شمیرپوهنه (ریاضي)

ددولسم ټولګي لپاره

لیکونکی ډاکتر ماخان (میرۍ) شینواری

2016

نیولیک

سریزه

ګرنو هیوادوالو!

ما په کلونو کې د نصاب لهپاره دا د دولسم ټولګي د پښتو او درې کتابونه لیکلي وو، خو په هغه وخت کې دا کتابونه د پوهنې وزارت له خوا چاپ نه شو او په ډېره خواشینۍ سره باید ووایم، چې په ځای یې کتابونه چاپ کړل، خو ناسم، چې نه یې ژبه سمه وه او نه یې شمیرپوهنیزه خوندویونه.

دا زما له خوا لیکل شوي کتابونه د معیار (د نړۍ د معیار) سره سم لیکل شوي او د لته یې ګرانو زده کوونکو ته وړاندې کوم، هیله ده، چې ګټه به ترې واخلي.

د نصاب له پاره د چاپ شوي کتاب د بوې برخې ناسمون به د کتاب په اخر کې ځای په ځای کړم.

ما ځو واره د افغانستان د پهنې وزارت څخه هیله کړې، چې اجازه راکړي، تول د ښوونځي کتابونه ، چې ما لیکلي، دوی ته وړاندې او د سرهسم ولیم، خو د کتابونو د ناسمون مسئولیت او یا هیڅ څوک د څه مسئولیت په غاړه نه لري.

زه دا ټول د ښوونځي کتابونه ګرانو لوستونکو ته وړاندې کوم، خو ځنو کتابونو کې به داسې راغلي وي، چې زما د ناتوانۍ له امله به مې د یوه کتاب ځنې برخې بل کتاب کې ځای په ځای کړې وي، چې له دې امله د ګرانو لوستونکو څخه هیله، چې د هر څه له مخه دې، د کتاب سریزه وګوري.

ما چې لیکنې جمهورریس او د پوهنې وزارت ته لیکلي، هم مل دي.

ګرانو هیوادوالو!

ماته به بخښنه کړۍ، زه له دې نور زیات زور نه لرم، چې ښه سریزه او نور اړین څه ولیکم. دا زما لیکنې نورې همداسې ومنۍ، چې څنګه درته وړاندې کیږي. په لیکنو کې به زما د لیکنیزو ناسمونو نور ناسمونونه نه وي. هیله ده، چې ګټه به ترې پورته کړي.

١ . پوله ارزښت

١ . ليميت يا حـد(پوله ارزښت) "The Limit"

موږ لاندې د

اعدادو ترادف لرو:

$$
\begin{aligned}
&(I) \quad \frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n}\\
&(II) \quad \frac{3}{2},\frac{4}{3},\ldots,\frac{n+1}{n}\\
&(III) \quad 2,4,6,\ldots,2n
\end{aligned}
$$

كه n د ناپاى په لور لاړ شي، نو د پورته ترادفونو څخه (I)د صفر په لور، (II) د يو په لور او (III) د ناپاي په لور ځي.

د Limit (لاتين) معنا پوله يا حد دى. په پخواني روم کې د يوه ښار د كلا نوم هم Limit وو، چې په رياضياتوكې ، د پولې مفهوم لري. د حد د كاروني مفهوم په دې کې پروت دى، چې د يوې تابع سلوک داسې وڅېړو لکه په افقي محور(دx محور يعني"abscissa ") باندې، چې د تابع د x قيمتونه يوه حد(پولې) ته ورنږدې کېږي.

وبه گورو، چې ليميټ په رياضياتو کې د مشتق د پيژندلو لپاره کارول کيږي.

فعالیتونه:

- ایا تاسو په ورځني ژوند کې د لیمیټ یا پولې له کلمې سره بلد یاست؟

- ایا تاسو په ورځني ژوند کې یوه بیلګه راوړی شئ، چې یوه لیمیټ ته له دواړو لورو، یعني له ښئ لورې څخه و کیڼې لورې ته او همداډول له کیڼې لورې څخه و ښئ لورې ته نږدې شئ؟

- ایا د حیرتان او ترمز ترمنځ پول د افغانستان او ازبکستان ترمنځ له دواړو لورو پوله یا حد دی، که څنګه؟

- ایا دا په ټاکلي ځاي کي پوله یاحد دی، که څنګه؟

د پورته فعالیتونو څخه دا لاندې د لاسه کوو:

پورته راوړل شوې د لیمیټ بیلګې په یوه ټاکلي ځای کې د توابعو یا د ځنو عملي بیلګو لیمیټونه یا حدونه دي، چې موږ یې په ریاضیاتو کې هم په یوه ټاکلي ځای کې لیمیټ، پوله یا حد بولو.

موږ اوس لاندې بیلګه د پایلیزې روښانه ونې لپاره راوړو:

بیلګه ۱:

یوه د $f(x)=2x$ تابع او د P_0 یوټکی دې ورکړ شوی وي، چې د P_0 ټکی د وضعیه کمیاتو په سیستم کې $(3,6)$ وضعیه قیمتونه لري نو :

1- دتابع جدول وکاږئ.

2- د تابع ګراف یا څیره انځور کړئ.

3- د$f(3)$ قیمت پیداکړئ او د$f(x)$ پرحرکت باندې بحث وکړئ که x و 3 ته نږدې شي.

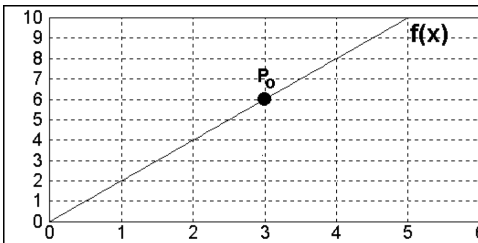
4- په شکل کې د $f(x)$ حد ته تلنه روښانه کړئ.

ښوونه:

1- د تابع جدول

2- د تابع شکل

3 - موږ $f(3) = 6$ لرو او غواړو د درې قیمتونوڅخه چې له ښی او کیڼي لوري 3 ته ورنږدې کیږي، و ګورو، چې په دې درې ارزښتونو کې تابع چېرته ځي.



ولاړ جدول:

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې ګورو،چې د f ارزښتونو سره له کیڼې لورې له پورته څخه وکښته لورې ته 6 ته نږدې کیږو او همداسې له ښی لورې له کښته څخه و پورته لورې ته هم6 ته نږدې کیږو.

-- ------------

پروت جدول روږو:

له ښۍ لورې څخه کيڼې لورې ته له کيڼې لورې څخه ښۍ لورې ته

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6,002	6.02	6.04

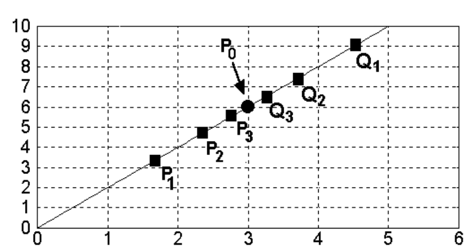
$\longrightarrow 6 \longleftarrow$

په درې پلونو يا قدمونوکې د f(3) قيمت دf(x) له قيمتونو سره پرتله کوو، کهx و3 ته ورنږدې شي.

دا حالت موږ ته په ګوته کوي چې: که x و 3 ته ورنږدې شي، نو د f(x) ليميټ به په 6 برابر شي او داسې يې ليکو: $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$

او داسې يې لولو: د f(x) ليميټ يا پوله که x د درې په لور لاړ شي.

4- اوس ګراف په لاندې توګه رسموو او کيڼې لورې ته هدفمند ټکي - لکه په پورته جدول کې- په نخښه کوو.



د مخامخ شکل له مخې... $P_1, P_2, P_3,$ ټکي په پام کې نيسو، چې د P_0ټکي ته تل له کيڼې لورې نږدې کيږي.

او همداسې ... $Q_1, Q_2, Q_3,$ ټکي چې له ښۍ لورې P_0 ټکي ته نږدې کيږي

کتل کیږي: هرڅومره، چې پورته ټکي و P_0 ټکي ته نږدې کیږي په همغه کچه د تابع قیمتونه و 6 ته نږدې کیږي (د $P_0(3,6)$ ټکي قیمت له امله).که په ګراف کې x د $x=3$ ځای ته نږدې شو، نو د تابع قیمت و 6 قیمت ته نږدې کیږي.

وایو: 6 د $f(x)$ تابع لیمیټ دی، د $x \to 3$ (لوستل: x د3 (درې) په لورې ځي یا درې ته نږدې کیږي) لپاره.

د لیمیټ لپاره لیکبڼه په دې ډول تعریف شوې: $\lim_{x\to3} f(x) = 6$

د پورته فعالیتونو او بیلګو څخه دا تعریف لاس ته راوړو:

پیژند(تعریف): د $f(x)$ تابع یو لیمیټ (حد) L لري، د x لپاره که x د یوه حقیقي عدد c په لورې تړلی لاړ شي او داسې یې لیکو: $\lim_{x\to c} f(x) = L$
لوستل: د $f(x)$ لیمیټ برابر په L دی، د $x\text{-}> c$ لپاره.

په ځنو توابعو کې لیمیټ، لکه چې ولیدل شو، په داسې سادګی لاس ته نه شو راوړي.

یوه بیلګه راوړو، چې دا لاندې پوښتنې په کې ځواب شوې وي:

- ایا یوه تابع په خپل ورکړ شوي ځای کې لیمیټ درلودی شي، چې هلته تعریف نه وي ؟
- اودا کار که کدونکی وي ، څنګه کیدی شي؟

بیلګه ۲ : تابع $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}; x \neq 1$ راکړ شوې.

د تابع جدول او ګراف وکاږئ.

x له ښی لوري څخه1ته نږدې کیږي x له کیڼې لورې 1 ته نږدې کیږي

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

x	0.98	0.99	0.999		1.001	1.01	1.02
f(x)	1.98	1.99	1.999		2.001	2.01	2.02

$\longrightarrow 2 \longleftarrow$

د f(x) تابع حرکت تر بحث لاندې ونيسئ که x و 1 ته نږدې شي يعنې $x \to 1$. له دواړو يعنې له ګراف او جدول څخه دا پايله لرو، چې f(x) د حقيقي عدد 2 په لور هڅيږي، يعنې: $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$	خيره کښل کيږي

له پورته شکل ځرګنديږي: تابع په هغه ټکي کې چې ليميټ يې شميرل شوی، تعريف نه ده.

شميرنيزه ښوونه: که يوه تابع په صورت او مخرج کې داړونده قيمت لپاره صفر ولري او دا صفرځايونه له منځه تللی شي- لکه زموږ په بيلګه کې- نو د ليميټ يا بولي پيدا کولو لپاره داسي مخ ته ځو:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

او وايو چې دا ډول تابع په صفر ځای کې تشيا (خاليګاه) لري يعنې په دې ځای کې تعريف نه ده .

فعالیت:

د سرک ښی لوري ته دا مخامخ تخته لرو:

- ووایئ، چې دا تخته څه مفهوم لري؟

په همدې توګه د سرک په سر کیڼي لوري ته هم همداسې یوه تخته ځړول شوې. دا هم په همغه مفهوم.

دا پوښتنه مو دې لاندې روښانه ونې ته لاښودوي:

بیلګه ۳: د $x \neq 0$, $f(x)=\frac{|x|}{x}$ تابع راکړ شوې.

1- تابع ولیکئ، بې له دې، چې د مطلقه قیمت نښه | | استعمال کړئ.

2- د تابع ګراف وکاږئ.

3- که x له ښی لوري 1 ته نږدې شي، نو د f(x) قیمت پیدا کړئ.

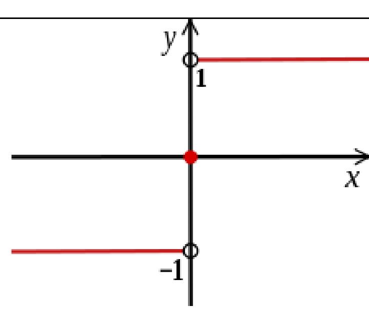
4- که x له کیڼي لوري1- ته نږدې شي، نو د(x)f قیمت پیدا کړئ.

5- وښایاست چې پورته تابع یعنې f(x) څو حدونه لري.

ښوونه: 1-تابع بې له سمبول ،، ،،| | په لاندې ډول لیکو

$$f(x)=\begin{cases}1; x>0\\ -1; x<0\end{cases}$$

2- د تابع ګراف انځورو: مخامخ



3- که x له ښي لور 1ته نږدې شي، نود لرو:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -1$$

4- کهx له کيڼې لور 1- ته نزدې شي، نو د f(x) ليميټ دی: $\lim_{x\to -1} f(x) = -1$

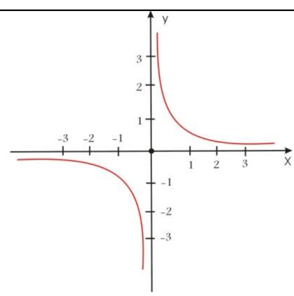
5- ګورو چې که x دوه قيمتونو 1 او1- ته نږدې شي، نو f(x) دوه د ليميټ قيمتونه لري يعني$\lim_{x\to \pm 1} f(x) = \pm 1$ ، نو له دې امله f(x) ليميټ نه لري.

له پورته بيلګې پايله:

په پورته بيلګه کې د$x \to -1$ لپاره تابع ښی ليميټ لري او د $x \to 1$ لپاره کيڼ ليميټ لري.

د دې لپاره دې د ګراف پورته کښل شوی شکل هم وکتل شي.

بيلګه۴: $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع لرو، چې $x \neq 0$ دی د $f(x)=\frac{1}{x}$تابع په x=0 ځای کې ارزښت نه شي نيولی، يعني په x=0 کې تعريف نه لري. دا تابع په صفرځای کې قطب(Pol) لري. مخامخ شکل دې وکتل شي.



يادونه: هغه تابع، چې مخرج يې صفر وي او صورت يې صفر نه وي، وايو چې تابع په دې د مخرج په صفرځای کی قطب Pol لري.

$x=0$ته د نږدې کېدو لپاره ترادف $(x_n)=\frac{1}{n}$ ، ټاکو.

د اړوندې تابع د قيمتونوترادف $(x_n)=\left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right)=n$ دی.

دا د $n>0$ لپاره یو نامحدود صعودي(جګېدونکی) ترادف دی.
او د $n<0$ لپاره نزولي- یا متناقص(ټيټېدونکی) ترادف دی.
دا په دې معنا، چې د(x)f تابع په صفرځای کې ليميټ نه لري. دا هلته يو قطب لري.

د توابعو د ليميټ لپاره دا لاندې پايله لرو:
د $f(x), x\in D_f$ تابع د x_0 په ځای کې يو کيڼ اړخيز ليميټ $a_l=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ لري، که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي يې د x_0 کيڼ لور ته پراته وي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_l په لور هڅيږي.

په ورته توګه ښی اړخيزه ليميټ: د $f(x), x\in D_f$ تابع د x_0 په ځای کې يو ښی اړخيز ليميټ $a_r=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$ لري، که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي يې د x_0 ښي لور ته پراته وي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_r په لور وهڅيږي..

که تابع f(x) همغه ليميټ L ولري که x له ښی اويا کيڼي لورې و c ته نږدې شي، نو **ليميټ** شته دی او د L سره برابر دی.

دا داسې ليکو: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$

تمرينونه :

د دې لاندې هرې تابع (پيژند ورشو(د تعريف ناحيه) domain اوارزښت ورشو(د قيمتونو ناحيه)) range يا codomain پيدا کړئ. د توابعو ګراف وکاږئ او حدونه (پولې) يې پيداکړئ.

$$1)\ \lim_{x\to -1}(x^2+x)\ ,\ 2)\ \lim_{x\to 4}(x^2+x)\ ,\ 3)\ \lim_{x\to 0}|x|\ ,\ 4)\ \lim_{x\to 2}\frac{x}{x}$$

$$5)\ \lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^2}{x}}\ ,\qquad 6)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\ ,\quad 7)\ \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^9-9}$$

10- که وي: $f(x)=\begin{cases}2+x; x<1\\ x^2 \quad ; x\geq 1\end{cases}$

الف) د تابع ګراف وکاږئ.

ب) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ پیدا کړئ.

۱. ۲ د لیمیټونو یا پوله ارزښت خویونه:

" Properties of Limits "

پوهیږو: په ریاضیاتو کې ټول توابع چې لرو، د ساده توابعو ترکیب combination دی، لکه دتوابعو جمع، تفریق، ضرب، وېش (چې مخرج یې صفر نه وي) او زنځیرونه compositon . موږ دوه غوره او ساده توابع = f(x) c او g (x) = x لرو.که دواړه توابع سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$h(x) = x + C$, یا $L(x) = cx$, یا $m(x) = x.x= x^2$ او داسې نور.

وبه ګورو،چې دلته هم ټولې څلور عملیې همداسې اجراکیږي، لکه د اعدادو په ترادفونوکې.

فعالیت:

په دې برخه کې د په خوښه د ثابتو توابعواو کتمټ یا ایدنتیک توابعو Identity function لیمیټونه د جمعې، تفریق، ضرب او همداسې د ویش(چې مخرج یې صفر نه وي) له لارې وشمیرئ (وروسته به وګورو، چې دا د لیمیټ خویونو تر نامه څیړل کیږي).

- د په خوښه یوه پولینوم تابعو لیمیټ پیدا کړئ.

- د $f(x) = x$ او $g(x) = x - 2$ توابعوڅخه کار واخلئ، چې درې نورې په خوښه توابع ترې لاس ته راوړئ. د دې توابعو لیمیټونه پیداکړئ. دا لیمیټونه جمع ، تفریق، ضرب او تقسیم(چې مخرج صفر نه وي) کړئ.

- که شوني شي، چې د یوې تابع لیمیټ د تابع له حل څخه لاس ته راوړلای شو، یعني که د بیلګې په توګه ولرو: $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} 3 = 3$ نودا تابع به څنګه لیکو؟

- ایا د پورته عملیې په څیر دا عملیه د هرې ثابتې او کټمټ تابع لپاره رښتوني ده؟

موږ له پورته څخه دا لاندې پایله لرو:

که $f(x) = x$ او $g(x) = 2$ ولرو، نو لرو: $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$, $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

2- که $h(x) = f(x) + g(x)$ وي، نو لرو: $h(x) = x + 2$

3- د h(x) ګراف وکاږئ.

4- د تابع لیمیټ د جدول له لارې

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

په یاد ولرئ: $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1}(x+2) = 3$ او $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x)$

له پورته څخه د لیمیټ لومړی خوي لاس ته راځي:

لومړی: د لیمیټ د جمعي خوې: د د وه یا ځو توابعو د جمعي لیمیټ د همغو اعدادو د لیمیټ د جمعي سره برابر دی: $\lim\limits_{x\to1} h(x)=\lim\limits_{x\to1} f(x)+\lim\limits_{x\to1} g(x)$

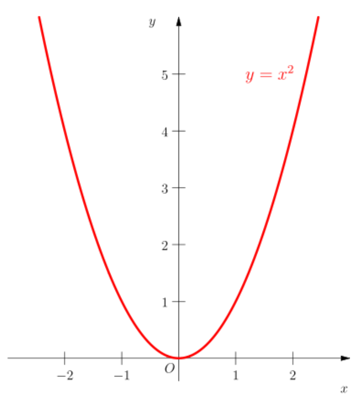
دویم: د لیمیټ د تفریق خوې: دا د پورته سره ورته حل لري. دا کار دې ګران زده کوونکي سرته ورسوي.

بیلګه ۱: که $g(x)=x^2$ او $f(x)=x$ وي،
نو پیدا کړی: $f(x)\cdot f(x)=g(x)$

ب) د تابع شکل وکاږئ:

پ) پیدا کړی: $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

ت) پیدا کوی: $\lim\limits_{x\to2} g(x)$



حل: الف) $f(x)\cdot f(x)=x\cdot x=x^2=g(x)$

ب)

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	4	1	0	1	4

پ) $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2} x=2$

ت) له ګراف څخه لاس ته راځي: $\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} x^2 = 4$

له دې امله لرو: $\lim_{x\to 2} x^2 = \lim_{x\to 2}(x \cdot x) = \lim_{x\to 2} x \cdot \lim_{x\to 2} x = 2\cdot 2 = 4$

له پورته بیلګې څخه دا پایله لرو:

دریم: د لیمیټ د ضرب خوي:

د دوه یا ډیرو توابع د ضرب لیمیټ د هغو توابعو د لیمیټونو د ضرب سره برابر دی.

$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a}(x\cdot x) = \lim_{x\to a} x \cdot \lim_{x\to a} x = a\cdot a = a^2$$

بیلګه:

که $g(x) = x^2\ ,\ f(x) = x$ وي، دا لاندې لیمیټونه پیدا کړئ:

$a)\ \lim_{x\to -1} f(x)\ ,\ \lim_{x\to -1} g(x)$ $\qquad b)\ \lim_{x\to -1} f(x) \cdot \lim_{x\to -1} g(x)$

$c)\ h(x) = g(x)\cdot f(x)$ $\qquad d)\ \lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}(x) = -1$

پیدا کړئ: $\lim_{x\to -1} h(x)$

حل:a $a)\ f(x)\cdot f(x) = x\cdot x = x^2 = g(x) \Rightarrow \lim_{x\to -1} x^2 = 1$

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	4	1	0	1	4

$$b)\ \lim_{x\to -1} f(x)\cdot \lim_{x\to -1} g(x) = -1\cdot 1 = -1 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to -1} x^2 = 1$$
$$c)\ h(x) = x^2\cdot x = x^3 \quad ,\ d)\ \lim_{x\to -1} h(x) = \lim_{x\to -1} x^3 = -1$$

بیلګه:

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{2x^2+1}$ تابع لرو، $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ پیدا کړئ.

حل: $f(x)$ د دوه توابعو $g(x) = x^2 - 2x + 5$ او $L(x) = 2x^2 + 1$ وېش دی.

که x و3 ته نږدې شي کیدای شي لیمیټ د تابع د حل له لارې په $x = 3$ کې پیدا شي:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x+5}{2x^2+1}$$
$$= \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-2x+5)}{\lim\limits_{x\to 3}(2x^2+1)}$$
$$= \frac{3^2 - 2\cdot 3 + 5}{2\cdot 3^2 + 1} = \frac{8}{19}$$

له پورته بیلګې څخه لاندې لاس ته راځي:

څلورم: د لیمیټ د ویش خوي(مخرج د صفر سره برابر نه دی):

دیوې کسرې تابع لیمیټ(یعني یوه تابع، چې د دوه توابعو له وېش(مخرج له صفر سره برابر نه

دی) څخه لاس ته راغلې وي) د تابع د صورت لیمیټ او د مخرج لیمیټ (مخرج له صفر سره

نابرابر دی) د وېش سره برابر دی.

بیلګه:

د $g(x)=\sqrt{3-x}$ ګراف وکاږئ او پیدا کړئ.

$$a)\ \lim_{x\to 2} g(x)\ ,\ b)\ \lim_{x\to -1} g(x)\ ,\ c)\ \lim_{x\to 3} g(x)$$

حل: په لاندې توګه مخ ته ځو:

الف)

$$\lim_{x\to 2} g(x)=1$$
$$\lim_{x\to 2}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to 2}(3-x)}=\sqrt{1}=1$$

ب) له ګراف څخه: $\lim_{x\to -1} g(x)=2$

یادونه: $\lim_{x\to -1}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to -1}(3-x)}=2\sqrt{4}$

$$c)\ \lim_{x\to 3^-} g(x)=\lim_{x\to 3^-}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to 3^-}(3-x)}=\sqrt{0}=0$$

(د $f(x)\geq 0$ لپاره او د ټولو x قیمتونولپاره، چې c ته نږدې کیږي).

له پورته څخه لاس ته راوړنه:

پنځم: د لیمیټ د جذر (ریښې)خوي: د یوې تابع چې د جذر (ریښې) لاندې وي لیمیټ برابر دی، که چیرې تابع او لیمیټ دواړه د جذر لاندې ونیول شي.

پوښتنه: که $\lim_{x\to -2} f(x)=3$ وي، نو $\lim_{x\to -2}(f(x))^n$ پیدا کړئ.

یادونه: د یوه پولینوم حد تیک داسي شمیرل کیري، لکه د یوې تابع حد. د مخه مو وویل،چي یو پولینوم د ساده توابعو د مختلو نښلونو څخه لاس ته راځي.

تمرینونه.

که $\lim_{x\to4} h(x)=-2$, $\lim_{x\to4} g(x)=0$ او $\lim_{x\to4} f(x)=5$ وي، نو پیدا کړئ:

$$1)\ \lim_{x\to4}(f+g)(x)\quad,\quad 2)\ \lim_{x\to4}\left(\frac{g}{f}\right)(x)\quad,\quad 3)\ \lim_{x\to4}(fg)(x)$$

$$4)\ \lim_{x\to4}(h(x))\quad,\quad 5)\ \lim_{x\to4}\left(\frac{g}{f}\right)(x)\quad,\quad 6)\ \lim_{x\to4}(2h-3g)(x)$$

$$7)\ \lim_{x\to4}(f\cdot h(x)\quad,\quad 8)\ \lim_{x\to4}\left(\frac{2h}{3f-g}\right)(x)\ ,\quad 9)\ \lim_{x\to4}(h(x)+f^2(x))$$

$$10)\ \lim_{x\to2}(6x^3-2x+5x-3)\qquad,\qquad 11)\ \lim_{x\to-2}\frac{3x-2}{x^2+1}$$

د کسري - یا ماتو توابعو لیمیټ" Lmit of Rational functions

مورږ د پولینومونو دا لاندې ویش لرو:

$$R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_mx^m+b_{n-1}x^{m-1}+\ldots+b_0};P_m\neq0$$

او د لیمیټ په هکله یې فکر کوو، چې د $b_0\neq0$ سره $\frac{a_0}{b_0}$ ترې لاس ته راځي.

فعاليت:

موږ پولينوم $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ لرو. ددې پولينوم ليميټ دx د مختلفو قيمتونو لپاره څنګه پيداکولای شو؟

- که $x\to 0$ د صفر په لورې لاړ شي يا صفر ته ورنږدې شي.

- که $x\to 1$ يوه ټاکلي عدد ته ور نږدې شي.

- که $x\to\infty$ د ناپای په لورې لاړ شي.

-که د دريمې درجې پولينوم $P(x)=5x^3+3x^2+3$ ولرو، نو ددې پولينوم ليميټ دځلورو په خوښه قيمتونو لپاره پيداکړئ.

پوهيږو، چې د پولينومي توابعو ليميټ د ورکړل شوو x قيمتونو لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېر، چې د جمعې، تفريق،ضرب او وېش(چې مخرج صفر نه وي) په څير ورکړل شوي دي، شمېرلای شو. غواړو د ناطقو توابعويا کسري توابعو ليميټ پيداکړو.

د ناطقو توابعو د ليميټونوشميرلو لپاره،که شته وي، له مختلفو لاروڅخه کار اخلو:

که ولرو: $\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$، نو د تابع خويونه د $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$ لپاره ساده کوو او د پورته پولينوم وېش، چې کسري تابع ده، ليميټ شميرو.

فعاليت: که $\dfrac{x^2-4}{x+2}$ ولرود $x\neq -2$ سره.

- ددې تابع حد د $x->-2$ لپاره پيدا کړئ.

- ددې تابع حد د $x\to 1$ لپاره پيدا کړئ

- ددې تابع حد د $x \to -1$ لپاره پيدا کړئ
- د تابع پيژندورشو وليکئ!
- دا تابع څنګه ساده کولی شئ، چې پوله يې د $x \to -2$ لپاره وشميرلی شو؟

د پورته فعاليت په بنسټ کولای شو، چې دکسري توابعو حدونه د مختلفو اعدادو لپاره پيداکړو او همداسې يوه کسري تابع که شوني وي، هغه ځايونو ته ورنږدې هم پيدا کړو، په کومو کې چې تابع تعريف نه وي.

ددې موضوع د روښانولو لپاره د مختلفو کسري توابعو څو بيلګې راوړو:

بيلګه ۱:

پيداکړئ: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x}{x+2}$ که $x=1$ وي. دا تابع تعريف ده او لرو:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x}{x+2} = \frac{(1)^2+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

که $x=1$ ځای په ځای کړو(Substitue) نو لاس ته راځي: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

بيلګه ۲: پيدا کړئ: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2-1}{x+3}$

حل: دا چې تابع په $x=0$ کې تعريف ده، نو لرو: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2-1}{x+3} = \dfrac{0-1}{0+3} = -\dfrac{1}{3}$

بيلګه ۳: پيدا کړئ: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x+1}$

حل: دا چې تابع په $x=1$ کې تعریف ده، نو لرو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}=\frac{1^2+1-2}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

که په یوه ځای یا عدد کې تابع تعریف نه لري، نو د مختلفو لارو یا متودونو څخه کار اخلو، چې لیمیټ یې پیداکړو، که شته وي.

بیلګه ۴: پیداکړئ: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}$

حل: دا چې $f(x)$ تابع په $x=2$ چې تعریف نه لري، نو حد د تابع د حل له لارې نه شي پیداکیدای. داکیدای شي داسې پیدا کړو، چې د تابع صورت په ضریبونو تجزیه کړو.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)}$$

د تابع لیمیټ که x و 2 ته نږدې شي، دا مانا لري، چې $x\neq 2$ دی.

دا کسري تابع و $\lim_{x\to 2}(x-4)$ رالنډیږي او لاندې لیمیټ لري:

$$\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

بیلګه ۵: پیداکړئ: $\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

ګورو، چې تابع په $x=16$ کې تعریف نه لري یعني باید $x\neq 16$ وي.

په یاد ولرئ چې: $\sqrt{b}-\sqrt{a}$ او $\sqrt{b}+\sqrt{a}$ یو د بل مزدوج دي.

حل: د پورته تابع صورت او مخرج د $\sqrt{x}-4$ له مزدوج $\sqrt{x}+4$ سره ضرب کړئ.

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}$$
$$=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}$$

بیلگه ۶: پیدا کړئ: $\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل: تابع په $x=3$ کې تعریف نه لري، نو مخرج او صورت د مخرج په مزدوج ضربوو اولرو:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)}$$
$$=\lim_{x\to 3}-1(\sqrt{x+1}+2)$$
$$=\lim_{x\to 3}-(\sqrt{3+1}+2=-4$$

بیلگه ۷:

پیدا کړئ: $\lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

حل: تابع په $x=1$ کې تعریف نه لري، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{5+10x-15}{2x-3}}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{10}{(2x-3)(x+1)}=\frac{10}{(2(1)-3)(1+1)}$$
$$=\frac{10}{-2}=-5$$

د کلاسيک لارې د کسري اعدادو ليميټ:

اوس يوه بله تابع د څيړنې لاندې نيسو، چې $g(x)$ يې بولو: $g(x)=\frac{x^2+x-2}{x-1}$

دلته هم دا پوښتنه کوو، چې که $x=1$ ځای ته نږدې شي، نو د $g(x)$ تابع د تابع کوم

قېمتونه غوره کوي: مونږ

بيا هغه ځای په پام کې نيسو، چې $x=1$ د مخ لورې(کيڼې لورې) ته خورا نږدې پروت

وي او هغه ځای، چې د $x=1$ وروسته يا ښۍ لورې ته خورا نږدې پروت وي:

$$g(1-h)=\frac{(1-h)^2+(1-h)-2}{(1-h)-1}$$
$$=\frac{(1-2h+h)^2+(1-h)-2}{-h}=\frac{-3h+h^2}{-h}=3-h$$
$$g(1+h)=\frac{(1+h)^2+(1+h)-2}{(1+h)-1}$$
$$=\frac{(1+2h+h)^2+(1+h)-2}{h}=\frac{-3h+h^2}{h}=3+h$$

دا دواړه لاس ته راوړني يا پايلې اوس داسې تشريح کوو:

كه h ناپای کوچنی وټاکو، يعني هغه ځايونه راونيسو چې $x=1$ ځای ته ناپای نږدې پراته وي، نو د تابع ارزښتونه به هم و 3 ته ناپاي نږدې پراته وي. عدد 3 د $x=1$ ځای لپاره د $g(x)$ تابع د حد قيمت دی. ددې لپاره ليکو: $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=3$

تمرينونه:

د لاندې معادلو حدونه پيدا کړئ، که شته وي.

1) $\lim\limits_{x\to 2}(6x^3-2x^2+5x+3)$

2) $\lim\limits_{x\to -1}(x^7+2x-5)$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)^2-4}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2+7x}{(2x-3)^2-9}$

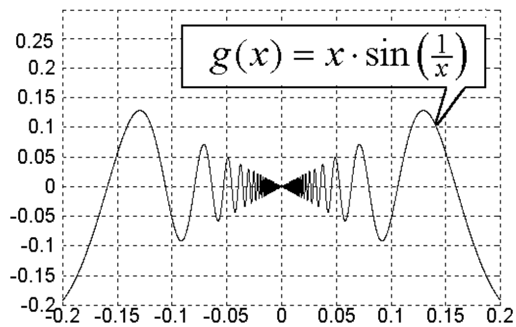
5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}$

6) $\lim\limits_{x\to 4}(\frac{1}{x}-\frac{1}{4})(\frac{1}{x-4})$

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}$

8) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

د مثلثاتي توابعو حدونه Limit of trigometric function



فعالیت:

_ دساین پوله یعني $\lim_{x\to a}\sin x$ د x د مختلفوقیمتونولپاره پیدا کړئ،که $x\in[0;2\pi]$ وي:

_ که $x\to 0$ وي. _ که $x\to 30$ وي. _ که $x\to 45$ وي._ که $x\to 60$ وي.

_ که $x\to 90$ وي.- که $x\to 135$ وي._ که $x\to 270$ وي._ که $x->2\pi$ وي.

- د پورته ورکړشوو قیمتونولپاره د کوساین $\cos x$ لیمیټ پیدا کړئ.

قضیه: که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ دی.

ښوونه: دx=0 لپاره تابع $\frac{\sin x}{x}$ تعریف نه لري او ناتاکلي بڼه $\frac{0}{0}$ لري.

موږ غواړو، د $x\to 0$ او $\frac{\sin x}{x}$ لپاره په لاندې ډول یو جدول ولیکو(په پورته مساوات کې x په رادیان اندازه کیږي):

x په درجه	x په راديان	$\sin x$	$\frac{\sin x}{x}$
10°	0.1745	0.1736	0.9948
5°	0.0873	0.0872	0.9988
3°	0.05235	0.05233	0.9996
1°	0.0174532	0.0174524	0.9995
$30'$	0.00872664	0.00872653	0.99999
$6'$	0.00174532	0.00174532	≈ 1
$3'$	0.00087266	0.00087266	≈ 1
$1'$	0.000291	0.000291	≈ 1
⋮	⋮	⋮	⋮

په پورته جدول کې گورو، چه د x لپاره $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ قیمت غوره کوي.

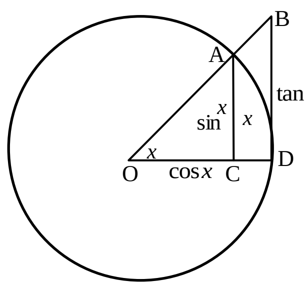
په شمیرنیزه توگه د $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ښوونه په لاندې ډول مخ ته بیایو:

یوه دایره په پام کې نیسو چې د هغې مرکز (0) اوشعاع یې OD او $\overline{OA}=\overline{OD}=1$ ده (لاندې شکل وگورئ). د A له ټکی څخه پر $\overline{OD}$ یو عمود رسموو، چې دا ورانکه په C ټکي کې غوځوي.

د D په ټکي باندې پر دايرې يو مماس رسمو، دامماس له $\overline{OA}$ څخه غځيدلي کر ښه د B په ټکي کې غوڅوي.

اوس A د D سره تړو:

موږ لرو :



$$\sin x = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC}$$

$$\cos x = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \overline{OC}$$

$$\tan x = \frac{\overline{DB}}{\overline{OD}} = \overline{DB}$$

دا چې x په راديان اندازه کيږي، نو لرو: $\overset{\frown}{AD} = x$

له پورته شکل څخه لاندې نا مساوات لرو: $\overset{\Delta}{OBD} > \overset{\angle}{AOD} > \overset{\Delta}{AOC}$

همداسې لرو:

$$\frac{1}{2}\cos x.\sin x < \frac{1}{2}\overline{OD^2}.x < \frac{1}{2}\overline{OD}.\tan x$$

په پورته نامساواتو کې $\overline{OD} = 1$ ږدو او د نامساواتو ټولې خواوې په دوو کې ضربوو، نو لرو: $\cos x.\sin x < x < \tan x$

يا په همدې ډول ليکلای شو: $\cos x.\sin x < x < \dfrac{\sin x}{\cos x}$

که د پورته نامساواتو ټولې خواوې پر $\sin x$ وويشو، نو لرو:

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

یا:

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > \lim_{x\to 0}\cos x$$

دا چې د $x \to 0^+$ لپاره $\cos x \to 1$ دی، نو لرو:

$$\frac{1}{1} > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > 1$$

$$1 > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > 1$$

گورو چې په عین وخت کې $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ له1 لوی او هم له یو 1 کوچنی دی، نو له دې نامساواتو څخه دا لاندې مساوات لرو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

پام: که $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ او $x = -\alpha$ و لیکو، نو دا لاندې ترې لاس ته راځي:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

له پورته دواړو مساواتو څخه غوښتنه لاس ته راځي:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

بيلګه ۱: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$ پيدا کړئ.

حل: که $2x = \alpha$ اوکه $x \to 0$ وي، نو $\alpha \to 0$ او $\frac{\sin 2x}{2x} = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ لرو.

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \Rightarrow 2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$$

بيلګه ۲:

وښاياست $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{2x}$

که $y = 5x$ وي او $x \to 0$ ، نو $y -> 0$ هم لرو:

$$\frac{\sin 5x}{5x} \quad \frac{5}{2} = \frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)} \quad \frac{5}{2} = \frac{\sin 5x}{2x}$$
$$= \frac{5}{2} \frac{\sin y}{y}$$

له دې امله لرو:

$$\frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}\frac{5}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}$$
$$=\frac{5}{2}\cdot 1=\frac{5}{2}$$

تمرینونه: دا لاندې غوره قضیه وښایاست.

که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ او لاندې اجرات وکړئ:

الف) تانجنت $\tan x$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو ولیکئ.

ب) $\frac{\tan x}{x}$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو و لیکئ.

پ) دپورته قضیې لیمیټ پیدا کړئ.

ت) ایا قضیه رښتیا ده؟

لاندې لیمیټونه (حدونه)وشمېرئ.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}\ ,\ 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x},\ \ 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x}\ ,$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x}\ ,\ 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}\ ,\ 6)\ \lim_{x\to 0}\sin 5x\ \cos 3$$

$$7)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}\ ,\ \ 8)\ \lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}+\sin^2 x)$$

د $x \to \pm\infty$ لپاره پوله ارزښت یا لیمیټ

د $\frac{Q(x)}{P(x)};\ P(x) \neq 0$ کسري توابعو لپاره مو لیمیټونه وشمیرل، چې x په خوښه وو.

اوس $\frac{Q(x)}{P(x)};\ P(x) \neq 0$ لپاره لیمیټونه غواړو و شمیرو، که $x \to \pm\infty$ وي.

فعالیت:
زده کوونکي دې د هرې لاندې تابع د حد له شمېرلو د مخه، د توابعو ګرافونه انځور کړي او په ګرافونو کې دې یې دې ته پام وي،چې دا څنګه په تعریف شوې ورشوې کې ځغلي.

لومړی: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x-2}$ پیدا کړئ.

د 5 وېشنه په یوه ډېر لوی (ناپای) مثبت(منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یعنې $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{\pm\infty} = 0^{\pm}$.
ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y = 0$ لري، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نږدې کیږي.

دویم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-3}{x+1}$ پیدا کړئ.

د -3 وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت(منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یانې $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-3}{x+1} = \frac{-3}{\pm\infty} = 0^{\pm}$.
ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y = 0$ لري، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نزدې کیږي.

دریم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x^2-2x}$ پیدا کړئ.

په مخرج کې یوازې x^2 ستر رول لوبوي. د مربع کوني له لارې هر عدد مثبت

کیږي.که 5 په یوه ډېر لوی مثبت عدد وویشل شي، نو یو خورا کوچنی مثبت عدد ترې لاس ته راځي، یعنې $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x^2-2x} = \frac{5}{+\infty} = 0^+$

ګراف G_f یو پروت اسیمپټوت $y=0$ لري، یوازې له پورته لور ور نږدې کېدنې سره.

څلورم: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3}{x^2-2}$ پیدا کړئ.

د مخرج مربع کونې سره منفي عددونه هم مثبت کیږي. د -3 وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت عدد باندې یو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي یانې $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3}{x^2-2} = \frac{-3}{+\infty} = 0^-$.

ګراف G_f یو پروت اسیمپټوت $y=0$ لري، یوازې له کښته ګراف ته ور نږدې کیږي.

د پرېښودنې- یا ترې صرفنظر کونې یا له ترې تیرېدنې اصول:

لومړی: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2}$ پیدا کړئ.

په صورت کې د x جګعدد(توان؟)، په مخرج کې د x^2 توان په پام کې نیسو او همداسې له ټولو ثابتو تېرېږو (ټولې ثابتې پرېښول کیږي،صرف نظر ترې کیږي) او بیا x لنډیږي.

که 1 په ډېر لوی مثبت(منفي) عدد ووېشل شي، نو $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0^\pm$ ترې لاس ته راځي.

(ځیره G_f پروت ګاونډ(مجانب) $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ورنږدې کیږي.

دویم: غواړو د $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2}{x+2}$ تابع حل پیدا کړو.

حل: په صورت کې د x^2 او په مخرج کې د x له ټولو توانونو په پام کې نیولو او له ټولو ثابتو تریږو(صرفنظر ترې کوو) او بیا یې د x سره لنډوو. په روښانه توګه ټول حدونه $\pm\infty$ لاس ته راځي یعنې $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$.

شکل G_f مائله اسیمپټوت راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د 1 په اندازه ستره ده.

دریم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2-2}{3x^2+2x}$ پیدا کړئ.

په صورت او مخرج کې د x^2 ټول توانونه په پام کې نیسو او له ټولو ثابتو تیرېږو او بیايې د x^2 سره لنډوو.

ټولې پولې په روښانه توګه $\frac{2}{3}$-راکوي

یعني $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2}{3x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2}{3}=-\dfrac{2}{3}$

شکل G_f پرته اسیمپتوت راکوي، چې $y=-2/3$ ده.

څلورم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}$ پیداکړئ

په صورت کې له x^2 څخه کوچنیو ټولو توانونو او په مخرج کې د x^3 له ټولو کوچنیو توانونو او همداسې له ثابتو تیرېږو. که $2-$ په $\pm\infty$ ووېشل شي، نو یو کوچنی مثبت یا منفي عدد یعنې $0^{\pm}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2}{3x^3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2}{3x}=\dfrac{-2}{\pm\infty}=0^{\pm}$ ترې لاس ته راځي.

شکل(څیره) G_f یو پروت اسیمتوت $y=0$ لري، چې له پورته او کښته لور ورنږدې کیږي.

شمیرنیز حلونه(د شمیرنې له لارې حل):

اول: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-1}{x^2-2}$ وشمیرئ.

په صورت او مخرج x^2 له نوکانو(لینده کیو یاقوسونو) راوستنې او بیا د x^2 سره لنډونې وروسته مخرج د 1 په لور ځي او صورت دصفر په لور، یعنې صورت ترمونه صفر ته نزدې کیږي.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{0^{\pm}}{1}=0^{\pm}$$

شکل G_f یوه مایله اسیومپټوت(مجانب) لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په 1 کوچنی ده.

دویم: وشمیرئ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}$

په صورت او مخرج کې هغه د لوی توان x یعني x^4 له نوکانو یا لیندکیوبهر نیسو او بیا په ترتیب شمیرنیزه عملیه مخ ته بیایو ، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0^-}{1}=0^-$$

ټولیز خویونه:

بیلګه۱: پیداکړئ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^2-2}{x+1}$

په پورته بیلګه کې داسې مخ ته تللي یو،چې په صورت کې له ټولو عددونو څخه تیرېږو، چې د خپلواکي متحولي توان له 1 کوچنی یعني صفر وي او په صورت کې له ټولو هغو خپلواک متحولو تیرېږو، چې توان یې له 2 څخه کوچنی وي.. ګورو، چې په صورت کې x له کوم ضریب سره پاتې کیږي، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي ناپای په لور ځي.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(3x-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

بیلګه ۲: پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2-2}$

په پورته بیلګه کې په صورت کې له 1 او مخرج کې له 2 څخه تېرېږو او بیا صورت او مخرج په x ویشو. لاس ته راوړنه یې د x په یوه ثابت عدد وېشل دي. چې د $x\to\infty$ سره تابع ±0 ته ځي، یعني: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2-2}=0\pm$

بیلگه ۳: پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2-2}{3x^2+2x}$

په صورت کې له 2 او مخرج کې له $2x$ څخه تیرېږو او د x^2 سره یې لنډوو او په دې ډول لاندې پایله لرو: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=-\dfrac{2}{3}$

تمرینونه:

د لاندې تمرینونو حدونه د پورته ورکړشوو مختلفو لارو له لارې وشمیرئ:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6}{x^2-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x-5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$$

متمادیت(ناپرېکیدنه)"Continuity"

د درس په دې برخه کې لولو ، چې یوه تابع په یوه ټکي یا یوه انټروال کې کوم حالت غوره کوي. ایا دا تابع په کوم ځای کې ټوپ وهي، یا پرې کیږي او که یا په متمادي یعنې نه پرېکیدنې ډول د اینتروال په دننه کې ځغلي.

موږ په دې موضوع د تابع متماديت څېړو او متماديت تعريفوو

فعاليت:

لاندې توابع لرو:

$$f(x)=x^2-1\ ,\ f(x)=\frac{1}{x}\ ,\ f(x)=\frac{|x|}{x}$$

- د دې درې توابعو شکلونه وکاږئ.

- وګورئ، چې د توابعو ګرافونه څنګه ځغلي. په کومه تابع کې ګراف ترړلی ځغلي او
چرته ماتيږي، ټوپ وهي او ...

له پورته فعاليتونو څخه لاندې پايله لرو:

د توابعو متماديت Continuous functions

په دې موضوع کې موږ د يوې تابع د متماديت په هکله څېړنه کوو او د متماديت
پيژند(تعريف) ورکوو.

پيژند:

که b د f تابع تعريفورشو (- ساحه) کې يو حقيقي عدد وي. د f تابع په b متمادي
بلل کيږي، که د ټکي (b.f(b)) نږدې د f ګراف داسې وکښلی شو، بې له دې چې د
پنسل څوکه له کاغذ څخه پورته کړو.

له دې امله $f(x)=x^2-1$ تابع او $f(x)=\frac{1}{\mathrm{x}}$ تابع د $x=b$ په ټکي کې متمادي ده.

$f(x)=\frac{|x|}{x}$ تابع په $x=0$ متمادي نه ده ياني ټوپ وهي کيږي.(څيره په ۵ –م مخ کې)

تابع په $x=a$ کې غیر متمادي ده، که پرې شي(تشیا ولري)، ټوپ ووهي او یا ماته شي.

لرو: $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=1$ او $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=-1$ نو له دې امله $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}$ په $x=0$ کې نشته یعني تابع د $x=0$ په ټکي کې متمادي نه ده.

بیلگه ۱:

که $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; \quad x\geq1\\ 1-x & ; \quad x<1\end{cases}$ وي، نو:

الف) د تابع گراف وکاږئ.

ب) پیدا کړئ $\lim\limits_{x\to3}f(x)$

پ) پیداکړئ: $\lim\limits_{x\to1}f(x)$

که تابع په $x=3$ او $x=1$ کې متمادي وي.

حل:

الف) گراف دې د گرانو لوستونک دنده وي.

ب)
$$\lim_{x\to3}f(x)=(2x+1)=7$$
$$f(3)=7$$

پ)
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(2x+1)=3$$
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(1-x)=0$$

د ب) او پ) له مخې لرو:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

له دې امله تابع په $x=3$ ناپرېکیدونې او $x=1$ کې پرېکیدونکې ده.

بیلګه ۲:

که $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x3+x}{x} & ; \ x\neq 0\\ 3 & ; \ x=0\end{cases}$ **وي.**

الف) فنکشن رسم کړئ

ب) و خیرئ، چې تابع په $x=2$ او $x=0$ کې متمادي ده او که نه؟

حل: الف) د تابع ګراف لپاره

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	5	2	3	2	5

ب) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+x}{x} = \lim\limits_{x\to 2} (x^2+1) = 2^2+1 = 5$

$$f(2) = \frac{2^3+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دې امله د f لیمیټ شته او $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ دی، نو تابع متمادي دی که $x=2$ وي.

وي دې $x=0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+x}{x} = 1$$

د دې معنا دا ده، چې $\lim_{x\to 0} f(x)=1$ او په دې معنا دی، چې $f(0)=3$

دا دا معنا لري، چې $\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$

تابع په $x=0$ کې غیرمتمادي ده.

بیلګه۳: که $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}\ ,\ x\neq -3$ وي.

ایا $f(x)$ تابع په $x=-3$ کې متمادي ده؟

حل: تابع $f(-3)$ تعریف نه لري، نوله دې

امله تابع په $x=-3$ کې متمادي نه ده.

له دې بیلګې او د تیرو درسونو څخه لرو:

تعریف (پیژند):

که f یوه تابع وي، چې د ټولو x لپاره په همغه واز اینتروال کې چې $x=c$ لري تعریف وي،نو د f تابع په $x=c$ کې متمادي بلل کیږي، که دا لاندې شرایط پوره وي:

1- که $f(x)$ تعریف وي.

2- که $\lim_{x\to c} f(x)$ شته وي (موجود وي).

3- که $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ رښتیا وي.

که تابع د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره متمادي وي، نو تابع په واز اینتروال (a,b) کې هم متمادي ده.

بيلگه ۴:

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; \; x\le 1\\ 4+x & ; \; x>1\end{cases}$ وي.

وګورئ، چې تابع چيرته متمادي او چيرته غيرمتمادي ده.

حل: په $x=1$ کې f تعريف لري

$$\begin{aligned}&f(x)=3\\&\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(2x^2+1)=3\\&\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(4+x)=5\\&\lim_{x\to-1}f(x)\ne\lim_{x\to-1}f(x)\end{aligned}$$

له دې امله تابع په $x = 1$ کې غيرمتمادي ده

بيلگه ۵:

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; \; x<2\\ 3 & ; \; x=2\\ x+3 & ; \; x>2\end{cases}$ وي، نود $f(x)$ تابع متماديت په $x=2$ کې وخيرئ.

حل: تابع $f(x)$ په $x=2$ کې تعريف لري او لرو $f(2)=3$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to2^+}=\lim_{x\to2^+}(x+3)=5\\&\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^-}f(x)\\&\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}(x^2+1)=5\;\Rightarrow\;\lim_{x\to2}f(x)=5\end{aligned}$$

دا چې $f(x)=3$ دی، نو له دې امله $\lim_{x\to2}f(x)\ne f(2)$.

دا په دې معنا دی، چې تابع په $x = 2$ کې غیرامتمادي ده.

بیلگه ۶:

که $f(x) = \begin{cases} 2\sin x & ; \quad x \le \frac{\pi}{2} \\ ax^2 + \pi^2 & ; \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ وي، نو:

a داسې پیدا کړئ، چې f په $x = \frac{\pi}{2}$ کې متمادي وي.

حل: $\lim_{x \to \frac{\pi^-}{2}} f(x) = 2 \quad ; \quad \lim_{x \to \frac{\pi^+}{2}} f(x) = a\frac{\pi^4}{4} + \pi$

$f(x)$ متمادي ده، نو له دې څخه لاس ته راځي:

$$a\,\frac{\pi^2}{4} + \pi^2 = 2$$

و

$$= \frac{a}{4}\pi^2 = 2 - \pi^2$$

$$a\,\pi^2 = 8 - 4\,\pi^2 \Rightarrow a = \frac{8}{\pi^2} - 4$$

تمرینونه:

1- یوه په خوښه تابع ولیکئ او د تابع گراف وکاږئ او وگورئ، چې تابع چیرته تعریف ده او متمادیت یې وښایاست.

په لاندې پوښتنو کې وڅیړی، چې تابع په ورکړشوي ټکي کې متمادي یا غیرمتمادي دي.

2) $f(x) = x^2 + 5(x-2)^7 \;;\; x = 3$

3) $f(x) = \dfrac{x+3}{(x^2+2x-5} \;;\; x = -1$

4) $f(x)\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \;;\; x = -2$

5) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3^3)} \;;\; x = 3$

6) $f(x) = |x-3| \;;\; x = 3$

7) $g(x) = \dfrac{|x|}{x} \;;\; x = 0$

د متمادي یا ناپرېکیدونکو توابعو خویونه

دلته دا خویونه همغه د لیمیټ خویونه دي.

فعالیت:

-1 د f او g توابعو جمع پیداکړئ:

$(f+g)(x) =$...........

-2 د f او g توابع په $x = 2$ کې متمادي دي، نو:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$ .... & $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$

-3 د لیمیټ قیمتونه استعمال کړئ:

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$

$=$ .... : ...

$=$ .... : ... $= (f+g)(a)$

له دې امله $(f+g)$ په $x=a$ کې متمادي ده.

که f او g توابع په $x=c$ کې متمادي وي، نو د لاندې توابعو څخه يې هره يوه په $x=c$ کې متمادي ده.

1- د توابعو جمع $f+g$

2- د توابعو تفريق $f-g$

3- د توابعو ضرب $f \cdot g$

د توابعو وېش $\frac{f}{g}\ ;\ g \neq 0$

بيلگه۱:

که $f(x)=\sin x+1$ **او** $g(x)=x^2+3x-2$ **وي، نو:**

1- f او g په $x=1$ کې متمادي دي.

