شمیرپوهنه (ریاضي)

د یولسم ټولګي لپاره

برېښنا پته : smakhan1946@gmail.com

لیکونکی:

ډاکترماخان میرړي شینواری

2016

جرمني د بن ښار

شمیرپوهنه (ریاضي)

د یولسم ټولګي لپاره

لیکونکی:

ډاکتر ماخان (میرزي) شینواری

زما بریښنا پته:

Smakhan1946@gmail.com

سرلیک

سريزه

دا نړدې څلوېښت کاله کيږي، چې زموږ هيواد هراړخيزه ستونزې لري او هر څه دې اوږده جنګ را خراب کړي

ګرانو هيوادوالو!

د نورو نيمګړتياو په څير زموږ درسي نصاب - په تيره شميرپوهنه - هم ډېره د ناسمون سره مخامخ ده.

که دا کار د دولت په څلورديوالي ونه شو، نو زه به وهڅيږم، چې دا ما ليکلي کتابونه د ن ج له لارې له تاسو سره شريک کړم او دا د نړۍ په ستاندارد.

د ښوونځي په کتابونو کې د ستااتيستيک او احتمالوالي درس نور هم خورا ستونځمن دۍ، چې زه ترې دلته تيريږم او د ښوونځي د تيرو کتابونو څخه هم هيله ده- که زما کتابونه وړاندې نه شو- چې دابرخې يا سمې يا له درسي نصاب څخه ووېستل شي. په دې برخه باور وکړۍ، چې نه ليکونکی بوهيږي او نه بل لوستونکی پرې پوهيدلی شي.

زما په دې د ښوونځي کتابونو کې دا برخې نه شته، خو که وخت مې پيدا کړ دا به هم سمې کړم. ما په دې هکله د احتمالوالي او ستاتيستيک کتابونه ژباړلي او همداسې مې په هندسه کې هم احتمالوالي شميرنه راوړې او د ستاتيستيک يو ګتاب مې هم ژباړلي، چې زه به يې په مناسبوخت کې د ليدلو پتې ګرانو لوستونکو ته د ن ج له لارې ورکړم.

دا زما ځني کتابونه او په ډېره مننه د www.ketabton.com ن ج کې ګرانولوستونکوته وړاندې شوي.

د شميرپوهنې سم اند يا منطق زموږ د نصاب په لسم ټولګي کې راغلی او هغه هم لکه ستاتيستيک او ... د پوهيدلو نه دۍ. دا- لکه څنګه چې برېښي- دومره پيچلی نه دۍ، نو زه دا درس له دې امله د اوم ټولګي په سرکې راوړم، هيله ده چې ستونځې به رامنځ ته نه کړي.

زه چې ترڅو ستاسو په منځ کې وم او د کار یم، ستاسو چوپړ کې به اوسم. راځئ، چې ستونځوبي(د ستونځو حل) سره شریک کړو.

زه دې لیکنو او پرې قضاوت کولو ته ځانله یم.

تکرار په کې زیات دی، خو د موصوع، نه د خودیونې. وایې چې تکرار د زده کړې مورده، نو پروا نه لري. کمښتونه هم په کې شته. سره د ټولو نیګرتیاوو دا د ښوونځي له پاراه ډېره ګټوره او زه چې پوهیږم، یواخنۍ سمه لیکنه ده.

دا چې سمه لیکنه ، د ځان له امله نه وایم، دګرانو زده کوونکو او ښوونکو له پاره وایم. دا زما لیکنې نه دې، دا ما له نورو کتابونو څخه رانیولي، چې باید سمې وي.

زه به وهڅېږم، چې درسمي ښوونځي کتابونو نا سمونونه له تاسو سره شریک کړم، خو ډېر لږ، یواځې داسې د یادونې له امله.

په ډېره خواشینۍ باید ووایم، چې ملاتړی نه لرم، چې د لیکنې ستونځې راته په ګوته کړي.

د نصاب د غړو څخه مې هیله ده، چې ګټه ترې پورته کړي او په بنسټ یې د ښوونځي لیکنې سمې کړي.

د خوندیونې ټیکاوي کې پوښتنه نه شته، ځکه چې ما هم د نورو لیکنو څخه راټول کړي او هڅیدلی یم، چې سم یې ترې راونیسم.

باور وکړی زه د دې لیکنو سره لږ ستړی شوی یم، نو ځنې ځایونه به داسې نیمګړي پاتې وي، چې ستاسو پوهیدنې ته کوم زیان نه رسوي، د هغې بخښنه دې وي.

کله تمرینونه کم وي او کله تکرار راځي، چې دا بد مه ګڼۍ.

په دې کتابونو ما دومره ځان بوخت کړی، چې باورکړۍ مغذ مې ترې نورمور دی، نو له دې امله یې پای نور پایوم یا ورته د پای ټکی ږدم.

شننيزه ځمككچپو هنه(تحليلي هندسه)

تحليلي هندسه:

تحليلی هندسه(وکتورهندسه هم) د هندسي يوه برخه ده، چې د هندسي پرابلمونو د حل د پاره د الجبري مرستندوی موادو (په تولیزه توګه له کرښيز الجبر) څخه جمتو کوي. دا په ډېرو حالتونو کې ممکن کوي، چې ځمككچيزې پوښتنکونې سوچه شميرنيز حل کړي، بې له دې چې ليد يې مرستې ته راوبولي يعنې چې شکل څنګه برېښي يا دئ.

دا برخه مويوڅه په لسم ټولګي کې ولوسته اودا نوره بيدلته د څيدنې لاندې نيسو.
دا برخه د نصب د ښوونځيرخهکېډ مخروطيمقاطع ترنامه راغلي،چې ماته يې دا بديلبنه برېښي،ځکه چې د نړی يا لږ تر لږه الماني ادبياتوکې د دېنامه لاندې راغلي.

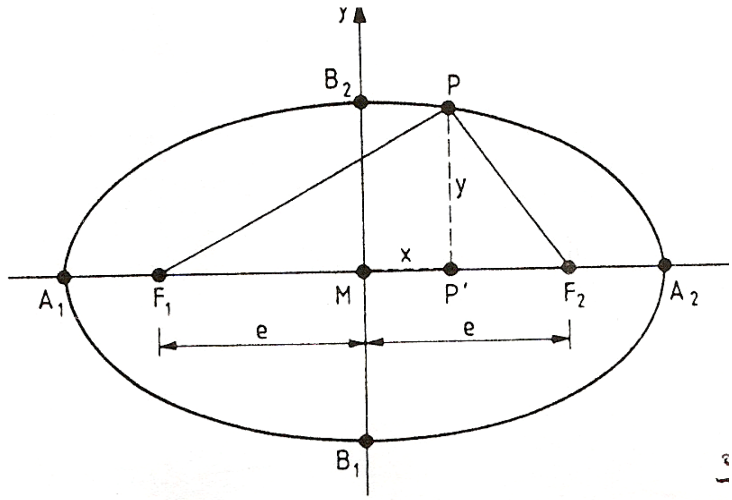
بيضوي(هګی) يا ايليپسی Die Ellipse

بيضوي يا ايليپسی د ټولو هغو ټکو P ډيرئ ده، د کومو واټن چې له دوه ټينګ په ځايټکو، داسی په نامه د ايليپسی د سوزونټکويا محراق F1 او F2 څخه ثابت وي. دا سوزونټکی د څيرې ۱۶ . ۱۱ سره سم د -y محور سره سيومتريك دx - محور باندې ځايوو يا ږدو او د ثابت واټنزياتون ليکو:

$$\underline{PF}1 + \underline{PF}2 = 2a \qquad (16.18)$$

د سوزونټکو واټن دې وي:

$\underline{F}1F2 = 2e;$



ښېره ۱۶ . ۱۱

دا e لاینې اکسڅنتریڅیتي(Exzentrizität دا یوناني کلیمه ده چې په الیپسی هوپربول او پارابول کی د همدغه تعریف لپاره تاکل شوې) بلل کیږي .
د پیتاګوراس له جملی لاس ته راځي:

$$\underline{PF}_1 = \sqrt{(e+x)^2 + y^2}$$

او

$$\underline{PF}_2 = \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

او له دې سره له (۱۶ . ۱۸)

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

$$e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a.\sqrt{(e-x)^2 + y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2$$

(څلورۍ یا مربع ته جګیږي)

$$ex - a^2 = -a\sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$ (ریښه رابیلیږي

(څلورۍ یا مربع کوو)

$$e^2x^2 - 2exa^2 + a^4 = a^2(e^2 - 2ex + x^2 + y^2)$$

ترتیب اوړون $(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$

په ځاي کوو

$$a^2 - e^2 = b^2 \qquad (16.19)$$

او لاس ته راوړو

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad \Leftrightarrow$$

$$(x^2/a^2) + y^2/b^2) = 1 \qquad (16,20)$$

د منځټکي(M(0,0سره د ایلیپسی منځټکي مساوات

د $y=0$ لپاره دی $x=\pm a$، د $x=0$ لپاره دی $y=\pm b$. ایلیپسی (ځیره ۱۶ ، ۱۱)

د x - محور په ټکو $A1(-a,0)$, $A2(a,0)$ او د y - محور په ټکو

$B1(0.-b)$, $B2(0,b)$ کی پرې کوي، aاو b د دواړو نیمحورونو اوږدوالی دی

<table>
<tr>
<td>لکه د الیپسی د هرټکي لپاره، همداسی د Bلپاره هم اړیکی (۱۶ ، ۱۸) باور لري:
$\underline{F1B2} + \underline{F2B2} = 2a$

د $\underline{F1B2} = \underline{F2B2}$ له امله له دې لاس ته راځي $\underline{F2B2} = a$

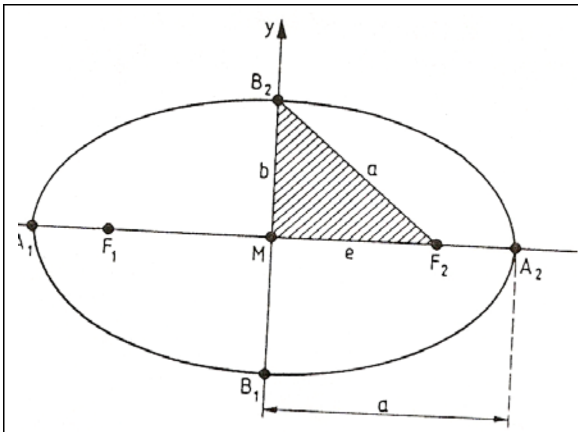
ځیره ۱۶، ۱۲)</td>
<td>

Bild 16.12</td>
</tr>
</table>

له دې سره په دریګوډي MF2B2 کی د اړیکو (۱۶ ، ۱۹) هندسي ارزښت پیژندل کیږي.

که منځټکی M کواوردینات Mx ; My ولري او د ایلیپسی محورونه د کواوردیناتو سره غبرګ وځغلي، نو د ایلیپسی د یوه خوښې ټکي(P(x,yلپاره باور لري:

$$(x-xM)^2/a^2+(y-yM)^2/b^2=1 \qquad (16\ ,2\ 1)$$

د ایلیپسی د منځټکي مساوات د منځټکي $M(x_M, y_M)$ سره

د پورته فرمول ځلولو وروسته د ایلیپسی ټولیز(عمومي) جوړښت پیژندل کیږي.

$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ (16 , 22)

د ایلپسی مساواتو ټولیزه بڼه یا - فورم

د ګردۍ برابرون سره په توپیر(پرتله یا مقایسه ۱۶ . ۱۲) د x^2 او y^2 ځله وونی یا ضریبونه یو له بل توپیر لري، مګر همغه مخنخښه لري($A.B > 0$)

بیلګه ۱۶ . ۱۶ :

د د ایلیپسی منځټکی، نیممحور، او سوزونټکي لټول کیږي، که دا برابرن

$$9x^2 + 25y^2 -54x +100y -719 = 0$$

مو مخ ته پروت وي.

اوبنونه : د ایلپسي برابرون د منځټکي بڼه یا فورم (۱۶ . ۱۲) باندې اړول کیږي:

$$9(x^2-6x)+25(y^2+4y) = 719$$

څلورۍ پوره کونه یا مربعتکمیلونه

$$9(x^2-6x+9)+25(y^2+4y+4) = 719+9.9+25.4$$

$$9(x-3)^2 +25(y+2)^2 = 900$$

(په ۹۰۰ ویش)

$$(x-3)^2 / 100 + (y+2)^2 / 36 = 1$$

د لاس ته راوړلو مساواتو څخه منځټککواوردینات

$$xM = 3 , yM= -2$$

لوستلکیږي او د نیممحور لپاره $a^2=100$, $a=10$ او $b=6$, $b^2=36$ لوستل کیږي.

د (۱۶ . ۱۹) سره سم لاس ته راځي:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$$

او له دې سره منځټکي (پرتله څیره ۱۶ ، ۱۱)

$$F_1(x_M - e, y_M) = F_1(-5,-2), F_2(x_M + e, y_M) = F_2(11,-2)$$

بیلګه ۱۶ . ۱۷ :

د ایلپسي برابرون د منځټکي (M(-1,3 سره لټول کیږي، په کوم چې ټکي(P1(-3,3او

$P_2(0,3+\frac{3}{2}\sqrt{3})$ پراته وي.

اوبونه : د (۱۶ ، ۲۱) سره سم د منځتکي(M(-1,3 سره د ایلپسي براورن داسی دي

$(x-1)^2 / a^2 + (y-3)^2 / b^2 = 1$

ټیکي P1 او P2 باید د ایلیپسي برابرون پوره کړي:

$$\frac{(-3+1)^2}{a^2}+\frac{\sqrt{(3-3)^2}}{b^2}=1, \frac{(0+1)^2}{a^2}+\frac{(3-3-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1$$

د دې برابرونونو له لومړی څخه لاس ته راځي $4/a^2 + 0 = 1$ همداسی(< = >)
a = 2 او له دې سره د دویم برابرون څخههمداسی < = >

$$\frac{(0+1)^2}{4}+\frac{(-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{9}{4}.3}{b^2}=3/4 \Leftrightarrow b=3$$

د ایلیپسی لټونکی برابون داسی دی:

$(x+1)^2/4 + (y-3)^2/9 = 1$

بیلګه ۱۶ . ۱۸ :

د کرښو
الف) $y = x + 2$
او ب) $y = x - 2$
غوڅټکي د ایلپسی $9x^2+y^2+54x+72=0$ سره لټول کیږي.
اوبیونه : که الف) $y=x+2$ د ایلپسی برابرنونو کی خوندي شي، نو لاس ته راځي

$9x^2+(x+2)^2 +54x+72=0$ <=> $10x^2+58x+76 = 0$

د څلوری - یامربع برابرونونو اوبی :

$x1 = -2 , x2 = -3,8$

د غوڅټکي ابسځیز یا پروتمحور دی. په دې پورې اوردینات یا ولاړ محور

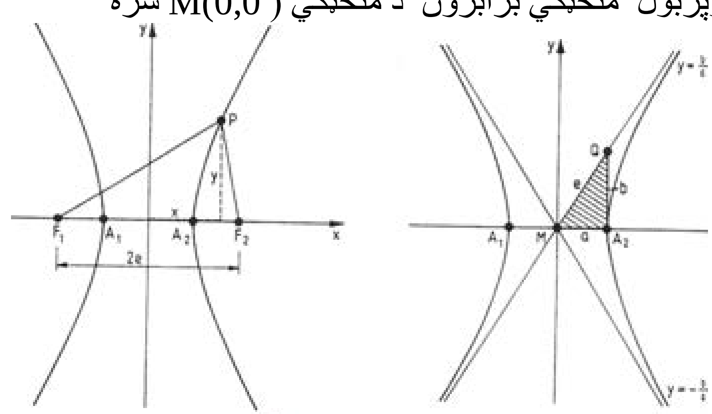
$y1 = 0 , y2 = -1,8$
اړه لري.
ب) دy رامدځ ته شوې څلورى(مربع) برابرون
$9X^2+(x-2)^2+54x+72 \Leftrightarrow 10x^2+50x+76=0$
رييل اوبيونه نه لري. کرښه $y = x-2$ د ايليپسې څخه دباندې پرته ده

هوپربول Die Hyperbel

پېژند:
هوپربول يا هيوپربل د ټولو هغو ټکو ډيرى ده، د کومو لپاره چى د کمون يا کمښت مطلقه ارزښت واټن، د دوه کره په ځاي ټکوF1 اوF2 ،دا په نامه د هوپربول سوزونټکو

يامحراقونو، څخه ثابت وي. دا سوزونټکي ، لکه په ايليپسى کى دلته هم موږ کره ټاکو (څيره ۱۶ . ۱۳) .
د ثابت واټنکمون يا واټنکمښت| $\underline{PF1}-\underline{PF2}| = 2a$ او (ځيره ۱۶ . ۱۳)
د سوزونټکوواټن) $\underline{F1F2} = 2e$ (څيره ۱۶ . ۱۳)
$$e^2-a^2= b^2 \qquad (16.23)$$
په پورته کې يا بل چيرې، چې کوم څه لاندې کرښيز شوي وي، دا په زياتو ادبياتو کې پورته کرښيز شوي، دې ته دې پام وي، چې لاندې کرښيز شوي وي او که پورته، توپير نه لري يا همغه څه دي.
يو ايليپسى برابرون ته ورته تلنه (برخۀ ۱۶ ، ۱۳) مو لاندې ته لارښودوي:

$$(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1 \qquad (16 . 24)$$
د هوپربول منځټکي برابرون د منځټکي (M(0,0 سره



د y=0 لپاره x=±a دى ، دا په دې مانا چې هوپربول د x - محور په ټکي

(A1(-a,0 او(A2(a,0کی غوڅوي. دا ټکی ککری ټکی بلل کیږي۰ ګورو چی دا دککری ټکی دئ .(د ناپای سره ځاننیونی په هکله: که (۱۶ . ۲۴) د y په لور حل شي، نولاس ته راځي:

$$y = \pm b.\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} = \pm\frac{b}{a}.x.\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

د oe ± <- x لپاره a²/x²- له منځه ځي. پس هوپربول ځان کرښی y = ±(b/a).x ته نزدې کوي (ځیره ۱۶ . ۱۴)
له دې امله لاندې برابرون

$$y = \pm(b/a)x \qquad (16,25)$$

د هوپربول اسیمپتوتی بلل کږي.
د (۱۶ . ۲۳) له امله MQ = e دی .
که منځټکی M کواوردینات xM ,yM ولري او سیومتریك غبرګ د کوردیناتو محور ته ځغلي، نو د یوه په خوښه هوپربول ټکي(P(x,yلپاره باور لري:

$$(x-x_M)^2/a^2-(y-y_M)^2/b^2=1 \qquad (16,26)$$

د هوپربول منځټکي برابرون (M(xM ,yM سره.

د پورته مساوات د ځلولو وروسته، په لاندې ډول د هوپربولمساوات ټولیز جوړښت جوتیږي.

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (16,27)$$

دهیوپربول برابرون ټولیزه بڼه یا فورم
دلته د ایلیپسی سره په مخامخ (همدا برعکس دئ) یا په ځټ ډول د x² او y² ځلهووني بدله مخښه لري
(A . B < 0) ټولیز برابرون هم کولی شي چی موږ لاندې منځټکي برابرون ته لارښود کړي،

$$(y-y_M)^2/b^2-(x-x_M)^2/a^2=1 \qquad (16,26')$$

د کومو ځیره چی یو پورته لور او کښته لور ته واز هوپربول دئ.

بیلګه ۱۶ . ۱۹:
د لاندې هوپربول منځټکی او سوزونټکی لټول کیږي

$-25x^2 -150x+144y^2 -188y +144 = 0$

اوبیونه: د ورکړشوي هوپربولمساوات بنه په منځ ټکي (۱۶ . ۲۶) اوړي یعني فورم یی بدلیږي:

$-25(x^2+6x)+144(y^2+2y) = -144$

(د څلوری پوره کونه)

$-25 (x^2+6x+9)+144(y^2-2y+1) =-144-225+144$ $-25(x+3)^2 + 144(y-1)^2 = -225$

(په 225 - ویشنه)

$-25(x+3)^2+144(y-1)^1 = -225+(x+3)^2 / 9 -(y-1) /(25/16) = 1$

د لاس ته راغلومساواتوڅخه لاندې لوستل کیږي:

$xM = - 3 ,yM = 1 ,a^2 = 9 , a = 3 , b^2 = 25 /16 , b = 5/ 4$

او د دې سره سم د (۱۶ . ۲۳) له امله لرو:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{144/16 + 25/14} = 13/4$$

د هوپربول منځټکی (M(-3,1دی ، سوزونټکي یی

(F1(xM-e,yM)=F1(-25/4,1 او (F2(xM+e,yM)=F2(1/4,1 دي.

بیلګه ۱۶ . ۲۰ :

د هوپربول $9x^2-4y^2=36$ اسیمپټوتي یو له بل سره کوم کونجونه ترې یعنی جوړوي یا اسیمپټوتی په کومو کونجونو کی یو بل پریکوي؟

اوبیونه : هوپربول د منځټکي بنه (فورم) له (۱۶ . ۲۴) سره سم په لاندې ډول ده $x^2/4-y^2/9=1$ یا د $a=2 ,b=3$ سره

له دې سره سم دواړه اسیمپټوتی د(۱۶ . ۲۵) له مخی $y=(3/2)x$ او $y=-(3/2).x$ دي.

د لومړی اسیمپټوتی او x - محور ترمنځ کونج φ د $\tan\varphi = 3/2, \varphi = 56,31°$ څخه لاس ته راځي.

له دې امله د اسیمپټوتو ترمنځ کونج ψ باور لري $\psi = 2\varphi = 112,62°$ داکونج کیدی شي د هوپربول د وازونکونج په نامه ونومول شي.

سرلیک

بیلګه ۱۶ . ۲۱ :

د ایلیپسی $x^2/64+y^2/16=1$ غوځتکي د هوپربول سره لټول کیږي چی منځ ټکي یی په سرچینه او ککرتګي یی د ایلیپسی په سوزونتکو پراته وي او همغه ارزښت b لکه ایلیپسی ولري.

اوبیونه : د ایلیپسی نیممحور په a1 او b1 سره او لاینیزه اکسڅینتریڅیتي یی په e1سره ښایو.

نو باور لري: $a1=8$, $b1=4$ او د (۱۶ . ۱۹) سره سم دی.

$$e_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

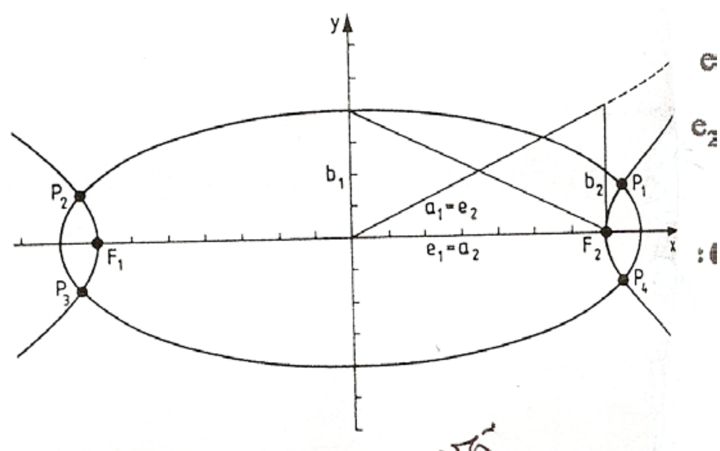


Bild 16.15 شکل

د هوپربول لپاره نخښی e_2, a_2, b_2 کاروو:

باورلري (پرتله څیره ۱۶ . ۱۵) : $b_2 = b_1 = 4, a_2 = e_1 = 4\sqrt{3}$

او د (۱۶ . ۲۳) سره سم دی $e_2^2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 8 = a_1$

د هوپربولبرابرون داسی دی:

$$x^2 / 48 - y^2 / 16 = 1$$

د غوڅتکو کواوردینات د ایلپسی- او هوپربولمساوات پوره کوي. که داوړه مساوات سره زیات شي نو لاس ته راځي

$$(\frac{1}{16}+\frac{1}{48})x^2=2, x^2=348/7, x_{1,2}=\pm 8\sqrt{\frac{6}{7}}$$

د ايليپسي او هوپربولبرابرونونو ځخه لاس ته راځي

$$y^2 = 16(1- x^2/64)=16/7 <=> y^2= 16(x^2/48 -1)=16/7=>$$

$$\Rightarrow y=\pm 4\sqrt{1/7}$$

او د دې سره سم د دواړو کږو غوڅټکي دي:

$$P_1(8\sqrt{6/7}), P_2(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, 4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_3(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_4(8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}})$$

پارابول Die Parabel

پارابول د ټولو هغو ټکو P ډيرئ ده، چې واټن يې له يوه کلك په ځاي ټکی، د پارابول سوزون ټکیF، او يوې کلك په ځاي کرښی، د پارابول ترمخکرښی l (داپه ښيره کی جوته ده چې دا کومه کرښه ده) سره مساوي دي(ښيره ۱۶ . ۱۶) د سوزونټکی او مخکرښی ترمنځ واټن نيم پارامتر p بلل کيږي، Sککری ټکی دی،کرښه چې له S او F تيريږي د پارابول محور دی.

له پيژند – يا تعريف برابرونونو = $\underline{PF}$ $\underline{PQ}$ځخه لاس ته راځي

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=x+\frac{P}{2}$$

او له دې ځخه د مربعکولو او د ټولګی ځخه لاس ته راځي

$(x-p/2)^2 +y^2 =$
$(x+p/2)^2$,

$x^2-px+p^2/4+y^2 = x^2+px+p^2/4$

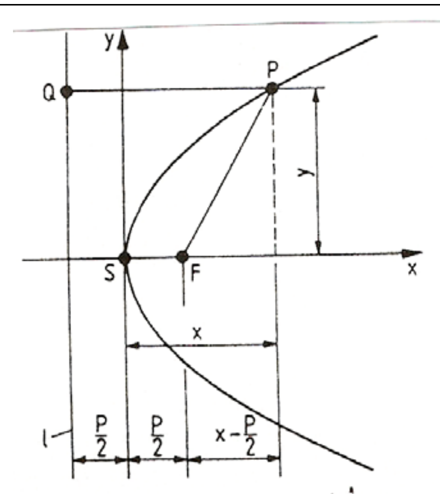


Bild 16.16

نو لرو

$$y^2 = 2px \qquad (16,28)$$

د پارابول ککربرابرون د ککرنکي $S(0,0)$ سره، پورته لور ته واز $(x > 0)$

په همدې ډول:

$$y^2 = -2Px \qquad (16 , 29)$$

هغه وکیڼ لور ته واز پارابول دئ د واریابلو د بدلون څخه لاس ته راځي:

$$(16 . 30) \qquad x^2 = 2py$$

د پارابول ککرمساوات د ککرټکي $S(0,0)$ سره، پورته واز پارابول $(y > 0)$

په همدې توګه:

$$x^2 = -2py \quad (Y<0) \qquad (16.31)$$

پورته لور ته واز پارابول دئ.

که ککرنکي S کواوردینات xS , yS ولري او د پارابول محور د x - محور ته غبرګ ځغلی په همدې ډول د y - محور ته هم غبرګ ځغلي، نو د یوې په خوښه پارابول ټکی لپاره باور لري:

$$(16. 32) \qquad (y - yS)^2 = 2p(x-xS)$$

د پارابول ککریبرابرون د ککری ټکی$S(xS,yS)$ سره، چی ښئ لور ته وازوي$(x>xS)$

$$(x - xS)^2 = 2p(y - yS) \qquad (16.33)$$

د پارابول ککریبرابرون د ککرټکي$S(xS,yS)$سره، چی پورته لور ته واز وي $(y> yS)$.

په همدې ډول:

$$(y - yS)^2 = -2p(x - xS) \quad (x<xS) \quad (16.34)$$

$$(x -xS)^2 = -2p(y - yS) \ (y<yS) \quad (16.35)$$

هغه کڼ لور او همداسی کوزې یا لاندې لور ته واز پارابولونه دي

د فرمول (۱۶ . ۳۲) همداسی (۱۶ . ۳۳) ځله ونو څخه وروسته د پارابول ټولیز (عمومي) جوړښت پیژندل کیږي:

$$Ay^2+Bx+Cy+D= 0 \ , B |=0 \qquad ((16, 36)$$

همداسی(< = >)

$$Ax^2+Bx+Cy+D=0 \ , C|=0, \qquad (16 . 37)$$

د پارابولمساوات ټولیزه (عمومي) بڼه (فورم)

بیلګه ۱۶ . ۲۲ :

د پارابول برابرون دې له ککریټکی ، له نیمپارامتر او وازلورې څخه پیداشي:

الف $S(,0,0), P = 6$)کیڼ، ب $S(2,1)\ ;P= 0,5$) پورته

پ $S(-3,-5), P = 4$) لاندې ت $S(4,-2)\ ,P= 2/3$) ښی

اوبیونه یا حل:

الف) $y^2 = -12x$ ب) $(x-2)^2 = y-1$

پ) $(x+3)^2 = -8(y+5)$ ت) $(y + 2)^2 = (4/3)(x-4)$

بیلګه: د پارابول د لاندې مساوات سره دې د پارابول د ککرټکي کواوردینات ، نیمپارامتر او د وازون لور وټاکل شي

$a) (x^2 + 4y +20x + 10 = 0,\ b)\ y^2 -18x + 12y -36 = 0$.

اوبیونه : د پارامترټولیزه بڼه (فورم) دې په ککرییرابرون (۱۶ ، ۳۲) همداسی(۱۶ ، ۳۳) همداسی (۱۶ ، ۳۴) همداسی (۱۶ ، ۳۵) کی وازمایل شي (څلوری پوره کیدنه یا مربع تکمیلیدنه) . د ککرییرابرون څخه ککریټکي ، نیم پارامتر او وازلور لوستوړ دي.

a) $x^2 + 20x +100 = -4y -100 + 100$

$(x+10)^2 = -4y\ S(-10, 0), P = 2$

پارابول لاندې لور ته و از دی

b) $y^2 + 12y +36 = 18x +36 + 36$

$(y+6)^2 = 18(x+4)$

$S(-4,-6), P = 9$

پارابول ښی لور ته واز دی

۱۶ . ۶ ټولګه:

دا له ۱۶ . ۱ نیولی تر ۱۶ . ۵ پورې خیرل شوې دهوارې کږې (کږی په هوارې یا سطحه کی)

-کرښه

-ګردی

-ایلیپسی چی د کواوردینات محور سره غبرګ ځغلي، ټول د لاندې مساوات

-هوپربول

-پارابول

په خیر انځوریږي:

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ (16 , 38)

فاکتورونه، ضریبونه یا ځله وونې A او B د کړی د توکو لپاره پرېکنده دي.

برابرون (۱۶،۳۸) لاندې روښانوي

د $A.B > 0 , A \neq B$ لپاره ایلیپسی ،

د $A = B$ لپاره گردئ

د $A.B < 0$ لپاره هوپربول، که $A > 0 , B < 0$ وي، نو کیڼ لور ته واز،

که $A < 0 , B > 0$ وي، نو پورته او لاندې لورته واز

د $A.B = 0 , A = 0 , B \neq 0$ لپاره یو پارابول، چی محور ئی د x - محور سره غبرگ دئ د $A \neq 0$ ، $B = 0$ یو پارابول ، چی محور یی د y - محور سره غبرگ دئ

د $A = B = 0$ لپاره یوه کرښه‌که په (۱۶ . ۳۸) یو بل گډوله(یو د بل سره گډ شوی) ځلوری توکي رامنځ ته شي، نو دا د کړې یو ځلوری برابرون یا مربع مساوات ښکاروي (توضیځ کوي) ، د کومو محورونه چی نور د کواوردیناتو محورونو سره غبرگ نه دي.

بیلگه ۱۶ . ۲۴ :

له لاندې مساواتو سره کومی کړې انځوریدلی شي ؟

a) $x^2+y^2+4x-8y-5=0$ b) $3x^2+24x+15y+138=0$

c) $16x^2+y^2-96x=0$,d) $2x^2-2y^2+16x+10y-105/2=0$?

اوبیونه : (یادونه : لکه د نورو ځایونو په څیر دلته هم الف د a په ځاي لیکم ، ځکه چی د پښتو لپاره کرښه په لاتین حروفو له ښي لور نه شي پیل کیدی)

الف یاa) که $A = B = 1$ وي ، نو گردئ

ب یاb)که $B=0$ پارابول چی محور یی د-y محور سره غبرگ وي

پ c)که $A.B > 0$، $A \neq B$ نو ایلیپسی

تd)که$A.B < 0$ ، نو هوپربول

تمرینونه:

کرښي $y = (4 /3)x +2$ سره غبرگ څغلي؟

۲۰ – د ایلیپسي مساوات وټاکئ. له

i) M(0,0), a 11, c = 8 , B) M(0,0), b = 4 , c = 6 ,

:) M(-3,7), c = 4 , b = 5 , d) M(4, -5) , c = 7 , a = 10!

۲۱ – د لاندې ايليپسيمساواتوڅخه د نيممحوررونو اوسوزونتکو منخټکی او اوردوالی راپیداکړی:

a) $x^2 / 100 + y^2/ 64 = 1$ b) $(x+3)^2 / 81 + (y-1)^2 / 56 = 1$

c) $3x^2 + 4y^2 -24x >= 0$, d) $5x^2 +9y^2 -10x + -90y + 50 = 0$,

e) $4x^2 -13y^2 -208 = 0$, f) $4x^2 +9y^2 +54y -227 = 0$!

۲۲ – د هغو ایلیپسو مساوات راپيداکړی، کومې چې

الف) چې منخټکی M (0,0) او لايتي ایکسځنتريځيتي e = 6 لري او
ټکی P(10.0) څخه تيرځي،

ب) له منځټکی M (1,1) او لاينې ايکسځنتريځيتی e = 4 لري او له
ټکو څخه تيريږي.

پ) د نيممحور اوږدوالی a = 9, b = 6 لري او له ټکو $P_1(2,8)$, $P_2(2,-4)$ څخه
تيريږي!

ت) د نيممحوراوږدوالی a = 2 , b = 6 لري او له ټکو($P_1(-1,-4)$, $P_2(-5,-4$
څخه تيريږي!

---

۲۳ – د لاندې ايلپسو او کرښو ترمنځ غوځټکي پيدا کړی

a) $x^22 +4y^2 -20 = 0$, $x+2y-6 = 0$,

b) $3x^2 +4y^2 -24x =$, $y = 3 .x$,

c) $(x-3)^2/ 9 +(y-1)^2 / 4 = 1$, $y = x+1$,

d) $x^2 + 4y^2 +16y +12 = 0$, $y = x-2$!

۲۴ – د هوپربول مساوات له

لف) b M(0,0) , a = 4 , e = 5 , ب) M(-3,2), b = 4 , e = 6 ,

پ) M(1,1) او هوپربولټکو $P_1(-3,1)$, $P_2(6 , 7 /4)$!

ت) a = 3 , b = 2 , x = -1 او د هوپربولټکي P(-4,-2) وټاکی !

۲۵ – د هوپربولونو

a) $x^2 / 144 - y^2 / 36 = 1$, b) $9x^2 - 64y^2 = 576$

نیممحورونواوړدوالی او اسیمپتوتي راپیدا کړی !

۲۶ – د لاندې هوپربولونو منځتکي او د نیممحور اوږدوالی پیداکړی

a) $9x^2 - 64y^2 - 36x - 540 = 0$, b) $x^2 - 9y^2 + 54y - 90 = 0$,

c) $x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 16 = 0$, d) $x^2 - y^2 - 2x + 10y - 28 = 0$!

۲۷ – د لاندې مساواتو سره دکړو غوځتکي وټاکی:

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$, $y = \frac{1}{5}x$,

b) $4x^2 - 9y^2 = 144$, $x^2 - 24y = -28$,

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, $y = -\frac{2}{3}x - 5$,

d) $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 68 = 0$, $9y^2 - 36y - 72x + 8 = 0$,

e) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$, $x^2 - y^2 = 16$!

۲۸ – د لاندې پارابولونو ککرتکو اوسوزونتکو کواوردینات وټاکی:

a) $5y^2 + 4x = 0$, b) $2y - (1/2)x^2 = 0$ c) $4y + (1/3)x = 0$,

d) $2y^2 - 12x = 0$, e) $y^2 - 2y - 10x - 9 = 0$, f) $x^2 - 7x - y + 12 = 0$

g) $y^2 - 6y + 6x - 3 = 0$. h) $x^2 + 4x + 12y 52 = 0$

۲۹ – د پارابولمساوات له لاندې ککرتکو او سوزونتکو وټاکی:

S (0,0), F(0,1) , b) S(0,0), F(-1,0), c) S(1,1) , F(2,1),

S(-1,-1), F(-2,-1), e) S(2,-3), F(2,-2), f) S(-2,3), F(-2,2)

۳۰ – یو پارابول د ککرې پروت ارزښت $x_s = 3$ لري، کرښه $y = 8$ د محور په ځ

تکي P (7,4) تیریږي. ددې مساوات څنګه دي؟

۳۱ – یو پارابول د ککرکواوردینات $y_s = -3$ لري، کربښه $x = 2$ د محور په څیر او له ټکي $P(4,-4)$ تیریږي. د هغې مساوات څنګه دي؟

۳۲ – کوم پروتڅاي اړیکی د

الف) پارابول $y^2 = -4x$ او کربښی $y = x-1$

ب) پارابول $x^2 = 5y$ او کربښی $y = x-4$

پ) پارابول $x^2 = -3y$ او کربښې $y = x + 5/12$

ت) پارابول $y^2 - 6x - 2y + 7 = 0$ اوکربښي $y = x$

ټ) پارابول $y^2 = 7x$ او کربښې $9x + 12y + 28 = 0$

ترمنځ پرتی دي؟

که موجود وي ، نو غوڅټکی همداسې لمستکی یې ورکړی!

د پارابول او کربښي غوڅټکي

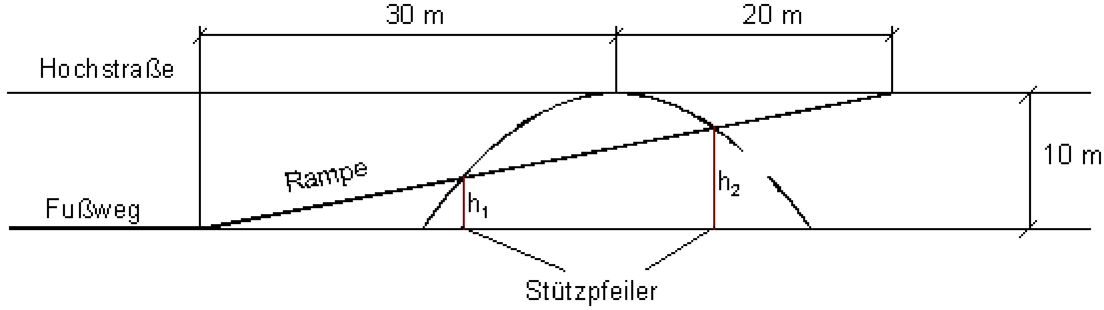
بیلبیلګه:

یوه د پلو لار د یوه جګ سرک لاندې تللې او هغې ته غبرګه.

د یوه پله په پښه چې د پارابول بڼې په ډول لیندې دې د پلو لار د یوې مایلسطحې جوړه شوي، چې سرک ته پورته ځي.

د دې مایل سطحې د په ولاړو پښو جګوالی وټاکی.

د پارابول څخه فقط پوهیږو، چې د بڼې ضریب $a_2 = -1/20$ لري.

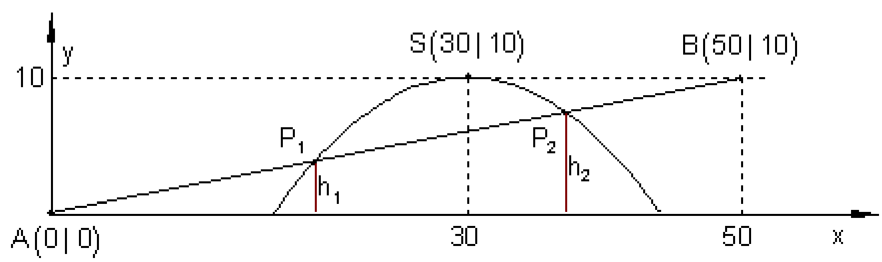


په پورته کې Hochstrasse جګ سرک

Fussweg د پلو لار

Stützpfeiler د درېدو- یا تکیه ستنې یا متې (پرېوداولو ستنې یا متې)

د مودل جوړونه Modellierung



تابع مساوات لیکنه

مایلهواره یا - سطحه(د کربنې په ډول) په سرچینه او P(50;10) کې.

$$\Rightarrow a_1 = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{5}x$$

د پله لینده یا که غواړۍ قوس(پارابول) د ککرۍ $S(30|10)$ او $a_2 = -\frac{1}{20}$ سره .

ککرۍ ټکي بڼه	$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{20}(x-30)^2 + 10$
ټوليزه بڼه	$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + 3x - 35$

د دې له پاره چې د دې په ولاړو ستنو جګوالی لاس ته راوړو د پارابول سره د کرښې غوڅټکو ته اړتيا لرو.

د غوڅټکو شمېرنه؛

اينوونه: $f(x)=g(x)$ يا $f(x)-g(x)=0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{20}x^2 + 3x - 35 - \frac{1}{5}x = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{14}{5}x - 35 = 0$$

څلوريز يا مربعمساوات يا - برابرون

$$-\frac{1}{20}x^2 + \frac{14}{5}x - 35 = 0 \,|\cdot(-20)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 56x + 700 = 0 \Rightarrow p = -56\,;\; q = 700$$
$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-28)^2 - 700 = 84$$
$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$
$$\Rightarrow x_1 = 28 + \sqrt{84} \quad \vee \quad x_2 = 28 - \sqrt{84}$$

د متو يا ستنو جګوالی د اړونده y ارزښتونه دي.

$$y_1 = g(x_1) = g\left(28 + \sqrt{84}\right) = \frac{1}{5}\left(28 + \sqrt{84}\right) \approx \underline{\underline{7,433}}$$
$$y_2 = g(x_2) = g\left(28 - \sqrt{84}\right) = \frac{1}{5}\left(28 - \sqrt{84}\right) \approx \underline{\underline{3,767}}$$

د متې h_1 جګوالی 3,764 m دی، د ستنې h_2 جګوالی 7,433 m دی.

که د يوې کرښې غوڅټکی د پارابول سره ټاکل کيږي، دا مو تل يوه مربع مساوات ته بيايي.

24

غوڅووني يا قطع کو ونی، مماس، تيرېدوني

د کارقرارداد:

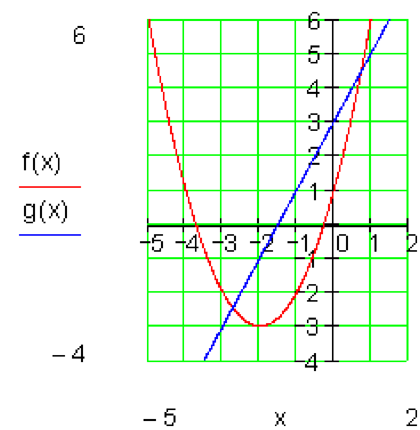
د پارابول$f(x)$ غوڅټکي د يوې کرښې $g(x)$ سره وټاکی او هر دواړه ګرافونه په يوه مناسب پروتولاړسيستم کې وکاږی.

د پارابول د رسمولو لپاره د ککرۍ ټکي بڼه وکاروی.

$f(x) = x^2 + 4x + 1$ همداسي د ککرۍټکي بڼه کي : $f(x) = (x+2)^2 - 3$

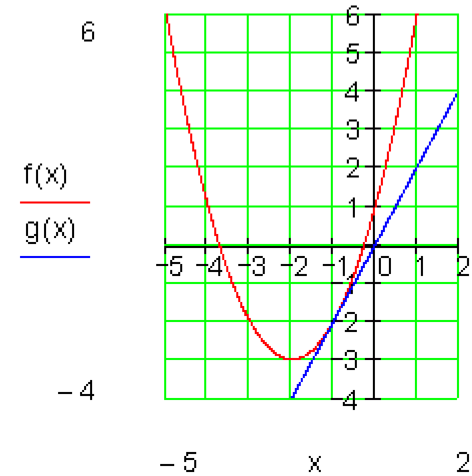
a) $g(x) = 2x + 3$ b) $g(x) = 2x$ c) $g(x) = 2x - 2$

د پارابول او ګرښې غوڅتکي
د داړو مساواتو د ضريبونو د ورکړې وروسته، غوڅتکي شمېل کيږي، بيا کېدی شي دواړه ګرافونه وکښل شي.



د $g(x)$ کرښه د $f(x)$ ګراف په دوه ټکو کې غوڅوي. غوڅووني بلل کيږي.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$$
$$\Rightarrow p = 2;\ q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 2 = 3$$
$$\Rightarrow x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} = -1 + \sqrt{3} \approx 0{,}73$$
$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{D} = -1 - \sqrt{3} \approx -2{,}73$$
$$g(x_1) = 2\cdot\left(-1 + \sqrt{3}\right) + 3 = 1 + 2\sqrt{3} \approx 4{,}46$$
$$g(x_2) = 2\cdot\left(-1 - \sqrt{3}\right) + 3 = 1 - 2\sqrt{3} \approx -2{,}46$$
$$\Rightarrow P_1\left(-1 + \sqrt{3} \mid 1 + 2\sqrt{3}\right) \approx \underline{\underline{P_1(0{,}73 \mid 4{,}46)}}$$
$$P_2\left(-1 - \sqrt{3} \mid 1 - 2\sqrt{3}\right) \approx \underline{\underline{P_1(-2{,}73 \mid -2{,}46)}}$$

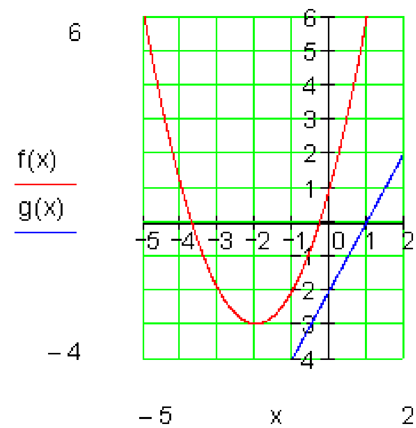


د g(x) کرښه د f(x) ګراف په یوه ټکي کې لمسوي.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$\Rightarrow p = 2;\ q = 1 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} = -1$$
$$g(x_{1/2}) = 2 \cdot (-1) + 3 = -2$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{1/2}(-1|-2)}}\ \text{Berührungspunkt}$$

پورته: د لمستکی یا مماستکی

یوه کرښه چې ګراف په تیک یوه ټکي کې لمسیږي تانجنت یا لمسووني بلل کیږي



$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$$
$$\Rightarrow p = 2;\ q = 3$$
$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 - 3 = -2\ \text{keine Lösung}$$

کرښه g(x) د f(x) سره ګډ ټکی نه لري.

داسي یوه کرښه تېرېدوني بلل کیږي.

د تمرين بيلګو څخه پيژندل کيږي، چې غوڅټکو ګڼون يا تعداد، چې يوه کرښه يې له پارابول سره لري د ديسکريمينانت څخه سيده لوستل کيږي.

$D > 0: \Rightarrow$ $D = 0: \Rightarrow$ $D < 0: \Rightarrow$	پارابول او کرښه په دوه ټکو کې سره غوڅوي پارابول او کرښه سره په يوه ټکي کې لمسوي. پارابول او کښه ګډ ټکی نه لري.

پوښتنې

پارابول او کرښه II

لومړی:

يو پارابول د تابع $f_1(x)$ سره له يوې کرښې د تابع $f_2(x)$ په ټکو P_1 او P_1 کې غوځيږي، چېرته چې P_1 هغه خورا ټيټ ټکی باید وي. کرښې ته ولاړکونجیز د تابع $f_2(x)$ سره يوه دويمه کرښه د تابع $f_3(x)$ سره ځغلي چې له ټکي P_2 تيريږي.	$f_1(x) = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - 6$ $f_2(x) = x + \frac{7}{2}$

وشمیرئ:

الف- د کرښې او پارابول غوڅټکي P_1 او P_2 .

ب – تابع $f_3(x)$ چې $f_2(x)$ ته ولاړکونجیزه ځغلي.

پ - توابعو ته ګرافونه وکاږئ.

دويم: پارابول $f(x)$ د y په لور داسې راکاږئ، چې کرښه g لمس کړي.

$$f(x) = 0{,}5x^2 + 3x \,; \qquad\qquad g: 2y - 4x + 8 = 0$$

د $f(x)$ راکښنه وشمیرئ او لمس ټکی.

دریم:

يو پارابول د تابع $f_1(x)$ سره له يوې کرښې د تابع $f_2(x)$ په ټکو P_1 او P_1 کې غوځيږي، چېرته چې P_1 هغه خورا ټيټ ټکی باید وي. کرښې ته ولاړکونجیز د تابع $f_2(x)$ سره يوه دويمه کرښه د تابع $f_3(x)$ سره ځغلي چې له ټکي P_2 تيريږي.	$f_1(x) = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - 6$ $f_2(x) = -x + \frac{7}{2}$

وشمیرئ

الف- د کرښې او پارابول غوښتکيP_1 او P_2 .

ب – تابع $f_3(x)$چې $f_2(x)$ ته ولاړکونجيزه څغلي.

پ - توابعو ته ګرافونه وکاږۍ.

څلورم: يو تابع $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}; x \in \mathbb{R}$ ورکړ شوی

الف- سچينيزه کرښه $g(x)$ د $A(1 | 6)$ له لارې ځغلي.

د غوښتکي$f(x)$ د $g(x)$ سره وشميرۍ.

ب- د $g(x)$ سره کومه غبرګه $f(x)$ لمسوئ؟

لمستکی و شميرۍ.

د $g(x)$ سره کومه غبرګه د $f(x)$ سره غوښتکی نه لري.

پنځم: يو پارابول د اوردينات محور(y –محور) په P_1 کې غوڅوي او په ټکو P_2 او P_3 کې له يوې کرښې د تابع$f_1(x)$ سره غوڅوي. دا وشميرۍ:

الف- ټکيP_2 اوP_3 ب- د $f_2(x)$ تابع پارابول. پ-د $f_2(x)$ ککرۍ ټکی. ت-ککرۍ ټکی. ټ- د محور غوښتکي	$f_1(x) = \frac{5}{3}x + \frac{5}{9}$ $P_1\left(0 \middle| -\frac{25}{9}\right); P_2(2 \mid y_2); P_3(-3 \mid y_3)$

شپږم:

یو پارابول او یوه کرښه د هغه د ارزښت جدول سره ورکړ شوي دي. پارابول او کرښه یو بل سره څنګه پراته دي؟

په کومه ورشو یا ساحه کې پارابول د کرښې پورته لور ته ځغلي؟

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_1(x)$	-6	0	4	6	6	4	0
$f_2(x)$	-1	0	1	2	3	4	5

پوښتنې

پارابول او کرښهIII

لومړی:

کرښه g(x) د مساوات

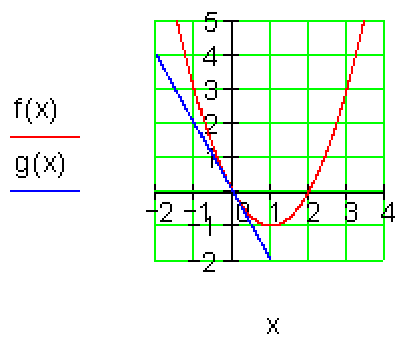
$g(x) = -2x$

سره پارابول f(x) په سرچینه کې لمسوي.

د a_1 د کومو ارزښتونو لپاره سرچینه پېژه

کرښه د مساوات $g(x) = a_1 x$ سره د f(x)

سره دوه همداسې یو ګډ ټکی لري؟



دویم: د دواړو پارابولونو د غوځټکو کواوردیناتونه وټاکی.

الف- $f(x) = x^2 + 3x; \quad g(x) = 0,5x^2$

ب - $f(x) = 2x^2 - 4x + 8; \quad g(x) = x^2 + 2x - 1$

پ - $f(x) = 0,5x^2 - 2x - 1; \quad g(x) = 2x^2 + 2x + 1$

29

سرلیک

ت - $f(x) = -x^2 + 3x - 1,5; \quad g(x) = -x^2 - x + 2,5$

دریم: دوه پارابولونونه د توابعو $f_1(x)$ او $f_2(x)$ سره په ټکو P_1 او P_2 کې سره غوڅوي.

$$f_1(x) = -\frac{3}{5}x^2 - 5x - \frac{32}{5}; f_2(x) = \frac{14}{15}x^2 + \frac{86}{15}x + \frac{14}{5}$$

وشمیرې:

الف- د ټکو P_1 او P_2 کواوردیناتونه یا پروتولاړ-یامحور ارزښتونه.

ب – د ترونکربښې [P_1 P_2] تابع.

پ – د دواړو پارابولونو صفرځایونه.

ت – د پارابولونو غوڅټکي د y محور سره.

ټ – د پارابول$f_1(x)$ ککرۍ بڼه او ککرۍ ټکی.

ث – د پارابول$f_2(x)$ ککرۍ بڼه او ککرۍ ټکی.

ج – په یوه پروتولاړ- یا کواوردینات سیستم د درې توابعو ګرافونه رسم کړۍ.

څلورم: د $f(x)$ او $g(x)$ د ګډو ټکو پرواته ولاړ ارزښتونه یا کواوردیناتونه وشمیرۍ.

$f(x) = -0,5x^2 + 2; x \in \mathbb{R}$

الف- $g(x) = x^2 - 3x + 3,5$ ب - $g(x) = -x(x-2)$

پ - $g(x) = -\frac{1}{9}(x-1)^2 + 1$ ت - $g(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 3x + 2)$

پنځم:

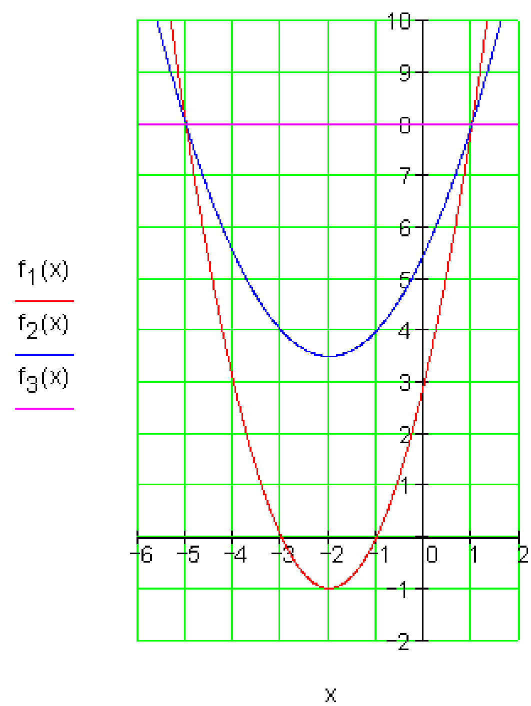
دوه پارابولونه د تابع $f_1(x)$ او $f_2(x)$ سره په ټکو P_1 او P_2 کې سره غوڅوي. دا وشمیرئ؛	$f_1(x) = (x+1)^2 - 1$ $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{11}{2}$

الف- غوڅټکي P_1 او P_2 .

ب – د غوڅکرښې [P_1 P_2] تابعمساوات د $y = f_3(x)$ سره.

پ – ککرۍ ټکي S_1 او S_2 .

ت – په یوه پروت ولاړسیستم یا کوبوردیناتسیستم کې د تابع ګراف وکاږئ.



۲ - پرلپسی او پرلپسی لړی(لنډ: لړی sequences and series)

۲ . ۱ - پیل

د میلاد څخه دري سوه کاله د مخه یوه یوناني جنګسالار(نوم یی راڅخه هیر شوی، ددې بخښنه غواړم) خپلو عسکرو څخه وپوښتل چی ، »دا د ده له مخه کیشپ چی سل متره یی ترمنځ واټن دی، کله نیولی شي، که دی له دې کیشپ سل ځله تیز ولاړشي؟« دې ته طبعآ د لوستنکو فکر شته چی وخت باید په نظر کي نه وي نیولشوی . ځوابولو ته دې ګران لوستونکی پخپله فکر وکړي.

موږ ددې برخی څیرنی سره لوړې شمیرپوهنی ته راځو. داسی هم نه ده، ځکه چی موږ د رییل ګڼونو تعریف سره سم چی هلته مو د اینتروالبندولو باندې خبرې کړي او په دې توګه مو رییل ګڼ تعریف کړی دی، د شمیرپوهني لوړه څیرنه وه. همدا ډول د لاینې مساواتو شمیرل او داسی نورې پوره دلوړې شمیرپوهني بیلګي لرو، خو دلته دا په ګوته کوو چی له دې ځایه د شمیرپوهنی هغه ځاي پیل کیږي چی شمیرپوهنیز فکر مو په پراخه توګه په کار اچولو ته راهڅوي او له دې امله مو د وړاند نیونه(لنډ: نیونه) یا فرضیه اړیینه وه چی دا برخه د لوړو شمیرپوهنو پیل په څیر وښایو.

له دې ځایه هغه ګڼونه چی موږ ورسره مخ کیږو، څموږ لپاره د څیرنی کیږي چی هغوي یوې پولی(حد) ته هڅه کوي. دا قوانین هم پوره څیرل کیږي چی وروسته بیا په دیفرنڅیال شمیرنه کی کار اخستلو لپاره ترې تیریدنه ناشونی ده.

په راتلونکی برخه کی لاندې کنځيپتونه (خيال، چې يو څه څنګه وشي) ځمونږ لپاره د هڅی وړ ګرځي
١ - د کليمی ليدوړه يا په خيال کی لرودونکی پيلونه
٢ - د ليدوړوالي يا فکر کی راوړيدونکی د ټولو په غوره شننه (تحليل)
٣ - د شميرپوهنيزو ټاکندو(پيژندو) يا تعريفونو ټيکوالی،
٤ - هغو وړاندنيونو يافرضيو ته پاملرنه چی د شميرپوهنی قوانينو د باوريتوب (اعتبار)لپاره وي،
٥ - د پرلپسی شننه، چی پوله ارزښت يی په پام کي ونه نيول شي،
٦ - د ګڼو دندو اوبی ، په ځانګړي توګه د ديفرنځيالولو او اينتګرالولو
٧ - بالاخره د پرلپسی لړۍ چی په لنډه توګه ىی لړۍ بولو څيړنه .
دلته هم ددې موضوع د پوره څيړلو ستونځې په کتاب کی د ځاي کموالي له امله شته.

داچی دا برخه يوه بنسټيزه برخه ده، نو پيل يی د يوې ساده او پوهوړې بيلګې له لارې کوو چي ماته خورا په زړه پورې هم ښکاريږي.

دګڼونو پرلپسی يا ګڼونپرلپسې (لنډ: پرلپسی) کليمه

پيلبيلګه :

پاي زياتون $s = 3+7+11+...+395+399$ څنګه ټاکل کيدی شي؟
کيدی شي چي دا د پوره ستونځو سره د يوګونو ګڼونو يو په بل زياتون له لارې وشميرل شي ترڅو چي ددې ګڼونپرلپسی قانونيت پيداشوی وي:
هر دوه ګاونډې توکي يوله بله په۴ + توپير کيږي يعنی کمون يا کمښت يي ۴ + دی. کيدی شي چی دا کارونه (استعمال) په يوه شکلی او سيماوړ لاره هم مخ ته لاړه شی او دا په لاندې ډول :

که لومړی (٣) او اخر(٣٩٩) ، دويم (٧) او له اخر دويم (٣٩٥) دريم (١١) او له اخر دريم (٣٩١) زياتوني او داسی نور سره زيات شي. دا په دې ټولو حالتونو کی همغه زياتون ارزښت يا د جمع لاس ته راوړنه ورکوي يعنی ۴٠٢ .
اوس دې د يوګونو زياتوونو زياتون ارزښت راپيداشي:

دویم غړی له لومړی غړي داسی لاس ته راځي چی لومړي غړي ته ۴ ور زیاتیږي او همداسی ورپسی تر n غړي پورې چی دلته و (n-1) ته 4 ور زیاتیږي ، یالنې -n) = n. 1)+4 :
که له دې لاس ته راوړنی لومړی غړی له اخر غړي کم کړو یعنی3- 399 = 396 ، نو ددې کمون سره د (n-1) دا 4 ځله ترې لاس ته راځي. داچی 99 = 396:4 دي، نو باید n او له دې امله د پرلپسي د غړو شمیر 100 وي. په دې لاس ته راوړنو سره باید 100 ګڼونه سره زیات شي. که چیرې په پورته توګه 2 زیاتووني سره زیات شي، نو باید له دې سره 100:2 = 50 یعني 50 -ځله زیات 402 ترې لاس ته راشي« له دې امله د ټولو رامخ ته شوو د پرلپسی غړو زیاتون دا دی: 50 . 402 = 20100•

دا لوستونکو ته په روڼنی ژوند کی هم څرګنده ده لکه د یو ټولګي د زدکوونکو په ګڼه (نمره) ترتیب، یا په یوه سیالی یا مسابقه کی د بریالیو ترتیب او داسی نورموجود دي، موږ کوښښ کوو چی دا مسئلی د شمیرپوهنی له لارې وڅیړو او وګورو چی په شمیرپوهنه کی پرلپسی څه شی دي.
موږ پیداینښتي یا طبعي ګڼونه ۱، ۲، ۳، ۴، ..... لرو (دلته ټکي ټکي دا مانا لري چی دا پرلپسی ناپای اوږدیږي)
که چیرې دا هر پیداینښتي یا طبعي ګڼ په یواځنی یو رییل ګڼ ترتیب شي یا یواځنی ترتیب رییل ګڼ وښایي یعنی ....a1 , a2, a3 ,a4، نو د لته د پیداینښتي یا طبعي ګڼونو او رییل ګڼونو تر منځ یو ترتیب منځ ته راځي. داچی دلته هر طبیعي ګڼ n په یواځنی رییل ګڼ an ترتیب شوی نو دا ترتیب یو فنکشن دی چی د فنکشن ټاکوندیرۍ (تعریفدیرۍ یا پیژنددیرۍ) دطبعي ګڼونو ډیرۍ N ده او ارزښتدیرۍ یی د رییل ګڼونو ډیرۍ R ده.

دلته د پرلپسی هر توکی an د ځای ګڼې (نمرې) n په بنسټ یواځنی ټاکلی، چی n ته په مسلکي نړیواله پیژندل شوې ژبه ایندکس Index (زیات یې Indices)، چې مانا یې : پیژند نخښنه ده ، وایي. (Index پیژند دخښنه)
که چیرته په لیکنو یا نوره هم ښه د پرلپسي په لیکنو کې .....,a1,a2,a3 ولرو، نو دا په لاندې مانا دي:

$a_1, a_2, a_3, ...$

که چیرې ناسمه ترې پوهیدنه منځ ته راتلله، نو بیا یې لیکنه په هغه اصلي توګه لیکم٠

ټاکونکی (پیژند، تعریف) :۱۸ . ۱ الف :
د پرلپسی غړو ak.....,a1, a2 , a3 د یو ترتیب قانونیت یا قانونمندي(an=a(n لاس ته راځي ، که دnلپاره پرلپسی پیداینښتي یا طبعي ګڼونه 1, 2,3 k...,ځای په ځای شي.

پرلپسی کې a1 د پرلپسی پیل غړی بلل کیږي. که د پرلپسی اخر غړي پای وي نو پرلپسی پای او که نه نو پرلپسی ناپای ده.

بیلګې

(دا ورپسې مخ کې بیلګې نورې هم روښانه دي)

$$I-;...a_n = n^2, a_1 = 1; a_2 = 4;....; a_{10} = 100,..; a_k = k^2;..$$

(چېرته چې an یو څلوری (مربع) ګڼ دی D=N;W={an|

2 – {an}={1/n} => an=1/n,a1=1;a2=1/2;…;a10=1/10 ,
{ak}={1/k}… .

3 - $\{a_n\}=\{(-1)\} \Rightarrow a_n=(-1)^n; a_1= -1; a_2=1;$

$a_3= -1,...a_{17}=-1;...a_{22}=1$

د دې پرلپسی غړي بدلی نخښی لري، له دې امله پرلپسی بدلیدونکی Altrnating بلل کیږي

4 - {an}={3+1/n},3+1/2 ;3+1/3;3+1/4 ;...3+1/k;...an=3+1/n

د ترتیب – یا نظمقاعدې څخه مختلفی ګڼونپرلپسی منځ ته راځي ۰ دا مو په لنډه توګه پرلپسی ونومولی. چی پیژند یی یو ځل بیا دلته په بل ډول راالنډوو.

تاکونی(تعریف) ۱۸ . ۱ :

که هر یو طبیعي ګڼ..... n=1,2,3,4,5 په یوه یو یواځني رییل ګن باندې ترتیب یا تنظیم شي، نو په ترتیب ګڼونه .... a1,a2,a3,a4 یوه د ګڼونو پرلپسی جوړوي، چی لنډ پرلپسی یی نوموو او ددې لپاره سړی داسی لیکي {an}.

دې an ته د پرلپسې {an} غړی ویل کیږي.

سړی کړی شي چی د رییلګڼونو د نمره کولو یا ګڼې لپاره له 0 یا 2 او حتی له 1 - یا 2 - څخه پیل وکړي، یعني:

a-1,a0,a1,a2.....یا a2,a3,a4.... او a0,a1,a2....یا

ګورو چی د پرلپسی لیکلو لپاره ځانګړي متودونه په کار اچول کیږي، کله دا کفایت کوي چی د پرلپسی تعریف لپاره د پرلپسی لمړي څو غړي ولیکل شي

بیلګه ۱۸. ۱ : د بیلګې په توګه لیکو:

35

سرلیک

$\{an\}$: 1, ,2 , 3 , 4 ....

او د طبعي ګڼونو پرلپسی موخه یا مطلب دی د جوړولوقانون an = n سره ، نو

$\{an\}=\{n\}$.

$\{an\}:1,4,9,16,25... \Rightarrow \{an\}=\{n^2\}$

دا په دې مانانا چی(=>)

$\{an\}:2,3/2,4/3,5/4,6/5 .... \Rightarrow$

یا په دې مانا چی$\{an\}=\{(n+1)/n\}$

$\{an\}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,1/6 ... \Rightarrow$

په دې مانا چی $\{a_n\}=\{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$

$\{an\}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,.. \Rightarrow$

یانې په دې مانا $\{an\}=\{(n+1)/n\}$

پیلبیلګه:

دشمیرپوهنی یوه ښوونکی لپاره په ښونځي کی یو ځاي تش یا خالي دئ. ددې ځاي لپاره دوه کسانو الف او ب ځانونه کاندید کړی. دوي ته لاندې پوښتنه ورکړ شوي چی اوبی یی کړي:

پنځه ګڼونه ۱،۳،۷،۱۵،۳۱ ورکړ شوي. درې نور ګڼونه باید داسی ور واچوی چی دا ګڼونپرلپسی موخه وره یا هدفمنده مخ ته ولاړه شي، یا مخودیزه شي.

دواړه کاندیدان دا دنده یا پوښتنه په بیلو ډولونو اوبی کوي ۰

کاندید الف داسی فکر کوي ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ کاندید ب داسی فکر کوي

لومړی ګڼ ۱ دئ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ لومړی ګن له ۲ څخه په ۱ کوچنی دئ:

2 - 1

دویم ګڼ لاس ته راځي، که د لومړي ۰۰۰۰۰۰۰ دوم ګڼ له ۴ څخه ۱ کوچنی دئ :

ګڼ دوه ځله ته ۱ ورزیات کړو : ۰۰۰۰۰۰۰۰۰ $2^2-1=4-1$

$2.1+1=3$

دریم ګڼ لاس ته راځي که د دوم ۰۰۰۰۰۰۰۰ دریم ګڼ له ۸ په ۱ کوچنی دی:

ګڼ دوه ځله ته ۱ ور زیات شي۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰$2^3-1=8-1$

$2.3+1=7$

۶- ام ګڼ لاس ته راځي که د پنځم۰۰۰۰۰۰۰۰ ۶ -ام ګڼ له ۶۴ څخه په ۱ کوچنی دئ :

ګڼ دوه برابره ته ۱ ور زیات کړو: .... $64-1=2^6-1=63$

$a_{k+1}=a_k{}^2+1$

2.31 + 1 = 63

اوم ګڼ دی .... اوم ګڼ دی: $2^7-1=128-1=127$

2.63 + 1 = 127

ګڼ ۸ دی .... ګڼ ۸ دی

)...........2.127 -1 = 255 $2^8-1=256-1=255$

د شمرپوهنی له مخی دا پنځه له مخه ورکړشوي ګڼونه د یوې پرلپسی لومړني پنځه توکي دي. دا پنځه توکي له

a1 , a2 , a3 , a4 , a5,

سره ښایو.

اوس زموږ په دې بیلګه کی داسی لرو: a1=1,a2=3,a3=7,a4=15,a5=31

که وغوښتل شي چی د دې پرلپسی نور توکي دې هم ورکړ شي، نو دا به تصادفي توکي نه وي، بلکه یوه جوړه شوې قاعده یا لاس ته راوړې قاعده به ورکړي، لکه څنګه چی یو په بل پسی راتلونکی توکی د پخوانی او یا له وروستني توکي څخه د مخه توکی په لاس راځي.ددې تثبیت یا ازمویني وظیفی شمیرپوهنیزه فرمولبندې په لاندې ډول ده:

د ګڼونپرلپسی دې د a1=1,a2=3,a3=7,a4=15,a5=31 سره ورکړ شوي وي.

یوجوړښتقانون یا قانونمندي او توکي a6,a7,a8 وټاکی.

د دواړو کاندیدانو د اوبیوني لارې یا حللارې کیدی چی په لاندې توګه انځور شي:

ب	الف
$a_1 = 2 - 1 =$	$a_1 = 1$
$a_2 = 4-1 = 2^2 -1 = 3$	$a_1 = 2.1 + 1 = 3$
$a_3 = 8 - 1 = 2^3 - 1 = 7$	$a_3 = 2.3 + 1 = 7$
. .	. .
$a_6 =$ $2^6 - 1 = 63$	$a_6 = 2.31 + 1 = 63$
$a_7 =$ $2^7 -1 = 127$	$a_7 = 2.63 + 1 = 127$
$a_8 =$ $2^8 -1 = 255$	$a_8 = 2.127 + 1 = 255$

په ټولیزه (عمومی) توګه لاس ته راځي

k -م غړی $(k \in N \wedge k \geq 2)$ k-م غړی $(k \in N)$

په کوم کی چی .... په کوم کی چی

د(k-1)- م غړي ته 1 زيات شي .... 1 له $a_k = 2^k$ کم شي

$a_k = 2.a_{k-1} + 1$ $a_k = 2^k - 1$ ....

دواړو کانديدانو پرابلم سم اوبی کړ. کله چی د پرلپسی ۲۰ - م غړي پوښتنه وشوه ، نو کانديد ب په کټه کی دی . ولی؟

دواړه کانديدان کولی شي چی د پرلپسی هر په خوښه توکی پيداکړي، له دې امله دوي دا پرلپسی پواځنی وټاکله. کانديد الف دا پرلپسی داسی حل کوي چی تل بايد له مخه غړي څخه وړپسی توکی لاس ته راوړي، يعني $a_k = 2.a_{k-1} + 1$

دا بايد هر د پرلپسی د مخه توکی وپيژني. دې ډول شميرلو ته د پرلپسی رکورسيو(recursive لاتين، له recure په څټ څغاسته) انځورونه وايی . مګر ب کانديدات دا خورا ساده او زر شميرلی شي، دی چې کوم توکي غواړي پيدا کړي، هغه سملاسي لاس ته راوړی شي يعني $a_k = 2^k - 1$

دې ډول ښوونلار ته ايکسپليځيت explizite (لاتين خورول، روښانوول) يعنی روښانه انځورونه وايي.

د لوستونکو لپاره دې دا لاندې د کور کا وي:

د پرلپسی ۲۰ - ۱م غړی وشميری ، رکورسيو او ايکسپليځيت. يانی د الف او ب په څير.

