شمیرپوهنه (ریاضي)

د لسم ټولګي لپاره

برېښنا پته : smakhan1946@gmail.com

لیکونکی:

ډاکترماخان میرې شینواری

2016

Ketabton.com

جرمني د بن ښار

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

د لسم ټولګي لپاره

لیکونکی:

ډاکتر ماخان(میرزی) شینواری

Smakhan1946@gmail.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

سریزه...................................... ۴
پولینومشمیرنه ۶
د ګاوس الګوریتم.............................. ۲۹
هورنرشیما......................... ۴۶
اړیکې.............................. ۵۵
فنکشن(ځیرونه) یا تابع ۶۵
فنکشن او په ښتفنکشن ۹۱
ځلوریا مربع توابع ۹۳
نورمال پارابل ۹۶
د ځلوری‌تکمیل له............... ۱۰۱
کرښیزبرابرونسیستم ۱۱۵
د مناسبځواب له پاره تلنلار.... ۱۲۳
مساواتسیستم بې له ۱۲۹
توان یا پوتنځ توابع ۱۳۳
کرښیزتوابع د ورکړ شوو ۱۳۸
مومړی حالت ۱۳۸
د کرښبرابرونونو ځانګړی ۱۴۲
n- مه درجه ټولراشنل توابع ۱۶۵
د ټولراشنل توابعوغوښتکي ۱۷۵
د بدلونقانونه ۱۷۸
شننیزه – یا تحلیی هندسه ۱۸۳
فنکشنونه (بل بدیل)............ ۲۰۲
دریکوډیکچ ۱۳۷
ګډوله – یا کمپلکسګنونه ۲۷۹
د لیکونکیلیکلیاوژباړې..... ۳۱۵
د لیکوکیژنود ته لنډه کتنه...... ۳۲۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

سريزه

دا ځلوېښت کاله کيږي، چې زموږ هيواد هراړخيزه ستونزې لري او هر څه دې اوږده جنګ را خراب کړي

ګرانو هيوادوالو!

د نورو نيمګرتياو په څير زموږ درسي نصاب - په تيره شميرپوهنه - هم ډېره د ناسمون سره مخامخ ده.

که دا کار د دولت په ځلورديوالي ونه شو، نو زه به وهڅيږم، چې دا ما ليکلي کتابونه د ن ج له لارې له تاسو سره شريک کړم او دا د نړۍ په ستاندارد.

د ښوونځي په کتابونو کې د ستاتيستيک او احتمالوالي درس نور هم خورا ستونځمن دی، چې زه ترې دلته تيريږم او د ښوونځي د تيرو کتابونو څخه هم هيله ده- که زما کتابونه وړاندې نه شو- چې دابرخې يا سمې يا له درسي نصاب څخه ووېستل شي. په دې برخه باور وکړی، چې نه ليکونکی بوهيږي او نه بل لوستونکی پرې پوهيدلی شي.

زما په دې د ښوونځي کتابونو کې دا برخې نه شته، خو که وخت مې پيدا کړ دا به هم سمې کړم. ما په دې هکله د احتمالوالي او ستاتيستيک کتابونه ژباړلي او همداسې مې په هندسه کې هم احتمالوالي شميرنه راوړي او د ستاتيستيک يو ګتاب مې هم ژباړلي، چې زه به يې په مناسبوخت کې د ليدلو پټې ګرانو لوستونکو ته د ن ج له لارې ورکړم.

دا زما ځني کتابونه او په ډېره مننه د www.ketabton.com ن ج کې ګرانولوستونکوته وړاندې شوي.

د شميرپوهني سم اند يا منطق زموږ د نصاب په لسم ټولګي کې راغلی او هغه هم لکه ستاتيستيک او ... د پوهيدلو نه دی. دا- لکه څنګه چې بربښي- دومره پيچلی نه دی، نو زه دا درس له دې امله د اوم ټولګي په سرکې راوړم، هيله ده چې ستونځې به رامنځ ته نه کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زه چې ترڅو ستاسو په منځ کې وم او د کار یم، ستاسو چوپړ کې به اوسم. راځئ، چې ستونځوبې(د ستونځو حل) سره شریک کړو.

زه دې لیکنو او پرې قضاوت کولو ته ځانله یم.

تکرار په کې زیات دی، خو د موصوع، نه د خودیونې. وایې چې تکرار د زده کړې مورده، نو پروا نه لري. کمښتونه هم په کې شته. سره د ټولو نیګرتیاوو دا د ښوونځي له پاراه ډېره ګټوره او زه چې پو هیږم، یواځنۍ سمه لیکنه ده.

دا چې سمه لیکنه ، د ځان له امله نه وایم، دګرانو زده کوونکو او ښوونکو له پاره وایم. دا زما لیکنې نه دې، دا ما له نورو کتابونو څخه رانیولي، چې باید سمې وي.

زه به وهڅیږم، چې درسمي ښوونځي کتابونو نا سمونونه له تاسو سره شریک کړم، خو ډېر لږ، یواځې داسې د یادونې له امله.

په ډېره خواشینۍ باید ووایم، چې ملاتړی نه لرم، چې د لیکنې ستونځې راته په ګوته کړي.

د نصاب د غړو څخه مې هیله ده، چې ګټه ترې پورته کړي او په بنسټ یې د ښوونځي لیکنې سمې کړي.

د خوندیونې ټیکاوي کې پوښتنه نه شته، ځکه چې ما هم د نورو لیکنو څخه راټول کړي او هڅیدلی یم، چې سم یې ترې راونیسم.

باور وکړی زه د دې لیکنو سره لږ ستړی شوی یم، نو ځنې ځایونه به داسې نیمګړي پاتې وي، چې ستاسو پو هیدنې ته کوم زیان نه رسوي، د هغې بخښنه دې وي.

کله تمرینونه کم وي او کله تکرار راځي، چې دا بد مه ګڼۍ.

په دې کتابونو ما دومره ځان بوخت کړی، چې باورکړی مغذ مې ترې نورموړ دی، نو له دې امله یې نور پایوم یا ورته د پای ټکی ږدم.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولينومشميرنه

پویلینوم څه شی دی؟

یو پولینوم د اووښتوني یا واریابلي –چي موږيې د x سره په نښه کوو- له ډېرواره توان د زیاتون دی: د توان جګګښونه پیداښتي یا طبیعي ګښونه دي. زیاتون له دې برسیره پای دی.

بیلګه: $a_n \cdot x^n + \ldots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

همداسي

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

یا هم:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

دلته n یو پیداښتي ګڼ اوپای دی او a_i ریلګښونه دي د ټولو $i=0,1,\ldots n$ له پاره.

پیژند: د پولینمچګګڼ n د پولینوم درجه بلل کيږي، که $a_n \neq 0$ وي.

په یاد ولری: په پورته سر کې- د پولینوم لیکنبنه د توان په همغږیزجګیدونکي لیکنبنه اودا کښته يي د پولینوم د توان په همغیزټیټیدونکي لیکنبنه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینومونو سره شمیرنه یا کارونې داسې لنډې څېړو

د پولینومونو زیاتون: که له

$$a_5 \cdot x^5 + ... + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

سره

$$b_5 \cdot x^5 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاته-وو، نو داسې مخ ته ځو:

په دې پورته برابرون کې ګورو، چې اووښتونې یا واریابله د څلور په جګ یعنې x^4 نه شته. دا په دې مانا ده،چې څله وونی یا صریب یې صفر دی. یعنې $o\ x^4$ یا

$$b_5 \cdot x^5 + o\ x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاتونعملیه یا کارونه مح ته بیای:

$$a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$b_5 \cdot x^5 + o\ x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

$$(a_{5+}\ b_5\ )x^5 + (a_4 + o)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + a_2 + b_2\ \ )x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0\ + b_0\ )$$

ګورو،چېد برابر توا یا برابر جګګې واریابلې سره زیاتیږي.

بیلګه:

$$3 \cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7$$

$$2x^5 + o\ x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1$$

$$(a_{5+}\ b_5\ )x^5 + (a_4 + o)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + a_2 + b_2\ \ )x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0\ + b_0\ )$$

د پولینومونو کمون کارونه:

کمون یې هم په همدې بیلګه داسې لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_5\cdot x^5 + a_4\cdot x^4 + a_3\cdot x^3 + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x + a_0$$

$$-(b_5\cdot x^5 + o\,x^4 + b_3\cdot x^3 + b_2\cdot x^2 + b_1\cdot x + b_0)$$

$$(a_5 - b_5)\cdot x^5 + (a_4 - o)x^4 + (a_3 - b_3)x^3 + (a - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

بيلګه:

$$3\cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4\cdot x^2 + 2\cdot x + 7$$

$$-(2x^5 + o\,x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1)$$

$$x^5 + 6x^4 \quad -7x^3 \quad -x^2 + x + 6$$

پيژند: دوه پولينومونه سره برابر دي، که خله ووني يا ضريبونه يې سره برابر وي، دا په دې مانا چې

$$a_n\cdot x^n + \ldots + a_3\cdot x^3 + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x + a_0$$

او

$$b_n\cdot x^n + \ldots + b_3\cdot x^3 + b_2\cdot x^2 + b_1\cdot x + b_0$$

سره برابر دي که $b_i = a_i$ وي،د ټولو $i=1,2,:::n$ له پاره.

د پولينومونوپه هکله مو په اتم ټولګي کې د ترمونوبرخه کې پوره زده کړه کړې. په پولينوم کې هم ټول هغه شميرلارې، چې په ګڼونو کې باور لري باوري دي.

دا لاندې بيلګې دې هم داروښانه کړي:

د پولينومونوله پاره نورې بيلګې:

o $3x^2 + 2x + 5$

o $7x^3 + x^2 + 6x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- $10x^5 + 3x^4 + 2x$

د پولینوم ډولونه:

په شمیرپوهنه کې د پولینوم مختلف ډولونه شته.په شمیرپوهنه کې د بینوم لاندې یو پولینوم پوهیږو، چې له دوه غړو جوړ وي یا په بل ډول ویلی شوي، چې یو بینوم د دوه مونومونو زیاتون یا کمون دی.دا لاندې بیلګې دا هم ښایي، چې بینوم څنګه برېښي!

- $a + b$
- $x^3 + y^3$
- $x - 3$

پولینوم، چې له درې زیاتونونو جوړ دی‌ترینوم بلل کیږي. لاندې بیلګه دا روښانه کوي.

- $a^2 + b^2 + c^2$
- $6a^2 + 7a^3 + 8a^4$

زیاتون ته بیلګه

$$(-x^5-2x^4-3x^2-x+2) + (x^2+2) = -x^5-2x^4-2x^2-x+4$$

پولینومکمون ته بیلګه: په لاندې بیلګه کې ګورو، چې د برابر توانونو x یو له بل څخه کمیږي.

$$(x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x) - (3x^3 + 2x^2 + 6x) = x^4$$

ځل (ضرب):

دا لاندې درې بیلګې د ځل یا ضرب له پاره ورکړ شوي.

موږاو تاسي د دې لارې سره د بینوم فرمول او د ترمونو د ځله ونو له لارې بلد یو، چې دلته ستاسوپام ورته رااړول کیږي

$$(x-4)\cdot(x^2-2x+3) = x^3-6x^2+11x-12$$

$$(x-5)\,(x^2+3\,x+7) = x^3-2\,x^2-8\,x-35$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(x-3)(4x+7)=4x^2-5x-21$$

$$(x+1)(x^2+x-6)=x^3+x^2-6x+x^2+x-6=x^3+2x^2-5x-6$$

پولينوموېش:

دا لاندې بېلګه د وېش له پاره راوړ، خو دا چې وېش لږ پيچلی دی، په دې به پوره وغږېږو.

$(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x) : (x + 3) = x^3-x^2+5x-9 + (27)/(x+3)$

$-(x^4+3x^3)$
$-(-x^3-3x^2)$
$-(5x^2+15x)$
$-(-9x-27)$
پاتېRest: 27

کرښيزڅله ووني سره ځل کيږي يا ضربيږي

$$f(x)=(x+1)(x+2)(x-1,5)$$

د ځله ووني ۲ سره غزول کيږي.

$$f(x)=(x^2+3x+2)(x-1,5)$$
$$=x^3-1,5x^2+3x^2-4,5x+2x-3$$
$$=x^3+1,5x^2-2,5x-3 \quad /\cdot 2$$

$$f(x)=2x^3+3x^2-5x-6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم وېش:

که د یوه پولینوم صفرځای معلوم وي، نو کړی شو د پولینوم وېش له لارې د پولینوم درجه په یوه کمه کړو. که دا مو مربع مساوات ته لاربنود کړي یا بوځیو نو ساده دی، چې نور صفرځایونه بیدا کړو. لاندې بېلګې دې د پولینوم وېش روښانه کړي.

د بیلګې په توګه د دریمې درجې تولراشنل تابع صفرځایونه معلوم دي، نو کیدی شي چې د تابع مساوات د کرښیزو صریبونوپه څېر ولیکلی شو:

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-\bar{x}_3)$$

چیرته چې $x_1; x_2; x_3$ صفرځایونه دي.

موږ اوس په څرګنده توکه تابع یا څیرونه د څیړنې لاندې نیسو

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$$

چیرته چې x1=2 یو صفرځای دی، ځکه چې

$$f(2) = 2^3 - 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 8 - 4 - 10 + 6 = 0$$

له دې سره له دې سره کېدی شي د تابع مساوات د x1=2 صفرځآی لاندې (له امله) په پام کې ونیسو او لکه چې لاس ته راځي و
لیکو $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6 = (\dots\dots\dots)(x-2)$

د صفرځای ټاکلو لپاره اینوونه : $f(x)= 0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\dots)(x-2)=0$
دا افاده $x^3-x^2-5x+6=(\dots)(x-2)=0$څېړو

د نوکانو افادې یا وییني (...)ټاکو

دواړه لورې په (x-2)وېشو

$$(x^3-x^2-5x+6) :(x-2)=(\dots)$$

په دې توګه د نوکانو افاده (...)لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

وپش د ليکنيز وپش قانون سره سم مخ ته بيايو

$$\left(x^3-x^2-5x+6\right):(x-2)=x^2+x-3$$
$$\underline{-\left(x^3-2x^2\right)}$$
$$x^2-5x$$
$$\underline{-\left(x^2-2x\right)}$$
$$-3x+6$$
$$\underline{-(-3x+6)}$$

د نوکانو افاده (…) اوسx^2+x-3 بنه لري

له دې لاس ته راځي د صفرځای ټاکنو لپاره اينسوونه:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\ldots)(x-2)=(x^2+x-3)(x-2)=0$$

نو دا مربع مساوات x^2+x-3 اوس حل کوو.

دا د p-q- فرمول سره ځوابوو:

$$p=1;\ q=-3 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}+3=\frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l} x_2=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}} \end{array}\right.$$

صفرځايونه:

$$x_1=2;\ x_2=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}};\ x_3=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x محور سره غوځتکي:

$$P_{x1}(2|0);\ P_{x2}\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}\,|\,0\right);\ P_{x3}\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}\,|\,0\right)$$

تابع مساوات:

$$f(x)=(x-2)\left(x+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}\right)\Leftrightarrow f(x)=x^3-x^2-5x+6$$

د پولینوموېش او لیکنیز پولینوموېش په منځ کې اړیکې شته. په لاندې مخامخوالي کې دا د وېش بې له پاتې په حالت کې را ښايي.

62228 : 47 = 1 3 2 4	$(x^3-6x^2+11x-12) : (x-4) = x^2-2x+3$
−47 ← 47 · 1	$-(x^3-4x^2)$ ← $(x-4)\cdot x^2$
152	$-2x^2+11x$
−141 ← 47 · 3	$-(-2x^2+8x)$ ← $(x-4)\cdot(-2x)$
112	$3x-12$
−94 ← 47 · 2	$-(3x-12)$ ← $(x-4)\cdot 3$
188	0
−188 ← 47 · 4	
0	

ګڼ ۶۲ د لومړیو دوه ځایونو څخه چوړ دی د دې وېشونو ګڼونو څخه د پروېشونې (۴۷)

سره وېشل کیږي. لاس ته راوړنه (۱) د (۴۷) سره څل یا ضرب کیږي او د ګڼ (۶۲) څخه کمیږي. د کمښت نتیجې کمښت (۱۵۲) سره په همدې ډول پرمخ ځو تر څو د کمښت لاس ته راوړنه صفر شي.

ازمایښت : $47\cdot 1324 = 62228$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right):(-2x+3)=3x^2+2x-4$$

$$\underline{-\left(-6x^3+9x^2\right)}$$

$$-4x^2+14x$$

$$\underline{-(-4x^2+6x)}$$

$$8x-12$$

$$-\underline{(8x-12)}$$

$$0$$

Probe:

$$\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right)=\left(3x^2+2x-4\right)(-2x+3)$$

بیلګه:

$$\left(x^3+3x^2-6x-8\right):(x-2)=x^2+5x+4$$

$$\underline{-\left(x^3-2x^2\right)}$$

$$5x^2-6x$$

$$\underline{-\left(5x^2-10x\right)}$$

$$4x-8$$

$$\underline{-(4x-8)}$$

$$0$$

Probe: $\left(x^2+5x+4\right)(x-2)=\left(x^3+3x^2-6x-8\right)$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right):(a+b)=a^2+2ab+b^2$$

$$\underline{-\left(a^3+a^2b\right)}$$

$$2a^2b+3ab^2$$

$$\underline{-\left(2a^2b+2ab^2\right)}$$

$$ab^2+b^3$$

$$\underline{-\left(ab^2+b^3\right)}$$

$$0$$

ازماېښت:

$$:\ \left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)=\underbrace{\left(a^2+2ab+b^2\right)}_{\text{1. binomische Formel}}(a+b)=\underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)}_{\text{Linearfaktoren}}$$

بیلګه:

$$\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right):(x-2)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$$

$$\underline{-\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2\right)}$$

$$-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x$$

$$\underline{-\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x\right)}$$

$$-x+2$$

$$\underline{-(-x+2)}$$

$$0$$

ازماېښت: $\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1\right)(x-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

$$
\begin{array}{l}
\left(2x^3 \qquad -14x-12\right):(x-3)=2x^2+6x+4\\
\underline{-\left(2x^3-6x^2\right)}\\
\qquad 6x^2-14x\\
\qquad \underline{-\left(6x^2-18x\right)}\\
\qquad\qquad 4x-12\\
\qquad\qquad \underline{-(4x-12)}\\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

په ځنو حالتونوکي دا بنه ده، چي د پولینوم لیکنوکي د اړتیا په وخت کېیوه تشیا پرېږدو، کلکه په پورته بیلګه کي چېګورو.

یوه بله شونتیا یي دا‌ده، چي هغه تشیا د صفر سره ډکه کړو، لکه دا لاندي:

$$2x^3-14x-12=2x^3+0x^2-14x-12$$

بیلګه:

لاندي بیلګه یو وېش د پاتي سره مخ ته بیایي.لکه ښنګه چي د لیکنیز وېش ښخه راته ښرګند دی.

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3+3x^2-6x-8\right):(x-1)=x^2+4x-2\ \ (\text{Rest}\ -10)\\
\underline{-\left(x^3-x^2\right)} \qquad \Rightarrow \left(x^3+3x^2-6x-8\right):(x-1)=x^2+4x-2-\dfrac{10}{(x-1)}\\
\qquad 4x^2-6x\\
\quad \underline{-\left(4x^2-4x\right)}\\
\qquad\qquad -2x-8\\
\qquad\quad \underline{-(-2x+2)}\\
\qquad\qquad -10\quad \text{Rest}
\end{array}
$$

$$\text{Probe: } \left(x^2+4x-2-\frac{10}{(x-1)}\right)(x-1)=\left(x^3+3x^2-6x-8\right)$$

دا چي نوي بلدې یون کي د ناسمون سره مخامخ کیږي،غوره ده چي د دې ازماېښت هم وکړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولينوموېش په کارونه کې که د پولينوموېش يوصفرځای څرګند وي، نو کيدی شي د پولينوم درجه په يوه وړه يا رکمه شي.

$x_1 = 2$ د پولينوم يو صفرځای دی.

$$\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x - 2) = \underbrace{x^2 + x - 3}_{\text{Restpolynom}}$$

$$\begin{array}{l} -\left(x^3 - 2x^2\right) \\ \hline \quad x^2 - 5x \\ \quad -\left(x^2 - 2x\right) \\ \hline \quad\quad -3x + 6 \\ \quad\quad -(-3x + 6) \\ \hline \end{array}$$

د پاتې پولينوم صفرځايونه اوس کيديشي د څلورۍ يا مربع پولينوم

$$x^2 + x - 3 = 0$$

له لارې پيدا کړو.

د سمون ازماېښت يې وکړی.

بيلګه: پولينوموېش او ازماېښت يې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(x^3+2x^2-5x-6):(x+1)=x^2+x-6$$

$$-(x^3+x^2)$$

$$x^2-5x$$

$$-(x^2+x)$$

$$-6x-6$$

$$-(-6x-6)$$

$$\text{Prob e}:(x+1)(x^2+x-6)=x^3+x^2-6x+x^2+x-6=\underline{\underline{x^3+2x^2-5x-6}}$$

پوښتنې:

لاندې پولینوموېش مخ ته بوځئ

الف- $(x^3-3x^2-6x+8):(x+1)$ ب ـ $(2x^3-x^2-8x+4):(x^2-4)$

پ ـ $(2x^3-3x+1):(2x-1)$ ت ـ $(6a^6+a^4b+25b^3):(3a^2+5b)$

ټ ـ $(8x^5-6x^7+2x):2x^2$

ث ـ $(9a^5b^3-12a^3b^5):3a^3b^3$

ج ـ $(15a^9-8a^6b+8b^3):(3a^3+2b)$ ،

چ ـ $(14a^4-a^3+5a^2-3a+1):(7a^2-4a+1)$

ح ـ $\dfrac{3x^5y^{n+2}+3x^2y^{3n+2}-2x^{m+3}y^{n+3}-2x^my^{3n+3}}{x^3+y^{2n}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځ - $$\frac{48a^{n+x}+56a^{x}b^{x}-72a^{n}b^{c}-84b^{x+c}}{12a^{n}+14b^{x}}$$

 څ - $$\frac{8a^{2n+1}-10a^{2n}b+15a^{3n-2}b-12a^{3n-1}}{2a^{2n}-3a^{3n-2}}$$

خ - $$\frac{2a^{5}b^{x+2}-2a^{3}b^{x+5}+3a^{4}b^{2x-1}-3a^{2}b^{2x+2}}{a^{2}-b^{3}}$$

پولینوم برابرون:

د یوه برابرون په کېڼ اوښي لور د x مختلف توانونه یو پولینوم برابرون ورکوي

$$\text{Beispiel}: x^3-6x=3x^2-8$$

د داسېبرابرون د اوبی له پاره لومړیدا برابرون په داسې نامه صفربڼه اړوي. دا په دې مانا چي برابرون تر هغې په ورتهبڼه بدلوناړولکیږي، چې په ښیلور یواځې صفر پاتې شي.

$$\text{Beispiel}: x^3-6x=3x^2-8 \mid -3x^2$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x=-8 \mid +8$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x+8=0$$

د صفربڼې یا- فورم په ځای د پولینوم دې بڼې ته هم نورمال بڼه وایي.
موږ د پولینوم پنځه بدیلونهراړوړو

لومړی بدیل:

په برابرون کې د اووښتونې x یو یواځنی توان مخ ته راځي.

$$ax^n+b=0 \Rightarrow x=\sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که n ناجوړه وي،نوريښه وېښتوني کيدی شي کميز ګڼ هم وي.
د رېښي ټيک يو حل شتون لري.
که n جوړه وي، نوريښه نيونی(هغه ګڼ چېريښه يېښيول کيږي) يواځې زياتيز ګڼ کيدی شي.
دوه اوبيونې شتون لري.
بيلګه:

$$\begin{aligned} & 8x^3 + 27 = 0 \,|\, -27 \\ \Leftrightarrow\ & 8x^3 = -27 \,|\, :8 \\ \Leftrightarrow\ & x^3 = -\frac{27}{8} \,|\, \sqrt[3]{\ } \\ \Leftrightarrow\ & x = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2} \Rightarrow L = \left\{-\frac{3}{2}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2x^4 - 3 = 0 \,|\, +3 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^4 = 3 \,|\, :2 \\ \Leftrightarrow\ & x^4 = \frac{3}{2} \,|\, \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \\ \Leftrightarrow\ & x = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107 \Rightarrow L = \left\{\sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107\right\} \end{aligned}$$

په لومړي حالت کې n ناجوړه دې. ريښه نيوني کميزه هم کيدی شي
اويواځې يواوبی شتون لري.
په دويم حالت کې n جوړه دی، ريښه نيونی زياتيزدی.که کميزوي بيا برابرون اوبی نه لري.

دويم بديل:

پولينومبرابرون يوځلوری‌برابرون (مربع مساوات) انځوروي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+px+q=0$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}_{D}}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

دا د -p-q- – فرمول له لارې اوبی –یا حلکيري

بیلګه

$$x^2-13x+36=0 \quad p=-13 \quad q=36$$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

$$=\left(\frac{13}{2}\right)^2-36=\frac{169}{4}-\frac{144}{4}=\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l}x_1=\frac{13}{2}+\frac{5}{2}=9\\ x_2=\frac{13}{2}-\frac{5}{2}=4\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow L=\{4;9\}$$

D د دېسکريمينانت له پاره ليکلکيږي چې هغې لرلو سره مخ دمخه سړی د اوبيونويا حلومو څومره وال یا ګڼون ټاکلی شي.

که صفر $<$ D وي ، نو څلورئ برابرون دوه اوبي يا حلونه لري

که صفر $=$ D وي،نو برابرون يواځې يو ډبل اوبيلري

که صفر $>$ D وي، نو برابرون اوبی نه لري په دې حالت کې نو سړی نور مخ ته نه ځي.

دريم بديل

ولینومبرابرونيو دوه-څلورئ برابرون biquadratische انځوري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + pz + q = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{D}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$x^2 = z \Rightarrow x = \pm\sqrt{z} \text{ für } z \geq 0$$

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + pz + q = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{D}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$x^2 = z \Rightarrow x = \pm\sqrt{z} \text{ für } z \geq 0$$

د په ځا اېښووني یا سبستیچیوشن z د -p-q -فرمول په مرسته یا له لارې شمیرل کیدی شي

پسې دې بیرته په ځایونه په ځتسبستیچیوشن وکارول شي او ریښه دې ونیل شي.

ریښه تیک د   زیاتیز - p-q-z -ارزښتونو   له پاره نیول کیدی شي.

بیلګه:

$$\frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} = 0$$

Substitution: $z = x^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{10}z^2 - \frac{9}{5}z + \frac{81}{10} = 0 \mid \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$$

$$p = -18 \,;\, q = 81$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 - 81 = 0$$

$$z = -\frac{p}{2} = 9$$

Rücksubstitution

$$z = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-3; 3\}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې حالت کې د يسکريمينانت صفر دی، داسې چې د سبستيچيوشناووښتونې له پاره يو اوبې .(z = 9) شتون لري.
دا په دېمانا، چې د ۴ –مې درجې پولينوم ټيک دوه اوبې يا څوابونه لري.

ځلورمبديل:
په پولينومبرابرون کې هغه همغه ارژښته يا مطلقه غړی نه لرو.

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \Leftrightarrow x\left(ax^2 + bx + c\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{2/3}$$

اووښتونې يا مجهوله x کيدی شي له نوکانو راووېستلشي.
اوبيونې د صفرځل يا – صرب له جملې شميرلکيدی شي (د فاکتورکولو تلنلار)،

بيلګه

$$x^3 + x^2 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2 + x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow p = 1;\ q = -2$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-2; 0; 1\}}}$$

د صفر ځلوونې يا صريب دويم ځلوونی کيدی شي د p-q - فرمولسره سادهوشميرلشي.
د صفرځلوونې جمله: يوخل يا صرب ټيک هلته صفردی، چې يو ځلوونی صفر ړي.

پنځم بديل:
پولينومبرابرون له بديلونو ۱ – ۴ په څير نه دی.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

په ډېرو حالتونوکېکيدی شي، د پوينوموېشله لارې اوبی وميندلشي.
د دې له پاره بايد يواوبی معلوم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د پولینوم یواوبی معلوم وي،نو کیدی شید پولینوم درجه د وېش له لارېیه یوه کمه شي. که دا یو څلوری برابرون راکړي،نو اوبیونه یېبیا ساده ه، چې نور اوبي پیدا کړو.
لاندې بیلګه چې اوبی $x = 2$ معلوم دی،د پولینوم تلنلار روښانه یا معلوموي.
پولینوموېش همغه په راته څرګنده لیکنیزډول لاس ته راوړو.

Division.
وېشنه

$$\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x - 2) = x^2 + x - 3$$
$$\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)}$$
$$x^2 - 5x$$
$$\underline{-\left(x^2 - 2x\right)}$$
$$-3x + 6$$
$$\underline{-(-3x + 6)}$$

د نوکانو(....) وبینه یا افاده اوس دا بڼه $x^2 + x - 3$ لري.
له دې د نورو شمیرنوځای په ځای کول لاسته راځي

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + x - 3\right)(x - 2) = 0$$

اوس دا څلوری برابرون یا مربع مساوات $\left(x^2 + x - 3\right)$ د اوبیوني دي،چې د
p-q- فرمول له لارې سرته رسیږي.

$$p = 1;\ q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left|\begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array}\right.$$

$$x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$\Rightarrow L = \left\{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ 2;\ -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}\right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې د ګومان یا ازماېښت له لورې اوبی نه شي پیداکیدی، نوبیا د نومریک تلنلار څخه کار اخستلکیږي(دا به اوس زموږ دنده نه وي).

برابرونونو ته تمرینونه:

۱ - برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت یې سرت هورسوئ.

الف - $\frac{1}{5}x^3 - 25 = 0$ ب - $\frac{27}{10}x^3 - \frac{4}{5} = 0$ پ - $8x\left(x^2 - 1\right) = -8x + 1$

۲ – برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت یې سرت هورسوئ.

الف - $27x^3 - 8 = 0$ ب – $\frac{1}{16}x^3 - 4 = 0$ پ- $-2 + \frac{7}{8}x^3 = -\frac{5}{2}x^3 - 1$

۳ ـ برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت یې سرت هورسوئ.

الف- $4k^2x^3 - 2k = 0; k > 0$ ب – $\frac{1}{4b}\left(x^3 - b^3\right) = 0; b > 0$ پ - $(x + 2a)^3 = \frac{1}{8}$

۴ - برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت یې سرت هورسوئ.

$$\frac{k \cdot x^3}{4} - 2k = 0$$

۵ - ځانګړې باکتریاګاني د ۴ ساعتونو په منځ کې خپل ګنو(تعداد) څلور برابره کوي.په یوه ساعت کې یې په سلوکې ډېروالی څومره دئ؟

۶ – د کال په پیل کې د موټروختارزښت نوی ټاکییا کره کیږي. د یوه پنځه کلن زوړ کارشوې یوم،ترپلورونکی € 8500 ورکوي.

د موټر کلنی زیان به څومره (د وختارزښت د په سلو کې) وي، که سړی له دې، که سړس داسېمخ ته لاړ شي چې دا په لومړیوپنځه کلونوکې برابر جګ وي؟

۷ – برابرونونه اوبی –یا حل کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

الف - $\frac{1}{4}x^3 - 4x = 0$ ب- $3x^3 + \frac{4}{3}x^2 = 0$ پ - $x^3 + x^2 - 2x = 0$

۸ – برابرونونه اوبیکړئ

الف- $4x\left(x^2 - x\right) = 7x^3 - 7x^2 - 6x$ ب- $\frac{3}{4}x^3 - 3x^2 = 0$

پ --- $\frac{1}{8}x^3 - x^2 + 2x = 0$

دا لاندې برابرونونه اوبي کړئ

الف- $x^3 + 4x^2 - 20x - 48 = 0$ ب - $-\frac{1}{2}x^3 + 4x = \frac{1}{2}x^2 - 4$

پ - $-2x^3 + 6x^2 - 4x = \frac{1}{2}x - 1$ ت- $x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2 = 0;\ x_1 = \frac{1}{2}$

ټ - $\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^3 + 4x^2 - 2x\right) = \frac{3}{2}$

لاندې برابرونونه حل کړئ چې یو اوبی یا حل یېمعلوم وي

الف - $x^3 - 3x^2 - 6x - 2 = 0;\ x_1 = -1$

د پولینوم ویش څخه کارواخلی.

-- د پولینوموېش څخه کار واخلئ

الف- $\left(4x^3 - 6x + \frac{5}{2}\right):(2x - 1)$ ب - $\left(x^3 - 2kx^2 - 2x + 4k\right):\left(x^2 - 2\right)$

۱۲ – برابرون $x^3 - 4x^2 + (k + 4)x - 2k = 0$ ورکړشوی. وښایئ، چې
د $x_1 = 2$ لپاره برابرون یواوبی دی. د k د کوم ارزښت لهپاره ټیک یو
دېل اوبی شته؟

لاس ته راوړنه د کرښیزو څلوونو یا صریبونوپه څیر ولیکی.

پوښتنه:

a داسې وټاکئ، چې برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ax - 1)(x + 2)(x - 1/2) = 0
ټيک دوه اوبيونې يا حلونه ولري
يو د دريمې درجې برابرون دا دوه { 4- ; 2 } = L اوبيونې لري.
الف - د اوبيونو يا حلونوپه هکله ويناوې وکړی.
ب – دوه برابرونونه ددې اوبيونې ورکړی.
۳ – برابرونونه اوبيکړی

الف- $2x^3 - x^2 - x = 0$ ب - $x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}$

۴ – برابرونونه اوبيکړی

الف- $-3x^3 + 5x^2 + 4 = 0$ ب- $x^3 - \frac{16}{5}x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{6}{5} = 0$

۵- برابرونونه اوبييا حلکړی

الف - $x^3 + x^2 - \sqrt{2}x^2 - 2x - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$

ب- $x^3 - 2,63x^2 - 1,45x + 3,08 = 0$

برابرونونه اوبی کړی

الف – $-u^3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{2}u - \frac{3}{2} = 0$ ب - $a^3 - 4a^2 - a + 4 = 0$

۷ – برابرونونه حل کړی

الف - $x^3 - \left(3 + \sqrt{3}\right)x^2 + 3\sqrt{3}x = 0$

ب- $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 0$ پ- $\frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + 1 = 0$

ت - $\frac{4}{10}x^3 - \frac{6}{10} = 0$ ټ - $x^3 - 5x^2 + 6,25x = 0$

ث - $\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0$ ج - $x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x = 0$

چ - $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ خ - $x^3 - 3x^2 = -4$

ځ - $(3x - 5)\frac{(x - 2)^2}{5} = 0$

پوښتنې
۱ - برابرونونه د پسې حل کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

الف ـ $\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+2=0$ ب $\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2=0$

پ ـ $-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{4}=0$ ت ـ $\frac{1}{5}x^3-\frac{3}{5}x^2-5x+15=0$

ټـ $2x^3-x^2-5x-2=0$ ث ـ $(3x-1)(x+k)^2=0$

۱ ــ د x پسې یې اوبی کړی $(k\neq 0)$

الف ـ $\frac{1}{9k}\left(x^4+x^3-12x^2\right)=0$ ب ـ $\frac{k}{2}x^4-kx^3-\frac{3k}{2}x^2=0$

پ ـ $\frac{x^2}{5k^2}\left(x^2-3k\right)=0\,;\,k>0$ ت ـ $x^4-26x^2+25=0$

ټ ـ $-\frac{1}{2}x^4+3x^2-4=0$ ث ـ $\frac{1}{2}x^4-4x^2+2=0$

ج ـ $-\frac{1}{16}x^4+x^2-3=0$ چ ـ $\frac{1}{3}\left(x^2-3\right)^2-3=0$

خ ـ $\frac{1}{3}x^4-2x^2+3=0$ ځ ـ $x^4-11x^2+18=0$

پوښتنې
حلونه یا اوبیونې وټاکئ

الف ـ $\frac{1}{3}x^4-3x^3=0$ ب ـ $\frac{1}{7}x^4-7=0$ پ ـ $\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^2+1=0$

تـ $-2x^4+x^2+x=0$ ټ ـ $\frac{1}{4}x^5-\frac{3}{4}x^3-x=0$ ث ـ $\frac{1}{3}\left(x^2-4\right)^2-3=0$

ج ـ $\frac{2}{5}\left(x^2-9\right)\left(x+2\right)^2=0$ چ ـ $\frac{1}{64}x^3+\frac{1}{4}x^2+x=0$ خ ـ $x^4-5x^2-2x=0$

ځ ـ $x^4-6x^2+8=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس الګوریتم **Der Gauß- Algorithmus**

فکر دې وشي، چې دا برخه په یولسم ټولګي کې راشي. دلته یې راوړنه هم بده نه ده.

یادونه: خوارزمیة د Algorithmus عربي مانا ده : زما په اند دا الخوارزمیّة دی، چې په لاتین کې ترې الګوریتموس جوړ شوی دی. الخواریزم د الګوریتم نومورکونکی، یوه شوروي پوست مارکې چې د الخواریزم د ۱۲۰۰ کلیزې جشن په هکله راوبېستلې وه. الګوریتم د پرابلم یا د پرابلمونود ټولګې پا یوه یواځنی د اوبیوني تلنلار ړه. الګوریتم یوه نړیواله تلنلار ده د په خوښه کرښیز برابرونونو سیستم اوبیوني ته	

ننوتنبیلګې:

د کرښې ډول په توګه کار کوو. د لیکو له پاره اجازه شته : - بدلیدلی شي - د یوه ګڼ سره ځلیدلی شي. - په یوه ګڼ سره وېشلکیدی شي.	درې برابرونونه د درې اووښتونویا واریابلو یا متحولو سره له بنه بدلون څخه لرو	$7x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12$ $-x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5$ $-4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$ شمیرنخیره یا شیما داسې لیکو

(c) ketabton.com: The Digital Library

- سره زیاتیدی شي

- سره کم کړي

درځونه هم سره بدلیدلی شي، که اووبنتوني یا واریابلي x ورسره واخستل شي.

د اوبیوني یا حل لاس ته راوړنه د بیرته په ښت اینسووني له راې هم کیدی شي.

$$-14x_3 = -14$$
$$\Leftrightarrow x_3 = 1$$
$$-11x_2 + 23\cdot 1 = 23$$
$$\Leftrightarrow -11x_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_2 = 0$$
$$7x_1 + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12$$
$$\Leftrightarrow 7x_1 = -7$$
$$\Leftrightarrow x_1 = -1$$

$$L = \{-1; 0; 1\}$$

ازمابینت: په لاندي کي د رښتیا له پاره ځاي په ځاى دي.

$$7\cdot(-1) + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12 \quad (w)$$
$$-1\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 1 = 5 \quad (w)$$
$$-4\cdot(-1) + 1\cdot 0 - 3\cdot 1 = 1 \quad (w)$$

x_1	x_2	x_3	
7	3	-5	-12
-1	-2	4	5
-4	1	-3	1

x_1	x_2	x_3	
*	*	*	*
0	*	*	*
0	0	*	*

شمیرنه داسي مخ ته بیایو: شننه یې ښي لور ته ده.

x_1	x_2	x_3		
7	3	-5	-12	$\mid\cdot 4$
-1	-2	4	5	$\mid\cdot 28$
-4	1	-3	1	$\mid\cdot 7$
28	12	-20	-48	
-28	-56	112	140	II + I
-28	7	-21	7	III + I
28	12	-20	-48	$\mid: 4$
0	-44	92	92	$\mid: 4$
0	19	-41	-41	
7	3	-5	-12	
0	-11	23	23	$\mid\cdot 19$
0	19	-41	-41	$\mid\cdot 11$
7	3	-5	-12	
0	-209	437	437	$\mid: 19$
0	209	-451	-451	III + II
7	3	-5	-12	
0	-11	23	23	
0	0	-14	-14	

د بیخي نویو له پاره یادوني:

د اوبیوني له پاره تلندول کیدی شي په کوچنیو پلونو توته شي.

۱ـ د اصلي ماتلانډي سره د لیکي له لاري ځل (ضرب) سره د د ماتونو مخه ونیسی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲- په لومړۍ کرښه لومړی ګڼ باید زیاتیز وي(که نه، بیا کیدی شي د ۱- سره ځل شي)

۳- د ځل یا وېش له لارې وهڅېږي چې په لومړي درځ کې ټول ګڼونه همغه ارزښت ولري.

په ۲ ـمه او ۳ ـمه لیکه کې دې لومړي ګڼونه کمیزوي.

۴- ۲ ـمې او ۳ ـمې لیکې هرې یوې ته دې لومړۍ لیکه ورزیاته شي. له دې سره په لومړي درځ کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۵- په۲ ـمه لیکه کې دې دویم ګڼ زیاتیز وي(که نه، نو د ۱- سره دې ځل شي)

۶ ـد ځل یاوېش له لارې په دې نیت کې شي، چې له ۲-مې لیکې په دویم درځ کې ټول ګڼونه همغه ارزښت ولري.

۷ - و ۲ ـمېلیکې یا کرښې ته ۳ ـمه لیکه ورزیاته کړی. له دې سره په ۳-مه لیکه کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۸ - لاس ته راوړی د اوبی یا حل په ښټ لور کیږدی.

برابر پرمختګېول کیدی شي د هغو سیستمونو له پاره هم وکارول شي، چې له دریو زیات برابرونونه شتون ولري:

بڼه بدلونونه کړی شي سړی بل ډول هم مخ ته بوځي.دا چې ،، ځنګه،، دا یواځې د شمیرپوهانو مهارت ته پربږدو. د زیاتو تمرینونوله لارې سړی یوه غوره لار پیدا کوي. د شونتیا پورې دې د ماتونومخه دې ونیولشي، چې د نا اړینې تیرونې مخه نیول شوي وي. که سړی ورته تازه وي، کیدی شي ډېر بڼه بدلونونه په یوه وخت جوړ کړي، له دېلارې لیکنه کیږي، خود ناسمون شونتیا زیاتیږي؟

د په ښټ اینوولو له لارې د اوبي یا حل لاس ته راوړنه	لانې الماني:سره بدل کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

tausche: ⇄

x_1	x_2	x_3		
7	3	−5	−12	
−1	−2	4	5	$\mid\cdot(-1)$ I ⇄ II
−4	1	−3	1	
1	2	−4	−5	
7	3	−5	−12	II - 7·I
−4	1	−3	1	III + 4·I
1	2	-4	-5	
0	-11	23	23	$\mid\cdot 9$
0	9	-19	-19	$\mid\cdot 11$
1	2	−4	−5	
0	−99	207	207	$\mid : 9$
0	99	−209	−209	III + II
1	2	-4	-5	
0	-11	23	23	
0	0	-2	-2	

$-2x_3 = -2$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 1}}$

$-11x_2 + 23\cdot 1 = 23$

$\Leftrightarrow -11y = 0$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}}$

$x_1 + 2\cdot 0 - 4\cdot 1 = -5$

$\Leftrightarrow x_1 = -7$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -1}}$

$L = \{-1; 0; 1\}$

ازماېښت:

$7\cdot(-1) + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12 \quad (w)$

$-1\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 1 = 5 \quad (w)$

$-4\cdot(-1) + 1\cdot 0 - 3\cdot 1 = 1 \quad (w)$

بیلگه ۱ :(ساده یا اسانه)

د په ځتټ اینوولو له لارې د اوبییا حل لاس ته راوړنه

$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 8$

$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -4$

$4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 1$

x_1	x_2	x_3		
2	−3	4	8	$\mid\cdot 6$
3	4	−5	−4	$\mid\cdot 4$
4	−6	3	1	$\mid\cdot 3$
12	−18	24	48	$\mid : 6$
12	16	−20	−16	II - I
12	−18	9	3	III - I
2	-3	4	8	
0	34	-44	-64	
0	0	-15	-45	

$-15x_3 = -45$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 3}}$

$34x_2 - 44\cdot 3 = -64$

$\Leftrightarrow 34x_2 = 68$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 2}}$

$2x_1 - 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 8$

$\Leftrightarrow 2x_1 = 2$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 1}}$

$L = \{1; 2; 3\}$

Probe:

$2\cdot 1 - 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 8 \quad (w)$

$3\cdot 1 + 4\cdot 2 - 5\cdot 3 = -4 \quad (w)$

$4\cdot 1 - 6\cdot 2 + 3\cdot 3 = 1 \quad (w)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ (منځنۍ سخته)

د په ښت اینوولو له لارې د اوبي یا حل لاس ته راوړنه

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2$$
$$4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 9$$
$$8x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 13$$

x_1	x_2	x_3		
3	2	−4	−2	$\vert \cdot 8$
4	−5	3	9	$\vert \cdot 6$
8	7	−9	13	$\vert \cdot 3$
24	16	−32	−16	$\vert : 8$
24	−30	18	54	II - I
24	21	−27	39	III - I
3	2	-4	-2	
0	-46	50	70	$\vert:2$ II $\rightleftarrows$ III
0	5	5	55	$\vert:5$
3	2	-4	-2	
0	1	1	11	$\vert \cdot 23$
0	-23	25	35	
3	2	−4	−2	
0	23	23	253	$\vert : 23$
0	−23	25	35	III + II
3	2	−4	−2	
0	1	1	11	
0	0	48	288	

$$48x_3 = 288$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 6}}$$
$$x_2 + 1 \cdot 6 = 11$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 5}}$$
$$3x_1 + 2 \cdot 5 - 4 \cdot 6 = -2$$
$$\Leftrightarrow 3x_1 = 12$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 4}}$$

$$L = \{4;5;6\}$$

ازمايښت:

$$3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 - 4 \cdot 6 = -2 \quad (w)$$
$$4 \cdot 4 - 5 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 9 \quad (w)$$
$$8 \cdot 4 + 7 \cdot 5 - 9 \cdot 6 = 13 \quad (w)$$

بیلګه ۳ : (سخته): لاندې درې برابرونونه غوارو اوبی کړو

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{4}{5}x_2 + \frac{3}{8}x_3 = 4$$
$$\frac{3}{4}x_1 + \frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 23$$
$$\frac{4}{5}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

x_1	x_2	x_3		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{8}$	4	$\mid\cdot 40$
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{5}$	23	$\mid\cdot 40$
$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	8	$\mid\cdot 20$
20	-32	15	160	$\mid\cdot 12$
30	15	8	920	$\mid\cdot 8$
16	-10	5	160	$\mid\cdot 15$
240	-384	180	1920	$\mid : 12$
240	120	64	7360	II - I
240	-150	75	2400	III - I
20	-32	15	160	
0	504	-116	5440	$\mid : 4$
0	234	-105	480	$\mid : 3$
20	-32	15	160	
0	126	-29	1360	$\mid\cdot 13$
0	78	-35	160	$\mid\cdot 21$
20	-32	15	160	
0	1638	-377	17680	$\mid : 13$
0	1638	-735	3360	III - II
20	-32	15	160	
0	126	-29	1360	
0	0	-358	-14320	

د په څټ اینوولو له لارې حل لاس ته راوړنه

$$-358x_3 = -14320$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 40}}$$
$$126x_2 - 29\cdot 40 = 1360$$
$$\Leftrightarrow 126x_2 = 2520$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 20}}$$
$$20x_1 - 32\cdot 20 + 15\cdot 40 = 160$$
$$\Leftrightarrow 20x_1 = 200$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 10}}$$
$$L = \{10 ; 20 ; 40\}$$

ازمايښت:

$$\frac{1}{2}\cdot 10 - \frac{4}{5}\cdot 20 + \frac{3}{8}\cdot 40 = 4$$
$$\Leftrightarrow 5 - 16 + 15 = 4 (w)$$
$$\frac{3}{4}\cdot 10 + \frac{3}{8}\cdot 20 + \frac{1}{5}\cdot 40 = 23$$
$$\Leftrightarrow \frac{15}{2} + \frac{15}{2} + 8 = 23 (w)$$
$$\frac{4}{5}\cdot 10 - \frac{1}{2}\cdot 20 + \frac{1}{4}\cdot 40 = 8$$
$$\Leftrightarrow 8 - 10 + 10 = 8 (w)$$

د کاروني يا استعمال بيلګې

د ټولراشنل فنکشن د فنکشن برابرون د شميرلو له لارې، چې څلور ټکي يې معلوم دي،

د ګاوس الګوريتم کارونه يا استعمال

د کاروني بيلګه۱:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{aligned}
P_1(1|4) &\Rightarrow f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 4\\
P_2(2|2) &\Rightarrow f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 2\\
P_3(4|4) &\Rightarrow f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 4\\
P_4(5|20) &\Rightarrow f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 20
\end{aligned}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	4	
1	2	4	8	2	II − I
1	4	16	64	4	III − I
1	5	25	125	20	IV − I
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	3	15	63	0	III − 3·II
0	4	24	124	16	IV − 4·II
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	0	6	42	6	
0	0	12	96	24	IV − 2·III
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	0	6	42	6	
0	0	0	12	12	

$\Rightarrow$

$$12a_3 = 12 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$6a_2 + 42a_3 = 6$$
$$\Leftrightarrow 6a_2 + 42 = 6 \mid -42$$
$$\Leftrightarrow 6a_2 = -36 \mid :6 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -6}$$

$$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -2$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 18 + 7 = -2$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 11 = -2 \mid +11 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 4$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 9 - 6 + 1 = 4$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 4 \mid -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x}}$$

د کارونپبیلکه ۲

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{aligned}
P_1\left(1 \middle| -\frac{11}{2}\right) &\Rightarrow f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -\frac{11}{2}\\
P_2\left(-1 \middle| \frac{9}{2}\right) &\Rightarrow f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = \frac{9}{2}\\
P_3(-2|8) &\Rightarrow f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 8\\
P_4\left(-3 \middle| \frac{5}{2}\right) &\Rightarrow f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	$-\frac{11}{2}$	$\vert\cdot 2$
1	−1	1	−1	$\frac{9}{2}$	$\vert\cdot 2$
1	−2	4	−8	8	$\vert\cdot 2$
1	−3	9	−27	$\frac{5}{2}$	$\vert\cdot 2$
2	2	2	2	−11	
2	−2	2	−2	9	II − I
2	−4	8	−16	16	III − I
2	−6	18	−54	5	IV − I
2	2	2	2	−11	
0	−4	0	−4	20	$\vert : (-2)$
0	−6	6	−18	27	$\vert : 3$
0	−8	16	−56	16	$\vert : 4$
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	−2	2	−6	9	III + II
0	−2	4	−14	4	IV + II
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	0	2	−4	−1	
0	0	4	−12	−6	IV − 2·III
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	0	2	−4	−1	
0	0	0	−4	−4	

$\Rightarrow$

$-4a_3 = -4 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$

$2a_2 - 4a_3 = -1$

$\Leftrightarrow 2a_2 - 4 = -1 \mid +4$

$\Leftrightarrow 2a_2 = 3 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$

$2a_1 + 2a_3 = -10$

$\Leftrightarrow 2a_1 + 2 = -10 \mid -2$

$\Leftrightarrow 2a_1 = -12 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$

$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -11$

$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 + 3 + 2 = -11$

$\Leftrightarrow 2a_0 - 7 = -11 \mid +7$

$\Leftrightarrow 2a_0 = -4 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2}}$$

د کاروني بیلګه ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|-16) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -16$$
$$P_2(2|11) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 11$$
$$P_3(4|-11) \Rightarrow \quad f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = -11$$
$$P_4(6|-9) \Rightarrow \quad f(6) = 216a_3 + 36a_2 + 5a_1 + 1a_0 = -9$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	−16	
1	2	4	8	11	II − I
1	4	16	64	−11	III − I
1	6	36	216	−9	IV − I
1	−1	1	−1	−16	
0	3	3	9	27	|: 3
0	5	15	65	5	|: 5
0	7	35	217	7	|: 7
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	1	3	13	1	III − II
0	1	5	31	1	IV − II
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	−8	
0	0	4	28	−8	IV − 2·III
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	−8	
0	0	0	8	8	

$\Rightarrow$

$$8a_3 = 8 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 + 10a_3 = -8$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 10 = -8 \,|\, -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -18 \,|\, : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -9}$$

$$a_1 + a_2 + 3a_3 = 9$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 9 + 3 = 9$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 6 = 9 \,|\, +6 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 15}$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -16$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 15 - 9 - 1 = -16$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 25 = -16 \,|\, +25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 9}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 9}}$$

د کاروني بيلګه۴ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$
\begin{array}{llcll}
P_1(-1|7) \Rightarrow & f(-1) & = & -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 & = 7 \\
P_2(-2|6) \Rightarrow & f(-2) & = & -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 & = 6 \\
P_3(3|1) \Rightarrow & f(3) & = & 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 & = 1 \\
P_4(-3|-2) \Rightarrow & f(-3) & = & -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 & = -2
\end{array}
$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	7	
1	−2	4	−8	6	II − I
1	3	9	27	1	III − I
1	−3	9	−27	−2	IV − I
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	4	8	28	−6	III + 4·II
0	−2	8	−26	−9	IV − 2·II
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	0	20	0	−10	
0	0	2	−12	−7	

$\Rightarrow$

$$20a_2 = -10 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{1}{2}}$$

$$2a_2 - 12a_3 = -7$$

$$\Leftrightarrow -1 - 12a_3 = -7 \mid +1$$

$$\Leftrightarrow -12a_3 = -6 \mid : (-12) \Leftrightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{2}}$$

$$-a_1 + 3a_2 - 7a_3 = -1$$

$$\Leftrightarrow -a_1 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow -a_1 - 5 = -1 \mid +5$$

$$\Leftrightarrow -a_1 = 4 \mid : (-1) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -4}$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 3 = 7 \mid -3 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 4}$$

Die Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

د پررته المانیژباره:د خیروني یا تابع برابرون

د کاروني بیلګه ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(2|22) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 22$$
$$P_2(4|44) \Rightarrow \quad f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 44$$
$$P_3(-4|4) \Rightarrow \quad f(-4) = -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_4(8|40) \Rightarrow \quad f(8) = 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + 1a_0 = 40$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	2	4	8	22	
1	4	16	64	44	II − I
1	−4	16	−64	4	III − I
1	8	64	512	40	IV − I
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	−6	12	−72	−18	III + 3·II
0	6	60	504	18	IV − 3·II
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	24	336	−48	$IV - \frac{1}{2}\cdot III$
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	0	288	−72	

$\Rightarrow$

$$288a_3 = -72 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{4}}$$

$$48a_2 + 96a_3 = 48$$
$$\Leftrightarrow 48a_2 - 24 = 48 \,|\, +24$$
$$\Leftrightarrow 48a_2 = 72 \,|\, : 48 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$$

$$2a_1 + 12a_2 + 56a_3 = 22$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 18 - 14 = 22$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 4 = 22 \,|\, -4$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = 18 \,|\, : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 22$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 18 + 6 - 2 = 22$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 22 = 22 \,|\, -22 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

Die Funktionsgleichung: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x$

د پېرته المانيژباره:د ځيرونبيا تابع برابرون

د کاروني بيلکه۶ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P_1(1|0) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 0$

$P_2(-1|-2) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -2$

$P_3(2|16) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 16$

$P_4(-3|-4) \Rightarrow \quad f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = -4$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	0	
1	−1	1	−1	−2	II − I
1	2	4	8	16	III − I
1	−3	9	−27	−4	IV − I
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	1	3	7	16	$III + \frac{1}{2} \cdot II$
0	−4	8	−28	−4	
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	3	6	15	|: 3
0	0	8	−24	1	|: 8
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	1	2	5	
0	0	1	−3	0	IV − III
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	1	2	5	
0	0	0	−5	−5	

$\Rightarrow$

$-5a_3 = -5 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$

$a_2 + 2a_3 = 5$

$\Leftrightarrow a_2 + 2 = 5 \,|\, -2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 3}$

$-2a_1 - 2a_3 = -2$

$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -2 \,|\, +2$

$\Leftrightarrow -2a_1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 0}$

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$

$\Leftrightarrow a_0 + 3 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 0 \,|\, -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -4}$

$\underline{\underline{f(x) = x^3 + 3x^2 - 4}}$

د کارونې بيلګه ۷ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|1) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 1$$
$$P_2(2|0) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0$$
$$P_3(-2|4) \Rightarrow \quad f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_4(3|9) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 9$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	1	
1	2	4	8	0	II − I
1	−2	4	−8	4	III − I
1	3	9	27	9	IV − I
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	−3	3	−9	3	III + 3 · II
0	2	8	26	8	IV − 2 · II
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	0	12	12	0	
0	0	2	12	10	$IV - \frac{1}{6} \cdot III$
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	0	12	12	0	
0	0	0	10	10	

$\Rightarrow$

$$10a_3 = 10 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$12a_2 + 12a_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 12a_2 + 12 = 0 \mid -12$$
$$\Leftrightarrow 12a_2 = -12 \mid : 12 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -1}$$

$$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -1$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 3 + 7 = -1$$
$$\Leftrightarrow a_1 + 4 = -1 \mid -4 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -5}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 5 - 1 + 1 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 5 = 1 \mid +5 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 6}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6}}$$

د کارونې بیلگه ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|6) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 6$$

$$P_2(3|-4) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -4$$

$$P_3\left(-\frac{1}{2}\middle|\frac{45}{8}\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{2}a_1 + 1a_0 = \frac{45}{8}$$

$$P_4\left(-\frac{3}{2}\middle|-\frac{77}{8}\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}a_3 + \frac{9}{4}a_2 - \frac{3}{2}a_1 + 1a_0 = -\frac{77}{8}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	6	
1	3	9	27	−4	
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{45}{8}$	$\|\cdot 8$
1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{27}{8}$	$-\frac{77}{8}$	$\|\cdot 8$
1	1	1	1	6	
2	3	9	27	−4	II − I
8	−4	2	−1	45	III − 8·I
8	−12	18	−27	−77	IV − 8·I
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	−12	−6	−9	−3	III + 6·II
0	−20	10	−35	−125	IV + 10·II
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	42	147	−63	|: 21
0	0	90	225	−225	|: 45
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	2	7	−3	
0	0	2	5	−5	IV − III
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	2	7	−3	
0	0	0	−2	−2	

$\Rightarrow$

$$-2a_3 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 - 7a_3 = -3$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 7 = -3 \mid -7$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -10 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -5}$$

$$2a_1 + 8a_2 + 26a_3 = -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 - 40 + 26 = -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 - 14 = -10 \mid +14$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = 4 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 2 - 5 + 1 = 6$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 2 = 6 \mid +2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 8}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کاروني یا استعمال بیلګه۹ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1\left(1 \mid -\frac{9}{2}\right) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -\frac{9}{2}$$

$$P_2\left(-1 \mid \frac{11}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = \frac{11}{2}$$

$$P_3\left(3 \mid -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -\frac{5}{2}$$

$$P_4\left(-\frac{5}{2} \mid -8\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{125}{8}a_3 + \frac{25}{4}a_2 - \frac{5}{2}a_1 + 1a_0 = -8$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	$-\frac{9}{2}$	$\mid \cdot 8$
1	−1	1	−1	$\frac{11}{2}$	$\mid \cdot 8$
1	3	9	27	$-\frac{5}{2}$	$\mid \cdot 8$
1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$	$-\frac{125}{8}$	−8	$\mid \cdot 8$

8	8	8	8	−36	
8	−8	8	−8	44	II − I
8	24	72	216	−20	III − I
8	−20	50	−125	−64	IV − I
8	8	8	8	−36	|: 4
0	−16	0	−16	80	|: 4
0	16	64	208	16	|: 4
0	−28	42	−133	−28	|: 7
2	2	2	2	−9	
0	−4	0	−4	20	
0	4	16	52	4	III + II
0	−4	6	−19	−4	IV − II
2	2	2	2	−9	
0	−4	0	−4	20	
0	0	16	48	24	|: 8
0	0	6	−15	−24	|: 3

$\Rightarrow$

$$-11a_3 = -11 \mid : (-11)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 + 6a_3 = 3$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 6 = 3 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -3 \mid : 2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{3}{2}}$$

$$-4a_1 - 4a_3 = 20$$
$$\Leftrightarrow -4a_1 - 4 = 20 \mid +4$$
$$\Leftrightarrow -4a_1 = 24 \mid : (-4)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$$

$$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -9$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 - 3 + 2 = -9$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 13 = -9 \mid +13$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 = 4 \mid : 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کاروني يا استعمال بيلګه۱۰ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|25) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 25$$
$$P_2(-1|-49) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -49$$
$$P_3(3|27) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 27$$
$$P_4(5|5) \Rightarrow \quad f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 5$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	25	
1	−1	1	−1	−49	II − I
1	3	9	27	27	III − I
1	5	25	125	5	IV − I
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	2	8	26	2	III + II
0	4	24	124	−20	IV + 2·II
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	0	8	24	−72	
0	0	24	120	−168	IV − 3·III
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	0	8	24	−72	
0	0	0	48	48	

$\Rightarrow$

$$48a_3 = 48 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$8a_2 + 24a_3 = -72$$
$$\Leftrightarrow 8a_2 + 24 = -72 \mid -24$$
$$\Leftrightarrow 8a_2 = 96 \mid :8 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -12}$$

$$-2a_1 - 2a_3 = -74$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -74 \mid +2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 = -72 \mid :(-2) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 36}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 25$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 36 - 12 + 1 = 25$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 25 = 25 \mid -25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x}}$$

پوښتنې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 + 0x_3 = 28 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 30 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 = 32 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{13;15;17\}$	$\begin{vmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 12 \\ 3x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 11 \\ 0x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{3;2;1\}$
$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 - x_3 = 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{15;12;10\}$	$\begin{vmatrix} -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -8 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{-1;3;2,5\}$
$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 23 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{5;3;1\}$	$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 20 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{5;3;1\}$

$$\begin{vmatrix} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -6 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -21 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 3 & -2 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & -4 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & -6 & 2 & -21 \end{array} \Rightarrow L = \{1;-1;2;-1\}$$

$$\begin{vmatrix} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 - 8x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - 6x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ x_4 = 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline -2 & 3 & -4 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & -8 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -1 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \Rightarrow L = \{-1;-1;0;5\}$$

د لاس ته راوړنې د کنترل له پاره دې ازمايښت وشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هورنر- شيما Das Horner – Schema

د دې له پاره چې د جګودرجو ټولراشنلځيرونو يا که غواړئ توابعو ګراف وکښلای شو، بايد يو ارزښت جدول برابرکړو. دا به ډېر وخت اوځای ونيسي، چې د دې له پاره اړين ځيره ارزښتونه يا فنکشنارزښتونه وشميرو.

د هورنر – شيما دا شميرنې ډېرې ساده کوي.

