

د دفرنخیال - او انتیگرال شمیرنو  
تمرینونه د اوبیونو (حلونو) سره

لیکونکی:

ډاکتر ماخان (میری) شینواری

Ketabton.com

2016

سریزه:

ګرانو لوستونکو.  
له ټولو د مخه مې دا  
کړي، چې کله کله یې ګڼون هم ښه نه دی ورکړ شوی، خو دا کومې یټونځې ځکه نه پېښوي،  
چې د تمرینونو اوبیونو کې هم هغه پوښتنه باید تکرار راشي.  
ما غوښتل، چې د پولې برخې د پاره هم ځنې پوښتنې د اوبیونو سره راوړم، خو پرې ونځه  
تونیدم.

نیولیک

- ۱ - د دفبر نشل شمیرني تمرینونه..... ۳
- ۲ - د انټیګرال شمیرني تمرینونه..... ۱۸
- ۳ - د دف. تمرینونو اوبیوني..... ۳۲
- ۴ - د انت. تمرینونو اوبیونه..... ۴۶

## رابیلیدنه یا مشتق

ګرانو هیوادوالو !

په دې لاندې کوچنی لیکنه کې تاسو ته د دفترنشل او انټیګرال شمیرنو اصلي تمرینونه له ۶۶ تمرین څخه پیل کیري:

۶۶ (۱) کمښتویش (د تفاضل وېش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a)  $P(3,2)$  ,  $Q(5,4)$       b)  $P(2,4)$  ,  $Q(3,1)$

۶۷ (۲) د  $x = x_0$  په ځای کې د f تابع د تانجنت جگوالی وټاکئ.

a)  $f(x) = x^2$  ,  $x_0 = 2$       b)  $f(x) = 0.5x^2$  ,  $x_0 = 3$

۶۸ (۳) د کمښتویش (د تفاضل ویش) او مشتق لاندې څه پوهیږو او د دوي تررنځ فوپیږ څه دی؟

۶۹ (۴) د یوه تابع د سکانت ( ) لاندې څه پوهیږو او د تانجنت جگپډو لاندې څه پوهیږو؟ او دوي تررنځ کومې اړیکې پرتې دي؟

۷۰ (۵) د تابع مشتق د توان قانون له مخې پیدا کړئ.

a)  $f(x) = x^5$       b)  $f(x) = x^6$

c)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$       d)  $f(x) = \frac{1}{x^5}$

e)  $f(x) = \sqrt{x}$       f)  $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

g)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$       h)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

۷۱ (۶) د تابع مشتق د ثابت د قانون له مخې پیدا کړئ.

a)  $f(x) = 0.2x^5 - 3$       b)  $f(x) = 2x^4 + 1$

c)  $f(x) = \frac{4}{x^2}$       d)  $f(x) = \frac{3}{x^3} + 2$

e)  $f(x) = 6\sqrt{x}$       f)  $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x}} - 5$

۷۲ (۷) د تابع د ګراف په مرسته وښایئ، چې ټول  $g(x) + c$  ترمونه همغه مشتق لري.

یاودونه: پابت عدد که هرکوم ارزښت ونیسي.

۷۳ (۸) وښایئ، چې د  $a.g(x)$  د مشتق سره د a ضریب (ځله وونی) ساتلی پاتي کیري.

۷۴ (۹) د f تابع مشتق د جمعي قانون سره وښایئ

a)  $f(x) = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 1$       b)  $f(x) = x - \sqrt{x}$

c)  $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{x^3}$       d)  $f(x) = 3x^2 + 0.4x - 5$

۷۵ (۱۰) د f تابع مشتق د ضرب قانون سره وټاکئ.

$$a) f(x) = x^3(x^2 - 2x + 1) \qquad b) f(x) = (2x^2 + 1)(x - 1)$$

$$c) f(x) = (x^2 - 5)(2x^3 + x^2 + x) \qquad d) f(x) = (4x^2 - x + 4)(3x + 2)$$

۷۶ (۱۱) د  $f$  تابع مشتق د ویش قانون له مخي وټاکئ.

$$a) f(x) = \frac{x^3 - 1}{4 - x^2} \qquad b) f(x) = \frac{2x^2 + x + 3}{x + 1}$$

$$c) f(x) = \frac{4 - x - x^3}{2x^2 + 3} \qquad d) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$$

۷۷ (۱۲) د وېش قانون له مخي په څټ ارزښت (پر عکس ارزښت) وټاکئ.

لاندې کي: د سره

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$$

د  $g(x) \neq 0$  سره

۷۸ (۱۳) د  $f$  تابع ارزښت د زنځير قانون له مخي وټاکئ.

$$a) f(x) = (4x^4 - x)^2 \qquad b) f(x) = (3x^2 + 4x - 5)^2$$

$$c) f(x) = (2x - 7)^3 \qquad d) f(x) = (5 - 3x^3)^4$$

۷۹ (۱۴) د لاندې توابعو مشتق وټاکئ.

$$a) f(x) = \frac{1}{(2x^2 + x)^3} \qquad b) f(x) = \frac{1}{(x - 5)^4}$$

$$c) f(x) = (1 + \sqrt{x})^2 \qquad d) f(x) = \sqrt{1 - x^3}$$

۸۰ (۱۵) د لاندې توابعو دري واره مشتق ونيسئ.

$$a) f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \qquad b) f(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 5$$

$$c) f(x) = \frac{3x - 4}{x} \qquad d) f(x) = \frac{x^2 - 1}{2 - x}$$

۸۱ (۱۶) د يو  $n$ -م درجي تابع بايد څو واره مشتق ونيول شي چې يوه ثابته تری لاس ته راشي.

۸۲ (۱۷) د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

$$a) f(x) = \sin 3x \qquad b) f(x) = \sin x \cdot \cos x \qquad c) f(x) = \sin^2 x$$

$$d) f(x) = \tan x + 2 \sin 2x \qquad e) f(x) = \sin x^2 \qquad f) f(x) = \sin \frac{x-1}{x+1}$$

۸۳ (۱۸) د  $f(x) = \sin^n x (n \in \mathbb{N})$  تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښايست يا وټاکئ.

۸۴ (۱۹) د تانجنت تابع لپاره د ساين او کوساين قانون په مرسته د مشتق قانون وښايست.

۸۵ (۲۰) وښايست چې د  $f(x) = \tan x$  لپاره  $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$  هم باور لري.

۸۶ (۲۱) د ویش قانون له مخي د کوتانجنت قانون پيداکړئ او هم د تانجنت قانون له مخي.

۸۷ (۲۲) ولی د ساین تابع او د کوساین تابع په خوبه زیات مشتقور دي.

۸۸ (۲۳) د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

a) $f(x) = 3 \cdot e^{-2x+1}$	b) $f(x) = e^{x^2+2x-1}$	c) $f(x) = (x-1) \cdot e^x$
d) $f(x) = \sqrt{e^x}$	e) $f(x) = x^n \cdot e^e$	f) $f(x) = e^{kx}$
g) $f(x) = 2^{2^x}$	h) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x}$	i) $f(x) = x \cdot a^{\sqrt{x}}$
k) $f(x) = \sqrt{e^x+1}$	l) $f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$	m) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

بېلگه:

د  $f(x) = (x^2 + 2) \cdot \lg x \quad (x > 0)$  مشتق دي پیدا شي.

د ضرب قانون:

$$u(x) = x^2 + 2 \quad u'(x) = 2x \quad \text{سره،} \quad v(x) = \lg x \quad v'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 10} \quad \text{د سره}$$

$$f'(x) = 2x \cdot \lg x + (x^2 + 2) \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \cdot (2x \cdot \ln x + x + \frac{2}{x})$$

۸۹ (۳۴) د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ یا پیدا کړئ.

a) $f(x) = \ln \sqrt{x}$	b) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$	c) $f(x) = \ln \frac{2}{x^3}$
d) $f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$	e) $f(x) = x \cdot \log_2 x^2$	f) $f(x) = (x^4 - 1) \cdot \log$
g) $f(x) = \frac{\ln}{x+2}$	h) $f(x) = \frac{x^4}{\ln x}$	

۹۰ (۳۵) د لاندې توابعو لپاره خورا لویه تعریف ورشو (ساحه) ورکړئ او لومړی مشتق یې وټاکئ.

د تعریف سټ (ډېری) هغه ورشو (ساحه) ورکړئ، په کومه کې چې توابع مشتقور دي.

a) $f(x) = \sqrt{x+3}$	b) $f(x) = \sqrt{(x-2)(x-4)}$
c) $f(x) = x\sqrt{x}$	d) $f(x) = \sqrt{x^2+2}$

۹۱ (۳۶) ولی باید د ټیک شمېرنې لپاره لوگاریتمي توابعو ته همداسې سوچ وشي، لکه ریښه توابعو ته؟

۹۲ (۳۷) ۹۰ – مه پوښتنه د لوگاریتمي توابعو لپاره ځواب کړئ.

a) $f(x) = \ln(x^4 - 1)$	b) $f(x) = \ln(2x+4)$
--------------------------	-----------------------

۹۳ (۳۸) – د لاندې توابعو لومړی مشتق پیدا کړئ.

- a)  $f(x) = \frac{2}{5}x^{10} - \frac{1}{5}x^5$       b)  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 7x + 8$
- c)  $f(x) = 5x^8 - 3x^6 + \frac{10}{x^3} - \frac{8}{x^7}$       d)  $f(x)(2x-5)(x^2+11x-3)$
- e)  $f(x) = \cos x - 2x \sin x$       f)  $f(x) = \sin^3 x$
- g)  $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$       h)  $f(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$
- i)  $f(x) = \frac{3e^x + 1}{2e^x - 1}$       j)  $f(x) = \frac{2e^x(x^2 - 3)}{x}$
- k)  $f(x) = \frac{1}{x^2} \ln x^2$       l)  $f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{1-x}$
- m)  $f(x) = \frac{\sin x}{\ln x}$       n)  $f(x) = 3x^2 \cdot \lg x$
- o)  $f(x) = \ln(\sin x)$       p)  $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1}$
- q)  $f(x) = \sqrt[n]{ax+b}$       r)  $f(x) = (x^2 + 3)e^{-2x}$

۹۴ (۳۹) - لومری مشتق و تاکئ

- a)  $f(x) = \sin^n$       b)  $f(x) = (\ln x)^n$
- c)  $f(x) = s + \frac{1}{x}$       d)  $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^n$

۹۵ (۴۰) - د هرې تابع لومري درې مشتقونه و تاکئ

- a)  $f(x) = e^{x^2}$       b)  $f(x) = \sin x \cdot \cos x$
- c)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$       d)  $f(x) = x^2 \cdot e^x$

۹۶ (۴۱) - په کوم تابع کې لومری مشتق f د f سره برابر دی.

۹۷ (۴۲) -

الف: د کوم f تابع لپاره  $f'(x) = 2f(x)$  دی؟

ب: د کوم f تابع لپاره  $f'(x) = -f(x)$  دی؟

۹۸ (۴۳) - د  $f(x) = \sin x$  مشتق د f سره سر خوري يا برابر دی؟

۹۹ (۴۴) - د لاندې توابعو لپاره -م مشتق ته وده ورکړئ.

- a)  $f(x) = e^{ax}$       b)  $f(x) = \ln(x+1)$

۱۰۰ (۴۵) - د لاندې توابعو صفر ځایونه وشمېرئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x - 3 & b) f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 \\
 c) f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x & d) f(x) = x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{12} \\
 e) f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 & f) f(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100
 \end{array}$$

٤٦) - د دريمي درجي تام راشنل گراف د  $x$  - محور د  $x_2 = 0$ ,  $x_1 = -2$  او  $x_3 = 4$  په ټکو کې غوڅوي.

د تابع مساوات کوم دي، که سربېره پر دې گراف د  $P(2, -8)$  ټکي څخه هم تېر شي؟  
 ١٠٢) ٤٧) - د يوه څلورمې درجي تام راشنل تابع د  $x$  - محور د  $x_1 = 0,5$  او  $x_2 = 3$  په ټکو کې غوڅوي.

د تابع برابرېون څنگه دي، که برسېره پر دې گراف د  $y$  - محور د  $P(0,9)$  په ټکي کې هم لمس کړي.

١٠٣) ٤٨) - د څلورمې درجي د يو تام راشنل تابع گراف د وضعيه قيمت سيستم پيل او له

$P(\frac{1}{2}, -\frac{15}{8})$  ټکي تېرېږي. د تابع مساوات څنگه دي، که گراف د  $x$  - محور هم د  $x_1 = -1$  سره لمس کړي او په  $x_2 = 2$  کې غوڅ کړي.  
 ١٠٤) ٤٩) د لاندې توابعو صفر ځايونه پيدا کړئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 4} & b) f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x} \\
 c) f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x - 0.5} & d) f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x}{x + 5}
 \end{array}$$

١٠٥) ٥٠) : د يوه مات راشنل  $f$  تابع د  $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x + d}$  سره ثابتې  $a, b, c$  او  $d$  پيدا کړئ، که د  $x_1 = -2, x_2 = -1$  او سره صفر ځايونه پراته وي او تابع په  $x = 0$  کې يو تشخای ولري.

١٠٦) ٥١) : د  $f_a(x) = \frac{a^3x^3 - 8}{ax}$  تابع صفر ځايونه پيدا کړئ د  $a > 0$  او سره چې د  $a$  په واک کې وي يا تابع وي. د  $a$  د کوم ارزښت لپاره  $f_a$  په  $x_1 = 0,5$  کې صفر ځاي لري.

١٠٧) ٥٢) : مات يا کسري راشنل  $f$  تابع په  $x_1 = 1$  کې د  $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x}$ ;  $(x \neq 0)$  سره درې ځله صفر ځاي لري.

د يوې ساحې د ویش په مرسته وڅېړئ چې په همدې څلورمه کې صفر ځاي کې ځغلي او که صفر ځاي څلورمه بدلوي.

١٠٨) ٥٣) : د لاندې توابع صفر ځايونه وشمېرئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x} & b) f(x) = \frac{x}{4} \cdot \sqrt{6 - x} \\
 c) f(x) = x \cdot \ln(x + 2) & d) f(x) = (x^2 - 2) \cdot \ln x \\
 e) f(x) = \ln \frac{1 + x}{1 - x} & f) f(x) = \frac{3x}{\sqrt{2 + x^2}}
 \end{array}$$

۱۰۹ (۵۴): دا سي يو ترم وټاکئ، کوم چي د لاندې پريوديکي يا تل بېرته راگرځېدونې توابعو  
صفر ځايونه ورکوي.

د شمېرنې له لارې صفر ځايونه ونوموئ، چي په انټروال  $[-2\pi \leq x \leq 2\pi]$  کې پراته وي.

$$a) f(x) = \frac{1}{2} \sin 3x \quad b) f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$c) f(x) = 1 - \sin^2 x \quad d) f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

۱۱۰ (۵۵): ولي لاندې توابع صفر ځايونه نه لري؟

$$a) f(x) = \ln(x^2 + 3) \quad b) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$c) f(x) = \frac{e^x}{x+1} \quad d) f(x) = 1 + \sin^2 x$$

۱۱۱ (۵۶): ولي کېدې شي چي يو تابع ډېر صفر ځايونه ولري، مگر د  $y$  - محور سره يواځې  
يو صفر ځاي ولري؟

۱۱۲ (۵۷): د صفر ځايونو د تعداد په هکله څه ويلاي شئ، که د يو  $f$  تابع لپاره په تعريفست (-  
ډېرې) کې يو  $f^{-1}$  معکوس تابع هم شته وي؟

۱۱۳ (۵۸): د  $y$  - محور سره د لاندې توابعو غوڅتکي وشمېرئ.

$$a) f(x) = x^3 + 2x - 1 \quad b) f(x) = (x+1) \cdot \ln(x+1)$$

$$c) f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x+2} \quad d) f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$e) f(x) = (x-2) \cdot e^{x-1} \quad f) f(x) = e^{\frac{2}{1-x}}$$

۱۱۴ (۵۹): د يوه تام راشنل تابع  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  د  $a_0 \neq 0$  سره  
کېدې شي د  $y$ -محور غوڅتکي د ساده لوستلو له لارې وټاکل شي.  
په دې هکله دلایل راوړئ.

۱۱۵ (۶۰): د  $x_1=1$  او  $x_2=2$  لپاره تابع ارزښتونه وشمېرئ او هم د  $f$  تابع جگېدنه د  
 $f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1$  سره.

۱۱۶ (۶۱): په صفر ځاي کې  $\epsilon$   $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$  تابع کومه جگېدنه لري.

۱۱۷ (۶۲): د  $f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 0,5x^2 + x - 4$  گراف په کومو ټکو کې  $f'(x) = 1$   
جگېدنه لري؟

۱۱۸ (۶۳): د گراف په کومو ځايونو کې پروت تانجنټ لري؟

بيلگه:



تابع ارزښت اود گراف په  $x_0 = -1$  ځاي کې د جگړينه غواړو پياکړو.

$$f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x - 1}, \quad (x \neq 1)$$

$$f(-1) = \frac{1 - 8 + 16}{-1 - 1} = -4,5$$

تابع ارزښت:

د مات راشنل تابع ۱. مشتق د وېش قانون له مخې ټاکل کيږي.

$$f'(x) = \frac{(4x^3 - 16x)(x-1) - (x^4 - 8x^2 + 16) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{3x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 16x - 16}{(x-1)^2}$$

جگړالی:

$$f'(-1) = \frac{3 + 4 - 8 - 16 - 16}{4} = -8,25$$

۱۱۹ (۶۴): د لاندې توابعو ارزښت او جگړينه د  $x = x_0$  په ځاي کې وشميرئ.

a)  $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 4}{x}$ ,  $x_0 = 1$     b)  $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x}{x}$ ,  $x_0 = -3$

۱۲۰ (۶۵): په کومو ټکو کې لاندې توابع [گړالی]  $m$  لري؟

a)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$ ,  $m = 2$     b)  $f(x) = \frac{x - 2}{x^2}$ ,  $m = -5$

۱۲۱ (۶۶): د لاندې توابعو تبع ارزښت او جگړالی (ميلان) د  $x_0$  په ځاي کې پيدا کړئ.

a)  $f(x) = x \cdot \ln x$ ,  $x_0 = 1$     b)  $f(x) = \sin x^2$ ,  $x_0 = \sqrt{\pi}$

۱۲۲ (۶۷): په کومو ځايونو کې لاندې توابع پروت تانجنت لري؟

a)  $f(x) = x^2 e^{-x}$     b)  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

۱۲۳ (۶۸): د  $a$  د کومو ارزښتونو لپاره د  $f(x) = (x+a) \cdot e^x$  د گراف د  $x_0 = 0$  په ځاي کې ۲ جگړالی لري؟

۱۲۴ (۶۹): د لاندې توابعو ټول ځاييزي (لوکال) خورا جگ ټکي وښايست.

a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$     b)  $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1$

c)  $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 15x + 7$     d)  $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$

e)  $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x$     f)  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{10}{3}x^3 + 6x^2 - 2$

۱۲۵ (۷۰): په وضعيه قيمت سيستم (پروت ولاړ سيستم) د لاندې توابعو ټول خورا جگ ټکي وښايست:

که د  $f$  تابع د  $x_0$  په ځاي کې يو نسبي خورا جگ ټکی پروت وي، نو د مشتق تابع  $f^1$  گراف د  $x_0$  په ځاي کې صفر ځاي لري.

د دې لپاره د  $f$  او د  $f^1$  گراف په همغه وضعيه قيمت سيستم کې رسم کړئ.

a)  $f(x) = x^3 - 3x$     b)  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

۱۲۶ (۷۱): د  $n$ -می درجی یو تام راشنل تابع خورا زیات څومره لوکال (ځایز) افراطي ځایونه لرو دی شي؟

۱۲۷ (۷۲) ولی د جگتکي لپاره شرایط  $f''(x) < 0$  اړین نه دي؟

۱۲۸ (۷۳) د لاندې توابعو لوکال (ځایز) انحرافي (افراطي) ځایونه وټاکئ.

$$a) f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + 8x - 1 \quad b) f(x) = \frac{1}{3}x^4 + 1$$

$$c) f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + \frac{8}{3}x \quad d) f(x) = x^4 - 4$$

۱۲۹ (۷۴): د لاندې توابعو ټول لوکال انحرافي ټکي پیدا کړئ.

$$a) f(x) = \frac{x^2 - 12x + 27}{x^2 - 4x + 5} \quad b) f(x) = \frac{x^2}{1 - x}$$

$$c) f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2 + 2} \quad d) f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

د نه راشنل توابعو افراطي ځایونه

بیلگه:

د ټول f اکسپوننشل توابعو د  $f(x) = x^2 e^x$  سره لوکال (ځایز) افراطي ځایونه دي پیدا شي.

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x(2+x) \cdot e^x$	۱. مشتق
$f''(x) = (2+2x) \cdot e^x + (2x+x^2) \cdot e^x = (2+4x+x^2) \cdot e^x$	۲. مشتق

اړین شرایط

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(2+x) \cdot e^x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2$$

پوره کېدونکي شرایط

$$\text{او } e^{-2} = \frac{1}{e^2} > 0 \text{ له } f''(-2) = (2-8+4) \cdot e^{-2} = -2 \cdot e^{-2} < 0$$

$$f''(0) = 2 \cdot e^0 = 2 > 0 \quad f''(0) = 2 \cdot e^0 = 2 > 0 \text{ امله.}$$

د تابع ارزښتونه

$$f(-2) = 4 \cdot e^{-2} \approx 0.54, \quad f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$$

$$f(-2) = 4 \cdot e^{-2} \approx 0,54, \quad f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$$

پایله:

تابع  $(-2 | 0,54)$  جگتکي او  $T(0|0)$  تیتکتی لري.

۱۳۰ (۷۵): د لاندې توابعو ټول لوکال افراطي ټکي پیدا کړئ.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = e^{-4x^2} & b) f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^x \\ c) f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & d) f(x) = \ln(x^2 + 1) \end{array}$$

۱۳۱ (۷۶): د تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دي په دي په لاندې انتروال کې ولټول شي.  
 $-2\pi \leq 2\pi$ .

$$a) f(x) = \sin^2 x \quad b) f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$$

۱۳۲ (۷۷): لاندې توابعو ټول لوکال او گلوبال افراطي ځايونه پيدا کړئ.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \sqrt{x^2 + x} & b) f(x) = \sqrt{x^2 + 3} \\ c) f(x) = x - \sqrt{x} & d) f(x) = 3 + \sqrt[3]{x^2} \end{array}$$

۱۳۳ (۷۸): لومړی دمطلق ارزښت وشمېرئ او پسي ټول افراطي ارزښتونه وټاکئ.

$$a) f(x) = |x| + x^2 \quad b) f(x) = |x^2 + 2x - 8|$$

د مات کسري توابعو د سره د انعطاف ټکي (اورونټيکي) بېلگه:

د  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x - 1)^2}$ ,  $x \neq 1$  سره د انعطاف ټکي پيدا کونه د مشتق جوړښت د ویش د قاعدې سره

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x - 1)(x - 1)^2 - (x^2 - x - 2) \cdot 2 \cdot (x - 1)}{(x - 1)^4} \\ &= \frac{(2x - 1)(x - 1) - 2(x^2 - x - 2)}{(x - 1)^3} = \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - 2x^2 + 2x + 4}{(x - 1)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{5 - x}{(x - 1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot (x - 1)^3 - (5 - x) \cdot 3 \cdot (x - 1)^2}{(x - 1)^6} = \frac{-1(x - 1) - 3(5 - x)}{(x - 1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2x - 14}{(x - 1)^4}$$

د انعطاف ټکي لپاره اړين شرطونه:  $f''(x) = 0$

$$\frac{2x - 14}{(x - 1)^4} = 0 \Rightarrow 2x - 14 = 0 \Rightarrow x_1 = 7$$

د  $f''(x)$  د مخنيبي له مخي د پوره کيدونکو شرطونو ازماينيت

$$f''(6) = \frac{12-14}{5^4} = -\frac{2}{5^4} < 0, \quad f''(8) = \frac{16-14}{7^4} = +\frac{2}{7^4} > 0$$

$$\Rightarrow W(7 / \frac{10}{9})$$

د انعطاف - يا اوږونټکي دی.  $W(7 / \frac{10}{9})$

۱۳۸ (۸۳): د لاندې توابعو د انعطاف ټکي پيدا کړئ.

$$a) f(x) = \frac{2x-2}{x^2} \qquad b) f(x) = \frac{x}{x^2+3}$$

$$c) f(x) = \frac{x^3}{3(x-1)^2} \qquad d) f(x) = \frac{x^3-8}{4x}$$

۱۳۹ (۸۴): وښايئ، چې د  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} e$  تابع د انعطاف ټکي زینټکي دی. د لاندې توابعو د انعطاف ټکي (اوږونټکي) پيدا کړئ.

$$a) f(x) = x \cdot e^{-x^2} \qquad b) f(x) = \ln \frac{1}{x^2+1}$$

۱۴۱ (۸۶): په انټروال  $0 \leq x \leq 2\pi$  کې د انعطاف ځايونه پيدا کړئ.

$$a) f(x) = x + \sin x \qquad b) f(x) = 2(1 - \sin 2x)$$

۱۴۲ (۸۷): لاندې کسري راشنل توابع د تعريف تشيا په اړوند وڅېړئ. وښايئ چې ايا دا متمادي (ناپريکيدونکي) له منځه وړونکي تعريف تشيا لري او که قطبځايونه دي.

$$a) f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2} \qquad b) f(x) = \frac{x^2+2}{x+2}$$

$$c) f(x) = \frac{x}{x^2-3} \qquad d) f(x) = \frac{x^2-1}{1+x}$$

۱۴۳ (۸۸): وڅېړئ، چې ايا لاندې توابع د  $x=0$  په ځاي کې ناپريکيدونکي دي.

a) $f(x) = \begin{cases} -2x \\ \sqrt{x} \end{cases}$	لپاره $x \leq 0$ د $x_0 = 0$ لپاره $x > 0$ د $x_0 = 0$	b) $f(x) = \begin{cases} 2 \\ x^2 + 1 \end{cases}$	لپاره $x \leq 1$ د $x_0 = 1$ لپاره $x > 1$ د $x_0 = 1$
c) $f(x) = \begin{cases} \sin x \\ e^x \end{cases}$	لپاره $x \leq 0$ د $x_0 = 0$ لپاره $x > 0$ د $x_0 = 0$	d) $f(x) = \begin{cases} -x + 1 \\ \ln x \end{cases}$	لپاره $x \leq 1$ د $x_0 = 1$ لپاره $x > 1$ د $x_0 = 1$

۱۴۴ (۹۹): د تعريف سټ (تعريفېږئ) د کومو توکو لپاره لاندې توابع نه دي تعريف؟

a)  $f(x) = |x^2 - 2|$

b)  $f(x) = |2x - 1|$

c)  $f(x) = \sqrt{2x - 4}$

d)  $f(x) = x + |x + 1|$

e)  $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

f)  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

۱۴۵ (۹۰): لاندې توابع په  $x_0$  کې په مشتقورتيا باندې وڅېړئ.

a)  $f(x) = \begin{cases} \cos x & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}, x_0 = 0$

b)  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}, x_0 = 1$

c)  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 1 \\ e^{x-1} & x \geq 1 \end{cases}, x_0 = 1$

d)  $f(x) = \begin{cases} \ln x & x \leq 1 \\ x - 1 & x > 1 \end{cases}, x_0 = 1$

۱۴۶ (۹۱): a او ذ داسې وټاکئ، چې f تابع په  $x_0$  کې مشتقور ده

a)  $f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 0 \\ x^2 + 2x & x > 0 \end{cases}, x_0 = 0$ , b)  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & x < 1 \\ x + 1 & x \geq 1 \end{cases}, x_0 = 1$

۱۴۷ (۹۲) ولي متماديت د مشورتيا لپاره اړين شرط، مگر مشتقور والی د متماديت لپاره پوره کېدونکی شرط دی؟

۱۴۸ (۹۳) په کوم دليل تام راشنل توابع د  $x \in R$  لپاره مشتقور دي؟ دا لاندې توابعو مونوتوني (جگ - تیتوالي) و څېړئ.