بيلګه:

يوه پرلپسی د $a1 = 5$ او $a_{k+1} = a_k{}^2 + 1$ سره ورکړ شوې. ددې پرلپسی لومړنی پنځه توکي وشميری.

اوبنونه يا حل:

$$a_1 = 5$$
$$a_2 = a_1^2 + 1 = 25 + 1 = 26$$
$$a_3 = a_2^2 + 1 = 676 + 1 = 677$$
$$a_4 = a_3^1 + 1 = 458329 + 1 = 458330$$

بیلګه :

یوه پرلپسی د $a1 = 1$ او $a_{k+2} = a_{k+1}.a_k$ سره ورکړ شوې ده.
ددې پرلپسی لمړني پنځه غړي وشمیری .
اوبنونه:

$a_1 = 1$

$a_2 = 2$

$a_3 = a_2.a_1 = 2.1 = 2$

$a_4 = a_3 \, . \, a_2 = 2.2=4$

$a_5=a_4.a_3 = 4.2=8$

پوښتنی:

د هرې لاندنی پرلپسی لمړني ۱۰ غړي وشمیری پرلپسې رکورزیو ورکړ شوې

a) $a_1 = 2, \; a_{k+1} = \frac{1}{a_k}$

b) $a_1 = 0, \; a_{k+1} = a_k^2 + 1$

c) $a_1 = 2, \; a_{k+1} = \frac{1}{a_k} + 1$

d) $a_1 = 1, \; a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k + 1$

e) $a_1 = 2, \; a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right)$

f) $a_1 = 1, \; a_2 = 1, \; a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$

g) $a_1 = 1, \; a_2 = 2, \; a_{k+2} = a_{k+1}^2 \cdot a_k$

h) $a_1 = 1, \; a_2 = -2, \; a_{k+2} = a_k : a_{k+1}$

بیلګه :

یوه پرلپسی د $ak=k^2/(k+1)$ سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی لومړني پنځه توکي وشمیری
اوبی:

$a_1 = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2}$ $\quad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$ $\quad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$

$a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$ $\quad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$

بیلګه :

پرلپسی د $a_k = \frac{(-1)^k + 1}{k}$ سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی ۳ -م، ۸ -م ۱۵ -م او ۲۰ -م توکي وشمیری

اوبی

$$a_3 = \frac{(-1)^3 + 1}{3} = 0$$

$$a_8 = \frac{(-1)^8 + 1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$a_{15} = \frac{(-1)^{15} + 1}{15} = 0$$

$$a_{20} = \frac{(-1)^{20} + 1}{20} = \frac{1}{10}$$

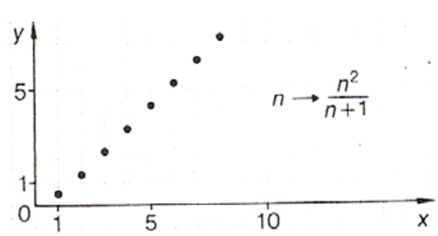
پوښتنی :

د لاندې پرلپسیو لومړني پنځه توکي ، ۲۰ -م او ۴۵ –م توکي وشمیری

$$a)a_k = 2k+1; b)a_k = k^2 + k; c)a_k = \frac{k^2+1}{k+1};$$

$$d)a_k = \frac{k^2-1}{k+1}; e)a_k = (-\frac{1}{10})^{k-1}; f)a_k = 1-(1/2)^k;$$

$$g)a_k = 1+(-1/2)^k; h)a_k = 1.2.3....k$$

په کارتیزي کواوردیناتسیستم کی د یوې پرلپسی د ګراف انځورونه لاس ته راوړو، که هر توکی د x -کواوردینات باندې د پرلپسی هر توکی د توکي نمرې k سره کیښنول شي او د y- کواوردینات باندې هر غړی د غړې د نمرې ak سره و کښل شي	 Bild 4

پوښتنی :

د لاندې پرلپسیو ګراف په کارتیزي کواوردیناتسیستم کی وکاږی.
له دې ځایه وروسته بیا پیل دی

a) $a_k = \frac{5k}{k+2}$ b) $a_k = 3k + 2$ c) $a_k = (-1)^{k-1} \cdot \frac{12}{k}$

d) $a_k = \sin\frac{k\pi}{2}$ e) $a_1 = \frac{1}{2}, a_{k+1} = 1 - 2a_k$ f) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{k+2} = a_{k+1} \cdot a_k$

مونوتونی پرلپسی

بیلګه : د غړو $ak = 2k - 1$
(ما کله کله توګی او کله کله غړی نومونه کارولی، په په پرلپسی کې یو غړی د پرلپسی غړی دی او د یوې ډیری چې یو د هغې ډیری توکی دی)
سره پرلپسی هر توکی د مخته تیرشوي توکي لوي دی . دا باور لري:
$ak+1 > ak$ د ټولو $k \in N$ لپاه

اوبیونه) :

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2^{k+1} - 1 \\ &= 2.2^k - 1 \\ &= 2^k + 2^k - 1 \\ &= 2^k + (2^2 - 1) \\ &= 2^k + a_k \\ &> a_k \end{aligned}$$

تعریف ۱۸ . ۲ الف:

یوه پرلپسی(strictly monotonic increasing)
په کلکه – یا کره مونوتون جګیدونکی ده یا کره مونوتو جګیږي، که دا لاندې باور ولري :

د ټولو $k \in N$ لپاره ak+1> ak
که د يوې پرلپسی لپاره باوري وي
د ټولو $k \in N^*$ لپاره ak+1 $\geq$ ak
نو دلته د مونوتون جګيدونکی monotonic increasing پرلپسی څخه غږيږو

بيلګه :
د پرلپسی د توکو
ak = 10 - 4k
سره هر غړی د مخ ته تير غړي څخه کوچنی دی.
لرو:
ak+1 < ak د ټولو $k \in N^*$ لپاره
اوبښونه::

$$
\begin{aligned}
ak+1 &= 10 - 4(k+1)\\
&=10 - 4k - 4\\
&=(10-4k)-4\\
&= ak - 4\\
&< ak
\end{aligned}
$$

ټاکونی (پيژند تعريف) ۱۸ . ۳ :
يوه پرلپسی په کلکه مونوتونټيټيدونکی يا - لويدونکی strictlymonotonic decreasing ده، که لاندې باور ولري:
د ټولو $k \in N$ لپاره ak < ak+1
که په يوه پرلپسی کې باور ولري(په پورته کې او همداسې که ورپسې داسې څه راشي کا د ان توکی دی)
د ټولو $k \in N$ لپاره a1 $\leq$ ak+1
نو دلته د موتون لويدونکی- يا مونوتون ټيټيدونکیmonotonicdecreasing پرلپسی څخه خبرې دي.

پوښتنه:
د يوې پرلپسي دوه ګاونديو غړو توپير يا کمون ياکمښت ak+1 - ak، کوم شرطونه بايد پوره کړي، چې دا لاندې صدق ولري
الف) کلکه مونوتون جګيدونکی وي
ب) کلکه مونوتون ټيټيدونکي يا ـلويدونکې وي
پ) مونوتون جګيږي

ت) مونوتون لوېږي؟

ددې دندې د اوبیونې په مرسته کیدی شي، چې د توکي aK=(k+1)/(k+2)سره د پرلپسی مونوتونی په لاندې ډول وښوول شي:

$$a_{k+1}-a_k=\frac{(k+1)+1}{(k+1)+2}-\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+2}{k+3}-\frac{k+1}{k+2}$$
$$=\frac{(k+2)^2-(k+1)(k+3)}{(k+3)(k+2)}=\frac{(k^2+4k+4)-(k^2+4k+3)}{(k+3)(k+2)}$$
$$=\frac{1}{(k+3)(k+2)}>0 \quad \text{ولې} \quad k\in\mathbb{N}^*$$

له ak+1-ak>0 همداسی(<=) (ak+1)>ak
د ټولو $k \in N^*$ لپاره لاس ته راځي، چې ورکړ شوې پرلپسی په کلکه مونوتون جګیږي.

۱۸ . ۲ . ۲ اریتمیتیکي - یا ګنیزې پرلپسی

د پرلپسی ..... 14;11;8;5;2 هرغړی د خپل مخکښ غړي څخه په 3 لوي دی.
ددې پرلپسی لپاره ورکړی
الف(یوه رکوررزیف انځورونه
ب) (یوه اکسپلیڅیت انځورونه.

ځنی پرلپسي د ډیرې پاملرنې ارزښت لري، په دې ډول چی د دوه په خوښه ګاونډیو غړو akاو ak+1 ترمنځ یو ثابت (تل همغه) بلواك موجود دی
غواړو چی دداسی دوه مهمو پرلپسی تیپونه (ډولونه ، رقمونه) په ځانګړې توګه څرګند راوباسو یا بهتره تر څیرنی لاندې ونیسو:

(پیژند یا تعریف ۱۸ . ۴ :
په یوه اریتمیتیکي- یا ګنونشمیرنیزې پرلپسي یالنډ: شمیرنیزې پرلپسی کي د درې توکو منځنی توکی د دواړو دباندنیو توکو اریتمیتیکي منځ دی:

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$$

په یوې ځمککچیزې لپسی(ټاکونی یا پیژند وروسته راځي) کی د درې یو په بل پسی توکو منځ غړی د دوو نورو دباندنیو غړو ځمککچیز یا هندسي منځ دی:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}.a_{n+1}}$$

لومړی اریتمیتیکی یا شمیرنیزه پرلپسی څیرو:

غوښتنه(ثبوت): یوه پرلپسی ورکړی، چی لومړی توکی یي ۵ او هر ورپسی راتلونکی توکی یی له مخ غړي څخه په ۱۲ کوچنی وي

الف) ددې پرلپسی لومړي پنځه توکي وشمیرئ

ب) د پرلپسی رکوررزیف انځورونه ورکړئ

پ) د پرلپسی اکسپلیڅیت انځورونه وکړئ

ت) د پرلپسی ۲۰ -م (۲۵ ، ۳۵،۵۰، ۱۰۰) توکي وشمیرئ.

ټاکونکی یا تعریف ۱۸ . ۵ :

یوه پرلپسی an اریتمیتیکي پرلپسی بلل کیږي، که د دوه پرلپسی توکو کمون یاکمښت تل ثابت یا همغه وي: $a_{n+1} - a_n = d \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + d$

بیلګي:

۱ - لاندنی پرلپسي ...;2;5,8;11;14;...;29;32;35

یوه اریتمیتیکي Arithmetic پرلپسی ده چی لومړی توکی یی a1 = 2

او ثابت یا همغه کمون یا کمښت یا فرق یی d = 3 دی.

۲ - دا پرلپسی ...;34-, 23-, 12- , 1- ; 10 اریتمیتیکي پرله پسی ده چی لومړی توکی یي a1=10 دی او d=-11 ده

که په هر پل(قدم) کی فنکشن $n \in N$; n—>an په همغی زیاته وونې d زیاتیږي یا همداسی کمیږي d=0 (لپاره ثابت دی) نو باید اریتمیتیکي پرلپسی یو لاینیز فنکشن(لاینیز بلواك) وي (D = N) د d په جګوالي . دا د لاندی اند لاس ته راوړنه یا فکر لاس ته اوړنه ده:

44

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

.

.

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1).d = a_1 + d.n - d$$
$$f(n) = d.n + (a_1-d)$$

د لاینیز فنکشن جګوالی d
دی او ثابت یا همغه
توکی a1 -d نوميږي(
يادیږي يا بلل کيږي)

دلته an=2n+1 دلاینیز فنکشن په څير دی، د d=2 په جګيدو او دy - محورغوڅی-a1
d=1
له دې سره د پرلپسی د هر توکي د شميرلو امکانات ورکړ شوي دي:

تعريف ۱۸ . ۶ :

په اريتميتيکي- يا شميريزه پرلپسی کی n- م توکی د قاعدې له مخي داسي ورکړ شوی:
an=an-1+d=a1+(n-1).d

بيلګی:

۱ - اريتميتکي پرلپسی ... 2,19,36 , 53 ,ورکړ شوې.
غوښتونکي a20 ده.
داسی لرو: a1=2,d=17,n=20
نو an=a1+(n-1).d ⇔ a20=2+19.17=325
۲ - ورکړ شوې دې وي
a1 = -o,5 او a10 = -44,5
غوښتونکي d ده:
an=a1+(n-1).d<=>(an-a1)/(n-1)=d =>
d=(-44,5+0,5)/(10-1)=-44 /9

۱۸ . ۲ . ۳ځمککچيزې – يا هندسي پرلپسی

اوس غواړو هغه د مخه ویل شوی ،د یوه ثابت ((تل) همغه ارزښتیز) فنکشن سره، د پرلپسی ۲ -م تیپ د دوه غړو ترمنځ تر څیړنی ونیسو

پیلبیلګه :

یو هوښیار زدکړی غواړي په رسختۍ کی یوه میاشت کار وکړي(۲۰ د کار ورځی(. دی کارورکوونکی ته وایي، چی دیٔ ارزانه کار ورته کوي او لاندې وړاندیز ورته مخ ته کوی » د لمړی ورځي معاش دې 0,05 ډالره وي د دویمی دې دوه ځله د دریمی ورځی د دویمی ورځي دوه ځله څلورمه ورځ د دریمی ورځی دوه ځله او داسي نور، یعنی لمړی ورځ که 0,05 وي نو دومه ورځ 0,10، دریمه ورځ 0,20 او څلورمه ورځ 0,40 ډالره معاش کیږی او داسی نور

پوښتنه : د

الف) د ۱ –می یا لومړیٔ ورځی
ب) ۱۵ - می ورځی
پ) د ۲۰ - می ورځی
معاش څومره کیږي. اندازه ګڼ که په ډالرو وشمیرل شي، لاندې پرلپسی جوړوي:
0,05;0,1; 0,2; 0,4;0,8; 1,6; 3,2,......

پوښتنه :

ددې پرلپسی لپاره
الف) رکورزیف انځورونه
ب) اکسپلیڅیت انځورونه ورکړی

پیژند ۱۸ . ۷:

(ځمککچیزې یا هندسی پرلپسی) یوه پرلپسی an هندسي بلل کیږي، که د دوه یوبل پسی غړو ویش ثابت((تل) همغه) q وي:
یا په بل ډول یا په بل عبارت : یوه پرلپسی چی لومړی غړی $a_1 \neq 0$ وي اود همغه ګڼ یعنی ثابت ګڼ q سره د تل ځلونی څخه لاس ته راشي، ځمککچیزه یا هندسي پرلپسی بلل کیږي.

$n \in N; q \in \{R\} \setminus \{0\}$ د ټولو $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q; a_{n+1} = a_n.q$ لپاره

يو ځل بيا يوځای
+d +d +d +d

اريتميتيکي پرلپسی ...a1 a2 a3 a4 a5

هندسي پرله پسی..... a1 a2 a3 a4 a5

.q .q .q . q

د هندسي پرلپسی دوهم غړی دلو

$a_{15} = 3.2^{14} = 29152$

مړي غړي سره د q ځل يا ضرب څخه لاس ته راځي، او دا د ټولو وروسته راتلونکو غړو لپاره باوري دي. له دې امله هندسی پرلپسي an ‹—— n اکسپونينشل فنکشن يا د جګګړې بلواک ښايي چی q د بنسټ په توګه لري:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1.q$$

$$a_3 = a_2.q = a_1q^2$$

$$a_4 = a_3.q = a_1.q^3$$

.

.

.

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

$$f(n) = a_1.q^{n-1}$$

جمله ۱۸ :

په هندسي پرلپسی کی n- م توکی د لاندې قاعدې له مخي شميرل کيږي

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

47

بېلګې:

1 - a1=3 , q=2 ,n=15 => $a_{15} = 3.2^{14} = 29152$

2 - a1=19,q=1,01,n=100 ;

a100= $19.1{,}o1^{99}$ = 50,88263639

جمله :

يوه ځمککچيزه پرلپسی د زياتيز يا مثبت پيلتوکي سره د $q > 1$ لپاره کلك مونوتون جګيدونکی ده د $0<q<1$ لپاره کلك مونوتون لويدونکی ده

غوښتنه :

د لاندې پرلپسيو ۱۰ لومړني غړي وشميرى

a) $a_k = \dfrac{k-2}{k+2}$ b) $a_k = \sin\dfrac{k\cdot\pi}{6}$ c) $a_k = \dfrac{1}{2}[1+(-1)^k]$

d) $a_k = 1-\left(\dfrac{1}{10}\right)^k$ e) $a_k = \left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k$ f) $a_k = \cos\dfrac{k\cdot\pi}{2}$

g) $a_k = k^k$ h) $a_k = (-1)^{k-1}\cdot k^2$

i) $a_1 = 3;\quad a_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_k + \dfrac{4}{a_k}\right)$ k) $a_1 = 1;\quad a_2 = 2;\quad a_{k+2} = \sqrt{a_{k+1}\cdot a_k}$

l) $a_1 = 3;\quad a_{2n} = a_{2n-1} - 3;\quad a_{2n+1} = a_{2n} + 4\ (n \in \mathbb{N}^*)$

m) $a_k = 2k - 1 + \dfrac{1+(-1)^k}{2} + (-1)^{\frac{(k+3)(k+4)}{2}}$ n) $a_k = 3 - \dfrac{1}{2^{k-2}}$

غوښتنه :

پرلپسی د مونوتون خويونو له پلوه وڅيړی

a) $a_k = \dfrac{k-2}{k}$ b) $a_k = \dfrac{k+4}{k}$ c) $a_k = \dfrac{3k}{2k-1}$

d) $a_k = \dfrac{1-k^2}{k}$ e) $a_k = 2^k$ f) $a_k = 1 - \sin\dfrac{\pi}{k+1}$

۱۸ . ۲ الف لړی

د هغه کارپلټونکی زدکړي وړانديز ته بيرته پام راګرځوو، چی د لمړی ورځي
$0,05$ اجوره د دويمې ورځي $0,1$ د دريمی ورځي $0,2$ ، د څلورمی ورځي اجوره يی
$0,4$ ډالره وه او داسی نور.
په هغه وخت کی داسی پوښتنه رامنځ ته شوې:
دk - می ورځي لپاره زدکړی څومره اجوره اخلی ؟
دا مو يوې ځمککچيزې لړی ته لاربنودوي د $a_k = 0,05.2^{k-1}$ سره.
د هغي k - م توکی دk- می ورځي اندازه ګڼ يا د اجورې معيار دی.
دا په دي مانا چی زدکړی دk - می ورځي لپاره $0,05.2^{k-1}$ دالره اجوره اخلي.
که غواړو چی وښايو چی زدکړی په لومړيو پنځو ورځو کی څومره اجوره اخلی ، نو
بايد د لومړيو ورځو اجورې ځککچيزه پرلپسی، د $a_k = 0,05.2^{k-1}$ سره، يو بل سره زياته کړو

$$0,05+0,1+0,2+0,4+0,8 = 1,55$$

دا زدکړی د لومړيو پنځو ورځولپاره $1,55$ ډالره معاش اخلي‌که د لومړيو n ورځو
اجوره په Sn سره وښايو ، نو يوه لړی د لاندې غړو سره لاس ته راځي :

$$s_1 = \quad 0,05\ .2^0 \quad = 0,05$$
$$s_2 = s_1 + 0,05.2 = 0,05+0,1 = 0,15$$
$$s_3 = s_2 + 0,05.2^2 = 0,15+0,20 = 0,35$$
$$s_4 = s_3 + 0,05.2^3 = 0,35+0,40 = 0,75$$
$$s_5 = s_4 + 0,05.2^4 = 0,75 + 0,80 = 1,55$$
$$s_6 = s_5 + 0,05.2^5 = 1,55+0,160 = 3,15$$

غوښتنه:

پرلپسی ته د ۱۵ - م توکي پورې پر مخ وده ورکړی(مخ وديزه کړی)۰ که د ورکړ
شوې پرلپسی ، چی توکي يی $a1,a2,a3$ ....
دي، دتوکو يو په بل پسی زياتون جوړ شي

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 && = a_1\\
s_2 &= a_1 + a_2 && = s_1 + a_2\\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 && = s_2 + a_3\\
&\;\;\vdots\\
s_{20} &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{19}) + a_{20} && = s_{19} + a_{20}\\
&\;\;\vdots\\
s_{n-1} &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}) + a_{n-1} && = s_{n-2} + a_{n-1}\\
s_n &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + a_n && = s_{n-1} + a_n\\
s_{n+1} &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + a_{n+1} && = s_n + a_{n+1}\\
&\;\;\vdots
\end{aligned}
$$

نو یوه پرلپسی S1,S2,s3,... لاس ته راځي٠

(پيژند تعریف ۱۸ . ۸:

د یوې پرلپسی a1; a2; a3;... څخه جوړه شوې پرلپسی S1;S2;S3...
د رکورزیف انځورونی $s_1 = a_1; s_n = s_n + a_{n+1}$
سره پرلپسې لړی (د پرلپسیو لړی) یا لنډ : لړی بلل کیږي.

بیلګه :

د ak = 2k سره جوړې شوې پرلپسی څخه جوړه شوی لړی په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 2^1 = 2$$

$$
\begin{aligned}
s_2 &= s_1 + 2^2 = 2^1 + 2^2 = 6\\
s_3 &= s_2 + 2^3 = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14\\
s_4 &= s_3 + 2^4 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30\\
&\vdots\\
s_n &= s_{n-1} + a_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} + 2^n\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

بیلګه :

د $a_k = (2+3k)/(k+1)$ سره جوړه پرلپسی څخه جوړه شوې لړی، په لاندې ډول ده:

$$s_1 = \frac{5}{2}$$

$$s_2 = s_1 + \frac{8}{3} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} = \frac{31}{6}$$

$$s_3 = s_2 + \frac{11}{4} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} = \frac{95}{12}$$

$$s_4 = s_3 + \frac{14}{5} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} = \frac{643}{60}$$

$$\vdots$$

$$s_n = s_{n-1} + \frac{2+3n}{n+1} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} + \dots + \frac{2+3n}{n+1}$$

$$\vdots$$

پوښتنې:

د لاندې پرلپسیو څخه جوړه شوې لړی توکي Snورکړی

a) $a_k = 2 \cdot 5^{k-1}$ b) $a_k = -3 \cdot 2^{k-1}$

c) $a_k = 5 \cdot 0{,}2^{k-1}$ d) $a_k = 4 \cdot (-3)^{k-1}$

پیژند ۱۸ . ۹ :

د اریتمیتیکي پرلپسی تکو یو له بل سره زیاتون په پام کی نیسو، دا څه چی لاس ته راځي، هغه اریتمیتیکي لړی بولو:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

موږ دلته بیا پیل بیلګه را اخلو، چی د اریتمیتیکي لړی (داد پرلپسی زیاتون پرلپسی ده چی د لړی پرلپسي یی غواړو ونومو او په لنډه توګه یی له دې وروسته »لړی « و بولو) زیاتون او په تولیزه توګه لړی زیاتون وشمیرو. تاکونکی زیاتون له مختلفو لورو موږ دوه واره لیکو، چی دواړه هغي پسی زیات کړی شو یا یي زیاتون ونیولی شو:

$$s_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_{100} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \ldots + a_2 + a_1$$

$$s_{100} = 3+7+11+\ldots +395 + 399$$

$$s_{100} = 399+ 395+.. .+ 11 + 7 + 3$$

$$2s_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+..+(a_n+a_1)$$

$$2s_n = (a_1+a_n) + (a_1+ d + a_{n-1}) +\ldots + (a_1 + (n-1).d + a_1)$$

$$2s_n = (a_1+a_n)+(a_1+a_n)\ldots+(a_1+a_n)$$

$$2s_n = n.(a_1+a_n)$$

$$s_n = n(a_1 + a_n)/2$$

$$2s_{100} = 402 + 402 + 402+.. +402 + 402$$

$$2s_{100} = 100.402$$

$$s_{100} = 50.402$$

$$s_{100} = 20100$$

د پورته شمیرني سره سم د اریتمیتیکي لړی زیاتون دی: $s_n = \dfrac{n(a_1+a_2)}{2}$

که دلته د an=a1+(n-1)d ځاي په ځاي شي او د اسانتیا لپاره کموتاتیو قانون وکارل شي، دا په دې مانا چي n /2 بني خوا ته راوړو، نو لاس ته راوړو:

$$s_n = \frac{(2a_1+(n-1)d)n}{2} = n.a_1 + \frac{(n-1)dn}{2}$$

بیلګي:

لومړی: $a_a = 3; d = 7; n = 50 => s_{50}(2.3+49.7)50/2 = 8725$

کنترول: $a_{50} = +49.7 = 346$ او له دي

$$s_{50} = \frac{(3+346)50}{2} = 8725$$

دویم- یو میراث د شپږو ورونو ترمنځ داسی ویشل کیږي چی هر یو مشر د ورپسی مشر ورور څخه 470 0افغاني زیاتي اخلي، د ځوان ورور 17000 افغانی رسیږي.
معلوم کړئ چی میراث څومره دئ او هر یو ورور څومره میراث اخلي؟
a1=17000;d=4700 ,s6=6/2(2.17000+5.4700)=172500 افغانۍ
ورونه په لاندې ډول پیسی اخلي
17000 افغانی، 21400 افغانی، 26400 افغانی ،
31100افغانی ، 35800 افغانی او 40500 افغانی.

لکه څنګه چی د اریتمیتیکي لړۍ زیاتون پیداکیږي، همداسی د هندسي لړۍ زیاتون هم پیداکیدی شي. عمومي فرمول به په پورتني ۱ - بیلګه کی ځانګړی یا ځانیزشي (مشخص). د زیاتون فرمول لاس ته راوړلو لپاره د لړۍ sn څخه په q پراخه شوې لړۍ کموو. په دې ډول لړی لږو توکو ته لږیږي:

.۱ ځمککچیزې لړی:

د ځمککچیزې پرلپسی څخه جوړه شوې لړی ځمککچیزه لړی بلل کیږي.
د هندسي پرلپسی د $a = 3.2^{k-1}$ څخه جوړه هندسي لړی په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 3.2^0 = 3$$
$$s_2 = s_1 + a_2 = 3.2^0 + 3.2^1 = 3+6 = 9$$
$$s_3 = s_2 + a_3 = 3.2^0+3.2^1 + 3.2^2 = 3+6+12=21$$
$$\vdots$$
$$s_n = s_{n-1} + a_n = 3.2^0+ 3.2+3.2^2+3.2^3+..+3.2^{n-1}$$
$$\vdots$$

$q \neq 1$

جمله : (اکسپلیځیت انځورونه):

د ځککچیزې پرلپسی د ak = a1 +(k- 1).d توکي سره جوړې پرلپسی څخه جوړې شوې هندسی لړۍ لپاره صدق کوي:

سرلیک

Sn = a1+a2q+a3q²+...+a1qn-1=a1(qn-1)/(q-1);

q|=0;Sn=n.a1   q = 1

اوبی: د $q \neq 1$ لپاره باور لري:

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$
$$s_n \cdot q = \quad a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$
$$s_n - s_n \cdot q = a_1 \qquad - a_1 q^n$$
$$s_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$
$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$$

غوښتنه: اوبی د q = 1 لپاره د ګرانو لوستونکو د کور کار دی.

دلته یو بل ډول ښوونه پلی کوو: پرلپسی د-n ام غړي an = 3.2n-1 سره ورکړ شوې.
دلته په دې توګه د لړی غړي لړو غړو ته رالږېږي.

$$s_{15} = 3 + 6 + 12 + \ldots + 24576 + 49152 \qquad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_{n-1} + a_n \quad +$$

$$s_{15} \cdot 2 = 6 + 12 + \ldots + 49152 + 98304 \qquad s_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \ldots a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q \quad -$$

$$s_{15} - s_{15} \cdot 2 = 3 - 98304 \qquad s_n - s_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q$$
$$s_{15}(1-2) = 3-98304 \qquad s_n(1-q) = a_1 - a_n \cdot q$$
$$s_{15} = (3-98304)/(-1) \qquad s_n = (a_1 - a_n \cdot q)/(1-q) = (a_1 - a_1 \cdot q^n)/(1-q)$$
$$s_{15} = 98401 \qquad s_n = a^1 \cdot (1-q^n)/(1-q)$$

له کمون یا کمښت وروسته د لړی په کښه لور تیك(یواځی) پورته لیکی لومړی توکی او د لاندې کرښی اخرنی توکی پاتیږي، نور ټول توکی یوبل سره لرې کوي، د بیلګي په توګه a2-a1.q=0 او یا an-an-1.q=0

دا روښانه ده چی q نه ارزښت صفر او نه ارزښت ۱ اخستلی شي ، په لومړي حالت که به مو پرلپسی

a1,0 , 0 , 0 , 0.......

54

لرودی او په دوهم حالت که مو د پرلپسي a1, a1, a1 ,a1سره سر او کار وي

بیلګي:

$1 - 7 ; -21 ; 63 ; -189 : \ldots\ldots q = -3; a_1 = 7$

غوښتونکی s_7

$s_7 = 7 . ((-3)^7 -1) / -3 -1 = -15316/ -4 = 3829$

کنترول:

$a_7 = a_1. q^6 = 7 . (-3)^6 = 5103 \quad , s_7=5103.(-3)^7-1/(-3)^7-(-3)^6 :$

$= 5103.2188/2916 = 3829$

. ۲ الف ۲ اریتمیتیکي لړی

دلته غواړو چی یو ځل بیا لنډ مګر د یوه لوي سرلیك په څیر اریتمیتیکي لړی ته یو نظر واچوو .یوه د اریتمیتیکی پرلپسی منځ ته راغلی یا جوړه شوې لړی اریتمیتیکی لړی نوموو. د

ak = 15 + (k - 1).4

سره جوړه اریتمیتیکي پرلپسی څخه جوړه شوې لړی په لاندې ډول ده:

$s_1 = a_1 = 15$

$s_2 = s_1+a_2 = 15+(15+4)=15+19=34$

$s_3 = s_2 +a_3 = 15+(15+4)+(15+2.4) = 15+19+23=57$

.

.

$s_n = s_{n-1} +a_n = 15+(15+4)+(15+2.4)+..+(15+(n-2).2+(15+(n-1).4$

.

.

.

جمله : (د اریتمیتیکی لړی اکسپلیڅیت انځورونه):

د $ak = a1+(k-1).d$
سره اریتمیتیکی پرلپسی څخه جوړه شوې لړی sn اریتمیتیکي لړی لپاره صدق کوي:

$$s_n = a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+..+(a_1+(n-1)d = (n /2) (2a_1 + (n-1)d)$$

اوبی:

$$\begin{aligned}
s_n &= a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\ldots+(a_1+(n-3)d)+(a_1+(n-2)d)+(a_1+(n-1)d) \\
s_n &= (a_1+(n-1)d)+(a_1+(n-2)d)+(a_1+(n-3)d)+\ldots+(a_1+2d)+(a_1+d)+a_1 \\
s_n+s_n &= [2a_1+(n-1)d]+[2a_1+(n-1)d]+[2a_1+(n-1)d]+\ldots \\
&\quad +[2a_1+(n-1)d]+[2a_1+(n-1)d]+[2a_1+(n-1)d] \\
2\cdot s_n &= n\cdot[2a_1+(n-1)\cdot d] \\
s_n &= \tfrac{n}{2}\cdot[2a_1+(n-1)\cdot d]
\end{aligned}$$

غوښتنه:

وښايي چی $sn=(n/2)(2a1+(n-1)d$ د $sn=(n /2)(a1+an)$
سره په یوه مانا دي

۱۸ . ۶ د پرلپسی او لړیو پولی

موږ تراوسه داسی لړیو سره سراو کار لروده چی اخرنی توکي یی لاس ته راوړونکي وو. داسی لړۍ پایلړی بلل کيږي. داسي فکر هم کیدی شي چي د لړی اخرني غړي موجود نه وي، یعني لړۍ دې په خوښه دوام پیدا کولی شي. په عمل کی داسی پرابلمونو سره مخامخ کيږو چی دا مو ناپای لړیو ته هڅوي. دا څرګنده ده، چي داسی لړی اریتمیتیکی لړی نه دي، کم له کمه به ی اخرنی غړی په پوښتنه کی راتلی او یا د پاډیرو غړو زیاتون، په اریتمیتيي لړی کی بي مفهومه دی، ځکه چی دواړه لويي د n د ارزښت سره په ټولو پولو لويږي په هندسی لړیو کی هم په یوه ناپای لړۍ کی د اخرني غړي او یا زیاتون پوښتنه بي مفهومه ده. دا روښانه ده چی د پیل غړی د|q| سره ځل له امله تل جګیږي. دا د مثبت او همداډول د منفی q لپاره باور لري.

بیلګي:

۱ - اریتمیتیکي لړۍ 2+3+4+5+..... یو لاس ته راوړونکی د زیاتون یا جمعی ارزښت نه لري، ځکه چی هر راتلونکی زیاته وونی د ټولو پولو لوییږي یاجګیږي۰

۲ – ځمککچیزه لړۍ 2+3+4,5+6,75+10,125+15,1875+...... د لومړي توکي $a1 = 2$
او د ویش $q = 1,5$ سره په ټولو پولو لوییږي. یا جګیږي نه اخر توکی او نه د جمع ارزښت معلومیدی شي. د پای توکوګڼ زیاتون sn او اخرنی توکی an شمیریدونکی دی.
۳ - ناپای ځککچیزه لړۍ 1,5-3+66-122+24-48+966-....... د $a1 =1,5$ او $q= -2$سره پای ارزښت زیاتون نه لري، ځکه چی د توکو مطلقه ارزښت د هر مخکي پولی څخه جګیږي یا لویږي .له دې سره به ځرګنده شوې وي چی کله د ناپای هندسي لړۍ د زیاتون ارزښت پای دی.

پیلبیلګه :

یو سخی سړی غواړي د معیوبو هستوګنځی ته بسپنه ورکړی . په لمړۍ میاشت کی دی ۱۰۰۰ افغانی بسپنه ورکوي او په نورو راتلونکو میاشتو کی د هغی د مخه میاشتی نیمایي یعنی په دومه میاشت کی ۵۰۰ افغانی او په دریمه کی ۲۵۰ افغانۍ او داسی نور.
دلته $a1=1000$او $q=1/2$دي. دوخت د کموالي له امله دا لړی باید پای لړۍ وي ، مګر موږ دې پوښتنی ته تیوریتیکي ځواب ورکوو.
د پای ځمککچیزو لړیو لپاره کیدی شي دلته د زیاتون له فرمول $s_n = 1000(1\text{-}0,5^5)/ (1\text{-}0,5)$ څخه کار واخستل شي، که چیرې n یو ناپاي لوي ارزښت نیولی شوی. که په دې فرمول کی موږ ته معلوم ارزښتونه کیښول شي، نو لاس ته راځي:

$$s_n = 1000(1\text{-}0,5^5)/ (1\text{-}0,5)$$

اوس کیدی شي ولیکو ($s = 1000(1\text{-}0,5^n)/(1\text{-} 0,5) = 2000.(1\text{-}(1/2)^n)$

که n له ټولو پولو تیر شي، باید د $(1/2)^n$ له امله دا مات (1/2) تل کوچنی شي.
دې مات (1/2) باندې کیدی شي، چی د لویو n توکو لپاره، بالاخره صرف نظر وشي
.
دلته روښانوي چی په دې توګه د زیاتون ارزښت یوه ناپای هندسي لړۍ 1000+500+250+125+65,50+32,75+......
جوړوي، کومه چی ځان و 2000 ته نزدي کوي او هغه ته هیڅ نه رسیږي. دا سړی زیات له زیاته کیدی شي 2000 افغانۍ خیرات ورکړي.

يادونه : هغه د دې برخې په سر کې پوښتنه هم په همدې توګه ځواب کيدی شي٠

پرلپسی او د پرلپسی لړی په لوړو شميرپوهنوکی غوره رول لوبوي« ډيرې ښوونی (اوبنوني) په دې ولاړې دي، چی ايا يوه ټيك ټاکلی پرلپسی يوې معلومی يا ټاکلی پولی ته هڅه کوي او که نه؟ چی په اول حالت کی پرلپسی(konvergent ليمټ لرونکی ياپوله لرونکي(بلل لکيږي او په دوهم حالت کی پرلپسی (divergent ليمټ يا پوله نه لرونکی) بلل کيږي.

بيلګه :

د ... مخ په اول او په دريمې بيلګو کی راوړل شوې پرلپسی ديورګنت يا پوله نه لرونکی ، په ٢ –مه بيلګه کی پرلپسی کونورګنت يا پوله لرونکی ده او د صفر لور ته هڅه کوي يا صفر ته کونورګنت ده يعني ددې پرلپسي پوله صفردی. او ۴ -مه بيلګه کی پرلپسی پوله لري او د ٣ لور ته هڅه کوی، يعني پوله يی ٣ دی.

پرلپسی شته چی د جګيدو سره يوه ټاکلی ګڼ ته په خوښه ورنزدې کيدی شي.د
دې پرلپسی د په خوښه لويو غړو او د دې ګڼ کمون ترمنځ بالاخره دومره کوچنی کيږي، چی په جبشميرني باندې هم نه شي شميرل کيدی .
موږ د پرلپسيو دا ډول ځانيونی، بی له جب شميرنی يا جبشميري، په لاندې بيلګو کی څيړو.

د پرلپسيو غړي

1 ; 1 /2; 1 /3 ; 1 /4 ;....| 0 ; 1 / 3 ; 2 / 4 ; 3 /5 ; 4 /6;.. | 3 /29 /4 ; 15 /8 : 33 /16

1;1/2;1/3;1/4;..|0;1/3;2/4;3/5;4/6;..
|3/29/4;15/8;33/16

د لاندې سره

$a_k = 1/k$ | $a_k = (k-1)/(k+1)$ | $a_k = 2+(-1/2)^k$

د k د جګيدو سره تل دا پرلپسځانونه ځانونه لاندې ګڼونو ته نزدې کوي

$g = 0$ | $, g = 1$ | $g = 2$

د ګراف ټکي يی تل د جګيدونکی غړی نمرې k سره د

دx - محور سره غبرګ | دx - محور سره غبرګ | x -محور ته

د y = 2 سره | د y=1 سره او په رينتونی

سرلیک

له لاندې او پورته بدل   له لاندې راتلونکي

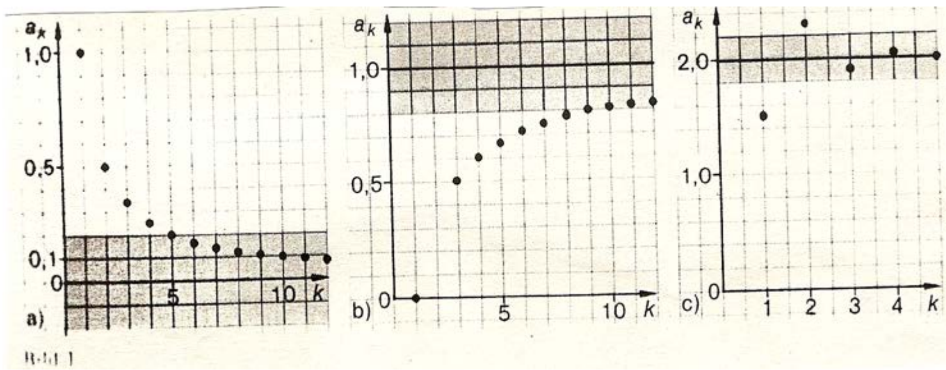
له پورته راتلونکي

راتلونکی

که په کرښه یو دواړو لورو ته پټۍ وکښل شي

د $y= 2$ سره   د $y = 1$ سره   د $y = 0$ سره

نو د پوره لويي k نمره توکي سره د پرلپسی ټول غړی په دې پټۍ کی دننه پراته دي.



دا لاندې دیفرنځ یا کمون

$|a_k - 0|$ | $|1 - a_k|$ | $|a_k - 2|$

دا مانا لري، چی د جګیدونکی k نمرې توکیه خورا کوچنی کیدی شي. دا پوښتنه مو چی د کوم غړی ak لپاره دا کمون د بیلګي په توګه له 0,0001 کوچنی کیدی شي، لاندې ناسمساوات ته را هڅوي

$\lvert a_k - 0 \rvert < 0{,}0001$	$\lvert 1 - a_k \rvert < 0{,}0001$	$\lvert a_k - 2 \rvert < 0{,}0001$
$\left\lvert \frac{1}{k} - 0 \right\rvert < 0{,}0001$	$\left\lvert 1 - \frac{k-1}{k+1} \right\rvert < 0{,}0001$	$\left\lvert 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2 \right\rvert < 0{,}0001$
$\frac{1}{k} < 0{,}0001$	$\left\lvert \frac{(k+1)-(k-1)}{k+1} \right\rvert < 0{,}0001$	$\left\lvert \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\rvert < 0{,}0001$
$k > 10000$	$\frac{2}{k+1} < 0{,}0001$	$\left(\frac{1}{2}\right)^k < 0{,}0001$
	$\frac{2}{0{,}0001} < k+1$	$k \cdot \lg\frac{1}{2} < \lg 0{,}0001 \Vert : \lg\frac{1}{2} < 0 \ (!!)$
	$19999 < k$	$k > \frac{\lg 0{,}0001}{\lg\frac{1}{2}}$
		$k > \frac{-4}{-0{,}3010}$
		$k > 13{,}29$

دا په دې مانا، : د ټولو پرلپسی غړو د

$k > 10000$ $\qquad$ $k > 19999$ $\qquad$ $k > 13$

سره کمون $| a k - g |$ له $0{,}0001$ کوچنی دی .

د ګراف لپاره باور لري، چی دا ټول ټکي د یوې پټۍ یا تسمې په دننه کی پراته دي سور یي $2.0{,}0001$ په کرښه د مساوات

$y = 0$ $\quad$ | $\quad$ $y = 1$ $\quad$ | $\quad$ $y = 2$

$y = 0$ $\quad$ $y = 1$ $\quad$ $y = 2$

سره پروت وي .

که دا د $0{,}0001$ په ځاي کی یو په خوښه کوچنی رییل ګڼ ورکړ شي، او وله دې وغوښتل شي چی کمون یی له دې ګڼ کوچنی دی نو په ورته توګه مو لاندېنامساواتو ته لاربنودوي.

$\lvert a_k - 0 \rvert < \varepsilon$	$\lvert a_k - 1 \rvert < \varepsilon$	$\lvert a_k - 2 \rvert < \varepsilon$
$\left\lvert \frac{1}{k} - 0 \right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert \frac{k-1}{k+1} - 1 \right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2 \right\rvert < \varepsilon$
$\frac{1}{k} < \varepsilon$	$\left\lvert \frac{(k-1)-(k+1)}{k+1} \right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\rvert < \varepsilon$
$k > \frac{1}{\varepsilon}$	$\left\lvert \frac{-2}{k+1} \right\rvert < \varepsilon$	$\left(\frac{1}{2}\right)^k < \varepsilon$
	$\frac{2}{k+1} < \varepsilon$	$k \cdot \lg\frac{1}{2} < \lg\varepsilon \,\Vert : \lg\frac{1}{2} < 0\ (!!)$
	$\frac{2}{\varepsilon} < k+1$	$k > \frac{\lg \varepsilon}{\lg \frac{1}{2}}$
	$\frac{2}{\varepsilon} - 1 < k$	

دا په دې مانا چې : د ټولو پرلپسیو لپاره د

$k > 1/\varepsilon$ | $k > 2/\varepsilon - 1$ | $k > \log \varepsilon / (\log(1/2))$

سره کمون $\frac{q^n}{1-q}$ دی .
پرلپسی له دې خویونو سره کونورګنت بلل کیږي او ګڼ g یې پوله.

پيژند ۱۸ .۱ :

یوه پرله پسی کونورګنټ Konvergent) لاتین convergere یو د بل په لور ور ځغلیدل یعني یو بل ته ورنزدېکیدل) بلل کیږي یعني د یوې ټاکلی پولی په لور هڅیږی، کله چې د هغې غړي د ځګیدونکی ایندکس n سره یوې پولی ته په خوښه نزدې شي. یوه لړی کونورګنت یا پوله لرونکی بلل کیږي، کله چې د برخه زیاتون پرلپسی د ځګیدونکی n سره یوې پولی ته په خوښه نزدې شي.

هغه پرلپسی چې د صفر په لور هڅیږي صفرپرلپسی یی بولو هغه پرلپسی چې یوې ټاکلی پولی ته نه هڅیږي .دیورګنت بلل کیږی ») دا وروسته ه تر ځیړنی لاندې نیول شوي دي.

جمله :

د ځمککچیزې یا هندسي لړی پولې تج ت لنې یا کونور ګنت لپاره شرطونه:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=|q|<1$$

که $|q|<1$ وي ، پس د پای ځمککچیزې لړی لپاره د زیاتون فرمول داسی دی

$$s_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

د q^n ارزښت څخه تېرېدی شو یعنې ترې صرفنظر کیدی شي، که n پوره لوي وټاکل شي.

: جمله

دناپای ځککچیزې لړی ...+a1+a1.q+a1.q²+a1.q3 د زیاتون sn سره پوله s = a1 / (1-q) تیك هلته لري، کله چی|q|<1

$$n=n_0(\varepsilon);.......................................(18.7)$$

وي.

جمله :

هره پرلپسی د $a_k=\frac{b}{k^n}(b\in R;n,k\in N)$ سره یوه صفر پرلپسی ده

جمله:

هره پرلپسی د $a_k=cq^n(c\in R$ سره د|q|<1 لپاره یوه صفرپرلپسی ده۰

دلته غواړو چی دا د پرلپسی د پولی کلیمه لږ نوره هم زوره کړو.
د یوې پرلپسی د غړو an ځانښیونی څیرنه د تل جګیدونکي n لپاره،وایو چی:
که n د oe (ناپای) په لوروهڅیږي او یا لنډ n—›oe ، نو دا مو د پولی ارزښت کلیمي ته بیایي او یا کونورګنځ (convergence). موږ پرلپسی{an}={1/n } په پام کی

نیسو، د جګیدونکي n سره، ګورو چی د پرلپسی غړي تل 0 ته په خوښه یا په زړه پورې ور نزدې کیږي .
که سړی هرڅومره کوچنی ګڼ $\varepsilon>0$ وټاکي د یوه معلوم($n=n_0(\varepsilon)$ د لته) $n_0(\varepsilon)$ د ε په واک کې دی) څخه وروسته ټول ګڼونه د0 په ε -چاپیریال کی پراته دي

$$|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall\, n > n_0\,(\varepsilon). \tag{18.1}$$

سړي کړی شي چی دا n دلته په ساده ډول ورکړي. د) ۱۸ . ۱ (له امله دی

$$n_0\,(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\ . \tag{18.2}$$

د
100 / 1 =
لپاره . n0 = 100 نو | an | < 1 / 100 د ټولو n > 100 لپاره، یعني د n = 101, n
=102 , n = 103........ لپاره. د = 1000000 / 1 لپاره لرو = ( ) n0
1000000پس, | an | < 1/ 1000000 د ټول n > 1000000 لپاره

په لاندې حالت کی سړی وایي: چی پرلپسی

{n 1 }
کنورګنت ده. هغه د پولې a = 0 لور ته کونورګنت کیږي. د دې لپاره لیکو)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

او یا په ساده ډول

$$\frac{1}{n} \to 0 \tag{18.3}$$

(د 1/n لیمس د n—>oe لپاره په 0 مساوي دی او یا ساده 1/nد0 په لور ځي)
د $\{a_n\}=\{(-1)^n(1+\frac{1}{n})\}$ لاندې پرلپسی په څېرنه کره لاس ته راځي: د جوړه یا جفت n لپاره پرلپسی an د1+ لورته نزدې کیږي او د ناجوړه یا طاق n لپاره پرلپسی د1- لورته نزدې کیږي. د لته سړی د دوه پولو +1 او -1 څخه نه غړیږي بلکې دپرلپسی ددوه ډیری شوو ټکو یا ځاي راټولشوو ټکو څخه . پرلپسی کونورګنت نه ده بلکه دیورګنت (divergence(ټیک : ناټاکلی دیورګنس)ده •

پرلپسی {an}={n2} هم دیورګنت ده. دا چي an د جګیدونکی n سره د oe یا ناپای لورته ځي پس د هرڅومره لوي ارزښت K څخه اوړي یا جګیږي، نو سړی د oeپه لور د ټاکلی دیورګنت څخه غربږي.

$$\lim_{n \to 0} n^2 = +\infty \vee n^2 \to +\infty; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18.4)$$

په پورته کې V د یا لپاره ځای په ځای ده

له دې پیل یادونوڅخه اوس باید د پولو(حدونو) کلیمی کره وپیژندل شي:

پیژند ۱۸ . ۲ :

یو پرلپسی $\{a_n\}$ { an } پوله یا حد a لري

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n \to a; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18.5)$$

که د هر یوه (هرڅومره کوچنی هم) $\varepsilon > 0$

< 0

لپاره یو $n_0 = n_0(\varepsilon)$

داسی موجود وي چی باوري وي

$$|a_n - a| < \varepsilon; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18.6)$$

(18 . 6)

د ټولو $n = n_0(\varepsilon); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18.7)$

n > nn (   )   (18 .7)

وایو چی پرلپسی { an } کونورګنت یا په بل عبارت پرلپسی { an } د پولی a په لور کونورګنت کیږي .که پرلپسی داسی پوله ونه لري، نو دیورګنت بللکیږي(یا دیورګنت کیږي) .

که یوې دیورګنتی پرلپسی { an } و هر (په خوښه لوی) ګن K لپاره یو
)n0 = n0(K

داسی موجود وي چی باوري وي

$a_n > K$ یا $a_n < -K$ (18 .8)

د ټول

$n > n_0(K)$ (18 . 9)

نو د پرلپسی ځرګند یا معلوم دیورګنت بلل کیږي د + oe په لور اویا - oe په لوراو ددې لپاره لیکي

$$\lim_{n\to\infty} a = +\infty \iff (\text{په همدې ډول}) \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad (18 . 10)$$

یا لنډ:

$$a_n \longrightarrow +\infty \implies (\text{یا په همدې ډول}) \; a_n \longrightarrow -\infty \qquad (18 . 11)$$

که یوه پرلپسی دیورګنت او ټاکلی دیورګنت نه وي، نو ناټاکلی دیورګنت بلل کیږي.

ددې پرلپس $\{a_n\} = \{ n / n+1\}$ ، څخه او د لاندې فورم بدلولو

$$a_n = n/(n+1) = 1/(1 + 1/n) = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

ددې پرلپس $\{a_n\} = \{ n / n+1\}$ څخه او د لاندې فورم بدلولو

$$a_n = n/(n+1) = 1/(1 + 1/n) = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

اټکل کیدی شي چی دا پرلپسی پوله $a = 1$ لري، یعني $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n/n+1) = 1$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $n/(n+1) < 1$ له امله لاس ته راځي :

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n/(n+1) = 1/(1/n) < 1/\varepsilon$$

د $n+1 > n \iff n > (1/\varepsilon) - 1 = n_0(\varepsilon)$ لپاره .

د $= 1/100$ لپاره لرو $n_0(\varepsilon) = 99$. نود ټولو $n > 99$ لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

ددې پورته سره کیدی شي چی تصدیق کړو چی: هر $\varepsilon > 0$ ته یو $n_0(\varepsilon) = (1/\varepsilon) - 1$ داسی موجود دی چی $|a_n - 1| < \varepsilon$ د ټولو $n > n_0(\varepsilon) = (1/\varepsilon) - 1$ لپاره دی.

دا ساده بیلګه د تعریف ۱۸ . ۲. پرابلم په ګوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا نه وایي چی پوله څرنګه پیداکیدی شي .مخکي له دې چی پولې ته تګ (کونورګنځ Konvergenz) وښوولی شو، نو پولې a ته ضرورت دی . مخکي له دې چی کونورګنځ

اټکل کیدی شي چی دا پرلپسی پوله $a = 1$ لري، یعني

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n/n+1) = 1$$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $n/(n+1) < 1$ له امله لاس ته راځي:

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n/(n+1)) = 1/(1/n) < 1/\varepsilon$$

د $n+1 > n \Leftrightarrow n > (1/\varepsilon) - 1 = n_0(\varepsilon)$ لپاره .

د $= 1/100$ لپاره لرو $n_0(\varepsilon) = 99$. نود ټولو $n > 99$ لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

ددې پورته سره کیدی شي چې تصدیق کړو چې: هر $\varepsilon > 0$ ته یو $n_0(\varepsilon) = (1/\varepsilon) - 1$ داسې موجود دی چې $|a_n - 1| < \varepsilon$ د ټولو $n > n_0(\varepsilon) = (1/\varepsilon) - 1$ لپاره دی.

ددې پورته سره کیدی شي چې تصدیق کړو چې: هر 0< $\varepsilon > 0$ ته یو $n_0(\varepsilon) = (1/\varepsilon) - 1$ داسې شته دی چې $|a_n - 1| < \varepsilon$ د ټولو $n > n_0(\varepsilon) = (1/\varepsilon) - 1$ لپاره دی .

دا ساده بیلګه د پیژند ۱۸ . ۲. پرابلم په ګوته کوي. دا تعریف جوړونکی نه دی، دا دا نه وایي چې پوله څرنګه پیداکیدی شي .مخکي له دې چې پولې ته تګ (کونورګنځ Konvergenz)وښوولی شو، نو پولې a ته اړتیا شته دی . مخکې له دې چې کونورګنځ (ټولې تج تلنه) وښایو نو باید پوله مو پیژندلې وي یا کم له کمه مو ګومان په راغلی وي.

په ټولیزه(عمومي) توګه د $n_0(\varepsilon)$ شمیرل هم د ستونځو ډك دي. د پولې عملي شمیرلو لپاره داسې عملیو یا کاره ونو ته اړتیا ده، چې بی د پیژند ۱۸ . ۲ د هر وار استعمال څخه ټولې راپیدا کړی شو. له دې پرابلم سره ۱۸ . ٤ -امه برخه ځان مشغولوي.

کله کله دا بسوالی یا بسیا کوي چې سړی دومره پوه شي چې ایا پوله وجود لري یا شته دی (ایا کونورګنت کیږی) بی له دې چې هغه وپیژني او یا یی وشمیري. داسی د موجودیت وېناوي یواځې د کونورګنځ کریتیرین (- خویونه) کولی شي، له کومو څخه چې لاندې یو ورکول کیږي. دې ته باید ګوته ونیسو چې دا کریتیرین د مخه د پولې پو هیدل ضرور نه نیسي) دا د مخه نیونه نه ده یعني فرضیه نه ده) .

جمله ۱۸ . ۱:

هره بنده (محدوده) مونوتون- یا یوغږیزه پرلپسې an کونورګنت ده ٠

دا کریتیریوم څرګند د لیدلو دی. که یوه ترلپسی تل جګیږي (کمیږی ،ټیټیږي) او ټاکلی یا معلوم پای ارزښت K څخه نه اوړي(K څخه نه ټیټیږي) نو باید an یوځاي کی راپنډ شي. دا د مونوتوني له امله یواځي په یوځاي کی کیدی شي.

یادونه : څه ګنونه چې په یوځاي کې سره ډیر راټول شي ما ورته ډیری لیکلي، دا ښه نه ده، ځکه، چې ډیری مې د ډیری یاني د سیټ لپاره کارولی ، نو دلته لیکم، چې »راپنډ» شي(لکه میږط او وزې چې په یو ځای کې راپنډیږي)٠

جمله ۱۸ . ۱ د بیلګي په توګه په دریمه برخه کی راوړلشوي، د طبعي لوګاریتم بنسټ په څیرګڼ e سره اړیکو یا رابطه کی استعمال لري . سرې د یو څه ستونځو سره ښوولی شي چې لاندې باوري دی

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3.$$

له دې امله دا ترلپسی

$$\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

مونوتون او بنده (محدوده) ده او د جملې ۱۸ . ۱ له امله کونورګنت ده.
ددي پوله e = 2, 71828 ده (پرتله یا مقایس برخه ۳ . ۱)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (18.12)$$

۱۸ . ۴ د ترلپسي پولی شمیرنه

په دې برخه کی غواړو چې قاعدې ورکړو د کومو په مرسته چې د پیژندلشوو ترلپسی د کونورګنت څخه د نورو کونورګنت لاس ته راوستی شو، او همداسی، چې د هغی په مرسته د پیژندلشوو ترلپسیو د پیژندل شوي پولی ارزښت په مرسته د نورو ترلپسیو پولی ارزښت شمیرل کیدی شي.
لاندې بنسټیزه جمله ښاي چې د ځانګړو شرایطو لاندې د ګنونو ترلپسیو سره همداسی شمیرل کیدی شي لکه پخپله د ګنونو سره.

جلمه ۱۸ . ۲ :

که ترلپسی $\{a_n\}$ او $\{b_n\}$ (پای)پوله ارزښت a او b ولري ، یاني

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b, \tag{18.13}$$

وي، نو باوري دي

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b, \tag{18.14}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \tag{18.15}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b},\ b_n \neq 0, b \neq 0, \tag{18.16}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b,\ a_n > 0, a > 0, \tag{18.17}$$

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = \log a,\ a_n > 0, a > 0. \tag{18.18}$$

دا جمله دوه کوني وينا کوي: که د پرلپسيو غړو an او bn د کونورګنت ګڼونو پرلپسي د
زياتون کمون ، ځل او ويش، پوتنځ يا لوګاريتم نيولو ، د يوې نوې پرلپسي غړي لاس ته
راولي نو دا نوې پرلپسي کونورګنت ده او د پولی ارزښت يی په ترتيب د کونورګنتو
پرلپسيو زياتون، کمون، ځل، ويش ، پوتنځ او لوګاريتم دی.
په لاندې کی غواړو يواځې اړيکی (۱۸ . ۱۴) وښايو. د ښوولو لپاره يی د پولی
ارزښت پيژند ۱۸ . ۲ څخه غواړوکار واخلو (استعمال کړو) . نيونی (۱۸ . ۱۳) دا
مانا لري، چې هر < 0 ته يو (n1) او يو (n2) داسی شته دی، چې باوري
کوي: $< |an - a|$ دټولو ( ) n>n1 لپاره، $< |bn - b|$ د ټولو (n > n2
لپاره‌پس معتبر دي) $< |an -a|$ او $< |bn - b|$ د ټول = ( ) n>no(
max{n1,n2}
اوس بايد يواځي وښايو چې د يوه ټاکلي n چه |(a±b) - (an±bn |) د هر لاندې
راتيټيدلی شي. لاندې باور لري $|(an \pm bn) - (a \pm b)| = |(an-a) \pm (bn-b)| <$
$= /2 + /2 < |an-a| + |bn-b|$ د ټولو $/ 2$ ($n > n0$) لپاره
په دې توګه (۱۸ . ۱۴) وښوول شوه.
د جملی ۱۸ . ۲ استعمال کی بايد برسيره په نيونو يا فرضيو، چې په (۱۸ . ۱۵) تر
(۱۸ . ۱۸) پورې شوي ټيك په پام کی ونيول شي چې پرلپسی { an{ او { bn{ څرګند
پای پولی ارزښتونه a او b بايد ولري. که د بيلګي په توګه oe <— an او — bn
oe >وي، نو فرمول) اجازه نه لرونکی استعمال !) (۱۸ ، ۱۴) په يوه په نامه
ناټاکلي افادې په لورځی يعنی

$$(a_n - b_n) \to \infty - \infty. \tag{18.19}$$

)

که وي 0 <—— an او0 <—— bn ، نو سړی د اجازې نه لرلو استعمال (۱۸ . ۱۵)
یوه بله ناټاکلی افاده لاس ته راولي:

$$(a_n \cdot b_n) \to 0 \cdot \infty. \tag{18.20}$$

د) ۱۸ . ۱۶ (استعمال مو د an —>0, bn —>0 <=> an —>oe, bn —>oe لپاره
دوه نورو ناټاکلو افادو ته لاربنود وي.

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{0} \text{ bzw. } \frac{a_n}{b_n} \to \frac{\infty}{\infty}. \tag{18.21}$$

په پورته کې .bzw د همداسې په معنا دی.

د(۱۸ . ۱۷) استعمال مو د
an —>0, bn—>0 <=>an—>oe,bn—>0, <=> an—>1,bn—>oe
لپاره لاندې نورو درې ناټاکلو افادو ته لاربنودوي:

$$a_n^{b_n} \to 0^0 \text{ bzw. } a_n^{b_n} \to \infty^0 \text{ bzw. } a_n^{b_n} \to 1^\infty. \tag{18.22}$$

په پورته انځورشوو اړیکو کی لاندې افادې

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty \tag{18.23}$$

ناټاکلی افادې بلل کیږي.

داسي پرلپسی چی د جملي ۱۸ . ۲ فورمال استعمال څخه ناټاکلو افادو ته لاښودوي ، دیورګنت او یا به مختلفو ارزښتو ته کونورګنت وي. دا یوې ځانګړی څیړنی ته اړ دي.

مخکی له دې چی داپوښتنی ځوابوو، نو باید یوڅو تیپیکي پرلپسی وڅیړل شي، کومی مو چی په نامه ټاکلو افادو ته لاربنود وي، که څه هم د جملی ۱۸ . ۲ نیوني یا فرضیي پوره نه وي.
که $a_n \to +\infty$ und $b_n \to +\infty$ باور ولري نو طبعآ لاس ته راځي

$$a_n + b_n \to \infty + \infty = \infty, \quad (18.24)$$

$$a_n \cdot b_n \to \infty \cdot \infty = \infty, \quad (18.25)$$

$$a_n^{\ b_n} \to \infty^\infty = \infty. \quad (18.26)$$

دا اړیکي (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۲۵) طبعآ د ناڅرګندي پولی ارزښت - oe لپاره هم باوري دي.

که $a_n \to a$ und $b_n \to \infty$ وي، نو باور لري :

د لاندې لپاره باور لري :

د 0 <- an او bn -> oe لپاره باور لري یا صدق کوي.

په دې همدا اوس ښوول شوي اړیکو کی لاندې افادې ټاکلی افادی دي (نیونه د (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۴۰) پورې دی په پام کي ونیول شي :

په لاندې بیلګه کی به یو څو ګنونپرلپسی ورکړ شي، کومی چی د ټاکلو افادې په لور لاربنودوي) بیایي :

بیلګه ۱۸ . ۳:

هغه پرلپسی چی د ناټاکلو افادو(۱۸ . ۲۳) . په لورلاربنودوي، ستونځي پیښوي. دا د هوښیارو فورمبدلولو یا بنه بدلون په بنسټ په داسی پرلپسو بدلیږي چی څرګنده – یا ټاکلي افادی (۱۸ . ۴۱) په لور مو بیایي یا چی د هغي کونورګنتځاننیونی معلوم دي .
لومړی دې یو څو ځانګړې پرلپسی وکتل شي:
پرلپسی مو د 1 + 1/n)n) غړو سره د نا ټاکلی افادې oe 1په لور بیایي او د (۱۸ . ۱۲) له مخی پوله ارزښت e لري. سړی ښوولی شي) دلته دې دا نه ښوول کیږی(، چی دا پولی ځاننیونه ساتلي پاتی کیږي، که څوك د an = 1/n په ځاي یوه په خوښه د صفر پرلپسی an|=0 , an —>0 وټاکي.

جمله ۱۸ . ۳ :

د هرې په خوښه صفر پرلپسی

} an {   lim an = 0 ,   an |= 0   (18 . 42)
لپاره باور لري
lim (1 + an)   = e   (18 . 43)

بيلګه ۱۸ . ۴ : د جملی ۱۸ . ۳ په مرسته د بيلګي په توګه لاس ته راځي:

د 0<—— an لپاره پرلپسی   (sinxn)/n د ناټاکلی افادې 0/0 په لور ځي.
لاندې باور لري :

جمله ۱۸ . ۴:

د هرې په خوښه صفر پرلپسی
lim   an = 0 , an |= 0   (18 . 44)
لپاره باور لري
Lim   (sin an) /an = 1   (18 . 45)   )
دلته   n د کرۍ په شميرکچ ، کچ کيرۍ)

اوبښونه :د
sin (-an) = -sin an
له امله او له دې امله چی
(sin (-an)) / -an   = (sin an) / an
دی، دلته دې(۱۸ . ۴۵) يواځې   د an> 0 لپاره وښوول شي.
موږ دلته د يوونګردی د کونج   بلواک څخه ګټه اخلو؟؟؟ ځيره ش ۱۸ . ۱) د درې
ګوډج OAB منځهواره: 1   ) 2 / (sin an.
د ګردی سکتور يا ګرديبرخه 0 AB
منځهوارې
.an / 2 1²
څخهکوچنی ده، او دا بيرته د درېګوډې OAC د منځهوارې.
.tan an / 2 1

څخه کوچنی دی.
له دې امله باور لري
an < tan an = sin an / cos an   اوsin an < an

او ورپسی < $\cos\ an < \sin an / an < 1$, $\cos an < \sin an / an$, <=> $\sin an / an < 1$

د

$\cos\ an \longrightarrow 1$

له امله د $0 \longrightarrow a$ لپاره فرمول (۱۸ . ۴۵) باور لري۰

بیلګه ۱۸ . ۶ :

په پرلپسی { an / bn } ،

چې د ناټاکلی افادې oe/oe په لور مو هڅوي کوښښ کیږي چې د مات باندې او ماتلاندې په یوه ګڼ وویشل شي، چې یو ټاکلی وبینه یا افاده رامنځ ته شي.

بیلګه ۱۸ . ۷ :

پرلپسی

}an - bn {,

چې د ناټاکلی افادې oe - oe په لور موبیایي، کیدی شي، د نورو په پام کی نیولو سره لاندې بدلون فورم یا بنه بدلون د ځان لپاره غوره کړي.

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{2n-1}=\frac{n+1-2n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{\frac{2}{n}-1}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}\to\frac{-1}{+0}\to-\infty,$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\to\frac{2}{\infty}=0.$$

که صورت(ماتباندې) کونورګنت شي یعنی د پولی په لور وهڅي، نو بیا مو یوه ټاکلی وبینه یا افاده مخ ته پرته ده

.

تمرینونه:

د ورکړشوو پرلپسي $\{a_n\}!$ پوله ارزښتونه a(که شتون ولري) وشمیرئ.

$n_0(\varepsilon)$ داسې وشمیرئ، چې د ټولو $n > n_0(\varepsilon)$ (18.6) له پاره باور ولري.

72

سرلیک

.1. a) $a_n = \frac{n+1}{2n}$ b) $a_n = \frac{1}{n^2\sqrt{n}} + \frac{1}{n^3}$

c) $a_n = n\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}} - n$ d) $a_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

د $\{a_n\}!$ پوله ارزښتونه(که شتون ولري) وشمیرئ.

.1. a) $a_n = \frac{2n+3}{3-4n}$ b) $a_n = \frac{4n-3}{2-5n+7n^2}$

c) $a_n = \frac{5n^2-6}{3n+4}$ d) $a_n = \frac{3n^3-2n^2+5n-6}{2n^3-4n^2-7n+9}$

e) $a_n = \left(\frac{3n-2}{3-6n}\right)^2$ f) $a_n = \frac{(2n-3)^2}{4n+1}$

g) $a_n = \frac{2-\sqrt[3]{n^2}}{n^2+5}$ h) $a_n = \frac{3+(-1)^n+2n}{1-3n}$

i) $a_n = \frac{4\sqrt{n}-10n}{n\sqrt{n}}$ j) $a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2}$

k) $a_n = n\left(1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}\right)$ l) $a_n = n\left(\sqrt[3]{n^2+2}-\sqrt[3]{n^2+1}\right)$

.2. a) $a_n = \left(1+\frac{4}{n}\right)^n$ b) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

c) $a_n = \left(\frac{cn+1}{cn}\right)^n$

d) $a_n = \left(\frac{2+n}{n-4}\right)^n$

e) $a_n = \left(\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)(n+3)}{n+2}\right)^n$

f) $a_n = \left(1-\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{4}+3}$

g) $a_n = \sqrt[n]{3}$

h) $a_n = \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$

2.3. a) $a_n = [2n^{-1} \cdot \sin(2n^{-1})]$

b) $a_n = n \cdot \sin\frac{1}{n}$

c) $a_n = n \cdot \tan\frac{1}{n}$

d) $a_n = \sqrt{n}\tan\frac{1}{\sqrt{n}}$

e) $a_n = 2n^2 \cdot \cos\frac{1}{n^2} \cdot \tan\frac{1}{n^2}$

f) $a_n = \sin\frac{1}{n} - n \cdot \cos\frac{1}{n}$

دریکوډیکچ یا ټریګونومتري Trigonometrie

د څیرنې دا برخه په نهم، لسم او یولسم ټولګیوکې هم څیرلکیري.ماته لرستونځمنه برېښي، چې څه کوم ځای کې ولیکم.ماته دا ښه برېښي، چې که دا برخه تکرارهم راشي،پروا به ونه لري. ګران لوستونکي به هرومروترې هغه برخه لولي، چې ورته اړیین برېښي

تعریفونه

د دریکوډیکچ یا تریگونومتري دنده ده چی په هواره یا په هوا کی دریکوډي کچ کړي ، د څانګړوبلواکو له لارې، دې په نامه تریگونومتریبلواکو. برسیره پر دې د دې په مرسته پریودیکی یعنی په منظمه فاصله پرلپسی تکراریدونکی پیښي(موږ یی تل راګرځیدوني بللی شو) څیړل کیږي.

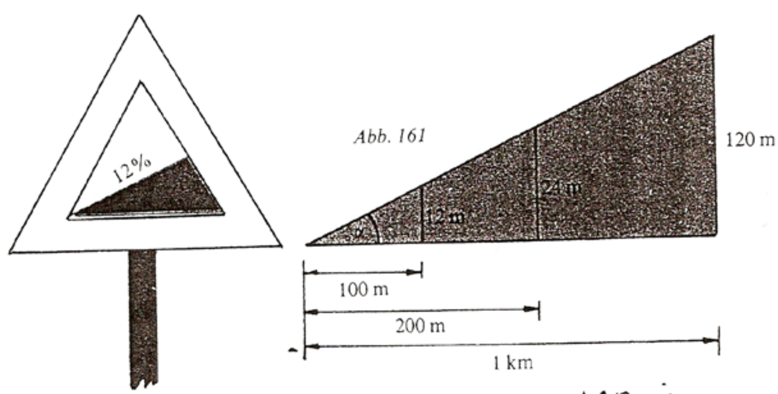
تریگونمتري تر هیپارچ (Hipparch ۱۶۰ – ۱۲۵ له م پخوا) پوري تعقیبیدی شي، وروسته له مصري پتولیمویس Patolemäus چي په ۱۶۸ م کال کی مړ شوی او بیا له هندي او عربو شمیرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پیل دا د کارونی یا عملي کیدو د ستونځو سره مخامخ وه. دریکوډیکچ خپل کارونه په استرنومي او فزيك، د څمککچ یا اندازه کولو، د څمك اندازونی، نقشو علم، او ابادي. او نوتيك Nautik (د کیشتیو د لارو نقشه ویستلو پوهنه) کی مومي.

: تریګونومتري مانا یا مهموالی په ځانګړي ډول په دې ربښتینوالی یا واقعیت کی نغښتی، چی د دې په مرسته د پایکرښبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي(پام دې وي، چی دا تړاو شمیرپوهینیز مفهوم لري).

پیلبیلګه: د په مانایا مهم جګوالي یا لویدکرښو نخښنه لوحی یا په بله عبارت د زوړي او پیچومی لیکتختی(دې ته دې پام وي چی ما دا کلیمی هر چیرې د زوړي او پیچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چی په هغه مناسب ځای

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي) وهل شوي

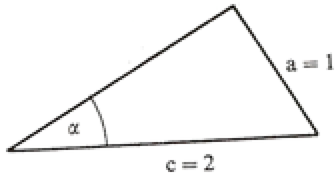
د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟
پیچومی یا جګوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جګوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیك ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جګوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توګه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جګوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جګوالي لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جګیږي. کتل کیري یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومي یا جګوالي کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځانښونه و هوارې فاصلي ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځانښونه تابث یا ځاي په ځاي پاتیږي او د په سلو کی ګڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جګوالي اوږدوالي معلومات نه



ځیره ۱۹۴

د فنکشن لپاره ما بلواک لیکلی یعنې همغه د درې له تابع څخه مې را اخستي، چې نورو ژبو کې یې بلواک ځیره ده، چې دې امله یې ځیره نمونه سمه ده اوکارونه یې ځیرونه ده.