بيلګه : دريمه درجه ټولراشنل فنکشن يا راشنل ځيرونه

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

د x د ډېرځله نوکانو بندولو له لاربېمنځ ته راځي:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x\left[a_3x^2 + a_2x + a_1\right] + a_0 = \underbrace{x\underbrace{\left[x\left(\underbrace{a_3x + a_2}_{e_2}\right) + a_1\right]}_{e_4} + a_0}_{E}$$

که سرې غواړي چې د $x = x_1$ له پاره فنکشن ارزښت وشميري، نوکی دی شي سرې په لاندې ډول له دننه دباندې لورته مخ ته لاړ شي:

-- ګرد نوکان وشميري

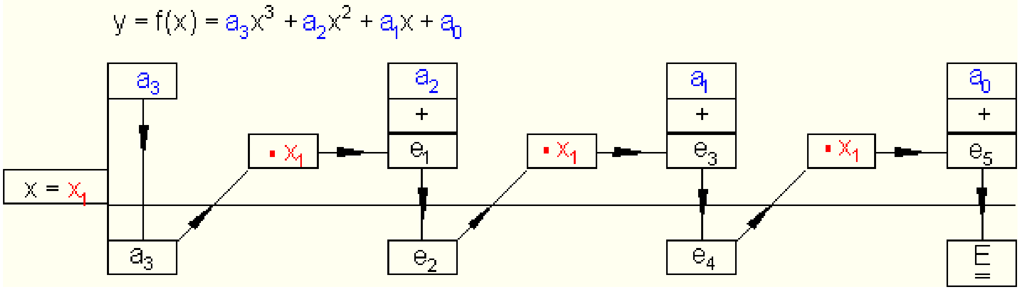
--منځ لاس ته راوړنه (ښه ليکنه به يې داسې وي: منځلاس –ته-راوړنه) د x_1 سره ځل کړي او a_1 ته يې ور زيات کړي

--لاس ته راوړنه د x_1 سره ځل کړي او a_0 ته يې ور زيات کړو

دا شميرنکارونې يا که غواړئ شميرنعمليې کيدی شي ځيره ډوله يا شيماتيکي داسې انځور کړو:

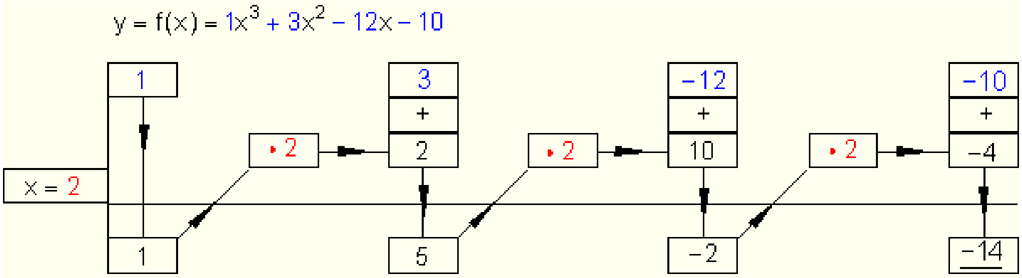
(c) ketabton.com: The Digital Library

Allgemeines Schema: تولیزه بنه



بیلګه : $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 12x - 10$

د $x = 2$ له پاره دې د $y = f(2)$ ارزښت د هورنر – شیما له لارې وشمیرل شي.



نولاس ته راځي یا باورلری: $y = f(2) = \underline{-14}$

د یوه دریمي درجې پولینوم له پاره- چې غواړو ګراف يې رسم کړو یا کاږو- باید یو ارزښتجدول جوړکړو.

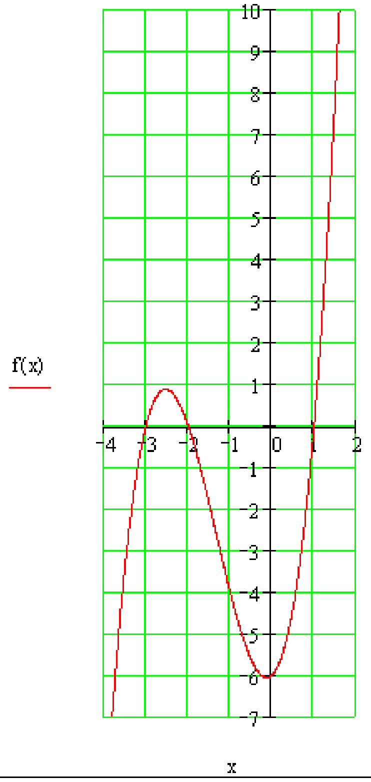
$y = f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 \quad D_f = \{x \mid -4 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$

$a_3 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_1 = 1 \quad a_0 = -6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

x = −4	1	4	1	−6	
		−4	0	−4	
	1	0	1	−10	= f(−4)
x = −3	1	4	1	−6	
		−3	−3	+6	
	1	1	−2	0	= f(−3)
x = −2	1	4	1	−6	
		−2	−4	+6	
	1	2	−3	0	= f(−2)
x = −1	1	4	1	−6	
		−1	−3	+2	
	1	3	−2	−4	= f(−1)
x = 1	1	4	1	−6	
		+1	+5	+6	
	1	5	6	0	= f(1)
x = 2	1	4	1	−6	
		+2	+12	+26	
	1	6	13	20	= f(2)
x = 3	1	4	1	−6	
		+3	+21	+66	
	1	7	22	60	= f(3)
x = −2,5	1	4	1	−6	
		−2,5	−3,75	+6,875	
	1	1,5	−2,75	0,875	= f(−2,5)

(c) ketabton.com: The Digital Library



ارزښتجدول؛

x	-4	-3	-2,5	-2	-1
f(x)	-10	0	0,875	0	-4
x	0	1	2	3	
f(x)	-6	0	20	60	

د لښتي- یا جدولارزښت سره کیدی شی په نږدې توګه ګراف وکښل شي.

که د ګراف کښلو کې څرګنده شي،چې یوبل ځای هم پاتې دی،دا کیدی شي هر وخت د هورنرشیما په مرسته پیدا شي.

ګراف په لاندې x – ځایونوکې صفر ارزښتونه لري: -3; -2;1

دا y – محور په -6 کې غوڅوي.

که په کښلوکې څرګنده شي چې یوبل ځای هم پاتې دی، نو دا کیدی شي د هونرشیما په مرسته پیدا کړو،د بیلګېپه توګه(0,5) f

	1	4	1	-6	
x = 0,5		+0,5	+2,25	+1,624	
	1	4,5	3,25	-4,375	= f(0,5)

د پولینوم وېشني پر ځای کیدی شي د ټولراشنل تابع درجه د هورنر شیما له لارې هم کمه شي.
موږ د هورنر شیما څیړو:

موږ بیرته تابع ترڅیرني لاندې نیسو

$f(x)=x^3-x^2-5x+6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چيرته چي x1=2يو صفرځای دی.

د f(x)=x³-x²-5x+6 لپاره د هورن شيما د x1=2 سره

موخه د ضريب (x-2) له نوکانو وتنه ده. $\begin{array}{cccccc} & 1 & -1 & -5 & 6 \\ x=2 & \downarrow & \underline{2} & \underline{2} & \underline{-6} \\ & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}$	په دريمه ليکه کې دري عددونه د وېش نتيجو لپاره هم د پاتي پولينوم ضريبونه بللکيږي. $f(x) = \underbrace{(x-2)}_{\text{Linearfaktor}} \underbrace{(1 \cdot x^2 + 1 \cdot x - 3)}_{\text{Restpolynom}}$ کربنيز ضريب پاتي پولينوم

د f (x) د نورو صفرځايونو لپاره د پاتي يا باقي پولينوم صفرځايونه شميرو. دا د اړونده مربع مساوات د حل له لارې کيږي.

نتيجه يې د لاندې پولينوم وېش بېلګې سره وګورې.

بیلګه: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^2 - x - 4$ چيرته چي $x_1 = -2$ يو صفرځای دی.

$\begin{array}{ccccc} & \frac{1}{4} & 1 & -1 & -4 \\ x=-2 & \downarrow & -\frac{1}{2} & -1 & 4 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -2 & 0 \end{array}$	باقي يا پاتي پولينوم: $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$ $f(x) = (x+2)\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right)$ د مربع مساوات حل $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$ له دی لاس ته راځي او معکوس: x2=2 او x3=-4

بیلګه:

$f(x) = -x^3 + 7x - 6 = -x^3 + 0 \cdot x^2 + 7x - 6$ چيرته چي $x_1 = 1$ يو صفرځای دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

باقي پولينوم:-1.x-1.x+6 $f(x)=(x-1)(.x^2-x+6)$ د مربعيز مساوات حل: $.x^2-x+6$له دي لاس تره اوپه څت يا برعکس $x2=2$ او$x3=-3$	$\begin{array}{c\|cccc} & -1 & 0 & 7 & -6 \\ x=1 & \downarrow & -1 & -1 & 6 \\ \hline & -1 & -1 & 6 & 0 \end{array}$

لکه بيلګه چې ښايي، د هورن شيما سره د پاتې پولينوم ټاکنه ساده ده نسبت د پولينوم وېش ته.

دا ټولې پورته تلنلارې مو د مربع مساوات حل ته لاربښودوي. که دا ونه توانيږو، نو د نومريکې تلنلارو څخه کار اخستل کيږي، چې دا دلته نه څېړل کيږي.

تمرينونه: د پولينوم وېش...

د لندې ترمونو لپاره د پولينوم وېش وکاروی:

لومړی - $\left(x^3+2x^2-5x-6\right):(x+1)$ دیم - $\left(2x^3-14x-12\right):(x-3)$

دريم - $\left(3x^3-15x^2-51x+63\right):(x-7)$ څلورم - $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+6\right):(x+2)$

پنځم - $\left(x^3+\frac{11}{2}x^2+5x-4\right):(x+2)$ شپږم - $\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3\right):(x-2)$

اوم - $\left(x^3-\frac{5}{4}x^2-\frac{23}{4}x+\frac{3}{2}\right):(x-3)$ اتم - $\left(x^3-\frac{5}{3}x^2-\frac{47}{3}x-5\right):(x+3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم - $\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3\right):(x+3)$ لسم - $\left(3x^3-15x^2-51x+63\right):(x-1)$

تمرینونه: د ټول راشنل توابعو صفرځایونه.

تمرین ټولراشنل تابع **IV**

د صفرځایونو ټاکنه له مختلفو لارو څخه.

د یوه تاسو ته مناسب قانو له مخې د ټولراشنل توابعو صفرځایونه وټاکئ. د x محور سره د ګراف غوڅټکي و ټاکي او د تابع مساوات د کرښیزو ضریبونو د ضرب په څیر انځور کړئ.

اول - $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{13}{2}x^2+18$ دویم - $f(x)=x^3-4x^2+x+6$

دریم - $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1$ څلورم - $f(x)=-\frac{3}{2}x^4+\frac{75}{2}x^2-216$

پنځم - $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{4}x+3$ شپږم - $f(x)=-\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x$

اوم - $f(x)=3x^4-3$ اتم - $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x-2$

نهم - $f(x)=2x^3-4x^2-16x$ لسم - $f(x)=2x^3+4x^2-26x+20$

پوښتنې

د ټول هوښیار یا راشنل توابعو محورغوڅټکي ګرافونه

صفرځایونه وشمیرئ او ګرافونه وکاږئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د لاندې توابعو صفرځايونه وشميرئ

الف- $f(x)=x^4+2x^3+x^2$ ب - $f(x)=x^2-6x+9$

پ - $f(x)=\left(x^2-25\right)\left(\frac{1}{2}x+4\right)$ ت - $f(x)=x^6-x^4$

ټ - $f(x)=3x\left(\frac{2}{3}x-2\right)(-2x+3)$ ث - $f(x)=3\left(x^2+4\right)\left(x^2-4x+10\right)$

دويم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځايونه وشميرئ

الف- $f(x)=x^4-6x^2+5$ ب - $f(x)=4x^4+6x^2-\frac{7}{4}$ پ - $f(x)=x^6-8x^4+20x^2$

دريم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځايونه وشميرئ

الف- $f(x)=2x^3+4x^2-2x-4$ ب - $f(x)=x^3-12x+16$

پ - $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$ ت - $f(x)=2x^3-10x^2-4x+20$

ټ - $f(x)=x^4-\frac{11}{4}x^2-\frac{9}{4}x-\frac{1}{2}$ ث - $f(x)=-3x^3+3x^2-3x+3$

ج - $f(x)=-5x^3-10x^2-\frac{5}{2}x-5$ چ - $f(x)=x^4+3x^3+5x^2+9x+6$

څلورم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځايونه وشميرئ

الف- $f(x)=-3x^4+15x^2-12$ ب - $f(x)=x^4-x^3-2x^2$

پ - $f(x)=-2x^3+2x^2+16x-24$ ت - $f(x)=\left(x^2-6x+9\right)(x-4)$

ټ - $f(x)=x^6-3x^4-4x^2$ ث - $f(x)=x^4-25x^2-60x-36$

پنځم: د لاندې ټولراشنل توبعو ګرافونه په يوه مناسب پروتولاړ يا کواودينات سيتم کې وکاږئ. د دې لپاره يو ارزښت جدول واچوئ او محور غوښتکي وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- $f(x)=x^3-6x^2+9x \quad D_f=\{x\,|\,-0{,}5\le x\le 4{,}5\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-2 \quad D_f=\{x\,|\,-3{,}5\le x\le 2{,}5\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f(x)=x^3-6x^2+9x-2 \quad D_f=\{x\,|\,-0{,}2\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \quad D_f=\{x\,|\,-3\le x\le 3{,}5\}_{\mathbb{R}}$

ټ - $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+2 \quad D_f=\{x\,|\,-2{,}5\le x\le 3{,}5\}_{\mathbb{R}}$

ث - ج - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x \quad D_f=\{x\,|\,-0{,}2\le x\le 8\}_{\mathbb{R}}$

شپږم: د لاندې توابعو صفرځايونه وټاکئ او ګراف يې تر شونې پولې پورې ښه وکاږئ. ارزښتجدول کيږدئ او ځنې ارزښتونه د جبشميري سره وشميرئ. ځنې صفرځايونه اټکل کړئ او که شوني وي، صفرځايونه وشميرئ.

الف- $f(x)=x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{10}{3}x-1$ ب - $f(x)=0{,}01(x^3-x^2-x+1)$

پ - $f(x)=0{,}1x^3-0{,}3x^2-9x-10$ ت - $f(x)=(x-1{,}7)(x^2-3)$

تر ۶۴۰ پورې دلته محورغوځتېکيراځي؟

اړيکي "Relation":

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

یوه اړیکۀ له دوه شیانو جوړه ده:

١ – یوه وینابنه

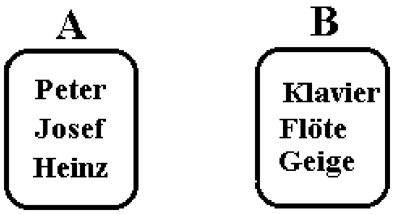
٢ – جوړه، چې دا وینا یې پوره کوي(چې وینابنه یوه رښتیا وینا کوي)٠

بیلګه :

دیوې کورنۍ د غړو ډیرۍ A دې ورکړ شوې وي او B د لوبو یا موزیک الو ډیرۍ٠

B	A
فوټبال	سپین
هاکي	
زیرګل	
والبال	
کوچۍ	

یا دا لاندې



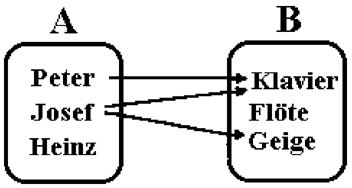
موزیک الي		د کسانونومونه:
پیانو شپیلی ګایګي	 	پتر یوسف هاینځ

د دواړو ډیریو په منځ کې یوه بینار وینابنه دې یوه وینابنه وي، چې سرۍ a الهbاندې لوبې کوي٠

جوړه ، چې وینابنه پوره کوي، کیدی شي د بیلګې په توګه لاندې جوړې وي:

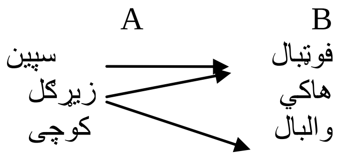
(c) ketabton.com: The Digital Library

پتر په کلاویر لوبه کوي، یوسف په کلاویر لوبه کوي ، یوسف په ګایګي لوبه کوي، د ځیرې په توګه اړیکې داسي انځوریږي:



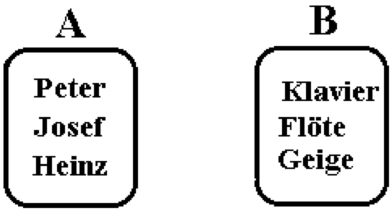
a spielt das Instrument b

یا دا لاندې



نورې بیلګې

موږ د مخه دا لاندې ډیرې منځ ته ر اوړې:

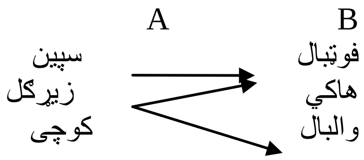


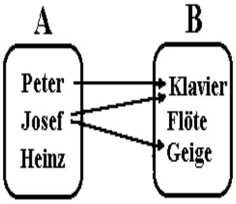
د دواړو ډیریو په منځ کې د اړیکو په ځیر موږ اړیکې «په اله لوبه کوي» راوړې یا دا لاندې

فوټبال هاکي والبال	سپین زیړګل کوچې

(c) ketabton.com: The Digital Library

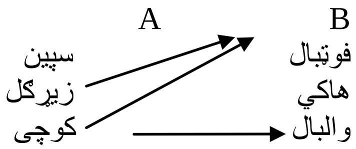
سرلیک

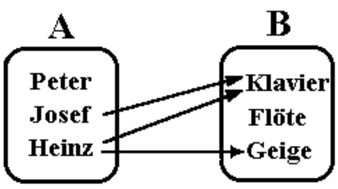




a spielt das Instrument b

په پورته کې ښوول کیږي، چې څوک په کومه اله لوبه کوي.
موږ اوس دواړه ډیری A او B ساتو ، مګر د دوي ترمنځ نوې اړیکې غواړو وپیژنو یا تعریف کړو:
بینار اړیکې دې اوس داسې وي، چې « اله لري» او « په اله باندې لوبه کوي» نور نهوي٠
د دې برسیره دې اړیکې « اله لري » لاندې درې جوړې ولری :
هاینځ کلاویر لري
هاینځ یوه ګایګې لري
یوسف یوه کلاویر لري
د ځیرې په ځیر انځور یږي:





a besitzt das Instrument b

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدلکیږي، چې د دوه ډیریو په منځ کې مختلفې اړیکې منځ ته راتللی شي یا ټینګیدلی شي٠

شننیزه انځورونه

مخ ته تیرو مخونوکې مو زده کړل، یوې اړیکې پورې دوه شیان اړه لري: یوه وینا بڼه او یوه جوړه، چې دا وینابڼه پوره کوي٠

کله اړیین نه دي یا نه شي کیدی، چې ټولې جوړې ورکړای شو، کومې چې په یوه اړیکې پورې اړه لري٠

بیلګه ۱

ډیری $A = \{ 1,2,3\}$ او ډیری $B=\{1,2,3\}$ دې ورکړ شوي وي٠ وینابڼه کوچنی له یا لنډ >

هر زده کوونکی پوهیږي، چې جوړې $(1/2),(1/3)$ او $(2/3)$ دا وینابڼه پوره کوي٠ جوړو ګڼلو ته اړنه یو، بلکې دا د وینابڼې مخ ته پرتې ډیری A او B ته٠

بیلګه ۲

په ځانګړې توګه دا هلته له پامه غورځول کیږي، چې ټولې جوړې وشمیري، کله چې وینابڼو ته مخ ته پرتې ډیری یا ډیرې لویې وي او یا ناپای٠

بیلګه : ډیری : $A = B = \{1, 2, 3, \ \dots \}$

وینابڼه: له هغې، چې لیدل کیږي، چې بیخي ناشوني ده، چې ټولې جوړې وشمیرل شي، چې دا وینابڼه پوره کوي٠

بیلګه ۳

کله کله اړیکه بیخي نه شي انځوریدلی٠

بیلګه : ډیری نارینه =M او ښځینه =F وینابڼه کې راوستل شي، چۀ « واده له سره »٠

دا څوک نه شي ګڼلی، چې څوک له چا سره واده دی او دا نه په برخه اخستونکو ډیریو M او F کې ورکړ شوې٠

د یوې اړیکې تیوپ یا ډول

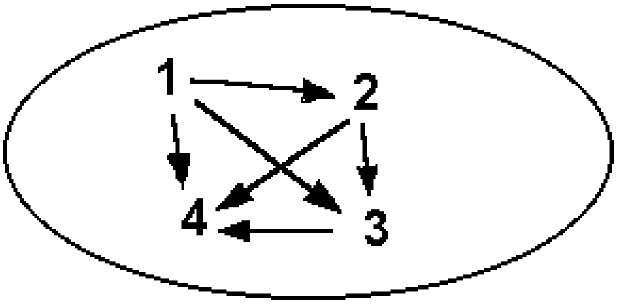
اړیکه په دوه ګروپونو ویشل کیدی شي٠

۱ – ددوه ډیریو ترمنځ اړیکې

۲ – د یوې ډیری په دننه کې اړیکې

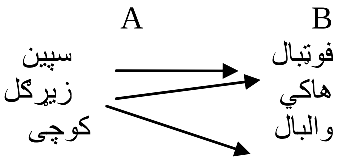
(c) ketabton.com: The Digital Library

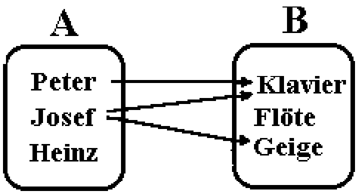
تیوپ ۱ – مورې وپیژند
د تیوپ ۲ - لپاره بیلګه لاندې اړیکي دي(چې په ځیره کې کښل شوي دي):



x له y څخه کوچنی دي

د مخ ته تیرو بیلګو په مخامخوالي یا تضاد دلته د ډیریو د توکو ترمنځ اړیکی پرتې دي
بنسټډیری ،موخه ډیری یا تر مخورشو پسي ورشو
Erklärungروښانه ونه
د ډیری A (بنسټډیری) او B (موخه ډیری) په اړیکو کې په ریښتوني د مخ ته ورشو (پتر ،یوس) همداسي ورپسي ورشو (کلاویر، ګایګې) اړیکې هغه توکي جوړوي، چې په کارونه کې ونډه لري۰
A د لوبغاړو نومونه دي او B د لوبو نومونه دي





بنسټډیری : {سپین ، زیرګل، کوچی } Grundmenge:
موخه ډیری : { فوتبال ، هاکي ، والیبال } Zielmenge

(c) ketabton.com: The Digital Library

Vorbereich ترمخورشو {Peter, Josef} :
Nachbereich ورپسي ورشو {Klavier, Geige} :

ځني شميرپوهان دا مخورشو او همداسي پسي ورشو، تعريفډيرى ،
ارزښتډيرى يا تعريفورشو همداسي ارزښتورشو بولي

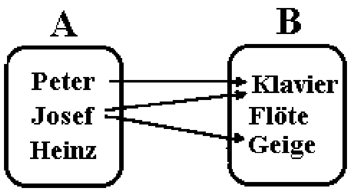
Relationstafelد اړيکو تخته

تراوسه مو تولي اړيکي د غشيدياګرام له لارې انځور کړل٠ يو شونوالى يا امکانات يې
د اړيکو تختې له لارې انځورونه ده:

د دې لپاره د بنسټډيرى او موخه ډيرى توکي په يوه جدول کې ليکو ٠ د بنسټډيرى توکي په
پورته ليکه کې ليکو اود موخه ډيرىتوکي په کيڼ درځ يا کينه متمه کې ليکو ٠

په صليبونه سره هغه پيژند يا تعريف ورکول کيږي، چې د موخه ډيرى
په توکي باندې د بنسټډيرى يو توکى تنظيم شوى وي٠

د بيلګي په توګه بيرته همغه د ساز الو سره بيلګه راوړو



په دې پورې اړونده اړيکتخته په لاندې ډول ليدل کيږي

	Peter	Josef	Heinz
Klavier	x	x	
Flöte			
Geige		x	

د کواوردينات سيستم انځوربنه

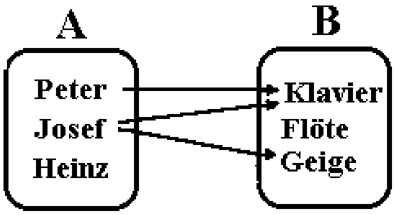
(c) ketabton.com: The Digital Library

تراوسه مو اړيکې د غشيدياګرام او اړيکتختو له لارې انځور کړې۰ اوس يو دريم شوونوالی يا دريمه شوونتيا يا امکان غواړو وپيژنو:
انځورونه په يوه کواوردیناتسیستم کې :

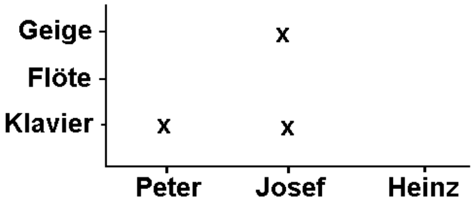
د بنسټډيرۍ توکي د پروتمحور په نخښنه کوو او د موخه ډيرۍ توکي په ولاړ محور په نخښنه کوو ۰
د ټکو سره هغه د بنسټډيرۍ توکي او ورسره د تنظيمډيرۍ تنظيم توکو ټاکلي وي

بيلګه

د بيلګی په توګه بيرته هغه بيلګه د لوبو يا موزيک الاتو سره ټاکو:
دلته په دې لاندې الماني ليکنپيا ښه يې :خيره بسيا کړی شو

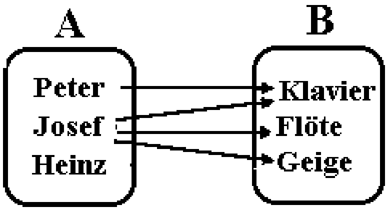


په کواوردیناتسیستم کې انځورونه داسې ليدل کيږي



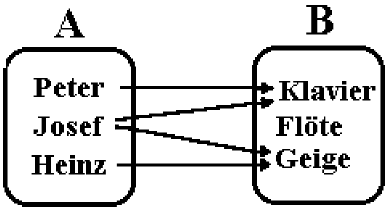
کڼ پوره کيدونکی اړيکې :
د Aځخه هرتوکی کم له کمه د B په يوه توکي تنظيميږي(پيژندورشو يا مخ ته ورشو او بنسټيزه ډيری کټمټ دي)
ښي پوره اړيکې : دB هر توکی کم له کمه د ځيرې په توګه منځ ته راځي (پسې ورشو او موخه ډيرې کټمټ دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library



rechtsvollständig

ښی پوره



Linksvollständig

کیڼ پوره

ښی یواځنی اړیکې

د ښنسټډیری (کیڼ)   هر توکی په زیات ترزیاته د موخه ډیری (ښی) باندې تنظیمیږي٠

پام مرسته : غشي ښي « ښیلوریز) یواځنی دي٠

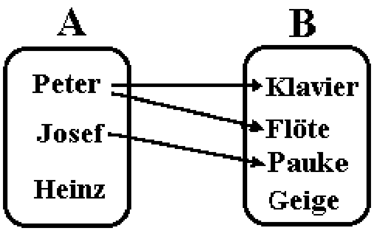
کیڼ یواځنی اړیکې :

د ښی ډیری هر توکی زیات ترزیاته یو وار د یوې ډیری (کیڼډیری) د خیرې په ډول منځ ته راځي٠

پام مرسته : غشي ښي لورته یواځني دي٠

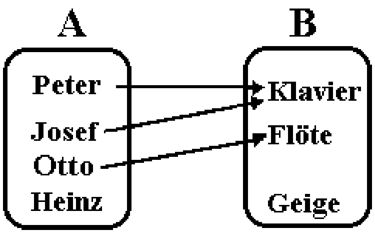
ناټیکوالی!

یا دا لاندې، چې د توپونو په ځای موزیک الې ورکړ شوي دي



linkseindeutig

کیڼ یواځنی



rechtseindeutig

ښی

یواځنی،   .

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو کينپوره کيدونکی او بنی يواځنی اړيکي يواځنی اړيکي بلل کيږي (فنکشن او يا ځيروني)

په غشيدياګرام کي يو فنکشن په دي پيژندل کيږي ، چي په هر توکی تيک يو غشی پيل کيږي

په ښه اړيکي : په خپ اړيکو کي

١ – مخ – او پسي ورشوګاني سره بدليږي(پيژنديری او ارزښتډيری)

٢ – اوښتوني سره بدليږي

رفلکسيو اړيکي reflexive relations

دياګرام : په هرتوکي يوکړئ غشی شته

رفلکسيو اړيکي :

د رفليکسو اړيکو پيژند : د هرو برابرو توکو جوړه اړيکو پوري اړ ج لري

د فرمو په ځير يي ليکنه : د تولو a لپاره باور لري:
aRa

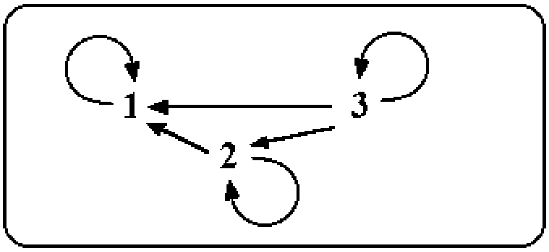
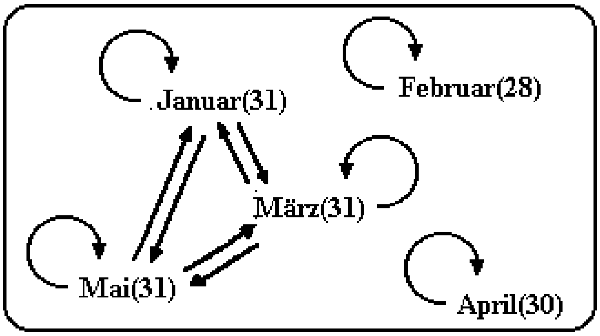


Bild: Die reflexive Relation ≥

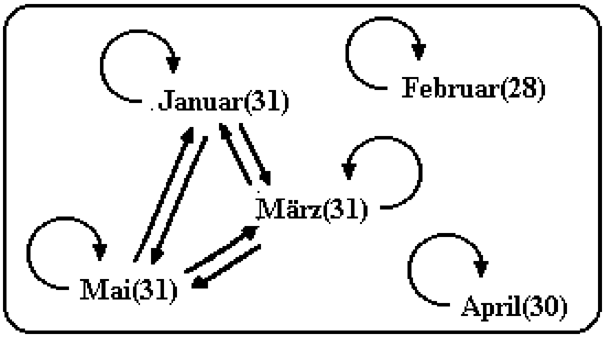
انتيرفلکسيو(ايرفلکسيو اړيکي
Antireflexive
(irreflexive)
Relationen

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند : په انتيرفلکسيو اړيکو کې په هيڅ توکي کړۍ غشی نه شته
د همغه توکي جوړه اړيکو پورې اړوند نه دی، يا په اړيکو ونده نه لري۰
د فرمول په توگه ليکل يي : ¬(aRa)



سيومتريکي اړيکي : symetric relations
هر غشي ته په څټ غشی شته
که (a,b) اړيکو پورې اړه ولري ، نو (b,a) هم په اړيکو پورې اړه لري۰
د سيومري اړيکو څيره: « همغومره ورځې لري لکه»



انتيسيومتري اړيکي: Antiasymetric reltions
د انتيسيومتري اړيکو دياگرام : په څټ غشی نه شته ۰
که (a,b) په اړيکو اړه ولري،نو (b,a) په اړيکو اړه نه لري، مگر که a = b
وي۰

فرمول: a = b   <= a R b /\ b R a

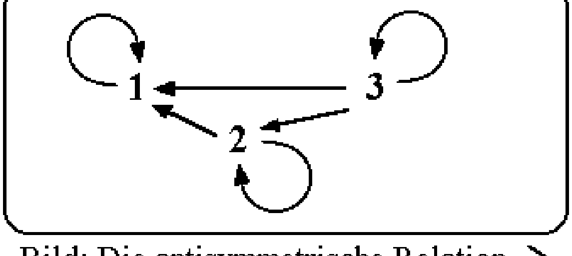


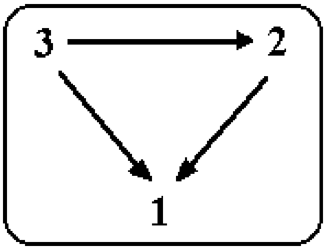
Bild: Die antisymmetrische Relation $\geq$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Antiasymetric reltions: ناسیومتریک اړیکي پورته څېره

اسيومتريکي اړيکي
asymetric relations (Asymmetrische Relationen)

د اسیومتريکي اړيکو دياګرام نه په ښت غشی لري او نه کړي غشی لري٠
د اسيومتريکي اړيکو پيژند: انتيرفليکسيو او انتيسيومتريکي اړيکي
فرمول : ¬(bRa ⇒ aRb

څېره: اسيومتري اړيکي	

خیره کونه یا توابع Funktionen

p

يادونه: په انرېزي کي mapping د او الماني کي DieAbbildung په نامه ن,مولشوي، چي پښتومانا يې خيرونه يا خيره کونه ده.

فنکشندوه اوښتونيا واريابلېلري، چي يوه خپلواکه اوبله يپواکه ده. له دېام له د فنکشن لهپاره ناسمد تابع نومورکړشويدی.

په رياضي يا شميرپوهنه کې خيرونه يا توابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

په شمیرپوهنه کې طبیعي ، تخنیکي یا هم نورو ورځنیو کارونو کې زیات وخت یوه لویه د بلې لوي په واک کې وي یا که غواړئ د هغې تابع وي، لکه د بیلګې په توګه د یوه موټر د بنزین سوزول یا استعمالول د هغه د تللې چټکتیا یا سرعت په واک کې یا تابع دی. دا ډول ساده اړیکې مو پخوا هم لوستلي او ګرافیکي مو په یوه کواوردینات – یا پروتولاړسیستم کې انځور کړي.

بیلګې:

د یوه شي یا جنس قیمتت د هغه د خرڅ شوې ډیرئ یا سټ په واک کې دی یا تابع دی.

ټوله دباندنۍ تودوخي د ورځې د وخت په واک کې ده.

د یوه بایسکلځغلونکي وهلې لار په مساوي چټکتیا یا سرعت د تلنې وخت په واک کې ده.

د موټر د بریک لار په روښانه توګه د هغه د چټکتیا په واک کې ده.

د یوه کوچني لوبدنه د هغه د عمر په واک ده.

د یوه ریاضي ازموینې نمرې د لاس ته راوړول ټکو په لاس کې ده.

د یوې بډایئ د ګټې قیمت یا لاس ته راوړنه د په د مخه ټاکلې ګټې سره دوخت تیرېدنې په واک کې ده.

تمرین ۱ : د داسې یو په واکوالي یا تابعیت لپاره نورې بیلګې هم پیدا کړئ.

له پورته بیلګې څخه لیدل کیږي، چې هر دوه لویې سره تنظیمیږي.

ډیرئ یا سټ ← وخت خرڅشوې سټ په قیمت اغیزه لري.

د ورځې وخت ← تودوخي. د ورځې وخت په اندازه شوې تودوخي اغیز لري.

د لاس ته راړلو ټکو تعداد یا ګنون ← نمرې د یوې ازموینې نمرې د لاس ته راړلو ټکو اغیزمن کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين ۲ : د پاتې بيلګو لپاره او د هغو لپاره چې په تمرين ۱ کې مو ميندلي اړيکې پيدا کړئ.

دا يو له بل سره تنظيم شوي لويې متحولې(اووښتوني يا **Variablen**) بلل کيږي.

دلته دې دې ته پام وشي، چې کوم په واکوالی يا تابعيت د دوي په منځ کې شتون لري.

د رياضي نمرې د ښوونکي له نظره د لاس ته راوړو ټکو په واک کې دي، مګر نه د نمرو د ټکو په واک کې.

سړی نمرې د بلواک يا تابع متحولو په حيث هم ښايي او د ټکو تعداد د خپلواک متحولو په حيث ښايي.

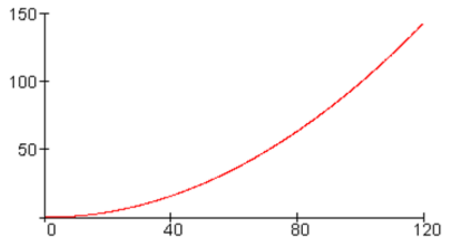
د ټکو او نمرو په منځ کې يو فنکشن يا بلواکيزې يا که غواړئ تابعيتي اړيکې شتون لري.

لکه د مخه درسونو څخه چې پوهيږو، ډېر امکانات شتون لري چې د دوه متحولو ترمنځ تابعيتي اړيکې تشريح کړو يا انځور کړو.

د مختلفو چټکتياو لپاره د بريک لار اندازه کيږي او يو ارزښت جدول ترتيبيږي.

چټکتيا په km/h(x)	20	40	60	80	100	120
د بريکنيولو لار په m(y)	4	16	36	64	100	144

که د جدول ارزښتونه په يوه پروت ولاړ – يا کواوردينات سيستم کې وکښل شي، نو سړی ګراف لاس ته راوړي وروسته له هغې چې ټکي يو له بل سره وتړل شي کوم چې د چټکتيا او بريکلار ترمنځ اړيکې تشريح کوي.



د پراته محور ، چې ابسخيز هم بلل کيږي د خپلواکي متحولي x ارزښتونه پيدا کيږي، په ولاړ محور چې اوردينات هم بل کيږي د بلواک متحولي y = f(x) ارزښتونه ميندل کيږي.

تمرين ۳ : د ارزښت جدول سره سم په يوه مناسب پروتولاړ – يا کواوردیناتسيستم کې اړونده ټکې وکاږئ او دا په يوه ګراف کې سره ونښلوئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بریکلار د چټکتیا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې وټا کئ.

پولیس یوه د90 m د بریک لار اندازه کوي؟

دا موټر د کومې چټکتیا یا سرعت سره خغلي؟

زیات وخت دا هم شوني ده چې فنکشنال یا تابیعي اړیکې د تابع مساوات له لارې انځور شي.

د بریکلار لپاره باور لري: $y = f(x) = 0,01\ x^2$

دلته $y = f(x)$ د بریکلار لپاره اینسوول شوی ا و دا وایي، چې y -کواوردینات په کواوردیناتسیستم کې د متحولې x په واک کې دی، یعنې د خپلواک متحولې x یو تابع دی یا په واک کې دی. تابعمساوات دی، کوم چې هغه قانون ورکوي، چې ارزښتونه د f(x) تابع یا بلواک متحولې جوړوي.

د تابع مساوات په ځای هم وایو چې $f(x) = 0,01\ x^2$ د تابع قانون دی.

تمرین ۴ : که تابع مساوات $f(x) = 0,01\ x^2$ وي، نو لوستل شوي ارزښتونه وشمیرئ؟

له دا تراوسه شوې کار څخه کیدی شي ووایو:

پیژند یا تعریف:

د یوه تابع سره د خپلواک متحولې x هر ارزښت ټیک یو تابع ارزښت f(x) باندې- یا سره تنظیمیږي. سرې دا هم وایي چې یوه تابع یو یواځنی نظم دی.

$$\underbrace{f : x \rightarrow \underbrace{f(x) = x - 1}_{\text{Funktionsgleichung}}}_{\text{Funktion}}$$

لیکنډول f:

پورته لومړۍیې په پښتو: تابع برابرون

که په راتلونکې کې له یوه تابع غږیږو، نو د دې تشریح لپاره فقط تابع مساوات ورکوو، یعنې فقط f(x) = ... ی.

د تابع نوم f دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا $x \to f(x)$ ليکندود روښانه کوي، د هر x –ارزښت سره يو ټاکلی تابع ارزښت $f(x)$اړه لري.

تابع مساوات $f(x) = x - 1$ د شميرلو قاعده يا قانون راکوي، چې تابع ارزښت څنګه جوړيږي.

د دې لپاره چې د نظم يواځنوالی بيا وښايو، لاندې بيلګه راوړو:

هر زده کوونکی يو ټاکلی د بوټانو لويوالی لري. دلته حتمي ده چې زيات زده کوونکي به يو- - يا هماغه د بوټانو لويوالی ولري.

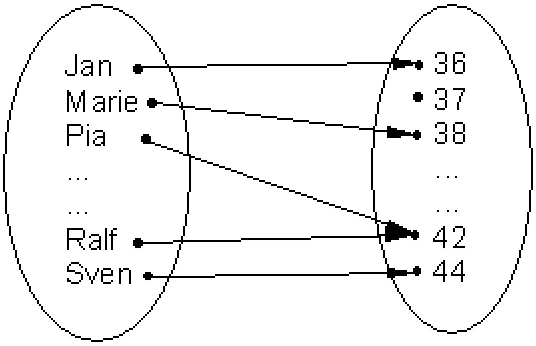
يواځنواوالی په زده کوونکو اړه لري ← د بوټانو لويوالی.

د متحولو سره کښلی يا ليکلې دا په دې معنا دی، چې د زده کوونکي نوم خپلواکه متحوله په ګوته کوي او هغه سره تنظيم شوې د بوټانو لويوالی بلواکه يا تابع متحوله جوړوی.

معکوس يا په څټ د زده کوونکو تنظيم يواځنی نه دی، ځکه چې ډېر زده کوونکي د بيلګې په توګه ۴۲ نمرې د بوټانو لويوالی لرودی شي.

دا ډول تابع د تابعمساوات نه لري، دا کيدی شي چې د ډېرئ څيرې يا ستعکس په څير انځور شي.

يواځنی نظم(تابع يا فنکشن)

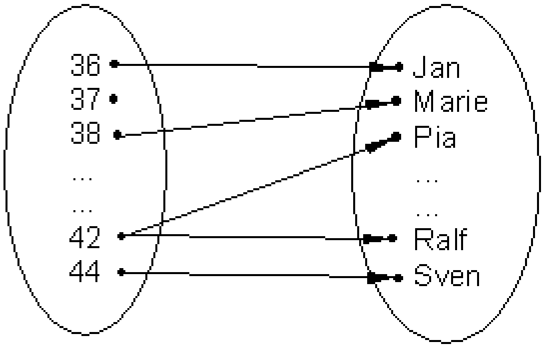


د بوټانولويوالی ډېرئ ياسټ   د زده کوونکو سټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

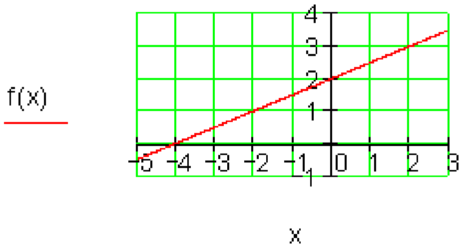
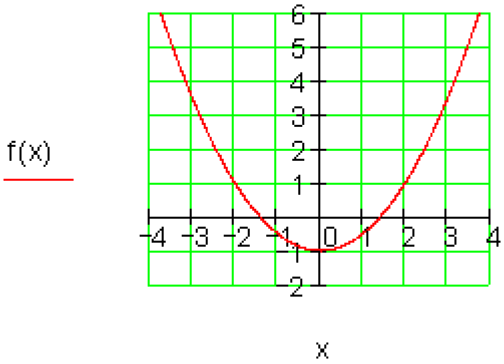
(ارزښت ډېرۍ)   (تعریفډېرۍ)

نظم یواځنی نه دی (تابع نه دی)



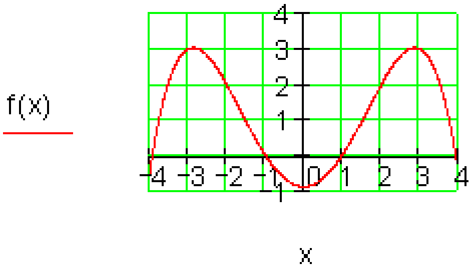
د دواړو ستونو بدلول

د ریاضیکي توابعو او تابعمساواتو بیلګي (له کيڼ و ښي لورته)

$f(x) := \frac{1}{2} \cdot x + 2$  کرښنیز مساوات(ګرښنه)	$f(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2 - 1$  مربع مساوات(پارا بل)

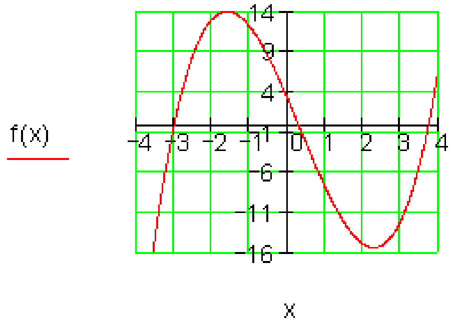
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) := \frac{-7}{120}\cdot x^4 + \frac{23}{24}\cdot x^2 - \frac{9}{10}$$



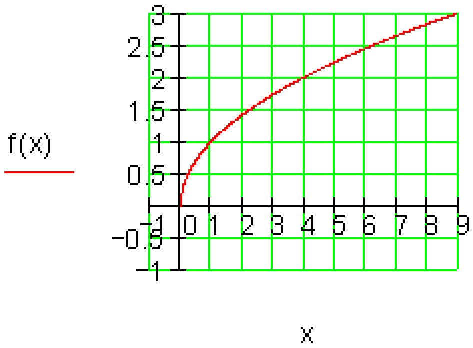
د څلورمې درجې پولراشنل تابع

$$f(x) := x^3 - x^2 - 11x + 3$$



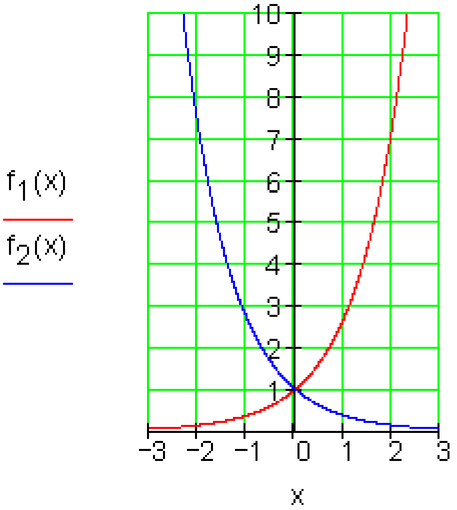
د دريمې درجې پولراشنل تابع

$$f(x) := \sqrt{x}$$



ريښه تابع

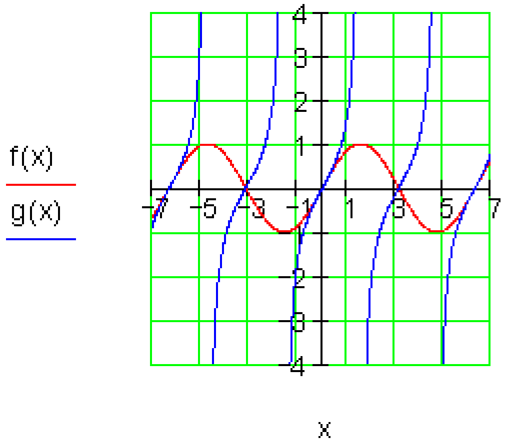
$$f_1(x) := e^x \qquad f_2(x) := e^{-x}$$



اکسپوننشل تابع

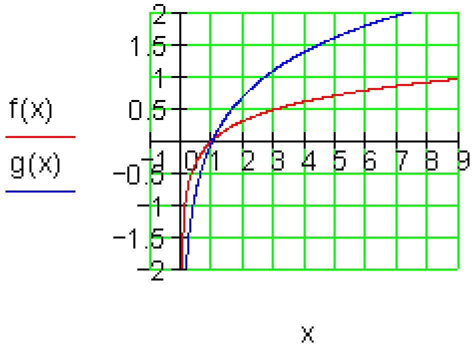
(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) := \sin(x) \quad g(x) := \tan(x)$



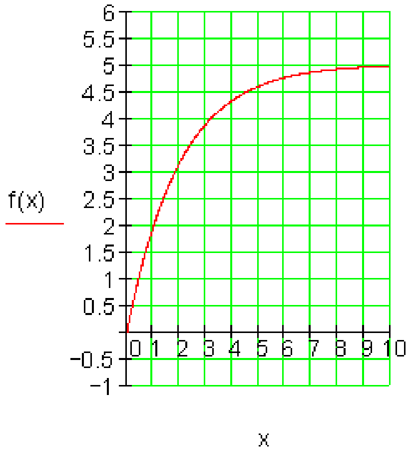
ترېګونومتريکي(مثلثاتي) تابع

$f(x) := \log(x) \quad g(x) := \ln(x)$



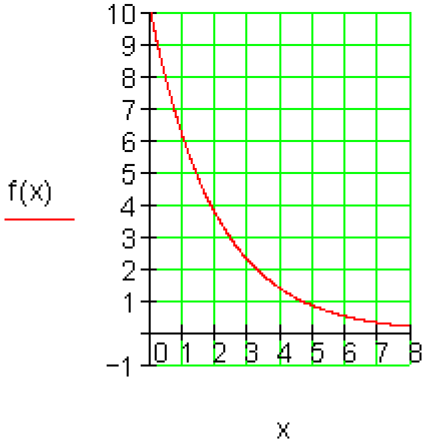
لوګاريتمتابع

$f(x) := 5 \cdot \left(1 - e^{-0.5 \cdot x}\right)$



اکسپوننشل مربنتکره

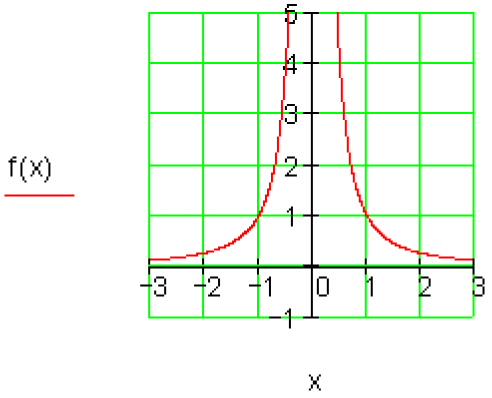
$f(x) := 10e^{-0.5 \cdot x}$



اکسپيننشلي کښته کيدنه

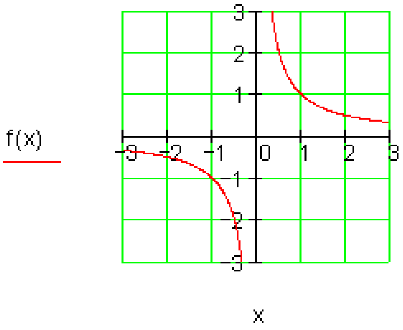
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) := \frac{1}{x^2}$$



های پارابول محورسیومتریک

$$f(x) := \frac{1}{x}$$



های پارابول ټکی سیومتریک

تعریف- او ارزښتډېرئ یا - سټ

تعریف(پیژند):

د یوه تابع تعدریفسټ **D** د ټولو خپلواکو متحولو ډېرئ یا سټ ده، د کومو لپاره چې تابع تعریف دی.

ارزښت ډېرئ **W** د ټولو تابع ارزښتونو- یا بلواکو - سټ ده، چې د D له ټوکو منځ ته راځي.

بیلګه:

$f(x) = \frac{1}{x}$ تعریفسټ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ تعریفسټ D=R

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفر سره د ویش اجازه نه شته	Rد حقیقیي اعدادو ډېرئ ده

بیلګه:

$f(x) = x^2 \quad D = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}_+$ د تابع ارزښت په حیث فقط مثبت یا زیاتیز ارزښتونه رامنځ ته کیږي	$f(x) = x+1 \quad D = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}$ تابع هر په خوښه ارزښت نیولی شي.

شمیرپو هنیزه لیکندود او د هغه معنا

$f(4) = 7$ د خپلواکو متحولو د ارزښت x = 4 لپاره د تابع ارزښت 7 دی.

دا د ارزښتجوړه (7 | 4)په کواوردیناتسیستم کې د ټکي (7 | 4) P کواوردیناتونه جوړوي.

$f(x) = 9$ غوښتونی د x -ارزښت دی، چې په هغه پورې تابع ارزښت 9 اړه لري.

$y = f(5)$ د x = 5 لپاره تابع ارزښت دی.

تولکه:

یو یواځنی نظم، چې په هغه کې د تعریف ست D څخه خپلواکه متحوله x ټیک یو تابع ارزښت f(x) باندې تنظیم شي ځیرونه (چېمور یې تابع بولو) یا فنکشن بلل کیږي.

تابعي(خپلواکیز) یا فنکشنلي اړوندوالی د یوه تابع مساوات(د بیلګې په توګه: f(x) = 2x + 1) سره لیکل –یا تشریح کیږي.

تابع مساوات کې د x –ارزښتونو په ایښولو سره د تابع ارزښت لاس ته راځي، چې دا د x -ارزښتونو سره یوه ارزښت جدول کې ایښولی یا انځورولی شو.

د ارزښتجدول هره جوړه په کواوردینات سیستم کې ټیک یو ټکی په ګوته کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په زياتو حالتونو کې کيدی شي دا منځ ته راغلي ټکي يوه ګراف ته سره رايوځای يا وتړل شي.

د ټول x - ارزښتونو ډېرئ، هغه چې په تابع مساوات کې ځای په ځای شي تعريف ډېرئ يا ــسټ بلل کيږي.

د ټول تابع ارزښتونو ډېرئ يا ــسټ، چې دلته منځ ته راځي، د تابع ارزښت ډېرئ W پورې اړه لري.

د تمرينونو حل

لومړی تمرين: د داسې بلواکوالي لپاره نورې بيلګې پيدا کړئ.

ځواب: - د يوه تيلسوزونکې ماشين قدرت د ځرخونتعداد(د ماشين د ځرخيدو تعداد) په واک کې دی.

- د يوې ګردئ يا دايرې سطحه د وړانګې يا شعاع په واک کې ده.

- د بريښنا پيسې د ثابت قيمت سره د انرژي يا بريښنا مصرف په واک کې ده.

دويم تمرين : د پاتې بيلګو او د هغو لپاره چې تاسو په لومړي تمرين کې وليدل ګډې اړيکې سره په فرمولبندۍ کې راوړي.

ځواب:

لار → د خوزښت وخت: په مساوي پاتې چټکتيا د خوزښت وخت په وهلې لار اغيز لري.

بريکلار → چټکتيا: د يوه موټر چټکتيا د بريکلار باندې اغيزه لري.

ټوله ګټه → د تيريدني وخت: د سرمايي ايښوني وخت د ګټې لاس ته راوړنه باندې اغيزه لري.

وده → عمر: د کوچني عمر د هغه په وده اغيزه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

قدرت → ځرخونتعداد: د یوه سوزونکي ماشین د تیلو سوزیدنه د هغه په ځرخونتعداد پورې اړه لري.

سطحه → وړانګه : د ګردئ یا دایرې وړانګه د دایرې سطحه باندې اغیز لري.

د بریښنا حساب → انرژي ستې: د سوزولې بریښنا یا انرژئ ستې یا ډېرئ د بریښنا بل(هغه د مصارفو کاغز) اغیزمن کوي.

دریم تمرین:په یو مناسب کواوردیناتسیستم کې د ارزښت جدول اړوند ټکي وکاږئ او دا یوه ګراف ته سره وتړئ.

د چټکتیا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې بریکلار پیدا کړئ.

پولیس یوه د 90 m بریکلار کچوي. دا موټر دکومې چټکتیا سره تلی؟

ځواب:

د 30 km/h چټکتیا بریکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتیا بریکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتیا بریکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتیا بریکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتیا بریکلار 120 m ده

له 90 m بریکلار سره یو موټر 95 km/h د چټکتیا سره ځغلي.

تلنلار: په کواوردیناتسیستم یا پروتولاړ سیستم کې د x -محور(ابسځیزا) د خپلواکو متحولو ډېرئ نمایندګي کوي، د y –محور (اوردینات) د بلواک یا تابع متحولو نماینده ده.

د مخه له دې چې په یوه کواوردیناتسیستم کې ارزښتونه لیکل –یا کښل کیږي باید وکتل شي، چې کومه خپلواک- او کومه بلواک- یا تابع متحوله ده.

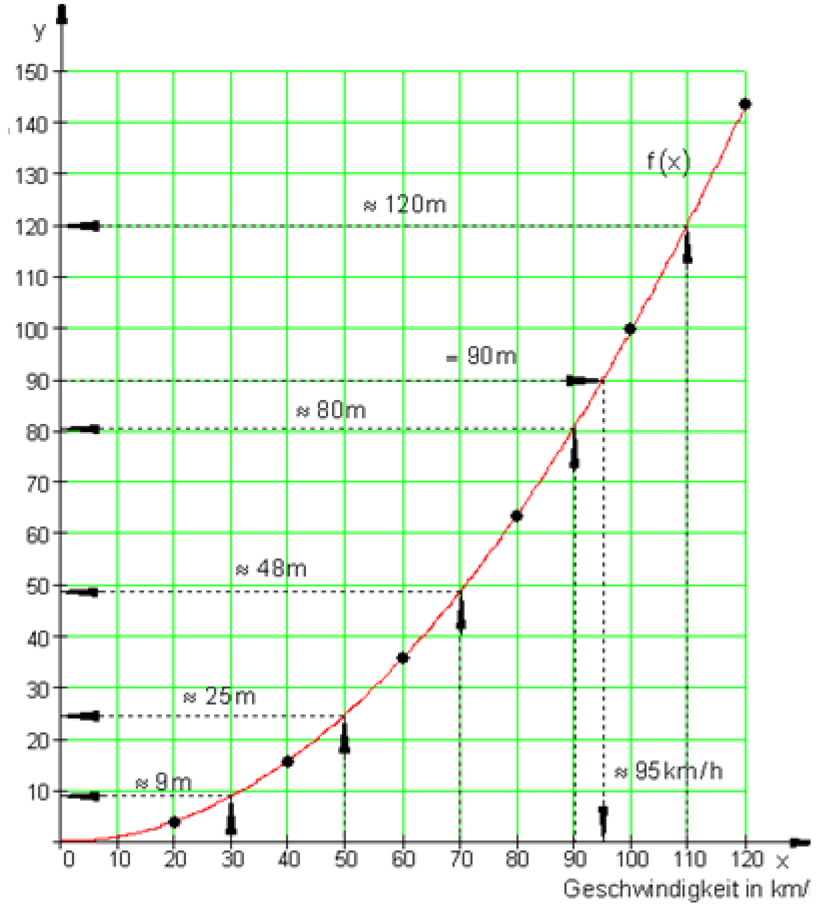
(c) ketabton.com: The Digital Library

پسي دا هم غوره ده، چي د کچوني لپاره يوو ښه کچونی يا هغه اله چي اندازه پرې کچوو بايد وموموو.
د دې لپاره د جدول لوي او کوچني ارزښتونه کتل کيږي او پرېکړه کيږي چ دواړه محوررونه په څو برخو بايد وويشل شي.

وروسته له هغي چي ټول په جدول کې ټکي په کواورديناتسيستم کې ځای په ځای شوي، نو بيا دا ټکي د ګراف په توګه سره تړل – يا نښلول کيږي

کيدی شي له ګراف څخه د داسي x -ارزښتونو لپاره هغه لړ يا ډېر تابع ارزښتونه هم ولوستل شي، چي په ارزښت جدول کې مخ ته نه راځي.

معکوس کيدی شي د يوه ټاکلي تابعارزښت اړونده x -ارزښت ولوستل شي. د دې نتيجو ټيکوالی د دې په واک کې دی، چي ګراف څومره ټيک کښل شوی دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته کواوردینات – یا پروتولاړسیستم کې: پروت: چټکتیا په کیلومتر. ولاړ:بریکلار په متر

څلورم تمرین:

لوستل شوي ارزښتونه وشمیرئ، که تابع مساوات $f(x) = 0{,}01\,x^2$ وي.

ځواب:

تابعارزښتونه داسې شمیرلکیږي، چې اړونده د x ارزښتونه په تابع مساوات کې کیښوول شي.

$$f(x) = 0{,}01x^2 = \frac{1}{100}x^2$$

$$x = 30 \Rightarrow f(30) = 0{,}01 \cdot 30^2 = 0{,}01 \cdot 900 = 9$$

$$x = 50 \Rightarrow f(50) = 0{,}01 \cdot 50^2 = 0{,}01 \cdot 2500 = 25$$

$$x = 70 \Rightarrow f(70) = 0{,}01 \cdot 70^2 = 0{,}01 \cdot 4900 = 49$$

$$x = 90 \Rightarrow f(90) = 0{,}01 \cdot 90^2 = 0{,}01 \cdot 8100 = 81$$

$$x = 110 \Rightarrow f(110) = 0{,}01 \cdot 110^2 = 0{,}01 \cdot 12100 = 121$$

د 30 km/h چټکتیا بریکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتیا بریکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتیا بریکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتیا بریکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتیا بریکلار 120 m ده

له 90 m بریکلار سره یو موټر 95 km/h د چټکتیا سره ځغلي.

بریکلار 90 m کچ شوي ، غواړو چټکتیا پیدا کړو.

پیل: $0{,}01x^2 = 90$ ⇔ $f(x) = 90$ دا مساوات په x پسې ځواب کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0{,}01x^2 = 90 \,|\, : 0{,}01 \Leftrightarrow x^2 = 9000 \,|\, \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{9000} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{900 \cdot 10} \Leftrightarrow |x| = 30\sqrt{10}$$

ارزښت حل کړئ.

$$|x| = 30\sqrt{10} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 30 \cdot \sqrt{10} \approx \pm 94{,}9$$

نسبت و پوښتنې ته فقط مثبت يا زياتيز ارزښتونه موخه ور دي، ځکه چې موږ مثبته چټکتيا په پام کې نيسو. د 90 m بريکلار سره د موټر چټکتيا 94,9 km/h وه.

يادونه:لومړی شميرنه ټيک ارزښتونه راکوي، سره له دې هم موخه وردی، چې دا شميرل شوي ارزښتونه په ګراف کې يا له ګراف څخه هم د لوستلو له لارې کنترول کړو.

پوښتنې

تابع I

لومړی:

ټول ټکي په کواوردينات سيستم کې په نخښه کړئ، چې کواوردينات يې ورکړ شوي شرايط پوره کوي.

الف- $y \le -1 \wedge x \ge 1$ ب- $y \in \mathbb{R} \wedge -2 \le x \le 3$ پ- $x \in \mathbb{R} \wedge y = 2$

ت - $0 \le x \le 4 \wedge y \ge 0$ ټ- $|x| \ge 1{,}5 \wedge |y| \le 2$ ث- $y > 0 \wedge x = -1$

دويم: په مناسب کواوردينات سيستم کې لاندې ټکي رسم کړئ.

$$A(40\,|\,220);\ B(10\,|\,250);\ C(200\,|\,300);\ D(80\,|\,240)$$

ايا د x – او y -کواورديناتو ترمنځ کومې اړيکې شته؟ د دې لپاره يو ترم وليکئ او نور درې ټکي ورکړئ.