2- وښيرئ، چې ايا

الف) $f(x)+g(x)=\sin x+x^2+3x-1$ او

ب) $(\sin x+1)(x^2+x^2+3x-1)$ په $x=1$ کې متمادي او که غيرمتمادي دي.

حل: $1)\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=\sin 1+1$

نو f په $x=1$ کې متمادي دی.

$$\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)=2$$

نو g په $x=1$ کې متمادي ده.

2- الف):

$$a)\ \sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2)$$
$$= f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

د متمادي توابعو جمع په $x=1$ کې متمادي ده.

ب) :
$$(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x)\cdot g(x)$$
$$=(f\cdot g)(x)$$

نو د متمادي توابعو ضرب په $x=1$ کې متمادي دی.

بیلګه ۲:

که $g(x) = 3x - 2$, $f(x) = x + 1$ وي، وښیئ، چې ایا $f(x)\cdot g(x)$ په $x=2$ کې متمادي ده.

حل:

له پورته ښخه لاس ته راځئ، چې $f(x)\cdot g(x)$ متمادي

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 3$$
$$\lim_{x\to 2} g(x) = 4 = g(2)$$
$f(x)\cdot g(x) = 3x^2 + x - 2$ده.
$$\lim_{x\to 2} f(x)\cdot g(x) = 3(4) + 2 - 2 = 12$$
$$= \lim_{x\to 2} f(x)\cdot \lim_{x\to 2} g(x) = f(2)\cdot g(2) = 3.4 = 12$$

دکینې لورې بند انتروال په [a,b] کې ګراف متمادي تابع په ګوته کوي یا ښایي، هلته چې $f(a) \neq f(b)$ دی.

که ولرو $f(a) < k < f(b)$ ګراف له $(b, f(b))$

ټکي ځخه نشي انځورېدلی تر څو افقي کرښه

$y = k$ د ثابتې k سره غوځه نه کړي.

له پورته څخه دا لاندې غوره جمله لیکلی شو:

که تابع f په بند اینتروال [a,b] کې متمادي اوk د a اوb ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عددc د f(a) اوf(b) ترمنځ شته، داسې چې f(c) = k دی.

بیلګه ۳: که $f(x) = x^3 + 4x\ ,\ \ x \in [1,2]$ وي، نو **وښایئ، چې یو** $c \in (1,2)$ **شته، داسې چې** $f(c) = 11$ **وي.**

حل: $f(x)$ یو پولینوم دی نو f په بند اینتروال [1,2] کې متمادي دی.

لاندې لرو:

$$f(1) = 1^3 + 4(1) = 5 \quad ; \quad f(2) = 8 + 4(2) = 16$$
$$5 < 11 < 16 \quad , \quad f(1) \neq f(2)$$

له دې امله یو عدد $c \in (1,2)$ شته، داسې چې $f(c) = 11$ دی.

بیلګه ۴:

که $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & ; \ -1 \le x < 2 \\ |x-10| & ; \ 2 \le x \le \mathbf{20} \end{cases}$ ي ، نو:

الف) وآزمایئ، چې تابع متمادي ده.

ب) وآزمایئ، چې یو $c \in (-1,20)$ شته داسې چې $f(c) = 6$ دی او د c ارزښت پیدا کړئ.

حل:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2x + 4 = 8$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 10 - 2 = 8$$

له دې امله لرو:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 8$$
$$f(x) = 10 - 2 = 8$$

ګورو چې تابع په [-1, 20] کې متمادي ده.

$$b)\ f\ (-1)2x\ -1+4=2$$
$$f\ (20)\,|\,20-10\,|=10\ \ \Rightarrow\ f\ (-1)\neq f\ (20)$$

په دې اساس لرو: $2<6<10$

له دې امله لرو: $c\in(-1,20):\ f(c)=6$

$$2x+4=6\Rightarrow 2x=2\Rightarrow x=1\in(-1,\,2)$$
$$|\,x-10\,|=6$$
$$x-10=6\ \ \Rightarrow x=16\in(-2,20)$$
$$10-x=6\ \ \Rightarrow x=4\in(-2,20)$$

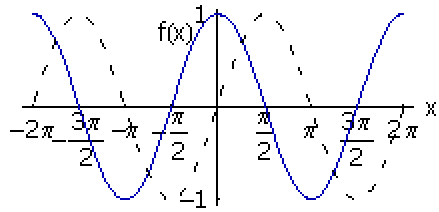
$$|x-10| \Rightarrow \qquad = 6$$

د c ارزښتونه 1, 4, 16 دي.

بیلګه ۵ :

که وي: $f(x) = 2\sin x + 3;\ x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],$ ، نو وښایئ چې

نشاد دهيد كه -] $c\in\ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ شته دی د کوم لپاره چې $f(c)=4$ او c پيدا کړی.

حل : تابع f د ساين تابع ددی ، نو له دې امله f متمادي دی. $f(-\frac{\pi}{2}) = 2\sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$ $f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin\frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$ $f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$ مو، لرو : تابع fمتمادي دی او لرو: $1 < 4 < 5$	 ټکي ټکي د ساين ګراف دی. دا ګراف که په ۳ کې ضرب کړی او ۳ ورزيات کړي د بيلګې ګراف راکوي.

دا په دې معنا چې، که $c \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ موجود وي، د هغه لپاره $f(c) = 4$ صدق کوي.

که د دې لپاره c پيدا کړو ، نو په لاس راځي:

$$f(c) = 2\sin c + 3 = 4$$

$$2\sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

له ګراف څخه واضح ايدل کيږي،، چې f په انتروا ل $[a,b]$ کې متمادي دی، $f(a)$ او $f(b)$ متضادې علامې لري، نو c د منځنی ارزښت قضيې په بنسټ د $f(a)$ او$f(b)$ په

منځ کې و K=0 ته لږ تر لږه یو C د a او b په منځ کې داسې شتون لري، چې له هغې نتیجه f(c) = 0 لاس ته راځي.

دا په دې معنا، چې x=c د برابرون یا مساوات f(x) = 0 یو حل دی.

بیلګه۶ :

که $f(x) = x^3 + 5x - 23$ **وي، نو وښایئ،چې د f تابع د x ـمحور په اینتروال** (2.3) **کې غوڅوي.**

حل: f **پولینوم تابع ده ، نو f په اینتروال** [2,3] **کې متمادي دی.**

$$f(2) = 2^3 + 5(2) - 23 = -5$$
$$f(3)3^3 + 5(3) - 23 = 19$$

$f(2) \neq f(3)$ **او د متضادو مخنخښو(علامو) سره.**

له دې امله د $c \in (2,3)$ لپاره لرو چې $f(c) = 0$ دی.

لنډ: غیرمتمادي توابع هغه دي، چې په یو کوم ځای کې تعریف نه وي

تمرینونه:

وښایئ چې تابع په ورکړ شوي ټکي کې متمادي ده.

1) $f(x) = x^3 - 2(x+1)^5 \qquad ; \quad x = 2$

2) $g(x) = \dfrac{x^2 + 3}{(x^2 - x + 5)(x^2 + 2x} \qquad ; \quad x = -1$

3) $h(x) = \dfrac{x\sqrt{x} + 1}{(x+2)^3} \qquad ; \quad x = 4$

4- تشریح کړئ، چې ولې تابع $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ په $x=0$ کې غیرمتمادي ده؟

5- که $f(x)=\dfrac{18}{x}+2\ ,\ x\in[2,3]$ وي، و ښایئ چې $c\in(2,3)$ شته داسې چې $f(c)=10$ وي او c پیدا کړئ.

6- وښایئ چې د لاندې مساوات لپاره یوحل شته:

$$x^3-4x+1=0 \quad ; \quad x\in[1,2]$$

7- وي دې: $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)\ ;\ f(x)=\sin x+\cos x$ وښایئ، چې مساوات $\sin x+\cos x=0$ په اینتروال $(\frac{\pi}{2},\pi)$ کې یو حل لري.

8- وي دې:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2 & ; \quad -1\le x\le 3 \\ 13-2x & ; \quad 3<x\le 7 \end{cases}$$

الف) ایا f په $x=0$ کې یو متمادي تابع دی؟

ب) $c\in(-1,7)$ داسې پیدا کړئ، چې $f(c)=0$ وي.

د لـــومړي څپـــرکي تولګه " Chapter Summary "

پیژند:

د $f(x)$ تابع یو لیمیټ L لري، که x ترڅی یو حقیقي عدد c ته لاړ شي. په دې معنا چې $f(x)$ لپاره، چې ترڅیLته ځي دا دی، چې x ترڅی c ته لاړشي او داسې یې لیکو:

د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځاي کې يو کيڼ اړخيز ليميټ $a_l = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ لري،

که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي يې د x_0 کيڼ لور ته پراته وي او د توابعو ارزښتونه د $f(x_n)$ د a_l په لور هڅيږي.

په ورته توګه ښی اړخيزه ليميټ:

د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځاي کې يو ښی اړخيز ليميټ $a_r = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ لري،

که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي يې د x_0 ښي لور ته پراته وي او د توابعو ارزښتونه د $f(x_n)$ د a_r په لور وهڅيږي..

که تابع f(x) همغه ليميټ L ولري که x له ښی اويا کيڼې لورې و c ته نږدې شي، نو ليميټ شته دی او د L سره برابر دی.

دا داسې ليکو: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

د پولې يا حد خويونه(خواص) :

که f او g توابع وي، c;L او M حقيقي اعداد وي داسې چې $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ او $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$، نو دا په لاندې توګه ليکلی شو:

1) $\lim\limits_{x\to c} (f + g)(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x) = L + M$

2) $\lim\limits_{x\to c} (f - g)(x) = \lim\limits_{x\to c} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to c} f(x) - \lim\limits_{x\to c} g(x) = L - M$

3) $\lim\limits_{x\to c} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to c} g(x) = L \cdot M$

$$4)\ \lim_{x\to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M};\ (M\neq 0)$$

$$5)\ \lim_{x\to c}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$$

(د $f(x)\geq 0$ او د x د ټولو قیمتونو لپاره، چې c ته ور نږدې کیږي.

قضیه: که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

قضیه: که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

پیژند: f دې یوه تابع وي او د ټولو x لپاره په یوه واز انتروال کې چې $x = c$ وي ،تعریف وي، نو وایو: f په $x = c$ کې متمادي دی، د لاندې شرایطو سره:

1) $f(x)$ تعریف لري 2) $\lim_{x\to c} f(x)$ شته دی

3) $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$

که تابع د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره متمادي وي، نو تابع په ټول انتروال (a, b) ې متمادي ده.

تعریف یا پیژند : وایو چې یو تابع په یوه بند انتروال $[a, b]$ ې متمادي ده، که تابع له ښئ لورې په $x=a$ کې متمادي وي او له کیڼې لورې په $x=b$ کې او د واز انتروال (a, b) په هر قیمت کې متمادي وي.

د متمادي توابعو خویونه(خواص): که f او g په $x=c$ کې متمادي وي، نو دا لاندې هره یوه تابع په $x=c$ کې متمادي ده.

لومړی) د توابعو جمع یعني $f+g$ تابع

دویم) د توابع تفریق یعنې f-g تابع

دریم) د توابعو ضرب یعنی f.g

څلورم) د توابعو ویش یعنې $\frac{f(x)}{g(x)}\ ;\ g(x)\neq 0$

د منځني قیمت قضیه:

که تابع f په بند انتروال [a,b] کې متمادي وي او k د f(a) اوf(b)ترمنځ یو عدد وي، نو لږ تر لږه د a اوb ترمنځ یو عدد c شته، د کوم لپاره چېf(c)=k باور لري.

د څېرکي تمرینونه:

سم ځواب وټاکئ:

که $\lim_{x\to 2} f(x)=4$ وي، نو $\lim_{x\to 2}(3x-20)(x+1)$ ی:

a) 5　　b) -5　　c) 4　　d) 3

ب) پیدا کړئ $\lim_{x\to 1}\frac{x2+1}{x2+3x-2}$

a) 1　　b) 2　　c) 1　　d) $\frac{1}{2}$

1- لیمیت پیداکړئ $\lim_{x\to 5}\frac{|x+5|}{x^2+3x-2}$

a) 1 b) 5 c) -1 d) -5

-2 $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$ دی.

a) -2 b) -1 c) 1 d) 2

-3 $\lim_{x \to 0} \frac{3x - \sin x}{x}$ دی.

a) 2 b) -2 c) 1 d) 3

-4 $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 2}$ دی.

a) $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) 1

-5 $\lim_{x \to 1.4} [2x + 0.3]$ دی.

a) 1 b) 3 c) 0 d) نشته

-6 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x}$ دی.

a) 1 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

-7 $\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ دی.

a) $2 + \sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

8- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin}{1+\cos 2x}$ دی.

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

9- لاندې توابع سره جمع کړئ.

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$ & $\lim\limits_{x \to 3}(x) = -2$

10- که $f(x) = x^2 + 1$ وي، پيداکړئ:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

11- تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - b & ; \quad x \le 3 \\ 10 - x & ; \quad x > 3 \end{cases}$ په $x = 3$ کې متمادي دی، b پيدا کړئ.

12- وښايئ، چې تابع $f(x) = 3x^2 - x - 5$ په اينتروال $(1,2)$ کې حل لري.

۱۳ - د لاندې ۱ – ۹ توابعو ليميتونه وشمېرئ.

1) $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + x)$ 2) $\lim\limits_{x \to 4} (x^2 + x)$ 3) $\lim\limits_{x \to -2} 2x + 3$

4) $\lim\limits_{x \to 0} |x|$ 5) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x}{x}$ 6) $\lim\limits_{x \to 1} 7$

7) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\frac{x^2}{x}}$ 8) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ 9) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^9 - 9}$

-------------------- --

۱٤-- که وي: $f(x)=\begin{cases}2+x; x<1\\ x^2 \quad ; x\geq 1\end{cases}$

الف) د تابع ګراف وکاږئ.

ب) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ پیدا کړئ.

15: هغه توابع چې په یوه عدد د بېلګې په توګه صفر کې تعریف نه لري ، څه بلل کیږي

16 پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

17-- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}$ وشمېرئ.

18--

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; \quad x<2\\ 3 & ; \quad x=2\\ x+3 & ; \quad x>2\end{cases}$ وي، نود $f(x)$ تابع متمادیت په $x=2$ کې وڅېړئ.

۱۹- یوه په خوښه تابع ولیکئ او د تابع ګراف وکاږئ او وګورئ، چې تابع چېرته تعریف ده او متمادیت یې وښایاست.

۲۰ - په لاندې له ۲ – ۷ پوښتنو کې څېړو، چې ایا تابع په ورکړشوي ټکي کې متمادي یا غیرمتمادي دي.

2) $f(x)=x^2+5(x-2)^7 \;\; ; \;\; x=3$

3) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5} \;\; ; \;\; x=-1$

4) $f(x)\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \;\; ; \;\; x=-2$

5) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3^3)} \;\; ; \;\; x=3$

6) $f(x)=|x-3| \;\; ; \;\; x=3$

7) $g(x)=\dfrac{|x|}{x} \;\; ; \;\; x=0$

---------------------- --

۲۱- تشریح کړئ، چې ولې تابع $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ په $x=0$ کې غیرمتمادي ده؟

۲۲- که $f(x)=\dfrac{18}{x}+2\ ,\ x\in[2,3]$ وي، و ښایئ چې $c\in(2,3)$ شته داسې چې $f(c)=10$ وي او c پیدا کړئ.

۲۳- وښایئ چې د لاندې مساوات لپاره یوحل شته:

$$x^3-4x+1=0 \quad ; \quad x\in[1,2]$$

۲٤- وي دې: $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$; $f(x)=\sin x+\cos x$ وښایئ، چې مساوات $\sin x+\cos x=0$ په اینتروال $(\frac{\pi}{2},\pi)$ کې یو حل لري.

۲۵ الف: وڅېړئ، چې ایا لاندې تابع د x_0 په ځاي کې مفمادي ده.

a) $f(x)=\begin{cases}-2x\\ \sqrt{x}\end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases}\sin x\\ e^x\end{cases}$	$x_0=0$ د $x\le 0$ لپاره $x_0=0$ د $x>0$ لپاره $x_0=0$ د $x\le 0$ لپاره $x_0=0$ د $x>0$ لپاره	b) $f(x)=\begin{cases}2\\ x^2+1\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}-x+1\\ \ln x\end{cases}$	$x_0=1$ د $x\le 1$ لپاره $x_0=1$ د $x>1$ لپاره $x_0=1$ د $x\le 1$ لپاره $x_0=1$ د $x>1$ لپاره

۲٦-- که $f(x)=2\sin x+3\ ;\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ وي، نو وښایئ چې $c\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ شته،

د هغه لپاره چې ربښتيا وي $f(c)=4$ او c پيداکړئ.

۲۷: لاندې ليميټونه وشمېرئ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x} \qquad \lim_{x\to 0}\sin 5x\cot 3x$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1} \qquad \lim_{x\to \pi}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}$$

$$\lim_{x\to 1}(\cos^2 x+\sin^2 x) \qquad \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-2x}{x}$$

20) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\tan 2x}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\cos\frac{\pi x}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^3+2x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

25) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$$

26) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x+\frac{\pi}{4})}{x+\frac{\pi}{4}}$$

27) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{x(x-\frac{\pi}{4})}$$

28) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-x\cos 3x}{x}$$

29) $$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 3x-\sin 5x}$$

30) $$\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}$$

31) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin^2 x-1}}{x}$$

32) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}$$

33) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(3x-3)}{1-x^3}$$

34) $$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+5x}{\sin 2x}$$

دویمه برخه: مشتق یا رابیلیدنه

په تیره برخه کې مو د پولې ځیرنه وکړه. وبه ګورو، چې دا د پولې درس د مشتق یا رابیلیدنې لپاره اړیین دی.

د تابع منځ ارزښت تغیر Average rate of change

دلته دې د سالنګ یا ماهیپر د سړک خیره راشي.(دلته ځېره راځي)

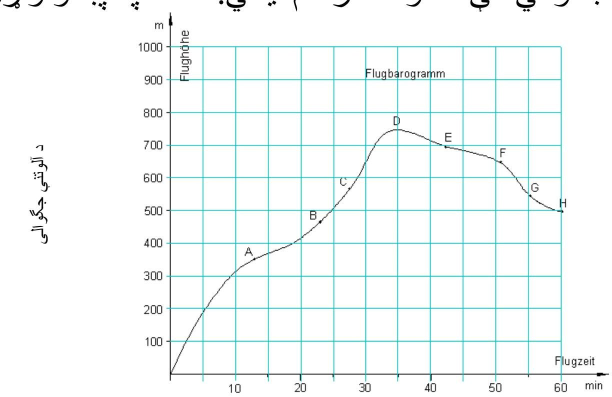
دکتاب په دې برخه کې موږ د ریاضیاتو یوه غوره برخه، چې د ریاضیاتو زړی ورته ویلی شو، تر ځیړنې لاندې نیسو، نو له دې امله لازم ګڼم، چې په دې هکله داسې مهم څه

د يوه يادښت په څير راوړم: که له يوه ځای څخه وبل ځای ته د تابع د تغير منځ ارزښت Averagerate of change څخه غږيږو ، نو موخه ترې په يوه ټکي يا دوه ټکو کې د تابع جگوالی، ميل اويا تانجنت دی او دا دريواړه کلمې د رياضياتو له مخې په همغه يوه معنا دي او وبه گورو، چې همداسې کمښتوېش يا د تفاضل وېش(Difference quotient) هم.

دې کلمو ته په انگريزي کې **slop** وايي، چې زموږ ادبيتو د ميل په نامه بلل کيږي.

په يوه ټکي کې د تابع د گراف ميل(جگيدنه)

الوتکوکې د الوتنې دليک(الوتنليک) الې (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل الوتنې جگوالی د الوتنې د وخت په واک کې يا د وخت تابعيت کې رسموي او په هر جگوالي کې د هوا فشار هم ليکي. که دا په پښتو واړوو، نو د ليک بکس به ورته ووايو.

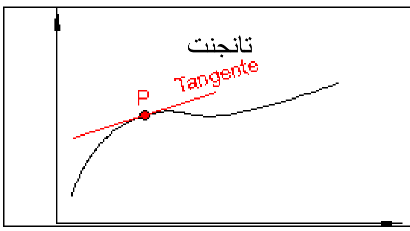


Flight barogramm

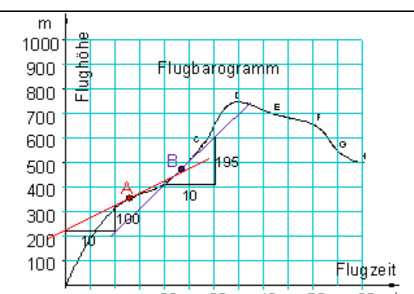
په پورته گراف کې د يوې الوتکې د الوتنې د بيلا بيلو وختونوجگوالی ښوول شوی.
فعاليتونه:
_ په پورته څيره کې د گراف جگوالی د A په ټکي کې د B ټکې سره پرتله کړئ. په ورته توگه دگراف ميل د E په ټکي کې د G ټکي سره پرتله کړئ.
_ روښانه کړئ، چې ولې په يوه ټکي کې بايد له جگوالي، ميل يا تانجنت څخه غږيږو؟
_ وهڅيږئ، چې په يوه ټکي کې د گراف جگوالي لپاره يو متود تعريف کړئ او له انځور څخه د A او B په ټکو کې جگوالی وټاکئ.
_ ايا فکر کوئ، چې پهB ټکي کې نسبت وA ټکي ته جگوالی زيات دی؟
_ ايا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جگوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جگوالی زيات دی نسبت د G ټکي ته؟

_ ايا د يوې کرښې جګوالی او په همدې ترتيب د يوې منحني هرڅيرته توپير لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه:
ګورو، چې په يوه منحني کې د ګراف جګوالی هرڅيرته برابر نه دی، نو له دې امله بايد ټکی په ګوته کړو، چې هلته ميل څېړل کېږي.
په لاندې بيلګه کې به روښانه کړو، چې تنها د يوې (سيده)کرښې ميل هرڅيرته برابر دی، نو له دې امله دلته د يوې کرښې د ميل يا جګوالي څخه غږيږو.
بريښي چې لاندې پيژند يا تعريف عاقلانه دی.

(تعريف): د يوې تابع ګراف ميل(جګوالی) د P په يوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د ميل د ګراف سره برابر دی.	

ليدل کېږي چې دلته يو تانجنت د کرښې تعريف لري، چې د لمستکي(مماس) په چاپيريال کې د امکاناتو سره سم لمستکي(مماس) ته ښه ور نږدې کېږي.
ددې پيژند يا تعريف له مخې په يوه ټکي کې د يوه ګراف ميل د يوې کرښې ميل دی.
د ګراف د جګېدنې ټاکلو لپاره د A او B په ټکو هر يوه کې يوه کرښه (تانجنت) انځوروو، چې ګراف ته خورا زياته نږدې کېږي.
د ميل يا جګېدنې مثلث په مرسته جګېدنه په شډل يا ساده ډول شميرل کيدی شي:
A په ټکي کې جګيدنه:

$\dfrac{100\,m}{10\min} = 10\,\dfrac{m}{\min}$ د B په ټکي کې جګيدنه: $\dfrac{195\,m}{10\min} = 15.5\,\dfrac{m}{\min}$	

زموږ د بيلګې لپاره ميل يا جګيدنه په يوه ټاکلي ټکي کې د لحظوي(سملاسي) ميل سرعت په معنا دی.

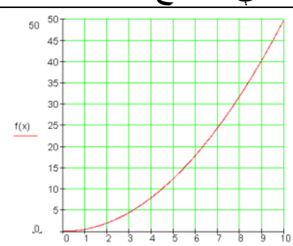
د A په ټکي کې: د الوتنې وخت نږدې $12.5\,\text{min}$، د میل یاجګیدنې چټکتیا (سرعت) نږدې $10\,\dfrac{m}{\text{min}}$ ده.

د B په ټکي کې: د الوتنې وخت نږدې $23.0\,\text{min}$، د جګیدنې سرعت نږدې $19.5\,\dfrac{m}{\text{min}}$ دی.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدنې له مخې تعریف شوی، چې د لمسټکي چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د ګراف میل د A او B په ټکو کې هم یوائې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی.

په یوه ټکي کې د تابع دګراف میل (جګیدنه):
معلومه ده، چې یو ریلګاډی د تمځای څخه له خوزېدو(حرکت) وروسته خپله چټکتیا(سرعت) په کراره کراره زیاتوي. وهلی لار(د تمځای څخه لرېوالی) تل زیاتیږي. د تمځای څخه لرېوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کې یا تابع دی.

عمل د لاندې تابعمساوات له لارې لیکلی شو.(مخامخ یا لاندې د تابع ګراف)
دلته د x وخت د ثانیې او د s لار د متر لپاره ټاکلي او لیکو: $S = f(x) = 0.5x^2$



فعالیت:
1- اوس دې منځنی تغیر ارزښتAveragerat of change(منځنی میل ارزښت) د 3 – مې او 7 –مې ثانیې ترمنځ وشمېرل شي.
2- ددې لپاره دې اړونده قاطع یا سیکانت انځور شي او د هغې جګوالی دې وشمېرل شي.
3- اوس دې د تغیر ارزښت(منځنی جګوالی) د 3 –مې او 7 –مې ثانیو ترمنځ وشمیرل شي.
4- وښایاست، چې په دریمه ثانیه کې د ارزښت تغیر یا جګوالی څومره دی؟

کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient

د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي.
کرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو.

د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

قاطع(غوڅی seconce):

قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي.

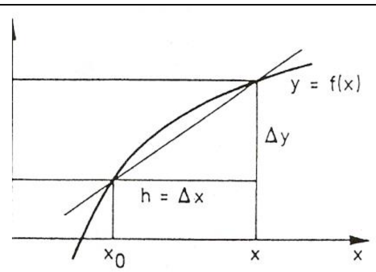
د قاطع میل یا جګیدنه(جګوالیsecant):

دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو میل(جګوالی) یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمیرل کیږي.

په لاندې کې m_S د جګوالي لپاره لیکل کیږي.

$$m_s=m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

(تعریف): د $y=f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څیره دې وکتل شي). نو د تفاضل یا کمبنتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:



$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

د f تابع لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمیرنه ده. د ا ټکي د $x-$ محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.

د کمبنت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.

بیلګه:

د $y = f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ تابع دې ورکړ شوې وي. د دې تابع کمبنت ویش(دتفاضل وېش) پیدا کړئ.

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{3(x+h)^2-5(x+h)+4-(3x^2-5x+4)}{h} \\ &= \frac{3x^2+6xh+3h^2-5x-5h+4-3x^2+5x-4}{h} \\ &= \frac{6xh+3h^2-5h}{h} \\ &= 6x+3h-5\end{aligned}$$

تمرینونه:

1 - کمبنتویش (د تفاضل وېش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a) P(3,2) , Q(5,4) b) P(2,4) , Q(3,1)

2- د $x = x_0$ په ځاي کې د f تابع د تانجنت جګوالی وټاکئ.

$a)\ f(x) = x^2\ ,\ x_0 = 2$ $b)\ f(x) = 0.5x^2\ ,\ x_0 = 3$

د کمبنتویش(د تفاضل ویش) او مشتق لاندې څه پوهیږو او د دوي ترمنځ توپیر څه دی؟

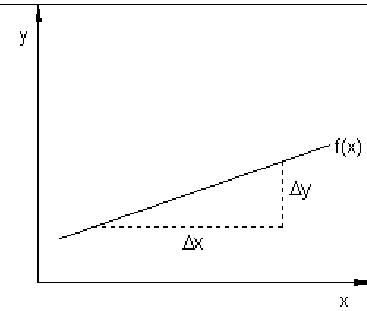
4 - د یوې تابع د سکانت(قاطع) لاندې څه پوهیږو او د تانجنت جګیدو لاندې څه پوهیږو؟ او د دوي ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي؟

رابيليدنه يا مشتقشميرنه **Diffrentialcaculation**

فعاليت:

پام وکړئ، لکه په يوه ثابت ميل $a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = constant$ کې، د بيلګې په توګه په خطي يا لاينيز تابع کې د $f(x) = a_1 x + a_0$ سره ميل شته او که نه؟

_ پام وکړئ، چې دا ميل به څه ځانګړي خويونه ولري؟ ايا جګيدنه به په هر ځای کې فرق ولري اوکه ثابت به وي؟



ايا په مختلفو وختونوکې اړين بولی، چې د تغيرحالت(د ميل حالت) کې د تابع د تلنې حالت و څيړئ؟

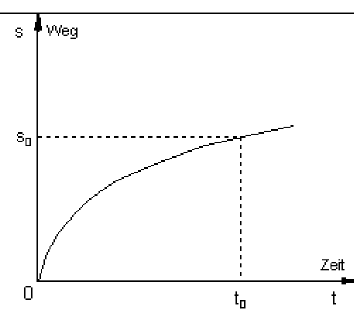
_ او يا له دې امله لحظوی چټکتيا(سرعت) $v(t_0)$ په لار- وخت- دياګرام کې وڅيړئ؟

_ ايا د مشتق شميرنې په مرسته دا پرابلم حل کيدی شي؟

په پام کې نيولې لحظه $\hat{=}\ t_0$

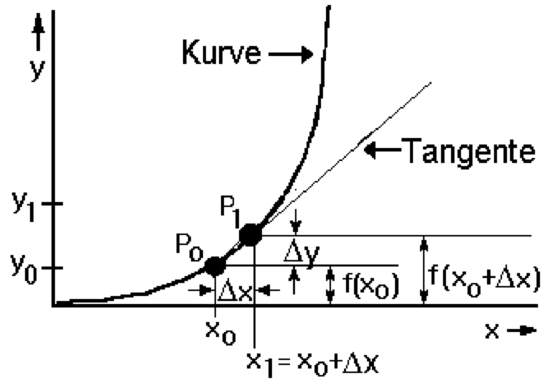
دا تر دې وخت وهل شوې لار $\hat{=}\ s_0$

يادونه: مخامخ Zeit د وخت ا و Weg د لار په معنا دي.



مشتقشمیرنه = د یوې منحني میل یا جګیدنه (Differential caculation

تانجنت: که د P_1 او P_0, ټکي یو بل ته ناپای نږدې شي، نو له قاطع څخه تانجنت جوړیږي.



د تانجنت جګیدنه: د تانجنت جګیدنه د قاطع د جګیدنې،، لیمت ،Limit,, یا حد دی.

$$\boxed{m_t = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

فعالیت:

1- له پورته څیړې او اړونده شننې څخه د مشتق لپاره څه فکر کوئ؟

2- د derivative (مشتق) کلمې لاندې څه پوهیږو؟

او دا په ساده پښتو څه معنی ورکوي؟

3- له کمښت وېش(د تفاضلونو ویش) څخه څنګه و مشتق ته راځو؟ په دې هکله د پورته څېړې څخه په ګټه اخسلوخپل نظر ووایاست.

4- له $2-$م فعالیت څخه ووایاست، چې ولې دا شمېرنه رابیلېدنه یا مشتق بلل کیږي؟

پام: لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله، د derivative کلمه نوې ده، نو له دې امله دا څو ټکي په پام کې نیسو: derivative د رابیلیدنې په معنا دی، چې موږ یې تراوسه مشتق بولو.

: که د تابع دا کمښتویش(د تفاضل وېش) او(همداسې) $x->x_0 \Leftrightarrow x->0$ او یا په (همدې ډول) $h->0 \Leftrightarrow$ لپاره یو حد ولري, نو د $y=f(x)$ تابع د $x=x_0$ په ځای کې د مشتق قابلیت لري او ددې لپاره لیکو:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h};...$$

دا لیمیټ داسې ښنایو: $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x)$

د x_0 ځای کې د $y=f(x)$ له مشتق(Derivativ,) یا رابیلدنې) ځخه یوه بله سیده یا بل ډول کړه لار رابیله وو.

د مشتق ساده شمیرنې لپاره یوه بیلګه:

د $f(x)=x^2-3x+2$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ددې کمښتوپش په لاندې ډول دی:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{((x_0+\Delta x)^2-3(x_0+\Delta x)+2)-(x_0^2-3x_0+2)}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-3x_0-3\Delta x+2-x_0^2+3x_0-2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0\Delta x+\Delta x^2-3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 2x_0+\Delta x-3$$

او د لیمیټ $\Delta x\to 0$ سره یې مشتق لاس ته راځي:

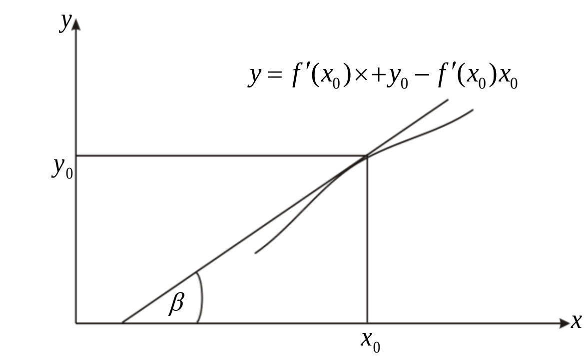
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x-3) = 2x_0-3.$$

د دې لپاره دا لاندې تعریف(پیژند) ورکوو:

که یو د $y=f(x)$ تابع د x_0 په ځای کې مشتق وړ وي، نو هغه لاندنی کرښه چې د (x_0,y_0) کې ځخه تېرېږي او میل یا جګوالی یې $f'(x)=\tan\beta$ دې او په لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f^{'}(x)\Leftrightarrow y=f'(x_0)x+y_0-f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0,y_0) په ټکي کې د ورکړ شوې منحني $y=f(x)$ تانجنت بلل کیږي(پرتله پورته کیڼ شکل)



موږ اوس د ځو بنسټیزو توابعو مشتق شمیرنه تر څیړنې لاندې نیسو.

بیلګه۱ :

د یوې ثابتې مشتق:

موږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت یې یوثابت دی.

ثابت $y=f(x)=c=Cons$ ، نو د هر x_0 ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{c-c}{h}=0$$

$$\Rightarrow(\frac{dy}{dx})_{x=x_0}=f'(x_0)=0$$

بیلګه۲ :

یوه $f(x)=x$ خطي(کرښیزه) تابع لرو، د x_0 په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta y}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta y}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-+x_0}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1=\underset{=}{1}$$

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعنې یوه ثابته ده.

بیلګه ۳ :
د $y=f(x)=c.u(x)$ ډوله تابع مشتق د c =ثابتې سره.

د ثابتي قانون:
د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې $=c$) سره ضر ب شوی وي. یعنې له $y=f(x)=c.u(x)$ څخه لرو: $f'(x)=c.u'(x)$ $\Rightarrow$

ثبوت:

$$\Rightarrow f(x_0)=c.u(x_0)$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x_0+\Delta x)-c\cdot u(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}c\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}c}_{c}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$$

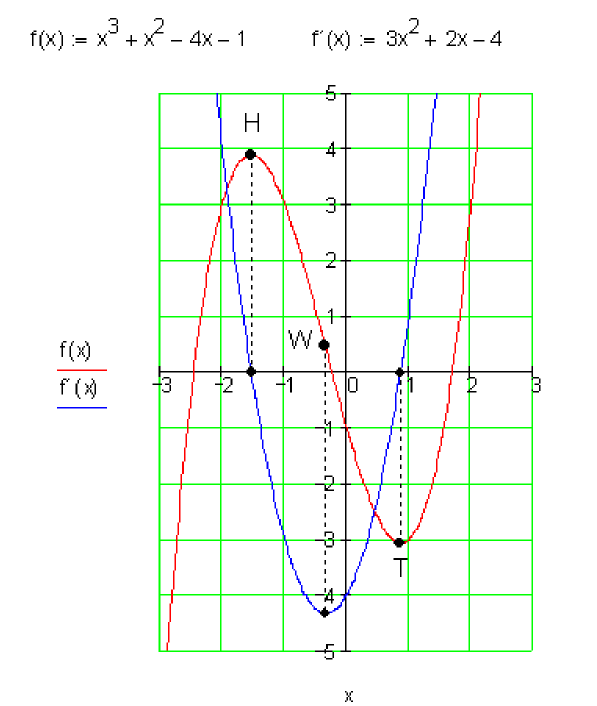
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underline{\underline{c\cdot u'(x_0)}}$$

تمرینونه:

1- د تفاضل وېش او د مشتق لاندې څه پوهېږو؟
2- د دوی ترمنځ څه اړیکې (پرتې) دي؟
3- د قاطع (سکانت) او تانجنت جګېدنې لاندې څه پوهېږو؟

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

شکل کې سره منحني تابع، شنه کرښه‌منحني د تابع مشتق او وبه گورو، چې له همدې امله د مشتق تابع هم ده.



فعالیت:

1- د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟

2- د یوې تابع له مشتق نیونې وروسته دې مشتق ته څه وو ایو؟

3- که د تابع مشتق د مشتق تابع ونومو، روښانه کړئ، چې ولې تابع ده او ددې تابع درجه، د لومړی تابع سره پرتله کړئ.؟

• ایا له دې توپیر څخه د مشتق کلمه روښانه کولی شئ؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بیلګې څخه کار اخلو

بیلګه۱: تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي. غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانګړې توګه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمښتویش(د تفاضل وېش) پیداکوو.

$$x = x_0 :$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

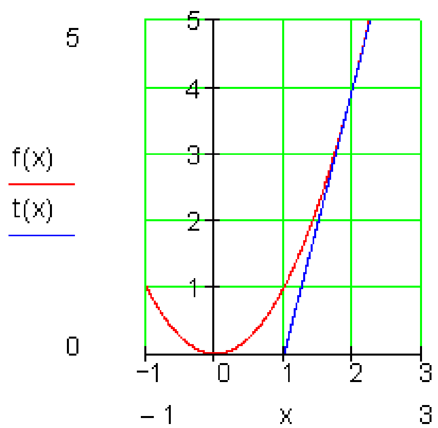
اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $\underline{\underline{f'(x_0) = 2x_0}}$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې میل یاچګوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یې:

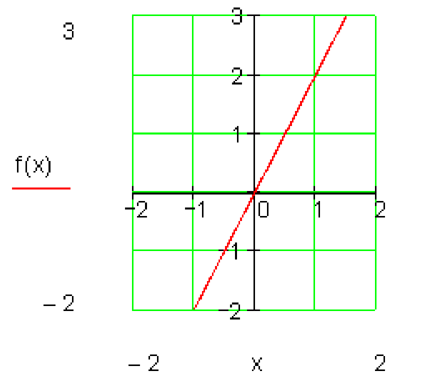
کیدی شي، د تابع د ګراف له لارې و ازمایل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0 \mid y_0) = P_0(2 \mid 4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د میل د مثلث له لارې جګیدنه لاس ته راوړو.	

پورته بیلګه کې: $y = f(x) = x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداکوو:

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$$

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	4

ګراف یوه کرښه $f'(x) = 2x$ انځوروي، چې د تابع مشتق بلل کیږي



پام: که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو بیرته هم یوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکیږي.
د مشتق تابع: د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنسټ تابع انځوروي، له دې امله دا د میل تابع هم بلل کیږي.

بیلګه ۲:
د $f(x) = x^3$ تابع دې ورکړ شوی وي.
فعالیت: ګران لوستونکي دې د $f(x) = x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.

موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0{}^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = 3x_0^2$$

نو $\underline{\underline{f'(x_0) = 3x_0^2}}$ د $f(x) = x^3$ تابع مشتق دی په ځای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسې ده: $\underline{\underline{f'(x_0) = 3x_0^2}}$

بیلګه ۳: یوه د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع ورکړشوې.

غوښتنې یا ثبوت:

الف: د تابع ګراف په یاد راوړئ.

ب: په x_0 تکي کې د تابع مشتق پیداکړئ.

پ: په x_0 تکي کې د مشتق تابع هم پیدا کړئ.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0}{x_0(x_0+\Delta x)}-\frac{(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-x_0-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}$$

د پورته اخري مساوات لیمیټ د $\Delta x\to 0$ لپاره نیسو:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}\right)=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}$$

نو لرو: $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$. دا د x_0 په ځای کې د f مشتق دی.

د مشتق تابع هم دی: $\underline{\underline{f'(x)=-\frac{1}{x^2}}}$

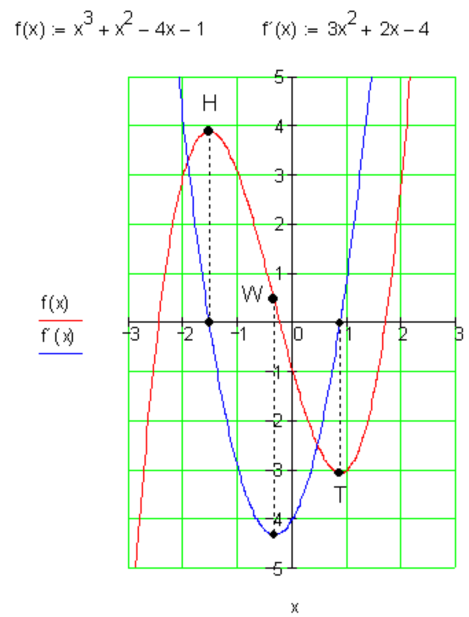
وضعیه کمیاتو سیستم کې تابع او د تابع مشتق:

تابع(سور): $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$

د تابع مشتق(شین):

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

د تابع مشتق هم تابع دع. مور دا د مشتق یا د میل تابع بللي.



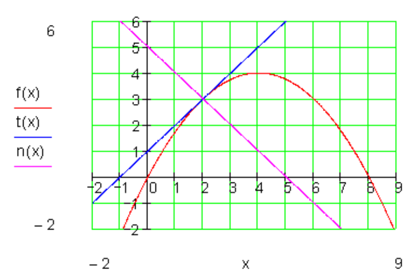
تمرینونه:

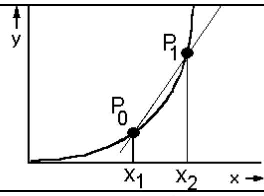
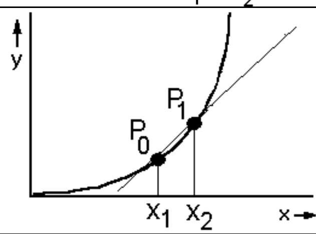
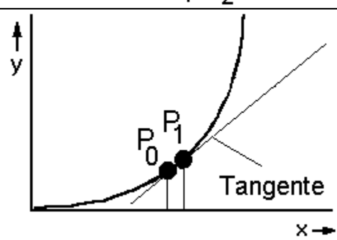
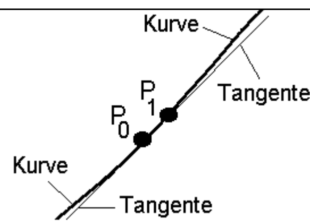
په لاندې مساواتو کې د f تابع مشتق او د مشتق تابع وښایئ

$a)\ \ f(x) = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 1$ $\qquad b)\ \ f(x) = x - \sqrt{x}$

$c)\ \ f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{x^3}$ $\qquad d)\ \ f(x) = 3x^2 + 0.4x - 5$

د تانجنت او عمود تعریفونه او خویونه



	لاندې يا مخاکخ ښيره يو منحني او يوه قاطع(غوڅی) په ټکو P_0 او P_1 کې ښايي.
	اوس غواړو، چې ټکی P_0 د ټکي P_1 په لور و خوځيږي. پام: ددې سره قاطع خپل ميل تغيروي
	بالاخره غواړو، چې P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کيږي.
	که پوره وپيژندلی شو، چې د ټکو P_1 او P_0 په شاو خوا غزوو يا لويوو : که د P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای نږدې شي، نو کتل کيږي، چې تانجنت په ټکي P_0 کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحني په P_0 ټکي کې.

د دې خويونو غوره غوره والی يا پايله:
ومو ليدل، چې د تانجنت ميل په P_0 ټکي کې په همدې ټکي کې د منحني ميل هم دی. له دې دا پايله لرو، چې که څوک غواړي د منحني ميل په P_0 ټکي کې پيدا کړو، بسيا کوی، چې د تانجنت جګوالی يا ميل په P_0 ټکي کې پيدا کړي.

فعاليتونه:
1- پورته شکلونه بيا سره پرتله کړئ. د ميل په هکله يې فکر وکړئ، چې کوم ميل زيات دی؟
2- تانجنت تعريف کړئ او په شکل کې يې وښاياست.
3- قاطع (سيکانت) تعريف کړئ او په ښېره کې يې وښاياست.

په لاندې کې د تانجنت او عمود عمومي فرمول راباسو:

پیل: تانجنت دې د $f(x)$ ګراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ ګراف د په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود یا ولاړ غوڅ کړي.

د تانجنت مساوات: $t(x) = m_t \cdot x + b_t$:

د $m_t = f'(x_0)$ سره لیکو: $\qquad (1) \qquad t(x) = f'(x_0) \cdot x + b_t$

دا چې $P(x_0), f(x_0))$ تانجنت یو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot x + b_t = f(x_0)$$
$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لر:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$$
$$= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال): د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود ځغلي.

د عمود میل:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$
$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

بیلګه:

د $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پیدا کړئ:

حل: په لاندې توګه د تابع مشتق نیسو او ګراف یې(ځیره لاندې کښل شوې) کاږو:

نو لرو: $\qquad f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت میل **په ټکي** x_0 **کې د میل ارزښت** 3 **لري.**

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2 \cdot (-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \qquad ,P(2,f(2))$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ په ځاي کې لرو:

$$t(x)=f'(2)(x-2)+f(2)$$

$$f(2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot(2)^2=4-1=3 \qquad f'(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow t(x)=1(x-2)+3=x-2+3=\underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \;, \quad P(2\,|\,f(2))$$

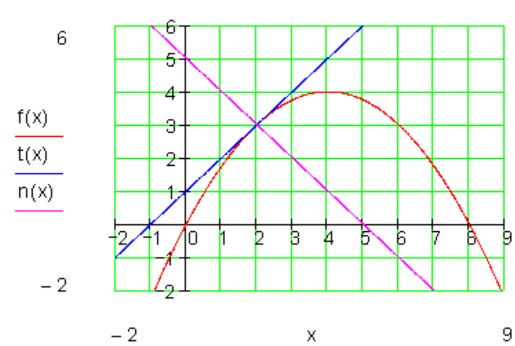
$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x)=\frac{1}{f'(2)}(x-2)+f(2)$$

$$f(2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot(2)^2=4-1=3 \qquad f'(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow n(x)=-\frac{1}{1}(x-2)+3=-x+2+3=\underline{\underline{-x+5}}$$



د تانجنت او ولاړ يا عمود عمومي مساوات

بيلګه: تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ لرو.

د تانجنت ميل:

د يوه تابع د ګراف ميل په ټکي $P(x_0 \mid f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت ميل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټيک په پام کې نيسو.

موږ $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ مربع تابع لرو

د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

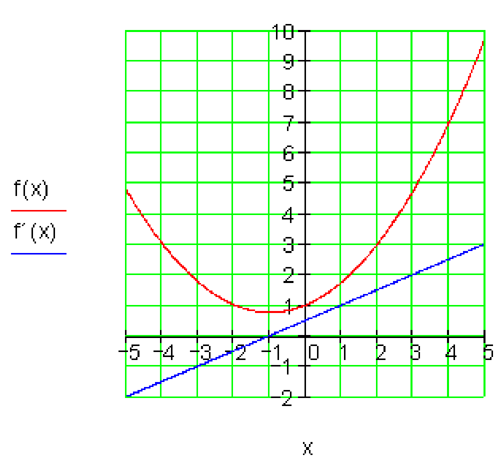
ارزښتجدول:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککرټکی دی: $S(-1,\ 0.75)$ د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د ميل تابع ارزښت دی: دا دا معنی لري، چې په ککرټکي(د رآس ټکی) کې د $f'(x)$ ميل صفر دی. تانجنت په S کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛ يعني د $x-$ محور سره غبرګ ځغلي.

ګرافونه:

$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ $f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



بیلګه:

$f(x)=2x^3+7x^2+x-7$ تابع لرو:

تانجنت دې پیداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

$$f(x)=2x^3+7x^2+x-7 \;\Rightarrow\; f'(x)=6x^2+14x+1 \quad P(-2\,|\,f(2)) \;\Rightarrow x_0=-2$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x_0)\,f'(-2)=24-28+1=-3$$

$$f(x_0)=f(-2)=-16+28-2-7=3$$

$$\Rightarrow t(x)=-3(x+2)+3=-3x-6+3=\underline{\underline{-3x-3}}$$

پایله:

د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0\,,f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري**.**

د تانجنت مساوات

$$t(x)=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګېدنه}}(x-x_0)+f(x_0)$$

د عمود مساوات

$$n(x)=-\frac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}}(x-x_0)+f(x_0)\ ;\quad f'(x_0)\neq 0$$

تمرینونه: د لاندې توابعو ګرافونه وکاږئ، د تانجنت او د عمود مساوات ولیکئ.

$$f(x)=x^3-6x^2+9x \qquad x_0=2$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{x}+3 \qquad x_0=1$$

$$f(x)=x^3-x^2-5x-2 \qquad x_0=-\frac{3}{2}$$

د مشتق شميرنې قوانين

د مشتقشميرنې شميرقوانين، لک څنګه په اعدادو، ترادفونو او حدونو(پوله ارزښتونو) کې اجرا کيږي،په همدې ډول مشتقشمېرنه کې هم دا قوانين باوري دي.

وبه ښايو، چې د جمعې، ضرب او ... مشتقونه د مشتقونو جمع، ضرب او ... ده. (په وېش کې بايد مخرج صفر نه وي).

فعاليت:

که $f(x)=x^2+x$ او $g(x)=x^3+2$ ولرو، $(f(x)+f(x))'$ د $(f(x)-g(x)),(f(x)\cdot g(x))'$ او $(\frac{f(x)}{g(x)})'$ د $g(x)\neq 0,$ د پيدا کولو په هکله فکر وکړئ.

قضيه (د جمعې قاعده):

که يو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعې څخه جوړ وي، نو مشتق يې هم د هر تابع د مشتق د جمعې څخه جوړ دی، يعنې:

$$f(x)=u(x)+v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x)=u'(x)+v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0)=u(x_0)+v(x_0)$$
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]+[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]}{\Delta x}+\frac{[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)}+\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x)=\underline{\underline{u'(x_0)+v'(x_0)}}$$

بیلګه:
که توابعو $f(x)=5x^2+3x\ ,\ u(x)=5x^2\ ,v(x)=3x$ ولرو شتق وشمرئ.
ښوونه:

$$f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

فعالیت: که چیرې $f_1، f_2، .....، f_n$ توابع او $k_1، k_2، ....، k_n$ ثابت عددونه وي نو لرو(پې له ښوونې):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+.....+k_n f_n(x)]'$$
$$=k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+.....+k_n f_n'(x)$$

قضیه (د ضرب قاعده): که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښایو:

$$(f(x)\cdot g(x)'=f(x)'\cdot g(x)\cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعنې په صورت کې د $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ ورزیاتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي یعنې د دواړو لورو لیمیټ نیسو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

بیلګه:

که $g(x)=x^2-1$ او $h(x)=\sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x)=g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ښوونه:

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x},\ f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د وېش قانون): f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښایو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښایو(ثبوت کړو).
لومړی لار یا طریقه یې په لاندې کې ښایو او دویمه لار دې ګران زده کوونکي وښايي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}\quad,\quad g(x)\neq 0$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زیات کړو، نو لرو:.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to 0}g(x)\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)\right]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

يعني لرو: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

بيلګه:

د $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ تابع (د $x^2 - 4 \neq 0$ سره) مشتق غواړو پيدا کړو.

حل: که چېرې $g(x) = x^2$ او $h(x) = x^2 - 4$

وضع شي نو لرو:

$$g'(x) = 2x$$

$$h'(x) = 2x$$

او د ويش قانون له مخي لرو:

$$f'(x) = \left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$= \frac{2x(x^2-4) - x^2.2x}{[x^2-4]^2}$$

$$= \frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$

پوښتنې:

که $f(x) = 3x^2 + 5x - 8$ او $g(x) = 5x^3 - 3x + 4$ ولرو، نو :

- د توابعو د توابعو د جمعي مشتق، د ضرب مشتق د توابعو د وېش($f(x) \neq 0$) مشتق پيداکړئ، که شونی وي له مختلفو لارو.

د الجبري توابعو مشتق

الجبري او نورو توابعو پيژندونه(تعريفونه):

1- يو بنستيز تابع الجبري بلل کيږي، که د ترتيب قانون يې د مساواتو له لارې ورکړ شوی وي،په هغو کې چې په ترمونو کې د مساواتو د متحولو سره فقط الجبري

-- ----

عمليی(جمع،تفريق، ضرب، تقسيم(چې مخرج يې صفر نه وي)توانکونه او جذرنيونه(د توان-اوريښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي) کارول شوي وي.

2- ناالجبري توابع ترانسڅندنت بلل کيږي، لکه اکسپوننشل-ولوګاريمی- او د زاويو توابع.

3- يو الجبري تابع راشنل بللکيږ ي، که د ترتيب قانون يې د يو مساوات سره ورکړ شوی وي، په کوم کې چې ناپاې ډيرې راشنل د شمير عمليی ((جمع،تفريق، ضرب، تقسيم(چې مخرج يې صفر نه وي)توانکونه او جذرنيونه(د توان-اوريښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي)) کارول شوي وي.

فعاليت:

په څېر د $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... a_1 x + a_0$ يوه تابع د $f(x)$ _ که د $n \in N \quad \wedge \quad a_1 \in R$ سره ليکل شوې وي، څه بلل کيږي؟

په د ويش v او u د دوه توابعو تابع f د $v(x) = 3x + 6$ او $u(x)x^2 + 4x + 4$ _ لرو:

سره وليکئ $v(x) \neq 0$ د $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ څېر لکه

تابع مشتق ونيسئ. پسې د $v;u$ _ د تابع تعريف ساحه وښاياست او بيا د هرې يوې مشتقونو وېش په نښه کولو پسې د مشتقونو وېش(چې مخرج صفر نه وي)، د مشتق سره پرتله کړئ.