سا ینبلواك sinusfunktion: بليگه:

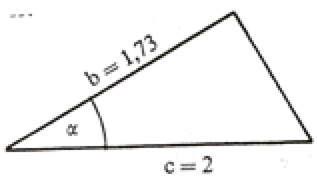


$sin\,\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

خیره ۱۹۶

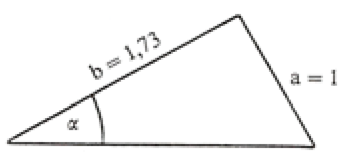
کوسایبلوك Cosinusfunktion بیلگه:



$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرته کتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}$

$\cos 30° = \frac{1,73}{2} = 0,8660$

تنجنتبلواك Tangensfunktion بیلگه:



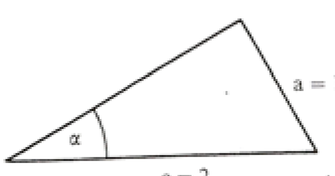
$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$

خیره ۱۹۸

$\tan 30° = \frac{1}{1,73} = 0,577$

د کونجونو د پښونوموونې (دا ټول شته، خو بیاهم اړیین دي.

کوسیکانسبلواك Kosekansfunktion بیلگه:



$cosec\,\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزي}}{\text{مخامخ کاتیت}}$

خیره ۲۰۱

$$\cos ec\alpha = \frac{2}{1} = 2$$

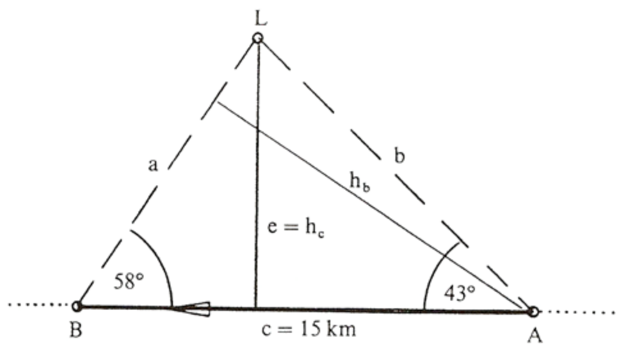
موږ به زيات وخت لمړنی درې يا په همدې توګه لمړنی څلور بلواکه د کارونی لپاره راونيسو يا وکاروو.

په خوبنه دريګوډيو کی شميرنه

سره له دې چی کونجبلواکي يواځی په ولاړکونجيز دريګوډي کی بايد تعريف کیږي، خو بيا هم برسيره پر دې استعمال يا کارونه مومي. د پيچومي يا جګوالی په جوړولو کی هر دريګوډی په ولاړو برخه دريګوډيو تجزيه يا ټوټه کيدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پايکرښي وينا وي د پيل دريګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

پيلبيلګه
يوه کيښتی د رڼاډزکړي(کله چی کښتی له ستونځو مخامخ شي او يا يوې بلی کښتي يا يو بل څه ته که يوه کښتي وغواړي خبر ورکړي، نو يوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې څرګنديږي او نورې خبر ورته ليږونکی په دې پوهيږي، چی څه پيښ شوي دي). دلته $43° = \measuredangle$د تګ په لور اندازه کیږي او له

یوه تګ پایکربښي $c = 15\ km$ او کونج $\beta = 58°$ وروسته.
په دوم ډز کی کیښتی له ډز رڼااور څخه څومره لرې ده؟
د A څخه و B ته د کیښتی نزدې واټن e د ډزرڼااور څخه څومره لرې دی؟
په A کی له اور څخه څومره لرې وه ؟



څیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 79°$; $\sin\beta = h_b / c$ او $\sin\gamma = h_b / b$

د h_b په لور اوبی‌ول یا حلول او په همدې وخت کی لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin\beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin\gamma$$
$$\Rightarrow c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$
$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58°}{\sin 79°} = 12{,}959\ km$$

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin\alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin\alpha = 12{,}959 \cdot \sin 43° = 8{,}838\ \text{km}$$

$$\sin\beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin\beta} = \frac{8{,}838}{\sin 58°} = 10{,}421\ \text{km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دریګوډي اړخونو a او b په شمیرنه کی مرستندوي لویی له منځه ځي او باور لري:

د ساین جمله :

په خوښه دریګوډي کی د اړخونو ځانیونه یاتناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځانیونه یا تناسب دی.

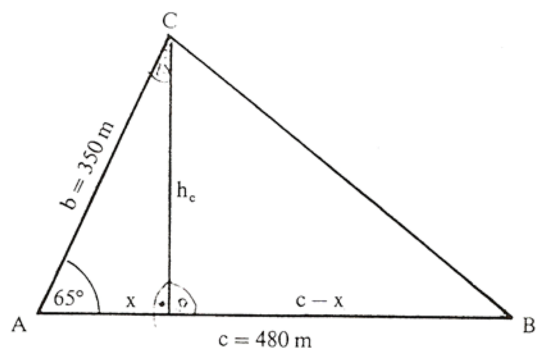
$\sin\alpha / \sin\beta = a / b$ $\qquad$ $\sin\beta / \sin\gamma = b / c$

$\sin\gamma / \sin\alpha = c / a$

د ساین جمله په پڅ دریګوډي کي هم باورلري(تمرین دې وکتل شي). ددې سره په یوه دریګوډي کی نه موجودې توټې هلته شمیرل کیږي، چیرته چی دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي.

سړی بیا څه کوي که دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راګیر کونج؟

پیلبیلګه : په یوه د ډبروسکرو کان کی دوه ستنی $b = 350\ m$ او $c = 480\ m$ دي او یو کونج $\alpha = 65°$ ښندوي.
د B ځخه و C ته به د نښلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟



ځیره ۲۰۳

اوبی یا حل :
جګوالی یا جګی h_c کرښه $AB = c$ په دوه ټوټو x او $c-x$ ویشي.
دلته دی $x = b.\cos\alpha$ ،
ځکه چی $\cos\alpha = x / b$ دی . د پیتاګوراس د جلی له مخی
لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$
او

$$a^2 = h_c^{\ 2} + (c-x)^2 .$$
$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb\cos\alpha$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

د اړخونو اوږدوالي نوموني او کونج کيدی شي چي منظم بيرته راګرځيدونکی (ځيکليکي يوناني کليمه ده ګردی ډوله يا منظم بيرته راګرځيدونکی zyklisch) يو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

کوساين جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos \gamma$$

په هر يوه دريګوټي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زياتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساين سره ځل.

د کوساين جمله د پيوتاګوراس د جملی عموميت يا ټوليز ته هم وايي. (تمرين ۶ مخ دې وکتل شي)

د کونجبلواك له لارې يو بل متود، د ډيرګوټي شميرلو لپاره ، تر څو دا په دريګوټيو ويشل کيدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه يی څرګند وي، پيدا شو.

د دې ټولو سره د څلورګوټي يو وربرسيره بل د شمير فرمول پيداشو:

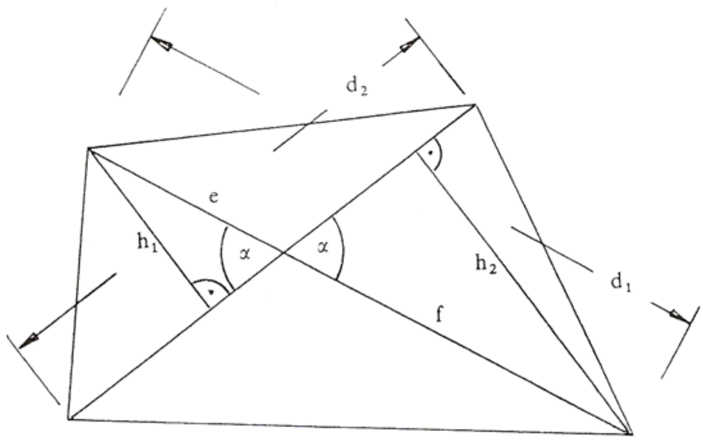
$$A = 0,5.d_1.d_2.\sin \alpha$$

چيرته چي $\alpha = w(d_1; d_2)$ وي .

اوبی يا حل : $A=0,5(d_2h_1 + d_2h_2)$

که d_1 په e او f ټوټه يا تجزيه شي ، نو لرو

$$h_1 = e \cdot \sin\alpha$$
$$h_2 = f \cdot \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2(e+f)\sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2\, d_1 \sin\alpha$$



ځیره۲۰۴

د په خوښه کونجونو تریګونومتریکي بلواکي

په اخره برخه کی مو وویل، چی کونجبلواك، نه یوائی د دننه لورته تیرو دریګوډیو لپاره ، بلکه د هغو کونجونو لپاره چی له ۹۰ درجو لوي وي ، هم هدفمند (موخور) تشریحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

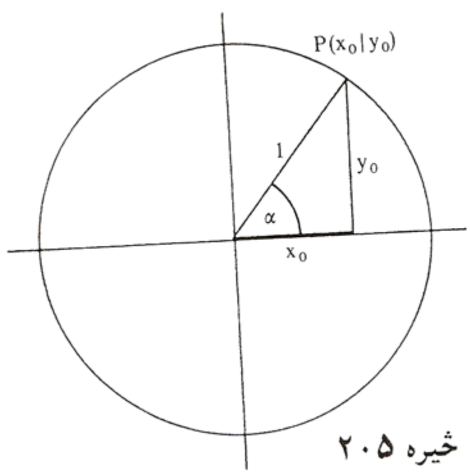
دا پراختیا څنګه تصور یا د خیالوړ کیدی شي ؟

په ښه توګه داسی کیدی شي چی په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کی یوه ګردۍ ووهي چی وړانګه یي ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی (دې ته یوونګردۍ ویل کیږي، ځکه چی وړانګه یی یو یوون دی) او د ګردۍ منځټکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردېنات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډی، چی د هغی یو کونج د ګردۍ ځنتریکونج دی، یعنی کونج یی د ګردې په منځ یا ځنتر پروت دی، (ځیره ۲۰۴) کم له کمه یی یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوډی په دننه کی شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړکونجیز دریګوډي ځخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي ځلورمه یا کوادرانت (Quadrant) کی پروت د ی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په ګردۍ ،د کونجټکی $P(x_0|y_0)$ په پام کی نیولو سره، باور لري:

$$\sin\alpha = y_0 / 1 = y_0 , \quad \cos\alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کربنی د پریوستون او یا د سیوربدرځونو په ځیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوهونکی مروند په ځیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محورغبرګي رڼا لاندې راشی.



ځیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کی کیدی شي چی د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

تریګونومتریکي پیتاګوراس:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

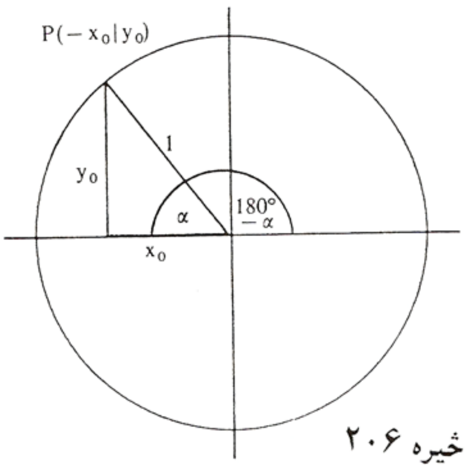
چیرته چی $\sin^2\alpha = \sin\alpha . \sin\alpha$ په مانا دی.

کیدی شي ، چی پوښتنه وشي چی همدا « سیوری » بیا کله لاس ته راتلی شي.
دا حالت بیاټیك هلته لاس ته راځي، چی وړانګه د منفي x –محور سره یو کونج α جوړ کړي، یعني څنتریکونج یی $180° - \alpha$ وي.
د « سیوروڅیرو» څخه لاس ته راځي:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

ځکه چی دا سیوری همغومره اوږد دی لکه د مخه، مګر اوس له صفر پیل مخامخ (منفی) لور ښایي.



خیره ۲۰۶

په ورته توګه لاس ته راځی :

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$

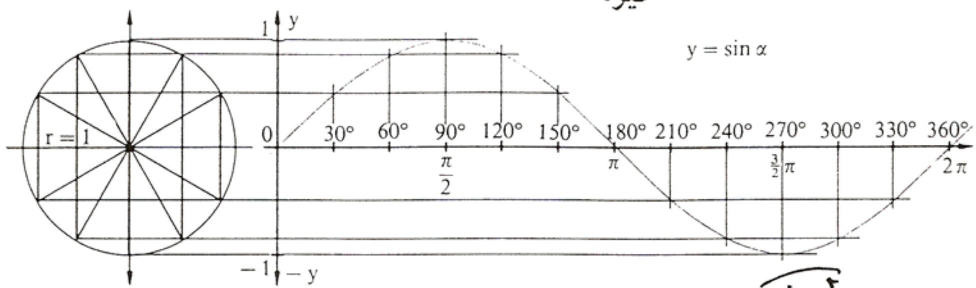
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

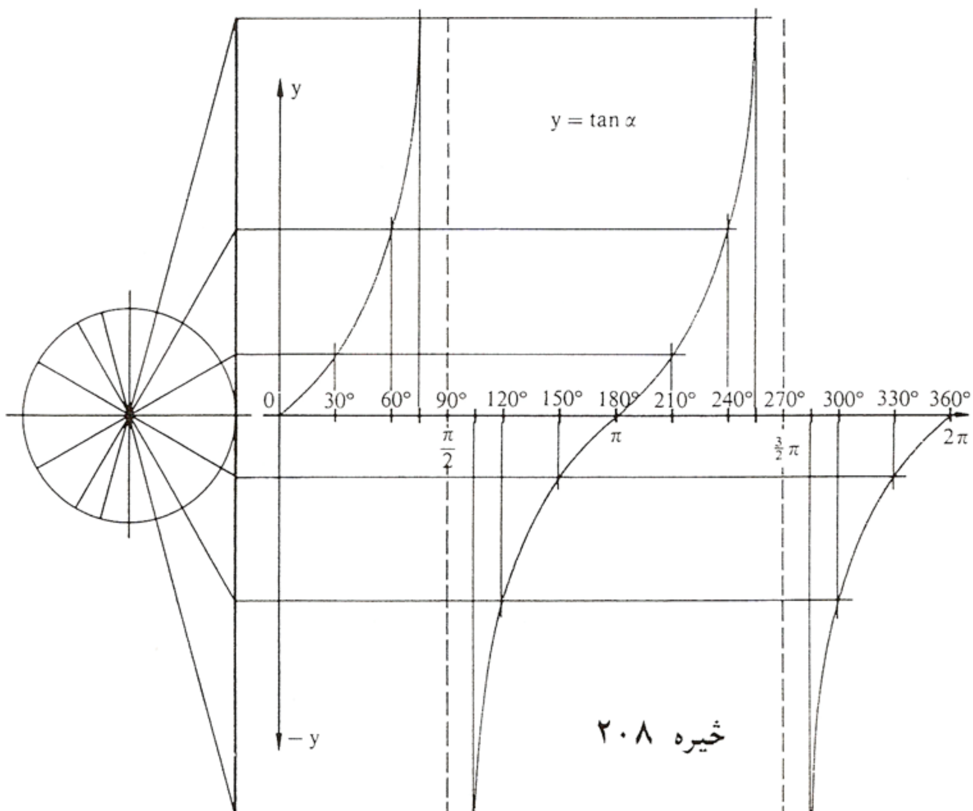
د کونج $\alpha + 360°$ لپاره بیرته د سرچیني کونج اړیکی لاس ته راځي: همدا ډول د $\alpha + 720$ لپاره اوهمداسی نور. په دې توګه د په خوښه کونجفنکشنونو یا کونجبلواکو لپاره د ساین او کوساین بلواك تعریف دي.
د $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ له امله (مقایسه مخ ۱۵۱) دا د تنجنت بلواك لپاره هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکګرافونه لاس ته راځی

شیره ۲۰۷



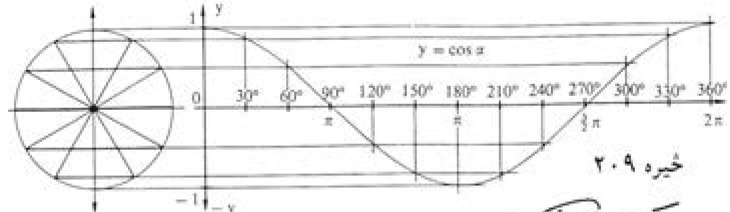
Die **Sinuskurve**: $y = \sin x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$

د ساین کږه



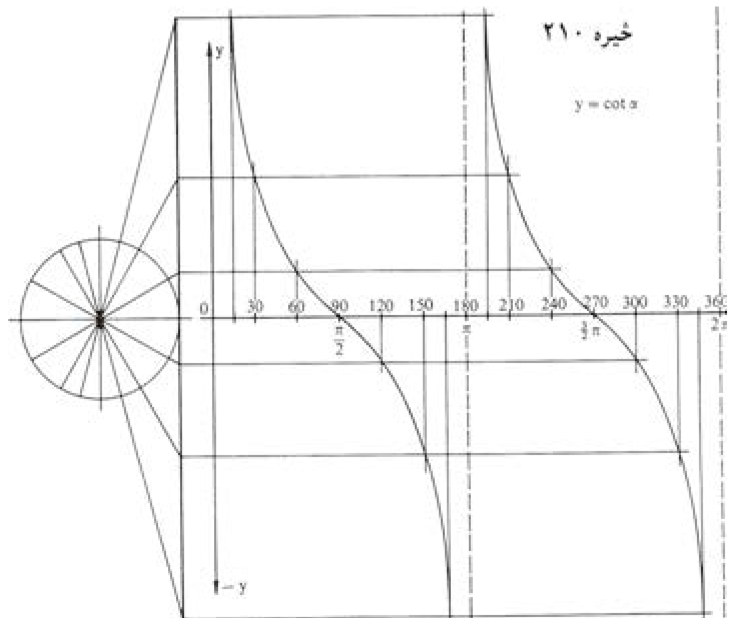
Die **Tangenskurve**: $y = \tan x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

د تنجنت کږه



Die **Kosinuskurve**: $y = \cos x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$

دکوساین ګ.ه



Die **Kotangenskurve**: $y = \cot x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

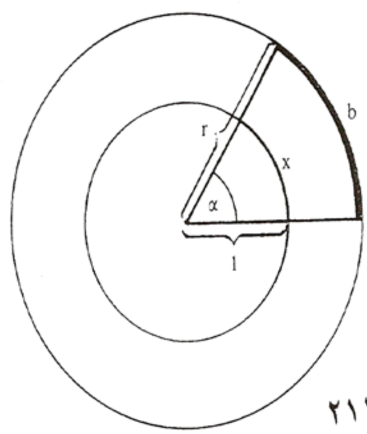
دکوتنجنت ګ.ه

لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

صو ۷

په زړه درجه د کونجکچ یا – اندازې سره بلد یو (دمخه ولیدل، چی ۳۶۰ درجی پوره ګردی ښایي. هغه، چی لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده ، چی ګردی په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دواړو کچیوونونو یا کچواحدونو کی ګډ دي، چی په ګنونو اندازه کیږي، بی له کچ یوون، ارزښتډیری رییلګنونه دي، په داسی حال کي چی وتل ګنونه (= د تعریف ډیری ګنونه) یو یوون یا واحد (درجه یا ګون) لري. دا په کارونه یا عمل کی موږ زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.

کونج لویي په واقعیت کی یوون «راد (rad) » لري، مګر دا په کارونه یا عمل کی کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مو نه راهخوي. دا کونجکچونه چی د کونج لپاره په تریګونومتریکی بلواکو کی اېښودل کیږی (د بیلګي په توګه sin)



څیره ۲۱۱

ارګومنت (Argument تعریفډیری) بلل کیږي. په تعریفډیري کی کیدی شي چی نوې درجه ، زړه درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چي په جبشمیري کی همغه مودوس په کار اچول شوي دی(راتلونکی دې وکتل شي)

په برخه ګردیبرخوکی وښوول شو (ګردیبرخی د مخه څیړل شوي دي) چی هر کونج پورې یوه ګردبرخه یا ګردی لینده اړه لري، نو ټولی ګردی پورې ۳۶۰ درجی کونج یا $2\pi r$ اړه لري، یوه کونج ∢ پورې بیا یوه لینده b اړه لري، کومه چی په چاپېرۍ ځانګهمداسی نیسي لکه په پیل کی ∢ و ۳۶۰ درجو ته . دلته ګردیګټ دی : $\pi = 3,14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پیلبیلګه:

کونج $\measuredangle = 60°$ له ګردی د ۱۰ سانتیمتره وړانګي سره یوه په لاندې ډول ګردی لینده $b = 20\pi . 60° : 360° = 10,47$ cm غوځوي یا بیلوي. د ګردی چاپیری دی : $U = 20\pi = 62,83$ cm

همغه کونج ∢ د ۵ سانتي متره وړانګی سره ګردیلینده

$b = 10\pi .60° : 360° = 5,236$ cm

غوڅوي. دا ګردی لاندې چاپیری لري: $U = 10 = 31,416$ cm .

له ګردی د وړانګي $r = 1$ cm سره ددې په څټ یا برعکس کونج ګردیلینده

$b = 2\pi . 60°: 360° = 1,047$ cm

غوڅوي» د دې ګردي چاپیری فقط $U = 2\pi = 6,283$ دی .

له بیلګي څرګندیږي، چی لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیږي لکه وړانګه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونګردي د وړانګي ۱ سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعریف: په یوونګردي د ګردیلیندی اوږدوالي کچګټ، چی په څنتریکونج

باندې خیره شوي، لینده کچ بلل کیږي. لاندې شمیراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180^\circ) . \pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x/\pi)\ 180^\circ = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$$

دا چی د وړانګي څرخون په پوره کونج هم وراوړیدی شي، نو له دې امله د لیندہ کچ لپاره په خوښه ریيلګڼونه پرینبوول شوي.
بیلګی :

$$\alpha = 1^\circ \Leftrightarrow x = \frac{1^\circ}{180^\circ}\pi = 0{,}0175\ (\text{rad}) \qquad \alpha = 180^\circ \Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ}\pi = \pi = 3{,}1416$$

$$\alpha = 30^\circ \Leftrightarrow x = \frac{30^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236 \qquad \alpha = 360^\circ \Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{180^\circ}\pi = 2\pi = 6{,}2832$$

$$\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow x = \frac{45^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854 \qquad \alpha = 720^\circ \Leftrightarrow x = \frac{720^\circ}{360^\circ}\pi = 4\pi = 12{,}5664 \quad \text{usw.;}$$

$$\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472$$

$$\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow x = \frac{90^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \qquad \alpha = -75^\circ \Leftrightarrow x = \frac{-75^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{-5}{12}\pi = -1{,}309$$

ارکوسبلواکي Arcusfunkrionen

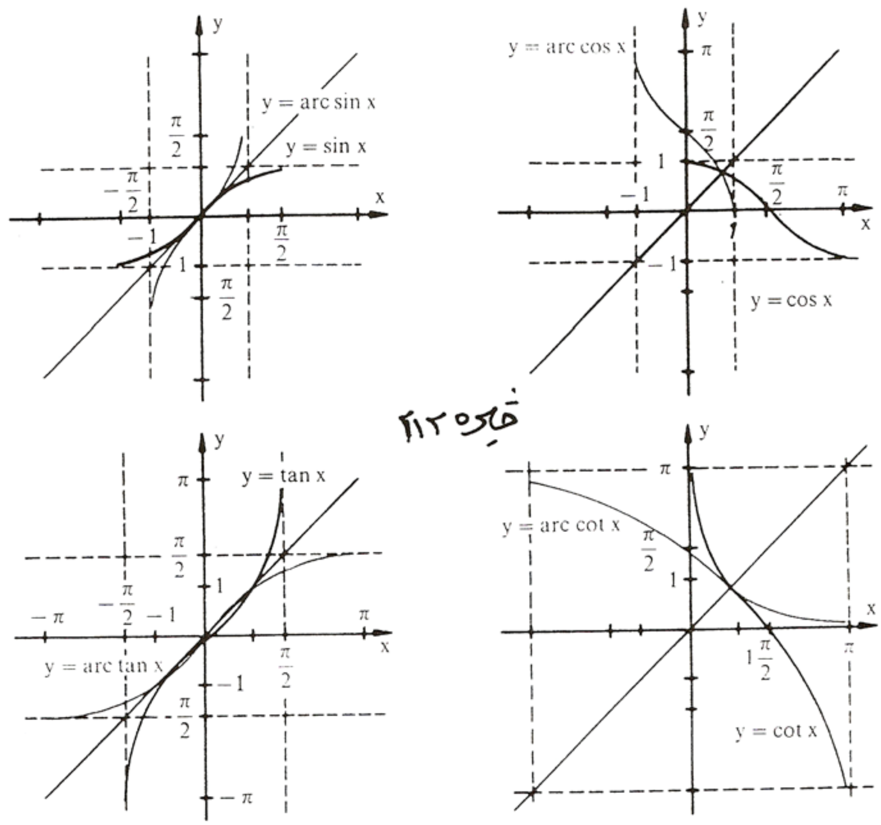
زیات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کیږي ، چي لکه په ورکړشوو کرښځاننیونو راپیداشوې کونجونه څنګه معلومیږي یا څنګه راڅرګندیږی یا بهتره څنګه ځانونه نیسی. ددې لپاره چی دا پوښتنه ځواب شي، باید امکانات ولټول شي، چی د کونجبلواك ارزښتونو څخه څنګه بیرته کونج یا په همدې توګه د هغه تعریفیږي ته، په لینده کچ راتلی شو. دا کونجبلواك پریودیکی یا تل بیرته راګرځیدونکي بلواك دی، دا په دې مانا ، چي د بلواك ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره یا .

مختلفو واټنونو وروسته، بلواك ارزښتونه تکراريږي. د دې لپاره چې په څرګندنه ممکن شي، نو بايد د خپل تعريف ډيرى په يوه برخه ډيري رابند يا محدود شي.

تعريف : د يوه (رابند يا محدود) تريګونومتريکي بلواك په څټ بلواکونه ارکوس بلواك Arcusfunktion بلل کيږي يا څيکلومتريکي بلواك (لاتين اركوس: Arcus = Bogen = لينده)

دلته (arc sin(x لوستل کيږي »دx اركوس ساين. د کونجبلواك تعريفډيرى دلته اړونده اركوسبلواك ارزښتډيرى دى او په څټ ارګومنت يا تعريفډيرى دلته تل يو ريیلګڼ دى.

Trigonometrische Funktion تريګونومتريکي بلواك	Arcusfunktion ارکوسبلواك
f: $x \mapsto \sin(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle\| -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arcsin(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle\| -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \mapsto \cos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| 0 \le x \le \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arccos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \{y \| 0 \le y \le \pi\}$
f: $x \mapsto \tan(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle\| -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -\infty < y < \infty\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arctan(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle\| -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \to \cot(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| 0 < x < \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -\infty < x < \infty\}$	f^{-1}: $x \to \operatorname{arccot}(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \{y \| 0 < y < \pi\}$



شکله ۲۱۲

Beispiele: بېلګې :

1. $\arcsin(0{,}8) = 0{,}9273\,(\mathrm{rad}) = 53{,}13°$

2. $\arccos(1) = 0\,(\mathrm{rad}) = 0°$

3. $\arctan(-100) = -1{,}5608\,(\mathrm{rad}) = -89{,}43°$

4. $\mathrm{arccot}(-70) = -0{,}0143\,(\mathrm{rad}) = -0{,}82°$

۵ – دا چې کونجبلواک و ارکوسبلاک یو د بل په څټ بلواک دي نو باور لري·

$$\sin(\arcsin(y)) = y; \quad \arcsin(\sin(x)) = x$$
$$\cos(\arccos(y)) = y; \quad \arccos(\cos(x)) = x$$
$$\tan(\arctan(y)) = y; \quad \arctan(\tan(x)) = x$$
$$\cot(\mathrm{arccot}(y)) = y; \quad \mathrm{arccot}(\cot(x)) = x$$

یعنې په لاندې توګه هم

$$\sin(\arcsin(0{,}4)) = \sin(23{,}58°) = 0{,}4$$
$$\arccos(\cos(\pi/3)) = \arccos(0{,}5) = 1{,}0472$$
$$\tan(\arctan(-40) = \tan(-88{,}5679°) = -39{,}9999$$
$$\mathrm{arccot}(\cot(60°)) = \mathrm{arccot}(0{,}5774) = 1{,}0472$$

د جبشمیري کارونی یا استعمال لپاره

داچی پخوا معمول جدولونه د بلواك تعریفېدیري او ارزښتېدیري شمیرلو لپاره له کاره غورځول شوي دی او دنده یی ایلکترونیکي ماشینونو نیولی ده، غواړو چي د جبشمیري استعمال په هکله هم څه ووایو

کورکمپیوتر زیات وخت داسی فنکشنونه یا بلواکي لري یا وظیفی په کلك اختیار کی لري، چی د درجي اوړون په لینده کچ او په څپ کوي، مګر شمیردرځ په توګه باید د شمیرونکی په پروګرام کی ځای په ځاي شوی وي.

پوره اسانتیاوې او زیاته کارونه د جبشمیرې په غاړه پرته ده، دلته دې توکمی د < .... > سره په نخښنه شي:

په قاعده کی دریی بلواك ورکړشوي دي : < sin > ; < cos > ; < cot > کوتنجنت بیا داسی شمیرلکیدی شي، د < tan><1/x > . د < INV > – توکمي سره سړی ارکوسبلواك ته راځي: نو < INV><sin > ارکوس ساین دی. په عمومی توګه کونج – بي پروا که په لینده کچ او یا درجه کچ ورکړ شوي وي – باید د فنکشن له مخه ورکړ.

بیلګي

س

١ لاندې جدول همغه د کارونی یا اتعمال لپاره د جبشمیري چمتووالی بنای :

Winkelmaß کونجیج	TR-Modus په تخښونه	Beispiel بېلګه
Altgrad زړه درجه Neugrad نوې درجه Bogenmaß لینده کچ	DEG GRAD RAD	$\sin 45° = 0{,}7071$ $\sin 50^g = 0{,}7071$ $\sin \frac{\pi}{4} = 0{,}7071$

2. Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
sin 45°	45⟨sin⟩	0.707106781	DEG
sin $\frac{\pi}{6}$	⟨π⟩⟨:⟩6⟨sin⟩	0,5	RAD
cot 30°	30⟨tan⟩⟨1/x⟩	1.732050808	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	60(°)	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	$1.047 = \frac{\pi}{3}$	RAD
arccot 2	2⟨1/x⟩⟨INV⟩⟨tan⟩	26.56505118°	DEG
sin 220^g	220⟨sin⟩	−0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چی جبشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه ») د زاړه – یا نوي درجی همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د تکمی < DRG> څخه لاس ته راځی یا د بیلګي په توګه < MODE >.

د ورکړشوي درجه ګڼ اوړون په لینده کچ د < <- DRG > سره سورت نیسي.
بیرته یا په څټ سړی داسی راځي- لکه چی لرل مو- د < INV> – تکمی سره.

بیلګی

60°	⟨DRG⟩	60(rad)
60	⟨DRG⟩	60(grad)
60°	⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨DRG →⟩	60°
60°	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	60°

دلته ګراد نښونه (gard) نوی درجه ده یعنی ګون(gon).

ځنی جشميري په دې برسيره نور زيات امکانات هم لري ، نتيجی يی په ګراد دقيقی، ثانيي اويا لسيز سيستم ورکړ شوي دي. بدلون بيا د تکمی <DMS-Dd> سره صورت نيسی:

26.75° 30°15′	⟨inv⟩ ⟨DMS − Dd⟩ ⟨DMS − Dd⟩	26°45′ 30.25°

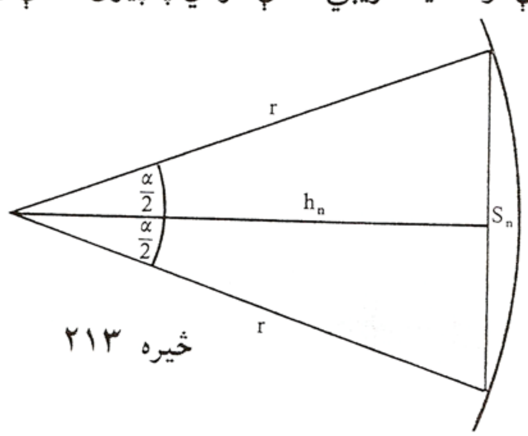
د " 30° 15" " ورکړه کيدی شي د جبشميري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جبشميری د لاس کتاب څخه ګټه واخستل شي (يادونه: زه پوهيږم چی داسی شيان موږ متآسفانه په خپل هيواد کي نه لرو ، خو په هر صورت يي ليکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پريښوولی)

پيلبيلګه: دلته دې S_n د يوه منظم n− ګوډي د اړخ اوږدوالی وي، چی په يوه ګردی کی چی وړانګه يی $r = 5$ cm ده، راګير دی.

الف) وښايي چی

$$S_n = 2r \,.\, \sin(180° : n)$$

ب) د يوه داسی n− ګوډي چاپيری U_n وشميری ، چی $n = 8;16;32;128$ وي، او په نزدې توګه يا تقريبي د دې ګردي چاپيری د دې وړانګي r سره وښايی .



خيره ۲۱۳

ب) په همدې ډول n– گوډی له هوارو A_n څخه په نزدې توگه یا تقریبي د
گردی ـــ هواره A ونبایي .
اوبی (حل : هر n– گوډی کیدی شي په n مساوي دریگوډیو توټه کړی شي.
د هغو د ځینتریکونج $\propto$ لپاره باور لري $\propto = 360° / n$. د جگی یا جگوالی h_c
د کنبلو سره په هر مساوي پښیز دریگوډي کي ولاړکونجیزې نیایی د ځنتریکونج
یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\propto}{2} = 360° / 2n = 180° / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n /2) / r = \sin\frac{\propto}{2} \Rightarrow S_n = 2r \cdot \sin\frac{\propto}{2} = 2r \cdot \sin(180° / n)$$

b) $U = n.S_n = 2r.n.\sin\ (180°/n) = 10n.\sin\ (180° / n)$
د ارزښتشمیرنو د غلطی مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که
په دغه همغه لړپیرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

180° ⟨STO⟩ ⟨ : ⟩ 8 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 8 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 30.614675
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 16 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 16 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 31.214452
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 32 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 32 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 31.365485
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 64 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 64 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 31.403312
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 128 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 128 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 31.412773

پ) د ډیرگوډي هواره د دریگوډیو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی
د هر دریگوډي هواره ده: $0,5.S_n.h_n$. د

$$h_n = r.\cos(180° / n)$$
او
$$S_n = 2r \cdot \sin (180°/ n)$$

له امله داسی دی

96

$$A = n \cdot 0{,}5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0{,}5 \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$$

له دې سره د نرې [illegible]

```
360° ⟨STO⟩ ⟨:⟩   8⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩   8⟨·⟩12.5⟨=⟩ 70.710678
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  16⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩  16⟨·⟩12.5⟨=⟩ 76.536686
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  32⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩  32⟨·⟩12.5⟨=⟩ 78.036129
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  64⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩  64⟨·⟩12.5⟨=⟩ 78.413712
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 128⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 128⟨·⟩12.5⟨=⟩ 78.508279
```

د یوه جشمیرې سره ، چې له یوې زخیرې زیاتی ولري ، لکه چی پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسیره نورې ثابتي هم زخیره کیدی شي» په یوه منظم پروګرامور ماشین سره کیدي شي چې د دا ډول شمیرنو لپاره د ګوډونو ګڼ څخه ت شو یا د ګوډونو ګڼ باند ې صرفنظر وشي .

د تریګونومتریکي بلواکو خویونه

دا چی کونجکچ په درجه کچ او هم په لینده کچ ورکول کیدی شي، کیدی شي چی یوه کونج بلواک تعریفېدیری یا ∝ او یا x وي. ددې لپاره چی د یوه بلواک خوي باندې ټینګار وکړو، باید په لاندې په لینده کچ تکیه وکړو.
د لاندې خویونو لمړی ډله یواځې له تعریفمساوات (د مخه راغلی) او د پیتاګوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي :

تعریف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرته کاتیت}} = \frac{\frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}}{\frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دي لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \iff \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسيره پر دي لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دي سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x \; ; \quad 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریگونومتریکي بلواکو کی هیله ده ، چی د پوتنځ لیکدود په پام کی ونیسی.
په لاندي پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

په لاندې کې gegeben ورکړې او gesucht غوښتونی یا پلټونی په مانا دي

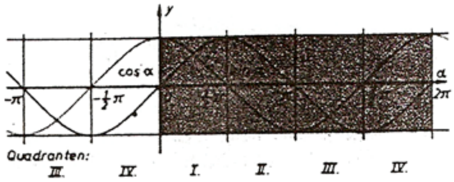
gegeben ورکړې / gesucht غوښتونې	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\sin x$	$\sin x$	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\tan x$	$\pm\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\dfrac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\tan x}$	$\cot x$

لکه چې د مخه مو په ګوته کړل، کیدی شي چې تریګونومتریکي بلواك د مختلفو ګونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواك ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

تعریف : تریګونومتریکي بلواك ټول پریودیکي یعني بیرته راګرځیدونکی دی، دا په دې مانا ، چې د بلواك ارزښتونه په منظمو واټنونو کی تکراریږي. په دې د ساین بلواك او د کوساین بلواك راګرځیدنه (یا ۳۶۰ درجی) لري، کوتنجنتبلواك راګرځیدنه (یا ۱۸۰ درجی (180°)) لري.

$$\left.\begin{aligned}\sin(x \pm 2k\pi) &= \sin x\\ \tan(x \pm k\pi) &= \tan x\end{aligned}\right\}\ k \in N$$

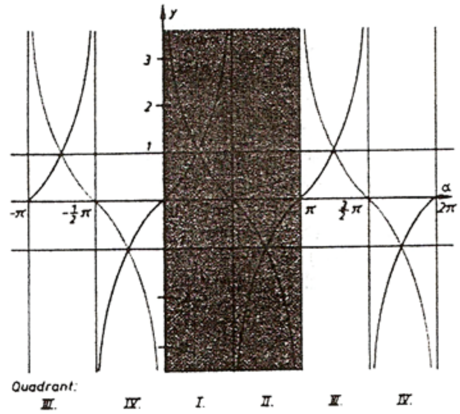
$$\left.\begin{aligned}\cos(x \pm 2k\pi) &= \cos x\\ \cot(x \pm k\pi) &= \cot x\end{aligned}\right\}\ k \in N$$



خیره ۲۱۴

د ساین - او کوساین فنکشن

پریود یائی راگرځیدنه



د تنجنت او کوتنجنت فنکشن پریود

بیلګي :

$\sin 50°$	$= \sin(50° + 360°)$	$= \sin(50° - 720°)$	$= 0{,}76604$	
$\cos -30°$	$= \cos(-30° - 360°)$	$= \cos(-30° + 1080°)$	$= 0{,}86603$	
$\tan 2{,}5$	$= \tan(2{,}5 - \pi)$	$= \tan(2{,}5 + 5\pi)$	$= -0{,}74702$	
$\cot 10$	$= \cot(10 + \pi)$	$= \cot(10 - \pi)$	$= 1{,}54235$	
$\sin 35°$	$= \sin(180° - 35°)$	$= -\sin(180° + 35°)$	$= -\sin(360° - 35°)$	$= 0{,}573576$
$\cos 35°$	$= -\cos 145°$	$= -\cos 215°$	$= \cos 325°$	$= 0{,}81952$
$\tan 0{,}6109$	$= -\tan 2{,}5307$	$= \tan 3{,}7525$	$= -\tan 5{,}6723$	$= 0{,}700208$
$\cot 0{,}6109$	$= -\cot 2{,}5307$	$= \cot 3{,}7525$	$= -\cot 5{,}6723$	$= 1{,}428042$

که د فنکشن ګراف ته په ځیر شو نو په دې برسیره په ټینګه روښانیږي :

100

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلګی:

	α	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$360° - \alpha$
	35°	145°	215°	325°
sin	0,573576	0,573576	– 0,573576	– 0,573576
cos	0,819152	– 0,819152	– 0,819152	0,819152
tan	0,700208	– 0,700208	0,700208	– 0,700208
cot	1,428148	– 1,428148	1,428148	– 1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یوائی د جبشمیرې یا کمپیوتر څخه کار اخستل کیږي ، هدفمند بولو، چی یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin x bzw. sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	–	0
cot x bzw. cot α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

د دغه جدول د هغه اجزاو په مانا دي او کېدای شي ژر یاد کړو.

له دې جدول څخه کېدی شي په خيال کی يا ګوماني لاس ته راوړی شو

sinx = cos (/2 -x) cos x = sin (/2 -x)
tan x = cot (/2 - x) cot x = tan (/2 -x)

دا ګومان کېدی شي په ولاړکونجيز درېګوډي کي د تعريف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

sin = a / c او cos ß = a / c

د – ß = 90° له امله لاس ته راځي :

sin = cos (90° -)

په ورته توګه نور ې غوښتني هم لاس
ته راتلی شي.

دا له څيرو څخه هم لاس ته راوړل کېدی شي، څکه د ساين او کوساين بلواکو يا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو ګرافونه د 2/ = x کرښې ته يو بل سره محورسيومتري څغلي :

له څيرو او بيلګو څخه په دې برسيره لاس ته راځي:

تعريف: د کوساين بلواک جفت دی ، لرو:

cos (x) = cos (-x)

ساين – ، تنجنت – او کوتنجنت بلواک ناجفت دي» د دوي لپاره باور لري:

sin (x) = -sin(-x), tan(x) = -tan(-x) ; cot (x) = -cot(-x)

يادونه : په دې نلواکو کي کېدی شي چې x له نوکانو دباندې هم وي:

102

بیلگی:

$\sin 60° = -\sin(-60°) = 0,86603$

$\cos 0,75 = \cos(-0,75) = -0,70711$

$\tan 150° = -\tan(-150°) = -0,57735$

$\cot 1,3 = -\cot(-1,3) = o,27762$

د زیاتون قضیي یا تیورمونه

دا چي کونجبلواك لايني نه دي(د فنکشنگراف کرښه نه ده،بلکه کږه ده) ، نو ډېل تعریفېدیږي پورې ساده ډېل بلواك ارزښت اړه نه لري.
لکه

$\sin 30° = 0,5 \quad \sin 90° = 1 \quad \sin 180° = 0$

د داسی په نامه زیاتونمسئلی په مرسته ممکن کیږي، چی د بلواك ارزښت د کونج په دوه برابرولو یا په همدې ډول د دوه کونجونو پو په بل زیاتولو د یوگونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابي کړی شو.

بیلگی :

1 . $\sin(x+y) = \sin x . \cos y + \cos x . \sin y$

1' . $\sin(x-y) = \sin x . \cos y - \cos x . \sin y$

2 . $\cos(x+y) \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

2 '. $\text{cis}(x-y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$

3 . $\sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

4 . $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

103

5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

7. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 - \cos x)}$

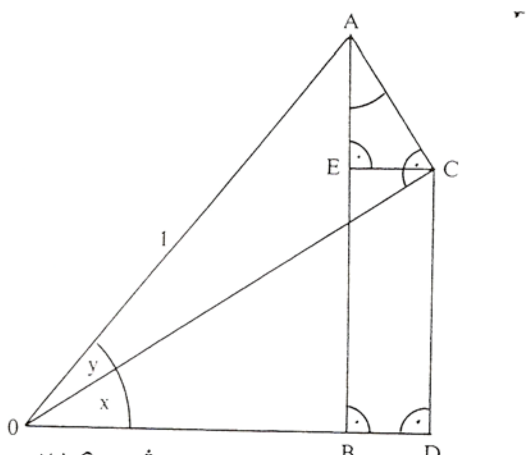
8. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 + \cos x)}$

9. $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

9′. $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

10. $\cot(x+y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

10′. $\cot(x-y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$ mit $\cot x \neq \cot y$



خیره ۲۱۶

1. und **2.**:

$|OA| = 1$

$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y$

$|AB| = \sin(x+y); \quad |OB| = \cos(x+y)$

$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$

$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$

104

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

برسېره پر دې لرو :

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$
$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د ځای په ځای کولو څخه ښوونه په لاس راځي

$$\sin(x + y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1′. 2′.:

3. 4.: $x = y$. ځای پر ځای کړه

5.: Setze $z + t = x;\ z - t = y \Rightarrow z = \frac{x+y}{2};\ t = \frac{x-y}{2}$ کېږده

$\sin x = \sin(z + t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$ پس لرو

$$= \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$\sin y = \sin(z - t) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ همداراز

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

6. ښوونه په ورته توګه څخه راځي

7.: $x = y = z/2$ کېږده

$$\Rightarrow \cos(x + y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2\frac{z}{2} - \cos z \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$$

د ویشنې نیوونې له لارې ښوونه لرو

8.: $(*)\ \sin^2\frac{z}{2}$ durch $1 - \cos^2\frac{z}{2}$. په (*) کې ولیکه یا لیکو ده

9-10: د ا ا پرته د 1 او 2 او تنجنت د تعریف څخه لاس ته راځي

بلواك يا فنكشن $y = a . \sin(bx+c) +d$

لكه چي په پيل كي مو وويل په طبيعت او تخنيك كي ډيرې پيښي شته دي چي تل بيرته راګرځي يا لنډ: راګرځي، يعني پريوديكي دي. د دې د تشريح لپاره په خپل سوچه يا خالصه بڼه تل د ساين بلواك بسيا نه كوي.
دا زيات علتونه لري : لمړي د ساينبلواك د ١- او ١ ترمنځ ارزښت نيسي، له بلي لور داواقعي د كونج په واك كي نه دي بلكه د وخت په واك كي دي د يوې راګرځيدنی سره، چي دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانيولكيدی. له دې امله د ساين بلواك د دې كارونو د روښانوولو لپاره بايد موډيفيځير شي يا يی بڼه واوړي. دا بڼه اوړون او د هغی تاثير په لاندې ليدنه كی راټول شويدي، ګراف يی ورزياتی ځيروني لپاره دی. په ورته ډول د نورو كونجبلواكو لپاره باور لري په عمل كي مګر يواځي د ساينبلواك (په همدې توګه د هغي مخامخ د كوساين بلواك چي په $\pi/2$ سره راكښل شوی وي) د مانا ډك دي. (لوستل: له ښي لور څخه)

بيلګی	دكارونی ساحه	تاثير	بلواك
څیره ۲۱۷	ټولی تلبيرته راګرځيدونی تعامولونه		$y = \sin (x)$
څیره ۲۱۸	د یوه مساوي او برل ښپیا لونډ یو په بل پرلوتل	د y- لور پر اوږدو راکښنه	$y = \sin(x) +d$

څېره ۲۱۹	په بدل بریښنا جریان کې د بریښنا او سیالونو تخنیکي دوبسالونه	د فاز تغیر یا ځای بدلون	y = sin(x+c)
څېره ۲۲۰	دیوه پندل خوځېدنه	د امپلیټود د ځای بدلون فاکتور -1 د $180°$ فاز ځای بدلون دی	y = a . sin(x)
د څېره ۲۲۱	دیو بنسټیزې څېرې تغیرونه په یوه وخت د ادوار په اړه رهنمایي کوي لکه په د موزیک الو په اوازونو کې	د پریود تغیر یا بدلون $b>1$ سرعت $0<b<1$ په کرار کېدل $b<0$ په شا ګرځېدنه کم مخور دی	y = sin(bx)
څېره ۲۲۲	کمپلکس پریودیک جریانونو عمل	عمومي حالت	y = a . sin(bx+c)+d

تمرینونه

۱ – د لاندې ورکړې سره شېره بله کړې

$4°6' = 4{,}1°$; $10°, 5' = 10°30$

a) $6{,}75° =$ b = $120{,}48° =$ c) $-75{,}65° =$

d) $52°16' =$ e) $97°13' =$ f) $44°44'\,44'' =$

۲ – په درجه کچ ي وليکي

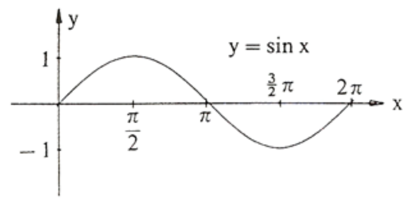
a) $x = \pi/3$, b) $x = -\pi/4$, c) $x\,(2/3)\pi$

d) $x = 4$ e) $x = -3$ f) $x = 4{,}7$

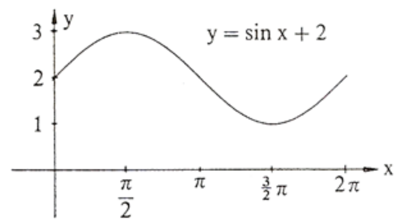
۳ – په لينده کچ يی وليکي

a) $15°$ b) $-60°$ c) $540°$ d) $20°15'$ e) $15{,}75°$

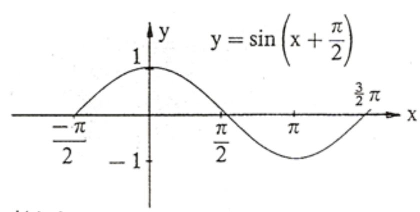
107



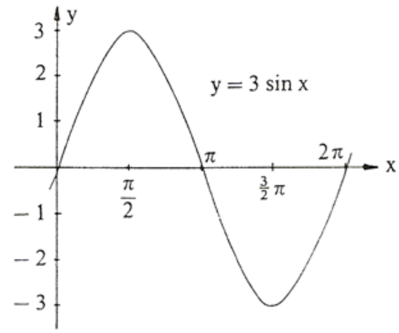
شیره ۲۱۷



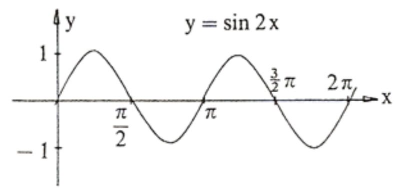
شیره ۲۱۸



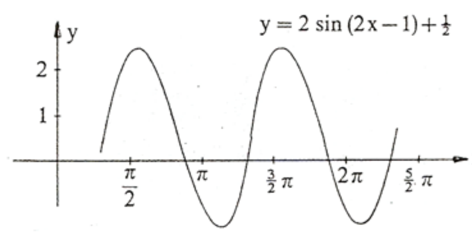
شیره ۲۱۹



شیره ۲۲۰



شیره ۲۲۱



شیره ۲۲۲

د دې بلواك ګراف د ساين كرېږ $y = \sin x$ څخه لكه چې ګورو لاس ته راځي:

١ – د ارزښت دوه ځله كيدل

٢ – د نيمې راګرځيد اوږدوالي باندې پړسيدنه

٣ – په يوه يوون د ښي لور ته راكښنه

٤ – په 1 / 2 پورته لورته %100 راكښنه

۴ – وټاکئ

a) sin20° b) sin(-30°) c) sin 172° d) din1°4'

e) cos 35° f) cos 380° g) cos(-27°) h) cos47,9°

i) tan 11° k) tan (-15°) l) tan 33,33° m) tan 13°13'

n) cot 870° o) cot (-11°) p) cot 14°14'

q) cot (-2°2')

r) $\sin\alpha = 0{,}8$ s) $\cos\alpha = 0{,}9$ t) $\tan\alpha = 2{,}5$

u) $\cot\alpha = -1$ v) $\sin\varphi = 0{,}3$ w) $\cos\varphi = -0{,}13$

x) $\tan\varphi = -4$ y) $\cot\varphi = 0{,}3$ z) $\arcsin(x) = \pi/2$

۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کې لرو $\gamma = 90°$ او په دې برسیره :

a) a = 7 cm; b = 6cm

b) a = 16cm; = 66°45'

c) c = 5cm; a = 3cm

پاتې توټې وشمیرئ

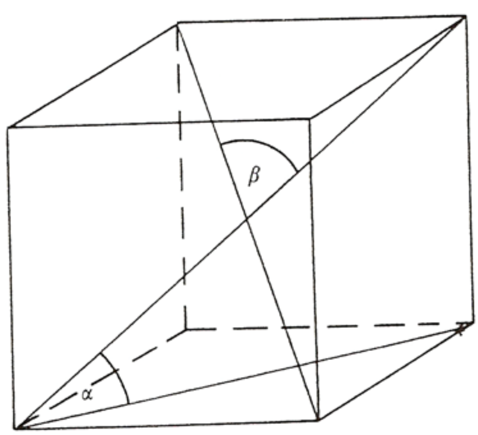
۶ – په مساوي پښیز دریګوډي کې (a = پښه ده) دی

a) a= 10cm ; α =80°40'

b) a= 12 cm ; h = 8cm

c) ß = 40°; a = 7cm

پاتې توټې وشمیرئ



شیره ۲۲۳

۷ – د یوه پڅکونجیز ($90° < \alpha$) دریګوډي لپاره ساین وشمیرئ

۸ الف) کوساین د یوه پڅ کونجیز دریګوډي لپاره وشمیرئ ($\alpha > 90°$)

ب) په يوه ولاړکونجيز دريګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟

۹ – په يوه مکعب کی د يوه هوا نيمي او بنستهوارې ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

څيره .د دواړو هوا يا فضا يا بدن نيميو ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

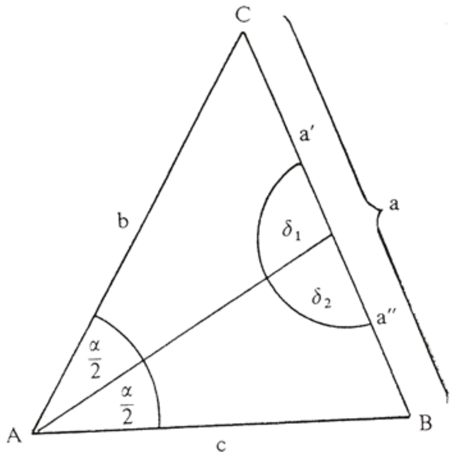
۱۰ – د دوه ګرديو وړانګی

$r_1 = 5$ cm , $r_2 = 4$ cm

دي او همداسی د منځټکو واټن $|M_1M_2| = 8cm$ ورکړ شوی دی.

دد دواړو ګرديو د تماس
مماسونو غوڅکونجي وټاکی
او د کړې غوڅوني اوږدوالی .

۱۱ – په يوه دريګوډي کی د يوه
کونجنيمی مخامخ اړخ په داسي
ځان نيونه يا تناسب غوڅوي لکه
په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د
ساين جملی په مرسته حل
(اوبی) کړی(څيره۲۲۴).



څيره ۲۲۴

۱۲ – که يوه بار ځاي ته،
چي ۱،۵۰ متره جګ دی،
يوه زينه ورجګه شي
ميلانکونج ے دې زيات ترزيات 33° وي، زينه دې څومره لويه وي؟

۱۳ – الف)د يوې پورته ختلی کوڅي جګوالي توپيردې څومره وي، که دا
کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جګه وي؟

ب) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جګوالي توپير څومره دی ؟

پ) د يوه زوړندې پټيلار، چی ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کی څومره
لوي دی ، که دا د جګوالی توپير ۵۰۰ متره ولري؟

۱۴ – یو د اوبو بیلر (کتله = ۱۰۰ کیلوګرامه) په یوه دړه پورته خېژول کیږي، چې میلانکونج α = 25° لري. د وزنزور په زوړندزور تختی سره غبرګ او نورمال یعنی ولاړ زور (د فشارزور) ولاړ تجزیه یا ټوټه کیږي، دواړه زوره څومره لوي دی ؟ (۱ کیلو ګرام = ۹ ، ۸۱ نیوټن 1 kg = 9,81N).

۱۵ – یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی ۵۳ متره اوږده ده، درول کیږي. درسیو میلانکونج 60° دی په پښه باندې په کوم جګوالي باید رسی وړلی شي ؟

۱۶ – د یوې ۵۳ متره جګي ونی سیوری ۵ ، ۱۲ متره اوږد دی. په څمکه لمروړانګي په کوم جګوالی یوبل سره مخامخ کیږي.؟

۱۷ – د یوه ۵ متره جګ کتونټکي (لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چی جګیدونکوج یی α = 18,5° او پښیټکی یی ß=8° لوید کونج ، برج څومره جګ دی ؟ د لیدټکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی ؟

۱۸ – الف) د پیزا (Pisa) کوږ برج ۴۷ متره جګ دی، او څوکه یی د پښی ټکي څخه ۵۰ ،۴ متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی ؟

ب) د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جګ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په څمکي ټکي (یعنی د سترګي جګوالی د برج بنسټټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟

پ) د ۵، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي

– که جګوالی یی ۱۶۰ متره وي؟

– که جګوالی یي ۱۳۷ متره وي ؟

ت) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې

– د بل برج څوکه ښکاریږي چی جګوالی یي ۱۴۳ متره وي ؟

–د پاریس د ایفل برج ښکاریږي چی جګوالی یي ۳۰۰ متره دی ؟

۱۹ – د ښیپپس اهرام(CHeopspyramide) ۱۳۷ متره جګوالی لري او د بنسټ د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري

الف) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟

ب) د څنګهوارې دریواړه دنننی کونجونه څومره لوي دي؟

۲۰ – یو ژوری یا قبر –۸ ، ۱ متره ژور دی، بنسټسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی

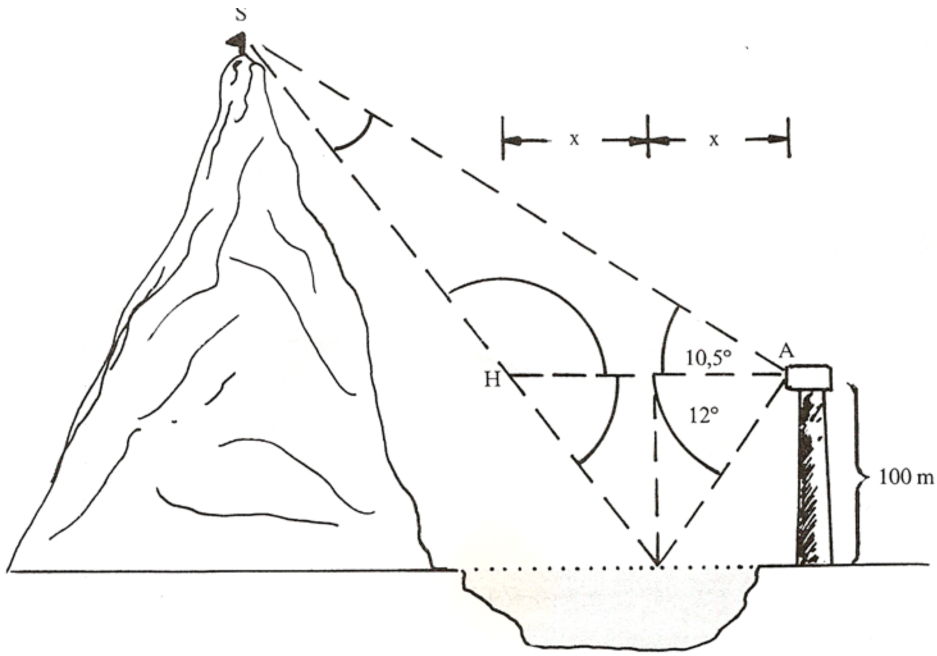
الف) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی؟

ب) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جګوالی یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟

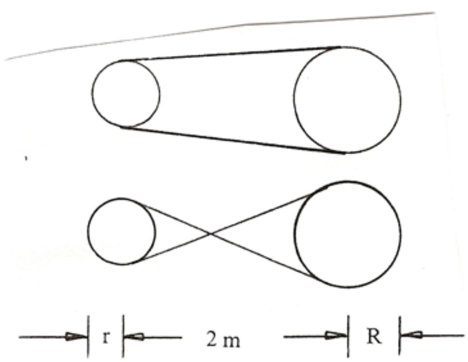
۲۱ – یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جګوالی لري د بحیرې لور ته 14° میلان لري، د دننه لور ته 28° میلان لري. د ډنډ بنسټ څومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده؟

۲۲ – د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو ښه لید د ماترهورن (ماترنښکر یا د ماترن د غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی دی) اچول کیږي که دا د یوه لیدټکي څخه چی ۱۰۰ متره جګ دی د ډنډ په لور ښکته وکتل شي، نو د غره د څوکي هندارونه د 12° پریوتکونج لاندې لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج 11° لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ باندې د ماترنښکر څوکه څومره جګه پروته ده؟

څیره



خيره ۲۲۵



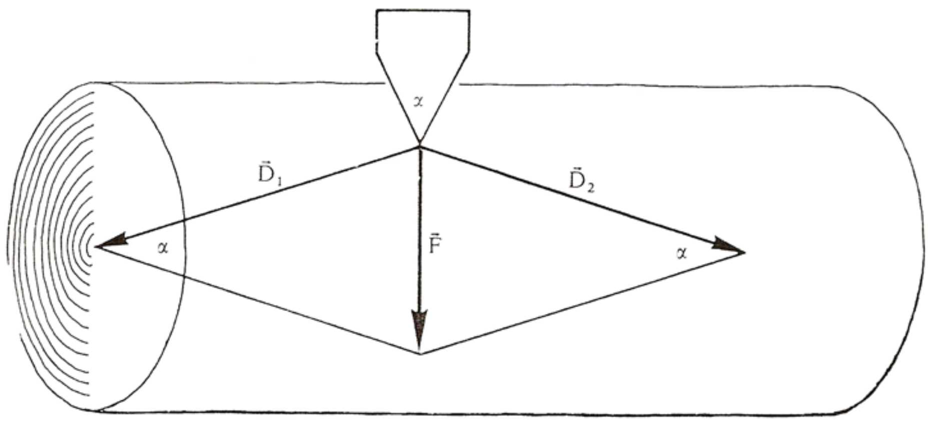
خيره ۲۲۶

۲۳ – الف) يوه د کشولو کړۍ، چي په دوه دکښولو چيترو باندې راتاو ده، څومره اوږده ده، که لاندې اندازې ولري
$r = 22$ cm , $R = 35$ cm ,
$|M_1M_2| = 2m$?

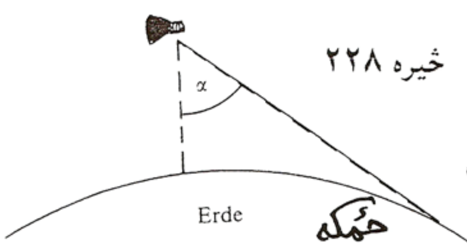
ب) دا کړۍ به څومره اوږدې وي که د اتيران په څير له څيتروګانو يا تميکليو راګی څېدلی وي ؟

۲۴ الف) د ونی په سته یو کایل)موړی) په ښتهك د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D ځومره لوي دي، کوم چی د ستهی درځونه ، که د کایل یا تبرګي کونج $\alpha = 6°$ وي. (خیره ۱۹۴)؟

ب) په کومکایلکونج یا تبرګیکونج لرو: $|D|=|F|$ ؟



خیره ۲۲۷

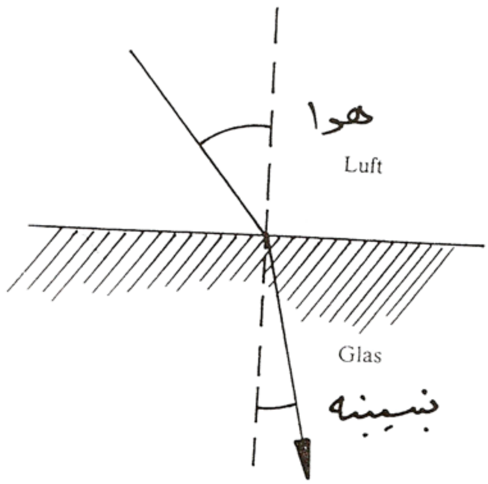


خیره ۲۲۸

۲۵ – د یوه الوتماشین څخه ځمکه د یوه α کونج لاندې لیدل کیږي (خیره) دا الوتماشین ځومره جګ الوزي ؟ (د ځمکی وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره)

۲۶ – یو ګادی د $v_{\alpha} = 120km/h$ سرعت سره روان دی، نو د باران څاڅکی په پتهلی د تلنلور باندې په $= 115°$ کونج

114



خیره ۲۲۹

د چیترو (مطلب د ګاډې د اوسپنې
ټیر یا ګاډیل دی) مخامخ ځغلي.
له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو
د لویدلو سرعت v_g وټاکی ؟

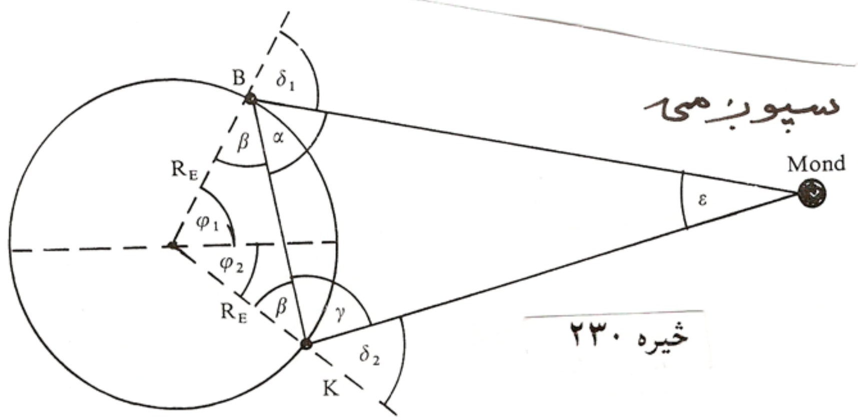
۲۷ – که د لمروړانګه په دوه مختلفو
طبقو ولوېږي، نو خپلی لور ته تغیر
یا بدلون ورکوي. د سنیلیوس Snellius
د ماتقاعدې له مخی کیدی شي چی د
ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون
وايي، چی پروتوړانګه ، ماتوړانګه او
ولاړکرښه یا عمود په بیلیدونکی هوارې په یوه هواره پراته دي او برسیره پر
دې لاندې اړیکي باور لري یا صدق کوي:

$$\sin \alpha \ / \ \sin \beta = n$$

که د رڼاوړانګه په یوه ښیښه (اوبو) پریوزي، نو $n = 1{,}5$ (1,33) دی وښایي،
چی ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

؟ 10,5°, 15,8°, 27,3° , 41,2°,67,6°,, 72,4°, 81,9°

۲۸ – په ۱۸ ا–مه میلادي پیړی کی د سپوږمی لریوالی تریګومتریکي وټاکل
شو. په برلین کی (جغرافیوي اوږدوالی $\varphi_1 = 52{,}52°$) او لکه د ښو هیلو
په کونج کی ($\varphi_2 = -33{,}93°$)، کوم چی په همغه اوږدګراد پراته دي، د
سپوږمی سره په همغه وخت کی تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل:
. $\delta_2 = 55{,}72°$ او $\delta_1 = 32{,}08°$
وشمیری $|KM|$, ß , $|BK|$ او له دې څخه d_{EM} .



شیره ۲۳۰

۲۹ – لړځيدنی Schwingungen تل د وخت په اړه شميرل کيږي يعني د وخت t ترواك لاندې دي. دا د بلواك $y = a . (\sin(2\pi/T)) .t + k$ له لارې ورکړ شوي. دلته $(2\pi/T)\,t = x$ هغه کونج دی ، کوم چې په T وخت کې وهلکيږي. $1/T = f$ د يوه ځرخون پريود يا راګرځيدنی وخت په ګوته کوي او د لړځيدنی دوام بلل کيږي» f فرکونځ frequenz بلل کيږي.

