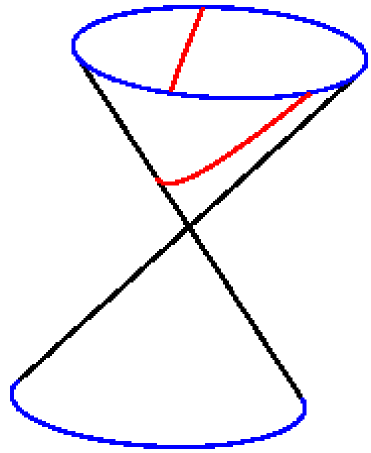
لاينيز(كرنيز) الجبر

Lineare Algebra



ډاکتر ماخان(میرزی) شینواری

سريزه

زه د سريزې په هکله ډېر څه نه ليکم، خو دې ته ګوته نيسم، چې ما د دې سرليک لاندې دوه ليکنې کړي. دا مخ ته پرته د هغو لوستونکو لپاره ده، چې د شميرپوهنې سره داسې لږڅه بلدتيا ولري، دا به ښه وي، خو اړينه هم نه ده.

دا ليکنه خورا مفصله ده نسبت هغې بلې ته

تر مخ راوړنه: فنکشن که په نورو ژبو کې وکورو، نو په پښتو ژباړه به يې ځيره کونه (لنډ : ځيره ونه) وي. په فنکشن کې يو څه په يو بل څه يا خپل ځان ځيره کيږي. چې لومړی يې ځيره کوونکی او دويم يې ځيره ده يعنې دوه مجهولې يا واريابلې دي، چې يوه په بله ځيره کيږي. لومړی خپلواک دی او دويم يې د لومړي په واک کې دی، نو له دې امله م عربي تابع بللې، يعنې دا د فنکشن تابع ده، چې موږ به يې هم دا ناسم نوم وکاروو، چې ګران شميرپوهان راته په قهر نه شي.

که زما په دې ليکنه کې ځيرونه راځي، نو هغه يې زموږ په ناسمه توګه همغه تابع ده. دا مو مو پوهيږم، چې له پامه نه لويږي.

ما په يو ځل ډېر ٥تابونه وژباړل او وليکل، چې ليکنيز تاتيکاوي به ولري. د هغې به راته بخښنه وکړی. دا څه چې تاسو ته وړاندې کيږي، پوره :تور دي او دې ته دې رياته پامرنه وشي.

دا زما ټولې ليکنې به تر يوې اندازې ستونځې ولري، خو باور وکړی، چې غوټې پسې وهی په لاس درځي.

مننه: د ټولنې او په ځانګړي ډول د هغې د مشر ښاغلي ډاکټر يحی وردګ څخه زياته مننه، نه داچې زما کتابونه يې [اپ ته ورسول بلکه په دې کار کې يې بط سارې هڅې کړي او بې له شکه يې خپلو يوادوالو ته ستر خدمت کړي، کور دې ودان وي، لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي او د لا ډېرې برياوو په هيله دې زموږ دعا ورسره مل وي.

لاینیز(کرښیز یا خطي) الجبر

بنسټیزجوړښتونه / ګروپونه او تنونه

Grups and fields

ګروپ

د یوه ګروپ $(G,\diamond)$ لاندې یوه ډېری G پوهیږو، په هغې چې یو دوه ییزه کارونه یا عملیه $\diamond$ داسې پیژندل ولري یا تعریف شوي.

$$\diamond : G \times G \longmapsto G\,,$$

دا په دې مانا، چې هره جوړه (a,b) د $a,b \in G$ سره د $a \diamond b \in G$ یو توکی باندې تنظیم دی. برسیره پردې لاندې خویونه باید باور ولري:

Assoziativität: اسوښیاتیو والی یا اسوښیاتیو قانون

$$(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c) \qquad \forall a,b,c \in G$$

neutrale Element ناپییلی توکی: یو یواځنی ټاکلی ناپیلی توکی $e \in G$ شته دا په دې مانا ، چې

$$e \diamond a = a \diamond e = a \qquad \forall a \in G$$

Inverses Element مخامخ يا په ضد توکی يا برعکس توکی: هر توکي $a \in G$ ته يو يواځنی ټاکلی مخامخ يا په څټ يا برعکس توکی $a^{-1} \in G$ شته د سره $a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = e$

ګروپ کموتاتيو يا د ابل (ابل Abel د شميرپوه نوم دی) ګروپ بلل کيږي، که کارونه $\diamond$ کموتاتيو وي:

$$a \diamond b = b \diamond a \qquad \forall a, b \in G .$$

له اړوندتوب څخه ليدل کيږي، چي کومه کارونه کارول کيږي، نو زيات وخت د $(G, \diamond)$ په ځای فقط G ليکل کيږي.

په باندي(بيجکتيو) رييل فنکشنونه يا توابع(بلواک) bijective real Functions
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ د $\circ$ يو په بل پسي کارونې له مخې يو ګروپ جوړوي.

ساده ازمايل کيدی شي، چي يو په بل پسي ايښونه اسوشياتيو ده :

$$((f \circ g) \circ h)(x) = f(g(h(x))) = (f \circ (g \circ h))(x) .$$

ناپيلی توګه په روښانه توګه لاندې فنکشن دی

$$e : \quad x \to x$$

بالاخره هر په باندې بلواک لپاره يو په څټ بلواک شته دی

$$f^{-1} : \quad f(x) \to x .$$

يو په بل پسې ترنه کموتاتيو نه ده : د بيلګې په توګه لاندې لرو :

$$f : x \to 2x , \quad g : x \to x + 1$$

$$f \circ g \neq g \circ f .$$

$$f(g(x)) = 2(x+1) \neq 2x+1 = g(f(x)).$$

لاندې ګروپونه

د يوه ګروپ $(G,\diamond)$ لپاره $(U,\diamond)$ لاندې ګروپ بلل کيږي، که U د G برخدېرۍ وي او $(U,\diamond)$ پخپله يو کروپ جوړ کړي

ددې لپاره ، چې و ازمايو ، چې ايا U و ترڼې $\diamond$ ته يو ګروپ جوړوي ، که نه، نو ازمايو ، چې U و نښلونې $\diamond$ ته او د په ځېټ جوړښت ته بنده ده. ياني باور لري:

$a \in U \Rightarrow a^{-1} \in U$ او $a, b \in U \Rightarrow a \diamond b \in U$

the set of numbers ګڼوندېرۍ يا د اعدادو سټ

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Z و جمعې(زياتون) ته يوکموتاتيو ګروپ دی، خوندي لرنې يا اينکلوزيون ته ټول ګڼونه و $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ او $\mathbb{C}$ ته يو لاندې ګروپ جوړوي او راشنل ګڼونه و $\mathbb{R}$ او $\mathbb{C}$ ته او رييل ګڼونه وکمپلکس ګڼونو ته يو لاندې ګروپ جوړوي.

که چيرې صفر لرې شي، نو ضرب يا ځله ونه هم يو ګروپ جوړښت تعريفوي:

$$\mathbb{Q}\backslash\{0\} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

تړاو جدول يا تړاوتخته

کارونه$\diamond$ په پای ګروپ $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ باندې کيدی شي د تړاوماتريکس

$$A: \quad a_{i,j} = g_i \diamond g_j$$

له لارې روښانه شي.

لاندې ځيرونه (بې له پرموتېشن يا بدلون ځخه) آول تړاوجوړښتونه ښايي د يوه ګروپ لپاره د $n \leq 4$ سره :

$n = 2$

$\diamond$	e	a
e	e	a
a	a	e

$n = 3$

$\diamond$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

$n = 4$

$\diamond$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$n = 4$

$\diamond$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

دا ګروپونه ټول ابل ګروپونه دي، لکه د ماتريکس A د سيومتري ($a_{i,j} = a_{j,i}$)چې ليدل کيږي.

لومړى نااېل ګروپ شپږ توکي لري او د $\{1,2,3\}$ توکو د پروتېشن له مخې پېژندل کېدى شي

Permutations پرموتيشونونه ((د توکو يا اعدادو) ځاى بدلون)

د په خوښه ډېرى M لپاره د بيجکشن (په کې ځيرونه يا په کې فنکشن) لاندې له M په Mکې ، چې کمپوزيشن کارونه يا ځيرونه يى د کارونې په ځير وي، يو ګروپ پوهيږوو داسې په نامه د M سيومتري ګروپ.

لنډ : د M په M کې ځيروني ته پرموتېشن يا بدلون وايو.

که $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ وي، نو د سيومتري ګروپ S_n ځخه غربږو، چې ګراد يا درجه يې n وي.

د S_n ډېرى د π توکي $n!$ پرموتيشن يا بدلون بلل کيږي او داسې يې ليکو

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

پرمېرتیشنګروپ په ټولیزه توګه کموتاتیو نه دی، لکه د لاندې بیلګې څخه لیدل کیږي

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

د ځای بدلنون (پرموتیشن) څیوکلیکي یا تل بیرته راګرځیدونی لیکندود:

پرموتیشنونه داسې په نامه څیوکلیکي لیکندود له لارې هم ورکول کیږي..یو څیکلوس یا تل بیرته راګرځیدنه د یوه توکي او د هغه له څېرو، چې ډېرځله د بدلون یا پرموتیشن له لارې منځ ته راځي، جوړه ده، تر څو چې بیرته هغه پیل توکي یا وتونتوکي ته ورسیږي. د هغو توکو څخه، چې په لومړي تلبېرته راګځیدنې کې منځ ته نه راځي، نور څیوکلونه جوړیږي ، تر څو ټول توکي رامنځ ته شي. څیکلونه د توکو د ګڼون(تعداد) ټیټیدونکي یا لوېدونکي ډول تنظیم کیږي او په کړو نوکانوکې یو پر بل پسې لیکل کیږي. هغه څیوکلونه یا تلبیرته راګرځیدوني ، چې اوږدوالی یې ۱ وي نه لیکلکیږي.

د بیلګې په توګه دی

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \equiv (1\,4\,6)\ (2\,3)\ (5)$$

همداسې

$$\pi = (1\,4\,6)\ (2\,3)\ .$$

د پرموتیشن ترانسپوني کوونه یا په بل ډول لیکنه او سیګنوم

یو ترانسپوزیشن (ځای بدلون)

$$\tau = (j\ k)$$

د j او k بدلون دی. ددې ساده یا بنسټیز پرموتیشن ترڼې سره دا پرموتیشن π داسې انځورېدی شي:

$$\pi = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_m .$$

دلته برابرازښتوالی (جوړه یا ناجوړه m) یواځنی ټاکلی دی، او

$$\sigma(\pi) = (-1)^m$$

د پرموتیشن مخ نخښې یا د پرموتاشن زیګنوم π په ځیر π ټاکو یا تعریفوو.

د

$$\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_m = \pi \in S_n$$

لپاره او د $k = \pi(n)$ سره دی

$$\tilde{\pi} = (k, n) \circ \pi \in S_{n-1} ,$$

ځکه چې د ترانسپوزیشن کمپوزیشن سره n کره په ځای نیول کیږي یا ځای په ځای پاتیږي. ایندوکتیوInduktiv (د ځانګړي په تولیز پایونه) کیدی شي و نیول شي یا فرض شي، چې برابرارزښتوالی یا پاریټي د $\tilde{\pi}$ په ایندوځیري ټوټه ونه کې یواځنی ټاکلې ، پسې د $(-1)^m$ مخنخښه.

ددې لپاره، چې د پرموتیشن

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

سیګنوم و ټاکو، نو

$$(\pi(1), \ldots, \ \pi(6)) = (6, \ 5, \ 3, \ 1, \ 2, \ 4)$$

د ترانسپوزيشن سوکځيسيو(sukzessiv) پل په پل يو بل پسې) د کانوني لړۍ پرلپسې په ځير ليکنې ته بيايو:

$$(1\ 6):\qquad (1\ 5\ 3\ 6\ 2\ 4)$$

$$(2\ 5):\qquad (1\ 2\ 3\ 6\ 5\ 4)$$

$$(4\ 6):\qquad (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)\,.$$

په دې پسې يا له دې امله

$$(4\ 6)\circ(2\ 5)\circ(1\ 6)\circ\pi$$

کټمټوالی يا ايدنټيک ده، همداسې

$$\pi=(1\ 6)\circ(2\ 5)\circ(4\ 6)$$

او

$$\sigma(\pi)=(-1)^3$$

الترناتيو يا بديلي سرې کړی شي ځويکليکي ليکډوله وکارول شي:

$$\pi=(1\ 6\ 4)\ \ (2\ 5)\ \ (3)\ .$$

ځکه چې د k اوږدوالي يوه ځيوکلوس τ لپاره $\sigma(\tau)=(-1)^{k-1},$ دی

$$\sigma(\pi)=(-1)^2\cdot(-1)^1\cdot(-1)^0=-1\,.$$

مودولوس Modulus

(كه دوه ګڼونه ۱۳ او ۵ ولرو او ۱۳ په ۵ ووېشو، نو لاس ته ۲ راځي د ۳ ياتي سره. دا داسې ليکو:

$$13 : 5 = 2$$

ياتي 3

ليکلی شو 0 = 5 : (13-3) دا په دې مانا چې ګڼ ۵ ګڼ3-13 وېشي

پيژند (تاکونکی يا تعريف) كه تولګنونهx او y او يو طبيعي عدد يا پيداېښتي ګڼ a ولرو ، نو وايو ،، x كونګروانځy مودولو a (mod a) ده،، په نخښه x≡ymod a ، . كه x≡ymoda نه وي، نو واي چې : x د y سره كونګروانځ مودولو(moda)a نه ده ،،يعني x≢ymod a

مودولوس Modulus

لرو a > 0 او $x \in \mathbb{R}$. د $x \bmod a$ (لوستل : x مودولو a)لاندې په a باندې د x وېشنې ياتي پوهيږو، دا په دې مانا، چې

$$x \bmod a = x - na \in [0, a)$$

د يوه تولګڼn لپاره . كه باور ولري

$$x \bmod a = y \bmod a \,,$$

نو x او y كونګروانځ مودولو a بلل كيږي.

ياتيتولګی(باقي-)(مودولو) modulo n

ډېرۍ $\{0,1,\dots,n-1\}$ د ابل ګروپ جوړوي د زياتون يا جمعې او د $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z} \bmod n$ سره په نخښه کيږي.

پام دې وي، چې ضرب $\text{modulo } n$ په $\mathbb{Z}_n$ د ګروپ جوړښت نه تعريفوي، خکه چې 0 په څېر توکی نه لري.

د دې روښانه بيلګې $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ په بنسټ اسان ارماېښت کيدی شي، چې زياتون يا جمعې، همداسې کمون يا تفرق د مودول – کارونې يا عمليې سره زغموړ دي.

د بيلګې په توګه دی

$$1 + 3 \bmod 4 = 0, \quad 0 - 2 \bmod 4 = 2$$

او داسې نور

سره له دې څل مودولو ۴ ($\text{modulo } 4$)مو د ګروپ تيوري ته نه لاربښودوي، خکه چې

$$1 \cdot 2 \bmod 4 = 3 \cdot 2 \bmod 4 = 2 .$$

دا د ناپيلي توکې د يواځيوالي سره په مخامخوالي يا تضادګې پروت دی

بدن(جسم يا تن يا پټی Field)

يوه ډېرۍ (سټ) چې په هغه کې يوه جمعه ``+,, او يو ضرب ``· ,,تعريف وي، بدن يا پټی يا ورشو بلل کيږي، که لاندې خويونه په کې باور ولري:

اول – د ګروپ د جمعې يا زياتيز جوړښت: $(K,+)$ يو ابل ګروپ دی د توکی(سفرتوکي) سره.

دا په دې معنا چې د ټولو $a, b \in K$ لپاره باور لري.

$b+a$	$=$	$a+b$
$a+(b+c)$	$=$	$(a+b)+c$
a	$=$	$a+0$
$0\,,$	$=$	$a+(-a)$

دويم – دلته $(-a)$ د a په څېر يا معکوس توکی دی.

دريم – د ضرب ګروپي جوړښت: $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ يو د ابل ګروپ دی د ناپيلي توکي 1 سره(يوي توکی يا که غواړئ واحد توکی) دا په دې معنا چې د ټولو $a, b, c \in K\backslash\{0\}$ لپاره باور لري:

چيرته چې $(-a)$ و a ته په څېر يا پرعکس توګی دی.

د ضرب ګروپي جزړښت : $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ يو ابلګروپ دی د ناپيلي توکي (يوي توکی)، دا په دې معنا چې د تولو $a, b, c \in K\backslash\{0\}$ لپاره صدق کوي

a.b=ba

(a,b).c=a.(b.c)

a.1=a

1= $a \cdot a^{-1}$

د کوم سره چې a^{-1} د a په څټ یا برعکس توکی دی.

دیستریبیوتیو قانون: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ د ټول $a,b,c\in K$ لپاره.

د ریښتونو اعدادو $\mathbb{Q}$ ډېرۍ، د حقیقي اعدادو $\mathbb{R}$ ډېرۍ او د کمپلکس اعدادو $\mathbb{C}$ ډېرۍ

د شمېرني قاعده يې سملاسي د اړونده تړني له لارې لاس ته راځي. صفرتوکی يې0 او یویتوکی يې 1.

همداسې يې د کمپلکس عدد $z=x+\mathrm{i}y\neq 0$ یوي توکی نسبت و ضرب ته $w=\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{-y}{x^2+y^2}$, دی، ځکه چې لرو:

$$z\cdot w=(x+\mathrm{i}y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-\mathrm{i}^2y^2}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{-xy+yx}{x^2+y^2}=1+\mathrm{i}0\,.$$

لومړني تنونه یا پټي یا ورشو

د هر لومړني عدد p لپاره $\mathbb{Z}_p=\{0,1,\ldots,p-1\}$ د ډېریو یو تن دی د د جمعې او ضرب مودولو p سره.

د په څټ – یا برعکس توکي شتون پورې ، نسبت و ضرب ته د تنونو لپاره همدا اوس په ټول اعدادو کې او د باقیتولګیو لپاره به میراث پاتي شي.

د $a\in\{2,\ldots,p-1\}$ لپاره کیدی شي a^{-1} په لاندې توګه جوړ شي. لومړی سړی په پام کې نیسي چې، $a^i\neq 0\bmod p \quad \forall i\in\mathbb{N}\,.$.

که $a^i = np$ وی، نو د لومړي تن تجزيې څخه به ولرو، چې په p ويشل کيږي، څه چې د $a < p$ له امله ناشونی دی. که اوس پرلپسې $a^i \bmod p, \quad i = 0, \ldots, p-1$, په پام کې ونيسو

، نو بايد کم له کمه يو پاتي دوه واره رامنځ ته شي، يعني

$$a^{i_1} = a^{i_2} \bmod p\,, \quad i_1 < i_2$$

به ضدق وکړي. له دې سره به وي:

$$a^{i_2-i_1} = a^{i_2-i_1-1}a = 1 \bmod p\,,$$

له کوم سره به چې a ته په برعکس توکی پيدا شوی وي.

په لومړني تن $\mathbb{Z}_5$ کې برعکس توکي دي

$3 \bmod 5$	$=$	2^{-1}
$2 \bmod 5$	$=$	3^{-1}
$4 \bmod 5\,.$	$=$	4^{-1}

که $a^i = np$ وی، نو د لومړني ضريب تجزيې څخه به مو لرودی، چې p وېشي، څه چې د $a < p$ له امله ناشوني دي. که اوس پرلپسې يا $a^i \bmod p, \quad i = 0, \ldots, p-1$, په پام کې ونيسو، نو بايد کم له کمه يو باقي دوه واره رامنځ ته شي، پس $a^{i_2-i_1} = a^{i_2-i_1-1}a = 1 \bmod p$, به صدق وکړي د کوم سره به چې د a برعکس توکی پيدا شوی وي.

په لومړني تن $\mathbb{Z}_5$ کې په څټ – يا برعکس توکي دي:

$$2^{-1} = 3 \bmod 5$$

$$3^{-1} = 2 \bmod 5$$

$$4^{-1} = 4 \bmod 5\,.$$

د دې سره د بيلګې په توګه $\frac{(2+4)}{3} \bmod 5 = \frac{1}{3} \bmod 5 = 2$ همغږيز دی له دې لاندې سره.

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \bmod 5 &= 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \bmod 5 \\ &= 4 + 3 \bmod 5 \\ &= 2\,.\end{aligned}$$

ګالويز – بدن Galois-Körper

تن$[2^2]$GF د 4 توکو سره د جمعې او ضرب د ترنو له لارې کيدی شی ورکړل شي:

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b

a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

دا مخ ته پروت جوړښت اصول داسي ساده نه دی، لکه په لومړنيو تتونو $\mathbb{Z}_p$ کي او د ګالويز له خوا پيدا شوي دي. دا په تړليږه توګه کېدی شي د تنړنړ ځخه د p^{ℓ} توکو سره $\ell \in \mathbb{N}$ ، د په خوښه p لپاره لومړنی عدد لپاره اجرا کړي يا سرته ورسوي، او کېدی شي و ښوول شي چې په دې توګه ټول تتونه لاس ته راوړي.

په ګروبونو کې تورنی (لکه د مسابقې لپاره جمتو کيدو ګروپ)

به کابل، غزني او ننګرهار کې په څلورو مهالوېش(وختونو) د نهو ډلو په منځ کې مسابقه بيل کيږي. د لته دي ،، هر يو د هر يو په مقابل کې،، لوبه وکړي. دا يه دې معنا چې په هر مهالوېش دې درې ګروپونه د هر درې ډلو ځخه لوبه وکړي، چې په هرو دې درې ځايونو کې دې لوبه وشي. ستونځی په دې کې پرتې دي، چې يو بل بايد سره غوځ يا قطعه نه کړي، هره جوړه د $3 \cdot 4$ ګروپونو کې بايد يو ځل رامنځ ته شی

د شميرپوهنې له مخې دا مسأله په لاندې ډول فرمولولی شو: دا 3 توکيزې ډېری

$$S_{0,k} \cup S_{1,k} \cup S_{2,k} = \{1, \ldots, 9\}, \quad k = 0, \ldots, 3$$

دې وټاکل شي، چې د دوه ډېريو غوڅی ماکسيمال يو توکی خوندي ولري.

د دې شرايطو سره د دې مخه نيول کيږي، چې د ګروپونو ډېری چې د لوبو ورځې يې مختلفې دي، ګډه د لوبدلو جوړه خوندي ولري..

د $S_{j,k}$ ډېری د لومړنی تن $\mathbb{Z}_3$ په مرسته جوړ بدلای شی.. د لته د لوبډلې نمرې $(\alpha, \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_3$ $1, \dots, 9$ د نهه توکیزه ،، پای سطحي،، دټکو سره په نخښنه کېدی شي او دا په نخښنه شوي ،، پای سطحه،، ډېری د دې سطحې د کربنوسره په نخښنه کېدی شي:

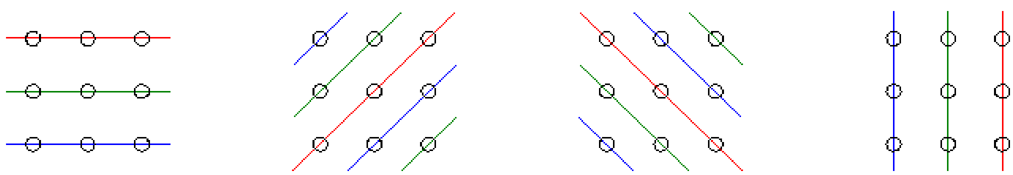
$$S_{j,k} = \{(\alpha, k \cdot \alpha + j \bmod 3) : \alpha = 0, 1, 2\}, \quad ($$

کربنه د $k = 0, 1, 2)$ جګېدنې سره

$$S_{j,3} = \{(j, \alpha) : \alpha = 0, 1, 2\} \quad ($$

ولاړه یا عمود کربنه).

داګروپ وېشنه په لاندې شکل کې لیدوړ ده:



همدا مسأله د 16 ټیمونو سره ده ، 4 ښارونو او پنځه مهالوېش سره په ورته ډول حل کېدی شي. سری 4-توکیزه ګالویز تن $GF[2^2]$ او لاندې ګروپ وېش لاس ته راوړو:

	لوبځای1	لوبځای2	لوبځای3	لوبځای4
لومړی لوبورځ	1,2,3,4	5,6,7,8	9,10,11,12	13,14,15,16
2-مه لوبورځ	1,6,11,16	5,2,15,12	9,14,3,8	13,10,7,4
3 -مه لوبورځ	1,10,15,8	5,14,11,4	9,2,7,16	13,6,3,12
4 -مه لوبورځ	1,14,7,12	5,10,3,16	9,6,15,4	13,2,11,8

5 -مه لوبورځ	1,5,9,13	2,6,10,14	3,7,11,15	4,8,12,16

په ټوليزه توګه د ليل د q^2 لوبډلو او q ښارونو لپاره دليل شووني دی، هلته چې q د يوه لومړني عدد توان دی، ځکه چې د داسي يوه عدد q لپاره تن GF(q) شتون لری.

وکتورفضا يا وکتوري فضا

يو ابل ګروپ $(V,+)$ وکتورفضا په يوه تن K يا K -وکتورفضا بلل کيږی، که يو سکالار ضرب ``·,, تعريف وي، چې $(\lambda, v) \in K \times V$ په ضرب $\lambda \cdot v \in V$ تنظيم او لاندې خويونه ولری..

د ټولو سکالار $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in K$ او ټولو وکتورونو v، v_1، $v_2 \in V$ لپاره صدق کوی:

$$
\begin{aligned}
(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v &= \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v \\
\lambda \cdot (v_1 + v_2) &= \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 \\
(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v &= \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v) \\
1 \cdot v &= v\,.
\end{aligned}
$$

که $K = \mathbb{R}$ يا $K = \mathbb{C}$ وی، نو سړی د يوه حقيقي همداسي کمپلکس وکتورفضا غږيږو او په ټوليزه توګه د سکالار ضرب لپاره ټکي ځخه تېريږو.

پام دې وي، چې د حمعي علامه د V په همداسې په K کې کارول کیږي. همداسې ضرب هم په K کې د ضرب لپاره کارول کیږي. پای

د تعریف سره سم په ځانګړي ډول په وکتورفضا کې د ګروپ اکسیومونه ضدق کوی:

اسوشیاتیو قانون:

$$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$$

ضفر توکی(صفروکتور) : تیک یو توکی $0 \in V$ د $v + 0 = v$ سره شتون لري ، د ټول $v \in V$ لپاره.

نسبت و جمعي ته په ښه – یا معکوس توکی: د ټولو $v \in V$ لپاره تیک یو $-v \in V$ شتون لري د لاندې سره:

$$v + (-v) = 0$$

د جمعي بدلون قانو:

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

غوښتونکی شرایط تنظیموي، چې جمعه، کمون یا تفریق او ضرب دا ورسره بلد شمیرقوانین پوره کوي.. سږی داسې کړی شي چې ضرب سر ته ورسوي:

$$\left(\sum_i \lambda_i\right) \cdot \left(\sum_j v_j\right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \cdot v_j \,.$$

سربیره پردې د مخ نخښې قانون صدق کوي.

$$-(-v) = (-1)\cdot(-v) = v, \quad -\left(\sum_i v_i\right) = \sum_i -v_i\,.$$

د $\text{Gard} \le n$ (درجې) پولينوم

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (a_i \in \mathbb{C}),$$

يو حقيقي (کمپلکس) وکتور فضا جوړوي،، د کوم سره چې جمعه او سکالار ضرب په ورته نږدې ډول تعريف دي:

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x), \quad (\lambda p)(x) = \lambda p(x)\,.$$

د وکتورفضا خويونه ساده تصديق کيدلی شي.

په پام کې لرو چې پولينوم د n درجې سره، دا په دې معنا چې د $a_n \neq 0$ سره وکتورفضا نه جوړوی. د جمعې جوړول کيدی شي د درجې کموالی ته لاربنود کړي. د بيلګې په توګه دی:

$$(2x - x^2) + (3 + x^2) = 3 + 2x\,.$$

پای

حقيقي پرلپسي (a_n) د $n \in \mathbb{N}$ سره يوه حقيقي وکتورفضا د عمليې سره جوړوي

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n), \quad \lambda(a_n) = (\lambda a_n)\,.$$

که سربيره پردې و غوښتل شي، چې ايا د وکتور سترکچر يا جوړښت خرابيدلی شي.

د بېلګې په توګه یوغږیزې پرلپسې وکتور فضا نه جوړوی. د مونوتون پرلپسیو جمعه اړیین نه ده یوغږیز وی، لکه دا لاندې بېلګه ښایي:

$$(4n) + (-n^2)$$

برعکس به بندوالی یا محدودیت یو منل شوی خوی وی..

پای

د n - ګوني وکتورفضا

د K تن لپاره n -ګوني یا n-وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad a_i \in K$$

فضا دا K وکتورفضا K^n د کمپوننت ډوله تعریف شوي جمعي او سکالار ضرب سره، دا په دې معنا چې

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

او

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

د ټولو $a_i, b_i, \lambda \in K$ لپاره .

په زياتو حالاتو کې ساده دی چې n ګونی يا n توپل د ليکې وکتور په څېر

$$a = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{t}}$$

همداسې

$$a^{\mathrm{t}} = (a_1, \ldots, a_n)$$

وليکل شي. د ترانسپوزيشن سيومبول ``$\mathtt{t}$,, سره د ستاندارد قرارداد څخه د متو وکتور په حيث توپيرېږي.

پای

لاندې فضا يا برخه فضا sub space

د يوه K -وکتورفضا V پيرخه ډېرى U، چې د په V کې تعريف شوې جمعې او سکالار ضرب سره پخپله وکتورفضا جوړوی، د V لاندې فضا يا برخه فضا بلل کيږي.

برخه فضا U زيات وخت د V توکو شرايطو سره تعريفيږی:

$$U = \{v \in V : A(v)\},$$

د کوم سره چېA يوه په نخښه کوی، چې د ټولو $v \in V$ لپاره بايد پوره وی.

د دې لپاره چې و ازمايو چې ايا U د V لاندې فضا ده، کفايت کوي چې وښايو چې U نسبت د جمعې او سکالار ضرب سره تړلې ده:

$$u, v \in U \implies u + v \in U$$

$$\lambda \in K, u \in U \implies \lambda \cdot u \in U\,.$$

$$u, v \in U \implies u + v \in U$$

$$\lambda \in K, u \in U \implies \lambda \cdot u \in U\,.$$

ليکونکي اېپ، کيمرلې

برخفضاوې زيات وخت د ورزياتو(برعلاوه؟) ځانګړ شوو خويونو له لارې منځ ته راځي. که د حقيقي توابعو $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,$ وکتورفضا په پام کې ونيسو، نو د بېلګې په توګه جوړه توابع $f(x) = f(-x)$ د ټولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره يوه برخفضا جوړوی. نورې بيلګې همداسې معکوسې بېلګې په لاندې جدول کې ورکړې شوې دی.

لاندې فضا	خويونه
هو	ناجوړه
ja هو	بند يا مخدود
نه	يوغړيز
هو	نابرېکيدونکي
نه	مثبت
هو	ګربنيز

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د یوه K -وکتورفضا د هر وکتور $d \neq 0$ لپاره د صفر څخه تیرېدونکي کرښه $v = \lambda d, \quad \lambda \in K$ یوه لاندې – یا برخفضا جوړوي.

په هر حالت یوه کرښه چې له صفر0 نه تیریږي، لاندې یا برخفضا نه ده. د بېلګې په توګه

$$g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

$(1,0)^t$ په کرښه

پرته ده، مګر $(2,0)^t$ نه.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

ګرښیز کمبینیشنLinearkombination

په یوه K - وکتورفضا V وکتورونو $v_1, v_2, \ldots, v_m$ لپاره سړی

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_m \cdot v_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i$$

د سکالارو $\lambda_i \in K$ سره د وکتورونو v_i ګرښیز کمبینیشن بولي یا نوموي.

په ټولیزه توګه د $W \subset V$ لپاره د W څخه کرښیز کمبینېشن لاندې ، د W څخه د ناپای ډېرو وکتورونو یو کرښیز کمبینېشن پوهیږو.

لیکونکي: اپپ، کیمرلې

وکتور $v=(1,2,3)^t$ د وکتورونو $v_1=(3,4,5)^t,\ v_2=(1,1,1)^t,$ یو کرښیز کمبینېشن دی، ځکه چې $v=v_1-2v_2$.

د دې برعکس $v=(1,0)^t$ د وکتورونو $v_1=(0,1)^t,\ v_2=(0,2)^t,$ کرښیز کمبینېشن نه دی.ځکه چې د v_1 او v_2 کرښیز پولینوم بڼه $(0,*)^t$ لری..

بالاخره کېدی شي $v=(0,0,0,0)^t$ په مختلفو ډولونو د وکتورونو

$$v_1=(1,1,0,0)^t,\ v_2=(0,2,2,0)^t,\ v_3=(0,0,3,3)^t,\ v_4=(4,0,0,4)^t$$

کرښیز کمبینیشن په څیر انځور شي:

$$v=\lambda(12v_1-6v_2+4v_3-3v_4)$$

د $\lambda\in\mathbb{R}$ سره.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

کرښیزه هیولې یا سپاین یا سمڅ Lineare Hülle(span)

یادونه: د په یوه فضا کې د خوندې شیانو او د باندې په منځ کې یو دیوال جوړوي.

د K - وکتورفضا V د وکتورونو $v_1, \dots, v_n$ ټولو ګرښیزو کمبینېشنونو ډېرۍ د وکتورونو v_i کرښیزه سپاین یا هیولې(یو څه یا کوټی یا ...و چې په فضا کې یو ځا رابندوي (ژباړی)) بلل کیږي او داسې یې په نخښه کوو:

$$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot v_i : \lambda_i \in K\}.$$

په ورته توګه سرۍ د $\operatorname{span}(U)$ وکتورونو د یوې ډېرۍ U لپاره د U د ټولو کرښیزوکمبینېشنونو ډېرۍ تعریفوی..

د هرې برخډېرۍ $\operatorname{span}(U)$ $U \in V$ لپاره د V یو برخفضا ده.

لیکونکي: اپ، کیمرلې

که په $\mathbb{R}^3$ کې دوه مختلفې د سرچینې کرښې g_1 او g_2 په پام کې ونیسو، د بېلګې په توګه

$$g_1 : x = \lambda_1(1,0,0)^t,\ g_2 : x = \lambda_2(0,1,0)^t, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

دا هریو د لوریزو وکتورونو کرښیزه سپاین یا ګرښیزه هیولې دي، دلته

$$v_1 = (1,0,0)^t,\ v_2 = (0,1,0)^t.$$

نو د وکتورونو v_1 او v_2 کرښیزه هیولې یا سپاین یوه سطحه $E = \operatorname{span}(v_1, v_2)$ ده، چې کرښې g_1 او g_2 خوندي لري، پس دلته

$$E : x = \lambda_1(1,0,0)^t + \lambda_2(0,1,0)^t, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

همداسې

$$E = \{x : x_3 = 0\}$$

ليکونکي اپ، هيوليک

ننوتی – یا محدب کمبينيشن Konvexkombination

په يوه حقيقي وکتورفضا V کې يو کرښيز کمبينيشن

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$$

د $\lambda_i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1$ سره د وکتورونو $v_i \in V$ کنوکسکمبينيشن بلل کيږي.

ليکونکي اپ، هيوليک

ننوتی يا محدبه هيبولې يا سپاين(المانی ويينه :شپاين)Konvexe Hülle

د يوه حقيقي وکتورفضا V د يوې برخډېری M محدبه هيولې د ټولو محدب کمبېشنونو

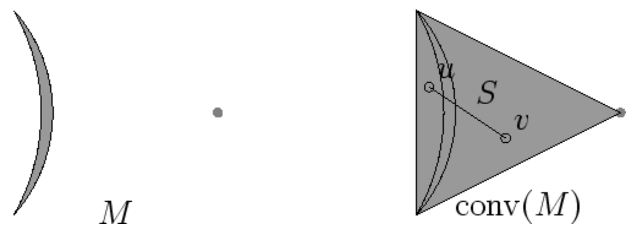
$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m \qquad (\lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1)$$

ډېری ده د $v_i \in M$ سره او د $\operatorname{conv}(M)$ سره ليکل کيږي.

