

شمير پوهنه ( رياضي )

د لسم ټولگي لپاره

برېښنا پته : smakhan1946@gmail.com

ليکونکی:

ډاکټر ماخان ميري شينواری

2016

Ketabton.com

جرمني د بن بډار

شمیر پوهنه

د لسم ټولګي لپاره

لیکونکی:

ډاکټر ماخان (میری) شینواری

[Smakhan1946@gmail.com](mailto:Smakhan1946@gmail.com)

<b>نیولیک</b>	
۴	سرریزه.....
۶	پولینومشمیرنه .....
۲۹	د گاوس الگوریتم.....
۴۶	هورنرشیما.....
۵۵	اړیکې.....
۶۵	فنکشن(خپرونه) یا تابع .....
۹۱	فنکشن او په ختفنکشن .....
۹۳	څلوری یا مربع توابع .....
۹۶	نورمال پارابل .....
۱۰۱	د څلوری تکمیل له.....
۱۱۵	کرښیزبرابرونسیستم .....
۱۲۳	د مناسبوواب له پاره تلنلار....
۱۲۹	مساواتسیستم بی له .....
۱۳۳	توان یا پوتنخ توابع .....
۱۳۸	کرښیزتوابع د ورکړ شوو .....
۱۳۸	مومری حالت .....
۱۴۲	د کرښیزبرابرونونو ځانگری .....
۱۶۵	n- مه درجه ټولراشئل توابع .....
۱۷۵	د ټولراشئل توابعو غوختکي .....
۱۷۸	د بدلونقانونه .....
۱۸۳	شننیزه – یا تحلیلی هندسه .....
۲۰۲	فنکشنونه (بل بدیل).....
۱۳۷	درېکودیکچ .....
۲۷۹	گډوله – یا کمپلکسگڼونه .....
۳۱۵	د لیکونکیلیکلیاوژبارې.....
۳۲۰	د لیکوکیژنود ته لنډه کتنه.....

## سریزه

دا څلویښت کاله کیري، چې زموږ هیواد هراړخیزه ستونزې لري او هر څه دي اوردې  
جنگ را خراب کړي

گرانو هیوادوالو!

د نورو نیمگرتیاو په څیر زموږ درسي نصاب - په تیره شمیرپوهنه - هم ډېره د ناسمون  
سره مخامخ ده.

که دا کار د دولت په څلور دیوالي ونه شو، نو زه به وهڅیږم، چې دا مالیکلي کتابونه د ن  
ج له لارې له تاسو سره شریک کړم او دا د نړۍ په ستاندارد.

د بنوونځي په کتابونو کې د ستاتیسټیک او احتمالوالي درس نور هم خورا ستونځمن دی،  
چې زه ترې دلته تیریرم او د بنوونځي د تیرو کتابونو څخه هم هیله ده. که زما کتابونه  
وړاندي نه شو. چې د ابرخي یا سمې یا له درسي نصاب څخه ووپستل شي. په دې برخه  
باور وکړی، چې نه لیکونکی بو هیږي او نه بل لوستونکی پرې پوهیدلی شي.

زما په دې د بنوونځي کتابونو کې دا برخې نه شته، خو که وخت مې پیدا کړ دا به هم سمې  
کړم. ما په دې هکله د احتمالوالي او ستاتیسټیک کتابونه ژباړلي او همداسې مې په هندسه  
کې هم احتمالوالي شمیرنه راوړي او د ستاتیسټیک یو کتاب مې هم ژباړلي، چې زه به یې  
په مناسبوخت کې د لیدلو پټي گرانو لوستونکو ته د ن ج له لارې ورکړم.

دا زما ځني کتابونه او په ډېره مننه د [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com) ن ج کې گرانو لوستونکو ته  
وړاندي شوي.

د شمیرپوهني سم اند یا منطق زموږ د نصاب په لسم ټولگي کې راغلی او هغه هم لکه  
ستاتیسټیک او ... د پوهیدلو نه دی. دا- لکه څنگه چې بریښي- دومره پیچلی نه دی، نو زه  
دا درس له دې امله د اوم ټولگي په سر کې راوړم، هیله ده چې ستونځي به رامنځ ته نه  
کړي.



زه چې ترڅو ستاسو په منځ کې وم او د کار یم، ستاسو چوپړ کې به اوسم. راځی، چې ستونځوبي (د ستونځو حل) سره شریک کړو.

زه دې لیکنو او پرې قضاوت کولو ته ځانله یم.

تکرار په کې زیات دی، خو د موضوع، نه د خودیونې. وایې چې تکرار د زده کړې مورده، نو پروا نه لري. کمبټونه هم په کې شته. سره د ټولو نیگرتیاوو دا د بنوونځي له پاره ډېره ګټوره او زه چې پوهیږم، یواځنی سمه لیکنه ده.

دا چې سمه لیکنه، د ځان له امله نه وایم، دگرانو زده کوونکو او بنوونکو له پاره وایم. دا زما لیکنې نه دي، دا ما له نورو کتابونو څخه رانیولې، چې باید سمې وي.

زه به وهڅیږم، چې درسمې بنوونځي کتابونو نا سمونونه له تاسو سره شریک کړم، خو ډېر لږ، یواځې داسې د یادونې له امله.

په ډېره خواشینۍ باید ووايم، چې ملاتړی نه لرم، چې د لیکنې ستونځي راته په ګوته کړي.

د نصاب د غړو څخه مې هیله ده، چې ګټه ترې پورته کړي او په بنسټ یې د بنوونځي لیکنې سمې کړي.

د خونديونې ټیکاوي کې پوښتنه نه شته، ځکه چې ما هم د نورو لیکنو څخه راټول کړي او هڅیدلی یم، چې سم یې ترې راوینیسم.

باور وکړی زه د دې لیکنو سره لږ ستړی شوی یم، نو ځنې ځایونه به داسې نیمګړي پاتې وي، چې ستاسو پوهیدنې ته کوم زیان نه رسوي، د هغې بڅبنه دې وي.

کله تمرینونه کم وي او کله تکرار راځي، چې دا بد مه ګڼی.

په دې کتابونو ما دومره ځان بوخت کړی، چې باورکړی مغذ مې ترې نورمور دی، نو له دې امله یې نور پایوم یا ورته د پای ټکی ږدم.

## پولینوم شمیرنه

### پولینوم څه شی دی؟

یو پولینوم د اووښتوني یا واریابلي -چې مورېي د  $x$  سره په نښه کوو- له ډېرواره توان د زیاتون دی: د توان جگښتونه پیداښتي یا طبیعي ښه دي. زیاتون له دې برسیره پای دی.

$$\text{بیلگه: } a_n \cdot x^n + \dots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

همداسې

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

یا هم:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

دلته  $n$  یو پیداښتي ګڼ اوپای دی او  $a_i$  ریلګښتونه دي د ټولو  $i=0,1,\dots,n$  له پاره.

پېژند: د پولینومچګګن  $n$  د پولینوم درجه بلل کېږي، که  $a_n \neq 0$  وي.

په یاد ولری: په پورته سر کې- د پولینوم لیکښه د توان په همغږیز جګیدونکي لیکښه اودا کښته یې د پولینوم د توان په همغږیز ټیټیدونکي لیکښه ده.

د پولینومونو سره شمیرنه یا کارونې داسې لنډې څیرو

د پولینومونو زیاتون: که له

$$a_5 \cdot x^5 + \dots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

سره

$$b_5 \cdot x^5 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاته-وو، نو داسې مخ ته څو:

په دې پورته برابرون کې گورو، چې اووښتونې یا واریابله د څلور په جگ یعنی  $x^4$  نه شته. دا په دې مانا ده، چې ځله وونی یا صریب یې صفر دی. یعنی  $0 x^4$  یا

$$b_5 \cdot x^5 + 0 x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاتونعملیه یا کارونه مخ ته بیای:

$$a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$b_5 \cdot x^5 + 0 x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

$$(a_5 + b_5) x^5 + (a_4 + 0) x^4 + (a_3 + b_3) x^3 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

گورو، چېد برابر توا یا برابر جگگن واریابلي سره زیاتیري.

بیلگه:

$$3 \cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7$$

$$2x^5 + 0 x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1$$

$$(a_5 + b_5) x^5 + (a_4 + 0) x^4 + (a_3 + b_3) x^3 + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

د پولینومونو کمون کارونه:

کمون یې هم په همدې بیلگه داسې لیکو:

8

سرلیک

$$\begin{aligned} & a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \\ & -(b_5 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0) \\ \hline & (a_5 - b_5) \cdot x^5 + (a_4 - 0) x^4 + (a_3 - b_3) x^3 + (a_2 - b_2) x^2 + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0) \end{aligned}$$

بیلگه:

$$\begin{aligned} & 3 \cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7 \\ & -(2x^5 + 0 \cdot x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1) \\ \hline & x^5 + 6x^4 - 7x^3 - x^2 + x + 6 \end{aligned}$$

پيژند: دوه پولينومونه سره برابر دي، که خله ووني يا صريبنه يې سره برابر وي، دا په دې مانا چې

$$a_n \cdot x^n + \dots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

او

$$b_n \cdot x^n + \dots + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

سره برابر دي که  $b_i = a_i$  وي، د  $i=1,2,\dots,n$  ټولو له پاره.

د پولينومونو په هکله مو په اتم ټولگي کې د ترمونوبرخه کې پوره زده کړه کړې. په پولينوم کې هم ټول هغه شمير لارې، چې په گڼونو کې باور لري باوري دي.

دا لاندې بیلگې دې هم داروښانه کړي:

د پولينومونوله پاره نورې بیلگې:

$$O \quad 3x^2 + 2x + 5$$

$$O \quad 7x^3 + x^2 + 6x + 2$$

$$O \quad 10x^5 + 3x^4 + 2x$$

د پولینوم ډولونه:

په شمیرپوهنه کې د پولینوم مختلف ډولونه شته. په شمیرپوهنه کې د بینوم لاندې یو پولینوم پوهیږو، چې له دوه غړو جوړ وي یا په بل ډول ویلی شوي، چې یو بینوم د دوه مونومونو زیاتون یا کمون دی. دا لاندې بیلگې دا هم ښایي، چې بینوم څنگه برېښي!

- $a + b$
- $x^3 + y^3$
- $x - 3$

پولینوم، چې له درې زیاتونونو جوړ دی ترینوم بلل کیږي. لاندې بیلگه دا روښانه کوي.

- $a^2 + b^2 + c^2$
- $6a^2 + 7a^3 + 8a^4$

زیاتون ته بیلگه

$$(-x^5 - 2x^4 - 3x^2 - x + 2) + (x^2 + 2) = -x^5 - 2x^4 - 2x^2 - x + 4$$

پولینوم کمون ته بیلگه: په لاندې بیلگه کې گورو، چې د برابر توانونو  $x$  یو له بل څخه کمېږي.

$$(x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x) - (3x^3 + 2x^2 + 6x) = x^4$$

ځل (ضرب):

دا لاندې درې بیلگې د ځل یا ضرب له پاره ورکړ شوي.

موراو تاسې د دې لارې سره د بینوم فرمول او د ترمونو د ځله ونو له لارې بلد یو، چې دلته ستاسو پام ورته رااړول کیږي

$$(x - 4) \cdot (x^2 - 2x + 3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 12$$

$$(x - 5)(x^2 + 3x + 7) = x^3 - 2x^2 - 8x - 35$$

$$(x - 3)(4x + 7) = 4x^2 - 5x - 21$$

$$(x + 1)(x^2 + x - 6) = x^3 + x^2 - 6x + x^2 + x - 6 = \underline{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$$

پولینومو پش:

دا لاندي بیلگه د وېش له پاره راوړ، خو دا چې وېش لږ پیچلی دی، په دې به پوره وغږیو.

$$(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x) : (x + 3) = x^3 - x^2 + 5x - 9 + (27)/(x+3)$$

$$-(x^4 + 3x^3)$$

$$-(-x^3 - 3x^2)$$

$$-(5x^2 + 15x)$$

$$-(-9x - 27)$$

Rest: 27 پاتي

کرنیزخله ووني سره خل کیري يا ضربیري

$$f(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 1,5)$$

د خله ووني ۲ سره غزول کیري.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 3x + 2)(x - 1,5) \\ &= x^3 - 1,5x^2 + 3x^2 - 4,5x + 2x - 3 \\ &= x^3 + 1,5x^2 - 2,5x - 3 \quad / \cdot 2 \end{aligned}$$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$$

## پولینوم وېش:

که د یوه پولینوم صفرخای معلوم وي، نو کړی شو د پولینوم وېش له لارې د پولینوم درجه په یوه کمه کړو. که دا مو مربع مساوات ته لارښود کړي یا بوځیو نو ساده دی، چې نور صفرخایونه پیدا کړو. لاندې بېلگې دې د پولینوم وېش روښانه کړي.

د بېلگې په توګه د دریمې درجې ټولراشنل تابع صفرخایونه معلوم دي، نو کیدی شي چې د تابع مساوات د کرښیزو صریبونو په څېر ولیکلی شو:

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-\bar{x}_3)$$

چیرته چې  $x_1, x_2, x_3$  صفرخایونه دي.

مور اوس په څرګنده توګه تابع یا څیرونه د څیړنې لاندې نیسو

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$$

چیرته چې  $x_1=2$  یو صفرخای دی، ځکه چې

$$f(2) = 2^3 - 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 8 - 4 - 10 + 6 = 0$$

له دې سره له دې سره کېدی شي د تابع مساوات د  $x_1=2$  صفرخای لاندې (له امله) په پام کې ونیسو او لکه چې لاس ته راځي و

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6 = (\dots)(x-2)$$
 لیکو

د صفرخای ټاکلو لپاره ایښوونه:  $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\dots)(x-2)=0$

دا افاده  $x^3-x^2-5x+6=(\dots)(x-2)=0$  څېړو

د نوکانو افادې یا وینې (... ) ټاکو

دواړه لورې په  $(x-2)$  وېشو

$$(x^3-x^2-5x+6):(x-2)=(\dots)$$

په دې توګه د نوکانو افاده (... ) لاس ته راځي.

وېش د لیکنیز وېش قانون سره سم مخ ته بیاو

$$\begin{array}{r} (x^3 - x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x^2 + x - 3 \\ -(x^3 - 2x^2) \\ \hline x^2 - 5x \\ -(x^2 - 2x) \\ \hline -3x + 6 \\ -(-3x + 6) \\ \hline \end{array}$$

د نوکانو افاده (...) اوس  $x^2 + x - 3$  بڼه لري

له دې لاس ته راځي د صفر ځای ټاکنو لپاره ایښوونه:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 5x + 6 = (\dots)(x - 2) = (x^2 + x - 3)(x - 2) = 0$$

نو دا مربع مساوات  $x^2 + x - 3$  اوس حل کوو.

دا د  $-p - q$  فرمول سره ځوابوو:

$$p = 1; q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2,3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array} \right.$$

صفر ځایونه:

$$x_1 = 2; x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}}; x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$



د  $x$  محور سره غوڅتکي:

$$P_{x1}(2|0); P_{x2}\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \mid 0\right); P_{x3}\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \mid 0\right)$$

تابع مساوات:

$$f(x) = (x-2)\left(x + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}\right)\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}}\right) \Leftrightarrow f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$$

د پولینومویش او لیکنیز پولینومویش په منځ کې اړیکې شته. په لاندې مخامخوالي کې دا د وېش بې له پاتې په حالت کې را ښایي.

$  \begin{array}{r}  62228 : 47 = 1 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \\  \underline{-47} \phantom{0000} \leftarrow 47 \cdot 1 \\  152 \phantom{000} \leftarrow 47 \cdot 3 \\  \underline{-141} \phantom{000} \leftarrow 47 \cdot 3 \\  112 \phantom{000} \leftarrow 47 \cdot 2 \\  \underline{-94} \phantom{000} \leftarrow 47 \cdot 2 \\  188 \phantom{000} \leftarrow 47 \cdot 4 \\  \underline{-188} \phantom{000} \leftarrow 47 \cdot 4 \\  0  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  (x^3 - 6x^2 + 11x - 12) : (x - 4) = x^2 - 2x + 3 \\  \underline{-(x^3 - 4x^2)} \phantom{000} \leftarrow (x-4) \cdot x^2 \\  -2x^2 + 11x \phantom{000} \leftarrow (x-4) \cdot (-2x) \\  \underline{-(-2x^2 + 8x)} \phantom{000} \leftarrow (x-4) \cdot (-2x) \\  3x - 12 \phantom{000} \leftarrow (x-4) \cdot 3 \\  \underline{-(3x - 12)} \phantom{000} \leftarrow (x-4) \cdot 3 \\  0  \end{array}  $
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

ګڼ ۶۲ د لومړيو دوه ځايونو څخه چور دی د دې وېشونو ګڼونو څخه د پروېشونې (۴۷)

سره وېشل کيږي. لاس ته راوړنه ( ۱ ) د ( ۴۷ ) سره ځل يا ضرب کيږي او د ګڼ (۶۲) څخه کميږي. د کمښت نتيجه کمښت ( ۱۵۲ ) سره په همدې ډول پرمخ ځو تر څو د کمښت لاس ته راوړنه صفر شي.

$$47 \cdot 1324 = 62228 \quad \text{از ماښت :}$$

بيلگه:

$$\begin{array}{r}
 (-6x^3 + 5x^2 + 14x - 12) : (-2x + 3) = 3x^2 + 2x - 4 \\
 \underline{-(-6x^3 + 9x^2)} \\
 -4x^2 + 14x \\
 \underline{-(-4x^2 + 6x)} \\
 8x - 12 \\
 \underline{-(8x - 12)} \\
 0
 \end{array}$$

Probe:

$$(-6x^3 + 5x^2 + 14x - 12) = (3x^2 + 2x - 4)(-2x + 3)$$

بیلگه:

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + 3x^2 - 6x - 8) : (x - 2) = x^2 + 5x + 4 \\
 \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
 5x^2 - 6x \\
 \underline{-(5x^2 - 10x)} \\
 4x - 8 \\
 \underline{-(4x - 8)} \\
 0
 \end{array}$$

$$\text{Probe: } (x^2 + 5x + 4)(x - 2) = (x^3 + 3x^2 - 6x - 8)$$

بیلگه:

$$\begin{array}{r}
 (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) : (a+b) = a^2 + 2ab + b^2 \\
 \underline{-(a^3 + a^2b)} \\
 2a^2b + 3ab^2 \\
 \underline{-(2a^2b + 2ab^2)} \\
 ab^2 + b^3 \\
 \underline{-(ab^2 + b^3)} \\
 0
 \end{array}$$

از ماڀڻت:

$$(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = \underbrace{(a^2 + 2ab + b^2)}_{\text{1. binomische Formel}}(a+b) = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)}_{\text{Linearfaktoren}}$$

بیلگه:

$$\begin{array}{r}
 \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2\right) : (x-2) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 \\
 \underline{-\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2\right)} \\
 -\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x \\
 \underline{-\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x\right)} \\
 -x + 2 \\
 \underline{-(-x + 2)} \\
 0
 \end{array}$$

$$\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2\right) = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1\right)(x-2) \quad \text{از ماڀڻت:}$$

$$\begin{array}{r}
 (2x^3 - 14x - 12) : (x - 3) = 2x^2 + 6x + 4 \\
 \underline{-(2x^3 - 6x^2)} \\
 6x^2 - 14x \\
 \underline{-(6x^2 - 18x)} \\
 4x - 12 \\
 \underline{-(4x - 12)} \\
 0
 \end{array}$$

بیلگه:

په ځنو حالتونو کې دا بڼه ده، چې د پولینوم لیکنو کې د اړتیا په وخت کې یوه تشیا پرېږدو، کلکه په پورته بیلگه کې چېگورو.

یوه بله شونتیا یې داده، چې هغه تشیا د صفر سره ډکه کړو، لکه دا لاندې:

$$2x^3 - 14x - 12 = 2x^3 + 0x^2 - 14x - 12$$

بیلگه:

لاندې بیلگه یو وېش د پاتې سره مخ ته بیایي. لکه څنګه چې د لیکنیز وېش څخه راته څرګند دی.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + 3x^2 - 6x - 8) : (x - 1) = x^2 + 4x - 2 \text{ (Rest } -10) \\
 \underline{-(x^3 - x^2)} \\
 4x^2 - 6x \\
 \underline{-(4x^2 - 4x)} \\
 -2x - 8 \\
 \underline{-(-2x + 2)} \\
 -10 \text{ Rest}
 \end{array}
 \Rightarrow (x^3 + 3x^2 - 6x - 8) : (x - 1) = x^2 + 4x - 2 - \frac{10}{(x - 1)}$$

$$\text{Probe: } \left( x^2 + 4x - 2 - \frac{10}{(x - 1)} \right) (x - 1) = (x^3 + 3x^2 - 6x - 8)$$

دا چې نوي بلدي یون کې د ناسمون سره مخامخ کېږي، غوره ده چې د دې ازماښت هم وکړو.

د پولینومویش په کارونه کې که د پولینومویش یو صفرځای څرگند وي، نو کیدی شي د پولینوم درجه په یوه وړه یا رکه شي.

$x_1 = 2$  د پولینوم یو صفرځای دی.

$$(x^3 - x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = \underbrace{x^2 + x - 3}_{\text{Res polynomial}}$$

$$\begin{array}{r} -(x^3 - 2x^2) \\ \hline x^2 - 5x \\ -(x^2 - 2x) \\ \hline -3x + 6 \\ -(-3x + 6) \\ \hline \end{array}$$

د پاتي پولینوم صفرځایونه اوس کیدشي د څلورۍ یا مربع پولینوم

$$x^2 + x - 3 = 0$$

له لارې پیدا کړو.

د سمون ازماښت یې وکړی.

بیلگه: پولینومویش او ازماښت یې

$$\begin{array}{r} (x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 1) = x^2 + x - 6 \\ -(x^3 + x^2) \\ \hline x^2 - 5x \\ -(x^2 + x) \\ \hline -6x - 6 \\ -(-6x - 6) \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Prob e: } (x + 1)(x^2 + x - 6) = x^3 + x^2 - 6x + x^2 + x - 6 = \underline{\underline{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}}$$

پوښتنې:

لاندي پولينومو پش مخ ته بوځي

الف -  $(x^3 - 3x^2 - 6x + 8) : (x + 1)$  ب -  $(2x^3 - x^2 - 8x + 4) : (x^2 - 4)$

پ -  $(2x^3 - 3x + 1) : (2x - 1)$  ت -  $(6a^6 + a^4b + 25b^3) : (3a^2 + 5b)$

ټ -  $(8x^5 - 6x^7 + 2x) : 2x^2$

ث -  $(9a^5b^3 - 12a^3b^5) : 3a^3b^3$

ج -  $(15a^9 - 8a^6b + 8b^3) : (3a^3 + 2b)$

چ -  $(14a^4 - a^3 + 5a^2 - 3a + 1) : (7a^2 - 4a + 1)$

ح -  $\frac{3x^5y^{n+2} + 3x^2y^{3n+2} - 2x^{m+3}y^{n+3} - 2x^my^{3n+3}}{x^3 + y^{2n}}$

$$\frac{48a^{n+x} + 56a^x b^x - 72a^n b^c - 84b^{x+c}}{12a^n + 14b^x} \quad \text{خ -}$$

$$\frac{8a^{2n+1} - 10a^{2n}b + 15a^{3n-2}b - 12a^{3n-1}}{2a^{2n} - 3a^{3n-2}} \quad \text{خ -}$$

$$\frac{2a^5 b^{x+2} - 2a^3 b^{x+5} + 3a^4 b^{2x-1} - 3a^2 b^{2x+2}}{a^2 - b^3} \quad \text{خ -}$$

### پولینوم برابرېون:

د یوه برابرېون په کین اوبنې لور د  $x$  مختلف توانونه یو پولینوم برابرېون ورکوي

$$\text{Beispiel: } x^3 - 6x = 3x^2 - 8$$

د داسې برابرېون د اوبی له پاره لومړی دا برابرېون په داسې نامه صفر بڼه اړوي. دا په دې مانا چې برابرېون تر هغې په ورته بڼه بدلونارولکیري، چې په بنیلور یواځې صفر پاتې شي.

$$\text{Beispiel: } x^3 - 6x = 3x^2 - 8 \quad | -3x^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 6x = -8 \quad | +8$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$$

د صفر بڼې یا- فورم په ځای د پولینوم دې بڼې ته هم نور مال بڼه وایي. مور د پولینوم پنځه بدیلونهار اړوړو

### لومړی بدیل:

په برابرېون کې د اوبنېونې  $x$  یو یواځنی توان مخ ته راځي.

$$ax^n + b = 0 \Rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$$

که  $n$  ناجوره وي، نورینه وپښتوني کیدی شي کمیز گن هم وي. د رېښې ټیک یو حل شتون لري.

که  $n$  جوړه وي، نورینه نیونی (هغه گن چېرینه پېښول کيږي) یواځې زیاتیز گن کیدی شي.

دوه اوبیوني شتون لري.

بیله:

$$\begin{aligned} 8x^3 + 27 = 0 &| -27 \\ \Leftrightarrow 8x^3 = -27 &| : 8 \\ \Leftrightarrow x^3 = -\frac{27}{8} &| \sqrt[3]{\phantom{x}} \\ \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2} &\Rightarrow L = \underline{\underline{\left\{ -\frac{3}{2} \right\}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^4 - 3 = 0 &| +3 \\ \Leftrightarrow 2x^4 = 3 &| : 2 \\ \Leftrightarrow x^4 = \frac{3}{2} &| \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \\ \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1,107 &\Rightarrow L = \underline{\underline{\left\{ \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1,107 \right\}}} \end{aligned}$$

په لومړي حالت کې  $n$  ناجوره دی. رینه نیوني کمیزه هم کیدی شي اویواځې یواوبی شتون لري.

په دویم حالت کې  $n$  جوړه دی، رینه نیونی زیاتیزدی. که کمیزوي بیا برابران اوبی نه لري.

دویم بدیل:

پولینوم برابران یوڅلوری برابران (مربع مساوات) انځوروي



$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_D} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

داد - p-q- فرمول له لاري اوبی -يا حلکيري بيلگه

$$x^2 - 13x + 36 = 0 \quad p = -13 \quad q = 36$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$= \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36 = \frac{169}{4} - \frac{144}{4} = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9 \\ x_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \underline{L = \{4; 9\}}$$

D د دېسکریمینانت له پاره لیکلکيري چې هغې لړلو سره مخ دمخه سړی د اوبیونویا حلومو څومره وال یا گڼون ټاکلی شي.

که صفر  $D >$  وي ، نو څلوری برابرې دوه اوبی یا حلونه لري

که صفر  $D =$  وي، نو برابرې یواځې یو ډبل اوبیلري

که صفر  $D <$  وي، نو برابرې اوبی نه لري په دې حالت کې نو سړی نور مخ ته نه ځي.

دریم بدیل

ولینومبر ابرونیو دوه-څلوری برابرې biquadratische انځوري.

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + pz + q = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_D} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$x^2 = z \Rightarrow x = \pm\sqrt{z} \text{ für } z \geq 0$$

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + pz + q = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_D} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$x^2 = z \Rightarrow x = \pm\sqrt{z} \text{ für } z \geq 0$$

د په ځا اېښوونې يا سبستېچيوشن د  $p-q-z$  - فرمول په مرسته يا له لارې شميرل کيدی شي

پسې دې بيرته په ځايونه په څټسبستېچيوشن وکارول شي او ريښه دې ونيل شي. ريښه ټيک د زياتيز -  $p-q-z$  - ارزښتونو له پاره نيول کيدی شي.

بيلگه:

$$\frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} = 0$$

$$\text{Substitution: } z = x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10}z^2 - \frac{9}{5}z + \frac{81}{10} = 0 \mid \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$$

$$p = -18; q = 81$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 - 81 = 0$$

$$z = -\frac{p}{2} = 9$$

Rücksubstitution

$$z = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3$$

$$\Rightarrow L = \underline{\underline{\{-3; 3\}}}$$

په دې حالت کې د یسکریمینانت صفر دی، داسې چې د سبستیچیوشناووبنتونې له پاره یو اوبې ( $z=9$ ) شتون لري. دا په دېمانا، چې د ۴-مې درجې پولینوم ټیک دوه اوبې یا ځوابونه لري.

څلورمبدیل:

په پولینومبرابرون کې هغه همغه ارژنېته یا مطلقه غړی نه لرو.

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \Leftrightarrow x(ax^2 + bx + c) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{2/3}$$

اووبنتونې یا مجهوله  $x$  کیدی شي له نوکانو راووبستلشي. اوبیوني د صفرځل یا - صرب له جملې شمیرلکیدی شي (د فاکتورکولو تلنلار)،

بیلگه

$$x^3 + x^2 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow \underline{x_1 = 0}$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow p = 1; q = -2$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \underline{L = \{-2; 0; 1\}}$$

د صفر څلورونې یا صریب دویم څلورونې کیدی شي د  $p-q$  - فرمولسره سادهوشمیرلشي. د صفر څلورونې جمله: یوځل یا صرب ټیک هلته صفر دی، چې یو څلورونې صفر وي.

پنځم بدیل:

پولینومبرابرون له بدیلونو ۱ - ۴ په څیر نه دی.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

په دېرو حالتونوکې کیدی شي، د پوینوموېشله لارې اوبې ومیندلشي. د دې له پاره باید یواوبې معلوم وي.

که د پولینوم یو اوبی معلوم وي، نو کیدی شید پولینوم درجه د وېش له لاریپه یوه کمه شي. که دا یو څلوری برابرېون راځي، نو اوبیونه یېبیا ساده ه، چې نور اوبی پیدا کړو. لاندې بیلگه چې اوبی  $x = 2$  معلوم دی، د پولینوم تلنلار روښانه یا معلوموي. پولینوم وېش همغه په راته څرگنده لیکنیز ډول لاس ته راوړو.

Division.  
وېشنه

$$\begin{array}{r} (x^3 - x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x^2 + x - 3 \\ -(x^3 - 2x^2) \\ \hline x^2 - 5x \\ -(x^2 - 2x) \\ \hline -3x + 6 \\ -(-3x + 6) \\ \hline \end{array}$$

د نوکانو (... ) وینه یا افاده اوس دا بڼه  $x^2 + x - 3$  لري.

له دې د نورو شمیرنوځای په ځای کول لاسته راځي

$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x - 3)(x - 2) = 0$$

اوس دا څلوری برابرېون یا مربع مساوات  $(x^2 + x - 3)$  د اوبیوني دي، چې د  $-p-q$  فرمول له لاری سرته رسیږي.

$$p = 1; q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2,3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array} \right.$$

$$x_1 = 2; x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}}; x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$\Rightarrow L = \left\{ -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}}; 2; -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \right\}$$

که چیرې د گومان یا ازماښت له لورې اوبی نه شي پیدا کیدی، نوییا د نومریک تڼلار څخه کار اخستل کیري (دا به اوس زموږ دنده نه وي).

برابرونو ته تمرینونه:

۱ - برابرونه د  $x$  پسې اوبی - یا حل کړی او ازماښت یې سرت هورسوی.

$$\text{الف - } \frac{1}{5}x^3 - 25 = 0 \quad \text{ب - } \frac{27}{10}x^3 - \frac{4}{5} = 0 \quad \text{پ - } 8x(x^2 - 1) = -8x + 1$$

۲ - برابرونه د  $x$  پسې اوبی - یا حل کړی او ازماښت یې سرت هورسوی.

$$\text{الف - } 27x^3 - 8 = 0 \quad \text{ب - } \frac{1}{16}x^3 - 4 = 0 \quad \text{پ - } -2 + \frac{7}{8}x^3 = -\frac{5}{2}x^3 - 1$$

۳ - برابرونه د  $x$  پسې اوبی - یا حل کړی او ازماښت یې سرت هورسوی.

$$\text{الف - } 4k^2x^3 - 2k = 0; k > 0 \quad \text{ب - } \frac{1}{4b}(x^3 - b^3) = 0; b > 0 \quad \text{پ - } (x + 2a)^3 = \frac{1}{8}$$

۴ - برابرونه د  $x$  پسې اوبی - یا حل کړی او ازماښت یې سرت هورسوی.

$$\frac{k \cdot x^3}{4} - 2k = 0$$

۵ - ځانگړې باکتریاگانې د ۴ ساعتونو په منځ کې خپل گڼو (تعداد) څلور برابره کوي. په یوه ساعت کې یې په سلوکې ډېروالی څومره دی؟

۶ - د کال په پیل کې د موټروختار زښت نوی ټاکیا کره کیري. د یوه پنځه کلن زوړ کارشوي یوم، ترپلورونکی € 8500 ورکوي.

د موټر کلنی زیان به څومره (د وختار زښت د په سلو کې) وي، که سړی له دې، که سړس داسپمخ ته لار شي چې دا په لومړیو پنځه کلونو کې برابر جگ وي؟

۷ - برابرونه اوبی - یا حل کړی

$$\text{الف - } \frac{1}{4}x^3 - 4x = 0 \quad \text{ب- } 3x^3 + \frac{4}{3}x^2 = 0 \quad \text{پ- } x^3 + x^2 - 2x = 0$$

۸ - برابرونونه اوبیکری

$$\text{الف- } 4x(x^2 - x) = 7x^3 - 7x^2 - 6x \quad \text{ب- } \frac{3}{4}x^3 - 3x^2 = 0$$

$$\text{پ- } \frac{1}{8}x^3 - x^2 + 2x = 0$$

دا لاندې برابرونونه اوبی کری

$$\text{الف- } x^3 + 4x^2 - 20x - 48 = 0 \quad \text{ب- } -\frac{1}{2}x^3 + 4x = \frac{1}{2}x^2 - 4$$

$$\text{پ- } -2x^3 + 6x^2 - 4x = \frac{1}{2}x - 1 \quad \text{ت- } x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2 = 0; x_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{ت- } \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^3 + 4x^2 - 2x\right) = \frac{3}{2}$$

لاندې برابرونونه حل کری چې یو اوبی یا حل بی معلوم وي

$$\text{الف- } x^3 - 3x^2 - 6x - 2 = 0; x_1 = -1$$

د پولینوم وپس څخه کار واخلي.

-- د پولینوموېش څخه کار واخلي

$$\text{الف- } \left(4x^3 - 6x + \frac{5}{2}\right) : (2x - 1) \quad \text{ب- } (x^3 - 2kx^2 - 2x + 4k) : (x^2 - 2)$$

۱۲ - برابرون  $x^3 - 4x^2 + (k + 4)x - 2k = 0$  ورکړ شوی. وښایې، چې

د  $x_1 = 2$  لپاره برابرون یو اوبی دی. د  $k$  د کوم ارزښت لپاره تیک یو

ډبل اوبی شته؟

لاس ته راوړنه د کرښیزو څلورنو یا صریبونو په څیر ولیکي.

پوښتنه:

a داسې وټاکي، چې برابرون

$$(ax - 1)(x + 2)(x - 1/2) = 0$$

تیک دوه اوبیونو یا حلونه ولری

یو د دریمې درجې برابرېون دا دوه  $L = \{ -4 ; 2 \}$  اوبیونو لری.

الف - د اوبیونو یا حلونو په هکله ویناوي وکړی.

ب - دوه برابرېونونه ددی اوبیونو ورکړی.

۳ - برابرېونونه اوبیکړی

$$\text{الف. } 2x^3 - x^2 - x = 0 \quad \text{ب. } x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}$$

۴ - برابرېونونه اوبیکړی

$$\text{الف. } -3x^3 + 5x^2 + 4 = 0 \quad \text{ب. } x^3 - \frac{16}{5}x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{6}{5} = 0$$

۵- برابرېونونه اوبییا حلکړی

$$\text{الف. } x^3 + x^2 - \sqrt{2}x^2 - 2x - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$$

$$\text{ب. } x^3 - 2,63x^2 - 1,45x + 3,08 = 0$$

برابرېونونه اوبی کړی

$$\text{الف. } -u^3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{2}u - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{ب. } a^3 - 4a^2 - a + 4 = 0$$

۷ - برابرېونونه حل کړی

$$\text{الف. } x^3 - (3 + \sqrt{3})x^2 + 3\sqrt{3}x = 0$$

$$\text{ب. } \left(x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{پ. } \frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + 1 = 0$$

$$\text{ت. } \frac{4}{10}x^3 - \frac{6}{10} = 0 \quad \text{ب. } x^3 - 5x^2 + 6,25x = 0$$

$$\text{ث. } \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \quad \text{ج. } x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x = 0$$

$$\text{چ. } x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0 \quad \text{خ. } x^3 - 3x^2 = -4$$

$$\text{ح. } (3x - 5)\frac{(x - 2)^2}{5} = 0$$

پوښتنې

۱ - برابرېونونه د پسي حل کړی

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 2 = 0 \quad \text{ب} \quad \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 2 = 0 \quad \text{الف}$$

$$\frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - 5x + 15 = 0 \quad \text{ت} \quad -\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{4} = 0 \quad \text{پ}$$

$$(3x-1)(x+k)^2 = 0 \quad \text{ث} \quad 2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0 \quad \text{ب}$$

۱۔  $x$  پسی یی اوبی کری  $(k \neq 0)$

$$\frac{k}{2}x^4 - kx^3 - \frac{3k}{2}x^2 = 0 \quad \text{ب} \quad \frac{1}{9k}(x^4 + x^3 - 12x^2) = 0 \quad \text{الف}$$

$$x^4 - 26x^2 + 25 = 0 \quad \text{ت} \quad \frac{x^2}{5k^2}(x^2 - 3k) = 0; k > 0 \quad \text{پ}$$

$$\frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 2 = 0 \quad \text{ث} \quad -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \quad \text{ب}$$

$$\frac{1}{3}(x^2 - 3)^2 - 3 = 0 \quad \text{ج} \quad -\frac{1}{16}x^4 + x^2 - 3 = 0 \quad \text{ج}$$

$$x^4 - 11x^2 + 18 = 0 \quad \text{خ} \quad \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + 3 = 0 \quad \text{خ}$$

پوشتنی

حلونہ یا اوبیونی و تاکی

$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^2 + 1 = 0 \quad \text{پ} \quad \frac{1}{7}x^4 - 7 = 0 \quad \text{ب} \quad \frac{1}{3}x^4 - 3x^3 = 0 \quad \text{الف}$$

$$\frac{1}{3}(x^2 - 4)^2 - 3 = 0 \quad \text{ث} \quad \frac{1}{4}x^5 - \frac{3}{4}x^3 - x = 0 \quad \text{ب} \quad -2x^4 + x^2 + x = 0 \quad \text{ت}$$

$$x^4 - 5x^2 - 2x = 0 \quad \text{خ} \quad \frac{1}{64}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x = 0 \quad \text{ج} \quad \frac{2}{5}(x^2 - 9)(x + 2)^2 = 0 \quad \text{ج}$$

$$x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \quad \text{خ}$$



## Der Gauß- Algorithmus د گاوس الگوریتم

فکر دې وشي، چې دا برخه په یولسم ټولگي کې راشي. دلته یې راوړنه هم بده نه ده.

	<p>یادونه: خوارزمیه د Algorithmus عربي مانا ده : زما په اند دا الخوارزمیه دی، چې په لاتین کې ترې الگوریتموس جوړ شوی دی.</p> <p>الخواریزم د الگوریتم نومورکونکی، یوه شوروي پوست مارکي چې د الخواریزم د ۱۲۰۰ کلیزې جشن په هکله راوېستلې وه.</p> <p>الگوریتم د پرابلم یا د پرابلمونود ټولگي پا یوه یواځنی د اوبیوني تلنار ږه.</p> <p>الگوریتم یوه نړیواله تلنار ده د په خوبه کرښیز برابر ونونو سیستم اوبیوني ته</p>
--	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

### ننوتنیلگي:

$7x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12$ $-x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5$ $-4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$ <p>شمیرنڅیره یا شیمیا داسې لیکو</p>	<p>درې برابر ونونه د درې اووینتونو یا واریابلو یا متحولو سره</p> <p>له بڼه بدلون څخه لرو</p>	<p>د کرښې ډول په توگه کار کوو.</p> <p>د لیکو له پاره اجازه شته :</p> <p>- بدلیلی شي</p> <p>- د یوه گڼ سره ځلیدلی شي.</p> <p>- په یوه گڼ سره وپشلکیدلی شي.</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$x_1$	$x_2$	$x_3$		$x_1$	$x_2$	$x_3$	
7	3	-5	-12	*	*	*	*
-1	-2	4	5	0	*	*	*
-4	1	-3	1	0	0	*	*

- سره زیاتیدی شي

- سره کم کړي

درځونه هم سره بدلیدی شي، که اووښتوني یا واریابلي  $x$  ورسره واخستل شي.

د اوبیوني یا حل لاس ته راوړنه د بیرته په څټ اېښوونې له رای هم کیدی شي.

$$-14x_3 = -14$$

$$\Leftrightarrow \underline{x_3 = 1}$$

$$-11x_2 + 23 \cdot 1 = 23$$

$$\Leftrightarrow -11x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x_2 = 0}$$

$$7x_1 + 3 \cdot 0 - 5 \cdot 1 = -12$$

$$\Leftrightarrow 7x_1 = -7$$

$$\Leftrightarrow \underline{x_1 = -1}$$

$$L = \{-1; 0; 1\}$$

ازماښت: په لاندې کې د رښتیا له پاره ځای په ځای دي.

$$7 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 - 5 \cdot 1 = -12 \quad (w)$$

$$-1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 5 \quad (w)$$

$$-4 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 1 \quad (w)$$

د بیخي نویو له پاره یادونې:

د اوبیوني له پاره تلندول کیدی شي په کوچنیو پلونو توتیه شي.

۱- د اصلي ماتلاندې سره د لیکې له لاری ځل (ضرب) سره د د ماتونو مخه ونیسی.

۲- په لومړۍ کړبنه لومړی گڼ باید زیاتیز وي (که نه، بیا کیدی شي د ۱- سره حل شي)

۳- د حل یا وېش له لارې وهڅیري چې په لومړي درخ کې ټول گڼونه همغه ارزښت ولري.

په ۲-مه او ۳-مه لیکه کې دې لومړي گڼونه کمزوي.

۴- ۲-مې او ۳-مې لیکې هرې یوې ته دې لومړۍ لیکه ورزیاته شي. له دې سره په لومړي درخ کې ۲-صفرونه منخ ته راځي.

۵- په ۲-مه لیکه کې دې دویم گڼ زیاتیز وي (که نه، نو د ۱- سره دې حل شي)

۶- د حل یا وېش له لارې په دې نیت کې شي، چې له ۲-مې لیکې په دویم درخ کې ټول گڼونه همغه ارزښت ولري.

۷- و ۲-مې لیکې یا کړبنې ته ۳-مه لیکه ورزیاته کړی. له دې سره په ۳-مه لیکه کې ۲-صفرونه منخ ته راځي.

۸- لاس ته راوړی د اوبی یا حل په څنټ لور کیردی.

برابر پرمختگېول کېدی شي د هغو سیستمونو له پاره هم وکارول شي، چې له دريو زیات برابر ونونه شتون ولري:

بڼه بدلونونه کړی شي سړی بل ډول هم مخ ته بوځي. دا چې ،، څنگه،، دا یواځې د شمیرپوهانو مهارت ته پرېږدو. د زیاتو تمرینونوله لارې سړی یوه غوره لار پیدا کوي. د شونتیا پورې دې د ماتونومخه دې ونيولشي، چې د نا اړینې تیروني مخه نیول شوي وي. که سړی ورته تازه وي، کیدی شي ډېر بڼه بدلونونه په یوه وخت جوړ کړي، له دېلارې لیکنه کیري، خود ناسمون شونتیا زیاتیري؟

لاني الماني:سره بدل کړی	د په څنټ ایښوولو له لارې د اوبی یا حل لاس ته راوړنه
-------------------------	-----------------------------------------------------

tausche: $\Leftrightarrow$					
$x_1$	$x_2$	$x_3$			
7	3	-5		-12	
-1	-2	4		5	$  \cdot (-1) \quad   \Leftrightarrow II$
-4	1	-3		1	
-----					
1	2	-4		-5	
7	3	-5		-12	$II - 7 \cdot I$
-4	1	-3		1	$III + 4 \cdot I$
-----					
1	2	-4		-5	
0	-11	23		23	$  : 9$
0	9	-19		-19	$  : 11$
-----					
1	2	-4		-5	
0	-99	207		207	$  : 9$
0	99	-209		-209	$III + II$
-----					
1	2	-4		-5	
0	-11	23		23	
0	0	-2		-2	

$$-2x_3 = -2$$

$$\Leftrightarrow x_3 = 1$$

$$-11x_2 + 23 \cdot 1 = 23$$

$$\Leftrightarrow -11y = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 0$$

$$x_1 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = -5$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -7$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -1$$

$$L = \{-1; 0; 1\}$$

ازماښت:

$$7 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 - 5 \cdot 1 = -12 \quad (w)$$

$$-1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 5 \quad (w)$$

$$-4 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 1 \quad (w)$$

بیلگه ۱: (ساده یا اسانه)

$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 8$ $3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -4$ $4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 1$				<p>د په څټ ایښوولو له لارې د اوبییا حل لاس ته راوړنه</p>	
$x_1$	$x_2$	$x_3$			
2	-3	4		8	$  \cdot 6$
3	4	-5		-4	$  \cdot 4$
4	-6	3		1	$  \cdot 3$
-----					
12	-18	24		48	$  : 6$
12	16	-20		-16	$II - I$
12	-18	9		3	$III - I$
-----					
2	-3	4		8	
0	34	-44		-64	
0	0	-15		-45	

$$-15x_3 = -45$$

$$\Leftrightarrow x_3 = 3$$

$$34x_2 - 44 \cdot 3 = -64$$

$$\Leftrightarrow 34x_2 = 68$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 2$$

$$2x_1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 8$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 = 2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 1$$

$$L = \{1; 2; 3\}$$

Probe:

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 8 \quad (w)$$

$$3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = -4 \quad (w)$$

$$4 \cdot 1 - 6 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 1 \quad (w)$$

## بیلگه ۲ (منځنی سخته)

$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2$ $4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 9$ $8x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 13$	<p>د په څنټ ایښوولو له لارې د اوبې یا حل لاس ته راوړنه</p> $48x_3 = 288$ $\Leftrightarrow x_3 = 6$ $x_2 + 1 \cdot 6 = 11$ $\Leftrightarrow x_2 = 5$ $3x_1 + 2 \cdot 5 - 4 \cdot 6 = -2$ $\Leftrightarrow 3x_1 = 12$ $\Leftrightarrow x_1 = 4$ $L = \{4; 5; 6\}$ <p>ازمایښت:</p> $3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 - 4 \cdot 6 = -2 \quad (w)$ $4 \cdot 4 - 5 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 9 \quad (w)$ $8 \cdot 4 + 7 \cdot 5 - 9 \cdot 6 = 13 \quad (w)$																																																																																															
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>x_1</math></th> <th style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>x_2</math></th> <th style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>x_3</math></th> <th style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></th> <th style="padding: 5px;"></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">3</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">2</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-4</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-2</td> <td style="padding: 5px;"> ·8</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">4</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-5</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">3</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">9</td> <td style="padding: 5px;"> ·6</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">8</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">7</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-9</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">13</td> <td style="padding: 5px;"> ·3</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">24</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">16</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-32</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-16</td> <td style="padding: 5px;"> : 8</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">24</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-30</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">18</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">54</td> <td style="padding: 5px;">   - I</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">24</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">21</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-27</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">39</td> <td style="padding: 5px;">    - I</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">3</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">2</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-4</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-2</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-46</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">50</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">70</td> <td style="padding: 5px;"> : 2    <math>\Leftrightarrow</math>    </td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">5</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">5</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">55</td> <td style="padding: 5px;"> : 5</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">3</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">2</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-4</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-2</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">11</td> <td style="padding: 5px;"> ·23</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-23</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">25</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">35</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">3</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">2</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-4</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-2</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">23</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">23</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">253</td> <td style="padding: 5px;"> : 23</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-23</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">25</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">35</td> <td style="padding: 5px;">    + II</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">3</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">2</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-4</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">-2</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">11</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">48</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">288</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	$x_1$	$x_2$	$x_3$			3	2	-4	-2	·8	4	-5	3	9	·6	8	7	-9	13	·3	24	16	-32	-16	: 8	24	-30	18	54	- I	24	21	-27	39	- I	3	2	-4	-2		0	-46	50	70	: 2    $\Leftrightarrow$	0	5	5	55	: 5	3	2	-4	-2		0	1	1	11	·23	0	-23	25	35		3	2	-4	-2		0	23	23	253	: 23	0	-23	25	35	+ II	3	2	-4	-2		0	1	1	11		0	0	48	288		
$x_1$	$x_2$	$x_3$																																																																																														
3	2	-4	-2	·8																																																																																												
4	-5	3	9	·6																																																																																												
8	7	-9	13	·3																																																																																												
24	16	-32	-16	: 8																																																																																												
24	-30	18	54	- I																																																																																												
24	21	-27	39	- I																																																																																												
3	2	-4	-2																																																																																													
0	-46	50	70	: 2    $\Leftrightarrow$																																																																																												
0	5	5	55	: 5																																																																																												
3	2	-4	-2																																																																																													
0	1	1	11	·23																																																																																												
0	-23	25	35																																																																																													
3	2	-4	-2																																																																																													
0	23	23	253	: 23																																																																																												
0	-23	25	35	+ II																																																																																												
3	2	-4	-2																																																																																													
0	1	1	11																																																																																													
0	0	48	288																																																																																													

## بیلگه ۳ : (سخته): لاندې درې برابر ونونه غواړو اوبې کړو

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{4}{5}x_2 + \frac{3}{8}x_3 = 4$$

$$\frac{3}{4}x_1 + \frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 23$$

$$\frac{4}{5}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 8$$

د په خټ اېښوولو له لارې حل لاس ته راوړنه	$x_1$	$x_2$	$x_3$		
$-358x_3 = -14320$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{8}$	4	·40
$\Leftrightarrow x_3 = 40$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{5}$	23	·40
$126x_2 - 29 \cdot 40 = 1360$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	8	·20
$\Leftrightarrow 126x_2 = 2520$	20	-32	15	160	·12
$\Leftrightarrow x_2 = 20$	30	15	8	920	·8
$20x_1 - 32 \cdot 20 + 15 \cdot 40 = 160$	16	-10	5	160	·15
$\Leftrightarrow 20x_1 = 200$	240	-384	180	1920	: 12
$\Leftrightarrow x_1 = 10$	240	120	64	7360	II - I
$L = \{ 10 ; 20 ; 40 \}$	240	-150	75	2400	III - I
	20	-32	15	160	
	0	504	-116	5440	: 4
	0	234	-105	480	: 3
	20	-32	15	160	
	0	126	-29	1360	·13
	0	78	-35	160	·21
	20	-32	15	160	
	0	1638	-377	17680	: 13
	0	1638	-735	3360	III - II
	20	-32	15	160	
	0	126	-29	1360	
	0	0	-358	-14320	

ازمابښت:

$$\frac{1}{2} \cdot 10 - \frac{4}{5} \cdot 20 + \frac{3}{8} \cdot 40 = 4$$

$$\Leftrightarrow 5 - 16 + 15 = 4(w)$$

$$\frac{3}{4} \cdot 10 + \frac{3}{8} \cdot 20 + \frac{1}{5} \cdot 40 = 23$$

$$\Leftrightarrow \frac{15}{2} + \frac{15}{2} + 8 = 23(w)$$

$$\frac{4}{5} \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 20 + \frac{1}{4} \cdot 40 = 8$$

$$\Leftrightarrow 8 - 10 + 10 = 8(w)$$

د کارونې یا استعمال بیلګې

د ټولراشنل فنکشن د فنکشن برابرېون د شمیرلو له لارې، چې څلور ټکي یې معلوم دي،

د گاوس الګوریتم کارونه یا استعمال

د کارونې بیلګه ۱:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|4) \Rightarrow f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 4$$

$$P_2(2|2) \Rightarrow f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 2$$

$$P_3(4|4) \Rightarrow f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 4$$

$$P_4(5|20) \Rightarrow f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 20$$

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$		
1	1	1	1	4	
1	2	4	8	2	II - I
1	4	16	64	4	III - I
1	5	25	125	20	IV - I
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	-2	
0	3	15	63	0	III - 3·II
0	4	24	124	16	IV - 4·II
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	-2	
0	0	6	42	6	
0	0	12	96	24	IV - 2·III
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	-2	
0	0	6	42	6	
0	0	0	12	12	

$$12a_3 = 12 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$6a_2 + 42a_3 = 6$$

$$\Leftrightarrow 6a_2 + 42 = 6 \mid -42$$

$$\Leftrightarrow 6a_2 = -36 \mid :6 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -6}$$

$$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -2$$

$$\Leftrightarrow a_1 - 18 + 7 = -2$$

$$\Leftrightarrow a_1 - 11 = -2 \mid +11 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 4$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 9 - 6 + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 4 \mid -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x}}$$

## د کارونبیلگه ۲

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1\left(1 \mid -\frac{11}{2}\right) \Rightarrow f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -\frac{11}{2}$$

$$P_2\left(-1 \mid \frac{9}{2}\right) \Rightarrow f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = \frac{9}{2}$$

$$P_3(-2|8) \Rightarrow f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 8$$

$$P_4\left(-3 \mid \frac{5}{2}\right) \Rightarrow f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = \frac{5}{2}$$

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$		
1	1	1	1	$-\frac{11}{2}$	·2
1	-1	1	-1	$\frac{9}{2}$	·2
1	-2	4	-8	8	·2
1	-3	9	-27	$\frac{5}{2}$	·2
2	2	2	2	-11	
2	-2	2	-2	9	II-I
2	-4	8	-16	16	III-I
2	-6	18	-54	5	IV-I
2	2	2	2	-11	
0	-4	0	-4	20	I: (-2)
0	-6	6	-18	27	I: 3
0	-8	16	-56	16	I: 4
2	2	2	2	-11	
0	2	0	2	-10	
0	-2	2	-6	9	III+II
0	-2	4	-14	4	IV+II
2	2	2	2	-11	
0	2	0	2	-10	
0	0	2	-4	-1	
0	0	4	-12	-6	IV-2·III
2	2	2	2	-11	
0	2	0	2	-10	
0	0	2	-4	-1	
0	0	0	-4	-4	

$$-4a_3 = -4 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 - 4a_3 = -1$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 - 4 = -1 \mid +4$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 = 3 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$$

$$2a_1 + 2a_3 = -10$$

$$\Rightarrow \Leftrightarrow 2a_1 + 2 = -10 \mid -2$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 = -12 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$$

$$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -11$$

$$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 + 3 + 2 = -11$$

$$\Leftrightarrow 2a_0 - 7 = -11 \mid +7$$

$$\Leftrightarrow 2a_0 = -4 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2}}$$

د کاروني بيلگه ۳ :



$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|-16) \Rightarrow f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -16$$

$$P_2(2|11) \Rightarrow f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 11$$

$$P_3(4|-11) \Rightarrow f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = -11$$

$$P_4(6|-9) \Rightarrow f(6) = 216a_3 + 36a_2 + 5a_1 + 1a_0 = -9$$

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$		
1	-1	1	-1	-16	
1	2	4	8	11	II - I
1	4	16	64	-11	III - I
1	6	36	216	-9	IV - I
1	-1	1	-1	-16	
0	3	3	9	27	: 3
0	5	15	65	5	: 5
0	7	35	217	7	: 7
1	-1	1	-1	-16	
0	1	1	3	9	
0	1	3	13	1	III - II
0	1	5	31	1	IV - II
1	-1	1	-1	-16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	-8	
0	0	4	28	-8	IV - 2·III
1	-1	1	-1	-16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	-8	
0	0	0	8	8	

$$8a_3 = 8 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 + 10a_3 = -8$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 + 10 = -8 \mid -10$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 = -18 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -9}$$

$$a_1 + a_2 + 3a_3 = 9$$

$$\Rightarrow \Leftrightarrow a_1 - 9 + 3 = 9$$

$$\Leftrightarrow a_1 - 6 = 9 \mid +6 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 15}$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -16$$

$$\Leftrightarrow a_0 - 15 - 9 - 1 = -16$$

$$\Leftrightarrow a_0 - 25 = -16 \mid +25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 9}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 9}}$$

د کارونې بیلګه ۴ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|7) \Rightarrow f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 7$$

$$P_2(-2|6) \Rightarrow f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 6$$

$$P_3(3|1) \Rightarrow f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 1$$

$$P_4(-3|-2) \Rightarrow f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = -2$$

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$		
1	-1	1	-1	7	
1	-2	4	-8	6	II - I
1	3	9	27	1	III - I
1	-3	9	-27	-2	IV - I
1	-1	1	-1	7	
0	-1	3	-7	-1	
0	4	8	28	-6	III + 4 · II
0	-2	8	-26	-9	IV - 2 · II
1	-1	1	-1	7	
0	-1	3	-7	-1	
0	0	20	0	-10	
0	0	2	-12	-7	

Die Funktionsgleichung:

$$20a_2 = -10 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$2a_2 - 12a_3 = -7$$

$$\Leftrightarrow -1 - 12a_3 = -7 | +1$$

$$\Leftrightarrow -12a_3 = -6 | : (-12) \Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{2}$$

$$-a_1 + 3a_2 - 7a_3 = -1$$

$$\Rightarrow \Leftrightarrow -a_1 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow -a_1 - 5 = -1 | +5$$

$$\Leftrightarrow -a_1 = 4 | : (-1) \Leftrightarrow a_1 = -4$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 3 = 7 | -3 \Leftrightarrow a_0 = 4$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4}}$$

د پورته المانیژباره: د څیروني يا تابع برابرېون

د کاروني بیلگه ۵ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(2|22) \Rightarrow f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 22$$

$$P_2(4|44) \Rightarrow f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 44$$

$$P_3(-4|4) \Rightarrow f(-4) = -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 4$$

$$P_4(8|40) \Rightarrow f(8) = 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + 1a_0 = 40$$

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$		
1	2	4	8	22	
1	4	16	64	44	II - I
1	-4	16	-64	4	III - I
1	8	64	512	40	IV - I
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	-6	12	-72	-18	III + 3 · II
0	6	60	504	18	IV - 3 · II
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	24	336	-48	IV - $\frac{1}{2}$ · III
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	0	288	-72	

Die Funktionsgleichung:

$$288a_3 = -72 \Leftrightarrow a_3 = -\frac{1}{4}$$

$$48a_2 + 96a_3 = 48$$

$$\Leftrightarrow 48a_2 - 24 = 48 | +24$$

$$\Leftrightarrow 48a_2 = 72 | : 48 \Leftrightarrow a_2 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 12a_2 + 56a_3 = 22$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 + 18 - 14 = 22$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 + 4 = 22 | -4$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 = 18 | : 2 \Leftrightarrow a_1 = 9$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 22$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 18 + 6 - 2 = 22$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 22 = 22 | -22 \Leftrightarrow a_0 = 0$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x$$

د پورته المانیژباره: د څیرونیا تابع برابر و

د کارونی بیلگه ۶ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|0) \Rightarrow f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 0$$

$$P_2(-1|-2) \Rightarrow f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -2$$

$$P_3(2|16) \Rightarrow f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 16$$

$$P_4(-3|-4) \Rightarrow f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = -4$$

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$		
1	1	1	1	0	
1	-1	1	-1	-2	II - I
1	2	4	8	16	III - I
1	-3	9	-27	-4	IV - I
1	1	1	1	0	
0	-2	0	-2	-2	
0	1	3	7	16	III + $\frac{1}{2}$ · II
0	-4	8	-28	-4	
1	1	1	1	0	
0	-2	0	-2	-2	
0	0	3	6	15	: 3
0	0	8	-24	1	: 8
1	1	1	1	0	
0	-2	0	-2	-2	
0	0	1	2	5	
0	0	1	-3	0	IV - III
1	1	1	1	0	
0	-2	0	-2	-2	
0	0	1	2	5	
0	0	0	-5	-5	

$$-5a_3 = -5 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$a_2 + 2a_3 = 5$$

$$\Leftrightarrow a_2 + 2 = 5 | -2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 3}$$

$$-2a_1 - 2a_3 = -2$$

$$\Rightarrow \Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -2 | +2$$

$$\Leftrightarrow -2a_1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 0}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 0 | -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -4}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + 3x^2 - 4}}$$

د کاروني بیلگه ۷ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|1) \Rightarrow f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 1$$

$$P_2(2|0) \Rightarrow f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0$$

$$P_3(-2|4) \Rightarrow f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 4$$

$$P_4(3|9) \Rightarrow f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 9$$

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$		
1	1	1	1	1	
1	2	4	8	0	II - I
1	-2	4	-8	4	III - I
1	3	9	27	9	IV - I
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	-1	
0	-3	3	-9	3	III + 3 · II
0	2	8	26	8	IV - 2 · II
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	-1	
0	0	12	12	0	
0	0	2	12	10	IV - $\frac{1}{6}$ · III
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	-1	
0	0	12	12	0	
0	0	0	10	10	

$$10a_3 = 10 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$12a_2 + 12a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12a_2 + 12 = 0 \mid -12$$

$$\Leftrightarrow 12a_2 = -12 \mid :12 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -1}$$

$$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -1$$

$$\Leftrightarrow a_1 - 3 + 7 = -1$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 4 = -1 \mid -4 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -5}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

$$\Leftrightarrow a_0 - 5 - 1 + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow a_0 - 5 = 1 \mid +5 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 6}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6}}$$

د کاروني بیلگه ۸ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|6) \Rightarrow f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 6$$

$$P_2(3|-4) \Rightarrow f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -4$$

$$P_3\left(-\frac{1}{2} \mid \frac{45}{8}\right) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{2}a_1 + 1a_0 = \frac{45}{8}$$

$$P_4\left(-\frac{3}{2} \mid -\frac{77}{8}\right) \Rightarrow f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}a_3 + \frac{9}{4}a_2 - \frac{3}{2}a_1 + 1a_0 = -\frac{77}{8}$$

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$		
1	1	1	1	6	
1	3	9	27	-4	
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{45}{8}$	·8
1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{27}{8}$	$-\frac{77}{8}$	·8
1	1	1	1	6	
2	3	9	27	-4	II - I
8	-4	2	-1	45	III - 8·I
8	-12	18	-27	-77	IV - 8·I
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	-10	
0	-12	-6	-9	-3	III + 6·II
0	-20	10	-35	-125	IV + 10·II
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	-10	
0	0	42	147	-63	: 21
0	0	90	225	-225	: 45
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	-10	
0	0	2	7	-3	
0	0	2	5	-5	IV - III
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	-10	
0	0	2	7	-3	
0	0	0	-2	-2	42

$$-2a_3 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 - 7a_3 = -3$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 + 7 = -3 \mid -7$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 = -10 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -5}$$

$$2a_1 + 8a_2 + 26a_3 = -10$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 - 40 + 26 = -10$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 - 14 = -10 \mid +14$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 = 4 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 2 - 5 + 1 = 6$$

$$\Leftrightarrow a_0 - 2 = 6 \mid +2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 8}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8}}$$

## د کارونې یا استعمال بیلگه ۹ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1\left(1 \mid -\frac{9}{2}\right) \Rightarrow f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -\frac{9}{2}$$

$$P_2\left(-1 \mid \frac{11}{2}\right) \Rightarrow f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = \frac{11}{2}$$

$$P_3\left(3 \mid -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow f(-3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -\frac{5}{2}$$

$$P_4\left(-\frac{5}{2} \mid -8\right) \Rightarrow f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{125}{8}a_3 + \frac{25}{4}a_2 - \frac{5}{2}a_1 + 1a_0 = -8$$

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$		
1	1	1	1	$-\frac{9}{2}$	·8
1	-1	1	-1	$\frac{11}{2}$	·8
1	3	9	27	$-\frac{5}{2}$	·8
1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$	$-\frac{125}{8}$	-8	·8

$-11a_3 = -11 \mid (-11)$   
 $\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$

8	8	8	8	-36	
8	-8	8	-8	44	II - I
8	24	72	216	-20	III - I
8	-20	50	-125	-64	IV - I
8	8	8	8	-36	: 4
0	-16	0	-16	80	: 4
0	16	64	208	16	: 4
0	-28	42	-133	-28	: 7
2	2	2	2	-9	
0	-4	0	-4	20	
0	4	16	52	4	III + II
0	-4	6	-19	-4	IV - II
2	2	2	2	-9	
0	-4	0	-4	20	
0	0	16	48	24	: 8
0	0	6	-15	-24	: 3

$2a_2 + 6a_3 = 3$   
 $\Leftrightarrow 2a_2 + 6 = 3 \mid -6$   
 $\Leftrightarrow 2a_2 = -3 \mid : 2$   
 $\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{3}{2}}$

$-4a_1 - 4a_3 = 20$   
 $\Leftrightarrow -4a_1 - 4 = 20 \mid +4$   
 $\Leftrightarrow -4a_1 = 24 \mid (-4)$   
 $\Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$

$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -9$   
 $\Leftrightarrow 2a_0 - 12 - 3 + 2 = -9$   
 $\Leftrightarrow 2a_0 - 13 = -9 \mid +13$   
 $\Leftrightarrow 2a_0 = 4 \mid : 2$

## د کاروني يا استعمال بیلگه ۱۰ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|25) \Rightarrow f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 25$$

$$P_2(-1|-49) \Rightarrow f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -49$$

$$P_3(3|27) \Rightarrow f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 27$$

$$P_4(5|5) \Rightarrow f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 5$$

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$		
1	1	1	1	25	
1	-1	1	-1	-49	II - I
1	3	9	27	27	III - I
1	5	25	125	5	IV - I
1	1	1	1	25	
0	-2	0	-2	-74	
0	2	8	26	2	III + II
0	4	24	124	-20	IV + 2 · II
1	1	1	1	25	
0	-2	0	-2	-74	
0	0	8	24	-72	
0	0	24	120	-168	IV - 3 · III
1	1	1	1	25	
0	-2	0	-2	-74	
0	0	8	24	-72	
0	0	0	48	48	

$$48a_3 = 48 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$8a_2 + 24a_3 = -72$$

$$\Leftrightarrow 8a_2 + 24 = -72 \mid -24$$

$$\Leftrightarrow 8a_2 = 96 \mid : 8 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -12}$$

$$-2a_1 - 2a_3 = -74$$

$$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -74 \mid +2$$

$$\Leftrightarrow -2a_1 = -72 \mid : (-2) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 36}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 25$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 36 - 12 + 1 = 25$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 25 = 25 \mid -25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x}}$$

پوښتنې:



$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 = 28 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 30 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 = 32 \end{cases} \Rightarrow L = \{13; 15; 17\}$	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 12 \\ 3x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 11 \\ 0x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow L = \{3; 2; 1\}$
$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow L = \{15; 12; 10\}$	$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -8 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19 \end{cases} \Rightarrow L = \{-1; 3; 2, 5\}$
$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 23 \end{cases} \Rightarrow L = \{5; 3; 1\}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 20 \end{cases} \Rightarrow L = \{5; 3; 1\}$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -6 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 3 & -2 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & -4 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & -6 & 2 & -21 \end{array} \Rightarrow L = \{1; -1; 2; -1\}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 - 8x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - 6x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ x_4 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline -2 & 3 & -4 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & -8 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -1 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \Rightarrow L = \{-1; -1; 0; 5\}$$

د لاس ته راوړني د کنترول له پاره دي ازماښت وشي.

**Das Horner – Schema** هورنر- شیمما

د دې له پاره چې د جگودر جو ټولراشئلخیرونو یا که غواړی توابعو گراف وکښلای شو، باید یو ارزښت جدول برابرکړو. دا به ډېر وخت اوځای ونیسي، چې د دې له پاره اړین څیره ارزښتونه یا فنکشنارزښتونه وشمیرو.

د هورنر – شیمما دا شمیرني ډبرې ساده کوي.

بیلگه : دریمه درجه ټولراشئل فنکشن یا راشئل څیرونه

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

د  $x$  د ډبرځله نوکانو بندولو له لارېمنځ ته راځي:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x \left[ a_3x^2 + a_2x + a_1 \right] + a_0 = x \left[ x \left( \underbrace{a_3x + a_2}_{e_2} \right) + a_1 \right] + a_0$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{e_4}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_E$$

که سرې غواړي چې د  $x = x_1$  له پاره فنکشن ارزښت وشمیري، نوکی دی شي سرې په لاندې ډول له دننه دباندي لورته مخ ته لار شي:

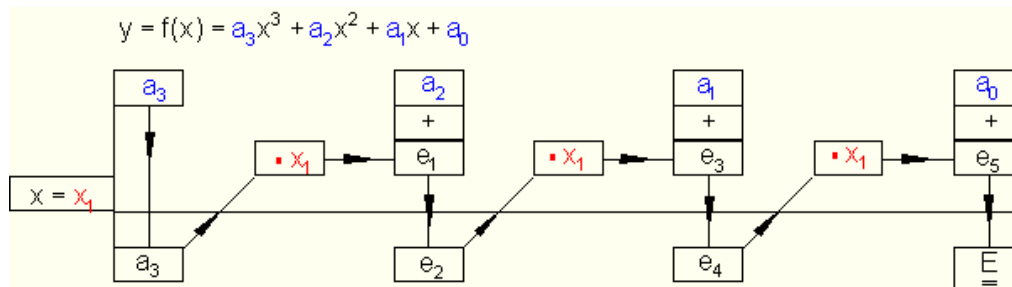
-- گرد نوکان وشمیري

--منځ لاس ته راوړنه ( ښه لیکنه به یې داسې وي: منځلاس -ته-راوړنه) د  $x_1$  سره ځل کړي او  $a_1$  ته یې ور زیات کړي

--لاس ته راوړنه د  $x_1$  سره ځل کړي او  $a_0$  ته یې ور زیات کړو

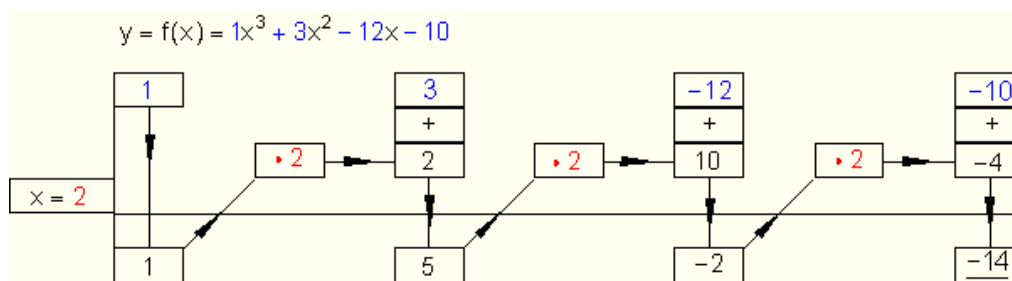
دا شمیرنکارونې یا که غواړی شمیرنعمليي کیدی شي څیره ډوله یا شیماتیکي داسې انځور کړو:

Allgemeines Schema: ټولیزه بڼه



بیلگه :  $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 12x - 10$

د  $x = 2$  له پاره دې د  $y = f(2)$  ارزښت د هورنر - شیماله لارې وشمیرل شي.

