شمیرپوهنه (رياضي)

ددولسم ټولګي لپاره

لیکونکی داکتر ماخان (میرې) شینواری

2016

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

پوله ارزښت ١

د پوله ارزښت خويونه................ ١٠

د کسري يا ماتو توبعو پوله............ ١۶

د کلاسيک له لارې د کسري اعدادو ٢١

د مثلثاتي توابعو پوله ٢٣

د $x \to \pm\infty$ لپاره پوله ارزښت يا ليميټ ٢٩

ټوليز خويونه: ٣١

ناپرېکيدنه ٣۴

د متمادي يا................................ ۴٠

د لــومړي څپــرکي ټولګه ۴٧

د څپرکي تمرينونه ۵٠

د تابع منځ ارزښت تغير ۵٧

کمښت ويش يا د تفاضل ويش..................... ۶٠

رابيليدنه يا مشتقشميرنه ۶٣

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع ۶٨

د تانجنت او عمود تعريفونه او خويونه ٧٣

د مشتق شميرني يا رابيليدني قوانين ٧٨

د د الجبري توابعو مشتق ٨١

د زنځيري(مرکب) توابعو مشتق ٨۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي توابعو مشتق ۹۰

د مشتق استعمال په طبيعي علومو ۹۵

د جګو درجو مشتق ۹۹
د اکسپوننشل توابعو مشتق ۱۰۳

د لوګاریتم مشتق ۱۰۷

د ایمپلیځیت Implicit تابعو مشتق ۱۱۷
د فصل ټولګه ۱۲۰

د څپرکي تمرینونه ۱۲۲

درول قضیه ۱۲۸
همغږیزې توابع ۱۳۲

ځای اړونده افراطي ټکي ۱۳۷

وړنټکی ۱۴۳

د کږې یا منحني خبرې ۱۵۳

د ناټاکلو افدو پولې ۱۵۷
د ناټاکلو افدو پولې ۱۶۰
د تانجنت له پاره............ ۱۶۶

د سترو ګټو ۱۶۷
په تولید کې ۱۷۱

ټولګه ۱۷۳

زینټکی(د اس زین) ۱۷۶

د څپرکي تمرینونه: ۱۷۷

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ۱۸۷

انتیګرالشمیرنې ته پیل راوړنه ۱۹۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتیګرالشمیرنه ۲۰۰

بنستیز یا لومړنۍ تابع ۲۰۴

ناټاکلی انتیګرال ۲۱۰

د ټاکلی انتیګرال......... .... ۲۱۲

د ټاکلی انتیګرال څخه نا......... ۲۱۶

د انتیګرالونږا......... ۲۱۹

د لوګاریتمي......... .... ۲۲۲

د بدلون قانون ۲۲۴

ټوټه انتیګرالونه ۲۳۱

ناپای انتیګرال ۲۴۰

ټولګه ۲۴۴

د څپرکي تمرینونه ۲۴۷

د اینتیګرال شمیرنی استعمال ۲۵۳

د دوه کرښو څخه رابنده ۲۵۶

څرخېدونکي تنونه: ۲۶۴

ټولګه ۲۷۷

تمرینونه: ۲۷۹

د لیکونکي ژند ته کتنه

د نصاب د دولسم ټولګي ناسمونونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

سریزه

ګرنو هیوادوالو!

ما په کلونو کې د نصاب لهپاره دا د دولسم ټولګي د پښتو او درې کتابونه لیکلي وو، خو په هغه وخت کې دا کتابونه د پوهنې وزارت له خوا چاپ نه شو او په ډېره خواشینۍ سره باید ووایم، چې په ځای یې کتابونه چاپ کړل، خو ناسم، چې نه یې ژبه سمه وه او نه یې شمیرپوهنیزه خوندویونه.

دا زما له خوا لیکل شوي کتابونه د معیار (د نړۍ د معیار) سره سم لیکل شوي او د لته یې ګرانو زده کوونکو ته وړاندې کوم، هیله ده، چې ګټه به ترې واخلي.

د نصاب له پاره د چاپ شوي کتاب د بوې برخې ناسمون به د کتاب په اخر کې ځای په ځای کړم.

ما څو واره د افغانستان د پهنې وزارت څخه هیله کړې، چې اجازه راکړي، تول د ښوونځي کتابونه ، چې ما لیکلي، دوی ته وړاندې او د سرهسم ولیم، خو د کتابونو د ناسمون مسئولیت او یا هیڅ څوک د څه مسئولیت په غاړه نه لري.

زه دا ټول د ښوونځي کتابونه ګرانو لوستونکو ته وړاندې کوم، خو ځنو کتابونو کې به داسې راغلي وي، چې زما د ناتوانۍ له امله به مې د یوه کتاب ځنې برخې بل کتاب کې ځای په ځای کړې وي، چې له دې امله د ګرانو لوستونکو څخه هیله، چې د هر څه له مخه دې، د کتاب سریزه وګوري.

ما چې لیکنې جمهورریس او د پوهنې وزارت ته لیکلي، هم مل دي.

ګرانو هیوادوالو!

ماته به بخښنه کړۍ، زه له دې نور زیات زور نه لرم، چې ښه سریزه او نور اړین څه ولیکم. دا زما لیکنې نورې همداسې ومنۍ، چې څنګه درته وړاندې کیږي. په لیکنو کې به زما د لیکنیزو ناسمونو نور ناسمونونه نه وي. هیله ده، چې ګټه به ترې پورته کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . پوله ارزښت

۱ . ليميت يا حد(پوله ارزښت) "The Limit"

موږ لاندې د

اعدادو ترادف لرو:

$$(I) \quad \frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...,\frac{1}{n}$$

$$(II) \quad \frac{3}{2},\frac{4}{3},...,\frac{n+1}{n}$$

$$(III) \quad 2,4,6,...,2n$$

که n د ناپای په لور لاړ شي، نو د پورته ترادفونو څخه (I)د صفر په لور، (II) د يو په لور او (III) د ناپاي په لور ځي.

د Limit (لاتين) معنا پوله يا حد دی. په پخواني روم کې د يوه ښار د کلا نوم هم Limit وو، چې په رياضياتوکې ، د پولې مفهوم لري. د حد د کاروني مفهوم په دې کې پروت دی، چې د يوې تابع سلوک داسې وڅيړو لکه په افقي محور(دx محور يعنې"abscissa ") باندې، چې د تابع د x قيمتونه يوه حد(پولې) ته ورنږدې کيږي.

وبه ګورو، چې ليميټ په رياضياتو کې د مشتق د پيژندلو لپاره کارول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیتونه:

- ایا تاسو په ورځني ژوند کې د لیمیټ یا پولې له کلمې سره بلد یاست؟

- ایا تاسو په ورځني ژوند کې یوه بیلګه راوړی شئ، چې یوه لیمیټ ته له دواړو لورو، یعنې له ښئ لورې څخه و کیڼې لورې ته او همداډول له کیڼې لورې څخه و ښئ لورې ته نږدې شئ؟

- ایا د حیرتان او ترمز ترمنځ پول د افغانستان او ازبکستان ترمنځ له دواړو لورو پوله یا حد دی، که څنګه؟

- ایا دا په ټاکلي ځاي کي پوله یاحد دی، که څنګه؟

د پورته فعالیتونو څخه دا لاندې د لاسه کوو:

پورته راوړل شوې د لیمیټ بیلګې په یوه ټاکلي ځای کې د توابعو یا د ځنو عملي بیلګو لیمیټونه یا حدونه دي، چې موږ یې په ریاضیاتو کې هم په یوه ټاکلي ځای کې لیمیټ، پوله یا حد بولو.

موږ اوس لاندې بیلګه د پایلیزې روښانه ونې لپاره راوړو:

بیلګه ۱:

یوه د $f(x)=2x$ تابع او د P_0 یوټکی دې ورکړ شوی وي، چې د P_0 ټکی د وضعیه کمیاتو په سیستم کې $(3,6)$ وضعیه قیمتونه لري نو :

1- دتابع جدول وکاږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

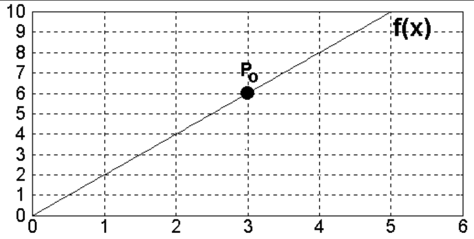
2- د تابع ګراف یا څیره انځور کړئ.

3- د(3)f قیمت پیداکړئ او د(x)f پرحرکت باندې بحث وکړئ که x و3 ته نږدې شي.

4- په شکل کې د f(x) حد ته تلنه روښانه کړئ.

ښوونه:

1- د تابع جدول

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>2- د تابع شکل

3 - موږ 6 = (3) f لرو او غواړو د درې قیمتونوڅخه چې له ښي او کيڼې لورې 3 ته ورنږدې کيږي، و ګورو، چې په دې درې ارزښتونو کې تابع چېرته ځي.</td>
</tr>
</table>

ولاړ جدول:

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې ګورو،چې د f ارزښتونو سره له کيڼې لورې له پورته څخه وکښته لورې ته 6 ته نږدې کيږو او همداسې له ښۍ لورې له کښته څخه و پورته لورې ته هم6 ته نږدې کيږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوله ۴

پروت جدول روړو:

له ښی لورې څخه کینې لورې ته   له کینې لورې څخه ښی لورې ته

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6,002	6.02	6.04

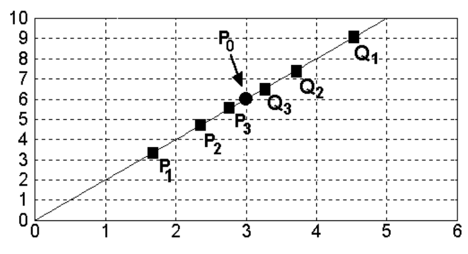
$\longrightarrow 6 \longleftarrow$

په درې پلونو یا قدمونوکې د f(3) قیمت دf(x) له قیمتونو سره پرتله کوو، کهx و3 ته ورنږدې شي.

دا حالت موږ ته په ګوته کوي چې: که x و 3 ته ورنږدې شي، نو د f(x) لیمیټ به په 6 برابر شي او داسې یې لیکو: $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$

او داسې یې لولو: د f(x) لیمیټ یا پوله که x د درې په لور لاړ شي.

4- اوس ګراف په لاندې توګه رسموو او کینې لورې ته هدفمند ټکي - لکه په پورته جدول کې- په نخښه کوو.



د مخامخ شکل له مخې... $P_1, P_2, P_3,$ ټکي په پام کې نیسو، چې د P_0 ټکي ته تل له کینې لورې نږدې کیږي.

او همداسې ... $Q_1, Q_2, Q_3,$ ټکي چې له ښی لورې P_0 ټکي ته نږدې کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوله ۵

کتل کیږي: هرڅومره، چې پورته ټکي و P_0 ټکي ته نږدې کیږي په همغه کچه د تابع قیمتونه و 6 ته نږدې کیږي (د $P_0(3,6)$ ټکي قیمت له امله).که په ګراف کې x د x=3 ځای ته نږدې شو، نو د تابع قیمت و 6 قیمت ته نږدې کیږي.

وایو: 6 د f(x) تابع لیمیټ دی، د 3 ← x (لوستل: x د3 (درې) په لورې ځي یا درې ته نږدې کیږي) لپاره.

د لیمیټ لپاره لیکبڼه په دې ډول تعریف شوې: $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$

د پورته فعالیتونو او بیلګو څخه دا تعریف لاس ته راوړو:

پیژند(تعریف): د f(x) تابع یو لیمیټ (حد)L لري، د x لپاره که x د یوه حقیقي عدد c په لورې تږلی لاړ شي او داسې یې لیکو: $\lim_{x\to c} f(x) = L$ لوستل: د f(x) لیمیټ برابر په L دی، د c <- x لپاره.

په ځنو توابعو کې لیمیټ، لکه چې ولیدل شو، په داسې سادګۍ لاس ته نه شو راوړي.

یوه بیلګه راوړو، چې دا لاندې پوښتنې په کې ځواب شوې وي:

- ایا یوه تابع په خپل ورکړ شوي ځای کې لیمیټ درلودی شي، چې هلته تعریف نه وي ؟

- اودا کار که کدونکی وي ، څنګه کیدی شي؟

بیلګه ۲ : تابع $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}; x \neq 1$ راکړ شوې.

د تابع جدول او ګراف وکاږئ.

x له ښی لورې څخه1ته نږدې کیږي x له کیڼې لورې 1 ته نږدې کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

x	0.98	0.99	0.999		1.001	1.01	1.02
f(x)	1.98	1.99	1.999		2.001	2.01	2.02

$\longrightarrow 2 \longleftarrow$

د f(x) تابع حرکت تر بحث لاندې ونيسئ که x و 1 ته نږدې شي يعني $x \to 1$. له دواړو يعني له ګراف او جدول څخه دا پايله لرو، چې f(x) د حقيقي عدد 2 په لور هڅيږي، يعني: $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$	خبره کښل کيږي

له پورته شکل ځرګنديږي: تابع په هغه ټکي کې چې ليميټ يې شميرل شوی، تعريف نه ده.

شميرنيزه بښوونه: که يوه تابع په صورت او مخرج کې داړونده قيمت لپاره صفر ولري او دا صفرځايونه له منځه تللی شي- لکه زموږ په بيلګه کې- نو د ليميټ يا بولې پيدا کولو لپاره داسې مخ ته ځو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1} x+1=2$$

او وايو چې دا ډول تابع په صفر ځای کې تشيا (خاليګاه) لري يعني په دې ځای کې تعريف نه ده .

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت: د سرک ښی لورې ته دا مخامخ تخته لرو: - ووایئ، چې دا تخته څه مفهوم لري؟ په همدې توګه د سرک په سر کیڼي لورې ته هم همداسې یوه تخته ځړول شوې. دا هم په همغه مفهوم.	

دا پوښتنه مو دې لاندې روښانه وني ته لاښودوي:

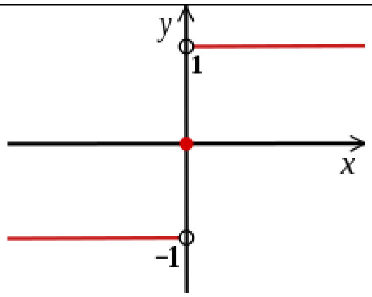
بیلګه ۳: د $x \neq 0$, $f(x)=\frac{|x|}{x}$ تابع راکړ شوې.

1- تابع ولیکئ، بې له دې، چې د مطلقه قیمت نښه | | استعمال کړئ.

2- د تابع ګراف وکاږئ.
3- که x له ښی لورې 1 ته نږدې شي، نو د f(x) قیمت پیدا کړئ.

4- که x له کیڼي لورې1- ته نږدې شي، نو دf(x) قیمت پیدا کړئ.

5- وښایاست چې پورته تابع یعنې f(x) څو حدونه لري.

ښوونه: 1-تابع بې له سمبول ،، ،،| | په لاندې ډول لیکو $f(x)=\begin{cases}1; x>0\\-1; x<0\end{cases}$ 2-د تابع ګراف انځورو: مخامخ	

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- که x له ښي لور 1 ته نږدې شي، نود لرو:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -1$$

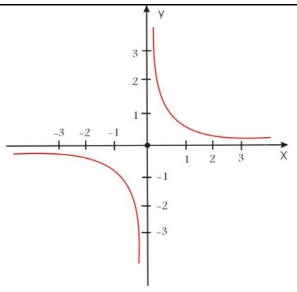
4- که x له کيڼې لور 1- ته نزدې شي، نو د f(x) ليميټ دی: $\lim_{x \to -1} f(x) = -1$

5- ګورو چې که x دوه قيمتونو 1 او 1- ته نږدې شي، نو f(x) دوه د ليميټ قيمتونه لري يعني $\lim_{x \to \pm 1} f(x) = \pm 1$، نو له دې امله f(x) ليميټ نه لري.

له پورته بيلګې پايله:

په پورته بيلګه کې د $x \to -1$ لپاره تابع ښی ليميټ لري او د $x \to 1$ لپاره کيڼ ليميټ لري.

د دې لپاره دې د ګراف پورته کښل شوی شکل هم وکتل شي.

بيلګه۴: $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع لرو، چې $x \neq 0$ دی. د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع په x=0 ځای کې ارزښت نه شي نيولی، يعني په x=0 کې تعريف نه لري. دا تابع په صفرځای کې قطب(Pol) لري. مخامخ شکل دې وکتل شي.	

يادونه: هغه تابع، چې مخرج يې صفر وي او صورت يې صفر نه وي، وايو چې تابع په دې د مخرج په صفرځای کې قطب Pol لري.

$x=0$ ته د نږدې کېدو لپاره ترادف $(x_n)=\frac{1}{n}$، ټاکو.

د اړوندې تابع د قيمتونو ترادف $(x_n) = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right) = n$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د $n>0$ لپاره یو نامحدود صعودي(جگېدونکی) ترادف دی.
او د $n<0$ لپاره نزولي- یا متناقص(ټیټېدونکی) ترادف دی.
دا په دې معنا، چې د f(x) تابع په صفرځای کې لیمیټ نه لري. دا هلته یو قطب لري.

د توابعو د لیمیټ لپاره دا لاندې پایله لرو:
د $f(x), x\in D_f$ تابع د x_0 په ځای کې یو کیڼ اړخیز لیمیټ $a_l=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ لري، که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي یې د x_0 کیڼ لور ته پراته وي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_l په لور هڅیږي.

په ورته توگه ښی اړخیزه لیمیټ: د $f(x), x\in D_f$ تابع د x_0 په ځای کې یو ښی اړخیز لیمیټ $a_r=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$ لري، که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي یې د x_0 ښي لور ته پراته وي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_r په لور وهڅیږي..

که تابع f(x) همغه لیمیټ L ولري که x له ښی اویا کیڼې لورې و c ته نږدې شي، نو **لیمیټ** شته دی او د L سره برابر دی.

دا داسې لیکو: $\lim_{x\to c} f(x)=L$

تمرینونه :

د دې لاندې هرې تابع (پېژند ورشو(د تعریف ناحیه) domain اوارزښت ورشو(د قېمتونو ناحیه)) range یا codomainپیدا کړئ. د توابعو گراف وکاږئ او حدونه (پولې) یې پیداکړئ.

$$1)\ \lim_{x\to -1}(x^2+x)\ ,\ 2)\ \lim_{x\to 4}(x^2+x)\ ,\ 3)\ \lim_{x\to 0}|x|\ ,\ 4)\ \lim_{x\to 2}\frac{x}{x}$$

$$5)\ \lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^2}{x}}\ ,\quad 6)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\ ,\quad 7)\ \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^9-9}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

10- که وي: $f(x)=\begin{cases}2+x; x<1\\ x^2 \quad ; x\geq 1\end{cases}$

الف) د تابع گراف وکاږئ.

ب) $\lim_{x\to -1} f(x)$ پیدا کړئ.

۱. ۲ د لیمیټونو یا پوله ارزښت خویونه:

" Properties of Limits "

پوهیږو: په ریاضیاتو کې ټول توابع چې لرو، د ساده توابعو ترکیب combination دی، لکه دتوابعو جمع، تفریق، ضرب، وېش (چې مخرج یې صفر نه وي) او زنځیرونه compositon . موږ دوه غوره او ساده توابع f(x) = c او g (x) = x لرو.که دواړه توابع سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي:

h(x) = x + C, یا L(x) = cx, یا $m(x) = x.x = x^2$ او داسې نور.

وبه گورو،چې دلته هم ټولې څلور عملیې همداسې اجراکیږي، لکه د اعدادو په ترادفونوکې.

فعالیت:

په دې برخه کې د په خوښه د ثابتو توابعواو کتمټ یا ایدنتیک توابعو Identity function لیمیټونه د جمعې، تفریق، ضرب او همداسې د ویش(چې مخرج یې صفر نه وي) له لارې وشمیرئ (وروسته به وگورو، چې دا د لیمیټ خویونو تر نامه څېړل کیږي).

- د په خوښه یوه پولینوم تابعو لیمیټ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د $f(x) = x$ او $g(x) = x - 2$ توابعوڅخه کار واخلئ، چې درې نورې په خوښه توابع ترې لاس ته راوړئ. د دې توابعو لیمیټونه پیداکړئ. دا لیمیټونه جمع ، تفریق، ضرب او تقسیم(چې مخرج صفر نه وي) کړئ.

- که شوني شي، چې د یوې تابع لیمیټ د تابع له حل څخه لاس ته راوړلای شو، یعني که د بیلګې په توګه ولرو: $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} 3 = 3$ نودا تابع به څنګه لیکو؟

- ایا د پورته عملیې په څیر دا عملیه د هرې ثابتې او کثمت تابع لپاره ریښتوني ده؟

موږ له پورته څخه دا لاندې پایله لرو:

که $f(x) = x$ او $g(x) = 2$ ولرو، نو لرو: $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$

2- که $h(x) = f(x) + g(x)$ وي، نو لرو: $h(x) = x + 2$

3- د h(x) ګراف وکاږئ.

4- د تابع لیمیټ د جدول له لارې

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

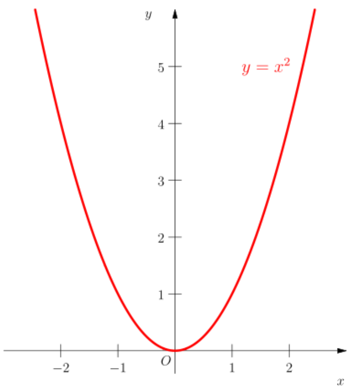
په یاد ولرئ: $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1}(x+2) = 3$ او $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x)$

له پورته څخه د لیمیټ لومړی خوي لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د لیمیټ د جمعي خوې: د د وه یا څو توابعو د جمعي لیمیټ د همغو اعدادو د لیمیټ د جمعي سره برابر دی: $\lim_{x\to1} h(x) = \lim_{x\to1} f(x) + \lim_{x\to1} g(x)$

دویم: د لیمیټ د تفریق خوي: دا د پورته سره ورته حل لري. دا کار دې ګران زده کوونکي سرته ورسوي.

بیلګه ۱: که $g(x) = x^2$ او $f(x) = x$ وي، نو پیدا کړئ: $f(x) \cdot f(x) = g(x)$ ب) د تابع شکل وکاږئ: پ) پیدا کړئ: $\lim_{x\to2} f(x)$ ت) پیدا کوئ: $\lim_{x\to2} g(x)$	

حل: الف) $f(x) \cdot f(x) = x \cdot x = x^2 = g(x)$

ب)

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	4	1	0	1	4

پ) $\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} x = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) له ګراف څخه لاس ته راځي: $\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} x^2 = 4$

له دې امله لرو: $\lim_{x \to 2} x^2 = \lim_{x \to 2}(x \cdot x) = \lim_{x \to 2} x \cdot \lim_{x \to 2} x = 2 \cdot 2 = 4$

له پورته بیلګې څخه دا پایله لرو:

دریم: د لیمیټ د ضرب خوي:

د دوه یا ډیرو توابع د ضرب لیمیټ د هغو توابعو د لیمیټونو د ضرب سره برابر دی.

$$\lim_{x \to a} x^2 = \lim_{x \to a}(x \cdot x) = \lim_{x \to a} x \cdot \lim_{x \to a} x = a \cdot a = a^2$$

بیلګه:

که $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ وي، دا لاندې لیمیټونه پیدا کړئ:

$a)\ \lim_{x \to -1} f(x)\ ,\ \lim_{x \to -1} g(x)$ $b)\ \lim_{x \to -1} f(x) \cdot \lim_{x \to -1} g(x)$

$c)\ h(x) = g(x) \cdot f(x)$ $d)\ \lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1}(x) = -1$

پیدا کړئ: $\lim_{x \to -1} h(x)$

حلa: $a)\ f(x) \cdot f(x) = x \cdot x = x^2 = g(x) \Rightarrow \lim_{x \to -1} x^2 = 1$

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	4	1	0	1	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b)\ \lim_{x\to -1} f(x)\cdot \lim_{x\to -1} g(x) = -1\cdot 1 = -1 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to -1} x^2 = 1$$

$$c)\ h(x) = x^2\cdot x = x^3 \quad ,\ d)\ \lim_{x\to -1} h(x) = \lim_{x\to -1} x^3 = -1$$

بیلگه:

$f(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{2x^2+1}$ تابع لرو، $\lim_{x\to 3} f(x)$ پیدا کړئ.

حل: $f(x)$ د دوه توابعو $g(x)=x^2-2x+5$ او $L(x)=2x^2+1$ وېش دی.

که x و3 ته نږدې شي کیدای شي لیمیټ د تابع د حل له لارې په $x=3$ کې پیدا شي:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+5}{2x^2+1} = \frac{\lim_{x\to 3}(x^2-2x+5)}{\lim_{x\to 3}(2x^2+1)} = \frac{3^2-2\cdot 3+5}{2\cdot 3^2+1} = \frac{8}{19}$$

له پورته بیلگې څخه لاندې لاس ته راځي:

څلورم: د لیمیټ د ویش خوي(مخرج د صفر سره برابر نه دی):

دیوې کسرې تابع لیمیټ(یعنې یوه تابع، چې د دوه توابعو له وېش(مخرج له صفر سره برابر نه

دی) څخه لاس ته راغلې وي) د تابع د صورت لیمیټ او د مخرج لیمیټ (مخرج له صفر سره

نابرابر دی) د وېش سره برابر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

د $g(x)=\sqrt{3-x}$ ګراف وګارئ او پیدا کړئ.

$$a)\ \lim_{x\to 2} g(x)\ \ ,\ b)\ \lim_{x\to -1} g(x)\ ,\ c)\ \lim_{x\to 3} g(x)$$

حل: په لاندې توګه مخ ته ځو:

الف)

$$\lim_{x\to 2} g(x)=1$$
$$\lim_{x\to 2}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to 2}(3-x)}=\sqrt{1}=1$$

ب) له ګراف څخه: $\lim_{x\to -1} g(x)=2$

یادونه: $\lim_{x\to -1}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to -1}(3-x)}=2\sqrt{4}$

$$c)\ \lim_{x\to 3^-} g(x)=\lim_{x\to 3^-}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to 3^-}(3-x)}=\sqrt{0}=0$$

(د $f(x)\geq 0$ لپاره او د ټولو x قیمتونولپاره، چې c ته نږدې کیږي).

له پورته څخه لاس ته راوړنه:

ټنځم: د لیمیټ د جذر (ریښې)خوي: د یوې تابع چې د جذر (ریښې) لاندې وي لیمیټ برابر دی، که چیرې تابع او لیمیټ دواړه د جذر لاندې ونیول شي.

پوښتنه: که $\lim_{x\to -2} f(x)=3$ وي، نو $\lim_{x\to -2}(f(x))^n$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: د یوه پولینوم حد تیک داسې شمیرل کیږي، لکه د یوې تابع حد. د مخه مو وویل،چې یو پولینوم د ساده توابعو د مختلو نښلونو څخه لاس ته راځي.

تمرینونه.

که $\lim_{x\to4} h(x)=-2$, $\lim_{x\to4} g(x)=0$ او $\lim_{x\to4} f(x)=5$ وي، نو پیدا کړئ:

1) $\lim_{x\to4}(f+g)(x)$, 2) $\lim_{x\to4}\left(\frac{g}{f}\right)(x)$, 3) $\lim_{x\to4}(fg)(x)$

4) $\lim_{x\to4}(h(x))$, 5) $\lim_{x\to4}\left(\frac{g}{f}\right)(x)$, 6) $\lim_{x\to4}(2h-3g)(x)$

7) $\lim_{x\to4}(f\cdot h(x)$, 8) $\lim_{x\to4}\left(\frac{2h}{3f-g}\right)(x)$, 9) $\lim_{x\to4}(h(x)+f^2(x))$

10) $\lim_{x\to2}(6x^3-2x+5x-3)$, 11) $\lim_{x\to-2}\frac{3x-2}{x^2+1}$

د کسري - یا ماتو توابعو لیمیټ" Lmit of Rational functions

موږ د پولینومونو دا لاندې ویش لرو:

$$R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0}{b_mx^m+b_{n-1}x^{m-1}+...+b_0};P_m\neq0$$

او د لیمیټ په هکله یې فکر کوو، چې د $b_0\neq0$ سره $\frac{a_0}{b_0}$ ترې لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

موږ پولینوم $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ لرو. ددې پولینوم لیمیټ دx د مختلفو قېمتونو لپاره څنګه پیداکولای شو؟

- که $x\to 0$ د صفر په لورې لاړ شي یا صفر ته ورنږدې شي.

- که $x\to 1$ یوه ټاکلي عدد ته ور نږدې شي.

- که $x\to\infty$ د ناپای په لورې لاړ شي.

-که د دریمې درجې پولینوم $P(x)=5x^3+3x^2+3$ ولرو، نو ددې پولینوم لیمیټ دڅلورو په خوښه قیمتونو لپاره پیداکړئ.

پوهیږو، چې د پولینومي توابعو لیمیټ د ورکړل شوو x قېمتونو لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېر، چې د جمعې، تفریق،ضرب او وېش(چې مخرج صفر نه وي) په څیر ورکړل شوي دي، شمېرلای شو. غواړو د ناطقو توابعویا کسري توابعو لیمیټ پیداکړو.

د ناطقو توابعو د لیمیټونوشمیرلو لپاره،که شته وي، له مختلفو لاروڅخه کار اخلو:

که ولرو: $\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$، نو د تابع خویونه د $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$ لپاره ساده کوو او د پورته پولینوم وېش، چې کسري تابع ده، لیمیټ شمیرو.

فعالیت: که $\frac{x^2-4}{x+2}$ ولرود $x\neq -2$ سره.

- ددې تابع حد د$x->-2$ لپاره پیدا کړئ.

- ددې تابع حد د $x\to 1$ لپاره پیدا کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ددې تابع حد د $x \to -1$ لپاره پیدا کړئ

- د تابع پیژندورشو ولیکی!

- دا تابع څنګه ساده کولی شئ، چې پوله یې د $x \to -2$ لپاره وشمیرلی شو؟

د پورته فعالیت په بنسټ کولای شو، چې دکسري توابعو حدونه د مختلفو اعدادو لپاره پیداکړو او همداسې یوه کسري تابع که شوني وي، هغه ځایونو ته ورنږدې هم پیدا کړو، په کومو کې چې تابع تعریف نه وي.

ددې موضوع د روښانولو لپاره د مختلفو کسري توابعو څو بیلګې راوړو:

بیلګه ۱:

پیداکړئ: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}$ که $x=1$ وي. دا تابع تعریف ده او لرو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}=\frac{(1)^2+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

که $x=1$ ځای په ځای کړو(Substitue) نو لاس ته راځي: $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$

بیلګه ۲: پیدا کړئ: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}$

حل: دا چې تابع په $x=0$ کې تعریف ده، نو لرو: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}=\frac{0-1}{0+3}=-\frac{1}{3}$

بیلګه ۳: پیدا کړئ: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: دا چې تابع په $x=1$ کې تعریف ده، نو لرو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}=\frac{1^2+1-2}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

که په یوه ځای یا عدد کې تابع تعریف نه لري، نو د مختلفو لارو یا متودونو څخه کار اخلو، چې لیمیټ یې پیداکړو، که شته وي.

بیلګه ۴: پیداکړئ: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}$

حل: دا چې $f(x)$ تابع په $x=2$ چې تعریف نه لري، نو حد د تابع د حل له لارې نه شي پیداکیدای. داکیدای شي داسې پیدا کړو، چې د تابع صورت په ضریبونو تجزیه کړو.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)}$$

د تابع لیمیټ که x و 2 ته نږدې شي، دا مانا لري، چې $x\neq 2$ دی.

دا کسري تابع و $\lim_{x\to 2}(x-4)$ رالنډیږي او لاندې لیمیټ لري:

$$\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

بیلګه ۵: پیداکړئ: $\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

ګورو، چې تابع په $x=16$ کې تعریف نه لري یعنې باید $x\neq 16$ وي.

په یاد ولرئ چې: $\sqrt{b}-\sqrt{a}$ او $\sqrt{b}+\sqrt{a}$ یو د بل مزدوج دي.

حل: د پورته تابع صورت او مخرج د $\sqrt{x}-4$ له مزدوج $\sqrt{x}+4$ سره ضرب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}$$
$$=\lim_{x\to16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$=\lim_{x\to16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}$$

بیلګه ۶: پیدا کړئ: $\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل: تابع په $x=3$ کې تعریف نه لري، نو مخرج او صورت د مخرج په مزدوج ضربوو اولرو:

$$\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)}$$
$$=\lim_{x\to3}-1(\sqrt{x+1}+2)$$
$$=\lim_{x\to3}-(\sqrt{3+1}+2=-4$$

بیلګه ۷:

پیدا کړئ: $\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

حل: تابع په $x=1$ کې تعریف نه لري، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{5+10x-15}{2x-3}}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{10}{(2x-3)(x+1)}=\frac{10}{(2(1)-3)(1+1)}$$
$$=\frac{10}{-2}=-5$$

د کلاسیک لارې د کسري اعدادو لیمیټ:

اوس یوه بله تابع د څیړنې لاندې نیسو، چې $g(x)$ یې بولو: $g(x)=\frac{x^2+x-2}{x-1}$

دلته هم دا پوښتنه کوو، چې که $x=1$ ځای ته نږدې شي، نو د $g(x)$ تابع د تابع کوم قیمتونه غوره کوي:

مونږ بیا هغه ځای په پام کې نیسو، چې $x=1$ د مخ لورې(کیڼې لورې) ته خورا نږدې پروت وي او هغه ځای، چې د $x=1$ وروسته یا ښۍ لورې ته خورا نږدې پروت وي:

$$g(1-h)=\frac{(1-h)^2+(1-h)-2}{(1-h)-1}$$
$$=\frac{(1-2h+h)^2+(1-h)-2}{-h}=\frac{-3h+h^2}{-h}=3-h$$
$$g(1+h)=\frac{(1+h)^2+(1+h)-2}{(1+h)-1}$$
$$=\frac{(1+2h+h)^2+(1+h)-2}{h}=\frac{-3h+h^2}{h}=3+h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دواړه لاس ته راوړني يا پايلې اوس داسې تشريح کوو:

که h ناپای کوچنی وټاکو، يعنې هغه ځايونه راونيسو چې $x=1$ ځای ته ناپای نږدې پراته وي، نو د تابع ارزښتونه به هم و 3 ته ناپاي نږدې پراته وي. عدد 3 د $x=1$ ځای لپاره د $g(x)$ تابع د حد قيمت دی. ددې لپاره ليکو: $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=3$

تمرينونه:

د لاندې معادلو حدونه پيدا کړئ، که شته وي.

1) $\lim\limits_{x\to 2}(6x^3-2x^2+5x+3)$

2) $\lim\limits_{x\to -1}(x^7+2x-5)$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)^2-4}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2+7x}{(2x-3)^2-9}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{3}}{x}$

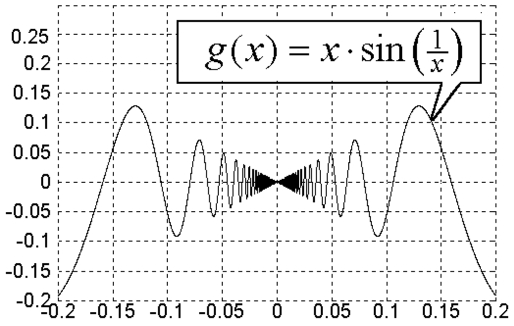
6) $\lim\limits_{x\to 4}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{4})(\dfrac{1}{x-4})$

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{4}{5}}{x-2}$

8) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي توابعو حدونه Limit of trigometric function



فعالیت:

_ دساین پوله یعنې $\lim_{x \to a} \sin x$ د x د مختلفوقیمتونولپاره پیدا کړئ،که $x \in [0;2\pi]$ وي:

_ که $x \to 0$ وي. _ که $x \to 30$ وي. _ که $x \to 45$ وي._ که $x \to 60$ وي.

_ که $x \to 90$ وي.- که $x \to 135$ وي.- که $x \to 270$ وي._ که $x -> 2\pi$ وي.

- د پورته ورکړشوو قیمتونولپاره د کوساین $\cos x$ لیمیټ پیدا کړئ.

قضیه: که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ دی.

ښوونه: د x=0 لپاره تابع $\frac{\sin x}{x}$ تعریف نه لري او ناټاکلې بڼه $\frac{0}{0}$ لري.

موږ غواړو، د $x \to 0$ او $\frac{\sin x}{x}$ لپاره په لاندې ډول یو جدول ولیکو(په پورته مساوات کې x په رادیان اندازه کیږي):

(c) ketabton.com: The Digital Library

x		$\sin x$	$\frac{\sin x}{x}$
په درجه	په راديان		
10°	0.1745	0.1736	0.9948
5°	0.0873	0.0872	0.9988
3°	0.05235	0.05233	0.9996
1°	0.0174532	0.0174524	0.9995
$30'$	0.00872664	0.00872653	0.99999
$6'$	0.00174532	0.00174532	≈ 1
$3'$	0.00087266	0.00087266	≈ 1
$1'$	0.000291	0.000291	≈ 1
⋮	⋮	⋮	⋮

په پورته جدول کې گورو، چه د x لپاره $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ قيمت غوره کوي.

په شميرنيزه توگه د $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ښوونه په لاندې ډول مخ ته بيايو:

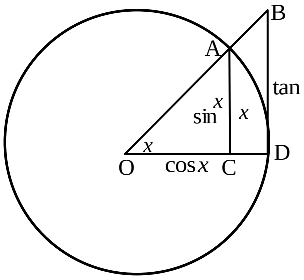
يوه دايره په پام کې نيسو چې د هغې مرکز (0) اوشعاع يې OD او $\overline{OA}=\overline{OD}=1$ ده (لاندې شکل وگورئ). دA له ټکی څخه پر $\overline{OD}$ يو عمود رسموو، چې دا وړانگه پهC ټکي کې غوڅوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د D په ټکي باندې پر دایرې یو مماس رسموو، دامماس له $\overline{OA}$ څخه غځېدلې کر ښه د B په ټکي کې غوڅوي.

اوس A د D سره تړو:

موږ لرو :



$$\sin x = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC}$$

$$\cos x = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \overline{OC}$$

$$\tan x = \frac{\overline{DB}}{\overline{OD}} = \overline{DB}$$

دا چې x په رادیان اندازه کیږي، نو لرو: $\overset{\frown}{AD} = x$

له پورته شکل څخه لاندې نا مساوات لرو: $\overset{\Delta}{OBD} > \overset{\angle}{AOD} > \overset{\Delta}{AOC}$

همداسې لرو:

$$\frac{1}{2}\cos x.\sin x < \frac{1}{2}\overline{OD^2}.x < \frac{1}{2}\overline{OD}.\tan x$$

په پورته نامساواتو کې $\overline{OD} = 1$ ږدو او د نامساواتو ټولې خواوې په دوو کې ضربوو، نو لرو: $\cos x.\sin x < x < \tan x$

یا په همدې ډول لیکلای شو: $\cos x.\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$

که د پورته نامساواتو ټولې خواوې پر $\sin x$ وویشو، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

یا:

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} > \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} > \lim_{x\to 0} \cos x$$

دا چې د $x \to 0^+$ لپاره $\cos x \to 1$ دی، نو لرو:

$$\frac{1}{1} > \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} > 1$$

$$1 > \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} > 1$$

گورو چې په عین وخت کې $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ له1 لوی او هم له یو 1 کوچنی دی، نو له دې نامساواتو څخه دا لاندې مساوات لرو: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

پام: که $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ او $x = -\alpha$ و لیکو، نو دا لاندې ترې لاس ته راځي:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورته دوارو مساواتو څخه غوښتنه لاس ته راځي:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

بیلګه ۱: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ پیدا کړئ.

حل: که $2x=\alpha$ اوکه $x\to 0$ وي، نو $\alpha\to 0$ او $\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ لرو.

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1\Rightarrow 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2$$

بیلګه ۲:

وښایاست $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$

که $y=5x$ وي او $x\to 0$، نو $y->0$ هم لرو:

$$\frac{\sin 5x}{5x}\ \ \frac{5}{2}=\frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)}\ \ \frac{5}{2}=\frac{\sin 5x}{2x}$$

$$=\frac{5}{2}\frac{\sin y}{y}$$

له دې امله لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}\frac{5}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}$$
$$=\frac{5}{2}\cdot 1=\frac{5}{2}$$

تمرینونه: دا لاندې غوره قضیه وښایاست.

که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ او لاندې اجرات وکړئ:

الف) تانجنت $\tan x$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو ولیکئ.

ب) $\frac{\tan x}{x}$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو و لیکئ.

پ) دپورته قضیې لیمیټ پیدا کړئ.

ت) ایا قضیه رښتیا ده؟

لاندې لیمیټونه (حدونه)وشمېرئ.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}$, 2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$, 3) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x}$,

4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x}$, 5) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}$, 6) $\lim_{x\to 0}\sin 5x\cos 3$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}$, 8) $\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}+\sin^2 x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x \to \pm\infty$ لپاره پوله ارزښت یا لیمیټ

د $\frac{Q(x)}{P(x)};\ P(x) \neq 0$ کسري توابعو لپاره مو لیمیټونه وشمیرل، چې x په خوښه وو.

اوس $\frac{Q(x)}{P(x)};\ P(x) \neq 0$ لپاره لیمیټونه غواړو و شمیرو، که $x \to \pm\infty$ وي.

فعالیت:
زده کوونکي دې د هرې لاندې تابع د حد له شمېرلو د مخه، د توابعو ګرافونه انځور کړي او په ګرافونو کې دې یې دې ته پام وي،چې دا څنګه په تعریف شوې ورشوې کې ځغلي.

لومړی: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{5}{x-2}$ پیدا کړئ.

د 5 وېشنه په یوه ډېر لوی (ناپای) مثبت(منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یعنې $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{\pm\infty} = 0^{\pm}$.
ګراف G_fیو پروت اسیمپټوټ $y = 0$ لري، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نږدې کیږي.
دویم: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{-3}{x+1}$ پیدا کړئ.
د -3 وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت(منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یانې $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{-3}{x+1} = \frac{-3}{\pm\infty} = 0^{\pm}$.
ګراف G_f یو پروت اسیمپټوټ $y = 0$ لري، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نږدې کیږي.
دریم: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{5}{x^2 - 2x}$ پیدا کړئ.
په مخرج کې یوازې x^2 ستر رول لوبوي. د مربع کونې له لارې هر عدد مثبت

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیږي.که 5 په یوه ډېر لوی مثبت عدد وویشل شي، نو یو خورا کوچنی مثبت عدد ترې لاس ته راځي، یعنې $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^2-2x}=\frac{5}{+\infty}=0^+$
ګراف G_f یو پروت اسیمپټوت $y=0$ لري، یوازې له پورته لور ور نږدې کېدنې سره.

څلورم: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x^2-2}$ پیدا کړئ.

د مخرج مربع کونې سره منفي عددونه هم مثبت کیږي.د -3 وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت عدد باندې یو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي یانې $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x^2-2}=\frac{-3}{+\infty}=0^-$.
ګراف G_f یو پروت اسیمپټوت $y=0$ لري، یوازې له کښته ګراف ته ور نږدې کیږي.

د پرېښودنې- یا ترې صرفنظر کونې یا له ترې تیرېدنې اصول:

لومړی: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ پیدا کړئ.

په صورت کې د x جګعدد(توان؟)، په مخرج کې د x^2 توان په پام کې نیسو او همداسې له ټولو ثابتو تېرېږو (ټولې ثابتې پرېښول کیږي،صرف نظر ترې کیږي) او بیا x لنډیږي.
که 1 په ډېر لوی مثبت(منفي) عدد وویشل شي، نو
$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0^\pm$ ترې لاس ته راځي.

(څیره G_f پروت ګاونډ(مجانب) $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ورنږدې کیږي.

دویم: غواړو د $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{x+2}$ تابع حل پیدا کړو.

حل: په صورت کې د x^2 او په مخرج کې د x له ټولو توانونو په پام کې نیولو او له ټولو ثابتو ترېږو(صرفنظر ترې کوو) او بیا یې د x سره لنډوو. په روښانه توګه ټول حدونه $\pm\infty$ لاس ته راځي یعنې $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$.
شکل G_f مائله اسیمپټوت راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د 1 په اندازه ستره ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}$ پیدا کړئ.

په صورت او مخرج کې د x^2 ټول توانونه په پام کې نیسو او له ټولو ثابتو تیرېږو او بیایې د x^2 سره لنډوو.

ټولې پولې په روښانه توګه $-\frac{2}{3}$ راکوي

یعني $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2-2}{3x^2+2x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2}{3x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$

شکل G_f پرته اسیمپتوت راکوي، چې $y=-2/3$ ده.

څلورم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}$ پیداکړئ

په صورت کې له x^2 څخه کوچنیو ټولو توانونو او په مخرج کې د x^3 له ټولو کوچنیو توانونو او همداسې له ثابتو تیرېږو. که -2 په $\pm\infty$ ووېشل شي، نو یو کوچنی مثبت یا منفي عدد یعنې $0^{\pm}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2}{3x^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-2}{3x} = \frac{-2}{\pm\infty} = 0^{\pm}$ ترې لاس ته راځي.

شکل(څیره) G_f یو پروت اسیمتوت $y=0$ لري، چې له پورته او کښته لور ورنږدې کیږي.

شمیرنیز حلونه(د شمیرنې له لارې حل):

اول: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2}$ وشمیرئ.

په صورت او مخرج x^2 له نوکانو(لینده کیو یاقوسونو) راوستنې او بیا د x^2 سره لنډونې وروسته مخرج د 1 په لور ځي او صورت دصفر په لور، یعنې صورت ترمونه صفر ته نژدې کیږي.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}} = \frac{0^{\pm}}{1} = 0^{\pm}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شکل G_f یوه مایله اسیومپټوت(مجانب) لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په 1 کوچنۍ ده.

دویم: وشمیرئ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}$

په صورت او مخرج کې هغه د لوی توان x یعنې x^4 له نوکانو یا لیندکیوبهر نیسو او بیا په ترتیب شمیرنیزه عملیه مخ ته بیایو ، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0^-}{1}=0^-$$

ټولیز خویونه:

بیلګه۱: پیداکړئ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^2-2}{x+1}$

په پورته بیلګه کې داسې مخ ته تللي یو،چې په صورت کې له ټولو عددونو څخه تیرېږو، چې د خپلواکي متحولې توان له 1 کوچنی یعنې صفر وي او په صورت کې له ټولو هغو خپلواک متحولو تیریږو، چې توان یې له 2 څخه کوچنی وي.. ګورو، چې په صورت کې x له کوم ضریب سره پاتې کیږي، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي ناپای په لور ځي.

$$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(3x-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3x-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

بیلګه ۲: پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2-2}$

په پورته بیلګه کې په صورت کې له 1 او مخرج کې له 2 څخه تېرېږو او بیا صورت او مخرج په x ویشو. لاس ته راوړنه یې د x په یوه ثابت عدد وېشل دي. چې د $x\to\infty$ سره تابع ± 0 ته ځي، یعنې: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2-2}=0\pm$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۳: پیدا کړئ: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}$

په صورت کې له 2 او مخرج کې له $2x$ څخه تیرېږو او د x^2 سره یې لنډوو او په دې ډول لاندې پایله لرو: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=-\frac{2}{3}$

تمرینونه:

د لاندې تمرینونو حدونه د پورته ورکړشوو مختلفو لارو له لارې وشمیرئ:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6}{x^2-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x-5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$$

متمادیت(ناپرېکیدنه)"Continuity"

د درس په دې برخه کې لولو ، چې یوه تابع په یوه ټکي یا یوه انټروال کې کوم حالت غوره کوي. ایا دا تابع په کوم ځای کې ټوپ وهي، یا پرې کیږي او که یا په متمادي یعنې نه پرېکیدنې ډول د اینتروال په دننه کې ځغلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ په دې موضوع د تابع متمادیت څېړو او متمادیت تعریفوو

فعالیت:

لاندې توابع لرو:

$$f(x)=x^2-1\ ,\ f(x)=\frac{1}{x}\ ,\ f(x)=\frac{|x|}{x}$$

- د دې درې توابعو شکلونه وکاږئ.

- وګورئ، چې د توابعو ګرافونه څنګه ځغلي. په کومه تابع کې ګراف ترلی ځغلي او چرته ماتیږي، ټوپ وهي او ...

له پورته فعالیتونو څخه لاندې پایله لرو:

د توابعو متمادیت Continuous functions

په دې موضوع کې موږ د یوې تابع د متمادیت په هکله څېړنه کوو او د متمادیت پیژند(تعریف) ورکوو.

پیژند:

که b د f تابع تعریفورشو (- ساحه) کې یو حقیقي عدد وي. د f تابع په b متمادي بلل کیږي، که د ټکي (b.f(b)) نږدې د f ګراف داسې وکښلی شو، بې له دې چې د پنسل څوکه له کاغذ څخه پورته کړو.

له دې امله $f(x)=x^2-1$ تابع او $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع د $x=b$ په ټکي کې متمادي ده.

$f(x)=\frac{|x|}{x}$ تابع په $x=0$ متمادي نه ده یانې ټوپ وهي کیږي.(څېره په ۵ ـم مخ کې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع په $x=a$ کې غير متمادي ده، که پرې شي(تشيا ولري)، ټوپ ووهي او يا ماته شي.

لرو: $\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=1$ او $\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=-1$ نو له دې امله $\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}$ په $x=0$ کې نشته يعنې تابع د $x=0$ په ټکي کې متمادي نه ده.

بيلگه ۱:

که $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; \quad x\ge1\\ 1-x & ; \quad x<1\end{cases}$ وي، نو:

الف) د تابع گراف وکاږئ.

ب) پيدا کړئ $\lim_{x\to3} f(x)$

پ) پيداکړئ: $\lim_{x\to1} f(x)$

که تابع په $x=3$ او $x=1$ کې متمادي وي.

حل:

الف) گراف دې د گرانو لوستونک دنده وي.

ب)
$$\lim_{x\to3} f(x)=(2x+1)=7$$
$$f(3)=7$$

پ)
$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}(2x+1)=3$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(1-x)=0$$

د ب) او پ) له مخې لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

له دې امله تابع په $x = 3$ ناپرېکیدونې او $x = 1$ کې پرېکیدونکې ده.

بیلګه ۲:

که $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x3+x}{x} & ; \; x \neq 0 \\ 3 & ; \; x = 0 \end{cases}$ **وي.**

الف) فنکشن رسم کړئ

ب) و څیرئ، چې تابع په $x = 2$ او $x = 0$ کې متمادي ده او که نه؟

حل: الف) د تابع ګراف لپاره

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	5	2	3	2	5

ب) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \dfrac{x^3+x}{x} = \lim_{x\to 2} (x^2+1) = 2^2+1 = 5$

$$f(2) = \frac{2^3+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دې امله د f لیمیټ شته او $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ دی، نو تابع متمادي دی که $x = 2$ وي.

وي دې $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+x}{x} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې معنا دا ده، چې $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ او په دې معنا دی، چې $f(0) = 3$

دا دا معنا لري، چې $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$

تابع په $x = 0$ کې غیرمتمادي ده.

بیلگه۳: که $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$, $x \neq -3$ وي.

ایا $f(x)$ تابع په $x = -3$ کې متمادي ده؟

حل: تابع $f(-3)$ تعریف نه لري، نوله دې

امله تابع په $x = -3$ کې متمادي نه ده.

له دې بیلگې او د تیرو درسونو څخه لرو:

تعریف (پیژند):

که f یوه تابع وي، چې د ټولو x لپاره په همغه واز اینتروال کې چې $x = c$ لري تعریف وي،نو د f تابع په $x = c$ کې متمادي بلل کیږي، که دا لاندې شرایط پوره وي:

1- که $f(x)$ تعریف وي.

2- که $\lim_{x\to c} f(x)$ شته وي (موجود وي).

3- که $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ رښتیا وي.

که تابع د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره متمادي وي، نو تابع په واز اینتروال (a,b) کې هم متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلگه ۴:

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; \; x\le 1 \\ 4+x & ; \; x>1\end{cases}$ وي.

وگورئ، چې تابع چيرته متمادي او چيرته غيرمتمادي ده.

حل: په $x=1$ کې f تعريف لري

$$f(x)=3$$
$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(2x^2+1)=3$$
$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(4+x)=5$$
$$\lim_{x\to -1} f(x)\neq \lim_{x\to -1} f(x)$$

له دې امله تابع په $x=1$ کې غيرمتمادي ده

بيلگه ۵:

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; \; x<2 \\ 3 & ; \; x=2 \\ x+3 & ; \; x>2\end{cases}$ وي، نود $f(x)$ تابع متماديت په $x=2$ کې وڅيرئ.

حل: تابع $f(x)$ په $x=2$ کې تعريف لري او لرو $f(2)=3$

$$\lim_{x\to 2^+} = \lim_{x\to 2^+}(x+3)=5$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2+1)=5 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=5$$

دا چې $f(x)=3$ دی، نو له دې امله $\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا دی، چې تابع په $x = 2$ کې غيرامتمادي ده.

بيلگه ۶:

که $f(x) = \begin{cases} 2\sin x & ; \quad x \le \frac{\pi}{2} \\ ax^2 + \pi^2 & ; \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ وي، نو:

a داسې پيدا کړئ، چې f په $x = \frac{\pi}{2}$ کې متمادي وي.

