كرتيز الجبر

$$\begin{array}{c|l} & A\cdot X_1 = b \\ - & A\cdot X_2 = b \\ \hline = & A\cdot (X_1 - X_2) = 0 \end{array}$$

له ن ج : بنستيز درس | كرتيز الجبر

2012

ژیاری: داکتر ماخان(میری) شینواری

کرښيز الجبر

$$\begin{array}{c|l} & A \cdot X_1 = b \\ - & A \cdot X_2 = b \\ \hline = & A \cdot (X_1 - X_2) = 0 \end{array}$$

dr.shinwari@hotmail.com

له ن ج : بنسټيز درس | کرښيز الجبر

ژباړې: ډاکتر ماخان(ميرِی) شينواری

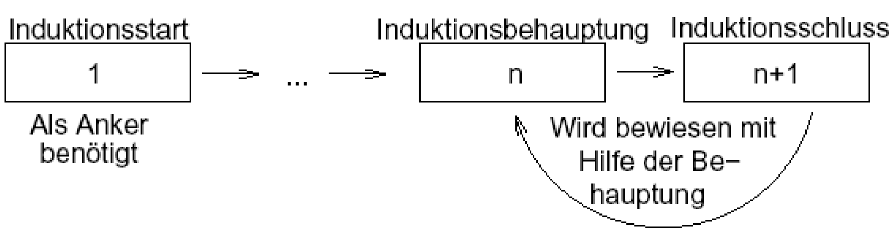
سرليک

د ژباړي نیولیک

د دې سرلیک لاندې یوه بله لیکنه هم شته. دا مخ ته پرته لیکنه ساده او د پیل په څیر باید وکتل شي. دا لیکنه د بنسټیزو لیکنو ن ج څخه راژباړل شوې ده.

نظر يا د پيداکيدو فکر

پوره اندکشن د ښووني يو متود يا لار ده، هغه چې په کرښيزه الجبر کې زيات کارول کيږي. د ښووني لپاره نيول کيږي چې يو ټاکلی فرمول د اندکشن ثبوت د n لپاره صدق کوي. د اندکشن پای يا ختمېدلو – چې د اندکشن پل هم بلل کيږي- ښوول کيږي، چې دا فرمول د $n+1$ لپاره صدق کوي، دايې چې بېرته د اندکشن ثبوت باندې لاس ولرو يا راونيسو. د دې لپاره چې ښوونه پېخې ټيک يا پوره ټيک وي، د يوه نښلون ټکي ته اړتيا شته، له کوم چې n پيل کيږي. دا نښلونټکی د اندکشن پيل ټکی هم بللکيږي. يا د اندکشن پيل او په ښوونه کې په پيل کې راوړل کيږي.



.

د پورته ديېنتو ژباړه له کيڼ و ښي لور ته:

پورته: د ايندکشن پيل. لاندې: د په باندې ايښولو (کلکولو) لپاره اړين.

لورېزئ کرښې: لړو .

ښيرته خيره پورته: د ايندکشن غوښتنه يا ثبوت   د ايندکشن پای. لاندې: د غوښتنې يا ثبوت په مرسته ښوول کيږي.

هندسي لړۍ پرلپسې یا لړۍ (   )

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

د ښوولو دی:

د اندکشن پیل: $n = 1$

$$\begin{aligned} q^0 &= 1 \\ &= \mathrm{Okay} \\ \tfrac{1-q^1}{1-q} &= 1 \end{aligned}$$

د اندکشن وړاندنیونه(فرضیه): د n لپاره دې ښوول شوي وي:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

د اندکشن پل : $n \rightsquigarrow n+1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

دا دد ښوولو دی.

کینې پیل کوو

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \\ &=_{nach\ Vor.} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \\ &= \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{(1-q)q^n}{1-q} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-q^n+(1-q)q^n}{1-q} \\
&= \frac{1-q^n+q^n-q^{n+1}}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}
\end{aligned}
$$

د برنولي نا مساوات يا نابرابرون Bernoulische Ungleichung

$(1+x)^a \geq 1+ax$ دې وښوول شو

د االندکشن پيل : $a=1$

$1+x \geq 1+x$: تيک دی.

د اندکشن پل:

$a \leadsto a+1$

$(1+x)^{a+1} \geq 1+(a+1)x$

دې وښوول شي

موږ. بېرته له ښیٔ لورې پيل کوو

لاندې کې : Die Voraussetzug= نيونه(فرضيه)

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{a+1} &= (1+x)^a \cdot (1+x) \\
&\geq_{Voraussetzung} (1+ax)\cdot(1+x) \\
&= 1+x+ax+ax^2 \\
&= 1+(a+1)x+ax^2 \\
&\geq 1+(a+1)x
\end{aligned}
$$

د پوره اندکشن سره نور د ښوولو فرمولونه

$(1+x)^a \geq 1+ax \quad \forall x \geq 0$

د لومړيو n طبيعي اعدادو مجموعه:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

د يوه کرښيز مساواتسيستم جوړښت

يو کرښيز مساواتسيستم د يو کرښيزو مساواتو تعداد څخه جوړ دی. دا مساوات نامعلومې خوندي لري، هم داسې په نامه واريابلې (اووښتونې يا متحولې). نامعلومې د ضريبونو سره ضربيږي. که د نامعلومې ضريب 0 - وي يعنې باور ولري: $0 \cdot x_k$ (دلته x_k نامعلومه ده) – نو دا ډول نامعلومه په مساواتو کې هم پرئښوول کيږي يعنې نه ليکل کيږي. دا لاندې د يوه کرښيز مساواتسيستم يوه بېلګه ده:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \end{array}$$

او دا ټول a_{ij} عمومي ضريبونه دي او x_j واريابلې يا متحولې يا اووښتونې :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} \cdot x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

وکتور $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ کوم چې زيات وخت عمود ليکل کيږي د حل وکتور بلل کئږي.
د يوه مساواتسيستم د ممکنه حلونو ډېرى يا سټ د حلونو ډېرى بلل کيږي:

$$\mathrm{Lös}(A,b) := \{x \in \mathbb{K}^n | Ax = b\}$$

که د حلونو ډېرۍ تشه وي، نو د مساواتسيستم ناحلوړ يا نه حل کيدونکی دی.

ماتريکسونه:

سړی کړی شي په لږ ځای کې کرښيز مساوات د ماتريکس په ډول وليکي. د مخه له دې چې دا کار کوو بايد ماتريکسونه راوپېژنو يا رامنځ ته کړو.

يو متريکس يو ولاړکوډيز يا ولاړکونجيز جدول دی د m کيلو يا ليکو او n درځونو يا متپو يا ولاړو ليکو سره.

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

د ماتريکس ليکنډول mxn - ماتريکس

سړی کړی شي د ماتريکسونو يوګونې کرښې رادباندې وليکي. دا بيا د **ليکو وکتورونه** بلل کيږي. په ټيک دې ترتيب د ولاړو ليکو يا متپو يا **ستنو وکتورونه** هم لاس ته راوړی شوو، که سړی يوګونې متې رادباندې وليکي.

سړی کړی شي ماتريکسونه يو له بل سره **جمعه** کړي.

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

او سره ضرب کړي-+:

$$A \cdot B \quad := \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= \quad \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1} & \dots & a_{11} \cdot b_{1m} + \dots + a_{1n} \cdot b_{nm} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + \dots + a_{mn} \cdot b_{n1} & \dots & a_{m1} \cdot b_{1m} + \dots + a_{mn} \cdot b_{nm} \end{pmatrix}$$

د ماتريکسونو په جمعه ساده پوهيدل کيدی شي. سرۍ سره جمعه کوي، جې اړونده کمپوننتونه يو له بل سره حمعه کړي، داسې نتيجه لاس ته راځي. د ماتريکسونو ضرب ستونځمندی. په ضرب کې د لومړۍ ماتريکس ليکه د دويمې ماتريکس د متې سره ضرب کيږي او ورپسې سره جمعه کيږي. او نتيجه يې داسې لاس ته راځي، چې c_{ij} يعني i–مه ليکه ، j -مه متّه کې ضرب د حل ماتريکس چې لاسته راشي، د لومړي ماتريکس د i–مې ليکې د j–مۍ متې يا ستن د توکو سره ضربوو او له ټولو ضربونو څخه جمعه جوړوو. دا يو ځل بيا ليکو:

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

هيله ده، چې په دا موضوع کې به لږه روښنتيا منځ ته راغلې وي. داسې وايو چې سرۍ دښۍ ديترمينانت متّه په $90°$ درجو د ساعت ځرخوني (عقربک؟؟)په لور څرخوي، چې د کينې ماتريکس په ليکه پريوځي، يو په بل پراته توکي بيا سره ضربيوي او په دې پسې يې بيا له دې ضربونو جمعه جوړوي.

اوس د ماتريکس د ضربوني په بنديزونو هم پوهيږو. سرې کړی شي $n \times m$- ماتريکس فقط د $n \times m$ -ماتريکس سره ضرب کړي. دا په دې معنا، چې د کيڼ ماتريکس ليکي ټيک دومره بايد اوږدې وي لکه د ښي ماتريکس متې (درځونه، ستنې) ، پرته له دې ته په ليکه نه ،، پربوځي،، يا سرخوري .

تراسپوني ماتريکس

د يوې ماتريکس ترانپوني ماتريکس داسې لاس ته راوړو، چې ليکې او متې سره بدلې شي. له توکي a_{ij} څخه توکی a_{ji} لاس ته راځي.

$$a_{ij} = a_{ji}$$

بيلګه:

$$T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{pmatrix}$$

د مربع ماتريکسونو لپاره دا په همدې معنا دی لکه په ،،دوه – کونجترې،، (قطر) باندې هندارونه(انعکاس).

سيومتريکي ماتريکسونه

يو ماتريکس ټيک هلته سيومتريک دی، چې باور ولري:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

د کربنيزمساوات سيستم ځايسپماييزه ليکندول

د يوه ماتيريکس په مرسته او کېدی شي کربنيزمساوات انرږي – او ځای سپماييز وليکو. مورږ ته دا بام ودريږي، چې دا نامعلومې تل په هر مساوات کې همهغه دي . نو لکه په ماتريکس ضربونې کې د ماتريکس ضربونې په مرسته دا د مساوات سيستم څخه دباندې راباسو او په دې توګه د ضربيونو(ځلوونو) ماتريکس A لاس ته راوړو:

$A \cdot x = b$

د ليکبنې له مخې دا داسې برېښي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

د ګاوس تلنلار لپاره ، چې لاندې ليکل شوې ده، دا بيا په لنډه توګه تکراروو او $x-$ - وکتور هم لرې بريږدو. له دې سره نوکان او مساوات هم لرې پريږدو يا نه ليکو او دا ټول په يوه کاستن Kasten, يا کارتون کې ليکو، چې دا لګه چې ګورو، په لاندې توګه ليکل کيږي.

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ \hline \end{array}$$

نا يو ډوله يا اينهوموجينبرابرون

يو کرښيز مساوات سيستم نايوډوله (اينهوموجين) بللکيږي، که که لږ تر لږه د يو b_i لپاره ($1 \leq i \leq n$) باور ولری

$b_i \neq 0$

په ريښتينې توګه دا پهدې معنا دی: پهښی لور صفرماتريکس نه دی ولاړ يا ځای په ځای نه دی.

يو ډوله يا هوموجين Homogen

د دې برعکس يو مساوات سيستم برابرډوله (هوموجين) بلل کيږی، که b صفروکتور وي، دا په دې معنا چې دټول b_i لپاره ($1 \leq i \leq n$) باور لري

$b_i = 0$

دا دا معنا لري، چې په بڼې اړخ صفروکتور پروت دی

لیکه- پوړیز بڼه Zeilenstufenform

موږ اوس طبعاً د کرښیز مساواتسیستم د اوبیونې یا حل سره مینه لرو. دا ګاوس الګوریتم چې یوځه کښته راځي، د اوبیونو یا حلونو د پیداکولو لپاره مرسته کوی. دا ماتریکس د ساده لیکه بدلون بڼې ځخه په لیک –پوړې –بڼې باندې اړوي. په لیکبوړیزبڼه کې یو ماتریکس مخ ته لرو، که هغه خورا ټیټه لیکه دا اکثره کیڼ پراته صفرونه ټولې لیکې خوندي ولري او د کیڼ پرتو صفرونو تعدا(ګڼون) پورته لور ته کم شي، د کوم سره چې کله کله یې له لیکې و لیکې ته یو ځل برابر باتې کیږی. لاندې ماتریکس د لیکې- پوړیز- بڼې ماتریکس بیلګه ده

$$\begin{pmatrix} 0 & \otimes & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & \otimes & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \otimes \neq 0 \\ \oslash \neq 0 \text{ oder } 0 \end{array}$$

پورته الماني: د ،،یا،، په معنا

جمله :

موږ کړی شو هر ماتریکس په لیکه-پوړیز-بڼه ماتریکس واړوو. داچې د ګاوس تلنلار د دې لپاره یو الګوریم راکوي، چې دا متمین ده او دا جمله ښوول شوې.

د حلونو کریتیریوم

(نخښې، چې د دوه یا زیاتو شیانو یا کسانو ترمنځ پرې پرېکړه کیږي)

د دې لپاره چې د کرښیزمساتسیستم د حلونو تعداد وټاکلی شو، د حلونو کریتیرین یا نځښې(توپیرنخښې) شتون لري..