ځمککچيز يا هندسي $\mathrm{conv}(M)$ خورا کوچنۍ ډېرۍ ده، چې M خوندی لري، کومه چې د هرو دوه توکو u, v لپاره د هغو ترنکربښه

$$S = \{\lambda u + (1-\lambda)v : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

هم خوندی لري



ليکونکي اپ، هيوليګ

حقيقي- ياربينتونی سکالار ضرب Reelles Skalarprodukt

په يوه حقيقي وکتور فضا V باندې يو سکالارضرب يو تابع

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

ده، دلاندې خويونو سره:

مثبتوالی :

$v \neq 0$ د $\langle v, v \rangle > 0$ لپاره.

سيومتري:

$$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$$

کرښيزوالی:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \varrho\langle v, w\rangle$$

دلته $u, v, w \in V$ او $\lambda, \varrho \in \mathbb{R}$ په خوښه وکتورونه هرداسي سکالار.

د سيومتري په بنسټ يو حقيقي سکالار ضرب د دويم دليل په بنسټ هم کرښيز دی، يعني په V يو بي کرښيزه Bilinearform بڼه.

ليکونکي اپ، هيوليک، کرايخ

سکالار ضرب Skalarprodukt

په يو کمپلکس وکتورفضا V يو سکالار ضرب يو فنکشن

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

دی، د لاندې خويونو سره:

مثبتوالی:

$\langle v, v\rangle > 0$ د $v \neq 0$ لپاره.

مائل سيومتري:

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

کرښیزوالی:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \varrho \langle v, w \rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ همداسې $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوښه وکتورونه همداسې سکالار دي.

مایل سیومتریکSchiefsymmetrie :

کرښیزوالی:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \varrho \langle v, w \rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ او $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوښه وکت.ورونه همداسې سکلار دي

د مائل سیومتري په اساس یو کمپلکس سکالارضرپ نسبت و دویمي متحولې ته ګرښیز نه دی:

$$\langle u, \lambda v + \varrho w \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle + \overline{\varrho} \langle u, w \rangle .$$

فقط د حقیقي سکالار لپاره کمپلکس کونجوګېشن بې مفهومه دی.

لیکونکي اپ، هیولیک، کرایخ

دا ترې لاس ته راغلې اسیومتري اړیین ده، چې د کمپلکس سکالارضرب مثبتوالی تضمینوي. د بېلګې په توګه دی:

$$\langle \mathrm{i}v, \mathrm{i}v \rangle \neq \mathrm{i}^2 \langle v, v \rangle = -\langle v, v \rangle < 0$$

د $v \neq 0$ لپاره.

له دی زيات صدق کوي:

$$\langle \mathrm{i}v, \mathrm{i}v \rangle = (\mathrm{i}\bar{\mathrm{i}}) \langle v, v \rangle = \langle v, v \rangle > 0 \,.$$

مثبتوالی اړيين دو چی له $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ لارې ئو نورم تعريف کړاي شو.

ليکونکي هيوليک، هيورنر

د وکتورونو $x, y \in \mathbb{R}^2$ لپاره يوه دحقيقي سکالار ضربونو د ممکنه تعريفونو لړی تر څېړنې نيسو. په لاندې جدول ورکړ شوي، چې کوم خويونه پوره دي.

خويونه	سکالار ځل
ټول	$10x_1y_1 + x_2y_2$
کرښيزوالی	x_1y_2
مثبتوالی، سيومتري	$\lvert x_1y_1 \rvert + \lvert x_2y_2 \rvert$
سيومتري	$x_1x_2 + y_1y_2$

فقط لومړی تعريف ټول غوښتوني شرايط پوره کوي. په کملکس وکتورفضا $\mathbb{C}^2$ کې په هر ډول دا حالت نه دی، هم مثبتوالی او هم مائل سيومتري پوره نه دي:

$$\langle(\mathrm{i},0),(\mathrm{i},0)\rangle = \qquad 10\mathrm{i}^2 = -10 < 0$$

$$\langle(\mathrm{i},0),(1,0)\rangle = 10\mathrm{i} \neq \overline{\langle(1,0),(\mathrm{i},0)\rangle} = -10\mathrm{i}$$

په داسې حالت کې چې د دویم Arguments اجزا وې یا کمپوننتونه کمپلمس کنجوګیرت کړي، پرابلک له منځه تلاي شي. تعریف

$$\langle x,y\rangle = 10x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$$

په کمپلکس حالت غزونه راکوي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د کوشي-شوارځ – نامساوات(نابرابرون)

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

سکالار ضرب کېدی شي د اسوځیاتیو قانون له مخې تخمین شي:

$$|\langle u,v\rangle| \leq |u||v|, \quad |w| = \sqrt{\langle w,w\rangle}\,.$$

مساوات ټیک هلته صدق کوي، که صدق ولري $u \parallel v$.

که $v = \lambda u$ وي، لکه څنګه چې غوښتل کیږي مساوات صدق کوي.

د u همداسې د v ضرب د یوه سکالار سره نامساوات تغیر نه خوري. کېدی شي ونیسو(فرض کړو) چې صدق کوي:

$$|u|^2 = |v|^2 = 1 \,.$$

که د سکالار ضرب سره (دلیل حقیقي حالت په بر کې نیسي) دي

$$\langle u, v\rangle = r\exp(\mathrm{i}\varphi)\,, \quad r > 0\,,$$

د $\lambda = \exp(\mathrm{i}\varphi)$ سره د ناغبرګو(ناموازي) وکتورونو لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} 0 &< \langle u - \lambda v, u - \lambda v\rangle \\ &= 1 + \lambda\bar{\lambda} - \lambda\overline{r\exp(\mathrm{i}\varphi)} - \bar{\lambda}r\exp(\mathrm{i}\varphi) \\ &= 1 + 1 - r - r\,. \end{aligned}$$

له دې سرره $r = |\langle u, v\rangle| < 1$ باور لري، ده په دې معنا چې غوښتنه مو.

نورم Normر ډولیزوال

په یوه حقیقي یا کمپلکس وکتورفضا V نورم یا تابع $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ ده

د لاندې خویونو سره:

مثبتوالی:

$\|v\| > 0$ د $v \neq 0$ لپاره.

هوموګینیوالی یا برابیرډولیزوالی Homogenität :

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

درېګوډې (مثلث-) نامساوات:

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

د لته u, v په خوښه وکتورونه دي او λ یو په خوښه سکالار.

دد نورم $d(u,v) = \|u-v\|$ په مرسته کېدی شي د دوه وکتورونو ترمنځ واټن تعریف شي.

د سکالار ضرب نورم Skalarprodukt - Norm

په یوه حقیقي یا کمپلکس وکتورفضا V د یوه سکالار ضرب سره ، نورم له

$$|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}, \quad v \in V$$

سره په یوه معنا دی.

مثبتوالی او هوموګینیټي (ورته والی) تړلې د سکالارضرب د ورته خویونو څخه لاس ته راځي. د مثلث مساوات له

$$|u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + \underbrace{\langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle}}_{\in\mathbb{R}} + \langle v,v\rangle$$

$$\leq \quad |u|^2 + 2|\langle u, v\rangle| + |v|^2$$

$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \quad |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$$

$$= \quad (|u| + |v|)^2$$

څخه د ريښې نيونې له لارې لاس ته راځي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

ماکسيموم - نورمMaximum-Norm

د وکتورونو فضاو $\mathbb{R}^n$ او $\mathbb{C}^n$ لپاره

$$\|z\|_\infty = \max_i |z_i|$$

ماسکيموم – نورم په نخښنه کوي.

درېګوډي نامساوات پوره دي، څکه چې د $z = x + y$ لپاره باور لري

$$\max_i |z_i| = \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i \left(|x_i| + |y_i|\right) \leq \max_i |x_i| + \max_i |y_i| \, .$$

ماکسيموم-نورم کېدی شي د وزنونو $w_i \in \mathbb{R}_+$ د پيل کولو يا رامنځ ته کولو سره ټوليز شي:

$$\|z\|_{\infty,w} = \max_i (w_i |z_i|) \, .$$

د حقيقي- يا ريل وکتورونو سکالار ضربSkalarprodukt reeller Vektoren

د وکتورونو $v=(v_1,\ldots,v_n)^{\mathrm{t}}, w=(w_1,\ldots,w_n)^{\mathrm{t}}\in\mathbb{R}^n$ لپاره کانونيکي
ضرب د

$$v^{\mathrm{t}}w=\sum_{i=1}^{n}v_iw_i=v_1w_1+\cdots+v_nw_n$$

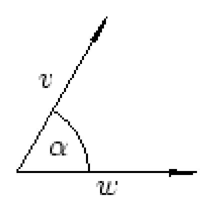
سره تعريف دی د ورکړشوي assoziierten نورم

$$|v|=\sqrt{v_1^2+\cdots+v_n^2}\,.$$

سره.

$$v^{\mathrm{t}}w=|v||w|\cos\alpha$$

هندسي کېدی شي دا نورم د له لارې تعريف شي، د v او w
ترمنځ کوچنی زاويه يا کونج α په نخښه کوي، چې د u او v څخه غزيدلې سطحې کې
اندازه کيږي.



د سکالار ضرب خويونه ساده ازمايل کيږي.

د هدسي تعريف ورته والی د کوساين جلې سره تصديقيږي(لومړی د $n=2$ لپاره).

دې پسې د $v=(v_1,v_2)^{\mathrm{t}}$ او $w=(w_1,w_2)^{\mathrm{t}}$ سره باور لري، چې

$$|v-w|^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2|v||w|\cos\alpha \ .$$

که ځاي په ځاي کړو، نو ترې لاس ته راځي

$$(v_1-w_1)^2 + (v_2-w_2)^2 = v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - 2|v||w|\cos\alpha$$

او د بنه بدلو سره ښونه يا ثبوت.

د $n \geq 2$ لپاره v او w په $\mathbb{R}^n$ کې يوه سطحه اواره(هواروي) وي يا غزوي. ورته شمېرنه په دې سطحه کې ښايي، چې د په خوښه ډيمنزيونون (ابعادو يا پراخېدونو) $n \geq 2$ لپاره ټيک دی.

د کمپلکس وکتورونو سکالار ضربSkalarprodukt komplexer Vektoren

د وکتورونو $x = (x_1, \ldots, x_n)^t, y = (y_1, \ldots, y_n)^t \in \mathbb{C}^n$ لپاره کانونيکي

سکالار ضرب د $$y^*x = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j$$ له خوا تعريف دی د شسوخيري نورمونو

$$|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2} \, .$$

سره.

دا سوپرسکريپت له دې سره د يوه وکتور ترانسپوزيشن او کمپلکس کنجوګېشن په ګوته کوي.

دا تعريف حقيقي حالت خوندي لري، چې په هغو کې کمپلکس کنجوګيري حالت پوره وي.

$$x = \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ -2-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

که له $\mathbb{C}^2$ څخه د وکتورونو
سکالارضرب جوړوو، نو لاس ته راځي:

$$\langle x, y\rangle = (1+2\mathrm{i})\cdot 2 + (-2-\mathrm{i})\cdot \overline{2\mathrm{i}} = 2+4\mathrm{i}+4\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2 = 2+8\mathrm{i}-2 = 8\mathrm{i}\,.$$

پس د دوه کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب اړیین نه دی چې حقیقي وي.

د اسوڅییري نورم سره د دویم وکتور کنجوګیري کونه غوره رول لري. بې له کنجوګیري کونې څخه به په ضرب کې لومړي وکتور لاندې نورم لرودی

$$\sqrt{(1+2\mathrm{i})^2+(-2-\mathrm{i})^2} = \sqrt{1+4\mathrm{i}-4+4+4\mathrm{i}-1} = \sqrt{8\mathrm{i}} \notin \mathbb{R}\,,$$

او د دویم وکتور لپاره به په همدې ډول نورم نامثبت وی:

$$\sqrt{2^2+(2\mathrm{i})^2} = \sqrt{4-4} = 0 \not> 0\,.$$

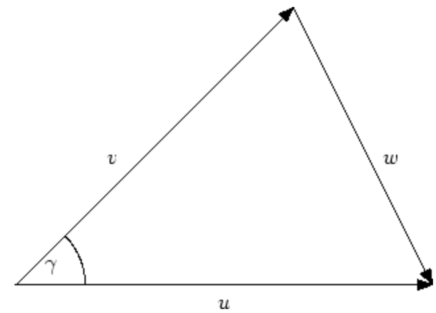
د دوه وکتورونو ترمنځ کونج Winkel zwischen Vektoren

$$\cos\sphericalangle(u,v) = \frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|}$$

د یوه حقیقي سکالار ضرب لپاره د لخوا

په $[0,\pi]$ کې د u او v ترمنځ یوکونج تعریفوي. په ځانګړې توګه u او v اورتوګونال، $u \perp v$ ، بولو که $\langle u, v\rangle = 0$ ولرو.

د کونج تعریف په $\mathbb{R}^2$ کې د وکتورونو لپاره د کوساین له مخې رابولي:



په یوه درېګوټي یا مثلث کې د اړخونو $|u|,|v|,|w|$ اوږدوالي لپاره اړیکې باور لري:

$$|w|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \sphericalangle(u,v) \,.$$

له بلې خوا د سکالار ضرب له تعریف څخه

$$|w|^2 = |v-u|^2 = |v|^2 + |u|^2 - 2\langle u,v\rangle \,,$$

د کونج تعریف د پرتلې له لارې لاس ته راځي.

د په خوښه حقیقي سکالارضرب لپاره د کوشي-شورڅ-مساوات په بنسټ لرو:

$$\frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|} \in [-1,1] \,.$$

وېش کېدی شي په $[0,\pi]$ کې د یوه کونج د کوساین سره برابر کیښوول شي یا ځاي په ځاي شي.

د پیتاګوراس(فیثاغورث) جمله Satz des Pythagoras

د یوه سکالارضرب-نورم د اورتوګونال یا عکود وکتورونو u او v لپاره

$$|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 \,.$$

باور لري.

باور لري

$$|u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \underbrace{\langle u,v\rangle}_{=0,\ \mathrm{da}\ u\perp v} + \underbrace{\langle v,u\rangle}_{=0,\ \mathrm{da}\ v\perp u} + \langle v,v\rangle =$$
$$= |u|^2 + |v|^2 .$$

دا حمله د پیتاګوراس جملې تر نامه شهرت لري(569-475 v. Chr)، سره له دې چې دا له دې 1000 کاله د مخه بابلیانو پېژندله.

امکان لري، چې پیتاګوراس به لومړنی وو، چې دا جمله یې ثبوت کړې.

د پیتاګوراس درېګونيPythagoräisches Tripel

د پیتاګوراس درېګونو سره درې طبیعي اعداد l, m, n بلل کیږي، د $l^2 + m^2 = n^2$, سره، د بېلګې په توګه $(3,4,5)$.

یو مثلث چې د اړخونو اوږدوالي نسبت یې د پیتاګوراس درېګونې پوره کوي، د پیتاګوراس جمله پوره کوي او له دې امله دا ولارګوډیز یا ولاړکونجیز او که غواړی قایم االزاویه دي.

مصریانو ممکن دا د ولاړګوډ د لاس ته راوړلو لپاره کارولی وي: دوي د یوې رسی یا پړي څخه کار رخسته، چې رابند او ۱۲ ګنډې د برابر یون (واحد)اوږدوالي سره درلودې. که دې رسی یو درېګوډی داسې جوړ شي، چې اخونه یې درې، څلور، پنځه یوونه یا واحده اوږده وي، نو د لنډو اړخونو ترمنځ پروت کوج ولاړ یا عمود دی.

هر ناجوړه یا طاق عدد $l \geq 3$ کېدی شي د عددونو $m = (l^2-1)/2$ او $n = (l^2+1)/2$ سره د یو پیتاګوراس درېګوني ته پوره یا مکمل شي، ځکه چې

$$l^2 + \frac{l^4 - 2l^2 + 1}{4} = \frac{l^4 + 2l^2 + 1}{4} = \left(\frac{l^2 + 1}{2}\right)^2 .$$

د دې درېګوني له 2 سره ضرب له لارې یو درېګونی لاس ته راځي، د هر ټول عدد $l \geq 6$ لپاره.

دا ورکړ شوی جوړخت اصول د یوې طریقې ځانګړی حالت دی، کزمه چې د ؛بینوم د دریم فرمول خڅه لاس ته راحي، [که چې له

$$c^2 - b^2 = (c - b)(c + b) = a^2$$

لاس ته راځي، که a^2 په دوه مختلفو ضریبونو تجزیه کېدی شي، چې یو بې جوړه کمښت یا تفریق $(= 2b)$ ولري. د ناجوړه یا طاق $a = l$ لپاره دا ټوټه کونه $a^2 = a^2 \cdot 1$ پوره ده. لاس ته راوړو:

$$b = \frac{a^2 - 1}{2} , \quad c = \frac{a^2 + 1}{2}$$

او له دې سره دا پورته ځانګړی حالت.

کرښیز نابلواکوالی یا خپلواکوالی یا نا تابعیت Lineare Unabhängigkeit

وکتورونه $v_1, \ldots, v_m$ کرښیز بلواک بللکیږي، که سکالار $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ شتون ولري د $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$

او لږ تر لږه یوه $\alpha_i \neq 0$ سره. په بل حالت کې کرښیز خپلواک بلل کیږي.

په ټولېزه توګه د وکتورونو یوه ډېرۍ M کرښیز نا بلوک یا خپواکه بلل کیږي، که د M هره پاي برخډېرۍ د کرښیز نا بلوک یا خپلواکه وکتورونو څخه جوړه وي. په بل حالت کې M کرښیزه بلواکه پلل کیږي.

په پام کې دې وې، چې د کرښیز الجبر په موخه په حقیقت کې ناپاي ډېریو ته اجازه ورکړ شوې، مګر فقط ناپاي کرښیوېو کمپینیشنونو ته. د بېلګې په توګه د پرلپسیو وکتورفضا ډېریو کې

$$e=(1,1,\ldots)^t,\ e_1=(1,0,0,\ldots)^t,\ e_2=(0,1,0,\ldots)^t,\ \ldots$$

کرښیز خپلواک دی، سره له دې چې

$$e=\sum_{n\in\mathbb{N}} e_n\ .$$

دي.

د ثابتو پرلپسیو یا ترادفونو د کانونیکي یوون- یا واحدوکتورونو سره پاي انځورونه نه شته.

په $\mathbb{R}^2$ کې دوه وکتورونه تیک هلته کرښیز خپلواک دي، که یو هم د بل ډېر واره نه وي،
د بیلګې په توګه ړکتورونه $(1,0)^t$ او $(1,1)^t$ کرښیز خپلواک دي، ځکه چې ایښوونه

$$\alpha(1,0)^t+\quad\beta(1,1)^t=(0,0)^t$$

راکوي

$$\beta=\qquad\qquad\alpha=0\,.$$

همداسې

برعکس وکتورونه $(0,0)^t$ او $(2,3)^t$ کربنیز بلواک دي، که

$$0(2,3)^t = (0,0)^t$$

همداسي:

$$1(0,0)^t + 0(2,3)^t = (0,0)^t;$$

پس د صفر وکتور یو ،،نه تریویال،، یا ساده انځورونه شتون لري.

په $\mathbb{R}^2$ کې د رې وکتورونه u, v, w تل کربنیزبلواک یا تابع دي، ځکه چې لاندې ځاي په ځاي کونه

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

کښته ټاکلي لاینیز هوموجین سیستم ته مو لاربنودوي

$$\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = 0$$

$$\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 = 0$$

د α, β, γ لپاره، چې تل یو ناساده حل لري

لکه په دوه بعدي همداسي په $\mathbb{R}^3$ کې دوه بعدي وکتورونه کربنیز بلواک دي، که دا غبرګ(موازي) وي، دا په دې معنا چې که یو وکتور د بل وکتور څو ځله وي.

درې وکتورونه کربنیز بلواک دي، که دوه وکتورونه غبرګ یا موازي وي یا که یو وکتور له دې نورو دوه وکتورونو غزېدلي سطحه کې پروت وي. د بېلګې په توګه د لاندې لپاره باور لري

$$u = (1, 2, -3)^t,\ v = (4, -6, 2)^t,\ w = (-9, 3, 6)^t$$

لپاره باور لري

$$6u + 3v + 2w = (0, 0, 0)^t$$

، پس وکتورونه کربنيز بلواک دي.

د تعريف سره سم د کربنيز بلواکوالي لپاره ازمايښت ورته دی یوه هوموجېن کربنيز مساواتسيستم سره

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د سکالار λ_i لپاره. دا په ځانګړي توګه ښايي، چې څلور وکتورونه په $\mathbb{R}^3$ کې تل ګربنيز بلواک يا تابع دي.

بنسټ Basis

د یوه وکتور فضا V برخډېرۍ B د وکتور V یو بنسټ بلل کيږی، که B کربنيز خپلواکه وي او د V یو توليدېدونکی يا جړوېدوکی سيستم وي، دا په دې معناچې که هر وکتور $v \in V$ یو یوائځنۍ انځورونه د یوه پاې کمبينېشن $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$ د $b_i \in B$ سره لري.

که B پای $(|B| = n)$ وي ، نو هر وکتور کېدی شي د يوه وضعيه قيمت له لارې سره نسبت و بنسټ ته وليکي:

$$v \leftrightarrow v_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t .$$

د وضعيه قيمت انځوروني

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \leftrightarrow v_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t ,$$

سره ، دا په نامه کانونيکي ايزومورفيزم، سرې کړی شي يو پای بعدي K -وکتورفضا V د n–ګونی وکتور فضا K^n سره په نخښه کړی شي يا وپيژندلی شي. په ځاګړې توګه کېدی شي چې د پای حقيقي او کمپلکس وکتوري فضا د د لوستلو سره په پروتو تيوپ $\mathbb{R}^n$ او $\mathbb{C}^n$ ځان محدود يا رابند کړي.

لکه د بېلګې په توګه د پولينومونو وکتور فضا يدلکيږي، اړيين نه ده چې وکتورفضا دې پای بنسټ ولري. مګر د د کرښيز الجب په ساحه کې پای کرښيز کمپېشنونه تر څېړنې لاندې نيول کيږي. د دې لاس ته رځي، چې پرلپسي

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots)^t,\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots)^t, \ldots$$

د پرلپسيو د وکتورفضا لپاره بنسټ نه جوړوي. دا د ناپای کرښيز کمبينېشن مطالعه يا راوړنه ، لکه دا چې ځنګه په فوريې لړيو کې رامنځ ته کيږي، په لاس لرو، خو يوه کونورکنځ يا پولې ته يوه تګ کليمه غواړي، يعني د فقط وکتورفضاجوړښت څخه زيات.

بعد يا پراخيدونی Dimension

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$
که یو وکتورفضا V یو پاي بنسټ ولری، نو د بنسټ وکتورونو ګڼون یا تعداد یواځنی ټاکلی او د V بعد یاپراخېدونی بلل کيږي:

$$n = \dim V \ .$$

د $V = \{0\}$ لپاره لیکو $\dim V = 0$ او $\dim V = \infty$ د یو ناپای بنسټ وکتورفضا لپاره.

د ټولیز بنسټ جملې له مخې هر وکتورفضا یو بسټ لری.

د دې لپاره چې وښایو، چې بعدونه یا پراخیدوني یواځني ټاکلی دي، بسیا کوی، چې لاندې وپینه وښایو:

که یوه وکتورفضا n-توکیزه بنسټ

$$b_1, \dots, b_n \ ,$$

ولري، نو $n+1$ وکتورونه

$$v_1, \dots, v_{n+1}$$

(او له دې سره د $n+1$ څخه زیات وکتورونه هم) کرښیز بلواک دي.

که دوه بنسټونه د مختلفو ډېرو وکتورونو سره شته وي، نو د بنشټوکتورونه به کرښیز خپلواکوالی ته یو تضاد لاس ته راشي.

پورتنی غوښتنه یا ثبوت کیدی شي د n پسې د ایندکشن له لارې و ښوول شي.

د ایندکشن پل لپاره (اندکشن پیل $n = 1$ ساده دی) که د وکتورونو v_i بنسټ انځورونه راواخلو:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} b_j, \quad i = 1, \ldots, n+1 .$$

.

باور لري:

$$\gamma_{i,1} = \cdots = \gamma_{i,n} = 0,$$
،

نو دی ، او کرښيزبلواکوالی همدا اوس و ښوول شو. نو کيدی شي د مناسب نمره کولو له لارې ونيسي، چې $\gamma_{n+1,n} \neq 0$. له پورته مساوات څخه په راوتنې يا پيل سړی اوس ومتورونه تعريفوي، کوم چې د $n-1$ وکتورونو $b_1, \ldots, b_{n-1}$ څخه د کرښيز کمبينيشن په څير انځوريدلای شي:

$$v_i' = v_i - \frac{\gamma_{i,n}}{\gamma_{n+1,n}} v_{n+1}, \quad i = 1, \ldots, n .$$

دا چې د b_n ضريب يا ځلوونی ورکيږي، ساده کتل کيږي. دا چې

$$\mathrm{Span}\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}, \ \ v_1', \ldots, v_n' \in V' =$$

کيی شي سړی د ايندکشن نيونې(فرضيی) وکاروي او نه ساده کرښيز کمبينيشن لاس ته راوړي

$$\lambda_1 v_1' + \cdots + \lambda_n v_n' = 0 .$$

د بنه بدلون پسي د کرښيز کمبينيشن لاس ته راځي، نو له دې سره غوښتنونی بلواکوالی يا تابعيت.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

اورتوګونال یا ولاړ بنسټ Orthogonale Basis

یو بنسټ $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ اورتوګونال بلل کیږي، که وي:

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0, \quad i \neq j\,.$$

که بنسټوکتورونه نورمي وي، دا په دې معنا چې $|u_i| = 1$ دي، نو د اورتوګونال سیستم یا اورتوګونال بنسټ څخه غږیږو.

یو وکتور v نسبت و یوه اورتوکونال بنسټ $u_1, \ldots, u_n$ ته انځورونه

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j\,, \quad c_j = \frac{\langle v, u_j \rangle}{|u_j|^2}\,.$$

لري.

د ضریبونو c_j لپاره پاور لري

$$|c_1|^2|u_1|^2 + \cdots + |c_n|^2|u_n|^2 = |v|^2\,.$$

د یوه نورمي پنسټ لپاره ترمونه $|u_j|^2$ له منځه ځي. او له دې سره لاس ته راځي:

$$c_j = \langle v, u_j \rangle\,, \quad |c_1|^2 + \cdots + |c_n|^2 = |v|^2\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیک، کیمرلې

دا چې $u_1, \ldots, u_n$ یو بنسټ جوړوي، نو سکالا $c_1, \ldots, c_n$ د

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j \ .$$

سره شتون لري.

که د پورتني مساوات لپاره په خوښه سکالار ضرب د u_k سره جوړ کړو او د بنسټ دد اورتوګوناليټي څخه کار واخستل شي، نو لاس ته راځي

$$\langle v, u_k\rangle = c_k\langle u_k, u_k\rangle$$

همداسې

$$c_k = \frac{\langle v, u_k\rangle}{\langle u_k, u_k\rangle} \ .$$

د ضريبونو لپاره کټمټوالی د پيتاګوراس د جملې ($n = 2$) توليزونه ده. دا تړلې د

$$|v|^2 = \langle c_1u_1 + \cdots + c_nu_n, c_1u_1 + \cdots + c_nu_n\rangle \, ,$$

ضربولو څخه لاس ته راځي، که دې ته پام وشي، چې مخلوط ترمونه

$$\langle c_ju_j, c_ku_k\rangle, \quad j \neq k$$

د بنسټ وکتورونو د اورتوګوناليټي له امله ورکيږي

نسبت و اورتوګونال بنسټ

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ته $v = (8,4)^t$ دا لاندې انځورونه لري

$$v = \frac{\langle v, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 + \frac{\langle v, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 = \frac{8+12}{1+9} u_1 + \frac{-48+8}{36+4} u_2 = 2u_1 - u_2 \ .$$

د ضريبونو لپاره باور لري:

$$|2|^2 \ \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|^2 + |-1|^2 \ \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}\right|^2 = 4 \cdot 10 + 1 \cdot 40 = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}\right|^2 .$$

نسپت و اورتوګونال پنسټ

$$u_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix},\ u_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix},\ u_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ته $v = (-1,1,3)^t$ لاندې انځورونه لري:

$$v = \langle v, u_1\rangle u_1 + \langle v, u_2\rangle u_2 + \langle v, u_1\rangle u_1 = 3u_1 - u_2 - u_3 \ .$$

د ضربيونو لپاره باور لري

$$|3|^2+|-1|^2+|-1|^2=\left|\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}\right|^2.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

اورتوګونال پروجکشن يا - پرپوستون Orthogonale Projektion

په يوه برخفضا U اورتوګونال پرپوستون

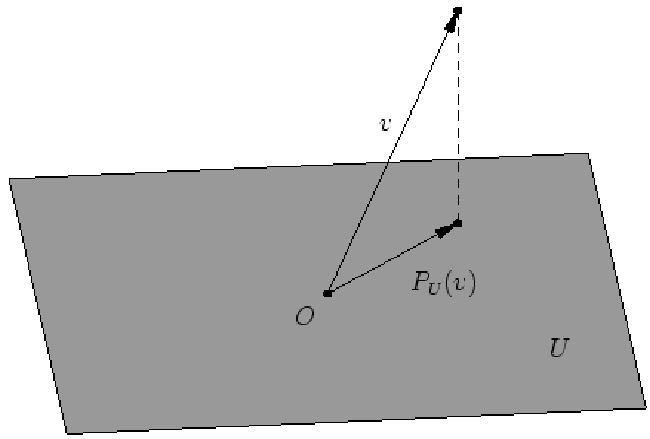
$$v\mapsto P_U(v)\in U$$

داورتوګوناليتي شرايط

$$\langle v-P_U(v),u\rangle=0,\quad\forall u\in U$$

سره پيژندل شوی دی.

.



که $u_1, \ldots, u_j$ د U يو اوتوګونال پنسټ وي، نو دی

$$P_U(v) = \sum_{k=1}^{j} \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k \,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

له $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ سره يوه هايپرسطحه $H \subset \mathbb{R}^4$ تعريف کيږي. د اوروتوګونال بنسټ لپاره کېدی شي لاندې وکتورونه وکارول شي:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نو د وکتور $x = (1, 2, 3, 4)^t$ د اورتوګونال پروجکشن لپارره لاندې باور لري:

$$P_H x = \frac{x^t u}{|u|^2}u + \frac{x^t v}{|v|^2}v + \frac{x^t w}{|w|^2}w = \frac{-4}{4}u + \frac{-2}{4}v + \frac{0}{4}w$$

ليکونکي: هيوليک، کرايخ

د ګرام-شميت تګلار يا قانون Verfahren von Gram-Schmidt

د يوه بنسټ $b_1, \ldots, b_n$ څخه کېدی شي، لکه په لاندې توګه، يو اورتوګونال بسټ $u_1, \ldots, u_n$ جوړ شي. دا سړی د $j = 1, \ldots, n$ لپاره سوکڅيسيو تعريفوي:

$$u_j = b_j - \sum_{k<j} \frac{\langle b_j, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k,$$

د $j = 1, \ldots, n$ لپاره.

دا رکوررزيو ساده کيږي، که بنسټوکتور له هر پل(قدم) ورسته نورمي شي:

$$u_j \leftarrow \frac{u_j}{|u_j|}.$$

په دې خالت دي: $\langle u_k, u_k \rangle = 1$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

سړی ايندوکتيو(له يوه څخه توليز ته) ښايي، چې $u_1, \ldots, u_l$ د $\operatorname{span}(b_1, \ldots, b_l)$ لپاره يو اورتوکونال بنسټ جوړزي.

د $l = 1$ لپاره دا روښانه دی: $u_1 = b_1$

د ایندکشن پل $(l \to l+1)$ لپاره په پام کې نیسو، جې د $j \leq l$ لپاره لرو

$$\langle u_{l+1}, u_j \rangle = \langle b_{l+1}, u_j \rangle - \sum_{k \leq l} \frac{\langle b_{l+1}, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} \underbrace{\langle u_k, u_j \rangle}_{\delta_{k,j}|u_k|^2} = 0 \, .$$

له دې امله $u_1, \ldots, u_{l+1}$ اورتوګونال دي. بالاخره

$$b_{l+1} - u_{l+1} \in \mathrm{span}(u_1, \ldots, u_l) = \mathrm{span}(b_1, \ldots, b_l) \, ,$$

دي، له کوم سره چې و ښوول شو، دواړه فضا همغه لاندې فضا غېوي یا خوروي.

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

د دې لپاره چې نسبت سکالار ضرب یا خل

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, dx$$

ته د پولینومونو $p_0, p_1, \ldots$ اورتوګونال پرلپسې(ترادف) جوړه کړو ,کیدی شنلار سرهي سرِی د مونوم $q_j(x) = x^j$ څخه مخ ته لاړشي. د ګرامشمیت د تلنلار سره لاس ته راوړي.

$$p_0 = q_0$$

$$p_1 = q_1 - \frac{\int_{-1}^{1} x \cdot 1 \, dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, dx} \cdot 1 = x - 0$$

$$p_2 = q_2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot x\,dx}{\int_{-1}^{1} x \cdot x\,dx} \cdot x - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1\,dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\,dx} \cdot 1 = x^2 - 0 \cdot x - \frac{1}{3}.$$

تولیزه بڼه

$$p_{n+1} = q_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \frac{\langle q_{n+1}, p_j}{p_j, p_j} \cdot p_j$$

کیدی شي کره نازکه یا نرمه شي، که سرې د $q_{n+1}(x) = x^{n+1}$ په ځای پولینوم $\tilde{q}_{n+1}(x) = x \cdot p_n(x)$ وکاروي. د

$$\operatorname{span}\{p_1, \ldots, p_n, q_{n+1}\} = \operatorname{span}\{p_1, \ldots, p_n, \tilde{q}_{n+1}\}$$

له امله دا قانوني دی. په دې حالت کې دې فقط زیاتوونی یا د جمعي غړی د $j = n - 1$ سره د صفر سره نا برابره وي.

د سیمتري په بنسټ د $j = n$ لپاره $\langle \tilde{q}_{n+1}, q_n \rangle = \int_{-1}^{1} x\, q_n(x)\, q_n(x) dx$ ورکیږي.د $j < n - 1$ لپاره $[x\, p_j(x)]$ د $p_k(x), k < n$ یوکرښیز کمبینیشن دی.

د $\langle p_n, p_n \rangle = 0$ له امله له دې سره

$$\langle \tilde{q}_{n+1}, p_j \rangle = \int_{-1}^{1} p_n(x)\, [x\, p_j(x)]\, dx$$

هم صفر دی.

