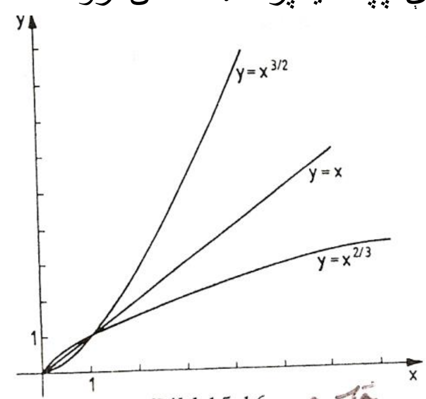


Bild 15.16a خیره ب)

(خیره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$

خیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$y = x^{-2} = 1/x^2, x > 0$

یادونه : په پیژند ٤ . ۲ کی مو وویل چی یوائی د ناکمیز رادیکاندو ریښه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرښې فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په
پام کی وي. د بیلګي په توګه فنکشن
$y=x^3$ په ټول تعریفدیري کي مونوتون پورته کیدونکی وی او له دې امله ټول په ښې کیدونکی وی، $y = \sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژنددیری($D = [0,\infty$ کی پر ښې فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د$y = x^3$ پرښې فنکشن د] $D = (-\infty,0$
سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) ۰

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

$y=a^x, a > 0, a \neq 1$..................................(15,9)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ(لنډ »جګ«) بلواك بلل کیږي٠
(د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پیژند ۴ . ۱ وکتل شي)

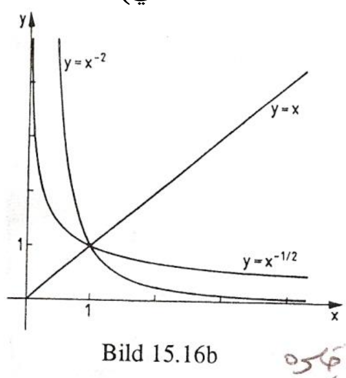


Bild 15.16b

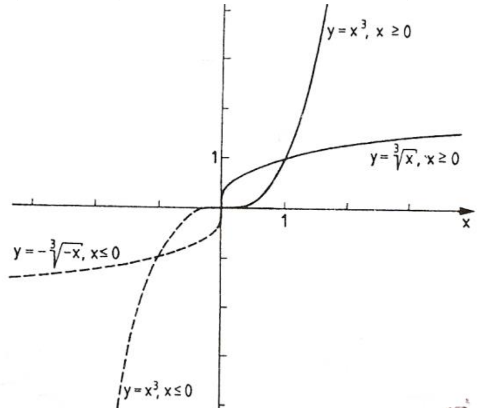


Bild 15.17

پورته دوه څیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې پیژندډیری(D=(-oe,oe او ارزښتډیری(W=(o,oe لري. د $a^0 = 1$ له امله ټکی(0,1 () د ټولو کړو ګډ ټکی دی

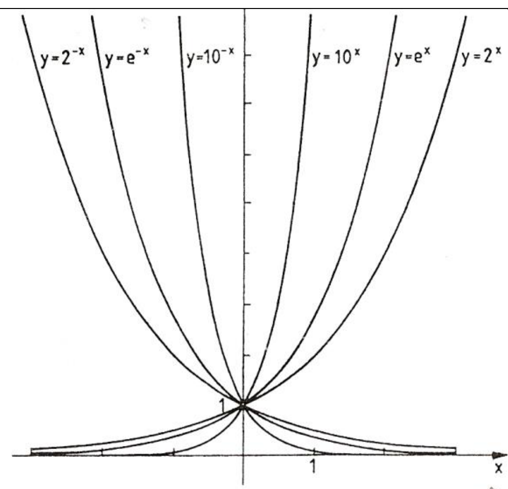


Bild 15.18

د a>0 لپاره (۱۵ . ۹)
په کلکه یو غږیز- یا مونوتونجګیدونګی دئ اود x->oe سره د x - محور ته اسیمپوتیك ورنږدې کیږي .د 0<a<1 لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوتون لویږي او ځان د oe -> x سره د x -محور ته اسیمپتوتیك نږدې کوي .