۴ - لوګاریتم یا لوګاریتموس Logarithmus

په دې برخه کې د لوکاریتم کلمه ترڅیرنې لاندې نیسو او د لوګاریتم د قوانینود استعمال اسانتیاوې، چې په کره یا په کلکه یې په نیونو (فرضیو) پاملرنه شوې وې څیړو۰

۵ ۰ ۱ د لوګاریتم کلمه

موږ په دې برخه کې لوګاریتم تر څیرنې لاندې نیسو، د لوګاریتم د قوانینو اسانتیاوې څیړو ، چې په نیونو یا فرضیو کې باید پوره پاملرنه شوې وې ۰د
لوګاریتم $c = \log_b a$ پیژند لپاره د یوه زیاتیز - یا مثبت عدد a یوه زیاتیز - یا مثبت عدد b ته چې $b \neq 1$ او د لوګاریتم بنسټ بلل کیږي له لاندې برابرون یا مساوات څخه مخ ته ځو د په خوښه c لپاره

$$b^{c} = a \,; a > 0; b > 0; b \neq 1 \qquad (5,1)$$

که a او b له مخه ورکړ شوي وي، نو د برخی ٤ سره یواځنی ټاکلی دی۰ که a او b له مخه ورکړشوي وي، نودپورتنیو نیونو سره یواځنی ریيل ګڼې c شته دی، چې برابرون(4,1) پوره کوي۰ دې ته د a لوګاریتم وایود b پر بنسټ:

پیژند ۵ ۰ ۱:

د ریلل مثبت ګڼې a لوګاریتم لاندې، چې له یوه سره نابرابر بنسټ bولري، هغه ریلل ګڼې c پوهیږو , له کوم سره، چې bد هغه په توان یا پوتنځ کړو او ګڼې a ترې لاس ته راشي۰ لکه (5,1)

د دې لپاره لیکو:

$$c = \log_b a; a > 0; b > 0; b \neq 1, ...(5,2)$$

(5,1) او (۲ ۰ ۵) یو ارزښت لري د دې لپاره، چې د لوګاریتم قوانین له (5,2) سره سم لاس ته راوړو، نو د(5,1) ته بیرته ورګرځو۰ دا به په لاندې بیلګه کې روښانه شي،په کوم کې چې له a,b,c ځخه تل دوه ګڼونه ورکړ شوي دي

بیلګه ۵ ۰ ۱

۵ ۰ ۱ الف : له $2^x = 16$ لرو x=4 ، ځکه، چې $16 = 2^4$

ب له $3^x = \frac{1}{9}$ څخه لرو x=-2 ، ځکه چې $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9 = \frac{1}{9}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۲ الف: د $2 = \log_x 36$ x²=36 سره یو ارزښت لري، نو لرو x=6

ب : د $-6 = \log_x \frac{1}{36}$ $x^{-6} = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$ سره یو ارزښت لري،

نو لرو x = 2

۵ ۰ ۱ ۰ ۳ الف : د $x = \log_5 125$ $5^x = 125 = 5^3$ سره، یوارزښت لري،

نو x = 3

ب: د $x = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{16})$ $(\frac{1}{2})^x = 1/16 = (1/2)^4$

سره یو ارزښت لري، نو لرو x= 4

۳ ۰ ۱ ٤ الف د $5 = \log_3 x$ $3^5 = x$ سره یو ارزښت لري، نو x=243

118

ب : $-5=\log_2 x$ د $x = 2^{-5}$ سره يو ارزښت لري، نو لرو $x=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$

۵ ، ۱ ، ۵ الف $2=\log_x(-6)$ تعريف نه دی يا پيژند نه لري۰

ب : $x=\log_{-5}125$ پيژند نه لري يا تعريف نه دی

پ: $\log_1 x$ پيژند يا تعريف نه دی

له (5,1) او(5,2) څخه لاس ته راځي

$$a=b^{\log a},...(5,3)$$
$$\log_b 1=0,\log_b b=1,.............................(5,4)$$

د ځانګړي بنسټ لپاره لاندې سومبول کارولکيږي

$b=e=2,71828 \Leftrightarrow b=10$

$$\log_{10} a=\log a,\log_e a=\ln a,.................(5,5)$$

د lga لوګاريم ته لسيز لوګاريتم وايي او lna ته پيدايينتي يا طبيعي لوګاريتم وايي(e وروسته څيرو) زيات وخت د لشميز لوګاريتم لپره داسې هم ليکو:

c= loga (5,6)

که سومبولlog څو واره رامنځ ته شي، نو په پام کې دې وي، چې په خوښه، مګر همغه بنسټ بايد وکارول شي۰

۵ ، ۲ د لوګاريتم قوانين

د لوګاریتم د پیژند سره سم د (5,1) او(5,2) له مخې کیدی شي د پوتنځ د قوانینو(5,3) تر(5,7) په مرسته لاندې لوګاریتم قوانین رابیل کړای شو، کوم چې په خوښه مګر همغه لوګاریتم بنسټ b |= 0 ، b>0 او د زیاتیز(مثبت) x> 0 , y > 0 لپاره باور لري

$$\log(x.y) = \log x + \log y, ...(5,7)$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - loy, ...(5,8)$$

$$\log x^a = a \log x, a \in R, ...(5,9)$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log, n = 1, 2, ..., ...(5,10$$

د پوتنځ قوانینو له مخې د دې فرمولونو راوستل یو د وړاندیز وړ د لوګاریتم ژورې څیړنې لپاره تمرین ښایي

د بیلګې په توګه له (۷ ، ۵) همداسې

$$\log_b(x.y) = \log_b x + \log_b y, ...(5,11)$$

څخه په لاندې ډول او له (5,2)،(5,1) څخه لرو

$$c_1 = \log \quad x, c_2 = \log_b y, c = \log_b(x + y), ...(5,12)$$

د لاندې سره یو ارزښت لري

$$b^{c_1} = x, b^{c_2} = y, b^c = x.y, ...(5,13)$$

له(5,13) او د پوتنځ قانون(4, 2) پر بنسټ لرو :

$$b^c = x.y = b^{c_1}.b^{c_2} = b, \Rightarrow c = c_1 + c_2, ...(5,14)$$

او له (5,11) همداسې د(5,7) ښوونه د (5,12) له امله د لوګاریتم د (5,7) تر(5,10)

120

قوانینو کیدی شي د پیچلي لوګاریتم له افادې څخه د لوګاریتم ساده بنسټیزې افادې ته بیرته راوګرځو اوپه څټ۰

بیلګه ۵ ۰ ۲

$$\log \frac{2\sqrt{a+b}\,a^3 b^2}{\sqrt[3]{c}\,(a+c)^2}$$

$$= \log 2 + \frac{1}{2}\log(a+b) + 3\log a + 2\log b - \frac{1}{3}\log c - 2\log(a+c)$$

بیلګه ۵ ۰ ۳

$$\log(a+b) + 2\log(a-b) - \frac{1}{2}\log(a^2-b^2)$$

$$= \log\frac{(a+b)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}} = \log\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}} = \log[(a-b)\sqrt{a^2-b^2}]$$

اوس باید وښایو، چې تر کومو شرایطو لاندې دا اړیکې باور لري۰

په بیلګه ۵ ۰ ۲ کې په کینې اړخ کې لوګاریتم ځاي لري، چې د ټولوa,b,c تعریف دی او لاندې برابرون پوره کوي یا ډکوي:

وي دې$a+b>0$ (د دې لپاره ، چې ریښه تعریف وي او صفر نه شي، ځکه، چې بیا لوګاریتم اوبی یا حل نه لري۰

وي دې$c > 0$ (د دې لپاره چې ریښه تعریف او ماتلاندې صفر نه شي)

وي دې $a+b \neq 0$ (د دې لپاره، چې لوګاریتم تعریف وي)

وي دې $b \neq 0, a > 0$ (د دې لپاره، لوګاریتم تعریف وي)

د کینې اړخ لوګاریتم په ځانګړي ډول د $a = 2$. $b = -1$, $c = 1$ لپاره تعریف دی۰ په ښي اړخ کې ولاړ برابرون شکلبدلون یا څیره بدلون ریښتونی کیدی نه شي، ځکه

121

چېLog بې ځایه دی٠ د دې لپاره، چې د څیرې بدلون ریښتونوالی ممکن شي، باید د $b \neq 0$ پر ځاي په ټینګه یا کره,b>0 وغوښتل شي٠

په بیلګه٥ ٠ ٣ کې کېنه خوا یواځې هلتهموخه وره ده، چې وي:

a+b>0, a-b>0

نو بیا0 <(a+b)(a-b) = a^2-b^2 او په دې بیلګ کې رامنځ ته شوي ټول لوګاریتمونه هم تعریف دي٠ دا اړیکې د ټولو a ، bلپاره هم باور لري،د کومو لپاره چېپورته نابرابرون ډک وي٠ دا کیدی شيb < a , a > - b له امله هم و|a >|b ته راغونډ شي٠

دې ته دې هم ګوته نیولې وي، چې لوګاریتم په یوه بنسټ b یوه بل لوګاریتم یوه په خوښه بل بنسټd ته د شمیراوړون د شمیرنې اړول کیدی شي
$$(b > 0, b \neq 1, d > 0, d \neq 1, a > 0)$$

د تیرله مخې باور لري $a = b^{\log_b a}$

د دې برابرون لوګاریتم نیول و بنسټd ته لرو:

$$\log_d a = \log_d b^{\log_b a} = (\log_b a)(\log_d b), \ldots\ldots\ldots\ldots(5,15)$$

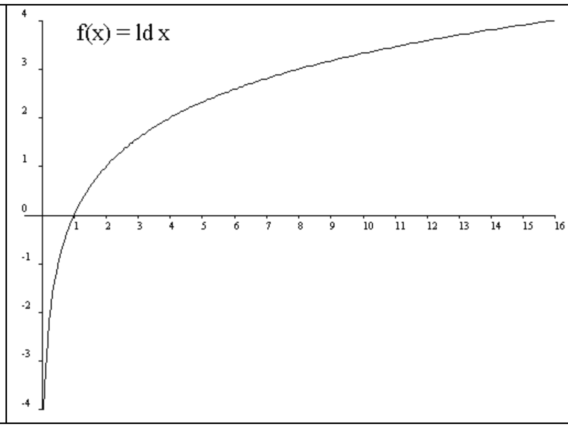
د لسیز لوګاریتم اړول په پیدایښتي یا طبیعي لوګاریتم او په څټ لپاره لیکوb=10, d = e همداسې b = e , d = 10 او لاس ته راځي :

Lga = (lge)(lna); ....(16)

Lna=(ln10)(lga) = 2,30429lga;......(17)

$$\lg a = (\lg e)(\ln a), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,16)$$
$$\ln a(\ln 10)(\lg a) = 2,30429 \lg a, \ldots\ldots\ldots\ldots(5,17)$$

122 سرلیک

	د لوگاریتم فنکشن یا بلواک او دیاگرام یې

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_b b^x = x$$

تکرار د نورو تورو سره

د یوه ځل لوگاریتم

$$\log_b (n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$$

$$\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m$$

د پوتنځ لوگاریتم

$$\log_b n^m = m \cdot \log_b n$$

د ریښي لوگاریتم

123 سرلیک

$$\log_b \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_b n$$

د لوګاریتم یو په بل بدلیدل

$$\log_b n = \log_b d \cdot \log_d n$$

د کوما یا لسمیزمات نخښۀ وروسته بینارځایونه ó او لسمیزسیستم

	binär	dezimal
2^{-1}	0,1	0,5
2^{-2}	0,01	0,25
2^{-3}	0,001	0,125
2^{-4}	0,0001	0,062.5
2^{-5}	0,0000.1	0,031.25
2^{-6}	0,0000.01	0,015.625
2^{-7}	0,0000.001	0,007.812.5
2^{-8}	0,0000.0001	0,003.906.25
2^{-9}	0,0000.0000.1	0,001.953.125

۳ . ۵ ټولګه

لوګاریمتم د اکسپوننشل فنکشن یا بلواک په څېر بلواک دئ

$x = \log_b n \iff b^x = n$

د $a,b,x,y,d, > 0$ رييل ګڼونو او $a, b, d \neq 1$ لپاره باور لري:

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a, b^{\log_b a} = a, \log_b 1 = 0, \log_b b = 1, b \neq 1$$

$$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a, e = 2,71828.....$$

$$\log(x.y) = lox + \log y, \log \frac{x}{y} = lodx - \log y,$$

$$\log x^{\alpha} = \alpha, \alpha \in R, \log \sqrt[n]{x} \frac{1}{n} \log x, n = 1,2,3,....$$

$$\log_b a = (lod_b d)(.(\log_d a),$$

$$\lg a = (\lg e).(\ln a) = 0,43429 \ln a, \ln a = (\ln 10).(\lg a) = 2,30259 \lg a$$

۵ . ۴ – تمرينونه

۱ . د د لوګاريتم تعريف

دلوګاريتم تعرف وکاروئ يا استعمالکړئ او x وټاکئ.

1.1.	a) $\log_7 49 = x$	b) $\log_3 1 = x$	c) $\log_5 \sqrt[6]{25} = x$	d) $\log_{0,5} \frac{1}{32} = x$
1.2.	a) $\lg \frac{1}{10} = x$	b) $\lg 10^{-\frac{1}{3}} = x$	c) $\lg \sqrt[3]{100} = x$	d) $\lg \sqrt{\frac{1}{10}} = x$
1.3.	a) $\log_x 8 = 3$	b) $\log_x 25 = 2$	c) $\log_x 243 = 5$	d) $\log_x 1024 = 10$
1.4.	a) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$	b) $\log_x \frac{1}{5} = -1$	c) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$	d) $\log_x \frac{1}{32} = -5$
1.5.	a) $4^x = 64$	b) $64^x = 64$	c) $9^x = 3$	d) $8^x = 4$
1.6.	a) $2^x = \frac{1}{8}$	b) $3^x = \frac{1}{27}$	c) $5^x = 0,04$	d) $10^x = 0,0001$
1.7.	a) $\lg x = 3$	b) $\lg x = -2$	c) $\log_2 x = 6$	d) $\log_{0,5} x = 4$
1.8.	a) $\ln x = 2$	b) $\ln x = \frac{1}{2}$	c) $\ln x = -1$	d) $\ln x = 0$

۲ . د لوګاريتم قوانينو استعمال

دلوګاريتم قوانيناستعمال کړئ دو د a,b,c,d,m,n باور لرلو ورشو کره وټاکئ.

125

2.1. a) $\lg 2^4$ b) $\lg\left(\frac{1}{2}\right)^3$ c) $\lg\sqrt{10}$ d) $\lg\sqrt{\frac{1}{100}}$

2.2. a) $\ln\left(\sqrt{e}\right)^3$ b) $\ln\sqrt{e^{3(\ln e^2+\ln e^6)}}$ c) $\ln\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$ d) $\ln\sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$

2.3. a) $\lg\sqrt[7]{a^5}$ b) $\lg\frac{a^2b^3}{c}$ c) $\lg\sqrt[3]{\frac{ac^2}{bd}}$ d) $\lg\frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a^5b^3}}$

2.4. a) $\lg(a^4-b^4)$ b) $\lg(a^2+b^2)^2$ c) $\lg\frac{(a^2-b^2)^2}{a^4-b^4}$ d) $\lg\frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}$

2.5. a) $\log\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ c) $\ln\frac{\sqrt{a}\cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c}\cdot d^{-3}}$

b) $\lg\sqrt[n+1]{a^n\cdot\sqrt[m]{b^{-1}}}$ d) $\log 2\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{a^2b\cdot\sqrt[4]{ac^2}}}$

2.6. a) $\frac{1}{3}\log(a+b)+\frac{1}{3}\log(a-b)^{-1}$

b) $\lg a+n\lg(a+b)+n\lg(a-b)$

c) $\lg a-\frac{1}{2}\lg b+\frac{4}{3}\lg c$

d) $\frac{1}{3}\lg(a^2-b^2)-\frac{1}{2}\lg(a-b)-\frac{1}{2}\lg(a+b)$

2.7. a) $\frac{1}{3}\lg a+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\lg(a+b)+\frac{1}{2}\lg(a-b)-\lg a-\lg b\right\}$

b) $\frac{1}{2}\lg(a^2+b^2)-\frac{1}{3}\{\lg(a-b)+\lg(a+b)\}$

c) $\frac{1}{3}(\lg a+3\lg b)-\frac{1}{2}(4\lg c-2\lg d)$

d) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{b-\sqrt{b^2-a^2}}+\ln\sqrt{a}$

۳ . د لوګاریتم بنسټیز فرمولونو استعمال.

x وشمیرئ.

126

3.1. a) $x = \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$ c) $x = 3 \cdot 10^{-2\lg 3}$

b) $x = 2 \cdot 10^{2\lg 2}$ d) $x = \left(100^{\frac{1}{2}\lg 49}\right)^{\frac{1}{2}}$

3.2. a) $x = \sqrt{10^{2+\lg 9}}$ c) $x = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\lg 2 + \lg 32)}}$

b) $x = \sqrt[3]{10^{4-\frac{1}{2}\lg 100}}$ d) $x = \sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}}$

3.3. a) $x = \ln \frac{7{,}63}{\sqrt{e^3}}$ c) $x = \left\{\left(\sqrt[3]{e}\right)^2\right\}^{\ln 8}$

b) $x = \ln \frac{0{,}23}{2e^2}$ d) $x = \left(\sqrt{e}\right)^{3\ln 5}$

۴ الف -لوګاریتم او د لوګاریم قوانین

د لوګاریم کلمه

موږ مساوات $5^3 = 125$ را اخلو .

کیڼ لور ته توان دی د5 په بنسټ او 3 اکسپوننت یا جګګڼ(-عدد) سره.

ښي لور ته اړونده توان ا رزښت 125 ځای په ځای دی.

که بنسټ، اکسپوننت یا توان ارزښت په ځای اووښتوني یا متحوله x کینوول شي، نو لاندې پرابلم- انځوروني مخ ته لرو.

$5^3 = x$ Der Potenzwert wird gesucht توان ارزښت غوښتل شوی دی	د توانونو له لارې یې حل $x = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \quad \Rightarrow L = \{125\}$

127

$x^3 = 125$ بنسټ غواړو پیدا کړو	حل د ریښي نیوني له لارې $x = \sqrt[3]{125} = 5 \quad L = \{5\}$
$5^x = 125$ (اکسپوننشل مساوات) اکسپوننت یا جګعدد غواړو پیدا کړو	حل؟

د اکسپوننت یا جګګې (-عدد) تاکنه لوګاریم بلل کیږي.

سړی وایي: x برابر دی د 125 لوګاریم سره د5 په بنسټ. او د دې لپاره لنډ لیکو:

$x = \log_5(125)$ موږ کړی شو برابرون $5^x = 125$ لومړی د ازمایني له لارې حل کړو:

$$5^x = 125 \Leftrightarrow x = \log_5(125) \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow L = \{3\}$$

ځکه چې $x = \log_5(125)$

پیژند(تعریف):

$$x = \log_a(b) \Leftrightarrow a^x = b$$

د $x \in \mathbb{R}\,;\, b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}\,;\, a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0; 1\}$ لپاره.

لوګاریتم اکسپوننت (x) دی، د کوم سره چې بنسټ (a) په توان شي، چې د توان ارزښت (b) ترې لاس ته راشي.

سړی وایي: x د b لوګاریتم دی دa په بنسټ

بیلګې :

128

سرلیک

$\log_2(8) = 3$	ځکه چې	ا $2^3 = 8$
$\log_4(16) = 2$	ځکه چې	ا $4^2 = 16$
$\log_5(625) = 4$	ځکه چې	ا $5^4 = 625$
$\log_{10}(1000) = 3$	ځکه چې	ا $10^3 = 1000$
$\log_a(1) = 0$	ځکه چې	ا $a^0 = 1$

$\log_{10}(0,1) = -1$	ځکه چې	$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$
$\log_4(2) = \frac{1}{2}$	ځکه چې	$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$
$\log_4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$	ځکه چې	$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

$\log_2(8)$	ځکه چې	$2^3 = 8$
$\log_4(16)$	ځکه چې	$4^2 = 16$
$\log_5(625)$	ځکه چې	$5^4 = 625$
$\log_{10}(1000)$	ځکه چې	$10^3 = 1000$
$\log_a(1)$	ځکه چې	$a^0 = 1$
$\log_{10}(0,1) = -1$	ځکه چې	$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$
$\log_4(2) = \frac{1}{2}$	ځکه چې	$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$
$\log_4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$	ځکه چې	$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

لوګاریتم د استعمالیدونکو بنسټونو سره

د جبشمیري سره کیدی شي لوګارتمونه د10 په بنسټ او د e په بنسټ (طبیعي لوګاریت) وشمېرل شي.

طبیعي د ډیروالی تعاملونه زیات وخت د شمېرپوهنیزو ترمونو له لارې شمېرل کیږي یا څېړل کیږي، په کومو کې چې د عدد e توانونه خوندي دي. طبیعي لوګاریتم په طبعی پوهنو (علومو) او تخنیک کې کارول کیږي. له دې امله د دې لپاره ځانګړی لیکندود منځ ته راوړل شوی.

لوګاریتم په10 بنسټ (لسیز لوګاریتم)	$\log_{10}(a) := \lg(a)$
لوګاریتم په بنسټ e(طبیعي لوګاریتم)	$\log_e(a) := \ln(a)$

ځانګړي حالتونه.

د لوګاریتم له تعریف $x = \log_a(b) = a^x = b$ څخه ترلي لاس ته راځي

د لوګارتم لپاره دa په بنسټ د لسمیز لوګارتم لپاره د طبیعي لوګاریتم لپاره د لوګاریتم لپاره د aپه بنسټ د لسمیز لوګارتم لپاره د طبیعي لوګاریتم لپاره		ځکه چې ځکه چې ځکه چې ځکه چې ځکه چې ځکه چې	

لوګاریتم په اکسپوننت کې

زیات وخت د ترم بڼه بدلون لپاره لاندې اړیکې ګټورې دي:

$x = \log_a(b) \Leftrightarrow a^x = b \Leftrightarrow a^{\log_a(b)} = b$ $x = \lg(b) \Leftrightarrow 10^x = b \Leftrightarrow 10^{\lg(b)} = b$ $x = \ln(b) \Leftrightarrow e^x = b \Leftrightarrow e^{\ln(b)} = b$	د اعدادو بېلګه: د اعدادو بېلګه: د اعدادو بېلګه:	: $2 = a^{\log_a(2)}$: $5 = 10^{\lg(5)}$: $9 = e^{\ln(9)}$

: $2 = a^{\log_a(2)}$

: $5 = 10^{\lg(5)}$

: $9 = e^{\ln(9)}$ ------- ---

د لوګاریتم قوانین

د یوه ضرب یا ځل لوګاریتم

د ضرب لوګاریتم د د یوګونو ضربیونو د لوګاریتمونو د جمعي سره برابر دی.

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

بېلګه :

$$\lg(500) = \lg(5 \cdot 100) = \lg(5) + \lg(100) = \lg(5) + 2$$

د یوه وېش لوګاریتم

د یوه وېش لوګاریتم برابر دی دمخرج (د پرووېشوني) د لوګاریتم کمول د د صورت(د وېشووني) د لوګاریتم څخه.

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

بېلګه:

$$\log_7\left(\frac{343}{7}\right) = \log_7(343) - \log_7(7) = \log_7(7)^3 - \log_7(7)^1 = 3 - 1 = 2$$

131

د يوه توان لوګاريتم

د توان لوګاريتم برابر دی د بنسټ د لوګاريم سره ضرب يې اکسپوننت. $\log_a\left(b^c\right) = c \cdot \log_a(b)$

بېلګه: $\log_3 (3)^5 = 5 \cdot \log_3 (3)^1 = 5 \cdot 1 = 5$

په پام کې ولره:

د ريښي لپاره باور لري $\log_a\left(\sqrt[c]{b}\right) = \log_a (b)^{\frac{1}{c}} = \frac{1}{c} \cdot \log_a b$

بېلګه:

$$\ln\left(\sqrt[3]{e}\right) = \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\ln(e) = \frac{1}{3}$$

د لوګاريتمونو په منځ کې شمېربدلون

دا چې په جبشميري سره فقط لسميز او طبيعي لوګاريتم شمېرل کېدی شي، دا کله د يوه حالت و بل ته اړيينه ده چې لوګاريتم شمېربدل (يعنې د شمېرلو لپاره يې په بله بنه واړولی شي)کړي.

$$\log_a (b) = \frac{\lg(b)}{\lg(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

بېلګه:

$$\log_3(5) = \frac{\lg(5)}{\lg(3)} \approx 1{,}4649735 \quad \text{oder} \quad \log_3(5) = \frac{\ln(5)}{\ln(3)} \approx 1{,}4649735$$

ښوونه:

$$\left.\begin{array}{l} x=\log_a(b)\Leftrightarrow a^x=b \\ y=\log_c(b)\Leftrightarrow c^y=b \end{array}\right|\Leftrightarrow a^x=c^y \mid \log_c(\ )$$

$$\Leftrightarrow \log_c\left(a^x\right)=\log_c\left(c^y\right)\Leftrightarrow x\cdot\log_c(a)=y\cdot\underbrace{\log_c(c)}_{1}\Leftrightarrow x\cdot\log_c(a)=y$$

د x

او y لپاره لوګاریتمونه ځای په ځای کړی او د $\log_a(b)$ پسي یې بنه بدل کړی.

$$\log_a(b)\cdot\log_c(a)=\log_c(b) \mid :\log_c(a)$$

$$\Leftrightarrow \log_a(b)=\frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}=\frac{\lg(b)}{\lg(c)}=\frac{\ln(b)}{\ln(c)}$$

د استعمال بیلګه:

د ماتونو یا کسرونو ترمونه د **10** په بنسټ لوګاریتم شي یا دې لوګاریتم ونیول شي.

$$\frac{a^2\cdot b\cdot\sqrt[3]{c}}{d\cdot\sqrt{e^3}}$$

$$\lg\left(\frac{a^2\cdot b\cdot\sqrt[3]{c}}{d\cdot\sqrt{e^3}}\right)=\lg\left(\frac{a^2\cdot b\cdot c^{\frac{1}{3}}}{d\cdot e^{\frac{3}{2}}}\right)=2\cdot\lg(a)+\lg(b)+\frac{1}{3}\cdot\lg(c)-\lg(d)-\frac{3}{2}\cdot\lg(e)$$

د لوګاریتم ترمونه دې یوه لوګاریتم ترم ته سره رایوځای شي.

$$\ln x-\frac{1}{2}\ln y+\frac{4}{5}\ln z$$

$$\ln(x)-\frac{1}{2}\cdot\ln(y)+\frac{4}{5}\cdot\ln(z)=\ln\left(\frac{x\cdot z^{\frac{4}{5}}}{y^{\frac{1}{2}}}\right)=\ln\left(\frac{x\cdot\sqrt[5]{z^4}}{\sqrt{y}}\right)$$

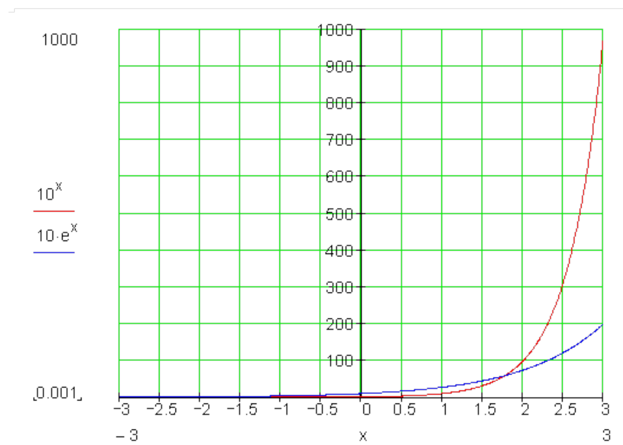
په اکسپوننت کې دلوګاریتمونو بڼه بدلون

$$2^x = e^{\ln\left(2^x\right)} = e^{\ln(2)\cdot x} \qquad 4^x = 10^{\lg\left(4^x\right)} = 10^{\lg(4)\cdot x}$$

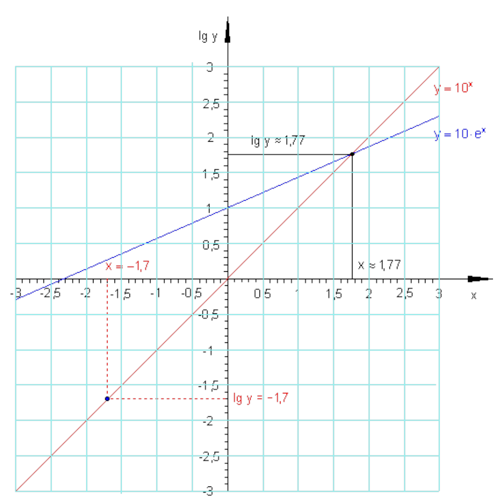
$$e^{\ln(10)\cdot x} = e^{\ln\left(10^x\right)} = 10^x \qquad 10^{\lg(e)\cdot x} = 10^{\lg\left(e^x\right)} = e^x$$

د لوګاریتم سکالاکونه یا ګراف کښنه

بیلګه: د تابع $f(x) = 10^x$ او $g(x) = 10 \cdot e^x$ ګرافونه دې په یوه کواوردینات-یا پروت ولاړ سیستم کې انځور شي.



د دې انځوروني زیان په دې کې دی، چې د کوچنیو **x** ارزښتونه نه شي لوستل کیدی.



د یوه لوګاریتم د y محور باندې سکالا کونې یا ارزښت ټاکنې باندې ګراف په کرښه کیږي. په y محور باندې د تابع ارزښتونو لوګاریتمونه لیکل کیږي.

$$y = 10^x \Leftrightarrow \lg(y) = \lg(10^x) = x \cdot \lg(10) = x$$

له دې لاس ته راځي $\lg(y) = x$ کرښه چې له سرجینې تیریږي د جګوالي1 سره

$$y = 10 \cdot e^x \Leftrightarrow \lg(y) = \lg(10 \cdot e^x) = \lg(10) + x \cdot \lg(e) = 1 + x \cdot \lg(e)$$

له دې لاس ته راځي $\lg(y)=\lg(e).x+1$. کرښه د جګوالي $\lg(e)$ سره.

رینتوني ارزښتونه باید وشمیرل شي.

په y محور ارزښت -1,7 دا معنا لري چې $\lg(y) = -1{,}7 \Rightarrow y = 10^{-1{,}7} \approx 0{,}02$

د تابع $f(x) = 10^x$ د ګراف غوښتکی د تابع $g(x) = 10 \cdot e^x$ سره د y محور لوګاریتمیکي سکالا کولو د دوه کرښو غوښتکو باندې بیرته اړول کیږي.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 10^x = 10 \cdot e^x$ (اکسپوننشل مساوات)

د لوګاریتم له لارې حل:

$$\Rightarrow \lg(10^x) = \lg(10 \cdot e^x) \Leftrightarrow x \cdot \lg(10) = \lg(10) + x \cdot \lg(e) \Leftrightarrow x \cdot 1 = 1 + x \cdot \lg(e)$$

$$\Leftrightarrow x - x \cdot \lg(e) = 1 \Leftrightarrow x(1 - \lg(e)) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1 - \lg(e)} \approx 1{,}77$$

$$\lg(y) = \lg(10^x) = x \cdot \lg(10) = x \approx 1{,}77$$

$$\lg(y) = \lg(10 \cdot e^x) = \lg(10) + x \cdot \lg(e) = 1 + x \cdot 0{,}434 \approx 1{,}77$$

د دواړو ګرافونو غوښتکي $f(x) \approx 10^{1{,}77} \approx 58{,}88 \Rightarrow S(1{,}77 \mid 58{,}88)$

کنترول:

$g(x) \approx 10 \cdot e^{1,77} \approx 58,70$ (د راګردوني له لارې د اصل څخه سره په څنګيدنه)

بيلګه:

د يوه طبيدوا له مخې يو د باکتريا نسل د يوه تابع $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ وروسته مري.

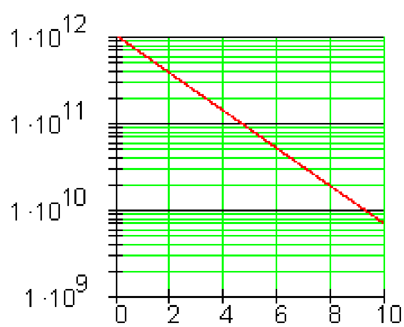
دلته په معنا دي: $N(t)$ د باکتړياګانو تعداد د وخت t وروسته.

N_0 د باکتړياګانو تعداد له وخت t=0 وروسته.

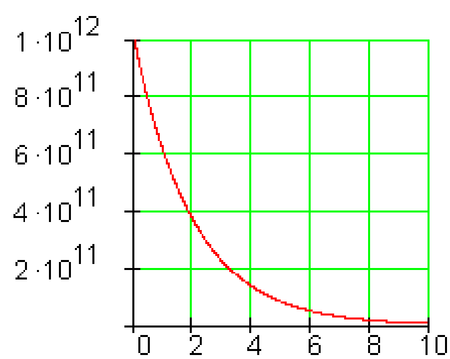
λ د کميدو ثابته

هغه وخت، چې وروسته له هغه نيمې باکتړياګانې مړې شوي دي، نيموخت ارزښت τ بلل کيږي.

دا تلنلار ګرافيکي لکه چې لرو په لاندې ډول انځوريږي



کرښيزه د سکالا برخه



لوګاريتميکي د سکالا برخه

د ښه کيدنې ثابتې λ او د نيموخت ارزښت τ تر منځ اړيکې انځور کړئ.

نيموخت ارزښت:

136

$$: N(\tau) = \frac{1}{2} \cdot N_0 \quad N(\tau) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \tau} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda \cdot \tau}$$

لوګاریتمول
$$e^{-\lambda \cdot \tau} = \frac{1}{2}$$

بنه بدلون:
$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{-\lambda \cdot \tau}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\lambda \cdot \tau \cdot \underbrace{\ln e}_{1} = \ln(1) - \ln(2) \quad | \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow \lambda \cdot \tau = \ln(2) - \ln(1) \quad | : \tau$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(2) - \underbrace{\ln(1)}_{0}}{\tau}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{\tau}$$

له دې سره سړی هم لیکلی شي:
$$\underline{\underline{N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{\tau} t}}}$$

یادونه: نیم ارزښت وخت هغه وخت دي، په کوم کې چې اکسپوننشل د وخت سره د کمیدنې ارزښت نیموي

د لوګاریم خورا غوره قوانین

ټولګه:

$$\log_e(b) = \ln(b) \qquad \log_{10}(b) = \lg(b) \qquad x = \log_a(b) \Leftrightarrow a^x = b$$

137

$$\lg(10)=1 \qquad \lg(1)=0 \qquad \log_a(a)=1 \qquad \log_a(1)=0$$

$$\ln(e)=1 \qquad \ln(1)=0$$

$$b=a^{\log_a(b)}=10^{\lg(b)}=e^{\ln(b)} \qquad b^x=a^{\log_a(b)x}=10^{\lg(b)x}=e^{\ln(b)\cdot x}$$

$$\lg(b\cdot c)=\lg(b)+\lg(c) \qquad \log_a(b\cdot c)=\log_a(b)+\log_a(c)$$

$$\ln(b\cdot c)=\ln(b)+\ln(c)$$

$$\lg\left(\frac{b}{c}\right)=\lg(b)-\lg(c) \qquad \log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a(b)-\log_a(c)$$

$$\ln\left(\frac{b}{c}\right)=\ln(b)-\ln(c)$$

$$\ln\left(b^c\right)=c\cdot\ln(b) \quad \lg\left(b^c\right)=c\cdot\lg(b) \qquad \log_a\left(b^c\right)=c\cdot\log_a(b)$$

د لوګاریم پوښتنې

لوګاریتمونه

لومړی: جدول ډک کړئ

10^x	1	100	0,1	$\sqrt{10}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	-1
x						

دويم: په توانبڼه يې ولیکئ.

الف - $\log_2(7)=x$ ب - $\log_3(x)=y$ پ - $\log_a(y)=x$ ت - $\log_e(b)=1-x$

138

دریم: د لوګاریتم تعریف وروسته یې وټاکئ

الف - $\log_2(16)$ ب - $\log_5(0,2)$ پ - $\log_5(5)$ ت - $\log_a(\sqrt{a})$

ټ - $\log_2(2^{1,5})$ ث - $\log_2(4^{-2})$ ج - $\lg(\sqrt[3]{10})$ چ - $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)$

ح- $\log_2(0,125)$ خ — $\log_{0,5}\left(\frac{1}{8}\right)$ څ - $\log_{32}(2)$ ځ - $\log_{\sqrt{5}}(125)$

ځلورم: د متحولو یا اووښتونو ارزښتونه ورکړئ.

الف - $\log_a(5)=1$ ب - $\log_4(y)=-2$ پ - $\log_3(1)=x$ ت - $\log_3(\sqrt{b})=1,5$

پنځم: وټاکئ $\log_a(81)$ که باور ولري: $\log_a(3)=0,25$

د لوګاریتم پوښتنې

د لوګاریتم | نتیجې

نتیجې

لومړی:

10^x	1	100	$0,1$	$\sqrt{10}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	-1
x	0	2	-1	$0,5$	$-0,5$	$\varnothing$

139

2^x	1	2	8	1024	0,5	$\sqrt{2}$	$\sqrt[3]{4}\cdot 2$
x	0	1	3	10	-1	0,5	$\frac{5}{3}$

دویم: الف - $2^x = 7$ ب - $3^y = x$ پ - $a^x = y$ ت - $e^{1-x} = b$

دریم: الف - 4 ب - -1 پ - 1 ت - 0,5

ټ - 1,5 ث - -4 ج - $\frac{1}{3}$ چ - $-1,5$

ح - -3 خ - 3 ځ - 0,2 ځ - 6

څلورم: الف - $a = 5$ ب - $y = \frac{1}{16}$ پ - $x = 0$ ت - $b = 27$

پنځم:

$$\log_a(3) = 0,25 \Leftrightarrow a^{0,25} = 3;\ \text{mit } 81 = 3^4 \text{ folgt } \left(a^{0,25}\right)^4 = 3^4 \Rightarrow a = 81 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{81}(81) = 1$$

مفصل حلونه:

لومړی: په لاندې کې denn ځکه چې او keine Lösung حل نه شته.

140 سرلیک

$2^x = 1 \Rightarrow x = 0$ denn $2^0 = 1$

$2^x = 2 \Rightarrow x = 1$ denn $2^1 = 2$

$2^x = 8 \Rightarrow x = 3$ denn $2^3 = 8$

$2^x = 1024 \Rightarrow x = 10$ denn $2^{10} = 1024$

$2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1$ denn $2^{-1} = \frac{1}{2}$

$2^x = \sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ denn $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$2^x = \sqrt[3]{4} \cdot 2 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ denn $2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{4} \cdot 2$

$10^x = 1 \Rightarrow x = 0$ denn $10^0 = 1$

$10^x = 100 \Rightarrow x = 2$ denn $10^2 = 100$

$10^x = 0{,}1 \Rightarrow x = -1$ denn $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$10^x = \sqrt{10} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ denn $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

$10^x = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ denn $10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$10^x = -1 \Rightarrow x = \varnothing$ keine Lösung

$$\sqrt[3]{4} \cdot 2 = \sqrt[3]{2 \cdot 2} \cdot 2 = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot 2 = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^1 = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+1} = 2^{\frac{5}{3}}$$

2^x	1	2	8	1024	0,5	$\sqrt{2}$	$\sqrt[3]{4} \cdot 2$
x	0	1	3	10	-1	0,5	$\frac{5}{3}$

10^x	1	100	0,1	$\sqrt{10}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	-1
x	0	2	-1	0,5	$-0{,}5$	$\varnothing$

دویم:

الف - $\log_2(7) = x \Leftrightarrow 2^x = 7$ ب - $\log_3(x) = y \Leftrightarrow 3^y = x$

پ - $\log_a(y) = x \Leftrightarrow a^x = y$ ت - $\log_e(b) = 1 - x \Leftrightarrow e^{1-x} = b$

دریم:

الف -

$\log_2(16) = x \Leftrightarrow 2^x = 16$

$2^x = 16 = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$

$\Rightarrow \log_2(16) = 4$

ب -

$\log_5(0{,}2) = x \Leftrightarrow 5^x = 0{,}2$

$5^x = 0{,}2 = \frac{1}{5} = 5^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

$\Rightarrow \log_5(0{,}2) = -1$

پ -

$\log_5(5) = x \Leftrightarrow 5^x = 5$

$5^x = 5 = 5^1 \Leftrightarrow x = 1$

$\Rightarrow \log_5(5) = 1$

ت -

$\log_a\left(\sqrt{a}\right) = x \Leftrightarrow a^x = \sqrt{a}$

$a^x = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \log_a\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}$

141

سرلیک

ټ -

$$\log_2\left(2^{1,5}\right)=x \Leftrightarrow 2^x=2^{1,5}$$

$$2^x=2^{1,5}=2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \log_2\left(2^{1,5}\right)=\frac{3}{2}$$

ث -

$$\log_2\left(4^{-2}\right)=x \Leftrightarrow 2^x=4^{-2}$$

$$2^x=4^{-2}=(2\cdot 2)^{-2}=2^{-2}\cdot 2^{-2}=2^{-4}$$

$$\Leftrightarrow x=-4 \Rightarrow \log_2\left(4^{-2}\right)=-4$$

ج -

$$\lg\left(\sqrt[3]{10}\right)=x \Leftrightarrow 10^x=\sqrt[3]{10}$$

$$\Leftrightarrow 10^x=\sqrt[3]{10}=10^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \lg\left(\sqrt[3]{10}\right)=\frac{1}{3}$$

چ-

$$\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)=x \Leftrightarrow 2^x=\frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$2^x=\frac{1}{\sqrt{8}}=8^{-\frac{1}{2}}=\left(2^3\right)^{-\frac{1}{2}}=2^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2} \Rightarrow \log_2\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)=-\frac{3}{2}$$

ح-

$$\log_2(0,125)=x \Leftrightarrow 2^x=0,125$$

$$2^x=0,125=\frac{1}{8}=8^{-1}=\left(2^3\right)^{-1}=2^{-3}$$

$$\Leftrightarrow x=-3 \Rightarrow \log_2(0,125)=-3$$

خ -

$$\log_{0,5}\left(\frac{1}{8}\right)=x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow x=3 \Rightarrow \log_{0,5}\left(\frac{1}{8}\right)=3$$

څ –

$$\log_{32}(2)=x \Leftrightarrow 32^x=2$$

$$32^x=2 \Leftrightarrow \left(2^5\right)^x=2$$

$$\Leftrightarrow \left(2^x\right)^5=2 \mid \sqrt[5]{\ } \Leftrightarrow 2^x=2^{\frac{1}{5}}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{5} \Rightarrow \log_{32}(2)=\frac{1}{5}$$

ځ -

$$\log_{\sqrt{5}}(125)=x \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}\right)^x=125$$

$$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^x=125=5^3 \Leftrightarrow \left(5^x\right)^{\frac{1}{2}}=5^3 \mid ^2$$

$$\Leftrightarrow 5^x=5^6 \Leftrightarrow x=6 \Rightarrow \log_{\sqrt{5}}(125)=6$$

څلورم:

الف - $\log_a(5) = 1 \Leftrightarrow a^1 = 5 \Leftrightarrow a = 5$

ب - $\log_4(y) = -2 \Leftrightarrow 4^{-2} = y \Leftrightarrow y = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

پ - $\log_3(1) = x \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

ت - $\log_3(\sqrt{b}) = 1{,}5 \Leftrightarrow 3^{1,5} = \sqrt{b}$

$3^{1,5} = \sqrt{b} \mid ^2 \Leftrightarrow (3^{1,5})^2 = b$

$\Leftrightarrow 3^3 = b \Leftrightarrow b = 27$

پنځم:

$\log_a(81) = x$ es gilt: $\log_a(3) = 0{,}25 \Leftrightarrow a^{0,25} = 3$

$a^{0,25} = 3 \Leftrightarrow a^{\frac{1}{4}} = 3 \mid ^4 \Leftrightarrow \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4 = 3^4 \Leftrightarrow a = 81$

$\log_{81}(81) = x \Leftrightarrow 81^x = 81 \Leftrightarrow x = 1$

$\Leftrightarrow \log_{81}(81) = 1$

د لوګاریتم پوښتنې

لوګاریتم II

لومړی: لاندې لوګاریتمونه وټاکئ.

الف - $\ln 8$ ب - $\ln(2+e)$ پ - $3\ln e^{-2}$

ت - $\left[\ln\left(1-e^{-1}\right)\right]^2$ ټ - $\ln 2 - \ln\sqrt{e}$ ث - $\ln 2\cdot\left(\ln e^3 - 2\right)$

ج - $\frac{\ln 2}{3} - 1$ چ- $\frac{\ln\sqrt{3}}{\ln\sqrt{2}}$ ح- $\ln\frac{2}{e} - 1$

دویم: د کوم حقیقي عدد لپاره لوګاریتم تعریف دی؟

143

الف - $\ln(-x)$ ب - $\ln(x-2)$ پ - $\ln(\ln x)$

دريم: پرېکړه وکړئ، چې ايا ترم يو زياتيز يا مثبت، منفي يا کميز ارزښت نيسي که يا ارزښت صفر نيسي.

الف - $\ln\frac{2}{3}$ ب - $\ln 1{,}085$ پ - $\ln\frac{4}{\sqrt{18}}$

ت - $\ln(\ln e)$ ټ - $\ln\frac{2^6}{32}$ ث - $\ln\left(x^2+2\right)$ für $x \in \mathbb{R}$

څلورم: ساده يي کړئ. الف - $\left(u-e^{\ln 2u}\right)^2$ ب - $\ln\sqrt{e^{2u}}$ پ - $e^{\ln(2u)}-2ue^{\ln 2}$

توان قوانين

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

د لوګاريتم قوانين و بنست e ته يا د e په بنست

$\ln(b \cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$	$\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c)$	$a = e^{\ln(a)}$	$e^0 = 1$
$\ln\left(b^c\right) = c \cdot \ln(b)$	$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a}$	$\ln(1) = 0$	$\ln(e) = 1$

د لوګاريتم پوښتني

لوګاريتم II

144

نتیجې:

لومړی:

الف ـ $2,07944$ ب ـ $1,55144$ پ ـ -6
ت ـ $0,21038$ټ ـ $0,193$ ث ـ $0,693$
ج ـ $-0,768950$ چ ـ $1,58496$ ح ـ $-1,30685$

دویم:

په لاندې کې Für : د ... لپاره او wegen له امله

الف ـ $\ln(-x)$ für $x < 0$ ب ـ $\ln(x-2)$ für $x > 2$ پ ـ $\ln(\ln x)$ für $x > 1$

دریم:

$\ln x < 0$ für $0 < x < 1$ $\ln x > 0$ für $x > 1$

الف ـ $-0,4054$ ب ـ $0,08158$ پ ـ $-0,05889$

$\ln\left(x^2+2\right) > 0$ für $x \in \mathbb{R}$
wegen $x^2 + 2 > 1$
ت ـ 0 ټ ـ $0,69314$ ث ـ

څلورم:

الف ـ $\left(u - e^{\ln 2u}\right)^2 = u^2$ ب ـ $\ln\sqrt{e^{2u}} = u$ پ ـ $e^{\ln(2u)} - 2ue^{\ln 2} = -2u$

مفصل حلونه:

د توان او لوګارتم قوانین:

د توان قوانین

145

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

د لوګاریتم قوانین د e په بنسټ:

$\ln(b \cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$	$\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c)$
$\ln\left(b^c\right) = c \cdot \ln(b)$	$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a}$

$a = e^{\ln(a)}$	$e^0 = 1$
$\ln(1) = 0$	$\ln(e) = 1$

د شمیرني لپاره د تکساس د Ti- 30 eco RS of Texas جبشمیرى اله کارول کیږي. د استعمال تر مخه د توان او لوګاریتم ترمونه ساده کیږي.

لومړی:

الف - $\ln(8) \approx 2{,}079$

$\boxed{8}\ \boxed{\ln}$

ب - $\ln(2+e) \approx 1{,}551$

$\boxed{(}\ \boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{\text{2nd}}\ \boxed{e^x}\ \boxed{)}$

پ - $3\ln\left(e^{-2}\right) = -2 \cdot 3\ln(e)$

$= -6 \cdot 1$

$= -6$

ت - $\left[\ln\left(1-e^{-1}\right)\right]^2 \approx 0{,}210$

$\boxed{(}\ \boxed{1}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{\pm}\ \boxed{\text{2nd}}\ \boxed{e^x}\ \boxed{)}\ \boxed{\ln}\ \boxed{x^2}$

146

سرلیک

پ -

$$\begin{aligned}\ln(2)-\ln\left(\sqrt{e}\right) &= \ln(2)-\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)\\ &= \ln(2)-\frac{1}{2}\ln(e)\\ &= \ln(2)-\frac{1}{2}\cdot 1\\ &\approx 0{,}193\end{aligned}$$

ث -

$$\begin{aligned}\ln(2)\cdot\left(\ln\left(e^{3}\right)-2\right) &= \ln(2)\cdot(3\cdot\ln(e)-2)\\ &= \ln(2)\cdot(3\cdot 1-2)\\ &= \ln(2)\cdot(1)\\ &= \ln(2)\\ &\approx 0{,}193\end{aligned}$$

ج -

$$\frac{\ln(2)}{3}-1\approx -0{,}769$$

2	ln	:	3	−	1	=

چ-

$$\begin{aligned}\frac{\ln\left(\sqrt{3}\right)}{\ln\left(\sqrt{2}\right)} &= \frac{\ln\left(3^{\frac{1}{2}}\right)}{\ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right)}\\ &= \frac{\frac{1}{2}\ln(3)}{\frac{1}{2}\ln(2)}\\ &= \frac{\ln(3)}{\ln(2)}\\ &\approx 1{,}585\end{aligned}$$

$$\ln\left(\frac{2}{e}\right)-1=\ln(2)-\ln(e)-1 = \ln(2)-1-1 = \ln(2)-2 \approx 1{,}307$$ ح-

$$\ln\left(\frac{e}{2}\right)-1=\ln(e)-\ln(2)-1 = 1-\ln(2)-1 = -\ln(2) \approx -0{,}693$$ خ -

دويم:

الف-   (ln(-x الوگاريتم ځانله د زياتيزو اركومنتونو يا لوگاريتم نيوني متحولي لپاره تعريف دی.

x>0 ⇔ -x>0|+2   له دې لرو ln(-x) د x<0   لپاره تعريف دی.

ب -   (ln(x-2 لوگاريتم ځانله د زياتيزو اركومنتونو يا لوگاريتم نيوني متحولي لپاره تعريف دی.

ln(x-2) <=x>2 ⇔x-2>0|+2 د   x>2 لپاره تعريف دی.

پ-   ((ln(ln(x لوگاريتم ځانله د زياتيزو اركومنتونو يا لوگاريتم نيوني متحولي لپاره تعريف دی.

Ln(x)>0كه x>1 وي، نو لاس ته راځي((ln(ln(x د x>1 لپاره تعريف دی

دريم

الف - $\ln\left(\frac{2}{3}\right)<0$ da $\frac{2}{3}<1 \Rightarrow \ln\left(\frac{2}{3}\right)\approx -0{,}405$

ب - $\ln(1{,}0085)>0$ da $1{,}0085>1 \Rightarrow \ln(1{,}0085)\approx 0{,}082$

پ - $\ln\left(\frac{4}{\sqrt{18}}\right)<0$ da $\frac{4}{\sqrt{18}}\approx 0{,}942<1 \Rightarrow \ln\left(\frac{4}{\sqrt{18}}\right)\approx -0{,}059$

ت – ln(ln(e))=0 ځكه چې ln(e) = 1 او ln(1) = 0دي

ټ – $\ln\left(\frac{2^6}{32}\right)>0$ دا چې

148

سرلیک

$$\frac{2^6}{32}=\frac{2^6}{2^5}=2>1\Rightarrow \ln\left(\frac{2^6}{32}\right)=\ln(2)\approx 0{,}693$$

ث – $\ln(x^2+2)>0$ د ټولو $x\in\mathbb{R}$ لپاره دا چې $x^2+2>1$ دی.

ځلورم:

الف - $\left(u-e^{\ln(2u)}\right)^2=(u-2u)^2=(-u)^2=u^2$

ب - $\ln\left(\sqrt{e^{2u}}\right)=\ln\left(e^{\frac{2u}{2}}\right)=u\cdot\ln(e)=u$

پ – $e^{\ln(2u)}-2u\cdot e^{\ln(2)}=2u-2u\cdot 2=2u-4u=-2u$

د لوګاریتم پوښتنې

لوګارتمونه III

لومړی: لوګاریتمونه وټاکئ

الف - $\log_3(9)+\log_3\left(\frac{1}{243}\right)$ ب - $\log_9\left(3^4\right)$ پ - $\log_5\left(\sqrt{125}\right)$

ت - $\log_a\left(\frac{1}{a^2}\right)$ ټ - $\log_8(2)$ ث - $\log_a\left(\sqrt{a^k}\right)$

ج - $\ln\left(e^{-3}\right)+\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ چ- $\log_5(0{,}04)$ ح- $\log_2\left(\sqrt{8}\right)$

دویم: لوګاریتمونه وټاکئ

الف - $\log_3(x)=3$ ب - $\log_x(3)=-2$ پ - $\log_2(5)=x$

ت - $\log_4(x-1)=-1,5$ ټ - $\log_x(3)=0$ ث - $\lg(x)=-\frac{1}{2}$

ج - $\ln(x)=-1$ چ- $\lg(2x)=0,5$ ح- $\log_x(4)=\frac{1}{3}$

خ - $\log_4(x)+\log_4(2)=\log_4(12)$ ځ – $\log_3(x)-\log_3(5)=3$

څ - $\log_5(12)=x$

دريم: بڼه بدل کړئ

الف - $\log(xy)$ ب - $\log\left(\frac{1}{ab}\right)$ پ - $\log(3x-3)-\log(x-1)$

ت - $\log\left(\sqrt{2xy}\right)$ ټ - $\ln(u)+2\ln(v)$ ث - $-\lg\left(\frac{1}{u}\right)$

ج - $\lg(x)-\lg(y)+\frac{1}{2}\lg(z)$ چ- $\ln\left(e^2\right)-3\ln\left(\frac{e}{2}\right)$ ح- $\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

خ - $\log\left(x^3\right)-\log(x)$ ځ - $\lg(uv)+\lg\left(\frac{1}{v^2}\right)$ څ - $\log\left(\sqrt{x}\right)+1,5\log(x)$

څلورم: ساده کړئ

الف - $\ln\left(2e^2\right)+\ln\left(\frac{e}{2}\right)$ ب - $\ln\left(\frac{4}{3}u\right)-\ln\left(\frac{4}{u}\right);\ u>0$

پ - $\ln\left(1-x^2\right)-\ln(1+x)$ ت - $\ln(x)-\ln(4)+\ln\left(\frac{4y}{x}\right)$

ټ - $\ln\left(\frac{1}{a}\right)-\ln(2a)-\ln\left(\frac{1}{a^2}\right)$ ث - $\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)-\ln(x+1)$

پنځم: پرېکړه وکړئ، چې ايا لاندې افادې يا وييني رښتيا (W) يا نارښتيا (F) دي.

150

سرليک

الف - $\log_3(4)=\frac{\ln(4)}{\ln(3)}$ ب - $\log_3(4)=\frac{\lg(3)}{\lg(4)}$ پ - $\log_3(4)=\frac{\lg(4)}{\lg(3)}$

ښپږم: پرېکړه وکړئ، چې د $\log_a(b)$ او $\log_b(a)$ ترمنځ کومې اړيکې شتون لري.

الف- برابر ب- يو بل ته کميز يا منفي پ- يو بل ته معکوس

اوم: $\ln(x)=0,25$ ورکړئ. له دې سره $\ln(\sqrt{x});\ \ln\left(\frac{1}{x}\right);\ \ln(x^2);\ \ln^2(x)$ وټاکئ.

اتم: جبشميرى راکوي $\lg(4)$: بې له نور استعمال جبشميرى وکاروې $\lg(4000)$ او $\lg(0,25)$ وټاکئ. دلته کوم قانونونه کارول کيږي.

نهم:

$e^{2\ln(u)}$	$e^{\ln\left(\frac{u}{2}\right)}$	$\frac{1}{2}e^{\frac{\ln(u)}{2}}$	$e^{-\frac{\ln(u)}{3}}$	$2e^{\ln(u^2)}$	$e^{\ln(u)-1}$	$e^{\ln(u-1)}$

لسم: وښايئ: الف - $e^{\ln(u)+1}=u\cdot e$ ب - $\frac{2}{3}e^{-\ln(0,75u)}=\frac{8}{9u}$

د توان قوانين

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$
$(a^n)^m=a^{n\cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$	$a^0=1$

$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$
$\frac{1}{a^n}=a^{-n}$

د

لوګاريتم قوانين و بنسټ e ته $\ln(b)=c\Leftrightarrow e^c=b$

$\ln\left(\frac{b}{c}\right)=\ln(b)-\ln(c)$	$\ln(b\cdot c)=\ln(b)+\ln(c)$
$\log_a(b)=\frac{\lg(b)}{\lg(a)}=\frac{\ln(b)}{\ln(a)}$	$\ln\left(b^c\right)=c\cdot\ln(b)$

$e^0=1$	$a=e^{\ln(a)}$
$\ln(e)=1$	$\ln(1)=0$

د لوګاریتم III نتیجې

نتیجې

لومړی:

الف - $\log_3(9)+\log_3\left(\frac{1}{243}\right)=-3$ ب - $\log_9\left(3^4\right)=2$ پ - $\log_5\left(\sqrt{125}\right)=\frac{3}{2}$

ت - $\log_a\left(\frac{1}{a^2}\right)=-2$ ټ - $\log_8(2)=\frac{1}{3}$ ث - $\log_a\left(\sqrt{a^k}\right)=\frac{k}{2}$

ج - $\ln\left(e^{-3}\right)+\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-3,5$ چ- $\log_5(0,04)=-2$ ح- $\log_2\sqrt{8}=\frac{3}{2}$

دویم: الف - $\log_3(x)=3 \Rightarrow x=27$ ب - $\log_x(3)=-2 \Rightarrow x=\frac{1}{3}\sqrt{3}$

پ - $\log_2(5)=x \Rightarrow x=\frac{\ln(5)}{\ln(2)}\approx 2,322$ ت - $\log_4(x-1)=-1,5 \Rightarrow x=\frac{9}{8}$ ټ - $\log_x(3)=0 \Rightarrow x=\{\ \}$

152

سرلیک

ث - $\lg(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{10}\sqrt{10}$ ج - $\ln(x) = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$ چ- $\lg(2x) = 0,5 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{10} \approx 1,581$

ح- $\log_x(4) = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 64$ خ - $\log_4(x) + \log_4(2) = \log_4(12) \Rightarrow x = 6$

ځ- $\log_3(x) - \log_3(5) = 3 \Rightarrow x = 135$ څ- $\log_5(12) = x \Rightarrow x = \frac{\ln(12)}{\ln(5)} \approx 1,544$

دریم

الف - $\log(x) + \log(y)$ ب - $-\log(a) - \log(b)$ پ - $\log(3)$

ت - $\frac{1}{2}\left[\log(2) + \log(x) + \log(y)\right]$ ټ - $\ln\left(uv^2\right)$ ث - $\lg(u)$

ج - $\lg\left(\frac{x\sqrt{z}}{y}\right)$ چ- $3\ln(2) - 1$ ح- $\ln(1-x) - \ln(1+x)$

خ - $2\log(x)$ څ - $\lg(u) - \lg(v)$ ځ - $2\log(x)$

څلورم:

الف - 3 ب - $2\ln(u) - \ln(3)$ پ - $\ln(1-x)$

ت - $\ln(y)$ ټ - $-2\ln(a) - \ln(2)$ ث - $-\ln(2+x)$

پنځم:

الف- $\log_3(4) = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}$ (W) ب- $\log_3(4) = \frac{\lg(3)}{\lg(4)}$ (F) پ- $\log_3(4) = \frac{\lg(4)}{\lg(3)}$ (W)

شپږم: $\log_a(b)$ او $\log_b(a)$ یو بل سره معکوس دي.

(د بیلګي په توګه $\log_5(25)=2;\ \log_{25}(5)=\frac{1}{2}$)

اوم:

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x)=-\frac{1}{4} \qquad \ln\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}\ln(x)=\frac{1}{8}$$

$$\ln^2(x)=(\ln x)^2=\frac{1}{16} \qquad \ln\left(x^2\right)=2\ln(x)=\frac{1}{2}$$

د لوګاریتم لومړی قانون د لوګاریتم دویم قانون	اتم: $\lg(4000)=\lg(4\cdot 1000)=\lg(4)+3$ $\lg(0{,}25)=\lg(1)-\lg(4)=-\lg(4)$

نهم:

$e^{2\ln(u)}$	$e^{\ln\left(\frac{u}{2}\right)}$	$\frac{1}{2}e^{\frac{\ln(u)}{2}}$	$e^{-\frac{\ln(u)}{3}}$	$2e^{\ln\left(u^2\right)}$	$e^{\ln(u)-1}$	$e^{\ln(t-1)}$
u^2	$\frac{u}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{u}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{u}}$	$2u^2$	$u\cdot e^{-1}$	$u-1$

لسم:

الف ـ $e^{\ln(u)+1}=e^{\ln(u)}\cdot e=u\cdot e$ ب ـ $\frac{2}{3}e^{-\ln(0{,}75u)}=\frac{2}{3\cdot e^{\ln\left(\frac{3}{4}u\right)}}=\frac{2}{3\cdot\frac{3}{4}u}=\frac{8}{9u}$

د توان او لوګاریتم قوانین

د توان قوانین د توان قوانین

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$
$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$	$a^0=1$	$\frac{1}{a^n}=a^{-n}$

د لوګاريتم قوانين و بنسټ e ته $\ln(b) = c \Leftrightarrow e^{c} = b$

$\ln(b \cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$	$\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c)$	$a = e^{\ln(a)}$	$e^{0} = 1$
$\ln\left(b^{c}\right) = c \cdot \ln(b)$	$\log_{a}(b) = \frac{\lg(b)}{\lg(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$	$\ln(1) = 0$	$\ln(e) = 1$

بيلګه:

$$\log_{5}(25) = x \Leftrightarrow 5^{x} = 25 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\log_{25}(5) = x \Leftrightarrow 25^{x} = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

۵ ـ ماتريکسونه او ديترمينانتونه

ما په خپل ستر کتاب کې دا موضوع پوره څېړلې، خو دا دلته غواړم په لنډه توګه د ماتريکس او ديترمينانت د کارولو ځايونو ته ګوته ونيسم، چې داسې ښه پوهور او ساده ليکل شوي دي.

د يوه ماتريکس تاکونی (پېژند يا تعريف) : يو له m ليکو rowاو n متو يا درزونوcolumn څخه جوړه څېره(شېما) د تيوپ **Typ (m; n)** ماتريکس يا **(m x n)** - ماتريکس بلل ګيري.

155

سرلیک

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

په a_{ij} ګې i لیکه ایندکس یا پېژندنخښه اوj مټه(ستن) – یا درز پېژندنخښه ده

د لیکنې ډول: $A=[a_{ij}]$ یا (a_{ij})

د ماتریکسونو لپاره د کارونې یا استعمال ځایونه:

۱. لاینیز برابرونسیستم:

I. $3x - 2y + 4z = 5$

II. $4x + y - 3z = 9$

III. $x - y - z = 1$

$$K = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

K .... د ځله وونو(ضریبونو) ماتریکس دی، دلته (3 x 3) - ماتریکس په ګوته کوي

$$E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

E ... غزېدنماتریکس یا غزېدلی ماتریکس، دلته (3 x 4) – ماتریکس دی

۲ . د مالوماتو شننه او انځورونه :

156

سرليک

د بېلګې په توګه : د ناستځايونو پلان، د ساعتونو پلان، ...مختلف مالوماتونه

	سګرټسکوونکي	نه سکوونکي
نارينه	211	283
ښځينه	143	428

$$M = \begin{pmatrix} 211 & 283 \\ 143 & 428 \end{pmatrix}$$

د ماتريکسونو په هکله د ازماېښت انځورونه :

1 ازمايې

0 نه ازمايې

Z... د نظم يا تنظيم ماتريکس

يادونه : په لاندې شيما کې په ليکه پراته نومونه دي او ولاړ يا په مته ليکلي هم کېدی شي نومونه يا خويونه وي، چې زه يې د پښتو کوونې څخه تېرېږم،چې ليکونکي يې هم ترې پوهېدنې ته ارزښت نه دی ورکړی او همداسې په خوښه يې څه رانيولي

	Zaloznik	Dichtl	Kranzmayer	Pirolt	Gratzer
Meter	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
Wrussnig	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
Sgonc	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
Wogrin	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
Pippan	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**

157

سرلیک

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

۳. د اړیکو جوړښتونه:

د ځوانانو د ګروپونو غړي ...... A_1, A_2, A_3, A_4

په زړه پورې نه 0 0

په زړه پوې 1 1

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	0	1	1	0
A_2	1	0	0	1
A_3	1	0	0	0
A_4	1	1	0	0

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

د ماتریکسونو بڼه:**Typen von Matrizen**

۱. ځلوری (مربع) ماتریکس:

یوه شیما یا څېره ده ، په کومه کې چې د لیکو ګڼون(تعداد) **m** د مېو(ستنو) یا درزونو د ګڼون(تعداد) **n** یو بل سره برابر وي، ځلوری ماتریکس(مربع-) بلل کیږي.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{10} & \mathbf{20} & \mathbf{30} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

(3 x 3) - ماتریکس یا د ۳-مې درجې ځلوری ماتریکس

a) دربګوړي ماتریکس:

یو ځلوری (مربع) ماتریکس، چې د دوه کونجترې کښته لور ته ، همداسې پورته لور ته ټول توکي صفر وي دربګوړی ماتریکس بلل کیږي

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$$

پورته دربګوړی ماترکس

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{6} & \mathbf{8} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$$

کښته دربګوړی ماتریکس

b) د دوه کونجترې ماتریکس

یوه ځلوری ماتریکس، په کوم کې چې ټول توکي صفر وي، بې له اصلي دوه کونجترې ، د دوه کونجترې ماتریکس بلل کیږي.

که د اصلي دوه کونجتړې تول توکي ارزښت ۱ ولري، نو يوون ماتريکس (يووالي -) مو مخ ته پروت دی يا دا يوي ماتريکس (د واحدونو) ماتيکس بلل کيږي.

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

د دوه کونجتړي ماتريکس

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

د يوون – يا يووالي ماتريکس

۲ . صفرماتريکس

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

۳ . ليکه ماتريکس يا د ليکو ماتريکی. **m=1** او n>1

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

۴ . د متې - يا درز ماتريکس **n=1** او m>1

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

۵ . سکالار: **m=n=1**

رييل ګڼونه ا ... a_{11}

د ماتریکسونو سره شمېرنه.

۱ . د ماتریکسونو زیاتون او کمون

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D = A - B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

د ماتریکسونو د زیاتون لپاره لاندې ویناوې باور لري:

زیاتون اسوشیاتیو(سره یوځای تړلی) دی یانې

(A+B) + C = A + (B+C) $\Rightarrow \Rightarrow$

زیاتون کموتاتیو یا بدلېدونکی دی

A+B = B+A $\Rightarrow \Rightarrow$

صفر ناپیلی - یا بې اغیزه توکی دی

A+0 = 0+A = A $\Rightarrow \Rightarrow$

د هر ماتریکس لپاره یو په خپ(مخامخ – یا برعکس) ماتریکس شته د کوم لپاره، چې باور لري:

A+(-A) = -A+A = 0 $\Rightarrow \Rightarrow$

ډېرى، چې ټیک دا پورته خویونه ولری (د بېلګې په توګه: N, Z, Q, R)ګروپونه بلل کیږي.

۲ . د یوې ماتریکس ځل د یوه سکالار سره

$$(-3)\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\\ 6 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -9\\ -12 & -15\\ -18 & -21\end{pmatrix}$$

۳ . د ماتریکسونو ځاه ونه یا ثل :

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\\ 3 & 6 & 7\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix} \qquad C=A\cdot B=\begin{pmatrix}36 & 41\\ 53 & 59\end{pmatrix}$$

(**2** x 3) (3 x **2**) لاس ته راوړی ماتریکس: (**2 x 2**)

وړاندیز دی، چې ددې لپاره دې د ،، فالک ،،**"Falk"** شېما وکاروي

			5	**4**
			4	**2**
			2	**5**
2	**4**	**5**	**36**	**41**
3	**6**	**7**	**53**	**59**

$$\boxed{a_{ij}\cdot b_{jk}=c_{ik}}$$

د دیترمینانتونو شمېرنه

تاکندوي یا پیژند (تعریف): د یوه څلوری ماتریکس $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ چې نظم یې ۲ دی، د دیترمینانت **det(A)** لاندې هغه ریبل ګڼ پوهیږو، چې د $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$ قانون له مخې جوړ وي.

$$\mathbf{det(A)} = \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} \end{vmatrix} = \mathbf{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

په خبرو : د اصلي دوه کونجتړې توکوځل ترې کم د څنګيزې دوه کونجتړې توکو ځل(ضرب)

د کاروني بېلګه: د برابرون سیستم دې د کرامر قاعدې**„Cramerschen Regel“** له لارې اوبی یا حل شي.

I: 5x + 2y =18
II: 15x – 5y =10

اوبیونه: D دې د ځله وونو ماتریکس دیترمینانت وي.

$$D = \begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{15} & \mathbf{-5} \end{vmatrix} = \mathbf{5 \cdot (-5) - 2 \cdot 15 = -55}; \quad \mathbf{D \neq 0},$$

برابرونسیستم د یواځنی اوبیونې وړ دی یا یواځنی اوبیوړ دی

$$D_x = \begin{vmatrix} \mathbf{18} & \mathbf{2} \\ \mathbf{10} & \mathbf{-5} \end{vmatrix} = \mathbf{18 \cdot (-5) - 2 \cdot 10 = -110}$$

$$\mathbf{D_y} = \begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{18} \\ \mathbf{15} & \mathbf{10} \end{vmatrix} = \mathbf{5 \cdot 10 - 18 \cdot 15 = -220}$$

„<u>Cramersche Regel</u>“: $D \neq 0$ د کرامر قاعده

$$x = \frac{D_x}{D}\text{،}\quad y = \frac{D_y}{D}$$

x= 2; y= 4

د یوې 3x3 - ماتریکس د دیترمینانت شمېرل

a) a) Regel von Sarrus: **د ساروس قاعده**

<u>Beispiel</u>:بیلګه

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$= 1\cdot2\cdot1 + 2\cdot1\cdot1 + 3\cdot4\cdot2 - [2\cdot4\cdot1 + 1\cdot1\cdot2 + 3\cdot2\cdot1] = 28 - 16 = 12$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \; =$$

-

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31})$$

بېلګه<u>Beispiel</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

د A دیترمینانت غواړو پیدا کړو

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 7 & 8 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix} =$$

$$= 7 \cdot 2 \cdot 0 + 8 \cdot 3 \cdot 0 + 9 \cdot (-1) \cdot 1 - 9 \cdot 2 \cdot 0 - 7 \cdot 3 \cdot 1 - 8 \cdot (-1) \cdot 0 = -9 - 21 = -30$$

ب) ب) د ليكي يا متي پسي وديزونه

بېلګه. ۲ ـمې ليکې پسې

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 5 \\ -7 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 8 & -6 & 5 \\ -7 & 2 & -1 \\ 3 & -9 & 4 \end{vmatrix} = -(-7)\cdot\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ -9 & 4 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 3 & -9 \end{vmatrix}$$

=7 (+21)+2 (+17)+54 =235

د مخنخښي قاعده

د ګڼونو یا اعدادو نخښې د اندکسونو یا پیژندنښو جوړه زیاتون سره "+„ او "-„ د ناجوړه پیژندنخښو د زیاتون سره

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

د ۱ لیکي پسي اوبیونه

$$a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

د کوفاکتورونو یا کوځله وونو α_{ij} شمېرنه:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

که **باور ولري، نو α_{ij} د a_{ij} کوفاکتورونه بلل کیږي.**

د α_{ij} لپاره باور لري:

$$\alpha_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix};\ \alpha_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix};\ \alpha_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

او داسې نور.

له دې امله باور لري: $\det(A)=\alpha_{11}\cdot a_{11}+\alpha_{12}\cdot a_{12}+\alpha_{13}\cdot a_{13}$

بېلګه: ټول کوفاکتورونه وشمېرئ

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\alpha_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2;\ \alpha_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2;\ \alpha_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1$$

$$\alpha_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2;\ \alpha_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1;\ \alpha_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0$$

$$\alpha_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5;\ \alpha_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4;\ \alpha_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1$$

بیلګه: د دویمې متې د ودې پسې $\det(A)$ وشمېرئ

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 4\\ 2 & -5 & 1\end{pmatrix}$$

$$\det(A)=0\cdot\alpha_{12}+0\cdot\alpha_{22}+(-5)\cdot\alpha_{32}=(-5)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-10$$

بېلګه: $\det(A)$ **وشمېرئ**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 8\\ -2 & 1 & 5\\ -3 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

داسې چې د دريمې متې څخه د دويمې متې دوه ځله وکاږئ يا کم کړئ:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&4&8\\-2&1&5\\-3&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&8-2\cdot4\\-2&1&5-2\cdot1\\-3&2&4-2\cdot2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&0\\-2&1&3\\-3&2&0\end{vmatrix}=$$

$$3\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1&4\\-3&2\end{vmatrix}=-42$$

د يوه ځلورى ماتريکس ادجونګيري

وي دې $A=[a_{ij}]$ يو n - ځلوريېز ماتريکس او α_{ij} دې د a_{ij} کوفاکتور وي، نو دی

$$\text{Adjungierte}\quad A=\operatorname{adj}(A)=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{21}&\ldots\ldots\alpha_{n1}\\\alpha_{12}&\alpha_{22}&\ldots\ldots\alpha_{n2}\\\ldots\ldots&\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\\\alpha_{1n}&a_{2n}&\ldots\ldots\alpha_{nn}\end{pmatrix}.$$

د ژوري پاملرنې لاندې دې وي، چې د **A** د **i** -مې ليکې(متې) توکو کوفاکتور د **adj(A)**

د **i** – مې متې (ليکې) توکې دي

بيلګه : د ماتريکس A **لپاره د** A **اديونګېري وشمېرئ**

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&2\\3&3&4\end{pmatrix}$$

$$\alpha_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}3&2\\3&4\end{vmatrix}=6;\quad \alpha_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix}=-2;\quad \alpha_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2&3\\3&3\end{vmatrix}=-3$$

$$\alpha_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}=1;\quad \alpha_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1&3\\3&4\end{vmatrix}=-5;\quad \alpha_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1&2\\3&3\end{vmatrix}=3$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad \alpha_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad \alpha_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Inverse einer Matrix A: د یوه ماتریکس په ځېټ یا په ښتماتریکس

ټاکندوی(پېژند یا تعریف): که A او B ځلوری ماتریکسونه وي، د کومو لپاره چې باروړ ولري $A \cdot B = B \cdot A = I$ ، نو **B** د**A** **په ښېټ** بلل کیږي او ددې لپاره لیکو $B = A^{-1}$ (،، B د A په ښټ یا برعکس سره برابره ده،،) .