په دې توګه لاس ته راوړل شوي پولینومونه د لجندر Legendre پولینومونه بلل کیږي. د یوه بل نومالي کونې سره

$$p_n(x) = \alpha_n x^n + \dots$$

د لاندې بڼې د دوه ترمونو ریکورزیون لری

$$p_{n+1}(x) = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}(x - \beta_n)p_n(x) - \gamma_n p_{n-1}(x)$$

د $\beta_n = \frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\varrho_n}, \gamma_n = \frac{\alpha_{n+1}\alpha_{n-1}\varrho_n}{\alpha_n^2 \varrho_{n-1}}$ او $\varrho_n = \langle p_n, p_n \rangle$ سره

کربنیزه ځیرونه (فنکشن یا تابع)Lineare Abbildung

د K–وکتور فضا V او W ترمنځ فنکشن $L : V \longmapsto W$ ګربنیز بلل کیږی، که دا لاندې خوېونه ولري:

- مثبتوالی

$$L(u + v) = L(u) + L(v)$$

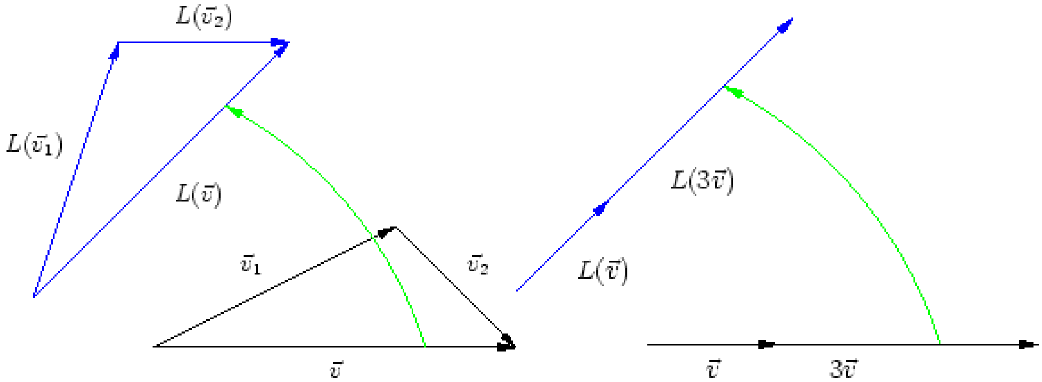
-هوموګیېینوالی:

$$L(\lambda v) = \lambda L(v)$$

له دې سره $u, v \in V$ او $\lambda \in K$ په خوښه وکتورونه همداسې سکالار دي.

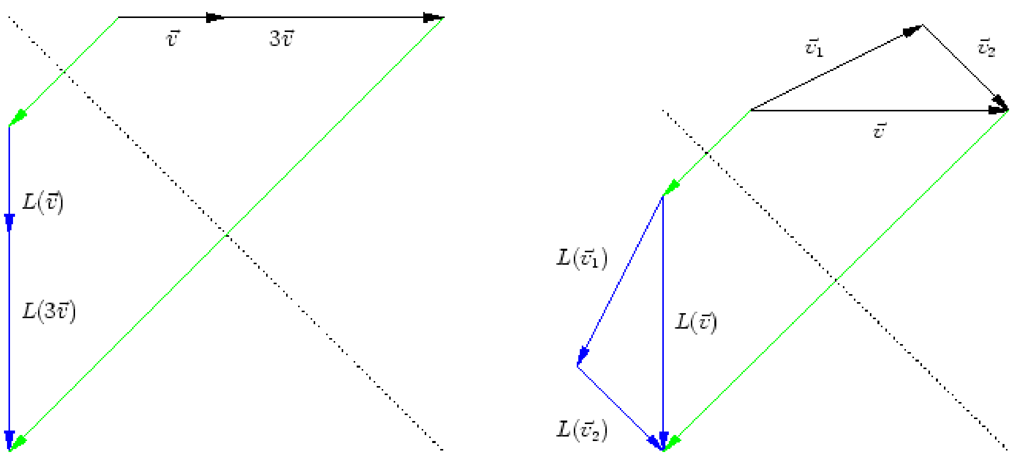
په ځانګړې توګه $L(0_V) = 0_W$ او $L(-v) = -L(v)$ باور لري.

لکه په لاندې بیلګه کې به چې ښوول شي، یو ځرخون کربنیز دی.



لکه جمعه یا زیاتون $v = v_1 + v_2$ د دواړو وکتورونو v_i سره یو مثلث یا درېګوډی جوړوي، چې د ده بڼه د څرخون سره بې تغیره پاتیږي، دا په دې معنا چې جمعه د مخه یا د څرخون سره جوړه شي. دا چې د ضریب λ سره غزونه د څرخون سره بدلیږي، بسې تړلی لیدل کیږي.

په ورته توګه ښوول کیږي چې هندارونه هم کرښيزه ده.



په سطحه کې د تګو یوه راکښنه کرښيزه نه ده.

نه زاتونوالی یا جمعه کیدنه او هم نه هوموجینیتي پوره دي. د

$$T: \ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 1, x_2)$$

او

$$v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,1),\ \lambda = 2$$

لپاره د بيلګې به توګه باور لري

$$T(v_1 + v_2) = (2,1) \neq (3,1) = T(v_1) + T(v_2)$$

$$T(\lambda v) = (3,0) \neq \qquad (4,0) = \lambda T(v)\,.$$

ليكونكي: هيورليک، هيورنر

يو څو بيلګې لاندې د حقيقي توابعو يا فنكشنونو جدول ښايي. دلته هرڅېرته وركړ شوي، چې د كرښيزوالي لپاره كوم شرطونه پوره دي.

ځيرونه يا فنكشن mapping	جمعي Additive	هوموجين homogen
$f \mapsto f'$	X	X
$f \mapsto \lvert f \rvert$	-	-
$f \mapsto \int_0^1 f$	X	X
$f \mapsto \max f$	-	-

$f \mapsto f(0)$	X	X
$f \mapsto (\max f + \min f)/2$	-	X

د يوه فنکشن لپاره يوه بيلګه، زياتيز (مثبت) مګر هوموجېن نه دی، دادی، چې يو فنکشن T، چې يو کمپلکس ارزښتيزه تابع د هغې حقيقي برخه په ګوته کړي يا وښايی يا په هغې څېره شي. دلته باور لري: $T(\mathrm{i}f) \neq \mathrm{i}T(f)$

ليکونکي: هيورليګ، هيورنر

د کرښيزو توابعو کمپوزيشن Komposition linearer Abbildungen

د دوه کرښيزو توابعو

$$S : U \to V\,, \qquad T : V \to W\,.$$

لپاره سړی کمپوزيشن تعريفوي(چې يوبل پسې تړاو يا ځنځيرونه هم بلل کيږي)

$$T \circ S : \quad U \to W$$

دا د لاندې لاری

$$(T \circ S)(u) = T(S(u))\,,$$

دا په دې معنا چې په $u \in U$ باندې فنکشن S او په نتيجه باندې فنکشن T کارول کيږي، فنکشن T د فنکشن S پسې کارول کيږي.

د دوه کربنیزو فنکشنونو کمپوزیشن بېرته کربنیز دی.

ماتریکس Matrix

په یوه تن یا جسم باندې د یوه $(m \times n)$ -ماتریکس تر نامه لاندې ($m, n \in \mathbb{N}$) دا لاندې یوه ولاړکډیزه - یا قام الزاویه شکل پوهیږو:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

دلته دا د A وکتورونه $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ د i –مې لیکې – او $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^t$ د j –مې متې(ستن یا پرته لیکه یا درځ...) وکتورونه بلل کیږي. په ځانګړي توګه $(n \times 1)$ - ماتریکس یو د لیکې - او $(1 \times n)$ - ماتریکس یو د متې یا ستنې وکتور دي..

د ټولو $(n \times m)$ - ماتریکسونو ټولګه په $K^{n\times m}$ سره په نخښه کیږي، حقیقي (کمپلکس) ماتریکسونه د $\mathbb{R}^{n\times m}$ ($\mathbb{C}^{n\times m}$) سره په نخښه کیږي.

لاندې بیلګې د مختلف د ماتریکس بعدونه یا پراخېدونی ښايي.

$$\begin{pmatrix} 31 \\ 57 \\ 97 \end{pmatrix} , \quad (\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}, -1, 3\mathrm{i}) , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ \sqrt{3}+3\mathrm{i} & 7543 & 17 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \\ 31 & 32 \end{pmatrix}$$

لومړي دوه ماتريکسونه د ليکو – همداسي د مټووکتورونه دي، دا په دې معنا چې د کومو څخه چې د يوې ديمنزيون 1 دی. بنې لور ته يو څلوريځ يا مربع ماتريکس او يو يو ولاړګوډيز- يا مستطيلي ماتريکس دی.

ليکونکي: هيورليګ، هيورنر

د يوه کربنيز فنکشن ماتريکس Matrix einer linearen Abbildung

د دوه K - وکتوروفضاو ترمنځ د بنسټونو $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ او $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ سره يو کربنيز فنکشن $L : V \longmapsto W$ دبنسټوکتورونو د $L(e_j) = a_{1,j} f_1 + \cdots + a_{m,j} f_m$ عکسونو يا ارزښت قيمتونو سره يواځني ټاکلي دي. دا لاندې دماتريکس انځورونه لری:

$$w_F = A v_E \longleftrightarrow w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j, \quad i = 1, \ldots, m,$$

د کومو سره چې v_j او w_i د v او $w = L(v)$ وضعييه قيمتونه (کواوردیناتونه) به نخښه کيږي نسبت و بنسټ E او F ته. د ماتريکس A په j-مه مټه کې د $L(e_j)$ کواوردیناتونه يا وضعيه قيمتونه نسبت د F بنسټ ته ځا په ځای دي.

دا چې L د يوه بنسټ د عکسونو يا ارزښتونو سره يواځنی ټاکلي، تړلي د کربنيزوالي لپاره شرايطو څخه ورکول کيږي:

$$w = L(v) = L\left(\sum_j v_j e_j\right) = \sum_j v_j L(e_j) = \sum_j \sum_i v_j a_{i,j} f_i \,.$$

ليکو

$$w = \sum_i w_i f_i$$

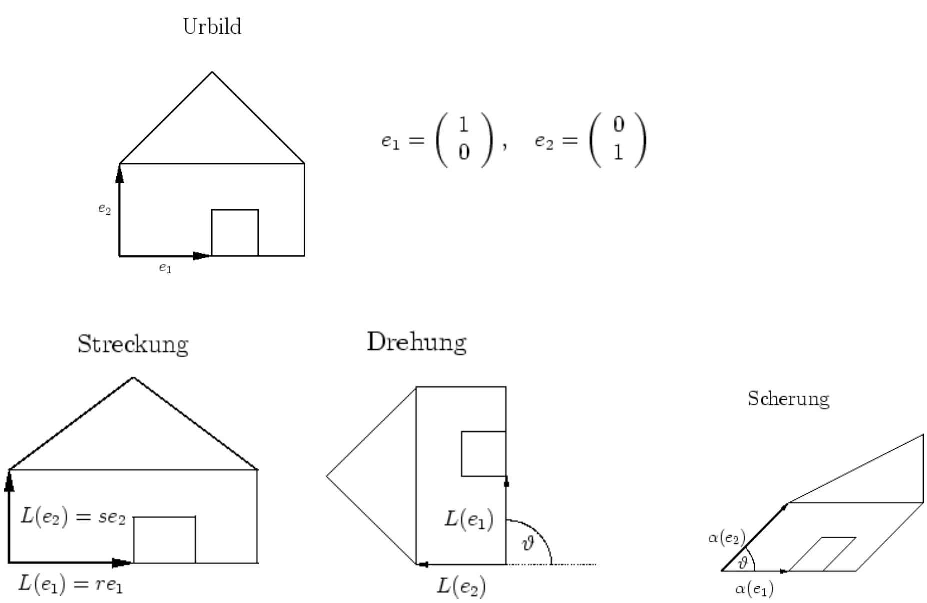
او د بنسټ وکتورونو w_i کواوردينات پرتله کيږي، داسې هم سړی غوښتل شوي د ماتريکسونو انځورونه لاس ته روړي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

په لاندې کې يو څو د سطحې کرښيزې تابع

$$L:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

انځور شوي دي، چې د يوون – يا واحد وکتورونو شکلونو يا بهتره ارزښتونو e_i (غوړ) له لارې کره شوي دي.



$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \cot\vartheta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

سړی کړی شي چې د ماتريکس A انځورونه نسبت کانونيکي بنسټونو e_1, e_2 ته تړلی معلوميږی يا لوستل کيږي. د ماتريکس متې هره يوه ځانله د وکتورونو $L(e_i)$ $i = 1,2$ ، کواوردیناتونه خوندی لري.

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

يو کرښيز فنکشن يا تابع

$$x \mapsto p(x) = a_0 + a_1 x$$

په ټکو $x = 0,1$ باندې د هغو ارزښتونو سره تاکلي. فنکشن

$$L : p \mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

کرښيز دی او کېدی شي نسبت د ضريب وکتورونو

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

له لارې تعريف شوي مونومبنسټ سره

رکربنیز الج

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

له لارې انځور شي

که بنسټ

$$p_1(x) = 1 - x, \, p_2(x) = x$$

استعمال شي، نو ماتریکس

$$\begin{pmatrix} p_1(0) & p_2(1) \\ p_1(0) & p_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ترې لاس ته راځي.

ټولیز د $\leq n$ درجې په m تکیه ځایون $x = x_1, \ldots, x_m$ کې د یوه پولینوم

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

ارزښتونه یا قیمت ټاکنه د واندرموند –ماتریکس Vandermonde-Matrix

$$V = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_1^1 & \cdots & x_1^n \\ x_2^0 & x_2^1 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^0 & x_m^1 & \cdots & x_m^n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_m) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

سره تشریح شوې یا ورکړل شوې.

كواوردیناتونو ترانسفورمیشن د بنسټ بدلون سره

Koordinatentransformation bei Basiswechsel

د یوه بنسټبدلون $E \to E'$ سره د یوه وکتور v كواوردیناتونه د

$$v_E = A v_{E'} \quad \Leftrightarrow \quad v_{E'} = A^{-1} v_E \,,$$

سره سم ترانسفورمي كوي، د کوم سره چې د مربع ماتریکس A متې د بنسټ وکتورونو e'_i ضریبونه نسبت و بنسټ ته خوندي لري:

$$e'_i = \sum_j a_{j,i} e_j \,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورن

وکتور v نسبت و بنسټ وکتور E او E' ته لاندې انځورونه لري:

$$\sum_k \lambda_k e_k = v = \sum_k \lambda'_k e'_k \,.$$

د e'_k د انځوروني په مرسته نسبت و بنسټ E ته لرو:

$$v = \sum_k \lambda'_k e'_k = \sum_k \lambda'_k \left(\sum_j a_{j,k} e_j \right)$$

$$= \sum_j \left(\sum_k a_{j,k} \lambda'_k \right) e_j = \sum_j \lambda_j e_j \,.$$

د کواوردينات پرتلې سره لاس ته راځي: $v_E = Av_{E'}$

ليکونکی:وېپر

Bild او Kern معنا خيره يا شکل او زړي

د يوه کرښيز تابع $L : V \to W$ لپاره د

$$\ker L = \{v \in V : \; L(v) = 0\} \; \subseteq V$$

سره سړی کرن يا زړی په نخښه کوي او د

$$\operatorname{Bild} L = \{w \in W : \; \exists v \in V$$

$$L(v) = w\} \; \subseteq W$$

د سره د L ارزښت يا شکل ښوول کيږي يا په نخښه کيږي.
دواړه ډېرى(ستونه) لاندي – يا برخه فضاوې دي.

ليکونکی: کيمرلې

ثبوتوو چې د K –وکتورفضا V همداسې W نسبت و کرښيزو عملياتو ته تړلي يا رابند دي يعنی دا عمليات په کې بې بنديزه اجراکېدی شي.

اول - $\ker L$ د V لاندې فضا ده: د $u, v \in \ker(L), \; \lambda \in K$ لپاره، د کرښيزوالي په بنسټ باور لري:

$$L(\lambda\, u) = \lambda\, L(u) = \lambda\, 0 = 0$$

او

$$L(u + v) = L(u) + L(v) = 0 + 0 = 0 \; .$$

د دې په تعقيب λu او $u+v$ هم د $\ker(L)$ توکي دي.

دويم - $\operatorname{Bild} L$ د W لاندېفضا ده: د $u, v \in \operatorname{Bild} L$ لپاره د $u = L(x), v = L(y)$ او $\lambda \in K$ سره د L کرښيزوالي په بنسټ لاندې صدق کوي:

$$\lambda u = \lambda L(x) = L(\lambda x)$$

او

$$u + v = L(x) + L(y) = L(x+y) \ .$$

دا چې V يوه وکتورفضا ده، نو اړونده له مخ ښېروني يا عکسونه يا تابع وې هم شته او په تعقيب λu او $u+v$ هم د $\operatorname{Bild} L$ توکي دي.

ليکونکی: ويپر

د Bild او Kern ابعاد يا براخيدوني Dimension von Bild und Kern

د يوه کرښيز فنکشن $L : V \to W$ لپاره باور لري

$$\dim V = \dim \ker(L) + \dim \operatorname{Bild}(L) \ ,$$

که وي: $\dim V < \infty$

د دې لپاره چې د بعد کتمتوالی وښايو، نو د $\ker L$ لپاره يو بنسټ $E' = \{e_1, \ldots, e_m\}$ ټاکو او دا د $\{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ سره د V و بنسټ E ته پوره کوو. دا چې

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i\right) = \sum_{i=m+1}^{n} v_i L(e_i),$$

نو لرو:

$$\mathrm{Bild}\, L = \mathrm{span}\, F, \quad F = \{L(e_{m+1}), \ldots, L(e_n)\}.$$

دا چې پسې F کربنيز خپلواک دی، يعني د $\mathrm{Bild}\, L$ بنسټ، نو له

$$\sum_{i=m+1}^{n} v_i L(e_i) = 0$$

لاس ته راځي $\sum_{i=m+1}^{n} v_i e_i \in \ker L$ او له دې سره $v_i = 0$.

دا غوښتونی د بعدفرمول اوس د بنسټوکتورونو تعداد څخه لاس ته راحي.

ليکونکي: هيوليک، هيورن

د بعدفرمول د ښوونې لپاره د پولينومونو - چې له $\leq n$ درجه لري- په فضا باندې k-م مشتق څېړل کيږي.

لومړی دې $k = 1$ او $n = 2$ وي. د پولينومونو د فضا لپاره چې درجه يې ≤ 2 ده $\{1, x, x^2\}$ بنسټ جوړوي، دا فضا پس بعد 3 لري. د $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ لپاره

$p'(x) = a_1 + 2a_2 x$ يو پولينوم دی چې درجه يې ≤ 1 ده. بيلدفضا نو بعد 2 لري.

د مشتقنيولو سره ثابته له منځه ځي يا ورکيږي. دا يوه يو بعدې لاندې - برخفضا جوړوي.

د تابع ګرن يا زړی بعد 1 لري او له دې سره د $3 = 1 + 2$ سره د بعدفرمول پوره دی يا بنول شوی.

په توليزه توګه پولينوم لاندې فرمول لري:

$$p(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l x^l$$

او k -م مشتق

$$p^{(k)}(x) = \sum_{l=k}^{n} \frac{l!}{(l-k)!} a_l x^{l-k} .$$

بيلد يا ځېره يا ارزښت د $\leq n-k$ درجې پولينوم دی او پولينومونه چې $< k$ درجه لري له منځه وړل کيږي. پس د بعدفرمول لاندې بڼه لري:

$$n + 1 = \underbrace{((n-k)+1)}_{\dim \mathrm{Bild}} + \underbrace{k}_{\dim \ker} .$$

•

ليکونکي: هيوليک، هيورن

معکوس يا په خټ تابع (ځيرونه يا فنکشن)Inverse Abbildung

يوه کرښيزه تابع $L : V \to W$ تيک هلته انجکتيو يا په کې ده، که $\ker L = 0_V$ وي. په دې حالت کې د

$$w \mapsto v, \quad w = L(v) ,$$

له مخې يو معکوس تابع $L^{-1} : \mathrm{Bild}\, L \to V$ تعريف شوې، چې دا هم کرښيزه ده

په ځانګړي توګه باور لري

$$L^{-1} \circ L(v) = v\,, \quad L \circ L^{-1}(w) = w$$

د ټولو $v \in V$ او $w \in \text{Bild}\, L$ لپاره

ليکونکي: هيوليک، هيورن

د L د ګرښيزوالي په دليل صدق کوي

$$L(v_1) - L(v_2) = L(v_1) + L(-v_2) = L(v_1 - v_2)\,,$$

او له دې اړيکو لاس ته راځي:

$$L(v_1) = L(v_2) \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in \ker L\,.$$

د يوه انجکتيو (په کې) کرښيزې تابع لپاره کېدی شي چې کرن يازړی فقط صفروکتور خوندي ولري.

دا معکوس تابع کرښيزه ده له لاندې لاس ته راځي

$$\begin{aligned} L^{-1}(L(v_1) + L(v_2)) &= L^{-1}(L(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = L^{-1}(L(v_1)) + L^{-1}(L(v_2))\,, \\ L^{-1}(\lambda L(v_1)) &= L^{-1}(L(\lambda v_1)) = \lambda v_1 = \lambda L^{-1}(L(v_1))\,. \end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليک، هيورن

د ماتريکسونو وکتورفضا Vektorraum der Matrizen

د $(m \times n)$ -ماتريکسونه يو وکتورفضا جوړوي، دا په دې معنا چې دا کېدی شي سره جمعه شي او د سکالار سره ضرب شي. دا کارونې يا عمليې په لاندې توګه کمپوننتونوله تعريف دي:

$$C = A + B \Leftrightarrow \qquad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j},$$

$$B = \lambda A \Leftrightarrow \qquad b_{i,j} = \lambda a_{i,j} \,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

د ماتريکسونو ضرب Matrix-Multiplikation

د يوه $(n \times m)$ -ماتريکس A او يوه $(m \times s)$ -ماتريکس B ضرب لاندې د $(n \times s)$ ـماتريکس دی:

$$C = AB \,, \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \,,$$

دا په دې معنا چې د c_{ij} دتعريف لپاره د A د i ليکې توکي او د B د j متې توکي سره جمعه کيږي:

$$\begin{pmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{kj} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} .$$

پام دې وي، چې له دې سره بايد د A د متو تعداد (ګڼون) د B د ليکو تعداد(ګڼون) سره برابر وي.

د ماتريکس ضرب همغه د کرښيزو توابعو کمپوزيشن دی

$$T : u \mapsto v = Bu, \quad S : v \mapsto w = Av \,,$$

دا په دې معنا چې C د $T \circ S$ ماتريکس انځورونه ده.

د کمپوزيشن لپاره د

$$w_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} v_k \,, \quad v_k = \sum_{j=1}^{s} b_{kj} u_j$$

له مخې تعريف شوي تابع په لاندې ډول لاس ته راوړي.

$$w_i = \sum_k \sum_j a_{ik} b_{kj} u_j = \sum_j \left[\sum_k a_{ik} b_{kj} \right] u_j \,.$$

په ګوډيزه يا کونجيزه نوکانو يا که غواړی قوسونو کې افاده د ماتريکسونو ضرب دی او کمپوزيشن توابعو د ماتريکس C سره سرخوري(يا باربر دی).

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

په لاندې يو ځو معلوم د ماتريکسونو ضربونه ورکړشوي دي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 100 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 321 & 213 & 132 \\ 123 & 312 & 231 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 14 & 26 \\ 21 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 25$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2i \end{pmatrix}$$

دستراسن(وييته: شتراس) الګوريتم Strassens Algorithmus

که په ورسره بلد ډول د دوه (2×2) -ماتريکسونو A او B ضرب $C = AB$ تر څېړنې لانې ونيسو، نو سړی اته ضربونو ته اړتيا لري. په ډېر هکبکوالي(چې د څه انتظار نه کيږي او پيښ شي) شتراسن وښوول چې اوه ضربونه بسيا کوي

[V. Strassen: Gaussian elimination is not optimal, Numer. Math. 13 (1969). 357-361]. Man berechnet die Produkte

سړی ضربونې شميري

$$\begin{aligned}
p_1 &= (a_{1,2} - a_{2,2})(b_{2,1} + b_{2,2}) \\
p_2 &= (a_{1,1} + a_{2,2})(b_{1,1} + b_{2,2}) \\
p_3 &= (a_{1,1} - a_{2,1})(b_{1,1} + b_{1,2}) \\
p_4 &= (a_{1,1} + a_{1,2})b_{2,2} \\
p_5 &= a_{1,1}(b_{1,2} - b_{2,2}) \\
p_6 &= a_{2,2}(b_{2,1} - b_{1,1}) \\
p_7 &= (a_{2,1} + a_{2,2})b_{1,1}
\end{aligned}$$

او د C ضرب د زياتون يا جمعې جوړولو له لارې لاس ته راځي.

$$\begin{aligned}
c_{1,1} &= a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} &= p_1 + p_2 - p_4 + p_6 \\
c_{1,2} &= a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} &= p_4 + p_5 \\
c_{2,1} &= a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} &= p_6 + p_7 \\
c_{2,2} &= a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} &= p_2 - p_3 + p_5 - p_7.
\end{aligned}$$

کوموتاتور Kommutator

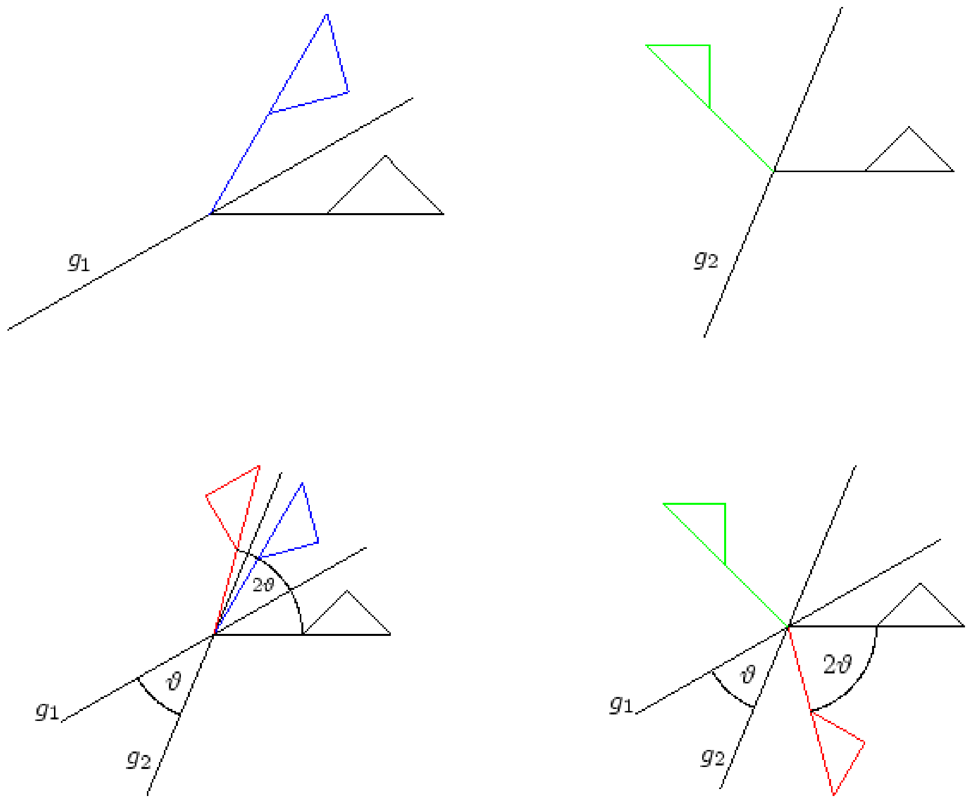
د دوه $(n \times n)$ - ماتريکسونو کموتاتور د $[A, B] = AB - BA$ په حيث تعريف شوی او په ټوليزه توګه ناصفر. د $[A, B] = 0$ په حالت کې ماتريکسونه A او B کموتي کيدونکی ماتريکسونه بلل کيږي.

ليکونکي: هيوليک، هيورن

په مختلفو محورونو g_1 او g_2 د دوه وکتوررونو S_1 او S_2 دهندارونې (که غواړی انغکاس) يو په بل پسې راوړنه کې د لړی پرلپسې رول نه لري.

دا پورته ځيره يا عکس د يوګونو هندارونو شکلونه ښايې. په لاندې لړی کې کېنې ډبله هندارونه $S_2 \circ S_1$ انځور ده اوښي لور ته ډبله يا دوه واره هندارونه $S_1 \circ S_2$. د هر

ځله نتيجې يې د کرښو ترمنځ په دوه برابره کونج څرخون دی، په هر حالت په مختلو لورو.



که g_1 د لومړی کونجنيمي په څېر ونيسو او د g_2 د y -محور نو توابع د ماتريکس انځورونه لري.

$$v = S_1 u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u \,,$$

$$v = S_2 u = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u \,.$$

ډبل هندارونه يا ا نعکاسونه لاندې انځورونه لري

$$w = S_2 S_1 u \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u \,,$$

$$w = S_1 S_2 u \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u \,.$$

په دې حالت کې کوموتاتور په لاندې ډول دی

$$[S_1, S_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

په ځې يا معکوس ماتريکسونه Inverse Matrix

د يوه معکوس کېدونکي کرښيز تابع $Av \mapsto v$ لپاره A^{-1} د A معکوس ماتريکس په نخښنه کوي، دا په دې معنا چې

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

د

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

يون – واحد ماتريکس سره؟

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

معکوس کېدونکي په همدې ډول رېګولار ماتريکسونه $A \in K^{n\times n}$ نسبت و ضرب ته يو ګروپ جوړوي، کرښيز ګروپ چې د $\mathrm{GL}(n,K)$ سره په نخښه کيږي.

باور لري

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

د $A, B \in \mathrm{GL}(n,K)$ لپاره .

باور لري

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = B^{-1}B = E\ ,$$

او له دې سره $B^{-1}A^{-1}$ و AB ته معکوس دی

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د دياګونال ماتريکس معکوس داسې لاس ته راځي، چې د دياګونال توکو معکوس يا په ښتې ارزښت جوړيږي،، د بېلګې په توګه:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/7 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

د درېګودئ – يا مثلث متاريکس لپاره په معکوسوني کې د مثلث بڼه ساتلې پاتيې کيږي، د بېلګې په توګه:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

په ټوليزه توګه د ماتريکس په ښتې يا معکوس پوره ځاي نيولی يا ډک دی، د بېلګې په توګه:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

ليکنې بايد د يوه کرښيز مساواتسيتم له لارې و ټاکمل شي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

تراسپوني او ادجونګيري ماتريکسونه

Transponierte und adjungierte Matrix

که د يوه ماتريکس A ليکې اوو متې سره بدلې شي، نو د ترانپوني ماتريکس $B = A^{\mathrm{t}}$ ښخه غږيږو، دا په دې معنا چې

$$b_{i,j} = a_{j,i}\,.$$

که د يوه کمپلکس ماتريکس A سربېره پر دې ليکنې کنجوګير شي، نو اديونګيري ماتريکس ترې لاس ته راځي، دا په دې معنا چې

$c_{i,j} = \bar{a}_{j,i}$.

یو ماتریکس د $A = A^{\mathrm{t}}$ سره سیومتریک بلل کیږي، یوه ماتریکس د $A = A^*$ سره د پخپله ادیونګیري په ځبر ده یا هرمیتیکي Hermitesch ده. د حقیقي ماتریکسونو لپاره کلیمي سیومتریک او هرمیتیکي همغه (یوه) معنا لري.

لاندي قانون باور لري:

- $(AB)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$ او $(AB)^* = B^*A^*$

- $(A^{\mathrm{t}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{t}}$ او $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

د یوې لیکنې لپاره په $C^{\mathrm{t}} = (AB)^{\mathrm{t}}$ کي باور لري

$$c^{\mathrm{t}}_{ji} = c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj} = \sum_k a^{\mathrm{t}}_{ki}b^{\mathrm{t}}_{jk} = \sum_k b^{\mathrm{t}}_{jk}a^{\mathrm{t}}_{ki}$$

او له دې سره $C^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$. دا چې $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$ او $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$ باور لري، نو دا د ادیونګیري لپاره هم تیک دی.

له

$$E = E^{\mathrm{t}} = \left(AA^{-1}\right)^{\mathrm{t}} = \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}}$$

لاس $\left(A^{-1}\right)^{\mathrm{t}} = \left(A^{\mathrm{t}}\right)^{-1}$ ته راځي. په ورته توګه د ادجونګیري لپاره هم صدق کوي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

شپور Spur

(د ا لماني ژبې کلمه د شپور پښتو معنا: نخښه يا علامه)

شپور د يوه $n \times n$ -ماتريکس A اصلي دوه کونټرې توکو(وتر) جمع د A شپور بلل کيږي،

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\ .$$

که A, B په خوښه $(n \times n)$ - ماتريکسونه وي، نو باور لري:

$$\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA).$$

له دې لاس ته راځي، د يوه رېگولار ماتريکس T او يوه په خوښه ماتريکس A لپاره صدق کوي:

$$\mathrm{Spur}(T^{-1}AT) = \mathrm{Spur}(A).$$

دا دا معنا لري، چې شپور يا سپور د کواورډينات ترانفورميشن لاندېinvariant (نسبت يوې کچونې يا اندازه کوني ته بې تغيره پتتې کيدل) يا بې تغيره پاتيږي.

د يوه ماتريکس رانګ Rang einer Matrix

د يوه $(m \times n)$ -ماتريکس لپاره د کرښيز خپلواکو متو ماکسيمال ګڼون ياتعداد د ماکسيمالو ګرښيزو خپلواکو کيلو سره يو په بل پريوحي يا يو بل سره مساوي دي او د رانګ A په لکنيز ډول $\mathrm{Rang}\,A$ بلل کيږي،

په ځانګړي ډول باور لري

$$\mathrm{Rang}\, A \leq \max\{m,n\}.$$

د ماکسیمال کربنیز خپلواکو متو $v_1,\ldots,v_n$ تعداد د وکتورفضا پعد به گوته کوي

$$V = \mathrm{span}\{v_1,\ldots,v_n\},$$

ځکه چې سړی کړی شي د متو څخه بنسټ وټاکي. په ورته توګه وینا د لیکو $w_1,\ldots,w_m$ څخه غزیدلي وکتورفضا W لپاره هم صدق کوي.

غوښتنه $\dim V = \dim W$ د n پسي اندکشن له لارې وښوول شي.

ساده ښوول کیږي، چې $\dim V$ او $\dim W$ د لاندې عملیو یا کارونو سره بې تغیره پاتیږي:

- د متو یا لیکو بدلېدنه یا پرموتیشن

- د یوه سکالار جمعه دېرځله یا د یوه دېرځله سکالار سره د یوې متې (لیکې)حمعه د یوه بلې متې (لیکې) سره.

که $A \neq 0$ وي، سړی کړی شي دا عملیه په لاندې بڼه

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

راوړي.

د پرموتیشن سره لومړی $b_{1,1} \neq 0$ لاس ته راځي او بیا د لومړی لیکې یا کیلې او متې پاتې توکي د مناسب جمعې له لارې له منځه وړي. په ټیک ډول لومړي د لومړی متې

$(-b_{1,j}/b_{1,1})$ -ځله و j -مې متې ($j = 2, \ldots, n$) ته جمعه کوي او په ورته توګه د ليکو وکتورونو سره هم دا عمل وخ ته بيولاي شو . که د V' او W' سره ْوښتونې وکتورفضاوې د $(m-1)\times(n-1)$ - ماتريکس A' لپاره ، نو لاس ته راځي

$$\dim V = \dim V' + 1, \quad \dim W = \dim W' + 1$$

او د ايندکشن له لارې غوښتنه.