1)  $f(x) = x^3 - 1.5x^2 - 6x - 6$

2)  $f(x) = x^3 + 4$

3)  $\ln \frac{1}{x+1}$

۱۴۹ (۹۴): لاندې تام راشنل توابع په همغريزو والي خوښوونو وڅېړئ.

a)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$

b)  $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 12x$

c)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$

d)  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + 2$

۱۵۰ (۹۵): د لاندې ماترانشنل توابعو د مونوتوني حالت د د a په واکوالي کې ورکړئ.

a)  $f(x) = \frac{1}{ax+2}$

b)  $f(x) = \frac{1}{ax^2+1}$

۱۵۱ (۹۶): و څېړئ، چې ایا لاندې توابع په خپله پېزند ورشو مونو ون او که په کلکه مونوتون دي.

$$a) f(x) = \frac{e^x}{2+e^x}$$

$$b) f(x) = 2x^5 - 7$$

$$) f(x) = \frac{e^x}{2+e^x}$$

$$b) f(x) = 2x^5 - 7$$

۱۵۲ (۹۷): لاندې ناراشنل توابع په یو غریزووالي خوینو وڅیړئ.

$$a) f(x) = e^{x^2}$$

$$b) f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$$

۱۵۳ (۹۸): په کومه ورشو کې لاندې تام راشنل توابع یو کین کړوالی لري او په کون کې بنی کړوالی لري.

$$a) f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 2$$

$$b) -2x^3 + 3x^2 - x - 4$$

۱۵۴ (۹۹): د لاندې مات توابعو گرافونه هاپیاربول دي. د هاپیاربول څانگې کوم کړوالی لري؟

$$a) f(x) = \frac{1}{4x+1}$$

$$b) f(x) = 3 - \frac{3}{x^2}$$

۱۵۵ (۱۰۰): په کومه ساحه کې لاندې ناراشنل توابع یو کین او په کوم کې یو بنی کړوالی لري؟

$$a) f(x) = x \cdot e^{2-x}$$

$$b) f(x) = \ln x^2$$

۱۵۶ (۱۰۱): ولې د یوه دریمې درجې تام راشنل تابع گراف په تل تلنه کې یوه بنی انخنا کړوالی نه لري.

۱۵۷ (۱۰۲): ولې یو څلورمه درجه تامراشنل تابع د  $f(x) = ax^4 + dx + e$  سره یو تلتلونی کینه انخنا (کړوالی) او بنی انخنا لري؟

۱۵۸ (۱۰۳): څنگه کېدی شي، چې د یوې  $f$  تابع د ۱ درجې مشتق څخه د د گراف په انخنا قضاوت وکړو؟

۱۵۹ (۱۰۴): لاندې توابع په ضربخایونو وڅیړئ؟

$$a) f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x+1}$$

$$b) f(x) = \frac{x+2}{x^2 + 4x + 4}$$

$$c) f(x) = \frac{x}{x^2 - 3}$$

$$d) f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2}$$

$$d) f(x) = \frac{x+5}{x^2}$$

$$f) f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 4}{x}$$

۱۶۰ (۱۰۵): د لاندې توابعو حالت وڅیړئ، که  $|x| \rightarrow \infty$  په لور لار شي.

$$a) f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x - 5$$

$$b) f(x) = -3x^4 + x^3 - 2x^2 + x$$

$$c) f(x) = \frac{1}{3}x^5 - x + 6$$

$$d) f(x) = -\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$$

$$e) f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}$$

$$f) f(x) = -x^3 - x^2 - x - \frac{1}{3}$$

۱۶۱ (۱۰۶): د لاندې مات راشنل توابعو حالت وڅیړئ، که  $|x| \rightarrow \infty$  په لور لار شي. که شتون ولري، نو د اسیمپتوت (مجاناب) همداسې د ورنږدې منحنی مساوات ورکړئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - x}{-4x^3 + 2x - 3} & b) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 3} \\
 c) f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 7x - 3}{x^2 + 3} & d) f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5x + 3}{x + 1} \\
 e) f(9x) = \frac{-3x^3 + 4x^2 + x - 3}{x^2 - 1} & f) f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x}{x + 1} \\
 g) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 5}{x^4 + 3x^2 - 2x - 3} & h) f(x) = \frac{2x^2 + 4x - 1}{3x^2 - x + 2}
 \end{array}$$

۱۶۲ (۱۰۷): د نارنشتوني توابعو حالت و څېړئ، که  $|x| \rightarrow \infty$  لار شي.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = 3 + 2^x & b) f(x) = 1 - \ln |x| \\
 c) f(x) = e^{|x|} - 3 & d) f(x) = x + e^x
 \end{array}$$

۱۶۳ (۱۰۸): ولې د  $x \rightarrow +\infty$  لپاره په ساده ډول د پولې په هکله وړاند وینه نه شي کېدای:

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = x^3 \cdot \frac{1}{\ln x} & b) f(x) = x \cdot e^{-x}
 \end{array}$$

۱۶۴ (۱۰۹): لاندې تامراشل شوني اعداد په شيومتری وڅېړئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = x^3 + x^2 - 1 & b) f(x) = -x^4 + 2x^2 - 3 \\
 c) f(x) = 3x^3 + x & d) f(x) = x^2 + 1
 \end{array}$$

۱۶۵ (۱۱۰): یو و سرچېني ټکي سره ټکي سيومتر تام ريښتوني دريمه درجه تابع  $H(2,5)$  جگټکی لري. د دې تابع ټيټکی کوم وضعيه ارزښتونه لري؟

۱۶۶ (۱۱۱): یو د څلورمې درجې تابع د - محور ته سيومتری تابع یو ټيټکی په  $(-3,4)$  کې لري.

د بل افراطي ټکي وضعيه قېمتونو په هکله څه ویلای شی؟

۱۶۷ (۱۱۲): د جوړه (جفت) جگعدد (اکسپوننت) سره تام ريښتوني تابع کوم ډول سيومتری لري؟

۱۶۸ (۱۱۳): د ناجوره (طاق) جگعدد (اکسپوننت) سره یو تام ريښتوني تابع ټيک هلته د سر چيني سره ټکي سيومتری دی، چې مطلق ارزښت صفر شي؟

۱۶۹ (۱۱۴): لاندې تام ريښتوني اعداد په سيومتری و څېړئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} & b) f(x) = \frac{x^5 - 2x^3 + x}{x^3 - x} \\
 c) f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^4 + 2x^2 - 3} & d) f(x) = \frac{3}{x^3 - 1}
 \end{array}$$

۱۷۰ (۱۱۵): لاندې نارينشتوني اعداد په سيومتری وڅېړئ.

$$a) f(x) = x^2 \cdot e^{|x|} \qquad b) f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

په گوته كونه (لارښود): توابع بي له بنسټ كې يادشوي سيومتري خويونو ، نور سيمتري خويونه هم ولري.

۱۷۱ (۱۱۶): لاندې توابع په بنسټ كې لوستل شوي سيومتري خويونه نه لري. وښايئ چې دا سره له دې هم سيومتريك دي.

$$a) f(x) = (x+2)^2 \qquad b) f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$c) f(x) = -(x+1)^2 + 3 \qquad d) f(x) = 2 + \frac{1}{x-4}$$

۱۷۲ (۱۱۷): لاندې تام ريښتوني اعداد په محدوديت وڅېړئ.

$$a) f(x) = x^2 - 2x + 4 \qquad b) f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x$$

$$c) f(x) = -(x+3)^2 + 1 \qquad d) f(x) = x^3 - 2x + 1$$

۱۷۳ (۱۱۸): لاندې كسر ريښتوني اعداد په محدوديت وڅېړئ.

$$a) f(x) = 1 - \frac{2}{x+4} \qquad b) f(x) = 1 - \frac{2}{x^2+4}$$

$$c) f(x) = \frac{x}{x^2+1} \qquad d) f(x) = \frac{1}{x^2} - 5$$

۱۷۴ (۱۱۹): لاندې نارښتوني اعداد په محدوديت وڅېړئ.

$$a) f(x) = 2 - e^x \qquad b) f(x) = x^2 + |x| + 2$$

$$c) f(x) = \sqrt{4-x^2} \qquad d) f(x) = 2 + \sin 2x$$

۱۷۵ (۱۲۰): لاندې پوله ارزښتونه وشمېړئ.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2^x} \qquad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \qquad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{e^x} \qquad f) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)$$

۱۷۶ (۱۲۱): د لويپتال قاعدې په مرسته د  $x \rightarrow \infty$  لپاره د لاندې مات ريښتوني توابعو پوله ارزښتونه وشمېړئ.

$$a) f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1} \qquad b) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$$

۱۷۷ (۱۲۲): لاندې مساوات ټيک يو صفرځاي لري. دا د تانجنت له لارې تر دوه لسميزو ځايونو وټاکئ.



$$\begin{aligned} a) f(x) &= x^3 - 2x - 3 & b) f(x) &= x^3 - x^2 - 15 \\ c) f(x) &= x^3 + 6x^2 + 12x + 5 & d) f(x) &= x^5 + x^3 - 20 \end{aligned}$$

۱۷۸ (۱۲۳): د لاندې توابعو لپاره د  $x=x_0$  په ځای کې د تانجنت مساوات وټاکئ

۱۷۹ (۱۲۴): په کومو ټکو کې د لاندې مساواتو لپاره د تانجنت مساوات د ورکړ شوي کرني سره غبرگ دي؟

۱۸۰ (۱۲۵): د  $x = x_0$  په ځای کې د لاندې توابعو لپاره د تانجنت مساوات وټاکئ

$$\begin{aligned} a) f(x) &= x^3 + x^2 - 3x - 2, \quad x_0 = -1 \\ b) f(x) &= \frac{3 - x^2}{2x - 1}, \quad x_0 = 1 & c) f(x) &= \frac{1}{x} \cdot \ln x, \quad x_0 = 1 \end{aligned}$$

۱۸۱ (۱۲۶): د لاندې توابعو لپاره په کومو ټکو کې تانجنت د ورکړ شوو کرنيو سره غبرگ دي؟

$$\begin{aligned} a) f(x) &= -x^3 + 3x^2 + 2x - 5, \quad g: y = 2x \\ b) f(x) &= \frac{3x - 4}{x}, \quad g: y = x + 2 \end{aligned}$$

۱۸۲ (۱۲۷): ټول راشنل تابع  $f_t$  د  $f_t(x) = x^3 + tx^2 + tx$  سره له سرچینې څخه تیرېږي. هلته د تانجنت مساوات پیدا کړئ د  $t$  په تابعیت کې.

۱۸۳ (۱۲۸): د  $t$  د کوم ارزښت لپاره د  $f_t(x) = \frac{t^2}{x^2 + t}$  په گراف تانجنت په  $x_0 = -3$  ځای کې د  $g: y = \frac{3}{8}x + 2$  گراف سره غبرگه ده؟

۱۸۴ (۱۲۹): په ټکي  $N(x_1/0)$  کې د نه راشنل فنکشن  $f$  په گراف د  $f(x) = (x - t) \cdot e^x$  سره د تانجنت برابرېږي یا مساوات وټاکئ.

۱۸۵ (۱۳۰): په  $f$  تابع د  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 1$  سره په ټکي  $P(0, -9)$  کې د تانجنت مساوات وټاکئ.

۱۸۶ (۱۳۱): د تام ریښتوني  $f$  تابع د  $f(x) = x^3 - 3x - 1$  سره تانجنت په ټکي  $P(-2, 5)$  کې وټاکئ.

۱۸۷ (۱۳۲): د مات ریښتوني  $f$  تابع د  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x}$  سره د تانجنت مساوات په  $P(-1, -\frac{4}{3})$  ټکي وټاکئ.

۱۸۸ (۱۳۳): د لاندې تام ریښتوني توابعو د انعطاف ټکي (اورونټکي) او د نورمالي مساوات ولیکئ.

$$a) f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3} \quad b) f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 2x + 10$$

۱۸۹ (۱۳۴): د لاندې تابع د

$$f_t(x) = \frac{4}{3}t^2x^3 + 3tx^2 + 3x \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

سره د انعطاف – يا اورونتيكي مساوات وليکئ.

۱۹۰ (۱۳۵): د اکسپوننشم تابع د انعطاف ټک او په انعطاف ټکي د

$$f(x) = (x-2) \cdot e^x \text{ نورمال مساوات پيدا کړئ.}$$

۱۹۱ (۱۳۶)

$$f_t(x) = t \sin x + t \cos x \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

په انټروال  $0 \leq x \leq \pi$  کي.

۱۹۲ (۱۳۷): د لاندې توابعو لپاره د منحنیو شننيز بحث وکړئ او گرافونه يې و کارئ.

$$a) f(x) = -x^3 + x^2 + 4 \quad b) f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

$$c) f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \quad d) f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

۱۹۳ (۱۳۸): د لاندې توابعو لپاره د پوره منحنیو يا کړو مطالعه وکړئ او گرافونه يې و کارئ.

$$a) f(x) = \frac{x}{4} - \frac{2}{x^2} \quad b) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$$

$$c) f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} \quad d) f(x) = \frac{9}{x^2 + 3}$$

## انټیگرال شمیرني ته پوښتنې

۱- لاندې نااصلي پولینومونه دي د یوه ټول نسبتي- یا راشنل عدد پولینومونو او یوه اصلي پولینوم د جمعې په څېر ولیکل شي.

$$a) \frac{x^3 + 7x^2 + 9x - 5}{x + 5}$$

$$b) \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2 - 2}$$

$$c) \frac{x^3 - 2x^2 + x - 5}{x^3 + 1}$$

$$d) \frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

$$e) \frac{x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 3}{x - 2}$$

$$f) \frac{x^5 - x^4 + 1}{x^2 + 2}$$

- ۲

$$a) \frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$$

$$b) \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$$

$$c) \frac{4x + 10}{x^2 + 6x + 8}$$

$$d) \frac{-3x^2 + 19x - 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$$

$$e) \frac{4x^2 + 6x - 20}{x^3 - 4x}$$

$$f) \frac{14}{x^2 + 20x + 51}$$

۳ - د لاندې اصلي پولینومونو په توټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

$$\begin{array}{ll} a) \frac{3x^2 + 5x + 10}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} & b) \frac{3x^2 - 18x + 36}{x^3 - 6x^2 + 9x} \\ c) \frac{x^2 + 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1} & d) -\frac{x^2 + 13x + 10}{x^3 - 5x^2} \end{array}$$

۴ - د لاندې اصلي پولینومونو په توټه کسرونو ټوټه ګونه ورکړئ.

$$\begin{array}{ll} a) \frac{x^2 + 2x - 12}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5} & b) \frac{4x^2 - 3x + 8}{x^3 - 2x + 4} \\ c) \frac{8x^2 - 16x + 10}{x^3 - 4x^2 + 5x} & d) \frac{x}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} \end{array}$$

۵ - د لاندې پولینوم کسرونو په توټه کسرونو ټوټه کونه پرکړئ.

$$\begin{array}{ll} a) \frac{x^3 + 7x^2 + 17x + 17}{x^2 + 6x + 8} & b) \frac{2x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 4}{x^2 - 4x + 3} \\ c) \frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1} & d) \frac{4x^3 + 16x^2 - 7x - 49}{x^3 + 4x^2 + x - 6} \end{array}$$

۶ - وښایئ، چې د F تابع د f تابع لومړنی تابع ده.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = 2x^2 + 4x - 7, & f(x) = 4x + 4 \\ b) F(x) = (x^2 - x)^3, & f(x) = 3 \cdot (2x - 1) \cdot (x^2 - x)^2 \\ c) F(x) = \sqrt{2x + 1}, & f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} \\ d) F(x) = 1 + \sin x, & f(x) = 3x \cdot \cos 3x \\ e) F(x) = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \frac{4}{9}x^3, & f(x) = x^2 \cdot (\ln x - 1) \end{array}$$

۷ - وښایئ، چې د F او G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$$\begin{array}{ll} a) F(x) = x^3 + x + 4, & G(x) = x^3 + x + 1 \\ b) F(x) = (x - 3)^2, & G(x) = x^2 - 6x + 4 \\ c) F(x) = \frac{x + 1}{x + 2}, & G(x) = \frac{3x + 5}{x + 2} \\ d) F(x) = 1 + \sin x, & G(x) = \sin x \end{array}$$

۱۳ - لاندې ناټاکلي انټیګرالونه پیدا کړئ او ټیکوالی یې و ازمایئ.

$$\begin{array}{lll}
a) \int x^3 dx & b) \int 7dx & c) \int x dx \\
d) \int (1-x^2) dx & e) \int (x + \frac{1}{x}) dx & f) \int (e^x + \cos x) dx \\
g) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx & h) \int \frac{5}{\cos^2 x} dx & i) \\
i) \int u dx & k) \int (2+e^x) dx & l) \int (1+\ln x) dx & m) \int (\sqrt{x} + \sin) dx
\end{array}$$

۱۴ - د لاندې ټاکلو انټیگرالونو ارزښت وشمېرئ

$$\begin{array}{lll}
a) \int_0^3 4dx & b) \int_{-3}^{-1} x dx & c) \int_1^e \frac{1}{x} dx \\
d) \int_1^e (2 + \frac{1}{x}) dx & e) \int_{-1}^0 e^x dx & f) \int_0^\pi \sin x dx \\
g) \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4dx & h) \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x} dx & i) \int_{-2}^2 x^3 dx \\
j) \int_2^6 (1+x) dx & k) \int_1^2 (x^2 - x^5) dx & l) \int_{-2}^2 (\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3}) dx
\end{array}$$

۱۶ = د لاندې ټاکلو انټیگرالونو ارزښت وشمېرئ او ارزښتونه یې سره پرتله کوئ.

$$\begin{array}{ll}
a) \int_{-3}^1 3dx \text{ und } - \int_{-3}^1 3dx & b) \int_0^1 (1+e^x) dx \quad \wedge \quad - \int_1^0 (1+e^x) dx \\
c) \int_{-\pi}^0 \sin x dx \quad \wedge \quad - \int_0^{-\pi} \sin x dx
\end{array}$$

۱۷ - هر دوه انټیگرالونه د یوه انټیگرال سره انځور کړئ.

$$\begin{array}{ll}
a) \int_0^{0.5\pi} \cos x dx + \int_{0.5\pi}^\pi \cos x dx & , \quad b) \int_{-1}^0 (x + e^x) dx + \int_0^1 (x + e^x) dx \\
c) \int_2^3 3x^2 dx - \int_5^3 3x^2 dx & , \quad d) \int_{-2}^1 (2+x) dx - \int_4^1 (x + e^x) dx
\end{array}$$

0 - د لاندې ټاکلو انټیگرالونو لپاره ارزښت تخمین کړئ.

$$\begin{array}{ll}
a) \int_{-4}^{-2} e^{x+3} & b) \int_0^8 \sqrt{1+x} dx \\
c) \int_3^5 2^{4-x} dx & d) \int_0^{0.5\pi} \sin^2 x dx
\end{array}$$

۱۹ - د کومو  $x$  ارزښتونو لپاره لاندې انټیگرالونه ورکړ شوي ارزښتونه لري؟

$$a) \int_1^x 5t^4 dt, \quad la(x) = 31 \qquad b) \int_0^x e^t dt, \quad la(x) = e - 1$$

۲۰ - لاندې انټیگرالونه توابع ته د انټیگرال توابع وټاکئ.

$$a) f(x) = x^2, \quad a = 3 \quad b) f(x) = 2 + e^x \quad a = 0$$

$$c) f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad a = 0 \quad d) f(x) = 2 \quad a \in \mathbb{R}$$

۲۱ - لاندې ناپاکلي انټیگرالونه پیدا کړئ

$$a) \int \sqrt[4]{x^3} dx \qquad b) \int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx \qquad c) \int \sqrt[6]{x^5} dx \qquad d) \int x^2 \cdot \sqrt[3]{x} dx$$

$$e) \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx \qquad f) \int \frac{x^3}{x^4} dx \qquad g) \int \frac{x^3 \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx \qquad h) \int \frac{\sqrt[4]{x^2}}{x \cdot \sqrt{x^3}} dx$$

۲۲ - لاندې ناپاکلي انټیگرالونه پیدا کړئ

$$a) \int 8x^3 dx \qquad b) \int -4x^{-2} dx \qquad c) \int \frac{3}{-x^3} dx \qquad d) \int \sqrt[3]{3x} dx$$

$$e) \int k \cdot e^x dx \qquad f) \int -5x^n dx; n \neq 0 \qquad g) \int \frac{\sin x}{2} dx \qquad h) \int \frac{3a}{2 \cdot \cos^2 x} dx$$

$$i) \int \frac{2\sqrt{x}}{3x^3} dx \qquad j) \int \frac{-\sqrt{2}}{3x} dx$$

۲۳ - د توان قانون په مرسته یو ثابت ضریب بېل کړئ او د دې پسي لاندې ناپاکلي انټیگرال وټاکئ.

$$a) \int e^{x+3} dx \qquad b) \int (4x)^3 dx \qquad c) \int a \cdot e^{x+b} dx \qquad d) \int (7x^2)^4 dx$$

۲۴ - لاندې ناپاکلي انټیگرالونه وشمېرئ

$$a) \int (x^2 + 3x - 4) dx \qquad b) \int (x - \sqrt{x}) dx \qquad c) \int (5x^3 - 7x + 4) dx$$

$$d) \int (1+x)^2 dx \qquad e) \int x^2(x^2 + 2) dx \qquad f) \int x^2(1+x)(x-1) dx$$

$$g) \int (\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2}) dx \qquad h) \int (\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5}) dx \qquad i) \int (5x - \frac{1}{3} + \frac{\cos x}{3}) dx$$

$$k) \int (5 + x^5 + \sin x) dx \qquad l) \int (e^x - \frac{1}{\sin^2 x}) dx \qquad m) \int (\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x}) dx$$

۲۵ - لاندې ناپاکلي انټیگرالونه لومړی په یوه جمعه وپروئ او ورپسي انټیگرالونه وټاکئ.

$$a) \int \frac{(x^2 - 1)^3}{x} dx \qquad b) \int (\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}) dx$$

$$c) \int \frac{e^{2x} + e^{x+2}}{e^x} dx \qquad d) \int (\frac{3x^2 + 2x - 4}{x^3}) dx$$

۲۶ - لاندې ناپاکلي انټیگرالونه وشمېرئ.

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \int 3^{x+1} dx & \text{b) } \int 2^{-x} dx & \text{c) } \int a^{x+b} dx & \text{d) } \int \frac{1}{a^x} dx \\
 \text{e) } \int 2^x \cdot 3^x dx & \text{f) } \int \frac{2^x}{3^x} dx & \text{g) } \int \frac{4^{x+3}}{2^x} dx & \\
 \text{h) } \int \frac{5^x + 3^x}{2^x} dx & \text{i) } \int (1 + 2x^x) dx & \text{j) } \int (x - 3^x) dx & 
 \end{array}$$

۲۷ - لاندې ناکلي انټیگرالونه وشمېرئ

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \int \ln 2x^3 dx & \text{b) } \int \ln \sqrt{x} dx \\
 \text{c) } \int \lg \frac{x}{2} dx & \text{d) } \int_3 \log \frac{1}{x} dx
 \end{array}$$

۲۸ - د مشتق د قوانینو په مرسته وښایئ، چې تابع  $F$  د  $F = x \cdot \ln x - x$  سره یو لومړنی تابع ده و  $f(x) = \ln x$  تابع ته

۲۹ - د انټیگرال شمېرنې په مرسته د عمومي لوگارتم تابع لپاره د طبیعي لوگارتم له فرمول څخه د انټیگرال فرمول راوباسئ.

۳۰ - لاندې ناکلي انټیگرالونه د بدلون په طریقو وشمیرئ.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \int \frac{10}{5x-7} dx & \text{b) } \int \frac{12}{(1+3)^4} dx & \text{c) } \int \frac{1}{5-4x} dx \\
 \text{d) } \int \frac{a}{bx+d} dx & \text{e) } \int (5x+7)^3 dx & \text{f) } \int (ax+b)^n dx \\
 \text{g) } \int \sqrt{4x-2} dx & \text{h) } \int \sqrt{ax+b} dx & \text{i) } \int \frac{7}{\sqrt{2x+5}} dx \\
 \text{j) } \int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx & \text{k) } \int \sin 4x dx & \text{l) } \int \frac{3}{e^{2x}} dx
 \end{array}$$

$$\text{n) } \int \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) dx \quad \text{o) } \int e^{3x-5} dx$$

۳۲ - لاندې ناکلي انټیگرالونه وشمېرئ.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \int \frac{\ln x}{x} dx & \text{b) } \int x(x^2+3) dx \\
 \text{c) } \int 3x^2(x^3-1) dx & \text{d) } \int (2x-1)(x^2-x) dx
 \end{array}$$

$$\int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} (f(x))^2 + c$$

۳۳ - د بدلون قاعدې په مرسته وشمېرئ.

۳۴ - لاندې ناکلي انټیگرالونه وشمېرئ، ښه یې بدله کړئ، که اړین وي.

$$a) \int \frac{x^2}{4+x^3} \quad b) \int \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2-1}$$

۳۵ په لاندې انتیگرالونو پرېکړه وکړئ، چې ایا لوگاریتمی یې انتیگرال نیوه کېدی شي او یا د بدلون قانون باید و کارول شي؟

$$a) \int \frac{5x^4}{3+x^5} dx \quad b) \int \frac{5x^4}{(3+x^5)^2} dx \quad c) \int \frac{3x}{(1-x^2)^4} dx$$

$$d) \int \frac{5x}{4-x^2} dx \quad e) \int \frac{\cos x}{3+\sin x} dx \quad f) \int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2} dx$$

۳۶ - لاندې ناکلې انتیگرالونه پیدا کړئ. لومړی یې بڼه بدله کړئ، که اړین وي.

$$a) \int \frac{4}{x^2+9} dx \quad b) \int \frac{3}{2x^2+2} dx \quad c) \int \frac{1}{x^2+2} dx$$

$$d) \int \frac{2}{3x^2+5} dx \quad e) \int \frac{1}{x^2+a^2} dx \quad f) \int \frac{1}{ax^2+b} dx, ab > 0$$

۳۷ - وښایئ، چې دا لاندې انتیگرالونه (هغه، چې انتیگرال یې نیول کېږي) صفرخایونه نه لري. پسي ترلي ناکلې انتیگرالونه وشمېرئ.

$$a) \int \frac{1}{x^2+4x+13} dx \quad b) \int \frac{5}{x^2+2x+2} dx$$

$$c) \int \frac{6}{3x^2+18x+30} dx \quad d) \int \frac{2}{2x^2+8x+58} dx$$

۳۸ لاندې ناکلې انتیگرالونه وشمېرئ. لومړی یې، که اړین وي، بڼه بدله کړئ.

$$a) \int \frac{2}{\sqrt{9-x^2}} dx \quad b) \int \frac{1}{\sqrt{2-4x-x^2}} dx \quad c) \int \frac{1}{\sqrt{2x^2-2}} dx$$

$$d) \int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x-2}} dx \quad e) \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx \quad f) \int \frac{6}{\sqrt{9x^2+9}} dx$$

۳۹ - لاندې ناکلې انتیگرالونه وشمېرئ، لومړی یې که اړین وي، بڼه بدله کړئ.

$$a) \int \frac{1-x}{x^2+x+1} dx \quad b) \int \frac{2x+1}{x^2+4x+6} dx$$

$$c) \int \frac{3x}{2x^2+2x+8} dx \quad d) \int \frac{x-3}{x^2+8x+17} dx$$

۴۰ - لاندې انتیگرالونه د ټوټه انتیگرالونې له لارې پیدا کړئ یا وشمېرئ.

$$a) \int x \cdot e^x dx \quad b) \int x \cdot \sin x dx \quad c) \int x^2 \cdot \ln x dx$$

$$d) \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad e) \int x \cdot e^{2x} dx \quad f) \int x \cdot \sin 2x dx$$

۴۱ - لاندې ناکلې انتیگرالونه د ټوټه انتیگرال له لارې وشمېرئ.