دريم: د ټکو ځای وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- ټکي $P_t\left(t-1\middle|\frac{1}{t+1}\right)$ د t€R کوم ارزښت په لومړئ څلورئکي پروت دی؟

ب- ټکي $Q_t\left(t\middle|t^2-1\right)$ د t€R کوم ارزښت لپاره دx محور کښته لور ته پرته ده؟

څلورم:

د ټکوډېرئ یا ـسټ $A=\left\{(1|3);\left(2\middle|\frac{3}{2}\right);(3|1);\left(4\middle|\frac{3}{4}\right);...\right\}$ ورکړ شوی دی.

د A نور دري توکي ورکړئ او دا ټکي په یوه کواوردینات سیتم کي وکاږئ. ایا د x- او y -کواوردیناتونو ترمنځ اړیکی شته؟

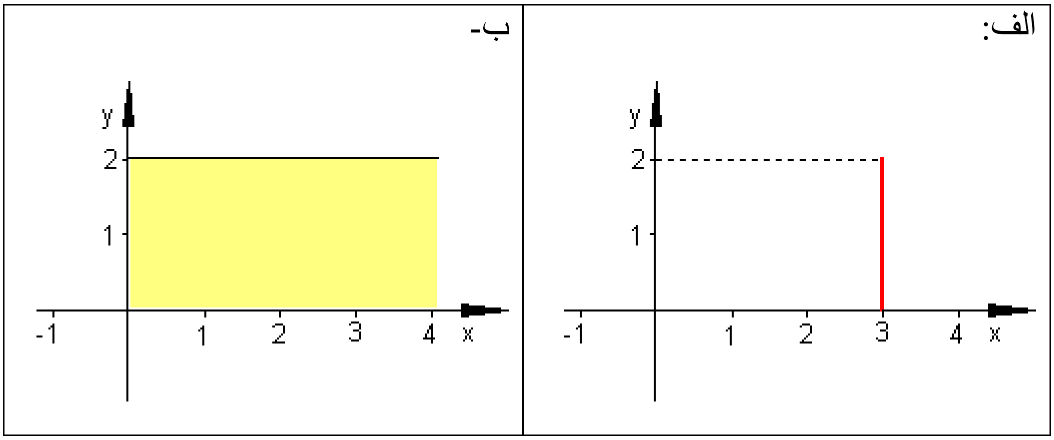
پنځم: یو ټکی $P\left(t\middle|\frac{t}{2}+3\right)$ د t€R سره ورکړشوی دی.

د t لپاره څه ارزښتونه ورکړي او دا د دې اړونده ټکي په یوه کواوردینات سیستم کي وکاږئ.

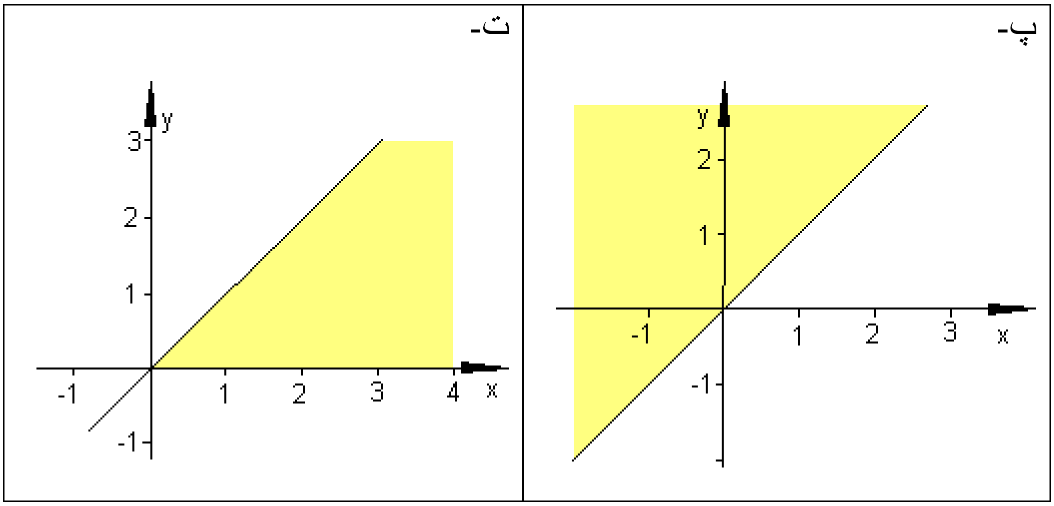
د کومو t -ارزښتونو لپاره باور لري:

د ټکي P د x -کواوردینات د ټکي د y -کواوردینات سره برابر دي؟

شپږم: په نخښه شوي کربنه او همداسي سطحه تشریح کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library



پوښتنې

توابع II

لومړی

ښاغلی برګ د یوه ملفون(لاسي یا لاسي تلفون) قرارداد د لاندې شرایطو سره وکړ:

د میاشتې € 20 ، د تلفون قیمت په دقیقه € 0,35 .

الف- که دی 80 ,40 یا 120 دقیقې تلفون وکړي، نو میاشتنی حساب به یې څومره جګ وي؟

ب - لګښت لپاره یو ترم ولیکئ چې په دقیقه کې د خبرو د دوام په واک کې وي.

پ – اړیکې ګرافیکي انځور کړئ.

دویم:یوه الوتکه د سوزونموادو کیروزین 10500 Liter لیتره زخیره لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په 100 km دا 180 Liter سوزوي.

الف- د په لیتر مصرف جدول جوړ کړئ. یو واټن له 0 km تر 5000 km پورې وټاکئ.

ب – اړیکې یې ګرافیکي ځور کړئ.

پ-له څومره کیلومتره وروسته به زخیره تمامه شوې وی؟

ت - د الوتنې د لار ترم د ټانک د خوندیونې په واکوالي کې وټاکئ.

دریم: یو د شمیراړونې جدول جوړ کړئ، چې ^{0} څلزیوس (^{0}C) په فارنهایت(^{0}F) اړوي د 20^0C - او 60^0C په ساحه یا ورشو کې. د دې لپاره اړین داتا تشریح کړئ. اړیکې ګرافیکي انځور کړئ. دا اړیکې کوم ترم په ګوته کوي؟ د ا د تبې تودوخئ کچونه (ترمومتر) د ناروغ د تبې په اندازه کئ چې ده ایا دا حرارت یا تودوخي د ژوند خطر لري؟

څلورم: یوه د مالونو لیږلو مغازه غواړي لګښت له امله یو د تحفې پاکټ ولیږي. د پاکټولو تخنیکي پرابلم له امله یې یو اړخ د 35 cm سره کره ټاکلی دی. د پوست د لګښت نظم باید په پام کې نیول شوی وي

د لګښت نظم: مربع ډوله پاکټونه دننه په هیواد کې.

خورا کوچنئ کتله(یا بهتره ډکی): اوږدوالی 15 cm ، سور 11 cm ، جګوالی 1 cm .

خورا جګه کتله: اوږدوالی 60 cm ، سور 30 cm ، لوړوالی 15 cm یا اوږدوالی جمعه یې سور جمعه یې یا په ورزیات جګوالی = 90 cm. خورا زیات وزن 2 kg.

الف- د یوه ډکي یاحجم $V = 21\ dm^3$ لپاره د سور او جګوالي ترمنځ اړیکې وټاکي.

ب- دا ماکسیمال رسیدلوړ ډکی یا حجم څومره لوي دی؟

پنځم: فرمول ورکړشوی دی.

الف- ش څنګه تغیر خوري، که کوچنی شي.

ب- ایا لاندې اړیکې به د فرمول له لارې تشریح شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

A : د کرایې موټر ټول لګښت د عدد a د تللی کیلو متر او د هغه د یوه کیلو متر د قیمت c لپاره.

B : د ودرېدلو لار یا واټن a د بریکلارb او عکس العمل لارc څخه شمیرل کیږي.

پ-شي اړیکې ورکړئ چې د فرمول له لارې تشریح کیدی شي یا روښانه کیدی شي.

شپږم: یو ولاړګوډیز یا مستطیل U = 12 cm چاپیریال یا محیط لري.

الف- اړخونه څنګه یو د بل په واک کې کیدی شي.

ب- یو ترم وټاکئ، چې بلواکوالی د اړخ a څخه ورکوي یا د اړخ a په واک کې یا تابع دی.

پ- د a د کوم ارزښت لپاره سطحه خورا لویه وي؟

پوښتنې

توابع III

لومړی: توابع f(x) ورکړ شوي. یو مناسب ارزښتجدول وکاږئ. دې ته ا ړوند ګراف رسم کړئ.

الف - $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ ب - $f(x)=x^2$ پ - $f(x)=\frac{1}{x+3}$ ت- $f(x)=3^x$

دویم: فکر وکړئ، چې ایا یو ،،یواځنی نیظم،،د $x \rightarrow y$ لپاره مخ ته لرو: $x^2+y^2=1$

دریم: ټکی P ورکړ شوی دی. ایا یوه تابع مخ ته لرو؟ که هو، نو نظمقانو وټکئ او خورا لویه تعریفسټ یا – ډېرئ هم وټاکئ.

$$P=\left\{(2|1);\left(5|\frac{1}{4}\right);\left(10|\frac{1}{9}\right);\left(25|\frac{1}{24}\right);.....\right\}$$

څلورم: یو ارزښتجدول ولیکئ او د تابع ګراف وکاږئ:

$$f(x)=\frac{1}{8}\left(x^3-2x-4\right);\ x\in\mathbb{R}$$

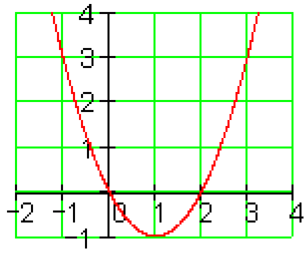
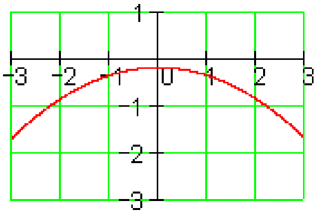
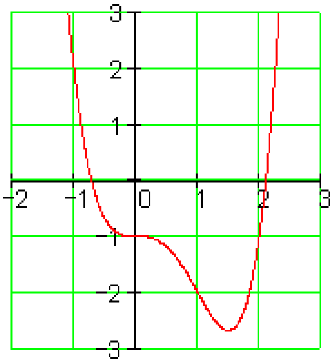
الف- د جبشمیري سره f (3) او f (- 2) وشمیرئ.

ب- په کوم ځای کې د تابع ارزښت صفر دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ-د کومو x -ارزښتونو لپاره تابعارزښت 1 دی؟
ت-د کومو x -ارزښتونو لپاره تابعارزښت کمیز یا منفي دی؟
ټ-د کومو x -ارزښتونو لپاره باور لري: $f (x) < 1$ کړئ، چې د کوم تابع لپاره باور لري:

پنځم: د درې توابعو f1, f2, f3 ګراف ورکړ شوی دی. پرېکړه وکړئ:

	الف- د تابع ارزښتونه هر چیرته صفر دي. ب- توابع په انټروال [0,5 ; 1] منفي یا کمیز دي پ-. $f (2) < f (0)$ ت-. $f (0) = - 1$ ټ-. $f (- 2) = f (2)$
	

پوښتنې

توابع **IV**

لومړی: تابع f ورکړ شوې د $f(x) =-0,2(2-x); x€R$ سره

پرېکړه وکړئ، چې ایا لاندې وېناوې رښتیا او که نارښتیا دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

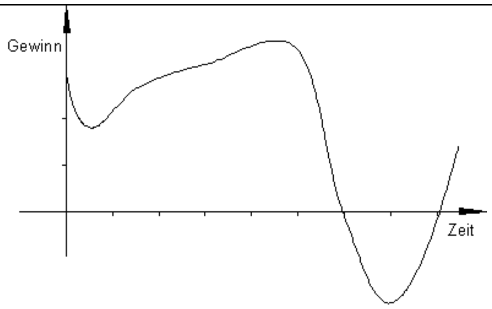
ځيل ځواب مدلل کړئ.

الف- د تابع ارزښتونه زياتيز يا مثبت دي د ټول x – ارزښتونو لپاره.

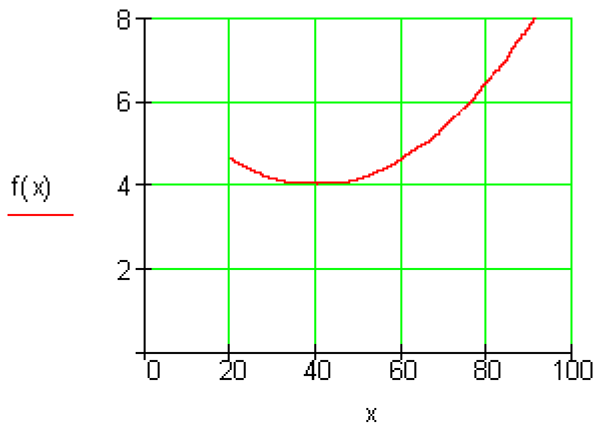
ب- $f(x) < 0$ د ټولو x€R لپاره.

پ- $f (x)$ د $x = 2$ لپاره منفي دی.

ت- يو ځای u شتون لري، چې د هغه لپاره $f (u) = f (u + 1)$ باور لري.

دويم: د رسم شوي تابعګراف تلنه تشريح کړئ. دلته هغه غوره ټکي په نخښخه کړئ. هغه ټکي، انتروالونه روښانه کړی يا تشريح کړئ په کومو کې چې ته اقتصادي پسمنظر(د شاته پراته دليل) فرمولبندي کوې.	 کواورديناتسيستم کې : پروت: وخت. ولاړ: ګټه

دريم: د يوه موټر د تيلو سوزول د چټکتيا په واک کې يا تابع دی. دا په ښنګ کې ښيره د تيلو سوزول ښايي په ليتر په سل کيلو متر کې او د چټکتيا په واکوالي کې، که سرې په څلورم ګير Gang کې لاړ شي.

	الف- کږه يا منحني روښانه کړه. ب- په کومه چټکتيا کې استعمال ۶ ليتره په سل کيلومتر کې دی؟ پ- په کومه چټکتيا کې د تيلو سوزښت خورا کم دی؟ ت- کږه به ښنګه وځغلي، که په دريم ګير کې سړی لاړ شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم: د لمبا په ډنډ کې $40\ m^3$ اوبه دي. دا اوبه د ډنډ د پاکوالي له امله د پمپ کولو سره وباسي، چې په دقيقه کې 350 Liter ليتره اوبه وځي.

الف- يو ترم د پاتې حجم يا ډکي لپاره په m^3 وټاکئ.

ب- څومره m^3 د ۲۰ دقيقو وروسته په لمباډنډ کې لا پاتې ي.

پوښتنې

توابع V

لومړی:د تابع $f(x)$ماکسيمال تعريفورشو D_{max} پيدا کړئ

الف- $f(x) = 2 - 3x$ ب - $f(x) = \sqrt{2x-3}$

ث- $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ ت - $f(x) = -x^2 + 1$

دويم: د تابع $f(x)$ ارزښتورشو وټاکئ د $D = D_{max}$ سره.

الف- $f(x) = \dfrac{3}{2}x - 4$ ب - $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$

پ - $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ت - $f(x) = x^2 - 5$

دريم: تابع $f(x)$ ورکړ شوې ده. ماکسيمال تعريفورشو D_{max} وټاکئ. د $f(x)$ګراف وکاږئ.

د $x \in \left\{k\,;\, -\dfrac{2}{k}\,;\, k+1\,;\, k-4\right\}$ لپاره تابعارزښتونه وټاکئ.

الف- $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$ ب - $f(x) = 2x - \dfrac{2}{x}$ پ - $f(x) = x - x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت - $f(x)=\frac{1}{x+3}$ ټ - $f(x)=\sqrt{4-2x}$ ث - $f(x)=2^x-1$

خلورم: تابع $f(x)$ د $f(x)x^3$ سره ورکړشوې ده.

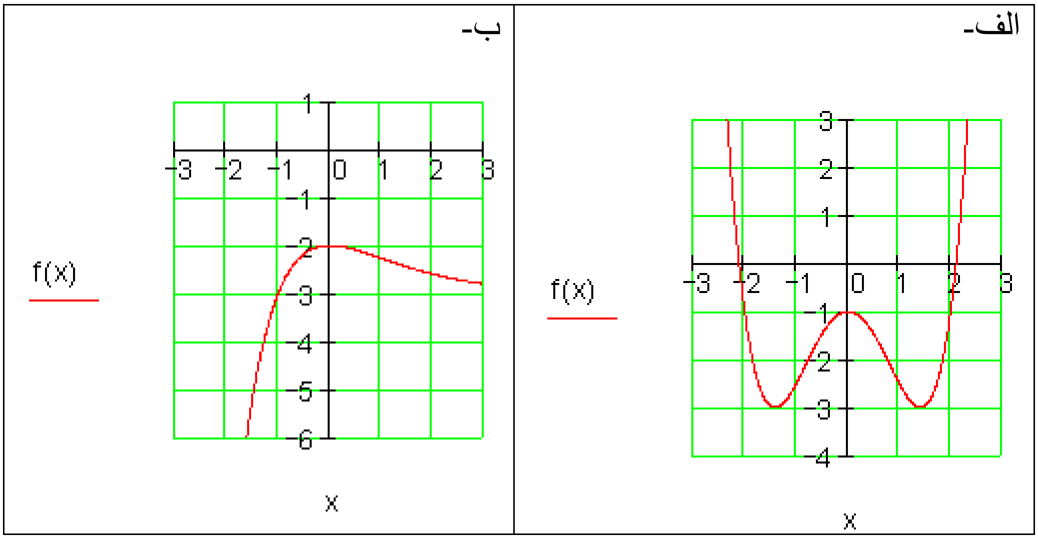
الف- ماکسیمال تعریفورشو D او ارزښتورشو W ورکړئ.

ب- د کوم $x\in D$ لپاره باور $f(x)=81$ لري؟

پ-د کوم $x\in D$ لپاره باور $f(x)\geq 9$لري؟

ت- و ښایئ: $f(x+1)=3.f(x)$ د ټولو $x\in D$ لپاره.

پنځم: تابع $f(x)$ د $D = IR$ لپاره تعریف ده. د رسمونو څخه ارزښت ډېرئ وښایئ.



پوښتنې

توابع VI

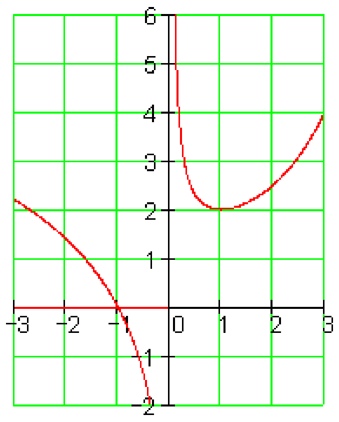
لومړی: د تابع$f(x)$ ارزښتښت د جبشمیري سره وشمیرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

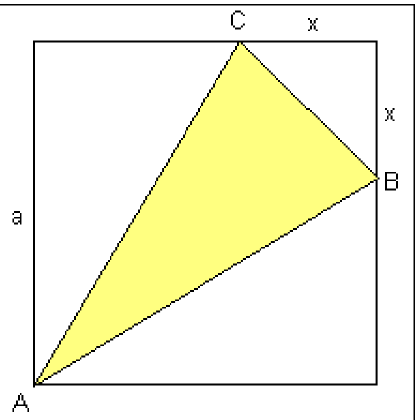
سرلیک

$$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{2}{5}x^3-2$$ د D=R سره.

دويم:

	دويم: ترڅنګ کړه د تابع f(x) ګراف دی؟ ايا f(x) د ټولو x€R لپاره تعريف دی؟ د x د کومو ارزښتونو لپاره تابع ارزښت - له 2 لوي دی؟ - له صفرکوچنی دی؟

دريم:

	يوه مربع يا څلورې د اړخ اوږدوالي a = 5 cm سره ورکړ شوې ده. د مثلث يا درېګوديABC د سطحي ترم A(x) وټاکئ

څلورم: د يوه مالک ټول لګښت K د يوه لاسته راوړنې سټ x په واکوالي کې په سټ واحد يا ډېرئ يوون (ME) د ترم له لارې ليکل کيږي

$$K(x)=0{,}01x^3-x^2+100x+720$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- د x -ارزښتونو لپاره تر 100 پورې ټول لګښت وشميرئ. يو مناسبتلنلارې ډول وټاکئ او د ټول لګښت ليدخيره رسم کړئ.

ب- د هر ستې – يا ډېرې واحد خرڅلاو99 پيسپواحده دی. لاس ته راونې (د پيسو) څومره دي، که x(ME د ستې واحد) په بازار کې خرڅ شي؟

په لرلي کواورديناتسيستم کې د خرڅلاو(پيسو) د ليدلو ځيره و کاږئ.

پ-د ليدځيرې څخه ولولئ:

په کومه ورشو يا ساحه کې ګټه منځ ته راځي؟ د کوم x –ارزښتونو سره به خورا لويه ګټه لاس ته راشي؟

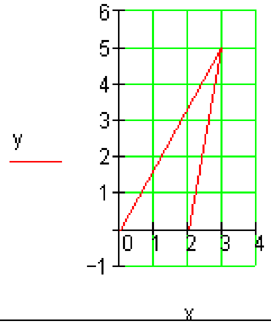
پوښتنې

VIIتوابع

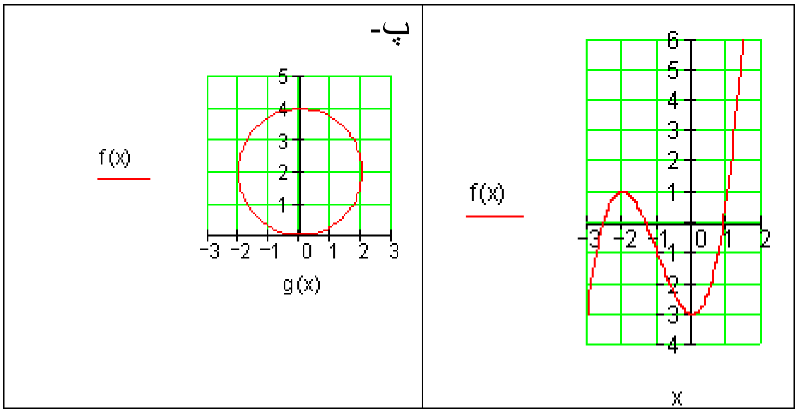
لومړی: توابع f(x) ورکړشوي دي. يو مناسب ارزښت جدول جوړ کړئ. له دې سره اړوند ګراف وکاږئ.

الف- $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ب- $f(x) = x^2$

دويم: کوم ګراف په تابع $f : x \to f(x)$ پورې اړه لري؟ دليل يې راوړئ.

الف-	ب –
	

(c) ketabton.com: The Digital Library



دریم:د شمیرپو هنیز لنډ لیکدود سره یې فرمولبندي کړئ.

الف- په ځای3 کې تابع f(x) تابعارزښت 12 لري.

ب- د تابع f(x) له لارې د x -ارزښت سره عدد 4- تنظیمیږي.

پ-ټکی (5 | 2) P د f(x) په لیدخیره باندې پروت دی.

ت- f(x) د کومو ابسخیزا یا پراته ارزښتونو لپاره تابع ارزښت 4 لري.

ټ- د f(x) تابع تابع ارزښت له 7لوی دی د ټول $x \in \mathbb{R}$. لپاره.

ث- تابع f(x) د 17- ځای کې تا بع ارزښت 9 نیسي.

ج- توابع f او g د په ځای کې همغه ارزښت غوره کوي.

چ- په کوم ځای x کې fد تابعارزښت gد له تابعارزښت څخه کوچنی دی؟

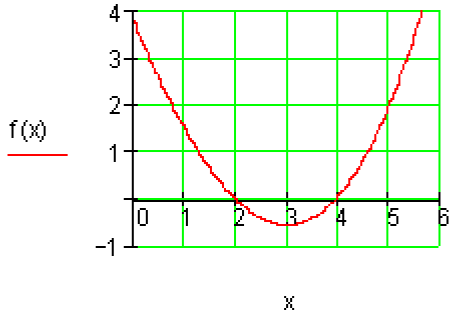
ح- د تابع f(x) د تابع ارزښت برابر 5 دی د ټولو $x \in \mathbb{R}$. لپاره.

خ- د یوه کږې ټکي K_f کواوردیناتونه سره سر خوري.

څلورم: د یوه نظم لپاره د یوې روځنۍ بیلګې نوم واخلئ، چې هغه تابع وي یا تابع نه وي.

پنځم: دا ترڅنګ کږه یا منحني د تابع f(x) ګراف دی. له ګراف څخه ولولئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



الف-د تابع ارزښت په ځای 5 کې

ب- يو ځای د f(x) سره.

پ-په کوم ورشو $f(x) > 0$ باور

لري؟

شيپږم:کوم ارزښت جدول يوه تابع پوري اړه لري؟

الف -

x	−1	0	1	2	3
y	4	0	−2	4	4

ب -

x	−1	0	3	3	4
y	8	7	2	4	5

توابع او په څټ - يا معکوس توابع

تولیز:

د f د نظم قانون د تابع مساوات له لارې افاده کيږي، لکه د بیلګې په توګه

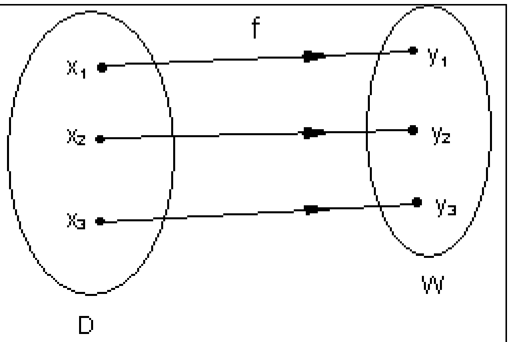
$$f = \{(x|y)\,|\,y = f(x) = 2x + 3\}_{D\times W}$$

يا په لنډه توګه: $y=f(x)=2x+3$

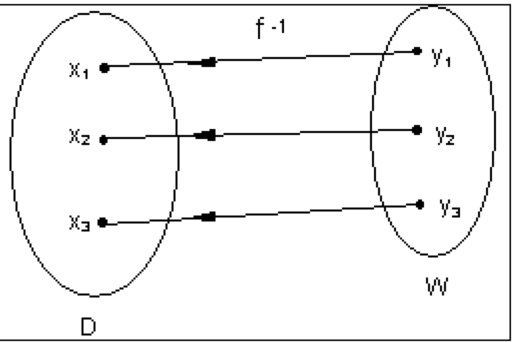
د يوه تابع د يو-يواځنوالي د f^{-1} يو-يواځنی نظم هم شتون لري.

دا نظم معکوس تابع يا په څټ تابع يا انورز inverse تابع بلل کيږي، لکه د بیلګې په توګه.

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library



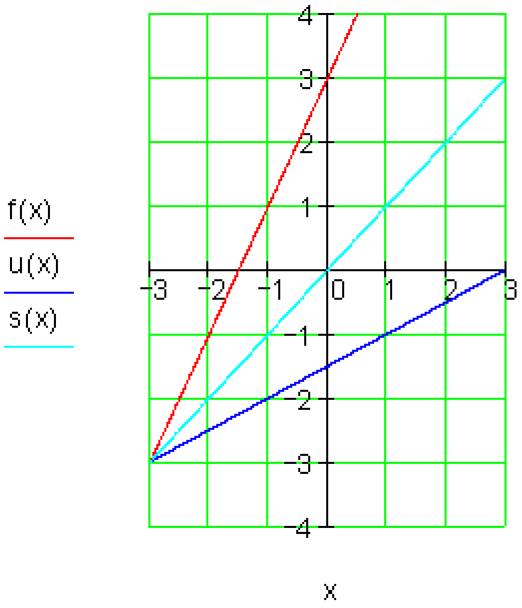
د کرښیز توابعو معکوس توابع

تابع: $y = f(x) = 2x + 3$ $x = f(y) \Leftrightarrow x = 2y + 3$ $\Leftrightarrow 2y + 3 = x \mid -3$ $\Leftrightarrow 2y = x - 3 \mid : 2$ $\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ معکوس تابع: $y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$	تابع $y = f(x) = 2x + 3$ ورکړ شوی غوښتنه معکوس تابع f^{-1} او د هغه ګراف ده تابع **f** جګوالی $m = 2$ لري. دا د خپل ګراف سره پروت محور په ټکي $P_x(-1,5 \mid 0)$ کې غوڅوي او ولاړ محور یا اوردینات په ټکي $P_y(0 \mid 3)$ کې غوڅوي. د هغه ګراف کرښه ده. که د تابع اووښتوني یا متحولې یو له بل سره بدلې شي او د y پسې په ورته توګه بڼه بدلون منځ ته راشي، نو سرې معکوس تابع لاس ته راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr>
<td>د معکوس تابع ګراف د تابع د ګراف هندارونه(انعکاس) ده په 45^0- محور باندې.

په تولیزه توګه باور لري:
$y = f(x) = a_1 x + a_0$ تابع

معکوس تابع
$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{a_1} x + \frac{a_0}{a_1}$$
د ساده والي له امله معکوس تابع u(x) بولو.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

مربع توابع

څلورۍ- یا مربع توابعو ته ننوتنه یا پیل

ننوتنه یا پیل

هرڅوک چې موټر زده کوي، باید پوه وي، جې د بریک په وخت کې په پاخه سرک د بریک نیولو او د موټر دریدځای په منځ کې لار یا واټن څنګه سره یوځای کیدی شي یا جمعه کیدی شي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندي موټر قانون سره سم له چټکتیا(سرعت) v په km/h (کیلومتر په ساعت) د عکس العمل لار r د بریک لار b په متر شمیرلکیدی شي.

پام (خبراوسه) : د بیلګې په توګه د المان پخوانی او له څخه نوي قانون.

له څخه د تملار په وچ اسفالت شوي سرک د پل بریکلار سره شمیرل کیږي.

د بریک لار $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ د عکس $r = \frac{v}{10} \cdot 3$ العمل لار

یادونه: د څه وخت را په دې خوا په جرمني کې د بریکلار لپاره دا فرمول باور لري.:

$$b = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$$

د بریک همدا ډول د عکس العمل لار په متر (m) راوځي، که چټکتیا یا سرعت په کیلومتر په ساعت (km/h)وي.

الف – د دوارو حالتونو لپاره د s = f(v) تابع مساوات و ټاکی ، د کوم لپاره چې په هره تللي چټکتیا یا سرعت تملار شمیرل کیدی شي.

ب - د تابع مشاوات s = f(v) د دوارو حالتونو لپاره د وهل شوی سرعت v = 0, 10, 20, 30, ... 100 km/h سره د ه یوه د ودرېډ - یا توقف لار چې شمیرل کیږي.

پ : په کواوردیناتسیستم کې یا د وضعیه قیمتسیستم کې ګراف رسم کړی.

ت: ټوله لاس ته راوړې نتیجه تشریح کړی.

Problemlösung: د پرابلم حل:

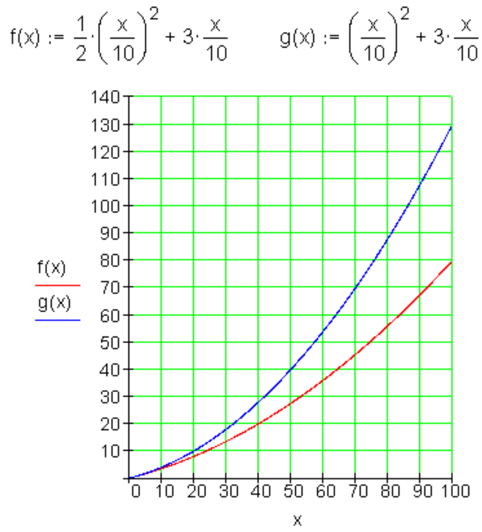
الف: د تابع مساوات:

$f(v) = \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{100}v^2 + \frac{3}{10}v$	زوړ قانون:
$f(v) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{200}v^2 + \frac{3}{10}v$	نوی قانون:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب - : ارزښتجدول(په کيلو متر په ساعت کي)

v (in km/h)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
f(v) (in m)	0	4	10	18	28	40	54	70	88	108	130	alt
f(v) (in m)	0	3,5	8	13,5	20	27,5	36	45,5	56	67,5	80	neu



پ - گرافونه

د x محور هر ه وهل شوي لار په km/h په گوته کوي.

د y - محور د هر همغه د توقفلار په m په گوته کوي.

ت – کومنتار

د نوي نظم وروسته د د چټکتيا(سرعت) زياتيدني توپير تل زياتيږي. د 50 km/h چټکتيا سره نوی د تم کيدلو لار 27,5 m ده، دا د زړې لار40 m نږدې 69% ده. په 100 km/h دا نوي لار نوره فقط ده، دا د زړې 130 m لارېا نږدې 61% ده. د بريک نيولو لار کمېدنه د بريک ښه کيدو(ABS) سره موخه وره ده.

د تابع مساوات د ټيک پامورتيا او گراف له امله مورږ کره کوو، چې دا نه کرښيز مساوات دی او نه يوه کرښه. انځوروي.

د تابع مساوات لاندې بڼه لري:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

داسې تابع مربع تابع بولو او يا هم د2 –مې درجې ټول(تام) راشنل توابع.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګرافونه يې پارابول بلل کيږي.

تمرينونه:

د لاندې پارابولونو ګرافونه وکاږئ.

د دې لپاره ارزښت جدول ولیکئ

اول - $f(x) = x^2 + 4x - 5$ دويم $f(x) = x^2 + 2x + 5$

دريم - $f(x) = -x^2 + x + 6$ څلورم - $f(x) = x^2 - x$

پنځم - $f(x) = x^2 - \frac{1}{9}$ شپږم - $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$

اوم - $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ اتم - $f(x) = -2x^2 + 8x - 11$

نهم م- $f(x) = 3x^2 - 3x$ لسم - $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{11}{2}x + 10$

نورمال پارابل، بڼه ځل يا - ضريب او راکښنې

د کار قرارداد:

د a2 د مختلفو ارزښتونو لپاره تابع $f(x) = a_2x^2$ وخيرئ او ګراف په وضعيه قيمت سيستم کې وکاږئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = \frac{3}{2}x^2 \quad f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$

د انځور شوي پارابل تابع مساوات يو له بل د x^2 ضريب a_2 له امله توپيروي.

$f_1(x) = x^2$

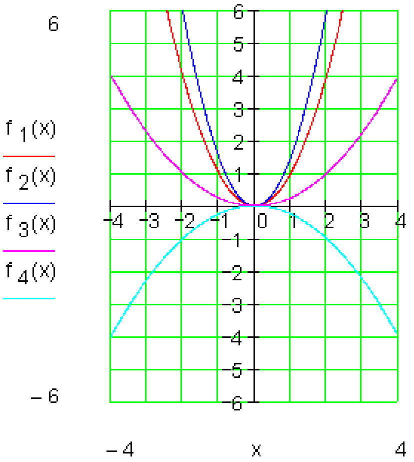
$f_2(x) = \frac{3}{2}x^2$

$f_3(x) = \frac{1}{4}x^2$

$f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$

دا ضريب a_2 د پارابل د بنې لپاره مسول او له دې امله د بنې ضريب بلل کيږي.

د تقاطع ټکی S وضعيه قيمتونه S (0 | 0) لري.



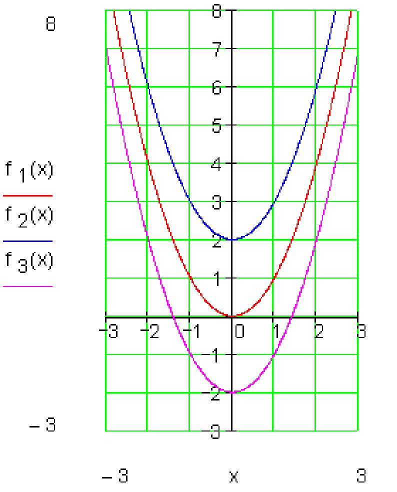
بنه ضريب د پارابل قوارې يا شکل ته څنګه تغير ورکوي؟

ضریب بنې	د پارابول په نخښه ونه
$a = 1$ →	نورمال پارابو ل
$a > 1$ →	غزېدلی پارابول
$0 < a < 1$ →	کېکاږلی پارابول
$a = -1$ →	په x محور هنداره شوی نورمال پارابول
$a < -1$ →	غزېدلی پارابول، په x -محور هنداره
$-1 < a < 0$ →	شوی کیکاږلی پاربول، په x –محور هنداره شوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کار قرارداد:

د a_0 د مختلفو ارزښتونو لپاره د $f(x) = x^2 + a_n$ تابع مطالع کړی او په وضعیه قیمتسیستم کې یې ګراف رسم کړی: $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$

	دا یو راکښلی نورمال پارابل دی، چې ککرئ ټکی(د ر آس نقطه) S دa_0 په واحدونو راکښل شوې ده. $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$ راکښنه دy محور په اوږدوالي باندې صورت نیسي ، چېرته چې د راکښنې لور د a_0د مخنځښې له لارې ټاکل کیدی شي. د تقاطع ټکی S کواوردینات $S(0 \mid a_0)$ لري. $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$

د کار ورکوني قرارداد:

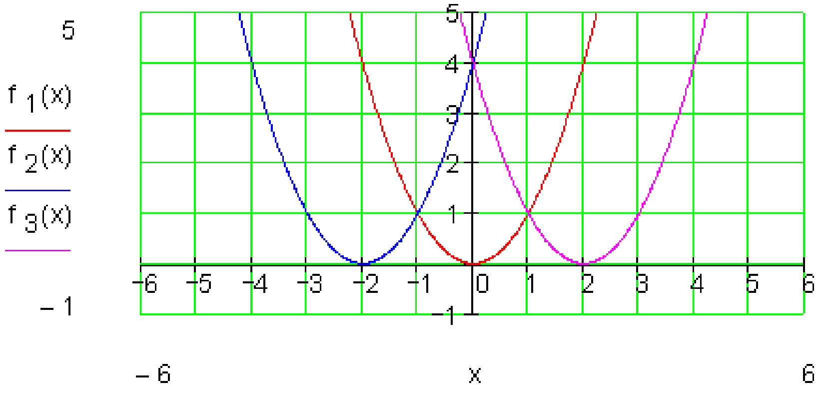
د$f(x) = (x+u)^2$ تابع د u د مختلفو ارزښتونو لپاره راکښنه وڅیړی او ګراف یې په وضعیه قیمتسیستم کې x رسم کړی

$f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = (x+2)^2$ $f_3(x) = (x-2)^2$

د ارزښت جدول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

f_1	x	−2	−1	0	1	2	f_2	x	−4	−3	−2	−1	0	f_3	x	0	1	2	3	4
	y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4



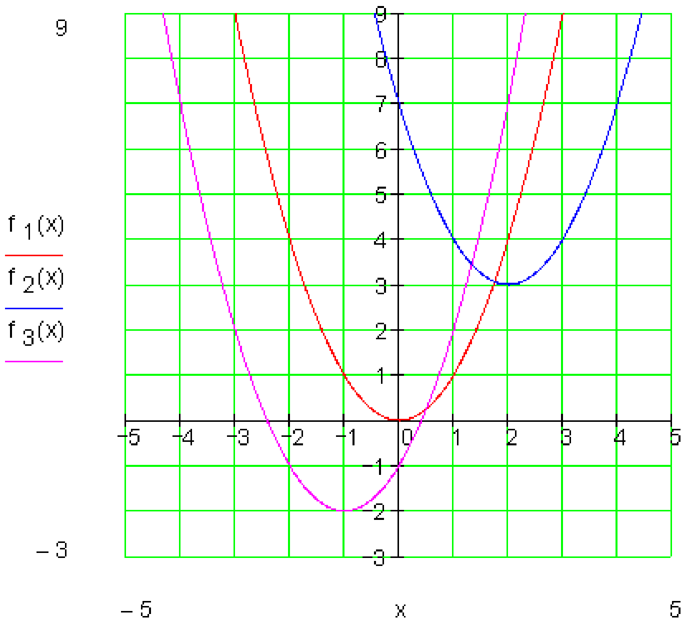
د ا يو راکبنلی (چي ځای ته يي تغير ورکړ شوی وي) نورمال پارابول دی، چي ککرئ ټکی(د رأس نقطه) S يي د u په واحدونو(يوونونو) دx په محور راکبنل يا کبنول شوې ده. دS غوڅتکی(نقطه تقاطع) يي کواوردينات S (-u | 0) لري.

کيڼي لور ته ځرخون يا ځرخول، ککرئ ټکیS په u واحدونو يا يوونوو د پيل يا سرچيني کيڼ لورت پروت دی.	u>0 =>
ښی ځرخون يا ځرخول، ککرټکی S په u واحدونو د پيل يا سرچيني ښیِ لورته پروت دی.	u<0 =>

د کار (ورکوني) قرارداد: د u او a0 دمختلفو ارزښتونو لپاره تابع f(x) = (x+u)² + a0 وڅيرئ او ګراف يي په يوه کواوردينات(پروت ولاړ) سيستم کي انځور کړئ.

$f_1(x) = x^2$ $\qquad f_2(x) = (x-2)^2 + 3$ $\qquad f_3(x) = (x+1)^2 - 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $f_2(x)$ ګراف بيرته يو نورمال پارابول دی، چې ککرئ ټکی S يې په دوه واحده ښی لور ته او په درې واحده پورته لور ته راکښلی دی.

د $f_3(x)$ ګراف هم يو نورمال پارابول دی، چې ککرټکی S (د رأسټکی) په يوه واحد(يوون) کيڼ او په درې واحده لاندې لور ته کښول شوی دی.

د $f(x) = (x+u)^2 + a_0$ ډول تابع د مربع تابع د ککرئ ټکي(رأس ټکي) بڼې تابع بلل کيږي.

د تابع ګراف نورمال پاربول دی، چې په u ارزښت دx محور په لور او په a_0 د yمحور په لور راکښل شوی دی.

که ککرټکی د $S(x_s|y_s)$ سره په نخښنه کړو، نو د ککرټکي بڼې مربع تابع په دې ډول ده:

$$f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډه بڼه:	$S(x_s \mid y_s) \Leftrightarrow f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$
بېلګه:	$S(3 \mid -1) \Leftrightarrow f(x) = (x-3)^2 - 1$

تر اوسه مو فقط نورمال پارابول راکښلی (را کش شوی) وو.

همدا یا برابره راکښنه کیدی شي د یوه په خوښه پارابول سره سرته ورسول شي.

دلته دې بیا فاکتور a_2 په پام کې ونیول شي.

په ټولیزه توګه باور لري:

$Ist\ f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ د یوه نورمال پارابول تابع (بلوان) دی، چې ککرټکی (د رأس ټکی) $S(x_s \mid y_s)$ لری، نو $f(x) = a_2(x - x_s)^2 + y_s$ د ککرټکي د تابع مساوات دي.

د خلورى تکمیلوني له لارې د رآس ټکي(ککرى ټکي) ټاکل

موږ پوهیږو چې صدق کوي:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \Leftrightarrow a_2(x - x_s)^2 + y_s \Rightarrow S(x_s \mid y_s)$$

په ککرټکي کې د تولیز تابع مساواتو د ترم تابع له لارې کیدی شي د یوه پارابول ککرټکی (د ککری ټکی) وشمیرل شي.

بېلګه:

$F(x) = 3x^2 - 12x + 15$ دې په ککرئ ټکي مساوات واړول شي.

لوړمی پل(قدم) : د x^2 تر مخه ضریب دې له نوکانو راوه وېستل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow f(x) = 3[x^2-4x+5]$$

دویم پل : مربع تکمیلونه [ ] او بنه بدلون

$$\Rightarrow f(x) = 3.[x^2 - 4x +(2)^2 -(2)^2 +5] = 3.[(x-2)^2+1]=3.(x-2)^2 +3$$
$$\Rightarrow S(2;3)$$

بیلګه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = \frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 8\right] = \frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 8\right]$$
$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left[(x-3)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow S\left(3 \,\middle|\, -\frac{1}{2}\right)$$

بیلګه:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right] = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{4}\right]$$
$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{36}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{27}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow S\left(-\frac{3}{4} \,\middle|\, -\frac{9}{16}\right)$$

تمرینونه: د مربع تکمیلونې له لارې د رآس ټکي(ککرۍ ټکي) ټاکل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه پارابل تابع مساوات ورکړشوي دي(د دویمې درجې ټول راشنل تابع). د لاندې بارابولونو لپاره رآسته‌کو بڼه او رآسته‌کي پیدا کړئ.

ګرافونه یې وکاږئ:

لومړی: $f(x) = x^2 + 2x + 5$ دویم: $f(x) = x^2 + 4x + 1$

دریم: $f(x) = x^2 - 4x + 1$ څلورم: $f(x) = x^2 - 3x + 3,5$

پنځم: $f(x) = x^2 + x - 3$ شپږم: $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

اووم: $f(x) = -x^2 + 5x - 5$ اتم: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$

نهم: $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$ لسم: $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

بیلګه 1 :

د ټول راشنل تابع ګراف چې رسم کړای شو،په زیاتو حالتونو کې اړیند دی، چې ارزښتجدول وپیژنو. د دې لپاره جبشمیري له لارې کیدی شي. خو دا هم تل اړیین دی.

یو ه ساده بیلګه بې له جبشمیري څخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د متحولې $x = 0$ څخه پیل کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=0: f(0)=0^2-4\cdot 0+3=0-0+3=3$$
$$x=1: f(1)=1^2-4\cdot 1+3=1-4+3=0$$
$$x=2: f(2)=2^2-4\cdot 2+3=4-8+3=-1$$
$$x=3: f(3)=3^2-4\cdot 3+3=9-12+3=0$$
$$x=4: f(4)=4^2-4\cdot 4+3=16-16+3=3$$
$$x=5: f(5)=5^2-4\cdot 5+3=25-20+3=8$$
$$x=6: f(6)=6^2-4\cdot 6+3=36-24+3=15$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له ± 10 لوی شي، کېدی شي چې پع کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکل کيږي.

$$x=-1: f(-1)=(-1)^2-4\cdot(-1)+3=1+4+3=8$$
$$x=-2: f(-2)=(-2)^2-4\cdot(-2)+3=4+8+3=15$$

اوس ټول ارزښتونه په يوه جدول کې کښل کيږي.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	15	8	3	0	−1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د f(x) ګراف رسم شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بيا پسې شميرل کېدی شي

د بيلګې په توګه $x=\pm ½$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=-\frac{1}{2}: f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3=\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}+2+3=5\frac{1}{4}=5,25$$

$$x=\frac{1}{2}: f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-2+3=1\frac{1}{4}=1,25$$

هر څوک له جبشميري سره بنه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شميروني يا کمپيوټر څخه کار واخلي.

په لاندې کې HN د اصلي ګډ مخرج (ماتلاندې) په معنا دی.

يوه غوره بيلګه، چې څنې برخې يې د جبشميري په مرسته حل شوي دي

د تابع مساوات $f(x)=\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}$

يادونه: په لاندې زيات ځايونه HN راغلي، دا د اصلی مخرج په مانا دي.

موږ د $x=0$ سره پيل کوو

$$x=0: f(0)=\frac{4}{5}\cdot 0^2-\frac{3}{4}\cdot 0-\frac{7}{2}=0-0-\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}=-3,5$$

$$x=1: f(1)=\frac{4}{5}\cdot 1^2-\frac{3}{4}\cdot 1-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}-\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}-\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{69}{20}=-3,45$$

$$x=2: f(2)=\frac{4}{5}\cdot 2^2-\frac{3}{4}\cdot 2-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}-\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=-\frac{18}{10}=-\frac{9}{5}$$

$$=-1,8$$

$$x=3: f(3)=\frac{4}{5}\cdot 3^2-\frac{3}{4}\cdot 3-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}-\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}-\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{29}{20}=1,45$$

$$x=4: f(4)=\frac{4}{5}\cdot 4^2-\frac{3}{4}\cdot 4-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}-3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}-\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{63}{10}=6,3$$

$$x=5: f(5)=\frac{4}{5}\cdot 5^2-\frac{3}{4}\cdot 5-\frac{7}{2}=20-\frac{15}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=4}{=}\frac{80}{4}-\frac{15}{4}-\frac{14}{4}=\frac{51}{4}=12,75$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکو.

$$x=-1:\ f(-1)=\frac{4}{5}\cdot(-1)^2-\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{\equiv}\frac{16}{20}+\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{39}{20}=-1{,}95$$

$$x=-2:\ f(-2)=\frac{4}{5}\cdot(-2)^2-\frac{3}{4}\cdot(-2)-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{\equiv}\frac{32}{10}+\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1{,}2$$

$$x=-3:\ f(-3)=\frac{4}{5}\cdot(-3)^2-\frac{3}{4}\cdot(-3)-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{\equiv}\frac{144}{20}+\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{119}{20}=5{,}95$$

$$x=-4:\ f(-4)=\frac{4}{5}\cdot(-4)^2-\frac{3}{4}\cdot(-4)-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}+3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{\equiv}\frac{128}{10}+\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{123}{10}=12{,}3$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې لیکل کیږي.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دې ارزښتونو سره اوس د ګراف کښل کیدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسې شمیرل کیدی شي

د بیلګې په توګه $x=\pm 5/2$

$$x=-\frac{5}{2}:\ f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{\equiv}\frac{40}{8}+\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=\frac{27}{8}=3{,}375$$

$$x=\frac{5}{2}:\ f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{\equiv}\frac{40}{8}-\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=-\frac{3}{8}=-0{,}375$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: په پورته کې (HN(Hauptnenner داصلې مخرج(ماتلاندې) یا مخرج مشترک په معنا دی.

د دې لپاره چې د یوه ټول ریښتونې یا تام راشنل تابع گراف انځور کړای شو، په زیاتو حالتونو کې اړیین دی، چې ارزښت جدول وکاږو. د دې لپاره یو جبشمیرونې ته اړتیا لرو.

یو ه ساده بیلګه بې له جبشمیري څخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د تحولې $x = 0$ څخه پیل کوو

$$
\begin{aligned}
x = 0: f(0) &= 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3 \\
x = 1: f(1) &= 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0 \\
x = 2: f(2) &= 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \\
x = 3: f(3) &= 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0 \\
x = 4: f(4) &= 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3 \\
x = 5: f(5) &= 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8 \\
x = 6: f(6) &= 6^2 - 4 \cdot 6 + 3 = 36 - 24 + 3 = 15
\end{aligned}
$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له $\pm$ 10 لوی شي، کېدی شي چې پع کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکل کیږي.

$$
\begin{aligned}
x = -1: f(-1) &= (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8 \\
x = -2: f(-2) &= (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15
\end{aligned}
$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې کښل کیږي.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	15	8	3	0	−1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د $f(x)$ گراف رسم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسې شمېرل کیدی شي

د بیلګې په توګه $x = \pm ½$

$$x = -\frac{1}{2}: f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} + 2 + 3 = 5\frac{1}{4} = 5{,}25$$

$$x = \frac{1}{2}: f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 4\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 2 + 3 = 1\frac{1}{4} = 1{,}25$$

هر څوک له جبشمېري سره ښه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شمیروني یا کمپیوتر څخه کار واخلي.

یوه غوره بیلګه، چې ځنې برخې یې د جبشمیري په مرسته حل شوي دي:

د تابع مساوات $f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$

موږ د $x = 0$ سره بیل کوو

$$x = 0: f(0) = \frac{4}{5}\cdot 0^2 - \frac{3}{4}\cdot 0 - \frac{7}{2} = 0 - 0 - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} = -3{,}5$$

$$x = 1: f(1) = \frac{4}{5}\cdot 1^2 - \frac{3}{4}\cdot 1 - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} - \frac{7}{2} \underset{HN=20}{=} \frac{16}{20} - \frac{15}{20} - \frac{70}{20} = -\frac{69}{20} = -3{,}45$$

$$x = 2: f(2) = \frac{4}{5}\cdot 2^2 - \frac{3}{4}\cdot 2 - \frac{7}{2} = \frac{16}{5} - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \underset{HN=10}{=} \frac{32}{10} - \frac{15}{10} - \frac{35}{10} = -\frac{18}{10} = -\frac{9}{5} = -1{,}8$$

$$x = 3: f(3) = \frac{4}{5}\cdot 3^2 - \frac{3}{4}\cdot 3 - \frac{7}{2} = \frac{36}{5} - \frac{9}{4} - \frac{7}{2} \underset{HN=20}{=} \frac{144}{20} - \frac{45}{20} - \frac{70}{20} = \frac{29}{20} = 1{,}45$$

$$x = 4: f(4) = \frac{4}{5}\cdot 4^2 - \frac{3}{4}\cdot 4 - \frac{7}{2} = \frac{64}{5} - 3 - \frac{7}{2} \underset{HN=10}{=} \frac{128}{10} - \frac{30}{10} - \frac{35}{10} = \frac{63}{10} = 6{,}3$$

$$x = 5: f(5) = \frac{4}{5}\cdot 5^2 - \frac{3}{4}\cdot 5 - \frac{7}{2} = 20 - \frac{15}{4} - \frac{7}{2} \underset{HN=4}{=} \frac{80}{4} - \frac{15}{4} - \frac{14}{4} = \frac{51}{4} = 12{,}75$$

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=-1:\ f(-1)=\frac{4}{5}\cdot(-1)^2-\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}+\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{39}{20}=-1{,}95$$

$$x=-2:\ f(-2)=\frac{4}{5}\cdot(-2)^2-\frac{3}{4}\cdot(-2)-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}+\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1{,}2$$

$$x=-3:\ f(-3)=\frac{4}{5}\cdot(-3)^2-\frac{3}{4}\cdot(-3)-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}+\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{119}{20}=5{,}95$$

$$x=-4:\ f(-4)=\frac{4}{5}\cdot(-4)^2-\frac{3}{4}\cdot(-4)-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}+3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}+\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{123}{10}=12{,}3$$

اوس ټول ارزښتونه په يوه جدول کې ليکل کيږي.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f (x)	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دې ارزښتونو سره اوس د ګراف کښل کيدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بيا پسې شميرل کيدی شي

د بېلګې په توګه $x = \pm 5/2$

$$x=-\frac{5}{2}:\ f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$

$$=\frac{25}{5}+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}+\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=\frac{27}{8}=3{,}375$$

$$x=\frac{5}{2}:\ f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$

$$=\frac{25}{5}-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}-\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=-\frac{3}{8}=-0{,}375$$

پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنسټونه مربع توابع II

لومړی - د لاندې پارابولونو د تابع مساوات ورکړی:

الف- $f(x)=x^2-4x+2$ ب - $f(x)=x^2+4x+2$

پ - $f(x)=-x^2-4x+3$ ت- $f(x)=-x^2+8x-9$

ټ- $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+5$ ث - $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+6$

ج - $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-2$ چ - $f(x)=-\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{4}x+6$

ح- $f(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x-7$ خ - $f(x)=\frac{4}{5}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}$

(۱) د ککرئ ټکي بڼه او ککرئ ټکي وټاکی.

(۲) د محورونو غوڅټکي وشمیری.

(۳) پل په پل تشریح کړی، چی f(x) د نورمال پارابول حخه څنګه منځ ته راځي او دا څنګه واز دی.

(۴) په یوه مناسب پروتولاړسیستم کې د f(x) ګراف وکاږی

دویم – سړی کړی شي د نورمال پارابول څخه هر په خوښه پارابول د د غوڅټکي د راکښني له لارې او د پرسېدني یا غزوني له لارې منځ ته اوړي. که دا کښته لور ته واز وي، نو دا دx محور باندې هنداره کیږي یا منعکس کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه پارابول په هکله لاندې ټکي پیژنو:

د y په لور راکښنه یا بدلون	د x په لور راکښنه یا ځای بدلون	Formfaktor بڼه ضریب	
په 2 واحدونو کښنه لور ته	په 2 واحدونو ښي لورته	$a_2 = 1$	a)
په 4 واحدونو پورته لور ته	په 3 واحدونو کيڼ لورته	$a_2 = -1$	b)
په 4 واحدونو کښته لور ته	په 2 واحدونو کيڼ لورته	$a_2 = \frac{1}{2}$	c)
په 5 واحدونو پورته لور ته	په 1 واحد ښي لورته	$a_2 = -2$	d)
په 3 واحدونو پورته لور ته	په 4 واحدونو کيڼ لورته	$a_2 = -\frac{1}{4}$	e)
په 6 واحدونو کښنه لور ته	په 2,5 واحدونو ښي لورته	$a_2 = \frac{3}{2}$	f)
په 3 واحدونو پورته لور ته	په 3 واحدونو کيڼ لورته	$a_2 = -\frac{3}{4}$	g)
په 4,5 واحدونو کښنه لور ته	په 3,5 واحدونو ښي لورته	$a_2 = 2$	h)
په 3 واحدونو یا یوونونو کښنه لور ته	په 2 واحدونو ښي لورته	$a_2 = \frac{1}{3}$	i)
په3 واحدونو پورته لور ته		$a_2 = -\frac{2}{3}$	j)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په 4 واحدونو بښي لورته

(۱) د ککرئ ټکي ښه او ککرئ ټکي وټاکی.

(۲) د محورونو غوځتکي وشميرى.

(۳) د تابع مساوات په پولينوم بڼه $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$? څنګه دي؟

(۴) په يو مناسب کواوردينات سيسم کې د f(x) ګراف وکاږی.

پوښتني

د مربع توابعو ښستيونه IV

لومړی:

تابع f(x) ورکړ شوی دی. د شميرني له لارې وښايی، چې ګراف تابع په x محور کې لمسوي. ګراف وکاږی.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8} \quad x \in \mathbb{R}$$

دويم: د تابع مساوات(f(x د محور غوځتکي وشميرى، او ککرئ ټکي. ګراف يې رسم کړی.

الف- $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x$ ب - $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$ پ- $f(x) = x^2 + 4x + 1$

ت - $f(x) = -0,25\left(4x^2 + 12x + 9\right)$ ټ ـ $f(x) = 3x(1-x)$ ث-

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{5}{3}$$

دريم: د$U = 18\ cm$ محيط سره کوم مستطيل(ولاړکوډيز) خورا لويه سطحه لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم: د توابعو f(x) او g(x) ګرافونه چیرته د x محور غوڅوي؟ ککری چیرته پرتي دي؟ د دواړو ګرافونو ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي؟ د ارزښت جدول په مرسته پوښتنې ځواب کړئ.

الف –

x	–3	–2	–1	0	1	2
f(x)	–3,5	0,5	2,5	2,5	0,5	–3,5
g(x)	4	0	–2	–2	0	4

ب –

x	–2	–1	0	1	2	3
f(x)	–12	–5	0	3	4	3
g(x)	3,5	0	–2,5	–4	–4,5	–4

پنځم: د اړونده ګراف کوم خویونه د تابع مساوات څخه سیده لوستل کیدی شي؟

$$f(x) = -x^2 - x + 6; \quad g(x) = (2-x)(x+3); \quad h(x) = -(x+0{,}5)^2 + \frac{25}{4}$$

د مربع-یا څلورئ توابعو معکوس تابع

تلنلار (که غواړې: طریقه یا قانون) همداسې ده لکه پورته په کرښیزو توابعو کې چې وښوول شوه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y=(f(x)=x^2$

د متحولو x او y بدلول

$x=f(y)=y^2 \Leftrightarrow y^2=x$

رینه نیونه:

له دې لاس ته راځي او برعکس

$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$

يا $y = -\sqrt{x}$

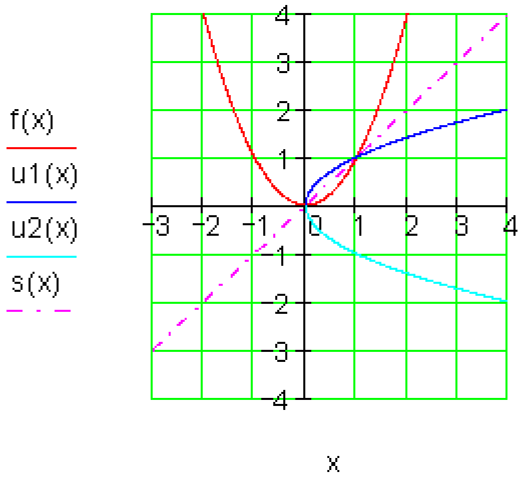
نو دوه معکوس توابع شتون لري:

$y = u_1(x) = \sqrt{x}$

او

$y = u_2(x) = -\sqrt{x}$

د معکوس تابع جوړولو سره تعريفورشو محدوده شوه، د دې لپاره چې يواځنی نظم منځ ته راشي



(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښنیزبرابرونسیستم د ۲ برابرونونو او ۲ متحولو سره.

داسي سیستم له دوه مساوتو څخه جوړ دی. غوښتونی د دواړو مساواتو ګډ حل دی. مختلفي تلنلاړي شته، چي سړی حل ته ورسيږي

په لاندي einsetzen in = په ... کي اېښوول.

د جمعي تلنلار:

مساواتسیستم: (I) $5x - 2y = 1$ (II) $3x + 3y = 9$	د حل پل(قدم) غوښي(قطاع، که قطعه؟) د جمعي تلنلار ته لومړی امکان یا واریانت
(I) $5x - 2y = 1 \mid \cdot 1{,}5$ (II) $3x + 3y = 9$ (I) $7{,}5x - 3y = 1{,}5$ (II) $3x + 3y = 9$	لومړی: مساوات ورته داسي بڼه بدل کړئ، چي ضریبونه (ترمخ عددونه) د yمتحولي تر مخنخښي پوري سره سروخوري.
(I) $7{,}5x - 3y = 1{,}5$ (II) $3x + 3y = 9$ + $10{,}5x = 10{,}5 \mid : 10{,}5$ $\Leftrightarrow$ $x = 1$	دویم: منځ ته راغلي مساوات سره جمعه کړي او د **x** - متحولي پسي يي حل کړئ
په $3x + 3y = 9$ کي ايښوونه: $x = 1$	دریم: د **x** لپاره میندل شوي ارزښتونه د دواړو څخه په یوه مساوات کي کيږدئ او **y** پسي يي حل کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$3\cdot 1+3y=9$ $\Leftrightarrow 3+3y=9 \mid -3$ $\Leftrightarrow 3y=6 \mid :3$ $\Leftrightarrow y=2$	
$L=\{(1 \mid 2)\}$	څلورم: حلست یا حلډېرئ ولیکئ

پنځم:

ازماینت د ابنووني له لارې

$$(I)\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$

$$(II)\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

مساواتسیستم

$$(I)\quad 5x-2y=1$$
$$(II)\quad 3x+3y=9$$

د حل پلونه قدمونه د جمعي تلنلار لپاره

دویم واریانت

لومړی: مساوات داسې ورته بنهبدل کړئ، چې د **x** ضریبونه(ترمخعددونه) تر مخنخښې پورې سره یوغږیز شي.

$$(I)\quad 5x-2y=1 \mid \cdot 3$$
$$(II)\quad 3x+3y=9 \mid \cdot(-5)$$
$$(I)\quad 15x-6y=3$$
$$(II)\quad -15x-15y=-45$$

دویم: منځ ته راغلی مساوات سره جمعه کړئ او متحولې **y** پسې یې حل کړئ.