بيلګه:

د $f(x) = \sqrt{x}$ تابع ورکړ شوې په x_0 کې د تابع مشتق پيدا کړئ او د مشتق تابع په ګوته کړئ.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x + \sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x + \sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x + \sqrt{x_0}}}$$

$$f'(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو د x_0 په ځای کې $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د تابع $f(x) = \sqrt{x}$ مشتق دی.

د تېرو درسونو پر بنسټ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ د مشتق تابع ده.

د $q \in Q \;;\; f(x) = x^q$ ډوله توابعو مشتق:

د شمیرنې له مخې لاندې لاس ته را وړنې لرو:

تابع	د مشتق تابع	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$f'(x) = 1 \cdot x^0$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2 \cdot x$	$f'(x) = 2 \cdot x^1$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$
$f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$f'(x) = -1.x^{-2}$
$f(x) = \sqrt{x} = x\dfrac{1}{2}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}$

که دا پورته پنځه مشتقونه یو د بل سره پرتله کړو، نو اټکل کیږي، چې لاندې جوړښتقانون باور لري:

د توان قانون (بې له بنونې)
(پونتخ) قانون:
1- مختني اکسپوننت د متحولې x د مخ د فاکتور په څیر لیکل کیږي.

2- نوی اکسپوننت همغه پخوانی اکسپوننت دی، چې په یو کم شوی.

$f'(x) = q \cdot x^{q-1} \;\Rightarrow\; f(x) = x^q$ **د** $q \in Q$ **سره**

بیلګه:

د $f(x)=\frac{1}{x^2}$ مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2} \quad \Rightarrow \; f'(x)=-2x^{-3}=-\underline{\underline{\frac{2}{x^3}}}$$

بیلګه:

د $f(x)=3x^4$ تابع مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=3x^4 \qquad c=3 \qquad u(x)=x^4 \Rightarrow u'(x)=4x^3$$

$$f'(x)=c\cdot u'(x)=3\cdot 4x^3=\underline{\underline{12x^3}}$$

بیلګه:

غواړو د $f(x)$ تابع مشتق د $x=2$ په ځای کې ونیسو:

$$f(x)=x^2+3$$

$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=4+\Delta x$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=\underline{\underline{4}}$$

$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=2u+\Delta x$$

$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2u+\Delta x)=\underline{\underline{2u}}$$

بیلګه:

د تا بع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ مشتق د $x=2$ په ځای کې پیداکړئ.

ښوونه:

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{1}{3(3+\Delta x)}$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{3(3+\Delta x)}\right)=-\frac{1}{9}$$

$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}$$

$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}=-\frac{1}{(u+1)^2}$$

بیلګه:

(توان((Potence) مشتق، چې طبیعي جګ عدد یا اکسپوننت لري:

موږ د $1, 2, 3,...$, $y(f(x)=x^n$ تابع لرو او غواړو مشتق یې پیداکړو:

ښوونه: موږ په لاندې توګه مخ ته ځو.

د بینوم جملی په بنسټ په هر x_0 ځای کې دا لاندې باورلري.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{}$$

$$=\frac{\binom{n}{0}x_0^n+\binom{n}{1}x_0^{n-1}h+\binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2+...+\binom{n}{n}h^n-x_0^n}{h}$$

$$=\frac{1}{h}\left(x_0^n+nx_0^{n-2}h+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h^2+...+h^n-x_0^n\right)$$

$$=nx_0^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h+...+h^{n-1}$$

د $h\to 0$ لپاره تابع $y=x^n$ د x_0 په هرځای کې، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري:

$$(dy/dx)_{x=x_0}=f'(x)=nx^{n-1}$$

ددې پورته بیلګې بل ډول ښوونه دې د پوښتنې په څېر وي.

تمرينونه: _ که يو پولينوم $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...a_1x+a_0$
د $a_1\in R \quad \wedge \quad n\in N$ سره ورکړ شوی وي، مشتق يې پيداکړئ.
- د توابع مشتق د توان قانون له مخې پيداکړئ.

$a)\ f(x)=x^5$ $\qquad b)\ f(x)=x^6$

$c)\ f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad d)\ f(x)=\dfrac{1}{x^5}$

$e)\ f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad f(x)=\sqrt[4]{x^3}$

$g)\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad h)\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

د زنځيري(مرکب) توابعو مشتق

تابع کيدی شي د v تابع سره وتړل شي، که د د باندني تابع(ځنځيروني قاعده)، پيژند ورشو (دتعريف ساحه) $D(u)$ د دنني تابع د $W(v)$ سره ګډ توکي يا عناصر ولري.

ددې لپاره ليکو: $u\circ v(x)=u(v(x))$، که د f تابع د $y=f(x)=u(z)$ سره او $Z=v(x)$ وي.

فعاليت:
_ په زنځيري تابع کې د $f(g(x))$ پيژند ورشو او همداسې د تابع ورشو په هکله خپل نظر څرګند کړئ.
په ځاي کې څه دی او $x=3$ تابع ارزښت د $f(g(x))=(x^2+2x+1)^2$ _ ووایاست، چې د د تابع ساحې کومې دي او په مشتق نيولو کې يې فکر وکړئ.
_ که يوه په خوښه زنځيري تابع ولرو، نو د تابع ورشو په ګوته کړئ او وهڅيږئ، چې مشتق يې پيدا کړئ.

اوس نو د $x=x_0$ ځای کې د $y=f(g(x))$ تړلي يا ځنځيري تابع مشتقوړوالی څيرو:

$$f(x) = f\left[g(x)\right]$$
$$\Rightarrow f'(x) = f'(g) \quad . \quad g'(x)$$

دننني مشتق د باندنی مشتق(دادې ورپورته شي)
ددې لپاره نیسو چی:

-1 د $g(x)$ دننني تابع د $x = x_0$ په ځای کې مشتقوړ ده. دانو بیا باید د x_0 په یوه معلوم تعریف شوي چاپیریال کی متمادي(نه پریکیدونکی) وي.

موږ لرو : $g(x+h)->g(x_0)$ د $h->0$ لپاره.

همداسې $g(x_0+h) = g(x_0)+k$ داسې، چې $k->0$ د $h->0$ لپاره.

-2 که د $y = f(z)$ دباندنی تابع په $z = z_0 g(x_0)$ کې د مشتق قابلیت ولري.

د $y = f(g(x))$ کمبنتویش کیدی شي په لاندې ډول ورکړ شي او بڼه(فورم) یې هم بدله شي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)}$$
$$= \frac{f(z_0+k) - f(z_0)}{k} . \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

که $h->0$ لاړه شي (همداسې $k->0$ خواته ځي) نو دا اړیکی مشتق ته ځي:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)} . \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0} \quad ;........(*)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)} . \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

که چیرې د ځای په ځای(فیکس) ځای $x = x_0$ لپار بیرته x نیسو، نو کیدی شي چې (*) فرمول په لاندې لنډ ډول ورکړشي او د $y = (z)$, $z = g(x)$ لپاره باور ولري:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(**)$$

په پام کې دې وي، چې $\frac{dy}{dx}$ د $z=g(x)$ په ځای کې باید ترتیب(تنظیم) شي.

دا $(*)$ فرمول ځنځيري قاعده(لار،قانون) بلل کيږي او د پورته نيونو يا فرضيو سره باوري دى. دا په ساده ډول په ياد لرلی شو، ځکه چې ښۍ خوا د کيڼې خوا سره د فورمال dzزياتيدلو له لارې منځ ته راغلي.

د پورته ښوونې لاس ته راوړنه دا لاندې جمله ده:

زنځيري يا مرکبه قاعده

لرو : $f(z)=f(g(x))$ ، نود $z=g(x)$ تابع په x او د $y=f(z)$ تابع په $z=g(x)$ کې د مشتق قابليت لري يا مشتقوړ دى، نوترلی ورکړ شوى د $y=f(g(x))$ تابع هم په x کې د مشتق قابليت لري او دا باوري کيږي.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{\frac{df}{dg}}{\frac{dx}{dg}}==f\ '(g(x)).g\ '(x)$$

لنډ:

$$(fog)'(x)=f(g(x))'$$

بيلګه:

د $f(x)=(x^2+2)^2$ مشتق ونيسئ.

$$f(x)=\left(x^2+2\right)^2$$

بدلون tion: $z(x)=x^2+2 \quad f(z)=z^2 \Rightarrow f'(z)=2z \quad z'(x)=2x$

$$f'(x)=f'(z)\cdot z'(x)=2z\cdot 2x=2\left(x^2+2\right)\cdot 2x=\underline{\underline{4x^3+8x}}$$

بېلګه:

د $y=\sin x^2$ تابع يوه په لاندې توګه ورکړ شوی ځنځيري تابع ده:

$$y=\sin z \quad , \quad z=x^2$$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق ورېدي. له دې امله هر چيرته باور لري:

$$\frac{d\sin x^2}{dx}=\frac{d\sin z}{dz}.\frac{dx^2}{dx}=\cos z.2x=2x.\cos x^2$$

بېلګه:

د $y=\sin^2 x$ تابع په لاندې ډول تړلی ورکړ شوی.

$$y=z^2 \quad , z=\sin x$$

دلته هم دواړه توابع هرچيرته مشتقوړ دي. نو له دې امله هرچيرته باور لري:

$$\frac{d\sin^2 x}{dx}=\frac{dz^2}{dz}.\frac{d\sin x}{dx}=2z.\cos x=2\sin x.\cos x=\sin 2x$$

بېلګه:

د $f(x)=(x^5+4)^8$ تابع مشتق وشمېرئ!

حل: هرکله چې $g(x)=x^8$ او $h(x)=x^5+4$ وضع کوو نو لرو:

$$f(x)=g(h(x))$$

$$f'(x)=(g(h(x))'=g'(h(x)).h'(x)$$

$g'(x)=8x^7$ $h'(x)=5x^4$ دی، نو لرو:

$$f(x)=8(h(x))^7 5x^4=40(x^5+4)^7.x^4$$

تمرينونه:

۱ - $h(x)=\frac{1}{(x^3-4x^2+1)^2}$

۲ - که چيرې $f(x)=(3-2x+x^2)^4$ وي، نو f' پيداکړئ.

د لاندې تابعو مشتقونه هم ونيسئ

1: $f(x) = (1-2x^3)^4$

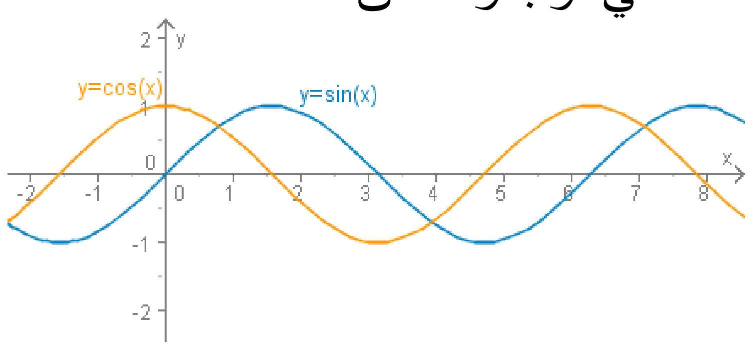
2: $f(x) = (2x^2+1)^{-2}$

3: $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2+x^2+x^3}}$

4: $h(z) = \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$

5: $f(t) = \sqrt[3]{3t+1}$

د مثلثاتي توابعو مشتق



$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad \text{....} \quad I$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad \text{....} \quad II$$

فعالیت:

د لاندې توابعو مشتقونه وشمیرئ:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad :a$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad :b$$

$$f\,'(x) = \frac{d\ \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad c$$

موږ په لاندې کې پورتني درې حالتونه ښايو او د نورو درې حالتونوښوونه ګرانو زده کوونکو ته پرېږدو.

قضيه:

د ساين تابع مشتق غواړو وښايوو چې $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$ دی:

ددې قضيې د ښوولو لپاره پورتني په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي.

د $y = f(x) = \sin x$ ساين تابع د هر x لپاره تعريف ده، نو د x_0 په خوښه ټاکلوځخه لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h}$$

$$= \frac{2}{h}\cos\frac{2x_0+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2} = \cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\ .$$

د ليميټ د برخې په پام کی لرلو سره لرو:

$$\lim_{h\to 0}\left(\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) = \cos x_0.$$

د ساين تابع په هر ځاي کی، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابليت لري يا مشتقوړ ده:

$$\left(\frac{d\sin x}{dx}\right)_{x=x_0} = f\,'(x_0) = \cos x_0\,,$$ (Xپه لينده کچ يا راديان)

قضيه:

همداسي ښوول کيږي چی کوساين تابع هم په هرځاي کی مشتقوړ ده، دلاندې مشتق سره:

په لینده کچ یا رادیان x $\left(\frac{d\cos x}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = -\sin x_0,$

ثبوت:

لرو: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x_0}{h}$

په پورته ننوتنه کې د دویم فرمول له مخې لرو:

$$= \frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2} . \sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \frac{-2\sin(x+\frac{h}{2}).\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= -[\sin(x+\frac{h}{2}).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}]$$

د لیمیټ او د لیمیټ د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي :

$$= -\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2}) \; . \; \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنډه توګه لیکو:

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

قضیه :

غواړو وښايو چې د تانجنت تابع f(x) = tanx مشتقوړ ده او د مشتق تابع يې $f'(x)=\frac{d\tan x}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$ ده.

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$
$$=\frac{\cos x\,\frac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\,\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{\cos x.\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=1+\tan^2 x\ ,x\neq(2k+1).\frac{\pi}{2}$$

فعاليت: ګرا زده کوونکي دې د $f(x)=x^2\sin x$ تابع مشتق پيدا کړي.

يادونه: $g(x)=x^2$ او $h(x)=\sin x$ دې ځا په ځای کړي.

بيلګه:

غواړو د $y=\cos\frac{\pi x}{180}$ تابع مشتق پيدا کړو.

حل:

ږدو : $f(x)=\cos x$ او $g(x)=\frac{\pi x}{180}$ ، نو y په لاندي توګه ليکلی شو:

$y=f(g(x))$. د زنځيري قاعدې په بنسټ لرو:

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= \cos'(g(x)) \cdot (\frac{\pi}{180} \cdot x)'$$
$$= -\sin(g(x)) \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180} \cdot \sin\frac{\pi x}{180}$$

د لاندې توتبعو مشتق پيدا کړئ

$\tan^4 x$	$:b$	$\cos^2 2x$	$:a$
$\sin(3x-1)$	$:d$	$\sec x \cdot \cot anx$	$:c$
$\sec(\sec(x))$	$:f$	$\sin^2 x - \cos x$	$:e$

حل a: د ځنځيري قاعدې په بنسټ او د توان يا طاقت يو فرمول په بنسټ لرو:

$$(\cos^2 2x)' = 2\cos(2x) \cdot \cos'(2x)$$
$$= 2\cos(2x)(-\sin(2x)).2$$
$$= -4\cos 2x \cdot \sin 2x$$

$$(\tan^4 x)' = 4\tan^3 x \cdot (\tan x)' \quad :b$$
$$= 4\tan^3 x \cdot \sec^2 x$$

$$(\sec x.\cot x)' = (\sec x)'\cot x + (\cot x)'\sec x \quad :c$$
$$= (\sec x.\tan x)\cot x + (-\csc^2 x)\sec x$$
$$= \sec x - \csc^2 x \cdot \sec x$$
$$= \sec x(1 - \csc^2 x)$$

$$[\sin(3x-1)]' = \cos(3x-1).(3x-1)' \quad :d$$
$$= \cos(3x-1) \cdot 3 = 3\cos(3x-1)$$

$$:e \quad [\sin^2 x - \cos x]' = (\sin^2 x)' - (\cos x)'$$
$$= 2\sin x(\sin x)' - (-\sin x)$$
$$= 2\sin x \cdot \cos x + \sin x$$
$$= \sin x(2\cos x + 1)$$

بيلګې:

1- د f(x) = sinx تابع لومړي څلور مشتقونه دې پيدا شي.

---

f'(x) = cosx ; f''(x) = -sinx ; f'''(x) = -cosx ; $f^{(4)}(x)$ = -(-sinx) = sinx

2- د (x) = x.sinx تابع مشتق پيداکړئ.
د ضرب قانون څخه کار واخلئ.
f'(x) = 1.sinx+xcosx=sinx+ x.cosx

3- د $f(x) = \sin\frac{1}{x}; x \neq 0$ تابع مشتق پيداکولو له پاره د ځنځير قونو ن څخه نار اخلو.

ږدو $z = \frac{1}{x^2}$ **او u(z) = sinz لا س ته راځي:** $f'(x) = -\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$

تمرينونه:

-- د لاندې توابعو لومړی مشتق و ټاکئ.

$a)\ f(x) = \sin 3x$ $\quad b)\ f(x)\sin x \cdot \cos x$ $\quad c)\ f(x) = \sin^2 x$

$d)\ f(x) = \tan x + 2\sin 2x$ $\quad e)\ f(x) = \sin x^2$ $\quad f)\ f(x) = \sin\frac{x-1}{x+1}$

-- د $f(x) = \sin^n x (n \in IN)$ تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښاياست يا وټاکئ.

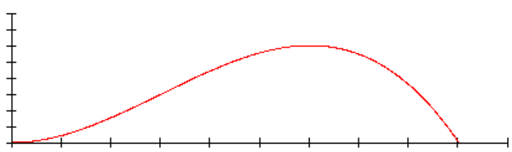
-- د تانجنت تابع لپاره د ساين او کوساين قانون په مرسته د مشتق قانون و ښاياست.

-- وښاياست چې د f(x) = tanx لپاره $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ هم باور لري.

-- د ویش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پیداکړئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

--- ولې د ساین تابع او د کوساین تابع په خوښه زیات مشتقوړ دي.

د مشتق استعمال په پیداښتي یا طبیعي علومو کې

په ریاضیاتو کې زیات وخت توابع راوړل کیږي، چې د یوې متحولې(اووښتونې) x په واک کې وي. په طبیعي پوهنو کې زیات وخت توابع څېړو، چې د وخت په واک کې وي. لکه په شکل کې د یوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کیږي)	

فعالیت:
ګران زده کوونکي دي د فزیک د درسونو له مخې د چټکتیا او بیړې تعریفونه ور کړې او د لار، وخت، چټکتیا او بیړې فرمولونه دي ولیکي.

بیلګه:
د یوه په برابرډوله بیره (تعجیل) غورځول شوي شي لپاره د پیل چټکتیا (لومړنی سرعت) $v_0=4\frac{m}{s}$ او $a=1,8\frac{m}{s^2}$ بیړې(تعجیل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

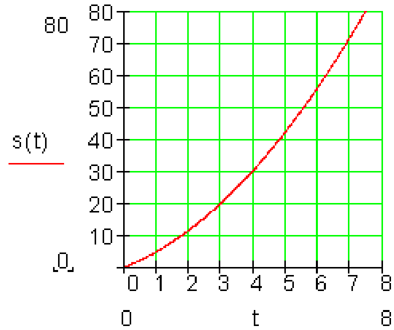
$$\boxed{s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t}$$

پورته ورکړشوي v_0 د ارزښت لپاره باور لري: $S(t) = 0,9t^2+4t$
(tپه s (ثانیه) ، s(t) په m (متر))
منځنی چټکتیا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ده)

لحظوی(سملاسي) چټکتیا په لاندې ډول ده:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$$

$$v = s'(t) = 1{,}8t + 4$$

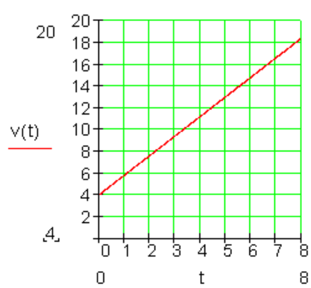


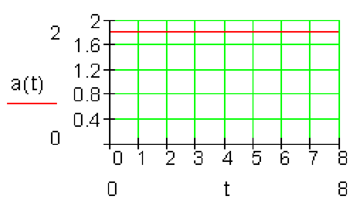
v-t - دیاګرام کې یوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتیا په برابر ډول زیاتیږي.

دا دلته ثابته جګېدنه $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ده او $a = 1.8\frac{m}{s^2}$ بیره(تعجیل) ده.

بیرې یا تعجیل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي:

$$v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$





پام : د یوه برابرډوله په بیره (تعجیلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

$$|\, s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \,| \qquad v(t) = s'(t) = at + v_0 \qquad a(t) = v'(t) = a$$

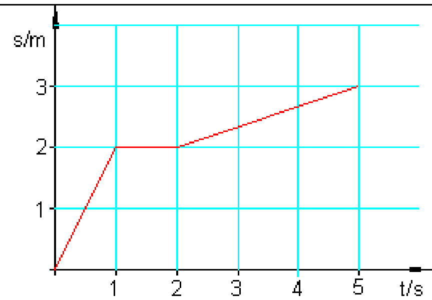
د یوې چټکتیا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره $v(t) = s'(t)$ لرو. د $s'(t)$ لپاره داسې $v(t) = s'(t)$ هم لیکو.

فعالیت:

1- د یوه خوزنده تن یا جسم د لار-وخت- دیاګرام ورکړ شوی.

الف: دا خوزښت تشریح کړئ.

ب : دې پوري اړونده د چټکتیا – وخت – دیا ګرام وکاږئ.



2- یوه تیره د پیل چټکتیا $v_0 = 7\frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\frac{m}{s^2}$ (را ټولي (؟؟کرديږ شوي)سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تیرې چټکتیا (سرعت) صفر دی؟

ب) خورا جګ د میل جګوالوشمیرئ

3- تابع د یوه خوزښت د لار-وخت- دیاګرام ښایي.

الف)د ورځني ژوند څخه یوه بېلګه ورکړئ، د هغي لپاره چي دا تلنه ښايي.

د منحني تلنه د $t > 3$ لپاره فزیکي څه مفهوم لري؟

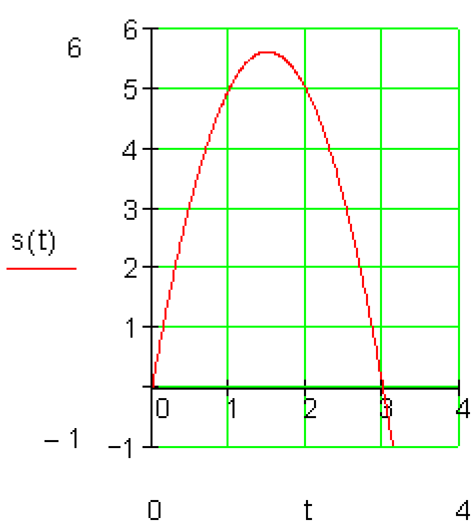
ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-دیاګرام په لاندي ډول دی.

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

a او v_0 وټاکئ.

پ) د اړونده بیړي – وخت-دیاګرم وکاږئ او دا تشریح کړئ.

یوه منفي چټکتیا (سرعت) څه معنا لري؟



4- یوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه کي داسي حرکت کوي ،چي د t وخت کي $s(t) = 5 \cdot t^2$ لار وهي.

په وختونو $t=1,2,3$ کې لحظوي چټکتیا(سرعت) وښایی.
حل: لحضوي جټکتیا د سملاسي تغیرارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

$$t=1: \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(1+\Delta x)-s(1)}{\Delta x}=10+5\Delta x$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $10+5\Delta x \to 10$

$$t=2: \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(2+\Delta x)-s(2)}{\Delta x}=20+\Delta x \Rightarrow 1$$

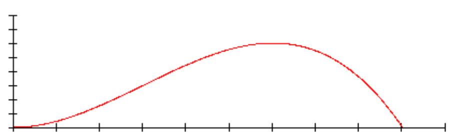
د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $20+5\Delta x \to 20$

$$t=3: \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(3+\Delta x)-s(3)}{\Delta x}=30+5\Delta x \Rightarrow 1$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري $20+5\Delta x \to 30$

تمرین:

د $f(x)=-\frac{1}{288}x^3+\frac{1}{16}x^2 \;;\; x>0$
لاندې تابع ګراف او په ورنزدې توګه د فوټبال میدان کې د توپ الوتنې منحني ښایي، چې لاندې څېره لري.



لاندې پوښتنې ځواب کړئ:
الف:توپ کوم خورا جګ(ماکسیمال) جګوالی لري او د وهلټکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟
ب : د توپ وهلټکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لرې بېرته ځمکې ته راځي؟
پ : د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهنې ځای څخه 9 متره لرې او 2 متره جګ دی. ایا توپ له دې څخه جګ الوزي؟
ت : توپ د تور(ګول) لاین(د x محور) څخه په 2 متره جګوالي الوزي. له ګول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوی دی؟

د جګو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسي مشتق له لارې لاس ته راځي. د $f'(x)$ بیا مشتق نیونې سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دویم مشتقتابع په نامه یادیږي.

بیلګه:

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x)3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \underline{\underline{f''(x) = 6x + 2}}$$

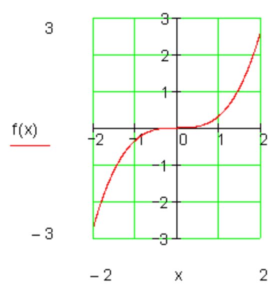
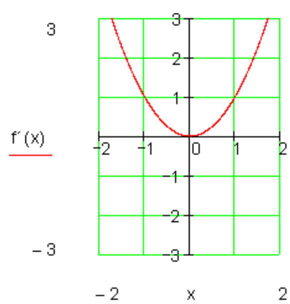
د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور.

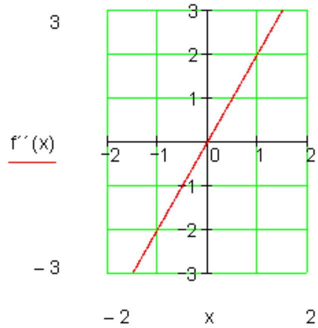
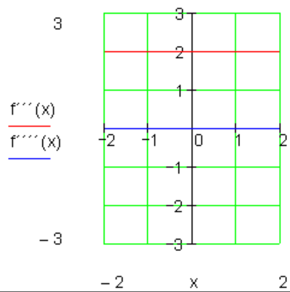
$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x)3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow \underline{\underline{f'''(x) = 6}}$$

د $f(x)\dfrac{x^3}{3}$ تابع دې 4 واره مشتق ونیول شي:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$

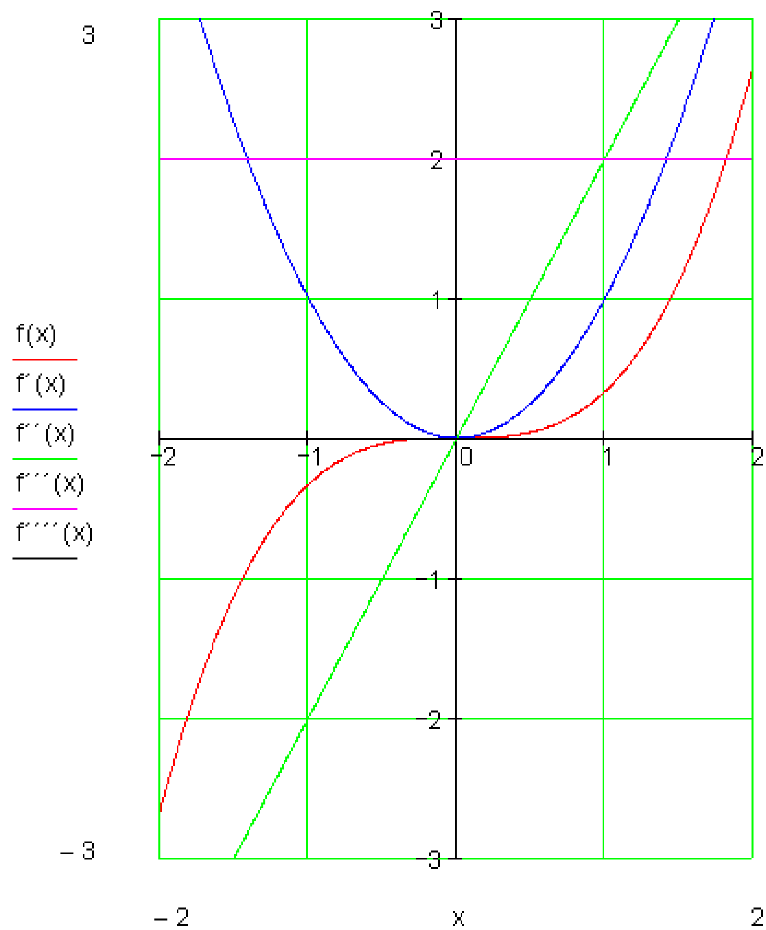
د تابع ګراف: د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

$f(x) = \dfrac{x^3}{3}$	
$f(x) = \dfrac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = x^2$	

 	$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$ $f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$

-- -----------

پورته تولو توابعو ګراف په یوه پروت ولاړ سیستم کې



بیلګې:

اول: د تابع $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$ مشت درپواره پیدا کړی

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$$
$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$$
$$f''(x) = 24x - 4$$
$$f'''(x) = 24$$

۱-۳ د جګو درجو مشتق

دویم: د تابع $f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$ **مشتق درپواره پیدا کړی**

$$f(x)=\frac{3}{4}x^3-12x^2+\frac{1}{4}x$$
$$f'(x)\frac{9}{4}x^2-24x+\frac{1}{4}$$
$$f''(x)=\frac{9}{2}x-24$$
$$f'''(x)=\frac{9}{2}$$

تولګه:

د $f(x)$ لومړی مشتق د $f(x)$ مشتق تابع $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$ ده :

د $f(x)$ دویم مشتق د $f'(x)$ مشتق تابع $f''(x)=\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د $f(x)$ دریم مشتق د $f''(x)$ مشتق تابع $f'''(x)=\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: یو په خوښه کسرۍي تابع $f(x)$ په خوښه د مشتق قابلیت لري.

تمرینونه:

د لاندې توابعو دریواره مشتق ونیسئ.

1− $f(x)=3x+4$

2− $f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3$

3− $f(x)=3x^3+2x^2+x+1$

4− $f(x)=(2x+1)^3$

5− $f(x)=x-x^4+3+x$

6− $f(x)=1-2x-3x-4x+x^4$

7− $f(x)=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$

8− $f(x)=4x^3-2x^2+5x-2$

د اکپوننشل توابعو مشتق

د تابع مساواتو جوړښت

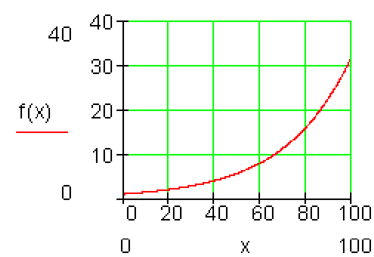
کولي باکتریا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوتې ویش (حجره ویش) له لارې زیاتیږي. و مساعدو شرایطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقیقو کې ځان تجزیه کوي. د غه عملییې لپاره یو ارزښت جدول :اړ، او ګراف یې کاږو. دلته د x اووښتوني (متغیره) په دقیقو د وخت لپاره ده.

د y متغیره د باکتریا ګانو د تعداد لپاره ده.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32

x = دقیقې

y = د باکتریا ګنون یا تعداد



فعالیت: د دې لپراه تابع ولیکئ

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y=b^x, (b>0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'=b^x \ln b$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad , f(x)=b^x$$

حل:

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{b^x-b^{x_0}}{x-x_0}$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{b^{x-x_0}-1}{x-x_0} \quad , x-x_0=h$$

-- --------------------

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

له پورته لرو $\begin{cases} b^h - 1 = k \\ h = \log_b (1 + k) \end{cases}$ او لا س ته تري راځي

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{k}{\log_b (1 + k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{1}{\frac{1}{k} \cdot \log_b (1 + k)}$$

د لوگاريتم قانون څخه لرو: $n \cdot \log x = \log x^n$ او لاس ته راځي

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{k}{\log_b (1 + k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b [\lim_{k \to 0} (1 + k)^{\frac{1}{k}}]} \quad , \lim_{k \to 0} (1 + k)^{\frac{1}{k}} = e$$

له پورته لاس ته راځي

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b e} \quad , \ \log_b e = \frac{1}{\ln b}$$

$$= b^{x_0} \cdot \ln b \ ; \quad x_0 \in IR \ ; b \in IR^{>0}$$

$$\Rightarrow f\ ' : f\ '(x) = b^x \cdot \ln b \ ; \ D\ '(f\ ) = IR \ ; b \in IR^{>0}$$

$$f\ '(x) = b^x \cdot \ln b$$

ضيه :

د $y = f\ (x) = e^x$ مشتق پيدا کړئ.

حل:

$$y = f(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

موږ دا لرلي په پام کې نيسو: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} . e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

موږ د تل کوچنيکيدونکي Δx ارزښت لپاره څیړو $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ موږ لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

زموږ د شمېرنې په بنسټ دا دا معنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که د x_0 په ځای x ځای په ځای کړو، نو لرو:

$f\,'(x) = e^x$ او $f(x) = e^x$

اکسپوننشل فنکشن $y = f(x) = e^x$ تیک $y' = f'(x) = e^x$ مشتق لري

یعني د e^x تابع د مشتق څخه بېرته د e^x تابع لاس ته راځي.

بیلګه:

لرو : $f(x) = b^{3x^2} - 10;\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}$

د پورته تابع مشتق ونیسئ.

$$D'(f) = D(f) = IR \quad \Rightarrow D(f') = IR$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= b^{3x^2-10} = g[h(x)] \\
g(z) &= b^z \ \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b}; z \in IR \\
h(z) &= 3x^2 - 10 \ \Rightarrow h'(x) = \underline{6x}; x \in IR \\
f'(x) &= g'(x) \cdot h'(x) \\
&= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \ \Rightarrow z = 3x^2 - 10 \\
&= b^{3x^2-10} \cdot \ln b \cdot 6x;\ x \in IR \\
&= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2}; D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}}}
\end{aligned}$$

تمرینونه:

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

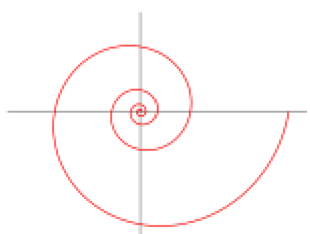
$a)\ f(x)=3\cdot e^{-2x+1}$ $b)\ f(x)=e^{x^2+2x-1}$ $c)\ f(x)=(x-1)\cdot e^{x}$

$d)\ f(x)=\sqrt{e^{x}}$ $e)\ f(x)=x^{n}\cdot e^{e}$ $f)\ f(x)=e^{kx}$

$g)\ f(x)=2^{\frac{1}{2x}}$ $h)\ f(x)=(\frac{1}{4})^{3x}$ $i)\ f(x)=x\cdot a^{\sqrt{x}}$

$k)\ f(x)=\sqrt{e^{x}+1}$ $l)\ f(x)=\frac{e^{x}}{1-e^{x}}$ $m)\ f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

د لوګاریتم مشتق



فعالیت:
- لوګاریتم تعریف
- اکسپوننت یا توان تعریف کړئ.
- د لوګاریتم او توان ترمنځ اړیکې وښایاست.

قضیه :
د لوګاریتم تابع مشتق:

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b\neq 0, x>0$ سره، مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'(x)=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x.\ln b}$

ثبوت: دا چې تابع $y=f(x)=\log_b x$ یواځې د $x>0$ لپاره پیژند لري یا تعریف دی. په هر ځاي کی چی $x>0$ وي، نودا لاندې باوري دی :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\log_b(x_0+h)-\log_b x_0}{h}=\frac{1}{h}\log_b\frac{x_0+h}{x_0}=\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}$$

د (لومړۍ برخې) له مخی دا لاس ته راځي:

$$\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right]^{\frac{1}{x_0}}\to e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\log_b e^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\log_b e$$

د لوګاریتم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پیژند سټ کی د مشتق قابلیت لري.

$f'(x)=\frac{1}{x}\log_b e$ همداسې $f'(x)=\frac{1}{x}.\frac{\ln e}{\ln b}$ داچې $\ln e = 1$ نو صدق کوي:

$f'(x)=\frac{1}{x.\ln b}$. خه چې د ښوولو وو.

په ځانګړي ډول دا لاندې باور لري:

$$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$$

بیلګه:

د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ مشتق وشمېرئ.

ښوونه: په لاندې توګه مخ تخ ځو:

$$f(x)=\log\sqrt{x^3}=\log_{10}x^{3/2}=\frac{3}{2}\log_{10}x$$
$$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 10}$$
$$=0.6514\cdot\frac{1}{x};\ D(f')=IR^{>0}$$

بیلگه:

د $y=\ln\frac{x-2}{x+2}$ تابع مشتق پیداکړئ

حل:

موږ لیکلاي شو :

$$y=\ln\frac{x-2}{x+2}$$
$$=\ln(x-2)-\ln(x+2)$$

دا چې $(\ln(x-2))'=\frac{1}{x-2}$ او $(\ln(x+2))'=\frac{1}{x+2}$ دی، نو لرو:

$$y'=(\ln(x-2))'-(\ln(x+2))'$$
$$=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{4}{x^2-4}$$

بیلگه:

لرو: $f(x)=\log_2(x)$

غواړو پیدا کړو: ۱. مشتق $f'(x)$
مشتق د $x_0=16$ په ځاي کې
حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو: $f'(x) = 1/(x\cdot\ln 2)$
اوس د $x_0=16$ په ځاي کې مشتق ټاکو:
$f'(x_0)= 1/(16\cdot\ln 2)= 1/(16\cdot 0.69)= \underline{0.09}$

تمرینونه:

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ یا پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\ln\sqrt{x}$ $\quad b)\ f(x)=\ln(x^2-4)$ $\quad c)\ f(x)=\ln\dfrac{2}{x^3}$

$d)\ f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x}$ $\quad e)\ f(x)=x\cdot\log_2 x^2$ $\quad f)\ f(x)=(x^4-1)\cdot\log$

$g)\ f(x)=\dfrac{\ln}{x+2}$ $\quad h)\ f(x)=\dfrac{x^4}{\ln x}$

د یوې تابع مشتقوړوالی یا - قابلیت

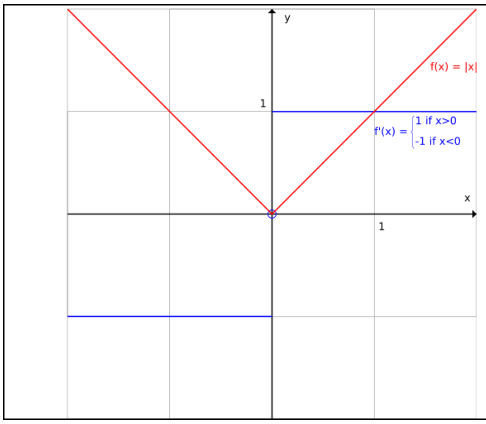
موږ ولیدل، چې یوه تابع په هر ځاي کې تعریف نه ده، په هر ځاي کې حد نه لري او همداسې په هرځاي کې متمادي نه ده. په همدې توګه یوه تابع هر چیرته د مشتق قابلیت هم نه لري.
تابع $f(x) = |x|$ په 0 ځای کې تعریف نه ده:
د ټولو $x>0$ له پاره باور لري $f(x) = x$

او له دې سره $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x-0}=1$

د تولو $x<0$ لپاره د پورته په برعکس $f(x)=-x$ باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

دا چې کيڼ- او ښی اړخيز حد يو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راوړل شوي ځای کې مشتقوړ نه ده.



د تابع مشتق کېدنه په نورو تولو ځايونو کې تر اوسه تل ورکړ شوي.

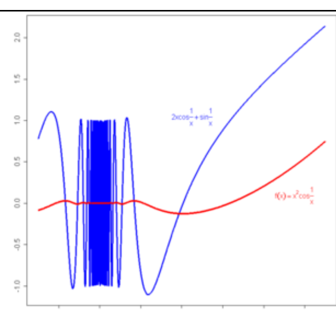
په صفر ځای کې سره له دې يو ښي اړخيز مستق ورکړ شوی، يعني لرو:

$$f'+(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=1$$

او يو کيڼ اړخيز مشتق هم:

$$f'-(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

که پورته ګراف ته وګورو، نو وبه پوهيږو، چي يوه مشتقوړ تابع بايد ګوډه نه وي يا په کوم ځای کې ماته نه وي يا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.



د يوه نه متمادي مشتقوړ تابع لپاره بېلګه:

يو تابع متمادي مشتقوړ بلل کيږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که يوه تابع هرچېرته مشتقوړ وي، بايد نه دی چي مشتق دې يې هم متمادي وي.

د بيلګې په توګه:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

تابع په هر ټکي کې حتي د $x=0$ سره مستقوړ دی. مشتق

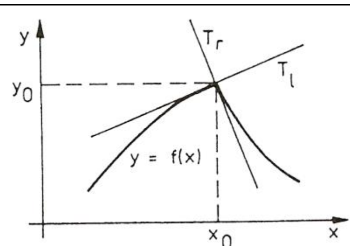
د لوګاريتم مشتق ١١٢

$$f'(x)=\begin{cases}2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

يې ددې په خلاف په 0 ځای کې متمادي نه دی
مشتق د ټاکلو نيونويا فرضيو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چې ليميټ (پولی) ته تګ ممکن وي يعني چيرته چې د تفاضل ويش يو ليميټ د $x\to 0$ لپاره ولري.

که کومه منحني چيرته راماته وي (ځبره 4)، ګورو چې هلته تانجنت نه شته او همدارنګه جګيدل او هم د تفاضل ويش نه شته. پس د مشتق قابليت د متماديت په ځير د يوې تابع ځانګړې خوي دی.

په پورته ځيره کی انځور شوې منحني د x_0 په ځاي کی يواځنی تانجنت هم ونه لري او له دې امله مشتق هم ونه لري، خو دلته يو کينې تانجنت T_1 يا کينې جګوالی لري اوپه دې ډول کينې مشتق لري او په همدې ډول يو ښی تنجت T_r او ښی جګوالی او په دي ډول ښی د تابع مشتق موجو د دی.



په يوه نامتمادي تابع کی د تانجنت يا مشتق پوښتنه بی معناده.
دا دلته انځور شوی پرابلم يا مسأله اوس د شميرنې د ټيك فرمول لاندې راوړو.
وليدل شو چې په يوه ځای x_0 کی چی تابع متمادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نيسو چی دا دې ښوول شوی وی. دا ځرګنده ده چی هره متمادي تابع بايد ضرور مشتقوړنه وي. د بيلګې په توګه که تابع زاويه يا کونج ولري.

دې ته اړتيا ده چی وښايو، چی يواځې متمادي توابع د مشتق قابليت لري، دا بيا دا معنا لري چی هره تابع چې د مشتقوړ وي بايد لږ تر لګه متمادي وي او په دې ډول مشتق متماديت په بر کی لري يا خوندي لري، په دې معنا چی متماديت د مشتقوړوالی لپاره اړيين يا ضروري شرطونه دي

جمله:

که د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي ده.

ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی حد شته دی.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

لیمیټ یواځی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د $x \to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانی $f(x) - f(x_0) -> 0$ لاړ شي.

نو باور لري: $f(x) -> f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.

دا د متمادیت پیژند دی.

دا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:

دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یواځی په ځای (lokal) پورې اړ خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دی. لکه څنګه چی په متمادیت کی(لومړي څېرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف:

د $y = (x)$ یوه تابع په واز اینتروال (a, b) کې، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کیږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) \ ; \ a < x < b$$

که داد $x = x_0 \in (a, b)$ په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره. دا په بند اینتروال $[a, b]$ کې مشتق وړ بلل کیږي، که دا سربېره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلګه ۲ ، ۶:

د توان تابع $y = x^n$, $n = 1, 2, 3, ...$ په هرځاي کی د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

د ساین تابع $y = \sin x$ او کوساین تابع $y = \cos x$ په هرځاي کی مشتقوږده، د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

په یوه واز انتروال کی $y = f(x)$ مشتقوږ تابع مشتق بیرته $y' = f'(x)$ تابع ده ، نو په دې ډول یې د مشتق قابلیت اود متمادیت قابلیت پوښتنه کیدی شي.

تعریف (پیژند) ۲. ۴:

په یو د $x = x_0$ چاپیریال کې د مشتق قابل تابع (رابیلیدوږ بلواك) $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې دوه واره د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوږ دی)، که د هغې اشتقاق(رابیلیدنه) $y' = f'(x)$ هلته د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوږ وي). سرِی د $f'(x)$ مشتق د تابع(رابیلیدنه د بلواك) $y = f(x)$ دویمه رابیلیدنه بولي او لیکي:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0} = f''(x_0) = \left(\frac{df'(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

یو په یوه واز اینتروال کي مشتق کېدونکي تابع $y = f(x)$ هلته دوه واره مشتقوږ بلل کیږي، که د هغه مشتق $y' = f'(x)$ په دې اینتروال کې مشتق وړ وي. ␟ ددې لپاره لیکل کیږي:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$$

تمرین:

وښایئ چې ایا دا توابع $y = c \,;\; y = x^n \;;\; y = \cos x$ هر چیرته دوه واره مشتقوږ دي؟

د معکوس تابع مشتق

فعالیتونه:

د یوې تابع معکوس تابع تعریف کړئ.

د $f(x) = \frac{x^2+5x}{x^3-8}$ تابع د تعریفساحه وښایاست.

د پورته تابع د مشتق مشتق وشمیرئ.

اوس دې معکوسه تابع تر څیړنې لاندې ونیول شي . دلته دې ونیول شي،چې $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې د $f(x) = 0$ سره او په یوه د x_0 چاپیریال کې جګېدونکې دی $f'(x_0) > 0$ او یا په کلکه لوېدونکې $f'(x_0 < 0$ او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعني $x = f^{-1}(y)$ ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې $x -> x_0$ او $f(x)$ د متمادیت له امله هم $y -> y_0$ او باورلري.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}}$$

که د لاندې ټکي ځای $x = x_0$ لپاره ساده بیرته x ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د $y = f(x)$ لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

۱۱۶ د لوګاریتم مشتق

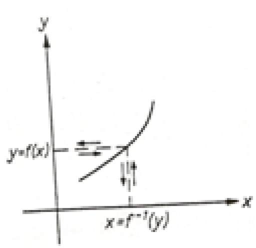
د پورته ورکړ شوو نیونوسره سرۍ بیرته یو د تفاضل ویش لاس ته راوړي چې د هغه سره د مروج ویش په څیر شمیرنه کیدی شي، لکه

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

جمله ۲ . ۷: د معکوس تابع مشتق : که y = f(x) د x په یوه چاپیریال کې د $x=f^{-1}(y)$ سره معکوس او همله د f' (x) |= 0 سره مشتقوړ وي، نو معکوس تابع د y = f (x) سره مشتقوړ دی او باوري $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

حل: کیدی چې د f تابع د مشتق څخه د f^{-1} معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له x ->0 او هم y->0 او معکوس څخه، د y = f(x+ x)-f(x) سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

$f'(x)=\frac{dy}{dx}$ او $(f-1)'(y)=\frac{dx}{dy}$ سره. بالاخره لرو: $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$	

تمرینونه: د $y=f(x)=x^n; n=1,2,3,4......$ تابع لپاره که $x\ge 0$ وټاکل شي او په دې $x=\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}}; y\ge 0$ توګه یې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

-- د $y = x^{\frac{m}{n}}, m,n\in N$ تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

د ایمپلیڅیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د f(x) تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیڅیتExplicit ډول، که تابع متحوله د برابرون په یوه اړخ ځانله شوې وي:

د بیلګې په توګه $Y = 3x^2+7x$

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې دی، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیځیت Implicit دول د بیلګې په توګه $Ex^2+7x+y=0$

فعالیت:

که $Ex^2+7x+y=0$ولرو، څنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟

قضیه:

یوه تابع په ایمپلیڅیته بڼه $x^2+xy-y^2 = 1$ لرو، غواړو $\frac{dy}{dx}$ پیدا کړو.:

ښوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2+xy-y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+(1\cdot y+x\frac{dy}{dx})-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}(2y-x)$$

$$\frac{2x+y}{2y-x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{-x+2y}\quad\vee\quad\frac{2x+y}{2y-x}$$

ایمپلیڅیټ مشتق د یوې تابع مشتقنیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیڅیت یعنې د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیڅیت یعنې د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي. دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیڅیت ډول ورکړ شوې وي، خو د دې مشتقنیول ستونځمن وي.

بیلګه :

د $f(x) = x^x$ تابع مشتق په ورسره بلدو مشتققوانینو نه شي نیول کیدی، ځکه چی په بنسټ او جګ االکسپوننت کي یي متحولي پرتي دي. د لوګاریتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منحه وړل کیدی شي:

$$\ln f(x) = x \ln x$$

اوس ایمپلځیت دا حل کوو، داسي چي دواړو لورو ته يي د x پسي مشتق نیسو:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln f(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

د دي مساوات مشتق د ځنځیرقانون له لارې صورت نیسي:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}y} f'(x) = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

دلته $y = f(x)$. دی. د لوګاریتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y} f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x}$$

که په $f'(x)$ پسي حل شي او د y له پاره بېرته $f(x) = x^x$ ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x) = y(\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

تمرینونه:

- د r وړانګي سره د د ایرې مساوات $x^2 + y^2 = r^2$ سره. دایمپلیخیټ مشتق له لارې يي مشتق ونیسئ.

-- د $E: \; x^2 + 3y^2 = 7$ سره ورګړ شوي الیپسې مشتق دې ونیول شي.

د بنستیزو مشتقونو جدول

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3 \ldots\ldots$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	x تول عدد او $x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \quad x > 0$
5	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3 \ldots\ldots x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \; a \; reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \; a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \; a \neq 1, \; x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	

13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$
14	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$x \neq k\pi,\ k\ \ k \in z\ (Z)$

د پورته جدول په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوبنه د هرې شننیزې یا سپړنیزې(تحلیلي) وییني یا افادي مشتق په شننیزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم باید سړی همغه نیونی په نظر کي ونیسي.

د فصل تولګه

کمبنتویش Differenzenquotient (د سیکانت جګیدنه) یا منځنی تغیر ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(fx_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق Differetialquotient (د تانجنت چګوالی یا لحضوي تغیر ارزښت)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتي قانون

$$f(x) = c \cdot u(x) mit\ c = constant$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

د جمعي قانون

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow\ f'(x) = u'(x) + v(x)$$

$$\boxed{f' = u' + v'}$$

د ضرب قانو

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$
$$\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

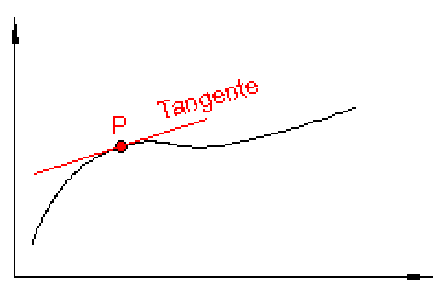
د وېش قانون

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{[v(x)]^2}$$
$$\boxed{f = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

د ځنځير قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$
$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \quad \cdot \quad z'(x)$$

(تعريف): د يوه تابع ګراف ميل (جګوالی) په يوه ټکي P کې په همغه ټکي کې د تانجنت د ميل يا جګوالي ګراف سره برابر دی



د کمبنت ويش يا د تفاضل ويش Difference quotient

د يوي کرښي جګښدنه بي له مشتق نيوني ټاکلکېدی شي:

کرښه $y=f(x) = mx+a$ لرو

د دې کرښي د جګېدني فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د څېرکي تمرينونه:

(۱) کمښتويش (د تفاضل وېش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a) P(3,2) , Q(5,4)　　b) P(2,4) , Q(3,1)

(۲) د $x = x_0$ په ځاي کې د f تابع د تانجنت جګوالی وټاکئ.

$a)\ f(x) = x^2\ ,\ x_0 = 2$　　$b)\ f(x) = 0.5x^2\ ,\ x_0 = 3$

(۳) د کمښتويش(د تفاضل ويش) او مشتق لاندې څه پوهيږو او د دوي ترړنځ فوپير څه دی؟

(٤) د يوه تابع د سکانت(　) لاندې څه پوهيږو او د تانجنت جګېدو لاندې څه پوهيږو؟ او دوي ترمنځ کومې اړيکې پرتې دي؟

(٥) د تابع مشتق د توان قانون له مخې پيداکړئ.

$a)\ f(x) = x^5$　　$b)\ f(x) = x^6$

$c)\ f(x) = \frac{1}{x^2}$　　$d)\ f(x) = \frac{1}{x^5}$

$e)\ f(x) = \sqrt{x}$　　$f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

$g)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$　　$h)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(٦) د تابع مشتق د ثابت د قانون له مخې پيداکړئ.

$a)\ f(x)=0.2x^5-3$ $\quad b)\ f(x)2x^4+1$

$c)\ f(x)=\dfrac{4}{x^2}$ $\quad d)\ f(x)=\dfrac{3}{x^3}+2$

$e)\ f(x)=6\sqrt{x}$ $\quad f)\ f(x)\dfrac{8}{\sqrt{x}}-5$

(٧) د تابع د ګراف په مرسته وښايئ، چې ټول g(x) + c ترمونه همغه مشتق لري.

ياودونه: پابت عدد كه هركوم ارزښت ونيسي.

(٨) وښايئ، چې د a.g(x) د مشتق سره د a ضريب (ځله ونى) ساتلى پاتې کيږي.

(٩) د f تابع مشتق د جمعې قانون سره وښايئ

$a)\ f(x)=4x^4-3x^3+x^2-x-1$ $\quad b)\ f(x)=x-\sqrt{x}$

$c)\ f(x)=\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{x^3}$ $\quad d)\ f(x)=3x^2+0.4x-5$

(١٠)د f تابع مشتق د ضرب قانون سره وټاکئ.

$a)\ f(x)=x^3(x^2-2x+1)$ $\quad b)\ f(x)=(2x^2+1)(x-1)$

$c)\ f(x)=(x^2-5)(2x^3+x^2+x)$ $\quad d)\ f(x)=(4x^2-x+4)(3x+2)$

(١١) د f تابع مشتق د ويش قانون له مخې وټاکئ.