برابرډوله یا هموجین مساواتسیستم کړی شي یا ساده حل ولري او یا ډېر حلونه ولري.

ساده حل:

ساده حل يې صفروکتور دی، دا په دې معنا، چې ټول مساوات ټیک هلته پوره کیږي، که ټولې واریابلې(متحولې یا اووښتونې) صفر کېښوول شي.

دا حالت هلته رامنځ ته کیږی، چې که برابرډوله مساوات سیستم په داسې لیکه-بوږیز-بڼه و اړولی شي، چې په هره لیکه کې له بورته تر کښته یو صفر ځا په ځای وی. او همدومره د ماتریکس متې ولرو لکه لیکې.
د یوه کرښیز مساوات سیستم بیلګه، چې یو د لیکه-پوړی-بڼې ماتریکس سره ، چې ښايي، چې فقط ساده حل شتون لري.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د دې مساواتسیستم د اخرنې لیکې څخه لاس ته راځي$x_3 = 0$. له دويمې لیکې لاس$x_2 = 0$ ته راځي او بالاخره $x_1 = 0$ ، له کومه امله چې موږ د حل په څېر فقط صفروکتور لاس ته راوړو.
د یو هموجین مسواتسیستم سره کړی شو و ازمایو، چې ایا ومتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک ای ا کرښیز بلواک دي. موږ له دې سره وکتورونه په متاریکس کې د متې وکتورونو په څیر لیکو. که داسې لاس ته راوړی هموجین کرښیز م ساوات سیستم فقط ساده حلونه لري، ن و وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دی.

زیات حلونه یا اوبیونې:

دا هوموجین کرښیز مساوات سیستم زیات حلونه لري، که خپلواکه متحوله (اووښتونې) شتون ولري.. یوه خپلواکه اووښتونې هغه اووښتونې ده چې مساواتسیستم حل له لارې کره نه وي ټاکل شوي. موږ مړی شو داسې اووښتونې په خپله خوښه وټاکو او همداسې په خوښه زیات حلونه د مساوات سیستم لپاره لاس ته راځي.

دا حلونه یو وکتورفضا غزوي.

دا ځنګه پیژنو،چې ایا یو میاواتسیستم خپواکې متخولې لري؟ خپلواکې متحولې ټیک هلته شتون لري، چې په سیستم کې لږ مساوات شتون ولري، نسبت اووښتونو ته.

بیلګه:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

داسې مساواتسیستمونههم شته، چې په هغې کې داسې نه ده، چې د متحولو څخه دې مساوات لږ وي. په داسې مساواتسیستم کې پیژنو، چې په لیکه پوړیزه کونه کې یوه صفرلیکه شتونلري. پههوموجېنګربنیز سیستم کې کېدی شي داسې لیکه له منځه یوسو(پام! داپه ناهموجېن کې مکنه نه ده، ځکهچې دا حقیقت به مو لهمنځهوړی وي، چې کومحل شتون نه لري) . که د دې لهمنځه وړنې سره زیاتې متحولې پاتې شي نسبت مساواتو ته ، ن و یو م ساواتسیستم بهولرو د خپلواکو (ازاده)متحولو سره .
که د یوه هوموجین مساوات سیستم د حل سره، په کوم کې چې ماتریکس له متو وکتورونو جوړ دی، چې کربنیز خپلواکوالی یې یو بل ته ازمایل کیږي، لاس ته راشي، نو وکتورونه یو بل ته کربنیز بلواک دي.

انهوموجین مساواتسیستمونه کېدی شي هیڅ حل، ټیک یو حل او یا ریات حلونه ولرودای شي.

هیڅ حل یا نه حل: یو انهوموجین کربنیز سیستم کوم حل نه لري، که د دیوه مساوات ضریبونه صفر وي، او اړونده b_i صفر نه وي..:

یعني

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_i \quad b_i \neq 0$$

داسې یو برابرون یا مساوات بنه اړولی بنه بدل **entartet.** بلل کیږي. بنه اړول شوې مساوات نه پوره کیږي او له دې سره تړلمسوات سیستم نه پوره کېدونکی دی، له کومه کبله چې موږ حل هم نه لرو.

ټيک يو حل:

يو انهوموجين مساوات ټيک يو حل لري، که دا اړونده هومجين مساوات سيستم – دا اړونده هوموجين مساوات سيستم جوړ شي، په کومکې چې ټول b_i د صفر سره برابر وليکل شي – فقط ساده حلونه ولري.

د دې لپاره چې حلونه وشميرلی شو، دا انهوموجين کربنيز سيستم د ليکی پوړيزبڼه باندې اړوو، لکه پورته مو چې داسې وکړل، د کوم سره چې موږ b_i ($1 \le i \le n$) هم بايد په پام کې ونيسو.

يو ناهوموجين مساوات سيستم کيدی شي د دې لپاره وکارول شي، چې و ازمايي، چې ايا يو وکتور د نورو وکتورونو ځخه د کربنيز کمبينېشن په ځېر جوړی شي که نه. ټيک هلته يو حل شته، که b د متو يا ستنو وکترونو د کربنيز کمبينېشن ځخه جوړولی شي. که داسې يو حل شتون ونه لري، نو نه شي کېدی چې د متو وکترونو ځخه کمبينی يا ترکيب کړي. که يو يا حتا زيات حلونه شتون ولري، نو دا په لاندې توګه دي:

زيات حلونه يا اوبيونې:

لکه په کربنيز هوموجېن مساواتسيستم کې ازادې متحولې په ناهوموجېن مساوات سيسم کې هم راپيدا کيږي يا منځ ته ارځي. دا بېرته په هغه وختکې شتون لري، که سړی زاتې متحولې ولري نسبت مساواتو ته. په ناهوموجېن سيستمکې هم سړی کړی شي صفرليکې لرې کړي، چېرته چې $b_i = 0$ هم وي. په هرحالت دا بڼه تغير شوې مساوات له منځه نهشي وړل کېدی.

ديترمينانتونه Determinante :

که د يوه مربع ماتريکس وکتورونه يو بل ته کربنيز بلواک وي، نو ديترمينات 0 دی. په بل حالت کې $\neq 0$. له دې سره د $Ax = b$ لپاره باور لري:

د هوموجين مساواتسيستم لپاره ساده حل،	$\det A \neq 0$ $\Rightarrow$
د ناهوموجين مساوات سيستم لپاره حلونه. د ناهوموجين سيستم لپاره حلونه يو حل يا هيڅ حل	$\det A = 0$ $\Rightarrow$

رانګ Rang

$$rang(Ab) = rang(A)$$

حل شتون لري. د يوه ناهوموجين سيستم لپاره يو حل شتون لري. د يوه هوموجين سيستم لپاره ساده حل شتون لري.

د حلفضا د ديمنزيون (بعد، پراخيدونی)ټاکل

د يوه هوموجين مساواتسيستم د حلډېريو د د بعد ټاکلو لپاره مور کړی شو د ديمنزيون يا بعد فرمول څخه کار واخلو. دا چي هر ماتريکس A په يوه ټاکلي بنسټ f_A اينڈومورفيزم انخوروي د هوموجېن کربنيزمساوات سيستم حلفضا لپاره

$$Lsg(A,0) = Kern(f_A)$$

باور لري او داسي کړس شو د بعد د فرمړل

$$\dim V = \dim(Kern(f)) + \dim(Bild(f)) \Leftrightarrow \mathrm{d}$$

$$\dim(Kern(f)) = \dim V - \dim(Bild(f))$$

سره د حلفضا بعد وټاکو

بعد یا پراخیدونی

یا 0 دی : نو بیا تیک ساده حل شتون لري، داسې په نامه صفروکتور.

یا >0 دی : نو په دې حالت کې ازادې اووښتونې(متحولې (شتون لري، بعد لویوالی د متحولو تعداد دی، چې لرو یې:

پوښتنه:

موږ عکس(ځیره) ځنګه ټاکو؟ موږ دلته باید یوون – واهدوکتورنه په ماتریکونو وځغوو یا راوړو. موږ بای د پسې د بیلد(ځېرې) پراخېدونی وشمېرو، داسې چې په هغې کې بېرته یو کربنیزمساواتسیستم حل کړو. موږ له دې سره یو د شمیرنې پانګه لرودی شو. او که اشتباه کړم؟

د ګاوس - تلنلار یا - - قانون Gauss-Verfahren

د ګاوس-قانون د دې لپاره دی، چې یو ماتریکس په لیکه وکتورونو راوړي. د لیکه وکتورونو بدلیدنه او لیکه کمون یا تفریق د تر مخه سکالار ضرب په بنسټ د برخه اخستونکو لیکو تر هغې مخ ته بیایي، چې ماتریکس په لیکه پوړیز ماتریکس بدل شي. د ګاوس قانون تل د کترولو دی یا عملي کیدی شي.خو سه له دې هم کېدی شي، چې په قوي ډول ناټیک وي. اوس الګوریموس ،، پروګرامي ،، کوو:

لاندې یا کښته برخه:
د ګاوس قانون د یوه ماتریکس د لیکه پوړیز بڼې باندې اړولو لپاره

- په پیل کې ازمایو، چې ایاماتریکس ماتریکس همرا اوس لیکه پوړیز بڼه لري. په بېخي ځانګړې توګه $A=0$ ، یعنې فقط له 0 –نو ځخه جوړ ماتریکس لیکه پوړیزبڼه لري.

- د دې عمل جراکولو له مخه – او نظري په دې مهال هم- کېدی شي او باید هم لیکې بدلې شي، که دا کار ګټور وي. دا په دې معنا، چې د لیکې د پیوت توکي(Pivotelemente) له پورته بیخي کیڼ تل پسې ښي لور ته لاړ شي. د پیوت توکي

هغه توکي بللکيږي، کوم چې له ښې لورې کتل شوي په يوه ليکه کې لومړئ يا په سر کې د 0 سره نابرابر وي.

- د i سره پيل شوې هر ي ليکې لپاره د پورته ليکې د $i=1$ سره تر د اخرې ليکې پورې لاندې ډول مخ ته ځو:

د هرې ليکې لپاره ، چې وي – ليکه j تل له ليکې i کښته پرته ده - دi ډيرواره له ليکې j ته ور زياتوي يا تر کموي(که غواړې، جمعه کوي يا ترې تفريقوي) ، داسې چې a_{ji} - دلته i اووښتوني يا متحوله د متې يا درڅ ګنه(نمره) په ګوته کوي- 0 شي.

د ګاوس الګوريتموس يوه ليدنه

په لاندې کې Aktuelles ورځنۍ يا اکتول

لومړی پل يا تلنلار i=1

$$\begin{array}{rcccc}
\text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\
 & X & X & X & X \\
 & X & X & X & X \\
 & \uparrow & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccc}
\text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\
 & 0 & X & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\
 & X & X & X & X \\
 & \uparrow & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc}
\text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\
 & 0 & X & X & X \\
 & 0 & X & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\
 & \uparrow & & &
\end{array}$$

دويمه پل يا تلنه i=2

$$\begin{array}{rcccc}
 & X & X & X & X \\
\text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & X & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\
 & 0 & X & X & X \\
 & & \uparrow & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccc}
 & X & X & X & X \\
\text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & X & X & X \\
 & 0 & 0 & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\
 & & \uparrow & &
\end{array}$$

دریم پل یا تلنه i=3

$$\begin{array}{rcccc} & X & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ \text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & 0 & X \\ & & & \uparrow & \end{array}$$

له ماتریکی داسې په لاس راړی لیکه پوړیز بڼه وکتور څخه کېدی شي حلونه (اوبیونې) وشمېرل شي.

دا داسې کوو چې دا مساواتسیستم بېرته په ماتریکس بڼه په یوګونو مساواتو بدل کړو او له لاندې څخه په پیل په اړونده متحولې پسې حل کړو.

کخ دا مساواتسیستم زیات حلونه لرودی شي، نو له دې سره پېژنو، چې متحولې شتون لري، چې د هغو ارزښتونه ه شو ټاکلی. دا نو ازادې متحولې دي.

د ګاوس الګوریتموس ټیکاوی

د دې لپاره چې وښایو چې ګاوس قانون یو کرښیز مساوات سیستم$\overline{A}$ د ټیک همغه یا برابر حلډېری (حلستې) سره لکه مساواتسیستمA یې چې تولیدوي، باید وښایو، چې لاندې بڼه بدلونونه په حلونو کوم اغیز نه لري.

لومړی: د لیکو بدلونه

دویم : د لیکو ضربونه د سره او بالاخره یې د بلې لیکې سره زیاتول یا کمول(جمعه او تفریق)

ښوونه یې:

لومړی : دا ساده دی. د یوه مساولتسیستم د لیکو بدلون په حلونو کوم اغیز نه لري، ځکه چې لړې پرلپسې پروا نه لري..