د اکسپوننشل فنکشنونو یو څو بیلګې
(a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/10)
په څیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي

پیژند ۱۵ . ۱۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څېر فنکشن دی

$$y = \log_a x \ , \ a > 0 \ , \ a \ne 1 \qquad (15.10)$$

او لوګاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوګاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وګورئ) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پیژندډیری $D = (0.oe)$ او د ارزښتډیری($W=(-oe,oe)$ لري.

د $y = \log_a x$ کرېږ د ګرو $y=a^x$ هندارونه ده، په کرښه $y=x$ ۰ ټکی$(1,0)$ د ټولوکرو ګډ ټکی دی (څیره شته دی)

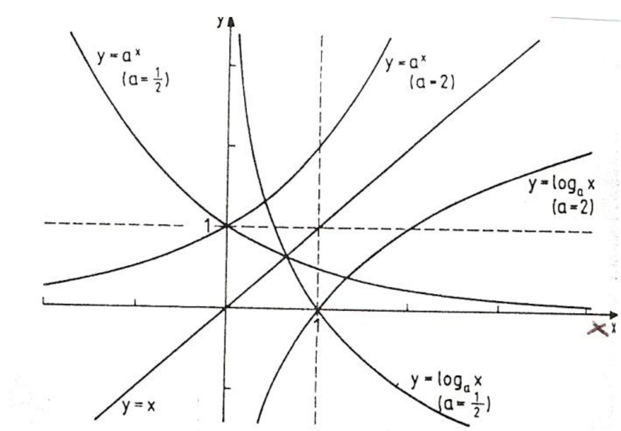


Bild 15.19 څېره

د $a>1$لپاره(۱۵ . ۱۰) کلك مونوتونجګیدونکی اود $x\to 0$لپاره اسیومپتوتیك د کمیز y - محور ته نزدې کیږي. د $0<a<1$لپاره (۱۵ . ۱۰) کلك مونوتون لویدونکی دی او د $x>0$لپاره اسیمپتوتیك د زیاتیز y - محور ته نزې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په څېر یی یعني $y = \log_a x$

د $a= 2$ او $a=1/2$ لپاره انځوریږي .

په ځانګړې توګه لیکل کیږي $y = \log_{10}x = \lg x \ , \ y = \log_e x = \ln x$ ۰

پیژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تریګونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کیږي یا راوړل کیږي.

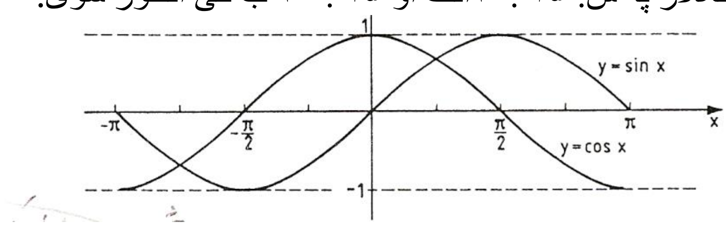
$y=\sin x ;D=R,W=[1,1]$..$(15,11_a)$

$y=\cos x; D=R, W=[-1,1]$..$(15,11_b)$

$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z$....$(15,11_c)$

$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z$..........$(15,11_d)$

د دې ګروتګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریګونومتریکی فنکشنونه $y = \sin x, y = \tan x , y = \cot x$ ناجوړه فنکشنونه، او $y = \cos x$ یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تریګونومتریکي فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي(مقایسه ۱۵ . ۵)
فنکشنونه $y=\sin x$, $y= \cos x$ پریودې 2π لري، دا په دې مانا چی لرو:

$\sin (x+2k\pi) = \sin x$; $\cos(x+2k\pi)= \cos x , k\in Z$

لاندې فنکشنونه پریود π لري
$y=\tan x$, $y=\cot x$. دا په دې مانا چي

$\tan (x + k\pi) = \tan x$, $\cot (x + k\pi) = \cot x , k\in Z$

د تریګونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k = k\pi, k\in Z$

د $y=\tan x$, $k\in Z$ $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $y=\sin x$ لپاره او د $y = \cot x$, $y = \cos x$

لپاره تانجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپانځایونه) لري یعني $y = \tan x$ په $k\in Z$, $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ او $y = \cot x$ په $k\in Z$, $x_k = k\pi$ کی.

د تریګونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلګي په توګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

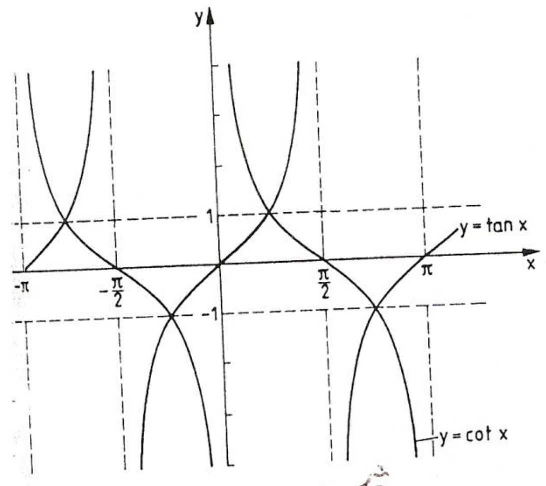


Bild 15.20b

فنکشن y = sin x په ایتروال $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جګیدونکی دئ او په انتروال $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودې کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ لپاره y = sin x جګیدونکی یا پورته کیدونکی دئ

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لویدونکی دئ، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کیدونکی دئ.

د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لویدونکی دئ

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګیدونګی دئ

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګیدونکی دئ ،

په تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي.د ساین فنکشنونه د بیلګي په توګه د وخت په پریودیکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوینګونګ: رپیدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واریابل په t نخښه کیږي .فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a \sin (\omega t + \varphi) \qquad (15 . 11e)$$

هارموني فنکشن بلل کيږي.

يادونه: فنکشن (۱۵ . ۱۱ت) د پيژند (۱۵ . ۱۵) له مخی تړلی يا ځنځيري فنکشن دی. موږ ترڅيرني لاندې نيسو چي د ساين فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واريابل tاو زياتوونکی د ساين فنکشن په خپلواك)Argoment(د کږېڅيره باندې څه تاسير اچوي.

۱ - د فاکتور a تاثير په فنکشن y = a . sin t د y = sin t فنکشن ارزښت باندې غزول يا راکشول دی که (|a| > 1)او يا پړسول دي که
|a| < 1)وي y= a.sin x فنکشن ارزښت a - ځله د فنکشن ارزښت
y = sin t دی، چيرته چی برسيره پردې د 0 > a لپاره په t - محور يوه
اينه څيرونه هم منځ ته راولي (څره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2
په فنکشن کی a امپليتودې Amplitude(جګوالی(نوميږي او د
شوينګنګ Schwingungرپيدنی پراخوالی يا ښه : سور باندې تاثير اچوي.
څيره شته