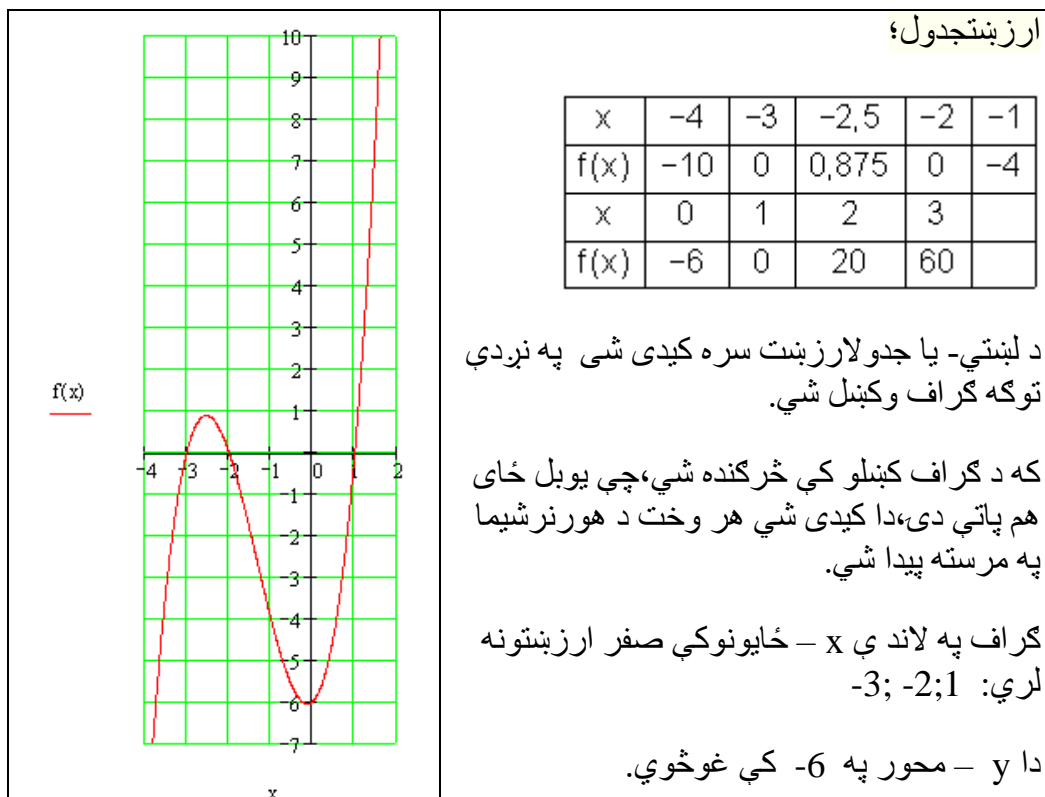


نولاس ته راځي يا باورلری:  $y = f(2) = -14$

د یوه دریمې درجې پولینوم له پاره- چې غواړو گراف یې رسم کړو یا کارو- باید یو ارزښتجدول جوړکړو.

$y = f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 \quad D_f = \{x \mid -4 \leq x \leq 3\}_{\mathbf{R}}$   
 $a_3 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_1 = 1 \quad a_0 = -6$

$x = -4$	1	<u>4</u>	<u>1</u>	<u>-6</u>	
		<u>-4</u>	<u>0</u>	<u>-4</u>	
	1	0	1	-10	= f(-4)
$x = -3$	1	4	1	-6	
		<u>-3</u>	<u>-3</u>	<u>+6</u>	
	1	1	-2	0	= f(-3)
$x = -2$	1	4	1	-6	
		<u>-2</u>	<u>-4</u>	<u>+6</u>	
	1	2	-3	0	= f(-2)
$x = -1$	1	4	1	-6	
		<u>-1</u>	<u>-3</u>	<u>+2</u>	
	1	3	-2	-4	= f(-1)
$x = 1$	1	4	1	-6	
		<u>+1</u>	<u>+5</u>	<u>+6</u>	
	1	5	6	0	= f(1)
$x = 2$	1	4	1	-6	
		<u>+2</u>	<u>+12</u>	<u>+26</u>	
	1	6	13	20	= f(2)
$x = 3$	1	4	1	-6	
		<u>+3</u>	<u>+21</u>	<u>+66</u>	
	1	7	22	60	= f(3)
$x = -2,5$	1	4	1	-6	
		<u>-2,5</u>	<u>-3,75</u>	<u>+6,875</u>	
	1	1,5	-2,75	0,875	= f(-2,5)



که په کښلو کې څرگنده شي چې یو بل ځای هم پاتې دی، نو دا کیدی شي د هورنر شیمیا په مرسته پیدا کړو، د بیلگه په توگه  $f(0,5)$

	1	4	1	-6
$x = 0,5$		$+0,5$	$+2,25$	$+1,624$
	1	4,5	3,25	$-4,375 = f(0,5)$

د پولینوم وېشنې پر ځای کیدی شي د ټولراشئل تابع درجه د هورنر شیمیا له لارې هم کمه شي.

مورن د هورنر شیمیا څیرو:

مورن بیرته تابع تر څیرو لاندې نیسو

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$$

چیرته چې  $x_1=2$  یو صفرخای دی.

د  $f(x)=x^3-x^2-5x+6$  لپاره د هورن شیما د  $x_1=2$  سره

<p>په دریمه لیکه کې درې عددونه د وېش نتیجه لپاره هم د پاتې پولینوم ضریبونه بللکیري.</p> $f(x) = \underbrace{(x-2)}_{\text{Linearfaktor}} \underbrace{(1 \cdot x^2 + 1 \cdot x - 3)}_{\text{Restpolynom}}$ <p>پاتې پولینوم کرښیز ضریب</p>	<p>موخه د ضریب <math>(x-2)</math> له نوکانو وتنه ده.</p> $\begin{array}{r} 1 \quad -1 \quad -5 \quad 6 \\ x = 2 \downarrow \quad 2 \quad 2 \quad -6 \\ \hline 1 \quad 1 \quad -3 \quad 0 \end{array}$
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

د  $f(x)$  د نورو صفرخایونو لپاره د پاتې یا باقي پولینوم صفرخایونه شمیرو. دا د اړونده مربع مساوات د حل له لارې کیري.

نتیجه یې د لاندې پولینوم وېش بیلگې سره وگوری.

بیلگه:  $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^2 - x - 4$  چیرته چې  $x_1 = -2$  یو صفرخای دی.

<p>باقي یا پاتې پولینوم:</p> $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$ $f(x) = (x+2) \left( \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 \right)$ <p>د مربع مساوات حل <math>\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0</math> له دې لاس ته راځي او معکوس: <math>x_2=2</math> او <math>x_3=-4</math></p>	$\begin{array}{r} \frac{1}{4} \quad 1 \quad -1 \quad -4 \\ x = -2 \downarrow \quad -\frac{1}{2} \quad -1 \quad 4 \\ \hline \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad -2 \quad 0 \end{array}$
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

بیلگه:

چیرته چې  $x_1 = 1$  یو صفرخای دی  $f(x) = -x^3 + 7x - 6 = -x^3 + 0 \cdot x^2 + 7x - 6$

باقي پولینوم: $-1 \cdot x - 1 \cdot x + 6$	$-1 \quad 0 \quad 7 \quad -6$
$f(x) = (x-1)(x^2-x+6)$	$x=1 \quad \downarrow \quad -1 \quad -1 \quad 6$
د مربعیز مساوات حل:	<hr/>
$x^2-x+6$ له دې لاس تره اوپه	$-1 \quad -1 \quad 6 \quad 0$
څنې یا برعکس $x^2=2$ او $x^3=-3$	

لکه بیلگه چې ښایي، د هورن شیمیا سره د پاتې پولینوم ټاکنه ساده ده نسبت د پولینوم وېش ته.

دا ټولې پورته ټولنلارې مو د مربع مساوات حل ته لارښودوي. که دا ونه توانیږو، نو د نومړیکي ټولنلارو څخه کار اخستل کیږي، چې دا دلته نه څېړل کیږي.

تمرینونه: د پولینوم وېش...

د لنډې ترمونو لپاره د پولینوم وېش وکاروی:

$$\text{لومړی - } (x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 1) \text{ دیم - } (2x^3 - 14x - 12) : (x - 3)$$

$$\text{دریم - } (3x^3 - 15x^2 - 51x + 63) : (x - 7) \text{ څلورم -}$$

$$\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x + 6\right) : (x + 2)$$

$$\left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x - 3\right) : (x - 2) \text{ شپږم - } \left(x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 5x - 4\right) : (x + 2) \text{ پنځم -}$$

$$\left(x^3 - \frac{5}{3}x^2 - \frac{47}{3}x - 5\right) : (x + 3) \text{ اتم - } \left(x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{23}{4}x + \frac{3}{2}\right) : (x - 3) \text{ اوم -}$$

$$\left(3x^3 - 15x^2 - 51x + 63\right) : (x - 1) \quad \text{لسم -} \quad \left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x - 3\right) : (x + 3) \quad \text{نهم -}$$

تمرینونه: د ټول راشنل توابعو صفرخایونه.

#### تمرین ټولراشنل تابع IV

د صفرخایونو ټاکنه له مختلفو لارو څخه.

د یوه تاسو ته مناسب قانون له مخې د ټولراشنل توابعو صفرخایونه وټاکئ. د  $x$  محور سره د گراف غوڅتکي و ټاکئ او د تابع مساوات د کرښیزو ضریبونو د ضرب په څیر انځور کړئ.

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 \quad \text{دویم -} \quad f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{13}{2}x^2 + 18 \quad \text{اول -}$$

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^4 + \frac{75}{2}x^2 - 216 \quad \text{څلورم -} \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 \quad \text{دریم -}$$

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x \quad \text{شپږم -} \quad f(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{4}x + 3 \quad \text{پنځم -}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 2 \quad \text{اتم -} \quad f(x) = 3x^4 - 3 \quad \text{اوم -}$$

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 26x + 20 \quad \text{لسم -} \quad f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 16x \quad \text{نهم -}$$

#### پوښتنې

د ټول هوښیار یا راشنل توابعو محور غوڅتکي گرافونه

صفرخایونه وشمیرئ او گرافونه وکارئ



لومړۍ: د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف-  $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$  ب-  $f(x) = x^2 - 6x + 9$

پ-  $f(x) = (x^2 - 25)\left(\frac{1}{2}x + 4\right)$  ت-  $f(x) = x^6 - x^4$

ب-  $f(x) = 3x\left(\frac{2}{3}x - 2\right)(-2x + 3)$  ث-  $f(x) = 3(x^2 + 4)(x^2 - 4x + 10)$

دویم: لومړۍ: د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف-  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$  ب-  $f(x) = 4x^4 + 6x^2 - \frac{7}{4}$  پ-  $f(x) = x^6 - 8x^4 + 20x^2$

دریم: لومړۍ: د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف-  $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$  ب-  $f(x) = x^3 - 12x + 16$

پ-  $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$  ت-  $f(x) = 2x^3 - 10x^2 - 4x + 20$

ب-  $f(x) = x^4 - \frac{11}{4}x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{1}{2}$  ث-  $f(x) = -3x^3 + 3x^2 - 3x + 3$

ج-  $f(x) = -5x^3 - 10x^2 - \frac{5}{2}x - 5$  چ-  $f(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 9x + 6$

څلورم: لومړۍ: د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف-  $f(x) = -3x^4 + 15x^2 - 12$  ب-  $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$

پ-  $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 16x - 24$  ت-  $f(x) = (x^2 - 6x + 9)(x - 4)$

ب-  $f(x) = x^6 - 3x^4 - 4x^2$  ث-  $f(x) = x^4 - 25x^2 - 60x - 36$

پنځم: د لاندې ټولراشل توابعو ګرافونه په یوه مناسب پروټولار یا ګواوډینات سیمه کې وکارئ. د دې لپاره یو ارزښت جدول واچوئ او محور غوڅتکي وټاکئ

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad D_f = \{x \mid -0,5 \leq x \leq 4,5\}_{\mathbb{R}} \text{ الف -}$$

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2 \quad D_f = \{x \mid -3,5 \leq x \leq 2,5\}_{\mathbb{R}} \text{ ب -}$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \quad D_f = \{x \mid -0,2 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}} \text{ پ -}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad D_f = \{x \mid -3 \leq x \leq 3,5\}_{\mathbb{R}} \text{ ت -}$$

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \quad D_f = \{x \mid -2,5 \leq x \leq 3,5\}_{\mathbb{R}} \text{ ټ -}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x \quad D_f = \{x \mid -0,2 \leq x \leq 8\}_{\mathbb{R}} \text{ ټ - ج -}$$

شپږم: د لاندې توابعو صفرځايونه وټاکئ او گراف يې تر شونې پولې پورې بڼه وکارئ. ارزښتجدول کيږدئ او ځنې ارزښتونه د جېشميري سره وشميرئ. ځنې صفرځايونه اټکل کړئ او که شونې وي، صفرځايونه وشميرئ.

$$f(x) = 0,01(x^3 - x^2 - x + 1) \quad \text{ب -} \quad f(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3}x - 1 \quad \text{الف -}$$

$$f(x) = (x - 1,7)(x^2 - 3) \quad \text{ت -} \quad f(x) = 0,1x^3 - 0,3x^2 - 9x - 10 \quad \text{پ -}$$

تر ۶۴۰ پورې دلته محور غوڅتکيږاځي؟

اړيکي "Relation":

### سرلیک

یوه اړیکه له دوه شیانو جوړه ده:

۱ - یوه وینابنه

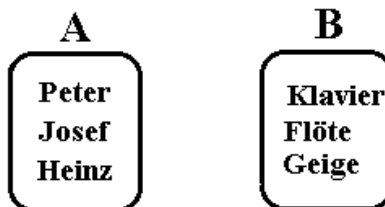
۲ - جوړه، چې دا وینایې پوره کوي (چې وینابنه یوه رښتیا وینا کوي).

**بیلگه :**

دیوې کورنۍ د غرو ډیرۍ A دې ورکړ شوې وي او B د لوبو یا موزیک الو ډیرۍ.

A	B
سپین	فوتبال
	هاکي
	زیرگل
	والبال
	کوچی

یا دا لاندې

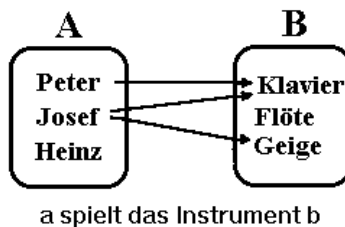


د کسانو نومونه: پتر یوسف هاینخ	<table border="0" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td style="width: 50%;"><b>A</b></td> <td style="width: 50%;"><b>B</b></td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 5px;">Peter Josef Heinz</td> <td style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 5px;">Klavier Flöte Geige</td> </tr> </table>	<b>A</b>	<b>B</b>	Peter Josef Heinz	Klavier Flöte Geige	موزیک الو پیانو شپیلی کاپکي
<b>A</b>	<b>B</b>					
Peter Josef Heinz	Klavier Flöte Geige					

د دواړو ډیریو په منځ کې یوه بینار وینابنه دې یوه وینابنه وي، چې سری a له b باندې لوبې کوي.

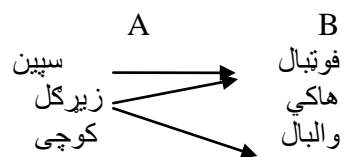
جوړه ، چې وینابنه پوره کوي، کیدی شي د بیلگې په توگه لاندې جوړې وي:

پتر په کلاویر لوبه کوي، یوسف په کلاویر لوبه کوي ، یوسف په گایگی لوبه کوي، د څیرې په توگه اړیکې داسې انځورېږي:



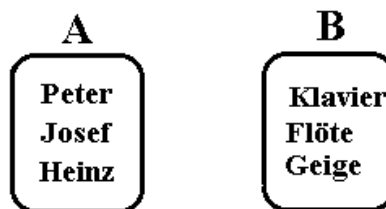
a spielt das Instrument b

یا دا لاندې



**نورې بیلگې**

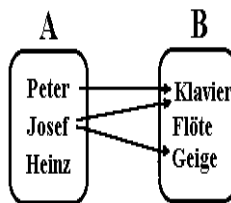
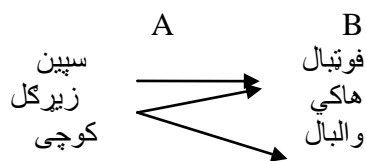
مور د مخه دا لاندې ډیرې منځ ته راوړي:



د دواړو ډیریو په منځ کې د اړیکو په څیر مور اړیکې «په اله لوبه کوي» راوړي یا دا لاندې

سپین	فوتبال
زیرگل	هاکی
کوچی	والبال

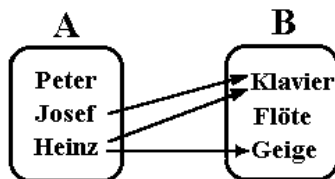
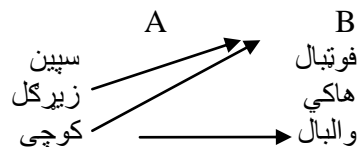
سرلیک



a spielt das Instrument b

په پورته کې ښوول کېږي، چې څوک په کومه اله لوبه کوي. مور اوس دواړه ډیرې A او B ساتو، مگر د دوي ترمنځ نوې اړیکې غواړو وپېژنو یا تعریف کړو:

بینار اړیکې دې اوس داسې وي، چې «اله لري» او «په اله باندي لوبه کوي» نور نه وي.  
 د دې برسیره دې اړیکې «اله لري» لاندې درې جوړې ولری:  
 هاینخ کلاویر لري  
 هاینخ یوه گایگی لري  
 یوسف یوه کلاویر لري  
 د څیرې په څیر انځور یزي:



a besitzt das Instrument b

لیدلکیري، چې د دوه ډبريو په منځ کې مختلفې اړیکې منځ ته راتللی شي یا ټینګیدلی شي.

شننیزه انځورونه

مخ ته تیرو مخونو کې مو زده کړل، یوې اړیکې پورې دوه شیان اړه لري: یوه وینا بڼه او یوه جوړه، چې دا وینابڼه پوره کوي. کله اړیین نه دي یا نه شي کیدی، چې ټولې جوړې ورکړای شو، کومې چې په یوه اړیکې پورې اړه لري.

بیلګه ۱

ډبرې  $A = \{1, 2, 3\}$  او ډبرې  $B = \{1, 2, 3\}$  دې ورکړ شوي وي. وینابڼه کوچنۍ له یا لنډ <

هر زده کوونکی پوهیږي، چې جوړې  $(1/3), (1/2)$  او  $(2/3)$  دا وینابڼه پوره کوي. جوړو گڼلو ته اړه یو، بلکې دا د وینابڼې مخ ته پرتې ډبرې  $A$  او  $B$  ته.

بیلګه ۲

په ځانگړې توگه دا هلته له پامه غورځول کيږي، چې ټولې جوړې وشمیري، کله چې وینابڼو ته مخ ته پرتې ډبرې یا ډبرې لويې وي او یا ناپای. بیلګه: ډبرې:  $A = B = \{1, 2, 3, \dots\}$  وینابڼه: له هغې، چې لیدل کيږي، چې بیخي ناشونې ده، چې ټولې جوړې وشمیرل شي، چې دا وینابڼه پوره کوي.

بیلګه ۳

کله کله اړیکه بیخي نه شي انځوریدلی. بیلګه: ډبرې نارینه  $M$  او بنځینه  $F$  وینابڼه کې راوستل شي، چې «واده له سره» دا څوک نه شي گڼلی، چې څوک له چا سره واده دی او دا نه په برخه اخستونکو ډبريو  $M$  او  $F$  کې ورکړ شوي.

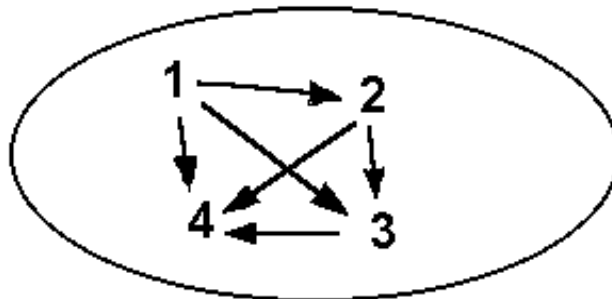
د یوې اړیکې تیوپ یا ډول

اړیکه په دوه گروپونو ویشل کیدی شي.

۱ – ددوه ډبريو ترمنځ اړیکې

۲ – د یوې ډبرې په دننه کې اړیکې

تیوپ ۱ - مورن وپیژند  
د تیوپ ۲ - لپاره بیلگه لاندې اړیکې دي (چې په څیره کې کښل شوي دي):



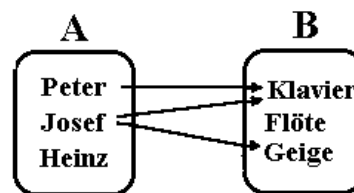
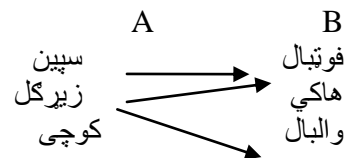
x له y څخه کوچنی دی

د مخ ته تیرو بیلگو په مخامخوالي یا تضاد دلته د ډیریو د توکو ترمنځ اړیکې پرتې دي

بنسټیږی، موخه ډیری یا تر مخور شو پسي ورشو

**Erklärung** روښانه ونه

د ډیری A (بنسټیږی) او B (موخه ډیری) په اړیکو کې په ریښتوني د مخ ته ورشو (پنر، یوس) همداسې ورپسي ورشو (کلاویر، گایگی) اړیکې هغه توکي جوړوي، چې په کارونه کې ونډه لري. A د لوبغاړو نومونه دي او B د لوبو نومونه دي



بنسټیږی: { سپین، زیرگل، کوچی } Grundmenge:  
موخه ډیری: { فوتبال، هاکی، والیبال } Zielmenge

Vorbereich : {Peter, Josef} تر مخور شو  
 Nachbereich : {Klavier, Geige} ورپسي ورشو

خني شمير پوهان دا مخور شو او همداسې پسي ورشو، تعريفډيري ،  
 ارزښتډيري يا تعريفور شو همداسې ارزښتور شو بولي

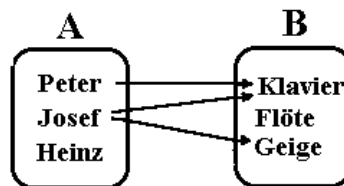
**Relationstafel د اړيکو تخته**

تراوسه مو ټولې اړيکې د غشيدياگرام له لارې انځور کړل. يو شونوالی يا امکانات يي  
 د اړيکو تختې له لارې انځورونه ده:

د دې لپاره د بنسټډيري او موخه ډيري توکي په يوه جدول کې لیکو. د بنسټډيري توکي په  
 پورته ليکه کې لیکو اود موخه ډيري توکي په کين درخ يا کينه مته کې لیکو.

په صلیبونه سره هغه پیژند يا تعريف ورکول کيږي، چې د موخه ډيري  
 په توکي باندې د بنسټډيري يو توکی تنظيم شوی وي.

د بيلگي په توگه بيرته همغه د ساز الو سره بيلگه راوړو



په دې پورې اړونده اړيکته په لاندې ډول ليدل کيږي

	Peter	Josef	Heinz
Klavier	x	x	
Flöte			
Geige		x	

د کواوردينات سيستم انځور بڼه

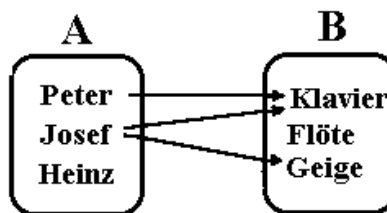


تراوسه مو اړیکې د غشیدیاگرام او اړیکتختو له لارې انځور کړې • اوس یو دریم شوونوالی یا دریمه شوونتیا یا امکان غواړو وپېژنو: انځورونه په یوه کواوردیناتسیستم کې :

د بنسټیږی توکي د پروتمحور په نڅبنه کوو او د موخه ډیری توکي په ولاړ محور په نڅبنه کوو • د ټکو سره هغه د بنسټیږی توکي او ورسره د تنظیمډیری تنظیم توکو ټاکلي وي

**بیلگه**

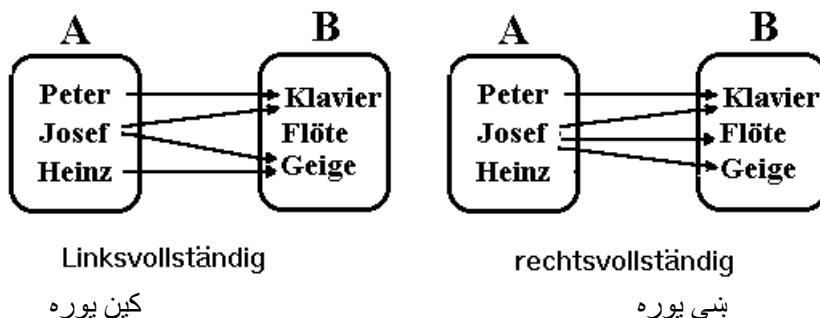
د بیلگې په توگه بیرته هغه بیلگه د لوبو یا موزیک الاتو سره ټاکو: دلته په دې لاندې الماني لیکنبیا ښه یې څیره بسیا کړی شو



په کواوردیناتسیستم کې انځورونه داسې لیدل کیږي

Geige		x	
Flöte			
Klavier	x	x	
	Peter	Josef	Heinz

کڼ پوره کیدونکی اړیکې : د A څخه هر توکی کم له کمه د B په یوه توکي تنظیمیږي (پېژندورشو یا مخ ته ورشو او بنسټیزه ډیری کټمټ دي) ښي پوره اړیکې : د B هر توکی کم له کمه د څیري په توگه منځ ته راځي (پسي ورشو او موخه ډیری کټمټ دي)



بنی یواځنی اړیکې

د بنسټیږی (کین) هر توکی په زیات ترزیاته د موخه ډیری (بنی) باندې تنظیمیږي.

پام مرسته : غشي بني « بنیلوریز) یواځنی دي.

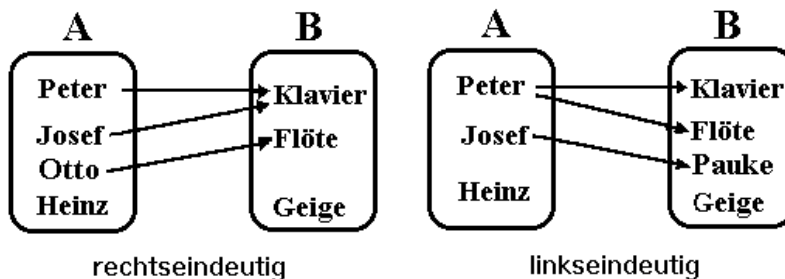
کین یواځنی اړیکې :

د بنی ډیری هر توکی زیات ترزیاته یو وار د یوې ډیری (کینډیږی) د څیری په ډول منځ ته راځي.

پام مرسته : غشي بني لورته یواځني دي.

ناتیځوالی!

یا دا لاندې، چې د توپونو په ځای موزیک الی ورکړ شوي دي



بنی

کین یواځنی

یواځنی، .

یو کینپوره کیدونکی او بنی یواځنی اړیکې یواځنی اړیکې بلل کیږي ( فنکشن او یا څیروني)

په غشیدیاگرام کې یو فنکشن په دې پیژندل کیږي ، چې په هر توکی تیک یو غشی پیل کیږي

په څټ اړیکې : په څټ اړیکو کې

۱ – مخ – او پسې ورشوگاني سره بدلیري (پیژندډیری او ارزښتډیری )

۲ – اوبنتوني سره بدلیري

رفلکسیو اړیکې reflexive relations

دیاگرام : په هر توکی یوکرئ غشی شته

رفلکسیو اړیکې :

د رفلیکسو اړیکو پیژند : د هرو برابر و توکو جوړه اړیکو پورې اړج لري

د فرمو په څیر یې لیکنه : د ټولو a لپاره باور لري:

aRa

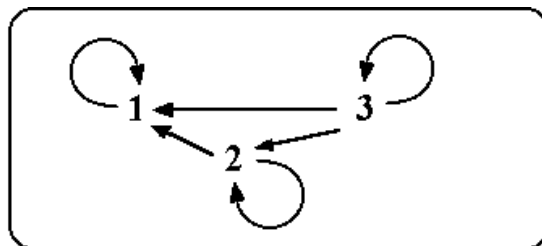
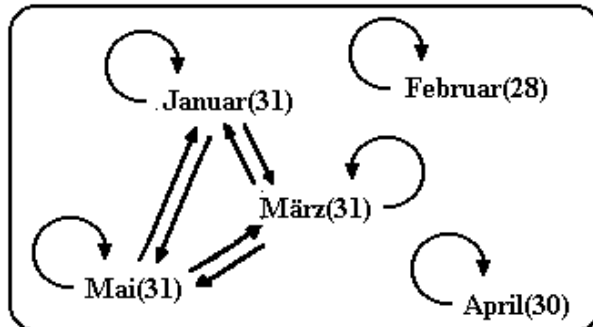


Bild: Die reflexive Relation  $\geq$

انتیرفلکسیو (ایرفلکسیو اړیکې

Antireflexive  
(irreflexive)  
Relationen

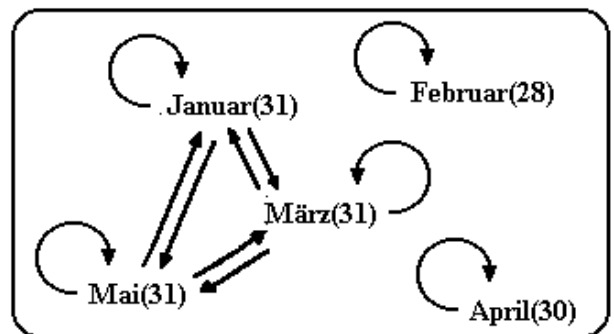
پیژند : په انټیرفلکسیو اړیکو کې په هیڅ توکي کړی غشی نه شته  
د همغه توکي جوړه اړیکو پورې اړوند نه دی، یا په اړیکو ونډه نه لري •  
د فرمول په توګه لیکل یی :  $\neg(aRa)$



سیومتريکي اړیکي : symmetric relations :

هر غشي ته په څټ غشي شته

که  $(a,b)$  اړیکو پورې اړه ولري ، نو  $(b,a)$  هم په اړیکو پورې اړه لري •  
د سیومري اړیکو څیره: « همغومره ورځي لري لکه»



انتیسیومتري اړیکي: Antisymmetric relations :

د انتیسیومتري اړیکو دیاګرام : په څټ غشي نه شته •

که  $(a,b)$  په اړیکو اړه ولري، نو  $(b,a)$  په اړیکو اړه نه لري، مګر که  $a = b$  وي •

فرمول:  $a R b \wedge b R a \Rightarrow a = b$

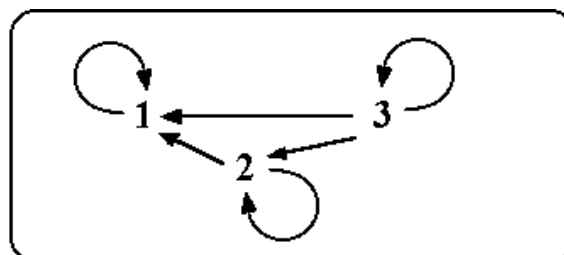
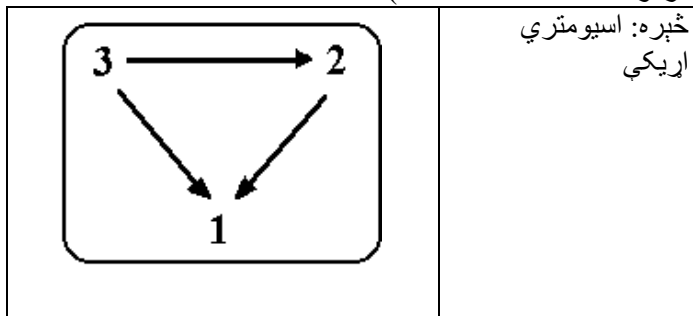


Bild: Die antisymmetrische Relation  $\geq$

Antiasymmetric relations: ناسيومتریک اړیکې پورته څېره

اسيومتریکې اړیکې  
asymmetric relations ( Asymmetrische Relationen)

د اسيومتریکې اړیکو دياگرام نه په څټ غښی لري او نه کړي غښی لري •  
د اسيومتریکې اړیکو پيژند: انټيرفلیکسيو او انټيسسيومتریکې اړیکې  
فرمول:  $\neg(bRa \Rightarrow aRb)$



## څیره کونه یا توابع Funktionen

p

یادونه: په انرېزي کې mapping د او الماني کې DieAbbildung په نامه ن،مولشوي، چې پښتومانایي څیرونه یا څیره کونه ده.

فنکشنده اوښتونپیا واریابلېلري، چې یوه خپلواکه اوبله ییواکه ده. له دپام له د فنکشن لهپاره ناسمد تابع نومورکړشویدی.

په ریاضي یا شمیرپوهنه کې څیرونه یا توابع

په شمیرپوهنه کې طبیعي ، تخنیکي یا هم نورو ورځنیو کارونو کې زیات وخت یوه لویه د بلي لوي په واک کې وي یا که غواری د هغې تابع وي، لکه د بیلگې په توګه د یوه موټر د بنزین سوزول یا استعمالول د هغه د تللي چټکتیا یا سرعت په واک کې یا تابع دی. دا ډول ساده اړیکې مو پخوا هم لوستلي او ګرافیکي مو په یوه ګواوردینات – یا پروتولارسیستم کې انځور کړي.

بیلگې:

د یوه شي یا جنس قیمتت د هغه د خرڅ شوي ډیري یا ست په واک کې دی یا تابع دی.

ټوله دبانډنئ تودوخي د ورځي د وخت په واک کې ده.

د یوه بایسکلځغلوونکي وهلي لار په مساوي چټکتیا یا سرعت د تلني وخت په واک کې ده.

د موټر د بریک لار په روښانه توګه د هغه د چټکتیا په واک کې ده.

د یوه کوچني لوږښه د هغه د عمر په واک ده.

د یوه ریاضي ازموښي نمري د لاس ته راوړول ټکو په لاس کې ده.

د یوي بډايئ د ګټي قیمت یا لاس ته راوړنه د په د مخه ټاکلي ګټي سره دوخت تیرېدنې په واک کې ده.

تمرین ۱ : د داسې یو په واکوالي یا تابعیت لپاره نورې بیلگې هم پیدا کړئ.

له پورته بیلگې څخه لیدل کیږي، چې هر دوه لويي سره تنظیمیږي.

ډیري یا ست ← وخت خرڅشوي ست په قیمت اغیزه لري.

د ورځي وخت ← تودوخي. د ورځي وخت په اندازه شوي تودوخي اغیز لري.

د لاس ته راړلو ټکو تعداد یا ګڼون ← نمري د یوي ازموښي نمري د لاس ته راړلو ټکو اغیزمن کیږي.

تمرین ۲ : د پاتې بیلگو لپاره او د هغو لپاره چې په تمرین ۱ کې مو میندلي اړیکې پیدا کړی.

دا یو له بل سره تنظیم شوی لویې متحولې (اووښتوني یا **Variablen**) بلل کيږي.

دلته دې دې ته پام وشي، چې کوم په واکوالی یا تابعیت د دوي په منځ کې شتون لري.

د ریاضي نمرې د ښوونکي له نظره د لاس ته راوړو ټکو په واک کې دي، مگر نه د نمرې د ټکو په واک کې.

سری نمرې د بلواک یا تابع متحولو په حیث هم ښایي او د ټکو تعداد د خپلواک متحولو په حیث ښایي.

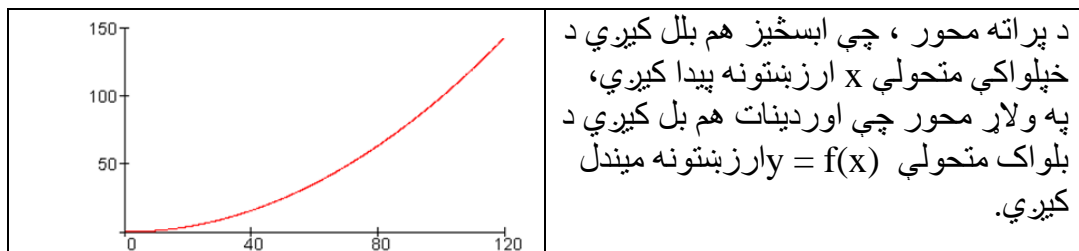
د ټکو او نمرې په منځ کې یو فنکشن یا بلواکیزې یا که غواری تابعیتي اړیکې شتون لري.

لکه د مخه درسونو څخه چې پوهیږو، ډېر امکانات شتون لري چې د دوه متحولو ترمنځ تابعیتي اړیکې تشریح کړو یا انځور کړو.

د مختلفو چټکتیاو لپاره د بریک لار اندازه کيږي او یو ارزښت جدول ترتیبیږي.

چټکتیا په km/h(x)	20	40	60	80	100	120
د برېکټولو لار په m(y)	4	16	36	64	100	144

که د جدول ارزښتونه په یوه پروت ولاړ – یا کواوردینات سیستم کې وکښل شي، نو سری گراف لاس ته راوړي وروسته له هغې چې ټکي یو له بل سره وتړل شي کوم چې د چټکتیا او بریکلار ترمنځ اړیکې تشریح کوي.



تمرین ۳ : د ارزښت جدول سره سم په یوه مناسب پروتولاړ – یا کواوردیناتسیستم کې اړونده ټکي وکارئ او دا په یوه گراف کې سره ونښلوئ.

د بریکلار د چټکتیا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې وټاکئ.

پولیس یوه 90 m د بریک لار اندازه کوي؟

دا موټر د کومې چټکتیا یا سرعت سره خغلي؟

زیات وخت دا هم شونې ده چې فنکشنال یا تابعي اړیکې د تابع مساوات له لارې انځور شي.

د بریکلار لپاره باور لري:  $y = f(x) = 0,01 x^2$

دلته  $y = f(x)$  د بریکلار لپاره ایښوول شوی او دا وايي، چې  $y$  -کو اوړدینات په کو اوړدیناتسیستم کې د متحولې  $x$  په واک کې دی، یعنی د خپلواک متحولې  $x$  یو تابع دی یا په واک کې دی. تابع مساوات دی، کوم چې هغه قانون ورکوي، چې ارزښتونه د  $f(x)$  تابع یا بلواک متحولې جوړوي.

د تابع مساوات په ځای هم وایو چې  $f(x) = 0,01 x^2$  د تابع قانون دی.

تمرین ۴ : که تابع مساوات  $f(x) = 0,01 x^2$  وي، نو لوستل شوي ارزښتونه وشمیرئ؟

له دا تراوسه شوي کار څخه کیدی شي ووايو:

پېژند یا تعریف:

د یوه تابع سره د خپلواک متحولې  $x$  هر ارزښت ټیک یو تابع ارزښت  $f(x)$  باندې- یا سره تنظیمیږي. سری دا هم وايي چې یوه تابع یو یواځنی نظم دی.

$$f : x \rightarrow \underbrace{f(x) = x - 1}_{\text{Funktionsgleichung}} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Funktion}} : \text{لیکنډول } f$$

پورته لومړۍ یې په پښتو: تابع برابر ورون

که په راتلونکې کې له یوه تابع غږیږو، نو د دې تشریح لپاره فقط تابع مساوات ورکوو، یعنی فقط  $f(x) = \dots$  ی.

د تابع نوم  $f$  دی.



دا  $f(x) \rightarrow x$  لیکندود روښانه کوي، د هر  $x$  - ارزښت سره یو ټاکلی تابع ارزښت  $f(x)$  اړه لري.

تابع مساوات  $f(x) = x - 1$  د شمیرلو قاعده یا قانون راکوي، چې تابع ارزښت څنگه جوړيزي.

د دې لپاره چې د نظم یواځنوالی بیا وښایو، لاندې بیلگه راوړو:

هر زده کوونکی یو ټاکلی د بوتانو لویوالی لري. دلته حتمي ده چې زیات زده کوونکي به یو - یا هماغه د بوتانو لویوالی ولري.

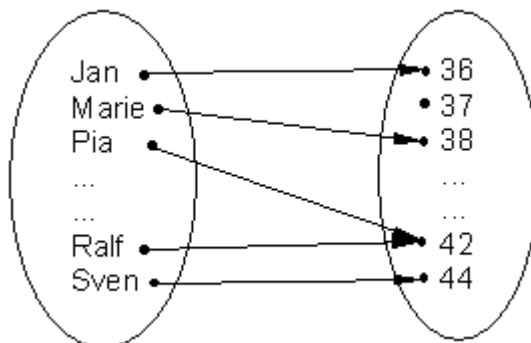
یواځنوالی په زده کوونکو اړه لري  $\leftarrow$  د بوتانو لویوالی.

د متحولو سره کښلی یا لیکلي دا په دې معنا دی، چې د زده کوونکي نوم خپلواکه متحوله په گوته کوي او هغه سره تنظیم شوي د بوتانو لویوالی بلواکه یا تابع متحوله جوړوي.

معکوس یا په څټ د زده کوونکو تنظیم یواځنی نه دی، ځکه چې ډېر زده کوونکي د بیلگي په توگه ۴۲ نمرې د بوتانو لویوالی لرو دی شي.

دا ډول تابع د تابع مساوات نه لري، دا کیدی شي چې د ډېرئ څیري یا ستعکس په څیر انځور شي.

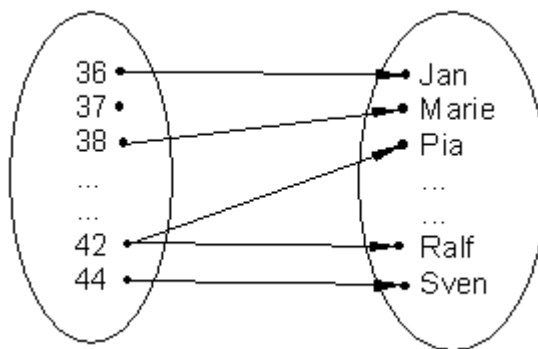
یواځنی نظم(تابع یا فنکشن)



د بوتانولویوالی ډېرئ یاست د زده کوونکو ست

(ارزښت ډېرئ) (تعریفډېرئ)

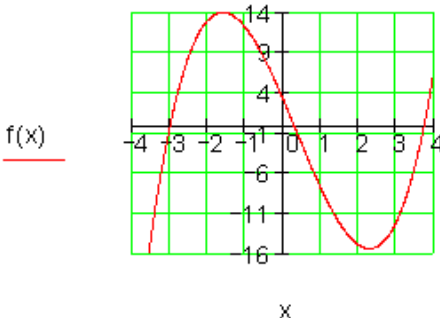
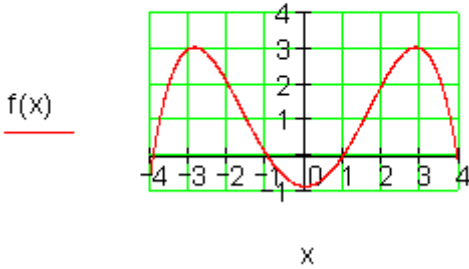
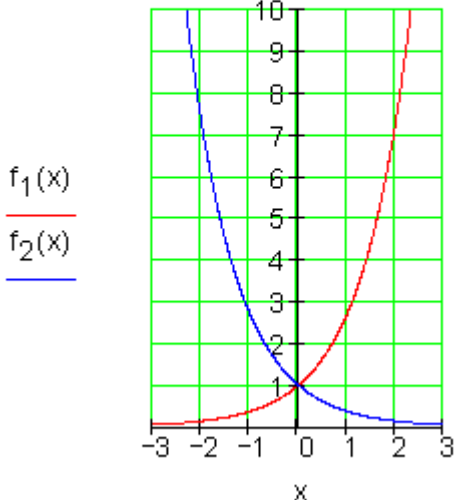
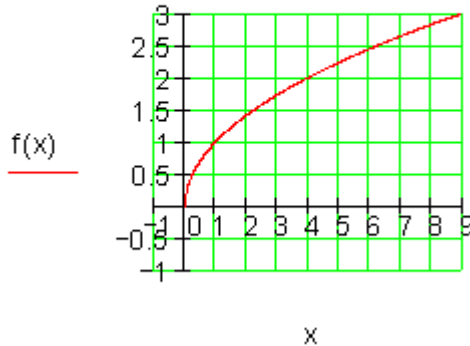
نظم یواځنی نه دی (تابع نه دی)



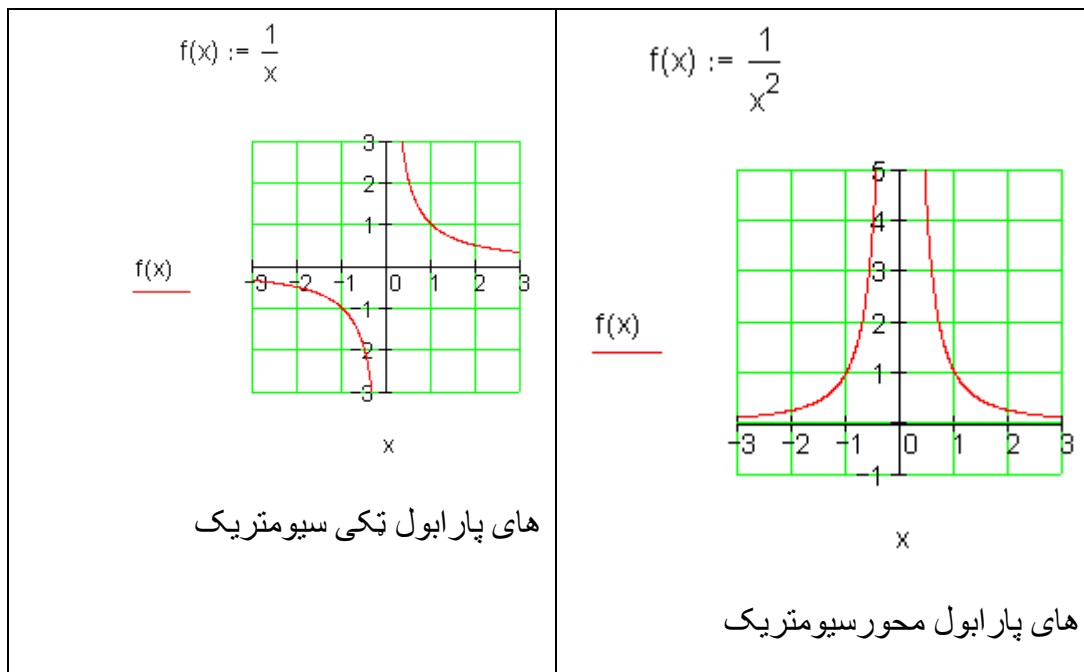
د دواړو ستونو بدلول

د ریاضیکي توابعو او تابعمساواتو بیلگي (له کین و ښي لورته)

<p><math>f(x) := \frac{1}{2} \cdot x + 2</math></p> <div style="text-align: center;"> </div> <p style="text-align: center;">x</p> <p>کرښیز مساوات (گرښه) (</p>	<p><math>f(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2 - 1</math></p> <div style="text-align: center;"> </div> <p style="text-align: center;">x</p> <p>مربع مساوات (پارا بل)</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<p><math>f(x) := x^3 - x^2 - 11x + 3</math></p>  <p><math>f(x)</math></p> <p>د دریمې درجې ټولراشمنل تابع</p>	<p><math>f(x) := \frac{-7}{120} \cdot x^4 + \frac{23}{24} \cdot x^2 - \frac{9}{10}</math></p>  <p><math>f(x)</math></p> <p>د څلورمې درجې ټولراشمنل تابع</p>
<p><math>f_1(x) := e^x</math>      <math>f_2(x) := e^{-x}</math></p>  <p><math>f_1(x)</math> <math>f_2(x)</math></p> <p>اکسپوننشل تابع</p>	<p><math>f(x) := \sqrt{x}</math></p>  <p><math>f(x)</math></p> <p>رېښه تابع</p>

<p><math>f(x) := \log(x)</math>    <math>g(x) := \ln(x)</math></p> <p><math>\frac{f(x)}{g(x)}</math></p> <p>x</p> <p>لوگار یتمناع</p>	<p><math>f(x) := \sin(x)</math>    <math>g(x) := \tan(x)</math></p> <p><math>\frac{f(x)}{g(x)}</math></p> <p>x</p> <p>تریگونومیتریکی (مثلثاتی) تابع</p>
<p><math>f(x) := 10e^{-0.5 \cdot x}</math></p> <p><math>f(x)</math></p> <p>x</p> <p>اکسپوننشلی کبته کیدنه</p>	<p><math>f(x) := 5 \cdot (1 - e^{-0.5 \cdot x})</math></p> <p><math>f(x)</math></p> <p>x</p> <p>اکسپوننشل مر بنسکره</p>



## تعريف- او ارزبنتدېرئ يا - ست

تعريف (بيژند):

د يوه تابع تعديفست  $D$  د ټولو خپلواکو متحولو دېرئ يا ست ده، د کومو لپاره چې تابع تعديف دی.

ارزبنت دېرئ  $W$  د ټولو تابع ارزبنتونو- يا بلواکو - ست ده، چې د  $D$  له توکو منځ ته راځي.

بيلگه:

$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ <p>تعديفست <math>D = \mathbb{R}</math></p>	$f(x) = \frac{1}{x}$ <p>تعديفست <math>D = \mathbb{R} \setminus \{0\}</math></p>
----------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------

د صفر سره د وېش اجازه نه شته	$\mathbb{R}$ د حقیقي اعدادو ډېرئ ده
------------------------------	-------------------------------------

بیلگه:

$f(x) = x^2 \quad D = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}_+$ د تابع ارزښت په حیث فقط مثبت یا زیاتیز ارزښتونه رامنځ ته کیري	$f(x) = x+1 \quad D = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}$ تابع هر په خوښه ارزښت نیولی شي.
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------

شمیر پوهنیزه لیکندود او د هغه معنا

$f(4) = 7$  د خپلواکو متحولو د ارزښت  $x = 4$  لپاره د تابع ارزښت 7 دی.

دا د ارزښتجوړه  $(4 | 7)$  په کواوردیناتسیستم کې د ټکي  $P(4 | 7)$  کواوردیناتونه جوړوي.

$f(x) = 9$  غوښتونی د  $x$  - ارزښت دی، چې په هغه پورې تابع ارزښت 9 اړه لري.

$y = f(5)$  د  $x = 5$  لپاره تابع ارزښت دی.

ټولګه:

یو یواځنی نظم، چې په هغه کې د تعریف سټ  $D$  څخه خپلواکه متحوله  $x$  ټیک یو تابع ارزښت  $f(x)$  باندې تنظیم شي څیرونه (چپمور یې تابع بولو) یا فنکشن بلل کیري.

تابعی (خپلواکیز) یا فنکشنلي اړوندوالی د یوه تابع مساوات (د بیلګې په توګه:  $f(x) = 2x + 1$ ) سره لیکل - یا تشریح کیري.

تابع مساوات کې د  $x$  - ارزښتونو په ایښولو سره د تابع ارزښت لاس ته راځي، چې دا د  $x$  - ارزښتونو سره یوه ارزښت جدول کې ایښولی یا انځورولی شو.

د ارزښتجدول هره جوړه په کواوردینات سیستم کې ټیک یو ټکی په ګوته کوي.

په زیاتو حالتونو کې کیدی شي دا منځ ته راغلي ټکي یوه گراف ته سره رايوځای یا وتړل شي.

د ټول  $x$  - ارزښتونو ډېرئ، هغه چې په تابع مساوات کې ځای په ځای شي تعریف ډېرئ یا -ست بلل کېږي.

د ټول تابع ارزښتونو ډېرئ یا -ست، چې دلته منځ ته راځي، د تابع ارزښت ډېرئ  $W$  پورې اړه لري.



### د تمرینونو حل

لومړی تمرین: د داسې بلواکوالي لپاره نورې بیلګې پیدا کړئ.

ځواب: - د یوه تیلوسوزونکي ماشين قدرت د څرخوننتعداد( د ماشين د څرخیدو تعداد) په واک کې دی.

- د یوې گردئ یا دایرې سطحه د وړانګې یا شعاع په واک کې ده.

- د بریښنا پیسې د ثابت قیمت سره د انرژي یا بریښنا مصرف په واک کې ده.

دویم تمرین: د پاتې بیلګو او د هغو لپاره چې تاسو په لومړي تمرین کې ولیدل کېږي اړیکې سره په فرمولبندي کې راوړي.

ځواب:

لار → د خوزښت وخت: په مساوي پاتې چټکتیا د خوزښت وخت په وهلي لار اغیز لري.

بریکلار → چټکتیا: د یوه موټر چټکتیا د بریکلار باندې اغیزه لري.

ټوله گټه → د تیریدني وخت: د سرمایي ایښوني وخت د گټې لاس ته راوړنه باندې اغیزه لري.

وده → عمر: د کوچني عمر د هغه په وده اغیزه لري.

قدرت → څرخونتعداد: د یوه سوزونکي ماشین د تیلو سوزیدنه د هغه په څرخونتعداد پورې اړه لري.

سطحه → وړانگه: د گردۍ یا دایرې وړانگه د دایرې سطحه باندې اغیز لري.

د بریښنا حساب → انرژي سټ: د سوزولې بریښنا یا انرژي سټ یا ډېرۍ د بریښنا بل (هغه د مصارفو کاغز) اغیزمن کوي.

دریم تمرین: په یو مناسب کواوردیناتسیستم کې د ارزښت جدول اړوند ټکي وکارئ او دا یوه گراف ته سره وتړئ.

د چټکتیا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې بریکلار پیدا کړئ.

پولیس یوه د 90 m بریکلار کچوي. دا موټر دکومې چټکتیا سره تلی؟

ځواب:

د 30 km/h چټکتیا بریکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتیا بریکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتیا بریکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتیا بریکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتیا بریکلار 120 m ده

له 90 m بریکلار سره یو موټر 95 km/h د چټکتیا سره ځغلي.

تلنلار: په کواوردیناتسیستم یا پروتولار سیستم کې د x-محور (ابسخیزا) د خپلواکو متحولو ډېرۍ نمایندګي کوي، د y-محور (اوردینات) د بلواک یا تابع متحولو نمایندګه ده.

د مخه له دې چې په یوه کواوردیناتسیستم کې ارزښتونه لیکل — یا کښل کیري باید وکتل شي، چې کومه خپلواک- او کومه بلواک- یا تابع متحوله ده.



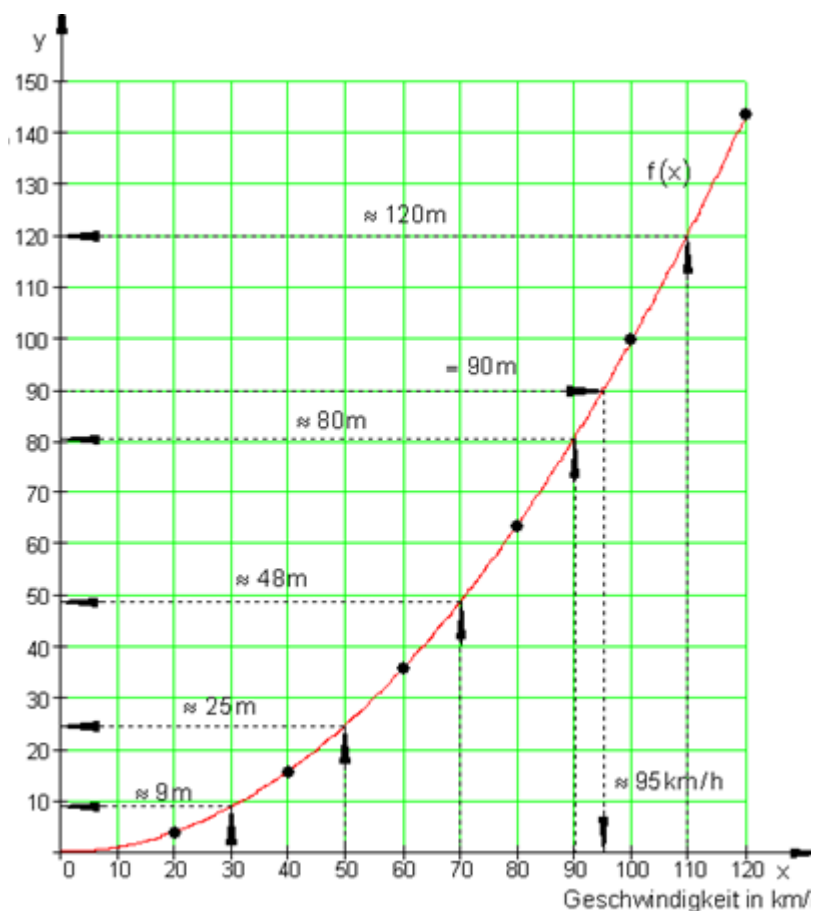
پسي دا هم غوره ده، چې د کوچني لپاره يوو بنه کوچنی يا هغه اله چې اندازه پرې کچوو بايد ومومو.

د دې لپاره د جدول لوي او کوچني ارزښتونه کتل کيږي او پرېکړه کيږي چې دواړه محورونه په څو برخو بايد ووېشل شي.

وروسته له هغې چې ټول په جدول کې ټکي په کواورديناټيسټم کې ځای په ځای شوي، نو بيا دا ټکي د گراف په توگه سره تړل - يا نښلول کيږي.

کيدی شي له گراف څخه د داسې  $x$ -ارزښتونو لپاره هغه لږ يا ډېر تابع ارزښتونه هم ولوستل شي، چې په ارزښت جدول کې مخ ته نه راځي.

معکوس کيدی شي د يوه ټاکلي تابع ارزښت اړونده  $x$ -ارزښت ولوستل شي. د دې نتيجه ټيکوالی د دې په واک کې دی، چې گراف څومره ټيک کښل شوی دی.



پورته کواوردینات – یا پروتولارسیستم کي: پروت: چټکتیا په کیلومتر. ولار: بریکلار په متر

څلورم تمرین:

لوسنل شوي ارزښتونه وشمیرئ، که تابع مساوات  $f(x) = 0,01x^2$  وي.

ځواب:

تابع ارزښتونه داسې شمیرلکیري، چې اړونده د  $x$  ارزښتونه په تابع مساوات کي کینوول شي.

$$f(x) = 0,01x^2 = \frac{1}{100}x^2$$

$$x = 30 \Rightarrow f(30) = 0,01 \cdot 30^2 = 0,01 \cdot 900 = 9$$

$$x = 50 \Rightarrow f(50) = 0,01 \cdot 50^2 = 0,01 \cdot 2500 = 25$$

$$x = 70 \Rightarrow f(70) = 0,01 \cdot 70^2 = 0,01 \cdot 4900 = 49$$

$$x = 90 \Rightarrow f(90) = 0,01 \cdot 90^2 = 0,01 \cdot 8100 = 81$$

$$x = 110 \Rightarrow f(110) = 0,01 \cdot 110^2 = 0,01 \cdot 12100 = 121$$

د 30 km/h چټکتیا بریکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتیا بریکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتیا بریکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتیا بریکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتیا بریکلار 120 m ده

له 90 m بریکلار سره یو موټر 95 km/h د چټکتیا سره ځغلي.

بریکلار 90 m کچ شوي، غواړو چټکتیا پیدا کړو.

پیل:  $f(x) = 90 \Leftrightarrow 0,01x^2 = 90$  دا مساوات په  $x$  پسي ځواب کړئ

$$0,01x^2 = 90 \mid : 0,01 \Leftrightarrow x^2 = 9000 \mid \sqrt{\phantom{x}}$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{9000} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{900 \cdot 10} \Leftrightarrow |x| = 30\sqrt{10}$$

ارزښت حل کړئ.

$$|x| = 30\sqrt{10} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 30 \cdot \sqrt{10} \approx \pm 94,9$$

نسبت و پوښتنې ته فقط مثبت یا زیاتیز ارزښتونه موخه وړ دي، ځکه چې مور مثبتہ چټکتیا په پام کې نیسو. د 90 m بریکلار سره د موټر چټکتیا 94,9 km/h وه.

یادونه: لومړی شمیرنه ټیک ارزښتونه راګوي، سره له دې هم موخه وړدی، چې دا شمیرل شوي ارزښتونه په ګراف کې یا له ګراف څخه هم د لوستلو له لارې کنټرول کړو.

پوښتنې

**I** تابع

لومړی:

ټول ټکي په ګواوردینات سیستم کې په نڅښه کړئ، چې ګواوردینات یې ورکړ شوي شرایط پوره کوي.

الف-  $y \leq -1 \wedge x \geq 1$       ب-  $y \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq x \leq 3$       پ-  $x \in \mathbb{R} \wedge y = 2$

ت-  $0 \leq x \leq 4 \wedge y \geq 0$       ټ-  $|x| \geq 1,5 \wedge |y| \leq 2$       ټ-  $y > 0 \wedge x = -1$

دویم: په مناسب ګواوردینات سیستم کې لاندې ټکي رسم کړئ.

$A(40 \mid 220)$ ;  $B(10 \mid 250)$ ;  $C(200 \mid 300)$ ;  $D(80 \mid 240)$

ایا د  $x - y$  ګواوردیناتو ترمنځ کومې اړیکې شته؟ د دې لپاره یو ترم ولیکئ او نور درې ټکي ورکړئ.

دریم: د ټکو ځای وټاکئ

الف- ټکي  $P_t\left(t-1 \mid \frac{1}{t+1}\right)$  د  $t \in \mathbb{R}$  کوم ارزښت په لومړۍ څلورنکې پروت دی؟

ب- ټکي  $Q_t(t \mid t^2 - 1)$  د  $t \in \mathbb{R}$  کوم ارزښت لپاره د  $x$  محور کېښته لور ته پرته ده؟

څلورم:


د ټگودېرۍ یا سټ  $A = \left\{ (1 \mid 3); \left(2 \mid \frac{3}{2}\right); (3 \mid 1); \left(4 \mid \frac{3}{4}\right); \dots \right\}$  ورکړ شوی دی.

د  $A$  نور درې توکي ورکړئ او دا ټکي په یوه کواورډینات سیستم کې وکارئ. ایا د  $x$ - او  $y$ -کواورډیناتونو ترمنځ اړیکې شته؟

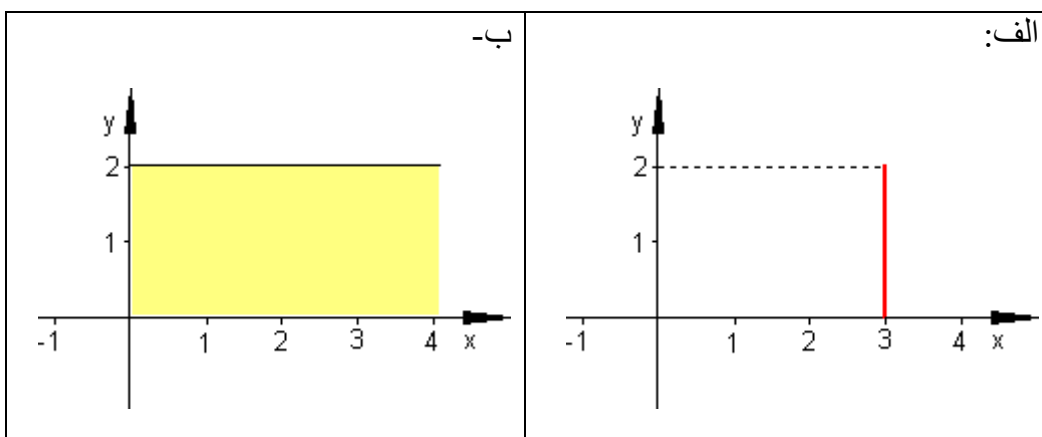
پنځم: یو ټکی  $P\left(t \mid \frac{t}{2} + 3\right)$  د  $t \in \mathbb{R}$  سره ورکړ شوی دی.

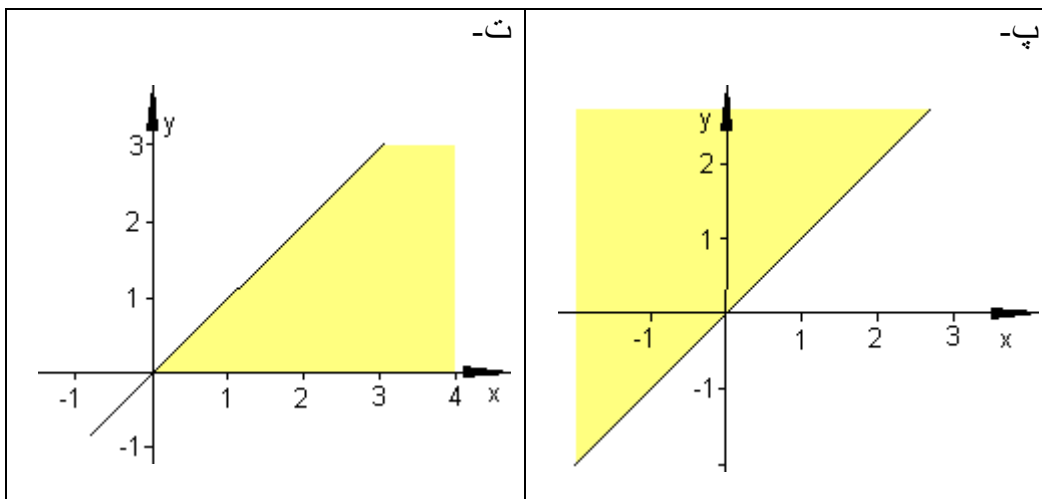
د  $t$  لپاره څه ارزښتونه ورکړي او دا د  $t$  دې اړونده ټکي په یوه کواورډینات سیستم کې وکارئ.

د کومو  $t$ -ارزښتونو لپاره باور لري:

د ټکي  $P$  د  $x$ -کواورډینات د ټکي د  $y$ -کواورډینات سره برابر دي؟ 

شپږم: په نڅېښه شوي کرښه او همداسې سطحه تشریح کړئ.





پوښتنې

## توابع II

لومړی

بناغلی برگ د یوه ملفون (لاسي يا لاسي تلفون) قرارداد د لاندې شرایطو سره وکړ:

د میاشتي € 20 ، د تلفون قیمت په دقیقه € 0,35 .

الف- که دی 40, 80 یا 120 دقیقې تلفون وکړي، نو میاشتي حساب به یې څومره جگ وي؟

ب - لگښت لپاره یو ترم ولیکئ چې په دقیقه کې د خبرو د دوام په واک کې وي.

پ - اړیکې گرافیکي انځور کړئ.

دویم: یوه الوتکه د سوزونموادو کیروزین 10500 Liter لیتره زخیره لري.

په 100 km دا 180 Liter سوزوي.

الف- د په لیتر مصرف جدول جوړ کړئ. یو واټن له 0 km تر 5000 km پورې وټاکئ.

ب - اړیکې یې گرافیکي خور کړئ.

پ-له خومره کیلومتره وروسته به ذخیره تمامه شوې وی؟

ت - د الوتنې د لار ترم د ټانک د خونديونې په واکوالي کې وټاکئ.

دریم: یو د شمیراروني جدول جوړ کړئ، چې  $^0C$  څلزیوس ( $^0C$ ) په فارنهایت ( $^0F$ ) اړوي د  $20^0C$  - او  $60^0C$  په ساحه یا ورشو کې. د دې لپاره اړین داتا تشریح کړئ. اړیکې گرافیکي انخوړ کړئ. دا اړیکې کوم ترم په گوته کوي؟ د ا د تېې تودوخې کچونه (ترمومتر) د ناروغ د تېې په اندازه کئ چې ده ایا دا حرارت یا تودوخي د ژوند خطر لري؟

څلورم: یوه د مالونو لیړلو مغازه غواړي لگښت له امله یو د تحفي پاکټ ولیري. د پاکټولو تخنیکي پرابلم له امله یې یو اړخ د 35 cm سره کره ټاکلی دی. د پوست د لگښت نظم باید په پام کې نیول شوی وي

د لگښت نظم: مربع ډوله پاکټونه دننه په هیواد کې.

خورا کوچنی کتله (یا بهتره ډکی): اوږدوالی 15 cm ، سور 11 cm ، جگوالی 1 cm .

خورا جگه کتله: اوږدوالی 60 cm ، سور 30 cm ، لوړوالی 15 cm یا اوږدوالی جمعه یې سور جمعه یې یا په ورزیات جگوالی = 90 cm . خورا زیات وزن 2 kg .

الف- د یوه ډکي یا حجم  $V = 21 \text{ dm}^3$  لپاره د سور او جگوالي ترمنځ اړیکې وټاکي.

ب- دا ماکسیمال رسیدلور ډکی یا حجم خومره لوي دی؟

پنځم: فرمول ورکړشوی دی.

الف- ش څنکه تغیر خوري، که کوچنی شي.

ب- ایا لاندي اړیکې به د فرمول له لاري تشریح شي؟

A : د کرایې موټر ټول لگښت د عدد  $a$  د تللی کیلو متر او د هغه د یوه کیلو متر د قیمت  $c$  لپاره.

B : د ودرېدلو لار یا واټن  $a$  د بریکلار  $b$  او عکس العمل لار  $c$  څخه شمیرل کیږي.

پ-شي اړیکې ورکړئ چې د فرمول له لارې تشریح کیدی شي یا روښانه کیدی شي.

شپږم: یو ولاړګوډیز یا مستطیل  $U = 12 \text{ cm}$  چاپیریال یا محیط لري.

الف- اړخونه څنګه یو د بل په واک کې کیدی شي.

ب- یو ترم وټاکئ، چې بلواکوالی د اړخ  $a$  څخه ورکوي یا د اړخ  $a$  په واک کې یا تابع دی.

پ- د  $a$  د کوم ارزښت لپاره سطحه خورا لویه وي؟

پوښتنې

### توابع III

لومړی: توابع  $f(x)$  ورکړ شوي. یو مناسب ازبښتجدول وکارئ. دې ته اړوند ګراف رسم کړئ.

$$\text{الف - } f(x) = \frac{1}{2}x + 1 \quad \text{ب - } f(x) = x^2 \quad \text{پ - } f(x) = \frac{1}{x+3} \quad \text{ت - } f(x) = 3^x$$

دویم: فکر وکړئ، چې ایا یو، یواځنی نیظم، د  $x \rightarrow y$  لپاره مخ ته لرو:  $x^2 + y^2 = 1$  دریم: ټکی  $P$  ورکړ شوی دی. ایا یوه تابع مخ ته لرو؟ که هو، نو نظمقانو وټکئ او خورا لویه تعریفست یا - ډېرئ هم وټاکئ.

$$P = \left\{ (2 | 1); \left(5 | \frac{1}{4}\right); \left(10 | \frac{1}{9}\right); \left(25 | \frac{1}{24}\right); \dots \right\}$$

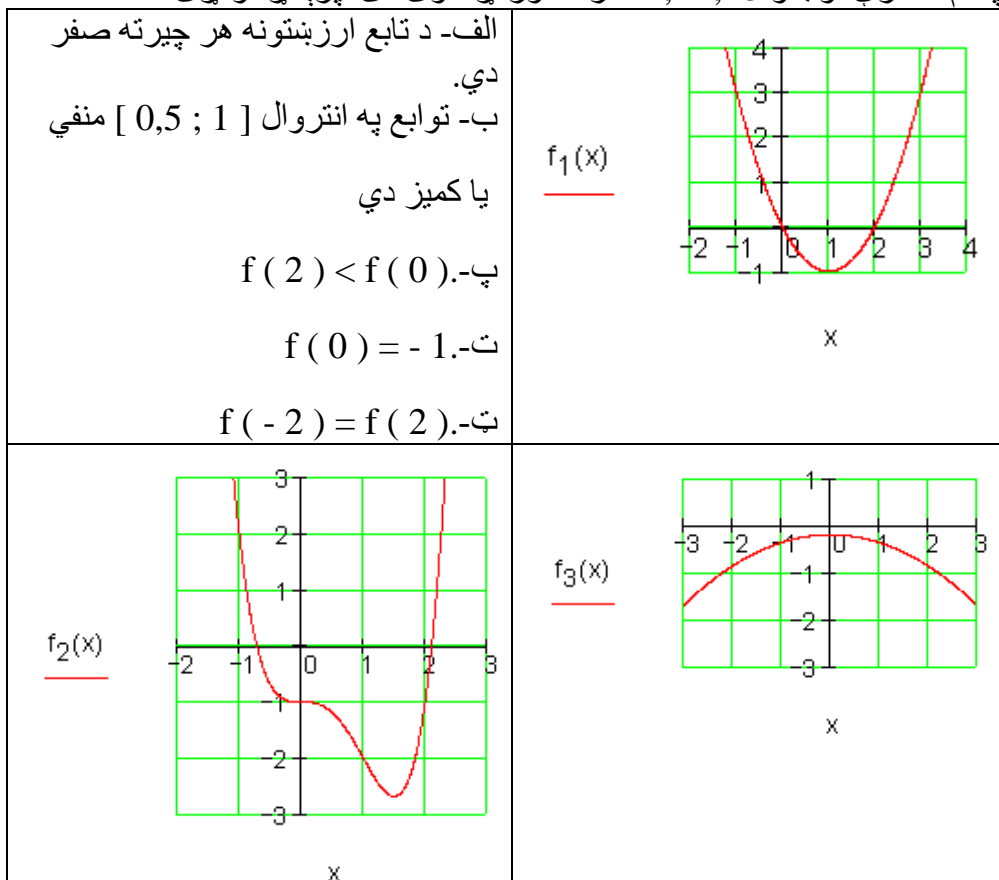
څلورم: یو ارزښتجدول ولیکئ او د تابع ګراف وکارئ:

$$f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 2x - 4); x \in \mathbb{R}$$

الف- د جشمیري سره  $f(3)$  او  $f(-2)$  وشمیرئ.