دویم : موږ د مساواتسیستم دوه لیکې ترځېړنې لاندې نیسو، څکه چې بڼه بدلون فقط د دې دوه لیکو په مرسته صورت نیسي. نور و دوه لیکو سره سراوکار نه لرو او د حلونو ډېرۍ تغیر نه خوري:

$$\begin{array}{lcccccccc} (1) & a_{i1}x_1 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ (2) & a_{j1}x_1 & + & \cdots & + & a_{jn}x_n & = & b_j \end{array}$$

لومړۍ لیکه د λ سره ضربوو، په مساوات کې تغیر نه راځي، ځکه چې سړی λ بیرته لنډولی شي یا کمولی شي یا که غواړۍ اختصار کولی شي:

$$\lambda \cdot a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda \cdot a_{in}x_n = \lambda \cdot b_i$$

دا(1) اوس د دویمې(2) لیکې سره جمعه کوو، لکه چې ترې لرو

$$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n + (\lambda \cdot a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda \cdot a_{in}x_n) = b_j + (\lambda \cdot b_i)$$

پوهیږو چې دلته هم په حل کې کوم تغیر نه راځي، ځکه چې مساوات ورسره زیاتوو، چې په دواړو لورو ته راغلی او دواړو لورو ته همغه برخه ورکوي. دا بیرته سره لنډیدی شي او موږ بیرته وتونمساوات لرو.

د حلونو یا اوبیونو نور قوانین

د یوه کربنیزمساواتسیستم د حل لپاره د ګاوس قانون ترڅنګ نور قوانین هم شته. په ښوونځي کې مو د بدلون قوانین وپیژندل. په دې کې یو مساوات د یوې متحولې یا اووښتونې سره حل کیږي او بیایې ارزښت د مساوات سیستم په بل مساوات کې کېښوول کیږي.په همدې ترتیب دې کار ته دوام ورکوو، چې بیداشوط اوښتونې ارزښت د مساوات سیستم په هبل مساوات کز ځا په ځای کیږي، تر څو چې د ټولو متحولو ارزښتونه پیداشي.که د اووښتون و ارزښتونه په پای کز ځا په ځاشي او لاس ته راشی ، $0 = 0$ ، نو مساوات سیستم ناپای ډېر حلونه یا اوبیونې لري. که د دې ځا په ځای کونې وروسته ،، کیڼ اړخ $\neq$ ښی اړخ،، نو کوم حل شتون نه لري. په ورته توګه دا مساوي ایښونې قانون هم کارول کیږي، د کوم سره چې دوه مساوات د یوهې اووښتونې په لور حل شي او بیا

برابر وليکل شي.

په پای کې باید وکورو، چې د یوه کربنیزمساوات سیستم ځنګه حلونه لاس ته راړو، که ورته سیستم حل کړ شوی وي:

غواړو د یوه ناهموجین کربنیز مساوات سیستم حلډېرۍ I وټاکو. موږ د هوموجین کربنیز مساوات سیستم حلډېرۍ یا حل سټ H پیژنو. د هوموجین کربنیز مساواتسیستم حلونو ډېرۍ یا سټ H د اړونده تابع د زړي(هستې) Kern سره برابره ده. برسره پردې موږ د ناهوموجین سیستم ټوټه یا برخه حل یا د حل یوه برخه حل v_0 پیژنو.

موږ کړی شو د دې ناهوموجین سیستم حلډېرۍ I پیداکړو، داسې چې

د ناهوموجین سیستم ټولو حلونه v_0 جمعه کوو:

$$I = v_0 + H = \{v_0 + h \;\forall\; h \in H\}$$

د هوموجین کربنیزمساواتسیستم حلونه $Ax = 0$ د کربنیزو توابعو زړی(که غواړی: هسته) دی. موږ کړی شو ، لکه د ماتریکس A سره چې انځور یږي، دا زړی و دې ټوټه – یا برخا حل ته ورزیات یا ور جمعه کړو. دا ځانله (تنها) د ناهوموجین مسوات سیستم سره نه کوو بلکه د هوموجین مساوات سیستم سره هم همداسې مخ ته ځو.

$$Lsg(A,0) = v_0 + Kern(A)$$

د هوجین مساواتسیستم ته تل یو ساده حل0 شتون ري، له دې سره لرو

$$Lsg(A,0) = 0 + Kern(A) = Kern(A)$$

موږ د ناهوموجین مساواتسیستم دوه حلونه لرو. له دې دوه وو څخه یو حل د هوموجین مساوات سیستم لپاره جوړولی شو، داسې دواړه حلونه یو بل کم یا تفریق کړو:

$$
\begin{array}{c|l}
 & A \cdot X_1 = b \\
- & A \cdot X_2 = b \\
\hline
= & A \cdot (X_1 - X_2) = 0
\end{array}
$$

ورته والي - یامشابهت اړیکې **Äquivalenzrelationen**

په A یوه اړیکه~ ټیک هلته ورته بللکیږی، که د ټول $a, b, c \in A$ لپاره باور ولري

لومړی : $a \sim a$ یا $(a, a) \in\sim$ انهکاس یا هندارون اړیکې یا (Reflexiv)

دویم : که $a \sim b$، نو $b \sim a$ یا که $(a, b) \in\sim$، نو $(b, a) \in\sim$ سیومتریک اړیکې (Symmetrisch)

دریم : که $a \sim b$ او $b \sim c$، نو $a \sim c$ یا که $(a, b), (b, c) \in\sim$، نو $(a, c) \in\sim$ ترانسیتیو اړیکې (Transitiv)

ورته اړیکې یوه ډېرۍ(سټ) په،، ورته ټولګیو،، ویشي.

ډېرۍ یا سټ له ترمو یا عملیو سره

د ښوونځي او هم د شمېرپوهنې په ورځني ژوند کې له دې سره بلد یو، چې له کومو سره ترمونه ساده کېدی شي. دا زیات وخت ډېره مرسته کوي. د بېلګې په توګه د دېستزیبوتیو قانون په مرسته لاندې ترم خورا زر ګڼلی شو، لکه بې له دې قانون.

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{13}{2}\right) \cdot \frac{8}{13} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{13} + \frac{13}{2} \cdot \frac{8}{13} = \frac{1}{13} + 4 = 4\frac{1}{13}$$

د بینوم لومړۍ جملې هم د دیستریبوتیو قانون ډېر واره استعمالول دي

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = (a+b)\cdot a+(a+b)\cdot b = a\cdot a+b\cdot a+a\cdot b+b\cdot b =$$
$$= a^2+2ab+b^2$$

په لاندې برخه کې اوس شمېرنې نور قوانين ، چې د اکسيومونه بلل کيږي و تعريفو. دا قوانين د ډېريو لپاره صدق کوي د اړونده ترنو سره. زيات وخت پوښتنې رامنځ ته کيږي، چې دا االکسيومونه له کومه راځي. اکسيومونه خويونه ل ري، چې دا په ساده توګه تعريفيږي، بې له ثبوته. طبعأ دا په خوښه نه ټاکل کيږي. مګر په لومړي سر کې يا د پيل زده کوونکو لپاره په دې بسيا کوو، چې دا دې شتون ولري.

لاندې برخه (که ټوټه برخه يا کښته برخه):

Unterabschnitte

موږ او يو په بل پسې يوګوني تعريفونه ورکوو. له دې سره پورته و کښته لور ته تل زيات امسيمونه باور لري. د بيلګې په توګه تنونه يا اجسام له دوه کموتاتيو ګروپونو منځ ته راځي، يو ځل نسبت جمعې يا زياتون + ته او يوځل نسبت و ضرب · يا * ته او دې سره اړونده ديستريبوتيو قانون څخه يو ځای يا په ګډه، يعنې بدن يا تن يا جسم له ګروپ څخه زيات دی.

ګروپ

يوه حوړه يا يو ګون $(G,+)$ ، چې G يوه ډېری ده او $+$ يوه ترنه يا عمليه ده،

$$+ : G\times G\to G$$

ګروپ بللکيږی، که لاندې اکسيومونه پوره وی:

G1 : $(a+b)+c = a+(b+c) \forall\ a,b,c \in G$ اسوځیاتیو قانون.

G2 : یو $e \in G$ (ناپیلی توکی) شتون لري چې د $\forall\ a \in G$ لپاره لاندې خویونه پوره کوي:

لومړی: $e + a = a$

دویم : د هر $a \in G$ لپاره یو $a' \in G$ شتون لري (په څټ یا برعکس توکی) د $a' + a = e$ سره

د ابل - یا کموتاتیو ګروپ **Abelsche / kommutative Gruppe**

یو ګروپ د ابل ګروپ بلل کیږي، که د د ګروپ د اکسیومونو **G1** او **G2** برسېره دا $a+b = b+a$ هم $\forall\ a,b \in G$ باور ولري (کموتاتیو قانون) *(Kommutativgesetz)*.

کړی Ring

یو ګون $(R,+,*)$ ، چېرته چې R یوه ډېری او $+,*$ دوه ترونونه یا عملیې دي د لاندې سره

$$+ : R \times R \to R \qquad * : R \times R \to R,$$

کړی یا رینګ بلل کیږي، که لاندې اکسیومونه پوره وي:

R1 : د **+** سره یو ځای کموتاتیو ګروپ (اسوشاتیوؤ ناپیلی توکی، په څټ یا برعکس توکی دی.

R2 : $(a*b)*c = a*(b*c) \forall \; a,b,c \in R$ (د $*$ لپاره اسوشاتیو دی.

R3 : دپستربوتیو قانون باور لري:

(a) $\forall \; a,b,c \in R : (a+b)*c = a*c + b*c$

(b) $\forall \; a,b,c \in R : a*(b+c) = a*b + a*c$

کړۍ د یوي توکي (واحد توکي) سره Ring mit Einselement

$(R,+,*)$ یوه کړی ده، له دې امله باور لري:

$\exists 1 \in R$ (ناپیلی توکی یا یوې توکی د ترڼې لپاره) د هغه لپاره چې باور لري:

$1*a = a$

کموتاتیو کړۍ:Kommutativer Ring

$(R,+,*)$ یوه کړی ده، له دې امله باور لري:

$\forall \; a,b \in R : a*b = b*a$ (د $*$ لپاره کموتاتیو قانون)

کموتاتیو کړۍ د یوی توکي (واحد عنصر) سره

کړۍ، په کومو کې چې کموتاتیو قانون باور لري او دا هم یو یویتوکی ولري، یعنې د دوه پورته اکسیومونو سره، کموتاتیو کړۍ د یویتوکي سره بللکیږي.

بدن یا تن یا پتۍField Körper

یو ارزښت نظم یا توپل $(K,+,*)$ یو تن دی، که باور ولري

K1 : د کموتاتیو کړۍ اکسیومونه د یویتوکي سره باور لري.

K2: $\forall a \in K \exists a^{-1}$ ، داسې چې $a * a^{-1} = 1$ باور لري (د ترڼې $*$ لپاره په څټ یا برعکس توکی)

پولینوم کړۍ Polynomring

$\mathbb{K}$ دې یو تن وي. د $\mathbb{K}_n[t]$ ډېرۍ د لاندې بڼې پولینومونو څخه جوړه ده

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$$

د کومو سره $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ ، t یوه اووښتونې(متحوله) او n د پولینوم درجه بللکیږي. د پولینومونو دا ډېرۍ یو کموتاتیو کړۍ ده. د یوه پلینوم P خورا جګ ضریب(څلوونی) - په پورتنۍ بېلګه کې یعنې n ، چې باید $a_n \neq 0$ وي - د پولینوم درجه بللکیږي. که دا 0 وي، یعنې د ټولو i لپاره $a_i = 0$ ، نو دا پولینوم صفر پولینوم بلل کیږي. د صفرپلینوم درجه ناپای ده:

$$\deg P := \begin{cases} \infty & \text{falls } P = 0 \\ n & \max \ (i \text{ für das gilt } a_i \neq 0) \end{cases}$$

پاتې ټولګي یا باقي ټولګي Restklassen

اوس غواړم د بدن لپاره یوه بله بېلګه دروپېژنم یا معرفي کړم، د لومړنیو ګڼونو پاتې ټولګي. د لومړنیو ګڼونو پاتې ټولګي کېدی شي بدنونه شي، داسې چې په هغو کې

جمعه(زیاتون) او ضرب(ځل) تعریف شي. داسي تنونه $\mathbb{F}_p$ بللکیږي یعني د بېلګې په توګه $\mathbb{F}_7$ د پاتېتولګي 7 لپاره. په روځني ژوند کې د پاتې تولګي سره ډېر شمېرل کیږي، د بېلګې په توګه د لیکنیزې جمعې سره [2.2] :

$$\begin{array}{rrr} & & 8 \\ + & {}_1 & 9 \\ \hline & 1 & 7 \end{array}$$

موږ 8 او 9 د 7 سره جمعه کړل چې چېرته موهغه لاس ته راغلی زیات هېر کړی نه دی. موږ اوس کړی شو چې هغه زیات یا لاس ته راغلی پرېږدو او ولیکو

$$8 \bmod 10 + 9 \bmod 10 \equiv 7 \bmod 10$$

چېرته چې ،، mod ،، مودولو**modulo** په معنا دی، یعني د وېش پاتې یا باقي.