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & 15x-6y=3\\ (II) & -15x-15y=-45\end{array}\right\}+$$

$$-21y=-42 \mid :(-21)$$

$$\Leftrightarrow \quad y=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: بني لورته الماني د اینووني په مانا ده

$$y = 2 \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y = 9$$

د x لپاره میندل شوي ارزښتونه له دې دوه پهیوه مساوت کي کیږدئ او د متحولي x پسې یې حال کړئ.

$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 3x = 3 \mid : 3$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

څلروم: حلستې یا د حلډېرئ ولیکئ

$$L = \{(1 \mid 2)\}$$

پنځم: د اینووني له لارې ازماېښت

$$\text{(I)} \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$\text{(II)} \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د برابراینووني تلنلار

مساواتسیستم

$$\text{(I)} \quad 5x - 2y = 1$$
$$\text{(II)} \quad 3x + 3y = 9$$

د حل پل د برابراینووني تلنلار ته

واریانت 1

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{array}{lll}
(I) & 5x - 2y = 1 & | +2y \\
(II) & 3x + 3y = 9 & | -3y \\
\hline
(I) & 5x = 1 + 2y & |: 5 \\
(II) & 3x = 9 - 3y & |: 3 \\
\hline
(I) & x = \dfrac{1+2y}{5} & \\
(II) & x = \dfrac{9-3y}{3} & \\
\hline
(I) & x = \dfrac{1+2y}{5} & \\
(II) & x = 3 - y &
\end{array}
$$

لومړی: دواړه مساوات د اووښتوني یا متحولې **x** پسې حل کیږي.

$$
\begin{aligned}
\frac{1+2y}{5} &= 3 - y \;|\cdot 5 \\
\Leftrightarrow 1 + 2y &= 15 - 5y \;| +5y \\
\Leftrightarrow 1 + 7y &= 15 \;| -1 \\
\Leftrightarrow 7y &= 14 \;|: 7 \\
\Leftrightarrow y &= 2
\end{aligned}
$$

دویم: د مساوات ښي ا ړخونه برابر اینوول کیږي او د متحولې **y** پسې حل کیږي.

دریم: (د کین لور الماني په پښتو: اینسول په ..کې)

$y = 2$ eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

$$
\begin{aligned}
3x + 3 \cdot 2 &= 9 \\
\Leftrightarrow 3x + 6 &= 9 \;| -6 \\
\Leftrightarrow 3x &= 3 \;|: 3 \\
\Leftrightarrow x &= 1
\end{aligned}
$$

د **y** میندل شوی ارزښت د دواړو څخه په یوه وتونمساوات کې اینسوول کیږي، او دا بیا د متحولې **x** پسې حل کیږي.

$$L = \{(1 | 2)\}$$

څلورم: حلسټ یا ــدېرئ ولیکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم: د ځا په ځای کولو یا ایښوولو له لارې ازماېښت

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د حل پل د برابرایښوولو له لارې

واریانت 2

مساواتسیستم

$$(I)\quad 5x - 2y = 1$$
$$(II)\quad 3x + 3y = 9$$

لومړی: دواړه مساوت د اووښتونې یا متحولې y پسې حل کیږي.

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \mid -5x$$
$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \mid -3x$$

$$(I)\quad -2y = 1 - 5x \mid : (-2)$$
$$(II)\quad 3y = 9 - 3x \mid : 3$$

$$(I)\quad y = \frac{1 - 5x}{-2}$$
$$(II)\quad y = \frac{9 - 3x}{3}$$

$$(I)\quad y = \frac{5x - 1}{2}$$
$$(II)\quad y = 3 - x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{5x-1}{2} = 3-x \;|\cdot 2$$
$$\Leftrightarrow 5x-1 = 6-2x \;|\; +2x$$
$$\Leftrightarrow 7x-1 = 6 \;|\; +1$$
$$\Leftrightarrow 7x = 7 \;|\; :7$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$$

دويم: د دوارو مساواتو ښئ خوا برابره ليکل يا اينبوول کيږي او د متحولې **x** پسې حل کيږي.

$$x = 1 \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y = 9$$
$$3\cdot 1 + 3y = 9$$
$$\Leftrightarrow 3 + 3y = 9 \;|\; -3$$
$$\Leftrightarrow 3y = 6 \;|\; :3$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$$

درى(ښئ الماني: اينبوول په ...کې)

د **x** ميندل شوى ارزښت د ددارو وتونمساواتو څخه په يوه کې اينبوول کيږي، دا بيا د متحولې **y** پسې حل کيږي.

$$\underline{\underline{L = \{(1|2)\}}}$$

څلورم: د حلسټ وليکئ

پنځم د اينبووني له لارې ازماښت

$$\text{(I)}\quad 5x-2y = 1 \Rightarrow 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5-4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$\text{(II)}\quad 3x+3y = 9 \Rightarrow 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3+6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

مساواتسيستم

$$\text{(I)}\qquad 5x - 2y = 1$$
$$\text{(II)}\qquad 3x + 3y = 9$$

د اينبووني تلنلار: د اينبووني تلنلار لپاره د حل پلونه(قدمونه)

وارينت 1

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: مساوات**(I)** د **x** پسي حل کيږي.

$$(I)\ \ 5x - 2y = 1 \mid +2y$$
$$\Leftrightarrow 5x = 2y + 1 \mid : 5$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}$$

$$x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5} \text{ eingesetzt in } (II):\ 3x + 3y = 9$$
$$3\left(\frac{2}{5}y + \frac{1}{5}\right) + 3y = 9$$

دويم: د بني اړخ ميندل شوی ترم په مساوات **(II)** کې ايښوول کيږي او د **y** پسي حل کيږي.

$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + \frac{3}{5} + 3y = 9 \mid -\frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + 3y = 9 - \frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{21}{5}y = \frac{42}{5} \mid \cdot 5$$
$$\Leftrightarrow 21y = 42 \mid : 21$$
$$\Leftrightarrow \quad y = 2$$

دريم: د **y** لپاره ميندل شوی ارزښت په يو د دې دوه وتونمساواتو کې ايښوول کيږي، دا بياپه **x** پسي حل کيږي.

$$y = 2 \text{ eingesetzt in } (II):\ 3x + 3y = 9$$
$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 3x = 3 \mid : 3$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 1$$

خلورم: د حل سټ وليکئ

$$L = \{(1 \mid 2)\}$$

پنځم: د ايښوولو له لارې حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$

$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د حل پلونه(قدمونه) د اینوولو تلنلار لپاره

واریانت 2

مساواتسیستم

$$(I)\quad 5x - 2y = 1$$

$$(II)\quad 3x + 3y = 9$$

لومړی: مساوات**(II)** د متحولي **y** پسي حل کيږي.

$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \,|\, -3x$$
$$\Leftrightarrow \quad 3y = 9 - 3x \,|: 3$$
$$\Leftrightarrow \quad y = 3 - x$$

دویم: دبنی لور میندل سوی ترم په مساوات **(I)**کې کيږدئ او په **x** پسي يې حل کړئ.

$$y = 3 - x \text{ eingesetzt in } (I): 5x - 2y = 1$$
$$5x - 2(3 - x) = 1$$
$$\Leftrightarrow 5x - 6 + 2x = 1 \,|\, +6$$
$$\Leftrightarrow 7x = 7 \,|: 7$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

3. دریم: د **x** لپاره میندل شوی ارزښت په يو د دې دوه وتونمساوتو کې اینوول کيږي، او دا بیا د متحولي **y** پسي حل کيږي.

$$x = 1 \text{ eingesetzt in } (II): 3x + 3y = 9$$
$$3\cdot 1 + 3y = 9$$
$$\Leftrightarrow 3 + 3y = 9 \,|\, -3$$
$$\Leftrightarrow 3y = 6 \,|: 3$$
$$\Leftrightarrow y = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم: جلسټ ولیکئ

$L = \{(1|2)\}$

پنځم: ازماېښت د اېښوولو له لارې

$$(I)\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \;\Leftrightarrow 5-4=1 \;\Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$
$$(II)\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

ټولې درې تلنلارې د هغه د واریانتو سره په یوه ټکلي مساوتسیستم وکارول شو. که ځوک یوګوني تلنلرې ټیک وګوري، پیژني، چې په واریانت ۲ کې لږ د شمیرلو کار غوښتونی دی.

په یوه ټاکلي تلنلار د شمیرلو کار د دې حل کوونکي مساوتسیستم په واک کې دی. له دې امله دې لومړی پام وشي، چې کومه تلنلار د لږ کار سره سرته رسیدی شي. د دې لپاره نو یو ځو بیلګو ته اړ یو. لاندې بیګې دې د دې لپاره یوه کوچنۍ مرسته وي، چې مناسب د حل – یا ځواب تلنلار پیداشي.

د مناسب ځواب تلنلار لپاره بیلګې

بیلګه ۱ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

x1=-1 په (1) کې اینوونه y=7x+8 $y = 7\cdot(-1)+8$ $\Leftrightarrow y = -7+8$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 1}}$ حل: L={(-1|1)} ازماېښت (I) $y = 7x+8 \Rightarrow y = 7\cdot(-1)+8$ $\Leftrightarrow y = -7+8 \Leftrightarrow y = 1$ (w) (II) $y = -2x-1 \Rightarrow y = -2\cdot(-1)-1$ $\Leftrightarrow y = 2-1 \Leftrightarrow y = 1$ (w)	(I) $y = 7x+8$ (II) $y = -2x-1$ د برابر اینوونې لار $7x+8 = -2x-1 \mid +2x$ $\Leftrightarrow 9x+8 = -1 \mid -8$ $\Leftrightarrow 9x = -9 \mid :9$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = -1}}$

بیلګه۲:

Y=3 اینوونه په (1) کې 2x+4y=8 حل: $2x-12 = 8 \mid +12$ $\Leftrightarrow 2x = 20 \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 10}}$ ازماېښت (I) $2x+4y = 8 \Rightarrow 2\cdot 10+4\cdot(-3) = 8$ $\Leftrightarrow 20-12 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8$ (w) (II) $2x-5y = 35 \Rightarrow 2\cdot 10-5\cdot(-3) = 35$ $\Leftrightarrow 20+15 = 35 \Leftrightarrow 35 = 35$ (w)	(I) $2x+4y = 8$ (II) $2x-5y = 35$ د جمعي تلنلار: (II) $2x-5y = 35 \mid \cdot(-1)$ (I) $2x+4y = 8$ (II) $-2x+5y = -35$ } + $9y = -27 \mid 9$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۳ :

(I) $x + 2y = 5$ (II) $-x + y = 1$ د اینووني لار; (II) په y پسې حل کړئ $-x + y = 1 \mid +x$ $\Leftrightarrow \quad y = x + 1$ په (I) کې کیږدئ x+2y=5 $x + 2(x + 1) = 5$ $\Leftrightarrow x + 2x + 2 = 5 \mid -2$ $\Leftrightarrow \quad 3x = 3 \mid : 3$ $\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 1}}$	X=1 په (1) کې کیږدئ x+2y=5 $1 + 2y = 5 \mid -1$ $\Leftrightarrow 2y = 4 \mid : 2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$ حل: L= {(1|2)} ازماېښت (I) $x + 2y = 5 \Rightarrow 1 + 4 = 5$ $\Leftrightarrow 5 = 5 \ (w)$ (II) $-x + y = 1 \Rightarrow -1 + 2 = 1 = 35$ $\Leftrightarrow 1 = 1 \ (w)$ د ربښتیا لپاره w

بیلګه ۴ : په لاندې: einsetzen اینووونه په (1)کې اوبیونه یا حل:Lösung ازماېښتProbe د زیاتون یا جمعې لار:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{aligned}(I)\quad & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ (II)\quad & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{aligned}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$

$$\Leftrightarrow -5=y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

$y=-5$ eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2\,|\,-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2 \Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2 \Leftrightarrow 2=2\ (w)$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4 \Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$

$$\Leftrightarrow 6-2=4 \Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(I) $\frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$

(II) $\frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4$

Additionsverfahren:

(I) $\frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \mid \cdot 2$

(II) $\frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \mid : (-2)$

(I) $\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 4$

(II) $-\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = -2$ $\Big\}+$

$$-\frac{10}{y} = 2 \mid \cdot y$$

$\Leftrightarrow -10 = 2y \mid : 2$

$\Leftrightarrow -5 = y$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -5}}$

$y = -5$ eingesetzt in (I) $\frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$

$\frac{3}{x} - \frac{5}{2(-5)} = 2$

$\Leftrightarrow \frac{3}{x} + \frac{1}{2} = 2 \mid -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{3}{2} \mid \cdot x$

$\Leftrightarrow 3 = \frac{3}{2}x \mid \cdot \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}}$

Lösung: $L = \{(2 \mid -5)\}$ $x, y \neq 0$

Probe:

(I) $\frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{5}{2(-5)} = 2$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$ (w)

(II) $\frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \Rightarrow \frac{12}{2} + \frac{10}{-5} = 4$

$\Leftrightarrow 6 - 2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4$ (w)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$

$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$

$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{aligned}\text{(I)}\quad & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ \text{(II)}\quad & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{aligned}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$

$$\Leftrightarrow -5=y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

y = −5 eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2|-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\Rightarrow\frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2\Leftrightarrow 2=2\ (w)$$

$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\Rightarrow\frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$

$$\Leftrightarrow 6-2=4\Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

یادونه:

مساواتسیستم د کسرونو ترمونو څخه جوړ دی. دا چې مخرج دد صفر کیدو اجازه نه لري یا نه شي صفر کیدی، تعریفست باید ورکړ شي. داسې مساواتسیستم کربنیز نه دی.

د رسموني لار

$$\text{(I)}\qquad x-y=-2\qquad L_I=\{(-2|0);(-1|1);(0|2);(1|3);\ldots\}$$

$$\text{(II)}\ \wedge\ -2x-y=1\qquad L_{II}=\{(-2|3);(-1|1);(0|-1);(1|-3);\ldots\}$$

دواړه مساوات د y پسې حل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هر مساوات لپاره ارزښتجوړې د حل سټ په ګوته کوي.

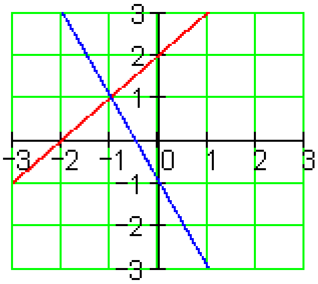
$$
\begin{array}{lrl}
(I) & x - y = -2 & | +y \\
(II) & -2x - y = 1 & | +y \\
\hline
(I) & x = -2 + y & | +2 \\
(II) & -2x = 1 + y & | -1 \\
\hline
(I) & x + 2 = y \Leftrightarrow y = x + 2 & \\
(II) & -2x - 1 = y \Leftrightarrow y = -2x - 1 & \\
\hline
\end{array}
$$

کا دا په يوه کواوردیناتسیستم کې وکښل شي، نو دوه کرښې ترې لاس ته راځي. د کرښو په غوڅېټکي يا نقطه تقاطع کې د د,ړو مساواتو حلسټ پروت دی.

حلسټ يا-ډېرئ: $L=\{(-1|1)\}$

په هر مساوات کې د x لپاره عددونه اېښوول کيږي.

x	-2	-1	0	1
y_I	0	1	2	3
y_{II}	3	1	-1	-3



د رسموني لار د مساوات او کرښو ترمنځ هندسي(ځمککچيزې) اړيکې ليدوړ کوي. د حل لار په حيث زيات وخت مناسب نه دی، چې د ګډغوڅېټکي کواودينات په ګرفيک کې ناټيک لوستل کيدی شي.

برابرون – يا مساواتسيستم بې له يواځني حل خخه

رسميزه حل يا درسم له لارې حل د مساوات او کرښې ترمنځ هندسي اړيکې ليدوړ کوي.

- دوه کرښې کيدی شي چې نسبت يو بل ته مختلف پروتځايونه ولري.

- دا کيدی چې په يو ټکي کې سره غوڅې کړي، لکه پورته بيلګه چې ليدوړ کوي، د دواړو کرښيز مساوات لپاره ټک يو حل شتون لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- دا کیدی شي یو بل سره غبرګې وي، نو په دې حالت کې کوم ټکی نه شته، چې دواړه کربښې یې یو له بل سره ګډ ولري. له دې سره اړونده مساوات له دې امله حل نه لري.

- دا کیدی شي یو په بل پرتې وي، یعنې کټمټ وي، نو هر ټکی د یوې کربښې به د بلې کربښې ټکی هم وي. نو له دې امله به دااړونده مساوات ناپای زیات حلونه ولري.

مساوات سیستم حل نه لري چې دا د حل پیل مو یوه . لیدوږ دا په دې معنا دی، ې ځغلي او کوم ګډ ټکی نه لري.	$(I)\quad 10x + 4y = 4$ $(II)\quad 5x + 2y = 1 \mid \cdot(-2)$ $(I)\quad 10x + 4y = 4$ $(II)\quad -10x - 4y = -2 \mid$ $+$ 0=2 نو دا ناټیک وینا ده، له دې لاس ته را ځي $L=\{\}$

دا مساواتسیستم ناپای ډېر ځوابونه یا حلونه لري

د ورته بڼه بدلون وروسته د مساوات (I) او مساوات (II) جمعه کونې یو بل سره پورته کوي یا له منځه وړي، دا په دې معنا چې مساوات ورته یا ایدنتیک دي. هره د اعدادو جوړه، چې مساوات (I) پوره کوي،دا مساوات (II)هم پوره کوي. لیدوږ دا په دې معنا دی، چې کربښې یو په بل پرتې دي.	$(I)\quad 10x + 4y = 2$ $(II)\quad 5x + 2y = 1 \mid \cdot(-2)$ $(I)\quad 10x + 4y = 2$ $(II)\quad -10x - 4y = -2 \mid$ $+$ 0=0 له دې لاس ته راځي رښتیا وینا

پوښتنې

مساواتسیستم I

مساوات سیستم ته د دوه متحولو سره ګډوله پوښتنې، کربښیزمساواتسیستم، سیستم د کسري ترمونو سره او شي پوښتنې(د متن سره پ،ښتنې)

لومړی: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

الف- (I) $5y-3x=1$ (II) $x=y+1$

ب - (I) $4x+5y=32$ (II) $y=5x-11$

پ- (I) $15y-4x=-50$ (II) $x=y+7$

ت - (I) $3x=y+15$ (II) $2y-10=2x$

د ویم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

a) (I) $2y=2x-40$ (II) $3x=10-2y$

b) (I) $\frac{x}{2}-\frac{3y}{5}=3$ (II) $\frac{x}{4}+y=8$

c) (I) $\frac{2x}{15}+\frac{7y}{12}=3$ (II) $\frac{7x}{25}-\frac{5y}{16}=\frac{3}{20}$

d) (I) $\frac{x+5}{y-7}=\frac{4}{3}$ (II) $\frac{x+2}{y-5}=\frac{5}{8}$

دریم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

a) (I) $\frac{4}{3x+1}=\frac{2}{3y-13}$ (II) $\frac{2}{5x-10}=\frac{4}{7y-6}$

b) (I) $\frac{7}{x}-\frac{12}{y}=\frac{5}{6}$ (II) $\frac{4}{y}+\frac{5}{2}=\frac{9}{x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c)

(I) $\frac{4}{x}+\frac{8}{y}=\frac{5}{3}$

(II) $\frac{2}{x}-\frac{4}{y}=-\frac{1}{6}$

d)

(I) $\frac{3}{2x-1}-\frac{8}{3y+2}=-\frac{1}{5}$

(II) $\frac{5}{2x-1}+\frac{4}{3y+2}=\frac{8}{15}$

څلورم: د لاندې مساواتسیستم حلست وټاکئ

(I) $\frac{7}{2x-5}-\frac{9}{7y+5}=\frac{10}{3}$

(II) $\frac{24}{2x-5}+\frac{15}{7y+5}=\frac{19}{3}$

پنځم: یو پلار په دې لحضه کې څلورواره دومره عمر لري لکه ځوي یې او په ۵ کاله کې به فقط درې واره دومره عمر ولري. دا دواړه همدا اوس څومره عمر لري؟

شپږم: په کوم وخا کې به یو (اوبه) ساتونی (بیلر؟) له دوه نلونو څخه نیمم ډک شي، چې لومړی نل د ټول ساتوني د ډکولو لپاره ۱۸ دقیقې اودویم د دې لپاره ۲۲ دقیقو ته اړتیا ولري یا په کار ولري؟

اوم: د یوه مستېیل یا ولاړکونجیزچاپیریال یا محیط ۱۸۰ سانتي متره دی. اړخa څومره اوږد دی، که اړخ b ۳۰ سانتي متره وي؟

اتم: که د دوه ارزښتځاییزه پرته جمعه یا پروت زیاتون عدد9 دی. که ارزښتونه بدل شي، نو نوی عدد   لاس ته راځي چې د زاړه عدد 7/4 ده. دواړه ځا ارزښتونه څومره دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

توان- یا پوتنخ توابع

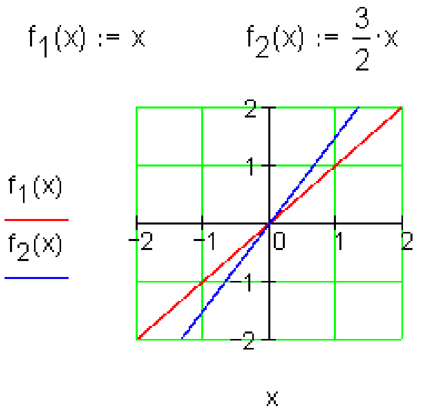
توان توابع

تعریف:

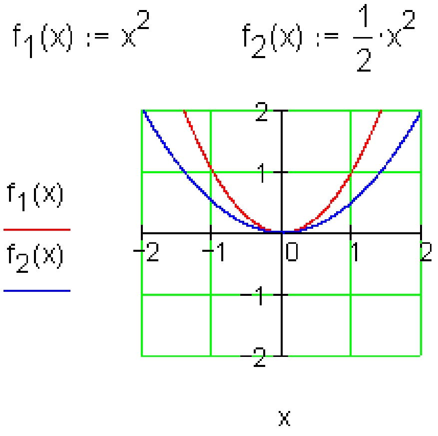
يوه تابع د تابع مساوات $f(x) = a_n x^n \quad ; n \in \mathbb{N} \quad ; a_n \in \mathbb{R}$ سره پوتنخ تابع بلل کيږي.

د n اکپوننت يا جګعدد د پوتنخ تابع درجه ټاکي او ضريب an د ګراف بڼه يا فورم او هغه د بڼي ضريب بلل کيږي.

بیلګي:



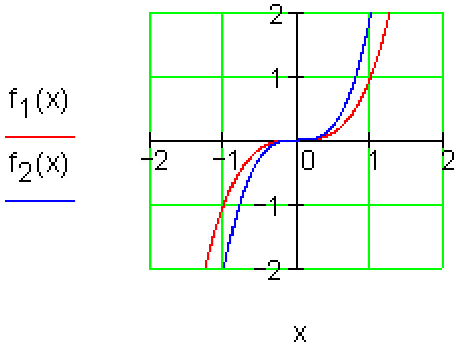
د لومړۍ دزجي توان تابع(کرښه)



د دويمي درجي توان تابع (پارابول)

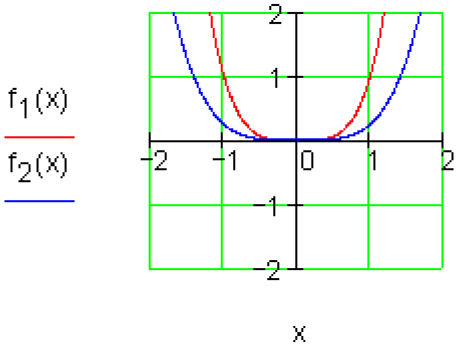
(c) ketabton.com: The Digital Library

$f_1(x) := x^3$ $f_2(x) := 2 \cdot x^3$

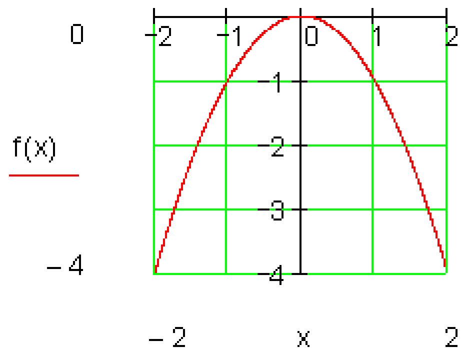


د دريمي درجي توانتابع

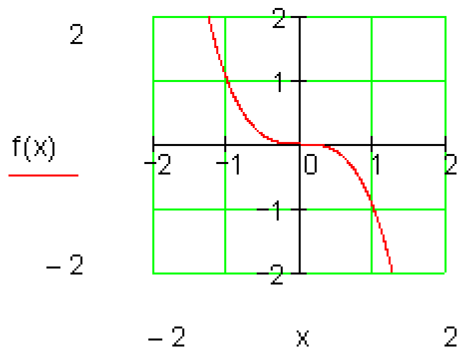
$f_1(x) := x^4$ $f_2(x) := \frac{1}{4} \cdot x^4$



د څلورمي درجي توانتابع



تابع مساوات وليکی



تابع مساوات وليکی

لاندې پوښتنې ځواب کړی:

ب – دn درجه او د a_n مخنخښه د ګراف په تلنه کومه اغيزه لري؟

پ – د پوتنخ تابع n درجه د ګراف په سيومتري کومه اغيزه لري؟

ت – د پوتنخ تابع د n په واکولي او د a_n مخنخښي له امله کوم ارزښتښ(ارزښتډپرى) لري؟

ټ - د a_n مطلق ارزښت د ګراف په تلنه کوم اِيز لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځوابونه لړ. ورروسته راځي.

سیومتري

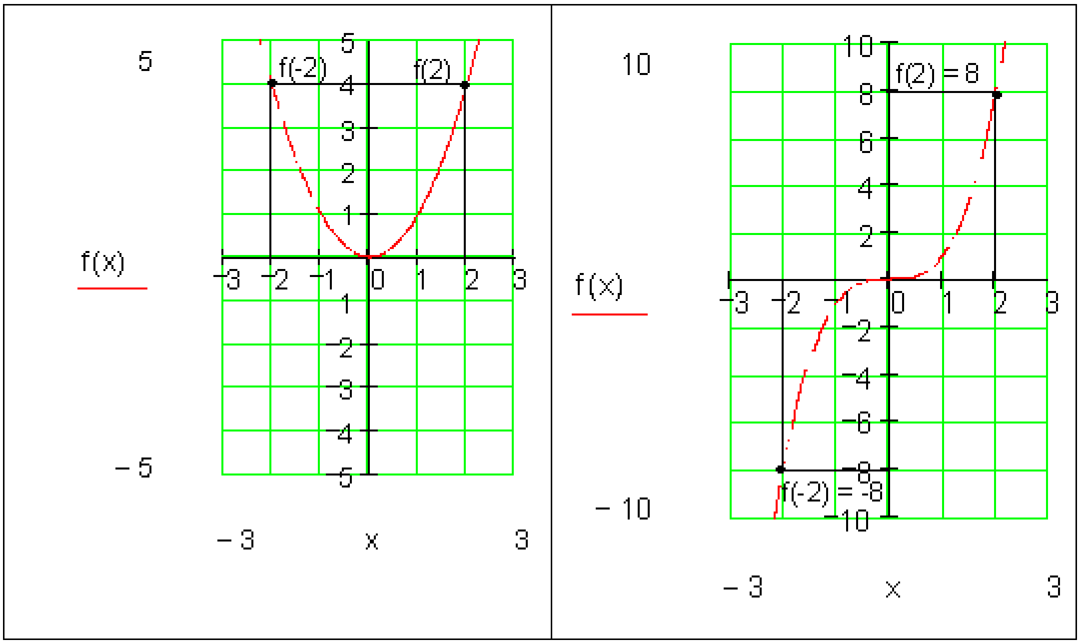
په سیومتري څنګه قضاوت کیدی شي، که څوک فقط د یوه توان(پوتنځ) تابع تابع مساوات پیژني؟

د دې لپاره د لاندې توابعو ګرافونه کاږو:

$f(x) = x^3$ او $f(x)=x^2$

او تابع د $x=-2$ او $x=2$ په ځایونو کې تر څېړنې لاندې نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ګومان مو نږدې دی چې لاندې باور لري:

دx د جوړه ګڼعدد سره د تابع ارزښتونه برابر دي. دا په دې معنا چې :

محورسیمتریک، نو $f(-x) = f(x)$

د x ناجوړه(طاقو) ګڼعددونو لپاره د تابع ارزښت برابر مطلق قیمت لري، مګر متضادې مخنښې لري.

دا په دې معنا چې:

ټکی سیومتریک، نو $f(-x) = -f(x)$

دا اړیکې د ټولو تانتوابعو لپاره باور لري (بې له ښوونې).

د یوه توان - یا طاقت تابع محورسیومتریک دی، که د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري: $f(-x)=f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه توانتابع ګراف ټکی سيمتريک دی،که د ټولو $x \in D$ ؛ لپاره باور ولري $f(-x)= - f(x)$

ټولګه:

د $a_n > 0$ لپاره باور لري:

ټول توان توابع د جوړه جګعدد سره محور سيومتريک دي. دا له II د I. څلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتوابع د ناجوړه(طاق) جګعدد سره ټکيسيومتريک دي. دوی له III.و I. څلورمې(ربع) ته ځغلې(خوزي).

د ټولو 0 > لپاره باور لري:

ټول توان توابع د جوړه جګعدد سره محور سيومتريک دي. دا له III د IV. څلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتوابع د ناجوړه(طاق) جګعدد سره ټکيسيومتريک دي. دوی له II.و IV. څلورمې(ربع) ته ځغلې(خوزي).

تمرينونه:

د توان تابع خويونه.

د لاندې توانتوابعو درجه وټاکی، په سيمتريکي حالت، د ګراف په تلنه او او ارزښت دېرئ يې يوه وينا وکړئ د د هر ګراف يې په پروت ولاړسيستم (کواوردينات سيستم) کې رسم کړئ.

لومړی - $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ دويم - $f(x) = \frac{1}{4}x$

دريم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^4$ څلورم - $f(x) = \frac{1}{5}x^3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^5$ شپږم - $f(x) = -\frac{1}{2}x$

اوم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^3$ اتم - $f(x) = 2x^2$

نهم - $f(x) = \frac{1}{5}x^4$ لسم - $f(x) = -\frac{2}{5}x^4$

کرښيز ې توابع د ورکړشوو شرايطو سره

. لومړی حالت : د P تکي څخه تيرې کرښې د a_1 جګوالي سره

بيلګه:

يوه کرښه د a_1 د جګوالي سره د $P_1(x_1 \mid y_1)$ په تکي کې ځغلي.

د $f(x) = a_1x + a.$ تابع مساوات دې پيدا شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جګوالی: $a_1 = 1,5$: ټکی $P_1(-2|3)$

وتونمساوات $f(x) = a_1x + a_0$

جګوالی ځای په ځای کړی

$f(x) = 1,5 \cdot x + a_0$

د a_0 لپاره دې ارزښت وشمیرل شي.

د $P_1(-2|3)$: لپاره ازماینښت

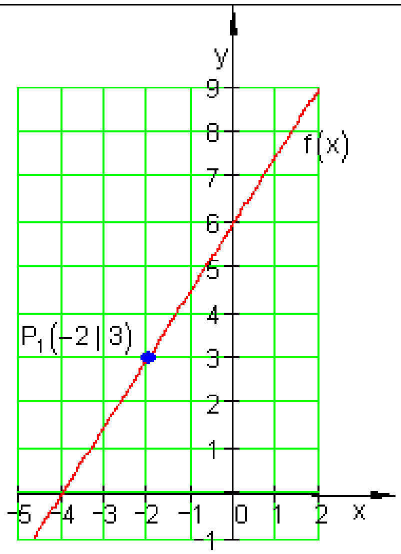
$$\begin{aligned} f(-2) = 3 \quad &\Leftrightarrow \quad 1,5 \cdot (-2) + a_0 = 3 \\ &\Leftrightarrow \quad -3 + a_0 = 3 \,|+3 \\ &\Leftrightarrow \quad a_0 = 6 \end{aligned}$$

د تابع مساوات $f(x) = 1,5 \cdot x + 6$

ازماینښت:

$P_1(-2|3) \Leftrightarrow f(-2) = 3$

$f(-2) = 1,5 \cdot (-2) + 6 = -3 + 6 = 3$



بیلګه:

د حیواناتو ساتونکی د وبنو اوتومات څخه د روځې 7,5 kg خوراک شته. دولس روځې، وروسته له هغې چې زیرمه له غذایي موادو ډکه شوې وه، هلته نور 250 kg پاتې دي.

الف - یو تابع مساوات ولیکی، چې دا حالت تشریح کړي

ب - په څومره ستې یا ډېری به دا د وبنو زیرمه دولس ورځې د مخه ډکه شوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل و الف ته - د x محور: وخت په ورځو

y محور : د وښو زېرمه په کیلوګرام kg .

$$f(x) = -7{,}5x + a_0$$

$$P(12 \mid 250) \Rightarrow f(12) = 250 \Leftrightarrow -7{,}5 \cdot 12 + a_0 = 250$$

$$\Leftrightarrow -90 + a_0 = 250 \mid +90$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 340 \Rightarrow f(x) = -7{,}5x + 340$$

حل و ب ته- د ډکیدنې وخت $x = 0$ دی.

$$\Rightarrow f(0) = -7{,}5 \cdot 0 + 340 = 340$$

د وښو شتون دولس12 ورځې د مخه په 340 kg ډک شوی .

لکه څنګه په لومړي حالت کې چې د یوې کرښې جګوالی او یو ټکی معلوم دي، شمېرنه په همغه ډول د ورکړشوو داتن یا داتا Daten سره مخ ته ځي.

په داسې حالت کې شمیرنه ټویزه سرته رسیږي. دا مو بیا یو فرمول ته لاربنوده وي.

یوه کرښه دa_1 جګوالي سره د$P_1(x_1 \mid y_1)$ ټکي څخه تیریږي.

د کرښمساواتو ټولیز فرمول دی: $f(x) = a_1x + a_0$

$$P_1(x_1 \mid y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow a_1 \cdot x_1 + a_0 = y_1 \mid -a_1 \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - a_1 \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = a_1 \cdot x + y_1 - a_1 \cdot x_1 = a_1 \cdot x - a_1 \cdot x_1 + y_1 = a_1(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$$

دا د ټکی - جګوالي فرمول هم بلل کیږي.

بیلګه:

په $a_1 = -2; P_1(-3 \mid 4)$ کې ځا په ځای کړی $f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$:

$$f(x) = -2(x - (-3)) + 4 = -2(x + 3) + 4 = -2x - 6 + 4 = -2x - 2$$

.

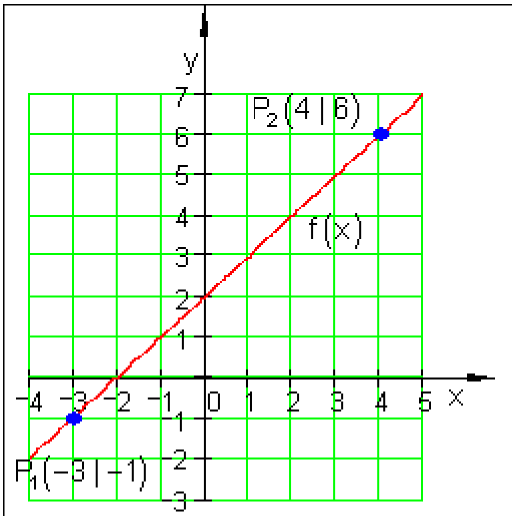
(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم حالت: کرښه له دوه ټکو تيريږي

بیلګه:

دوه ټکی $P_1(x_1 \mid y_1)$ او $P_2(x_2 \mid y_2)$ په يوه کرښه پراته دي.

د $f(x) = a_1x + a_0$ تابع مساوات غواړو پیداکړو.



$P_1(-3\mid-1)$ $\qquad$ $P_2(4\mid6)$

وتونمساوات: $f(x) = a_1x + a_0$

د جګوالي تاکنه:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-1)}{4-(-3)} = \frac{6+1}{4+3} = \frac{7}{7} = 1$$

جګوالی وضعه کړی $f(x) = 1 \cdot x + a_0$

وروسته له دې چې جګیدنه معلومه شوه، دا پوښتنه داسي حل کيږي لکه په لومړي حالت کي.

د ټکو ازمايينت لپاره بې پروا ده چې د دې لپاره کوم ټکي کارول کيږي، ځکه چې دواړه ټکي به په کرښه پراته وي.

د ټکو ازمايينت د $P_2(4\mid6)$ يا P_1 لپاره

$$P_2(4\mid6) \Rightarrow f(4) = 6 \Leftrightarrow 1 \cdot 4 + a_0 = 6 \mid -4 \Leftrightarrow a_0 = 2 \Rightarrow f(x) = x + 2$$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فزيک څخه پوهيږو چې د حرارت معلومولو (ګرمی کچونې) لپاره مختلفې دد حرارت سکالا کارول کيږي. د څلزيوس سکالاCelsiusskala او د فارنهايټ سکالا Fahrenheitskala

د دواړو ترمنځ کرښيزې اړيکې موجود دي.

$100\ ^0C$ برابری دي د $212\ ^0F$ سره . $0\ ^0C$ برابر د ی په $32\ ^0F$ سره.

د يوه تابع مساوات غواړو پيداکړو، چې د هغې په مرسته ^0C په ^0F اړول کيږي.

خپلواکه متحوله x په ^0C او بلواکه يا تابع متحوله $y = f(x)$ په ^0F .

جګوالی:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{212-32}{100-0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5} \Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + a_0$$

$$P_1(0\,|\,32) \Rightarrow f(0) = 32 \Leftrightarrow \frac{9}{5}\cdot 0 + a_0 = 32 \Leftrightarrow a_0 = 32$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

په بدل شوی تابع x په C° کې کيږدی نتيجه يې ده.

د بيلګې په دول:

$$x = 20\ ^0C : f(20) = \frac{9}{5}\cdot 20 + 32 = 68 \Rightarrow 20\ ^0C \triangleq 68\ ^0F$$

د دويم حالت لپاره هم کيدی شي شميرنه په ټوليزه توګه مخ ته بوتلی شی:

دوه ټکی $P_1(x_1\,|\,y_1)$ او $P_2(x_2\,|\,y_2)$ په يوه کرښه پراته دي.

د مساواتو عمومي بڼه ده:. $f(x) = a_1x + a_0$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جګوالی:
$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + a_0$$

$$P_1(x_x \mid y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + a_0 =$$
$$= y_1 \mid - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 =$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

دا په دوه ټکو کې د کربنيزړومساواتو یو تولیزه بڼه ده .

په زیاتو ادبیاتو کې په لاندې ډول ده:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \; ; x_1 \neq x_2$$

چیرته چې $y = f(x)$ باور لري.

د عملي کاروني لپاره لاندې بڼه مساعده ده:

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

بیلګه:

$P_1(2 \mid -1); P_2(-3 \mid 2)$ په $f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ کې ځای په ځای کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{2-(-1)}{-3-2}(x-2)+(-1)=\frac{2+1}{-5}(x-2)-1=-\frac{3}{5}(x-2)-1=-\frac{3}{5}x+\frac{6}{5}-\frac{5}{5}$$
$$=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}\Leftrightarrow f(x)=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$$

تمرین:

د ^0F په ^0C باندې شمیرنې لپاره یو تابع مساوات ولیکئ

2.2.3.تمرین: د تابعمساواتو شمیرنه

یو کرښیز مساوات د a_1 جګوالی لري او د P له ټکي تیریږي.

د$f(x)$ تابعمساوات معلوم کړئ او د محورونو قاطع ټکي یا غوڅټکي او ګراف انځور کړئ

اول - $P(2|-2)$ $a_1=\frac{1}{2}$ دویم - $P(-1|3)$ $a_1=\frac{3}{4}$

دریم - $P(3|-1)$ $a_1=2$ څلورم - $P\left(\frac{3}{2}\middle|4\right)$ $a_1=\frac{4}{5}$

یوه کرښه له ټکوP_1 او P_2 تیریږي.

د$f(x)$ تابع مساوات پیدا کړئ او د محور قاطع ټکي او ګراف رسم کړئ.

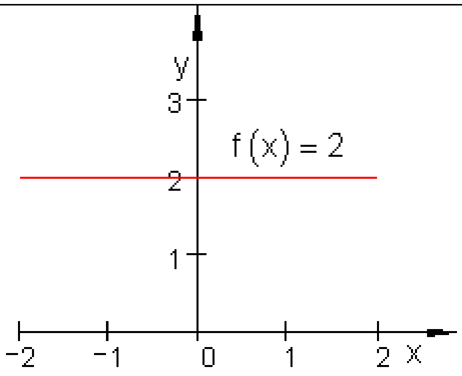
پنځم - $P_2(5|4)$ $P_1(2|1)$ شپږم - $P_2(2|3)$ $P_1(-3|-2)$

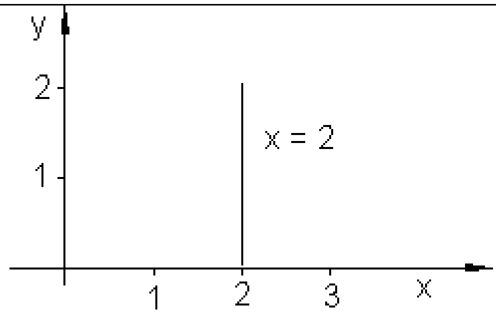
اوم - $P_2(4|-1)$ $P_1(-2|3)$ اتم - $P_2(3|1)$ $P_1(-4|-1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم - $P_2(4\mid -1)$ $P_1\left(-3\mid \frac{9}{2}\right)$ لسم - $P_2\left(\frac{7}{2}\mid 4\right)$ $P_1(-4\mid -2)$

. د کرښبرابروتو ځانګړی حالت:

د x- محور سره غبرګ کرښه: $f(x) = a_0 ; a_0 \in \mathbb{R}$ یو د 0 درجې تام راشنل تابع ده او ثابته تابع هم بلل کیږي. x- محور هم یوه ثابته تابع ده د تابع مساوات $f(x) = 0$ سره. د ثابتې تابع جګوالی تل صفر دی.	

د y- محور سره غبرګه. $x = a ; a \in \mathbb{R}$ کرښه د محور سره غبرګه (موازي) ځغلي. دا د یوه تابع مساوات سره نه شي لیکل کیدی، ځکه چې یواځنۍ تنظیم نه شته یعني تابع نه ده. $x = 0$ دy - محور مساوات دي.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

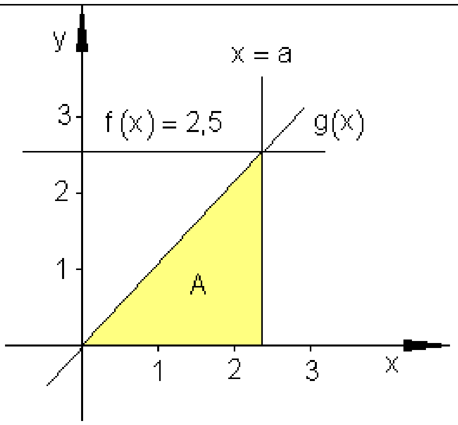
یو $f(x) = 2,5$ ور کړ شوی او y- محور سره موازي دa واټن د $a > 0$ سره.

یوه سرچینییزه کرښه g د($P(a \mid f(x))$ ټکي څخه تیریږي.

دا دx - محور او د y- محور سره غبرګې کرښې سره یو مثلث جوړوي.

a داسې وټاکۍ چې وسطحه د سطحې څلور واحدونه (یوونونهFE) جوړ کړي. د دې حالت لپاره د(g(x تابع مساوات څنګه دي؟

<table>
<tr>
<td>



</td>
<td>

$A = \frac{g \cdot h}{2}$ د $g = a$ او

$h=f(x) = 2,5$ سره

د مثلث سطه $\Rightarrow A = \frac{2,5 \cdot a}{2} = \frac{5}{4}a$

$A = 4 \Leftrightarrow \frac{5}{4}a = 4 \mid \cdot \frac{4}{5} \Leftrightarrow a = \frac{16}{5}$

(ځکه چې د سرچینې کرښه $g(x) = a_1 x \ (a_0 = 0$

د جګېدو له مثلث څخه $a_1 = \frac{5}{2} : \frac{16}{5} = \frac{25}{32}$

د تابع مساوات : $g(x) = \frac{25}{32}x$

</td>
</tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين: د ^0F بدلون شميرنه په ^0C لپاره د تابع مساوات وليکئ

حل :

د ^0C اړونه يا بدلون په^0F د متحولې لپاره دا معنا لري:

x په ^0F مستقله يا خپلواکه متحوله ده او $y = f(x)$ په^0C بلواکه يا تابع متحوله ده.

$$212\,^0F \triangleq 100\,^0C \Rightarrow P_1(212\,|\,100) \quad \text{او} \quad 32\,^0F \triangleq 0\,^0C \Rightarrow P_1(32\,|\,0)$$

دا چې د حرارت الو ترمنځ يوه کرښيزه اړيکه پرته ده، نو ټکي P_1 اوP_2 په يوه کرښه پراته دي.

د کرښي عمومي کرښيزه بڼه په دې ډول ده:.$f(x) = a_1x + a_0$

دلته ضريبونه a_1 او a_0 د ټاکلو دي.

جګوالی:
$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100 - 0}{212 - 32} = \frac{100}{180} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{9}x + a_0$$

ټکي ازمايښت د $P_1(32\,|\,0)$ سره.

$$\Rightarrow f(32) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{9}\cdot 32 + a_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{160}{8} + a_0 = 0\,|-\frac{160}{9} \Leftrightarrow a_0 = -\frac{160}{9}$$
$$\Rightarrow f(x) = f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} = \frac{5}{9}(x - 32)$$

د ^0F اړونې په ^0C لپاره باور لري.

$$^0F \text{ in } ^0C \text{ gilt: } f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

x په ^0F او y په ^0C .

پوښتنې:

کرښيزي توابع III

لومړی: د g کرښو مساوات وټاکئ

الف: $P_1(-4|-2)$ او $P_2(2|0)$ په g پراته دي،

ب- g په $P_1(-3|1)$ او $P_2\left(1|\frac{11}{3}\right)$ کې ځغلي

پ- $P_1(1|-2)$ او $P_2(-2|10)$ په g پراته دي

ت- g محورونه په x = 2 او y = 6 کې غوڅوي(قطع کوي)

ټ- g له P(-6;1)) تيرېږي او له h سره غبرګ دی د $h(x) = -\frac{2}{3}x + 2$ مساوات سره

ث- g جګوالی $a_1 = -4{,}5$ لري او له P(1;1,5) څخه تيرېږي.

ج- g جګوالی $a_1 = 3$ لري او له P(1;,1,5) څخه تيرېږي

چ- g دx محور په x = 3 کې غوڅوي او د hکرښه د h(x) = 4x - 2 سره په x = -1 کې غوڅوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم: د دوه کرښو g او h کرښیز مساوات پیدا کړئ، چې له ټکی P(3;-2) تیریږي.

دریم: یوه کرښه g د کرښیز تابع f(x) سره پیدا کړئ، چې له ټکو P_1 او P_2 تیریږي او تابع مساوات وټاکئ.

الف- $P_1(-3\,|\,5)\,;\,P_2(1\,|\,2{,}5)$ ب - $P_1(1{,}5\,|\,3)\,;\,P_2(3\,|\,2{,}5)$

پ- $P_1(k\,|\,3)\,;\,P_2(2k\,|\,-1)$ ت - $P_1(4\,|\,0)\,;\,P_2\left(-1\,|\,-\sqrt{2}\right)$

ټ - $P_1\left(2\sqrt{k}\,|\,\sqrt{2k}\right)\,;\,P_2\left(\sqrt{k}\,|\,0\right)$ ث - $P_1(1\,|\,0)\,;\,P_2(-1\,|\,k+1)$

څلورم: د f(x) کرښیزې تابع مساوات وټاکئ.که معلوم وي:

الف-کرښه د $a_1 = \frac{5}{4}$ جګیدني سره له P(4;-1) څخه تیریږي.

ب-کرښه له ټکو $P_1(-5\,|\,-3)$ او $P_2(0\,|\,3)$ څخه تیریږي.
پ-کرښه له P(4,5;2,7) ټکي تیریږي. او د x محور سره 45° مایله ده.

ت-کرښه له P(-1,5;0) تیریږي او د h(x) = 2x+2 سره غبرګه (موازي) ده.

پنځم: کر ښه g و کاږئ او کرښیز مساوات وټاکئ.

الف- $P(3\,|\,-1) \in g$ او g دy محور سره غبر؛(موازي) څغلي.

ب- $P(3{,}5\,|\,2{,}5) \in g$ او g دx محور سره موازي څغلي.

پ- g له P(-5;1)تیریږي او د $h(x) = -\frac{1}{2}x + 4$ سره موازي ده.

ت- g له $P\left(1\,|\,\frac{3}{2}\right)$ تیریږي او د کرښو سره چې له ټکو $P_1(-2\,|\,-3)$ او $P_2\left(\frac{3}{2}\,|\,-5\right)$ تیریږي، موازي څغلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

کرښيز مساوات VI

لومړی –

د لاندې کرښيزو توابعو ګرافونه و کاږی او د ارزښت سټ يا – دېرى W و ټاکى

الف- $f(x) = -2x + 2;\ D = \{x | -3 \le x \le 5\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4};\ D = \{x | -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f(x) = \frac{3}{4}x - 3;\ D = \{x | -2 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f(x) = 3x - 6;\ D = \{x | -1 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$

دويم –

ټکی P_1 او P_2 ورکړ شوي، چې په کرښه پراته دي. د f (x) تابعمساوات پيدا کړی او ګراف يې وکاږی

الف- $P_1(3 | 4);\ P_2(7 | -1);\ D = \{x | 0 \le x \le 7\}_{\mathbb{R}}$

ب - $P_1(-8 | 1);\ P_2(2 | -3);\ D = \{x | -8 \le x \le 2\}_{\mathbb{R}}$

پ - $P_1(4 | 3);\ P_2(-7 | -1);\ D = \{x | -7 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

ت - $P_1(-4 | -4);\ P_2(4 | 2);\ D = \{x | -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

دريم –

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې مساواتو حلسټ یا حلډېرۍ پیداکړئ. مساوات چې کسرې راشنل ترمونه ولري، باید د هغو تعریفورشو هم ورکړل شي.

الف- $x-5=9$ ب - $8+x=25$ پ - $x-\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$ ت - $\frac{5}{9}=x-\frac{1}{3}$

ټ - $88=4x-16$ ث - $a+bx=3b+a$ ج - $8-(x+5)=2$

چ - $9+(5-x)=6$ ح = $(x-6)(x+3)=(x-5)(x-2)$ - خ

خ - $(x+3)(x+7)=(x+2)(x+9)$ $\frac{x}{4}+\frac{5x}{6}+\frac{5}{6}=\frac{x}{2}+x$

ځ - $\frac{3}{2x}+\frac{2}{3x}=\frac{1}{9}+\frac{7}{3x}$ د - $\frac{ax}{b}-\frac{b}{ac}=\frac{a}{bc}-\frac{bx}{a}$ ډ - $\frac{x}{a-b}+\frac{x}{a+b}=a$

ذ- $23a-\{5ax-[9ax+(12a-6ax)]-(3a-8ax)\}-15a=5ax-7a$

څلورم:د لاندې توابعو د محورونو سره د تقاطع ټکي هم پیدا کړئ.

الف- $f(x)=2x-7$ ب - $f(x)=-2x+6$ پ - $f(x)=3x-3$

ت - $f(x)=2x+\frac{2}{3}$ ټ - $f(x)=\frac{3}{4}x+2$ ث - $f(x)=-\frac{3}{4}x+\frac{4}{5}$

ج - $f(x)=3{,}5x+\frac{1}{2}$ چ – $f(x)=-2{,}5x+2\frac{1}{2}$ ح - $f(x)=1\frac{3}{4}x-3\frac{2}{3}$

پنځم: د یوې کرښې دوه ټکي P_1 او P_2 ورکړ شوي د لاندې توابعو له I تر IV لپاروه وټاکئ:

I. $P_1(3\mid 4);P_2(7\mid -1);D=\{x\mid -2\le x\le 8\}_{\mathbb{R}}$

II. $P_1(-8\mid 1);P_2(2\mid -3);D=\{x\mid -8\le x\le 2\}_{\mathbb{R}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

III. $P_1(4 \mid 3);\ P_2(-7 \mid -1);\ D=\{x \mid -8 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

IV. $P_1(4 \mid 2);\ P_2(-4 \mid -4);\ D=\{x \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

الف- د جګیدنې ضریب m.

ب - د کرښې تابعمساوات

پ - د y محور سره د تقاطع ټکی P_y

ت - د تقاطع ټکی P_y د x محور سره

ټ - په W باندې ارزښتډېری W.

ث - په D کې د تابع ګراف

شپږم: لاندې مساواتسیستمونه حل کړی:

الف- $\begin{cases} \text{I} & 5y-3x=1 \\ \text{II} & x=y+1 \end{cases}$ ب - $\begin{cases} \text{I} & 4x+5y=32 \\ \text{II} & y=5x-11 \end{cases}$ پ - $\begin{cases} \text{I} & 15y-4x=-50 \\ \text{II} & x=y+7 \end{cases}$

ت - $\begin{cases} \text{I} & 3x=y+15 \\ \text{II} & 2y-10=2x \end{cases}$ ټ - $\begin{cases} \text{I} & 2y=2x-40 \\ \text{II} & 3x=10-2y \end{cases}$ ث - $\begin{cases} \text{I} & x+y=a+b \\ \text{II} & x-y=a-b \end{cases}$

پوښتنې

IX کرښیز مساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی:کرښه g له ټکو P1(4;-3,5) او P2(2,5;-1) تیرېږي.

کرښه h له ټکو $P_3(5|2,5)$ او $P_4\left(\frac{3}{2}\Big|\frac{25}{3}\right)$ تیرېږي.

ګرښې یو بل ته څه موقعیت لري یا څنګه پرتې دي؟

دویم:د f(x) کرښیزې تابع د تابع ترم او ارزښتساحه(ارزښتورشو) و ټاکئ، که صدق ولري:

الف- $f(0) = 20 ; f(12) = 32 ; x > 0$ ب- $f(-3) = 6 ; f(2) = -8 ; x \in [-3 ; 3]$

دریم:

د f(x)کرښیزې تابع ګراف په 3 LE اوږدوالی واحده کینې لور

ته خوزیږي. د راکښل شوې کرښې د f*(x) مساوات څنګه دي؟

$$f(x) = \frac{5}{3}x - 2 \quad D = \mathbb{R}$$

څلورم: د f(x) او g(x) توابع ورکړ شوې دي. د کوم ارزښت لپاره f(x) > g(x) صدق کوي؟

$$f(x) = 2x - 3 \quad ; \quad g(x) = -0,5x + 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

پنځم: یوه g(x)کرښه ورکړ شوې.. دا د یوې کرښې h(x) له خوا قطع کیږي. د h(x)مساوات وټاکئ، که باور ولري: $g(x) = -3x + 2$

الف- قاطع یا غوڅی دx محور سره . ب - قاطع(غوڅی) په x = -5 کې

شپږم:

یوه د پیل کرښه د $a_1 = -0,125$ جګوالي سره و داسی کښنول کیږي. چې کرښه h د مساوات	; $h(x) = -1,5(x-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره د x په محور قطع کوي. راکښنه تشریح کړئ او د راکښل شوې کرښې ګراف و کاږئ.	

اوم: یوه f(x) کرښیزه تابع ورکړ شوې. کرښه د x = u مساوات سره د f(x) ګراف په P کې قطع کوي او د x محور په Q کې قطع کوي. یوه سکیڅې ترتیب کړئ.

الف- د P او Q کواوردینات وټاکئ، که f (x) = 0,75x + 2 وي.

ب- د u د کوم ارزښت لپاره P د x محور پورته لور ته پرته ده.

ت- P(u | f(u)) په 1 څلورئ یا ربع کې پروت دئ. R (0 | 0), Q او P د یوه مثلث رآسونه (ککرټکي)جوړوي. د دې مثلث د مساحت A لپاره ترم وټاکئ. u (محیط) داسې وټاکئ، چې A(u) = 10 صدق وکړي.

اتم: د g کرښې ته موازي او عمود مساوات داسې وټاکئ، چې له P ټکي تیر شي.

الف- $g: x + 2 - 3y = 0 ; P(0 | 3)$ ب- $g(x) = \frac{2}{3}x - 3 ; P(1 | 4)$

پ - $g(x) = -1,5kx ; P(1 | 0)$

نهم: کرښه g له ټکو P_1 او P_2 تیریږي. د h کرښې ته یې ځای مطالعه کړئ او د امکان په حالت کې یې د قاطع ټکئ معلوم کړئ.

$P_1(-1 | 1,5) ; P_2(-2 | -2,5) \qquad h: \ -x - 6 - 4y = 0$

لسم: و ښایئ: کرښه g او کرښه h عمود دي.

$g: \ y - \sqrt{2}x = 1 \qquad h: -2y - \sqrt{2}x + 6 = 0$

$g(x) = -3x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یولسم:

د A, B او C ټکي د یوه مثلث د رآس ټکي دي. د$k > 0$ د کوم ارزښت لپاره دا مثلث قایم الزاویه (ولاړګوډیز) دی؟ (ښی رآس په C پروت دی)	$A\left(\sqrt{3k} \mid \frac{k}{3}\right); B\left(-\sqrt{3k} \mid \frac{k}{3}\right); C(0 \mid k)$

پوښتې

کرښیز توابع XI

لومړی-

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}; f_2(x) = -4x - 2; D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه له تابع $f_1(x)$ سره د دویمې کرښې د تابع$f_2(x)$ سره غوځیږي. وټاکئ:

الف – د کواوردیناتونو x_s او y_s سره غوڅټکی S .

ب – د دواړو کرښو غوڅټکي د y محور سره .

پ – د دواړو کرښو غوڅټکي دx محور سره .

ت - د دواړو توابعو ګراف په D کې .

دویم –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 4 ;\ D = \{x \mid 0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه له تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $S(3 \mid y_s)$ کې د تابع $f_2(x)$ سره له کرښې څخه غوځیږي.

وټاکئ:

الف-د S پوره کواودینات

ب-تابع $f_2(x)$.

پ-د دواړو کرښو غوځټکي د کواوردینات محورونو سره.

ت-په D کې د دواړو توابعو ګراف.

دریم:

$$f_1(x) = -\frac{3}{8}x + 1;\ D = \{x \mid -7 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $S(-4 \mid y_s)$ کې کې له کرښې څخه د تابع $f_2(x)$ سره ، چې پروتمحور په 7- کې غوځوي، غوځیږي.

وټاکئ:

الف – د S پوره کواوردینات.

ب – تابع $f_2(x)$.

پ – د دواړو کرښو غوځټکي د کواودینات د محورونو سره.

ت – د واړو توابعو ګراف په D کې..

څلورم –

د یوه درېکوڼي یا مثل ټکي P_1, P_2 او P_3 ورکړ شوي دي. د درېګوڼي د اړخونو تابع وټاکئ. پخوا له دې یو پلان نقشه ترتیب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف-

$$[P_1P_2] \triangleq f_1 ; [P_2P_3] \triangleq f_2 ; [P_1P_3] \triangleq f_3$$
$$P_1\left(-6 \;\middle|\; \frac{3}{2}\right); P_2\left(-2 \;\middle|\; -\frac{3}{2}\right); P_3\,(-4 \mid 3)$$

ب –

$$[P_1P_2] \triangleq f_1 ; [P_2P_3] \triangleq f_2 ; [P_1P_3] \triangleq f_3$$
$$P_1\left(6 \;\middle|\; \frac{3}{2}\right); P_2\left(2 \;\middle|\; -\frac{3}{2}\right); P_3\,(4 \mid 3)$$

پنځم -

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x + 3 ; P_2(-2 \mid -3) ; D = \{x \mid -6 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع f_1 (x) سره د دویمې کرښې څخه د تابع f_2 (x) سره ، چې له ټکي P_2 تیریږي ، په ټکي S کې ولاړکونجیزه غوځیږي.

وټاکئ:

الف - د(x) f_2 جګوالی m_2 .

ب- تابع (x) f_2 .

پ – د دواړو کرښو غوځټکی S .

ت - د دواړ کرښو محورغوځټکي.

ټ - د دواړو کرښو ګراف په D کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

کرښیز توابع XII

لومړی -

$$f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 3\,;\, P_2(2\,|\,-3)\,;\, D = \{x\,|\,0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له یوې دویمې کرښې د تابع $f_2(x)$ سره، چې له ټکي P_2 تیریږي په ټکي S کې ولاړکونجیزه غوځیږي.

وټاکی.

لومړی:

الف – د $f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ب – تابع $f_2(x)$.

پ - د دواړو کرښو غوځټکی S .

ت - د دواړو کرښو د محورغوځټکي.

ټ - د دواړو کرښو ګراف په D کې.

دویم –

د کرښې تابع $f_2(x)$ وټاکی، چې پروتمحور په P_{x2} کې غوځوي او له کرښې څخه د تابع $f_1(x)$ سره په S کې غوځیږي. د واړو کرښو غوځټکي وشمیرئ او د دواړو کرښو ګراف په D کې رسم کړئ.

الف- $f_1(x) = \frac{3}{2}x + 6\,;\, P_{x_2}(-6\,|\,0)$ ، $S\left(x_s\,\middle|\,\frac{3}{2}\right);\, D = \{x\,|\,-6 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f_1(x) = \frac{1}{2}x - 3\,;\, P_{x_2}(4\,|\,0)$ ، $S(3\,|\,y_s)\,;\, D = \{x\,|\,-1 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$

دریم -

$$P_1(-5\,|\,5)\,;\, P_2(-1\,|\,-1)\,;\, S(x_s\,|\,2)\,;\, D = \{x\,|\,-6 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له ټکو P_1 او P_2 تیریږي او په ټکي S کې ولاړکونجیز له کرښې څخه د تابع $f_2(x)$ سره غوځیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وټاکئ:

الف- د $f_1(x)$ جګوالی m_1 .