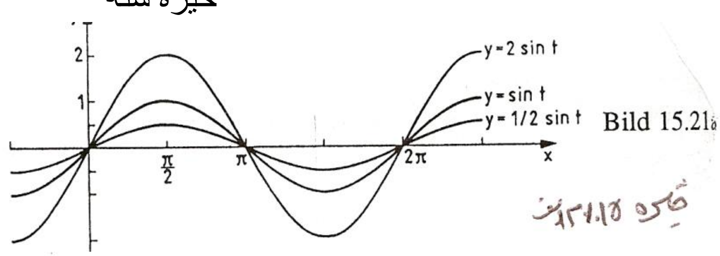


Bild 15.21

۲ - په فنکشن $y = \sin\omega t$ کی فاکتور ω په فنکشن y = sin t باندې يو وختني غزول که $|\omega|<1$ يا پړسول که $|\omega|>1$ وي تاثير اچوي.چيرته چی د $\omega < 0$ لپاره برسيره پردې يو په y- محور اينونه هم ده.
د يوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin\omega t$ يوه فنکشن ارزښت، دy = sin t خپلواك ω-ځله ، يعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (څيره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).
ګردی فرکونځ (Kreisfrequenz) بلل کيږي، دا په پريودې تاثير اچوي او $y = \omega t$
پريودې $P = \dfrac{2\pi}{\omega}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

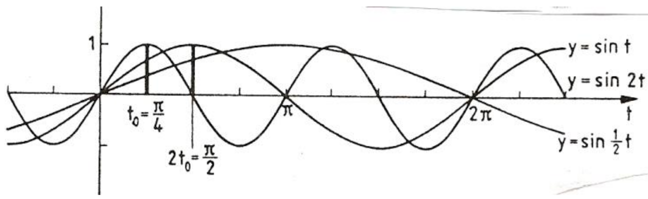


Bild 15.21b

۳ – زیاتیدونکی φ په فنکشن $y = \sin (t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنې تاثیر په $|\varphi|$ له کیڼی لور $\varphi>0$ او یا له ښي لور $\varphi<0$ اچوي .

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره د فنکشن $y = \sin (t+\varphi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چی د $y=\sin t$ لپاره٠

د φ په کچه راکښل شوی (یعنی د یوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، یعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(څیره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

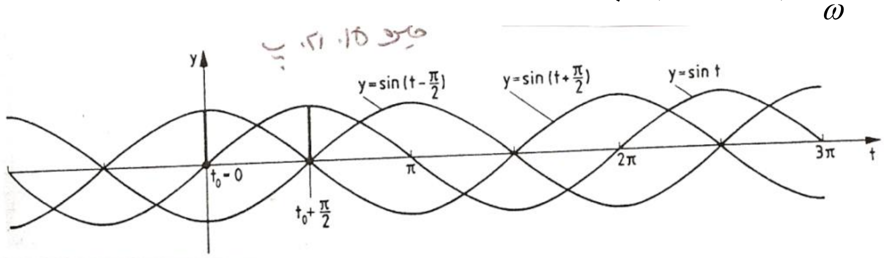
$$(\varphi=\frac{\pi}{2},\varphi=-\frac{\pi}{2})$$

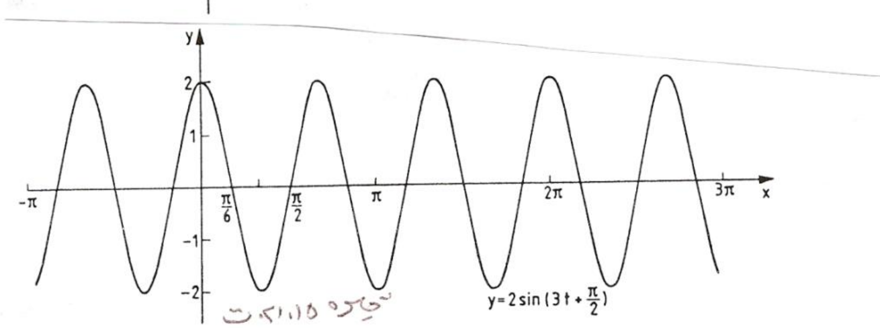
په فنکشن

$$y = a.\sin (\omega t +\varphi)= a . \sin\omega (t+\frac{\varphi}{\omega})$$

کی φ چی فازې نومیږي یو د راکښلو تاثیر په کره $y = a.\sin\omega t$

د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.