دا هم باور لري:_ $A = B^{-1}$

Beispiel: بېلګه

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = ?$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_3; x_2 + 2x_4 \\ 3x_1 + 4x_3; 3x_2 + 4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

169

$$I : x_1 + 2x_3 = 1$$

$$II : 3x_1 + 4x_3 = 0$$

$$-2x_3 = -3 / : (-2)$$
$$x_3 = \frac{3}{2}$$

$$x_1 + \frac{6}{2} = 1 \,|\, -3$$
$$x_1 = -2$$

$$I : x_2 + 2x_4 = 0$$
$$II : 3x_2 + 4x_4 = 1$$

$$-2x_4 = 1 / : (-2)$$
$$x_4 = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 + (-1) = 0 / +1$$
$$x_2 = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

د ادجونګيري کارونې یا استعمال له لارې د په څټجوړونه:

Inversenbildung unter Benutzung der Adjungierten:

$$\det(A) \neq 0 \,; \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$$

بېلګه ؛ د ماتریکس A لپاره په څټماتریکس وشمېرئ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

170

سرليک

$$adj(A)=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix};$$

det(A)=-7;

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

د ماتريکسونو سره د برابرونسيستمونو اوبيوني يا خلونه:

$$\begin{aligned} 5x+3y-7z&=4 \\ 2x-8y+z&=6 \\ -x+9y+4z&=5 \end{aligned}$$

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ 2 & -8 & 1 \\ -1 & 9 & 4 \end{pmatrix};H=\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix};X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

171

$$\mathbf{A \cdot X = H \,/\cdot A^{-1}} \quad \textbf{von} \quad \textbf{links}$$
$$\mathbf{A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot H}$$
$$\mathbf{I \cdot X = A^{-1} \cdot H}$$
$$\mathbf{X = A^{-1} \cdot H}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ 2 & -8 & 1 \\ -1 & 9 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{879}{302} \\ \frac{53}{302} \\ \frac{239}{151} \end{pmatrix}$$

د کینې لوې د A^{-1} سره ځلکیږي، یانې $\mathbf{A \cdot X = H \,/\cdot A^{-1}}$

د کینې لوې د A^{-1} سره ځلکیږي، یانې $\mathbf{A \cdot X = H \,/\cdot A^{-1}}$

نو لرو

$$\mathbf{A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot H}$$
$$\mathbf{I \cdot X = A^{-1} \cdot H}$$
$$\mathbf{X = A^{-1} \cdot H}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ 2 & -8 & 1 \\ -1 & 9 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{879}{302} \\ \frac{53}{302} \\ \frac{239}{151} \end{pmatrix}$$

اوبی<u>Lösung</u>: **x = 2,91; y = 0,17; z = 1,58**

172

سرلیک

تمرینبېلگه: لاندې برابرونسیستم په درې ډوله اوبی یا حل کړی

$$\text{I:}\quad 3x - 5y + z = 0$$

$$\text{II}\quad -4x + 5y - z = -3$$

$$\underline{\text{III:}\quad x + y + z = 6}$$

۱) ۱) د د کاوس د له منځه وړلو له لارې

1) 1) Gauß'sches Eliminationsverfahren

۲) ۲) د کرامر قاعدې له لارې

2) 2) Cramer´sche Regel

۳) ۳) د ماتریکس شمېرنې له لارې

3) 3) mittels Matrizenrechnung

Gauß'sches Eliminationsverfahren: *د ګاوس د له منځه وړنې لار یا طریقه*

$$\text{I:}\quad 3x - 5y + z = 0$$

$$\textbf{II:}\quad -4x + 5y - z = -3$$

$$\underline{\mathbf{x = 3}}$$

$$\text{II:}\quad -12 + 5y - z = -3$$

$$\textbf{III:}\quad 3 + y + z = 6$$

$$9 + 6y = 3$$

$$\underline{\mathbf{y = 2;\ z = 1}}$$

Cramer´sche Regel: د ګاوس قاعدې له مخې

$$\text{I:}\quad 3x - 5y + z = 0$$

$$\text{II:}\quad -4x + 5y - z = -3$$

$$\underline{\text{III:}\quad x + y + z = 6}$$

173

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

$$D_Y = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$D_Z = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D} \qquad z = \frac{D_z}{D}$$

x= 3; y = 2; z = 1;

mittels Matrizenrechnung:

د ماتریکس شمېرنې په مرسته

I: 3x - 5y +z = 0

II: -4x + 5y –z = -3

III: x + y + z = 6

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

174

سرلیک

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

-

د ښوونې(ثبوت) لارې یا متودونه

یاددونه: دا درس د افغانستان په نصاب کې نه شته،خوما لازم وګڼل چې دلته یې راوړم، ځکه چې په پولسم ټولګي کې زده کوونکي پرې پوهيدي شي.

په شميرپوهنه کې داسي مخ په وړاندې ځو، چې د ځينو نيونو يا فرضيو په فرمولولو سره، غوښتنو يا ښوونو او يا لکه تراوسه د ثبوتولو پرابلم (د ګڼپوهنې جملې په څير) منځ ته راځي، چې دا نيونې او غوښتنې ويناوې دي. په جملو کېد دې ماتماتيکي يا شميرپوهنيزه تړنه بيا ايمپليکيشن يا لاس ته راوړنه ده(مخ ته دې وکتل شي)ياني $A => B$ دا غوښتنه د ريښتيا ارزښت w غوښتنه B کې نغښتې او دا اوبې يا حل B له V او د دې تراوسه اوبی- يا حل شوو جملو لاس ته راځی. د دې لاس ته راوړنو لپاره بيلابيلې لارې شته ، چې په لاندې کې يې څيرو

۸ ۰ ۱ سیده یاسیخه (مستقیمه) ښوونه

په سیده ښوونه (ثبوت) کې سړی له یوې وینا A څخه مخ ته ځي، چې رښتیاارزښت یې څرګند دی او په دې لاس ته راوړنې پسې د B وینا لاس ته راوړي۰

دا وینا B هم رښتیا ده، ځکه چې له یوې رښتیا پریمیسې Prämisse (نیونې یا فرضیې) څخه رښتیا کونکلوزیون Konklusion (لاس ته راوړنه یا نوره هم ښه ښوونه یا ثبوت)(د اینمپلیکیشن ۱ او ۲ لیکه د رښتیاارزښت په جدول کې) له یوې رښتیا پریمیسې څخه د نارښتیا کونکلوزیون لاس ته راوړنې نارښتیا دي (ایمپلیکیشن رښتیا ارزښت ۲ ــم جدول)۰

بیلګه : سیده اوبیونه یا حل:

نیونه V : $x \geq 1$

غوښتنه B : $6x+3 \geq 3x + 6$

اوبی : وینا A ، چې رښتیا ارزښت w یې جوت دی، نیونه یې $x \geq 1$ ده۰ له 3 سره ځل له امله لاس ته راوړنې لرو چې په لاندې ډول دی$3x \geq 3$: د 3 زیاتون له لارې لرو: $3x + 3 \geq 6$ د $3x$ زیاتون له امله لاس ته راځي:

$6x + 3 \geq 3x+6.$

بیلګه:

د یوه ناټیک اوبیونې یا حل کارونه (متود)

د $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$ ښوونې دی

د ښوونې وړ وینا څخه لاندې لاس ته راوړنې لرو:

$(a+b)^2 \geq ab$

$a^2+b^2+2ab \geq 4ab$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

لاس $$(a-b)^2 \geq 0$$

ته راوړل شوې ویناوې $(a-b)^2 \geq 0$ بې بندیزه رښتیا دي۰ مګر دا د ښوولو وینا یواځې د شرایطو $a \geq 0, b \geq 0$ لاندې باور لري۰ له دې امله که له رښتیا وینا څخه غوښتل شوې یا د ښوولو ویناو ته نه شي راتلی(سیده ښوونه) او په ناسداِه یا غیرمستقیم ه ښوونه یا اوبیونه باندې استعمال شي نو ګټوره به وي، چې په لاندې توګه تر څیړنې لاندې ونیول شي۰

۸ ۰ ۲ ناسیده ښوونه یا - ثبوت:

په ناسیده ښوونه کې له یوه نفي یا نیګیشن یا نه والي څخه مخ ته ځو، چې A « ناغوښتنه» او له دې یوه وینا B لاس ته راوړل کیږي، کومه چې نارښتیا ده۰ وینا یعنې نفیې غوښتنه یا ثبوت هم نارښتیا دی، ځکه چې له یوې نارښتیا نیونې څخه یوه نارښتیا ښوونه یا ثبوت لاس ته راتلی شي(د ایمپلیکیشن څلورمه کرښه).

له یوې رښتیا نیونې څخه د یوې نارښتیا ثبوت لاس ته راوړنه نارښتیا ده۰ (د ثبوت د

رښتیا جدول څخه) که د غوښتنو نفی نارښتیا وي، نو غوښتنه بیا په دې اوبیونې یا حل کې رښتیا ده۰

بیلګه : ناسیده ښوونه یا ثبوت

نیونه V : a , b دې رییل ګڼونه وي او وي دې: $0 \geq b$ $a \geq 0,$

ښوونه یا غوښتنه B :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

اوبیونه : د غوښتنو نفیې ده $$\frac{a+b}{2} \prec \sqrt{a.b}$$

د پورته نابرابرون له څلورې یا مربع کولو له امله لاس ته راوړنه لرو:

$$(a+b)^2/4 < a.b$$

177

دواړه لورې له څلورو سره صربوو، نو لاس ته راځی

$$(a+b)^2 < 4a.b$$

له څلوری وتنې یامربعوتنې څخه لاس ته راځي:

$$a^2+b^2+ 2ab < 4ab$$

په دواړو لورو د 4ab کمونې څخه لاس ته راځي

$$a^2-2ab+b^2 < 0$$

د نابرابرون کینه لور د څلوری ۰ مربع په بڼه لیکل کیدی شي او هیڅکله له صفر څخه نه شي کوچنی کیدی۰ دا په دې مانا، چې $(a+b)^2 < 0$ نارښتیا دی یا غلط دی، نو له دې سره $(a+b) < ab$ نارښتیا دی یانې

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

رښتیا دی ۰

۲ – غوښتنه B :د ۲ رېښه یا جذر $\sqrt{2}$ ایرشنل دی

اوبیونه یا حل : د غوښتنې نفیې ده، چې : د ۲ رېښه $\sqrt{2}$ ریشنل ګڼ دی (د ریشنل ګڼونو لپاره دې برخه ۳ وکتل شي)، نو باید بیا دوه ټولریشنل ګڼونه q, p, د q≠0 سره شته وي، چې دا باوري شي: $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$

له دې پورته برابرون سره p^2 یو جوړه((جفت) ګڼ دی۰ نو له دې امله p هم یو جوړه ګڼ دی، ځکه چې یواځې د جوړه ګڼ مربع یا څلوری جوړه کیدی شي $p=2p'$ له مربع یا څلوریځ کولو او پر ځای اینوولو لاس ته راځي:

$$P^2 = 4p'^2$$،

$$2q^2 = 4p'^2$$

$$q^2 = 2p'^2$$

له اخرنی برابرون لاس ته راځي، چې q هم یو څلوری یا مربع ګڼ دی٠ په دې پسې لرو p او q پر۲ ویشونی دی، یانې پرویشپردی نه دی٠ که پرویشپردي ټول ګڼونه p اوq له $\sqrt{2}$

سره شته نه وي، نو دا ډول ټولګڼونه نه شي کیدی، چې شته یا موجود وي٠

۸ ٠ ۳ د پوره ایندکشن له لارې ښوونه

د پوره ایندکشن ثبوت یا حل د هغو غوښتنو لپاره کارول کیږي، چې د یوه ټاکلي ګڼ n0 (صفر باید لږ. د ن د پېښی لاندې ولیکل شي) څخه د ټولو پیدایښتي ګڼونو لپاره باوري کیدی شي٠ یانې دلته نوینه داده، چې یوه وینا د لپاره که باور ولري، نو دا بیا د ټولو پیدایښت ګڼونو لپاره باور ي کیدی شي٠

بیلګه ۱ :

د ټولو $0 \geq n$ لپاره ۲ په توان دn له صفر لوي یا له صفر بسره برابر دي یعنې باور لري: $2^{n} \geq 0$

بیلګه : د ټولو $n \geq 0$ لپاره باور لري $1+3+5+\dots 2n+1) = n^2$

د پوره ایندکشن د ښوونې لپاره د « پوره ایندکشن پرینځیپ بنسټ» مخ ته پروت دی:

که یوه وینا دn= n0 یا(په لاندې، که ن،ج، ته پورته شو،نو صفر په پښه کېلیکل شوی) $n = n_0$ لپاره باور ولري او که د دې وینا د یوه په خوښه پیدایښتي ګڼ n = k لپاره اور لرلو څخه د n = k+1 لپاره باوریوالی ترې لاس ته راشي، نو دا وینا د ټولو پیدایښتي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ریښتونې ده ٠

په دې پسې په ترتیب د ایندکشن ښوونه په دوه پلونو یا قدمونو سرته رسیږي

۱ - د ایندکشن پیل

179

ښوول کيږي، چې دا وينا د $n \geq n_0$ لپاره باور لري

۲ – د ايندکشن پل

اوس بايد يو ايمپليکيشن يا لاس ته راوړنه وښوول شي. له دې امله د ايندکشن پل يا له برخه پلونو جوړ دئ

۲ الف: د ايندکشن نيونه :

نيول کيږي، چې وينا د $n = k \geq 0$ لپاره باور لي او دا نيونه په V فرمولبند کيږي

يادونه V د نيونې لپاره ځاي پرځاي کيږي يا راوړل کيږي.

۲ ب – د ايندکشن غوښتنه:

غوښتل کيږي، چې دا وينا د $n = k+1$ لپاره باور لري او دا غوښتنه په B فرمولبندي کوو. دا په ګوته کوو، چې B دلته د غوښتنې پرځاي ليکو

۲ ج – د ايندکشن ښوونه :

ښوول کيږي، چې B له A څخه لاس ته راځي: $A \Rightarrow B$

بيلګه ۱ :

۱ – د $n = 0$ لپاره باور لري $2^0 = 1 > 0$

۲ . ۱ . V ته :

$$2^k > k$$

و ۲ . ۲ B ته

$$2^{k+1} > k+1$$

۲ . ۳ له $B \Rightarrow V$: له $2^k > k$ او $1 < 2$ څخه د زياتون له امله لاس ته راځي :

$$2 + 2^k > k + 1$$

او له دې لاس ته راځي: $2.2^k > k+1, 2^{k+1} > k+1$

بيلګه ۲ :

۱ ۰ د $n = 1$ لپاره باور لري $1 = 1° = 1$

و ۲ ۰ ۱ V ته: $1+3+5++\ldots+(2k-1) = k^2$

و ۲ ۰ ۲ B ته:

و ۲ ۰ ۳ B <= V ته: له نيونې څخه د زياتوون 2k+1 زياتونې او له دې د ښي خوا د يوه بينومځلورى(-مربع) په څير انځورونې څخه لاس ته راځي:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1=k^2+2k+1$$

او له دې د ښى خوا انځورونې څخه د بينوم ځلورى(-مربع) لاس ته راځى :

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)= (2k+1)^2$$

يادونه : د V او B پر ځاي کړى شو، چې نيونه او غوښتنه وليکو، ياني مورږ درې څه لرو، چې نيونه غوښتنه او ښوونه ده۰ په هغه ورسره بلد ډول يې ښوونه د يوه پارابلم حل دى، چې ما اوبى يا اوبيونه بللى(اوبي پښتو ده او ښه کره، همدې وي يا لغات ته مناسب خپل د پښتو نوم دى، چې ورسره بلد هم يو، لکه ملګوبى، خړوبى، چې موخه ترې همدا اوبى دى او په نورو ژبو کې هم همداسې دى)

دلته د شميرپوهنې سم اند درس ته د پاى ټکى ږدو، کۀ نور څه مو ښه مخ ته راغله هغه به بيا د ترڼې په ډول ورسره مل کړو۰ ستاسو وړانديزونو ته هم سترګى په لار يم۰

۸ . ۴ تمرینونه

۱ – سیده وښايي

الف) له $a + 1/a = b$ څخه لاس ته راځي $a^3 + 1/a^3 = b^3 - 3b$

ب) د دوه تیرو کونجونو α ، β لپاره صدق کوي

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$$

۲ – ناسیده وښايي :

الف) د ټولو x لپاره ، چې وي $0 < x < \infty$ ، صدق کوي

$$(3x - 4) / (2x + 4) > 1$$

ب) $\sqrt{2}$ یو ایریشنل ګڼ دی

۳ – د پوره اندکشن له لارې يې وښايئ

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{(n+1)\,n}{2}.$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{(2n+1)(n+1)\,n}{6}.$

c) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$

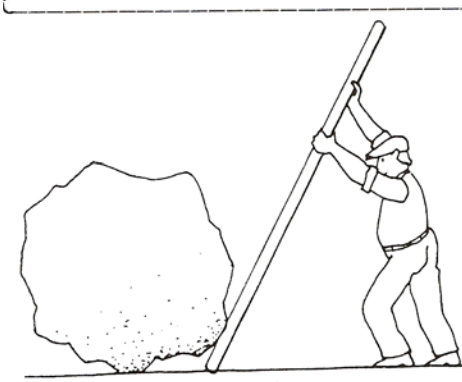
ؚ کتورشمیرنه

نځورونه

پیلبیلګه

یوه درنديږ تیګی ته څنګه سړی حرکت ورکولی شي؟ طبعآ کیدی شي چي ورل یی وازمائل شي، مګر دا پوره ستونځی لري او دا لاندیږ طریقه یی ساده ده: د تیګی لاندیږ سړی یوه تخته یا اړم ننبلوي او یا ورلاندیږ کوي، د بل سر نه یی لاندیږ لور ته زور کوي یا لاندیږ لور ته زور په واردوي. تیګه یو څرخونحرکت باندیږ راځي.

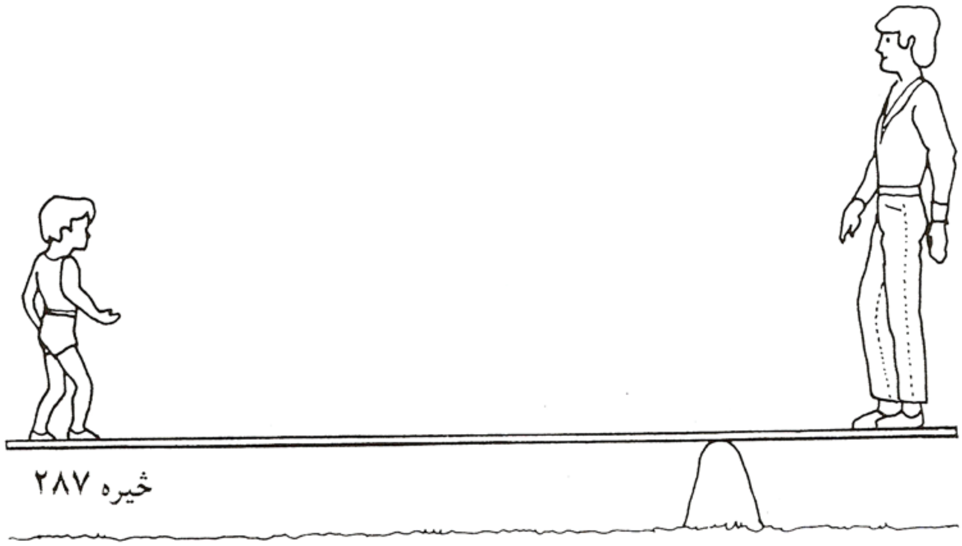
ددیږ حالت لپاره د اړم قانون صدق کوي« زور د زوراړم = بار د بار اړم» . که تیکه په پوره اندازه اوږده (او ستابیل) وي، کیدی چي یو ډیر نازورور سړی هم کړی شي، چي خورا درانده بارونه پورته کړي.



خیره ۲۸۶

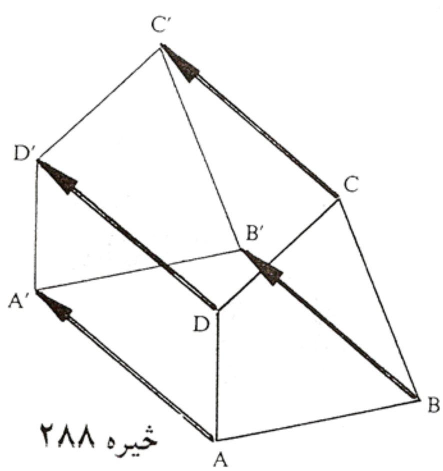
یا دا حالت د پورته پیلبیلګي سره ټیك ؤښانه څرګند شوی ؟ هیڅ نه پیښیږي، نه څوك په اړم ښکته یا پورته زور ونه ـړي بلکه یا راکښ یا وریوري وهي. ـوږ باید دا پوښتنه نوره هم روښانه کړو ؚ د زورارزښت سره دزورتاثیر لور هم په ـپله لوبه کی ورداخل کړو. ددیږ هدف لپاره وکتور سره شمیرنه کړي.

183



شیره ۲۸۷

تعریف : وکتور د یوه ارزښت او یوه لور سره تعریف دی. تل د یوه غشي په شیر انځوریږي. اوږدوالی د وکتور ارزښت (ګڼ ارزښت) ، په هواکی یی ځای لور او د غشي څوکه د وکتورلور موخه یا هدف ښایي.



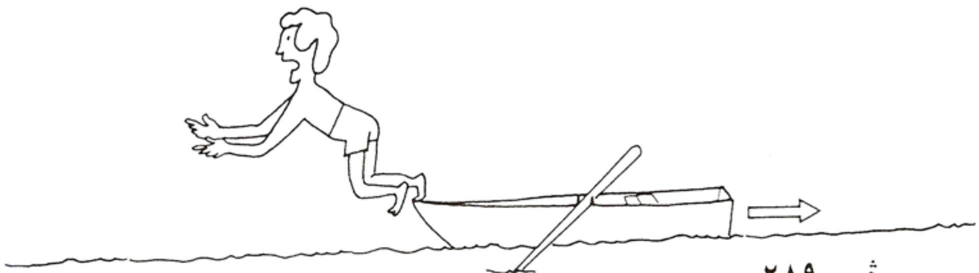
شیره ۲۸۸

دوکتورونو لپاره د کارونی ساحی

ګڼونه د مخنخښبی سره کیدی شي د وکتور په حیث واضح شي. په فزیک کی کښول، لکه زورونه، سرعتتونه، لاري کیدی شي د وکتورونو په شیر انځور شي. (د جلالکوټ څخه و

شیره ✓ کښول په وکتور سره په ښنه کیږي

و هسکی مینی ته راښایی، چی دا لار دا دوه ځایونه سره ونخلوي او دا هم راښایي چي څومره اږده ده. وکتور دا را په ګوته کوي، چی ایا څوك له جلاکوټ څخه هسکی مینی ته ځي او که له هسکی مینی څخه جلالکوټ ته)

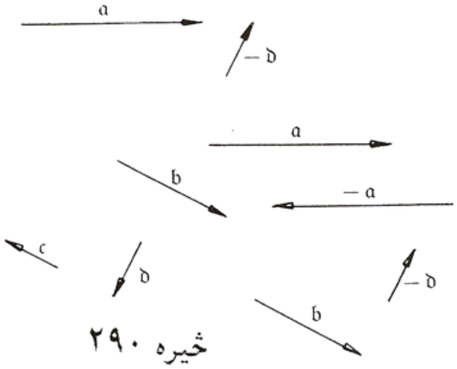


ځیره ۲۸۹

داچي یو وکتور د خپل پیلټکي او پایټکي سره ورکړ شوی دی، کیدی شي چی دا ټکي هم د هغه په انځورونه کی استعمال شي.

تعریف: هغه وکتور چي له ټکي P و ټکي Q ته لاربښودوي، د $\overrightarrow{PQ}$ سره په نخښنه کیږي.
بل ډول لیګدودونه یی دي: $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = \vec{a}$.

په راکښلو سره که ټکی 'P د P ځیره او ټکي 'Q د ټکي Q ځیره وي، نو د $\overrightarrow{PQ}$ اوږدوالی او لورد $\overrightarrow{P'Q'}$ یو بل سره برابر دي. له دې امله دا باید برابر ولیدل شي یا وګڼل شي. یو وکتور له دې امله یو غشی نه دی بلکه ډیر یوبل سره غبرګ او کوګروایننخ غشي دي. له دې امله د ورته ټولګي څخه هم غبریدی شو. (دا دې څما په لمړي د شمیتپوهنی کتاب کي وکتل شي)



خیره ۲۹۰

خیره وکتورو نه د ایکویوالنځتېولګی
په خیر: دوه وکتورونه ټیك هلته سره برابر دي، که هغه همغه ارزښت(اوږدوالی) او همغه لور ولري.

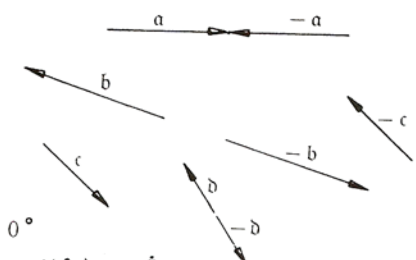
تعریف
د **a** مطلقه ارزښت $a = |\mathbf{a}|$ دی. a
تل یو نامنفي ګڼ دی .
وکتورونه د ارزښت ۱ سره مور یوونوکتورونه یا واحدوکتورونه بولو.
وکتورونه د همغه ارزښت سره مګر د مخامخ لور سره مخامخ یا په ځټ وکتورونه بلل کیږي:

$$|\mathbf{a}| = |-\mathbf{a}| = a$$

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = -\overrightarrow{QP} = -(-\mathbf{a})$$

یواځنی وکتور د 0 (صفر) ارزښت سره صفروکتور **0** دی :

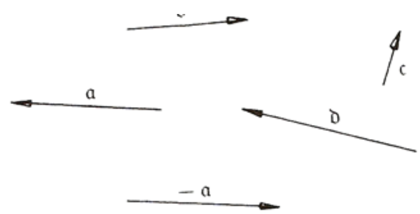
$$\overrightarrow{AA} = \mathbf{a} \Rightarrow |\overrightarrow{AA}| = |\mathbf{a}| = 0$$



خیره ۲۹۱

دا چې وکتورونه له ټکي وټکي ته لارې روښانه کوي، کیدې شي چې د وکتورونو د توضیح لپاره کواوردینات یا پروت ولاړ سیستمونه (محورونه) هم وکارول شي:

تعریف: وکتورکواردینات د پیل او پای ټکو توپیر یا کمون څخه لاس ته راځي



خيره ۲۹۲

پـه هواره کي : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix}$

پـه هوا کی : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix}$

خيره وکتورونه او د هغوي ارزښتونه(اوږدوالی):

$|\mathbf{a}| = |-\mathbf{a}| = 2{,}5\ ;\ |\mathbf{b}| = 2\ ;\ |\mathbf{c}| = 1\ ;\ |\mathbf{v}| = 3$

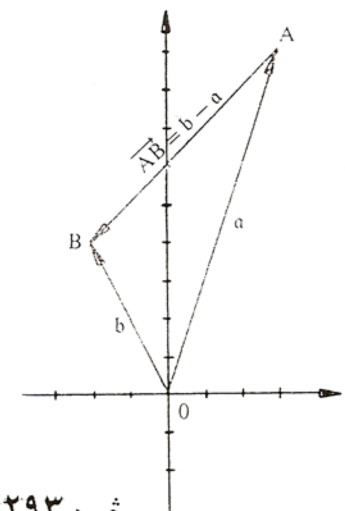
بيلګي:

وي دې $A(3|9)$ او $B(-2|4)$ پيل-او پايټکي . نو د A او B څخه ټاکلی وکتور کواوردينات په لاندې ډول لاس ته راځي :

$$a = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad b = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$-c = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 9-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$



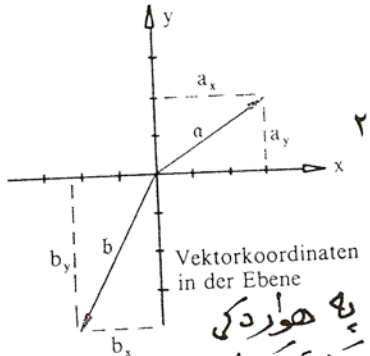
خيره ۲۹۳

جمله: د وکتور ارزښت د پيتاګوراس له جملی څخه لاس ته راځي او دا د يوګونو کواودیناتو له لارې :

پـه هواره کی: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

ش

په هوا کې: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$



شیره ۲۹۴

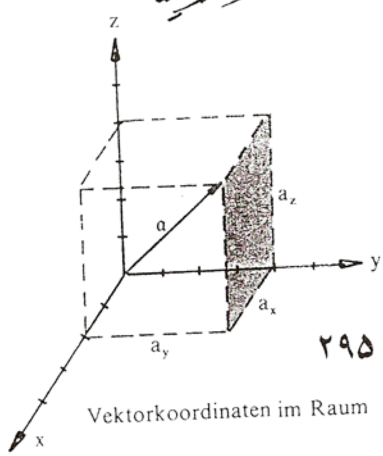
په هوارډکې
وکتورکواوردینات

بیلګې :

$$a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |b| = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11{,}31$$

$$c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |c| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{77} \approx 8{,}77$$



شیره ۲۹۵

Vektorkoordinaten im Raum

په هواکې
وکتورکواوردینات

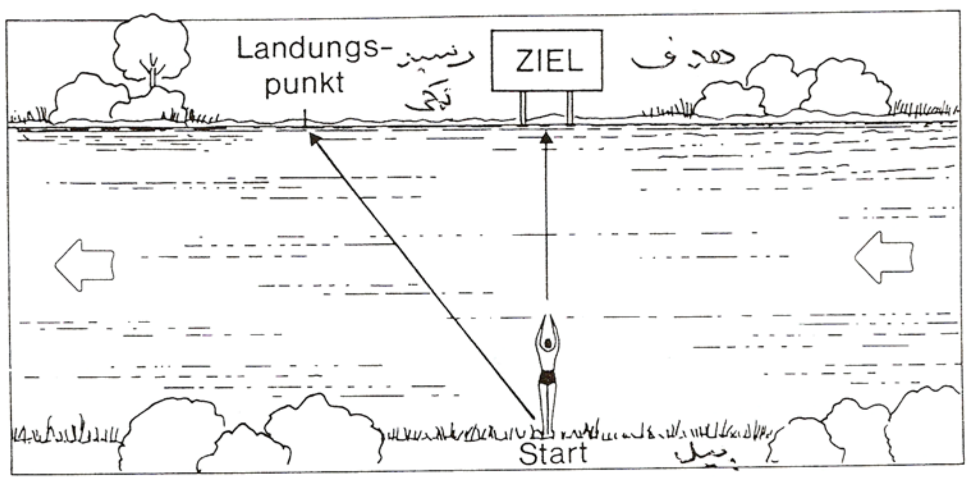
وکتورزیاتون او s–ځلوون یا ضربول

پیلبیلګه: یو لامبووهونکی د سین بلې لور ته د سین په سور یا پلنو لامبی، دا په دې مانا چې اوبه روانې دي. سره له دې چې دا تل سیده لامبي ، دا نه شي کولی چې هغه د لمبا ځاي ته مخامخ ځاي ته ولمبیدی شي.د روانو اوبو څخه د ځان سره ووړ کیږي. په ټولیزه –

188

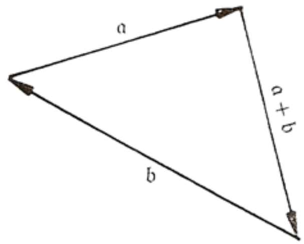
یا عمومي توګه ده یو مائل حرکت وکړ یا مایل یي ولمبل، کومکی چی د ده د لمبا سرعت او د سین سرعت یو په بل زیات شوي دي.

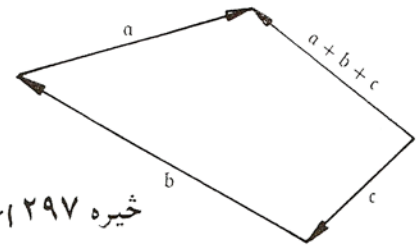
ګرافیکی د وکتورزیاتون داسی صورت نیسي، چی د دواړو سرعتونو وکتورغشي په خپلو پیل ټکو یو په بل ږدي او دا هر یو د یوه غبرګ اړخیز سره یوځایی وصل کوي. د غبرګ اړخیز نیمی د دواړو سرعت وکتورونو زیاتون ، چی له پیل ټکی پیل کیږي انځوروي. یعنی د لامبووهونکي او د اوبو د سرعت زیاتون ، څمور په څیره کی «



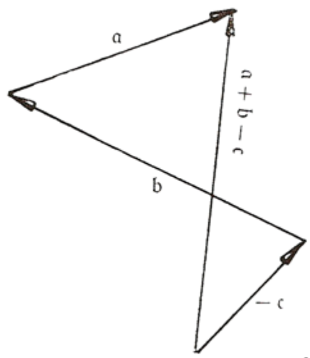
څیره ۲۹۶

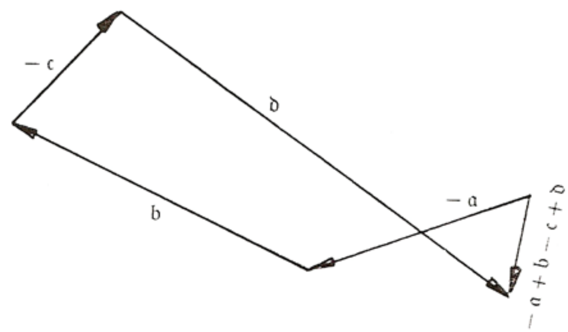
تعریف: وکتورونو ګرافیکی سره زیاتیږي، که د دوهم وکتور پیلټکی د لمړي وکتور په پاکي کینبول شي یعنی د غشی په سر کینبول شي او داسی ورپسی . دا زیاتون وکتور نو بیا د لمړي وکتور د پیل ټکی د دوهم وکتور یا د ځنځیر اخرني وکتور د څوکی یا غشي سر پورې غزول کیږي.





خیره ۲۹۷ الف



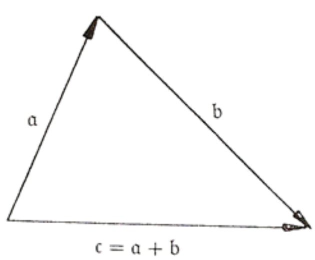


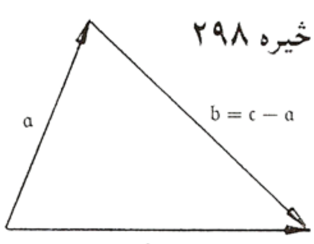
خیره ۲۹۷ ب

د وکتورمساواتو حل څخه د یوه پیلوکتور یا د یوه مخامخ وکتور له زیاتون څخه کیدی شي د وکتورکمون روښانه کړی شي:

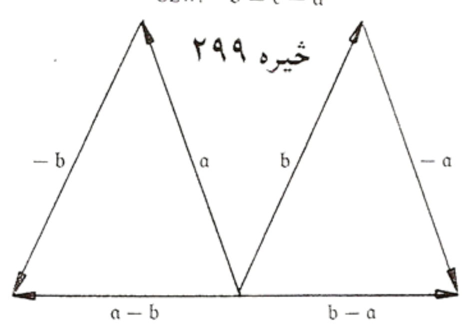
$$a + b = c \Leftrightarrow a = c - b = c + (-b)$$

bzw. $b = c - a$





خیره ۲۹۸



خیره ۲۹۹

د ځیرونو څخه دا لاندې هم لاس ته راتلی شي

جمله : د زیاتونوکتور کواودینات همداسی کمونوکتور د پیلوکتور د زیاتون همداسی کوم څخه لاس ته راځي.

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$ په هوارۍ

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$ په فضا کې

بېلګه

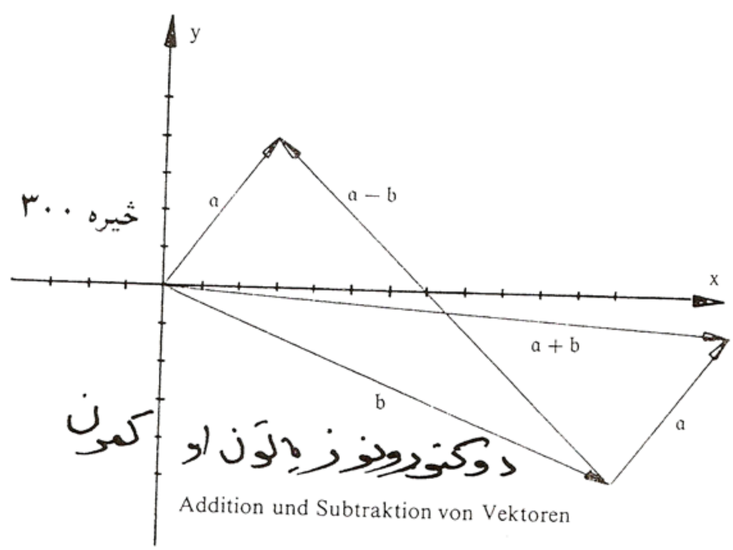
1. $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad |a| = 5 \quad |b| = 13$

$$\Rightarrow a + b = \begin{pmatrix} 3 + 12 \\ 4 \ \ - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a - b = \begin{pmatrix} 3 - 12 \\ 4 \ \ + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$b - a = \begin{pmatrix} 12 - 3 \\ -5 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$|a - b| = |b - a| \approx 12{,}73; \quad |a + b| \approx 15{,}03$$



Addition und Subtraktion von Vektoren

$$2.\quad a=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix};\quad c=\begin{pmatrix}7\\8\\-9\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a+b=\begin{pmatrix}4-2\\3+0\\2+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$$

$$a-c=\begin{pmatrix}4-7\\3-8\\2+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-5\\11\end{pmatrix}$$

$$a-b+c=\begin{pmatrix}4+2+7\\3-0+8\\2-5-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\11\\-12\end{pmatrix}$$

$$a+a=\begin{pmatrix}4+4\\3+3\\2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\6\\4\end{pmatrix}=2\cdot a$$

دا وروستنی بیلګه د وکتورونو د ځلولو لپاره ده چې له ګڼونو سره ځل شوي (s– ځلون یا · ضربونه) یعنی د سکالار سره ځلونه :

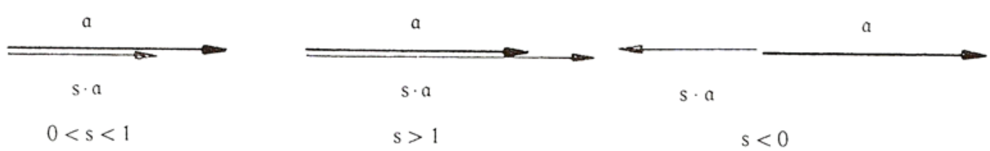
تعریف : وي دې s یو ریل ګڼ (سکالار هم نومیږي) **a** یو وکتور. نو s. **a** = **a** .s هغه وکتور لاس ته راکوي ، چې همغه لور ولري لکه **a** او s –واره اوږدوالی ولري. وکتور **a** له s سره ځلیږي، که د وکتور هر کومپوننت د s سره ځل شي:

په هواکې $s\cdot a=\begin{pmatrix}s\cdot a_x\\s\cdot a_y\\s\cdot a_z\end{pmatrix}$ ، په هوارکې $s\cdot a=\begin{pmatrix}s\cdot a_x\\s\cdot a_y\end{pmatrix}$

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad s_1 = 4; \quad s_2 = -0{,}5$$

$$\Rightarrow s_1 \cdot a = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot 7 \\ 4 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 28 \\ 36 \end{pmatrix}; \quad s_2 \cdot a = \begin{pmatrix} -0{,}5 \cdot 5 \\ -0{,}5 \cdot 7 \\ -0{,}5 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -3{,}5 \\ -4{,}5 \end{pmatrix}$$

هندسي د يوه وکتور ځلونه د يوه رييلګڼ سره د هغه وکتور منځنی غزونه ده د ځلوونی يا فاکتور s په اندازه. د وکتور پيلټکی د کربښمنځ يا غزونمنځ دی.
دلته د $|s| > 1$ سره وکتور اوږدېږي يا غزېږي» او د $|s| < 1$ سره وکتور لنډېږي.
د $|s| = 1$ لپاره د وکتور ارزښت تغير نه خوري. که $s < 0$ وي، نو د وکتور لور راپه څټ کيږي يا راګرځي يا برعکس کيږي.



خيره ۳۰۱: د وکتورa ځلونه د يوه رئيل ګڼ s سره.

که $s = 0$ وي ، نو $s.\mathbf{a}$ صفر وکتور $\mathbf{0}$ دی .

جمله :په ټوله توګه يا مجموعه کی د سکالار سره د وکتور ځلونو لپاره ل اندې شمير قاعدې باور لري:

$$|s.\,\mathbf{a}| = |s|.\,|\mathbf{a}|$$
$$(s_1 + s_2).\mathbf{a} = s_1.\,\mathbf{a} + s_2.\,\mathbf{a}$$
$$s.(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s.\,\mathbf{a} + s.\,\mathbf{b}$$

بیلګي:

$$\mathbf{1.}\quad \left|-3\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix}-9\\-12\\-15\end{vmatrix} \approx 21{,}21$$

$$\left|-3\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = |-3|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = 3\cdot\sqrt{50}\approx 21{,}21$$

$$\mathbf{2.}\quad (4-6)\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$$

$$(4-6)\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} - 6\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\28\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-18\\42\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{3.}\quad 3\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\right] = 3\begin{pmatrix}7\\-9\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\-27\\9\end{pmatrix}$$

$$3\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\right] = 3\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\-9\\33\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\18\\24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\-27\\9\end{pmatrix}$$

که یو وکتور د بل وکتور زیاتواره په څیر انځور کړی شي، نو دواړه وکتورونه لاینې بلواك بلل کیږي، په غیر له دې لاین خپلواك بلل کیږي.
ټیك په لاندې توګه افده کیږي:

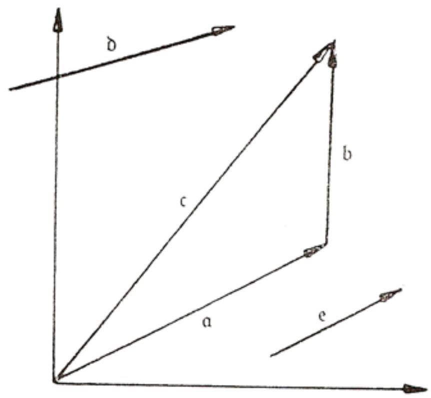
> **تعریف:** دوه وکتورونه **a** او **b** لاینې بلواك دي، که چیرې (یواځنی ټاکلی) ریيلګڼ s (سکالار) موجود وي د کوم لپاره چی **s.a = b** باور ولري.
> دا وکتورونه لاینخپلواك دی، که انځورونه **s.a = b** د هیڅکوم ریيل ګڼ s لپاره ممکنه نه وي.

په هواره (R^2) کی تل دري وکتورونه لائنې بلواك دي. په هوا (R^3) کی تل ۴ وکتورونه لاینبلواك دي. په هواره زیات تر زیاته ۲ او په هوا کی زیات تر زیات

یادونه: لاینبلواک که لاینیز بلواک وبلل شي، نو ښه به وي یا کرښيز بلواک (خطي تابع)..

194

دري وکتورونه لاينيخپلواك كيدى شي.



ثيره ۳۰۲

لايني بلواك وکتورونه	لايني خپلواك وکتورونه د بيلگی پو توگه
$\{a, e\}$	$\{a, b\}$
$\{a, b, c\}$	$\{b, c\}$
$\{a, c, d\}$	$\{e, d\}$

بيلگي:

۱ – وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix}$ لايني بلواك دي ، ځكه چی

$$s.\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -3.s = 6 \\ 6.s = -12 \\ 11.s = -22 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = -2 \\ s = -2 \\ s = -2 \end{matrix}$$

۲ – په ځېږ يا برعکس، وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$ لاينيخپلواك دی، ځكه چی :

$$s.\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -4.s = 10 \\ 6.s = 15 \\ 8.s = 20 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = -2,5 \\ s = 2,5 \\ s = 2,5 \end{matrix}$$

گورو، چی دلته سره گډ يا مساوي s نه شي پيداكيدى.

د وکتورونو لاینې خپلواکوالي او لاینې بلواکوالی په هواره او هوا کې د وکتورونو انځورونو لپاره په کارول کیدي شي:
لکه څنګه چې ټکی په کواوردیناتو کی تعریفیږي چې خپل واټن له محور څخه بیانوي، نو همداسی کیدی شي چې وکتورونه ، ځانونه، په خوښه داسی وکتورونو روښانه یا بیان کړي، چې ځغاستلور یې یو ددې کواوردیناتو محور وي..

تعریف:

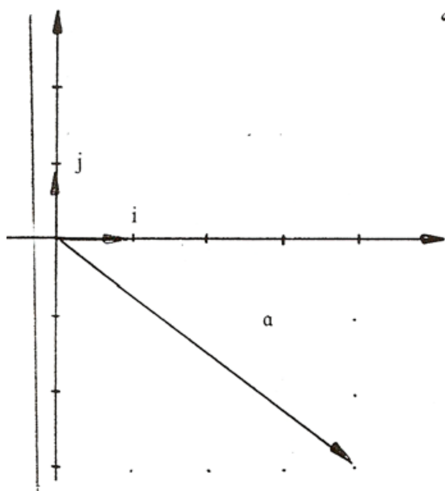
وکتورونه : $i=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $j=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په هواره کې، همداسی

وکتورونه $i=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ او $j=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ په هوا کې او $k=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

بنسټ وکتورونه بلل کیږي. دا مثبتمحور لو، په ګوته کوي او ددې لپاره باور لري:

$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$$

هر وکتور کیدی چې په هواره کی له i او j او په هوا کې د i , j او k وکتورونو په نامه لاینې کمبیناشن په څیر د بنسټ وکتورونو څخه انځور کړی شي.



ثیره ۳۰۳

بیلګې:

$$a=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=4\cdot i-3\cdot j=4\cdot i+(-3)\cdot j$$

$$b=\begin{pmatrix}-3\\11\\6\end{pmatrix}=-3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+11\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=-3i+11j+6k$$

په پای کی یو نظر په الجبري جوړښت، چې وکتورونه یې د زیاتون او کمون په بنسټ او د رییلګڼونو سره ځلونی له لارې لري:

د ټولو وکتورونو ډیری V په هواره کی (همدا ډول په هوا کی) د زیاتون په نسبت یو زیاتون کموتاتیو ګروپ جوړوي (د ګروپ تعریف وروسته)، ځکه چې لرو :

اول – $a+b \in V$ د ټولو b, a لپاره ، چې له V وي رابندیدنه

دوم – $(a+b)+c = a+(b+c)$ د ټولو c, b, a لپاره، چې له V وي اسوشیاتیو قانون

دریم – $0+a = a+0$ صفر وکتور 0 ناپییلی توکی دی

څلورم – $a+(-a) = (-a)+a = 0$ هر وکتور ته یو په څټ وکتور یعنی مخامخ وکتور موجود دی

پنځم – $a+b = b+a$ د ټولو a, b لپاره، چې له V وي. کموتاتیو قانون

برسیره پر دې د ځلوونی لپاره د یوه ریل ګڼ سره باور لري:

شپږم – $s.a \in V$ د ټولو a لپاره ، چې له V وي

اووم – $1.a = a$ د ټولو a لپاره، چې له V وي

اتم – $(m+n).a = m.a + na$ د ټولو رییلګڼون m او n لپاره او هر وکتور a لپاره ، چې له V وي.

نهم – $m.(a+b) = m.a + n.b$ د ټولو وکتورونو a او b لپاره چې له V وي او هر رییل ګڼ m لپاره.

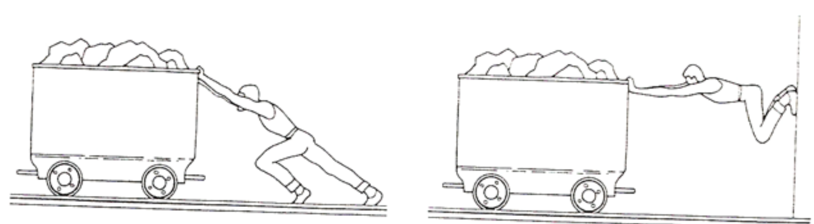
په ټولګیزه توګه یو داسې جوړښتخویونه د وکتورهوایا · فضا تر نامه یادیږي.

197

سکالار ځل

وکتورونهٔ لکه چی ومو لیدل٬کیدی شي چی سره زیات شي او یا د یوه رییلګڼ سره ځل شي . کیدی شي، چی وکتورونه یو له بل سره هم ځل کړی شي؟
دا حتی په دوه توپیریدونکو ډولونو ممکن دی . یو واریانت یو د یوې لوي په توګه، بیرته یو وکتورهوا جوړوي (د مخه لوستل شوی دی)، بل یی د یوې لوي په توګه سکالار لاس ته راکوي، چی دا یواځي ارزښت لرې او لور نه لري.

پیلبیلګه :
په پخوا وختونو کی د سکرو د کانو واګونونه په لاس راکښل کیده. دلته دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چی ولی کارګر واګون مخته راکښوده او په همدې توګه ټیلواهه، ددې لپاره چی موټر سم پورته کړي؟



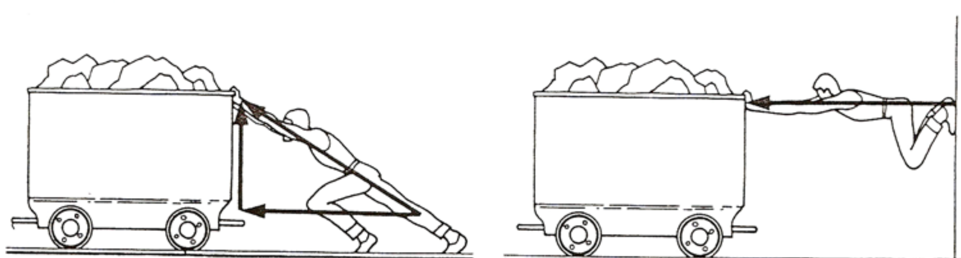
خیره ۳۰۴

ددې پوښتنی سره موږ د دوه وکتوري لویو سره سر او کا رلرو: زور او لار، چی د هغو ځل په فزیك کی «کار» بلل کیږي. هغه زور چی واګون په حرکت کی راولی، باید د واګون په لور واچول شي یا د واګون په لور تاثیر وکړي. یو په پورته لور اچولی زور کړی شي چی واګون پورته کړي. هر مایل تاثیر کوونکی زور کیدی شي د وکتور زیاتون قانون له لارې په یوه واګون سره غبرګ او بل په دې ولاړ زور ټوټه کړي یا تجزیه کړي. یواځي پروت زور واګون د مخ لور ته

198

په حرکت راولي. په دې توګه واردونکی زور او مؤثر زور په ټولیزه توګه همغه یو زور نه دی. دا د دې پوښتنې ځواب هم دې، چې ولي کارګر د مخ لور ته تکیه وهي.: هغه رسی چی د هغی له لارې زور اچول کیږي، نزدې ځمکې سره غبرګه ځغلي (= لار) ، (نزدې د متې ټول زور کیدی شي مؤثر واقع شي. هر څومره چی کونج د ځمکې او رسی ترمنځ مایل وي، همغومره زیات زور بی تاثیره پاتي کیږي.

دا په کار اچولی زور ، په دوه یو په بل ولاړو کمپوننتو (زورونو) ټوټه کیدل یو ولاړکونجیز دریګوډی جوړوي، دا لار سره غبرګ زور د $F.\cos\alpha$ په ښیر لاس ته راځي . کار $W = F.s.\cos\alpha$ پخپله په برخلاف د جوړښتلوی زور او لار – لور نه لري، بلکه یواځی ارزښت لري:
دا یو سکالار دی.



ښیره ۳۰۵

تعریف:

د دوه وکتورونو **a** او **b** یو **a . b** سکالار ځل لاندي(ویل کیږي **a** ځل **b**) یو یواځنی ریل ګڼ پوهیدل کیږی ،

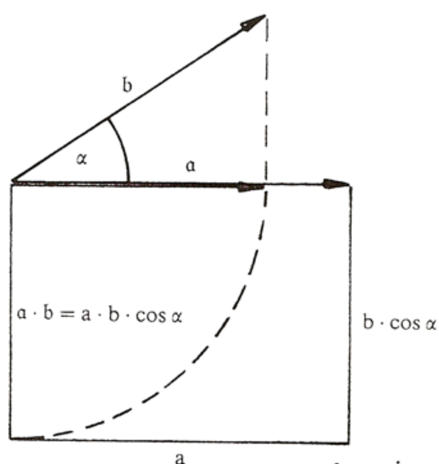
$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.\cos\alpha = a.b.\cos\alpha$$

دلته کونج α د **a** او **b** وکتورونو ترمنځ کونج دی .

هندسي سکالار ځل د یوه ولاړکونجیز هوارمتن دی یا هواره ده د اړخونو a او $b.\cos\alpha$ سره (د **b** پریوستون په **a**). داسی یوه هواره هلته موجود ده، که له دې وکتورونو هیڅ یو هم د صفر اوږدوالی ونه لري او یا $\cos\alpha \neq 0$ ، یعني $\alpha \neq 90°$ ده.

د **b** ولاړ پریوستون په **a** کله کله په $b_a = b.\cos\alpha$ سره ښول کیږي:

$$\mathbf{a.b} = a.b_a$$



شیره ۳۰۶

جمله: د دوه وکتورونو $\mathbf{a} \neq 0$ او $\mathbf{b} \neq 0$ سکالار ځل هلته او هلته صفر دی، کله چې دواړه یو په بل ولاړ وي:

$$\mathbf{a . b = 0 \iff a \perp b}$$

بیلګه:

د یوه ولاړکونجیز کواوردینات سیستم (Orthono_rmalbasis اورتونورمالبنسټ) یو په بل نیغ ولا ړ دي. له دې امله له دوه مختلفو وکتورونو ځل صفر دی او د یوه بنسټوکتور سکالار ځل د ځان سره تل ۱ دی :

$$\mathbf{i.i = j.j = k.k = 1 \quad , \quad i.j = j.k = k.i = 0}$$

د د زیاتون څخه په بل ډول، د وکتورډیری نسبت و سکالار ځل ته تړلی یا رابند نه دی . د سکالار ځل د په خوښه وکتورونو ځل د هغه ډیري څخه راوباسی، چی عملیه په کی اجرا کیږي، دا په دې مان چی دا نتیجه بیرته وکتور نه دی یعنی د وکتو په ډیري کی هم نه دی پروت. دلته اسوشیاتیو قانون هم باور نه لري:

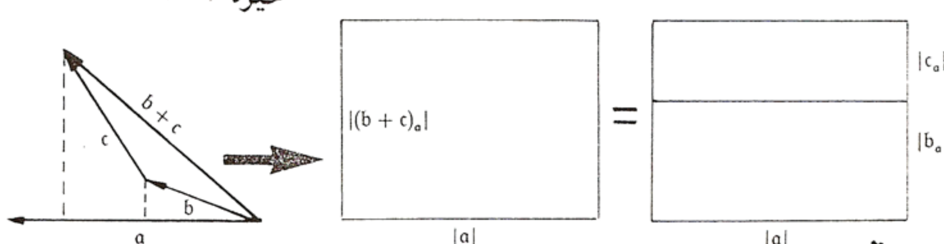
$$\mathbf{a}.(\mathbf{b}.\mathbf{c}) = \mathbf{a}.|\mathbf{b}|.|\mathbf{c}| \cos(\mathbf{b}.\mathbf{c})$$

د $\mathbf{a}$ یو زیتځله دی او په څپ : $(\mathbf{a}.\mathbf{b}).\mathbf{c}= |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}|.\cos(\mathbf{a}.\mathbf{b}).\mathbf{c}$ د $\mathbf{c}$ یو زیاتځل دی.

سره له دې هم باورلري:

سکالار ځل کموتاتیو دی :	$\mathbf{a}.\mathbf{b}= \mathbf{b}.\mathbf{a}$
او وکتور زیاتونه دیستربیوتیو دی.	$\mathbf{a}.(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{a}.\mathbf{c}$

خیره ۳۰۷



Das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ دستوبیوتیو قانون :

کموتاتیو قانون په کمپوننتوانځورونو له لارې او بنستې وکتورونو له لارې ساده ښوول یا ثابت کیدی شي. د بیلګي په توګه په هواره کی :

$$a \cdot b = (a_x \cdot i + a_y \cdot j) \cdot (b_x \cdot i + b_y \cdot j)$$
$$a \cdot b = a_x\, i \cdot b_x\, i + a_y\, j \cdot b_x\, i + a_x\, i \cdot b_y\, j + a_y\, j \cdot b_y\, j$$
$$a \cdot b = a_x\, b_x\, i \cdot i + a_y\, b_x\, j \cdot i + a_x\, b_y\, i \cdot j + a_y\, b_y\, j \cdot j$$
$$a \cdot b = a_x\, b_x \cdot 1 + a_y\, b_x \cdot 0 + a_x\, b_y \cdot 0 + a_y\, b_y \cdot 1$$
$$a \cdot b = a_x\, b_x + a_y\, b_y$$
$$a \cdot b = b_x\, a_x + b_y\, a_y = b \cdot a$$

په ورته ډول دا د دري او زيات کمپوننتوکتورنو لپاره هم ښوول کيدي شي:

تعريف : د سکالار ځل د کمپوننت انځورونی لپاره باور لري:

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_y \\ b_y \end{pmatrix} = a_x\, a_y + b_x\, b_y \quad \text{bzw.} \quad a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z.$$

همداسی

د **a** او **b** ترمنځ کونج په لان دي ډول ټاکل کيږي:

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}.$$

د

ردوه وکتورونو ترمنځ رابند کونج α شميرنه د تير مخ مساواتو څخه لاس ته راځي

بيلګي:

1. $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow a \cdot b = (-3) \cdot 10 + 5 \cdot 6 = 0$

   also auch $\cos \alpha = \dfrac{0}{\sqrt{(9+25)} \cdot \sqrt{(100+36)}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$

2. $a = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = a = \sqrt{81+9} = \sqrt{90}; \quad |b| = b = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

   $a \cdot b = 9 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) = 18 - 15 = 3 \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{3}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{29}} \approx 0{,}05872 \Rightarrow \alpha \approx 86{,}63°$

وکتورځل

پیبیلګه:
که چیرې په یوه سوري جام کې اوبه واچوی او بیا سوری خلاص کړی او یا که چیرې تاسو یو لاسمینځي یا لمباڼه ډک کړی وي، نو که چیرې اوبه بندی راوباسی اوبه په ښیلوریز څرخون ډوله حرکت له سوري وځي .
دا داوبو تویدل د دروند ورن په ذریعه منځ ته راځي ، په ښي لور څرخیدنه اوبه د کوریولیسزور Corioliskraft له لارې منځ ته راځي. دا د کشولو زور په حرکت کوونکي سیستم کی باید وکتل شي یا تر نظر لاندې وي، او دا د ځمکی په ځانڅرخون له لارې کتل کیدیشي.

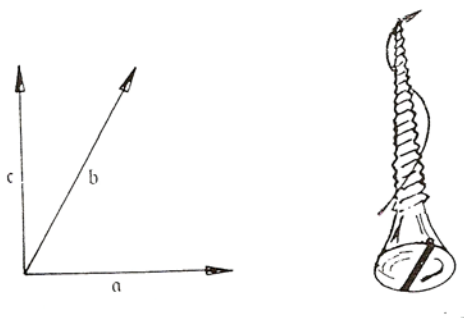
د دوه وکتوري لویو یو بل باندې تاثیر له امله (حرکت یا خوزیدنه د دروندزور په بنسټ او د ځمکی څرخون له امله خوزیدنه یا حرکت) یوه بله لویه ، چیدا هم وکتوري لویه ده منځ ته راځي. د دریواړه، د لور له امله ، په یوائنی ګډاړیکو کی سره پرتی دي، او او د دریمی ارزښت کیدی شي د نورو دوهو ارزښتونو لاس ته راوړو. په ټولیزه توګه باور لري:

تعریف :
د وکتورځل $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ لاندې ($\mathbf{a}$ اتیران $\mathbf{b}$) یو وکتور پوهیږو، چی لاندې خویونه ولري
اول . دا وکتوردریګوني $\mathbf{a,b,c}$ په لړپیرلپسی یو ښی سیستم جوړوي
دوم. وکتور $\mathbf{c}$ په وکتورونو $\mathbf{a}$ او $\mathbf{b}$ نیغ ولاړدی، یعنی په هغی هواره هم چی د دوه وکتورونه په کی پراته دي.

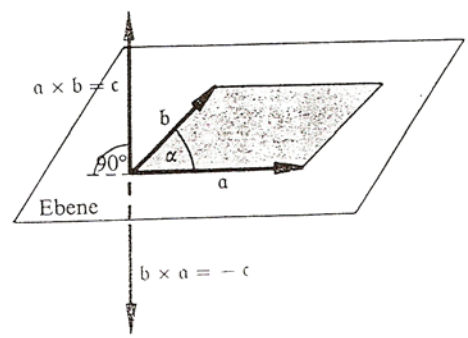
203

دریم. د وکتور **c** ارزښت د **a** او **b** څخه جوړ غبرګ اړخیز سره مساوي دی

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}| \;.\; \sin(\mathbf{a};\mathbf{b}) = a.b.\sin\alpha$$



خیره ۳۰۸ : یو ښی سیستم
کیدی شي، چی د پیچیمیخ له
لارې وښوول شي:
که پیچیمیخ له **a** و **b** ته وڅرخول
شي، نو میخ د **c** په لور خوزي یا
حرکت کوي



خیره ۳۰۹

خیره ۳۰۹ : وکتور ځل او هندسي
اهمیت یی

پس که د وکتور وکتور ځل صفر وکتور وي ، نو یا یو له دې دواړو وکتورونو صفروکتور دی او یا دواړه سره غبرګ پراته دي(دا په دې مانا ، چی $\alpha = 0$ او یا $\alpha = 180°$)

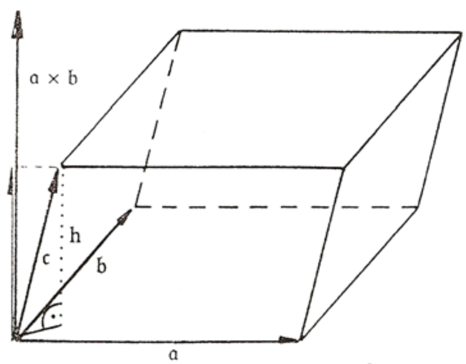
جمله: وکتور **c** د دیترمینانت په مرسته د وکتورونو **a** او **b** د کمپوننتو له لارې لاس ته راوړ کیدي شي

$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & a_x & b_x \\ j & a_y & b_y \\ k & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$c = a \times b = (a_y\, b_z - b_y\, a_z)\, i + (a_z\, b_x - b_z\, a_x)\, j + (a_x\, b_y - b_x\, a_y)\, k$$

شپاتځل Spatprodukt يا غبرګهواريزي ځل

د وکتورځلونه ارزښت هغه غبرګهواريزې هواره ده، کومه چې له دواړو وکتورونو غزيږي. يو دريخوايز يا دريدمينزيونال وينه و غبرهواريز ته شپات يا بيرته همغه شپږهواريز وايي (دا د مخه لوستل شوی) دا کيدی شي، چې له درې وکتورونو ځخه غزيدلی فکر ته راوړل شي. د دې ډکی داسی شميرل کيږي، چې بنسټهواره د جګي سره ځل کړای شي. دا جګي د c ولاړ پريوستون دی، په $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. يو هندسي بدنيز Stereometrische اوبی يا حل له دې امله د c او $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ د سکالارځل له لارې لاس ته راوړ لکيږي.



خيره ۳۱۰

تعريف :

د وکتورونو **a , b** او **c** څخه غزيدلی شپات يا غبرګهواريز (Parallelepiped) ډکی دلاندې ځل څخه شميرل کيږي:

$$V_{Spat} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \,.\, \mathbf{c}$$

دا غبرګهواريزځل مثبت دی، که وکتورونه **a ,b , c** په دې ترتيب يو لړيپرلسی ښی سيستم جوړ کړي، په غير له دې بيا منفی دی.

تر هغی ، چې بنسټهواره د يوه وکتور له لارې ځان ښای يا ښوول کيږي يا ځان ځرګندوي، نو دا ډکي يو سکالار دی .

په ادبياتو کی دا د ځل اتيران نخښه ، چې په نوکانو کی نيول شوې، زيات وخت نه

یکل کیږي، یعنی لیکو: $(a\times b)\cdot c = a.b.c$، غبرګهواریزخل شمیرنه د
یترمینانت شمیرنی له لور صورت نیسي:

$$(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix} i & j & \bar{t} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

داچی دا اټیرانخل لکه د مخه مو چی وویل د بنسټوکتورونو د لاینی کومبینیشن په خیر انخوریدلی شي، دا بیرته په یوه له دې کمپوننتو، کومی چی له صفر توپیر لري.

بیلګه:

د هغه غبرګهواریز ډکی څومره لوي دی، چی دد لاندې وکتورونو څخه غزیدلی وي؟

$$a=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$ او $$c=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$ aufgespannt wird? له دې چې غزیږي

$$abc=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$abc=2\cdot(-2)\cdot 6+0\cdot(-3)\cdot 4+3\cdot(-1)\cdot 5-3\cdot(-2)\cdot 4-2\cdot(-3)\cdot 5-0\cdot(-1)\cdot 6$$

$$abc=-24+0-15+24+30-0=15$$

غبرګهواریز نو ډکی 15 V.E لري (یعنی ۱۵ (V,E) ډکییوونونه یا –واحدنه)

تمرینونه

۱ – دواړه وکتورونه $a=\binom{3}{4}$ او $b=\binom{-2}{5}$ ورکړشوي دي. په یوه کواوردیناتسیستم کی دا لاندې رسم کړی

رسم کړی .

a) $a + 3b$, b) $0.5a - 3b$, c) $2(a + b)$

او په هروار یی نتیجه د کمپوننت په ډول ورکړی؟

۱ – په هوا یا فضا کی ټکی $O(0|0|0)$, $A(1|2|3)$. $B(2|-1|4)$ او $C(-5|7|9)$ ورکړ شوي دي، لاندې وکتورونه په کمپوننت لیکدود څه نومیږي یا څه ډول دي؟

a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BC}$ f) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

د دې وکتورونو ارزښتونه څومره لوي دي؟

۲ – که په یوه هواره کی دوه وکتورونه a او b لاینی خپلواک وي، نو هر بل د دې هوارې وکتور د دې دوه وکتورونو a او b د لاینی کمبینیشن په څیر انځوریدلی شي. a او b بنسټ جوړوي.

وکتور c د مساوات $c = k_1a + k_2b$ له لارې د لاینی کمبینیشن په څیر د ریبلو ګڼونو k_1 او k_2 سره انځور کړی. له دې دوه مساوات د k_1 او k_2 ناپیژندونکو سره جوړ کړی. (د دې لپاره دې زما د شیمرپوهنی کتاب وکتل شي)

$$a = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix};\quad b = \begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$$

a) $c = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ b) $c = \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ c) $c = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$

۴ – وي دې : $a = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}$. وشمیری:

a) a.b b) -a.b c) a.a d) b.b

e) a.(b.a) f) a.(b.a).a

او د دواړو وکتورنو ترمنځ کونج.

207

۵ – کونجونه $\alpha = w(a,b)$, $\beta = w(b,c)$, $\gamma = w(a,c)$ د وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} ,b= \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

لپاره وټاکی /: .

۶ – د تریګونومتري یا کونجکچ د کوساین جمله، لکه د مخه مو چی لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیری.

۷ – د تالس جمله، چی د مخه مو لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیری:

۸ – په خوښه دریګوډي ABC لپاره د پیتاګوراس جمله او د هغی په څټ وشمیری:

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \iff |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$$

۹ – د مخته لوستل شوو کاتیت جمله او جګجمله وکتوري وښایی.

۱۰ – د یوه په خوښه غبرګهواریز ABCD لپاره وشمیری:

۱۱ – الف) د غبرګ اپیپت یا غبرګهواریز ډکي وشمیری، چی له

وکتورونو $b = 3$, $a = 1$ او $c = -2$ څخه غزیدلی وي.

ب) دا څه مانا لري ، که وي : $(a \times b) . c = 0$ ؟

پ) د یوې بیلګي په مرسته وښایي، چی اتیرانځل اسوځیاتیو نه دی.

ت) د وکتورونو $b = 0$, $a = 2$ او $c = k. 4$ له لاري یو غبرګ

اپیپت ورکړ شوی دی، چي ډکی یی ۸ یوونونه دی. k به څومره لویه وي؟

۱۲ – یوه سپورتي الوتکه د 250 km/h په سرعت د N60°O په لور الوځي.

سملاسی له جنوب څخه باد لیږیږي. دا باد یو د 75 km /h سرعت لري او دا

الوتکه له پیللارې اړوي. دا نوې الوتللور وټاکی او د الوتکی نوی سرعت!

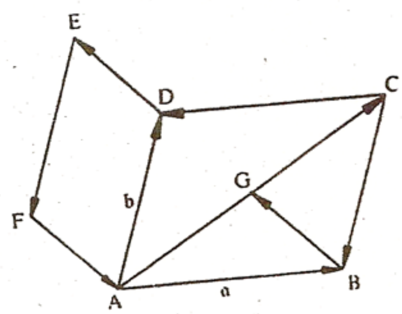
۱۳ – د وکتورونو a او b لپاره کله لاندې اړیکی باورلري ؟

a) $|a+b| < |a| + |b|$,   b) $|a+b| = |a| + |b|$

۱۴ – لاندې وکتورونه ورکړشوي دي:

$a = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; $c = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$; $d = \begin{pmatrix} -45 \\ 30 \end{pmatrix}$; $e = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}$; $f = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; $g = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$

وکتورونه c تر g (که ممکن وي) د وکتورونو a یا b د ډیرواره په څیر انځور کړی.



۱۵ – ناټاکلی وکتورونه د a او b د وکتورونو لاینې کمبینیشن په څیر انځور کړی. (څیره)

۱۶ – یو دریګوډی ABC په $a = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

سره ورکړ شوی دی. دا اړخ اوږدوالی او دننني کوجونه وشمیری.

۱۷ – په یوه څلورګوډي کی دی $a = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$c = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $d = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
او

د نیمی اوږدوالی وشمیری او د هغی غوڅکونج ($\leq 90°$)

۱۸ – یوه کیبنتی د ټکی O څخه د $r = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ په لور خوزیږي یا حرکت کوي، دا کیبنتی تګلور دی، باد د $w = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ په لور لګیږي.

الف) د بادزور $F_\perp$ برخه څومره لویه ده، چی په زیګل باندې ولاړ پریوزي. یا تاثیر کوي؟ دا زور کومه لور لري؟

ب) د F برخزور له $F\perp$ ځخه ځومره لوي دی، ك ومه چی کیښتی د مخ په لور بیایي؟

۱۹ – یو بار، چی ۱۰۰۰۰ نیوټونه دی د دوه ماںلو ستنو سره نیول شوی. جوړښت یی یو مساوي پښیز دریګوډی جوړوي ، د بنسټ ۶ متره سره او د پښی اوږدوالی (د ستنی اوږدوالی) ۵ متره دی.

الف د وشن زور په ضواړو ستنو څنګه تاثیر اچوي؟

ب) د دې برخه زور ولاړ او پراته کمپوننتونه ځومره لوي دي؟

۲۰ –د وکتور v کواوردینات و اورتوګونالبنستهونو $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ته وشمیری، که $|v| = 5$ وي او v د وکتور $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ سره یو د $55°$ کونج جوړ کړي.

۲۱ – وي دې $a + b + c = v$. وشمیری : $a.d + b.v + c.d$

۲۲ – د څلور ټکو A, B, C, D او همداسی E, F, G, H سره یو غبرګ اړخیز ورکړشوی دی. د لاندې ورکړنو یا شرطونو سره د هغو هواري وشمیری

a) $A = (0|6|0)$, $B = (8|4|0)$, $C = (6|16|0)$

b) $E = 1,5|2,5|3,5)$, $F = (0.5|0|2,5)$, $G = (1|0,5|4,5$

هغه تراوسه ورك یا نامعلوم ټکی (D همداسی H) چیرته پروت دی؟

۲۳ –اهرام د بنسټ هوارې د کونجونو

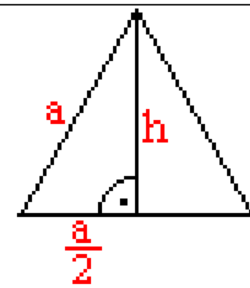
$A = (1|0|2)$, $B = (3|3|7) =$, $C = (4|2|12)$, $D = (2|-1|7)$

سره کوم ډکی لري، چی ځوکه یی $S = (2|4|15)$ وي؟

لارښودنه: لمړی خپل ځان وپوهوي، چی ایا کونجونه ریښتیا په یوه هواره کی پراته دي.