ب – تابع $f_1(x)$.

پ – دS پوره کواوردینات.

ت – د$f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ټ – تابع$f_2(x)$.

ث – د $f_1(x)$ او$f_2(x)$ ګرافونه

څلورم -

$$P_1(5\,|\,5);\, P_2(1\,|\,-1);\, S(3\,|\,y_s);\, D=\{x\,|\,0\leq x\leq 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له ټکو P_1 اوP_2 څخه تیریږي او په ټکي S کې ولاړکونجیزه له کرښې د تابع $f_2(x)$ سره غوځیږي.

وټاکئ:

الف – د $f_1(x)$ جګوالی m_1 . ب - تابع $f_1(x)$.

پ - د S پوره کواوردیناتونه ت – د $f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ټ - تابع $f_2(x)$. د $f_1(x)$ او $f_2(x)$ ګرافونه.

پنځم -

$$f_2(x)=3x-3;\, S\left(\frac{3}{2}\,\middle|\,\frac{3}{2}\right);\, D=\{x\,|\,0\leq x\leq 6\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع $f_1(x)$ ګراف په ټکي S کې د تابع $f_2(x)$ له ګراف څخه ولاړکونجیزه غوځیږي.

وټاکئ:

الف - تابع $f_1(x)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب – د دواړو کرښو د محورونو غوڅټکي.

پ – د دواړو توابعو ګراف په D کې.

پوښتنې

کرښيزې توابع برخه XIII

لومړی -

$$f_2(x)=\frac{4}{5}x+\frac{9}{10};S\left(2\left|\frac{5}{2}\right.\right);D=\{x\,|\,-1\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع(x) f_1 ګراف په ټکي S کې د تابع f_2 (x) له ګراف څخه ولاړکونجيز(قايم الزاويه) غوڅيږي.

وټاکی:

الف: تابع (x) f_1 .

ب – د دواړو کرښو د محورونو غوڅټکي.

پ – د دواړو توابعو ګرافونه په D کې.

$$g:\quad y-\sqrt{2}x=1 \qquad \Rightarrow g(x)=\sqrt{2}x+1$$

$$h:-2y-\sqrt{2}x+6=0\Rightarrow h(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}x+3$$

د اورتوګوناليټي شرايط: $a_{1g}=-\dfrac{1}{a_{1h}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{1g} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1\cdot 2}{1\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\ \text{q.e.d}$$

دويم:

د دوه کرښنو توابع $f_1(x)$ او $f_2(x)$ ورکړشوي او د يوې دريمي کرښي جګوالی m_3 د تابع $f_3(x)$ سره. تابع $f_3(x)$ داسي وټاکئ، چي ګراف يي د نورو دواړو کرښنو غوښتکي څخه تير شي. د دريواړو کرښنو محور غوښتکي وټاکئ او د دريواړو توابعو ګراف په D کې رسم کړئ.

الف-

$$f_1(x) = -4x - 2\,;\ m_3 = \frac{1}{4}$$

$$f_2(x) = 2x + 4\,;\ D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

ب –

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}\,;\ m_3 = -4$$

$$f_2(x) = 2x + 4\,;\ D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

دريم: کرښه دتابع $f_1(x)$ سره له ټکي P_1 تييري او له يوې دويمي کرښي چې له ټکي P_2 تيريري په ټکي S کي غوځيري. توابع $f_1(x)$ او $f_2(x)$ وټاکئ د هغو محورغوښتکي اوپه D کي يي ګراف وکاږئ.

$$P_1\left(-2 \,\middle|\, \frac{3}{2}\right);\ P_2(3 \mid 5);\ S\left(2 \,\middle|\, \frac{5}{2}\right);\ D = \{x \mid -8 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

څلورم:

$$P_1\left(-1 \,\middle|\, \frac{5}{2}\right);\ P_2\left(-3 \,\middle|\, \frac{11}{2}\right);\ D = \{x \mid -9 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره محور په 8- کې غوڅوي. $f_1(x)$ ته غبرګه یوه دویمه کرښه د تابع $f_2(x)$ سره پروت محور په 4- کې غوڅوي. دواړه کرښې له یوې دریمې کرښې چې تابع $f_3(x)$ لري او له ټکو P_1 او P_2 تیریږي په ټکو P_3 او P_4 کې ولاړکونجیزه(قایوم الزاویه) غوڅوي. وټاکئ:

الف- تابع $f_3(x)$ ب - تابع$f_1(x)$

پ – تابع $f_2(x)$ ت – د دریواړو توابعو ګراف په D کې.

پنځم:

$$A\left(-\frac{13}{2}\,\middle|\,-\frac{3}{2}\right);\,B(3\mid 2);\,D=\{x\mid -8\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$$

د یوه قایوم الزاویه مثلث(ولاړکونجیز دریګودي) څخه، چې ولاړ کونج(قایم الزاویه) یې پهC کې پرته ده، ټکي A اوB ورکړ شوي. د مثلث اړخ یا ضلع [BC] د تابع $f_3(x)$ سره د اوردینات یا ولاړ محور په 3 کې غوڅوي.

وټاکئ:

الف- د اړخ [AB] تابع $f_1(x)$ ب- د اړخ یا ضلعې [BC]تابع $f_3(x)$

پ- د اړخ [AC] تابع $f_2(x)$ ت- د ټکي C کواوردیناتونه

ټ په D کې ګرافونه.

پوښتنې

کرښیزې توابع **XIV**

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: $A(-8|-6); C(-1|5); D=\{x|-8 \le x \le 2\}_{\mathbb{R}}$

له يوه قايمالزاويه مثلث، چې قايمه زاويه يې په B پرته ده، ټکی A او C ورکړ شوي دي. د مثلث ضلع (اړخ)[BC] د اوردينات محور (ولاړمحور) په 3کې قطع کوي.

دا وټاکی:

الف-

$[AB] = f_1$; $[BC] = f_2$; $[AC] = f_3$ د مثلث درې د ضلعو توابع.

ب- د B ټکي کواودينات يا وضعيه قيمت کې د ټکي B محورونه

پ -په D کې ګراف.

دويم:

$A(-4|-1); B(2|-4); D=\{x|-4 \le x \le 5\}_{\mathbb{R}}$

د يوه مثلث ټکيA او B ورکړ شوي دي. د مثلث [BC] ضلع دy محور په 12-کې قطع کوي; ضلع [AC] د x محور په 3- کې غوڅوي.

دا وټاکی:

الف-تابع f_1 (x) ضلع .[AB] قطع کوي

ب - تابع f_2 (x) ضلع [BC] غوڅوي.

پ - تابع f_3 (x) ضلع [AC]

ت - د C ټکي وضعيه قيمتونه

ټ - د D ټکي وضعيه قيمتونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: توابع $y = f(x) = 3x - 4$ او $g(x) = ax + 3$ ورکړ شوي.

د دواړو توابعو ګرافونه په ټکي $S(3 \mid 5)$ کې غوڅوي.

د $h(x)$ تابع مساوات داسې وکاږئ، چې ګراف په ټکي S عمود څغلي. په یوه وضیه قیمتسیستم کې دریواړه ګرافونه رسم کړئ.

څلورم:

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}\,;\ f_2(x) = -4x - 2\,;\ D = \{x \mid -10 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$$

د $f_1(x)$ تابع سره کرښه د دویمې کرښې د $f_2(x)$ تابع سره قطعه کوي.

دا وټاکئ:

الف- د S قاطع ټکی د x_s او y_s کواودینات سره.

ب - د دواړو کرښو د قاطع ټکي د x محور سره.

پ - د دواړو کرښو قاطع ټکي د x محو سره.

ت - د دواړو توابعو ګراف په D کې.

پنځم:

د $g(x)$ تابع ، چې په $f(x)$ عمود ده پیدا کړئ. د $g(x)$ ګراف د y محور په $P_y(0 \mid 3)$ ټکي قطع کوي. دواړه کرښې په یوه وضعیه قیمت سیستم(پروت ولاړ سیستم) کې رسم کړئ.

الف - $f(x) = -2x + 2$ ب - $f(x) = 3x - 6$

پ - $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ ت - $f(x) = \frac{3}{4}x - 3$

شپږم: د دواړو کرښو غوڅټکی (نقاط تقاطع) و ټاکئ او ګراف یې وکاږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}\,;\ f_2(x) = -4x - 2\,;\ D = \{x \mid -10 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f_1(x) = -2x + 2\,;\ f_2(x) = 3x - 6\,;\ D = \{x \mid -2 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 4\,;\ f_2(x) = \frac{3}{2}x - 2\frac{1}{2}\,;\ D = \{x \mid -1 \le x \le 7\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f_1(x) = -\frac{3}{8}x + 1\,;\ f_2(x) = \frac{5}{6}x + 5\frac{5}{6}\,;\ D = \{x \mid -8 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

n -مه درجه ټول مات- یا راشنل توابع

n -مه درجه ټول راشن لفنکشن

یو تابع $f(x)$د

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

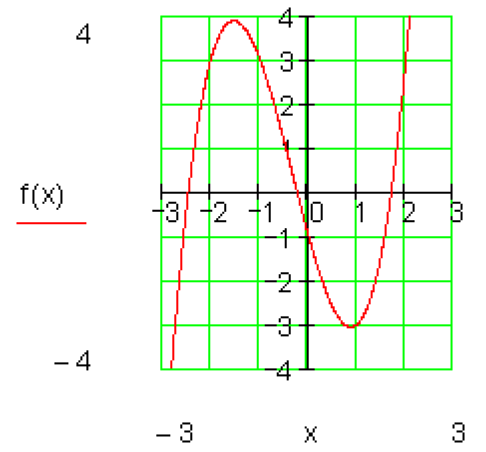
سره n -مه درجه ټول راشنل تابع بلل کيږي.

عددونه $a_n\,;\ a_{n-1}\,;\ a_{n-2}\,;\ \ldots\ a_2\,;\ a_1\,;\ a_0$ ضريبونه بلل کيږي.

ټول راشنل یا هوښيار توابع د توان توابعو يوځای ايښوولو له لارې لاس ته راځي.

بيلګې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$$

$$f(x) = -x^3 - x^2 + 4x + 1$$

$$f(x) = 0,2x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x - 2$$

$$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - x + 2$$

د ګراف تلنه

جمله:
د ټول راشنل تابع ګراف تلنه د خورا جګ توان زياته وونې (د جمعي غړي) سره ټاکل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	n جوړه	n ناجوړه(طاق)
$a_n>0$	تلنه له II و I ته.	تلنه له III و I ته.
$a_n<0$	تلنه له IV و III ته.	تلنه له II و IV ته.

بيلګه: د الماي پېنتو: ناجوړه(طاق) جوړه (جفت) ناجوړه

$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 7 \qquad n = 3\ (\text{ungerade}) \wedge a_n = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - I}}$

$f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 7 \qquad n = 4\ (\text{gerade}) \wedge a_n = -2 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - IV}}$

$f(x) = -5x^5 + 2x^4 + 9 \qquad n = 5\ (\text{ungerade}) \wedge a_n = -5 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{II - IV}}$

سيومتري

ګومان مو نږدې دی، هغه توابع، چې فقط د جوړه جګعددونو توانونو څخه يوځای شوي وي، محور سيومتريک دي او توابع چې فقط د ناجوړه(طاقو) جګعددونو توانونو څخه يوځای شوي وي، ټکی سيومتريک دي.

جمله

د يوه ټولراشنل تابع ګراف ټيم هلته محورسيومتريک دی، که تابع مساوات فقط جوړه جګعددونه ولري.

د يوه ټولراشنل تابع ګراف ټيک هلته ټکيسيومتريک دی، که تابع مساوات فقط ناجوړه (طاق) جګعددونه ولري.

بيلګه:

$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$$

$$f(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^2 + 1 = 2x^4 + 3x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow$$

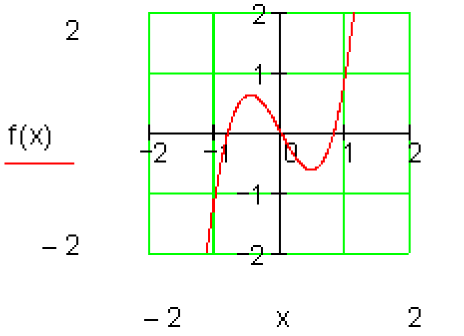
(c) ketabton.com: The Digital Library

محورسیومتریک

$$f(x) = 3x^3 - 2x$$

$$f(-x) = 3(-x)^3 - 2(-x) = -3x^3 + 2x = -(3x^3 - 2x) = -f(x) \Rightarrow$$

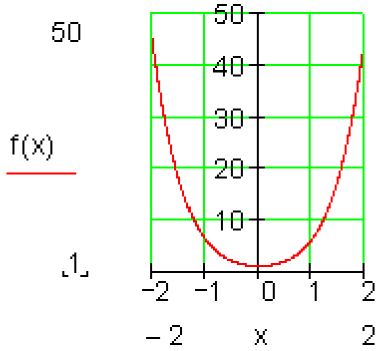
تکی سیومتریک



$$f(x) = 3x^3 - 2x$$

سرچینې ته سیومتریک دی

(تکی سیومتري)



$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$$

yمحور ته سیومتریک دی

(محورسیومتریک)

تمرینونه:

د ټول هوښیارو توابعو خویونه.

د لاندې تاوبعو په سیمترى، تلنه او د صفرځایونو تعداد یا ګنون باندې ویناوې وکړی.

لومړی - $f(x) = 2x^2 - 1$ دویم - $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ریم - $f(x)=-\frac{1}{2}x^4+2x^2+2$ خلورم - $f(x)=-x^5-x^3+x$

پنځم - $f(x)=x^6-x^4+1$ شپږم - $f(x)=-\frac{1}{2}x^5+x^2-2x$

اوم - $f(x)=\frac{1}{10}x^7+\frac{1}{8}x^5-\frac{1}{6}x^3+x$ اتم - $f(x)=\frac{1}{100}x^{10}-\frac{1}{50}x^6+\frac{1}{10}x^2$

نهم - $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{2}{5}x-1$ لسم - $f(x)=\frac{3}{4}x^5-\frac{1}{2}x$

په یوه خوښه ټکي ته سیومتریک

که د یوه ټکي سیومستري تابع ګراف په خوښه راکښل شي، نو سیومتري سرچیني ته ځي، چې موږ یې ټکی سیومتري بولو له منځه ځي. نسبت و موخښټکی ته دا ساتلې پاتې کیږي.

بیلګه:

د $f(x)=0,5x^3-1,5x$ تابع ګراف ټکی سیومتریک دی، یعني سرچیني ته سیومتریک.

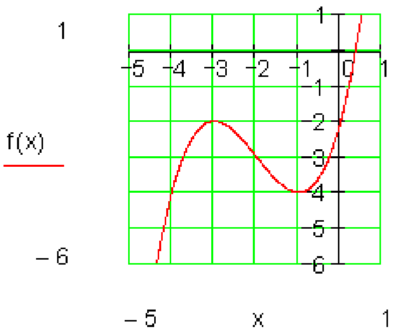
دا ګراف دې په ۲ واحدونو یا یوونونو کیڼ لور ته او په ۳ یوونونو یا واحدونو کښته لور ته راکښل شي.

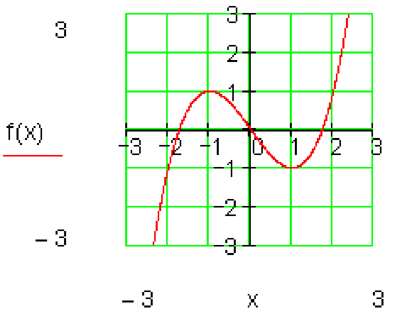
د راکښلشوي ګراف تابع مساوات دي:

$$g(x)=0,5(x+2)^3-1,5(x+2)-3=0,5x^3+3x^2+4,5x-2$$

$g(x)$ و ټکی $P_0(-2|-3)$ ته سیومتریک دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library





کواوردينانسيستم د ګراف په بڼه کوم رول نه لوبوي. تنها تابع مساواتوتغير خوړلی.

د حالت بيلګه: بايد وازمايل شي، چې ايا د دريمې درجې د يوه ټول هوښيار تابع ګراف يوه ټاکلي ټکی ته ټکی سيومتريک دی.

ترمخ راوړنه.

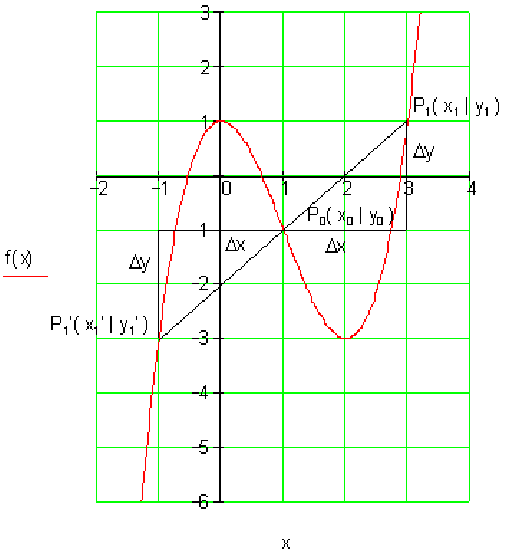
چمتووالی:

د ټکو کواوردينات لپاره باور لري:

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y$$
$$x_1{}' = x_0{}' - \Delta x$$
$$y_1{}' = y_0{}' - \Delta y$$
$$\Delta x = x_1 - x_0$$
$$\Delta y = y_1 - y_0$$

د هنداره-يا منعکس شوي ټکو کواوردیناتونه:

$$x_1{}' = x_0 - (x_1 - x_0) = \underline{\underline{2x_0 - x_1}}$$
$$y_1{}' = y_0 - (y_1 - y_0) = \underline{\underline{2y_0 - y_1}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

	د دې قاعدې یا لار سره تل کېدی شي په P_0 و P_1 ته یوه هنداړونه یا انعکاسونه کې اړونده هنداړونه P_1' وټاکل شي.

بیلګه:

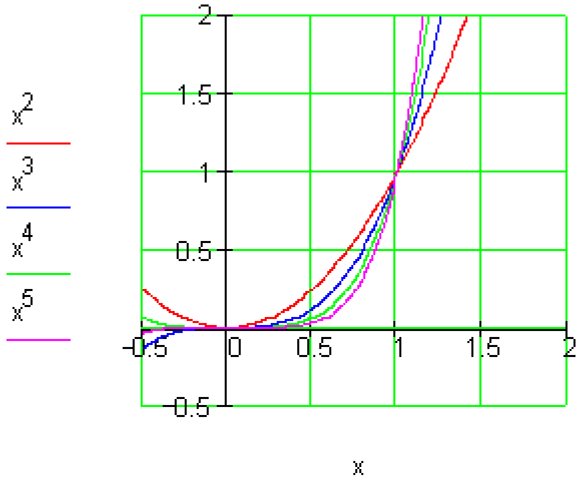
که هنداورنه په ګراف نه وي پرته ، نو ګراف و P_0 ته ټکی سیومتریک نه دی.

پوښتني

ټول مات- یا راشنل توابع I

د توانتوابعو خویونه

لومړی –

	دا ترخنګ په 1 . خلورمه کې ګراف تر خیرنې لاندې ونیسی د x ارزښتونو لپاره د 0 او 1 ترمنځ دجګو درجو یو د توان تابع ګراف پروت دی د یوه توان تابع د ګراف لاندې یا کښته د ټیټې درجې. د $x > 1$ لپاره دا ټیک برعکس کېدونکي دي. د دې حالت لپاره لایل راوړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم – د دریمې درجې توان تابع کراف دې په دوه واحده کینې لور ته او ترلی په درې واحده پورته لور ته و کښل شي.

د دې راکښل شوې تابع مساوات لپاره دې د تابع مساوات ورکړ شي.

دریم –

د څلورمې درجې توان تابع ګراف دې په درې واحده ښی لور ته او پسې ترلی دې په دوه ضریبه وغزول شي.

الف – د راکشل شوي ګراف لپاره تابع مساوات ورکړئ

ب – وښایئ، چې ګراف نه محور – او نه ټکی سیومتریک دی.

څلورم –

په کوم توان تابع $f(x) = x^n$ کې ټکی په ګراف اړه لري؟

د دې توان توابعو مساوات ورکړئ.

الف - $P(-3 \mid -27)$ ب - $P(-2 \mid 16)$ پ - $P(0,5 \mid 0,25)$ ت - $P\left(\frac{1}{3} \middle| \frac{1}{27}\right)$

ټ - $P(0,1 \mid 0,0001)$ ث - $P(-1 \mid 1)$ ج - $P(-2 \mid 8)$ چ - $P\left(\frac{3}{4} \middle| \frac{81}{256}\right)$

پنځم –

د لاندې توان توابعو سیومتري او د ګراف تلنه وټاکئ او د هر یوه ارزښتدېرئ(ارزشتسټ) او درجه ورکړې.

الف - $f(x) = 4x^3$ ب - $f(x) = -160x^2$ پ - $f(x) = -1500x$

ت - $f(x) = \sqrt{2} \cdot x^6$ ټ - $f(x) = 5$ ث - $f(x) = -25x^5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم –

لاندې تابع مساوات د پولینوم په بڼه انځور کړی.

هر ځل يې درجه ورکړی.

الف - $f(x) = (x-2)^2 - 4x^3$ ب- $f(x) = 4(x+5)^3 + (x-2)(x+2)$

پ- $f(x) = 2x^3 - (x-1)^2$ ت - $f(x) = (x-4)(x+1)^2$

ټ - $f(x) = (x^2-4)(x^3-x^2+4)$ ث - $f(x) = \frac{x-5}{8}(x-2) + \frac{3}{4}x^2$

اوم -

دلیل راړی:

د یوه ناجوړه(طاق) درجې تولراشنل تابع ګراف دx محور لږ ترلږه په یوه ځل غوڅوي.

دا هلته هم باور لري که درجه جوړه یا جفتوي؟

پوښتنې

تول راشنل توابع II

سیومتری او تلنه

لومړی – و ښیږی، چې ایا f(x) یو تولراشنل تابع دی. په ورکړشوي حالت کې د تابع ګراف، درجه او د ضریبونو $a_0; a_1; a_2; \dots a_n$ ارزښتونه ورکړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف ـ $f(x)=2$ ب ـ $f(x)=4x$ پ ـ $f(x)=2^x$ ت ـ $f(x)=\frac{x^3-4x}{8}$

ټ ـ $f(x)=\sqrt{3}x^4$ ث ـ $f(x)=\frac{1}{x}$ ج ـ $f(x)=\sqrt{x}$ چ ـ $f(x)=\left(x-\sqrt{3}\right)^2$

ح ـ $f(x)=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$ خ ـ $f(x)=16x^3-2x^2+5x^2-4$

دویم – د لاندې ټولراشنل توابعو څخه کوم یې محور سیومتریک او کوم یې ټکی سیومتریک دي؟

الف ـ $f(x)=x^4-6x^2+5$ ب ـ $f(x)=x^3+3x+1$ پ ـ $f(x)=(x-2)(x+2)$

ت ـ $f(x)=x^6-6x^2+\sqrt{3}$ ټ ـ $f(x)=(x-2)^3(x-1)$ ث ـ $f(x)=x^4-\sqrt{5}x^2$

ج ـ $f(x)=\left(2x^4+2x^2+5\right)x$ چ ـ $f(x)=\left(x^2-2x+3\right)(x+1)(x-1)$

ح ـ $f(x)=1-3x^2+x^6$

دریم – د c متحوله داسې وټاکئ، چې د تابع ګراف ټکی سیومتریک او همداسې محورسیومتریک شي.

الف ـ $f(x)=x^3+4x+c$ ب ـ $f(x)=(x-c)(x+4)$ پ ـ $f(x)=x^5+x^c$

ت ـ $f(x)=x^3\left(x^2-cx\right)$ ټ ـ $f(x)=c+x^3$ ث ـ $f(x)=4x^3+x^2+cx^2+5x$

څلورم : د لاندې توابعو د ګراف تلنه معلومه کړئ.

الف ـ $f(x)=2x^5-6x^3$ ب ـ $f(x)=-4x^4+3$

پ ـ $f(x)=2x-5$ ت ـ $f(x)=-2x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ - $f(x)=4x^4-3x^2+4x-5$ ث - $f(x)=-6x+3$

ج - $f(x)=4x^4+3x^3-6x^5$ چ - $f(x)=-2x^5+6x^3$

پنځم - د لاندې توابعو د ګراف تلنه او سیومتري ورکړی.

الف - $f(x)=\sqrt{3}x^2-\sqrt{5}x^4-2$ ب - $f(x)=x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(8-\frac{1}{2}x\right)$

پ - $f(x)=5x^6-4x^4+5$ ت - $f(x)=x^5+x^3-2x$

ټ - $f(x)=5$ ث - $f(x)=\left(x^2-25\right)\left(x^2+6x+9\right)$

ج - $f(x)=x^5+4x^4+4x^3$ چ - $f(x)=\left(4x^2-4\right)\left(x^3+8x^2+16x\right)\left(x^3+27\right)$

ح - $f(x)=-3$ خ - $f(x)=-x^5+x^3-2$

شپږم : د لاندې تابعو صفرځیونه وشمېرئ:

الف - $f(x)=(x-4)(x-2)(x+1)$ ب - $f(x)=(x-4)(-x+2)$

پ - $f(x)=x(x+5)^2$ ت - $f(x)=3(x-4)^3(x+2)$

ټ - $f(x)=(2x-4)(x+3)x^3$ ث - $f(x)=x^3-2x^2$

د ټیولراشنل توابعو محور غوځېټکي (د محور د تقاطع نقطی)

د ټیولراسنل توابعو محور غوځېټکي (د محور د تقاطع نقطی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د y محور سره غوځتکی $P_y(0|y_s)$: $P_y(0|y_s)$ شرط: $y_s = f(0)$

بيلګه : د يا په معنا

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 3 \Rightarrow f(0) = 3\cdot 0^4 - 2\cdot 0^2 - 3 = 0 - 0 - 3 = -3$$
$$\Rightarrow P_y(0|-3) \text{ oder } P_y(0|f(0))$$

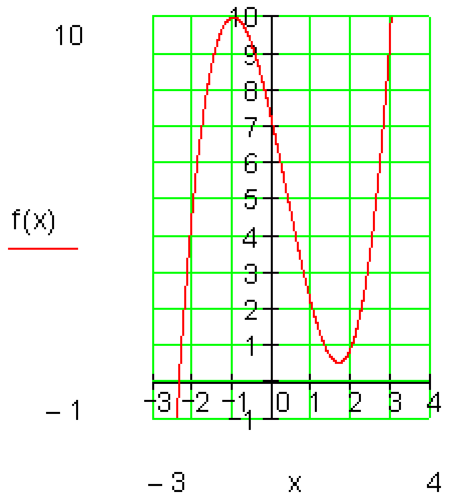
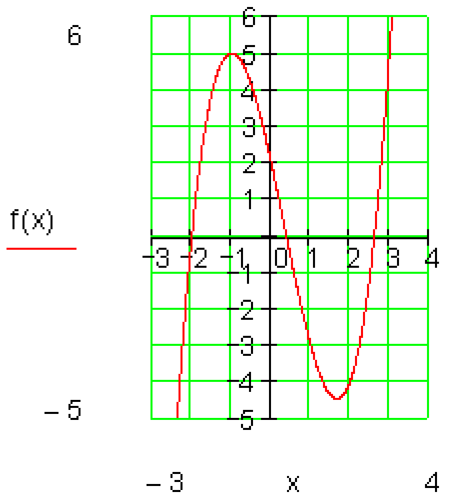
د P_y د y کواوردينات تل د ضريبونو a_0 سره کټمټ ده.

دا تل د تابع مساوات څخه لوستل کيدی شي.

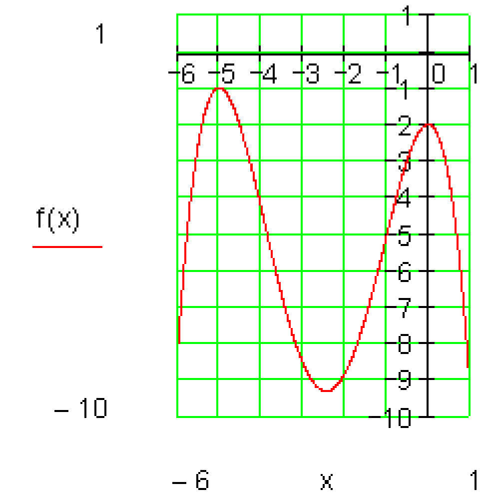
د x-محور سره غوځتکی $P_y(x_s|0)$ صفرځای : شرط: $f(x) = 0$

د مربع تابع (د دويمي درجي ټولراشنلتابع) څخه بوهيږو، چي دا دوه ، يو ، يا هيڅ صفرځايونه لرودی شي. دا د څګ درجو ټول راشنلتابع سره څنګه دی؟

بيلګه:

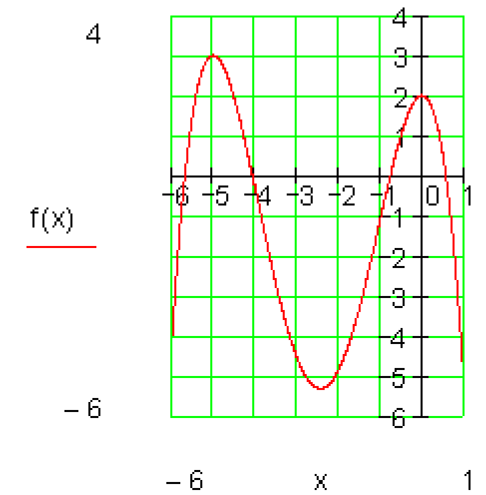
	
$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 7$	$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$
صفرځای نه لري	دري صفرځايونه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 0,2x - 2$

د صفرځای نه شتون



$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 0,2x + 2$

خلور صفرځایونه لري.

جمله:

یو د n -مي درجي تولراشنل تابع زیات له زیاته n صفرځایونه لري.

که n جوړه وي، نو دا لږترلږه یو صفرځای لري.

د صفرځایونو شمیرنې لار(تګلار)

د فکتوري کونو یا صریبونو تګلار:

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x = 0$$

فاکتور x له نوکانو راوتلی شي.

$$\Leftrightarrow x(2x^2 - 2x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

او په نوکانو کې افاده یا وییِنه صفر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

مربع مساوات دی.

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \,|\, : 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$p = -1;\ q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

صفرځایونه :

$$x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = -1$$

د x محور سره غوڅتکی

$$P_{x1}(0|0);\ P_{x2}(2|0);\ P_{x3}(-1|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{2x(x+1)(x-2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x$$

(پورته) د کرښیز ضریبونو ضرب

د بدلون قانون substitution:

یادونه: په دې معنا چې د يوې اووښتونې یا متحولې لپاره بله متحوله ځا په ځای کوو.

$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ بې مربعیز(بي ځلوریز) مساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

بدلون: $x^2=z$

$$\Rightarrow f(z) = z^2 - 13z + 36 = 0 \quad p = -13 \quad q = 36$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36 = \frac{169}{4} - \frac{144}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} z_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9 \\ z_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4 \end{array} \right.$$

بدلون په ځېـ- يا بيرته ګرځوو:

$$x^2 = z_1 = 9 \,|\, \sqrt{\ } \qquad x^2 = z_2 = 4 \,|\, \sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{9} \qquad |x| = \sqrt{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -3 \qquad x_3 = 2 \quad x_4 = -2$$

د x محور سره غوځېکی

$$P_{x1}(3|0); P_{x2}(-3|0); P_{x3}(2|0); P_{x4}(-2|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

د کرښيز ضريبونو ضرب

پوښتني

محور غوځېکي او د ټولراشنل يا ماتتوابعو ګرافونهII

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د درېيمې درجې يو ټولهوښيار يا –راشنل تابع سرچيني سره سيومتريک ده، که

الف- له ټکو $P_1(1|2)$ او $P_2(3|-2)$ څخه تيره شي.

ب- که کربنهg د g(x)=3x سره پارابول په P(0|0) کې لمس کړي.

دويم: تابع f(x) د پيژندورشو يا تعريف ساحې D = IR سره ورکړ شوې ده. تابع f(x) په سيومتري وڅيړی، صفرځايونه وشميری او ګراف وکاږی.

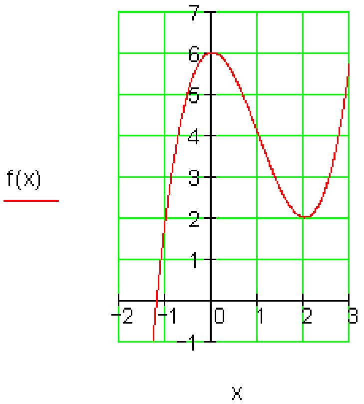
الف – $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2$ ب – $f(x)=x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x$

پ - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+5$ ت - $f(x)=\frac{1}{48}x^3-x$

ټ - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x$ ث - $f(x)=\frac{1}{5}x(3-x)(x+1)$

ج - $f(x)=\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{4}x-1\right)^2$ چ = $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2-6x+\frac{9}{2}$

دريم: تابع $f(x)=x^3-3x^2+6\,;D=\mathbb{R}$ ورکړشوې ده.



الف - وښايی:
د f(x) صفرځای د (-1 ; -2) ترمنځ پروت دی
مدلل کړی، چې f(x) ټيک يو صفرځای لري، دا ګراف بايد څنګه راکښل شي، چې له هغې سره دا ټيک دوه صفرځايونه ولري؟

ب- کربنه x = u د f(x) ګراف په ټکي Q او د x محور په P کې غوڅوي.
د لاندې درېګوډي يا مثلث 0PQ سطحه د u = 2 لپاره وښايی.
د مثلث د (خوندي) سطحې ترم د u په واکوالي کې د u > 0 لپاره ورکړی.
g(x) څومره صفرځايونه د g(x)=3.f(x) سره لري؟
دلايل يې راوړی.

څلورم: تابع $f(x)=5x^3-10{,}8x+4$ ورکړ شوې ده. وښای: x=0,4 يو صفرځای دی. پسې نور صفرځايونه وشميری.

$f(x)=5x^3-10{,}8x+4\,;D=\mathbb{R}$

پنځم: د اووښتوني يا متحولې c په واکوالي کې د صفرځايونو تعداد وټاکی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$f(x)=x^3+2x^2+2cx\,;\,D=\mathbb{R}$$

$$x^2+2x+2c=0\Rightarrow p=2\,;\,q=2c\Rightarrow D=1-2c$$
$$\text{für } D>0\Rightarrow 1-2c>0\Leftrightarrow c<0{,}5$$
$$\text{für } D=0\Rightarrow 1-2c=0\Leftrightarrow c=0{,}5\Rightarrow x_{2/3}=-1$$
$$\text{für } D<0\Rightarrow 1-2c<0\Leftrightarrow c>0{,}5$$
$$\text{für } c=0\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow x(x+2)=0\Rightarrow x_2=0\,;\,x_3=-2$$

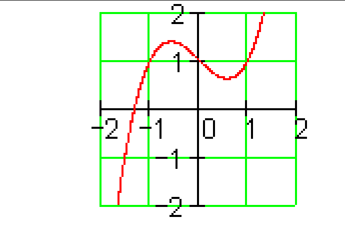
اړيکي:
د $c > 0{,}5$ لپاره $f(x)$ تيک يو صفرځاى لري:$P_x(\,0\,|\,0\,)$
د $c = 0{,}5$ يا د $c = 0$ لباره$f(x)$ تيک دوه صفرځايونه لري.
د$c < 0{,}5$ او c د صفر سره نامساوي لپاره $f(x)$ تيک درې صفرځايونه لري.

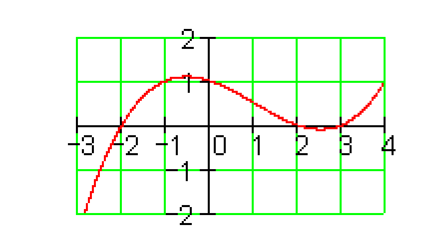
پوښتنې
د ټول راشنل توابعو محور غوښتکي او ګرافونه III
تابع په يوه ګراف تنظيمېږي.

لومړی: هر د يوه تابع ترم سره تنظيم کړی او خپله پرېکړه په دليل کلکه کړی.

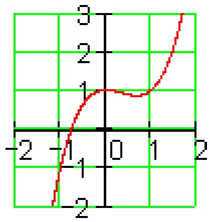
$$f_1(x)=x^3-x+1;\ f_2(x)=x^3-2x+1$$

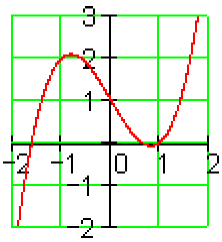
$$f_3(x)=x^3-x^2+1;\ f_4(x)=\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x+1$$





(c) ketabton.com: The Digital Library





دویم: هر هغه څوک چې د لایسنس اخستلو لپاره ځان چمتو کوي، باید وپوهیږي، چې د یوه بریک وهونکي موټر تمکیدني واټن په یوه وچ پاخه سرک)چې طبعأ باید هوار وي) د عکسالعمل لار او د بریک لار څخه یوځای جوړه ده. د لاندې د موټې قانون یا لار(د دري ګوتو) څخه کیدی شي د چټکتیا v پهkm/h د عکسالعمل لارr او د بریک لار b په متر وشمیرل شي.

د بریک لار: $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ همداسې $b = \frac{\left(\frac{v}{10}\right)^2}{2}$ ، د عکس العمل لار: $r = \frac{v}{10} \cdot 3$

د المان د3.3.04 راپن اخبار د اول له جولای1. Juli 2004 په وچ سره د تمځای لار په بل بریکلار شمیرل کیږي.(په افغانستن کې به داخنګه وي ؟نه پوهیږم)

الف- تابع مساوات $s = f(v)$ وټاکی، د کوم سره چې د هرې تلنې د چټکتیا یا سرعت تملار شمیرل کیدی شي.

ب – د لاندې تلل شوی چټکتیا $v = 0, 10, 20, 30, \dots 50$ km/h لپاره په یوه ارزښت جدول کې د هغه هر یوه تمځای s سره یوځای کړی

پ – له دې سره د (60 ... 100 km/h) لپاره s د یو څونور ارزښتونه وشمیری او د دې تابع ګراف وکاږی.

ت – د نوې بریک نیولو قانون(المانی) سره دا تراوسه شمیرل شوي ارزښتونه وشمیری او دا په همغه کواودینات سیستم کې وکاږی او تولہ نتیجه په شننه یا کومنتار سره روښانه کړی.

دریم: داتابعورکړ شوې: $f(x) = x^3 - 0{,}5x^2 - 3x + 1{,}5\,;\ D = \mathbb{R}$

الف- وښایی: $f(x) = 0{,}5(2x-1)(x^2-3)$

ب –ګراف د شوونتیا تر پولې ټیک وکاږی.

پ – د x د کوم ارزښتونو لپاره$f(x)>0$ باور لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

شننيزه ځمککچپو هنه يا تحليلي هندسه:

تحليلی هندسه(وکتورهندسه هم) د هندسي يوه برخه ده، چې د هندسي پرابلمونو د حل د پاره د الجبري مرستندوی موادو (په ټوليزه توګه له کربنيز الجبر) څخه جمتو کوي. دا په ډېرو حالتونو کې ممکن کوي، چې ځمککچيزې پوښتنکوني سوچه شميرنيز حل کړی شو، بې له دې چې ليدوني يې مرستې ته راوبولي يعني چې شکل څنګه برېښي يا دی.

۱۶ - د سطحې شننيزه (تحليلي) هندسه

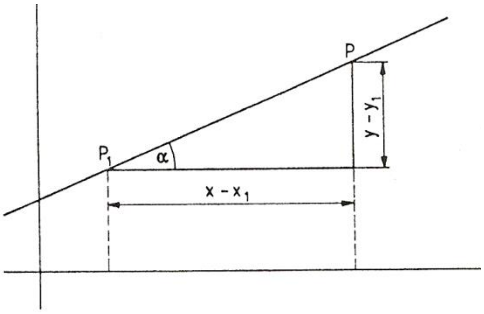
په دې برخه کی يوڅود تحليلي (شننيزې يا سپړنيزې) ځمککچپوهنې يا هندسي ټاکلي پرابلمونه څېړل کيږي.د تحليلي هندسي بنسټيزه ټګلار به څرګنده (وښول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننيزې يا تحليلي څرګندونويی د هندسي خويونو جوړښت ښايي.

۱۶ . ۱ کرښه

د هندسي ټاکندو ټوټو له لارې مختلف امکانات شته دی، چې يوه کرښه يواځنی کره تعين کړاي شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښبرابرونونو يا - مساواتو مختلفی بڼی شته دی. يوه کرښه د يوه ټکي او د هغه د لور(سمت) له لارې ټاکل کيدي شي . (ټکی او د ټکی ميلان معلوم دی) .

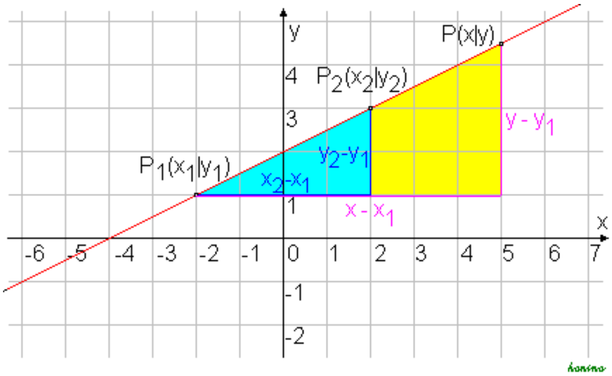
دلته دې($P1(x1 , y1$)دا ټکي وي. $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ دې د ځګيدو کونج،وي، چې د کرښی لور ټاکي (خ ۱۶ . ۱) او $P(x,y)$ په کرښه يو اووښتونی (واريابل) ټکی دی٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



نو د کرښی د میلان $\tan\alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته څیره دې وکتل شي(لاددې څیره هم په همدې موخه کښل شوې ده))



له دې څخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1); ....(16,1)$$

پورته د کرښی ټکی لوربرابرون

که د y په محور P1وټاکل شي د کواوردیناتو $x1= 0, y1 = b$ سره، نو له (۱۶ . ۱)سملاسي په لاس راځي: $y - b = m (x - 0)$ په همدې ډول(⇔)

$$y = mx + b \qquad (16 . 2)$$

دا پورته برابرون د کرښمساواتونورمال فورم (بڼه) بلل کیږي

یوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دوه ټکي دي(P1(x1 , y1 او(P2 (x2 , y2 وي، د x1|=x2 سره ، (ځيره ش ۱۶ . ۲) د جګيدونکی يا تنجنت $\tan\alpha = m$ لپاره داسی دي:

m = (y - y1) /(x -x1)

او

m = (y2-y1)/(x1-x2) = (y2-y1)/(x2-x1)

له کومو چی لاس ته راځي

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x \;\; - x_1};..................(16,3)$$

پورته د کرښی دوه ټکيزبرابرون

ځيره ده

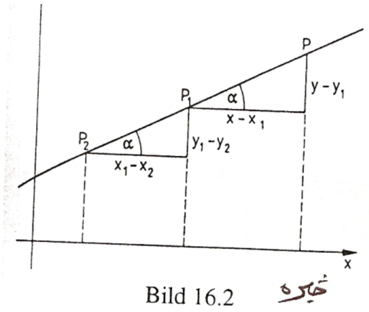
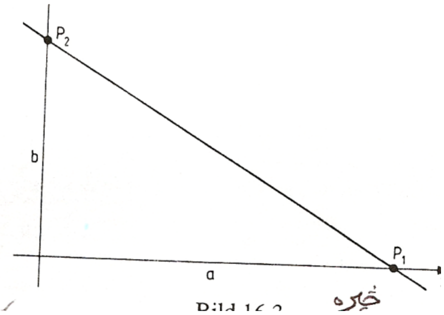


Bild 16.2 ځيره



ځيره

که د x - محور باندې د P1 ټکی ، د کواوردينات x1 = a |= 0 , y1 = 0 سره وټاکو او ټکیP2 دy- محور باندې د کواوردينات x1= 0, y2 = b|= 0 سره وټاکو، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:

(y - 0) / (x - a) = (b - 0)/ (0 - a)

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a+y/b = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوڅي برابرون

ځلور پورتنی کرښمساوات ټول په x او y کی لاينيز دي.د مساوات عمومي فورم)يا ټوليزه بڼه (داسی دی:

Ax + By + C = 0 (16 . 5)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښبرابرونونو ټولیزه بڼه(عمومي فورم)
دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري یا په بر کی نیسي
$y = y0$ ($A = 0$,$B|=0$)
او($x=x0(A|=0,B=0$ چی د x - محور اوپه همدې ډول د y - محور ته غبرګي کرښي دي، په داسی حال کی چی تراوسه دومه لا نه ده څېړل شوې

بیلګه ۱۶ . ۱:

د کرښی برابرون یا لاینیز برابرون، چی له(P(-2 , 3 ټکي تیریږي او د جګوالي کونج $\alpha = 30°$ یی د $m = \tan\alpha \frac{1}{3}\sqrt{3}$ له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسی لیکل کیږي $y-3=\frac{1}{3}\sqrt{3}(x+2)$

او نورمال فورم يي په لاندې ډول دی

$$y=\frac{1}{3}\sqrt{3}x+(3+\frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بیلګه ۱۶ . ۲ :

د لاینیزبرابرون یا دکرښوبرابرون په ټکو(P1 (3/2 ,-2 او(P2(1 , -4کی د (۱۶ . ۳)سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y+2}{x-\frac{3}{2}}=\frac{-y+2}{1-\frac{3}{2}}$$

له دې لاس ته راځي: $y+2=\frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x-\frac{3}{2})$

نو نورمال فورم $y=4x-8$ لرو(**اته** ناسم، په ځای یې شپږ دي)

بیلګه ۱۶ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښه د y =-(3/2)x+1 برابرون سره د y - محور په(P1(0,1 ټکي کی غوڅوي او جګوالی یی 2/3 - دی ، دا په دې مانا چی د x - ارزښت تغیریدل په یو دy - ارزښت په 2/3 - تغیروي، په دې ډول دوم د کرښي ټکی لاس ته راځي. د بیلګی په توګه p2 (0+1 , 1-(3/ 2)=p2(1,-1/2)

(ځیره ۱۶ . ۴ لاندې کښل شوې)

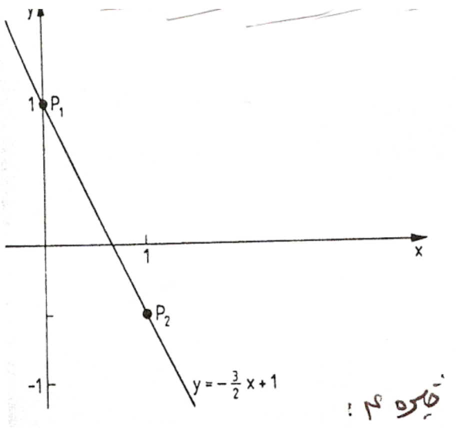
بیلګه ۱۶ . ۴ :

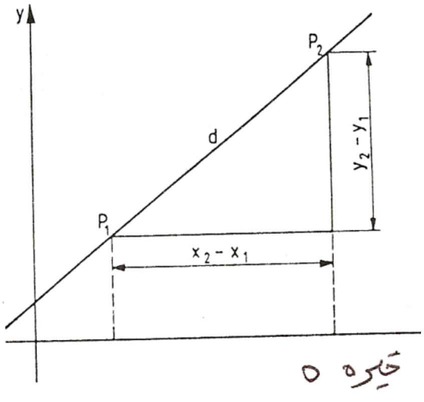
د کرښی د برابرونونو عمومي فورم x-2y-6 = 0 څخه دغوځیدو فورم لاس ته راځي
x / 6 + y / 3 = 1
کرښه دکواوردینات محورونه په دې ټکو(P1(6 , 0), P2(o,-3 کې غوڅوي۰
په یوه کرښه د دوه ټکو(P1(xx,y1),P2(x2,y2ترمنځ فاصله (که د کرښي واټن P1P2 d = وي د پیتاګوراس(فیساغورس) له جملی (ځیره . ۱۶ . ۵) داسی ده

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};.........................(16,6)$$

پورته د ټکو P1 او P2 ترمنځ واټن

ځیرې ۱۶ . ۴ او - ۵





بیلګه ۱۶ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د درېګوډي ABC د اړخونواوږدوالی، چی کونجتکي یی دادي(A(3,1),B(-1,1),C(2,5، په لاندې ډول دی

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښي (نه کېمټی) چی (یو د بلی سره) غبرګي نه وي ټیك یو غوڅټکی لري. دا چی دا ټکی په دواړو کواور دیناتو پروت دی ، نو د دواړو کواوردیناتو برابرون باید پوره کړي . په دې حالت کي د غوڅټکي کواوردیناتو، د دوه لاینیزو برابرونونو سره چی دوه اوښتونې یا

ناپیژندونکی (مجهولی) ولري، د یوه سیستم یواځنی کره اوبیونه ترې لاس ته راځي. په ټولیزه توګه دا باور لري: که یو برابرونسیستم چی د دوه کرښو د برابرونونو څخه جوړ وي، او یو یواځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښي یو بل په دې ټکي کی سره پرې کوي.
که ناپای ډیرې اوبیونې شته وي، نو په دې حالت کی برابرون همغه یوه کرښه ښایي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښي یوبل سره غبرګي ځغلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بیلګه ۱۶ . ۶ :

د g1 : y = 3x-2 کرښی پروتځاي (موقعیت) د لاندې کرښو
الف) g2: -2x+y = 1,
ب) g3: 3x -y=5, ,
پ) g4 : -x+(1/3)y=-2/3
سره څیرو
اوبیونه : د g1 برابرونونو څیره داسی بدلیږي : 3x-y=2
الف) د برابرونونو سیستم 3x-y=2، -2x+y=1
ټیك یوه اوبونه لري: x1=3 , y1=7
ددې څخه څرګندیږي چی ټکی(S(3 , 7 د کرښو g1 او g2 غوڅټکی دی .
ب) د برابرونونو سیستم
3x - y = 2
3 x - y = 1

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبی نه لري : برابرونونه يو بل ردوي يه نه زغمي . د g1 او g2 کرښی يو د بل سره غبرگي دي

پ) د برابرونونو سيستم 3x-y=2

-x+(1/3)y=-2/3

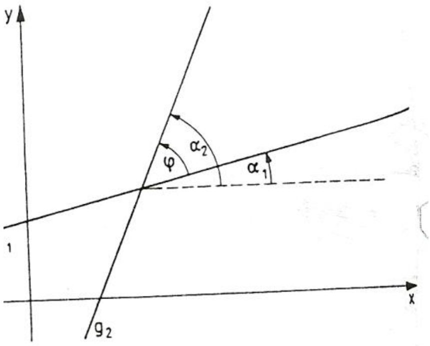
ناپای ډیر ې اوبيونې يا حلونه لري. برابرونونه يو بل سره برابر يا يو بل ته ورته دي. که په ۳ ضرب شي يو همغه پورته برابرون ترې لاس ته راځي .

g1 او g2 دوه کتې مټ برابرونونه دي ۰

که د دوه کرښو

g 1 : y = m1x + b1 g2 : y = m2x + b2

غوڅکونج ϕ ټاکو، نو د دواړو کرښو جگيد کونجونو $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ کمون (کمښت يا توپير)جوړوو (ځ ۱۶ . ۶)



ځېره ۱۶ . ۶

د کرښی له برابرونونو پوهيږو $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$

د زياتون تيورم (بنستيزه جمله) (برخه ۶ . ۵) ځخه د $\tan(\alpha_2-\alpha_1)$ لپاره (پر تله برخه ۴ . ۵) باوري ده

$$\tan\phi = \tan(\alpha_2-\alpha_1) = (\tan\alpha_2 - \tan_1)/(1+\tan\alpha_1.\tan\alpha_2)$$

د کوم ځخه چی د $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1+m_1.m_2};........................(16,7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج دیږ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې پورې اړه لري چې ایا $\phi > 0 \vee \phi < 0$ د پورته خېرې ۱۶ . ۶ کونج پڅ او که تیره دئ.

بیلګه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو g1:y=x-1او g2:y=(7/4)x+1 غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) څخه لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{\frac{7}{4}-1}{1+1.\frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255°$$

د g1 او g2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دئ : $180-\phi = 164,745°$

د دوه کرښو یو بل ته ځانګړي حالتونه:

۱ – کرښې یوبل سره غبرګې ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180° \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1+m_1.m_2} = 0$$

ګورو چې د 0 = m2 - m1 لپاره باور لري، نو m2 = m1

(دلته باور لري : $m_1.m_2 = m_1^2 \neq -1$)

۲ - کرښې یو په بل (نیغې) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90° \Rightarrow \tan\phi = (m-m)/(1+m.m) = \infty$$

دا حالت د 0 = 1+m1.m2لپاره منځ ته راځي،

یعنې د1/m1- =m2 لپاره (0 =|m1|=0,m2)

په کرښه(m1=0) y=y0 باندې کرښه(x=x0(m2=oe نیغه ولاړه ده

د غبرګوالی لپاره شرطونه

m2 = m1 (16, 8)

د اورتوګونالیټی Orthogonalität(یو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

m2 = -1 / m1   (16 . 9)

بیلګه ۱۶ . ۸ : دکرښی g2 برابرون دې وټاکل شي چی له ټکي(P (2,-1 تیریږي، او له کرښی g1 : y = -2x +1 سره الف (غبرګه او ب(اورتوګونال (نیغه) ځغلي اوبیونه:
الف) د g2 کرښی میلان (جګوالی m2 = m1 = -2)دی. پام (۱۶ . ۱) ته دکرښي g2برابرون لپاره باور لري : (y+1=-2(x-2 همداسی y = -2x +3
ب) د g2 کرښي میلان یاجګیدنه ده m2=-1/m1=1/2 د(۱۶ . ۱) سره سم د g2 کرښي برابرون دی: y+1=(1/2)(x-2) <=> y=(1/2)x-2

بیلګه ۱۶ . ۹ :

د کرښی برابرون ټاکل کیږي چي د(P1(1/3,-1/6 ټکی تیریږي او په کرښه چی له ټکو(P2(-1,1 او(P3(-2,-1 تیریږي، ولاړه وي.
ځواب : کرښه چي له P2 ,P3 ټکو تیریږي، و (۱۶ . ۳) ته په پام لاندې برابرون لري (y-1)/(x+1)=(-1-1)/(-2+1) = 2 <=> y = 2x +3

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی میلان یا جګوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د p_1 څخه تیریدونکی کرښي برابرون د m_2 میلان سره د(۱۶ . ۱) له مخی دي:
y+(1/6)=-(1/2)(x-173) <=> y=-(1/2)x

بیلګه ۱۶ . ۱۰ :

د g1:2x-y-1=0او g2: 3x+2y=5 کرښو د غوځښکي S واټن له ټکي(P(6,13څومره دی او د کرښي برابرون څنګه دی چي د کواوردینات له سرچینی تیریږي او د S او P څخه تیریدونکی کرښه باندې ولاړه کرښه وي؟
ځواب : د غوځښکي کواوردینات د لاندې برابرونونو سیستم څخه لاس ته راځي
2x-y=1
3x+2y=5
یعنی: xS=1 , yS=1
د S او P ټکو ترمنځ واټن له (۱۶ . ۶) څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d=\sqrt{(1-6)+(1-13)^2}=13$$

د (۱۶ . ۳) له مخی د کرښي برابرونونه چی له S او P تیریږي دي

$(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1) \Leftrightarrow y=(12/5)x-7/5$

(جګوالی: $m = 12 / 5$)

له S او P تګو تیریدونکی کرښه باندې د ولاړې کرښي میلان

$m2 = -1/m = -5/12$

د ($P0\ (0,0)$ څخه تیریدونکی کرښه د m2 میلان سره د (۱۶ . ۱) له مخی لاندې برابرون لري

$y-0=-(5/12)(x-0) \Leftrightarrow y=-(5/12)x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ . ۷ تمرینونه

۱ – د هغو کرښو مساوات و ټاکئ، کومې چې له P_1 ټکي تیریږي او د x–محور سره کونج ∝ جوړوي

a) $P_1(2,-3)$, ∝ = 30°, b) $P_1(-3,2)$ ∝ = 45°

c) $P_1(-1,-4)$, ∝ = 120° , d) $P_1(4,4)$, ∝ = 0°

e) $P_1(0,0)$, ∝ =150° , f) $P_1(1,-1)$, ∝ = 90°

۲ –د ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو P_1 او P_2 تیریږي

a) $P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$, b) $P_1(-3,3)$, $P_2(0,0)$,

c) $P_1(1,4)$, $P_2(-3,-4)$, d) $P_1(1,2)$, $P_2(-1,1)$,

e) $P_1(0.1.-1)$, $P_2(-0,1,-3$, f) $P_1(1,-1)$, $P_2(4,-2)$!

۳ – د محوررونو غوځي(لنډ : محورغوځي) a,b د کرښې مساوات په نورمالفورم وټاکئ او همداسې د غوځټکو واټن d د محورغوځټکو سره چې یو له بل بې لري وټاکئ.

a) a = 5 , b = 2 , b) a = -1 , b =3 , c) a = 2 , b = -3 , d) a = -3 , b = -3

۴ – یو دریګوړی دا لاندې ګوډټکی لري A(-4,-1) , B(2,-2), C(1,3) . د هغو کرښو مساوات ښکاره دي، په کومو چې د دریګوړیو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دریګوړي اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ – د لاندې کرښمساواتو نورمالفورم او برختوټېنه یا –فورم ښکاره دی؟

a) 3x -5y +15 = 0 , b) 4x -3y -18 = 0

c) -4x +2y -10 = 0 , d) -3x -4y +15 = 0 ?

۶ – د کرښې y = -(12 / 5)x +2 پروتځای د کرښو

a) y+2,4x - 6 = 0 , b) 28x +10y = 0 , c) 8x + 5y =2,

d) 5y +12x -10 = 0 . e) y +(12/5)x = 3 , f) 6x +2,5y = 5

سره وڅیړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د لاندې کرښو د غوښتنکو کواوردیناتونه او غوښکونج وټاکئ.

a) $2x + 3y = 7$, $3x - y = 5$,

b) $y = (1/2)x + 1$, $y = -2x + 6$,

c) $y - x = 7$, $y = 7$,

d) $x/3 - y/2 = 1$, $-x/2 + y/3 = 1$,

e) $6x - 2y + 10 = 0$, $y = 3x + 6$,

f) $y = 4x - 1$, $y = -3x + 5$!

۸ – کومه کرښه د کرښې $x - y = 4$ ، کرښې $3x + y = 8$ او برسیره پر دې له غوښتنکې P(0,5) څخه تیریږي ؟

۹ – د لاندې ګوټ A(-4,-1), B(2,-2), C (1,3) سره د دریګوټي دننه کونجونه څومره لوي دی ؟ (پیلونه: دریکونجی وکاږی) یا (در ګوټي)

۱۰ – د ولاړپریوتی کرښې یا زوړندې مساوات له ټکی P(2,0) څخه په کرښه $y = 2x + 1$ څنګه دی؟

۱۱ – د ولاړ کرښی مساوات په کرښه $y = 2x + 1$ باندې په ټکي P(-1,-2) څنګه د

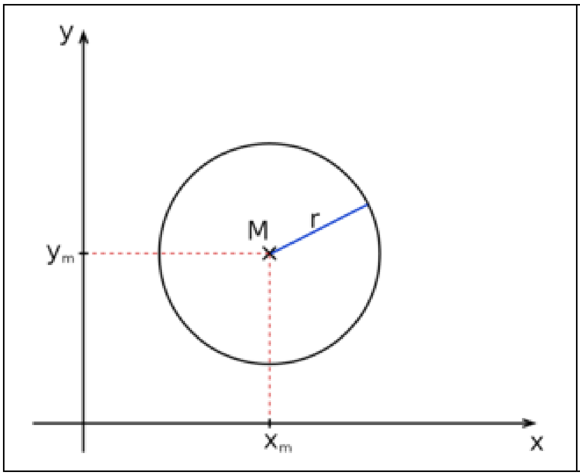
۱۲ – د کرښې $y = 2x + 1$ سره د غبرګلې کرښې مساوات چې له ټکي P(-1,-3) تیریږي، څنګه دي؟

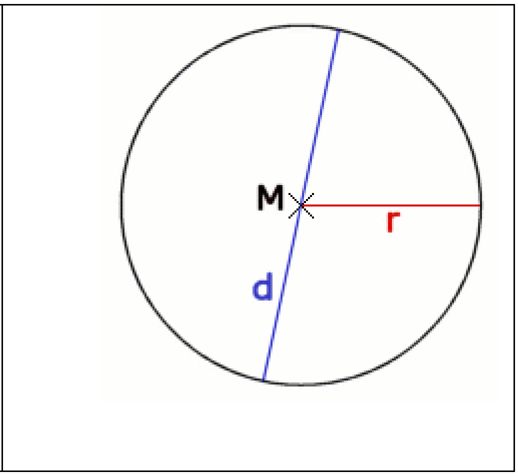
۱۶ . ۲ ګردی (دایره)

دایره(ګردی) د ټولو هغو ټکو ډیری(سټ) ده، چې د یوه کره ځای په ځاي ټکي ، داسې په نامه منځټکی څخه ، همغه واټن ولری. واټن ته یی وړانګه وایو او په rیی په نخښه کوو.
فورمال داسې ویل کیږي یا دا پیژند ورکوو، چې دایره (ګردی) k د د سطحې (هوارې) E د ټولو ټکو ډیری(سټ) ده،د کومو لپاره چې باور لري:

$$k = \left\{ X \in E \,|\, |\overline{MX}| = r \right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





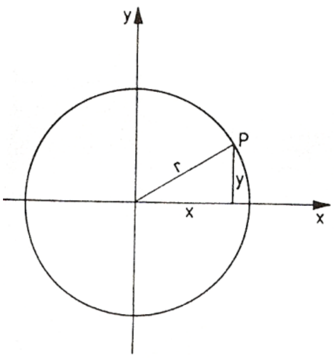


Bild 16.7 ځېره

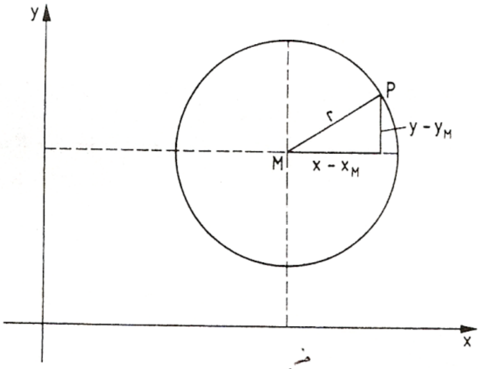


Bild 16.8 ځېره

په شننیزه هندسه کې کیدی شي، چې ګردۍ د منځټکي $M(x_m, y_m)$ او وړانګې r
سره (په هواره کې) د لاندې برابرون له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د ګردۍ ټولیز برابرون

دا برابرون د پېژند او پیتاګوراس له جملې سملاسي ورکوي
د یوې ګردۍ ځانګړې حالت او د کواوردیناتسیستم سره، چې منځټکی یې د کواوردینات
په سرچینه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

که د ګردۍ منځ ټکی د کواوردیناتسیستم (ځیره ۱۶ . ۷) په سرچینه پروت وي، نو د
) پیوتاګوراس د جملې له مخې (د ګردي په خوښه ټکي P(x,y) لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16 . 10)$$

د ګردی منځټکي برابرون چی د ګردي منځټکی(M(0,0او وړانګه r ده.