ليکونکي: هيوليګ، هيوررنر

يو څو تيپيکي حالتونه د درې (3×2) -متريکسونو سره دليدلو شوي يا ورکړ شوي دي

$$\mathrm{Rang}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}=0 \quad \mathrm{Rang}\begin{pmatrix}1&2\\2&3\\3&4\end{pmatrix}=2, \quad \mathrm{Rang}=\begin{pmatrix}3&4\\6&8\\9&12\end{pmatrix}=1\,.$$

د دريم ماتريکس لپاره صدق کوي $4S_1 = 3S_2$ د متو S_1 او S_2 لپاره او د ليکو $2Z_3 = 3Z_2 = 6Z_1$ Z_1, Z_2 او Z_3 لپاره. په دواړو حالتونو کې نو د غوښتوني وکتورفضا ديمنژن يا بعد برابر په 1 دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيوررنر

د يوه ماتريکس نورم Norm einer Matrix

د يوه وکتور نورم د ماتريکس نورم

$$||A|| = \sup_{x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \max_{||x||=1} ||Ax||$$

ته بنسټ ووي د نورم خويونو سربېره (مثپتوالی، هوموچیِنیتي، مثلثنمساوات)

$$||AB|| \leq ||A||||B||,$$

باور لري، دا په دی کعنا چی د ورسره تنظیم شوی ماتریکس نورم سبضریبي submultiplikativ دی.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

په لاندې کې به يوګوني خويونه د ازماينې له لارې زښوول شي:

مثبتوالی: د وکتور فضا تعریف له لارې تظمین دی، چې $||A|| \geq 0$ دی. که A صفرمآتریکس وي، نو فقط صفروکتور 0د څېرې په څېر مخ ته لرو. که له بلې خوا نورم صفر وي، نو فقط صفروکتور د څېرې په څېر رامنځ ته کیږي، او تابع یا فنکشن د صفرماتریکس سره تشریح کیږي.

Homogenität هوموحنیتي:

$$\max_{||x||=1} ||\lambda Ax|| = \max_{||x||=1} |\lambda|||Ax|| \;=\; ||\lambda A||$$

$$|\lambda| \max_{||x||=1} ||Ax|| = |\lambda|||A||. \;=$$

$$||\lambda A|| = \quad \max_{||x||=1} ||\lambda Ax|| = \max_{||x||=1} |\lambda|||Ax||$$

$$= \quad |\lambda| \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\| \,.$$

Dreiecksungleichungمثلثات برابرون :

$$\begin{aligned} \|A+B\| &= \max_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax+Bx\| \\ &\le \max_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \\ &\le \max_{\|x\|=1} \|Ax\| + \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\| \,. \end{aligned}$$

Submultiplikativitätسب ضريبوالی:

د $B = 0$ لپاره $AB = 0$ دي او له دې سره نامساوات پوره دی. د $B \neq 0$ لپاره دی:

$$\begin{aligned} \|AB\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \sup_{x:\,Bx \neq 0} \frac{\|A(Bx)\|}{\|Bx\|} \, \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\ &\le \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \, \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \|B\| \,. \end{aligned}$$

د لومړي بڼې بدلون سره ، جې په حقيقت کی ډېری يا سټ په يوه سوپرېموم Supremumځېره کيږي محدوديږي، مګر فقط وکتورونه ترې لرې کيږي، چې صفروکتور دځېرې په ډول لري او له دې سره سوپرېموم نه اغيزمن کوي.

ليکونکي: هيوليک ، کرايخ

د ليکو د جمعې نورم Zeilensummen-Norm

د وکتورونو لپاره ماکسيمومو نورم $\|v\|_\infty = \max_i |v_i|$ د ماتريکسونو لپاره د ليکوجمعي نورم

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

تنظيم دی.

ليکونکي: هيوليک ، کرايخ

د $\|x\|_\infty = \max_j |x_j| = 1$ لپاره

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| ,$$

دی

او سړی لاس ته راوړي

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_\infty \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| .$$

که سړی ونيسي يا فرض کړي، چې ماکسيموم د $i = k$ لپاره فرض شوی يا نيول شوي، نو مساوات د

$$x_j = \operatorname{sign} a_{kj}$$

انتخاب له لارې لاس ته راځي، څکه چې دی:

$$\left|\sum_j a_{kj} x_j\right| = \sum_j \|a_{kj}| \ .$$

ليکونکي: هيوليک ، کرايخ

د ماتريکس د ډکونې جوړښت Belegungsstruktur von Matrizen

د صفر سره مختلف ماتريکس توکو $a_{i,j}$ د تنظيم سره سم د لاندې ترمنځ توپير کوي

اول – دياګونالماتريکس: $a_{i,j} = 0$ د $i \neq j$ لپاره،

باند ماتريکسونه Bandmatrizen: د لپاره د سره د صفر نه مختلفو ماتريکسونو د دياګونالو شمېر، چې د باند سور په څېر په نخښه کيږي يا نومول کيږي،

پورته (کښته) مثلث ماتريکسونه: $a_{i,j} = 0$ د $i < j$ ($i > j$) لپاره.

په توليزه توګه يو $(m \times n)$ - ماتريکس ضعيف ډکشوی، که فقط توکي $c \max(m,n)$ د صفي سره نامساوي وي، د يوې نه ډېرې لوې ثابتې c سره.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

اورتوګونال او يونيتار ماتريکسونه Orthogonale und unitäre Matrizen

يو کمپلکس $(n \times n)$ - ماتريکس A يونيتار بلل کيږي، که ولرو

$$A^{-1} = \overline{A}^t = A^* ,$$

دا په دې معنا چې که د A متې د $\mathbb{C}^n$ يو اورتوګونال بنسټ جوړ کړي.

د حقيقي ماتريکسونو لپاره (لکه په سکالار ضرب کې) کمپلکس کنجګيشن،

$$A^{-1} = A^t ,$$

او سرې د يوه اورتوګونال ماتريکس څخه غږيږي.

اورتوګونال (يونيتار) ماتريکسونه د($\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$) يو لاندې – برخګروپ جوړوي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د هادامارد – ماتريکسونه Hadamard-Matrizen

د $n = 2^k$ لپاره تر سکالار کېدنوپورې اورتوګونال ماتريسکونه شتون لري د H_k
د $n \times n$ بعد په $\{-1, 1\}$ کې د ليکنو سره داسې په نامه هادامارد ماتريکسونه.

د هاداماد لومړی ماتيکسونه دي:

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

په ټوليزه توګه ماتريسونه د ريکورزيون

$$H_{2k} = \begin{pmatrix} H_k & H_k \\ H_k & -H_k \end{pmatrix}$$

سره جوړکړي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د فورير (ويينه: فوريې) ماتريکسونه Fourier-Matrizen

د توان جوړولو له لارې د يوون - يا واحد ريښې

$$w_n = \exp(2\pi\mathrm{i}/n)$$

سړی داسې په نامه فوريې ماتري:س لاس ته راوړي

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0\cdot 0} & \cdots & w_n^{0\cdot(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1)\cdot 0} & \cdots & w_n^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix}.$$

دا د نورمي کولو($W_n \to W_n/\sqrt{n}$) پسې يونيتار دي، دا په دې معنا چې $W_n^* W_n/n$ يوون – يا واحد ماتريکس دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د مټو اورتوګوناليټي ساده ازمايل کيږي. د $(j+1)$ ـمو او $(k+1)$ ـمو مټو سکالار ضرب

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} w_n^{\ell j}\overline{w_n^{\ell k}} = \sum_{\ell} w_n^{(j-k)\ell} = \frac{w_n^{(j-k)n}-1}{w_n^{j-k}-1},$$

دی، او داچې $w_n^n = 1$ دی، نو صورت يا ماتباندې صفر دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليک

د $n = 4$ لپاره $w_4 = \exp(2\pi \mathrm{i}/4) = \mathrm{i}$ دی، او سړی لاس ته راوړي

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

په 2 د وېشنې وروسته W_4 يونيتار دی، دا په دې معنا چې

$$\left(\frac{1}{2}W_4^*\right)\left(\frac{1}{2}W_4\right) = E.$$

له دې امله د فوريې ماتريکسونو د سيومترۍ والی له امله $W_4^* = \overline{W_4}^{t} = \overline{W_4}$ دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليک

نورم ريښتونې يا ـ وفاداره اورتوګونال ا و يونيتار ماتريکونه

Normtreue orthogonaler und unitärer Matrizen

یو حقیقي (کمپلکس) ماتریکس A ټیک هلته اوتوګونال (یونیتار) دی، که دا د هر وکتور اوکلید(اقلیدسeuklidische) نورم انواریانت پریږ دی:

$$|Av| = |v| .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

بسیا کوي، چې کمپلکس حالت وڅیړو، چې حقیقي حالت په بر کې نیسي.

اول - A یونیتار ده، نو باور لري

$$(Ay)^*(Ax) = y^*A^*Ax = y^*x$$

پس په ټولیزه توګه د کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب لاس ته راځي، چې د نورمرییښتونوالی په بر کې لري.

دویم – د نورم ریښونوالي څخه لومړی لاس ته راځي، چې د A د متې وکتور v_j د یوون وکتورونو e_j د عکسونو نورم یوی خوندي لري. د دې لپاره چې وښایو چې مختلفې متې اوتوګونال دي،نو $\lambda = \exp(i\vartheta)$ ټاکو، داسې چې لرو:

$$(\lambda v_k)^* v_j \in \mathbb{R} .$$

پسې د نورریښتونوالی او اقلیدس نورم تعریف په بنسټ لرو

$$2 = |e_j + \lambda e_k|^2 = |v_j + \lambda v_k|^2 = |v_j|^2 + |\lambda|^2 |v_k|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda v_k)^* v_j = 2 + 2\overline{\lambda} v_k^* v_j ,$$

په تعقیب باید په ښی لور سکالار ضرب ورک شي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

خيوکليکي (تلبيرته راګرځېدوني) ماتريکسونه Zyklische Matrizen

د خيکليکي $(n \times n)$-ماتريکسونو متې د لومړی متې د خيوکليکي راکښني له لارې جوړيږي:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

د ماتريکسونو ضرب سره خيوکليکي جوړښت ساتلی يا خوندي پاتي کيږي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د يوه خيوکليکي ماتريکس-ضرب $C = AB$ توکی دي:

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i-j \bmod n} b_{j-k \bmod n}.$$

د اچې

$$\{0, \ldots, n-1\} = k + \{0, \ldots, n-1\} \bmod n,$$

کېدی شي سری په زياتوونو (د جمعي اجزاوو) د j په ځای $j+k$ ځای په ځای کړي، کوم چې ښايي، چې $c_{i,k}$ فقط د $i - k \bmod n$ په واک کې دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د خيوکليکي ماتريکسونو

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

ضرب دا لاندې څيوكليكي ماتريک دی:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 18 & 11 & -23 \\ -23 & 18 & 11 \\ 11 & -23 & 18 \end{pmatrix}.$$

ليكونكي: اپپ، هيوليګ

ستوښاستيكي ماتريكسونه

يو $(n \times n)$-ماتريكس ستوښايتيكي بلل كيږي، كه $p_{i,j} \geq 0$ وي او

$$\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

ستوښاستيكي ماتريكس د احتمالوالو x_i تغير ښايي د لاندې له مخې:

$$x'_j = \sum_i x_i p_{i,j}.$$

ليكونكي: اپپ، هيوليګ

د P د ښويونو په ښنسټ x' هم يو د احتمالوالي وكتور دی، دا په دې معنا چې

$$x_j' \geq 0, \quad \sum_j x_j' = 1\,.$$

دا نه کمښتوالی یا نه منفیوالی ښرګند دی او د جمعي انواريانت له لاندې ښخه تعقيبيږي:

$$\sum_j \sum_i x_i p_{i,j} = \sum_i x_i \underbrace{\sum_j p_{i,j}}_{=1}\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ديترمينانت د انتيسيومتري کرښيزفورم په حيث

Determinante als antisymmetrische Multilinearform

د يوه مربع ماتريکس A ديترمينانت

$$\det A = \det(a_1, \ldots, a_n)$$

د متې a_j سره کېدی شي د لاندې خويونو له لارې تعريف شي.

اول – دېرکرښيزوالی

$$\det(\ldots, \alpha a_j + \beta b_j, \ldots) = \alpha \det(\ldots, a_j, \ldots) + \beta \det(\ldots, b_j, \ldots)\,.$$

دويم - انتيسيومتري:

$$\det(\ldots, a_j, \ldots, a_k, \ldots) = -\det(\ldots, a_k, \ldots, a_j, \ldots)\,.$$

دريم – نورمي کونه

$$\det(e_1,\ldots,e_n)=1\,,(e_k)_\ell=\delta_{k\ell}\,.$$

د دې قانون سره ديترمينانت د n–ځله ضرب سره وده کولی شي:

$$\det A=\sum_{i\in S_n}\sigma(i)a_{i_1,1}\cdots a_{i_n,n}\,,$$

د کوم سره چې د $(1,\ldots,n)$ په ټولو ځای بدلونو $(i_1,\ldots,i_n)$ سره جمعه کېږي او σ د ځاي بدلونون سره مخنخښه ښايو.

سړی دا لاندې ليکدود هم استعمالوي

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix}\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيونر

د زياتيدونو (د جمعې اجزاوو) د تعداد د جګيدو له امله($n!$ ځای بدلونونه شتون لري) د ديترمينانت د عملي آنځورونو لپاره ښه مساعدنه دی. مګر دا ټړلی د تعريف شوو خويونو ټړلی (د عمليو له لارې) دا د ښووني او د نوروو خويونو د لاس ته راوړلو لپاره اړيين دي. له دې امله دا د ورته (برابر ازښته) تعريف لپاره ورکړشوی دی.

لومړ ی ښايو، چې غوښتل شوي خويونه مو اړيين د ديترمينانت وديزونې ته بيايې، په اړيينه توګه د برموتيشن په مرستې .

د دې سره د A متي د يوون – يا واحد وکتورونو e_i د کرښيز کمبينيشنونو په حيث انځوروي:

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \,.$$

د ډېرکرښيزوالي په بنسټ باور لري:

$$\det A = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \underbrace{\det(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})}_{=: d_i} \,.$$

دا جمعه لکه چې لاس ته راځي کیدی شي ساده شي. که له دې دوه یوون - یا واحدوکتورونه برابر وي، نو د انتیسیومتري په بنسټ d_i صفر دی:

$$\det(\ldots, e_k, \ldots, e_k, \ldots) = -\det(\ldots, e_k, \ldots, e_k, \ldots) \,.$$

که ټول i_ν مختلف وي، دا په دې معنا چې

$$(i_1, \ldots, i_n)$$

یو پرموتیشن دی د $(1, \ldots, n)$ ، نو صدق کوي

$$d_i = (-1)^{\tau(i)} \,,$$

د کوم سره چې $\tau(i)$ مودولو 2 د بدلونونو یواځنی ټاکلی تعداد(ګڼون) په نخښه کوي ، د کوم لپاره چې واحدوکتور په کانونيکي لړی پرلپسې راوړی شو. ځای بدلون د مخنخښې تعريف پسې دی:

$$\det(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = \sigma(i) \det(e_1, \ldots, e_n) = \sigma(i) \,,$$

دا په دې معنا چې سړی ورکړ شوې وديزينه لاس ته راوړي.

برعکس کېدی شي و ازمايو، چې وديزينه د غوښتوني قانون سره تړلې ده. ډېرکرښيز والی باور لري، خکه چې په ضرب

$$a_{i_1,1}\cdots a_{i_n,n}$$

کې د هرې متې تيک يو توکی منځ ته راځي. انتی سيومتری لاس ته راځي، ځکه چې د متو له پدلون دبدلولو تعداد کانونيکي لړی پرلپسي په يو تغير خوري، بالاخره په واحد ماتريکس کې جمعه په يوه زياتووني (د جمعې غړي) کميږي

$$a_{1,1}\cdots a_{n,n}=1\cdots 1=1$$

.

ليکونکي: هيوليک، هيونر

2 - ليکيزه ديترمينانت 2-reihige Determinante

د يوه -ماتريکس ديترمينانت

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

دی.

دا د برموتيشن وديزيني پسې په ساده ډول ليدل کيږي، ځکه چې 2 زياتيدونی شتون لري.

دبديل په توګه کېدی شي ديترميناتونه د تعريف شوو خويونو له مخې هم و شمېرل شي.

که متې د کانونيکي واحد وکتور(يوون-) e_k کرښيز کمبينيشن په څېر انځور شي، نو د مولتی (ډېر-)کرښيزوالي له امله لاس ته راځي

$$\det(ae_1+ce_2,be_1+de_2) = a\det(e_1,be_1+de_2)+c\det(e_2,be_1+de_2)$$

$$= ab\det(e_1,e_1)+ad\det(e_1,e_2)$$

$$+ cb\det(e_2, e_1) + cd\det(e_2, e_2)$$

$$= ab \cdot 0 + ad \cdot 1 + cb \cdot (-1) + cd \cdot 0 = ad - bc\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيونر

د ساروس شيما يا شکلSarrus-Schema

د يوه (3×3) - ماتريکس ديترمينانت لکه څنګه چې په تابع يا فنکشن کې ښوول شوې د ضربونو جمعه ده، چې مختلف دياګونالونه (دوه کونجترې) په ګوته کوي:

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ \hdashline a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & & a_{2,3} \end{array} \quad = \quad \begin{array}{l} a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} \\ -a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} \end{array}$$

دې د ساروس په نامه يادې شوې شيما ته ورته د n جګ بعدي لپاره شتون نه لري.
سملاسي د $n = 4$ ديترمينانت د 24 ضربونه يوه جمعه لري.

د ساروس –شېما په ساده توګه د ځاي بدلون وديزيېنه پسي په ساده توګه و ازمايي. لاندې جدول ټول زياتوونې يا جمعی اجزاوې ښايي همداسې دا د ځايبدلون i سره اسوځييري بدلونې، له کومو چې دا مخنځښه σ لاس ته راځي.

i	بدلونونه	$\sigma(i)$	Summand

	Vertauschungen		زياتيدوني يا د جمعې اجزا
$(1,2,3)$		$+$	$+a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$
$(2,3,1)$	$\rightarrow (3,2,1) \rightarrow (1,2,3)$	$+$	$+a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}$
$(3,1,2)$	$\rightarrow (2,1,3) \rightarrow (1,2,3)$	$+$	$+a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}$
$(3,2,1)$	$\rightarrow (1,2,3)$	$-$	$-a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}$
$(1,3,2)$	$\rightarrow (1,2,3)$	$-$	$-a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$
$(2,1,3)$	$\rightarrow (1,2,3)$	$-$	$-a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$

ليکونکي: هيوليک، هيونر

لوريز حجمونه (ډکي) Orientiertes Volumen

د يوه حقيقي ماتريکس A ديترمينانت مطلق ارزښت د ـبعدي سره چې له متو ځخه غزيدلی شپاټ(Spats) سره پراپر دی يا يو په بل پرېوځي:

$$|\det A| = \mathrm{vol}\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i :\ 0 \le \alpha_i \le 1\right\} = \mathrm{vol}\left(A[0,1]^n\right) .$$

ليکونکي: هيوليک، هيونر

ساده ازمایل کیدی شي، چې لوریز حجمونه یا ډکي

$$\mathrm{vol}_* A := \mathrm{sign}(\det A)\,\mathrm{vol}(A[0,1]^n)$$

ټول درې د دیترمیناتونو تعریف شوي خویونه (مولتی کربنیزوالی، انتي سیومتري، نورمي ونه) لري، له دې امله باید باور ولري:

$$\mathrm{vol}_* A = \det A$$

لیکونکي: هیولیګ، هیونر

په $\mathbb{R}^3$ کې د وکتورونو $u,\ v,\ w$ لپاره دیترمینانتونه د شپات ضرب سره سر خوري یا برابر دی:

$$\det(u,v,w) = [u,v,w]\,.$$

د بدیل په قسم دا کېدی شي د ε -تنځور ε Tensors- سره افاده شي:

$$\det(u,v,w) = \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{i,j,k} u_i v_j w_k\,.$$

که وکتورونه د بېلګې په توګه و ټاکل شي

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

نو شپاټ ضرب لاس ته راځي.

$$(2,1,1)\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)=(2,1,1)\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}=6-1-1=4\,.$$

د ε - تنځور سره لاندې انځورونه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\det(u,v,w) &= \varepsilon_{1,2,3}\cdot 2\cdot 2\cdot 2+\varepsilon_{1,3,2}\cdot 2\cdot 1\cdot 1+\varepsilon_{2,1,3}\cdot 1\cdot 1\cdot 2\\ &\quad +\varepsilon_{2,3,1}\cdot 1\cdot 1\cdot 1+\varepsilon_{3,1,2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1+\varepsilon_{3,2,1}\cdot 1\cdot 2\cdot 1\\ &= 8-2-2+1+1-2=4\,.\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليک، هيونر

د ديترمينانتونو لپاره قاعدې Regeln für Determinanten

د $(n\times n)$ - ماتريکسونو A او B لپاره صدق کوي:

- $$\det A=\det A^t,\quad \det A^*=\overline{\det A}$$
- $$\det(AB)=(\det A)(\det B)$$.
- A تيک هلته انورتير وړ يا معکوسکېدونکي ده، که او $\det A\neq 0$ وي،

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

لیکونکي: هیولیګ، هیونر

اول – د سیومتري خویونه د ځای بدلون پسې ودیزوني ښخه لاس ته راځي:

$$\det A^{\mathrm{t}} = \sum_{i \in S_n} \sigma(i) a_{1,i_1} \cdots a_{n,i_n} \, .$$

که د جمعۍ اجزا سره اندکسونه یا پیژند نخښې $\{1, \ldots, n\}$ هر یو په لړۍ پرلپسې و i ته معکوس ځاي بدلون j سره و وځغلوو، نو د تابع یو تغیر شوی نظم لاس ته راوړو:

$$a_{j_1,i_{j_1}} \cdots a_{j_n,i_{j_n}} = a_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n} \, .$$

داچې $\sigma(i) = \sigma(j)$ دی، نو مساوي ودیزینه لاس ته راځي، لکه د $\det A$ لپاره.

د بیلګې په توګه

$$i = (1\ 2\ 3) \leftrightarrow j = (1\ 3\ 2)$$

یو بل ته معکوس ځاي پلونونه دي په ځیکلیکي لیکډول او

$$a_{1,i_1} a_{2,i_2} a_{3,i_3} = a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} = a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3} = a_{j_1,1} a_{j_2,2} a_{j_3,3} \, .$$

که د زیاتیدونو یا د جمعي د اجزاو ا ینکسونو یا پیژندنخښو $\{1, \ldots, n\}$ کې وځغلي هر یو په لړۍ پرلپسي و i ته په ځت یا برعکس بدلونونه یا پرموتیشنونه j ته ، نو فنکشن یو تغیر شوي نظم راکوي.

$$a_{j_1,i_{j_1}} \cdots a_{j_n,i_{j_n}} = a_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n} \, .$$

دا چې $\sigma(i)=\sigma(j)$ دی، نو سړب مساوي يا باربه وده لاس ته راولي لکه $\det A$.

د بيلګې په توګه

$$i=(1\ 2\ 3)\leftrightarrow j=(1\ 3\ 2)$$

يو بل ته په ځيکليکي لکندود په ځت يا معکوس پرموتيشنونه يا ځای بدليدنې دي، او

$$a_{1,i_1}a_{2,i_2}a_{3,i_3}=a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}=a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}=a_{j_1,1}a_{j_2,2}a_{j_3,3}\,.$$

مخنخښنهσ مثبت ده او هرځل ، ځکه چې

$$i=(1\ 3)\circ(1\ 2),\quad j=i^{-1}=(1\ 2)\circ(1\ 3)\,,$$

دا په دې معنا چې د پدلونون شميره (ګنون) هر ځل 2 دی.

دويم – که معکوسوړ نه وي، نو ضرپوالی د دريم خوي ځخه لاس ته راځي.

د $\det A\neq 0$ لپاره ښوول کيږي، چې تابع

$$B\mapsto f(B):=\det(AB)/\det(A)$$

تو د ديترمينانت ک ټاکونکي خويونه لري، په تعقيب د $\det B$ سره بايد برابر وي.
نورمي کونه $f(E_n)=1$ ځرکنده ده. د ډېرکرښيزوالي او انتيسيومتري لپاره په پام کې نيسو، چې فنکشن(تابع) $B\mapsto AB$ کرښيزه ده د B په متو کې او دا چې د دوه مټو بدلون د AB د اړونده متو بدلون په ګوته کوي.

دريم – يو مربع ماتريکسA تيک هلته نامعکوسوړ ده، که د يوه نه ساده وکتور x لپاره $Ax=0$ وي، دا په دې معنا چې که د A د د متو يو نه ساده کرښيو کمپينيشن a_j شتون ولري:

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = 0\,.$$

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = 0\,.$$

په ورکړشوي حالتکې د متووکتور ځايپډلون څه کېدی شي $x_1 \neq 0$ ونيسو، دا په دې معنا چې

$$a_1 = y_2 a_2 + \cdots + y_n a_n\,, \quad y_j = -x_j / x_1\,.$$

د ضريپوالي څخه لاس ته راځي

$$\det A = \sum_{j=2}^{n} y_j \det(a_j, a_2, \ldots, a_n) = 0\,,$$

ځکه چې ټولې په ښي لور ديترميناتونه دوه برابرې متې خوندي لري، بايد د انتی سيومتري له امله ورکې شي يا له منځه ولاړې شي.

دا چې د انورتير وړinvertierbaren (په ځتوړ) ماتريکس ديترمينانت د صفرسره برابر نه دی، د يوه له متو خواره شوي غبرګ اړخيز لوريز حجم په حيث ديترمينانت د هندسي تشريح څخه لاس ته راځي . بالاخره دا همدااوس د $\det(A^{-1})\,.$ لپاره ښوول شوي ضربوالي څخه لاس ته راځي.

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

د ځانګړو ماتريکسونو ديترمئناتونه

Determinanten spezieller Matrizen

د يوه $(n \times n)$ - ماتريکس A لپاره ديترمينانتونه ترلي ورکول کيږي

- مثلث ماتريکس: که $a_{i,j} = 0$ د $i < j$ لپاره یا $i > j$ لپاره وي، نو باور لري

$$\det A = a_{1,1} \cdots a_{n,n}\,.$$

- بلوک دیاګونال ماتریکس: که ماتریکس B بلوک جوړښت د $A_{i,j} = 0$ $i \neq j$, سره ولري اومربع دیاګونال بلوکونه $A_{i,i}$ ، نو باور لري

$$\det B = \prod_{i=1}^{k} \det A_{i,i}\,.$$

- اورتوګونا او یونیتار ماتریکسونه: د یوه یونیتارمیاتریکس U لپاره باور لري

$$|\det U| = 1\,.$$

د یوه اورتوګونال ماتریکس $(u_{i,j} \in \mathbb{R})$ لپاره ځانګړی دی

$$\det U \in \{-1, 1\}\,.$$

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر

مثلثماتریکس : دا چې $\det A = \det A^{t}$ دی، بسیا کوي چې پورته مثلث ماتریکس وڅېړو. د $(1, \ldots, n)$ دخای بدلون i لپاره، کوم چې کتمتوال(ایدنتیتي) نه دی.

، لاس ته ارځي، چې لږ تر لږه يو توکی i_k د $i_k > k$ سره بايد ورکړ شوی وي، دا په دې معنا چې $a_{i_k,k} = 0$. داسې جمعه راکمېږي، د کټمتوالي ورکړه ، او ديترمينانت د دياګونال توکو د ضرب څخه ورکول کيږي.

بلوکدياګونال ماتريکسونه : لومړی فقط يو وېش په 2 دياګونالبلوکونو راړړو چې لويې n_1 او n_2 لري، نو دا بسيا کوي، چې په ځاي بدلون چې ور جمعه کړو يا ورېيات کړو، کوم چې لومړي توکي د خپل ځانونو ترمنځ او له دې سره هم اکر توکي د خپل ځانونو ترمنځ بدل کړي، څکه چې نور مو پاتېدونو يا د جمعې اجزاوو 0 ته بيايي. دا د جمعې پاتې اجزاوې د لومړيو n_1 توکو يوه ځايبدلون k او د اخرو n_2 توکو يو ځاي بدلون l د ضرب په څير ليکل کيږي:

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{i\in S_n} \sigma(i)\,(a_{i_1,1}\cdots a_{i_{n_1},n_1})\,(a_{i_{n_1+1},n_1+1}\cdots a_{i_n,n}) \\
&= \left(\sum_{k\in S_{n_1}} \sigma(k)\,(a_{k_1,1}\cdots a_{k_{n_1},n_1})\right)\left(\sum_{l\in S_{n_2}} \sigma(l)\,(a_{n_1+l_1,n_1+1}\cdots a_{n_1+l_{n_2},n})\right) \\
&= \det A_{1,1}\det A_{2,2}\,.
\end{aligned}$$

ايندوکتيو له دې څخه يوه وينا لاس ته رورل کيږي له دوه بلوکونو څخه په ډېرو يوې ويشنې لپاره.

اورتوګونال او يونيتار ماتريکسونه: دا چې کمپلکس کنجوګيشن په جمعې ضرب سره منځ ته کوي او $\det U = \det U^t$ صدق کوي، نو د ديترمينانت د ضربوالي څخه لاس ته راځي

$$
\begin{aligned}
1 = &\quad \det E = \det\left(U^{*}U\right) = \det U^{*} \det U \\
= &\quad \overline{\det U^{t}} \det U = \overline{\det U} \det U = \left|\det U\right| .
\end{aligned}
$$

په حقيقي حالت کې ډيټرمينانت حقيقي ده او له دې امله فقط 1 او -1 ممکن دي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

د ډيټرمينانتو بڼه بدلون Umformung von Determinanten

د يو ماتريکس ډيټرمينانتونه د د دوه برابرو متو او يا دوه برابرو ليکو سره صفر دي.له دې په ځانګړې توګه لاس ته راځيو چې ډيټرمينانتونه تغير نه خوري، که که سړی د يوې متې (ليکې) يوې بلې متې (ليکې) ته ورزيات کړي يا ورجمعه کړي ليکونکي : هيوليک، هيورنر

دا چې د ترانپوني حالت کې د يوه ماتريکس متې په ليکې بدليږي او $\det A = \det A^{t}$ صدق کوي،دنو بسيا کوي، چد متو حالت وڅيړو.

د دوه متو د پدلولو سره بايد ډيټرمينانت د تعريف له مخې مخنخښه بدله کړي. که دواړه کټمټ متې يو د بل سره بدلې کړی شي ماتريکسونه ځان نه بدلوي او ډيټرمينانتونه بايد صفر وي.

که λ - ځله د متې a_j و متې $i \neq j$ a_i , ته ور زياته يا جمعه شي، نو لاندې ماتريکس لاس ت ه راځي

$$A' = \left(a_1, \ldots, a_i + \lambda a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n\right) .$$

د کرښيز کمبينيشن په بنسټ کېدی شي ډيټرمينانت و وېشل شي يا ټوټه شي په

$$\det A' = \det\left(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n\right) + \lambda \det\left(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n\right) .$$

دويم ماتريکس دوه کټمټې متې لري او له دې امله دا ډيټرمينانت صفر لري.

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

د يوه ماتريکس د يوې ليکي ډيرواره د ماتريکس د بلې ليکې سره زياتولو يا جمعه کولو له لارې کېدی شي ماتريکس په مثلث بڼه باندې واړول شي او ديترمينانت بيا د دياګونال توکو د ضرب له لارې وګټل شي يا لاس ته راړل شي.

که د متو يا ليکو بدلون صورت ونيسي، مخنخښه تغير خوري.

د بيلګې په توګه کېدی شي

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

لکه چې تعقيبوي وشمېرل شي.

دريمه ليکه ترې کم يا منفی د لومړۍ ليکې درې ځله راکوي :

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & -9 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

د دويمې متې او څلورمې متې بدلون:

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & -4 & 3 & -9 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

دريمه ليکه ورزيات دويمه ليکه، څلورمه ليکه ترې کم دويمه ليکه راکوي:

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -(1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (-2)) = 24\,.$$

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

د ديترمينانتو وديزيينه Entwicklung von Determinanten

د يوه $(n \times n)$ - ماتريکس A ديترمينانت کېدی شي د يوې په خوښه متي يا ليکې پسي وديزيينه کړي.:

$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det \tilde{A}_{k,j}$	د ليکې k پسې وديزيينه
$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{i,l} \det \tilde{A}_{i,l}$	د درز يا متې l پسې وديزيينه

چيرته چې $\tilde{A}_{i,j}$ هغه ماتريکس په ګوته کوي، کومه چې د A د i -مې ليکې ، j - مې متې د کرښې کولو (په کرښه کولو له منځه وړنې) له لارې منځ ته راځي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

د $\det A = \det A^t$ له امله بسيا کوي، چې وديزيينه د يوې متې پسې تر څېړنې لاندې ونيسو.

- مه متِه په متو

$$a_l = \sum_{i=1}^{n} a_{i,l} e_i$$

ټوټه کوو، د دیترمینانتونو د ډېرکرښیزوالي په اساس لاس ته راځي

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,l} \det \underbrace{(a_1, \ldots, a_{l-1}, e_i, a_{l+1}, \ldots, a_n)}_{=B_i} .$$

یو ماتریکس B_i ترڅېړنې لاندې نیسو، نو کېدی شي د دې لپاره د $n-l$ متېه بدلونونو له لارې l ـمه متېه اخر ته راوړل شي، بې له دې چې د نورو متېو لړېپرلپسې په خپلو منځونوکې تغیر شي.

په ورته توګه کېدی شي i ـمه لیکه د $n-l$ لیکه بدلونونو سره اخرې لیکې ته راوړل شي:

$$\det B_i = (-1)^{n-l}(-1)^{n-i} \det \begin{pmatrix} & & \tilde{A}_{i,l} & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,l+1} & \cdots \; a_{i,n} & 1 \end{pmatrix}$$

د بنې اړخ دیترمینانت کې فقط د S_n ځاي بدلونونه ونډه اخلي، چې د n ـمې لیکنې په خیث n لري. دا د S_{n-1} ځای بدلون ښایي او له دې سره دی

$$\det \begin{pmatrix} & & \tilde{A}_{i,l} & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,l+1} & \cdots \; a_{i,n} & 1 \end{pmatrix} = \det \tilde{A}_{i,l} .$$

د زیاتونو د جمعي اجزاوو ضرب د $1 = (-1)^{2l+2i-2n}$ سره د ورکړ شوي ودیزېینې فرمول ورکوي.

که د ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

لپاره ديترمينانت د لومړی ليکې پسي وديزبينه شي، نو لاس ته ترې راځي

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2(4-1) - 1(2-1) + 1(1-2) = 6 - 1 - 1 = 4\,. \end{aligned}$$

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

د 3 ټکو له لارې د يوې سطحې ايمپليځيت(ساده) انځورونه

Implizite Darstellung einer Ebene durch 3 Punkte

په $\mathbb{R}^3$ کې يوه سطحه چې د درې ټکو

$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ او $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$

له لاري ورکړ شوي وي، کېدی شي په ايمپليځيت فرمول له

$$E: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

له انځور شي. د لومړی ليکې پسې وديزيينې سره لاس ته راځي

$$E: ax + by + cz = d$$

د لاندې سره

$$a = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \ b = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \ c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \ d = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليک، شترايت

بنسټ ازمايښت Basistest

وکتورونه $a_1, \dots, a_n \in K^n$ ټيک هلته يو بنسټ جوړوي، که د ماتريکس $A = (a_1, \dots, a_n)$ ديترمينانتونه ورک نه شي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

که د A لومړی ليکه صفر وي، نو غوښتنه (ثبوت) روښانه ده.

په بل حالت کې کېدی شي د متې يوه ځاي بدلون پسې ونيسو يا فرض کړو، چې $a_{1,1} \neq 0$ اومتې a_j لکه ښنګه لرو بڼه بدل کړو:

$$a_j \to a'_j = a_j - \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}}\, a_1, \quad j = 2, \ldots, n \,.$$

دا د متو عمليو کارولو له لارې کېدی شي د متو ديترمينانت او هم د بنسټ خويونه بې تغيره پاتې شي. دا بڼه بدل شوی ماتريکس لاندې بڼه لري

$$A' = \left(\begin{array}{cccc} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ c & & B & \end{array} \right) .$$

د وديزيېنې جملې پسې لرو

$$\det A' = a_{1,1} \det B \,,$$

او دا چې $a_{1,1} \neq 0$ د A' متې تيک هلته يو د K^n بنسټ دي، که د B متې يوه د K^{n-1} بنسټ دي. دا غوښتنه کېدی شي اندوکتيو و ښوول شي.