ب- په کوم ځای کې د تابع ارزښت صفر دی؟

پ-د کومو  $x$  - ارزښتونو لپاره تابع ارزښت 1 دی؟  
 ت-د کومو  $x$  - ارزښتونو لپاره تابع ارزښت کمیز یا منفي دی؟  
 ټ-د کومو  $x$  - ارزښتونو لپاره باور لري:  $f(x) < 1$  کړی، چې د کوم تابع لپاره باور لري:  
 پنځم: د درې توابعو  $f_1, f_2, f_3$  گراف ورکړ شوی دی. پرېکړه وکړئ:



پوښتنې

#### IV توابع

لومړی: تابع  $f$  ورکړ شوی د  $f(x) = -0,2(2-x)$ ;  $x \in \mathbb{R}$  سره  
 پرېکړه وکړئ، چې ایا لاندې ویناوې رښتیا او که نارښتیا دي.



خپل ځواب مدلل کړئ.

الف- د تابع ارزښتونه زیاتیز یا مثبت دي د ټول  $x$  - ارزښتونو لپاره.

ب-  $f(x) < 0$  د ټولو  $x \in \mathbb{R}$  لپاره.

پ-  $f(x) > 0$  د  $x = 2$  لپاره منفي دی.

ت- یو ځای  $u$  شتون لري، چې د هغه لپاره  $f(u) = f(u + 1)$  فبلور لري.

	<p>دویم: د رسم شوي تابعگراف تلنه تشریح کړئ. دلته هغه غوره ټکي په نڅښخه کړئ. هغه ټکي، انټروالونه روښانه کړئ یا تشریح کړئ په کومو کې چې ته اقتصادي پسمنظر (د شاته پراته دلیل) فرمولبندي کوي.</p>
<p>کوارډیناټسیسټم کې: پروت: وخت. ولاړ: گټه</p>	

دریم: د یوه موټر د تیلو سوزول د چټکتیا په واک کې یا تابع دی. دا په څنګ کې څیره د تیلو سوزول بنایي په لیتر په سل کیلو متر کې او د چټکتیا په واکوالي کې، که سړی په څلورم گیر Gang کې لاړ شي.

<p>الف- کره یا منحنی روښانه کړه.</p> <p>ب- په کومه چټکتیا کې استعمال ۶ لیتره په سل کیلومتر کې دی؟</p> <p>پ- په کومه چټکتیا کې د تیلو سوزښت خورا کم دی؟</p> <p>ت- کره به څنګه وځلي، که په دریم گیر کې سړی لاړ شي؟</p>	
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

څلورم: د لمبا په ډنډ کې  $40 \text{ m}^3$  اوبه دي. دا اوبه د ډنډ د پاکوالي له امله د پمپ کولو سره وباسي، چې په دقیقه کې 350 Liter لیتره اوبه وځي.

الف- یو ترم د پاتې حجم یا ډکي لپاره په  $\text{m}^3$  وټاکئ.

ب- څومره  $\text{m}^3$  د ۲۰ دقیقو وروسته په لمباډنډ کې لا پاتې ي.

پوښتنې

## V توابع

لومړۍ: د تابع  $f(x)$  ماکسیمال تعریفورشو  $D_{\max}$  پیدا کړئ

الف-  $f(x) = 2 - 3x$       ب-  $f(x) = \sqrt{2x - 3}$

ث-  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$       ت-  $f(x) = -x^2 + 1$

دویم: د تابع  $f(x)$  ارزښتورشو وټاکئ د  $D = D_{\max}$  سره.

الف-  $f(x) = \frac{3}{2}x - 4$       ب-  $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$

پ-  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$       ت-  $f(x) = x^2 - 5$

دریم: تابع  $f(x)$  ورکړ شوي ده. ماکسیمال تعریفورشو  $D_{\max}$  وټاکئ. د  $f(x)$  گراف وکارئ.

د  $x \in \left\{ k; -\frac{2}{k}; k+1; k-4 \right\}$  لپاره تابع ارزښتونه وټاکئ.

الف-  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$       ب-  $f(x) = 2x - \frac{2}{x}$       پ-  $f(x) = x - x^2$


ت -  $f(x) = \frac{1}{x+3}$  - ب -  $f(x) = \sqrt{4-2x}$  - ث -  $f(x) = 2^x - 1$


څلورم: تابع  $f(x)$  د  $f(x)x^3$  سره ورکړ شوي ده.

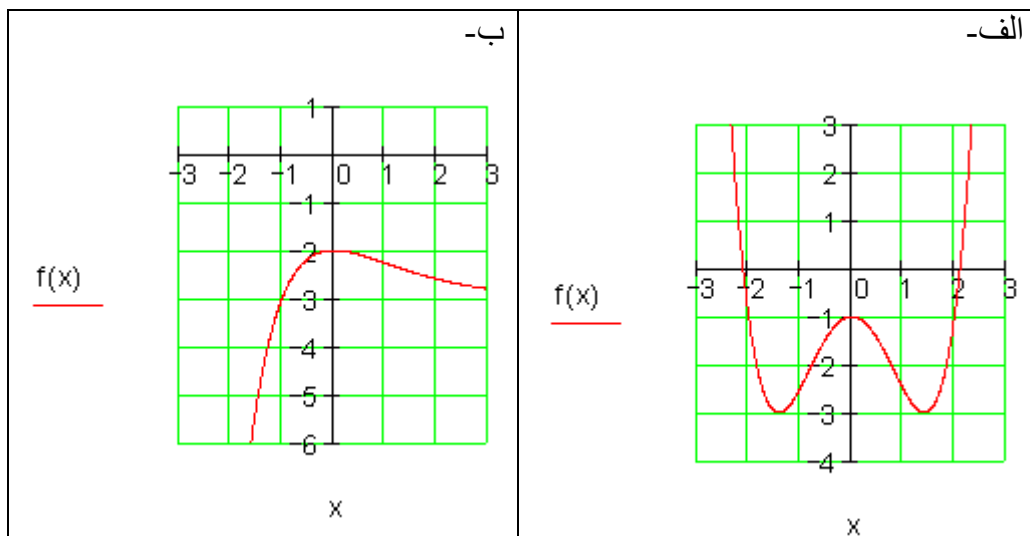
الف- ماکسیمال تعریفورشو  $D$  او ارزښتورشو  $W$  ورکړئ.

ب- دکوم  $x \in D$  لپاره باور  $f(x)=81$  لري؟

پ- دکوم  $x \in D$  لپاره باور  $f(x) \geq 9$  لري؟

ت- وښايئ:  $f(x+1)=3 \cdot f(x)$  د ټولو  $x \in D$  لپاره. 

پنځم: تابع  $f(x) \in D = \mathbb{R}$  لپاره تعريف ده. درسمونو څخه ارزښت ډېرئ وښايئ. 



پوښتنې

### توابع VI

لومړی: د تابع  $f(x)$  ارزښتست د جشميري سره وشميرئ

$$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{2}{5}x^3 - 2$$

د  $D=R$  سره.

دویم:

<p>دویم: ترڅنگ کړه د تابع <math>f(x)</math> گراف دی؟</p> <p>ایا <math>f(x)</math> د ټولو <math>x \in R</math> لپاره تعریف دی؟</p> <p>د <math>x</math> د کومو ارزښتونو لپاره تابع ارزښت له 2 لوی دی؟</p> <p>له صفر کوچنی دی؟</p>	
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

دریم:

<p>یوه مربع یا څلورې د اړخ اوږدوالي <math>a = 5 \text{ cm}</math> سره ورکړ شوي ده.</p> <p>د مثلث یا درېکودي <math>ABC</math> د سطحې ترم <math>A(x)</math> وټاکئ</p>	
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

څلورم: د یوه مالک ټول لگښت  $K$  د یوه لاسته راوړنې سټ  $x$  په واکوالي کې په سټ واحد یا ډبرئ یوون (ME) د ترم له لارې لیکل کيږي

$$K(x) = 0,01x^3 - x^2 + 100x + 720$$

الف- د  $x$  - ارزښتونو لپاره تر 100 پورې ټول لگښت وشمیرئ. یو مناسبټنلارې ډول وټاکئ او د ټول لگښت لیدڅیره رسم کړئ.

ب- د هر سټ – یا ډېرې واحد خرڅلاو 99 پیسېواحدې دی. لاس ته راوڼې (د پیسو) څومره دي، که  $x$  (ME د سټ واحد) په بازار کې خرڅ شي؟

په لرلي کواوردیناتسیستم کې د خرڅلاو(پیسو) د لیدلو څیره و کارئ.

پ-د لیدڅیرې څخه ولولئ:

په کومه ورشو یا ساحه کې گټه منځ ته راځي؟ د کوم  $x$  - ارزښتونو سره به خورا لویه گټه لاس ته راشي؟

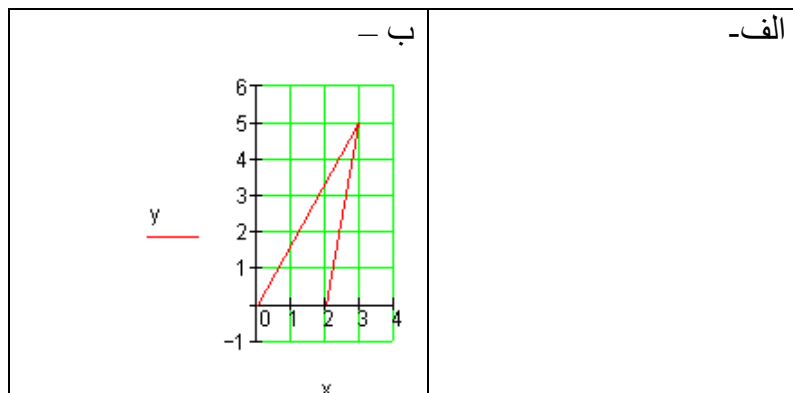
### پوښتنې

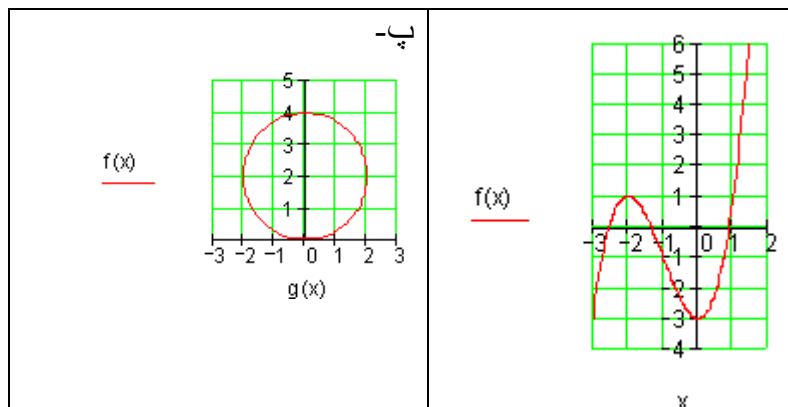
### توابع VII

لومړی: توابع  $f(x)$  ورکړشوي دي. یو مناسب ارزښت جدول جوړ کړئ. له دې سره اړوند گراف وکارئ.

الف-  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$       ب-  $f(x) = x^2$

دویم: کوم گراف په تابع  $f: x \rightarrow f(x)$  پورې اړه لري؟ دلیل یې راوړئ.





دریم: د شمیرپوهنیز لنډ لیکدود سره یې فرمولبندي کړئ.

الف- په ځای 3 کې تابع  $f(x)$  تابع ارزښت 12 لري.

ب- د تابع  $f(x)$  له لارې د  $x$  - ارزښت سره عدد 4- تنظیمیږي.

پ- ټکی  $(2 | 5)$  د  $f(x)$  په لیدڅیره باندې پروت دی.

ت-  $f(x)$  د کومو اېسټیڅیزا یا پراته ارزښتونو لپاره تابع ارزښت 4 لري.

ټ- د  $f(x)$  تابع تابع ارزښت له 7 لوی دی د ټول  $x \in \mathbb{R}$  لپاره.

ث- تابع  $f(x)$  د 17- ځای کې تابع ارزښت 9 نیسي.

ج- توابع  $f$  او  $g$  د په ځای کې همغه ارزښت غوره کوي.

چ- په کوم ځای  $x$  کې  $f$  د تابع ارزښت د  $g$  له تابع ارزښت څخه کوچنی دی؟

ح- د تابع  $f(x)$  د تابع ارزښت برابر 5 دی د ټولو  $x \in \mathbb{R}$  لپاره.

خ- د یوه کړې ټکي  $K_f$  کواوردیناتونه سره سر خوري.

څلورم: د یوه نظم لپاره د یوې روځنې بیلګې نوم واخلي، چې هغه تابع وي یا تابع نه وي.

پنځم: دا ترڅنګ کړه یا منحنی د تابع  $f(x)$  گراف دی. له گراف څخه ولولئ.

<p>الف-د تابع ارزښت په ځای 5 کې</p> <p>ب- یو ځای د <math>f(x)</math> سره.</p> <p>پ-په کوم ورشو <math>f(x) &gt; 0</math> باور لري؟</p>	
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

شپږم: کوم ارزښت جدول یوه تابع پورې اړه لري؟

x	-1	0	3	3	4
y	8	7	2	4	5

ب -

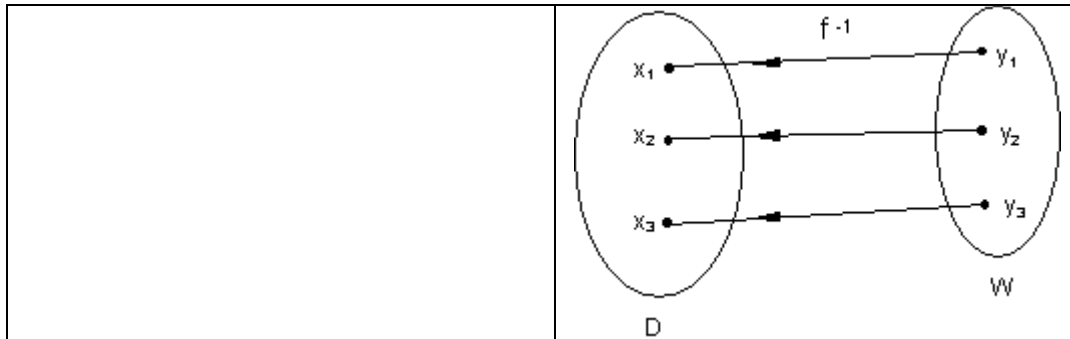
x	-1	0	1	2	3
y	4	0	-2	4	4

الف -

## توابع او په څټ - یا معکوس توابع

ټولیز:

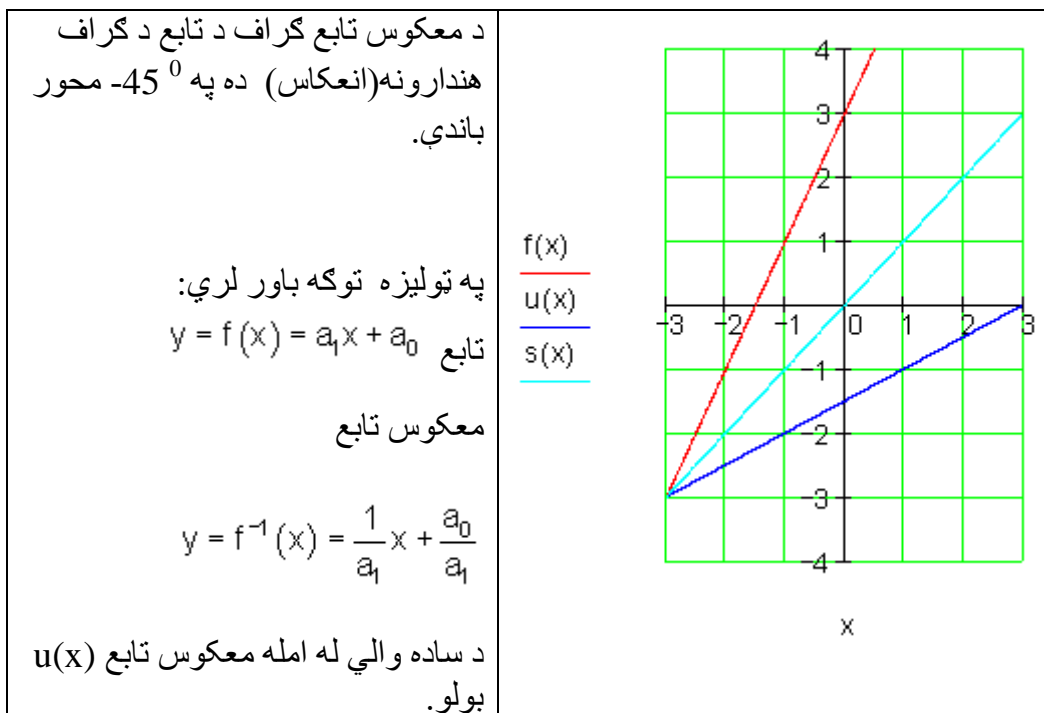
<p>د <math>f</math> د نظم قانون د تابع مساوات له لارې افاده کيږي، لکه د بیلگې په توګه</p> $f = \{(x   y) \mid y = f(x) = 2x + 3\}_{D \times W}$ <p>یا په لنډه توګه: <math>y = f(x) = 2x + 3</math></p> <p>د یوه تابع د یو-یواځنوالي د <math>f^{-1}</math> یو-یواځنی نظم هم شتون لري.</p> <p>دا نظم معکوس تابع یا په څټ تابع یا انورز inverse تابع بلل کيږي، لکه د بیلگې په توګه.</p> $y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$	
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--



## د کرښیز توابعو معکوس توابع

<p>تابع <math>y = f(x) = 2x + 3</math> ورکړ شوی</p> <p>غوښتنه معکوس تابع <math>f^{-1}</math> او د هغه گراف ده</p> <p>تابع <math>f</math> جگوالی <math>m = 2</math> لري. دا د خپل گراف سره پروت محور په ټکي <math>P_x (-1, 5   0)</math> کې غوڅوي او ولار محور یا اوردینات په ټکي <math>P_y (0   3)</math> کې غوڅوي. د هغه گراف کرښه ده.</p> <p>که د تابع اووښتونې یا متحولې یو له بل سره بدلې شي او د <math>y</math> پسې په ورته توگه ښه بدلون منځ ته راشي، نو سړی معکوس تابع لاس ته راوړي.</p>	<p>تابع:</p> $y = f(x) = 2x + 3$ $x = f(y) \Leftrightarrow x = 2y + 3$ $\Leftrightarrow 2y + 3 = x   -3$ $\Leftrightarrow 2y = x - 3   : 2$ $\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ <p>معکوس تابع:</p> $y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------





## مربع توابع

څلورۍ- يا مربع توابعو ته ننوتنه يا پيل

ننوتنه يا پيل

هرڅوک چې موټر زده کوي، بايد پوه وي، چې د بريک په وخت کې په پاڅه سرک د بريک نيولو او د موټر دريدځای په منځ کې لار يا واټن څنگه سره يوځای کيدی شي يا جمعه کيدی شي..

د لاندې موټر قانون سره سم له چټکتیا (سرعت)  $v$  په  $\text{km/h}$  (کیلومتر په ساعت) د عکس العمل لار  $r$  د بریک لار  $b$  په متر شمیرل کېدی شي.

پام ( خبراوسه ): د بیلگې په توگه د المان پخوانی او له څخه نوي قانون.

له څخه د تملار په وچ اسفالت شوي سرک د پل بریکلار سره شمیرل کېږي.

$$\text{د بریک لار } b = \left(\frac{v}{10}\right)^2 \quad \text{د عکس العمل لار } r = \frac{v}{10} \cdot 3$$

یادونه: د څه وخت را په دې خوا په جرمني کې د بریکلار لپاره دا فرمول باور لري.:

$$i: b = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$$

د بریک همدا ډول د عکس العمل لار په متر (m) راوځي، که چټکتیا یا سرعت په کیلومتر په ساعت (km/h) وي.

الف - د دواړو حالتونو لپاره د  $s = f(v)$  تابع مساوات و ټاکي، د کوم لپاره چې په هره تللي چټکتیا یا سرعت تملار شمیرل کېدی شي.

ب - د تابع مساوات  $s = f(v)$  د دواړو حالتونو لپاره د وړې شوی سرعت  $v = 0$ ،  $10, 20, 30, \dots, 100 \text{ km/h}$  سره ده یوه د ودرېد - یا توقف لار چې شمیرل کېږي.

پ: په کواوردیناتسیستم کې یا د وضعیه قیمتسیستم کې گراف رسم کړی.

ت: ټوله لاس ته راوړي نتیجه تشریح کړی.

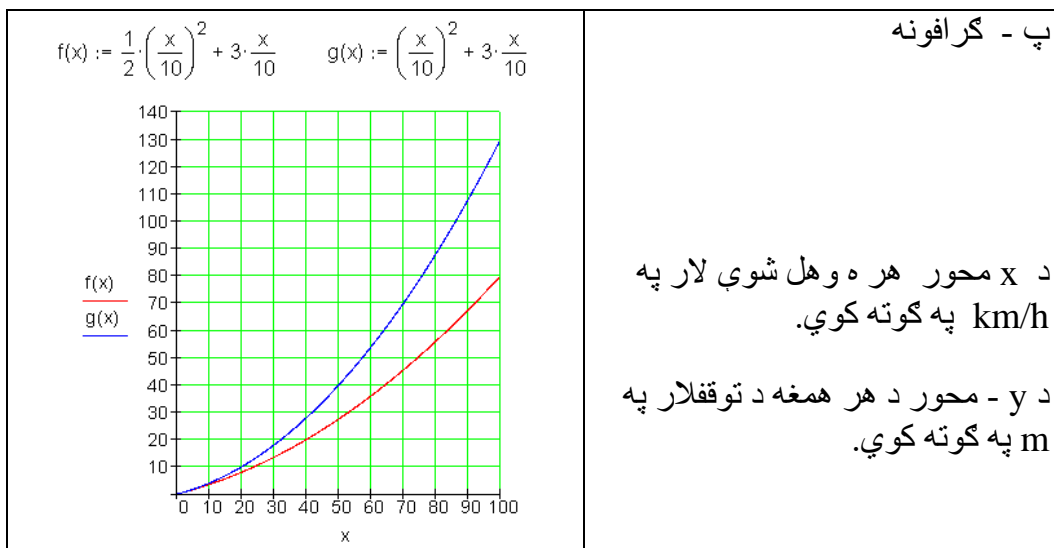
Problemlösung: د پرابلم حل:

الف: د تابع مساوات:

$f(v) = \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{100}v^2 + \frac{3}{10}v$	زور قانون:
$i: f(v) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{200}v^2 + \frac{3}{10}v$	نوی قانون:

ب - : ارزینتجدول (په کیلو متر په ساعت کې)

v (in km/h)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
f(v) (in m)	0	4	10	18	28	40	54	70	88	108	130	alt
f(v) (in m)	0	3,5	8	13,5	20	27,5	36	45,5	56	67,5	80	neu



ت - کومنتار

د نوي نظم وروسته د د چټکتيا (سرعت) زياتيدني توپير تل زياتيري. د 50 km/h چټکتيا سره نوی د تم کيدلو لار 27,5 m ده، دا د زړې لار 40 m نږدې 69% ده. په 100 km/h دا نوي لار نوره فقط ده، دا د زړې 130 m لار پانږدې 61% ده. د برېک نيولو لار کمېدنه د برېک بڼه کيدو (ABS) سره موخه وړه ده.

د تابع مساوات د ټيک پامورتيا او گراف له امله مور کره کوو، چي دا نه کرښيز مساوات دی او نه يوه کرښه. انځوروي.

د تابع مساوات لاندي بڼه لري:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

داسې تابع مربع تابع بولو او يا هم د 2-مي درجي ټول (تام) راشنل توابع.

گرافونه یې پارابول بلل کيږي.

### تمرینونه:

د لاندې پارابولونو گرافونه وکارئ.

د دې لپاره ارزښت جدول وليکئ

اول -  $f(x) = x^2 + 4x - 5$  دویم  $f(x) = x^2 + 2x + 5$

دریم -  $f(x) = -x^2 + x + 6$  څلورم -  $f(x) = x^2 - x$

پنځم -  $f(x) = x^2 - \frac{1}{9}$  شپږم -  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$

اوم -  $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$  اتم -  $f(x) = -2x^2 + 8x - 11$

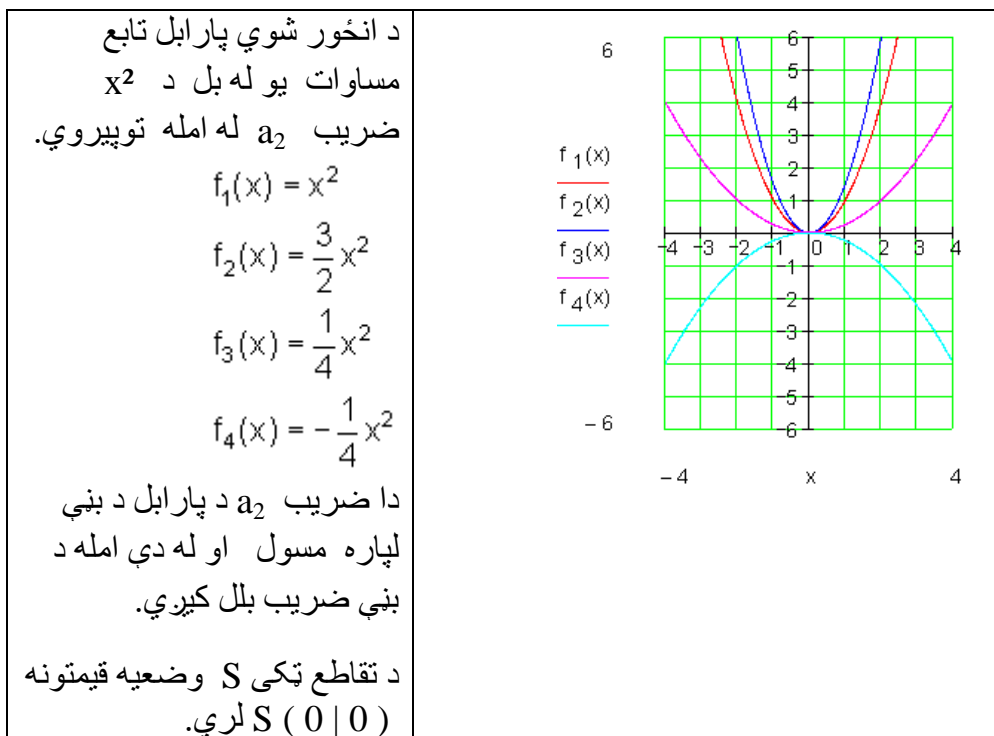
نهمم -  $f(x) = 3x^2 - 3x$  لسم -  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{11}{2}x + 10$

## نور مال پارابل، بڼه حل یا - ضریب او راکښنې

د کار قرارداد:

د  $a_2$  د مختلفو ارزښتونو لپاره تابع  $f(x) = a_2x^2$  وڅیړئ او گراف په وضعیه قیمت سیستم کې وکارئ:

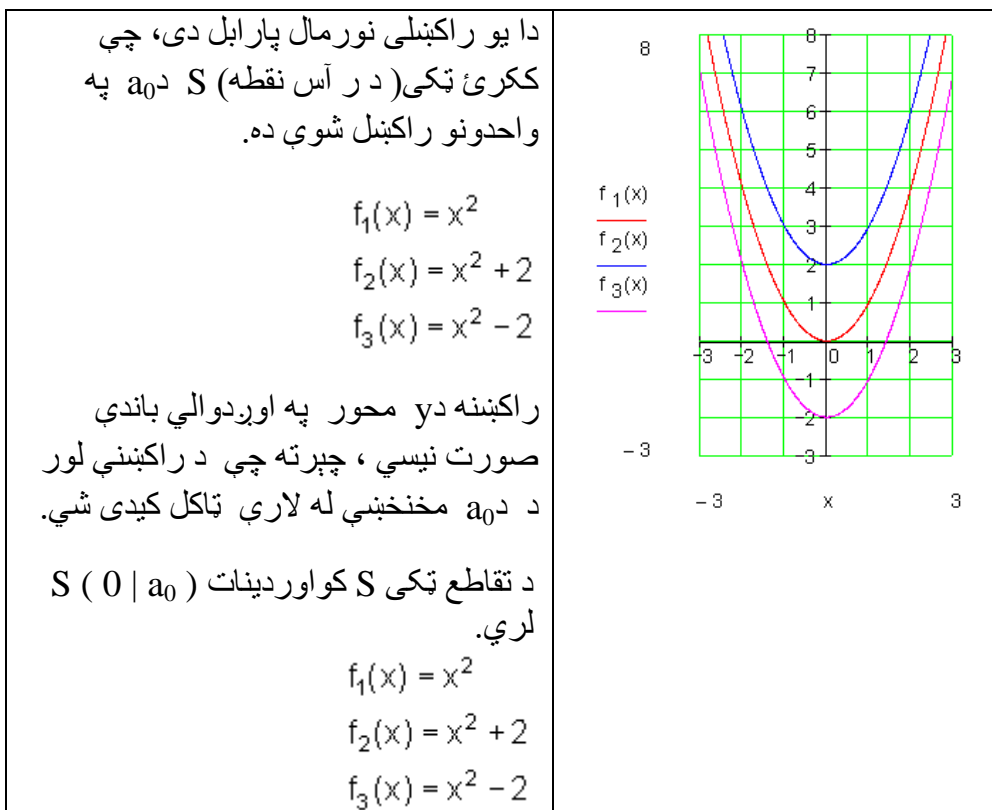
$$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = \frac{3}{2}x^2 \quad f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$$



بڼه ضريب د پارابل قواري يا شکل ته څنگه تغير ورکوي؟

ضريب بني	د پارابل په نځېنه ونه
$a = 1$	→ نورمال پارابل
$a > 1$	→ غزېدلی پارابل
$0 < a < 1$	→ کپکاري پارابل
$a = -1$	→ په $x$ محور هنداره شوی نورمال پارابل
$a < -1$	→ غزېدلی پارابل، په $x$ -محور هنداره شوی کپکاري پارابل، په $x$ -محور هنداره شوی
$-1 < a < 0$	→

د  $a_0$  د مختلفو ارزښتونو لپاره د  $f(x) = x^2 + a_0$  تابع مطالع کړی او په وضعیه  $f_1(x) = x^2$   $f_2(x) = x^2 + 2$   $f_3(x) = x^2 - 2$  قیمتسیستم کې یې گراف رسم کړی:



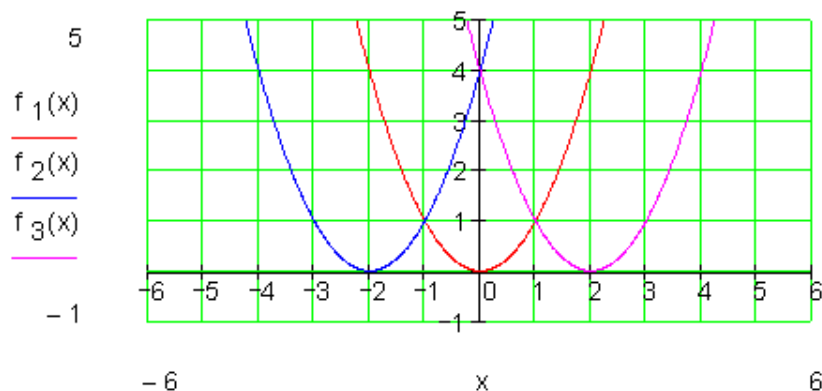
د کار ورکوني قرارداد:

د  $f(x) = (x+u)^2$  تابع د  $u$  د مختلفو ارزښتونو لپاره راکښنه وڅیړی او گراف یې په وضعیه قیمتسیستم کې  $x$  رسم کړی

$$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = (x+2)^2 \quad f_3(x) = (x-2)^2$$

د ارزښت جدول:

$f_1$	x	-2	-1	0	1	2	$f_2$	x	-4	-3	-2	-1	0	$f_3$	x	0	1	2	3	4
	y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4

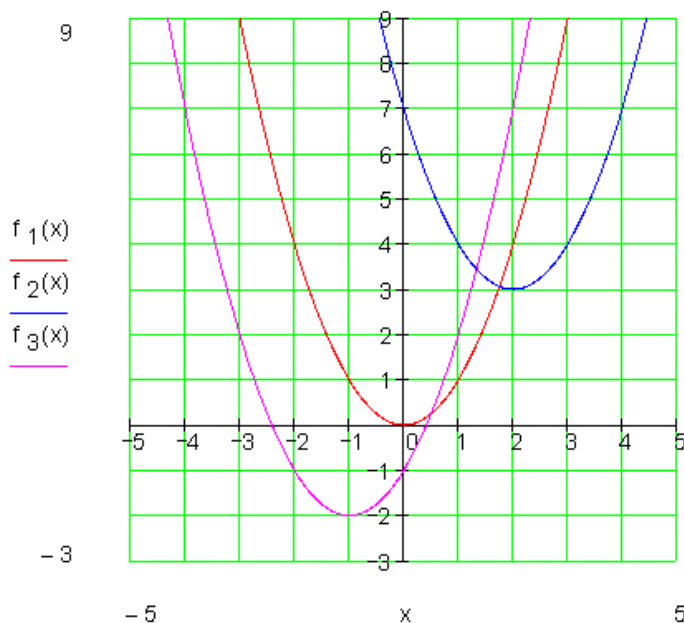


د ا یو راکنبلې (چې خای ته یې تغیر ورکړ شوی وي) نورمال پارابول دی، چې ککړئ ټکی (درأس نقطه)  $S$  یې د  $u$  په واحدونو (یونونو) د  $x$  په محور راکنبل یا کنبول شوي ده.  $S$  غوڅتکی (نقطه تقاطع) یې کواوردینات  $(-u | 0)$  لري.

$u > 0 \Rightarrow$	کیني لور ته څرخون یا څرخول، ککړئ ټکی $S$ په $u$ واحدونو یا یونونو د پیل یا سرچیني کین لورت پروت دی.
$u < 0 \Rightarrow$	بنی څرخون یا څرخول، ککړتکی $S$ په $u$ واحدونو د پیل یا سرچیني بنی لورته پروت دی.

د کار (ورکونې) قرارداد: د  $u$  او  $a > 0$  دمختلفو ارزښتونو لپاره تابع  $f(x) = (x+u)^2 + a$  وڅیری او گراف یې په یوه کواوردینات (پروت ولاړ) سیستم کې انځور کړی.

$$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = (x-2)^2 + 3 \quad f_3(x) = (x+1)^2 - 2$$



د  $f_2(x)$  گراف بیرته یو نورمال پارابول دی، چې ککړئ ټکی  $S$  یې په دوه واحده بڼی لور ته او په درې واحده پورته لور ته راکښلی دی.

د  $f_3(x)$  گراف هم یو نورمال پارابول دی، چې ککړئ ټکی  $S$  (د راسټکی) په یوه واحد(یوون) کین او په درې واحده لاندې لور ته کښول شوی دی.

د  $f(x) = (x+u)^2 + a_0$  ډول تابع د مربع تابع د ککړئ ټکي(راس ټکي) بڼې تابع بلل کیږي.

د تابع گراف نورمال پارابول دی، چې په  $u$  ارزښت  $x$  د محور په لور او په  $a_0$  د  $y$  محور په لور راکښل شوی دی.

که ککړئ ټکی د  $S(x_s | y_s)$  سره په نڅښه کړو، نو د ککړئ ټکي بڼې مربع تابع په دې ډول ده:

$$f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$$



$S(x_s   y_s) \Leftrightarrow f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$	لنډه بڼه:
$S(3   -1) \Leftrightarrow f(x) = (x - 3)^2 - 1$	بېلگه:

تر اوسه مو فقط نورمال پارابول راکښلی (راکش شوی) وو.

همدا یا برابره راکښنه کیدی شي د یوه په خوښه پارابول سره سرته ورسول شي.

دلته دي بیا فاکتور  $a_2$  په پام کې ونيول شي.

په ټولیزه توګه باور لري:

$$\text{Ist } f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{د یوه نورمال پارابول تابع (بلوان) دی، چې ککرتکی (د راس ټکی)}$$

$$S(x_s | y_s) \quad \text{لری، نو} \quad f(x) = a_2(x - x_s)^2 + y_s \quad \text{د ککرتکی د تابع مساوات دي.}$$

د څلوری تکمیلوني له لاری د راس ټکي (ککری ټکي) ټاکل

مور پوهیرو چې صدق کوي:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \Leftrightarrow a_2(x - x_s)^2 + y_s \Rightarrow S(x_s | y_s)$$

په ککرتکي کې د ټولیز تابع مساواتو د ترم تابع له لاری کیدی شي د یوه پارابول ککرتکی (د ککری ټکی) وشمیرل شي.

بېلگه:

$$F(x) = 3x^2 - 12x + 15 \quad \text{دي په ککری ټکي مساوات وړول شي.}$$

لورمی پل (قدم): د  $x^2$  تر مخه ضریب دي له نوکانو راه وپستل شي.

$$\Rightarrow f(x) = 3[x^2 - 4x + 5]$$

دویم پل : مربع تکمیلونه [ ] او بڼه بدلون

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= 3.[x^2 - 4x + (2)^2 - (2)^2 + 5] = 3.[(x-2)^2 + 1] = 3.(x-2)^2 + 3 \\ &\Rightarrow S(2;3) \end{aligned}$$

بیلگه:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = \frac{1}{2}[x^2 - 6x + 8] = \frac{1}{2}[x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 8] \\ \Leftrightarrow f(x) &= \frac{1}{2}[(x-3)^2 - 1] = \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{S\left(3 \mid -\frac{1}{2}\right)}} \end{aligned}$$

بیلگه:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right] = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{4}\right] \\ \Rightarrow f(x) &= -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{36}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{27}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} \\ &\Rightarrow \underline{\underline{S\left(-\frac{3}{4} \mid -\frac{9}{16}\right)}} \end{aligned}$$

**تمرینونه:** د مربع تکمیلوني له لارې د رآس ټکي (ککړی ټکي) ټاکل

د یوه پارابل تابع مساوات ورکړ شوي دي (د دویمې درجې ټول راشنل تابع). د لاندې بارابولونو لپاره رآستکو بڼه او رآستکي پیدا کړی.

گرافونه یې وکارئ:

$$\text{لومړی: } f(x) = x^2 + 2x + 5 \quad \text{دویم: } f(x) = x^2 + 4x + 1$$

$$\text{دریم: } f(x) = x^2 - 4x + 1 \quad \text{څلورم: } f(x) = x^2 - 3x + 3,5$$

$$\text{پنځم: } f(x) = x^2 + x - 3 \quad \text{شپږم: } f(x) = -x^2 + 2x + 1$$

$$\text{اووم: } f(x) = -x^2 + 5x - 5 \quad \text{اتم: } f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$$

$$\text{نههم: } f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6} \quad \text{لسم: } f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

بیلگه 1 :

د ټول راشنل تابع گراف چې رسم کړای شو، په زیاتو حالتونو کې اړیند دی، چې ارزښتجدول وپيژنو. د دې لپاره جېشمیري له لارې کیدی شي. خو دا هم تل اړین دی.

یوه ساده بیلگه یې له جېشمیري څخه.

$$\text{تابع مساوات: } f(x) = x^2 - 4x + 3$$

مورن د متحولي  $x = 0$  څخه پیل کوو

$$x = 0: f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$

$$x = 1: f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$x = 2: f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

$$x = 3: f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$

$$x = 4: f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$$

$$x = 5: f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8$$

$$x = 6: f(6) = 6^2 - 4 \cdot 6 + 3 = 36 - 24 + 3 = 15$$

تر هغی چې د تابع ارزښت له  $\pm 10$  لوی شي، کېدی شي چې پې کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي  $x$  ارزښتونو لپاره ټاکل کيږي.

$$x = -1: f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8$$

$$x = -2: f(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې کښل کيږي.

$x$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	15	8	3	0	-1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د  $f(x)$  گراف رسم شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي، دا بیا پسي شمیرل کېدی شي

$$x = \pm \frac{1}{2} \text{ په توګه}$$

$$x = -\frac{1}{2}: f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} + 2 + 3 = 5\frac{1}{4} = 5,25$$

$$x = \frac{1}{2}: f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 2 + 3 = 1\frac{1}{4} = 1,25$$

هر څوک له جېشميري سره بڼه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شمېروني يا کمپيوتر څخه کار واخلي.

په لاندې کې HN د اصلي گډ مخرج (ماتلاندي) په معنا دی.

يوه غوره بيلگه، چې ځنې برخې يې د جېشميري په مرسته حل شوي دي

$$f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{2} \quad \text{د تابع مساوات}$$

بادونه: په لاندې زيات ځايونه HN راغلي، دا د اصلي مخرج په مانا دي.

مور د  $x = 0$  سره پيل کوو

$$x = 0: f(0) = \frac{4}{5} \cdot 0^2 - \frac{3}{4} \cdot 0 - \frac{7}{2} = 0 - 0 - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} = -3,5$$

$$x = 1: f(1) = \frac{4}{5} \cdot 1^2 - \frac{3}{4} \cdot 1 - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} - \frac{7}{2} = \frac{16}{20} - \frac{15}{20} - \frac{70}{20} = -\frac{69}{20} = -3,45$$

$$x = 2: f(2) = \frac{4}{5} \cdot 2^2 - \frac{3}{4} \cdot 2 - \frac{7}{2} = \frac{16}{5} - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = \frac{32}{10} - \frac{15}{10} - \frac{35}{10} = -\frac{18}{10} = -\frac{9}{5}$$

$$= -1,8$$

$$x = 3: f(3) = \frac{4}{5} \cdot 3^2 - \frac{3}{4} \cdot 3 - \frac{7}{2} = \frac{36}{5} - \frac{9}{4} - \frac{7}{2} = \frac{144}{20} - \frac{45}{20} - \frac{70}{20} = \frac{29}{20} = 1,45$$

$$x = 4: f(4) = \frac{4}{5} \cdot 4^2 - \frac{3}{4} \cdot 4 - \frac{7}{2} = \frac{64}{5} - 3 - \frac{7}{2} = \frac{128}{10} - \frac{30}{10} - \frac{35}{10} = \frac{63}{10} = 6,3$$

$$x = 5: f(5) = \frac{4}{5} \cdot 5^2 - \frac{3}{4} \cdot 5 - \frac{7}{2} = 20 - \frac{15}{4} - \frac{7}{2} = \frac{80}{4} - \frac{15}{4} - \frac{14}{4} = \frac{51}{4} = 12,75$$

اوس د تابع ارزښتونه د منفي  $x$  ارزښتونو لپاره ټاکو.

$$\begin{aligned}
 x = -1: f(-1) &= \frac{4}{5} \cdot (-1)^2 - \frac{3}{4} \cdot (-1) - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} + \frac{3}{4} - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=20}{=} \frac{16}{20} + \frac{15}{20} - \frac{70}{20} = -\frac{39}{20} = -1,95 \\
 x = -2: f(-2) &= \frac{4}{5} \cdot (-2)^2 - \frac{3}{4} \cdot (-2) - \frac{7}{2} = \frac{16}{5} + \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=10}{=} \frac{32}{10} + \frac{15}{10} - \frac{35}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1,2 \\
 x = -3: f(-3) &= \frac{4}{5} \cdot (-3)^2 - \frac{3}{4} \cdot (-3) - \frac{7}{2} = \frac{36}{5} + \frac{9}{4} - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=20}{=} \frac{144}{20} + \frac{45}{20} - \frac{70}{20} = \frac{119}{20} = 5,95 \\
 x = -4: f(-4) &= \frac{4}{5} \cdot (-4)^2 - \frac{3}{4} \cdot (-4) - \frac{7}{2} = \frac{64}{5} + 3 - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=10}{=} \frac{128}{10} + \frac{30}{10} - \frac{35}{10} = \frac{123}{10} = 12,3
 \end{aligned}$$

اوس ټول ارزښتونه په يوه جدول کې ليکل کيږي.

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دې ارزښتونو سره اوس د گراف کښل کيدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بيا پسي شميرل کيدی شي

د بيلگې په توگه  $x = \pm 5/2$

$$\begin{aligned}
 x = -\frac{5}{2}: f\left(-\frac{5}{2}\right) &= \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{25}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} - \frac{7}{2} \\
 &= \frac{25}{5} + \frac{15}{8} - \frac{7}{2} = 5 + \frac{15}{8} - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=8}{=} \frac{40}{8} + \frac{15}{8} - \frac{28}{8} = \frac{27}{8} = 3,375 \\
 x = \frac{5}{2}: f\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{25}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} - \frac{7}{2} \\
 &= \frac{25}{5} - \frac{15}{8} - \frac{7}{2} = 5 - \frac{15}{8} - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=8}{=} \frac{40}{8} - \frac{15}{8} - \frac{28}{8} = -\frac{3}{8} = -0,375
 \end{aligned}$$

یادونه: په پورته کې  $HN$  (Hauptnenner) د اصلي مخرج (ماتلاندې) یا مخرج مشترک په معنا دی.

د دې لپاره چې د یوه ټول ریښتوني یا نام راشنل تابع گراف انځور کړای شو، په زیاتو حالتونو کې اړین دی، چې ارزښت جدول وکارو. د دې لپاره یو جېشمیروني ته اړتیا لرو.

یوه ساده بیلگه به له جېشمیروني څخه.

تابع مساوات:  $f(x) = x^2 - 4x + 3$

مور د تحولي  $x = 0$  څخه پیل کوو

$$x = 0: f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$

$$x = 1: f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$x = 2: f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

$$x = 3: f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$

$$x = 4: f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$$

$$x = 5: f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8$$

$$x = 6: f(6) = 6^2 - 4 \cdot 6 + 3 = 36 - 24 + 3 = 15$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له  $\pm 10$  لوی شي، کېدی شي چې په کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي  $x$  ارزښتونو لپاره ټاکل کېږي.

$$x = -1: f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8$$

$$x = -2: f(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې کښل کېږي.

$x$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	15	8	3	0	-1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د  $f(x)$  گراف رسم شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسي شمېرل کیدی شي

د بېلګې په توګه  $x = \pm 1/2$

$$x = -\frac{1}{2} : f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} + 2 + 3 = 5 \frac{1}{4} = 5,25$$

$$x = \frac{1}{2} : f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 2 + 3 = 1 \frac{1}{4} = 1,25$$

هر څوک له جېشمېرې سره ښه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شمېروني يا کمپيوتر څخه کار واخلي.

یوه غوره بیلګه، چې ځنې برخې یې د جېشمېرې په مرسته حل شوي دي:

$$f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{2} \quad \text{د تابع مساوات}$$

مور د  $x = 0$  سره بیل کوو

$$x = 0 : f(0) = \frac{4}{5} \cdot 0^2 - \frac{3}{4} \cdot 0 - \frac{7}{2} = 0 - 0 - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} = -3,5$$

$$x = 1 : f(1) = \frac{4}{5} \cdot 1^2 - \frac{3}{4} \cdot 1 - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} - \frac{7}{2} = \frac{16}{20} - \frac{15}{20} - \frac{70}{20} = -\frac{69}{20} = -3,45$$

$$x = 2 : f(2) = \frac{4}{5} \cdot 2^2 - \frac{3}{4} \cdot 2 - \frac{7}{2} = \frac{16}{5} - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = \frac{32}{10} - \frac{15}{10} - \frac{35}{10} = -\frac{18}{10} = -\frac{9}{5} = -1,8$$

$$x = 3 : f(3) = \frac{4}{5} \cdot 3^2 - \frac{3}{4} \cdot 3 - \frac{7}{2} = \frac{36}{5} - \frac{9}{4} - \frac{7}{2} = \frac{144}{20} - \frac{45}{20} - \frac{70}{20} = \frac{29}{20} = 1,45$$

$$x = 4 : f(4) = \frac{4}{5} \cdot 4^2 - \frac{3}{4} \cdot 4 - \frac{7}{2} = \frac{64}{5} - 3 - \frac{7}{2} = \frac{128}{10} - \frac{30}{10} - \frac{35}{10} = \frac{63}{10} = 6,3$$

$$x = 5 : f(5) = \frac{4}{5} \cdot 5^2 - \frac{3}{4} \cdot 5 - \frac{7}{2} = 20 - \frac{15}{4} - \frac{7}{2} = \frac{80}{4} - \frac{15}{4} - \frac{14}{4} = \frac{51}{4} = 12,75$$

اوس د تابع ارزښتونه د منفي  $x$  ارزښتونو لپاره ټاکو.



$$\begin{aligned}
 x = -1: f(-1) &= \frac{4}{5} \cdot (-1)^2 - \frac{3}{4} \cdot (-1) - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} + \frac{3}{4} - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=20}{=} \frac{16}{20} + \frac{15}{20} - \frac{70}{20} = -\frac{39}{20} = -1,95 \\
 x = -2: f(-2) &= \frac{4}{5} \cdot (-2)^2 - \frac{3}{4} \cdot (-2) - \frac{7}{2} = \frac{16}{5} + \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=10}{=} \frac{32}{10} + \frac{15}{10} - \frac{35}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1,2 \\
 x = -3: f(-3) &= \frac{4}{5} \cdot (-3)^2 - \frac{3}{4} \cdot (-3) - \frac{7}{2} = \frac{36}{5} + \frac{9}{4} - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=20}{=} \frac{144}{20} + \frac{45}{20} - \frac{70}{20} = \frac{119}{20} = 5,95 \\
 x = -4: f(-4) &= \frac{4}{5} \cdot (-4)^2 - \frac{3}{4} \cdot (-4) - \frac{7}{2} = \frac{64}{5} + 3 - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=10}{=} \frac{128}{10} + \frac{30}{10} - \frac{35}{10} = \frac{123}{10} = 12,3
 \end{aligned}$$

اوس ٽول ارزښتونه په يوه جدول کي ليکل کيږي.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دي ارزښتونو سره اوس د گراف کښل کيډی شي.

که د رسمولو په وخت کي نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بيا پسي شميرل کيډی شي

د بېلگي په توگه  $x = \pm 5/2$

$$\begin{aligned}
 x = -\frac{5}{2}: f\left(-\frac{5}{2}\right) &= \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{25}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} - \frac{7}{2} \\
 &= \frac{25}{5} + \frac{15}{8} - \frac{7}{2} = 5 + \frac{15}{8} - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=8}{=} \frac{40}{8} + \frac{15}{8} - \frac{28}{8} = \frac{27}{8} = 3,375 \\
 x = \frac{5}{2}: f\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{25}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} - \frac{7}{2} \\
 &= \frac{25}{5} - \frac{15}{8} - \frac{7}{2} = 5 - \frac{15}{8} - \frac{7}{2} \stackrel{\text{HN}=8}{=} \frac{40}{8} - \frac{15}{8} - \frac{28}{8} = -\frac{3}{8} = -0,375
 \end{aligned}$$

پوښتني

## بنستونه مربع توابع II

لومړی - د لاندې پارابولونو د تابع مساوات ورکړئ:

$$\text{الف- } f(x) = x^2 - 4x + 2 \quad \text{ب- } f(x) = x^2 + 4x + 2$$

$$\text{پ- } f(x) = -x^2 - 4x + 3 \quad \text{ت- } f(x) = -x^2 + 8x - 9$$

$$\text{ث- } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5 \quad \text{ډ- } f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$$

$$\text{ج- } f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 2 \quad \text{چ- } f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x + 6$$

$$\text{ح- } f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 7 \quad \text{خ- } f(x) = \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$$

(۱) د ککړئ ټکي بڼه او ککړئ ټکي وټاکئ.

(۲) د محورونو غوڅتکي وشمیرئ.

(۳) پل په پل تشریح کړئ، چې  $f(x)$  د نورمال پارابول څخه څنګه منځ ته راځي او دا څنګه واز دی.

(۴) په یوه مناسب پروتولارسیستم کې د  $f(x)$  ګراف وکارئ

دویم - سړی کړی شي د نورمال پارابول څخه هر په خوښه پارابول د د غوڅتکي د راکبني له لارې او د پرسېدني يا غزوني له لارې منځ ته اوړي. که دا کبته لور ته واز وي، نو دا د  $x$  محور باندې هنداره کيږي يا منعکس کيږي.

د یوه پارابول په هکله لاندې ټکي پیژنو:

د  $y$  په لور راګېښه یا خای د  $x$  په لور راګېښه یا  
بدلون خای بدلون  
Formfaktor بڼه ضریب

- a) په 2 واحدونو کېښه لور ته په 2 واحدونو کېښه لورته  $a_2 = 1$
- b) په 4 واحدونو پورته لور ته په 3 واحدونو کېښه لورته  $a_2 = -1$
- c) په 4 واحدونو کېښه لور ته په 2 واحدونو کېښه لورته  $a_2 = \frac{1}{2}$
- d) په 5 واحدونو پورته لور ته په 1 واحد کېښه لورته  $a_2 = -2$
- e) په 3 واحدونو پورته لور ته په 4 واحدونو کېښه لورته  $a_2 = -\frac{1}{4}$
- f) په 6 واحدونو کېښه لور ته په 2,5 واحدونو کېښه لورته  $a_2 = \frac{3}{2}$
- g) په 3 واحدونو پورته لور ته په 3 واحدونو کېښه لورته  $a_2 = -\frac{3}{4}$
- h) په 4,5 واحدونو کېښه لور ته په 3,5 واحدونو کېښه لورته  $a_2 = 2$
- i) په 3 واحدونو یا یوونو کېښه لور ته په 2 واحدونو کېښه لورته  $a_2 = \frac{1}{3}$
- j) په 3 واحدونو پورته لور ته  $a_2 = -\frac{2}{3}$

په 4 واحدونو بڼې لورته

(۱) د ککړۍ ټکي بڼه او ککړۍ ټکي وټاکۍ.

(۲) د محورونو غوڅټکي وشمیرۍ.

(۳) د تابع مساوات په پولینوم بڼه  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$  څنگه دي؟

(۴) په یو مناسب کواور دینات سیسم کې د  $f(x)$  گراف وکارۍ.

### پوښتنې

د مربع توابعو بنسټونه IV

لومړۍ:

تابع  $f(x)$  ورکړ شوی دی. د شمېرنې له لارې وښایۍ، چې گراف تابع په  $x$  محور کې لمسوي. گراف وکارۍ.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8} \quad x \in \mathbb{R}$$

دویم: د تابع مساوات  $f(x)$  د محور غوڅټکي وشمیرۍ، او ککړۍ ټکي. گراف یې رسم کړۍ.

الف -  $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x$  ب -  $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$  پ -  $f(x) = x^2 + 4x + 1$

ت -  $f(x) = -0,25(4x^2 + 12x + 9)$  ټ -  $f(x) = 3x(1-x)$  ټ -

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{5}{3}$$

دریم: د  $U = 18 \text{ cm}$  محیط سره کوم مستطیل (ولارکودیز) خورا لویه سطحه لري؟

څلورم: د توابعو  $f(x)$  او  $g(x)$  گرافونه چیرته د  $x$  محور غوڅوي؟ ککړی چیرته پرته دي؟ د دواړو گرافونو ترمنځ کومې اړیکې پرته دي؟ د ارزښت جدول په مرسته پوښتنې ځواب کړی.

الف -

$x$	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-3,5	0,5	2,5	2,5	0,5	-3,5
$g(x)$	4	0	-2	-2	0	4

ب -

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-12	-5	0	3	4	3
$g(x)$	3,5	0	-2,5	-4	-4,5	-4

پنځم: د اړونده گراف کوم خویونه د تابع مساوات څخه سیده لوستل کیدی شي؟

$$f(x) = -x^2 - x + 6; \quad g(x) = (2-x)(x+3); \quad h(x) = -(x+0,5)^2 + \frac{25}{4}$$

د مربع-یا څلورۍ توابعو معکوس تابع

تلنار (که غواړې: طریقه یا قانون) همداسې ده لکه پورته په کرښیزو توابعو کې چې وپنډول شوه.

$$y = (f(x) = x^2$$

د متحولو  $x$  او  $y$  بدلول

$$x = f(y) = y^2 \Leftrightarrow y^2 = x$$

رېښه نیونه:

له دې لاس ته راځي او برعکس

$$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$$

$$y = -\sqrt{x} \text{ یا}$$

نو دوه معکوس توابع شتون لري:

$$y = u_1(x) = \sqrt{x}$$

او

$$y = u_2(x) = -\sqrt{x}$$

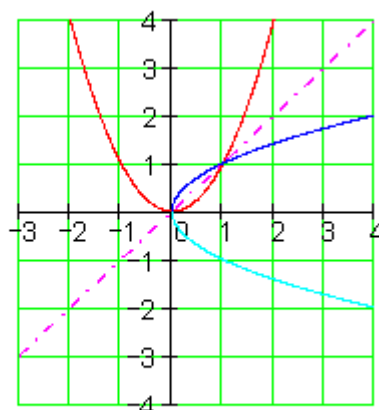
د معکوس تابع جوړولو سره تعریفورشو  
محدوده شوه، د دې لپاره چې یواځنی  
نظم منځ ته راشي

$f(x)$

$u_1(x)$

$u_2(x)$

$s(x)$



$x$

## کرنییز برابر ونسیستم د ۲ برابر ونونو او ۲ متحولو سره.

داسې سیستم له دوه مساوتو څخه جوړ دی. غوښتونې د دواړو مساواتو گډ حل دی. مختلفې تڼلارې شته، چې سری حل ته ورسیري

په لاندې einsetzen in = په ... کې ایښوول.

د جمعې تڼلار:

د حل پل (قدم) غوڅي (قطاع، که قطعہ؟) د جمعې تڼلار ته لومړی امکان یا واریانت	مساواتسیستم: (I) $5x - 2y = 1$ (II) $3x + 3y = 9$
لومړی: مساوات ورته داسې بڼه بدل کړی، چې ضربیونه (تر مخ عددونه) د متحولې تر مخځنې پورې سره سروخوري.	(I) $5x - 2y = 1 \cdot 1,5$ (II) $3x + 3y = 9$ <hr/> (I) $7,5x - 3y = 1,5$ (II) $3x + 3y = 9$
دویم: منځ ته راغلي مساوات سره جمعہ کړي او د $x$ - متحولې پسې یې حل کړی	(I) $7,5x - 3y = 1,5$ (II) $3x + 3y = 9$ } + <hr/> $10,5x = 10,5 \mid : 10,5$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$
دریم: د $x$ لپاره میندل شوي ارزښتونه د دواړو څخه په یوه مساوات کې کیردی او $y$ پسې یې حل کړي.	په $3x + 3y = 9$ کې ایښوونه: $x = 1$

	$3 \cdot 1 + 3y = 9$ $\Leftrightarrow 3 + 3y = 9 \mid -3$ $\Leftrightarrow 3y = 6 \mid :3$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$
څلورم: حلست یا حلډېرئ وليکئ	$L = \{(1 \mid 2)\}$

پنځم:

ازماښت د ايسنوني له لارې

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د حل پلونه قدمونه د جمعي تئلاړ لپاره

مساواتسيستم

$$(I) \quad 5x - 2y = 1$$

دويم واريانت

$$(II) \quad 3x + 3y = 9$$

لومړی: مساوات داسي ورته ښهېدل

کړئ، چې د  $x$  ضريبونه)

ترمخددونه) تر مخخښي پورې سره

يوغريز شي.

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \mid \cdot 3$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \mid \cdot (-5)$$

$$(I) \quad 15x - 6y = 3$$

$$(II) \quad -15x - 15y = -45$$

دويم: منځ ته راغلي مساوات سره

جمعه کړئ او متحولي  $y$  پسې يې حل

کړئ.

$$\left. \begin{array}{l} (I) \quad 15x - 6y = 3 \\ (II) \quad -15x - 15y = -45 \end{array} \right\} +$$

$$-21y = -42 \mid : (-21)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$$



دریم: ښي لورته الماني د اېښوونې په

$$\text{مانا ده } y = 2 \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y = 9$$

$$\begin{aligned} 3x + 3 \cdot 2 &= 9 \\ \Leftrightarrow 3x + 6 &= 9 \quad | -6 \\ \Leftrightarrow 3x &= 3 \quad | :3 \\ \Leftrightarrow \underline{x} &= \underline{1} \end{aligned}$$

د  $x$  لپاره میندل شوي ارزښتونه له دې

دوه پهبوه مساوت کې کیردی او د

متحولې  $x$  پسې یې حال کړی.

څلروم: حلست یا د حلېږی ولیکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1|2)\}}}$$

پنځم: د اېښوونې له لارې ازماېنت

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د برابر اېښوونې تلنلار

د حل پل د برابر اېښوونې تلنلار ته

مساواتسیستم

واریانت 1

$$(I) \quad 5x - 2y = 1$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9$$

لومړی: دواړه مساوات د اووښتونې یا متحولې  $x$  پسې حل کيږي.

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad 5x - 2y = 1 \quad | +2y \\ \text{(II)} \quad 3x + 3y = 9 \quad | -3y \\ \hline \text{(I)} \quad 5x \quad = 1 + 2y \quad | : 5 \\ \text{(II)} \quad 3x \quad = 9 - 3y \quad | : 3 \\ \hline \text{(I)} \quad x \quad = \frac{1+2y}{5} \\ \text{(II)} \quad x \quad = \frac{9-3y}{3} \\ \hline \text{(I)} \quad x \quad = \frac{1+2y}{5} \\ \text{(II)} \quad x \quad = 3-y \end{array}$$

دویم: د مساوات ښي اړخونه برابر ایښوول کيږي او د متحولې  $y$  پسې حل کيږي.

$$\begin{array}{l} \frac{1+2y}{5} = 3-y \quad | \cdot 5 \\ \Leftrightarrow 1+2y = 15-5y \quad | +5y \\ \Leftrightarrow 1+7y = 15 \quad | -1 \\ \Leftrightarrow 7y = 14 \quad | : 7 \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}} \end{array}$$

دریم: (د کین لور الماني په پښتو:

ایښوول په .. کې)  $y = 2$  eingesetzt in (II):  $3x + 3y = 9$

$$\begin{array}{l} \text{د } y \text{ میندل شوی ارزښت د دواړو څخه} \\ \Leftrightarrow 3x + 3 \cdot 2 = 9 \\ \text{په یوه وتونمساوات کې ایښوول کيږي،} \\ \Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \quad | -6 \\ \text{او دا بیا د متحولې } x \text{ پسې حل کيږي.} \\ \Leftrightarrow 3x = 3 \quad | : 3 \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}} \end{array}$$

څلورم: حلست یا -دېرئ ولیکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1|2)\}}}$$

پنځم: د خا په خای کولو یا ایښوولو له لارې ازمایښت

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د حل پل د برابر ایښوولو له لارې

مساوات سیستم

واریانت 2

$$(I) \quad 5x - 2y = 1$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9$$

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \quad | -5x$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \quad | -3x$$

$$(I) \quad -2y = 1 - 5x \quad | : (-2)$$

$$(II) \quad 3y = 9 - 3x \quad | : 3$$

$$(I) \quad y = \frac{1 - 5x}{-2}$$

$$(II) \quad y = \frac{9 - 3x}{3}$$

$$(I) \quad y = \frac{5x - 1}{2}$$

$$(II) \quad y = 3 - x$$

لومړی: دواړه مساوت د اووښتونې یا  
متحولې  $y$  پسې حل کيږي.

دویم: د دواړو مساواتو بڼی خوا برابره لیکل یا ایښوول کيږي او د متحولې  $x$  پسي حل کيږي.

$$\begin{aligned} \frac{5x-1}{2} &= 3-x \quad | \cdot 2 \\ \Leftrightarrow 5x-1 &= 6-2x \quad | +2x \\ \Leftrightarrow 7x-1 &= 6 \quad | +1 \\ \Leftrightarrow 7x &= 7 \quad | :7 \\ \Leftrightarrow \underline{x} &= \underline{1} \end{aligned}$$

دری (بڼی الماني: ایښوول په ... کې)

د  $x$  میندل شوی ارزښت د دواړو وتونمساواتو څخه په یوه کې ایښوول کيږي، دا بیا د متحولې  $y$  پسي حل کيږي.

$$\begin{aligned} x = 1 \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y &= 9 \\ 3 \cdot 1 + 3y &= 9 \\ \Leftrightarrow 3 + 3y = 9 \quad | -3 \\ \Leftrightarrow 3y = 6 \quad | :3 \\ \Leftrightarrow \underline{y} &= \underline{2} \end{aligned}$$

څلورم: د حلست وليکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1|2)\}}}$$

پنځم د ایښوونې له لارې ازماښت

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 5x - 2y = 1 &\Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w) \\ \text{(II)} \quad 3x + 3y = 9 &\Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w) \end{aligned}$$

د ایښوونې تڼلار: د ایښوونې  
تڼلار لپاره د حل پلونه (قدمونه)

وارینت 1

مساوات سیستم

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 5x - 2y &= 1 \\ \text{(II)} \quad 3x + 3y &= 9 \end{aligned}$$

لومړی: مساوات (I) د  $x$  پسي  
حل کيږي.

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 5x - 2y &= 1 \quad | +2y \\ \Leftrightarrow 5x &= 2y + 1 \quad | : 5 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{5}y + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5} \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y = 9$$

$$3 \left( \frac{2}{5}y + \frac{1}{5} \right) + 3y = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + \frac{3}{5} + 3y = 9 \quad | -\frac{3}{5}$$

دویم: د بني اړخ ميندل شوی ترم  
په مساوات (II) کې ايسنول  
کيږي او د  $y$  پسي حل کيږي.

$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + 3y = 9 - \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{21}{5}y = \frac{42}{5} \quad | \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow 21y = 42 \quad | : 21$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$$

دریم: د  $y$  لپاره ميندل شوی  
ارزښت په يو د دي دوه  
وتون مساواتو کې ايسنول کيږي،  
دا بيا په  $x$  پسي حل کيږي.

$$y = 2 \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y = 9$$

$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \quad | -6$$

$$\Leftrightarrow 3x = 3 \quad | : 3$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$$

څلورم: د حل سټ وليکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1 | 2)\}}}$$

پنځم: د ايسنولو له لاري حل

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د حل پلونه (قدمونه) د ایښوولو تڼلار  
لپاره

واریانت 2

مساواتسیستم

$$(I) \quad 5x - 2y = 1$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9$$

لومړۍ مساوات (II) د متحولي  $y$   
پسې حل کيږي.

$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \quad | -3x$$

$$\Leftrightarrow 3y = 9 - 3x \quad | : 3$$

$$\Leftrightarrow y = 3 - x$$

دویم: دښی لور میندل سوی ترم په  
مساوات (I) کې کيږدی او په  $x$   
پسې یې حل کړی.

$$y = 3 - x \text{ eingesetzt in (I): } 5x - 2y = 1$$

$$5x - 2(3 - x) = 1$$

$$\Leftrightarrow 5x - 6 + 2x = 1 \quad | +6$$

$$\Leftrightarrow 7x = 7 \quad | : 7$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$$

3. دریم: د  $x$  لپاره میندل شوی  
ارزښت په یو د دې دوه  
وتون مساوتو کې ایښوول کيږي، او  
دا بیا د متحولي  $y$  پسې حل کيږي.

$$x = 1 \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y = 9$$

$$3 \cdot 1 + 3y = 9$$

$$\Leftrightarrow 3 + 3y = 9 \quad | -3$$

$$\Leftrightarrow 3y = 6 \quad | : 3$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$$

څلورم: جلست وليکئ

$$L = \{\{1 \mid 2\}\}$$

پنځم: ازماښت د اېنولو له لارې

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

ټولې درې تڼلارې د هغه د واريانتو سره په يوه ټکلي مساوتسيستم وکارول شو. که څوک يوگوني تڼلارې ټيک وگوري، پېژني، چې په واريانت ۲ کې لږ د شميرلو کار غوښتونی دی.

په يوه ټاکلي تڼلار د شميرلو کار د دې حل کوونکي مساوتسيستم په واک کې دی. له دې امله دې لومړی پام وشي، چې کومه تڼلار د لږ کار سره سرته رسيدی شي. د دې لپاره نو يو څو بيلگو ته اړ يو. لاندې بيلگې دې د دې لپاره يوه کوچنی مرسته وي، چې مناسب د حل – يا ځواب تڼلار پيداشي.