که د ګردي منځټکی M کواوردينات (xM,yM) ولري (ځيره ۱۶ . ۸) نو د ګردی د خوښی ټکي P(x) لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د ګردي د منځټکي برابرون وي د منځټکي $M(x_M,y_M)$ او وړانګي r سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بينوم مربع وې شميرو او برابرون په A|=0 فاکتور ځلوو (بی له دې چی د ګردي برابرون تغير وعمومي) ، پس پيژندل کيږي چی د ګردیبرابرون د ځلوری يا مربع غړي په x اوy کی په فاکتور A لاينيز برابرون په x او y او ثابت غړي (چی يوه غړي په ځيري سره يوځاي شوي) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې ټوليز(عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2+Cx+Dy+E = 0 . A |= 0 \quad (16 . 12)$$

د ګردي برابرونونو(مساواتو) ټوليز فورم يا ټوليزه بڼه ۰
که د ګردي برابرون په ټوليزه بڼه يا عمومي فورم ورکړشوي او که منځټکی او وړانګه يی ځرګنده کوو يا معلوموو نو د ګردي برابرون   د منځټکي فورم باندې راوړو يا را اړوو. دا د ځلوری پوره کولو يا مربع تکميلولو په بنسټ صورت نيسي   . دوه ځيرې پورته وګوری

بيلګه ۱۶ . ۱۱ :
د ګردی برابرون دې   په ټوليزه - يا عمومي توګه وي:

$$2x^2+2y^2 +4x-12y = 0$$

له دې لاس ته راځي، که په دوه وويشل شي $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

(د ځلوری پوره کونه يا مربع تکميلونه) $x^2-4x+4+y^2-6y \;\; +9 = 3+4+9$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دبينوم د مربع له لارې انځورونه $(x+2)^2 +(y-3)^2 = 16$
ګردۍ منځټکی(M(-2,3 او وړانګه r=4 لري.

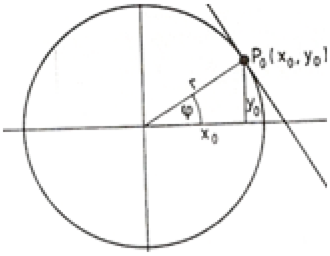
بيلګه ۱۶ . ۱۲ :
د ګردۍ برابرون وليکې چې منځټکی يې(M(2;0 وي او په کوم چې ټکی(P(6,4-3 روت دی؟
اوبيونه : د(M(2,0 سره (۱۶ . ۱۱) داسې دی
$(x-2)^2 + y^2 = r^2$
د P ټکی د ګردۍ برابرون پوره کوي $(6-2)^2 +(4 - 3)^2 = r^2$
له دې څخه د ګردۍ وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: r = 8 او له دې سره د ګردۍ برابرون:
$(x-2)^2 + y^2 = 64$
ګردۍ او کرښه يو بل ته درې مختلف ځايونه لرودی شي
۱ - کرښه ګردی غوڅوي، نو له دې امله غوڅی ده(سيکانتې)
۲ – کرښه ګردۍ په يوه ټکي کی لمسوي يعنی مماس دی (تانجنت يا جګوالی)
۳ - کرښه ټوله له ګردی دباندې پرته ده (له ګردۍ تيريدونکی، لنډ : تيرېدونې)
د غوڅټکي(د تقاطع ټکي) کواوردينات بايد د ګردۍ اوکرښی برابرون پوره کړي سرې د کرښي برابرون د ګردۍ په برابرونونو کی ږدي(y يا x پسی حل يا اوبۍ شوي) او په روښانه ډول يو مربع مساوات (ځلوری برابرون) په x او y کی لاس ته راوړي، کوم چی په ځرګند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ريل اوبيونې يا ځوابونه لري، يو رييل ډبل اوبی او يا هيڅ رييل اوبی کيدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ څخه عبارت دي.

بيلګه ۱۶ . ۱۳:
کوم پروت ځايونه ګردی k چې راکړشوی: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ اولاندې کرښی و يو بل ته لري؟
g1 : 2x+y=4 ,g2=2x+y=12 , g3: -x+y/2=3

اوبی: g1: y=-2x+4 که د ګردیبرابرون کی ځاي کړو نو دا برابرون لاس ته راځي
$(x-2)^2+(-2x+4 -3)^2=5 <=> 5x-8x=0$
ددې ځوابونو x=0 , y=4 او x=8/5 , y=4/5 سره به g1 د ګردي غوڅوونی يا (Sekantسکانت) وي.
که g2: y=-2x+12 د ګردي مساواتو کی ځاي کړو نو لاندې لاس ته راځي
$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 <=> x^2-8x+16=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډېل اوبوني $x_{1,2} = 4$, $y_{1,2} = 4$ سره $g2$ يو تانجنت دی.
که $g3 : y=2x+6$ د ګردۍ مساوات کی ځاي کړو، نو لاندې لاس ته راځي:
$(x-2)^2+(2x+6-3)^2 <=> 5x^2+x+8=0$
دا څلوری برابرون یا مربعمساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه $g3$ له ګردی k دباندې پرته ده، یعنی دباندنی یا دباندونی ده.



په ګردي $x^2+y^2 = r^2$ (څېره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرون په ټکی $P0(x0,y0)$د مساوات $x0^2+y0^2 = r^2 > 0$ سره غوښتل کیږي. تنجنت د مماس په وړانګه نیغ ولاړ دی
د مماسوړانګه دا میلان یا جګوالی لري $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0}$ او
له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخی د تنجنت

$$m = 1/\tan\phi = -x_0 / y_0; ....(16,13)$$

د تنجنت یا جګي برابرون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:
$y-y=-(x0/y0)(x-x0) <=> xx0+yy0=x0^2+y0^2=r^2$

$$xx_0+yy_0 = r^2 \qquad (16 . 14)$$

د ګردۍ تنجنت باربرون په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ په ګردي
$x^2+y^2 = r^2$

(حالتونه$P0(\pm r,0)$او$P0(0,\pm r)$ په (۱۶ . ۱۴) کی ځاي (دننه) دي.
(څېره . ۱۶ . ۱۰)

(c) ketabton.com: The Digital Library

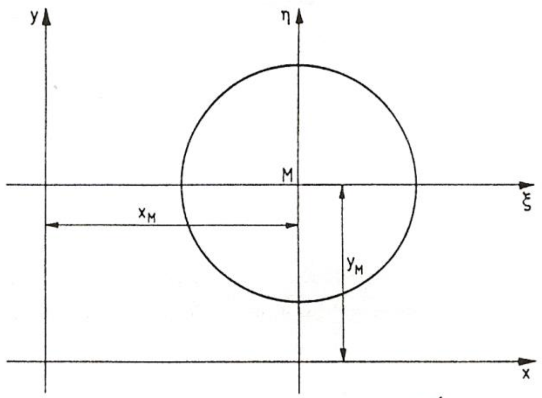


Bild 16.10

یادونه : که له دې مخ ته یا وروسته x0,y0 یا xM,yMاو x_0, y_0 یا x_M, y_M ګورو نو کټمټ دي

بیلګه ۱۶ . ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرون له ټکي(P1(-12,4 په ګردي $x^2+y^2=r^2$ په څه ډول دي؟
اوبیونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پیداکوو. دا باید دګردی برابرون پوره کړي . ټکی P1 باید په تنجنت پروت وي یعنی د تنجنت برابرون (۱۶ . ۱۴) باید پوره کړي.
نو باور لري

$x_0^2+y_0^2 = 16$ او $-12x_0 + 4y_0 = 16$

که دا لاینیزبرابرون د y0 په لور حل شي ، نو په x0 کې یو څلوری برابرون یا مربع مساوات لاس ته راځي

$x_0^2+(3x_0+4)^2 = 16$

همداسي $5x_0^2+12x_0=0$د اوبیونو $x_{01}=0$, $x_{02}=-12/5$سره. داهم په دې پورې اړه لري

$y_{01}=4$, $y_{02}=-16/5$

د تنجنت مساوات په ګردې، په ټکو(P01(0,4او(P02(-12/5,16/5-)د (۱۶ . ۱۴) له مخی په لاندې ډول دي

$0.x+4y=16 \Leftrightarrow y=4$

او

$(-12/5)x-(16/5)y=16 \Leftrightarrow y=(-3/4)x-5.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګردۍ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځټکي (M(xM,yM سره د η,ζ -کواوردينات سيستم کی ، چی سرچينه يي په M کی پرته ده)(؟ څيره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري .

$$\zeta^2+\eta^2=r^2$$

د تنجنت مساوات په ټکي $P_0(\zeta_0,\eta_0)$ کی داسی دي

$$\zeta\zeta_0+\eta\eta_0=r^2;\ldots\ldots\ldots\ldots(16,15)$$

د η,ζ -کواوردیناتسیستم د y,x - کواوردیناتسیستم یو غبرګ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کواوردیناتسیستم کی لاندې اړیکی پرتی دي .

$$\zeta=x-x_M,\eta=y-y_M;\ldots\ldots\ldots\ldots(16,16)$$

که برابرون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو(۱۶. ۱۵)کی ځاي په ځاي شي، نو سړی بیا دا دy,x -کواوردینات سیستم ته ترانفورمیرکوي(کشوي یا راکاږي) :

$$(x-x_M)(x_0-x_M)+(y-y_M)(y_0-y_M)=r^2 \quad (16.17)$$

په ټکي(Po(x0,y0کی د ګردۍ تنجنت برابرو په ګردۍ

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$$

بیلګه ۱۶ . ۱۵:

په ګردۍ چی برابرن $x^2+y^2+16x+4y+43 = 0$ لري، دx - محور باندې، په ټکو

$$x_1 = x_2 =-5$$

سره تنجنت وکاږو(کیږدو). برابرون يی څنګه دي؟

اوبیونه : د ګردۍ برابرون د منځټکي فورم (۱۶. ۱۱) باندې بدليږي:

$$x^2 +16x+64+y^2-4y+4 = -43+64+4$$

$$(x+8)^2 +(y-2)^2 = 25$$

او له دې لاس ته راځي

$$x_M = -8 , y_M = 2 , r = 5$$

د ګردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه

$$x_1 = x_2 = -5$$

د دواړو ګردۍ ټکو په ګردیبرابرون کی ځايوو:

$$(-5+8)^2+(y-2)^2=25$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې داسې لاس ته راغلي دy لپاره ځلوریبرابرون یا مربع مساواتو د دواړو اوردیناتو
مماس ټکي لاس ته راځي : $y1 = 6$, $y2 = -2$
د (۱۶ . ۱۷) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 \iff 3x+4y=9$$

او

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 \iff 3x-4y=-7$$

تمرینونه:

۱۳ – د لاندې مساواتو سره گردیمنځټکی او وړانگه وټاکی:

a) $x^2 + y^2 = 20$ b) $x^2+y^2 +2x -4y + 1 = 0$

c) $x^2+y^2 9y = 0$, d) $4x^2 +4y^2+32x-8y+67 = 0$

e) $36x^2 +36y^2 -36x +24y -23 = 0$, f) $x^2+2x+y^2+2y = 16$!

۱۴ – د لاندې گردیو مساوات وڅیړی

الف) چې منځ ټکی $M(-2,-1)$ لری او له سرچینې تیریږي

ب) هغه چې دري ټکی $P_1(3,0)$, $P_2(5, 5 -3)$, $P_3(5 \, 3,-1)$ یې د غاړو ټ

پ) چې وړانگه $r = 6$ لري او له ټکو $P_1(-1,11)$,$P_2(5,5)$ څخه تیریږي.

ت) له ټکی $P_1(3,4)$ تیریږي او کرښه $y = -(4 / 3)x + 13$ په ټکي $P_2(4,3)$ لمسوي.

ټ) چې منځ ټکی $M(2,2)$ لري او کرښه $y = -(4 / 3)x +13$ لمسوي.

ث) چې د هغې منځټکی په کرښه $y = 3x -19$ پروت دی او له ټکی $P_1(7,-2)$ او همداسی له ټکي $P_2(11,2)$ څخه تیریږي.

۱۵ – کوم پروتځایونه گردی k چې فرمول لري $x^2+y^2-8x = 0$ او لاندې کرښې یو له بل سره لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $g: y = 2x + 1$, b) $g: y = x$, c) $g: y = x - 1$,
d) $g: y = 4$, e) $g: y = -x - 3$, f) $g: y = x - 3$?

۱۶ – کوم پروتخاي کرښه $3x + 4y = 25$ ګردی $x^2 + y^2 = 25$ ته لري؟

۱۷ – د تنجنت مساوات څنګه دی
الف) په ټکي $P_0(5, y_0)$ چې په ګردی $x^2+y^2 = 169$ پروت دی،
ب) په ټکی $P_0(x_0, -2)$ چې په ګردی $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ پروت دی؟
۱۸ – د هغو ګردیو منختکي پیداکړی چې وړانګه یې $r = 5$ وي، کومی چې کرښه $3x + 4y = 9$ په ټکی $P_0(-1, 3)$ کی لمسوي!
۱۹ – په ګردی $x^2 + y^2 = 25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکی، کوم چې د کرښي $y = (4/3)x + 2$ سره غبرګ څغلي؟

فنکشنونه(بلواك يا تابع)

د فنکشن کليمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چې ددې برخی په پيل کی دی کليمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کليمه کله د يواځنی ښيرونی، چې په هندسه کی خورا ډيره کارول کيږي يا استعماليږي ، کله د بلواك او بيا زياته د فنکشن په نامه څموږ په دې کار کی بلل شوي چې موږ ورسره تراوسه د تابع د نامه لاندې هم بلد يو، څما په اند يا فکر که دا موږ ښيرونه وبولو، نو موخه ور يا هدفمند به مو نومولی وي او تابع خوبې له هغې بلواک دی. په لاندې کي به وګور چې خپلواکی او بلواکی ناپيوندونکی څموږ د ښيرلو متن جوړوی

پيژند ۱۵ . ۱:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې ریښلی واریابلی (اووښتوني یا متحولي) Rریبل ارزښته فنکشن(لنډ: فنکشن یا ځیرونه) د ریبلو ګڼونو ډېری باندې ، د یوې ډېری $D \subseteq R$ یوه یواځنی ځیرونه ده. D دپیژند ډېری نومیږي .

د ټولو ارزښتونو ډېری چې y یې د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پیژندډیری یا تعریف ډیري په دننه کی وځغلي، د ارزښت ډیری W بلل کیږي .

د دي قانونمندی f له مخی هرx ∈ Mیواځني یوه y ∈ W باندې تنظیمیږي یا ځیره کیږي :

$y = f(x)$

اوس نو x خپلواك واریابل یا اووښتونی یا مجهوله بلل کیږي یا نومیږي او y بلواك واریابل یا اووښتونی بلل کیږي، له دې امله تابع، چې موږوايو، د ځیروني هغه ځیره شوې خوا ده. (د فنکشن یا ځیروني او تابع یا بلواک توپیر)

د فنکشن مختلف انځورډولونو په منځ کې سرې توپیروي. د دې کلیمه انځورونه کې له ماتماتیکي یا شمیریز سومبولیك څخه تیرید شوځو ، مګر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چې

په لاندې کي به ورسره بلد شو.

بیلګه ۱۵ . ۱ : هر ریبل ګڼ د همغه ریبلګڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل یا ځیره کیدل..

بیلګه ۱۵ . ۲ : هر یو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت ګن او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهنی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x اوy د نورو ریبلو ګڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو ، زیاتون، کمون ، ځل ، ویش ، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې ترل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴)

بیلګی ۱۵ . ۱ ته: $y=(x/2)+1, D=R , W=R$

بیلګی ۱۵ . ۲ ته :

د $x<0$ لپاره $y=|x|$
د $x>0$ لپاره $y=x^2$
دلته $D=R,W = [0,\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام دې وي چې په داسې حالت کې له کيڼ و ښي لور ته یا ګډوډ لوستل کیږي یعنې داسې لولو:
y د x مطلقه ارزښت سره مساوي دی، که چیرې x له 0 کوچنی وي.

داسې لیکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چې له اشتباه سره به نه مخامخ کیږو). تحلیلي(شننیزه) انځورونه اکسپلیڅیت(واضح)روښانه و څرګند) explizit نومیږي، که د فنکشن برابرون، لکه په بیلګو ۱۵ ، ۱ او ۱۵ . ۲ چې په یوه د y په لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: $y = f(x)$
که چیرې داسې نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځوروني شکل $F(x,y)=0$ دی او فنکشن ایمپلیڅیت (ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی implizit) بلل کیږي یا نومیږي . د بیلګې په توګه به $2y-x-1=0$, $D=R, W=R$ فنکشن د بیلګې ۱۵ . ۱ یو ایمپلیڅیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیڅیت شنینیزه بڼه (ایمپلیڅیت تحلیلي فورم) کیدی شي په اکسپلیڅیت شننیزه یا سپړنیزه بڼه (تحلیلي فورم) واړول شي.
د بیلګې په توګه:
که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیڅیت حل کیدونکی نه دی.
د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزې انځورونی ځانګړې بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتونې یا واریابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لارښوديږي. هر پارامتر (له یوه پارامتر ساحی څخه)
$x = \varphi(t)$, $y = \Psi(t)$

په یو ارزښتجوړې x,y تنظیمیږي.

بیلګه ۱۵ . ۱ ته: $x=2t$, $y=t+1$; $-oe< t <oe$ به یوه پارامتري انځورونه وی
او $x = t$, $y = t/2 + 1$ به یوه بله پارامتري انځورونه وي.
زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیږي

بیلګي ۱۵ . ۱ته:

X	-2	-1	0	1	2 ....
Y	2	0,5	1	1,5	2 .....

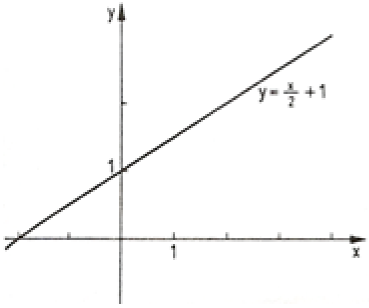
بیلګي ۱۵ ، ۲ ته:

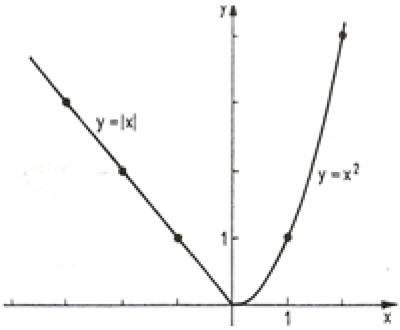
X....-3 2 -1 0 1 2 3 ...

(c) ketabton.com: The Digital Library

Y....3   2   1   0   1   4   9 ...

د فنکشن گرافیکی انځورونه (د یوې ټوټې) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کږې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی ځخه عبارت ده ، چی د واریابلو یا اووښتونوجوړې د x,y- هواره یا سطحه کی یواځني او یواځني ټکي باندې تنظیمیږي . ځیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲ بیلګي) ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته





۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایتروال] a,b [کی هلته او هلته یا ټیك هلته مونوتون جګیدونکی (مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو $x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري:

$f(x1) \le f(x2) \quad (f(x1) > f(x2))$

که د برابروننخښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دی

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینتروال) $(oe,0]$ کي مونوتون ټیټیدونکی یا -لویدونکی
او په اینتروال $(oe,0]$ کی مونوتون جګیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه اینتروال [-a,a] کی یو تعریف شوی فنکشن (y = f(x هلته او هلته جوړه (جفت) یا سیومتریك symetrisch,) ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتیسیومتریكantisymetrisch بلل کیږي چی باوري وي

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$

د جوړه فنکشنونو څیرې اکسیال یا محوري سیومتریك y و - محور ته څغلي) دلته هم څیره شته ، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳ (، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریك څغلي) بیا هم څیره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

بیلګه ۱۵ . ۴

فنکشن $y= x^3 ,D= R$

یو ناجوړه یا طاق فنکشن دی :

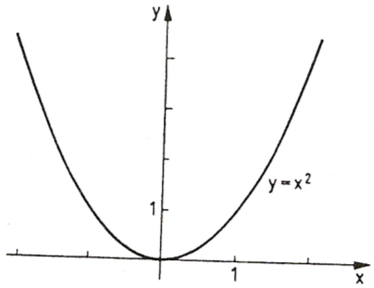
$$(-x^3) = -x^3$$

بیلګه ۱۵ . ۳ :

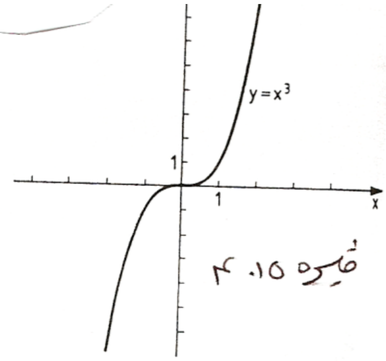
فنکشن $y=x^2,D=R$

یو جوړه یا جفت فنکشن دی:

$$(-x)^2 = x^2$$



څیره ۱۵.۳



څیره ۱۵.۴

د بیلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

پیژند ۱۵ . ۴:

(y = f(x تیك هلته په D (پیژندډیری ده) بند یا رابند(محدود)بلل کیږي که یو $k > 0$ داسی شته وي چي دا باور ولري:

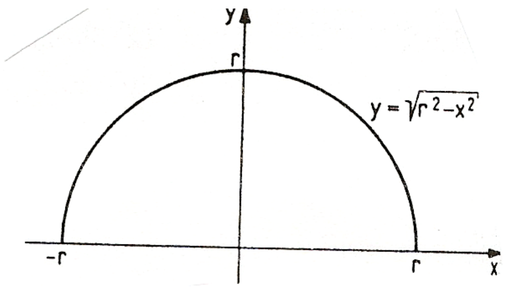
$$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$$

بیلګه ۱۵ . ۵:

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r , r]$
رابند یا راګیر(محدود» زه به دا له دې وروسته
بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم یوونګردی څیره ده(

ش . ۱۵ . ۵ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \leq r$



پیژند ۱۵ . ۵:
$y = f(x)$ پریودیکي(دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:

$$f(x + p)= f(x)$$

د دورانی یا تل راکځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

پیژند ۱۵ . ۶ :

ټول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کیږي۰

د فنکشن صفرځایونه د مساوات $f (x) = 0$ د حل له لارې پیدا کیږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرږې د غوڅېکو x - ارزښتونه دي.

بیلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\ x + 1$ صفرځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دی (څیره ۱۵ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه۰ ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 ,\quad x_2 = -2$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري.) بیا هم ځیر ۱۵ . ۶ (

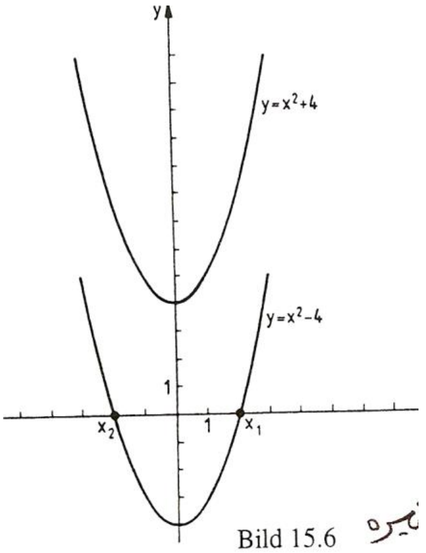


Bild 15.6

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D$, $y \in W$ y =f(x),

یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي
یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ ځیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: (y =
f(x)یو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په ښتکیدونکی دی ، دا په دې مانا چي دا
یو فنکشن (x = g(y تعریفوي، یعني په ښت یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا
واریابلو د نخښی(نخونی) سره بدلی شي، نو د په ښت فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا
د فنکشن روڼنۍ یا وسره بده یا که غواړی مروجه ځیره ده، چی x خپلواك
اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیزندونکی دي د y=f(x) په
ښت یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په ښت فنکشن سره کتمت(- ورته) identic دی۰ د په ښت یا
برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرافیکی ښیره $y = x$ په کرښه د $y = f(x)$ هندارونه) یعنی په هنداره کی ښیرونه او لنډ یی: هندارونه) ده٠

بیلګي ۱۵ ، ۱ ته :

د فنکشن $y = f(x) = x/2 + 1$ چپه یا په ښت فنکشن داسی دی
$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$
سږی $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x = 2y - 2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(ښیره. ۱۵ ۷ الف)
ړ

بیلګي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن
$x \in D$ $y = x^2$,
ښیرره ش ۱۵ . ۳) په ښتکیدونکی دي یا په ښتکیدونکی نه دی.
هر $y \in W$ $= [0, oe]$ پوري دوه $= [-oe, oe]$ $x \in D$ اړه لري، یعنی $x = +y$ او $x = -y$
مګر $y = x^2$ کلك مونوتون جګیدونکی دی (او په دې ډول یواځنی او یواځنی).

د $x \geq 0$ لپاره او کلك مونوتون لویدونکی د $x < 0$ لپاره. $y = x^2, x \geq 0$
ته چپه- یا په ښت فنکشن $y = +x$ دی، او $x < 0$, $y = x^2$ ته چپه- یا په ښت فنکشن - $y =$ x دی. (ښیره ۱۵ . ۷ ب) .
په ټولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که $y = f(x)$ کلك مونوتون جګیدونکی (لویدونکی (وي ،نو په ښت فنکشن $y = f^{-1}(x)$
موجود دی او دا هم کلك مونوتون جګیدونکی (لویدونکی) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کي بنسټیز فنکشنونه تعریفیږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوټنځ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوګاریتم فنکشنونه، تریګونومتري فنکشنونه او ښیکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د خپلوځانګړډوله خویونو له مخی وښیرل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا تړلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشنونه) وڅیړل شي. د فنکشنونو څیړل به د هغو ځانګړدوله یا کرکتریستیکي خویونو له مخی هلته هم دوام ومومي، که د دیفرنشل شمیرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پیژند ۱۵ . ۸ :

فنکشن

$$y=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a^2 x^2 + a_1 x + a_0, n \in N; a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in R$ لپاره تعریف دی او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه(یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه ($n = 1$) یالاینی فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کی پارامترونو $a1$ او $a0$ په مانا دي. د لاینی فنکشنونو څیره(ګراف) یوه کربنه ده چي په $y = n$ کی yد - محور غوڅوي ($x = 0$) او جګوالی $m = \tan\alpha$

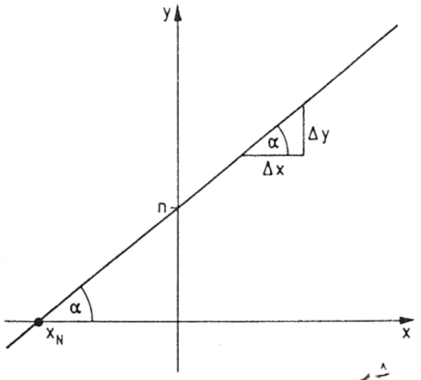


Bild 15.8

لري (څیره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره متناسب دی:

$$m = \Delta y / \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

کربنه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که $m|=0$ نیول شوی وي، ټيك يو صفرځاي ($y=0$ لري: $x_N=-n/m$

که را په غاړه شي چې د يوې کرښې برابرون، چې له دوه ټکو $(x1,y1)$ او $(x2,y2)$ تيريږي، پيدا کړو چي پو په بل نيغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرېټکی يا نوره ښه غوښتکی n په y - محور د برابرونسيستم

$$y1 = x1m + n \,,\; y2 = x2m + n$$

له مخی پيدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو

$$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$$

په بل پل)قدم(کی موږ ۲ -امه درجه ټولريشنل فنکشنونه يا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په (۱۵ . ۱) کې $a_2=a, a_1=b, a_0=c$

$$y=ax^2+bx+c \,,\; a\ |=0 \qquad (15.3)$$

د مربع فنکشنونو څيره) ګراف (پارابول دی چې د هغي سيومتري محور و y - محور ته غبرګ ځغلي. کوايفيځينت) ځله وونې يا ځليدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځای او بڼه)فورم(ټاکی.

موږ د مربع فنکشن يو څو ځانګړي حالتونه تر څيړني لاندې نيسو.

1. $y=x^2 (a=1, b=0, c=0)$ (15 . 4)

نورمال پارابول، د ککرې کواوردينات: $x_s=0 \,,\; y_s=0$

(خ . ۱۵ . ۹)

2. $y=x^2+px+q \quad (a=1, b=p, c=q)$ (15 . 5)

او x^2+px ته د څلورې - يا مربع تکميلولو ورزياتونی څخه لاس ته راځي:

$$y=x^2+px\ (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2 \quad (15,5)$$

يو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په $p/2$ - اودy - لور په $q-p^2/4$ راکښل (راښکل-يا راکش -) شوی نورمال پارابول د ی ، دا په دې مانا چې په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لرې:

$x_s=-p/2 \,,\; y_s=q-p^2/4$

بيلګه ۱۵ . ۷:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y=x^2+6x+10,\ x_s=-6/2=-3, y_s=10-6^2/2=1$

(خ،۱۵ . ۹)

3. $y = ax^2$ ($|a|=0, b=0, c = 0$)

د ککرې (سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0 , y_s = 0$

پارابول د $|a| > 1$ لپاره خور، د $|a|<1$ لپاره پرسیدلی،د $a > 0$ لپاره پورته لور ته او د $a < 0$ لپاره کښته لورته واز دی (خلاص دی)

بیلګه ۱۵ . ۸:

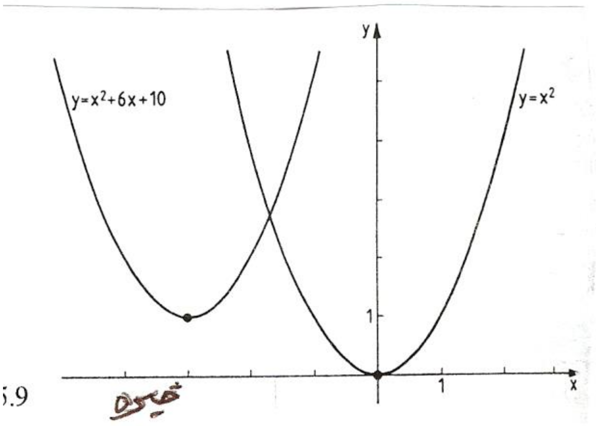
$y = 2x^2 , y = (1/2)x^2, y = -2x^2$

(خ . ۱۵ . ۱۰)

4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرې (رأس) کواوردینات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)

$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c-b^2/4a^2$



5.9 شکل

بیلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$,($a=-1/2, b=1, c=4$)

دککرې کواوردینات:

$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4-12/(4.(-1/2)) = 9/2$

دا چي $a = -1/2$ دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

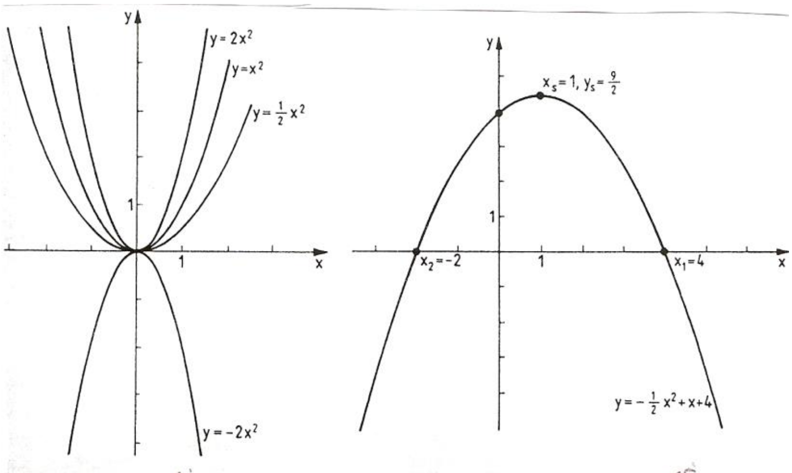


Bild 15.10 ځاره

Bild 15.11 ځاره

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$د صفرځایونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبیونې دي.
وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (ځ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چې دلته $x_1=4, x_2=-2$ دي٠

و بیلګي ۱۵ . ۷ (ځیره ۱۵ . ۹) ته:
د $x^2+6x+10=0$ یاني $x_{1,2}=-3\pm\sqrt{9-10}=-3\pm\sqrt{-1}=-3\pm i$ څخه لاس ته راځي
چې برابرون رییل صفرځایونه نه لري.

فنکشن $y=x^2$ غبرګ یا جوړه(ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2}=0$ دي

د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چې د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Horne rschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.

$y=[a_3x^2+a_2x+a_1]x+a_0=[(a_3x+a_2)x+a_1)x+a_0$ $x_{4,5}=-1\pm\sqrt{1-5}=-1\pm 2i$

هغه ورکړ شوي خپلواك x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1=f(x_1)$ کیدی شي له دې بڼی سره په لاندې ډول وشمیرل شي:
a3 له x1 سره ځل کیږي، دې سره a2 زیاتیږي، زیاتون یې له x1سره ځل، او a1 ور زیاتوو، زیاتون د x1 سره ځل او a0 ور زیاتوو. دا د عملیوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شیما (د هورنرشیما) له لارې په لیدوړ ډول مخ ته بیایو (ځرکندوو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلونه یا ضریبونه	a_0	a_1	a_2	
منځنۍ خلونه	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$	$(a_3x_1+a_2)x_1$	a_3x_1	
منځنۍ زیاتون	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 = f(x_1)$	$(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$	$a_3x_1+a_2$	a_3

ددي شیما پوهیدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بیلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x_1 = -2$ او $x_2 = 5$ څخه شمیرل کیږي.

اوبیونه) :

که چیرې ددریمی درجې ریشنلفنکشن یو صفرځاي ولري، نو کړی شو چې د پولینوم ویش له لارې دا لايني فاکتور بیل کړو(پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بیلګي ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5):(x-5)=x^2+3x+1$ له دې امله لرو:

$y = x^3-2x^2-5 = (x^2+3x+1)(x-5)$

د ویش پولینومونو ځلووني ، یعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشیما په اخره لیکه کی ولاړ دی. د هورنرشیما له لارې د صفرځاي شمیرلو سره په همغه وخت یا دمګړی کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او $f(x_1)=0$ چې د $(x-x_1)$ سره د ځلوني له لارې دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر ځایونه د ځلورې – یا مربع برابرنی د اوبیونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0; x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دریمی درجې فنکشن د درې لايني فنکشنونو د ځلوني په څیر لیکل کیدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=x^3-2x^2-14x-5 = (x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وینا په عمومي توګه د ټولوn- م درجو ریشنل ړرزرنړ ړړطړتظداغظطافنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ریشنلفنکشن n صفرځایونه لري . کیدي شي دا ټول یو له بل توپیر ولري او یادا صفرځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، ریيل او یا جوړه کونجوګیري کملکس کیدی شي.

که $x_1, x_2, ..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځایونه وي

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیځینت یا ځله ووني لپاره دې صفر ولیکل شي.

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :

5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن

$y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$ درې صفرځایونه $x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$

لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلونې په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	2	0	-6	-20	-8	80
x_1 = 2		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
x_2 = 2		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
x_3 = -2		-4	-8	-20		
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتی پولینوم $(2\ x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
$x_{4,5} = -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$ د

لپاره لاندې د حل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي
$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$

ددې لپاره چی د دریمي او جګو درجو د ټول ریشنلفنکشنونو یوه څیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکتریستیکی یا د خویونو ټکی یی د دیفرنځیالشمیرنې له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چی د دفیرنځیالشمیر له مرستي کار واخلو ، کیدی شي چی د هغه د ناپای په هکله وینا وي وکړی شو. موږ په لیدیدونکی ډول د فنکشن د پولی کلیمه په کار اچوو، کومه به چی په برخه ۱۹ کی ټیك تعریف شي. دا د بیلګي په توګه دا مانا لري
چی $f(x) = g$ $\lim_{x\to\infty}$ سره ($f(x)$تل ارزښت g ته نزدې کیږي، که x د oe یانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty}[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چی
xn -> oe

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي
او xn ->±oe د x ->±oe لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زیاتیز یا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y=\infty; \lim_{x\to-\infty} y=\infty$
(کږه له - oe څخه د oe په لور ځي) .
که n جوړه او a_n کمیز یا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=-\infty; \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$
کږه د - oe څخه د - oe په لور ځي) .

که n ناجوړه او a_n کمیز یا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=\infty; \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$
کږه له - oe څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او a_n کمیز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=-\infty; \lim_{x\to-\infty} y=\infty$
کږه لهoe څخه د oe - په لور ځي)

پیژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0};..........(15,7)$$
$$n,m\in N_0; a_k,b_i\in R; Q_m\neq 0$$

مات ریشنلفنکشن بلل کیږي او د ټولو x د $Q_m(x)\neq 0$ لپاره تعریف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نومیږي، که n<m وي او نااصلي مات دی
که n ≥ m ، نااصل مات فنکشن کیدی شي چي د پولینوم ویش له لارې تجزیه
(توټه) شي او د یوه ټول ریشنلفنکشن او یوه ریښتونی ماتی برخی د زیاتون په څیر
ولیکل شي.

بیلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y=\frac{2x^4-3x^3-6x^2+13x-6}{x^3-4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې فنکشن
باندې دماتباندې فنکشن ویش څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(2x^4-3x^3-6x^2+13x-6):(x^3-4x)=2x-3$$

د $2x^2+x-6$ پاتی (باقي) سره. پس لرو:

$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$.

فنکشن (۱۵ . ۷) د $x = x0$ لپاره يو صفرځاي لري، که $x = x0$ وي نو باور لري:

$P_n(x_0) = 0$ مګر $Q_m(x) \neq 0$

دا د $x = x_L$ لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0) = 0$ او $Q_m(x)=0$

د $x = x_P$ لپاره يو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P) \neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بيلګه ۱۵ . ۱۳ :

فنکشن ($y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$ د ماتباندي- او ماتلاندي فکشنونو توټي کولو وروسته په لاندې فورم د لايني فاکتورونوپه توګه ليکل کيږي.

$$y=\frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندي صفر دی، مګر مات لاندې صفر نه دی (صفرځای)مات لاندې- او مات باندې فنکشنونه د $x = x; L = -2$ لپاره صفر دې (تشځای)

د $x = x_{P1} = 0$ او $x = x_{P2} = 0$ لپاره ماتلاندې صفر او مات باندې صفر نه دی (قطب)

که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چی د قطبځای (ټيك ناپای ځای بللکيږي)xp کی کره داسيمپتوټي کربښي $x = xP$ ته نزدې کيږي. د يوه تشځای xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې 0 / 0 شکل غوره کوي، له دې امله د $x = xL$ لپاره تعريف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نيونی ته:

د اصل ماتفنکشن (n<m) د x په جګ پوتنځ يعنی x^m د ماتباندې او ماتلاندې د ويش څخه لاس ته راځی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=\frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}}+\frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}}+\ldots+\frac{a_1}{x^{-1+m}}+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0}{b_m}=0$$

داچی د x تول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x تول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن ځیره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کيږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نیسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه یی د صفر په لور ځي، لکه تولریشنل برخه.
د نااصل مات فنکشن ځیره د ±oe <- x سره ، ځان خپل تولریشنلبرخی ته نزدې کوي.

بیلګه ۱۵ . ۱۴:

الف: (y = x /(x²+1 د x0 = 0 په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول یا قطب نه لري ربیل اوبیونه نه لري) او د x -> ± oeلپاره دx- محور (y = 0) د اسیمپتوتی په څير لري (ځيره. ۱۵ . ۱۲)

ب: (y=(x²+2x-3)/(x+2)=x- 3/(x+2 صفرځایونه(x²+2x-3 =0) په x1 =-3 او x1=1کی لري . تشځای نه لري او په 2- = x3 کی قطب لري دا په دې مانا چی x = -2اسیمپتوتی دی، او د x →±oe لپاره فنکشن y = x اسیمپتوتي کيږي)دا سیمپتوتی کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

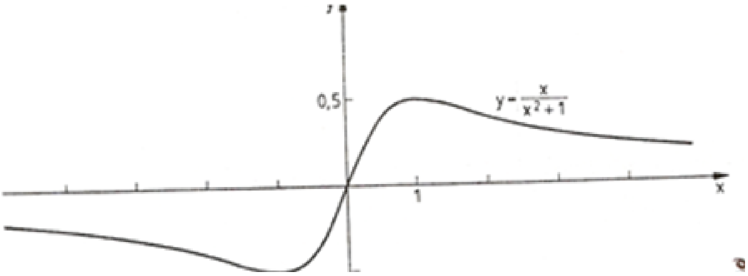
موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي تول - یا مات ريشنلفنکشنونه راوړو: فنکشن

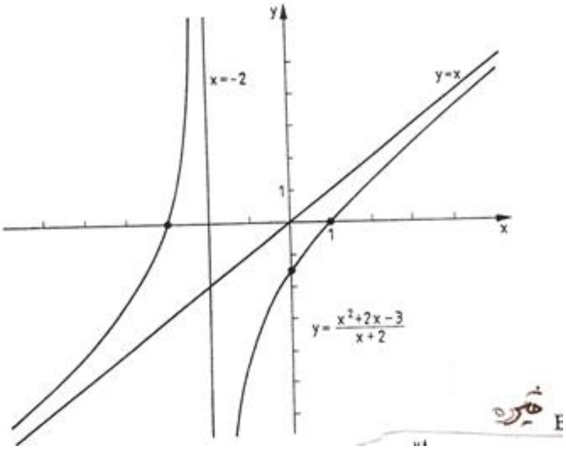
$$y=x^n;n\in Z\setminus\{0,1\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15,8_a)$$

یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی(د پوتنځ پيژند 6 ۰ ۱)

(15.8)د زيا ات یز زیاتیز یا مثبت تولګڼ n لپاره یو تولرشنل فنکشن دی. د جوړه تولګڼ nلپاره تولریشنل فنکشن دی. د تولګڼ n لپاره تولی کرې د تعریف ډيری(-) = D oe,oe، د ارزښت ډيری(W=(0,oeاو ګډ تکی (1,1)، (0,0),(1,1) لري.
(ځيره ١٤ الف ١٥) د ناجوړه ګڼ د n لپاره(D = (-oe,oe
او(W = (-oe,oe دي او (-1,-1) , (0,0). (1,1) ګډ تکي دي (ځيره ١٥ . ١۴ ب)۰

(c) ketabton.com: The Digital Library





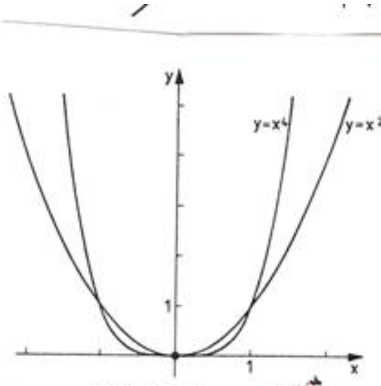


Bild 15.14a

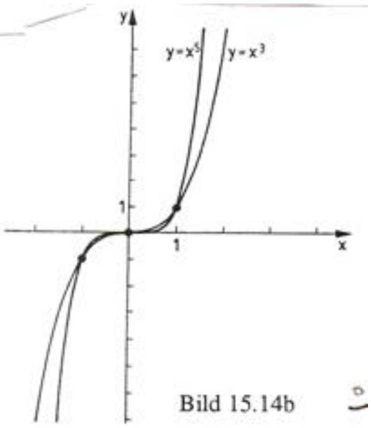


Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کميز يا منفي ګڼ nلپاره يو مات ريشنل فنکشن دئ په $x = 0$ کی د يوه قطب او $y = 0$ کی يوې اسيمپتوتی په څير. د جوړه ګڼون يا تعداد (کميز) nلپاره ټولی کرېږ د پيژند ډيري

(c) ketabton.com: The Digital Library

D = (-oe,oe)\{0} د ارزښت ډيري(W = (0,oe) لري اوګډټکي (1,1), (-1,1)

؟؟؟ ښيره ش. ۱۵/۱۵الف) .

د ناجوړه ګڼون (کميز n)لپاره{ D = (-oe,oe)\{0 او W=(-oe,oe) او(1-،1-) (1,1)

ګډ ټکی دی (ښيره »۱۵ . ۱۵ ب) .

دوه ښيرې دي

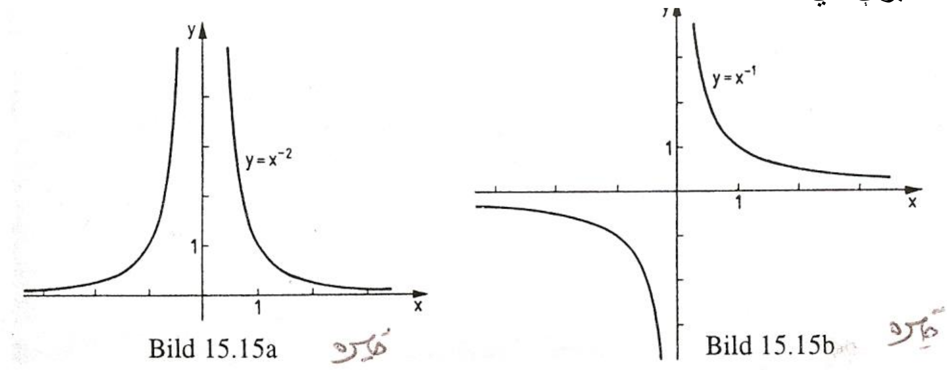


Bild 15.15a Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر ښت بلواک لپاره دې د مونوتوني اينتروال په پام کی ونيول شي.(پرتله بيلګه(بيلګه ۱۵ .۳)

د فنکشن) لوستل له کيڼ وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D=[0,\infty), W=[0,\infty)$$

چپه- يا پر ښت فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}\ , n \in N \setminus\{1\}\ , D=[0,\infty), W=[0,\infty) ....(15,8_b)$$

او ريښه فنکشن نوميږي (پيژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کيدی شي و ريښنل ايکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ريښنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n\ , a \in Q\ , x > 0 \qquad (15 . 8c)$$

نو د ريښي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دې د پوتنځ فنکشن په ښير وپوهيدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرښت بيرته پوتنځ فنکشن دی.

ټوليز پوتنځ فنکشن پيژند د ريیل ايکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د ريیلګڼونو کليمه دې وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha} \quad , \quad \alpha \in R \; , x > 0 \qquad (15.8d)$$

پوتنځ فنکشن نوميري

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن $y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3} \; , x \geq 0$

لاندې چپه - یا پر ښت فنکشن لرو $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2} \; , x \geq 0$

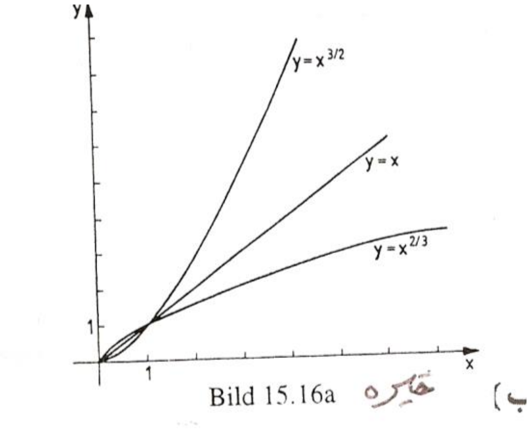


Bild 15.16a

(خیره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, \; x > 0$

خیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$$y = x^{-2} = 1/x^2 \; , x > 0$$

یادونه : په پیژند ٤ . ۲ کی مو وویل چی یوائی د ناکميز راديکاندو ریښه ويستل کيدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرښت فنکشن جوړولو برسيره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په پام کی وي.

د بیلګي په توګه فنکشن $y=x^3$ په ټول تعریفیدیري کي مونوتون پورته کیدونکی دی او له دې امله ټول په ښت کیدونکی وی، $y = \sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژندیدیری ($D = [0,\infty[$ کی پر ښت فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د $y= x^3$ پرښت فنکشن د $D= (-\infty,0]$ سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) .

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

$y=a^{x}, a>0, a\neq 1$.................................(15,9)

ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ(لنډ »جګ«) بلواك بلل کیږي٠

(د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پېژند ۴ . ۱ وکتل شي)

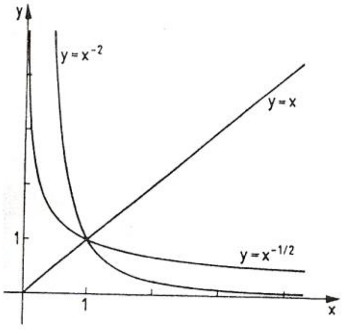


Bild 15.16b

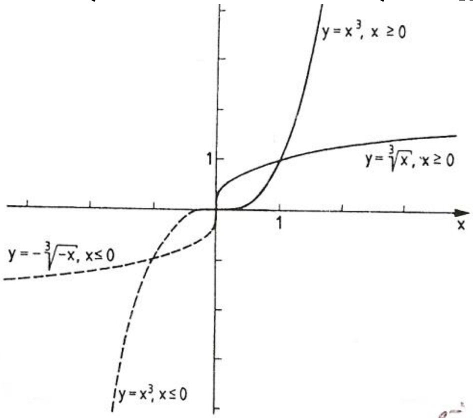
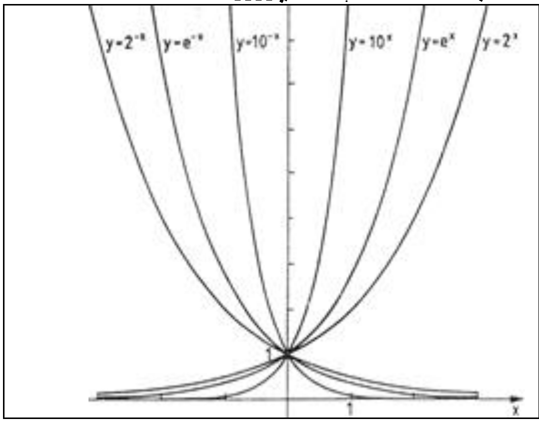


Bild 15.17

پورته دوه څیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې   پېژنددېری(D=(-oe,oe او ارزښتدېری(W=(o,oe
لري. د $a^0=1$ له امله ټکی(0,1 () د ټولو کږو ګډ ټکی دی

د a>0 لپاره (۱۵ . ۹) په کلکه مونوتونجګېدونکی دی اود x->oe سره د x - محور ته اسیمپوتیك ورنزدې کیږي. د 1>a>0 لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوتون لوېږي او ځان د oe <- x سره د x -محور ته اسیمپتوتیك نزدې کوي.



کسپوننشل فنکشنونو یو څو بیلګکې
(a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/1(
څیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۱۲ :

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څېر فنکشن دی

$$y = \log_a x \, , \, a > 0 \, , \, a \neq 1 \qquad (15.10)$$

او لوګاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوګاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وګورئ) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پیژندديری $D = (0.oe \;)$ او د ارزښتدیری $W=(-oe,oe \;)$ لري.

د $y = \log_a x$ کرې د ګړو $y=a^x$ هنداورنه ده، په کرښه $y=x$ ۰ تکی $(1,0)$ د ټولوکړو ګډ تکی دی (خیره شته دی)

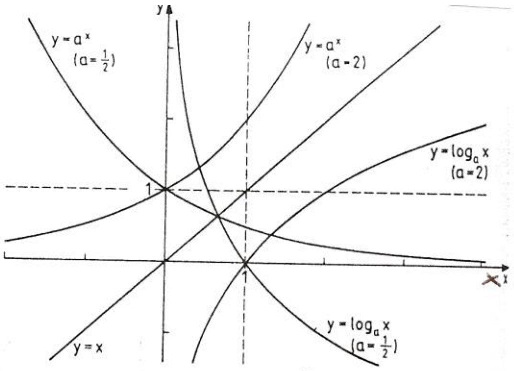


Bild 15.19 څېره

د $a>1$ لپاره(۱۵ . ۱۰) کلك مونوتونجګیدونکی اود $x->0$ لپاره اسیومپتوتیك د کمیز - y محور ته نزدې کیږي. د $0<a<1$ لپاره (۱۵ . ۱۰) کلك مونوتون لویدونکی دی او د $x>0$ لپاره اسیمپتوتیك د زیاتیز - y محور ته نزې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په څېر یی یعني $y = \log_a x$

د $a= 2$ او $a=1/2$ لپاره انځوریږي.

په ځانګړې توګه لیکل کیږي $y = \log_{10}x = \lg x \, , \, y = \log_e x = \ln x$ ۰

پیژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټریګونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کیږي یا راوړل کیږي.

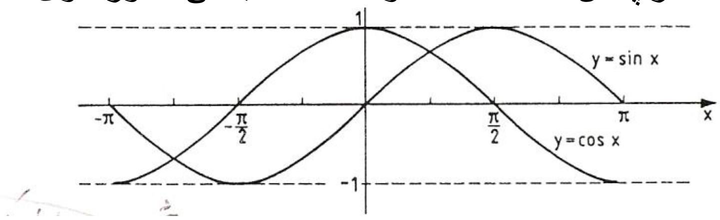
$$y=\sin x\ ;D=R,W=[1,1]..(15,11_a)$$

$$y=\cos x; D=R, W=[-1,1]...(15,11_b)$$

$$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z....(15,11_c)$$

$$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z...........(15,11_d)$$

د دې کړوتګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



ټریګونومتریکی فنکشنونه y = sin x, y = tan x , y = cotx ناجوړه فنکشنونه، او y = cos x یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

ټریګونومتریکي فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي(مقایسه ۱۵ . ۵)

فنکشنونه y=sinx , y= cosx پریودې 2π لري، دا په دې مانا چی لرو:

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x\ ;\ \cos(x+2k\pi)=\cos x\ ,\ k\in Z$$

لاندې فنکشنونه پریود π

(c) ketabton.com: The Digital Library

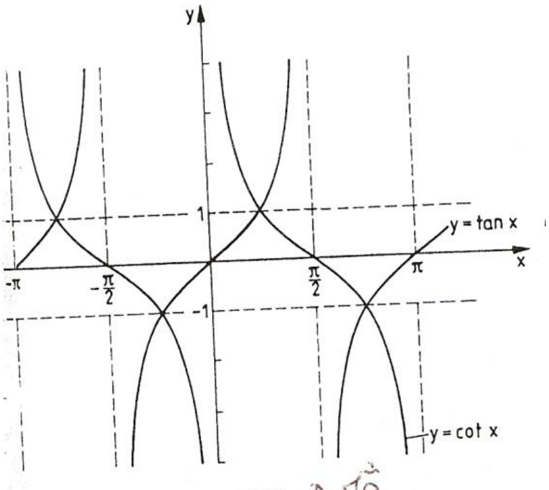


Bild 15.20b

لري y=tanx , y=cotx. دا په دې مانا چي

$$\tan(x + k\pi) = \tan x,\ \ \cot(x + k\pi) = \cot x\ ,\ k \in Z$$

د تريګونومتريکي فنکشنونو صفرځايونه دي $x_k = k\pi, k \in Z$

د y=tanx, $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi\ \ , k \in Z$ y=sinx لپاره او د y = cos

x , y = cot xلپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځايونه(ناپاځايونه) لري

يعني y = tan x په $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi\ \ , k \in Z$ او y = cot x په $x_k = k\pi\ \ , k \in Z$ کی.

د تريګونومتريکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خويونه په پام کی ونيول شي. د بيلګي په توګه

فنکشن y = sin x په ايتروال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جګيدونکی دی او په

ايتروال $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

کی مونوتون لويدونکی، او دا مونوتوني خويونه په يوه پوره پريودې کی تکراريږي. پس ويلی شو:

د y = sin x لپاره جګيدونکی يا پورته کيدونکی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لويدونکی دی، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \leq x \leq 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کيدونکی دی٠

د $0+2k\pi \leq x \leq \pi+2k\pi$ لپاره لويدونکی دی

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګيدونکی دی

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګيدونکی دی ،

په تنجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځايونه د مونوتوني اينتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ايتروالونه واز اينتروالونه دي.د ساين فنکشنونه د بيلګي په توګه د وخت په پريوديکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوينګونګ: رپيدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واريابل په t نخښنه کيږي.فنکشن

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) \qquad (15 . 11e)$$

هارموني فنکشن بلل کيږي.

يادونه: فنکشن (۱۵ . ۱۱ت) د پيژند (۱۵ . ۱۵) له مخی ترلی يا ځنځيري فنکشن دی. موږ ترخيرني لاندې نيسو چي د سا ين فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واريابل t او زياتوونکی د ساين فنکشن په خپلواك)Argoment(د کږېخيره باندې څه تاسير اچوي.

۱ ـ د فاکتور a تاثير په فنکشن y = a . sin t د y = sin t فنکشن ارزښت باندې غزول يا راکشول دی که (1 < |a|)او يا پرسول دي که

|a| < 1)وي y= a.sin x فنکشن ارزښت a ـ ځله د فنکشن ارزښت

y = sin t دی، چيرته چی برسيره پردې د 0 > a لپاره په t ـ محور يوه

اينه ځيرونه هم منځ ته راولي (ځره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2

په فنکشن کی a امپليتودې Amplitude(جګوالی(نوميږي او د شوينګنګ Schwingung

رپيدنی پراخوالی يا بڼه : سور باندې تاثير اچوي.

ځيره شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

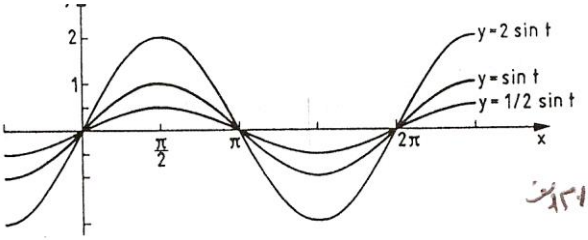


Bild 15.21a

۲ - په فنکشن $y = \sin\omega t$ کې فاکتور ω په فنکشن $y = \sin t$ باندې یو وختني غزول که $|\omega|<1$ یا پړسول که $|\omega|>1$ وي تاثیر اچوي.چیرته چې د $\omega < 0$ لپاره برسیره پردې یو په y- محور اینونه هم ده.

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin\omega t$ یوه فنکشن ارزښت، د $y = \sin t$ خپلواك ω-ځله ، یعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (ځیره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).
ګردی فرکونځ (Kreisfrequenz) بلل کیږي، دا په پریودې تاثیر اچوي
او $y = \omega t$ پریودې $P = \frac{2\pi}{\omega}$ لري.

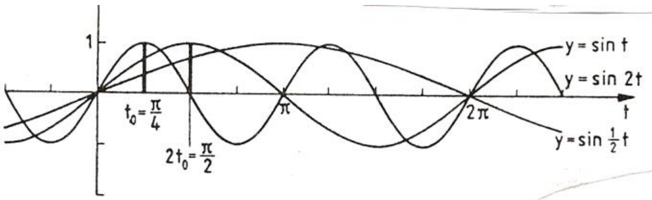


Bild 15.21b

۳ – زیاتیدونکی φ په فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ کې د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنی تاثیر په $|\varphi|$ له کینی لور $\varphi>0$ او یا له ښي لور $\varphi<0$ اچوي .

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چې د $y=\sin t$ لپاره۰

د φ په کچه راکښل شوی (یعنی د یوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، یعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(ځیره ، ۱۵ . ۲۱ پ)
$(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2})$

په فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a.\sin(\omega t + \varphi) = a.\sin\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)$$

کی φ چی فازې نومیږي یو د راکښلو تاثیر په کږه $y = a.\sin\omega t$

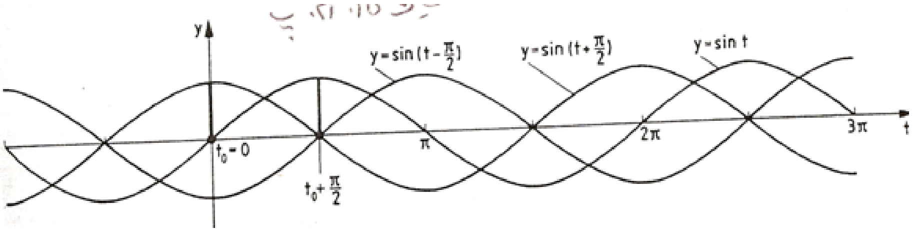
د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.

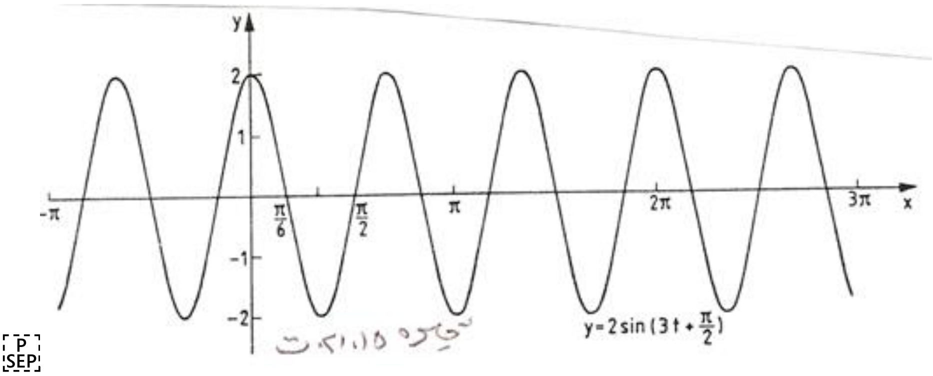
په شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2.\sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$ انځوردی.

هغه امپلیتود $a = 2$ لري، پریودې یی $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$ کي

د $\sin t$ و کینږ لورته راکښل شوی دی.