په ورته توګه نور پاتې تولګي هم تعریفولی شو. د دې په څایچې په 10 یې ووېشو په 3 یې وېشو.

$$\begin{array}{rrr} & & 3 \\ + & {}_1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 \end{array}$$

د دې لپاره کړی شو، چې یو د جمعې او ضرب جدول جوړ کړو:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

په همدې توګه دا کار بیا کړو، دا وار د پاتې تولګي 4 لپاره:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

اوس کړی شو د بدن اکسیومونه په یوګوني ډول په هغو پاتې ټولګیو پورې اړونده بدن باندې د جدول ارزښتونو په مرسته و ازمایو. کموتاتیو قانون باور لري، که جدول په دوه -کونجتړې(قطر) باندې هنداروني یا انعکاس سیومتریک وي. په ځټ یا معکوس توکی شتون لري، که د جدول په هره لیکه او هره مټه کې د بدن هر توکی یوځل منځ ته راشي یا شتون ولري. صفرتوکی شتون لري، که په هره لیکه او هره مټه کې منځ ته راشي یا شتون ولري. اسوځیاتیو او دېستریبوتیو قوانین له جدول ځخه په ساده توګه نه شي لوستل کېدی.

وروسته له دې چې دا نښلونټکي(د نښلونو ټکي) لرو، پېژنو، چې بدن $\mathbb{F}_4$ شتون نه لري. دا د ضرب د معکوس توکی قانون په خلاف دی. داسې x نه شته چې$2 \cdot x = 1$ باوري کړي

یعنې د4 پاتې ټولګي ځخه بدن نه شي جوړېدلای. برعکس یو بدن $\mathbb{F}_3$ له پاتې ټولګي 3 ځځخه ممکن دی، ځکه چې هېڅ اکسیوم نه زیانمن یا زخمي کیږي: ګورو چې سیمتریک، برعکس او ناپیلی توکي شتون لري . همداسې د نږدې پسې ازمایلو ځخه ګورو چې اسوځیاتیو او دېستریبوتیو قوانین هم باوري دي.

که نور هم ځیرنه ژوره کړو، نو په دې کې یو سیستم ګورو، چې کله یو پاتې ټولګی p یو بدن$\mathbb{F}_p$ کیږي. دا حالت تېک هلته رامنځ ته کیږي، چې p یو لومړنی ګڼ(عدد) وي. دا ثبوت دلته نه راوړو.

مګر غواړو چې په پای تعریف کړو، چې یو کرکتریستیک (خوی ټاکونی) ځه شی دی او ولې د یوه په خوښه بدن $\mathbb{K}$کرکتریستیک تل یو لومړنی ګڼ او یا 0 دی:

پیژند(تعریف):

$\mathbb{K}$ دې یو ردن وي او 1 د ضرب یو ناپیلی توکی(یوونتوکی، عنصر واحد) وي. د یوه زیاتیز یا مثبت عدد n لپاره د $n \cdot 1$ لاندې پوهیږو

$$n \cdot 1 = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ mal}}.$$

د بدن $\mathbb{K}$ کرکتريستيک په لاندې توګه تعريف دی

$\mathrm{char}\mathbb{K} = \begin{cases} 0 \\ n \end{cases}$	که n>0 شتون ونه لري، چې n.1=0 باور ولري که nشتون ونه لري، چې باور ولرn1=0

ښوونه: n تل يو لومړنی ګڼ دی:

وي دې $n \neq 0$ (د تعريف دويم حالت). که n لومړنی عدد نه وی، نو دا په لاندې ضقيبونو ټوټه کيږی [2.3] .

$$\begin{aligned} & n1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (n_1 \cdot n_2)1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & n_1 1 \cdot n_2 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & n_1 1 = 0 \wedge n_2 1 = 0 \end{aligned}$$

دا تضاد دی. ځکه چې $n_1 < n$ او $n_2 < n$ بايد کرکتريستيک char $\mathbb{K} = n_1$ اويا char $\mathbb{K} = n_2$ کرکتريستيک وي. دی char $\mathbb{K}$ = n او له دې سره n په ضريبونو نه شي ټوټه (تجزيه) کېدی، نو له دې امله يو لومړنی عدد دی.

موږ د ښوونځي ځخه غوره بدنونه پيژنو، لکه د هوښيار اعدادو(کسري-) $\mathbb{Q}$ ، د ريل يا حقيقی اعداد $\mathbb{R}$ بدنونه او ورپسي د کمپلکس اعدادو $\mathbb{C}$ بدنونه هم. دا ټول زدنونه کرکتريستيک 0 لري. نور د اعدادو غوره ډېرۍ هم شته لکه د ټول ګڼونو (- اعدادو) ډېرۍ. دا فقط يو کموتاتيو ګروپ جوړوي، ځکه چې په نسبت و ضرب ته معکوس توکی نه لری. دا له دې امله داسي ده،چې موږ په دې عددونو کي ماتونه(کسرونه) نه لرو. د ټولو طبيعي اعدادو $\mathbb{N}$ ډېرۍ چې 0ورسره تړلی دی او يا نه،

متأسفانه چې حتا يو ګروپ هم نه دی، ځکه چې د جمعي معکوس توکي نه لرو، د بېلګې په توګه د $3+x=1$ لپاره x شتون نه لری، ځکه چې $x=-2$ شتون نه لري.

وکتور فضا **der Vektorraum**

لاندې برخه

کربنيزبلواکوالی (خطي تابعيت)

يادونه (ژباړی): ګ‌ړو چې دلته مو تابع کليمه، چې د فنکشن لپاره کارول کيږي، ناتيکاوي ته لاربنودوي. دلته د بلواکوالي يا تابعيت څخه موخه فنکشن نه دی. پای.

يو د وکتورونو $(v_1, \dots, v_n)$ کورنۍ کېدی شي کربنيز بلواکه يا کربنيز خپلواکه وي، نه دواړه يو ځای کېدی شي او هم نه له دوه ځخه يوه هم نه . يوه کورنۍ هغه ډېرۍ ده، چې يو توکی په کې دوه ځله هم راتلی شي. پس موږ په خوښه وکتورونه لرو- په کوم کې چې همغه وکتور ختی دوه ځله راتلی شي- کوم چې موږ داپه خپلو اړيکو کې يو له بل سره ځېږو.

کربنيز خپلواکوالی

V دې يو $\mathbb{K}-$ -وکتورفضا وي. يوه د وکتورونو $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ پای کورنی له V ځخه کربنيز خپلواک بلل کيږی، که له $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

ځخه لاس ته راشي، چې $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ دي.

دا په دې معنا، چې صفر وکتور د نورو وکتورونو $v_1, v_2, \ldots, v_n$ څخه ساده ترکيب کيدی شي

کرښيز بلواکواکوال:

V دې بيا هم يو $\mathbb{K}-$ -وکتورفضا وی. يوه د وکتورونو $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ پای کورنۍ له V څخه کرښيز بلواک بلل کيږی، که له $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

لاس ته راشي، چې هم ساده حل $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ شته ، او هم يو حل له کوم سره چې لږ تر لږه يو $(1 \leq i \leq n)\, \lambda_i \neq 0$ دی.

دا په دې معنا دی، چې موږ صفروکتورونه د ساده حلونو يا اوبيونو څخه په بل ډول هم د وکترونو د کورنې څخه جوړولی شو

د وکتور فضا تعريف:

اوس د وکتورفضا تعريف ته راځو:

$\mathbb{K}$ دې يو بدنوي. يودرېګون $(V, +, *)$ چې V يوه n-ګون

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

او $+$ او $*$ ترني يا عمليې وي

$$+ \quad : \quad V \times V \rightarrow V$$
$$* \quad : \quad \mathbb{K} * V \rightarrow V$$

$\mathbb{K}$ -وکتور فضا بلل کيږي، که لاندې اکسيونونه باور ولري:

$(V, +)$ يو کموتاتيو ګروپ دی.

S1 : $\forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V$ باور لري $\lambda * (\mu * v) = (\lambda * \mu) * v$ (آسوځياتيو قانون)

S2 : $1 \in \mathbb{K} : \forall \ v \in V : 1 * v = v$ (ناپيلی توکی)

D1 : $\forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V$ باور لري $(\lambda + \mu) * v = \lambda * v + \mu * v$ (ديستريبوتيو قانون)

D2 : $\forall \ \lambda \in \mathbb{K}, v, w \in V$ باور لري $\lambda * (v + w) = \lambda * v + \mu * w$ (دېتريبوتيو قانون)

د یوه وکتور فضا جوړونه يا که غواړی تولید Erzeugen eines Vektorraums

اوس غواړو $n-$ ګونی 3.1 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، چې دوکتورفضا د تولید لپاره اړتی ورته لرو تولید کړو. دا کړی شو که موږ دا ټول ولیکو . دا د ډېرو کمو وکتورونو لپاره هم موخه ور دی. مګر د زياتو وکتورفضاو لپاره دا نا ممکن دی، څکه چې موږ ناپای ډېر ګونونه لرو. موږ باید دا د یوه شمېرقانون سره تولید کړو.

کربنيز ترکيبوالی

وي دي $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ په $\mathbb{K}-$ -وکتور فضا کې يوه د وکتورونو کورنۍ. هر د $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K})$ بڼې

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

وکتور v د $v_1, v_2, \ldots, v_n$ کربنيز ترکيب بلل ګيږی.
اوس ، د کلمو،، کربنيز خپل(بل)واک،، او د ،،کربنيز ترکيب،، ترمنځ يو ځو ښوونې يا ثبوتونه راړل کيږی. د دې ښوونو لاس ته راوړنې به شايد د ډېرو زده کړو په غوښنه او وينو ته تللي وي. تاسو پوهيږئ چې دا داسې دی. خو بيا هم موږ بايد دا يو ځل وښايو:

جمله ؛

که د کورنی $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتورونه يو بل ته کربنيزخپلواک وي، نو کېدی شي هر وکتور $v \in L(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ د دوی له لارې په يوه ټاکلې لار ترکيب شي. له

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \qquad v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n$$

ځخه لاس ته راځي

$$\lambda_1 = \mu_1; \quad \lambda_2 = \mu_2; \quad \lambda_n = \mu_n$$

ښوونه:

$$\begin{aligned} & v = v \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n \\ \Leftrightarrow \quad & (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + (\lambda_2 - \mu_2) v_2 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0 \end{aligned}$$

د کربنيزخپلواکوالي له امله باور لري:

$$\lambda_1 - \mu 1 = 0;\ \ \lambda_2 - \mu_2 = 0;\ \ldots\ \lambda_n - \mu_n = 0$$
$$\Rightarrow\ \ \lambda_1 = \mu 1;\ \ \lambda_2 = \mu_2;\ \ldots\ \lambda_n = \mu_n$$

له دې سره کېدی شي وکتور ټيک په يوه ډول ترکيب شي.

برعکس يا په ځټ کيدی شي وښوول شي:

جمله :

که چيرې يو وکتور v ټيک په يوه ډول له وکتورکورنيو $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ څخه د کرښيز ترکيب کيدی شي، نو نو د دې کورنی وکتورونه يو بل ته کرښيز خپلواک دي.

ټيک په يوه ډول تکيبوړ په دې معنا دی، چې که

$$\begin{aligned} & v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \\ \text{und}\quad & v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n \end{aligned}$$

باور ولري، $\lambda_1 = \mu_i$ باور لري او له دې سره $\lambda_i - \mu_i = 0$

$$\begin{aligned} & v = v \\ \Leftrightarrow\quad & \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n \\ \Leftrightarrow\quad & (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0 \end{aligned}$$

داچې $\lambda_i - \mu_i = 0$ د $1 \leq i \leq n$ لپاره د کورنې وکتورونه کرښيز خپلواک دي.

جمله:

که د يوې کورنې $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتورونه کرښيز بلواک وي، نو له يوه څخه زيات امکانات شته چې وکتور v ترکيب کړو. کرښيز بلواک په دې معنا دی، چې لږ ترلږه يوه v_i لپاره $(1 \leq i \leq n)$ باور ولري:

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n.$$

ښوونه:

که موږ وکتور v ولرو، کړی شو دا په لاندې ډول ترکیب کړو:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n.$$

له دې ځخه لاس ته راځي $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. اوس کړی شو دا پورته یادشوی کرښیز ترکیب د v_i لپاره ځای په ځای کړو او لاس ته راړو

$$\begin{array}{rcl} v & = & \lambda_1 v_1 + \ldots + \\ & & \lambda_i \cdot (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n) \\ & & + \ldots + \lambda_n v_n \\ \Leftrightarrow \quad v & = & (1+\lambda_i)\lambda_1 v_1 + \ldots + (1+\lambda_i)\lambda_n v_n \end{array}$$

نو $(1+\lambda_i)\lambda_1, \ldots, (1+\lambda_i)\lambda_n$ یو نوی امکان دی چې v ترکیب کړو او د دې سره همدا اوس دوه امکانات لرو

موږ کړی شو چې لاندې دوه واقعیتونه هم ثبوت کړو:

جمله :

که یو وکتور v_i د کورنی $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ کرښیز د کورنۍ $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ ځخه نه شي ترکیبېدی، نو د کورنی $(v_1, \ldots, v_n)$ وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

ښوونه:

نیسو چې دا کرښیز بلواک دي. داپه دې معنا، چې د

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

لپاره لږ تر لږه د يوه λ_i لپاره $(1 \leq i \leq n)$ باور لري

$$\lambda_i \neq 0$$

دا په دې معنا چې

$$\begin{aligned} & \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n = -\lambda_i v_i \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\lambda_1}{-\lambda_i} v_1 + \ldots + \frac{\lambda_{i-1}}{-\lambda_i} v_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{-\lambda_i} v_{i+1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{-\lambda_i} v_n = v_i \end{aligned}$$

نو کېدی شي، چې v_i له $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ کرښيزه ترکيب کړاي شي. دا نيونې ته تضاد دی. نو بايد وکتورونه کرښيز خپلواک وي.