که اړین وي، نو په ۴۰ - م تمرین کې شمېرلي نتيجه وکاروم.

$$\begin{array}{ll} a) \int x^2 \cdot \cos x dx & b) \int x^2 \cdot e^x dx \\ c) \int x^2 \cdot e^{2x} dx & d) \int x^2 \cdot \cos 2x dx \end{array}$$

د پورته کارولي ریکورزیون ( ) فرمول په مرسته لاندې ناتیګر الوونه وشمېرئ.

$$\begin{array}{ll} a) \int x^4 \cdot e^{2x} dx & b) \int \sin^4 x dx \\ c) \int x^3 \cdot e^{2x} dx & d) \int \cos^6 x dx \end{array}$$

۴۴ - لومړی د ټوټه کسر ټوټه ونه سرته ورسوئ او بالاخره لاندې ناتیګر الوونه حل کړئ.

$$\begin{array}{ll} a) \int \frac{1}{x^2-1} dx & b) \int \frac{1}{x^2+6x+8} dx \\ c) \int \frac{3x+2}{x^2-x-2} dx & d) \int \frac{x^2-12x+12}{x^3-4x} dx \end{array}$$

۴۵ - لومړی به ټوټه کسر ټوټه ونه سرته ورسوئ او بیا لاندې ناتیګر الوونه حل کړئ. اصلي مات رېښتوني توابع، چې صورت (متلاندې) هم لاینز یا کرښیز ضریبونه لري.

$$\begin{array}{ll} a) \int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} dx & b) \int \frac{3x}{x^2-6x+9} dx \\ c) \int \frac{x^3-1}{x^4+x^3} dx & d) \int \frac{5x^3-11x^2+5x+4}{(x-1)^4} dx \end{array}$$

۴۶ - لومړی د هریوه لپاره په ټوټه کسر ټوټه ونه سرته ورسوئ او بالاخره لاندې ناتیګر الوونه وشمېرئ.

$$\begin{array}{ll} a) \int \frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)} dx & b) \int \frac{3x+4}{x^3-2x-4} dx \\ c) \int \frac{2x^2-2x+3}{x^3-x^2-x-2} dx & d) \int \frac{7x^2-10x+37}{x^3-3x^2+9x+13} dx \end{array}$$

۴۷ - لومړی د پولینوم ویش سرته ورسوئ او پسي لاندې ناتیګر الوونه پیدا کړي.

$$\begin{array}{ll} a) \int \frac{x^2}{x+1} dx & b) \int \frac{x^3-2x^2+x+5}{x^2-1} dx \\ c) \int \frac{3x^3+5x^2-29x-25}{x^2+x-12} dx & d) \int \frac{2x^3+x^2}{x^3-1} dx \end{array}$$

۴۸ - لاندې ناتیګر الوونه پیدا کړئ.

$$\begin{array}{ll} a) \int \sqrt{x^2-5} dx & b) \int \sqrt{5x^2+10} dx \\ c) \int \sqrt{x^2-6x+8} dx & d) \int \sqrt{2x^2+4x+6} dx \end{array}$$

۴۹ - لاندې ناتیګر الوونه وشمېرئ.



$$\begin{array}{ll} a) \int \sqrt{x^2 + 2x} dx & b) \int \sqrt{x^2 - 4x} dx \\ c) \int x \cdot \sqrt{x^2 + 4x + 3} dx & d) \int (x+2) \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 2} dx \end{array}$$

۵۰ - لاندې ناپاکلي انتيگرالونه وشمېرئ.

$$\begin{array}{lll} a) \int \frac{x^2}{x} dx & b) \int \frac{1}{x^3} dx & c) \int (1 - 2x^2 + x^3) dx \\ d) \int (x^2 - 3x - 6) dx & e) \int x \cdot \sqrt{x} dx & f) \int x^2 \cdot \sqrt[3]{x} dx & g) \int \frac{x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}} dx \\ h) \int \frac{3x \cdot \sqrt{x^3}}{x^2} dx & i) \int \frac{x^2 + 3x - 2}{x} dx & j) \int \frac{x - 5}{\sqrt{x}} dx \end{array}$$

۵۱ - لاندې ناپاکلي انتيگرالونه وشمېرئ.

$$\begin{array}{lll} a) \int 2(5 - 4x)^3 dx & b) \int \sqrt{5x + 2} dx & c) \int x \cdot e^{x^2} dx \\ d) \int x^2 \cdot \sqrt{2x^3 - 4} dx & e) \int \frac{3x + 3}{x^2 + 2x + 1} dx & f) \int \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^3} dx \\ i) \int \frac{x}{x^2 + 2x + 3} dx & j) \int \frac{1}{2x^2 + 9} dx & k) \int \frac{x}{x^2 + 2x - 3} dx \\ l) \int \frac{1}{x^2 - 10x + 25} dx & m) \int \sqrt{x^2 + 2x + 3} dx & n) \int \frac{1}{x^2 + 12x + 40} dx \end{array}$$

۵۲ - لاندې ناپاکلي انتيگرالونه وشمېرئ.

$$\begin{array}{llll} a) \int \ln(2x - 3) dx & b) \int \cos 3x dx & c) \int 2^{3x+1} dx & d) \int \lg 4x dx \\ e) \int x \cdot \ln x dx & f) \int \sqrt{x} \cdot \ln x dx & g) \int e^x \cdot \cos x dx & h) \int x \cdot \cos x dx \end{array}$$

۵۳ - وښايئ، چې لاندې ورکړل شوي توابع په ورکړل شوي انټروال کې لومړني توابع نه لري، مگر په I کې انتيگراور دي. په لاندې انټروال کې يې انتيگراو ارزښت ورکړئ.

$$\begin{array}{ll} a) I = [-2; 5] & b) I = [-3; 4] \\ f(x) = \begin{cases} -x & ; x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x & ; x > 1 \end{cases} & f(x) = \begin{cases} 2 & ; -3 < x \leq -1 \\ 1 & ; -2 < x \leq 1 \\ 2 & ; 1 < x \leq 4 \end{cases} \end{array}$$

۵۴ - د f تابع د  $f(x) = |x-1|$  سره په انټروال  $I = [-3, 3]$  د  $x=1$  سره مشتقور نه ده، وښايئ، چې سره له دې هم انتيگراور ده.

۵۵ - د لاندې توابعو منځني ارزښت په ورکړل شوي انټروالونو پيدا کړئ.

$$\begin{array}{l} a) f(x) = x^2 - 2x + 2 \text{ mit } x \in [-1; 4] \\ b) f(x) = x + 1 \text{ mit } x \in [0; 6] \\ c) f(x) = \sin \text{ mit } x \in [0; \pi] \end{array}$$

mit ... سره په معنا

۵۶ - و بنایي جي د  $f$  کربنيز (خطي) تابع  $f(x_0)$  منځ ارزڻت د  $f(x)=mx=n$  سره په انٽروال  $[a,b]$  نخبه ونه  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  اعتبار لري..

۵۷ - په ورکړ شوي انٽروال کي د د  $x$  محور او گراف ترمنځ سطحي وشمېرئ.

a)  $f(x) = x^2 + 1$  ,  $x \in [-2; 1]$

b)  $f(x) = 2 + \sin$  ,  $x \in [0; \pi]$

c)  $f(x) = -x^2 - 4x - 5$  ,  $x \in [-3; 0]$

d)  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$  ,  $x \in [1; e]$

۵۸ - د انٽروال پورتنی پوله  $b$  داسي وشميرئ، چي د پارابول  $p: y = x^2 + 2x + 2$  او  $x$  - محور ترمنځ سطحه په انٽروال  $[-2; b]$  کي کي عدد ۶ ونيسي.

۵۹ - لاندنی د انٽروال پوله  $a$  داسي وٽاکئ، چي د پارابول  $p: y = 3\sqrt{x}$  او  $x$  - محور ترمنځ سطحه په انٽروال  $[a; 4]$  کي عدد ۱۴ واخلي.

۶۰ - يو پورته لور ته کښول شوی نورمال پارابول د  $x$  - محور سره په انٽروال کي  $[-1; 2]$  يوه سحه د کچ عدد ۹ سره رابنده کړئ.

د پارابول مساوات وٽاکئ.

۶۱ - ضريب  $a$  داسي وٽاکئ، چي د  $f(x) = a \cdot \sin x$  ساين تابع د  $x$  - محور سره په انٽروال  $[0; \pi]$  کي عدد 4 رابند کړي.

۶۲ - د کربني  $g: y = 0,5x + 2$  او د پروتولار سيستم (وضعيه قيمت تر منځ) سطحه وشميرئ.

د ساده شميرني له لاري يي و آزمایئ.

۶۳ - د گراف او  $X$  محور ترمنځ سطحه وشميرئ.

a)  $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{13}{4}x + 3$

b)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x$

c)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$

d)  $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

۶۴ - په ورکړ شوي انٽروال کي د گراف او  $x$  محور ترمنځ سطحه وشميرئ.

a)  $f(x) = x - 2$  ,  $x \in [-2; 3]$

b)  $f(x) = x^2 - x - x$  ,  $x \in [1; 5]$

c)  $f(x) = x^2 - 8x + 12$  ,  $x \in [0; 8]$

۶۵ - د اکسپوننشل منحنی  $g$  د  $y = e^x$  سره او د پارابول  $p$  د  $y = -x^2 - 1$  سره رابنده سطحه په انٽروال  $[0; 1]$  کي وشميرئ.

۶۶ - د کربني  $g$  د  $y = 2x + 2$  سره د ساين  $h$  منحنی د  $y = \sin x$  سره او له اينٽروال  $[0; 2\pi]$  څخه رابنده سطحه وشميرئ.

٦٧ - پارابولونه  $p_1$  د  $y=x^2-3$  سره او  $p_2$  د  $y=2x^2+1$  سره په اینتروال  $[-1;2]$  کې یوه سطحه را بنده وي. دا رابنده سطحه و شمېرئ.

٦٨ - د پارابول  $P$  د  $y = \sqrt{x}$  سره او کرښه  $g$  یې د  $y = -x-1$  سره په اینتروال  $[0;4]$  کې رابنده سطحه لرو. دا را بنده سطحه و شمېرئ.

٦٩ - په اینتروال  $[-2;1]$  د کرښې  $g_1$  د  $y=x+3$  سره او  $g_2$  د  $y=2x+1$  څخه را بنده سطحه و شمېرئ.

٧٠ - پارابول  $p$  د  $y = x^2 - 6x + 5$  سره او کرښه  $g$  د  $y = -x + 1$  سره رابنده سطحه. د دې سطحې مساحت و شمېرئ.

٧٢ - د یوه کرښه یو پارابول  $p$  د  $y = x^2 + 2$  سره په  $x_1 = -1$  او  $x_2 = 2$  کې غوڅوي.

د کرښې او پارابول څخه رابندې سطحې مساحت و شمېرئ.

٧٣ - د  $g$  یوه کرښه یو پارابول  $p$  د  $y = 0,5x^2 + x + 4$  سره په  $x_1 = -2$  او  $x_2 = 4$  ټکو کې غوڅوي.

د دې کرښې او پارابول څخه رابندې سطحې مساحت و شمېرئ.

٧٤ - د دواړو پارابولونو  $p_1$  د  $y = -2x^2 + 8x - 3$  سره او  $p_2$  د  $y = x^2 - 4x + 6$  سره را بندې سطحې مساحت و شمېرئ؟

٧٥ - د دواړو پارابولونو  $p_1$  د  $y = 4\sqrt{x}$  سره او  $p_2$  د  $y = 0,5x^2$  سره را بندې سطحې مساحت و شمېرئ؟

٧٦ - د بارابول  $p$  د  $y = 2\sqrt{x}$  سره او کرښې  $g$  د  $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$  سره رابندې سطحې مساحت و شمېرئ.

٧٧ - د ساین د منحنی گراف او د کوساین د منحنی گراف یو بل په انتروال  $0 \leq x \leq 2\pi$  کې غوڅوي.

د دواړو غوڅتکو تر منځ له واړو منحنو را بندې سطحې مساحت و شمېرئ.

٧٨ - د تابع  $f$  په گراف پروت تانجنټ د  $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$  سره او د  $x_0 = 2$  په ځای کې د تابع د گراف سره رابندې سطحې مساحت و شمېرئ.

٧٩ - د هغې سطحې مساحت و شمېرئ، چې د  $x_0 = -1$  په ځای کې په پارابول  $y = x^2$  عمود د دې بارابول څخه را بنده وي.

$$t \ y = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

٨٠ - د  $f$  تابع گراف د سره د  $x$  محور سره سطحه پوره رابندوي. د دې مساحت و شمېرئ.

۸۱ - د  $f$  تابع گراف د  $y = \frac{x^3 - 8}{4x^2}$  سره همداسې درې کرښې د مساواتو  $y = \frac{1}{4}x$ ,  $x = 1$  او  $x = b$  ( $b > 1$ ) سره پوره رابنده سطحه لرو. د  $b$  د کوم ارزښت لپاره د سطحې مساحت 1,5 دی؟

۸۲ - د  $p1$  پارابول د  $y = x^2 - 3x + 3$  سره او د  $p2$  پارابول د  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}$  سره پوره رابنده سحه لرو. د دې سطحې مساحت وښایاست.

۸۳ - د  $f$  تابع گراف د  $y = a(1 - \sin 2x)$ , ( $a > 0$ ) سره او د وضعیه قیمت په  $I$  (اوله) مربع کې ( قیمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو. د و کومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت  $(\pi - 2)$  سطحې یونونه ( واحدونه) دی.

۸۴ - د  $f$  گراف د  $y = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x$  او د  $g$  د  $y = -x^2 + 6x$  سره یوه هواره پوره رابندوي. د دې هوارې خونديونه یا دننه هواره وشمیرئ.

۸۵ - د  $f$  گراف د  $y = \sqrt{16 - 2x}$  سره د پروتولار محور سره ټوله هواره پوره بندوي. د دې هوارې دننه هواره وشمیرئ.

۸۶ - الف: د  $f$  گراف د  $y = \frac{48x}{(x+2)^3}$  سره، د  $x$  - محور یا - څرخونی او د  $x = a$  ( $a > 0$ ) کرښه یوه هواره ټوله پوره رابند وي. د  $a$  د کوم ارزښت له پاره دا هواره ۸ د هوارې یوونونه کچه وي.

ب - د  $f$  گراف د  $y = \frac{48x}{(x+2)^3}$  سره، د  $x$  - محور یا څرخونی او کرښه  $x = 4$  یوه هواره ټوله پوره رابندوي. د د کوم ارزښت له پاره هواره د هوارې ۱۰ یوونونه کچه وي.

۸۷ - د  $f$  گراف د  $y = x \cdot e^{0,5x}$  سره، د  $x$  - محور او کرښه  $x = 1$  یوه هواره پوره رابندوي. د دې هوارې دننه وشمیرئ.

۸۸ - د  $f$  گراف د  $y = e^x(x - 1)$  سره د پروتولار محورونو سره یوه هواره پوره رابندوي. د دې هوارې دننه هواره وشمیرئ.

۸۹ - د  $f$  گراف د  $y = -2x^3 - 3x^2$  سره د پروتولار محورونو سره یوه هواره پوره رابندوي. د دې هوارې دننه هواره وشمیرئ.

۹۰ - د  $f$  گراف د  $y = x^2 \cdot (\ln x - 1)$  سره، د  $x$  - محور او کرښه  $x = -5$  یوه هواره پوره رابندوي. د دې هوارې دننه وشمیرئ.

۹۱- د f گراف د  $y = e^{\frac{1}{4}x}$  سره او د  $y = e^{-\frac{1}{4}x+1}$  سره، کرښه  $x=a$  او  $x=a+2$  د  $-x$  محور یوه هواره پوره رابندوي. د a د کوم ارزښت له پاره به د دې هواره دننه هواره خورا لویه وي.

۹۲- د f گراف د  $y = \sqrt{9-4x}$  سره د کواورديات محورونو سره یوه هواره پوره رابندوي. د دې هوارې دننه وشمیری.

۹۳- د f گراف د  $y = \frac{x^3+12}{2x^2}$  سره، کرښه  $x=1$  او  $x=4$  د گاونډ یا اسیمپتوت سره ټوله هواره پوره رابندوي. د دې هوارې دننه وشمیری.

۹۴- د f گراف د  $y = \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2 + 23x - 15)$  سره، د  $-x$  محور سره ټوله هواره پوره رابندوي. د دې هوارې دننه وشمیری.

۹۵- د هوارې منځهواره وشمیری، چې کرښه  $g$  له  $y=x+7$  د پارابول  $p$  د  $y=x^2-$  سره  $5x+7$  غوڅوي.

۹۶- د هوارې منځهواره وټاکي، چې د تابع f کوم گراف یې د  $y=2(1 - \cos(x/2))$  سره په انټروال  $[0,4\pi]$  د  $-x$  محور سره رابندوي.

۹۷- گراف د  $y = 3 \cdot \sqrt{9-x}$  سره د پروتولار سیستم یا کواورديات محور سره یوه هواره پوره رابندوي. د دې هوارې منځهواره وشمیری.

۹۸- پارابول  $p: y = x^3 - 2ax^2 + a^3$  د  $a > 1$  له پاره د  $x$ -محور سره او د کرښې  $x=1$  سره یوه هواره د 2,75 هواروونو (واحدونو) خونديونې سره رابندوي. د پارامتر a ارزښت وټاکي.

۹۹- د یوه تابع  $f: y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$  په سرچینه کې نورماله د دې تابع د گراف سره یوه هواره رابندوي. د دې هوارې منځهواره وښایی.

100- د یوه تابع  $f: y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$  گراف د  $-x$  محور سره یوه هواره رابندوي. په کوم نسبت دا په سرچینه کې کرښه او د f جگټکی دا هواره وېشي؟

101- د هوارې منځهواره وشمیری، چې د  $f: y = \frac{x^2}{1+x^2}$  له گراف، د  $-x$  محور او کرښې  $x=1$  څخه رابنده وي.

102 - د  $f: y = \frac{x}{1+x^2}$  گراف، د  $x$ -محور، کرښه  $x=a$  او  $x=-1$  یوه هواره رابندوي. د  $a$  د کوم ارزښت د پاره د دې هوارې منځهواره د هوارې یوون ۱ ارزښت لري؟

103 - کرښه  $g: y = \frac{2}{\pi}x$ ، ساین کره او د  $x$ -محور یوه هواره په لومړۍ څلورۍ کې رابندوي. د دې هوارې منځهواره وشمیرئ.

104 - د تابع  $f: y = x \cdot \sin x$  او  $g: y = 2 \cdot \sin x$  گرافونه د  $0 \leq x \leq \pi$  د پاره یوه واره رابندوي. د دې هوارې منځهواره یا سطحه وشمیرئ.

105 - د تابع  $f: y = \frac{2e^x}{e^x + 1}$  گراف د پروتولار سیستم محورونه او کرښه  $x=2$  یوه هواره رابندوي. دا منځهواره (د دې هوارې منځ) وشمیرئ.

106 لاندې د څرخیدونکي بدنونو گراف په  $x$  محور څرخي. د داسې منځ ته راغلو څرخیدونو تونو حجمونه (ډکي) وشمیرئ.

$$a) f(x) = 2 + \sqrt{x}, \quad I = [0; 4] \quad b) f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2, \quad I = [2; 4]$$

107 د لاندې څرخیدونکو بدنونو گرافونه د  $x$  محور باندې څرخي داسې منځ ته راغلي حجمونه (ډکي) وشمیرئ او په ساده حساب سره یې وشمیرئ.

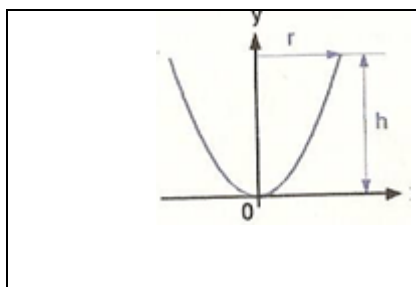
$$a) f(x) = -x + 5, \quad I = [0; 3] \quad b) f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad I = [1; 5]$$

108 د لاندې توابعو د څپخون له لارې منځ ته راغلو تونو حجم وشمیرئ.

$$a) f(x) = \sqrt{x}, \quad I = [0; 4] \quad b) f(x) = (x-2)^2, \quad I = [1; 3]$$

۱۰۹ - د لاندې توابعو گراف د  $y$  په محور څرخي. داسې منځ ته راغلي تونونه وشمیرئ او په ساده شمېرنه سره وشمیرئ.

$$a) f(x) = x + 1, \quad I = [1; 4] \quad b) f(x) = -\frac{1}{2}x + 2, \quad I = [0; 4]$$



۱۱۰ - د یوه پارابول په خپله سیمترې محور څرخیدل یو لوبڼي جوړیږي. وښایئ، چې دا لوبڼي د فضا ډکي لري.

$$V = \frac{\pi}{2} \cdot r^2 \cdot h$$

۱۱۱ - کرښه د  $y = -\frac{1}{2}x + 4$  د پروتولار سیستم سره یوه هواره رابندوي. د دې څرخون تن پوښهواره څومره لویه ده، چې د  $x$ -محور باندې د څرخون له لارې منځ ته راځي؟  
د انټیګرال شمیرني سره ووشمیری او ساده هم.

۱۱۲ - د څرخون بدن پوښهواره څومره لویه ده، چې د  $x$ -محور په انټروال  $[0;4]$  باندې د پارابول د  $y = 2 \cdot \sqrt{x}$  سره له څرخون څخه منځ ته راځي.

۱۱۳ - د پارابول  $p$  د  $y = \frac{1}{6}x^3$  سره د څرخون له لارې په انټروال  $[1;2]$  د  $x$ -محور باندې یو څرخون بدن منځ ته راځي. د دې بدن پوښهواره وشمیری.  
۱۱۴ - د کرښې  $g$  د  $y=x+1$  سره د  $y$ -محور باندې په انټروال  $[1,5]$  یو څرخونښندن جوړوي.

د دې بدن پوښهواره د انټیګرال سره وشمیری او د ساده شمیرني له لارې یې وازمایي.

۱۱۵ - پارابول  $p$  د  $y = -(1/4)x^2 + 4$  سره په لومړۍ څلورې کې د کواورډینات له محورونو سره یوه هواره پوره رابندوي. د بدن پوښهواره وشمیری کومه چې د دې بدن د څرخون له لارې د  $y$ -محور سره منځ ته راځي.

۱۱۶ - د انټیګرال شمیرني په مرسته د  $AB$  کرښې د  $A(2,4)$  او  $B(5,8)$  سره. د ساده شمیرني سره دا لاس ته راوړنه وازمایي.

۱۱۷ - په لومړۍ څلورې کې د پارابول اوږدوالی د پارابول  $p$  د پاره د  $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^3}$  سره په انټروال  $[0,1]$  کې وشمیری.

یوسل او اتلس: وڅیړی، چې ایا کوم یو له دې لاندې ناتیګرالونو څخه پوله ارزښت لري.

$$a) \int_{-\infty}^0 e^x dx \quad b) \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx \quad c) \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x}{(x^2+2)^3} dx$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

یوسل او نولس: د جګڼ یا اکسپوننت د کوم ارزښت له پاره دا ناتیګرال یو پوله ارزښت لري؟

یوسل او شل: لاندې توابع د انټروال د یوې پولې له پاره پیژندنه لري یا نه دې تعریف وڅیړی، چې ایا دا ټاکلی انټیګرال په دې انټروال یو پوله ارزښت لري؟

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}, \quad I = [0;1] & \text{b) } f(x) = \ln x, \quad I = [0;1] \\
 \text{c) } f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}, \quad I = [1;2] & \text{d) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad I = [-1;1] \\
 \text{e) } f(x) = \frac{x^2}{x^3-8}, \quad I = [0;2] & \text{f) } f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}, \quad I = [0;1]
 \end{array}$$

### د دفرنشل مساوات پوښتنو ته ځوابونه

د 66 (1) او 67 (2) تمرینونو ځواب:

$$66. \text{ a) } m = \frac{4-2}{5-3} = 1$$

$$\text{b) } m = \frac{1-4}{3-2} = -3$$

$$67. \text{ a) } f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4 + \Delta x)}{\Delta x} = 4$$

$$\text{b) } f'(3) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0.5(3 + \Delta x)^2 - 0.5 \cdot 3^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3 + 0.5\Delta x)}{\Delta x} = 3$$

68(3): کمښتویش (د تفاضلونو ویش) د د کرې (منحنی) د دوه ټکو P او Q ترمنځ جگوالی دی. مشتق د کرې په یوه ټکي P د تانجنت جگوالی دی.

مشتق د کمښتویش پولې ارزښندی، که Q و P ته نژدې شي یا وهڅیري.

69(4): د غوڅوني یا قطاع جگوالی د منحنی په ټاکلي انټروال کې د منحنی جگوالی دی.

د تانجنت جگوالی په یوه ټاکلي ټکي کې د منحنی جگوال لپاره یوه اندازه ده.

د تانجنت جگوالی د غوڅوني یا قطاع د جگپدني انټروال کوچني کول دي.





$$77. f'(x) = \frac{0 \cdot g(x) - 1 \cdot g'(x)}{g(x) \cdot g(x)} = \frac{-g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$$

$$78. a) f'(x) = 32x^3(4x^4 - 3)$$

$$b) f'(x) = 2(6x+4)(3x^2+4x-5) = 4(3x+2)(3x^2+4x-5)$$

$$c) f'(x) = 6(2x-7)^2 \quad d) f'(x) = -36x^2(5-3x^3)^3$$

$$79. a) f'(x) = \frac{12x+3}{(2x^2+x)^4}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2}; 0 \right\}$$

$$b) f'(x) = -\frac{4}{(x-5)^5}, \quad x \neq 5$$

$$c) f'(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

$$d) f'(x) = -\frac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}, \quad x < 1$$

$$80. a) f'''(x) = 6$$

$$b) f'''(x) = 48x+18$$

$$c) f'''(x) = 10x^4 + 4x^3 - 27x^2 - 10x - 5 \quad d) f'''(x) = \frac{18}{(2-x)^4}, \quad x \neq 2$$

81 ( ) : د هر مشتق نیونی سره د په توان عدد یا اکسپوننت په 1 کمېږي. د - مشتق پسي خورا جگ اکسپوننت کيږي. د لاندې بڼې یو ترم منځ ته راځي:  $f_{(x)}^{(n)} = k \cdot x^0 = k \cdot 1 = k$  او له دې سره ثابتته  $k$ .

$$81. a) f'(x) = 3 \cos 3x$$

$$b) f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

)84

$$c) f'(x) = 2 \sin \cos x = \sin 2x$$

$$d) f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 4 \cos 2x$$

$$e) f'(x) = 2x \cos x$$

$$f) f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \cos \frac{x-1}{x+1}, \quad x \neq -1$$

$$81. a) f'(x) = n \cdot \cos x \cdot \sin^{n-1} x$$

( ) : د  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  سره د وېشقاعدې استعمال ته ځان رامنځ ته کوي:

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$85. f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$86 ( ) \text{ لومړی امکانات } f(x) = \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\tan^2 x} \text{ د ځنځیري قانون له مخې:}$$

$$f'(x) = -\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{بڼه بدلون:}$$

$$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{دويم امکانات:}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \quad \text{د وېش قانون له مخې:}$$

$$f'(x) = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{بڼه بدلون:}$$

87) د ساين همداسې د کوساين توابعو مشتق بيرته يوه له همدې توابعو ده، پس بيا مشتقور دي.

$$88. \quad a) \quad f'(x) = -6 \cdot e^{-2x+1}$$

$$b) \quad f'(x) = 2(x+1)e^{x^2+2x-1}$$

$$c) \quad f'(x) = x \cdot e^x$$

$$d) \quad f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x}} = \frac{1}{2}\sqrt{e^x}$$

$$e) \quad f'(x) = x^{n-1} e^x (n+x)$$

$$f) \quad f'(x) = k \cdot e^{kx}$$

$$g) \quad f'(x) = -\frac{1}{2x^2} \cdot 2^{\frac{2}{x}} \cdot \ln 2, \quad x \neq 0$$

$$h) \quad f'(x) = -3 \ln 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{3x}$$

$$i) \quad f'(x) = 1 \cdot a^{\sqrt{x}} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot a^{\sqrt{x}} \cdot \ln a = a^{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{x}{2\sqrt{x}} \cdot \ln a\right), \quad x > 0$$

$$j) \quad f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$$

$$k) \quad f'(x) = \frac{e^x(1-e^x) + e^x \cdot e^x}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x - e^{2x} + e^{2x}}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}, \quad x \neq 0$$

$$l) \quad f'(x) = \frac{e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^0 - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$a) \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{2 \cdot (\sqrt{x})^2} \quad ( ) 89$$

دا چې  $\ln \sqrt{x}$  فقط د  $(1) x > 0$  لپاره تعريف دی، نو د  $(\sqrt{x})^2 = x$  سره اختياط په کار دی.

$$e \quad f(x) = \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2x} \quad \text{پڼه بدلون به راکړي:}$$

د  $\frac{1}{2x}$  ترم د ټولو  $x \neq 0$  لپاره تعريف دی مگر د مشتق تابعه دومره لوي تعريف سټ نه

شي لروډی لکه  $f$  يې چې لري، نو د  $(1)$  له مخې مشتق تابع هم د  $x > 0$  لپاره تعريف ده.

$$b) \quad f'(x) = \frac{2x}{x^2-4}, \quad |x| > 2$$

(c) د  $(1)$  تابع  $f$  د  $x > 0$  لپاره تعريف ده. دلته هم د زخيري قانون څخه بڼه بدلون مساعد دی.

$$f(x) = \ln 2 - 3 \ln x \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{x} \quad \text{د لته د } x \neq 0 \text{ له امله ممکن دی)}$$

د  $f'$  تعريف سټ بايد د  $f$  تعريف سټ برخه سټ وي. له دې امله د (1) له مخې مشتقور  
دی د  $x > 0$  لپاره او نه د  $x \neq 0$  لپاره

$$d) f(x) = \ln(x+1) - \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)}, \quad x < -1 \vee x > 0$$

$$e) f(x) = 2x \cdot {}_2 \log x \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot 1 \cdot {}_2 \log x + 2x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 2}$$

$$f'(x) = 2 \frac{\ln x}{\ln 2} + 2 \frac{1}{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2} (\ln x + 1), \quad x > 0$$

$$f) f'(x) = 4x^3 \cdot \lg x + (x^4 - 1) \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{4x^3 \ln x}{\ln 10} + \frac{x^3}{\ln 10} - \frac{1}{x \ln 10}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 10} (4x^3 \ln x + x^3 - \frac{1}{x}), \quad x > 0$$

$$g) f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x+2) - \ln x \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{(x+2) - x \ln x}{x(x+2)^2}, \quad x > 0$$

$$h) f'(x) = \frac{4x^3 \ln x - x^4 \cdot \frac{1}{x}}{\ln x \cdot \ln x} = \frac{4x^3 \ln x - x^3}{(\ln x)^2} = \frac{x^3 \cdot (4 \ln x - 1)}{(\ln x)^2}, \quad x > 0$$

90 ( ) : ماكسيمال تعريف سټ (- ډېری)

الف: ماكسيمال تعريف سټ:  $x_2 = 4, x > 0 \Rightarrow D = \{x \mid x \geq -3\}$

$$لومړی مشتق: f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

دا چې مخرج بايد صفر نه وي، نو  $f$  د  $x > -3$  لپاره مشتقور دی.

$$b) (x-2)(x-4) \geq 0 \Rightarrow D = \{x \mid x \geq 4 \vee x \leq 2\}$$

$$f'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+8}}$$

$$b) (x-2)(x-4) \geq 0 \Rightarrow D = \{x \mid x \geq 4 \vee x \leq 2\}$$

$$f'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+8}}$$

د  $f$  تابع د  $x_1 = 2$  او لپاره مشتقور ده.

$$c) D = \mathbb{R}_0^+, f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}; f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

د  $f$  تابع د  $x \in \mathbb{R}^+$  لپاره مشتقور ده.