$a)\ f(x)=\dfrac{x^3-1}{4-x^2}$ $\quad b)\ f(x)=\dfrac{2x^2+x+3}{x+1}$

$c)\ f(x)=\dfrac{4-x-x^3}{2x^2+3}$ $\quad d)\ f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}$

(١٢) د وېش قانون له مخې په ځنډ ارزښت(پرعکس ارزښت) وټاکئ.

(۱۲ الف) د لاندې تابع مشتق وشمېرئ.

$$f(x)=\frac{1}{g(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{-g'(x)}{g(x)\cdot g(x)}$$

د $g(x)\neq 0$ سره

(۱۳) د f تابع ارزښت د زنځير قانون له مخې وټاکئ.

$a)\ f(x)=(4x^4-x)^2$ $\quad b)\ f(x)=(3x^2+4x-5)^2$

$c)\ f(x)=(2x-7)^3$ $\quad d)\ f(x)=(5-3x^3)^4$

(۱٤) د لاندې توابعو مشتق وټاکئ.

$a)\ f(x)=\dfrac{1}{(2x^2+x)^3}$ $\quad b)\ f(x)=\dfrac{1}{(x-5)^4}$

$c)\ f(x)=(1+\sqrt{x})^2$ $\quad d)\ f(x)=\sqrt{1-x^3}$

(۱٥) د لاندې توابعو درې واره مشتق ونيسئ.

$a)\ f(x)=x^3-2x^2+1$ $\quad b)\ f(x)2x^4+3x^3-x^2+x-5$

$c)\ f(x)\dfrac{3x-4}{x}$ $\quad d)\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{2-x}$

(۱٦) د يو n-م درجې تابع بايد څو واره مشتق ونيول شي چې يوه ثابته ترې لاس ته راشي.

(۱۷) د لاندې توابعو لومړی مشتق و ټاکئ.

$a)\ f(x)=\sin 3x$ $\quad b)\ f(x)\sin x\cdot\cos x$ $\quad c)\ f(x)=\sin^2 x$

$d)\ f(x)=\tan x+2\sin 2x$ $\quad e)\ f(x)=\sin x^2$ $\quad f)\ f(x)=\sin\dfrac{x-1}{x+1}$

(۱۸) د $f(x)=\sin^n x (n\in IN)$ تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښاياست يا وټاکئ.

(۱۹) د تانجنت تابع لپاره د ساين او کوساين قانون په مرسته د مشتق قانون و ښاياست.

(۲۰) وښاياست چې د f(x) = tanx لپاره $f'(x)=1+\tan^2(x)$ هم باور لري.

(۲۱) د ويش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پيداکړئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

(۲۲) ولې د ساين تابع او د کوساين تابع په خوښه زيات مشتقوړ دي.

(۲۳) د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

$a)\ f(x)=3\cdot e^{-2x+1}$ $\quad b)\ f(x)=e^{x^2+2x-1}$ $\quad c)\ f(x)=(x-1)\cdot e^x$

$d)\ f(x)=\sqrt{e^x}$ $\quad e)\ f(x)=x^n\cdot e^e$ $\quad f)\ f(x)=e^{kx}$

$g)\ f(x)=2^{\frac{1}{2x}}$ $\quad h)\ f(x)=(\frac{1}{4})^{3x}$ $\quad i)\ f(x)=x\cdot a^{\sqrt{x}}$

$k)\ f(x)=\sqrt{e^x+1}$ $\quad l)\ f(x)=\frac{e^x}{1-e^x}$ $\quad m)\ f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(۲٤)د $f(x)=(x^2+2)\cdot \lg x \quad (x>0).$ مشتق دې پيدا شي.

مشتق يې وټاکئ يا پيدا کړئ.

$a)\ f(x)=\ln\sqrt{x}$ $\quad b)\ f(x)=\ln(x^2-4)$ $\quad c)\ f(x)=\ln\frac{2}{x^3}$

$d)\ f(x)=\ln\frac{x+1}{x}$ $\quad e)\ f(x)=x\cdot\log_2 x^2$ $\quad f)\ f(x)=(x^4-1)\cdot\log$

$g)\ f(x)=\frac{\ln}{x+2}$ $\quad h)\ f(x)=\frac{x^4}{\ln x}$

(۳۵) د لاندې توابعو لپاره خورا لويه تعريف ورشو(ساحه) ورکړئ او لومړی مشتق يې وټاکئ.

د تعریف سټ(ډېرى) هغه ورشو(ساحه) ورکړئ، په کومه کې چې توابع مشتقوړ دي.

$a)\ f(x)=\sqrt{x+3}$ $b)\ f(x)=\sqrt{(x-2)(x-4)}$

$c)\ f(x)=x\sqrt{x}$ $d)\ f(x)=\sqrt{x^2+2}$

(۳٦) ولې باید د ټیک شمېرنې لپاره لوګاریتمي توابعو ته همداسې سوچ وشي، لکه رېښه توابعو ته ؟

(۳۷) ۹۰ ـمه پوښتنه د لوګاریتمي توابعو لپاره ځواب کړئ.

$a)\ f(x)=\ln(x^4-1)$ $b)\ f(x)=\ln(2x+4)$

(۳۸) ـ د لاندې توابعو لومړى مشتق پیداکړئ.

$a)\ f(x)=\frac{2}{5}x^{10}-\frac{1}{5}x^5$ $b)\ f(x)=3x^4-4x^3+11x^2-7x+8$

$c)\ f(x)=5x^8-3x^6+\frac{10}{x^3}-\frac{8}{x^7}$ $d)\ f(x)(2x-5)(x^2+11x-3)$

$e)\ f(x)\cos x-2x\sin x$ $f)\ f(x)=\sin^3 x$

$g)\ f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$ $h)\ f(x)=(x^2-2x+2)\cdot e^x$

$i)\ f(x)=\frac{3e^x+1}{2e^x-1}$ $j)\ f(x)=\frac{2e^x(x^2-3)}{x}$

$k)\ f(x)=\frac{1}{x^2}\ln x^2$ $l)\ f(x)=\frac{x\cdot\ln x}{1-x}$

$m)\ f(x)=\frac{\sin x}{\ln x}$ $n)\ f(x)=3x^2\cdot\lg x$

$o)\ f(x)=\ln(\sin)\ x$ $p)\ f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}$

$q)\ f(x)=\sqrt[n]{ax+b}$ $r)\ f(x)=(x^2+3)e^{-2x}$

(۳۹) - لومړی مشتق وټاکئ

$a)\quad f(x)=\sin^{n}$ $\qquad b)\quad f(x)=(\ln x)^{n}$

$c)\quad f(x)=s+\frac{1}{x}$ $\qquad d)\quad f(x)=(1+\frac{1}{x})^{n}$

(٤٠)– د هرې تابع لومړي درې مشتقونه وټاکئ

$a)\quad f(x)=e^{x^2}$ $\qquad b)\quad f(x)=\sin x\cdot\cos x$

$c)\quad f(x)=x+\frac{1}{x}$ $\qquad d)\quad f(x)=x^2\cdot e^{x}$

(٤١)– په کوم تابع کې لومړی مشتق f د f سره برابر دی.

(٤٢)–

الف: د کو fتابع لپاره $f'(x)=2f(x)$ دی؟

ب: د کو fتابع لپاره $f'(x)=-f(x)$ دی؟

(٤٣)- د f(x)=sinx څوم مشتق د f سره سر خوري یا برابر دی؟

(٤٤)– د لاندې توابعو لپاره -م مشتق ته وده ورکړئ.

$a)\quad f(x)=e^{ax}$ $\qquad b)\quad f(x)=\ln(x+1)$

د رول قضیه (Theorem of Rolle)

که د f یوه تابع په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي او k د a او b ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عدد c د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ شته، داسې چې $f(c)=k$ دی.

فعالیت:

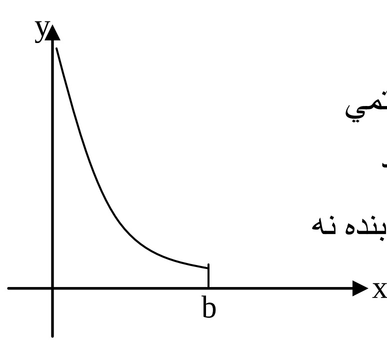
_ که f تابع په یوه بند اینتروال $[1,3]$ کې ثابته وي، دا به د یوې تابع لپاره څه معنا ولري، چې تابع څنګه ځغلي. ایا دا تابع به جګ ټکي یا ټیټ ټکي ولري او که څنګه؟ دا روښانه کړئ او د انتروال په خوښه درې منځ ټکو کې ارزښتونه یو له بل سره پرتله کړئ.

_ وښایاست، چې د $f(x)=-x$ تابع په $[-1,1]$ انترول کې جګ او ټیټ ټکي چیرته لري او د یو او منفي یو تر منځ د درې x ارزښتونو لپاره په ګراف د f ارزښتونه وښایاست او وښایاست، چې یو له بل توپیر لري او که نه؟

_ د رسم له لارې وښایاست، چې x^2 کوم جګ یا ټیټ ټکی لري او که څنګه او که لري یې چیرته؟

دوایرشتراس قضیه Theorem of Weierstrass

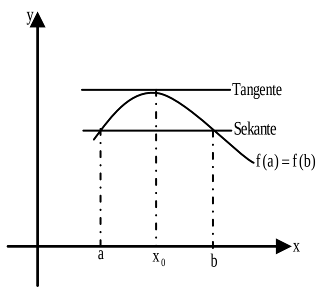
که د f یوه تابع په بند اینتراوال $[a,b]$ کې متمادي وي، نو f په دې‌اینتراوال کی لږ تر لږه یو جګ ارزښت(اعظمي قیمت) او یو ټیټ ارزښت(اصغري قیمت) نیسی
دلته شننیز یا تحلیلي ځواب نه ورکول کیږي، دا وینا د لیدلو له مخې معقوله بریښي.
کیدی شي چی یو همغږیز (monoton مونوتون یا جګټیټ) ارزښت د اینتروال په غاړه هم پروت وي.
د اینتروال محدودوالی (بندوالی) بی قید او شرطه حتمي دی. د بیلګي په توګه د $y=f(x)=\frac{1}{x}$ تابع په نیم بند اینتروال $(0,b]$ کې متمادي ده، مګر پورته لور ته بنده نه ده، چی په دې توګه خورا جګ ټکی نه لري



د مشتق منځ ارزښت قضيي

د تانجنت او قاطع ترمنځ او په همدې ډول د مشتق – اوتفاضل ویش ترمنځ داسې نږدې اړیکي شتون لري، هغه چې د انالیوزې په منځ ارزښت قضیو کی تشریح کیږي.
د تابع او انحرافي ارزښتونوخویونو څخه لومړی پسی تړلې لاندې د رول قضیه لاس ته راځي

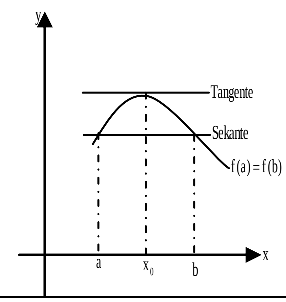
د رول(Rolle) قضیه:
یوه د f تابع دې په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز ایتروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه یوځاي $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.



حل:

1. که f ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$
2. که f ثابت نه وي، نو د وایرشتراس د قضی له مخی لږ تر لږه د تابع یوخورا لوي او یوخورا کوچنی ارزښت موجود دی. دا ارزښتونه توپیر لري، ځکه چی f ثابت نه دی. نو له دی کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د $f(a)=f(b)$ سره نامساوي دی . په دې اساس د اینتروال په دننه کی یو مونوتون (جګټیټ) ځای x_0 موجود دی. د مشتقوړ توابعو مونوتوني (جګټیټ ارزښت) شتون د اړیین یا ضروري شرطونوقضي له مخی لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$

تر اوسه مو وښوول، چی د لازمو شرایطو لاندې یوې افقي قاطع ته یو افقي تانجنت هم شته دی.
دا هندسي پرابلم کیدی شي چی عمومي شي.
پوښتنه رامنځ ته کیږي، چی ایا یوې مایئلی قاطع ته په همغه ډول تانجنت د همغه میل (جګوالي) سره جوړیدلی شي؟
ځواب یی لاندې قضیه راکوي.

	د مشتق منځ ارزښت (وسطي قيمت) قضيه: که $y=(x)$ تابع په بند اينتروال $[a,b]$ کې متمادي او په واز اينتروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته يوځاي $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې لرو: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$

حل: دا پرابلم په يوه مرستندوې تابع داسی تعريفيږي، چې د رول قضيه وکارول شي. د دې لپاره د قاطع مساوات رامنځ ته کوو: $y=g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$

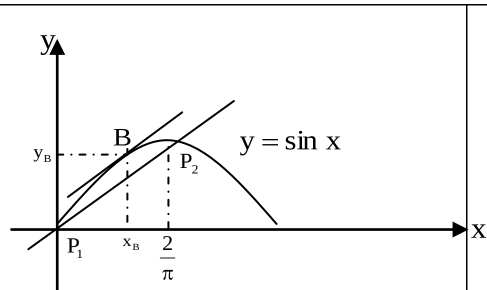
د مرستندوې تابع په څير د مشتق تابع جوړيږي:

$$h:\ h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

نو باور لري: $h(a)=h(b)=0$ برسيره پر دې h په (a,b)کې د مشتق وړوالی لري او په $[a,b]$ کې متمادي دی. له دې سره د رول د قضيې وړاند نيونه(فرضيه) ورکړ شوې، دا په دې معنا چې يو ځاي $x\in(a,b)$ شته دی د $h'(x)=0$ سره، چې له هغې لرو:

$$h'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0, \text{ يعني } f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بيلګې نوره هم روښانه کيږي.

	بيلګه: د $f(x)=\sin x$ يوه تابع دې داسې ورکړشوي وي،چې په يوه ټکي $B(X_B,Y_B)$ کې تانجنت د منحني مماس وي، هغه چه په $P_1(0,0)$ او $P_2(\frac{\pi}{2},1)$ ټکو کی همغه ميل ياجګوالی لري لکه قاطع.

ځواب: د قاطع (غوځي) میل یاجگوالی: $m = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \dfrac{2}{\pi}$

د منحني میل د $B(x_B : y_B)$ په ټکی کې $f'(x_B) = \cos x_B = \dfrac{2}{\pi}$

له دې ځخه لاس ته راځي: $x_B = \arccos\dfrac{2}{\pi} = 0{,}88\iota$ او $f(x_B) = f(0{,}88) = 0{,}77$

لمس ټکی: $B(0{,}88 : 0{,}77)$

د تانجنت مساوات: $y = \dfrac{2}{\pi}(x - 0{,}88) + 0{,}77$

د منځ قضی د عمومیت ځخه لاس ته راځي:

پراخه شوې د منځ ارزښت قضیه:
که $u = f(x)$ او $v = g(f)$ په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال (a,b) کې مشتقوړاو $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځای $x_0 \in (a,b)$ وجودلري چی لاس ته ترې راځي:
$\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

حل: د $g'(x) \neq 0$ له امله g معکوس کېدونکی ده او $v = g(x)$ مساوات د x په لور معکوس کیدنه ورکوي، یعنې: $x = g^{-1}(v)$

که د f په تابع کی هم نوې متحوله ځاي پر ځاي شي، نو یوه زنځیري تابع لاس ته ترې راځي:

$$u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

د زنځیري قاعدې له مخې یی دا مشتق لاس ته راځي:

که په $u = h(x)$ تابع د $v_1 = g(a)$ او $v_2 = g(b)$

سره د وسطي قیمت قضیه استعمال شي، نو د $v_0 \in (v_1;v_2)$ ځای په لاندې ډول موجود دی:

$$\frac{h(v_2)-h(v_1)}{v_2-v_1}=h'(v_0)$$

له دې ځخه د $h(v)=f(x),v=g(x)$ او $x_0=g^{-1}(v_0)$سره لاس ته راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

تمرینونه:

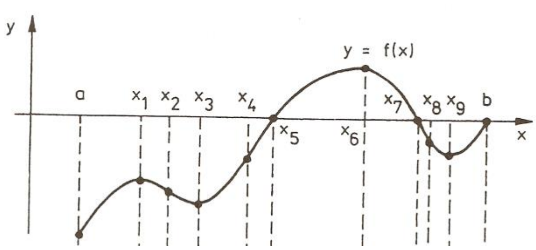
لاندې توابع دوه صفرځایونه لري. هغه بحراني ارزښتونه پیدا کړئ، چې د دواړو صفرځایونو تر منځ پراته وي.

$a)\ f(x)=x^4-5x^3+7x-5x+6$

$b)\ f(x)=x^4+x^3+2x^2+2x$

همغږیزې توابع(Monotony (یوناني: یوغږیز، برابرډوله)

جګېدونکې(متزاید)، ټیټېدونکې(متناقص) توابع(جګ-ټیټېدونکې توابع)



فعالیتونه

- په پورته ځېره کې ټول هغه ځایونه وښایاست، چې هلته تابع جګېږي.
- په پورته ځېره کې ټول ځایونه وښایاست، چې هلته تابع ټیټېږي.
- په پورته ځېره کې ټول هغه ځایونه په نخښه کړئ، چې هلته د تانجنت میل افقي وي.

که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره د f یوه تابع په یوه اینټروال کې
$(f(x_1) \ge f(x_2))\, f(x_1) \le f(x_2)$ وي، نوتابع په دې اینټروال کې مونوټون جګیدونکې
(- ټیټیدونکې) بلل کیږي،که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري،نو دا
$(f(x_1) > f(x_2))\, f(x_1) < f(x_2)$ کره یا په زغرده همغږیزجګیدونکې (همغږیز
ټیټیدونکې) بلل کیږي.

لاندې قواعد، چې له همغږیزوالي څخه په لاس راځي، د همغږیزوالي حالت لپاره ګټور دي.

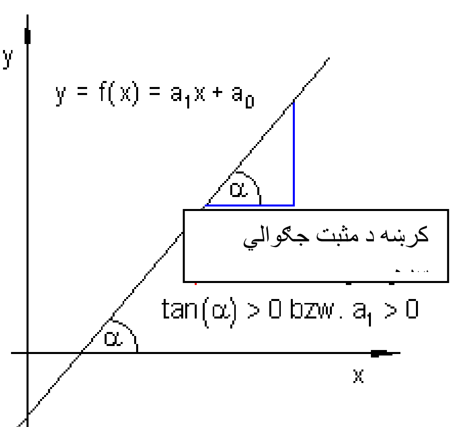
د f یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې همغږیزجګیدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \ \wedge\ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

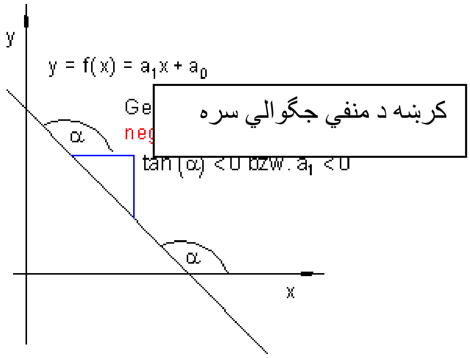
د f یو تابع ټیک هلته په D کې همغږیزټیټېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

یوغږیزوالی (یونواخت والی) Monotony جګټیټوالی، د جکټیټوالی جملې
دا $f(x) = a_1 x + a_0$ کرښیز(خطي) تابع
خورا ساده تابع ده، چې انحنا نه لري. ددې لپاره مسئول یې ثابته جګېدنه یا ثابت میل ی، $a_1 = \tan(\alpha)$ چېرته چې α د کرښې او مثبت لوریز د $x-$محور ترمنځ زاویه(کونج) ده.
په مخامخ شکل کې: کرښه د مثبت میل سره
$a_1 > 0 \Leftrightarrow \tan\alpha > 0$

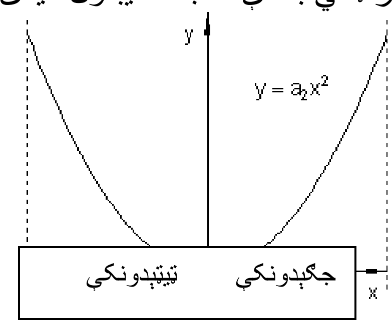


که $0 < \alpha < 90^\circ$ یا $0 < a_1 < \infty$ وي، دا په دې مانا چې $\alpha > 0 \vee a_1 > 0$ همداسې($\Leftrightarrow$)، نو کرښه جګېږي. دا معنی لري، چې د جګېدونکي x سره د تابع $f(x)$ ارزښت هم جګېږي.
په مخامخ شکل کې: کرښه د منفي جګېدنې سره: $\tan\alpha < 0$ همداسې $(\Leftrightarrow) a_1 < 0$



داپورته داسې دی: $tan\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$

که $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ یا $-\infty < a_1 < 0$ وي، دا په دې معنی، چې $\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$، نو کرښه ټیټېږي یا لوېږي. دا په دې معنی، چې د جګېدونکي x سره د تابع ارزښت $f(x)$ کوچنی کیږي.
په پورته دواړو حالتونو کې د همغږیزې تابع (یا د جګ-ټیټېدونکي تابع) غږیږو او له یوه همغږیزجګیدونکې تابع څخه، که $a_1 > 0$ وي. له یوې مونوتون ټیټیدونکې تابع څخه، که $a_1 < 0$ وي.
دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کیږي، چې د منحنیو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټولیزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي باندې تانجنت اینول کیدی شي.



له دې امله د تابع $f(x) = a_2x^2$ لپاره باور لري:
په اننتروال $|_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_R$ کې تابع $f(x)$ مونوتون ټیټیږي. او $f(x)$ په اینتروال $|_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_R$ کې مونوتون جګیږي.

لکه د کرښې په ګراف کې، چې جګیدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعني جګیدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحنې له یوه ټکې څخه بل ټکې ته تغیر خوري.
د تانجنت جګیدنه $> 0 \rightarrow$ منحني مونوتون جګیږي. د تانجنت جګیدنه$< 0 \rightarrow$ منحني مونوتون ټیټیږي
د تانجنت جګیدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کیږي.

روښانه ده چي د $f(x)$ تابع لومړی مشتق $f'(x)$ د تابع ميل (جګوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتونی قضيه په لاندې ډول فرمولوو.

قضيه:

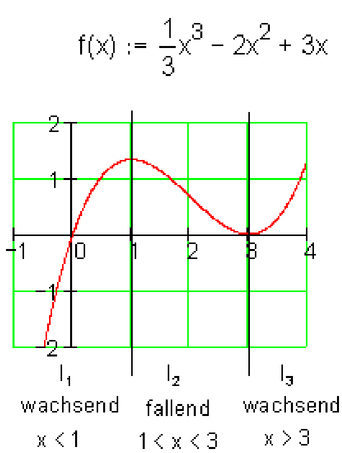
د $f(x)$ تابع دې په انتروال Iکې مشتقوړ وي.

1. که د $f(x)$ تابع په اينتروال Iکې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in 1$ لپاره

- که $f(x)$ په اينتروال کې همغږيزټيټېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in 1$ لپاره.
- که $f'(x) \geq 0$ وي، دټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال I کې همغږيز جګېدونکې ده.
- که $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په ايتروالIکې همغږيز ټيټېدونکې ده.
- که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال I کې په کلکه همغږيزجګيدونکې ده.
- که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اينتروال Iکې په کلکه مونوتون ټيټېدونکې ده.

د مونوتوني پيژند ورشو (تعريفساحه) ټاکنه

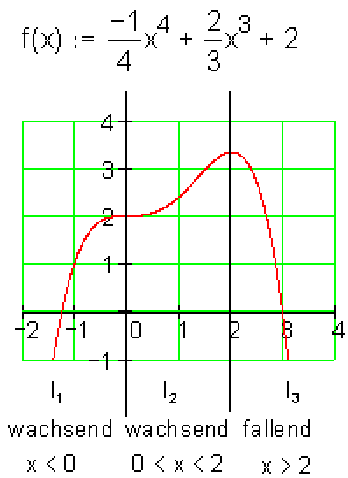
بېلګه: د تابع ګراف څخه زيات وخت کيدی شي د مونوتوني ساحې لږ يا زيات ټيک و لوستل شي.



د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکی دی.

د $I_2 = \{1 < x < 3\}_R$ لپاره $f(x)$ يوغږيز ټيټېدونکې ده.

د $r\, I_3 < x < \infty\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه يوغږز جګېدونکې ده.



له گراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کيږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونج گېدونکي ده.

د $I_2 = \{1 < x < 3\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونجگېدونکي ده.

د $r\, I_3 < x < \infty\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون ټيټېدونکي ده.

تمرينونه:

--- لاندې تام راشنل توابع په همغږېزوالي خويونو وڅېرئ.

$a)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$

$b)\ f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 12x$

$c)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$

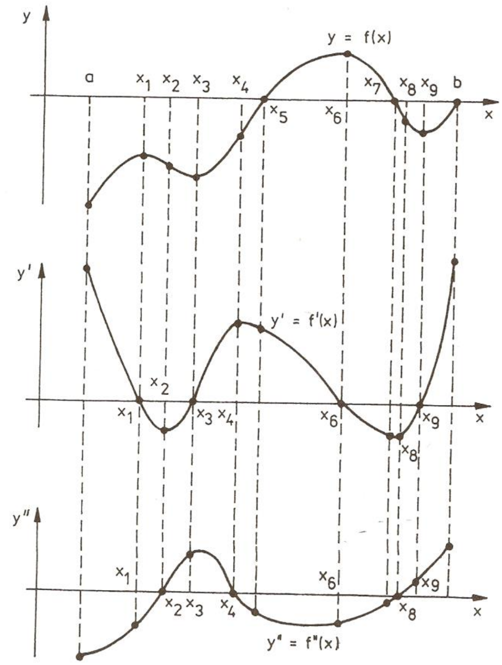
$d)\ f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + 2$

--- د لاندې ماتراشنل توابعو د مونوتوني حالت د a په واکوالي کې ورکړئ.

$a)\ f(x) = \frac{1}{ax+2}$

$b)\ f(x) = \frac{1}{ax^2+1}$

ځای اړونده افراطي ټکي (local extrema)



يادونه: په ليکلو مې کله کله د افراطي لپاره بحراني ليکلي، پام دې ورته وي.

فعاليتونه:

د مختلفو توابعو گرافونه او په هغې خبرې، چې چيرته افراطي ټکي پراته دي.

- په پورته څېره کې د تابع لپاره نسبي جگ ټکي اوخورا جگ ټکي و ښاياست.

- په پورته څېره کې نسبي ټيټ او خورا ټيټ ټکي وښاياست.

- په پورته څېره کې وښاياست، چې د نسبي جگو ټکو همداسې خورا جگو ټکو، نسبي ټيټو ټکو همداسې د خورا ټيټو ټکو دواړو لورو ته تابع څنگه ځغلي؟

- په پورته شکل کې هغو ټکو ته، چې بحراني ټکي دي ځير شئ، چې تابع هلته څه خوي لري؟

- د تابع همدې ټکي کې وګورئ، چې لومړی مشتق یې کوم ارزښت لري؟

موږ ددې پورته فعالیتونوڅخه لاسته راوړو:

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ او $f''(x)>0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x)=0$ او $f''(x)<0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x)=0$ وي او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

1. دا اړیکي یواځې د x_0 لپاره ارزښت لري چې د تعریف سټ په دننه کې پروت وي او هلته د $y=f(x)$ تابع پوره څو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څنډو) او د هغوځایونو لپاره چې هلته $f(x)$ تابع کم یا هیڅ مشتق وړ نه وي، ځانګړو څیړنو ته اړتیا ده.
2. شرایط چې $f'(x)=0$ وي(مشتقوړ تابع) یواځې د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی(ضروري یا اړین شرایط).
3. شرایط $f'(x)=0$ او $f''(x)\neq 0$ د بحراني ټکي لپاره یواځې پوره کېدونکی دی او نه ضروري).

بیلګه:

د $f(x)=x^2+2$ تابع ګراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د ګراف او مشتق له لارې وټاکئ

حل: د بيلګې له ګراف څخه روښانه ده، چې تابع د $x = 0$ په ځای کې خورا ټيټ ټکي(اصغري-) لري.

د ابحراني ټکي لپاره اړيين شرطونه:

1. د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x) = 2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 لپاره صفرځای لري، يعنې دلته يو بحراني ټکی پروت دی.
-د تابع دويم مشتق: $f''(x) = 2$ دا چې $f''(x) > 0$ دی، نو يو نسبي ټيټ ټکی مخ ته لرو.
بيلګه:

د $y = x^4$ تابع د $x = x_0 = 0$ لپاره نسبي ټيټ ټکي لري او باوري دي:

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$
$$f''(x) = 2x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

ګورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوي دی.

د پورته شننې څخه لاندې پيژند ته راځو

تعرف يا پيژند: د $x = x_0$ په چاپيريال کې د $y = f(x)$ تعريف شوې تابع يونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټيټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدی x لپاره باور ولري: $f(x) \le f(x_0)$ ($\Leftrightarrow$) په همدې ډول $f(x) > f(x_0)$
جمله: (د يوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرايط): که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x) = 0$

همغږيزې توابع

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځې د x_0 ځای په پوښتنه کی راځي، چی د هغي لپاره لرو $f'(x) = 0$ ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې يواکستريموم و لري.

جمله ۲ ۱۳ : (د يوه بافراطي ټکي لپاره پوره کيدونکی شرايط):
که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتقوړ $y = f(x)$ تابع لپاره ولرو:
$f'(x) = 0 \ , \ f''(x) \neq 0$
نو تابع $y = f(x)$ هلته يو بحراني ټکی لري.
خورا ټيټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x) > 0$
خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x) < 0$

پوښتنې:

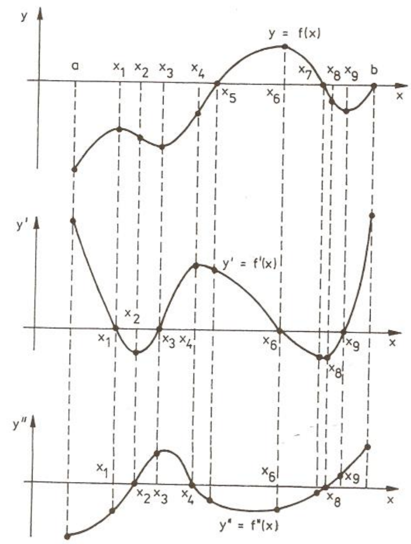
د لاندې توابعو انحرافي ټکي پيدا کړئ.

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

2) $f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 1$

3) $f(x) = 7x^7 - 6x^6 6 + 4x^4 x^3 + 2x + 1$

له ښۍ لور انحنا اوله کيڼ لور انحنا(مقعر او محدب)



فعالیت:

- په پورته شکل کې مقعریت(ننوتوال) او محدبیت(وتنوالی) وښایاست.

- په پورته شکل کې د مشتقونو له مخې مقعریت او محدبیت په ګوته کړی.

که په یوه اینتروال کې د مشتقوړ تابع f دویم مشتق $f''>0$ وي، نو په دې اینتروال کې ګراف کيڼ کوږ شوی یا کینه انحنا لري او که دویم مشتق $f''<0$ وي، نو د تابع ګراف ښی کوږ یا ښی انحنا لري.

بیلګه:

ټول ګونګ تابع(راشنل تابع) f د $f(x)=x^3-2x^2+4x-1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کې کيڼ کوږدی (کینه انحنا لري (ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشوکې ښی کوږ دی (ښۍ انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (له لومړی مشتق څخه):

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$
$$f''(x) = 6x - 4$$

د $x > \frac{2}{3} \Rightarrow 6x - 4 > 0$ لپاره کينې گوړوال(کينه انحنا (ننوتی يامقعر)

د $x < \frac{2}{3} \Rightarrow 6x - 4 < 0$ لپاره ښی کوږوالی(ښی انحنا(وتلی يامحدب))

بيلگه:

د مات راشنل تابع $f(x) = \frac{1}{x+2}$ گراف يو های پاررابول دی. د های پارابول کومه ځانگه کينه کږه ده يا کينه انحنا لري(مقعر)، او کومه يوه يې ښی کوږوالی - يا ښی انحنا لري(محدب)؟

دويم مشتق: $f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$; $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ صورت تل مثبت دی.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د هایپارابول ښانگه ښی کوږوالی يا انحنا لري(وتلی يا مخدب).

د لپاره $x > -2$ مخرج او همداسې ټول کسر(مات) مثبت دی.

های بارابول کينکوږ دی يا کينه انحنا لري(ننوتی يامقعر).

بيلگه: د دواړو توابعو $f(x) = \sqrt{x}$ او $g(x) = \sqrt{x^3}$ کوږوالی(انحنا) دې له دواړو لورو يو د بل سره پرتله شي. دواړه توابع د x>0 لپاره تعريف دي.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad g'' = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

دويم مشتقونه د $x \in R^+$ لپاره تعريف دي.

په دي ساحه كې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف ښی کوږوالی یا انحنا لري، دا یو ښي لور ته واز پارابول ښايي.

په همدي ساحه كې $g''(x) > 0$ دی. اړونده ګراف کیڼ کوږ دی یا کینه انحنا لري. اړونده ګراف یو کیڼ کوږوالی یا کینه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

تمرينونه:

۱ -- و ښایاست، چې د لاندې توابعو مقعريت او محدبيت كوم دي؟

$$a) \quad f(x) = x^3 + 4x^2 + x$$
$$b) \quad g(x) = 2x^3 + 3x - 2$$

۲ -- په کومه ورشو کې لاندې تام راشنل توابع یو کیڼ کږوالی لري او په کوم کې ښی کږوالی لري.

$$a) \quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 2 \qquad b) \quad -2x^3 + 3x^2 - x - 4$$

۳ -- د لاندې مات توابعو ګرافونه هایپاربول دي. د هاپارابول څانګي کوم کږوالی لري؟

$$a) \quad f(x) = \frac{1}{4x+1} \qquad b) \quad f(x) = 3 - \frac{3}{x^2}$$

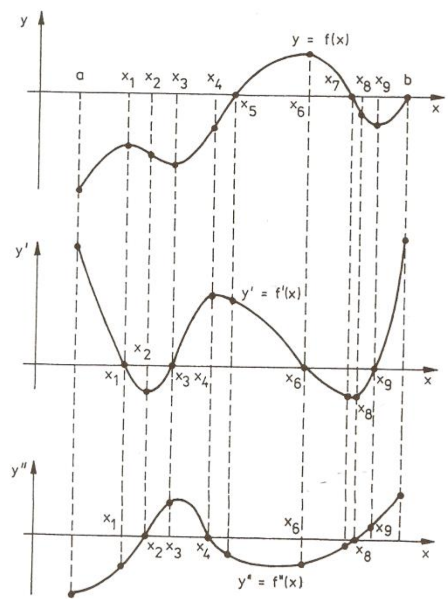
٤ -- په کومه ساحه کې لاندې ناراشنل توابع یو کیڼ او په کوم کې یو ښئ کږوالی لري؟

$$a) \quad f(x) = x \cdot e^{2-x} \qquad b) \quad f(x) = \ln x^2$$

٥ -- ولې د یوه دریمې درجې تام راشنل تابع ګراف په ټل ټلنه کې یوه ښئ انخنا(کږوالی) نه لري.

٦-- ولې یو څلورمه درجه تامراشنل تابع د $f(x) = ax^4 + dx + e$ سره یو ټلټلونی کینه انخنا(کږوالی) او ښئ انحنا لري؟

د انعطاف ټکي(اوړونټکي) Inflection Points



فعالیتونه:

- پورته ځیره په ځیر وګورئ او وښایاست، چې چیرته یا په کوم ټکي کې منحني(له کینې و ښي لور ته) خوزښت - یا خپله د حرکت لور بدلوي؟

- د انعطاف ټکو شاوخوا هم فکر وکړئ، چې کوم ټکي غوره ټکي دي او د هغو له خویونو هم د

انعطاف ټکو خویونه وټاکئ.

- په شکل کې فکر وکړئچې د انعطافټکي شاوخوا منحني ځنګه ځغلي.

- د شکل په هکله په خپل فکر څه ووایئ او د خپل فکر په بنسټ خپل دلایل روښانه کړئ. موږ له پورته ځیرې اټکل کولی شو چې: که د x_0 ځای کې ولرو: $f''(x)=0$ او $f'''(x)>0$ ، نو یو ښی-کینې- انعطاف ټکی (اوړونټکی) مو مخ ته پروت دی.

برعکس(په ځنډ): که وي: $f''(x)=0$ او $f'''(x)<0$ نو یو کینږ - ښی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

دا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چې $f''(x)=0$ وي، دا چې دا ښی -کینږ - او که کینږ- ښی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f'''(x)$ مخ نښه یی ټاکي.

- شرایط $f''(x)=0$ د انعطاف ټکي لپاره یوائی اړیین یاضروري دي.

د $y=x^4$ لپاره $f''(0)=0$ دی، مگر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

- شرایط $f''(x_0)=0$ او $f'''(x_0)\neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکي دي.

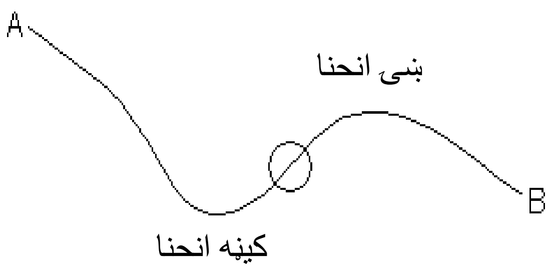
گورو چی $y=f(x)=x^5$ تابع د $x=x_0=0$ ځاي کی یو انعطافټکی لري او باوري دي:

$$f'(x)=5x^4 \quad , \quad f'(0)=0$$
$$f''(x)=20x^3 \quad , \quad f''(0)=0$$
$$f'''(x)=60x^2 \quad , \quad f'''(x)=0$$

گورو چې دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

ترمخ راوړني او د کلمې روښانه ونې:

د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توگه مخ ته ځو:



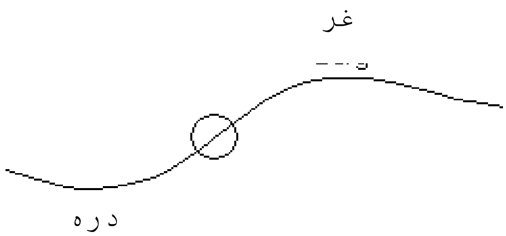
د بایسکل ځغاستي چې له A څخه ځغلي د منحنی څخه تېرېږي او B ته رسیږي. د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د اندل حالت د ځغاستې په وخت کې په پام کې ولري. د کینې منحنې(د کینږ لورې د اندل حالت) څخه وروسته د ښی لورې منحني کې ځغلي.

.

د کیڼي- او ښی منحني(کږې) ترمنځ باید د باسکل انډل نېغ ولاړ وي(عمود وي)، چې دا د انډل بدلون دی له کیڼي لورې و ښی لورې ته. دا د کیڼي او ښی منحني ترمنځ اوړیدنه یاد **انعطاف ټکی** بلل کیږي.

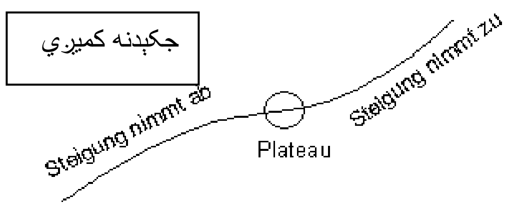
تاسو له بایسکل سره په یوه غونډۍ ځغلی. وروسته له هغې، چې له تالې څخه تیږېږي، نو لار په جګېدو پیل کوي. په لومړي سر کې نرم او بیا په نیغه جګیږي، بیا په دې پسې جګوالی بېرته کمیږي، چې پاس د غونډۍ په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. یو څېرته په غونډۍپورته صفرارزښت ته رسیږي. یو څېرته په لار جګېدنه خورا لویه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.

دا څېره بیا



د بایکل ځغلونکي بل حالت، چې له څنګ دیاګرام څخه یې رانیسو:
په غره د بایسکل ځغاستمیل یاجګېدنه لومړی کمیږي، چې له سره بېرته جګه شي.
ددې ترمنځ یوه ساحه شته، د کم جګوالي سره (یوه نسبتاًهواره). دې نسبتاً هوار ځای کې د ټوټه کږښي جګیدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونټکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.

دا څیره د پښتو نومونو سره بیا کښل...



له کیڼ ښي لور ته ژباړه: جګیدنه کیږي، هواره، جګیدنه زیاتیږي

پوهیږو، چې د یوې تابع لومړی مشتق د تابع د جګوالی تابع دی، چې له ګراف څخه یې جګوالی لوستل کیږي. دا چې د انعطاف ټکی خورا لوي یا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پیدا کیږي، چې د مشتق تابع انحرافي ارزښتونه پیدا کړو.
دا تلنلار همهغسې ده، لکه د پیل تابع $f(x)$ لپاره مو ټاکلې. اوس د مشتق تابع $f'(x)$ باندې دا کار یا عمل اجرا کیږي.
مخکی له دې چې یو لړ جملی د پحراني ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څیړو، غواړو چې دا کلیمی تعریف کړو.

دواړه کلمې به د نسبي افراطي ټکي په بڼه کی سره را غونډې شي.

پيژند:

په يوه چاپيريال $x = x_0$ کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ يو کيڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کيڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته يو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه يو نسبي ټيټ ټکی ولري.

جمله: (د يوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ اکستريموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره يوائې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغي لپاره $f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې يوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړيين شرايط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته يو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

دلته هم باور لري(يادونه ۴ دې پ۶تله شي) : چيرته چی $f''(x) \neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کيدی چي د انعطاف ټکي موجود وي. مګرچيرته چی $f''(x) = 0$ وي ، د انعطاف ټکی شته کيدلی شي، خو اړيين يا ضرور نه ده چی هلته انعطاف ټکی شته وي.

له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

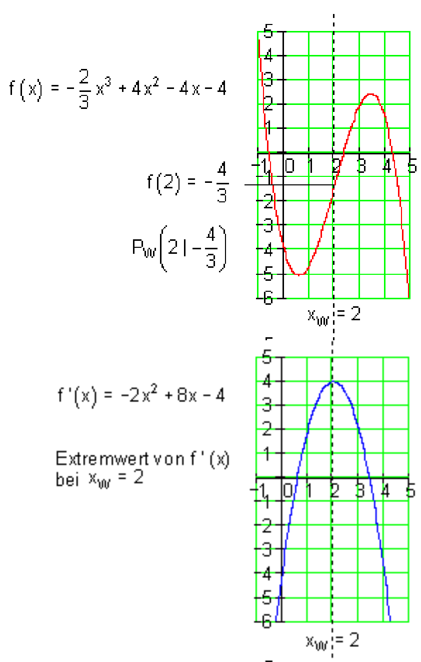
جمله: (د انعطافټکي لپاره پوره کيدونکی شرطونه)

که په $x = x_0$ کی د دريواره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) \neq 0$

نو هلته یو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که $f'''(x) < 0$ وي، نو یو کيڼ- ښي – انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د $f'''(x) > 0$ لپاره یو ښی-کيڼ-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

شننيزه يا تحليلي بيلګه:

يادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښه کوو او د x_W سره د انعطاف ټکی په نښه کوو.



1- تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$
$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$
$$f''(x) = -4x + 8$$
$$f'''(x) = -4$$

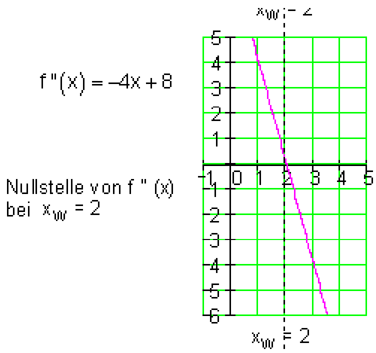
2- دويم مشتق صفر کړئ.

$$f''(x) = 0 \iff -4x + 8 = 0$$
$$\Rightarrow x_W = 2$$

3- د انعطاف ټکي له مخي ښوونه، چې ايا د انعطاف ټکی شته دی؟

$$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$$

4- په $f(x)$ د انعطاف ځايونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف ټکي ټاکنه



$$f(x_W) = f(2) = -\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$$

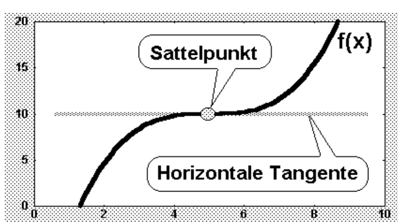
$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{W\left(2|-\frac{4}{3}\right)}}}$$

$$\underline{\underline{P_W(21-1.33)}}$$

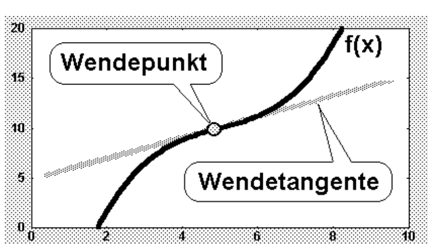
پام: په انعطاف ځای x_Wکې د $f(x)$ گراف کږیږي.
په یوه په خوښه ټکي x_0کې د کږوني(انحنا) لپاره باور لري:
$f''(x) > 0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کیڼ لور ته کږیږي(انحنا لري) دی.
$f''(x) < 0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ گراف ښی لور ته کږیږي(انحنا کوي)
یو زینتکی Der Sattelpunkt څه شی دی؟

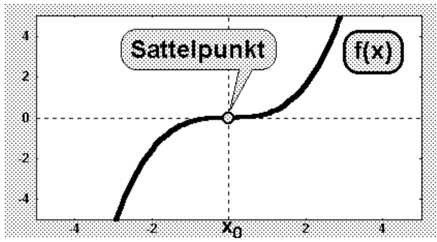
پېژند:

د زینټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:



د پرتلې لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري



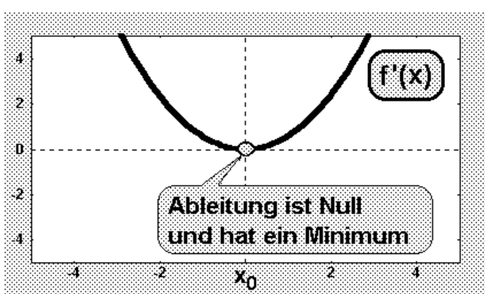


توضيح:

اوس فکر کوو، چې يو زينټکی ځنګه د شمېرلو له مخې پېژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانګړي توګه دا مخ ته لرو، چې يو زينټکی له ښي – و کينه انحنا و شمېرو.

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جګوالی په پام کې نيسو، يعنې لومړی مشتق: د زينټکي د مخه د $f(x)$ جګوالي کميږي، په زينټکي کې صفر ارزښت لري، او له زينټکي څخه وروسته بېرته جګيږي.

يو زينټکی (د ښي – کيڼ – بدلون سره) په دې پېژندل کيږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ يې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته يو نسبي ټيټکی (مينيموم) ولري.



د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

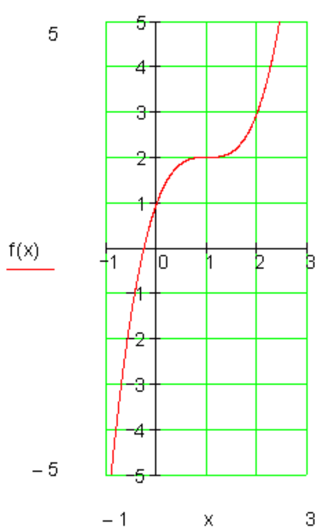
لومړی شرط دی، چې مشتق يعنې $f'(x)$ په زينټکي کې د صفر سره مساوي دی.

زينټکی(ښی-کيڼ-بدلون) $f'(x_0)=0$ دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته يو نسبي مينيموم لري.

دا په دې معنادی، چې بل جګ مشتق $f''(x)$ بايد په صفر مساوي وي او مخښنه له منفي و مثبت ته بدليږي.
له دې سره سم د زينټکي لپاره پوره کېدونکي قضيه وميندل شوه:
د زينټکي لپاره جمله(خوي ټاکنه)(د ښي –کيڼ- انعطاف سره)

الف:د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$
ب : د x_0 په ځا ي کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ یو مینیموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، یعنې $f''(x)=0$ دوم مشتق مخنخښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.
بل بدیل(د ګرانو دوستانو وړاندیز)

زینټکی **Der Sattelpunkt**



د انعطاف ټکي یو ځانګړی حالت زینټکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جګېدني سره.که د کېڼ لور ورتزدې شو فکر کېږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی
که ښوک د ښي لور ور نزدې شي فکر کوي، چې یو نسبي ټیټټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د ریاضیاتو له لوري څېړو:
مشتق:

$$f(x)=x^3-3x^2+3x+1$$
$$f'(x)=3x^2-6x+3$$
$$f''(x)=6x-6$$
$$f'''(x)=6$$

$$f'(x)=0 \iff 3x^2-6x+3=0 \Rightarrow x_{1/2}=1$$

$f''(1)=6\cdot1-6=0$ $f'''(1)=6$	$<=1$ د $x=1$ سره د انعطاف ټکی	$<=1$ د $x=1$ سره زینټکی

د انعطاف ټکي لپاره شرایط پوره دي.
دا چې د $f''(1)=0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زینټکی دی.
د انعطاف ټکي پیداکونه:
د تابع ګراف باندې انعطاف ټکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کېږي. د انعطاف تانجنت هم
همداسې پیدا کیږي لکه د تابع دګراف په یوه ټکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات ټاکل کیږي.

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x-2$$

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-6x+9$$

$$f''(x)\frac{3}{2}x-6 \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

$$f''(x_W)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-6=0$$

د $x_W=4$ او $f'''(x_W)=\frac{3}{2}\neq 0$ د

تانجنت $f(x_W)=f(4)=2 \Rightarrow \underline{P_W(4|2)}$

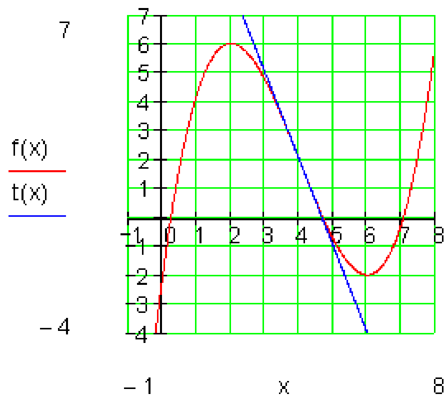
مساوات لپاره باور لري.

د x_W لپاره د تانجنت مساوات

$$t(x)=f'(x_W)(x-x_W)+f(x_W)$$

د $f'(x_W)=f'(4)=-3$ سره په لاندې ډول

دي $t(x)=-x(x+4)+2=\underline{\underline{-3x+4}}$



د انعطاف تانجنت د $f(x)$ ګراف د انعطاف په ټکي $P_W(4,2)$ کې غوځوي او دا لاندې مساوات لري:

$$t(x)=-3x+14$$

د انعطاف ټکي تانجنت پیداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دګراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي.
د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کیږي، لکه د تانجنت مساوات د ګراف په خوښه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=0$ دلته تر څیړنې لاندې نه نیول کیږي.

پوښتنې

۱ -- د تابع f د $f(x)=\frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}, x\neq 1$ سره د انعطاف ټکي پیداکونه

۲ -- د لاندې توابعو د انعطاف ټکي پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2}$ $\qquad b)\ f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$

$c)\ f(x)=\dfrac{x^3}{3(x-1)^2}$ $\qquad d)\ f(x)=\dfrac{x^3-8}{4x}$

۳ -- و ښايئ، چې د $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}e$ تابع د انعطاف ټکی زينتکی دئ.

۴ -- د لاندې توابعو د انعطاف ټکي (اوړونټکي) پيداکړئ.

$a)\ f(x)-=x\cdot e^{-x^2}$ $\qquad b)\ f(x)=\ln\dfrac{1}{x^2+1}$

د منحني بحث (Kurven Diskusion):

يوه تابع $y=x^3+x^2-3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بيا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نخښه کړئ، رښانه کړئ، چې انحنا چيرته له کينې لور و ښى لورې ته او له ښى لورې و کينې لورې ته ده.

فعاليت:

- تناظر تعريف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جگ ټکي، ټيټ ټکي او د انعطاف ټکي يې پيدا اکړئ.
- x^3+x
- $3x^3+x+2$

ددې لپاره چې يوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پيژنو. موږ دې بحث ته د منحني بحث وايو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې بايد سيستماتيک مخ ته لاړ شو.

په لاندې ډول تلنه گټوره بلل شوې.

دتعريف ساحه: د تابع ځيړنه يواځې په همدې ورشو کې موخه وره ده.

تناظر **Symetry** : بايد وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.

د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x)=f(x)$

د مرکزي تناظر لپاره باور لري. $f(-x) = -f(x)$
په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط $x \geq 0$ وڅیړل شي.
په تولیزه توګه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو ګورو چې که توان(د پولینوم درجه)یې جفت(جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان(د پولینوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

انحرافي ټکي **Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جګټکی، ټیټټکی)
د جګټکی یا نسبي جګ ټکي پوره کېدونکي شرطونه:
$f'(x_1) = 0 \ \wedge \ f''(x_1) < 0$

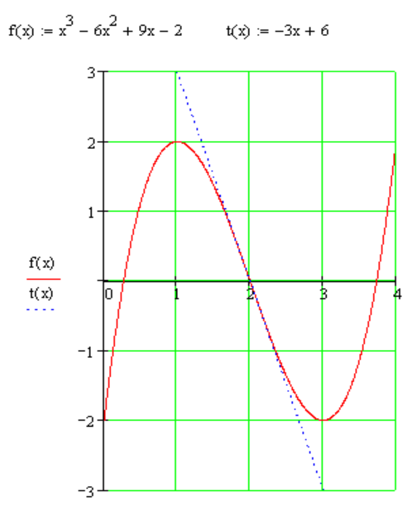
انعطافټکی Inflection Point :
د انعطافټکواو همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کېدونکي شرطونه:
$f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$
زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.
د تابع تقاطع د x او y محورونوسره(د محورونوِغوڅټکی):
د $x-$ محور سره ِغوڅټکی: $P_{xi}(x_i \mid 0) \Rightarrow (x) = 0$
د y محور سره غوڅټکی(صفرځای) ټاکي $P_y(0 \mid y_s) \Rightarrow f(0)$
دګراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې ګراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځوریږي. دا راته په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمیرل کیږي.