حل: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 2 \quad ; \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = a\frac{\pi^4}{4} + \pi$

$f(x)$ متمادي ده، نو له دې څخه لاس ته راځي:

$$a\frac{\pi^2}{4} + \pi^2 = 2$$

و

$$= \frac{a}{4}\pi^2 = 2 - \pi^2$$

$$a\pi^2 = 8 - 4\pi^2 \Rightarrow a = \frac{8}{\pi^2} - 4$$

تمرينونه:

1- يوه په خوښه تابع وليکئ او د تابع گراف وکاږئ او وگورئ، چې تابع چيرته تعريف ده او متماديت يې وښاياست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې پوښتنو کې وڅیړئ، چې تابع په ورکړشوي ټکي کې متمادي یا غیرمتمادي دي.

$$2)\ f(x) = x^2 + 5(x-2)^7 \ ;\ x = 3 \qquad 3)\ f(x) = \frac{x+3}{(x^2+2x-5}\ ;\ x=-1$$

$$4)\ f(x)\frac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5}\ ;\ x=-2 \qquad 5)\ f(x)=\frac{1}{(x-3^3)}\ ;\ x=3$$

$$6)\ f(x) = |x-3|\ ;\ x=3 \qquad 7)\ g(x)=\frac{|x|}{x}\ ;\ x=0$$

د متمادي یا ناپرېکیدونکو توابعو خویونه

دلته دا خویونه همغه د لیمیټ خویونه دي.

فعالیت:

-1 د f او g توابعو جمع پیداکړئ:

$$(f+g)(x) = \text{..........}$$

-2 د f او g توابع په $x=2$ کې متمادي دي، نو:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \text{..........} \ \&\ \lim_{x\to a} g(x) =$$

-3 د لیمیټ قیمتونه استعمال کړئ:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a}(f+g)(x)$$

$$= \text{................}:\text{...}$$

$$= \text{.....................}:\text{...} = (f+g)(a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله $(f+g)$ په $x=a$ کې متمادي ده.

که f او g توابع په $x=c$ کې متمادي وي، نو د لاندې توابعو څخه یې هره یوه په $x=c$ کې متمادي ده.

1- د توابعو جمع $f+g$

2- د توابعو تفریق $f-g$

3- د توابعو ضرب $f\cdot g$

د توابعو وېش $\dfrac{f}{g}\ ;\ g\neq 0$

بیلگه۱:

که $f(x)=\sin x+1$ **او** $g(x)=x^2+3x-2$ **وي، نو:**

1- f او g په $x=1$ کې متمادي دي.

2- وښیرئ، چې ایا

الف) $f(x)+g(x)=\sin x+x^2+3x-1$ او

ب) $(\sin x+1)(x^2+x^2+3x-1)$ په $x=1$ کې متمادي او که غیرمتمادي دي.

حل: $1)\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=\sin 1+1$

نو f په $x=1$ کې متمادي دی.

$$\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)=2$$

نو g په $x=1$ کې متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- -------------------

2- الف):

$$a)\ \sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2)$$
$$= f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

د متمادي توابعو جمع په $x=1$ کې متمادي ده.

ب) :

$$(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x)\cdot g(x)$$
$$= (f\cdot g)(x)$$

نو د متمادي توابعو ضرب په $x=1$ کې متمادي دی.

بیلګه ۲:

که $g(x) = 3x - 2$, $f(x) = x + 1$ وي، وڅیرئ، چې ایا $f(x)\cdot g(x)$ په $x = 2$ کې

متمادي ده.

حل:

له پورته څخه لاس ته راځئ، چې $f(x)\cdot g(x)$ متمادي

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 3$$
$$\lim_{x\to 2} g(x) = 4 = g(2)$$

$f(x)\cdot g(x) = 3x^2 + x - 2$ ده.

$$\lim_{x\to 2} f(x)\cdot g(x) = 3(4) + 2 - 2 = 12$$
$$= \lim_{x\to 2} f(x)\cdot \lim_{x\to 2} g(x) = f(2)\cdot g(2) = 3.4 = 12$$

دکینې لورې بند انتروال په [a,b] کې ګراف متمادي تابع په ګوته کوي یا ښایي، هلته چې $f(a) \neq f(b)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ولرو $f(a) < k < f(b)$ ګراف له $(b, f(b))$

ټکي ځخه نشي انځورېدلی تر څو افقي کرښه

$y = k$ د ثابتې k سره غوڅه نه کړي.

له پورته څخه دا لاندې غوره جمله لیکلی شو:

که تابع f په بند اینتروال [a,b] کې متمادي اوk د a اوb ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عددc د f(a) اوf(b) ترمنځ شته، داسې چې f(c) = k دی.

بیلګه ۳: که $f(x) = x^3 + 4x\ ,\ x \in [1,2]$ وي، نو **وښایئ، چې یو** $c \in (1,2)$ **شته، داسې چې** $f(c) = 11$ **وي.**

حل: $f(x)$ یو پولینوم دی نو f په بند اینتروال [1,2] کې متمادي دی.

لاندې لرو:

$$f(1) = 1^3 + 4(1) = 5 \quad ; \quad f(2) = 8 + 4(2) = 16$$
$$5 < 11 < 16 \quad , \quad f(1) \neq f(2)$$

له دې امله یو عدد $c \in (1,2)$ شته، داسې چې $f(c) = 11$ دی.

بیلګه ۴:

که $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & ; \ -1 \le x < 2 \\ |x - 10| & ; \ 2 \le x \le 20 \end{cases}$ ي ، نو:

الف) وآزمایئ، چې تابع متمادي ده.

ب) وآزمایئ، چې یو $c \in (-1, 20)$ شته داسې چې $f(c) = 6$ دی او د c ارزښت پیدا کړئ.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2x+4 = 8$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 10-2 = 8$$

له دې امله لرو:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 8$$
$$f(x) = 10-2 = 8$$

ګورو چې تابع په [-1, 20] کې متمادي ده.

$$b)\ f(-1)2x - 1 + 4 = 2$$
$$f(20)\,|20-10| = 10 \;\Rightarrow\; f(-1) \neq f(20)$$

په دې اساس لرو: $2 < 6 < 10$

له دې امله لرو: $c \in (-1, 20) : f(c) = 6$

$$2x+4=6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1, 2)$$
$$|x-10| = 6$$
$$x - 10 = 6 \;\Rightarrow x = 16 \in (-2, 20)$$
$$10 - x = 6 \;\Rightarrow x = 4 \in (-2, 20)$$

$$\Rightarrow |x-10| = 6$$

د c ارزښتونه 1, 4, 16 دي.

بیلګه ۵ :

که وي: $f(x) = 2\sin x + 3;\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$ ، نو وښایئ چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

نشاد دهيد که $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ $c\in$ شته دی د کوم لپاره چې $f(c)=4$ او c پيدا کړی.

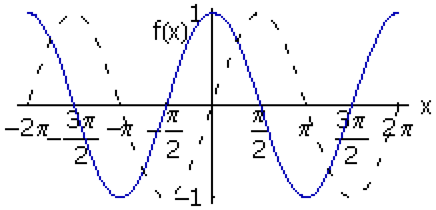
حل : تابع f د ساين تابع ددی ، نو له دې امله f متمادي دی.

$$f(-\frac{\pi}{2}) = 2\sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin\frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$$

$f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$ مو، لرو :

تابع fمتمادي دی او لرو: $1 < 4 < 5$



ټکي ټکي د ساين ګراف دی.

دا ګراف که په ۳ کې ضرب کړی او ۳ ورزيات کړي د بيلګې ګراف راکوي.

دا په دې معنا چې، که $c\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ موجود وي، د هغه لپاره $f(c) = 4$ صدق کوي.

که د دې لپاره c پيدا کړو ، نو په لاس راځي:

$$f(c) = 2\sin c + 3 = 4$$

$$2\sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

له ګراف څخه واضح ايدل کيږي،، چې f په انتروا ل $[a,b]$ کې متمادي دی، $f(a)$ او $f(b)$ متضادې علامې لري، نو c د منحنی ارزښت قضيې په بنسټ د $f(a)$ او$f(b)$ په

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځ کې و K=0 ته لږ تر لږه یو C د a او b په منځ کې داسې شتون لري، چې له هغې نتیجه f(c) = 0 لاس ته راځي.

دا په دې معنا، چې x=c د برابرون یا مساوات f(x) = 0 یو حل دی.

بیلګه۶ :

که $f(x) = x^3 + 5x - 23$ **وي، نو وښایئ،چې د f تابع د x ـمحور په اینتروال (2.3) کې غوڅوي.**

حل: f **پولینوم تابع ده ، نو f په اینتروال [2,3] کې متمادي دی.**

$$f(2) = 2^3 + 5(2) - 23 = -5$$
$$f(3)3^3 + 5(3) - 23 = 19$$

$f(2) \neq f(3)$ **او د متضادو مخنخښو(علامو) سره.**

له دې امله د $c \in (2,3)$ لپاره لرو چې $f(c) = 0$ دی.

لنډ: غیرمتمادي توابع هغه دي، چې په یو کوم ځاي کې تعریف نه وي

تمرینونه:

وښایئ چې تابع په ورکړ شوي ټکي کې متمادي ده.

1) $f(x) = x^3 - 2(x+1)^5$; $x = 2$

2) $g(x) = \dfrac{x^2 + 3}{(x^2 - x + 5)(x^2 + 2x}$; $x = -1$

3) $h(x) = \dfrac{x\sqrt{x} + 1}{(x+2)^3}$; $x = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-4 تشریح کړئ، چې ولې تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ په $x=0$ کې غیرمتمادي ده؟

-5 که $f(x)=\frac{18}{x}+2\ ,\ x\in[2,3]$ وي، و ښایئ چې $c\in(2,3)$ شته داسې چې $f(c)=10$ وي او c پیدا کړئ.

-6 وښایئ چې د لاندې مساوات لپاره یوحل شته:

$$x^3-4x+1=0 \quad ; \quad x\in[1,2]$$

-7 وي دې: $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$; $f(x)=\sin x+\cos x$ وښایئ، چې مساوات $\sin x+\cos x=0$ په اینتروال $(\frac{\pi}{2},\pi)$ کې یو حل لري.

-8 وي دې:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2 & ; \quad -1\le x\le 3 \\ 13-2x & ; \quad 3<x\le 7 \end{cases}$$

الف) ایا f په $x=0$ کې یو متمادي تابع دی؟

ب) $c\in(-1,7)$ داسې پیدا کړئ، چې $f(c)=0$ وي.

د لـــومړي څپـــرکي ټولګه " Chapter Summary "

پیژند:

د $f(x)$ تابع یو لیمیټ L لري، که x تړلی یو حقیقي عدد c ته لاړ شي. په دې معنا چې $f(x)$ لپاره، چې تړلیLته ځي دا دی، چې x تړلی c ته لاړشي او داسې یې لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

-------------------- --

د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځاي کې يو کيڼ اړخيز ليميټ $a_l = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ لري،

که د هر ترادف (x_n) لپاره، چېn غړي يې د x_0 کيڼ لور ته پراته و ي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_l په لور هڅيږي.

په ورته توګه ښى اړخيزه ليميټ:

د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځاي کې يو ښى اړخيز ليميټ $a_r = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ لري،

که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي يې د x_0 ښي لور ته پراته و ي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_r په لور وهڅيږي..

که تابع f(x) همغه ليميټ L ولري که x له ښى اويا کيڼې لورې و c ته نږدې شي، نو ليميټ شته دى او د L سره برابر دى.

دا داسې ليکو: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

د پولې يا حد خويونه(خواص) :

که f او g توابع وي، c;Lاو M حقيقي اعداد وي داسې چې $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ او $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$، نو دا په لاندې توګه ليکلى شو:

1) $\lim\limits_{x\to c}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x) = L + M$

2) $\lim\limits_{x\to c}(f-g)(x) = \lim\limits_{x\to c}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x) = L - M$

3) $\lim\limits_{x\to c}(f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to c} g(x) = L \cdot M$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$4)\ \lim_{x\to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}; (M \neq 0)$$

$$5)\ \lim_{x\to c}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

(د $f(x) \geq 0$ او د x د ټولو قیمتونو لپاره، چې c ته ور نږدې کیږي.

قضیه: که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

قضیه: که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$

پیژند: f دې یوه تابع وي او د ټولو x لپاره په یوه واز انتروال کې چې $x = c$ وي ،تعریف وي، نو وایو: f په $x = c$ کې متمادي دی، د لاندې شرایطو سره:

1) f (x) تعریف لري 2) $\lim_{x\to c} f(x)$ شته دی

$$3)\ \lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

که تابع د ټولو $x \in (a, b)$ لپاره متمادي وي، نو تابع په ټول انتروال (a, b) ې متمادي ده.

تعریف یا پیژند : وایو چې یو تابع په یوه بند انتروال [a, b] ې متمادي ده، که تابع له ښئ لورې په $x = a$ کې متمادي وي او له کیڼې لورې په $x = b$ کې او د واز انتروال (a, b) په هر قیمت کې متمادي وي.

د متمادي توابعو خویونه(خواص): که f او g په $x = c$ کې متمادي وي، نو دا لاندې هره یوه تابع په $x = c$ کې متمادي ده.

لومړی) د توابعو جمع یعني f+g تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم) د توابع تفريق يعنې f-g تابع

دريم) د توابعو ضرب يعنی f.g

څلورم) د توابعو ويش يعنې $\frac{f(x)}{g(x)}\ ;\ g(x) \neq 0$

د منځني قيمت قضيه:

که تابع f په بند انټروال [a,b] کې متمادي وي او k د f(a) او f(b) ترمنځ يو عدد وي، نو لږ تر لږه د a او b ترمنځ يو عدد c شته، د کوم لپاره چې f(c)=k باور لري.

د ځپرکي تمرينونه:

سم ځواب وټاکئ:

که $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ وي، نو $\lim_{x \to 2}(3x-20)(x+1)$ ی:

a) 5　　b) -5　　c) 4　　d) 3

ب) پيدا کړئ $\lim_{x \to 1} \frac{x2+1}{x2+3x-2}$

a) 1　　b) 2　　c) 1　　d) $\frac{1}{2}$

1- ليميت پيداکړئ $\lim_{x \to 5} \frac{|x+5|}{x^2+3x-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) 1 b) 5 c) -1 d) -5

-2 $\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}$ دی.

a) -2 b) -1 c) 1 d) 2

-3 $\lim_{x\to0}\frac{3x-\sin x}{x}$ دی.

a) 2 b) -2 c) 1 d) 3

-4 $\lim_{x\to-2}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$ دی.

a) $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) 1

-5 $\lim_{x\to1.4}[2x+0.3]$ دی.

a) 1 b) 3 c) 0 d) نشته

-6 $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}$ دی.

a) 1 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

-7 $\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ دی.

a) $2+\sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

(c) ketabton.com: The Digital Library

-8 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin}{1+\cos 2x}$ دی.

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

-9 لاندې توابع سره جمع کړئ.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 5 \quad \& \quad \lim_{x \to 3}(x) = -2$$

-10 که $f(x) = x^2 + 1$ وي، پیداکړئ:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

-11 تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - b & ; \quad x \le 3 \\ 10 - x & ; \quad x > 3 \end{cases}$ په $x = 3$ کې متمادي دی، b پیدا کړئ.

-12 وښایئ، چې تابع $f(x) = 3x^2 - x - 5$ په اینټروال $(1,2)$ کې حل لري.

۱۳ - د لاندې ۱ – ۹ توابعو لیمیټونه وشمېرئ.

1) $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + x)$ 2) $\lim\limits_{x \to 4} (x^2 + x)$ 3) $\lim\limits_{x \to -2} 2x + 3$

4) $\lim\limits_{x \to 0} |x|$ 5) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x}{x}$ 6) $\lim\limits_{x \to 1} 7$

7) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\frac{x^2}{x}}$ 8) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ 9) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^9 - 9}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱٤-- که وي: $f(x)=\begin{cases}2+x; x<1\\ x^2 \quad ; x\geq 1\end{cases}$

الف) د تابع ګراف وکاږئ.

ب) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ پيدا کړئ.

15: هغه توابع چې په يوه عدد د بېلګې په توګه صفر کې تعريف نه لري ، څه بلل کيږي

16 پيدا کړئ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

17-- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}$ وشمېرئ.

18--

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; \quad x<2\\ 3 & ; \quad x=2\\ x+3 & ; \quad x>2\end{cases}$ وي، نود $f(x)$ تابع متماديت په $x=2$ کې وڅېړئ.

۱۹- يوه په خوښه تابع وليکئ او د تابع ګراف وکاږئ او وګورئ، چې تابع چېرته تعريف ده او متماديت يې وښاياست.

۲۰ - په لاندې له ۲ – ۷ پوښتنو کې څېړو، چې ايا تابع په ورکړشوي ټکي کې متمادي يا غيرمتمادي دي.

2) $f(x)=x^2+5(x-2)^7 \;;\; x=3$

3) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5} \;;\; x=-1$

4) $f(x)\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \;;\; x=-2$

5) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3^3)} \;;\; x=3$

6) $f(x)=|x-3| \;;\; x=3$

7) $g(x)=\dfrac{|x|}{x} \;;\; x=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۱- تشريح کړئ، چې ولې تابع $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ په $x=0$ کې غيرمتمادي ده؟

۲۲- که $f(x) = \dfrac{18}{x} + 2 \ , \ x \in [2,3]$ وي، و ښايئ چې $c \in (2,3)$ شته داسې چې $f(c) = 10$ وي او c پيدا کړئ.

۲۳- وښايئ چې د لاندې مساوات لپاره يوحل شته:

$$x^3 - 4x + 1 = 0 \quad ; \quad x \in [1,2]$$

۲٤- وي دې: $f(x) = \sin x + \cos x \quad ; \quad x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ وښايئ، چې مساوات $\sin x + \cos x = 0$ په اينتروال $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ کې يو حل لري.

۲۵ الف: وڅيړئ، چې ايا لاندې تابع د x_0 په ځاي کې مفمادي ده.

a) $f(x) = \begin{cases} -2x \\ \sqrt{x} \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} \sin x \\ e^x \end{cases}$	د $x_0 = 0$ $x \le 0$ لپاره د $x_0 = 0$ $x > 0$ لپاره د $x_0 = 0$ $x \le 0$ لپاره د $x_0 = 0$ $x > 0$ لپاره	b) $f(x) = \begin{cases} 2 \\ x^2 + 1 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x + 1 \\ \ln x \end{cases}$	د $x_0 = 1$ $x \le 1$ لپاره د $x_0 = 1$ $x > 1$ لپاره د $x_0 = 1$ $x \le 1$ لپاره د $x_0 = 1$ $x > 1$ لپاره

۲٦-- که $f(x) = 2\sin x + 3 \ ; \ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ وي، نو وښايئ چې $c \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ شته،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه لپاره چې ربښتیا وي $f(c)=4$ او c پیداکړئ.

۲۷: لاندې لیمیټونه وشمېرئ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\sin 5x \cot 3x$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}$$

$$\lim_{x\to\pi}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}$$

$$\lim_{x\to 1}(\cos^2 x+\sin^2 x)$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-2x}{x}$$

20) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\tan 2x}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\cos\frac{\pi x}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^3+2x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

25) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$$

26) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x+\frac{\pi}{4})}{x+\frac{\pi}{4}}$$

27) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{x(x-\frac{\pi}{4})}$$

28) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-x\cos 3x}{x}$$

29) $$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 3x-\sin 5x}$$

30) $$\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}$$

31) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin^2 x-1}}{x}$$

32) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}$$

33) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(3x-3)}{1-x^3}$$

34) $$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+5x}{\sin 2x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويمه برخه: مشتق يا رابيليدنه

په تيره برخه کې مو د پولي ځيرنه وکړه. وبه ګورو، چې دا د پولي درس د مشتق يا رابيليدنې لپاره اړيين دی.

د تابع منځ ارزښت تغير Average rate of change

دلته دې د سالنګ يا ماهيپر د سرک ځيره راشي.(دلته ځېره راځي)

دکتاب په دې برخه کې موږ د رياضياتو يوه غوره برخه، چې د رياضياتو زړی ورته ويلی شو، تر ځيرني لاندې نيسو، نو له دې امله لازم ګڼم، چې په دې هکله داسې مهم څه

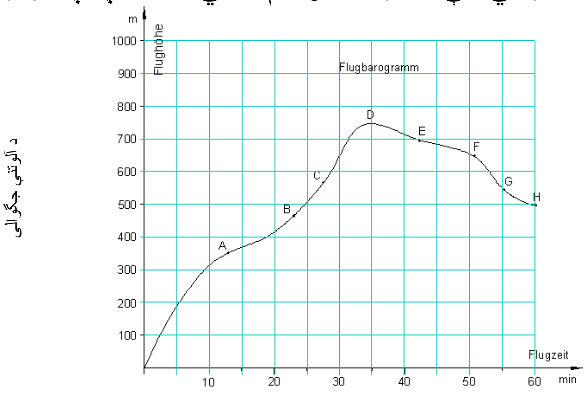
(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه یادښت په ځیر راوړم: که له یوه ځای څخه وبل ځای ته د تابع د تغیر منځ ارزښت Averagerate of change څخه غږیږو ، نو موخه ترې په یوه ټکي یا دوه ټکو کې د تابع جګوالی، میل اویا تانجنت دی او دا دریواړه کلمې د ریاضیاتو له مخې په همغه یوه معنا دي او وبه ګورو، چې همداسي کمښتوپش یا د تفاضل وېش(Difference quotient) هم.

دې کلمو ته په انګرېزي کې **slop** وايي، چې زموږ ادبیتو د میل په نامه بلل کیږي.

په یوه ټکي کې د تابع د ګراف میل(جګیدنه)

الوتکوکي د الوتني دلیک(الوتنلیک) الي (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل الوتنې جګوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت تابعیت کې رسموي او په هر [دالوتلې وخت] جګوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پښتو واړوو، نو د لیک بکس به ورته ووایو.



Flight barogramm

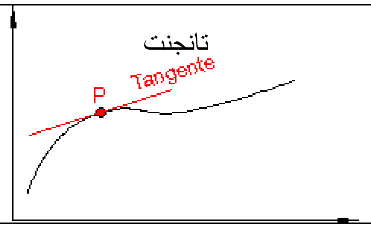
په پورته ګراف کې د یوې الوتکې د الوتنې د بیلا بیلو وختونوجګوالی ښوول شوی.
فعالیتونه:
_ په پورته ځیره کې د ګراف جګوالی د A په ټکي کې د B ټکې سره پرتله کړئ. په ورته توګه دګراف میل د E په ټکي کې د G ټکي سره پرتله کړئ.
_ روښانه کړئ، چې ولې په یوه ټکي کې باید له جګوالي، میل یا تانجنت څخه غږیږو؟
_ وهڅیږئ، چې په یوه ټکي کې د ګراف جګوالي لپاره یو متود تعریف کړئ او له انځور څخه د A او B په ټکو کې جګوالی وټاکئ.
_ ایا فکر کوئ، چې په B ټکي کې نسبت وA ټکي ته جګوالی زیات دی؟
_ ایا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جګوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جګوالی زیات دی نسبت د G ټکي ته؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

_ ايا د يوې کرښې جګوالی او په همدې ترتيب د يوې منحني هرچيرته توپير لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه:
ګورو، چې په يوه منحني کې د ګراف جګوالی هرچيرته برابر نه دی، نو له دې امله بايد ټکی په ګوته کړو، چې هلته ميل څېړل کيږي.
په لاندې بيلګه کې به روښانه کړو، چې تنها د يوې (سيده)کرښې ميل هرچيرته برابر دی، نو له دې امله دلته د يوې کرښې د ميل يا جګوالي څخه غږيږو.
برېښي چې لاندې پيژند يا تعريف عاقلانه دی.

(تعريف):
د يوې تابع ګراف ميل(جګوالی) د P په يوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د ميل د ګراف سره برابر دی.

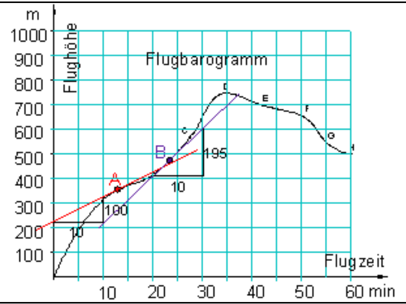


ليدل کيږي چې دلته يو تانجنت د کرښې تعريف لري، چې د لمستکي(مماس) په چاپيريال کې د امکاناتو سره سم لمستکي(مماس) ته ښه ور نږدې کيږي.
ددې پيژند يا تعريف له مخې په يوه ټکي کې د يوه ګراف ميل د يوې کرښې ميل دی.
د ګراف د جګېدنې ټاکلو لپاره د A او B په ټکو هر يوه کې يوه کرښه (تانجنت) انځوروو، چې ګراف ته خورا زياته نږدې کيږي.
د ميل يا جګېدنې مثلث په مرسته جګېدنه په شډل يا ساده ډول شميرل کيدی شي:
A په ټکي کې جګيدنه:

$$\frac{100\,m}{10\min} = 10\frac{m}{\min}$$

د B په ټکي کې جګيدنه:

$$\frac{195\,m}{10\min} = 15.5\frac{m}{\min}$$



زموږ د بيلګې لپاره ميل يا جګيدنه په يوه ټاکلي ټکي کې د لحظوي(سملاسي) ميل سرعت په معنا دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

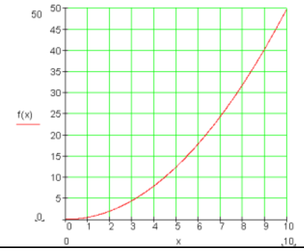
د A په ټکي کې: د الوتنې وخت نږدې $12.5\,\text{min}$، د میل یاجګیدنې چټکتیا (سرعت) نږدې $10\,\frac{m}{\text{min}}$ ده.

د B په ټکي کې: د الوتنې وخت نږدې $23.0\,\text{min}$، د جګیدنې سرعت نږدې $19.5\,\frac{m}{\text{min}}$ دی.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدنې له مخې تعریف شوی، چې د لمستکې چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د ګراف میل د A او B په ټکو کې هم یواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی.

په یوه ټکي کې د تابع دګراف میل (جګیدنه):
معلومه ده، چې یو ریلګاډی د تمځای څخه له خوزېدو(حرکت) وروسته خپله چټکتیا(سرعت) په کراره کراره زیاتوي. وهلی لار(د تمځای څخه لرېوالی) تل زیاتیږي. د تمځای څخه لریوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کې یا تابع دی.

عمل د لاندې تابعمساوات له لارې لیکلی شو.(مخامخ یا لاندې د تابع ګراف)
دلته د x وخت د ثانیې او د s لار د متر لپاره ټاکلي او لیکو: $S = f(x) = 0.5x^2$



فعالیت:
1- اوس دې منځنی تغیر ارزښت Averagerat of change(منځنی میل ارزښت) د 3- مې او 7- مې ثانیی ترمنځ وشمېرل شي.
2- ددې لپاره دې اړونده قاطع یا سیکانت انځور شي او د هغې جګوالی دې وشمیرل شي.
3- اوس دې د تغیر ارزښت(منځنی جګوالی) د 3- مې او 7- مې ثانیو ترمنځ وشمیرل شي.
4- وښایاست، چې په دریمه ثانیه کې د ارزښت تغیر یا جګوالی څومره دی؟

کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient

د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي.
کرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

قاطع(غوڅی seconce):

قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي.

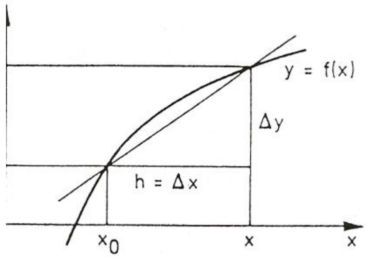
د قاطع میل یا جګیدنه(جګوالیsecant):

دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو میل(جګوالی) یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمیرل کیږي.

په لاندې کې m_s د جګوالي لپاره لیکل کیږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

(تعریف): د $y = f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څیره دې وکتل شي). نو د تفاضل یا کمبنتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:

	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

د f تابع لپاره فرمول: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمیرنه ده. د ا ټکي د $x-$ محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.

د کمبنت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

د $y = f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ تابع دې ورکړ شوې وي. د دې تابع کمبنت ویش(دتفاضل وېش) پیدا کړئ.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{3(x+h)^2 - 5(x+h) + 4 - (3x^2 - 5x + 4)}{h}$$

$$= \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 4 - 3x^2 + 5x - 4}{h}$$

$$= \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h}$$

$$= 6x + 3h - 5$$

تمرینونه:

1 - کمبنتویش (د تفاضل وېش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a) P(3,2) , Q(5,4) b) P(2,4) , Q(3,1)

2- د $x = x_0$ په ځای کې د f تابع د تانجنت جګوالی وټاکئ.

$a)\ f(x) = x^2 ,\ x_0 = 2 \qquad b)\ f(x) = 0.5x^2 ,\ x_0 = 3$

د کمبنتویش(د تفاضل ویش) او مشتق لاندې څه پوهیږو او د دوي ترمنځ توپیر څه دی؟

4 - د یوې تابع د سکانت(قاطع) لاندې څه پوهیږو او د تانجنت جګیدو لاندې څه پوهیږو؟ او د دوي ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي؟

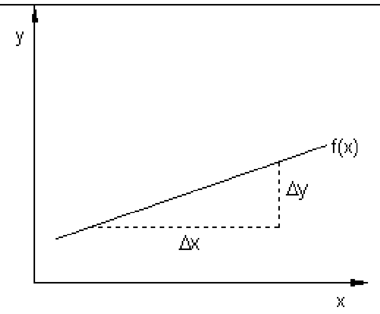
(c) ketabton.com: The Digital Library

رابیلیدنه یا مشتقشمیرنه **Diffrentialcaculation**

فعالیت:

پام وکړئ، لکه په یوه ثابت میل $a_1 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = constant$ کې، د بیلګې په توګه په خطي یا لاینیز تابع کې د $f(x) = a_1 x + a_0$ سره میل شته او که نه؟

_ پام وکړئ، چې دا میل به څه ځانګړي خویونه ولري؟ ایا جګیدنه به په هر ځای کې فرق ولري اوکه ثابت به وي؟



ایا په مختلفو وختونوکې اړین بولی، چې د تغیرحالت(د میل حالت) کې د تابع د تلنې حالت و څیړئ؟

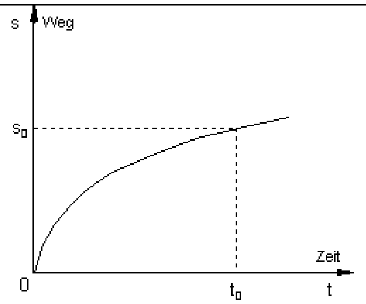
_ او یا له دې امله لحظوی چټکتیا(سرعت) $v(t_0)$ په لار- وخت- دیاګرام کې وڅیړئ؟

_ ایا د مشتق شمیرنې په مرسته دا پرابلم حل کیدی شي؟

په پام کې نیولې لحظه $\hat{=}\ t_0$

دا تر دې وخت وهل شوې لار $\hat{=}\ s_0$

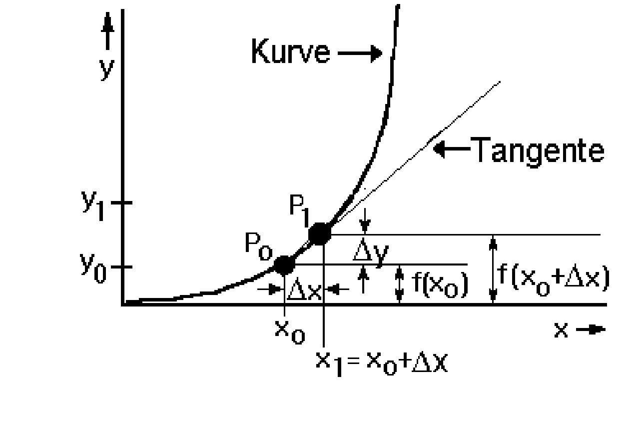
یادونه: مخامخ Zeit د وخت ا و Weg د لار په معنا دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتقشميرنه = د يوې منحني ميل يا جګيدنه (Differential caculation

تانجنت: که د P_1 او P_0, ټکي يو بل ته ناپاى نږدې شي، نو له قاطع څخه تانجنت جوړيږي.



د تانجنت جګيدنه: د تانجنت جګيدنه د قاطع د جګيدنې،، ليمت ،Limit„ يا حد دى.

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

فعاليت:

1- له پورته څيرې او اړونده شننې څخه د مشتق لپاره څه فکر کوئ؟

2- د derivative (مشتق) کلمې لاندې څه پوهيږو؟

او دا په ساده پښتو څه معنى ورکوي؟

3- له کمښت وېش(د تفاضلونو ويش) څخه ښنګه و مشتق ته راځو؟ په دې هکله د پورته څېړې څخه په ګډه اخسلوخپل نظر ووااياست.

4- له 2 – م فعاليت څخه وواياست، چې ولې دا شمېرنه رابيلېدنه يا مشتق بلل کيږي؟

پام: لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونيوله، د derivative کلمه نوې ده، نو له دې امله دا څو ټکي په پام کې نيسو: derivative د رابيليدنې په معنا دى، چې موږ يې تراوسه مشتق بولو.

: که د تابع دا کمښتويش(د تفاضل وېش) $x->x_0$ او(همداسې) $\Leftrightarrow x->0$ او يا په (همدې ډول) $\Leftrightarrow h->0$ لپاره يو حد ولري, نو د $y = f(x)$ تابع د $x = x_0$ په ځاى کې د مشتق قابليت لري او ددې لپاره ليکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}; ...$$

دا لیمیټ داسې ښایو: $(\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x)$

د x_0 ځای کې د $y = f(x)$ له مشتق(Derivativ,) یا رابیلدنې) څخه یوه بله سیده یا بل ډول کړه لار رابیله وو.

د مشتق ساده شمیرنې لپاره یوه بیلګه:

د $f(x) = x^2 - 3x + 2$ مشتق غواړو پیدا کړو.
ددې کمښتوپش په لاندې ډول دی:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{((x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 2) - (x_0^2 - 3x_0 + 2)}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3x_0 - 3\Delta x + 2 - x_0^2 + 3x_0 - 2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 2x_0 + \Delta x - 3$$

او د لیمیټ $\Delta x \to 0$ سره یې مشتق لاس ته راځي:

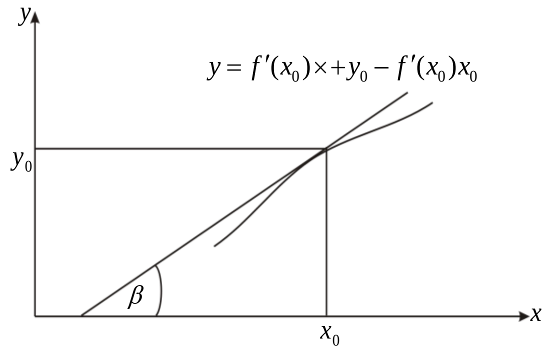
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x - 3) = 2x_0 - 3.$$

د دې لپاره دا لاندې تعریف(پیژند) ورکوو:

که یو د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځای کې مشتق وړ وي، نو هغه لاندنی کرښه چې د (x_0, y_0) کې څخه تېریږي او میل یا جګوالی یې $f'(x) = \tan\beta$ دې او په لاندې ډول لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f^{'}(x)\Leftrightarrow y=f'(x_0)x+y_0-f'(x_0)x_0$$

	او دا د (x_0, y_0) په ټکي کې د ورکړ شوې منحني $y=f(x)$ تانجنت بلل کیږي(پرتله پورته کېن شکل)

موږ اوس د ځو بنسټیزو توابعو مشتق شمیرنه تر څیړنې لاندې نیسو.

بیلګه۱ :

د یوې ثابتې مشتق:

موږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت یې یوثابت دی.

ثابت $y=f(x)=c=Cons$ ، نو د هر x_0 ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{c-c}{h}=0$$

$$\Rightarrow (\frac{dy}{dx})_{x=x_0}=f'(x_0)=0$$

بیلګه۲ :

یوه $f(x)=x$ خطي(کرښیزه) تابع لرو، د x_0 په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-+x_0}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1=\underline{\underline{1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعنې یوه ثابته ده.

بیلګه ۳ :

د $y=f(x)=c.u(x)$ ډوله تابع مشتق د c = ثابتې سره.

د ثابتې قانون:

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې $c=$) سره ضر ب شوی وي. یعنې له $y=f(x)=c.u(x)$ څخه لرو: $f'(x)=c.u'(x)$ $\Rightarrow$

ثبوت:

$$\Rightarrow\ f(x_0)=c.u(x_0)$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x_0+\Delta x)-c\cdot u(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0} c\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} c}_{c}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$$

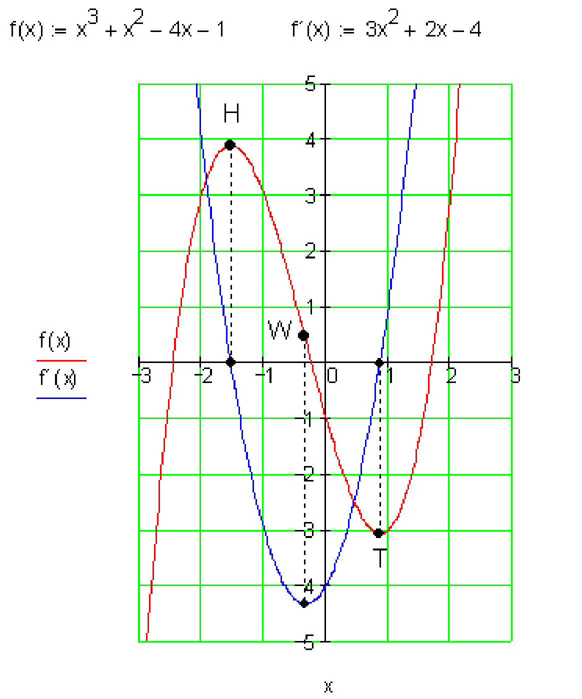
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underline{\underline{c\cdot u'(x_0)}}$$

تمرینونه:

1- د تفاضل وېش او د مشتق لاندې څه پوهېږو؟
2- د دوی ترمنځ څه اړیکې (پرتې) دي؟
3- د قاطع (سکانت) او تانجنت ځګېدنې لاندې څه پوهېږو؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع



شکل کې سره منحني تابع، شنه کرښه‌منحني د تابع مشتق او وبه گورو، چې له همدې امله د مشتق تابع هم ده.

فعاليت:

1- د x_0 په ځای کې د تابع مشتق يعنې څه؟

2- د يوې تابع له مشتق نيونې وروسته دې مشتق ته څه وو‌ايو؟

3- که د تابع مشتق د مشتق تابع ونوموو، روښانه کړئ، چې ولې تابع ده او ددې تابع درجه، د لومړی تابع سره پرتله کړئ.؟

- ايا له دې توپير څخه د مشتق کلمه روښانه کولی شئ؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بيلگې څخه کار اخلو

بيلگه۱: تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي. غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانگړې توگه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمښتونيش(د تفاضل وېش) پيداکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = x_0 :$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

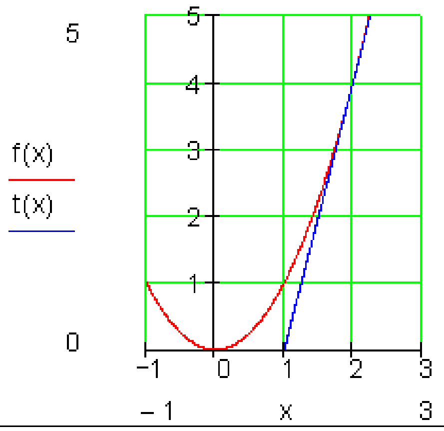
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لرې.

د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې میل یاجګوالی 4 لرې.

لاس ته راوړنه یې:

کیدی شي، د تابع د ګراف له لارې و ازمایل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0 | y_0) = P_0(2|4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د میل د مثلث له لارې جګیدنه لاس ته راوړو.



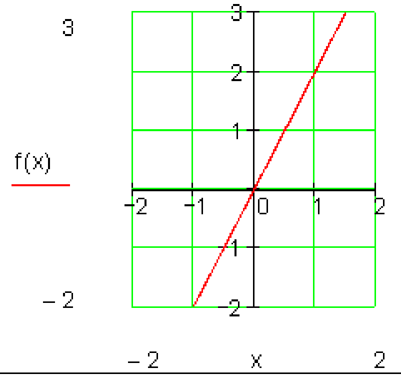
پورته بیلګه کې: $y = f(x) = x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداکوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$$

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	4

ګراف یوه کرښه $f'(x) = 2x$ انځوروي، چې د تابع مشتق بلل کیږي



پام: که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو بیرته هم یوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکیږي.
د مشتق تابع: د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنسټ تابع انځوروي، له دې امله دا د میل تابع هم بلل کیږي.

بیلګه ۲:
د $f(x) = x^3$ تابع دې ورکړ شوی وي.
فعالیت: ګران لوستونکي دې د $f(x) = x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.

مونږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^{\ 3}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^{\ 3} + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^{\ 3}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = 3x_0^2$$

نو $\underline{\underline{f'(x_0) = 3x_0^2}}$ د $f(x) = x^3$ تابع مشتق دی په ځای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسې ده: $\underline{\underline{f'(x_0) = 3x_0^2}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۳: یوه د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع ورکړشوې.
غوښتنې یا ثبوت:

الف: د تابع ګراف په یاد راوړئ.

ب: په x_0 ټکي کې د تابع مشتق پیداکړئ.

پ: په x_0 ټکي کې د مشتق تابع هم پیدا کړئ.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0}{x_0(x_0+\Delta x)}-\frac{(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-x_0-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x_0(x_0+\Delta x)}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}$

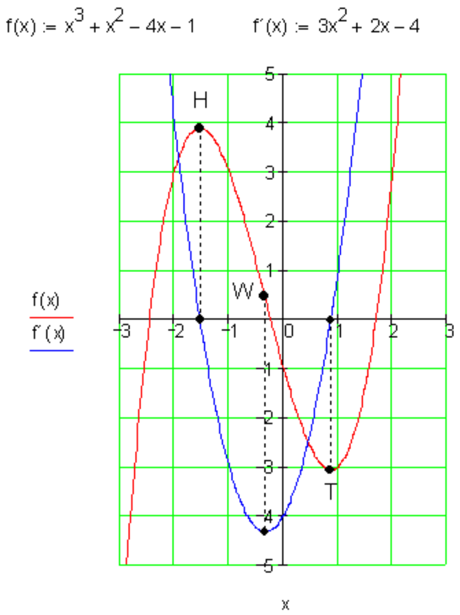
د پورته اخري مساوات لیمیټ د $\Delta x\to 0$ لپاره نیسو:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}\right)=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}$$

نو لرو: $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$. دا د x_0 په ځای کې د f مشتق دی.

د مشتق تابع هم دی: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وضعیه کمیاتو سیستم کې تابع او د تابع مشتق: تابع(سور): $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$ د تابع مشتق(شین): $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$ د تابع مشتق هم تابع دع. مورږ دا د مشتق یا د میل تابع بللي.	

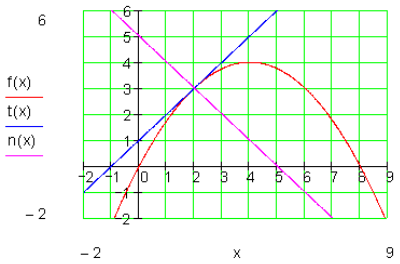
تمرینونه:

په لاندې مساواتو کې د f تابع مشتق او د مشتق تابع وښایئ

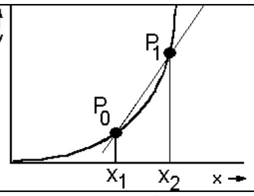
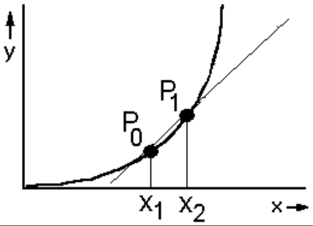
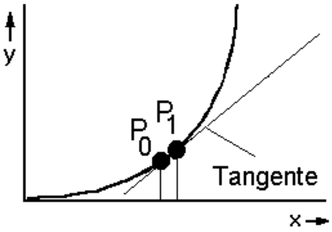
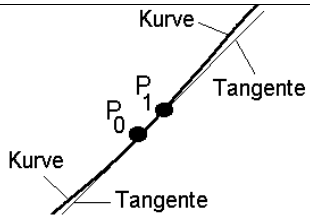
$a)\quad f(x) = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 1$ $\qquad b)\quad f(x) = x - \sqrt{x}$

$c)\quad f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{x^3}$ $\qquad d)\quad f(x) = 3x^2 + 0.4x - 5$

د تانجنت او عمود تعریفونه او خویونه



(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې يا مخاکخ ښيره يو منحني او يوه قاطع(غوڅی) په ټکو P_0 اوP_1 کې ښايي.	
اوس غواړو، چې ټکی P_0 د ټکي P_1په لور و خوځيږي. پام: ددې سره قاطع خپل ميل تغيروي	
بالاخره غواړو، چېP_1 ټکی وP_0 ټکي ته ناپای ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کيږي.	
که پوره وپيژندلی شو، چې د ټکو P_1 او P_0په شاو خوا غزوو يا لويوو : که د P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای نږدې شي، نو کتل کيږي، چې تانجنت په ټکي P_0 کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحني په P_0 ټکي کې.	

د دې خويونو غوره غوره والی يا پايله:
ومو ليدل، چې د تانجنت ميل پهP_0 ټکي کې په همدې ټکي کې د منحني ميل هم دی. له دې دا پايله لرو، چې که څوک غواړي د منحني ميل په P_0 ټکي کې پيدا کړو، بسيا کوی، چې د تانجنت جګوالی يا ميل په P_0 ټکي کې پيدا کړي.

فعاليتونه:
1- پورته شکلونه بيا سره پرتله کړئ. د ميل په هکله يې فکر وکړئ، چې کوم ميل زيات دی؟
2- تانجنت تعريف کړئ او په شکل کې يې وښاياست.
3- قاطع (سيکانت) تعريف کړئ او په ښېره کې يې وښاياست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې د تانجنت او عمود عمومي فرمول راباسو:

پیل: تانجنت دې د $f(x)$ گراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ گراف د په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود یا ولاړ غوڅ کړي.

د تانجنت مساوات: $t(x) = m_t \cdot x + b_t$:

د $m_t = f\,'(x_0)$ سره لیکو: $\qquad (1) \qquad t(x) = f\,'(x_0) \cdot x + b_t$

دا چې $P(x_0), f(x_0))$ تانجنت یو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f\,'(x_0) \cdot x + b_t = f(x_0)$$
$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f\,'(x_0) \cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لر:

$$t(x) = f\,'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f\,'(x_0) \cdot x_0 = f\,'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$$
$$= f\,'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال): د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود ځغلي.
د عمود میل:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f\,'(x_0)}$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{f\,'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

بیلگه:
د $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.
د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پیدا کړئ:
حل:په لاندې توگه د تابع مشتق نیسو او گراف یې(ښیره لاندې کښل شوې) کاږو:

نو لرو: $\qquad f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \;\Rightarrow\; f\,'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت میل **په ټکي** x_0 **کې د میل ارزښت** 3 **لري.**

$$f\,'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2 \cdot (-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \qquad ,P(2,f(2))$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ په ځاي کې لرو:

$$t(x)=f'(2)(x-2)+f(2)$$

$$f(2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot(2)^2=4-1=3 \qquad f'(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow t(x)=1(x-2)+3=x-2+3=\underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال يا عمود پيدا کونه:

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \;,\quad P(2|f(2))$$

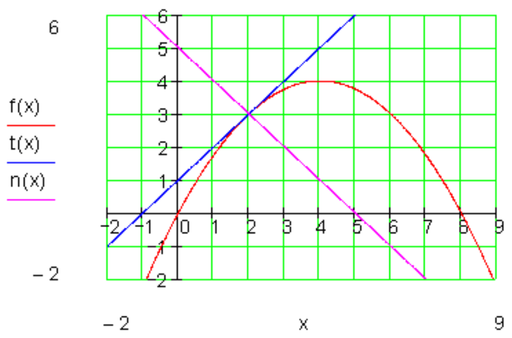
$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x)=\frac{1}{f'(2)}(x-2)+f(2)$$

$$f(2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot(2)^2=4-1=3 \qquad f'(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow n(x)=-\frac{1}{1}(x-2)+3=-x+2+3=\underline{\underline{-x+5}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت او ولاړ يا عمود عمومي مساوات

بيلګه: تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ لرو.

د تانجنت ميل:

د يوه تابع د ګراف ميل په ټکي $P(x_0 \mid f(x_0))$ کې همغه معنى لري، لکه په دې ټکي د تانجنت ميل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټيک په پام کې نيسو.

موږ $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ مربع تابع لرو

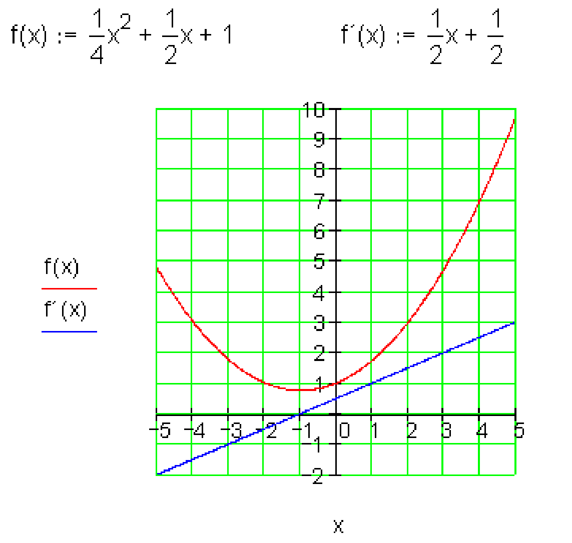
د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

ارزښتجدول:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f (x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f '(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلى شو چې د پورته مربع تابع ککرټکى دى: $S(-1,\ 0.75)$ د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د ميل تابع ارزښت دى: دا معنى لري، چې په ککرټکي(د رآس ټکى) کې د $f'(x)$ ميل صفر دى. تانجنت په S کې هم دا معنى لري، چې صفر دى، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛ يعني د $x-$ محور سره غبرګ ځغلي.

ګرافونه:



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

$f(x)=2x^3+7x^2+x-7$ تابع لرو:

تانجنت دې پیداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

$$f(x)=2x^3+7x^2+x-7 \Rightarrow f'(x)=6x^2+14x+1 \quad P(-2|\,f(2)) \Rightarrow x_0=-2$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x_0)\,f'(-2)=24-28+1=-3$$

$$f(x_0)=f(-2)=-16+28-2-7=3$$

$$\Rightarrow t(x)=-3(x+2)+3=-3x-6+3=\underline{\underline{-3x-3}}$$

پایله:

د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0\,,\,f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري.

د تانجنت مساوات	د عمود مساوات
$t(x)=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګېدنه}}(x-x_0)+f(x_0)$	$n(x)=-\dfrac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}}(x-x_0)+f(x_0)\ ;\ \ f'(x_0)\neq 0$

تمرینونه: د لاندې توابعو ګرافونه وکاږئ، د تانجنت او د عمود مساوات ولیکئ.

$$f(x)=x^3-6x^2+9x \qquad x_0=2$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{x}+3 \qquad x_0=1$$

$$f(x)=x^3-x^2-5x-2 \qquad x_0=-\frac{3}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق شمیرني قوانین

د مشتقشمیرنې شمیرقوانین، لک څنګه په اعدادو، ترادفونو او حدونو(پوله ارزښتونو) کې اجرا کیږي،په همدې ډول مشتقشمېرنه کې هم دا قوانین باوري دي.

وبه ښایو، چې د جمعې، ضرب او ... مشتقونه د مشتقونو جمع، ضرب او ... ده. (په وېش کې باید مخرج صفر نه وي).

فعالیت:

که $f(x)=x^2+x$ او $g(x)=x^3+2$ ولرو، $(f(x)+f(x))'$

د $(f(x)-g(x)),(f(x)\cdot g(x))'$ او $g(x)\neq 0,(\frac{f(x)}{g(x)})'$ د پیدا کولو په هکله فکر وکړئ.

قضیه (د جمعې قاعده):

که یو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعې څخه جوړ وي، نو مشتق یې هم د هر تابع د مشتق د جمعې څخه جوړ دی، یعنې:

$$f(x)=u(x)+v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x)=u'(x)+v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0)=u(x_0)+v(x_0)$$
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]+[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]}{\Delta x}+\frac{[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)}+\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x)=\underline{\underline{u'(x_0)+v'(x_0)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه:

که توابعو $f(x)=5x^2+3x$, $u(x)=5x^2$, $v(x)=3x$ ولرو شتق وشمرئ.

ښوونه:

$$f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

فعاليت: که چيرې f_1، f_2، ..... ، f_n توابع او k_1، k_2، .... ، k_n ثابت عددونه وي نو لرو(پې له ښووني):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+.....+k_n f_n(x)]'$$
$$=k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+.....+k_n f_n'(x)$$

قضيه (د ضرب قاعده): که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښايو:

$$(f(x)\cdot g(x))'=f(x)'\cdot g(x)\cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

د مناسب فورم- يا بڼه بدلون يعنې په صورت کې د $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ ورزياتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي يعنې د دواړو لورو ليميټ نيسو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه:

که $g(x)=x^2-1$ او $h(x)=\sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x)=g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ښوونه:

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x},\ f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د وېش قانون): f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښایو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښایو(ثبوت کړو).

لومړی لار یا طریقه یې په لاندې کې ښایو او دویمه لار دې ګران زده کوونکي وښایي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}\quad,\quad g(x)\neq 0$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زیات کړو، نو لرو:.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to 0}g(x)\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)\right]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعني لرو: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

بېلګه:

د $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ تابع (د $x^2 - 4 \neq 0$ سره) مشتق غواړو پيدا کړو.

حل: که چېرې $g(x) = x^2$ او $h(x) = x^2 - 4$

وضع شي نو لرو:

$$g'(x) = 2x$$
$$h'(x) = 2x$$

او د ويش قانون له مخي لرو:

$$f'(x) = \left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$= \frac{2x(x^2 - 4) - x^2.2x}{[x^2 - 4]^2}$$

$$= \frac{-8x}{[x^2 - 4]^2}$$

پوښتنې:

که $f(x) = 3x^2 + 5x - 8$ او $g(x) = 5x^3 - 3x + 4$ ولرو، نو :

- د توابعو د توابعو د جمعي مشتق، د ضرب مشتق د توابعو د وېش($f(x) \neq 0$) مشتق پيداکړئ، که شونی وي له مختلفو لارو.