٦ ٠ ګونومتري (کونجکچ یا مثلثات (Gonometry

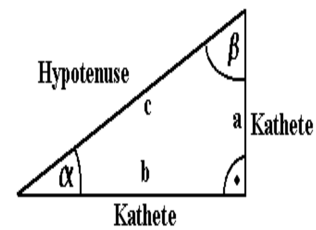
بیلګه ۴ . ۵ : په یوه مساوي اړخیز دریګوډي کی دې (لاندې ځیره) جګی و شمیرل شي .د ٦ . ۴ (له مخی لرو(جګی په همدې وخت کې د مخامخ اړخ نیمی هم دی، دا په دې درېګوډي کې وکارېږی)

$h^2 = a^2 - (a/2)^2$ $h^2 = a^2 - a^2/4$ $h^2 = (3/4)a^2$ $h = (\sqrt{3}/2)a$	

٦ . ۲ په ولاړکونجیز دریګوډي کی د اړخونو تناسب

د کونجکچ لپاره د اړخونو تناسب هم مساعد دی، چی یوه ولاړکونجیز دریګوډي کي جوړیږي(لاندې ځیره). که د کونج α مخامخ اړخ یا -کاتیت a gegkathete د مخامخ اړخ په ځیر وښایو، د b اړخ په β پروت اړخ ankathete
اوhypothenuse لوي اړخ وي، نو په ولاړکونجیز دریګوډي کی لاندې اړخځاننیوني منځ ته راځي یا جوړیږي

211

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{katheta}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{kathetb}{c}$ $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{opk}{ank}$ $\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{ank}{opk}$	

د وړانګو جملو له امله دا اړیکي یا تناسب یواځي د کونج په واك کی دی. که په پام کی ونیول شي چي $\beta = 90° - \alpha$ دی، نولاندې اړیکی لیکلی شو

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \tan(90-\alpha) = \cot\alpha$$

$$\cot\beta = \frac{a}{b} = \cot(90-\alpha) = \tan\alpha$$

له دې لیدل کیږي، چی د دې څلورو ارزښتونو د پیداکولو لپاره دوه ګنجدولونه پوره دي یا بسیا کوي .ورپسي یا ددې په تعقیب پیژندوړ دي

$$\tan\alpha = \frac{in\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(6,10)$$

برسیره پردې د پیتاګوراس د جملی په پام کی نیولو سره لرو

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(6,11)$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; 1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}; \ldots\ldots\ldots.(6,12)$$

٦ ۰ .٣ په یوونګردی کی د کونج فنکشنونه (-بلواك)

په ۴ . ۲ برخه کی $\sin\alpha; cis\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$ یواځي د لیدیدونکو Konkrete)
اړختناسبونو لپاره په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی ځای په ځای دي. دا ویناوې یواځي

یا په ځانګړې توګه د $0<\alpha<\frac{\pi}{2}(0<\alpha<90°)$ لپاره تعریف دي. که د α خپلواك واریابل په څیر ونیسو، نو $\sin\alpha$ او داسې نور فنکشنونه راپه ګوته کوي چې په برخه ۱۵ کې انځور دي او کوجنفنکشنونه بلل کیږي. په یاده شوې برخه کې) څیرې ۱۵ . ۲۰ الف او ب

ددې لپاره چې د دې تعریفونو پراخوالی په زړه پورې کونجونو لپاره ممکن شي، نودا مو د یوون ګردي باندې مخ نخښې په واك کې کرښو ته لاربښودوي .د لته ټولی کرښی) د لته به له کرښو ځمور. مطلب پای کرښی وي(، چې پخپله او یایی پرویکشن یا پریوستون یا پریوتنه په وړانګو $s1$ او $s2$ پروت وي زیاتون مخنخښه) مثبت مخنخښه(لري، ټولی کرښې او یایي پرویکشنونه پریوستونونه چې په وړانګو $s'1$ او $s'2$ پرتی وي کمون مخنخښه (منفي مخنخښه) لري .د لاندې څیرو کښلو سره کیدی شي تعریفونه ۸ . ۴ (د په خوښه کونجونو لپاره پراخه شي

$$\sin\alpha=\overline{QP},\cos\alpha=\overline{OP},\tan\alpha=\overline{AD},\cot\alpha=\overline{BE};..............................(6,13)$$

د کونج α لپاره چي په لومړي څلورمه یا کوادرانت Quadrant (لاتین: د کواوردیناتسیستم څلورمه کی پروت دی(لاندې څیره له کیڼ و ښی لورته کښته دا په فرمولونوکې کارول شي توري ساده ایښوول کیږي٠ په څیرو کې شنې کرښې د ساین دي او سرې کرښې کوساین دی او کونجونه ټول په ترتیب له یوه سره پهالف سره په نخښه کیږي، چې د دې لارې تانجنت او کوتانجنت هم پیدا دي او توري هم ایښوولی شو)، دا تعریفونه د هغو تعریفونو سره سر خوري، کوم چې په ولاړکونجیز دریګوډي کی تر څیرنی نیول شوي دي .په پام کی دې وي چې کونج α په لینده اندازه کی د ګردیلیندې اوږدوالي AP سره مساوي دی، چیرته چې په زیات څرخون له 2 څخه لوییدلی هم شي .برسیره پر دې له تعریفونو) ۱۳ . ۴ (څخه لاس ته راځي، چې ساین-او کوساین فنکشنونه، پریود :°360) 2 (periode (تل تکراریدونکی ، بیرته

راګرځیدونکی(، تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونه پریود(°180) لري .

213

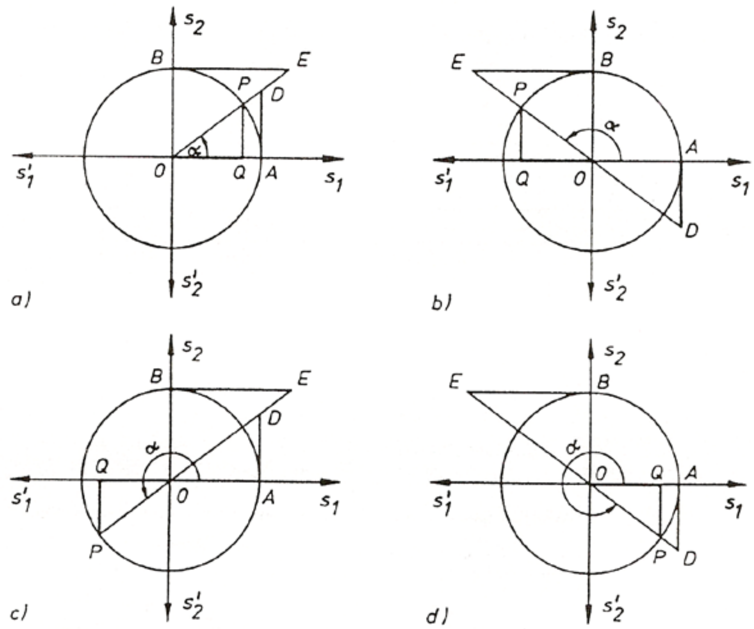


Bild 4.17 څیره

پس لرو

$$\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha+360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha+360°)=\cos\alpha;......................(6.14)$$
په
$$\tan(\alpha+2\pi=\tan(\alpha+360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2\pi)=\cot(\alpha+360°)=\cot\alpha$$

تولیزه)عمومي(توګه لرو

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin(\alpha+k.360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos(\alpha+k.360°)=\cos\alpha;......................(6.15)$$
$$\tan(\alpha+2k\pi=\tan(\alpha+k.360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2k\pi)=\cot(\alpha+k.360°)=\cot\alpha$$

د ټولو ټولګنونو ....3 , 2, k = ..-3,-2,-1,0,1 لپاره

یادونه :د کوادرانت لپاره څلورمه لیکلی شو خو دا باید په پام کی وي چی دا په کواوردیناتسیستم کی دئ

214

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونج-یازاویو توبعو وخنخبنه

	لومړۍ خلورمه $(0;\frac{\pi}{2})$	دویمه خلورمه $(\frac{\pi}{2};\pi)$	دریمه خلورمه $(\pi;\frac{3}{2}\pi)$	څلورمه خلورمه $(\frac{3}{2}\pi;2\pi)$
sinx	+	+	-	-
cosx	+	-	-	+
Tan x	+	-	+	-
cotx	+	-	+	-

برسیره پر دې لاندې اړیکې باور لري:

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \;, \quad \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha \;, \quad \cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha \qquad (4.16)$$
$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \;, \quad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha \;,$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \;, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha \;, \quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

بیلګه ۴ . ۶ : د جبشمیروني سره د کونجفنکشن د $\alpha = 446°$ لپاره پیداکوو. دا چې α په درجې اندازه ورکړ شوې ده، نو اومشالتریا سویچ (بدلون) دلته مطلب د جبشمیري اړونه ده، پۀ غوښتل شوي فنکشن کی) په « DEG » سموو او بیا لاندې ورکوتی کوو.

په همدې ډول تکمي وهو

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونجفنکشنونو مخنخبنه

دنده مو د لاندې مساوت حل یا اوبی دی

$$1. \quad \sin\alpha = a \quad , \quad 2. \quad \cos\alpha = a,$$
$$3. \quad \tan\alpha = a \quad , \quad 4. \quad \cot\alpha = a$$

دلته تمرینونه ۱ او ۲یوائې هلته موخه ور یا هدفمند ي، چې باور ولري$1 \leq a \leq 1$-

او په تمرین ۳ او ۴ کط په خوښه هر ارزښت نیولی شي.

یو «بنستیزوبی یا بنستیز حل»α_0 د هر تمرین د جبشمیرني سره په لاندې ډول یا همداسې تکموترتیب لاس ته راځي (دا په دې اړه لري چې α_0 په درجه اندازه یا لینده اندازه کوو، نو په ورته ډول د سویچبدلون په "DEG" یا "RAD" باندې راولو)

1. $\boxed{a}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\sin}$ 2. $\boxed{a}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\cos}$

3 $\boxed{a}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\tan}$ 4. $\boxed{a}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\tan}$

تکمه F د په څټ فنکشن ته تلنه ممکنوي.

دلته نو بیاد α_0 هر بنستیزحل په درجه یا لینده کې څرګندیږي.

د $a = -0,55$ لپاره لاندې بنستیزحلونه لاس ته راځي :

1. $\alpha_0 = -33,367013° = -0,58236,$
2. $\alpha_0 = 123,36701° \quad = 2,1531606,$
3. $\alpha_0 = -28,810793° = -0,5028432,$
4. $\alpha_0 = -61,189206° = -1,0679531.$

د مخ ت ه تیرو په بنسټ لو

1. $\sin \alpha = \sin(180° - \alpha) = \sin(\pi - \alpha),$
2. $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$

او په ورته توګه،، فرعي یا څنګیز حل یا اوبی،،

1. $\beta_0 = 180° - \alpha_0 = \pi - \alpha_0,$
2. $\beta_0 = -\alpha_0$

لاس ته راشي

216

د لیدیدونکي حالت $a = -0,55$ لپاره په دې مانا چې :

1. $\beta_0 = 213,367013° = 2,1531563,$
2. $\beta_0 = -123,36701° = -2,1531606.$

د α ټول حلونه د (۴ . ۱۵) له امله په لاندې فورم لاس ته راځي

$$\begin{aligned} &\text{1. und 2.} \quad \alpha = \alpha_0 + k \cdot 360° = \alpha_0 + 2k\pi, \\ &\qquad\qquad\quad \alpha = \beta_0 + k \cdot 360° = \beta_0 + 2k\pi, \\ &\text{3. und 4.} \quad \alpha = \alpha_0 + k \cdot 180° = \alpha_0 + k\pi. \end{aligned}$$

بیلګه ۴ . ۹ : لرو $\sin x = 1/2\sqrt{3}$. ودې شمیرل شي $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pm\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

بیلګه ۴ . ۱۰ : په بیلګه ۴ . ۴ کې ورکړشوی زور F_H او F_N څومره لویې دي، که په مایل هواره پروت بدن وزن $700\ N$ وي (دلته N د Newton لپاره دی چې وزن پرې اندازه کیږي) او مائلې هوارې مایلکونج $\beta = 28°$ وی؟

$$\sin\beta = \frac{F_H}{G}, \qquad F_H = G \cdot \sin\beta = 700\ N \cdot \sin 28°$$
$$= 700\ N \cdot 0,4695 = 328,65\ N.$$

$$\cos\beta = \frac{F_N}{G}, \qquad F_N = G \cdot \cos\beta = 700\ N \cdot \cos 28°$$
$$= 700\ N \cdot 0,8829 = 618,03\ N.$$

۴. ٦ دساین- او کوساین جملی

دا دواړه جملی ممکنوي چی په ټولیز یا عمومي دریګوډي کی شمیرنی پلی کړای شو

۱ . د ساین جمله‌د ځیرې ۴ . ۱۸ له نخښوني سره لرو

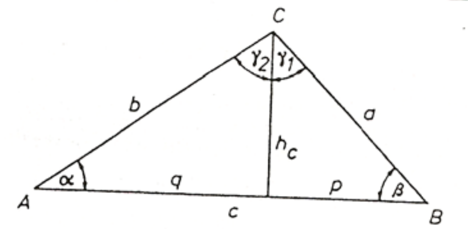


Bild 4.18

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}, \quad \sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

او له دې امله

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چې په عمومي توګه صدق
کوي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (4.17)$$

ځیره پورته او لاندې کښل شوي، دا یو ولاړکونجیز درېګوډی کښل کیږي(پورته او لاندې ځیرې) په ورته توګه ښوول کیدی شي، چی په عمومي توګه صدق کوي

د ساین جمله کیدی شي استعمال شي، که د یوه دریګوډي -دوه اړخونه او لوي اړخ ته

مخامخ کونج - SSW یو اړخ او داړه پرې پراته کونجونه WSWورکړشوي وي

۲ . د کوساین جمله

د ځیرې ۴ . ۱۸ ښخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
h_c^2 &= b^2 - q^2 \\
h_c^2 &= a^2 - p^2 \\
\hline
a^2 &= b^2 + p^2 - q^2, \quad p = c - q, \\
a^2 &= b^2 + (c - q)^2 - q^2, \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2, \quad q = b\cos\alpha,
\end{aligned}$$

نو $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$ لرو او همداسې:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,\\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \qquad (4.18)\\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.
\end{aligned}
$$

د کوساین جله استعمالیدی شي، که په یوه درېګوډي یا مثلث کې

- درې اړخونه یا ضلعې یا

- دوه ا ړخونه(ضلعې) او له هغو رابند کونج یا زاویه

ورڅ شوي وي.

بیلګه ۴ . ۱۱ :د دوه قوو(زور F1)او F2 لاس ته راوړل شوې R1 چی په پراته لورد F1سره کونج جوړوي ، څنګه شمیرل کیږي؟ د دې دوه قوو F1 او F2 برسیره له دوي جوړکونج هم معلوم دئ .د دې پوښتنی کولو د روښانولو لپاره څیره ۴ . ۱۹

ورکړ شوې، له کومی څخه چی د دوي ترمنځ اړیکي هم معلومیږي .په دې پسی په ABCدریګوډي کی، F1 = c, F2 = a او s - 180° = ss' معلوم دي، α

او R = b لټوونکی یا غوښتونکی لویي دي؟

د کوساین جملی (۱۸ . ۶) څخه لرو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ coss$$

همداسی یا⇔

$$R^2 = F1^2 + F2^2 - 2F1F2\cos(180° - s')$$

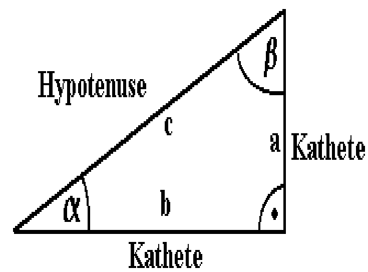
او د ساین له جملی (۱۷ .۶) لاس ته راځي

له کومو چی α تاکل کیدی شي .

لوي اړخ او ولاړ یا عمود اړخونه (هیپوتینوز او کاتیتونه یا مخامخ- او په پروت اړخ):

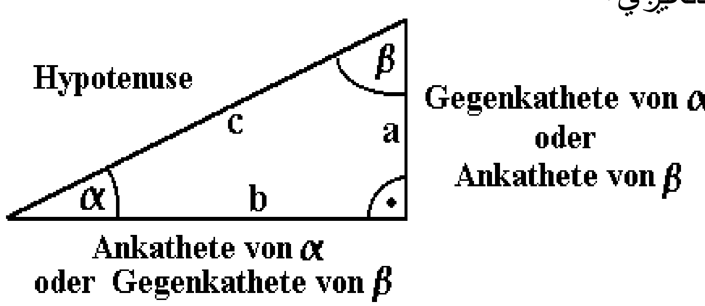
۱ – په ولاړکونجیز دریګوډي کې ولاړ کونج ته مخامخ اړخ هیپوتینوز یا لوي اړخ بولو۰

۲ - نور دواړه اړخونه غوښتوني – یا مطلوب کوج ته مخامخ اړخ او په مطلوب کونج پروت اړخ یا ولاړ اړخونه یا کاتیتونه بولو۰

مخامخ دریګوډی دې ورکړشوی وي: په لاندې درېګوډي کې کونجونه، او اړخونه جوت یا څرګند روښانه دي . د اړخونو نومونه: الفا کونج ته مخامخ مخامخ اړخ بولو او په الفا پروت اړخ په پروت یا پروت اړخ بولو. ولاړ کونج ته مخامخ لوی اړخ بولو	

لند یا تکرار :پورته او په لاندې بیلګه کې دا اړخونه دغوښتوني کونج مخامخ او په پراته اړخونه بلل کیږي

بیلګه
بیا دې همغه پورته درېګوډی ورکړ شوی وي، چې په بیتا پروتاوخ یا کاتیت د الفا مخامخ اړخ یا کاتیت او په څنډ په الفا پرو اړخ یا ه کاتیت د بیتا مخامخ اړخ یا کاتیت ده، چې په څیره کې لیدلکیږي۰



د ساین جمله

په تریګونومتري کې ساینجمه د درېګوډي د یوه کونج او د دې کونج مخامخ اړخ ترمنځ اړیکی ښایي۰ دا له البتانی میندل شوي او ښوول شوي۰ د درېګوډي درې اړخونه او درې ګونجونه ، وړانګه او چاپیری ورکړ شوي (لکه په فرمول کې) نو باور لري:

220

سرلیک

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

یادونه : دا پورته فرمول دې (6,14)وي ۰

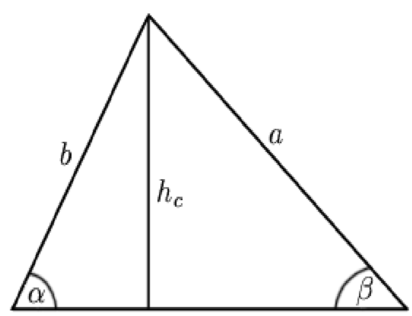
زیات وخت د ساین جمله په داسې ډول هم ورکول کیږي:

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$$

که چیرې په درېګوډي کې د ساین جملي له لارې څه ښوول کیږي ، نو دې ته دې پام وي، چې په اینتروال [0°;180°] کې په ټولیزه توګه د همغه کونج دوه یو له بل بیل ارزښتونه لیدل کیږي، دا: دوه ګونوالی ګونګرواینځجمله په ګوته کوي۰

د دې لپاره دې د کوساین جمله هم وکتل شي

ښوونه : (دا څیره دې ٦ ، ١٨ وي او دا نا نومول شوي کونجونه دې x,y وي)

	$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$ $\sin\beta = \frac{h_c}{a}$ په h_c پسې یې اوبې کوو $h_c = b\cdot\sin\alpha$ د برابراینونې له لارې لاس ته راځي $a\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\alpha$ که په $\sin\alpha\cdot\sin\beta$ وویشو، نو د غوښتنې لومړی برخه کې لاس ته $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ راځي

برابرون له $\frac{c}{\sin\gamma}$ سره په پیداینتي توګه جګی h_a او یا h_b لاس ته راکوي

د کاروني بیلګه : درجګوډی ABC لارو او ورکړ شوي :

221

سرلیک

$a = 5,4\,\mathrm{cm}$ ، $b = 3,8\,\mathrm{cm}$ ، $\alpha = 73^\circ$

دا نورې لويې دې په درېګوډي کی پيداشي

د β   شميرلو لپاره د ساين جمله کارول کيږي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} = \frac{3{,}8\,\mathrm{cm}\cdot\sin 73^\circ}{5{,}4\,\mathrm{cm}} = 0{,}67$$

$$\beta = \underline{42^\circ}$$

لکه د خه مو، چې ګوته ورته ونيوله يو بل کونج هم د همدې ارزښت سضته شته ، ياني

$$\beta' = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

د دې اوبی په پوښتنه کې نه راځي، ځکه چې د درېګوډي د کونجونو زياتون به له ۱۸۰ درجو څخه واوړي۰

او نو ګاما د کونج زياتون جملې له لارې لاس ته ر اوړو

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 73^\circ - 42^\circ = \underline{65^\circ}$$

اړخ c هم داسې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$c = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{5{,}4\,\mathrm{cm}\cdot\sin 65^\circ}{\sin 73^\circ} = \underline{5{,}118\,\mathrm{cm}}$$

دکوساين جمله

په ترېګونومتري کې کوساينجمله په درېګوډي کې د درېګوډي   د اړخونو او کونجونو

222

په منځ کې اړیکې ښایې ، چې په لاندې توګه ورکړ شوي دي :

یادونه : دا لاندې فرمولونه دې (۱۸ ۰ ۹) وي

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

که ګاما ۹۰ درجې وي، نو دپیتاګوراس جملې له مخې لرو:

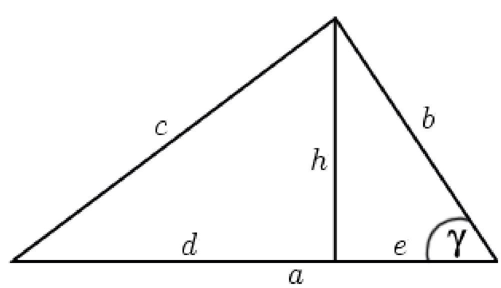
$$c^2 = a^2 + b^2$$

د کوساین جمله استعمالیدی شي، که په یوه دریګوډي کی

- درې اړخونه (SSS) یا
- دوه اړخونه او له هغو بند کونج (SWS) ورکړ شوي وي.

که له پورته څخه یې درې ورکړ شوي وي، نو څلورم یې پیداکولی شو

ښوونه :



د درېګوډي په کیڼ لور د پیتاګوراس قضیه استعمالوو، چې د c^2 لپاره یوه شمیرافاده یا – وپینه پیداکړو، د دې لپاره د دې خوا د ولاړاړخونو یا کاتیتو اوږدوالی څلوری یا مربع باید پیدا شي

$$h^2 = b^2 - e^2$$

223

د ښي اړخ لپاره د پیتاګوراس قضیې استعمال څخه لرو

$$d^2 = (a-e)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2$$

(د بینوم فرمول)

د پیتاګوراس جملې له مخې د کيڼ لور لپاره لرو:

$$c^2 = h^2 + d^2$$

اوس دواړه پورته پیداشوي شمیروییني یا- افادې سره زیاتوو:

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot e$$

اوس باور لري $\cos\gamma = \frac{e}{b} (\frac{ankathet}{Hypotenuse})$

له دې لاس ته راځي $e = b \cdot \cos\gamma$

دا پورته ځاي په ځاي کوو، نو د c^2 لپاره لاس ته راځي:

$$c^2 = \underline{\underline{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}}$$

بیلګه:

یو درېګوډیABC ، جې اړخونه یې ځرګند دي، ورکړ شوی

$a = 4{,}9 \text{ cm}$ ،

$b = 2{,}8 \text{ cm}$

$c = 3{,}5 \text{ cm}$

د کونج β لویوالی غواړو پیداکړو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

224

سرلیک

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{(4{,}9\,\mathrm{cm})^2 + (3{,}5\,\mathrm{cm})^2 - (2{,}8\,\mathrm{cm})^2}{2 \cdot 4{,}9\,\mathrm{cm} \cdot 3{,}5\,\mathrm{cm}} = 0{,}83$$

$$\beta = \underline{34^\circ}$$

دا پيژند ورکو يا داسي تعريفوو

$$\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$$

کډ وډ فرمولونهCommon formular

د پيتاګوراس کېمتوالیPythagorean identities

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

زياتون او کمون کېمتوالیSum and difference identities

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

225

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

Double-angle identities دوه برابره کونج کې ګټمټوالي

$$\sin 2A=2\sin A\cos A$$

$$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1=1-2\sin^2 A=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}=\frac{2\cot A}{\cot^2 A-1}=\frac{2}{\cot A-\tan A}$$

Half-angle identities د نیم کونج ګټمټوالی

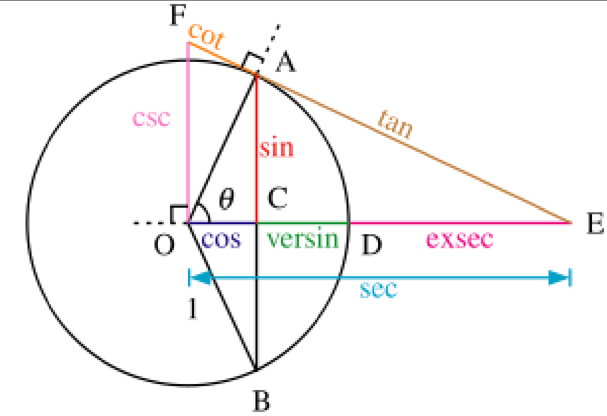
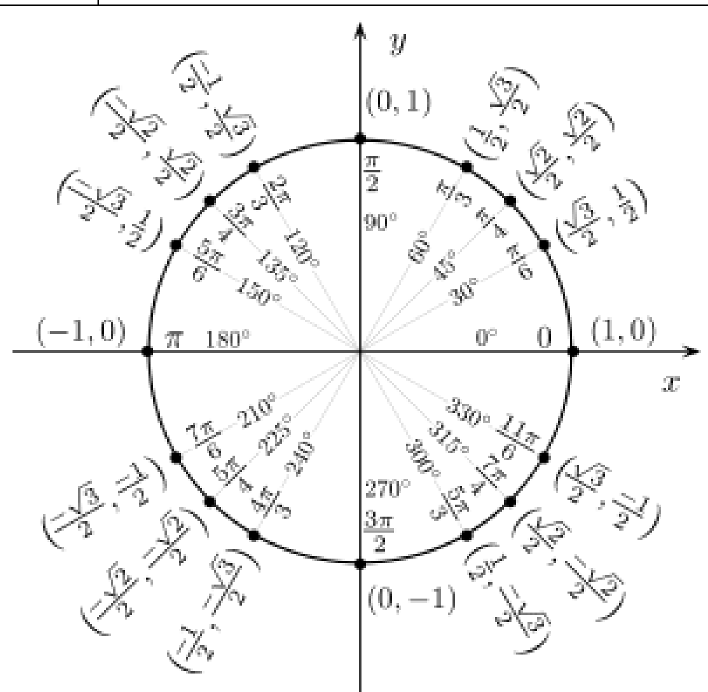
$$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{1-\cos A}{\sin A}$$

List of trigonometric identities د تریګونومتریکي ګټمټوالي لیست

226

	نوره ژوره څيرنه دلته نه کېږو، دې ته ګوته نيسو، چې په لاندې ډيره کې ترېګونومتريکي فنکشنونه روښانه دي
	د يوه کونج θ ټول ترېګونومتريکي فنکشنونه په O باندې د يوې يونګردی ترم له لارې ورکول کيدی شي (يونګردی لاندې ورکړ شوي او کونجونه هم په نخښنه شوي) مخامخ: يوونګردی(يووالي يا واحد ګردی) The unit circle

Notationليکنبڼه

دا لاندې ليکنبڼه يا - ډول د ټولو ترېګونومتريکي – يا مثلثاتي فنکشنونو ساين، کوساين ، تانجنټ ، کوتانجنټ ، سيکانټ، کوسيکانټ لپاره باور لري، د لنډوني لپاره په لاندې جدول کې يواځې ساين او کوساين ليکل شوي دي

$\arcsin(x)$ کيدی شي $\sin^{-1}(x)$ وليکل شي، خو د $(\sin(x))^{-1}$ سره بايد بدل نه شي

Definitionsپيژند:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

تل بيرته راگرځيدنه ، سيومتري او بدلونPeriodicity, symmetry, and shifts .

:په يوون(يووالي-) گردئ يا دايره کې ساده ليدل کيږي

Periodicity تل بيرته راګرځيدنه

ساين ، کوساين ، سيکانت، کوسيکانت تل بيرته راګرځيدنه 2π ده(پوره گردئ) (تکرار دئ)

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\sec(x) = \sec(x + 2k\pi)$$

$$\csc(x) = \csc(x + 2k\pi)$$

تانجنت ، کوتانجنت تلبيرته راګرځيدنه π لري(نيمگردئ يا نيمدايره) :

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi)$$

$$\cot(x) = \cot(x + k\pi)$$

Symmetry سيومتري

د تريګونومتريکي فنکشنونو لپاره سيومتري ، لکه لاندې کښل شوي

$x \to -x$, $x \to \pi/2 - x$ ،يا $x \to \pi - x$ په لاندې ډول ده

228

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin(x), & \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x), & \sin(\pi - x) &= \sin(x)\\
\cos(-x) &= \cos(x), & \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x), & \cos(\pi - x) &= -\cos(x)\\
\tan(-x) &= -\tan(x), & \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cot(x), & \tan(\pi - x) &= -\tan(x)\\
\cot(-x) &= -\cot(x), & \cot\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \tan(x), & \cot(\pi - x) &= -\cot(x)\\
\sec(-x) &= \sec(x), & \sec\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \csc(x), & \sec(\pi - x) &= -\sec(x)\\
\csc(-x) &= -\csc(x), & \csc\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sec(x), & \csc(\pi - x) &= \csc(x)
\end{aligned}$$

بدلون : د π/2 او π بدلون دی

$$\begin{aligned}
\sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos(x), & \sin(x + \pi) &= -\sin(x)\\
\cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x), & \cos(x + \pi) &= -\cos(x)\\
\tan\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\cot(x), & \tan(x + \pi) &= \tan(x)\\
\cot\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\tan(x), & \cot(x + \pi) &= \cot(x)\\
\sec\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\csc(x), & \sec(x + \pi) &= -\sec(x)\\
\csc\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \sec(x), & \csc(x + \pi) &= -\csc(x)
\end{aligned}$$

د پیتاګوراس کتمتوالی Pythagorean identities

د دې بنسټ د پیتاګوراس قضیه ده

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$.

د کونج د زیاتون او کمون کتمتوالی Angle sum and difference identities

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

د کمون او زیاتوننخښې په ورته ترتیب راځي لکه په فرمولونو کې

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

که په کیڼ لور " + " وي، نو په ښي لور"-" راځي او په څټ

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

د کونج دوه ځلوالي فرمول Double-angle formulae

که $x = y$ کيږدو د پيتاګواراس يا موفريي فرمول له لارې لرو د $n = 2$ له امله ۰

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot(x) - \tan(x)}{2}$$

د نيمکونج فرمول Half-angle formular

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \qquad (1)$$

که د ريښې لاندې ماتباندې او مات لاندې له $1 + \cos x$ سره ځل شي ، نو د پيتاګوراس جملې له مخه لرو:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1+\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

په ورته توګه که برابرون له (۱) له $1 - \cos x$ سره ځل شي، نو لور

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{(1-\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

د نیمکونج فرمولونه د تانجنت لپاره دي:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}.$$

که کیږدو $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$

نو لرو: $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

د ځل و زیاتون ته کتمتوالی Product-to-sum identities

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}$$

د زیاتون- و- ځل ته کتمتوالی (برابرون)

Sum-to-product identities

که د x لپاره $(x+y)/2$ او y لپاره $(x-y)/2$ کیږدو نو لرو

$$\cos(x)+\cos(y)=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)+\sin(y)=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x)-\cos(y)=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)-\sin(y)=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

که $x, y,$ او z د کوم درېګوډي کونجونه وي یا په نورو کلیمو، نو

نیمګردی یا نیمدایره $\text{if } x+y+z=\pi=\text{half circle,}$=که

او *نو یا* tan x + tan y + tan z = tanx.tany.tanz

$$\text{and }\sin(2x)+\sin(2y)+\sin(2z)=4\sin(x)\sin(y)\sin(z).$$

Trigonometric conversionsتریګونومتریکي په څټوالی

هر تریګونومتریکي فنکشن د بل تریګونومتریکي فنکشن سره سیده یا سیخې اړیکی لري۰ داسې اړیکی د په څټ اړیکو له لارې افاده یا ویل کیدی شي، لکه : که φ او ψ د تریګنومتریکي فنکشنونو د یوې جوړې نمایندکی وکړي ، او arcψ دې د ψ په څټ وي، داسې چې $\psi(\mathrm{arc}\psi(x)) = x$ ۰ نو $\varphi(\mathrm{arc}\psi(x))$ کیدی شي د یو الجبري فنکشن ترم x په څیر ووېلی شي یا افاده شي۰

داسې فرمولونه د لاندې جدول له لارې ښوول کیدی شي : موږ دا نوره نه روښانه کوو او په لاندې جدول پوهیدی شو

232 سرلیک

cot	sec	csc	Tan	cos	sin	φ \ ψ
$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}$	x	**sin**
$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	x	$\sqrt{1-x^2}$	**Cos**
$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	**Tan**
$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**sec**
x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	**cot**

$$\begin{array}{ccccccccc}
\sin 0 & = & \sin 0^\circ & = & 0 & = & \cos 90^\circ & = & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & = & \sin 30^\circ & = & 1/2 & = & \cos 60^\circ & = & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & = & \sin 45^\circ & = & \sqrt{2}/2 & = & \cos 45^\circ & = & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & = & \sin 60^\circ & = & \sqrt{3}/2 & = & \cos 30^\circ & = & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & = & \sin 90^\circ & = & 1 & = & \cos 0^\circ & = & \cos 0
\end{array}$$

د طیلایي نسبت φ له امله لرو

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \varphi/2$$

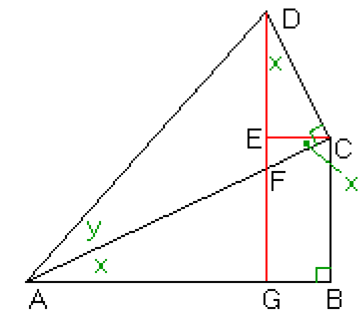
233

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\varphi - 1}{2} = \frac{1}{2\varphi}$$

جیومتریکي غوښتنه (ثبوت)Geometric proofs

sin(*x* + *y*) = sin(*x*) cos(*y*) + cos(*x*) sin(*y*)

په مخامخ خیره کې کونج x د ولاړکونجیز درېګوډي ABC برخه ده، او کونج y د ولاړکوډیز درېګوډي ACD برخه ده ۰ نو جوړښت DG و AB باندې ولاړ او CE و AB ته غبرګ دی



کونج ACE =کونجBAC = Angle x

EG = BC.   کونج CDE= x

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \frac{DG}{AD} \\ &= \frac{EG+DE}{AD} \\ &= \frac{BC+DE}{AD} \\ &= \frac{BC}{AD}+\frac{DE}{AD} \\ &= \frac{BC}{AD}\cdot\frac{AC}{AC}+\frac{DE}{AD}\cdot\frac{CD}{CD} \\ &= \frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC}{AD}+\frac{DE}{CD}\cdot\frac{CD}{AD} \\ &= \sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y).\end{aligned}$$

$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

د پورته ځیري ځخه کار اخلو:Using the above figure

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \frac{AG}{AD} \\ &= \frac{AB - GB}{AD} \\ &= \frac{AB - EC}{AD} \\ &= \frac{AB}{AD} - \frac{EC}{AD} \\ &= \frac{AB}{AD}\cdot\frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AD}\cdot\frac{CD}{CD} \\ &= \frac{AB}{AC}\cdot\frac{AC}{AD} - \frac{EC}{CD}\cdot\frac{CD}{AD} \\ &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).\end{aligned}$$

د $\sin(x - y)$ او $\cos(x - y)$ فرمولونو ښوونه

د $\cos(x - y)$ او $\sin(x - y)$ لپاره فرمولونه ساده ښوول کيږي، که د $\cos(x + y)$ او $\sin(x - y)$ لپاره فرمولونه وپيژنو

$\sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$

که په فرمول $\sin(x + y)$ کې د y په ځاي -y کيږدو نو لرو

$$\sin(x + (-y)) = \sin(x)\cos(-y) + \cos(x)\sin(-y).$$

که د فاکت ځخه، چې ساين جوړه او کوساين ناجوړه فنکشنونه دي، نو لرو

235

$$\sin(x-y)=\sin(x)\cos(y)-\cos(x)\sin(y).$$

$$\mathbf{\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)}$$

موږ په پورته فرمول cos(x+y) کې د y په ځاي -y ږدو ، نو لرو

$$\cos(x+(-y))=\cos(x)\cos(-y)-\sin(x)\sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجړه فنکشنونه دي، نو لاس ته راوړو

$$\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y).$$

۶ . ۵ تریګونومتریکي یا کونجکچ فرمولونه

د کونجبلواك یا کونجفنکشن د شمیرلو لپاره، له دا اوس څرګند فرمولونو، یوه د اړیکو ډله شته) د زیاتون)جمع(تیوریم(، له کومو یی چی دلته یوڅو راوړل غواړو .د همغو فرمولټولګه) کتاب چي فرمولونه په کي راټول وي(کی لاندې فرمولونه پیدا کیدی شي

$$\sin(x\pm y)=\sin x.\cos y\pm\cos x.\sin a;........................(6,19)$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x.\cos y\mp\sin x.\sin y;........................(6,20)$$

$$\sin 2x=2\sin x.\cos x;\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x;....................(6,21)$$

$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x.\tan y};....................(6.22)$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};..........................(6,23)$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2};$$

$$cox+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};............................(6,24)$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$$

ددې اړيکو ښوونه يوه مهمه کورني دنده ده، خو څه به په دې لاندې بېلګه کې وښايو

بيلګه ۶ . ۱۲ :

Cos(x+) = cosx.cosy –sinx.siny

موږ له څېرې ۴ . ۱۸ څخه مخ ته ځو، او ځاې په ځاى کوو $\gamma_1 = x$ ، $\gamma_2 = y$ ، نو لرو $\gamma = x + y$.

د کوساين له جملې لاس ته راځي

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2,\quad a^2 = p^2 + h_c^2,\quad b^2 = q^2 + h_c^2,\quad c^2 = (q+p)^2$$

$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - (q+p)^2,$$

$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - q^2 - 2qp - p^2$$

له $2ab\cos\gamma = 2h_c^2 - 2qp$ څخه لاس ته راځي

$$\cos\gamma = h_c^2 / ab - qp / ab = (h/a).(h/b) - (q/b).(p/a),$$

$$\cos\gamma = \cos\gamma_1 .\cos\gamma_2 - \sin\gamma_1 . \sin\gamma_2$$

$$\cos(x+y) = \cos x .\cos y - \sin x . \sin y$$

څه چې د ښوولو وو

يادونه: ځاى په ځاى بايد دې ته ګوته ونيسم، چې د ضرب او وېش تړاو نسبت و جمعې اړ تفريق يا زياتو او کمون تړاو ته کلک يا کلک نښتى دى.

بيلګه ۴ . ۱۳ – لاندې ويينې يا افادې دې ساده شي

a) $y = \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$

237

دې (۶ . ۲۳) پسې د مساوات(برابرون) ښی اړخ د لاندې سره یو- یا هم ارزښته ده.

$$2\sin\frac{\alpha-\frac{\pi}{4}+\alpha+\frac{\pi}{4}}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{4}-\alpha-\frac{\pi}{4}}{2}=2\sin\alpha\cos(-\frac{\pi}{4})=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4},$$

له کوم چې $y=\sqrt{2}\sin\alpha$ لاس ته راځي

b) $y=\cos(\frac{3}{2}x+\pi)$

د (۶ . ۲۰) پسې لرو

$$\cos(\frac{3}{2}x+\pi)=\cos\frac{3}{2}x\cdot\cos\pi-\sin\frac{3}{2}x\cdot\sin\pi.$$

دا چې $\cos\pi=-1, \sin\pi=0$ دی، نو لاس ته راځي

$$y=\cos(\frac{3}{2}x+\pi)=-\cos\frac{3}{2}x.$$

دې نتیجې ته د (۶ . ۱۶) استعمال وروسته هم رسیږو، له کومې چې لاس ته راځي

$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \text{ ist.}$$

بیلګه ۶ . ۱۴ برابرون یا مسات $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad 0\le\alpha\le 2\pi,$ دې وښوول شي

دی $1=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}$ او $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$ او له دې سره

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}-(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2})}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}}=|\sin\frac{\alpha}{2}|=\sin\frac{\alpha}{2}\quad(\text{wegen } 0\le\alpha\le 2\pi).$$

238

۶ . ۶ تمرینونه

۱ – بنسټیزه هندسه یا ځمکګچونه

۱ . ۱ – لاندې کونجونه دې په لینده اندازه همداسې په درجه اندازه(د څسیما یا دسیمال یا لسمیز او سمساګیسیمال (د ۶۰ په بنسټ جوړ شوي ګڼل(که غواړې شمیرل) برخو) ورکړ شوي دي،

1.1.1.a) $15°$	b) $225°$	c) $105°$	d) $277{,}5°$
1.1.2.a) $\frac{\pi}{8}$	b) $\frac{\pi}{12}$	c) $2\pi+\frac{\pi}{2}$	d) $\pi-\frac{\pi}{3}$
1.1.3.a) $4{,}24°$	b) $70{,}9°$	c) $31°\ 17'\ 20''$	d) $228{,}1923°$
1.1.4.a) $5{,}19$	b) $0{,}22$	c) $2{,}31$	d) 1

۱ . ۲ – یو دریګوټی له $a = 4{,}5$ cm , $b = 12{,}2$ cm او $c = 11{,}7$ cm سره ورکړ شوی دی. دا دریګوټی جوړ کړی ! د اړخونو نیموونکی وکاږی، د منځ ولاړې ، کونجنیموونکي او جګې، همداسی یې ګردیخوندي او خوندیګردي ګردی(یعنی دباندې او دننه ګردی) رسم کړی.

۱ . ۳ – لاندې دریګوټی جوړ کړی

a) $a = 11{,}7$ cm , $b = 9{,}2$ cm , $\gamma = 43{,}5°$

b) $c = 16{,}1$ cm , $\alpha = 84{,}6°$ $\beta = 51{,}9°$

وښایې چې ولې دواړه دریګوټي ورته دي!

۱ . ۴ – یو مساوي پښیز، ولاړکونجیز دریګوټي ABC ته یو مساوي اړخیز دریګوټی A'B'C' داسې په دننه کې ورکړ شوی چې $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ څغلي او C' په $\overline{AB}$ پرته ده (څیره ۴ . ۲۰ دې وکتل شي).

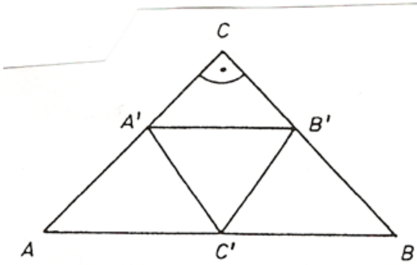


Bild 4.20 څیره

ورکړی $\overline{A'B'} = \overline{A'C'} = \overline{B'C'}$ د $\overline{AC} = \overline{BC}$ سره!

۱ . ۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی د خیږي ۴ . ۲۱ سره سم په لیدوړ ډول په دننه کی یوه مربع ورکړ شوې. د مربع اړخونه وشمیری

الف) له کاټتو څخه

ب) له هیپوتینوزپېرخو څخه

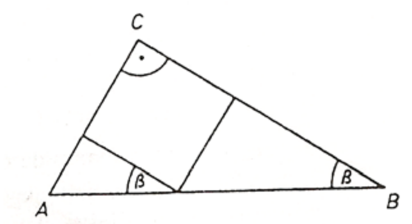


Bild 4.21

۲ . د جبشمیرنی سره د ارزښتونوټاکنه

۲ . ۱ – له لاندې کونجونو څخه د لاندېکونجونو لپاره فنکشن ارزښتونه پیداکړی:

a) $\alpha = 47{,}15^\circ$, b) $\alpha = -390^\circ$, c) $\alpha = 7{,}784$, d) $\alpha = 13{,}195$

۲ . ۲ – کونج ß دې د $\sin ß = a$, $\cos ß = a$, $\tan ß = a$, $\cot ß = a$ څخه د

a) $a = 0{,}8290$, b) $a = -0{,}2907$, c) $a = -2{,}145$, d) $a = 0{,}8660$

لپاره وشمیرل شي (په اوبی کی دې د الفا په ځاي بیتا ولیکل شي !!!)

۳ . په ولاړکونجیز دریګوډي کې شمیرنې

۳ . ۱ – په ولاړکونجیز ($\gamma = 90^\circ$) دریګوډي کې معلوم دي

الف) $a = 3$ cm , $b = 4$ cm ، ب) $a = 5$ cm , $c = 12$ cm

کوم ازښتونه $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ لري؟

۳ . ۲ – ولاړکونجیز دریګوډي کې ($\gamma = 90^\circ$) نه ورکړشوي کونجونه او نه ورکړ شوي اړخونه وشمیری ، لاندې لوییي موږ ته معلومي دي:

a) $a = 50$cm , b) $a = 40$cm , c) $b = 70$ cm , d) $c = 65$ cm

$b = 78{,}1$ cm $\alpha = 43^\circ 36'$ $\alpha = 18^\circ 55'$ $ß = 59^\circ 29'$

۳ . ۳ – وشمیری ! A , h_c او همداسی د ټاکلي مساوي پښیز دریګوډي ورکړ شوي پاتې کونجونه او اړخونه ($\alpha = ß$, $a = b$):

a) $a = 66$cm , b) $c = 22{,}4$ cm , c) $a = 38{,}9$ cm , d) $c = 30{,}3$ cm

$c = 130$ cm $\alpha = 47{,}8^\circ$, $\gamma = 33{,}3^\circ$ $\gamma = 48{,}2^\circ$

240

ب) درې قوې دې د زوریا قوت $F_1 = 167{,}5N$, $F_2 = 112\ N$ او $F_3 = 157\ N$ سره ورکړ شوې وي، چی په ګډه یو دریګوډی جوړوي. د دې دریګوډي کونجونه چی له اړخونو رابند دي، څومره لوي دي؟

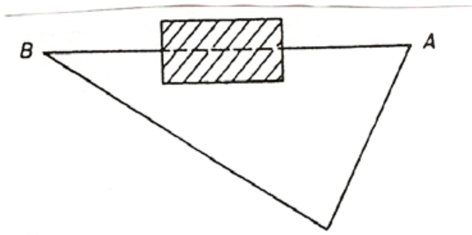


Bild 4.23 ځاکره

پ) دوه ټکي A او B چی یوه کور یی مخه پټه کړې وي، یو له بل څومره لرې دي، که $\overline{BC} = 75{,}25\ m$, $\overline{AC} = 51{,}75m$ او $\sphericalangle BCA = 71°15'45''$ وي (څیره ۴ . ۲۳)

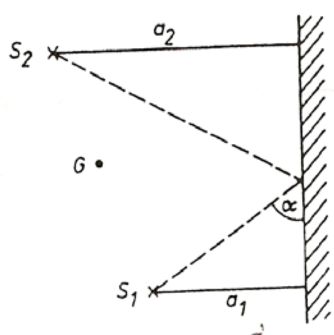


Bild 4.24 ځاکره

ت) د دوه یخ هاکي لوبغاړو S_1 او S_2 ترمنځ یو د مخالف ټیم لوبغاړی G ولاړ دی. S_1 په داسی ډول توپ و S_2 ته وهي چی توپ په یوه دیوال ولږیږي. (څیره ۴ ، ۲۳ وګورئ).

د دواړو لوبغاړو S_1 او S_2 لریوالی څومره دی؟ که د دوي واټن له دیوال $a_1 = 2{,}5m$ همداسی $a_2 = 6{,}5\ m$ وي او توپ د یوه دې دیوال سره په یوه کونج $\alpha = 42°$ ولږیږي.؟

۵ . د تریګونومتریکي یا دریکوډیزو(مثلثاتي) فرمولونو استعمال

۵ . ۱ – بې له جبشمیري او جدول دې نور دوه درې فنکشن ارزښتونه دې وشمیرل شي، که ورکړ شوي وي: $(0 < \alpha < 2\pi)$:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ c) $\tan\alpha = \sqrt{3}$ d) $\cot\alpha = -\sqrt{3}$

۵ . ۲ - لاندې مساوات وښایئ:

5.2.1. a) $1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ b) $1+\cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

c) $\cos\alpha \cdot \sqrt{1+\tan^2\alpha} = 1$ d) $1+2\cos\alpha = 4\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1$

5.2.2. a) $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ b) $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

c) $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ d) $\cot\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

5.2.3. a) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ b) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

c) $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$ d) $\cot 3\alpha = \dfrac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}$

5.2.4. a) $\cos 2\alpha = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha$ b) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

c) $\cos 2\alpha = 1 - 8\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ d) $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

5.2.5. a) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha = \dfrac{1}{4}\sin 4\alpha$

b) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = -(\cos\alpha + \sin\alpha)$

c) $\sin\alpha + \sin(\alpha + \dfrac{2\pi}{3}) + \sin(\alpha + \dfrac{4\pi}{3}) = 0$

d) $\sin^2(3\pi - \alpha) + \sin^2(6{,}5\pi + \alpha) = 1$

وکتور شمیرنه او په څمککچ کی د هغه په کارونه

دا د ږترشمیرنېبلبدی لدۍ. ښهدی،چې ګرانلوستونکې ولولي.

۱۷ . ۱ د وکتور پیژند ،

په کارتیزي کواودینات سیستم کی د وکتور انځورونه

په پیدایښتي پوهنو یا طبیعي علومو او تخنیك کی موږ لویی پیژنو چی د ریبل ارزښتونو په ورکولو سره یواځنۍ ټاکلي دي، لکه وخت، ګرمي، توان ، وزن . داډول لویو ته سکالار لویې وایو .نورې لویی لکه زور ، چټکتیا(سرعت)، بیره (تعجیل)، د برقي او مقناطیسي چاپیریالزور برسیره په ارزښت (مطلقه ارزښت) د لور ورکونه هم غواړي، په کومه چی تاسیر اچوي. موږ دې لویو ته وکتورونه وایو.
د وکتور له لارې کیدی شي چی دهندسي شیانو ځان نیونه هم تشریح کړای شو. په فضا هوا کی یو ټکی کیدی شي چی د هوا کواوردینات سیستم کی د سرچینی څخه د دې ټکي په لور لوریزشوې کرښه (په دې مانا چي مطلقه ارزښت او لوری لري) تشریح کړی شي یعنی له سرچینی څخه یی په دې ټکي برید وي یا دا ټکی په نخښه کړای شي یا یې د غشي څوکه د دې ټکي په لور لوریزه وي.

یادونه : ما وکتورونه $a,b,$ ښوولي، ښه به یې $\vec{a},\vec{b};....$ وای، ډیرو کتابونو کې پندې **a,b,..** لیکل شوي، خو ما د وکتور سره تل د وکتور کلمه یاده کړې، چې د ناټیکپوهنې څخه مو ژغوري٠

پیژند ۱۷ . ۱ : یوه لویه a چی د یوه مطلقه ارزښت (|a| چی داوړدوالي کچګڼ یی هم بولو) او یوې لورې له مخی ټاکل شوی وي، وکتور بلل کیږي٠

(لنډ: یوه لویه چی لور ولري، وکتور دئ. موږ کړی شو چی دې لویي ته غشی هم ووابو.
زه یی همدا وکتور بولم)

یو وکتور په هوا کي د یوه لور لرونکی کرښی(غشي) په څیر انځورکیدی شي. د تعریف ۱۷ . ۱ له مخی ټول مساوي اوږده او په یوه لور لوری-، لوریزې کرښي همغه وکتور انځوروي، په یوه بریدټکي باندې ټړل یی په نظر کي نه دي نیول شوي.
سړی ویلی شي: یو وکتور کیدی شي په هوا کی په خوښه غبرګ (موازی) وخوځول شي یا راکښل شي، موږ په راتلونکي کی د داسی ازادو وکتورو سره سر او کار لرو. نورې په وکتور انځور شوې لویي، بر سیره په مطلقه ارزښت او لور، په نورو ټاکونټوټو هم اړه لري. د بیلګي په توګه یوه قوه یا زور د همغه خپل تاثیرلیکی یا بهتره برید لیکی په اوږدوالي له یوه ځایه بل ته راکښل کیدی شي(په غبرګ یا موازی راکښنون یی تاثیر تغیر کوي) دلته په لیکه راکښونکو وکتورو باندې غږیږو. هغه یو ټکی انځورونکی وکتور په کواوردیناتسیستم په سرچینې (د برید - یا حملی ټکی) پورې ټړلی. داسی وکتورونه ځاي وکتورونه(په ځاي ټړلي -) بلل کیږي .
ځنی په لاندې کی د فرمول بندي شوې شمیرقاعدې له مخي کیدی شي دې ډول وکتورونو ته هم پراخه شي.

پیژند ۱۷ . ۲ :
دوه وکتورونه **a** او **b** برابر بلل کیږي **a** = **b**
که دواړه وکتورونه په مطلق ارزښت او لور یو په بل سر وخوري یا پریوځي.

Bild 17.1 ځاکه

ټولي برابرې اوږدې او برابرې – یا همغه لوریزې کرښې، لکه چې
وویل شو همغه وکتور ښایي.

پیژند ۱۷ . ۳ :
یو وکتور **a** د مطلقه ارزښت |**a**|=0 سره 0 - یا صفر وکتور بلل کیږي.
صفر وکتور لور نه ټاکي یا تعینوي. یو وکتور **ea** چې د a لور او مطلقه
ارزښت |**ea**|=1لري، نو په وکتور a پورې اړوند یوونوکتور(۱) بلل کیږي.

(1)Einheitsvektor,unit vector یوونوکتور یاني ارزښت یې یو یوون
دی یا واحدوکتور(؟)

پیژند ۱۷ . ۴ :

دوه وکتوره اورتوګونال (Orthogonal) بلل کیږي، که دوي یو په بل نیغ
ولاړ (عمود) ولاړ وي، کولینیار(kollinear) بلل کیږي، که دواړه د
همغی یوې کرښي سره غبرګ وي، کومپلانار (komplanar) بلل کیږي ،
که د همغي یوې هوارې سره غبرګ وي.

د وکتورونو سره شمیرلو لپاره باید مطلقه ارزښت او همدارنګه لور
شمیرنیز ډوله لاس ته راوړل شي. ددې لپاره یوه نسبي سیستم ته اړتیا حس
کیږي، دلته هوایي یا فضایي کارتیزي کواوردینات سیستم استعمالیدی شي. د
کواوردینات سیستم انځورونولپاره لاندني روښانه ونې یا توضیحات یعنی د
وکتور ځله ونه یاضرب د یوه رییل ګڼ سره او د وکتورونو زیاتون مخ ته
پراته دي.

پیژند ۱۷ . ۵ :

د یوه وکتور ځله ونه یا ځل د یوه سکالار سره:

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}, \lambda \in R$$

یو وکتور دی چې د $|\lambda|$ - ځله دa مطلقه ارزښت لري او د $\lambda > 0$ لپاره
همغه لور لري لکه a، په ښت یا برعکس که $\lambda < 0$ وي نو د a مخامخ لور یا
په ښت لور لري

245

جمله ۱۷ . ۱:

د رییل ګڼ سره د وکتور د ځل د شمیرقاعدې
کوموتاتیف قاعده،اسوشیاتیو ضانون او د صفر وکتور سره ځل

$$\lambda.\vec{a} = \vec{a}.\lambda;....Kommutativ$$

$$\lambda(\mu.\vec{a}) = \eta(\lambda.\vec{a}) = \lambda\mu.\vec{a};....Ass.$$

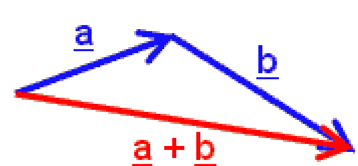
$$|\lambda.\vec{a}| = |\lambda|.|\vec{a}|, 0.\vec{a} = \vec{0}, \vec{0} = 0$$

ددې ځل یاضرب د پیژند سره ممکن کیږي چی هر وکتور a د یوه رییل ګڼ (ددې وکتور مطلقه ارزښت) او په هغه پوری تنظیم یا ترتیب شوی یوونوکتور د ځل په څیر انځور کړو: $a = |a|.e_a$

پیژند ۱۷ . . ۶ :

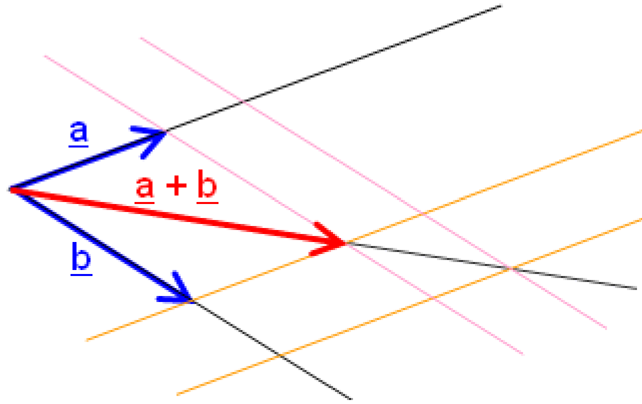
(د وکتورونو زیاتون)
د دوه وکتورونو a , b زیاتون (جمع) a+b د دواړو وکتورونو a او b څخه غزیدلی غبرګ اړخیزې(موازي الاضلاع) لوریز دوه کونجتړې (قطر) ده.
څیره ۱۷ . ۲)

د وکتورنو زیاتون (جمع) د قوو یا زورونو د زیاتون په ځیر دی او دا د شمیر قاعده ساده د لیدو کیدی شي



څیره شته دغبرګ اړخیزه پورته نیمه یا له تعریف ۱۷ . ۶ څخه پورته څیره یا لاندې څیره

246



جمله ۱۷ . ۲ :

(د وکتورونو د جمع لپاره د شمیرقاعدې)

a+b=b+a (کوموتاتیف قاانون)

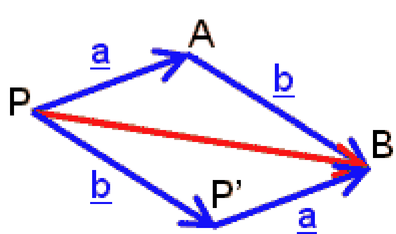
(a+b)+c=a+(b+c) اسوسیاتیف) قانون)

دیستریبوتیوو او وربسي یه لاندې نظم اړیکې

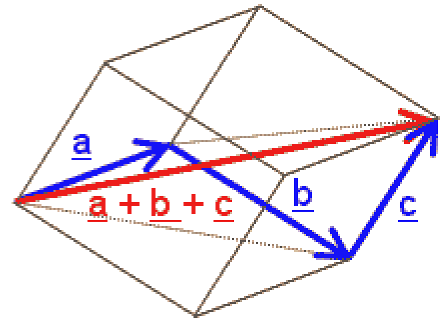
$$(\lambda+\mu).\vec{a}=\lambda.\vec{a}+\mu.\vec{a};............Distrib.$$

$$\mu(\vec{a}+\vec{b})=\mu.\vec{a}+\lambda\vec{b};............Distr.$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$$



د زیاتون دي قانونو سره موږ ته ممکن کیږي چې هر وکتور، د بیلګي په توګه د وکتورونو د کواوردینات محور په لور ښودونکو وکتورونو د زیاتون په څیر انځورکړای شو یا ولیکو. په دې ډول بریالي کیږو چې دواړه د وکتورونو لپاره موخه وره یا هدفمنده شمیرنه په کواوردینات سیستم کی انځور کړو



پورته ځیره کې د درې وکتورونو زیاتون

پیژند ۱۷ . ۷ :
په کواودینات سیستم کی د وکتور a انځورونی لاندې
a=(a1,a2,a3)   (17 . 1)
موږ په یوه ولاړکونجیز
-x1 , x2 , x3
کواوردینات سیستم کی د وکتور انځوره ونه پوهیږو، د نخښنی یا مخ نخښنی
په نظر کې

نیولوسره او د ai پرویکشن یا پریوستون له لارې په هر
xi - محور(i = 1 , 2 , 3)
پرویکشن (Projection) د دوه اړخونو لپاره انځورونه (په ځیره ۱۷ . ۳
کی)
داسی ai د a وکتورi - م کواوردینات بلل کیږي

248

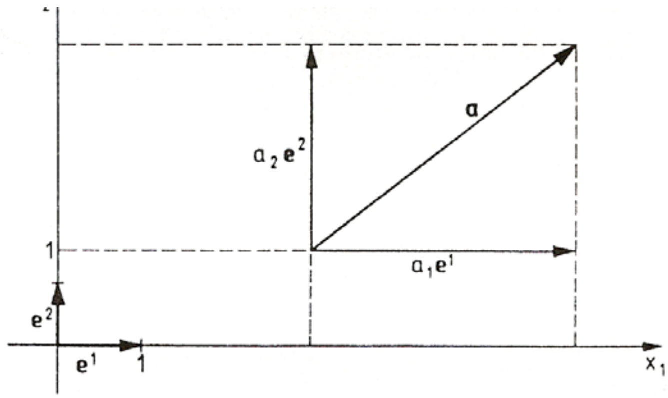


Bild 17.3 ځېره

یادونه:

مورږ دلته که د وکتورونو پورته څه لیکو نو هغه د وکتور پوتنځ په مانا نه دی بلکه هغه وکتور ښايي چې په کومه کواوردینات اړه لری. دلته د لیکنی له لورې پوره جوت دی. د xi - محورونو په لور په کواوردیناتشکل د یوونوکتورونو ځرګندونه په لاندې ډول ده

$$e^1 = (1, 0, 0)$$
$$e^2 = (0, 1, 0) \qquad (17.2)$$
$$e^3 = (0, 0, 1)$$

د وکتور aانځورونه د کواودیناتو $a^i; i = 1, 2, 3,$ او د یوونوکتورونو(۱۷ . ۲) د استعمال له لارې، د تعریفونو ۱۷ . ۵ او ۱۷ . ۶ په بنسټ د کمپوننتو له لارې یا مرسته لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۳: (د کمپوننتو (جوړختبرخو) له لارې د وکتور a انځورونه)

لرو:

$$\vec{a} = a_1\vec{e^1} + a_2\vec{e^2} + a_3\vec{e^3};............................(17,3)$$

د دوه پراخیدونې یا دوه بعدیز یا دوه دیمنزیون انځورونه. (ځېره . ۱۷ . ۳) دلته, a^ie^i چې $i=1,2,3$ وي، د a وکتور i - م کمپوننت یا جوړخت برخه بللکیږي

د جملو ۱۷ . ۲ او ۱۷ . ۳ په مرسته کیدی شي لاندې جمله لاس ته راشي:

جمله ۱۷ . ۴:

د رییل ګڼ سره د یوه کتور ځله ونه او یا د وکتورونو زیاتون کواوردینات ډوله یا په ځیر صورت نیسي، دا په دې مانا چی لاندې باوري کیږي::

$a=(a_1, a_2, a_3), \quad b=(b_1, b_2, b_3)$

$\mu a=(\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) \qquad (17.4)$

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17,5)$

بیلګه ۱۷ . ۱ :

د($a=(-2,3,-5)$, $b=(1,-6,4)$ لپاره لرو

$2a+3b=(2-2,3,-5)+3(1,-6,4)=(-1,-12,2)$.

د وکتورونو کمون د وکتورونو د زیاتون په ځیر (تعریف ۱۷ . ۶) صورت نیسي یا ځان نیسی

پیژند ۱۷ . ۸ :

د a - b کمون یا کمښت د وکتور a او وکتور b ته مخامخ - یا په څټ وکتور یعني -b زیاتون دی: $a-b=a+(-b)$ (څېره۱۷ . ۴)

له تعریف ۱۷. . ۸ لاس ته راځي : وکتور a ، کوم چی له $x1$ ټکي x^2 ټکی ښايي

(د دوه اړخؤنویا بعدونو انځورونی لپاره .ش ۱۷ . ۵) داسی دی

(پاي ټکی ترې کم پیل ټکی یانې د پایټکي او پیلټکی کمښت): $a = x^2 - x^1$

250

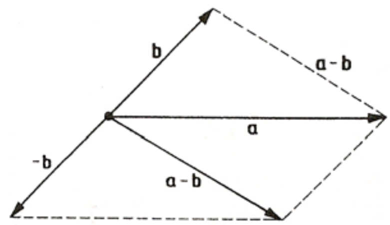


Bild 17.4 څېره

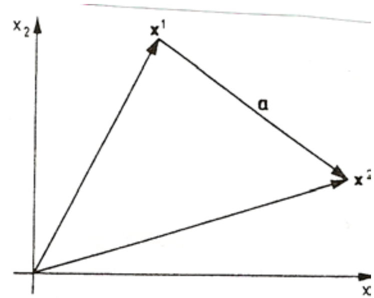


Bild 17.5 څېرو

بیلګه ۱۷ . ۲:

هغه وکتور چې له $x^1 = (-1,-3,1)$ ټکي څخه($x^2=(2,-1,5$ ټکی ښايي(په ګوته کوی یه ګوتنیوونی کوي) داسی دی :

$$a = x^2-x1 =(2,-1,5)-(-1,-3,1)=(3,2,4).$$

۱۷ . ۲ د دوه وکتورنو سکالار ځله ونه یا ضرب

پیژند ۱۷ . ۹ :

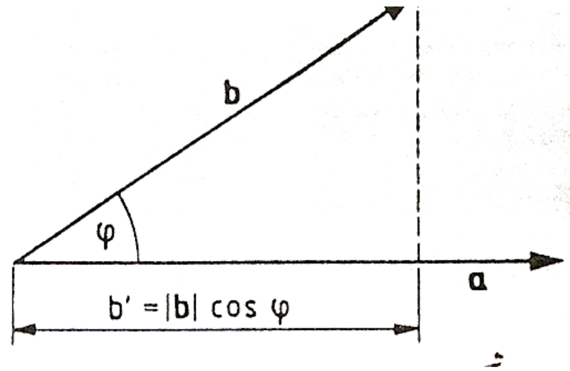
د دوه وکتوررونو a , b سکالار ځل a . b د دواړو وکتورنو د مطلقه ارزښت او له دي دواړو وکتوررونو منځ ته راغلی کونج کوساين ځل یا ضرب دی، یاني

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\varphi;..............................(17,7)$$

د سکالار ځل یا ضرب نتیجه سکالار ده

په (۱۷ . ۷) کی فاکتور $\vec{b}' = |\vec{b}|.\cos\varphi$ په هندسی مانا د (مخ) نخښني ساتلو سره (د کوساین د پیژند له مخی) په وکتورa دوکتور b پرویکشن یا پریوتل یا پرییستل دي (څیره ۱۷ . ۶)

251



په فزيك كی د سكالار ځل يا- ضرب بيلګه :

كه a هغه لار وي چی د هغي په اوږدوالی د b زور تاثير اچوي، پس A = a. bله دې زور له لارې کړ شوی كار ښايي) د لار اوږدوالی چې د لار په لور د زور د پرويكشن سره ځل دی) .

جمله ۱۷ . ۵ : (د سكالار ځل شميرقاعدې)

$a.b=b.a$ (كوموتاتيو قاون)

$a(b+c)=a.b+a.c$ (ديستريبوتيو قانون)

$a.b=0$ كه a اوb يوپه بل اورتوګونال يا عمود وي (۱۷ ، ۸)

(17 . 9) $a.a=|a|^2$

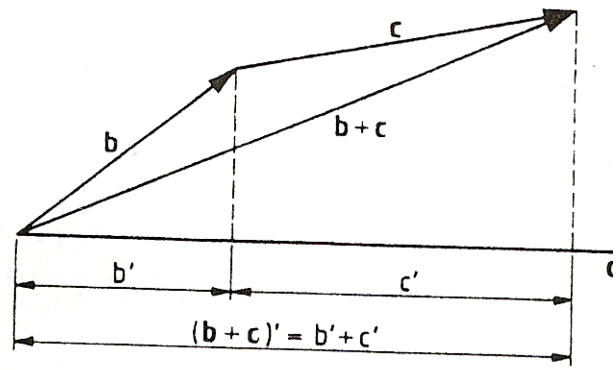
د پورته شميرقاعدو جوتونه: كوموتايو قانون د (۱۷ . ۷) پسی ترلی لاس ته راځي. ديستريبوريوقانون په (خيره ۱۷ . ۷) كی ليدل كيږي.

د اورتوګونالوكتورونو لپاره باور لري: كه $a.b = 0$ نو $\alpha = 0$ او$\cos$ (۱۷ . ۸) له (۱۷ . ۷) څخه لاس ته راځي .

همداډول (۱۷ . ۹) له (۱۷ . ۷) او داچی$\alpha = 0°$ د a او a ترمنځ دی، نو لاس ته راځي$\cos\alpha = 1$

252

سرلیک



پورته ښېره ۱۷ . ۷

جمله ۱۷ . ۶ :

د دوه وکتورونو سکالار ځل کواوردیناتډوله صورت نیسي یعني د
a = (a1 ,a2 ,a3), b = (b1 ,b2 ,b3)
د ځله ونی یا ضرب څخه لاس ته راځي :

a.b=a1b1+a2b2+a3b3 (17 . 10)

اوبیونه : د یوونوکتورونو (۱۷ . ۲) لپاره لاندې باور لري
د (۹ . ۱۷) سره سمر د i = j لپاره $e^i.e^j = 1$ د(۹/۱۷) سره سم د i|=
jلپاره $e^i.e^j = 0$ له دې لاس ته راځي:

$$\vec{a}.\vec{b} = (a_1e^1 + a_2e^2 + a_3e^3)(b_1e^1 + b_2e^2 + b_3e^3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

یادونه : د لته د وکتورونو په توانډول چی څه لیکل کیږي د توان مانا نه لري په یوونوکتورونو کي ددې لار ې ښوول کیږي چي دا دکوم کواودینات یوون وکتور دی او د نورو وکتورنو لپاره دا مانا لري چي کوم یو وکتور مو مطلب دی او نه چی په کوم توان . دې ته د مخه هم ګوته نیول شوې ده.