(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2 . \sin (3t+\frac{\pi}{2})$ انځوردی. هغه امپلیتود $a = 2$ لري، پریودې یی $P=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega}=\frac{\pi}{6}$ کې د sint و کیڼ لورته راکښل شوی دی.

خبره ۱۵ . ۲ پ $\varphi=\frac{\pi}{2},\varphi=-\frac{\pi}{2}$

د تریګونومتري فنکشنونو(یواځني) په معکوسوالي یا په څتوالي کی موږ په ځانګړو یوغږیزو یا مونوتوني اینتروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

پیژند .۱۵ ۰ ۱۴ :
(پام: څیرې له تشریح د مخه راغلې، بله لار نه وه)

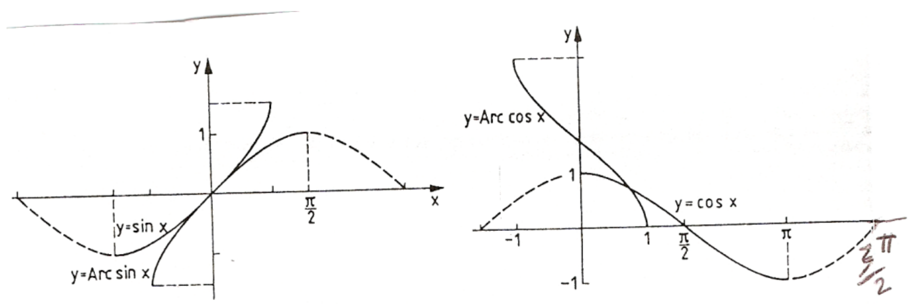


Bild 15.22 Bild 15.23

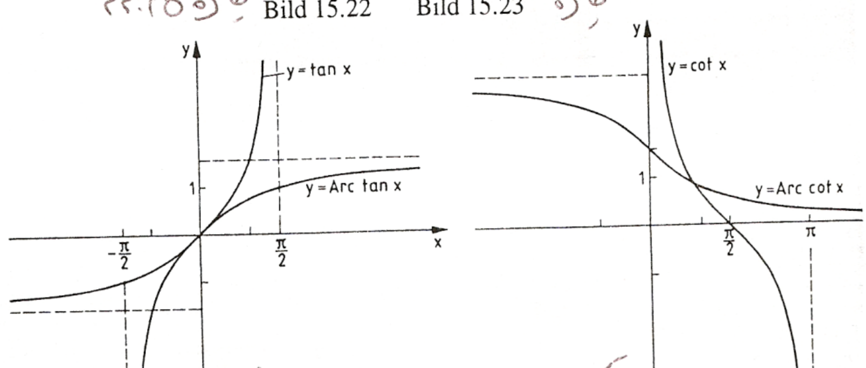


Bild 15.24 Bild 15.25

د لاندې فنکشنونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. $y=\sin x$,	$D=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,	$W=[-1,1]$	(15.12a)
2. $y=\cos x$,	$D=[0,\pi]$,	$W=[-1,1]$	(15.12b)
3. $y=\tan x$,	$D=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,	$W=\mathbf{R}$	(15.12c)
4. $y=\cot x$,	$D=(0,\pi)$,	$W=\mathbf{R}$	(15.12d)

پرخښ یا چپه فنکشنونه لاندې څیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

1. $y=\operatorname{Arc}\sin x$,	$D=[-1,1]$,	$W=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	(15.13a)
2. $y=\operatorname{Arc}\cos x$,	$D=[-1,1]$,	$W=[0,\pi]$	(15.13b)
3. $y=\operatorname{Arc}\tan x$,	$D=\mathbf{R}$,	$W=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	(15.13c)
4. $y=\operatorname{Arc}\cot x$,	$D=\mathbf{R}$,	$W=(0,\pi)$	(15.13d)

د تریګونومتري فنکشنونو برخی په مونوتوني ایترووالونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په څیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

۱۵ . ۴ ځنځیري (تړلي) فنکشنونه

پیژند ۱۵ . ۱۵ :

د $x \in D$لپاره یو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتدیري W سره ورکړ شوی او برسیره پر دې د $z \in W$لپاره یو فنکشن $y= f(z)$ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15.14)$$

د x تړلی (ځنځیري) فنکشن بلل کیږي.