په همدې توګه برعکس ی په ښتې هم باور لري:

جمله:

که د کورنی $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتورونه يو بل ته کرښيز خپلواک وي، نو کوم يو وکتور د بل ځخه کرښيز ترکيب کېدی نه شي.

ښوونه:

نيسو، چې دا شونی دی، يو وکتور v_i $(1 \leq i \leq n)$ کېدی شي کرښيز ترکيب کړاي شی. نو باور لري:

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n$$

ګورو، چې $\lambda_i \neq 0$ دی، څکه چې $\lambda_i = -1$. او د کورنۍ وکتورونه به کرښيز بلواک وی. تضاد. بو دا ممکن نه ده، چې له دې وکتورونو څخه کوم یو له بل څخه کرښيز ترکيب کړي، څکه چې بيا به کرښيز خپلواکوالی زخمي شوی یا زیانمن شوی وي.

سپاین یا کرښیزه **Spann**،(**(کرښيزه) رابنده ورشو)lineare Hülle**، **Abschluss**

په یوه $\mathbb{K}-$ - وکتورفضا کې د یوې کورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ د ټولو کرښيز ترکيبونو ډېرۍ سپاین یا کرښيزه رابنده ورشو بلل کيږي

$span(v_1, \ldots, v_n)$

یا د وکتورونو د کورنۍ کرښيزه (که غواړۍ) سمڅه(**Hülle**)

روښانه دې وي: د یوه سپاین وکتورونه ناجبري کرښيز خپلواک نه دي.

جوړښتسيستم (توليدي سيستم) Erzeugendensystem

د وکتورکورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ د وکتور فضا V توليدی سيستم بلل کيږی، که باور ولري

$$V = span(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

داپه دې معنا چې وکتورونه د وکتور فضا V مکمله یا پوره غزوي.

دلته کېدی شي، چې د وکتورونو کورنۍ کرښيز بلواک یا کرښيز خپلواک وی. دا یواځې باید وکتور فضا و غزوي.

بنسټ Basis

د وکتورونو $(v_1,\dots,v_n)$ کورنۍ د وکتور V بنسټ بلل کيږي، که د کورنۍ يوګوني وکتورونه

- يو بل ته کرښيز خپلواک دي

- او که د وکتورونو کورنۍ ټول وکتور V وغزوي، يعنې د V يو توليدي(جوړختيز) سيستم دی:

$$V = span(v_1,\dots,v_n)$$

او

$$\text{und}\quad \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

له دې سره يو توليدي سيستم ټيک هلته يو بنسټ دی، چې د دې توليدي سيستم وکتورونه يو بل ته کرښيز خپلواک دي.

د شتاينيځ بدلونجمله Austauschsatz von Steinnitz

جمله:

په يوه د $\mathbb{K}-$ - وکتورونو کورنۍ(که فضا) V کې دې يو بنسټ

$$B := \{v_1,\dots,v_r\}$$

او يوه کرښيز ځپلواکه کورنې

$$(w_1,\dots,w_n)$$

ورکړ شوي وي.

دی $r \geq n$. سړی کړی شي د بنسټ n وکتورونه د nکربنیز خپلواکو کتورونو کورنیو سره بدل کړای شي، داسې چې نوی بنسټ B^* بېرته کربنیز خپلواک دی او د وکتورفضا V_K بنسټ دی. د ایدنکس د ګڼې بدلون وروسته کېدی شي داسې ولیکو:

$$B^* := \{w_1, \ldots, w_n, v_{n+1}, \ldots, v_r\}$$

$$B^* := \{w_1, \ldots, w_n, v_{n+1}, \ldots, v_r\}$$

یا په ځانکړي حالت $n = r$:

$$B^* := \{w_1, \ldots, w_n\}$$

ښوونه:

ښوونه د بدلون لیما سره صورت نیسي. دا دبدلون لېما) وړه چمله) د د بنټ څخه یو وکتور اخلي او یو بل ورزیاتوي:

بدلون جمله ګی Austauschlemma

یو $K-$ -وکتورفضا V دې د بنسټ

$$B := \{v_1, \ldots, v_r\}$$

سره ورکړ شوې وي او یوه w د

$$w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + \underline{\underline{\lambda_k v_k}} + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_r v_r \in V$$

د $\lambda_k \neq 0 \quad (\star)$ سره او

$$\lambda_k \neq 0.$$

نو

$$B' := \{v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_r\}$$

بېرته یود V بنسټ دی .

یعنې سرې کړی شي v_k د w وکتور سره بدل کړي. (دا نور $\lambda_1 \dots \lambda_r$ بې له λ_k باید حتماً 0 نه وي.، مګر دوی کړی شي).

د بدلون جملې ښوونه**Beweis des Austauschlemmas** :

د لیکنې د ساده کونې لپاره نیسو، چې$k = 1$ دی. موږ ښایو چې

$$B' := \{w, v_2, \dots, v_r\}$$

هم د V_K بنسټ دی.

- د بنسټ 3.2 ټول وکتورونه $v \in V$ د کربنیزترکیب په څېر لیکل کېدی شي یعنې

$$v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r \quad (\star\star)$$

داچې $\lambda_1 \neq 0$ دي، کړی شو په لاندې ډول یې بنهبدل کړو

$$\begin{aligned} & w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \qquad (von \ \star) \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_1 v_1 = w - \lambda_2 v_2 - \dots - \lambda_r v_r \\ \Leftrightarrow \quad & v_1 = \tfrac{w}{\lambda_1} - \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \tfrac{\lambda_r}{\lambda_1} v_r \end{aligned}$$

- اوس کړی شو دا په ⋆⋆ کې ځای په ځای کړو

$$\begin{aligned} v &= \mu_1\left(\frac{w}{\lambda_1}-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}v_2-\ldots-\frac{\lambda_r}{\lambda_1}v_r\right)+\ldots+\mu_r v_r \\ &= \mu_1\frac{w}{\lambda_1}-\mu_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1}v_2-\ldots-\mu_1\frac{\lambda_r}{\lambda_1}v_r+\ldots+\mu_r v_r \\ &= \frac{\mu_1}{\lambda_1}w+\left(\mu_2-\mu_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)v_2+\left(\mu_3-\mu_1\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)v_3+\ldots+\left(\mu_r-\mu_1\frac{\lambda_r}{\lambda_1}\right)v_r \end{aligned}$$

له دې لاس ته راځي، چې نوی بنسټ لږ تر لږه يو توليدي سيستم دی.

- اوس پاتې دادی چې کرښيز خپلواکوالی و ښايو
$\mu w+\mu_2 v_2+\ldots+\mu_r v_r=0$

د $\star$ ځا ي په ځای کونه:

$$\begin{aligned} & \mu(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_r v_r)+\mu_2 v_2+\ldots+\mu_r v_r=0 \\ \Leftrightarrow\quad & \mu\lambda_1 v_1+(\mu\lambda_2+\mu_2)v_2+(\mu\lambda_3+\mu_3)v_3+\ldots+(\mu\lambda_r+\mu_r)v_r=0 \end{aligned}$$

نو $\mu\lambda_1=\mu\lambda_2+\mu_2=\mu\lambda_3+\mu_3=\ldots=\mu\lambda_r+\mu_r=0$ ، څکه چې B کرښيزخپلواکه وه ($\mu_2=\mu_3=\ldots=\mu_r=0$) او $\mu=0$ ، څکه چې $\lambda_1\neq 0$.

له دې څخه کرښيز خپلواکوالی لاس ته راځي

د بدلون جملې ښوونه:

له دې وروستهچې ومو ښوول، چې سرې يو وکتور v_k له بنسټ څخه را اخستی شي او د وکتور w سره يې بدلولی شي، که دا اړونده $\lambda_k\neq 0$ وي(کړی شي، چې د نمرې يا ګڼې بذلون سره اِه ټيک ځای ته راوړل شي)، بايد وښايو، چې د زاړه بنسټ لپاره تل داسې يوه $\lambda_k\neq 0$ شتون لري، داسې چې موږ وکتورونه پرلپسې سره بدلولی شو:

- که صفر وکتورونه سره بدل کړو، نو ښوونې ته نه اړکیږو. موږ اړیین نه یو چې کوم وکتور پیدا کړو، چې له هغو سره بنسټ وکتور بدل کړو. دا زموږ د ایندکشن پیل دی.

- زموږ د ایندکشن نیونه ده، چې k وکتورونه مو سره بدل کړي دي او بېرته مو یو بنسټ لاس ته راوړی دی:

$$B' = \{w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_r\}$$

- د ایندکشن پای :

که موږ وکتور w_{k+1} بدل کړو، نو باید یو λ_i د $k+1 \leq i \leq r$ سره پیداکړو، د کوم لپاره چې $\lambda_i \neq 0$ باور لري. باور لري :

$$w_{k+1} = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k + \underbrace{\lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_r v_r}_{\text{mindestens ein } \lambda_i \neq 0}$$

دا پورته لږ تر لږه یوه $\lambda_i \neq 0$.

دا چې کرښیزخپلواکه کورنۍ $(w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}, \ldots)$ کرښیز خپلواکه وه، اجازه نه شته چې $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k \neq 0$ وي، ځکه چې پرته له دې کرښیز خپلواکوالی زحمي شوی وي.

داچې w_{k+1} هم صفر وکتور نه دی، ځکه چې بیا به کرښیز خپلواکوالی زخمي شوی وي، نو یو λ_i ($k+1 \leq i \leq r$) شتون لري د $\lambda_i = 0$ سره.

د ښوونې ځخه لاس ته راوړنه

- که یو $K-$ - وکتورفضا V یو پای بنسټ ولري، نو د V هر بنسټ پای دی.
- د یوې وکتورفضا هر دوه بنسټونه برابر اوږدوالی لري.
- بنسټ پوره کېدنه:

په یوه پای تولېدکېدونکي وکتور فضا Vکې دې کرښیز خپلواک وکتورونه $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ورکړل شوي وي. نو کېدی شي سرې پیدا کړي، داسې چې

$$B := \{w_1, w_2, \ldots, w_n, w_{n+1}, \ldots, w_r\}$$

د V یو بنسټ وي.

- $v_i, \ldots, v_n$ دې د کرښیز خپلواک وکتورونو ډېرۍ وي، چې یوه وکتور فضا غزوي، نو د $v_i, \ldots, v_{n+1}$ ډېرۍ په هر حالت کرښیز بلواک ده.

دا په دې معنا چې بل وکتور نه شي پیداکېدی چې و $v_i, \ldots, v_n$ ته کرښیز خپلواک وي.

- د بنسټ بدلید جمله:

$v_i, \ldots, v_n$ دې کرښیز خپلواک وکتورونه وي، چې یوه وکتور فضا غزوي(دا په دې معنا چې دا یو بنسټ دی)، نو $w_i, \ldots, w_n$ کرښیز خپلواک وکتورونه ، چې د وکتورونو$v_i, \ldots, v_n$ د کرښز ترکیب څخه جوړیدی شي، برابره وکتورفضا غزوي.

بعد یا پراخېدونی(Dimension)

که Vیوه $K-$ - وکتور فضا وي، نو تعریفوو

$dim_k V = \begin{cases} \infty \\ r \end{cases}$	که V پای بنسټ ونه ري، کهV د r اوږدوالي بنسټ ولري

د پراخېدوني یا بعد جمله:

وي دې $f : V \to W$ (V, W دلته $\mathbb{K}-$ -وکتورفضاوې دي) يو کرښيزبلواک. نو د بعد ياپراخېدوني جمله باور لري:

$$dim\ \ V = dim\ \ Bild(f) + dim\ \ Ker(f)$$

Bildخيره او Ker(Kern) زړی یا هسته

ښوونه :

يادونه:

$dimV$: : دV د بنسټ وکتورونو ګڼون یا تعداد.

$dim\ \ Bild(f)$: : د وکتورونو ګڼون یا تعداد د V د لاندې وکتورفضا Bild (f) کې.

$dim\ \ Ker(f)$: : د f په زړي(هسته) کې د وکتورونو ګڼون یا تعداد. دا بېرته د V لاندې وکتورفضا ده.

لومړی: دا چې زړی Ker (f) د V لاندېوکتورفضا ده، په هر حالت لرو

$$dimV \geq dim\ \ Ker(f).$$

د $v_1, v_2, \ldots, v_n$ د زړي د بنسټونو وکتورونه يو بل ته کرښيز خپلواک دي.