**د مناسب ځواب تڼلار لپاره بيلگې**

بيلگه ۱ :

<p>(I) <math>y = 7x + 8</math>          (II) <math>y = -2x - 1</math></p> <p>د برابر ایښوونې لار</p> $7x + 8 = -2x - 1   +2x$ $\Leftrightarrow 9x + 8 = -1   -8$ $\Leftrightarrow 9x = -9   :9$ $\Leftrightarrow \underline{x = -1}$	<p><math>y = 7x + 8</math> په <math>x = -1</math> کې ایښوونه</p> $\left  \begin{array}{l} y = 7 \cdot (-1) + 8 \\ \Leftrightarrow y = -7 + 8 \\ \Leftrightarrow \underline{y = 1} \end{array} \right.$ <p>حل: <math>L = \{(-1 1)\}</math></p> <p>ازمابښت</p> $\left  \begin{array}{l} \text{(I)} \quad y = 7x + 8 \Rightarrow y = 7 \cdot (-1) + 8 \\ \Leftrightarrow y = -7 + 8 \Leftrightarrow y = 1 \text{ (w)} \\ \text{(II)} \quad y = -2x - 1 \Rightarrow y = -2 \cdot (-1) - 1 \\ \Leftrightarrow y = 2 - 1 \Leftrightarrow y = 1 \text{ (w)} \end{array} \right.$
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

بیلگه ۲:

<p>(I) <math>2x + 4y = 8</math>          (II) <math>2x - 5y = 35</math></p> <p>د جمعې تڼلار:</p> $\frac{\text{(II)} \quad 2x - 5y = 35   \cdot (-1)}{\text{(I)} \quad 2x + 4y = 8} \left. \vphantom{\frac{\text{(II)} \quad 2x - 5y = 35   \cdot (-1)}{\text{(I)} \quad 2x + 4y = 8}} \right\} +$ $\frac{\text{(II)} \quad -2x + 5y = -35}{\text{(I)} \quad 2x + 4y = 8} \left. \vphantom{\frac{\text{(II)} \quad -2x + 5y = -35}{\text{(I)} \quad 2x + 4y = 8}} \right\} +$ $\frac{9y = -27   :9}{\Leftrightarrow \underline{y = -3}}$	<p><math>Y = 3</math> ایښوونه په (I) کې <math>2x + 4y = 8</math></p> <p>حل:</p> $2x - 12 = 8   +12$ $\Leftrightarrow 2x = 20   :2$ $\Leftrightarrow \underline{x = 10}$ <p>ازمابښت</p> $\text{(I)} \quad 2x + 4y = 8 \Rightarrow 2 \cdot 10 + 4 \cdot (-3) = 8$ $\Leftrightarrow 20 - 12 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \text{ (w)}$ $\text{(II)} \quad 2x - 5y = 35 \Rightarrow 2 \cdot 10 - 5 \cdot (-3) = 35$ $\Leftrightarrow 20 + 15 = 35 \Leftrightarrow 35 = 35 \text{ (w)}$
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------



$(I) \quad x + 2y = 5$ $(II) \quad -x + y = 1$ <p>د ایښوونې لار؛</p> <p>(II) په <math>y</math> پسې حل کړئ</p> $-x + y = 1 \quad   +x$ $\Leftrightarrow y = x + 1$ <p>په (I) کې کیردئ <math>x + 2y = 5</math></p> $x + 2(x + 1) = 5$ $\Leftrightarrow x + 2x + 2 = 5 \quad   -2$ $\Leftrightarrow 3x = 3 \quad   :3$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$	$x + 2y = 5 \text{ په } (1) \text{ کې کیردئ } X = 1$ $1 + 2y = 5 \quad   -1$ $\Leftrightarrow 2y = 4 \quad   :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$ <p>حل: <math>L = \{(1 2)\}</math></p> <p>ازماښت</p> $(I) \quad x + 2y = 5 \Rightarrow 1 + 4 = 5$ $\Leftrightarrow 5 = 5 \quad (w)$ $(II) \quad -x + y = 1 \Rightarrow -1 + 2 = 1 = 35$ $\Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$ <p>د رښتیا لپاره <math>w</math></p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

بیلگه ۴ : په لاندې: einsetzen ایښوونه په (1) کې اوبیونه یا حل: Lösung  
ازماښت Probe د زیاتون یا جمعې  
لار:

$$(I) \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$$

$$(II) \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4$$

Additionsverfahren:

$$(I) \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \quad | \cdot 2$$

$$(II) \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \quad | : (-2)$$

$$(I) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 4 \end{array} \right\} +$$

$$(II) \quad \left. \begin{array}{l} -\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = -2 \end{array} \right\} +$$

$$-\frac{10}{y} = 2 \quad | \cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10 = 2y \quad | : 2$$

$$\Leftrightarrow -5 = y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -5}}$$

$$y = -5 \text{ eingesetzt in (I) } \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$$

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} + \frac{1}{2} = 2 \quad | -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{3}{2} \quad | \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{3}{2}x \quad | \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}}$$

Lösung:  $L = \{(2 | -5)\}$   $x, y \neq 0$

Probe:

$$(I) \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \quad (w)$$

$$(II) \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \Rightarrow \frac{12}{2} + \frac{10}{-5} = 4$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \quad (w)$$

$$(I) \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$$

$$(II) \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4$$

Additionsverfahren:

$$(I) \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \quad | \cdot 2$$

$$(II) \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \quad | : (-2)$$

$$(I) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 4 \end{array} \right\} +$$

$$(II) \quad \left. \begin{array}{l} -\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = -2 \end{array} \right\} +$$

$$-\frac{10}{y} = 2 \quad | \cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10 = 2y \quad | : 2$$

$$\Leftrightarrow -5 = y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -5}}$$

$$y = -5 \text{ eingesetzt in (I) } \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$$

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} + \frac{1}{2} = 2 \quad | -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{3}{2} \quad | \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{3}{2}x \quad | \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}}$$

Lösung:  $L = \{(2 | -5)\}$   $x, y \neq 0$

Probe:

$$(I) \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \quad (w)$$

$$(II) \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \Rightarrow \frac{12}{2} + \frac{10}{-5} = 4$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \quad (w)$$

$$(I) \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$$

$$(II) \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4$$

Additionsverfahren :

$$(I) \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \quad | \cdot 2$$

$$(II) \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \quad | : (-2)$$

$$(I) \quad \left. \begin{array}{l} \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 4 \end{array} \right\} +$$

$$(II) \quad \left. \begin{array}{l} -\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = -2 \end{array} \right\} +$$

$$-\frac{10}{y} = 2 \quad | \cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10 = 2y \quad | : 2$$

$$\Leftrightarrow -5 = y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -5}}$$

$$y = -5 \text{ eingesetzt in (I)} \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$$

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} + \frac{1}{2} = 2 \quad | -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{3}{2} \quad | \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{3}{2}x \quad | \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}}$$

Lösung:  $L = \{(2 | -5)\}$   $x, y \neq 0$

Probe :

$$(I) \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \quad (w)$$

$$(II) \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \Rightarrow \frac{12}{2} + \frac{10}{-5} = 4$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \quad (w)$$

یادونه:

مساواتسیستم د کسرونو ترمونو څخه جوړ دی. دا چې مخرج دد صفر کیدو اجازه نه لري یا نه شي صفر کیدی، تعریفست باید ورکړ شي. داسی مساواتسیستم کرښیز نه دی.

د رسموني لار

$$(I) \quad x - y = -2 \quad L_I = \{(-2 | 0); (-1 | 1); (0 | 2); (1 | 3); \dots\}$$

$$(II) \quad -2x - y = 1 \quad L_{II} = \{(-2 | 3); (-1 | 1); (0 | -1); (1 | -3); \dots\}$$

دواړه مساوات د  $y$  پسې حل کيږي.

$$(I) \quad x - y = -2 \mid +y$$

$$(II) \quad -2x - y = 1 \mid +y$$

$$(I) \quad x = -2 + y \mid +2$$

$$(II) \quad -2x = 1 + y \mid -1$$

$$(I) \quad x + 2 = y \Leftrightarrow y = x + 2$$

$$(II) \quad -2x - 1 = y \Leftrightarrow y = -2x - 1$$

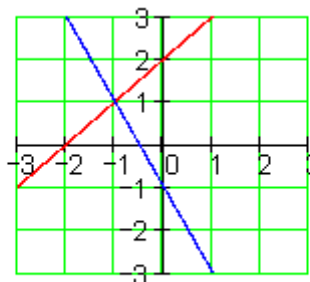
د هر مساوات لپاره ارزښتجوړې د حل سټ په گوته کوي.

کا دا په يوه کواورډیناټسېستم کې وکښل شي، نو دوه کرښې ترې لاس ته راځي. د کرښو په غوڅتکي يا نقطه تقاطع کې د د، اړو مساواتو حلست پروت دی.

$$L = \{(-1|1)\}$$

په هر مساوات کې د  $x$  لپاره عددونه ایښوول کېږي.

$x$	-2	-1	0	1
$y_I$	0	1	2	3
$y_{II}$	3	1	-1	-3



د رسمونې لار د مساوات او کرښو ترمنځ هندسي (ځمکچیزې) اړیکې لیدور کوي. د حل لار په حیث زیات وخت مناسب نه دی، چې د گډغوڅتکي کواورډینات په گرافیک کې ناتیګ لوستل کیدی شي.

## برابرون – یا مساواتسیستم بې له یواځني حل څخه

رسمیزه حل یا درسم له لارې حل د مساوات او کرښې ترمنځ هندسي اړیکې لیدور کوي.

- دوه کرښې کیدی شي چې نسبت یو بل ته مختلف پروتځایونه ولري.

- دا کیدی چې په یو ټکي کې سره غوڅي کړي، لکه پورته بیلگه چې لیدور کوي، د دواړو کرښیز مساوات لپاره ټک یو حل شتون لري.

- دا کیدی شي یو بل سره غبرګې وي، نو په دې حالت کې کوم ټکی نه شته، چې دواړه کرښې یې یو له بل سره ګډ ولري. له دې سره اړونده مساوات له دې امله حل نه لري.

- دا کیدی شي یو په بل پرتي وي، یعنی کټمټ وي، نو هر ټکی د یوې کرښې به د بلې کرښې ټکی هم وي. نو له دې امله به دا اړونده مساوات ناپای زیات حلونه ولري.

$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad 10x + 4y = 4 \\ \text{(II)} \quad 5x + 2y = 1 \quad   \cdot (-2) \\ \hline \text{(I)} \quad 10x + 4y = 4 \\ \text{(II)} \quad -10x - 4y = -2 \quad   \quad + \\ \hline \end{array}$ <p><math>0=2</math> نو دا ناتیګ وینا ده، له دې لاس ته راځي <math>L=\{\}</math></p>	<p><b>مساوات سیستم حل نه لري</b></p> <p>چې دا د حل پیل مو یوه لیدور دا په دې معنا دی، چې ځغلي او کوم ګډ ټکی نه لري.</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

### دا مساوات سیستم ناپای ډېر ځوابونه یا حلونه لري

$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad 10x + 4y = 2 \\ \text{(II)} \quad 5x + 2y = 1 \quad   \cdot (-2) \\ \hline \text{(I)} \quad 10x + 4y = 2 \\ \text{(II)} \quad -10x - 4y = -2 \quad   \quad + \\ \hline \end{array}$ <p><math>0=0</math> له دې لاس ته راځي رښتیا وینا</p>	<p>د ورته بڼه بدلون وروسته د مساوات (I) او مساوات (II) جمعه کونې یو بل سره پورته کوي یا له منځه وړي، دا په دې معنا چې مساوات ورته یا ایدنتیک دي. هر د اعدادو جوړه، چې مساوات (I) پوره کوي، دا مساوات (II) هم پوره کوي. لیدور دا په دې معنا دی، چې کرښې یو په بل پرتي دي.</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

پوښتنې

### مساوات سیستم I

مساوات سیستم ته د دوه متحولو سره ګډوله پوښتنې، کرښیز مساوات سیستم، سیستم د کسري ترمونو سره او شي پوښتنې (د متن سره پ، بنسټي)

لومړی: د لاندې مساوات سیستم حلست وټاکئ

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 4x + 5y = 32 \\ \text{(II)} & y = 5x - 11 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(I)} & 5y - 3x = 1 \\ \text{(II)} & x = y + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 3x = y + 15 \\ \text{(II)} & 2y - 10 = 2x \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(I)} & 15y - 4x = -50 \\ \text{(II)} & x = y + 7 \end{array}$$

د ویم: د لاندې مساواتسیستم حلست وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} \text{(I)} \quad 2y = 2x - 40 \\ \text{(II)} \quad 3x = 10 - 2y \end{array} \\ \text{b)} & \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \frac{x}{2} - \frac{3y}{5} = 3 \\ \text{(II)} \quad \frac{x}{4} + y = 8 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c)} & \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \frac{2x}{15} + \frac{7y}{12} = 3 \\ \text{(II)} \quad \frac{7x}{25} - \frac{5y}{16} = \frac{3}{20} \end{array} \\ \text{d)} & \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \frac{x+5}{y-7} = \frac{4}{3} \\ \text{(II)} \quad \frac{x+2}{y-5} = \frac{5}{8} \end{array} \end{array}$$

د ریم: د لاندې مساواتسیستم حلست وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \frac{4}{3x+1} = \frac{2}{3y-13} \\ \text{(II)} \quad \frac{2}{5x-10} = \frac{4}{7y-6} \end{array} \\ \text{b)} & \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \frac{7}{x} - \frac{12}{y} = \frac{5}{6} \\ \text{(II)} \quad \frac{4}{y} + \frac{5}{2} = \frac{9}{x} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c)} & \text{(I) } \frac{4}{x} + \frac{8}{y} = \frac{5}{3} \\ & \text{(II) } \frac{2}{x} - \frac{4}{y} = -\frac{1}{6} \\ \text{d)} & \text{(I) } \frac{3}{2x-1} - \frac{8}{3y+2} = -\frac{1}{5} \\ & \text{(II) } \frac{5}{2x-1} + \frac{4}{3y+2} = \frac{8}{15} \end{array}$$

څلورم: د لاندې مساواتسیستم حلست وټاکئ

$$\begin{array}{ll} \text{(I) } & \frac{7}{2x-5} - \frac{9}{7y+5} = \frac{10}{3} \\ \text{(II) } & \frac{24}{2x-5} + \frac{15}{7y+5} = \frac{19}{3} \end{array}$$

پنځم: یو پلار په دې لحظه کې څلورواړه دومره عمر لري لکه څوې یې او په ۵ کاله کې به فقط درې واړه دومره عمر ولري. دا دواړه همدا اوس څومره عمر لري؟

شپږم: په کوم وخت کې به یو (اوبه) ساتونې (بیلر؟) له دوه نلونو څخه نیمم ډک شي، چې لومړی نل د ټول ساتونې د ډکولو لپاره ۱۸ دقیقې او دویم د دې لپاره ۲۲ دقیقو ته اړتیا ولري یا په کار ولري؟

اوم: د یوه مستطیل یا ولاړکونجیز چاپیریال یا محیط ۱۸۰ سانتي متره دی. اړخ a څومره اوږد دی، که اړخ b ۳۰ سانتي متره وي؟

اتم: که د دوه ارزښتخاایزه پرته جمعه یا پروت زیاتون عدد 9 دی. که ارزښتونه بدل شي، نو نوی عدد لاس ته راځي چې د زاړه عدد 7/4 ده. دواړه څا ارزښتونه څومره دي؟



# توان- یا پوتنخ توابع

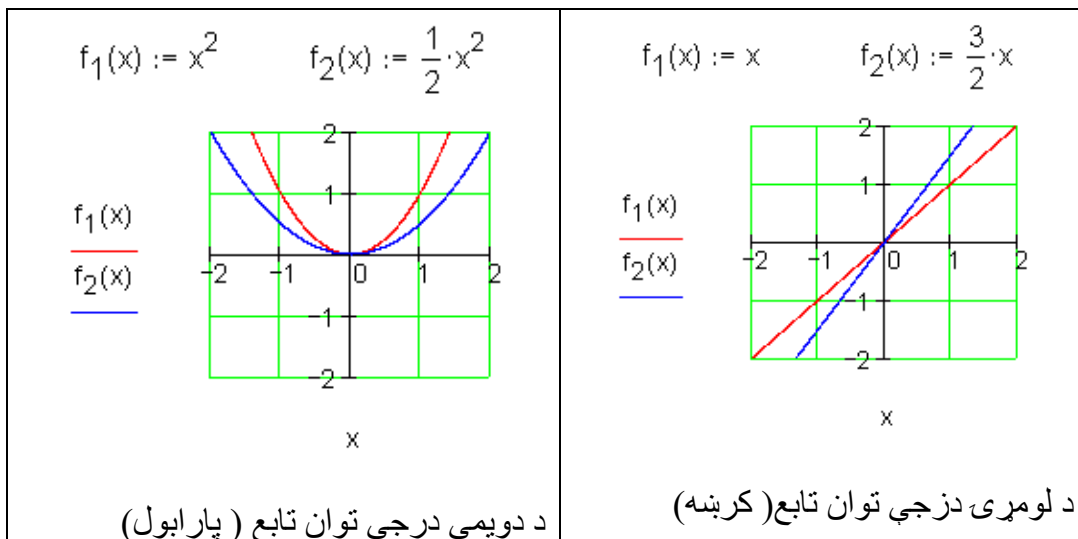
توان توابع

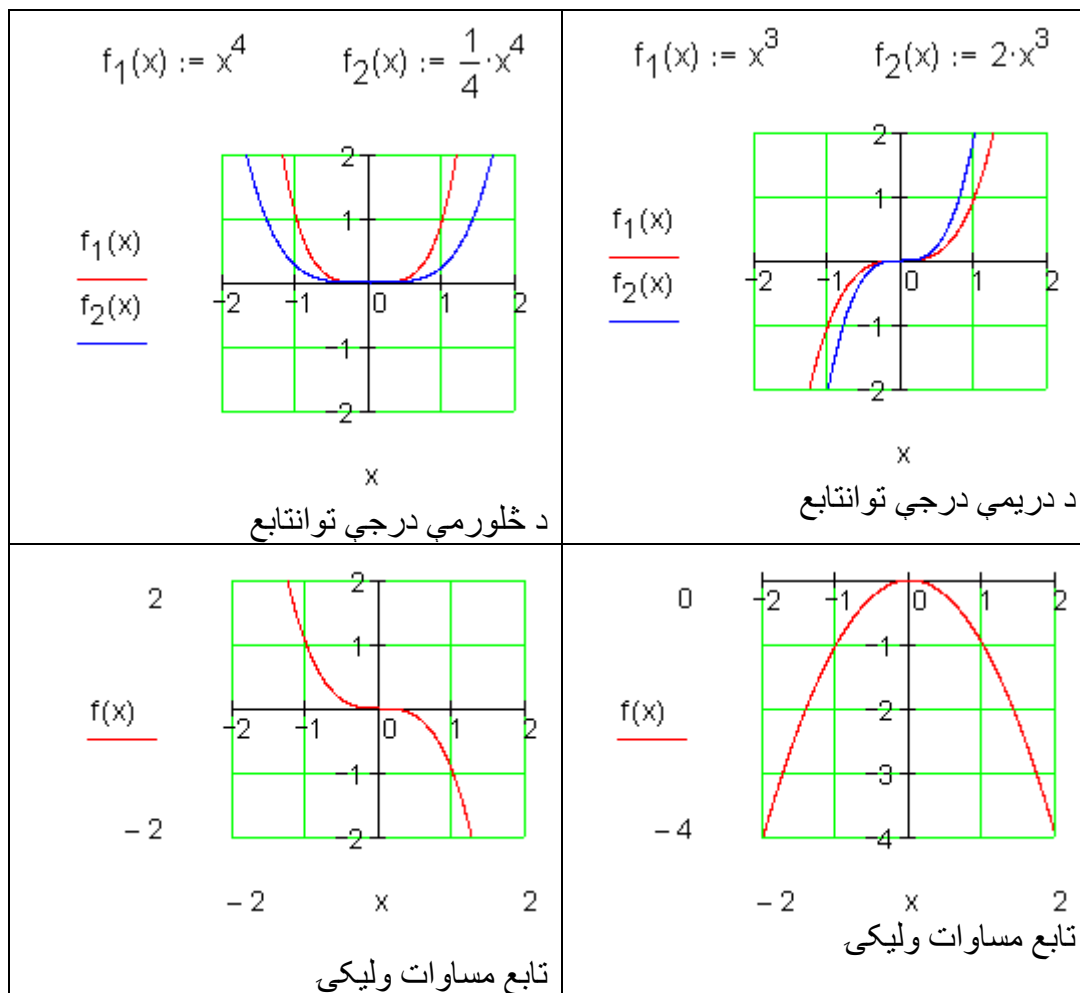
تعریف:

یوه تابع د تابع مساوات  $f(x) = a_n x^n$  ;  $n \in \mathbb{N}$  ;  $a_n \in \mathbb{R}$  سره پوتنخ تابع بلل کیږي.

د  $n$  اکپوننت یا جگعدد د پوتنخ تابع درجه ټاکي او ضریب  $a_n$  د گراف بڼه یا فورم او هغه د بني ضریب بلل کیږي.

بیلګې:





لاندې پوښتنې ځواب کړی:

ب -  $n$  درجه او  $a_n$  مخخښه د گراف په تلنه کومه اغیزه لري؟

پ - د پوټنڅ تابع  $n$  درجه د گراف په سیومتری کومه اغیزه لري؟

ت - د پوټنڅ تابع  $n$  په واکولي او  $a_n$  مخخښې له امله کوم ارزښتست (ارزښتدېری) لري؟

ټ -  $a_n$  مطلق ارزښت د گراف په تلنه کوم ایز لري؟

خوابونه لږ وروسته راځي.

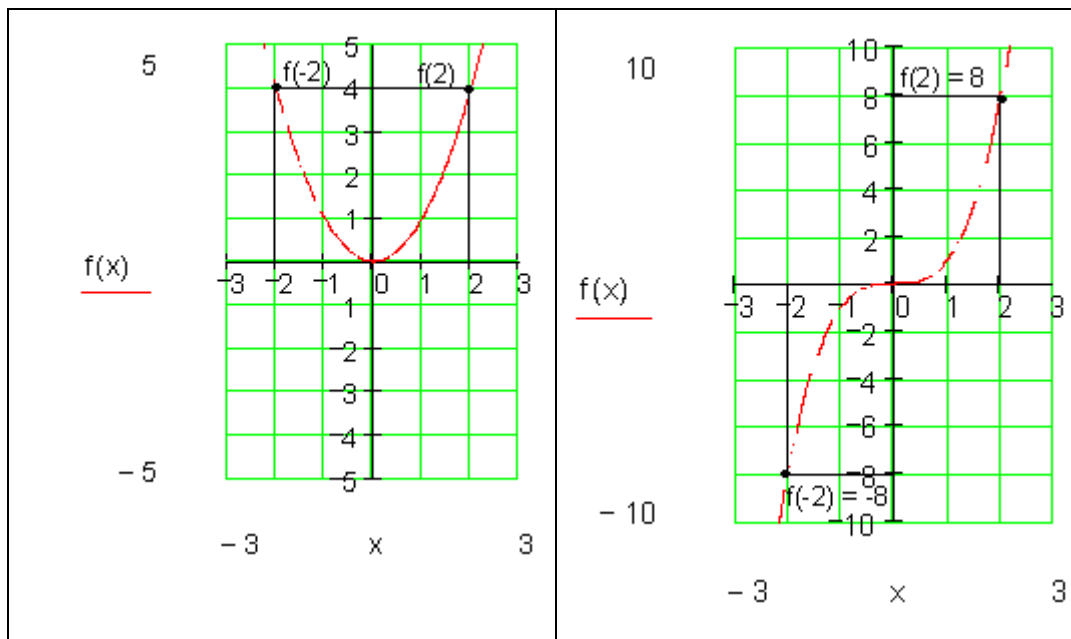
سیومتری

په سیومتری څنگه قضاوت کیدی شي، که څوک فقط د یوه توان (پوتنڅ) تابع تابع مساوات پیژني؟

د دې لپاره د لاندې توابعو گرافونه کارو:

$$f(x) = x^3 \quad \text{او} \quad f(x) = x^2$$

او تابع د  $x = -2$  او  $x = 2$  په ځایونو کې تر څیړني لاندې نیسو.



ګومان مو نږدې دی چې لاندې باور لري:

$x \in D$  د جوړه جگعدد سره د تابع ارزښتونه برابر دي. دا په دې معنا چې:

$$f(-x) = f(x) \text{ محورسیمیتریک، نو}$$

د  $x$  ناجوره (طاقو) جگعددونو لپاره د تابع ارزښت برابر مطلق قیمت لري، مګر متضادي مخنځېښي لري.

دا په دې معنا چې:

$$f(-x) = -f(x) \text{ ټکی سیومتریکی، نو}$$

دا اړیکې د ټولو تانتوابعو لپاره باور لري (بې له ښوونې).

د یوه توان - یا طاقت تابع محورسیومتریکی دی، که د ټولو  $x \in D$  لپاره باور ولري:  $f(-x) = f(x)$

د یوه توانتابع گراف ټکی سیمتریک دی، که د ټولو  $x \in D$  لپاره باور ولري  $f(-x) = -f(x)$

ټولگه:

د  $a_n > 0$  لپاره باور لري:

ټول توانتابع د جوړه جگعدد سره محور سیمتریک دي. دا له II د I څلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتابع د ناجوره(طاق) جگعدد سره ټکیسیمتریک دي. دوی له III. و I. څلورمې(ربع) ته ځغلي(خوزي).

د ټولو  $0 <$  لپاره باور لري:

ټول توانتابع د جوړه جگعدد سره محور سیمتریک دي. دا له III د IV. څلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتابع د ناجوره(طاق) جگعدد سره ټکیسیمتریک دي. دوی له II. و IV. څلورمې(ربع) ته ځغلي(خوزي).

## تمرینونه:

د توان تابع خوبونه.

د لاندې توانتوابعو درجه وټاکي، په سیمتریکي حالت، د گراف په تله او او ارزښت دېری یې یوه وینا وکړی د د هر گراف یې په پروت ولاړسیستم (کواردینات سیستم) کې رسم کړی.

$$f(x) = \frac{1}{4}x \quad \text{دویم} \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^2 \quad \text{لومړی}$$

$$f(x) = \frac{1}{5}x^3 \quad \text{څلورم} \quad f(x) = -\frac{1}{10}x^4 \quad \text{دریم}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x \quad \text{شپږم -} \quad f(x) = -\frac{1}{10}x^5 \quad \text{پنځم -}$$

$$f(x) = 2x^2 \quad \text{اتم -} \quad f(x) = -\frac{1}{10}x^3 \quad \text{اوم -}$$

$$f(x) = -\frac{2}{5}x^4 \quad \text{لسم -} \quad f(x) = \frac{1}{5}x^4 \quad \text{نهم -}$$

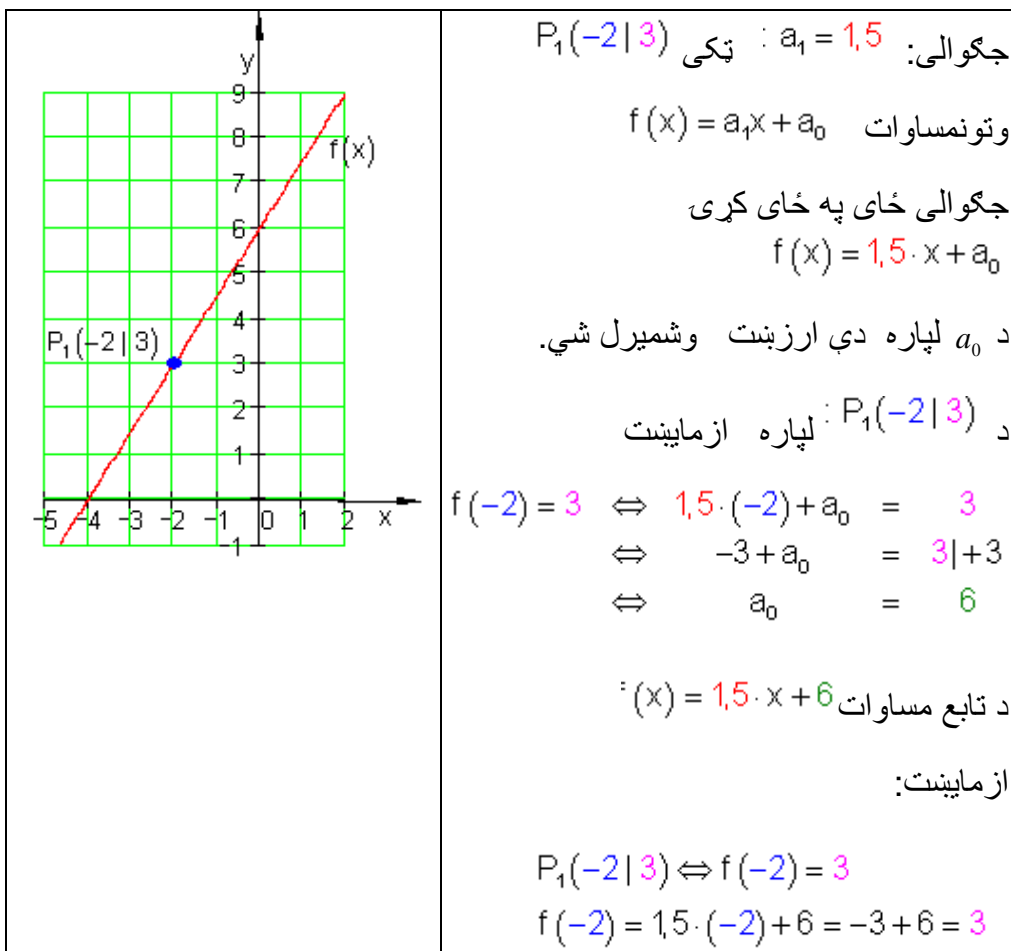
## کرنیزې توابع د ورکړشوو شرایطو سره

. لومړۍ حالت : د  $P$  ټکي څخه تیرې کرنیزې د  $a_1$  جگوالي سره

بیلگه:

یوه کرنیزه د  $a_1$  د جگوالي سره د  $P_1(x_1 | y_1)$  په ټکي کې ځغلي.

د  $f(x) = a_1x + a$  تابع مساوات دې پیدا شي.



بیلگه:

د حیواناتو ساتونکی د وښو اوتومات څخه دروځي  $7,5 \text{ kg}$  خوراک شته. دولس روځي، وروسته له هغې چې زیرمه له غذايي موادو ډکه شوي وه، هلته نور  $250 \text{ kg}$  پاتي دي.

الف - یو تابع مساوات ولیکي، چې دا حالت تشریح کړي

ب - په څومره سټ یا ډېری به دا د وښو زیرمه دولس ورځي دمخه ډکه شوي وي.

حل و الف ته - د  $x$  محور: وخت په ورځو

$y$  محور : د وینو زېرمه په کیلوگرام  $kg$  .

$$f(x) = -7,5x + a_0$$

$$P(12 | 250) \Rightarrow f(12) = 250 \Leftrightarrow -7,5 \cdot 12 + a_0 = 250$$

$$\Leftrightarrow -90 + a_0 = 250 | +90$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 340 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -7,5x + 340}}$$

حل و ب ته- د ډکیدني وخت  $x = 0$  دی.

$$\Rightarrow f(0) = -7,5 \cdot 0 + 340 = 340$$

د وینو شتون دولس 12 ورځي د مخه په  $340 kg$  ډک شوی .

لکه څنګه په لومړي حالت کې چې د یوې کرنيې جگوالی او یو ټکی معلوم دي، شمېرنه په همغه ډول د ورکړشوو داتن یا داتا **Daten** سره مخ ته ځي.

په داسې حالت کې شمېرنه توپزه سرته رسیږي. دا مو بیا یو فرمول ته لارښوده وي.

یوه کرنبه  $a_1$  د جگوالی سره د  $P_1(x_1 | y_1)$  ټکي څخه تیري.ي.

د کرنبمساواتو تولیز فرمول دی:  $f(x) = a_1x + a_0$

$$P_1(x_1 | y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow a_1 \cdot x_1 + a_0 = y_1 | -a_1 \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - a_1 \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = a_1 \cdot x + y_1 - a_1 \cdot x_1 = a_1 \cdot x - a_1 \cdot x_1 + y_1 = a_1(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$$

دا د ټکی - جگوالی فرمول هم بلل کیږي.

بیلګه:

$f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$ : کې ځا په ځای کړی په  $a_1 = -2$ ;  $P_1(-3 | 4)$

$$f(x) = -2(x - (-3)) + 4 = -2(x + 3) + 4 = -2x - 6 + 4 = \underline{\underline{-2x - 2}}$$

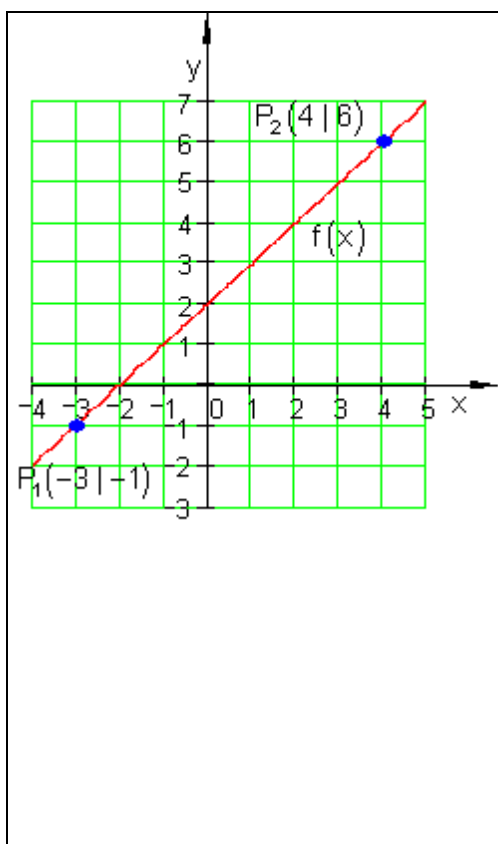


دویم حالت: کرښه له دوه ټکو تیریري

بیلگه:

دوه ټکی  $P_1(x_1 | y_1)$  او  $P_2(x_2 | y_2)$  په یوه کرښه پراته دي.

د  $f(x) = a_1x + a_0$  تابع مساوات غواړو پیداکړو.



$P_1(-3 | -1)$        $P_2(4 | 6)$

وتون مساوات:  $f(x) = a_1x + a_0$

د جگوالی ټاکنه:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - (-1)}{4 - (-3)} = \frac{6 + 1}{4 + 3} = \frac{7}{7} = 1$$

جگوالی وضعه کړی  $f(x) = 1 \cdot x + a_0$

وروسته له دي چي جگیدنه معلومه شوه، دا پوښتنه داسي حل کیري لکه په لومړي حالت کي.

د ټکو ازمايښت لپاره بي پروا ده چي د دي لپاره کوم ټکي کارول کیري، ځکه چي دواړه ټکي به په کرښه پراته وي.

د ټکو ازمايښت د  $P_2(4 | 6)$  يا  $P_1$  لپاره

$$P_2(4 | 6) \Rightarrow f(4) = 6 \Leftrightarrow 1 \cdot 4 + a_0 = 6 \mid -4 \Leftrightarrow a_0 = 2 \Rightarrow f(x) = x + 2$$

بیلگه:

د فزیک څخه پوهیږو چې د حرارت معلومولو ( گرمی کچونې) لپاره مختلفې دد حرارت سکالا کارول کیږي. د څلزیوس سکالا Celsiuskala او د فارنهایت سکالا

Fahrenheitskala

د دواړو ترمنځ کرښیزې اړیکې موجود دي.

$100^{\circ}\text{C}$  برابری دي د  $212^{\circ}\text{F}$  سره.  $0^{\circ}\text{C}$  برابر دی په  $32^{\circ}\text{F}$  سره.

د یوه تابع مساوات غواړو پیداکړو، چې د هغې په مرسته  $^{\circ}\text{C}$  په  $^{\circ}\text{F}$  اړول کیږي.

خپلواکه متحوله  $x$  په  $^{\circ}\text{C}$  او بلواکه یا تابع متحوله  $y = f(x)$  په  $^{\circ}\text{F}$ .

جگوالی:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5} \Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + a_0$$

$$P_1(0 | 32) \Rightarrow f(0) = 32 \Leftrightarrow \frac{9}{5} \cdot 0 + a_0 = 32 \Leftrightarrow a_0 = 32$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

په بدل شوی تابع  $x$  په  $^{\circ}\text{C}$  کې کیږدی نتیجه یې ده.

د بیلگې په ډول:

$$x = 20^{\circ}\text{C} : f(20) = \frac{9}{5} \cdot 20 + 32 = 68 \Rightarrow 20^{\circ}\text{C} \triangleq 68^{\circ}\text{F}$$

د دویم حالت لپاره هم کیدی شي شمیرنه په ټولیزه توګه مخ ته بوتلی شي:

دوه ټکی  $P_1(x_1 | y_1)$  او  $P_2(x_2 | y_2)$  په یوه کرښه پراته دي.

د مساواتو عمومي بڼه ده:  $f(x) = a_1x + a_0$ .

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + a_0 \quad \text{جگوالی:}$$

$$P_1(x_x | y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + a_0 = y_1$$

$$a_0 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 =$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

دا په دوه ټکو کې د کرښیزو مساواتو یو ټولیزه بڼه ده .

په زیاتو ادبیاتو کې په لاندې ډول ده:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} ; x_1 \neq x_2$$

چیرته چې  $y = f(x)$  باور لري.

د عملي کارونې لپاره لاندې بڼه مساعده ده:

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

بیلگه:

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1 \quad \text{په } P_1(2|-1); P_2(-3|2)$$

کې ځای په ځای کړی

$$f(x) = \frac{2 - (-1)}{-3 - 2}(x - 2) + (-1) = \frac{2 + 1}{-5}(x - 2) - 1 = -\frac{3}{5}(x - 2) - 1 = -\frac{3}{5}x + \frac{6}{5} - \frac{5}{5}$$

$$= -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5} \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$$

تمرین:

د  $^{\circ}\text{F}$  په  $^{\circ}\text{C}$  باندې شمیرني لپاره یو تابع مساوات ولیکي

### 2.2.3. تمرین: د تابع مساواتو شمیرنه

یو کرښیز مساوات د  $a_1$  جگوالی لري او د  $P$  له ټکي تیريږي.

د  $f(x)$  تابع مساوات معلوم کړی او د محورونو قاطع ټکي یا غوڅټکي او گراف انځور کړی

$$a_1 = \frac{3}{4} \quad P(-1|3) \quad \text{دویم} \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad P(2|-2) \quad \text{اول -}$$

$$a_1 = \frac{4}{5} \quad P\left(\frac{3}{2} \mid 4\right) \quad \text{څلورم} \quad a_1 = 2 \quad P(3|-1) \quad \text{دریم -}$$

یوه کرښه له ټکو  $P_1$  او  $P_2$  تیريږي.

د  $f(x)$  تابع مساوات پیدا کړی او د محور قاطع ټکي او گراف رسم کړی.

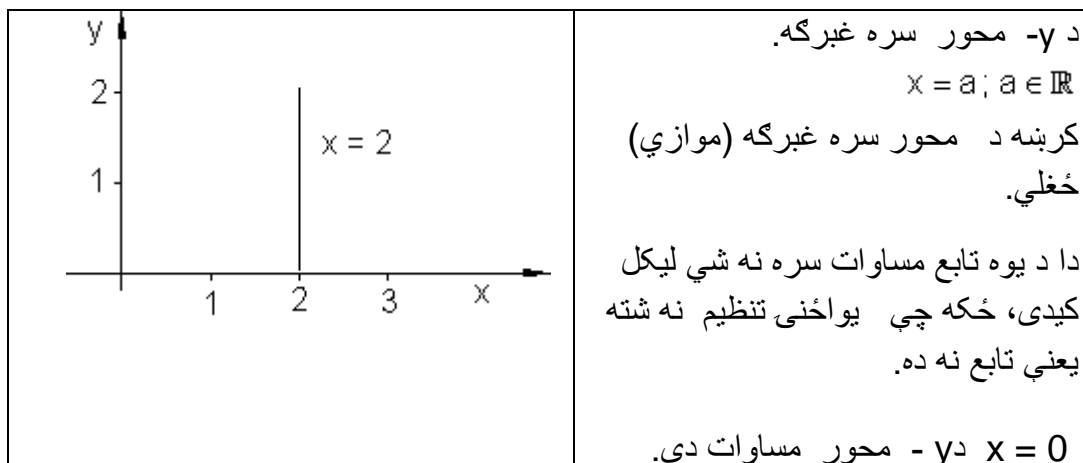
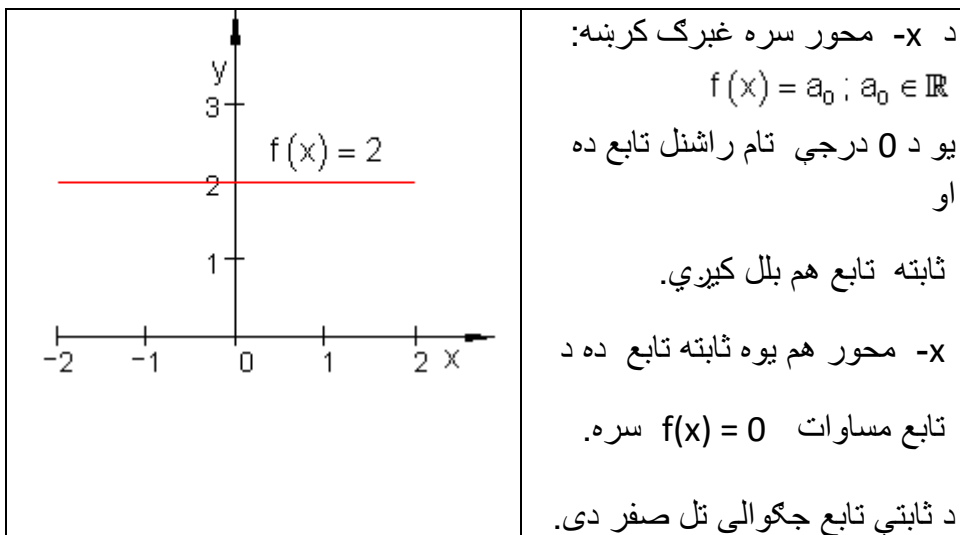
$$P_1(-3|-2) \quad P_2(2|3) \quad \text{شپږم} \quad P_1(2|1) \quad P_2(5|4) \quad \text{پنځم -}$$

$$P_1(-4|-1) \quad P_2(3|1) \quad \text{اتم} \quad P_1(-2|3) \quad P_2(4|-1) \quad \text{اوم -}$$

$P_1(-4 | -2)$      $P_2\left(\frac{7}{2} | 4\right)$      $P_1\left(-3 | \frac{9}{2}\right)$      $P_2(4 | -1)$     - نهم - لسم -



. د کرښبرابرو تو خانگړی حالت:



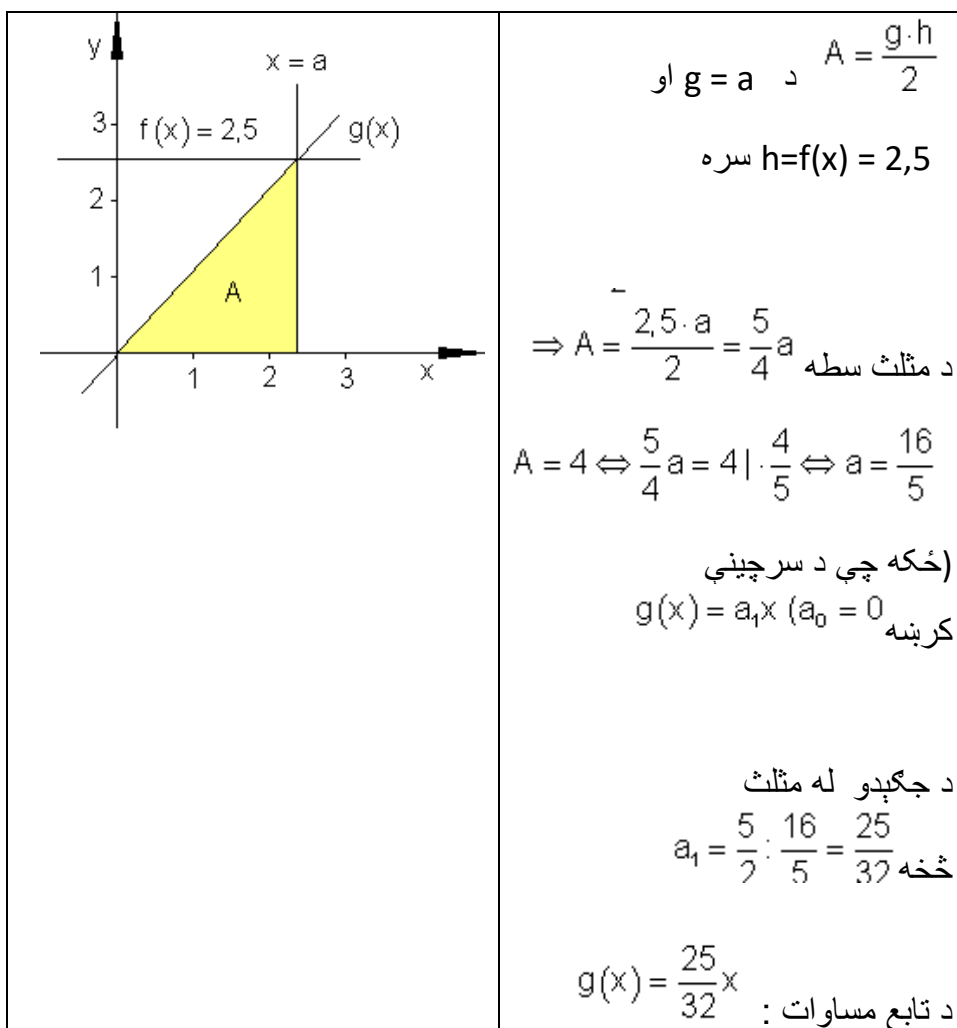
بیلگه:

یو  $f(x) = 2,5$  ور کړ شوی او  $y$ -محور سره موازي د  $a$  واټن د  $a > 0$  سره.

یوه سرچینیزه کرښه  $g$  د  $P(a | f(x))$  ټکي څخه تیریري.

دا  $x$  - محور او د  $y$ -محور سره غبرگي کرښي سره یو مثلث جوړوي.

$a$  داسي وټاکي چې وسطحه د سطحې څلور واحدونه (یوونونه FE) جوړ کړي. د دې حالت لپاره د  $g(x)$  تابع مساوات څنگه دي؟



تمرین: د  $^{\circ}\text{F}$  بدلون شمیرنه په  $^{\circ}\text{C}$  لپاره د تابع مساوات ولیکی

حل:

د  $^{\circ}\text{C}$  اړونه یا بدلون په  $^{\circ}\text{F}$  د متحولې لپاره دا معنلري:

$x$  په  $^{\circ}\text{F}$  مستقله یا خپلواکه متحوله ده او  $y = f(x)$  په  $^{\circ}\text{C}$  بلواکه یا تابع متحوله ده.

$$212^{\circ}\text{F} \triangleq 100^{\circ}\text{C} \Rightarrow P_1(212|100) \quad \text{او} \quad 32^{\circ}\text{F} \triangleq 0^{\circ}\text{C} \Rightarrow P_1(32|0)$$

دا چې د حرارت الو ترمنځ یوه کرښیزه اړیکه پرته ده، نو ټکي  $P_1$  او  $P_2$  په یوه کرښه پراته دي.

د کرښي عمومي کرښیزه بڼه په دې ډول ده:  $f(x) = a_1x + a_0$ .

دلته ضریبونه  $a_1$  او  $a_0$  د ټاکلو دي.

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100 - 0}{212 - 32} = \frac{100}{180} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{9}x + a_0 \quad \text{جگوالی:}$$

ټکي ازمايننت د  $P_1(32|0)$  سره.

$$\Rightarrow f(32) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{9} \cdot 32 + a_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{160}{9} + a_0 = 0 \quad | -\frac{160}{9} \Leftrightarrow a_0 = -\frac{160}{9}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} = \frac{5}{9}(x - 32)$$

د  $^{\circ}\text{F}$  اړوني په  $^{\circ}\text{C}$  لپاره باور لري.

$$^{\circ}\text{F in } ^{\circ}\text{C gilt: } f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$$

x په °F او y په °C .



پوښتنې:

### کرنيزې توابع

لومړۍ: د g کرښو مساوات وټاکۍ

الف:  $P_1(-4|-2)$  او  $P_2(2|0)$  په g پراته دي،

ب- g په  $P_1(-3|1)$  او  $P_2\left(1|\frac{11}{3}\right)$  کې ځغلي

پ-  $P_1(1|-2)$  او  $P_2(-2|10)$  په g پراته دي

ت- g محورونه په  $x=2$  او  $y=6$  کې څوڅوي (قطع کوي)

ټ- g له  $P(-6;1)$  تیرېږي او له h سره غبرگ دی د  $h(x) = -\frac{2}{3}x + 2$  مساوات سره

ث- g جگوالی  $a_1 = -4,5$  لري او له  $P(1;1,5)$  څخه تیرېږي.

ج- g جگوالی  $a_1 = 5$  لري او له  $P(1;1,5)$  څخه تیرېږي

چ- g د x محور په  $x=3$  کې څوڅوي او د h کرښه د  $h(x) = 4x - 2$  سره په  $x = -1$  کې څوڅوي.



دویم: د دوه کرښو  $g$  او  $h$  کرښیز مساوات پیدا کړی، چې له ټکی  $P(3;-2)$  تیرېږي.  
دریم: یوه کرښه  $g$  د کرښیز تابع  $f(x)$  سره پیدا کړی، چې له ټکو  $P_1$  او  $P_2$  تیرېږي  
او تابع مساوات وټاکي.

الف-  $P_1(-3|5); P_2(1|2,5)$  ب-  $P_1(1,5|3); P_2(3|2,5)$

پ-  $P_1(k|3); P_2(2k|-1)$  ت-  $P_1(4|0); P_2(-1|-\sqrt{2})$

ټ-  $P_1(2\sqrt{k}|\sqrt{2k}); P_2(\sqrt{k}|0)$  ټ-  $P_1(1|0); P_2(-1|k+1)$

څلورم: د  $f(x)$  کرښیز تابع مساوات وټاکي. که معلوم وي:

الف- کرښه د  $a_1 = \frac{5}{4}$  جگړدني سره له  $P(4;-1)$  څخه تیرېږي.

ب- کرښه له ټکو  $P_1(-5|-3)$  او  $P_2(0|3)$  څخه تیرېږي.

پ- کرښه له  $P(4,5;2,7)$  ټکي تیرېږي. او د  $x$  محور سره  $45^\circ$  مایله ده.

ت- کرښه له  $P(-1,5;0)$  تیرېږي او د  $h(x) = 2x+2$  سره غبرگه (موازي) ده.

پنځم: کرښه  $g$  و کارۍ او کرښیز مساوات وټاکي.

الف-  $P(3|-1) \in g$  او  $g$  د  $\gamma$  محور سره غبرگه؛ (موازي) ځغلي.

ب-  $P(3,5|2,5) \in g$  او  $g$  د  $x$  محور سره موازي ځغلي.

پ-  $g$  له  $P(-5;1)$  تیرېږي او د  $h(x) = -\frac{1}{2}x + 4$  سره موازي ده.

ت-  $g$  له  $P\left(1|\frac{3}{2}\right)$  تیرېږي او د کرښو سره چې له ټکو  $P_1(-2|-3)$  او  $P_2\left(\frac{3}{2}|-5\right)$  تیرېږي، موازي ځغلي.

## پوښتنې

## کرنیز مساوات VI


لومړۍ –

د لاندې کرنیزو توابعو گرافونه وکارۍ او د ارزښت سټ یا – ډېرۍ  $W$  و ټاکۍ

الف.  $f(x) = -2x + 2; D = \{x | -3 \leq x \leq 5\}_{\mathbb{R}}$  ب. –

$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}; D = \{x | -4 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}}$

پ.  $f(x) = \frac{3}{4}x - 3; D = \{x | -2 \leq x \leq 6\}_{\mathbb{R}}$  ت. –

  $f(x) = 3x - 6; D = \{x | -1 \leq x \leq 3\}_{\mathbb{R}}$

دویم –

ټکی  $P_1$  او  $P_2$  ورکړ شوي، چې په کرښه پراته دي. د  $f(x)$  تابع مساوات پیدا کړۍ او گراف یې وکارۍ

الف.  $P_1(3 | 4); P_2(7 | -1); D = \{x | 0 \leq x \leq 7\}_{\mathbb{R}}$

ب.  $P_1(-8 | 1); P_2(2 | -3); D = \{x | -8 \leq x \leq 2\}_{\mathbb{R}}$

پ.  $P_1(4 | 3); P_2(-7 | -1); D = \{x | -7 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}}$

ت.  $P_1(-4 | -4); P_2(4 | 2); D = \{x | -4 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}}$

دریم –

د لاندې مساواتو حلست یا حلډېری پیدا کړی. مساوات چې کسری راشنل ترمونه ولري، باید د هغو تعریفورشو هم ورکړل شي.

$$\frac{5}{9} = x - \frac{1}{3} \quad \text{ت} \quad x - \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \quad \text{پ} \quad 8 + x = 25 \quad \text{ب} \quad x - 5 = 9 \quad \text{الف}$$

$$\text{ب} \quad 88 = 4x - 16 \quad \text{ث} \quad a + bx = 3b + a \quad \text{ج} \quad 8 - (x + 5) = 2$$

$$\text{ج} \quad 9 + (5 - x) = 6 \quad \text{ح} \quad (x - 6)(x + 3) = (x - 5)(x - 2) \quad \text{خ}$$

$$\frac{x}{4} + \frac{5x}{6} + \frac{5}{6} = \frac{x}{2} + x \quad \text{خ} \quad (x + 3)(x + 7) = (x + 2)(x + 9)$$

$$\frac{x}{a-b} + \frac{x}{a+b} = a \quad \text{د} \quad \frac{ax}{b} - \frac{b}{ac} = \frac{a}{bc} - \frac{bx}{a} \quad \text{د} \quad \frac{3}{2x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{9} + \frac{7}{3x} \quad \text{خ}$$

$$\text{د} \quad 23a - \{5ax - [9ax + (12a - 6ax)] - (3a - 8ax)\} - 15a = 5ax - 7a$$

څلورم: د لاندې توابعو د محورونو سره د تقاطع ټکي هم پیدا کړی.

$$\text{الف} \quad f(x) = 2x - 7 \quad \text{ب} \quad f(x) = -2x + 6 \quad \text{پ} \quad f(x) = 3x - 3$$

$$\text{ت} \quad f(x) = 2x + \frac{2}{3} \quad \text{ب} \quad f(x) = \frac{3}{4}x + 2 \quad \text{ث} \quad f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{4}{5}$$

$$\text{ج} \quad f(x) = 3,5x + \frac{1}{2} \quad \text{چ} \quad f(x) = -2,5x + 2\frac{1}{2} \quad \text{ح} \quad f(x) = 1\frac{3}{4}x - 3\frac{2}{3}$$

پنځم: د یوې کرښې دوه ټکي  $P_1$  او  $P_2$  ورکړ شوي د لاندې توابعو له ا تر IV لپاره وټاکي:

$$P_1(3 | 4); P_2(7 | -1); D = \{x | -2 \leq x \leq 8\} \quad \mathbb{R} \text{ I.}$$

$$P_1(-8 | 1); P_2(2 | -3); D = \{x | -8 \leq x \leq 2\} \quad \mathbb{R} \text{ II.}$$

$$P_1(4 | 3); P_2(-7 | -1); D = \{x | -8 \leq x \leq 4\} \mathbb{R}.III$$

$$P_1(4 | 2); P_2(-4 | -4); D = \{x | -4 \leq x \leq 4\} \mathbb{R}.IV$$

الف - د جگیدنی ضربیب m.

ب - د کرنی تابعمساوات

پ - د y محور سره د تقاطع تکی  $P_y$

ت - د تقاطع تکی  $P_y$  د x محور سره

ث - په W باندی ارزبنتدپری W.

ث - په D کی د تابع گراف

شیرم: لاندی مساواتسیستمونه حل کری:

$$\begin{array}{lll} I & 15y - 4x = -50 & I & 4x + 5y = 32 & I & 5y - 3x = 1 \\ II & x = y + 7 & \text{الف -} & II & y = 5x - 11 & \text{ب -} & II & x = y + 1 & \text{پ -} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} I & x + y = a + b & I & 2y = 2x - 40 & I & 3x = y + 15 \\ II & x - y = a - b & \text{ث -} & II & 3x = 10 - 2y & \text{ب -} & II & 2y - 10 = 2x & \text{ت -} \end{array}$$



پوښنتی

کرنیز مساوات IX

لومړۍ کرښه  $g$  له  $P_1(4; -3, 5)$  او  $P_2(2, 5; -1)$  تیرېږي.

کرښه  $h$  له  $P_3(5 | 2, 5)$  او  $P_4\left(\frac{3}{2} | \frac{25}{3}\right)$  تیرېږي.

گرښې یو بل ته څه موقعیت لري یا څنګه پرتې دي؟

دویم:  $f(x)$  کرښیزې تابع د تابع ترم او ارزښتساحه (ارزښتورشو) و ټاکی، که صدق ولري:

$$\text{الف. } f(0) = 20; f(12) = 32; x > 0 \quad \text{ب. } f(-3) = 6; f(2) = -8; x \in [-3; 3]$$

دریم:

د  $f(x)$  کرښیزې تابع ګراف په 3 LE اوږدوالی واحد کین لور

ته خوزیري. د راکنبل شوې کرښې د  $f^*(x)$  مساوات څنګه دي؟

$$f(x) = \frac{5}{3}x - 2 \quad D = \mathbb{R}$$

څلورم: د  $f(x)$  او  $g(x)$  توابع ورګر شوي دي. د کوم ارزښت لپاره  $f(x) > g(x)$  صدق کوي؟

$$f(x) = 2x - 3 \quad ; \quad g(x) = -0,5x + 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

پنځم: یوه  $g(x)$  کرښه ورګر شوي.. دا د یوې کرښې  $h(x)$  له خوا قطع کیږي. د  $h(x)$  مساوات وټاکی، که باور ولري:  $g(x) = -3x + 2$

الف- قاطع یا غوڅی  $x$  محور سره. ب- قاطع (غوڅی) په  $x = -5$  کې

شپږم:

$h(x) = -1,5(x - 2)$	یوه د پیل کرښه د $a_1 = -0,125$ جګوالي سره و داسی کښول کیږي. چې کرښه $h$ د مساوات
----------------------	-----------------------------------------------------------------------------------

	<p>سره د <math>x</math> په محور قطع کوي.</p> <p>راکبننه تشریح کړی او د راکنبل شوي کرښې گراف و کارې.</p>
--	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------

اوم: یوه  $f(x)$  کرښیزه تابع ورکړ شوي. کرښه د  $x = u$  مساوات سره د  $f(x)$  گراف په  $P$  کې قطع کوي او د  $x$  محور په  $Q$  کې قطع کوي. یوه سکيڅي ترتیب کړی.



الف- د  $P$  او  $Q$  کواوردینات وټاکي، که  $f(x) = 0,75x + 2$  وي.

ب- د  $u$  د کوم ارزښت لپاره  $P$  د  $x$  محور پورته لور ته پرته ده.

ت-  $P(u | f(u))$  په 1 څلورۍ یا ربع کې پروت دی.  $Q, R(0 | 0)$  او  $P$  د یوه مثلث رأسونه (ککرتکي) جوړوي. د دې مثلث د مساحت  $A$  لپاره ترم وټاکي.  $u$  (محیط) داسې وټاکي، چې  $A(u) = 10$  صدق وکړي.

اتم: د  $g$  کرښې ته موازي او عمود مساوات داسې وټاکي، چې له  $P$  ټکي تیر شي.

الف-  $P(0 | 3); g: x + 2 - 3y = 0$  ب-  $P(1 | 4); g(x) = \frac{2}{3}x - 3$

پ-  $P(1 | 0); g(x) = -1,5kx$

نهم: کرښه  $g$  له ټکو  $P_1$  او  $P_2$  تیرېږي. د  $h$  کرښې ته یې ځای مطالعه کړی او د امکان په حالت کې یې د قاطع ټکي معلوم کړی.

$P_1(-1 | 1,5); P_2(-2 | -2,5)$   $h: -x - 6 - 4y = 0$

لسم: و بنایي: کرښه  $g$  او کرښه  $h$  عمود دي.

$g: y - \sqrt{2}x = 1$   $h: -2y - \sqrt{2}x + 6 = 0$

$g(x) = -3x + 2$

یولسم:

$A\left(\sqrt{3k} \mid \frac{k}{3}\right); B\left(-\sqrt{3k} \mid \frac{k}{3}\right); C(0 \mid k)$	<p>د <math>A, B</math> او <math>C</math> ټکي د یوه مثلث د رأس ټکي دي. د <math>k &gt; 0</math> د کوم ارزښت لپاره دا مثلث قائم الزاویه (ولارگودیز) دی؟ (بني رأس په <math>C</math> پروت دی)</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

پوښتي

کرنیز توابع XI

لومړۍ-

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}; f_2(x) = -4x - 2; D = \{x \mid -9 \leq x \leq 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرنه له تابع  $f_1(x)$  سره د دویمې کرنې د تابع  $f_2(x)$  سره غوڅیري. وټاکي:

الف - د کواوردیناتونو  $x_s$  او  $y_s$  سره غوڅتکی  $S$ .

ب - د دواړو کرنو غوڅتکي د  $y$  محور سره.

پ - د دواړو کرنو غوڅتکي د  $x$  محور سره.

ت - د دواړو توابعو گراف په  $D$  کې.

دویم -

$$f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 4; D = \{x \mid 0 \leq x \leq 6\}_{\mathbb{R}}$$

کربنه له تابع  $f_1(x)$  سره په ټکي  $S(3 \mid y_s)$  کې د تابع  $f_2(x)$  سره له کربني څخه غوڅیږي.

وټاکي:

الف-د  $S$  پوره کواورډینات

ب-تابع  $f_2(x)$ .

پ-د دواړو کربنو غوڅتکي د کواورډینات محورونو سره.

ت-په  $D$  کې د دواړو توابعو گراف.

دریم:

$$f_1(x) = -\frac{3}{8}x + 1; D = \{x \mid -7 \leq x \leq 3\}_{\mathbb{R}}$$

کربنه د تابع  $f_1(x)$  سره په ټکي  $S(-4 \mid y_s)$  کې کې له کربني څخه د تابع  $f_2(x)$  سره ، چې پروت محور په  $-7$  کې غوڅوي، غوڅیږي.

وټاکي:

الف – د  $S$  پوره کواورډینات.

ب – تابع  $f_2(x)$ .

پ – د دواړو کربنو غوڅتکي د کواورډینات د محورونو سره.

ت – د واپرو توابعو گراف په  $D$  کې..

څلورم –

د یوه درېکودي یا مثل ټکي  $P_1, P_2$  او  $P_3$  ورکړ شوي دي. د درېکودي د اړخونو تابع وټاکي. پخوا له دې یو پلان نقشه ترتیب کړی.



الف-

$$[P_1 P_2] \triangleq f_1; [P_2 P_3] \triangleq f_2; [P_1 P_3] \triangleq f_3$$

$$P_1 \left( -6 \mid \frac{3}{2} \right); P_2 \left( -2 \mid -\frac{3}{2} \right); P_3 (-4 \mid 3)$$

ب -

$$[P_1 P_2] \triangleq f_1; [P_2 P_3] \triangleq f_2; [P_1 P_3] \triangleq f_3$$

$$P_1 \left( 6 \mid \frac{3}{2} \right); P_2 \left( 2 \mid -\frac{3}{2} \right); P_3 (4 \mid 3)$$

پنجم -

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x + 3; P_2(-2 \mid -3); D = \{x \mid -6 \leq x \leq 0\}_{\mathbb{R}}$$

کربنه د تابع  $f_1(x)$  سره د دویمي کربني څخه د تابع  $f_2(x)$  سره ، چي له ټکي  $P_2$  تیریري ، په ټکي  $S$  کي ولاړ کونجيزه غوڅیري.

وټاکي:

الف - د  $f_2(x)$  جگوالی  $m_2$  .ب- تابع  $f_2(x)$  .پ - د دواړو کربنو غوڅتکی  $S$  .

ت - د دواړو کربنو محور غوڅتکي.

ټ - د دواړو کربنو گراف په  $D$  کي.

## کرنیز توابع XII

لومړۍ -

$$f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 3; P_2(2 | -3); D = \{x | 0 \leq x \leq 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرنیزه د تابع  $f_1(x)$  سره له یوې دویمې کرنیزې د تابع  $f_2(x)$  سره، چې له ټکي  $P_2$  تیریري په ټکي  $S$  کې ولارکونجیزه غوڅیري.

وټاکي.

لومړۍ:

الف - د  $f_2(x)$  جگوالی  $m_2$ .ب - تابع  $f_2(x)$ .پ - د دواړو کرنیزو غوڅتکي  $S$ .

ت - د دواړو کرنیزو د محور غوڅتکي.

ټ - د دواړو کرنیزو گراف په  $D$  کې.

دویم -

د کرنیزې تابع  $f_2(x)$  وټاکي، چې پروت محور په  $P_{x_2}$  کې غوڅوي او له کرنیزې څخه د تابع  $f_1(x)$  سره په  $S$  کې غوڅیري. د واړو کرنیزو غوڅتکي وشمیرئ او د دواړو کرنیزو گراف په  $D$  کې رسم کړئ.

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x - 3; P_{x_2}(4 | 0) \quad f_1(x) = \frac{3}{2}x + 6; P_{x_2}(-6 | 0)$$

$$S(3 | y_s); D = \{x | -1 \leq x \leq 6\}_{\mathbb{R}} \quad S\left(x_s \mid \frac{3}{2}\right); D = \{x | -6 \leq x \leq 1\}_{\mathbb{R}}$$

الف -  
دریم -

$$P_1(-5 | 5); P_2(-1 | -1); S(x_s | 2); D = \{x | -6 \leq x \leq 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرنیزه د تابع  $f_1(x)$  سره له ټکو  $P_1$  او  $P_2$  تیریري او په ټکي  $S$  کې ولارکونجیز له کرنیزې څخه د تابع  $f_2(x)$  سره غوڅیري.

سرلیک

وتاکۍ:

الف- د  $f_1(x)$  جگوالی  $m_1$  .ب - تابع  $f_1(x)$  .پ - د  $S$  پوره کواوردینات.ت - د  $f_2(x)$  جگوالی  $m_2$  .ټ - تابع  $f_2(x)$  .ث - د  $f_1(x)$  او  $f_2(x)$  گرافونه  
څلورم -

$$P_1(5|5); P_2(1|-1); S(3|y_s); D = \{x | 0 \leq x \leq 6\}_{\mathbb{R}}$$

کربنه د تابع  $f_1(x)$  سره له ټکو  $P_1$  او  $P_2$  څخه تیر پیری او په ټکي  $S$  کې ولاړ کونجیزه  
له کربني د تابع  $f_2(x)$  سره غوڅیری.

وتاکۍ:

الف - د  $f_1(x)$  جگوالی  $m_1$  . ب - تابع  $f_1(x)$  .پ - د  $S$  پوره کواوردیناتونه . ت - د  $f_2(x)$  جگوالی  $m_2$  .ټ - تابع  $f_2(x)$  . د  $f_1(x)$  او  $f_2(x)$  گرافونه.

پنځم -

$$f_2(x) = 3x - 3; S\left(\frac{3}{2} \middle| \frac{3}{2}\right); D = \{x | 0 \leq x \leq 6\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع  $f_1(x)$  گراف په ټکي  $S$  کې د تابع  $f_2(x)$  له گراف څخه ولاړ کونجیزه  
غوڅیری.

وتاکۍ:

الف - تابع  $f_1(x)$  .

ب - د دواړو کرښو د محورونو غوڅتکي.

پ - د دواړو توابعو گراف په  $D$  کې.



پوښتنې

### کرښيزې توابع برخه XIII

لومړۍ -

$$f_2(x) = \frac{4}{5}x + \frac{9}{10}; S\left(2 \mid \frac{5}{2}\right); D = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع  $f_1(x)$  گراف په ټکي  $S$  کې د تابع  $f_2(x)$  له گراف څخه ولاړکونجيز (قايم الزاويه) غوڅيږي.

وتاکي:

الف: تابع  $f_1(x)$ .

ب - د دواړو کرښو د محورونو غوڅتکي.

پ - د دواړو توابعو گرافونه په  $D$  کې.

$$g: y - \sqrt{2}x = 1 \Rightarrow g(x) = \sqrt{2}x + 1$$

$$h: -2y - \sqrt{2}x + 6 = 0 \Rightarrow h(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}x + 3$$

$$a_{1g} = -\frac{1}{a_{1h}} \quad \text{د اور توگوناليتي شرايط:}$$

$$a_{1g} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ q.e.d}$$

دویم:

د دوه کرښو توابع  $f_1(x)$  او  $f_2(x)$  ورکړشوي او د یوې دریمې کرښې جگوالی  $m_3$  د تابع  $f_3(x)$  سره. تابع  $f_3(x)$  داسې وټاکئ، چې گراف یې د نورو دواړو کرښو غوڅټکي څخه تیر شي. د دریاوو کرښو محور غوڅټکي وټاکئ او د دریاوو توابعو گراف په  $D$  کې رسم کړئ.

الف-

$$f_1(x) = -4x - 2; m_3 = \frac{1}{4}$$

$$f_2(x) = 2x + 4; D = \{x \mid -9 \leq x \leq 0\}_{\mathbb{R}}$$

ب -

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}; m_3 = -4$$

$$f_2(x) = 2x + 4; D = \{x \mid -9 \leq x \leq 0\}_{\mathbb{R}}$$

دریم: کرښه دتابع  $f_1(x)$  سره له ټکي  $P_1$  تیري او له یوې دویمې کرښې چې له ټکي  $P_2$  تیري په ټکي  $S$  کې غوڅيري. توابع  $f_1(x)$  او  $f_2(x)$  وټاکئ د هغو محور غوڅټکي او په  $D$  کې یې گراف وکارئ.

$$P_1\left(-2 \mid \frac{3}{2}\right); P_2(3 \mid 5); S\left(2 \mid \frac{5}{2}\right); D = \{x \mid -8 \leq x \leq 3\}_{\mathbb{R}}$$

څلورم:

$$P_1\left(-1 \mid \frac{5}{2}\right); P_2\left(-3 \mid \frac{11}{2}\right); D = \{x \mid -9 \leq x \leq 3\}_{\mathbb{R}}$$

کربنه د تابع  $f_1(x)$  سره محور په 8- کې غوڅوي.  $f_1(x)$  ته غیرگه یوه دویمه کربنه د تابع  $f_2(x)$  سره پروت محور په 4- کې غوڅوي. دواړه کربني له یوې دریمې کربني چې تابع  $f_3(x)$  لري او له ټکو  $P_1$  او  $P_2$  تیریری په ټکو  $P_3$  او  $P_4$  کې ولاړکونجیزه (قایوم الزاویه) غوڅوي. وټاکئ:

الف- تابع  $f_3(x)$  ب - تابع  $f_1(x)$

پ - تابع  $f_2(x)$  ت - د دريوارو توابعو گراف په D کې.

پنځم:

$$A\left(-\frac{13}{2} \mid -\frac{3}{2}\right); B(3 \mid 2); D = \{x \mid -8 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}}$$

د یوه قایوم الزاویه مثلث (ولاړکونجیز درې گوډي) څخه، چې ولاړ کونج (قایوم الزاویه) یې په C کې پرته ده، ټکي A او B ورکړ شوي. د مثلث اړخ یا ضلع [BC] د تابع  $f_3(x)$  سره د اوردینات یا ولاړ محور په 3 کې غوڅوي.

وټاکئ:

الف- د اړخ [AB] تابع  $f_1(x)$  ب- د اړخ یا ضلعي [BC] تابع  $f_3(x)$

پ- د اړخ [AC] تابع  $f_2(x)$  ت- د ټکي C کو اوردیناتونه

ت په D کې گرافونه.



پوښتنې

کربنيزې توابع XIV

لومړۍ:  $A(-8|-6); C(-1|5); D = \{x | -8 \leq x \leq 2\}_{\mathbb{R}}$

له یوه قایم‌الزاویه مثلث، چې قایمه زاویه یې په B پرته ده، ټکی A او C ورکړ شوي دي. د مثلث ضلع (اړخ) [BC] د اوږدینات محور (ولامحور) په 3 کې قطع کوي.

دا وټاکئ:

الف-

$[AB] = f_1; [BC] = f_2; [AC] = f_3$  د مثلث درې د ضلعو توابع.

ب- د B ټکي کواورډینات یا وضعیه قیمت کې د ټکي B محورونه

پ- په D کې گراف.

دویم:

$A(-4|-1); B(2|-4); D = \{x | -4 \leq x \leq 5\}_{\mathbb{R}}$

د یوه مثلث ټکي A او B ورکړ شوي دي. د مثلث [BC] ضلع د y محور په 12- کې قطع کوي؛ ضلع [AC] د x محور په 3- کې غوڅوي.

دا وټاکئ:

الف-تابع  $f_1(x)$  ضلع [AB]. قطع کوي

ب- تابع  $f_2(x)$  ضلع [BC] غوڅوي.

پ- تابع  $f_3(x)$  ضلع [AC]

ت- د C ټکي وضعیه قیمتونه

ټ- د D ټکي وضعیه قیمتونه

دریم: توابع  $y = f(x) = 3x - 4$  او  $g(x) = ax + 3$  ورکړ شوي.

د دواړو توابعو گرافونه په ټکي  $(5 | 3)$  کې غوڅوي.

د  $h(x)$  تابع مساوات داسې وکارئ، چې گراف په ټکي  $S$  عمود څغلي. په یوه وضیه قیمتسیستم کې دریاوړه گرافونه رسم کړئ.

څلورم:

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}; f_2(x) = -4x - 2; D = \{x | -10 \leq x \leq 1\}_{\mathbb{R}}$$

د  $f_1(x)$  تابع سره کرښه د دویمي کرښي د  $f_2(x)$  تابع سره قطع کوي.

دا وټاکئ:

الف- د  $S$  قاطع ټکي د  $x_s$  او  $y_s$  کواورديناټ سره.

ب - د دواړو کرښو د قاطع ټکي د  $x$  محور سره.

پ - د دواړو کرښو قاطع ټکي د  $x$  محور سره.

ت - د دواړو توابعو گراف په  $D$  کې.

پنځم:

د  $g(x)$  تابع ، چې په  $f(x)$  عمود ده پیدا کړئ. د  $g(x)$  گراف د  $y$  محور په  $(0 | 3)$  کې رسم کړئ. دواړه کرښي په یوه وضعیه قیمت سیستم (پروت ولاړ سیستم) کې رسم کړئ.

الف -  $f(x) = -2x + 2$  ب -  $f(x) = 3x - 6$

پ -  $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$  ت -  $f(x) = \frac{3}{4}x - 3$

شپږم: د دواړو کرښو غوڅتکی (نقاط تقاطع) وټاکئ او گراف یې وکارئ.