د الجبري توابعو مشتق

الجبري او نورو توابعو پېژندونه(تعريفونه):

1- يو بنستيز تابع الجبري بلل کيږي، که د ترتيب قانون يې د مساواتو له لارې ورکړ شوی وي،په هغو کې چې په ترمونو کې د مساواتو د متحولو سره فقط الجبري

(c) ketabton.com: The Digital Library

عمليی(جمع،تفريق، ضرب، تقسيم(چې مخرج يې صفر نه وي)توانکونه او جذرنيونه(د توان-اوريښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي) کارول شوي وي.

2- ناالجبري توابع ترانسځندنت بلل کيږي، لکه اکسپوننشل-ولوګاريمی- او د زاويو توابع.

3- يو الجبري تابع راشنل بللکيږ ي، که د ترتيب قانون يې د يو مساوات سره ورکړ شوی وي، په کوم کې چې ناپای ډيرې راشنل د شمير عمليی ((جمع،تفريق، ضرب، تقسيم(چې مخرج يې صفر نه وي)توانکونه او جذرنيونه(د توان-اوريښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي)) کارول شوي وي.

فعاليت:

په څېر د $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... a_1 x + a_0$ يوه تابع د $f(x)$ _ که د $n \in N \;\wedge\; a_1 \in R$ سره ليکل شوې وي، څه بلل کيږي؟

په د ويش v او u د دوه توابعو تابع f د $v(x) = 3x + 6$ او $u(x)x^2 + 4x + 4$ _ لرو:

سره وليکئ $v(x) \neq 0$ د $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ څېر لکه

تابع مشتق ونيسئ. پسې د $v;u$ _ د تابع تعريف ساحه وښاياست او بيا د هرې يوې مشتقونو وېش په نښه کولو پسې د مشتقونو وېش(چې مخرج صفر نه وي)، د مشتق سره پرتله کړئ.

بيلګه:

د $f(x) = \sqrt{x}$ تابع ورکړ شوې په x_0 کې د تابع مشتق پيدا کړئ او د مشتق تابع په ګوته کړئ.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x + \sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x + \sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x + \sqrt{x_0}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو د x_0 په ځای کې $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د تابع $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق دی.

د تېرو درسونو پر بنسټ $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ د مشتق تابع ده.

د $q\in Q$; $f(x)=x^q$ ډوله توابعو مشتق:

د شميرنې له مخې لاندې لاس ته را وړنې لرو:

تابع	د مشتق تابع	
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$f'(x)=1\cdot x^0$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2\cdot x$	$f'(x)=2\cdot x^1$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3\cdot x^2$	$f'(x)=3\cdot x^2$
$f(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$f'(x)=-1.x^{-2}$
$f(x)=\sqrt{x}=x\dfrac{1}{2}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}$

که دا پورته پنځه مشتقونه يو د بل سره پرتله کړو، نو اټکل کيږي، چې لاندې جوړښتقانون باور لري:

د توان قانون (بې له بنونې)
(پونتڅ) قانون:
1- مختني اکسپوننت د متحولي x د مخ د فاکتور په څير ليکل کيږي.

2- نوی اکسپوننت همغه پخوانی اکسپوننت دی، چې په يو کم شوی.

سره $q\in Q$ **د** $f(x)=x^q \;\Rightarrow\; f'(x)=q\cdot x^{q-1}$

بيلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=\frac{1}{x^2}$ مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2} \quad \Rightarrow \; f'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

بیلګه:

د $f(x)=3x^4$ تابع مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=3x^4 \qquad c=3 \qquad u(x)=x^4 \Rightarrow u'(x)=4x^3$$
$$f'(x)=c\cdot u'(x)=3\cdot 4x^3=12x^3$$

بیلګه:

غواړو د $f(x)$ تابع مشتق د $x=2$ په ځای کې ونیسو:

$$f(x)=x^2+3$$
$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=4+\Delta x$$
$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$$
$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=2u+\Delta x$$
$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2u+\Delta x)=2u$$

بیلګه:

د تا بع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ مشتق د $x=2$ په ځای کې پیداکړئ.

ښوونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- -----------

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{1}{3(3+\Delta x)}$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{3(3+\Delta x)}\right)=-\frac{1}{9}$$

$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}$$

$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}=-\frac{1}{(u+1)^2}$$

بیلګه:

(توان(Potence) مشتق، چی طبیعي جګ عدد یا اکسپوننت لري:

موږ د $1, 2, 3,...$, $y(f(x)=x^n$ تابع لرو او غواړو مشتق یې پیداکړو:

ښوونه: موږ په لاندې توګه مخ ته ځو.

د بینوم جملې په بنسټ په هر x_0 ځای کې دا لاندې باورلري.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h}$$

$$=\frac{\binom{n}{0}x_0^n+\binom{n}{1}x_0^{n-1}h+\binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2+...+\binom{n}{n}h^n-x_0^n}{h}$$

$$=\frac{1}{h}\left(x_0^n+nx_0^{n-2}h+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h^2+...+h^n-x_0^n\right)$$

$$=nx_0^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h+...+h^{n-1}$$

د $h\to 0$ لپاره تابع $y=x^n$ د x_0 په هرځای کې، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري:

$$(dy/dx)_{x=x_0}=f'(x)=nx^{n-1}$$

ددې پورته بیلګې بل ډول ښوونه دې د پوښتنې په څېر وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرينونه: _ که يو پولينوم $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...a_1x+a_0$
د $a_1\in R \quad \wedge \quad n\in N$ سره ورکړ شوی وي، مشتق يې پيداکړئ.
- د توابع مشتق د توان قانون له مخې پيداکړئ.

$a)\ f(x)=x^5$ $\qquad b)\ f(x)=x^6$

$c)\ f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad d)\ f(x)=\dfrac{1}{x^5}$

$e)\ f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad f(x)=\sqrt[4]{x^3}$

$g)\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad h)\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

د زنځيري(مرکب) توابعو مشتق

تابع کيدی شي د v تابع سره وتړل شي، که د د باندني تابع(ځنځيرونې قاعده)، پيژند ورشو (دتعريف ساحه) $D(u)$ د دنني تابع د $W(v)$ سره ګډ توکي يا عناصر ولري.

ددې لپاره ليکو: $u^\circ v(x)=u(v(x))$، که د f تابع د $y=f(x)=u(z)$ سره او $Z=v(x)$ وي.

فعاليت:
_ په زنځيري تابع کې د $f(g(x))$ پيژند ورشو او همداسې د تابع ورشو په هکله خپل نظر ځرګند کړئ.
په ځاي کې څه دی او $x=3$ تابع ارزښت د $f(g(x))=(x^2+2x+1)^2$ _ وواياست، چې د د تابع ساحې کومې دي او په مشتق نيولو کې يې فکر وکړئ.
_ که يوه په خوښه زنځيري تابع ولرو، نو د تابع ورشو په ګوته کړئ او وهڅېږئ، چې مشتق يې پيدا کړئ.

اوس نو د $x=x_0$ ځای کې د $y=f(g(x))$ تړلي يا ځنځيري تابع مشتقوړوالی څيرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=f\left[g(x)\right]$$
$$\Rightarrow f'(x)= \quad f'(g) \quad . \quad g'(x)$$

دننني مشتق د باندنی مشتق(دادې ورپورته شي)
ددې لپاره نيسو چی:

1- د $g(x)$ دننني تابع د $x=x_0$ په ځای کې مشتقوړ ده. دانو بيا بايد د x_0 په يوه معلوم تعريف شوي چاپيريال کی متمادي(نه پريکيدونکی) وي.

موږ لرو : $g(x+h)->g(x_0)$ د $h->0$ لپاره.

همداسې $g(x_0+h)=g(x_0)+k$ داسې، چې $k->0$ د $h->0$ لپاره.

2- که د $y=f(z)$ دباندنی تابع په $z=z_0g(x_0)$ کې د مشتق قابليت ولري.

د $y=f(g(x))$ کمبنتويش کيدی شي په لاندې ډول ورکړ شي او بڼه(فورم) يې هم بدله شي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}=\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)}$$
$$=\frac{f(z_0+k)-f(z_0)}{k}.\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

که $h->0$ لاړه شي (همداسې $k->0$ خواته ځي) نو دا اړيکی مشتق ته ځي:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=\left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o}=\left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)}.\left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0} \quad ;........(*)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=\left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o}=\left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)}.\left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

که چيرې د ځای په ځای(فيکس) ځای $x=x_0$ لپار بيرته x نيسو، نو کيدی شي چې (*) فرمول په لاندې لنډ ډول ورکړشي او د $y=(z)\ ,\ z=g(x)$ لپاره باور ولري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(**)$$

په پام کې دې وي، چې $\frac{dy}{dx}$ د $z=g(x)$ په ځای کې باید ترتیب(تنظیم) شي.

دا (*) فرمول ځنځيري قاعده(لار،قانون) بلل کيږي او د پورته نيونو يا فرضيو سره باوري دی. دا په ساده ډول په ياد لرلی شو، ځکه چی ښی خوا د کيڼې خوا سره د فورمال dzزياتيدلو له لارې منځ ته راغلي.

د پورته ښوونې لاس ته راوړنه دا لاندې جمله ده:

زنځيري يا مرکبه قاعده

لرو : $f(z)=f(g(x))$ ، نود $z=g(x)$ تابع په x او د $y=f(z)$ تابع په $z=g(x)$ کې د مشتق قابليت لري يا مشتقوړ دی، نوتړلی ورکړ شوی د $y=f(g(x))$ تابع هم په x کې د مشتق قابليت لري او دا باوري کيږي.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{\frac{df}{dg}}{\frac{dx}{dg}}==f\ '(g(x)).g\ '(x)$$

لنډ: $(fog)'(x)=f(g(x))'$

بيلګه:

د $f(x)=(x^2+2)^2$ مشتق ونيسئ.

$$f(x)=\left(x^2+2\right)^2$$

بدلون tion: $z(x)=x^2+2 \quad f(z)=z^2\Rightarrow f'(z)=2z \quad z'(x)=2x$

$$f'(x)=f'(z)\cdot z'(x)=2z\cdot 2x=2\left(x^2+2\right)\cdot 2x=\underline{\underline{4x^3+8x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه:

د $y = \sin x^2$ تابع يوه په لاندې توګه ورکړ شوی ځنځيري تابع ده:

$$y = \sin z \quad , \quad z = x^2$$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق وړدي. له دې امله هر چيرته باور لري:

$$\frac{d \sin x^2}{dx} = \frac{d \sin z}{dz} \cdot \frac{dx^2}{dx} = \cos z \,.2x = 2x \,.\cos x^2$$

بيلګه:

د $y = \sin^2 x$ تابع په لاندې ډول تړلی ورکړ شوی.

$$y = z^2 \quad , z = \sin x$$

دلته هم دواړه توابع هرچيرته مشتقوړ دي. نو له دې امله هرچيرته باور لري:

$$\frac{d \sin^2 x}{dx} = \frac{dz^2}{dz} \cdot \frac{d \sin x}{dx} = 2z \,.\cos x = 2 \sin x \,.\cos x = \sin 2x$$

بيلګه:

د $f(x) = (x^5 + 4)^8$ تابع مشتق وشمېرئ!

حل: هرکله چې $g(x) = x^8$ او $h(x) = x^5 + 4$ وضع کوو نو لرو:

$$f(x) = g(h(x))$$

$$f'(x) = (g(h(x))' = g'(h(x)).h'(x)$$

$g'(x) = 8x^7$ $h'(x) = 5x^4$ دی، نو لرو:

$$f(x) = 8(h(x))^7 5x^4 = 40(x^5 + 4)^7.x^4$$

تمرينونه:

۱ - $h(x) = \dfrac{1}{(x^3 - 4x^2 + 1)^2}$

۲ - که چيرې $f(x) = (3 - 2x + x^2)^4$ وي، نو f' پيداکړئ.

د لاندې تابعو مشتقونه هم ونيسئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

1: $f(x) = (1-2x^3)^4$

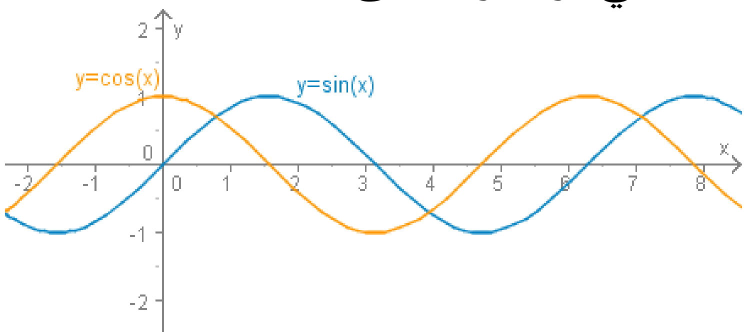
2: $f(x) = (2x^2+1)^{-2}$

3: $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2+x^2+x^3}}$

4: $h(z) = \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$

5: $f(t) = \sqrt[3]{3t+1}$

د مثلثاتي توابعو مشتق



$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \; I$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \; II$$

فعاليت:

د لاندې توابعو مشتقونه وشميرئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad :a$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad :b$$

$$f\,'(x) = \frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad c$$

موږ په لاندې کې پورتني درې حالتونه ښايو او د نورو درې حالتونوښوونه ګرانو زده کوونکو ته پرېږدو.

قضيه:

د ساين تابع مشتق غواړو وښايو چې $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$ دی:

ددې قضيې د ښوولو لپاره پورتني په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي.

د $y = f(x) = \sin x$ ساين تابع د هر x لپاره تعريف ده، نو د x_0 په خوښه ټاکلوځخه لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h}$$

$$= \frac{2}{h}\cos\frac{2x_0+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2} = \cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \ .$$

د ليميټ د برخې په پام کی لرلو سره لرو:

$$\lim_{h\to 0}\left(\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) = \cos x_0.$$

د ساين تابع په هر ځاي کی، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابليت لري يا مشتقوړ ده:

$$\left(\frac{d\sin x}{dx}\right)_{x=x_0} = f\,'(x_0) = \cos x_0\,,$$ (Xپه لينده کچ يا راديان)

قضيه:

همداسي ښوول کيږي چی کوساين تابع هم په هرځاي کی مشتقوړ ده، دلاندې مشتق سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت:

لرو: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\cos(x+h)-\cos x_0}{h}$

په پورته ننوتنه کې د دویم فرمول له مخې لرو:

$$= \frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}.\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \frac{-2\sin(x+\frac{h}{2}).\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= -[\sin(x+\frac{h}{2}).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}]$$

د لیمیټ او د لیمیټ د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي :

$$= -\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2}) \; . \; \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x\cdot 1 = -\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنډه توګه لیکو:

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

قضیه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

غواړو وښايو چې د تانجنت تابع f(x) = tanx مشتقوړ ده او د مشتق تابع يې

$f\ '(x)=\dfrac{d\tan x}{dx}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ ده.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)\\ &= \frac{\cos x\dfrac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos x.\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

$$=1+\tan^2 x\ ,x\neq(2k+1).\frac{\pi}{2}$$

فعاليت: ګرا زده کوونکي دې د $f(x)=x^2\sin x$ تابع مشتق پيدا کړي.

يادونه: $g(x)=x^2$ او $h(x)=\sin x$ دې ځا په ځای کړي.

بيلګه:

غواړو د $y=\cos\dfrac{\pi x}{180}$ تابع مشتق پيدا کړو.

حل:

ږدو : $f(x)=\cos x$ او $g(x)=\dfrac{\pi x}{180}$ ، نو y په لاندي توګه ليکلی شو:

$y=f(g(x))$. د زنځيري قاعدې په بنسټ لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$
$$= \cos'(g(x))\cdot(\frac{\pi}{180}\cdot x)'$$
$$= -\sin(g(x))\cdot\frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180}\cdot\sin\frac{\pi x}{180}$$

د لاندې توتبعو مشتق پیدا کړئ

$\tan^4 x$:b $\cos^2 2x$:a

$\sin(3x-1)$:d $\sec x\cdot\cot anx$:c

$\sec(\sec(x))$:f $\sin^2 x-\cos x$:e

حل a: د ځنځیري قاعدې په بنسټ او د توان یا طاقت یو فرمول په بنسټ لرو:

$$(\cos^2 2x)' = 2\cos(2x)\cdot\cos'(2x)$$
$$= 2\cos(2x)(-\sin(2x)).2$$
$$= -4\cos 2x\cdot\sin 2x$$

:b
$$(\tan^4 x)' = 4\tan^3 x\cdot(\tan x)'$$
$$= 4\tan^3 x\cdot\sec^2 x$$

:c
$$(\sec x.\cot x)' = (\sec x)'\cot x + (\cot x)'\sec x$$
$$= (\sec x.\tan x)\cot x + (-\csc^2 x)\sec x$$
$$= \sec x - \csc^2 x\cdot\sec x$$
$$= \sec x(1-\csc^2 x)$$

:d
$$[\sin(3x-1)]' = \cos(3x-1).(3x-1)'$$
$$= \cos(3x-1)\cdot 3 = 3\cos(3x-1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[\sin^2 x - \cos x]' = (\sin^2 x)' - (\cos x)' \qquad :e$$
$$= 2\sin x(\sin x)' - (-\sin x)$$
$$= 2\sin x \cdot \cos x + \sin x$$
$$= \sin x(2\cos x + 1)$$

بيلګې:

1- د f(x) = sinx تابع لومړي څلور مشتقونه دې پيدا شي.

---

f’(x) = cosx ; f’’(x) = -sinx ; f’’’(x) = -cosx ; $f^{(4)}(x)$ = -(-sinx) = sinx

2- د (x) = x.sinx تابع مشتق پيداکړئ.
د ضرب قانون څخه کار واخلئ.
f’(x) = 1.sinx+xcosx=sinx+ x.cosx

3- د $f(x) = \sin\frac{1}{x}; x \neq 0$ تابع مشتق پيداکولو له پاره د ځنځير قونو ن څخه نار اخلو.

پردو $z = \frac{1}{x^2}$ ***او u(z) = sinz لا س ته راځي:*** $f'(x) = -\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$

تمرينونه:

-- د لاندې توابعو لومړی مشتق و ټاکئ.

$a)\ f(x) = \sin 3x \qquad b)\ f(x)\sin x \cdot \cos x \qquad c)\ f(x) = \sin^2 x$

$d)\ f(x) = \tan x + 2\sin 2x \qquad e)\ f(x) = \sin x^2 \qquad f)\ f(x) = \sin\frac{x-1}{x+1}$

-- د $f(x) = \sin^n x (n \in IN)$ تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښاياست يا وټاکئ.

-- د تانجنت تابع لپاره د ساين او کوساين قانون په مرسته د مشتق قانون و ښاياست.

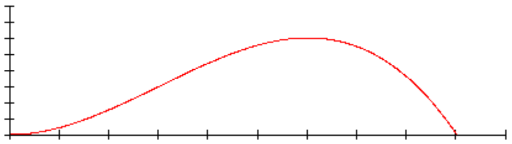
-- وښاياست چې د f(x) = tanx لپاره $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ هم باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- د ویش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پیداکړئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

--- ولې د ساین تابع او د کوساین تابع په خوبنه زیات مشتقوړ دي.

د مشتق استعمال په پیداښتي یا طبیعي علومو کې

په ریاضیاتو کې زیات وخت توابع راوړل کیږي، چې د یوې متحولې(اووښتونې) x په واک کې وي. په طبیعي پوهنو کې زیات وخت توابع څیړو، چې د وخت په واک کې وي. لکه په شکل کې د یوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کیږي)	

فعالیت:
ګران زده کوونکي دي د فزیک د درسونو له مخې د چټکتیا او بیړې تعریفونه ور کړي او د لار، وخت، چټکتیا او بیړې فرمولونه دي ولیکي.

بیلګه:
د یوه په برابرډوله بیره (تعجیل) غورځول شوي شي لپاره د پیل چټکتیا (لومړنی سرعت) $v_0=4\frac{m}{s}$ او $a=1{,}8\frac{m}{s^2}$ بیړې(تعجیل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

$$s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t$$

پورته ورکړشوي د v_0 ارزښت لپاره باور لري: $S(t) = 0{,}9t^2+4t$

(t په s (ثانیه)، s(t) په m (متر))

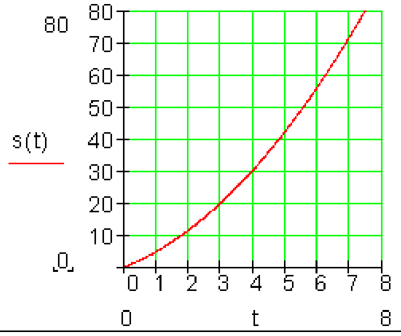
منځنی چټکتیا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ده)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لحظوی(سملاسي) چټکتیا په لاندې ډول ده:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=v$$

$$v=s'(t)=1{,}8t+4$$

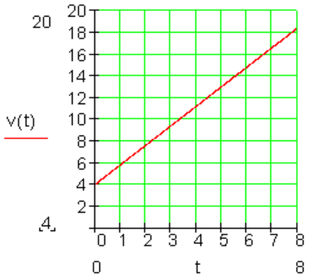


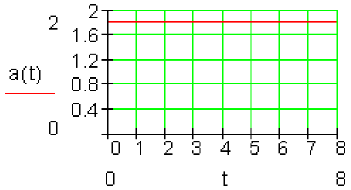
v-t - دیاګرام کې یوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتیا په برابر ډول زیاتیږي.

دا دلته ثابته جګیدنه $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ده او $a=1.8\frac{m}{s^2}$ بیړه(تعجیل) ده.

بیړې یا تعجیل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي:

$$v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=a$$





پام : د یوه برابرډوله په بیړه (تعجیلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

$$|\,s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t\,|\qquad v(t)=s'(t)=at+v_0\qquad a(t)=v'(t)=a$$

د یوې چټکتیا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره $v(t)=s'(t)$ لرو. د $s'(t)$ لپاره داسې $v(t)=s'(t)$ هم لیکو.

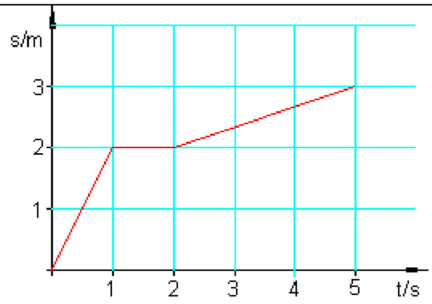
(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت:

1- د يوه خوزنده تن يا جسم د لار-وخت-دياګرام ورکړ شوی.

الف: دا خوزښت تشريح کړئ.

ب : دې پورې اړونده د چټکتيا – وخت – ديا ګرام وکاږئ.



2- يوه تيره د پيل چټکتيا $v_0 = 7\frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول کيږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\frac{m}{s^2}$ (را ټولې (؟؟کردې شوې)سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تيرې چټکتيا (سرعت) صفر دی؟

ب) خورا جګ د ميل جګوالوشميرئ

3- تابع د يوه خوزښت د لار-وخت-دياګرام ښايي.

الف)د ورځني ژوند څخه يوه بېلګه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ښايي.

د منحني تلنه د $t > 3$ لپاره فزيکي څه مفهوم لري؟

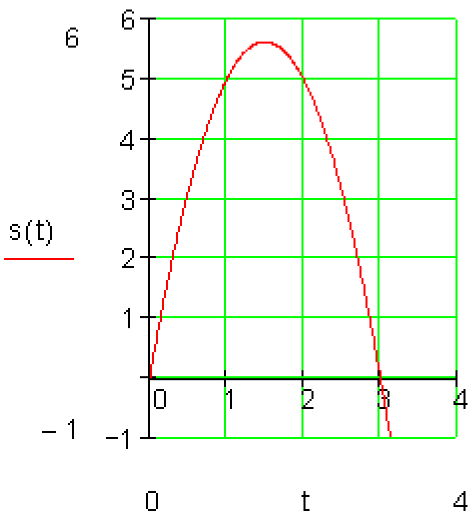
ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-دياګرام په لاندې ډول دی.

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

a او v_0 وټاکئ.

پ) د اړونده بيړې – وخت-دياګرم وکاږئ او دا تشريح کړئ.

يوه منفي چټکتيا (سرعت) څه معنا لري؟



4- يوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي ،چې د t وخت کې $s(t) = 5 \cdot t^2$ لار وهي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په وختونو $t=1,2,3$ کي لحظوي چټکتيا(سرعت) وښايی.
حل: لحضوي جټکتيا د سملاسي تغيرارزښت سره په دي لاندې معنا دی:

$$t=1:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(1+\Delta x)-s(1)}{\Delta x}=10+5\Delta x$$

د $\Delta x\to 0$ لپاره باور لري: $10+5\Delta x\to 10$

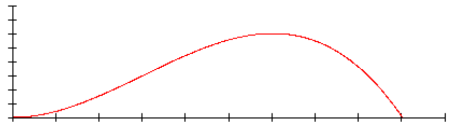
$$t=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(2+\Delta x)-s(2)}{\Delta x}=20+\Delta x\Rightarrow 1$$

د $\Delta x\to 0$ لپاره باور لري: $20+5\Delta x\to 20$

$$t=3:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(3+\Delta x)-s(3)}{\Delta x}=30+5\Delta x\Rightarrow 1$$

د $\Delta x\to 0$ لپاره باور لري $20+5\Delta x\to 30$

تمرين:
د $f(x)=-\frac{1}{288}x^3+\frac{1}{16}x^2\ ;\ x>0$
لاندې تابع ګراف او په ورنزدي توګه د فوټبال ميدان کې د توپ الوتني منحني ښايي، چې لاندې ښېره لري.



لاندې پوښتني ځواب کړئ:
الف:توپ کوم خورا جګ(ماکسيمال) جګوالی لري او د وهلېکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟
ب : د توپ وهلېکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لرې ببرته ځمکي ته راځي؟
پ : د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهنې ځای څخه 9 متره لرې او 2 متره جګ دی. ايا توپ له دې څخه جګ الوزي؟
ت : توپ د تور(ګول) لاين(د x محور) څخه په 2 متره جګوالي الوزي. له ګول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوی دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جګو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسي مشتق له لارې لاس ته راځي. د $f'(x)$ بیا مشتق نیونې سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دویم مشتقتابع په نامه یادېږي.

بیلګه:

$$f(x)=x^3+x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)3x^2+2x+1 \Rightarrow \underline{\underline{f''(x)=6x+2}}$$

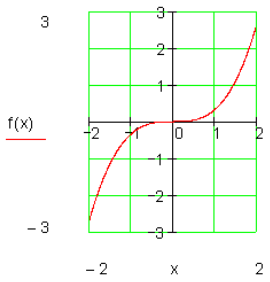
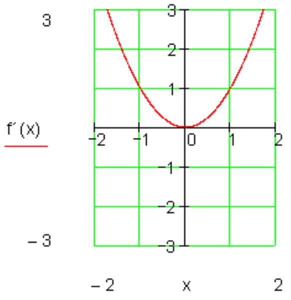
د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور.

$$f(x)=x^3+x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)3x^2+2x+1 \Rightarrow f''(x)=6x+2 \Rightarrow \underline{\underline{f'''(x)=6}}$$

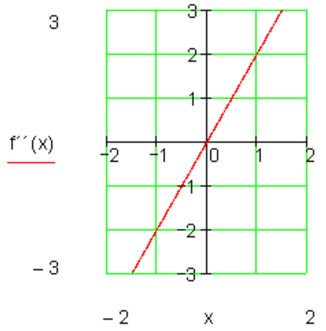
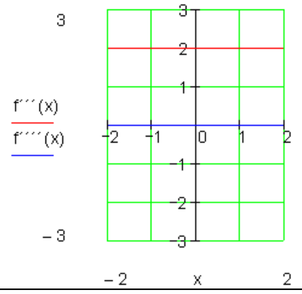
د $f(x)\frac{x^3}{3}$ تابع دې 4 واره مشتق ونیول شي:

$$f(x)=\frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{3}=x^2 \Rightarrow f''(x)=2x \Rightarrow f'''(x)=2 \Rightarrow f''''(x)=0$$

د تابع ګراف: د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

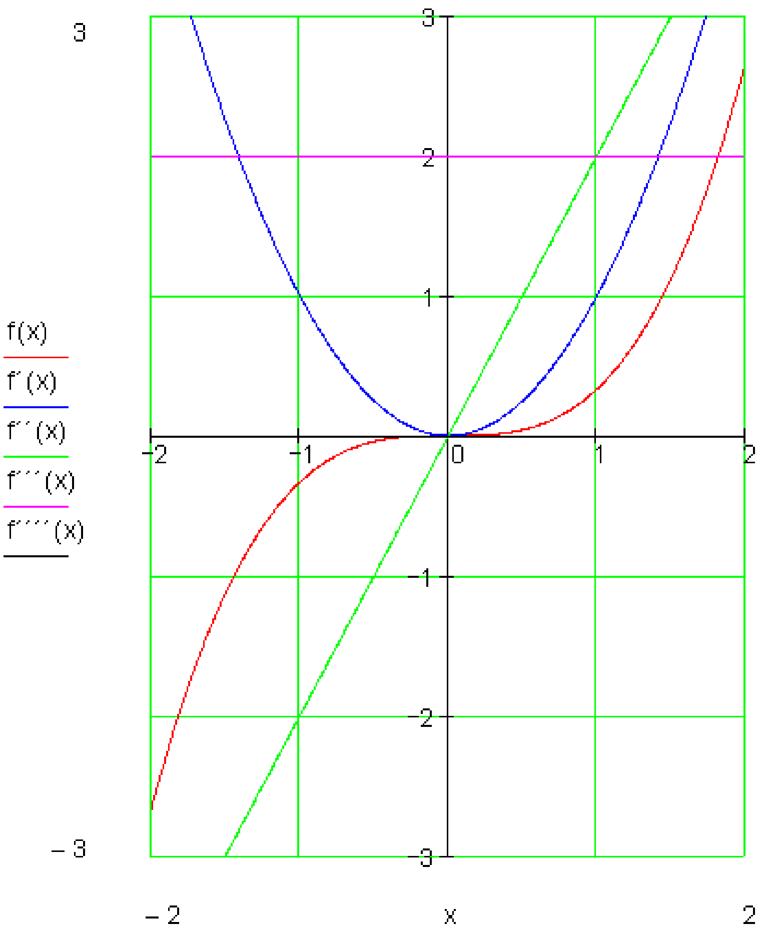
	$f(x)=\frac{x^3}{3}$
	$f(x)=\frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x)=x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

 	$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$ $f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$

پورته تولو توابعو ګراف په یوه پروت ولاړ سیستم کې

(c) ketabton.com: The Digital Library



بيلګې:

اول: د تابع $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$ مشت درپواره پيدا کړی

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$$
$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$$
$$f''(x) = 24x - 4$$
$$f'''(x) = 24$$

۳-۱ د جګو درجو مشتق

دويم: د تابع $f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$ **مشتق درپواره پيدا کړی**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{3}{4}x^3-12x^2+\frac{1}{4}x$$

$$f'(x)\frac{9}{4}x^2-24x+\frac{1}{4}$$

$$f''(x)=\frac{9}{2}x-24$$

$$f'''(x)=\frac{9}{2}$$

ټولګه:

د $f(x)$ لومړی مشتق د $f(x)$ مشتق تابع $f'(x)=\dfrac{df(x)}{dx}$ ده :

د $f(x)$ دويم مشتق د $f'(x)$ مشتق تابع $f''(x)=\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د $f(x)$ دريم مشتق د $f''(x)$ مشتق تابع $f'''(x)=\dfrac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: يو په خوښه کسرۍي تابع $f(x)$ په خوښه د مشتق قابليت لري.

تمرينونه:

د لاندې توابعو دريواره مشتق ونيسئ.

1- $f(x)=3x+4$

2- $f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3$

3- $f(x)=3x^3+2x^2+x+1$

4- $f(x)=(2x+1)^3$

5- $f(x)=x-x^4+3+x$

6- $f(x)=1-2x-3x-4x+x^4$

7- $f(x)=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$

8- $f(x)=4x^3-2x^2+5x-2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکپوننشل توابعو مشتق

د تابع مساواتو جوړښت

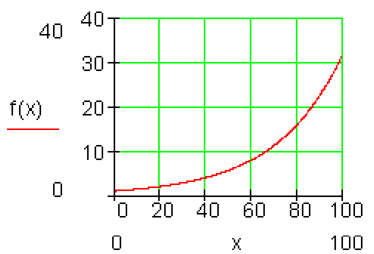
کولي باکتریا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوتي ویش (حجره وېش) له لارې زیاتیږي. و مساعدو شرایطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقیقو کې ځان تجزیه کوي. د غه عملیې لپاره یو ارزښت جدول :اړ، او ګراف یې کاږو. دلته د x اووښتوني (متغیره) په دقیقو د وخت لپاره ده.

د y متغیره د باکتریا ګانو د تعداد لپاره ده.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32

x = دقیقې

y = د باکتریا ګڼون یا تعداد



فعالیت: د دې لپراه تابع ولیکئ

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y=b^x, (b>0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'=b^x \ln b$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad , f(x)=b^x$$

حل:

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{b^x-b^{x_0}}{x-x_0}$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{b^{x-x_0}-1}{x-x_0} \quad , x-x_0=h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

له پورته لرو $\begin{cases} b^h - 1 = k \\ h = \log_b(1+k) \end{cases}$ او لا س ته تري راځي

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k\to 0} \frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k\to 0} \frac{1}{\frac{1}{k} \cdot \log_b(1+k)}$$

د لوګاريتم قانون څخه لرو: $n \cdot \log x = \log x^n$ او لاس ته راځي

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k\to 0} \frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b[\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}]} \quad , \lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}} = e$$

له پورته لاس ته راځي

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b e} \quad , \quad \log_b e = \frac{1}{\ln b}$$

$$= b^{x_0} \cdot \ln b \quad ; \quad x_0 \in IR \, ; b \in IR^{>0}$$

$$\Rightarrow f\,' : f\,'(x) = b^x \cdot \ln b \, ; D\,'(f) = IR \, ; b \in IR^{>0}$$

$$f\,'(x) = b^x \cdot \ln b$$

ضيه :

د $y = f(x) = e^x$ مشتق پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$y = f(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

موږ دا لرلي په پام کې نيسو: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} . e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

موږ د تل کوچنيکيدونکي Δx ارزښت لپاره ځيرو $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

Δx

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ موږ لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

زموږ د شمېرنې په بنسټ دا دا معنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که د x_0 په ځای x ځای په ځای کړو، نو لرو:

-- --------

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = e^x$ او $f'(x) = e^x$

اکسپوننشل فنکشن $y = f(x) = e^x$ تیک $y' = f'(x) = e^x$ مشتق لري

یعني د e^x تابع د مشتق څخه بېرته د e^x تابع لاس ته راځي.

بیلګه:

لرو : $f(x) = b^{3x^2} - 10;\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}$

د پورته تابع مشتق ونیسئ.

$$D'(f) = D(f) = IR \quad \Rightarrow D(f') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2-10} = g[h(x)]$$

$$g(z) = b^z \ \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b}; z \in IR$$

$$h(z) = 3x^2 - 10 \ \Rightarrow h'(x) = \underline{6x}; x \in IR$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$

$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \ \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$

$$= b^{3x^2-10} \cdot \ln b \cdot 6x;\ x \in IR$$

$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2}; D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرينونه:

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

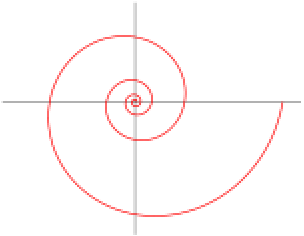
$a)\ f(x)=3\cdot e^{-2x+1}$ $b)\ f(x)=e^{x^2+2x-1}$ $c)\ f(x)=(x-1)\cdot e^x$

$d)\ f(x)=\sqrt{e^x}$ $e)\ f(x)=x^n\cdot e^e$ $f)\ f(x)=e^{kx}$

$g)\ f(x)=2^{\frac{1}{2x}}$ $h)\ f(x)=(\frac{1}{4})^{3x}$ $i)\ f(x)=x\cdot a^{\sqrt{x}}$

$k)\ f(x)=\sqrt{e^x+1}$ $l)\ f(x)=\frac{e^x}{1-e^x}$ $m)\ f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

د لوګاریتم مشتق



فعاليت:
- لوګاريتم تعريف
- اکسپوننت يا توان تعريف کړئ.
- د لوګاريتم او توان ترمنځ اړيکې وښاياست.

قضيه :
د لوګاريتم تابع مشتق:

(c) ketabton.com: The Digital Library

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b\neq 0, x>0$ سره، مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'(x)=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x.\ln b}$

ثبوت: دا چې تابع $y=f(x)=\log_b x$ یواځې د$x>0$ لپاره پیژند لري یا تعریف دئ. په هر ځاي کی چی$x>0$ وي، نودا لاندې باوري دی :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\log_b(x_0+h)-\log_b x_0}{h}=\frac{1}{h}\log_b\frac{x_0+h}{x_0}=\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}$$

د (لومړۍ برخې) له مخی دا لاس ته راځي:

$$\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right]^{\frac{1}{x_0}}\to e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\log_b e^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\log_b e$$

د لوګاریتم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پیژند سټ کی د مشتق قابلیت لري.

$f'(x)=\frac{1}{x}\log_b e$ همداسې $f'(x)=\frac{1}{x}.\frac{\ln e}{\ln b}$ داچې $\ln e = 1$ نو صدق کوي: $f'(x)=\frac{1}{x.\ln b}$. خه چې د ښوولو وو.

په ځانګړي ډول دا لاندې باور لري:

$$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$$

بیلګه:

د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ **مشتق وشمېرئ.**

ښوونه: په لاندې توګه مخ تخ ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\log\sqrt{x^3}=\log_{10}x^{3/2}=\frac{3}{2}\log_{10}x$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 10}$$

$$=0.6514\cdot\frac{1}{x};\ D(f')=IR^{>0}$$

بیلگه:

د $y=\ln\frac{x-2}{x+2}$ تابع مشتق پیداکړئ

حل:

موږ لیکلاي شو :

$$y=\ln\frac{x-2}{x+2}$$

$$=\ln(x-2)-\ln(x+2)$$

دا چې $(\ln(x-2))'=\frac{1}{x-2}$ او $(\ln(x+2))'=\frac{1}{x+2}$ دی، نو لرو:

$$y'=(\ln(x-2))'-(\ln(x+2))'$$

$$=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{4}{x^2-4}$$

بیلگه:

لرو: $f(x)=\log_2(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غواړو پیدا کړو: ۱.   مشتق $f'(x)$
مشتق د $x_0=16$ په ځاي کې
حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو: $f'(x) = 1/(x\cdot\ln 2)$
اوس د $x_0=16$ په ځاي کې مشتق ټاکو:
$f'(x_0)= 1/(16\cdot\ln 2)= 1/(16\cdot 0.69)= \underline{0.09}$

تمرینونه:

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ یا پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\ln\sqrt{x}$ $\qquad b)\ f(x)=\ln(x^2-4)$ $\qquad c)\ f(x)=\ln\frac{2}{x^3}$

$d)\ f(x)=\ln\frac{x+1}{x}$ $\qquad e)\ f(x)=x\cdot\log_2 x^2$ $\qquad f)\ f(x)=(x^4-1)\cdot\log$

$g)\ f(x)=\frac{\ln}{x+2}$ $\qquad h)\ f(x)=\frac{x^4}{\ln x}$

د یوې تابع مشتقوړوالی یا - قابلیت

موږ ولیدل، چې یوه تابع په هر ځاي کې تعریف نه ده، په هر ځاي کې حد نه لري او همداسې په هرځاي کې متمادي نه ده. په همدې توګه یوه تابع هر چیرته د مشتق قابلیت هم نه لري.
تابع $f(x) = |x|$ په 0 ځای کې تعریف نه ده:
د ټولو $x > 0$ له پاره باور لري $f(x) = x$

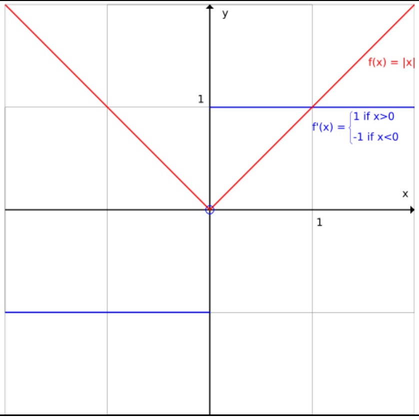
(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې سره $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0}=1$

د تولو $x<0$ لپاره د پورته په برعکس $f(x)=-x$ باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

دا چې کيڼ- او ښی اړخيز حد يو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راوړل شوي ځای کې مشتقوړ نه ده.



د تابع مشتق کېدنه په نورو تولو ځايونو کې تر اوسه تل ورکړ شوې.

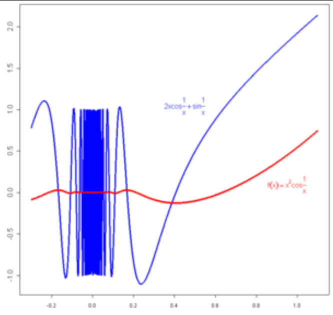
په صفر ځای کې سره له دې يو ښي اړخيز مستق ورکړ شوی، يعني لرو:

$$f'+(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=1$$

او يو کيڼ اړخيز مشتق هم:

$$f'-(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

که پورته گراف ته وگورو، نو وبه پوهيږو، چې يوه مشتقوړ تابع بايد گوډه نه وي يا په کوم ځای کې ماته نه وي يا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.



د يوه نه متمادي مشتقوړ تابع لپاره بېلگه:

يو تابع متمادي مشتقوړ بلل کيږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که يوه تابع هرچېرته مشتقوړ وي، بايد نه دی چې مشتق دې يې هم متمادي وي.

د بېلگې په توگه:

$$f(x)=\begin{cases}x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

تابع په هر ټکي کې حتي د $x=0$ سره مستقوړ دی. مشتق

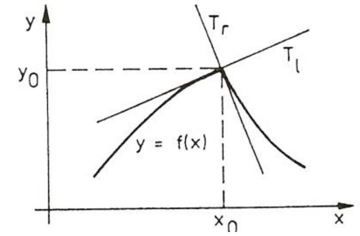
د لوگاريتم مشتق ۱۱۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x)=\begin{cases}2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

یې ددې په خلاف په 0 ځای کې متمادي نه دې
مشتق د ټاکلو نیونویا فرضیو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چې لیمیټ (پولی) ته تګ ممکن وي یعني چیرته چې د تفاضل ویش یو لیمیټ د $x\to 0$ لپاره ولري. P SEP P SEP
که کومه منحني چیرته راماته وي (څېره 4)، ګورو چې هلته تانجنت نه شته او همدارنګه جګیدل او هم د تفاضل ویش نه شته. پس د مشتق قابلیت د متمادیت په څیر د یوې تابع ځانګړې خوې دی.

په پورته څیره کی انځور شوې منحني د x_0 په ځاي کی یواځنی تانجنت هم ونه لري او له دې امله مشتق هم ونه لري، خو دلته یو کیڼ تانجنت T_1 یا کیڼ جګوالی لري اوپه دې ډول کیڼ مشتق لري او په همدې ډول یو ښی تنجت T_r او ښی جګوالی او په دي ډول ښی د تابع مشتق موجو د دی.



په یوه نامتمادي تابع کی د تانجنت یا مشتق پوښتنه بی معناده.
دا دلته انځور شوی پرابلم یا مسأله اوس د شمیرنې د ټیك فرمول لاندې راوړو.
ولیدل شو چی په یوه ځای x_0 کی چی تابع متمادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نیسو چی دا دې ښوول شوی وی. دا څرګنده ده چی هره متمادي تابع باید ضرور مشتقوړنه وي. د بیلګي په توګه که تابع زاویه یا کونج ولري.
دې ته اړتیا ده چی وښایو، چی یواځي متمادي توابع د مشتق قابلیت لري، دا بیا دا معنا لري چی هره تابع چې د مشتقوړ وي باید لږ تر لګه متمادي وي او په دې ډول مشتق متمادیت په بر کی لري یا خوندي لري، په دې معنا چی متمادیت د مشتقوړوالی لپاره اړیین یا ضروري شرطونه دي

-- ----------------------------

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله:
که د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي ده.
ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی حد شته دی.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

لیمیټ یوائی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د $x \to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې $f(x)-f(x_0)->0$ لاړ شي.
نو باور لري: $f(x)->f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.
دا د متمادیت پیژند دی.

دا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:
دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توګه ورکړ شوي دی:
د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یوائی په ځای (lokal) پورې اړ خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دی. لکه څنګه چی په متمادیت کی(لومړي څپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف:
د $y = (x)$ یوه تابع په واز اینتروال (a,b) کې، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کیږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) \;\; ; \;\; a<x<b$$

که داد $x = x_0 \in (a,b)$ په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره. دا په بند اینتروال $[a,b]$ کې مشتق وړ بلل کیږي، که دا سربېره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلګه ۲ ، ۶:
د توان تابع $y = x^n$, $n = 1 , 2 , 3,.....$ په هرځاي کی د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

د لوګاریتم مشتق ۱۱۴

-- ------------------

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^{n}}{dx}=nx^{n-1}$$

د ساين تابع $y=\sin x$ او کوساين تابع $y=\cos x$ په هرځاي کی مشتقوړده، د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dsinx}{dx}=cosx,\ \frac{dy}{dx}=\frac{dcosx}{dx}=-sinx$$

په يوه واز انتروال کی $y=f(x)$ مشتقوړ تابع مشتق بيرته $y'=f'(x)$ تابع ده ، نو په دې ډول يي د مشتق قابليت اود متماديت قابليت پوښتنه کيدی شي.

تعريف (پيژند) ۲. ۴:
په يو د $x=x_0$ چاپيريال کې د مشتق قابل تابع (رابيليدوړ بلواك) $y=f(x)$ په $x=x_0$ کې دوه واره د مشتق قابليت لري(رابيليدوړ دی)، که د هغي اشتقاق(رابيلیدنه) $y'=f'(x)$ هلته د مشتق قابليت لري(رابيليدوړ وي). سرې د $f'(x)$ مشتق د تابع(رابيليدنه د بلواك) $y=f(x)$ دويمه رابيليدنه بولي او ليکي:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0}=f''(x_0)=\left(\frac{df'(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

يو په يوه واز اينتروال کې مشتق کېدونکي تابع $y=f(x)$ هلته دوه واره مشتقوړ بلل کيږي، که د هغه مشتق $y'=f'(x)$ په دې اينتروال کې مشتق وړ وي.
ددې لپاره ليکل کيږي:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=\frac{df'(x)}{dx}$$

تمرين:
وښايئ چې ايا دا توابع $y=\cos x$; $y=x^{n}$; $y=c$ هر چيرته دوه واره مشتقوړ دي؟

د معکوس تابع مشتق

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیتونه:

د یوې تابع معکوس تابع تعریف کړئ.

د $f(x)=\frac{x^2+5x}{x^3-8}$ تابع د تعریفساحه وښایاست.

د پورته تابع د مشتق مشتق وشمیری.

اوس دې معکوسه تابع تر څیرنې لاندې ونیول شي . دلته دې ونیول شي،چې $y=f(x)$ په $x=x_0$ کې د $f(x)=0$ سره او په یوه د x_0 چاپیریال کې جګیدونکی دی $f'(x_0)>0$ او یا په کلکه لوېدونکی $f'(x_0<0$ او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعني $x=f^{-1}(y)$ ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې $x->x_0$ او $f(x)$ د متمادیت له امله هم $y->y_0$ او باورلري.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)}=\left(\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)}=\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}}=\frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}}$$

که د لاندې ټکي ځای $x=x_0$ لپاره ساده بیرته x ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د $y=f(x)$ لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

د لوگاریتم مشتق ۱۱۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته ورکړ شوو نیونوسره سړی بیرته یو د تفاضل ویش لاس ته راوړي چی د هغه سره د مروج ویش په څیر شمیرنه کیدی شي، لکه

$$(f^{-1})`(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f`(x)}$$

جمله ۲ . ۷: د معکوس تابع مشتق : که y = f(x) د x په یوه چاپیریال کی د $x = f^{-1}(y)$ سره معکوس او هملته د 0 =| (x) ’f سره مشتقوړ وي، نو معکوس تابع د y = f (x) سره مشتقوړ دی او باوري $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

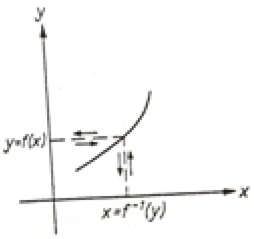
حل: کیدی چی د f تابع د مشتق څخه د f^{-1} معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له 0<- x او هم 0<-y او معکوس څخه، د y = f(x+ x)-f(x) سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})`(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f`(x)}$$

$f'(x) = \frac{dy}{dx}$ او $(f-1)'(y) = \frac{dx}{dy}$ سره.

بالاخره لرو:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$



تمرینونه: د $y = f(x) = x^n; n = 1,2,3,4......$ تابع لپاره که x ≥ 0 وټاکل شي او په دې $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}; y \geq 0$ توگه یې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

-- د $y = x^{\frac{m}{n}}, m,n \in N$ تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایمپلیځیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د f(x) تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیځیتExplicit ډول، که تابع متحوله د برابرون په یوه اړخ ځانله شوې وي:
د بیلګې په توګه $Y = 3x^2+7x$
د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې دی، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیځیت Implicit دول د بیلګې په توګه $Ex^2+7x+y=0$
فعالیت:
که $Ex^2+7x+y=0$ولرو، څنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟
قضیه:
یوه تابع په ایمپلیځیته بڼه $x^2+xy-y^2 = 1$ لرو، غواړو $\frac{dy}{dx}$ پیدا کړو.:
ښوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2+xy-y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+(1\cdot y+x\frac{dy}{dx})-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}(2y-x)$$

$$\frac{2x+y}{2y-x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{-x+2y} \quad \vee \quad \frac{2x+y}{2y-x}$$

ایمپلیځیټ مشتق د یوې تابع مشتقنیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیځیت یعنې د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیځیت یعنې د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي.
دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیځیت ډول ورکړ شوې وې، خو د دې مشتقنیول ستونځمن وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه :

د $f(x)=x^x$ تابع مشتق په ورسره بلدو مشتققوانينو نه شي نيول کيدی، ځکه چې په بنسټ او جګ الکسپوننت کې يې متحولې پرتې دي. د لوګاريتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منحه وړل کيدی شي:

$$\ln f(x)=x\ln x$$

اوس ايمپلځيت دا حل کوو، داسې چې دواړو لورو ته يې د x پسې مشتق نيسو:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln f(x))}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{\mathrm{d}x}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځيرقانون له لارې صورت نيسي:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}y}f'(x)=\frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{\mathrm{d}x}$$

دلته $y=f(x)$. دی. د لوګاريتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y}f'(x)=\ln x+x\frac{1}{x}$$

که په $f'(x)$ پسې حل شي او د y له پاره بېرته $f(x)=x^x$ ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x)=y\,(\ln x+1)=x^x\,(\ln x+1)$$

تمرينونه:

- د r وړانګي سره د د ايرې مساوات $x^2+y^2=r^2$ سره. دايمپليخيټ مشتق له لارې يې مشتق ونيسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- د $E : x^2 + 3y^2 = 7$ سره ورګړ شوي الیپسې مشتق دي ونیول شي.

د بنسټیزو مشتقونو جدول

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	x تول عدد او $x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \quad x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \; a \; reell$
7	a^x	$a^x \ln \; a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \; a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \; a \neq 1, \; x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin \; x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$
14	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$	$x \neq k\pi,\ k\ \ k \in z\ (Z)$

د پورته جدول په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوبنه د هرې شننيزې يا سپړنيزېي(تحليلي) وييني يا افادي مشتق په شننيزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم باید سږی همغه نیونی په نظر کي ونیسي.

د فصل تولګه

کمبنتویش Differenzenquotient (د سیکانت جګیدنه) یا منځنی تغیر ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(fx_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق Differetialquotient (د تانجنت چګوالی یا لحضوي تغیر ارزښت)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتي قانون

$$f(x) = c \cdot u(x) mit\ c = constant$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

د جمعي قانون

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v(x)$$

$$\boxed{f' = u' + v'}$$

د ضرب قانو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=u(x)\cdot v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$
$$\boxed{f'=u'\cdot v+u\cdot v'}$$

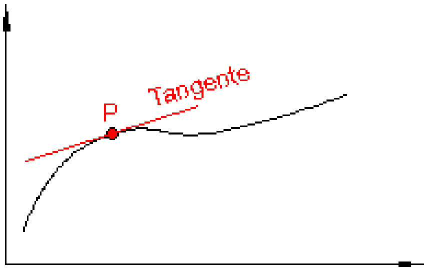
د وېش قانون

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$$
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)}{[v(x)]^2}$$
$$\boxed{f=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}}$$

د ځنځير قانون

$$f(x)=f[z(x)]$$
$$\Rightarrow f'(x)=f'(z)\quad\cdot\quad z'(x)$$

(تعریف): د یوه تابع ګراف میل (جګوالی) په یوه ټکي P کې په همغه ټکي کې د تانجنت د میل یا جګوالي ګراف سره برابر دی



د کمبنت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient

د یوې کربنې جګېدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکېدی شي:

کربنه $y=f(x) = mx+a$ لرو

د دې کربنې د جګېدنې فرمول په لاندې ډول دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ځپرکي تمرینونه:

(۱) کمښتویش (د تفاضل ویش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a) P(3,2) , Q(5,4) b) P(2,4) , Q(3,1)

(۲) د $x = x_0$ په ځاي کې د f تابع د تانجنت جګوالی وټاکئ.