د انحنا حالت او یوغږیزوالی:
د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ ګراف تغیر خوري.
په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:
$f''(x_0) > 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف کینه انحنا لري (کونوکس)
$f''(x_0) < 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف ښی انحنا لري (کونکاو)
یوغږیزوالی
1- که د ټولو $x \in I$ لپاره وي $f'(x) \geq 0$ ، نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون جګیږي.
که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) \leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون ټیټېدونکی دی.

-2 که د ټولو $I \in x$ لپاره $f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروال I کې کره غښتلې مونوتون جګېدونکی ده.
که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروال I کې غښتلې مونوتون جګېدونکی ده.
د پېژند ورشو ژی ټکې:
د تابع ژی ټکې کتنه په پېژند ورشوکې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ او $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلګه :
د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.

مشتق کونه:



$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$
$$y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$$

نسبي انحرافي ټکې

$P_{max}(1|2) \qquad P_{min}(3|-2)$

انعطاف ټکی او تانجنت

$P_W(2|0) \qquad y = f_t(x) = -3x + 6$

صفرځایونه:

$P_{x3}(0.3|0) \quad P_{x2}(3.7|0) \quad P_{x1}(2|0)$

د y– محور سره غوڅټکی(دقاطع): $P_y(0|-2)$

یوغږیزوالی(مونوتوني یاجگ - ټیټوالی)   د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$ کې

په $I_1 = \{x \mid -\infty < x \leq 1\}_{\mathbb{R}}$ کې یوغږیز جگیږي.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = \infty$$

په $I_3 = \{x \mid 3 \leq x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې یوغږیز جگیږي.

سیومتري: نه لري

د انحنا حالت:

ښئ انحنا(محدب) : $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کینه انحنا (مقعر) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

تمرینونه:

په لاندې توابعو بحث وکړئ او غوره نقطې یې پیدا کړئ:

اول) د شمېرنې له لارې وښایاست.

دویم) په شکل کې په نخښه کړئ.

$a)\quad 2x^3+x^2+1$

$b)\quad x^3+x^2+3x$

$c)\quad x^3+2x^2+x+3$

د ناټاکلو افادو یا وېینو=ګ\پولې

$$0.\infty\ ,\quad \frac{0}{0}\ ,\quad 0^{\infty}\quad .\frac{\infty}{\infty},.....$$

که و لرو $x \neq 5$; $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$ ، ومو لیدل، چې د داسې توابعو لیمیټ په پیداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وایې، ځکه چې مشتق یې نیول کېدی شي، یعنې د کمښتونو ویش(د تفاضلونو ویش) حد یې ټاکل کیدی شي.

که $\frac{\sin 2x}{5x}$ توابع ولرو،نود $x=0$ لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توګه نه شو نیولی، چې له دې امله ناټاکلې افادې ورته وایو.

فعالیت:

- که تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x^2+x}$ ورکړشوې وي.

اول - د تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x^2+x}$ پوله یعنې $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+x}$ د پولې له درسه ، چې په لومړۍ بره کې لوستل شوي، پیدا کړئ.

- پورته په ننوتنه کې و هڅېږئ، چې د توابعو مشتقونه پیدا کړئ.
- که ولرو $\frac{x^2-4x-5}{x-5}$ ، نو د تابع مشتق د چېرته نیول کیږي، که د x=5 شونی وي، نو مشتق یې ونیسئ.

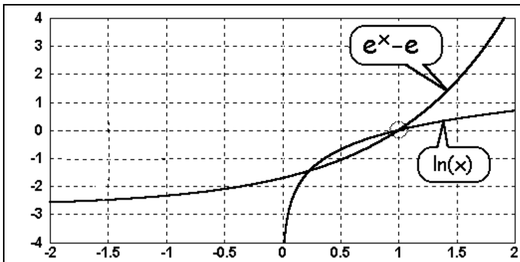
پیل ځیرنه: د $\frac{0}{0}$ حالت که پوله ارزښت جوړېدو کې یو کسر پیدا شي، چې صورت او مخرج یې دواړه د صفر په لور لاړ شي یا صفر شي، نو دا پوله ارزښت،، ناټاکلې افاده،، بولو.

بیلګه:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$$

په څېره کې برخه توابع رسم شوي دي، یعني د صورت او همداسې د مخرج ګرافونه.

ګورو: د صورت او مخرج د توابعو ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱ په لور لاړشي)



لیکندود(لیکندول): د افادې

$$\frac{\text{Zähler} \to 0}{\text{Nenner} \to 0}$$

لپاره په حدشمېرنه کې لنډ لیکو: $\frac{0}{0}$

دا په حقیقت کې دقیق نه دی، مګر په ټولېزه توګه داسې معمول دئ

روښانه ونه :

ناټاکلې افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې دا ناټاکلې افاده خپل نوم له کومه ځایه اخلي. دا ،، ناټاکلی،، بلل کیږي، ځکه چې حدیې د عادي طریقو له لارې نه شي شمېرل کېدی. دا کار د لوړې ریاضي سره دا شمېرنه شونی شوه(دبېلګې په توګه د لو پیتال قانون له مخې، چې پسبه وڅېړل شي).

روښانه ونو ته تشریح:

اوس ښایو، چې د داسې توابعو شمېرل ولې ناشوني دي.

موږ بیا دا د تېر مخ بیلګه رانیسو:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$$

1- که هڅه وشي، چې حد پیدا کړو، داسې چې د $x = 1$ په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده $0:0$ به ترې لاس ته راشي. دا تعریف نه لري، $u = f(\frac{1}{z})$ ځکه په صفرویش اجازه نه شته.

2- ترمخه مو د ناټاکلو افادو د شمېرلو لپاره یعني د ناطق کسري توابعو پوله شمېرنه کې د چل یا د طریقې څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارلی، لکه په پورته بیلګه کې.

3- د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي لید کېدی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د 1 په لور وخوزیږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001} = 1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معني ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نږدې برابر شي.دا دا معني نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.0000000010\ 0}{0.0000000010\ 0} = 100$$

لکه چې ګورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نږدې برابردي(دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مګر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعنې (100) دی،

د برنولي او د دې لو، پیتالقاعده Brnoulli and de L,Hospital

$$\frac{\sin 2x}{5x} \quad \text{او} \quad \frac{x^2+3x-10}{x-5}$$

د برونولي او د دو لو پیتال قاعدې د $\frac{f(x)}{g(x)}$ ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانګړی رول لوبوي. داحالت په ځانګړي ډول هلته رامنځ ته کیږي، چې مخرج او صورت همغه صفرځاي x_0 ولري. دا ناټاکلی افاده $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{0}{0}$ هدفمنده نه ده. کیدی شي چې د ویش حد $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ وڅیړل شي، په کومو کی چې صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د غوښتلو دي. د بیلګې په توګه تابع $f: \quad y=f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}$ صورت او مخرج همغه صفرځاي x0=-2لري، سره له دې هم لیمیټ شته دی.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^2}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x+2)=0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شمیرل کیدی شي، چې د صورت او مخرج توابعو له نتیجې څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوي منځ ارزښتقضیي استعمال هم بلل کیږي.

د برنولي او د دو لو، پیتال قاعده:

Bernoulli and de l'Hospital

که توابع $u=f(x)$ او $v=g(x)$ د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د

$g'(x) \neq 0$ سره او د ټولو $x \in U(x)$ لپاره او x_0 د f او g یوصفرځاي وي،

د $f(x_0) = g(x_0) = 0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توگه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

حل: تابع د پراخه شوې منځ ارزښت قضيې نيونې پوره کوي. د هر $x \in U(x_0)$ لپاره یو x_m د $x_m \in (x_0, x)$ سره موجود دی، په داسې ډول چې لرو:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د $f(x_0) = 0 \ \wedge \ g(x_0) = 0$ له امله لرو:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچې د $x -> x_0$ سره $xm -> x_0$ هم هڅه کوي.

د $x -> oe$ په حالت کې $x = 1/z$ ځای په ځای کوو. د زنځيري قضيې په مرسته لاس ته راځي:

$$u = f(1/z)$$

د مشتق $du/dz = f(1/z)(-1 - z^2)$ او مشتق $\frac{dv}{dz} = g'(\frac{1}{z})(\frac{-1}{z^2})$ سره، داسې چې لرو:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

یادونه : که په پورته حالت کې $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$ هم وي، نو په ويش بيالله سره دا قاعده استعماليږي. که سړي د n – پلونو(قدمونو) وروسته بريالی وي نو دا قاعده لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چیرته چې $f^{(n)}$ او $g^{(n)}$ د تابع $n-$م مستق په معنی دی.

ډول یا تیپ: $0/0$

بیلګه: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{1}=\frac{0}{1}=0$

بیلګه: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=\frac{0}{1}=1$$

تیپ یا ډول: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0\qquad \alpha>0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان(جګعدد) α لپاره یو په خوښنه توان x^{α} د $x->oe$ لپاره په غښتلې توګه جګیږي، نسبت لوګاریتم تابع $1n$ ته $\alpha>0$ $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0$

له دې $f(x)=\frac{x^n}{e^x}$ تابع د لوپیتال د قعاعدې د دیرځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

اکسپوننشل تابع e^x د x په هرتوان تابع څخه په غښتلې جګیږي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0\qquad n\in N$$

نور حالتونه کیدی شی په بنه یا تیپ $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بیرته واړول شي

له تیپ یا بڼې $\infty-\infty$ څخه و بڼې یا تیپ $\frac{0}{0}$ ته ددې لپاره لاندې تابع بیلګه کیدی شي:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$$

د $x\to 0$ لپاره

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

داچی دلته مشتق بیرته د بڼې تیپ $\frac{0}{0}$ ده، نو د لوپیتال قاعده استعمالیدی شي.

له تیپ یا بڼې $0.(\pm\infty)$ څخه بڼې $\frac{\pm\infty}{\infty}$ ته:

د تیپ $0.(-\infty)$ حالت د بیلګي په توګه تابع $f(x)=x.\ln x$ د$x\to 0$ لپاره ښایي. په کوم کی چي ضرب د ویش په څیر انځور کړي، نو د لوپیتال د قاعدې په استعمال دا لاندې لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to +0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +0}(-x)=0$$

له بڼې 0^0 څخه وبڼې e^0ته:

دلته د بیلګي په توګه تابع $f(x)=x^x$ د $x->0$ لپاره تر څېړنې لاندې نیول کېږي.

د بڼې بدلون یا فورم بدلون و بنسټ e ته د یوې انځورونی په مرسته په بریالی توګه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to +0}x^x=\lim_{x\to +0}e^{\ln(x^x)}=\lim_{x\to +0}e^{x\cdot\ln x}=e^0=1$$

له 1^∞ بڼې څخه و $e^{0.\infty}$ بڼې ته

د ښوونې، د بیلګې په توګه د تابع $f(x)=(1+\frac{\mu}{x})^x$ پوله ده د $\mu\in R^+$ لپاره او $x\to\infty$ د $x\in R^+$ سره:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}e^{x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{2}))}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\eta}{2}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\mu}{2}}\cdot\frac{-\mu}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mu}{1+\frac{\mu}{x}}}=e^{\mu}$$

د $\mu=1$ لپاره لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

له بنې ∞^0 و بنې $e^{0.(\pm\infty)}$ ته دا کارونه په يوې بيلګې روښانه کوو:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\lim_{x\to+0}e^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}(\sin x\cdot\ln\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to+0}\frac{x\cdot(\frac{-1}{x^2}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x}=\lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x-x\cdot\sin x}=0$$

د $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=1$ سره

بايد لاندې جدول کې پام وشي.

لاندې جدول د پورته ښوول شوو ښويا ډولونو د بنی بدلون تولیزه کتنه ممکنوي

تيپ(ډول)	$f(x)\to$	$g(x)\to$	بڼه بدلون يا لنډ: بدلون
$-\infty$	0	0	$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)\cdot g(x)}\to\frac{0}{0}$

∞	0		$f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}\to\dfrac{0}{0}$ $\wedge (Or)$ $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}\to\dfrac{\infty}{\infty}$
∞	0 1 0	0 0	$(f(x))^{g(x)}=e^{\ln(f(x)^{g(x)})}=e^{g(x)\cdot \ln f(x)}\to e^{0\cdot\infty}$ د f(x)>0 سره.

تمرینونه:

پورته کې دېرې بیلګې حل شوې. له هغوباید څه تمریونونه راوړل شي.

۱) لاندې پوله ارزښتونه وشمیرئ.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2^x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}\right)$

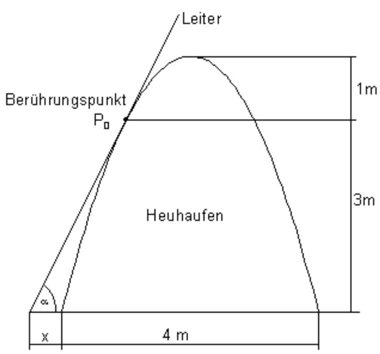
د $x\to\infty$ لپاره د لاندې راشنل توابعو لیمیتونه د دې لو پیتال قاعدې له مخې وشمېرئ.

a) $f(x)=\dfrac{2x^3-x+4}{3x^3+1}$

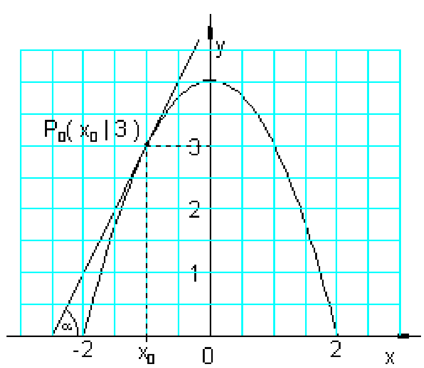
b) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{4x^3+3x^2-2x+5}$

د تانجنت لپاره د يوې تابع د استعمال بيلګې

له ځمکې څخه د وښو په ټوپۍ يوه زينه ايښول کيږي. دا زينه په درې متره جګوالي ټوپۍ لمسوي.



د وښو توپۍ دې د يوه کينکودي پارابول څېره ولري، چې بنسټ يې 4 متره سرور دی او 4 متره جګوالی لري. غواړو په دې يوه زينه کيږدو، چې د وښو ټوپۍ سره تانجنت جوړ کړي.
په کومه زاويه(کونج)بايد دا زينه کېښول شي؟
د وښو ټوپۍ له بيخ څخه دې په کوم لرېوالي په ځمکه دا زينه کېښول شي؟



موږ د y محور داسې کاږو،چې د پارابول له ککرۍ(څوکې) څخه تېريږي.
پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$
$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$
$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$
$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$

شمېرنه:
د نورو شمېرنو لپاره ارزښت $x_0 = -1$ کاروو. زينه ټوپۍ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې لمسوي.موږ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1|3) \;\Rightarrow\; x_0 = -1\,;\; f(x) = 3$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $f'(x)=-2x$ سره لاس ته راځي:

$$f'(x_0)=f'(-1)=-2\cdot(-1)=2$$

$$\Rightarrow t(x)=2[x-(-1)]+3=\underline{\underline{2x+5}}$$

جوړه زاویه: $\tan\alpha=2\Leftrightarrow\alpha\approx 62.4^{\circ}$

د زینې او د وښو ټوپې تر منځ واټن د $f(x)$ د صفرځای او د تانجنت $t(x)$ د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځایونه:

لرو:

$$f(x)=-x^2+4=0 \;\Leftrightarrow\; x^2=4 \;\Rightarrow\; x_{1/2}=\pm 2$$

$$t(x)=2x+5=0 \;\Leftrightarrow\; x=-2.5$$

د x ارزښتونو -2.5 او -2 ترمنځ واټن 0.5 دی.

زینه د وښو د ټوپې له پښو څخه باید نیم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کیږي، چې یو ګراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

د ستړې ګټې(غټو ګټو) مسئله یا قضیه

دا د ستړې ګټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د یو څو بیلګو له لارې وڅیړل شي.

نزدې ټولو پروسو کې ، چې په عمل کې کارول کیږي یا صورت نیسي، له تاثیروونکو یا په همدې ډول د هغو ټاکلو لویو استعمال ته اړ دی، کومې چې موږ په ځانګړو یا مخصوصو پولو کې په اختیار کې لرودی شو.

موږ یواځې هغه پروسې تر څیړنې لاندې نیسو چې د یوې واریابلې یا اووښتونې x په واك کې وي. دا د بل په واك کې د یوې تابع $y=f(x)\ ,x\in D$ له لارې څرګندولی شو.

که y ټول لګښتونه یا مصارف په کوته کړي، نو x باید داسې وټاکل شي چې $f(x)$ مینیمال یا خورا کم شي.

که په څټ یا برعکس y ګټه وي یا ګټور تاثیر وي، نو x باید داسي لاس ته راوړل شي، چې $f(x)$ ماکسیمال یا خورا لوی شي. په قاعده کې اغزمنه یا مؤثره لویه یا په بل عبارت، خپلواك وار یا بل یا اووښتونی x د $-\infty$ او ∞ پولو ترمنځ ازاده ټاکونکی نه ده، بلکه د تخنیك یا تخنیك پوهنې له امله، یواځې په ټاکلو پولو کې:

$$a \le x \le b \qquad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پورې د ګټې مسئلې، په دې پورې اړه لري، چې آیا دا ګټه ده او که لګښت.

$$y = f(x) = \max! \qquad (a \le x \le b \qquad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \le x \le b) \qquad ($$

دا د افراطي ارزښتونو برخې پرابلمونو سره خورا نزدی یا ټینګ تړلی دی. دلته زموږ علاقه په ځانګړې توګه د لاندې پرابلم د کارکولو سره ده:

1- د بلواکیزو $y = f(x)$ ګډو اړیکو راپیداکول، د دندې یا وظیفې ورکولو سره سم(مودالیټي پرابلم).

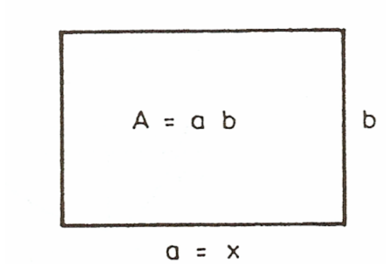
2- د تخنیك پوهنې پولو په پام کې لرل $(*)$ دادې د دوه بیلګو له لارې وښول شي

بیلګه: یو د منډو(پټي ته په کلوکې د اغزو منډو کېښول کیږي، چې مالونه ور وا نه وړي) سیم لرو چې ټول اوږدوالی یې L دی. له دې سیم سره باید یوه مربع سطحه(څلورګوډیزه هواره)، چې د امکان ترحده باید لویه وي، منډو شي. دا وظیفه شوه یا په بل عبارت غوښتنه.

اوس د مودالیټيArt und Weise پرابلم: غوښتنه مو د یوې څلور ضلعي(څلورګوډۍ) پیداکول دي. لکه چې معمول دي، ددې څلورضلعي(څلور ګوډۍ) یو اړخ په a ښایو او بل اړخ یې په b ښایو، د څیرې 14.20 له مخې).

دا په سر کې دوه اغیزې لرونکي یا تاثیر اچونکي لویيa او b دی.

د $L = 2a + 2b \; , \; b = (L/2) - a$

له امله یواځي یوې اغیزمنې(تاثیراچوونکي) لویي ته اړیو د بیلګي په توګه $a = x$، دا ګټه (ستحهA)داسي ده $A = ab = x((L/2) - x)$ دا روښانه ده چې صدق کوي $0 \le x \le L/2$ له دې امله د سترې ګټې پرابلم داسې دی.	

$$y = f(x) = x((L/2)-x)=Max! \qquad (0 < x < L/2)$$

د $f(0) = f(L/2) = 0$ له امله باید ماکس د 0 او L /2 ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره یواځي x = L /4 په پوښتنه کی راځي.

د دې لپاره $y'' = f''(x) = -2 < 0$ دی.

په ریښتیا چې یو ماکس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنیکپوهنیزې پولی 0 او L / 2 رول نه لوبوي. نو صدق کوي. a = b = L /4

بیلګه: یوه بډای چې په یوه ټاکلي وخت کی تولسټ (تولډیری) M تولید کړي او دا ټل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي.
کیدې شي چې سملاسی د دې تولید په تولسټ (تولډیری) M کې تولید کړي، په یوه زخیره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یی سملاسي ورسوي. دلته

د زېمتون(زخیره کونی) لګښتونه راپید کیږي(ددې د زخیرې لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چی تولید په لړه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخیره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر تل تولید په دې ډول تولید باندې درول، لګښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لګښتونه یی بولو.
کومه ډیرى x (ازاده لویه) باید تولید شي، چی د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟
د زخیرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دى ، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنى چي خرځلاو ته چمتو کیږي، په څټ متناسب دى. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتیا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون تل باید تغیر وخوري یعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چیرته چی F ثابت(همغه) یا په کلکه ایښول شوي لګښتونه دي، Lد زخیرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لویه x د تولیددیرى M څخه نه شي سترېدلی ، لوئیدلی یا غټیدلی. له دې امله صدق کوي $0 \leq x \leq M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده :

$$y = f(x) = F + Lx + R/x = Min! \ (0 \leq x \leq M)$$

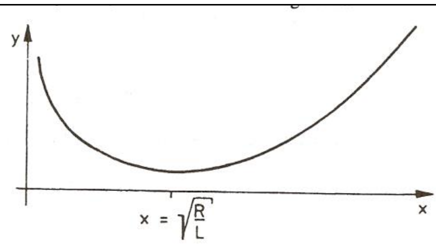
لومړی $f(x)$ دوه واره دیفرنځیال کیږي یا یي دوه واره رابیلیدنه نیول کیږي:

$f'(x) = L - R/x^2$, $f''(x) = 2R/x^3$

د مینیوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$
پس لرو $x = R/L$

د $x \geq 0$ له امله $f''(x) \geq 0$ هم صدق کوي،

پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو.



د کرېږ(منحني) تګلار په شکل کې انځور شوي. څرګنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی.که $x = R/L > M$ وي، نو یو منیموم په څنډه $x = M$ لرو. نامساوت $x = R/L < M$ دا مانا لري $R/L < M^2$ په همدې ډول $R^2 < M^2L$ پس مخ ته لرو: $x = R/L$ د $R < M^2L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2L$ لپاره؛ نو : که د چمتوالي لګښتونه , R زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې تول تولید x = M صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

ټاکلی بیلګه: د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي،
$R = 1000 < M^2L = 108 \cdot 10 = 109$ ستر یا غټ ازاد لګښت دی
$x = R/L = 1000/10 = 100 = 10$ ازاد a دلته 10 یوونه باید ورزیات شي ، چې
10000 یوونه تولید کړي د $M = 10, R = 1000, L = 1$ لپاره صدق کوي
$R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده، یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي.

په تولید کې د مشتق استعمال

فعالیت:
یوه فابریکه x تولید کوي. په دې تولید لګښت کیږي، چې دا د تولید په واک کې دی، چې موږ ورته د لګښت تابع وایو او په $K(x)$ سره یې ښایو.
څنګه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لګښت را ټیټ کړو؟
د لګښت تابع $K(x)$ د تولید سټ(ډېرۍ) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.
که تولید د Δx شاو خوا کې زیات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زیاتیږي.
کمښتویش (تقسیم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځنې لګښت زیاتوالی ښایي، د یوه Δx تولید تغیر سره(منځنی تغیر ارزښت)
د x_0 ځای کې لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لګښت بلل کیږي. دا د پوله ارزښت $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کیږي، داپه دې معني، چې د لګښت د تابع K مشتق.

پېژند: د لګښت تابع $K(x)$ مشتق د مشتفارزښت $K(x)$ په نامه یادوو یا یې پوله لګښت $K'(x)$ هم بولو.

بېلګه: د لګښت تابع $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$ دې ورکړ شوې وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکئ، یو ارزښت جدول د $K(x)$ او $K'(x)$ لپاره وکاږئ او په پروتولاړ سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یې ګراف وکاږئ.
پوله ارزښت د $[0\ ;\ 6] = 1$ لپاره په 1پل(قدو) پراخوالي سره.

ب: د ډېر کم لګښت زیاتوالی و ټاکئ:

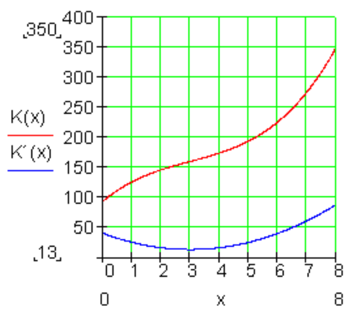
لاندې تابع

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

لرو

مشتف ارزښت

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$



ارزښت جدول

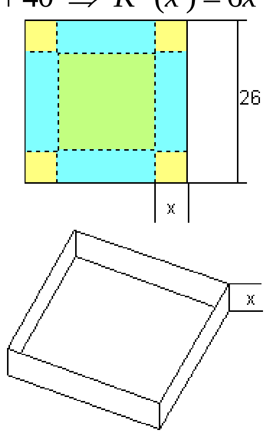
x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

خورا کم د لګښتزیاتوالی(لګښتجګېدنه) د پارابول $K'(x)$ په ککره(څوکه) کې پروت دی، یعني هلته چې تانجنت $K'(x)$ پروت یا افقي دی

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

دد تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره:

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

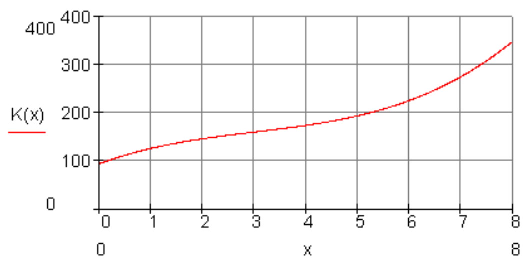


پوښتنې: دې، مربع کارتون(د کلک کاغذ څخه جوړ)څخه، چې 26 سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، چې د x جګوالی لري.

الف: د یوه تابع ترم وټاکئ، چې د بګس حجم(ډکی) v د x په واکوالي یا تابعیت کې

ښايي.

ب: ګراف وکاږئ او په نږدې توګه يې
ماګسيما(خورا جګ) حجم و ټاکئ.

د يوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع) $K(x)$ د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړيکې انځوروي، داسې چې $x=1$ د 100 ناروغانو معنى او $y=1$ دى معنى چې 1000 $\in/\tan$ د روځې زر يورو (1000 $\in/\tan$). $K(x)=x^3-9x^2+40x+94$	

الف: د مصرف تابع په خپله کتابچه کې وليکئ.

ب: د لګښت تابع مشتق د مشتق لګښت (-مصرف) يا دحدمصرف په نامه ياديږي. تاسو د لګښت زياتېدنه د ناروغانو په واکوالي يا تابعيت کې تشريح کړئ.(د $K(x)$ جګېدونه).
$K'(x)$ وټاکئ او ګراف يې په وضعيه سيستم (پروت- ولاړ-سيستم) کې انځور کړئ)

پ: د ناروغانو د کوم تعداد سره د لګښت زياتوالى خورا کم دئ؟ دا قيمتونه وشمېرئ.

ټولګه:

د رول(Rolle) قضيه:
يوه د f تابع دې په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز اينټروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه يوځاي $c\in(a,b)$ شته دى د $f'(x_0)=0$ سره.

د مشتق د منحني ارزښت (وسطي قيمت) قضيه:
که $y=(x)$ تابع په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي

او په واز اینتروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته یوځای $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې خیره په نوټ کې ده،

لرو: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$

پراخه شوې منځقضیه:

که $u=f(x)$ او $v=g(f)$ په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال (a,b) کې مشتقوړ او $g'(x)\neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځای $x_0\in(a,b)$ وجودلري چې لاس ته ترې راځي: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

قضیه:

د $f(x)$ تابع دې په انتروال Iکې مشتقوړ وي.

2. که د $f(x)$ تابع په اینتروال Iکې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\geq 0$ د ټولو $x\in 1$لپاره

- که $f(x)$ په اینتروال کې همغږیزټیټېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\leq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره.
- که $f'(x)\geq 0$ وي، دټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې همغږیز جګېدونکې ده.
- که $f'(x)\leq 0$ وي د ټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال Iکې همغږیز ټیټېدونکې ده.
- که $f'(x)>0$ وي ، د ټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې په کلکه همغږیزجګېدونکې ده.
- که $f'(x)<0$ وي د ټولو $x\in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اینتروال Iکې په کلکه مونوتون ټیټېدونې ده.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x)=0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x)=0$ او $f''(x)>0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

•

که ددې برعکس ولرو: $f'(x)=0$ او $f''(x)<0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x)=0$ وي، او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د $x=x_0$ په چاپېریال کې د $y=f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدی x لپاره باور ولري:
$f(x)\le f(x_0)$ په همدې ډول $f(x)>f(x_0)$

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):
که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y=f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x)=0$

دا جمله موږ ته وایي: چیرته چې $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغي لپاره لرو $f'(x)=0$ ، خو حمتي نه ده چې $y=f(x)$ دې یواکستریموم و لري.

جمله : (د یوه بحراني ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x=x_0$ کې دوه واره مشتقوړ $y=f(x)$ تابع لپاره ولرو: $f''(x)\neq 0$, $f'(x)=0$
نو تابع $y=f(x)$ هلته یو بحراني ټکی لري.

خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x)>0$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x)<0$

پېژند: په یوه چاپېریال $x = x_0$ کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ یو کینې- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کینې- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):
که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ اکستریموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وایي: چېرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره یوازې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره $f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملې استعمال

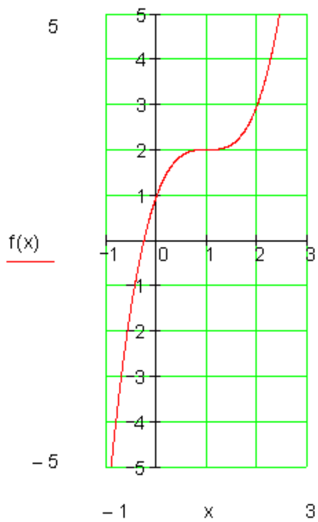
پیزند: د زینټکي(کله کله برندې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پو هیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:

د پرتلې لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري

په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط):
که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

زینټکی(د اس زین) **<u>Der Sattelpunkt</u>**



د انعطاف ټکي يو ځانګړی حالت زينټکی دی. دا د انعطاف ټکی دیَ د صفر جګېدني سره.که د کيڼ لور ورتزدې شو فکر کېږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی
که ځوک د ښي لور ور نزدې شي فکر کوي، چې يو نسبي ټيټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د رياضياتو له لورې ځېړو:
مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = 1$$

د برنولي او د دې لو، پيتال قاعده:
که توابع $u = f(x)$ او $v = g(x)$ د يوه $U(x_0)$ چاپيريال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x) \neq 0$ سره او د ټولو $x \in U(x)$ لپاره او x_0 د f ا و g يوصفرځاي وي،
د $f(x_0) = g(x_0) = 0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,
ترڅو په ښي لور حد شته وي.
په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

د څېرکي تمرينونه:

١ -- د لاندې ماتراشنل توابعو د مونوتوني حالت د د a په واکوالي کې ورکړئ.

$a)\;\; f(x) = \frac{1}{ax + 2}$ $\qquad$ $b)\;\; f(x) = \frac{1}{ax^2 + 1}$

٢ -- و څېړئ، چې ايا لاندې توابع په خپله پېزند ورشو مونو ون او که په کلکه مونوتون دي.

$a)\ f(x)=\frac{e^x}{2+e^x}$ $b)\ f(x)=2x^5-7$

۳ -- لاندې ناراشنل توابع په یوغږیزوالي خویونو وڅېړ.

$a)\ f(x)=e^{x^2}$ $b)\ f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$

٤ -- د لاندې توابعو ټول لوکال افراطي ټکي پیداکړئ.

$a)\ f(x)=e^{-4x^2}$ $b)\ f(x)=(x^2-3)\cdot e^x$

$c)\ f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ $d)\ f(x)=\ln(x^2+1)$

٥ -- د تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دې په دې په لاندې انتروال کې ولټول شي.

$-2\pi \le 2\pi.$

$a)\ f(x)=\sin^2 x$ $b)\ f(x)=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2})$

٦ -- لاندې توابعو ټول لوکال او ګلوبال افراطي ځایونه پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\sqrt{x^2+x}$ $b)\ f(x)=\sqrt{x^2+3}$

$c)\ f(x)=x-\sqrt{x}$ $d)\ f(x)=3+\sqrt[3]{x^2}$

٧ -- لومړی دمطلق ارزښت وشمېرئ او پسې ټول افراطي ارزښتونه وټاکئ.

$a)\ f(x)=|x|+x^2$ $b)\ f(x)=|x^2+2x-8|$

٨ -- د f تابع د $f(x)=\frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}, x\neq 1$ سره د انعطاف ټکي بیداکونه

٩ -- د x1=1 او x2=2 لپاره تابع ارزښتونه وشمېرئ او هم د f تابع جګېدنه د

$f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1.$ سره.

۱۰ -- په صفرځاي کې $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ تابع کومه جگېدنه لري.

۱۱ -- د $f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 0,5x^2 + x - 4$ گراف په کومو ټکو کې جگېدنه لري.؟

۱۲---- د x0=-1 ځاي کې د $f(x) = \dfrac{x^4 - 8x^2 + 16}{x - 1}, \quad (x \neq 1)$ تابع ارزښت او د گراف جگېدنه غواړو پیاکړو

۱۳ -- د لوپیتال قاعدې په مرسته د $x \to \infty$ لپاره د لاندې مات ریښتوني توابعو پوله ارزښتونه وشمرئ.

$$a)\ \ f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1} \qquad b)\ \ f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$$

۱٤ -- د لاندې توابعو لپاره د منحنیو شننیز بحث وکړئ او گرافونه یې و کاږئ.

$$a)\ \ f(x) = -x^3 + x^2 + 4 \qquad b)\ \ f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

$$c)\ \ f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \qquad d)\ \ f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

۱٥ -- د لاندې توابعو لپاره د پوره منحنیو مطالعه وکړئ او گرافونه یې و کاږئ.

$$a)\ \ f(x) = \frac{x}{4} - \frac{2}{x^2} \qquad b)\ \ f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$$

$$c)\ \ f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} \qquad d)\ \ f(x) = \frac{9}{x^2 + 3}$$

۱٦ -- د لاندې توابعو صفرځایونه وشمېرئ.

$a)\ f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3$ $\quad b)\ f(x)=x^4-2x^3-13x^2+14x+24$

$c)\ f(x)=x^3-6x^2+8x$ $\quad d)\ f(x)=x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{12}$

$e)\ f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$ $\quad f)\ f(x)=x^4+6x^3-11x^2-60x+100$

۱۷ -- د دريمې درجې تام راشنل ګراف د x -محور د $x1=-2$, $x2 = 0$ او $x3=4$ په ټکو کې غوڅوي.

د تابع مساوات کوم دي، که سربېره پر دې ګراف د $P(2,-8)$ ټکي څخه هم تېر شي؟

۱۸ -- د يوه څلورمې درجې تام راشنل تابع د x - محور د $x1=0,5$ او $x2=3$ په ټکو کې غوڅوي. د تابع برابرون څنګه دی، که پرسېره پردې ګراف د y - محور د $P(0,9)$ په ټکي کې هم لمس کړي.

۱۹ -- د څلورمې درجې د يو تام راشنل تابع ګراف د وضعيه قيمت سيستم پيل او له $P(\frac{1}{2}/-\frac{15}{8})$. ټکي تېرېږي. د تابع مساوات څنګه دي، که ګراف د x– محور هم د $x1=-1$ سره لمس کړي او په $x2 = 2$ کې غوڅ کړي.

۲۰ -- د لاندې توابعو صفرځايوه پيدا کړئ.

$a)\ f(x)=\frac{x^2+2x-15}{x+4}$ $\quad b)\ f(x)=\frac{x^3+2x^2-4x-8}{x}$

$c)\ f(x)=\frac{x^3-x^2-5x-3}{x-0.5}$ $\quad d)\ f(x)\frac{x^4-x^3+4x^2-4x}{x+5}$

۲۱ -- د يوه مات راشنل f تابع د $f(x)=\frac{x^3+ax^2+bx+c}{x+d}$, ' سره ثابتې a,b,c او d پيداکړئ، که د $x1=-2,x2=-(1:2)$ او سره صفرځايونه پراته وي او تابع په $x=0$ کې يو تشځای ولري.

$f(x) = \frac{(x-1)^3}{x}, \quad (x \neq 0)$

۲۳ -- مات یا کسري راشنلf تابع په x1=1 کې د سره درې ځله صفرځاي لري.

د یوې ساحې د ویش په مرسته وڅېړئ چې په همدې څلورمه(ربع) کې صفرځاي کې ځغلي او که صفرځاي څلورمه بدلوي.

۲٤ -- دا سې یو ترم وټاکئ، کوم چې د لاندې پریودیکي یا تل بېرته راګرځېدوني توابعو صفر ځایونه ورکوي.

$-2\pi \leq x \leq 2\pi$

د شمېرنې له لارې صفرځایونه ونوموئ، چې په انتروال 1 کې پراته وي.

$$a)\quad f(x) = \frac{1}{2}\sin 3x \qquad\qquad b)\quad f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$c)\quad f(x) = 1 - \sin^2 x \qquad\qquad d)\quad f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$$

۲٦ -- ولې لاندې توابع صفرځایونه نه لري؟

$$a)\quad f(x) = \ln(x^2 + 3) \qquad\qquad b)\quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$c)\quad f(x) = \frac{e^x}{x + 1} \qquad\qquad d)\quad f(x) = 1 + \sin^2 x$$

۲۷ -- ولې کېدی شي چې یو تابع ډېر صفرځایونه ولري، مګر د y - محور سره یواځې یو صفرځاي ولري؟

۲۸-- د صفرځایونو د تعداد په هکله څه ویلاي شئ، که د یو f تابع لپاره په تعریفستړ(-ډېرۍ) کې یو f^{-1} معکوس تابع هم شته وي؟

۲۹-- د y - محور سره د لاندې توابعو غوځتکي وشمېرئ.

$a)\ f(x)=x^3+2x-1$ $\qquad b)\ f(x)=(x+1)\cdot\ln(x+1)$

$c)\ f(x)=\dfrac{x^4-3x^2+x}{x+2}$ $\qquad d)\ f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+9}}$

$e)\ f(x)=(x-2)\cdot e^{x-1}$ $\qquad f)\ f(x)=e^{\frac{2}{1-x}}$

۳۰-- د یوه تام راشنل تابع $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ د $a_0\neq 0$ سره کېدی شي د y-محور غوځتکي د ساده لوستلو له لارې و ټاکل شي.

په دې هکله دلایل راوړئ.

۳۱-- د x1=1 او x2=2 لپاره تابع ارزښتونه وشمېرئ او هم د f تابع جګېدنه د $f(x)=x^4-2x^3-x+1.$ سره.

۳۲--په صفرځاي کې $f(x)=x^3-x^2-2x$ تابع کومه جګېدنه لري.

۳۹-- په کومو ځایونو کې لاندې توابع پروت تانجنت لري؟

a) $f(x)=x^2e^{-x}$ $\qquad$ b) $f(x)=\ln(x^2+1)$

۴۰-- د a د کومو ارزښتونو لپاره د $f(x)=(x+a)\cdot e^x$ د ګراف د $x_0=0$ په ځاي کې ۲ جګوالی لري؟

۴۱د لاندې توابعو ټول ځایزې(لوکال) خوراجګ ټکي وښایاست.

$a)\ \ f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ $\quad$ $b)\ \ f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+1$

$c)\ \ f(x)=4x^3-18x^2+15x+7$ $\quad$ $d)\ \ f(x)=x^4-4x^2+5$

$e)\ \ f(x)=x^5-5x^3-20x$ $\quad$ $f)\ \ f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{10}{3}x^3+6x^2-2$

۴۳-- د n-مې درجې يو تام راشنل تابع خورا زيات څومره لوکال (ځايز) افراطي ځايونه لرودی شي؟

۴۴-- ولې د ځګتکي لپاره شرايط و $f''(x)<0$ اړيين نه دي؟

۴۵-- د لاندې توابعو لوکال(ځايز) انحرافي(افراطي) ځايونه وټاکئ.

$a)\ \ f(x)=\frac{2}{3}x^3+4x^2+8x-1$ $\quad$ $b)\ \ f(x)=\frac{1}{3}x^4+1$

$c)\ \ f(x)=\frac{1}{3}x^4-2x^2+\frac{8}{3}x$ $\quad$ $d)\ \ f(x)=x^4-4$

۴۷-- د f تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دې په دې په لاندې انتروال کې ولټول شي.

$-2\pi\le 2\pi.$

$a)\ \ f(x)=\sin^2 x$ $\quad$ $b)\ \ f(x)=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2})$

۴۸-- لاندې توابعو ټول لوکال او ګلوبال افراطي ځايونه پيدا کړئ.

$a)\ \ f(x)=\sqrt{x^2+x}$ $\quad$ $b)\ \ f(x)=\sqrt{x^2+3}$

$c)\ \ f(x)=x-\sqrt{x}$ $\quad$ $d)\ \ f(x)=3+\sqrt[3]{x^2}$

--- د fتابع د $f(x)=\frac{x^2-x-2}{(x-1)^2},x\neq 1$ سره د انعطاف ټکي بيداکړئ.

۵۳-- په انتروال $0 \le x \le 2\prod$ کې د انعطاف ځایونه پیداکړئ.

a) f(x) = x + sinx b) f(x) = 2(1-sin2x)

۵٤-- لاندې توابع په x_0 کې په مشتقوړتیا باندې وڅیړئ.

$$a)\ f(x)=\begin{cases}\cos x & x\le 0\\ x^2+1 & x>0\end{cases},\quad x_0=0$$

$$b)\ f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ x^2 & x\ge 1\end{cases},\quad x_0=1$$

$$c)\ f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ e^{x-1} & x\ge 1\end{cases},\quad x_0=1$$

$$d)\ f(x)=\begin{cases}\ln x & x\le 1\\ x-1 & x>1\end{cases},\quad x_0=1$$

۵۵-- ولې متمادیت د مشتقوړتیا لپاره اړین شرط، مگر مشتقوړوالی د متمادیت لپاره پوره کېدونکی شرط دی؟

۵٦-- په کوم دلیل تام راشنل توابع د $x \in R$ لپاره مشتقوړ دي؟

۵۹-- و څېړۍ، چې ایا لاندې توابع په خپله پېژند ورشو مونو ون او که په کلکه مونوتون دي.

$$a)\ f(x)=\frac{e^x}{2+e^x} \qquad b)\ f(x)=2x^5-7$$

٦۱-- په کومه ورشو کې لاندې تام راشنل توابع یو کېن کږوالی لري او په کون کې ښی کږوالی لري.

$$a)\ f(x)=x^3-6x^2+5x+2 \qquad b)\ f(x)=-2x^3+3x^2-x-4$$

٦۲--د لاندې مات توابعو گرافونه هایپاربول دي. د هاپارابول څانگې کوم کږوالی لري؟

$$a)\quad f(x)=\frac{1}{4x+1} \qquad b)\quad f(x)=3-\frac{3}{x^2}$$

٦٤-- ولې د یوه دریمې درجې تام راشنل تابع گراف په تل تلنه کې یوه بنئ انحنا(کږوالی) نه لري.

٦٥ ولې یو څلورمه درجه تامراشنل تابع د $f(x)=ax^4+dx+e$ سره یو تلتلونی کینه انحنا(کږوالی) او بنئ انحنا لري؟

۱۵۸(۱۰۳): څنگه کېدی شي، چې د یوې f تابع د ۱ . درجې مشتق څخه د د گراف په انحنا قضاوت وکړو؟

۱٦۰(۱۰۵): د لاندې توابعو حالت وڅېړئ، که $|x|\to\infty$ په لور لاړ شي.

$$a)\quad f(x)=x^3-4x^2-4x-5 \qquad b)\quad f(x)=-3x^4+x^3-2x^2+x$$

$$c)\quad f(x)=\frac{1}{3}x^5-x+6 \qquad d)\quad f(x)=-\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$$

$$e)\quad f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2} \qquad f)\quad f(x)=-x^3-x^2-x-\frac{1}{3}$$

۱٦۳(۱۰۸):ولې د $x\to+\infty$ لپاره په ساده ډول د پولې په هکله وړاند وینه نه شي کېداي:

$$a)\quad f(x)=x^3\cdot\frac{1}{\ln x} \qquad b)\quad f(x)=x\cdot e^{-x}$$

۱٦۷(۱۱۲): د جوړه(جفت) جگعدد(اکسپوننت) سره تام رینتونی تابع کوم ډول سیومتري لري؟

۱٦۸(۱۱۳): د ناجوړه(طاق) جگعدد(اکسپوننت) سره یو تام رینتونی تابع ټیک هلته د سر چینې سره ټکی سیومتري دی، چې مطلق ارزښت صفر شي؟

۱۷۱(۱۱٦): لاندې توابع په بنسټ کې لوستل شوي سیومتري خویونه نه لري. وښایئ چې

دا سره له دې هم سيومتريک دي.

$$a)\ f(x)=(x+2)^2 \qquad b)\ f(x)=1+\frac{1}{x}$$

$$c)\ f(x)=-(x+1)^2+3 \qquad d)\ f(x)=2+\frac{1}{x-4}$$

۱۷۲۱۷): لاندې تام ريښتوني اعداد په محدوديت وڅېړئ.

$$a)\ f(x)=x^2-2x+4 \qquad b)\ f(x)=3x^4-4x^3+12x^2-24x$$

$$c)\ f(x)=-(x+3)^2+1 \qquad d)\ f(x)=x^3-2x+1$$

۱۷٦(۱۲۱): د لوپيتال قاعدې په مرسته د $x\to\infty$ لپاره د لاندې مات ريښتوني توابعو پوله ارزښتونه وشمرئ.

$$a)\ f(x)=\frac{2x^3-x+4}{3x^3+1} \qquad b)\ f(x)=\frac{x^2+2x-3}{4x^3+3x^2-2x+5}$$

۱۷۸(۱۲۳): د لاندې توابعو لپاره د x=x0 په ځاي کې د تانجنت مساوات وټاکئ

۱۷۹(۱۲٤): په کومو ټکو کې د لاندې مساواتو لپاره د تانجنت مساوات د ورکړ شوې کربښې سره غبرګ دي؟

۱۸۸(۱۳۳):د لاندې تام ريښتوني توابعو د انعطاف ټکي(اوړونټکي) او د نورمالي مساوات وليکئ.

$$a)\ f(x)=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3} \qquad b)\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+2x+10$$

۱۸۹(۱۳٤) د f_t تابع د انعطاف ټکي مساوات وليکئ.

$$f_t(x)=\frac{4}{3}t^2x^3+3tx^2+3x \quad (t\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$$

۱۹۲(۱۳۷): د لاندې توابعو لپاره د منحنیو شننیز بحث وکړئ او ګرافونه یې و کاږئ.

$$a)\ f(x) = -x^3 + x^2 + 4 \qquad b)\ f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

$$c)\ f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \qquad d)\ f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

په ټوټه ماتونو یا کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرج یې مختلف لاینیز ضریبونه لري.

بنسټ: که د یوه اصلي پولینوموېش $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولینوم $P_n(x)$ په مختلفو کرښیزو(لاینی) ضریبونو $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ ...\ (x - x_n)$ ټوټه کېدونکی وي، نو پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3}\ ...\ \frac{N}{x - x_n}$$

داسې یوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه،، بلل کیږي، چې A,B,C,...,N حقیقي عددونه دي.

فعالیت: په پورته ننوتنه کې و ښایاست، چې دا ټوټه کسرونه څنګه تعریف لري؟

-- د یوه په خوښه پولینوم کسر ټوټه ونه او د تعریف ساحې ورکړئ.

بیلګه: اصلي پولینوم کسر $\dfrac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسر ټوټه کړئ.

حل: د مساوات $x^3-4x^2-7x+10=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمایښت له لارې ځیرو .

د پولینوم ویش(لنډ: پولینومویش) $(x^3-4x^2-7x+10):(x-1)=x^2-3x-10$ مو ټوټه ونې ته بیایي $x^3-4x^2-7x+10=(x^2-3x-10)(x-1)$ مساوات $x^2-3x-10$ اوس $x_2=-2$ او $x_3=5$ حلونه لري.

له دې امله $x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$ دی.

د اصلي کسر $\dfrac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمیرنو قاعدې له مخې کیدی شي ورکړ شوی پولینوم په درې جمعی برخو ټوټه شي، چې مخرجونه یې لاینیز (کرښیز-)ضریبونه دي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولینوم مخرج دی.

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{x^3-4x^2-7x+10}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{x^3-4x^2-7x+10}$$

-- -------

دصورتونو ارزښت A ,B او C ټاکنه د ضریبونو د پرتلې له لارې:

د مساوي مخرجونو کسرکې بسیا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته باید د مساوي توانونو ضریبونه، دا په دې مانا چې د x^2, x او x_0 باید مساوي وي.

$$A + B + C = 4 \qquad \mathrm{I}$$
$$A - 3B - 6C = -1 \qquad \mathrm{II}$$
$$-2A - 10B + 5C = 39 \qquad \mathrm{III}$$

د فاکټور 2 سره د I او II مساوات ضربونه او د هر یوه جمع د III سره پورته درې مساوات سیستم و دوه مساواتسیستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$-8B = -72 \qquad \mathrm{V}$$
$$-16B - 7C = -41 \qquad \mathrm{IV}$$

د مساوات IV.V څخه لرو: $-24B = -72 \Rightarrow B = 3$

د $B = 3$ په V کې ایښوونه: $-16.3 - 7C = -41 \Rightarrow C = -1$

د $B = 3$ او $C = -1$ په I کې ایښوونه: $A + 3 - 1 = 4 \Rightarrow A = 2$

په ټوټه کوني فرمول کې ایښووني سره غوښتونکی ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x-5} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

ازمایښت:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+2) + 3(x-5)(x+2) - 1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)} = \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$$

تمرينونه:

د لاندې اصلي پولينومکسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کړئ.

$$a)\ \frac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x+6}\ ,\ b)\ \frac{x^2+1}{x^3-x}\ ,\ c)\ \frac{4x+10+12}{x^2+6x+8}$$

ب) اصلي پولينوم کسرونه، چې مخرج يې مساوي لاينيز(کربنيز) فاکتورونه لري.

که د يوه اصلي پولينوم $P_n(x)$ مخرج $\frac{P(x)}{P_n(x)}$ د کربنيز فاکتور $x-x_0$ توان $\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^n}+...+\frac{N}{(x-x_0)^n}$ وي، نو ددې کربنيزو فاکتورونو له پاره پولينوم لاندې بڼه لري:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کربنيزو فاکتورونو ټوټه کسرونو په بلده بڼه ورکول کيږي.

بيلګه:

د اصلي پولينوم کسر $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کربنيزو فاکتورونو:

د پولينوم $x^3-4x^2+5x-2=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمايښت له لارې پيدا کيږي.

پولينوم ويش $(x^3-4x^2+4x-2):(x-1)=x^2+3x+2$ مو لاندې ټوټه کونې ته لاربنودوي:

$$x^3-4x^2+4x-2=(x^2+5x-2)(x-1)$$

مساوات $x^2-3x+2=0$ دا $x_2=1$ او $x_3=2$ حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره ډبل حل دی:

$$x^3-4x^2+5x-2)=(x-2)(x-1)^2$$

د ټوټه کسر پيل:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزونې له لارې:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{x^3-4x+5x-2}$$

د A,B او C صورتونو ارزښت د ضريبونو پرتله کونې له لارې.

$$A+B=3 \qquad \mathrm{I}$$
$$-2A-3B+C=-6 \qquad \mathrm{II}$$
$$A+2B-2C=2 \qquad \mathrm{III}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره ګډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$A+B=3 \qquad \mathrm{I}$$
$$-3A-4B=-10 \qquad \mathrm{II}$$

دI ضرب له 4 سره او جمعه يي له IV سره : $A = 2$

د $A = 2$ ايښوونه په I کې: $2 + B = 3 \Rightarrow B = 1$

د $A = 2$ او $B = 1$ ايښونه په III کې: $2 + 2.2 - 2C = 2 \Rightarrow C = 1$

د ټوټه کوني فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

تمرينونه:

د لاندې اصلي پولينوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$$a)\ \frac{3x^2 + 5x + 10}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} \qquad b)\ \frac{3x^2 - 18x + 36}{x^3 - 6x^2 + 9x}$$

$$c)\ \frac{x^2 + 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1} \qquad d)\ -\frac{x^2 + 13x + 10}{x^3 - 5x^2}$$

پ) اصلي پولينوم کسرونه، چې مخرج يې پوره په کرښيزو فاکتورونو نه ټوټه کيږي.

بنسټ:

که د يوه اصلي پولينوم کسر $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ نور په يوه حقيقی ضريب نه ټوټه کيدونکي ضريب ax^2+bx+c مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کيدو کې دې د يو ټوټه کسر $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$ په بڼه دې کينول شي يا راوړل شئ

بیلګه:

د پولینوم کسر $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ له پاره دې په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرج ټوټه کونه په کرښیزو ضریبونو:

لومړی حل دې $x_1=-1$ وي مساوات $x^3+3x^2+6x+4=0$ د ازماېښت له لارې پیدا کیږي.