د  $(d) D = \mathbb{R}$  له امله  $x^2 + 2 \geq 2$ .

$$له دې امله  $f$  په ټول تعريف سټ باندې مشتقور دی.  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$$$

91 ( ) :  $f(x) = \ln x$  فقط د  $x > 0$  لپاره تعريف دی.

د  $f(x) = \frac{1}{x}$  تابع د ټولو  $x \neq 0$  لپاره تعريف ده.  $f'(x) = \frac{1}{x}$  تابع د لوگاريتمي تابع مشتق په څېر نه شي کېدی د  $f$  د تعريفست څخه لوی تعريف ست ولري. پس  $f'$  فقط د  $x > 0$  لپاره تعريف ده.

$$92) a) D = \{x | x > 1\}, f'(x) = \frac{4x^3x^4 - 1}{x^4 - 1}$$

تابع  $g(x) = \frac{4x^3}{x^4 - 1}$  به د ټولو  $|x| \neq 1$  لپاره تعريف تعريف واي.

د  $f$  لپاره د مشتق تابع  $f'$  فقط د  $|x| > 1$  لپاره تعريف وي. دا له دې سره په ټول تعريف ست کې شته دی.

$$b) D = \{x | x > -2\}, f'(x) = \frac{2}{2x+4} = \frac{1}{x+2}$$

د مشتق تابع په ټول تعريف ست کې شتون لري يا شته دی.

$$93. a) f'(x) = 4x^9 - x^4$$

$$b) f'(x) = 12x^3 - 12x^2 + 22x - 7$$

$$c) f'(x) = 40x^7 - 18x^5 - \frac{30}{x^4 + \frac{56}{x^8}}$$

$$d) f'(x) = 6x^2 + 34x - 61$$

$$e) f'(x) = 3\sin x - 2x\cos x$$

$$f) f'(x) = 3\cos x \cdot \sin^2 x$$

$$g) f'(x) = e^x - e^{-x}$$

$$h) f'(x) = x^2 e^x$$

$$i) f'(x) = \frac{5e^x}{(2e^x - 1)^2}$$

$$k) f'(x) = \frac{2e^x(x^3 + x^2 - 3x + 3)}{x^2}$$

$$l) f'(x) = \frac{2(1 - \ln x^2)}{x^3}$$

$$m) f'(x) = \frac{\ln x - x + 1}{(1-x)^2}$$

$$n) f'(x) = \frac{x \cos x \ln x - \sin x}{x \cdot (\ln x)^2}$$

$$o) f'(x) = \frac{3x}{\ln 10} (2 \ln x + 1)$$

$$p) f'(x) = \frac{1}{\tan x}$$

$$q) f'(x) = \frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x+1}}$$

$$r) f'(x) = \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x}$$

$$s) f'(x) = e^{-2x}(-2x^2 + 2x - 6)$$

$$94. a) f'(x) = n \cdot \cos x \cdot \sin^{n-1} x$$

$$b) f'(x) = \frac{n \cdot (\ln x)^{n-1}}{x}$$

$$c) f'(x) = \frac{a}{n \cdot \sqrt[n]{(ax+b)^{n-1}}}$$

$$d) f'(x) = -\frac{n}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n-1}$$

$$95. a) f'(x) = 2xe^{x^2}, f''(x) = 2e^{x^2}(1+2x^2), f'''(x) = 4xe^{x^2}(3+2x^2)$$

$$b) f'(x) = 2\cos^2 xx - 1, f''(x) = -4\sin x \cdot \cos x, f'''(x) = -8\cos^2 x + 4$$

$$c) f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, f''(x) = \frac{2}{x^3}, f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$d) f'(x) = (x^2 + 2x)e^x, f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x, f'''(x) = (x^2 + 6x + 6)e^x$$

96 ( ) د طبعی  $f(x) = e^x$  اکسپوننشل تابع د  $f'(x) = e^x$  له امله ټول مشفقونه د وتنومشتق یا پیلیمشتق برابر دي.

97 ( ) :

97 ( الف : ) د  $f(x) = e^{2x} = 2f(x)$  تابع  $f'(x) = 2e^{2x} = 2f'(x)$  مشتق لري.

( ب ) د  $f(x) = e^{-x}$  تابع  $f'(x) = -e^{-x} = -f'(x)$  مشتق لري

98 ( ) : د  $f(x) = \sin x$  تابع څلورم مشتق  $f^{(4)}(x) = \sin x$  لري.

همداسې د  $f(x) = \cos x$  لپاره باور لري د  $f^{(4)}(x) = \cos x$  سره.

99. a)  $f'(x) = ae^{ax}$  ,  $f''(x) = a^2e^{ax}$  ,  $f'''(x) = a^3e^{ax}$  , ...  $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$

b)  $f'(x) = \frac{1}{x+1}$  ,  $f''(x) = -1 \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$  ,  $f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{(x+1)^3}$

$f^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (x+1)^{-n}$

100. a)  $N_1(-30)$ ,  $N_2(-0.5/0)$ ,  $N_3(2/0)$       b)  $N_1(0/0)$ ,  $N_2(2/0)$ ,  $N_3(4/0)$

b)  $N_1(0/0)$ ,  $N_2(2/0)$ ,  $N_3(4/0)$       d)  $N_1(-\frac{1}{2}/0)$ ,  $N_2(\frac{1}{2}/0)$ ,  $N_3(\frac{1}{3}/0)$

d)  $N_1(-2/0)$ ,  $N_2(-1/0)$ ,  $N_3(1/0)$ ,  $N_4(3/0)$

e)  $N_1(-5/0)$ ,  $N_2(2/0)$

101 ( ) : ږدو (پایپل)  $f(x) = a(x-2) \cdot x \cdot (x-4)$  د  $a = \frac{1}{2}$  سره  $f(2) = -8$  سره

لاس ته راوړنه:  $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 4x$

102 ( ) ږدو پیل  $f(x) = a \cdot (x-3)^2(x-0.5)^2$  د  $a = 4$  سره  $f(0) = 9$  سره

پایله:  $f(x) = 4x^4 - 28x^3 + 61x^2 - 42x + 9$

103 ( ) : پیل  $f(x) = a(x+1)^2 \cdot x \cdot (x-2)$  د  $a = \frac{10}{9}$  سره  $f(\frac{1}{2}) = -\frac{15}{8}$  سره

پایله:  $f(x) = \frac{10}{9}x^4 - \frac{10}{3}x^2 - \frac{20}{9}x = \frac{10}{9}(x^4 - 3x^2 - 2x)$

104 ( الف : )  $D = R \setminus \{-4\}$  ږدو (پیل):  $x^2 + 2x - 15 = 0$

پایله:  $N_1(0,5|0)$ ,  $N_2(3|0)$

b)  $D = IR \setminus \{0\}$  ;  $N_1(-2/0)$  ,  $n_2(2/0)$

c)  $D = IR \setminus \{0,5\}$  ;  $N_1(-1/0)$  ,  $n_2(3/0)$

d)  $D = IR \setminus \{-5\}$  ;  $N_1(0/0)$  ,  $n_2(1/0)$

105 ( ) :  $a = 2$  ,  $b = -0.25$  او  $d = 0$  په تابع کې سملاسي ږدو، نو لاس ته راځي:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 0.25 - 0.5}{x}$$

$$106 \text{ ( ) د : } x = \sqrt[3]{\frac{2^3}{a^3}} = \frac{2}{a} \Rightarrow x^3 = \frac{8}{a^3} \Rightarrow a^3 x^3 - 8 = 0 \text{ اښوونه صفرځای راکوي:}$$

$$N\left(\frac{2}{a}, 0\right)$$

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4$$

107 ( ) د:  $x=1$  په پوره کوچني چاپیریال کې صفر تل مثبت دی. صورت د  $x > 1$  لپاره مثبت دی او د  $x < 0$  لپاره منفي. د سره مخنښنه بدلیري او له دې سره سم بدلون د 4 څلورمې (ربع) څخه و 1 څلورمې (ربع) سره صورت نیسي.

108 (الف): د  $e^{-x} > 0$  له امله دی د  $N_1(-1, 0), N_2(1, 0)$  لپاره  $x^2 - 1 = 0$  لپاره. (ب)  $\sqrt{6-x}$  او له دې سره سم  $f$  د  $x \leq 6$  لپاره تعریف دي.  $f(x) = 0$  دی د  $N_1(0, 0)$  او  $N_2(6, 0)$  لپاره.  $x = 0 \Rightarrow N_1(0, 0)$  او  $6 - x = 0 \Rightarrow N_2(6, 0)$

(پ)  $\ln(x+2)$  او  $f$  د  $x > -2$  لپاره تعریف دي.  $f(x) = 0$  دی د  $N_1(0, 0)$  او  $N_2(-1/0)$  لپاره.  $\ln(x+2) = 0 \Rightarrow x+2=1 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow N_2(-1/0)$  لپاره.  $\ln x$  او له دې سره  $f$  د  $x > 0$  لپاره تعریف دي.  $f(x) = 0$  دی د  $N_1(\sqrt{2}, 0)$  لپاره او د  $\ln x$  لپاره لرو:  $N_2(1, 0)$  یادونه: د مساوات دویم حل مو (1) صفرځای ته بیایو ځکه چې  $x = -\sqrt{2}$  تعریف ست پورې اړه نه لري.

$$\text{ت) } f(x) = 0 \text{ دی، ځکه چې } N(0/0) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 1 + x = 1 - x \Rightarrow \frac{1+x}{x-x} = 1$$

$$\text{ث) } f(x) = 0 \text{ دی، ځکه چې } N(0/0) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 1 + x = 1 - x \Rightarrow \frac{1+x}{x-x} = 1$$

$$\text{ج) } f(x) = 0 \text{ ځکه چې } N(0, 0) \Rightarrow 3x = 0$$

$$109 \text{ ( ) د } 3x = k\pi \text{ سره صفرځایونه په } x = k\frac{\pi}{3}, k \in Z \text{ کې پراته دي.}$$

په ورکړ شوي انټروال کې په دې ځایونو کې:

$$-2\pi, -5\frac{\pi}{3}, -4\frac{\pi}{3}, -\pi, -2\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \pi, 2\frac{\pi}{3}, \pi, 4\frac{\pi}{3}, 5\frac{\pi}{3}, 2\pi$$

$$\text{ب) صفرځایونه په } ix = (k - \frac{1}{4}) \cdot \pi = (4k - 1)\frac{\pi}{4}, k \in Z \text{ کې پراته دي.}$$

$$\text{په ورکړ شوي انټروال کې صفرځایونه: } i - \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

$$\text{پ) صفرځایونه په } x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in Z \text{ کې پراته دي.}$$

$$\text{په ورکړ شوي انټروال کې صفرځایونه: } i - \frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

ت) ( صفرخايونه په  $x = k \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = (3k+1) \cdot \frac{\pi}{6}$ ,  $k \in Z$  کي پراته دي.

په ور کړ شوي انټروال کي صفرخايونه:  $-\frac{11}{6}\pi, -\frac{4}{3}\pi, -\frac{5}{6}\pi, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{5}{3}\pi$

110 ( الف): د  $x=1$  لپاره  $\ln x=0$  دی. د  $x^2 \geq 0$  له امله  $x^2+3 \geq 3$  دی او له دې سره د  $\ln x=1$  لپاره اړين ارزښت 1 نه شي نيولی.

ب) د  $x^2+1 \geq 1$  دی او له دې امله په کوم ځاي کي صفر نه دی. دلته مخرج بي معنا دی.

پ) د  $e^x > 0$  ټولو  $x \in R$  لپاره دی. دلته هم مخرج بي معنا دی.

ت) د  $\sin^2 x \geq 0$  له امله  $1+\sin^2 x \geq 1$  دی او له دې امله په کوم ځاي کي صفر نه دی.

111 ( ): يوه تابع يو تنظيم  $f(x) \rightarrow x$  دی، د کوم سره چي د يوه  $x$  سره يواځني يو

$f(x)$  ترتيب يا تنظيم شوی وي. له دې امله کېدی شي  $x=0$  سره ټيک يو  $f(x)$  تابع

ارزښت تنظيم شوی وي. او له دې سره ټيک يو غوڅټکی د  $y$  محور سره ولري. او په څټ کېدی شي د تعريف سټ يو ارزښت د ارزښت سټ په ډېرو توکو تنظيم شوی وي. د  $f(x)=0$

تابع ارزښت کېدی شي ډېرواره رامنځ ته شي، چي د ډېرو صفرخايونو په معنا دی.

112 ( ): که يوه تابع د خپل تعريف سټ باندې برعکس کېدونکی وي، بايد سربېره پردې

نظم  $x \rightarrow f(x)$  يواځني وي (يعنی معکوس کېدونکی هم وي)، دا په دې معنا چي

$f(x)=0$  تابع ارزښت ټيک يو وار نيول کېدی شي، چي بېلا بېل صفرخايونه ناممکنوي.

$$113. \quad a) S_y(0/-1) \qquad b) S_y(0/0)$$

$$c) S_y(0/0) \qquad b) S_y(0/\frac{4}{3})$$

$$e) S_y(0/-\frac{2}{e}) \qquad b) S_y(0/e^2)$$

114 ( ): وي دي:  $f(0) = a_n \cdot 0 = a_{n-1} \cdot 0 + \dots + a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0$

يو تام راشنل تابع د  $y$  محور تل د هغه په مطلق ارزښت کي غوڅوي  $P(0, a_0) : y = a_0$ .

$$115). \quad f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 1, \quad f(1) = -1, \quad f'(x) = -3; \quad f(2) = -1, \quad f'(2) = 7$$

116 ( )  $f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$  صفرخايونه:  $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2$

جگنده:  $f'(-1) = 3, f'(0) = -2, f'(2) = 6$

$$117. \quad f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 1; \quad P_1(0/-4), \quad P_2(0.5/-3.47), \quad P_3(1/-3)$$

$$118. \quad f'(x) = x^2 - x - 6 \quad ; \quad P_1(-2/11), \quad P_2(3/-\frac{1}{2})$$

$$119. \quad a) \quad f'(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 4}{x^2} \quad ; \quad f(1) = 4, \quad f'(1) = -3$$

$$b) \quad f(-3) = 6, \quad f'(-3) = -8$$



$$120) \text{ لومړی مشتق } f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 4) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2 + 4}{x^2}$$

$$\text{پیل: } 2 = \frac{x^2 + 4}{x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = x^2 + 4 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$$

که  $x_1 \wedge x_2$  په تابع ارزښت کې کېږدو، نو لاس ته ترې راځي:  $P_1(-2, 0) \wedge P_2(2, 0)$

$$b) P(-1/-3)$$

$$121. a) f(1) = 0, f'(x) = \ln x + 1, f'(1) = 1 \quad b) f(\sqrt{\pi}) = 0, f'(\sqrt{\pi}) = -\sqrt{\pi}$$

$$122. a) f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}, x_1, x_2 = 2 \quad b) x_1 = 0$$

$$123) \text{ لومړی مشتق } f'(x) = (x + a + 1) \cdot e^x$$

$$\text{ځای په ځای کړئ: } 2 = e^0 \cdot (0 + a + 1) \Rightarrow 2 = a + 1 \Rightarrow a = 1$$

$$124. a) H(-1/15), T(3/-17)$$

$$b) H(-1/4.5), T(2/-9)$$

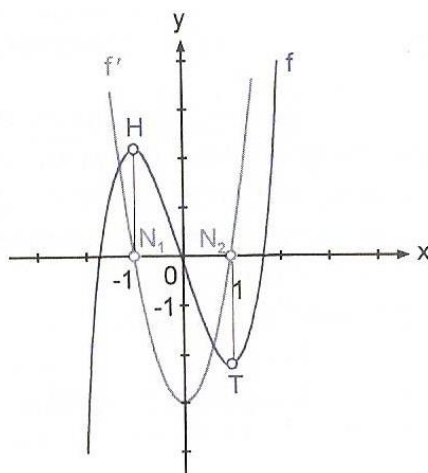
$$c) H(0.5/10.5), T(2.5/5.5)$$

$$d) H(0/5), T_1(-\sqrt{2}/1), T_2(\sqrt{2}/1)$$

$$e) H(-2/48), T(2/-48)$$

$$f) H(2/3 \frac{1}{3}), T_1(0/-2), T_2(3/2.5)$$

125) الف: د  $f$  گراف یو خورا جگ ټکی  $H$  په  $-1$  کې لري او خورا ټیټ ټکی  $T$  په  $1$  کې. د گراف په دې ځایونو کې د  $f'$  گراف صفر ځایونه  $N_1 \wedge N_2$  لري.



ب) د  $f$  گراف یو جگ ټکی  $H$  په  $-2$  کې لري او یو ټیټ ټکی  $T$  په  $0$  کې لري. په دې ځایونو کې د  $f'$  گراف صفر ځایونه  $N_1 \wedge N_2$  لري.

126) د  $n$  -مې درجې یو ټول هوبنډ یا راشنل تابع یو د  $(n-1)$  -مې درجې د مشتق تابع لري. د  $(n-1)$  -مې درجې تابع زیات له زیاته  $n-1$  صفر ځایونه لري. له دې امله  $n$  -مې درجه ټول راشنل تابع زیات له زیاته  $n-1$  انحرافي ځایونه لري.

127) کپډ شي حالت  $f''(x) = 0$  منځ ته راشي. نو بیا د دویم مشتق په مرسته کپډی نه شي د انحراف ټکی په هکله پرېکړه وشي.

که په  $x_0$  کې د لومړي مشتق روسته د مخنځېني تغیر له مثبت څخه و منفي ته صورت ونیسي،  $f$  د  $x_0$  په ځای کې یو جگړکی لري، سره له دې چې شرایط  $f''(x) < 0$  پوره نه دي.

128 (الف): لومړی مشتق  $f'(x) = 2x^2 + 8x + 8$

دویم مشتق  $f''(x) = 4x + 8$

د انحرافي ارزښت لپاره اړین شرطونه  $f'(x) = 0$

$$2x^2 + 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$$

د پوره کېدونکي شرایطو لپاره شرطونه:  $f''(-2) = 0$

د مخنځېني تغیر ازمايښت:  $f'(-1) = 2 - 8 + 8 = 2$ ,  $f'(-3) = 18 - 24 + 8 = 2$

دا چې د پوره کېدونکي شرایطو څخه کوم یو پوره نه دي، د  $f$  گراف انحراف ځای نه لري.

(ب) لومړی مشتق:  $f'(x) = \frac{4}{3}x^3$

2 مشتق:  $f''(x) = 4x^2$   $x_1 = 0$

د  $f'(x) = \frac{4}{3}x^3 \Rightarrow x = 0$  سره

د مخنځېني بدلون له امله  $f'(-1) = -\frac{4}{3}$  او  $f'(1) = \frac{4}{3}$

د  $f$  تابع ټیټکی  $T(0,1)$  لري

(پ) لومړی مشتق:  $f'(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x + \frac{8}{3}$

۲ مشتق:  $f''(x) = 4x^2 - 4$

د انحراف ټکي لپاره اړین شرایط:  $f'(x) = 0$

$$\frac{4}{3}x^3 - 4x + \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$$

د پوره کېدونکو شرایطو لپاره ازمايښت:  $f''(-2) = 4 \cdot 4 - 4 = 12$

له دې لاس ته راځي چې  $T(-2, -8)$  ټیټکی دی.

د  $f''(1) = 4 \cdot 1 - 4 = 0$  پرېکړه ممکن نه ده.

د  $x = 1$  ره د لومړي مشتق د مخنځېني ازمايښت.

$$f'(0) = \frac{8}{3}, f'(3) = \frac{4}{3} \cdot 27 - 4 \cdot 3 + \frac{8}{3} = 26 \frac{1}{3}$$

د  $x = 1$  لپاره د لومړي مشتق د مخنځېني تغیر مخ ته نه لرو. له دې امله  $T(-2, -8)$  واځنی د انحراف ټکی دی.

(ت) د  $f'(x) = 4x^3 = 0$  له امله کېدی شي انحرافي ځایونه د  $x_1 = 0$  ځای پراته وي.

د  $f'(-1) = -4 \wedge f'(1) = 4$  د مخنځېني تغیر د یوه ټیټکي  $T(0, -4)$  لپاره پوره کېدونکي شرایط پوره کوي.

129. a)  $T(4/-1), H(1.5/9)$       b)  $T(0/0), H(2/-4)$   
       c)  $T(0/-2)$                       d)  $T(-1/-0.5), H(1/0.5)$
130. a)  $H(0/1)$                         b)  $H(-3/0), T(1/-5.44)$   
       c)  $T(0/1)$                          $T(0/0)$

131 ( الف ) لومری مشتق  $f'(x) = 2 \cos x \sin x = \sin 2x$

دویم مشتق:  $f''(x) = 2 \cos 2x$

اړین شرایط:  $f'(x) = 0$

$\sin 2x = 0 \Rightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in Z$  لپاره. په ورکړشوي انټروال کې د

$2\pi, \frac{3}{2}\pi, \pi, \frac{1}{2}\pi, 0, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$  لپاره پوره کېدونکي شرایط:

$$f''(k \cdot \frac{\pi}{2}) 2 \cos(2x \cdot \frac{\pi}{2}) = 2 \cos k \pi = \begin{cases} 1, & k = 2n \\ -1, & k = 2n + 1 \end{cases}$$

د  $f$  تابع لاندې جگ ټکي

$$H_1(-\frac{3}{2}\pi/1), H_2(-\frac{1}{2}\pi/1), H_3(\frac{1}{2}\pi/1), H_4(\frac{3}{2}\pi/1)$$

او لاندې ټیټکي

$$T_1(-2\pi/0), T_2(-\pi/0), T_3(0/0), T_4(\pi/0), T_5(2\pi/0)$$

د  $2\pi, \pi, 0, -\pi, -2\pi$  لپاره  $f'(x) = 0$  دی. که په دویم مشتق کې په  $x_1 = 0$  کې جگټکی لري که په دویم مشتق کې کېښول شي. او تښتیکې لري د  $x_2 = -2\pi \wedge x_3 = 2\pi$  سره.

132 ( الف ) د  $f$  تعریف ساحه:  $f: D = \{x | x \leq -1 \vee x \geq 0\}$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

دا د  $x_1 = -1 \wedge x_2 = 0$  لپاره له  $D$  تعریف نه ده.

لرو  $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -0.5$  د  $2x+1=0$  لپاره.

دا  $x_1$  په تعریف سټ پورې اړه نه لري یا په تعریف سټ کې نه دی پروت، نو له پیله کوم انحرافي ارزښت گومان ته نه راځي.

د  $f(x) \geq 0$  له امله د  $x \in D$  لپاره د ژی ټکو مطالعه عمومي ټیټ ټکي  $T_1(-1,0) \wedge T_2(0,0)$  منځ ته راوړي.

ب) د  $f$  تعریف سټ:  $D = R$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

لرو  $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$  د  $x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$  لپاره. په  $x_1 = 0$  کې د مخنځیني بدلو سره د لومړي مشتق یو لوکال ټیټ ټکی  $T(0, \sqrt{3})$  راځي. د  $x \in D$  له امله دا یو ټولیز ټکی دی.

پ) د  $f$  تعریف ورشو:  $D = R_0^+$

لومړی مشتق  $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$  د  $x_1 = 0$  لپاره چې  $x_1 \in D$  وي تعريف نه دی.

لرو  $f'(x) = 0$  د  $1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$  لپاره. د ژی ټکي مطالعه لوکال

جگتکی  $H(0,0)$  راكوي.

د  $x \rightarrow \infty$  لپاره  $f(x) \rightarrow \infty$  هڅيري، نو له دې امله  $T(0,25, -0,5)$  ټوليز ټيټکي دي.

(ت) د  $f$  تعريفست:  $D = R$

لومړی مشتق:  $f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}$  د  $x_1 = 0$  لپاره تعريف نه دی.

له دې سره لومړی د کومو انحرافي ټکو گوان نه کيږي. د  $x_1 = 0$  مطالعو څخه لرو  $f(0) = 3$ .

نور ټول ټکي د  $f(x) = 3 + \sqrt[3]{x^2} \geq 3$  له امله يو لوي تابع ارزښت لري.  $T(0,3)$  يو ټوليز ټيټکي دی.

133 ( الف ) لرو

$$f(x) = \begin{cases} x+x^2 & x \geq 0 \\ -x+x^2 & x < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1+2x & x \geq 0 \\ -1+2x & x < 0 \end{cases}$$

د  $x \geq 0$  لپاره د  $f'(x) = 0$  له امله د  $x_1 = 0,5$  لپاره کوم انحرافي ارزښت شتون نه لري. په همدې کمی د  $x \leq 0$  لپاره هم.

$$f(0) = \begin{cases} 0+0^2 = 0 \\ -0+0^2 = 0 \end{cases} \text{ د ژی ټکي مطالعه.}$$

دا نور ټول د  $f$  تابع ارزښتونه له  $T(0,0)$  څخه لوی دي، نو دا ټوليز مينيوم دی.