$a)\ f(x) = x^2\ ,\ x_0 = 2$ $b)\ f(x) = 0.5x^2\ ,\ x_0 = 3$

(۳) د کمښتویش(د تفاضل ویش) او مشتق لاندې څه پوهیږو او د دوي ترړنځ فوپیر څه دی؟

(٤) د یوه تابع د سکانت( ) لاندې څه پوهیږو او د تانجنت جګېدو لاندې څه پوهیږو؟ او دوي ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي؟

(٥) د تابع مشتق د توان قانون له مخې پیداکړئ.

$a)\ f(x) = x^5$ $b)\ f(x) = x^6$

$c)\ f(x) = \frac{1}{x^2}$ $d)\ f(x) = \frac{1}{x^5}$

$e)\ f(x) = \sqrt{x}$ $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

$g)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $h)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(٦) د تابع مشتق د ثابت د قانون له مخې پيداکړئ.

$a)\ f(x)=0.2x^5-3$ $b)\ f(x)2x^4+1$

$c)\ f(x)=\dfrac{4}{x^2}$ $d)\ f(x)=\dfrac{3}{x^3}+2$

$e)\ f(x)=6\sqrt{x}$ $f)\ f(x)\dfrac{8}{\sqrt{x}}-5$

(٧) د تابع د ګراف په مرسته وښايئ، چې ټول g(x) + c ترمونه همغه مشتق لري.

ياودونه: پابت عدد که هرکوم ارزښت ونيسي.

(٨) وښايئ، چې د a.g(x) د مشتق سره د a ضريب (ځله وونی) ساتلی پاتې کيږي.

(٩) د f تابع مشتق د جمعي قانون سره وښايئ

$a)\ f(x)=4x^4-3x^3+x^2-x-1$ $b)\ f(x)=x-\sqrt{x}$

$c)\ f(x)=\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{x^3}$ $d)\ f(x)=3x^2+0.4x-5$

(١٠)د f تابع مشتق د ضرب قانون سره وټاکئ.

$a)\ f(x)=x^3(x^2-2x+1)$ $b)\ f(x)=(2x^2+1)(x-1)$

$c)\ f(x)=(x^2-5)(2x^3+x^2+x)$ $d)\ f(x)=(4x^2-x+4)(3x+2)$

(١١) د f تابع مشتق د ويش قانون له مخې وټاکئ.

$a)\ f(x)=\dfrac{x^3-1}{4-x^2}$ $b)\ f(x)=\dfrac{2x^2+x+3}{x+1}$

$c)\ f(x)=\dfrac{4-x-x^3}{2x^2+3}$ $d)\ f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}$

(١٢) د وېش قانون له مخې په څټ ارزښت(پرعکس ارزښت) وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۱۲ الف) د لاندې تابع مشتق وشمېرئ.

$$f(x)=\frac{1}{g(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{-g'(x)}{g(x)\cdot g(x)}$$

د $g(x)\neq 0$ سره

(۱۳) د f تابع ارزښت د زنځير قانون له مخې وټاکئ.

$a)\ f(x)=(4x^4-x)^2$ $\quad b)\ f(x)=(3x^2+4x-5)^2$

$c)\ f(x)=(2x-7)^3$ $\quad d)\ f(x)=(5-3x^3)^4$

(۱٤) د لاندې توابعو مشتق وتاکئ.

$a)\ f(x)=\frac{1}{(2x^2+x)^3}$ $\quad b)\ f(x)=\frac{1}{(x-5)^4}$

$c)\ f(x)=(1+\sqrt{x})^2$ $\quad d)\ f(x)=\sqrt{1-x^3}$

(۱٥) د لاندې توابعو درې واره مشتق ونيسئ.

$a)\ f(x)=x^3-2x^2+1$ $\quad b)\ f(x)2x^4+3x^3-x^2+x-5$

$c)\ f(x)\frac{3x-4}{x}$ $\quad d)\ f(x)=\frac{x^2-1}{2-x}$

(۱٦) د يو n-م درجې تابع بايد څو واره مشتق ونيول شي چې يوه ثابته ترې لاس ته راشي.

(۱۷) د لاندې توابعو لومړی مشتق و ټاکئ.

$a)\ f(x)=\sin 3x$ $\quad b)\ f(x)\sin x\cdot\cos x$ $\quad c)\ f(x)=\sin^2 x$

$d)\ f(x)=\tan x+2\sin 2x$ $\quad e)\ f(x)=\sin x^2$ $\quad f)\ f(x)=\sin\frac{x-1}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۱۸) د $f(x)=\sin^n x (n\in IN)$ تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښایاست یا وټاکئ.

(۱۹) د تانجنت تابع لپاره د ساین او کوساین قانون په مرسته د مشتق قانون و ښایاست.

(۲۰) وښایاست چې د f(x) = tanx لپاره $f'(x)=1+\tan^2(x)$ هم باور لري.

(۲۱) د ویش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پیداکړئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

(۲۲) ولې د ساین تابع او د کوساین تابع په خوښه زیات مشتقوړ دي.

(۲۳) د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

$a)\ f(x)=3\cdot e^{-2x+1}$ $b)\ f(x)=e^{x^2+2x-1}$ $c)\ f(x)=(x-1)\cdot e^x$

$d)\ f(x)=\sqrt{e^x}$ $e)\ f(x)=x^n\cdot e^e$ $f)\ f(x)=e^{kx}$

$g)\ f(x)=2^{\frac{1}{2x}}$ $h)\ f(x)=(\frac{1}{4})^{3x}$ $i)\ f(x)=x\cdot a^{\sqrt{x}}$

$k)\ f(x)=\sqrt{e^x+1}$ $l)\ f(x)=\frac{e^x}{1-e^x}$ $m)\ f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(۲٤)د $f(x)=(x^2+2)\cdot \lg x \quad (x>0).$ مشتق دې پیدا شي.

مشتق يې وټاکئ یا پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\ln\sqrt{x}$ $b)\ f(x)=\ln(x^2-4)$ $c)\ f(x)=\ln\frac{2}{x^3}$

$d)\ f(x)=\ln\frac{x+1}{x}$ $e)\ f(x)=x\cdot\log_2 x^2$ $f)\ f(x)=(x^4-1)\cdot\log$

$g)\ f(x)=\frac{\ln}{x+2}$ $h)\ f(x)=\frac{x^4}{\ln x}$

(۳۵) د لاندې توابعو لپاره خورا لویه تعریف ورشو(ساحه) ورکړئ او لومړی مشتق يې وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تعریف ستڼ(ډېرى) هغه ورشو(ساحه) ورکړئ، په کومه کې چې توابع مشتقوړ دي.

$a)\ f(x)=\sqrt{x+3}$ $\qquad b)\ f(x)=\sqrt{(x-2)(x-4)}$

$c)\ f(x)=x\sqrt{x}$ $\qquad d)\ f(x)=\sqrt{x^2+2}$

(٣٦) ولې باید د ټیک شمېرنې لپاره لوګاریتمي توابعو ته همداسې سوچ وشي، لکه رېښنه توابعو ته ؟

(٣٧) ٩٠ –مه پوښتنه د لوګاریتمي توابعو لپاره ځواب کړئ.

$a)\ f(x)=\ln(x^4-1)$ $\qquad b)\ f(x)=\ln(2x+4)$

(٣٨) – د لاندې توابعو لومړى مشتق پیداکړئ.

$a)\ f(x)=\frac{2}{5}x^{10}-\frac{1}{5}x^5$ $\qquad b)\ f(x)=3x^4-4x^3+11x^2-7x+8$

$c)\ f(x)=5x^8-3x^6+\frac{10}{x^3}-\frac{8}{x^7}$ $\qquad d)\ f(x)(2x-5)(x^2+11x-3)$

$e)\ f(x)\cos x-2x\sin x$ $\qquad f)\ f(x)=\sin^3 x$

$g)\ f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$ $\qquad h)\ f(x)=(x^2-2x+2)\cdot e^x$

$i)\ f(x)=\frac{3e^x+1}{2e^x-1}$ $\qquad j)\ f(x)=\frac{2e^x(x^2-3)}{x}$

$k)\ f(x)=\frac{1}{x^2}\ln x^2$ $\qquad l)\ f(x)=\frac{x\cdot\ln x}{1-x}$

$m)\ f(x)=\frac{\sin x}{\ln x}$ $\qquad n)\ f(x)=3x^2\cdot\lg x$

$o)\ f(x)=\ln(\sin)\ x$ $\qquad p)\ f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}$

$q)\ f(x)=\sqrt[n]{ax+b}$ $\qquad r)\ f(x)=(x^2+3)e^{-2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۳۹) - لومړی مشتق وټاکئ

$a)\quad f(x)=\sin^{n}$ $\qquad$ $b)\quad f(x)=(\ln x)^{n}$

$c)\quad f(x)=s+\dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $d)\quad f(x)=(1+\dfrac{1}{x})^{n}$

(٤٠)– د هرې تابع لومړي درې مشتقونه وټاکئ

$a)\quad f(x)=e^{x^{2}}$ $\qquad$ $b)\quad f(x)=\sin x\cdot\cos x$

$c)\quad f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $d)\quad f(x)=x^{2}\cdot e^{x}$

(٤١)– په کوم تابع کې لومړی مشتق f د f سره برابر دی.

(٤٢)–

الف: د کو fتابع لپاره $f'(x)=2f(x)$ دی؟

ب: د کو fتابع لپاره $f'(x)=-f(x)$ دی؟

(٤٣)- د f(x)=sinx څوم مشتق د f سره سر خوري یا برابر دی؟

(٤٤)– د لاندې توابعو لپاره -م مشتق ته وده ورکړئ.

$a)\quad f(x)=e^{ax}$ $\qquad$ $b)\quad f(x)=\ln(x+1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رول قضیه (Theorem of Rolle)

که د f یوه تابع په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي او k د a او b ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عدد c د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ شته، داسې چې $f(c)=k$ دی.

فعالیت:

_ که f تابع په یوه بند اینتروال $[1,3]$ کې ثابته وي، دا به د یوې تابع لپاره څه معنا ولري، چې تابع څنګه ځغلي. ایا دا تابع به جګ ټکي یا ټیټ ټکي ولري او که څنګه؟ دا روښانه کړئ او د انتروال په خوښه درې منځ ټکو کې ارزښتونه یو له بل سره پرتله کړئ.

_ وښایاست، چې د $f(x)=-x$ تابع په $[-1,1]$ انترول کې جګ او ټیټ ټکي چیرته لري او د یو او منفي یو تر منځ د درې x ارزښتونو لپاره په ګراف د f ارزښتونه وښایاست او وښایاست، چې یو له بل توپیر لري او که نه؟

_ د رسم له لارې وښایاست، چې x^2 کوم جګ یا ټیټ ټکی لري او که څنګه او که لري یې چیرته؟

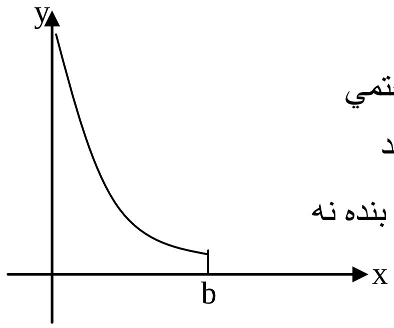
دوایرشتراس قضیه Theorem of Weierstrass

که د f یوه تابع په بند اینتراوال $[a,b]$ کې متمادي وي، نو f په دېاینتراوال کی لږ تر لږه یو جګ ارزښت(اعظمي قیمت) او یو ټیټ ارزښت(اصغري قیمت) نیسی

دلته شننیز یا تحلیلي ځواب نه ورکول کیږي، دا وینا د لیدلو له مخې معقوله برېښي.

کیدی شي چې یو همغږیز (monoton مونوتون یا جګټیټ) ارزښت د اینتروال په غاړه هم پروت وي.

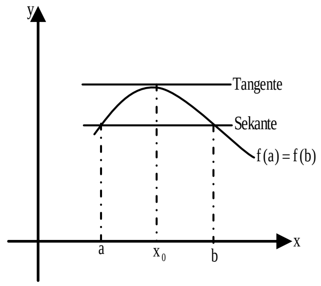
د اینتروال محدودوالی (بندوالی) بی قید او شرطه حتمي دی. د بیلګي په توګه د $y=f(x)=\frac{1}{x}$ تابع په نیم بند اینتروال $(0,b]$ کې متمادي ده، مګر پورته لور ته بنده نه ده، چې په دې توګه خورا جګ ټکی نه لري



(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق منځ ارزښت قضیې

د تانجنت او قاطع ترمنځ او په همدې ډول د مشتق – اوتفاضل ویش ترمنځ داسې نږدې اړیکې شتون لري، هغه چې د انالیوزې په منځ ارزښت قضیو کې تشریح کیږي.
د تابع او انحرافي ارزښتونوخویونو څخه لومړی پسی تړلې لاندې د رول قضیه لاس ته راځي

د رول(Rolle) قضیه: یوه د f تابع دې په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز ایتروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه یوځاي $c \in (a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.	

حل:

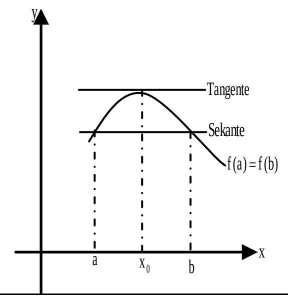
1. که f ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$
2. که f ثابت نه وي، نو د وایرشتراس د قضی له مخی لږ تر لږه د تابع یوخورا لوي او یوخورا کوچنی ارزښت موجود دی. دا ارزښتونه توپیر لري، ځکه چی f ثابت نه دی. نو له دی کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د $f(a)=f(b)$ سره نامساوي دی . په دې اساس د اینتروال په دننه کی یو مونوتون (جګټیټ) ځای x_0 موجود دی. د مشتقوړ توابعو مونوتوني (جګټیټ ارزښت) شتون د اړیین یا ضروري شرطونوقضي له مخی لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$

تر اوسه مو وښوول، چی د لازمو شرایطو لاندې یوې افقي قاطع ته یو افقي تانجنت هم شته دی.
دا هندسي پرابلم کیدی شي چی عمومي شي.
پوښتنه رامنځ ته کیږي، چی ایا یوې مایئلی قاطع ته په همغه ډول تانجنت د همغه میل (جګوالي) سره جوړیدلی شي؟
ځواب یی لاندې قضیه راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

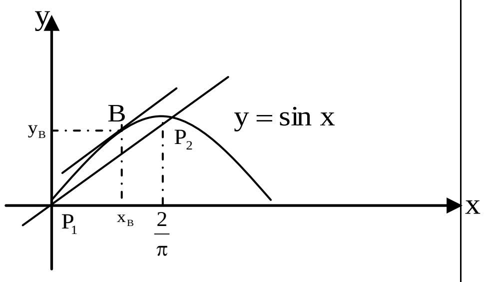
د مشتق منځ ارزښت (وسطي قیمت) قضیه:
که $y=(x)$ تابع په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي او په واز اینتروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته یوځای $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې لرو:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$



حل: دا پرابلم په یوه مرستندوی تابع داسی تعریفیږي، چی د رول قضیه وکارول شي. د دې لپاره د قاطع مساوات رامنځ ته کوو:
$$y=g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$
د مرستندوې تابع په څیر د مشتق تابع جوړیږي:
$$h:\ h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$
نو باور لري: $h(a)=h(b)=0$ برسیره پر دې h په (a,b) کې د مشتق وړوالی لري او په $[a,b]$ کې متمادي دی. له دې سره د رول د قضیې وړاند نیونه(فرضیه) ورکړ شوې، دا په دې معنا چې یو ځای $x\in(a,b)$ شته دی د $h'(x)=0$ سره، چې له هغې لرو:
$$h'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,\ \text{یعني}\ f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بیلګې نوره هم روښانه کیږي.

بیلګه:
د $f(x)=\sin x$ یوه تابع دې داسې ورکړشوي وي،چې په یوه ټکي $B(X_B,Y_B)$ کې تانجنت د منحني مماس وي، هغه چه په $P_1(0,0)$ او $P_2(\frac{\pi}{2},1)$ ټکو کی همغه میل یاجګوالی لري لکه قاطع.



(c) ketabton.com: The Digital Library

ځواب: د قاطع (غوڅې) میل یاجګوالی: $\frac{2}{\pi} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = m$

د منحني میل د $B(x_B : y_B)$ په ټکی کې $f'(x_B) = \cos x_B = \frac{2}{\pi}$

له دې څخه لاس ته راځي: $x_B = \arccos\frac{2}{\pi} = 0{,}88$ او $f(x_B) = f(0{,}88) = 0{,}77$

لمس ټکی: $B(0{,}88 : 0{,}77)$

د تانجنت مساوات: $y = \frac{2}{\pi}(x - 0{,}88) + 0{,}77$

د منځ قضی د عمومیت څخه لاس ته راځي:

پراخه شوې د منځ ارزښت قضیه:
که $u = f(x)$ او $v = g(f)$ په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال (a,b) کې مشتقوړاو $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځای $x_0 \in (a,b)$ وجودلري چی لاس ته ترې راځي:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: د $g'(x) \neq 0$ له امله g معکوس کېدونکی ده او $v = g(x)$ مساوات د x په لور معکوس کیدنه ورکوي، یعنې: $x = g^{-1}(v)$

که د f په تابع کی هم نوې متحوله ځاي پر ځاي شي، نو یوه زنځیري تابع لاس ته ترې راځي:

$$u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

د زنځیري قاعدې له مخې یی دا مشتق لاس ته راځي:

که په $u = h(x)$ تابع د $v_1 = g(a)$ او $v_2 = g(b)$

سره د وسطي قیمت قضیه استعمال شي، نو د $v_0 \in (v_1; v_2)$ ځای په لاندې ډول موجود دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{h(v_2)-h(v_1)}{v_2-v_1}=h'(v_0)$$

له دې ځخه د $h(v)=f(x),v=g(x)$ او $x_0=g^{-1}(v_0)$ سره لاس ته راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

تمرينونه:

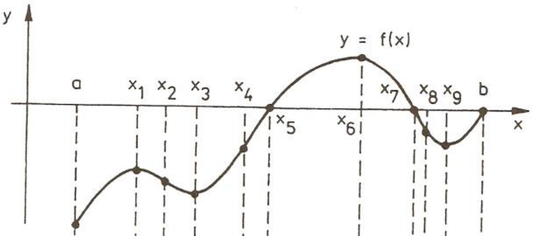
لاندې توابع دوه صفرځايونه لري. هغه بحراني ارزښتونه پيدا کړئ، چې د دواړو صفرځايونو تر منځ پراته وي.

$a)\ f(x)=x^4-5x^3+7x-5x+6$

$b)\ f(x)=x^4+x^3+2x^2+2x$

همغږيزې توابع(Monotony (يوناني: يوغږيز، برابرډوله)

جګېدونکې(متزايد)، ټيټېدونکې(متناقص) توابع(جګ-ټيټېدونکې توابع)



فعاليتونه

- په پورته ځېره کې ټول هغه ځايونه وښاياست، چې هلته تابع جګېږي.
- په پورته ځېره کې ټول ځايونه وښاياست، چې هلته تابع ټيټېږي.
- په پورته ځېره کې ټول هغه ځايونه په نخښه کړئ، چې هلته د تانجنت ميل افقي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

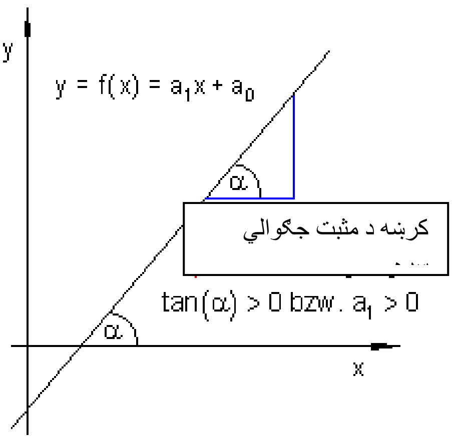
که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره د f یوه تابع په یوه اینتروال کې
$f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$ وي، نو تابع په دې اینتروال کې مونوتون جګېدونکې
(- ټیټیدونکې) بلل کیږي،که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري،نو دا
$f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ کره یا په زغرده همغږیزجګیدونکې (همغږیز
ټیټیدونکې) بلل کیږي.
لاندې قواعد، چې له همغږیزوالي څخه په لاس راځي، د همغږیزوالي حالت لپاره ګټور
دي.
د f یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې همغږیزجګیدونکې ده، که د
خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

د f یو تابع ټیک هلته په D کې همغږیزټیټېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره،
چې په D کې پراته دي، باور ولري:

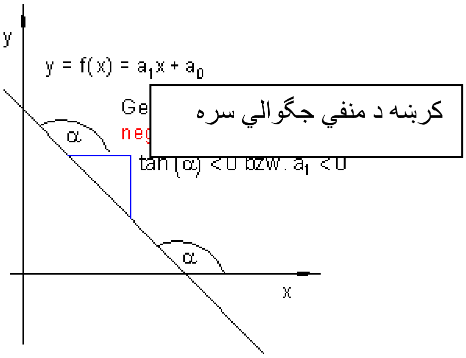
$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

یوغږیزوالی (یونواخت والی) Monotony جګټیټوالی، د جګټیټوالی جملې
دا $f(x) = a_1 x + a_0$ کرښیز(خطي) تابع



خورا ساده تابع ده، چې انحنا نه لري. ددې
لپاره مسئول یې ثابته جګېدنه یا ثابت میل
ی، $a_1 = \tan(\alpha)$ چېرته چې α د کرښې او
مثبت لوریز د x – محور ترمنځ
زاویه(کونج) ده.
په مخامخ شکل کې: کرښه د مثبت میل سره
$a_1 > 0 \Leftrightarrow \tan\alpha > 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دپورته داسې دی: $tan\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$

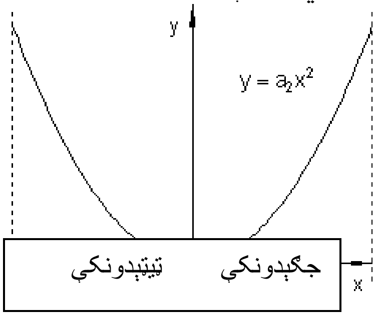
که $0 < \alpha < 90^\circ$ یا $0 < a_1 < \infty$ وي، دا په دې مانا چې $\alpha > 0 \vee a_1 > 0$ همداسې($\Leftrightarrow$)، نو کرښه جګېږي. دا معنی لري، چې د جګېدونکي x سره د تابع $f(x)$ ارزښت هم جګېږي.

په مخامخ شکل کې: کرښه د منفي جګېدنې سره: $\tan\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0(\Leftrightarrow)$

که $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ یا $-\infty < a_1 < 0$ وي، دا په دې معنی، چې $\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$، نو کرښه ټیټېږي یا لوېږي. دا په دې معنی، چې د جګېدونکي x سره د تابع ارزښت $f(x)$ کوچنی کېږي.

په پورته دواړو حالتونو کې د همغږیزې تابع (یا د جګ-ټیټېدونکي تابع) غږېږو او له یوه همغږیزجګیدونکې تابع څخه، که $a_1 > 0$ وي. له یوې مونوتون ټیټیدونکې تابع څخه، که $a_1 < 0$ وي.

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کېږي، چې د منحنیو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټولیزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي باندې تانجنت اینول کیدی شي.



له دې امله د تابع $f(x) = a_2x^2$ لپاره باور لري:

په اننتروال $I_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_R$ کې تابع $f(x)$ مونوتون ټیټېږي. او $f(x)$ په اینتروال $I_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_R$ کې مونوتون جګیږي.

لکه د کرښې په ګراف کې، چې جګیدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعنې جګیدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحنې له یوه ټکي څخه بل ټکي ته تغیر خوري.

د تانجنت جګیدنه $> 0 \rightarrow$ منحنې مونوتون جګیږي. د تانجنت جګیدنه $< 0 \rightarrow$ منحنې مونوتون ټیټیږي

د تانجنت جګیدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

روښانه ده چې د $f(x)$ تابع لومړی مشتق $f'(x)$ د تابع ميل (جګوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتونی قضيه په لاندې ډول فرمولوو.

قضيه:

د $f(x)$ تابع دې په انتروال Iکې مشتقوړ وي.

1. که د $f(x)$ تابع په اينتروال Iکې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in 1$ لپاره

- که $f(x)$ په انتروال کې همغږيزټيټېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in 1$ لپاره.

- که $f'(x) \geq 0$ وي، دټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال I کې همغږيز جګېدونکې ده.

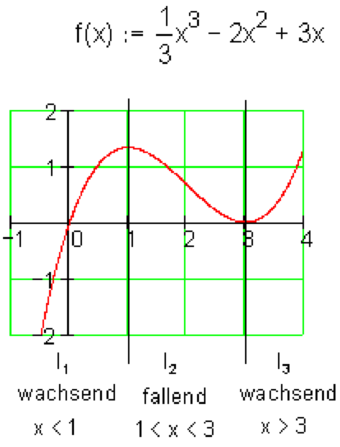
- که $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په ايترولIکې همغږيز ټيټېدونکې ده.

- که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال I کې په کلکه همغږيزجګيدونکې ده.

- که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اينتروال Iکې په کلکه مونوتون ټيټېدونکې ده.

د مونوتوني پيژند ورشو (تعريفساحه) ټاکنه

بيلګه: د تابع ګراف څخه زيات وخت کيدی شي د مونوتوني ساحې لږ يا زيات ټيک و لوستل شي.



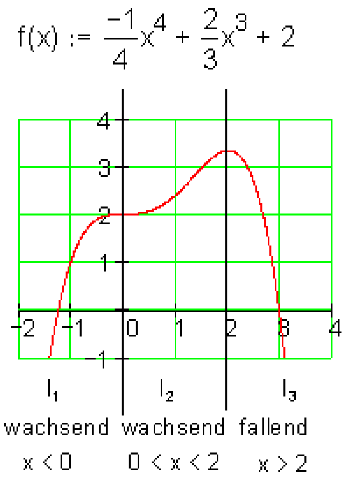
د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکی دی.

د $I_2 = \{1 < x < 3\}_R$ لپاره $f(x)$ يوغږيز ټيټېدونکې ده.

د $r\, I_3 < x < \infty\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه يوغږز جګېدونکې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له گراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کيږي.
د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونج ګېدونکې ده.
د $I_2 = \{1 < x < 3\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونجګېدونکې ده.
د $r\ I_3 < x < \infty\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون ټيټېدونکې ده.



تمرينونه:

--- لاندې تام راشنل توابع په همغږيزوالي خويونو وڅيړئ.

$a)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$

$b)\ f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 12x$

$c)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$

$d)\ f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + 2$

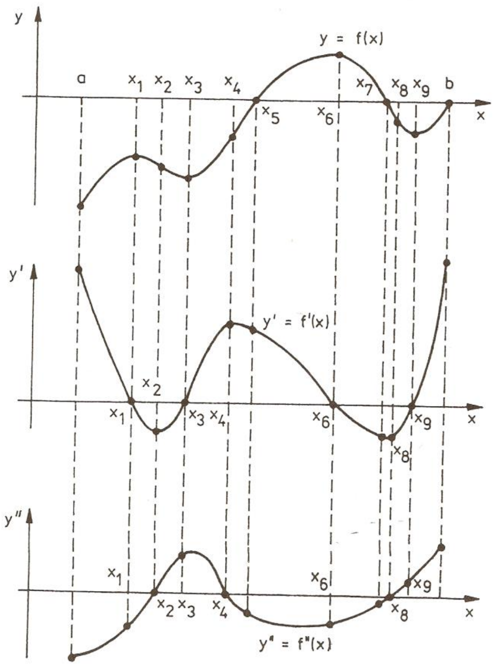
--- د لاندې ماتراشنل توابعو د مونوتوني حالت د a په واکوالي کې ورکړئ.

$a)\ f(x) = \frac{1}{ax+2}$

$b)\ f(x) = \frac{1}{ax^2+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځای اړونده افراطي ټکي (local extrema)



يادونه: په ليکلو مې کله کله د افراطي لپاره بحراني ليکلي، پام دې ورته وي.

فعاليتونه:

د مختلفو توابعو ګرافونه او په هغې خبرې، چې چيرته افراطي ټکي پراته دي.

- په پورته څېره کې د تابع لپاره نسبي جګ ټکي اوخورا جګ ټکي و ښاياست.

- په پورته څېره کې نسبي ټيټ او خورا ټيټ ټکي وښاياست.

- په پورته څېره کې وښاياست، چې د نسبي جګو ټکو همداسې خورا جګو ټکو، نسبي ټيټو ټکو همداسې د خورا ټيټو ټکو دواړو لورو ته تابع څنګه ځغلي؟

- په پورته شکل کې هغو ټکو ته، چې بحراني ټکي دي ځير شئ، چې تابع هلته څه خوي لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د تابع همدې ټکي کې وګورئ، چې لومړی مشتق یې کوم ارزښت لري؟

موږ ددې پورته فعالیتونوڅخه لاسته راوړو:

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ او $f''(x)>0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x)=0$ او $f''(x)<0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x)=0$ وي او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

1. دا اړیکي یوائې د x_0 لپاره ارزښت لري چې د تعریف سټ په دننه کې پروت وي او هلته د $y=f(x)$ تابع پوره څو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څنډو) او د هغوځایونو لپاره چې هلته $f(x)$ تابع کم یا هیڅ مشتق وړ نه وي، ځانګړو څیړنو ته اړتیا ده.
2. شرایط چې $f'(x)=0$ وي(مشتقوړ تابع) یوائې د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی(ضروري یا اړین شرایط).
3. شرایط $f'(x)=0$ او $f''(x)\neq 0$ د بحراني ټکي لپاره یوائې پوره کېدونکی دی او نه ضروري).

بیلګه:

د $f(x)=x^2+2$ تابع ګراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د ګراف او مشتق له لارې وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د بيلگې له گراف څخه روښانه ده، چې تابع د $x=0$ په ځای کې خورا ټيټ ټکي(اصغري-) لري.

د ابحراني ټکي لپاره اړيين شرطونه:

1. د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x)=2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 لپاره صفرځای لري، يعنې دلته يو بحراني ټکی پروت دی.
-د تابع دويم مشتق: $f''(x)=2$ دا چې $f''(x)>0$ دی، نو يو نسبي ټيټ ټکی مخ ته لرو.
بيلگه:

د $y=x^4$ تابع د $x=x_0=0$ لپاره نسبي ټيټ ټکي لري او باوري دي:

$$f'(x)=4x^3 \;\Rightarrow\; f'(0)=0$$
$$f''(x)=2x^2 \;\Rightarrow\; f''(0)=0$$

گورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوي دی.

د پورته شننې څخه لاندې پيژند ته راځو

تعرف يا پيژند: د $x=x_0$ په چاپيريال کې د $y=f(x)$ تعريف شوې تابع يونسبي جگ ټکی په همدې ډول نسبي ټيټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري: $f(x)\le f(x_0)$ $(\;\Leftrightarrow)$ په همدې ډول $f(x)>f(x_0)$
جمله: (د يوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرايط): که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y=f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x)=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همغږيزې توابع

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځې د x_0 ځای په پوښتنه کی راځي، چې د هغي لپاره لرو $f'(x) = 0$ ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې يواکستريموم و لري.

جمله ۲ ۱۳ : (د يوه بافراطي ټکي لپاره پوره کيدونکی شرايط):
که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتقوږ $y = f(x)$ تابع لپاره ولرو:
$f'(x) = 0 \;,\; f''(x) \neq 0$
نو تابع $y = f(x)$ هلته يو بحراني ټکی لري.
خورا ټيټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x) > 0$
خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x) < 0$

پوښتنې:

د لاندې توابعو انحرافي ټکي پيدا کړئ.

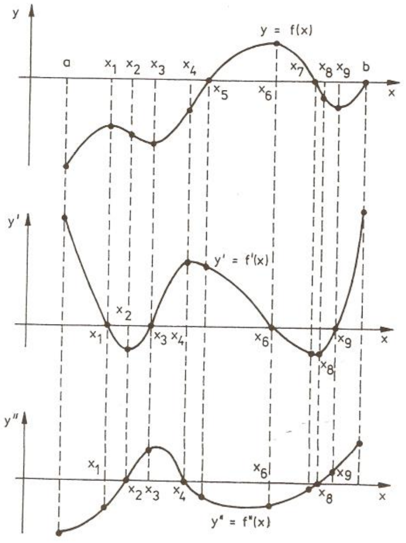
1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

2) $f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 1$

3) $f(x) = 7x^7 - 6x^6 6 + 4x^4 x^3 + 2x + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له ښۍ لور انحنا اوله کيڼ لور انحنا(مقعر او محدب)



فعالیت:

- په پورته شکل کې مقعریت(ننوتوال) او محدبیت(وتنوالی) وښایاست.
- په پورته شکل کې د مشتقونو له مخې مقعریت او محدبیت په ګوته کړی.

که په یوه اینټروال کې د مشتقوړ تابع f دویم مشتق $f''>0$ وي، نو په دې اینټروال کې ګراف کيڼ کوږ شوی یا کینه انحنا لري او که دویم مشتق $f''<0$ وي، نو د تابع ګراف ښی کوږ یا ښی انحنا لري.

بیلګه:

ټول ګونګ تابع(راشنل تابع) f د $f(x)=x^3-2x^2+4x-1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کې کیڼ کوږدی (کینه انحنا لري (ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشوکې ښی کوږ دی (ښۍ انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (له لومړی مشتق څخه):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x)=3x^2-4x+4$$
$$f''(x)=6x-4$$

د $x>\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $6x-4>0$ لپاره کينې ګوړوال(کينه انحنا (ننوتی يامقعر)

د $x<\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $6x-4<0$ لپاره ښی کوړوالی(ښی انحنا(وتلی يامحدب))

بيلګه:

د مات راشنل تابع $f(x)=\frac{1}{x+2}$ ګراف يو های پارابول دی. د های پارابول کومه ځانګه کينه کږه ده يا کينه انحنا لري(مقعر)، او کومه يوه يې ښی کوږوالی - يا ښی انحنا لري(محدب)؟

دويم مشتق: $f''(x)=\frac{2}{(x+2)^3}$; $f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$ صورت تل مثبت دی.

د $x<-2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د های‌پارابول ځانګه ښی کوږوالی يا انحنا لري(وتلی يا مخدب).

د لپاره $x>-2$ مخرج او همداسې ټول کسر(مات) مثبت دی.

های بارابول کينکوږ دی يا کينه انحنا لري(ننوتی يامقعر).

بيلګه: د دواړو توابعو $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{x^3}$ کوږوالی(انحنا) دې له دواړو لورو يو د بل سره پرتله شي. دواړه توابع د x>0 لپاره تعريف دي.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x)=\frac{3\sqrt{x}}{2}$$
$$f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad g''=\frac{3}{4\sqrt{x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مشتقونه د $x \in R^{+}$ لپاره تعريف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف ښی کوږوالی يا انحنا لري، دا يو ښې لور ته واز پارابول ښايي.

په همدې ساحه کې $g''(x) > 0$ دی. اړونده ګراف کيڼ کوږ دی يا کيڼه انحنا لري. اړونده ګراف يو کيڼ کوږوالی يا کيڼه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

تمرينونه:

۱ -- و ښاياست، چې د لاندې توابعو مقعريت او محدبيت کوم دي؟

$a)\quad f(x) = x^3 + 4x^2 + x$

$b)\quad g(x) = 2x^3 + 3x - 2$

۲ -- په کومه ورشو کې لاندې تام راشنل توابع يو کيڼ کږوالی لري او په کوم کې ښی کږوالی لري.

$a)\quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 2 \qquad b)\quad -2x^3 + 3x^2 - x - 4$

۳ -- د لاندې مات توابعو ګرافونه هايپاربول دي. د هاپارابول څانګې کوم کږوالی لري؟

$a)\quad f(x) = \dfrac{1}{4x+1} \qquad b)\quad f(x) = 3 - \dfrac{3}{x^2}$

٤ -- په کومه ساحه کې لاندې ناراشنل توابع يو کيڼ او په کوم کې يو ښئ کږوالی لري؟

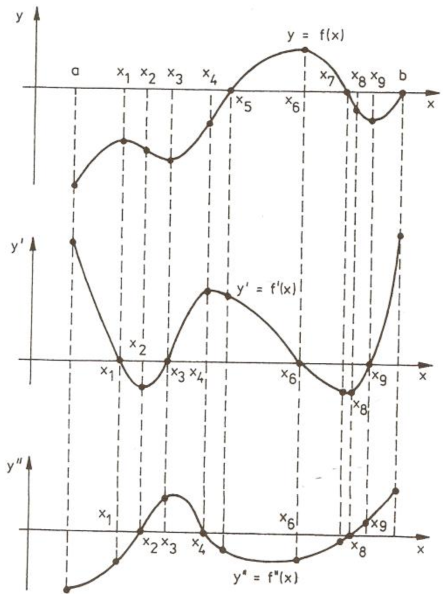
$a)\quad f(x) = x \cdot e^{2-x} \qquad b)\quad f(x) = \ln x^2$

٥ -- ولې د يوه دريمې درجې تام راشنل تابع ګراف په ټل تلنه کې يوه ښئ انخنا(کږوالی) نه لري.

٦-- ولې يو څلورمه درجه تامراشنل تابع د $f(x) = ax^4 + dx + e$ ، سره يو تلتلونی کينه انخنا(کږوالی) او ښئ انحنا لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف ټکي(اوړونټکي) Inflection Points



فعالیتونه:

- پورته ځیره په ځیر وګورئ او وښایاست، چې چیرته یا په کوم ټکي کې منحني(له کینۍ و ښي لور ته) خوزښت - یا خپله د حرکت لور بدلوي؟

- د انعطاف ټکو شاوخوا هم فکر وکړئ، چې کوم ټکي غوره ټکي دي او د هغو له خویونو هم د

انعطاف ټکو خویونه وټاکئ.

- په شکل کې فکر وکړئ‌چې د انعطافټکي شاوخوا منحني ځنګه ځغلي.

- د شکل په هکله په خپل فکر څه ووایئ او د خپل فکر په بنسټ خپل دلایل روښانه کړئ. موږ له پورته ځیرې اټکل کولی شو چې: که د x_0 ځای کې ولرو: $f''(x)=0$ او $f'''(x)>0$ ، نو یو ښی-کینې- انعطاف ټکی (اوړونټکی) مو مخ ته پروت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

برعکس(په ښتې):   که وي: $f''(x)=0$ او $f'''(x)<0$ نو یو کیڼ - ښی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

دا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چې $f''(x)=0$ وي، دا چې دا ښی -کیڼ - او که کیڼ- ښی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f'''(x)$ مخ نښنه یی ټاکي.

- شرایط $f''(x)=0$ د انعطاف ټکي لپاره یوائی اړیین یاضروري دي.

د $y=x^4$ لپاره $f''(0)=0$ دی، مګر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

- شرایط $f''(x_0)=0$ او $f'''(x_0)\neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکي دي.

ګورو چې $y=f(x)=x^5$ تابع د $x=x_0=0$ ځاي کی یو انعطافټکی لري او باوري دي:

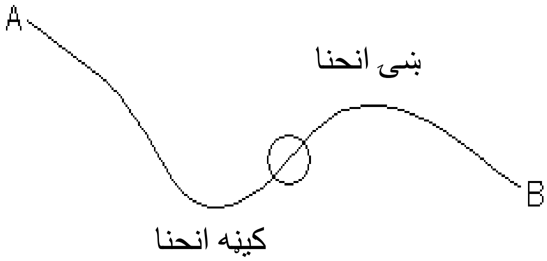
$$f'(x)=5x^4 \quad , \quad f'(0)=0$$
$$f''(x)=20x^3 \quad , \quad f''(0)=0$$
$$f'''(x)=60x^2 \quad , \quad f'''(x)=0$$

ګورو چې دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

ترمخ راوړني او د کلمې روښانه ونې:

د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

د بایسکل ځغاستي چې له A څخه ځغلي د منحنی څخه تېرېږي او B ته رسېږي. د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د اندل حالت د ځغاستې په وخت کې په پام کې ولري. د کینې منحني(د کیڼ لورې د اندل حالت) څخه وروسته د ښی لورې منحني کې ځغلي.



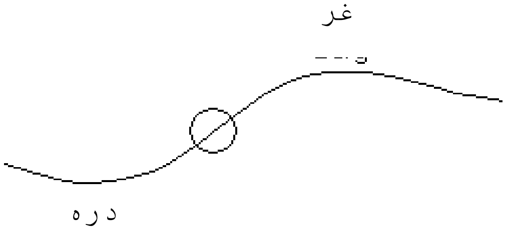
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کيني- او ښی منحني(کږې) ترمنځ بايد د باسکل انډل نيغ ولاړ وي(عمود وي)، چي دا د انډل بدلون دی له کينې لورې و ښی لورې ته. دا د کينې او ښی منحني ترمنځ اوړيدنه ياد انعطاف ټکی بلل کيږي.

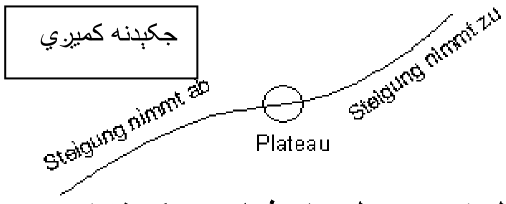
تاسو له بايسکل سره په يوه غونډۍ ځغلی.
وروسته له هغې، چې له تالي ځخه تيږيږي، نو لار په جګيدو پيل کوي. په لومړي سر کې نرم او بيا په نيغه جګيږي، بيا په دې پسې جګوالی بيرته کميږي، چې پاس د غونډۍ په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. يو ځيرته په غونډۍپورته صفرارزښت ته رسيږي. يو ځيرته په لار جګيدنه خورا لويه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.

دا ځيره بيا



د بايکل ځغلونکي بل حالت، چې له ځنګ دياګرام څخه يې رانيسو:
په غره د بايسکل ځغاستميل ياجګيدنه لومړی کميږي، چې له سره بيرته جګه شي.
ددې ترمنځ يوه ساحه شته، د کم جګوالي سره (يوه نسبتآهواره). دې نسبتآ هوار ځای کې د ټوټه کړښي جګيدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونټکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.

دا ځيره د پښتو نومونو سره بيا کښل...



له کيڼ ښي لور ته ژباړه: جګيدنه کيږي، هواره، جګيدنه زياتيږي

پوهيږو، چې د يوې تابع لومړی مشتق د تابع د جګوالی تابع دی، چې له ګراف څخه يې جګوالی لوستل کيږي. دا چې د انعطاف ټکی خورا لوي يا خورا کوچنی ټکی کيدی شي، داسې پيدا کيږي، چې د مشتق تابع انخرافي ارزښتونه پيدا کړو.
دا تلنلار همهغسې ده، لکه د پيل تابع $f(x)$ لپاره مو ټاکلې. اوس د مشتق تابع $f'(x)$ باندې دا کار يا عمل اجرا کيږي.
مخکی له دې چی يو لړ جملی د بحراني ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله ځيرو، غواړو چی دا کليمی تعريف کړو.

دواړه کلمې به د نسبي افراطي ټکي په بڼه کی سره را غونډې شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند:

په يوه چاپيريال $x = x_0$ کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ يو کيڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کيڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته يو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه يو نسبي ټيټ ټکی ولري.

جمله: (د يوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ اکستريموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره يواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره $f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې يوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملې استعمال په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړيين شرايط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته يو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

دلته هم باور لري(يادونه ۴ دې پ‍ءتله شي) : چيرته چی $f''(x) \neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کيدی چي د انعطاف ټکي موجود وي. مګرچيرته چی $f''(x) = 0$ وي ، د انعطاف ټکی شته کيدلی شي، خو اړيين يا ضرور نه ده چی هلته انعطاف ټکی شته وي.

له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

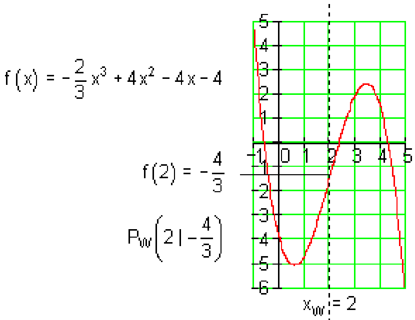
جمله: (د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکی شرطونه)

که په $x = x_0$ کی د دریواره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) \neq 0$

نو هلته یو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که $f'''(x) < 0$ وي، نو یو کيڼ- ښي – انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د $f'''(x) > 0$ لپاره یو ښی-کيڼ-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

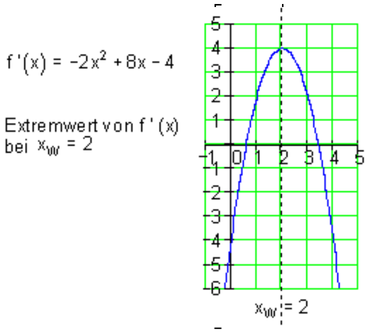
شننيزه يا تحليلي بيلگه:

يادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښه کوو او د x_W سره د انعطاف ټکی په نښه کوو.



1- تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$
$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$
$$f''(x) = -4x + 8$$
$$f'''(x) = -4$$



2- دويم مشتق صفر کړئ.

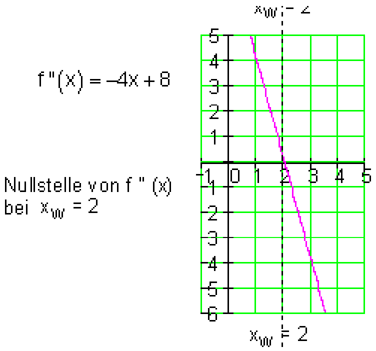
$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -4x + 8 = 0$$
$$\Rightarrow x_W = 2$$

3- د انعطاف ټکي له مخې ښوونه، چې ايا د انعطاف ټکی شته دی؟

$$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$$

4- په $f(x)$ د انعطاف ځايونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف ټکي ټاکنه

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x_W) = f(2) = -\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$$

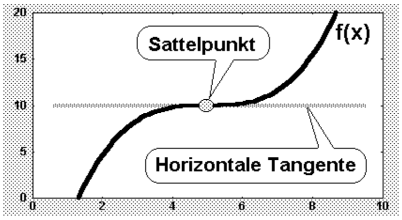
$$\Rightarrow P_{W\left(2|-\frac{4}{3}\right)}$$

$$P_W(21-1.33)$$

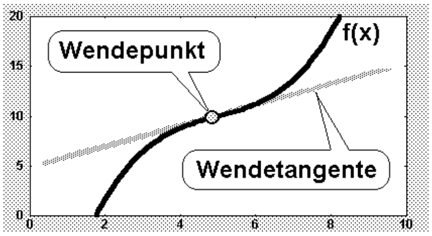
پام: په انعطاف ځای x_Wکې د $f(x)$ ګراف کږيږي.
په يوه په خوښه ټکي x_0کې د کږوني(انحنا) لپاره باور لري:
$f''(x) > 0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کيڼ لور ته کږيږي(انحنا لري) دی.
$f''(x) < 0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ ګراف ښي لور ته کږيږي(انحنا کوي)
يو زينټکی <u>Der Sattelpunkt</u> څه شی دی؟

پيژند:

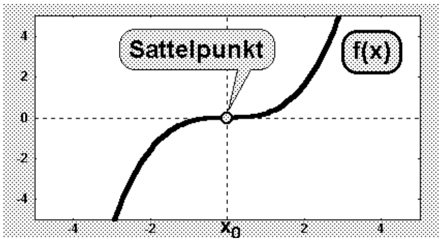
د زينټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کيږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پوهيږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت يې افقي (پروت) وي:



د پرتلي لپاره دې بيا يو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا يو مائل(نه افقي) تانجنت لري



(c) ketabton.com: The Digital Library

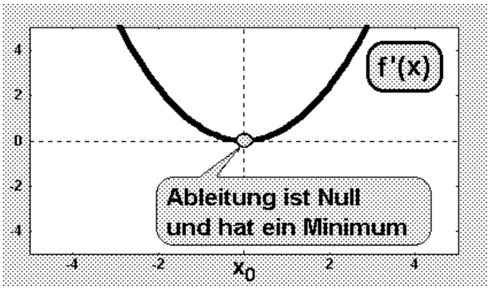


توضیح:

اوس فکر کوو، چې یو زینتکی ځنګه د شمېرلو له مخې پېژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانګړي توګه دا مخ ته لرو، چې یو زینتکی له ښي – و کینه انحنا و شمېرو.

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جګوالی په پام کې نیسو، یعنې لومړی مشتق: د زینتکي د مخه د $f(x)$ جګوالي کمیږي، په زینتکي کې صفر ارزښت لري، او له زینتکي څخه وروسته بېرته جګیږي.

یو زینتکی (د ښي – کیڼ – بدلون سره) په دې پېژندل کیږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ یې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي تیټتکی (مینیموم) ولري.



د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

لومړی شرط دی، چې مشتق یعنې $f'(x)$ په زینتکي کې د صفر سره مساوي دی.

زینتکی(ښی-کیڼ-بدلون) $f'(x_0) = 0$ دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته یو نسبي مینیموم لري.

دا په دې معنادی، چې بل جګ مشتق $f''(x)$ باید په صفر مساوي وي او مخښنه له منفي و مثبت ته بدلیږي.
له دې سره سم د زینتکي لپاره پوره کېدونکي قضیه ومیندل شوه:
د زینتکي لپاره جمله(خوي ټاکنه)(د ښي –کیڼ- انعطاف سره)

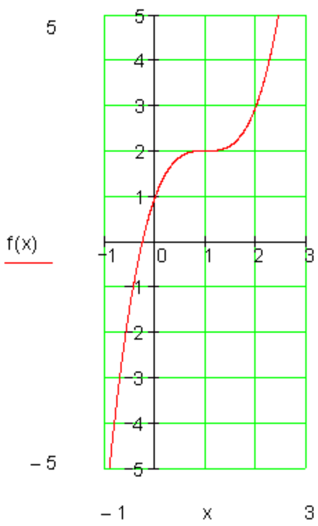
(c) ketabton.com: The Digital Library

الف:د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$

ب : د x_0 په ځا ي کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ یو مینیموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، یعني $f''(x)=0$ دوم مشتق مخخښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.

بل بديل(د گرانو دوستانو وړاندیز)

زینټکی **Der Sattelpunkt**



د انعطاف ټکي يو ځانګړی حالت زینټکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جګېدني سره.که د کيڼ لور ورتزدي شو فکر کېږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی

که څوک د ښي لور ور نزدې شي فکر کوي، چې يو نسبي ټيټکی مخ ته لرو.

اوس دا حالت د رياضياتو له لوري څېړو:

مشتق:

$$f(x)=x^3-3x^2+3x+1$$

$$f'(x)=3x^2-6x+3$$

$$f''(x)=6x-6$$

$$f'''(x)=6$$

$$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2-6x+3=0 \;\Rightarrow\; x_{1/2}=1$$

$f''(1)=6\cdot1-6=0$ $f'''(1)=6$	1=> د $x=1$ سره د انعطاف ټکی	1=> د $x=1$ سره زینټکی

د انعطاف ټکي لپاره شرايط پوره دي.

دا چې د $f''(1)=0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زینټکی دی.

د انعطاف ټکي پیداکونه:

د تابع گراف باندې انعطاف ټکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کيږي. د انعطاف تانجنت هم

همداسې پیدا کيږي لکه د تابع دگراف په يوه ټکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات ټاکل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x-2$$

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-6x+9$$

$$f''(x)\frac{3}{2}x-6 \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

$$f''(x_W)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-6=0$$

د $x_W=4$ او $f'''(x_W)=\frac{3}{2}\neq 0$ د

تانجنت $f(x_W)=f(4)=2\Rightarrow \underline{P_W(4|2)}$

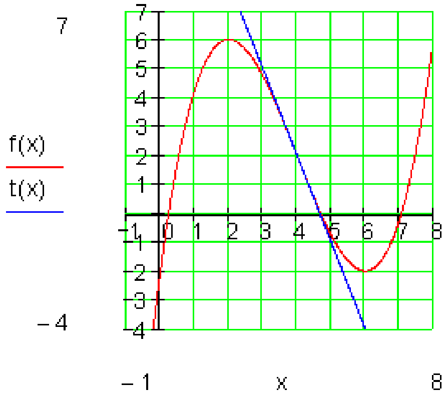
مساوات لپاره باور لري.

د x_W لپاره د تانجنت مساوات

$$t(x)=f'(x_W)(x-x_W)+f(x_W)$$

د $f'(x_W)=f'(4)=-3$ سره په لاندې ډول

دي $t(x)=-x(x+4)+2=\underline{\underline{-3x+4}}$



د انعطاف تانجنت د $f(x)$ گراف د انعطاف په تکي $P_W(4,2)$ کې غوڅوي او دا لاندې مساوات لري:

$$t(x)=-3x+14$$

د انعطاف تکي تانجنت پیداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دگراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي.
د انعطاف تانجنت مساوات همداسي ټاکل کیږي، لکه د تانجنت مساوات د گراف په خوښه ټکي باندې.

داسي حالتونه، لکه $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=0$ دلته تر څېړنی لاندې نه نیول کیږي.

پوښتني

۱ -- د تابع f د $f(x)=\frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}, x\neq 1$ سره د انعطاف ټکي پیداکونه

۲ -- د لاندې توابعو د انعطاف ټکي پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=\frac{2x-2}{x^2}$ $b)\ f(x)=\frac{x}{x^2+3}$

$c)\ f(x)=\frac{x^3}{3(x-1)^2}$ $d)\ f(x)=\frac{x^3-8}{4x}$

۳ -- و ښايئ، چې د $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}e$ تابع د انعطاف ټکی زينتکی دئ.

۴ -- د لاندې توابعو د انعطاف ټکي (اوړونټکي) پيداکړئ.