د بنسټتکيلېدوجملې په بنسټ کېدی شي دې بنسټ ته کرښيز خپلواک وکتورنه V ته ورزيات کړي او دا بنسټ په دې توګه د V يوه بنسټ ته پوره یا تکميل کړي:

$$B_V := \{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots v_k\}.$$

لومړی: موږ اوس پرېږدو چې تابع f د وکتورفضا V په بنسټ وڅغلي. نو لاس ته راوړو:

$$Bild(f) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)}_{=0} + \sum_{i=n+1}^{k} \lambda_i f(v_i) = \sum_{i=n+1}^{k} \lambda_i f(v_i)$$

د زړي بنسټوکتورونه په 0 تنظیمیږي یا څېره کیږي . له دې امله د څېرې یا عکس د بنسټوکتورونو ګڼون یا تعداد او له دې سره د عکس پرخېدونی یا بعد دی.

$$\begin{aligned} & dim\ \ Bild = dim\ V - dim\ \ Kern \\ \Leftrightarrow\quad & dim\ V = dim\ \ Bild + dim\ \ Kern \qquad !!! \end{aligned}$$

لاندې وکتور فضا

تعریف (پېژند):

د وکتورفضا V په $\mathbb{K}$ باندې یو لاندې وکتورفضا Uمنځ ته راځي، که سړی د وکتورفضا ټاکلې توکي لرې پرېږدي(لنډ:پرېږدي). له دې سره باید د لاندېوکتورفضا پاتې توکي دا لاندې ځویونه پوره کړی:

- $U \neq \emptyset$

- د ټول $x, y \in U$ لپاره $x + y \in U$ باور لري او د ټولو $x \in U$ ، $\lambda \in \mathbb{K}$ لپاره $\lambda x \in U$ باور لري .

خويونه:

- له دې سره يو وکتورفضا لږترلږه دږه لاندې وکتورفضاوې لري. يو څل دا اکسيومونه پخپله په وکتورفضا کې ورکړل شوي، داسې چې داوکتور فضا و خپل ځان ته لاندېوکتورفضا ده. له بلې خوا هروکتورفضا صفروکتور لري. دا صفر وکتور ځانله هم يوه وکتورفضا ده.

- $U_1 \cap U_2$ لاندې فضاو ده، کهU1 اوU2 لاندې فضاوې وي.

- $V_{\mathbb{K}}$ دې يوه وکتورفضا وي او $v_1, \ldots, v_n \in V_{\mathbb{K}}$. هر کرښيز ترکيب $L(v_1, \ldots, v_n)$ يوه لاندېفضا ده.

د لاندې فضاو لپاره د بعد يا پراخيدوني فرمول

$$dim(U_1 \cap U_2) + dim(U_1 + U_2) = dim(U_1) + dim(U_2)$$

ښوونه د وکتورفضاو د بنسټ د وکتورونو د ګڼون يا تعداد باندې مخ ته بيول کيږي. د وکتورفضا $U_1 \cap U_2$ بنسټ يو څل وکتورفضا U_1 او يو څل وکتورفضا U_2 ته وربوره يا تکميل کيږي. د وکتورفضا $U_1 + U_2$ [3.3]بنسټ د غوځي بنسټ دی جمعه يې دا نور د U_1 او U_2 وکتورونه

فنکشنونه يا توابع ، په ځانګړې توګه کرښيزې-

تعريف: X او Y ډېرې يا ستونه دي. يو تابع f يو ترتيب يا تنظيم دی، د کومو له لارې چې هرتوکی $x \in X$ په ټيم يوه توکي $f(x) = y \in Y$ تنظيم شي

$f:X\longrightarrow Y$

- دا چې دا توکی څنګه ترتیبیږي دا پروا نه لري. لومی په کرښیزو توابعو کې بندیزونه راړل کیږي، دا چې تابع باید کرښیز هوي.

- د Y په توکي کېدی شي د X ډېر توکي وښايي یاپه ډېرو توکو ترتیب یا تنظیم شي. مګر برعکس ممکن نه دی. دا په Y کې توکی، کوم چې د X توکی له ښودل کیږي یا په کوم چې د X توکی تنظیم شي، باید تل یواځنی ټاکلی وي.

د فنکشنونو یا څیرونو(توابعو) خویونه Eigenschaften von Abbildungen

په باندې فنکشن(- تابع) Surjektiv

$f:V\to W$ دې یوه تابع وي. تابع په باندې ده، چه باور ولري:

$\forall\ w\in W\ \exists v\in V$ ، داسې چې $f(v)=w$.

په کې (فنکشن (څیرونه یا تابع)) Injektiv

$f:V\to W$ دې یو تابع وي. تابع په باندې دی، که باور ولري:

$\forall x,y\in V$

$$x\neq y\Leftrightarrow f(x)\neq f(y)\qquad f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$$

په (په باندې او په کې فنکشن یا -- تابع) Bijektiv

په توابع هم په باندې تابع دي او هم په کې تابع (سوزجکتيو، اینجکتیو) دي یخد په باندېولی اوپهکې والی پوره کوي:

$\forall\ w \in W\ \ !\exists\ v \in V$ ، داسي چې باور لري $f(v) = w$. (هر $w \in W$ تيک يو پخوا يا تر مخځېره $v \in V$ لري)

کرښيز فنکشنونه يا توابع Lineare Abbildung

تعريف(پيژند)

يو تابع $f : V \to W$ ، د کوم سره چې V او W وکتورفضاوې دي په همغه بدن K ، کرښيز بلل کيږي(يا د وکتورونو هومومورفيزم)، که $\forall\ x, y \in V$ او $r \in K$ لپاره باور ولري:

$$\begin{aligned} L1: &\quad f(x+y) = f(x) + f(y) \\ L2: &\quad r \cdot f(x) = f(r \cdot x) \end{aligned}$$

سرى کړى شي دواړهاکسيومونه په باندې تکه سره رايوځاى کړي:

$$L : f(r \cdot x + y) = r \cdot f(x) + f(y)$$

زړى(هسته) او عکس يا ځېره Bild und Kern

د يوه تابع $f : V \longrightarrow W$ ځېره يا عکس په لاندې توګه تعريف دى

د لږ ترلږه يوه لپاره.

$$Img(f) := \{w \in W | f(v) = w \text{ für mindestens ein } v \in V\}$$

د یوه تابع $f : V \longrightarrow W$ زړی په لاندې توګه تعریف دی

$$Kern(f) := \{v \in V | f(v) = 0\}$$

ځانګړي کربنيز فنکشنونه (توابع)

یو کربنیز تابع $F : V \to W$

یو مونومورفیزم Monomorphismus بلل کيږي، که F اینجکتیو وي.

ایپیمورفیزم Epimorphismus ، که F سورجکتیو وي،

ایزومورفیزم **Isomorphismus** ،که F بیجکتیو وي،

ایندومورفیزم**Endomorphismus** ، که $V = W$ او

اوتومورفیزم**Automorphismus** ، که $V = W$ او F بیجکتیو وي.

د په باندې، په کې ، په (باندې او کې) فنکشنونو یا توابعو لپاره ښوونه

X→X

وې دی $f : X \to X$. لاندې ویناوې برابر ارزښته یا ایکویوالنت دي:

(i) f په کې دی injektiv

(ii) f ist surjektiv په باندې دی

(iii) f ist bijektiv په دی

دا چې له (iii) څخه (i) او(ii) لاس ته راځي او او څخه لاس ته راځي روښانه ده.

د ښوولو دی چې لومړی. (ii)→(i) او دویم. (i)→(ii)

لومړی: اینجکتیو له دې لاس ته راځي سورجکتیو. دا داسط ښایو، که په کې وښایو، چې،، نه سورجکتیو له دې لاس ته راځي نه اینجکتیو،،. د نور کلمو سره:: تابع سورجکتیو ده، که دا اینجکتیو وي، ځکه چې که سورجکتیو نه وي، نو ایجکتیو به هم نه شوی کېدی:

- په باندې یا سورجکتیو په دې معنا ده،چې د ټولو $x \in X$ لپاره په وتونډېری کې یو $x' \in X$ شتون لري، داسې چې باور $f(x') = x$ لري . که یو تابع په باندې نه وي، نو یو $x \in X$ په کوخه ډېری کې له مخه ځېره ونه لري(یعنې چې دا یې ځېر هوي).

نو $f(X) \neq X$ باور لري .

وي دې $X := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ یعنې $|X| = n$ ، نو $|f(X)| = m < n$ دی[4.1]. نو نو اوس دا **Schubfachprinzip** von Dirichlet (د دیریښلیت(شمیر پوه) د میزکورونو(لکه چې د میز خانه یې پول)، خو داسې چې ډیطر کورګړي ولري(ژباړی) اصول) وایي، چې که n شیان په mکورونو(خانو) کې کېږدو او $n > m$ وي، نو لږ ترلږه په یوه کور کې له یوه زیات شیان باید واچول شي.

د دې لاس ته راوړنې سره اینجکتیووالی نه دی ورکړ شوی، ځکه چې $f(x) = f(x')$ مګر $x \neq x'$ (ټیک هلته چې په یوه کور کې دوه توکي پراته دي).

دویم : سورجکتیو له دې لاس ته راځي اینجکتیو. موږ ښایو چې که تابع اینجکتیو نه وي، نو سورجکتیو هم نه ده.

1. f په کې نه ده، نو $f(x) = f(x')$ شتون لري د $x \neq x'$ سره . نو $f(X) \neq X$ دی او دا چې لږ تر لږه په $|f(X)| < |X|$ کې یو توکی کم دی لږ تر لږه $|f(X)| = n - 1$ کېدی شي وي ، داسې چې $|f(X)| < |X|$ او له دې

سره تابع په باندې نه ده، داسې چې په موخه ډېرۍ کې يو توکی $x \in X$ شتون لري د کوم لپاره چې په وتونډېرۍ کې $x' \in X$ شتون نه لري.

F په کې(اينجکتيو) $\Leftrightarrow$ Ker (F) = 0

وي دې $F : V \to W$ او $x, v_1, v_2, n \in V$ او $0 \in W$

له دې لاس ته راځي:

دا چې F په کې يا اينجکتيو دی نو هر شکل يا ځېره يو پخوا يا ترمخ شکل لري.

د 0 پخواشکل يا ترمخ شکل يا ځېره دې n وي. $\Longleftrightarrow$
$Ker(F) = \{n\} \Rightarrow F(n) = 0$

دا چې کرښيز دی بايد باور ولري:

$$\begin{aligned} & F(x) + F(n) = F(x+n) \\ \Leftrightarrow\quad & F(x) = F(x+n) - F(n) \\ \Leftrightarrow\quad & F(x) = F(x+n) - 0 \\ \Leftrightarrow\quad & F(x) = F(x+n) \\ \Rightarrow\quad & n = 0 \end{aligned}$$

نو $Ker(F) = 0$

له دې لاس ته راځي ($\Leftarrow$) :
$Ker(F) \Leftrightarrow \{v \in V | F(v) = 0\}$

د په باندېوالي خوونه: دا چې تابع کرښيزه دی با ور لري:

د په کې والي ښوونه:

$$\begin{aligned} & F(v_1) = F(v_2) \\ \Leftrightarrow\quad & F(v_1) - F(v_2) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & F(v_1 - v_2) = 0 \\ Da\ Ker(F) = 0 \quad \Rightarrow\quad & F(v_1 - v_2) = F(0) \end{aligned}$$

له دې سره دی $v_1 = v_2$.

L په کې ⇔ کربنيزخپلواک وکتورونه په کربنيز خپلواک وکتورونو څېره کيږي

L په کې ⇔ کربنيزخپلواک L کربنيز خپلواک

له دې لاس ته راځي(⇐:) :

ښايو: $L(v) = L(w) \Rightarrow \ldots \Rightarrow v = w$

وي دې $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ بنسټ، $v, w \in V$ او بنسټ او

$L(v_1), \ldots, L(v_i), \ldots, L(v_n)$ کربنيز خپلواک

$$\begin{array}{ll} & L(v) = L(w) \\ \Leftrightarrow & L(\sum \lambda_i v_i) = L(\sum \mu_i v_i) \\ \Leftrightarrow & \sum \lambda_i L(v_i) = \sum \mu_i L(v_i) \\ \Rightarrow & \sum (\lambda_i - \mu_i) L(v_i) = 0 \end{array}$$

(د کربنيز کمبينيشن د يواځيوالي له امله)

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow & \sum (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0 \\ \Rightarrow & v = w \end{array}$$

په کې والی ښايي

له دې لاس ته راځي يا

⇒:

ښايو: $L(\sum \lambda_i v_i) = 0$

$$\begin{array}{ll} & \sum \lambda_i v_i = \sum \mu_i v_i \\ \Leftrightarrow & \sum \lambda_i L(v_i) = \sum \mu_i L(v_i) \end{array}$$

د ا ينجکتيويتي له امله

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \sum(\lambda_i - \mu_i)L(v_i) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \sum(\lambda_i - \mu_i) = 0 \\ &\Rightarrow \quad L(\sum \lambda_i v_i) = 0 \end{aligned}$$

د ارزښتوني فنکشنونه یا توابع یا څېروني

موږ د بېلګې په توګه درې پولینومونه P_1, P_2, P_3 لرو د لاندې سره

$$\begin{aligned} P_1 &= (x-1)(x-2)(x-4) \\ P_2 &= (x-3)(x-5)(x-1) \\ P_3 &= (x-4)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

موږ اوس کړی شو یو د ارزښتوني تابع یا ځېرونه تعریف کړو(a ځای دی په کوم کې چې ارزونه کیږی)

$$W_a(P) : P \mapsto P(a)$$

د ارزښتوني پولینوم کرښیز دی ځکه چې لاندې $\forall\ P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ او $\lambda \in K$ [4.2] باور لري :

$$W_a(\lambda P + Q) = \lambda W_a(P) + W_a(Q)$$

په دې توګه د ارزښتوني تابع سره کرښیز خپلواک وکتورونه په کرښیز خپلواک وکتورونو ځېره کیږي ای ماپینګmapping جوړوي، دا په دې معنا چې

P_1, P_2, P_3 کرښیز خپلواک دي، که $W_a(P_1), W_a(P_2), W_a(P_3)$ کرښیز خپلواک وي.