(ب) ليکنود پرته د مطلقه ارزښت يا له مطلقه ارزښت ازاد ليکودود:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 8 & -4 < x < 2 \\ x^2 + 2x - 8 & x < -4 \vee x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 = 0 & \Rightarrow x_1 = -1 \\ 2x + 2 = 0 \end{cases}$$

په انټروال کي حل نه شته

تابع يو د  $H(-1,9)$  لوکال ټيټکي لري، همداسي  $T_1(-4,0) \wedge T_2(2,0)$  د ټوليز ټيټکو په څېر.

$$134. a) W_1(-2/-8\frac{2}{3}), W_2(2// -4\frac{2}{3})$$

$$b) W(2/-1)$$

(پ) د  $f''(x) = x^2 = 0$  د  $x_1 = 0$  لپاره. دا چي  $f''(0) = 2 \cdot 0 = 0$  هم دي او  $f''(x) = x^2$  د  $x_1 = 0$  په چاپيريال کي د مخښي بدلون نه لري، نو  $f$  کوم د انعطاف ټکی نه لري.

(ت)  $W(2,-1)$

135 ( الف ) دا يواځنی  $W(0,-1)$  د انعطاف ټکی حتی زينټکی دی.

(ب) اړين شرايط  $f''(x) = 0$  د  $x_1 = 1 \wedge x_2 = \frac{1}{3}$  لپاره بوره دي.



ب) دا چې تجزيه شوني نه ده، نو  $f$  په  $x = -2$  کې یو قطبتيکی لري د مخخبي بدلون سره.

$$c) \frac{x}{x^2 - 3} = \frac{x}{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}$$

تابع په  $x_1 = -\sqrt{3}$  او  $x_2 = \sqrt{3}$  کې قطبتيکی لري د مخخبي تغیر سره.

$$d) \frac{x^2 - 1}{1 + x} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = x - 1$$

په  $x = -1$  کې  $f$  د  $f(-1) = -2$  سره یوه ناپرېکېدونکې له منځه تلونکې یا وړنکې تعریفشیا لري.

متأسفانه چې ټولې پوښتنې په کې نه دي ځواب شوي. دا په ډېر ومني. نور مې له وسه پوره نه دی، چې پسي وگرځم.

## د انتیگرال پوښتنو ته ځوابونه

د لومړۍ پوښتنې اوبی یا حل:

1. a)  $\frac{x^3 + 7x^2 + 9x - 5}{x + 5} = x^2 + 2x + 1$
- b)  $\frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2 - 2} = x^2 - 1 - \frac{1}{x^2 - 2}$
- c)  $\frac{x^3 - 2x^3 + x - 5}{x^3 + 1} = 1 - \frac{2x^2 - x + 6}{x^3 + 1}$
- d)  $\frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1} = x - 1$
- e)  $\frac{x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 3}{x - 2} = x^3 + 4x^2 + 2x - 1 + \frac{1}{x - 2}$
- f)  $\frac{x^5 - x^4 + 1}{x^2 + 2} = x^3 - x^2 - 2x + 2 + \frac{4x - 3}{x^2 + 2}$

دویم - الف: د کسر په کرښیز ضریبونو توته کونه یا تجزیه

$$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$$

دا راکوي

$$\frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}$$

$$A=4, B=1, C=-3$$

دا مو ټوټه کسر ټوټه کوني ته بيايي.

$$\frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = \frac{4}{x-2} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+3}$$

ب - د مخرج په کرښيز ضربيونو ټوټه کونه يا تجزيه

$$x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$$

پ - د مخرج کرښيز ضربيونو ټوټه کونه يا تجزيه

$$x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$$

په ټوټه کسر ټوټه کونه:

$$\frac{4x+10}{x^2+6x+8} = \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x+4}$$

$$1. a) \frac{x^3 + 7x^2 + 9x - 5}{x+5} = x^2 + 2x - 1$$

$$b) \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2 - 2} = x^2 - 1 - \frac{1}{x^2 - 2}$$

$$c) \frac{x^3 - 2x^2 + x - 5}{x^3 + 1} = 1 - \frac{2x^2 - x + 6}{x^3 + 1}$$

$$d) \frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1} = x - 1$$

$$e) \frac{x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 3}{x-2} = x^3 + 4x^2 + 2x - 1 + \frac{1}{x-2}$$

$$f) \frac{x^5 - x^4 + 1}{x^2 - 2} = x^3 - x^2 - 2x + 2 + \frac{4x - 3}{x^2 + 2}$$

دويم: الف) د ماتلاندي يا مخرج په کرښيزه ضربيونو ټوټه کونه (تجزيه)

$$2. a) (x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = (x-2)(x+3)$$

$$\frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}$$

د  $A=4; B=1$  او  $C=-3$  سره

دا مو ټوټه مات (کسر) ټوټه وني ته لارښودوي

$$\frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = \frac{4}{x-2} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+3}$$

$$A = 4, \quad B = 1, \quad C = -3$$

$$\frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = \frac{4}{x-2} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+3}$$

ب) د ماتلاندي يا مخرج په کرښيزه ضریبونو توته کونه يا تجزيه

$$x^3 - x = (x-1) \cdot x \cdot (x+1)$$

پارشلکسر توته کونه

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

پ) د مخرج يا ماتلاندي په کرښيز ضریبونو توته کونه

$$x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$$

پارشلکسر توته کونه

$$\frac{4x+10}{x^2+6x+8} = \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x+4}$$

ت) د مخرج په کرښيز ضریبونو توته کونه

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-1)(x+2)$$

$$d) \quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-1)(x+2)$$

$$\frac{-3x^2 + 19x - 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

$$e) \quad x^3 - 4x = (x-2) \cdot x \cdot (x+2)$$

$$\frac{4x^2 + 6x - 20}{x^3 - 4x} = \frac{1}{x-2} + \frac{5}{x} - \frac{2}{x+2}$$

پارشلکسر توته کونه

$$\frac{-3x^2 + 19x - 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

ب) د مخرج په کرښيز ضریبونو توته کونه

$$x^3 - 4x = (x-2) \cdot x \cdot (x+2)$$

پارشلکسر توته کونه

$$\frac{4x^2 + 6x - 20}{x^3 - 4x} = \frac{1}{x-2} + \frac{5}{x} - \frac{2}{x+2}$$

ث) د مخرج په کرښيز ضریبونو توته کونه

$$f) \quad x^2 + 20x + 51 = (x+3)(x+17)$$

پارشلکسر توته کونه

$$\frac{14}{x^2 + 20x + 51} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-17}$$



دریم: الف) د مخرج په کرښیز ضریبونو ټوټه کونه

$$3. a) x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = (x-2) \cdot (x+2)^2$$

$$\frac{3x^2 + 5x + 10}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}$$

$$b) x^3 - 6x^2 + 9x = (x-3)^2 \cdot x$$

$$\frac{3x^2 - 18x + 36}{x^3 - 6x^2 + 9x} = -\frac{1}{x-3} + \frac{3}{(x-3)^2} + \frac{4}{x}$$

پ: د ماتلاندي يا مخرج په کرښیز ځلونو يا ضریبونو ټوټه کونه

$$c) x^4 - 2x^2 + 1 = (x-2)^2 \cdot (x+1)^2$$

په ټوټه مات ټوټه کونه:

$$\frac{x^2 + 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1} = -\frac{3}{4(x-1)} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2}$$

ت) د مخرج په کرښیز ضریبونو ټوټه کونه

$$d) x^3 - 5x^2 = (x-5) \cdot x^2$$

$$-\frac{x^2 + 13x + 10}{x^3 - 5x^2} = -\frac{4}{x-5} + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$$

پارشلکسر ټوټه کونه

څلورم: الف) د مخرج په کرښیز ضریبونو ټوټه کونه

$$4. a) x^3 + 2x^2 + 6x + 5 = (x^2 + x + 5)(x+1)$$

پارشلکسر ټوټه کونه

$$\frac{-x^2 + 2x - 12}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5} = \frac{2x+3}{x^2+x+5} - \frac{3}{x+1}$$

ب) د مخرج په کرښیز ضریبونو ټوټه کونه

$$b) x^3 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x+2)$$

پارشلکسر ټوټه کونه

$$\frac{4x^2 - 3x + 8}{x^3 - 2x + 4} = \frac{x+1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{3}{x+2}$$

د مخرج په کرښیز ضریبونو ټوټه کونه

$$c) x^3 - 4x^2 + 5x = (x^2 - 4x + 5) \cdot x$$

پارشلکسر ټوټه کونه

$$\frac{8x^2 + 16x + 10}{x^3 - 4x^2 + 5x} = \frac{6x - 8}{x^2 - 4x + 5} + \frac{2}{x}$$

(ت) د مخرج په کرښيز ضربونو ټوټه کونه

$$d) x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)(x + 1)$$

پارشلکسر ټوټه کونه

$$\frac{x}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{x + 1}$$

پنځم: الف) پولینوم وېش

$$5. a) \frac{x^3 + 7x^2 + 17x + 17}{x^2 + 6x + 8} = x + 1 + \frac{2x + 11}{x^2 + 6x + 8}$$

ټوټه کسر ټوټه کونه

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 17x + 17}{x^2 + 6x + 8} = x + 1 + \frac{3}{2(x + 2)} + \frac{3}{2(x + 4)}$$

ب) پولینوم وېش

$$b) \frac{2x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 4}{x^2 - 4x + 3} = 2x^2 + 1 + \frac{x + 1}{x^2 - 4x + 3}$$

ټوټه کسر ټوټه کونه

$$\frac{2x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 4}{x^2 - 4x + 3} = 2x^2 + 1 - \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x - 3}$$

پ) پولینوم وېش

$$c) \frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1} = 2 + \frac{x^2 + 2}{x^3 - 1}$$

ټوټه کسر ټوټه کونه

$$\frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1} = 2 + \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

ت) پولینوم وېش

$$d) \frac{4x^3 + 16x^2 - 7x - 49}{x^3 + 4x^2 + x - 6} = 4 - \frac{11x + 25}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$$

ټوټه کسر ټوټه کونه

$$\frac{4x^3 + 16x^2 - 7x - 49}{x^3 + 4x^2 + x - 6} = 4 - \frac{3}{x - 1} + \frac{1}{x + 2} + \frac{2}{x + 3}$$

شپږم: الف) د بنوونې لپاره مشتق  $F'(x)$  جوړیږي.

د جمعي قانون او د توان قانون:

$$a) F'(x) = 2 \cdot 2x + 4 = 4x + 4$$

ب) ځنډیږي قانون:

$$F(x) = u^3 \quad u(x) = x^2 - x, \quad u'(x) = 2x - 1$$

$$F'(x) = 3 \cdot (2x - 1) \cdot (x^2 - x)^2$$

خُنزيري قانون

6. a)  $F'(x) = 2 \cdot 2x + 4 = 4x + 4$

b)  $F(x) = u^3 \quad u(x) = x^2 - x, \quad u'(x) = 2x - 1$

$$F'(x) = 3 \cdot (2x - 1) \cdot (x^2 - x)^2$$

c)  $F(x) = \sqrt{u} \quad u(x) = 2x + 1, \quad u'(x) = 2$

$$F'(x) = 2 \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

d)  $F'(x) = 0 + 3 \cdot \cos 3x = 3 \cdot \cos 3x$

e)  $F'(x) = x^2 \cdot \ln x + \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} - \frac{4}{9} \cdot 3x^2 = x^2 \cdot \ln x + \frac{1}{3} x^2 - \frac{4}{3} x^2$

$$F'(x) = x^2 \cdot \ln x - x^2 = x^2 \cdot (\ln x - 1)$$

7. a)  $F'(x) = 3x^2 + 1, \quad G'(x) = 3x^2 + 1$

$$F'(x) = G'(x)$$

b)  $F'(x) = 2(x - 3) = 2x - 6, \quad G'(x) = 2x - 6$

$$F'(x) = G'(x)$$

c)  $F'(x) = \frac{1 \cdot (x + 2) - (x + 1) \cdot 1}{(x + 2)^2} = \frac{1}{(x + 2)^2},$

$$G'(x) = \frac{3 \cdot (x + 2) - 3x + 5}{(x + 2)^2} = \frac{1}{(x + 2)^2}$$

$$F'(x) = G'(x)$$

d)  $F'(x) = 0 + \cos x = \cos x, \quad G'(x) = \cos x$

$$F'(x) = G'(x)$$

8. a)  $F(x) = x^2 + c$

$$2 = 1^2 + c \Rightarrow c = 1$$

b)  $F(x) = x^2 + 1$

$$-2 = \sin \pi + c \Leftrightarrow -2 = 0 + c \Rightarrow c = -2$$

c)  $F(x) = e^x + c$

$$3 = e^0 + c \Leftrightarrow 3 = 1 + c \Rightarrow c = 2$$

d)  $F(x) = 2x^3 + c$

$$0 = 2 \cdot (-1)^3 + c \Leftrightarrow 0 = -2 + c \Rightarrow c = 2$$

9. a)  $F'(x) = f(x)$   
 $f(x) = F'(x) = 4x + 1$   
 b)  $f(x) = F'(x) = 3x^2 - 3$   
 c)  $f(x) = F'(x) = 1 + 2 \cdot \cos x$   
 d)  $f(x) = F'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x \cdot (1 + x)$

لیم: د یوې بلواکې یا تابع  $f$  ټول بنسټیزې تابع  $F$  یواځې په یوې ثابتې  $c$  یو له بل توپیر پریږي. له دې امله دا یوه ډله (شار) جوړوي، چې  $y$ -لور باندې راکښل شوی گراف دی. یولسم: د رابیلیدني لار (د مشتق قانون) لاس ته راونه یا نتیجه راکوي.

11. a)  $\int \sin x dx = -\cos x + c, c \in \mathbb{R}$   
 b)  $\int (x+4) dx = \frac{x^2}{2} + 4x + c, c \in \mathbb{R}$   
 c)  $\int 2 dx = 2x + c, c \in \mathbb{R}$   
 d)  $\int (1 - \cos x) dx = x - \sin x + c, c \in \mathbb{R}$

دولسم: الف؛ د انتیگریشن اووښتوني یا واریابلي  $s$  سره راکوي:  
 ب: د انتیگریشن اووښتوني یا واریابلي  $u$  سره راکوي:  
 پ: د انتیگریشن اووښتوني یا واریابلي  $t$  سره راکوي:

12. a)  $\int ms^2 dx = \frac{1}{3} mx^3 + c$   
 b)  $\int u \cdot \sin t du = \frac{1}{2} u^2 \cdot \sin t + c$   
 c)  $\int at dt = \frac{1}{2} at^2 + c$   
 d)  $\int \frac{1}{4} v^3 \cdot \sqrt{e} dv = \frac{1}{16} v^4 \cdot \sqrt{e} + c$

دیارلسم:

13. a)  $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$   
 b)  $\int 7 dx = 7x + c$   
 c)  $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$   
 d)  $\int (1 - x^2) dx = x - \frac{x^3}{3} + c$   
 e)  $\int (x + \frac{1}{x}) dx = \frac{x^2}{2} + \ln |x| + c$   
 f)  $\int (e^x + \cos x) dx = e^x + \sin x + c$   
 g)  $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$   
 h)  $\int \frac{5}{\cos^2 x} dx = 5 \tan x + c$   
 i)  $\int u dx = ux + c$   
 k)  $\int (2x + e^x) dx = 2x + e^x + c$   
 l)  $\int (1 + \ln x) dx = x \cdot \ln x + c$   
 m)  $\int (\sqrt{x} + \sin x) dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \cos x + c$

څوارلسم:

$$14. a) \int_0^3 4dx = [4x]_0^3 = 4 \cdot 3 - 0 = 12$$

$$b) \int_{-3}^{-1} xdx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-3}^{-1} = \frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-3)^2}{2} = -4$$

$$c) \int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

$$d) \int_1^e \left(2 + \frac{1}{x}\right) dx = [2x + \ln |x|]_1^e = 2e - 1 - (2 + 0) = 2e - 3$$

$$e) \int_{-1}^0 e^x dx = [e^x]_{-1}^0 = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{e}(e - 1)$$

$$f) \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 - (-1) = 2$$

$$g) \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{\cos^2 x} dx = [\tan x]_0^{\frac{1}{4}\pi} = 1 - 0 = 1$$

$$h) \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\cos^2 x} dx = [\tan x]_0^{\frac{1}{3}\pi} = 1 - 0 = 1$$

$$i) \int_{-2}^2 x^3 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{-2}^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = 4 - 4 = 0$$

$$k) \int_2^6 (1+x) dx = \left[ x + \frac{x^2}{2} \right]_2^6 = 6 + \frac{6^2}{2} - \left( 2 + \frac{2^2}{2} \right) = 6 + 18 - 2 - 2 = 20$$

$$l) \int_1^2 (x^2 - x^5) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} \right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{2^6}{6} - \left( \frac{1^3}{3} - \frac{1^6}{6} \right) = -\frac{49}{6}$$

$$m) \int_{-2}^0 \left( \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3} \right) dx = \left[ \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{9} \right]_{-2}^0 = 0 + 0 - \left( \frac{(-2)^4}{16} + \frac{(-2)^3}{9} \right) = -\frac{1}{9}$$

پنخلم:

$$15. a) \int_{-3}^1 3dx = [3x]_{-3}^1 = 3 - (-9) = 12 \quad ; \quad - \int_1^{-3} 3dx = [3x]_1^{-3} = -(-9 - 3) = 12$$

$$b) \int_0^1 (1 + e^x) dx = [x + e^x]_0^1 = e \quad ; \quad - \int_0^1 (1 + e^x) dx = -[x + e^x]_0^1 = -e$$

$$c) \int_{-\pi}^0 \sin x dx = [-\cos x]_{-\pi}^0 = -2 \quad ; \quad - \int_0^{-\pi} \sin x dx = -[-\cos x]_0^{-\pi} = -2$$

شپارلسم:

$$16. \quad a) \int_0^{\pi} \cos x dx \qquad b) - \int_{-1}^1 (x + e^x) dx$$

$$c) \int_2^3 3x^2 dx - \int_5^3 3x^2 dx = \int_2^3 3x^2 dx + \int_3^5 3x^2 dx = \int_2^5 3x^2 dx$$

$$d) \int_{-2}^1 (2+x) dx - \int_4^1 (2+x) dx = \int_{-2}^1 (2+x) dx + \int_1^4 (2+x) dx = \int_{-2}^4 (2+x) dx$$

اولسم:

$$17. \quad a) \int_1^{2e} \frac{1}{x} dx = \ln 2e ; \int_1^e \frac{1}{x} dx + \int_e^{2e} \frac{1}{x} dx = \ln e - \ln 1 + \ln 2e - \ln e = \ln 3e$$

$$b) \int_{-1}^2 6x^2 dx = 18 ; \int_{-1}^0 6x^2 dx + \int_0^2 6x^2 dx = 2 + 16 = 18$$

$$c) \int_0^{\pi} \sin x dx = 2 ; \int_0^{0.5\pi} \sin x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi} \sin x dx = 1 + 1 = 2$$

اتلسم:

الف: د اکسپوننشل تابع  $f(x) = e^{x+3}$  گراف یو غریز جگیدونکی. له دې امله د انټروال  $[-4, -2]$  د ژۍ ارزښتونه غوښتونکي بندیزونه راکوي.

$$18. \quad a) e^{-4+3} \cdot (-2 - (-4)) \leq \int_{-4}^{-2} e^{x+3} dx \leq e^{-2+3} \cdot (-2 - (-4))$$

$$e^{-1} \cdot 2 \leq \int_{-4}^{-2} e^{x+3} dx \leq e^1 \cdot 2 \Leftrightarrow \frac{2}{e} \leq \int_{-4}^{-2} e^{x+3} dx \leq 2e$$

ب: د کرښیز تابع  $f(x) = 1 + x$  گراف یو غریز جگیدونکی دی. د ریښي تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  د مونوتوني له امله د  $f(x) = \sqrt{1+x}$  گراف هم یو غریز جگیدونکی دی. له دې سره د انټروال  $[0, 8]$  ژۍ ارزښتونه غوښتونکي بندیزونه یا که غواړئ بندونه دي.

$$b) \sqrt{1+0} \cdot (8-9) \leq \int_0^8 \sqrt{1+x} dx \leq \sqrt{1+8} \cdot (8-0)$$

$$\Leftrightarrow 8 \leq \int_0^8 \sqrt{1+x} dx \leq 24$$

پ:

د تابع  $f(x) = a^x$  گرافونه اکسپوننشل گري يا منحي دي، چې د  $a < 1$  له پاره یو غریز لویدونکي

دي. له دې سره د  $f(x) = 2^{4-x} = 2^4 \cdot 2^{-x} = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$  گراف د  $\frac{1}{2} < 1$  له امله یو غریز

لوېدونکي اکسپوننشل گره ده.

د انټروال  $[3; 5]$  دواړه ژۍ غوښتونکي بندیزونه یا دیوالونه دي.

$$2^{4-5} \cdot (5-3) \leq \int_3^5 2^{4-x} dx \leq 2^{4-3} \cdot (5-3) \Leftrightarrow 1 \leq \int_3^5 2^{4-x} dx \leq 4$$

ت: د  $f(x) = \sin^2 x$  گراف د  $0 \leq x \leq 1$  سره تړلی دی یا رابند دی. له دې سره 0 او 1 غوښتونکي بندیزونه دي.

$$0 \cdot (0.5\pi - 0) \leq \int_0^{0.5\pi} \sin^2 x dx \leq 1 \cdot (0.5\pi - 0) \Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{0.5\pi} \sin^2 x dx \leq \frac{1}{2}\pi$$

نولسم: الف : انتیگریشن

$$\int_1^x 5t^4 dt = x^{5-1}$$

$$l_a(x) = 31 \Rightarrow x^5 - 1 = 31 \Leftrightarrow x^5 = 32 \Rightarrow x = 2$$

ب : انتیگریشن

$$\int_0^x e^t dt = e^x - 1$$

$$l_a(x) = e - 1 \Rightarrow e^x - 1 = e - 1 \Leftrightarrow e^x = e \Rightarrow x = 1$$

شللم:

$$20. \quad a) \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} - 9 \qquad b) \int_0^x (2 + e^t) dt = 2x + e^x - 1$$

$$c) \int_0^x \frac{1}{\cos^2 t} dt = \tan x \qquad d) \int_a^x 2 dt = 2(x - a)$$

یووپشتم:

$$21. \quad a) \int \sqrt[4]{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{4}} dx = \frac{4}{7} x \cdot \sqrt[4]{x^3} + c$$

$$b) \int \frac{1}{\sqrt[2]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{5}{4} \sqrt{x^4} + c$$

$$c) \int \sqrt[6]{x^5} dx = \int x^{\frac{5}{6}} dx = \frac{6}{11} x \cdot \sqrt[6]{x^5} + c$$

$$d) \int x^{2\frac{3}{3}} \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{7}{3}} dx = \frac{3}{10} x^3 \cdot \sqrt[3]{x} + c$$

$$e) \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = -\frac{2}{\sqrt{x}} + c$$

$$f) \int \frac{x^3}{x^4} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$g) \int \frac{x^3 \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{18}{6} + \frac{2}{6} - \frac{2}{3}} dx = \int x^{\frac{17}{6}} dx = \frac{6}{23} x^3 \cdot \sqrt[6]{x^5} + c$$

$$h) \int \frac{\sqrt[4]{x^2}}{x \cdot \sqrt{x^3}} dx = \int x^{\frac{2}{4} - \frac{4}{4} - \frac{6}{4}} dx = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} + c$$

دوه وېشتم:

$$22. \quad a) \int 8x^3 dx = 8 \int x^3 dx = 2x^4 + c$$

$$b) \int -4x^{-2} dx = -4 \int x^{-2} dx = \frac{4}{x} + c$$

$$c) \int \frac{3}{-x^3} dx = - \int \frac{1}{x^3} dx = \frac{3}{2x^2} + c$$

$$d) \int \sqrt[3]{3x} dx = \sqrt[3]{3x} \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3\sqrt[3]{3}}{4} x \cdot \sqrt[3]{x} + c$$

$$d) \int k \cdot e^x dx = k \int e^x dx = k \cdot e^x + c$$

$$f) \int -5x^n dx = -5 \int x^n dx = -\frac{5}{n+1} x^{n+1} + c \quad ; \quad n \neq -1$$

$$g) \int \frac{\sin x}{2} dx = \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x + c$$

$$h) \int \frac{3a}{2 \cdot \cos^2 x} dx = \frac{3a}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{3a}{2} \tan x + c$$

$$i) \int \frac{2\sqrt{x}}{3x^3} dx = \frac{2}{3} \int x^{-\frac{5}{2}} dx = -\frac{4}{9\sqrt{x^3}} + c = -\frac{4\sqrt{x}}{9x^2} + c$$

$$k) \int \frac{-\sqrt{2}}{3x} dx = -\frac{\sqrt{2}}{3} \int \frac{1}{x} dx = -\frac{\sqrt{2}}{3} \ln |x| + c$$



$$23. \quad a) \int e^{x+3} dx = \int e^x \cdot e^3 dx = e^3 \int e^x dx = e^3 \cdot e^x + c = e^{x+3} + c$$

$$b) \int (4x)^3 dx = \int 4^3 \cdot x^3 dx = 4^3 \int x^3 dx = 4^3 \cdot \frac{1}{4} x^4 + c = 16x^4 + c$$

$$c) \int a \cdot e^{x+b} dx = a \cdot e^b \int e^x dx = a \cdot e^b \cdot e^x + c = a \cdot e^{x+b} + c$$

$$d) \int (7x^2)^4 dx = 7^4 \int x^8 dx = 7^4 \cdot \frac{1}{9} x^9 + c = \frac{7^4 \cdot x^9}{9} + c = \frac{2401 \cdot x^9}{9} + c$$

$$24. \quad a) \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x + c \qquad b) \frac{x^2}{2} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + c$$

$$c) \frac{5x^4}{4} - \frac{7x^2}{2} + 4x + c \qquad d) \frac{x^3}{3} + x^2 + x + c$$

$$e) \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + c \qquad f) \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + c$$

$$g) \frac{3x \cdot \sqrt[3]{x}}{4} - \frac{1}{x} + c \qquad h) -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} + c$$

$$i) \frac{5x^2}{2} - \ln|x| + \frac{\sin x}{3} + c \qquad k) 5x + \frac{x^6}{6} - \cos x + c$$

$$l) e^x + \cot x + c \qquad m) \tan x + \ln|x| + c$$

$$25. \quad a) \int \frac{(x^2-1)^3}{x} dx = \int \left( x^5 - 3x^3 + 3x - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^6}{6} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + c$$

$$b) \int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx = \int \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - 2 + \sqrt{x} \right) dx = 2\sqrt{x} - 2x + \frac{2x \cdot \sqrt{x}}{3} + c$$

$$c) \int \frac{e^{2x} + e^{x+2}}{e^x} dx = \int (e^x + e^2) dx = e^x + x \cdot e^2 + c$$

$$d) \int \frac{3x^2 + 2x - 4}{x^3} dx = \int \left( \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) dx = 3 \cdot \ln|x| - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + c$$

$$26. a) \int 3^{x+1} dx = \int 3 \cdot 3^x dx = 3 \int 3^x dx = \frac{3 \cdot 3^x}{\ln 3} + c = \frac{3^{x+1}}{\ln 3} + c$$

$$b) \int 2^{-x} dx = \int \frac{1}{2^x} dx = \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln \frac{1}{2}} + c = -\frac{1}{2^x \cdot \ln 2} + c$$

$$c) \int a^{x+b} dx = a^b \int a^x dx = a^b \cdot \frac{a^x}{\ln a} + c = \frac{a^{x+b}}{\ln a} + c$$

$$d) \int \frac{1}{a^x} dx = \int \left(\frac{1}{a}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^x}{\ln \frac{1}{a}} + c = -\frac{1}{a^x \cdot \ln a} + c$$

$$e) \int 2^x \cdot 3^x dx = \int 6^x dx = \frac{6^x}{\ln 6} + c$$

$$f) \int \frac{2^x}{3^x} dx = \int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln \frac{2}{3}} + c = \frac{2^x}{3^x \cdot (\ln 2 - \ln 3)}$$