$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}; f_2(x) = -4x - 2; D = \{x \mid -10 \leq x \leq 1\}_{\mathbb{R}} \quad \text{الف -}$$

$$f_1(x) = -2x + 2; f_2(x) = 3x - 6; D = \{x \mid -2 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}} \quad \text{ب -}$$

$$f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 4; f_2(x) = \frac{3}{2}x - 2\frac{1}{2}; D = \{x \mid -1 \leq x \leq 7\}_{\mathbb{R}} \quad \text{پ -}$$

$$f_1(x) = -\frac{3}{8}x + 1; f_2(x) = \frac{5}{6}x + 5\frac{5}{6}; D = \{x \mid -8 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}} \quad \text{ت -}$$

## **n** -مه درجه ټول مات- يا راشنل توابع

**n** -مه درجه ټول راشن لښکون

يو تابع  $f(x)$

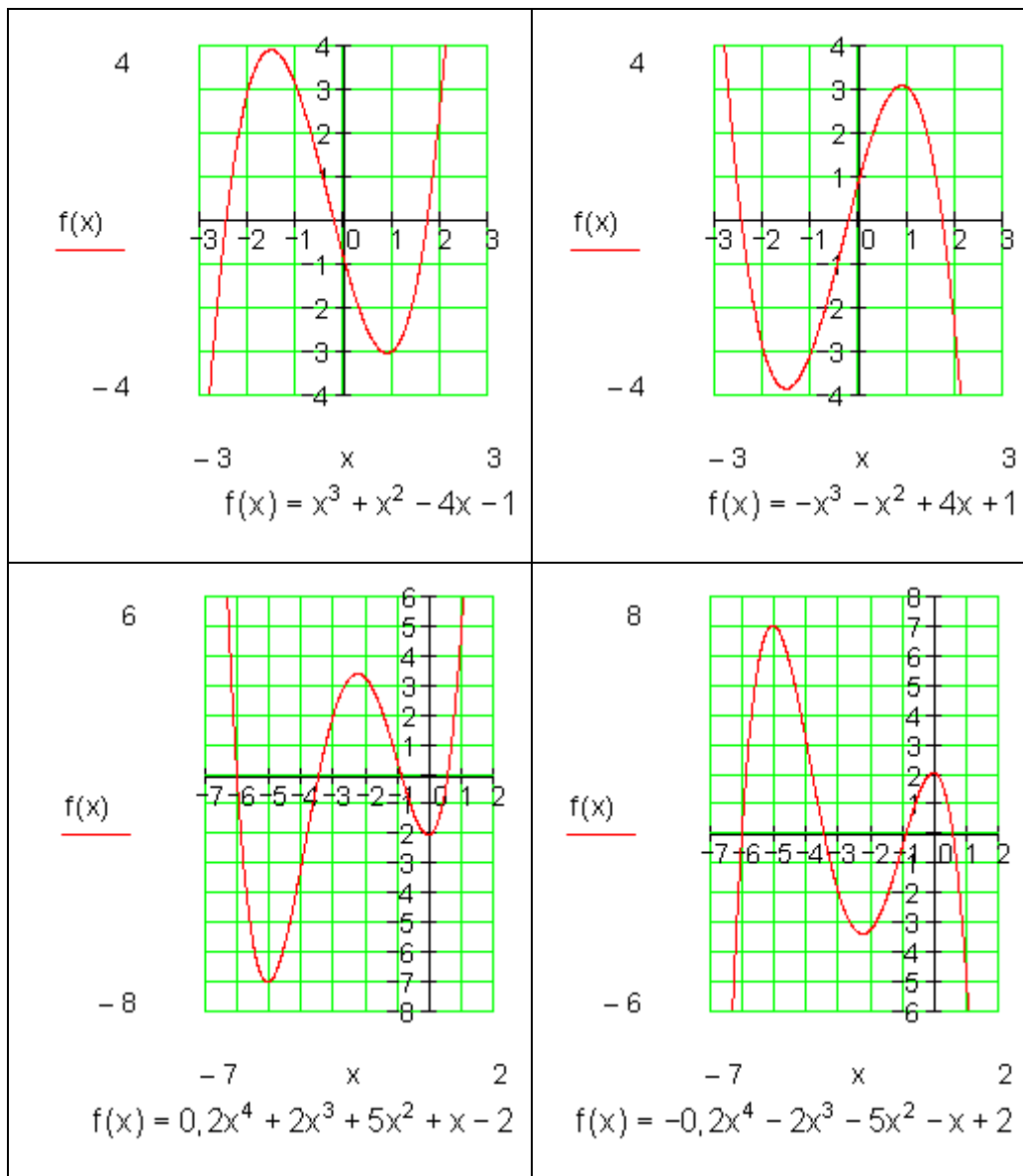
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

سره **n** -مه درجه ټول راشنل تابع بلل کيږي.

عدونه  $a_n; a_{n-1}; a_{n-2}; \dots; a_2; a_1; a_0$  ضريبونه بلل کيږي.

ټول راشنل يا هوبنيار توابع د توان توابعو يوځای ايښوولو له لارې لاس ته راځي.

بيلگي:



د گراف تلنه

جمله:

د ټول راشنل تابع گراف تلنه د خورا جگ توان زیاته وونی (د جمعی غړي) سره ټاکل کیری.

n ناچوره (طاق)	n جوړه	
تله له I و III ته.	تله له II و I ته.	$a_n > 0$
تله له II و IV ته.	تله له III و IV ته.	$a_n < 0$

بیلگه: د المای پښتو: ناچوره (طاق) جوړه (جفت) ناچوره

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 7 \quad n = 3 \text{ (ungerade)} \wedge a_n = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{III-I}}}$$

$$f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 7 \quad n = 4 \text{ (gerade)} \wedge a_n = -2 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{III-IV}}}$$

$$f(x) = -5x^5 + 2x^4 + 9 \quad n = 5 \text{ (ungerade)} \wedge a_n = -5 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{II-IV}}}$$



### سیومتری

گومان مو نږدې دی، هغه توابع، چې فقط د جوړه جگعدونو توانونو څخه یوځای شوي وي، محور سیومتریکی دي او توابع چې فقط د ناچوره (طاقو) جگعدونو توانونو څخه یوځای شوي وي، ټکی سیومتریکی دي.

### جمله

د یوه ټولراشنل تابع گراف ټیم هلته محور سیومتریکی دی، که تابع مساوات فقط جوړه جگعدونه ولري.

د یوه ټولراشنل تابع گراف ټیک هلته ټکیسیومتریکی دی، که تابع مساوات فقط ناچوره (طاق) جگعدونه ولري.

بیلگه:

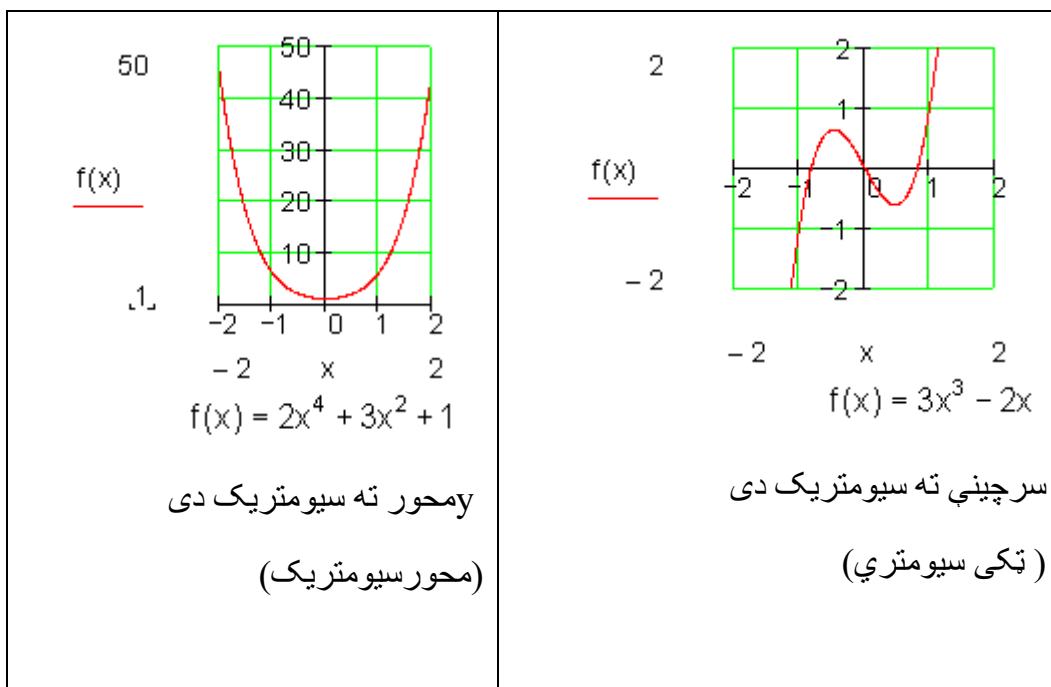
$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$$

$$f(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^2 + 1 = 2x^4 + 3x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow$$

$$f(x) = 3x^3 - 2x$$

$$f(-x) = 3(-x)^3 - 2(-x) = -3x^3 + 2x = -(3x^3 - 2x) = -f(x) \Rightarrow$$

ټکی سیومتريک



### تمرینونه:

د ټول هوښیارو تابعو خوږونه.

د لاندې تابعو په سیمټري، تلنه او د صفر ځایونو تعداد یا گڼون باندې ویناوې وکړئ.

لومړی -  $f(x) = 2x^2 - 1$  دویم -  $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

$$f(x) = -x^5 - x^3 + x \quad \text{څلورم -} \quad f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 + 2 \quad \text{ریم -}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^5 + x^2 - 2x \quad \text{شپږم -} \quad f(x) = x^6 - x^4 + 1 \quad \text{پنځم -}$$

$$f(x) = \frac{1}{100}x^{10} - \frac{1}{50}x^6 + \frac{1}{10}x^2 \quad \text{اتم -} \quad f(x) = \frac{1}{10}x^7 + \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x \quad \text{اوم -}$$

$$f(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{1}{2}x \quad \text{لسم -} \quad f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{5}x - 1 \quad \text{نهم -}$$

په یوه خوښه ټکي ته سیومتریکی

که د یوه ټکي سیومستري تابع گراف په خوښه راکښل شي، نو سیومتری سرچیني ته ځي، چې مور یې ټکی سیومتری بولو له منځه ځي. نسبت و موخېټکی ته دا ساتلي پاتي کيږي.

بیلگه:

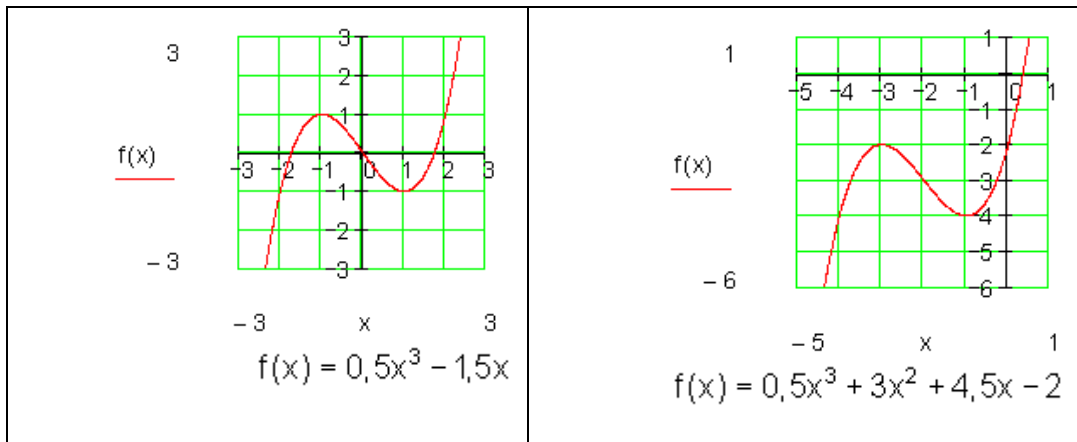
د  $f(x) = 0,5x^3 - 1,5x$  تابع گراف ټکی سیومتریکی دی، یعنی سرچیني ته سیومتریکی.

دا گراف دې په ۲ واحدونو یا یوونونو کین لور ته او په ۳ یوونونو یا واحدونو کښته لور ته راکښل شي.

د راکښلشوي گراف تابع مساوات دي:

$$g(x) = 0,5(x+2)^3 - 1,5(x+2) - 3 = 0,5x^3 + 3x^2 + 4,5x - 2$$

$g(x)$  و ټکی  $P_0(-2|-3)$  ته سیومتریکی دی.



کوار دینانسیستم د گراف په بڼه کوم رول نه لوبوي. تنها تابع مساواتو تغیر خورلی.

د حالت بیلگه: باید وازمایل شي، چي ایا د دریمي درجي د یوه ټول هوښیار تابع گراف یوه ټاکلي ټکی ته ټکی سیومتریکی دی.

ترمخ راوړنه.

چمتوالی:

د ټکو کوار دینات لپاره باور لري:

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y$$

$$x_1' = x_0' - \Delta x$$

$$y_1' = y_0' - \Delta y$$

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

$$\Delta y = y_1 - y_0$$

د هنداره-یا منعکس شوي ټکو کوار دیناتونه:

$$x_1' = x_0 - (x_1 - x_0) = \underline{\underline{2x_0 - x_1}}$$

$$y_1' = y_0 - (y_1 - y_0) = \underline{\underline{2y_0 - y_1}}$$

<p>د دې قاعدې يا لار سره تل          کېدی شي په <math>P_0</math> و <math>P_1</math> ته يوه          هندارونه يا انعکاسونه کې اړونده          هندارونه <math>P_1'</math> و ټاکل شي.</p>	
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

بیلگه:

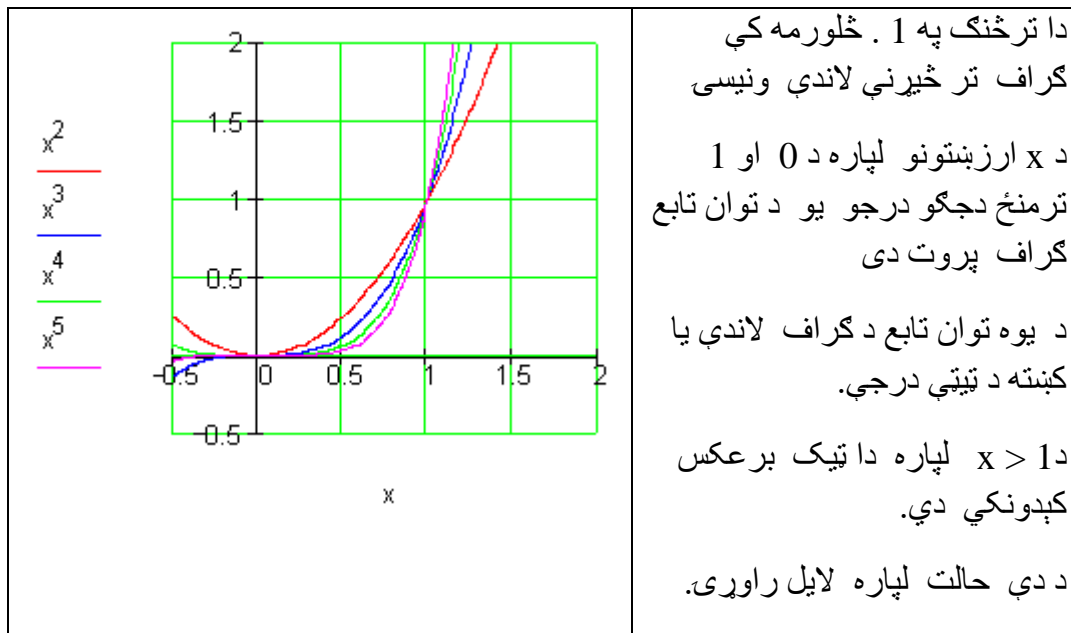
که هندارونه په گراف نه وي پرته ، نو گراف و  $P_0$  ته ټکی سیومتریک نه دی.

پوښتنې

ټول مات- یا راشنل توابع I

د توانتوابعو خوږونه

لومړی -



دویم - د دریمې درجې توان تابع کراف دې په دوه واحده کینې لور ته او تړلی په درې واحده پورته لور ته و کینل شي.

د دې راکینل شوي تابع مساوات لپاره دې د تابع مساوات ورکړ شي.

دریم -

د څلورمې درجې توان تابع کراف دې په درې واحده بنی لور ته او پسې تړلی دې په دوه ضریبه و غزول شي.

الف - د راکشل شوي کراف لپاره تابع مساوات ورکړی

ب - وینایې، چې کراف نه محور - او نه ټکی سیومتریکی دی.

څلورم -

په کوم توان تابع  $f(x) = x^n$  کې ټکی په کراف اړه لري؟

د دې توان توابعو مساوات ورکړی.

الف -  $P(-3 | -27)$  ب -  $P(-2 | 16)$  پ -  $P(0,5 | 0,25)$  ت -

$$P\left(\frac{1}{3} \mid \frac{1}{27}\right)$$

ب -  $P(0,1 | 0,0001)$  ث -  $P(-1 | 1)$  ج -  $P(-2 | 8)$  چ -  $P\left(\frac{3}{4} \mid \frac{81}{256}\right)$

پنځم -

د لاندې توان توابعو سیومتری او د کراف تلنه وټاکي او د هر یوه ارزښتدېری (ارزښتست) او درجه ورکړي.

الف -  $f(x) = 4x^3$  ب -  $f(x) = -160x^2$  پ -  $f(x) = -1500x$

ت -  $f(x) = \sqrt{2} \cdot x^6$  ث -  $f(x) = 5$  ج -  $f(x) = -25x^5$



شپږم -

لاندې تابع مساوات د پولینوم په بڼه انځور کړی.

هر ځل یې درجه ورکړی.

$$\text{الف - } f(x) = (x-2)^2 - 4x^3 \quad \text{ب - } f(x) = 4(x+5)^3 + (x-2)(x+2)$$

$$\text{پ - } f(x) = 2x^3 - (x-1)^2 \quad \text{ت - } f(x) = (x-4)(x+1)^2$$

$$\text{ټ - } f(x) = (x^2 - 4)(x^3 - x^2 + 4) \quad \text{ث - } f(x) = \frac{x-5}{8}(x-2) + \frac{3}{4}x^2$$

اوم -

دلیل راری:

د یوه ناجوره (طاق) درجې ټولراشنل تابع گراف د  $x$  محور لږ تر لږه په یوه ځل غوڅوي.

دا هلته هم باور لري که درجه حوره یا جفتوي؟

پوښتنې

## II ټول راشنل توابع

سیومتری او تلنه

لومړی - و څېړی، چې ایا  $f(x)$  یو ټولراشنل تابع دی. په ورکړشوي حالت کې د تابع گراف، درجه او د ضریبونو  $a_0; a_1; a_2; \dots; a_n$  ارزښتونه ورکړی.

$$\text{الف - } f(x) = 2 \text{ - ب - } f(x) = 4x \text{ - پ - } f(x) = 2^x \text{ - ت - } f(x) = \frac{x^3 - 4x}{8}$$

$$\text{ب - } f(x) = \sqrt{3}x^4 \text{ - ث - } f(x) = \frac{1}{x} \text{ - ج - } f(x) = \sqrt{x} \text{ - چ - } f(x) = (x - \sqrt{3})^2$$

$$\text{ح - } f(x) = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \text{ - خ - } f(x) = 16x^3 - 2x^2 + 5x^2 - 4$$

دویم - د لاندې ټولراشنل توابعو څخه کوم یې محور سیومتريک او کوم یې ټکی سیومتريک دي؟

$$\text{الف - } f(x) = x^4 - 6x^2 + 5 \text{ - ب - } f(x) = x^3 + 3x + 1 \text{ - پ - } f(x) = (x - 2)(x + 2)$$

$$\text{ت - } f(x) = x^6 - 6x^2 + \sqrt{3} \text{ - ث - } f(x) = (x - 2)^3(x - 1) \text{ - ج - } f(x) = x^4 - \sqrt{5}x^2$$

$$\text{د - } f(x) = (2x^4 + 2x^2 + 5)x \text{ - چ - } f(x) = (x^2 - 2x + 3)(x + 1)(x - 1)$$

$$\text{ح - } f(x) = 1 - 3x^2 + x^6$$

دریم - د متحوله داسی وټاکي، چي د تابع گراف ټکی سیومتريک او همداسي محور سیومتريک شي.

$$\text{الف - } f(x) = x^3 + 4x + c \text{ - ب - } f(x) = (x - c)(x + 4) \text{ - پ - } f(x) = x^5 + x^c$$

$$\text{ت - } f(x) = x^3(x^2 - cx) \text{ - ث - } f(x) = c + x^3 \text{ - ج - } f(x) = 4x^3 + x^2 + cx^2 + 5x$$

څلورم : د لاندې توابعو د گراف تلنه معلومه کړی.

$$\text{الف - } f(x) = 2x^5 - 6x^3 \text{ - ب - } f(x) = -4x^4 + 3$$

$$\text{پ - } f(x) = 2x - 5 \text{ - ت - } f(x) = -2x^2$$

$$\text{ټ}_ټ. f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 4x - 5 \quad \text{ټ}_ټ. f(x) = -6x + 3$$

$$\text{ج}_ټ. f(x) = 4x^4 + 3x^3 - 6x^5 \quad \text{چ}_ټ. f(x) = -2x^5 + 6x^3$$

پنځم - د لاندې توابعو د گراف تلنه او سیومتری ورکړی.

$$\text{الف}_ټ. f(x) = \sqrt{3}x^2 - \sqrt{5}x^4 - 2 \quad \text{ب}_ټ. f(x) = x \left( x + \frac{1}{2} \right) \left( 8 - \frac{1}{2}x \right)$$

$$\text{پ}_ټ. f(x) = 5x^6 - 4x^4 + 5 \quad \text{ت}_ټ. f(x) = x^5 + x^3 - 2x$$

$$\text{ټ}_ټ. f(x) = 5 \quad \text{ټ}_ټ. f(x) = (x^2 - 25)(x^2 + 6x + 9)$$

$$\text{ج}_ټ. f(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3 \quad \text{چ}_ټ. f(x) = (4x^2 - 4)(x^3 + 8x^2 + 16x)(x^3 + 27)$$

$$\text{ح}_ټ. f(x) = -3 \quad \text{خ}_ټ. f(x) = -x^5 + x^3 - 2$$

شپږم : د لاندې تابعو صفرخپونه وشمېری:

$$\text{الف}_ټ. f(x) = (x-4)(x-2)(x+1) \quad \text{ب}_ټ. f(x) = (x-4)(-x+2)$$

$$\text{پ}_ټ. f(x) = x(x+5)^2 \quad \text{ت}_ټ. f(x) = 3(x-4)^3(x+2)$$

$$\text{ټ}_ټ. f(x) = (2x-4)(x+3)x^3 \quad \text{ټ}_ټ. f(x) = x^3 - 2x^2$$



د ټولراشنل توابعو محور غوڅتکي (د محور د تقاطع نقطی)

د ټولراشنل توابعو محور غوڅتکي (د محور د تقاطع نقطی)

د  $y$  محور سره غوڅتکی  $P_y(0|y_s)$  :  $P_y(0|y_s)$  شرط:  $y_s = f(0)$

بیلگه: د یا په معنا

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 3 \Rightarrow f(0) = 3 \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 - 3 = 0 - 0 - 3 = -3$$
$$\Rightarrow P_y(0|-3) \text{ oder } P_y(0|f(0))$$

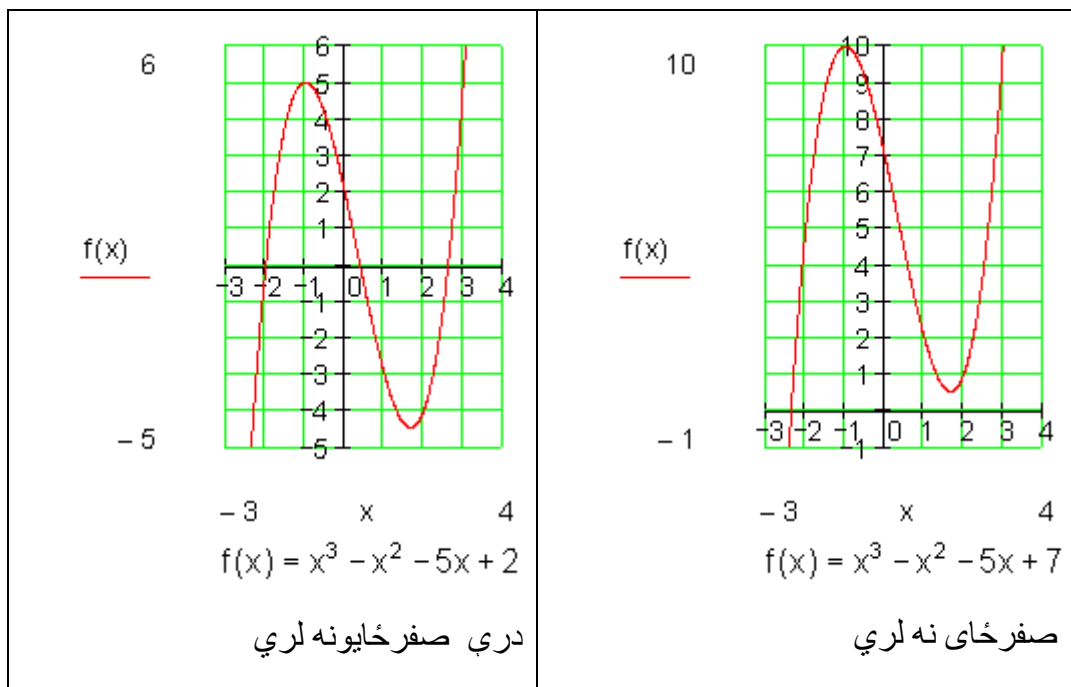
د  $P_y$  د  $y$  کواوردینات تل د ضربونو  $a_0$  سره کټمټ ده.

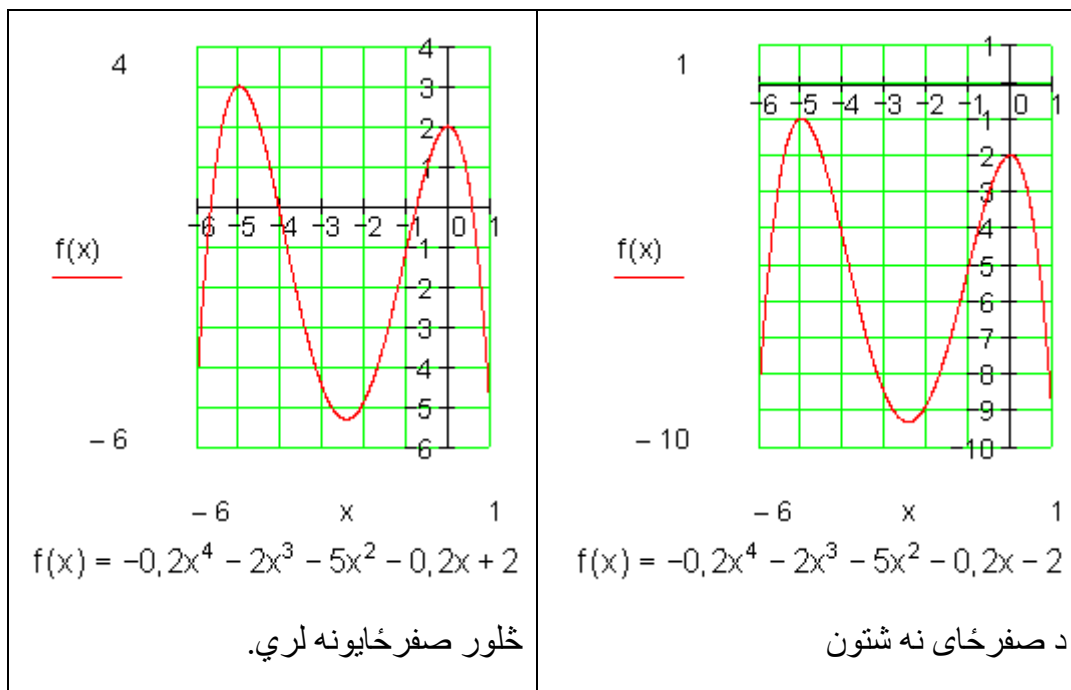
دا تل د تابع مساوات څخه لوستل کیدی شي.

د  $x$ -محور سره غوڅتکی  $P_y(x_s|0)$  صفرځای: شرط:  $f(x) = 0$

د مربع تابع ( د دویمې درجې ټولراشنتتابع) څخه بوهیرو، چې دا دوه، یو، یا هیڅ صفرځایونه لرودی شي. دا د جگ درجو ټول راشنتتابع سره څنگه دی؟

بیلگه:





جمله:

يو د  $n$  -مې درجې ټولراشمنل تابع زيات له زياته  $n$  صفرځايونه لري.

که  $n$  جوړه وي، نو دا لږترلږه يو صفرځای لري.

د صفرځايونو شميرني لار (تگلار)

د فکتوري کونو يا صربيونو تگلار:

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x = 0$$

فاکتور  $x$  له نوکانو راوتلی شي.

$$\Leftrightarrow x(2x^2 - 2x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

او په نوکانو کې افاده يا ويينه صفر دی.

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

مربع مساوات دی.

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \mid : 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$p = -1; q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

صفر خایونه :

$$x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = -1$$

د x محور سره غوڅتکی

$$P_{x_1}(0|0); P_{x_2}(2|0); P_{x_3}(-1|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{2x(x+1)(x-2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x$$

(پورته) د کرښیز ضریبونو ضرب

د بدلون قانون substitution:

یادونه: په دې معنا چې د یوې اوښتونې یا متحولې لپاره بله متحوله خا په خای کور.

$$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \quad \text{بی مربعیز (بی څلوریز) مساوات}$$

بدلون:  $x^2=z$ 

$$\Rightarrow f(z) = z^2 - 13z + 36 = 0 \quad p = -13 \quad q = 36$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36 = \frac{169}{4} - \frac{144}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} z_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9 \\ z_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4 \end{array} \right.$$

بدلون په څټ- یا بیرته گرځوو:

$$x^2 = z_1 = 9 \quad | \quad \sqrt{\quad}$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{9}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -3$$

$$x^2 = z_2 = 4 \quad | \quad \sqrt{\quad}$$

$$|x| = \sqrt{4}$$

$$x_3 = 2 \quad x_4 = -2$$

د  $x$  محور سره غوڅتکی

$$P_{x1}(3|0); P_{x2}(-3|0); P_{x3}(2|0); P_{x4}(-2|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

د کرښیز ضریبونو ضرب

پوښتنې

محور غوڅتکي او د ټولراشنل یا ماتتوابعو گرافونه II

لومړی: د درېمې درجې یو ټولھوبنډیار یا -راشنل تابع سرچینې سره سیومتريک ده، که الف- له ټکو  $P_1(1|2)$  او  $P_2(3|-2)$  څخه تیره شي.

ب- که کرښه  $g(x)=3x$  سره پارابول په  $P(0|0)$  کې لمس کړي.

دویم: تابع  $f(x)$  د پیژندورشو یا تعریف ساحې  $D = \mathbb{R}$  سره ورکړ شوي ده. تابع  $f(x)$  په سیومتري وڅیړی، صفر ځایونه وشمیری او گراف وکاري.

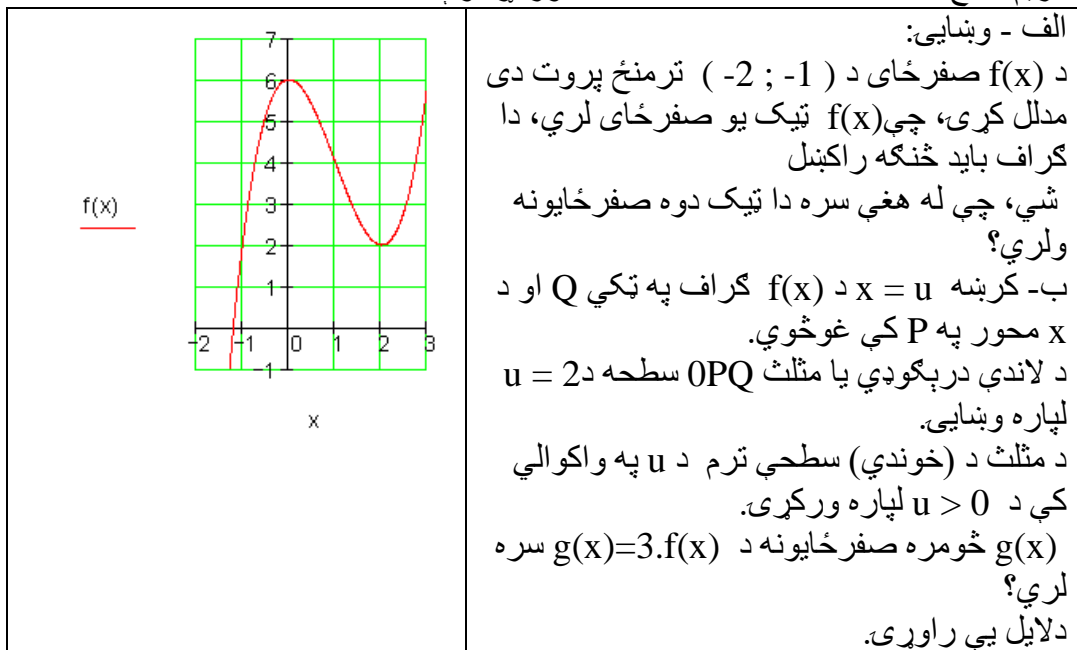
$$f(x) = x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x \quad \text{الف - ب}$$

$$f(x) = \frac{1}{48}x^3 - x \quad \text{ب - ت}$$

$$f(x) = \frac{1}{5}x(3-x)(x+1) \quad \text{ت - ټ}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 6x + \frac{9}{2} \quad \text{ټ - ج}$$

دریم: تابع  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6; D = \mathbb{R}$  ورکړ شوي ده.



څلورم: تابع  $f(x) = 5x^3 - 10,8x + 4$  ورکړ شوي ده. وښایی:  $x=0,4$  یو صفر ځای دی.

پسې نور صفر ځایونه وشمیری.

$$f(x) = 5x^3 - 10,8x + 4; D = \mathbb{R}$$

پنځم: د اووښتونې یا متحولې  $c$  په واکوالي کې د صفر ځایونو تعداد وټاکي.



$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2cx; D = \mathbb{R}$$

$$x^2 + 2x + 2c = 0 \Rightarrow p = 2; q = 2c \Rightarrow D = 1 - 2c$$

$$\text{für } D > 0 \Rightarrow 1 - 2c > 0 \Leftrightarrow c < 0,5$$

$$\text{für } D = 0 \Rightarrow 1 - 2c = 0 \Leftrightarrow c = 0,5 \Rightarrow x_{2/3} = -1$$

$$\text{für } D < 0 \Rightarrow 1 - 2c < 0 \Leftrightarrow c > 0,5$$

$$\text{für } c = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0; x_3 = -2$$

اړیکي:

د  $c > 0,5$  لپاره  $f(x)$  ټیک یو صفرځای لري:  $P_x(0 | 0)$   
 د  $c = 0,5$  یا د  $c = 0$  لپاره  $f(x)$  ټیک دوه صفرځایونه لري.  
 د  $c < 0,5$  او  $c$  د صفر سره نامساوي لپاره  $f(x)$  ټیک درې صفرځایونه لري.

پوښتنې

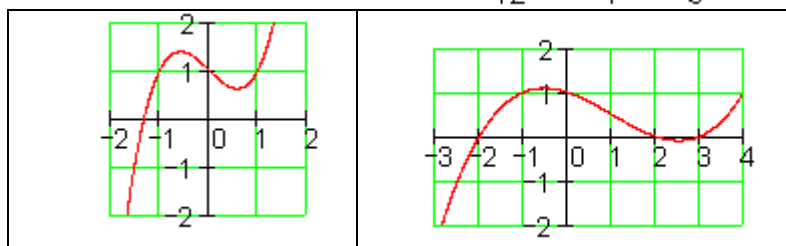
د ټول راشنل توابعو محور غوڅتکي او گرافونه III

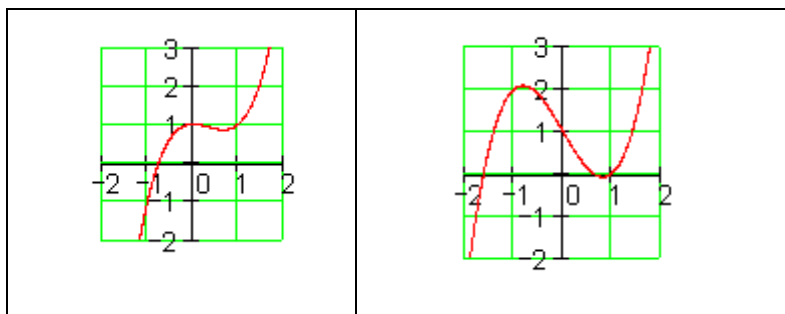
تابع په یوه گراف تنظیمیږي.

لومړی: هر د یوه تابع ترم سره تنظیم کړی او خپله پرېکړه په دلیل کلکه کړی.

$$f_1(x) = x^3 - x + 1; f_2(x) = x^3 - 2x + 1$$

$$f_3(x) = x^3 - x^2 + 1; f_4(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$$





دویم: هر هغه څوک چې د لایسنس اخستلو لپاره ځان چمتو کوي، باید وپوهیږي، چې د یوه بریک وړونکي موټر تمکیدني واټن په یوه وچ پاخه سرک(چې طبعاً باید هوډار وي) د عکسالعمل لار او د بریک لار څخه یوځای جوړه ده. د لاندې د موتي قانون یا لار( د درې گوتو) څخه کیدی شي د چټکتیا  $v$  په  $\text{km/h}$  د عکسالعمل لار  $r$  او د بریک لار  $b$  په متر وشمیرل شي.

$$r = \frac{v}{10} \cdot 3 \quad \text{د عکس العمل لار:} \quad b = \frac{\left(\frac{v}{10}\right)^2}{2} \quad \text{همداسي} \quad b = \left(\frac{v}{10}\right)^2 \quad \text{د بریک لار:}$$

د المان د 3.3.04 راین اخبار د اول له جولای 1. Juli 2004 په وچ سره د تمځای لار په بل بریکلار شمیرل کیږي. (په افغانستان کې به داڅنگه وي؟ نه پوهیږم)  
الف- تابع مساوات  $s = f(v)$  وټاکي، د کوم سره چې د هرې تلني د چټکتیا یا سرعت تملار شمیرل کیدی شي.

ب- د لاندې تلل شوی چټکتیا  $v = 0, 10, 20, 30, \dots, 50 \text{ km/h}$  لپاره په یوه ارزښت جدول کې د هغه هر یوه تمځای  $s$  سره یوځای کړی  
پ- له دې سره د (  $60 \dots 100 \text{ km/h}$  ) لپاره د  $s$  یو څونور ارزښتونه وشمیرئ او د دې تابع گراف وکارئ.

ت- د نوي بریک نیولو قانون(الماني) سره دا تراوسه شمیرل شوي ارزښتونه وشمیرئ او دا په همغه کواوډینات سیستم کې وکارئ او ټوله نتیجه په شننه یا کومنتار سره روښانه کړئ.

$$f(x) = x^3 - 0,5x^2 - 3x + 1,5; D = \mathbb{R} \quad \text{دریم: داتابعورکړ شوي:}$$

$$f(x) = 0,5(2x - 1)(x^2 - 3) \quad \text{الف- وښایئ:}$$

ب- گراف د شوونټیا تر پولې ټیک وکارئ.

پ- د  $x$  د کوم ارزښتونو لپاره  $f(x) > 0$  باور لري؟

## شننیزه ځمکچپوهنه یا تحلیلي هندسه:

تحلیلي هندسه (وکتور هندسه هم) د هندسي يوه برخه ده، چې د هندسي پرابلمونو د حل د پاره د الجبري مرستندوی موادو (په ټولیزه توګه له کرښيز الجبر) څخه جمتو کوي. دا په ډېرو حالتونو کې ممکن کوي، چې ځمکچيزې پوښتنګونې سوچه شميرنيز حل کړی شو، بي له دې چې ليدوني يې مرستي ته راوبولي يعني چې شکل څنگه برېښي يا دی.

## ۱۶ - د سطحې شننيزه (تحلیلي) هندسه

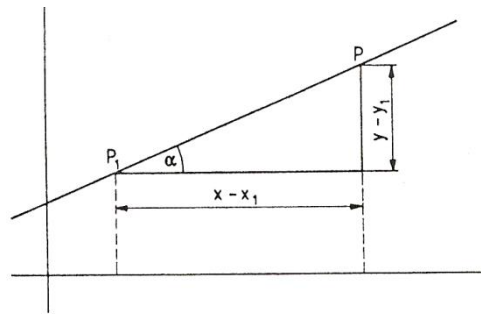
په دې برخه کې يوڅو د تحلیلي (شننيزې يا سپرنيزې) ځمکچپوهنې يا هندسي ټاکلي پرابلمونه څيرل کيږي. د تحلیلي هندسي بنسټيزه تګلار به څرګنده (وېنول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننيزې يا تحلیلي څرګندونو کې د هندسي خوږونو جوړښت ښايي.

۱۶ . ۱ کرښه

د هندسي ټاکنډو ټوټو له لارې مختلف امکانات شته دي، چې يوه کرښه يواځنې کره تعين کړای شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښبرابرونونو يا - مساواتو مختلفې ښې شته دي. يوه کرښه د يوه ټکي او د هغه د لور (سمت) له لارې ټاکل کيږي شي. ( ټکی او د ټکی ميلان معلوم دی).

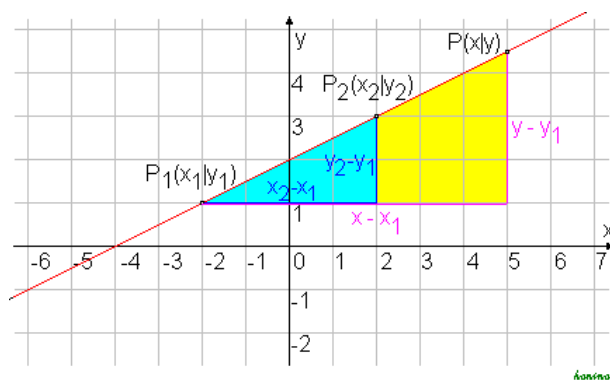
دلته دې  $P_1(x_1, y_1)$  دا ټکي وي.  $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$  دې د جگيدو کونج وي، چې د کرښې

لور ټاکي (څ ۱۶ . ۱) او  $P(x, y)$  په کرښه يو اووښتونې (واريابل) ټکی دی.



نو د کرښی د میلان  $\tan \alpha = m$  لپاره باور لري:  $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته څیره دې وکتل شي (لاددې څیره هم په همدې موخه کښل شوي ده))



له دې څخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1); \dots \dots \dots (16.1)$$

پورته د کرښی ټکی لور برابر و

که د  $y$  په محور  $P_1$  وټاکل شي د کواورډیناتو  $x_1 = 0, y_1 = b$  سره، نو له (۱۶. ۱) سملاسي په لاس راځي:  $(y - b = m(x - 0))$  په همدې ډول ( $\Leftrightarrow$ )

$$y = mx + b \quad (16.2)$$

دا پورته برابر و د کرښمساواتونو نور مال فورم (ښه) بلل کيږي

یوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوي.

دا دوه ټکي دي  $P_1(x_1, y_1)$  او  $P_2(x_2, y_2)$  وي، د  $x_1 = x_2$  سره ، ( څیره ش ۱۶

۲ . ) د جگیدونکی یا تنجنت  $\tan \alpha = m$  لپاره داسی دي:

$$m = (y - y_1) / (x - x_1)$$

او

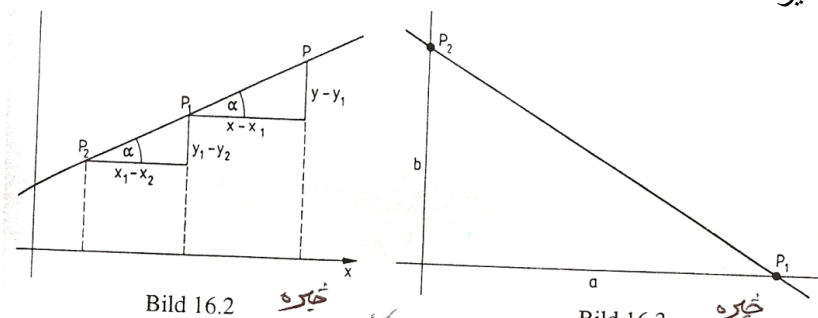
$$m = (y_2 - y_1) / (x_1 - x_2) = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$$

له کومو چی لاس ته راځي

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}; \dots\dots\dots(16,3)$$

پورته د کرښی دوه ټکیز برابر وړون

څیره ده



که د  $x$  - محور باندې د  $P_1$  ټکی ، د کوآرډینات  $x_1 = a$  ,  $y_1 = 0$  سره وټاکو او ټکی  $P_2$  د  $y$ -محور باندې د کوآرډینات  $x_1 = 0$  ,  $y_2 = b$  سره وټاکو، نو له ( ۱۶ . ۳ ) لاس ته راځي:

$$(y - 0) / (x - a) = (b - 0) / (0 - a)$$

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a + y/b = 1 \quad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوڅي برابر وړون

څلور پورتنی کرښمساوات ټول په  $x$  او  $y$  کی لاینیز دي. د مساوات عمومي فورم (یا ټولیزه بڼه) داسی دی:

$$Ax + By + C = 0 \quad (16.5)$$

د کرښبرابرونونو ټولیزه بڼه (عمومي فورم) دا فورم په ځانگړې توگه دا برابرون هم خوندي لري یا په بر کی نیسي

$$y = y_0 \quad (A = 0, B \neq 0)$$

او ( $x = x_0$ ) ( $A \neq 0, B = 0$ ) چې د  $x$  - محور او په همدې ډول د  $y$  - محور ته غبرگي کرښي دي، په داسی حال کی چې تراوسه دومه لانه ده څیرل شوي

بیلگه ۱۶ . ۱ :

د کرښی برابرون یا لاینیز برابرون، چې له  $P(-2, 3)$  ټکي تیریري او د جگوالي کونج  $\alpha = 30^\circ$  یی د  $m = \tan \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3}$  له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسی لیکل

$$y - 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x + 2) \quad \text{کیري}$$

او نورمال فورم یی په لاندې ډول دی

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بیلگه ۱۶ . ۲ :

د لاینیز برابرون یا د کرښو برابرون په ټکو  $P_1(3/2, -2)$  او  $P_2(1, -4)$  کی د (۱۶ . ۳) سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y + 2}{x - \frac{3}{2}} = \frac{-y + 2}{1 - \frac{3}{2}}$$

$$\text{له دې لاس ته راځي: } y + 2 = \frac{-2}{1 - \frac{3}{2}}(x - \frac{3}{2})$$

نو نورمال فورم  $y = 4x - 8$  لرو (اته ناسم، په ځای یی شپږ دي)

بیلگه ۱۶ . ۳ :

کړښه د  $y = -(3/2)x + 1$  برابرون سره د  $y$  - محور په  $P_1(0,1)$  ټکي کې غوڅوي او جگوالی یې  $2/3$  - دی، دا په دې مانا چې د  $x$  - ارزښت تغیریدل په یو د  $y$  - ارزښت په  $2/3$  - تغیروي، په دې ډول دوم د کرښې ټکی لاس ته راځي. د بیلگې په توګه  $P_2(0+1, 1-(3/2)) = P_2(1, -1/2)$

(څیره ۱۶. ۴ لاندې کښل شوي )

بیلگه ۱۶. ۴ :

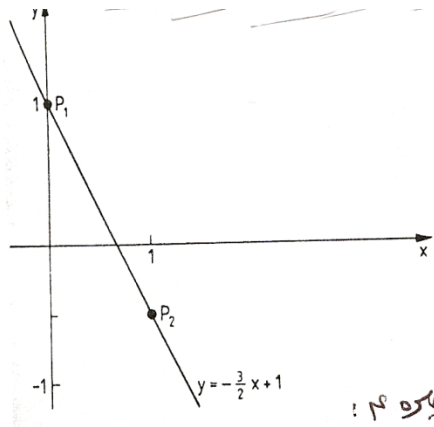
د کرښې د برابرونو عمومي فورم  $x - 2y - 6 = 0$  څخه د غوڅیدو فورم لاس ته راځي  $x/6 + y/3 = 1$

کړښه د کواور دینات محورونه په دې ټکو  $P_1(6, 0)$ ,  $P_2(0, -3)$  کې غوڅوي، په یوه کرښه د دوه ټکو  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  ترمنځ فاصله (که د کرښې واټن  $P_1P_2 = d$  وي د پیتاګوراس (فیساغورس) له جملې (څیره ۱۶. ۵) داسې ده

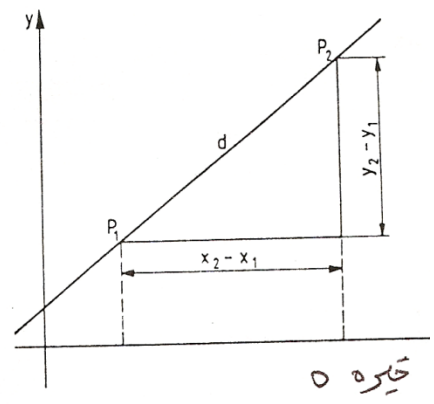
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}; \dots \dots \dots (16,6)$$

پورته د ټکو  $P_1$  او  $P_2$  ترمنځ واټن

څیرې ۱۶. ۴ او ۵ -



څیره ۱۶



څیره ۵

بیلگه ۱۶. ۵ :

د درې ګوډي ABC د اړخونو اوږدوالی، چې کونجګي یې دادي (-) B(3,1), A(1,1), C(2,5) په لاندې ډول دی

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښي (نه کټمټی) چې (یو د بلې سره) غیرګي نه وي ټیک یو غوڅټکی لري. دا چې دا ټکی په دواړو کواور دیناتو پروت دی، نو د دواړو کواور دیناتو برابر ون باید پوره کړي. په دې حالت کې د غوڅټکي کواور دیناتو، د دوه لاینیزو برابر ونونو سره چې دوه اوبښتوني یا

ناپیژندونکی (مجهولی) ولري، د یوه سیستم یواځنی کره اوبیونه ترې لاس ته راځي. په ټولیزه توګه دا باور لري: که یو برابر ون سیستم چې د دوه کرښو د برابر ونونو څخه جوړ وي، او یو یواځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښي یو بل په دې ټکي کې سره پرې کوي.

که ناپای دیرې اوبیوني شته وي، نو په دې حالت کې برابر ون همغه یوه کرښه ښايي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښي یو بل سره غیرګي ځغلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بیلګه ۱۶ . ۶ :

د  $y = 3x - 2$  کرښی پروتځاي (موقعیت) د لاندې کرښو

الف)  $g_2: -2x + y = 1$ ,

ب)  $g_3: 3x - y = 5$ ,

پ)  $g_4: -x + (1/3)y = -2/3$

سره څیرو

اوبیونه : د  $g_1$  برابر ونونو څیره داسی بدلیږي :  $3x - y = 2$

الف) د برابر ونونو سیستم  $3x - y = 2$  ,  $-2x + y = 1$

ټیک یوه اوبیونه لري:  $x_1 = 3$  ,  $y_1 = 7$

ددې څخه څرګندېږي چې ټکی (7, 3) د کرښو  $g_1$  او  $g_2$  غوڅټکی دی .

ب) د برابر ونونو سیستم

$$3x - y = 2$$

$$3x - y = 1$$



اوبی نه لري : برابر ونونه یو بل ردوي په نه زغمي . د  $g_1$  او  $g_2$  کرښی یو د بل سره غبرگي دي

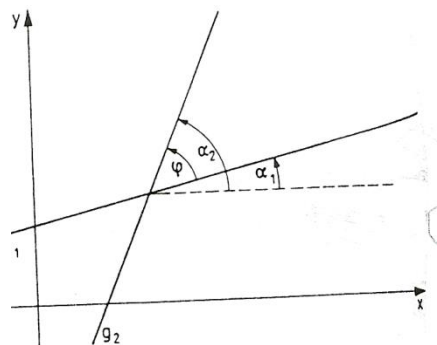
$$\begin{aligned} 3x-y=2 \quad \text{پ) د برابر ونونو سیستم} \\ -x+(1/3)y=-2/3 \end{aligned}$$

نایای ډیرې اوبیوني یا حلونه لري. برابر ونونه یو بل سره برابر یا یو بل ته ورته دي. که په ۳ ضرب شي یو همغه پورته برابر ون تری لاس ته راځي .

$g_1$  او  $g_2$  دوه کت مت برابر ونونه دي .  
که د دوه کرښو

$$g_1 : y = m_1x + b_1 \qquad g_2 : y = m_2x + b_2$$

غوڅکونج  $\phi$  ټاکو، نو د دواړو کرښو جگید کونجونو  $\alpha_1 \wedge \alpha_2$  کمون (کمښت یا توپیر) جوړوو (خ ۱۶ . ۶)



څېره ۱۶ . ۶

د کرښی له برابر ونونو پوهیږو  $\tan \alpha_1 = m_1 \wedge \tan \alpha_2 = m_2$

د زیاتون تیورم ( بنسټیزه جمله ) ( برخه ۶ . ۵ ) څخه د  $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$  لپاره ( پر تله برخه ۴ . ۵ ) باوري ده

$$\tan \phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1) / (1 + \tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2)$$

د کوم څخه چی د  $\tan \alpha_1 = m_1 \wedge \tan \alpha_2 = m_2$  سره دا لاندی لاس ته راځي:

$$\tan \phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}; \dots \dots \dots (16, 7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج ډیر

دا په دې پورې اړه لري چې ایا  $\phi > 0 \vee \phi < 0$  د پورته څېرې ۱۶ . ۶ کونج پخ او که تیره دی.

بیلگه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو  $g_1: y=x-1$  او  $g_2: y=(7/4)x+1$  غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) څخه لاس ته راځي:

$$\tan \phi = \frac{\frac{7}{4} - 1}{1 + 1 \cdot \frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255^\circ$$

د  $g_1$  او  $g_2$  ترمنځ پخکونج په دې ډول دی :  $180 - \phi = 164,745^\circ$

د دوه کرښو یو بل ته ځانگړي حالتونه:

۱ - کرښی یو بل سره غبرگی ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180^\circ \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan \phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = 0$$

گورو چې د  $m_2 - m_1 = 0$  لپاره باور لري، نو  $m_2 = m_1$

(دلته باور لري :  $m_1 \cdot m_2 = m_1^2 \neq -1$ )

۲ - کرښی یو په بل (نیغی) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90^\circ \Rightarrow \tan \phi = (m - m) / (1 + m \cdot m) = \infty$$

دا حالت د  $1 + m_1 \cdot m_2 = 0$  لپاره منځ ته راځي،

یعنی د  $m_2 = -1/m_1$  لپاره ( $m_1 \neq 0, m_2 \neq 0$ )

په کرښه ( $m_1 = 0$ )  $y = y_0$  باندې کرښه ( $m_2 = \infty$ )  $x = x_0$  نیغه ولاړه ده

د غبرگوالی لپاره شرطونه

$$m_2 = m_1 \quad (16, 8)$$

د اورتوگونالیتی (Orthogonalität) (یو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

$$m_2 = -1 / m_1 \quad (16.9)$$

بیلگه ۱۶ . ۸ : دکرښی  $g_2$  برابرې دې وټاکل شي چی له ټکي  $P(2, -1)$  تیریري، او له کرښی  $g_1: y = -2x + 1$  سره الف ( غیرگه او ب) اورتوگونال (نیغه) ځغلي اوبونه:

الف ( د  $g_2$  کرښی میلان ( جگوالی  $m_2 = m_1 = -2$  ) دی. پام ( ۱۶ . ۱ ) ته دکرښی  $g_2$  برابرې لپاره باور لري:  $y + 1 = -2(x - 2)$  همداسی  $y = -2x + 3$   
ب ( د  $g_2$  کرښی میلان یا جگیدنه ده  $m_2 = -1/m_1 = 1/2$  ) د ( ۱۶ . ۱ ) سره سم د  $g_2$  کرښی برابرې دی:  $y + 1 = (1/2)(x - 2) \Leftrightarrow y = (1/2)x - 2$

بیلگه ۱۶ . ۹ :

د کرښی برابرې ټاکل کیري چي د  $P_1(1/3, -1/6)$  ټکی تیریري او په کرښه چی له ټکو  $P_2(-1, 1)$  او  $P_3(-2, -1)$  تیریري، ولاره وي.  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ \text{SEP} \end{smallmatrix} \right]$   
ځواب : کرښه چي له  $P_2, P_3$  ټکو تیریري، و ( ۱۶ . ۳ ) ته په پام لاندې برابرې لري  $(y-1)/(x+1) = (-1-1)/(-2+1) = 2 \Leftrightarrow y = 2x + 3 \left[ \begin{smallmatrix} P \\ \text{SEP} \end{smallmatrix} \right]$

په دې کرښی د (عمودي) ولارې کرښی میلان یا جگوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د  $p_1$  څخه تیریدونکی کرښی برابرې د  $m_2$  میلان سره د ( ۱۶ . ۱ ) له مخی دي:

$$y + (1/6) = -(1/2)(x - 173) \Leftrightarrow y = -(1/2)x$$

بیلگه ۱۶ . ۱۰ :

د  $g_1: 2x - y - 1 = 0$  او  $g_2: 3x + 2y = 5$  کرښو د غوڅټکي  $S$  واټن له ټکي  $P(6, 13)$  څومره دی او د کرښی برابرې څنگه دی چي د کواوردینات له سرچینی تیریري او د  $S$  او  $P$  څخه تیریدونکی کرښه باندي ولاره کرښه وي؟

ځواب : د غوڅټکي کواوردینات د لاندې برابر وونو سیستم څخه لاس ته راځي

$$\left[ \begin{smallmatrix} P \\ \text{SEP} \end{smallmatrix} \right] 2x - y = 1$$

$$\left[ \begin{smallmatrix} P \\ \text{SEP} \end{smallmatrix} \right] 3x + 2y = 5 \left[ \begin{smallmatrix} P \\ \text{SEP} \end{smallmatrix} \right]$$

$$x_S = 1, y_S = 1 \left[ \begin{smallmatrix} P \\ \text{SEP} \end{smallmatrix} \right] \left[ \begin{smallmatrix} P \\ \text{SEP} \end{smallmatrix} \right]$$

د  $S$  او  $P$  ټکو ترمنځ واټن له ( ۱۶ . ۶ ) څخه لاس ته راځي

$$d = \sqrt{(1-6) + (1-13)^2} = 13$$

[P]  
[SEP]

د ( ۱۶ . ۳ ) له مخی د کرښی برابر ونونه چی له S او P تیریږی دی

$$(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1) \Leftrightarrow y=(12/5)x-7/5$$

( جگوالی:  $m = 12 / 5$  ) [P]  
[SEP]

له S او P ټکو تیریږونکی کرښه بانډی د ولاری کرښی میلان

$$m_2 = -1/m = -5/12$$

د ( 0,0 ) P0 څخه تیریږونکی کرښه د m2 میلان سره د ( ۱۶ . ۱ ) له مخی لانډی

برابرون لری

$$y-0=-(5/12)(x-0) \Leftrightarrow y=-(5/12)x$$
 [P]  
[SEP]

## ۱۶ . ۷ تمرینونه

۱- د هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له  $P_1$  ټکي تیرېږي او د  $x$ -محور سره  
کونج جوړوي

a)  $P_1(2,-3)$ ,  $= 30^\circ$ ,      b)  $P_1(-3,2)$        $= 45^\circ$

c)  $P_1(-1,-4)$ ,  $= 120^\circ$ ,      d)  $P_1(4,4)$ ,       $= 0^\circ$

e)  $P_1(0,0)$ ,  $= 150^\circ$ ,      f)  $P_1(1,-1)$ ,       $= 90^\circ$

۲- ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو  $P_1$  او  $P_2$  تیرېږي

a)  $P_1(0,0)$ ,  $P_2(3,3)$ ,      b)  $P_1(-3,3)$ ,  $P_2(0,0)$ ,

c)  $P_1(1,4)$ ,  $P_2(-3,-4)$ ,      d)  $P_1(1,2)$ ,  $P_2(-1,1)$ ,

e)  $P_1(0,1,-1)$ ,  $P_2(-0,1,-3)$ ,      f)  $P_1(1,-1)$ ,  $P_2(4,-2)$ !

۳- د محورونو غوڅي (لنډ: محورغوڅي) a, b د کرښې مساوات په نورمالفورم وټاکئ

او همداسې د غوڅتکو واین d د محورغوڅتکو سره چې یو له بل یې لري وټاکئ.

a)  $a = 5$ ,  $b = 2$ ,      b)  $a = -1$ ,  $b = 3$ ,      c)  $a = 2$ ,  $b = -3$ ,      d)  $a = -3$ ,  $b = -3$

۴- یو دريگودی دا لاندې گودټکی لري  $A(-4,-1)$ ,  $B(2,-2)$ ,  $C(1,3)$ . د هغو کرښو

مساوات څنگه دي، په کومو چې د دريگودیو اړخونه پراته دي او معلوم کړی چې

د دريگودی اړخونه خومره اوږده دي؟

۵- د لاندې کرښو مساواتو نورمالفورم او برختوټاونه یا فورم څنگه دی؟

a)  $3x - 5y + 15 = 0$ ,      b)  $4x - 3y - 18 = 0$

c)  $-4x + 2y - 10 = 0$ ,      d)  $-3x - 4y + 15 = 0$  ?

۶- د کرښې  $y = -(12/5)x + 2$  پروتخاي د کرښو

a)  $y + 2,4x - 6 = 0$ ,      b)  $28x + 10y = 0$ ,      c)  $8x + 5y = 2$ ,

d)  $5y + 12x - 10 = 0$ .      e)  $y + (12/5)x = 3$ ,      f)  $6x + 2,5y = 5$

سره وڅیړئ.

۷- د لاندې کرښو د غوڅتکو کواوردیناتونه او غوڅکونج وټاکل:

a)  $2x + 3y = 7$       b)  $y = (1/2)x + 1$       c)  $y - x = 7$

$3x - y = 5$ ,       $y = -2x + 6$ ,       $y = 7$ ,

d)  $x/3 - y/2 = 1$       e)  $6x - 2y + 10 = 0$       f)  $y = 4x - 1$

$-x/2 + y/3 = 1$ ,       $y = 3x + 6$ ,       $y = -3x + 5$ !

۸- کومه کرښه د کرښې  $x - y = 4$  ، کرښې  $3x + y = 8$  او برسیره پر دې له غوڅتکې  $P(0,5)$  څخه تیریري؟

۹- د لاندې ګڼو <sup>نکو</sup>  $A(-4,-1)$ ,  $B(2,-2)$ ,  $C(1,3)$  سره د دريګوډي دننه کونجونه

څومره لوي دي؟ (پیلونه: دريکونجی وکارئ) یا (دريګوډی)

۱۰- د ولاړپړیوتې کرښې یا زورندې مساوات له ټکي  $P(2,0)$  څخه په کرښه  $y = 2x + 1$  څنګه دي؟

۱۱- د ولاړکرښې مساوات په کرښه  $y = 2x + 1$  باندې په ټکي  $P(-1,-2)$  څنګه د

۱۲- د کرښې  $y = 2x + 1$  سره د غبرګلې کرښې مساوات چې له ټکي  $P(-1,-3)$  تیریري، څنګه دي؟

## ۱۶. ۲ ګردی $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$ (داپره)

داپره (ګردی) د ټولو هغو ټکو ډیري (سټ) ده، چې د یوه کره ځای په ځای ټکي، داسې په نامه منځنۍ څخه، همغه واټن ولری. واټن ته یې وړانګه وایو او په یې په نڅبنه کوو. فورمال داسې ویل کیږي یا دا پیژند وړکوو، چې داپره (ګردی)  $k$  د د سطحې (هوارې)  $E$  د ټولو ټکو ډیري (سټ) ده، د کومو لپاره چې باور لري:

$$k = \{ X \in E \mid |\overline{MX}| = r \}$$

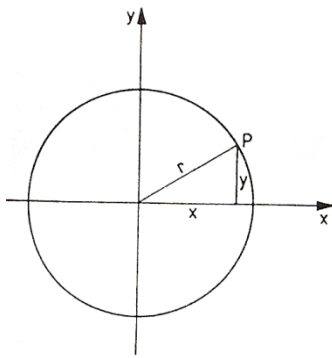
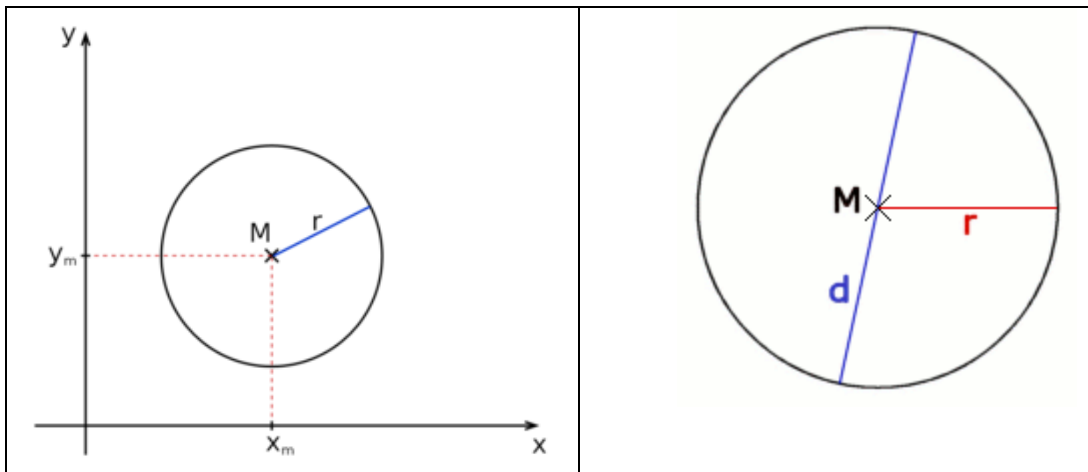


Bild 16.7 ځاږه

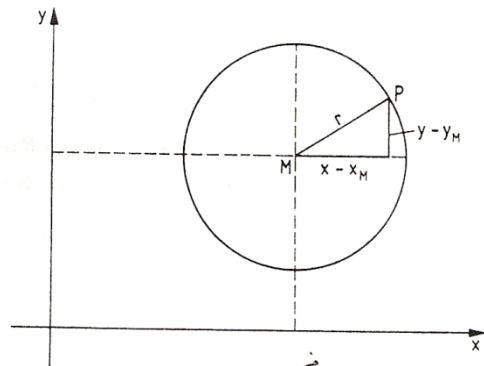


Bild 16.8 ځاږه

په شننيزه هندسه کې کيدی شي، چې گردی د منځتکي  $M(x_m, y_m)$  او وړانگي  $r$  سره (په هواره گي) د لاندې برابرې له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د گردی ټوليز برابرې

دا برابرې د پېژند او پېتاگوراس له جملې سملاسي ورکوي د يوې گردی ځانگړي حالت او د کواورديناټسيستم سره، چې منځتکي يې د کواورديناټ په سرچينه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

که د گردی منځ تکی د کواورديناټسيستم ( څيره ۱۶ . ۷ ) په سرچينه پروت وي، نو د ( پيوټاگوراس د جملې له مخې ) د گردې په خوښه تکی  $P(x, y)$  لپاره باور لري

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16.10) \left[ \begin{array}{c} P \\ SEP \end{array} \right]$$

د گردی منځکي برابرېون چی د گردې منځکي  $M(0,0)$  او وړانگه  $r$  ده.

که د گردې منځکي  $M$  کواوردینات  $(x_M, y_M)$  ولري (څیره ۱۶ . ۸) نو د گردی د خوښی ټکي  $P(x)$  لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د گردې د منځکي برابرېون وي د منځکي  $M(x_M, y_M)$  او وړانگي  $r$  سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بینوم مربع وې شمیرو او برابرېون په  $A=0$  فاکتور ځلوو (بی له دې چی د گردې برابرېون تغیر ومومي)، پس پیژندل کیري چی د گردی برابرېون د ځلوری یا مربع غړي په  $x$  او  $y$  کې په فاکتور  $A$  لاینیز برابرېون په  $x$  او  $y$  او ثابت غړي ( چی یوه غړي په څیري سره یوځای شوي ) لاس ته راوړو.  $\left[ \begin{array}{c} P \\ SEP \end{array} \right]$

نو دا لاندې ټولیز (عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2 + Cx + Dy + E = 0. \quad A \neq 0 \quad (16.12)$$

د گردې برابرېونو (مساواتو) ټولیز فورم یا ټولیزه بڼه •  
که د گردې برابرېون په ټولیزه بڼه یا عمومي فورم ورکړ شوي او که منځکي او وړانگه یی څرگنده کوو یا معلومو نو د گردې برابرېون د منځکي فورم باندې راوړو یا را اړوو. دا د ځلوری پوره کولو یا مربع تکمیلولو په بنسټ صورت نیسي . دوه څیري پورته وگوری

بیلگه ۱۶ . ۱۱ :

د گردی برابرېون دې په ټولیزه - یا عمومي توگه وي:

$$2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y = 0 \left[ \begin{array}{c} P \\ SEP \end{array} \right]$$

له دې لاس ته راځي، که په دوه وویشل شي  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$   $\left[ \begin{array}{c} P \\ SEP \end{array} \right]$

(د ځلوری پوره کونه یا مربع تکمیلونه)  $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 3 + 4 + 9$   $\left[ \begin{array}{c} P \\ SEP \end{array} \right]$



دبېنوم د مربع له لارې انځورونه  $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$  گردی منځتکی  $M(-2,3)$  او وړانگه  $r=4$  لري.

بېلگه ۱۶ . ۱۲ :

د گردی برابرېون ولیکی چی منځتکی یی  $M(2;0)$  وي او په کوم چی تکی  $P(6,4-3)$  روت دی؟

اوبیونه : د  $M(2,0)$  سره ( ۱۶ . ۱۱ ) داسی دی

$$(x-2)^2 + y^2 = r^2$$

د  $P$  تکی د گردی برابرېون پوره کوي  $(6-2)^2 + (4-3)^2 = r^2$  له دې څخه د گردی وړانگه په لاندې ډول لاس ته راځي:  $r = 8$  او له دې سره د گردی برابرېون:

$$(x-2)^2 + y^2 = 64$$

گردی او کرېنه یو بل ته درې مختلف ځایونه لرودی شي

- ۱ - کرېنه گردی غوڅوي، نو له دې امله غوڅی ده (سیکانتي)
  - ۲ - کرېنه گردی په یوه تکی کی لمسوي یعنی مماس دی ( تانجنت یا جگوالی )
  - ۳ - کرېنه ټوله له گردی دباندې پرته ده ( له گردی تیریدونکی، لنډ : تیریدونې )
- د غوڅتکی ( د تقاطع تکی ) کواوردینات باید د گردی او کرېنی برابرېون پوره کړي سړی د کرېنی برابرېون د گردی په برابرېونونو کی ردي (  $y$  یا  $x$  پسې حل یا اوبی شوي ) او په روبښانه ډول یو مربع مساوات (څلوری برابرېون) په  $x$  او  $y$  کی لاس ته راوړي، کوم چی په څرگند ډول ( پرتله برخه ۱۲ . ۲ ) دوه ریل اوبیوني یا ځوابونه لري، یو ریل ډبل اوبی او یا هڅ ریل اوبی کیدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ څخه عبارت دي.

بېلگه ۱۶ . ۱۳ :

کوم پروت ځایونه گردی  $k$  چی راکړشوی:  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$  اولاندې کرېنی و یو بل ته لري؟

$$g1 : 2x+y=4, g2=2x+y=12, g3: -x+y/2=3$$

اوبی:  $g1: y=-2x+4$  که د گردی برابرېون کی ځای کړو نو دا برابرېون لاس ته راځي

$$(x-2)^2 + (-2x+4-3)^2 = 5 \Leftrightarrow 5x-8x=0$$

ددې ځوابونو  $x=0, y=4$  او  $x=8/5, y=4/5$  سره به  $g1$  د گردی غوڅوونی یا

(Sekant سکانت) وي.