$a)\ f(x)-=x\cdot e^{-x^2}$ $b)\ f(x)=\ln\frac{1}{x^2+1}$

د منحني بحث : (Kurven Diskusion)

يوه تابع $y=x^3+x^2-3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بيا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نخښه کړئ، رښانه کړئ، چې انحنا چيرته له کيڼې لور و ښۍ لورې ته او له ښۍ لورې و کيڼې لورې ته ده.

فعاليت:

- تناظر تعريف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جګ ټکي، ټيټ ټکي او د انعطاف ټکي يې پيدا اکړئ.
- x^3+x
- $3x^3+x+2$

ددې لپاره چې يوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پيژنو. موږ دې بحث ته د منحني بحث وايو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې بايد سيستماتيک مخ ته لاړ شو.

په لاندې ډول تلنه ګټوره بلل شوې.

دتعريف ساحه: د تابع ځيرنه يوائې په همدې ورشو کې موخه وره ده.

تناظر **Symetry** : بايد وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.

د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x)=f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکزي تناظر لپاره باور لري. $f(-x)=-f(x)$
په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط $x\geq 0$ وڅېړل شي.
په ټوليزه توګه که ټول ريل تابع په پام کې ونيسو، نو ګورو چې که توان(د پولينوم درجه)يې جفت(جوړه) وي، نو پولينوم محوري متناظر دی او که توان(د پولينوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولينوم مرکزي متناظر دی.

انحرافي ټکي **Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جګټکی، ټيټټکی)
د جګټکی يا نسبي جګ ټکي پوره کېدونکي شرطونه:
$f'(x_1)=0 \ \wedge \ f''(x_1)<0$

انعطافټکی Inflection Point :
د انعطافټکو او همداسې زينټکي ټاکلو له پاره پوره کېدونکي شرطونه:
$f''(x_W)=0 \quad \wedge \quad f'''(x_W)\neq 0$
زينټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.
د تابع تقاطع د x او y محورونوسره(د محورونوِغوښټکی):
د $x-$ محور سرهِ غوښټکی: $P_{xi}(x_i\,|\,0) \Rightarrow (x)=0$
د y محور سره غوښټکی(صفرځای) ټاکي $f(0)$ $\Rightarrow$ $P_y(0\,|\,y_s)$
دګراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې ګراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی يو ارزښتجدول انځوريږي. دا راته په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شميرل کيږي.

د انحنا حالت او يوغږيزوالی:
د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ ګراف تغير خوري.
په خوښه يوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:
$f''(x_0)>0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف کينه انحنا لري (کونوکس)
$f''(x_0)<0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف ښی انحنا لري (کونکاو)
يوغږيزوالی
1- که د ټولو $x\in I$ لپاره وي $f'(x)\geq 0$ ، نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون جګيږي.
که د ټولو $x\in I$ لپاره $f'(x)\leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون ټيټېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-2 که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې کره غښتلې مونوتون جګېدونکې ده.

که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې غښتلې مونوتون جګېدونکی ده.

د پېژند ورشو ژی ټکي:

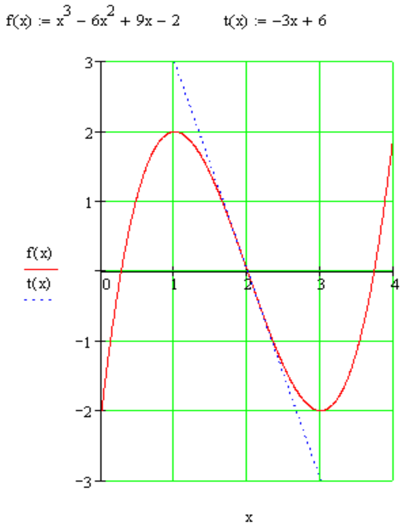
د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشوکې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ او $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلګه :

د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.

مشتق کونه:

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$
$$y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$$



نسبي انحرافي ټکي

$P_{min}(3|-2) \qquad P_{max}(1|2)$

انعطاف ټکی او تانجنت

$P_W(2|0) \quad y = f_t(x) = -3x + 6$

صفرځایونه:

$P_{x1}(2|0) \quad P_{x2}(3.7|0) \quad P_{x3}(0.3|0)$

د y– محور سره غوڅټکی(دقاطع): $P_y(0|-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوغړیزوالی(مونوتوني یاجګ - ټیټوالی)   د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$ کې

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

په $I_1 = \{x \mid -\infty < x \leq 1\}_{\mathbb{R}}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = \infty$$

کې یوغړیز جګیږي.

په $I_3 = \{x \mid 3 \leq x < \infty\}_{\mathbb{R}}$

سیومتري: نه لري

کې یوغړیز جګیږي.

د انحنا حالت:

ښیٔ انحنا(محدب) : $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کینه انحنا (مقعر) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

تمرینونه:

په لاندې توابعو بحث وکړئ او غوره نقطې یې پیدا کړئ:

اول) د شمېرنې له لارې وښایاست.

دویم) په شکل کې په نخښه کړئ.

$a)\quad 2x^3+x^2+1$

$b)\quad x^3+x^2+3x$

$c)\quad x^3+2x^2+x+3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناټاکلو افادو یا وییینو=ګ\پولې

$$0.\infty\ ,\ \ \frac{0}{0}\ ,\ \ 0^{\infty}\ \ .\frac{\infty}{\infty},.....$$

که و لرو $x \neq 5;\ \frac{x^2+3x+2}{x+5}$ ، ومو لیدل، چې د داسې توابعو لیمیټ په پیداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وایې، ځکه چې مشتق یې نیول کېدی شي، یعنې د کمښتونو ویش(د تفاضلونو ویش) حد یې ټاکل کیدی شي.

که $\frac{\sin 2x}{5x}$ توابع ولرو،نود $x=0$ لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توګه نه شو نیولی، چې له دې امله ناټاکلې افادې ورته وایو.

فعالیت:

- که تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x^2+x}$ ورکړشوې وي.

اول - د تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x^2+x}$ پوله یعني $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+x}$ د پولې له درسه ، چې په لومړۍ بره کې لوستل شوي، پیدا کړۍ.د.

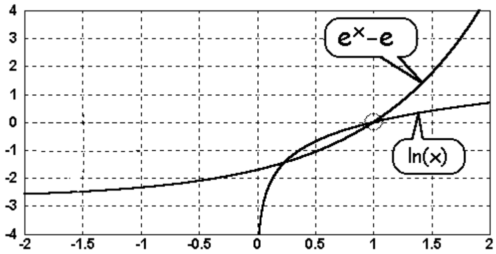
- پورته په ننوتنه کې و هځېږۍ، چې د توابعو مشتقونه پیدا کړۍ.
- که ولرو $\frac{x^2-4x-5}{x-5}$ ، نو د تابع مشتق د چېرته نیول کیږي، که د x=5شوني وي، نو مشتق یې ونیسۍ.

پیل څېرنه: د $\frac{0}{0}$ حالت که پوله ارزښت جوړېدو کې یو کسر پیدا شي، چې صورت او مخرج یې دواړه د صفر په لور لاړ شي یا صفر شي، نو دا پوله ارزښت،، ناټاکلې افاده،، بولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$$

په څېره کې برخه توابع رسم شوي دي، یعني د صورت او همداسې د مخرج ګرافونه. ګورو: د صورت او مخرج د توابعو ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱ په لور لاړشي)	

لیکندود(لیکندېول): د افادې

$$\frac{\text{Zähler} \to 0}{\text{Nenner} \to 0}$$

لپاره په حدشمېرنه کې لنډ لیکو: $\frac{0}{0}$

دا په حقیقت کې دقیق نه دی، مګر په ټولېزه توګه داسې معمول دئ

روښانه ونه :

ناټاکلي افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې دا ناټاکلې افاده خپل نوم له کومه ځایه اخلي. دا ،، ناټاکلی،، بلل کیږي، ځکه چې حدیې د عادي طریقو له لارې نه شي شمېرل کېدی. دا کار د لوړې ریاضي سره دا شمېرنه شونی شوه(دبېلګې په توګه د لو پیتال قانون له مخې، چې پسبه وڅېړل شي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

روښانه ونو ته تشریح:

اوس ښایو، چې د داسې توابعو شمېرل ولې ناشوني دي.

موږ بیا دا د تېر مخ بیلګه رانیسو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Z\ddot{a}hler \to 0}{Nenner \to 0}$$

1- که هځه وشي، چې حد پیدا کړو، داسې چې د $x = 1$ په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده $0:0$ به ترې لاس ته راشي. دا تعریف نه لري، $u = f(\frac{1}{z})$ ځکه په صفرویش اجازه نه شته.

2- ترمخه مو د ناټاکلو افادو د شمېرلو لپاره یعني د ناطق کسري توابعو پوله شمېرنه کې د چل یا د طریقې څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارلی، لکه په پورته بیلګه کې.

3- د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي لید کېدی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د 1 په لور وخوزیږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001} = 1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معني ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نژدې برابر شي.دا دا معني نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.0000000010\ 0}{0.0000000010\ 0} = 100$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه چې ګورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نزدې برابردي(دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مګر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعني (100) دی،

د برنولي او د دې لو، پیتالقاعده Brnoulli and de L,Hospital

$$\frac{\sin 2x}{5x} \quad \text{او} \quad \frac{x^2+3x-10}{x-5}$$

د برونولي او د دو لو پیتال قاعدې د $\frac{f(x)}{g(x)}$ ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانګړی رول لوبوي. داحالت په ځانګړي ډول هلته رامنځ ته کیږي، چې مخرج او صورت همغه صفرځاي x_0 ولري. دا ناټاکلی افاده $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{0}{0}$ هدفمنده نه ده. کیدی شي چې د ویش حد $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ وڅیړل شي، په کومو کی چې صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د غوښتلو دي. د بیلګي په توګه تابع $f: \quad y=f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}$

صورت او مخرج همغه صفرځاي x0=-2 لري، سره له دې هم لیمیټ شته دی.

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^2}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x+2)=0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شمیرل کیدی شي، چې د صورت او مخرج توابعو له نتیجي څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوي منځ ارزښتقضیي استعمال هم بلل کیږي.

د برنولي او د دو لو، پیتال قاعده:

Bernoulli and de l'Hospital

که توابع $u=f(x)$ او $v=g(x)$ د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g'(x)\neq 0$ سره او د ټولو $x\in U(x)$ لپاره او x_0 د f او g یوصفرځاي وي،

د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$,

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

حل: تابع د پراخه شوې منځ ارزښت قضي نیونی پوره کوي. د هر $x\in U(x_0)$ لپاره

یو x_m د $x_m\in(x_0,x)$ سره موجود دی، په داسی ډول چې لرو:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د $f(x_0)=0\ \wedge\ g(x_0)=0$ له امله لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچې د $x->x_0$ سره $xm->x_0$ هم هڅه کوي.

د $x->oe$ په حالت کې $x=1/z$ ځای په ځای کوو. د زنځیري قضي په مرسته لاس ته راځي:

$$u=f(1/z)$$

د مشتق $du/dz=f(1/z)(-1-z^2)$ او مشتق $\frac{dv}{dz}=g'(\frac{1}{z})(\frac{-1}{z^2})$ سره، داسې چې لرو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

یادونه : که په پورته حالت کې $f'(x_0)=g'(x_0)=0$ هم وي، نو په ویش بیاله سره دا قاعده استعمالیږي. که سړي د $n-$ پلونو(قدمونو) وروسته بریالی وي نو دا قاعده لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چیرته چې $f^{(n)}$ او $g^{(n)}$ د تابع $n-$م مستق په معنی دی.

ډول یا تیپ: $0/0$

بیلگه: $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{1}=\frac{0}{1}=0$$

بیلگه: $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

بیلگه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=\frac{0}{1}=1$$

تیپ یا ډول: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان(جگعدد) α لپاره یو په خوښه توان x^{α} د $x->oe$ لپاره په غښتلې توگه جگیږي، نسبت لوگاریتم تابع $1n$ ته $\alpha>0$ $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0$

له دې $f(x)=\frac{x^n}{e^x}$ تابع د لوپیتال د قعاعدې د ډیرځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

اکسپوننشل تابع e^x د x په هرتوان تابع څخه په غښتلې جگیږي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 \qquad n\in N$$

نور حالتونه کیدی شی په بڼه یا تیپ $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بیرته واړول شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

له تیپ یا بڼې ∞-∞ څخه و بڼې یا تیپ $\frac{0}{0}$ ته ددې لپاره لاندې تابع بیلګه کیدی شي:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$$

د $x\to 0$ لپاره

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

داچې دلته مشتق بیرته د بڼې تیپ $\frac{0}{0}$ ده، نو د لوپیتال قاعده استعمالیدی شي.

له تیپ یا بڼې $0.(\pm\infty)$ څخه بڼې $\frac{\pm\infty}{\infty}$ ته:

د تیپ $0.(-\infty)$ حالت د بیلګي په توګه تابع f(x)=x.lnx د0<-x لپاره ښایي. په کوم کی چي ضرب د ویش په څیر انځور کړي، نو د لوپیتال د قاعدې په استعمال دا لاندې لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to +0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +0}(-x)=0$$

له بڼې 0^0 څخه وبڼې e^0 ته:

دلته د بیلګي په توګه تابع $f(x)=x^x$ د $0 <- x$ لپاره تر څیړنې لاندې نیول کیږي.

د بڼې بدلون یا فورم بدلون و بنسټ e ته د یوې انځورونی په مرسته په بریالی توګه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to +0}x^x=\lim_{x\to +0}e^{\ln(x^x)}=\lim_{x\to +0}e^{x\cdot\ln x}=e^0=1$$

له 1^∞ بڼې څخه و $e^{0.\infty}$ بڼې ته

د ښوونې، د بیلګې په توګه د تابع $f(x)=(1+\frac{\mu}{x})^x$ پوله ده د $\mu\in R^+$ لپاره او $x\to\infty$ د

$x\in R^+$ سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}e^{x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{2}))}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\eta}{2}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\mu}{2}}\cdot\frac{-\mu}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mu}{1+\frac{\mu}{x}}}=e^{\mu}$$

د $\mu=1$ لپاره لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

له بنې ∞^0 و بنې $e^{0.(\pm\infty)}$ ته دا کارونه په یوې بیلګې روښانه کوو:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\lim_{x\to+0}e^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}(\sin x\cdot\ln\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to+0}\frac{x\cdot(\frac{-1}{x^2}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x}=\lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x-x\cdot\sin x}=0$$

د $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=1$ سره

باید لاندې جدول کې پام وشي.

لاندې جدول د پورته ښوول شوو بڼویا ډولونو د بڼی بدلون تولیزه کتنه ممکنوي

بڼه بدلون یا لنډ: بدلون	$g(x)\to$	$f(x)\to$	تیپ(ډول)
$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)\cdot g(x)}\to\frac{0}{0}$	0	0	$-\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

∞	0		$f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}\to\dfrac{0}{0}$ $\wedge(Or)$ $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}\to\dfrac{\infty}{\infty}$
∞	0 1 0	0 0	$(f(x))^{g(x)}=e^{\ln(f(x)^{g(x)})}=e^{g(x)\cdot \ln f(x)}\to e^{0\cdot\infty}$ د f(x)>0 سره.

تمرینونه:

پورته کې ډېرې بیلګې حل شوې. له هغوباید څه تمریونونه راوړل شي.

۱) لاندې پوله ارزښتونه وشمیرئ.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2^x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}\right)$

د $x\to\infty$ لپاره د لاندې راشنل توابعو لیمیټونه د دې لو پیټال قاعدې له مخې وشمېرئ.

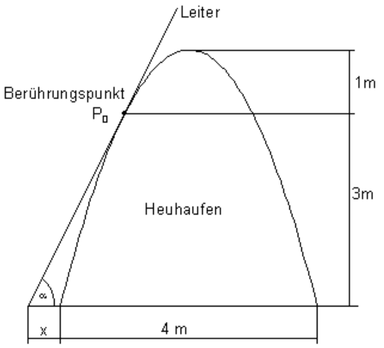
a) $f(x)=\dfrac{2x^3-x+4}{3x^3+1}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{4x^3+3x^2-2x+5}$

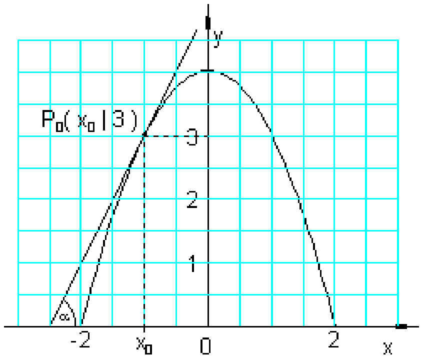
(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت لپاره د يوې تابع د استعمال بيلګې

له ځمکې څخه د وښو په ټوپۍ يوه زينه ايښول کيږي. دا زينه په درې متره جګوالي ټوپۍ لمسوي.



د وښو توپۍ دې د يوه کينکودي پارابول څېره ولري، چې بنسټ يې 4 متره سرور دی او 4 متره جګوالی لري. غواړو په دې يوه زينه کيږدو، چې د وښو ټوپۍ سره تانجنت جوړ کړي.
په کومه زاويه(کونج)بايد دا زينه کېښول شي؟
د وښو ټوپۍ له بيخ څخه دې په کوم لرېوالي په ځمکه دا زينه کېښول شي؟



موږ د y محور داسې کاږو،چې د پارابول له ککرۍ(څوکې) څخه تېرېږي.
پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$
$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$
$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$
$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$

شمېرنه:
د نورو شمېرنو لپاره ارزښت $x_0 = -1$ کاروو. زينه ټوپۍ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې لمسوي.موږ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1|3) \Rightarrow x_0 = -1\,;\ f(x) = 3$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f'(x) = -2x$ سره لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$
$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

جوړه زاویه: $\tan\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha \approx 62.4^{\circ}$

د زینې او د وښو ټوپې تر منځ واټن د $f(x)$ د صفرځای او د تانجنت $t(x)$ د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځایونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 2$$
$$t(x) = 2x + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2.5$$

د x ارزښتونو -2.5 او -2 ترمنځ واټن 0.5 دی.

زینه د وښو د ټوپې له پیښو څخه باید نیم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کیږي، چې یو ګراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

د ستري ګټې(غټو ګټو) مسئله یا قضیه

دا د ستري ګټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د یو څو بیلګو له لارې وڅیړل شي.

نزدې ټولو پروسو کی ، چې په عمل کی کارول کیږي یا صورت نیسي، له تاثیرونکو یا په همدې ډول د هغو ټاکلو لویو استعمال ته اړ دی، کومی چې موږ په ځانګړو یا مخصوصو پولو کی په اختیار کي لرودی شو.

موږ یوائې هغه پروسی تر څیړني لاندې نیسو چې د یوې واریابلی یا اووښتونې x په واك کی وي. دا د بل په واك کی د یوې تابع $y = f(x) \ , x \in D$ له لارې څرګندولی شو.

که y ټول لګښتونه یا مصارف په کوته کړي، نو x باید داسی وټاکل شي چې $f(x)$ مینیمال یا خورا کم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په څټ یا برعکس y ګټه وي یا ګټور تاثیر وي، نو x باید داسې لاس ته راوړل شي، چې $f(x)$ ماکسیمال یا خورا لوی شي. په قاعده کې اغزمنه یا مؤثره لویه یا په بل عبارت، خپلواك وار یا بل یا اووښتونی x د $-\infty$ او ∞ پولو ترمنځ ازاده ټاکونکی نه ده، بلکه د تخنیك یا تخنیك پوهنې له امله، یواځې په ټاکلو پولو کې:

$$a \le x \le b \qquad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پورې د ګټې مسئلې، په دې پورې اړه لري، چې آیا دا ګټه ده او که لګښت.

$$y = f(x) = \max! \qquad (a \le x \le b \qquad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \le x \le b) \qquad ($$

دا د افراطي ارزښتونو برخې پرابلمونو سره خورا نزدی یا ټینګ تړلی دی. دلته زموږ علاقه په ځانګړې توګه د لاندې پرابلم د کارکولو سره ده:

1- د بلواکیزو $y = f(x)$ ګډو اړیکو راپیداکول، د دندې یا وظیفې ورکولو سره سم(مودالیټي پرابلم).

2- د تخنیك پوهنې پولو په پام کې لرل (*) دادې د دوه بیلګو له لارې وښول شي

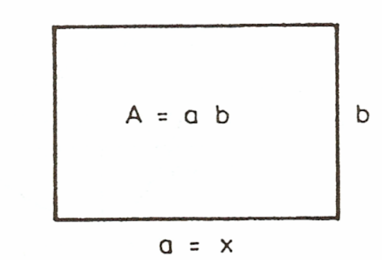
بیلګه: یو د منډو(پټي ته په کلوکې د اغزو منډو کېښول کیږي، چې مالونه ور وا نه وړ ي) سیم لرو چې ټول اوږدوالی یې L دی. له دې سیم سره باید یوه مربع سطحه(څلورګوډیزه هواره)، چې د امکان ترحده باید لویه وي، منډو شي. دا وظیفه شوه یا په بل عبارت غوښتنه.

اوس د مودالیټيArt und Weise پرابلم: غوښتنه مو د یوې څلور ضلعي(څلورګوډۍ) پیداکول دي. لکه چې معمول دي، ددې څلورضلعي(څلور ګوډۍ) یو اړخ په a ښایو او بل اړخ یې په b ښایو، د څیرې 14.20 له مخې).

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په سر کې دوه اغیزې لرونکي یا تاثیر اچونکي لویيa او b دی.

د $L = 2a + 2b \;,\; b = (L/2) - a$

له امله یوائې یوې اغیزمنې(تاثیراچوونکي) لویي ته اړیو د بیلگي په توگه $a = x$، دا گټه (ستحهA)داسي ده $A = ab = x((L/2) - x)$ دا روښانه ده چې صدق کوي $0 \le x \le L/2$ له دې امله د سترې گټې پرابلم داسې دی.	

$$y = f(x) = x((L/2)\text{-}x)=\text{Max!} \qquad (0 < x < L/2)$$

د $f(0) = f(L/2) = 0$ له امله باید ماکس د 0 او L /2 ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره یوائې $x = L/4$ په پوښتنه کی راځي.

د دې لپاره $y'' = f''(x) = -2 < 0$ دی.

په رېښتیا چې یو ماکس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنیکپوهنیزې پولی 0 او L / 2 رول نه لوبوي. نو صدق کوي. $a = b = L/4$

بیلگه: یوه بډای چې په یوه ټاکلي وخت کی تولسټ (تولډیرۍ) M تولید کړي او دا تل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لگښتونه F تړلي دي.
کیدې شي چې سملاسی د دې تولید په تولسټ (تولډیرۍ) M کې تولید کړي، په یوه زخیره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یی سملاسي ورسوي. دلته

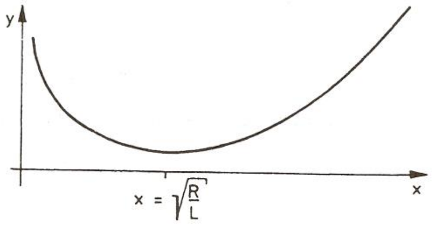
(c) ketabton.com: The Digital Library

د زېمتون(زخیره کوني) لګښتونه راپید کيږي(ددي د زخیرې لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چې تولید په لږه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته ورورړل شي. دلته نو د زخیره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر تل تولید په دي ډول تولید باندي درول، لګښتونه منځ ته راولي، چې د چمتووالی لګښتونه یی بولو. کومه ډیری x (ازاده لویه) باید تولید شي، چې د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟ د زخیرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چې خرڅلاو ته چمتو کيږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتیا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون تل باید تغیر وخوري یعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چیرته چې F ثابت(همغه) یا په کلکه ایښول شوي لګښتونه دي، Lد زخیرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لویه x د تولیددیری M څخه نه شي سترېدلی ، لوئیدلی یا غتیدلی. له دې امله صدق کوي $0 \leq x \leq M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده :

$$y = f(x) = F + Lx + R/x = \text{Min!} \ (0 \leq x \leq M)$$

لومړی $f(x)$ دوه واره دیفرنځیال کیږي یا یي دوه واره رابیلیدنه نیول کيږي:

$f'(x) = L - R/x^2$, $f''(x) = 2R / x^3$ د مینیوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$ پس لرو $x = R / L$ د $x \geq 0$ له امله $f''(x) \geq 0$ هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کږې(منحني) تګلار په شکل کې انځور شوې. څرګنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی.که $x = R/L > M$ وي، نو یو منیموم په څنډه $x = M$ لرو. نامساوت $x = R/L < M$ دا مانا لري $R/L < M^2$ په همدې ډول $R^2 < M^2L$ پس مخ ته لرو: $x = R/L$ د $R < M^2L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2L$ لپاره؛ نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې تول تولید x = M صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

ټاکلی بیلګه: د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي،
$R = 1000 < M^2L = 108 \cdot 10 = 109$ ستر یا غټ ازاد لګښت دی
$x = R/L = 1000/10 = 100 = 10$ ازاد a دلته 10 یوونه باید ورزیات شي ، چې 10000 یوونه تولید کړي د $M = 10, R = 1000, L = 1$ لپاره صدق کوي
$R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده، یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي.

په تولید کې د مشتق استعمال

فعالیت:
یوه فابریکه x تولید کوي. په دې تولید لګښت کیږي، چې دا د تولید په واک کې دی، چې موږ ورته د لګښت تابع وایو او په $K(x)$ سره یې ښایو.
څنګه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لګښت را ټیټ کړو؟
د لګښت تابع $K(x)$ د تولید سټ(ډېرۍ) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.
که تولید د Δx شاو خوا کې زیات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زیاتیږي.
کمښتویش (تقسیم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځنې لګښت زیاتوالی ښایي، د یوه Δx تولید تغیر سره(منځنی تغیر ارزښت)
د x_0 ځای کې لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لګښت بلل کیږي. دا د پوله ارزښت سره ټاکل کیږي، داپه دې معني، چې د لګښت د تابع K مشتق. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

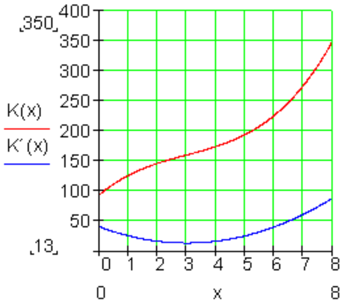
پیژند: د لګښت تابع $K(x)$ مشتق د مشتفارزښت $K(x)$ په نامه یادوو یا یې پوله لګښت $K'(x)$ هم بولو.

بېلګه: د لګښت تابع $K(x)=x^3-9x^2+40x+94$ دي ورکړ شوي وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکی، یو ارزښت جدول د $K(x)$ او $K'(x)$ لپاره وکاږیاو په پروتولاړ سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یې ګراف وکاږئ.

پوله ارزښت د $[0\ ;\ 6]=1$ لپاره په1پل(قدو) پراخوالي سره.

ب: د ډېر کم لګښت زیاتوالی و ټاکی:



لاندي تابع

$$K(x)=x^3-9x^2+40x+94$$

لرو

مشتف ارزښت

$$K'(x)=3x^2-18x+40$$

ارزښت جدول

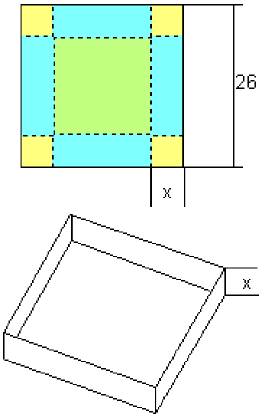
x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

خورا کم د لګښتزیاتوالی(لګښتجګېدنه) د پارابول $K'(x)$ په ککره(څوکه) کې پروت دی، یعني هلته چې تانجنت $K'(x)$ پروت یا افقي دی

$$K'(x)=3x^2-18x+40 \Rightarrow K''(x)=6x-18$$

دد تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره:

$$K''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-18=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=3}}$$



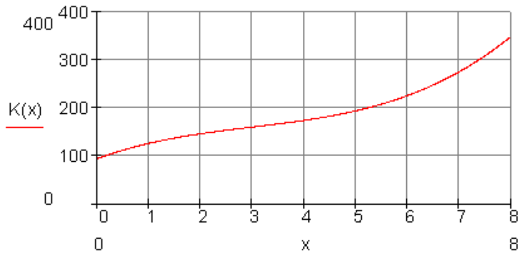
پوښتنې: دې، مربع کارتون(د کلک کاغذ ټخه جوړ)څخه، چې 26 سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، چې د x جګوالی لري.

الف: د یوه تابع ترم وټاکئ، چې د بګس حجم(ډکی) v د x په واکوالي یا تابعیت کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښايي.

ب: ګراف وکاږئ او په نردې توګه يې
ماګسيما(خورا جګ) حجم و ټاکئ.

د يوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع) $K(x)$ د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړيکې انځوروي، داسې چې $x=1$ د 100 ناروغانو معنی او $y=1$ دی معنی چې $tan/\in 1000$ د روځې زر يورو ($tan/\in 1000$). $K(x)=x^3-9x^2+40x+94$	

الف: د مصرف تابع په خپله کتابچه کې وليکئ.

ب: د لګښت تابع مشتق د مشتق لګښت (-مصرف) يا دحدمصرف په نامه ياديږي. تاسو د لګښت زياتېدنه د ناروغانو په واکوالي يا تابعيت کې تشريح کړئ.(د $K(x)$ جګېدونه).
$K'(x)$ وټاکئ او ګراف يې په وضعيه سيستم (پروت- ولاړ-سيستم) کې انځور کړئ)

پ: د ناروغانو د کوم تعداد سره د لګښت زياتوالی خورا کم دی؟ دا قېمتونه وشمېری.

ټولګه:

د رول(Rolle) قضيه:
يوه د f تابع دې په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز اينټروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه يوځاي $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قيمت) قضيه:
که $y=(x)$ تابع په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي

(c) ketabton.com: The Digital Library

او په واز اينټروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو   ځيره په نوټ کې ده،
هلته يوځای (a,b) $x\in$ شته دی، د کوم لپاره چې

لرو: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$

پراخه شوې منځقضيه:
که $u=f(x)$ او $v=g(f)$ په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اينټروال (a,b) کې مشتقوړاو $g'(x)\neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه يوځای $x_0\in(a,b)$ وجودلري چې لاس ته ترې راځي: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

قضيه:
د $f(x)$ تابع دې په انټروال Iکې مشتقوړ وي.

2. که د $f(x)$ تابع په اينټروال Iکې مونوټون جګېدونکي وي، نو باور لري: $f'(x)\geq 0$ د ټولو $x\in 1$لپاره
- که $f(x)$ په اينټروال کې همغړيزټيټېدونکي وي، نو باور لري: $f'(x)\leq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره.
- که $f'(x)\geq 0$ وي، دټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينټروال I کې همغږيز جګېدونکي ده.
- که $f'(x)\leq 0$ وي د ټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينټروال Iکې همغږيز ټيټېدونکي ده.
- که $f'(x)>0$ وي ، د ټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينټروال I کې په کلکه همغږيزجګېدونکي ده.
- که $f'(x)<0$ وي د ټولو $x\in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اينټروال Iکې په کلکه مونوټون ټيټېدوني ده.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x)=0$ ولرو نو يو نسبي ټيټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x)=0$ او $f''(x)>0$ ولرو نو يو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ددې برعکس ولرو: $f'(x)=0$ او $f''(x)<0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x)=0$ وي، او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پرېکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د $x=x_0$ په چاپېریال کې د $y=f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري: $f(x)\le f(x_0)$ په همدې ډول $f(x)>f(x_0)$

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):   که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y=f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x)=0$

دا جمله موږ ته وایي: چیرته چې $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغي لپاره لرو $f'(x)=0$ ، خو حمتي نه ده چې $y=f(x)$ دې یواکستریموم و لري.

جمله : (د یوه بحراني ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x=x_0$ کی دوه واره مشتقوړ $y=f(x)$ تابع لپاره ولرو: $f'(x)=0\ ,\ f''(x)\neq 0$
نو تابع $y=f(x)$ هلته یو بحراني ټکی لري.

خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x)>0$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x)<0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پېژند: په یوه چاپېریال $x = x_0$ کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ یو کینې- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کینې- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):
که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ اکستریموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وایي: چیرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره $f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملې استعمال

پیژند: د زینټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:

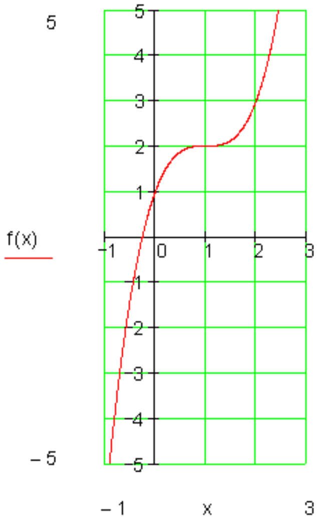
د پرتلې لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري

په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط):
که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

زینټکی(د اس زین) **<u>Der Sattelpunkt</u>**

(c) ketabton.com: The Digital Library



د انعطاف ټکي يو ځانګړی حالت زينتکی دی. دا د انعطاف ټکی دیَ د صفر جګېدني سره.که د کيڼ لور ورتزدې شو فکر کېږي، چې، نسبي جګتکی مو مخ ته پروت دی
که ښوک د ښي لور ور نژدې شي فکر کوي، چې يو نسبي ټيټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د رياضياتو له لورې ځېړو:
مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = 1$$

د برنولي او د دې لو، پيتال قاعده:
که توابع $u = f(x)$ او $v = g(x)$ د يوه $U(x_0)$ چاپيريال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x) \neq 0$ سره او د ټولو $x \in U(x)$ لپاره او x_0 د f ا و g يوصفرځاي وي،
د $f(x_0) = g(x_0) = 0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,
ترڅو په ښي لور حد شته وي.
په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

د ځېرکي تمرينونه:

١ -- د لاندې ماتراشنل توابعو د مونوتوني حالت د د a په واکوالي کې ورکړئ.

$a)\;\; f(x) = \frac{1}{ax + 2}$ $\qquad$ $b)\;\; f(x) = \frac{1}{ax^2 + 1}$

٢ -- و ځېرېږئ، چې ايا لاندې توابع په خپله پيژند ورشو مونو ون او که په کلکه مونوتون دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x) = \frac{e^x}{2+e^x}$ $\qquad$ $b)\ f(x) = 2x^5 - 7$

۳ -- لاندې ناراشنل توابع په يوغړيزوالي خويونو وڅېړ.

$a)\ f(x) = e^{x^2}$ $\qquad$ $b)\ f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$

٤ -- د لاندې توابعو ټول لوکال افراطي ټکي پيداکړئ.

$a)\ f(x) = e^{-4x^2}$ $\qquad$ $b)\ f(x) = (x^2-3)\cdot e^x$

$c)\ f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $\qquad$ $d)\ f(x) = \ln(x^2+1)$

٥ -- د تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دې په دې په لاندې انتروال کې ولټول شي.

$-2\pi \le 2\pi.$

$a)\ f(x) = \sin^2 x$ $\qquad$ $b)\ f(x) = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2})$

٦ -- لاندې توابعو ټول لوکال او ګلوبال افراطي ځايونه پيدا کړئ.

$a)\ f(x) = \sqrt{x^2+x}$ $\qquad$ $b)\ f(x) = \sqrt{x^2+3}$

$c)\ f(x) = x - \sqrt{x}$ $\qquad$ $d)\ f(x) = 3 + \sqrt[3]{x^2}$

۷ -- لومړی دمطلق ارزښت وشمېرئ او پسې ټول افراطي ارزښتونه وټاکئ.

$a)\ f(x) = |x| + x^2$ $\qquad$ $b)\ f(x) = |x^2 + 2x - 8|$

۸ -- د f تابع د $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x-1)^2}, x \neq 1$ سره د انعطاف ټکي بيداکونه

۹ -- د x1=1 او x2=2 لپاره تابع ارزښتونه وشمېرئ او هم د f تابع جګېدنه د $f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1.$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۰ -- په صفرځاي کې $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ تابع کومه جګېدنه لري.

۱۱ -- د $f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 0,5x^2 + x - 4$ ګراف په کومو ټکو کې جګېدنه لري.؟

۱۲---- د $x0=-1$ ځاي کې د $f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x - 1}, \quad (x \neq 1)$ تابع ارزښت اود ګراف جګېدنه غواړو پیاکړو

۱۳ -- د لوپیتال قاعدې په مرسته د $x \to \infty$ لپاره د لاندې مات ریښتوني توابعو پوله ارزښتونه وشمرئ.

$$a)\ f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1} \qquad b)\ f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$$

۱٤ -- د لاندې توابعو لپاره د منحنیو شننیز بحث وکړئ او ګرافونه یې و کاږئ.

$$a)\ f(x) = -x^3 + x^2 + 4 \qquad b)\ f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

$$c)\ f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \qquad d)\ f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

۱۵ -- د لاندې توابعو لپاره د پوره منحنیو مطالعه وکړئ او ګرافونه یې و کاږئ.

$$a)\ f(x) = \frac{x}{4} - \frac{2}{x^2} \qquad b)\ f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$$

$$c)\ f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} \qquad d)\ f(x) = \frac{9}{x^2 + 3}$$

۱٦ -- د لاندې توابعو صفرځایونه وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3$　　$b)\ f(x)=x^4-2x^3-13x^2+14x+24$

$c)\ f(x)=x^3-6x^2+8x$　　$d)\ f(x)=x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{12}$

$e)\ f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$　　$f)\ f(x)=x^4+6x^3-11x^2-60x+100$

۱۷ -- د دریمې درجې تام راشنل ګراف د x -محور د x1=-2 , x2 = 0 او x3=4 په ټکو کې غوڅوي.

د تابع مساوات کوم دي، که سربېره پر دې ګراف د P(2,-8) ټکي څخه هم تېر شي؟

۱۸ -- د یوه څلورمې درجې تام راشنل تابع د x - محور د x1=0,5 او x2=3 په ټکو کې غوڅوي. د تابع برابرون څنګه دی، که پرسېره پردې ګراف د y - محور د P(0,9) په ټکي کې هم لمس کړي.

۱۹ -- د څلورمې درجې د یو تام راشنل تابع ګراف د وضعیه قیمت سیستم پیل او له $P(\frac{1}{2}/-\frac{15}{8})$. ټکي تېرېږي. د تابع مساوات څنګه دي، که ګراف د x– محور هم د x1=-1 سره لمس کړي او په x2 = 2 کې غوڅ کړي.

۲۰ -- د لاندې توابعو صفرځایوه پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\frac{x^2+2x-15}{x+4}$　　$b)\ f(x)=\frac{x^3+2x^2-4x-8}{x}$

$c)\ f(x)=\frac{x^3-x^2-5x-3}{x-0.5}$　　$d)\ f(x)\frac{x^4-x^3+4x^2-4x}{x+5}$

۲۱ -- د یوه مات راشنل f تابع د $f(x)=\frac{x^3+ax^2+bx+c}{x+d}$, سره ثابتې a,b,c او d پیداکړئ، که د x1=-2,x2=-(1:2) او سره صفرځایونه پراته وي او تابع په x=0 کې یو تشځای ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = \frac{(x-1)^3}{x}, \quad (x \neq 0)$

۲۳ -- مات یا کسري راشنلf تابع په x1=1 کې د سره درې ځله صفرځاي لري.

د یوې ساحې د ویش په مرسته وڅېړئ چې په همدې څلورمه(ربع) کې صفرځاي کې ځغلي او که صفرځاي څلورمه بدلوي.

۲٤ -- دا سې یو ترم وټاکئ، کوم چې د لاندې پریودیکي یا تل بېرته راګرځېدوني توابعو صفر ځایونه ورکوي.

$-2\pi \leq x \leq 2\pi$

د شمېرنې له لارې صفرځایونه ونوموئ، چې په انتروال کې پراته وي.

$$a)\quad f(x) = \frac{1}{2}\sin 3x \qquad b)\quad f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$c)\quad f(x) = 1 - \sin^2 x \qquad d)\quad f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$$

۲٦ -- ولې لاندې توابع صفرځایونه نه لري؟

$$a)\quad f(x) = \ln(x^2 + 3) \qquad b)\quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$c)\quad f(x) = \frac{e^x}{x+1} \qquad d)\quad f(x) = 1 + \sin^2 x$$

۲۷ -- ولې کېدی شي چې یو تابع ډېر صفرځایونه ولري، مګر د y - محور سره یواځې یو صفرځاي ولري؟

۲۸-- د صفرځایونو د تعداد په هکله څه ویلاي شئ، که د یو f تابع لپاره په تعریفستډ(-ډېرۍ) کې یو f^{-1} معکوس تابع هم شته وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۹-- د y - محور سره د لاندې توابعو غوختکي وشمېرئ.

$a)\ f(x)=x^3+2x-1$ $b)\ f(x)=(x+1)\cdot\ln(x+1)$

$c)\ f(x)=\frac{x^4-3x^2+x}{x+2}$ $d)\ f(x)=\frac{4}{\sqrt{x^2+9}}$

$e)\ f(x)=(x-2)\cdot e^{x-1}$ $f)\ f(x)=e^{\frac{2}{1-x}}$

۳۰-- د یوه تام راشنل تابع $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

د $a_0\neq 0$ سره کېدی شي د y-محور غوښتکي د ساده لوستلو له لارې و ټاکل شي.

په دې هکله دلایل راوړئ.

۳۱-- د x1=1 او x2=2 لپاره تابع ارزښتونه وشمېرئ او هم د f تابع جګېدنه د $f(x)=x^4-2x^3-x+1.$ سره.

۳۲--په صفرځاي کې $f(x)=x^3-x^2-2x$ تابع کومه جګېدنه لري.

۳۹-- په کومو ځایونو کې لاندې توابع پروت تانجنت لري؟

$a)\ f(x)=x^2e^{-x}$ $b)\ f(x)=\ln(x^2+1)$

۴۰-- د a د کومو ارزښتونو لپاره د $f(x)=(x+a)\cdot e^x$ د ګراف د $x_0=0$ په ځاي کې ۲ جګوالی لري؟

۴۱د لاندې توابعو ټول ځایزې(لوکال) خوراجګ ټکي وښایاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ $\qquad$ $b)\ f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+1$

$c)\ f(x)=4x^3-18x^2+15x+7$ $\qquad$ $d)\ f(x)=x^4-4x^2+5$

$e)\ f(x)=x^5-5x^3-20x$ $\qquad$ $f)\ f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{10}{3}x^3+6x^2-2$

٤٣-- د n-مې درجې يو تام راشنل تابع خورا زيات څومره لوکال (ځايز) افراطي ځايونه لرودی شي؟

٤٤-- ولې د جګتکي لپاره شرايط و $f''(x)<0$ اړيين نه دي؟

٤٥-- د لاندې توابعو لوکال(ځايز) انحرافي(افراطي) ځايونه وټاکئ.

$a)\ f(x)=\frac{2}{3}x^3+4x^2+8x-1$ $\qquad$ $b)\ f(x)=\frac{1}{3}x^4+1$

$c)\ f(x)=\frac{1}{3}x^4-2x^2+\frac{8}{3}x$ $\qquad$ $d)\ f(x)=x^4-4$

٤٧-- د f تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دې په دې په لاندې انتروال کې ولټول شي.

$-2\pi\leq 2\pi.$

$a)\ f(x)=\sin^2 x$ $\qquad$ $b)\ f(x)=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2})$

٤٨-- لاندې توابعو ټول لوکال او ګلوبال افراطي ځايونه پيدا کړئ.

$a)\ f(x)=\sqrt{x^2+x}$ $\qquad$ $b)\ f(x)=\sqrt{x^2+3}$

$c)\ f(x)=x-\sqrt{x}$ $\qquad$ $d)\ f(x)=3+\sqrt[3]{x^2}$

--- د fتابع د $x\neq 1$, $f(x)=\frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$سره د انعطاف ټکي بيداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵۳-- په انتروال $0 \le x \le 2\prod$ کې د انعطاف ځایونه پیداکړئ.

a) f(x) = x + sinx b) f(x) = 2(1-sin2x)

٥٤-- لاندې توابع په x_0 کې په مشتقوړتیا باندې وڅېړئ.

$$a)\ f(x)=\begin{cases}\cos x & x\le 0\\ x^2+1 & x>0\ ,\quad x_0=0\end{cases}\qquad b)\ f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ x^2 & x\ge 1,\ x_0=1\end{cases}$$

$$c)\ f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ e^{x-1} & x\ge 1\ ,\ x_0=1\end{cases}\qquad d)\ f(x)=\begin{cases}\ln x & x\le 1\\ x-1 & x>1\ ,\ x_0=1\end{cases}$$

٥٥-- ولې متمادیت د مشتقوړتیا لپاره اړین شرط، مگر مشتقوړوالی د متمادیت لپاره پوره کېدونکی شرط دی؟

٥٦-- په کوم دلیل تام راشنل توابع د $x\in R$ لپاره مشتقوړ دي؟

٥٩-- و څېړړئ، چې ایا لاندې توابع په خپله پېژند ورشو مونو ون او که په کلکه مونوتون دي.

$$a)\ f(x)=\frac{e^x}{2+e^x}\qquad b)\ f(x)=2x^5-7$$

٦١-- په کومه ورشو کې لاندې تام راشنل توابع یو کښې کږوالی لري او په کون کې بنی کږوالی لري.

$$a)\ f(x)=x^3-6x^2+5x+2\qquad b)\ f(x)=-2x^3+3x^2-x-4$$

٦٢--د لاندې مات توابعو گرافونه هاپیاربول دي. د هاپارابول څانگې کوم کږوالی لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \ f(x)=\dfrac{1}{4x+1}$ $\qquad b)\ \ f(x)=3-\dfrac{3}{x^2}$

٦٤-- ولې د يوه دريمي درجې تام راشنل تابع ګراف په ټل تلنه کې يوه بنئ انخنا(کږوالی) نه لري.

٦٥ ولې يو څلورمه درجه تامراشنل تابع د $f(x) = ax^4 + dx + e$ سره يو تلتلونی کينه انخنا(کږوالی) او بنئ انحنا لري؟

١٥٨(١٠٣): څنګه کېدی شي، چې د يوې f تابع د ١ . درجې مشتق څخه د ګراف په انخنا قضاوت وکړو؟

١٦٠(١٠٥): د لاندې توابعو حالت وڅېړئ، که $|x| \to \infty$ په لور لاړ شي.

$a)\ \ f(x)=x^3-4x^2-4x-5$ $\qquad b)\ \ f(x)=-3x^4+x^3-2x^2+x$

$c)\ \ f(x)=\dfrac{1}{3}x^5-x+6$ $\qquad d)\ \ f(x)=-\dfrac{2}{5}x^2-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{4}{5}$

$e)\ \ f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{5}{2}$ $\qquad f)\ \ f(x)=-x^3-x^2-x-\dfrac{1}{3}$

١٦٣(١٠٨):ولې د $x \to +\infty$ لپاره په ساده ډول د پولې په هکله وړاند وينه نه شي کېداي:

$a)\ \ f(x)=x^3\cdot\dfrac{1}{\ln x}$ $\qquad b)\ \ f(x)=x\cdot e^{-x}$

١٦٧(١١٢): د جوړه(جفت) جګعدد(اکسپوننت) سره تام رينتونی تابع کوم ډول سيومتري لري؟

١٦٨(١١٣): د ناجوړه(طاق) جګعدد(اکسپوننت) سره يو تام رينتونی تابع ټيک هلته د سر چينې سره ټکی سيومتري دی، چې مطلق ارزښت صفر شي؟

١٧١(١١٦): لاندې توابع په بنسټ کې لوستل شوي سيومتري خويونه نه لري. وښايئ چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سره له دې هم سیومتریک دي.

$a)\ f(x)=(x+2)^2 \qquad b)\ f(x)=1+\frac{1}{x}$

$c)\ f(x)=-(x+1)^2+3 \qquad d)\ f(x)=2+\frac{1}{x-4}$

۱۷۲۱۷): لاندې تام ريښتوني اعداد په محدوديت وڅېړئ.

$a)\ f(x)=x^2-2x+4 \qquad b)\ f(x)=3x^4-4x^3+12x^2-24x$

$c)\ f(x)=-(x+3)^2+1 \qquad d)\ f(x)=x^3-2x+1$

۱۷٦(۱۲۱): د لوپيتال قاعدې په مرسته د $x\to\infty$ لپاره د لاندې مات ريښتوني توابعو پوله ارزښتونه وشمرئ.

$a)\ f(x)=\frac{2x^3-x+4}{3x^3+1} \qquad b)\ f(x)=\frac{x^2+2x-3}{4x^3+3x^2-2x+5}$

۱۷۸(۱۲۳): د لاندې توابعو لپاره د x=x0 په ځاي کې د تانجنت مساوات وټاکئ

۱۷۹(۱۲٤): په کومو ټکو کې د لاندې مساواتو لپاره د تانجنت مساوات د ورکړ شوې کربښې سره غبرگ دي؟

۱۸۸(۱۳۳):د لاندې تام ريښتوني توابعو د انعطاف ټکي(اوړونټکي) او د نورمالي مساوات وليکئ.

$a)\ f(x)=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3} \qquad b)\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+2x+10$

۱۸۹(۱۳٤) د f_t تابع د انعطاف ټکي مساوات وليکئ.

$$f_t(x)=\frac{4}{3}t^2x^3+3tx^2+3x \quad (t\in \mathbb{R}\setminus\{0\})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۹۲(۱۳۷): د لاندې توابعو لپاره د منحنيو شننيز بحث وکړئ او ګرافونه يې و کاږئ.

$$a)\ \ f(x) = -x^3 + x^2 + 4 \qquad b)\ \ f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

$$c)\ \ f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \qquad d)\ \ f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

په ټوټه ماتونو يا کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرج يې مختلف لاينيز ضريبونه لري.

بنسټ: که د يوه اصلي پولينوموېش $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ په مختلفو کربنيزو(لايني) ضريبونو $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ ...\ (x - x_n)$ ټوټه کېدونکی وي، نو پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3}\ \ ...\ \ \frac{N}{x - x_n}$$

داسې يوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه،، بلل کيږي، چې A,B,C,...,N حقيقي عددونه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت: په پورته ننوتنه کې و ښایاست، چې دا ټوټه کسرونه چېرته تعریف لري؟

-- د یوه په خوښه پولینوم کسر ټوټه ونه او د تعریف ساحې ورکړئ.

بیلګه: اصلي پولینوم کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسر ټوټه کړئ.

حل: د مساوات $x^3-4x^2-7x+10=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمایښت له لارې ځیرو .

د پولینوم ویش(لنډ: پولینوموېش) $(x^3-4x^2-7x+10):(x-1)=x^2-3x-10$ مو ټوټه ونې ته بیایي $x^3-4x^2-7x+10=(x^2-3x-10)(x-1)$ مساوات $x^2-3x-10$ اوس $x_2=-2$ او $x_3=5$ حلونه لري.

له دې امله $x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$ دی.

د اصلي کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمیرنو قاعدې له مخې کیدی شي ورکړ شوی پولینوم په درې جمعی برخو ټوټه شي، چې مخرجونه یې لاینیز (کرښیز-)ضریبونه دي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولینوم مخرج دی.

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{x^3-4x^2-7x+10}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{x^3-4x^2-7x+10}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دصورتونو ارزښت A ,B او C ټاکنه د ضريبونو د پرتلې له لارې:

د مساوي مخرجونو کسرکې بسيا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته بايد د مساوي توانونو ضريبونه، دا په دې مانا چې د x^2, x او x_0 بايد مساوي وي.

$$A + B + C = 4 \qquad \text{I}$$
$$A - 3B - 6C = -1 \qquad \text{II}$$
$$-2A - 10B + 5C = 39 \qquad \text{III}$$

د فاکټور 2 سره د I او II مساوات ضربونه او د هر يوه جمع د III سره پورته درې مساوات سيستم و دوه مساواتسيستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$-8B = -72 \qquad \text{V}$$
$$-16B - 7C = -41 \qquad \text{IV}$$

د مساوات IV.V څخه لرو: $-24B = -72 \Rightarrow B = 3$

د $B = 3$ په V کې اېښوونه: $-16.3 - 7C = -41 \Rightarrow C = -1$

د$B = 3$ او $C = -1$ په I کې اېښوونه: $A + 3 - 1 = 4 \Rightarrow A = 2$

په ټوټه کونې فرمول کې اېښووني سره غوښتونکی ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x-5} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

ازمايښت:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+2) + 3(x-5)(x+2) - 1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)} = \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرينونه:

د لاندې اصلي پولينومکسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کړئ.

$$a)\ \frac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x+6}\ ,\ b)\ \frac{x^2+1}{x^3-x}\ ,\ c)\ \frac{4x+10+12}{x^2+6x+8}$$

ب) اصلي پولينوم کسرونه، چې مخرج يې مساوي لاينيز(کرښيز) فاکتورونه لري.

که د يوه اصلي پولينوم $P_n(x)$ مخرج $\frac{P(x)}{P_n(x)}$ د کرښيز فاکتور $x-x_0$ توان $\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^n}+...+\frac{N}{(x-x_0)^n}$ وي، نو ددې کرښيزو فاکتورونو له پاره پولينوم لاندې بڼه لري:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کرښيزو فاکتورونو ټوټه کسرونو په بلده بڼه ورکول کيږي.