بولینوم وېش $(x^3+3x^2+6x+4):(x+1)=x^2+2x+4$ مو لاندې ټوټه کونې ته بیایي:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

دا چې مساوات x^2+2x+4 حقیقي حل نه لري، نو د حقیقي اعدادو په ورشو کې نوره ټوټه کونه ناشونې ده.

نو له دې امله پولینوم کسر لاندې بڼه لري:

$$\frac{Ax}{x^2+2x+4}$$

د $\frac{c}{x+1}$ بڼې کسر سره یوځاې مو لاندې ټوټه کسر ټوټه کونې ته بیایي:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمع

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

د ضریبونو A,B,C تاکنه د پرتله کولو له لارې:

$$A+C=5 \qquad \mathrm{I}$$

$$A+B+2C=8 \qquad \mathrm{II}$$

$$B+4C=9 \qquad \mathrm{III}$$

د III کمښت (تفریق) له مساوات II څخه د I سره يې ګډولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اووښتوني يا متحولې لري:

$$A-2C=5 \qquad \mathrm{IV}$$

$$A+C=5 \qquad \mathrm{I}$$

مساواتIII منفي مساواتII :

د C = 2 په Iائښوولو سره :

د C = 2 په III ایښوولو سره:

که دا د ټوټه کوني فرمول کې کېږدو نو د ټوټهکسر ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

تمرینونه:

د لاندې اصلي کسري پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړی:

$$a)\ \frac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5} \qquad b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$$

$$c)\ \frac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x} \qquad d)\ \frac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$$

ج) نا اصلي پولينوم کسرونه:

که د يوه پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د صورت درجه د پولينوم د مخرج له درجې څخه لويه وي، نو دا د پولينوموېش له لارې په ټولناطق کسر او يوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بيلګه:

کسري پولينوم $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ په ټوټه کسري پولينومونو ټوټه کړئ .

د پولينوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو يو نا اصلي پولينومکسر مخ ته پروت دی.

پولينوم وېش:

$$(3x^3-6x^2-20x-1):\ (x^2-2x-8)=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$$

$$\frac{-(3x^3-6x^2-24x)}{4x-1}$$

د پاتې کسر $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$ له پاره د ټوټه کسر ټوټه کونې کارونه (عمليه) مخ ته بيايو.مخرج په کربنيزو ضريبونو ټوټه کړی:

د مساوات $x^2 - 2x - 8 = 0$ له پاره حل $x_1=-2$ او $x_2=4$ لرو.

نو $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$ دی.

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

د ټوټه کسر ټوټه کوني لپاره ځای په ځاي کوو: $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$

د غزوني له لارې د ټوټه کسرونو جمعه کول:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$
$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

د ضریبونو د پرتله کووني په مرسته د A او B ټاکل:

$$A+B=4 \qquad \mathrm{I}$$
$$2A-4B=4 \qquad \mathrm{II}$$

د I ضرب له 2 سره او له II څخه یې تفریق یا کول $6B=9 \Rightarrow B=\frac{3}{2}$

په II کې اېښوول: $2A-4\frac{3}{2}=-1 \Rightarrow A=\frac{5}{2}$

منځنی لاس ته راوړنه $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{(2(x+2)}$

متحول (ښتونکی) په ټوټه کسر ټوټه کونه لاندی بڼه غوره کوي:

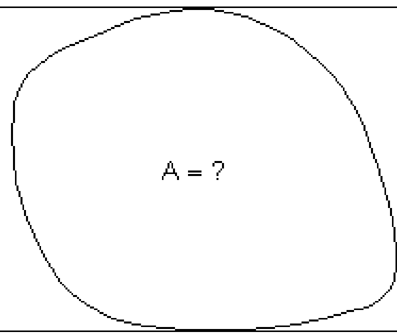
$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

پوښتنې د لاندې پولینومکسرونو په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

$a)\ \frac{3x^2+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8}$ $\qquad$ $b)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$

$c)\ \frac{2x^3+x^2}{x^3-1}$ $\qquad$ $d)\ \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$

د انتیګرالشمیرنې لپاره پیل راوړنې

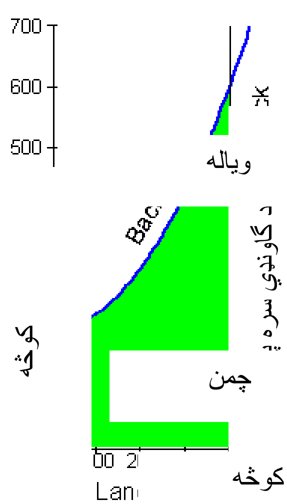


پخوانیو یونانیانو ته دا د منحني څخه رابندې سطحې شمېرلو اصول معلوم وو.
دا دمشتق شمیرنه، چې موږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پیړۍپاي کې) د طبیعي علومو پوهانو د لایبنیڅ او نیوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.

فعالیت:

- د پورته رابندې څېرې د سطحې د شمېرلو له پاره وړاندیزونه وکړئ.
- ایا تاسو د داسې سطحې شمېرلو سره بلد یاست ؟
- ایا تاسو دې ته ورنږدې سطحې مساحت شمېرلی دی؟ او که هو نو هغه ولیکئ.
- داپورته سطحه د وضعیه قیمت سیستم له لارې په څلورو نږدې برابرو برخو وویشئ او د انتیګرالونې په هکله یې فکر وکړئ.

بېلګه



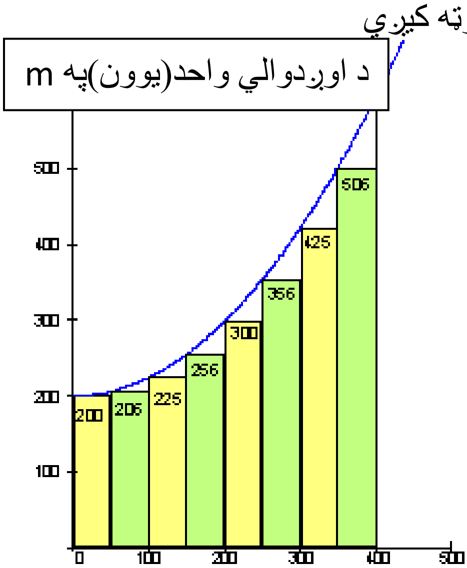
دا څېره شوی چمن خرڅیږي. له پورته لور د ویالې را بند دی او له ښي لور د ګاونډي ځمکه ده او کیڼ لور ته کوڅه او له کښته لور هم د یوې کوڅې را بند دی.

ددی لپاره چې چمن وپلورل شي، باید سطحه وپیژندل شي. د پلورونکی لپاره سطحه باید نږدې پوره مګر هیڅکله کمه ونه شمیرل شي. اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پیسې باید ورکړي، خو هیڅکله ځمکه د اصل څخه زیات ونه شمیېل شو.

وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

ویاله $f(x) = \frac{1}{400}x^2 + 200$ د تابع مساوات لري.

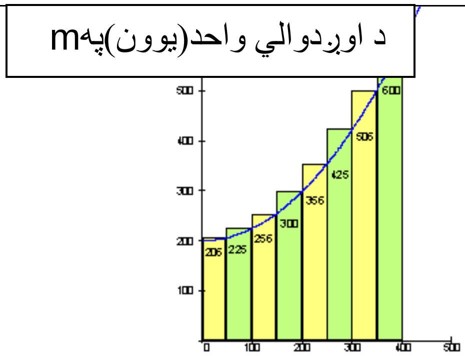
د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

هره ټوټه(مستطیل پټی) 50m سره وره ده او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو، سطحه یو ځای شمیرو. $200 \cdot 50 = 10000$ $206 \cdot 50 = 10300$ $225 \cdot 50 = 11250$ $256 \cdot 50 = 12800$ $300 \cdot 50 = 15000$ $256 \cdot 50 = 12800$ $425 \cdot 50 = 21250$ $506 \cdot 50 = 25300$ $\underline{123700}$	ځمکه په لاندې ډول په اوږدو ټوټو(پټیو) ټوټه کیږي 

د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نزدې $123700\ m^2$ ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره ټوټه(پټی) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یوځای شمیرو.	



$$206 \cdot 50 = 10300$$
$$225 \cdot 50 = 11250$$
$$256 \cdot 50 = 12800$$
$$300 \cdot 50 = 15000$$
$$356 \cdot 50 = 12800$$
$$425 \cdot 50 = 21250$$
$$506 \cdot 50 = 25300$$
$$600 \cdot 50 = 30000$$
$$\underline{143700}$$

د د پلورونکي له پاره د تولې سطحې مساحت نزدې $\boldsymbol{143700\ m^2}$ دی.
اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قېمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعني د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700 + 143700}{2} = 133700\ unt^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انتيګرال برخه (په مخ) کې وشمېرو، چې رېښتونی ارزښت يې $133333.\bar{3}m^2$ دی.
د اخستونکي په بېلګه کې دا ډول شمېرنه **لاندنی** ،،**جمعي جوړول**،، بلل کيږي.
د پلورونکي په بېلګه دا ډول شمېرنه،، **پورتنی جمعي**،، **جوړول** بلل کيږي.
دا د سطحې رېښتونی ارزښت يو چيرته په دا منځ کې پروت دی.
باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې رښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

پوښتنې

د $3x^2+1$ تابع ګراف وکاږئ.

د انتروال $[1,3]$ ترمنځ د تابع سطحه به نخښه کړئ.

د دې ورکړ شوې سطحې پورته جمعه جوړه کړئ

د دې ور کړ شوې سطحې کښته جمعه جوړه کړئ

انتیګرالشمیرنه Integralcalculation

د سطحې تابع له پاره تر مخ راوړنه: دا دانتیګرال هندسي مفهوم هم دئ. په کارتیزي وضعیه قېمت سیستم کې د ګراف په سرچینه کې یوه کربښه رسموو.غواړو سطحه پیداکړو، چې د تابع دګراف او x - محور ترمنځ د x په واکوالي کې پرته وي.

د ریمن (ټاکلی) انتلګرال

دلته دې یوه څېره راوړل (د یوه ډنډ او یا.....)

فعالیت:

- یوه په خوښه هندسي څیره وکاږئ، چې په ترتیب له دريې، پنځو او اوو کربښو رابنده وي. د د ې څیرو سطحه په ورسره بلد ډول وشمیرئ.
- په یوه د وضعیه قیمت سیستم کې یوه کږه(منحني) وکاږئ او وهڅیرئ، چې سطحه یې په ورنزدي ډول پیدا کړئ چې د x محور او منحني ترمنځ پرته وي.

یادونه: انتیگرال څه شی دی؟

آنتیګرال کونه Integration د ورګډېدلو په معنی دی ، لکه چې یو څوک یوې پردۍ ټولنې ته ورګډیږي یعنې ددې پردۍ ټولنې خویونه خپلوي، یعنې دی په دې ټولنه ورزیاتیږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څیړلو ته وړاندې کیږي، چې څنګه د یوې کوچنی درجې تابع و یوه جګ درجې تابع ته ځي.

د انتیګرال هندسي تعریف:

لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:

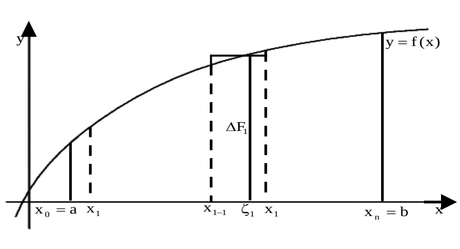
که یوه f تابع ولرو، نو د x مخور او تابع ترمنځ سطحې شمیرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښخ لري.

تحلیلي تعریف:

تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انتروال [a,b] باندې تعریف دی، نو د aڅخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پو هیږو.

په دې برخه کې غواړو، چې د انتګرال کلیمي ته وده ورکړو. د سطحې کچوني یا اندازه کووني څخه کړی شو د انتګرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتګرالنیول د مشتق په څټ یا برعکس کارونه یا عملیه ده.

یو تابع y = f(x) لرو. غواړو ددې تابع د ګراف او د x – محور باندې پرتو ټکو او ترمنځ هواره (سطحه) وشمیرو داسې چې f(x)>0)) وي. (څیره ۱ . ۱)



ددې دندې د حل لپاره د [a,b] اینتروال په n (نه اړینه) برابرو برخو انتروالونو $[x_{i-1}, x_i]$ټوټه کوو.

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} x_i < ... < x_n = b$$
$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اینتروال $[x_{i-1}, x_i]$ کې په خوښه$\xi_l \in [x_{i-1}, x_i]$ ټاکو.

د $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$ تر منځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطیل سطحه (و لاړکونجیزه هواره) ده:

$$\Delta F_i(x) = f(\xi_l).\Delta x_i ;..........................(4,1)$$

د ټولو پورته مستطیل ډوله کوچنیو سطحو د جمعې (زیاتون) له لارې غوښتونکې، نږدې ټوله سطحه لاس ته راځي:

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum f(\xi) \Delta x_i ;..............................(4,2)$$

دا نږدیوالی تر هغې ښه کیږي څومره چې د اینتروال [a , b] ویش نری شي یعني $\max \Delta x \to 0$، هرڅومره چې د زیاتیدونکو شمیر ($n \to \infty$) شي.

که (٤ . ٢) تل همغه پوله ارزښت F ولري، په دې اړه نه چې اینتروال [a , b]څنګه ویشل شوی او $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ څنګه ټاکل شوي، نو f (x) په اینتروال [a,b] کې اینتیګرالوړ دی. دا د بیلګې په توګه د ټولو ټوټه، متمادی او محدودو توابعو y = f (x) حالت دی .

پیژند (تعریف) ٤ . ١ : که لیمیټ

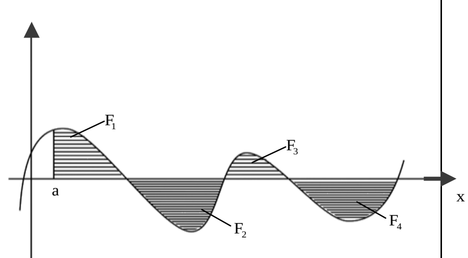
$$\lim_{x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F ; (\max \Delta x \to 0),........(4,3)$$

په اینتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینتیګرال بولو، یا د ریمن سطحه F- Riemann . دلته a د اینتیګرال کیدونکي لاندې(کښته)پوله او b د ایتیګرال کیدونکي پورته پوله بلل کیږي او [a,b] د ایتیګرال کیدونکي اینتروال او f (x) (Integrand) (اینتیګرالیدونکی) او xد اینتیګرال کېدونکې متحول (Integrationsvariable) بلل کیږي

یادونه ۱ : د ایتیګریشن واریابله یا اووښتونی کیدی شي په خپله خوښه په نخښه شي(مخښه یا علامه یی په خوښه وټاکل شي).

موږ لرو: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\ dt = \int\limits_a^b f(u)\,du$

یادونه ۲ : دا پورته تعریف ٤ . ۱ کیدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چیرته چی f (x) 0 < باوري نه وي . که 0 > f (x) وي نو دا ټاکلی اینتیګرال بیا د x -محور تر لاندې منفي هواره لري .

	که د y = f (x) (کږه - لکه په)ش ٤ . ۲) کی - داینتیګرآلونی په اینتروال کی د x-محور پرې کړي نو دا مخامخ فرمول د لاندې سطې سره باور لري : $F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 ...$

د تعریف ٤ . ۱ پسې تړلې دا لاندې جمله لرو:

جمله٤ . ۱ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$$

ددې لپاره چې دا پورته مساوات د c ارزښتونو ته پراخه کړی شو، بايدc له اينتروال [a,b]د باندې نه وي پروت، يعنې ټکي a,b او c په يوه اينتروال کی بايد پراته وي، په هغه کی چې تابع f (x) اينتيګرالوړ دی.

موږ دا لاندې تعريف(پيژند) لرو :

پيژند يا تعريف ٤ . ٢ : f (x) په يوه بند انتروال[a, b] کې اينتيګرالوړ دی، نو باور لري: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

د پيژند تعريف ٤ . ١ له مخی تل باور لري: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

تمرينونه:

د لاندې توابعو ګراف و کاږئ او د ګراف او x محور ترمنځ د سطحې مثبته او منفي لور په نخښه کړئ.

الف : $4x^3 + 5x^2 + x + 6$ ،

ب: $x^2-4x-+16$ ،

پ: $x^4 + 5x^2 - 2x - 7$

بنسټيز- يا لومړنی تابع

$$F'(x) = f(x)$$

فعاليت

- په پورته مساوات کې به F (x) څنګه وليکلاي شو؟

- F (x) نسبت و f (x) ته څه بلل کيږي او په څټ، f (x) د F (x) څه بلل کئږي؟

په پورته دواړو پوښتنو کې فکر وکړي، چې پايلې يې دا لاندې دي:

ددې لپاره چې د مشتقنيولو او اينتيګرال نيولو ترمنځ اړيکی لاس ته راوړو، د لومړنی تابع کلمه په لاندې توګه تعريفوو:

پيژند (تعريف):
تابع y = f (x) دې په يوه واز اينتروال I کی تعريف وي. هر يوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرايط پوره کړي، د f (x) بنسټيز- ، ساده – يا لومړنی تابع بلل کيږي

په ساده توګه ليدل کيږي چې د يوې f (x) تابع لپاره نه يوائې يو بنسټيز تابع F (x) موجود دی، د بيلګي په توګه $F_0(x) = x^2,\ F_1(x) = x^2 + 1,\ F_2(x) = x^2 + 2$ تابع، بلکې په عمومي ډول

F (x) = x² + C، چې دا ټول مساوي مشتقونه f (x) = 2x لري.

د پورته ښوونو پايله، چې څنګه سړی د يوه متمادي تابع f (x) لومړنیتابع پيدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

y = f (x) دې په اينتروال I کی متمادي تابع وي، نو د a ∈ I لپاره

$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ د f (x)، يوه لومړنیتابع ده، دټولو $c \in I$ لپاره .

د f (x) هره بله لومړنی(بنسټیزه) تابع لاندې بڼه لري:

$$F(x)=F_a(x)+C,\ \ C\in R$$

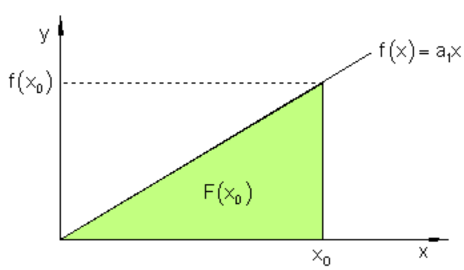
ځواب : ښایو چې Fa (x) دf (x) بنسټیز تابع ده. ددې د ښوولو لپاره ښایو چې د Fa (x)لپاره د پورته پېژند شرایط باور لري. د Fa (x) مشتق د $x\in I$ او $x\neq a$ لپاره په لاندې ډول ده.

$$\begin{aligned}
F_a^{'}(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left[\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^{x} f(t)dt\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\int_a^{x+h} f(t)dt\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot h\cdot f(\xi),\ \ \xi\in[x,x+h]
\end{aligned}$$

د لیمیټ منځ ارزښت جملې له مخې داسې یوه ξ شته دی)
(د متمادیت له امله $(f(\xi)\to f(x))$ $= f(x)$

سطحه او لومړنی تابع:

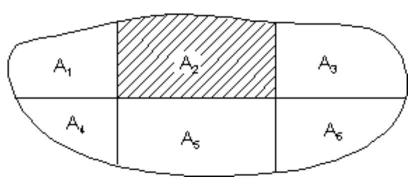
سطحې تابع ته ترمخ راوړنه:

د تابع $f(x)=a_1x$ ګراف په کارتېزي وضعیه سیستم (پروت ولاړسیستم) په سرچینه کې یوه کرښه انځوروي. یو تابع غواړو پیدا کړو، چې د ګراف او x -محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي یا تابعیت کې سطحه په ګوته کوي. دا چې دا جوړه شوې سطحه یو مثلث دی، نو حل یې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته	

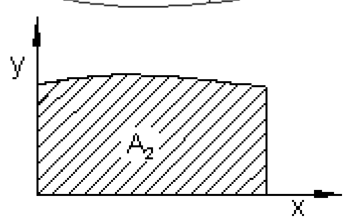
ساده پیدا کیږي: $A=\dfrac{g\cdot h}{2}$ زموږ د مسألې لپاره متحوله داسې تغیروو: $A\to F(x_0);\ g\to x_0;\ h\to f(x_0)=a_1x_0$	$F(x_0)=\dfrac{x_0\cdot f(x_0)}{2}$ د $f(x_0)=a_1x_0$ سره په لاندې ډول دی: $F(x_0)=\dfrac{x_0\cdot a_1x_0}{2}=\dfrac{a_1}{2}x_0^2$

تابع $F(x_0)$ د ګراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي(تابعیت) کې تشریح کوي یا ښايي. موږ دا تابع د **سطحې تابع** بولو.

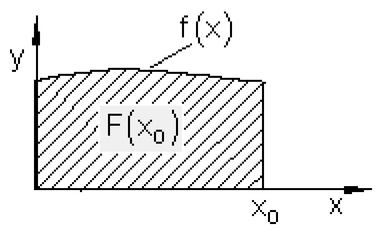
د سطحې پرابلم:



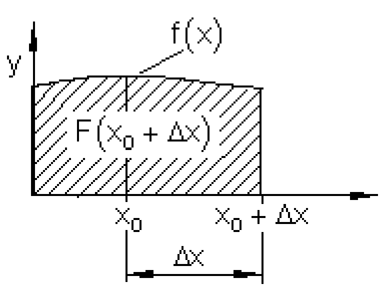
هره له کږوکږښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو(قدمونو)، چې په هغې کې فقط یوه یوه کږه کرښه رامنځ ته کیږي.
نورې ټولې رابندونې سیده کرښیزې دي.
هره یوه د سطحې برخه(د بیلګې په توګه دلته $\mathbf{A_2}$) کېدی شي د وضعیه قیمتونو سیستم کې د یوې سطحی په څېر انځور شي، چې د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.



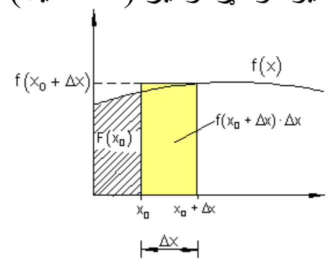
که له کږوکرښو رابند ګراف د f(x) متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې ایا یو تابع شته چې د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظیم کړي، لکه په پیلبیلګه کې؟



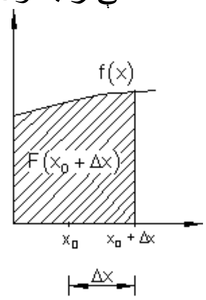
که داسې یو تابعF شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محورارزښت تنظیم وي، نو باید د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$ په سطحه باندې تنظیم کړای شي.



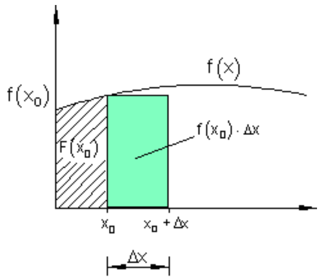
په يوه ولاړګوډيز (مستطيل) کې د سطحې رابندول:



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه د رښتوني سطحې څخه لويه ده



ريښتوني سطحه ده.



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه له ريښتوني سطحې څه کوچنۍ ده.

که د سطحې پټې (يا کوچني مستطيلونه)هرڅومره کوچني شي، په همغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه يې توپير کميږي.
دا اړودوالی د رياضياتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کېدی شي:

$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$

دا مو دی لاندې نابرابرونونويا نامساواتو ته راهڅوي

$$\begin{aligned}
F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x \quad &\le \quad F(x_0+\Delta x) \quad \le \quad F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |F(x_0)\\
\Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x \quad &\le \quad F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \quad \le \quad f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |:\Delta x\\
\Leftrightarrow f(x_0) \quad &\le \quad \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \quad \le \quad f(x_0+\Delta x)
\end{aligned}$$

ليميټ يې نيسو:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) \quad &\le \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad \le \quad \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)\\
f(x_0) \quad &\le \quad F'(x_0) \quad \le \quad f(x_0)\\
f(x_0) \quad &= \quad F'(x_0) \quad = \quad f(x_0)
\end{aligned}$$

نو لرو: $\underline{\underline{F'(x_0)=f(x_0)}}$

دا په دې معنا، چې د سطحې $F(x)$ مشتق د کړې کرښې د تابع ارزښت $f(x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی.

موږ ليکو: $F'(x_0)=\frac{dF(x_0)}{dx}=f(x_0)$ يا $\boxed{F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)}$

که موږ بريالي شو، داسې يو تابع $F(x)$ پيداکړو چې مشتق يې د رابندې کړې $f(x)$تابع وي، نو $F(x)$ د سطحې تابع دی.

که موږ يو تابع د لومړني تابع څخه رابيل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د يوې سطحې تابع پيدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی. سړی کړی شي فورمال ووايي: د يوې سطحې مساحت تابع، چې پيداکړو، دا معنا لري چې ورګډول يا انټېګرالول يې شمېرو.

د يوه ساده توان تابع په بېلګه د احساس له مخې يوه لار پيداکېدی شي، چې دا څنګه ايټېګرالوي.

توانتابع : $f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3\cdot x^{3-1}=3x^2$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په يو کميږي او پوتنځتابع د زاړه پوتنځ سره ضربيږي.

انټيګرالونه (زياتونه ياورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په يو جګيږي اوپوتنځتابع په نوي اګسپوننت وېشل کيږي.

دا همدا اوس ازمايو:

توانتابع: $f(x)=3x^2 \Rightarrow F(x)=\frac{3}{2+1}x^{2+1}=\underline{\underline{x^3}}$

تابع $F(x)$ د $f(x)$ بنسټتابع (لومړنۍ تابع يا ساده تابع) بلل کيږي، ځکه چې $f(x)$ له $F(x)$ څخه لاس ته ارځي يا را پيداکيږي يا راځيږي.

تمرينونه:

– و ښايئ، چې د F او دG توابع د f تابع لومړنۍ تابع وې ده.

$$a)\ F(x)=x^3+x+4 \quad , \quad G(x)=x^3+x+1$$

$$b)\ F(x)=(x-3)^2 \quad , \quad G(x)=x^2-6x+4$$

$$c)\ F(x)=\frac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x)=\frac{3x+5}{x+2}$$

$$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad G(x)=\sin x$$

ناټاکلی انتیګرال

$$\int f\ (x)\,d\ x$$

فعالیتونه:

-- په پورته څیره کې $\int$ په څه مفهوم دی

-- په تیر ه برخه کې مو F(x) د f(x)څه بللی وو او اوس به $F(x)=\int f(x)\,d\,x$ د لومړنئ تابع سره څه توپیر ولري؟

و به ګورو، چې نا ټاکلی انتیګرال د لومړنی تابع لپاره بل نوم دی.

که دیوې ورکړ شوې f(x) تابع F(x) لومړنی تابع، یعني F(x) وپيژنو، نو د یوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د f(x) د ټولو لومړنیو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه یو حقیقي عدد دی).

موږ د f(x) تابع د F(x) لومړنی تابع ټاکنه یا اینتګرلونه هم بولو او ددې له پاره لیکو:

$$\frac{dF}{dx}=f\ (x) \quad\Leftrightarrow\quad dF\,(x)=f\ (x)dx \quad\Leftrightarrow\quad F\,(x)=\int dF\,(x)=\int f\ (x)dx$$

نو لرو : $F(x)=\int f(x)\,d\,x$

دا تراوسه فورمال لیکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.

موږ لومړنی توابع پلټو

بیلګه:

لومړنی تابع F(x) دې پیدا شي، چې مشتق یې f(x) = 2x دی.

قاعده داسې ده $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x\,dx$

موږ ازمایو: $F(x)=x^2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$

$F(x)=x^2+2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$. په ټولیزه توګه باور لري:

$F(x)=x^2+C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x)=2x=f(x)$

دوارہ توابع په ثابت غړي کې يو له بل توپير لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله بايد دې خپلې لار ته تغير ورکړو.

قاعده(لار): باور لري: $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$

د لومړنيو توابعو سټ(ډېرى): بيلګه ښايي، چې د تابع f(x) لپاره نه يواځې يو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې يواځې ثابت عدد کې يو له بل سره توپير لري، چې دا د f(x) د لومړنييو توابعو سټ بولو.

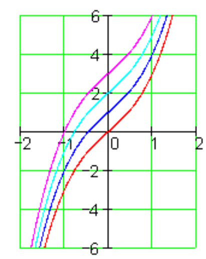
بيلګه: يو لومړنیتابع F(x) دې پيدا شي، چې د هغه مشتق $f(x) = 3x^2 + 2$ وي.

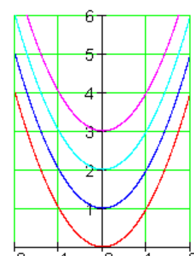
$F(x) = x^3 + 2x + C$ ، ځکه چې $F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x)$

د ټولو لومړنيو توابعو ډېرى دې د منحنيو ډلې په ښېر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې يو له بل توپير لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بيلګې وکتل شي.

$F(x) = x^3 + 2x + C$ $\qquad$ $F(x) = x^2 + C$





تمرينونه:

د لاندې توابعو له پاره لومړني توابع پيدا کړئ او لاس ته راوړني يې د مشتق له لارې وازمايئ.

$a)\ f(x) = x^2$ $\qquad$ $b)\ f(x) = 2x^2$ $\qquad$ $c)\ f(x) = x$

$d)\ f(x) = -2x$ $\qquad$ $e)\ f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad$ $f)\ f(x) = -\frac{1}{4}x$

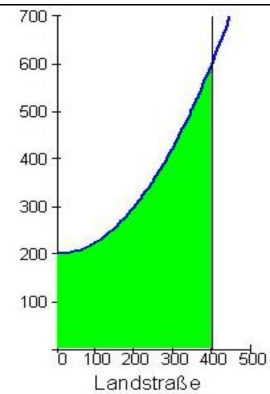
$g)\ f(x) = x^3$ $\qquad$ $h)\ f(x) = 4x^3$ $\qquad$ $i)\ f(x) = 2$

$j)\ f(x) = x + 1$ $\qquad$ $k)\ f(x) = x^2 + x - 3$ $\qquad$ $l)\ f(x) = x^n;\ n \in N$

$m)\ f(x) = x^2$ $\qquad$ $n)\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

د ټاکلي انتيگرال شميرنه

ټاکلی انتيگرال همغه د ريمن انتيگرال دی، چې يوه د تابع د گراف او x محور ترمنځ سطحه شميري.



ټاکلی انتيگرال:

که f يو حقيقي تابع وي، نو د ټاکل انتيگرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتيگرال د پولې(حد) a تر پولې(حد) b يا د a او b حدونو ترمنځ يا انتيگرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې يوه لوريزه سطحه پوهيږو د f گراف لاندې د a او b تر منځ.

فعاليت:

اول: ووايئ چې په پورته انتيگرال کې $f(x)$ څه نوميږي؟

G دې په بند انتروال $a \le x \le b$ کې د $g(x)$ لومړنی انتيگرال وي، د $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ سره، نو

باور لري: $\int_a^t f(t)dt = G(b)$

دا چې د دوه لومړنيو توابعو F او G تر منځ يو ثابت C توپير شته، نو G(x) = F(x) + C باور لري. د x=b لپاره لاسته راوړو: G(b) = F(b) + C

دا چې $G(x) = \int_a^a f(t)dt = 0$ دی او G(a)=F(a)+ C دی، نو C = -F(a) ده.

دا په دې معنا، چې G(b) = F(b) – F(a) همداسې $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتيګرال جمله لاس ته راوړه

يا دا وينا د مشتق - او انتيګرالشمېرنې بنسټيزه جمله بلل کيږي:

تعريف:

f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتيګرال دی : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$

د F(b) – F(a) لپاره زيات وخت $[F(x)]_a^b$ ليکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتيګرال شمېرنه په لومړني انتيګرال بېرته واړوله او د مشتق او انتيګرال تر منځ مو اړيکي رامح ته کې.

بیلګي:

$$a)\ \int_1^2 x^2dx=\left[\frac{x^3}{x}\right]_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

$$b)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx=\int_2^4 x^{-2}dx=\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^4=\left[-\frac{1}{x}\right]_2^4=\frac{1}{4}$$

$$c)\ \int_1^3 \sqrt{x}\,dx=\int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]=\frac{2}{3}[\sqrt{x^3}]_1^3(\sqrt{3^3}-\sqrt{1^3}$$

$$=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)=2(\sqrt{3}-\frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لاندې جملې رښتیا دي:

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\cdot\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx+$$

تکمیلیدونکي بنسټونه:

د F(b) – F(a) له امله د انتګرالوني ثابته c له منځه ځي. له دې امله کولي شو د انتیګرال ثابتي ټاکلو لپاره c=0 ولیکو.

بیلګه :

د ټاکلي انتیګرال $\int_1^3 x^2dx$ ارزښت و ټاکی. د توان قانون له مخې لومړنی تابع

یعنې $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$ پیدا کړی

ښوونه: موږ په دا لاندې ډول ښایو:

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^2}{3}+C\right]_1^3 = F(3)-F(1) = \frac{3^3}{3}+C-\left(\frac{1^3}{3}+C\right) = \frac{27}{3}+C-\frac{1}{3}-C$$

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}$$

اساسات تکمیل کننده:

از د لیل F(b) – F(a) ثابت C انتگرال گرفتن از بین میرود. ازین بابت میتوانیم براي تعین ثابت انتیگرال بنویسیم C =0 .

مثال :

قیمت انتیگرال معین $\int_{-\pi}^{+0,5\pi} \cos x dx$ را تعیین نمایید.

ثبوت: ما قرار زیل ثبوت میکنیم:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x\, dx = [\sin x]_{-\pi}^{0.5\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1-0=1$$

یادونه : دا چې په دې برخه کې یواځې د ټاکلي انتیګرال ارزښت غوښتل شوي دی او نه د یوې منحني لاندې سطحه، نو باید نه دی چې صفرځایونه په پام کې ونیول شي.

عوره یادونه: دادې په یاد وي، چې ناټاکلی انتیګرال تابع ده او ټاکلی انتیګرال یو عدد.

تمرینونه:

د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښتونه وشمیرئ

$$a)\ \int_0^3 4dx \qquad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx \qquad c)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx$$

$$d)\ \int_1^e (2+\frac{1}{x})dx \qquad e)\ \int_{-1}^{0} e^x dx \qquad f)\ \int_0^{\pi} \sin x\, dx$$

$$i)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{\cos^2 x}dx \qquad j)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x}dx \qquad k)\ \int_{-2}^{2} x^3 dx$$

$$l)\ \int_2^6 (1+x)dx \qquad m)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx \qquad n)\ \int_{-2}^{0}\left(\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}\right)dx$$

د ناټکلي انتیګرال څخه و ټاکلي انتیګرال ته

ترمخ راوړنه یا وړاندراوړنه

موږ ولیدل، چې څنګه یو تابع $f(x)$ ته لومړنۍ تابع $F(x)$ منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د یوې ورجمع کوونکي ثابتي کې یو له بل توپیر لري.

فعالیت :

-- د $\int f(x)dx$ او $\int_a^b f(x)dx$ تر منځ توپیر باندې فکر وکړئ؟

-- د $\int f(x)dx$ او $\int_a^b f(x)dx$ پایله څه ده ؟

- دا توپیر یې د یوې بیلګې په بنسټ روښانه کړئ.

بیلګه:

لرو: تابع $f(x)=3x^2+2$ او د دې د لومړنیو توابعو سټ $f(x)=x^3+2x+C$

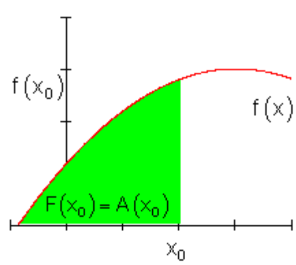
پیژند : د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع f(x) ته ،،ناټاکلی انتیګرال ،، بلل کیږي او ددې له پاره لیکو: $\int f(x)dx=F(x)+C$

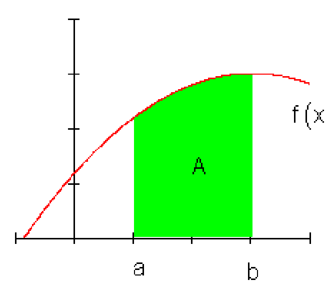
د مشتق- او انتیګرالشمیرنې ترمنځ اړیکې کېدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

جمله(قضیه) : د ناټاکلی انتیګرالشمیرنه د مشتقشمیرنې برعکس انځوروي

$$\frac{d[f(x)]+C}{dx}=[F(x)+C]'=f(x)$$

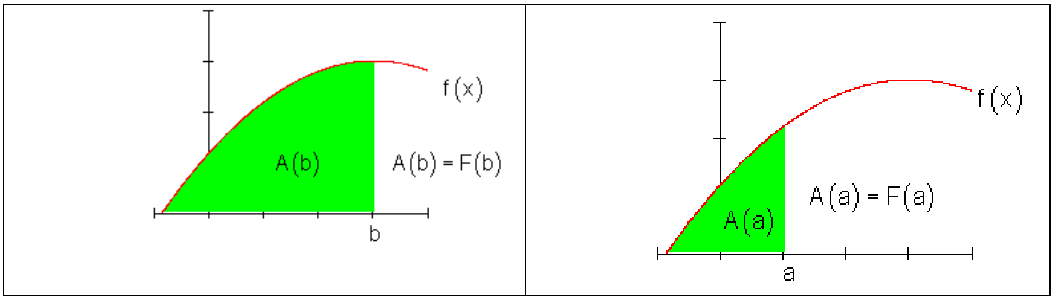
د تابع د ګراف لاندې او د انتروال [a ; b] تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.

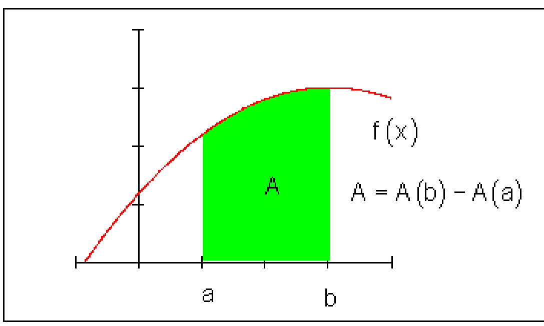




د یوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لاربنوده وي:
د یوې سطحې، چې د یوې په پام کې نیولې f(x) تابع ګراف لاندې ده تر x_0 ځای پورې

او يوې $F'(x)$ تابع، چي د $F(x)$ تابع مشتق د x_0 ځاي د f تابع د تابع ارزښت سره د x_0 په ځاي کي برابر وي، ترمنځ اړيکي شته دی، يعني





د انتروال [a,b] حدونو ترمنځ سطحي پيداکول د تابع د ګراف سطحو د کمښت څخه په ځاي (A(b)) b او سطحي په (A(a)) a ځاي کي ،. يعني $A= A(b) – A(a)$ په همدې توګه $F= F(b) – F(a)$ لاس ته راځي.

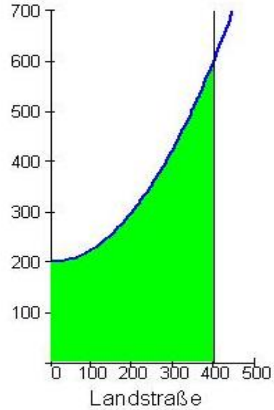
په انتروال [a,b] کي د تابعګراف لاندي سطحه د لومړنيو توابعو تفريق دی:

$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx$$

دا انتيګرال ټاکلی انتيګرال هم بلل کيږي.

جمله :
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چي په پيل بېلګه کي راوړې د چمن سطحه وشمېرو.

ثابته له تفريق سره لرې کيږي. په عمل کي د دې مسآلي د حل لپاره يوه بله لار ګټوره راوستلي يا ګټوره بنوولي:



$$A=\int_0^{400}\left(\frac{1}{400}x^2+200\right)dx=\frac{1}{1200}x^3+200\cdot x\Big|_0^{400}$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400\left[\underline{\frac{1}{1200}0^3+200\cdot 0}\right]$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400=\underline{\underline{133333.\bar{3}}}$$

تمرينونه: لاندې ټاکلي انتيګرالونه وشمېری.

$$\int_1^3 x\,dx\ ,\ \int_1^3 (x^2-1)dx\ ,\ \int_{-2}^2 4dx\ ,\ \int_3^4 dx\ ,$$

$$\int_0^4 (2x-5)dx\ ,\ \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}\left(\frac{1}{2}x^2-4\right)dx$$

د انتیګرالونې قاعدی

د ناټاکلي ایتیګرال انتیګرالونې قاعدې: په لاندې اینتیګریشن قاعدوکي د اینتیګریشن ثابته باندې صرف نظر کیږي‌دلته مساوات تر یوې ورجمع شوې ثابتې C پورې مساوات دی ، په دې معنا چې دمساواتو تر منځ یواځې یوه ثابته کیدی شي زیاته یا کمه وي. دا قاعده کیدی شي چی په ټاکلې انتیګرال کې ښوولې جملی سره سم ټاکلي ایتیګرال ته نقل شي یعني په ټاکلي ایتیګرال استعمال شي . دا قاعدې کیدی شي چی د تیرو درسونو سره سم د دوارو خواو د مشتق نیولو سره وښول شي.

جمله :

د یوې ثابتې سره ضرب : که تابع (f (x په یوه اینتروال کې متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,, \qquad a \in R$$

جمله: د جمعي (تفریق) قاعده که $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په یوه ایتروال کې نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

بیلګې:

لاندې ایتیګرالونه کیدی شي چې د مخ ته تېرو جملو په استعمالیدو او ساده څیره بدلون بیرته په بنستیزو اینتیګرالونو بدلکړای شي

$$a)\quad \int \frac{dx}{3x^4} = \frac{1}{3}\int x^{-4}dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-3} + C = -\frac{1}{9x^3} + C,$$

$$b)\quad \int 3x^2 + 4x - 1)\,dx = 3\int x^2dx + 4\int xdx - \int dx = 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 4\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + C$$
$$= x^3 + 2x^2 - x + C,$$

$$c)\quad \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx - 3\int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int x^{\frac{5}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$= 2\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{7}x^3\cdot\sqrt{x} - 2x\cdot\sqrt{x} + C$$

تمرینونه: د لاندې توابعو انتیګرال ونیسئ:

$$a)\quad \int \frac{2x^{3}-3x}{\sqrt{x}}dx \quad , \; b)\int_{1}^{2}\frac{\sqrt{x}-1}{x}dx$$

د اکسپوننشل توابعو انتیګرالونه

بنسټ :

د طبیعي اکسپوننشل تابع $f(x)=e^{x}$ لپاره لرو:

د تولیز اکسپوننشل تابع $\int e^{x}dx=e^{x}+C$ $(a\in IR^{+}, a\neq 1)$ لپاره لرو:

$$\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C$$

بیلګه : دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع $\int 2^{x-3}dx$ غواړو پیداکړو

بنه بدون:د توان قانون سره سم لرو $2^{x-3}=\frac{2^{x}}{2^{3}}=\frac{1}{8}2^{x}$

د فاکتوروني قانون سره سم لرو: $\int \frac{1}{8}2^{x}dx=\frac{1}{8}\int 2^{x}dx$

انتیګرال یې ونیسئ: $\frac{1}{8}\int 2^{x}dx=\frac{1}{8}\cdot\frac{2^{x}}{\ln 2}+c=\frac{2^{x}}{8\cdot\ln 2}+c=\frac{2^{x-3}}{\ln 2}+c$

تمرینونه:

لاندې انتیګرالونه وشمیرئ

$a)\ \int 3^{x+1}dx$ $\qquad b)\ \int 2^{-x}dx$ $\qquad c)\ \int a^{x+b}dx$

$d)\ \int \frac{1}{a^x}dx$ $\qquad e)\ \int 2^x \cdot 3^x dx$ $\qquad f)\ \int \frac{2^x}{3^x}dx$

$i)\ \int \frac{4^{x+3}}{2^x}dx$ $\qquad j)\ \int \frac{5^x+3^x}{2^x}dx$ $\qquad k)\ \int (1+2^x)dx$

د لوګاریتمي توابعو انتیګرالونه

بنسټ: د طبیعي لوګاریتم تابع $f(x)=\ln x(x\in IR^+)$ لپاره $\int \ln xdx = x\cdot\ln x - x + c$ دی .

د ټولیز لوګاریتم تابع $f(x)=\log_a x\ ,a\in IR^+ ,a\neq 1)$

لپاره $\int \log_a xdx = \frac{x\cdot\ln x - x}{\ln a} + c$ دی.

بیلګه :

ناټکلی انتیګرال $\int \ln 3xdx$ غواړو پیدا کړو:

بڼه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3xdx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3xdx \div \int \ln xdx = x\cdot\ln 3 + x\cdot\ln x - x + c$$

$$\int \ln 3xdx = x\cdot(\ln 3 + \ln x - 1) + c$$

تمرینونه:

دا لاندې ناټاکلي انتېګرالونه پيداکړئ

$a)\ \int \ln 2x^3 dx$ $\qquad$ $b)\ \int \ln \sqrt{x} dx$

$c)\ \int \log \frac{x}{2} dx$ $\qquad$ $d)\ \int 3\log \frac{1}{x} dx$

بنسټيز اينتيګرالونه په يوه جدول کې

د اينتيګرالولو او مشتق نيول د اړيکو په بنسټ کيدی شي چی د بنسټيزو اينتيګرالونو يو جدول ترتيب شي. دا په مشتق جدول کی راوړل شوو بنسټيزو توابعوبرعکس څرګنديږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x) = \int f(x)dx$	نيونه يا فرضيه
1	x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$n \in Z \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
3	x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$	$a \in R \setminus \{-1\},\ x > 0$
4	a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$	$a > 0,\ a \neq 1$
5	e^x	$e^x + C$	
6	$\sin x$	$-\cos x + C$	

7	$\cos x$	$\sin x + C$	
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n \cdot \pi, \quad n \in Z$

بیلګې :

د جدول او تیرو جملو څخه په ګټه لاندې اینتیګرالونه په لاندې ساده ډول په بنسټیز توابعو بدلیدلی شي .

a) $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = -\frac{1}{4} x^{-4} + C$,................................1,

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0)$, ...3,

c) $\int \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}\, dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x > 0)$, ...3,

d) $\int \frac{\sin 2x}{2 \sin x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin x} dx = \int \cos x \, dx = \sin x + C$, ...(4,21) 6,

e) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi)$, (4,11) 9,

f) $\int (1 + \cot^2 x)\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi)$ (4,12) 8,

g) $\int \frac{(1+x)(1-x)}{x - x^3} dx = \int \frac{1-x^2}{x(1-x^2)} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1, \; x \neq 0)$, $Nr.2$,

h) $\int_{-1}^{0} e^x dx = e^x \Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2}$, ...5

د بدلون قانون Substitutionlaw

د ناټاکلي انتيګرال حل د بدلون له لارې(ننوتنه راځي)

$$\int f\ (x)dx\ = \int (x^2 + 4x\ - 5)^n\,dx$$

فعاليت:

- د $\int (x^2 - x)dx$ انتيګرال ونيسی
- د $\int (x^2 + 5x)^3 dx$ انتيګرال نيولو کې فکر وکړئ او که وتونېدی انتيګرال يې ونيسی.

تراوسه پورې مو فقط انتيګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنيو توابعو په انتيګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنيو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنۍ انتېګرالونې سيده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به وليدل شي.

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution) لاتين :د يوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لويه اينسوول (لنډ: بدلون) د فرضيو لاندې چې u = g (x) متمادي او مشتقوړدئ او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f\left[g(x)\right]g'(x)dx = \int f\left[f(u)\right]du$$

حل : د ښي اړخ مشتق د تيرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f\left[g(x)\right]\cdot g'(x),$$

دا د کيڼ اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتيګراليدو لپاره مساعده ده، په کوم کی چې يو فاکتور زنځيري تابع [f [g (x) وي او دا بل فاکتور (ضريب) يی د دننه تابع مشتق g ' (x) وي. سرې د دننه تابع لپاره په دې توګه متحولې بدلوي يا

ځاي په ځاي کويک: $u = g(x)$ مشتق جوړوي په

همدې ډول $du = g'(x)\,dx$

۲۲۶ د بدلون قانون

د بريالي انتيګراليدو وروسته بدلون بيرته راګرځول کيږي.

بيلګه a :

لرو : $I = \int 2\cos(2x-1)dx$. د دې اتنيګرال وشمېرئ.

بدلون يا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\, du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بيلګه b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : , $2x = u-1$ مشتق $2= du/dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\, du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

ومولیدل چی ځنځیري تابع د لايني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اينتيګرال کيدی شي، ځکه چی د لايني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تيرې جملی سره سم د اينتيګرال تر مخ (موخه کيڼ لور ده) ليکل کيږي.

بيلګه:

لرو $I = \sqrt{-3x+5}\ dx$

بدلون: $-3x+5=u$

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

$$I = \int \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) du = -\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9} \cdot \sqrt{(-3x+5)^3} + C.$$

$$b) \quad I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx.$$

$$-2x - 3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \qquad dx = -\frac{1}{2} du,$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4}\int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C.$$

$$c) \quad I = \int \frac{2dx}{x+2}.$$

$$x + 2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C.$$

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کيږي لکه لاندې بلګه:
بيلګه: عواړو د $f(x) = e^x$ مشتق بيدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پيدا کولي شو، يعنې لرو:

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^x dx = e^x + C$$

ګورو، چې $F'(x) = e^x = f(x)$ دی.

که ولرو: $f(x) = e^{2x}$ او د پورته په څېر لاړ شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx \neq e^{2x} + C$$

وي $F(x) = e^{2x} + C$ **دی، که** $F'(x) = 2e^{2x} \neq f(x)$

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

بیلګه:
د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسی

۲۲۸ د بدلون قانون

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

بدلون : $u(x)=2x=u$

جوړ کړئ: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{du}{2}$

$$\int f(x)dx=\int e^{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

نو لرو: $F(x)\int(x)dx=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

ازمايښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بیلګه :
وښايی چې باور لري. $f(x)=(x+1)^2 \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(x+1)^2dx$.

بدلون $u(x)=x+1=u$

جوړ کړی

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=1 \Rightarrow dx=\frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx=\int u^2\frac{du}{1}=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C$$

بیرته بدلون: $\frac{u^3}{3}+C=\frac{(x+1)^3}{3}+C$

نو: $\int(x)dx=\int(x+1)^2dx=\underline{\underline{\frac{(x+1)^2}{3}+C}}$

بیلګه :

و ښايي چې باور لري: $f(x)=(3x+6)^3 \quad \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int (3x+6)^3 dx$
بدلون: $u(x)=3x+6=u$
جوړوو: $u'(x)=\dfrac{du}{dx}=3 \quad \Rightarrow dx=\dfrac{du}{3}$
$\int f(x)dx=\int u^3\dfrac{du}{3}=\dfrac{1}{3}\int u^3du=\dfrac{u^4}{12}+C$
بېرته بدلون: $\dfrac{u^4}{12}(3x+6)^4+C$
نو لرو: $\int (x)dx=\int (3x+6)^3dx=\underline{\underline{\dfrac{1}{12}(3x+6)^4+C}}$

تمرینونه: د $f(x)=x\cdot \ln(x^2)$ تابع انتیګرال وشمیرئ.

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې

$$\int_3^8 (x^2+4x-5)^n dx$$

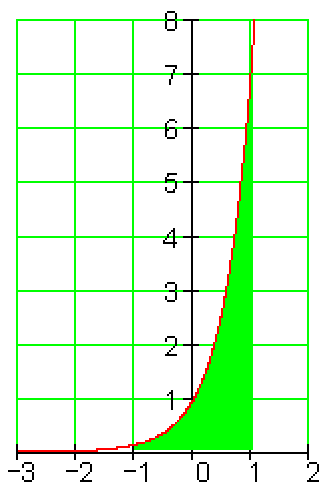
فعالیت:

- د $\int_a^b (x^2-x)dx$ انتیګرال ونیسی
- د $\int_1^5 (x^2+5x)^3dx$ انتیګرال نیولو کې فکر وکړئ او که وتوانېدی انتیګرال یې ونیسی.

ټاکلي انتیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کیږي.

بیلګه : وښایاست: $f(x)=e^{2x} \quad \Rightarrow F(x)=\int_{-1}^{1} e^{2x}dx$ د انتیګرال حل د بدلون له لارې:	

$f(x) := e^{2 \cdot x}$



۱ – بدلون $u(x)=2x$

۲ – د dx په ځای کېږدی

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \quad \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

۳ – د پولو بدلون

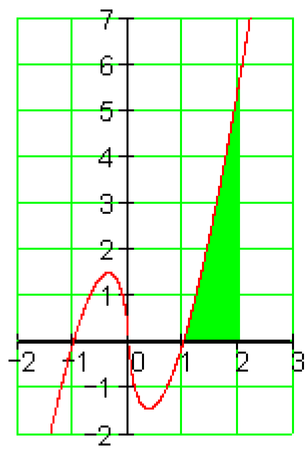
- لاندې پوله $u(-1)=-2$
- پورته پوله

۴ - په انتیګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}du=\frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2}=\frac{1}{2}\left[e^{2}-e^{-2}\right]=\underline{\underline{3.627}}$$

بیلګه :

$f(x) := 2x \cdot \ln\left(x^2\right)$



$$f(x)=2x\cdot\ln(x^{2}) \quad \Rightarrow F(x)=\int_{1}^{2}2x\cdot\ln(x^{2})dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x)=x^{2}$

۲ – د ځای په ځای کونه

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=2x \quad \Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

- لاندې پوله $u(1)=1$
- پورته پوله $u(2)=4$

۴ – په انتیګرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_{1}^{4}2x\cdot\ln(u)\cdot\frac{1}{2x}du=\int_{1}^{4}\ln(u)du=\left[u\cdot\ln(u)-u\right]_{1}^{4}$$

$$=\left[4\cdot\ln(4)-4\right]-\left[1\cdot\ln(1)-1\right]\approx\underline{\underline{2.545}}$$

تمرین: لاندې انتیګرالونه وشمیرئ یا حل کړئ

۱ - $\int \frac{3}{4x+1}\,dx$ ۲ - $\int_0^2 \frac{4}{4-x}\,dx$

۳ - $\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx$ ۴ - $\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx$

۵ - $\int_{-2}^{2} \frac{10}{(x-4)^5}\,dx$ ۶ - $\int_{-2}^{2} e^{1-x}\,dx$

۷ - $\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ ۸ - $\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$

۹ - $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx$ ۱۰ - $\int_0^2 \left(x-1-e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$

ټوټه انتيګرالونه

$$f(x).g(x) = x.\ln(x^2)$$

ټوټه انتيګرالونه، چې ضرب انتيګرالونه هم بلل کيږي، په انتيګرالشميرنه کې د لومړنيو توابعو ټاکلو يا شميرلو لپاره امکان دی. دا کيدی شي د مشتقشميرنې د برعکسکونی په څير وګڼل شي.