یادونه : یو تړلی فنکشن کیدی شي چی زیاتو ځنځیرونو سره هم رامنځ ته شي: د بیلګي په توګه $z = f(x$

د$x \in D, z \in W$لپاره او $w=h(z)$ د $z \in W, w \in W^*$لپاره

او$y=f(w)$ د $W \in W^*$ لپاره لرو،

نو $y=f[h(g(x))]$ هم د x یو تړلی فنکشن دئ

بیلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د $z = 2x + 4$ او $y=e^z$ سره تړلی فنکشن $y=e^{2x+4}$ لاس ته راځي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب : په ترلي فنکشن $y = \sin x^2$ کی $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی.
په ترلي فنکشن $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$ کي $z = \sin x$ د ننني - او $y = z^2$ دباندنی فنکشن دی
پ : د
$, y = \cos w \;\; w = \sqrt{z} \;\; , \;\; z = 2x + 4,$
سره ترلي فنکشن $y = \cos \sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي
ت : په ترلي فنکشن $y = \text{Arctan}1/(x-1)$ کی $z=x-1$ دننني، $w=1/z$ منځنی او $y=\text{Arctan } w$ دباندنی فنکشن دی .

یادونه : د یوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځیري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شمیرنی

له » دننه « پیل کیږي .

بیلګي ۱۵ . ۱۶ ته :
ب) د $x = 0.5$ لپاره دی
$z=x^2=0{,}5^2=0{,}25; y=\sin x^2=\sin z=\sin 0{,}25=0{,}24740$
او
$z=\sin x=\sin 0{,}5=0{,}47942; y=\sin^2 x=z^2=0{,}47942^2=0{,}22984$

پ) د $x = 2$ لپاره دی $z=x-1=2-1=1 \; ; \; w=1/z=1/1=1$
$y=\text{Arctan} w=\text{Arctan} 1=\frac{\pi}{4}$

روښانونه، تشریح:

$y=f(x)$ تحلیلي(شننیزه) وینا بلل کیږي، که $f(x)$ له رییل ګڼونواو بسټیزو فنکشنونوڅخه د زیاتون، کمون،ځل، ویش، له لارو ترلی یا ناترلي(ځنځیري یا نا ځنځیري) جوړیږي

د بیلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنځ بنسټ او همداډول رادیکاند منفی نه شي کیدلی، او یا باید مثبت وي، چی د لوګاریتم نومروس باید

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثبت وي او(Arc sin f(x همداړول(Arc cosf(x تيك د $x \in [-1,1]$ لپاره پېژند لري يا تعريف دي

بيلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحليلي ويناو لپاره دې تعريفېدېري پيداکړى شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

راديکاند بايد کميز يا منفي نه وي، چى دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 <=> x^2 \geq 3 <=> |x| \geq 3$ ($x \geq \sqrt{3}$ v $x \leq -\sqrt{3}$)

نو لرو $D = (-oe , - 3] \cup [3 ,oe]$

ب)($y=lg(x+2)+1/(3+2x-x^2$ له لمړي زياتونى کى بايد Numerus > 0 نومروس وي دا په دې مانا چى : $x +2 >0 <=> x >-2$ ،

پس($D1=(-2,oe$

په دوم زياتوني کى بايد مات لاندې په صفر برابر نه وي (=| 0) وي . د مات لاندې صفرځايونه

له $3-2x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2,x2=-1$.