بيلګه:

د اصلي پولينوم کسر $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کرښيزو فاکتورونو:

د پولينوم $x^3-4x^2+5x-2=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمايښت له لارې پيدا کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم ویش $(x^3-4x^2+4x-2):(x-1)=x^2+3x+2$ مو لاندې ټوټه کونې ته لاربښودوي:

$$x^3-4x^2+4x-2=(x^2+5x-2)(x-1)$$

مساوات $x^2-3x+2=0$ دا $x_2=1$ او $x_3=2$ حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره ډېل حل دی:

$$x^3-4x^2+5x-2)=(x-2)(x-1)^2$$

د ټوټه کسر پیل:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزونې له لارې:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{x^3-4x+5x-2}$$

د A,B او C صورتونو ارزښت د ضریبونو پرتله کونې له لارې.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-2A-3B+C=-6 \qquad \text{II}$$
$$A+2B-2C=2 \qquad \text{III}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره ګډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-3A-4B=-10 \qquad \text{II}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دI ضرب له 4 سره او جمعه یې له IV سره : A = 2

د A = 2 ایښوونه په I کې: $2 + B = 3 \Rightarrow B = 1$

د A = 2 او B = 1 ایښونه په III کې: $2 + 2.2 - 2C = 2 \Rightarrow C = 1$

د ټوټه کونې فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

تمرینونه:

د لاندې اصلي پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$a)\ \frac{3x^2 + 5x + 10}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$ $\qquad b)\ \frac{3x^2 - 18x + 36}{x^3 - 6x^2 + 9x}$

$c)\ \frac{x^2 + 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1}$ $\qquad d)\ -\frac{x^2 + 13x + 10}{x^3 - 5x^2}$

پ) اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج یې پوره په کرښیزو فاکتورونو نه ټوټه کیږي.

بنسټ:

که د یوه اصلي پولینوم کسر $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولینوم $P_n(x)$ نور په یوه حقیقی ضریب نه ټوټه کیدونکي ضریب ax²+bx+c مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کیدو کې دې د یو ټوټه کسر $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$ په بڼه دې کینول شي یا راوړل شئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

د پولینوم کسر $\dfrac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ له پاره دې په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرج ټوټه کونه په کرښیزو ضریبونو:

لومړی حل دې $x_1=-1$ وي مساوات $x^3+3x^2+6x+4=0$ د ازماېښت له لارې پیدا کیږي.

بولینوم وېش $(x^3+3x^2+6x+4):(x+1)=x^2+2x+4$ مو لاندې ټوټه کونې ته بیایي:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

دا چې مساوات x^2+2x+4 حقیقي حل نه لري، نو د حقیقي اعدادو په ورشو کې نوره ټوټه کونه ناشونې ده.

نو له دې امله پولینوم کسر لاندې بڼه لري:

$$\frac{Ax}{x^2+2x+4}$$

د $\dfrac{c}{x+1}$ بڼې کسر سره یوځای مو لاندې ټوټه کسر ټوټه کونې ته بیایي:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمع

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضریبونو A,B,C تاکنه د پرتله کولو له لارې:

A+C = 5 I

A + B + 2C = 8 II

B + 4C = 9 III

د III کمښت (تفریق) له مساوات II څخه د I سره یي ګډولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اووښتوني یا متحولې لري:

A – 2C = 5 IV

A + C = 5 I

مساواتIII منقي مساواتII :

د C = 2 په Iائښوولو سره :

د C = 2 په III ایښوولو سره:

که دا د ټوټه کوني فرمول کې کېږدو نو د توټهکسر ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

تمرینونه:

د لاندې اصلي کسري پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړی:

$a)\ \frac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$

$c)\ \frac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x}$ $d)\ \frac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ج) نا اصلي پولينوم کسرونه:

که د يوه پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د صورت درجه د پولينوم د مخرج له درجې څخه لويه وي،
نو دا د پولينومويش له لارې په ټولناطق کسر او يوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بيلګه:

کسري پولينوم $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ په ټوټه کسري پولينومونو ټوټه کړئ .

د پولينوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو يو نا اصلي پولينومکسر مخ ته پروت دی.

پولينوم وېش:

$$(3x^3-6x^2-20x-1):\ (x^2-2x-8)=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$$

$$\frac{-(3x^3-6x^2-24x)}{4x-1}$$

د پاتې کسر $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$ له پاره د ټوټه کسر ټوټه کونې کارونه (عمليه) مخ ته بيايو.مخرج په کرښيزو ضريبونو ټوټه کوی:

د مساوات $x^2 - 2x - 8 = 0$ له پاره حل $x_1=-2$ او $x_2=4$ لرو.

نو $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

د ټوټه کسر ټوټه کونې لپاره ځای په ځاي کوو: $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمعه کول:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$
$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

د ضريبونو د پرتله کوونې په مرسته د A او B ټاکل:

$$A+B=4 \qquad \text{I}$$
$$2A-4B=4 \qquad \text{II}$$

د I ضرب له 2 سره او له II څخه يې تفريق يا کول $6B=9 \Rightarrow B=\frac{3}{2}$

په II کې اېښوول: $2A-4\frac{3}{2}=-1 \Rightarrow A=\frac{5}{2}$

منځنی لاس ته راوړنه $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{(2(x+2)}$

متحول (ښتونکی) په ټوټه کسر ټوټه کونه لاندی بڼه غوره کوي:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

پوښتنې د لاندې پولينومکسرونو په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

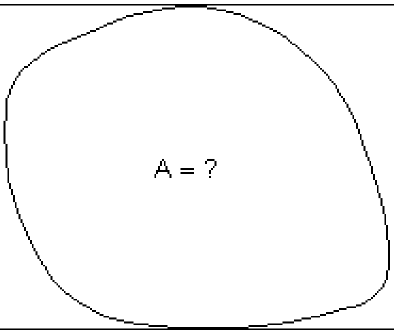
$a)\ \frac{3x^2+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8}$ $\qquad b)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$

$c)\ \frac{2x^3+x^2}{x^3-1}$ $\qquad d)\ \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرالشمیرنې لپاره پیل راوړنې

پخوانیو یونانیانو ته دا د منحني څخه رابندې سطحې شمېرلو اصول معلوم وو.
دا دمشتق شمیرنه، چې مونږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پیړۍپاي کې) د طبیعي علومو پوهانو د لایبنیځ او نیوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.



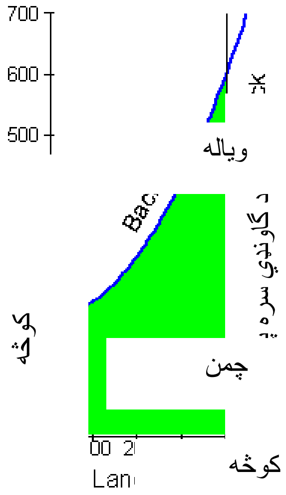
فعالیت:

- د پورته رابندې څېرې د سطحې د شمېرلو له پاره وړاندیزونه وکړی.
- ایا تاسو د داسې سطحې شمېرلو سره بلد یاست ؟
- ایا تاسو دې ته ورنږدې سطحې مساحت شمېرلی دی؟ او که هو نو هغه ولیکی.
- داپورته سطحه د وضعیه قیمت سیستم له لارې په څلورو نږدې برابرو برخو وویشئ او د انتیګرالونې په هکله یې فکر وکړئ.

بیلګه

دا څیره شوی چمن خرڅیږي. له پورته لور د ویالې را بند دی او له ښي لور د ګاونډي ځمکه ده او کیڼ لور ته کوڅه او له کښته لور هم د یوې کوڅې را بند دی.

ددی لپاره چې چمن وپلورل شي، باید سطحه وپیژندل شي. د پلورونکی لپاره سطحه باید نژدې پوره مګر هیڅکله کمه ونه شمیرل شي. اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پیسې باید ورکړي، خو هیڅکله ځمکه د اصل څخه زیات ونه شمپیل شو.

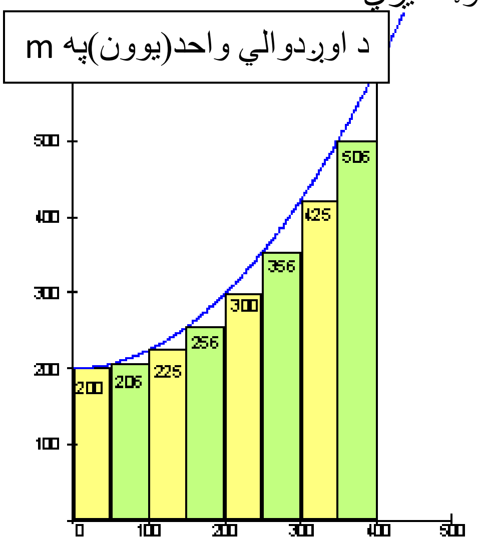


(c) ketabton.com: The Digital Library

وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

ویاله $f(x)=\frac{1}{400}x^2+200$ د تابع مساوات لري.

د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

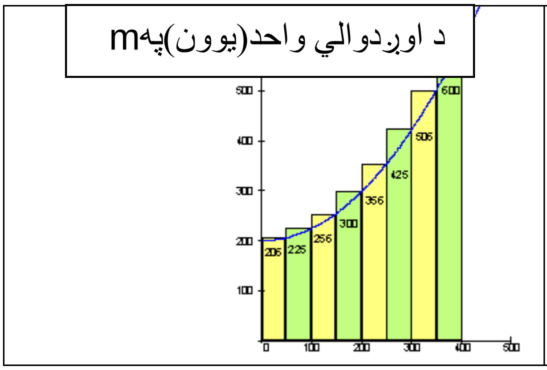
هره ټوټه(مستطیل پټی) 50m سره وره ده او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو، سطحه یو ځای شمیرو. $200\cdot 50=10000$ $206\cdot 50=10300$ $225\cdot 50=11250$ $256\cdot 50=12800$ $300\cdot 50=15000$ $256\cdot 50=12800$ $425\cdot 50=21250$ $506\cdot 50=25300$ $\underline{123700}$	ځمکه په لاندې ډول په اوږدو ټوټو(پټیو) ټوټه کیږي 

د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نږدې ***123700 m²*** ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره ټوټه(پټی) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یوځای شمېرو.	

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$206 \cdot 50 = 10300$$
$$225 \cdot 50 = 11250$$
$$256 \cdot 50 = 12800$$
$$300 \cdot 50 = 15000$$
$$356 \cdot 50 = 12800$$
$$425 \cdot 50 = 21250$$
$$506 \cdot 50 = 25300$$
$$600 \cdot 50 = 30000$$
$$\underline{143700}$$

د د پلورونکي له پاره د تولې سطحې مساحت نزدې $\boldsymbol{143700\ m^2}$ دی.
اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قیمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعني د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700 + 143700}{2} = 133700\ unt^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انتیګرال برخه (په مخ) کې وشمېرو، چې رینتونی ارزښت یې $133333.\bar{3}m^2$ دی.
د اخستونکي په بیلګه کې دا ډول شمیرنه **لاندنۍ** ،،**جمعي جوړول**،، بلل کیږي.
د پلورونکي په بېلګه دا ډول شمیرنه،، **پورتنۍ جمعي**،، **جوړول** بلل کیږي.
دا د سطحې رینتونی ارزښت یو چیرته په دا منځ کې پروت دی.
باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې رښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

پوښتنې

د $3x^2+1$ تابع ګراف وکاږئ.

د انتروال $[1,3]$ ترمنځ د تابع سطحه به نخښه کړئ.

د دې ورکړ شوې سطحې پورته جمعه جوړه کړئ

د دې ور کړ شوې سطحې کښته جمعه جوړه کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتيګرالشميرنه Integralcalculation

د سطحې تابع له پاره تر مخ راوړنه: دا دانتيګرال هندسي مفهوم هم دی. په کارتيزي وضعيه قېمت سيستم کې د ګراف په سرچينه کې يوه کرښه رسموو.غواړو سطحه پيداکړو، چې د تابع دګراف او x - محور ترمنځ د x په واکوالي کې پرته وي.

د ريمن (ټاکلی) انتګرال

دلته دې يوه څېره راوړل (د يوه ډنډ او يا.....)

فعاليت:

- يوه په خوښه هندسي څېره وکاږئ، چې په ترتيب له درې، پنځو او اوو کرښو رابنده وي. د دې څېرو سطحه په ورسره بلد ډول وشميرئ.
- په يوه د وضعيه قيمت سيستم کې يوه کږه(منحني) وکاږئ او وهڅيرئ، چې سطحه يې په ورنزدې ډول پيدا کړئ چې د x محور او منحني ترمنځ پرته وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: انتیگرال څه شی دی؟

آنتیګرال کونه Integration د ورګډېدلو په معنی دی ، لکه چې یو څوک یوې پردۍ ټولنې ته ورګډیږي یعنې ددې پردۍ ټولنې خویونه خپلوي، یعنې دی په دې ټولنه ورزیاتیږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څیړلو ته وړاندې کیږي، چې څنګه د یوې کوچنی درجې تابع و یوه جګ درجې تابع ته ځي.

د انتیګرال هندسي تعریف:

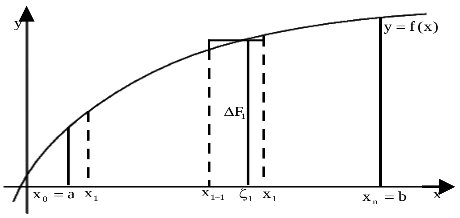
لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:

که یوه f تابع ولرو، نو د x مخور او تابع ترمنځ سطحې شمیرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښخ لري.

تحلیلي تعریف:

تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انتروال [a,b] باندې تعریف دی، نو د a څخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

په دې برخه کې غواړو، چې د انتګرال کلیمې ته وده ورکړو. د سطحې کچونې یا اندازه کوونې څخه کړی شو د انتګرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتګرالنیول د مشتق په څټ یا برعکس کارونه یا عملیه ده.

	یو تابع y = f(x) لرو. غواړو ددې تابع د ګراف او د x – محور باندې پرتو ټکو او ترمنځ هواره (سطحه) وشمیرو داسې چې (f(x)>0) وي. (څیره ۱ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې دندې د حل لپاره د [a,b] اينتروال په n (نه اړيين) برابرو برخو انتروالونو $[x_{i-1}, x_i]$ټوټه کوو.

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} x_i < \ldots < x_n = b$$
$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اينتروال $[x_{i-1}, x_i]$ کې په خوښه$\xi_l \in [x_{i-1}, x_i]$ ټاکو.

د $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$ تر منځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطيل سطحه (و لاړکونجيزه هواره) ده:

$$\Delta F_i(x) = f(\xi_l).\Delta x_i ;\ldots\ldots\ldots\ldots(4,1)$$

د ټولو پورته مستطيل ډوله کوچنيو سطحو د جمعې (زياتون) له لارې غوښتونکې، نږدې ټوله سطحه لاس ته راځي:

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum f(\xi) \Delta x_i ;\ldots\ldots\ldots\ldots(4,2)$$

دا نږديوالی تر هغې بنه کيږي خومره چې د اينتروال [a , b] ويش نری شي يعني $\max \Delta x \to 0$، هرخومره چې د زياتيدونکو شمير ($n \to \infty$) شي.

که (٤ . ٢) تل همغه پوله ارزښت F ولري، په دې اړه نه چې اينتروال [a , b]څنګه ويشل شوی او $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ څنګه ټاکل شوي، نو f (x) په اينتروال [a,b] کې اينتيګرالوړ دی. دا د بيلګې په توګه د ټولو ټوټه، متمادی او محدودو توابعو y = f (x) حالت دی .

پيژند (تعريف ٤ . ١) : که ليميټ

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F; (\max \Delta x \to 0), \ldots\ldots(4,3)$$

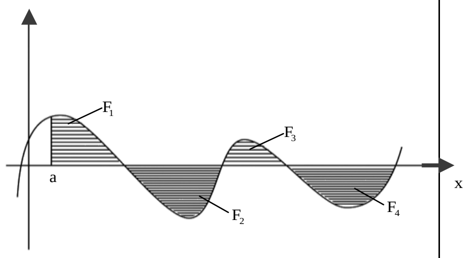
(c) ketabton.com: The Digital Library

په اینتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینتیګرال بولو، یا د ریمن سطحه F- Riemann . دلته a د اینتیګرال کیدونکې لاندې(کښته)پوله او b د ایتیګرال کیدونکې پورته پوله بلل کیږي او [a,b] د ایتیګرال کیدونکې اینتروال او f (x) (Integrand) (اینتیګرالیدونکی) او x د اینتیګرال کېدونکې متحول (Integrationsvariable) بلل کیږي

یادونه ۱ : د ایتیګریشن واریابله یا اووښتونی کیدی شي په خپله خوښه په نخښه شي(مخښه یا علامه یې په خوښه وټاکل شي).

موږ لرو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\;dt = \int_a^b f(u)\,du$

یادونه ۲ : دا پورته تعریف ٤ . ۱ کیدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چیرته چی f (x) 0 > باوري نه وي . که $0 > f(x)$ وي نو دا ټاکلی اینتیګرال بیا د x -محور تر لاندې منفي هواره لري .

	که د y = f (x) کږه - لکه په)ش ٤ . ۲) کی - داینتیګرآلوني په اینتروال کی د x-محور پرې کړي نو دا مخامخ فرمول د لاندې سطې سره باور لري : $F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 \ldots$

د تعریف ٤ . ۱ پسې تړلې دا لاندې جمله لرو:

جمله٤ . ۱ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې دا پورته مساوات د c ارزښتونو ته پراخه کړی شو، بايدc له اينتروال [a,b]د باندې نه وي پروت، يعنې ټکي a,b او c په يوه اينتروال کی بايد پراته وي، په هغه کی چې تابع f (x) اينتيګرالوړ دی.

موږ دا لاندې تعريف(پيژند) لرو :

پيژند يا تعريف ٤ . ٢ : f (x) په يوه بند انتروال[a, b] کې اينتيګرالوړ دی، نو باور لري: $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

د پيژند تعريف ٤ . ١ له مخی تل باور لري: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

تمرينونه:

د لاندې توابعو ګراف و کاږئ او د ګراف او x محور ترمنځ د سطحې مثبته او منفي لور په نخښه کړئ.

الف : $4x^3 + 5x^2 + x + 6$ ،

ب: $x^2-4x-+16$ ،

پ: x^4+5x^2-2x-7

بنسټيز- يا لومړنی تابع

$$F'(x) = f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت

- په پورته مساوات کې به F (x) څنګه وليکلاي شو؟

- F (x) نسبت و f (x) ته څه بلل کيږي او په څټ، f (x) د F (x) څه بلل کئږي؟

په پورته دواړو پوښتنو کې فکر وکړي، چې پايلې يې دا لاندې دي:

ددې لپاره چې د مشتقنيولو او اينتيګرال نيولو ترمنځ اړيکی لاس ته راوړو، د لومړنۍ تابع کلمه په لاندې توګه تعريفوو:

> پيژند (تعريف):
>
> تابع y = f (x) دې په يوه واز اينتروال I کی تعريف وي. هر يوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرايط پوره کړي، د f (x) بنسټيز- ، ساده – يا لومړنی تابع بلل کيږي

په ساده توګه ليدل کيږي چې د يوې f (x) تابع لپاره نه يوازې يو بنسټيز تابع F (x) موجود دی، د بيلګې په توګه $F_0(x) = x^2,\ F_1(x) = x^2 + 1,\ F_2(x) = x^2 + 2$ تابع، بلکې په عمومي ډول

$F (x) = x^2 + C$، چې دا ټول مساوي مشتقونه $f (x) = 2x$ لري.

د پورته ښوونو پايله، چې څنګه سړی د يوه متمادي تابع f (x) لومړنۍتابع پيدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

y = f (x) دې په اينتروال I کی متمادي تابع وي، نو د a ∈ I لپاره

$F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ د f (x)، يوه لومړنۍتابع ده، دټولو c∈I لپاره .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f (x) هره بله لومړنۍ(بنسټيزه) تابع لاندې بڼه لري:

$$F(x)=F_a(x)+C,\ \ C\in R$$

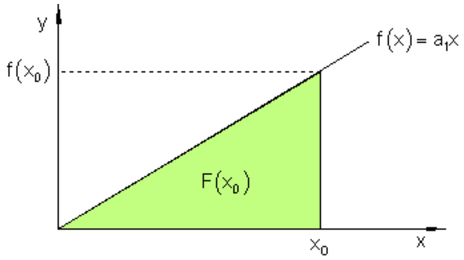
ځواب : ښايو چې Fa (x) دf (x) بنسټيز تابع ده. ددې د ښوولو لپاره ښايو چې د Fa (x)لپاره د پورته پېژند شرایط باور لري. د Fa (x) مشتق د I ∈ x او a ≠ xلپاره په لاندې ډول ده.

$$F_a^{'}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left[\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^{x} f(t)dt\right]$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\int_a^{x+h} f(t)dt$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot h\cdot f(\xi),\ \ \xi\in[x,x+h]$$

د ليميټ منځ ارزښت جملې له مخې داسې يوه ξ شته دی)
(د متماديت له امله $(f(\xi)\to f(x)$ = f(x)

سطحه او لومړنی تابع:

سطحې تابع ته ترمخ راوړنه:

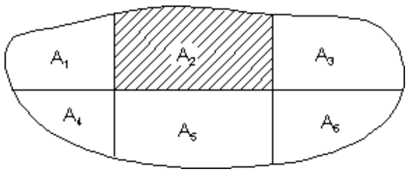
د تابع $f(x)=a_1x$ ګراف په کارتېزي وضعيه سيستم (پروت ولاړسيستم) په سرچينه کې يوه کرښه انځوروي. يو تابع غواړو پيدا کړو، چې د ګراف او x -محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي يا تابعيت کې سطحه په ګوته کوي. دا چې دا جوړه شوې سطحه يو مثلث دی، نو حل يې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته	

(c) ketabton.com: The Digital Library

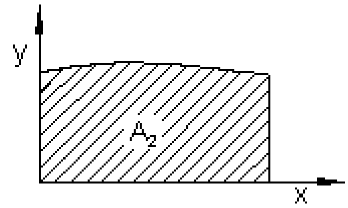
$A=\frac{g\cdot h}{2}$ ساده پيدا کيږي: زموږ د مسألې لپاره متحوله داسې تغيروو: $A\to F(x_0);\ g\to x_0;\ h\to f(x_0)=a_1x_0$	$F(x_0)=\frac{x_0\cdot f(x_0)}{2}$ د $f(x_0)=a_1x_0$ سره په لاندې ډول دی: $F(x_0)=\frac{x_0\cdot a_1x_0}{2}=\frac{a_1}{2}x_0^2$

تابع $F(x_0)$ د ګراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي(تابعيت) کې تشريح کوي يا ښايي. موږ دا تابع د **سطحې تابع** بولو.

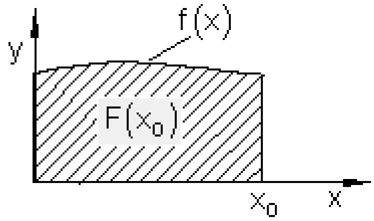
د سطحې پرابلم:



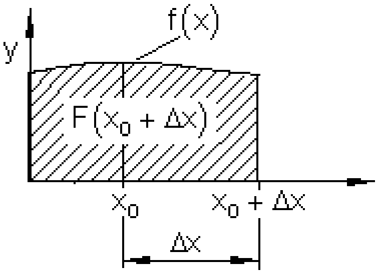
هره له کږوکږښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو(قدمونو)، چې په هغې کې فقط يوه يوه کږه کرښه رامنځ ته کيږي. نورې ټولې رابندونې سيده کرښيزې دي.



هره يوه د سطحې برخه(د بيلګې په توګه دلته $\mathbf{A_2}$) کېدی شي د وضعيه قيمتونو سيستم کې د يوې سطحی په څېر انځور شي، چې د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.



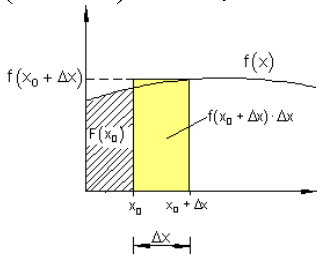
که له کږوکرښو رابند ګراف دf(x) متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ايا يو تابع شته چې د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظيم کړي، لکه په پيلبېلګه کې؟



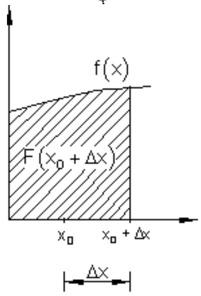
که داسې يو تابعF شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محورارزښت تنظيم وي، نو بايد د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$په سطحه باندې تنظيم کړای شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

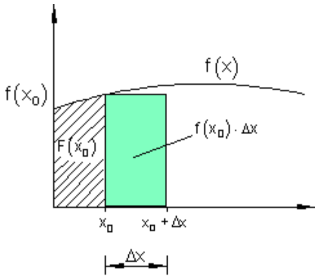
په يوه ولاړګوديز (مستطيل) کې د سطحې رابندول:



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه د ربنتوني سطحې څخه څه لويه ده



ريښتوني سطحه ده.



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه له ريښتوني سطحې څه کوچنی ده.

که د سطحې پټې (يا کوچني مستطيلونه)هرڅومره کوچني شي، په همغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه يې توپير کميږي.
دا اړودوالی د رياضياتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کېدی شي:

$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$

دا مو دې لاندې نابرابرونويا نامساواتو ته راهڅوي

$$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x) \le F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |F(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \le f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |:\Delta x$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) \le \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \le f(x_0+\Delta x)$$

ليميټ يې نيسو:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$$

$$f(x_0) \le F'(x_0) \le f(x_0)$$

$$f(x_0) = F'(x_0) = f(x_0)$$

نو لرو: $\underline{\underline{F'(x_0)=f(x_0)}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې د سطحې F(x) مشتق د کړي کرښې د تابع ارزښت $f(x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی.

موږ ليکو: $F'(x_0) = \dfrac{dF(x_0)}{dx} = f(x_0)$ يا $\boxed{F'(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)}$

که موږ بريالي شو، داسې يو تابع F(x) پيداکړو چې مشتق يې د رابندې کړې f(x)تابع وي، نو F(x) د سطحې تابع دی.
که موږ يو تابع د لومړني تابع څخه رابيل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د يوې سطحې تابع پيدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی. سړی کړی شي فورمال ووايي:
د يوې سطحې مساحت تابع، چې پيداکړو، دا معنا لري چې ورګډول يا انتيګرالول يې شمېرو.
د يوه ساده توان تابع په بېلګه د احساس له مخې يوه لار پيداکېدی شي، چې دا څنګه ايتېګرالوي.

توانتابع : $f(x) = x^3 \quad \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$
مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په يو کميږي او پوتنځتابع د زاړه پوتنځ سره ضربيږي.
انتيګرالونه (زياتونه ياورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په يو جګيږي اوپوتنځتابع په نوي اکسپوننت وېشل کيږي.
دا همدا اوس ازمايو:

توانتابع: $f(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow F(x) = \dfrac{3}{2+1} x^{2+1} = \underline{\underline{x^3}}$

تابع F(x) د f(x) بنسټتابع (لومړنۍ تابع يا ساده تابع) بلل کيږي، ځکه چې f(x) له F(x) څخه لاس ته ارځي يا را پيداکيږي يا راځيږي.

تمرينونه:
– و ښايئ، چې د F او دG توابع د f تابع لومړنۍ تابع وې ده.

$a)\ F(x) = x^3 + x + 4 \quad , \quad G(x) = x^3 + x + 1$

$b)\ F(x) = (x-3)^2 \quad , \quad G(x) = x^2 - 6x + 4$

$c)\ F(x) = \dfrac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x) = \dfrac{3x+5}{x+2}$

$d)\ F(x) = 1 + \sin x \quad , \quad G(x) = \sin x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناټاکلی انتیګرال

$$\int f(x)\,dx$$

فعالیتونه:

-- په پورته څیره کې $\int$ په څه مفهوم دی

-- په تیر ه برخه کې مو $F(x)$ د $f(x)$څه بللی وو او اوس به $F(x)=\int f(x)\,dx$ د لومړنئ تابع سره څه توپیر ولري؟

و به ګورو، چې نا ټاکلی انتیګرال د لومړنی تابع لپاره بل نوم دی.

که دیوې ورکړ شوې$f(x)$ تابع $F(x)$ لومړنی تابع، یعني $F(x)$ وپیژنو، نو د یوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د $f(x)$ د ټولو لومړنیو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه یو حقیقي عدد دئ).

موږ د $f(x)$ تابع د $F(x)$ لومړنی تابع ټاکنه یا اینتګرلونه هم بولو او ددې له پاره لیکو:

$$\frac{dF}{dx}=f(x) \Leftrightarrow dF(x)=f(x)dx \Leftrightarrow F(x)=\int dF(x)=\int f(x)dx$$

نو لرو : $F(x)=\int f(x)\,dx$

دا تراوسه فورمال لیکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.

موږ لومړنی توابع پلټو

بیلګه:
لومړنی تابع $F(x)$ دې پیدا شي، چې مشتق یې $f(x) = 2x$ دی.
قاعده داسې ده $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x\,dx$

موږ ازمایو: $F(x)=x^2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$

$F(x)=x^2+2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$. په ټولیزه توګه باور لري:

$F(x)=x^2+C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x)=2x=f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړه توابع په ثابت غړي کې یو له بل توپیر لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله باید دې خپلې لار ته تغیر ورکړو.

قاعده(لار): باور لري: $\int f(x)dx = F(x) + C$

د لومړنیو توابعو سټ(ډېری): بیلګه ښایي، چې د تابع f(x) لپاره نه یواځې یو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې یواځې ثابت عدد کې یو له بل سره توپیر لري، چې دا د f(x) د لومړنیو توابعو سټ بولو.

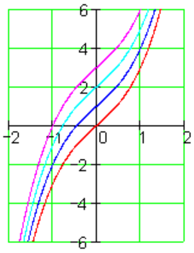
بیلګه: یو لومړنی‌تابع F(x) دې پیدا شي، چې د هغه مشتق $f(x) = 3x^2 + 2$ وي.

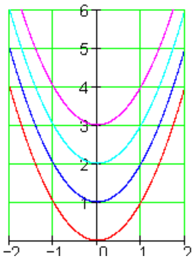
$F(x) = x^3 + 2x + C$ ، ځکه چې $F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x)$

د ټولو لومړنیو توابعو ډېری دې د منحنیو ډلې په څېر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې یو له بل توپیر لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بېلګې وکتل شي.

$F(x) = x^3 + 2x + C$ $\qquad$ $F(x) = x^2 + C$





تمرینونه:

د لاندې توابعو له پاره لومړني توابع پیدا کړئ او لاس ته راوړني یې د مشتق له لارې و ازمایئ.

$a)\ f(x) = x^2$ $\qquad$ $b)\ f(x) = 2x^2$ $\qquad$ $c)\ f(x) = x$

$d)\ f(x) = -2x$ $\qquad$ $e)\ f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad$ $f)\ f(x) = -\frac{1}{4}x$

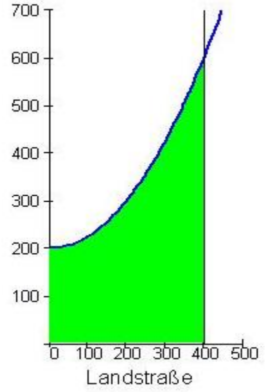
$g)\ f(x) = x^3$ $\qquad$ $h)\ f(x) = 4x^3$ $\qquad$ $i)\ f(x) = 2$

$j)\ f(x) = x + 1$ $\qquad$ $k)\ f(x) = x^2 + x - 3$ $\qquad$ $l)\ f(x) = x^n;\ n \in N$

$m)\ f(x) = x^2$ $\qquad$ $n)\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټاکلي انتيګرال شميرنه

ټاکلی انتیګرال همغه د ریمن انتیګرال دی، چې یوه د تابع د ګراف او x محور ترمنځ سطحه شمیري.	

ټاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د پولې(حد) a تر پولې(حد) b یا د a او b حدونو ترمنځ یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د f ګراف لاندې د a او b تر منځ.

فعالیت:

اول: ووایئ چې په پورته انتیګرال کې $f(x)$ څه نومیږي؟

G دې په بند انتروال $a \le x \le b$ کې د g(x) لومړنی انتیګرال وي، د $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ سره، نو

باور لري: $\int_a^t f(t)dt = G(b)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د دوه لومړنيو توابعو F او G تر منځ يو ثابت C توپير شته، نو G(x) = F(x) + C باور لري. د x=b لپاره لاسته راوړو: G(b) = F(b) + C

دا چې $G(x)=\int_a^a f(t)dt=0$ دی او G(a)=F(a)+ C دی، نو C = -F(a) ده.

دا په دې معنا، چې G(b) = F(b) – F(a) همداسې $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$.

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتيګرال جمله لاس ته راوړه

يا دا وينا د مشتق - او انتيګرالشمېرنې بنسټيزه جمله بلل کيږي:

تعريف:

f په انتروال a ≤ x ≤ b کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتيګرال دی : $\int_a^b f(x)dx=[F(x)_a^b=F(b)-F(a).$

د F(b) – F(a) لپاره زيات وخت $[F(x)]_a^b$ ليکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتيګرال شمېرنه په لومړني انتيګرال بېرته واړوله او د مشتق او انتيګرال تر منځ مو اړيکې رامح ته کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګې:

$$a)\ \int_1^2 x^2dx=\left[\frac{x^3}{x}\right]_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

$$b)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx=\int_2^4 x^{-2}dx=\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^4=\left[-\frac{1}{x}\right]_2^4=\frac{1}{4}$$

$$c)\ \int_1^3 \sqrt{x}\,dx=\int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]=\frac{2}{3}[\sqrt{x^3}]_1^3(\sqrt{3^3}-\sqrt{1^3}$$

$$=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)=2(\sqrt{3}-\frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتيګرالونو لپاره لاندې جملې رښتيا دي:

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\cdot\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx+$$

تکميليدونکي بنسټونه:

د F(b) – F(a) له امله د انتګرالوني ثابته c له منځه ځي. له دې امله کولي شو د انتيګرال ثابتي ټاکلو لپاره c=0 وليکو.

بيلګه :

د ټاکلي انتيګرال $\int_1^3 x^2dx$ ارزښت و ټاکی. د توان قانون له مخې لومړنی تابع

يعني $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$ پيدا کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه: موږ په دا لاندې ډول ښايو:

$$\int_{1}^{3} x^2dx = \left[\frac{x^2}{3}+C\right]_1^3 = F(3)-F(1) = \frac{3^3}{3}+C-\left(\frac{1^3}{3}+C\right) = \frac{27}{3}+C-\frac{1}{3}-C$$

$$\int_{1}^{3} x^2dx = \frac{26}{3}$$

اساسات تکمیل كننده:

از د ليل F(b) – F(a) ثابت C انتگرال گرفتن از بين ميرود. ازين بابت ميتوانيم براي تعين ثابت انتيگرال بنويسيم C =0 .

مثال :

قيمت انتيگرال معين $\int_{-\pi}^{+0,5\pi} \cos x dx$ را تعيين نماييد.

ثبوت: ما قرار زيل ثبوت ميكنيم:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x\, dx = [\sin x]_{-\pi}^{0.5\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1-0 = 1$$

يادونه : دا چې په دې برخه کې يواځې د ټاکلي انتيگرال ارزښت غوښتل شوي دی او نه د يوې منحني لاندې سطحه، نو بايد نه دی چې صفرځايونه په پام کې ونيول شي.

عوره يادونه: دادې په ياد وي، چې ناټاکلی انتيگرال تابع ده او ټاکلی انتيگرال يو عدد.

تمرينونه:

د لاندې ټاکلو انتيگرالونو ارزښتونه وشميرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \int_0^3 4dx$ $b)\ \int_{-3}^{-1} xdx$ $c)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e (2+\frac{1}{x})dx$ $e)\ \int_{-1}^0 e^x dx$ $f)\ \int_0^\pi \sin x\, dx$

$i)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{\cos^2 x}dx$ $j)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x}dx$ $k)\ \int_{-2}^2 x^3 dx$

$l)\ \int_2^6 (1+x)dx$ $m)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx$ $n)\ \int_{-2}^0 \left(\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}\right)dx$

د ناټکلي انتیګرال څخه و ټاکلي انتیګرال ته

ترمخ راوړنه یا وړاندراوړنه

موږ ولیدل، چې څنګه یو تابع $f(x)$ ته لومړنی تابع $F(x)$ منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د یوې ورجمع کوونکې ثابتې کې یو له بل توپیر لري.

فعالیت :

-- د $\int f(x)dx$ او $\int_a^b f(x)dx$ تر منځ توپیر باندې فکر وکړئ؟

-- د $\int f(x)dx$ او $\int_a^b f(x)dx$ پایله څه ده ؟

- دا توپیر یې د یوې بیلګې په بنسټ روښانه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

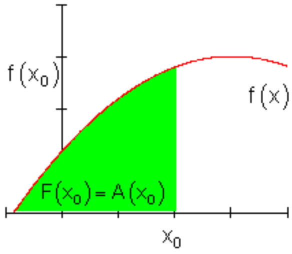
لرو: تابع $f(x)=3x^2+2$ او د دې د لومړنیو توابعو سټ $f(x)=x^3+2x+C$

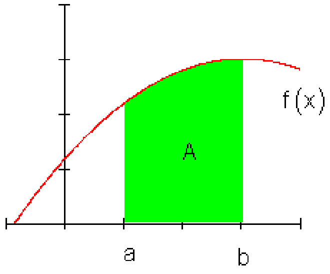
پیژند : د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع f(x) ته ،،ناټاکلی انتیګرال ،، بلل کیږي او ددې له پاره لیکو: $\int f(x)dx=F(x)+C$

د مشتق- او انتیګرالشمیرنې ترمنځ اړیکې کېدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

جمله(قضیه) : د ناټاکلی انتیګرالشمیرنه د مشتقشمیرنې برعکس انځوروي $\frac{d[f(x)]+C}{dx}=[F(x)+C]'=f(x)$

د تابع د ګراف لاندې او د انټروال [a ; b] تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.

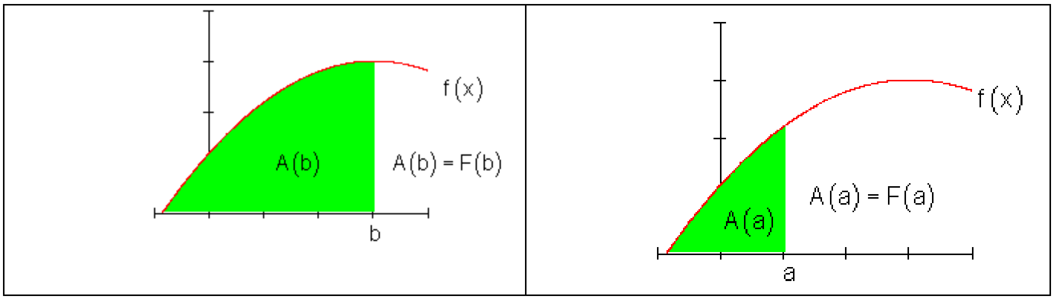


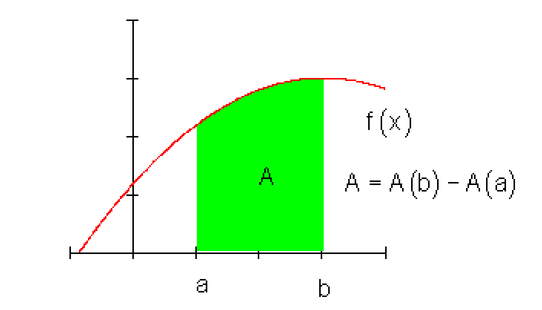


د یوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لاربنوده وي:
د یوې سطحې، چې د یوې په پام کې نیولې f(x) تابع ګراف لاندې ده تر x_0 ځای پورې

(c) ketabton.com: The Digital Library

او يوې F'(x) تابع، چې دF(x) تابع مشتق د x_0 ځاي د f تابع د تابع ارزښت سره د x_0 په ځاي کې برابر وي، ترمنځ اړيکې شته دی، يعنې



د انټروال [a,b] حدونو ترمنځ سطحې پيداکول د تابع د ګراف سطحو د کمښت څخه په ځاي (A(b)) b او سطحې په (A(a)) a ځاي کې ،. يعنې پهA= A(b) – A(a) همدې توګه F= F(b) – F(a) لاس ته راځي.	

په انټروال [a,b] کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنيو توابعو تفريق دی:

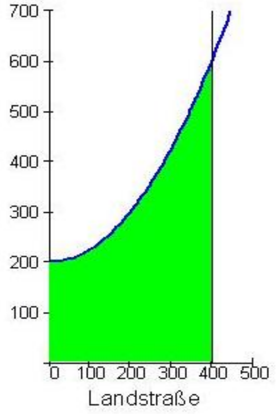
$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx$$

دا انټيګرال ټاکلی انټيګرال هم بلل کيږي.

جمله : دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په بيل بېلګه کې راوړې د چمن سطحه وشميرو.

ثابته له تفريق سره لرې کيږي. په عمل کې د دې مسآلې د حل لپاره يوه بله لار ګتوره راوستلې يا ګټوره بنوولې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A=\int_0^{400}\left(\frac{1}{400}x^2+200\right)dx=\frac{1}{1200}x^3+200\cdot x\Big|_0^{400}$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400\underline{\left[\frac{1}{1200}0^3+200\cdot 0\right]}$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400=\underline{\underline{133333.\bar{3}}}$$

تمرینونه: لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمېرئ.

$$\int_1^3 x\,dx\ ,\ \int_1^3 (x^2-1)dx\ ,\ \int_{-2}^2 4dx\ ,\ \int_3^4 dx\ ,$$

$$\int_0^4 (2x-5)dx\ ,\ \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}\left(\frac{1}{2}x^2-4\right)dx$$

د انتیګرالونې قاعدې

د ناټاکلي ایتیګرال انتیګرالونې قاعدې: په لاندې اینتیګریشن قاعدوکي د اینتیګریشن ثابته باندې صرف نظر کیږي‌دلته مساوات تر یوې ورجمع شوې ثابتې C پورې مساوات دی ، په دې معنا چې دمساواتو تر منځ یواځې یوه ثابته کیدی شي زیاته یا کمه وي. دا قاعده کیدی شي چې په ټاکلې انتیګرال کې ښوولې جملې سره سم ټاکلي ایتیګرال ته نقل شي یعني په ټاکلي ایتیګرال استعمال شي . دا قاعدې کیدی شي چې د تیرو درسونو سره سم د دواړو خواو د مشتق نیولو سره وښول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله :

د يوې ثابتي سره ضرب : كه تابع $f(x)$ په يوه اينتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a\cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,, \qquad a\in R$$

جمله: د جمعې (تفريق) قاعده كه $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په يوه ايتروال کی نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

بيلګې:

لاندې ايتيګرالونه كيدی شي چی د مخ ته تېرو جملو په استعماليدو او ساده څيره بدلون بيرته په بنسټيزو اينتيګرالونو بدلګړای شي

$$a)\quad \int \frac{dx}{3x^4} = \frac{1}{3}\int x^{-4}dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-3} + C = -\frac{1}{9x^3} + C,$$

$$b)\quad \int 3x^2 + 4x - 1)\,dx = 3\int x^2dx + 4\int xdx - \int dx = 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 4\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + C$$
$$= x^3 + 2x^2 - x + C,$$

$$c)\quad \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx - 3\int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int x^{\frac{5}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$= 2\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{7}x^3\cdot\sqrt{x} - 2x\cdot\sqrt{x} + C$$

تمرينونه: د لاندې توابعو انتيګرال ونيسئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\quad \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}}dx \quad , \quad b)\ \int_1^2 \frac{\sqrt{x} - 1}{x}dx$$

د اکسپوننشل توابعو انتیگرالونه

بنسټ :

د طبیعي اکسپوننشل تابع $f(x) = e^x$ لپاره لرو:

د تولیز اکسپوننشل تابع $(a \in IR^+, a \neq 1)\int e^x dx = e^x + C$ لپاره لرو:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

بیلګه : دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع $\int 2^{x-3} dx$ غواړو پیداکړو

بنه بدون:د توان قانون سره سم لرو $2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8}2^x$

د فاکتوروني قانون سره سم لرو: $\int \frac{1}{8}2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx$

انتیګرال یې ونیسئ: $\frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + c = \frac{2^x}{8\cdot\ln 2} + c = \frac{2^{x-3}}{\ln 2} + c$

تمرینونه:

لاندې انتیګرالونه وشمیرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \int 3^{x+1}dx$ $b)\ \int 2^{-x}dx$ $c)\ \int a^{x+b}dx$

$d)\ \int \frac{1}{a^x}dx$ $e)\ \int 2^x \cdot 3^x dx$ $f)\ \int \frac{2^x}{3^x}dx$

$i)\ \int \frac{4^{x+3}}{2^x}dx$ $j)\ \int \frac{5^x+3^x}{2^x}dx$ $k)\ \int (1+2^x)dx$

د لوګاريتمي توابعو انتيګرالونه

بنسټ: د طبيعي لوګاريتم تابع $f(x)=\ln x (x\in IR^+)$ لپاره $\int \ln x dx = x\cdot\ln x - x + c$ دی .

د ټوليز لوګاريتم تابع $f(x)=\log_a x\ ,a\in IR^+, a\neq 1)$ لپاره $\int \log_a x dx = \frac{x\cdot\ln x - x}{\ln a}+c$ دی.

بېلګه :

ناټاکلی انتيګرال $\int \ln 3x dx$ غواړو پيدا کړو:

بڼه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3xdx = \int(\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3xdx \div \int \ln xdx = x\cdot\ln 3 + x\cdot\ln x - x + c$$

$$\int \ln 3xdx = x\cdot(\ln 3 + \ln x - 1) + c$$

تمرينونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا لاندي ناټاکلي انتېګرالونه پيداکړئ

$a)\ \int \ln 2x^3 dx$ $\qquad$ $b)\ \int \ln \sqrt{x} dx$

$c)\ \int \log \frac{x}{2} dx$ $\qquad$ $d)\ \int 3\log \frac{1}{x} dx$

بنسټيز اينتيګرالونه په يوه جدول کې

د اينتيګرالولو او مشتق نيول د اړيکو په بنسټ کيدی شي چې د بنسټيزو اينتيګرالونو يو جدول ترتيب شي. دا په مشتق جدول کی راوړل شوو بنسټيزو توابعوبرعکس څرګنديږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x)=\int f(x)dx$	نيونه يا فرضيه
1	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$	$n\in Z\setminus\{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$	$x\neq 0$
3	x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C$	$a\in R\setminus\{-1\},\ x>0$
4	a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x+C$	$a>0,\ a\neq 1$
5	e^x	e^x+C	
6	$\sin x$	$-\cos x+C$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

7	$\cos x$	$\sin x + C$	
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n \cdot \pi, \quad n \in Z$

بيلګې :

د جدول او تيرو جملو څخه په ګټه لاندې اينتيګرالونه په لاندې ساده ډول په بنسټيز توابعو بدليدلی شي .

a) $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = -\frac{1}{4} x^{-4} + C$,...............................1,

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0)$, ...3,

c) $\int \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}} dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x > 0)$, ...3,

d) $\int \frac{\sin 2x}{2\sin x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{2\sin x} dx = \int \cos x \, dx = \sin x + C$, ...(4,21) 6,

e) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi)$, (4,11) 9,

f) $\int (1 + \cot^2 x) \, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi)$ (4,12) 8,

g) $\int \frac{(1+x)(1-x)}{x - x^3} dx = \int \frac{1-x^2}{x(1-x^2)} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1, \ x \neq 0)$, $Nr.2$,

h) $\int_{-1}^{0} e^x dx = e^x \Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2}$, ...5

(c) ketabton.com: The District Library

د بدلون قانون <u>Substitutionlaw</u>

د ناټاکلي انتيګرال حل د بدلون له لارې(ننوتنه راځي)

$$\int f(x)dx = \int (x^2 + 4x - 5)^n dx$$

فعاليت:

- د $\int (x^2 - x)dx$ انتيګرال ونيسى

- د $\int (x^2 + 5x)^3 dx$ انتيګرال نيولو کې فکر وکړئ او که وتونېدى انتيګرال يې ونيسى.

تراوسه پورې مو فقط انتيګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنيو توابعو په انتيګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنيو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنۍ انتېګرالونې سيده استعمال تل ساده نه دى، لکه چې په لاندې کې به وليدل شي.

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتين :د يوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لويه اينوول (لنډ: بدلون) د فرضيو لاندې چې u = g (x) متمادي او مشتقوړدى او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

حل : د ښي اړخ مشتق د تيرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دى:

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کيڼ اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتيګراليدو لپاره مساعده ده، په کوم کى چې يو فاکتور زنځيري تابع [f [g (x) وي او دا بل فاکتور (ضريب) يى د دننه تابع مشتق g ' (x) وي. سړى د دننه تابع لپاره په دې توګه متحولې بدلوي يا

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځاي په ځاي کويک: $u = g(x)$ مشتق جوړوي په

همدې ډول $du = g'(x)\,dx$

۲۲۶ د بدلون قانون

د بريالي انتيګراليدو وروسته بدلون بيرته راګرځول کيږي.

بيلګه a :

لرو : $I = \int 2\cos(2x-1)dx$. د دې اتنيګرال وشمېرئ.

بدلون يا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بيلګه b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x = u-1$, مشتق $2 = du/dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\,du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

ومولیدل چی ځنځيري تابع د لايني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اينتيګرال کيدی شي، ځکه چی د لايني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تيرې جملی سره سم د اينتيګرال تر مخ (موخه کيې لور ده) ليکل کيږي.

بيلګه:

لرو $I = \sqrt{-3x+5}\ dx$

بدلون: $-3x+5=u$

(c) ketabton.com: The Digital Library

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

$$I = \int \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) du = -\frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9} \cdot \sqrt{(-3x+5)^3} + C.$$

$$b) \quad I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx.$$

$$-2x - 3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \qquad dx = -\frac{1}{2} du,$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4} \int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C.$$

$$c) \quad I = \int \frac{2dx}{x+2}.$$

$$x + 2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C.$$

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کیږي لکه لاندې بلګه:

بیلګه: عواړو د $f(x) = e^x$ مشتق بیدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پیدا کولي شو، یعنې لرو:

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int e^x dx = e^x + C$$

ګورو، چې $F'(x) = e^x = f(x)$ دی.

که ولرو: $f(x) = e^{2x}$ او د پورته په څېر لاړ شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int e^{2x} dx \neq e^{2x} + C$$

وي $F(x) = e^{2x} + C$ **دی، که** $F'(x) = 2e^{2x} \neq f(x)$

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه:
د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسی

$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$

بدلون : $u(x)=2x=u$

جوړ کړئ: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{du}{2}$

$\int f(x)dx=\int e^{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

نو لرو: $F(x)\int(x)dx=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

ازمایښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بیلگه :
وښایی چې باور لري. $f(x)=(x+1)^{2} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(x+1)^{2}dx$.

بدلون $u(x)=x+1=u$

جوړ کړی

$u'(x)=\frac{du}{dx}=1 \Rightarrow dx=\frac{du}{1}$

$\int f(x)dx=\int u^{2}\frac{du}{1}=\int u^{2}du=\frac{u^{3}}{3}+C$

بیرته بدلون: $\frac{u^{3}}{3}+C=\frac{(x+1)^{3}}{3}+C$

نو: $\int(x)dx=\int(x+1)^{2}dx=\frac{(x+1)^{2}}{3}+C$

بیلگه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

و ښايي چې باور لري: $f(x)=(3x+6)^3 \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(3x+6)^3dx$
بدلون: $u(x)=3x+6=u$
جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=3 \Rightarrow dx=\frac{du}{3}$
$\int f(x)dx=\int u^3\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int u^3du=\frac{u^4}{12}+C$
بېرته بدلون: $\frac{u^4}{12}(3x+6)^4+C$
نو لرو: $\int(x)dx=\int(3x+6)^3dx=\frac{1}{12}(3x+6)^4+C$

تمرينونه: د $f(x)=x\cdot\ln(x^2)$ تابع انتيگرال وشميرئ.

د ټاکلو انتيګرالونو حل د بدلون له لارې

$$\int_3^8(x^2+4x-5)^n dx$$

فعاليت:

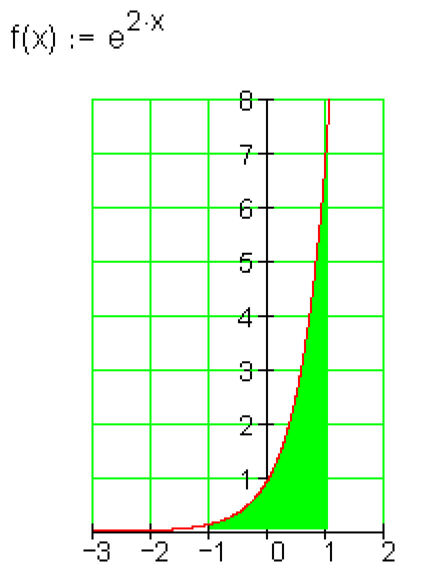
- د $\int_a^b(x^2-x)dx$ انتيگرال ونيسى

- د $\int_1^5(x^2+5x)^3dx$ انتيگرال نيولو کې فکر وکړئ او که وتوانېدی انتيگرال يې ونيسى.

ټاکلي انتيګرالونه هم د بدلون له لارې حل کيږي.