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

د بيلګې په توګه له

$$A = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right)$$

کېدی شي د بنسټ ازماېښت روښانه شي.

که د متو يا ليکو څخه يو يې فقط له صفر جوړ وي، نو د ديترمينانت لپاره 0 ترې لاس ته راځي. په دې حالت کې د ماتريکس رانګ ماکسيمال 1 دی او له دې امله متې بنسټ نه جوړوي.

په بل حالت کې له $ad = bc$ لاس ته راځي

$$a\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab-ba \\ ad-bc \end{pmatrix} = 0$$

او له دې سره متې کرښيز بلواک دي.

که د متې کرښيز بلواک وي، نو صدق کوي:

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},$$

ديترمينانت شمېرل کې.ي و ته:

$$\det A = ad - bc = a\lambda c - \lambda ac = 0\,.$$

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

د واندرموند – ديترمينانتونه Vandermonde-Determinante

په n ټکو x_i کې ارزښت شوي مونومونو $1, x, \ldots x^{n-1}$ ديترمينانت دی

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)\,.$$

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

د $n = 2$ لپاره د واندرمود – ماتريکس ديترمينانت دی

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1 .$$

د یوه ټولیز n لپاره د ټولو نورو لیکو څخه لومړۍ لیکه کمیږي:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} .$$

د لومړۍ متې پسې ودیزیېنې سره راکوي

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} ,$$

د کوم سره چې له k -مې لیکې څخه ضریب $x_k - x_1$ رادباندې کیدی شي:

$$\left(\prod_{k=2}^{n}(x_k - x_1)\right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 & \dots & \sum\limits_{i=0}^{n-2} x_2^{n-2-i}x_1^i \\ 1 & x_3 + x_1 & x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2 & \dots & \sum\limits_{i=0}^{n-2} x_3^{n-2-i}x_1^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 + x_nx_1 + x_1^2 & \dots & \sum\limits_{i=0}^{n-2} x_n^{n-2-i}x_1^i \end{vmatrix} .$$

که د هرې متې څخه دا د مخه تېرې شوې متې دا x_1 – ځله کم کړو، نو بېرته پیل بڼې دیترمینانت لاس ته راځي

$$\left(\prod_{k=2}^{n}(x_k - x_1)\right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

، او فرمول د اندکشن له لارې ښوول کېدی شي.

لیکونکي : هیولیک، هیورنر

کرښیز مساوات سیستم Lineares Gleichungssystem

په یوه تن یا جسم K کرښیز مساوات سیستم دا لاندې بڼه لري

$$\begin{matrix} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b$$

د یوه ضریبونو د ماتریکس $A = (a_{i,j}) \in K^{m\times n}$ سره، د نامعلومو $x_j \in K$ او یو ښی اړخ $b \in K^m$ سره.

دا کرښیز مساوانسیستم هوموجېن بلل کيږي، که $b = 0$ وي، پرته له دې ناهوموجېن inhomogen بلل کيږي.

د یوه حقیقي ($K = \mathbb{R}$) یا کمپلکس ($K = \mathbb{C}$) کرښیز سیستم لپاره K اکسپلیڅیت explizit نه شي ورکول کېدی. دا چې کوم حالت مخ ته لرو د اړوندوالي له مخې لیدل کیږي یا روښانه دی.

که کرښیز مساوات سیستم کوم حل نه لري (په ټولیزه د $m > n$ لپاره)، نو دا باندې-تاکلی بلل کیږي. په دې حالت کې له اندولپرابلم څخه غږیږو. یو کرښیز مساوات سیستم د

نا يواحني حل سره (په تولیزه توګه د $m < n$ لپاره) کښته - – يا لاندې- تکلی بلل کيږي.

يوه تابع $f(x)$ کيدی شي له داتن

$$(x_i, f_i), \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

څخه د انترپوليشن له لارې په نږدې توګه بيا جوړه rekonstruiert شي. که يوه کرښيزه ځاي په ځاي کونه يا اينوونه

$$f(x) \approx p(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j p_j(x)$$

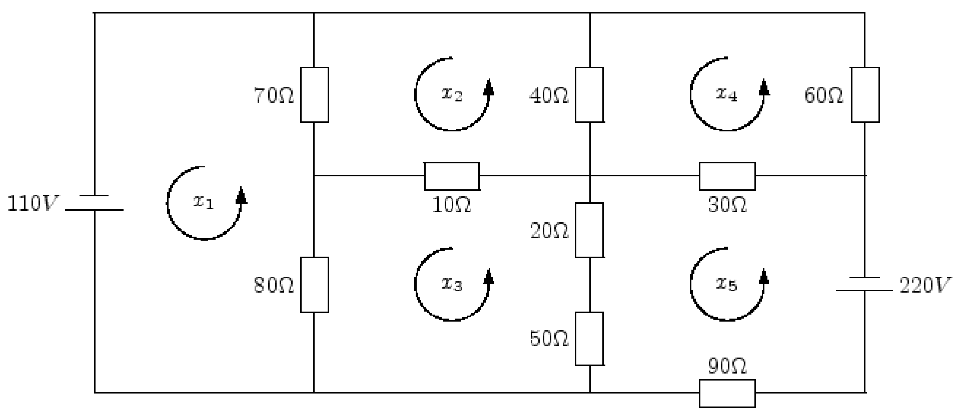
د مناسب بنسټتوابعو p_j سره، نو د انترپوليشن شرايطو څخه

برېښنايي جريانداېره Elektrischer Schaltkreis

که په يوه برېناجريان دايره (ګردی)کې د x_i سره د دايرې برېښناجريان وښايو د جريانلور د ساعتتنخبنه ووني (عقربک) مخامخ يعني معکوس، د سره د i - مي او j – مي پټی ګسره دډ يا مشترک مقاومت، د $R_{i,j}$ سره او د U_i سره اينوولی Spannungen ، نود اومOhm او کيرښهوف Kirchhoff قانون څخه دا کرښيز مساوات سيستم لرو

$$\sum_{i\sim 0} x_i R_{i,0} + \sum_{i\sim j} (x_i - x_j) R_{i,j} = U_i.$$

دلته $i \sim j$ معنا ورکوي، چې i -م او j —م د برېښناپټۍ يو ګډ مقاومت لري.
$x_i - x_j$ د دې مقاومت له لارې برېښناجريان دی. د $i \sim 0$, $R_{i,0}$ سره مقاومت
شوول کيږي چې هغه فقط په i —مې پټۍ کې پروت دی.



د بيلګې په توګه د څېره شوې جريان دابرې(ګردی) لپاره کرښيز مساوات سيستم

$$\begin{pmatrix} 150 & -70 & -80 & 0 & 0 \\ -70 & 120 & -10 & -40 & 0 \\ -80 & -10 & 160 & 0 & -70 \\ 0 & -40 & 0 & 130 & -30 \\ 0 & 0 & -70 & -30 & 190 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -220 \end{pmatrix}.$$

د ضريبونو ماتريکس په دياګونال کې د يوې پټۍ پورې اړونده مقاومت او ځاي يا
(i,j) Position د i او j ګميز يا منفي ګډ مقاومت . د دې راوړل شوې بيلګې حل
دی:

$$x \approx \begin{pmatrix} 1.0157 \\ 0.5641 \\ 0.0358 \\ -0.0940 \\ -1.1595 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د يوه کرښيز مساوات سيستم حلوړوالی

Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

په يوه تن يا جسم K د يوه هموجين کرښيز مساوات سيستم حلډېرى

$$Ax = 0,$$

د يوه $m \times n$ ضريبونو ماتريکس A يوه د K^n لاندې – يا برخډېرى U ده.

که دا هموجين کرښيز سيستم

$$Ax = b$$

يو حل v ولري، نو د توليز حل لپاره باور لري

$$x \in v + U\,,$$

دا په دې معنا چې حللډېرى د K^n يو افين affin لاندې – يا برخډېرى ده. په ځانګړې

توګه کېدی شي هوموجېن کرښیز مساوات سیستم هیڅ ، یو $U = \emptyset$ یا ناپای ډېر زیات $\dim U > 0$ حلونه ولې.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ، کیمرلې

که x, y د هوموجېن کرښیز مساوت سیستم حلونه وي او $\lambda \in K$ ، نو لاس ته راوړو:

$$A(x+y) \; = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

همداسې

$$A(\lambda x) \; = \lambda A x = \lambda 0 = 0 \, ,$$

دا په دې معنا چې د هوموجېن کرښیز مساوات سیستم د حلونو ډېری یوه لاندې- یا برخفضا U جوړوي.

که v د هوموجېن کرښیز مساوات سیستم یو حل وي او $u \in U$ ، نو $x = v + u$ د

$$Ax = A(v+u) = Av + Au = b + 0 = b$$

له امله هم د دې هوموجېن کرښیز مساوات سیستم یو حل دی.

برعکس د ناهوموجېن کرښیز مساوات سیستم د دوه حلونو v او w سره کمښت یا تفریق $v - w$ د

$$A(v-w) = Av - Aw = b - b = 0$$

له امله هوموجېن کرښیز مساوات سیستم یو حل دی.

له دې سره د يوه ناهوموجېن كربنيز مساوات سيستم ټول حلونه لاس ته راځي، داسې چې د ناهوموجېن كربنيز مساوات سيستم د خوښې حلونو لپاره د ټولو هوموجېن كربنيز مساوات سيستم حلونو جمعه جوړه كړو، يعې سره جمعه كړو.

ليكونكي: اپپ، هيوليګ

دا لاندې ساده حالتونه د كربنيزو مساواتو مختلف ډولونه د ليدنې كوي:

لومړى – كربنيز مساوات سيستم

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 60 \end{pmatrix}$$

يواځني حلونه لري: $x_1 = 8$, $x_2 = 1$.

دويم – كربنيز مساوات سيستم

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

يواځنی حل نه لري. كه $x_3 = t$ په خوښه وټاكو، نو $x_1 = 2$, $x_2 = 2t$ د حلونو په څېر لاس ته راځي.

دريم - كربنيز مساوات سيستم

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

کوم حل نه لري. اخرنی ليکه $x_2 = 4$ راکوي، که دا په يوه ليکه کې کېښوول شي، د لومړۍ ليکې څخه $x_1 = 2$ لاس ته راځي، له دويمي څخه برعکس $x_1 = 1$.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

ديترمينانت او د يوه مساوات سيستم حلوړوالی

Determinante und Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

يو کرښيز مساوات سيستم

$$Ax = b$$

د مربع ضريبونو ماتريکس A سره تيک هلته يو يوائحنی حل لري، هر ښي لوريزې b سره، که همداسې دا هوموجېن سيستم $Ax = 0$ فقط يو ساده حل $x = 0$ ورلري.

که $\det A = 0$ وي، نو يو حل فقط د ښی لورې b لپاره شتون لري په هغه د A د متو څخه غزېدلي لاندې – يا برخفضا ده. په دې حالت کې حل يوائحنی نه دی.

ليکونکي: کرايخ، هيوليک

غوښتنه د ديترمينانت د خويونو څخه په لاس راځي.

و $\det A \neq 0$ ته ورته لرو، چې د A متې $a_1, \dots, a_n$ کرښيز خپلواکې دي. د تعريف سره سم دا په دې معنا دی چې

$$x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0,$$

همداسې

$$Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0\,.$$

د دې لپاره چې د ناهوموجېن سيستم يوائځني حلوړوالي ته ورته لاس ته راوړای شو، له دې کار اخلو چې متې يو بنسټ جوړ کړي، دا په دې معنا چې هر ښی اړخ b د $x_1a_1 + \ldots + x_na_n = b \Leftrightarrow Ax = b$ کرښيزکمبېنېشن په حيث

يوائځنی انځوروړ دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

دا کرښيز مساوات سيستم

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

تيک هلته يو يوائځنی حل لري، که ديترمينانت $ad - bc \neq 0$ وي. په دې حالت کې حل په لاندې ډول دی

$$x = \frac{du - bv}{ad - bc}\,, \qquad y = \frac{av - cu}{ad - bc}\,.$$

که ديترملنانت $ad - bc$ برابر 0 وي، په ټوپيزه توګه کرښيز مساوات سيستم حل نه لري. په دې حلات حلونه فقط هلته شتون لري، که

$$av \qquad\qquad = cu$$

او

$$bv \qquad = du$$

صدق ولري. که د بېلګې په توګه $a \neq 0$ وي، نو کېدی شي y په خوښه وټاکو او د x لپاره لاس ته راوړو

$$x = \frac{u - by}{a}\,.$$

ليکونکي: پپ، اهيوليک

د کرامر قاعده Cramersche Regel

د يوه مربع کرښيز مساوات سيستم $Ax = b$ لپاره

$$x_i \det A = \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)\,,$$

دی، د کوم a_j سره چې د متوضريبونو ماتريکس A په نخښنه کيږي.

په ځانګړې توګه کېدی شي د $\det A \neq 0$ لپاره په څټ يا معکوس $C = A^{-1}$ د

$$c_{i,j} = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{\det A}$$

له لارې ټاکل کېدی شي.

ليکونکي: هيوليک، شترايت

د ديترمينانت د ډېركربنيزوالي او سيومتري له امله لاس ته راځي:

$$\det(a_1,\dots,a_{i-1},b,a_{i+1},\dots,a_n) = \det(a_1,\dots,a_{i-1},\sum_{j=1}^{n} a_i x_i, a_{i+1},\dots,a_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(a_1,\dots,a_{i-1},a_j,a_{i+1},\dots,a_n)$$

$$= x_i \det(a_1,\dots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\dots,a_n)$$

په ځانګړي توکه د $b = e_j$ سره د معکوسي j ـمه متېه $x = (c_{i,j},\dots,c_{n,j})^{\mathrm{t}}$ راکوي

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

ديوه (2×2) ـ ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

د معکوس C لپاره د کرام قاعدې سره لرو

$$c_{1,1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{d}{\det A}, \qquad c_{1,2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-b}{\det A},$$

$$c_{2,1} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-c}{\det A}, \qquad c_{2,2} = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{a}{\det A},$$

همداسې د $\det A = ad - cb$ سره دا لاندې لرو

$$\det A = ad - cb$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د (3×3) - ماتريکس

$$(3 \times 3)$$

د معکوس G لپاره د کرامر د قانون له مخې لرو

$$c_{1,1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{3}{25}, \qquad c_{1,3} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{25},$$

$$c_{3,2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{25}, \qquad \ldots$$

ټول داسې دي

$$A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 12 & 1 & 8 \\ -14 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

په څټ لور ځای په ځای کول Rückwärts-Einsetzen

په يوه کرښيز مساوات سيستم کې د پورته مثلث -بڼي سره

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{n,n} \end{pmatrix}}_{R}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

د $\det R = r_{1,1}\cdots r_{n,n} \neq 0$ سره کېدی شو ناټاکلې $x_n, \ldots, x_1$ يو پر بل پسې وټاکو:

$$r_{n,n}x_n = b_n \to x_n = b_n/r_{n,n}$$

او د $\ell = n-1, \ldots 1$ لپاره ،

$$r_{\ell,\ell}x_\ell + \cdots + r_{\ell,n}x_n = b_\ell, \to x_\ell = (b_\ell - r_{\ell,\ell+1}x_{\ell+1} - \cdots - r_{\ell,n}x_n)/r_{\ell,\ell}.$$

له دې سره به هر يو دا اوس معلوم شمېل شوي ارزښتونه $x_{\ell+1},\ldots,x_n$ و کارول شي.

په يوه مساوات سيستم کې د يوه لاندې مثلث ماتريکس کې کېدی شي په ورته توګه يو په بل پسې $x_1,\ldots,x_n$ و ټاکل شي.

د کربنيز مساوات سيستم

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & & & 7x_3 & = & 7 \end{array}$$

لپاره په ملث بنې کې د په څټ اېښووني له لارې حلونه لاس ته اځي

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 \\ x_2 &= (0-2)/2 = -1 \\ x_1 &= (6-3(-1)-1) = 2\,. \end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليک، شترايت

د ګاوس ترانفورميشن Gauß-Transformationen

لاندې عمليې د کربنيز مساوات سيستم د حلونو ډېرۍ بې تغيره پرېږدي:

- د دوه مساوتو بدلونه
- یوه مساوات ضربونه د یوه ضریب $\neq 0$ سره.
- د یوه مساوات کمول له یوه بل مساوات څخه

د اخرو دوه عملیو د کمبینېشن له لارې د یوې لیکې ډېرواره زیاتول یا جمعه کول و بلې لیکې ته عملیې دي چې اجازه لري یا پریښوول شوې عملیې دي.

د داسي په نامه ګاوس ترانسفورمېشن په مسته کزدی شي sukzessive یا یو په بل پسي ناټاکلي له منځه یووړل شي او یو کرښیز مساوات سیستم په مثلثفورم تراسفورمه کړو یا په بله بڼه واړوو او بیا یې په څټ ایښووني له لارې حل کړو.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د کرښیز مساوات سیستم

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\
x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\
6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8
\end{array}
$$

حل ځان ته تغیر نه ورکوي له

- د لومړي او دویم مساوات بدلونه

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\
3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\
6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8
\end{array}
$$

- د دویم مساوات ضربونه د 2 ضریب سره

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 22 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \end{array}$$

- د دريم مساوات کمول يا تفريقول له دويم مساوات څخه

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 22 \\ & & -3x_2 & + & 9x_3 & = & 30 \end{array}$$

ليکونکي: هيوليک، شترايت

د ګاوس د له منځه وړنه Gauß-Elimination

د ګاوس – بنه بدلون له لارې کېدی شي يو کربنيز مساوات سيستم د انعکاس وړ $(n \times n)$ -ضريبماتريکس به ماکسيمال $n-1$ پلونو (قدمونو) په پورته مثلثبنه باندې واړول شي يا راوړو. د دې لپاره يو په بل پسې د دياګونال لاندې کښته ضريبونه له منځه يوسو دا په دې معنا چې له $\ell-1$ پلونو (قدمونو) وروسته دا ک م س (کربنيز مساوات سيستم) لاندې بنه غوره کوي :

$$\begin{array}{cccccccccccccc} a_{1,1} & x_1 & + & a_{1,2} & x_2 & + & \dots & + & a_{1,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{1,n} & x_n & = & b_1 \\ & & & a_{2,2} & x_2 & + & \dots & + & a_{2,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{2,n} & x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & a_{\ell,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{\ell,n} & x_n & = & b_\ell \\ & & & & & & & & a_{\ell+1,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{\ell+1,n} & x_n & = & b_{\ell+1} \\ & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & a_{n,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{n,n} & x_n & = & b_n \end{array}$$

په يوګوني ډول ℓ-م له منځه وړنې پل داسې ځغلي لکه لاندې .

- که دا –م دياګونال توکی، داسې په نامه د پيوټ-توني Pivot-Element، صفر دی، نو ℓ -م به د يوه دې لاندې مساواتو سره بدل شي، داسې چې $a_{\ell,\ell} \neq 0$ به باور ولري...
- د $i > \ell$ لپاره به د i –م مساوات څخه د ℓ –م مساوات ډېر واره کم شي، داسې چې $a_{i,\ell}$ صفر شي:

$$a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - q_i a_{\ell,j}, \quad b_i \leftarrow b_i - q_i b_\ell \quad (q_i = a_{i,\ell}/a_{\ell,\ell})$$

د ټولو $j \geq \ell$ لپاره..

ليکونکي: هيوليک، شترايت

د کربنيز مساوات لپاره

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د ګاوس الګوريتم په لاندې تو؛ه ځغلي:

- د لومړی او دويمي ليکي پدلول:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (3 لیکه) – (1 لیکه) او (4 لیکه) - (1 لیکه) $\cdot 2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (.لیکه2) + (لیکه$\cdot 2$ 3):

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (لیکه3)- (لیکه4)$\cdot 3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د ایښیلون بڼه Echelon-Form

یو کربنیز مساوات سیستم د یوه $(m \times n)$ - ضریب ماتریکس سره کېدی شي د ګاوس –ترانفورمیشن سره د ایښېلون-فورم باندې يې بنّ بدله یا واړول شي:

$$Ax = b \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0\ldots0 & p_1 & *\ldots* & & & & & \\ & & 0 & 0\ldots0 & p_2 & *\ldots* & & \\ & & & & 0 & 0\ldots0 & p_3 & *\ldots* \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}}_{A'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} .$$

له دې سره داسې په نامه پیووت

$$p_1 = a'_{1,j_1}, \ldots, p_k = a'_{k,j_k}, \quad k \leq m, \quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n,$$

د صفر سره نابرابرې دي او k د A رانګ ی.

د k –م ترانفورمیشن پل په لاندې ډول ځغلي:

- یو له صفر مختلف متریکس توکی p_k د خورا کوچنی متې ایندکس(پیژندنخښې) سره او $\geq k$ لیکې اندکس(د لیکې پيژند نخښه) د پیووت توکی په حیث ټاکل کیږي او د لیکو بدلون له لارې پوزیشن (k, j_k) ته راوړل کیږي. که پیووت توکی شتون نه لري، نو د ایښلون پښه مو لاس ته راوړې ده.

- د k لیکې ډېرواره کمون یا تفریق له لارې د پیووت لاندې لور ته د ماتریکس توکی له منځه ځي.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د ماتریکس

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 6 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

لپاره ترنفورميشن د ايښلون-فورم باندې په لاندې ډول ځغلي

1. د لومړۍ او دويمې ليکې پدلون:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 6 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

2. (3.لیکهZeile) - $2\cdot$(1.لیکهZeile) und (4.لیکهZeile) او + (1.لیکهZeile):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

3. (3.Zeile) - (2.Zeile), (4.Zeile) - (2.Zeile)

او (5.Zeile) - (2.Zeile)

په پورته کې Zeile د ليکې يا ميلې په معنا دي.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.4 (4. Zeile) - $\frac{1}{2}\cdot$ (3.Zeile):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

د ايښلون – فورم لري نا ساده ليکي د پيووټ –توکو $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ او $p_3 = -10$ سره.

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د ايښلون- بڼه د يوه ل م س (کرښيز مساواتسستم)حل

Lösung eines LGS in Echelon-Form

يو کرښيز مساوات سيستم $Dx = c$ د ايښلون په بڼه،

$$\begin{pmatrix} 0\ldots0 & p_1 & *\ldots* & & & & & \\ & & 0 & 0\ldots0 & p_2 & *\ldots* & & \\ & & & & 0 & 0\ldots0 & p_3 & *\ldots* \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

د پيووټ $p_1, \dots, p_k$ سره تيک هلته حلوړ دی، که $c_{k+1} = \cdots = c_m = 0$ وي.

حل يواځنی دی، که $k = n$ وي. د $k < n$ لپاره د هوموجين کرښيز مساوات سيستم ($c_i = 0$)تيک $n - k$ کرښيز خپلواک حلونه شته .

نا معلومې، چې بې له پيووټ يې متې په ګوته کوي. کېدی شي ازادې يا په خوښه و ټاکل شي.

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

په لاندې کې به زيات تيوپيکي حالتونه تر بحث لاندې راوړل شي.

- $k = n = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

د په ځېږ اينسوونې له لارې ريکورزيو يواځنی حل لاس ته راوړی شو.

$$x = (1, -1, -1, 1)^t.$$

- $3 = k < n = 5$ ، $c_4 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

په اخرنۍ ليکه کې $0\cdot x=1$ ترې لرو، له دې سره کرښيز مساوات سيستم کوم حل نه لري.

- $3=k<n=5$ ، $c_4=0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

دا چې $c_{k+1}=0$ ، نو کرښيز مساوات سيستم $Dx=c$ حلوړ دی

د $\operatorname{Rang} D=3=n-2$ له امله حل x يواځنی نه دی. دلته د دوه کرښيز خپلواک حلونه v_i شتون لري د هوموجېن سيستم او د ټوليز حل لاندې بڼه

$$x=x_s+\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2\,,\alpha_j\in\mathbb{R}$$

لري د هوموجين سيستم يو ځانګړی حل x_s سره.

وکتورونه v_i د پيووت پورې نه اړه لرونکو نامعلومو د کانونيکي (بڼه يز: کنوني) ټاکنې له لارې معلوموي يا ټاکي او پاتې ضريبونه په هوموجېن سيستم باندې:

$$r_{\ell,\ell}x_\ell+\cdots+r_{\ell,n}x_n=b_\ell,\rightarrow x_\ell=\left(b_\ell-r_{\ell,\ell+1}x_{\ell+1}-\cdots-r_{\ell,n}x_n\right)/r_{\ell,\ell}\,.$$

یو ځانګړی حل

$$x_s = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د $x_3 = x_5 = 0$ اینسوونې له لارې لاس ته راځي.

لیکونکي: هیولیک، شترایت

رانګ او د ک م س(کربنیز مساواتسیستم) حلوړوالی

Rang und Lösbarkeit von LGS

وي دې $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m.$.

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m.$

- کربنیز مساوات سیستم $Ax = b$ یو حل لري

$$\Longleftrightarrow \operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang}(A, b).$$

- کربنیز مساوات سیستم $Ax = b$ یواځنی حلوړ دی

$$\Longleftrightarrow \operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang}(A, b) = n.$$

- کربنیز مساوات سیستم $Ax = b$ ډېر حلونه لري

$$\iff \operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang}(A,b) = k < n.$$

دلته په پام کې ولرئ، چې د A رانګ او د غزېدلي ماتريکس $(A,$ اينواريانت دي د ساده بنې بدلون سره. له دې امله کېدی شي و نيول شی يا فرض شي کرښيز مساوات سيستم به اينلون-بنه دی. به دې بنه کېدی شي نتيجې ترلې ولوستل شي.

د انډول کرښه(انډولکرښه) Ausgleichsgerade

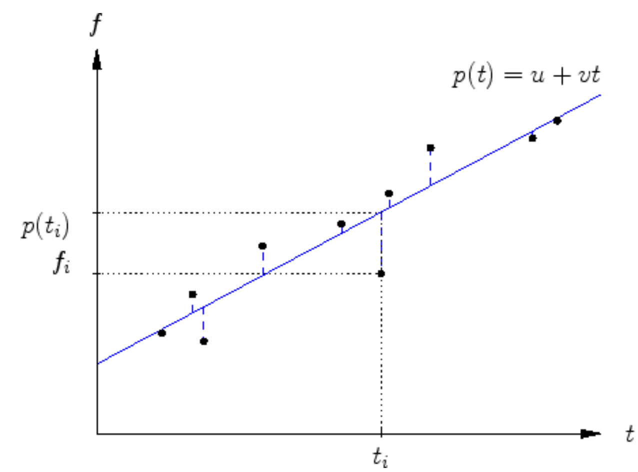
يوه کرښه

$$p(t) = u + vt\,,$$

، چې داتنونه $i = 1, \ldots, n$ ، به خورا ښه توګه approximiert کوي، کېدی شي د ناتيکاوي مربع جمعي کمښت

$$\sum_{i=1}^{n} (f_i - p(t_i))^2$$

له لارې پيدا کړی شي.



د محوربرخې u او جګېدنې v لباره لاندې فرمولونه راکوي

$$u = \frac{(\sum t_i^2)(\sum f_i) - (\sum t_i)(\sum t_i f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2}$$

$$v = \frac{n(\sum t_i f_i) - (\sum t_i)(\sum f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2},$$

که لږ تر لږه دوه پراته ارزښتونه یا قیمتونه t_i ورکړ شي یعني صفر وي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د مینیموم سره بایدد غلطی مربع جمعي مشتق هم د u او v هم د پسې صفر وي:

$$0 = 2\sum_i (u + vt_i - f_i)$$

$$0 = 2\sum_i t_i (u + vt_i - f_i)\,.$$

دواړه مساوات د ماتریکس په بڼه په لاندې ډول دي

$$\begin{pmatrix} n & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f_i \\ \sum t_i f_i \end{pmatrix}.$$

که لږ ترلږه دوه t_i مختلفي وي، نو دیترمینانت ده:

$$\underbrace{(1+\cdots+1)}_{n\,\mathrm{mal}}|(t_1,\dots,t_n)^{\mathrm{t}}|_2^2 - \left(\sum_i 1\cdot t_i\right)^2 > 0\,,$$

او سړی د کرامر د قاعدې سره ورکړ شوی حل لاس ته راوړي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د برابروني حل يو بل سره يوغږيز کيدل يا يو په بل پريوتلو، کرښيزو مساوات سيستم

Ausgleichslösung überbestimmter, linearer Gleichungssysteme

که د يوه کرښيز مساوات سيستم $Ax = b$ ښی خوا b وي د $(m \times n)$ - اتريکس A متو کرښيزې هيولي ياسپاين کې خوندي نه وي (په تيپيکي دول د $m > n$ لپاره)، دا په دې معنا چې وي

$$\mathrm{Rang}\, A < \mathrm{Rang}\,(A, b)\,,$$

نو مساوات سيستم حل نه لري. سړی د يوه د پاسه تاکلي سيستم څخه خبرې کوي. په دې حالت کې کېدی شي يو اپروکسيميشن د برابروالي پرابلم

$$|Ax - b| \to \min$$

له لارې و ټاکل شي.

د برابروالي حل شمېرل د نورمالومساوات يا سينګولارارزښتتوته کوني په مرسته ممکن يا شوني دی

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

الجبر - كربنيز مساوات سيستم-برابروني پرابلم

Algebra - Lineare Gleichungssysteme – Ausgleichsprobleme

نورمالمساواتونه Normalengleichungen

د يوه په خوښه $m \times n$ – ماتريكس A لپاره هر د برابروني پرابلم

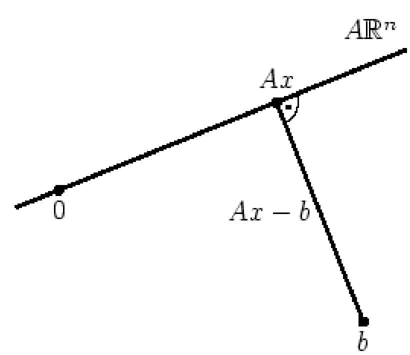
$$|Ax - b| \to \min$$

هر حل x نورماليز –مساواتونه

$$A^{\mathrm{t}}Ax = A^{\mathrm{t}}b,$$

پوره كوي، دا په دې معنا چې

ريزيدووم $r = Ax - b$ Residuum اورتوګونال دی د A د متو څخه غزېدلي لانديفضا $\operatorname{Bild} A$ سره



ځمككچيز يا هندسي مساوات معنا لري، چې ريزيدووم $r = Ax - b$ د ماتريكس A په متو نيغ ولاړ دی يعني عمود دی.

ماتريکس $A^{\mathrm{t}}A$ مربعيزه ده او پراخېدونی يا بعد n لري. دا ټيک هلته معکوسوړ ده کله چې $\mathrm{Rang}\, A = n$ وي، دا په دی معنا چې کله د A متې کرښيز خپلواکې وي.
نورماليز-مساوات د سينګولار حالت کې هم حلوړ دی، خو حل يې يواځنی نه دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

له

$$|A(x+ty)-b|^2 \geq |Ax-b|^2$$

د

$$(Ax-b)^{\mathrm{t}}y = y^{\mathrm{t}}(Ax-b), \quad r = Ax-b$$

سره برابر ارزښته نامساوات

$$2ty^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}r + t^2y^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}Ay \geq 0$$

لاس ته راځي د ټولو $t \in \mathbb{R}$ او وکتورونو y لپاره. که د نابرابرون کيڼ اړخ په t کې د پارابول په څېر ونيول شي، نو نه منفيوال(نه کميزوالي) د

$$y^{\mathrm{t}}(A^{\mathrm{t}}r) = 0\,.$$

سره به يوه معنا دي.

دا ټيک هلته د ټولو وکتورونو y لپاره صدق کوي، که په نوکانو کې افاده (وبينه) صفروکتور وي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لپاره نورمالمساوات لاس ته راځي

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس ته راځي

دا کربنیز مساوات سیستم ئواځني حل $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t$ لري.ريزيدووم $r = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t$ دي.

که A کربنیز بلواکي متې ولري، لکه په بېلګه کې

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

نو نورمالو-مساوات سیستم سینګولار دي:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

حل

$$x = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

په دې حالت کې يواځني نه دي، مګر ريزيدووم

$$r = \left(\tfrac{6}{5} \quad -\tfrac{12}{5} \quad 0 \right)^t$$

.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

توموګرافيTomographie

لکه څنګه په فنکشن يا څيرونه (mappingتابع) کې ښوول شوي دي، په کمپيوتر- توموګرافي Computer-Tomographie کې د حجروغړو ټينګوالي (غلظت) $x(u,v)$ بيا جوړيږي ، په کومه کې چې د ګڼوالي يا ټينګوالي بايليدنه(کمښت) Intensitätsverlust د رونتګن وړانګو د k کودې له ℓ غبرګو کربنو

$$\mathcal{R}_i: \quad (u_i, v_i) + \mathbb{R}(\cos\vartheta_i, \sin\vartheta_i), \quad i = 1, \ldots, m = k\ell\,,$$

کچ کيږي. سړي د ټينګوالي وېش د يوه ټوټه ډوله ثابتې تابع approximiert کوي

سړی د ټينګواليخورونه د يوه ټوټه ډوله يا ټوټه په ټوټه ثابتو له لارې اپروکسيمي کوي د مربعو Q_j په پاتې شونو او ګڼوالي کچه ونو د نږدې ونې له لارې کټلي کربنيز ا نتيګرال څخه.

$$b_i = \int_{\mathbb{R}} x(u_i + t\cos\vartheta_i, v_i + t\sin\vartheta_i)\, dt \approx \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\,,$$

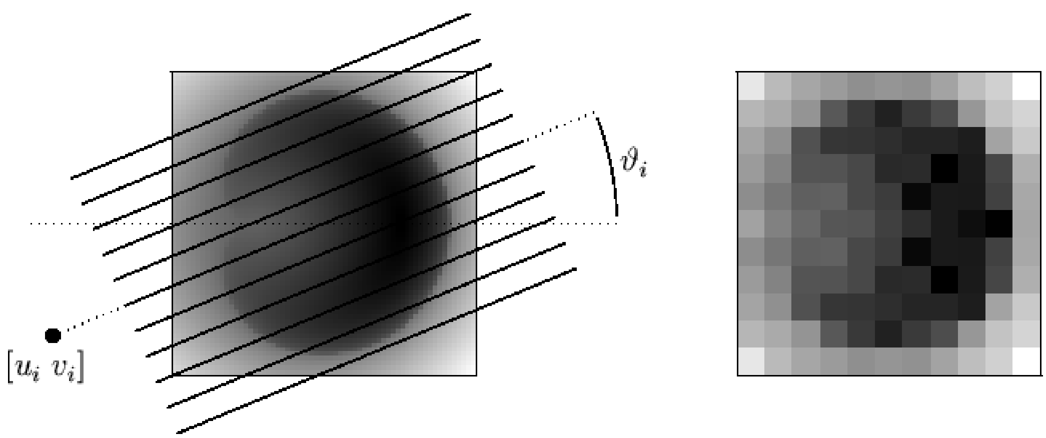
چيرته چې x_j د $x(u,v)$ يو اپروکسيميشن دی په Q_j او

$$a_{i,j} = |\mathcal{R}_i \cap Q_j|$$

د کرښو $\mathcal{R}_i$ د Q_j سره غوڅ ي یا تقاطع ا وړدوالی په ګوته کوي. دا چې د کچوونو تعداد یا ګڼون په ټولیزه توګه ډېر لوي دي نسبت د راستر (هغه تخته چې څیره پرې کښل کیږي) څلوریو او شنتیګرالونه چې ټیک نه شي شمیرل کیدی، د داتا b څخه د x ټاکلوته سرې یو برابروالیز یا د انډول پرابلم سره مخامخ کیږي.