نو $D2=R\(2;-1)$ دى

د فنکشن تعريفېدېرى بايد دا اول زياتونى او همداسى د دوم زياتونى تعريفېديري وي يعنى د D1 او D2

غوځېدېرى: $D=D_1 \cap D_2 = (2 ,oe) \setminus \{2; -1\}$

پ) $y = Arc sin (x-1)/5$ د ارکوس ساين-فنکشن د تعريفېديري په پام کى نيولو سره بايد باور ولري-

$-1 \leq (x-1)/5 \leq 1 <=> -5 \leq x-1 \leq 5 <=> -4 \leq x \leq 6 => D=[-4,6]$

ت $(y = 1 / \sqrt{(x^2 - 4)}$

راديکاند بايد له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چى

$x^2-4>0 <=> x^2<4 <=> x>2$ يا $x<-2$

نو دى $D=(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیڅیت توابعو ایکسپلیڅیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y – 8 = 0$

۲ - لاندې فنکشنونه په پارامترانځورونی ورکړ شوي

a) $x=2t \quad y=-t^2+3t$ b) $x=\sqrt{t} \quad y= 2t+1$

c) $x=1/t \quad y=2(t-3)$ d) $x(/2)t-1 \quad y=t^2$

پارامتر له منځه یوسی او په دې سره ورکړی $y=f(x)$

۳ - لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅیړی، او که ممکن وي نو مونوتونی اینتروالونه په تعریفدیریو بیل (تجزیه) کړی، یا لږ ته کړی.

a) $y=2x-3$ b) $y=-2x+3$ c) $y=x^2$

d) $y=-2x^2$ c) $y=2x^2+1$ f) $y=|x|$

۴ – پرېکړه وکړی چې لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y=x$ b) $y=x+1$ c) $y=x-1$

d) $y=2x^2$ e) $y=2x^2+1$ f) $y=(x-1)^2$

g) $y=x^2/2$ h) $y=x^5$ i) $y=|x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $y = -2x + 3$ b) $y = (x-1)(x+2)$ c) $y = x^2-x-2$

d) $y = 2x^2 -12x +18$ e) $y = x^2 + 1$ f) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په ځې فنکشونونه پيدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1$, $D = [0, \infty)$, $W = [0,\infty)$

c) $y = (x+1)^2$, $D = [-1,\infty)$, $W=[0,\infty)$, d) $y=x^3 /2$, $D = [0,\infty)$, $W=[0,\infty)$

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

a) $y = 0,4x -1,6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1 /5)(3x +1,5)$

d) $y = 2$ e) $3x -3y -7 = 0$ f) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي. جګوالي کونج α دې پيدا شي. او صفرخايونه x_N و ګنی!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تيريږي

a) (2,3) (5,5) b) (1 ,1) او (3,7) c) (-1,0) او (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك يا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 -4x +3$ b) $y = x^2-8x+16$ c) $y = x^2 -6x +10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$ e) $2x^2 -10x+12$ f) $y = 3x^2 +6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2}+x + 4$ h) $y = x^2 / 4 + x +2$ i) $y = 5x^2 +45$

د ککرې کواوردينات دې پيداشي، صفرخايونه دې وګنل شي او پارابول دې انځور شي

۱۰ – د لاندې تولريشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشيما د استعمال له لارې وګنل شي. فنکشنونه دګا د خلفورم باندې انځور شي

a) $y = f(x) = x^3 -6x +5;$ $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

b) $y = f(x) = (1 /2)x^3 -x^2 -(13 /2)x -5;$ $x_1 = 1 /5$ $x_2 = 5$

c) $y = f(x) = x^3 +2x + 2x$; $x_1 = -2$ $x_2= 0,2$

d) $y = f(x) = x^4 -x^3 -28x^2 32x +40$; $x_1 = 2$ $x_2 = 5$

e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 -6x^2 +5x +6$; $x_1 = 1,5$ $x_2 = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۱۱ – مات ریشنل فنکشنونه ورکړل شي :

a) $y=\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ b) $y=\frac{x^4-3x^3-4x^2}{x^2+5x+6}$

c) $y=\frac{x^3+2x^2+x}{x^4-13x^2+36}$ d) $y=\frac{x}{(x^3+6x^2+9x)(x^2-4x+4)}$

e) $y=\frac{2x^3-x^2+6x-3}{x^2+3}$.