بیلګه ۱۷ . ۳ :

وکتور(a=(2,-3,1 دې له لاندې وکتورونو سره ځل شي
a) b1=(3,1,4),b) b²=(3,2,-2), c) b³=(3,3,3)

اوبونه: بیا یا انینترنیت

a) a . b1 = 2.3 - 3.1 + 1.4 = 7
b) a . b² = 2.3 - 3.2 +1.(-2) = -2
c) a . b³ = 2.3 - 3.3 +1.3 = 0

دلته c (په دې مانا ده چې وکتورونه a او b³ اورتوګونال یا عمود دي ددې لپاره لیکو: $a \perp b^3$

جمله ۱۷ . ۷:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};..........................(17,11)$$

اوبیونه : له (۱۷ . ۱۰) لرو : $a . a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

بیلګه ۱۷ . ۴ :

د وکتورونو(b=(3,0,-4 , a=(2,-3,1) مطلقه ارزښت (اوږدوالی) دی

$$|\vec{b}| = \sqrt{9+0+16} = 5; |\vec{a}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{4}$$

جمله ۱۷ . ۸ :

د دوه وکتورونو aاو b ترمنځ کونج په لاندې ډول ټاکل کیږي

$$\cos\phi = \frac{a.b}{|a|.|b|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}};................(17,12)$$

اوبیونه : (۱۷ ، ۱۲) له (۱۷ . ۷) ، (۱۷ . ۱۰) او (۱۷ . ۱۱) څخه لاس ته راځی

بیلګه ۱۷ . ۵ :

په بیلګه ۱۷. . 3کی د $\vec{a} \wedge b^1, b^2, b^3$ تر منځ کونجونه د شمیرلو دي.
اوبیونه:

$$\phi_1 = \square\,(\vec{a},\vec{b^1}) = \frac{2.3-3.1+1.4}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+1+16}} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = 0,3669; \phi_1 = 68,48°$$

$$\phi_2 = \square\,(\vec{a}.\vec{b^2}) = \cos\phi_2 = \frac{2.3-3.2+1(-2)}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+4+4}} = \frac{-2}{\sqrt{4}\sqrt{17}} = -0,1296, \phi_2 = 97,45°$$

$$\phi_3 = \square\,(\vec{a}.\vec{b^3}) = \frac{2.3-3.3+1.3}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+9+9}} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{27}} == 0, \phi_3 = 90°$$

۱۷ . ۳ د دوه وکتورونو وکتوري ځلونه يا ځل

پيژند ۱۷ . ۱۰:

ددوه وکتورونوa,bکتورځل يا وکتوريز ځل يو وکتورc دی د کوم لپاره چې ليکو
$a \times b = c$ او لاندې خويونه لري:
۱ - د c مطلقه ارزښت دی
$$|c| = |a||b|.\sin\phi; ....(17,13)$$

دا دهندسي له مخې د a او b وکتورونو لخوا غزيدلي غبرګ اړخيز منځهوارې په مانا دی.(خ. ۱۷ . ۸)
۲- د c وکتور a او b باندې نيغ ولاړ يا اورتوګونال دی.
۳– دلته a , b , c يو ښي سيستم جوړوي، دا په د مانا چې که دښي لاس غټه ګوته او د ښوولو ګوته د aاوbلور وښايي نو کونجوړونکي د منځ ګوته دوکتورc-
لور ښايي (ځيره ۱۷ . ۹)

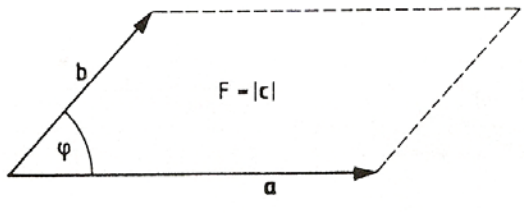


Bild 17.8

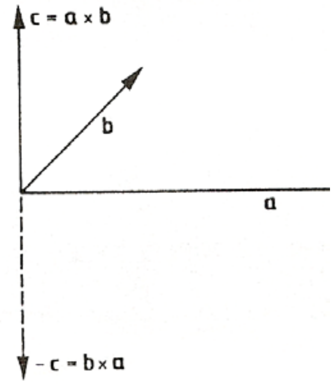


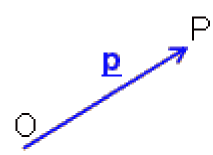
Bild 17.9

دا لاندي ښيرې د فرمولونو سره موږ ته ټکی، کرښه او هواره را په ګوته کوي او د يوه وکتور مطلقه ارزښت.

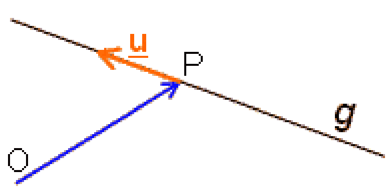
$$|\underline{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

ټکی $P(p_1|p_2|p_3)$

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$



کرښه g

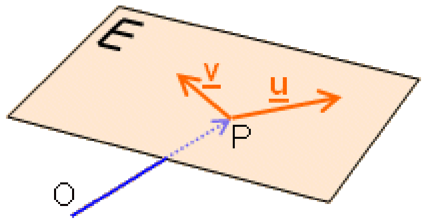


$$g: \underline{x} = \underline{p} + t \cdot \underline{u}$$

256

سرلیک

هواره E



E: $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{p}} + r\cdot\underline{\mathbf{u}} + s\cdot\underline{\mathbf{v}}$

وکتورځله ونه یا وکتور ځل یواځي د دری اړخيزې هوايا فضا لپاره تعریف دی.

د وکتورځل بیلګه په فزيك کی :

که F قوه یا زور وي چي په یوه کلك ځرخيدونکي بدن (جسم) د Q په ټکي د
rپه مروند چي د r سره کونج جوړوي، برید یا حمله کوي او هغه د P په
ټکي ځرخوي (ځیره ش. ۱۷ . ۱۰) نو ځرخون مومنت
Drehmomentمنځ ته راځي M = r × F

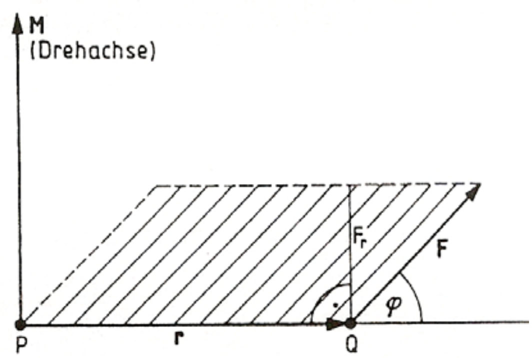


Bild 17.10

د مطلقه ارزښت له مخی د ځرخونمومنت د اوږدوالی | r | د اړم مټ او
مطلقه ارزښت $F_1 = |F|\sin\phi$

چی د اړم په مټ (نیغ) ولاړ د قدرت یا قوت زور کپوننت (جوړونکی) دی:

$$M = |r||F|\sin\phi$$

جمله ۱۷ . ۹: (د وکتورځل لپاره د شمیرقاعدې)

$$a \times b = - b \times a \qquad (17 . 14)$$

دیستریبوتیو قانون)

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c) \qquad (17.15)$$

$a \times b = 0$ د کولینیار وکتورونو لپاره) (16 . 17

د پورته شمیرقاعدو ښه څرګندونه یا توضیح : (۱۷ . ۱۴) د غوښتونکي ښي سیستم له مخی (پیژند .۱۷ ۱۰ ،څ. ۱۷ . ۹)
د کولینیار وکتورونو لپاره $\phi = 0$ پس لرو: $\sin\phi = 0$ له دې سره د (۱۷ . ۱۳) له مخی (۱۷ . ۱۵) لاس ته راځي. په دیستریبوتیو قانون په لیدنوالي (پیچي دی) دلته صرف نظر کیږي، لیدوړ والی یی نه څرګندوو. د وکتورځل شمیرلو لپاره د وکتورکواوردیناتډوله ښودنی سره د یوون وکتورونو e^1 , e^2 , e^3 وکتورځل ته اړیو.د (۱۷ . ۱۵) شمیر قانون له یوې خوا او له بلی خوا د وکتور ځل پیژند ۱۷ . ۱۰ څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۱۰ (د یوونوکتورونو وکتورځل)

$$e^i \times e^i = 0, i = 1, 2, 3; ....(17,16)$$

$$e^1 \times e^2 = e^3, e^2 \times e^3 = e^1, e^3 \times e^1 = e^2; ....(17,17)$$

$$e^2 \times e^1 = -e^3, e^3 \times e^2 = -e^1, e^1 \times e^3 = -e^2; ....(17,17)$$

د دریمی درجی دیترمینانت کلیمی لاندې (پیژند۱۱ . ۲) او که څوك یوون وکتورونه د دیترمینانت د توکو په څیر ومنلی شي، کیدی شي چی د وکتورځل $a\times b$ د a , b کواوردیناتو په څیر انځور شي

جمله ۱۷ . ۱۱ : د وکتورونو

$$b = (b1,b2,b3), a = (a1,a2,a3)$$

وکتوریز ځل یا وکتوري ځله ونه په لاندې کې د ماتریکس په توګه ده:

$$a \times b = \begin{bmatrix} e^1 e^2 e^2 \\ a_1 a_2 a_2 \\ b_1 b_2 b_3 \end{bmatrix};....................(17,18)$$

اوبيونه : د وکتور $a = (a_1 e^1 + a_2 e^2 + a_3 e^3)$ ځل د وکتور

$$b = (b_1 e^1 + b_2 e^2 + b_3 e^3)$$

د توکوېوله(توګي په توکي) وکتوري ځل د جملی ۱۷ . ۱۰ کارونه، دا لاندې ورکوي

$$a \times b = e^1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + e^2(a_1 b_3 - a_3 b_1) + e^3(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

دا ځل ارزښه يه دا لاس ته راوړنه يا نتيجه د ديترمينانت (۱۸ . ۱۷) د شميرلواود

پېژند ۱۱ . څخه هم ترلاس راځي

بيلګه ۱۷ . ۶:

a × b دې وشميرل شي، که وي

الف) a=(-2,1/2,-1), b=(1/2,-2 ,1)

ب)

$$a = e^1 - 3e^2 + e^3, b = -e^1 - 2e^2 + 3e^3$$

اوبيونه الف) ب) د دې بيلګې اوبيونه دې ګان لستونکي او مينه وال په غاړه واخلی، دا له مخه تيرې جملې له مخی پوره روښانه دی۰

وکتوري ځل د خپل مطلقه ارزښت (۱۷ . ۱۳) هندسي اهميت په بنسټ د وکتورونو a , b څخه خورې شوې منځهوارې Fp غبرګ اړخيز ه همداېول د a او b څخه خورشوي يا غزيدلي دريګوډی منځهوارې FD شميرلو لپاره خورا مساعد دی . باور لري

$$F_P = |a \times b|; F_D = \frac{1}{2}|a \times b|;.....................(17,19)$$

بیلګه ۱۷ . ۷ :

د وکتورونو(a=(1,1,0) , b=(2,0,1 څخه خورې شوې هوارې منځ یا دننه
په لاندې ډول ده

$$a \times b = \begin{vmatrix} e^1 e^2 e^3 \\ 110 \\ 201 \end{vmatrix} = (1,-1,-2), F_P = |a \times b| = \sqrt{1^2(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

بیلګه ۱۷ . ۸ :

د دریګوډی ABC منځهواره (د هوارې دننه) دې وشمیرل شي چی
کونجتکي يي وي:
A=(2,1,1) , B=(4,0,0) , C=(1,-1,2)

ابیونې :
دریګوډی له لاندې وکتورونو څخه غزیږي
a=B-C=(3,-1,-2),
او b=A-C=(1,2,-1)
د a او b وکتوري ځل په لاندې ډول دی

$$a \times b = \begin{vmatrix} e^1 e^2 e^3 \\ 31-2 \\ 12-1 \end{vmatrix} = 3e^1 + e^2 + 5e^3 = (3,1,5)$$

د درېګوډی ABC د هوارې دننه یا منځهواره په لاندې ډول ده

$$F_D = \frac{}{2}|a \times b| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 1 + 5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{35}$$

۱۷ . ۴ شپات ضرب (غبرګهواریزځل موزی سطحیز ضرب)

260

يادونه : دا يو شيږ خوابيز تن دی چی مخامخ هوارې يی سره غبرگی او يو په بل ضرور نيغ ولاړ نه وي . لاندې شكل ۱۷ ۱۱. يی بيلگه او د مسئلی دحل انځورونه ده

پیژند ۱۷ . ۱۱ :

د درې وكتورونو غبرګهواريز ځل يا شپاتځل[a , b , c] لاندې ځل يا ضرب دی

[a,b,c]=(a×b)   (17 . 20)

دلته وکتورونه a او b وکتوريز ځل کيږي او نتيجه يي بيا د cسره سکالار ځل کيږي،
يعنی لاس ته راوړنه يا نتيجه يي سکالار ده.

غبرکهواريزځل ځمككچيز هندسي ليدونکی اهميت لري. د سكالارځل (پيژند ۱۷ . ۹) سره سم باور لري

$$[a,b,c]=(a\times b).c=|a\times b|.c=|a\times b|.|c|.\cos\alpha$$

دلته الفا د وكتورونو a × b او c څخه رابند شوی كونج دی .(څيره ۱۷ . (۱۱

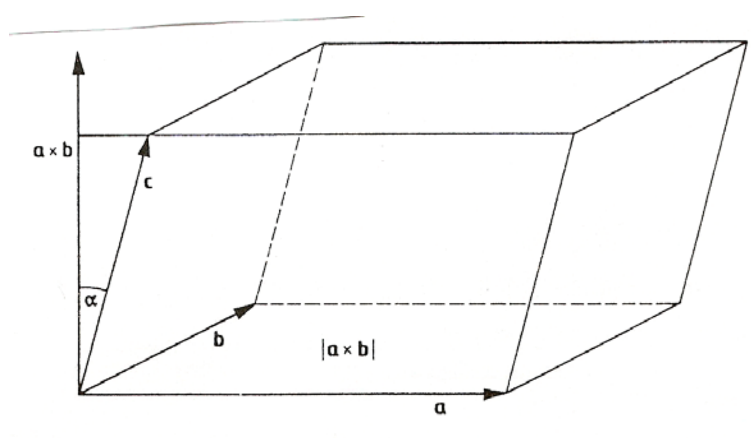


Bild 17.11

دلته د وکتورځل تعريف سره سم (پيژند ۱۷ . ۱۰) |a×b| د a او b غزيدلي غبرگ اړخيز دی . برسيره پر دې $|c|.\cos\alpha$ پرتله برخه ۱۷ . ۲) په

261

وکتور a×b باندې د وکتور c پروجکشن يا پريوستون په مانا دئ. يعني د a,b
او c ځخه غزيدلی غبرګهوارې يا

شپاټ جګوالی ښايي. پس[a,b,c] هندسي د وکتورونو a,b,c ځخه غزيدلي
غبرکهواريزې ډکي (حجم) په مانا دی.
دغبرګهواريز په مطلقه ارزښت (د غبرګهواريز ډکي يا-حجم) کی تغير نه
راځي که چيرې د وکتورونو پرلپسی ترتيب بدل شي. د غبرګهواريزې ډکی
زياتيز يا مثبت دی، که ورکړ شوي ترتيب يو ښی- سيستم جوړ کړی٠

جمله ۱۷ ۱۲۰:

[a,b,c] =[b,c,a] = [c.a.b]=-[a,c,b]=
=-[c,b,a]=-[b,a,c]   (17 . 21

که وکتورنه په يوه هواره کی پراته وي)کومپلانار وي(نو يو شپاټ د صفر
جګوالي سره لاس ته راځي. نو بيا لاندې جمله باور لري

جمله ۱۷ . ۱۳:

(17 . 22) د کومپلانار وکتورونو لپاره باور لري[a,b,c]=0

د غبرګهواريز يا شپاټ ځل شميرلو لپاره د وکتورونو په کواورديناتتوګه
انځورونه بيرته ديترمينانت انځورونه په کار اچول کيږي

جمله ۱۷ . ۱۴:

د وکتورونو
a=(a1,a2,a3),b=(b1,b2,b3),c=(c1,c2,c3)

غبرګهواريز ځل په لاندې ډول دی

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix};..........(17,23)$$

262

اوبیونه : وکتور څل a×b د جملی ۱۷ . ۱۱ سره سم لاندې اوبیونه لري

$a.b=(a_2b_3-a_3b_2)e^1-(a_1b_3-a_3b_1)e^2+(a_1b_2-a_2b_1)e^3$

د a × b سکالارڅل د c سره کواوردیناتېوله په لاندې توګه صورت نیسي.

(a×b).c=[a2b3-a3b2,-(a1b2-a2b1),a1b2-a2 b1].(c1,c2,c3
) = c1(a2b3-a3b2)-c2(a1b3-a3b1)+c3(a1b2-a2b1)= a1(b2c3-b3c2)-a2(b3c1-b1c3)+a3(b1c2-b2c1)

دا نتیجه د دیترمینات (۱۷ . ۲۳) شمیرلو له لارې هم لاس ته راځي.

بیلګه ۱۷ . ۹:

د وکتورنو(a=(0,1,2) , b=(2,0,1), c=(1,1,0

غبرګهواریز - یا شپاتڅل[a,b,c] په لاندېډول دی:

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix}012\\201\\110\end{vmatrix}=0(0-1.1)-1(0-1.1)+2(2.1-0)=5$$

بیلګه ۱۷ . ۱۰:

وکتورونه(a=(1,2,3) ,b=(3,6,1), c=(0,0,1کومپلانار دې او شپاتڅل بي په لاندې ډول دی(دا اوبیونه دې ګران لوستونکي او مینه وال په غاړه واخلي)

بیلګه ۱۷ . ۱۱ :

د تیترایدر(دریګوډي اړخیزه ، لاندې شکل دی) ډکی(حجم) دې وشمیرل شي)

(څیره. ۱۷ . ۱۲)

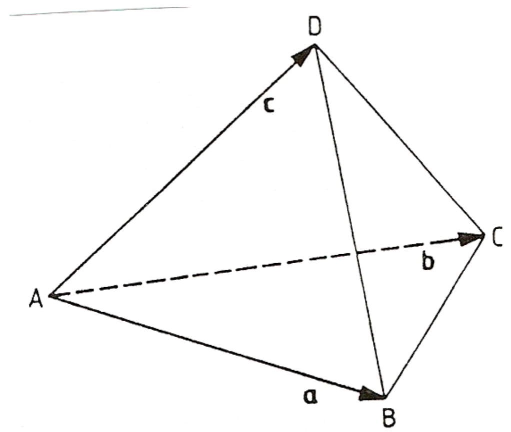


Bild 17.12

د لاندې کونجټکو یا ګوډټکو سره

A=(1,1,0) , B=(2,0,1)
C=(3,-1,2) , D=(1,0,3)

یادونه : دا پورته په خته کې ککرټکي دي، څکه چې دا څېره څلور ککرۍ لري

اوبیونه : دا غوښتونکی ډکی د لاندې وکتورونو څخه خور تیترید ۶/۱ برخه ده

a=B-A=(1,2,0),b=C-A=(2,1,0) , c=D-A=(0,1,2)

دا تیترئیدر یو اهرام دێ چې ډکی یا حجم یی ۳/۱ ځل بنسټیزهواره ځل جګوالیډ تیترائد جګوالی د شپاټ جګوالي سره مساوي دێ او د دریګوډیهواره یی د شپاټ نیم د وکتورونو a , b , c کمیز یا منفي دێ

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix}110\\201\\012\end{vmatrix}=-5$$

د کچګڼ لپاره مطلقه ارزښت نیول کیږي: V=(1/6).|[a,b,c]|=5/6

۱۷ . ۵ په شننیزه (تحلیلي) څمککچ کی د وکتورونو کارونه

264

په دې برخه کې څمونږ هدف دئ چې وګورو چې د تحليلي هندسی پرابلمونه او بيا په ځانګړي ډول تحليلي هندسي په هوا کې وکتوري مطالعه) د ۱۶ - برخي سره په توپير (څنګه کيږي٠

۱۷ . ۵ . ۱ د يوې کرښی وکتوريزه انځورونه

په فضا يا هوا کي د يوې کرښی ځای د يوه ټکي او لور له لاری يواځنی ټاکلی دی. په کرښه gدي نښتی ټکی د ځاي وکتور x0 په مرسته (چې د کواوردينات سيستم د O څخه دا ټکی ښايي)، لور يي په وکتور V (څيرې۱۷ . ۱۳

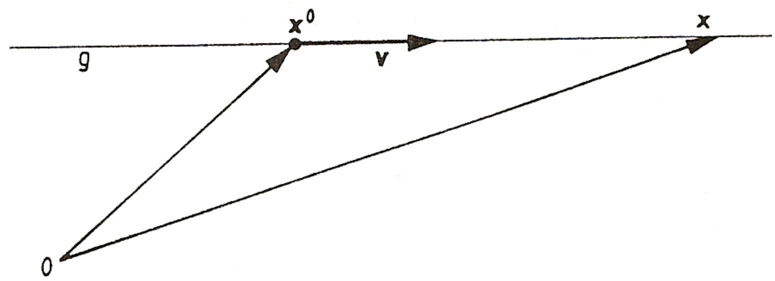


Bild 17.13 ځېره

که λ يو پارامتر وي چې د رييلګڼونو ډيرئ کی ځغلي، نو د کرښی g يو په زړه پور ټکی x د وکتور زياتون يا - جمع له لارې په لاندې فورم (بڼه) ښوول کيږي

$$x = x^0 + \lambda.v, -\infty < \lambda < \infty; ....(17,24)$$

د وکتور v په لور په ټکي x0 کی د کرښی g برابرون (پارامتر فورم)

که پارامتر λ په ريل ګڼونو کی وځغلي نو x د کرښی ټولو ټکو کي يا د ټکو ترمنځ

ځغلي. د هر ټکي $x \in g$ لپاره يواځني يوه $\lambda \in R$ شته يا موجود دوکتور مساوات

(۱۷ ، ۲۴) لاندې درې سکالار برابرونونه نه دي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda.v, x_2 = x_2^0 + \lambda.v, x_3 = x_3^0 + \lambda.v; ....(17,25)$$

که کرښه g په دوه ټکو $x0,x^1$ ورکړ شوي وي، نو د لور وکتوريې دی
$v=x^1-x^0$ او په دې ډول یی د کرښي برابرونونه دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0); ....(17,26)$$

بیلګه ۱۷ . ۱۲ :

په لاندي ټکو($x^1=(1,3,2), x0=(1,2,3$ ورکړ شوي کرښه
د $v=x^1-x^0 = (0,1,-1)$ له امله په لاندي توګه لیکل کیږي

$$x = x^0 + \lambda.v = (1,2,3) + \lambda(0,1,-1)$$

دا لاس ته راوړنه یا نتیجه موږ ته لاندې درې سکالار برابرونونه په ګوته کوي

$$x_1 = 1, x_2 = 2 + \lambda, x_3 = 3 - \lambda$$

دکرښی برابرونونو (۱۷ . ۲۴) پارامترفورم په هواره کی د کرښي ځانګړی حالت خوندي لري: x,x0 او v وکتورونه دي، هر یو د دوه کومپوننتو سره.

بیلګه ۱۷ . ۱۳ :

په یوې هوارې کي د یوې کرښي د مساواتو فورم:
$x = (1,2) + \lambda(1,-1)$ سکلار برابرونونه په ګوته کوي.

$$x_1 = 1 + \lambda, x_2 = 2 - \lambda$$

له دې ځخه سړی کولی شي چي پارامتر λ له منځه یوسي:

$$\lambda = x_1 - 1, x_2 = 2 - (x_1 - 1) = 3 - x_1$$

که د x1 په ځاي x او د x2 په ځاي y ولیکو نو لاس ته راځي$y=-x+3$ د

کرښي د برابرونونو نورمال فورم (16 . 2 .) که غواړو چي معلومه کړو چی ایا ټکی x^1 په کرښه g پروت دی، نو باید وځیړو چي کواوردینات یی برابرون (۱۷ . ۲۵) پوره کوي، که نه. دا په دی مانا چي ایا دده لپاره یو د λ - ارزښت موجود دی .

 266

بیلګه ۱۷ . ۱۴ :

لاندې ټکي $1)...x^1=(-1,4,3), 2)...x^2(2,-2,1)$ په
کرښه $g: x=(1,0,1)+\lambda(-1,2,1)$ پراته دي که نه ؟

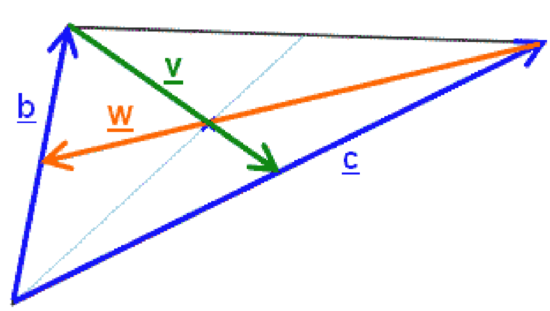
اوبیونه : ۱) د دې درې برابرونونو
$-1=1-\lambda, 4=0+2\lambda, 3=1+\lambda$ له جملې د دوهم څخه لاس ته
راځي $\lambda=2$ او دا ارزښت لومړی او هم دریم مساوات ډکوي) پوره کوي
$-1=1-2, 3=1+2$ له دې امله ټکی x^1 په کرښه g پروت دی.
۲) ددې درې برابرونونو $2=1-\lambda, -2=0+2\lambda, 1=1+\lambda$ له دویم
لرو $\lambda=-1$

دا ارزښت لمړي مساوات پوره کوي، مګر دریم مساوات نه: پسx^2 په کرښه gنه دی پروت.

که د دوه کرښو $g_1: x=x^1+\lambda v; g_2: x=x^2+\mu w$ غوڅتکی xS ،
موجود وي باید د دواړه کرښو مساوات پوره کړي. په دې مانا چې باید
باوري شي:

$$x_S = x^1+\lambda v = x^2+\mu w$$

دا وکتوربرابرون درې سکالار برابرونونه دي چې د هغو له دوه وو څخه
سرې پارامتره $\lambda \wedge \mu$ شمیرلی شي. که لاس ته راغلي ارزښتونه دریم
مساوات پوره کړي، نو یو پریټکی مخ ته شته، که ناپای زیات حلونه مخ ته
پراته وي ، نو دواړه کرښې یو په بل پرتې دي.



267

بیلګه ۱۷ . ۱۵ : د لاندې کرښو غوڅېکی دې پیدا شي :

$$g_1 : x=(1,1,0)+\lambda(1,3,-2),\ g_2 : x=(1,2,2)+\mu(-1,-2,4)$$

اوبیونه : غوڅېکي باید دواړه برابرونونه پوره کړي::

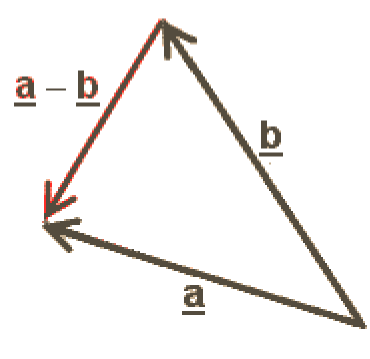
$$1+\lambda=1-\mu, 1+3\lambda=2-2\mu, -2\lambda=2+4\mu$$

د درې سکالار برابرونونو له لومړي مساوت څخه لرو $\lambda=-\mu$ ددې له مخې او له دوهم برابرون څخه لاس ته راځي : $\mu=-1$ نو لرو $\lambda=1$. په دې ډول دریم برابرون هم پوره کیږي د غوڅېکي کواوردینات سیستم د کرښې g1 د $\lambda=1$ سره لاس ته راځي:

xs =(1,1,0)+1.(1,3,-2)=(2,4,-2).

۱۷ . ۵ . ۲ د هوارې یا سطحې وکتوریزه انځورونه

د یوې هوارې E ځای په هوا کی په یوه ټکي x0 او دوه نا غبرګو وکتورونو vاو w یواځنی ټاکلی دی. د وکتورونو v او w پیلټکي کیدی شي په x0 پراته ونیول شيیا پراته فرض شي) ش؟؟ څیره شته . ۱۷ . ۱۴) .



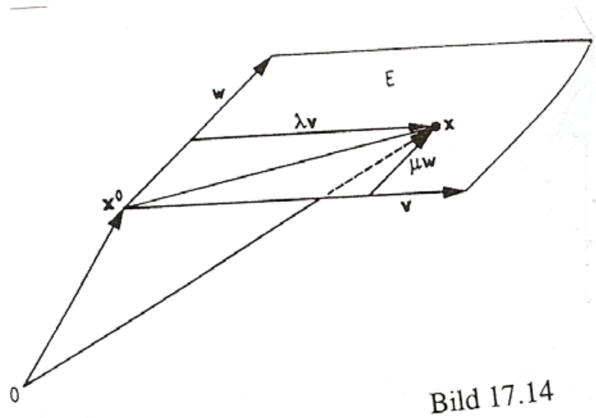


Bild 17.14

که $\lambda \wedge \eta$ پارامترونه وي چې يو له بل خپلواك د رييل ګڼونو ډيري کی ځغلي، نو کيدی شي د هوارې Eپه خوښه ټکی xپه لاندې ډول انځور شي.

$$x = x^0 + \lambda v + \mu w, -\infty < \lambda, \mu < \infty; ....(17,27)$$

د هوارې E مساوات چې دx0 ټکي کی، له وکتورونو v,w غزيدلي (پارامترفورم)

هر جوړه ارښت $\lambda, \mu \in R$ يواځنی يو $x \in E$ ښايي. وکتوربرابرون (۱۷ . ۲۷) لاندې سکالاربرابرون ځرګندوي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda v_1 + \mu w_1, x_2 = x_2^0 + \lambda v_2 + \mu w_2, x_3 = x_3^0 + \lambda v_3 + \mu w_3; ....(17,28)$$

که چيرې هواره په درې ټکو $x0$, x^1 , x^2
چې په يوه کرښه نه دې پراته ورکړ شوي وي، نو کيدی شي چې د هوارې غزوونکي وکتورونه په لاندې ډول انځورشي: $v=x^1-x0$, $w=x^2-x0$ له دې سره د هوارې مساوات داسی دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) + \mu(x^2 - x_0); ....(17,29)$$

بيلګه ۱۷ . ۱۶:

په درې ټکو $x0=(-1,2,5), x^1=(2,3,-6), x^2=(1,-4,3)$ کې د هوارې E ورکړ شوي براورن د $v=x^1-x0=(3,1,-11), w=x^2-x0=(2,-6,-2)$ له امله په لاندې ډول دي:

$$x = x^0 + \lambda v + \mu w = (-1,2,5) + \lambda(3,1,-11) + \mu(2,-6,-2)$$

ددې نتیجې څخه لاندې سکالاربرابرون لاس ته راځي:

$$x_1 = -1 + 3\lambda + 2\mu, x_2 = 2 + \lambda - 6\mu, x_3 = 5 - 11\lambda - 2\mu$$

۱۷ . ۵ . ۳ :د هواروبرابرون یا- مساوات سکالارفورم(-بڼه)

یوه هواره د یوه ټکي x0 او یوه په هواره نیغ ولاړ وکتور n له پلوه یاله لارې هم یواځنی ټاکلی ده یا، چې عمودي یا نورمال وکتور (Normalvektor(یي بولي) ؟؟؟ څیره شته ش . ۱۷ . ۱۵ په هواره E کی دې x یو په خوښه ټکی وي .نو دا له x0 و x ته بریدي وکتور x-x0 هم په دې هواره کی پروت دی او وکتورونه n او x-x0 یو په بل نیغ ولاړدي.

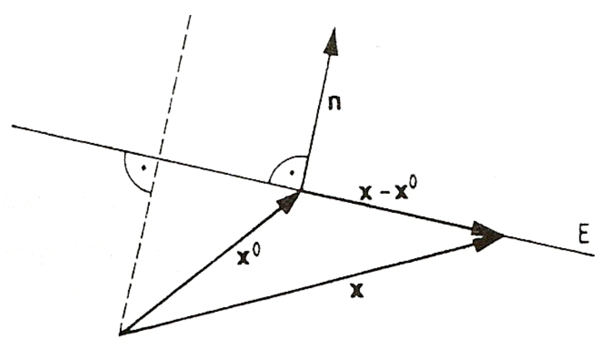


Bild 17.15

په یو بل نیغولاړو) اورتوګونال (وکتورونوڅخه جوړ شوي سکالارځل صفر دی څیره

(خ. ۱۷ . ۸ دې برتله شي) دا په دې مانا چې باوري کیږي :

$$n(x-x0)=0,nx=nx0= c \qquad (17 . 30)$$

دهوارې برابرونونو سکالار فورم ، n- عمودوکتور، د هوارې x0 په ټکی.

بيلګه ۱۷ . ۱۷ :

د هوارې برابرون چی ټکی(x0 =(2,-1,5په پروت دی او په هغه وکتور(n=(2,-2,1 (نيغ)ولاړ دی
د c=nx0=(2-2,1).(2,-1,5)=4+2+5=11 له مخې په لاندې ډول دی:
(2,-2,1).x=11 <=> 2x1-2x2+x3=11.

د هوارې مساواتو پارامترفورم (۱۷ . ۲۷) په يوه سکالارفورم اړول بدلول (۱۷ . ۳۰) د پارامتر د له منځه وړلو له لارې لاس ته راځي.

بيلګه ۱۷ . ۱۸ :
د هوارې مساوات دې په پارامتر فورم وي:

$$x=(1,-2,4)+\lambda(0,1,-1)+\mu(1,-1,2)$$

دا وکتور برابرون لاندې درې سکالار برابرونونه خوندي لري يا په بر کي لري يا ځايوي:

$$x_1=1+\mu, x_2=-2+\lambda-\mu, x_3=4-\lambda+2\mu$$

له لومړي لاس ته راځي

$$\mu=x_1-1$$

له دې سره دا نور دوه برابرونونه داسې دي

$$x_2=-2+\lambda-x_1+1 \Leftrightarrow x_1+x_2=-1+\lambda \wedge$$
$$x_3=4-\lambda+2x_1-2 \Leftrightarrow -x_1+x_3=2-\lambda \Leftrightarrow$$
$$-x_1+x_2+x_3=1$$

د هوارې برابرونونو سکالار فورم: (-1,1,1)x=1

که غواړو چی څرگنده کړو چی ایا یو ټکی x1 په هواره E پروت دی چي برابرون یی په پارامتر فورم ورکړ شوي ، نو باید مطالعه شي چی ددې کواوردینات (۱۷ . ۲۸) برابرون پوره کوي که نه (بیلگه ۱۷ ، ۱۵ : د کرښی مساواتوته ورته) . او یا سړی پارامترفورم په سکالارفورم بدلوي او څیړي چی د ټکي کواوردینات دا مساوات پوره کوي، که نه .

بیلگه ۱۷ . ۱۹ :

ایا ټکی($x^1=(2,-2,5$ په هواره $E: x=(1,-2,4)+\lambda(0,1,-1)+\mu(1,-1,2)$ پروت دی ؟

اوبیونه : : دلومړي

دوه برابرونونو $2=1+0\lambda+\mu, -2=-2+\lambda-\mu, 5=4-\lambda+2\mu$

څخه لاس ته راځي $\lambda=1 \wedge \mu=1$

دا دواړه ارزښتونه دریم برابرون پوره کوي: 5=4-1+2.1 ، دا په دې مانا چي x1 په هواره E پروت دی. که د هوارې برابرون په سکالرفورم واړول شي: -x1+x2+x3=1 (بیلگه ۱۷ . ۱۸ دې وکتل شي (، نو د ټکي x^1کواوردینات دې یواځي دx1,x2,x3 لپاره ځاي په ځاي شي ، چی معلوم کړو چی x^1 په هواره E پروت دی : -2+(-2)+5=1

د یوې هوارې: n.x=c:E او د یوې کرښی $g: x=x^0+\lambda v$ ترمنځ غوڅټکی xs(که شته وي)(نو هم پهE پروت دی او هم په g .له دې امله د هوارې په برابرونونو کی د x لپاره $x^0+\lambda v$ ځاي په ځاي کوو(ږدو) او په دې ډول یو برابرون د λلپاره لاس ته راځي.که دا برابرون یواځنی یو اوبی ولري نو غوڅټکی موجود دی ، که اوبی شته نه وي یا موجود نه وي نو کرښه g د هوارې E سره غبرگه ځغلي، که ناپاي ډیر ې اوبیونې شته وي نو کرښه g په هواره E پرته ده.

بیلگه ۱۷ . ۲۰ :

د کرښو $g: x=(1,0,1)+\lambda(-1,1,1)$ پروت ځاي یا موقعیت دې لاندې هوارو ته وټاکل شي:

$$a).....x_1+2x_2+3x_3=4, b)...2x_1+x_2+x_3=3, c)...2x_1+x_2+x_3=4$$

اوبیونه : دا چی لټونکی غوڅټکی xsد کرښي برابرون پوره کوي نو باوري دي:

$x_1=1-\lambda, x_2=\lambda, x_3=1+\lambda$

a) $x_1+2x_2+3x_3=(1-\lambda)+2\lambda+3(1+\lambda)=4\lambda+4=-4,\ \lambda=-2$

$x_S=(1+2,-2,1-2)=(3,-2,-1)$

b) $2x_1+x_2+x_3=2(1-\lambda)+\lambda+(1+\lambda)=0.\lambda+3=3$

لمدا λ په خوښه، gپه E پرته ده

c) $2x_1+x_2+x_3=2(1-\lambda)+\lambda+(1+\lambda)=0.\lambda+3=4$

حل نه شته ، نوکرښه gد سطحې E سره غبرګه څغلي.

ددوه سطح $E1:\ n^1.x=c1$ او $E2$ هوارې: $n^2.x=c2$ غوڅکرښه دواړه برابرونونه پوره کوي(دا دوه برابرونونه دي، هر یو د درې نامعلومو $x1, x2, x3$ سره). دوه امکانات شته دي چې کرښه g (که شته وي وي) را پیدا کړی شو.

۱ – سړی یوه واریابله په خوښه ټاکي: $x_i=\lambda$ (ازاد پارامتر)، نور دواړه $x_j,\ j\neq i$ له دواړو هوارمساواتو څخه په λ کې د لایني افادو په څیر راپیداکوي. او په دې ډول د کرښې مساوات لاس ته راځي.

۲ – سړي د کرښې دوه مختلف ځانګړي ټکي x^0 او x^1 راپیدا کوي او په دې ډول د کرښې g مساوات لاس ته راولي: $x=x_0+\lambda(x^1-x_0)$.

بیلګه ۱۷ . ۲۱ :

د دوه هوارو E_1 او E_2 پرېکرښه g غواړو پیدا کړو. هوارې دې وي :

$$E_1: x_1-x_2+x_3=3, \qquad E_2: 2x_1-x_2-3x_3=0$$

حل ۱): $x_1=\lambda$ په خوښه

$$E_1:\ -x_2+x_3=3-\lambda,\ E_2:\ -x_2-3x_3=-2\lambda.$$

کمون یا تفریق : $4x_3 = 3 + \lambda$,

په E_1 کی دې ځاي په ځاي شي :- $-x_2+3/4+\lambda/4 = 3-\lambda$, $x_2=(5/4)\lambda-9/4$

نو لاس ته راځي $x_1 = \;\;, x_2=(5/4)\lambda-9/4, x_3=(1/4)\lambda+3/4$

په وکتور لیکدود : $x=(0,-9/4\,,3/4)+\lambda(1,5/4\,,1/4)$

همداسی (<=>) له $(1/4)\lambda$ $\tilde{\lambda} =$ سره لرو

$$x=(0,-9/4\;,+\tilde{\lambda}(4,5,1)$$

حل(اوبی) ۲ : په E_1 او E_2 ځاي په ځاي کوو: $x_3=0$, پس لاس ته

راځي $2x_1-x_2=0$, $x_1-x_2=3$ د لاندې حل سره $x_1=-3\,, x_2=-6$,

پس $x^0=(-3\,,-6,0)$ په هوار کې ځانګړي تکی دی،که ولیکو $x_2=0$ پس

له $2x_2-3x_3=0$, $x_1+x_2=3$ لاندې حل لرو: $x_3=6/5$, $x_1=9/5$ او په دې ډول د ه

کربښې g دوم تکی : $x^1=(9/5\,,0\,,6/5)$

په تکو x^1 ، x^0 د کربښې g مساوات (مقایسه ۱۷ . ۲۶) داسې دي

$$x=x^0+\lambda(x^1-x^0)=(-3,-6,0)+\lambda(24/5\,,6\,,6/5)$$

<=> د $\tilde{\lambda}=(6/5)\lambda$ سره :

$$x=(-3,6,0)+\tilde{\lambda}(4,5,1)$$

دا په حل (اوبی) ۱ کی پیداشوې کربښې g یوبل ډول انځوردي، ځکه چی د لورو

وکتورونه یو بل ته ورته دي، : $v=(4,5,1)$ او د $\tilde{\lambda}=-3/4$ لپاره په حل ۱ کې د

کربښې تکی د حل ۲ x^0 دا تکی لاس ته راځي

$$x=(0,-9/4,3/4)-(3/4)(4,5,1)=(-3,-6,0)$$

۱۷ . ۶ تمرینونه:

۱ – وکتورونه $\mathbf{a} = (1,0,-2)$, $\mathbf{b} = (-3,-5,0)$, $\mathbf{c} = (4,-1,7)$ ورکړ شوي دي.
جوړکړی :
$-\mathbf{a}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\mathbf{c}$, $2\mathbf{a} - \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$!

۲ – وکتور $\mathbf{a}$ چې له ټکي $x^1 = (3,-5,7)$ څخه د ټکي $x^2 = (-2,4,-1)$ لور ته لاربشودوي، څنګه دی؟

۳ – وکتور $\mathbf{a} = (3,21)$ دې پیلټکي $x^1 = (1,2,3)$ ولري. وښیی چې پایټکې x^2 یې کوم کواوردینات لري؟

۴ – لاندې وکتورونه کوم مطلقه ارزښت لري؟
$\mathbf{a} = (4,-3,12)$, $\mathbf{b} = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $\mathbf{c} = (3,3,3,)$?

۵ – وکتورونو $\mathbf{a} = (2,-1,3)$, $\mathbf{b} = 7,0,0)$ پورې اړوند یا مربوط یوونوکتورنه کومې کواوردیناتی لري؟

۶ – د لاندې وکتورونو یو په بل ولاړوالی یا اورتوګونالیتې دې وښول شي ؟
$\mathbf{a} = (1,2,3)$, $\mathbf{b} = (3,0,-1)$!

۷ – دلته دې a_1 , b_1 او c_1 څومره لوي وي، چې وکتورونه
$\mathbf{a} = (a_1,3,2)$, $\mathbf{b} = (-4,b_1,2)$, $\mathbf{c} = (3,-2,c_1)$
په وکتور $\mathbf{d} = (2,1,-3)$ (نیغ) ولاړ وي؟

۸ – د

a) $\mathbf{a} = (-2/3, 1/2, 5/4)$, $\mathbf{b} = (3\ 74, -1/3, 2/3)$,

b) $\mathbf{a} = e^1 - e^2 + e^3$ ، $\mathbf{b} = 2e^1 + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره دې $\mathbf{a} . \mathbf{b}$ وشمیرل شي!

۹ – وکتورونه $a = (3,-4,12)$ او $b = (-6,8,0)$ يو له بل سره کومه کونج جوړوي!

۱۰ – د ګوډ - ياکونجتهکو

$A = (-2,0,3)$, $B = (-6,4,-1)$, $C(4,-1,2)$

سره، د دريګوډي کونجونه څومره لوي دي؟

۱۱ – وښايي چې وکتورونه $a = (2,4,-6)$ او $b = (-1,-2,3)$ يو بل ته کولايني دي!

۱۲ – د

a) $a = (-4,-1,3)$, $b = (5,-2,7)$

b) $a = e - e^2 + 2e^3$, $b = 2e + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره $a \times b$ وشميرئ!

۱۳ – د دريګوډي هواره څومره لويه ده، چې کونجونه يې په لاندې توګه راکړ شوي وي

$A = (-2,0,3)$, $B = (-6,4,-1)$, $C = (4,-1,2)$?

۱۴ – د هغه غبرګ اړخيز هواره څومره لويه ده چې له وکتورونو

$a = (-3,2,1)$, $b = (5,-3,2)$

څخه غزيدلي وي ؟

۱۵ – د وکتورونو

$a = (-2,1,-3)$, $b = (1,-3,6)$, $c = (1,2,-3)$

څخه غزولشوې غبرګهوارې کوم ډکې يا حجم لري؟

دا نتيجه هندسي روښانه کړئ!

۱۶ – څلورګوډي د لاندې ګوډونو (بېلګه : څلور ا پرخې [داد اهرام تشکلوله)]

$P_1(2,1,4)$, $P_2(0,-1,2)$, $P_3(-3,6,4)$, $P_4(2,2,2)$

سره کوم ډکې ياحجم لري؟

۲۳ – د لاندي هوارو

الف) E_1 چې له ټکي $x^o = (0,1,2)$ تیریږي او د لاندي وکتورونو

لور لري: $v=(0,2,1)$, $w = (2.3,-5)$

ب) E_2 چې له ټکو $x^1 = (2,-3,4)$, $x^o = (o,1,2)$ او

ټکي $x^2 = (7,-9,-3)$ څخه تیریږي.

پ) E_3 چې د نورمال وکتور $n = (0,2,1)$ سره

له ټکي $x^o = (0,.1.2)$ تیریږي، مساوات څنګه دي؟

۲۴ – له تمرینو۲۳ الف او ب څخه د هواري مساواتو سکالارینه څنګه ده؟

۲۵ – ودی څیړل شي چی ایا ټکي $x^1 = (1.3.-6)$ همداسی $x^2 =(5,-5,4)$ په هواره

a) E_1: $\mathbf{x} = (0, 2, -1) + \lambda(1, -3, 5) + \mu(2, -2, 0)$,

b) E_2: $2x_1 + x_2 - x_3 = 1$

پراته دي!

۲۶ – د کرښو

a) g_1: $\mathbf{x} = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 3, 1)$,

b) g_2: $\mathbf{x} = (-1, 1, 1) + \lambda(-1, -1, 1)$,

c) g_3: $\mathbf{x} = (3, -2, 0) + \lambda(-1, -1, 1)$

پروتڅاي د هواري $E: \; 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18$ سره وټاکی!

۲۷ – د هوارو

الف) $E_1 : 2x_1 + x_2 - x_3 = -1$ او $E_2 : -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$

ب) $E_1 \; -5x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 4$ او $E_2 \; : x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -8$

غوڅکرښه دي راپیدا شي !

د وکتور شميرنې بنستيزې کليمې

وکتور او سکالار

د وکتورونو زياتون

د وکتورونو کمون

د کارونې يا استعمال بيلګه

د کوساين - او ساين جمله

رايوځايونه يا تولګه

پوښتنې: د وکتورونو زياتون او کمون

Vektor und Skalar

Addition von Vektoren

Subtraktion von Vektoren

Anwendungsbeispiele

Kosinus- und Sinussatz

Zusammenfassung

Aufgaben: Addition und Subtraktion von Vektoren I

وکتور او سکالار:

په طبيعت او تخنيک کې رامنځ ته کيدونکې لويې د يوه کره شوي کچيوونونو يا اندازه واحدونو سره د يوه کچګڼ يا اندازه عدد له لارې پوره يا مکمل ټاکل شوي د بيلګې په توګه داسې لويې دي:

اوږدوالی، کتله، کار، انرژي، وخت، تودوخي او پوتنځيال. داسې لويې کيدی شي په يوه سکالا (شميرپهنيزې لويې، چې د ګڼون ارزښت سره کره ټاکلې ده) انځور شي او له دې امله سکالارې لويې يا سکالار بلل کيږي.

لويې، چې د هغو ټاکلو ته له سکالار برسيره يا د سکالار ترڅنګ لور هم اړتيا ولري ، دا وکتوری لويې يا وکتورونه بلل کيږي. چټکتيا يا سرعت او بيړه يا تعجيل داسې لويې دي.

وکتورونه د غشو سره ادځوريږي. د غشو اوږدوالی ارزښت ټاکي او د غشي لور د وکتور لور ښايي. وکتور د سکالار سره پر پرتله يوه لوريزه لويه ده.

ازاد وکتورونه، کرښه تړلي وکتورونه او ځايتړلي وکتورونه سره توپير کيږي.

د يوه ازادوکتور غوره خوي دی، چې اغيز کرښې سره او د ځان سره غبرګ هرې لور ته په فضا کې وړل کيدی شي. د برابر اوږدوالي او برابرې لورې وکتورونه يو بل سره برابر يا مساوي دي.

$$\overline{AB} = \vec{a} \text{ und } \overline{CD} = \vec{b}$$

$$\overline{AB} = |\vec{a}| = a$$

$$\overline{CD} = |\vec{b}| = b$$

قوه يا زور چې پهيوه تن بريد کوي، يو کرښه تړلی وکتور انځوروي. داکړی شي د خپل بريد کرښې په خوښه يووړل شي يا راکښل شي، مګ ده ته غبرګ نه.

يوځای تړلی وکتور، چې ځايوکتور هم بلل کيږي يو کره ټاکلی بريد ټکی لري او راکښل کيدی نه شي.

د وکتورونو زياتون يا جمع

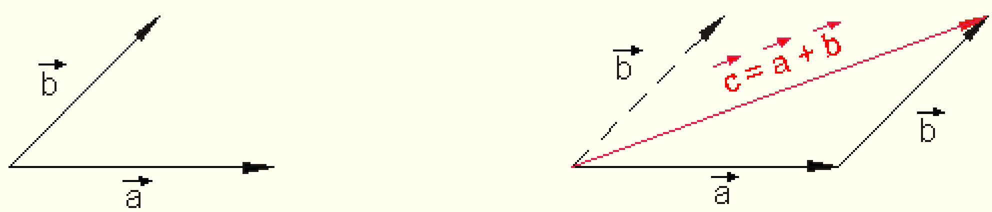
که يو وکتورb و وکتور a سره زيات کړو، په دې معنا چې وکتورb د ځان سره داسې غبرګ يا موازي راکښل شي، چې پيل ټکی يې د وکتور a په پای ټکي پريوځي.

يادونه: زه د وکتورونو په سر د وکتورنخښه يعنې غشي نخښه نهشم باسليو دا به راته ګران لوستونکي وبښي(ژباړي).

د وکتور a د پيل ټکي تړل د وکتور b د پای ټکي سره وکتور c ورکوي او د دې لپاره ليکو:

$$\boxed{\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}}$$

د دوه وکتورونو زياتون يا جمع



د دوه وکتورونو د جمعې يا زياتون لپاره د بدلون يا کموتاتيو قانون صدق کوي يا باور لري

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

د درې وکتورونو د زياتو سره اړين نه دئ، چې دا دې په يوه سطحه کې پراته ويد له دې درې وکتورونو يې هر يو يوه په فضا کې لوريزه کرښه ده دا درې
وکتورونهکړی شي په فضا کې يو جوړښت وغزوي. اسوشياتيو قانون باور لري:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

دوه ارزښت برار وکتورونه د مخامخ ایښول شوې لور سره په فضا کې مخامخ لوریز یو بل سره معکوس یا په څټ وکتورونه بلل کیږي. که سره زیات یا جمع شیو نو د زیاتون یا جمعې په حیث یو وکتور لاس ته راوړو، چې د هغه پیل ټکي د موخې ټکي سره یوځای پریوځي.

دا چې د ې جمعي وکتور ارزښت صفر دی، دا صفروکتور بلل کیږي. دا ټاکلي لور نه لري.

د وکتورونو کمون یا تفریق

د دوه وکتورونو کمون یا تفریق

د وکتور کمون کیدی شي بیرته د وکتور پهزیاتون یا جمع واړول شي.

یو وکتور کمیږي یا تفریقیږي،که د دې مخامخ وکتور جمع شي

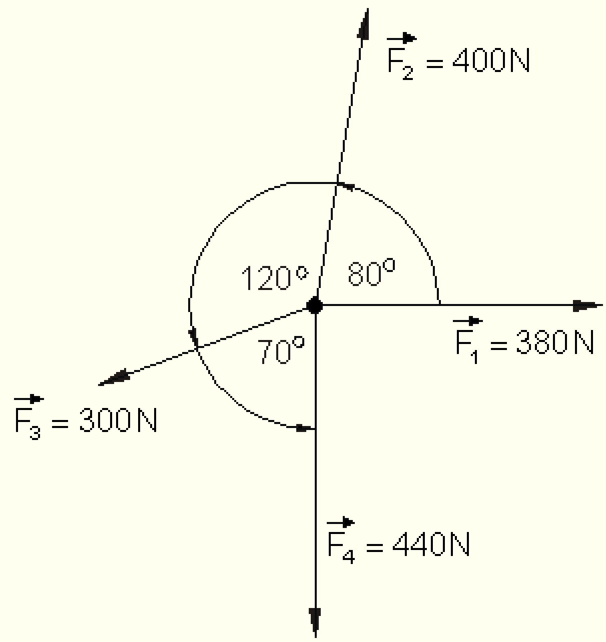
د کارونې یا استعمال بیلګه:

بیلګه ۱ :

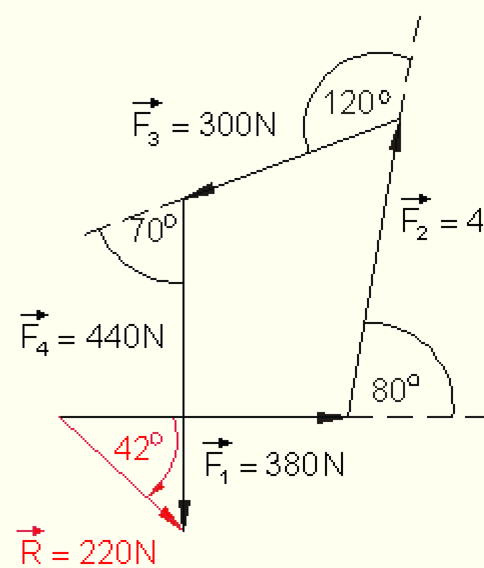
د وکتور جمع رسمیزه.

دیوه برقوېشني متّ باندې پهیوه ټکي څلور قوې برید کوي، چې په یوه سطحه دې پرتې وي. رسمیز د دې وکتور لور او ارزښت وټاکل شي. د رسمکچې یا د کچونې اله یا د کچونې لرګی(؟):1 cm د 100 N سره برابر دی.

پوښتنه کونه:



رسمیز حل:



$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4}$$
$$\Rightarrow \left|\vec{R}\right| = 220N \text{ und } \sphericalangle\left(\vec{F_1},\vec{R}\right) = -42^0$$

د لاس ته راغلي ارزښت 220 N دی. دا په دې معنا، چې د وېشوني په مټه يو لاس ته راوړې قوه د 220 N اغيز کوي.

Die Wirkungsrichtung beträgt in Bezug auf $\vec{F_1}$ -42^0 oder 318^0

يادونه:

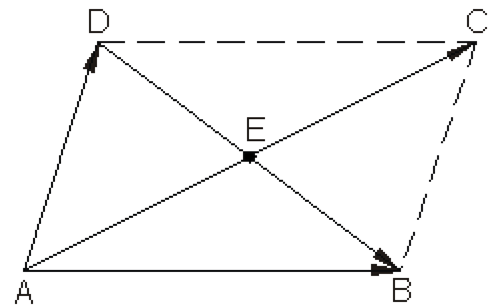
د ساعت څرغون په مخامخ يا معکوس (کيڼ راتاو) د نسبت کرښې څخه په وتو مثبت ګڼل کيږي، د ساعت څرخون په لور (ښي راتاو) د دې په عکس منفي.

رسميز حل ياځي نږدې حل دی. داتيک دومره ټيک دی، چې څنګه رسم کيدی شي. يو شميرنيز حل ، چې دا به وروسته تر څيړني ونيول شي يو ټيک حل راکوي:

$$\left|\vec{R}\right| = 224{,}009N \text{ und } \sphericalangle\left(\vec{F_1},\vec{R}\right) = -41{,}585^0$$

بيلګه ۲:

غوښتنه د کرښې DB د نيمونکې ټکي Eواټن دی له ټکيAڅخه، که B د وکتور AB پای ټکی اوD د وکتور AD پای ټکی وي او وکتورونه AB او AD له ټکي A ووځي.



حل:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$$

دا چېټک E د کربښې DB نیمونکی دی، باور لري:

$$\overrightarrow{DE} = \frac{\overrightarrow{DB}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}}{2}$$

دوکتور AB لپاره نو باور لري

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{2}$$

د کربښې AE لپاره باور لري:

$$\overline{AE} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|$$

دا چې $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ دی، باید E د کربښې ACنیمونکی ټکی هم وي.

له دې سره مو وښوول، چې په غبرگ اړخیز کې دوه کونجتړې(قطرونه) د هغو د غوڅټکي له لارې نیمیږي.

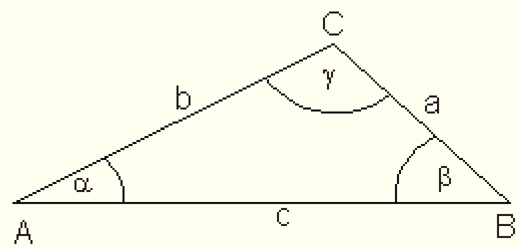
د ساین او کوساین جمله د وکتور شمیرنې لپاره مرستندوی مواد

تر اوسه مو وکتورونه رسمیز سره جمعه کول. د رسمیزو حلونه تل دقیق نه دي،

284

دکوساین جمله:

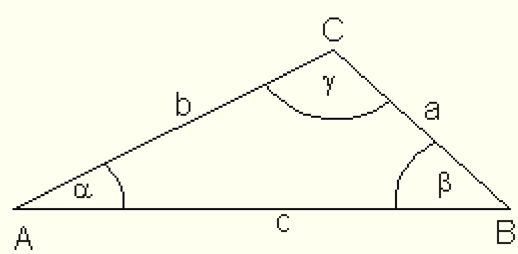
په هر درېګوډي یا مثلث کې کیدی شي د یوه اړخ مربع(څلورئ) له دواړو نورو اړخونو او له دوي رابند کونج څخه وشمیرل شي.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot \cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot \cos(\gamma)$$

د ساین جمله؛

په هر مثلث یا درېګوډي کې د اړخونو د اودوالي د تناسب نسبت و مخامخ کونج ته د ټولو اړخونو لپاره همغه دی.



$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

د ساین او کوساین جملو ته تمرینونه:

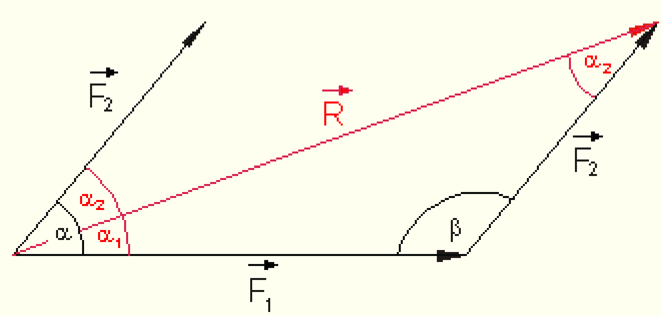
دوه قوې $\vec{F_1}$ او $\vec{F_2}$ د $\left|\vec{F_1}\right| = F_1 = 60\,N$ او $\left|\vec{F_2}\right| = F_2 = 40\,N$ سره
یو د $\alpha = 50^0$ کونج رابندوي .

دا د نتیجي قوه $\vec{R}$ خومره لویه ده؟ د $\vec{R}$ $\vec{F_1}$ همداسي د $\vec{F_2}$ سره کوم کونج جوړوي.

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} \quad \measuredangle\left(\vec{F_1}, \vec{F_2}\right) \text{ ist } \alpha = 50^0$$
$$\beta = 180^0 - 50^0 = 130^0$$

د کوساین جملې له مخه باور لري:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(\beta)}$$
$$= \sqrt{\left(60^2 + 40^2 - 2 \cdot 60 \cdot 40 \cdot \cos\left(130^0\right)\right) N^2}$$
$$\approx \underline{\underline{91{,}024\,N}}$$



د سان جملې پسې یا په تعقیب باور لري:

$$\frac{R}{F_2} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha_1)} \Leftrightarrow \sin(\alpha_1) = \frac{F_2}{R} \cdot \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha_1) = \frac{40}{91{,}024} \cdot \sin\left(130^0\right) \approx 0{,}337$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \arcsin(0{,}337) \approx \underline{\underline{19{,}672^0}}$$

له R او F1 رابند کونج دی.

دا چې α_1 او α_2 څانونه $\alpha = 50^0$ ته پوره کوي، نو د F2 اوR تر منځ کونج کیږي

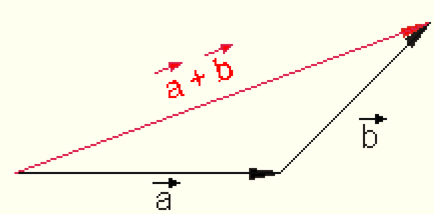
$$\alpha_2 = 50^0 - \alpha_1 = 50^0 - 19{,}672^0 \approx \underline{\underline{30{,}328^0}}$$

ټولګه:

لومړی: یو وکتور په فضا کې یوه لوریزه، اوریتي شوې کربنه ده؟

دویم: وکتورونه برابر دي، که دوي په ارزښت او لور کې سره برابر وي یا یو پهبل پریوځي.

دریم:دوه وکتورونه سره جمع کیږي، که د یوهوکتور په پای د بل وکتور پیل کیښول شي.



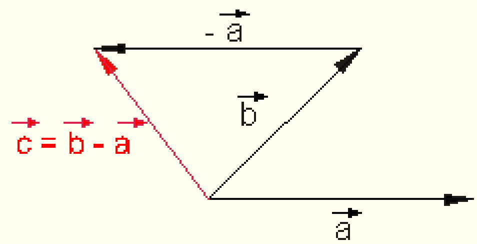
د جمع وکتور: Der Summenvektor $\vec{a} + \vec{b}$

287

وکتور چې لاس ته راځي، پیل یې د لومړي وکتور او پای یې د دویم وکتور دي.

څلورم: وکتور او معکوس یا مخمخ وکتورونه برابر ارزښت او برابر لور مګر معکوس یا مخمخ ایښول شویOrientierung لري.

پنځم:



$$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$$

کمونوکتور

داسې لاس ته راځي، چې سړی وکتور b ته د مخامخ یا برعکس وکتور aجمع کړي:

$$\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + \left(-\vec{a}\right)$$

288

پوښتنې

د وکتورونو زياتون اوو کمون(د وکمتورونو جمع او تفريق)

لومړی: دوه وکتورونه aاو b په خپلو منځو کې يو کونج α جوړوي.

وکتورونه $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ او $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ دې رسميز او شميرنيز وټاکل شي.

نور يا پسې دې د رسم سطحې څخه د βهمداسې γکونجونه، چې وکتورونه c او d يې د وکتور a سره جوړوي ولوستل شي او ودې شميرل شي.

کچوونی: د اوږدوالي يوون يا واحد په cm (د بيلګې په توګه a = 4,6 په دې معنا چې 4,6 cm)

الف - $\left|\vec{a}\right| = a = 4,6 \quad \left|\vec{b}\right| = b = 4,0 \quad \alpha = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 60^0$

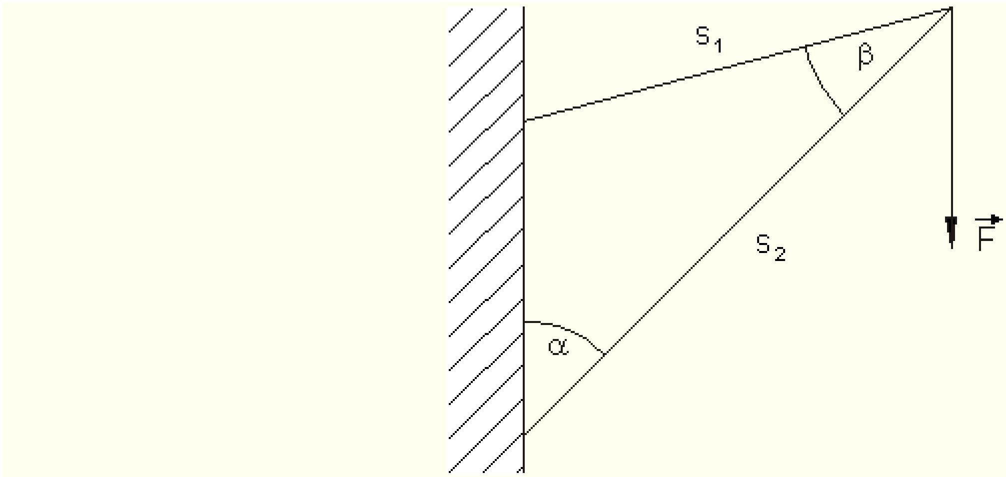
ب - $\left|\vec{a}\right| = a = 4,2 \quad \left|\vec{b}\right| = b = 3,8 \quad \alpha = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 120^0$

پ - $\left|\vec{a}\right| = a = 4,7 \quad \left|\vec{b}\right| = b = 3,2 \quad \alpha = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 250^0$

ت - $\left|\vec{a}\right| = a = 3,5 \quad \left|\vec{b}\right| = b = 4,2 \quad \alpha = \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 290^0$

دويم: د يوه کران په ستنو s_1 او s_2 باندې څومره زور پرېوځي، که کران يو 18 kN بار وړي؟

$\vec{F} = 18\,kN \quad \alpha = 45^0 \quad \beta = 30^0$



لاربنوونه:

دا د باروکتور د ستنو یا مټو په دواړو لورو ټوټه (تجزیه) کړئ او د وکتورونو ارزښت وشمیرئ. پام وکړئ چې په ستنو یا مټو په کومو لورو قوه اغیزه کوي(کیکاږل زور یا قوه(فشار)Dru.kraft که راکښل زور.Zugkr؟)

دریم: دوه برابر لویې قوې په یوه ټکي برید کوي یا پرېوځي یا زور اچوي.

د دوي ترمنځ کونج باید څومره لوي وي؟

ځلورم: دوه قوې $\vec{F_1}$؛ او $\vec{F_2}$ د $\left|\vec{F_1}\right| = F_1 = 60N$ او $\left|\vec{F_2}\right| = F_2 = 40N$ سره یو له بل سره یوکونج $\alpha = 50^0$ ترې یا جوړوي.

دا نتیجهزوق یا قوه $\vec{R}$ - څومره لویه ده؟ $\vec{R}$: د $\vec{F_1}$؛ همداسې د $\vec{F_2}$ سره کوم کونج جوړوي؟

پنځم: یوه د کانتینرو کیشتئ ټیک په ختیځ لور په حرکت راوړل کیږي.

د هغه خپله چټکتیا (سرعت) ۲۴ غوټې(Knoten د چټکتیا د شمیرلو یوون یا واحد دی).

د شمال له لور یو په ۹ غوټو د اوبو زوریزه بهیدنه د کیښتئ خوزښت اغیز من کوي یا د کیښتئ په خوزښتاغیز کوي.

و کورس تغیر(په درجو(څومره لوي دید او دا په کومه لور صورت نیسي؟

کیینتئ د بحر په لینده کومه [تکتیا لري؟

په غوټه = ۱ بحري مایل په ساعت کې، چې دا 1,852 km/h دی.

شيږم:يوه الوتكه د 10 kN د ټيلوهل زور سره په همغه يا ثابت جګوالي سيده کربنيزه ټيلوهل کيږي. يو باد د6 kN برابر پاتي زور پرې اچوي.

په دې الوتكه ټول څومره زور يا قوه پرېوځي؟

د غوښتوني الوتني لار د کوم کونج لاندې بايد تلنلار لور وساتل شي، چې موخه ځای ته ورسيږو؟

د **S** -ضرب او یوونوکتور یا واحدوکتور

- **[Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl](#)**
- **[Einheitsvektoren](#)**
- **[Der Vektorraum](#)**

د یوه وکتور ضرب د یوه سکالار سره

د 4a بنې الجبري ترم په دې معنا دی:.$4a = a + a + a + a$.

د $\frac{3}{4}a$ لاندې سرې په ورته توګه $\frac{3}{4}$ د a پوهيږي.

دا لیکندول، د خپلې معنا سره، کیدی شي سرې د وکتورشميرنې لپاره هم ترې ونيسي.

د $4\vec{a}=\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$ لاندې سړی یو وکتور پوهیږي د $\vec{a}$ د لور او لوریزوالي سر او ۴ واره یا ځله د $\vec{a}$ داوږدوالي سره.

د $\frac{3}{4}\vec{a}$ لاندې یو وکتور پوهیږو د $\vec{a}$ د لور سره او 3/4 د $\vec{a}$ اوږدوالی سره.

پیژند(تعریف):

k دې یو مثبت حقیقيی عدد وي او $\vec{a}$ یووکتور .

د $k\cdot\vec{a}=k\vec{a}$ لاندې وکتور پوهیږو، چې همغه لور او اورینتیشن ولري، لکه $\vec{a}$ او k ځله دومره اوږد دی لکه $\vec{a}$ ،

پسې دې باور ولري: $0\vec{a}=\vec{0}$ (صفر وکتور)

او $-k\vec{a}=(-k)\vec{a}=-(k\vec{a})$ (د $k\vec{a}$ معکوس یا په ښت وکتور)

د یوه وکتور ضرب د یوه سکالار سره S -ضرب بلل کیږي.

د S -ضرب لپاره لاندې شمیرقوانین باور لري:

جمله:

د هر k, k_1, k_2 عدد او $\vec{a}, \vec{b}$ وکتورونو لپاره باور لري:

اسوښیاتیو قانو	$k_1(k_2\vec{a})=k_1\cdot k_2\vec{a}$
لومړی دیستریبوتیو قانون	$(k_1+k_2)\vec{a}=k_1\vec{a}+k_2\vec{a}$ $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ $1\vec{a}=\vec{a}$

292 سرليک

دويم ديستريبوتيو قانون	

واحد وکتور(يوونوکتور)

پيژند(تعريف)موږ دوه وکتورنه (يو بل سره) غبرګ (يا کولينيار **kollinear**)بولو، که يو له دواړو د دې بل ډېرواره ياڅوځله وي.

پيژند(تعريف):که د ټولو کولينيارو(غبرګو) وکتورونو انځورونې ته يو بنستوکتو $\vec{a}$ د اوږدوالي ۱ سره(يعنې $|\vec{a}| = 1$) وکاروو، نو سړی دا د وکتور $\vec{a}$ په لور واحدوکتور يا يوون وکتور $\overrightarrow{e_a}$ بولي.

د وکتور اوږدوالی د وکتور اوږدوالی هم بلل کيږي.

ټول وکتورونه د اوږدوالي ۱ سره واحد وکتورونه(يوونوکتورونه) بلل کيږي.

هر په خوښه وکتور کيدی شي د يوه واحد يا يوونوکتور د څو ځله په حيث انځور کړی شي.

293

بيلګه ١ : لاندې وکتورونه ورکړ شوي

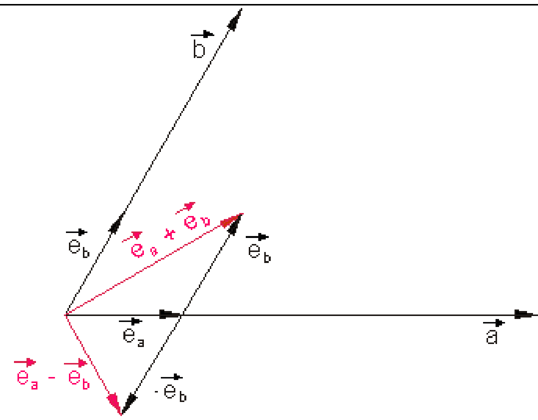
$\vec{a} = 4\vec{e_a}$ او

$\vec{b} = 3\vec{e_b}\ ;\quad \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^0$

وکتورونه $\vec{a}$ او $\vec{b}$

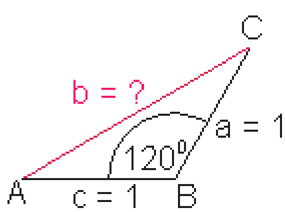
$\vec{e_a} + \vec{e_b}$ او همداسې

$\vec{e_a} - \vec{e_b}$ رسم کړئ



او وشميرئ $\left|\vec{e_a} + \vec{e_b}\right|$

او $\left|\vec{e_a} - \vec{e_b}\right|$ همداشې



د اړخ يا ضلعې b شميرنه د کوساين جملې سره کيږي.

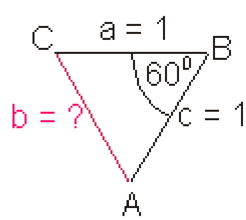
$$b = \left|\vec{e_a} + \vec{e_b}\right|$$

$$b = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)}$$

$$b = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\left(120^0\right)}$$

$$b = \sqrt{1 + 1 - 2 \cdot (-0{,}5)} = \sqrt{3} \approx 1{,}734$$

$$\Rightarrow \left|\vec{e_a} + \vec{e_b}\right| = \sqrt{3} \approx 1{,}734$$



د اړخ b شميرنه د کوساين جملې

سره کیدی شي. $b = \left\lvert \vec{e_a} - \vec{e_b} \right\rvert$ $b = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)}$ $b = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(60^0)}$ $b = \sqrt{1 + 1 - 2 \cdot 0{,}5} = \sqrt{1} = 1$ $\Rightarrow \left\lvert \vec{e_a} - \vec{e_b} \right\rvert = \sqrt{1} = 1$	

وکتور فضا

یوه وکتور فضا یا کربښیزه فضایو الجبري جوړښت دی، چې توکي یې وکتورونه بلل کیږي. دا کیدی شي سره جمعه شي یا د عددونو(سکالار) سره ضرب شي. نتیجه یې بیرته د همغې وکتور فضا وکتور دی.

په یوه حقیقي وکتور فضاV کې، دا یوهه داسي ده، چې په هغې کې سکالار حقیقي عدد دی، لاندي قوانین باور لري:

وکتور فضا:

د هر عدد $\{k;\ k_1;k_2\} \in \mathbb{R}$ لپاره او د وکتور په حیث هر $\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\} \in V$ لپاره باور لري.