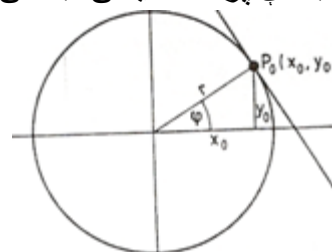
که  $g2: y=-2x+12$  د گردی مساواتو کی ځای کړو نو لاندې لاس ته راځي

$$(x-2)^2 + (-2x+12-3)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2-8x+16=0$$

د ډبل اوبوني  $x_{1,2} = 4, y_{1,2} = 4$  سره  $g_2$  یو تانجنت دی  $P_0$ .  
که  $g_3: y = 2x + 6$  د گردۍ مساوات کی ځای کړو، نو لاندې لاس ته راځي:

$$(x-2)^2 + (2x+6-3)^2 = 5x^2 + x + 8 = 0 \quad P_0$$

دا څلورۍ برابرېون یا مربع مساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه  $g_3$  له گردۍ  $k$  دباندې پرته ده، یعنی دباندنی یا دباندونی ده.



په گردې  $x^2 + y^2 = r^2$  (څېره ۱۶ . ۹) باندې د تانجنت برابرېون په ټکی  $P_0(x_0, y_0)$  مساوات  $x_0^2 + y_0^2 = r^2 > 0$  سره غوښتل کېږي. تانجنت د مماس په وړانګه نیغ ولاړ دی

د مماسوړانګه دا میلان یا جګوالی لري  $\tan \phi = \frac{y_0}{x_0}$  او

له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخې د  $P_0$  تانجنت

$$m = 1 / \tan \phi = -x_0 / y_0; \dots \dots \dots (16,13)$$

د تانجنت یا جګې برابرېون د (۱۶ . ۹) سره سم لاس ته راځي:

$$y - y_0 = -(x_0 / y_0)(x - x_0) \Leftrightarrow xx_0 + yy_0 = x_0^2 + y_0^2 = r^2 \quad P_0$$

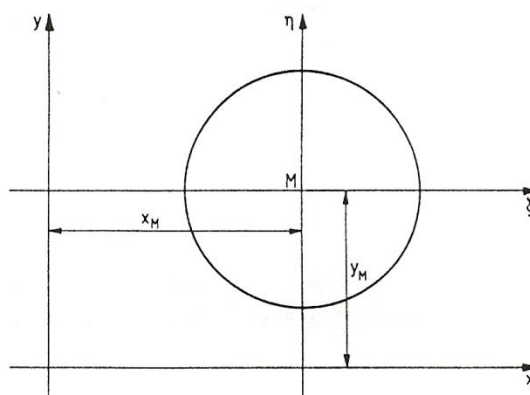
$$xx_0 + yy_0 = r^2 \quad (16.14)$$

د گردۍ تانجنت برابرېون په ټکی  $P_0(x_0, y_0)$  په گردې

$$x^2 + y^2 = r^2$$

حالتونه  $P_0(0, \pm r)$  او  $P_0(\pm r, 0)$  په (۱۶ . ۱۴) کی ځای ( دننه ) دي.

(څېره ۱۶ . ۱۰)

Bild 16.10 تصویر

یادونه : که له دې مخ ته یا وروسته  $x_0, y_0$  یا  $x_M, y_M$  او  $x_0, y_0$  یا  $x_M, y_M$  گورو نو کټمت دي

بیلگه ۱۶ . ۱۴ :

د دوه تنجنتو برابرېون له ټکي  $P_1(-12,4)$  په گردې  $x^2+y^2=r^2$  په څه ډول دي؟  
 اوبیونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پیدا کوو. دا باید د گردې برابرېون پوره کړي .  
 ټکی  $P_1$  باید په تنجنت پروت وي یعنی د تنجنت برابرېون ( ۱۶ . ۱۴ ) باید پوره کړي.  
 نو باور لري

$$x_0^2 + y_0^2 = 16 \quad \text{او} \quad x_0 + 4y_0 = 16$$

که دا لاینیز برابرېون د  $y_0$  په لور حل شي ، نو په  $x_0$  کي یو څلوری برابرېون یا مربع مساوات لاس ته راځي

$$x_0^2 + (3x_0 + 4)^2 = 16$$

همداسي  $5x_0^2 + 12x_0 = 0$  د اوبیونو  $x_0 = 0$  ،  $x_0 = -12/5$  سره. داهم په دې پورې اړه لري

$$y_0 = 4 \quad , \quad y_0 = -16/5$$

د تنجنت مساوات په گردې، په ټکو  $P_0(0,4)$  او  $P_2(-12/5, 16/5)$  د ( ۱۶ . ۱۴ ) له مخی په لاندې ډول دي

$$0 \cdot x + 4y = 16 \Leftrightarrow y = 4$$

او

$$(-12/5)x - (16/5)y = 16 \Leftrightarrow y = (-3/4)x - 5$$

د گردی مساوات ( ۱۶ . ۱۱ ) د منځتکي  $M(x_M, y_M)$  سره د  $\eta, \zeta$  -کووردینات سیستم کی ، چی سرچینه یی په  $M$  کی پرته ده) (؟ څیره ش . ۱۶ . ۱۰ ) لاندې فورم لري  $\zeta^2 + \eta^2 = r^2$

د تنجنت مساوات په ټکي  $P_0(\zeta_0, \eta_0)$  کی داسی دي  
 $\zeta\zeta_0 + \eta\eta_0 = r^2; \dots\dots\dots(16,15)$

د  $\eta, \zeta$  -کووردیناتسیستم د  $y, x$  - کووردیناتسیستم یو غیرگ کنبول ( راکنل) دي، او د دواړو کووردیناتسیستم کی لاندې اړیکی پرتی دي .  
 $\zeta = x - x_M, \eta = y - y_M; \dots\dots\dots(16,16)$

که برابر و ( ۱۶ . ۱۶ ) د تنجنت مساواتو (۱۵ . ۱۶) کی ځای په ځای شي، نو سری بیا دا  $y, x$  -کووردینات سیستم ته ترانفورمیرکوي (کشوي یا راکاري) :

$$(x-x_M)(x_0-x_M)+(y-y_M)(y_0-y_M)=r^2 \quad (16.17)$$

په ټکي  $P_0(x_0, y_0)$  کی د گردی تنجنت برابر و په گردی

$$\zeta^2 + \eta^2 = r^2$$

بیلگه ۱۶ . ۱۵:

په گردی چی برابر  $x^2+y^2+16x+4y+43 = 0$  لري، د  $x$  - محور باندې، په ټکو  $x_1 = x_2 = -5$

سره تنجنت وکاړو (کیزدو). برابر و یی څنگه دي؟

اوبیونه : د گردی برابر و ( ۱۶ . ۱۱ ) باندې بدلیری:

$$\zeta^2 + \eta^2 + 16\zeta + 4\eta + 4 = -43 + 64 + 4$$

$$\zeta^2 + \eta^2 + 16\zeta + 4\eta + 4 = -43 + 64 + 4$$

$$\zeta^2 + \eta^2 + 16\zeta + 4\eta + 4 = -43 + 64 + 4$$

او له دې لاس ته راځي

$$x_M = -8, y_M = 2, r = 5$$

د گردی د دواړو ټکو ارزښتونه

$$x_1 = x_2 = -5$$

د دواړو گردی ټکو په گردی برابر و کی ځایوو:

$$(-5+8)^2+(y-2)^2=25$$

له دې داسې لاس ته راغلي دي لپاره څلورې برابرې یو یا مربع مساواتو د دواړو اوردیناتو

مماس ټکي لاس ته راځي:  $y_1 = 6$ ,  $y_2 = -2$  او  $(17, 16)$  سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 \Leftrightarrow 3x+4y=9$$

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 \Leftrightarrow 3x-4y=-7$$

تمرینونه:

۱۳ - د لاندې مساواتو سره گردیمنختکی او وړانگه وټاکئ:

a)  $x^2 + y^2 = 20$

b)  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

c)  $x^2 + y^2 - 9y = 0$ ,

d)  $4x^2 + 4y^2 + 32x - 8y + 67 = 0$

e)  $36x^2 + 36y^2 - 36x + 24y - 23 = 0$ , f)  $x^2 + 2x + y^2 + 2y = 16$  !

۱۴ - د لاندې گردیو مساوات وڅیړئ

الف) چې منځ ټکی  $M(-2, -1)$  لري او له سرچینې تیرېږي

ب) هغه چې دري ټکي  $P_1(3, 0)$ ,  $P_2(5, -3)$ ,  $P_3(5, 3)$  یې د غاړو ټا

پ) چې وړانگه  $r = 6$  لري او له ټکو  $P_1(-1, 11)$ ,  $P_2(5, 5)$  څخه تیرېږي.

ت) له ټکي  $P_1(3, 4)$  تیرېږي او کرښه  $y = -(4/3)x + 13$  په ټکي  $P_2(4, 3)$  لمسوي.

ټ) چې منځ ټکی  $M(2, 2)$  لري او کرښه  $y = -(4/3)x + 13$  لمسوي.

ث) چې د هغې منځ ټکي په کرښه  $y = 3x - 19$  پروت دی او له ټکي  $P_1(7, -2)$  او همداسې له ټکي  $P_2(11, 2)$  څخه تیرېږي.

۱۵ - کوم پروتخایونه گردی  $k$  چې فرمول لري  $x^2 + y^2 - 8x = 0$  او لاندې کرښې یو له بل سره لري:

a)  $g: y = 2x + 1$ ,    b)  $g: y = x$ ,    c)  $g: y = x - 1$ ,  
 d)  $g: y = 4$ ,    e)  $g: y = -x - 3$ ,    f)  $g: y = x - 3$ ?

۱۶ - کوم پروتخاي کرښه  $3x + 4y = 25$  گردی.  $x^2 + y^2 = 25$  ته لري؟

۱۷ - د تنجنت مساوات څنگه دی

الف) په ټکي  $P_0(5, y_0)$  چې په گردی  $x^2 + y^2 = 169$  پروت دی،

ب) په ټکي  $P_0(x_0, -2)$  چې په گردی  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$  پروت دی؟

۱۸ - د هغو گردیو منځټکي پیدا کړی چې وړانگه یې  $r = 5$  وي، کومی چې ( )  
 کرښه  $3x + 4y = 9$  په ټکي  $P_0(-1, 3)$  کی لمسوي!

۱۹ - په گردی  $x^2 + y^2 = 25/4$  د هغه تنجنت مساوات وټاکي، کوم چې د  
 کرښي  $y = (4/3)x + 2$  سره غبرگ ځغلي؟

## فنکشنونه (بلواک يا تابع)

### د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چې ددې برخی په پیل کی دی کلیمي ته د لوستونکو پام راوگرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنی څیرونی، چې په هندسه کی خورا ډیره کارول کیري یا استعمالیري، کله د بلواک او بیا زیاته د فنکشن په نامه ځمور په دې کار کی بلل شوي چې مور ورسره تراوسه د تابع د نامه لاندې هم بلدیو، ځما په اند یا فکر که دا مور څیرونه وبولو، نو موخه ور یا هدفمند به مو نومولی وي او تابع خوبی له هغې بلواک دی. په لاندې کي به وگور چې خپلواکی او بلواکی ناپیوندونکی ځمور د څیرو متن جوړوی

پیژند ۱۵ . ۱:

د یوې ریښې واریابلی (اووښتوني یا متحولې)  $R$  ریښې ارزښته فنکشن (لنډ: فنکشن یا څیرونه) د ریښو ګڼونو ډیری باندې، د یوې ډیری  $D \subseteq R$  یوه یواځنی څیرونه ده.  $D$  ډیږند ډیری نومیري .

د ټولو ارزښتونو ډیری چې  $y$  یې د ځان لپاره غوره کولی شي، که  $x$  د پیژندډیری یا تعریف ډیری په دننه کې وځلي، د ارزښت ډیری  $W$  بلل کیږي .  
د دې قانونمندی  $f$  له مخې هر  $M \in x$  یواځني یوه  $y \in W$  باندې تنظیمیږي یا څیره کیږي :

$$y = f(x)$$

اوس نو  $x$  خپلواک واریابل یا اووښتوني یا مجهوله بلل کیږي یا نومیري او  $y$  بلواک واریابل یا اووښتوني بلل کیږي، له دې امله تابع، چې موروايو، د څیرونې هغه څیره شوي خوا ده. (د فنکشن یا څیرونې او تابع یا بلواک توپیر)

د فنکشن مختلف انځور ډولونو په منځ کې سری توپیروي. د دې کلیمه انځورونه کې له ماتماتيکي یا شمیریز سومبولیک څخه تیرید شو، خو، مگر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چې

په لاندې کې به ورسره بلد شو.

**بیلګه ۱۵. ۱:** هر ریښ ګڼ د هماغه ریښ ګڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل یا څیره کیدل..

**بیلګه ۱۵. ۲:** هر یو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت ګڼ او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهنې سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته  $x$  او  $y$  د نورو ریښو ګڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو، زیاتون، کمون، ځل، ویش، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې تړل دي (پرتله برخه ۱۵. ۴)

بیلګی ۱۵. ۱ ته:  $y = (x/2) + 1, D = R, W = R$

بیلګی ۱۵. ۲ ته:  $y = |x|$  د  $x < 0$  لپاره  
 $y = x^2$  د  $x > 0$  لپاره  
 دلته  $D = R, W = [0, \infty)$

پام دې وي چی په داسی حالت کي له کین و ښي لور ته یا گډوډ لوستل کیری یعنی داسی لولو:  
 $x$  د  $y$  مطلقه ارزښت سره مساوي دی، که چیري  $x$  له 0 کوچنی وي.

داسی لیکنو ته دې گران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کیرو). تحلیلې (شننیزه) انځورونه اکسپلیخیت (واضح) روښانه و څرگند) **explizit** نومیري، که د فنکشن برابر و، لکه په بیلگو ۱۵، ۱ او ۱۵. ۲ چی په یوه د  $y$  په لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي:  $y = f(x)$

که چیري داسی نه وي نو د تحلیلې - یا شننیزې انځوروني شکل  $F(x,y)=0$  دی او فنکشن ایمپلیخیت ( ورسره ځای شوي یا ورسره تړلی **implizit** ) بلل کیری یا نومیری. د بیلگی په توگه به  $D=R, W=R, 2y-x-1=0$  فنکشن د بیلگی ۱۵. ۱ یو ایمپلیخیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیخیت شننیزه بڼه ( ایمپلیخیت تحلیلې فورم) کیدی شي په اکسپلیخیت شننیزه یا سپرنیزه بڼه (تحلیلي فورم) واړول شي.

د بیلگی په توگه  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$ :

که  $x + y + y^5 - 1 = 0$  وي، نو دا د  $y$  په لور اکسپلیخیت حل کیدونکی نه دی.  $\left[ \begin{smallmatrix} P & T & P \\ SEP & I & SEP \end{smallmatrix} \right]$   
 د یو فنکشن تحلیلې یا شننیزې انځوروني ځانگړې بڼه پارامتری څرگندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتوني یا واریابلی  $t$ ، دا په نامه پارامتر، له لاري لارښودیری. هر پارامتر ( له یوه پارامتر ساحی څخه)

$$x = \varphi(t), y = \Psi(t)$$

په یو ارزښتجوړي  $x, y$  تنظیمیری.  $\left[ \begin{smallmatrix} P & T & P \\ SEP & I & SEP \end{smallmatrix} \right]$

بیلگی ۱۵. ۱ ته:  $x=2t, y=t+1; -\infty < t < \infty$  به یوه پارامتری انځورونه وی  
 $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$  او  $x = t, y = t/2 + 1$  به یوه بله پارامتری انځورونه وي.  
 زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیری

بیلگی ۱۵. ۱ ته:

X .....-2 -1 0 1 2 ....

---

Y . .....2 0,5 1 1,5 2 .....

بیلگی ۱۵، ۲ ته:

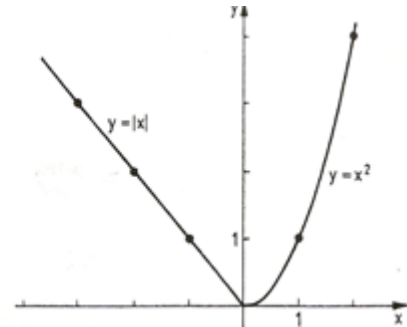
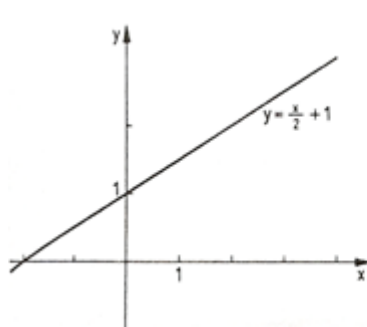
X....-3 2 -1 0 1 2 3 ...

---



Y...3 2 1 0 1 4 9 ...

د فنکشن گرافیکی انځورونه (د یوې ټوټې) په  $x, y$ -کو اواردینات سیستم کی د یوې کبرې له لارې، د هغه فنکشن انځورونې څخه عبارت ده، چی د واریابلو یا اوښتونو جوړې د  $x, y$ -هواره یا سطحه کی یواځني او یواځني ټکي باندې تنظیمیري. څیره ۱۵. ۱. او ۱۵. ۲ (P SEP) بیلگي ۱۵. ۲ ته بیلگي ۱۵. ۱ ته



P SEP

۱۵. ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خوبونه

پیژند ۱۵. ۲:  $y = f(x)$ 

په اینتروال  $[a, b]$  کی هلته او هلته یا ټیک هلته مونوتون جگیدونکی (مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو  $x_1 < x_2$  لپاره  $x \in [a, b] \wedge y \in [a, b]$  سره باور ولري:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

که د برابر و نښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غبرو.

و بیلگي ۱۵. ۱ ته:  $y = (1/2)x + 1$  په  $D = \mathbb{R}$  کی کلک مونوتون دیو بیلگي ۱۵. ۲ ته:  $y = |x|$  د  $x < 0$  لپارهاو  $y = x^2$  د  $x > 0$  لپاره

په اینتروال  $(0, \infty)$  کی مونوتون ټیټېدونکی یا لویدونکی او په اینتروال  $(-\infty, 0)$  کی مونوتون جگیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵. ۳:

په یوه اینتروال  $[-a, a]$  کې یو تعریف شوی فنکشن  $y = f(x)$  هلته او هلته جوړه (جفت) یا سیومتریک (طاق) یا نا-سیومتریک (antisymmetrisch) بلل کیږي چې باوري وي

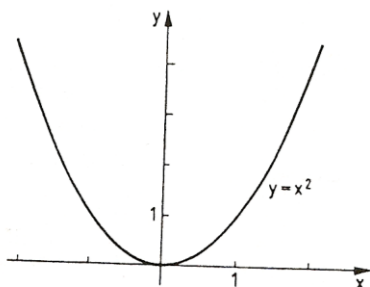
$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$

د جوړه فنکشنونو څیرې اکسیال یا محوري سیومتریک و  $y$  - محور ته ځغلي (دلته هم څیره شته، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵. ۳)، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریک ځغلي (بیا هم څیره او ۱۵. ۴) [SEP].

بیلگه ۱۵. ۳:

فنکشن  $y = x^2, D = \mathbb{R}$   
یو جوړه یا جفت فنکشن دی:

$$(-x)^2 = x^2$$

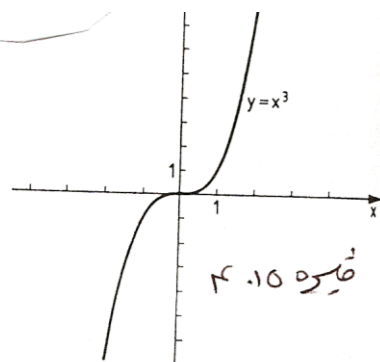


څیره ۱۵. ۳

بیلگه ۱۵. ۴:

فنکشن  $y = x^3, D = \mathbb{R}$   
یو نا جوړه یا طاق فنکشن دی:

$$(-x^3) = -x^3$$



څیره ۱۵. ۴

د بیلگې ۱۵. ۱ او ۱۵. ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه نا جوړه یا طاق دي

پیژند ۱۵. ۴:

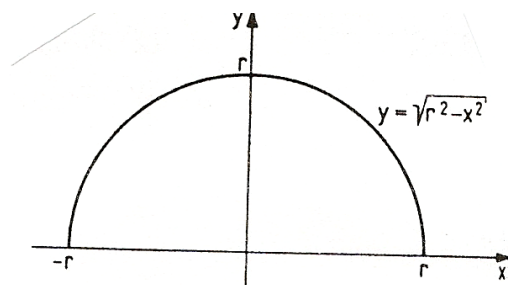
$y = f(x)$  ټیک هلته په  $D$  (پیژندډیری ده) بند یا رابند (محدود) بلل کیږي که یو  $k > 0$  داسی شته وي چې دا باور ولري [SEP]:

$$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$$

بیلگه ۱۵. ۵:

فنکشن  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  ,  $D = [-r, r]$  را بند یا راگیر (محدود) زه به دا له دې وروسته [P:SEP] بند وبولم) دی، ځکه چې لرو: نیم یوونگر دی څیره ده [P:SEP]

$$\text{ش. ۱۵. ۵} \quad f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \leq r$$



پیژند ۱۵. ۵:

$y = f(x)$  پریودیکی (دورانی یا بیرته- یا تل بیرته راگرځیدونکی periodical بلل کیري د دوران یا راگرځیدونکی  $p$  سره، که باور ولري:

$$f(x + p) = f(x)$$

د دورانی یا تل راگرځیدونکو (پریودیکی) فنکشنونو تیوپیکی بیلگی تریگونومتریکی فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵. ۳)

پیژند ۱۵. ۶:

تول  $x \in D$  د  $f(x) = 0$  سره، د فنکشن  $f(x)$  صفر ځایونه بلل کیري.

د فنکشن صفر ځایونه د مساوات  $f(x) = 0$  د حل له لارې پیدا کیري. داخلونه د  $-x$  محور سره د فنکشن کړي د غوڅتکو  $x$  - ارزښتونه دي. [P:P:SEP]

بیلگی ۱۵. اته:

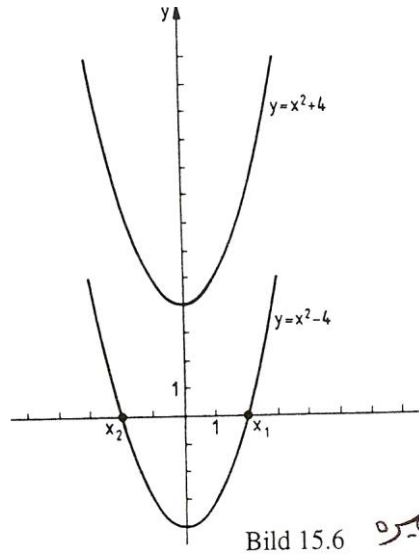
د فنکشن  $y = 1/2 x + 1$  صفر ځایونه د مساوات  $x/2 + 1 = 0$  اوبی  $x = -2$  دی (څیره ۱۵. [P:P:SEP])

بیلگه ۰.۱۵.۶: [P][SEP]

[P][SEP]

فونکشن  $y = x^2 - 4$  دوه صفرخایونه لري:

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = -2$$

فونکشن  $y = x^2 + 4$  صفرخایونه نه لري. (بیا هم څیر ۱۵.۶)

پیژند ۰.۱۵.۷:

$$x \in D, \quad y \in W \quad y = f(x),$$

یو یواځنی «یا یواځنی او یواځنی بلل کیري، که هر یو  $y \in W$  د یوه  $x \in D$  په واک کی وي

یا هر یو  $y \in W$  ته یوه  $x \in D$  څیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: ( $y =$

$f(x)$  یو یواځنی یا یواځنی او یواځنی فونکشن په څټکیدونکی دی، دا په دې مانا چي دا

یو فونکشن ( $x = g(y)$  تعریفوي، یعنی په څټ یا چپه فونکشن. که دلته د اووبنتونو یا

واریابلو د نخبنی (نخونی) سره بدلی شي، نو د په څټ فونکشن په توگه لرو  $y = g(x)$  دا

د فونکشن روځنی یا وسره بده یا که غواری مروجه څیره ده، چی  $x$  خپلواک

او یبلواک، دلته د  $x$  په واک کی واریابل یا مجهولی یا ناپیزندونکی دي د  $y = f(x)$  په

څټ یا برعکس فونکشن لپاره داسی هم لیکلی شو:  $y = f^{-1}(x)$

فونکشن  $y = x$  د خپل په څټ فونکشن سره کټمټ (-ورته)  $identic$  دی، په څټ یا

برعکس فونکشن  $y = f^{-1}(x)$

کرافیکي څیره  $y = x$  په کرښه د  $y = f(x)$  (هندارونه) یعنی په هنداره کی څیرونه او لنډی: هندارونه) ده.  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

**بیلگي ۱۵، ۱ ته :**

د فنکشن  $y = f(x) = x/2 + 1$  چپه یا په څټ فنکشن داسی دی  
 $y = f^{-1}(x) = 2x - 2$   
 سری  $y = x/2 + 1$  د  $x$  په لور اوبی کوي:  $x = 2y - 2$  او بالاخره  $x$  او  $y$  سره بدلوي .  
 (څیره. ۱۵ ۷ الف)  
 ر

**بیلگي ۱۵ . ۳ ته :** فنکشن

$x \in D \quad y = x^2$  ,  
 څیره ش ۱۵ . ۳ ) په څټکیدونکی دي یا په څټکیدونکی نه دی.  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$   
 هر  $y \in W = [0, \infty]$  پورې دوه  $x \in D = [-\infty, \infty]$  اړه لري، یعنی  $x = +y$  او  $x = -y$   
 مگر  $y = x^2$  کلک مونوتون جگیدونکی دی ( او په دې ډول یواځنی او یواځنی ).

د  $x \geq 0$  لپاره او کلک مونوتون لویدونکی د  $x < 0$  لپاره.  $y = x^2, x \geq 0$   
 ته چپه- یا په څټ فنکشن  $y = +x$  دی، او  $y = x^2, x < 0$  ته چپه- یا په څټ فنکشن  $y = -x$  دی.  
 ( څیره ۱۵ . ۷ ب ).  
 په ټولیزه (عمومي) توگه لاندې جمله باور لري

**جمله ۱۵ . ۱ :**

که  $y = f(x)$  کلک مونوتون جگیدونکی ( لویدونکی ) وي، نو په څټ فنکشن  $y = f^{-1}(x)$  موجود دی او دا هم کلک مونوتون جگیدونکی ( لویدونکی ) دی.

**۱۵ . ۳ . بنسټیز فنکشنونه**

په دې برخه کې بنسټیز فنکشنونه تعریفیږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنڅ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوگاریتم فنکشنونه، تریگونومتری فنکشنونه او څیکلومتری فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د خپلو ځانگړ ډوله خویونو له مخی وڅیړل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به د فنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا تړلي

فنکشنونه) وڅیرل شي. د فنکشنونو څیرل به د هغو ځانګړې ډوله یا کرکترېستيکي خویونو له مخې هلته هم دوام ومومي، که د ډیفرنشل شمیرنې کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پیژند ۱۵ . ۸ :

فنکشن

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a^2 x^2 + a_1 x + a_0, n \in N; a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو  $x \in R$  لپاره تعریف دی او  $n$  - مه درجه ټولریشنل فنکشن نومېږي. دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه (یا لنډ : پولینوم) هم ویل کېږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - مه درجه ( $n = 1$ ) یا لاینی فنکشن په لاندې ډول دی:

$$\overset{[P]}{[SEP]} y = mx + n \quad (15.2) \overset{[P]}{[SEP]}$$

دلته  $m$  او  $n$  په (۱۵ . ۱) کې پارامترونو  $a_1$  او  $a_0$  په مانا دي. د لاینی فنکشنونو

څیره (ګراف)  $\overset{[P]}{[SEP]}$  یوه کرښه ده چې په  $y = n$  کې  $\overset{[P]}{[SEP]}$  د  $y$  - محور غوڅوي

( $x = 0$ ) او جګوالی  $m = \tan \alpha$

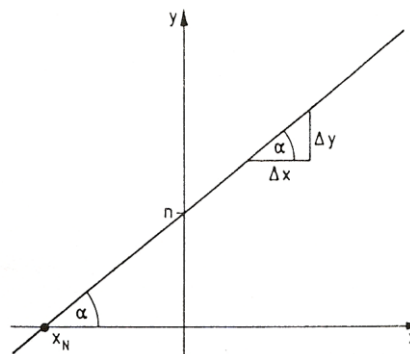


Bild 15.8

څیره

لري (څیره پورته . ۱۵ . ۸)  $\overset{[P]}{[SEP]}$  جګوالی د  $y$  - ارزښت د تغیر  $\overset{[P]}{[SEP]}$  د  $x$  - ارزښت تغیر سره

$$\overset{[P]}{[SEP]} m = \Delta y / \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ متناسب دی:}$$

کرښه جګیږي که  $m > 0$  او لویږي یا ټیټیږي که  $m < 0$  وي او که  $m = 0$  وي،

د  $x$  - محور سره غبرگه ځغلي . کربنه ، که  $|m|=0$  نیول شوی وي، ټيک یو [SEP] صفر ځای  $y = 0$  لري:  $x_N = -n/m$  [SEP]

که را په غاړه شي چی د یوې کرښی برابر ون، چی له دوه ټکو  $(x_1, y_1)$  او  $(x_2, y_2)$  تیریري، پیدا کړو چې پو په بل نیغی نه وي ولاړي ، نو د هغو جگوالی  $m$  او د هغو پرتکی یا نوره بڼه غوڅتکی  $n$  په  $y$  - محور د برابر ونسیستم

$$y_1 = x_1 m + n, y_2 = x_2 m + n$$

له مخی پیدا کوو او په دې توگه لاس ته راوړو

$$(y - y_1)/(x - x_1) = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \text{ [SEP]}$$

په بل (پل) قدم) کی مور ۲ -امه درجه ټولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو

لکه په ( ۱۵ . ۱ ) کی  $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0 \quad (15.3) \text{ [SEP]}$$

د مربع فنکشنونو څیره ) گراف ( پارابول دی چی د هغی سیومتری محور و  $y$  - محور ته غبرگ ځغلي. کوایفیثینت) ځله وونی یا ځلیدونکی  $(a, b, c)$  د پارابول د ککری ځای او بڼه(فورم) ټاکی.

مور د مربع فنکشن یو څو ځانگړي حالتونه تر څیرني لاندې نیسو.

$$1. \quad y = x^2 (a=1, b=0, c=0) \quad (15.4)$$

نورمال پارابول، د ککری کواوردینات:  $x_s = 0, y_s = 0$

( ۹ . ۱۵ . خ )

$$2. \quad y = x^2 + px + q \quad (a=1, b=p, c=q) \quad (15.5) \text{ [SEP]}$$

او  $x^2 + px$  ته د څلورۍ - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:

$$y = x^2 + px \quad (p/2)^2 + q - (p/2)^2 = (x + p/2)^2 + q - p^2/4 \quad (15,5)$$

یو و (نسبت) ( ۱۵ . ۴ ) ته (مخامخ) د  $x$  - لور په  $p/2$  - او د  $y$  - لور په

$q - p^2/4$  راکښل ( رابنکل-یا راکش - ) شوی نورمال پارابول دی ، دا په دې مانا چی په )

( ۱۵ . ۵ ) راکښل شوی پارابول دا ککره لري:

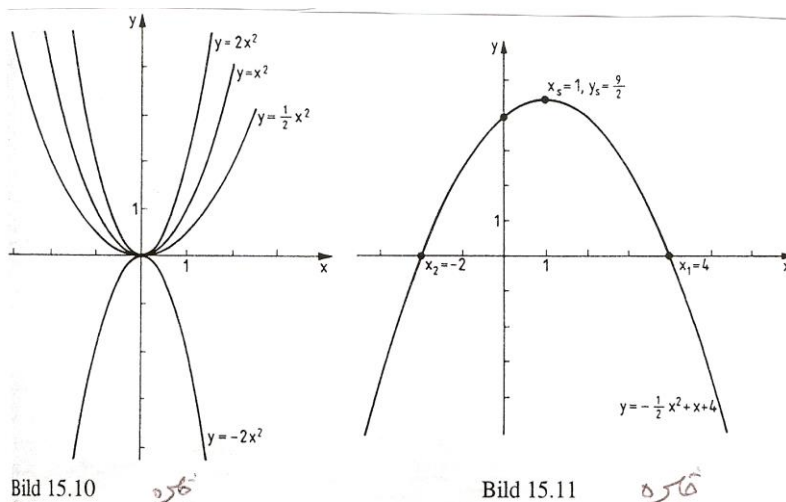
$$x_s = -p/2, y_s = q - p^2/4$$

[SEP]

بیلگه ۱۵ . ۷:







د فنکشن  $y = ax^2 + bx + c$  د صفر ځایونه د برابرې  $ax^2 + bx + c = 0$  اوبیوني دي. وبللکي ۱۵. ۹ ته (خ. ۱۵. ۱) :

صفر ځایونه له دې لاس ته راځي :  $-(1/2)x^2 + x + 4 = 0$  ، چی دلته  $x_1 = 4, x_2 = -2$  دي .

و بللکي ۱۵. ۷ (خیره ۱۵. ۹) ته  $\frac{P}{SEP}$  :

د  $x^2 + 6x + 10 = 0$  یانې  $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$  څخه لاس ته راځي

چی برابرې رییل صفر ځایونه نه لري  $\frac{P}{SEP}$  .

فنکشن  $y = x^2$  غبرگ یا جوړه (ډبل) صفر ځایونه لري یانې  $x_{1,2} = 0$  دي

د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلگي په توگه د ټولریشنل فنکشنونو بیلگي له مخي، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو

چي د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانگړی لیدور فورم دی، د هورنر شیمایا (بنه) Horne rschema، معرفي شي. ددې لپاره به د (۱۵. ۶) فورم بدل شي.

$$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1]x + a_0 \quad x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

هغه ورکړ شوي خپلواک  $x_1$  پورې اړوند فنکشن ارزښت  $y_1 = f(x_1)$  کیدی شي له دې بنی سره په لاندې ډول وشمیرل شي:

$a_3$  له  $x_1$  سره ځل کيږي، دې سره  $a_2$  زیاتیري، زیاتون یی له  $x_1$  سره ځل، او  $a_1$  وړ زیاتوو، زیاتون د  $x_1$  سره ځل او  $a_0$  وړ زیاتوو.  $\frac{P}{SEP}$  د عملیو پرلپسې په لاندې ډول د لاندې شیمایا (د هورنر شیمایا) له لارې په لیدور ډول مخ ته بیایو (څرکندوو)

$a_2$	$a_1$	$a_0$	ځلونه يا ضريبونه
$a_3x_1$	$(a_3x_1+a_2)x_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$	منځنی ځلونه
-----			
$a_3$	$a_3x_1+a_2$	$(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$	منځنی زياتون
			$= f(x_1)$

د دې شېما پوهیدل لږ نابېلې دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی. [P]  
[SEP]

**بېلگه ۱۵ . ۱۰ :** د فنکشن  $y = x^3 - 3x^2 - 14x - 5$  لپاره د فنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو  $x_1 = -2$  او  $x_2 = 5$  څخه شمیرل کيږي.

اوبیونه ( :

که چېرې د دریمې درجې ریشنفنکشن یو صفرځای ولري، نو کړی شو چې د پولینوم ویش له لارې دا لاینې فاکتور بیل کړو ( پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . [P]  
[SEP]

بېلگې ۱۵ . ۱۰ ته:  $(x-5) = x^2 + 3x + 1$  : له دې امله لرو: [P]  
[SEP]

$$y = x^3 - 2x^2 - 5 = (x^2 + 3x + 1)(x - 5) \quad \begin{matrix} [P] \\ [SEP] \end{matrix}$$

د ویش پولینومونو ځلونو، یعنی 1 د  $(x^2)$  سره، 3 د  $(x)$  سره او 1 د هورنر شېما په اخره لیکه کې ولاړ دی. د هورنر شېما له لارې د صفرځای شمیرلو سره په همغه وخت یا دمگړۍ کې د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0] : (x - x_1) = a_3x^2 + (a_3x_1 + a_2)x + [(a_2x_1 + a_1)x_1 + a_1]$$

او  $f(x_1) = 0$  چې د  $(x - x_1)$  سره د ځلوني له لارې دا تصدیقیدلی شي. [P]  
[SEP]

ځایونه د څلورۍ - یا مربع برابرۍ له لارې لاس ته راځي

$$x^2 + 3x + 1 = 0; x_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = -(3 \pm \sqrt{5}) / 2$$

په دې ډول د دریمې درجې فنکشن د درې لاینې فنکشنونو د ځلوني په څیر لیکل کیدی شي ( پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵ )

$$y = x^3 - 2x^2 - 14x - 5 = (x-5) \left[ x - \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right] \left[ x - \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \right]$$

د جملې ۱۲. ۵ وینا په عمومي توګه د ټولو  $n$ -م درجو ریشنل پرزرنږ  
پر طرټظدا غظطافنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵. ۲:

هر  $n$  - م درجه ټول ریشنل فنکشن  $n$  صفر ځایونه لري . کیدي شي دا ټول یو له بل توپیر ولري  
او یادا صفر ځایونه څو ځله هم رامنځ ته شي، رییل او یا جوړه کونجوگیری کملکس  
کیدی شي.

که  $x_1, x_2, \dots, x_n$  دلاندې فنکشن  $n$  صفر ځایونه وي

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلوني په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) a_n$$

د هورنر شیمیا په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$   
که په یوه  $n$  - م درجه پولینوم کی یو  $x$  - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیچینت یا ځله ووني  
لپاره دې صفر ولیکل شي  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$ .

بیلګه ۱۵. ۱۱:

5 - مه درجه ټول ریشنل فنکشن

$$y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80 \quad x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$$

لري. نور صفر ځایونه دې پیدا کړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلوني په څیر  
ولیکل شي.  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$ .

ځواب : د هورنر جملې له لاری یو په بل پسې د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم  
لاس ته راکوي:

$$\begin{array}{r}
 x_1 = 2 \quad \begin{array}{cccccc} 2 & 0 & -6 & -20 & -8 & 80 \\ & 4 & 8 & 4 & -32 & -80 \end{array} \\
 \hline
 x_2 = 2 \quad \begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 5 & -1 & -40 & 0 = f(0) \\ & 4 & 16 & 36 & 40 & \dots \\ 2 & 8 & 18 & 20 & 0 = f(2) & \end{array} \\
 x_3 = -2 \quad \begin{array}{cccccc} & -4 & -8 & -20 & & \\ 2 & 4 & 10 & 0 = f(-2) & & \end{array}
 \end{array}$$

دا پاتی پولینوم  $x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5)$  د  $x^2+2x+5 = 0$  له امله  
 $x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$

لیاره لاندې د حل فورم لري  $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کيږي  
 $y = 2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$

ددې لپاره چې د دریمې او جگو درجو د ټول ریشنا فنکشنونو یوه څیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکترېستیکي یا د خویونو ټکی یی د دیفرنشیا لشمیرني له لاري لاسته راوستی شو (برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چې د ديفرنشیا لشمير له مرستي کار واخلو، کیدی شي چې د هغه د ناپای په هکله وینا وي وکړی شو. مور په لیدیدونکی ډول د فنکشن د پولی کلیمه په کار اچوو، کومه به چې په برخه ۱۹ کی ټیک تعريف شي. دا د بیلگي په توگه دا مانا لري چې  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$  سره  $f(x)$  نل ارزښت  $g$  ته نژدې کيږي، که  $x$  د  $oe$  یاني ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right] = a_n \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n$$

دا چې

$x^n \rightarrow oe$

د  $x \rightarrow \pm \infty$  لپاره که  $n$  جوړه (جفت) وي او  $x \rightarrow \pm \infty$  لپاره که  $n$  نا جوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که  $n$  جوړه او  $a_n$  زیاتیز یا مثبت وي، نو لرو  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty$  (کږه له  $\infty$  - څخه د  $\infty$  په لور ځي).  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

که  $n$  جوړه او  $a_n$  کمیز یا منفي وي، نو لرو:  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty$  (کږه د  $\infty$  - څخه د  $\infty$  په لور ځي).  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

که  $n$  نا جوړه او  $a_n$  کمیز یا مثبت وي، نو لرو:  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$  (کږه له  $\infty$  - څخه د  $\infty$  په لور ځي)

که  $n$  نا جوړه او  $a_n$  کمیز وي، نو لرو:  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty$  (کږه له  $\infty$  څخه د  $\infty$  په لور ځي)

پیژند ۹.۱۵:

فنکشن

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}; \dots \dots (15, 7)$$

$$n, m \in \mathbb{N}_0; a_k, b_i \in \mathbb{R}; Q_m \neq 0$$

مات ریشنفنکشن بلل کیږي او د ټولو  $x$  د  $Q_m(x) \neq 0$  لپاره تعریف دی.

فنکشن (۱۵. ۷) اصلي مات نومیري، که  $n < m$  وي او نااصلي مات دی  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$  که  $n \geq m$  نااصل مات فنکشن کیږي شي چې د پولینوم ویش له لارې تجزیه (ټوټه) شي او د یوه ټول ریشنفنکشن او یوه ریشنونۍ ماتې برخې د زیاتون په څیر ولیکل شي.  $\left[ \begin{smallmatrix} P & P \\ SEP & SEP \end{smallmatrix} \right]$

بیلگه ۱۵. ۱۲:

فنکشن  $y = \frac{2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{x^3 - 4x}$  اصل مات نه دی ( $n=4, m=3$ ) په ماتلاندې فنکشن

باندې د ماتباندې فنکشن ویش څخه لاس ته راځي:

$$(2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6) : (x^3 - 4x) = 2x - 3$$

[P]  
[SEP]

د  $2x^2 + x - 6$  پاتې (باقي) سره. پس لرو:

[P]  
[SEP]

$$y = 2x - 3 + (2x^2 + x - 6) / (x^3 - 4x)$$

فنکشن (۱۵ . ۷) د  $x = x_0$  لپاره یو صفرځای لري، که  $x = x_0$  وي نو باور لري:

$$P_n(x_0) = 0 \text{ مگر } Q_m(x) \neq 0$$

دا د  $x = x_L$  لپاره تشځای (Lücke) لري، که وي:  $P_n(x_0) = 0$  او  $Q_m(x) = 0$

د  $x = x_p$  لپاره یو قطب pol لري که وي:  $P_n(x_p) \neq 0$  مگر  $Q_m(x_p) = 0$

بیلگه ۱۵ . ۱۳:

فنکشن  $y = (2x^2 + x - 6) / (x^3 - 4x)$  د ماتباندي- او ماتلاندي فنکشنونو ټوټي کولو وروسته په لاندې فورم د لایني فاکتورونو په توگه لیکل کيږي.

$$y = \frac{2(x - \frac{3}{2})(x + 2)}{x(x + 2)(x - 2)}$$

د  $x = x_0 = 3/2$  لپاره ماتباندي صفر دی، مگر مات لاندي صفر نه دی (صفرځای) مات

لاندي- او مات باندي فنکشنونه د  $x = x; L = -2$  لپاره صفر دي (تشځای) [P]  
[SEP]

د  $x = x_{p1} = 0$  او  $x = x_{p2} = 0$  لپاره ماتلاندي صفر او مات باندي صفر نه دی (قطب)

که  $x$  سره د قطب ځای ته نژدې شي، نو  $y$  د ناپای په لور ځي چی د قطبځای (تیک ناپای ځای

بللکيږي)  $x_p$  کی کره داسیمپتوتي کريني  $x = x_p$  ته نژدې کيږي [P]  
[SEP]. د یوه تشځای  $x_L$

په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادي  $0 / 0$  شکل غوره کوي، له دي

امله د  $x = x_L$  لپاره تعريف نه دی. [P]  
[SEP]

په ناپای کی د فنکشن ځان نیونی ته:

[P]  
[SEP]

د اصل ماتفنکشن ( $n < m$ ) د  $x$  په جگ پوتنخ یعنی  $x^m$  د ماتباندي او ماتلاندي د ویش څخه

لاس ته راځي:

$$y = \frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}} + \frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}} + \dots + \frac{a_1}{x^{-1+m}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{0}{b_m} = 0$$

داچې د  $x$  ټول اکسپوننټونه مثبت دي، او د  $x$  ټول پوتنځونه د ناپای په لور ځي، نو د اصل مات فنکشن څیره د  $x \rightarrow \pm\infty$  لپاره د  $x$  - محور ته نژدې کیږي. فنکشنونه

چې اصل مات نه وي نو د  $x \rightarrow \pm\infty$  لپاره داسې ځانونه نیسي، چې اصل د ماتفنکشن برخه یې د صفر په لور ځي، لکه ټولریشنل برخه  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ \text{SEP} \end{smallmatrix} \right]$ .  
د نااصل مات فنکشن څیره د  $x \rightarrow \pm\infty$  سره، ځان خپل ټولریشنل برخې ته نژدې کوي.  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ \text{SEP} \end{smallmatrix} \right]$ .

بیلگه ۱۵. ۱۴:  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ \text{SEP} \end{smallmatrix} \right]$

الف:  $y = x / (x^2 + 1)$  د  $x_0 = 0$  په ځای کې صفرځای لري. تشځای او پول یا قطب نه لري. ریيل اوبیونه نه لري (او د  $x \rightarrow \pm\infty$  لپاره د  $x$  - محور  $(y = 0)$ ) د اسیمپټوتی په څیر لري (څیره. ۱۵. ۲  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ \text{SEP} \end{smallmatrix} \right]$ ).

ب:  $y = (x^2 + 2x - 3) / (x + 2) = x - 3 / (x + 2)$  صفرځایونه  $(x^2 + 2x - 3 = 0)$  په  $x_1 = -3$  او  $x_2 = 1$  کې لري. تشځای نه لري او په  $x_3 = -2$  کې قطب لري دا په دې مانا چې  $x = -2$  اسیمپټوتی دی، او د  $x \rightarrow \pm\infty$  لپاره فنکشن  $y = x$  اسیمپټوتی کیږي (دا اسیمپټوتی کلیمه دې په برخه ۱۶. ۴ کې هم وکتل شي  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ \text{SEP} \end{smallmatrix} \right]$ ).

مور په دې پسی ځانله شوي ځانگړي ټول - یا مات ریشنل فنکشنونه راوړو:  
فنکشن

$$y = x^n; n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\} \dots \dots \dots (15, 8_a)$$

یو ځانگړی پوتنځفنکشن دی (د پوتنځ پیژند ۶ ۰ ۱)

(15.8) د زیاتو یز زیاتیز یا مثبت ټولگن  $n$  لپاره یو ټولریشنل فنکشن دی. د جوړه ټولگن  $n$  لپاره ټولریشنل فنکشن دی. د ټولگن  $n$  لپاره ټولی کړي د تعریف ډیری (-)  $D = (0, \infty)$ ، د ارزښت ډیری  $W = (0, \infty)$  او گډ ټکی  $(1, 1)$ ،  $(0, 0)$ ،  $(1, 1)$  لري. (څیره ۱۴ الف ۱۵) د نا جوړه گن د  $n$  لپاره  $D = (-\infty, \infty)$  او  $W = (-\infty, \infty)$  دي  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ \text{SEP} \end{smallmatrix} \right]$  او  $(-1, -1)$ ،  $(0, 0)$ ،  $(1, 1)$  گډ ټکي دي (څیره ۱۵. ۱۴) (ب)

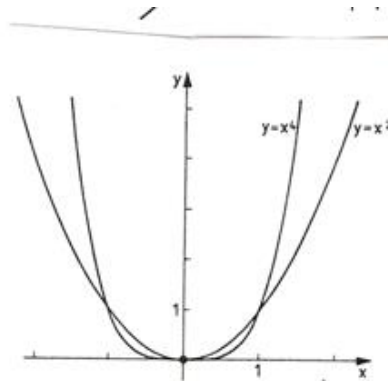
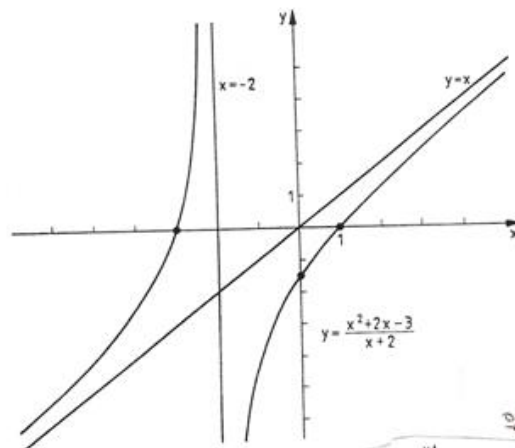
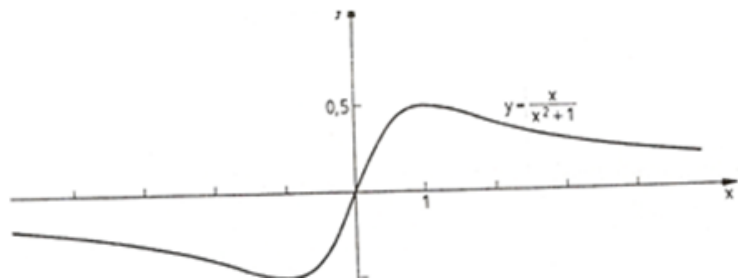


Bild 15.14a

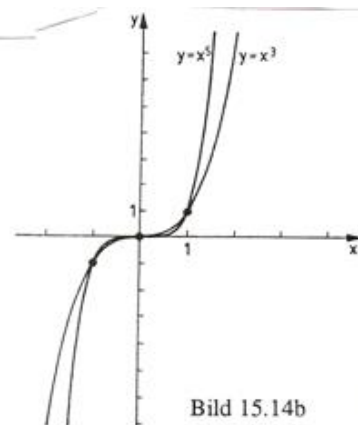


Bild 15.14b

(۱۵، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي گڼ لپاره یو مات ریشنل فنکشن دی په  $x = 0$  کې د یوه قطب او  $y = 0$  کې یوې اسیمپټوټی په څیر. د جوړه گڼون یا تعداد (کمیز) لپاره ټولې کړې د پېژند ډیري



$D = (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$  د ارزښت ډیري  $W = (0, \infty)$  لري او گډټکي  $(-1, 1), (1, 1)$

؟؟؟ څیره ش. ۱۵/الف.  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

د ناجوره گڼون (کمیز n) لپاره  $D = (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$  او  $W = (-\infty, \infty)$  او  $(-1, -1), (1, 1)$  گډټکی دی (څیره «۱۵. ۱۵ ب).

دوه څیري دي

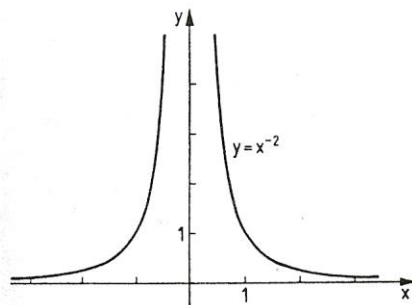


Bild 15.15a

څیره

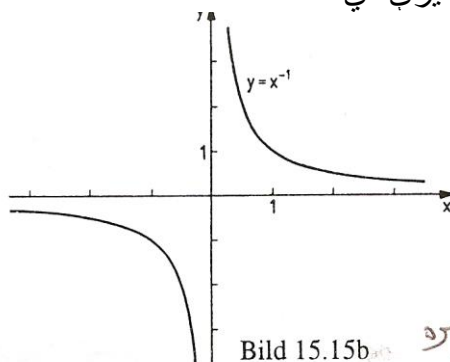


Bild 15.15b

څیره

د پوتنخ فنکشن پر څټ بلواک لپاره دې د مونوټوني اینټروال په پام کې ونیول شي. (پرتله بیلگه) بیلگه ۱۵. ۳)

د فنکشن) لوستل له کین ویني لور ته

$$y = x^n; n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, D = [0, \infty), W = [0, \infty)$$

چپه- یا پر څټ فنکشن په لاندې ډول دی.

$$\left[ \begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right] y = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, D = [0, \infty), W = [0, \infty) \dots (15, 8_b)$$

او ریښه فنکشن نومیري (پیژند ۶. ۲ دې وکتل شي) پوتنخ فنکشن کیدی شي و ریشنل ایکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو  $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m = x^{\frac{m}{n}}$  (پرتله برخه ۴)

که پوتنخ فنکشنونه د ریشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$\left[ \begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right] y = x^a, a \in \mathbb{Q}, x > 0 \quad (15. 8c)$$

نو د ریښي فنکشن (۱۵. ۸ ب) دې د پوتنخ فنکشن په څیر وپوهیدی شي.

د پوتنخ فنکشن (۱۵. ۸ ث) پر څټ بیرته پوتنخ فنکشن دی.  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$  ټولیز پوتنخ فنکشن پیژند د ریښل ایکسپوننت لپاره ورکړ شوی (د ریښل ګڼونو کلیمه دې وکتل شي برخه ۳. ۱۰ کی)

پیژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, x > 0 \quad (15.8d)$$

پوتنخ فنکشن نومیری

بیلگه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن  $y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}, x \geq 0$ 

$$y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}, x \geq 0$$

لاندي چپه - يا پر خت فنکشن لرو

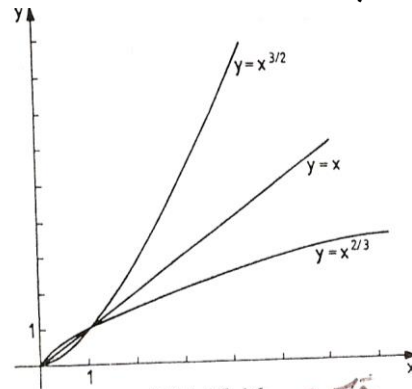


Bild 15.16a

(ب) خیره ۱۵ . ۱۶ الف

فنکشن لاندي چپه فنکشن لري:  $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$ 

خیره ۱۵ . ۱۶ (ب)

$$y = x^{-2} = 1/x^2, x > 0$$

P  
SEP

**یادونه:** په پیژند ۴ . ۲ کی مو وویل چی یواخی د ناکمیز رادیکاندو ریښه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کرنلار دې د پرخت فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په پام کی وي.

د بیلگي په توگه فنکشن  $y = x^3$  په ټول تعریفیږي کی مونوتون پورته کیدونکی دی او له( ) دې امله ټول په خت کیدونکی وی،  $y = \sqrt[3]{x}$  د فنکشن  $y = x^3$  په پیژندیږی] D = [0, oe کی پر خت فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د  $y = x^3$  پرخت فنکشن د• D = (-oe, 0) سره په  $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$  فنکشن کی ورکړ شوی دی (ش. ۱۵ . ۱۷)

پیژند ۱۱ . ۱۵ : فنکشن

$y=a^x, a > 0, a \neq 1$ .....(15,9)

ایکسپوننشلفنکشن یا په جگ «لند» جگ «بلواک» بلل کیري .

(ایکسپوننشلفنکشن یا «جگ» کلیمی لپاره دی پیژند ۴ . ۱ وکتل شي)

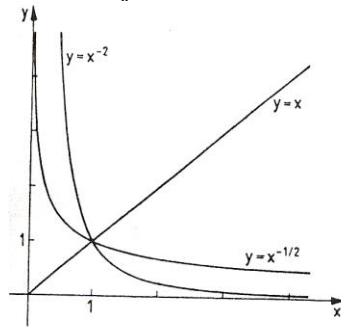


Bild 15.16b

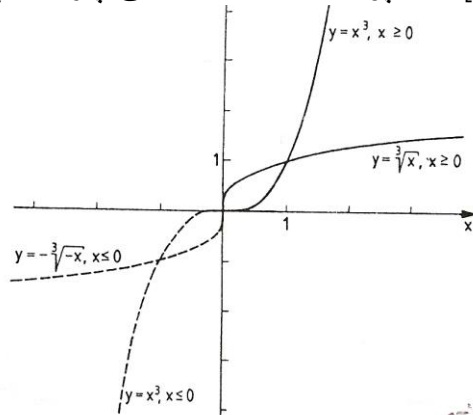
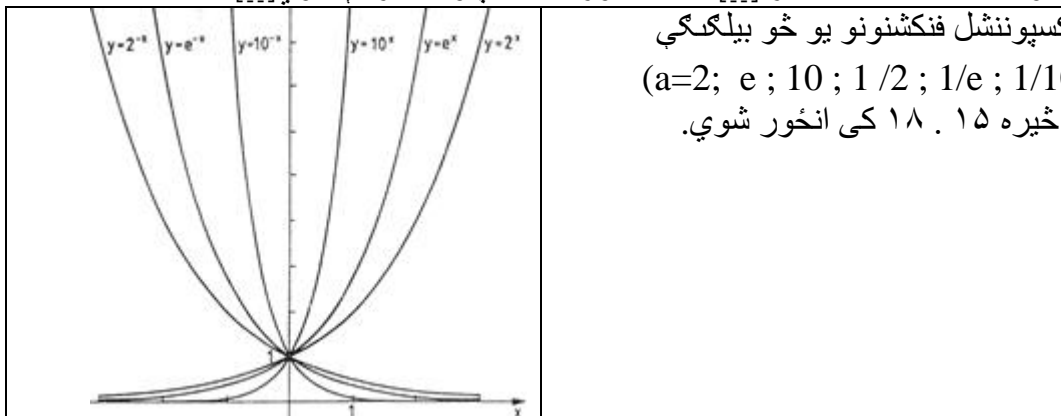


Bild 15.17

پورته دوه څیري دي پام کي ونیول شي

فنکشن ( ۹ . ۱۵ ) لاندې پیژندډیری  $D=(-oe,oe)$  او ارزښتډیری  $W=(o,oe)$  لري.  $a^0 = 1$  له امله تکی  $(0,1)$  د ټولو کبرو گډ تکی دی

د  $a > 0$  لپاره ( ۹ . ۱۵ ) په کلکه مونوتونجگیدونگی دی او د  $x \rightarrow oe$  سره  $x$  - محور ته اسیمپوتیک ورنزدې کیري  $0 < a < 1$  د لپاره ( ۹ . ۱۵ ) په کلکه مونوتون لویري او  $x \rightarrow oe$  سره  $x$  - محور ته اسیمپوتیک نزدې کوي



کسپوننشلفنکشنونو یو څو بیلگگی  
( $a=2; e; 10; 1/2; 1/e; 1/10$ )  
څیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي.

## پیژند ۱۲. ۱۵:

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څې فنکشن دی

$$y = \log_a x, a > 0, a \neq 1 \quad (15.10)$$

او لوگارېتم فنکشن بلل کېږي

د لوگارېتم کلیمې لپاره پیژند ۵. ۱ وگورئ) فنکشن (۱۰. ۱۵) پیژندېږي  
 $D = (0, \infty)$  او  $W = (-\infty, \infty)$  لري.  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

د  $y = \log_a x$  کېږي د  $y = a^x$  هندارونه ده، په کرښه  $y = x$  کې  $(1, 0)$  د ټولو کېږي  
 ټکی دی (څیره شته دی)

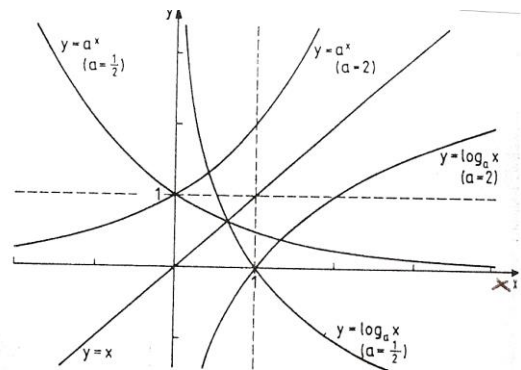


Bild 15.19 څیره

د  $a > 1$  لپاره (۱۰. ۱۵) کلک مونوټونجیدونکی او د  $x > 0$  لپاره اسیمپټوټیک د کمیز  $y$  -  
 محور ته نژدې کېږي.  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$   $0 < a < 1$  لپاره (۱۰. ۱۵) کلک مونوټون لویدونکی دی او

د  $x > 0$  لپاره اسیمپټوټیک د زیاتیز  $y$  - محور ته نژدې کېږي. په شکل ۱۵. ۱۹

کې  $y = a^x$  او په څې یی یعنی  $y = \log_a x$

د  $a = 2$  او  $a = 1/2$  لپاره انځورېږي.  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

په ځانگړې توگه لیکل کېږي  $y = \log_{10} x = \lg x$ ,  $y = \log_e x = \ln x$

## پیژند ۱۳. ۱۵:

د تریگونومتری فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې (پرتله برخه ۶ . ۳ ) دا لاندني فنکشنونه په نڅښه کيږي یا راوړل کيږي.

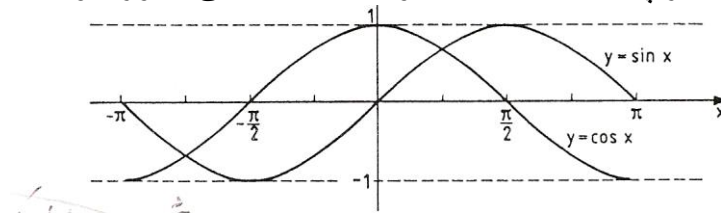
$y = \sin x ; D = \mathbb{R}, W = [1, 1] \dots \dots \dots (15, 11_a)$

$y = \cos x ; D = \mathbb{R}, W = [-1, 1] \dots \dots \dots (15, 11_b)$

$y = \tan x = \sin x / \cos x ; D = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \}, W = \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \dots \dots (15, 11_c)$

$y = \cot x = \cos x / \sin x ; D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \}, W = \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \dots \dots \dots (15, 11_d)$

د دې کړوتگلار په ش. ۱۵ . ۲۰ الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریگونومتریکی فنکشنونه  $y = \sin x, y = \tan x, y = \cot x$  نا جوړه فنکشنونه، او  $y = \cos x$  یو جوړه فنکشن یا - بلواک دی.  $\begin{matrix} [P] & [P] \\ [SEP] & [SEP] \end{matrix}$

تریگونومتریکی فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي (مقایسه ۱۵ . ۵)

فنکشنونه  $y = \sin x, y = \cos x$  پریودې  $2\pi$  لري، دا په دې مانا چی لرو:  $\sin(x + 2k\pi) = \sin x ; \cos(x + 2k\pi) = \cos x, k \in \mathbb{Z}$   
لاندې فنکشنونه پریود  $\pi$

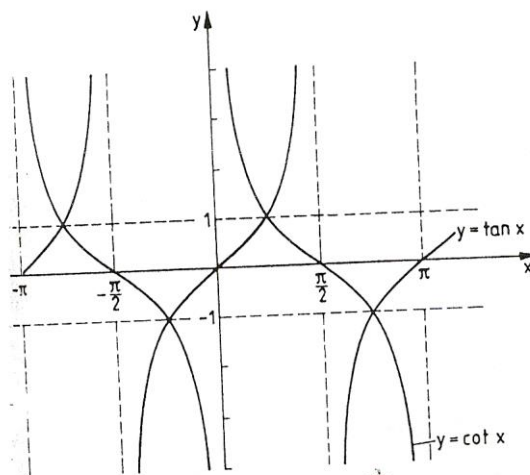


Bild 15.20b

[P]  
[SEP]

لري  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$  دا په دې مانا چې

$$\tan(x + k\pi) = \tan x, \quad \cot(x + k\pi) = \cot x, \quad k \in \mathbb{Z}$$

د تريگونوميټريکي فنکشنونو صفر ځايونه دي  $x_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$y = \cos \quad \text{د } [P] \text{ لپاره او } y = \sin x \quad x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad y = \tan x \quad \text{د } [SEP]$$

لري  $y = \cot x$  لپاره تانجنټ - او کوټنجنټ فنکشنونه قطب ځايونه (ناپاڅايونه) لري

يعني  $y = \tan x$  په  $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  او  $y = \cot x$  په  $x_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$  کې.

د تريگونوميټريکي فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوټوني ځايونه په پام کې ونيول شي. د بيلگي په توگه

فنکشن  $y = \sin x$  په ايتروال  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  کې مونوټون جگيدونکی دی او په

$$[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$$

کې مونوټون لويدونکی، او دا مونوټوني ځايونه په يوه پوره پريودي کې تکرار يږي. پس ويلي شو:

لپاره  $y = \sin x$  جگيدونکی يا پورته کيدونکی دی [P]  
[SEP]

$$د \quad \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{لپاره لويدونكى دى، او په ورته توگه}$$

$$د \quad -\pi + 2k\pi \leq x \leq 0 + 2k\pi \quad \text{لپاره } y = \cos x \quad \text{پورته كيدونكى دى،}$$

$$د \quad 0 + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi \quad \text{لپاره لويدونكى دى}$$

$$د \quad -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{لپاره } y = \tan x \quad \text{جگيدونكى دى}$$

$$د \quad 0 + k\pi < x < \pi + k\pi; k \in Z \quad \text{لپاره } y = \cot x \quad \text{جگيدونكى دى،}$$

په تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونو کې د قطب ځایونه د مونوتوني اینټروالونو ترمنځ پراته دي،

له دې امله دا مونوتوني اینټروالونه واز اینټروالونه دي. د ساین فنکشنونه د بیلگې په توگه

د وخت په پریودی کې انځور کې خپل استعمال مومي (Schwingung) (شوینگونگ):

رپیدنه = په عمومي ډول دلته خپلواک واریابل په  $t$  نڅبنه کېږي. فنکشن

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) \quad (15.11e)$$

هارموني فنکشن بلل کېږي.  $\left[ \begin{array}{c} P \\ \text{SEP} \end{array} \right]$

**یادونه:** فنکشن (۱۵.۱۱ب) د پیژند (۱۵.۱۵) له مخې تړلی یا ځنځیري فنکشن دی. مور  
ترڅیرني لاندې نیسو چې د ساین فنکشن د مخه فاکتور  $a$  فاکتور د خپلواک واریابل  $t$   
او زیاتونکی د ساین فنکشن په خپلواک (Argument) د کرځیره باندې څه تاسیر  
اچوي.

۱-  $\left[ \begin{array}{c} P \\ \text{SEP} \end{array} \right]$  د فاکتور  $a$  تاثیر په فنکشن  $y = a \cdot \sin t$  د  $y = \sin t$  فنکشن ارزښت باندې غزول یا

راکشول دی که  $(|a| > 1)$  او یا پرسول دي که

$(|a| < 1)$  وي  $y = a \cdot \sin x$  فنکشن ارزښت  $a$  - ځله د فنکشن ارزښت

$y = \sin t$  دی، چېرته چې برسیره پردې د  $a < 0$  لپاره په  $t$  - محور یوه

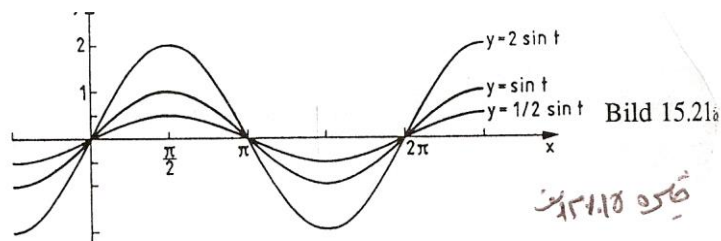
اینه څیرونه هم منځ ته راولي (څره ش. ۱۵.۲۱ الف).  $(a = 2, a = 1/2)$

په فنکشن کې  $a$  امپلیتودې (Amplitude) (جگوالی) نومېږي او د شوینگونگ (Schwingung)

$\left[ \begin{array}{c} P \\ \text{SEP} \end{array} \right]$

رپیدنی پراخوالی یا بنه : سور باندې تاثیر اچوي.

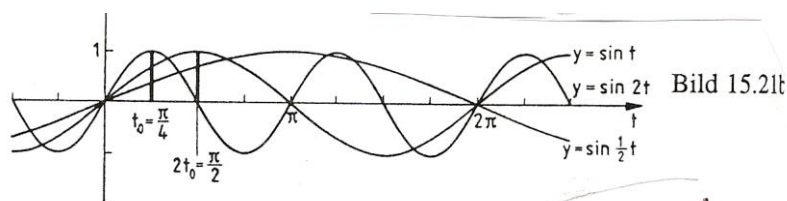
څیره شته



۲ - په فنکشن  $y = \sin \omega t$  کې فاکتور  $\omega$  په فنکشن  $y = \sin t$  باندې یو وختي غزول که  $|\omega| < 1$  یا پرسول که  $|\omega| > 1$  وي تاثیر اچوي. چیرته چې  $\omega < 0$  لپاره برسیره پردې یو په  $-y$  محور اینونه هم ده.  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$

د یوه ټاکلي خپلواک  $t = t_0$  لپاره په فنکشن  $y = \sin \omega t$  یوه فنکشن ارزښت،  $y = \sin t$  خپلواک  $\omega$  -خله، یعنی  $t = \omega t_0$  لپاره غوره کوي (خیره؟؟ ش. ۱۵. ۲۱ ب).

گردی فرکونخ (Kreisfrequenz) بلل کيږي، دا په پریودی تاثیر اچوي او  $y = \omega t$  پریودی  $P = \frac{2\pi}{\omega}$  لري.



۳ - زیاتیدونکی  $\varphi$  په فنکشن  $y = \sin(t + \varphi)$  کې د  $y = \sin t$  باندې دیوې راکښنی تاثیر په  $|\varphi|$  له کینی لور  $\varphi > 0$  او یا له بني لور  $\varphi < 0$  اچوي.

د یوه ټاکلي خپلواک  $t = t_0$  لپاره د فنکشن  $y = \sin(t + \varphi)$  سره یو فنکشن ارزښت، چې د  $y = \sin t$  لپاره.

$\varphi$  په کچه راکښل شوی (یعنی د یوه ځای څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، یعنی  $t = t_0 + \varphi$  لپاره، غوره کوي. (خیره، ۱۵. ۲۱ ب)

$$\left( \varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2} \right)$$

په فنکشن



$$y = a \cdot \sin(\omega t + \varphi) = a \cdot \sin \omega \left( t + \frac{\varphi}{\omega} \right)$$

کی  $\varphi$  جی فازی نومیری یو د راکنبلو تاثیر په کبره  $y = a \cdot \sin \omega t$

د  $\frac{\varphi}{\omega}$  په اندازه اچوي.

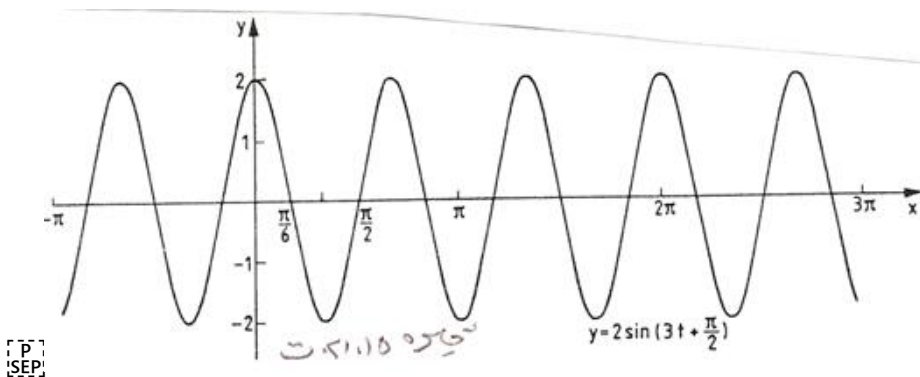
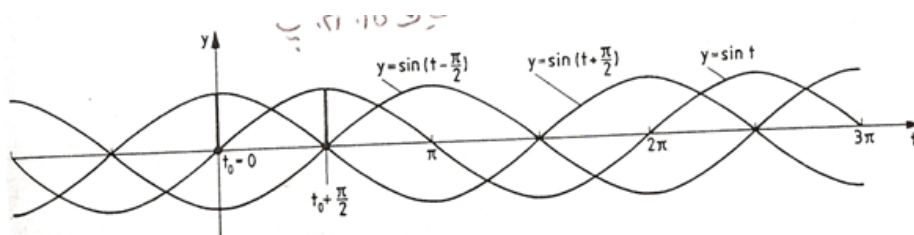
په شکل ۱۵. ۲۱ ت کی هارمونی فنکشن  $y = 2 \cdot \sin \left( 3t + \frac{\pi}{2} \right)$  انخوردی.