$$g) \int \frac{4^{x+3}}{2^x} dx = \int \frac{4^3 \cdot 4^x}{2^x} dx = 4^3 \int 2^x dx = \frac{4^3 \cdot 2^x}{\ln 2} + c = \frac{2^{6+x}}{\ln 2} + c$$

$$h) \int \frac{5^x + 3^x}{2^x} dx = \int \left( \left(\frac{5}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x \right) dx$$

$$= \frac{5^x}{2^x \cdot (\ln 5 - \ln 2)} + \frac{3^x}{2^x \cdot (\ln 3 - \ln 2)} + c$$

$$i) \int (1 + 2^x) dx = x + \frac{2^x}{2} - \frac{3^x}{\ln 3} + c$$

$$27. a) \int \ln 2x^3 dx = \int (\ln 2 + 3 \ln x) dx = x \cdot \ln 2 + 3(x \cdot \ln x - x) + c$$

$$= x \cdot (\ln 2 + 3 \cdot \ln x - 3) + c$$

$$b) \int \ln \sqrt{x} dx = \int \frac{1}{2} \ln x dx = \frac{1}{2} x \cdot \ln x - \frac{x}{2} + c = x \cdot (\ln \sqrt{x}) - \frac{1}{2} x + c$$

$$c) \int \lg \frac{x}{2} dx = (\lg x - \lg 2) dx = \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln 10} + c$$

$$= \frac{x \cdot (\ln x - 1 - \ln 2)}{\ln 10} + c$$

$$d) \int 3 \log \frac{1}{x} dx = -\int {}_3 \log x dx = \frac{x - x \cdot \ln x}{\ln 3} + c$$

$$28. F(x) = x \cdot \ln x - x$$

$$F'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x = f(x)$$

$$29. {}_a \log x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\int {}_a \log x dx = \int \frac{\ln x}{\ln a} dx = \frac{1}{\ln a} \cdot \int \ln x dx = \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln a} + c$$

$$30. a) u = 5x - 7, \quad dx = \frac{du}{5}$$

$$\int \frac{10}{5x-7} dx = \frac{10}{5} \int \frac{1}{u} du = 2 \ln(5x-7) + c$$

$$b) u = 1 + 3x, \quad dx = \frac{du}{3}$$

$$\int \frac{12}{(1+3x)^4} dx = \frac{12}{3} \int \frac{1}{u^4} du = -\frac{4}{3(1+3x)^3} + c$$

$$c) u = 5 - 4x, \quad dx = \frac{du}{4}$$

$$\int \frac{1}{5-4x} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{1}{u} du = -\frac{1}{4} \ln(5-4x) + c$$

$$d) u = bx + d \quad , \quad dx = \frac{du}{b}$$

$$\int \frac{a}{bx+d} dx = \frac{a}{b} \int \frac{1}{u} du = \frac{a}{b} \cdot \ln(bx+d) + c$$

$$e) u = 5x + 7 \quad , \quad dx = \frac{du}{5}$$

$$\int (5x+7)^x dx = \frac{1}{5} \int u^3 du = \frac{(5x+7)^4}{20} + c$$

$$f) u = ax + b \quad , \quad dx = \frac{du}{a}$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \int u^n du = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c \quad , \quad n \neq -1$$

$$g) u = 4x - 2 \quad , \quad dx = \frac{du}{4}$$

$$\int \sqrt{4x-2} dx = \frac{1}{4} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{6} \sqrt{(4x-2)^3} + c$$

$$h) u = ax + b \quad , \quad dx = \frac{du}{a}$$

$$\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{1}{a} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3a} \sqrt{(ax+b)^3} + c$$

$$i) u = 2x + 5 \quad , \quad dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \frac{7}{\sqrt{2x+5}} dx = \frac{7}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \sqrt{2x+5} + c \setminus$$

$$k) u = ax + b \quad , \quad dx = \frac{du}{a}$$

$$\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{1}{a} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{2a} \sqrt{(ax+b)^3} + c$$

$$l) u = 4x \quad , \quad dx = \frac{du}{4} ; \quad \int \sin 4x dx = \frac{1}{4} \int \sin u du = -\frac{1}{4} \cos 4x + c$$

$$m) u = -2x \quad , \quad dx = -\frac{du}{2} ; \quad \int \frac{3}{e^{2x}} dx = -\frac{3}{2} \int e^u du = -\frac{3}{2} 2e^{2x} + c$$

$$n) u = 3x + \frac{\pi}{4} \quad , \quad dx = \frac{du}{3}$$

$$\int \cos(3x + \frac{\pi}{4}) dx = \frac{1}{3} \int \cos u du = \frac{1}{3} \sin(3x + \frac{\pi}{4}) + c$$

$$o) u = 3x - 5 \quad , \quad dx = \frac{du}{3} ; \quad \int e^{3x-5} dx = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^{3x-5} + c$$

$$\int \frac{x}{3+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{3+x^2} dx \quad \text{یو دپرشم: الف: بنه بدلون:}$$

په خای اېښوونه یا سبستېچيوشن:  $u = 3 + x^2 = 2x$

کیردی او انټیگرال یې ونیسی:  $\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln(3 + x^2) + c$

$$b) \int \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{2+x^2}} dx$$

$$u = 2 + x^2 \quad u' = 2x$$

$$\frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \sqrt{2+x^2} + c$$

$$c) \int \frac{x^2}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{1+x^3} dx$$

$$u = 1 + x^3 \quad u' = 3x^2$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{3} \ln(1+x^3) + c$$

$$d) \int x \cdot (x^2 - 5)^3 dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot (x^2 - 5)^3 dx$$

$$u = x^2 - 5 \quad u' = 2x$$

$$\frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{8} \ln(x^2 - 4)^4 + c$$

$$e) \int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot e^{x^2} dx$$

$$u = x^2 \quad u' = 2x$$

$$\frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$f) \int x \cdot \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot \sin x^2 dx$$

$$u = x^2 \quad u' = 2x$$

$$\frac{1}{2} \int \sin u du = c - \frac{1}{2} \cos x^2$$

$$g) u = 1 + e^x \quad u' = e^x$$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln(1 + e^x) + c$$

$$g) u = 1 + x \quad u' = e^x$$

$$\int u^3 du = \frac{1}{4} (x^2 + x)^4 + c$$

$$i) \int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^3}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{\sqrt{4+x^3}} dx$$

$$u = 4 + x^3 \quad u' = 3x^2$$

$$\frac{1}{3} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3} \sqrt{4+x^3} + c$$

$$k) \int x^3, \ln^4 dx = \frac{1}{4} \int 4x^3 \cdot \ln x^4 dx$$

$$u = x^4 \quad u' = 4x^3$$

$$\frac{1}{4} \int \ln u du = \frac{1}{4} x^4 \cdot (\ln x^4 - 1) + c$$

$$32. a) f(x) = \ln x ; \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + c$$

$$b) f(x) = x^2 = 3 ; \int x(x^2 + 3) dx = \frac{1}{2} (x^2 + 3)^2 + c$$

$$c) f(x) = x^3 - 1 ; \int 3x^2(x^3 - 1) dx = \frac{1}{2} (x^3 - 1)^2 + c$$

$$d) f(x) = x^2 - x ; \int (2x - 1)(x^2 - x) dx = \frac{1}{2} (x^2 - x)^2 + c$$

$$33. \quad f(x) = u \quad \frac{du}{dx} = f'(x) \Rightarrow f'(x) dx = du$$

$$\int f(x) \cdot f'(x) dx = \int u du = \frac{1}{2} u^2 + c = \frac{1}{2} (f(x))^2 + c$$

$$34. a) \int \frac{x^2}{4 + x^3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{4 + x^3} dx = \frac{1}{3} \ln |4 + x^3| + c$$

$$b) \int \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 - 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 3x^2 - 1} dx = \frac{1}{3} \ln |x^3 + 3x^2 - 1| + c$$

$$c) \int \frac{5}{x+2} dx = 5 \int \frac{1}{x+2} dx = 5 \ln |x+2| + c$$

$$d) \int \frac{3e^x}{e^x - 5} dx = 3 \int \frac{e^x}{e^x - 5} dx = 3 \ln |e^x - 5| + c$$

$$e) \int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} = \ln |\sin x| + c$$

$$f) \int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + c$$

$$35. a) g(x) = 3 + x^5 \quad g'(x) = 5x^4$$

$$\int \frac{5x^4}{3 + x^5} dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |3 + x^5| + c$$

$$b) u = 3 + x^5$$

$$\int \frac{5x^4}{(3+x^5)^2} dx = \int \frac{g'(x)}{(g(x))^2} dx = \int u^{-2} du = -\frac{1}{3+x^5} + c$$

$$c) u = 1 - x^2$$

$$\int \frac{3x}{4-x^2} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{-2x}{(1-x^2)^4} dx = -\frac{3}{2} \int u^{-4} du = -\frac{1}{2(1-x^2)^3} + c$$

$$d) g(x) = 4 - x^2 \quad g'(x) = -2x$$

$$\int \frac{5x}{4-x^2} dx = -\frac{5}{2} \int \frac{-2x}{4-x^2} dx = -\frac{5}{2} \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = -\frac{5}{2} \ln|4-x^2| + c$$

$$e) g(x) = 3 + \sin x \quad g'(x) = \cos x$$

$$\int \frac{\cos x}{3 + \sin x} dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|3 + \sin x| + c$$

$$f) u = 1 - \cos x$$

$$\int \frac{\sin x}{3 + (1 - \cos x)^2} dx = \int \frac{g'(x)}{(g(x))^2} dx = \int u^{-2} du = -\frac{1}{1 - \cos x} + c$$

$$36. a) \int \frac{4}{x^2 + 9} dx = \frac{4}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1} dx = \frac{4}{3} \arctan \frac{x}{3} + c$$

$$b) \int \frac{3}{2x^2 + 2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{3}{2} \arctan x + c$$

$$c) \int \frac{1}{x^2 + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{x \cdot \sqrt{2}}{2} + c$$

$$d) \int \frac{2}{3x^2 + 5} dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2 + \frac{5}{3}} dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{\frac{5}{3} \cdot \left(\left(\frac{x \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1\right)} dx$$

$$= \frac{2}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{x \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{15}} \cdot \arctan \frac{x \cdot \sqrt{15}}{5} + c$$

$$e) \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$$

$$f) \int \frac{1}{ax^2 + b} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{x^2 + \frac{b}{a}} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\frac{b}{a} \cdot \left(\left(\frac{x \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 + 1\right)} dx$$

$$= \frac{1}{b} \int \frac{1}{\left(\frac{x \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan \frac{x \cdot \sqrt{ab}}{b} + c \text{ mit } ab > 0$$

وه دېرېښم: الف: د  $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-9}$  له امله ماتلاندي پولینوم صفرخایونه نه لري، نو له دې

امله په کرښیزو ځلونو یا ضریبونو نه توتېه کيږي یا توتېه وړ نه ده. اوبیونه یا حل د ارکوس تانجنټ تابع په مرسته لاس ته راتلی شي.

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 13} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2 + 9} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{3} \arctan \frac{x+2}{3} + c$$

ب: د  $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{-1}$  له امله

اوبیونه یا حل د ارکوس تانجنټ تابع په مرسته لاس ته راتلی شي.

$$\int \frac{5}{x^2 + 2x + 2} dx = 5 \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = 5 \arctan(x+1) + c$$

پ: د  $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{-1}$  له امله

اوبیونه یا حل د ارکوس تانجنټ تابع په مرسته لاس ته راتلی شي.

$$\int \frac{6}{3x^2 + 18x + 30} dx = \frac{6}{3} \int \frac{1}{x^2 + 6x + 10} dx = 2 \int \frac{1}{(x+3)^2 + 1} dx$$

$$= 2 \arctan(x+3) + c$$

د: د  $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-25}$  له امله

اوبیونه یا حل د ارکوس تانجنټ تابع په مرسته لاس ته راتلی شي.

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{2x^2 + 8x + 58} dx &= \int \frac{1}{x^2 + 4x + 29} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2 + 25} dx \\ &= \frac{1}{25} \int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{5}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{5} \arctan \frac{x+2}{5} + c \end{aligned}$$

$$38. \text{ a) } \int \frac{2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} dx = 2 \arcsin \frac{x}{3} + c$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{1}{\sqrt{2-4x-x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{6-(2+x)^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)^2}} dx \\ &= \arcsin \frac{x+2}{\sqrt{6}} + c \end{aligned}$$



$$c) \int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + c$$

$$d) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 5}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 - 6}} dx = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-1}{\sqrt{6}}\right)^2 - 1}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} du = \ln \left| \frac{x-1}{\sqrt{6}} + \sqrt{\left(\frac{x-1}{\sqrt{6}}\right)^2 - 1} \right| + c_1$$

$$= \ln \left| \frac{x-1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{x^2 - 2x - 5} \right| + c_1$$

$$= \ln|x-1 + \sqrt{x^2 - 2x - 5}| - \ln\sqrt{6} + c_1 = \ln|x-1 + \sqrt{x^2 - 2x - 5}| + c$$

$$e) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}} dx = \ln|x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}| + c$$

$$f) \int \frac{6}{\sqrt{9x^2 + 9}} dx = 6 \int \frac{1}{3\sqrt{x^2 + 1}} dx = 2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = 2 \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}| + c$$

$$39. a) \int \frac{1-x}{x^2+x+1} dx = -\int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)}{x^2+x+1} dx = -\int \frac{\frac{1}{2}(2x+1-3)}{x^2+x+1} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{\frac{3}{4} \cdot \left( \left( \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right)} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + 2 \int \frac{1}{\left( \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| + \sqrt{3} \cdot \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \int \frac{2x+1}{x^2+4x+6} dx &= \int \frac{2x+4-3}{x^2+4x+6} dx \\
&= \int \frac{2x+4}{x^2+4x+6} dx - 3 \int \frac{1}{(x+2)^2+2} dx \\
&= \int \frac{2x+4}{x^2+4x+6} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx \\
&= \ln|x^2+4x+6| - \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \arctan \frac{x+2}{\sqrt{2}} + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } \int \frac{3x}{2x^2+2x+8} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{x}{x^2+x+4} dx = \frac{3}{2} \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2}}{x^2+x+4} dx \\
&= \frac{3}{4} \int \frac{2x+1}{x^2+x+4} dx - \frac{3}{4} \int \frac{1}{\frac{15}{4} \cdot \left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)^2+1\right)} dx \\
&= \frac{3}{4} \int \frac{2x+1}{x^2+x+4} dx - \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)^2+1} dx \\
&= \frac{3}{4} \ln|x^2+x+4| - \frac{\sqrt{15}}{10} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{15}} + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } \int \frac{x-3}{x^2+8x+17} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-6)}{x^2+8x+17} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+8-14)}{x^2+8x+17} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{2x+8}{x^2+8x+17} dx - \int \frac{7}{x^2+8x+17} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{2x+8}{x^2+8x+17} dx - 7 \int \frac{1}{(x+4)^2+1} dx \\
&= \frac{1}{2} \ln|x^2+8x+17| - 7 \cdot \arctan(x+4) + c
\end{aligned}$$

40. a)  $u(x) = x$  mit  $u'(x) = 1$  und  $v'(x) = e^x$  mit  $v(x) = e^x + c_1$   
 $\int x \cdot e^x dx = x \cdot (e^x + c_1) - \int 1 \cdot (e^x + c_1) dx$   
 $= x \cdot e^x + c_1 x - \int e^x dx - \int c_1 dx = (x - 1) \cdot e^x + c$
- b)  $u(x) = x$  mit  $u'(x) = 1$  und  $v'(x) = \sin x$  mit  $v(x) = -\cos x + c_1$   
 $\int x \cdot \sin x dx = x \cdot (-\cos x + c_1) - \int 1 \cdot (-\cos x + c_1) dx$   
 $= -x \cdot \cos x + c_1 x + \int \cos x dx - \int c_1 dx = -x \cdot \cos x + \sin x + c$
- c)  $u(x) = \ln x$  mit  $u'(x) = \frac{1}{x}$  und  $v'(x) = x^2$  mit  $v(x) = \frac{x^3}{3} + c_1$   
 $\int x^2 \cdot \ln x dx = \left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) \cdot \ln x - \int \left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) \cdot \frac{1}{x} dx$   
 $= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x + c_1 \ln x - \frac{x^3}{9} - c_1 \ln x + c = \frac{x^3}{3} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + c$
- d)  $u(x) = \ln x$  mit  $u'(x) = \frac{1}{x}$  und  $v'(x) = x^{-2}$  mit  $v(x) = -\frac{1}{x} + c_1$   
 $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x} + c_1\right) \cdot \ln x - \int \left(-\frac{1}{x} + c_1\right) \cdot \frac{1}{x} dx$   
 $= -\frac{1}{x} \cdot \ln x + c_1 \ln x - \frac{1}{x} - c_1 \ln x + c = -\frac{1}{x} \cdot (\ln x + 1) + c$
- e)  $u(x) = x$  mit  $u'(x) = 1$  und  $v'(x) = e^{2x}$  mit  $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + c_1$   
 $\int x \cdot e^{2x} dx = x \cdot \left(\frac{1}{2}e^{2x} + c_1\right) - \int \left(\frac{1}{2}e^{2x} + c_1\right) dx$   
 $= \frac{1}{2}x \cdot e^{2x} + c_1 x - \frac{1}{4}e^{2x} - c_1 x + c = \frac{1}{4}e^{2x}(2x - 1) + c$
- f)  $u(x) = x$  mit  $u'(x) = 1$  und  $v'(x) = \sin 2x$  mit  $v(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + c_1$   
 $\int x \cdot \sin 2x dx = x \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + c_1\right) - \int \left(-\frac{1}{2}\cos 2x + c_1\right) dx$   
 $= -\frac{1}{2}x \cos 2x + c_1 x + \frac{1}{4}\sin 2x - c_2 x + c = -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$
41. a)  $\int x^2 \cdot \cos x dx = x^2 \cdot \sin x - 2\int x \cdot \sin x dx + c_1$   
 $\int x^2 \cdot \cos x dx = x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \sin x + c.$
- b)  $\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x dx + c_1$   
 $\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x - 2e^x + c = e^x \cdot (x^2 - 2x + 2) + c.$
- c)  $\int x^2 \cdot e^{2x} dx = \frac{x^2 \cdot e^{2x}}{2} - \int 2x \cdot \frac{e^{2x}}{2} dx + c_1$   
 $= \frac{x^2 \cdot e^{2x}}{2} - \int x \cdot e^{2x} dx + c_1$   
 $\int x^2 \cdot e^{2x} dx = \frac{x^2 \cdot e^{2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{2x}(2x - 1) + c = \frac{1}{4}e^{2x}(2x^2 - 2x + 1) + c.$
- d)  $\int x^2 \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \sin 2x - \int 2x \cdot \frac{\sin 2x}{2} dx + c_1$   
 $= \frac{1}{2}x^2 \cdot \sin 2x - \int x \cdot \sin 2x dx + c_1$

$$\int x^2 \cdot \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin 2x + \frac{1}{2} x \cdot \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

42. a)  $\int x^4 \cdot e^{2x} \, dx = \frac{e^{2x}}{2} \cdot \left( x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + \frac{3}{2} \right) + c$

b)  $\int \sin^4 x \, dx = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cdot \cos x - \frac{3}{8} \sin x \cdot \cos x + \frac{3}{8} x + c$

c)  $\int x^3 \cdot e^x \, dx = e^x \cdot (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$

d)  $\int \cos^6 x \, dx$   
 $= \frac{1}{6} \cos^5 x \cdot \sin x + \frac{5}{24} \cos^3 x \cdot \sin x + \frac{5}{16} \cos x \cdot \sin x + \frac{5}{16} x + c$

43. a)  $\int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x \, dx + c_1$   
 $= \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx + c_1$   
 $\int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx + c_2$   
 $2 \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + x + c_2$   
 $\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + c$

b)  $\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \ln x \cdot \ln x - \int \frac{\ln x}{x} \, dx + c_1$   
 $\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + c$

c)  $\int e^x \cdot \sin x \, dx = -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x \, dx + c_1$   
 $\int e^x \cdot \sin x \, dx = -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x \, dx + c_1$   
 $\int e^x \cdot \sin x \, dx = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x \, dx + c_2$   
 $\int e^x \cdot \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x \cdot (\sin x - \cos x) + c$

d)  $\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \sin x \cdot \sin x - \int \cos x \cdot \sin x \, dx + c_1$   
 $\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + c$

44. a)  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} \, dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} \, dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + c$$

ب: کیردی

$$x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$$

د توتیه کسرونو اینونوه

$$\frac{1}{x^2 + 6x + 8} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+4} \quad A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$$

کیردی او انتیگرال یی ونیسی

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 8} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+2} \, dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+4} \, dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+2}{x+4} \right| + c$$

$$= \sqrt{\frac{|x+2|}{|x+4|}} + c$$

پ : ماتلاندې ټوټه کړی

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

د ټوټه مات له پاره ایښونه

$$\frac{3x+2}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \quad A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+2}{x^2-x-2} dx &= \frac{8}{3} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{8}{3} \ln |x-2| + \frac{1}{3} \ln |x+1| + c \end{aligned}$$

ت : ماتلاندې ټوټه کونه

$$d) x^3 - 4x = (x(x-2)(x+2))$$

$$\frac{x^2+12x+12}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}$$

$$\text{سره } A = -3, \quad B = 5, \quad C = -1$$

کینول او بنتیگرانیول

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+12x+12}{x^3-4x} dx &= -3 \int \frac{1}{x} dx + 5 \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= -3 \ln |x| + 5 \ln |x-2| - \ln |x+2| + c \end{aligned}$$

$$45. a) x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2$$

$$\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} dx = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} dx &= 6 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x+1} dx + 9 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx \\ &= 6 \ln |x| - \ln |x+1| - \frac{9}{x+1} + c \end{aligned}$$

$$b) x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

$$\frac{3x}{x^2-6x+9} dx = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{3x}{x^2-6x+9} dx = 3 \int \frac{1}{x-3} dx + 9 \int \frac{1}{(x-3)^2} dx$$

$$= 3 \ln |x-3| - \frac{9}{x-3} + c$$

$$c) x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

$$\frac{3x}{x^2-6x+9} dx = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}$$

$$A = -1, B = 1, C = -1, D = 2$$

$$\int \frac{3x}{x^2-6x+9} dx = -\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^3} dx + 2 \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= 3 \ln |x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + 2 \ln |x+1|$$

ت : ماتلاندي توتيه كونه

د كونه مخ ته لرو  $(x-1)^4 = (x-1) \cdot (x-1) \cdot (x-1) \cdot (x-1)$  له امله يوه په كرښيز ځلونو يا ضربيونو توتيه

د توتيه ماتونو توتيه كونه ردويا ځي په ځاي كوو

$$\frac{5x^3 - 11x^2 + 5x + 4}{(x-1)^4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{(x-1)^4}$$

سره  $A = 5, B = 4, C = -2, D = 3$  د

كيريدي او لنتيگرال يې ونيسي

$$\int \frac{5x^3 - 11x^2 + 5x + 4}{(x-1)^4} dx$$

$$= 5 \int \frac{1}{x-1} dx + 4 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{(x-1)^3} dx + 3 \int \frac{1}{(x-1)^4} dx$$

$$= 5 \int \frac{1}{x-1} dx + 4 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{(x-1)^3} dx + 3 \int \frac{1}{(x-1)^4} dx$$

شپيرڅلوپښتم. الف:

ماتلاندي ټوټه كونه

$$(x^2 - x)(x^2 + 4) = x(x-1)(x^2 + 4)$$

د ټوټه ماتونو ټوټهونې له پاره ايښونه

$$\frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

سره.  $A = 2$  ,  $B = -2$  ,  $C = 2$  ,  $D = 4$  د

كېردي او انټيگرال يې ونيسي:

$$\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx - 2 \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2x+4}{x^2+4} dx$$

$$= 2 \ln |x| - 2 \ln |x-1| + \int \frac{2x}{x^2+4} dx + 2 \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)+1} dx$$

$$= 2 \ln |x| - 2 \ln |x-1| + \ln(x^2 + 4) + \arctan \frac{x}{2} + c$$

b)  $x^3 - 2x - 4 = (x-2)(x^2 + 2x + 2)$

$$\frac{3x+4}{x^3 - 2x - 4} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+c}{x^2 + 2x + 2}$$

$A = 1$  ,  $B = -1$  ,  $C = -1$

$$\int \frac{3x+4}{x^3 - 2x - 4} dx = \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 2} dx$$

$$= \ln |x-2| - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 2| + c$$

c)  $x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(x^2 + x + 1)$

$$\frac{2x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 - x - 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+c}{x^2 + x + 1} dx$$