دالاندې ژباړي دلته راکاپې کړي(دا لاندې دې همداسې په انګرېزي پاتې وي):

›› The word "raster" has its origins in the Latin *rastrum* (a rake), which is derived from *radere* (to scrape). It originally referred to the raster scan of cathode ray tube (CRT) video monitors, which paints the image line by line by magnetically steering a focused electron beam. By association, it came also to refer to a rectangular grid of pixels. See also rastrum, a device for drawing musical staff lines پای‹‹



پورته ښي لور ته څیره په یوه 11×11 راستر شمیرلی نږدیوالی ښایي کیڼ څیره شوی ټینګوالي خورونه(غلظت-) ښایي. له دې سره د کونج

$$\vartheta = 0, \pi/16, \pi/8, \ldots$$

لپاره 11 غبرګ سکن-لورې د راستر مربع سور باندې کارول شوي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

آيګن-ارزښت او آيګو-وکتور Eigenwert und Eigenvektor

يو سکالار λ د يوه مرئع ماتريکس A آيګو-ارزښت بلل کيږي، که وي:

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0.$$

وکتورونه $v \neq 0$ د $Av = \lambda v$ سره و آيګن-ارزښته λ ته آيګن-وکتورونه بلل کيږي.
آيګن-وکتورونه و آيګن-ارزښت ته د صفر وکتور سره يوځاي يوه کرښيزه فضا جوړوي، داسې په نامه د λ آيګن-فضا

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda E)$$

ليکونکي: هيوليک،هيورنر، کيمرلي

ماتريکسونه

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

آيګن-ارزښتونه $\lambda_1 = 0$ او $\lambda_2 = 2$ لري، ځکه

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

او

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

لاندې بېلګې د (2×2) ـماتريکسونو لپاره ممکنه حالتونه ښايي

- دوه حقيقي آيګن-ارزښتونه:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda_1 = -1 \, , \, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda_2 = 3 , \, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

- يو حقيقي آيګن- ارزښت، دوه کرښيز خپلواک آيګن-زکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} , \quad \lambda = 2 \, , \, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

- يو حقيقي آيګن-ارزښت، يو آيګن-وکتور:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda = 1 \, , \, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

- دوه کنجوګيري کمپلکس آيګن-ارزښتونه او آيګن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda_{1,2} = 1 \mp \mathrm{i} \, , \, v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \mathrm{i} \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

لاندې بېلګې د کمپلکس (2×2) – متريکسونو لپاره ممکنه حالتونه څېړي.

- دوه آيګن-ارزښتونه اودوه آيګن-وکتورونه:

$$A=\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 2 \\ 2 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \lambda_1=2+\mathrm{i}\,, v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2=-2+\mathrm{i}\,, v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- يو آيګن-ارزښت، دوه کرښيز خپلواک آيګن-وکتورونه:

$$A=\begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \lambda=2\mathrm{i}\,, v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- يو آيګن-ارزښت، يو آيګن-وکتور:

$$A=\begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \lambda=\mathrm{i}\,, v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

ورته والي - ترانفورميشن Ähnlichkeitstransformation

د يوه مربعيز ماتريکس A په ورته والي تراسفورميشن

$$A\to B=Q^{-1}AQ\,,$$

کې آيګن-ارزښتونه ساتلي پاتيږي. آيګن-وکتورونه د اينورتيروږ ماتريکس Q له لارې تشريح شوې بنسټ بدلون سره سم ترانسفورمي کيږي، دا په دې معنا، چې د A آيګن-

وکتور v و آیګن- ارزښت λ ته و همهغسي د B آیګن-وکتور $w = Q^{-1}v$ په ګوته کوي و همغه بنسټ ته.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

که v د A یو آیګن-وکتور وي و آیګن-ارزښت λ ته، یعنې $Av = \lambda v$ ، نو د $w = Q^{-1}v$ لپاره لاس ته

$$Bw = Q^{-1}AQw = Q^{-1}AQQ^{-1}v = Q^{-1}Av = Q^{-1}\lambda v = \lambda Q^{-1}v = \lambda w\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

لاندې مربع ماتریکس دې ورکړ شوی وي

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

د آیکن-ارزښت $\lambda_1 = 2$ او $\lambda_2 = 3$ او د لاندې اړونده آیګن-وکتور سره:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

یو ورته والي ترانسفورمیشن د $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$B = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

سره راکوي.

د B آيګن-وکتورونه w_1 او w_2 د

$$w_1 = Q^{-1}v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

سره، همداسي

$$w_2 = Q^{-1}v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

سره شميرل کيږي.

ليکونکي: هيوليک، کرايخ

کرکتريستکي پولينوم Charakteristisches Polynom

د $(n \times n)$ – ماتريکس A آيګن-ازښتونه د کرکتريستيکي پولينوم صفرونه دي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}.$$

په ځانګړې توګه د ماتريکس آيګن – ارزښونه د ترانسپوزيشن سره اينواريانت پاتې کيږي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر، کيمرلې

يو سکالار λ تيک هلته د $(n \times n)$-ماتريکس A آيګن-ارزښت دی، که ولرو

$$Av = \lambda v\,, \quad v \neq 0,$$

دا په د ې معنا چې که دا هوموجېن کرښيز مساوات سيستم $(A - \lambda E)v = 0$ يو له صفر مختلف حل ولري. دا حالت تيک هلته لرو، که $(A - \lambda E)$ زينګولار وي يعنې که وي:

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د آيګن – ارزښتونو او - - وکتوونوشميرنه

د دې لپاره چې د مربع ماتريکس A لپاره د آيګن-ارزښت پرابلم حل کړو، لومړی د کرکتريستيکي پولينومونو آيګن-ارزښتونه λ د صفرځايونو په حيث ټاکي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)\,.$$

د هر آيګن – ارزښت λ لپاره له دې سره اړوند آيګن – وکتور v لاس ته راوړو د هوموجېن ګرښيز مساوات سيستم د يوه ناتريويال په څېر

$$(A - \lambda E)v = 0\,.$$

د دې لپاره چې د آيګن-فضا V_λ لپاره يو بنسټ لاس ته راوړو، سړی کړی شي دا سيستم په اپسيلون-فرمول ترنسفورمی کړو.

په ټوليزه توګه $\dim V_\lambda = 1$ دی. دا تر يوه سکالار ضيب يواځنی ټاکلی آيګن-وکتور v کېدی شي هلته وټاکل شي ، په کوم کې چې د وکتورونو v مناسب کمپوننتونه له مخه ورکړي

ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

د ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

د آيګن –ارزښت د ټالکو لپاره کرکتيستيکی پولينوم جوړوو

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2 - 4 + 8 - 2\lambda = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4\,.$$

او د ده صفرځايونه ټاکي. د ګومان له مخې (د مطلق ارزښت غړي پروېشونی يا مقسوم عليه) د لومړي صفرځای په څېر $\lambda_1 = 2$ لاس ته راځي. د دې صفرځای وېشنه

$$(-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4)/(\lambda - 2) = -\lambda^2 + 2\lambda - 2,$$

او په لانې فرمول (دنيمې شپې فرمول په نامه بلل شوی) کې يې ځای په ځای کوو ترې لرو

$$\lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{-2} = 1 \pm \mathrm{i}\,.$$

يو آيګن – وکتور و آيګن – ارزښت 2 ته كيدی شي د هوموجين مساوات سيستم

$$(A-2E)v=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

حلونو له لارې وټاكل شی. حل $v=(1,0,-2)^t$ ساده ليدل كيږي

يوه آيګن-ارزښته $1+\mathrm{i}$ ته يو آيګن – وکتور w_1 له دې لاندې لاس ته راوړو:

$$(A-(1+\mathrm{i})E)w_1=\begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & -2 & -1 \\ 2 & 1-\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 2 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} w_1 = 0\,.$$

او داسې د پزلګز به تګه $w_1=(-1-\mathrm{i},-1+\mathrm{i},2)^t$. دا A چې حقيقي ده، کېدی شي و $\lambda=1-\mathrm{i}$ ته آيګن-وکتور د کمبلکس کنجوګيشن له لارې جوړ شي:

$$w_2=\overline{w_1}=(-1+\mathrm{i},-1-\mathrm{i},2)^t$$

.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

الجبری او هندسي ډېرځلوالی

Algebraische und geometrische Vielfachheit

كه λ د $(n \times n)$ – ماتريكس A آيګن –ارزښت وي، نو دكركتريستيكي پولينوم $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$ د صفرځای په حيث د λ ډېرځلوالی د آيګن-ارزښت λ

الجبري m_λ ډېرځلوالی بللګيږي

د يوه آيګن – ارزښت λ د آيګن-فضا V_λ بعد يا پراخپدونی d_λ د λ هندسي ډېرځلوالی بلل كيږي. . ابور لري

$$d_\lambda \leq m_\lambda\,, \qquad \sum_\lambda m_\lambda = n\,,$$

همداسې

$$d_\lambda = n - \mathrm{Rang}(A - \lambda E)\,.$$

ليكونكي: هيوليګ، هيورنر، كيمرلي

ماتريكسونه

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

ټول لاندې كركتريستيكي پولينوم لري:

$$(4-\lambda)^3 = (4-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) + 4 - \lambda = (4-\lambda)^3 + 12(4-\lambda) - 12(4-\lambda)$$

او له دې سره هوار $m_4 = 3$ دی. د ماتريكس

$$(A_1 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_2 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(A_3 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

د رانګ په لرودو سره $d_4 = 3$ د A_1 لپاره، $d_4 = 2$ د A_2 لپاره او $d_4 = 1$ د A_3 لپاره پېژني

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د آيګن –ارزښتونو جمعه او ضرب

Summe und Produkt von Eigenwerten

د يوه $(n \times n)$-ماتريکس A د آيګن – ارزښت λ_i لپاره صدق کوي

Für die Eigenwerte λ_i einer $(n \times n)$-Matrix A gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{Spur} A, \quad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A\,,$$

د کوم سره چي ډېرځله آيګن – ارزښتونه د الجبري ډېرځلوالی سره سم شمېرل کيږي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د ديترمينانت د مولتی کربنيزوالی په اساس د کرکتريستيکي پولينوم لپاره لاس ته راځي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-\lambda)^n + \mathrm{Spur}\, A(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \det A\,.$$

بلې لور ته پولينوم په لاندې بنه

$$p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda)$$

انځوريدلای شي. د دويم فرمول په ضربونه او د ضريبونو پرتله کونه دا ورکړ شوی کتمتوالی يا ايدنتيتي راکوي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

کرکتريتيکي بولينوم

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$

لي د لاندې صفرځايونو سره:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}\,.$$

که د آيکن – ارزښتونو جمعه تشکيل شي، دا ريښې افاده له ۃنځه ځي، او لاس ته راځي:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{(a+d) + (a+d)}{2} = a + d = \mathrm{Spur}\, A\,.$$

که آيګن – ارزښتونه سره ضرب شي، نو د دريم بېنوم فرمول سره لرو:

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{(a+d)^2-(a+d)^2+4(ad-bc)}{4} = ad-bc = \det A\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د ماتريکسونو ريښتونی فنکشنونه يا توابع

Rationale Funktionen von Matrizen

که د يوه ماتريکس A يو آيګن-ارزښت λ د ريښتوني فنکشن

$$r(t)=\frac{p(t)}{q(t)}=\frac{a_0+a_1t+\cdots}{b_0+b_1t+\cdots}\,,$$

قطبځای نه وي ، نو $r(\lambda)$ د

$$r(A)=q(A)^{-1}p(A)=p(A)q(A)^{-1}\,.$$

آيګن – ارزښت دی.

په ځانګړي توګه λ^k د توان-ماتريکس A^k آيګن – ارزښت دی او $1/\lambda$ د معکوس کېدونکي ماتريکس A^{-1} يو آيګن-ارزښت دی.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

له $Av = \lambda v$ د $k \geq 0$ لپاره لاس ته راځي چې $A^k v = \lambda^k v$ او په ټوليزه توګه

$$\left(\sum_k c_k A^k\right) v = \left(\sum_k c_k \lambda^k\right) v \,.$$

پسې صدق کوي

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow v = \lambda A^{-1} v \,,$$

که A معکوسوړ وي

که λ د صورت پولينوم q صفرځای نه وي. نو صدق کوي

$$q(A)v = q(\lambda)v, \quad q(A)^{-1}v = q(\lambda)^{-1}v \,,$$

پس

$$q(A)^{-1}p(A)v = q(\lambda)^{-1}p(\lambda)v = p(A)q(A)^{-1}v$$

لکه څه مو چې غوښتل .

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د آيګن – وکتورونو بنسټ Basis aus Eigenvektoren

که يوه ماتريکس A ته د آيګن – وکتورونو v_j څخه يو بنسټ شتون ولري د آيګن – ارزښت λ_j سره ، نو دی

$$V^{-1}AV = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad V = (v_1, \ldots, v_n)\,,$$

دا په دې معنا چې A نسبت و بنسټ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ته دیاګونال بنه لري.

لیکونکي: هیولی، اپپ

د ښوولو دی، چې

$$V^{-1}AV \qquad = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

باور لری، د لاندې سره ورته (برابر ارزښته)دی

$$AV = V\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n)\,.$$

دا چې v_j د V متِه و λ_j ته د آیګن-وکتورونه دي، دا سملاسي لیدل کیږي

لیکونکي: هیولی، اپپ

ماتریکسونه

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 1 & -5 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

آیګن- ارزښتونه -2 , -2 او 3 لري. اړونده آئګن-وکتورونه دپیلګی به توګه دئ:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

د $V = (v_1, v_2, v_3)$ سره لاس ته راځئ

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيولی، اپپ

د ځيوکليکي ماتريکسونو دياګونالونه

Diagonalisierung zyklischer Matrizen

يو ځيوکليکي $(n \times n)$ – ماتريکس A کېدی شي د پورير-ماتريکس

$$W = (w^{jk})_{j,k=0,\dots,n-1}, \quad w = \exp(2\pi \mathrm{i}/n),$$

په مرسته دياګونالي شي.

$$\frac{1}{n}\overline{W}\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

د

$$\lambda_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{-k\ell}, \quad \ell = 0, \dots, n-1,$$

سره د A آيګن – ارزښت دی.

ليکونکي: هيولی، اپپ

سړی ساده بسې شمېرلی شي، چې د W ℓ -مه متِه د A يو آيګن – وکتور دی. د Aw_ℓ

د j –م کمپوننت لپاره سړی لاس ته راوړي:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{j-k \bmod n} w^{(k-j)\ell} w^{j\ell} = w^{j\ell} \sum_{k'=j-n+1}^{j} a_{k' \bmod n} w^{-k'\ell} .$$

دا اندکس يا پيژند نخښه مودولو سره ښوول کيږي، کېدی شي د جمعي کېدنې ورشو د $k' = 0, \ldots, n-1$ سره ځاي په ځاي شي يا بدله شي. په تعقيب سره يې زياتون يا

جمعه برابر په λ_ℓ ده ،لکه چې غوښتل مو. له دې مو و ښوول چې لرو:

$$AW = W \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

دا چې $\frac{1}{\sqrt{n}} W$ يوتيتار دی،دا په دې معنا چې $\frac{1}{\sqrt{n}} W^* = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} W \right)^{-1}$ ، سړی غوښتونکی ترانسفورمېشن په دياګونال بڼه لاس ته راوړي

ليکونکي: هيولی، ايپ

د عمومي تيوري سره سم کيدی شي څيوکليکي ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

د فورير- ماتريکس

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

سره په دياګونال بڼه واړول شي(ترانسفورمي شي)

$$\frac{1}{4}\overline{W}AW = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

د 2 ,2 ,0 او 4 سره د A آيګن – ارزښت. دا چي A حقيقي دی بايد کمپلکس آيګن-وکتورونه

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

(د W دويمه او څلورمه متړه) يو کډ آيګن-ارزښت ولري. داسې کېدی شي د کرښيز کمبينېشن له لارې د آيګن-وکتورونو لپاره يو حقيقي بنسټ تشکيل شي:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} - \mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي : اپپ، هيوليګ

د ماتريکسونو توان Potenzen von Matrizen

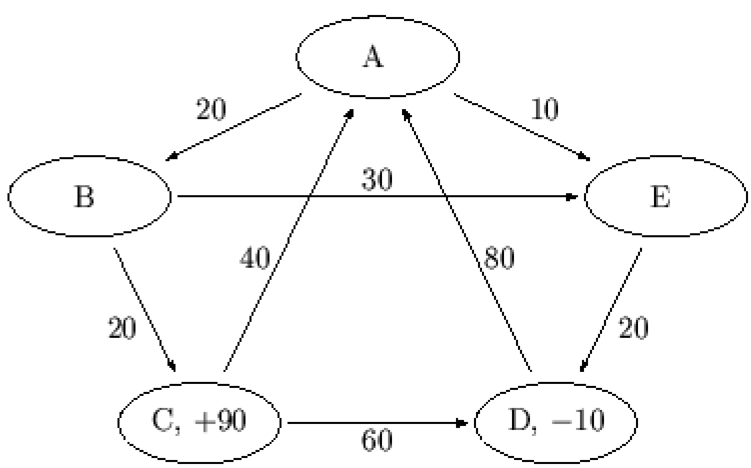
که A د مطلق ارزښت سره سم يا - - ډوله خورا لوي آيګن- ارزښت λ د آيګن – وکتور v سره ولري،نو صدق کوي:

$$A^n x = \lambda^n (cv + o(1)), \quad n \to \infty \,,$$

که x يو ناترېويال کمپوننت د λ په آيګن-فضا کې ولري، دا په دې معنا چې $x = cv + w$ د $c \neq 0$ او $v \nparallel w$ سره.

ليکونکي : اېپ، هيوليګ

دا تابع د مارکېټپرخي x_i د رقابت د فيرما ګانو کلنی تغير ښايي.په دې ترتيب فيرماA د 80% بېلګې په توګه د فيرما D د مارکېټ برخه ګټي او د فيرما C خپله د مرکېټ برخه د 90% په شاوخوا کې لوېه وي د نوي خرڅلاو امکانات پيداکولو سره ، په همدې وخت کې د مارکېټ برخې A او D ته له لاسه ورکوي.



د ليدخيري ځخه د مارکېټ نوې برخې(ونډه) رانيسو:

$$A_{\text{neu}} \text{ نوي } = 0.7A + 0.4C + 0.8D$$

$$B_{\text{neu}} \text{ نوي } = 0.5B + 0.2A$$

$$C_{\text{neu}} \text{ نوي } = 0.9C + 0.2B$$

$$D_{\text{neu}} \text{ نوي } = 0.1D + 0.6C + 0.2E$$

$$E_{\text{neu}} \text{ نوي } = 0.8E + 0.3B + 0.1A\,.$$

له $x = (A, B, C, D, E)^t$ سره لاس ته راځي:

$$x_{\text{neu}} \text{ نوی } = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} x\,.$$

د ایتراشن ماتریکس د n–توان سره ضربولو د n کلونو وروسته د مرکت ونډه راکوي.

نورميري شوي وکتورونه x^0 د یوه آيګن- وکتور $v_{\max}$ (ماکس) پولې ته ځي(کونورګيريګي) د ماتر يکس د ارزښت له مخې لوی ا يګن ارزښت $\lambda_{\max}$ ته. سړی لاس ته راوړي $\lambda_{\max} = 1.1$ او دې ته اړوند ايګنوکتور

$$v_{\max} = (0.75, 0.25, 0.25, 0.25, 0.5)^t\,.$$

د اوږده وخت لپاره بازار يا مارکيټ د A ه خوا تاکل کيږي يا تعينيږي. په سلو کې برخې د $\max v$ د نورمي کولو له لارې لاس ته راځي يعني $\max v/\|\max v\|_1$, په دې توګه

$$A:\ 37.5\%,\ \ B,C,D:\ 12.5\%,\ \ E:\ 25\%\,.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليک

د فيبوناچي پرلپسې يا - ترادف Fibonacci-Folge

د فيبوناچي پرلپسي يا ترادفونه داسي پيژند لري يا تعريف دي:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1,$$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}\,, \quad \text{د } n \geq 1\,, \text{ لپاره}$$

دا په دې معنا چې هره فيبوناچي پرلپسې د دواړو ترمخ غړو زياتونن يا جمعه ده.

د فيبوناچي لومړي عددونه دي:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots\,.$$

سړی د پيل ارزښت $a_1 = 1$ او $a_2 = 3$ ټاکي نو داسې په نامه لوکاس - $a_2 = 3$ Lucas- عدد:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots\,.$$

که دوه يو په بل پسې د فيبوناچي عددونه يوه وکتور

$$x_n = (a_n, a_{n-1})^t$$

ته سره يوځاي شي، نو ريکورزيون د

$$x_{n+1} = Ax_n$$

په څير د لاندې سره وليکو:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

د ماتريکسليکنې په مرسته کېدی شي د فيبوناچي عدد دا اسيمپتوتيکي حالت وټاکل شي. د دې لپاره سرې د A آيګن-ارزښتونه او آيګن-وکتورونه شمېري:

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad v_\pm = \begin{pmatrix} \lambda_\pm \\ 1 \end{pmatrix} .$$

که سرې د ريکورزيون وکتورونه د v_+ کرښيز کمبينېشن په حيث انځور کړي،

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}v_+ - \frac{1}{\sqrt{5}}v_- ,$$

، نو لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} a_n = & \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_+\lambda_+^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_-\lambda_-^{n-1} \\ = & \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n + o(\lambda_-^n) . \end{aligned}$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

نورمال ماتريکسونه Normale Matrizen

يو کمپلکس ماتريکس A نورمال بلل کيږي، که

$$AA^* = A^*A\,,$$

وي، د $A^* = \bar{A}^{\rm t}$ سره. په ځانګړې توګه يونيتار او هرمييتيکي ماتريکسونه نورمال دي.

د حقيقي نورمال ماتريکسونو لپاره دی:

$$AA^{\rm t} = A^{\rm t}A\,,$$

کوم چې په ځانګړې توګه د اورتوګونال او سيومتري ماتريکسونو لپاره پوره دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،کيمرلي

د يونيتارو او هرميتيکي ماتريکسونو نورمالوالی ترلی له تعريف څخه لاس ته راځي.

د ئوه يونيتار ماتريکس لپاره دی:

$$AA^* = AA^{-1} = E = A^{-1}A = A^*A\,.$$

د يوه هرمېتيکي ماتريکس لپاره دی:

$$AA^* = AA = A^*A\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د نورمالو ماتريکسونو يونيتار دياګونالي – يا دوه کونجتړي کول

Unitäre Diagonalisierung normaler Matrizen

يو ماتريکس A ټيک هلته نورمال دی، که A يونيتار دياګوناوړ وي، دا په دې معنا چې ، که وي:

$$U^{-1}AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,$$

د کوم سره چې د U متې يو اورتونورمال بنسټ و آيګن – ارزښت λ_j ته له آيګن-وکتورونو تشکيل کړي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک، کيمرلي

که

$$A = UDU^*, \quad U^* = U^{-1}\,,$$

وي، نو نورمال دی، ځکه چې لرو:

$$\begin{aligned} AA^* &= (UDU^*)(UDU^*)^* = UD(U^*U)D^*U^* \\ &= U(D^*D)U^* = (UD^*U^*)(UDU^*) \\ &= A^*A\,. \end{aligned}$$

د دې معکوس کېدی شي د يوه اورتوکونال بنسټ شتون نسبت بعد ته د ايندکشن له لارې وښايي. د ايندکشن پل لپاره يو يونيتار ماتريکس V جوړوو د لاندې سره:

$$V^*AV = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right).$$

د اینکشن نیونې یا فرضیې له مخې کېدی شي B د یونتارماتریکس W له لارې په دیاګونال بڼه ترنسفورمي شي، داسې چې سړی ځاي په ځاي کولی شي:

$$U = V\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & W \end{array}\right)$$
.

د V دجوړښت یا کنسترکشن ته د یوه نورمي آیګن – وکتور v څخه و آیګن- ارزښت λ ته ځي او بړدي

$$V = (v|\tilde{V}),$$

د کوم سره چې د $\tilde{V}$ متې وکتور v و اورتوګونال بنسټ ته پوره کوي. لاس ته راځي:

$$V^*AV = \left(\begin{array}{c} v^* \\ \hline \tilde{V}^* \end{array}\right)\left(\ \lambda v \mid A\tilde{V}\ \right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & c^* \\ \hline 0 & B \end{array}\right).$$

ښوولو تهدومره پاتیږي، چې B نورمال او $c = 0$ دی. دواړه د A د نوپمالیټي څخه لاس ته راځي. دا د ورته والي ترنسفورمیشن سره ساتلي پاتې کیږیو ، پس د پورته مساوات د ښي اړخ $\tilde{D}$ لپاره هم صدق کوي.

که

$$\tilde{D}\tilde{D}^* = \left(\begin{array}{c|c} |\lambda|^2 + |c|^2 & c^*B^* \\ \hline Bc & BB^* \end{array}\right)$$

$$\tilde{D}^*\tilde{D} = \left(\begin{array}{c|c} |\lambda|^2 & \overline{\lambda}c^* \\ \hline \lambda c & B^*B \end{array}\right),$$

تشکیل کړو، نو غوښتونی خویونه د پورته ماتریکسونو د دیاګونال بلوکونو د پرتلې له لارې لاس ته راځي. لیکونکي: اپپ،هیولیګ

ماتريکسونه

$$A=\begin{pmatrix}3+2\mathrm{i} & 3-2\mathrm{i}\\ 3-2\mathrm{i} & 3+2\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

نورمال دي، چې د سيده شمېرنې له لارې تصديق کېدی شي.

$$AA^*=\begin{pmatrix}26 & 10\\ 10 & 26\end{pmatrix}=A^*A$$

د دې په تعقيب بايد A يونيتار دياګونالوړ وي. سرې آيګن – ارزښتونه6 او $4\mathrm{i}$ لاس ته راوړي او اړونده نورمي آيګن-وکتورونه د بېلګې په توګه دي:

$$v_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

د انتظار سره سم $v_1 \perp v_2$ دی، او د يونيتار ماتريکس $U=(v_1,v_2)$ سره دياګونال ماتريکس لاس ته راځي:

$$\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 4\mathrm{i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3+2\mathrm{i} & 3-2\mathrm{i}\\ 3-2\mathrm{i} & 3+2\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اپپ،هيوليک

د هرميتيکي ماتريکسونو دياګونال بڼه Diagonalform hermitescher Matrizen

ديوه هوموجين ماتريکس $A\ (A=A^*)$ آيګن-ارزښتونه λ_i حقيقي دي او د آيګن-وکتورونو v_i څخه يو اورتوګونال بنسټ شتون لري. په تعقيب

ده د یونیتارماتریکس سره

$$U^*AU = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,$$

ده د یونیتارماتریکس $U = (v_1, \ldots, v_n)$ سره.

په ځنګړې حالت کې حقیقي سیومتریکي ماتریکسونو $(A = A^t)$ آیګن-وکتورونه هم حقیقي دي.

لیکونکي: هیولیګ، ربل

یونیتار دیاګوناوړوالی په نورمالو ماتریکسونو د اړونده ټولیزې نتیجې څخه لاس ته راځي، هغه چې هرمیتیکي حالت خوندي لري. د ښولو دا پاتې دی چې آیګن – ارزښت λ حقیقي دی. که په ورته توګه v آیګن- وکتور وي، نو دا له لاندې لاس ته راځي:

$$\lambda v^* v = \quad v^*(\lambda v) = v^*(Av) = (A^* v)^* v$$

$$= \quad (Av)^* v = (\lambda v)^* v = \overline{\lambda} v^* v\,,$$

ځکه چې $\lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ لرو.

لیکونکي: هیولیګ، ربل

هرمیتیکي ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1-\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

دیترمینانت 0 لري. پسې $\lambda = 0$ یو آیګن – ارزښت دی او سرې تړلی ګوري، چې

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

يو اړونده آيګن-وکتور دی. له $\operatorname{Spur} A = 3 = \lambda + \varrho$ څخه د ويم آيګن – ارزښت په حيث $\varrho = 3$ لاسته راځي. يو اړونده آيګن-وکتور نسبت و کمپلکس سکالار ضرب ته هغه و v ته لاندې اورتوګونال وکتور دی:

$$w = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

د نورمي کولو له لارې يونيتار ماتريکس لاس ته راځي

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}.$$

په تعقيب باور لري:

$$A = U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} U^*,$$

د

$$U^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$$

سره، هغه و U ته معکوس.

ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

مثبت ديفينيت ماتريکسونه Positiv definite Matrizen

يو مربع ماتريکس A مثبت ديفينيت بلل کيږي، که وي:

$$v^*Av > 0 \quad \forall v \neq 0.$$

که v^*Av يواځې نامنفي وي، نو A مثبت سيمي (نيم – يا برخه-) ديفينيت بولو.

يو مثبت ديفينيت ماتريکس A فقط مثبت دياګونالتوکي لري او آيګن-ارزښتونه. په ځنګړي توګه A معکوسوړ ده او معکوس يې هم مثبت ديفينيتدی.

ليکونکي: هيوليک، ربل

ريلا ي – ويش (هعني هغه د ويش تيجه) Rayleigh-Quotient

د يوه هرميتيکی مثبت ديفينيت ماتريکس S لپاره د داسې په نامه ريلای-ويش اکسترم – ارزښتونه

$$r_S(x) = \frac{x^*Sx}{x^*x}, \quad x \neq 0,$$

خورا کوچنی او خورا لوي د S آيګن – اررښت دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

ماتريکس S کېدی شي ا يونيتار ماتريکس U له لارې دياګونال فروم ته واړول شي:

$$U^*SU = D, \quad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

د کوم سره چې

$$Sv_i = \lambda_i v_i \Rightarrow \lambda_i = \frac{v_i^* S v_i}{v_i^* v_i} > 0$$

او $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ نيول يا فرض کېدی شي.

که سړی $S = UDU^*$ او $x = Uy$ بدل کړي، نو دی

.

$$r_S(y) = \frac{y^* D y}{y^*(U^* U) y} = \frac{\sum_i \lambda_i |y_i|^2}{\sum_i |y_i|^2} .$$

دا ښايي چې

$$\lambda_{\min} \leq r_S(y) \leq \lambda_{\max} ,$$

چېرته چې د مطلوب آيګن-وکتورونو لپاره $y = e_n$ او $y = e_1$ لپاره صدق کوي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

مثلث بڼه Dreiecksform

يو کمپلکس مربع ماتريکس A کېدی شي د يوه ورته ترانسفورميشن له لارې په پورته مثلث بڼه

$$R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = Q^{-1} A Q$$

ترانفورمي شي، چېرته چې دياګونالي د A آيګن-ارزښتونه λ_i خوندي لري.

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

ښوونه د ماترريکس په بعد n باندې د اينډکشن له لارې کيدی شي صورت ونيسي، د يوه (1×1)-ماتريکس د ترېويال حالت څخه په پيل.

يو $(n \times n)$-ماتريکس A تر څېړنې لاندې نيسو، نو دا لږترلږه يو ايګنوکتور v لري.

دا د نورمي کيدلو وروسته يوه اورتوګونال بنسټ $\{v, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ ته ورپوره کيدی شي. په دې بنسټ کې څېرونه(فنکشن-که غواړی تابع) لاندې بڼه لري:

$$\tilde{A} = T^*AT = \begin{pmatrix} \lambda & x^* \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

د $((n-1) \times (n-1))$-ماتريکس لپاره د اينډکشن نيونې يا فرضيې له مخې يو يونيتار ترانفورميشن $\tilde{Q}$ شتون لری د $\tilde{Q}^*B\tilde{Q} = R_{n-1}$ سره. له دې امله د

$$Q = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

سره لاس ته راځي، چې

$$Q^*AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} T^*AT \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x^* \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x^*\tilde{Q} \\ 0 & B\tilde{Q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & x^*\tilde{Q} \\ 0 & \tilde{Q}^*B\tilde{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & x^*\tilde{Q} \\ 0 & R_{n-1} \end{pmatrix} = R\,.$$

ليكونكي: هيوليګ، هيورنر

اصلي وكتورونه Hauptvektoren

كه λ د كمپلكس $(n \times n)$ - ماتريكس A يو آيګن-ارزښت وي، د الجبری ډېرځلوالی m سره، نو يو وكتور v د

$$(A - \lambda E)^m v = 0\,, \quad v \neq 0$$

سره اصلی وكتور بلل كيږي و آيګن-ارزښت λ ته.

ټول اصلي وكتورونه و آئګن – ارزښت ته د صفر وكتور سره يوځاي د بعد m يو لاندي- يا برخوكتور جوړوي، دا اصليفضا H_λ و آيګن – ارزښت λ ته. دا كرښيزې څېروني يا فنكشن A ته انواريانت دی.

ټوله فضا د اصلي فضاو سيده جمعه يا زيتون دی:

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_\lambda H_\lambda$$

ليكونكي: هيوليګ، هيورنر

ښوونه یې له ډېرو برخپلونو یا-قدمونو رایوځای کیږي.

اول - داچې یوونماتریکس یا واحد ماتریکس د هر ماتریکس سره بدلېدونکی دی یوه وکتور $v \in H_\lambda$ د ځېرې(عکس ؟؟) Av لپاره صدق کوي:

$$(A-\lambda E)^m Av = \left(A^{m+1} + \cdots + \lambda^m E^m A\right) v = A\left(A^m + \cdots + \lambda^m E^m\right) v$$

$$= \qquad A(A-\lambda E)^m v = A \cdot 0 = 0 .$$

په تعقیب $Av \in H_\lambda$ دی.

دویم- د دې لپاره چې بعد وټاکو، ماتریکس A په پورتني مثلثبنه ترانفورمي کوو:

$$A \rightarrow B = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & & * & * & * \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & * & * \\ & 0 & & R & \\ & & & & \end{pmatrix} .$$

دا جې د $v \in H_\lambda$ لپاره

$$0 = Q^{-1}(A-\lambda E)^m Q(Q^{-1}v) = (B-\lambda E)^m (Q^{-1}v) ,$$

دی، اصلي وکتورونه د $v \rightarrow w = Q^{-1}v$ سره سم اصلي وکتور ته ترانفورمي کیږي.

مکر د B له بنې روښانه دی، چې یوون – یا واحدوکتورونه د e_i $i \le m$ لپاره د B په اصلیفضا $Q^{-1}H_\lambda$ کې پراته دي. پسې یو وکتور v د $v_i \neq 0$ سره د یوه $i > m$

لپاره د $(B-\lambda E)^m$ له لارې په 0 نه څېره کیږي یا فنکشن 0نه دی. په تعقیب $\dim H_\lambda = m$ لرو.

دریم – دا چې $\sum_\lambda \dim H_\lambda$ د الجبري د ډېرواره جمعې سره برابر دی، یعني برابر په n دی، ښیا کوي، چې د بنسټ خویونو لپاره د اصلي فضا کرښیز خپلواکوالی وښودل شي یا وښایو. دې ته استعماليږي، چې د $\varrho \neq \lambda$ لپاره لرو:

$$(A-\varrho E)v = 0 \wedge v \in H_\lambda \Rightarrow v = 0.$$

که د مختلو اصلي فضاو څخه یوه د وکتورونو جمعه ورکه شي،

$$v_\lambda + v_\varrho + v_\sigma + \ldots = 0,$$

، نو لاس ته راځي:

$$\left((A-\varrho E)^{m_\varrho}(A-\sigma E)^{m_\sigma}\ldots\right) v_\lambda = 0.$$

دا چې یوګونی ضربیونه H_λ انواریانت دي، په پورته یادونه استعمالوږ دی، او لاس ته تری $v_\lambda = 0$ راځي. په ورته توګه $v_\varrho = v_\sigma = \ldots = 0$ ترې لاس ته راځي او له دې سره صفروکتور فقط په ساده ډول انځوروږ دی.