	بيلګه :
	وښاياست: $f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int_{-1}^{1}e^{2x}dx$
	د انتيګرال حل د بدلون له لارې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



۱ – بدلون $u(x)=2x$

۲ – د dx په ځای کېږدی

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \quad \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

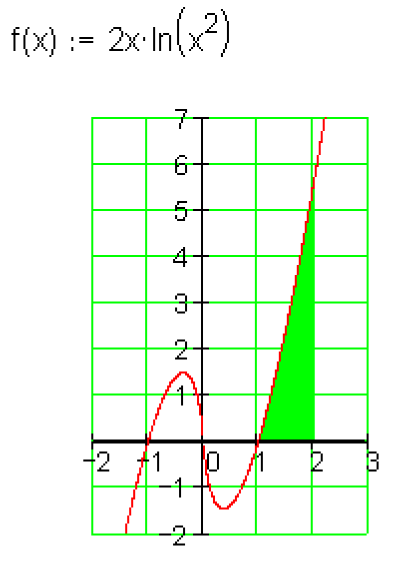
۳ – د پولو بدلون

- لاندې پوله $u(-1)=-2$
- پورته پوله

۴ - په انتیګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}e^u du=\frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-2}^{2}=\frac{1}{2}\left[e^2-e^{-2}\right]=\underline{\underline{3.627}}$$

بیلګه :



$$f(x)=2x\cdot\ln(x^2) \quad \Rightarrow F(x)=\int_1^2 2x\cdot\ln(x^2)dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x)=x^2$

۲ – د ځای په ځای کونه

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=2x \quad \Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

- لاندې پوله $u(1)=1$
- پورته پوله $u(2)=4$

۴ – په انتیګرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_1^4 2x\cdot\ln(u)\cdot\frac{1}{2x}du=\int_1^4\ln(u)du=\left[u\cdot\ln(u)-u\right]_1^4$$

$$=\left[4\cdot\ln(4)-4\right]-\left[1\cdot\ln(1)-1\right]\approx\underline{\underline{2.545}}$$

تمرین: لاندې انتیګرالونه وشمیری یا حل کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ - $\int \frac{3}{4x+1}\,dx$ ۲ - $\int_0^2 \frac{4}{4-x}\,dx$

۳ - $\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx$ ۴ - $\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx$

۵ - $\int_{-2}^{2} \frac{10}{(x-4)^5}\,dx$ ۶ - $\int_{-2}^{2} e^{1-x}\,dx$

۷ - $\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ ۸ – $\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$

۹ - $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx$ ۱۰ - $\int_0^2 \left(x-1-e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$

ټوټه انتيګرالونه

$$f(x).g(x) = x.\ln(x^2)$$

ټوټه انتيګرالونه، چې ضرب انتيګرالونه هم بلل کيږي، په انتيګرالشميرنه کې د لومړنيو توابعو ټاکلو يا شميرلو لپاره امکان دی. دا کيدی شي د مشتقشميرنې د برعکسکونی په څير وګڼل شي.

فعاليت:

- څه بايد وشي، چې دا پورته په ننوتنه کې تابع انتيګرال نيونه شونې شي؟

___ ايا دا پورته ننوتنه کې راغلې بوښتنه دا تر اوسه ورسره بلدې لارې يعنې د (بنې) بدلون له لارې حل دی؟

د ټوټه انتيګرالونې له پاره لاندې قانون کاروي، چې د متمادي (نه پرېکيدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري.:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا قانون ټيک هلته ګټور دی، که د f مشتقکونی سره يو ساده تابع منح ته راځي.
پيل
د ضرب قانون (د ضرب مشتقنيونې) څخه لرو:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتيګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

يا همدغسې، لکه په زياتو رياضي کتابونو کې چې پيداکيږي.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره ګتور دی، چې لومړی ځان په ناټاکلي انتيګرال محدود کړو، چې دا نا اړينو حدونو څخه چې ليد مو رابندوي، ازاد يو.

بيلګه:
د بيلګې په توګه لاندی انتيګرال شميرو.

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

يو ساده انتيګرالېږ تابع $g'(x)$ او همداسی يو ساده مشتقوړ تابع $f(x)$ لټوو. نيسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د ln(x) انتيګرالونه نوې ln(x) راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نيسو او انتيګرالوو، نو لرو:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ او } g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بديل ليکبڼه:

اوس دی u اوv په خوښه توابع وي.U او V دې د u اوV لومړني توابع وي ، او همداسې دې u' او v' دu او v مشتقونه وي.

u تابع ده، چې د مشتق نيولو له پاره لومړيتوب لري، v تابع ده چې د انتيګرالونې له پاره لومړيتوپ لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

د ټوټه انتيګرالونې لار(طريقه)

د ټوټه انتيګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معياري چلول شته.

بيلګه :

کله کله کېږدی شي ګټور وي، جی د مساوات ښۍ لور ته ټوته انتيګرال د ځو واره انتيګرالونې وروسته بيرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي يا پخواني کيڼ لور انتيګرال سره يوځای کولی شي.

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

که کيږدو $f(x) = \cos(x)$ او $g'(x) = \sin(x)$ ، **نو ترې لرو:**

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دواړو لورو ته وتون انتيګرال ورزيات کړو، نو راکوي:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که دواړه لورې په 2 ووېشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x).\cos(x)dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + C$$

بيلګه ۲ :

د ځنو انتيګرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د g'(x) له پاره يو ترم وټاکو چې په انتيګرالونې کې هيڅ يا کو تغير خوري، لکه د بيلګې په توګه اکسپوننشل تابع او يا مثلثاتي توابع. نو کيدی شي دا بل ترم ،،له منځه يووړل شي،،.

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

که هر ځل ex = g'(x) کيږدو او د f(x) له پاره، د انتيګرال لاندی ترم ، نو تری لاس ته راځي:

$$\begin{aligned}\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x &= [e^x\cdot(2-x^2)] - \int e^x\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - \int 2\cdot e^x\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - [2\cdot e^x]\\ &= [e^x\cdot(2-x^2+2x-2)]\\ &= [e^x\cdot(2x-x^2)] + C\end{aligned}$$

بيلګه ۳ :

که تر انتيګرال لاندې فقط يو ترم ولرو، چې د هغه لومړنی تابع بې له جدول ارزښت ځخه پاي ته نه رسيږي(نه پايول کيږي)(نه ختميږي) کېدی شي کله کله د ورزياتونې له لارې(ناڅرګند شته) ضريب "1" تړوته انتيګرال شي.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = 1$ کيږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\begin{aligned}\int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x &= x\cdot\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= x\cdot\ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x\\ &= x\cdot\ln(x) - x + C\end{aligned}$$

.

جمله :

موږ د دې لاندې انتيګرال نيسو:

$$\int x\cos(x)\,dx$$

ږدو ***u* = *x*** ، نو لرو : ***du* = *dx***

ږدو ***dv* = cos(*x*) *dx*** ، نو ***v* = sin(*x*)** لرو

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= \int u\,dv\\ &= uv - \int v\,du\\ &= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx\\ &= x\sin(x) + \cos(x) + C.\end{aligned}$$

C د انتيګرالونې يوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انتيګرالونې د استعمال سره د انتيګرالونو لکه $\int x^3\sin(x)\,dx$

او $\int x^2 e^x\,dx$ کيده شي په همدې لار حل شي:

يوه په زړه پورې بيلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x\cos(x)\,dx$$

که په پوره سختوالي ونيسو، نو په ورسره بلده لار اړين نه دی، چې دا دې حل ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا بیلګه د دوه واره ټوټه انتیګرالوني استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\, dx$

$dv = e^x\, dx$ داسې چې $v = e^x$ نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\, dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیګرال حل شي، نو د ټوټه انتیګرالوني قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x);\ du = \cos(x)\, dx$

$v = e^x;\ dv = e^x\, dx$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\, dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\, dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته ځاخي:

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\, dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتیګرال که کيڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\, dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\, dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیګرالوني یوه په خوښه ثابته ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه: دا لاندې انتیګرالونه وشمرئ.

اول: $I = \int x\cos x\, dx$ ، دویم: $I = \int x^2 \cdot e^x\, dx$

دریم: $I = \int \ln x\, dx$, څلورم $I = \int e^x \cdot \cos x\, dx$:

د ټوټه - ، پاراشنل کسرونو انتیګرال

د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ تابع انتیګرال نیول

فعالیت:

-- د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ انتیګرال نیول یعنې څه ؟

- د پورته تابع تعریف ورشو به نخښه کړئ.

د دې انتیګرال نیول تر واسه په ورسره بلده لار شونی دی، که څنګه؟

بیلګه :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفرځایونو $x1 = -2$ او $x2 = -4$ سره د کرښیزو توابعو په ضریبونو تجزیه کیږي:

$$x^2-6x+8 = (x-2)\ (x-4)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه ونې له پاره لاندې توګه پیل کوو:

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج ورغزیږي او لاس ته ترې راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{[Ax-4A + Bx-2B]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[A(x-4) + B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[(A+B)x -4A-2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضريبونو د پرتلې څخه لاس ته راځي، چې د x له مخه يعني کيڼ لور ته (A+B) افاده بايد پرته وي

او (-4A-2B) ، چې ۱۲ - ورکوي (وتون مساوات وګورى) : 7x-12 = (A+B)x (-4A-2B)

له دې څخه لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:

7= A+ B

-12=-4A-2B

بدلون يې دA او B پسې : **A= (7-B)**

-12=-4(7-B)-2B

-12=-28 +4B -2B |+28

+16= 2B

B=8

A= **(7-8)= -1**

ليکلى شو :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \int [\frac{-1}{(x-2)}]dx + \int [\frac{8}{(x-4)}]dx$$

لومړني تابع جوړه کړى: $f(x)=\frac{1}{x} \rightarrow F(x)=\ln x$. دا چې طبيعي لوګايتم فقط له مثبت اعدادو شميرل کيږي، نو يواځې ارزښتونه نيسو.

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = -1 \ln |x-2| +8 \ln |x-4| +c$$

نا اصلي ماتراشنل توابع بايد لومړى په تول راشنل تابع او اصلي مات راشنل تابع توټه شي. دا د توټه کسرونو توټه کووني له لارې کيږي يا صورت نيسي.

بيلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx$$

په مخرجکې مربع تابع په صفرځایونو **x1 = -2** او **x2 = +3** کې په کښیزو فاکتورونو تحزیه کیږي :

$$x^2+x-6 = (x-2)\ (x+3)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه کونې له پاره اصلي مخرج غزوو او بیا یې ضربوو :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج غزیږي او بیا سره ضربیږي:

$$\frac{[A(x+3)\ +\ B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A\ +\ Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x\ \ +3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضریبونو پرتلې کونې له امله، چې د x ترمخه یعنې کیڼ لور ته له (A+B) افادې ځخه باید اوه لاس ته راشي او (+3A-2B) او یا ورته ۱۲ (وتونمساوات وګورئ) :

-5x+9 = (A+B)x (+3A-2B)

لاندې مساواتسیستم لاس ته راځي:

-5= A+ B

9= 3A-2B

د A او B پسې یې حل کړئ:

9= 3(-5-B)-2B

9=-15 -3B -2B |+15

24=-5B |:(-5)

<u>B=-4.8</u>

<u>A= (-5+4.8)= -0.2</u>

نو لیکلی شو :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \int [\frac{-0.2}{(x-2)}]dx + \int [\frac{-4.8}{(x+6)}]dx$$

لومړی تابع جوړ کړئ :

$$F(x) = \ln x \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}$$

دا چې طبیعي لوګاریتم فقط د طبیعي اعدادو شمیرل کیدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = -0.2\ln|x-2| - 4.8\ln|x+3| + C$$

تمرينونه :

لاندې انتيګرالونه د تېوته کسرونو تېوته کوني له طريقې وشمېرئ

$$a)\ \int \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3} \qquad b)\ \int \frac{x-2}{x^2-6x+13} \qquad c)\ \int \frac{x^6}{x^4+3x^2+2}$$

ناپاي انتيګرال

تعريف : که په يوه ټاکلي انتيګرال کې لږ تر لږه يو حد د مثبت يا منفي ناپاي لور ته لاړشي يا د انتيګرال ساحه ناپاي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپاي انتيګرال څخه غږيږو. په يوه مناسب ډول ناپاى انتيګرال د عادي انتګيګرال د حد په څير تعرفيږي. په دې توګه په زړه پورې پوهيدنې لاس ته راځي د بيلګې په توګه، چې څنګه د منفي توان د پوتنځ د ګراف لاندې ناپاي ته رسيدونکې په زړه پورې سطحې. نو باور لري

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = 2 \quad \text{او} \quad \int_1^\infty x^{-2}dx = 1$$

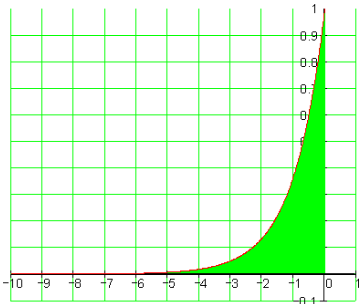
هم او د دې معکوس انتيګارلونه

$$\int_1^\infty x^{-1}dx$$ **او**

$$\int_0^1 x^{-1}dx$$ **ناپاي ته ځي يا له ټولو حدونو**

اوړي

يعنې د ناپاى په لور ځي..



(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = e^x$ ، ګراف او x-محور ترمنځ دې په انتروال $(-\infty ; 0]$ کې تړوله سطحه و شميرل شي، يعني

$$A = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$$

تراوسه د يوه ټاکلي انتيګرال د پورته همداسې کښته(لاندې) پولې عددونه وو.
د انتيګرالونې ورشو يااا ساحه محدود وه.
په دې حالت کې يا اوس د انتېګرالولو ورشو محدوده نه ده،
داسې انتيګرال يو نامحدود انتيګرال بولو، د انتيګرالونی نامحدودې ورشو سره.
انتيګرالونه د دې لاندې بڼو څخه په يوې بڼې منځ ته راځي

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

د دې انتيګرال شميرنې له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

لومړی د يوه پای انتروال $[a ; b]$ له پاره انتيګرال $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ شمېرو، بيا پسې د ورته افادو $a \to -\infty$ يا $a \to \infty$ همداسې، $b \to -\infty$. يا $b \to \infty$ له پاره پولې جوړوو.
فورمال دا په لاندې ډول بربښي:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{x} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

زموږ د سطحې شميرلو له پاره دا په لاندې ډول بربښي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = e^x$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[e^x\right]_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^0 - e^a\right] = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^0}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^a}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:

دا د y په محور هنداره شوې د e تابع دې د $f(x)=e^{-x}$ سره په انتروال $[0,\infty)$ کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0\,;\, u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b} e^u\frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b} e^u\,du = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^u\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^u\right]_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty}\left[e^0 - e^{-b}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} e^0 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:

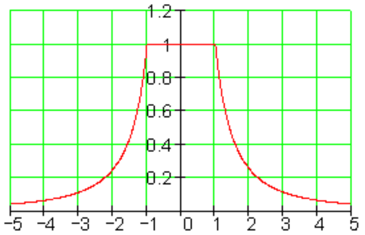
د یوه یوځاي ایښول شوې یا یو ځاي شوې تابع بیلګه لرو:

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ 1 \quad f \\ \frac{1}{x^2} \end{cases}$ $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$	د $x<-1$ لپاراه د $-1 \le x \le 1$ لپاره د $x > 1$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتيګرال په برخو وېشنه يا توټه کونه:
لاندې د انتيګرالونو تمعه دي و شميرل شي.

$$A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$



لومړنى اند يا تر مخه فکرکونه:
د تناظر دلايلو له مخې لرو :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

داسې، چې دا انتيګرال بايد فقط يوځل وشميرل شي.

$$\int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = [1]-[-1] = 1+1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0} - \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1} = 0-(-1) = \underline{\underline{1}}$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{2} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} = 1+2+1 = \underline{\underline{4}}$$

تمرينونه:

١ -- د $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ تابع انتيګرال وشميرئ، که د ناپاي په لور لاړشي.

٢ – و څېړئ چې ايا لاندې ناتاکلي انتيګرالونه پوله ارزښت لري؟

a) $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$ b) $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$

c) $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$ d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x}{(x^2+2)^3}\,dx$

٣ – د کومو توانونو p لپاره دا نا ټاکلى انتيګرال $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ پوله ارزښت لري.

٤ – لاندې انتيګرالونه د يوه انتيګرال پولې لپاره تعريف نه دي، و څېړئ، چې ايا دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکلی انتیګرال په دې انټروال کې پوله ارزښت لري.

a) $f(x) = \frac{x^3+1}{x}$, $I = [0;1]$ b) $f(x) = \ln x$, $I = [0;1]$

c) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$, $I = [1;2]$ d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $I = [-1;1]$

e) $f(x) = \frac{x^2}{x^3-8}$, $I = [0;2]$ f) $f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$, $I = [0;1]$

ټولګه

د انتیګرال هندسي تعریف

لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:که یوه f تابع ولرو، نو دx محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښخ لري.

تحلیلي تعریف:

تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انټروال [a,b] باندې تعریف دی، نو د aڅخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

پیژند (تعریف) ٤ . ١ : لیمیټ

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F;(\max\Delta x\to 0),........(4,3)$$

که په اینټروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینټیګرال بولو، یا F- Riemann (د ریمن سطحه). دلته a د اینټیګراله ونې لاندې(کښته)پوله او د b

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایتیګرالوني پورته پوله بلل کیږي او [a,b] د ایتیګرالوني اینتروال او(Integrand) (f (x)اینتیګرالېدونکی) او dx اینتیګرالوني (Integrationsvariable) متحول بلل کیږي

جمله٤ . ١ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

پیژند یا تعریف ٤ . ٢ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

پیژند تعریف 3.2: تابع y = f (x) دې په یوه واز اینتروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x (بنسټیز - ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

تاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د a تر b او په پولو یا حدونو یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د a او b تر منځ او د f ګراف لاندې.

تعریف:

(c) ketabton.com: The Digital Library

f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیگرال دی :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

د F(b) – F(a) لپاره زيات وخت $[F(x)]_a^b$ ليکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

جمله:

د يوې ثابتي سره ضرب : که تابع f (x) په يوه اينتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,, \qquad a \in R$$

جمله :

د جمعي (تفريق) قاعده که f1 (x) او f 2 (x) په يوه ايتروال کی نه پريکيدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتين :د يوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لويه اينوول ، لنډ: بدلون) د نيونو لاندې چی u = g (x) متمادي اوو مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضربونو انتیګرالونه
که د دوه توابعو د ضرب انتیګرال د ورسره بلدو متودونو یا لارو شمیرو، نو زیات وخت دا ناشوني وي.

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(x \cdot \ln(x^2)\right) dx = ?$$

د ځیرکي تمرینونه:

۱ - لاندې نااصلي پولینومونه دې د یوه ټول ګویا عدد پولینومونو او یوه اصلي پولینوم د جمعې په ډیر ولیکل شي.

$$a)\ \frac{x^3+7x^2+9x-5}{x+5} \qquad b)\ \frac{x^4-3x^2+1}{x^2-2}$$

$$c)\ \frac{x^3-2x^2+x-5}{x^3+1} \qquad d)\ \frac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}$$

$$e)\ \frac{x^4+2x^3-6x^2-5x+3}{x-2} \qquad f)\ \frac{x^5-x^4+1}{x^2+2}$$

۲ - لاندې پولینومونه دد جمعې په ډیر ولیکئ

$$a)\ \frac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x-6} \qquad b)\ \frac{x^2+1}{x^3-x}$$

$$c)\ \frac{4x+10}{x^2+6x+8} \qquad d)\ \frac{-3x^2+19x-10}{x^3-2x^2-5x+6}$$

$$e)\ \frac{4x^2+6x-20}{x^3-4x} \qquad f)\ \frac{14}{x^2+20x+51}$$

۳ – د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $b)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

$c)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$ $d)\ -\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$

٤ - د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ګونه ورکړئ.

$a)\ \frac{x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$

$c)\ \frac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x}$ $d)\ \frac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$

٥ - د لاندې پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ړرکړئ.

$a)\ \frac{x^3+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8}$ $b)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$

$c)\ \frac{2x^3+x^2}{x^3-1}$ $d)\ \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$

٦ – و ښایئ، چې د F تابع د f تابع لومړنی تابع ده.

$a)\ f(x)=2x^2+4x-7\ ,\quad f(x)=4x+4$

$b)\ F(x)=(x^2-x)^3\ ,\quad f(x)=3\cdot(2x-1)\cdot(x^2-x)^2$

$c)\ F(x)=\sqrt{2x+1}\ ,\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$d)\ F(x)=1+\sin x\ ,\quad f(x)=3x\cdot\cos 3x$

$e)\ F(x)=\frac{1}{3}x^3\cdot\ln x-\frac{4}{9}x^3\ ,\quad f(x)=x^2\cdot(\ln x-1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ - وښايئ، چې د Fاو G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$$a)\ F(x)=x^3+x+4 \quad , \quad G(x)=x^3+x+1$$

$$b)\ F(x)=(x-3)^2 \quad , \quad G(x)=x^2-6x+4$$

$$c)\ F(x)=\frac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x)=\frac{3x+5}{x+2}$$

$$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad G(x)=\sin x$$

۱۳ – لاندې ناټاکلي انتيګرالونه پيداکړئ او ټيکوالى يې و ازمايى.

$a)\ \int x^3dx$ $\quad b)\ \int 7dx$ $\quad c)\ \int xdx$ $\quad d)\ \int (1-x^2)dx$

$e)\ \int (x+\frac{1}{x})dx$ $\quad f)\ \int (e^x+\cos x)dx$ $\quad g)\ \int \frac{1}{\sin^2 x}dx$ $\quad h)\ \int \frac{5}{\cos^2 x}dx$

$i)\ \int udx$ $\quad k)\ \int (2+e^x)dx$ $\quad l)\ \int (1+\ln x)dx$ $\quad m)\ \int (\sqrt{x}+\sin)\,dx$

١٤ – د لاندې ټاکلو انتيګرالونو ارزښت وشميرئ

$a)\ \int_0^3 4dx$ $\quad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx$ $\quad c)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e (2+\frac{1}{x})dx$ $\quad e)\ \int_{-1}^{0} e^xdx$ $\quad f)\ \int_0^{\pi} \sin xdx$

$g)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4dx$ $\quad h)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x}dx$ $\quad i)\ \int_{-2}^{2} x^3dx$

$j)\ \int_2^6 (1+x)dx$ $\quad k)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx$ $\quad l)\ 0\int_{-2}^{2} (\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3})dx$

١٦ = د لاندې ټاکلو انتيګرالونو ارزښت وشميرئ او ارزښتونه پرتله کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \int_{-3}^{1} 3dx und - \int_{-3}^{1} 3dx$ $\quad b)\ \int_{0}^{1}(1+e^{x})dx \quad \wedge \quad -\int_{0}^{1}(1+e^{x})dx$

$c)\ \int_{-\pi}^{0}\sin x dx \quad \wedge \quad -\int_{-\pi}^{0}\sin x dx$

---

۱۷ – هر دوه انتیګرالونه د یوه انتیګرال سره انځور کړئ.

$a)\ \int_{0}^{0.5\pi}\cos x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi}\cos x dx$ $\quad b)\ \int_{-1}^{0}(x+e^{x})dx + \int_{0}^{1}(x+e^{x})dx$

$c)\ \int_{2}^{3}3x^{2}dx + \int_{5}^{3}3x^{2}dx$ $\quad d)\ \int_{-2}^{1}(2+x)dx - \int_{4}^{1}(2+x)dx$

- د لاندې ټاکلو انتیګرالونو لپاره ارزښت تخمین کړئ.

$a)\ \int_{-4}^{-2}e^{x+3}$ $\quad b)\ \int_{0}^{8}\sqrt{1+x}\,dx$

$c)\ \int_{3}^{5}2^{4-x}dx$ $\quad d)\ \int_{0}^{0.5\pi}\sin^{2}x dx$

۱۹ – د کوموx ارزښتونو لپاره لاندې انتیګرالونه ورکړشوي ارزښتونه لري؟

$a)\ \int_{1}^{x}5t^{4}dt \ , \quad la(x)=31$ $\quad b)\ \int_{0}^{x}e^{t}dt \ , \quad la(x)=e-1$

۲۰ - لاندې انتیګراند توابع ته د انتیګرال توابع وټاکئ.

$a)\ f(x)=x^{2}\ ,\ a=3$ $\quad b)\ f(x)=2+e^{x}\ ,\ a=0$

$c)\ f(x)\dfrac{1}{\cos^{2}x}\ ,\ a=0$ $\quad d)\ f(x)=2\ ,\ a\in IR$

۲۱ - د لومړني انتیګرال په استعمال سره لاندې انتیګرالونه وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d)\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx, \qquad e)\ \int \sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx, \qquad f)\ \int(\sqrt[3]{x^4}+1)\ dx,$$

$$g)\ \int \sqrt[3]{x^{-3}}dx, \qquad h)\ \int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}dx, \qquad i)\ \int 3\cdot 2^x dx,$$

$$j)\ \int \frac{1}{2\sin^2 x}dx, \qquad k)\ \int \frac{1}{3+3x^2}dx, \qquad l)\ \int \cos\varphi\cdot s\ \ ds,$$

$$m)\ \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}, \qquad n)\ \int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\,dt, \qquad o)\ \int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}du.$$

٢٢ - د بیرته په بنسټیز اینتیګرال بدلون وروسته یي اینتیګرال ونیسئ:

$$a)\ \int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}dx, \qquad b)\ \int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}dx, \qquad c)\ \int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx,$$

$$d)\ \int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\ dx, \qquad e)\ \int(-2-2\tan^2 x)dx, \qquad f)\ \int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}dt.$$

٢٣-- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیرئ:

$$a)\ \int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx, \qquad b)\ \int_\pi^{2\pi} \cos x\ dx, \qquad c)\ 2\int_2^3 dt,$$

$$d)\ \int_0^\pi \cos\pi \sin x\ dx, \qquad e)\ \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}, \qquad f)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx,$$

$$g)\ \int_{x_1}^{x_2}(2x-1)\,dx, \qquad h)\ \int_0^8\left(\sqrt[3]{x^2+2\sqrt{x}}\right)dx, \qquad i)\ \int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\ dt,$$

$$j)\ \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}du, \qquad k)\ \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}dx, \qquad l)\ \int_a^b a^x\ dx.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲٤- د بدلون یا سیتیچیوشن قاعدې استعمال له لارې يي اينتيګرال وشميري:

$$a)\ \int \sqrt[3]{2x-7}\,dx, \quad b)\ \int \frac{dx}{-x+1}, \quad c)\ \int 2^{3x+6}\,dx,$$

$$d)\ \int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx, \quad e)\ \int \frac{dx}{1+(x+1)^2}, \quad f)\ \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}dt,$$

$$g)\ \int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx, \quad h)\ \int \frac{3xdx}{-x^2+1}, \quad i)\ \int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx,$$

$$a)\ \int \frac{dx}{1+4x^2}, \quad b)\ \int \frac{dx}{2+4x^2}, \quad c)\ \int \frac{dx}{3+5x^2}.$$

$$d)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}, \quad e)\ \int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}}, \quad f)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},$$

$$g)\ \int \frac{dx}{x^2-10x+34}, \quad h)\ \int \frac{dx}{3x^2-6x+30}, \quad i)\ \int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}.$$

۲٥- د تر زيرنيوني فورمبدلون وروسته او په بنستيز اينتيګرال 10 او 11 د بدلون له لارې يي اينتيګرال وشيمرئ

۲٦- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشميري:

$$a)\ \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4x-1)^3}, \quad b)\ \int_{-1}^{0} e^{3x}dx, \quad c)\ \int_{0}^{2} 2^{2x+1}dx,$$

$$d)\ \int_{-1}^{1} \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5}, \quad e)\ \int_{e}^{e^x} \frac{1}{x}\ln\times dx, \quad f)\ \int_{2}^{4} \frac{e^t}{1+e^t}dt,$$

$$g)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\ dx, \quad h)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2}, \quad i)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cdot\cos x\ dx.$$

۲۷-- لاندې ټوټه اینتیګرالونه اینتیګرال کړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \int 0,2x \cdot \sin x\ dx,\qquad b)\ \int 4x^{3} \cdot \ln x\ dx,\qquad c)\ \int \cos^{2} x\ dx$

$d)\ \int \cos x \cdot \sin x\ dx\qquad e)\ \int x^{2} \cdot \sin x\ dx\qquad f)\ \int x \cdot (\cos x + 1)\ dx$

$g)\ \int x^{3} \cdot e^{x}\ dx,\qquad h)\ \int x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x\ dx,$

د اینتیگرال شمیرنی استعمال

د سطحومساحت، چې د f(x) دگراف او x محور ترمنځ پرتې وي.

په ځلورم ځپرکي کې وویل شو چې ټاکلی اینتیګرال $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$ د
سطحې مساحتA ښايي ، چي له منحنيy=f(x)، د x- محور y=(0) او د کرښیx=a
اوx=b له خوا رابند وي. موږ له دې څخه مخ ته تللي یو چې y=f(x) د اینتیګرال
اینتروال په دننه کی دx-محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدی شي د محور کښته لور ته
هم لاړ شي..

فعالیت:

--د يوې په خوښه تابع د منحني یا کرښې او د x محور ترمنځ او یا د دوه توابعو د سطحې شمیرلو لپاره وړاندیزونه وکړئ.

- دا هم په پام کې د شمرلو لپاره په پام کې ونیسئ، که منحني یا د تابه کرښه د x د محور لاندې لور ته پراته وي.

- یوه په خوښه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکاږئ او د تابع انتیګرال د x محور په ټاکلو پولو کې وشمېرئ.

- یوه په خوښه تابع ولیکئ، چې د انتروال په دننه کې د x محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم و کاږئ او دا تابع به کومه محنخښه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د محنښې په ورکولو کې دا بیا وځېړئ، چې ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: که موږ د سطحې مساحت شمېرلو کې هغه عدد ولیکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونیول شي، چې د سطحې واحد(یوون) ور سره شته دی. که دا ورسره لیکل شوی نه وي، خو باید تل په پام کې وي.

دا پورته فعالیتونه مو دې لاندې بېلګو ته رابولي:

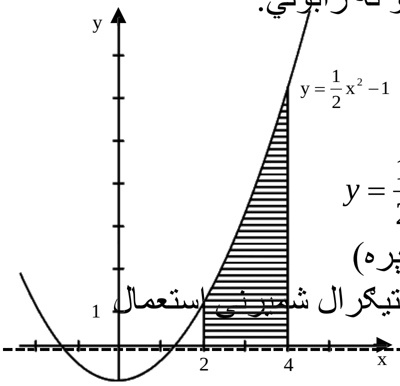


Bild 21,3

بېلګه ۵ . ۱ :

د سطحې مساحت د

$$y=\frac{1}{2}x^2-1\ ,\ y=0\ ,\ x_1=2\ ,\ x_2=4$$

ترمنځ په لاندې ډول دی(مخامخ ځېره)

$$A=\int_2^4(\frac{1}{2}x^2-1)dx=(\frac{1}{6}x^3-x)\Big|_2^4$$

$$=\frac{1}{6}.64-4-\frac{1}{6}.8+2$$

$$=\frac{22}{3}$$

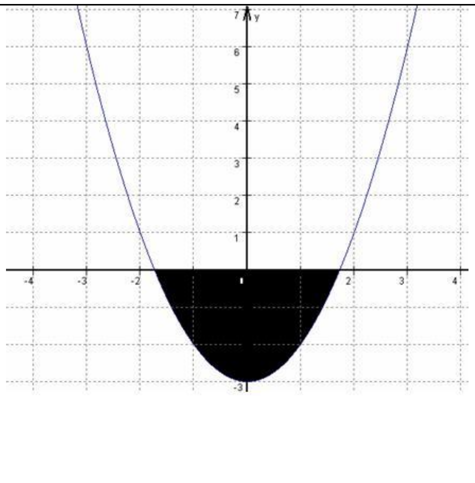
که د تابع y=f(x) سطحې د منحني تلنه د x- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

بdلګه ۵ . ۲ :

د f(x)=x²-3 ګراف د x محور سره یوه

سطحه رابندوي.د ګراف او x محور ترمنځ

د ټولې سطحې مساحت وشمېرئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

تګلار:	

۱ - د دي لپاره چي دا مسئله راته ښه روښانه شوي وي، نو دا پورته رسم کاږو.

۲ - د دي لپاره چي د انتیګرال حدونه لاس ته اروړی شو، باید صفرځایونه وشمېرو.

$$0 = x^2 - 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

---

۳ – اوس د سطحي د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انتیګرال لیکو.

د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر $\sqrt{3}$ پوري انتیګرال شمېرو او نتیجه یې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2)dx - 3\cdot\int_0^{\sqrt{3}} 1dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^{\sqrt{3}} - 3.x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 3\cdot\sqrt{3} = |-2\cdot\sqrt{3}|$$
$$A = 2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3} = 4\cdot\sqrt{3}$$

بیلګه ۵ ، ۲:

د سطحي مساحت د $x_2 = 2$, $x_1 = -1$, $y = 0$, $y = \frac{1}{2}x^3 - 5$ ترمنځ دی: (لاندي څېره)

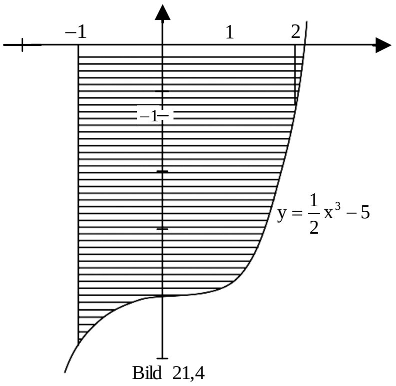
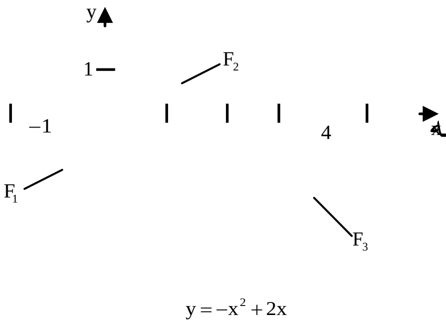


Bild 21,4

$$A = \left|\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^3 - 5)dx\right|$$
$$= -\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^3 - 5)dx$$
$$= (-\frac{1}{8}x^4 + 5x)\Big|_{-1}^{2}$$
$$= (-2 + 10 + 1/8 + 5) = \frac{105}{8}$$

بیلګه ۵ . ۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لاندې پولو $x_1=-1$ تر
$x_2=4$ اودمنحني $y=-x^2+2x$ او $y=0$
ترمنځ د x- محور پورته او کښته پرته سطحه
(په مخامخ څېره کې نښانه شوې ده) دې
وشمیرل شي

حل : د تابع $y=-x^2+2x$, د $x1=0$ د
صفرځایونو $x_1=0$ او $x_2=2$ تر منځ پرته

غوښتونکې سطحه د x-محور پورته، نوره
کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$A=-F_1+F_2-F_3$$
$$=\int_{-1}^{0}(-x^2+2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx-\int_{2}^{4}(-x^2+2x)dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{0}^{2}-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{2}^{4}=\frac{28}{3}$$

د لاندې پولو $x=-1$ تر $x=4$ او د کرښې $y=-x^2+2x$

او $y=0$ ترمنځ (د x – محور پورته او کښته)

تمرینونه

: - په ورکړ شوي انتروال کې د ګراف او x محور ترمنځ سطحه وشمېرئ.

$a)\ f(x)=x-2 \qquad , \quad x\in[-2;3]$

$b)\ f(x)=x^2-x-x \qquad , \quad x\in[1;5]$

$c)\ f(x)=x^2-8x+12 \qquad , \quad x\in[0;8]$

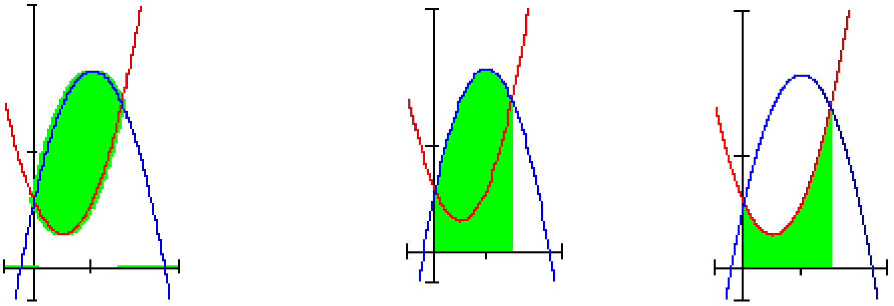
له دوه ګرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت:

- که داسې يو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنګه وشميرو؟

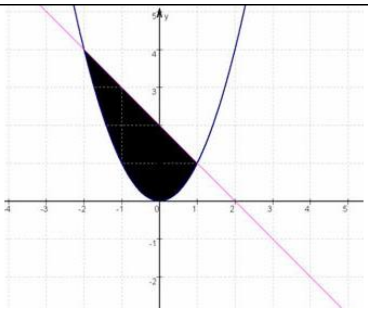
په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شميرل کيږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اينتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شيما څخه مخ ته ځو :



A A₁ A₂

$$A = A_1 - A_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	بیلگه ۵ . ۵ : د $f(x) = x^2$ او $g(x) = -x+2$ دوه توابعو ترمنځ رابند د سطحي مساحت غواړو وشمېرو: د تگلارې لار: دلته هم یو شکل یا گراف رسموو، چې دا حالت راته روښانه شي.

---

۲ - د دې لپاره چې انتیگرال وشمېرو، د گرافونو دقاطع ټکي ټاکو.

$x^2 = -x+2$

$x^2+x-2= 0$

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

P;q - فرمول

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

۳ – په ساده توگه لیدل کیږي. $\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

پس باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_{1}^{-2} (-x+2)dx - \int_{1}^{-2} x^2 dx =$$

$$-1 \cdot \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - 6 - \left(\frac{(-2)^3}{3} \right) - \frac{1}{3}$$

$$= -1,5 - 6 + + = -4.5$$

$$A = 4,5$$

جمله :

که د ټولو x لپاره ، د a<x<b سره f(x)>g(x) وي، دا په دې معنا چې د f گراف د a او b تر منځ د g پورته لور ته ځغلي, نو د دواړو گرافونو په انتروال کې رابندې سطحې مساحت لپاره بارور لري.

$$A = \int_{a}^{b} (f(x) - g(x))\, dx$$

بیلگه ۵ . ٦ :

د توابعو f(x) = x² -2x +2 او g(x) = -x²+4x +2 گرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پیداکړو.
د دواړو گرافونو د x–ارزښتونو غوښتکې(د تقاطع ټکې) د اینتیگرال حدونه جوړوي.

د غوښتکو د x - کواوردیناتو ټاکل:

f(x) = g(x) ⬄ x² -2x+2 = -x² +4x + 2

⬄2x² - 6x =0 ⬄

$x_1 = 0$ او $x_2 = 3$ د اینتېګرال لیمیټونه یا پولې دي.

د اینتګرال جوړونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

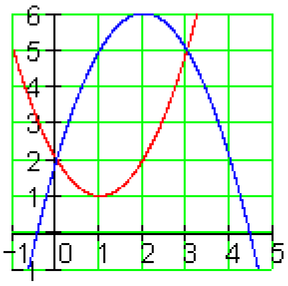
$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$

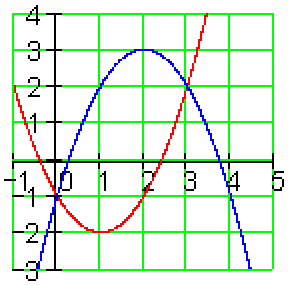
$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه باید تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت ښخه کووچنی ارزښت باید کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

لکه چې پوهیږو، د یوې سطحې مخنښنه ددې په واک کې ده، چې ایا سطحه د **x** -محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ ښیږو، چې ایا دا تاثیرات په پورتنی بیلګه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د **y** -محور په دري واحدونو(یوونونو) کښته لورته بیایو او سطحې نوې شمېرو.





که د لید له مخې قضاوت وکړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوښتکي هم او له دې سره د انتیګرال حدونه بې تغیره پاتیږي.

$$f(x) = x^2 - 2x - 1 \quad \text{و} \quad g(x) = -x^2 + 4x - 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځای په ځای کونه:

$$A=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$$

د $f(x)-g(x)=2x^2-6x$ سره کيږي:

$$A=\int_0^3 (2x^2-3x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9=18-27=\underline{\underline{-9}}$$

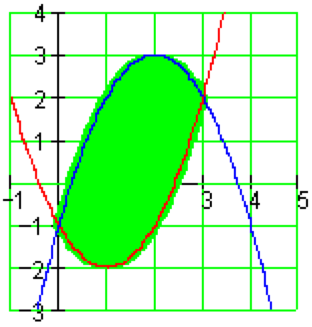
دا چې د دوه منحنيو ترمنځ سطحه فزيکي سطحه ښايي، بايد لاس ته راوړنه يو مثبت عدد وي.

دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A=\left|\int_0^3 (2x^2-6x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3\right|=\left|\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9\right|=|18-27|=|-9|=\underline{\underline{9}}$$

د دې متود تولیزه ونه(عموميت) :

د دوه گرافونو ترمنځ سطحه:



که يوه سطحه د يوې پورته او يوې کښته منحني څخه رابنده وي، چې تابع$f(x)$ او تابع $g(x)$ پورې اړه و لري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شمېرل کيږي.

$$A=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$$

د انتيګرالوني حدونه a اوb دx – محور د

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړو ګرافونو د وضعیه قېمتونو غوښتکي دي،

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له$x=a$ تر $x=b$ پورېاو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

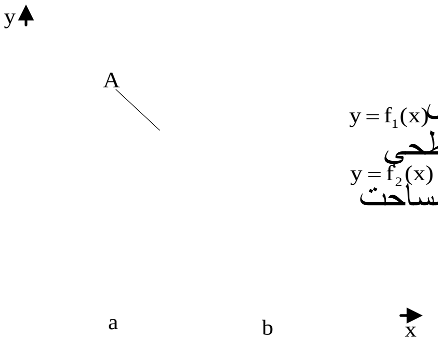


Bild 21,6

اینتیګرالوړاو $f_1(x) < f_2(x)$

په$[a,b]$ اینتروال کی (ش ۱ . ۶) داسی لاس

ته راوړل کیږي چی دتابع $y=f_2(x)$ لاندې سطحې

مساحت څخه د $y=f_1(x)$ تابع لاندې سطحې مساحت

کم کړئ.

$$A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

سرې په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواك

چی $f_1(x)$او $f_2(x)$ په اینتروال $[a,b]$ کومه یوه مخنخښه ځان ته غوره کوي باوري دی.

بیلګه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشمیرو $y=x^2-1$ او $y=-x^2+1$)

حل : د ایتیګرال پولې(حدونه) د افقي(پراته) محور غوښتکي(د تقاطع ټکي) دي

$$x^2-1=-x^2+1$$

$$2x^2=2$$

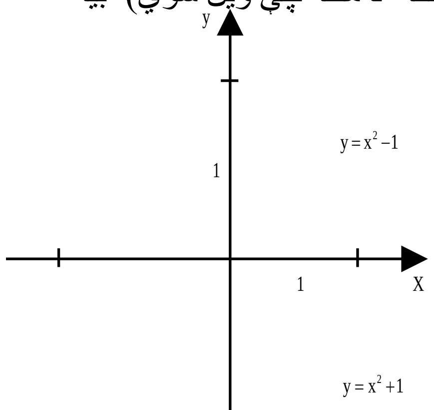
$$x^2=1 \qquad x_1-a=1\,,\ x_2=b=-1$$

د اینتیګرلولو په اینتروال $[1\ ,\ 1\ -]$ کی لرو$-x^2+1>x^2-1$

(که چیرې په اینتروال $[a,b]$ او په (۲ . ۱) کی $f2(x)>f1(x)$ په نظر کي ونه نیول

شي، نو د څرګند اینتیګرال به منفی شي او سرې(لکه د مخه چې ویل شوي) بیا

داینتیګرال مطلقه ارزښت نیسي. له دې امله لرو:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_{-1}^{1}\left[-x^{2}+1-(x^{2}-1)\right]dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(-2x^{2}+2)\,dx$$
$$=(-\frac{2}{3}x^{3}+2x)\Big|_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$$

بیلګه ۵ . ۸ :
د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ
سطحه شمیرل کیږي.
$y=(x-1)^2, y=-4x+4, y=4$

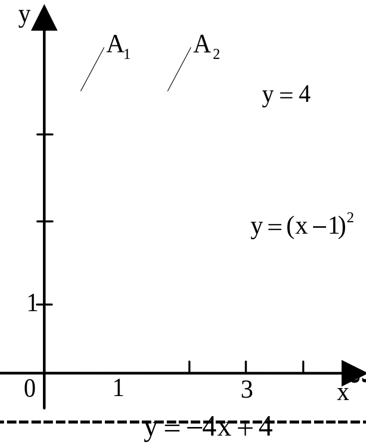


Bild 21.8

حل : دا د شمیرلو سطحه، د منحنیو ترمنځ د دوه
سطحوA1 او A2 له یوځاي کیدو ښخه لاس
ته راځي.
A1د منحنیو y=4 او y=-4x+4 ترمنځ
پروت دی. د اینتیګرال پولی(- حدونه) د لومړي
د دوه کرښو ښخه رابند

کواور ینات(x –محور) غوښتکی دی،
د y=4 او y=-4x+4 ترمنځ.

لرو $4=-4x+4,\ \ x_1=0$ په همدې ډول د

ښي غوښتکي لومړی وضعیه ارزښت (کواور دینات)

د $y=-4x+4$ او $y=(x-1)^2$ ترمنځ

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2}+x-2}{x+1}=\frac{1^{2}+1-2}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{2,3} = -1 \pm 2,\ x_3 = 1.$$

ګورو چی A2 د y=-4 او $y=(x-1)^2$ تر
منځ پرته ده ، د اینتیګرال حدونه(پولی) x1=1 او د لومړي
وضعیه قیمت د بښي غوڅتکي د y=4 او $y=(x-1)^2$.

غوښتوني سطحه داسې ده:

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 [4-(-4x+4)]dx + \int_0^1 \left[4-(x-1)^2\right]dx$$

$$= \int_0^1 4x\,dx + \int_0^1 (-x^2+2x+3)\,dx = 2x^2\Big|_0^1 + (1/3x^3 + x + 3x)\Big|_4^3 = 7\frac{1}{3}$$

تمرینونه:

د لاندې توابعو ترمنځ سطحې و شمېرئ

---

1) $f(x) = x^2 - x - 6\ ;\ \ g(x) = 4x - 10$

2) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3\ ;\ \ g(x) = 3x$

3) $f(x) = 0.75(x^2 - 5x + 4)\ ;\ \ g(x) = 0.75x + 3$,

4) $f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4}\ ;\ \ g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$

5) $f(x) = (x-2)^2 - 4\ ;\ \ g(x) = x - 1$

6) $f(x) = x^2 - 4x + 1\ ;\ \ g(x) = -x^2 + 2x + 1$

7) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3\ ;\ \ g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

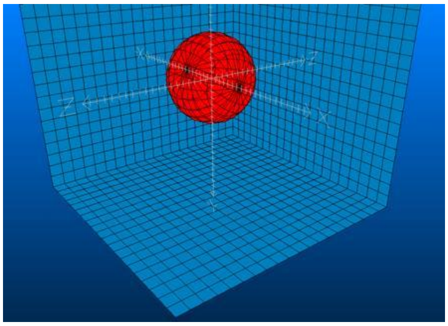
8) $f(x) = x^2 + 3x\ ;\ \ g(x) = 0.5x^2$

9) $f(x)0.5x^2 - 2x - 1\ ;\ \ g(x) = 2x^2 + 2x + 1$

10) $f(x) = -0.5x^2 + 2\ ;\ \ g(x) = -\frac{1}{9}(x-1)^2 + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځرخيدونکو بدنونو(جسمونو) ډکي(حجم)



فعاليت:

- په ورسره بلده توگه د مستطيل حجم وليکئ.

- د کرې، استوانې او د مخروط حجومونه، چې تراوسه مو لوستلي و ليکئ.

يادونه: دا دي تل په پام کې ونيول شي: که د انتيگرال شمېرنې له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د يوه جسم حجم ښايي. موږ ددې لپاره ليکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

ځرخيدونکي تنونه:

ځرخېدونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په يوه ځرخېدونکي محور باندې د يوې کرښې يا منحني ځرخېدنې له لارې منځ ته راځي. کرښه يا منحني په يوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحني محور نه غوځوي، اويا زيات له زياته يې ممکن لمس کړي. چې غوره بېلگې به يې په لاندې کې و ځېړل شي.

د xپه محور ځرخيدنه(ځرخون)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د مخه مو چې وویل، حجم هم یو انتیګرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که یوه تابع د X په محور و څرخول شي.

د یوه څرخېدونکي جسم (بدن یا تن) حجم(ډکی)

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال [a,b] کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ترمنځ جوړېږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخېدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انتروال دf تابع ګراف د y محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

 څرخېدونکي تنونه:

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2 \ dy$$

که دلته $x = f^{-1}(y)$ بدل کړو، نو د x په محور په لاندې توګه حجم لاس ته راوړو:

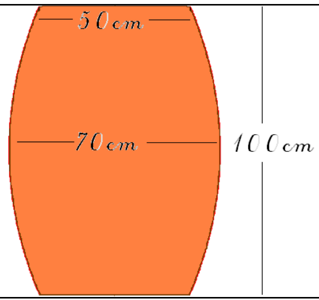
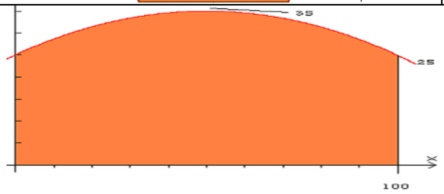
$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)| \, dx$$

د 'f مطلق ارزښت او د انتیګرال په حدونو کې خورا جګ – ټیټ(min/max) توابع یو مثبت انتیګرال تظمینوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحي په څرخولو(د y په محور)، چې د f تابع له ګراف او دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f))^2 \, dx$$

د یوه مرتبان حجم: د یوه مرتبان حجم غواړو پیدا کړو چې جګوالی یې 1 متر، وړانګه یې 25 سنتي متره په پاي او 35 سانتیمتره په منځ کې ده.	
که مرتبان په 90° درجو و څرخول شي، نو د مربع پارابول بڼه غوره کوي. د ژی تابع باید کښته لور ته واز پارابول وي، لکه دلته په شکل کې.	

حل: د پارابول د تابع لیکبنه کېدی شي ساده په ککرتکي یا راس باندې ولیکل شي.

خرخېدونکي تنونه: ۲۶۷

تولیز باور لري:

) ارزښت په دیسیمتر $f(x) - a \cdot (x-5)^2 + 3.5$ (dm

په څرګند دول -5 د رآس راکښنه د x+ په لور ورکوي او 3,5 د y+ په لور. د غزوني ضریب a په لور اړین دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضریب a نه شته. که په فرمول کې یو معلوم تکی کیږدو، کېدی شي a وشمېرل شي. دا تکی (0/2,5) دی.

$$f(x) = -a \cdot (x-5)^2 + 3.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x ارزښت ځا په ځاي کوونو لرو $-a\cdot(0-5)^2+3.5$

له دې امله a دی: $\frac{2.5-3.5}{25}=-0.04$

او مساوات پوره بلل کیږي. $f(x)=-0.04\cdot(x-5)^2+3.5$

د ساده والي لپاره د رآس ټکي فرمول په نورمال یا عمودې فورم بدلوو:
$f(x)=-0.04x^2+0.4x+2.5$

تابع مربع کړئ $f(x)=(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2$

نو دی $f(x)=0.0016x^2-0.032x^3-0.04x^2+2x+6.25$

لومړنۍ تابع $f(x)=\frac{0.0016x^2}{5}\cdot x^5-\frac{0.032x^3}{4}\cdot\frac{-0.04x^2}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x$

د حجم شمیرلو لپاره ټاکلی انتیګرال دی؛

$$\pi\cdot\int_0^{10}(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2\,dx=\pi\cdot\int_0^{10}(-0.0016x^2-0.032x^3-2x+6.25)\ dx$$
$$=\pi\left[\frac{0.0016}{5}\cdot10^5-\frac{0.032}{4}\cdot x^4-\frac{0.04}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x\right]_0^{10}$$
$$=\pi\left[32-80-13\frac{1}{3}+100+62.5\right]_0^{10}$$
$$=\pi\ \cdot101.167$$

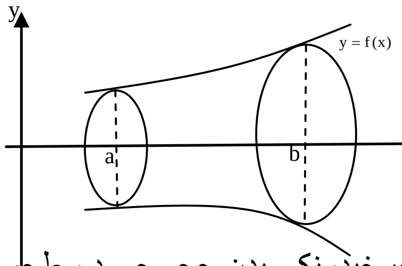
د حجم واحدونه (یوونونه یا یووالي)

دا چې موږ له پیله په دیخیمتر شمېرنه کړې، نو طبعآ دا په لیتر شمېرل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$= 317.824 \; liter$

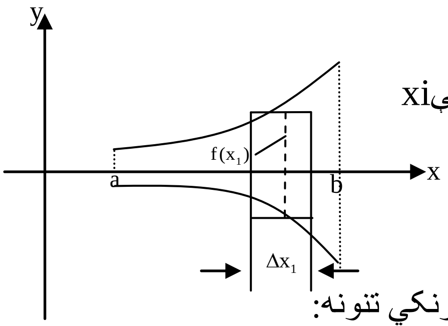
د تابع y=f(x),y=0,x=a,x=b ترمنځ
سطحه چې دx-محورباندې څرخې(ش ۵ . ۹).
دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوې راغلي
دڅرخيدونکي بدن ډکی(حجم) دی.
لاندېجمله باوري ده



جمله ۵ . ۸) د څرخيدونکي بدن ډکی(حجم):
په اينتروال[a,b]کي دی y=f(x) متمادي وي، د څرخيدونکي بدن حجم چې د سطحو
y=f(x),y=0,x=a,x=bترمنځ ، راپيداکيږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$$

ښونه: V د توتو(استوانو)د جمعې له
لارې چې وړانګه يې(f(xi، جګوالی يېxi
د i=1,2,3,...n لپاره لری.
(ش: 10 .5) دi-مې توتې
(سليندر ډکی(حجم) دی.