فعاليت:

- څه بايد وشي، چې دا پورته په ننوتنه کې تابع انتيګرال نيونه شونې شي؟

___ ايا دا پورته ننوتنه کې راغلې بوښتنه دا تر اوسه ورسره بلدې لارې يعنې د (بنې) بدلون له لارې حل دی؟

د ټوټه انتيګرالونې له پاره لاندې قانون کاروي، چې د متمادي (نه پرېکيدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري.:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

دا قانون ټيک هلته ګټور دی، که د f مشتقکونی سره يو ساده تابع منح ته راځي.

پيل

د ضرب قانون (د ضرب مشتقنيونې) څخه لرو:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتيګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \,\mathrm{d}x$$

يا همدغسې، لکه په زياتو رياضي کتابونو کې چې پيداکيږي.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \,\mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره ګتور دی، چی لومړی ځان په ناټاکلي انتيګرال محدود کړو، چې دا نا اړينو حدونو څخه چې ليد مو رابندوي، ازاد يو.

بيلګه:

د بيلګې په توګه لاندی انتيګرال شميرو.

$$\int x \cdot \ln(x) \,\mathrm{d}x$$

يو ساده انتيګرالبړ تابع $g'(x)$ او همداسی يو ساده مشتقوړ تابع $f(x)$ لټوو. نيسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د ln(x) انتيګرالونه نوې ln(x) راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نيسو او انتيګرالوو، نو لرو:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ او } g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بديل ليکبڼه:
اوس دی u اوv په خوښه توابع وي.U او V دي د u اوV لومړني توابع وي ، او همداسې دي u' او v' دu او v مشتقونه وي.
u تابع ده، چې د مشتق نيولو له پاره لومړيتوب لري، v تابع ده چې د انټيګرالونې له پاره لومړيتوپ لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

د ټوټه انټيګرالونې لار(طريقه)
د ټوټه انټيګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معياري چلول شته.

بيلګه :
کله کله کېيدی شي ګټور وي، چې د مساوات ښۍ لور ته ټوته انټيګرال د څو واره انټيګرالونې وروسته بيرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي يا پخواني کيڼ لور انټيګرال سره يوځای کولی شي.

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

که کيږدو f(x) = cos(x) او g'(x) = sin(x) ، **نو ترې لرو:**

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

که دواړو لورو ته وتون انتيګرال ورزيات کړو، نو راکوي:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که دواړه لورې په 2 وویشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x).\cos(x)dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x)+C$$

بيلګه ۲ :

د ځنو انتيګرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د g'(x) **له پاره يو ترم وټاکو چې په انتيګرالونې کې هيڅ يا کو تغير خوري، لکه د بيلګې په توګه اکسپوننشل تابع او يا مثلثاتي توابع. نو کيدی شي دا بل ترم ،،له منځه يووړل شي،،.**

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

که هر ځل g'(x) = ex کيږدو او د f(x) له پاره، **د انتيګرال لاندې ترم ، نو ترې لاس ته راځي:**

$$\begin{aligned}\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x &= [e^x\cdot(2-x^2)] - \int e^x\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - \int 2\cdot e^x\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - [2\cdot e^x]\\ &= [e^x\cdot(2-x^2+2x-2)]\\ &= [e^x\cdot(2x-x^2)] + C\end{aligned}$$

بيلګه ۳ :

که تر انتيګرال لاندې فقط يو ترم ولرو، چې د هغه لومړنی تابع بې له جدول ارزښت څخه پاي ته نه رسيږي(نه پايول کيږي)(نه ختميږي) کېدی شي کله کله د ورزياتونې له لارې(ناڅرګند شته) ضريب "1" ټوټه انتيګرال شي.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

که $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = 1$ کېږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x &= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln(x) - x + C\end{aligned}$$
.

جمله :

موږ د دې لاندې انتیګرال نیسو:

$$\int x\cos(x)\,dx$$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= \int u\,dv \\ &= uv - \int v\,du \\ &= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx \\ &= x\sin(x) + \cos(x) + C.\end{aligned}$$

C د انتیګرالوني یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انتیګرالوني د استعمال سره د انتیګرالونو لکه $\int x^3 \sin(x)\,dx$

او $\int x^2 e^x\,dx$ کیده شي په همدې لار حل شي:

یوه په زړه پورې بېلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\,dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولري.

دا بيلګه د دوه واره ټوټه انتيګرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\, dx$

$dv = e^x\, dx$ داسې چې $v = e^x$ نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتيګرال حل شي، نو د ټوټه انتيګرالونې قاعده بيا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x);\ du = \cos(x)\, dx$

$v = e^x;\ dv = e^x\, dx$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره يوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتيګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتيګرال که کيڼ لور ته يوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتيګرالونې يوه په خوښه ثابته ده

تمرینونه: دا لاندې انتیګرالونه وشمرئ.

اول: $I = \int x \cos x \, dx$ ، دویم: $I = \int x^2 \cdot e^x \, dx$

دریم: , $I = \int \ln x \, dx$ څلورم $I = \int e^x \cdot \cos x \, dx$:

د ټوټه - ، یاراشنل کسرونو انتیګرال

د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ تابع انتیګرال نیول

فعالیت:

-- د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ انتیګرال نیول یعنې څه ؟

- د پورته تابع تعریف ورشو به نخښه کړئ.

د دې انتیګرال نیول تر واسه په ورسره بلده لار شونی دی، که څنګه؟

بیلګه :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفرځایونو 2- = x1 او 4- = x2 سره د کرښیزو توابعو په ضریبونو تجزیه کیږي:

$$x^2-6x+8 = (x-2)\,(x-4)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه ونې له پاره لاندې توګه پیل کوو:

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج ورغزیږي او لاس ته ترې راځي:

$$\frac{[Ax-4A+Bx-2B]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[A(x-4)+B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[(A+B)x-4A-2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضریبونو د پرتلې ځخه لاس ته راځي، چې د x له مخه یعني کیڼ لور ته (A+B) افاده باید پرته وي
او (-4A-2B) ، چې ۱۲ - ورکوي (وتون مساوات وګورۍ) : 7x-12 = (A+B)x (-4A-2B)

له دې ځخه لاندې مساواتسیستم لاس ته راځي:

7= A+ B

-12=-4A-2B

بدلون یې دA او B پسې : **A= (7-B)**

-12=-4(7-B)-2B

-12=-28 +4B -2B |+28

+16= 2B

B=8

A= **(7-8)= -1**

لیکلی شو :

$$\int\left[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}\right]dx = \int\left[\frac{-1}{(x-2)}\right]dx + \int\left[\frac{8}{(x-4)}\right]dx$$

لومړني تابع جوړه کړی: $f(x)=\frac{1}{x} \rightarrow F(x)=\ln x$. دا چې طبیعي لوګایتم فقط له مثبت اعدادو شمیرل کیږي، نو یواځې ارزښتونه نیسو.

$$\int\left[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}\right]dx = \mathbf{-1\ln|x-2| + 8\ln|x-4| + c}$$

نا اصلي ماتراشنل توابع باید لومړی په تول راشنل تابع او اصلي مات راشنل تابع توټه شي. دا د توټه کسرونو توټه کووني له لارې کیږي یا صورت نیسي.

بیلګه :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx$$

په مخرجکي مربع تابع په صفرځایونو **x1 = -2** او **x2 = +3** کې په کښیزو فاکتورونو تحزیه کیږي :

$$x^2+x-6 = (x-2)\ (x+3)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه کوني له پاره اصلي مخرج غزوو او بیا یې ضربوو :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعي له پاره په اصلي مخرج غزیږي او بیا سره ضربیږي:

$$\frac{[A(x+3)\ +\ B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A\ +\ Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x\ +3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضریبونو پرتلې کوني له امله، چې د x ترمخه یعني کیڼ لور ته له (A+B) افادې څخه باید اوه لاس ته راشي او (+3A-2B) او یا ورته ۱۲ (وتونمساوات وګوری) :

-5x+9 = (A+B)x (+3A-2B)

لاندې مساواتسیستم لاس ته راځي:

-5= A+ B

9= 3A-2B

د A او B پسې یې حل کړی:

9= 3(-5-B)-2B

9=-15 -3B -2B |+15

24=-5B |:(-5)

<u>B=-4.8</u>

<u>A= (-5+4.8)= -0.2</u>

نو لیکلی شو :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \int [\frac{-0.2}{(x-2)}]dx + \int [\frac{-4.8}{(x+6)}]dx$$

لومړی تابع جوړ کړی :

$$F(x) = \ln x \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}$$

دا چې طبیعي لوګاریتم فقط د طبیعي اعدادو شمیرل کیدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نیسو.

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = -0.2\ln|x-2| - 4.8\ln|x+3| + C$$

تمرینونه :

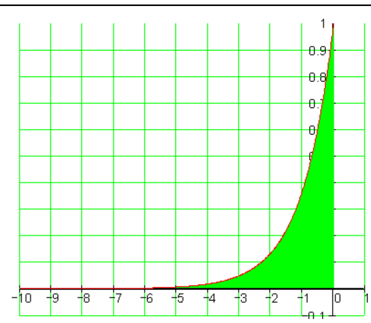
لاندې انتیګرالونه د ټوټه کسرونو ټوټه کوني له طریقې وشمېرئ

$$a)\ \int \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3} \qquad b)\ \int \frac{x-2}{x^2-6x+13} \qquad c)\ \int \frac{x^6}{x^4+3x^2+2}$$

ناپاي انتیګرال

تعریف : که په یوه ټاکلي انتیګرال کې لږ تر لږه یو حد د مثبت یا منفي ناپاي لور ته لاړشي یا د انتیګرال ساحه ناپاي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپاي انتیګرال څخه غږیږو. په یوه مناسب ډول ناپای انتیګرال د عادي انتګیګرال د حد په څیر تعرفیږي. په دې توګه په زړه پورې پوهیدنې لاس ته راځي د بیلګې په توګه، چې څنګه د منفي توان د پوتنځ د ګراف لاندې ناپاي ته رسیدونکې په زړه پورې سطحې. نو باور لري

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = 2 \text{ او } \int_1^{\infty} x^{-2}dx = 1$$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

هم او د دې معکوس انتیګارلونه

او $\int_1^{\infty} x^{-1}dx$

ناپاي ته ځي یا له ټولو حدونو $\int_0^1 x^{-1}dx$

اوړي

یعنې د ناپای په لور ځي..

</td>
</tr>
</table>

د $f(x)=e^x$ ، ګراف او x-محور ترمنځ دې په انتروال $(-\infty;0]$ کې ټوله سطحه و شمیرل شي، یعني

$$A=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$$

تر اوسه د یوه ټاکلي انتیګرال د پورته همداسې کښته(لاندې) پولې عددونه وو.
د انتیګرالونې ورشو یاا ساحه محدود وه.
په دې حالت کې یا اوس د انتېګرالولو ورشو محدوده نه ده،
داسې انتیګرال یو نامحدود انتیګرال بولو، د انتیګرالونی نامحدودې ورشو سره.
انتیګرالونه د دې لاندې بڼو څخه په یوې بڼې منځ ته راځي

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

د دې انتیګرال شمیرنې له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

لومړی د یوه پای انتروال $[a;b]$ له پاره انتیګرال $\int_a^b f(x)\,dx$ شمېرو، بیا پسې د ورته افادو $a\to-\infty$ یا $a\to\infty$ همداسې، $b\to-\infty$. یا $b\to\infty$ له پاره پولې جوړوو.

فورمال دا په لاندې ډول بربښي:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx+\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{x} f(x)\,dx+\lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

زموږ د سطحې شمیرلو له پاره دا په لاندې ډول بربښي:

$$f(x) = e^x$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[e^x\right]_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^0 - e^a\right] = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^0}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^a}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بيلګه:

دا د y په محور هنداره شوې د e تابع دې د $f(x)=e^{-x}$ سره په انتروال $[0,\infty)$ کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-x}\,dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0\,;\,u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b} e^u\,\frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b} e^u\,du = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^u\,du$$

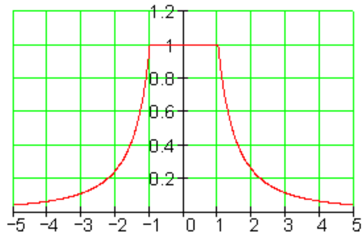
$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^u\right]_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty}\left[e^0 - e^{-b}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} e^0 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

بيلګه:

د يوه يوځاي ايښول شوې يا يو ځاي شوې تابع بيلګه لرو:

د $x<-1$ لپاراه د $-1\le x\ 1$ لپاره د $x > 1$ لپاره	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ 1 \quad f \\ \frac{1}{x^2} \end{cases}$ $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$



د انتيګرال په برخو وېشنه يا ټوټه کونه:

لاندې د انتيګرالونو تمعه دي و شميرل شي.

$$A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

لومړنى اند يا تر مخه فکرکونه:

د تناظر دلايلو له مخې لرو :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

داسې، چې دا انتيګرال بايد فقط يوځل وشميرل شي.

$$\int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = [1]-[-1] = 1+1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{b} = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0} - \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1} = 0-(-1) = \underline{\underline{1}}$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{2} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} = 1+2+1 = \underline{\underline{4}}$$

تمرينونه:

١ -- د $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ تابع انتيګرال وشميرئ، که د ناپاي په لور لاړشي.

٢ – و ښيرئ چې ايا لاندې ناټاکلي انتيګرالونه پوله ارزښت لري؟

a) $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$ b) $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$

c) $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$ d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x}{(x^2+2)^3}\,dx$

٣ – د کومو توانونو p لپاره دا نا ټاکلى انتيګرال $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ پوله ارزښت لري.

٤ – لاندې انتيګرالونه د يوه انتيګرال پولې لپاره تعريف نه دي، و ښيرئ، چې ايا دا

ټاکلی انتیګرال په دې انتروال کې پوله ارزښت لري.

a) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$, $I = [0;1]$ b) $f(x) = \ln x$, $I = [0;1]$

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$, $I = [1;2]$ d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $I = [-1;1]$

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3-8}$, $I = [0;2]$ f) $f(x) = \dfrac{e^x}{1-e^x}$, $I = [0;1]$

ټولګه

د انتیګرال هندسي تعریف

لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:که یوه f تابع ولرو، نو دx محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښ لري.

تحلیلي تعریف:

تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انتروال $[a,b]$ باندې تعریف دی، نو د aڅخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې $x=a$او $x=b$ تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

پیژند (تعریف) ٤ . ١ : لیمیټ

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F;(\max \Delta x \to 0),........(4,3)$$

که په اینتروال $[a , b]$ کې موجود وي، نو دا د $f(x)$ ټاکلی اینتیګرال بولو، یا

F- Riemann (د ریمن سطحه). دلته a د اینتیګراله ونې لاندې(کښته)پوله او د b

ایتیگرالوني پورته پوله بلل کیږي او [a,b] د ایتیگرالوني اینتروال او((Integrand) (
x) fاینتیګرالېدونکی) او xد اینتیګرالوني) Integrationsvariable) متحول بلل کیږي

جمله٤ . ١ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

پیژند یا تعریف ٤ . ٢ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

پیژند تعریف 3.2: تابع y = f (x) دې په یوه واز اینتروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x (بنسټیز - ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

تاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د a تر b او په پولو یا حدونو یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د a او b تر منځ او د f ګراف لاندې.

تعریف:

f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتيگرال دی :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

د F(b) – F(a) لپاره زيات وخت $[F(x)]_a^b$ ليکو. په دې توگه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

جمله:

د يوې ثابتي سره ضرب : که تابع f (x) په يوه اينتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx\,, \qquad a \in R$$

جمله :

د جمعي (تفريق) قاعده که f1 (x) او f 2 (x) په يوه ايتروال کی نه پريکيدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتين :د يوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لويه اينوول ، لنډ: بدلون) د نيونو لاندې چی u = g (x) متمادي اوو مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

د ضربونو انتیګرالونه
که د دوه توابعو د ضرب انتیګرال د ورسره بلدو متودونو یا لارو شمیرو، نو زیات وخت دا ناشوني وي.

$$f(x)=x\cdot\ln\left(x^2\right)\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx=?$$

د ځیرکي تمرینونه:

۱ - لاندې نااصلي پولینومونه دې د یوه تول ګویا عدد پولینومونو او یوه اصلي پولینوم د جمعې په ځېر ولیکل شي.

$$a)\ \frac{x^3+7x^2+9x-5}{x+5} \qquad b)\ \frac{x^4-3x^2+1}{x^2-2}$$

$$c)\ \frac{x^3-2x^2+x-5}{x^3+1} \qquad d)\ \frac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}$$

$$e)\ \frac{x^4+2x^3-6x^2-5x+3}{x-2} \qquad f)\ \frac{x^5-x^4+1}{x^2+2}$$

۲ - لاندې پولینومونه دد جمعې په ځېر ولیکئ

$$a)\ \frac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x-6} \qquad b)\ \frac{x^2+1}{x^3-x}$$

$$c)\ \frac{4x+10}{x^2+6x+8} \qquad d)\ \frac{-3x^2+19x-10}{x^3-2x^2-5x+6}$$

$$e)\ \frac{4x^2+6x-20}{x^3-4x} \qquad f)\ \frac{14}{x^2+20x+51}$$

۳ – د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

$$a)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8} \qquad b)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$$

$$c)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1} \qquad d)\ -\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$$

٤ ـ د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ګونه ورکړئ.

$$a)\ \frac{x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5} \qquad b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$$

$$c)\ \frac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x} \qquad d)\ \frac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$$

٥ ـ د لاندې پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ړرکړئ.

$$a)\ \frac{x^3+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8} \qquad b)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$$

$$c)\ \frac{2x^3+x^2}{x^3-1} \qquad d)\ \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$$

٦ – و ښایئ، چې د F تابع د f تابع لومړنی تابع ده.

$$a)\ f(x)=2x^2+4x-7 \quad , \quad f(x)=4x+4$$

$$b)\ F(x)=(x^2-x)^3 \quad , \quad f(x)=3\cdot(2x-1)\cdot(x^2-x)^2$$

$$c)\ F(x)=\sqrt{2x+1} \quad , \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad f(x)=3x\cdot\cos 3x$$

$$e)\ F(x)=\frac{1}{3}x^3\cdot\ln x-\frac{4}{9}x^3 \quad , \quad f(x)=x^2\cdot(\ln x-1)$$

۷ - وښايئ، چې د F او G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$$a)\ F(x)=x^3+x+4 \quad , \quad G(x)=x^3+x+1$$
$$b)\ F(x)=(x-3)^2 \quad , \quad G(x)=x^2-6x+4$$
$$c)\ F(x)=\frac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x)=\frac{3x+5}{x+2}$$
$$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad G(x)=\sin x$$

۱۳ – لاندې ناټاکلي انتيګرالونه پيداکړئ او ټيکوالی يې و ازمايی.

$a)\ \int x^3dx$ $\quad b)\ \int 7dx$ $\quad c)\ \int xdx$ $\quad d)\ \int (1-x^2)dx$

$e)\ \int (x+\frac{1}{x})dx$ $\quad f)\ \int (e^x+\cos x)dx$ $\quad g)\ \int \frac{1}{\sin^2 x}dx$ $\quad h)\ \int \frac{5}{\cos^2 x}dx$

$i)\ \int udx$ $\quad k)\ \int (2+e^x)dx$ $\quad l)\ \int (1+\ln x)dx$ $\quad m)\ \int (\sqrt{x}+\sin)\,dx$

۱٤ – د لاندې ټاکلو انتيګرالونو ارزښت وشمېرئ

$a)\ \int_0^3 4dx$ $\quad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx$ $\quad c)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e (2+\frac{1}{x})dx$ $\quad e)\ \int_{-1}^0 e^xdx$ $\quad f)\ \int_0^\pi \sin xdx$

$g)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4dx$ $\quad h)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x}dx$ $\quad i)\ \int_{-2}^2 x^3dx$

$j)\ \int_2^6 (1+x)dx$ $\quad k)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx$ $\quad l)\ 0\int_{-2}^2 (\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3})dx$

۱٦ = د لاندې ټاکلو انتيګرالونو ارزښت وشميرئ او ارزښتونه پرتله کړئ.

$$a)\ \int_{-3}^{1} 3dx und -\int_{-3}^{1} 3dx \qquad b)\ \int_{0}^{1}(1+e^{x})dx \quad \wedge \quad -\int_{0}^{1}(1+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{-\pi}^{0}\sin x dx \quad \wedge \quad -\int_{-\pi}^{0}\sin x dx$$

---

۱۷ ــ هر دوه انتیګرالونه د یوه انتیګرال سره انځور کړئ.

$$a)\ \int_{0}^{0.5\pi}\cos x dx+\int_{0.5\pi}^{\pi}\cos x dx \qquad b)\ \int_{-1}^{0}(x+e^{x})dx+\int_{0}^{1}(x+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{2}^{3}3x^{2}dx+\int_{5}^{3}3x^{2}dx \qquad d)\ \int_{-2}^{1}(2+x)dx-\int_{4}^{1}(2+x)dx$$

- د لاندې ټاکلو انتیګرالونو لپاره ارزښت تخمین کړئ.

$$a)\ \int_{-4}^{-2}e^{x+3} \qquad b)\ \int_{0}^{8}\sqrt{1+x}\,dx$$

$$c)\ \int_{3}^{5}2^{4-x}dx \qquad d)\ \int_{0}^{0.5\pi}\sin^{2}xdx$$

۱۹ ــ د کومو x ارزښتونو لپاره لاندې انتیګرالونه ورکړشوي ارزښتونه لري؟

$$a)\ \int_{1}^{x}5t^{4}dt\ ,\quad la(x)=31 \qquad b)\ \int_{0}^{x}e^{t}dt\ ,\quad la(x)=e-1$$

۲۰ - لاندې انتیګراند توابع ته د انتیګرال توابع وټاکئ.

$$a)\ f(x)=x^{2}\ ,\ a=3 \qquad b)\ f(x)=2+e^{x}\ ,\ a=0$$

$$c)\ f(x)\frac{1}{\cos^{2}x}\ ,\ a=0 \qquad d)\ f(x)=2\ ,\ a\in IR$$

۲۱ - د لومړني انتیګرال په استعمال سره لاندې انتیګرالونه وشمېرئ.

$$d)\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx, \quad e)\ \int \sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx, \quad f)\ \int(\sqrt[3]{x^4}+1)\ dx,$$

$$g)\ \int \sqrt[3]{x^{-3}}dx, \quad h)\ \int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}dx, \quad i)\ \int 3\cdot 2^x\,dx,$$

$$j)\ \int \frac{1}{2\sin^2 x}dx, \quad k)\ \int \frac{1}{3+3x^2}dx, \quad l)\ \int \cos\varphi\cdot s\quad ds,$$

$$m)\ \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}, \quad n)\ \int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\,dt, \quad o)\ \int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}du.$$

۲۲ - د بيرته په بنسټيز اينتيګرال بدلون وروسته يي اينتيګرال ونيسئ:

$$a)\ \int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}dx, \quad b)\ \int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}dx, \quad c)\ \int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx,$$

$$d)\ \int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\ dx, \quad e)\ \int(-2-2\tan^2 x)dx, \quad f)\ \int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}dt.$$

۲۳-- لاندې ټاکلي اينتيګرالونه وشميرئ:

$$a)\ \int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx, \quad b)\ \int_\pi^{2\pi} \cos x\ dx, \quad c)\ 2\int_2^3 dt,$$

$$d)\ \int_0^\pi \cos\pi\sin x\ dx, \quad e)\ \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}, \quad f)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx,$$

$$g)\ \int_{x_1}^{x_2}(2x-1)\,dx, \quad h)\ \int_0^8\left(\sqrt[3]{x^2+2\sqrt{x}}\right)dx, \quad i)\ \int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\ dt,$$

$$j)\ \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}du, \quad k)\ \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}dx, \quad l)\ \int_a^b a^x\ dx.$$

۲٤- د بدلون يا سيتيچيوشن قاعدې استعمال له لارې يي اينتيگرال وشميري:

$$a)\ \int \sqrt[3]{2x-7}\,dx,\quad b)\ \int \frac{dx}{-x+1},\quad c)\ \int 2^{3x+6}\,dx,$$

$$d)\ \int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx,\ e)\ \int \frac{dx}{1+(x+1)^2},\ f)\ \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}dt,$$

$$g)\ \int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx,\quad h)\ \int \frac{3xdx}{-x^2+1},\quad i)\ \int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx,$$

$$a)\ \int \frac{dx}{1+4x^2},\quad b)\ \int \frac{dx}{2+4x^2},\quad c)\ \int \frac{dx}{3+5x^2}.$$

$$d)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}},\quad e)\ \int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}},\quad f)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},$$

$$g)\ \int \frac{dx}{x^2-10x+34},\quad h)\ \int \frac{dx}{3x^2-6x+30},\quad i)\ \int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}.$$

۲٥- د تر زيرنيوني فورمبدلون وروسته او په بنستيز اينتيگرال 10 او 11 د بدلون له لارې يي اينتيگرال وشيمرئ

۲٦- لاندې ټاکلی اینتیگرالونه وشميري:

$$a)\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(4x-1)^3},\quad b)\ \int_{-1}^{0}e^{3x}dx,\quad c)\ \int_{0}^{2}2^{2x+1}dx,$$

$$d)\ \int_{-1}^{1}\frac{4x^2}{(3+2x^3)^5},\quad e)\ \int_{e}^{e^x}\frac{1}{x}\ln\times dx,\quad f)\ \int_{2}^{4}\frac{e^t}{1+e^t}dt,$$

$$g)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{\sin x}\cos x\ dx,\quad h)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{2+8x^2},\quad i)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cdot\cos x\ dx.$$

۲۷-- لاندې ټوټه اينتيگرالونه اينتيگرال کړي:

$$a)\ \int 0,2x \cdot \sin x\ dx, \qquad b)\ \int 4x^3 \cdot \ln x\ dx, \qquad c)\ \int \cos^2 x\ dx$$
$$d)\ \int \cos x \cdot \sin x\ dx \qquad e)\ \int x^2 \cdot \sin x\ dx \qquad f)\ \int x \cdot (\cos x + 1)\ dx$$
$$g)\ \int x^3 \cdot e^x\ dx, \qquad h)\ \int x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x\ dx,$$

د اینتیګرال شمیرنی استعمال

د سطحومساحت، چې د f(x) دګراف او x محور ترمنځ پرتې وي.

په څلورم څپرکي کی وویل شو چی ټاکلی اینتیګرال $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$ د سطحې مساحتA ښايي ، چې له منحنيy=f(x)، د x- محور y=(0) او د کرښیx=a اوx=b له خوا رابند وي. موږ له دې څخه مخ ته تللي یو چې y=f(x) د اینتیګرال اینتروال په دننه کی دx-محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدی شي د محور کښته لور ته هم لاړ شي..

فعالیت:

--د یوې په خوښه تابع د منحني یا کرښې او د x محور ترمنځ او یا د دوه توابعو د سطحې شمیرلو لپاره وړاندیزونه وکړئ.

- دا هم په پام کې د شمرلو لپاره په پام کې ونیسئ، که منحني یا د تابه کرښه د x د محور لاندې لور ته پراته وي.

- یوه په خوښه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکاږئ او د تابع انتیګرال د x محور په ټاکلو پولو کې وشمېرئ.

- یوه په خوښه تابع ولیکئ، چې د انتروال په دننه کې د x محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم و کاږئ او دا تابع به کومه محنخښه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د محنښې په ورکولو کې دا بیا وڅېړئ، چې ولې؟

یادونه: که موږ د سطحې مساحت شمېرلو کې هغه عدد ولیکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونیول شي، چې د سطحې واحد(یوون) ور سره شته دی. که دا ورسره لیکل شوی نه وي، خو باید تل په پام کې وي.
دا پورته فعالیتونه مو دې لاندې بېلګو ته رابولي:

بېلګه ۵ . ۱ :
د سطحې مساحت د

$$y=\frac{1}{2}x^2-1\ ,\ y=0\ ,\ x_1=2\ ,\ x_2=4$$

ترمنځ په لاندې ډول دی(مخامخ شېره)

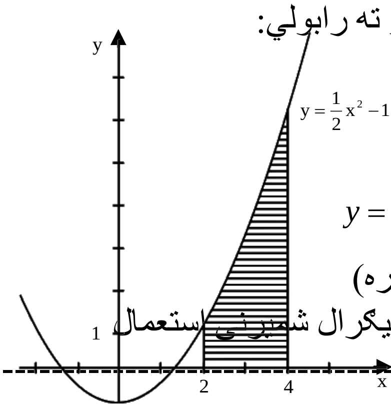


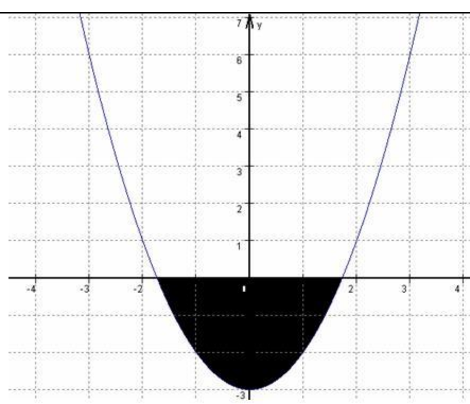
Bild 21,3

$$A=\int_2^4(\frac{1}{2}x^2-1)dx=(\frac{1}{6}x^3-x)\Big|_2^4$$

$$=\frac{1}{6}.64-4-\frac{1}{6}.8+2$$

$$=\frac{22}{3}$$

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.



بdلګه ۵ . ۲ :

د $f(x)=x^2-3$ ګراف د x محور سره یوه

سطحه رابندوي.د ګراف او x محور ترمنځ

د ټولې سطحې مساحت وشمېرئ.

	تګلار:

۱ - د دې لپاره چې دا مسئله راته ښه روښانه شوي وي، نو دا پورته رسم کاږو.

۲ - د دې لپاره چې د انتیګرال حدونه لاس ته اروړی شو، باید صفرځایونه وشمېرو.

$$0 = x^2 - 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

---

۳ – اوس د سطحې د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انتیګرال لیکو.

د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر $\sqrt{3}$ پورې انتیګرال شمېرو او نتیجه یې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2-3)dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2)dx - 3\cdot\int_0^{\sqrt{3}} 1dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\sqrt{3}} - 3.x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 3\cdot\sqrt{3} = |-2\cdot\sqrt{3}|$$
$$A = 2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3} = 4\cdot\sqrt{3}$$

بیلګه ۵ ، ۲:

د سطحې مساحت د $x_2 = 2$, $x_1 = -1$, $y = 0$, $y = \frac{1}{2}x^3 - 5$ ترمنځ دی: (لاندې څېره)

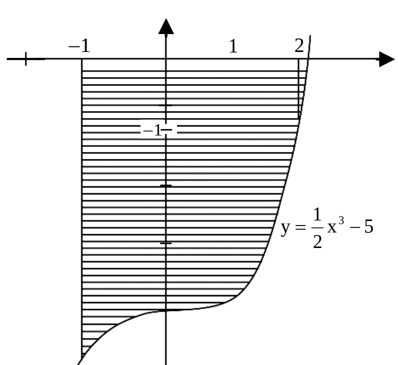
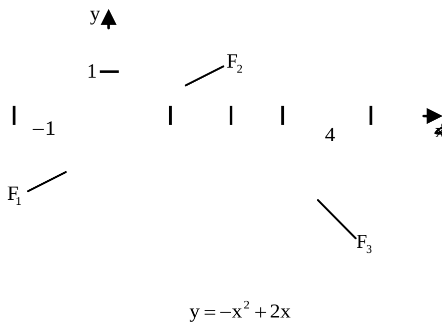


Bild 21,4

$$A = \left|\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^3 - 5)dx\right|$$
$$= -\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^3 - 5)dx$$
$$= (-\frac{1}{8}x^4 + 5x)\Big|_{-1}^{2}$$
$$= (-2 + 10 + 1/8 + 5) = \frac{105}{8}$$

بیلګه ۵ . ۳:



د لاندې پولو $x_1=-1$ تر
$x_2=4$ اودمنحني $y=-x^2+2x$ او $y=0$
ترمنځد x- محور پورته او کښته پرته سطحه
(په مخامخ څېره کي نښانه شوې ده) دې
وشميرل شي

حل : د تابع $y=-x^2+2x$, د $x1=0$
صفرځايونو $x_1=0$ او $x_2=2$ تر منځ پرته

غوښتونکي سطحه دx-محور پورته، نوره
کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$A=-F_1+F_2-F_3$$
$$=\int_{-1}^{0}(-x^2+2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx-\int_{2}^{4}(-x^2+2x)dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{0}^{2}-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{2}^{4}=\frac{28}{3}$$

د لاندې پولو $x=-1$ تر $x=4$ او د کږې $y=-x^2+2x$

او $y=0$ ترمنځ (د $x-$ محور پورته او کښته)

تمرينونه

: - په ورکړ شوي انتروال کي د گراف او x محور ترمنځ سطحه وشمېرئ.

$a)\ f(x)=x-2 \quad , \quad x\in[-2;3]$

$b)\ f(x)=x^2-x-x \quad , \quad x\in[1;5]$

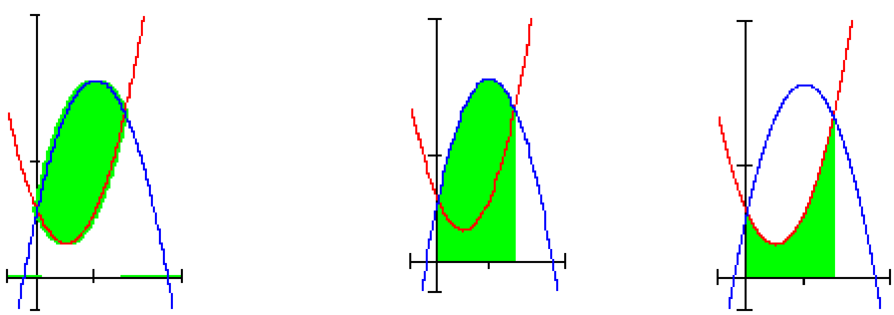
$c)\ f(x)=x^2-8x+12 \quad , \quad x\in[0;8]$

له دوه گرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شميرنه

فعالیت:

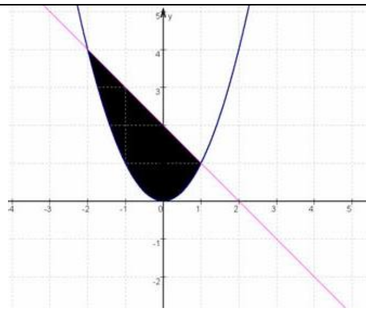
- که داسې یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنګه وشمیرو؟

په څنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمیرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



A A$_1$ A$_2$

$$A = A_1 - A_2$$

بيلگه ٥ . ٥ : د $f(x) = x^2$ او $g(x) = -x+2$ دوه توابعو ترمنځ رابند د سطحي مساحت غواړو وشمېرو: د تگلارې لار: دلته هم يو شکل يا گراف رسموو، چې دا حالت راته روښانه شي.	

---

۲ - د دې لپاره چې انتيگرال وشمېرو، د گرافونو دقاطع ټکي ټاکو.

$$x^2 = -x+2$$

$$x^2+x-2= 0$$

فرمول - P;q

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -2$$

۳ – په ساده توگه ليدل کيږي. $\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

پس باور لري

$$A = \int_{1}^{-2} (-x+2)dx - \int_{1}^{-2} x^2 dx =$$
$$-1\cdot\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-6-\left(\frac{(-2)^3}{3}\right)-\frac{1}{3}$$
$$=-1,5-6++=-4.5$$
$$A=4,5$$

جمله :

که د ټولو x لپاره ، د $a<x<b$ سره $f(x)>g(x)$ وي، دا په دې معنا چې د f ګراف د a او b تر منځ دg پورته لور ته ځغلي, نو د دواړو ګرافونو په انټروال کې رابندې سطحې مساحت لپاره باروړ لري.

$$A=\int_{a}^{b} (f(x)-g(x))\,dx$$

بېلګه ۵ . ٦ :

د توابعو$f(x) = x^2 -2x +2$ او $g(x) = -x^2+4x +2$ګرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پيداکړو.
د دواړو ګرافونو د x–ارزښتونو غوښتکي(د تقاطع ټکي) د اينتيګرال حدونه جوړوي.

د غوښتکو د x - کواورديناتو ټاکل:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 -2x+2 = -x^2 +4x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x =0 \quad \Leftrightarrow$$

$x_1 = 0$ او $x_2 = 3$ د اينتېګرال ليميټونه يا پولې دي.

د اينتګرال جوړونه:

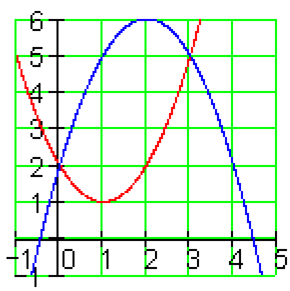
$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

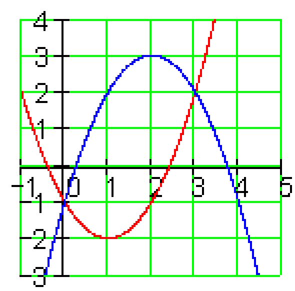
$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$
$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه باید تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت څخه کووچنی ارزښت باید کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

لکه چې پوهيږو، د يوې سطحې مختخښه ددي په واک کې ده، چې ايا سطحه د **x** -محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ ځيږو، چی ايا دا تاثيرات په پورتنی بيلګه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د **y** -محور په دري واحدونو(يوونونو) کښته لورته بيايو او سطحې نوې شميرو.





که د ليد له مخې قضاوت وکړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوځتکي هم او له دې سره د انتيګرال حدونه بې تغيره پاتيږي.

$$g(x) = -x^2 + 4x - 1 \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 - 2x - 1$$

ځای په ځای کونه:

$$A=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$$

د $f(x)-g(x)=2x^2-6x$ سره کيږي:

$$A=\int_0^3 (2x^2-3x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9=18-27=\underline{\underline{-9}}$$

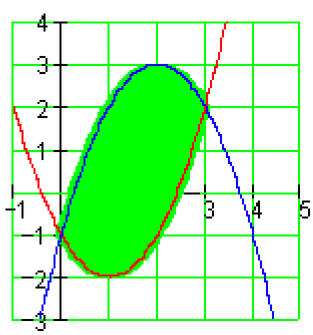
دا چې د دوه منحنيو ترمنځ سطحه فزيکي سطحه ښايي، بايد لاس ته راوړنه يو مثبت عدد وي.

دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A=\left|\int_0^3 (2x^2-6x)\,dx=\left|\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3\right|=\left|\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9\right|=\left|18-27\right|=\left|-9\right|=\underline{\underline{9}}\right|$$

د دې متود تولېزه ونه(عموميت) :

د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه:



که يوه سطحه د يوې پورته او يوې کښته منحني ښخه رابنده وي، چې تابع$f(x)$ او تابع $g(x)$ پورې اړه و لري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شمېرل کيږي.

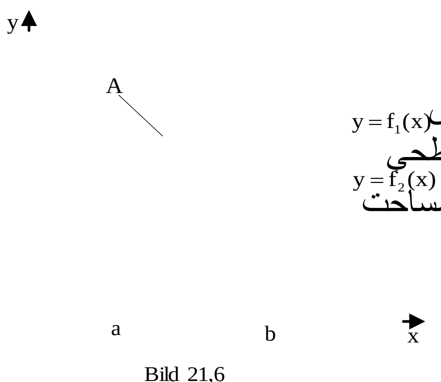
$$A=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$$

د انتيګرالوني حدونه a اوb دx – محور د

دواړو ګرافونو د وضعیه قېمتونو غوځېکي دي،

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې
له$x=a$ تر $x=b$ پورېاو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$



اینتیګرالوړاو $f_1(x)<f_2(x)$
په$[a,b]$ اینتروال کی (ش ۱ . ۶) داسی لاس
ته راوړل کیږي چی دتابع $y=f_2(x)$ لاندې سطحې
مساحت څخه د $y=f_1(x)$ تابع لاندې سطحې مساحت
کم کړئ.

$$A=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx$$

Bild 21,6

سړی په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواك
چی $f_1(x)$او $f_2(x)$په اینتروال $[a,b]$ کومه یوه مخنخښه ځان ته غوره کوي باوري دی.

بیلګه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشمیرو $y=x^2-1$ او $y=-x^2+1$)

حل : د ایتیګرال پولې(حدونه) د افقي(پراته) محور غوځېکي(د تقاطع ټکي) دي

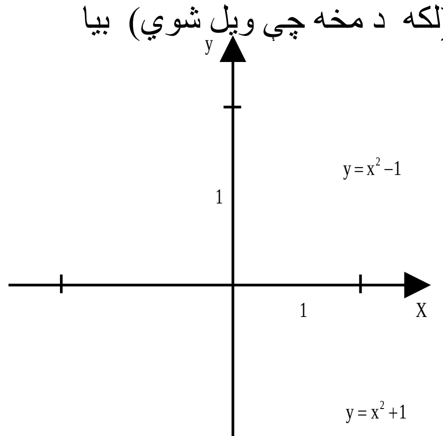
$x^2-1=-x^2+1$

$2x^2=2$

$x^2=1$ $\quad x_1-a=1,\ x_2=b=-1$

د اینتیګرلولو په اینتروال [1 , 1 -] کی لرو$-x^2+1>x^2-1$

(که چیرې په اینتروال [a,b] او په (۲ . ۱) کی $f2(x)>f1(x)$ په نظر کي ونه نیول
شي، نو د څرګند اینتیګرال به منفی شي او سړی(لکه د مخه چې ویل شوي) بیا
داینتیګرال مطلقه ارزښت نیسي. له دې امله لرو:



$$A = \int_{-1}^{1}\left[-x^2+1-(x^2-1)\right]dx$$
$$= \int_{-1}^{1}(-2x^2+2)\,dx$$
$$= (-\frac{2}{3}x^3+2x)\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

بیلګه ۵ . ۸ :

د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ
سطحه شمیرل کیږي.

$y=(x-1)^2, y=-4x+4, y=4$

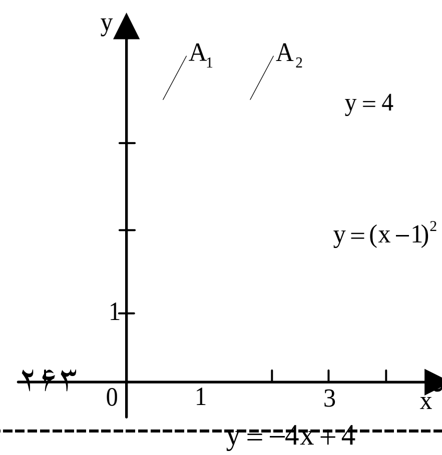


Bild 21.8

حل : دا د شمیرلو سطحه، د منحنیو ترمنځ د دوه سطحو A1 او A2 له یوځاي کیدو ښخه لاس ته راځي.

A1د منحنیو y=4 او y=-4x+4 ترمنځ پروت دی. د اینتیګرال پولی(- حدونه) د لومړي د دوه کرښو ښخه رابند

کواور ینات(x –محور) غوښتکی دی،
د y=4 او y=-4x+4 ترمنځ.

لرو $4=-4x+4,\ \ x_1=0$ په همدې ډول د

بني غوښتکي لومړی وضعیه ارزښت (کواور دینات)

د $y=-4x+4$ او $y=(x-1)^2$ ترمنځ

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}=\frac{1^2+1-2}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

$$x_{2,3}=-1\pm 2,\ x_3=1.$$

گورو چیA_2د $y=-4$ او $y=(x-1)^2$ تر
منځ پرته ده ، د اینتیگرال حدونه(پولی)$x_1=1$ او د لومړي
وضعیه قیمت د ښي غوڅتکي د $y=4$ او $y=(x-1)^2$.

غوښتوني سطحه داسې ده:

$$A=A_1+A_2=\int_0^1\left[4-(-4x+4)\right]dx+\int_0^1\left[4-(x-1)^2\right]dx$$

$$=\int_0^1 4x\,dx+\int_0^1(-x^2+2x+3)\,dx=2x^2\Big|_0^1+(1/3x^3+x+3x)\Big|_4^3=7\frac{1}{3}$$

تمرینونه:

د لاندې توابعو ترمنځ سطحې و شمېرئ

---

1) $f(x)=x^2-x-6\ ;\quad g(x)=4x-10$

2) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+3\ ;\quad g(x)=3x$

3) $f(x)=0.75(x^2-5x+4)\ ;\quad g(x)=0.75x+3$,

4) $f(x)=x^2+5x+\frac{9}{4}\ ;\quad g(x)=-\frac{3}{2}x-\frac{21}{4}$

5) $f(x)=(x-2)^2-4\ ;\quad g(x)=x-1$

6) $f(x)=x^2-4x+1\ ;\quad g(x)=-x^2+2x+1$

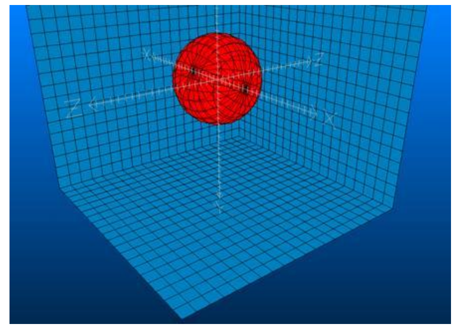
7) $f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+3\ ;\quad g(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$

8) $f(x)=x^2+3x\ ;\quad g(x)=0.5x^2$

9) $f(x)0.5x^2-2x-1\ ;\quad g(x)=2x^2+2x+1$

10) $f(x)=-0.5x^2+2\ ;\quad g(x)=-\frac{1}{9}(x-1)^2+1$

د څرخيدونکو بدنونو(جسمونو) ډکي(حجم)



فعاليت:

- په ورسره بلده توګه د مستطيل حجم وليکئ.

- د کرې، استوانې او د مخروط حجومونه، چې تراوسه مو لوستلي و ليکئ.

يادونه: دا دې تل په پام کې ونيول شي: که د انتيګرال شمېرنې له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د يوه جسم حجم ښايي. موږ ددې لپاره ليکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

څرخيدونکي تنونه:

څرخېدونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په يوه څرخېدونکي محور باندې د يوې کرښې يا منحني څرخېدنې له لارې منځ ته راځي. کرښه يا منحني په يوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحني محور نه غوڅوي، اويا زيات له زياته يې ممکن لمس کړي. چې غوره بېلګې به يې په لاندې کې و څېړل شي.

د xپه محور څرخيدنه(څرخون)

لکه د مخه مو چې وویل، حجم هم یو انتیګرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که یوه تابع د X په محور و څرخول شي.

د یوه څرخېدونکي جسم (بدن یا تن) حجم(ډکی)

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انټروال [a,b] کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ترمنځ جوړېږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخېدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انټروال دf تابع ګراف د y محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغرېز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغرېز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2 \ dy$$

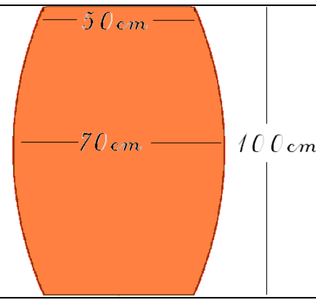
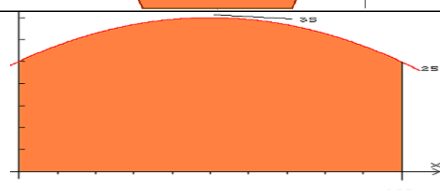
که دلته $x = f^{-1}(y)$ بدل کړو، نو د x په محور په لاندې توګه حجم لاس ته راوړو:

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot \left| f'(x) \right| dx$$

د f' مطلق ارزښت او د انتیګرال په حدونو کې خورا جګ – ټیټ(min/max) توابع یو مثبت انتیګرال تظمینوي.

د سطحي په ځرخولو(د y په محور)، چې د f تابع له ګراف او دوا‌ړو کرښو $x = a$ او $x = b$ څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f))^2 \, dx$$

	د یوه مرتبان حجم: د یوه مرتبان حجم غواړو پیدا کړو چې جګوالی یې 1 متر، وړانګه یې 25 سنتي متره په پاي او 35 سانتیمتره په منځ کې ده.
	که مرتبان په 90° درجو و ځرخول شي، نو د مربع پارابول بڼه غوره کوي. د ژی تابع باید کښته لور ته واز پارابول وي، لکه دلته په شکل کې.

حل: د پارابول د تابع لیکښه کېدی شي ساده په ککرتکي یا راس باندې ولیکل شي.

تولیز باور لري:

$f(x) - a \cdot (x-5)^2 + 3.5$ (dm ارزښت په دیسیمتر)

په ځرګند دول 5- د رآس راکښنه د x+ په لور ورکوي او 3,5 د y+ په لور. د غزونې ضریب a په لور اړین دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضریب a نه شته. که په فرمول کې یو معلوم ټکی کیږدو، کېدی شي a وشمېرل شي. دا ټکی (0/2,5) دی.

$$f(x) = -a \cdot (x-5)^2 + 3.5$$

د x ارزښت ځا په ځاي کوونو لرو $-a\cdot(0-5)^2+3.5$

له دې امله a دی: $\frac{2.5-3.5}{25}=-0.04$

او مساوات پوره بلل کیږي. $f(x)=-0.04\cdot(x-5)^2+3.5$

د ساده والي لپاره د رآس ټکي فرمول په نورمال یا عمودي فورم بدلوو:

$$f(x)=-0.04x^2+0.4x+2.5$$

تابع مربع کړئ $f(x)=(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2$

نو دی $f(x)=0.0016x^2-0.032x^3-0.04x^2+2x+6.25$

لومړنۍ تابع $f(x)=\frac{0.0016x^2}{5}\cdot x^5-\frac{0.032x^3}{4}\cdot\frac{-0.04x^2}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x$

د حجم شمیرلو لپاره ټاکلی انتیگرال دی؛

$$\pi\cdot\int_0^{10}(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2\,dx=\pi\cdot\int_0^{10}(-0.0016x^2-0.032x^3-2x+6.25)\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{0.0016}{5}\cdot10^5-\frac{0.032}{4}\cdot x^4-\frac{0.04}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x\right]_0^{10}$$

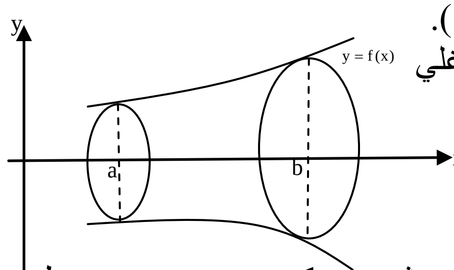
$$=\pi\left[32-80-13\frac{1}{3}+100+62.5\right]_0^{10}$$

$$=\pi\cdot101.167$$

د حجم واحدونه (یوونونه یا یووالي)

دا چې موږ له پیله په دیځیمتر شمېرنه کړې، نو طبعآ دا په لیتر شمېرل کیږي.

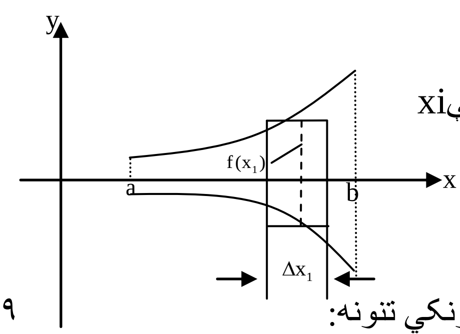
$= 317.824\ liter$



د تابع y=f(x),y=0,x=a,x=b ترمنځ
سطحه چی دx-محورباندې څرخي(ش ۵ . ۹).
دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوې راغلي
دڅرخیدونکي بدن ډکی(حجم) دی.
لاندېجمله باوري ده

جمله ۵ . ۸) د څرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینتروال[a,b]کي دی y=f(x) متمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چی د سطحو
y=f(x),y=0,x=a,x=bترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$$



ښونه: V د توتو(استوانو)د جمعي له
لارې چی وړانګه يې(f(xi، جګوالی يېxi
د i=1,2,3,...n لپاره لری.
(ش: 5. 10) دi-مې توتې
(سلیندر ډکی(حجم) دی.
څرخېدونکي تنونه:

$$\Delta_i V = \pi \cdot \left[f(x_i) \right]^2 \cdot \Delta x_i$$

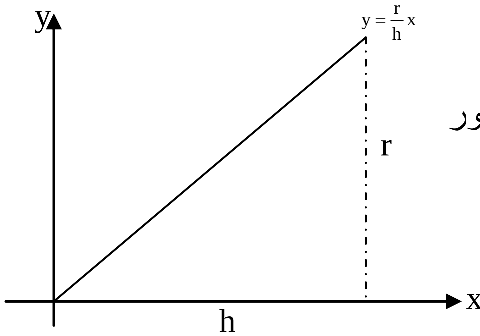
د ټولو n سلیندرونو یا توتو زیاتون

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(x_i) \right]^2 \cdot \Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه) n->oe, xi->0 (د بنسټ اینتیګرال د تعریف سره سم

$V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$ حجم (ډکی) راکوي.