لیکونکي: هیلیک، هیورنر

د اصلفضا څیوکلیکي بنسټ Zyklische Basen von Haupträumen

د یوه کمپلکس مربع ماتریکس A یو اصلفضا (اصلي فضا) کېدی شي د څیکلیکي برخفضاو په یوه سیده جمعې تجزیه شي:

$$H_\lambda = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell ,$$

دا په دې معنا چې هر برخفضا V_i د لاندې بنېي یو بنسټ لري

$$B^{k_i}v_i, \ldots, Bv_i, v_i, \quad B = A - \lambda E,$$

د $w_i = B^{k_i}v_i$ سره یوه آیګن-وکتور و آیګن-ارزښت λ ته.

ماتریکس A برخفضا V_i اینواریانت پرېږدیاو هلته لاندې ماتریکس-انځورونه لري:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} .$$

لیکونکي:هیولیک،هیورنر

د تعریف سره سم H_λ له وکتورونو v څخه د $B^{k+1}v = 0$ سره جوړه ده، د کوم سره چې k کوچنۍ ده د λ د الجبري ډېرځلوالي m څخه. د بنسټ ټاکلې بڼه له دې امله نږدېوالی لري. د دې لپاره چې وکتورونه

$$w_i \in \ker B ,$$

چې بنسټ کره کوې ، وټاکو ، نو د ایګنوکتورونو $\ker B$ و λ ته برخفضاوې

$$U_j = \ker B \cap \operatorname{Bild} B^j$$

تر څېرنې لاندې نیسو. په روښانه توګه دی

$$\emptyset = U_m \subset U_{m-1} \subset \cdots \subset U_0 = \ker B\,.$$

وكتورونه w_i به اوس ، له تشدېرئ سره په پيل، ايندوكتي، جوړيږي. كه $w_1, \ldots, w_{i-1}$ همدا اوس كره شوي وي ، نو سړی لويوالی دا لوي k_i داسې، د هغه لپاره داسې چې U_{k_i} په كرښيزه هيولې w_j د دغه W_{i-1} كې نه وی پروت، دا په دې معنا چې $v_i \neq 0$ باور لری د $B^{k_i} v_i = w_i \notin W_{i-1}, \quad Bw_i = 0\,.$ سره .

په دې ډول باالاخره د ټول آيګن-فضا $\ker B$ لپاره يو بنسټ $\{w_1, \ldots, w_\ell\}$ جوړيږي او اړونده ځيوكليكي بنسټونه د V_i لپاره.

د فضاو V_i د B سره (همداسې A) د ضرب له لارې روښانه دی. د غوښتل شوې ماتريكس انځورنه له اندې څخه لاس ته ارځي

$$A(B^j v_i) = (\lambda E + B) B^j v_i = \lambda B^j v_i + B^{j+1} v_i\,,$$

، كه د بنسټ وكتورونه ، لكه څنګه چې وركړ شوي دي، د كښته كېدونكي توان سره تنظيم كړي.

د جوړښت د ټيكوالي لپاره بايد برسېره پر دې د وكتورنو $B^j v_i$ بنسټ خويونه هم وښوول شي. دا د دوه پلونو (قدمونو) سره صورت نيسي.

اول - لومړی كرښي. خپلواكوالی ښوول كيږي. دا تخنيكي دلايل كزدی شي د دوه ځيكليكي ځنځيرونو د بېلګې

$$B^2 v_1,\ Bv_1,\ v_1, \quad Bv_2,\ v_2\,,$$

له لارې لیدوړ شي. نیسو چې

$$\alpha_{2,1}B^2v_1 + \alpha_{1,1}Bv_1 + \alpha_{0,1}v_1 + \alpha_{1,2}Bv_2 + \alpha_{0,2}v_2 = 0,$$

دی، نو د B^2 سره د ضرب له لارې لرو

$$\alpha_{0,1}w_1 = 0 \implies \alpha_{0,1} = 0\,,$$

د $B^3v_1 = Bw_1 = 0$ او $B^2v_2 = Bw_2 = 0$ له امله . د B سره د ضرب له لارې اوس لرو

$$\alpha_{1,1}w_1 + \alpha_{0,2}w_2 = 0 \implies \alpha_{1,1} = \alpha_{0,2} = 0$$

د جوړښت سره سم د آیګن-وکتورونو w_i کرښیز خپلواکوالی له امله. بالاخره لرو

$$\alpha_{2,1} = \alpha_{1,2} = 0$$

بیا هم د آیګن-وکتور w_i د کرښیز خپلواکوالی له امله.

په ټولیز حالت په ورته توګه مخ ته ځو. د یوه کرښیز کمبینیشن د تحلیل په هکله بسټوکټور د B د مناسب توان سره ضربوي، تر څو د آیګن-وکتورونو ټول ترمونه له منځه ولاړ شي.

دویم - همدومرهښایو، چې هر وکتور $u \in H_\lambda$ د بنسټوکټورونو سره انځوروړ دی.

پس وي دې $B^ku = 0\,,$ ، د $k \leq m$ سره. د $k = 1$ لپاره یې نه ښایو، ځکه چې وکتورونه w_i د جوړښت له امله د آیګن – فضا $\ker B$ لپاره یو بنسټ جوړوي.

اندوکټیو سړی نیوی شي یا فرض کولی شي، چې په کې وکتورونه انځوروړ دي.

همداسې آیګن-وکتور $B^{k-1}u$ انځوروړ دی:

$$B^{k-1}u = \sum_i \alpha_i w_i.$$

له دې لاس ته راځي، چې

$$B^{k-1}\underbrace{(u - \sum_i \alpha_i B^{k_i-k+1}v_i)}_{u'} = 0\,.$$

د دې په تعقيب u' انځورور دی او له دې سره u هم .

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

د جوردان بڼه Jordan-Form

يو کمپلکس مربعماتريکس کېدی شي د يوه ورته والي ترانفورمېشن له لارې د بلوک دياګونال بڼه باندې تراسفورم شي

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ$$

باندې تراسفورم شي. له دې سره د جوردانبلکونه دا لاندې بڼه لري

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix},$$

د A یوه آیګن – ارزښت λ_i سره

تر ځای بدلون پورې د جوردان بنه یواځنۍ ده.

لیکونکي:هیولیګ،هیورنر

دا چې اصلي فضاوې H_λ د فنکشن A لاندې انواریانت دي، کیدی شي د اصلي وکتورونو بلوکبنې پورې یوه بنسټ په نسبت لاس ته راوړل شي. د ځانګړو ځیوکلیکي بسټونو

$$B^{k_i}v_i,\,\ldots,\,Bv_i,\,v_i,\quad B=A-\lambda_i E\,,$$

استعمال له لارې بلوکونه غوښتونې بنه غوره کوي

لیکونکي: خیولیګ، هیورنر

ماتریکس

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&4\\2&-1&0\\3&2&-1\end{pmatrix}$$

کرکتریستیکي بولینوم

$$p_A(\lambda)=(-1-\lambda)^3+4(4-3(-1-\lambda))=-\lambda^3-3\lambda^2+9\lambda+27$$

لري د ډبل صفرځایونو $\lambda=-3$ او ساده صفځایونو $\varrho=3$ سره.

دا چې د ماتریکس

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

رانګ 2 دی، و ته فقط یو آيګن-وکتور شتون لري. د دې په تعقيب A د جوردان بنه لري.

$$Q^{-1}AQ = J = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, Q = (w, v, \tilde{w}) .$$

د کربنيز و مساواتشيستمونو د حل له لارې

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

او

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سرى لاندې آيګن-وکتورونه لاس ته راوړي:

$$w = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

اصلي ډياګونال پوره کوي

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

دا په دې معنا چې د بېلګې $v = (-3, 4, 1)^t$ په توګه . له دې سره دی

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

څه چې د ازمايښت له لارې $A = QJQ^{-1}$ تصديق کيږي.

ليکونکي: خيوليګ، هيورنر

د يوه کمپلکس (2×2)-ماتريکس A لپاره 3 څرنګواليز (د کواليټي له مخې) مختلف جوردان-نورمالبڼې شتون لري:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}, (\lambda \neq \varrho).$$

په لومړي حالت کې λ يو ډبل آيګن – ارزښت دی د فقط يوه (تر سکالار ضرب پورې) آيګن-وکتور w سره، دا په ی معا چې

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 1.$$

يو په دې پورې اړونده اصلي وکتور v او له دې سره دې ترانسفورميشن ماتريکس $Q = (w, v)$ د

$$w = (A - \lambda E)v$$

د حل له لارې لاس ته راوړي ، همداسې د $\ker(A - \lambda E)^2$ ټاکلو له لارې.

د دې لپاره يو څرګنده بېلګه

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$$

کرکتريستيکی پولينوم

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

دی، د ډبل صفرځای $\lambda = 2$ سره. د

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

حل له راې سرې $w = (2,3)^t$ لاس ته راوړي او له دې سره

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

يو اړونده اصلي وکتور $v = (1,2)^t$. دا د ازمايښت سره تصديق کيږي:

$$A = QJQ^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

سره تصديق کيږي. ليکونکي: خيوليګ، کرايخ

د یوه کملکس (3×3) - ماتریکس A لپاره لاندې کولتاتیو مختلف جوردان –نورمالبڼې $J = Q^{-1}AQ$ شتون لری:

اول – جوړه دوله مختلف آیګن-ارزښتونه λ, ϱ, σ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \varrho & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

دویم – یو دبل آیګن – ازښت λ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix}.$$

په دویم حالت کې

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 2$$

او $Q = (w, v, \tilde{w})$ دي له آیګن وکتورونو w او $\tilde{w}$ یوه اصلي وکتور v سره، هغه چې د مساوات سیستم د حل له لارې

$$(A - \lambda E)w = 0, \quad w = (A - \lambda E)v, \quad (A - \varrho E)\tilde{w} = 0$$

د حل له لارې ټاکل کېدی شي.

دریم – یو دریواره آیګن –ارزښت:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

په دويم حالت کې

$$\mathrm{Rang}(A-\lambda E)=1$$

دی او سړی يو اصلي وکتور v د

$$(A-\lambda E)^2 v = 0\,, \quad (A-\lambda E)v \neq 0.$$

حل له لارې لاس ته راوړي.

اړونده آيګن – وکتور $w=(A-\lambda E)v$ دی، او يو غزېدلی کرښيز خپلواک آيګن – وکتور $\tilde{w}$ دا لاندې پوره کوي:

$$(A-\lambda E)\tilde{w} = 0\,, \quad w \perp \tilde{w}\,.$$

بالاخره $Q=(w,v,\tilde{w})$ دی.

په دريم حالت کې

$$\mathrm{Rang}(A-\lambda E)=2$$

دی او دی $Q=(w,v,u)$ له

$$(A-\lambda E)w = 0\,, \quad w=(A-\lambda E)v\,, \quad v=(A-\lambda E)u\,.$$

سره. ليکونکی: ويپر

د (4x4) -ماتیکسونو جوردان-بنې

Jordan-Formen von (4x4)-Matrizen

لاندې توابع ټول 14 ممکن (4×4) - ماتریکسونو د جوردان – بنې ځای نیوني جوړښتونه بنايي .

- څلور مختلف آيګن – ارزښتونه $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

- يو دوه ځله آيګن – ازښت λ_1 او دوه دوه ځله آيګن -ارزښتونه λ_2, λ_3

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

- يو درې واره آيګن – ارزښت λ_1 او يو يوواره آيګن – ارزښت λ_2 .

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- دوه دوه واره آيګن – ارزښت λ_1, λ_2

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- يو څلورواره آيګن – ارزښت λ_1.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

ليکونکي: خپولیک، هیورنر

د ماتريکسونو توانونه Potenzen vonMatrixen

د يو کمپلکس ماتريکس توانونه A^n، $n = 0, 1, \ldots$ تيک هلته صفر ماتريکس پولي ته تلونکي دي، که د ټولوآيګن-ارزښتونو λ مطلق ارزښت له 1 کوچنی دی.

پرلپسي (A^n) محدوده پاتې کيږي، که $|\lambda| \leq 1$ او د آيګن – ارزښت لپاره د ارزښت 1 سره

ليکونکي: خپولیک، هیورنر

د A د جوردان – بڼې $J = Q^{-1}AQ$ سره کېدی شي د ماتریکس – توانونه په لاندې بڼه و لیکل شي:

$$A^n = (QJQ^{-1})(QJQ^{-1})\cdots(QJQ^{-1}) = QJ^nQ^{-1}$$

دلته یواځې دې ته اړتیا ده چې د J پولې ته تلنه(لیمیټ) تر څېړنې لاندې و نیل شي. د J د بلوکفورم (- بڼې) کېدی شي هر بلوک J_i ځانله تر څېړنې ونیل شي. د دې لپاره لیکو

$$J_i = (\lambda_i E) + D\,,$$

، د کوم سره چې D ګاونډی دیاګونال د یو سره خوندي لري. لکه چې په ساده توګه ښوول کیږي، د بعد m د یوه بلوک لپاره $D^m = 0$ دی. پسې صدق کوي

$$(J_i)^n = \lambda_i^n E + \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1}D + \cdots + \binom{n}{m-1}\lambda_i^{n-m+1}D^{m-1}\,.$$

له دې کېمټوالي څخه کېدی شي د پرلبسپپولې ته تلنه(لیمیټ کونورګنت) و لوستل شي.

د $|\lambda_i| < 1$ لپاره دی

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{j}\lambda_i^{n-j} = 0\,,$$

دی، ځکه چې $\binom{n}{j}$ فقط پولینومیال یعنې پولینومي لوییږي، د دې معکوس λ_i^{n-j} اکپوننشک ټیټیږي.

که $|\lambda_i| = 1$ وي پرلپسي محدوده يا راپنده پاتيږي، که $m = 1$ وي، دا په دې معنا، چې ګاوندی دياګونال د يوه سره شتون نه لري.

ليکونکي: خيوليک، هيورنر

په زيګولار ارزښت ټوټه کونه Singulärwert-Zerlegung

هر يوه کمپلکس $(m \times n)$ ـماتريکس A ته يونيتار ماتريکسونه U او V شتون لري د

$$U^*AV = S = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}.$$

سره.

زينګولار ارزښتونه

$$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k > s_{k+1} = \cdots = 0$$

د A^*A د آئګن – ارزښتونو ريښې دي او k د A رانګ دی.

د U متي u_j او د V متي v_j د AA^* همداسې A^*A د آيګن-وکتورونو اورتوګونال بنسټونه جوړوي او لاندې صدق کوي:

$$Av_j = s_j u_j,$$

د $1 \leq j \leq k$ لپاره.

د سینګولارارزښت تیټه کوني له لارې کېدی شي کرښیزه ځېرونه یا فنکشن

$$x \mapsto y = Ax$$

په لاندې بڼه انځور شي:

$$y = \sum_{i=1}^{k} s_i (v_i^* x) u_i$$

له دې لاس ته راځي ، چې

$$\mathrm{Kern}\, A = \mathrm{span}\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}, \quad \mathrm{Bild}\, A = \mathrm{span}\{u_1, \ldots, u_k\}\,.$$

ذاالاخره $\|A\|_2 = s_1$ او $\|A\|_F^2 = \sum_{j,k} |a_{j,k}|^2 = s_1^2 + \cdots + s_k^2$ دي.

لیکونکي: اېپ.هیولیګ

د هرمېټیکي ماتریکس A^*A د دیاګونالي کوني له لارې لاس ته

$$V^*A^*AV = \mathrm{diag}(s_1^2, \ldots, s_k^2, 0, \ldots, 0) = S^{\mathrm{t}} S\,,$$

راځي، له هغې سره چې سرې نیولی شي، چې آیګن – ارزښتونه د خپلې لویې پسې منظم دي. دا چې A^*A مثبت دیفینیت دي، کېدی شي چې فقط نامنفي آیګن-ارزښتونه د مربع په ځېر ولیکي او په دې توګه د $m \times n$ دیاګونالماتریکس S تعریف کړي.

د پورته مساوات څخه لرو ، چې د AV متې اورتوګونال دي او نورم s_i لري:

$$AV = \begin{pmatrix} s_1 u_1 & \cdots & s_k u_k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = US$$

د یوه یونیتارماتریکس U سره.

وروسته له دې چې غوښتونې انځورونه

$$A = USV^*$$

منځ ته ارغله، کېدی شئ پسې راتلونکي وینا ساده پسې وازمائل شي.

دا چې یونیتار ترانسفورمیشن د یوه ماتریکس رانګ نه تغیروي، صدق کوي

$$\text{Rang } A = \text{Rang } S = k \,.$$

پسې لرو

$$AA^* u_j = U(SS^t)U^* u_j = u_j (s_j)^2$$

او

$$A^* A v_j = V(S^t S)V^* v_j = v_j (s_j)^2 \,.$$

باالاخره Av_j د US د j ـمې متې سره برابر دی، یعني د $u_j s_j$ سره برابر.

لیکونکي: اپپ.هیولیګ

فاسد معکوس Pseudo-Inverse

یو کمپلکس $(m \times n)$ ـماتریکس A د سینګولار-ارزښت-ټوټه کونې USV^* سره کیدی شي د اندولوني پرابلم(مسئله $|Ax - b| \to \min$ د مینیمال نورم سره په بڼه

$$x = A^+ b, \quad A^+ = VS^+U^*,$$

وليکل شي، د کوم سره چې A^+ د A فاسد-معکوس بلل کيږي، او

$$S^+ = \mathrm{diag}(1/s_1, \ldots, 1/s_k, 0, \ldots, 0), \quad k = \mathrm{Rang}\, A\,,$$

د $(n \times m)$ - دياګونال ماتريکس د مثبت سينګولار ارزښت دی

د په څټ ارزښتونو سره.

که $\{u_1, \ldots, u_m\}$ او $\{v_1, \ldots, v_n\}$ د U همداسې V ، د مټو اورتوګونال بنسټونه وي، نو کېدی شي کرښيز فنکشن $b \mapsto x = A^+b$ په ضريبونو بڼه

$$x = \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{s_\ell}\,(u_\ell^* b) v_\ell$$

انځور شي. له دې څخه په ځانګړي ډول لاس ته راځي، چې

$$\mathrm{Kern}\, A^+ = \mathrm{span}\{u_{k+1}, \ldots, u_m\}, \quad \mathrm{Bild}\, A^+ = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$$

او $\|A^+\|_2 = 1/s_k$.

ليکونکي: اپپ.هيوليګ

د د $2-$ نورم انواريانت له امله د يونيتار ترانفورميشن له لارې کېدی شي $Ax - b$ له کيڼ د U^* سره ضرب کړي. د

$$c = U^*b, \quad y = V^*x$$

سره ترې ورته د مينيمال کولو پرابلم لاس ته راځي

$$|Sy - c| = \left| \begin{pmatrix} s_1 y_1 - c_1 \\ \vdots \\ s_k y_k - c_k \\ -c_{k+1} \\ \vdots \\ -c_m \end{pmatrix} \right| \to \min .$$

مينيموم سرِی د لومړيو k مساواواتو د حل له لارې لاس ته راوړي:

$$y_i = c_i / s_i ,\ i = 1 : k .$$

د يونيتار مياتريکس $(|x| = |y|)$ V نورم ته ريښتينوالي له امله د مينيمال نورم د حل لپاره دی:

$$y_{k+1} = \cdots = y_n = 0 .$$

په ټوليزه توګه ترې لاس ته راځي

$$y = S^+ c, \quad s^+_{i,j} = \begin{cases} 1/s_i & \text{für } i = j \le k \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

ليکونکي: اپپ.هيوليګ

د

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

لپاره دې د انډولوالي پرابلم حل شي

د زیګولار- ارزښت ټوټه کونې (تجزیه کونې) شمېرنې لپاره لومړی د

$$A^{t}A=\begin{pmatrix} 80 & -16 & 56 \\ -16 & 32 & -40 \\ 56 & -40 & 68 \end{pmatrix}$$

آیګن-ارزښتونه او آیګن-وکتورونه ټاکل کیږي او ترې لاس ته راځي

$$s_1^2=144,\ s_2^2=36,\ s_3^2=0, \quad V=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

له دې لرو

$$S=\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AV=\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}=US.$$

د U دوه لومړنی متې د AV د اړنده متو سره د ویش له لارې لاس ته راځي او د سیګولار ارزښتونو (له دې شره باید ئوون- یا واحد وکتورونه منح ته شي) له لارې، پاتې متې (نه یواځنی ټاکلې) و اورتونورمال بنسټ ته د پوره کونې له لارې لاس ته راځي:

$$U=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

له دې سره فاسد- معکوسيت

$$A^+ = V \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^t = \frac{1}{72} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 & 6 \\ -5 & 3 & -5 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

دی او

$$x = A^+ b = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د مينيمال نورم حل.

ليکونکي: اپپ.هيوليګ

د توپوګرافيکي کچونداتنونو تيکاوی يا اصلاح

Korrektur topografischer Meßdaten

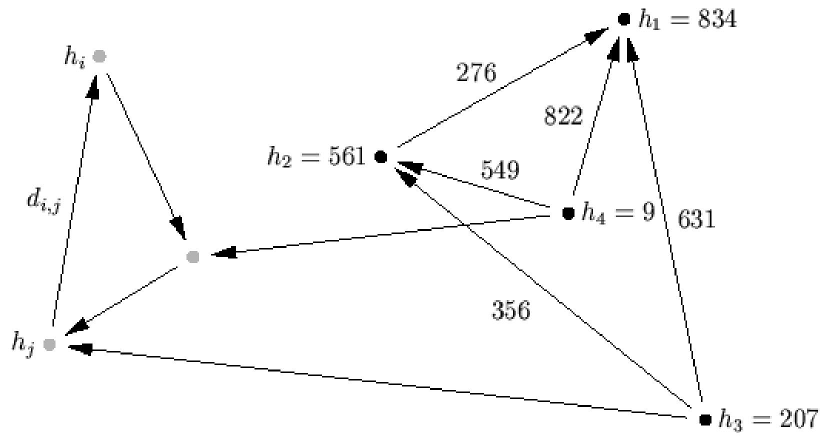
د توپګرافي جګوال h_i داتنونه يا اعداد چي کچوني له لارې لاس ته راړني ته د جګوالو کمښتونه $d_{i,j}$ کچ کيږي. د کچوني ناتيکاوي په بنسټ د قانون له مخي صدق کوي $d_{i,j} \neq h_i - h_j$

مناسب د جګوالي تيکاوي x_i کېدی شي د انډولوني پرابلم

$$\sum_{(i,j)} \Big(d_{i,j} - \big((h_i + x_i) - (h_j + x_j)\big)\Big)^2 \longrightarrow \min \ .$$

له لارې حل شي.

د تلنلارې د ښوولو لپاره د کمو داتن سره يو مودل-پرابلم حل کيږي.



د جګوالي او کمښت ارزښتونو

$$h = (834, 561, 207, 9)^t, \quad d = (276, 631, 822, 356, 549)^t$$

لپاره، د $d = (d_{1,2}, d_{1,3}, d_{1,4}, d_{2,3}, d_{2,4})^t$ سره ، دا لاندې له ټاکلو اخوا (پورته، زيات) سيستم لاس ته راځي

F

$$A(h+x) = d, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

د مينيمال نورم غ،ښتونی حل دی:

$$x = A^+(d - Ah) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د مینیمال – نورم – حل د څېړل شوي استعمال لپاره مخه ور دی، ځکه چې باید د ډېر امکان سره کوچنی ټیکاوی وټاکل شي.

لیکونکی : ویپر

د مور-پینروز-شرطونه Moore-Penrose-Bedingungen

فاسد-معکوس به د لاندې کتمتوالي له لارې یواځنی کرکتریستیک شي:

- $AA^+A = A$
- $A^+AA^+ = A^+$
- $(AA^+)^* = AA^+$
- $(A^+A)^* = A^+A$
- لیکونکي: اپپ.هیولیک

ساده بڼوول کیدی شي، چې د

$$A^+ = VS^+U^*, \quad A = USV^*$$

له لارې تعریف شوی فاسد-معکوس ورکړ شوي شرایط پوره کوي.

د بیلګې په توګه لومړی کتمتوالی د لاندې څخه لاس ته ارځي

$$(USV^*)(VS^+U^*)(USV^*) = U[SS^+S]V^*,$$

ځکه چې په کونجیزو نوکانو یا قوسونو کې د تولیز شوو دیاګونال ماتریکسونو (دوه کونجتړو – یا قطبي ماتریکسونو) ضرب به د دیاګونال توکو د ضربوني له لارې جوړېږ شي او لرو:

$$s^+_{i,i} = 1/s_{i,i}, \quad i \le \operatorname{Rang} A\,.$$

نور ټول کټمټوالي هم دسېده پسي- شمېرني له لاري لاس ته راځي.

د دې ښوونه چې وښايو A^+ يواځنی کرکتريستيک شوی دی د ورکړ شوو شرايطو له لارې، نور هم خوراستونځمن دی، له دې امله يې دلته له څېړنې تېرېږو.

ليکونکي: اېپ.هيوليک

اورتوګونال او ځانګړي اورتوګونال ګروپونه

Orthogonale und spezielle orthogonale Gruppe

د ټولو اورتوګونالو $(n \times n)$ - ماتريکسونو Q ډېرۍ(سټ) د اورتوګونال ګروپ $O(n)$ سره ښايو يا په نخښنه کوو يا بول.

د $Q \in O(n)$ لپاره صدق کوي

$$Q^{-1} = Q^{\mathrm{t}}\,, \quad |\det Q| = 1$$

او د يوه کواورډينات ترانسفورميشن

$$x \to x' = Qx$$

سره اوږدوالی اوسکلار ضرب ساتلی پاتې کيږي.

د ټول اورتوګونال $(n \times n)$ - ماتريکسونو Q ډېری د $\det Q = 1$ سره د څرخونګروپ يا ځانګړی اورتوګونال ګروپ

$$SO(n) \subset O(n)$$

بلل کيږي.

هندارونه Spiegelung

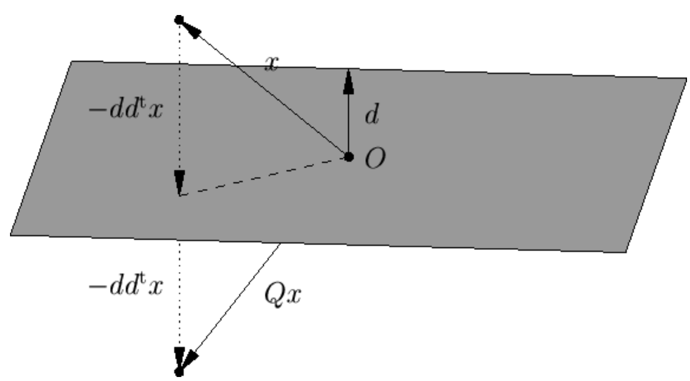
په $\mathbb{R}^n$ کي هندارونه (په هنداره انعکاسونه) و يوه يوونوکتور(واحد-) $d \neq 0$ ته اورتوګونال هايپرسطحه(Hyperebene)

$$H: \; d^t x = 0$$

باندې هندارونه د سيوم تري اورتوګونال ماتريکس

$$Q = E - 2dd^t$$

له لارې د يوونماتريکس (واحد-) E سره په نښه کيږي



پکي يا ميلي په معنا ده

د Q سيومتري روښانه ده. له دې سره لرو :

$$QQ^t = Q^2 = (E - 2dd^t)^2 = E^2 - 4dd^t + 4dd^t dd^t = E\,,$$

دا په دې معنا چې Q اورتوګونال ده.

د هنداروني خویونو ښوولز لپاره لومړی په پامکې نیسو، چې وکتور

$$x - Qx = x - x + 2dd^t x = 2(d^t x)d$$

و d ته غبرگ دی، او منځټکی د x او Qx ترمنځ په هایپرهواره کې پروت دی:

$$d^t(x + Qx) = d^t x + d^t x - 2d^t dd^t x = 0\,.$$

له دې سره Qx په هایپرهواره د x هندارونه ده په سرچینه کې، هغه چې د d سره اورتوگونا ده.

لیکونکي: اپپ.هیولیگ

څرخون Drehung

آورتوگونال $(n \times n)$ - مآتریکس

$$\begin{array}{r l}
 & \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & c & & -s & \\ & & & \ddots & & \\ & & s & & c & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r c}
 & \\
\text{Zeile } i \;\longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & c & & -s & \\ & & \ddots & & \\ & s & & c & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \\
\text{Zeile } j \;\longrightarrow &
\end{array}$$

په پورته کې Zeile د لیکي یا کیلې په معنا ده

د $c = \cos\varphi$ او $s = \sin\varphi$ سره یوه څرخون په φ په $\mathbb{R}^n$ کې پرته د $x_i x_j$ - سطحه کې په گوته کوي(تحلیلوي). لیکونکي: اپپ.هیولیگ

ساده شميرنه او د

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

په پام کې نيولو سره تصديقيږي، چې ځرخونماتريکس R اورتوګونال دی:

$$RR^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & c^2+s^2 & & -sc+sc & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & -sc+sc & & c^2+s^2 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} = E\,.$$

- ليکونکي: اپپ.هيوليک

ځرخونمحور او ځرخونکونج Drehachse und Drehwinkel

هر په $\mathbb{R}^3$ کې ځرخون Q يو ځرخون محور لري، دا پهدې معنا چې يو يوونوکتور u اينواريانت پريږدي،او په يوه کونج φ يو ځرخون ښايي په هغه هواره کې چې u ته(باندې) اورتوګونال ده.

نسبت و يوه اورتوګونال ولاړسيستم u, v, w ته Q لاندې د ماتريکس آنځورونه لري:

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\,.$$

او د ځرخونکونج لپاره په ځانګړې توګه صدق کوي

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Spur}\, Q - 1\right) .$$

- ليکونکي: هيوليګ، ربل

د يوه څرخونماتريکس Q لپاره لرو:

$$Q^{-1} = Q^{t}, \quad |\det Q| = 1 .$$

دا چې د يوه اورتوګونالماتريکس آيګن –ارزښت λ_i مطلق ارزښت 1 لري او $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det Q = 1$ دی، لرو، چې لږ تر لږه يو آيګن – ارزښت 1 دی. د مناسب په ګڼه کزلز يا نمرهکولو سره يا

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \quad \lambda_1\lambda_2 = 1$$

دی او يا

$$\lambda_i \in \{-1, 1\} .$$

دا نورمي شوی ايګن- وکتور u د آيګن – ارزښت 1 څرخونمحور ټټکي.

د يوه اورتوګونالولاړسيستم u, v, w لپاره باور لري:

$$\begin{aligned} Qu &= u \\ Qv &= \alpha v + \beta w \\ Qw &= \gamma v + \delta w . \end{aligned}$$

دا چې Qv, Qw کوم د u - کومپوننت نه لري، له لاندې له کونجساتونکو اورتوګونال مارتيکسونو څخه لاس ته راځي:

$$x \perp u \Rightarrow Qx \perp Qu = u\,.$$

که پورته مساوات د ماتريکس بنه باندې

$$Q(\underbrace{u,v,w}_{P}) = (u,v,w)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{pmatrix}}_{\tilde{Q}},$$

باندې وليکل شي، له $\tilde{Q} = P^{-1}QP$ لاس ته ارځي، چې

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

يو څرخون ماتريکس دی. په همدې ډول د شپور د انواريانت له امله لاس ته راځي:

$$\mathrm{Spur}\,Q = \mathrm{Spur}\,\tilde{Q} = 1 + 2\cos\varphi$$

- ليکونکي: هيوليګ، ربل

ماتريکس

$$Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

يو دياګونال ماتريکس دی، څکه چې لرو:

$$Q^{\mathrm{t}}Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = E \Rightarrow Q^{\mathrm{t}} = Q^*$$

او

$$\det Q = \det \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = +1\,.$$

څرخونمحور د آئګن- وکتور u په حيث ټاکل کيږي و آيګن – ارزښت $\lambda = 1$ ته:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}}_{Q-E}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

څرخونکونج φ له

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}\, Q - 1) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

څخه لاس ته راځي، د $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ په حيث .

د φ مخنخښه د څرخونلور u د لوريزوالي په واک کې ده او کېدی شي د يوه ولاړسيستم(کواوردينات سيستم) $\{u, v, w\}$ وټاکپ شي:

$$w^{\mathrm{t}}Qv = w^{\mathrm{t}}(\cos\varphi v + \sin\varphi w) = \sin\varphi\,.$$

د

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

سره د راوړل شوي بېلګې لپاره لرو:

$$\sin\varphi = (-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}) \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 1$$

نو لرو: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ليکونی: ويپر

د يو خرخون په ضرب‌پونو ټوټه کونه Faktorisierung einer Drehung

يو خرخون Q په $\mathbb{R}^3$ کې په کواورد يناتمخور د د کواوردخرخونونو د ضرب په څېر کېدی انځور شي:

$$Q = D_z D_y D_x\,.$$

- ليکونکي: هيوليک، ربل

خرخون D کېدی شي و ټاکل شي، دا سې چې يو په بل پسې sukzessive د Q توکي q_{21}, q_{31}, q_{32} له منځه يووړل شي:

$$D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

$$D_y^{-1}D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}$$

$$D_x^{-1}D_y^{-1}D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & 1 & \star \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix} = R\,.$$

له دې سره داسې کار اخستل شوی یا مخ ته تللي یو، چې یو په خوښه آیګن-وکتور $(v_1, v_2)^t$

په $(1,0)^t$ باندې د یوې سطحې د څرخون D له لارې ځان څېره کړی شي (یعنې د تابع په څېر ولیکل شي). دا چې $\det R = 1$ دی $r_{33} = 1$ لرو او د مټو د نورمي کولو له امله باید R یوونماتریکس (واحدماتریمس) وي. له دې سره غوښتونې انځورونه لاس ته راځي.

- لیکونکي: هیولیګ، ربل

د دې لپاره چې د ماتریکس

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{4}}{8} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \end{pmatrix}$$

په ضریبونو ټوټه کول لاس ته راوړو، نو لومړی توکی $q_{2,1}$ له منځه وړو د $\frac{\pi}{2}$ په کچه ځرخون د z – محور باندې:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \end{pmatrix}.$$

داسې پای کوو چې د y -محور باندې د $\frac{\pi}{4}$ په کچه ځرخوو:

:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} D_z^* Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

لاس ته راغلی ماتریکس یوو ځرخون D_x دی د x -محور باندې. په ټولیزه توګه لاندې په ضریبونو ټوټه کونه لاس ته راوړو:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

D_x D_y D_z

- ليکونکي: هيوليک، کرايخ

ځرخونماتريکس Drehmatrix

په $\mathbb{R}^3$ کې يو ځرخون د نورمي شوي ځرخون محورلور u او ځرخونکونج φ سره ، داسې لوريزه لکه ښی پيچي ميخ ، د يو وکتور x فنکشن جوړوي

$$Qx = \cos\varphi\, x + (1-\cos\varphi)\, u u^{t} x + \sin\varphi\, u \times x$$

، چيرته چې $v \times x$ د u او x صليب ضرب(وکتوري ضرب، چې x سره په نخښه کيږي) په نخښه کوي. اړونده ځرخونماتريکس دی:

$$Q: \quad q_{ik} = \cos\varphi\,\delta_{ik} + (1-\cos\varphi)\,u_i u_k + \sin\varphi \sum_j \varepsilon_{ijk} u_j .$$

د کرونيکرسومبول δ_{ik} او ε ـتنزور ε_{ijk} سره.

- ليکونکي: هيوليک، ربل

دا بسيا کوي پسې وښايو، چې $Qu = u$ او يو و u ته اورتوګونال وکتور v په يوه کونج φ د u په محور باندې وځرخي. لومړی غوښتنه ترلږ کتل کيږي. د v ځيرې يا تابع ارزښت په ځير لاس ته راځي

$$Qv = \cos\varphi\, v + \sin\varphi\, u \times v\,,$$

څه چې په φ د څرخون سره د v او $u \times v$ څخه غزېدلي سطحه په ګوته کوي.