موږ د

$$\lambda_1 W_a(P_1) + \lambda_2 W_a(P_2)) + \lambda_3 W_a(P_3) = 0$$

لپاره ښايو

: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$:

$P(1)$ په دې معنا چې P د 1 په ځای کې ارزښتول کيږي، يعنې دپولينوم ارزښت تاکل کيږي، که 1 ځای په ځای کړو :

	$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	
P_1	$=0$	$=0$	$\neq 0$	$\Rightarrow \lambda_3 = 0$
P_2	$=0$	$\neq 0$	$=0$	$\Rightarrow \lambda_2 = 0$
P_3	$\neq 0$	$=0$	$=0$	$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

داچې درې وکتورونه، چې د ارزښتوني له لارې جوړيږي يا منځ ته راځي يا توليديږي، کرښيز خپلواکدي، دادرې وکتورونه P_1, P_2, P_3 هم کرښيز خپلواک دی.

ايزومورفيزمونه Isomorphismen

V او W دې $\mathbb{K}-$ - وکتورفضاوې وي . V د $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتور فضا بنسټ وي. تابع $f : V \to W$ ټيک هلته ايزومورفيزم[4.3], ده، که

$(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n))$

د W يو بنسټ وي. دا جمله په ځټ يا برعکس هم باور لري.

V دې یو $\mathbb{K}-$ -وکتروفضا او $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ دې بنسټ وي.

موږ ایزمورفیزم

$\mathbb{K}^n \longrightarrow V$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \longrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

کانونیکي بنسټ- ایزومورفیزم بولو. د اړتیا په حالت کې دا په $\Phi_{(v_1, v_2, v_n)}$ توګه هم ښایو. موږ دلته ګورو چې د کانونیکي بنسټ-ایزومورفیزم ځخه کار اخستلای شو، چې د یوونوکتورونو (واحد-) سره (کانونیکي بنسټ) او د وکتروفضا V د بنسټوکتورونو ځخه یو ماتریکی جوړ کړو، چې د دواړو وکتورفضاو ترمنځ ترنفورمي کیږي.

موږ دا داسې کړو چې د V د بنسټ وکتورونه یو په بل پسې په ماتریکس کې ولیکو.

ماتریکسونه Matrizen

یو ماتریکس $Mat(m \times n; K)$ یو د m لیکو او n درڅونو(متو، ستنو) نظم دی د K بدن (پټي، ورشو، ساحه) ځخه. د یوه ماتریکس د یوګونو توکو د لیکي – او – متې کېدی شي د ایندکس لیکدودIndizeschreibweise سره ټیک کره شي:

a_{ij}

دلتهi لیکه او j متې په کوته کوي.

کرښیزې فنکشنونه (توابع) د ماتریکسونو په څېر

هر کرښیزه تابع کېدی شي په ټیک یوه ماتریکش تنظیم شي

د یوه ماتریکس رانګ Rang

د یوه ماتریکس رانګ د کرښيز خبلواکو لیکو/ یا د همغي د متو ګنون یا تعداد دی.

د متو رانګ = د لیکو راګ Zeilenrang = Spaltenrang

جمله :

د هر $m \times n$ ماتریکی لپاره باور لري:

د لیکوراګ=د متو رانګ یا رانګ

ښوونه:

ورکړ شوی یو $(m \times n)$ ماتریکس

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

موږ د $R_1, \ldots, R_m$ سره لیکي-وکتورونهښایو:

$$\begin{array}{rcccc} R_1 = & (a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n}) \\ R_2 = & (a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n}) \\ & & \cdots & & \\ R_m = & (a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots, & a_{mn}) \end{array}$$

کهr د لیکي رانګ وي، نو موږ r کرښيز خپلواک وکتورونه لرو، کوم چې د دې لپاره بنسټ جوړوي:

$$S_1 = (b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n}), S_2 = (b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2n}), \ldots, S_r = (b_{m1}, b_{m2}, \cdots, b_{mn})$$

هر ليکه وکتور R_i د لاندې بنسټ وکتورونو کرښيز ترکيب دی:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= k_{11}S_1 + k_{12}S_2 + \ldots + k_{1r}S_r \\
R_2 &= k_{21}S_1 + k_{22}S_2 + \ldots + k_{2r}S_r \\
&\cdots \\
R_m &= k_{m1}S_1 + k_{m2}S_2 + \ldots + k_{mr}S_r
\end{aligned}
$$

د دې لپاره چې د ماتريکس هر توکی a_{ji} لاس ته راوړو، بايد ټول ضريبونه، د ليکې وکتور ونه د ليکېفضاځخه وکتوروفضا انځور کړ، د بنسټ وکتور د اړونده توکي سره ضرب کړو. دا د a_{11} لپاره د بېلګې په توګه دی

$$a_{11} = k_{11} \cdot b_{11} + k_{12} \cdot b_{21} + \ldots + k_{1r} \cdot b_{r2}$$

له دې سره a د ټولو i لپاره د ليکې ډول دی.

$$
\begin{aligned}
a_{1i} &= k_{11}b_{1i} + k_{12}b_{2i} + \ldots + k_{1r}b_{ri} \\
a_{2i} &= k_{21}b_{1i} + k_{22}b_{2i} + \ldots + k_{2r}b_{ri} \\
&\cdots \\
a_{mi} &= k_{m1}b_{1i} + k_{m2}b_{2i} + \ldots + k_{mr}b_{ri}
\end{aligned}
$$

موږ کړی شو اوس هر د متې وکتور په لاندې توګه وليکو:

$$
\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = b_{1i} \cdot \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix} + b_{2i} \cdot \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + b_{ri} \cdot \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}.
$$

له دې امله دا وکتورونه د r وکتورونو کرښيز ترکيب دی:

$$
\begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}
$$

اړيين نهده چې داوکتورونه دې يو بل تهکرښيز خپلواک وي. مګر په هر حالت بايد هغه خوراجګ ګڼ(عدد) پهr رابند يا محدود وي، چې له کومهامله دی

د متېي(درز يا ستنې يا ولاړې ليکې يا کيلې) رانک Spaltenrang $\leq r$

سړی همداسې د تراسپونی شوې ماتريکس سره هم مخ ته ځي او په دې توګه ،، $\leq r$ Zeilenrangد ليکې رانګ ،، لاس ته راوړي. له دې سره دی:

د ليکې رانګ = دمتې رانګ

په خټ- يا معکوس ماتريک Inverse Matrix

يو مربع يا څلوريزه $n \times n$ ماتريکسA يو معکوس ماتريکس A^{-1} لري،، که يو لهدې لاندې برابر ارزښته اړيکو څخه يو پوره وي.

- د متو (ليکو) وکتورونه کرښيز خپلواک دي.
- $rang(A) = n$
- $det(A) \neq 0$
- له دې سره اړوند کرښيزه تابع f_A يو ايزومورفيزم دی.

څرخون- او هدارون-ماتريکسونه(--- د انعکاسونې --)

په $\mathbb{R}^2$کې څرخون يا څرخونه:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

په $\mathbb{R}^2$ کې هندارونه:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

دیترمینانتونه Determinanten

دیترمینانتونه دڅه لپاره دي؟

دیترمینانتونه په $\mathbb{R}^2$ کې د غبرګ اړخیز(موازی الاضلاع) په $\mathbb{R}^2$کې د یوه شپاټ(کشکول شوی کوادر یا مکعب) او په $\mathbb{R}^n$ کې د یوه غبرګ خوایز سطحه ورکوي.
له دې سره روښانهکېدی شي،چې ولې یو دیترمینات صفر دی، که وکتورونه یو بل ته کرښیز بلواک وي. که په کې دوه وکتورونهورکړ شوې وي او دا یو بل ته کرښیز بلواک وي، نو دا یو غبرګاړخیز نه شي غزولی او له دې امله مساحت صفر دی. له دې سره هر مربع – یا څلوری-ماتریکس یوه ګڼ یا عدد سره تنظیمیږي.

تعریف(پیژند) Definition

دیترمینانت هر ماتریکس $M(n \times n, \mathbb{K})$ یو عدد $\mathbb{K}$ باندې تنظیموي:

$$\det : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

فنکشن (تابع) لاندې خویونه لري:

لومړی: دیترمینانت په هره لیکه کې کرښیزه ده. داپه دې معنا، چې که سړی له ماتریکس M یوه کرښه لرې بریږدي یا پرېږدي او د یو کتور x سره بدله کړي، چې بیا دا تابع نسبت دې وکتور ته ځان کرښیز نیسي.

دویم : که د ماتریکس د لیکې رانک نسبت د لیکې تعداد n ته کوچنی وي، نو $\det A = 0$ ده.

دریم : د یوونماتریکس یا واحدماتریکس ډیترمینانت 1 دی:

$$\det(E) = 1$$

ټیک یوه تابع شته، چې دا خویونه پوره کوي. دا باید وښایو، داسې چې موږ یواځنوالی او شتونوالی وښایو. دا هر شرط لپاره باید په یواځې تګهوښول شي.

مرشتندوي جمله:Hilfssätze :

د ښوونې لپاره لومړی لاندې مرستندوی جملې ښایو:

لومړی: که په ماتریکس A کې دوه لیکې بدلې شي، نو ماتریکس A' لاس ته راځي، نو باور لري.

$$\det A' = -\det A$$

.

دویم : که د یوعماتریکس لیکه د یوه سکالار λ سره ضرب شي نو ماتریکس A' لاس ته راځي او له دې سره باور لري:

$$\det A' = \lambda \det A$$

دریم : که په یوه ماتریکس A کې یوه لیکه د ماتریکس د بلې لیکې سره جمعه (ورزیاته) شي نو ماتریکس A' لاس ته راځي، نوله دې څخه دیترمینان بې اغیزه پاتې کیږي: $\det A = \det A'$

د دې مرستندوی او یواځنوالی او شتون جملو ښوونه دې په Jänichکې وکتل شي.

د دیترمینانتو ساده شمېرنه

لاندې برخه

- 2×2
- 3×3

د لاپلاس د وديزېنې جمله Laplace Entwicklungssatz

د لاپلاس د وديزېنې جمله مرسته کوي، کد له 3×3 ماتريکسونو ځخه لوی ديترمينانتونه ټاکو[6.1] .

سړی کړی شي ديترمينانت ته وده ورکړای شي، که ماتريکس تل په کوچنيو ديترمينانتونو و وېشي. دلته لاندې ماتريکس A_{ij} هغه ماتريکس ده، چې د ماتريکس A د $i-$-مې او $j-$-مې ليکې همداسې متې د لرې کولو ځخه لاس ته راځي. سړی کړی شي چې وديزيېنه سرته ورسوي يا د ليکې له لارې

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

يا د متوو پسې

$$det\ A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

د ضريب يا خلووني $(-1)^{i+j}$ په مرسته يو د سترنجتختې ډوله مخ يا موسترمنځ ته راځي. له دې سره د ديترمينانت مخنخښه ټاکل کيږي:

+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+

بېلګه:

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$	ودیزیینه پورته لیکه پسې پورته لیکه => په لاندې دیترمینات کې د لیکې په څیر له منځه وړل کیږي =

$$+a_{11}\cdot \underbrace{det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}}_{1.Spalte\ \ ausgeblendet} \quad -a_{12}\cdot \underbrace{det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}}_{2.Spalte\ \ ausgeblendet}$$

۱ -م. درځ لرې کړي　　　۲ -م درځ لرې کړي

$$+a_{13}\cdot \underbrace{det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}}_{3.Spalte\ \ ausgeblendet} \quad -a_{14}\cdot \underbrace{det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}}_{4.Spalte\ \ ausgeblendet} =$$

۳ ـم درځ لرې کړی　　　۴ ـم درځ لرې کړي

د دیترمینانتونو ساده ټاکنه

- که یوه لیکه یا متِه کرښیز بلواک وي، نو باور لري

$$det\ \ A = 0$$

دا د لاندې سره په برابره معنا ده(د لیکو تعداد همداسې د متو تعداد)

$$rang\ A < n$$

- که څوک یوه متِه د بلې سره بدله کړي یا یوه لیکه د بلې سره بدله کړي،

مخنخښه تغير خوري(دا چې د ديترمينانت تابع الترنيري(بديلي)
alternierend ده)

$$det\ A_{ij} = -det\ A_{ji}$$

- کهد ماتريکس يوه ليکه د سکالار سره ضرب شي،نوبايد تنها ديترمينانت هم د همغه سکالار سرهضرب شي:

$$det\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \lambda\cdots\lambda & \lambda a & \lambda\cdots\lambda \\ & \vdots & \end{pmatrix} = \lambda\ det\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

په همدې توګه که ديترمينانت د λ^n سره هم ضربې شي، د کوم سره چې n د ليکو تعداد دی، داسې دهلکه که يوه ماتريکس ټوله له λ سره ضرب شي.

$$det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot det\ A$$

- د يوونماتريکس (واحد-) ديترمينانت 1 ده:

$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

- د يوه درېګودې ماتريکس ديترمينانت د هغه د دوه کونجتړې ضرب دی:

$$det\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \ \cdots \ \cdot \lambda_n$$

داسې يوه درېګويزه ماتريکس کړی شو د هر په خوښه $n \times n$ - ماتريکس څخه د ساده ليکو عمليو څخه د ګاوسقانون له مخې لاس ته راوړو. موږ بايد د ديترمينانت په ټاکلو يواځې دې ته پام وکړو، چې ليکه بدلون ديترمينانت ته له

څانسره یوسو. نو که r د لیکو د بدلون تعدادوي، چې موږ سر ته رسولې چې درېګوډیزه بڼه لاس ته راوړو، باور ولري::

$$\det A' = (-1)^r \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ \ldots \ \cdot a_{nn}$$

- که څوک یوه ماتریکس ترنسپوني کړي(داپه دې معنا چې د لیک څخه متې جوړوي او له متو څخه لیکې او یا په مربع یا ځلوریزه ماتریکسونوکې دا په دوهکونجتړې(قطر) هنداره کوي) په دې حالت کې د ترادپوني ماتریکس دیترمینانت ارزښه د نه ترانپوني شوې ماتریکس د دیترمینانت سره برابر دی:

$$\det \ A = \det \ A^T$$

کوچنی بام: په ضرب کې دې پامدې وي. باور لري

$$(AB)^t = B^t A^t$$

- دیترمینانت- ضرب-جمله

$$\det(A \cdot B) = \det \ A \cdot \det \ B$$

.... ښوونه یې دلته ورزیاته کړی.