بيلګه ۵ . ۹ :) دمخروط يا کيګل ډکی
(حجم) د $y=\frac{r}{h}x$ کربښي (د سرچيني
تيره کربښه د $\frac{r}{h}$ جګوالي سره) او دx- محور
$(y=0)$ د حدونو $x=0$ تر $x=h$
پورې(ش . ۱۱)



$$V=\pi\cdot\int_0^h\left[\frac{r}{h}x\right]^2dx=\pi\cdot\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

دا له بنسټيزې شمېرنې(د اساساتو) څخه معلومه نتيجه ده.

بيلګه ۵ . ۱۰:

د $y=\sqrt{2x},\ y=0,\ x=0,\ x=3$

ترمنځ د x-محور باندې ځرخېدلو جوړ(توليد) شوی جسم ځرخېدلی پارابولوييد دی (ځ ۵ ړ ۱۲)

y

$y=\sqrt{2x}$

1

0 1 3 x

$$V=\pi\cdot\int_0^3\left[\sqrt{2x}\right]^2dx$$
$$=2\pi\cdot\int_0^3 xdx$$
$$=2\pi\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3=9\pi.$$

د ارښيمدس جمله Archimedischer Satz

د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$$V_{\text{توته(استوانه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$$

د 1886 زکښ يوه درسي کتاب څخه

Figur 120.

Die Volumen der drei Körper verhalten sich wie die Ausdrücke unter 1), 2) und 3); man hat somit die Proportion:

$$\textit{Cyl.} : \textit{Kugel} : \textit{Kegel} = 2r^3\pi : \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2r^3\pi}{3}$$

oder: $\;,, : ,, : ,, = 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3}$

$\;,, : ,, : ,, = 6 : 4 : 2$

$\;,, : ,, : ,, = 3 : 2 : 1$

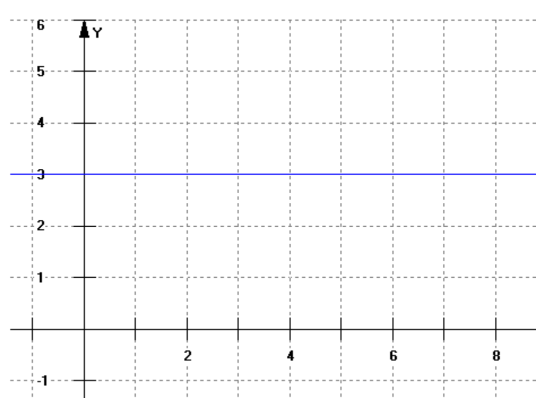
***Archimedes* war der erste, welcher dieses Verhältnis fand, daher heisst der hierdurch ausgedrückte Satz der Archimedische Satz.**

د پورته الماني پښتو:ارښيمېډس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب يې ومونده، له دې امله دا دلته راغلې جمله د ارښيمېډس جلې په نامه نومول شوې.

د څرخېدونکي بدن(حسم) حجم.

بيلگه ٥ . ١١:

استوانه(توته):



استوانه د x په محور د $f(x) = c$ يوې ثابتې تابع(په دې حالت کې $f(x) = 3$ دی) د څرخېدو څخه لاس ته راځي.

د يوې استوانې حجم (ډکې) شمېرنه:

اوس دې په $[0;5]$ انتروال کې د توتې حجم وشمېرل شي. د استوانې د حجم د شمېرلو لپاره $V = \pi r^2 \cdot h$ عمومي فرمول دی. په دې حالت کې $r=3$ او $h=5$ دی. د x هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

لومړی له هرڅه غواړو $V = \pi r^2 \cdot h$ څخه فقط $r^2 \cdot h$ تر څېړنې لاندې و نيسو او غواړو يوه لار پيدا کړو ، چې د هغې لارې د انتيګرال په مرسته حجم وشمېرلای شو. د سطحې مساحت د لاندې انتيګرال په مرسته وشمېرل شو :

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x)\, dx$$

که د دې ناپاې ډېرو مستطيلونو(د $f(x)$ د مربع مساحت ا د صفر په لور ځغېلېدونکې پنډوالي dx سره) انتيګرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 \left[f(x)\right]^2 dx$$

دا په دې معنا چې دا انتيګرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتنې فرمول څخه دد يوې توتې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راکوي:

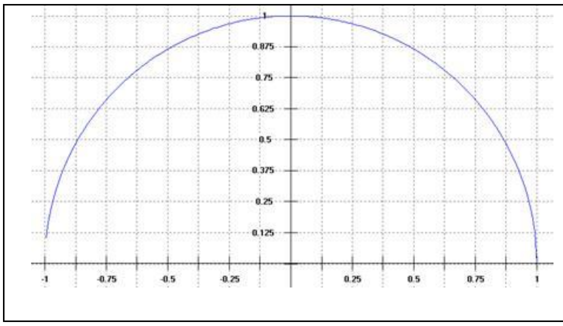
$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 \left[f(x)\right]^2 dx$$

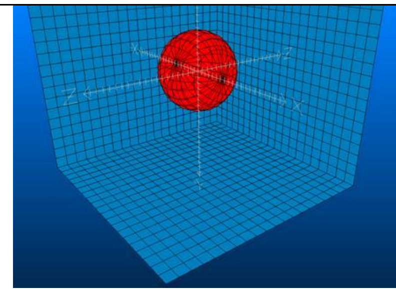
د دې ورکړ شوې استوانې د حجم شمېرنه:

$$\pi \int_0^5 \left[f(x)\right]^2 dx = \pi \int_0^5 \left[9(x)\right]_0^5 = \pi \int_0^5 \left[45 - 0\right]_0^5 = 45\pi$$

د پرتلې لپاره: $\pi r^2 h = 45\pi$

کره (غونډاری یا غونډوسکه):





فعالیت:

- د کري حجم بې له انتیگراله ولیکئ.

- د توتي حجم ولیکئ

- د مخروط حجم ولیکئ.

ځرخېدونکي تنونه: ٢٧٣

-دا درېواړه سره پرتله کړئ.

د x په محور د $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ تابع ځرخېدني ځخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتني شکل.

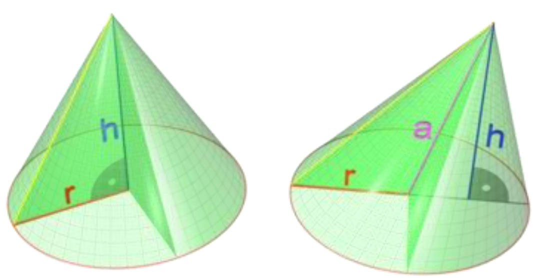
دا تابع هم کېدی شي په گردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکي تابع يي $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتیگرلولو له لارې دې بیا حجم وشمېرل شي.

په دې بېلگه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځاي ځخه و صفر ځاي ته د x په محور باندې

د $f(x)=\sqrt{1^2-x^2}$ تابع څرخېدنو له لارې منځ ته راځي ، يعني په انتروال [-1;1] کې .

$$\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

Kegel (Geometrie) مخروط



دا هم ممکن ده، چې يو مخروط د يوه منظمn زاويو (اړخيزې(کونجيز) څخه رابندې بنسټيزې سطحې(د n لپاره چې ناپا ي ته ځي) اهرام ته ور نژدې کړو.

د مخروط حجم:

د انتيگرال په مرسته د يوه مستقيم مخروط د حجم د شمېرلو يوه بله
۲۷۴

څرخېدونکي تنونه: ----------------------------

مرستندويه لار. يو د کارتيزي وضعيه ارزښت (قيمت) سيستم په کار اچول کيږي، د هغه سره چې د مخروط څوکه په سرچينه (0|0) او منځ ټکی په ټکي (h|0)کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنيو توتو(استوانو) رايوځاي شوی په پام کې ونيسو، چې جگوالی(پنډوالی) يې dx دی. داچې د داسې يوې توتې يا استوانې گردې ټوټې(کترې) واټن د مخروط له څوکې د وضعيه قېمت سيستم په x سره ور کړ شوی دی، د وړانگې جملې له مخې(دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوې باور لري.

د يوه ناپاي کوچنی توتې(استوانې) وړانگه:

$$r\,z\,(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

د یوې ناپاي کوچنی توتې(استوتنې) حجم:

$$(\frac{r}{h} \cdot x)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2\, dx$$

دټول څرخېدوني مخروط د ټولو داسې کوچنیو توتو حجم دی. د شمېرلو لپاره یې ټاکلی انتیګرال جوړوو، د انتیګرال حدونو 0 او h سره:

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه (f(x) = 0,5x څرخېدنه(څرخون) ده.

د یوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولاي چې لومړی د کوادر حجم وشمېرو. دلته د دې ګراف لاندې په ډېرو کترو کتره کول دي د dx پنډوالې سره . د دې کترو د سطحو مساحت وشمېرئ، چې

وړانګه f(x) لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بيا يې انتيګرال په ورکړ شوي [0;5] انتروال کې ونيسئ.

$$\pi\int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi\left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلې لپاره دئ د يوه مخروط د حجم معياري (ستاندارد) بنه وکتل شي.

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 32.72$$

لنډ :

که يوه منحني د x يا y په محور وڅرخول شي، يو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نريو کترو يا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرخونه: $V_x = \pi\cdot\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi\cdot\int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

بېلګه ۵ . ۱۲:

د $y = x^2/4$ تابع ګراف په $[0, 2]$ انتروال کې د وضعيه قيمتونو په محورونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دی؟

د x په محور څرخېدنه: $y^2 = x^4/16, x_1 = 0, x_2 = 2$

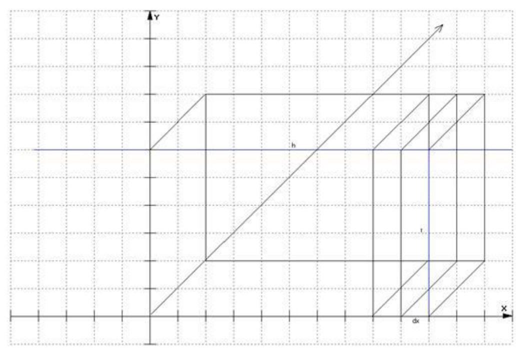
$$V_x = \pi\cdot\int_0^2 \frac{x^4}{16} dx = 0.4\pi$$

د y په محور ځرخېدنه: $x^2 = 4y, y_1 = 0, y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y\,dy = 2\pi$$

د ناځرخيدونکي جسم ډکی يا حجم.

مستطيل يا بربع المکعب (شپږ اړخيز جسم) Quader



دا ليد شکل د استواني ځخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه ځرخي. حجم يې کېدی شي د عادي کوادر په څېر وشمېرل شي $(V = r^2h)$ او يا د صفر په لور تلونکي dx سرورې مربع وې ټوټه شي. د دې لپاره دې د پروت غوڅي (قاطع) سطحه وشمېرل ځرخېدونکي تنونه:

شي، يعنې $q(x)$ د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بيا بايد انتيگرال ونيول شي. په ټوليزه توگه دا معنا لري: $V = \int_a^b q(x)dx$

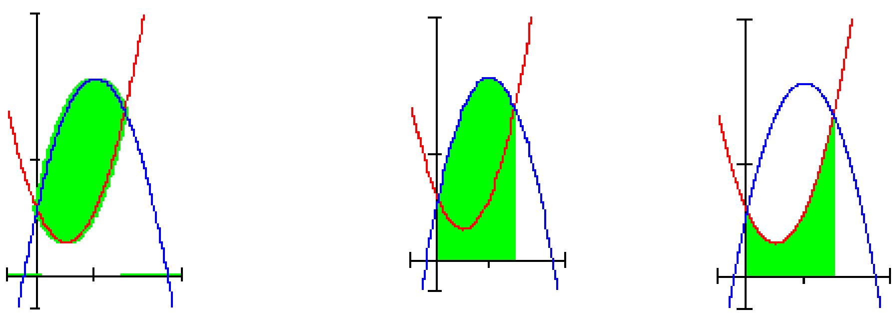
په دې بېلگه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژی تابع مربع ده: $q(x) = [f(x)]^2$

که موږ $f(x) = 3$ تابع له 0 تر 5 انتروال کې د پروتقاطع تابع سره انتيگرال کړو، نو بايد $V = r^2h = 45$ لاس ته راشي. $\int_0^5 q(x)dx = [9x]_0^5 = 45$

تبصره

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کېږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



A A_1 A_2

$$A = A_1 - A_2$$

ځرخېدونکي تنونه: ۲۷۸

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

تر منځ پرتې سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$.

د یوه ځرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په ځرخېدنه د x په محور په انتروال $[a,b]$ کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ترمنځ جوړېږي، رابنده وي.

د حجم شمیرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

د y په محور ځرخیدنه

د یوې سطحې په ځرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انټروال دf تابع گراف د y محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وې باید د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2\ dy$$

جمله ۵ . ۸) د ځرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینتروال[a,b]کي دی y=f(x) متمادي وي، د ځرخیدونکي بدن حجم چی د سطحو y=f(x),y=0,x=a,x=bترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

د توتي، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{\text{توته(استوتنه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بیلگې په توگه f(x) = 0,5x) ځرخیدنه(ځرخون) ده.

که یوه منحني د x یا y په محور وځرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا

په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرخونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع څرخيدني څخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کيدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکې تابع يې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتيګرلولو له لارې بيا حجم وشميرل شي.

تمرينونه:

١ - د $y = f(x) = x^2$ او د دې د معکوس تابع تر منځ سطحه وشميرئ.

٢ - د ګراف او X محور ترمنځ سطحه وشمېرئ.

څرخېدونکي تنونه: ٢٨٠

$a)\ f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{13}{4}x + 3$ $\qquad$ $b)\ f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x$

$c)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ $\qquad$ $d)\ f(x) = -x^2 + 6x - 5$

٣- د هغې سطحې مساحت وشميرئ، چې د وکړ شوو مساواتو منحنيو څخه را بنده شوي وي:

$$a)\quad y = e^{0,5x},\quad y = 0,\quad x = -2,\quad x = 2:$$

$$b)\quad y = \frac{1}{2}x^3,\quad y = 0,\quad x - 2,\quad x = 2:]$$

$$c)\quad y = \frac{1}{x^2},\quad y = 0\quad x = 9,\quad x = -3,\quad x = 3:$$

$$d)\quad y = \cos x,\quad y = 0$$

$$e)\quad y = \cos x,\quad y = 0,\quad x = \frac{\pi}{2},\quad x = \frac{5\pi}{6}:$$

$$f)\quad y = \frac{1}{x},\quad y = 0,\quad x = 2,\quad x = 4:$$

$$g)\quad y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2,\quad y = 0,\quad x = -2,\quad x = 2:$$

$$h)\quad y = x^3 + 7,\quad y = 0,\quad x = 1,\quad x = 2:$$

$$i)\quad y = x^3 + 7,\quad y = x^3 - x^2 + 3x + 5:$$

$$j)\quad y = 3 - \frac{1}{2}x^4,\quad y = 3 - 4x:$$

$$k)\quad y = \frac{1}{x},\quad 3y + 3x = 10:$$

$$l)\quad y = \cos x,\quad y = \sin x$$

$$m)\quad y = \sqrt{3x + 1},\quad y = 1,\quad x = 8:$$

$$n)\quad y = \frac{x^2}{4},\quad y = \frac{8}{4 + x^2}:$$

$$o)\quad y = x^2,\quad x = y^2:$$

$$p)\quad y = \frac{1}{6}\cdot\sqrt{x^3},\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 3:$$

٤-- - د ساین د منحني ګراف او د کوساین د منحني ګراف يو بل په انتروال $0 \le x \le 2\pi$ کې غوځوي.

د دواړو غوڅېتکو تر منځ له دواړو منحنيو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۵- د اکسپوننشل منحني g د $y = e^x$ سره او په انتروال $[0,1]$ دp پارابول د $y = -x^2 - 1$ سره را بنده سطحه وشمېرئ.

۶ - د کربنې g د $y = 2x^2 + 1$ سره او په اينتروال $[0, 2\pi]$ د ساين منحني د y=sin x سره څخه رابنده سطحه وشمېرئ.

۷ - پارابول p_1 د $y = x^2 - 3$ سره او p_2 د $y = 2x^2 + 1$ سره د $[-1,2]$ په اينتروال يوه سطحه را بنده وي.

د ا بنده سحه و شمېرئ.

۸ – د پارابول P د $y = \sqrt{x}$ سره او کربنه g يې د y = -x-1 سره په اينتروال رابنده سطحه لرو. دا را بنده سطحه وشمېرئ.

۹ - په اينتروال $[-2,1]$ د g_1 کربنې د $y = x + 3$ سره او g_2 د 2x+1 سره څخه را بنده سطحه وشمېرئ.

۱۰ - – پارابول $y = x^2 - 6x + 5$ د p سره او کربنهg د y+-x+1 سره رابنده سطحه.

د دې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱۱-- د g يوه کربنه يو پارابولp د $y = x^2 + 2$ سره په $x_1 = -1$ او $x_2 = 2$ کې غوڅوي.

د کربنې او پارابول څخه رابندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱۲ – د g یوه کرښه یو پارابول p د $y+0,5x^2+x+4$ سره په د $x_1=-2$ او $x_2=4$ ټکو کې غوځوي.

د دې کرښې او پارابول څخه رابندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱۳ - د ساین د منحني ګراف او د کوساین د منحني ګراف یو بل په انتروال $0 \leq x \leq 2\pi$ کې غوځوي.

د دواړو غوڅټکو تر منځ له واړو منحنئو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱٤ - د f تابع ګراف د t $y=-\frac{1}{9}x^4+\frac{2}{3}x^2$ سره د x محور سره سطحه پوره رابندوي.

د دې مساحت وشمېرئ.

۱٤ - د f تابع ګراف د y=a.(1-sin2x), (a>0) سره او د وضعیه قیمت په I (اوله) مربع کې (قیمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو.

د کومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت (x-2) سطحې یوونونه (واحدونه) دی.

۱۵- د لاندې توبعو ګرافونه هر یو د x په محور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدونکو جسمونو حجم وشمېرئ.

$a)\quad f(x)=2+\sqrt{x}\,,\quad |=[0;4]$

$b)\quad f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2+1\,,\quad |[2;4]$

۱٦ - د لاندې توبعو ګرافونه هر یو د x په مخور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدوکو جسمونو حجم وشمېرئ او د ساده شمېرنو سره یې و ازمایئ.

$a)\ \ f(x) = -x+5, \quad |=[0;3]$ $\qquad\qquad$ $b)\ \ f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ ,\ \ |[1;5]$

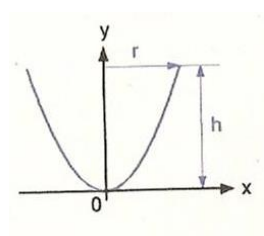
۱۷--د لاندې توابعو گرافونه هر يو د y په مخور ځرخي. د منځ ته راغلو ځرخېدوكو جسمونو حجم وشمېرئ.

$a)\ \ f(x) = \sqrt{x}\ \ ,\ 1=[0;4]$ $\qquad\qquad$ $b)\ \ f(x) = (x-2)^2\ ,\ 1=[1;3]$

۱۸- د لاندې توبعو گرافونه هر يو دy په محور ځرخي. د منځ ته راغلو ځرخېدونكو جسمونو حجم وشمېرئ او د ساده شمېرنو سره يې و ازمايئ.

$a)\ \ f(x) = x+1\ \ \ ,\ \ 1=[1;4]$ $\qquad\qquad$ $b)\ \ f(x) = -\frac{1}{2}x+2\ ,\ \ 1=[0;4]$

۱۹ د پارابول په سيومتري محور yد پارابول د ځرخيدو سره يو لوښى منځ ته راځي. وښايئ، چې دا $v = \frac{\pi}{2}\cdot r^2 \cdot h$ حجم لري.



$$v = \frac{\pi}{2}\cdot r^2 \cdot h$$

۲۰ - د ساين د منحني گراف او د كوساين د منحني گراف يو بل په انتروال $0 \le x \le 2\pi$ كې غوځوي.

د دواړو غوځتكو تر منځ له واړو منحنئو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۲۱ - د f تابع گراف د $t\ \ y = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$ سره د x محور سره سطحه پوره رابندوي.

د دې مساحت وشمېرئ.

۲۲ - د f تابع ګراف د $y=a.(1-\sin 2x), (a>0)$ سره او د وضعيه قيمت په I (اوله) مربع کې (قيمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو.

د کومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت (x-2) سطحې يونونه (واحدونه) دی.

۲۳---- لاندې د څرخېدونکې بدنونو ګراف په x محور څرخي. د داسې منځ ته راغلو څرخېدونو تتونو حجمونه(ډکي) وشمېرئ.

$$a)\ f(x)=2+\sqrt{x} \quad , \quad I=[0;4] \qquad b)\ f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2 \quad , \quad I=[2;4]$$

۲٤---د لاندې څرخېدونکو بدنونو ګرافونه د x محور باندې څرخي داسې منځ ته راغلي حجمونه(ډکي) وشمېريئ او په ساده حساب سره يې وشمېرئ.

$$a)\ f(x)=-x+5 \quad , \quad I=[0;3] \qquad b)\ f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \quad , \quad I=[1;5]$$

۲۵--- د لاندې توابعو د څرخون له لارې منځ ته راغلو تتونو حجم وشمېرئ.

$$a)\ f(x)=\sqrt{x} \quad , \quad |=[0;4] \qquad b)\ f(x)=(x-2)^2 \quad , \quad I\,|=[1;3]$$

۲٦---- د لاندې توابعو ګراف د y په محور څرخي. داسې منځ ته راغلي تتونه و شمېرئ او په ساده شمېرنه سره يې هم و شمېرئ.

$$a)\ f(x)=x+1 \quad , \quad |=[1;4] \qquad b)\ f(x)=-\frac{1}{2}x+2 \quad , \quad |=[0;4]$$

۲۷--- د لاندې توابعو گراف د y په محور څرخې. داسې منځ ته راغلي تنونه و شمېرئ او د ساده شمېرنې سره يې هم و شمېرئ

$a)\ f(x)=\sqrt{x}\quad , \quad I=[0;4] \qquad b)\ f(x)=(x-2)^2 \quad , \quad I=[1;3]$

$a)\ f(x)=x+1\quad , \quad I=[1;4] \qquad b)\ f(x)=-\frac{1}{2}x+2 \quad , \quad I=[0;4]$

هغه ناټيکاوي، چې د نصاب په کتاب کې شته، داسې لړڅه به يې زه دلته له تاسو سره شريک کړم

د ډاکتر ماخان (ميرې) شينواري چاپ او ناچاپي ليکنې:

په ډېره مننه، چې زما کتابونه به ټول www.ketabto.com ته پورته شي.

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب   په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګڼې – او کڼې د کڼې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې   انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنشيال برابرون (دا کتاب په دې ښانګه کې يو پيل   دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپيني خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور بریښي)

د ښوودځي کتابونه له ۷-م لګي څخه تر ۱۲-م ټولګي پورې.

۱ – د دولسم ټولګی شمیرپ،هنه

زما لیکونه:

Dr. Makhan Shinwari ډاکتر ماخان شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي حمهوریت جمهور ریس جلالتمآب

ډاکتر محمد اشرف غني ته په ډېر درنښت.

له هر څه د مخه دې بخښنه وي، چې ستاسو ډېر د ارزښت ډک وخت نیسم، خو دا راته ډېر اړیین بریښي او پرته له تاسو به یې څوک دومره جدي هم ونه نیسي.

پوهیږو، چې د پوهنې وزارت د ولس د پوهنې مغذ جوړوي، پوهه له همدې ځایه پیلیږي، چې بنسټ یې باید سم وي. همداسې نصاب د یوه هیواد د پوهنې مغذ دی، نو باید همداسې ورته د هره اړخه په درنه سترګه او غور وکتل شي.

زه خبره را لنډوم او د افغانستان د نصاب ستونځو ته په لنډ ډول ګوته نیسم او په همدې ډول ستونځوبیو یا د ستونځو حل ته یې.

ما د ۱۲ –م ټولګي د پښتو او دري کتابونه ولیکل او زه تري المان ته لاړم، قرارداد پای ته ورسید. زما د کتابونو په ځای نور کتابونه چاپ شول، چې ناسم وو. په دې هکله د پوهنې وزارت ته زما لیکنه مل ده. دا کتابونه ما بیا له سره ترتیب کړل(لیکنې مې یې

درلودلې) او چاپ ته مې چمتو کړل، خو دا مې باور نه کېده، چې دا به بیا بې زما له شتون چاپ شي.

ما د کتابونو د لیکلو لپاره پیسې اخستې او دا لیکنې هم دا دئ لرم، چې چاپ ته چمتو دي

ما چې دا نور کتابونه وکتل، نو دا مې لازم وګڼله، چې دا کتابونه هم زه له سره ولیکم، مواد یې لرم، ځکه چې ما ډېر د شمیرپوهنې یا ریاضي کتابونه لیکلي او ژباړلي(نږدې تر ۴۰ کتابونو پورې). د کتابونو منځپانګه د ښوونځي کتابونو لپاره هم پوره ده، تخنیکي کارونه یې باید له یوه مسلکي کس سره سرته ورسول شي.

اوس مې یې په لیکلو او د ښوونځي لپاره په سمون پیل کړي دئ.

زما لیکنې مسلکي ناسمون نه لري، معیاري او د وخت د غوښتنو سره سمې دي، چې دا زما د اخرنیو اوولس کالو د هڅو په اساس باوري ده.

زه څه کولی شم؟

دا چې په دې هکله بل کوم هیوادوال څه نه دي ویلي یا لیکلي، نو باور لرم، چې زه یوائنی کس یم چې دې ته مې فکر را اوښتی. زه دا څه چې لیکم دا په پوره مسئولیت لیکم.

ما چې دا څومره لیکنې کړي، دا زما د ارمان د پوره کولو لپاره دي او په دې هکله ځان د ولس پوروړی بولم.

که د دې کتابونو د لیکنې دنده راته وسپارل شوه، نو د کار میوه به مې وي او دا کار به په نړیوال معیار او ښه توګه سرته ورسوم.

دا اخر یونیم کال مې یوائې د ښوونځي له کتابونو سره سر خوږولی، چې د هر ځل لوستنې سره یې پوره زوریږم او د هر ځل لوستلو سره یې په ناسمون سر خوږوم.

زه هیله لرم، چې دا وخت راته راکړئ، چې د افغانستان ریاضی معیاري کولو کې مرسته وکړم او نه دا چې مرسته وکړم بلکه معیاري یې کړم. دا کار مې لکه د مخه مې چې ګوته ورته ونیوله هم کړی.

زه کړی شم، چې دا کار د المان څخه هم سرته ورسوم. که ماته دا وخت راکړ شو، نو زه به له حکومت څخه د معاش غوښتنه هم ونه کړم او دا کار زما له خوا ساده کیدونکی دئ.

د ښوونځي د رياضي لپاره به يو بنسټ کېښوول شي، چې په هغې د راتلونکی وخت شمیرپوهنه يا رياضي ابادېدی شي. دا بنسټيز مسلک به په نړيواله کچه سم شي.

زما مسئوليت مي په دې ليکنه سرته ورساوه.

له هر څه د مخه ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکټر ماخان شينواری

د نصاب د کتابونو د ناسمون په ځنو برخو د نموني لپاره لنډه څيرنه شوې، چې د دې ليک سره مل ده.

د پوهني محترم وزارت ته زما ليکنه هم مل ده.

ډاکټر ماخان شينواری

د ۲۰۱۳ زکـ لومړی نيمايي

Dr. Makhan Shinwari

Lansbergerstr.3

5311- Bonn

Germany

smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهني محترم وزير صاحب ته په ډېر درنښت!

ډېرو درنو!

غواړم دا لاندې دوه ټکي د تاسو محترم سره شريک کړم:

لومړی: ما له مارچ ۲۰۰۸ ز کال څخه تر دسمبر ۲۰۰۹ ز ک پورې د درسي کتابونو ليکنه کې ونډه لرله او د ۱۲ ــم ټولګي د شمير پوهنې يا رياضي کتابونه مې په پښتو او درې وليکل.

ما دا څه موده د مخه د پوهنې وزارت په ن ج پاڼه کې د ۱۲ ــم ټولګي د شميرپوهنې (رياضي)کتاب ولوسته، چې ګورم هلته په کې زما د نوم درک هم نه شته.

دويم : د کتاب خوندېوني يا متن ته چې ننوتم، ګورم، چې هغه څه چې ما ليکلي وو هغه يا نه شته او يا تخريب شوي دي.

ما په ډېر زور او د زړه خوراک سره د کتاب لومړۍ برخه يعنې د ،، پولي ارزښت،، يا ليميټ برخه وکتله، چې ګورم، نو دا مې ترې لاس ته راوړه، چې دا نه ريا ضي ده او نه پښتو او هغه چا چې دا ليکلې نه دا چې په رياضي نه پوهيږي په پښتو هم نه پوهيږي.

زما په ليکنو کې نوښت:

دا بايد په ګوته کړم، چې زما ليکنه په نړيوال معيار وه، چې منځپانګه يا متن يې طبعآ زه لرم.

لومړي: دا لومړي ځل دی، چې کتاب مې لومړی په پښتو او بيا په درې وليکه.

دويم: دا لومړۍ ليکنه وه، چې په ليکنه کې له ايراني کتابونو ګټه نه وه اخستل شوې او ليکنه له الماني ادبياتو او داسې څه له انګريزي ادبياتو رانيول شوي وه.

دريم: زما کتاب معياري ليکل شوی وو او ترې ښه ليکنې يې شونتيا نه لرله.

په لاندې توګه مې غوښتنه او هیله :

اول - زه باید پوه شم چې ولې داسې شوي، چې زما نوم له کتاب څخه وتلي؟

که یوائې یوه لیکنه هم په کې زما پاتې وي، نو باید زما نوم په کې وی. دا ماته له ما سره او زما د دوه کاله په دې لار کې د ستونځو ګاللو له امله او نه اخر زما د علمي کار سره هم تیری بریښي؟

تاسو پوهیږی، چې د ۱۲ ـــم ټولګي کتاب لیکلو لپاره ماډېرې پیسې اخستي او لپاره مې یې ښه کار کړی وو، چې لاس ته راوړنه یې باید داسې نه وی.

دویم- د کتاب دا لیکلي لومړئ او هم داسې سرسري دویمه برخه، چې ما لوستلې، د ښوونځیو لپاره د زغم نه دي.

زما وړاندیز: دا کتابونه باید راټول شي او بیا ولیکل شي، ځکه چې په دې خو لیکونکي نه پوهیږي ، نو له دې امله نه ښوونکي پرې پوهیدی شي او نه زده کوونکي او د پوهیدلو معقول څه هم نه لري. دې ته ګوته نیسم، چې په دې نورو کتابونوکې به هم ورته ستونځې وي، خو زما یې کتنه اوس د لاسه نه کیږي، ځکه چې .....

د داسې کتابونو لیکل او ښوونځیو ته وېشل د پوهنې وزارت لپاره توهین دی.

زه له دې امله د کوچني اختر وروسته کابل ته درځم او هیله لرم، چې د هرچا لومړی له تاسو سره وګورم. زه به د اګست په ۱۷ یو ځل وزارت ته درشم.

یادونه: ما په دې اخرو څو ورځو کې د کتاب ډېر ځایونه داسې ځغلند وکتل، باور وکړئ، چې د هرې موضوع د لوستلو سره زورېدلی یم.

زه به په دې هکله – که لوي څښتن کول- له تاسو سره په کابل کې وغږېږم.

له هر څه د مخه له تاسو ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکتر ماخان شینواری

یوه هیله

زه د افغانستان د ټولو ن ج ، نورو پاڼو او رادیو تلویزیونو څخه هیله لرم، چې دا زما لیکنه ګرانو لوستونکو ته وړاندې او په نورو اړونده لیکنو هم همدا مرسته وکړي.

د ریاضي کتابونو د چاپ مخه ونیول شي

ولې؟

په دې نږدې څو میاشتو کې د نصاب کتابونه بیا چاپ ته وړاندې کیږي او ګومان مې دی، چې داسې د معیار سره سم سمون به په کې نه وي راغلی، نو له دې امله یې د چاپ مخنیوی اړیین او په همدې ډول یې سمون هم اړین دی، چې په لاندې کې یې ستونځو او ستونځوبیو (د ستونځو حل) ته هم ګوته نیسم.

زه د شمیرپوهنې ټول د نصاب پوهانو ته درناوی لرم او هیله ده، چې دا لیکنه شخصي وه نه نیسي.

-- ما له نږدې ۱۹۹۸ ز ک وروسته د شمیرپوهنې په کتابونو پیل وکړ، چې تراوسه مې نږدې څه کم څلوېښت کتابونه لیکلي، چې له جملې یې له شلو ډېر چاپ او نور ناچاپ دي. د دې کتابونو ۱۴ غوره یې په www.kitabtoon.com (دې پاڼه کېاوس نه شته) کې خپاره شوي او همداسې له ما څخه شمیرپوهنې ته ځانګړې شوې پاڼه کې تر

۲۵ کتابونو ن ج ته پورته شوي او دا نور به هم په خپل وار ن ج ته پورته شي. زما پاڼه smakhan.wordpress.com

دا زما ن ج پاڼه په نا ښکلي ډول یواځې زما د شمیرپوهنې کتابونو ته ځانګړې شوې، چې زما زیات کتابونه په کې خپاره شوي او نور به هم په کې خواره شي. پاڼه ښکلې نه، خو خپله موخه پوره کولی شي او موږ ټولو سره مرسته کولی شي، چې شمیرپوهنه په ګډه سمه او معیاري کړو.

ګرانو هیوادوالو!

افغانستان دې اوږدې جګړې په هر اړخ کې بې ساری زیانمن کړی او همداسې په پوهنیز اړخ کې هم. د افغانستان نصاب هم له دې ناخوالو بې برخې نه دی پاتې شوی.

لکه څنګه چې پوهنه د هیواد مغز جوړوي، همداسې نصاب د پوهنې مغز دی، نو له دې امله زیاته پامرنه هم غواړي.

ما په نصاب کې د دولسم ټولګي پښتو او درې کتابونه ولیکل، د قرارداد وخت پوره شو، پیسې مې واخستلې او زه ترې لاړم، چې متآسفانه له ما لیکلي کتابونه چاپ نه شول – علت یې دا وو، چې ګران لیکونکي یا لیکونکې وښایې، چې دوی دا کار ښه کوي، نو ولې دا د هیواد دباندې افغانان دې دې کار ته راوبلل شي- او په ځای یې متآسفانه ناسم کتابونه چآپ شول. په دې هکله مې په ۲۰۱۲ ز ک کې پوهنې وزارت ته یو لیک هم لیږلی وو، چې

ما متآسفانه چې پوره ناوخته دا نور د ښوونځې چاپ کتابونه وکتل او دې نتیجې ته ورسیدم، چې د ریاضي کتابونه باید سم او معیاري چاپ شي او نه دا ناسم بیا چاپ شي.

دا وړاندیز ولې ما په نصاب کې نه دی کړي؟

په خواشینی سره به ووایم، چې د کار په سر کې مسئولو چې په کار پوه نه وو، بل څوک هم کار ته نه پرېږدي او د چا خبره د چا غوږ ته هم نه رسیږي. ما په همغه وخت کې هم د ټولو لیکنو لپاره وړاندیزونه لروده او هلته مې ورته چاپ او په میز ایښودلي وو، خو چا نه غوښتل ګټه ترې واخلي او یا یې ترې د ګټې اخستلو توان نه لاره.

ما ته د هغو د لیکنې متود ښه ونه برېښیده، ځکه چې استادان د دارنګه لیکنو سره بلد نه دي، نو له دې امله د پوهنې متن سره له هغې څو واره زیاتې ځنګیزې لیکنې کوي، چې موخه ور نه دي.

ما چې پتیل، چې د کتابونو د چاپ مخه باید ونیول شي، نو دې ته مې هم چمتووالی باید ښوولی وي، چې د کتابونو معیاري او سم لیکلو امکان هم باید شته وي.

دا امکان شته. ما دا کار سرته رسولی، کتابونه مې ټول داسې خام پوره کړې، چې زیاتو برخو ته یې ، څو واره وړاندیزون هم شته.

که د کتابونو د چاپ کار باید ډېر په بیړه وشي، نو دا کار هم کیدونکی دی، خو باید څو تخنیکي کسان د مرستې لپاره چمتو وي.

د چاپ کتابونو په ناسمون مې لیکنه کړې، چې ګران لوستونکي یې په smakhan.wordpress.com کې لوستلی شي او که ن ج ته پورته نه شو، نو مینه وال او په دې هکله لیوال یې د برېښنا پتې له لارې لاس ته راوړی شي..

ما د هرکتاب څخه لږ ترلږه یوه برخه داسې د نمونې په څیر څیړلې.

د دې لپاره چې د ښوونيز پوهنې مينه وال ګران لوستونکي په ستونځو وپوهيږي، نو اړيين بولم، چې د ښوونځي کتابونه هم وګوري او اړونده موضوعګانې زما د چاپ او ناچاپه ليکنو سره پرتله کړي(کتابونه په پورته ن ج کې شته دی، چې ځنې يې راکښته کيدی شي او هم يې هلته ګران لوستونکي لوستلی شي).

زه په دولت کې او له دولت دباندې د ټولو اغيزمنو هيوادوالو څخه هيله کوم، چې په دې لار کې له ما او له دې لارې زموږ د ځوان راتلونکي سره مرسته وکړي او د شميرپوهنې معياري کولواو سمون امکانات راته چمتو شي.

زما د کار دوه امکانات شته:
لمړی: دا کار زه کړی شم، چې له المان څخه هم سرته ورسوم او په ښه توګه، په دې حالت کې به زه د زحمت په مقابل کې له اجورې - د ځوانانو سره د مرستې له امله - تير شم.

دويم: په افغانستان کې که دا کار سرته ورسيږي، دا به ګټور وي، ځکه چې په افغانستان کې به په ټولو خواوو کاروشي.

داخه وروستی خبرې ما هم رامخ ته کړې.

په لاندې کې زما ليکنې د افغانستان اسلامې جمهوريت جمهورر ريس جلالتمآب اشرف غني او د پوهنې محترم وزارت ته ليک کې هم لوستلی شی او هيله مې ده، چې ويې لولی.

ستاسو له ګنو مشورو به ډېر مننندوی يم.

زما د برېښنا ليک پته: smakhan1946@gmail.com

ستاسو ماخان

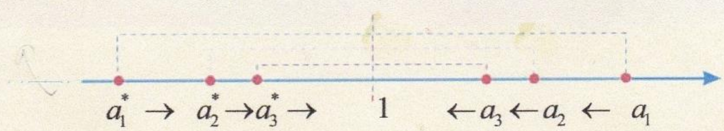
د نصاب د دولسم ټولګي کتاب ناسمونونو ته کتنه:

لومړي: په دولسم ټولګي کې پیل له ترادفونو شوی او په سر کې یې دوه ترادوفونه راوړي او دا یې بیا په یوه ګراف یا کرښه د ښي او کیڼې لورې یوې پولې ته ځغلولي.

د کتاب ۳ ـــم مخ

پایله:لیدل کېږي، چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کیڼ لوري څخه د 1 عدد ته د n په زیاتېدو سره نږدې کېږي، یعنې:

ـ د a_n ترادف کله چې n بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په(1) سره کېږي او همداشان د a_n^* د ترادف $n-$ام حد که n بې نهایت ته نږدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



ددې لپاره چې د لېمیټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړی پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څېړنې لاندې نیسو.

زه پوهیږم، چې دا کار دې درنو لیکوالانو ولې کړی؟

له همدې پیله روښانیږي، چې محترم لیکونکي د درس سره کومه بلدتیا نه لري.

په پورته کې دا دوه پرلپسې هیڅکله له) ۱ « سره نه برابریږي، لکه ښاغلی لیکوال چې لیکي.

پسې یې بیا د پرلپسې یا ردیفونو لپاره بیل بیل ګرافونه کښلي.

په پرلپسیو یا ردیفونوکې چې موږ لیمټ راوړو، نو موخه ترې د پرلپسې کونورګنت او ډیورګنت دي. په پرلپسې کې اړین نه ده، چې د کونورګنت حالت کې دې پرلپسې له دواړو لورو پولې ته لاړ شي، خو داسې پرلپسې شته او هغه یو ترادف دی نه دوه.

دویم: دا لاندې څه چې راغلي، هم کوم درس پورې اړوندوالی نه لري، همداسې څه یې لیکلي. دی د ناسم د ترادف درس څخه سملاسې داسې یوې موضوع ته راغلی او بیا د

ښي او کيڼ لوري ليميټ ته راځي او که وکتل شي، نو په ليکنو کې کوم توپير نه شته.
دلته د زده کړې څه نه ليدل کيږي او دا اخره کرښه يې داسې ده، چې په دې موضوع کې کومه پوهه هم نه لري.

که چيرې دا ټيک هم وي، نو ځای يې بې ځايه ځکه راوړي، چې د ښی او کيڼې لور ليمټونه، چې هلته هم ناسم دې، په اووم مخ کې څيړل(که چيرې څيړنه يې وبولو)

په لاندې کې ،، د متحول تقرب،، يعنې څه؟ دا هيڅ مفهوم يا ترې پوهيدنه نه لري. که ... ترادف وي هم بايد د ترادف په ډول وليکل شي او که تابع وي هم بايد د تابع په ډول وليکل شي.

د متحول تقرب: ويل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختياري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، يعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچنې دی يا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{يا} \quad \lim_{x \to a} x = a \quad \text{يا} \quad x \to a \quad \text{يا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چيرې د x د قيمتونو يو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدې شي.

$$x : a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$$

له کيڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چيرې د x د قيمتونو يو متزايد ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدې شي.

$$x : a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ يعنې:

$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta$ يا $\lim_{x \to a} x = a$ يا $x \to a$ يا $|x-a| \to 0$

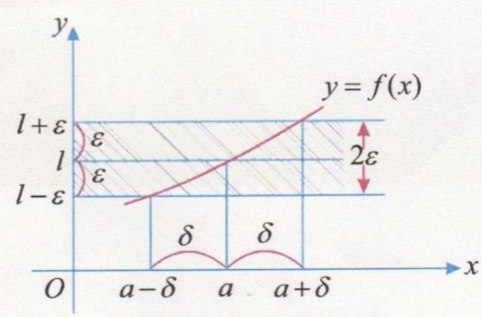
ډول ليکنو سره ګران ليکونکي بلدتيا نه لري او نه داسې څه د مخه راغلي، چې روښانه شوې وي

داسې ليکنې د ښوونځيو لپاره ستونځمنې دي. له دې امله ماهم په خپلو ليکنو کې نه وې راوړې. ګورو چې د کتاب ناسموونکي هم دا څه ناسم يا بې له تشريح کارولي.

په دې هکله زما ليکنه په لاندې کې شته.

دريم: په لاندې تعريف کې د پوهيدلو څه نه شته او په دې رياضيکي تعريف خو نه پوهيږي، څکه چې په لاندې يې د پوښتنې د حل نتيجه راوستلې او دا بحث له دې سره په رښتيا کې هيڅ سر او کارنه لري.

تعريف: که چيرې د $f(x)$ تابع په يوه غير تړلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې ګډون لري کيداى شي چې تابع په a کې نه وي تعريف شوى. که چيرې د x متحول د a عدد ته نږدې شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نږدې کيږي، نو ويل کيږي چې د $f(x)$ تابع ليميټ عبارت له l څخه دى، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي نو داسې يې ليکو: $\lim_{x \to a} f(x) = l$ يا $\begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$



$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x)-l| < \varepsilon$

$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \quad (|x-a| \to 0 \Rightarrow \ |f(x)-l| \to 0)$

دا سومبولونه $\forall$ او $\exists$ نه دي ښوول شوي، چې څه شی دی او څه بلل کيږي.

ښاغلي ليکونکی په اووم مخ کې بيلګه راوړي او بيا دا ښايي، ښي او کيڼې لورې ليميټ يې شميري.

بايد د $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$، لپاره $x \neq 3$ وليکي،چې هلته فنکشن تعريف نه دی. دی بيا په ناسمه توګه په جدول کې ليکي. دا چې دا بايد څنګه وليکل شي، زماپه ليکنو کې شته.

دويمه بېلګه: و ښيئ چې $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$ سره دی.

حل: د ښي او کيڼې خوا لېميټونه تر څېړنې لاندې نيسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$$

ليدل کېږي چې د ښی خوا او کيڼې خوا لېميټونه سره مساوي دي، نو $\lim\limits_{x \to 3} = \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6$ دي.

په پورته کې xد 3 قيمت نه شي اخستلی، هلته فنکشن تعريف نه دی، نو له دې امله په جدول کې، نه د ښیَ لورې او نه د کيڼې لورې دا ارزښت 3 اخستلی شي، هلته 3 ته ور نږدې کيږي.

د بيلګې حل يې هم بيا سم نه دیَ کړي، په هغه ورسره بلده لار.

دا هغه د کاغي او د زرکې خبره ده.........

دويمه طريقه: د لېميټ د تعريف په پام کې نيولو سره فرضوو چې د هر اختياري کوچني عدد ε لپاره يو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \ |x-a| < \delta \ \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$$

$$|x-3| < \delta \ \Rightarrow \left| \frac{x^2-9}{x-3} - 6 \right| = \left| \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} - 6 \right| = |x+3-6| = |x-3| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \delta$$

د بیلګې د حل نتیجه

$\varepsilon = \delta$

دا د دی بحث سره سر او کار نه لري یعني دا مو موخه نه ده، نو باید ووایم، چې دروند لیکونکي د موضوع څخه بوي هم نه وړي.(بخښنه دې وي، که زما لیکنې داسې لږ. توندې برېښي)

او بې ځایه مخ ته ځي، چې څه ترې پوهیدل کیږي هم نه.

له پورتنی اړیکې څخه دا معلومېږي چې ε له δ سره اړیکه لري، که δ ته قیمت ورکړو ε قیمت اخلي او که ε ته قیمت ورکړو δ قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعریف چې د لېمیټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لېمیټ لري، یعنې: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

دې پورته ته په لنډه توګه زما نوره لیکنه او تیکاوی:

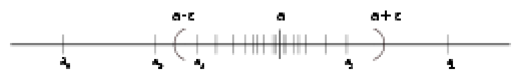
د کتاب په پیل کې راوړل شوې د ترادف یا پرلپسې موضوع باید د یوولسم ټولګي کتاب کې پوره څېړل شوې وی، مګر هلته یې یواځې دا نومونه راوړل شوي او نور لیکونکي – بې له دې، چې د موضوع اړیین څه راوړي - له موضوع څخه تیر شوی.

د دې موعوع څخه موخه د ترادف پولې ته تلنه یا کونورګنت او له پولې اووښتنه یا ناپای ته تلنه یا ډیورګنت او... دي، چې بې له دې په رښتیا کې د ترادف یا پرلپسې څیړنه کوم غوره والی یا اهمیت نه لري، یعنې خپله موخه له لاسه ورکوي. دا د یوولسم ټوګي د ترادف درس، نو په رښتیا کې خپل غوره والی او اړیینوالی له لاسه ورکوي. نور سموالي او ناسموالي ته یې ګوته نه نسم، همدا بسیا کوي، چې څه په کې نه دي ویل شوي یا لیکل شوي.

د ۱۲ ــم ټولګي کتاب ته:

يادونه: دا چې ګومان کيږي د داسې ليکنو سره به بلدتيا لږ وي، نو تشريح به راڅخه لږ ډيره شي.

د ،، پوله ارزښت،، په څيره کې ښوونه



که $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ د حقيقي اعدادو (ګڼونو) ترادف يا پرلپسي وي، نو عدد $a\in\mathbb{R}$ د دې ترادف يا پرلپسي پوله ارزښت بلل کيږي او پرلپسي a ته کونورګير کيږي يا a ته هڅيږي يا نږدې کيږي، که د هر $\varepsilon>0$ لپاره په انتروال $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ کې له يوه اندکس يا پيژند نخښې اخوا يا وروسته يا پسې د پرلپسي يا ترادف ټول غړي(دوي يې حدونه يا جملې بولې، نه پوهيږم ولې؟) د انتروال په دننه کې او فقط پای ډير غړي له انتروال څخه دباندې پراته وي.

(دنورې اوږدې روښانه ونکي شننې څخه تيريږم)

لنډ پيژند يې:

عدد $a\in\mathbb{R}$ د ترادف $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ پوله بلل کيږي، که د ټولو $\varepsilon>0$ لپاره يو طبيعي يا پيداښتي عدد N شتون ولري، داسې چې $|a_n-a|<\varepsilon$ باور ولري، که $n\geq N.$ وي.

دا پيژند راکوي، چې: د هر $\varepsilon>0$ لپاره يو ايندکس N شته، داسې چې له دې ايندکس يا پيژندنخښې وروسته د پرلپسې(ترادف) ټول غړې د ε څخه په کم واټن له a لرې پراته دي يعنې له ε څخه چې a ته څومره نږدې دی دا نور هم a ته نږدې دي.

د $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ د پولې ارزښت ليکلو لپاره خپل ځانله سومبول لرو: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

د دې ليکدود سره سم د يوې پرلپسې پوله ارزښت تعريف داسې رالنډولی شو:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \iff \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:\ |a_n - a| < \varepsilon$$

د داسې ليکنو لپاره د ε (لوستل: اپيسيلون) توری ورځنی يا مروج شوی.

بيلګه:

په يوه بيلګه کې يې روښانه کوو:

د دې لپاره چې د$\frac{1}{n}$ پرلپسې يا رديف و 0 ته کونورګنټ وښايو، يو د مخه ورکړ شوي ε ته يوه په خوښه طبيعي عدد يا ګڼN ټاکو، چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وی، نو د ټولو $n > N$ لپاره باور لري:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

موضوع اوږدولی نه شم، ځکه چې دا يو درس نه دی، دا فقط په موضوع داسې لږ رڼا اچونه ده.

د فنکشن پوله ارزښت:

يادونه: د دې ۱۲ – م ټولګي د درس دا هغه اصلي موضوع ده.

د فنکشن پوله ارزښت په لاندې توګه پيژنو يا تعريفوو:

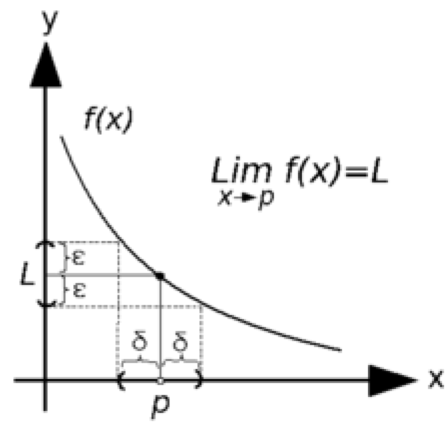
پيژند: د فنکشن f پوله ارزښت، د x لپاره چې p ته نږدې کيږي، L دی او داسې يې ليکو: $\lim_{x \to p} f(x) = L$

لوستل يې هم همداسې دي لکه پورته تعريف

داسې يې شميرپوهنيز ليک دود باندې تعريفوو:

فنکشن f پوله ارزښت L لري، که د هر $0 < \varepsilon$ لپاره یو $0 < \delta$ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاه د $\delta > |x\text{-}p|<0$ سره $\varepsilon > |f(x)\text{-}L|$ هم باور ولري.

د پورته شمیرپوهنیز یا ریاضیکي فنکشن پوله ارزښت لپاره لاندې ځیره



پورته دوه تعریفونه برابر ارزښته دي یعنې له یوه څخه بل لاس ته راځي او په څټ یا برعکس یعنې لیکو:

تعریف: د فنکشن f پوله ارزښت، چې x و p ته نږدې کیږي، L دی، تیک هلته یا هلته او هلته یا هلته او په څټ، یا له دې لاس ته راځي او په څټ یا برعکس چې د هر $\varepsilon >$ 0 لپاره یو $0 < \delta$ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاه د $\delta > |x\text{-}p|<0$ سره $|f(x)\text{-}$ $\varepsilon > |L$ هم باور ولري.

دلته هم په همدومره بسیا کوو، که څه هم روښانه کیدل نورې شننې ته هم اړتیا لري.

دې ته دلته په اخر کې بیا ګوته نیسم، چې دا شمیرپوهنیز یا ریاضیکې ډول لیکنې ستونځمنې دي او باید ترې تیر شو، د ترادفونو او فنکشنونو لپاره.

دا نور پاتې درس هم په همدې ترتیب ګران لیکونکي لیکلی چې زه نور پرې نه غزیږم.

دا بسیا کوي، چې کتاب د ښوونځیو څخه راټول شي او له سره ولیکل شي.

ستاسو له سرې سينې څخه – كه ومو لوسته- ډېره مننه.

ستاسو ډاكتر ماخان شينوارى.

د ډاكتر ماخان شينواري ليكنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړى:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول كتابونه په المان كې د ،، افغانستان كلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر كتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونكو او زده كوونكو لپاره (دا كتاب   په ۹۰۰ مخونو كې چاپ او دا نوې ليكنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمككچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو كې شميرنه، د ګټې – او كټې د كټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه كتاب د ښوونځي ټولي اړتياوې پوره كوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې   انګرېزي – پښتو ډكشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډكشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنشيال برابرون (دا كتاب په دې ښانګه كې يو پيل   دی، ساده ليكل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

:   *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج ښخه ژباړل شوي دي.

۱ -   شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه   د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک   دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو ښخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج ښخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپیني خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیرپوهنه د اوم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د اتم ټولګې له پاره

شمیرپوهنه د نهم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د لسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د دولسم ټولګي له پاره

ریاضي برای صنف دوازده

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرِي شینواری د اروابښادې پښتو او اروابښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولې.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکترې په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبرورې تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرِي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.