هغه امپلیتود  $a = 2$  لري، پریودی یی  $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi$  او په  $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$

کی

د  $\sin t$  و کین لورته راکنبل شوی دی.

خبره ۱۵. ۲ پ  $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$



د تریگونومتری فنکشنونو (یواځني) په معکوسوالي یا په څټوالي کی مورن په ځانگړو یو غبریزو یا مونوتونی اینټروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

پیژند. ۱۵. ۱۴: د لاندې فنکشنونو

1. $y = \sin x$ ,	$D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,	$W = [-1, 1]$	(15.12a)
2. $y = \cos x$ ,	$D = [0, \pi]$ ,	$W = [-1, 1]$	(15.12b)
3. $y = \tan x$ ,	$D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,	$W = \mathbf{R}$	(15.12c)
4. $y = \cot x$ ,	$D = (0, \pi)$ ,	$W = \mathbf{R}$	(15.12d)

پرخت يا چپه فنکشنونه لاندې ځیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

SEP

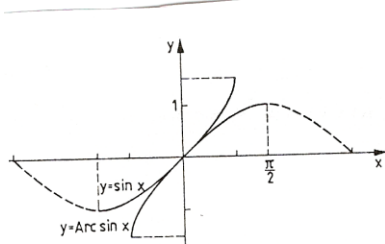
$$1. y = \text{Arc sin } x, \quad D = [-1, 1], \quad W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (15.13a)$$

$$2. y = \text{Arc cos } x, \quad D = [-1, 1], \quad W = [0, \pi] \quad (15.13b)$$

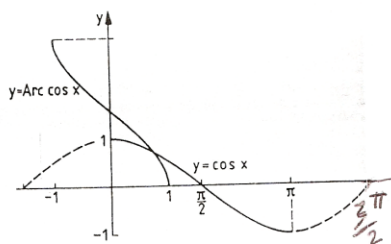
$$3. y = \text{Arc tan } x, \quad D = \mathbf{R}, \quad W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (15.13c)$$

$$4. y = \text{Arc cot } x, \quad D = \mathbf{R}, \quad W = (0, \pi) \quad (15.13d)$$

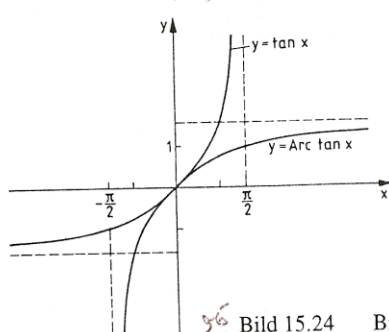
د تریگونومتری فنکشنونو برخی په مونوتوني ایتروالونو ( ۱۲. ۱۵ الف (تر) په ۱۲. ۱۵ ت (او د هغوي چپه) ۱۳. ۱۵ الف (تر) ۱۳. ۱۵ ت (په ځیرو ۱۵. ۲۲ تر ۱۵. ۲۵ پورې انځور دي.



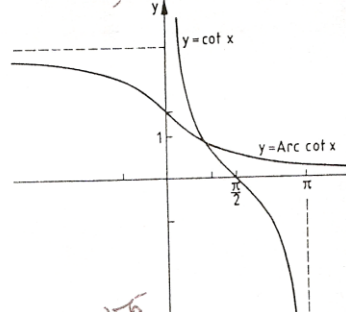
فکره ۱۵.۲۲ Bild 15.22



فکره ۱۵.۲۳ Bild 15.23



فکره ۱۵.۲۴ Bild 15.24



فکره ۱۵.۲۵ Bild 15.25

## ۱۵. ۴. ۱۵ خنځيري (ترلي) فنکشنونه

پيژند ۱۵. ۱۵ :

$D \in x$  د لپاره يو فنکشن  $z = g(x)$  ارزښتديري  $W$  سره ورکړ شوی او برسیره

پر دې  $z \in W$  لپاره يو فنکشن  $y = f(z)$  ورکړ شوی، نو

$$y = f(g(x)) \quad (15.14)$$

د  $x$  ترلي (خنځيري) فنکشن بلل کيږي.

**يادونه:** يو ترلي فنکشن کيدی شي چی زیاتو خنځيرونو سره هم رامنځ ته شي: د بيلگي

$$z = f(x)$$

د  $W \in D, z \in x$  لپاره او  $w = h(z)$  د  $W^* \in W, w \in z$  لپاره

او  $y = f(w)$  د  $W^* \in W$  لپاره لرو،

نو  $y = f[h(g(x))]$  هم د  $x$  يو ترلي فنکشن دی.

**بيلگه ۱۵. ۱۶:**

الف: د  $z = 2x + 4$  او  $y = e^z$  سره ترلي فنکشن  $y = e^{2x+4}$  لاس ته راځي.

ب: په ترلي فنکشن  $y = \sin x^2$  کې  $z = x^2$  دننۍ - او  $y = \sin z$  د باندنی

فنکشن دی. په ترلي فنکشن  $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$  کې  $z = \sin x$  د

ننۍ - او  $y = z^2$  د باندنی فنکشن دی.

پ: د

$$y = \cos w \quad w = \sqrt{z}, \quad z = 2x + 4,$$

سره ترلي فنکشن  $y = \cos \sqrt{2x+4}$  لاس ته راځي

ت: په ترلي فنکشن  $y = \text{Arctan} 1/(x-1)$  کې  $z = x-1$  دننۍ،  $w = 1/z$  منځنی او

$y = \text{Arctan} w$  د باندنی فنکشن دی.

**يادونه:** د يوه ورکړ شوي  $x$  - ارزښت لپاره د خنځيري فنکشنونو د فنکشن

ارزښت شميرنی له « دننه » پيل کيږي.

بيلگي ۱۵. ۱۶ ته

(ب) د  $x = 0.5$  لپاره دی

$$z = x^2 = 0,5^2 = 0,25; y = \sin x^2 = \sin z = \sin 0,25 = 0,24740$$

او

$$z = \sin x = \sin 0,5 = 0,47942; y = \sin^2 x = z^2 = 0,47942^2 = 0,22984$$

[ P T P T P T P T P T P T P ]  
[SEP:SEP:SEP:SEP:SEP:SEP:SEP:SEP]

$$z = x - 1 = 2 - 1 = 1; w = 1/z = 1/1 = 1 \text{ د } x = 2 \text{ لپاره دى}$$

$$y = \text{Arctan} w = \text{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$$

روښانونه، تشریح:

$y = f(x)$  تحليلي (شننيزه) وينا بلل کيږي، که  $f(x)$  له رييل گڼونو او بستيزو فنکشنونو څخه د زياتون، کمون، ځل، ویش، له لارو تړلی يا ناتړلي (خنځيري يا نا خنځيري) جوړيږي

د بيلگي په توگه دې په پام کې وي، چې ماتلاندي فنکشن دې صفر نه وي د پوټنځ بنسټ او همداډول راديکاند منفي نه شي کيدلی، او يا بايد مثبت وي،

چې د لوگاريتم نومروس بايد مثبت وي او  $\text{Arc sin } f(x)$  همداډول  $\text{Arc cos } f(x)$  تیک د  $x \in [-1, 1]$  لپاره پېژند لري يا تعريف دي

بيلگه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندي تحليلي ويناو لپاره دې تعريفديږي پيدا کړی شي.

$$y = \sqrt{x^2 - 3} \text{ الف } [P] [SEP]$$

راديکاند بايد کميز يا منفي نه وي، چې دا مان لري:

$$[P] [SEP] x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 3 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{3} \quad (x \geq \sqrt{3} \vee x \leq -\sqrt{3})$$

$$D = (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty)$$

(ب)  $y = \lg(x+2) + 1/(3+2x-x^2)$  له لمري زياتونی کی بايد  $\text{Numerator} > 0$

نومروس وي دا په دې مانا چې:  $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$  ،

$$D1 = (-2, \infty)$$

په دوم زياتوني کی بايد مات لاندي په صفر برابر نه وي ( $0 \neq$ ) وي . د مات لاندي صفر ځايونه

$$\text{له } 3 - 2x - x^2 = 0 \text{ څخه لاس ته راځي او دي } x_1 = 2, x_2 = -1.$$

$$\text{نو } D2 = \mathbb{R} \setminus \{2, -1\} \text{ دى}$$



a)  $y = 2x - 3$       b)  $y = -2x + 3$       c)  $y = x^2$   
 d)  $y = -2x^2$       c)  $y = 2x^2 + 1$       f)  $y = |x|$

۴ - پریکړه وکړی چی لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دوو کوم نه دي:

a)  $y = x$       b)  $y = x + 1$       c)  $y = x - 1$   
 d)  $y = 2x^2$       e)  $y = 2x^2 + 1$       f)  $y = (x-1)^2$   
 g)  $y = x^2/2$       h)  $y = x^5$       i)  $y = |x|$

۵ - د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړی

a)  $y = -2x + 3$       b)  $y = (x-1)(x+2)$       c)  $y = x^2 - x - 2$   
 d)  $y = 2x^2 - 12x + 18$       e)  $y = x^2 + 1$       f)  $y = x^3$

۶ - لاندې فنکشنونو ته په څټ فنکشنونه پیدا کړی

a)  $y = -2x + 3$       b)  $y = x^2 + 1, D = [0, \infty), W = [0, \infty)$   
 c)  $y = (x+1)^2, D = [-1, \infty), W = [0, \infty)$       d)  $y = x^3/2, D = [0, \infty), W = [0, \infty)$

۷ - لاندې لاینی فنکشنونه ورکړ شوي دي

a)  $y = 0,4x - 1,6$       b)  $y = -x + 1$       c)  $y = (1/5)(3x + 1,5)$   
 d)  $y = 2$       e)  $3x - 3y - 7 = 0$       f)  $4y + x = -1$

کرنې دې وکښل شي، جگوالي کونج  $\infty$  دې پیدا شي، او صفر ځایونه  $x_N$  وگڼی!

۸ - کومه کرښه له لاندې ټکو تیریري

a) (2,3) (5,5)      b) (1,1) // (3,7)      c) (-1,0) // (-2,-3) ?

۹ - لاندې مربع بلواک یا فنکشنونه ورکړ شوي

a)  $y = x^2 - 4x + 3$       b)  $y = x^2 - 8x + 16$       c)  $y = x^2 - 6x + 10$   
 d)  $y = (x-5x)(x-1)$       e)  $2x^2 - 10x + 12$       f)  $y = 3x^2 + 6x$   
 g)  $y = -\frac{x^2}{2} + x + 4$       h)  $y = x^2/4 + x + 2$       i)  $y = 5x^2 + 45$

د ککرې کواور دینات دې پیدا شي، صفر ځایونه دې وگڼل شي او پارابول دې انځور شي

۱۰ - د لاندې ټولریشنل فنکشنونه دې دورکړشو  $x$  ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وگڼل شي. فنکشنونه د  $k$  د خلفورم باندې انځور شي

$$a) y = f(x) = x^3 - 6x + 5; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

$$b) y = f(x) = (1/2)x^3 - x^2 - (13/2)x - 5; \quad x_1 = 1/5, \quad x_2 = 5$$

$$c) y = f(x) = x^3 + 2x + 2x; \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 0, 2$$

$$d) y = f(x) = x^4 - x^3 - 28x^2 - 32x + 40; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 5$$

$$e) y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x^2 + 5x + 6; \quad x_1 = 1, 5, \quad x_2 = 2$$

۱۱ - مات ریشنل فنکشنونه ورکړ شي:

$$a) y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$$

$$b) y = \frac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 5x + 6}$$

$$c) y = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^4 - 13x^2 + 36}$$

$$d) y = \frac{x}{(x^3 + 6x^2 + 9x)(x^2 - 4x + 4)}$$

$$e) y = \frac{2x^3 - x^2 + 6x - 3}{x^2 + 3}$$

صفرخایونه دې وگڼل شي، پول. تشخیصایونه او د  $\pm 8$  لپاره خان نیوته!

۱۲ - لاندې فنکشنونو ته په څټ فنکشنونه جوړ کړی

$$a) y = 2^{x-1}, D = \mathbb{R}, W = (0, \infty) \quad b) y = 2^x - 1, D = \mathbb{R}, W = (-1, \infty)$$

$$c) y = \log_3 x, D = (0, \infty), W = \mathbb{R} \quad d) y = \ln(x-1), D = (1, \infty), W = \mathbb{R}$$

۱۳ - لاندې فنکشنونو ته مونوتوني ایتروالونه ورکړی او برخه په څټ فنکشنونه:

$$a) y = (x-1)^2 \quad b) y = x^2 - 1 \quad c) y = (x+1)^2 + 1$$

$$d) y = x^2 - 4x + 5 \quad e) y = 4x^2 \quad f) y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$$

۱۴ - ټرلي فنکشنونه  $y = f[h(g(x))]$  په دتنه او دباندې فنکشنونو

$$y = f(w), \quad w = h(z), \quad z = g(x)$$

بیبل (تجزیه) کړی (د تعریف او ارزښته پریور کولو څخه کیدی شي تیرشو)

a) $y = e^{(x+1)^2}$	b) $y = (e^{x+1})^2$	c) $y = \lg \sqrt{2x-3}$
d) $y = \sqrt{\lg(2x-3)}$	e) $y = \tan \sqrt{x-3}$	f) $y = \sqrt{\tan(x-3)}$
g) $y = \sqrt{\tan x - 3}$	h) $y = \tan \sqrt{x} - 3$	i) $y = \text{Arc sin } x^2 +$
j) $y = [\text{Arc cos}(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$	k) $y = \ln \sin \frac{x}{3}$	l) $y = \sin \ln(x + \frac{1}{3})$
m) $y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$	n) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$	o) $y = \frac{1}{\sin \sqrt{x}}$
p) $y = \text{Arc cote}^{2x+1}$		

۱۵- تړلي فنکشنونه  $y = f[h\{g(k(x))\}]$  په دباندي او دته فنکشنونو

$$y = f(v), v = h(w), w = g(z), z = k(x)$$

بیل کړی (د تعریف- او ارزښته پری باندي تیرونه کیدی شي )

a) $y = [\text{Arc cot}(e^x + 1)]^{\frac{1}{2}}$	b) $y = e^{\text{Arccot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$	c) $y = \sin \left[ \cos \frac{x-4}{3} \right]^2$
d) $y = \sqrt{5 - \tan \sqrt{x}}$	e) $y = \cos[\ln(x^2 - 1) + 1]$	f) $y = \log_3 [\sqrt{2^x + 1}]$
g) $y = e^{\tan \sqrt{7x-1}}$	h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$	

۱۶- د لاندې شننیزو یا سپرنیز (تحلیلي) افادو لپاره تعریف پری پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$	b) $y = \sqrt{3-x^2}$	c) $y = \sqrt{x^2-9}$
d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$	e) $y = \frac{1}{x^2+x-6}$	f) $y = \ln(2x+5)$
g) $y = \text{Arc cos}(2x-4)$	h) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$	i) $y = \ln x + \frac{1}{x-1}$



## د ریګوډیکچ یا تریګونومتری Trigonometrie

### تعریفونه

د ریګوډیکچ یا تریګونومتری دنده ده چی په هواره یا په هوا کی د ریګوډی کچ کړي ، د ځانګړو بلواکو له لارې، دې په نامه تریګونومتری بلواکو. برسیره پر دې د دې په مرسته پریوډیکي یعنی په منظمه فاصله پرلپسی تکراریدونکی پیښی (موزی یی تل راګرځیدونی بللی شو) خپل کیري.

تریګونومتری تر هیپارچ ( Hipparch ۱۶۰ - ۱۲۵ له م پخوا ) پوري تعقیبیدی شي، وروسته له مصري پتولیمویس Patolemäus چي په ۱۶۸ م کال کی مړ شوی او بیا له هندي او عربو شمیرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پیل دا د کارونی یا عملی کیدو د ستونځو سره مخامخ وه. د ریګوډیکچ خپل کارونه په استرنومی او فزیک، د ځمککچ یا اندازه کولو، د ځمک اندازونی، نقشو علم، او ابادی او نوتیک ( Nautik ) د کیشتیو د لارو نقشه ویستلو پوهنه ( کی مومی.

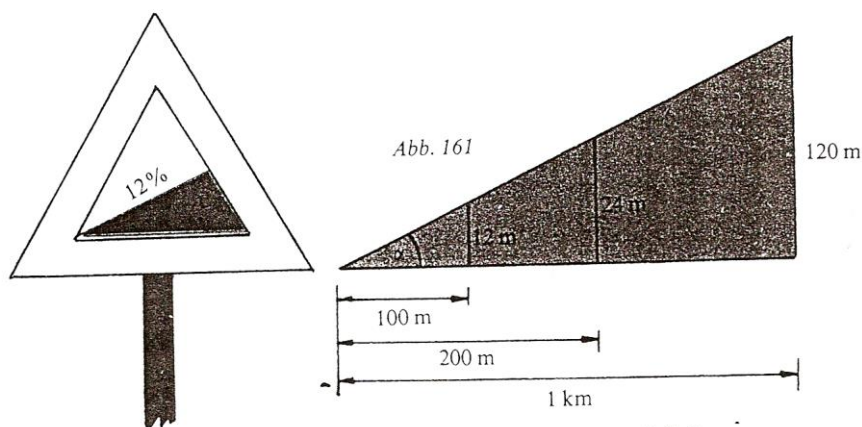
د تریګونومتری مانا یا مهموالی په ځانګړي ډول په دې ریښتینوالی یا واقعیت کی نغښتی، چی د دې په مرسته د پایکرښبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي ( پام دې وي، چی دا تراو شمیرپوهینیز مفهوم لري).

پیلبللګه: د په مانا یا مهم جګوالي یا لویدکرښو نخبه لوحی یا په بله عبارت د زوري او پیچومی لیکتختی ( دې ته دې پام وي چی ما دا کلیمی هر چیرې د زوري او پیچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چی په هغه مناسب ځای

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي ( وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟

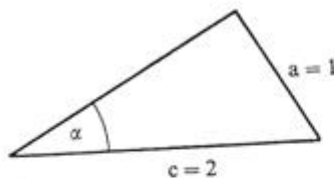
پیچومی یا جگوال 12% په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جگوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیک ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جگوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توگه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جگوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جگوالی لیدیدونکی ۱۲۰ متره ته جگپړي. کتل کیږي یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومي یا جگوالی کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځاننیونه و هواری فاصلي ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځاننیونه ثابت یا ځای په ځای پاتیري او د په سلو کی گڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جگوالی اوږدوالي معلومات نه



خیره ۱۹۴

د فنکشن لپاره ما بلواک لیکلی یعنی همغه د درې له تابع څخه مې را اخستي، چې نورو ژبو کې یې بلواک څیره ده، چې دې امله یې څیره نمونه سمه ده او کارونه یې څیرونه ده.

ساینبلواک sinusfunktion: بلیکه:

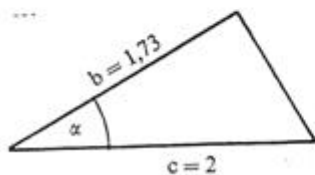


$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزی}}$$

څیره ۱۹۶

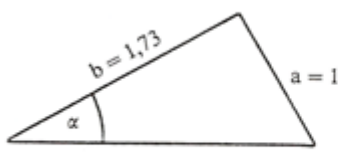
کوساینبلوک Cosinusfunktion: بیلکه:



$$\cos 30^\circ = \frac{1.73}{2} = 0.8660$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرته کتیت}}{\text{هیپوتینوزی}}$$

تنجنتبلواک Tangensfunktion: بیلکه:



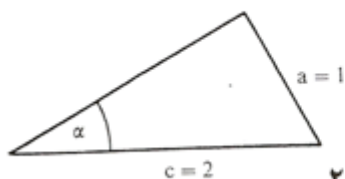
$$\tan 30^\circ = \frac{1}{1.73} = 0.577$$

څیره ۱۹۸

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$$

د کونجونو د پینونومونی (دا ټول شته، خو بیا هم اړین دي).

کوسیکانسبلواک Kosekansfunktion بیلگه:



$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزی}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

خیره ۲۰۱

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{2}{1} = 2$$

مور به زیات وخت لمړنی درې یا په همدې توګه لمړنی څلور بلواکه د کارونې لپاره راونیسو یا وکاروو.

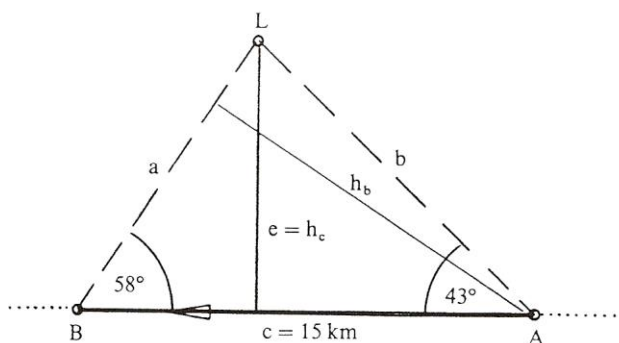
په خوښه دریکوډیو کی شمیرنه

سره له دې چی کونجبلواکي یواځی په ولاړکونجیز دریکوډی کی باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جگوالی په جوړولو کی هر دریکوډی په ولاړو برخه دریکوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرنی هنري، د مخکنی مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکرښي وینا وي د پیل دریکوډی باندي لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشو کونجونو.

#### پیلبلگه

یوه کینستی د رڼاډزکړي ( کله چی کینستی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کینستی یا یو بل څه ته که یوه کینستی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې څرګندیږي او نورې خبر ورته لیرونکی په دې پوهیږي، چی څه پیښ شوي دي). دلته  $\alpha = 43^\circ$  د تګ په لور اندازه کیږي او له

یوه تگ پایکرنیې  $c = 15 \text{ km}$  او کونج  $\beta = 58^\circ$  وروسته.  
 په دوم ډز کی کیښتی له ډز رڼا اور څخه څومره لرې ده؟  
 د A څخه و B ته د کیښتی نزدې واټن e د ډز رڼا اور څخه څومره لري دی؟  
 په A کی له اور څخه څومره لرې وه؟



څیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 79^\circ; \quad \sin \beta = h_b / c \text{ او } \sin \gamma = h_b / b$$

د  $h_b$  په لور اوبسول یا حلول او په همدې وخت کی لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin \beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin \gamma$$

$$\Rightarrow c \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$

$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58^\circ}{\sin 79^\circ} = 12,959 \text{ km}$$

د لنډ واټن  $e$  لپاره باور لري:

$$\sin \alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin \alpha = 12,959 \cdot \sin 43^\circ = 8,838 \text{ km}$$

$$\sin \beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin \beta} = \frac{8,838}{\sin 58^\circ} = 10,421 \text{ km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دریګوډي اړخونو  $a$  او  $b$  په شمیرنه کې مرستندوي لویی له منځه ځي او باور لري:

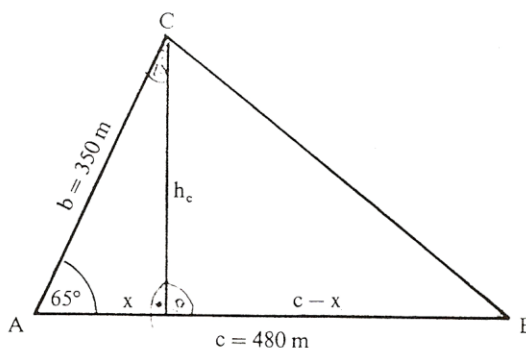
د ساین جمله :

په خوبه دریګوډي کې د اړخونو ځاننویونه یا تناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځاننویونه یا تناسب دی.

$$\begin{aligned} \sin \alpha / \sin \beta &= a / b & \sin \beta / \sin \gamma &= b / c \\ \sin \gamma / \sin \alpha &= c / a \end{aligned}$$

د ساین جمله په پخ دریګوډي کې هم باور لري (تمرین دې وکتل شي). ددې سره په یوه دریګوډي کې نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کیږي، چیرته چې دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي. سړی بیا څه کوي که دریاوړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راگیر کونج؟

پیلبلگه : په یوه د ډبروسکرو کان کی دوه ستنی  $b = 350 \text{ m}$   
او  $c = 480 \text{ m}$  دي او یو کونج  $\alpha = 65^\circ$  څرندوي.  
د B څخه و C ته به د نښلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟



څیره ۲۰۳

اوبی یا حل :

جگوالی یا جگمی  $h_c$  کرښه  $AB = c$  په دوه ټوټو  $x$  او  $c-x$  ویشي.

دلته دی  $x = b \cdot \cos \alpha$  ،

ځکه چی  $\cos \alpha = x / b$  دی . د پیتاگوراس د جلی له مخی

لرو :  $h_c^2 = b^2 - x^2$

او

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 .$$

$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb \cos \alpha$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

د اړخونو اوږدوالی نوموونی او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راگرځیدونکی (خیکلیکي یوناني کلیمه ده گردی ډوله یا منظم بیرته راگرځیدونکی zyklisch) یو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

### کوساین جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

په هر یوه دریګوډي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او د دې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاګوراس د جملی عمومیت یا ټولیز ته هم وايي. ( تمرین ۶ مخ دې وکتل شي )  
د کونجبلواک له لارې یو بل متود، د ډیرګوډي شمیرلو لپاره، تر څو دا په دریګوډيو ویشل کیدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه یی څرګند وي، پیدا شو. د دې ټولو سره د څلورګوډي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیدا شو:

$$A = 0,5 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = w(d_1; d_2) \quad \text{چیرته چي}$$

$$A = 0,5(d_2 h_1 + d_1 h_2) \quad \text{اوبی یا حل :}$$

که  $d_1$  په  $e$  او  $f$  ټوټه یا تجزیه شي، نو لرو

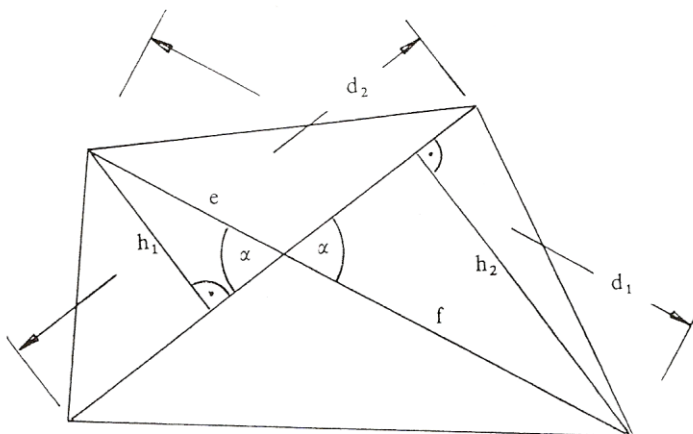


$$h_1 = e \cdot \sin \alpha$$

$$h_2 = f \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow A = 0,5 \cdot d_2 (e + f) \sin \alpha$$

$$\Rightarrow A = 0,5 \cdot d_2 d_1 \sin \alpha$$



څیره ۲۰۴

### د په خوبنه کونجونو تریگونومتریکی بلواکي

په اخره برخه کی مو وویل، چی کونجبلواک، نه یواځی د دننه لورته تیرو درېگوډیو لپاره، بلکه د هغو کونجونو لپاره چی له ۹۰ درجو لوی وي، هم هدفمند (موخور) تشریحور دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کیږي.

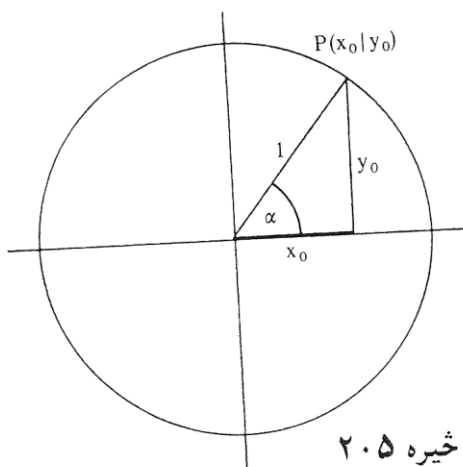
دا پراختیا څنگه تصور یا د خیالور کیدی شي؟

په نښه توگه داسی کیدی شي چی په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کی یوه گردی ووهی چی وړانگه یی ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی ( دې ته یوونگردی ویل کیږی، ځکه چی وړانگه یی یو یوون دی) او د گردی منځتکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردینات سرچینه یو په بل پریوځی . نو بیا هر دریگودی، چی د هغی یو کونج د گردی ځنتری کونج دی، یعنی کونج یی د گردی په منځ یا ځنتر پروت دی، (خیره ۲۴) کم له کمه یی یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لری. دا د دریگودی په دننه کی شمیرنه او اړیکي اسانه کوی.

لمړی د یوه ولاړ کونجیز دریگودی څخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي څلورمه یا کوادرنانت (Quadrant) کی پروت دی . نو هیپوتینوزی ۱ اوږدوالی لری، او په گردی، د کونجتگی  $P(x_0|y_0)$  په پام کی نیولو سره، باور لری:

$$\sin \alpha = y_0 / 1 = y_0, \quad \cos \alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرنی د پریوستون او یا د سیوربدرځونو په څیر لاس ته راځی، که موږ وړانگه د یوه ټالوهونکی مړوند په څیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محورغبرگی رڼا لاندې راشی.



خیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریگودی کی کیدی شي چی د پیتاگوراس جمله وکارول شي:

<p>تریگونومتریکی پیتاگوراس:</p> $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
---------------------------------------------------------------------

چیرته چی  $\sin^2 \alpha = \sin \alpha \cdot \sin \alpha$  په مانا دی.

کیدى شي ، چى پوښتنه وشي چى همدا « سيورى » بيا كله لاس ته راتلى شي .  
دا حالت بيا ټيک هلته لاس ته راځي، چى وړانگه د منفي  $x$ -محور سره يو  
کونج  $\alpha$  جوړ کړي، يعنې ځنټريکونج يى  $180^\circ - \alpha$  وي.

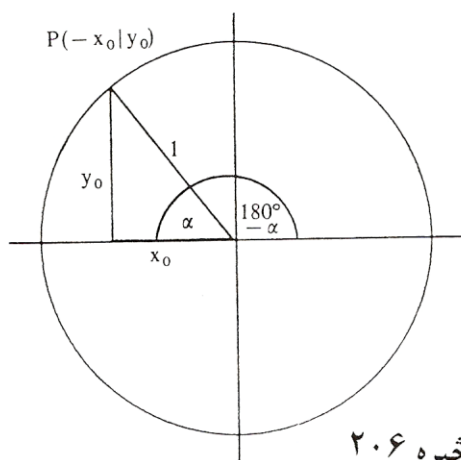
د « سيوروخپرو » څخه لاس ته راځي:

$$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

ځکه چى دا سيورى همغومره اوږد  
دى لکه د مخه، مگر اوس له صفر  
پيل مخامخ (منفى) لور ښايي.

په ورته توگه لاس ته راځي :



څيره ۲۰۶

$$\sin (180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha;$$

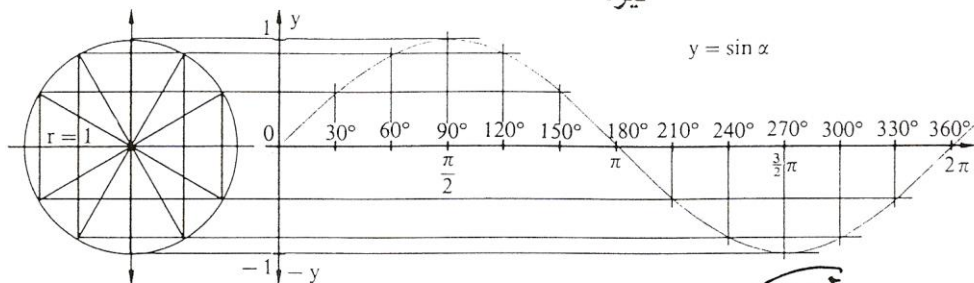
$$\cos (180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin (360^\circ - \alpha) = \sin (-\alpha) = -\sin \alpha;$$

$$\cos (360^\circ - \alpha) = \cos (-\alpha) = \cos \alpha$$

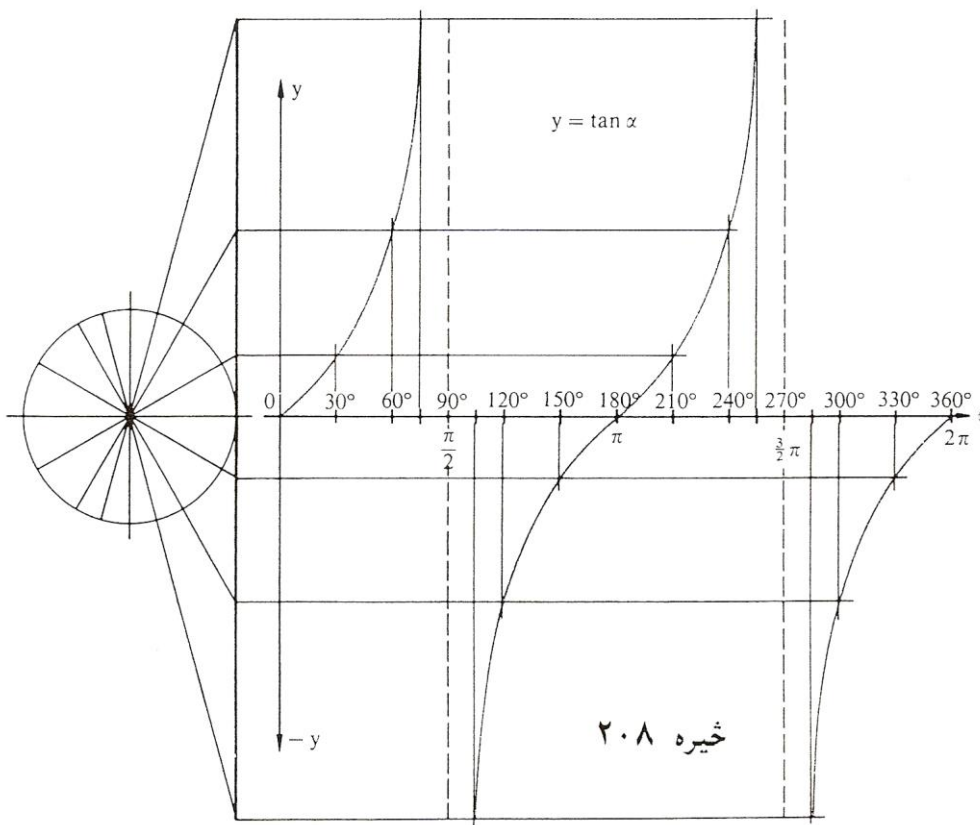
د کونج  $360^\circ + \alpha$  لپاره بېرته د سرچيني کونج اړيکى لاس ته راځي: همدا ډول  
د  $720^\circ + \alpha$  لپاره اوهمداسى نور. په دې توگه د په خوښه کونجفنکشونو يا  
کونجبلواکو لپاره د ساين او کوساين بلواک تعريف دي.  
د  $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$  له امله (مقايسه مخ | ۱۵) دا د تنجنت بلواک لپاره  
هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکگرافونه لاس ته راځي

څیره ۲۰۷



Die Sinuskurve:  $y = \sin x; x \in \mathbb{R}; y \in [-1; 1]$

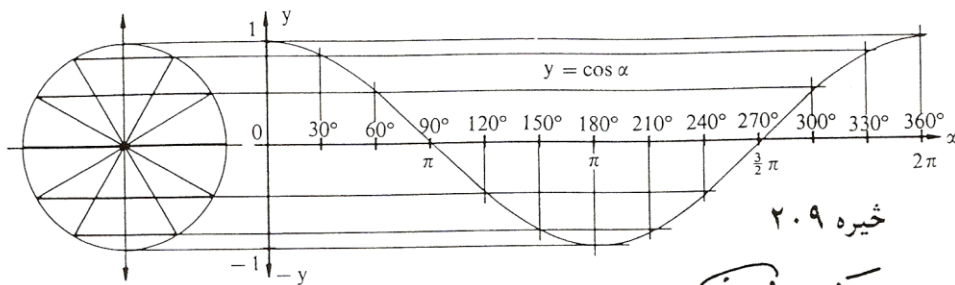
د سین کچه



Die Tangenskurve:  $y = \tan x; x \in \mathbb{R} \setminus \{x | x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\}; y \in \mathbb{R}$

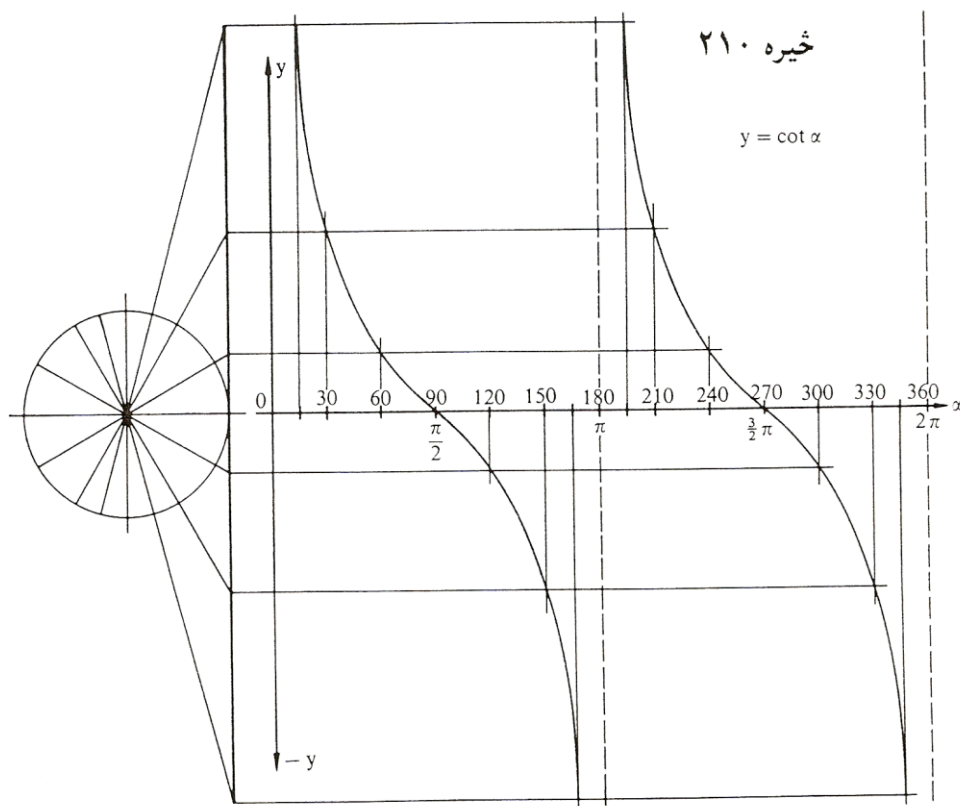
څیره ۲۰۸

د تانجنت کچه



Die Kosinuskurve:  $y = \cos x; x \in \mathbb{R}; y \in [-1; 1]$

خیره ۲۰۹  
دکوساین کویه

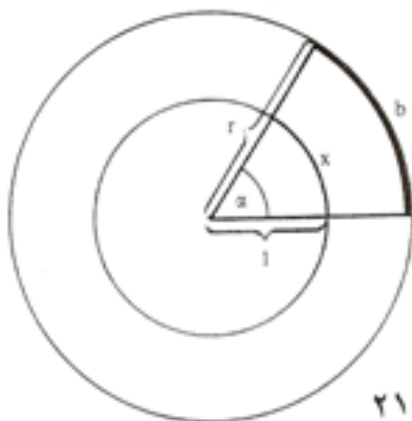


Die Kotangenskurve:  $y = \cot x; x \in \mathbb{R} \setminus \{x | x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\}; y \in \mathbb{R}$

خیره ۲۱۰  
دکوتنجنت کویه

## لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

په زړه درجه د کونجکچ یا - اندازې سره بلد یو ( دمخه ولیدل، چی ۳۶۰ درجی پوره گردی بنایي. هغه، چی لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده، چی گردی په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دواړو کچیوونونو یا کچواحدونو کی گډ دي، چی په گټونو اندازه کیږي، بی له کچ یوون ارزښتدیری رییلگټونه دي، په داسی حال کی چی وتل گټونه ( = د تعریف دیری گټونه ) یو یوون یا واحد ( درجه یا گون ) لري. دا په کارونه یا عمل کی موږ زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.



کونج لویی په واقعیت کی یوون «راد» ( rad ) « لري، مگر دا په کارونه یا عمل کی کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مونه راهڅوي. دا کونجکچونه چی د کونج لپاره په تریگونومتريکی بلواکو کی ایښودل کیږی ( د بیلگي په توگه  $\sin x$  )

ارگومنټ ( Argument تعریفدیری ) بلل کیږي. په تعریفدیری کی کیدی شي چی نوې درجه، زړه درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چی په جشمیری کی همغه مودوس په کار اچول شوي دی ( راتلونکی دې وکتل شي )

په برخه گردیبرخوکی وبنوول شو ( گردیبرخی د مخه خپل شوي دي ) چی هر کونج پورې یوه گردیبرخه یا گردی لینده اړه لري، نو ټولی گردی پورې  $360^\circ$  درجی کونج یا  $2\pi r$  اړه لري، یوه کونج  $\alpha$  پورې بیا یوه لینده  $b$  اړه لري، کومه چی په چاپیری کی  $\pi$  ناهمداسی نیسی لکه په پیل کی  $\alpha$  و  $360^\circ$  درجوته . دلته گردیگن دی :  $\pi = 3,14\dots$  (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

### پیلبلگه:

کونج  $60^\circ = \alpha$  له گردی د  $10$  سانتیمتره وړانگی سره یوه په لاندې ډول گردی لینده  $b = 20 \pi \cdot 60^\circ : 360^\circ = 10,47 \text{ cm}$  غوڅوي یا بیلوي. د گردی

چاپیری دی :  $U = 20 \pi = 62,83 \text{ cm}$

همغه کونج  $\alpha$  د  $5$  سانتی متره وړانگی سره گردیلینده

$b = 10 \pi \cdot 60^\circ : 360^\circ = 5,236 \text{ cm}$

غوڅوي. دا گردی لاندې چاپیری لري :  $U = 10 = 31,416 \text{ cm}$ .

له گردی د وړانگی  $r = 1 \text{ cm}$  سره ددې په خټې یا برعکس کونج گردیلینده

$b = 2\pi \cdot 60^\circ : 360^\circ = 1,047 \text{ cm}$

غوڅوي» د دې گردی چاپیری فقط  $U = 2\pi = 6,283$  دی .

له بیلگی څرگندیري، چی لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیري لکه وړانگه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونگردی د وړانگی  $1$  سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعریف: په یوونگردی د گردیلیندی اوردوالي کچگن، چی په خنتری کونج

باندې خیره شوي، لینده کچ بلل کيږي. لاندې شمیراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180^\circ) \cdot \pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x / \pi) 180^\circ = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$$

دا چې د وړانګي څرخون په پوره کونج هم وراوړیدی شي، نو له دې امله د لینده کچ لپاره په خوبنه رییلګڼونه پریښوول شوي.

بیلګی :

$$\alpha = 1^\circ \Leftrightarrow x = \frac{1^\circ}{180^\circ} \pi = 0,0175 \text{ (rad)}$$

$$\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ} \pi = \pi = 3,1416$$

$$\alpha = 30^\circ \Leftrightarrow x = \frac{30^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{6} = 0,5236$$

$$\alpha = 360^\circ \Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{180^\circ} \pi = 2\pi = 6,2832$$

$$\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow x = \frac{45^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{4} = 0,7854$$

$$\alpha = 720^\circ \Leftrightarrow x = \frac{720^\circ}{360^\circ} \pi = 4\pi = 12,5664 \quad \text{usw.};$$

$$\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{3} = 1,0472$$

$$\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow x = \frac{90^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{2} = 1,5708$$

$$\alpha = -75^\circ \Leftrightarrow x = \frac{-75^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{-5}{12} \pi = -1,309$$

## Arcusfunktionen ارکوسبلواکي

زیات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کيږي، چې لکه په ورکړشوو کرښخاننيونو راپیداشوې کونجونه څنګه معلومیږي یا څنګه راڅرګندیږي یا بهتره څنګه ځانونه نیسی. ددې لپاره چې دا پوښتنه ځواب شي، باید امکانات ولټول شي، چې د کونجبلواک ارزښتونو څخه څنګه بیرته کونج یا په همدې توګه د هغه تعریفیږي ته، په لینده کچ راتلی شو. دا کونجبلواک پریودیکی یا تل بیرته راګرځیدونکي بلواک دی، دا په دې مانا، چې د بلواک ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره یا .

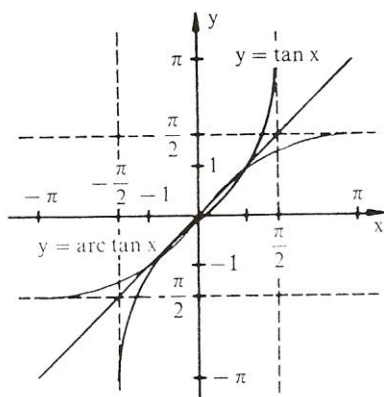
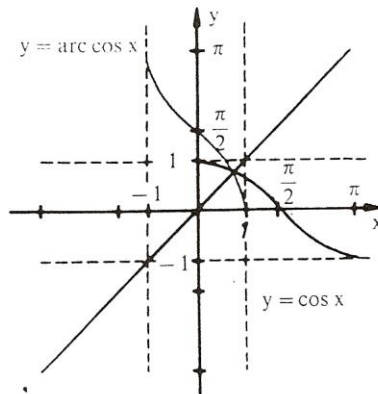
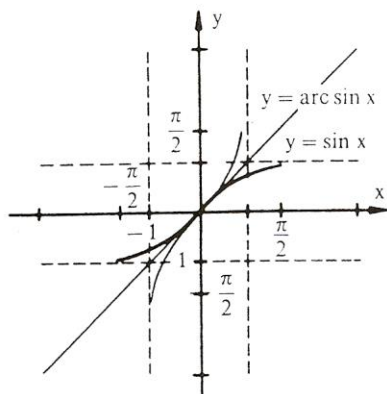


مختلفو واپتونو وروسته، بلواک ارزښتونه تکرارېږي. د دې لپاره چې په څټکيدنه ممکن شي، نو باید د خپل تعريف ډيری په يوه برخه ډيري رابند يا محدود شي.

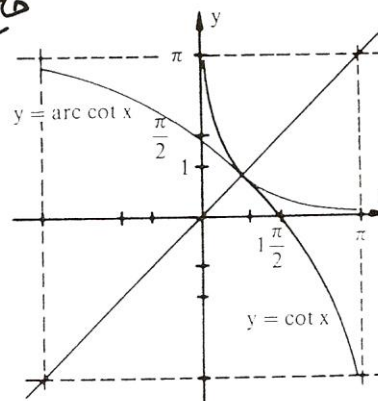
تعريف: د يوه ( رابند يا محدود ) تريگونوميټريکي بلواک په څټ بلواکونه ارکوس بلواک Arcusfunktion بلل کيږي يا څيکلوميټريکي بلواک ( لاتين: ارکوس Arcus = Bogen = لينده )

دلته  $\arcsin(x)$  لوستل کيږي «د  $x$  ارکوس ساين. د کونجبلواک تعريف ډيري دلته اړونده ارکوسبلواک ارزښت ډيري دی او په څټ ارگومنت يا تعريف ډيري دلته تل يو ريبيلگن دی.

Trigonometrische Funktion تريگونوميټريکي بلواک	Arcusfunktion ارکوسبلواک
$f: x \mapsto \sin(x)$ $ID = \left\{x \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ $W = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$f^{-1}: x \mapsto \arcsin(x)$ $ID = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ $W = \left\{y \mid -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$
$f: x \mapsto \cos(x)$ $ID = \{x \mid 0 \leq x \leq \pi\}$ $W = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$f^{-1}: x \mapsto \arccos(x)$ $ID = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ $W = \{y \mid 0 \leq y \leq \pi\}$
$f: x \mapsto \tan(x)$ $ID = \left\{x \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $W = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	$f^{-1}: x \mapsto \arctan(x)$ $ID = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $W = \left\{y \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
$f: x \mapsto \cot(x)$ $ID = \{x \mid 0 < x < \pi\}$ $W = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	$f^{-1}: x \mapsto \operatorname{arccot}(x)$ $ID = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $W = \{y \mid 0 < y < \pi\}$



فایده ۱۱۲



بیانگی

Beispiele:

1.  $\arcsin(0,8) = 0,9273(\text{rad}) = 53,13^\circ$
2.  $\arccos(1) = 0(\text{rad}) = 0^\circ$
3.  $\arctan(-100) = -1,5608(\text{rad}) = -89,43^\circ$
4.  $\text{arccot}(-70) = -0,0143(\text{rad}) = -0,82^\circ$

۵- دا چی کونجبلواک و ارکوسبلاک یو د بل په خت بلواک دې نو باور لري

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin(y)) &= y; & \arcsin(\sin(x)) &= x \\ \cos(\arccos(y)) &= y; & \arccos(\cos(x)) &= x \\ \tan(\arctan(y)) &= y; & \arctan(\tan(x)) &= x \\ \cot(\text{arccot}(y)) &= y; & \text{arccot}(\cot(x)) &= x \end{aligned}$$

یعنی په لاندې توګه هم

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin(0,4)) &= \sin(23,58^\circ) = 0,4 \\ \arccos(\cos(\pi/3)) &= \arccos(0,5) = 1,0472 \\ \tan(\arctan(-40)) &= \tan(-88,5679^\circ) = -39,9999 \\ \text{arccot}(\cot(60^\circ)) &= \text{arccot}(0,5774) = 1,0472 \end{aligned}$$

## د جشمیري کارونۍ یا استعمال لپاره

داچی پخوا معمول جدولونه د بلواک تعریفیږي او ارزښتدیري شمیرلو لپاره له کاره غورځول شوي دي او دنده یی ایلکترونیکي ماشینونو نیولی ده، غواړو چي د جشمیري استعمال په هکله هم څه ووايو

کورکمپیوتر زیات وخت داسی فنکشنونه یا بلواکي لري یا وظیفی په کلک اختیار کی لري، چی د درجي اورو په لینده کچ او په څپ کوي، مگر شمیردرخ په توگه باید د شمیرونکی په پروگرام کی ځای په ځای شوی وي.

پوره اسانتیاوې او زیاته کارونه د جشمیرې په غاړه پرته ده، دلته دې توکمی د <....> سره په نڅښه شي:

په قاعده کی دربی بلواک ورکړشوي دي:  $\langle \cot \rangle$ ;  $\langle \cos \rangle$ ;  $\langle \sin \rangle$  کونجنت بیا داسی شمیرلکیدي شي، د  $\langle \tan \rangle$  د  $\langle 1/x \rangle$  . د  $\langle \text{INV} \rangle$  - توکمي سره سری ارکوسبلواک ته راځي: نو  $\langle \text{INV} \rangle \langle \sin \rangle$  ارکوس ساین دی. په عمومی توگه کونج - بي پروا که په لینده کچ او یا درجه کچ ورکړ شوي وي - باید د فنکشن له مخه ورکړ.

## بیلگي

س

۱ لاندې جدول همغه د کارونۍ یا استعمال لپاره د جشمیري چمتووالی بنای :

Winkelmaß	کو کچ	TR-Modus	په نڅښونه	Beispiel	بیلگه
Altgrad	زړه درجه	DEG		$\sin 45^\circ = 0,7071$	
Neugrad	نوې درجه	GRAD		$\sin 50^\circ = 0,7071$	
Bogenmaß	لینده کچ	RAD		$\sin \frac{\pi}{4} = 0,7071$	

2. Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
$\sin 45^\circ$	45 <sin>	0.707106781	DEG
$\sin \frac{\pi}{6}$	< $\pi$ > <: > 6 <sin>	0,5	RAD
$\cot 30^\circ$	30 <tan> <1/x>	1.732050808	DEG
$\arccos 0,5$	0.5 <INV> <cos>	60(°)	DEG
$\arccos 0,5$	0.5 <INV> <cos>	$1.047 = \frac{\pi}{3}$	RAD
$\operatorname{arccot} 2$	2 <1/x> <INV> <tan>	26.56505118°	DEG
$\sin 220^\circ$	220 <sin>	-0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چی جبشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه») د زاړه - یا نوي درجی همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د تکمی <DRG> څخه لاس ته راځی یا د بیلگی په توگه <MODE> .

د ورکړشوي درجه گڼ اوپون په لینده کچ د <DRG ->> سره سورت نیسي. بیرته یا په څټ سپری داسی راځی- لکه چی لړل مو- د <INV> - تکمی سره.

## بیلگی

60°	<DRG>	60(rad)
60	<DRG>	60(grad)
60°	<DRG →>	1.047197551(rad)
1.047197551	<DRG →>	66.66666667(grad)
66.66666667	<DRG →>	60°
60°	<INV> <DRG →>	66.66666667(grad)
66.66666667	<INV> <DRG →>	1.047197551(rad)
1.047197551	<INV> <DRG →>	60°

دلته گراد نښونه ( gard ) نوی درجه ده یعنی گون ( gon ).

ځنی چشمیری په دې برسیره نور زیات امکانات هم لري ، نتیجی یی په گراد دقیقی، ثانیی اویا لسیز سیستم ورکړ شوي دي. بدلون بیا د تکی <DMS-Dd> سره صورت نیسی:

26.75° 30°15'	<inv><DMS - Dd> <DMS - Dd>	26°45' 30.25°
------------------	-------------------------------	------------------

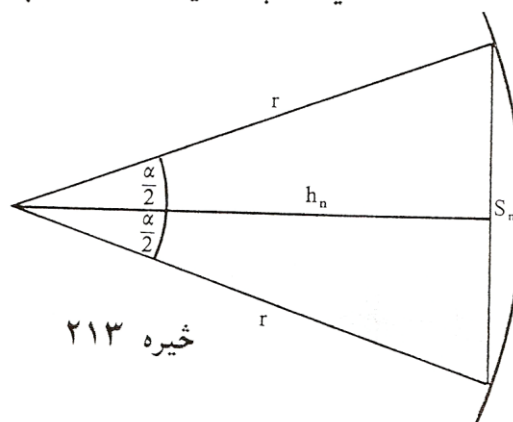
د " 30° 15' " ورکړه کیدی شي د چشمیری سره مختلف بدلون ولري دلته دې د چشمیری د لاس کتاب څخه گټه واخستل شي ( یادونه: زه پوهیږم چی داسی شیان مور متأسفانه په خپل هیواد کي نه لرو ، خو په هر صورت یي لیکل ضرور دي، دا پرمختگ مور هم خپل شاته نه شي پرینوولی )

پیلبللگه: دلته دې  $S_n$  د یوه منظم  $n$ -گودي د اړخ اوږدوالی وي، چی په یوه گردی کی چی وړانگه یی  $r = 5 \text{ cm}$  ده، راگیر دی.

الف) وښایی چی

$$S_n = 2r \cdot \sin ( 180^\circ : n )$$

ب) د یوه داسی  $n$ -گودي چاپیری  $U_n$  وشمیری ، چی  $n = 8;16;32;128$  وي، او په نزدې توگه یا تقریبی د دې گردی چاپیری د دې وړانگي  $r$  سره وښایی .



پ ( په همدې ډول  $n$ -گړدی له هوارو  $A_n$  څخه په نزدې توګه یا تقریبي د گړدی — هواره  $A$  وښایی .  
 اوبی (حل) : هر  $n$ -گړدی کیدی شي په  $n$  مساوي دريګوډيو ټوټه کړی شي .  
 د هغو د څینتريکونج  $\alpha$  لپاره باور لري  $\alpha = 360^\circ / n$  . د جګی یا جګوالی  $h_c$  د کښلو سره په هر مساوي پښیز دريګوډي کي ولاړکونجيزې نیایی د څنتریکونج یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\alpha}{2} = 360^\circ / 2n = 180^\circ / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n / 2) / r = \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow S_n = 2r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 2r \cdot \sin(180^\circ / n)$$

$$b) U = n \cdot S_n = 2r \cdot n \cdot \sin(180^\circ / n) = 10n \cdot \sin(180^\circ / n)$$

د ارزښتشمیرنو د غلطی مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که په دغه همغه لړپرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

$$\begin{aligned} 180^\circ \langle \text{STO} \rangle \langle : \rangle 8 \langle = \rangle \langle \text{SIN} \rangle \langle \cdot \rangle 8 \langle \cdot \rangle 10 \langle = \rangle 30.614675 \\ \langle \text{RCL} \rangle \langle : \rangle 16 \langle = \rangle \langle \text{SIN} \rangle \langle \cdot \rangle 16 \langle \cdot \rangle 10 \langle = \rangle 31.214452 \\ \langle \text{RCL} \rangle \langle : \rangle 32 \langle = \rangle \langle \text{SIN} \rangle \langle \cdot \rangle 32 \langle \cdot \rangle 10 \langle = \rangle 31.365485 \\ \langle \text{RCL} \rangle \langle : \rangle 64 \langle = \rangle \langle \text{SIN} \rangle \langle \cdot \rangle 64 \langle \cdot \rangle 10 \langle = \rangle 31.403312 \\ \langle \text{RCL} \rangle \langle : \rangle 128 \langle = \rangle \langle \text{SIN} \rangle \langle \cdot \rangle 128 \langle \cdot \rangle 10 \langle = \rangle 31.412773 \end{aligned}$$

پ ( د ډیرګوډي هواره د دريګوډيو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی  
 د هر دريګوډي هواره ده:  $0, 5 \cdot S_n \cdot h_n$  . د

$$h_n = r \cdot \cos(180^\circ / n)$$

$$S_n = 2r \cdot \sin(180^\circ / n)$$

او

له امله داسی دی



$$A = n \cdot 0,5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0,5 \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$$

له دې سره د نرې نورې (سینوس) د کونج کچه

360° <STO> <: >	8 <=> <SIN> <· >	8 <· > 12.5 <=>	70.710678
<RCL> <: >	16 <=> <SIN> <· >	16 <· > 12.5 <=>	76.536686
<RCL> <: >	32 <=> <SIN> <· >	32 <· > 12.5 <=>	78.036129
<RCL> <: >	64 <=> <SIN> <· >	64 <· > 12.5 <=>	78.413712
<RCL> <: >	128 <=> <SIN> <· >	128 <· > 12.5 <=>	78.508279

د یوه جسمیرې سره ، چي له یوې زخیرې زیاتې ولري ، لکه چی پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسیره نورې ثابتې هم زخیره کیدی شي» په یوه منظم پروگرامور ماشین سره کیدی شي چي د دا ډول شمیرنو لپاره د گوډونو گڼ څخه تـ شو یا د گوډونو گڼ باندې صرفنظر وشي .

## د تریگونومتريکي بلواکو خویونه

دا چی کونجکچ په درجه کچ او هم په لینده کچ ورکول کیدی شي، کیدی شي چی یوه کونج بلواک تعریفیږی یا  $\alpha$  او یا  $x$  وي. ددې لپاره چی د یوه بلواک خوي باندې ټینگار وکړو، باید په لاندې په لینده کچ تکیه وکړو.  
د لاندې خویونو لمړی ډله یواځي له تعریفمسوات ( د مخه راغلی ) او د بیتاگوراس له جملی لاس ته راځي ( د مخه لوستل شوې ) لاندې صدق کوي :

تعریف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزی}} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرتہ کاتیت}} = \frac{\text{هیپوتینوزی}}{\text{پرتہ کاتیت}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دې لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \Leftrightarrow \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دې لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دې سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x ; 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریگونومتريکي بلواکو کی هیله ده ، چی د پوتنخ لیکدود په پام کی ونیسی.

په لاندې پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$



په لاندې کې  $gegeben$  ورکړی او  $gesucht$  غوښتونې یا پلټونې په مانا دي

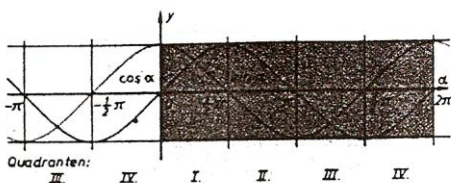
$\begin{matrix} gegeben \\ gesucht \\ \text{ورکړی} \\ \text{غوښتونې} \end{matrix}$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\sin x$	$\sin x$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\pm \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$
$\cos x$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\pm \frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$
$\tan x$	$\pm \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\cot x$

لکه چې د مخه مو په گوته کړل، کیدی شي چې تریگونومتريکي بلواک د مختلفو گونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواک ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

تعریف : تریگونومتريکي بلواک ټول پریودیکي یعنی بیرته راګرځیدونکی دي، دا په دې مانا، چې د بلواک ارزښتونه په منظمو واټنونو کې تکرارېږي. په دې د ساین بلواک او د کوساین بلواک راګرځیدنه (یا  $360^\circ$  درجې) لري، کونجنتبلواک راګرځیدنه (یا  $180^\circ$  درجې) لري.

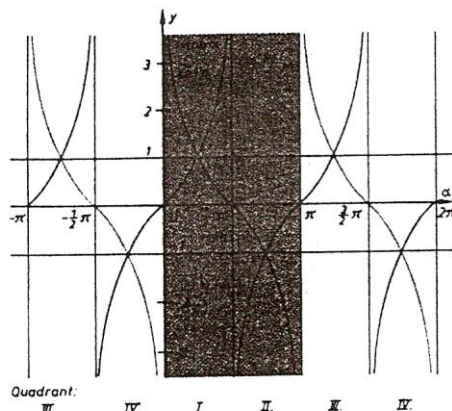
$$\left. \begin{aligned} \sin(x \pm 2k\pi) &= \sin x \\ \tan(x \pm k\pi) &= \tan x \end{aligned} \right\} k \in \mathbb{N}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(x \pm 2k\pi) &= \cos x \\ \cot(x \pm k\pi) &= \cot x \end{aligned} \right\} k \in \mathbb{N}$$



خیره ۲۱۴

د ساین - او کوساین فنکشن  
په وجود یان را لږ خبر نه



د تنجنت او کوټنېنت فنکشن په وجود  
بیلګې:

$\sin 50^\circ$	$= \sin (50^\circ + 360^\circ)$	$= \sin (50^\circ - 720^\circ)$	$= 0,76604$
$\cos -30^\circ$	$= \cos (-30^\circ - 360^\circ)$	$= \cos (-30^\circ + 1080^\circ)$	$= 0,86603$
$\tan 2,5$	$= \tan (2,5 - \pi)$	$= \tan (2,5 + 5\pi)$	$= -0,74702$
$\cot 10$	$= \cot (10 + \pi)$	$= \cot (10 - \pi)$	$= 1,54235$
$\sin 35^\circ$	$= \sin (180^\circ - 35^\circ)$	$= -\sin (180^\circ + 35^\circ)$	$= -\sin (360^\circ - 35^\circ) = 0,573576$
$\cos 35^\circ$	$= -\cos 145^\circ$	$= -\cos 215^\circ$	$= \cos 325^\circ = 0,81952$
$\tan 0,6109$	$= -\tan 2,5307$	$= \tan 3,7525$	$= -\tan 5,6723 = 0,700208$
$\cot 0,6109$	$= -\cot 2,5307$	$= \cot 3,7525$	$= -\cot 5,6723 = 1,428042$

که د فنکشن گراف ته په خیره شو نو په دې برسیره په ټینګه روښانېږي :

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلگی:

	$\alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
	$35^\circ$	$145^\circ$	$215^\circ$	$325^\circ$
sin	0,573576	0,573576	-0,573576	-0,573576
cos	0,819152	-0,819152	-0,819152	0,819152
tan	0,700208	-0,700208	0,700208	-0,700208
cot	1,428148	-1,428148	1,428148	-1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځی د جشمیری یا کمپیوتر څخه کار اخستل کیږي، هدفمند بولو، چی یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$2\pi$
$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
sin x bzw. sin $\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos $\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan $\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	-	0
cot x bzw. cot $\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0	-

د نته ماچو د هداړل په مانا دس او کیدس تیږی یا هموی .

له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا گوماني لاس ته راوړی شو

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) & \cos x &= \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \\ \tan x &= \cot \left( \frac{\pi}{2} - x \right) & \cot x &= \tan \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \end{aligned}$$

دا گومان کیدی شي په ولاړ کونجیز دریگوډي کي د تعریف په مرسته په ساده توگه وپنډول شي. :

$$\sin \beta = a / c \quad \text{او} \quad \cos \beta = a / c$$

د  $\beta = 90^\circ -$  له امله لاس ته راځي :

$$\sin \beta = \cos (90^\circ - \beta)$$

په ورته توگه نورې غوښتنې هم لاس

ته راتلی شي.

دا له څیرو څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، ځکه د ساین او کوساین بلواکو یا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنټ بلواکو گرافونه د  $x = \frac{\pi}{2}$  کرښی ته یو بل سره محوریو مترې ځغلي :  
له څیرو او بیلگو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

تعریف: د کوساین بلواک جفت دی ، لرو:

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

ساین - ، تنجنت - او کوتنجنټ بلواک نا جفت دي» د دوي لپاره باور لري:

$$\sin(x) = -\sin(-x), \quad \tan(x) = -\tan(-x); \quad \cot(x) = -\cot(-x)$$

یادونه : په دې نلواکو کي کیدی شي چی  $x$  له نوکانو دباندي هم وي:

بیلگی:

$$\sin 60^\circ = -\sin(-60^\circ) = 0,86603$$

$$\cos 0,75 = \cos(-0,75) = -0,70711$$

$$\tan 150^\circ = -\tan(-150^\circ) = -0,57735$$

$$\cot 1,3 = -\cot(-1,3) = 0,27762$$

### د زیاتون قضیې یا تیورمونه

دا چې کونجبلواک لایني نه دي (د فنکشن گراف کرښه نه ده، بلکه کره ده)، نو ډبل تعریف یې پورې ساده ډبل بلواک ارزښت اړه نه لري. لکه

$$\sin 30^\circ = 0,5 \quad \sin 90^\circ = 1 \quad \sin 180^\circ = 0$$

د داسې په نامه زیاتونمسئلي په مرسته ممکن کیږي، چې د بلواک ارزښت د کونج په دوه برابرولو یا په همدې ډول د دوه کونجونو یو په بل زیاتولو د یوگونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابې کړی شو.

بیلگی:

- 1 .  $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
- 1' .  $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$
- 2 .  $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
- 2' .  $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$
- 3 .  $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$
- 4 .  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$5. \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$6. \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$7. \sin \left( \frac{x}{2} \right) = \sqrt{0,5(1 - \cos x)}$$

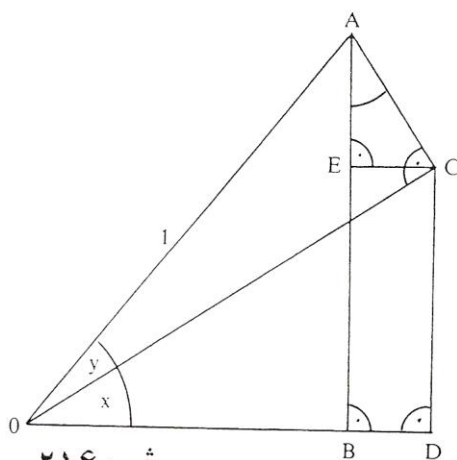
$$8. \cos \left( \frac{x}{2} \right) = \sqrt{0,5(1 + \cos x)}$$

$$9. \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} \quad \text{mit } \tan x \cdot \tan y \neq 1$$

$$9'. \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y} \quad \text{mit } \tan x \cdot \tan y \neq 1$$

$$10. \cot(x+y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y} \quad \text{mit } \cot x \neq -\cot y$$

$$10'. \cot(x-y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y} \quad \text{mit } \cot x \neq \cot y$$



خیره ۲۱۶

1. und 2.:

$$|OA| = 1$$

$$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y$$

$$|AB| = \sin(x+y); \quad |OB| = \cos(x+y)$$

$$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

$$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

بر حسب دو پر دبا لرو:

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$

$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د کای په های کولو تڼه ښودنه په لاس راځي

$$\sin(x + y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1': 2':

3. 1 4. :  $x = y$  های په های تڼه

5.: Setze  $z + t = x$ ;  $z - t = y \Rightarrow z = \frac{x + y}{2}$ ;  $t = \frac{x - y}{2}$

کین ره

$$\sin x = \sin(z + t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$$

پس لرو

$$= \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} + \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

$$\sin y = \sin(z - t) = \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} - \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

هراس

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

6. ښودنه په ورته توګه مخ ته راځي

7.:  $x = y = z/2$

لېږد

$$\Rightarrow \cos(x + y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2 \frac{z}{2} - \sin^2 \frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{z}{2} = \cos^2 \frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2 \frac{z}{2} - \cos z \quad (*)$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 \frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2 \frac{z}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos z)$$

درېښه ښوځي له لارې ښودنه لرو

8.:  $(*) \sin^2 \frac{z}{2}$  durch  $1 - \cos^2 \frac{z}{2}$ .

په (\*) کې ولیکه یا لېږد

9-10: د 11 پرېکړه 1 او 2 او ښښت له لوی لاس ته راځي



## بلواک یا فنکشن $y = a \cdot \sin(bx+c) + d$

لکه چی په پیل کی مو وویل په طبیعت او تخنیک کی ډیرې پېښې شته دی چې تل بیرته راگرځي یا لنډ: راگرځي، یعنی پریودیکی دي. د دې د تشریح لپاره په خپل سوچه یا خالصه بڼه تل د ساین بلواک بسیا نه کوي.