د ایندومورفیزم دیترمینانتونه

دا چې موږ هر ایندومورفیزم f د مربع – یا ځلوری-ماتریکس سره انځورولی شو[6.2]، له دې سرهکړی شو چې د ایندومورفیزم دیترمینانت هم تعریف کړو:

$$\det f := detA_f \in \mathbb{K}$$

اوس داپوښتنه رامنځ ته کوو، چې ایا د V د مختلفو بنسټونو لپاره دیترمینانتونه مختلف دي. دا کېدی شي وښوول شي چې دیترمینانت د بنسټ د ټاکنو یا انتخاب څخه خپلواک

دي. له دې سره لهدې امله کړی شو چد د یوه ایندومورفیزم دیترمینانت یواځنې ت عریف کړو.

أيګن ارزښت(Eigenwerte(Eigenvalue

يادونه: دا أيګن په ټول ژبوکې همداسې ليکي. دا الماني وی یا لغات دی، د خپل په معنا دی.

أيګن ارزښت(Eigenwerte(Eigenvalue

F دې د وکتورفضا V_K ایندومورفیزم وي. یو $\lambda \in K$ أيکنارزښت بلل کيږي، که یو $v \in V$ شتون ولري د $v \neq 0$ سره ، داسې چې باور ولري.

$$F(v) = \lambda v$$

أيګنوکتور Eigenvektoren

F دې د وکتورفضا V_K یو ایندومورفیزم وي. هر له صفر وکتور مختلف $v \in V$ د

$$F(v) = \lambda v$$

سره د F أيګنوکتور بلل کيږي(أيګن ارزښت λ ته)

دوه -کونجتړې کیدونکې یا دوه-کونجتړې کیدنوړ(قطري کیدونکې) Diagonalisierbar

یو ایندومورفیزم دوه کونجتړې کېدونکی (قطري کېدونکې یا – وړ) بلل کيږي، که د أيکن وکتورونو څخه یو بنسټ شتون ولري. دا په دې معنا چې د ایندومورفیزم لپاره یو دوه کونجتړی ماتریکس د لاندې بڼه شتون لري(د متو وکتورونه بنسټ ومتورونه

شتون لري، λ_i أيګن ارزښتونه دي)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

أيګن فضاوې Eigenräume

F دې د V ايندومورفيزم وي او $\lambda \in K$ ، نو

$$Eig(F;\lambda) := \{v \in V : F(v) = \lambda v\}$$

د F يو أيګنفضا بولو نسبت و λ ته.

- اګن فضا د V وکتورفضا يو برخوکتور فضا ده.
- صفروکتور په ليګنوکتور کې خوندي نه دی.
- $Eig(F;\lambda)\{0\}$ د λ اړونده أيګنوکتورونو ډېرى ده
- (S.210) ...

کرکتريستيکي پولينوم يا سړى څګګه أيګن ا رزښتونه پيدا کوي؟

سړى کړى شي چي أيګن ارزښتونه وټکي، داسي چي د کرکتريستيکي پولينوم صفرځايونه پيدا کوي. باور لري[7.1]

د ايګن ارزښت دى له دې لاس ته راځي او په ځت

$$\lambda \ ist \ Eigenwert \ von \ F \Leftrightarrow det(F - \lambda id_V) = 0$$

سړی د لاندې ماتريکسونو دوه -کونجتړې(قطر) پيداکوي:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{mn}-\lambda \end{pmatrix}$$

سړی أيګن وکتورونه او أيګن ارزښتونه څنګه پيدا کوي؟

که څوک أيګن-ارزښت λ ولري،نو کېدی شي و هغه ته مناسب أيګنوکتور وټاکي، داسې چې سړی لاندې برابرون - يا مساواتسيستم حل کړي:

$$(A-\lambda I)X=0$$

لکه کريتيکي پولينوم لپاره سړی همداسې بېرته ماتريکس جوړوي، چېرته چې د λ لپاره أيګن ارزښتونه ځای په ځای کوي . بيا سړی دا هوموجېن مساواتسيستم حل کوي.

يو ماتريکس سړی څنګه دوه-کونجتړې يا قطري کوي؟

لومړ: که لړ ايګنوکتورونه توليد يا جوړېدی شي، دې ته (نسبت دې ته) چې ماتريګس درزونه همداسې ليکې لري، نو متريکس دوه کونجتړې کيدونکې نه ده.

که پوره وکتورونه شتون لري او ودې ته ايګن ازښتونه نو $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باور لري

$$D=S^{-1}AS=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

سکالار ضرب(دننني ځل يا ــضرب) او نورم

Skalarprodukt (Innenprodukt) und Norm

سکالار ضرب

تعريف يا پيژند:

يو تابع $<,>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $(x,y) \to \ < x,y >$ سکالار ضرب بلل کيږي، که $\forall \ x,x',y \in \mathbb{R}^n$ دا لاندې باور ولري:

- $< x+x',y >=< x,y > + < x',y >$ کربنيزوالی)
- $< x,y >=< y,x >$ (سيومتري (Symmetrie
- $< x,x >\geq 0$ او $< x,x >= 0 \Rightarrow x = 0$ مثبت او ديفينيت) Positiv und definit)

بېلګه:

- $< a,b > \mapsto a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n$

نورم Norm

پيژند(تعريف): يوه ځيرونه يا فنکشن $|| \ || : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ نورم بلل کيږي، که لاندط امسيومونه باور ولري

- $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ديفينيت
- $||x|| \geq 0$ مثبت

- $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ هوموجين

- $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ درې ګوډي يا مثاثاتي نابرابرون

بيلګه:

$$||a||_\infty = ||(a_1, a_2, \dots, a_n)||_\infty = \max(|a_i|; i = 1, \dots, n)$$

ماکسيموم يا خورا جګ ارزښت

$$||a||_1 = ||(a_1, a_2, \dots, a_n)||_1 = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

(يو نورم)

$$||a||_2 = ||(a_1, a_2, \dots, a_n)||_2 = \sqrt{< a, a >} = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2}$$

(د پيوتاګوراس نورم)

د وازيدو کونج تعريف:

د يوې وکتورفضا د x او y وکتورونو ترمنځ د وازېدوکونج α په لاندې توګه تعريف دی

$$< x, y >= ||x|| \, ||y|| \, \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{< x, y >}{||x|| \, ||y||}$$

د وازيدو کونج د تعريف لپاره بايد کوساين تل تعريف وي. موږ بايد وښايو، چې دا لاندې باور لري:

$$-1 \leq \frac{< x, y >}{||x|| \, ||y||} \leq 1$$

دا د کوشي –شوارځ- نامساواتو خونديونه ده.

د کوشي –شوارڅ- نامساوات

دپه خوښه وکتورونو $u, v \in V$ لپاره باور لري:

$$< u, v >^2 \leq < u, u >< v, v >$$

یا ورته(اکویوالنت):

$$| < u, v > | \leq ||u|| \cdot ||v||$$

ښوونه:

د $y = 0$ لپاره ساده دی. وي دې $y \neq 0$. موږ له یوه واړه چل څخه کار اخلو او $\lambda := \frac{< x, y >}{||x|| \, ||y||} \in \mathbb{R}$ ږدو. لاندې باور لري:

$$\begin{aligned} 0 \leq < x - \lambda y, x - \lambda y > &= < x, x > -2\lambda < x, y > + \lambda^2 < y, y > \\ &= ||x||^2 - 2\frac{< x, y >^2}{||y||^2} + \frac{< x, y >^2}{||y||^2} \\ &= ||x||^2 - \frac{< x, y >^2}{||y||^2} \end{aligned}$$

په ورته توګه باور لري $< x, y >^2 = ||x||^2 ||y||^2$ او له دې سره $| < x, y > | \leq ||x|| \, ||y||$.

نورمال شوي ا و اورتوګونال وکتورونه

وکتورونو نورمالیدنه:

وکتورونه نورمال شوي دي، چې اوږدوالی 1 لري، دا په دې معنا، چې $< v,v >= 1$
یا $||v|| = 1$.

یو وکتور نورمال کیدی شي یا کیږي، داسې چې دی د په څټ یا معکوس ارزښت سره ضرب شي:

$$v_{normalisiert} = \frac{1}{||v||} \cdot v$$

اورتوګونال وکتورونه (یو په بل ولاړ -)

دوه وکتورونه v_1 او v_2 یو بل ته اوتوګونال دي، که دا یو په بل ولاړ یا عمود وي. یا نیغ ولاړ وي. له دې امله د دوي سکالار ضرب یا ځل 0 دی.

$< v_1, v_2 >= 0$

هر وکتورفضا ته لږ ترلږه یو(یعنې په ریښتوني زیات) له اورتوګونال وکتورونو بنسټونه شته. کا دا هو اوږدوالی 1 ولري، نو دا *اورتونورمال* دي.

اورتونورمال بنسټونه:

یو اورتونورمال بنسټ هغه بنسټ دی، په هغه چې ټول وکتورونه دي چې نسبت سکالار ضرب ته اوږدوالی 1 لري او یو بل ته اورتوګونال دي.

سړی کړی شي هر بنسټ ته د شمیدت اورتوګونالیدونکي تلنلار **Schmidtschen Orthnormalisierungsverfahrens** په مرسته یو اورتونورمال بتسټ جوړ کړي:

موږ غواړو د $i = 1$ تر $i = n$ پورې لاندې فرمول وځغلوو، د کوم سره چې د n بنسټ وکتورونو تعداد یاګنون دی، او یو بل پسې اورتوګونال وکتورونه د 1 اوږدوالي پیدا کوي یا میندي، چې دا موږ سملاسې د بل وکتور شمیرنو لپاره اړین مومو.

$$e_i = \frac{v_i - \sum_{k=1}^{i-1} e_k \cdot < v_i, e_k >}{\left\| v_i - \sum_{k=1}^{i-1} e_k \cdot < v_i, e_k > \right\|}$$

ځای بدلون Permotation

لیکندود

یو ځاییدلون یو په – یعنې بیجکتیو ځیرونه یا فنکشن دی، کوم چې n توکي ($n > 0$) تنظیموي.

$$\sigma = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \sigma(1) \end{array}, \begin{array}{c} 2 \\ \sigma(2) \end{array}, \ldots, \begin{array}{c} n \\ \sigma(n) \end{array} \right)$$

دا پورته لیکنډول دا معنا لري، چې د بیلګې په توګه 1 د $\sigma(1)$ ځای ته راکښل کیږي.

په همدې توکه څیوکلیکي یا تل بیرته راګرځیدونې لیکندود هم ورځنی یا بلد دی. د بیلګې په توګه:

$$(12)(3)(564) = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{array} \right)$$

ترانپوزیشن Transposition

یو ترانسپوزیشن د ټیک دوه یتوکو بدلون دی په څیوکلیکي لیکندود یعنې (ab) .

هر پرموتیشن د دوه ترانپوزشنونو کمپوزشن(ضرب) دی.

د ممکنه ځای بدلونو ګڼون یا تعداد

که یوه ډېرۍ یا سټ n توکي لري، نو دا $n!$ ځای بدلونونه ممکن دي.

پاتې یا تش ځایونه

که یو پرموتیشن له یوه کوچني ځای څخه و یوه لوي پسې څیره کړي، نو تشځایونه تولیدیږي. که $j < k$ او $\sigma(k) < \sigma(j)$ وي، نو دا یو تشځای دی.

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو تولنه،، له خوا

.يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،ميرې،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپېدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کربنیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کربنیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنرۍ، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرئ پو هنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپو هنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپو هانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پو هنې ګډې وډې ليکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپو هنې انګريزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپو هنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپو هنې پښتو ډکشنري د شميرپو هنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پوري ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکني ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

سرلیک