له پاره  $A = 1$  ,  $B = 1$  ,  $C = -1$  د

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 - x - 2} dx = \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2 + 2x + 1} dx$$

$$= \ln |x-2| + \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)+1} dx$$

d)  $x^3 - 3x^2 + 9x + 13 = (x+1)(x^2 - 4x + 13)$

$$\frac{7x^2 - 10x + 37}{x^3 - 3x^2 + 9x + 13} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+c}{x^2+4x+13}$$

$$A=3, \quad B=4, \quad C=-2$$

$$\begin{aligned} \int \frac{7x^2 - 10x + 37}{x^3 - 3x^2 + 9x + 13} dx &= 3 \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{4x-2}{x^2+4x+13} dx \\ &= 3 \ln|x+1| + 2 \int \frac{2x-4}{x^2+4x+13} dx + \frac{2}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)+1} \\ &= 3 \ln|x+1| + 2 \ln|x^2-4x+13| + 2 \arctan \frac{x-2}{3} + c \end{aligned}$$

$$47. \quad a) \quad x^2 : (x+1) = x-1 + \frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx = \int x dx - \int 1 dx + \int \frac{1}{x+1} = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c$$

$$b) \quad (x^3 - 2x^2 + x + 5) : (x^2 - 1) = x - 2 + \frac{2x+3}{x^2-1}$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{x^2 - 1} = x - 2 + \frac{5}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{x^2 - 1} dx &= \int x dx - \int 2 dx + \frac{5}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{5}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c \end{aligned}$$

$$c) \quad (3x^3 + 5x^2 - 29x - 25) : (x^2 + x - 12) = 3x + 2 + \frac{5x-1}{x^2+x-12}$$

$$\frac{3x^3 + 5x^2 - 29x - 25}{x^2 + x - 12} = 3x + 2 + \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+4}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^3 + 5x^2 - 29x - 25}{x^2 + x - 12} dx &= 3 \int x dx + \int 2 dx + 2 \int \frac{1}{x-3} dx + 3 \int \frac{1}{x+4} dx \\ &= \frac{3x^2}{2} + 2x + 2 \ln|x-3| + 3 \ln|x+4| + c \end{aligned}$$

$$d) \quad (2x^3 + x^2) : (x^3 - 1) = 2 + \frac{x^2+2}{x^3-1}$$



$$\frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1} = 2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1} dx &= \int 2dx + \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \\ &= 2x + \ln |x-1| + \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c \end{aligned}$$

$$d) \int \sqrt{2x^2 + 4x + 6} dx = \sqrt{2} \int \sqrt{(x+1)^2 + 2} dx$$

په خاي اېينوونه يا سېسټېچېشن

$$u = x+1$$

$$\begin{aligned} &\int \sqrt{2x^2 + 4x + 6} dx \\ &= \frac{x+1}{2} \sqrt{2x^2 + 4x + 6} + 2\sqrt{2} \cdot \ln \left| x+1 + \sqrt{2x^2 + 4x + 6} \right| + c \end{aligned}$$

$$49. a) \int \sqrt{x^2 + 2x} dx = \int \sqrt{(x+1)^2 - 1} dx$$

$$u = x+1$$

$$\int x^2 + 2x dx = \frac{x+1}{2} \sqrt{x^2 + 2x} - \frac{1}{2} \left| x+1 + \sqrt{x^2 + 2x} \right| + c$$

$$b) \int \sqrt{x^2 - 4x - 5} dx = \int \sqrt{(x-2)^2 - 9} dx$$

$$u = x-2$$

$$\int \sqrt{x^2 - 4x - 5} dx = \frac{x-2}{2} \sqrt{x^2 - 4x - 5} - \frac{9}{2} \ln \left| x-1 + \sqrt{x^2 - 4x - 5} \right| + c$$

$$c) \int x\sqrt{x^2 + 4x + 3} dx = \int x\sqrt{(x+2)^2 - 1} dx$$

$$u = x+2 \Rightarrow x = u-2$$

$$\int (u-2)\sqrt{u^2 - 1} du - 2 \int u\sqrt{u^2 - 1} du$$

$$\int x\sqrt{x^2 + 4x + 3} dx$$

$$= \frac{\sqrt{(x^2 + 4x + 3)^3}}{3} - (x+2)\sqrt{x^2 + 4x + 3} - \ln \left| x+2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3} \right| + c$$

$$d) \int (x+2)\sqrt{x^2+2}+2dx = \int (x+2)\sqrt{(x+1)^2+1}dx$$

په خای ایینوونه:

$$u = x+1 \Rightarrow x = u-1$$

$$\begin{aligned} \int (u+1)\sqrt{u^2+1}du &= \int u\sqrt{u^2+1}du + \int \sqrt{u^2+1}du \\ \int (x+2)\sqrt{x^2+2x+2}dx &= \frac{\sqrt{(x^2+2x+2)^3}}{3} + \frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{3}{2}\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}| + c \end{aligned}$$

$$50. a) \int \frac{x^2}{6} dx = \frac{x^3}{18} + c$$

$$b) \int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} + c$$

$$c) \int (1-2x^2+x^3) dx = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + c$$

$$d) \int (x^2-3x-6) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 6x + c$$

$$e) \int x \cdot \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{x} + c$$

$$f) \int x^2 \cdot \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{7}{3}} dx = \frac{3}{10} \cdot x^{\frac{10}{3}} \cdot \sqrt[3]{x} + c$$

$$g) \int \frac{x \cdot \sqrt{x}}{5\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{13}{10}} dx = \frac{10}{23} \cdot \sqrt[10]{x^{23}} + c = \frac{10}{23} \cdot x^2 \cdot \sqrt[10]{x^3} + c$$

$$h) \int \frac{3x \cdot \sqrt{x^3}}{x^2} dx = 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx = 3 \int \sqrt{x} dx = 2x\sqrt{x} + c$$

$$i) \int \frac{x^2+3x-2}{x} dx = \int \left(x+3-\frac{2}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln|x| + c$$

$$k) \int \frac{x-5}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\sqrt{x}-\frac{5}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 10\sqrt{x} + c$$

$$51. a) u = 5-4x$$

$$\int 2(5-4x)^3 dx = -\frac{2}{4} \int u^3 du = -\frac{1}{8}(5-4x)^4 + c$$

$$b) u = 5x+2$$

$$\int \sqrt{5x+2} dx = \frac{1}{5} \int \sqrt{udu} = \frac{2}{15} \sqrt{(5x+2)^3}$$

$$c) u = g(x) = x^2, \quad g'(x) = 2x$$

$$\int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$d) u = g(x) = 2x^3-4, \quad g'(x) = 6x^2$$

$$\int x^2 \cdot \sqrt{2x^3-4} dx = \frac{1}{6} \int 6x^2 \cdot \sqrt{2x^3-4} dx = \frac{1}{6} \int \sqrt{udu} = \frac{\sqrt{(2x^3-4)^3}}{9} + c$$

$$e) u = g(x) = x^2 + 2x + 1 \quad , \quad g'(x) = 2x + 2$$

$$\int \frac{3x+3}{x^2+2x+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1} dx = \frac{3}{2} \ln|x^2+2x+1| + c$$

$$f) u = g(x) = 2 + \sin x \quad , \quad g'(x) = \cos x$$

$$\int \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^3} dx = \int \frac{1}{u^3} du = -\frac{1}{2(2 + \sin x)^2} + c$$

$$g) \int \frac{1}{2x^2+9} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2} \cdot x}{3}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{3\sqrt{2}} \int \frac{1}{u^2+1} du$$

$$\int \frac{1}{2x^2+9} dx = \frac{1}{3\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2}}{3} x + c = \frac{1}{6} \sqrt{2} \arctan \frac{\sqrt{2}}{3} x + c$$

$$h) u = g(x) = x^2 - 4 \quad , \quad g'(x) = 2x$$

$$\int \frac{x^2}{x^2-4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-4} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2-4| + c$$

$$i) \frac{x}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} \quad ; \quad A = \frac{1}{4} \quad , \quad B = \frac{3}{4}$$

$$\int \frac{x}{x^2+2x-3} dx = \frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{3}{4} \ln|x+3| + c$$

$$k) \int \sqrt{x^2+2x+3} dx = \int \sqrt{(x+1)^2+2} dx$$

$$l) \int \sqrt{x^2+2x+3} dx = \int \sqrt{(x+1)^2+2} dx$$

$$= \frac{x+1}{2} \sqrt{x^2+2x+3} + \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}| + c$$

$$m) \frac{1}{x^2+12x+40} dx = \int \frac{1}{(x+6)^2+4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x+6}{2}\right)^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \arctan \frac{x+6}{2} + c$$

52. a)  $u = 2x - 3$

$$\int \ln(2x-3)dx = \frac{1}{2(2x-3)} + c$$

b)  $u = 3x$

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x + c$$

c)  $u = 3x + 1$

$$\int 2^{x+1} dx = \frac{2^{x+1}}{3 \ln 2} + c = \frac{2^{x+1}}{\ln 8} + c$$

d)  $u = 4x$

$$\int \lg 4x dx = \int (\lg 4 + \lg x) dx = x \lg 4 + \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln 10} + c$$

e)  $u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$ ,  $v' = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} + c_1$

$$\begin{aligned} \int x \cdot \ln x dx &= \left( \frac{x^2}{2} + c_1 \right) \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \left( \frac{x^2}{2} + c_1 \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x + c_1 \ln x - \frac{x^2}{4} = c_1 \ln x + c = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + c \end{aligned}$$

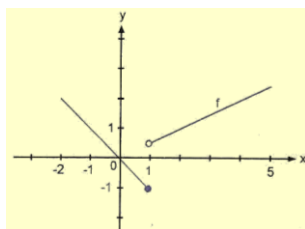
f)  $u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$ ,  $v' = \sqrt{x} \Rightarrow v = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c_1$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \cdot \ln x dx &= \left( \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c_1 \right) \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \left( \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c_1 \right) dx \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \cdot \ln x + c_1 \ln x - \frac{4}{9} \sqrt{x^3} - c_1 \ln x + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \cdot \ln x - \frac{4}{9} \sqrt{x^3} + c \end{aligned}$$

h)  $u = e^x \Rightarrow u' = e^x$ ,  $v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x + c_1$

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \cdot (\sin x + c_1) - \int (\sin x + c_1) dx \\ &= x \cdot \sin x + c_1 x + \cos x - c_1 x + c = x \cdot \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

در پینخوس: الف: یو بنسٹیز تابع f دی لاندی خیره ولری



53. a) 
$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + c & x \leq 1 \\ \frac{x^2}{4} + c & x > 1 \end{cases}$$

داد  $-1F'(1) =$  او

$$\lim_{x \rightarrow 1} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} x = \frac{1}{2}$$

له امله د  $x=1$  په خای کی مشتقور نه ده او له دی امله f بنسٹیز تابع نه ده. دوه نه پرېکیدونکو توابعو انټیگرېشن:

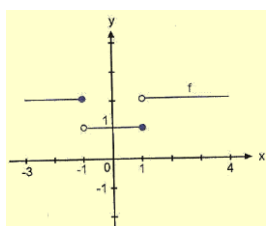
$$\int_{-2}^5 f(x) dx = \int_{-2}^1 -x dx = \left[ -\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 + \left[ \frac{x^2}{4} \right]_1^5$$

$$= -\frac{1}{2} - (-2) + \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{2}$$

دا د  $f$  تابع په ورکړ شوي اتروال کې انټیگرېشنونو د هغو سره له دې چې دا پرېکړونکي ده او بنسټیز تابع هم نه دي.

ب: تابع  $f$  لاندې څیره ولري:

$$b) f(x) = \begin{cases} 2x+c & -3 < x \leq -1 \\ x+c & -1 < x \leq 1 \\ 2x+c & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$



دا په ځایونو  $x=1$ ;  $x=-1$  کې انټیگرالون نه ده، نو له دې سره  $f$  بنسټیز تابع نه ده. د درې نه پرېکړونکو توابعو انټیگرال:

$$\int_{-3}^4 f(x) dx = \int_{-3}^{-1} 2x dx + \int_{-1}^1 (2x)[2x]_{-3}^{-1} + [x]_{-1}^1 + [2x]_1^4$$

$$= -2 + 6 + 1 + 1 + 8 - 2 = 12$$

څلور پنځوس: ارزښتازاده لیکنه راکوي:

$$54. f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$$

د تابع  $f$  یو بنسټیزه تابع باید لاندې څیره ولري

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + c & x \geq 1 \\ -\frac{x^2}{2} + x + c & x < 1 \end{cases}$$

د

$$F'(1) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1} F'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (-x+1) = 0$$

له امله په ځای کې بنسټیزه ده (تابع ارزښت برابر پوله ارزښت):

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{x^2}{2} + x + c$$

$$\frac{1}{2} - 1 + c_1 = -\frac{1}{2} + 1 = c_2$$

$$c_1 = 1 + c_2$$

له دې سره تابع  $f$  ناپرېکړونکي، مشتق بنسټیز تابع  $F$  لري.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + c & x \leq 1 \\ -\frac{x^2}{2} + x + c & x > 1 \end{cases}$$

پنځه پنځوس: الف:  $f$  پارابول پورته لورته واز دی د ککری ټکي  $S(1;1)$  سره. دا یواځي د  $-x$  محور پورته لور ته ځلي.

$$55. a) \int_{-1}^4 (x^2 - 2x + 2) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right]_{-1}^4 = \frac{40}{3} + \frac{10}{3} = \frac{50}{3}$$

منځ ارزښت

$$f(x_0) \cdot 4 - (-1) = \frac{50}{3} \Rightarrow f(x_0) = \frac{10}{3}$$

د اړونده ارزښتونو اېښوونه

$$\frac{10}{3} = x^2 - 2x + 2$$

$$x^2 - 2x - \frac{4}{3} \Rightarrow x_1 = 1 - \frac{\sqrt{21}}{3}, \quad x_2 = 1 + \frac{\sqrt{21}}{3}$$

ب: د  $f$  گراف چگیدونکي کرښه ده د  $-y$  محور غوڅي  $y=1$  سره. دا د ورکړشوي انټروال سره یواځي له دې سره د  $-x$  محور پورته لور ته ځلي.

$$b) \int_0^6 (x+1) dx = \left[ \frac{x^2}{2} + x \right]_0^6 = 24 - 0 = 24$$

منځ ارزښت

$$f(x_0) \cdot (6-0) = 24 \Rightarrow f(x_0) = 4$$

د اړونده  $-x$  ارزښتونو سره اېښوونه.

$$x+1=4 \Rightarrow x_0=3$$

پ: ساینکره د ورکړشوي انټروال کې د  $x$  - محور پورته لور ته پرته ده.

$$c) \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$$

منځ ارزښت

$$f(x_0) \cdot (\pi - 0) = 2 \Rightarrow f(x_0) = \frac{2}{\pi}$$

د ورکړشوي اړونده  $-x$  محور لپاره ږدو:

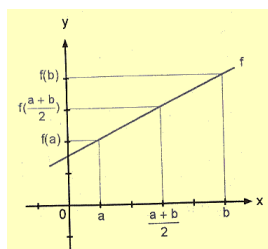
$$\sin x = \frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow x = \arcsin \frac{2}{\pi} \Rightarrow x_1 \approx 0.690, \quad x_2 \approx 2.451$$

شپږ پنځوس:

$$56. a) \int_a^b (mx + n) dx = \left[ \frac{mx^2}{2} + nx \right]_a^b = \frac{bm^2}{2} + bn - \frac{a^2m}{2} - an$$

$$= \frac{m}{2}(b^2 - a^2) + n(b - a) = (b - a) \left( \frac{m}{2}(b + a) + n \right)$$



منځ ارزښت:

$$f(x_0) \cdot (b-a) = (b-a) \left( \frac{m}{2}(b+a) + n \right) \Rightarrow x = \frac{a+b}{2}$$

د وینتونکو - ارزښتونو له پاره ایښوونه

$$= \frac{m}{2}(b+a) + n = mx \Rightarrow \frac{m}{2}(b+a) = mx \Rightarrow x = \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow \int_a^b (mx+n) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a)$$

د دې حالت له پاره چې کرښه د  $x$ -محور پورته لور ته ځغلي، نتیجه (۱) باوري کيږي، چې د تراپڅ فرمول سره سر خوري، که موږ اوږدوالی  $(b-a)$  د جگوالي په څیر او د تابع ارزښت

د منځارزښت په حیث نیسو  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 

$$A = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a)$$

اوه پنځوس: الف: د  $f$  گراف د  $x$ -محور یواځې پورته لور ته پروت دی.

$$\int_{-2}^1 (x^2+1) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + x \right]_{-2}^1 = 6$$

د سطحې یونونو سره  $A = 6$ ب - د  $f$  گراف د  $x$ -محور یواځې پورته لور ته پروت دی.

$$b) \int_0^\pi (2 + \sin x) dx = [2x - \cos x]_0^\pi = 2\pi + 2 \Rightarrow A = (2\pi + 2) \approx 8.283$$

د سطحې یونونه  $A = (2\pi + 2) \approx 8.283$  سطحې واحدونو یا یونونو سره

پ: دا کښته لور ته واز پارابل ککر ټکی  $S(-2; -1)$  لري او له دې سره یواځې د  $x$ -محور کښته لور ته پروت دی،

$$c) \int_{-3}^0 (-x^2 - 4x - 5) dx = -\int_{-3}^0 (x^2 + 4x + 5) dx = -\left[ \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x \right]_{-3}^0 = -6$$

د هواري یا سطحې یونونو په واحدونه.  $A = |-6| = 6$ 

ت: یواځې صفرځای  $N(-1; 0)$  دی، یواځني قطبځای په  $x_1 = 0$  کې پروت دی. د  $f$  گراف په ورکړ شوي انټروال کې ناپرېکښونکی دی او یواځې د  $x$ -محور پورته لور ته پرته ده.

$$d) \int_1^e \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = [x + \ln x]_1^e = e$$

د  $A = e$  د سطحې یونونه  $\sim 2.718$  د سطحې یونونو سره:

اته پنځوسم: دا پورته لور ته واز پارابل ککر ټکی  $S(-1, 1)$  لري او له دې سره یواځې د  $x$ -محور پورته لور ته پروت دی،

ایښونه:

$$\int_{-2}^b (x^2 + 2x + 2) dx = 6$$

$$\frac{b^3}{3} + b^2 + 2b + \frac{8}{3} = 6 \text{ په ایښوونه:}$$

$$b^3 + 3b^2 + 6b - 10 = 0 \text{ بڼه بدلون:}$$

لومړی حل:  $b_1=1$

د پولینومو پېش:  $(b^3 + 3b^2 + 6b - 10) : (b - 1) = b^2 + 4b + 10$

له امله بل کوم اوبی یا حل شتون نه لري.  $b_{2,3} = -2 \pm \sqrt{4-10}$

نه پنځوس: د گراف یواځې په لومړۍ څلورۍ کې او له دې امله د  $x$ -محور پورته لور ته پروت دی.

$$\int_a^4 3\sqrt{x} dx = 14 \text{ اېښوونه:}$$

انتگرالونه او اېښوونه:  $2\sqrt{4^3} - 2\sqrt{a^3} = 14$

بڼه بدلون:  $16 - 2\sqrt{a^3} = 14 \Rightarrow a = 1$

غوښتونې د انتیگرال لاندې پوله  $a=1$  ده.

شپېته: یو پورته لورته کښولشوی نورمال پارابول تابع مساوات  $y = x^2 + a$  لري د  $a > 0$  سره.

$$\int_{-1}^2 (x^2 + a) dx = 9 \text{ اېښوونه:}$$

انتیگرال - او ځای په ځای کړی:  $3 + 3a = 9 \Rightarrow a = 2$

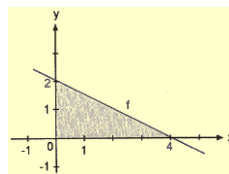
بنو غښتونې پارابول برابرون دی:  $y = x^2 + 2$

یوشپېته: د  $f$  انتروال د  $0 < x < \pi$  له پاره صفر ځای نه لري. دا یاد  $x$ -محور پورته لور ته او یا کښته لور ته پروت دی.

$$\left| \int_0^\pi a \cdot \sin x dx \right| = 4 \text{ اېښوونه:}$$

انتیگرال کړی او ځای په ځای کړی:  $|2a| = 4 \Rightarrow a_1 = 2, a_2 = -2$

د  $a_1 = 2$  یاد  $a_2 = -2$  په حالتونو کې په ورکړشوي انتروال کې د سطحې کچه ۴ ده. ۶۲: د سطحې شمېرنه د انتیگرال له لارې یا د انتیگرال سره



$$\int_0^4 \left(-\frac{1}{2}x + 2\right) dx = \left[ \frac{x^2}{4} = 2x \right]_0^4 = 4$$

د سطحې ساده شمېرنه

$$A = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$$

۶۳: الف: صفر ځایونه  $N_1(-4;0); N_2(1;0)$

$$A = \left| \int_{-4}^1 \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{13}{4}x + 3\right) dx \right| + \left| \int_1^3 \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{13}{4}x + 3\right) dx \right|$$

$$A = \left| \int_{-4}^1 \left[ \frac{x^4}{16} - \frac{13x^2}{8} + 3x \right] dx \right| + \left| \int_1^3 \left[ \frac{x^4}{16} - \frac{13x^2}{8} + 3x \right] dx \right| = \left| 23 \frac{7}{16} \right| + |-2|$$



$$A = 25 \frac{7}{16}$$

د غوښتونې سطحې منځه‌واري کچه  $25 \frac{7}{16}$  ده

صفرخاينه:  $N_1(-2;0); N_2(0;0); N_3(3,0)$

$$A = \left| \int_{-2}^0 \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2} + 3x\right) dx \right| + \left| \int_0^3 \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2} + 3x\right) dx \right|$$

$$A = \left| \left[ -\frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} \right]_{-2}^0 \right| + \left| \left[ -\frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 \right| = 10 \frac{13}{24}$$

پ: صفرخاينه:  $N_1(0;0); N_2(2;0); N_3(4,0)$

$$c) A = \left| \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \right| + \left| \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \right|$$

$$A = \left| \left[ \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 \right| + \left| \left[ \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_2^4 \right| = 8$$

غوښتونې منځه‌واره د هوارې ۸ واحدونه کچکوي

ت: صفرخاينه:  $N_1(1;0); N_2(5;0)$

$$d) A = \left| \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5) dx \right| = \left| \left[ -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right]_1^5 \right| = 10 \frac{2}{3}$$

د غوښتونې سطحې منځه‌واري کچه  $10 \frac{2}{3}$  ده

څلور شپيته:

الف: صفرخاينه:  $N_1(2;0)$

$$A = \left| \int_{-2}^2 (x-2) dx \right| + \left| \int_2^3 (x-2) dx \right|$$

$$A = \left| \left[ \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^2 \right| + \left| \left[ \frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3 \right| = 8 \frac{1}{2}$$

غوښتونې هوار دننه د هوار يوونو يا واحدونو کچه  $8 \frac{1}{2}$  ده.

ب: صفرخاينه:  $N_1(-2;0); N_2(3;0)$

$$A = \left| \int_1^3 (x^2 - x - 6) dx \right| + \left| \int_3^5 (x^2 - x - 6) dx \right|$$

$$A = \left| \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x \right]_1^3 \right| + \left| \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x \right]_3^5 \right| = 20$$

غوښتونې هوار دننه د هوار يوونو يا واحدونو کچه ۲۰ ده.

پ : صفرخايونه:  $N_1(2;0); N_2(6;0)$

$$c) A = \left| \int_0^2 (x^2 - 8x + 12) dx \right| + \left| \int_2^6 (x^2 - 8x + 12) dx \right| + \left| \int_6^8 (x^2 - 8x + 12) dx \right|$$

$$A = \left| \left[ \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x \right]_0^2 \right| + \left| \left[ \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x \right]_2^6 \right| + \left| \left[ \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x \right]_6^8 \right|$$

$$A = 32$$

غوښتوني هوار دننه د هوار يونونو يا واحدونو کچه ۳۲ ده.

پنځه شپيته: اکسپوننشل - يا جگگن  $y = e^x$  کزه يواځي د  $x$ -محور پورته لور ته پرته ده. دا کښته لور ته واز پارابول  $y = -x^2 - 1$  د ککړي ټکي  $S(0;-1)$  سره د  $x$ -محور کښته لور ته پروت دی. له دې امله دواړه گرافونه يو بل نه غوڅوي.

$$65. A = \left| \int_0^1 (e^x + x^2 + 1) dx \right| = \left| \left[ e^x + \frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 \right| = e + \frac{1}{3}$$

غوښتوني سطحه  $\frac{3e+1}{3}$  د سطحې يونونونه يا واحدونه ورکوي

شپږ شپيته: جگيدونکي کرښه د محور په کې غوڅوي. له دې سره دا په لومړي څلوري کې د ساينکزي پورته لور ته خغلي. په ورکړشوي انټروال کې د دواړو کړيو غوڅکي نه شته.

$$66. A = \left| \int_0^{2\pi} (2x + 2 - \sin x) dx \right| = \left| \left[ x^2 + 2x + \cos x \right]_0^{2\pi} \right| = 4\pi^2 + 4\pi$$

غوښتوني سطحه  $4\pi(\pi + 1)$  د سطحې يونونونه يا واحدونه ورکوي  
اوه شپيته: د

$$67. x^2 - 3 = 2x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = -4$$

له امله دواړه کرښي يوبل نه غوڅوي

$$A = \left| \int_{-1}^2 (2x^2 + 1 - (x^2 - 3)) dx \right| = \left| \int_{-1}^2 (x^2 + 4) dx \right| = \left| \left[ \frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-1}^2 \right| = 15$$

اته شپيته: پارابول  $y = \sqrt{x}$  ټول په لومړي څلورمه کې خغلي. هغه د لوېدونکو (نزولي) کرښو  $-x$  - $y$ -محور برخه سره ۱- نه غوڅوي.

$$68. A = \left| \int_0^4 (\sqrt{x} - (-x-1)) dx \right| = \left| \int_0^4 (\sqrt{x} + x + 1) dx \right| = \left| \left[ \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_0^4 \right|$$

$$A = 17\frac{1}{3}$$

غوښتونې منځهواره  $17\frac{1}{3}$  د سطحې یوونونه کچکوي.

نهه شپيته: د غوڅتکي شميرنه

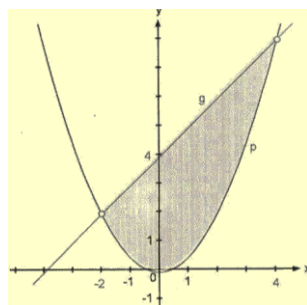
$$69. 2x+1=x+3 \Rightarrow x=2$$

دواړه

$$A = \left| \int_{-2}^1 (x+3-(2x+1))dx \right| = \left| \int_{-2}^1 (-x+2)dx \right| = \left| \left[ -\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 \right| = 7\frac{1}{2}$$

غوښتونې منځهواره 7,5 د سطحې یوونونه کچکوي.

اویا:



$$0.5x^2 = x + 4$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 4$$

هواره یا سطحه وشمیری

$$A = \left| \int_{-2}^4 (x+4 - \frac{x^2}{2}) dx \right|$$

$$= \left| \left[ \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{x^3}{6} \right]_{-2}^4 \right|$$

$$A = 18$$

غوښتونېد سطحې دننه د سطحې ۱۸ یوونونه کچکوي.

یواویا: د غوڅتکو پروتمحور

$$x^2 - 6x + 5 = -x + 1$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = 4$$

هوارې یا سطحې وشمیری

$$A = \left| \int_1^4 (-x+1 - (x^2 - 6x + 5)) dx \right| = \left| \int_1^4 (x^2 + 5x - 4) dx \right|$$

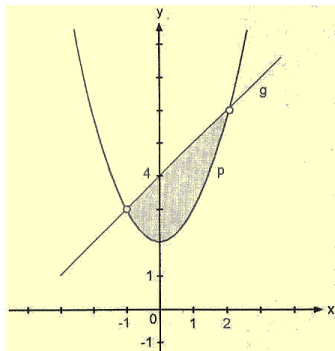
$$A = \left| \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right]_1^4 \right| = \frac{9}{2}$$

د غوښتونې هورې یا سطحې کچپوونونه  $\frac{9}{2}$  دي،

دوه اویا: د کرښیز برابررونو لیکل

$$f(-1) = 3, f(2) = 6$$

د کرښیز برابررونو دوه ټکي بڼه



$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

$$y = \frac{6-3}{2-(-1)}(x - (-1)) + 3$$

$$y = x + 4$$

هواري يا سطحی شميرنه:

$$A = \left| \int_{-1}^2 (x+4) - (x^2+2) dx \right|$$

$$= \left| \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx \right|$$

$$A = \left| \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 \right| = \frac{9}{2}$$

غوښتوني منځهواره 4,5 د سطحی يوونونه کچکوي.

هواري شميرنه:

$$A = \left| \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 3 - (x^2 - 4x + 6)) dx \right| = \left| \int_1^3 (-3x^2 + 12x - 9) dx \right|$$

$$A = \left| \left[ -x^3 + 6x^2 - 9x \right]_1^3 \right| = 4$$

پنځه اويا: د غوڅټکو پراته ارزښتونه:

$$4\sqrt{x} = \frac{x^2}{2}$$

$$16x = \frac{x^4}{4}$$

$$64x = x^4$$

$$x^4 - 64x = 0$$

$$x(x^3 - 64) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 4$$

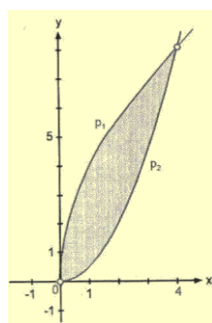
هواري شميرنه:

$$A = \left| \int_0^4 (4\sqrt{x} - \frac{x^2}{2}) dx \right|$$

$$A = \left| \left[ \frac{8\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{6} \right]_0^4 \right| = \frac{32}{3}$$

غوښتوني منځهواره  $\frac{32}{3}$  د سطحی يوونونه کچکوي.

شپږ اويا: د غوڅټکو پراته ارزښتونه:



$$2\sqrt{x} = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$6\sqrt{x} = 2x + 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 4$$

د سطحې يا هوارې شميرنه:

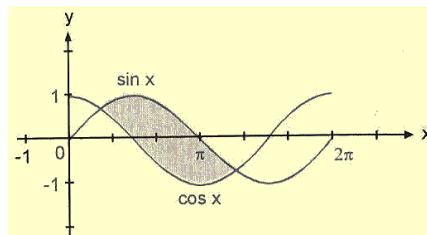
$$A = \left| \int_1^4 (4\sqrt{x} - (\frac{2}{3}x + \frac{4}{3})) dx \right| = \left| \int_1^4 (2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}) dx \right|$$

$$A = \left| \left[ \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{x^2}{3} - \frac{4x}{3} \right]_1^4 \right| = \frac{1}{3}$$

غوښتونې منځهواره  $\frac{1}{3}$  د سطحې يوونونه کچکوي.

اوه اويا: د غوڅتکو پراته ارزښتونه:

$$77. \sin x = \cos x$$



$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

$$\tan x$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{4}$$

د هوارې شميرنه:

$$A = \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx \right|$$

$$A = \left| \left[ (-\cos x - \sin x) dx \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \right| = \left( \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) - \left( -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) = 2\sqrt{2}$$

غوښتونې منځهواره  $2\sqrt{2}$  د سطحې يوونونه کچکوي.