- ليکونکي: هيوليک، ربل

د تولیز فرمول سره سم د $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\ 1\ 1)^{t}$ په محرړر په $\varphi = \frac{\pi}{3}$ يو د څرخون ماتريکس Q له 3ترمونو څخه په لاندې ډول يوځاي کيږي:

په تولیزه توګه لاس ته راوړ

$$\cos\varphi\ \delta_{ik}\ : \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(1-\cos\varphi)u_i u_k\ : \quad \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ليکونکي: هيوليک، کرايخ

$$\sin\varphi \sum_j \varepsilon_{ijk} u_j\ : \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

مربعيزه فورم(څلورى يې بنه)

Quadratische Form

د يوه حقيقي سيموتريک ماتريکس A لپاره دا لاندې

$$\alpha(x) = x^{t}Ax$$

مربعيزه فورم نوموو.

د A د آيګن – ارزښت د مخنخښي بدلون له مخې لاندې درې تيوپه(ډولونه) توپيروو:

- الیپتیکي (بیضوي ډوله) بڼه: ټول آیګن – ارزښتونه همغه مخنخښه لري.
- پارابولیک : لږ تر لږه یو آیګن – ارزښت صفر دی او نور آیګن ارزښتونه همه یابرابرې وخنخښې لري.
- های پارابولیکي : د مختلفو مخنخښو سره آیګن – ارزښتونه شتون لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د A سیومتري اړیین نه ده چې مخ له مخه ونیول شي(فرض شي)، د ټولیز ماتریکس لپاره کېدی شي مربع بڼه په لاندې ډول ولیکل شي:

$$x^{\mathrm{t}}Ax=\sum_{j,k}x_ja_{j,k}x_k=\sum_j a_{j,j}x_j^2+\sum_{j<k}(a_{j,k}+a_{k,j})x_jx_k$$

پس کېدی شي هر ځل دوه ترمونه سره یوځای کړو او مربع بڼه سیومتري کړو یا په سیمتري واړوو:

$$x^{\mathrm{t}}Ax=\frac{1}{2}x^{\mathrm{t}}(A+A^{\mathrm{t}})x\,.$$

مربع بڼې د بېلګې په توګه د یوه سکالارتابع f د تیلور- ودې د لومړي ترم په څېر رامنځ ته کیږي:

$$f(x)=f(0)+\operatorname{grad}f(0)^{\mathrm{t}}\,x+\frac{1}{2}x^{\mathrm{t}}(\mathrm{H}\,f(0))\,x\,.$$

په دې حالت کې $\mathrm{H}\,f$ د دویم ټوټه (partiellen -) مشتق د هسې-ماتریکس دی، د بدلونوالي په بنسټ سیومتري دی. لیکونکي: اپپ، هیولیګ

سیومتریک ماتریکس

$$A=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1-\lambda\\ 1-\lambda & 1+\lambda\end{pmatrix}$$

آيګن – ارزښتونه 2 او 2λ لري.

مربعي بڼه

$$\alpha(x) = x^t Ax$$

د $\lambda > 0$ لپاره بيضوي(هګۍ ډوله) ده، د $\lambda = 0$ لپاره پارابوليک او د $\lambda < 0$ لپاره هايپارابوليک دی.

- ليکونکي: اپپ، هيوليګ

کوادريک Quadrik

تکي

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) + 2\beta(x) + \gamma = 0\}$$

کوادريک بلل کيږي، چېرته چې α يو مربعيزه بڼه، β يوه کرښوزه بڼه او γ يوه ثابته ده.

د Q د ماتريکس ليکدود په ډول ليکل په لاندې ډول ليکل کيږي

$$Q: \quad x^t Ax + 2b^t x + c = 0$$

د $\alpha(x) = x^t Ax$ او $\beta(x) = b^t x$ سره.

د Q انځورونه يواځنی نه ده. د بېلګې په توګه کېدی شي د تعريف مساوات د يوه په خوښه ثابتې سره ضرب شي.

- ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د کوادريکونو شډله تړنه ونه Grobeinteilung der Quadriken

د يوه کوادريک د مساوات څخه په پيل

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

ليکو

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & b^t \\ \hline b & A \end{array} \right) .$$

د $\tilde{x}^t = (1, x_1, \ldots, x_n)$ سره کېدی شي Q هم په لاندې هوموجين بڼه وليکل شي:

$$Q: \quad \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0$$

لاندې ډولونه يا تيوپونه توپيروو:

- مخروطي کوادريک $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A$
- منځتکي کوادريک $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 1$
- پارابوليکي کوادريک $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 2$
- ليکونکي: اېپ، هيوليګ

کوادريک

يا دونه(ژباړی): په سطحه کې يوه کره(کرښه)، په درې بعديزه (درېپراخيدونې) فضا کې يوه سطحه ده، د ډېرو اووښتونو يا متحولو له لارې تشريح يا ښوول کيدی شي.پای

$$Q:\quad x_1^2+\lambda x_2^2+2x_2+\lambda=0$$

دې د $\lambda\in\mathbb{R}$ سره ورکړ شوي وي، همداسې د ماتريکس لکيندود

$$Q:\quad x^tAx+2b^tx+c=0$$

د

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&\lambda\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad c=\lambda,\quad \tilde{A}=\begin{pmatrix}\lambda&0&1\\0&1&0\\1&0&\lambda\end{pmatrix}.$$

،

سره ورکړ شوي وي.

د $\lambda=0$ لپاره $\operatorname{Rang}A=1$ دی، پرته له دې $\operatorname{Rang}A=2$ دی. د $\lambda=\pm1$ لپاره $\operatorname{Rang}\tilde{A}=2$ دی، پرته له دې $\operatorname{Rang}\tilde{A}=3$ دی. له دی سره Q د $\lambda=0$ لپاره يو پارابول ، د $\lambda=\pm1$ لپاره مخروطي ډوله کوادريک او د نورو ټول ارزښتونو لپاره يو منځټکي کوادريک دی.

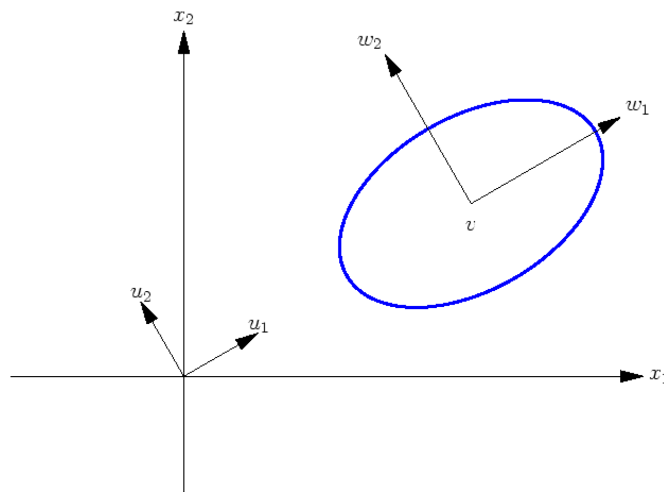
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

اصلي- محور –ترانفورميشن Hauptachsentransformation

د څرخون او راکښنی له لارې په $\mathbb{R}^n$ کې کېدی شي يو کوادريک په نورمال بڼه ترانسفورمي شي:

$$x^{\mathrm{t}}Ax + 2b^{\mathrm{t}}x + c = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i^2 + 2\beta w_{m+1} + \gamma\,, \quad x = Uw + v\,,$$

چيرته چي $m = \mathrm{Rang}\, A$ او $\beta\gamma = 0$ صدق کوي.



له دې سره د ځرخون ماتريکس U متې د A آيګن –ارزښتونو λ_i ته آيګن-وکتورونه u_i خوندي لري، چې د هغې لور اصلي محور بلل کيږي. د راکښني وکتور (راکښونوکتور) v د کوادريک منځټکی دی. ليکونکي: اپپ، هيوليګ

سيومتري مارتيکس A ته له آيګن –وکتورونو u_i څخه د $\det(u_1, \ldots, u_n) = 1$ سره يو اروتوګونال بنسټ شتون لري، د کومو سره چې لومړی و آيګن – ارزښتونو $\lambda_i \neq 0$ ته آيګن – وکتورونه نئول کيږي. د لومړي ځای بدلون $x = Uy = (u_1, \ldots, u_n)y$ پسې له دې سره لاندې دياګونال بڼه لاس ته راځي

$$y^{\mathrm{t}}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0)y + 2(\underbrace{U^{\mathrm{t}}b}_{\tilde{b}})^{\mathrm{t}}y + c\,.$$

له صفر څخه مختلف آيګن-ارزښتونو $\lambda_i \neq 0$ لپاره د نورو ورپسې ځای بدلون له لارې

$$y_i = z_i - \tilde{b}_i/\lambda_i$$

کيدی شيکرښيز ترمونه له ځايه يوړل شي (مربعي پوره کونه). ثابتې د

$$c \to \gamma = c - \sum_{i=1}^{m} \tilde{b}_i^2/\lambda_i\,.$$

سره سم تغير خوري،نو اوس له دې سره اوس دا بڼه لرو

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=m+1}^{n} 2\tilde{b}_i z_i + \gamma\,.$$

که اوس يو $\tilde{b}_i \neq 0$ د $i \geq m+1$ سره شتون ولري، نو د يو ه بل ځرخون پسې د

$$z'_i = z_i\,, \quad i \leq m$$

$$z'_{m+1} = (1/\beta) \sum_{m+1}^{n} \tilde{b}_i z_i\,, \quad \beta = \pm|\tilde{b}|$$

او په اړونده اورتوګونال د $z'_{m+2}, \ldots, z'_n$ سره تکمي شوی

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (z'_i)^2 + 2\beta z'_{m+1} + \gamma\,.$$

لاس ته راځي.

له دې سره د β سره مخ نخښه ډاسې ټاکل کيږي، چې د β سره ويش وروسته لږ تر لمه دومره مثبت لکه منفي ترمونه λ_i/β رامنځ ته شي.

اخرنی راکښنه

$$
\begin{aligned}
w_{m+1} &= z'_{m+1} + \gamma/(2\beta) \\
w_i &= z'_i\,, \quad i \neq m+1
\end{aligned}
$$

ثابته له منځه وړي او باالاخرخ راکوي:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i^2 + 2\beta w_{m+1}\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

کوادریکونه

یا دونه(ژباړی): په سطحه کې یوه کره(کرښه)، په درې بعدیزه (درېپراخیدونې) فضا کې یوه سطحه ده، د ډېرو اووښتونو یا متحولو له لارې تشریح یا ښوول کیدی شي.پای

$$Q: \quad 8x_1^2 + 17x_2^2 + 20x_3^2 + 20x_1x_2 + 8x_1x_3 + 28x_2x_3 - 48x_1 - 114x_2 - 78x_3 + 207 = 0$$

$$Q: \quad 8x_1^2 + 17x_2^2 + 20x_3^2 + 20x_1x_2 + 8x_1x_3 + 28x_2x_3 - 48x_1 - 114x_2 - 78x_3 + 207 = 0$$

دې په نورمال فورم یا – پڼې ترانسفورمي شي.

د ماتریکس لکندود سره لاس ته راځي

$$Q: \quad x^{t}Ax + 2b^{t}x + c = 0$$

د

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 \\ 10 & 17 & 14 \\ 4 & 14 & 20 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -24 \\ -57 \\ -39 \end{pmatrix}, \quad c = 207\,.$$

سره.

ماتريکس A آيګن – ارزښتونه 36 ، 9 او 0 لري، په دې اړونده نورمي شوي آيګن-وکتورونه u_i د $\det(u_1,u_2,u_3)=1$ سره د بېلګې په توګه دي:

$$u_1=\frac{1}{3}(1,2,2)^t\,,\quad u_2=\frac{1}{3}(2,1,-2)^t\,,\quad u_3=\frac{1}{3}(2,-2,1)^t\,.$$

د ترانسفورميشن $x=Uy$ پسې د $U=(u_1,u_2,u_3)$ سره لاس ته راځي

$$Q:\quad 36y_1^2+9y_2^2-144y_1-18y_2+18y_3+207=0\,.$$

د مربعيزې تکميلونې له لارې

$$z_1=y_1-2\,,\ z_2=y_2-1\,,\ z_3=y_3$$

لاس ته راحي

$$Q:\quad 36z_1^2+9z_2^2+18z_3+54=0\,.$$

راکښنه

$$w_1=z_1\,,\ w_2=z_2\,,\ w_3=z_3+3$$

باالاحره نورمالفورم (- بڼه) راکوي

$$Q:\quad 36w_1^2+9w_2^2+18w_3=0\,.$$

په ټوليزه توګه ترانسفورميشن لاندې فورم يابنه راکوي

$$x = Uy = Uz + U\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Uw + U\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

پس راکښنه ده

$$v = U\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

او د د کوادریک منځ ټکی په ګوته کوي.

ليکونکي: اېپ، هيوليک

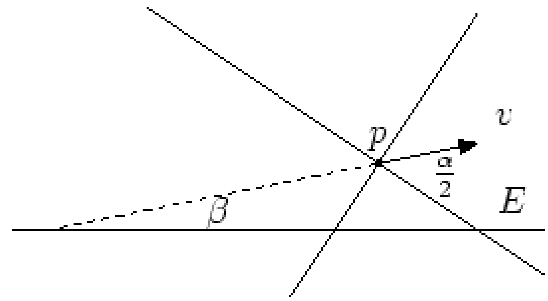
مخروط غوڅی Kegelschnitt

د یوه دېلمخروط غوڅی

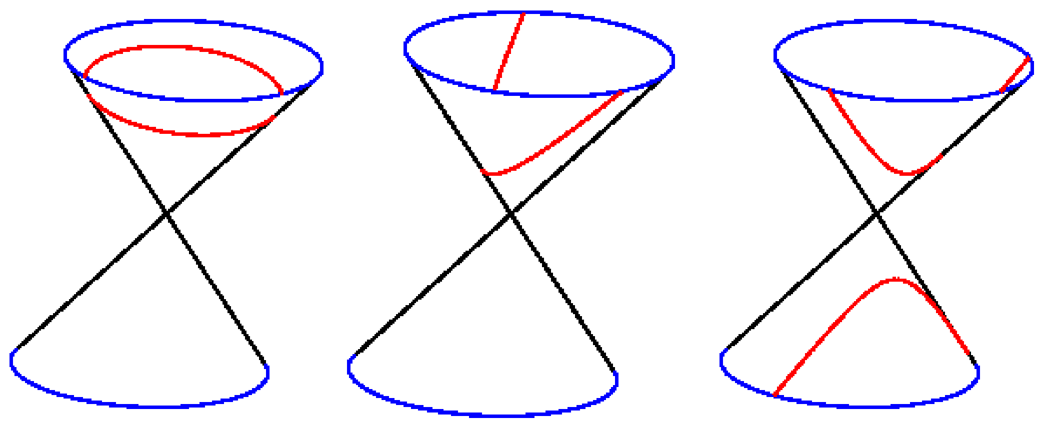
$$K: \ (x-p)^{t}v = \pm\cos\frac{\alpha}{2}\,|x-p||v|$$

د ځوکي p ($p_3 \neq 0$) ، لور v سره او وازولو کونج α د سطحې $E: \ x_3 = 0$
سره یوه مربعیزه کړه ده

$$K \cap E: \ a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c = 0.$$



د مخروط غوځي تيوپ يا ډول د E او کرښي $p + tv \quad t \in \mathbb{R}$, , ترمنځ کونج β د لويوالي په واک کې دی



Hyperbel: های پارابول Parabel: پارابول Ellipse: بيضوي يا هګښ

$\beta < \alpha/2$ $\beta = \alpha/2$ $\beta > \alpha/2$

ليکونکي: اېپ، هيوليک

د دوه بعدي کوادريکونو د اوکليدي نورمال بڼه

Euklidische Normalform der zweidimensionalen Quadriken

د سطحيزو کوادريکونو مختلف ډولونه شتون لري، د لاندې نورمال فورمونو سره:

- مخروطي کوادریکونه

Normalform نورمال بڼه	Bezeichnung نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	Punktټکی
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	schneidendes Geradenpaar د غوڅوونکو کرښو جوړه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$	Doppelgerade دېلي کرښي

- منځټکي کوادریکونه

Normalform نورما بڼه	Bezeichnung نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	(leere Mengeتش ډېری)
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	Hyperbelهای پارابول

Ellipseبيضوي(هګی)	$-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$
leere Menge)تش ډېری(	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$
paralleles Geradenpaar د کرښو غبرګه جوړه	$-\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$

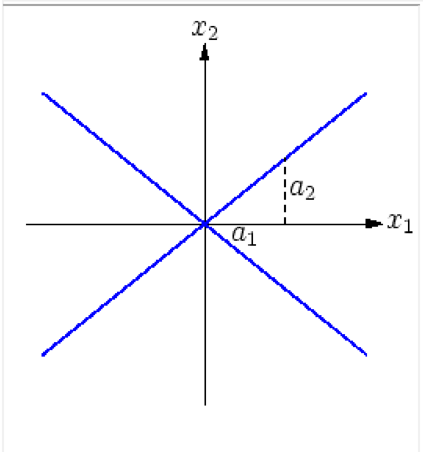
- پارابوليکي کوادريکونه

Bezeichnung نومونه	Normalform نورمال بڼه
Parabel پارابول	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+2x_2=0$

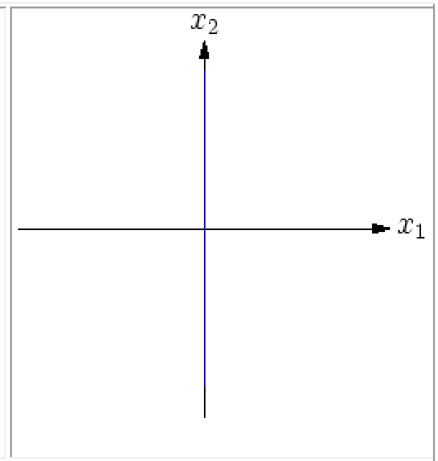
نورمالفورمونه يواځني دي، د ايندکسونو يا پېژند نخښنو تر ځای بدلون پورې او د مخروطي کوادريکونو د يوې ثابتې $c \neq 0$ سره د ضرب پورې.

لويې a_i مثبت اينول کيږي او د کوادريکونو داصلي محور اوږدوالی بلل کيږي

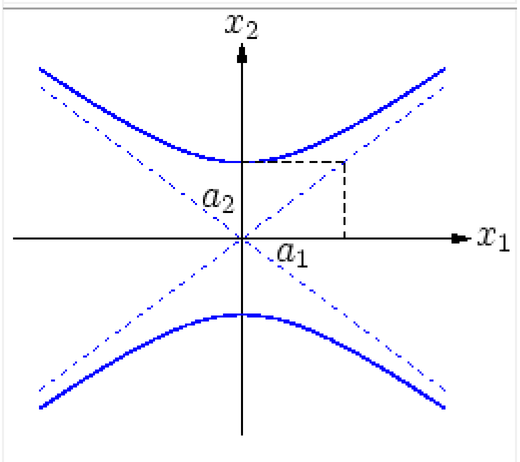
Doppelgerade ډبل کرښې	schneidendes Geradenpaar د غوڅيدونکو کرښو جوړه



Hyperbel های پارابول

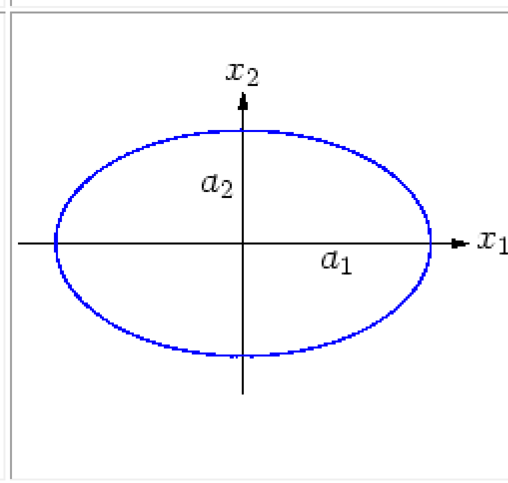


Ellipse بیضوي یا هکی

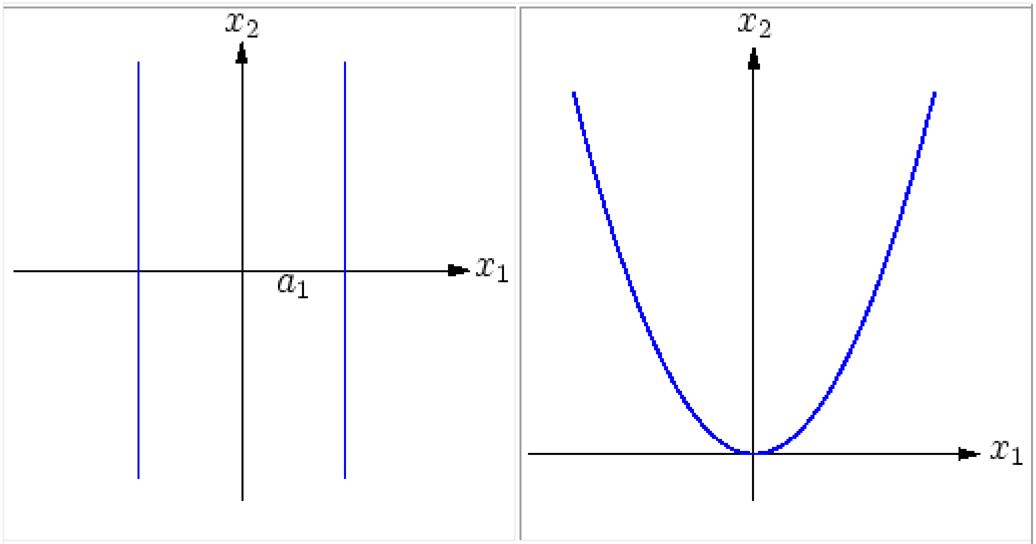


paralleles Geradenpaar

غبرګه(موازي) کرښجوړه



Parabel پارابول



لیکونکي: اپپ، هیولیک

اوس دې د لاندې کوادریکونو نورمالفورم(- بنه) او تیوپ وټاکل شي

د $$Q: \quad 3x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_1x_2 - 12\sqrt{2}x_1 - 4\sqrt{2}x_2 - 8 = 0$$

ماتریکسفورم د مربعیز فورم ځخه په پیل،

$$x^t Ax + 2b^t x + c = x^t \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} x + 2\sqrt{2}\,(-6, -2)\,x - 8$$

لومړی سړی د ماتریکس A آیګن – ارزښتونه او آیګن – وکتورونه ټاکي.

کرکتریتیکي پولینوم دی:

$$(3-\lambda)^2 - 25 = 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 25 = \lambda^2 - 6\lambda - 16$$

او لاندې صفرځایونه لري

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{2} = 3 \pm 5$$

و $\lambda_1 = -2$ ته یو نورمي شوی آیګن-وکتور د لاندې کربنیز مساوات د حل څخه لاس ته راوړل کیږي

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} v_1 = 0$$

نو $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^t$ دی. دا چې دویم آیګن-وکتور په په لومړي باید عمود (ولاړ) وي، نو لاس ته راځي $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^t$ ، د کوم سره چې مخنخښه داسي باید ټاکل شوي وي، چې د لاندې ورکړ شوې ترانفورمیشن ماتریکس دیترمینانت مثبت وي:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

د $x = Uy$ سره تراسفورمي شوي مساوات لاندې بڼه لري:

$$\begin{aligned} 0 &= y^t \tilde{A} y + 2\tilde{b}^t y + c \\ &= y^t U^t A U y + 2\left(b^t U\right) y + c \\ &= -2y_1^2 + 8y_2^2 - 8y_1 - 16y_2 - 8\,. \end{aligned}$$

د مربعیزې پوره ونه یا تکمیلونه راکوي

$$0 = -2y_1^2 + 8y_2^2 - 8y_1 - 16y_2 - 8$$

$$= \quad -2(y_1-2)^2+8(y_2-1)^2-8$$

$$= \quad -2z_1^2+8z_2^2-8$$

په همدې ډول

$$\frac{z_1^2}{2^2}-\frac{z_2^2}{1^2}+1=0\,.$$

نو مساوات یو های پارابول انځوروي.

(Autoren: Höllig/Hörner)

د درې بعدي کوادريکونو د اقليدس (اويکليد) نورمالفورم

Euklidische Normalform der dreidimensionalen Quadriken

د فضايي کوادريکونو 17 مختلف ډولونه شتون لري د لاندي نورمالفورمونو سره:

- مخروطي کوادريکونه

Bezeichnung نومونه	Normalform نورمال بڼه
تکیPunkt	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=0$

(Doppel-)Kegel(دبل)مخروط	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$
Geradeکرښه	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$
Schneidende Ebenenغوڅونکي سطحې	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$
Doppelebeneدبل سطحې	$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$

- منځټکي کوادريکونه

په نخښه ونه Bezeichnung	نورمال بڼه Normalform
(leere Menge) (تشهپرى)	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$
دوه پوښيز های پرابولوئيد zweischaliges Hyperboloid	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$
يوپوښيز های پرابولوئيد einschaliges Hyperboloid	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$

$-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}+1=0$	Ellipsoid ايليپسوېيد
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$	(leere Menge) تشډپرى
$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$	hyperbolischer Zylinder هايپربوليکي توته
$-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$	elliptischer Zylinder ايليپتيکي توته
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$	(leere Menge) تشډپرى
$-\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$	parallele Ebenen غبرگي سطحې يا ٠ هوارئ

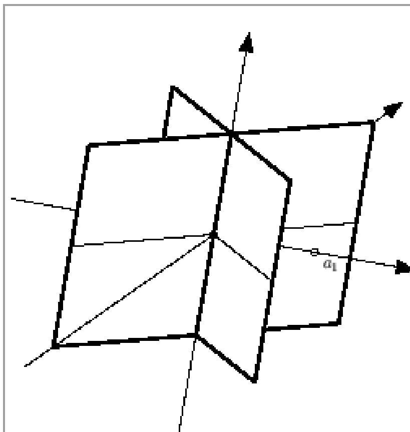
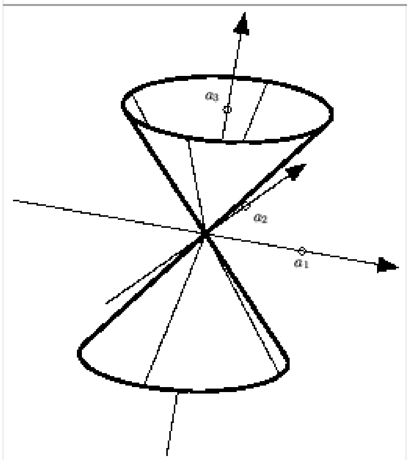
- پارابوليکي کوادريکونه

نورمال بڼه	نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+2x_3=0$	هکى ډوله ايليپميکي پارابولوئيد
$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+2x_3=0$	هاي پارابوليکي پارابولوئيد

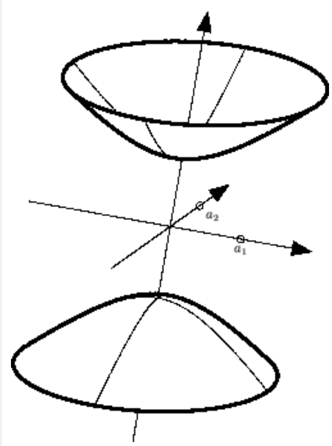
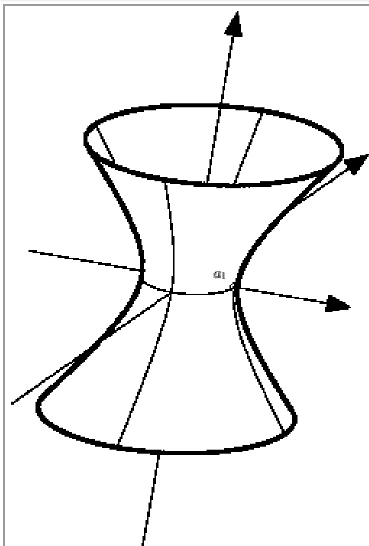
پارابوليکي توته	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+2x_2=0$

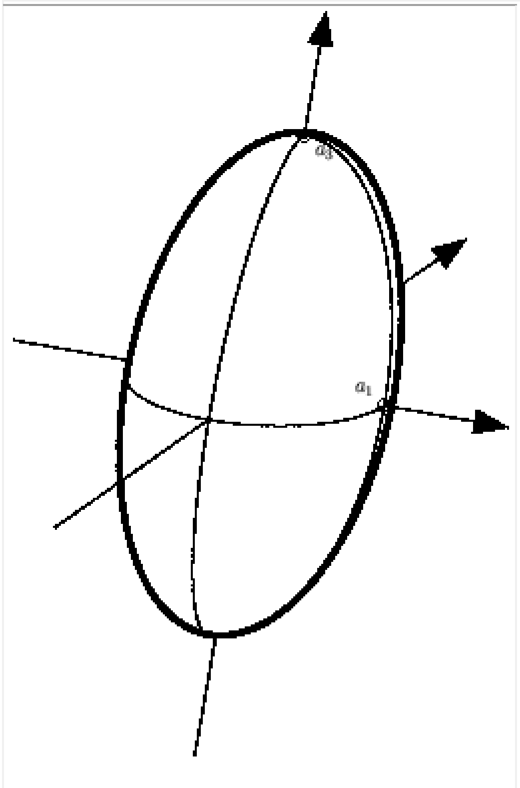
نورمال بڼې د ایندکسونو یا پېژند نخښو پورې يو اځني ټاکلي او مخروطئ کوادريکونه د ثابتې $c \neq 0$ سره د ضرب پورې يو اځني ټاکلي.

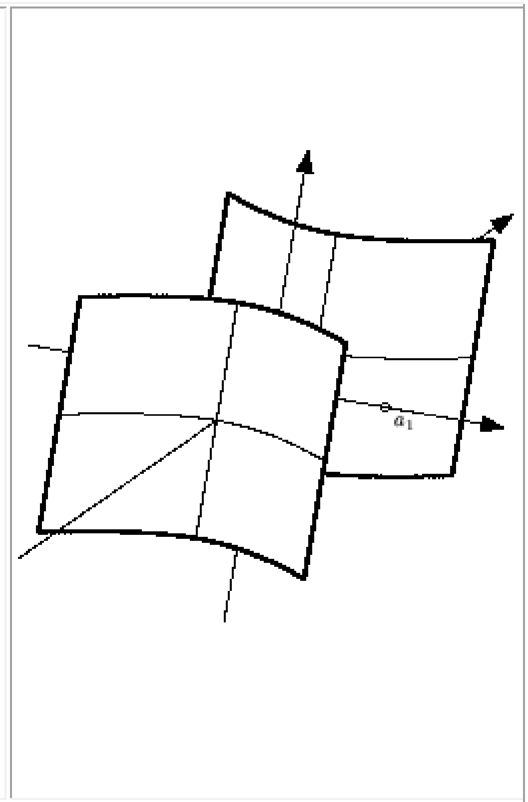
لويي a_i مثبت اينول کيږي او د کوادريکونو د اصلي محور اوږدوالی بلل کيږي.

غوڅوونکي سطحې	(ډبل) مخروط
	

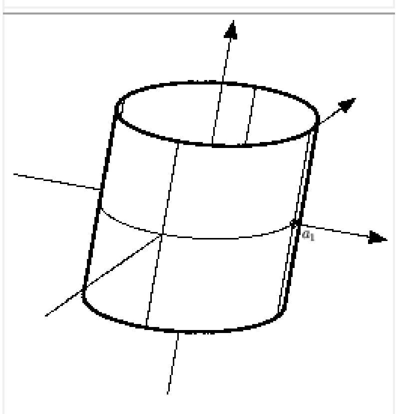
يو يوښيز های پارابول	دوه يوښيز های پارابول

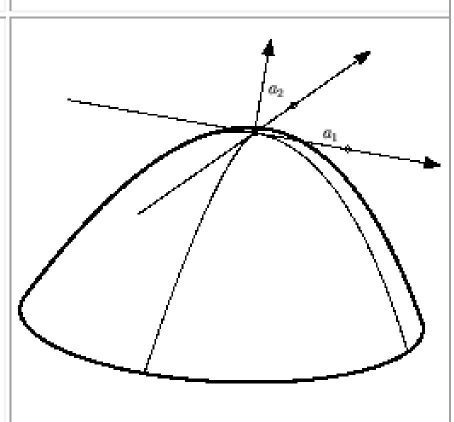
	
Ellipsoidهکی ډوله يا بيضوي ډوله	های پارابوليکي توته hyperbolischer Zylinder

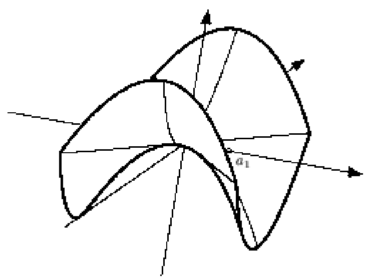
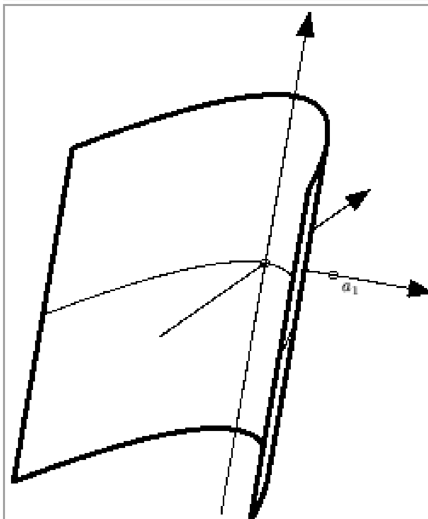




elliptischer Zylinder بيضوي توته	elliptisches Paraboloid بيضوي پارابولوئيد





hyperbolisches Paraboloid های پارابوليکي پارابولوئيد	parabolischer Zylinder پارابوليکي توته يا - استوانه
	

ليکونکي: هيوليګ، هيرنر

اوس دې د لاندې کوادريکونو نورمال بڼه او تيوپ (ډول) و ټاکل شي:

$$Q: \quad x^t \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} x + 2\,(-2,1,2)\,x + 2 = 0$$

د ماتريکس کرکتريستيکي يا ټاټونکی پولينوم

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 9\lambda + 81\,,$$

لاندې صفرځاي لري:

$$\lambda_1 = 9\,, \quad \lambda_2 = 3\,, \quad \lambda_3 = -3\,.$$

و آیګن – ارزښتونو λ_i ته اړونده نورمي آیګن-وکتورونه دي:

$$v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\,, \quad v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\,,$$

جېرته چې مخنخښه داسې ټاکل کيږي، چې و لاړسيستم منځ ته راځي.

د اورتوګونال ترانسفورميشن ماتريکس په حېث منځ ته راځي:

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

دا د $x = Uy$ سره ترانسفورمي مساوات لاندې بڼه لري:

$$y^t \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} y + 2\,(0,3,0)\,y + 2 = 0\,.$$

مربعيزه پوره کونه راکوي

$$\begin{aligned} 0 &= 9y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2 \\ &= 9y_1^2 + 3(y_2+1)^2 - 6y_2 - 3 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2 \end{aligned}$$

$$= \quad 9z_1^2 + 3z_2^2 - 3z_3^2 - 1$$

په همدې توګه

$$\frac{z_3^2}{\frac{1}{3}} - \frac{z_1^2}{\frac{1}{9}} - \frac{z_2^2}{\frac{1}{3}} + 1 = 0\,.$$

نور مساوات يوپوښيز های پارابول انځوروي

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

چې غوټې پسې وهې په لاس به درشي

چا وې دا چې په درياب کې ګور نه شته

برى د خداى (ج) سره دى.

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځې ټولې اړتیاوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې

۲۷ – د افغانستان په هکله سپيني خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)