ځیره ۱۵ . ۲ پ $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$





د تریګونومتري فنکشنونو(یوائني) په معکوسوالي یا په څېوالي کی موږ په ځانګړو یوغږیزو یا مونوتوني اینتروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

(c) ketabton.com: The Digital Library

پېژند .۱۵ ۰ ۱۴ : د لاندې فنکشنونو

$$1.\ y = \sin x, \qquad D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad W = [-1, 1] \qquad (15.12a)$$

$$2.\ y = \cos x, \qquad D = [0, \pi], \quad W = [-1, 1] \qquad (15.12b)$$

$$3.\ y = \tan x, \qquad D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad W = \mathbf{R} \qquad (15.12c)$$

$$4.\ y = \cot x, \qquad D = (0, \pi), \quad W = \mathbf{R} \qquad (15.12d)$$

پرڅېږ یا چپه فنکشنونه لاندې ځیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

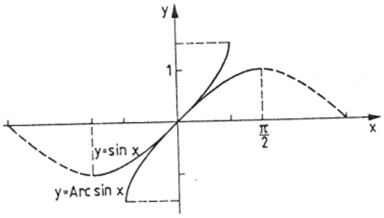
$$1.\ y = \operatorname{Arc}\sin x, \qquad D = [-1, 1], \quad W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad (15.13a)$$

$$2.\ y = \operatorname{Arc}\cos x, \qquad D = [-1, 1], \quad W = [0, \pi] \qquad (15.13b)$$

$$3.\ y = \operatorname{Arc}\tan x, \qquad D = \mathbf{R}, \quad W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad (15.13c)$$

$$4.\ y = \operatorname{Arc}\cot x, \qquad D = \mathbf{R}, \quad W = (0, \pi) \qquad (15.13d)$$

د تریګونومتري فنکشنونو برخی په مونوتوني ایتروالونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په ځیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.



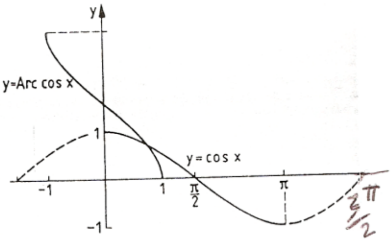
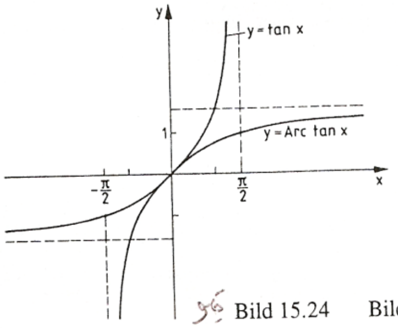


Bild 15.22 Bild 15.23



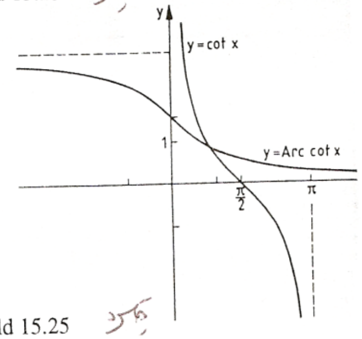


Bild 15.24 Bild 15.25

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ . ۴ ځنځیري (تړلي) فنکشنونه

پیژند ۱۵ . ۱۵ :

د x ∈ Dلپاره یو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتدیري W سره ورکړ شوی او برسیره
پر دې د z ∈ Wلپاره یو فنکشن $y= f(z)$ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15.14)$$

د x تړلی (ځنځیري) فنکشن بلل کیږي.

یادونه : یو تړلی فنکشن کیدی شي چې زیاتو ځنځیرونو سره هم رامنځ ته شي: د بیلګي
په توګه $z = f(x)$
د x ∈ D, z∈ Wلپاره او $w=h(z)$ د z∈ W,w∈ W*لپاره
او $y=f(w)$ د W*∈W لپاره لرو،
نو $y=f[h(g(x))]$ هم د x یو تړلی فنکشن دی

بیلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره تړلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي.

ب : په تړلي فنکشن $y = \sin x^2$ کې $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی. په تړلي فنکشن $y = \sin^2 x= (\sin x)^2$ کي $z = \sin x$ د ننني - او $y=z^2$ دباندنی فنکشن دی

پ : د

$$z = 2x + 4, \quad w = \sqrt{z}, \quad y = \cos w$$

سره تړلي فنکشن $y = \cos\sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي

ت : په تړلي فنکشن $y=\mathrm{Arctan}\,1/(x-1)$ کې $z=x-1$ دننني، $w=1/z$ منځنی او $y=\mathrm{Arctan}\, w$ دباندنی فنکشن دی.

یادونه : د یوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځیري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شمیرنی له » دننه « پیل کیږي.

بیلګي ۱۵ . ۱۶ ته:

ب) د $x = 0.5$ لپاره دی

$$z=x^2=0{,}5^2=0{,}25;\ y=\sin x^2=\sin z=\sin 0{,}25=0{,}24740$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$z=\sin x=\sin 0,5=0,47942; y=\sin^2 x=z^2=0,47942^2=0,22984$

پ) د $x=2$ لپاره دی $z=x-1=2-1=1$; $w=1/z=1/1=1$

$y=\mathrm{Arctan}w=\mathrm{Arctan}1=\frac{\pi}{4}$

روښانونه، تشريح:

$y=f(x)$ تحليلي(ښنيزه) وينا بلل کيږي، که $f(x)$ له ربيل ګڼونواو بستيزو فنکشنونوځخه د زياتون، کمون،ځل، ويش، له لارو تړلی يا ناتړلي(ځنځيري يا نا ځنځيري) جوړيږي

د بيلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنځ بنسټ او همداډول راديکاند منفی نه شي کيدلی، او يا بايد مثبت وي، چی د لوګاريتم نومروس بايد مثبت وي او $\mathrm{Arc}\sin f(x)$ همداډول $\mathrm{Arc}\cos f(x)$ تيك د $x\in[-1,1]$ لپاره پيژند لري يا تعريف دي

بيلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحليلي ويناو لپاره دې تعريفيږي پيداکړی شي.

الف $y=\sqrt{x^2-3}$

راديکاند بايد کميز يا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3\geq 0 \Leftrightarrow x^2\geq 3 \Leftrightarrow |x|\geq 3$ ($x\geq\sqrt{3}$ v $x\leq-\sqrt{3}$)

نو لرو $D=(-oe,-3]\cup[3,oe]$

ب) $y=\lg(x+2)+1/(3+2x-x^2)$ له لمړي زياتونی کی بايد Numerus > 0 نومروس وي دا په دې مانا چی : $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$ ،

پس $D1=(-2,oe)$

په دوم زياتوني کی بايد مات لاندې په صفر برابر نه وي ($\neq 0$) وي . د مات لاندې صفرځايونه

له $3-2x-x^2=0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2, x2=-1$.

نو $D2=R\backslash(2;-1)$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن تعریفډیری باید دا اول زیاتونی او همداسی د دوم زیاتونی تعریفډیري وي یعنی د

D1 او D2

غوڅډیری: $D=D_1 \cap D_2 = (2, oe) \setminus \{2; -1\}$

پ) $y = \text{Arc} \sin (x-1)/5$ د ارکوس ساین-فنکشن د تعریفډیري په پام کی نیولو سره باید باور ولري-

$-1 \leq (x-1)/5 \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq x-1 \leq 5 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 6 \Rightarrow D=[-4,6]$

ت $(y = 1 / \sqrt{(x^2 - 4)})$

رادیکاند باید له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$x^2-4>0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow x>2$ یا $x<-2$

نو دی $D=(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیڅیت توابعو ایکسپلیڅیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y - 8 = 0$

۲ - لاندې فنکشنونه په پارامترانځورونی ورکړ شوي

a) $x=2t$ $y=-t^2+3t$ b) $x=\sqrt{t}$ $y= 2t+1$

c) $x=1/t$ $y=2(t-3)$ d) $x(/2)t-1$ $y=t^2$

پارامتر له منځه یوسی او په دې سره ورکړی $y=f(x)$

۳ - لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅیړی، او که ممکن وي نو مونوتونی اینتروالونه په تعریفډیریو بیل (تجزیه) کړئ یا لوې ته کړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -2x + 3$ c) $y = x^2$

d) $y = -2x^2$ c) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = |x|$

۴ – پريکړه وکړی چی لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او يا له دې دووکوم نه دي:

a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = x - 1$

d) $y = 2x^2$ e) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = (x-1)^2$

g) $y = x^2 /2$ h) $y = x^5$ i) $y = |x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر خايونه پيدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = (x-1)(x+2)$ c) $y = x^2 - x - 2$

d) $y = 2x^2 - 12x + 18$ e) $y = x^2 + 1$ f) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په ځټ فنکشونونه پيدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

c) $y = (x+1)^2$, $D = [-1, \infty)$, $W = [0, \infty)$, d) $y = x^3 /2$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

۷ – لاندې لايني فنکشنونه ورکړ شوي دي

a) $y = 0{,}4x - 1{,}6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1/5)(3x + 1{,}5)$

d) $y = 2$ e) $3x - 3y - 7 = 0$ f) $4y + x = -1$

کربښې دې وکښل شي، جګوالي کونج α دې پيدا شي، او صفرخايونه x_N و ګنی!

۸ – کومه کربښه له لاندې ټکو تيريږي

a) (2,3) (5,5) b) (1,1) او (3,7) c) (-1,0) او (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك يا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = x^2 - 8x + 16$ c) $y = x^2 - 6x + 10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$ e) $2x^2 - 10x + 12$ f) $y = 3x^2 + 6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2} + x + 4$ h) $y = x^2/4 + x + 2$ i) $y = 5x^2 + 45$

د ککرې کواوردينات دې پيداشي، صفرخايونه دې وګنل شي او پارابول دې انځور شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ - د لاندي تولریشنل فنکشنونه دي دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لاري وګټل شي. فنکشنونه د ګی د خلفورم باندی انخور شي

a) $y = f(x) = x^3 - 6x + 5; \quad x_1 = 1 , x_2 = -1$

b) $y = f(x) = (1/2)x^3 - x^2 - (13/2)x - 5; x_1 = 1/5 \quad x_2 = 5$

c) $y = f(x) = x^3 + 2x + 2x \quad ; x_1 = -2 \quad x_2 = 0,2$

d) $y = f(x) = x^4 - x^3 - 28x^2 \ 32x + 40 ; x_1 = 2 \quad x_2 = 5$

e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x^2 + 5x + 6 ; x_1 = 1,5 \quad x_2 = 2$

۱۱ - مات ریشنل فنکشنونه ورکړی شي :

a) $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$

b) $y = \frac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 5x + 6}$

c) $y = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^4 - 13x^2 + 36}$

d) $y = \frac{x}{(x^3 + 6x^2 + 9x)(x^2 - 4x + 4)}$

e) $y = \frac{2x^3 - x^2 + 6x - 3}{x^2 + 3}$.

صفرځایونه دي وګټل شي، پول. تشځایونه او د $x \to \pm 8$ لپاره ځان نیونه!

۱۲ - لاندېفنکشنونو ته په څپ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y = 2^{x-1}$, D = R , W=(0,œ) b) $y = 2^x - 1$, D = R , W =(-1,œ)

c) $y = \log_3 x$, D = (0,œ), W = R d) $y = \ln(x-1)$, D =(1,œ), W = R

۱۳ - لاندي فنکشنونو ته مونوتوني اینتروالونه ورکړی او برخه په څپ فنکشتونه:

a) $y = (x-1)^2$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = (x+1)^2 + 1$

d) $y = x^2 - 4x + 5$ e) $y = 4x^2$ f) $y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$

۱۴ - تړلي فنکشنونه $y = f[h(g(x))]$ په دننه او دباندي فنکشنونو

$y = f(w) \ , w = h(z) , z = g(x \ )$

بیل (تجزیه) کړی(د تعریف–او ارزښتدېریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = e^{(x+1)^2}$ b) $y = \left(e^{x+1}\right)^2$ c) $y = \lg \sqrt{2x-3}$

d) $y = \sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y = \tan \sqrt{x-3}$ f) $y = \sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y = \sqrt{\tan x - 3}$ h) $y = \tan \sqrt{x} - 3$ i) $y = \operatorname{Arc}\sin x^2 +$

j) $y = [\operatorname{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y = \ln \sin \frac{x}{3}$ l) $y = \sin \ln (x + \frac{1}{3}$

m) $y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y = \frac{1}{\sin \sqrt{x}}$

p) $y = \operatorname{Arc}\cot e^{2x+1}$.

۱۵ – ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندې او دننه فنکشنونو

$$y = f(v),\ v = h(w), w = (g(z)),\ z = k(x)$$

بیل کړی(د تعریف– او ارزښتدیري باندې تیرونه کیدی شي)

a) $y = \left[\operatorname{Arc}\cot\left(e^x + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\operatorname{Arc}\cot(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos \frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5 - \tan \sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln\left(x^2 - 1\right) + 1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x + 1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ – د لاندې شننیزویا سپرنیز (تحلیلي) افادو لپاره تعریفدیري پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3 - x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$ e) $y = \frac{1}{x^2 + x - 6}$ f) $y = \ln(2x + 5)$

g) $y = \operatorname{Arc}\cos(2x - 4)$ h) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \frac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريګوډيکچ يا تريګونومتري Trigonometrie

تعريفونه

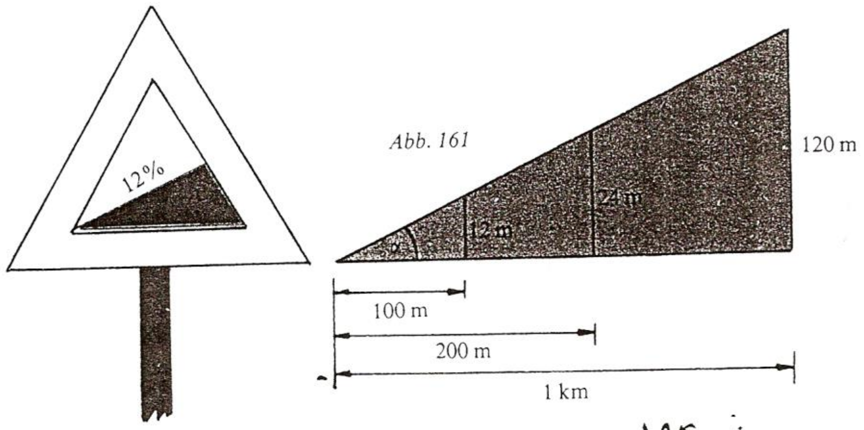
د دريګوډيکچ يا تريګونومتري دنده ده چې په هواره يا په هوا کې دريګوډي کچ کړي ، د څانګړوبلواکو له لارې، دې په نامه تريګونومتريبلواکو. برسيره پر دې د دې په مرسته پريوديکې يعنې په منظمه فاصله پرلپسې تکراريدونکې پيښې(موړ يې تل راګرځيدوني بللې شو) څيړل کيږي.
تريګونمتري تر هيپارچ (Hipparch ۱۶۰ – ۱۲۵ له م پخوا) پورې تعقيبيدې شي، وروسته له مصري پتوليموس Patolemäus چې په ۱۶۸ م کال کې مړ شوی او بيا له هندې او عربو شميرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پيل دا د کاروني يا عملي کيدو د ستونځو سره مخامخ وه. دريګوډيکچ خپل کارونه په استرنومي او فزيك، د څمککچ يا اندازه کولو، د څمك اندازونې، نقشو علم، او ابادۍ او نوتيك Nautik (د کيشتيو د لارو نقشه ويستلو پوهنه) کې مومي.
د تريګونومتري مانا يا مهموالی په څانګړي ډول په دې ريښتينوالی يا واقعيت کې نغښتی، چې د دې په مرسته د پايکرښبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي(پام دې وي، چې دا تړاو شميرپوهينيز مفهوم لري).

پيلبيلګه: د په مانايا مهم جګوالي يا لويدکرښو نخښه لوحې يا په بله عبارت د زوړي او پيچومې ليکتختی(دې ته دې پام وي چې ما دا کليمې هر چيرې د زوړي او پيچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چې په هغه مناسب ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي) وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟
پیچومی یا جګوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جګوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیک ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جګوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توګه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جګوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جګوالي لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جګیږي. کتل کیږي یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومي یا جګوالي کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځانیونه و هوارې فاصلي ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځاننیونه تابث یا ځاي په ځاي پاتیږي او د په سلو کی ګڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جګوالي اوږدوالي معلومات نه

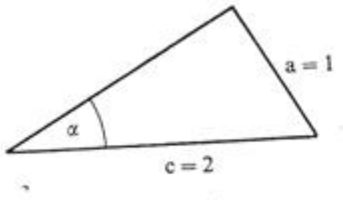


ځیره۱۹۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن لپاره ما بلواک لیکلی یعنې همغه د درې له تابع څخه مې را اخستي، چې نورو ژبو کې یې بلواک ځیره ده، چې دې امله یې ځیره نمونه سمه ده اوکارونه یې ځیرونه ده.

ساینبلواک sinusfunktion بلیګه:

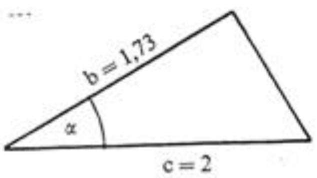


$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ = مخامخ کاتیت / هیپوتینوزي

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

ځیره ۱۹۶

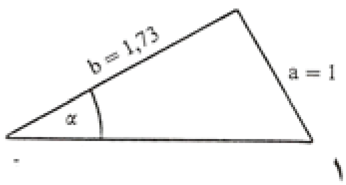
کوسایبلوک Cosinusfunktion بیلګه:



$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ = پرته کتیت / هیپوتینوزي

$\cos 30° = \frac{1,73}{2} = 0,8660$

تنجنتبلواک Tangensfunktion بیلګه:



$\tan\alpha = \frac{a}{b}$ = مخامخ کاتیت / پروتکاتیت

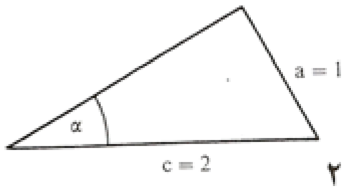
ځیره ۱۹۸

$\tan 30° = \frac{1}{1,73} = 0,577$

د کونجونو د پینونومونې (دا ټول شته، خو بیاهم اړیین دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوسیکانسبلواک Kosekansfunktion بیلگه:



$Cosec\alpha = \frac{c}{a} =$ هیپوتینوزې / مخامخ کاتیت

خیره ۲۰۱

$$\cos ec\alpha = \frac{2}{1} = 2$$

موږ به زیات وخت لمړنی درې یا په همدې توګه لمړنی څلور بلواکه د کارونی لپاره راونیسو یا وکاروو.

په ښوونه دریګوډیو کی شمیرنه

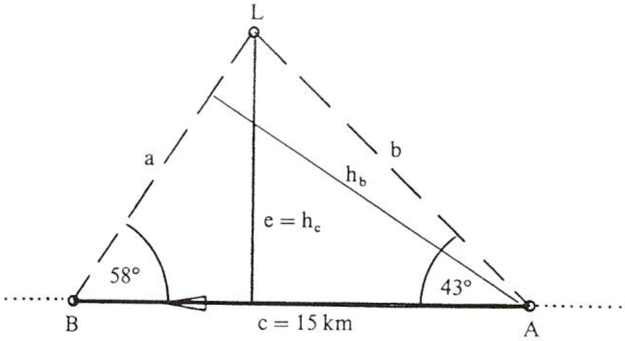
سره له دې چی کونجبلواکي یواځی په ولاړکونجیز دریګوډي کی باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جګوالی په جوړولو کی هر دریګوډی په ولاړو برخه دریګوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکرښي وینا وي د پیل دریګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

پیلبیلګه

یوه کیښتی د رڼاډزکړي(کله چی کښتی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کښتی یا یو بل څه ته که یوه کښتی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې څرګندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چی څه پیښ شوي دي). دلته $43° = \alpha$ د تګ په لور اندازه کیږي او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه تګ پایکربښي $c = 15\ km$ او کونج $\beta = 58^\circ$ وروسته.
په دوم ډز کی کیبنتی له ډز رڼااور څخه څومره لرې ده؟
د A څخه و B ته د کیبنتی نزدې واټن e د ډزرڼااور څخه څومره لري دی؟
په A کی له اور څخه څومره لرې وه ؟



څیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 79^\circ$; $\sin\beta = h_b / c$ او $\sin\gamma = h_b / b$

د h_b په لور اوبیول یا حلول او په همدې وخت کی لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin\beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin\gamma$$
$$\Rightarrow c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$
$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58^\circ}{\sin 79^\circ} = 12{,}959\ \text{km}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin \alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin \alpha = 12{,}959 \cdot \sin 43° = 8{,}838 \text{ km}$$

$$\sin \beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin \beta} = \frac{8{,}838}{\sin 58°} = 10{,}421 \text{ km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دریګوډي اړخونوa او b په شمیرنه کې مرستندوي لویی له منځه ځي او باور لري:

د ساین جمله :

په خوښه دریګوډي کې د اړخونو ځانګړنیونه یاتناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځانګړنیونه یا تناسب دی.

$$\sin\alpha / \sin\beta = a / b \qquad \sin\beta / \sin\gamma = b / c$$

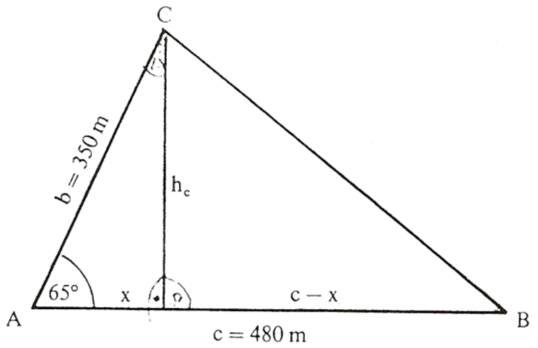
$$\sin\gamma / \sin\alpha = c / a$$

د ساین جمله په پخ دریګوډي کې هم باورلري(تمرین دې وکتل شي). ددې سره په یوه دریګوډي کې نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کیږي، چیرته چې دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي.

سړی بیا څه کوي که دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راګیر کونج؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلبیلگه : په یوه د ډبروسکرو کان کی دوه ستنی $b = 350\ m$ او $c = 480\ m$ دي او یو کونج $\alpha = 65°$ ښبندوي.
د B ځخه و C ته به د نبنلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟



ځیره ۲۰۳

اوبی یا حل :
جګوالی یا جګی h_c کرښه $AB = c$ په دوه ټوټو x او $c-x$ ویشي.
دلته دی $x = b.\cos\alpha$ ،
ځکه چی $\cos\alpha = x / b$ دی . د پیتاګوراس د جلی له مخی
لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$
او

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 .$$
$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb\cos\alpha$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړخونو اوږدوالی نومونی او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راګرځیدونکی (څیکلیکي یوناني کلیمه ده ګردی ډوله یا منظم بیرته راګرځیدونکی zyklisch) یو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

کوساین جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos \gamma$$

په هر یوه دریګوټي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاګوراس د جملی عمومیت یا ټولیز ته هم وایي. (تمرین ۶ مخ دې وکتل شي)

د کونجبلواك له لارې یو بل متود، د ډیرګوټي شمیرلو لپاره ، تر څو دا په دریګوټیو ویشل کیدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه یی څرګند وي، پیدا شو.

د دې ټولو سره د څلورګوټي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیداشو:

$$A = 0,5.d_1.d_2.\sin \alpha$$

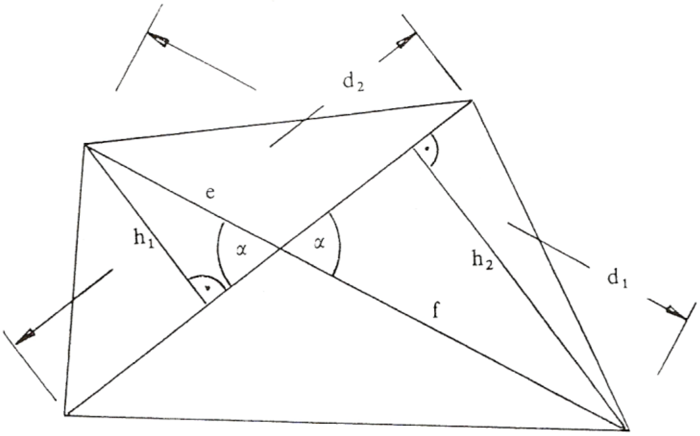
چیرته چي $\alpha = w(d_1; d_2)$ وي .

اوبی یا حل : $A=0,5(d_2h_1 + d_2h_2)$

که d_1 په e او f ټوټه یا تجزیه شي ، نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1 = e \cdot \sin\alpha$$
$$h_2 = f \cdot \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0,5 \cdot d_2(e+f)\sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0,5 \cdot d_2\, d_1\, \sin\alpha$$



شیره۲۰۴

د په خوښه کونجونو تریګونومتریکي بلواکي

په اخره برخه کی مو وویل، چی کونجبلواك، نه یوائی د دننه لورته تیرو درېګوډیو لپاره ، بلکه د هغو کونجونو لپاره چی له ۹۰ درجو لوي وي ، هم هدفمند (موخور) تشریحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

دا پراختیا څنګه تصور یا د خیالوړ کیدی شي ؟

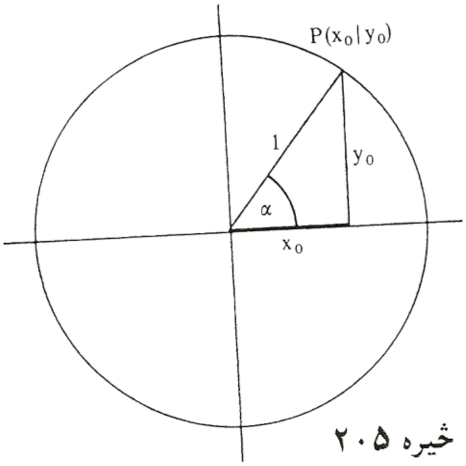
(c) ketabton.com: The Digital Library

په ښه توګه داسی کیدی شي چی په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کی یوه ګردی ووهي چی وړانګه یي ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی (دې ته یوونګردی ویل کیږي، ځکه چی وړانګه یی یو یوون دی) او د ګردی منځټکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردېنات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډی، چی د هغی یو کونج د ګردی ځنتریکونج دی، یعنی کونج یی د ګردې په منځ یا ځنتر پروت دی، (ځیره ۲۰۴ |) کم له کمه یی یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوډی په دننه کی شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړکونجیز دریګوډي ځخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي ځلورمه یا کوادرانت (Quadrant) کی پروت د ی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په ګردی ،د کونجټکی $P(x|_0y_0)$ په پام کی نیولو سره، باور لري:

$$\sin\alpha = y_0 / 1 = y_0 , \quad \cos\alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښی د پریوستون او یا د سیورېدرځونو په ځیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوهونکی مړوند په ځیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محورغبرګي رڼا لاندې راشی.



ځیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کی کیدی شي چی د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

تریګونومتریکي پیتاګوراس:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

چیرته چی $\sin^2\alpha = \sin\alpha . \sin\alpha$ په مانا دی.

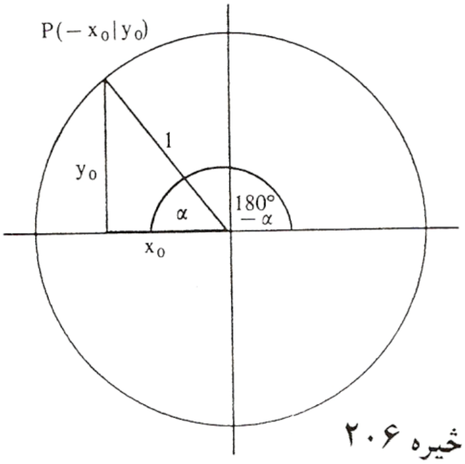
(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي ، چی پوښتنه وشي چی همدا « سيوری » بيا کله لاس ته راتلی شي.
دا حالت بیاټیك هلته لاس ته راځي، چی وړانګه د منفي x –محور سره یو کونج α جوړ کړي، یعني ځنتریکونج یی $180° - \alpha$ وي.
د « سیوروځیرو» ځخه لاس ته راځي:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

ځکه چی دا سیوری همغومره اوږد دی لکه د مخه، مګر اوس له صفر پیل مخامخ (منفی) لور ښایي.



ځیره ۲۰۶

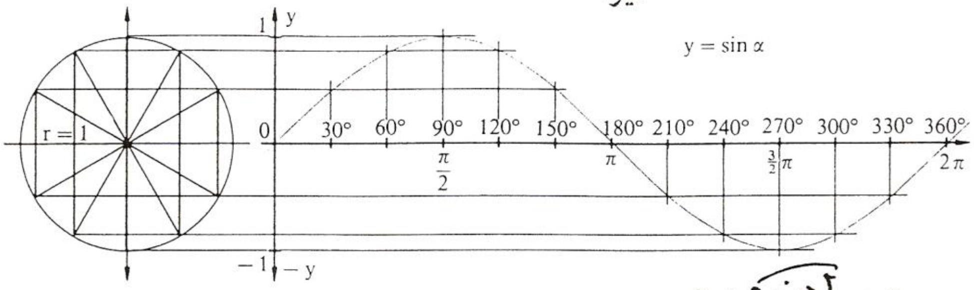
په ورته توګه لاس ته راځی :

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

د کونج $\alpha + 360°$ لپاره بیرته د سرچیني کونج اړیکی لاس ته راځي: همدا ډول د $\alpha + 720$ لپاره اوهمداسی نور. په دې توګه د په خوښه کونجفنکشنونو یا کونجبلواکو لپاره د ساین او کوساین بلواك تعریف دي.
د $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ له امله (مقایسه مخ ۱۵۱) دا د تنجنت بلواك لپاره هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکګرافونه لاس ته راځی

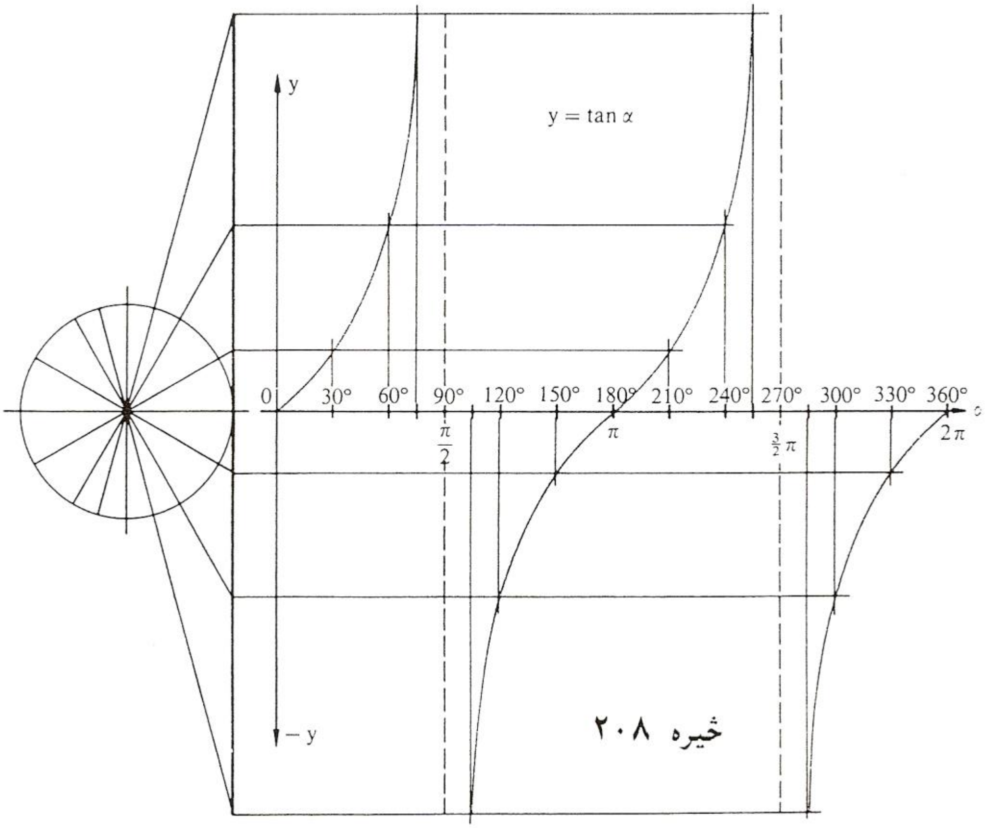
(c) ketabton.com: The Digital Library

شیره ۲۰۷



Die **Sinuskurve**: $y = \sin x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$

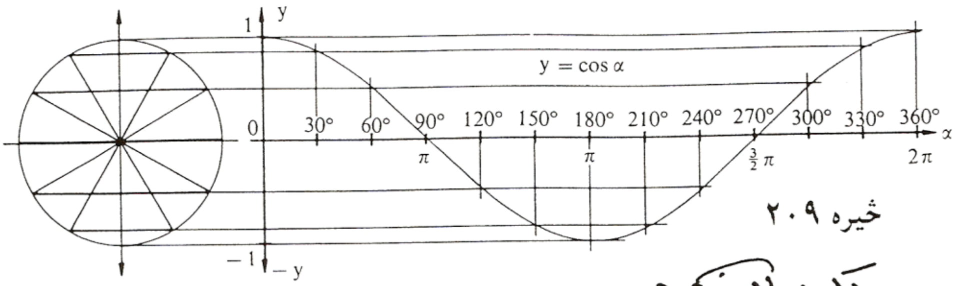
د ساین گرښه



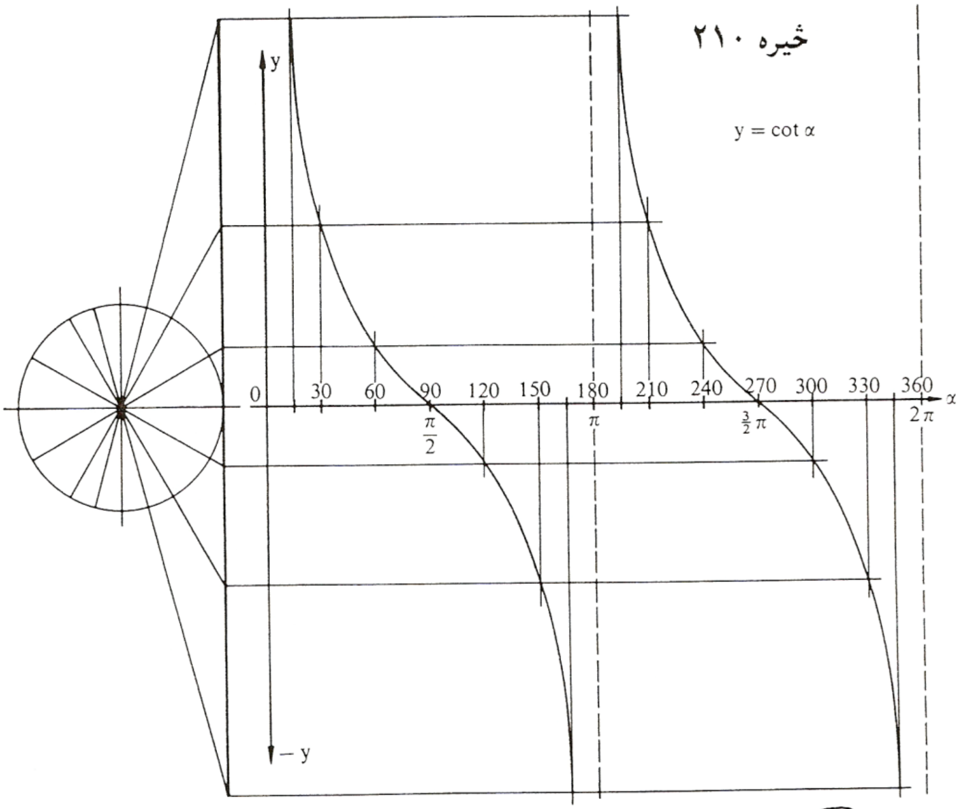
Die **Tangenskurve**: $y = \tan x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

د تنجنت گرښه

(c) ketabton.com: The Digital Library



Die **Kosinuskurve**: $y = \cos x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$ دکوساین کږه

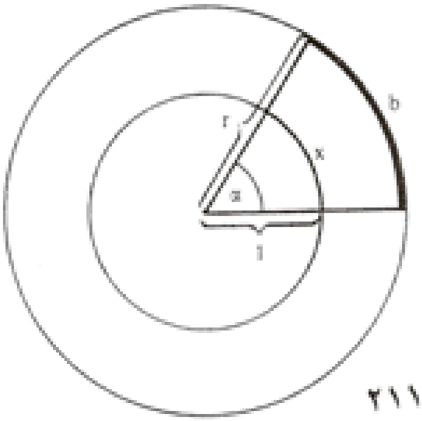


Die **Kotangenskurve**: $y = \cot x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$ دکوتنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

په زره درجه د کونجکچ یا – اندازې سره بلد یو (دمخه ولیدل، چې ۳۶۰ درجې پوره گردي بنايي. هغه، چې لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده ، چې گردي په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دوارو کچیوونونو یا کچواحدونو کې گډ دي، چې په گښونو اندازه کیږي، بې له کچ یوون ارزښتدېرې ربیلگښونه دي، په داسې حال کې چې وتل گښونه (= د تعریف ډېرې گښونه) یو یوون یا واحد (درجه یا گون) لري. دا په کارونه یا عمل کې موږ زیات وښت د ختڼ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.



خیره ۲۱۱

کونج لویي په واقعیت کې یوون «راد (rad) » لري، مگر دا په کارونه یا عمل کې کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مو نه راهخوي. دا کونجکچونه چې د کونج لپاره په تریگونومتریکي بلواکو کې ایښودل کیږي (د بیلگې په توگه sin) ارگومنت (Argument تعریفدېرې) بلل کیږي. په تعریفدېرې کې کیدی شي چې نوې درجه ، زره درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکي دې پام ولري چې په جېښمیري کې همغه مودوس په کار اچول شوي دي(راتلونکي دې وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په برخه ګردیبرخوکی وښوول شو (ګردیبرخی د مخه څیړل شوي دي) چی هر کونج پورې یوه ګردبرخه یا ګردی لینده اړه لري، نو ټولی ګردی پورې ۳۶۰ درجی کونج یا $2\pi r$ اړه لري، یوه کونج α پورې بیا یوه لینده b اړه لري، کومه چی په چاپېرۍ ځانګړهمداسی نیسي لکه په پیل کی α و ۳۶۰ درجو ته . دلته ګردیګڼ دی : $\pi = 3,14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پیلبیلګه:

کونج $\alpha = 60°$ له ګردی د ۱۰ سانتیمتره وړانګي سره یوه په لاندې ډول ګردی لینده $b = 20\pi . 60° : 360° = 10,47$ cm غوځوي یا بیلوي. د ګردی چاپیری دی : $U = 20\pi = 62,83$ cm

همغه کونج α د ۵ سانتي متره وړانګی سره ګردیلینده

$$b = 10\pi .60° : 360° = 5,236 \text{ cm}$$

غوځوي. دا ګردی لاندې چاپیری لري: $U = 10 = 31,416$ cm .

له ګردی د وړانګي $r = 1$ cm سره ددې په څټ یا برعکس کونج ګردیلینده

$$b = 2\pi . 60°: 360° = 1,047 \text{ cm}$$

غوځوي» د دې ګردي چاپیری فقط $U = 2\pi = 6,283$ دی .

له بیلګي څرګندیږي، چی لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیږي لکه وړانګه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونګردي د وړانګي ۱ سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعریف: په یوونګردي د ګردیلیندی اوږدوالي کچګڼ، چی په څنتریکونج

(c) ketabton.com: The Digital Library

باندې څېره شوي، لینده کچ بلل کیږي. لاندې شمیراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180°) . \pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x/\pi)\, 180° = \frac{x}{\pi} \cdot 180°$$

دا چې د وړانګي څرخون په پوره کونج هم وراوړیدی شي، نو له دې امله د لینده کچ لپاره په خوښه رییلګڼونه پرېښوول شوي.

بیلګې :

$$\alpha = 1° \Leftrightarrow x = \frac{1°}{180°}\pi = 0{,}0175 \text{ (rad)} \qquad \alpha = 180° \Leftrightarrow x = \frac{180°}{180°}\pi = \pi = 3{,}1416$$

$$\alpha = 30° \Leftrightarrow x = \frac{30°}{180°}\pi = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236 \qquad \alpha = 360° \Leftrightarrow x = \frac{360°}{180°}\pi = 2\pi = 6{,}2832$$

$$\alpha = 45° \Leftrightarrow x = \frac{45°}{180°}\pi = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854 \qquad \alpha = 720° \Leftrightarrow x = \frac{720°}{360°}\pi = 4\pi = 12{,}5664 \quad \text{usw.;}$$

$$\alpha = 60° \Leftrightarrow x = \frac{60°}{180°}\pi = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472$$

$$\alpha = 90° \Leftrightarrow x = \frac{90°}{180°}\pi = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \qquad \alpha = -75° \Leftrightarrow x = \frac{-75°}{180°}\pi = \frac{-5}{12}\pi = -1{,}309$$

ارکوسبلواکي Arcusfunkrionen

زیات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کیږي ، چې لکه په ورکړشوو کرښځاننیونو راپیداشوې کونجونه څنګه معلومیږي یا څنګه راڅرګندیږی یا بهتره څنګه ځانونه نیسی. ددې لپاره چی دا پوښتنه ځواب شي، باید امکانات ولټول شي، چی د کونجبلواک ارزښتونو څخه څنګه بیرته کونج یا په همدې توګه د هغه تعریفېدیري ته، په لینده کچ راتلی شو. دا کونجبلواک پریودیکی یا تل بیرته راګرځیدونکي بلواک دی، دا په دې مانا، چې د بلواک ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره یا .

(c) ketabton.com: The Digital Library

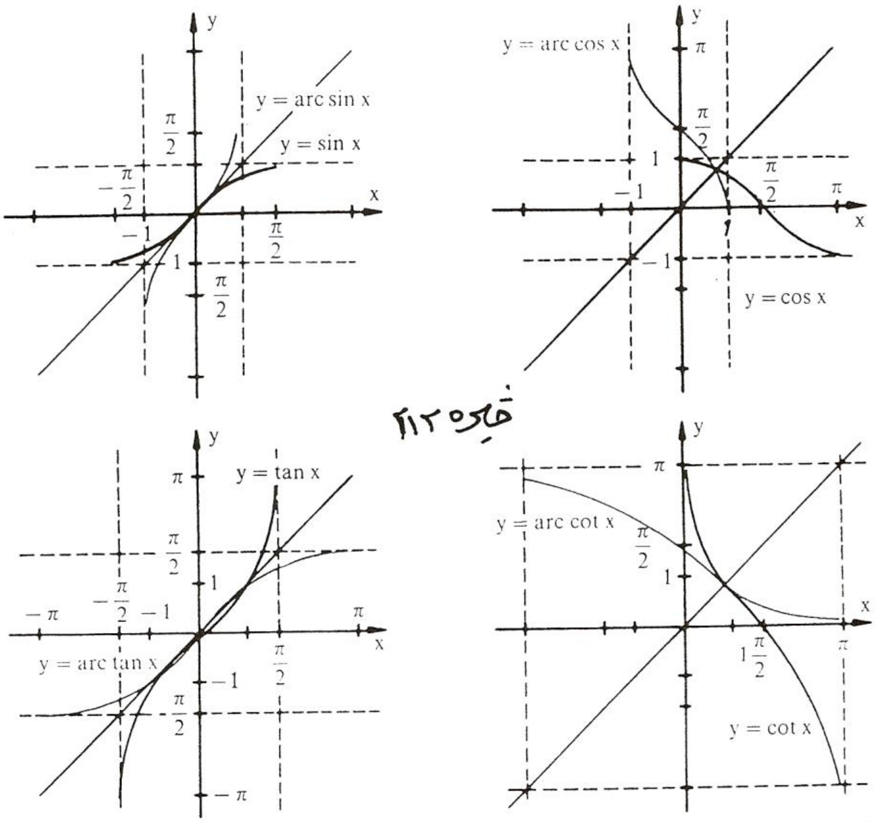
مختلفو واټونو وروسته، بلواك ارزښتونه تکراريږي. د دې لپاره چې په څرګندنه ممکن شي، نو بايد د خپل تعريف ډيرى په يوه برخه ډيري رابند يا محدود شي.

> **تعريف :** د يوه (رابند يا محدود) تريګونومتريکي بلواك په څټ بلواکونه ارکوس بلواك Arcusfunktion بلل کيږي يا څيکلومتريکي بلواك (لاتين :ارکوس Arcus = Bogen = لينده)

دلته arc sin(x) لوستل کيږي »دx ارکوس ساين. د کونجبلواك تعريفډيرى دلته اړونده ارکوسبلواك ارزښتډيرى دى او په څټ ارګومنت يا تعريفډيرى دلته تل يو رييلګڼ دى.

Trigonometrische Funktion ټريګونومتريکي بلواک	Arcusfunktion ارکوسبلواک
f: $x \mapsto \sin(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle| -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arcsin(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle| -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \mapsto \cos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 \le x \le \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arccos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 \le y \le \pi\}$
f: $x \mapsto \tan(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle| -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arctan(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle| -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \to \cot(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 < x < \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < x < \infty\}$	f^{-1}: $x \to \text{arccot}(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 < y < \pi\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



شکل ۲۱۲

Beispiele: بېلګې:

1. $\arcsin(0{,}8) = 0{,}9273\,(\text{rad}) = 53{,}13°$
2. $\arccos(1) = 0\,(\text{rad}) = 0°$
3. $\arctan(-100) = -1{,}5608\,(\text{rad}) = -89{,}43°$
4. $\text{arccot}(-70) = -0{,}0143\,(\text{rad}) = -0{,}82°$

۵ – دا چې کونجبلواک و ارکوسبلاک یو د بل په څټ بلواک دي نو باور لري·

$$\sin(\arcsin(y)) = y; \quad \arcsin(\sin(x)) = x$$
$$\cos(\arccos(y)) = y; \quad \arccos(\cos(x)) = x$$
$$\tan(\arctan(y)) = y; \quad \arctan(\tan(x)) = x$$
$$\cot(\text{arccot}(y)) = y; \quad \text{arccot}(\cot(x)) = x$$

یعنې په لاندې ډول توګه هم

$$\sin(\arcsin(0{,}4)) = \sin(23{,}58°) = 0{,}4$$
$$\arccos(\cos(\pi/3)) = \arccos(0{,}5) = 1{,}0472$$
$$\tan(\arctan(-40) = \tan(-88{,}5679°) = -39{,}9999$$
$$\text{arccot}(\cot(60°)) = \text{arccot}(0{,}5774) = 1{,}0472$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جبشمیري کاروني یا استعمال لپاره

داچې پخوا معمول جدولونه د بلواك تعریفېدیري او ارزښتېدیري شمیرلو لپاره له کاره غورځول شوي دي او دنده یې ایلکترونیکي ماشینونو نیولې ده، غواړو چې د جبشمیري استعمال په هکله هم څه ووایو
کورکمپیوټر زیات وخت داسې فنکشنونه یا بلواکي لري یا وظیفې په کلك اختیار کې لري، چې د درجې اوړون په لینده کچ او په څپ کوي، مګر شمیردرځ په توګه باید د شمیرونکې په پروګرام کې ځای په ځای شوی وي.
پوره اسانتیاوې او زیاته کارونه د جبشمیرې په غاړه پرته ده، دلته دې توکمې د < .... > سره په نخښنه شي:
په قاعده کې دریې بلواك ورکړشوي دي : < sin > ; < cos > ; < cot > کوتنجنت بیا داسې شمیرلکیدی شي، د < tan><1/x > . د < INV > – توکمي سره سړی ارکوسبلواك ته راځي: نو < INV><sin > ارکوس ساین دی. په عمومي توګه کونج – بې پروا که په لینده کچ او یا درجه کچ ورکړ شوي وي – باید د فنکشن له مخه ورکړ.

بیلګي

۱ لاندې جدول همغه د کاروني یا اتعمال لپاره د جبشمیري چمتووالی ښای :

Winkelmaß کونج کچ	TR-Modus په نخښونه	Beispiel بیلګه
Altgrad زړه درجه	DEG	$\sin 45^\circ = 0{,}7071$
Neugrad نوې درجه	GRAD	$\sin 50^g = 0{,}7071$
Bogenmaß لینده کچ	RAD	$\sin \frac{\pi}{4} = 0{,}7071$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
sin 45°	45⟨sin⟩	0.707106781	DEG
$\sin \frac{\pi}{6}$	⟨π⟩⟨:⟩6⟨sin⟩	0,5	RAD
cot 30°	30⟨tan⟩⟨1/x⟩	1.732050808	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	60(°)	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	$1.047 = \frac{\pi}{3}$	RAD
arccot 2	2⟨1/x⟩⟨INV⟩⟨tan⟩	26.56505118°	DEG
sin 220^g	220⟨sin⟩	−0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چی جبشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه») د زاړه – یا نوي درجی همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د تکمی <DRG> ځخه لاس ته راځی یا د بیلګي په توګه < MODE >.

د ورکړشوي درجه ګڼ اوړون په لینده کچ د < DRG –> > سره سورت نیسي.

بیرته یا په ځټ سړی داسی راځي– لکه چی لرل مو– د <INV> – تکمی سره.

بیلګی

60°	⟨DRG⟩	60(rad)
60	⟨DRG⟩	60(grad)
60°	⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨DRG →⟩	60°
60°	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	60°

دلته ګراد نښونه (gard) نوی درجه ده یعنی ګون(gon).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځنی جشمیري په دې برسیره نور زیات امکانات هم لري ، نتیجی یی په ګراد دقیقی، ثانیي اویا لسیز سیستم ورکړ شوي دي. بدلون بیا د تکمی <DMS-Dd > سره صورت نیسی:

26.75° 30°15′	⟨inv⟩⟨DMS – Dd⟩ ⟨DMS – Dd⟩	26°45′ 30.25°

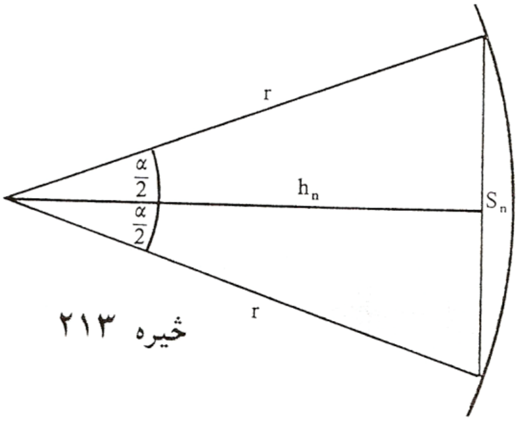
د " "15 °30 " ورکړه کیدی شي د جبشمیري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جبشمیری د لاس کتاب څخه ګټه واخستل شي (یادونه: زه پوهیږم چی داسی شیان موږ متآسفانه په خپل هیواد کي نه لرو ، خو په هر صورت یي لیکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پریښوولی)

پیلبیلګه: دلته دي S_n د یوه منظم n– ګوډي د اړخ اوږدوالی وي، چی په یوه ګردی کی چی وړانګه یی $r = 5\ cm$ ده، راګیر دی.

الف) وښایي چی

$$S_n = 2r \cdot \sin(180° : n)$$

ب) د یوه داسی n– ګوډي چاپیری U_n وشمیری ، چی $n = 8;16;32;128$ وي، او په نږدې توګه یا تقریبي د دې ګردي چاپیری د دې وړانګي r سره وښایی .



خیره ۲۱۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په همدې ډول n– ګوډی له هوارو A_n څخه په نزدې توګه یا تقریبي د ګردی ـــ هواره A وښایي .

اوبی (حل : هر n– ګوډی کیدی شي په n مساوي دریګوډیو ټوټه کړی شي.
د هغو د څینتریکونج ∝ لپاره باور لري $\propto = 360° / n$. د جګی یا جګوالی h_c د کنبلو سره په هر مساوي پښیز دریګوډي کي ولاړکونجیزې نیایی د څنتریکونج یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\propto}{2} = 360° / 2n = 180° / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n /2) / r = \sin\frac{\propto}{2} \Rightarrow S_n = 2r \cdot \sin\frac{\propto}{2} = 2r \cdot \sin(180° / n)$$

b) $U = n.S_n = 2r.n.\sin (180°/n) = 10n.\sin (180° / n)$

د ارزښتشمیرنو د غلطی مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که په دغه همغه لړپیرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

180° ⟨STO⟩ ⟨ : ⟩ 8 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 8 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 30.614675
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 16 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 16 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 31.214452
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 32 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 32 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 31.365485
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 64 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 64 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 31.403312
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 128 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 128 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 31.412773

پ) د ډیرګوډي هواره د دریګوډیو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی
د هر دریګوډي هواره ده: $0,5 .S_n . h_n$. د

$$h_n = r.\cos(180° / n)$$

او

$$S_n = 2r \cdot \sin (180°/ n)$$

له امله داسی دی

$$A = n \cdot 0{,}5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cos\left(\frac{180°}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0{,}5 \sin\left(\frac{360°}{n}\right)$$

له دې سره د نرې [illegible]

360° ⟨STO⟩ ⟨:⟩ 8 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 8 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 70.710678
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 16 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 16 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 76.536686
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 32 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 32 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.036129
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 64 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 64 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.413712
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 128 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 128 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.508279

د یوه جشمیرې سره ، چې له یوې زخیرې زیاتی ولري ، لکه چې پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسیره نورې ثابتي هم زخیره کیدی شي» په یوه منظم پروګرامونږ ماشین سره کیدي شي چې د دا ډول شمیرنو لپاره د ګوډونو ګڼ ځخه ت شو یا د ګوډونو ګڼ باند ې صرفنظر وشي .

د تریګونومتریکي بلواکو خویونه

دا چې کونجکچ په درجه کچ او هم په لینده کچ ورکول کیدی شي، کیدی شي چې یوه کونج بلواك تعریفېږی یا α او یا x وي. ددې لپاره چې د یوه بلواك خوي باندې ټینګار وکړو، باید په لاندې په لینده کچ تکیه وکړو.
د لاندې خویونو لمړۍ ډله یوائې له تعریفمساوات (د مخه راغلی) او د پیتاګوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرته کاتیت}} = \frac{\dfrac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}}{\dfrac{\text{پرته کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) \quad = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دي لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \iff \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دي لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دي سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x \; ; \quad 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریگونومتریکي بلواکو کی هیله ده ، چی د پوتنځ لیکدود په پام کی ونیسی.
په لاندي پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې gegeben ورکړې او gesucht غوښتونې يا پلټونې په مانا دي

gegeben / gesucht	sin x	cos x	tan x	cot x
sin x	sin x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
cos x	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	cos x	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
tan x	$\pm\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	$\dfrac{1}{\cot x}$
cot x	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\tan x}$	cot x

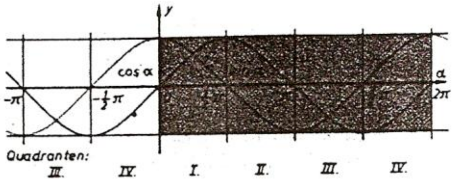
لکه چې د مخه مو په ګوته کړل، کیدی شي چې تریګونومتریکي بلواك د مختلفو ګونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواك ارزښتونه مقايسه شي، نو په کره توګه يا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

تعريف : تريګونومتريکي بلواك ټول پريوديکي يعني بيرته راګرځيدونکی دی، دا په دې مانا ، چې د بلواك ارزښتونه په منظمو واټنونو کی تکراريږي. په دې د ساين بلواك او د کوساين بلواك راګرځيدنه (يا ۳۶۰ درجی) لري، کوتنجنتبلواك راګرځيدنه (يا ۱۸۰ درجی (180°)) لري.

$$\left.\begin{aligned}\sin(x \pm 2k\pi) &= \sin x\\ \tan(x \pm k\pi) &= \tan x\end{aligned}\right\} \quad k \in N$$

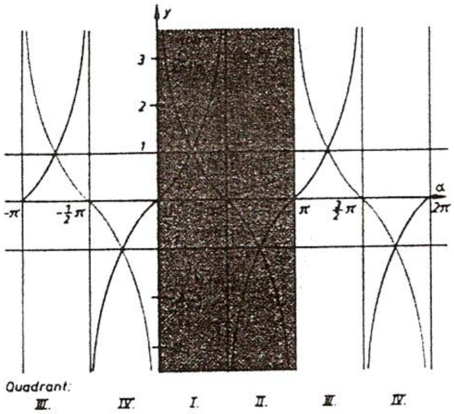
$$\left.\begin{aligned}\cos(x \pm 2k\pi) &= \cos x\\ \cot(x \pm k\pi) &= \cot x\end{aligned}\right\} \quad k \in N$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



شیره ۲۱۴

د ساین - او کوساین فنکشن پریودیک راتگ ښیدنه



د تنجنت او کوتنجنت فنکشن پریود ښیکي :

$\sin 50°$	$= \sin(50° + 360°)$	$= \sin(50° - 720°)$	$= 0{,}76604$	
$\cos -30°$	$= \cos(-30° - 360°)$	$= \cos(-30° + 1080°)$	$= 0{,}86603$	
$\tan 2{,}5$	$= \tan(2{,}5 - \pi)$	$= \tan(2{,}5 + 5\pi)$	$= -0{,}74702$	
$\cot 10$	$= \cot(10 + \pi)$	$= \cot(10 - \pi)$	$= 1{,}54235$	
$\sin 35°$	$= \sin(180° - 35°)$	$= -\sin(180° + 35°)$	$= -\sin(360° - 35°)$	$= 0{,}573576$
$\cos 35°$	$= -\cos 145°$	$= -\cos 215°$	$= \cos 325°$	$= 0{,}81952$
$\tan 0{,}6109$	$= -\tan 2{,}5307$	$= \tan 3{,}7525$	$= -\tan 5{,}6723$	$= 0{,}700208$
$\cot 0{,}6109$	$= -\cot 2{,}5307$	$= \cot 3{,}7525$	$= -\cot 5{,}6723$	$= 1{,}428042$

که د فنکشن ګراف ته په ځیر شو نو په دې برسیره په ټینګه روښانیږي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلګی:

	α	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$360° - \alpha$
	35°	145°	215°	325°
sin	0,573576	0,573576	– 0,573576	– 0,573576
cos	0,819152	– 0,819152	– 0,819152	0,819152
tan	0,700208	– 0,700208	0,700208	– 0,700208
cot	1,428148	– 1,428148	1,428148	– 1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځی د جبشمیرې یا کمپیوتر څخه کار اخستل کیږي ، هدفمند بولو، چی یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin x bzw. sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	–	0
cot x bzw. cot α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

د دغه ساحو د هراړول په مانا دی او پیدای تیزی یاد کړی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې جدول څخه کيدی شي په خيال کی يا ګوماني لاس ته راوړی شو

$\sin x = \cos(\ \ /2 - x)$ $\cos x = \sin(\ \ /2 - x)$

$\tan x = \cot(\ \ /2 - x)$ $\cot x = \tan(\ \ /2 - x)$

دا ګومان کيدی شي په ولاړکونجيز دريګوډي کي د تعريف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

$\sin\ \ = a / c$ او $\cos \beta = a / c$

د $\beta = 90° -$ له امله لاس ته راځي :

$\sin\ \ = \cos(90° -\ \ )$

په ورته توګه نور ې غوښتني هم لاس ته راتلی شي.

دا له څيرو څخه هم لاس ته راوړل کيدی شي، څکه د ساين او کوساين بلواکو يا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو ګرافونه د $x = \ /2$ کرښې ته يو بل سره محورسيومتري ځغلي :

له څيرو او بيلګو څخه په دې برسيره لاس ته راځي:

تعريف: د کوساين بلواك جفت دی ، لرو:

$\cos(x) = \cos(-x)$

ساين – ، تنجنت – او کوتنجنت بلواك ناجفت دي» د دوي لپاره باور لري:

$\sin(x) = -\sin(-x)$, $\tan(x) = -\tan(-x)$; $\cot(x) = -\cot(-x)$

يادونه : په دې نلواکو کي کيدی شي چی x له نوکانو دباندې هم وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی:

$\sin 60° = -\sin(-60°) = 0,86603$

$\cos 0,75 = \cos(-0,75) = -0,70711$

$\tan 150° = -\tan(-150°) = -0,57735$

$\cot 1,3 = -\cot(-1,3) = o,27762$

د زیاتون قضیي یا تیورمونه

دا چي کونجبلواك لاینې نه دي(د فنکشنګراف کرښه نه ده،بلکه کږه ده) ، نو ډېل تعریفدیري پورې ساده ډېل بلواك ارزښت اړه نه لري.

لکه

$\sin 30° = 0,5 \quad \sin 90° = 1 \quad \sin 180° = 0$

د داسی په نامه زیاتونمسئلی په مرسته ممکن کیږي، چی د بلواك ارزښت د کونج په دوه برابرولو یا په همدې ډول د دوه کونجونو یو په بل زیاتولو د یوګونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابي کړی شو.