295

اسوځیاتیو قانون	$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$
په v د صفر توکی یا بیاغیزه یا بې پلوه توکی	$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
په v کې نسبت جمعي ته په ځېټ یا معکوس توکی	$\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$
بدلیدنکی ا کموتاتیو قانون	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
د ضرب اسوځیاتیو قانون	$k_1\left(k_2\vec{a}\right)=k_1\cdot k_2\vec{a}$
د سکالار د جمعې دیستریبوتیو قانون	$\left(k_1+k_2\right)\vec{a}=k_1\vec{a}+k_2\vec{a}$
د وکتورونو د جمعې دیستریبوتیو قانون	$k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$
واحدقانون یا یوون قانون	$1\vec{a}=\vec{a}$

پورته تعریف په حقیقي ومتور فضا رابند یا محدود دی، ځکه چېٔ په لاندې فقط د داسې جوړختونو سره کار کیږي.

سکالار ضرب

د سکالار ضرب پیژند

د سکالار ضرب له پاره شمیرلارې(قوانین)

بیلګه ۱ :

بیلګه ۲

بیلګه ۳ :

بیلګه ۴ :

د اویکلید یا اقلسیدس وکتور فضا:

Definition des skalaren Produktes

↓ **Rechengesetze für skalare Produkte**

↓ **Beispiel 1**

↓ **Beispiel 2**

↓ **Beispiel 3**

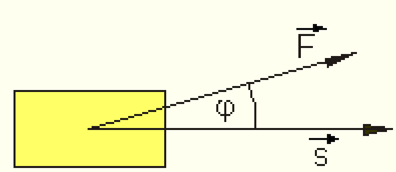
↓ **Beispiel 4**

↓ **Euklidischer Vektorraum**

د سکالار ضرب تعریف(پیژند):

د فزیکي موخه د کار تعریف د دوه وکتورونو ترمنځ یوه ترِنه(نښلونه، عملیه) ده، چي نتیجه یي یو حقیقي عدد دی.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{s}\right| \cdot \cos(\varphi)$$



پیژند(تعریف):

د دوه وکتورونو $\vec{a}$ او $\vec{b}$ سکالار ضرب $\vec{a}\cdot\vec{b}$ شمیرل کي ، چې د دواړو و کتورونو سکالار له د وي څخه رابند کونج یا زاویې د کوساین سره ضر ب شي:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$$

په پام کې ولره: د دوه وکتورونو سکالارضرب صفر کیږي، که لږ تر لږه له دې دواړو وکتورونو یو صفر وي، یا دواړه وکتورونه یو پر بل ولاړ یا عمود وي.

که $\vec{a}=\vec{0}$ یا $\vec{b}=\vec{0}$ او یا $\vec{a}\perp\vec{b}$ وي.

ځکه چې له $\vec{a}\perp\vec{b}$ لرو $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$ دا په دې معناچې $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^{0}$ یا $\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=270^{0}$

د دوه برابرو وکتورونو سکالار ضرب لپاره لرو یا لاس ته راځي:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\left(0^{0}\right)=a\cdot a\cdot 1=a^{2}\ \left(\text{Bemerkung: }\left|\vec{a}\right|=a\right)$$

د سکالار ضرب په مرستهکیدی شي د یوه وکتور ارزښت انځور شي.

د یوه وکتور ارزښت(مطلق ارزښت): $a=\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

د سکالار ضرب لپاره شمیر قوانین.

جمله:

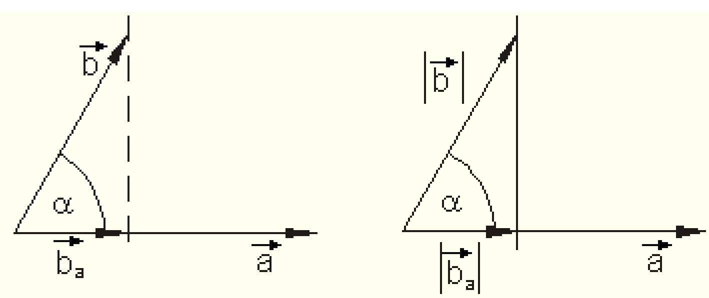
د ټولو $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ او $k \in \mathbb{R}$ لپاره باور لري:

بدليد قانون	$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
اسوسياتيو قانون	$(k\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{b}) = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$
ديستريبوتيو قانون	$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

بيلګه ۱ :

دوه وکتورونه $\vec{a}$ او $\vec{b}$ ورکړ شوي دی، چې مختلف لورې لري.

غوښتونی د وکتور $\vec{b}$ پريسوتون(پريوتل) دي په وکتور $\vec{a}$ باندې، همداسې د $\vec{b}$ وکتور کمپوننت د $\vec{a}$ وکتور په لور يعنې وکتور $\vec{b_a}$.



باور لري $\vec{b_a} = |\vec{b_a}|\cdot\vec{e_a}$ ، چيرته چې $\vec{e_a}$ د $\vec{a}$ واحد يا يوونوکتور دی.

$\vec{e_a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ دی
.

$$\Rightarrow \vec{b_a} = |\vec{b_a}|\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \qquad (1)$$

299

د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ د سكالار ضرب لپاره باور لري:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\alpha) \qquad (2)$$

پسې د کوساين لپاره باور ري: $\cos(\alpha) = \dfrac{|\overrightarrow{b_a}|}{|\vec{b}|} \Leftrightarrow |\overrightarrow{b_a}| = |\vec{b}|\cdot\cos(\alpha)$

په (۲) کې کيږدئ:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\overrightarrow{b_a}| \qquad (3)$$

وکتور $\overrightarrow{b_a}$ د وکتور $\vec{b}$ پرېوستون (پروجکشن) په وکتور $\vec{a}$ دی.

دا چې دواړه همغه لور لري، نو د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دسکالار ضرب لپاره باور لري:

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{b_a} = |\vec{a}|\cdot|\overrightarrow{b_a}|\cdot\cos(0^0) = |\vec{a}|\cdot|\overrightarrow{b_a}| \qquad (4)$$

له دې سره د (۳) او (۴) څخه لاس ته راځي:

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{a}|\cdot|\overrightarrow{b_a}| = \vec{a}\cdot\vec{b} \\ |\vec{a}|\cdot|\overrightarrow{b_a}| = \vec{a}\cdot\overrightarrow{b_a} \end{array}\right. \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\overrightarrow{b_a}$$

د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دبدلون لپاره همداسې $\vec{a}\cdot\vec{b} = \overrightarrow{a_b}\cdot\vec{b}$ باور لري.

پسې له (۳) څخه لاس ته راځي: $|\overrightarrow{b_a}| = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$ په (۱) د اينولو سره راکوي:

$$\overrightarrow{b_a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}\cdot\vec{a}$$

300

د وکتورونوود بدلون سره راکوي: $\overrightarrow{b_a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}\cdot\vec{a}$ همداسې $\overrightarrow{a_b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{b^2}\cdot\vec{b}$.

په ټوليزه توګه کړی شو ووايو:

د دوه وکتورونو سکالار ضرب تغير نه خوري، که سرې يو د بل وکتور د اوږدوالي کمپوننت پهځای کيږدي.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\overrightarrow{b_a} = \overrightarrow{a_b}\cdot\vec{b}$$

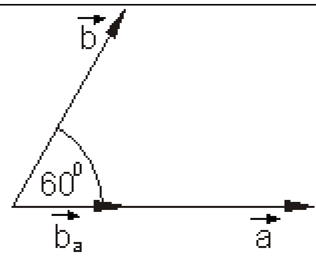
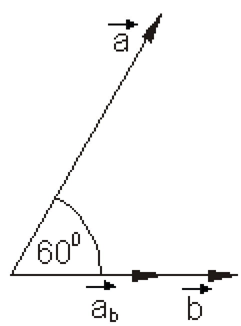
داچې د دوه وکتورونو وېش نه دی تعريف، کيدی کلهکله لاندې اړيکې مرسته وکړي.

$$\overrightarrow{b_a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a^2}\cdot\vec{a} \text{ bzw. } \overrightarrow{a_b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{b^2}\cdot\vec{b}$$

بيلګه ۲ :

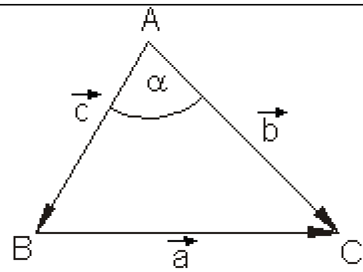
دوه وکتورونه $\vec{a}$ او $\vec{b}$ او د ارزښت a=4LE (LE د سطحې واحدونه يا يوونونه)او b=3LE (LE د سطحې واحدونه يا يوونونه)سره يو د 60° کونج جوړوي.

$\overrightarrow{b_a}$ او $\overrightarrow{a_b}$ وشميرئ. نتيجه يې انځوريز و ازمايئ.

	$\overrightarrow{b_a} = \frac{\vec a \cdot \vec b}{a^2} \cdot \vec a$ $\vec a \cdot \vec b = \lvert\vec a\rvert \cdot \lvert\vec b\rvert \cdot \cos\left(60^0\right) = 4 \cdot 3 \cdot 0,5 = 6$ $a^2 = \lvert\vec a\rvert \cdot \lvert\vec a\rvert = 4 \cdot 4 = 16$ $\Rightarrow \overrightarrow{b_a} = \frac{6}{16} \cdot \vec a = \frac{3}{8} \cdot \vec a$
	$\overrightarrow{a_b} = \frac{\vec a \cdot \vec b}{b^2} \cdot \vec b$ $b^2 = \lvert\vec b\rvert \cdot \lvert\vec b\rvert = 3 \cdot 3 = 9$ $\Rightarrow \overrightarrow{a_b} = \frac{6}{9} \cdot \vec b = \frac{2}{3} \cdot \vec b$

بیلگه۳:

د سطحې تریگونومتري (مثلثاتو) دکوساین جمله دې وکارول شي.



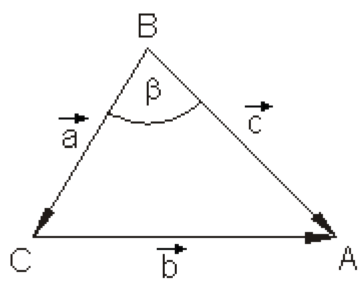
$$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}\,|\,+\vec{b}-\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}=\vec{b}-\vec{c} \text{ quadrieren}$$

$$\Rightarrow a^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=\left(\vec{b}-\vec{c}\right)^2=b^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+c^2$$

$$=b^2+c^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$=b^2+c^2-2bc\cdot\cos(\alpha)$$



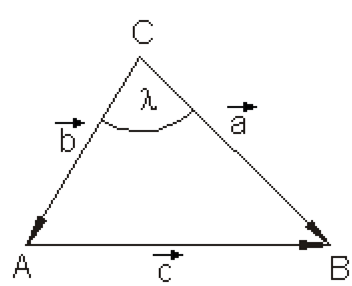
$$\vec{b}-\vec{c}+\vec{a}=\vec{0}\,|\,+\vec{c}-\vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \vec{b}=\vec{c}-\vec{a} \text{ quadrieren}$$

$$\Rightarrow b^2=\vec{b}\cdot\vec{b}=\left(\vec{c}-\vec{a}\right)^2=c^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+a^2$$

$$=a^2+c^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$=a^2+c^2-2ac\cdot\cos(\beta)$$



$$\vec{c}-\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}\,|\,+\vec{a}-\vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \vec{c}=\vec{a}-\vec{b} \text{ quadrieren}$$

$$\Rightarrow c^2=\vec{c}\cdot\vec{c}=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=a^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+b^2$$

$$=a^2+b^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=a^2+b^2-2ab\cdot\cos(\gamma)$$

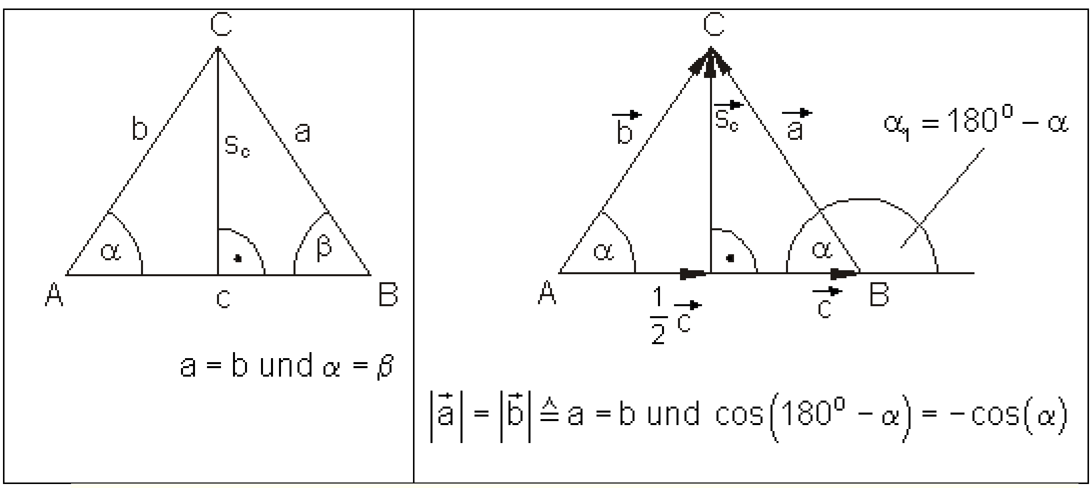
د یوه ولاړګوډیز یا قایم الزاویه مثلث(درېګوډي) ځانګړنوالې:

دا چې یو په بل ولاړو یا قایم وکتورونو سکالار ضرب صفر دی، سرې د پورته جملې لپاره د پیتاګوراس(فیثاغورث) جمله لاس ته راوړې.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

بیلګه ۴

وښایئ چې د یوه برابر اړخیز یا مساوی الاضلاع مثلث اړخنیمئ(نا صف الاضلاع) پهدې نیغه ولاړه یاقایمه ده.



وکتور مساوات یا برابرون:

$$\vec{c} + \vec{a} - \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{c} = \vec{b} - \vec{a} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}\vec{c} + \vec{a} - \overrightarrow{s_c} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_c} = \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{a} \qquad (2)$$

د (۱) سره کیږي $\overrightarrow{s_c} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) + \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$

د دې لپاره وښایو چې $\overrightarrow{s_c} \perp \vec{c}$ دی، باید باور ولري: $\overrightarrow{s_c} \cdot \vec{c} = 0$

$$\overrightarrow{s_c}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}ac\cdot\cos\left(180^0-\alpha\right)+\frac{1}{2}bc\cdot\cos(\alpha)$$

د $b=a$ او $\cos\left(180^0-\alpha\right)=-\cos(\alpha)$ سره دی:

$$\overrightarrow{s_c}\cdot\vec{c}=-\frac{1}{2}ac\cdot\cos(\alpha)+\frac{1}{2}ac\cdot\cos(\alpha)=0\Rightarrow\overrightarrow{s_c}\perp\vec{c}$$

څه چي د ښوولووو.

د اوکلید یا اقلیدس وکتورفضا

د اویکلید وکتورفضا پیژند(تعریف):

د یوه حقیقي وکتور فضا د الجبري جوړښت پرته یا برسیره ، په لاندې توګه په لیست شوي.

د هر عدد $\{k;\ k_1;k_2\}\in\mathbb{R}$ لپاره او د وکتور په حیث هر $\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\}\in V$ لپاره باور لري.

305

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$	اسوڅیاتیو قانون
$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$	په v د صفر توکی یا بیاغیزه
$\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$	یا بې پلوه توکی
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$	په v کې نسبت جمعې ته په څټ یا معکوس توکی
$k_1\left(k_2\vec{a}\right)=k_1\cdot k_2\vec{a}$	بدلیدنکی ا کموتاتیو قانون
$\left(k_1+k_2\right)\vec{a}=k_1\vec{a}+k_2\vec{a}$	د ضرب اسوڅیاتیو قانون
$k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$	د سکالار د جمعې دیستریبوتیو قانون
$1\vec{a}=\vec{a}$	د وکتورونو د جمعې دیستریبوتیو قانون
	واحدقانون یا یوون قانون

لاندې قوانین هم باور ولري

د هر عدد $\{k;a\}\in\mathbb{R}$ او؛ $\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\}\in V$ دوکتور په حیث لپاره باور لري:

د سکالار ضرب بدلید قانون	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
د سکالار ضرب دیستریبوتیو قانون	$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
ګډوله اسوشاياتيو قانون	$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$
د وکتور (مطلق) ارزښت	$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=\|a\|^2=a^2$

نو سړی د اویکلید یا اقلیدس فضا ځخه غږیږي یا دا د اقلیدس فضا بولو.

یادنه:

یوه وکتور ته نسبت سکالار ضرب ته معکوس یا په ځتې توکی نه شته. دا په دې معنا، چې سړی د وکتور سره ویشنه نه شي کولی.

د وکتورونو نسبت سکالار ضرب ته نا پیلی توکی نه شته، حکه چې نتیجه یو حقیقي عدد دی او وکتور نه دی.

وکتوري ضرب

د وکتوري ضرب پیژند

د وکتوري ضرب له پاره شمیرلارې

د شمیر لارو له پاره د کاروني بیلګې.

[Definition des vektoriellen Produktes]

↓ [Rechengesetze für vektorielle Produkte]

↓ [Beispiele zur Anwendung der Rechenregeln]

د وکتوري ضرب پیژند یا تعریف:

307

که یو هوکتور د یوه عدد سره ضرب شي، نو نتیجه بیرته یو وکتور دی. د ضرب دا ډول S –ضرب بلل کیږي.

که یو وکتور د یوه وکتور سره ضرب شي، نو نتیجه یې یو عدد دی، داسې په نامه سکالار بډول ضرب.

برسیره له دې د وکتورونو ضربډول شته، د کومو سره چې ضرب بیرته وکتور دیول وکتور ضرب یا وکتوري ضرب بلل کیږي، کله کله اتیران ضرب یا صلیبي ضرب(زه صلیبيي ضرب ته اتیران ضرب وایم اتران د لوبو هغه څیره ده، چې دوه کربښې سره په کې پریکوي).

پخوا له دې چې موږ د دې ضرب ځانونه په کار اچوو یا مشغولوو، باید روښانه شي، چې دا ډول ضرب څنګه تعریف دی.

پیژند(تعریف):

د دوه وکتورونو $\vec{a}$ او $\vec{b}$ د ضرب لاندې یو وکتور $\vec{a}\times\vec{b}$ پوهیږو، چې د لاندې خویونو سره خویز کرکتري شوی دی:

لومړی: $\vec{a}\times\vec{b}$ په $\vec{a}$ او $\vec{b}$ نیغ ولاړ دی یعنې قایم دی.

دویم: $\vec{a}$، $\vec{b}$ او $\vec{a}\times\vec{b}$ په دې ترتیب یو ښی سیستم جوړوي.

دریم: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ چیرته چې $0 \le \measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) \le \pi$.

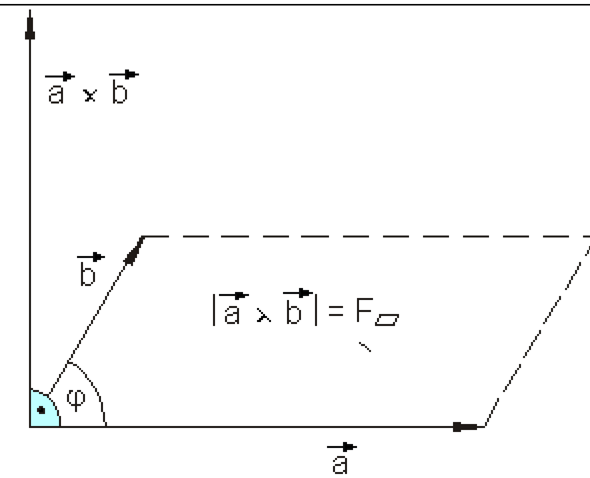
له پورته تعریف څخه سیده لرو:

د ده وکتورونو وکتوري ضرب ارزښت صفر لري، که لږ تر لږه له دواړو وکتورونو یو صفر وکتور وي یا دواړه وکتورونه غبرګ یا موازي وي.

معکوس یا په څت هم باور لري:

که د دوه وکتورونو ضرب له کومو، چې یو یې هم صفروکتور نه وي، نو دا غبرګ دي.

د تعریف د دریم شرط څخه لاس ته راځي، چې هلته خپل لوي ارزښت لري، که له هغوی رابند کونج 90 درجې وي.

ترخنګ ولاره څیره دې وکتوري ضرب ګرافیکي روښانه کړي. $\vec{a}\times\vec{b}$ یو وکتوري ضرب دی، کوم چې په $\vec{a}$ او $\vec{b}$ نیغ ولاړ یا قایم دی، داسې چې: $\vec{a}$، $\vec{b}$ او $\vec{a}\times\vec{b}$ یو ښی سیستم جوړوي.	

د دې ارزښت له دې دواړو وکتورونو غزیدلې غبرګ اړخیز یا موازی الاضلاع سطحې خوندیونه ده.

ښی سیستم په دې معنا دی:

که لومړی وکتور د ساعت څرخوني(لړمک ورته وايي که څنګه؟) په موخه د دويم وکتور په لور وڅرخيږي، نو دا دريم داسې څرخي لکه يو پيچي ميخ په بڼۀ اوړېدنې سره د مخ لور ته.

د وکتوري ضرب بونو لپاره بڼی سیستم.

جمله :

د هر $\{k\}\in\mathbb{R}$ عدد او $I\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\}\in V^3$ د وکتور په حيث لپاره باور لري:

$\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$	الترناتيو قانون
$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$	ديستريبوتيو قانون
$(k\vec{a})\times\vec{b}=k(\vec{a}\times\vec{b})$	ګډوله اسوڅياتيو قانون

د دې شمير قانون لپاره د استعمال لپاره جمله:

بیلګه۱:

وشميرئ: $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v})$

حل يا اوبې:

$$\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\times\vec{u}+\vec{u}\times\vec{v}+\vec{v}\times\vec{u}+\vec{v}\times\vec{v}$$
$$=\vec{0}-(\vec{v}\times\vec{u})+(\vec{v}\times\vec{u})+\vec{0}=\underline{\underline{\vec{0}}}$$

د دې لپاره وکارول شو $\vec{u}\times\vec{u}=\vec{v}\times\vec{v}=\vec{0}$ او $\vec{u}\times\vec{v}=-\left(\vec{v}\times\vec{u}\right)$.

بیلګه ۲ : ددوه وکتورونو ترمنځ کونج فورمال وشمیرئ

وشمیرئ: $\tan\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

حل:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=a\cdot b\cdot\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)\Leftrightarrow\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{a\cdot b}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\Leftrightarrow\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\cdot b}$$

$$\tan\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)}=\frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{a\cdot b}:\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\cdot b}=\frac{a\cdot b\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{a\cdot b\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}}=\underline{\underline{\frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{\vec{a}\cdot\vec{b}}}}$$

بیلګه ۳ :

ددوه وکتورونو ترمنځ کونج فورمال وشمیرئ

وشمیرئ: $\tan\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

حل یا اوبې:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=a\cdot b\cdot\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)\Leftrightarrow\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{a\cdot b}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\Leftrightarrow\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\cdot b}$$

$$\tan\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)}=\frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{a\cdot b}:\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\cdot b}=\frac{a\cdot b\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{a\cdot b\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}}=\underline{\underline{\frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{\vec{a}\cdot\vec{b}}}}$$

د وکتورونو برخ انځورونه(کمپوننتي انځورونه)

د وکتورونو برخ انځورونه(کمپوننتي انځورونه)

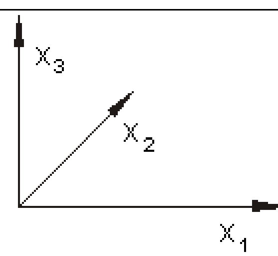
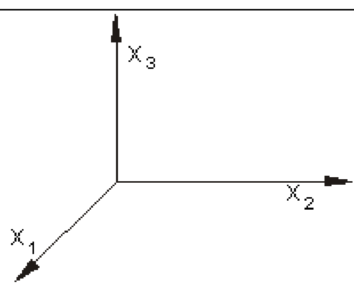
شمیرنه کې تر اوسه تنها یا ځانله د برخلرونکو وکتورونو یو بل ته ترتیب یا نظم لور لوباوه. د دې سره د وکتورونو فضایي ځای غوره نه وو.

دا پای لاس ته راوړني ته اجازه ورکوي، چې وکتورشمیرنه د کواوردینات- یا پروتولاړسیستم څخه خپلواک دی. د ټاکلو پرابلمونو لپاره دابیاهم ډېر ګټور دی، که سرې د وکتور انځورونې لپاره یو پروتولاړ-یا کواوردینات سیستم په بنسټ کې کینولی شي یا ولري.

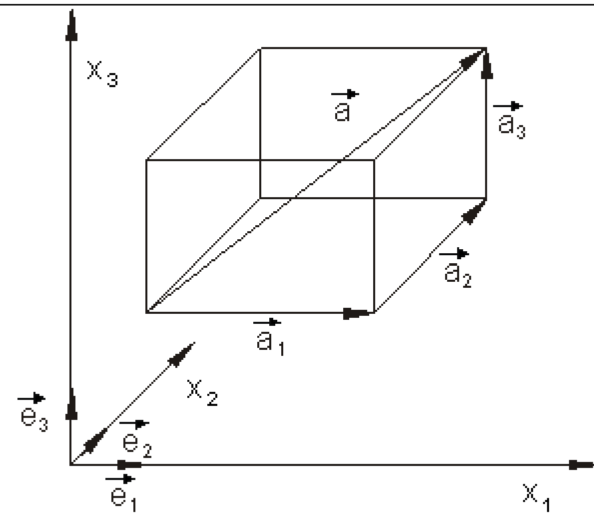
د پسې شمیرنو لپاره کارتیزي پروتولاړ- یا کارتیزي کواوردینات سیستم پهبنسټ کې اینولکیږي. دا درې یو په بل ولاړ یا قایم محورونه دي، چې په ترتیب د x_1, x_2 اوx_3 سره په نخښه کیږي.

یادونه: د x_1, x_2 او x_3 لپاره یا پرځای کیدی شي دا د x, y او y محورونه هم وبلل شي، مګر د n بعدي یا n پراخیدوني وکتورونو لپاره به دا انځورونه په کمه کچه مناسب وي.

د کارتیزي کواوردیناتسیستم لپاره لاندې دوه انځورونې، لکه په عمل کې چې ډېر کار ترې اخستل کیږي.

 د x_1 اوx_3 محورونه په رسمسطحه کې پرتې دي. مثبت x_2محور د شالور ته بنایي.	 د x_2اوx_3 محورونه په رسمسطحه کې پراته دي. مثبت x_1 محوردمخ لور ته بنایي.

312

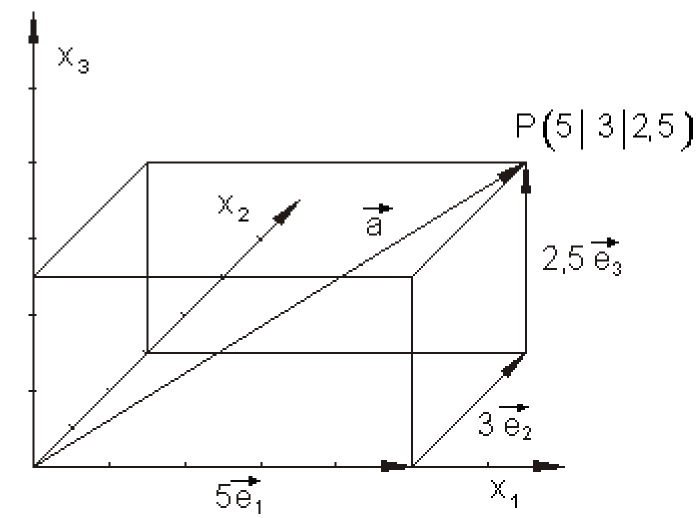
 	وکتور $\vec{a}$ په يوه فضايي کارتيزي کواوديناتسيتم کې انځوريږي. دا د کواورديناتونو محور کمپوننتونو سره غبرګ توته کيږي. $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$ هره د دې درې کواورديناتونو کيدی شي ځان د همغه اړونده واحد وکتور څو ځله انځور کړي: $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ درې سکالار a_1 , a_2 او a_3 هغه چې د کواوردينات په لور د وکتورونو اوږدوالی ورکوي، د وکتور کواوردينات په حيث بلل کيږي.

بيلګه ۱

وکتور $\vec{a} = 5\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + 2{,}5\vec{e_3}$

دې په فضايي کارتيزي کړاوردیناتسیستمکې رسم شي.

د دې لپاره چې وکتورونه انځور کړای شو، د هغه پیل ټکی په د کواوردینات په پیل ټکي کې ايښول کيږي.وکتور بيا له يوه کمپوننت څخه د وکتور جمعي قا نون له مخې سره يوځای کيږي. په دې بيلګه کې دا رسم شوی وکتور د P په ټکي کې پای مومي، چې کواوردیناتونه P(5| 3 |2 ,5) يې لري



بيلګه ښايي:

هغه وکتور، چې په درې بعدي- يا درې پراخيدونې فضا کې له کواوردینات پيل څخه راوځي، هلته په يوه ټکي کې پای مومي. همداسې هر ټکي په درې بعدي فضا کې د خپلو کواوردیناتونو له لارې يواځنی ټاکلی، دا کيدی شي د وکتورونو له لارې هم پيښه شي، چې د کواوردینات له پيله مو دې ټکي ته لارښودوي يا بيايي. داسې وکتورونه سري ځای وکتورونه يا په ځای تړلي بولي.

ځای وکتور $\vec{r} = 5\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + 2{,}5\vec{e_3}$ په ټکي $P(5|3|2{,}5)$ کې پای کيږي

314

ټوليز باور لري: $\vec{r} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}$ په ټکي $P(x_1|x_2|x_3)$ کې پای کيږي.

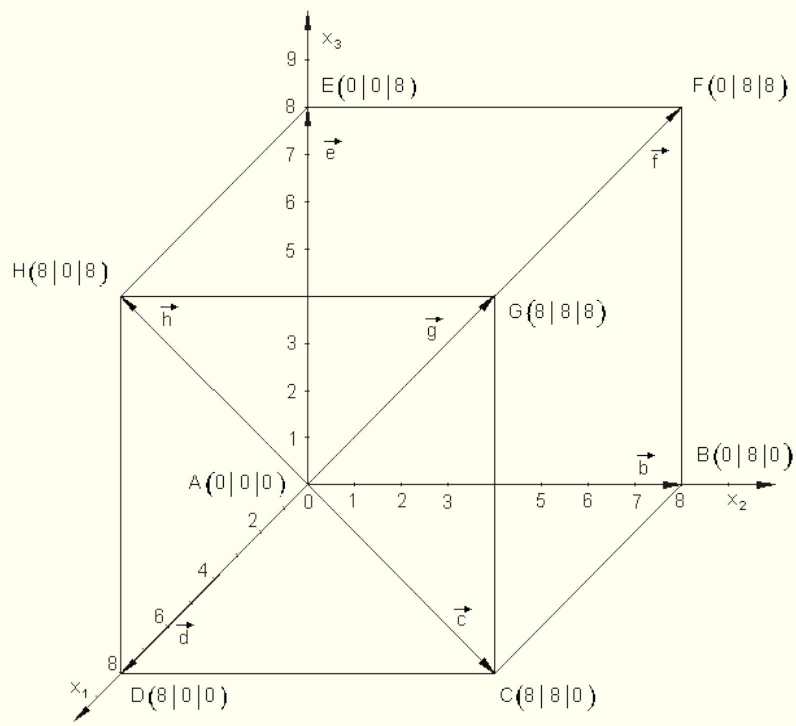
دا چې په درې بعدي فضا کې د وکتور لويوالی او لور د کواوردينات د ورکړې سره يوائځنی ټاکلی دی، سړی کړی شي د وکتور په ليکلو کې د واحدوکتور په ور کړه صرف نظر وکړي. يو وکتور کيدی د دې نيونو يافرضيو لاندې ځان د درځ يا متې متريکی په توګه همم وليکي.

الماني له کينې ښې لورته: کمپوننتونو انځورونه، کواوردیناتونو انځورونه $\underbrace{\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}_{\text{Komponentendarstellung}} \Leftrightarrow \underbrace{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{\text{Koordinatendarstellung}}$ ځانګړی: $\vec{a} = 5\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} + 2{,}5\overrightarrow{e_3} \Leftrightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$	کمپوننت انځورونه او کاوردينات انځورونه دوه مختلفي مګر برابر ارزښته يکندولونه دي. يو وکتور چې ټکي P ته مو بيايي، لکه چې ترې لاس ته راځي ا نځوريږي: په $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ تنظيم $P(x_1\|x_2\|x_3)$ دی.

په پام بدې ونيول شي، چې ځايوکتور، ې له ترلو وکتورونو په حيث د کواوردينات يا پروتولاړ سيستم له سرچينې څخه يوه ټکي ته لاربنودوي يا بيايي، هغو ازادو وکتورونو سره، چې په يوه فضا کې غبرګ راکښل کيږي بدل نه شي.

بيلګه ۲

يو سترګی يا مکعب دې د ۸ سطحې واحدونو يا يوونونو سره داسې په يوه کارتيزي (ديسکارتي) کواوردیناتسيستم کې ر سم شي، چې يو ګوډ يا کونج يې د کواوردينات په سرچينه کې پروت وي. د دې مکعب(سترګی، چې موږ ورته دانه وايو) ټولو ګوډونو يا کونجونو کې دې ځايوکتورونه وکښل شي. ځايوکتورونه دې په کواوردينات سيستم کې ورکړل شي.



د ځايوکتورونو لپاره باور لري:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

دا پورته انځورونه له ډېرو ښخه یوه ده. دا مکعب یه لومړئ اتمه (1. Oktanten) کې پروت دی. یوه بله انځورونه کیدی شي په کووردیناتسیستم یا پروتولاړ سیستم کې صورت ونیسي(ځان جوړ کړي)، په کوم کې چې د x_1-محور د شا ته په لور ښايي.

د هرګړد-یا کونجټکو د په نخښه کونې ا و د دوي د ترتیبونې وروسته کیدی شي وکتورونه بل ډول نخښه ونه ونیول شي او هم نور کواوردیناتونه ولري.

د وکتورونو ارزښت او لوریز کوساین

د یوه وکتور ارزښت

د یوه وکتور لوریز کوساین

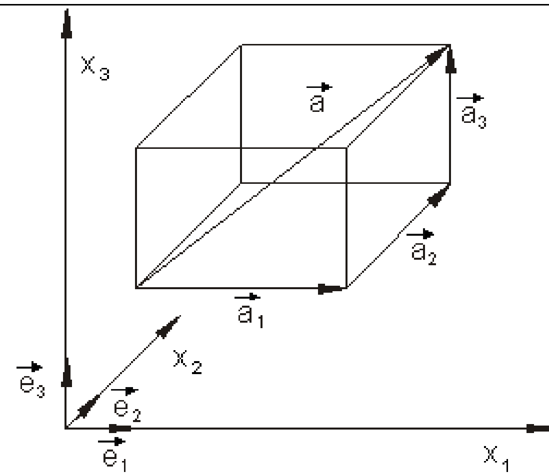
شمیرلبیلګې

رایوځایونه یا ټولګه یا لنډیز

دیوه وکتور ارزښت

د یوه وکتور ارزښت دې وشمیرل شي، که دا په کمپننت ډوله یا کواوردینات ډوله ورکړ شوی وي

317



تر څنګ انځورونه را اخلو، نو
پيژنوو چې وکتور

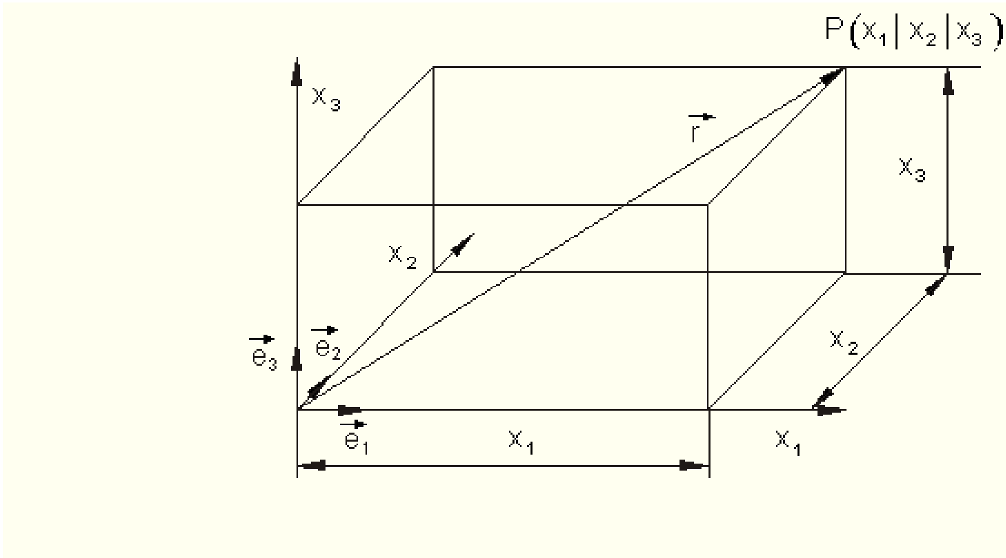
$$\vec{a} = \vec{a_1} + \vec{a_2} + \vec{a_3} =$$
$$= a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$$

د يوه کوادر لوريزې فضا دوه
کونټړې(قطر) ده، چې د ژيو
اوږدوالی يې $a_1, a_2,$ او a_3 دي.

دوکتور ارزښت له دې امله د
فضا دوه کونټړې سره سر
خوري. د پيتاګوراس له جملې
سره سم د وکتور د ارزښت لپاره
لاس ته راځي:

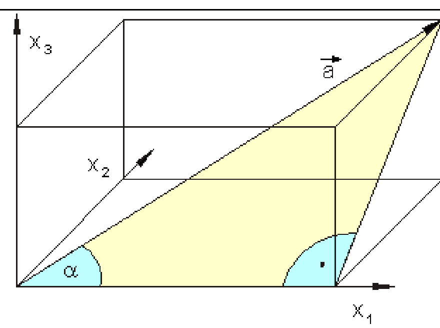
$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$$
$$\text{Betrag: } \left|\vec{a}\right| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

318



د یون وکتور د لور کوساین(لنډ: لورکوساین)

په فضا کې د یوه په کمپوننتونو همداسې کواوردیناتونو بنه ورکړشوي وکتور د لور ټاکنه ښايي، چې سرې کونج کاروي یا استعمالوي، کوم چې دا وکتور يې د یوون-یا واحد وکتور سره جوړوي.



کونج، چې د فضا دوه کونجتړې

(قطر که وتر؟)همداسې د دوه کونجتړې یا قطروکتور يې دx_1 محور سره او له دې سره د واحدوکتور سره هم جوړوي، په یوه درېګوډي یامثلث کې پروت دی، کوم چې د فضا قطر(دوه کوجتړې)،د کوادر د ښي اړخ سطحه لکه څنګه د قطر یا دوه کونجتړې وکتور x_1کمپوننتونه يې چې جوړيدی شي.

$$\cos(\alpha) = \frac{a_1}{|\vec{a}|} = \frac{x_1}{|\vec{a}|}$$

ورته نخښوني د نورو دواړو کونجونو لپاره هم لاس ته راوړو، داسې چې سړی لیکلی شي:

$$\cos(\alpha) = \frac{a_1}{|\vec{a}|} = \frac{x_1}{|\vec{a}|}, \qquad \cos(\beta) = \frac{a_2}{|\vec{a}|} = \frac{x_2}{|\vec{a}|}, \qquad \cos(\gamma) = \frac{a_3}{|\vec{a}|} = \frac{x_3}{|\vec{a}|}$$

د درې کونجونو د کوساین د تابع ارزښت د وکتور د لورکوساین بلل کیږي.

د لور کوساین دجمعې لپاره باور لري:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

داپه دې معنا: د لور کوساین مربع جمعه(څلورئ زیاتون) تل ۱ دی.

دا اړوندوالی کیدی شي د یوې ساده شمیرنې له لارئ وښوول شي:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = \frac{a_1^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_2^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_3^2}{|\vec{a}|^2}$$

$$= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{|\vec{a}|^2}$$

د $|\vec{a}|^2 = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ سره ترې لرو

$$= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$$

له $\cos(\alpha) = \frac{a_1}{|\vec{a}|}, \qquad \cos(\beta) = \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \qquad \cos(\gamma) = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$ څخه

د وکتور $\vec{a}$کواوردینات لپاره لاس ته راځي:

$$a_1 = \left|\vec{a}\right| \cos(\alpha), \qquad a_2 = \left|\vec{a}\right| \cos(\beta), \qquad a_3 = \left|\vec{a}\right| \cos(\gamma)$$

اوس له دې سره شونی دی چې یو وکتور د هغه د ټاکونکو لویو ارزښت او لور سره ولیکو:

$$\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} = \left|\vec{a}\right|\cos(\alpha)\overrightarrow{e_1} + \left|\vec{a}\right|\cos(\beta)\overrightarrow{e_2} + \left|\vec{a}\right|\cos(\gamma)\overrightarrow{e_3}$$

$\left|\vec{a}\right|$ له نوکنو راوځي او دواړه اړخونه په $\left|\vec{a}\right|$ باندې وېشل کیږي

$$\Rightarrow \vec{a} = \left|\vec{a}\right|\left(\cos(\alpha)\overrightarrow{e_1} + \cos(\beta)\overrightarrow{e_2} + \cos(\gamma)\overrightarrow{e_3}\right) \,|:\, \left|\vec{a}\right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} = \overrightarrow{a_e} = \cos(\alpha)\overrightarrow{e_1} + \cos(\beta)\overrightarrow{e_2} + \cos(\gamma)\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix}$$

په پام ولره: د یوه واحدوکتور کواوردیناتونه د هغه د لور کوساین دی

$$\overrightarrow{a_e} = \cos(\alpha)\overrightarrow{e_1} + \cos(\beta)\overrightarrow{e_2} + \cos(\gamma)\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix} \text{ mit } \left|\overrightarrow{a_e}\right| = 1$$

د شمیرنې بیلګې

بیلګه ۱ :

د لاندې وکتورونو لپاره دې ارزښتونه او د لورکوساین وشمیرل شي:

الف-

321

$$\vec{a} = 4\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ب –

$$\vec{b} = 2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} - 1\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

نتيجي له لسميز(عشاريه) څخه وروسته د درې ځايونو په ټيکوالي سره ورکړئ.

حل: لومړی-

لورکوساين:	(مطلق) ارزښت:
$\cos(\alpha) = \frac{a_1}{\lvert\vec{a}\rvert} = \frac{a_1}{a} = \frac{4}{\sqrt{29}} \approx 0{,}743 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 42{,}031^0}}$ $\cos(\beta) = \frac{a_2}{\lvert\vec{a}\rvert} = \frac{a_2}{a} = \frac{3}{\sqrt{29}} \approx 0{,}557 \Rightarrow \underline{\underline{\beta \approx 56{,}145^0}}$ $\cos(\gamma) = \frac{a_3}{\lvert\vec{a}\rvert} = \frac{a_3}{a} = \frac{2}{\sqrt{29}} \approx 0{,}317 \Rightarrow \underline{\underline{\gamma \approx 68{,}199^0}}$	$\lvert\vec{a}\rvert = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ $= \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2}$ $= \sqrt{16 + 9 + 4}$ $= \underline{\underline{\sqrt{29} \approx 5{,}385}}$ وکتور د نږدې 5,385 LE (LE د اوږدوالي واحد)اوږدوالی لري

د ب حل:

ارزښت:	لورکوساین:
$\left\vert\vec{b}\right\vert = b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$ $= \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-1)^2}$ $= \sqrt{4+9+1}$ $= \sqrt{14} \approx 3,742$ وکتور د نږدې 3,742 LE (LE د اوږدوالي واحد)اوږدوالی لري	$\cos(\alpha) = \frac{b_1}{\left\vert\vec{b}\right\vert} = \frac{b_1}{b} = \frac{2}{\sqrt{14}} \approx 0,535 \Rightarrow \alpha \approx 57,688^0$ $\cos(\beta) = \frac{b_2}{\left\vert b\right\vert} = \frac{b_2}{b} = \frac{-3}{\sqrt{14}} \approx -0,802 \Rightarrow \beta \approx 143,301^0$ $\cos(\gamma) = \frac{b_3}{\left\vert\vec{b}\right\vert} = \frac{b_3}{b} = \frac{-1}{\sqrt{14}} \approx -0,267 \Rightarrow \gamma \approx 105,501^0$

یادونه: که د یوه کونج کوساین کمیز یا منفي وي، نو د کونج ارزښتونه د 90^0 او 180^0 ترمنځ پراته دي.

بیلګه ۲: د ځا ی وکتور، چې اوږدوا لی یې ۲ دی، غواړو پید کړو، چې د x_1 محور سره 60^0کونج، دx_2 محور سره 135^0 کونج جوړوي او د x_3 محور سره یو تیره کونج (حاده زاویه؟؟) جوړوي.

حل: ځا وکتور $\vec{r}$ د اوږدوالي 2 په دې معنا دی، چې $\left\vert\vec{r}\right\vert = 2$

$$\alpha = 60^0 \Rightarrow \cos(\alpha) = \cos\left(60^0\right) = \frac{1}{2}, \quad \beta = 135^0 \Rightarrow \cos(\beta) = \cos\left(135^0\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1 \Leftrightarrow \cos(\gamma) = \pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha)-\cos^2(\beta)}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\gamma) = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

دا چې **γ** دې تیره کونج وي ، باور لري: $\cos(\gamma) = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = 60^0$

یوونوکتور یا واحد وکتور دی: $\overrightarrow{e_r} = \cos(\alpha)\overrightarrow{e_1} + \cos(\beta)\overrightarrow{e_2} + \cos(\gamma)\overrightarrow{e_3}$

$$= \cos\left(60^0\right)\overrightarrow{e_1} + \cos\left(135^0\right)\overrightarrow{e_2} + \cos\left(60^0\right)\overrightarrow{e_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{e_1} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\overrightarrow{e_2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{e_3}$$

او دا وکتور پخپله: $\vec{r} = |\vec{r}|\overrightarrow{e_r} = 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\overrightarrow{e_2} + \frac{1}{2}\overrightarrow{e_3}\right)$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\vec{r} = \overrightarrow{e_1} - \sqrt{2}\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}}}$$

د وکتورونو زیاتون او کمون:

وکتورونه یو بل سرهزیاتیږي، همداسې کمیږي، داسې چې اړونده کمپوننتونه یو له بلسره زیات، همداسې یو له بل څخه کم شي.

$$\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \left(a_1 \pm b_1\right)\overrightarrow{e_1} + \left(a_2 \pm b_2\right)\overrightarrow{e_2} + \left(a_3 \pm b_3\right)\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$$

د وکتورځل یا ضرب له سکالار سره:

د یوه وکتر ځلونه د یوه سکالارسره د وکتورهر کمپوننت د سکالارسره ځلیږي.

$$\vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u\cdot\vec{a} = ua_1\overrightarrow{e_1} + ua_2\overrightarrow{e_2} + ua_3\overrightarrow{e_3} = u\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cdot a_1 \\ u\cdot a_2 \\ u\cdot a_3 \end{pmatrix}$$

بيلګه

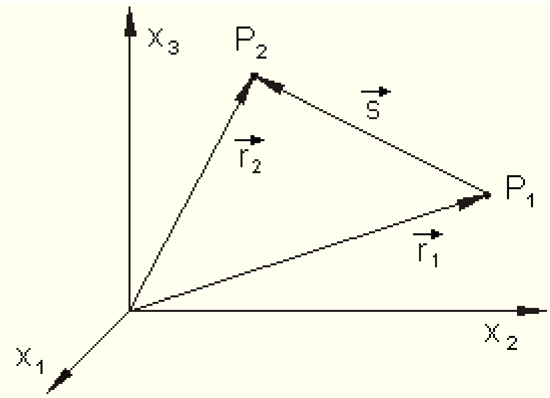
درې وکتورونه ورکړ شوي دي:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

وکتور $\vec{d} = \overrightarrow{3a} - 2\vec{b} + \overrightarrow{4c}$ وشميرئ

$$\vec{d} = 3\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-8-4 \\ 6+2+8 \\ 3-6+16 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 \\ 16 \\ 13 \end{pmatrix}}}$$

بيلګه: په دوه پراخيدوني- يا بعدي فضا کې دې د دوه ټکو P_1 او P_2 واټن وټاکل شي.



ټکو ته د ځای وکتورونه دي:

$$P_1(x_{11}\,|\,x_{12}\,|\,x_{13}) \Rightarrow r_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix}$$

$$P_2(x_{21}\,|\,x_{22}\,|\,x_{23}) \Rightarrow r_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix}$$

د دواړو ټکو تړون وکتور دې s وي.

$$\vec{r_1} + \vec{s} = \vec{r_2} \,|\, -\vec{r_1} \Leftrightarrow \vec{s} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \begin{pmatrix} x_{21} - x_{11} \\ x_{22} - x_{12} \\ x_{23} - x_{13} \end{pmatrix}$$

د دواړو ټکو تړنوکتور ارزښت یو د بل څخهواټن یه ګوته کوي او دا په درې بعدي (درې پراخیدوني) فضا کې.

Wegen $\left|\vec{a}\right| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ gilt:

$$\left|\vec{s}\right| = s = \sqrt{(x_{21} - x_{11})^2 + (x_{22} - x_{12})^2 + (x_{23} - x_{13})^2} = \overline{P_1P_2}$$

یادونه: د کواوردیناتو په اینډکس یا پیژندنخښهباندې x_{ij} سمبالولو سره دا لومړی اینډکی د ټکي P_i لپاره ولاړ دی او دویم اینډکس د کواوردینات محور لپاره

سکالار ضرب

دوه لاندې وکتورونه دې ورکړ شویوي

$$\vec{b} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ او } \quad \vec{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

دا یو د بل سره فورما ضربیږي:

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= \left(a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}\right)\cdot\left(b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}\right) \\ &= a_1b_1\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_1} + a_1b_2\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2} + a_1b_3\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_3} \\ &+ a_2b_1\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_1} + a_2b_2\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_2} + a_2b_3\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_3} \\ &+ a_3b_1\overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{e_1} + a_3b_2\overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{e_2} + a_3b_3\overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{e_3} \end{aligned}$$

په پام کې دې وي، چې د دوه یو په بل عمود ولاړو وکتورونو سکالار ضرب صفر دی او د یوه یوون-یا واحد وکتور تربع ۱ دی،پورته ولاړه وینا ډېره ساده کوي.

$$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2} = \left|\vec{e_1}\right|\cdot\left|\vec{e_2}\right|\cdot\cos\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right) = 1\cdot1\cdot\cos\left(90^0\right) = 1\cdot1\cdot0 = 0 \text{ da } \vec{e_1}\perp\vec{e_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{e_1}\cdot\vec{e_2} = \vec{e_2}\cdot\vec{e_1} = 0 \qquad \vec{e_1}\cdot\vec{e_3} = \vec{e_3}\cdot\vec{e_1} = 0 \qquad \vec{e_2}\cdot\vec{e_3} = \vec{e_3}\cdot\vec{e_2} = 0}$$

$$\vec{e_1}\cdot\vec{e_1} = \left|\vec{e_1}\right|\cdot\left|\vec{e_1}\right|\cdot\cos\left(\vec{e_1},\vec{e_1}\right) = 1\cdot1\cdot\cos\left(0^0\right) = 1\cdot1\cdot1 = 1 \text{ da } \vec{e_1} \text{ parallel zu } \vec{e_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{e_1}\cdot\vec{e_1} = 1 \qquad \vec{e_2}\cdot\vec{e_2} = 1 \qquad \vec{e_3}\cdot\vec{e_3} = 1}$$

له دې سره کیږي:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

سکالار ضرب هم کیدی شي ددرځ- یا متې یا ستن - یا ولاړ وکتورونو سره سرته ورسول شي.

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \text{او} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \left(a_1 \mid a_2 \mid a_3\right)^T$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a_1 \mid a_2 \mid a_3\right)^T \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

بیلګه۱ :

دواړه وکتورونه یو د بل سره کوم کونج جوړوي؟

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

328

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b}) \Leftrightarrow \cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (3 \mid -2 \mid 1)^T \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 12 + 2 + 3 = 17$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14} \approx 3{,}742$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26} \approx 5{,}099$$

$$\cos(\alpha) = \cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{17}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}} \approx 0{,}891 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 26{,}996^0}}$$

وکتوري ضرب

لکه د سکالار ضرب لومړی فورمال ضر بيږي. له د ې وروسته ساده کيږي. د دې لپاره دې د سليب يا ا ټيران ضرب قوانين بيا وکتل شي.

باور لري:

$\vec{a}\times\vec{b}$ په $\vec{a}$ او $\vec{b}$ او $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$ نيغ ولاړ يا قايم دی

$\vec{a},\vec{b}$ او $\vec{a}\times\vec{b}$ په دې لړئ پرلپسې يو ښی سيسيتم

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a},\vec{b})$ چيرته چې $0 \le \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \le \pi.$ دی

د کارتيزي کواورديناتسيستم وکتورونو لپاره په ځانګړې توګه باور ري:

$$|e_1 \times e_1| = |e_1|\cdot|e_1|\cdot\sin(e_1, e_1) = 1\cdot 1\cdot\sin(0^0) = 1\cdot 1\cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{e_1}\times\vec{e_1} = \vec{0} \qquad \vec{e_2}\times\vec{e_2} = \vec{0} \qquad \vec{e_3}\times\vec{e_3} = \vec{0}}$$

$$|e_1 \times e_2| = |e_1|\cdot|e_2|\cdot\sin(e_1, e_2) = 1\cdot 1\cdot\sin(90^0) = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3}$$

دا چې $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_3}$ او $\overrightarrow{e_2}$ (یعنې $\overrightarrow{e_3}$ په $\overrightarrow{e_1}$ او $\overrightarrow{e_2}$ عمود یا ولاړ) دی اوو ارزښت ۱ لري.
لاندې اړیکې شتون لري:

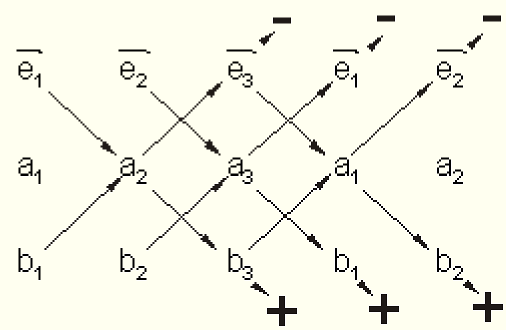
$\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}$
$\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_3}$	$\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{e_1}$	$\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{e_2}$

فورمال ضرب:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \left(a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}\right) \times \left(b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}\right) \\
&= a_1b_1\left(\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_1}\right) + a_1b_2\left(\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}\right) + a_1b_3\left(\overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_3}\right) \\
&+ a_2b_1\left(\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_1}\right) + a_2b_2\left(\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_2}\right) + a_2b_3\left(\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_3}\right) \\
&+ a_3b_1\left(\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_1}\right) + a_3b_2\left(\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_2}\right) + a_3b_3\left(\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{e_3}\right) \\
&= 0 + a_1b_2\overrightarrow{e_3} - a_1b_3\overrightarrow{e_2} - a_2b_1\overrightarrow{e_3} + 0 + a_2b_3\overrightarrow{e_1} + a_3b_1\overrightarrow{e_2} - a_3b_2\overrightarrow{e_1} + 0 \\
&= \underline{\underline{\left(a_2b_3 - a_3b_2\right)\overrightarrow{e_1} + \left(a_3b_1 - a_1b_3\right)\overrightarrow{e_2} + \left(a_1b_2 - a_2b_1\right)\overrightarrow{e_3}}}
\end{aligned}$$

د فرمول جوړول کیدی شي د درې لړئ بیزې دیترمینانت په څیر انځور شي. دا کیدی شي د ساروس قا نون یا لار له مخې وشمیرل شي داسې چې دا د شمیرلو فرمول راکړي. د دې لپاره چې د ساروس قا نون وکاروو، باید لومړئ او دویمه د دیترمینانتې درځونه یا متې یو بل پسې ولیکل شي. بالاخره ټول قطرونه یا دوه کونجترې تړنې او دا درې واره له کینې پورته لور ښې کښته خوا ته، همداسې درې ځله له کینې کښته خوا ته ښې پورته خوا ته.دا ډول ضربونه د جمعې په ډول سره یوځای کیږي او په حقیقت کې داسې چې ضربونه له کینې کښته ښې پورته کمیز یا منفي کړې یا شمیرل کیږي.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$



$$= \overrightarrow{e_1}\,a_2\,b_3 + \overrightarrow{e_2}\,a_3\,b_1 + \overrightarrow{e_3}\,a_1 b_2 - b_1\,a_2\,\overrightarrow{e_3} - b_2\,a_3\,\overrightarrow{e_1} - b_3\,a_1\,\overrightarrow{e_2}$$
$$= \left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right)\overrightarrow{e_1} + \left(a_3 b_1 - a_1 b_3\right)\overrightarrow{e_2} + \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)\overrightarrow{e_3}$$

وکتورونه

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ورکړ شوي.

د دواړو وکتورونووکتوري ځل يا ضرب دې جوړشي. لاس ته راوړنه يې د يوې مناسبي شميرني سره وازمايۍ.

بیلګه:

د یوه مثلث ګوډټکي یا د کونجونو ټکي A, B او C لاندې کواوردیناتونه لري

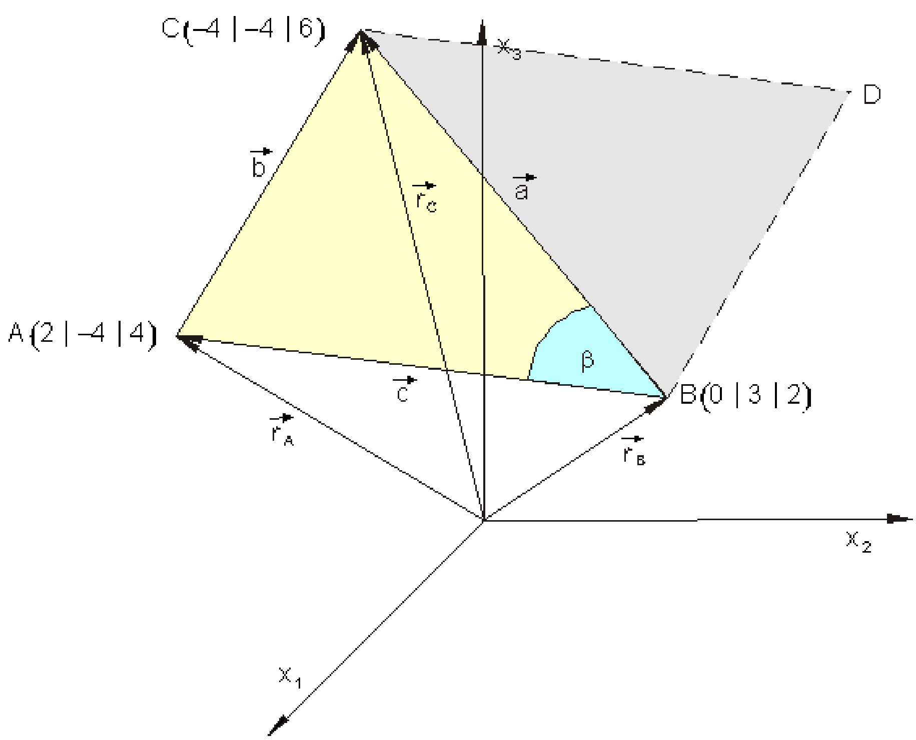
.C(-4 | -4 | 6) او A(2 | -4 | 4); B(0 | 3 | 2)

د مثلث سطحه دې وشمیرل شي.نتیجه دې د سطحې مثلثاتو یا درېګوډیکچ فرمول سره و ازمایل شي.

ترمخ پام:

یو رسم دې هندسي(ځمککچیز) ا نځور وښا یي.

د دوه وکتورونو وکتوري ضرب یا x ضرب یو وکتور دی، چې هغه له دې دواړو وکتورونو غزیذلې سطحې ته عمود یا ولاړ ځغلي او د هغې د سطحې خوندیونه له دوي جوړ غبرګ اړخیز یا موازی الاضلاع ارزښت دي. د غبرګ اړخیز دوهکونجتړې یا که غواړئ قطر دا په یو بل پټیونې مساوي برخو وېشي. له دې سره د درېکوډې سطحه د وکتورې ضرب ارزښت نیمایي سره برابره ده.



ځاس اړوند وکتور او د درې ګوډي یا مثلث اړخونو وکتورونه داسې لاس ته راځي:

$$\vec{r_A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{r_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{r_C} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}: \quad \vec{r_B} + \vec{a} = \vec{r_C} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{r_C} - \vec{r_B} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-0 \\ -4-3 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}: \quad \vec{r_A} + \vec{b} = \vec{r_C} \Leftrightarrow \vec{b} = \vec{r_C} - \vec{r_A} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-2 \\ -4+4 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}: \quad \vec{r_B} + \vec{c} = \vec{r_A} \Leftrightarrow \vec{c} = \vec{r_A} - \vec{r_B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ -4-3 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د دې رسم شوي غبرک اړخيز(موازيالا ضلاع) سطحه د سکالار يا صليب يا اتيرن ضرب سره سړی لاس ته راوړي.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{e_1} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{e_2} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e_3}$$

نورپسي بارور لري: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

$$\vec{a}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ -4 & -7 & 4 \\ 2 & -7 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} \\ -4 & -7 \\ 2 & -7 \end{matrix} = -14\vec{e_1} + 8\vec{e_2} + 28\vec{e_3} - \left(-14\vec{e_3} - 28\vec{e_1} - 8\vec{e_2}\right)$$

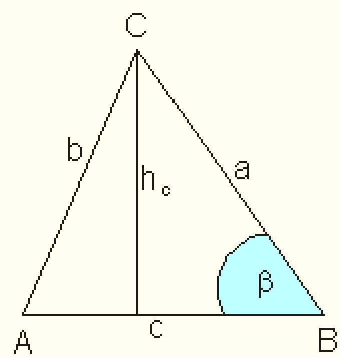
$$= -14\vec{e_1} + 8\vec{e_2} + 28\vec{e_3} + 14\vec{e_3} + 28\vec{e_1} + 8\vec{e_2}$$

$$= 14\vec{e_1} + 16\vec{e_2} + 42\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 14 \\ 16 \\ 42 \end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{c}\right| = \sqrt{14^2 + 16^2 + 42^2} = \sqrt{2216} \approx 47{,}074$$

ددرې ګوډي یا مثلث سطحه:
$$A = \frac{\left|\vec{a}\times\vec{c}\right|}{2} = \frac{\sqrt{2216}}{2} \approx 23{,}537$$

د نتیجې کنترول



$A = \dfrac{c \cdot h_c}{2}$ د $c = \left|\vec{c}\right|$ او $a = \left|\vec{a}\right|$ سره.

د h_c د β کونج د ساین سره شمیرل کیږي

$$\cos(\beta) = \frac{a \cdot c}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} \Rightarrow \beta = a\cos\left(\frac{a \cdot c}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|}\right)$$

$$\sin(\beta) = \frac{h_c}{|\vec{a}|} \Leftrightarrow h_c = |\vec{a}| \cdot \sin(\beta) \Rightarrow A = \frac{|\vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin(\beta)}{2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{16+49+16} = \sqrt{81} = 9 \qquad |\vec{c}| = \sqrt{4+49+4} = \sqrt{57}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = (-4 \mid -7 \mid 4)^T \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = -8 + 49 + 8 = 49$$

$$\cos(\beta) = \frac{49}{9 \cdot \sqrt{57}} \approx 0{,}712 \Rightarrow \beta = a\cos\left(\frac{49}{9 \cdot \sqrt{57}}\right) \approx 43{,}852^{o}$$

$$\sin(\beta) = \sin\left(a\cos\left(\frac{49}{9 \cdot \sqrt{57}}\right)\right) \approx 0{,}693$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{57} \cdot 9 \cdot \sin\left(a\cos\left(\frac{49}{9 \cdot \sqrt{57}}\right)\right)}{2} \approx \underline{\underline{23{,}537}}$$

ازماېښت لومړی شمیرنه تصدیقوي؟

ټولګه:

د وکتورونو جمعه او تفریق(زیاتون او کمون):

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1)\overrightarrow{e_1} + (a_2 \pm b_2)\overrightarrow{e_2} + (a_3 \pm b_3)\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$$

د یوه وکتور ضرب د یوه سکالار سره:

335

$$u\cdot\vec{a} = ua_1\overrightarrow{e_1} + ua_2\overrightarrow{e_2} + ua_3\overrightarrow{e_3} = u\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\cdot a_1\\u\cdot a_2\\u\cdot a_3\end{pmatrix}$$

سکالار ضرب:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1 \mid a_2 \mid a_3)^T\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$$

نور پسي باور لري: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ und $a = \left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

وکتوري ضرب:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} \Rightarrow \left|\begin{matrix}\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{matrix}\right|\begin{matrix}\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2}\\ a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{matrix}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\overrightarrow{e_1} + (a_3b_1 - a_1b_3)\overrightarrow{e_2} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overrightarrow{e_3}$$

نور پسي باور لري: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

وکتور ضرب:

د وکتوري ضرب پيژند(تعريف):

که يو وکتور د يوه سکالار سره ضرب شيو نو نتيجه بيرته وکتور دی. دا ډول ضرب سرې د S - ضر ب بولي. که يو وکتور د يوه وکتور سره ضرب شي، نو نتيجه يې يو عدد دی، چې سکالار نوميږي. د وکتور دا ډول ضرب سکالار ضرب

بلل کيږي. په دې برسيره يو د ضرب ډول شتون لري، د کوم نتيجه چې بيرته يو وکتور ديږ. د ضرب داډول وکتوري ضرب بلل کيږي،کله کله سليبې يا اتيران ضرب بلل کيږي.

د مخه له دې چې موږ د دا ډول ضرب ډول سره مشغول کړو، لومړی دې روښانه شي،چې دا ډول ضرب څنګه تعريف شوی دی.

تعريف يا پيژند: د دوهوکتورونو $\vec{a}$ او $\vec{b}$ د ضرب لاندې سړی يو وکتور $\vec{a}\times\vec{b}$ پوهيږي، کوم چې د لاندې شرايطو لاندې خوييز يا کرکتري شوی دی.

١ . $\vec{a}\times\vec{b}$ په $\vec{a}$ او $\vec{b}$ عمود يا سيخخ ولاړ دی.

٢ . $\vec{a},\vec{b}$ او $\vec{a}\times\vec{b}$ په دې لړئ پرلپسې. يو ښی سيستم جوړوي.

٣ . $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ چيرته چې $0 \le \sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) \le \pi$ دی.

په ياد ولره: د پورته پيژند څخه سيده لاس ته راځي:

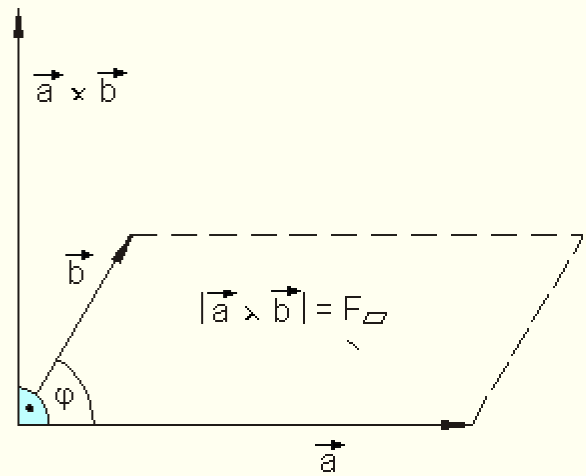
د دوه وکتورونو وکتوري ضرب صفر دی، که لږ تر لږه يو له دواړو وکتورونو څخه صفر وکتور وي يا دواړه وکتورونه سره غبرګ وي.

په څټ يا معکوس هم باور لري:

که د دوه وکتورونوضرب، چې هيڅ يو يې صفر وکتور نه دي، صفر وي، نو دا سره غبرګ دي.

له دريم شرط څخه لرو، چې هلته خپل لوی ارزښت لري، چې له هغوي رابند کونج يا زاويه 90 درجې وي.

دا لاندې ځيره دې وکتور ضر ب ګرافيکي روښانه کړي



$\vec{a}\times\vec{b}$ يووکتور دی،

هغه چې په $\vec{a}$ او $\vec{b}$ نيغ ولاړ دی،

داسې چې $\vec{a},\vec{b}$ او $\vec{a}\times\vec{b}$ يو ښی سيستم جوړوي.

د دې ارزښت له دواړو وکتورونو غزېدلي موازی الاضلاغ (غبرګ اړخيزې) سطحې مساحت دی.

ښی په دې معنا، چې:

که سړی لومړی وکتور د سا عتڅرخوني په لور (د ساعت ستنې لور) د دويم وکتور په لور وڅرخوي، نو دريم داسې خوزښت غوره کوي يا حرکت کوي لکه يو پيچتاو ميخ دښي کړ‌ون سره په خپل لور د مخ خواته.

د وکتوري ضرب لپاره بنی سیستم:

جمل:

د هر عدد $\{k\}\in\mathbb{R}$ او $\{\vec{a};\vec{b};\vec{c}\}\in V^3$ لپاره د وکتور په حیث باور لري:

بديلي قانو	$\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$
ديستربوتيو قانون	$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ $\left(k\vec{a}\right)\times\vec{b}=k\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$
ګوله اسوخياتيو قانون	

شميرقوانينو استعمال ته بيلګې:

بيلګه ۱

وشميرئ: $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\times\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$

حل يا اوبي:

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\times\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\vec{u}\times\vec{u}+\vec{u}\times\vec{v}+\vec{v}\times\vec{u}+\vec{v}\times\vec{v}$$
$$=\vec{0}-\left(\vec{v}\times\vec{u}\right)+\left(\vec{v}\times\vec{u}\right)+\vec{0}=\underline{\underline{\vec{0}}}$$

دلته وکارول شو:

$$\vec{u}\times\vec{u}=\vec{v}\times\vec{v}=\vec{0}\text{ und }\vec{u}\times\vec{v}=-\left(\vec{v}\times\vec{u}\right)$$

بیلګه ۲

د دوه وکتورونو ترمنځ کونج فورمال وشمیرئ.

وشمیرئ: $\tan\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

حل یا اوبي یا ځواب:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = a\cdot b\cdot\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right) \Leftrightarrow \sin\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{a\cdot b}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\cdot b}$$

$$\tan\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)} = \frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{a\cdot b} : \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\cdot b} = \frac{a\cdot b\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{a\cdot b\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}} = \underline{\underline{\frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{\vec{a}\cdot\vec{b}}}}$$

بیلګه ۳

د دوه وکتورونو ترمنځ کونج فورمال وشمیرئ.

وشمیرئ: $\tan\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

حل:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = a\cdot b\cdot\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right) \Leftrightarrow \sin\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{a\cdot b}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\cdot b}$$

$$\tan\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)} = \frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{a\cdot b} : \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\cdot b} = \frac{a\cdot b\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{a\cdot b\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}} = \underline{\underline{\frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{\vec{a}\cdot\vec{b}}}}$$

د ډاکتر ماخان شینواري لیکلې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

341

سرلیک

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

شپږم: د شميرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

اتم: دفرنځيال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې يو پيل   دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

<u>Bonn (Germany): 2003</u>

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

<u>1997 Bonn (Germany):</u>

يوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواريد ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي. دا هم چاپ سوي.

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ -   شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه   د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک   دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی   ۱

۷ – انالیزې   ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

343

سرلیک

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي چاپ شوی

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري چاپ شوی

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي) چاپ شوی

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګریزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویيونو په پښتو روښانه ونه چاپ شوی

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپيني خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پوري ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زيات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیرپوهنه د اوم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د اتم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د نهم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د لسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د دولسم ټولګي له پاره

ریاضي برای صنف دوازده

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میړي شینواری د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکترې په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میړي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیړي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.