دا زیات علتونه لري: لمړی د ساینبلواک د  $-1$  او  $1$  ترمنځ ارزښت نیسي، له بلي لور داواقعي د کونج په واک کی نه دي بلکه د وخت په واک کی دي د یوې راگرځیدنې سره، چی دا په ساده توگه د  $2$  په ډول نه شي رانیولکیدی. له دې امله د ساین بلواک د دې کارونو د روښانولو لپاره باید موډیفیکیشن شي یا یی بڼه واوري. دا بڼه اوږون او د هغی تاثیر په لاندې لیدنه کی راټول شویدی، گراف یی ورزیاتی څیرونی لپاره دی. په ورته ډول د نورو کونجبلواکو لپاره باور لري په عمل کی مگر یواځي د ساینبلواک ( په همدې توگه د هغی مخامخ د کوساین بلواک چی په  $\pi/2$  سره راکښل شوی وي ) د مانا ډک دي. ( لوستل: له پښې لودرځږد )

بلواک	تاثیر	د کارونی ساحه	بیلگی
$y = \sin(x)$		ټولی تلپیرته راگرځیدونی تعاملونه	څلورمه ۲۱۷
$y = \sin(x) + d$	د $-1$ لور بلانډې راکښنه	د یوه مساوی او برل شپا لوند یو په بل بر لاند	څلورمه ۲۱۸



$y = \sin(x+c)$	د فاز تغییر یا های بدلون	په بدل بوښنا جریان د بوښنا او شیاؤونک تغییر د وښناؤونه	٢١٩
$y = a \cdot \sin(x)$	د امپلیټوډ د ټاکې بدلون فالتور - 1 له 180° فاز ټاکې بدلون ده	د یوه بندل خوږ بدنه	٢٢٠
$y = \sin(bx)$	د یو لړۍ د تغیر یا بدلون b > 1 سرعت 0 < b < 1 په کرا کېدل b < 0 په څپه کې کېدنه که مخور دی	د یو ښیښی ټوټې څپونه په یوه وخت دا ورنه او د هغې لړۍ لنډه له تکریمه د مخورید الویه او ازولو کې	٢٢١
$y = a \cdot \sin(bx+c)+d$	عمومي حالت	کمپلکس پروټوټې جریان یا عمل	٢٢٢

## تمرینونه

١ - د لاندې ورکړې سره څیره بله کړی

$$4^{\circ}6' = 4,1^{\circ} \quad ; \quad 10^{\circ}, 5' = 10^{\circ}30'$$

$$a) 6,75^{\circ} = \quad b) 120,48^{\circ} = \quad c) -75,65^{\circ} =$$

$$d) 52^{\circ}16' = \quad e) 97^{\circ}13' = \quad f) 44^{\circ}44' 44'' =$$

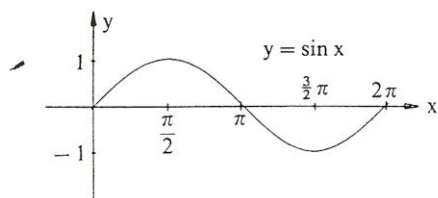
٢ - په درجه کچې وليکي

$$a) x = \frac{\pi}{3}, \quad b) x = -\frac{\pi}{4}, \quad c) x = \frac{2}{3}\pi$$

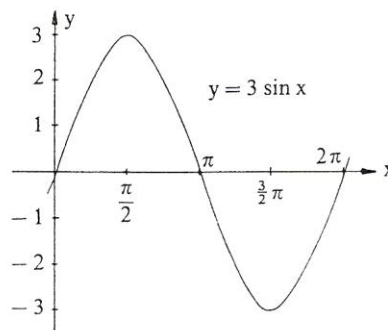
$$d) x = 4 \quad e) x = -3 \quad f) x = 4,7$$

٣ - په لینده کچې یې وليکي

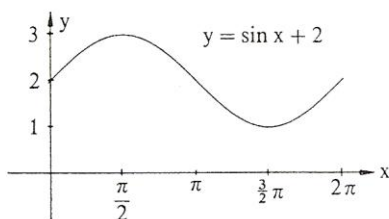
$$a) 15^{\circ} \quad b) -60^{\circ} \quad c) 540^{\circ} \quad d) 20^{\circ}15' \quad e) 15,75^{\circ}$$



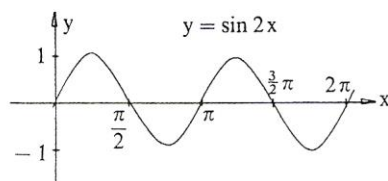
څیره ۲۱۷



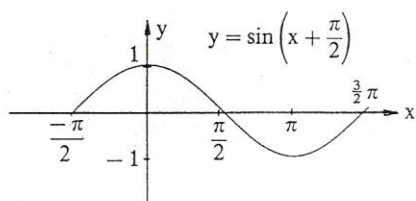
څیره ۲۲۰



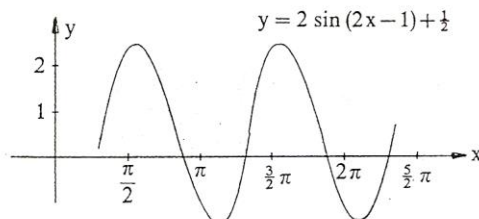
څیره ۲۱۸



څیره ۲۲۱



څیره ۲۱۹



څیره ۲۲۲

د دې بلواک گراف د ساین کړې  $y = \sin x$  څخه لکه چې گورو لاس ته راځي:

- ۱ - د ارزښت دوه ځله کیدل
- ۲ - د نیمې راگرځید اوږدوالی باندې پرسیدنه
- ۳ - په یوه یوون د ښي لور ته راکښنه
- ۴ - په  $1/2$  پورته لورته  $100\%$  راکښنه

## ۴ - وټاکي

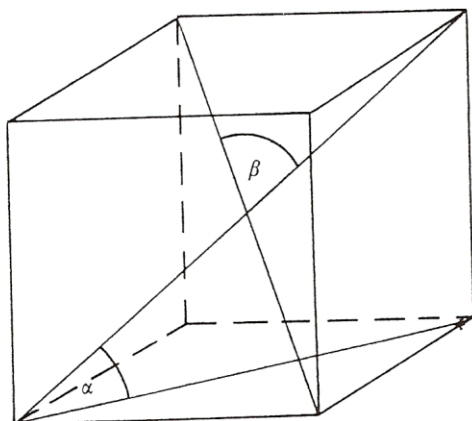
- a)  $\sin 20^\circ$     b)  $\sin(-30^\circ)$     c)  $\sin 172^\circ$     d)  $\sin 1^\circ 4'$   
 e)  $\cos 35^\circ$     f)  $\cos 380^\circ$     g)  $\cos(-27^\circ)$     h)  $\cos 47,9^\circ$   
 i)  $\tan 11^\circ$     k)  $\tan(-15^\circ)$     l)  $\tan 33,33^\circ$     m)  $\tan 13^\circ 13'$   
 n)  $\cot 870^\circ$     o)  $\cot(-11^\circ)$     p)  $\cot 14^\circ 14'$   
 q)  $\cot(-2^\circ 2')$   
 r)  $\sin \alpha = 0,8$     s)  $\cos \alpha = 0,9$     t)  $\tan \alpha = 2,5$   
 u)  $\cot \alpha = -1$     v)  $\sin \varphi = 0,3$     w)  $\cos \varphi = -0,13$   
 x)  $\tan \varphi = -4$     y)  $\cot \varphi = 0,3$     z)  $\arcsin(x) = \pi / 2$

۵ - په يوه ولاړ کونجيز دريگودي کې لرو  $\gamma = 90^\circ$  او په دې برسیره :

a)  $a = 7 \text{ cm}$ ;  $b = 6 \text{ cm}$

b)  $a = 16 \text{ cm}$ ;  $\gamma = 66^\circ 45'$

c)  $c = 5 \text{ cm}$ ;  $a = 3 \text{ cm}$



څیره ۲۲۳

پاتی ټوټی وشمیری

۶ - په مساوي پښيز دريگودي

کي (  $a =$  پښه ده ) دی

a)  $a = 10 \text{ cm}$ ;  $\alpha = 80^\circ 40'$

b)  $a = 12 \text{ cm}$ ;  $h = 8 \text{ cm}$

c)  $\beta = 40^\circ$ ;  $a = 7 \text{ cm}$

پاتی ټوټی وشمیری

۷ - د يوه پڅکونجيز ( $90^\circ < \alpha$ )

دريگودي لپاره ساين وشمیری

۸ الف ( کوساين د يوه پڅ کونجيز

دريگودي لپاره وشمیری ( $90^\circ > \alpha$ )

- ب) په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟  
 ۹ - په یوه مکعب کې د یوه هوا نیمې او بنسټهوارې ترمنځ کونج څومره لوي دی؟  
 څیره د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمو ترمنځ کونج څومره لوي دی؟  
 ۱۰ - د دوه گردیو وړانګی

$$r_1 = 5 \text{ cm}, r_2 = 4 \text{ cm}$$

دې او همداسی د منځتکو واټن  $|M_1M_2| = 8\text{cm}$  ورکړ شوی دی.

د دواړو گردیو د تماس

مماسونو غوڅکونجی وټاکي

او د کپې غوڅونی اوږدوالی .

۱۱ - په یوه دریګوډي کې د یوه

کونج نیمې مخامخ اړخ په داسی

ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه

په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د

ساین جملی په مرسته حل

(اوبی) کړی (څیره ۲۲۴).

۱۲ - که یوه بار ځای ته،

چې ۱،۵۰ متره جگ دی،

یوه زینه ورجگه شي

میلانکونج  $33^\circ$  وي، زینه دې څومره لويه وي؟

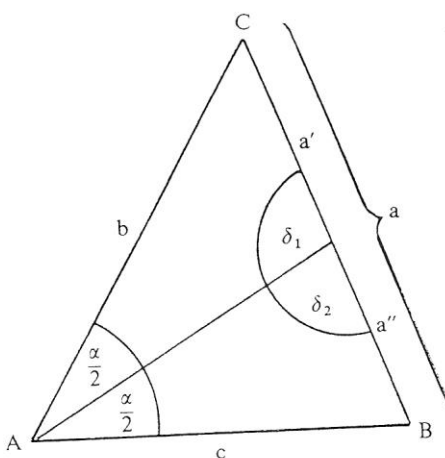
۱۳ - الف) د یوې پورته ختلی کوڅې جگوالی توپیر دې څومره وي، که دا

کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او ۱۲% جگه وي؟

ب) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جگوالی توپیر څومره دی؟

پ) د یوه زوړندې پتیلار، چې ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کې څومره

لوي دی، که دا د جگوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟

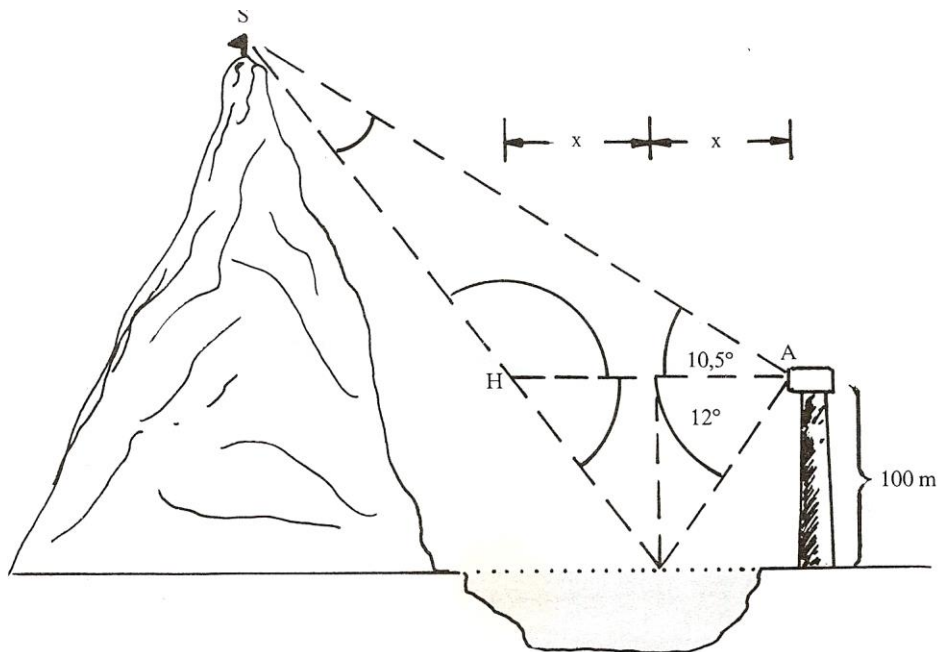


څیره ۲۲۴

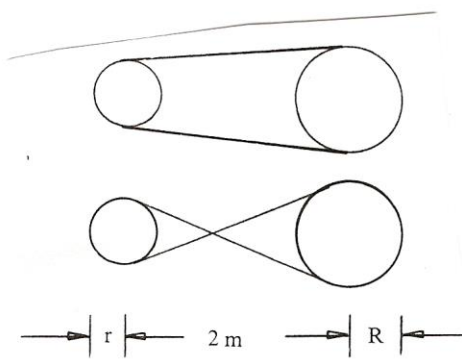
- ۱۴ - یو د اوبو بیلر ( کتله = ۱۰۰ کیلوگرامه ) په یوه ډره پورته خپژول کيږي، چی میلانکونج  $\alpha = 25^\circ$  لري. د وزن زور په زوریند زور تختی سره غبرگ او نورمال یعنی ولاړ زور ( د فشار زور ) ولاړ تجزیه یا ټوټه کيږي، دواړه زوره څومره لوي دی ؟ ( ۱ کیلوگرام = ۸۱ ، ۹ نیوتن  $1 \text{ kg} = 9,81 \text{ N}$  ).
- ۱۵ - یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی ۵۳ متره اوږده ده، درول کيږي. درسیو میلانکونج  $60^\circ$  دی په پښه باندي په کوم جگوالي باید رسی وړلی شي ؟
- ۱۶ - د یوې ۵۳ متره جگي ونی سیوری ۵ ، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه لمریزانگي په کوم جگوالي یوبل سره مخامخ کيږي.؟
- ۱۷ - د یوه ۵ متره جگ کتوتېکي ( لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی ) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کيږي چی جگیدونکوج یی  $\alpha = 18,5^\circ$  او پښتېکی یی  $\beta = 8^\circ$  لويد کونج ، برج څومره جگ دی ؟ د لیدتېکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی ؟
- ۱۸ - الف ) د پیزا ( Pisa ) کور برج ۴۷ متره جگ دی، او څوکه یی د پښی ټکي څخه ۴، ۵۰ متره وراوړي. دا برج څومره مایل دی ؟
- ب ) د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جگ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي ( یعنی د سترگي جگوالي د برج بنسټېکي سره برابر وي )، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟
- پ ) د ۱، ۵ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کيږي
- که جگوالي یی ۱۶۰ متره وي؟
- که جگوالي یی ۱۳۷ متره وي ؟
- ت ) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې
- د بل برج څوکه بنکارېږي چی جگوالي یی ۱۴۳ متره وي ؟

- د پاریس د ایفل برج بنسټونکي چي جگوالی یی ۳۰۰ متره دی ؟
- ۱۹ - د بنیپس اهرام (Cheops pyramide) ۱۳۷ متره جگوالی لري او د بنسټ د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چي بنسټ یی مربع شکل لري
- الف ) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟
- ب ) د ځنگهوارې دريواره دنننی کونجونه څومره لوي دي؟
- ۲۰ - یو ژوری یا قبر -۸ ، ۱ متره ژور دی ، بنسټسور یی ۵ ، ۲ متره دی ، د پورته لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی
- الف ) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی ؟
- ب ) که ۱۰ متره اوږد وي ، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جگوالی یی ۵۰ ، ۱ متره وي ؟
- ۲۱ - یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جگوالی لري د بحیرې لور ته ۱۴° میلان لري ، د دننه لور ته ۲۸° میلان لري . د ډنډ بنسټ څومره سور لري ؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده ؟
- ۲۲ - د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو بڼه لید د ماترهورن (ماترنبنکر یا د ماترن د غره څوکه Matterhorn ) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی دی ) اچول کیري که دا د یوه لیدتکي څخه چي ۱۰۰ متره جگ دی د ډنډ په لور بنسټه وکتل شي ، نو د غره د څوکی هندارونه د ۱۲° پریوتکونج لاندې لیدل کیري . د غره څوکه د یوپورته کونج ۱۱° لاندې لیدل کیري . د ریفلډنډ باندي د ماترنبنکر څوکه څومره جگه پروته ده ؟
- څیره





خیره ۲۲۵



خیره ۲۲۶

۲۳ - الف ) یوه د کښولو کړۍ،

چي په دوه دکښولو چیترو

باندي راتاو ده، خومره اوږده

ده، که لاندي اندازې ولري

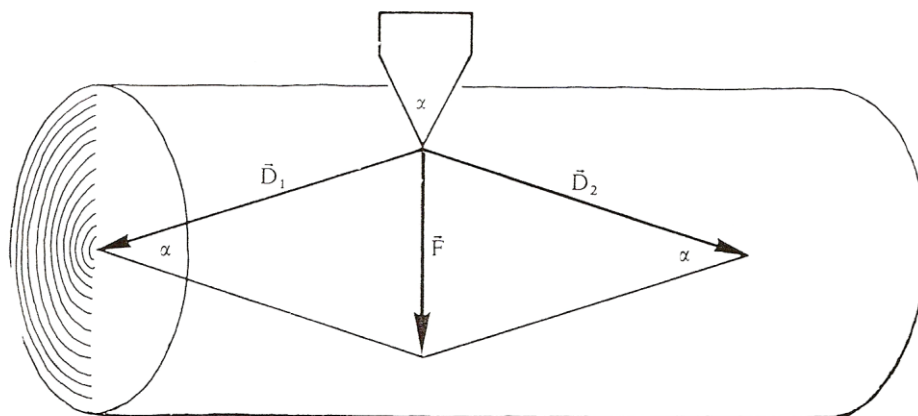
$r = 22 \text{ cm}, R = 35 \text{ cm},$

$|M_1 M_2| = 2m?$

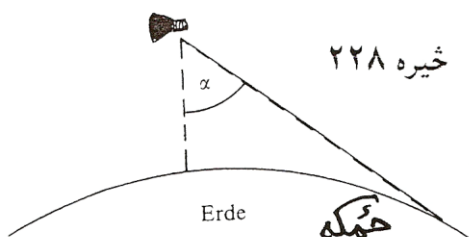
ب ) دا کړۍ به خومره اوږدې وي

که د اټیران په خیر له پختروگانو یا تپکلیو راکی حیدل وي ؟

۲۴ الف) د ونی په سټه یو کایل (موری) په خټک د  $D$  زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه  $D$  څومره لوي دي، کوم چی د سټی درځونه، که د کایل یا تبرگی کونج  $\alpha = 6^\circ$  وي. (حیره ۱۹۴)؟  
 ب) په کوم کایل کونج یا تبرگی کونج لرو:  $|D|=|F|$ ؟



خیره ۲۲۷



خیره ۲۲۸

۲۵ - د یوه الوت ماشین څخه

ځمکه د یوه  $\alpha$  کونج لاندې

لیدل کیږي (خیره) دا الوت ماشین

څومره جگ الوزی؟ (د ځمکی

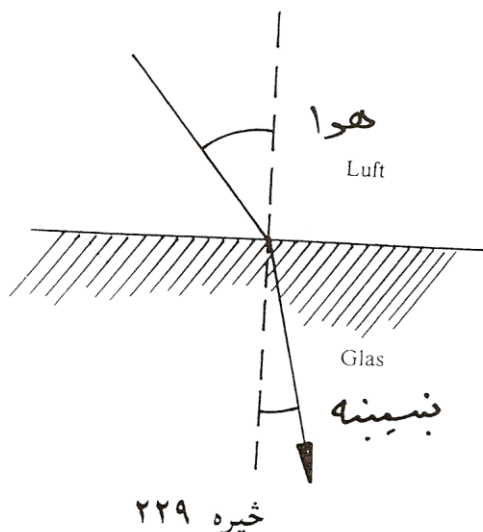
ورانگه: ۶۳۷۰ کیلومتره)

۲۶ - یو گادی د  $v_{\alpha} = 120 \text{ km/h}$  سرعت

سره روان دی، نو د باران څاڅکی په

پټلی د تلنلور باندې په  $115^\circ$  کونج





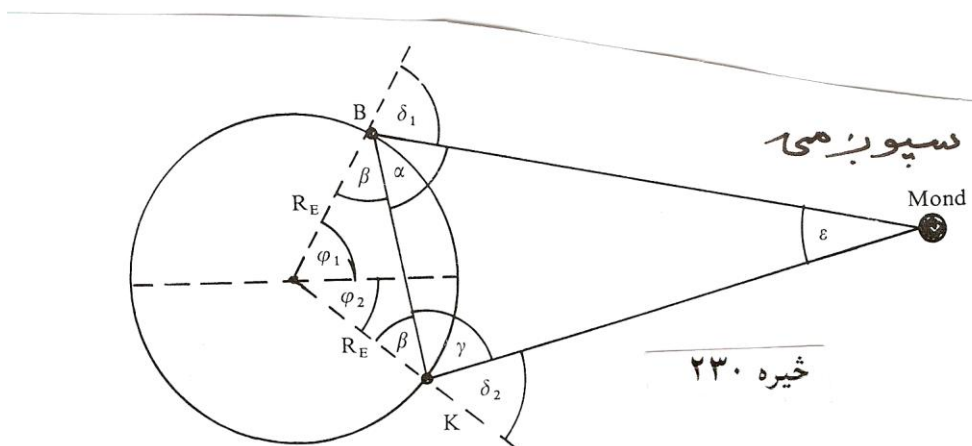
د چیترو (مطلب د گاډې د اوسپنی  
تیر یا گاډیل دی) مخامخ ځغلي.  
له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو  
د لویدلو سرعت  $v_g$  وټاکي ؟  
۲۷ - که د لمروړانگه په دوه مختلفو  
طبقو ولویری، نو خپلی لور ته تغیر  
یا بدلون ورکوي. د سنیلوس Snellius  
د ماتقاعدي له مخی کیدی شي چی د  
ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون  
وايي، چی پروتورانگه ، ماتورانگه او  
ولاړکرنه یا عمود په بیلیدونکی هواری په یوه هواره پراته دي او برسیره پر  
دې لاندې اړیکي باور لري یا صدق کوي:

$$\sin \alpha / \sin \beta = n$$

که د رنوارانگه په یوه بنسینه ( اوبو ) پریوزي، نو  $n = 1,5 (1,33)$  دی. وبنایي،  
چی ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

$$10,5^\circ, 15,8^\circ, 27,3^\circ, 41,2^\circ, 67,6^\circ, 72,4^\circ, 81,9^\circ ?$$

۲۸ - په ۱۸ مه میلادي پیړی کی د سپورمی لریوالی تریگومتريکي وټاکل  
شو. په برلین کی ( جغرافیوي اوږدوالی  $\varphi_1 = 52,52^\circ$  ) او لکه د بنو هیلو  
په کونج کی (  $\varphi_2 = -33,93^\circ$  )، کوم چی په همغه اوږدگراډ پراته دي، د  
سپورمی سره په همغه وخت کی تیرل کیږي. له دې لاس ته راغلل:  
 $\delta_1 = 32,08^\circ$  او  $\delta_2 = 55,72^\circ$ .  
و شمیری  $|BK|, \beta, |KM|$  او له دې څخه  $d_{EM}$ .



۲۹ - لړځیدنی Schwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعنی د وخت  $t$  ترواک لاندې دي. دا د بلواک  $y = a \cdot (\sin (2 \pi / T)) \cdot t + k$  له لارې ورکړ شوي. دلته  $(2 \pi / T) t = x$  هغه کونج دی، کوم چي په  $T$  وخت کی وهلکیږي.  $1 / T = f$  د یوه څرخون پریود یا راگرځیدنی وخت په گوته کوي او د لړځیدنی دوام بلل کیږي «  $f$  فرکونخ frequenz بلل کیږي.

## ۷ • گډوله گڼونه يا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې څنگه یوه گڼډیری پر بله گڼډیری ودانه شوی ده • که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \quad (7, 1)$$

که پورته برابرې ته وگورو، نو څرگند لیدل کیږي، چې دا په رییلگڼونډیری کې اوبی یا حل نه لري، نو له دې امله باید (7, 1) د گڼنو ډیری وغزول شي • له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, \dots \dots (7, 2)$$

د  $\sqrt{-1}$  گڼ، چې د لومړي ځل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو:  $i^2 = -1$  د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm i, \dots \dots (7, 3)$$

لیکو: دا پورته د لاندې سره

$$i^2 = -1 \quad (7, 4)$$

)

د (7,1) ځای نیسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = (-i)^2 = -1$$

دا چې  $i$  رییل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینار گڼ (imaginär) لاتین: فقط خیالي) یوون (واحد) وایو.

برابرون

$$x^2 + a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a, a > 0 \quad (7,5)$$

کیدی شي په لاندې ډول ولیکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{a}i, \dots \dots \dots (7,6)$$

$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{a}i$$

دلته د (7,4) له امله باور لري

$$x_1^2 = ai^2 = -a, x_2^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, \dots \dots \dots (5,7)$$

اوس د ایماجینار گن یوون (واحد) تولید کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 = -1, \dots \dots \dots (5,8)$$

ایماجینار یوون (واحد)  $z = i$  یو ځانگړی ایماجینار گن  $b=1$  دی

د تولیدي څلورۍ (عمومي مربع) برابرې (مساوات) اوبی (حل):

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, \dots \dots \dots (7,9)$$

په لاندې ډول د څلورۍ پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2 / 4$$

=> لاس ته راځی یالرو

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 + (q - p^2/4) \quad (7, 10)$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q \quad (7, 11)$$

او که فورمال پسی وگڼل شي

$$\pm \sqrt{p^2/4 - q} = \quad 1,2 \quad (x + p/2)$$

نولرو

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \dots \dots \dots (7,12)$$

د  $p^2 = 4q$  لپاره رییل «ډبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که  $p^2 > 4q$  وي نو (7,12) دوه مختلف رییل اوبیونې یا حلونه منځ ته راوړي .

که  $p^2 < 4q$  وي، نو رییل اوبی نه شته دی

د ایماجینار گڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{\left[q - \frac{p^2}{4}\right](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \cdot i$$

که اوس ځای پر ځای کړو

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a, b \in R$$

د دې فورم یا بڼې گڼونه کمپلکس گڼونه (Komplexe Zahlen) (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کيږي

$$z = a+bi, i^2 = -1; a, b \in R \quad (7,13)$$

د کمپلکس گڼونو ډیری په  $C$  سره په نڅښه کوو

$$\bar{z} = a - bi, \dots \dots \dots (7,14)$$

دا پورته (7,14) و (7.13) ته کنجوگیری کمپلکس گن بلل کیری • لنډ کنجوگیری کمپلکس گن یا اوبنتی گن

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \dots \dots \dots (5,15)$$

د دې مطلقه یا ساده ارزښت

$$a = \text{re}(z) \Leftrightarrow b = \text{Im}(z) \quad (7,16)$$

د دې رییل همدا رنگه ایماجینار برخه

دوه کمپلکسگونونه برابر بلل کیری، که دوي په رییل او ایماجینار برخه کې یو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1i = a_2 + b_2i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

مورن تل په پام کې لرو، چې  $i^2 = -1$  ایینول شوي

گډوله یا کمپلکس عدد کیدی شي په سطحه یا هاره کې د لاندې شکل سره سم (د گاوس د اعدادو سطحه). سړی د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شمیرنه کوي، لکه د حقیقي اعدادو سره او په پام کې نیسي چې:  $i^2 = -1$

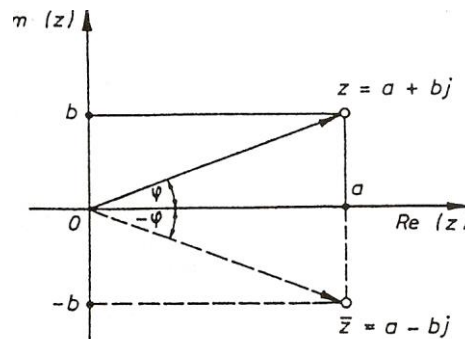


Bild 5.1

مورن دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وایو یا کواوردیناتسیستم Koordinaten system

پورته څیره دې وکتل شي

پروتولار سیستم ته د  $(x, y)$  - سیستم هم وایي په پروتولار سیستم کي پروت څرخون (محور) د  $x$  - محور ته د هواري یاسطخي ریبلبرخه او ولار محور یا د  $y$  - محور ته بیایماجینار برخه وایي لکه څنگه، انځور شوي دي . په دې توگه په پروتولار سیستم کي یو ټکی منح ته ر اځي، چې کمپلکس گن انځوروي . (مورن دا اوس دا برخه نوره نه څیرو، خو دا د وکتورونو په ډول انځوریري او کارونی یا عملي یي هم همداسي دي، لکه د ورسره بلډو وکتورونو) یادونه : هغه گران هیوادوال، چې نوي د شمیر پوهنی د دې برخي سره بلدیري، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځني وییونه یا لغاتونه یا کلمې په پام کي نه راځي، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څیرو کي کتلی شو، چې د کمپلکس گنونو زیاتون او کمون څنگه دی

۱۰۷ زیاتون او کمون:

لاندې څیرو ته دې پام وي او گورو، چې رییل برخه او ایماجینار برخه د  $\text{Re}(z)$  او  $\text{Im}(z)$  سره په نڅبنه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1i) \pm (a_2 + b_2i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i, \dots (7,17)$$

بیلگه ۱۰۷ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$

$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$

$\Rightarrow$

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13}$$

$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زیاتون یا جمعه ( او په همدې توگه کمون یا تفریق یعنی د  $(-z_2)$  په زیاتون) کیدی شي د څېري ۵ ( په همدې توگه د څېري ۷ . ۳ ) د گراف له لاري هم بنوول شي.

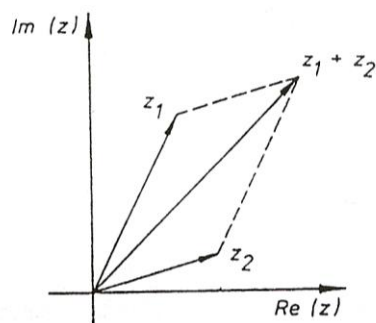


Bild 7.2 <sup>7.2</sup> قاره

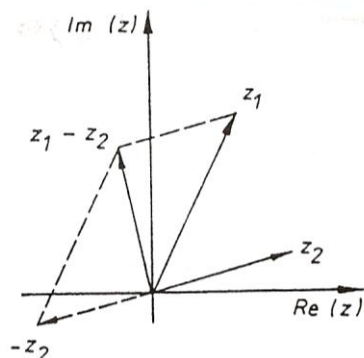
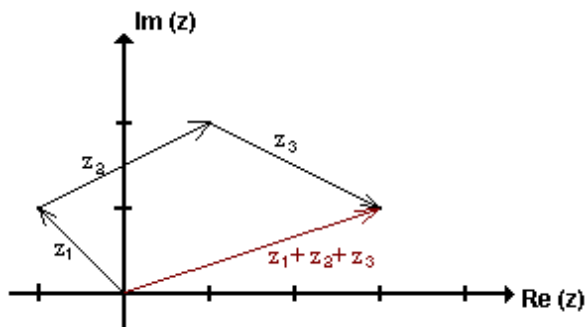
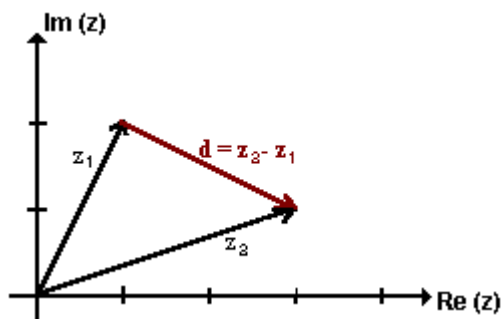


Bild 7.3 <sup>7.3</sup> قاره

یا لاندی:



په پورته او لاندې څیرو کې د کمپکس گڼونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیري •

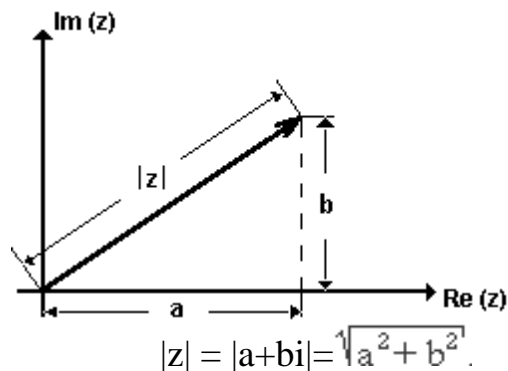


د کمپکس گڼونو ارزښت

د وکتور  $z$  اوږدوالی د کمپکس گڼونو ارزښت بلل کیږي •



دا د په  $|z|$  سره بنایو او د پیتاگوراس (فنثاغورث) د جملې سره بنسول کیري، د دې لپاره دې پورته اخرنی لیکه هم وکتل شي. مخامخ څیره مور ته د کمپلکس گڼ د ارزښت انځور بنایي



په درې گوډي کې د اړخونو ځانښوونه يا تناسب له امله باور لري

$$\| |z_1| - |z_2| \| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \dots \dots \dots (7,18)$$

برسيره پر دې باور لري:

$$z_1 + z_2 = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

۷. ۲ د کمپلکس گڼونوځل:

د ورسره بلد نوک ایشوولو له لارې لاس ته راځي

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 (-1) \\ &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \quad (7, 20)$$

گران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکې وي، دا به راته گران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي. دا لاندې هم ساده ازمايل کیدی شي

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad , \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2| \quad (7, 21)$$

بیلگه ۲۰۷

$$= (a+bi) ( a-bi) = a^2+b^2+(-ab + ab)i = a^2+b^2 \quad \overline{z \cdot \bar{z}} \quad \text{د}$$

او (۷، ۱۵) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \overline{z \cdot \bar{z}} = |z|^2 \quad (7, 22)$$

۳۰۷ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1 + b_1 i) : (a_2 + b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7, 23) \quad z_1 : z_2 &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \end{aligned}$$

په دې پسی لاس ته راځي

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \left( \frac{\overline{z_1}}{z_2} \right) = \frac{\overline{z_1}}{z_2} \quad (7,24)$$

بیلگه ۳.۷ :

د (۲۴.۷) د دویمې برخې بڼوونه:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{z_1}}{z_2} &= \frac{\overline{z_1} \cdot z_2}{z_2 \cdot z_2} = \frac{(a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i)}{(a_2 - b_2 i)(a_2 + b_2 i)} = \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i}{a_2^2 + b_2^2} = \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \left( \frac{\overline{z_1}}{z_2} \right) \end{aligned}$$

بیلگه ۴.۷ د: او  $Z_1$  لپاره له  $Z_2$  سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13} i = -i$$

۴.۷. تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱. ۱ - لاندې په اریتمیتیکی یا شمیرنیزه توگه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په گاوس سېچه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a)  $z = 1 - i$

b)  $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

c)  $z = 2(1 - \sqrt{3}i)$

d)  $z = -1 - i$

۱. ۲ - د گاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

$$\text{a) } |z| = \sqrt{2} \quad \text{b) } |z| < \sqrt{2} \quad \text{c) } |z| > \sqrt{2} \quad \text{d) } |z| = r$$

۲ - جمعه او تفریق (زاتون او کمون)

۲. ۱ - د شمیرني او کارني یا رسم کوني له لارې پیدا کړئ

$$\text{a) } (1+2i)+(2+i) \quad \text{b) } (-2+i)+1-2i$$

$$\text{c) } (1-2i)-(1-2i) \quad \text{d) } (-1-2i)+(2-i)$$

۲. ۲ - د شمیرني او کارني یا رسم کوني له لارې پیدا کړئ

$$\text{a) } (22 + 5i) + (2 + i) \quad \text{b) } (3 + 2i) - (5 + 2i)$$

$$\text{c) } (1 + 2i) - (1 + 2i) \quad \text{d) } i - (1 - 2i)$$

۳. ضرب (خل) او وېش:

په لاندې کې  $a, b, c, d, x, y$  حقيقي ګڼونه دي.

۳. ۲ - وشمیرئ

$$\text{a) } (2 + \sqrt{3}i) \cdot (3 - 2i) \quad \text{b) } (3 + 2\sqrt{2}i) \cdot (3 - 2\sqrt{2}i)$$

$$\text{c) } (1 + \sqrt{5}i) \cdot (1 - \sqrt{5}i) \cdot (13 - 12i) \quad \text{d) } \sqrt{3 + \sqrt{7}i} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{7}i}$$

۳. ۲ - وشمیرئ

$$\text{a) } (x + yi)(2x + yi) \quad \text{b) } (\sqrt{x} + \sqrt{y}i)(\sqrt{x} - \sqrt{y}i)$$

$$\text{c) } \left(\frac{2}{3}a - 3bi\right) \cdot \left(\frac{4}{3}a + 5bi\right) \quad \text{d) } (c - \sqrt{d}i)(-c - 2\sqrt{d}i)$$

۳. ۳ - د لاندې ماتونو مخرج یا ماتلاندې حقيقي ورګرځوئ ( $a$ ،  $b$  حقيقي دي)

$$3.3.1. \text{ a) } \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}i}{\sqrt{3} + \sqrt{2}i}$$

$$\text{b) } \frac{1 - 20\sqrt{5}i}{7 - 2\sqrt{5}i}$$

$$\text{c) } \frac{56 + 33i}{12 - 5i}$$

$$\text{d) } \frac{63 + 16i}{4 + 3i}$$

3.3.2. a)  $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}$

c)  $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}i-2}$

3.3.3. a)  $\frac{3a+4bi}{4a-3bi} + \frac{4a-3bi}{4a+3bi}$

c)  $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}i} - \frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}i}$

d)  $(5-i)(6-i) + \frac{5-i}{6-i}$

b)  $\frac{3-27\sqrt{5}i}{7-3\sqrt{5}i}$

d)  $\frac{i}{8-i}(i+1)$

b)  $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}i} - \frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}i}$

۴. سره رايوخی شوي پوښنتي

کډوله گڼونه يا اعداد ورکړ شوي.

$$z_2 = -\frac{1}{4} - \sqrt{3}\frac{i}{4} \quad \text{او} \quad z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{i}{2}$$

۳ - د لوگاريتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونو کې x وشمړئ.

$$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{i}{2} \quad \text{und} \quad z_2 = -\frac{1}{4} - \sqrt{3}\frac{i}{4}.$$

و شمیرئ:

4.1. a)  $z_1 + z_2$       b)  $z_1 - z_2$       c)  $z_1 \cdot z_2$       d)  $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a)  $|z_1|$       b)  $|z_2|$       c)  $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$       d)  $\frac{\bar{z}_1}{z_2}$

4.3. a)  $|z_1 + z_2|$       b)  $|z_1 - z_2|$       c)  $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$       d)  $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$

4.4. a)  $|z_1| \cdot |z_2|$       b)  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$       c)  $|z_1 \cdot z_2|$       d)  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$

۴ . ۵ - د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

- a)  $x^2 + (1 + i)x - 2(1 - i) = 0$
- b)  $x^2 + (3 - 2i)x + 3(1 - i) = 0$
- c)  $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}x + 1 = 0$
- d)  $16x^2 + 8(i + 1)x + 2(i + \frac{9}{2}) = 0$

همدا موضوع له بلکتاب څخه

7 . ایماجینار او کمپلکس گڼونه

## خونډیونه Inhaltsverzeichnis

- د رییلو گڼونو بنسټونه او نیوني یا فرضیي
- [ایماجینار گڼونه](#)

کمپلکس گڼونه

- په گڼونهوره کې د کمپلکس گڼونو انځورونه
- [د کمپلکس گڼونو سره شمیرنه](#)
- [د کمپلکس گڼونو زیاتون ، کمون](#)
- [د کمپلکس گڼونو ځل](#)
- د کمپلکس گڼونو ویش
- د کمپلکس گڼونو ټولگڼیز په توان
- د بېنوم درسي جمله
- [5.6 Die Moivreschen Formeln](#) د موډرې فرمول
- [5.7 Wurzeln aus komplexen Zahlen](#) د کمپلکس گڼونو ریښه
- توان د مختلفو جگگڼونو سره
- [5.8 Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten](#)

د رییل گڼونو بنسټونه

د رییلگنونو ډیری لکه د مخه مو، چې گوته ورته ونیوله د راشنل او ایراشنل گنونو له ډیریو جوړه ده (د رییلگنونو برخه دي وکتل شي).

### ایماجینار گنونه Imaginäre Zahlen

د رییل گنونو سیستم پوره نه دی، گورو، چې د یوه گن څلوری یامربع، چې د کمیز گن سره برابره وي، ریيله اوبیونه یا حل نه لري لکه لاندې

$$x^2 = -1$$

داسې یو رییل گن نه شته، چې پورته پوره کړي

یوه فورمال اوبیونه یې په لاندې ډول ده

$$x = \pm\sqrt{-1},$$

چیرته، چې  $\sqrt{-1}$  ریيله اوبیونه نه ده.

دا څلوری یا مربع ریښه د  $i$  سره په نخبه کوو، چې له دې پرابلم څخه ووتی شو او څلوری یې په 1 - سره په نخبه کوو.

د دې  $i$  لپاره باور لري:

$$i^2 = -1$$

اوس کړی شو، چې ولیکو

$$x_{1,2} = \pm i.$$

که گن  $i$  د رییلگنونو سره زیات ځل یا ضرب کړو، نو د گنونو یوه د نوو گنونو ډیری تری لاس ته راځي، د بیلگي په توگه :

$$2i, 3i, -i, 1 + i, 2 + i, 1 + 2i, -23 + 78i, 0.45 - 0.93i$$

او داسې نور.

تولیزه بڼه یې :

$$a + bi,$$

پورته گڼ کمپلکس گڼ دی او  $a$  او  $b$  رییلگڼونه. له دې سره هم لکه د نورو گڼونو سره ساده شمیرل کيږي، چیرته، چې د  $i^2$  په ځای  $-1$  لیکلی شو یا په څټ: لاندې کې یې بیلگې گورو

$$(1 + 2i) + (3 + 4i) = (1 + 3) + (2 + 4)i = 4 + 6i$$

په ټولیزه توګه:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

له دې سره ویش هم کړی شو، خودا، چې ستونځمن دی وروسته یې راوړو.

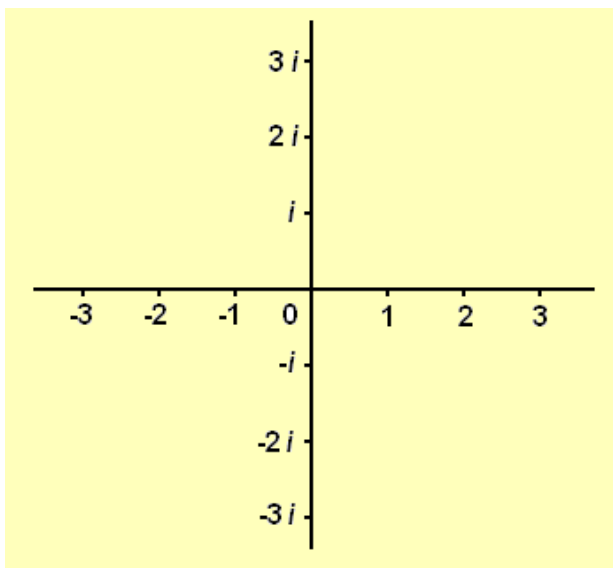
دا لاندې هم لرو

$$i, 2i, i, 0, -i, -2i, -3i, \dots$$

دا ایماجینار ټولګڼونه بلل کيږي یا بولو، چې دا هم صفرلري

مور په لاندې کې د هوارې پروت محور لاندې د رییلگڼونو محور پوهیږو او ولار محور یا څرخونی یې د ایماجینار گڼونو محور دی، چې د دواړو زیاتون کمپلکس گڼونه دي یا د کمپلکس گڼونو هواره انځوروي.





په لاندې کې یو کپلکس گن په یوه رییل گن یا پیدایښتي گن ویشل کيږي

$$mi : n = \frac{m}{n}i .$$

په پورته کې  $m$  او  $n$  رییلگونونه دي او ایماجینار

$$x^2 = -a^2$$

په پورته کې  $a$  رییلگن دی، خو  $x$  غواړو لاس ته راوړو، لاس ته راوړنه یې یو ایماجینار گن دی.

**د دوه ایماجینار گنونو زیاتون او کمون::**

$$ai \pm bi = (a \pm b) i .$$

**خُل او ویش یې**

$$\frac{i}{i} = 1 .$$

د دې سره لاس ته راځي

سرلیک

$$pi \cdot qi = -pq$$

او

$$\frac{pi}{qi} = \frac{p}{q},$$

چیرته چې  $p$  او  $q$  ریللگنونه دي.

لاس ته راوړنه : د دوه ایماجینار گنونو  $x$  یا ضرب او ویش څخه ریللگن لاس ته راځي، چې په لاندې کې یې گورو .

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^3 \cdot i = 1, \quad i^5 = i^4 \cdot i = i, \dots$$

د ټولگن  $n$  لپاره لرو:

$$i^{-n} \equiv \frac{1}{i^n}$$

لاس ته راوړنی یې

**!Error**

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i, \quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1, \quad i^{-3} = \frac{1}{i^3} = -\frac{1}{i} = i, \quad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = 1, \dots$$

د سره شمیرل ورسته کېدونکي دي.

**کملکس گڼونه Komplexe Zahlen**

گډ یا مخطلت څلورۍ - یا مربع برابرې شمیرې

$$x^2 - 4x + 13 = 0.$$

د څلورۍ پوره کونوي يا تکميلونې له لارې ، چې ورسره بلد يو ، اوبیونه يا حل پیداکوو

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i .$$

د دې برابرن اوبیونه نه رییل گن دي او نه ایماجینار . دې گن ته مور کمپلکس گن وایو **komplexe Zahlen**.

د کمپلکس گنونو او د دې سره سره شمیرنه .

مور دا لاندې کمپلکس گن لرو :

$$z = a + bi,$$

چیرته، چې  $a$  او  $b$  رییل گنونه دي

د کمپلکس گنونو په مرسته کرای شو، چې بی بندیزه څلورۍ یا مربع فرمولونه اوبي کړو

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

لاس ته راځي.

دلته چې څه راځي هغه گران لوستکي پخپله هم پیدا کولی شي، زه به وهڅیږم، چې دا پرابلمونه پورته کړم یا لري کړم ،

د لاندې لپاره

$$\frac{p^2}{4} - q \geq 0$$

يو يا دوه رییل اوبیوني لاس ته راځي .

د

$$\frac{p^2}{4} - q < 0$$

لپاره اوبیوني په لاندې ډول لیکل کیږي

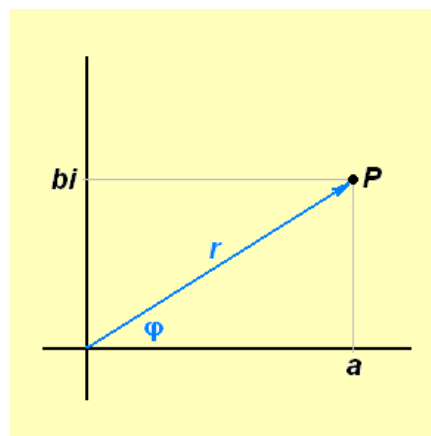
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

اوبیوني کنجوگيري کمپلکس دي، دا په دې مانا، چې یو له بل د مخخښي له مخه توپیر کیږي.

### په گڼو هواره یا گڼسطحه کې د کمپلکس گڼونو انځورونه

د کمپلکس گڼونو گرافیکي انځوروني لپاره هواره ځان رامنځ ته کوي، چې درييل او ایماجینار گڼکرښو څخه غزیدلي ده.

کمپلکس گڼونه  $a + bi$  د ټاکنې له مخې (په بدل وار یا همغه وخت) د یوه ټکی  $P$ ، چې کواوردینات یا پروت ولار محورونه یې  $a$  او  $b$ ، چیرته، چې محور  $b$  ټکی  $bi$  په ایماجینار گڼکرښی باندې په گوته کوي، یا د «ښوونکرښی»  $OP$  سره انځور کیدی شي. دا د یوي اور دې  $r$  سره ښایو او درييلي محور سره کونج  $\phi$  جوړوي. (دا همغه د ټکی  $P$  انځورول دي په پولار کواوردینات کې،  $r$  د کمپلکس گڼ مطلق ارزښت دی،  $\phi$  یې فاز بلل کیږي.)



د دواړو انځورینې لپاره لاندې ترانسفورمیشن ابرون باور لري (له دې څخه نوح زده کونکي تیریدلی شي، چې ترانسفورمیشن باندې نه پوهیږي)

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0$$

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi.$$

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} \quad \text{له لاس ته راځي}$$

$$\varphi = \arctan \frac{b}{a} + k \cdot 2\pi, \quad \text{wobei} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan \frac{b}{a} < \frac{\pi}{2} \quad \text{und } k \text{ ganzzahlig ist.}$$

په پورته کې wobei د کوم سره یا چیرته چې په مانا دی او  $k$  ټولګن دی .

ارزښت

$$\varphi_0 = \arctan \frac{b}{a}$$

د في  $\varphi$  اصلي ارزښت بلل کيږي . له دې نور ارزښتونه د  $k$  او  $\pi 2$  له زیاتون څخه لاس ته راځي .

د دې له مخې کیدی شي، چې کمپلکس ګن په لاندې توګه ولیکل شي .

$$z = a + bi = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) .$$

" وروسته د اویلر فرمول "Eulerschen Formel" په مرسته ترې لاس ته راځي

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

دریمه انځورونه یې لاندې ده:

$$z = a + bi = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi} .$$

د کمپلکس گڼ دا درې انځورونې په ترتیب داسې بلل کېږي اریتمیټیکي بڼه کونومتریکی (یا تریگونومتریکی بڼه) او اکسپوننشل بڼه.

دا چې د اویلر فرمول وروسته ښوول کېږي، اکسپوننشل بڼه دې دلته راوړل شوي وي، خو د ښوونې لپاره دې ترې کار نه اخستل کېږي.

## Rechnen mit komplexen Zahlen

### د کمپلکس گڼونو سره شمیرنه

دوه کمپلکس گڼونه دې ورکړ شوي وي

$$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i.$$

### د کمپلکس گڼونو زیاتون او کمون

په زیاتون او کمون کې د الجبري قوانینو له مخې  $i$  هم داسې په کار اچول کېږي لکه هره بله کومه د تورو لویه، چې په کار اچول کېږي یا کارول کېږي

$$z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

$$z_1 - z_2 = a_1 + b_1 i - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$$

د کمپلکس گڼونو «ښوونکرښه» (دا هغه کرښه ده، چې د دواړو محورونو صفر ټکو څخه د هغه په هواره موخه ور ټکی په لور گزیدلی وي، یانې د صفر ټکی څخه د هغه بل موخه ټکی په لور، ځکه لوریزه ده) لکه وکتورونه سره زیاتیدلی او کمیدلی شي

## Das Produkt komplexer Zahlen

### د کمپلکس گڼونو ځل

دی

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i.$$

دا ځل ترلی پیژند وړ لیدونکي مانا نه لري (یانې سملاسي ترې څه نه شو پوهیدلی) که د دې په څنټ «پولارکواودینات» وکارول شي، نو لاس ته راځي

$$a_1 a_2 - b_1 b_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = r_1 r_2 \cos (\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) = r_1 r_2 \sin (\varphi_1 + \varphi_2).$$

او له دې سره

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)].$$

نو دی

$$\varphi (z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2. \quad \text{او} \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

د  $\varphi$  - یا ضرب ارزښت د ارزښتونو  $\varphi$  د  $\varphi$  د  $\varphi$  یا ارگومنټ یا فازي د ارگومنټ یا فازي د زیاتون سره برابر دی.

سملاسي پیژندل کيږي، چې دا د دوه فاکتورونو څخه زیاتو فاکتورونو یا ځله وونو لپاره هم باور لري

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n. \quad \text{او} \quad |z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|$$

### د کمپلکس گڼونو ویش Division komplexer Zahlen

په ورته توګه پیدا کيږي، که  $z_2$  د صفر سره برابر نه وي

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2. \quad \text{او} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

که کيږدو  $1 = z_1 z_2^{-1}$  او  $z = z_2 z_2^{-1}$ ، نو لاس ته راځي:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} [\cos(0 - \varphi) + i \sin(0 - \varphi)] = \frac{1}{r} (\cos \varphi - i \sin \varphi),$$

او په ځانگړي ډول  $z = i$

$$\frac{1}{i} = -i.$$

## Ganzzahlige Potenzen einer komplexen Zahl

د کمپلکس گڼونو توان (کپلکس گڼ د یوه ناکمیز توان سره د رییل گڼونو په څیر دی)

$$z^{-n} \equiv \frac{1}{z^n}.$$

د کمپلکس گڼونو ځل دي وکتل شي

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n| \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n.$$

د همغه ځله وون یا ضریب  $z$  لپاره ترېلاس ته راځي

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

مور لرو

$$z^p \cdot z^q = z^{p+q}, \quad (z^p)^q = z^{p \cdot q}, \quad z_1^p \cdot z_2^p = (z_1 \cdot z_2)^p, \quad \frac{z^p}{z^q} = z^{p-q}, \quad \frac{z_1^p}{z_2^p} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^p.$$

## Der binomische Lehrsatz

د بېنوم درسي جمله

د بېنوم جملې لپاره هم لرو

د نوکاتو د چاوان قانون او ځل قانونو د زیاتیز جگ گڼ لپاره د بېنوم جمله همغسي باور لري

$$(z_1 + z_2)^n = \binom{n}{0} z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \dots + \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k + \dots + \binom{n}{n} z_2^n.$$



له دې ځایه بنسټه د بنوونځي زده کونکو لپاره ستونځمن دی.

### Die Moivreschen Formeln د موډری قانون

له برابرون څخه (پورته دې وکتلشي)

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

لاس ته راځي

$$|z| = 1 : (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

له بلې خوا د زیاتیز ټولگنیز جگړن یا اکسپوننت سره د بینوم جملې څخه لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n &= \cos^n \varphi + i \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \cdot \sin \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \cdot \sin^2 \varphi \\ &- i \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \cdot \sin^3 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \cdot \sin^4 \varphi + \dots + i^n \binom{n}{n} \sin^n \varphi. \end{aligned}$$

که د برابرون دوا

ره خواوې برابر کینول شي او بیا په پام کې ونیول شي، چې رییل او ایماجینار برخه دواړه باید برابر وینو د موډری برابرون ترې لاس ته راځي **Moivreschen**

**:Formeln**

$$\cos n\varphi = \cos^n \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \cdot \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \cdot \sin^4 \varphi - + \dots,$$

او

$$\sin n\varphi = n \cos^{n-1} \varphi \cdot \sin \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-3} \varphi \cdot \sin^3 \varphi + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \varphi \cdot \sin^5 \varphi - + \dots,$$

چیرته، چي بنی لور ترهغي پوره شي، تر خو چي حله وونی یا ضریب صفر شي.

### Wurzeln aus komplexen Zahlen د کمپلکس گڼونو ریښه

د برابر وون او بیونه

$$x^n = z \quad n \text{ positiv ganzzahlig}$$

پورته کی n زیاتیز ټولگن دی  
د کمپلکس گڼ z n -مه ریښه بلل کیږي :

$$x = \sqrt[n]{z}.$$

ردو

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

او

$$x = \rho (\cos \psi + i \sin \psi),$$

د  $z = x^n$  له امله لاس ته راځي

$$\rho^n = r \quad \text{und} \quad n\psi = \varphi$$

او د دي پسي

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{\varphi}{n}$$

دي

په ویشنه کې باید په پام کې ونیول شي، چې ارگومنټ یا پروت محور  $\varphi$  پریودی یا تل بیرته راگرځیدونی دی د پریودی یا راگرځیدنی  $2\pi$  سره، نو

$$\varphi = \varphi_0 + k \cdot 2\pi \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

پسې د  $\psi$  لپاره ټیک  $n$  مختلف ارزښتونه لاس ته راځي، یانې

$$\psi = \frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2 \cdot 2\pi}{n}, \dots, \frac{\varphi + (n-1) \cdot 2\pi}{n}.$$

د  $n = k$  ځانله د مخه ارزښتونه (له دویم پسې) تکراریږي، نو باور لري:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

هر له دې ارزښتونو د کمپلکس گڼ  $z$  د  $n$ -مې ریښه بلل کېږي

$$\sqrt[n]{z} \quad \text{oder} \quad z^{\frac{1}{n}}$$

دا ټول  $n$  ارزښتونه په گڼهواره په یوې گردی په  $O$  په یوه منظم  $n$ -گودي پرته ده، د څلورې ریښې لپاره له

$$i = i \sin \frac{\pi}{2}$$

لاندي ارزښتونه ترې لاس ته راځي

$$\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4},$$

او د څلورې ریښې لپاره له

سرلیک

$$-i = i \sin \frac{3\pi}{2}$$

پیدا کیری

$$\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}.$$

که مور ونیسو لکه د ریبل گنونو لپاره

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$$

دې وي، چېرته چې  $n$  یو پیداینستج گن او  $m$  یو په خوبنه تولگن دی، نو له دې سره د کمپلکس گن سره جگن یا کسپوننت وپیژندل شو یا تعریف شو. اوس نو اخرنی پل پاتې ، چې هغه د ایراشنلجگن دی .

توان د په خوبنه ریبل جگن سره

### Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

اوس دې  $z$  له صفر مختلف په خوبنه کمپلکس گن وي .

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r [\cos (\varphi + k \cdot 2\pi) + i \sin (\varphi + k \cdot 2\pi)],$$

چیرته چې

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

دی، نو د  $z^\nu$  (ریبل reell) لاندې هر دالاندې کمپلکس گن پوهیرو:

$$r^\nu [\cos \nu (\varphi + k \cdot 2\pi) + i \sin \nu (\varphi + k \cdot 2\pi)].$$

لارښود: د داسې په تولیز پیژند یا تعریف سره د کمپلکس گنونو توان لپاره د د توان شمیرني بنسټیز قوانین باور لري، یانې

$$z^\mu \cdot z^\nu = z^{\mu+\nu}, \quad z_1^\mu \cdot z_2^\mu = (z_1 \cdot z_2)^\mu, \quad (z^\mu)^\nu = z^{\mu \cdot \nu}$$

nicht mehr نور بس دی

### ۱۳ ترانسخندنت برابرونونه په - مساوات

دلته یواځي هغه ترانسخندنت مساوات څیرل کیري، کوم چی بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي. دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنگه په ریښه مساواتوکی، په خوښه په بل شکل اړول کیري او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو (فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چی اړولی فرمول زیاتي اوبیوني یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون ټولې اوبیوني په پیل برابرون کی ځاي په ځاي یا کینوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنگه په ریښه یي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځی رییل اوبیوني پلټل کیري.

### ۱۳ . ۱ لوگاریتمي مساوات

د لوگاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جگ سماواتو د حل (اوبی) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چی د یو عدد(گن)  $a$  لوگاریتم، د  $b$  په بنسټ، معلوم کړو یا وڅیرو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 \dots\dots\dots(13,1)$$

د بنسټ  $b = 10$  لپاره (lga) او د بنسټ  $b = e$  لپاره (ln a) کیدی شي ( ۱۳ )  
( ۱ .

سیده د جبشمیري له لاري پیداشي. په څټ یا برعکس د  $e| = b | = 10$  لپاره برابر ونونه په دې ډول اړول کیري  
 $x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b \dots \dots \dots (13.2)$

د لوگاریتمي مساواتو یو ساده ډول یا شکل ( تیپ ) دا دی  
 $\log_b x = c \dots \dots \dots (13.3)$

دا برابر وون د ( ۱ . 7 ) ، ( ۲ . 7 ) له مخی لاندې ته ورته دی:  
 $x = b^c \dots \dots \dots (13,4)$

دا سی افاده هم د جبشمیري سره شمیرل کیدی شي.

**بیلگه ۱۳ . ۱** :  $\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$

په همدې ډول د ( ۱۳ . ۳ ) بنی اویونه په لاندې ټولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c \dots \dots \dots (13,5)$$

دلته  $f(x)$  یوه الجبري وینه یا افاده ده، د ( ۱۳ . ۵ ) سره الجبري برابر وون کیمټ ( ورته ) دی

$$f(x) = b^c \dots \dots \dots (13,6)$$

ټولي د ( ۱۳ . ۶ ) اویوني د ( ۱۳ . ۵ ) اویوني هم دي

**بیلگه ۱۳ . ۲** : لوگاریتمیز برابر وون

$$\log_2 (x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتو سره کیمټ دي

$$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow (همداسی) x^2+x+6=2^3=8$$

او لاندي اوبيوني لري

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; x_1 = -2; x_2 = 1$$

يود ( ۱۳ . ۵ ) ډول ( تيپ ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کينه لور ( ارخ ) ته يود لوگاريتم ريشنل لايڼيز کمبينشن الجبري ويينه يا افاده موجوده وي

$$r_1 \cdot \log_b g_1(x) + r_2 \cdot \log_2(x) + r_3 \cdot \log_b g_3(x) + \dots = c \dots \dots \dots (13,7)$$

دلته ځلوني  $r_i$  راشنل گڼونه دي. د لوگاريتم قوانينو ( ۷ . ۷ ) ، ( ۷ . ۷ ) ، ( ۷ . ۷ ) کاروني يا استعمال څخه، ۷ برخه وگورئ، ( ۱۳ ، ۵ ) لاس ته راځي او دا د لاندي برابرونو سره

$$f(x) = \{g_1(x)\}^{r_1} \cdot \{g_2(x)\}^{r_2} \dots \dots \dots (13,8)$$

بيلگه ۱۳ . ۳:

$$\text{لومړی له } 2 = \log_3(x-1) + \frac{1}{2} \log_3 x - \frac{1}{2} \log_3(x-1) \text{ څخه لاندي لاس ته راځي}$$

$$\log \left[ (x-1) \left( \frac{x}{x-1} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

اوله دې څخه ريښه برابرون  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} = 9$  ، د کوم له څلورۍ يا مربع کولو څخه  $x(x-1) = 81$  يعني  $x^2 - x - 81 = 0$  د لاندي ځواب سره

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{324}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{325}{4}} = \frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 18.03;$$

$$x_1 = 9,515; x_2 = -8,515$$

تيك دا  $x_1 = 9,515$  پيل برابرون پوره کوي . د  $x = x_2 < 0$  لپاره  $\log x$  او په همدې ډول  $\log(x-1)$  پيژندنه لري يا تعريف نه دي.

بیلگه ۱۳. ۴:

$$\log_b(2x+3) = \log_b(x-1) - 1 \quad \text{له څخه لاس ته راځي}$$

$$\log_b \left[ \frac{2x+3}{x-1} \right] = 1$$

$$\text{پس } \frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b \quad \text{او نور پسی}$$

$$2x+3 = bx-b$$

$$b+3 = x(b-2)$$

$$x = (b+3)/(b-1)$$

پیل وینه یا افاده د  $x > 1$  لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعنی که  $(b+3)/(b-2) > 1$  وي.

د  $b > 2$  یعنی  $b-2 > 0$  څخه لاس ته راځ  $b+3 > b-2$

له دې لرو  $3 > -2$  دا د ټولو  $b$  لپاره پوره دی

د  $b \leq 2$  لپاره د  $b+3 \leq b-2$  څخه  $3 \leq 2$  لاس ته راځي

اودا د هېڅ  $b$  لپاره باور نه لري .

له دې امله که د  $b > 2$  لپاره اوبی شته دی. د  $b \leq 2$  لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوگاریتمي تیپ برابرېون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته وارول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \quad (13.9)$$

چیرته چی  $F$  او هم  $f$  الجبریزې وینه یا افادې دي. د بدلون کاروایي یا عملیه اجرا کوو

$$y = \log_b f(x) \dots \dots \dots (13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرېون اوبی کوو

$$F(y) = 0 \quad (13.11)$$

ددې اوبیونه  $y_1, y_2, \dots$  په  $(13/10)$  کی رډو، نو د هر  $y_i$  لپاره د تیپ  $(13/5)$



لوگاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (13.12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x) = b^{y_i} \quad (13.13)$$

ددې لپاره چې و آزمائیلی شو چې ایادا هم برابر وږن پوره کوي، نو ټول ددې برابر وږنو اوبیوني یا ځوابونه باید په پیل برابر وږن (۱۳/۹) کی کینوول شي یا ځای په ځای شي،

**بیلگه ۱۳. ۵:** برابر وږن  $\log^2 x - \lg x - 2 = 0$  د سبستیځیوشن (بدلون)

$y = \lg x$  سره په څلوری برابر وږن  $y^2 - y - 2 = 0$  بدلیری.

د  $y_1 = 2$  او  $y_2 = -1$  ځوابونو سره

له  $\lg x = 2$  او  $\lg x = -1$  لاس ته راځي.

$$x_2 = 10^{-1} = \frac{1}{10} \quad \text{او} \quad x_1 = 10^2 = 100$$

دواړه ځوابونه د پیل برابر وږن ځوابونه دي.

**بیلگه ۱۳. ۶:**

له برابر وږن  $(6 / (\lg x + 1)) + (8 / (\lg x - 1)) = 3$

د،  $x > 0$  مگر  $(x \neq 1/10, x \neq 10)$  چې د اصلي ماتلاندې

$(\lg x - 1)(\lg x + 1)$  سره ځل شي، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x - 1) + 8(\lg x + 1) = 3(\lg^2 x - 1)$$

$$, \quad 6\lg x - 6 + 8\lg x + 8 = 3\lg^2 x - 3$$

$$0 = 3\lg^2 x - 14\lg x - 5$$

او د بدلون  $y = \lg x$  سره مو لاندې څلوری بڼې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2 - 14y - 5 = 0, \quad y^2 - (14/3)y - 5/3 = 0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{15}{9}} = \frac{7}{3} \pm \frac{8}{3}; y_1 = \log x_1 = 5; y_2 = \lg x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = 10^5; x_2 = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي. که په یوه برابرېون کې لوگاریتمونه د مختلفو بنسټونو b سره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د (۲ . ۱۳) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلگه ۱۳ . ۷ :

$$\log_2(x-1) + \log_4(x-1) - 1 = 0$$

څخه دلاندې برابرېون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2} \log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{2} \log_2(x-1) - 1 = 0, \log_2(x-1) = \frac{2}{3}, x-1 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4},$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرېون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2 \sqrt[3]{4} + \log_4 \sqrt[3]{4} - 1 = \frac{1}{3} \log_2 4 + \frac{1}{3} \log_4 4 - 1 = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په جگړې برابرېونونه

ساده اکسپوننشل برابرېون (مساوات)

$$a^x = b; a > 0, a \neq 1, b > 0 \dots \dots \dots (13, 14)$$

کیدې شي چې د لوگاریتم نیولو سره سملاسي حل شي (ځواب شي)

$$x = \log_a b = \lg_b / \lg_a = \ln b / \ln a \quad (13, 15)$$

لاندني برابر ونونه په ساده ډول په (۱۳، ۱۴) ډول (رقم) تيوپ ( برابر ونونو باندي اړول کيدی شي.

بيلگه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2) + 3^x(3^2-3) = 0, \text{ bzw. } 6 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^x, \text{ bzw. } \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg \frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1,7095.$$

که په (۱۳، ۱۴) د الجبري وييني يا افادي (x) فاکسپوننتونه يا جگگنونه وي، نو:

$$af(x)=b, a>0, a \neq 1, b>0 \quad (13, 16)$$

په دې ډول د لوگاريتمولو له لارې يو الجبري برابر ون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b \dots \dots \dots (13,17)$$

د کومو ځوابونه چې د (۱۳، ۱۴) ځوابونه هم دي.

$$2^{x^2+x-4} = 4 \quad \text{بيلگه ۹ . ۱۳ : مساوات}$$

مو لاندې څلورۍ برابر ون يا مربع مساوات ته بيايي (لارښودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د  $x_1 = 2, x_2 = -3$  ځوابونوسره، کوم چې د پيل برابر ون اوبیوني يا

ځوابونه هم دي.

$$\text{بيلگه ۱۰ . ۱۳ : په برابر ون } \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \text{ کې د يوه پوتنڅ بنسټ د}$$

بل پوتنڅ د بنسټ په څټ ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3, x_2 = -4$$

بیلگه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات  $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کې کیدی شي چې ناپېژندونکې د اکسپوننت یا په جگ څخه د دوه واړه لوگارېتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0,5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2 \lg 2}{4 \lg 2}$$

$$x \cdot \lg 0,5 = \lg 0,5 \quad \text{یا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2}$$

$$x = 1$$

$$x = 1.$$

بیلگه ۱۳ . ۱۲ :  $7^x \sqrt{22} - 15^x \sqrt{25} = 0$

یو د تیپ (۱۳ . ۱۶) مساوات دی، ځکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[2]{22}}{\sqrt[2]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow x \sqrt{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

اوله دې امر

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0,1677.$$

که د مساوات په کین اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چې د لوگارېتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشي.  
له

$$\frac{a_1^{f_1(x)} \cdot a_2^{f_2(x)} \dots}{b_1^{g_1(x)} \cdot b_2^{g_2(x)} \dots} = c; \dots \dots \dots (13,18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x)lga_1 + f_2(x)lga_2 + \dots - g_1(x)lgb_1 - g_2(x)lgb_2 - \dots = lgc \quad (13.19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وینه یا افاده F د الجبري اکسپوننت f(x) سره رامنځ ته شي  
 $F(a^{f(x)})=0 ; \dots\dots\dots(13,20)$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \quad (13.21)$$

د برابرېون

$$F(y) \quad (13.22)$$

د ټولو اوبیونو  $y_1, y_2, y_3; \dots\dots\dots$  لپاره باید

$$a^{f(x)} = y_i ; i=1,2,3 \dots\dots \quad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i ; i = 1, 2, 3 \dots\dots \quad (13.24)$$

اوبی شي

**بیلگه ۱۳ . ۱۳:**

برابرېون  $3^{2x} + 3^x = 2$  کیدی شي چی د بدلون  $y = 3^x (y^2 = 3^{2x})$  سره په څلوری

برابرېون یا مربع مساوات  $y^2 + y - 2 = 0$  بیرته وارول شي. لاس ته راځي

$$y_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1.lg3 = lg1 = 0, x_1 = 0$$

دا برابرېون  $x_2.lg3 = lg(-2)$  اوبیونه نه لري

بیلگه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرېون

$$\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1} - 1} = \sqrt{2e^{x^2-1} - 1} \dots\dots\dots(13, 25)$$

کې داسې بدلوو:

$$y = e^{x^2-1} \dots\dots\dots(13, 26)$$

او لاس ته راوړو

$$\sqrt{y} - \sqrt{y-1} = \sqrt{2y-1}; \dots\dots\dots(13, 27)$$

له دې څخه د مربع کولو له لارې لاس ته راځي:

$$y + y - 1 - 2\sqrt{y(y-1)} = 2y - 1 \Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)} = 0 \Rightarrow y(y-1) = 0$$

$$y_1 = 0; y_2 = 1$$

تیک  $y_2 = 1$  (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1} = 1; \dots\dots\dots(13, 28)$$

باید اوبی . د لوگارېتمولو څخه تعقیبېږي:

$$x^2 - 1 = \ln 1 = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1$$

دواړه ارزښتونه پیلبرابرون پوره کوي .

برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخی ۱۳ . ۱ او ۲ کی انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړی حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوگارېتم یوځای رامنځ ته کیري.

بیلگه ۱۳ . ۱۵ :

له  $2^{(\ln^2 x - \ln x + 1)} = 8$  څخه د بیلگې په توگه د بنسټ 2 لوگارېتمولو له لارې لاس ته راځي

$$\ln^2 x - \ln x + 1 = \log_2 8 = 3$$

که کيږدو  $y = \ln x$  ، نو دا څلورۍ برابرون يا مربع مساوات  $y^2 - y - 2 = 0$

لاس ته راځي، د ځوابونو

$$y_1 = -1, y_2 = 2$$

سره اوله دې بيا لاس ته راځي:

$$\ln x = -1, \ln x = 2, x_1 = e^{-1} = 1/e, x_2 = e^2$$

د ډاکټر ماخان شينواري ليکنې اوژباړې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .  
Wien

*Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,  
University of Vienna/Austria*

لاندې د شميرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له  
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهني ستر کتاب : د شمیرپوهني برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسي د بنوونکو او زده کونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوي لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځني ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه (هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د احتمالي شمېرنه کتاب د بنوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهني انگرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهني الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرېون ( دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهني فرمولونو ټولگه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو



1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلي هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میري،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي. دا هم چاپ سوي.

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندي د برينکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دویم ټوک

۳ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د بنوونځي لپاره

۵ - احصایه یا ستاتیستیک د بنوونځي لپاره

لاندي کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - انالیزی ۱

۷ - انالیزی ۲

۸ - کرنبیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولگه

۱۱ - فنکشنل انالیز

۱۲ - وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له [www.grundstudium.info/linearealgebra](http://www.grundstudium.info/linearealgebra) څخه: کرښیز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده‌کوونکو لپاره پوره گټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي چاپ شوی

۱۶ - ځمکچپوهنه ( هندسه ) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېری پوهنه یا سټ تیوري چاپ شوی

۱۹ - د شمیرپوهنې سم اند ( منطق ریاضي ) چاپ شوی

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ - د شمیر پوهنې گډې وډې لیکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیگرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې

۲۳ - د شمیرپوهنې انگریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شمیرپوهنې پښتو انگریزي ډکشنري

۲۵ - د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویونو په پښتو روښانه ونه چاپ شوی

۲۶ - د زره له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي).

۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې و به غزیري.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپریري:

د گروپونو تیوري

- د بنوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره بڼه لیکنه ده، چې د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېشي)

دا لاندې د بنوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیرپوهنه د اوم ټولگي له پاره

شمیرپوهنه د اتم ټولگي له پاره

شمیرپوهنه د نهم ټولگي له پاره


شمیرپوهنه د لسم ټولگي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولگي له پاره

شميرپوهنه د دولسم ټولگي له پاره

رياضي برای صنف دوازه

### د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

<p>ماخان په اولني نوم ميروي شينواری د ارواښادي پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ هـ لمریز کې د شينواریو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترگې راغړولي.</p> <p>د هسکې مینې د لومړني ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسې له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې (ښوونځي له لومړي ټولگي پیل او د دویم ټولگي څخه گام او پای).</p>	
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------

د ۱۹۶۶ تر سپټمبر د کابل طب پوهنځۍ له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شميرپوهني ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د ۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر (صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانگه کې د پوهني وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میړي په ۱۹۷۲ کې له لري د میرمن ښاپیړی سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیړی سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې ځانگه او اباسین نومیږي. ځانگه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلي.

**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**