بیلګی :

1 . $\sin(x + y) = \sin x . \cos y + \cos x . \sin y$

1' . $\sin(x - y) = \sin x . \cos y - \cos x . \sin y$

2 . $\cos(x + y) \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

2 '. $cis(x - y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$

3 . $\sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

4 . $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

7. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 - \cos x)}$

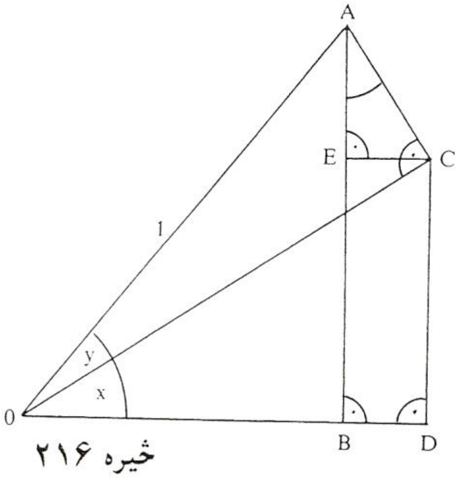
8. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 + \cos x)}$

9. $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

9′. $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

10. $\cot(x+y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

10′. $\cot(x-y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$ mit $\cot x \neq \cot y$



شیره ۲۱۶

1. und **2.**:

$|OA| = 1$

$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y$

$|AB| = \sin(x+y); \quad |OB| = \cos(x+y)$

$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$

$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

په نسبت پورې لرو :

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$
$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د ځای په ځای کولو څخه ښوونه په لاس راځي

$$\sin(x + y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1′. 2′.:

3. ι 4.: . . $x = y$. ځای په ځای کړه

5.: Setze $z + t = x;\ z - t = y \Rightarrow z = \frac{x+y}{2};\ t = \frac{x-y}{2}$ کېږده

$\sin x = \sin(z + t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$ پس له هغه

$$= \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$\sin y = \sin(z - t) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ همداسې

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

6. ښوونه په ورته توګه څخه راځي

7.: $x = y = z/2$ کېږده

$$\Rightarrow \cos(x + y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2\frac{z}{2} - \cos z \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$$

د دوهمې ښوونې له لارې ښوونه کړو

8.: $(*)\ \sin^2\frac{z}{2}$ durch $1 - \cos^2\frac{z}{2}$. په (*) کې و لیکو او لیکه یې کېږده

9-10: دا د پرته له ۱ او ۲ او ښکېلت د تعريف څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

بلواك يا فنکشن $y = a . \sin(bx+c) +d$

لکه چی په پیل کی مو وویل په طبیعت او تخنیك کي ډيرې پيښې شته دی چي تل بيرته راکرځي يا لنډ: راګرځي، يعني پريوديکي دي. د دې د تشريح لپاره په خپل سوچه يا خالصه بڼه تل د ساين بلواك بسيا نه کوي.
دا زيات علتونه لري : لمړی د ساينبلواك د ۱− او ۱ ترمنځ ارزښت نيسي، له بلي لور داواقعي د کونج په واك کی نه دي بلکه د وخت په واك کي دي د يوې راګرځيدنی سره، چی دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانيولکيدی. له دې امله د ساين بلواك د دې کارونو د روښانوولو لپاره بايد موډيفيځير شي يا يی بڼه واوړي. دا بڼه اوړون او د هغی تاثير په لاندې ليدنه کی راټول شويدي، ګراف يی ورزياتی ځيرونی لپاره دی. په ورته ډول د نورو کونجبلواکو لپاره باور لري په عمل کي مګر يواځي د ساينبلواك (په همدې توګه د هغي مخامخ د کوسائن بلواك چي په 2 /π سره راکښل شوی وي) د مانا ډك دي. (لوستل: له ښي لور څخه)

بیلګی	دکارونی ساحه	تاثير	بلواك
څیره ۲۱۷	ټولی تلبیرته راګرځیدونی تعامولونه		$y = \sin (x)$
څیره ۲۱۸	د یوه مساوی او بدل ښیپا لرونکو لپاره بل بریلوتل	د y− لور پا ندې راکښنه	$y = \sin(x) +d$

(c) ketabton.com: The Digital Library

قضیه ۲۱۹	په بدل بوښتنا جریان کې د بوښتنا او بشپړ لونګ تخنیر دوبسانونه	د فاز تغیر یا ځای بدلون	$y = \sin(x+c)$
قضیه ۳۲۰	د یوه پندل ځوړند نه	د امپلیټود د ځای بدلون فاکتور -1 د 180° فاز ځای بدلون دی	$y = a . \sin(x)$
د قضیه ۲۲۱	دیو بنسټیزې [illegible] غیږنه په یوه وخت دا د پونه او ډهغې لپاره لمړزه له تکلې په د منځنۍ الویه او ازولوکی	د پیریود تغیر یا بدلون $b>1$ سرعت $0<b<1$ په کرار کیدل $b<0$ په څټ ګرځیدنه له محور دی	$y = \sin(bx)$
قضیه ۲۲۲	کمپلکس پریودیک جریان یا عمل	عمومي حالت	$y = a . \sin(bx+c)+d$

تمرینونه

۱ – د لاندې ورکړې سره ښیره بله کړې

$4°6' = 4,1°$; $10°, 5' = 10°30$

a) $6,75° =$ b = $120,48° =$ c) $-75,65° =$

d) $52°16' =$ e) $97°13' =$ f) $44°44' 44'' =$

۲ – په درجه کچ ي وليکي

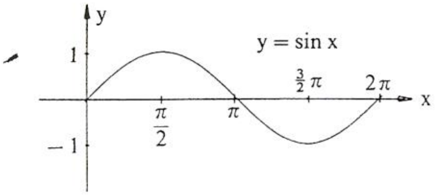
a) $x = \pi/3$, b) $x = -\pi/4$, c) $x (2/3)\pi$

d) $x = 4$ e) $x = -3$ f) $x = 4,7$

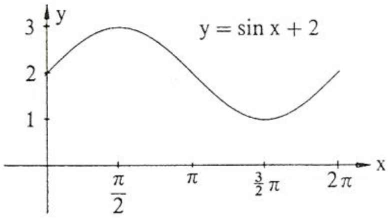
۳ – په لينده کچ يی وليکي

a) $15°$ b) $-60°$ c) $540°$ d) $20°15'$ e) $15,75°$

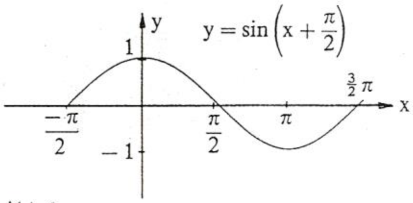
(c) ketabton.com: The Digital Library



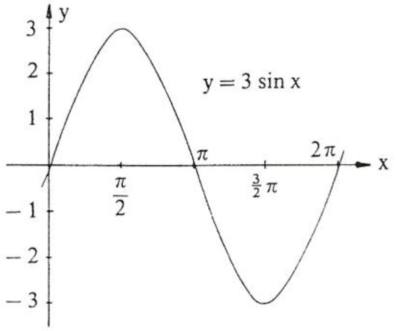
څیره ۲۱۷



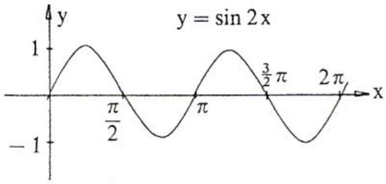
څیره ۲۱۸



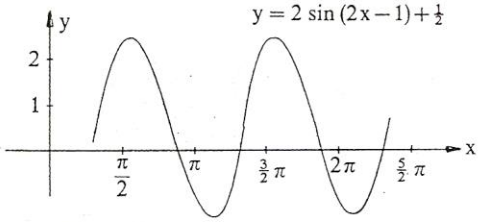
څیره ۲۱۹



څیره ۲۲۰



څیره ۲۲۱



څیره ۲۲۲

د دي بلواك ګراف د ساين کرېږ $y = \sin x$ څخه لکه چی ګورو لاس ته راځي:

١ – د ارزښت دوه ځله کيدل

٢ – د نیمی راګرځید اوږدوالی باندي پرسیدنه

٣ – په یوه یوون د ښي لور ته راکښنه

٤ – په $1/2$ پورته لورته 100% راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – وټاکی

a) sin20° b) sin(-30°) c) sin 172° d) din1°4'

e) cos 35° f) cos 380° g) cos(-27°) h) cos47,9°

i) tan 11° k) tan (-15°) l) tan 33,33° m) tan 13°13'

n) cot 870° o) cot (-11°) p) cot 14°14'

q) cot (-2°2')

r) sin α =0,8 s) cos α = 0,9 t) tan α = 2,5

u) cot α =-1 v) sin φ = 0,3 w) cos φ = -0,13

x) tan φ = -4 y) cot φ = 0,3 z) arcsin(x) = π /2

۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی لرو $\gamma = 90°$ او په دې برسیره :

a) a = 7 cm; b = 6cm

b) a = 16cm; = 66°45'

c) c = 5cm; a = 3cm

پاتی ټوټې وشمیری

۶ – په مساوي پښیز دریګوډي

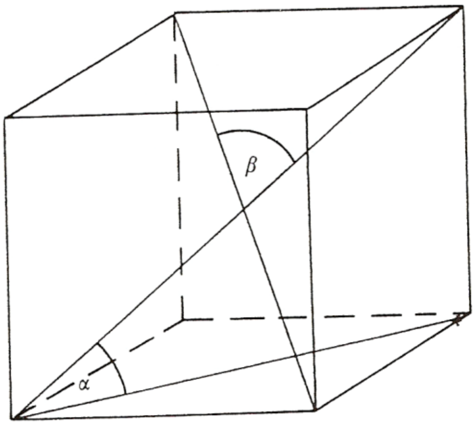
کي (a = پښه ده) دی

a) a= 10cm ; α =80°40'

b) a= 12 cm ; h = 8cm

c) ß = 40°; a = 7cm

پاتی ټوټي وشمیري



شیره ۲۲۳

۷ – د یوه پڅکونجیز (α > 90°)

دریګوډي لپاره ساین وشمیری

۸ الف) کوساین د یوه پڅ کونجیز

دریګوډي لپاره وشمیری (α > 90°)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟

۹ – په یوه مکعب کې د یوه هوا نیمي او بنستهواري ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

څیره .د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمیو ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

۱۰ – د دوه ګردیو وړانګې

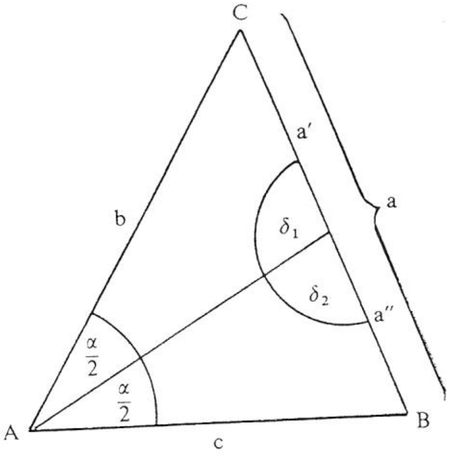
$r_1 = 5$ cm , $r_2 = 4$ cm

دي او همداسې د منځټکو واټن $|M_1M_2| = 8$cm ورکړ شوی دی.

دد دواړو ګردیو د تماس

مماسونو غوڅکونجې وټاکئ

او د کړې غوڅونې اوږدوالی .



څیره ۲۲۴

۱۱ – په یوه دریګوډي کې د یوه

کونجنیمی مخامخ اړخ په داسې

ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه

په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د

ساین جملې په مرسته حل

(اوبې) کړئ(څیره۲۲۴).

۱۲ – که یوه بار ځاي ته،

چي ۵۰ ،۱ متره جګ دی،

یوه زینه ورجګه شي

میلانکونج ✓ دې زیات ترزیات 33° وي، زینه دې څومره لویه وي؟

۱۳ – الف)د یوې پورته ختلی کوځي جګوالي توپیردې څومره وي، که دا

کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جګه وي؟

ب) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جګوالي توپیر څومره دی ؟

پ) د یوه زوړندې پټیلار، چې ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کې څومره

لوي دی ، که دا د جګوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴ – یو د اوبو بیلر (کتله = ۱۰۰ کیلوګرامه) په یوه دړه پورته خیژول کیږي، چی میلانکونج $\alpha = 25°$ لري. د وزنزور په زوړندزور تختي سره غبرګ او نورمال یعنی ولاړ زور (د فشارزور) ولاړ تجزیه یا ټوټه کیږي، دواړه زوره ځومره لوي دی ؟ (۱ کیلو ګرام = ۹، ۸۱ نیوټن $1\ kg = 9{,}81N$).

۱۵ – یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی ۵۳ متره اوږده ده، درول کیږي. درسیو میلانکونج $60°$ دی په پښه باندي په کوم جګوالي باید رسی وړلی شي ؟

۱۶ – د یوې ۵۳ متره جګي ونی سیوری ۵ ، ۱۲ متره اوږد دی. په څمکه لمروړانګي په کوم جګوالی یوبل سره مخامخ کیږي.؟

۱۷ – د یوه ۵ متره جګ کتونټکي (لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چی جګیدونکوج یی $\alpha = 18{,}5°$ او پښیتکی یی $ß=8°$ لوید کونج ، برج څومره جګ دی ؟ د لیدټکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی ؟

۱۸ – الف) د پیزا (Pisa) کوږ برج ۴۷ متره جګ دی، او څوکه یی د پښی ټکي څخه ۵۰ ،۴ متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی ؟

ب) د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جګ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په څمکي ټکي (یعنی د سترګي جګوالی د برج بنسټټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟

پ) د ۵، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي

– که جګوالی یی ۱۶۰ متره وي؟

– که جګوالی یي ۱۳۷ متره وي ؟

ت) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې

– د بل برج څوکه ښکاریږي چی جګوالی یي ۱۴۳ متره وي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

-د پاریس د ایفل برج ښکاریږي چی جګوالی یي ۳۰۰ متره دی ؟

۱۹ - د ښیپپس اهرام(CHeopspyramide) ۱۳۷ متره جګوالی لري او د بنسټ د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري

الف) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟

ب) د څنګهوارې دریواړه دنننی کونجونه څومره لوي دي؟

۲۰ - یو ژوری یا قبر -۸ ، ۱ متره ژور دی، بنسټسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی

الف) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی؟

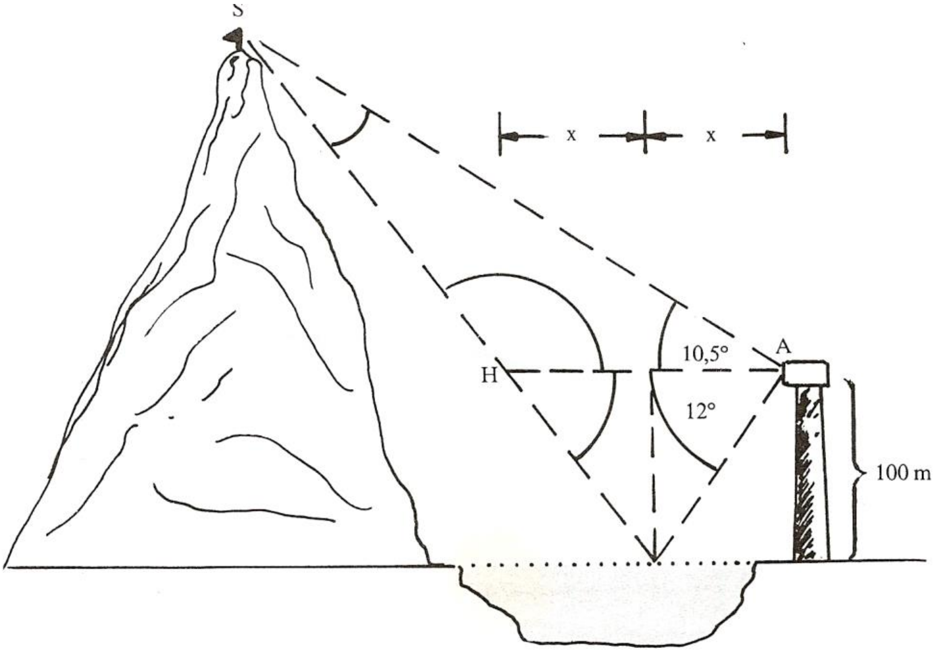
ب) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جګوالی یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟

۲۱ - یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جګوالی لري د بحیرې لور ته 14° میلان لري، د دننه لور ته 28° میلان لري. د ډنډ بنسټ څومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده؟

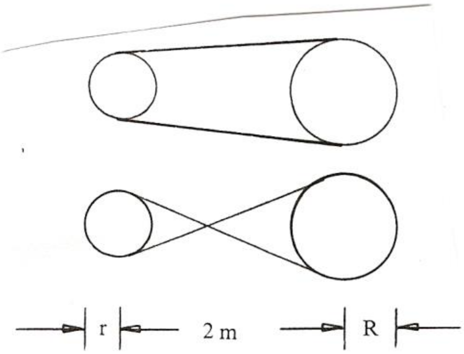
۲۲ - د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو ښه لید د ماترهورن (ماترنښکر یا د ماترن د غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی دی) اچول کیږي که دا د یوه لیدټکي څخه چی ۱۰۰ متره جګ دی د ډنډ په لور ښکته وکتل شي، نو د غره د څوکي هندارونه د 12° پریوتکونج لاندې لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج 11° لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ باندې د ماترنښکر څوکه څومره جګه پروته ده؟

څیره

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۵



خیره ۲۲۶

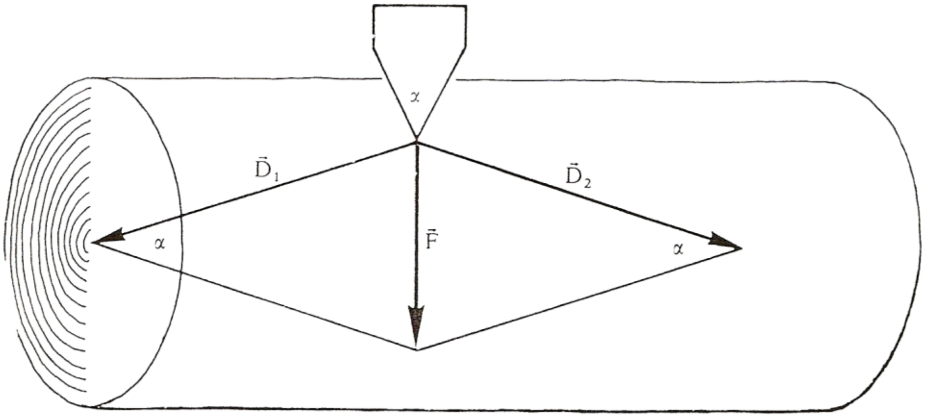
۲۳ – الف) یوه د کشولو کړۍ، چي په دوه دکښولو چیترو باندي راتاو ده، څومره اوږده ده، که لاندي اندازي ولري $r = 22\ cm$, $R = 35\ cm$, $|M_1M_2| = 2m$?

ب) دا کړۍ به څومره اوږدې وي که د اتیران په څیر له چیتروګانو یا تیکلیو راکي څیدلی وي ؟

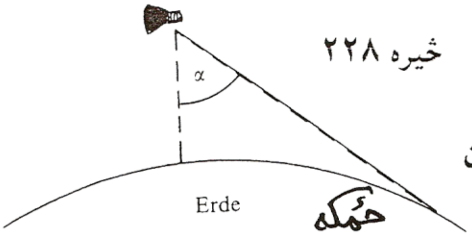
(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۴ الف) د ونی په ستنه یو کایل)موږی) په څنډك د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D څومره لوي دي، کوم چې د ستنې درځونه ، که د کایل یا تیرګي کونج $\alpha = 6°$ وي. (حیره ۱۹۴)؟

ب) په کومکایلکونج یا تیرګیکونج لرو: $|D|=|F|$ ؟



څیره ۲۲۷

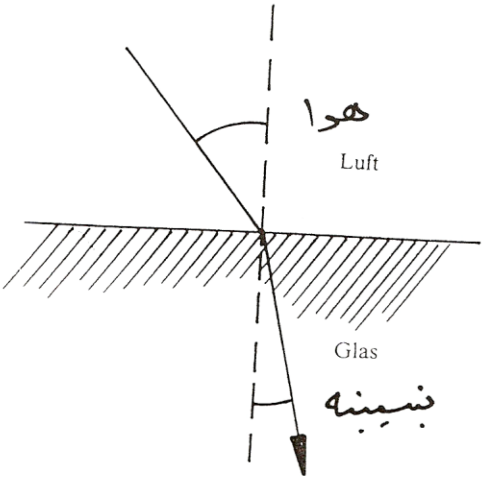


څیره ۲۲۸

۲۵ – د یوه الوتماشین څخه ځمکه د یوه α کونج لاندې لیدل کیږي (څیره) دا الوتماشین څومره جګ الوزې ؟ (د ځمکې وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره)

۲۶ – یو ګادی د $v_{\alpha} = 120km/h$ سرعت سره روان دی، نو د باران څاڅکی په پټلی د تلنلور باندې په $= 115°$ کونج

(c) ketabton.com: The Digital Library



خيره ۲۲۹

د چيترو (مطلب د ګاډي د اوسپنی ټير يا ګاډيل دی) مخامخ ځغلي. له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو د لويدلو سرعت v_g وټاکی ؟

۲۷ – که د لمروړانګه په دوه مختلفو طبقو ولوېږي، نو خپلی لور ته تغير يا بدلون ورکوي. د سنيليوس Snellius د ماتقاعدې له مخی کيدی شي چی د ماتيدو قانون وشميرل شي. دا قانون وايي، چی پروتوړانګه ، ماتوړانګه او ولاړکرښه يا عمود په بيليدونکی هوارې په يوه هواره پراته دي او برسيره پر دې لاندې اړيکي باور لري يا صدق کوي:

$$\sin \alpha \;/\; \sin \beta = n$$

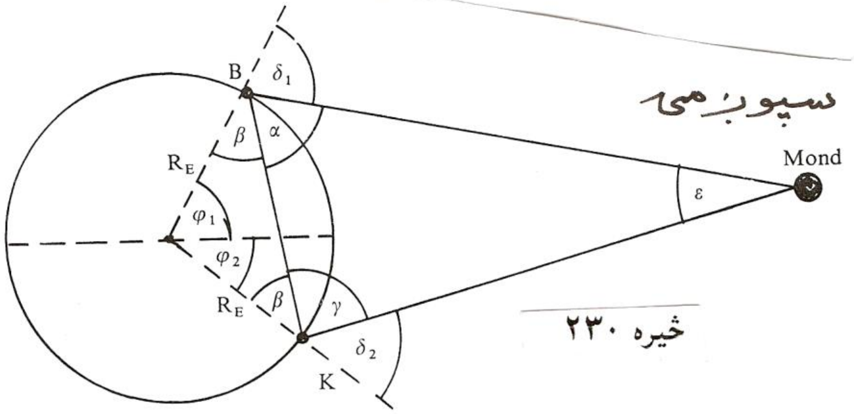
که د رڼاوړانګه په يوه ښيښه (اوبو) پريوزي، نو n = 1,5 (1,33) دی وښايي، چی ماتکونجونه څومره لوی دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

؟ 10,5°, 15,8°, 27,3° , 41,2°,67,6°,, 72,4°, 81,9°

۲۸ – په ۱۸ –مه ميلادي پيړی کی د سپوږمی لريوالی تريګومتريکي وټاکل شو. په برلين کی (جغرافيوي اوږدوالی $\varphi_1 = 52,52°$) او لکه د ښو هيلو په کونج کی ($\varphi_2 = -33,93°$)، کوم چی په همغه اوږدګراد پراته دي، د سپوږمی سره په همغه وخت کی تړل کيږي. له دې لاس ته راغلل: $\delta_1 = 32,08°$ او $\delta_2 = 55,72°$.

وشميری |KM| , ß , |BK| او له دې څخه d_{EM} .

(c) ketabton.com: The Digital Library



څیره ۲۳۰

۲۹ – لړځیدنی Schwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعني د وخت t تړواك لاندې دي. دا د بلواك $y = a . (\sin (2 \pi /T)) .t + k)$ له لارې ورکړ شوي. دلته $(2 \pi / T) t = x$ هغه کونج دی ، کوم چي په T وخت کی وهلکیږي. $1 / T = f$ د یوه څرخون پریود یا راگرځیدنی وخت په گوته کوي او د لړځیدنی دوام بلل کیږي» f فرکونځ frequenz بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې څنګه یوه ګنډیری پر بله ګنډیرۍ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \qquad (7,1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په رییلګڼونډیرۍ کې اوبی یا حل نه لري، نو له دې امله باید (7 , 1) د ګڼنو ډیرۍ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, ... (7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي حٔل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ...(7,3)$$

لیکو : دا پورته د لاندې سره

$$i^2 = -1 \qquad (7,4)$$

د (7,1) ځاي نیسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رییل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینارګڼ imaginär(لاتین: فقط خیالي)یوون(واحد)وایو.

برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$x^2+a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a \quad , a > 0 \qquad (7,5)$

کیدی شي په لاندې ډول ولیکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a.i}, ...(7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a.i}$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, ...(5,7)$$

اوس د ایماجینار ګڼ یوون(واحد) تولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, ...(5,8)$$

ایماجیناریوون(واحد)z= i یو ځانګړی ایماجینارګڼ b=1 دی

د تولیزې څلوری (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, ...(7,9)$$

په لاندې ډول د څلوری پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2 / 4$$

لاس ته راځی یالرو<=

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 = +(q - p^2/4) \qquad (7, 10)$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7, 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x+p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$$

نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \qquad (7,12)$$

د$p^2 = 4q$ لپاره رییل «ډبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رییل اوبیونې یا حلونه منځ ته راوړي٠

که $P^2 < 4q$ وي، نو رییل اوبی نه شته دئ

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a, b \in R$$

د دې فورم یا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کیږي

$$z = a+bi\ ,\ i^2 = -1;\ a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډیرئ په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z} = a - bi, \qquad (7,14)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګيري کمپلکس ګڼ بلل کيږي٠ لنډ کنجوګيري کمپلکس ګڼ يا اوښتی ګڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, ...(5,15)$$

د دې مطلقه يا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رييل همدا رنګه ايماجينار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کيږي، که دوي په رييل او ايماجينار برخه کې يو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

موږ تل په پام کې لرو، چې$i^2 = -1$ اينبول شوی

ګڼوله يا کمپلکس عدد کيدی شي په سطحه يا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سږی د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شميرنه کوي، لکه د حقيقي اعدادو سره او په پام کې نيسي چې:$i^2 = -1$

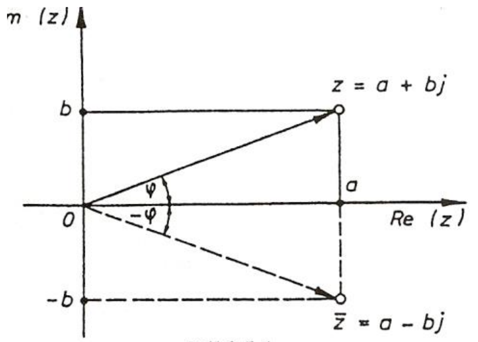


Bild 5.1

موږ دې سيستم ته پروت ولاړ سيستم وايو يا کواورديناتسيستم Koordinaten systm

پورته ځيره دې وکتل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وایي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون(محور) د x - محور ته د هوارې یاسطحې ریلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته یېایماجینار برخه وایې لکه څنګه، انځور شوي دي٠ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر اځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي٠(موږ دا اوس دا برخه نوره نه څیړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځوریږي او کارونی یا عملي یې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه : هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنی د دې برخې سره بلدیږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځنې وییونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څیرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون څنګه دی

۷ ۰ ۱ زیاتون او کمون:

لاندې څیرو ته دې پام وي او ګورو، چې رییل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), ...(7,17)$$

بیلګه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$\begin{aligned}
&z_1 = 2-3i, z_2 = 3+2i \\
&\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1-5i \\
&\Rightarrow \\
&| z_1 | = \sqrt{2^2+3} = \sqrt{13}, | z_1 | = \sqrt{13} \\
&-z_1 = -2+3i, -z_2 = -3-2i
\end{aligned}$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعنې د(z2-) په زیاتون)کیدی شي د څېرې ۵ (په همدې توګه د څېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

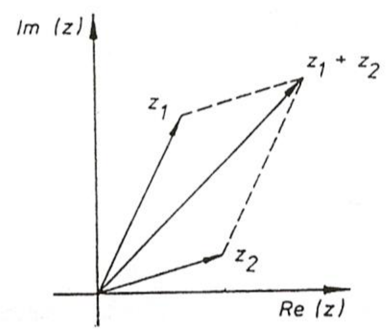


Bild 5.2

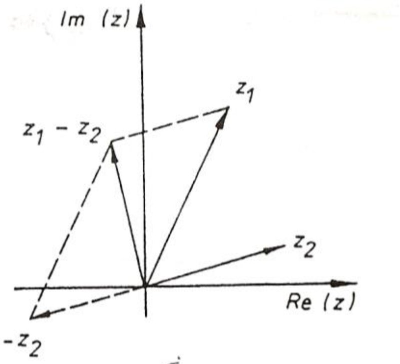
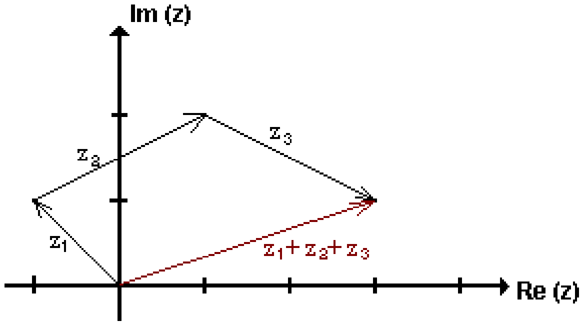
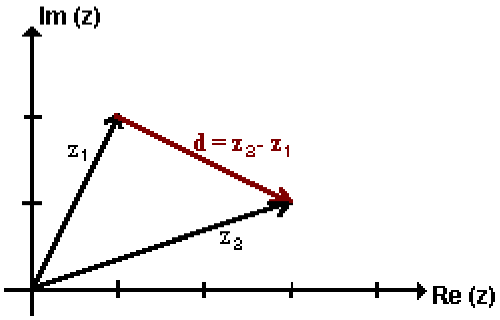


Bild 5.3

یا لاندې:



په پورته او لاندې ځیرو کې د کملپکس ګڼونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیږي۰



دکملپکس ګڼونو ارزښت

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کیږي۰

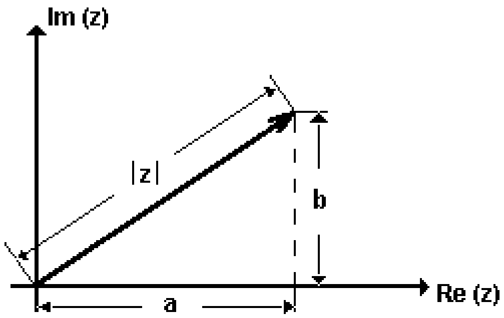
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د په |z| سره ښايو او د پيتاګوراس(فئثاغورث) د جملې

سره ښوول کيږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی ليکه

هم وکتل شي٠ مخامخ څيره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښايي



$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

په درې ګوډي کې د اړخونو ځاننيونه يا تباسب له امله باور لري

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, ...(7,18)$$

برسيره پر دې باور لري:

$$z_1 + z_2 = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

۷ . ۲ د کمپلکس ګڼونوځل:

د ورسره بلد نوک اينوولو له لارې لاس ته راځي

$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$

$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 (-1)$

$\Rightarrow$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو باروړل ري

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2 - b_1 b_2)+(a_1 b_2 +a_2 b_1)i \qquad (7 , 20)$$

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتين توري په بدل ډول ليکل شوي، چې دا هم زما تخنيکي ستونځې دي، دا که په هرځايکې وي،دا به راته ګران د شميرپوهنې مينه وال وبخښي٠ دا لاندې هم ساده ازمايل کيدی شي

$$\overline{z_1.z} = z_1.z_2 \quad , \quad |z_1 .z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بيلګه ۷ ۰ ۲

د $z.\bar{z} = (a+bi) (a-bi) = a^2+b^2+(-ab + ab)i =a^2+b^2$

او (۱۵ ، ۷) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7 , 22)$$

۷ ۰ ۳ ويش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1i):(a_2 +b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{\bar{z}}_2}{z_1\bar{\bar{z}}_2} = \frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)} = $$

$$= \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i} = \qquad (7,23)$$

$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسی لاس ته راځي

$$|\frac{Z_1}{Z_2}| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوېمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{\overline{Z}_1.Z_2}{\overline{Z}_2.Z_2} = \frac{(a_1-b_1i)(a_2+b_2i)}{(a_2-b_2i)(a_2+b_2i)} =$$

$$= \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2-a_2b_1)i}{a_2^2+b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} - \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} i = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ ۰ ٤ :د او $Z1$ لپاره له $Z2$ سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13}i = -i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z = 1 - i$ b) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

c) $z = 2(1 - \sqrt{3}i)$ d) $z = -1-i$

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $|z|=\sqrt{2}$ b) $|z|<\sqrt{2}$ c) $|z|>\sqrt{2}$ d) $|z|=r$

۲ – جمعه او تفریق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شميرنې او کارنې يا رسم کونې له لارې پيدا کړئ

a)(1+2i)+(2+i) b) (-2+i)+1-2i)

c) (1-2i)-(1-2i) d) (-1-2i)+(2-i)

۲ . ۲ - د شميرنې او کارنې يا رسم کونې له لارې پيدا کړئ

a) (22 + 5i) + (2 + i) b) (3 + 2i) - (5+2i)

c) (1+2i) - (1+2i) d) i -(1-2i)

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقيقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشميرئ

a) $(2+\sqrt{3}\,i).(3-\sqrt{2}i)$ b) $(3+2\sqrt{2}\,i).(3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1+\sqrt{5}\,i).(1-\sqrt{5}\,i).(13-12i))$ d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i}\,.\sqrt{3-\sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشميرئ

a) $(x+y\,i)\,(2x+yi)$ b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a-3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a+5bi\right)$ d) $(c-\sqrt{d}\,i)(-c-2\sqrt{d}\,i)$

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج يا ماتلاندې حقيقي ورګرځوئ (a ، b حقيقي دي)

3.3.1. a) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\dfrac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\dfrac{56+33i}{12-5i}$ d) $\dfrac{63+16i}{4+3i}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\,(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رایوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګڼونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\,\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکې x وشمرئ.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\,\frac{i}{4}.$

وشمیرئ:

4.1.	a) z_1+z_2	b) z_1-z_2	c) $z_1\cdot z_2$	d) $\frac{z_1}{z_2}$
4.2.	a) $\lvert z_1\rvert$	b) $\lvert z_2\rvert$	c) $\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$	d) $\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$
4.3.	a) $\lvert z_1+z_2\rvert$	b) $\lvert z_1-z_2\rvert$	c) $\overline{z}_1+\overline{z}_2$	d) $\overline{z}_1-\overline{z}_2$
4.4.	a) $\lvert z_1\rvert\cdot\lvert z_2\rvert$	b) $\frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$	c) $\lvert z_1\cdot z_2\rvert$	d) $\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $x^2 + (1 + i)\,x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\,x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\,\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

d) $16\,x^2 + 8\,(i + 1)\,x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

همدا موضوع له بلکتاب څخه

7 . ایماجینار او کمپلکس ګڼونه

Inhaltsverzeichnisخوندیونه

- د رييلو ګڼونو بنستونه او نيوني يا فرضيي
- ایماجیارګڼونه

کمپلکسګڼونه

- په ګڼونهواره کې د کمپلکس ګڼونو انځورونه
- د کمپلکس ګڼونو سره شمیرنه
- د کمپلکسګڼونو زیاتون ، کمون
- د کمپلکسګڼونو ځل
- د کمپلکس ګڼونو ویش
- د کمپلکس ګڼونو تولګنيز په توان
- د بينوم درسي جمله
- د موفري فرمول 5.6 Die Moivreschen Formeln
- د کمپلکس ګڼونو ريښه 5.7 Wurzeln aus komplexen Zahlen
- توان د مختلفو جګګڼونو سره
- 5.8 Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

د ريیلګڼونو بنستونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریيلګڼونو ډیرۍ لکه د مخه مو ، چې ګوته ورته ونیوله د راشنل او ایراشنل ګڼونو له ډیریو جوړه ده (د ریيلګڼونو برخه دې وکتل شي).

ایماجینار ګڼونه Imaginäre Zahlen

د ریيل ګڼونو سیستم پوره نه دی، ګورو، چې د یوه ګڼ ځلورۍ یامربع، چې د کمیز ګڼ سره برابره وي، ریيله اوبیونه یا حل نه لري لکه لاندې

$$x^2 = -1$$

داسې یو ریيل ګڼ نه شته، چې پورته پوره کړي

یوه فورمال اوبیونه یې په لاندې ډول ده

$$x = \pm\sqrt{-1}\,,$$

چیرته ، چې $\sqrt{-1}$ ریيله اوبیونه نه ده.

دا ځلورۍ یا مربع ریښه د i سره په نخښه کوو، چې له دې پرابلم څخه ووتی شو او ځلورۍ یې په 1 - سره په نخښه کوو۰

د دې i لپاره باور لري:

$$i^2 = -1$$

اوس کړی شو، چې ولیکو

$$x_{1,2} = \pm i\,.$$

که ګڼ i د ریيلګڼونو سره زیات ځل یا ضرب کړو، نو د ګڼونو یوه د نوو ګڼونو ډیرۍ ترې لاس ته راځي، د بیلګي په توګه :

$$2i,\ 3i,\ -i,\ 1+i,\ 2+i,\ 1+2i,\ -23+78i,\ 0.45-0.93i$$

او داسې نور.

تولیزه بڼه یې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$a + bi ,$$

پورته ګڼ کمپلکس ګڼ دی او a او b رييلګڼونه٠ له دې سره هم لکۀ د نورو ګڼونو سره ساده شمیرل کيږي، چیرته، چې د i^2 په ځای 1 - ليکلی شو يا په ځټ: لاندې کې يې بيلګې ګورو

$$(1 + 2i) + (3 + 4i) = (1 + 3) + (2 + 4)i = 4 + 6i$$

په ټوليزه توګه:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

له دې سره ويش هم کړی شو، خودا ، چې ستونځمن دی وروسته يې راوړو.

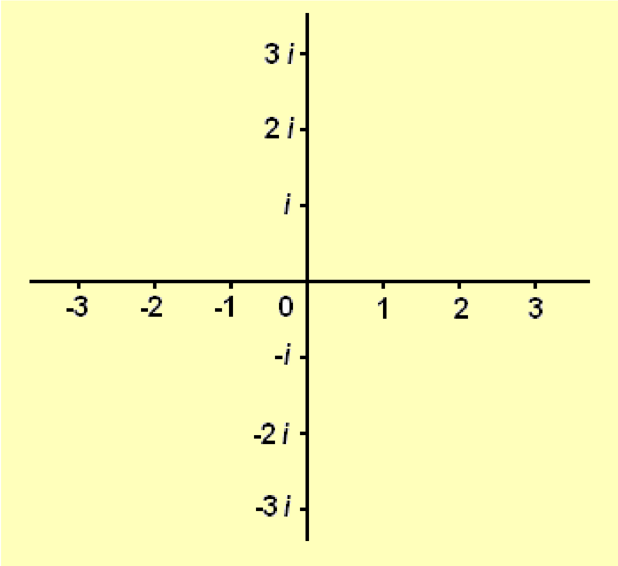
دا لاندې هم لرو

i.2i,i,0,-i,-2i,-3i٠٠٠3.....

دا ايماجينار ټولګڼونه بلل کيږ ي يا بولو ، چې دا هم صفرلري

موږ په لاندې کې د هوارې پروت محور لاندې د رييلګڼونو محور پوهيږو او ولاړ محور يا څرخونی يې د ايماجينار ګڼونو محور دی، چې د دواړو زياتون کمپلکس ګڼونه دي يا د کمپلکس ګڼونو هواره انځوروي٠.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په لاندې کې يو کپلکس ګڼ په يوه ريبل ګڼ يا پيداينتي ګڼ ويشل کيږي

$$mi : n = \frac{m}{n}i \ .$$

په پورته کې m او n ريبلګڼونه دي او ايماجينار

$$x^2 = -a^2$$

په پورته کې a ريبلګڼ دی، خو x غواړو لاس ته راوړو، لاس ته راوړنه يې يو ايماجينار ګڼ دی.

د دوه ايماجينار ګڼونو زياتون او کمون::

$$a\,i \pm b\,i = (a \pm b)\ i \ .$$

ځل او ويش يې

$$\frac{i}{i} = 1 \ .$$

د دې سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$pi \cdot qi = -pq$$

او

$$\frac{pi}{qi} = \frac{p}{q}\,,$$

چيرته چي p او q ريللګنونه دي.

لاس ته راوړنه : د دوه ايماجينار ګڼونو ځل يا ضرب او ويش څخه رييلګڼ لاس ته راځي، چي په لاندې کې يې ګورو .

$$i^2 = -1\,, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i\,, \quad i^4 = i^3 \cdot i = 1\,, \quad i^5 = i^4 \cdot i = i\,, \ldots$$

د ټولګڼ n لپاره لرو:

$$i^{-n} \equiv \frac{1}{i^n}$$

لاس ته راوړنی يې

Error!

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i\,, \quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1\,, \quad i^{-3} = \frac{1}{i^3} = -\frac{1}{i} = i\,, \quad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = 1\,, \ldots$$

د سره شميرل ورسته کيدونکي دي.

Komplexe Zahlen کملکس ګڼونه

ګډ يا مخطلت څلوری - يا مربع برابرون شميرو

$$x^2 - 4x + 13 = 0\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځلورئ پوره کوونې یا تکمیلوني له لارې ، چې ورسره بلد یو ، اوبیونه یا حل پیداکوو

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3\,i\ .$$

د دې برابرن اوبیونه نه رییل ګڼ دئ او نه ایماجینار ۰ دې ګڼ ته موږ کمپلکس ګڼ وایو **komplexe Zahlen**.

د کمپلکس ګڼونو او د دې سره سره شمیرنه ۰

موږ دا لاندې کمپلکس ګڼ لرو :

$$z = a + b\,i,$$

چیرته، چې a او b رییل ګڼونه دي

د کمپلکس ګڼونو په مرسته کړای شو، چې بې بندیزه ځلورئ- یا مربع فرمولونه اوبې کړو

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

لاس ته راځي.

دلته چې څه راځي هغه ګران لوستنکی پخپله هم پیدا کولی شي، زه به وهڅیږم، چې دا پرابلمونه پورته کړم یا لرې کړم ،

د لاندې لپاره

$$\frac{p^2}{4} - q \geq 0$$

یو یا دوه رییل اوبیونې لاس ته راځي۰

د

$$\frac{p^2}{4} - q < 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره اوبیوني په لاندې ډول لیکل کیږي

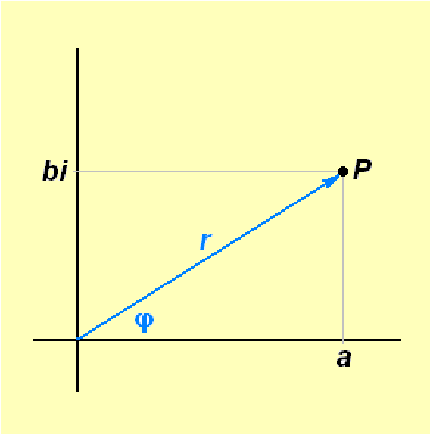
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\ .$$

اوبیوني کنجوګیري کمپلکس دي، دا په دې مانا، چې یو له بل د مخنخښي له مخه توپیر کیږي٠

په ګڼونهواره یا ګڼسطحه کې د کمپلکس ګڼونو انځورونه

د کمپلکس ګڼونو ګرافیکي انځورونې لپاره هواره ځان رامنځ ته کوي، چې د رییل او ایماجینارګڼکرښو څخه غزيدلې ده٠

کمپلکس ګڼونه a + bi د ټاکنې له مخې(په بدل وار یا همغه وخت) د یوه ټکی P ، چې کواوردینات یا پروت ولاړ محورونه یې a او b ، چیرته، چې محور b ټکی bi په ایماجینار ګڼکرښی باندې په ګوته کوي، یا د» ښوونکرښې « OP سره انځور کیدی شي٠ دا د یوې اوږ دې r سره ښایو او د رییلې محور سره کونج fi جوړوي٠ (دا همغه د ټکی P انځورول دي په پولار کواوردینات کې، r د کمپلکس ګڼ مطلق ارزښت دی، fi یې فاز بلل کیږي٠



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوارو انځوربنې لپاره لاندې ترانفورمیشنبرابرون باور لري(له دې څخه نوج زده کوونکي تیریدلی شي، چې ترانسفورمیشن باندې نه پوهیږي)

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}\,, \qquad a \neq 0$$

$$a = r\cos\varphi\,, \quad b = r\sin\varphi\,.$$

له $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ لاس ته راځي

$$\varphi = \arctan\frac{b}{a} + k\cdot 2\pi, \quad \text{wobei} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{b}{a} < \frac{\pi}{2} \quad \text{und } k \text{ ganzzahlig ist.}$$

په پورته کې wobei د کوم سره یا چیرته چې په مانا دی او k ټولګې دی ۰

ارزښت

$$\varphi_0 = \arctan\frac{b}{a}$$

د في φ اصلي ارزښت بلل کیږي۰ له دې نور ارزښتونه د k او 2π له زیاتون څخه لاس ته راځي۰

د دې له مخې کیدی شي، چې کمپلکس ګڼ په لاندې توګه ولیکل شي ۰

$$z = a + bi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.$$

" وروسته د اویلر فرمول "Eulerschen Formel په مرسته ترې لاس ته راځی

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

دریمه انځورونه یې لاندې ده:

$$z = a + bi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\,e^{i\varphi}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کمپلکس ګڼ دا درې انځورونې په ترتيب داسې بلل کيږي اريتميتيکي بڼه کونومتريکي (يا تريګنومتريکي بڼه) او اکسپوننشل بڼه.

دا چې د اويلر فرمول وروسته ښوول کيږي، اکسپوننشل بڼهٔ دې دلته راوړل شوي وي، خو د ښووني لپاره دې تري کار نه اخستل ک يږي.

Rechnen mit komplexen Zahlen

د کملپکس ګڼونو سره شميرنه

دوه کملپکس ګڼونه دې ورکړ شوي وي

$$z_1 = a_1 + b_1 i\,, \quad z_2 = a_2 + b_2 i\,.$$

د کمپلکش ګڼونو زياتون او کمون

په زياتون او کمون کې د الجبر ي قوانينو له مخې i هم داسې په کار اچول کيږي لکه هره بله کومه د تورو لويه ، چې په کار اچول کيږي يا کارول کيږي

$$z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$$

$$z_1 - z_2 = a_1 + b_1 i - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i$$

د کمپلکس ګڼونو « ښوونکرښه» (دا هغه کرښه ده، چهٔ د دواړو محورونو صفر ټکو څخه د هغه په هواره موخه ور ټکی په لور ګزيدلی وي، ياني د صفر ټکی څخه د هغه بل موخه ټکی په لور ، څکه لوريزه ده)لکه وکتورونه سره زياتيدلی او کميدلی شي

Das Produkt komplexer Zahlen

د کمپلکس ګڼونو ځل

دی

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i.$$

دا ځل ترلی پيژند وړ ليدونکي مانا نه لري(ياني سملاسي تری څه نه شو پوهيدلی) . که د دې په ښټ « پولارکواودينات » وکارول شي، نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_1a_2 - b_1b_2 = r_1r_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) = r_1r_2\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)$$

$$a_1b_2 + a_2b_1 = r_1r_2\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2\right) = r_1r_2\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right).$$

او له دې سره

$$z_1z_2 = r_1r_2\left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right].$$

نو دی

$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2| \quad \text{او} \quad \varphi\left(z_1z_2\right) = \varphi_1 + \varphi_2.$$

د ځل – یا ضرب ارزښت د ارزښتونو ځل دی٠   د ځل یا ارګومنت یا فازې د ارګومنت یا فازې د زیاتون سره برابر دی٠

سملاسې پیژندل کیږي، چې دا د دوه فاکتورونو څخه زیاتو فاکتورو یا ځله وونو لپاره هم باور لري

$$|z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n| = |z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_n| \quad \text{او} \quad \varphi = \varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n.$$

د کمپلکس ګڼونو ویش Division komplexer Zahlen

په ورته توګه پیدا کیږی، که z_2 د صفر سره برابر نه وي

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{او} \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

که کیږدو $z_1 = 1$ او $z_2 = z$, نو لاس ته راځي:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\left[\cos(0-\varphi) + i\sin(0-\varphi)\right] = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او په ځانګړي ډول د $z = i$

$$\frac{1}{i} = -i.$$

Ganzzahlige Potenzen einer komplexen Zahl

د کمپلکس ګڼونو توان (کپلکس ګڼ د يوه ناکميز توان سره د رييل ګڼونو په څير دی)

$$z^{-n} \equiv \frac{1}{z^n}.$$

د کمپلکس ګڼونو ځل دې وکتل شي

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n| \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n.$$

د همغه ځله وون يا ضريب z لپاره ترپلاس ته راځي

$$z^n = |z|^n \left(\cos n\varphi + i \sin n\varphi\right).$$

موږ لرو

$$z^p \cdot z^q = z^{p+q}, \quad \left(z^p\right)^q = z^{p \cdot q}, \quad z_1^p \cdot z_2^p = \left(z_1 \cdot z_2\right)^p, \quad \frac{z^p}{z^q} = z^{p-q}, \quad \frac{z_1^p}{z_2^p} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^p.$$

Der binomische Lehrsatz

د بينوم درسي جمله

د بينوم جملي لپاره هم لرو

د نوکانو د چاون قانون او ځل قانونو د زياتيز جګ ګڼ لپاره د بينوم جمله همغسي باور لري

$$(z_1 + z_2)^n = \binom{n}{0} z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \ldots + \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k + \ldots + \binom{n}{n} z_2^n.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځایه ښکته د ښوونځي زده کوونکو لپاره ستونځمن دی.

د موفری قانون Die Moivreschen Formeln

له برابرون څخه (پورته دې وکتلشي)

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

لاس ته راځي

$$|z| = 1: \qquad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

له بلې خوا د زیاتیز تولګنیز جګګڼ یا اکسپوننت سره د بینوم جملې څخه لاس ته راځئ:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + i\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi$$

$$-i\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi + \ldots + i^n\binom{n}{n}\sin^n\varphi.$$

که د برابرون دوا

ړه خواوې برابر کېنول شي او بیا په پام کې ونیول شي، چې رییل او ایماجینار برخه دوآړه باید برابر وینو د موفري برابرون ترې لاس ته راځي **Moivreschen Formeln**:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi - + \ldots,$$

او

$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi - + \ldots,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چيرته، چې ښی لور ترهغې پوره شي، تر څو چې ځله وونی یا ضریب صفر شي.

د کمپلکس ګڼونو ريښه Wurzeln aus komplexen Zahlen

د برابرون اوبيونه

$$x^n = z \qquad \text{n positiv ganzzahlig}$$

پورته کی n زياتيز ټولګڼ دی
د کمپلکس ګڼ z n -مه ريښه بلل کيږي :

$$x = \sqrt[n]{z}.$$

ږدو

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

او

$$x = \rho\left(\cos\psi + i\sin\psi\right),$$

د $z = x^n$ له امله لاس ته راځي

$$\rho^n = r \quad \text{und} \quad n\psi = \varphi$$

او د دې پسې

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{\varphi}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي

په ويشنه کې بايد په پام کې ونيول شي، چې ارگومنت يا پروتمحور φ پريودي يا تل بيرته راگرځيدونى دى د پريودې يا راگرځيدنى 2π سره ، نو

$$\varphi = \varphi_0 + k \cdot 2\pi \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

پسې د ψ لپاره تيک *n* مختلف ارزښتونه لاس ته راځي، ياني

$$\psi = \frac{\varphi}{n},\quad \frac{\varphi + 2\pi}{n},\quad \frac{\varphi + 2\cdot 2\pi}{n},\ \ldots\ \frac{\varphi + (n-1)\cdot 2\pi}{n}.$$

د $n = k$ ځانلۀ د مخه ارزښتونه (له دويم پسې) تکرارېږي، نو باور لري:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right) \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (n-1)$$

هر له دې ارزښتونو د کمپلکس گڼ z د n-مې رېښنه بلل کيږي

$$\sqrt[n]{z} \quad \text{oder} \quad z^{\frac{1}{n}}$$

دا ټول n ارزښتونه په گڼهواره په يوې گردى په O په يوه منظم n - گوډې پرته ده , د څلورى ريښى لپاره له

$$i = i\sin\frac{\pi}{2}$$

لاندې ارزښتونه ترې لاس ته راځي

$$\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4},$$

او د څلورى ريښې لپاره له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-i = i \sin \frac{3\pi}{2}$$

پیداکیږي

$$\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}.$$

که موږ ونیسو لکه د رییل ګڼونو لپاره

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$$

دې وي، چیرته چې n یو پیداینتج ګڼ او m یو په خوښه ټولګڼ دی، نو له دې سره د کمپلکس ګڼ سره جګګڼ یا کسپوننت وپیژندل شو یا تعریف شو٠ اوس نو اخرنی پل پاتې ، چې هغه د ایراشنلجګګڼ دی .

توان د په خوښه رییل جګګڼ سره

Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

اوس دې z له صفر مختلف په خوښه کمپلکس ګڼ وي .

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = r\left[\cos\left(\varphi + k\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\varphi + k\cdot 2\pi\right)\right],$$

چیرته چې

$$k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

دی ، نو د z^{ν} (ν رییلreell) لاندې هر دالاندې کمپلکس ګڼ پوهیږو:

$$r^{\nu}\left[\cos\nu\left(\varphi + k\cdot 2\pi\right) + i\sin\nu\left(\varphi + k\cdot 2\pi\right)\right].$$

لاربښود : د داسې په ټولیز پیژند یا تعریف سره د کمپلکس ګڼونو توان لپاره د د توان شمیرنې بنسټیز قوانین باور لري ، یانې

$$z^{\mu}\cdot z^{\nu} = z^{\mu+\nu}, \quad z_1^{\mu}\cdot z_2^{\mu} = \left(z_1\cdot z_2\right)^{\mu}, \quad \left(z^{\mu}\right)^{\nu} = z^{\mu\cdot\nu}$$

nicht mehrنور بس دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ ترانسڅندنت برابرونه یه ـ مساوات

دلته یواځي هغه ترانسڅندنت مساوات څېړل کیږي، کوم چی بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي. دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په رینه مساواتوکی، په خوبنه په بل شکل اړول کیږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چی اړولی فرمول زیاتي اوبیوني یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون ټولې اوبیونې په پیل برابرون کی ځای په ځای یا کیښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په رینه یي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځی رییل اوبیوني پلټل کیږي.

۱۳ . ۱ لوګاریتمي مساوات

د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چی د یو عدد(ګڼ) aلوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅیړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 ....(13,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنسټ b = 10 لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کيدی شي (۱۳ . ۱)

سيده د جبشميري له لارې پيداشي. په ځتې يا برعکس د 10 =| b =|e لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کيږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b ....(13.2)$$

د لوګاريتمي مساواتو يو ساده ډول يا شکل (تيپ) دا دی

$$l\,og_b\, x = c ....(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱) ، (7. ۲) له مخی لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c ....(13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشميري سره شميرل کيدی شي.

بيلګه ۱۳ . ۱ $: \log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بنې اوبيونه په لاندې ټوليز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c ....(13,5)$$

دلته (f(x يوه الجبري وينه يا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کټمټ (ورته) دی

$$f(x) = b^c ....(13,6)$$

ټولې د (۱۳ . ۶) اوبيونې د (۱۳ . ۵) اوبيونې هم دي

بيلګه ۱۳ . ۲ : لوګاريتميز برابرون

$$\log_2(x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کټمټ دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x^2+x+6=2^3= 8$ (همداسی) ⇔ $x^2+x-2=0$

او لاندې اوبیونې لري

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}; x_1=-2; x_2=1$$

یو د (۱۳ . ۵) ډول (تیپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کینه لور (ارخ) ته یود لوګاریتم ریشنل لاینیز کمبینشن الجبري وبینه یا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x)+r_2.\log_2(x)+r_3.\log_b g_3(x)+...=c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل کنونه دي. د لوګاریتم قوانینو (۷. ۷) ، (۷. ۹)کاروني یا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x)=\{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}....................................(13,8)$$

بیلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x-1)+\frac{1}{2}\log_3 x-\frac{1}{2}\log_3(x-1)=2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log[(x-1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې څخه ربینه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1}=9$ ،

د کوم له څلوری یا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ یعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{324}{4}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{325}{4}}=\frac{1}{2}\pm(\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1=9,515; x_2=-8,515$$

تیك دا $x1 = 9,515$ پیل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره log x او په همدې ډول log(x-1) پیژند نه لري یا تعریف نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)] = 1$$

او نور پسې $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$

$b+3=x(b-2)$

$x=(b+3)/b-1)$

پيل وينه يا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره يا هدفمنده ده، يعني که $1<(b+3)/b-2)$ وي.

د $b>2$يعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$

له دي لرو $-2<3$دا د ټولو b لپاره پوره دی

د. $2 \le b$ لپاره د $b+3 \le b-2$ $b+3 < b-2$ څخه $2 \le 3$ لاس ته راځي

اودا د هيڅ b لپاره باور نه لري .

له دي امله کره د $2 < b$ لپاره اوبی شته دی. د $2 \le b$ لپاره اوبيونه نه شته دی.

د لانديِ لوګاريتمي تيپ برابرون هم کيدی شي په الجبري مساواتو بيرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13.9)$$

چيرته چی F او هم f الجبريزيِ ويني يا افاديِ دي. د بدلون کاروايي يا عمليه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x)....................................(13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13.11)$$

ددي اوبيونه ..$y1,y2$ په (۱۳/۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تيپ (۱۳/۵)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاريتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i ;\quad i = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots \qquad (13.12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13.13)$$

ددې لپاره چې و ازمائيلى شو چې ايادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبيوني يا ځوابونه بايد په پيل برابرون (١٣/٩) کې کينوول شي يا ځاي په ځاى شي،

بيلګه ١٣ . ٥ : برابرون $\log^2 x-\lg x-2=0$ د سبستيځيوشن(بدلون) $y=\lg x$سره په څلورى برابرون $y^2-y-2=0$ بدليږي .

د $y1 = 2$ او $y2 = -1$ ځوابونو سره

له. $\lg x=2$ او $\lg x=-1$ لاس ته راځي

$x1 = 10^2=100$ او $x_2=10^{-1}=\frac{1}{10}$

دواړه ځوابونه د پيل برابرون ځوابونه دي.

بيلګه ١٣ . ٦ :

له برابرون $(6 /(\lg x +1)) + (8 / (\lg x -1)) = 3$

د,$x>0$ مګر $(x \neq 1/10,\ x \neq 10)$ چې د اصلي ماتلاندي $(\lg x+1)(\lg x-1)$ سره ځل شى، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x-1)+8(\lg x+1)=3(\lg^2 -1)$$
$$,\quad 6\lg x-6+8\lg x+8=3\lg^2 x-3$$
$$0=3\lg^2 x-14\lg x-5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې څلورى بڼې يا مربعفورم ته بيايي:

$$3y^2-14y-5=0\ ,\ y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_{1,2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{15}{9}}=\frac{7}{3}\pm\frac{8}{3};y_1=lox_1=5;y_2=\lg x_2=-\frac{1}{3}$$

$$x_1=10^5;x_2=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پيل مساوات پوره کوي.
که په يوه برابرون کی لوګاريتمونه د مختلفو بنسټونو bسره رامنځ ته شي،
نو کيدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بيلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1)+\log_4(x-1)-1=0$

ښخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1)=\frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1)+\frac{1}{2}\log_2(x-1)-1=0,\ \log_2(x-1)=\frac{2}{3},\ x-1=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4},$$

$$x=1+\sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پيل برابرون اوبی يا ځواب هم دی:

$$\log_2\sqrt[3]{4}+\log_4\sqrt[3]{4}-1=\frac{1}{3}\log_2 4+\frac{1}{3}\log_4 4-1=\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}-1=0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – يا په ځګګڼ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x=b;a>0,a\neq 1,b>0..............................(13,14)$$

کيدی شي چی د لوګاريتم نيولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x=\log_a b=\lg_b/\lg_a=\ln b/\ln a \qquad (13,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تیوپ)
برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2)+3^x(3^2-3)=0, \text{ bzw. } 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x, \text{ bzw. } \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg \frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري وییني یا افادي($f(x)$ اکسپوننتونه
یاجګګنونه وي، نو:

$$af(x)=b,a>0\ ,a|=1,b>0 \qquad (13 . 16)$$

په دې ډول د لوګاریتمولو له لارې یو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b ....(13,17)$$

د کومو ځوابونه چې د (۱۳ . ۱۶) ځوابونه هم دی.

بیلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4} = 4$
مو لاندې خلورى برابرون یا مربع مساوات ته بیایي (لاربنودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1 = 2 , x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چې د پیل برابرون اوبیونې یا
ځوابونه هم دي٠

بیلګه ۱۳ . ۱۰ : په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کې د یوه پوتنځ بنسټ د
بل پوتنځ د بنسټ په څېر ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3 \ , \ x_2 = -4$$

بيلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کی کيدی شي چی ناپيژندونکی د اکسپونتت يا په جګ څخه د دوه واره لوګاريتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \qquad \text{يا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = 1.$$

بيلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

يو د تيپ (۱۳ . ۱۶) مساوات دی، څکه چی باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې امله

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg\frac{15}{7}}{\lg\frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کيڼ اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او يا ويشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپونتونو سره، کيدی شي چی د لوګاريتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.
له

$$\frac{a_1^{f_1(x)} . a_2^{f_2(x)} ....}{b_1^{g_1(x)} . b_2^{g_2(x)} ....} = c; ....(13{,}18)$$

څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + ... - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - .... = \lg c \quad (13.19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وبینه یا افاده F د الجبري اکسپوننت(f(x سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)})=0 ;..................................(13,20$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \quad (13.21)$$

د برابرون

$$F(y) \quad (13.22)$$

د ټولواوبیونو $y_1 , y_2 , y_3;...............$ لپاره باید

$$a^{f(x)} = y_i ; i=1,2,3....... \quad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1 , 2 , 3 .... \quad (13.24)$$

اوبی شي

بیلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x}+3^x = 2$ کیدی شي چی د بدلون $y=3^x(y^2=3^{2x})$ سره په خلوری

برابرون یا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بیرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1.\lg 3 = \lg 1 = 0, x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2.\lg 3 = \lg(-2)$ اوبیونه نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}}-\sqrt{e^{x^2-1}-1}=\sqrt{2e^{x^2-1}-1}\text{..........................}(13,25)$$

کې داسې بدلوو:

$$y=e^{x^2-1}\text{......................................}(13,26)$$

او لاس ته راوړو

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};\text{...............................}(13,27)$$

له دې ځخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0 => y(y-1)=0$$

$$y_1=0; y_2=1$$

تیک $y_2=1$ (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1;\text{...}(13,28)$$

باید اوبی . د لوګاریتمولو ځخه تعقیبیږي:

x²-1=ln1=0,

x1 = 1 , x2 =-1

دواړه ارزښتونه پیلبرابرون پوره کوي٠

برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخی ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړی حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوګاریتم یوځاي رامنځ ته کیږي.

بیلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ ځخه د بیلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاریتموولو له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\ln^2x - \ln x + 1 = \log_2 8 = 3$

که کیږدو $y = \ln x$ ، نو دا څلورۍ برابرون یا مربع مساوات $y^2 - y - 2 = 0$

لاس ته راځي،د ځوابونو

$y1 = -1 , y2 = 2$

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

$\ln x = -1 , \ln x = 2, x1 = e-1 = 1/e , x2 = e^2$

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې اوڅېړنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

(c) ketabton.com: The Digital Library

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو تولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواريد ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي. دا هم چاپ سوي.

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج ښخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ ـ د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو ښخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج ښخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي چاپ شوی

۱۶ - څمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري چاپ شوی

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي) چاپ شوی

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه يې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه چاپ شوی

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیرپوهنه د اوم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د اتم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د نهم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د لسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولګي له پاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه د دولسم ټولګي له پاره

رياضي براى صنف دوازده

.

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرې شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library