څرخېدونکي تنونه:

$$\Delta_i V = \pi \cdot \left[f(x_i) \right]^2 \cdot \Delta x_i$$

د ټولو n سليندرونو يا توتو زياتون

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(x_i) \right]^2 \cdot \Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه) n->oe, xi->0 (د بنسټ اينتيګرال د تعريف سره سم

$V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$ حجم (ډکی) راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

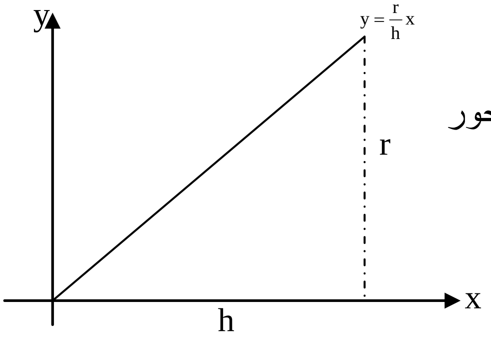
بیلګه ۵ . ۹ :) دمخروط یا کیګل ډکی

(حجم) د $y = \frac{r}{h}x$ کرښي (د سرچیني

تیره کرښه د $\frac{r}{h}$ جګوالي سره) او دx- محور

$(y=0)$ د حدونو $x=0$ تر $x=h$

پورې(ش . ۱۱)



$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[\frac{r}{h}x\right]^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

دا له بنستیزې شمېرنې(د اساساتو) څخه معلومه نتیجه ده.

بیلګه ۵ . ۱۰:

د $y = \sqrt{2x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$

ترمنځ د x-محور باندې ځرخېدلو جوړ(تولید) شوی جسم ځرخېدلی پارابولویید دی (ځ ۵ ې ۱۲)

y

$y = \sqrt{2x}$

1

0 1 3 x

$$V = \pi \cdot \int_0^3 \left[\sqrt{2x}\right]^2 dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^3 x dx$$

$$= 2\pi \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 = 9\pi.$$

د ارښیمد س جمله Archimedischer Satz

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توتي، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{\text{توته(استوانه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$

د 1886 زکڼ يوه درسي کتاب څخه

Figur 120.

Die Volumen der drei Körper verhalten sich wie die Ausdrücke unter 1), 2) und 3); man hat somit die Proportion:

$$Cyl. : Kugel : Kegel = 2r^3\pi : \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2r^3\pi}{3}$$

oder: „ : „ : „ $= 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3}$

„ : „ : „ $= 6 : 4 : 2$

„ : „ : „ $= 3 : 2 : 1$

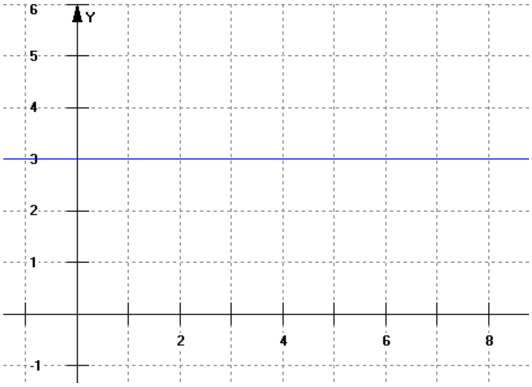
Archimedes war der erste, welcher dieses Verhältnis fand, daher heisst der hierdurch ausgedrückte Satz der Archimedische Satz.

د پورته الماني پښتو:ارښيمېډس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب يې ومونده، له دې امله دا دلته راغلې جمله د ارښيمېډس جلې په نامه نومول شوې.

د ځرخېدونکي بدن(حسم) حجم.

بيلګه ۵ . ۱۱:

استوانه(توته):



(c) ketabton.com: The Digital Library

استوانه د x په محور د$f(x) = c$ یوې ثابتې تابع(په دې حالت کې $f(x) = 3$ دی) د څرخېدو څخه لاس ته راځي.

د یوې استوانې حجم (ډکی) شمېرنه:

اوس دې په [0;5] انتروال کې د توتې حجم وشمېرل شي. د استوانې د حجم د شمېرلو لپاره $V = \pi r^2 \cdot h$ عمومي فرمول دی. په دې حالت کې $r=3$ او $h=5$ دی. دx هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

لومړی له هرڅه غواړو $V = \pi r^2 \cdot h$ څخه فقط $r^2 \cdot h$ تر څېړنې لاندې و نیسو او غواړو یوه لار پیدا کړو ، چې د هغې لارې د انتیگرال په مرسته حجم وشمېرلای شو. د سطحې مساحت د لاندې انتیگرال په مرسته وشمېرل شو :

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x)\, dx$$

که د دې ناپاي ډېرو مستطیلونو(د f(x) د مربع مساحت ا د صفر په لور ځغېلېدونکې پنډوالي dx سره) انتیگرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 [f(x)]^2\, dx$$

دا په دې معنا چې دا انتیگرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتني فرمول څخه دد یوې توتې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راکوي:

$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 [f(x)]^2\, dx$$

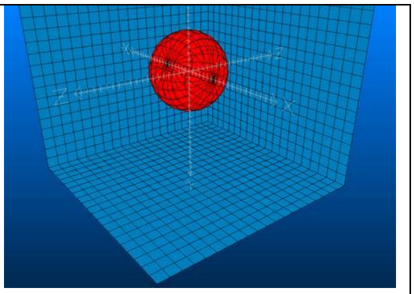
د دې ورکړ شوې استوانې د حجم شمېرنه:

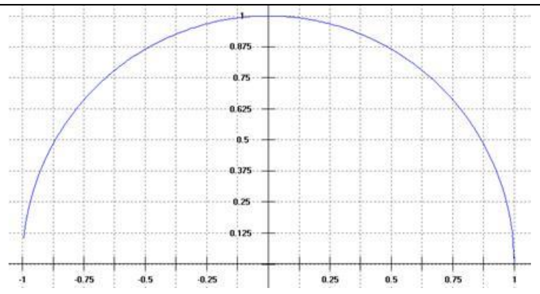
$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2\, dx = \pi \int_0^5 [9(x)]_0^5 = \pi \int_0^5 [45-0]_0^5 = 45\pi$$

د پرتلې لپاره: $\pi r^2 h = 45\pi$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کره (غونډاری یا غونډوسکه):





فعالیت:

- د کري حجم بې له انتیګراله ولیکئ.

- د توتي حجم ولیکئ

- د مخروط حجم ولیکئ.

څرخېدونکي تنونه: ۲۷۳

-دا درېواړه سره پرتله کړئ.

د x په محور د $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ تابع څرخېدني څخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتني شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکي تابع یي $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتیګرلولو له لارې دې بیا حجم وشمېرل شي.

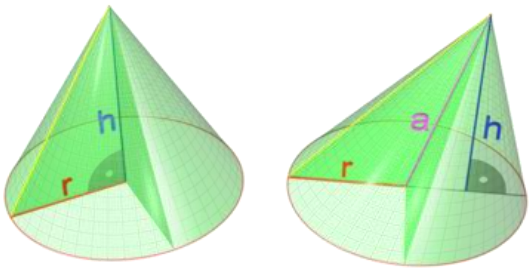
په دې بېلګه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځاي څخه و صفر ځاي ته د x په محور باندې

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=\sqrt{1^2-x^2}$ تابع ځرخېدنو له لارې منځ ته راځي ، یعني په انتروال [-1;1] کې .

$$\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

مخروطKegel (Geometrie)



دا هم ممکن ده، چې یو مخروط د یوه منظمn زاویو (اړخیزې(کونجیز) څخه رابندې بنسټیزې سطحې(د n لپاره چې ناپا ي ته ځي) اهرام ته ور نږدې کړو.

د مخروط حجم:

د انتیګرال په مرسته د یوه مستقیم مخروط د حجم د شمېرلو یوه بله ۲۷۴

ځرخېدونکي تنونه: -----------------------------

مرستندویه لار. یو د کارتیزي وضعیه ارزښت (قیمت) سیستم په کار اچول کیږي، د هغه سره چې د مخروط څوکه په سرچینه (0|0) او منځ ټکی په ټکي (h|0)کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنیو توتو(استوانو) رایوځاي شوی په پام کې ونیسو، چې جګوالی(پنډوالی) یې dx دی. داچې د داسې یوې توتې یا استوانې ګردې ټوټې(کترې) واټن د مخروط له څوکې د وضعیه قېمت سیستم په x سره ور کړ شوی دی، د وړانګې جملې له مخې(دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوې باور لري.

د یوه ناپاي کوچنی توتې(استوانې) وړانګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r\,z\,(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

د یوې ناپاي کوچنۍ توټې(استوتنې) حجم:

$$(\frac{r}{h} \cdot x)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2\ dx$$

دټول څرخېدوني مخروط د ټولو داسې کوچنیو توټو حجم دی. د شمېرلو لپاره یې ټاکلی انتیګرال جوړوو، د انتیګرال حدونو 0 او h سره:

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخېدنه(څرخون) ده.

د یوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولاي چې لومړی د کوادر حجم وشمېرو. دلته د دې ګراف لاندې په ډېرو کترو کتره کول دي د dx پنډوالې سره . د دې کترو د سطحو مساحت وشمېرئ، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

وړانګه f(x) لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بيا يې انټيګرال په ورکړ شوي [0;5] انټروال کې ونيسئ.

$$\pi\int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi\left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلې لپاره دئ د يوه مخروط د حجم معياري (ستاندارد) بڼه وکتل شي.

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 32.72$$

لنډ :

که يوه منحني د x يا y په محور وڅرخول شي، يو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نريو کترو يا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا په ورته نږدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نږدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د **x** په محور څرخونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د **y** په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

بېلګه ۵ . ۱۲:

د $y = x^2/4$ تابع ګراف په *[0, 2]* انټروال کې د وضعيه قيمتونو په محورونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دی؟

د x په محور څرخېدنه: $y^2 = x^4/16, x_1 = 0, x_2 = 2$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16} dx = 0.4\pi$$

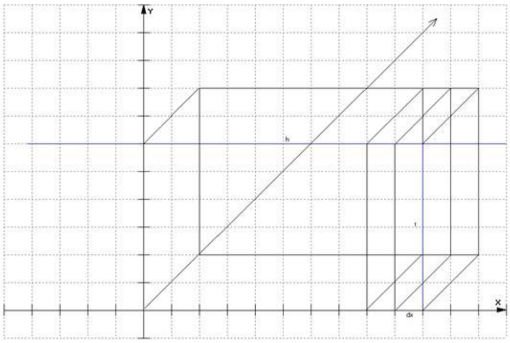
(c) ketabton.com: The Digital Library

د y په محور څرخېدنه: $x^2 = 4y, y_1 = 0, y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y\,dy = 2\pi$$

د ناڅرخیدونکي جسم ډکی یا حجم.

مستطیل یا بربع المکعب (شپږ اړخیز جسم) Quader



دا لید شکل د استواني څخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه څرخي. حجم یې کېدی شي د عادي کوادر په څېر وشمېرل شي $(V = r^2h)$ او یا د صفر په لور تلونکي dx سرورې مربع وې ټوټه شي. د دې لپاره دې د پروت غوڅي (قاطع) سطحه وشمېرل څرخېدونکي تنونه:

شي، یعنې $q(x)$ د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بیا باید انتیګرال ونیول شي. په ټولیزه توګه دا معنا لري: $V = \int_a^b q(x)dx$

په دې بېلګه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژی تابع مربع ده: $q(x) = [f(x)]^2$

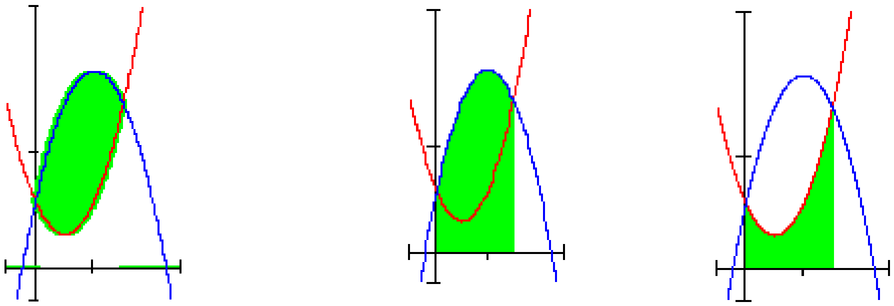
که موږ $f(x) = 3$ تابع له 0 تر 5 انتروال کې د پروتقاطع تابع سره انتیګرال کړو، نو باید $V = r^2h = 45$ لاس ته راشي. $\int_0^5 q(x)dx = [9x]_0^5 = 45$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تولګه

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



A A₁ A₂

$$A = A_1 - A_2$$

ځرخېدونکي تتونه: ۲۷۸

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

تر منځ پرتې سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$.

د یوه ځرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په ځرخېدنه د x په محور په انتروال [a,b] کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ترمنځ جوړیږي، رابنده وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حجم شمیرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخیدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انتروال دf   تابع ګراف د y محور او د دواړو کربښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که   f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f   په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې   متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2 \ dy$$

جمله ۵ . ۸) د څرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینتروال[a,b]کي دی y=f(x) متمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چی د سطحو y=f(x),y=0,x=a,x=bترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{\text{توته(استوتنه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کربښیزې (خطي) تابع(د بیلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخیدنه(څرخون) ده.

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور ځرڅونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور ځرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع ځرخيدني څخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کيدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکې تابع يې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتيګرلولو له لارې دې بيا حجم وشميرل شي.

تمرينونه:

۱ - د $y = f(x) = x^2$ او د دې د معکوس تابع تر منځ سطحه وشميرئ.

۲ - د ګراف او X محور ترمنځ سطحه وشمېرئ.

$a)\ f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{13}{4}x + 3$ $b)\ f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x$

$c)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ $d)\ f(x) = -x^2 + 6x - 5$

۳- د هغې سطحې مساحت وشميرئ، چې د وکړ شوو مساواتو منحنيو څخه را بنده شوي وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = e^{0,5x}, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2:$

b) $y = \frac{1}{2}x^3, \quad y = 0, \quad x - 2, \quad x = 2:]$

c) $y = \frac{1}{x^2}, \quad y = 0 \quad x = 9, \quad x = -3, \quad x = 3:$

d) $y = \cos x, \quad y = 0$

e) $y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{5\pi}{6}:$

f) $y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 4:$

g) $y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2:$

h) $y = x^3 + 7, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2:$

i) $y = x^3 + 7, \quad y = x^3 - x^2 + 3x + 5:$

j) $y = 3 - \frac{1}{2}x^4, \quad y = 3 - 4x:$

k) $y = \frac{1}{x}, \quad 3y + 3x = 10:$

l) $y = \cos x, \quad y = \sin x$

m) $y = \sqrt{3x+1}, \quad y = 1, \quad x = 8:$

n) $y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{8}{4 + x^2}:$

---

o) $y = x^2, \quad x = y^2:$

p) $y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3:$

٤-- - د ساین د منحني ګراف او د کوساین د منحني ګراف یو بل په انتروال $0 \le x \le 2\pi$ کې غوځوي.

د دواړو غوڅېڅکو تر منځ له دواړو منحنيو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۵- د اکسپوننشل منحني g د $y=e^x$ سره او په انتروال $[0,1]$ دp پارابول د $y=-x^2-1$ سره را بنده سطحه وشمېرئ.

٦ - د کربنې g د $y=2x^2+1$ سره او په اينتروال $[0,2\pi]$ د ساين منحني د y=sin x سره څخه رابنده سطحه وشمېرئ.

٧ - پارابول p_1 د $y=x^2-3$ سره او p_2 د $y=2x^2+1$ سره د $[-1,2]$ په اينتروال يوه سطحه را بنده وي.

د ا بنده سحه و شمېرئ.

٨ – د پارابول P د $y=\sqrt{x}$ سره او کربنه g يې د y = -x-1 سره په اينتروال رابنده سطحه لرو. دا را بنده سطحه وشمېرئ.

٩ - په اينتروال $[-2,1]$ د g_1 کربنې د $y=x+3$ سره او g_2 د 2x+1 سره څخه را بنده سطحه وشمېرئ.

١٠ - – پارابول $y=x^2-6x+5$ د p سره او کربنهg د y+-x+1 سره رابنده سطحه.

د دې سطحې مساحت وشمېرئ.

١١-- د g يوه کربنه يو پارابولpد $y=x^2+2$ سره په $x_1=-1$ او $x_2=2$ کې غوڅوي.

د کربنې او پارابول څخه رابندې سطحې مساحت وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ – د g یوه کرښه یو پارابول p د $y + 0,5x^2 + x + 4$ سره په د $x_1 = -2$ او $x_2 = 4$ ټکو کې غوڅوي.

د دې کرښې او پارابول څخه رابندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱۳ - د ساین د منحني ګراف او د کوساین د منحني ګراف یو بل په انټروال $0 \le x \le 2\pi$ کې غوڅوي.

د دواړوغوڅټکو تر منځ له واړو منحنئو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱٤ - د f تابع ګراف د t $y = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$ سره د x محور سره سطحه پوره رابندوي.

د دې مساحت وشمېرئ.

۱٤ - د f تابع ګراف د y=a.(1-sin2x), (a>0) سره او د وضعیه قیمت په I (اوله) مربع کې (قیمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو.

د کومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت (x-2) سطحې یوونونه (واحدونه) دی.

۱۵- د لاندې توبعو ګرافونه هر یو د x په محور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدونکو جسمونو حجم وشمېرئ.

$a)\quad f(x) = 2 + \sqrt{x}\,,\quad | = [0;4]$ $\qquad b)\quad f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1\,,\quad | [2;4]$

۱٦ - د لاندې توبعو ګرافونه هر یو د x په مخور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدوکو جسمونو حجم وشمېرئ او د ساده شمېرنو سره یې و ازمایئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \ f(x)=-x+5,\ \ |=[0;3]$ $\qquad$ $b)\ \ f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ ,\ \ |[1;5]$

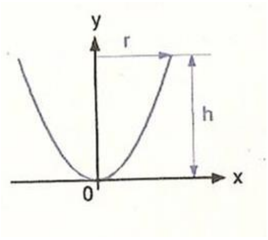
۱۷--د لاندې توابعو گرافونه هر یو د y په مخور ځرخي. د منځ ته راغلو ځرخېدوکو جسمونو حجم وشمېرئ.

$a)\ \ f(x)=\sqrt{x}\ \ ,\ 1=[0;4]$ $\qquad$ $b)\ \ f(x)=(x-2)^2\ \ ,\ 1=[1;3]$

۱۸- د لاندې توبعو گرافونه هر یو دy په محور ځرخي. د منځ ته راغلو ځرخېدونکو جسمونو حجم وشمېرئ او د ساده شمېرنو سره یې و ازمایی.

$a)\ \ f(x)=x+1\ \ \ ,\ \ 1=[1;4]$ $\qquad$ $b)\ \ f(x)=-\frac{1}{2}x+2\ \ ,\ \ 1=[0;4]$

۱۹ د پارابول په سیومتري محور yد پارابول د ځرخیدو سره یو لوښی منځ ته راځي. وښایئ، چې دا $v=\frac{\pi}{2}\cdot r^2\cdot h$ حجم لري.



$$v=\frac{\pi}{2}\cdot r^2\cdot h$$

۲۰ - د ساین د منحني گراف او د کوساین د منحني گراف یو بل په انتروال $0\le x\le 2\pi$ کې غوځوي.

۲۸۴ ځرخېدونکي تنونه:

د دواړو غوښتکو تر منځ له واړو منحنئو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۲۱ - د f تابع گراف د $y=-\frac{1}{9}x^4+\frac{2}{3}x^2$ سره د x محور سره سطحه پوره رابندوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مساحت وشمېرئ.

۲۲ - د f تابع ګراف د $y=a.(1-\sin 2x), (a>0)$ سره او د وضعیه قیمت په I (اوله) مربع کې (قیمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو.

د کومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت (x-2) سطحې یونونه (واحدونه) دی.

۲۳---- لاندې د څرخېدونکې بدنونو ګراف په x محور څرخي. د داسې منځ ته راغلو څرخېدونو تتونو حجمونه(ډکي) وشمېرئ.

$$a)\ f(x)=2+\sqrt{x} \quad , \quad I=[0;4] \qquad b)\ f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2 \quad , \quad I=[2;4]$$

۲٤---د لاندې څرخېدونکو بدنونو ګرافونه د x محور باندې څرخي داسې منځ ته راغلي حجمونه(ډکي) وشمېريئ او په ساده حساب سره يې وشمېرئ.

$$a)\ f(x)=-x+5 \quad , \quad I=[0;3] \qquad b)\ f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \quad , \quad I=[1;5]$$

۲٥--- د لاندې توابعو د څرخون له لارې منځ ته راغلو تتونو حجم وشمېرئ.

$$a)\ f(x)=\sqrt{x} \quad , \quad |=[0;4] \qquad b)\ f(x)=(x-2)^2 \quad , \quad I\ |=[1;3]$$

۲٦---- د لاندې توابعو ګراف د y په محور څرخي. داسې منځ ته راغلي تتونه و شمېرئ او په ساده شمېرنه سره يې هم و شمېرئ.

$$a)\ f(x)=x+1 \quad , \quad |=[1;4] \qquad b)\ f(x)=-\frac{1}{2}x+2 \quad , \quad |=[0;4]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۷--- د لاندې توابعو ګراف د y په محور څرخي. داسې منځ ته راغلي تنونه و شمېرئ او د ساده شمېرنې سره يې هم و شمېرئ

$a)\ f(x)=\sqrt{x}\quad , \quad |=[0;4]$ $\qquad$ $b)\ f(x)=(x-2)^2\quad , \quad |=[1;3]$

$a)\ f(x)=x+1\quad , \quad |=[1;4]$ $\qquad$ $b)\ f(x)=-\frac{1}{2}x+2\quad , \quad |=[0;4]$

هغه ناټيکاوي، چې د نصاب په کتاب کې شته، داسې لړځه به يې زه دلته له تاسو سره شريک کړم

د ډاکتر ماخان (ميرې) شينواري چاپ او ناچاپې ليکنې:

په ډېره مننه، چې زما کتابونه به ټول www.ketabto.com ته پورته شي.

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب   په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې څنو ځایونو غزېدلې او څنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګڼې – او کڼې د کڼې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې   انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل   دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – احصایه یا ستاتیستیک   دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - څمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزۍ پښتو او عربي + درۍ ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې څنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپیني خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

د ښوودځي کتابونه له ۷-م لګي څخه تر ۱۲-م ټولګي پورې.

۱ – د دولسم ټولګی شميرپ،هنه

زما ليکونه:

Dr. Makhan Shinwari ډاکتر ماخان شينواری

Smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي حمهوريت جمهور ريس جلاتمآب

ډاکتر محمد اشرف غني ته په ډېر درنښت.

له هر څه د مخه دې بخښنه وي، چې ستاسو ډېر د ارزښت ډک وخت نيسم، خو دا راته ډېر اړيين برېښي او پرته له تاسو به يې څوک دومره جدي هم ونه نيسي.

پوهيږو، چې د پوهنې وزارت د ولس د پوهنې مغذ جوړوي، پوهه له همدې ځايه پيليږي، چې بنسټ يې بايد سم وي. همداسې نصاب د يوه هيواد د پوهنې مغذ دی، نو بايد همداسې ورته د هره اړخه په درنه سترګه او غور وکتل شي.

زه خبره را لنډوم او د افغانستان د نصاب ستونځو ته په لنډ ډول ګوته نيسم او په همدې ډول ستونځوبيو يا د ستونځو حل ته يې.

ما د ۱۲ –م ټولګي د پښتو او دري کتابونه وليکل او زه ترې المان ته لاړم، قرارداد پای ته ورسيد. زما د کتابونو په ځای نور کتابونه چاپ شول، چې ناسم وو. په دې هکله د پوهنې وزارت ته زما ليکنه مل ده. دا کتابونه ما بيا له سره ترتيب کړل(ليکنې مې يې

(c) ketabton.com: The Digital Library

درلودلي) او چاپ ته مې چمتو کړل، خو دا مې باور نه کيده، چې دا به بيا بې زما له شتون چاپ شي.

ما د کتابونو د ليکلو لپاره پيسې اخستي او دا ليکنې هم دا دی لرم، چې چاپ ته چمتو دي

ما چې دا نور کتابونه وکتل، نو دا مې لازم وګڼله، چې دا کتابونه هم زه له سره وليکم، مواد يې لرم، ځکه چې ما ډېر د شميرپوهنې يا رياضي کتابونه ليکلي او ژباړلي(نږدې تر ۴۰ کتابونو پورې). د کتابونو منځپانګه د ښوونځي کتابونو لپاره هم پوره ده، تخنيکي کارونه يې بايد له يوه مسلکي کس سره سرته ورسول شي.

اوس مې يې په ليکلو او د ښوونځې لپاره په سمون پيل کړي دی.

زما ليکنې مسلکي ناسمون نه لري، معياري او د وخت د غوښتنو سره سمې دي، چې دا زما د اخرنيو اوولس کالو د هڅو په اساس باوري ده.

زه څه کولی شم؟

دا چې په دې هکله بل کوم هيوادوال څه نه دي ويلي يا ليکلي، نو باور لرم، چې زه يواځنی کس يم چې دې ته مې فکر را اوښتی. زه دا څه چې ليکم دا په پوره مسئوليت ليکم.

ما چې دا څومره ليکنې کړي، دا زما د ارمان د پوره کولو لپاره دي او په دې هکله ځان د ولس پوروړی بولم.

که د دې کتابونو د ليکنې دنده راته وسپارل شوه، نو د کار ميوه به مې وي او دا کار به په نړيوال معيار او ښه توګه سرته ورسوم.

دا اخر يونيم کال مې يواځې د ښوونځي له کتابونو سره سر خوږولی، چې د هر ځل لوستنې سره يې پوره زوريږم او د هر ځل لوستلو سره يې په ناسمون سر خوږوم.

زه هيله لرم، چې دا وخت راته راکړئ، چې د افغانستان رياضی معياري کولو کې مرسته وکړم او نه دا چې مرسته وکړم بلکه معياري يې کړم. دا کار مې لکه د مخه مې چې ګوته ورته ونيوله هم کړی.

زه کړی شم، چې دا کار د المان څخه هم سرته ورسوم. که ماته دا وخت راکړ شو، نو زه به له حکومت څخه د معاش غوښتنه هم ونه کړم او دا کار زما له خوا ساده کيدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښوونځي د رياضي لپاره به يو بنسټ کېښوول شي، چې په هغې د راتلونکی وخت شميرپوهنه يا رياضي ابادېدی شي. دا بنسټيز مسلک به په نړيواله کچه سم شي.

زما مسئوليت مې په دې ليکنه سرته ورساوه.

له هر څه د مخه ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکتر ماخان شينواری

د نصاب د کتابونو د ناسمون په څنو برخو د نموني لپاره لنډه څېړنه شوې، چې د دې ليک سره مل ده.

د پوهنې محترم وزارت ته زما ليکنه هم مل ده.

ډاکتر ماخان شينواری

د ۲۰۱۳ زکـ لومړی نيمايي

Dr. Makhan Shinwari

Lansbergerstr.3

5311- Bonn

Germany

smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهنې محترم وزير صاحب ته په ډېر درنښت!

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډېرو درنو!

غواړم دا لاندې دوه ټکي د تاسو محترم سره شریک کړم:

لومړی: ما له مارچ ۲۰۰۸ ز کال څخه تر دسمبر ۲۰۰۹ ز ک پورې د درسي کتابونو لیکنه کې ونډه لرله او د ۱۲ ــم ټولګي د ښمیر پوهنې یا ریاضي کتابونه مې په پښتو او درې ولیکل.

ما دا څه موده د مخه د پوهنې وزارت په ن ج پاڼه کې د ۱۲ ــم ټولګي د ښمیرپوهنې (ریاضي)کتاب ولوسته، چې ګورم هلته په کې زما د نوم درک هم نه شته.

دویم : د کتاب خوندېوني یا متن ته چې ننوتم، ګورم، چې هغه څه چې ما لیکلي وو هغه یا نه شته او یا تخریب شوي دي.

ما په ډېر زور او د زړه خوراک سره د کتاب لومړۍ برخه یعنې د ،، پولې ارزښت،، یا لیمیټ برخه وکتله، چې ګورم، نو دا مې ترې لاس ته راوړه، چې دا نه ریا ضي ده او نه پښتو او هغه چا چې دا لیکلې نه دا چې په ریاضي نه پوهیږي په پښتو هم نه پوهیږي.

زما په لیکنو کې نوښت:

دا باید په ګوته کړم، چې زما لیکنه په نړیوال معیار وه، چې منځپانګه یا متن یې طبعآ زه لرم.

لومړي: دا لومړي ځل دی، چې کتاب مې لومړی په پښتو او بیا په درې ولیکه.

دویم: دا لومړۍ لیکنه وه، چې په لیکنه کې له ایراني کتابونو ګټه نه وه اخستل شوې او لیکنه له الماني ادبیاتو او داسې څه له انګرېزي ادبیاتو رانیول شوي وه.

دریم: زما کتاب معیاري لیکل شوی وو او ترې ښه لیکنې یې شونتیا نه لرله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې توګه مې غوښتنه او هیله :

اول - زه باید پوه شم چې ولې داسې شوي، چې زما نوم له کتاب څخه وتلي؟

که یوائې یوه لیکنه هم په کې زما پاتې وي، نو باید زما نوم په کې وی. دا ماته له ما سره او زما د دوه کاله په دې لار کې د ستونځو ګاللو له امله او نه اخر زما د علمي کار سره هم تیری بربښي؟

تاسو پوهیږی، چې د ۱۲ ـم ټولګي کتاب لیکلو لپاره ماډېرې پیسې اخستي او لپاره مې یې ښه کار کړی وو، چې لاس ته راوړنه یې باید داسې نه وی.

دویم- د کتاب دا لیکلي لومړی او هم داسې سرسري دویمه برخه، چې ما لوستلې، د ښوونځیو لپاره د زغم نه دي.

زما وړاندیز: دا کتابونه باید راټول شي او بیا ولیکل شي، ځکه چې په دې خو لیکونکي نه پوهیږي ، نو له دې امله نه ښوونکي پرې پوهیدی شي او نه زده کوونکي او د پوهیدلو معقول څه هم نه لري. دې ته ګوته نیسم، چې په دې نورو کتابونوکې به هم ورته ستونځې وي، خو زما یې کتنه اوس د لاسه نه کیږي، ځکه چې .....

د داسې کتابونو لیکل او ښوونځیو ته وېشل د پوهنې وزارت لپاره توهین دی.

زه له دې امله د کوچنې اختر وروسته کابل ته درځم او هیله لرم، چې د هرچا لومړی له تاسو سره وګورم. زه به د اګست په ۱۷ یو ځل وزارت ته درشم.

یادونه: ما په دې اخرو څو ورځو کې د کتاب ډېر ځایونه داسې ځغلند وکتل، باور وکړی، چې د هرې موضوع د لوستلو سره زوربډلی یم.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زه به په دې هکله – که لوي څښتن کول- له تاسو سره په کابل کې وغږیږم.

له هر څه د مخه له تاسو ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکتر ماخان شینواری

یوه هیله

زه د افغانستان د ټولو ن ج ، نورو پاڼو او راديو تلويزيونو څخه هيله لرم، چې دا زما ليکنه ګرانو لوستونکو ته وړاندې او په نورو اړونده ليکنو هم همدا مرسته وکړي.

د رياضي کتابونو د چاپ مخه ونيول شي

ولې؟

په دې نږدې څو مياشتو کې د نصاب کتابونه بيا چاپ ته وړاندې کيږي او ګومان مې دی، چې داسې د معيار سره سم سمون به په کې نه وي راغلی، نو له دې امله يې د چاپ مخنيوی اړيين او په همدې ډول يې سمون هم اړين دی، چې په لاندې کې يې ستونځو او ستونځوبيو (د ستونځو حل) ته هم ګوته نيسم.

زه د شميرپوهنې ټول د نصاب پوهانو ته درناوی لرم او هيله ده، چې دا ليکنه شخصي وه نه نيسي.

-- ما له نږدې ۱۹۹۸ ز ک وروسته د شميرپوهنې په کتابونو پيل وکړ، چې تراوسه مې نږدې څه کم څلوېښت کتابونه ليکلي، چې له جملې يې له شلو ډېر چاپ او نور ناچاپ دي. د دې کتابونو ۱۴ غوره يې په www.kitabtoon.com (دې پاڼه کې پاوس نه شته) کې خپاره شوي او همداسې له ما څخه شميرپوهنې ته ځانګړې شوې پاڼه کې تر

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۵ کتابونو ن ج ته پورته شوي او دا نور به هم په خپل وار ن ج ته پورته شي. زما پاڼه smakhan.wordpress.com

دا زما ن ج پاڼه په نا ښکلي ډول يوائې زما د شميرپوهنې کتابونو ته ځانګړې شوې، چې زما زيات کتابونه په کې خپاره شوي او نور به هم په کې خواره شي. پاڼه ښکلې نه، خو خپله موخه پوره کولی شي او موږ ټولو سره مرسته کولی شي، چې شميرپوهنه په ګډه سمه او معياري کړو.

ګرانو هيوادوالو!

افغانستان دې اوږدې جګړې په هر اړخ کې بې سارې زيانمن کړی او همداسې په پوهنيز اړخ کې هم. د افغانستان نصاب هم له دې ناخوالو بې برخې نه دئ پاتې شوی.

لکه څنګه چې پوهنه د هيواد مغذ جوړوي، همداسې نصاب د پوهنې مغذ دی، نو له دې امله زياته پامرنه هم غواړي.

ما په نصاب کې د دولسم ټولګي پښتو او درې کتابونه وليکل، د قرارداد وخت پوره شو، پيسې مې واخستلې او زه ترې لاړم، چې متآسفانه له ما ليکلي کتابونه چاپ نه شول – علت يې دا وو، چې ګران ليکونکي يا ليکونکي وښايي، چې دوي دا کار ښه کوي، نو ولې دا د هيواد دباندې افغانان دې دې کار ته راوبلل شي- او په ځای يې متآسفانه ناسم کتابونه چآپ شول. په دې هکله مې په ۲۰۱۲ ز ک کې پوهنې وزارت ته يو ليک هم ليږلی وو، چې

ما متآسفانه چې پوره ناوخته دا نور د ښوونځي چاپ کتابونه وکتل او دې نتيجې ته ورسيدم، چې د رياضي کتابونه بايد سم او معياري چاپ شي او نه دا ناسم بيا چاپ شي.

دا وړانديز ولې ما په نصاب کې نه دئ کړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په خواشینۍ سره به ووایم، چې د کار په سر کې مسئولو چې په کار پوه نه وو، بل څوک هم کار ته نه پرېږدي او د چا خبره د چا غوږ ته هم نه رسیږي. ما په همغه وخت کې هم د ټولو لیکنو لپاره وړاندیزونه لروده او هلته مې ورته چاپ او په میز ایښودلي وو، خو چا نه غوښتل ګټه ترې واخلي او یا یې ترې د ګټې اخستلو توان نه لاره.

ما ته د هغو د لیکنې متود ښه ونه برېښیده، ځکه چې استادان د دارنګه لیکنو سره بلد نه دي، نو له دې امله د پوهنې متن سره له هغې څو واره زیاتې څنګیزې لیکنې کوي، چې موخه ور نه دي.

ما چې پتیل، چې د کتابونو د چاپ مخه باید ونیول شي، نو دې ته مې هم چمتووالی باید ښوولی وي، چې د کتابونو معیاري او سم لیکلو امکان هم باید شته وي.

دا امکان شته. ما دا کار سرته رسولی، کتابونه مې ټول داسې خام پوره کړې، چې زیاتو برخو ته یې ، څو واره وړاندیزون هم شته.

که د کتابونو د چاپ کار باید ډېر په بیړه وشي، نو دا کار هم کیدونکی دی، خو باید څو تخنیکي کسان د مرستې لپاره چمتو وي.

د چاپ کتابونو په ناسمون مې لیکنه کړې، چې ګران لوستونکي یې په
smakhan.wordpress.com کې لوستلی شي او که ن ج ته پورته نه شو، نو مینه وال او په دې هکله لیوال یې د برېښنا پتې له لارې لاس ته راوړی شي..

ما د هرکتاب څخه لږ ترلږه یوه برخه داسې د نمونې په څیر څیرلې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د شمیرپوهنې مینه وال ګران لوستونکي په ستونځو وپوهيږي، نو اړيين بولم، چې د ښوونځي کتابونه هم وګوري او اړونده موضوعګانې زما د چاپ او ناچاپه ليکنو سره پرتله کړي(کتابونه په پورته ن ج کې شته دی، چې ځنې يې راکښته کيدی شي او هم يې هلته ګران لوستونکي لوستلی شي).

زه په دولت کې او له دولت دباندې د ټولو اغيزمنو هيوادوالو څخه هيله کوم، چې په دې لار کې له ما او له دې لارې زموږ د ځوان راتلونکي سره مرسته وکړي او د شميرپوهنې معياري کولواو سمون امکانات راته چمتو شي.

زما د کار دوه امکانات شته:
لمړی: دا کار زه کړی شم، چې له المان څخه هم سرته ورسوم او په ښه توګه، په دې حالت کې به زه د زحمت په مقابل کې له اجورې - د ځوانانو سره د مرستې له امله - تير شم.

دويم: په افغانستان کې که دا کار سرته ورسيږي، دا به ګټور وي، ځکه چې په افغانستان کې به په ټولو خواوو کاروشي.

داڅه وروستی خبرې ما هم رامخ ته کړې.

په لاندې کې زما ليکنې د افغانستان اسلامې جمهوريت جمهورر ريس جلالتمآب اشرف غنې او د پوهنې محترم وزارت ته ليک کې هم لوستلی شئ او هيله مې ده، چې ويئ لولئ.

ستاسو له ګټو مشورو به ډېر مننوی يم.

زما د برېښنا ليک پته: smakhan1946@gmail.com

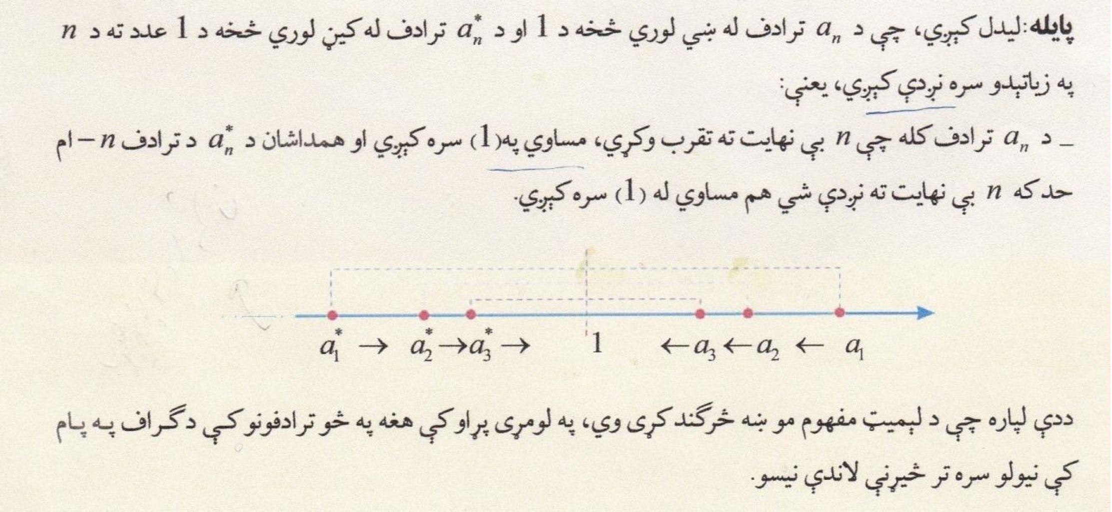
ستاسو ماخان

د نصاب د دولسم ټولګي کتاب ناسمونو ته کتنه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي: په دولسم ټولګي کې پیل له ترادفونو شوی او په سر کې یې دوه ترادوفونه راوړي او دا یې بیا په یوه ګراف یا کرښه د ښي او کیڼې لورې یوې پولې ته ځغلولي.

د کتاب ۳ ـــم مخ


پایله:لیدل کېږي، چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کیڼ لوري څخه د 1 عدد ته د n په زیاتېدو سره نږدې کېږي، یعنې:

ـ د a_n ترادف کله چې n بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په(1) سره کېږي او همداشان د a_n^* د ترادف $n-$ام حد که n بې نهایت ته نږدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.

ددې لپاره چې د لېمیټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړي پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څېړنې لاندې نیسو.

زه پوهیږم، چې دا کار دې درنو لیکوالانو ولې کړی؟

له همدې پیله روښانیږي، چې محترم لیکونکي د درس سره کومه بلدتیا نه لري.

په پورته کې دا دوه پرلپسې هیڅکله له) ۱ « سره نه برابریږي، لکه ښاغلی لیکوال چې لیکي.

پسې یې بیا د پرلپسې یا ردیفونو لپاره بیل بیل ګرافونه کښلي.

په پرلپسیو یا ردیفونوکې چې موږ لیمټ راوړو، نو موخه ترې د پرلپسې کونورګنت او ډیورګنت دي. په پرلپسې کې اړین نه ده، چې د کونورګنت حالت کې دې پرلپسې له دواړو لورو پولې ته لاړ شي، خو داسې پرلپسې شته او هغه یو ترادف دی نه دوه.

دویم: دا لاندې څه چې راغلي، هم کوم درس پورې اړوندوالی نه لري، همداسې څه یې لیکلي. دی د ناسم د ترادف درس څخه سملاسي داسې یوې موضوع ته راغلی او بیا د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښي او کيڼ لوري ليميټ ته راځي او که وکتل شي، نو په ليکنو کې کوم توپير نه شته.
دلته د زده کړې څه نه ليدل کيږي او دا اخره کرښه يې داسې ده، چې په دې موضوع کې کومه پوهه هم نه لري.

که چيرې دا ټيک هم وي، نو ځاى يې بې ځايه ځکه راوړي، چې د ښى او کيڼي لور ليمټونه، چې هلته هم ناسم دې، په اووم مخ کې څيړل(که چيرې څيرنه يې وبولو)

په لاندې کې ،، د متحول تقرب،، يعنې څه؟ دا هيڅ مفهوم يا ترې پوهيدنه نه لري. که ... ترادف وي هم بايد د ترادف په ډول وليکل شي او که تابع وي هم بايد د تابع په ډول وليکل شي.

د متحول تقرب: ويل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختياري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، يعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچني دی يا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{يا} \quad \lim_{x\to a} x = a \quad \text{يا} \quad x \to a \quad \text{يا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چيرې د x د قيمتونو يو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدې شي.

$$x : a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$$

له کيڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چيرې د x د قيمتونو يو متزايد ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدی شي.

$$x : a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ يعنې:

$$x \to a \iff (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\forall\delta>0:|x-a|<\delta$ یا $\lim\limits_{x\to a} x=a$ یا $x\to a$ یا $|x-a|\to 0$

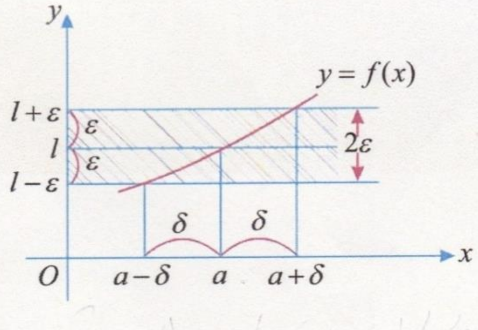
ډول ليکنو سره ګران ليکونکي بلدتيا نه لري او نه داسې څه د مخه راغلي، چې روښانه شوې وي

داسې ليکنې د ښوونځيو لپاره ستونځمنې دي. له دې امله ماهم په خپلو ليکنو کې نه وې راوړې. ګورو چې د کتاب ناسموونکې هم دا څه ناسم يا بې له تشريح کارولې.

په دې هکله زما ليکنه په لاندې کې شته.

دريم: په لاندې تعريف کې د پوهيدلو څه نه شته او په دې رياضيکي تعريف خو نه پوهيږي، خکه چې په لاندې يې د پوښتنې د حل نتيجه راوستلې او دا بحث له دې سره په رښتيا کې هيڅ سر او کارنه لري.

تعريف: که چيرې د $f(x)$ تابع په يوه غير تړلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې ګډون لري کيداى شي چې تابع په a کې نه وي تعريف شوى. که چيرې د x متحول د a عدد ته نږدى شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نږدى کيږي، نو ويل کيږي چې د $f(x)$ تابع ليميټ عبارت له l څخه دى، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي نو داسې يې ليکو: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ يا $x\to a$, $f(x)\to l$



$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0:|x-a|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=l\ \Leftrightarrow\ (|x-a|\to 0\Rightarrow |f(x)-l|\to 0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سومبولونه $\forall$ او $\exists$ نه دي ښوول شوي، چې څه شی دی او څه بلل کیږي.

ښاغلي لیکونکی په اووم مخ کې بیلګه راوړي او بیا دا ښایي، ښي او کيڼې لورې لیمیټ يې شمیري.

باید د $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$، لپاره $x \neq 3$ ولیکي،چې هلته فنکشن تعریف نه دی. دی بیا په ناسمه توګه په جدول کې لیکي. دا چې دا باید څنګه ولیکل شي، زماپه لیکنو کې شته.

دويمه بېلګه: و ښيئ چې $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$ سره دی.

حل: د ښي او کيڼې خوا لېميټونه تر څېړنې لاندې نيسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

ليدل کېږي چې د ښی خوا او کيڼې خوا لېميټونه سره مساوي دي، نو $\lim\limits_{x \to 3} = \frac{x^2-9}{x-3} = 6$ دي.

په پورته کې xد 3 قیمت نه شي اخستلی، هلته فنکشن تعریف نه دی، نو له دې امله په جدول کې، نه د ښیٔ لورې او نه د کیڼې لورې دا ارزښت 3 اخستلی شي، هلته 3 ته ور نږدې کیږي.

د بیلګې حل یې هم بیا سم نه دیٔ کړي، په هغه ورسره بلده لار.

دا هغه د کاغي او د زرکې خبره ده.........

دويمه طريقه: د لېميټ د تعريف په پام کې نيولو سره فرضوو چې د هر اختياري کوچني عدد ε لپاره يو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ |x-a| < \delta \ \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$$

$$|x-3| < \delta \ \Rightarrow \left| \frac{x^2-9}{x-3} - 6 \right| = \left| \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} - 6 \right| = |x+3-6| = |x-3| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \delta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې د حل نتیجه

$\varepsilon = \delta$

دا د دی بحث سره سر او کار نه لري یعنې دا مو موخه نه ده، نو باید ووایم، چې درونډ لیکونکي د موضوع څخه بوي هم نه وړي.(بخښنه دې وي، که زما لیکنې داسې لږ توندې برېښي)

او بې ځایه مخ ته ځي، چې څه ترې پوهیدل کیږي هم نه.

له پورتنی اړیکې څخه دا معلومیږي چې ε له δ سره اړیکه لري، که δ ته قیمت ورکړو ε قیمت اخلي او که ε ته قیمت ورکړو δ قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعریف چې د لیمیټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لیمیټ لري، یعنې: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

دې پورته ته په لنډه توګه زما نوره لیکنه او تیکاوی:

د کتاب په پیل کې راوړل شوې د ترادف یا پرلپسې موضوع باید د یوولسم ټولګي کتاب کې پوره څیړل شوې وی، مګر هلته یې یواځې دا نومونه راوړل شوي او نور لیکونکي – بې له دې، چې د موضوع اړیین څه راوړي - له موضوع څخه تیر شوی.

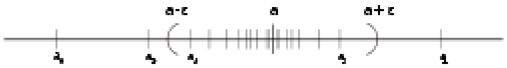
د دې موعوع څخه موخه د ترادف پولې ته تلنه یا کونورګنت او له پولې اووښتنه یا ناپای ته تلنه یا ډیورګنت او... دي، چې بې له دې په رښتیا کې د ترادف یا پرلپسې څیړنه کوم غوره والی یا اهمیت نه لري، یعنې خپله موخه له لاسه ورکوي. دا د یوولسم ټوګي د ترادف درس، نو په رښتیا کې خپل غوره والی او اړیینوالی له لاسه ورکوي. نور سموالي او ناسموالي ته یې ګوته نه نسم، همدا بسیا کوي، چې څه په کې نه دي ویل شوي یا لیکل شوي.

د ۱۲ ـــم ټولګي کتاب ته:

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: دا چې ګومان کیږي د داسې لیکنو سره به بلدتیا لږ وي، نو تشریح به راڅخه لږ ډېره شي.

د ،، پوله ارزښت،، په څیره کې ښوونه



که $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ د حقیقي اعدادو (ګڼونو) ترادف یا پرلپسي وي، نو عدد $a \in \mathbb{R}$ د دې ترادف یا پرلپسي پوله ارزښت بلل کیږي او پرلپسي a ته کونورګیر کیږي یا a ته هڅیږي یا نږدې کیږي، که د هر $\varepsilon > 0$ لپاره په انتروال $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ کې له یوه اندکس یا پیژند نخښې اخوا یا وروسته یا پسې د پرلپسي یا ترادف ټول غړي(دوي یې حدونه یا جملې بولي، نه پوهیږم ولې؟) د انتروال په دننه کې او فقط پای ډېر غړي له انتروال څخه دباندې پراته وي.

(دنورې اوږدې روښانه ونکي شننې څخه تیریږم)

لنډ پیژند یې:

عدد $a \in \mathbb{R}$ د ترادف $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ پوله بلل کیږي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو طبیعي یا پیداښتي عدد N شتون ولري، داسې چې $|a_n - a| < \varepsilon$ باور ولري، که $n \geq N.$ وي.

دا پیژند راکوي، چې: د هر $\varepsilon > 0$ لپاره یو ایندکس N شته، داسې چې له دې ایندکس یا پیژندنخښې وروسته د پرلپسي(ترادف) ټول غړې د ε څخه په کم واټن له a لرې پراته دي یعنې له ε څخه چې a ته څومره نږدې دی دا نور هم a ته نږدې دي.

د $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ د پولې ارزښت لیکلو لپاره خپل ځانله سومبول لرو: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

د دې لیکدود سره سم د یوې پرلپسې پوله ارزښت تعریف داسې رالنډولی شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \iff \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:\ |a_n - a| < \varepsilon$$

د داسې ليکنو لپاره د ε (لوستل: ايپسيلون) توری ورځنی يا مروج شوی.

بيلګه:

په يوه بيلګه کې يې روښانه کوو:

د دې لپاره چې د$\frac{1}{n}$ پرلپسې يا رديف و 0 ته کونورګنت وښايو، يو د مخه ورکړ شوي ε ته يوه په خوښه طبيعي عدد يا ګڼN ټاکو، چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وی، نو د ټولو $n > N$ لپاره باور لري:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

موضوع اوږدولی نه شم، ځکه چې دا يو درس نه دی، دا فقط په موضوع داسې لږ رڼا اچونه ده.

د فنکشن پوله ارزښت:

يادونه: د دې ۱۲ – م ټولګي د درس دا هغه اصلي موضوع ده.

د فنکشن پوله ارزښت په لاندې توګه پيژنو يا تعريفوو:

پيژند: د فنکشن f پوله ارزښت، د x لپاره چې p ته نږدې کيږي، L دی او داسې يې ليکو: $\lim\limits_{x\to p} f(x)=L$

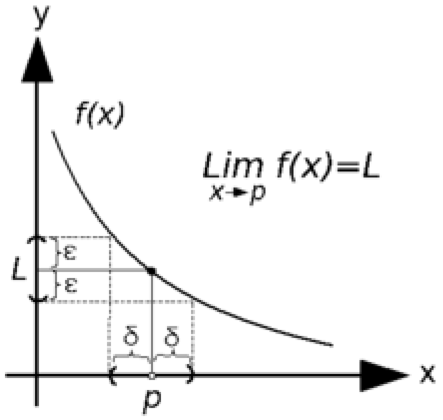
لوستل يې هم همداسې دي لکه پورته تعريف

داسې يې شميرپوهنيز ليک دود باندې تعريفوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن f پوله ارزښت L لري، که د هر 0 < ε لپاره یو 0 < δ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاه د δ > |x-p|<0 سره ε > |f(x)-L| هم باور ولري.

د پورته شمیرپوهنیز یا ریاضیکي فنکشن پوله ارزښت لپاره لاندې ځیره



پورته دوه تعریفونه برابر ارزښته دي یعنې له یوه څخه بل لاس ته راځي او په څټ یا برعکس یعنې لیکو:

تعریف: د فنکشن f پوله ارزښت، چې x و p ته نږدې کیږي، L دی، تیک هلته یا هلته او هلته یا هلته او په څټ، یا له دې لاس ته راځي او په څټ یا برعکس چې د هر ε > 0 لپاره یو 0 < δ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاه د δ > |x-p|<0 سره -|f(x) ε > |L هم باور ولري.

دلته هم په همدومره بسیا کوو، که څه هم روښانه کیدل نورې شننې ته هم اړتیا لري.

دې ته دلته په اخر کې بیا ګوته نیسم، چې دا شمیرپوهنیز یا ریاضیکې ډول لیکنې ستونځمنې دي او باید ترې تیر شو، د ترادفونو او فنکشنونو لپاره.

دا نور پاتې درس هم په همدې ترتیب ګران لیکونکي لیکلی چې زه نور پرې نه غږیږم.

دا بسیا کوي، چې کتاب د ښوونځیو څخه راټول شي او له سره ولیکل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ستاسو له سرې سينې څخه – كه ومو لوسته- ډېره مننه.

ستاسو ډاكتر ماخان شينوارى.

د ډاكتر ماخان شينواري ليكنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړى:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول كتابونه په المان كې د ،، افغانستان كلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنرۍ، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې څنو ځایونو غزېدلې او څنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: څمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنښیال برابرون (دا کتاب په دې ښانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو تولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

:   *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ -   شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه   د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک   دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د ښتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د ښتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یي متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویيونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې څنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپیني خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیرپوهنه د اوم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د اتم ټولګې له پاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

شميرپوهنه د نهم ټولګي له پاره

شميرپوهنه د لسم ټولګي له پاره

شميرپوهنه د يولسم ټولګي له پاره

شميرپوهنه د دولسم ټولګي له پاره

رياضي برای صنف دوازده

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميرړي شينواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمريز کي د شينوارو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مينې د لومړنې ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پيل او د دويم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتريش برس، چې هلته يې د شميرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمنې کې سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغئ.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې ځانګه او اباسین نومیږي. ځانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library