صفرځایونه دې وټاکل شي، پول. تشځایونه او د ± 8 <– x لپاره ځان نیونه!

۱۲ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y = 2^{x-1}$, D = R, W=(0,œ) b) $y = 2^x - 1$, D = R, W =(-1,œ)

c) $y = \log_3 x$, D = (0,œ), W = R d) $y = \ln(x-1)$, D =(1,œ), W = R

۱۳ – لاندې فنکشنونو ته مونوتوني اینتروالونه ورکړی او برخه په څپ فنکشنونه:

a) $y=(x-1)^2$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y=(x+1)^2 + 1$

d) $y= x^2 - 4x + 5$ e) $y = 4x^2$ f) $y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$

۱۴ – تړلي فنکشنونه $y = f[h(g(x))]$ په دننه او دباندې فنکشنونو

$$y = f(w)\ ,\ w = h(z)\ ,\ z = g(x)$$

بیل (تجزیه) کړی(د تعریف–او ارزښتدیریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو)

a) $y=e^{(x+1)^2}$ b) $y=\left(e^{x+1}\right)^2$ c) $y=\lg\sqrt{2x-3}$

d) $y=\sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y=\tan\sqrt{x-3}$ f) $y=\sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y=\sqrt{\tan x-3}$ h) $y=\tan\sqrt{x}-3$ i) $y=\mathrm{Arc}\sin x^2+$

j) $y=[\mathrm{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y=\ln\sin\frac{x}{3}$ l) $y=\sin\ln(x+\frac{1}{3}$

m) $y=\sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y=\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y=\frac{1}{\sin\sqrt{x}}$

p) $y=\mathrm{Arc}\cot e^{2x+1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ - ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندي او دننه فنکشنونو

$$y = f(v),\ v = h(w), w = (g(z)),\ z = k(x)$$

بیل کړی(د تعریف- او ارزښتدیري باندې تیرونه کیدی شي)

a) $y = \left[\operatorname{Arc}\cot\left(e^x + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\operatorname{Arccot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5 - \tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln\left(x^2 - 1\right) + 1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x + 1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ - د لاندې ښتنیزویا سیرنیز (تحلیلي) افادو لپاره تعریفدیري پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3 - x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$ e) $y = \dfrac{1}{x^2 + x - 6}$ f) $y = \ln(2x + 5)$

g) $y = \operatorname{Arc}\cos(2x - 4)$ h) $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \dfrac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول كتابونه په المان كې د ،، افغانستان كلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دريم: د شميرپوهنې ستر كتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونكو او زده كوونكو لپاره (دا كتاب په ۹۰۰ مخونو كې چاپ او دا نوې ليكنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمككچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو كې شميرنه، د ګټې – او كټې د كټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه كتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره كوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنستونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنشیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپېدو یې پیل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې چې همدا اوس چاپ شوې دي:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برينککن ليکنې چې له پرينمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

٣ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي، را ژباړل شوي دي.

۶ – اناليزی ١

٧ – اناليزې ٢

٨ – کرښيز الجبر

٩ - د شميرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل اناليز

١٢ – وکتور شميرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې : همدا اوس ځنې چاپ شوي او ځنې چاپ ته چمتو دي.

<u>Bonn (Germany):</u>

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره :

دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

کتب په دوه برخو کې چاپ شوی دی

الف . لومړۍ برخه

ب . دويمه برخه

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ ــ د شمیرپوهنې انګریزۍ پښتو او عربي + درۍ ډکشنري

۲۴ ــ د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ ــ د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې يې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ ــ د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه يې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

ــ د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور بریښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرې شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیرې. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکټره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library