اته ويا: د تانجنټبر ابرون ليکل:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f(2): f(2) = 1$$

$$x_0 = 2: f'(2) = 5$$

$$f(x_0) = y_0 = 1 \quad \text{او} \quad x_0 = 2$$

$$y = m(x - x_0) + y_0: \quad y = 5(x - 2) + 1$$

$$y = 5x - 9$$

ايښونه:

$$x^3 - 2x^2 + x - 1 = 5x - 9$$

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$$

پولينوموېش:

$$(x^3 - 2x^2) - 4x + 8 : (x - 2) = x^2 - 4$$

$$\Rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 2$$

د دویم گډ غوڅتکي د پروت محور ارزښت:  $x_1 = -2$   
د هواري شمیرنه:

$$A = \left| \int_{-2}^2 (x^3 - 2x^2 + x - 1)(5x - 9) dx \right| = \left| \int_{-2}^2 (x^3 - 2x^2 - 4x + 8) dx \right|$$

$$A = \left| \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 8x \right]_{-2}^2 \right| = \frac{64}{3}$$

غوښتونې منځهواره  $\frac{64}{3}$  د سطحې یوونونه کچکوي.

نهه اويا: نورمالبرابرون

لومړۍ رابيليدنه يا لومړي مشتق:

$$f'(x) = 2x$$

تابع ارزښت  $f(-1)$ :

$$f(-1) = 1$$

تانجنت جکيدنه په  $x_0 = -1$  کې.

$$f'(-1) = -2$$

په  $x_0 = -1$  کې د نورمال جکيدنه:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

نورمالبرابرونه:

$$y = \frac{1}{2}(x - (-1)) + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

د دویم غوڅتکي د پروت محور ارزښت

$$x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{3}{2}$$

نورمال د  $x_2 = \frac{3}{2}$  په ځای کې د پارابول سره یو بل گډ غوڅتکي لري.

د هواري شمیرنه:

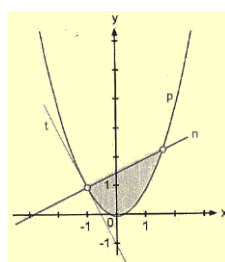
$$A = \left| \int_{-1}^{1.5} \left( \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - x^2 \right) dx \right| = \left| \left[ \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1.5} \right| = \frac{125}{48}$$

غوښتونې سطحه  $\frac{125}{48}$  د سطحې یوونونه ده.

یواتیا: په  $x=0$  کې پیژند- یا تعریفشیا ده.

له دې سره په ورکړشوي انټروال کې د  $f$  تابع ناپرېکيونکي ده،

یواتیا: د غوڅتکو د پروت محور ارزښتونه:

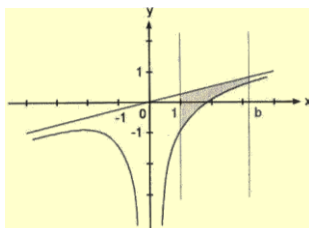


$$\frac{1}{4}x = \frac{x^3 - 8}{4x^2} \Leftrightarrow x^3 = x^3 - 8$$

کریسه د تابع له گراف سره گډ ټکي نه لري. (دا د گراف گاونډ یا اسیمپټوټي ده) اینسونه:

$$A = \left| \int_1^b \left( \frac{1}{4}x - \frac{x^3 - 8}{4x^2} \right) dx \right| = \left| \int_1^b \left( \frac{x}{4} - \frac{x}{4} + \frac{2}{x^2} \right) dx \right| = \left| \int_1^b \frac{2}{x^2} dx \right|$$

$$A = \left| \left[ -\frac{2}{x} \right]_1^b \right| = \left| -2 \cdot \frac{1}{b} + 2 \right|$$



د  $b > 1$  له امله دی

$$-2 \cdot \frac{1}{b} + 2 > 0, \text{ له دې سره دی}$$

$$-2 \cdot \frac{1}{b} + 2 = \frac{3}{2} \Rightarrow b = 4$$

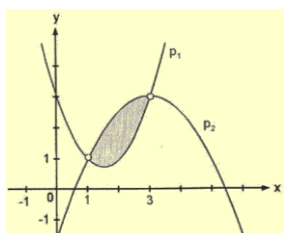
د  $b = 4$  له پاره هواره ورکړ شوي ارزښت غوره کوي یا اخلي.

دوه اتیا: د غوڅتکو د پروت محور ارزښتونه:

$$x^2 - 3x + 3 = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$$



د هواري شمیرنه په انټروال  $[1, 3]$  کې سرته رسیري.

د هواري شمیرنه:

$$A = \left| \int_1^3 \left( -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2} - (x^2 - 3x + 3) \right) dx \right|$$

$$A = \left| \int_1^3 \left( -\frac{3}{2}x^2 + 6x - \frac{9}{2} \right) dx \right| = \left| \left[ -\frac{x^3}{2} + 3x - \frac{9x}{2} \right]_1^3 \right| = 2$$

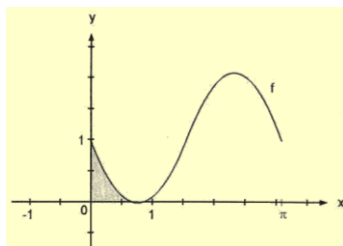
غوښتونې هواره د هواري دوه یونونه ده.

دري اتیا: د  $a - \sin 2x \geq 0$  او  $a > 0$  له امله د  $f$  گراف د  $x$ -محور یواځې پورته لور ته پروت

دی. (د  $a = 1$  له پاره په څنګ کې څیره وګوری)

صفر ځایونه:

صفر ځایونه له  $a$  خپلواک دي.



$$1 - \sin 2x \geq 0$$

$$1 - \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

د هواري شمیرنه له پیل تر لومړي صفر ځای پورې شمیرل کیږي.

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} a(1 - \sin 2x) dx \right| = a \cdot \left| \left[ x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right|$$

$$A = a \cdot \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) - a \cdot \left( 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{a}{4} \cdot (\pi - 2)$$

برابر اینگونه:

$$\pi - 2 = \frac{a}{4} \cdot (\pi - 2) \Rightarrow a = 4$$

د  $a = 4$  له پاره هوارع ورکړ شوي ارزښت هوره کوي.

څلور اتیا: د غوڅتکو پروت محور

$$\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x = -x^2 + 6$$

$$\frac{2}{3}x^3 - 3x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = \frac{9}{2}$$

د هوارې شمیرنه:

$$A = \left| \int_0^{4.5} \left( -x^2 + 6x - \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 6x \right) dx \right|$$

$$= \left| \int_0^{4.5} \left( -\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \right) dx \right|$$

$$A = \left| \left[ -\frac{1}{6}x^4 + x^3 \right]_0^{4.5} \right| = \left( \frac{9}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{4}$$

غوښتونې هواره  $\left( \frac{9}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{4}$  هوار یوونونه کچوي.

پنځه اتیا: صفر ځایونه

$$0 = \sqrt{16 - 2x} \Rightarrow x = 8$$

هوار شمیرنه

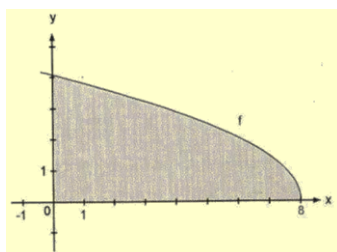
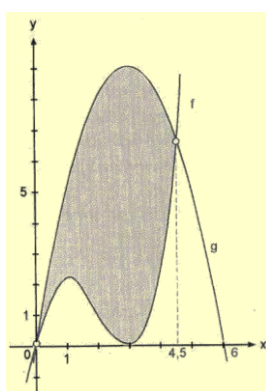
$$A = \left| \int_0^8 \sqrt{16 - 2x} dx \right|$$

$$= \left| \left[ -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(16 - 2x)} \right]_0^8 \right|$$

$$A = \frac{64}{3}$$

غوښتونې هواره  $A = \frac{64}{3}$  هوار یوونونه کچوي.

شپږ اتیا: الف: تابع په  $x = -2$  کې پیژندنه لري.





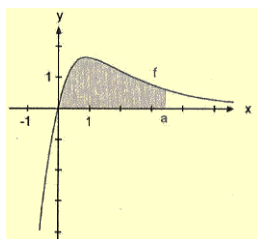
یواځنی صفر ځای د

$$86. a) \frac{48x}{(x+2)^3} = 0 \Rightarrow 48x = 0$$

له امله په  $x_2 = 0$  کې دی.

له دې امله گراف د  $a > 0$  له پاره ناپربکيدونکی دی په لومړي انټروال  $[0, a]$  کې د سطحې

شميرنه ده:



$$\frac{48x}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}$$

$$\frac{48x}{(x+2)^3} = \frac{Ax^2 + (4A+B)x + 4A + 2B + C}{(x+2)^3}$$

د ضریبونو یا ځلوونو پرتله کونه

$$A = 0$$

$$4A + B = 48$$

$$4A + 2B + C = 0 \Rightarrow A = 0, B = 0, C = -96$$

انتیگرال یې کړی

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{48x}{(x+2)^3} dx &= \int_0^a \left( \frac{48}{(x+2)^2} - \frac{96}{(x+2)^3} \right) dx = \left[ -\frac{48}{x+2} + \frac{48}{(x+2)^2} \right]_0^a \\ &= \left[ -48 \frac{x+1}{(x+2)^2} \right]_0^a = -48 \cdot \left( \frac{a+1}{(a+2)^2} - \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

د  $A=8$  له پاره د هواری یونونه

$$8 = -48 \cdot \left( \frac{a+1}{(a+2)^2} - \frac{1}{4} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{12} = \frac{a+1}{(a+2)^2} \Leftrightarrow 0 = a^2 - 8a - 8$$

د  $a > 0$  له امله  $a = 4 + \sqrt{24} \approx 8.900$  یواځنی حل دی.

د  $a = 8.900$  له پاره د هواری یونونه غوښتونې ارزښت نیسي

ب: پارامتر  $t$  په صفر ځای کوم اغیز نه لري.

مور په بلډول لیکو:

$$y = \frac{tx}{(x+2)^3} = t \cdot \frac{x}{(x+2)^3}$$

اوس د  $t=48$  له پاره د برخي الف سره پرته کول شوني دي.

$$y = \frac{48x}{(x+2)^3} = 48 \cdot \frac{x}{(x+2)^3}$$

د ناکلي انتیگرال لاس ته راوړي کیدی شي له برخي الف هم ونیول شي.

$$\int_0^4 t \frac{x}{(x+2)^3} dx = - \left[ -t \cdot \frac{x+1}{(x+2)^3} \right]_0^4 = \frac{1}{9} t$$

د  $A=10$  هواری یونون له پاره ایښونه.

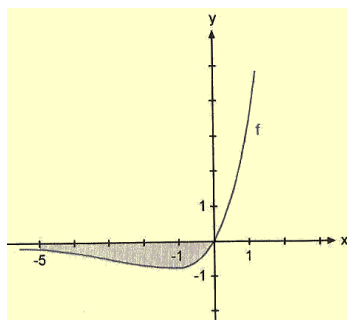
$$\frac{1}{9} t = 10 \Rightarrow t = 90$$

د  $t = 90$  له پاره د هواری یونونه غوښتلی ارزښت نیسي.

اوه اتیا: صفر ځایونه:

$$0 = x \cdot e^{0.5x} > 0$$

گراف د  $e^{0.5x} > 0$  له امله یواځنی صفر ځای په  $x = 0$  کې لري.



له دې سره د هواری شمیرنه په انټروال  $[-5, 0]$  کې کيږي. ټوټه - یا پارسل انټیگرالونه.

$$u(x) = x$$

$$د سره \quad u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^{0.5x}$$

$$د سره \quad v(x) = 2e^{0.5x}$$

$$\begin{aligned} \int_{-5}^0 x \cdot e^{0.5x} dx &= [2x \cdot e^{0.5x}]_{-5}^0 - \int_{-5}^0 2 \cdot e^{0.5x} dx \\ &= [2x \cdot e^{0.5x}]_{-5}^0 - [4 \cdot e^{0.5x}]_{-5}^0 \\ &= [2x \cdot e^{0.5x} (x - 2)]_{-5}^0 \\ &= -4 + 14 \cdot \sqrt{e^{-5}} \end{aligned}$$

دا چې هواره د - محور کښته لور ته پرته ده، ناپاکلی انټیگرال کمیز یا منفي گڼ ارزښت لري.

غوښتونې منځهواره د هواری نږدې ۲،۸۵۱ یوونونه کچوي.

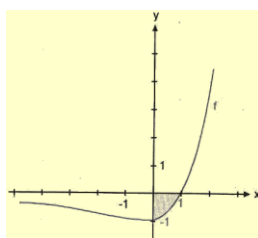
اته اتیا: صفر ځایونه

$$0 = e^x (x - 1)$$

$$د  $e^x > 0$  له امله گراف د  $x - 1 = 0$$$

له پاره یواځنی صفر ځای په  $x = 1$  کې لري.

له دې سره د سطحې شمیرنه په انټروال  $[0, 1]$  کې کيږي. ټوټه انټیگرالونه



$$u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^x$$

$$v'(x) = e^x$$

$$v(x) = e^x$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x (x - 1) dx &= [e^x (x - 1)]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [e^x (x - 1)]_0^1 - [e^x]_0^1 \\ &= [e^x (x - 2)]_0^1 = 2 - e \approx -0.718 \end{aligned}$$

دا چې هواره د -محور کښته لور ته پرته ده، نوپاکلی انټیگرال کمیز ښ ارزښت لري.

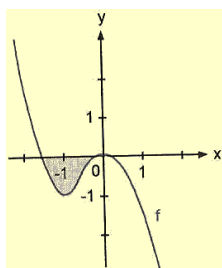
غوښتونې منځهواره 0.718 د هواری یوونونه کچه وي.

نه اتیا: صفر ځایونه:

$$-2x^2 - 3x^2 = 0$$

$$-x^2(2x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = -1.5, \quad x_{2,3} = 0$$

د دواړو صفر ځایونو په منځ کې د هواری شمیرنه:



$$A = \left| \int_{-1.5}^0 (-2x^3 - 3x^2) dx \right|$$

$$A = \left| \left[ -\frac{x^4}{2} - x^3 \right]_{-1.5}^0 \right| = \left| -\frac{27}{32} \right|$$

غوښتونې منځهواره 0,844 د هوارې يوونونه کچه وي.

نوي: صفرخايونه:

تابع (يا څيرونه)  $f$  يواځې د  $x > 0$  له پاره پيژندلري يا تعريف ده.

نو له دې امله يواځنې صفرخاي د  $\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$  لپاره په  $x = e$  کې

شتون لري.

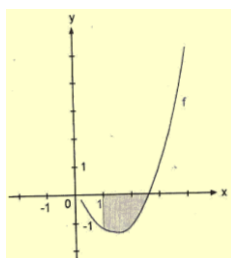
توبه انتيگرالونه

$$u(x) = \ln x - 1$$

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = x^2$$

$$v(x) = \frac{x^3}{3}$$



$$\int_0^1 x^2 \cdot (\ln x - 1) dx$$

$$= \left[ \frac{x^3}{3} \cdot (\ln x - 1) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx$$

$$= \left[ \frac{x^3}{3} \cdot (\ln x - 1) \right]_1^e - \left[ \frac{x^3}{9} \right]_1^e$$

$$= \left[ \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{4x^3}{9} \right]_1^e = \frac{1}{9}(4 - e^3) \approx -1.787$$

دا چې هواره د  $x$ -محور لاندې پرته ده، نو دا ټاکلي انتيگرال يو کميز؛ ن ارزښت لري.

غوښتونې هواره **1.787**- هوار يوونونه کچ کوي.

يونوي: د جگگنونو د پرته له مخې د غوڅټکو شميرل

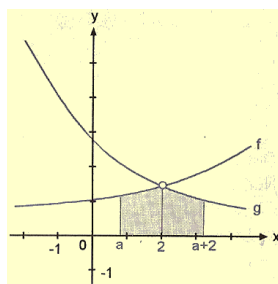
$$e^{\frac{1}{4}x} = e^{-\frac{1}{4}x+1}$$

$$\frac{1}{4}x = -\frac{1}{4}x + 1$$

$$x = 2$$

دواړه گرافونه په  $x = 2$  کې غوڅوي.

د هوار شميرني ايښوونه:



دواړه هيرخهوارې د  $x$ -محور پورته لور ته پرته دي، نو

له دې امله د ټاکلي انتيگرال ارزښتونه زاتيز يا مثبت دي،

له دې امله د ارزښت ليکنډول څخه تيريزو.

$$A = \int_a^2 a^{\frac{1}{4}x} dx + \int_2^{a+2} e^{-\frac{1}{4}x+1} dx = \left[ 4e^{\frac{1}{4}x} \right]_a^2 + \left[ -4e^{-\frac{1}{4}x+1} \right]_2^{a+2}$$

$$= 4e^{\frac{1}{2}} - 4e^{\frac{1}{4}a} - 4e^{-\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}+1} + 4e^{-\frac{1}{2}+1}$$

$$A = 4 \cdot \left( 2e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{4}a} - e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}} \right)$$

د خای اړوند اکستریموم له پار اړین شرط دی:  $A'(a) = 0$

$$A'(a) = 4 \cdot \left( -\frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}a} + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$0 = -e^{\frac{1}{4}a} - e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{\frac{1}{4}a} - e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{4}a = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$$

پوره کیدونکي شرطونه.

$$A''(a) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}a} - \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}}$$

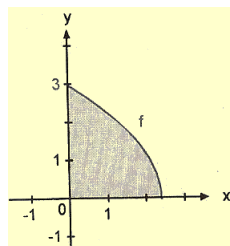
$$A''(1) = -\frac{1}{4}\sqrt[4]{e} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{4}(\sqrt[4]{e} + \sqrt{e}) < 0$$

د  $a=2$  له پاره هواره ممکن ستره خونديونه غوره کوي. له دې امله هواره په انټروال  $[1,3]$  کې پرته ده.

دوه نوي فرخايونه:

$$0 = \sqrt{9-4x} \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$

گراف د پارابل د خرانگې يا يوې برخه بنايي، چې کين لور ته از دی، کوم چې د  $x$ -محور پورته لور ته پروت دی. غښتوني هواره له دې سره په انټروال  $[0;2, 25]$  کې پرته ده. د هوارې شميرنه:



$$A = \left| \int_0^{\frac{9}{4}} \sqrt{9-4x} dx \right|$$

$$A = \left| \left[ -\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(9-4x)^3} dx \right]_0^{\frac{9}{4}} \right| = \left| \frac{1}{6} \sqrt{9^3} \right| = \frac{9}{2}$$

غښتوني هواره د  $\frac{9}{2}$  د هوارې يوونونه کچوي.

$$0 = -e^{\frac{1}{4}a} - e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{\frac{1}{4}a} - e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{4}a = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$$

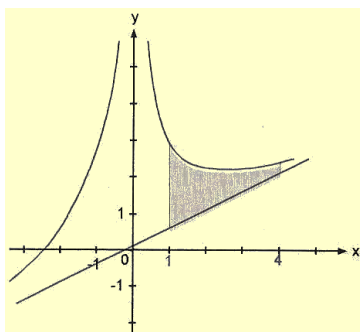
پوره کیدوني شرطونه

$$A''(a) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}a} - \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}}$$

$$A''(1) = -\frac{1}{4}\sqrt[4]{e} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{4}(\sqrt[4]{e} + \sqrt{e}) < 0$$

د له پاره هواره ممکن ستره خونديونه غوره کوي. له دې سره هواره په انټروال [1,3] کې پرتنه ده.

درې نوي: تابع يا څيرونه په  $x=0$  کې پېژندنشخای لري. په انټروال [1;4] کې ناپرېکيدونکی دی.



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 12}{2x^2} = \frac{1}{2}x$$

د گاونډ - يا اسيمپتوت برابرېون

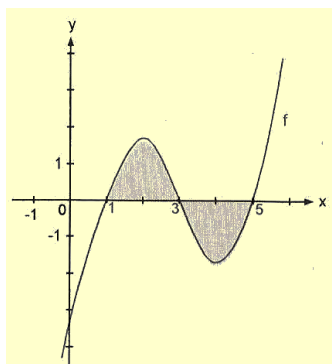
$$y = \frac{1}{2}x$$

هوار شميرنه:

$$A = \left| \int_1^4 \left( \frac{x^2 + 12}{2x^2} - \frac{1}{2}x \right) dx \right|$$

$$A = \left| \int_1^4 \left( \frac{1}{2}x - \frac{6}{x^2} - \frac{1}{2}x \right) dx \right| = \left| \int_1^4 \left( -\frac{6}{x^2} \right) dx \right| = \left| \left[ \frac{6}{x} \right]_1^4 \right| = \frac{9}{2}$$

وېستوني منځهواره  $\frac{9}{2}$  د هوارې يوونونه کچوي.



څلورنوي: صفرخايونه

ازمېنېنت يو لومړي صفرخای راکوي، د  $x_1 = 1$  سره

پولینوموېش

$$(x^3 - 9x^2 + 23x - 15) : (x - 1)$$

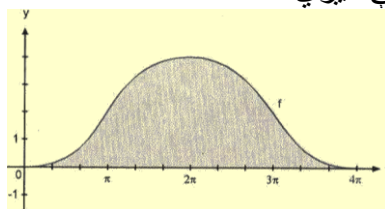
$$= x^2 - 8x + 15$$

نور صفرخايونه دي:

$$x_2 = 3, \quad x_3 = 5$$

له دې سره هوار شميرنه په

برخه انټروالونو [1;3] او [3;5] کې کيږي.



هوار شميرنه:

$$A = \left| \int_0^{4\pi} 2 \left( 1 - \cos \frac{x}{2} \right) dx \right| = 2 \cdot \left[ x - 2 \sin \frac{x}{2} \right]_0^{4\pi}$$

غوښتوني هواره ۲۵،۱۳ د هوارپوونونه لري.

اوه نوي: صفرخايونه:

$$3 \cdot \sqrt{9-x} = 0$$

$$\Rightarrow x = 9$$

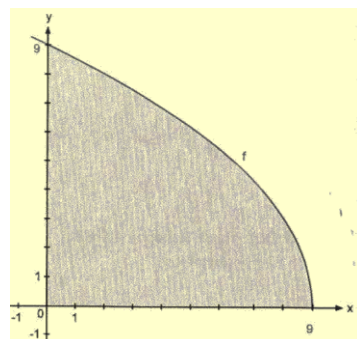
له دي سره غوښتوني هواره په

انتروال  $[0;9]$  كي پرته ده

$$A = \left| 3 \int_0^9 \sqrt{9-x} dx \right|$$

$$= 3 \left| \left[ -\frac{2}{3} \sqrt{(9-x)^3} dx \right]_0^9 \right|$$

$$A = 54$$



غوښتوني منځهواره ۵۴ د هوارې پوونونه كچه كوي.

اته نوي: صفرخايونه:

$$0 = x^3 - 2ax^2 + a^2x$$

$$0 = x(x^2 - 2ax + a^2)$$

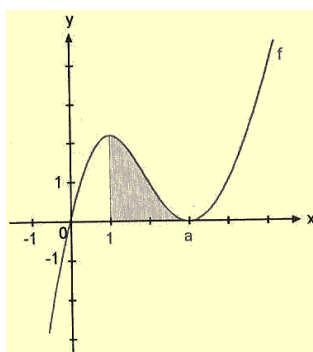
$$\Rightarrow x_1 = 0$$

$$0 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$\Rightarrow x_{2/3} = a$$

د  $a > 1$  له امله پارابول د  $0 < x < 1$

له پاره صفرخاي نه لري



د هوارشميرني ايښوونه:

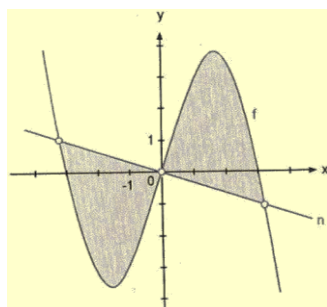
$$A = \left| \int_0^1 (x^3 - 2ax^2 + a^2x) dx \right|$$

$$A = \left| \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{2ax^3}{3} + \frac{a^2x^2}{2} \right]_0^1 \right| = \frac{11}{4}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{2a}{3} + \frac{a^2}{2} = \frac{11}{4} \Leftrightarrow 6a^2 - 8a - 30 = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{5}{3}, a_2 = 3$$

د  $a > 1$  له امله  $a=3$  يواځني اوبي يا حل دي.

نهه نوي:



$$99. f'(x) = -x^2 + 3$$

$$f'(0) = 3$$

$$\Rightarrow m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}$$

دا چې کرښه سرچینه یزه - یا پیلکرښه ده ، نو برابرن یې دي :

د غوڅتکو د پروت محور ارزښتونه:

$$\frac{1}{3}x = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$$

$$\frac{1}{3}x(x^2 - 10) = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{10}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{10}$$

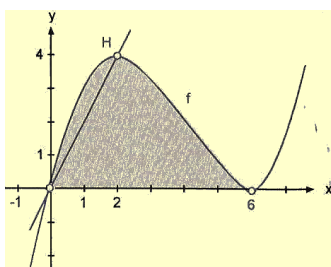
هوار شمیرنه:

دا چې  $f$  په برابر وونو کې یواځې ناجوره کښکونونه منځ ته راځي، له دې امله د گراف سرچینې ته ټکی سیموټریک دی. نو له دې سره بسیا کوي چې هواره په یوه برخه انټروال کې وشمیرو.

$$A = 2 \cdot \left| \int_0^{\sqrt{10}} \left( -\frac{1}{3}x - \left( -\frac{1}{3}x^3 + 3x \right) \right) dx \right| = 2 \cdot \left| \int_0^{\sqrt{10}} \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{10}{3} \right) dx \right|$$

$$A = 2 \cdot \left[ \frac{x^4}{12} - \frac{5x^2}{3} \right]_0^{\sqrt{10}} = 2 \cdot \frac{25}{3} = \frac{50}{3}$$

خورا لویه منځهواره  $\frac{50}{3}$  د هوارې یوونونه گچوي.  
سل:



$$\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x = 0$$

$$\frac{1}{8}x(x^2 - 12x + 36) = 0$$

$$\frac{1}{8}x(x-6)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_{2/3} = 6$$

جگټکی

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

$$0 = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

$$0 = \frac{3}{8}(x^2 - 8x + 12)$$

$$\Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = 6$$

د

$$f''(x) = \frac{3}{4}x - 3 \Rightarrow f''(2) = -\frac{3}{2} < 0 \quad x=2$$

له امله د  $x=2$  له پاره دا یومکسوم په گوتهکوي.  
د کرښیز برابرول لیکنه

$$f(2) = 4$$

$$y = \frac{4-0}{2-0}(x-0) + 0 \Rightarrow y = 2x$$

د منځواری شمیرنه:

ټوله هواره:

$$A = \left| \int_0^6 \left( \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x \right) dx \right| = \left| \left[ \frac{x^4}{32} - \frac{x^3}{2} + \frac{9x^2}{4} \right]_0^6 \right|$$

د برخواری له پاره ایښونه

$$A = \left| \int_0^6 \left( \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 2x \right) dx \right| = \left| \int_0^2 \left( \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 2x \right) dx \right|$$

$$A = \left| \left[ \frac{x^4}{32} - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^2}{4} \right]_0^2 \right| = \frac{3}{2}$$

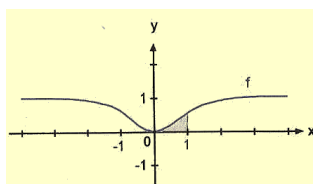
یوسل او یو: صفرځایونه:

$$0 = \frac{x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

د هوار بشمیرنه:

موخه ور بڼه بدلون مو یوه ساده انتیگرال نه بیایي.

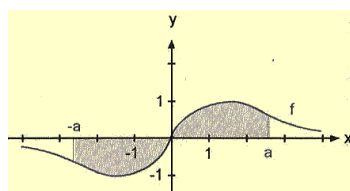


$$A = \left| \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \right| = \left| \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx \right|$$

$$A = \left| \int_0^1 \left( \frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \right| = \left| \int_0^1 \left( \frac{1}{1+x^2} \right) dx \right| = \left| [x - \arctan x]_0^1 \right|$$

$$A = 1 - \arctan 1 - 0 + \arctan 0 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

غوښتونې منځهواره 0,215 هوار یوونونه کچه وي.



یوسل ودوه:

$$0 = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow x = 0$$

د هوارې شمیرنې له پاره ایښونه:

دا چې گراف پیل یا سرچینې ټکی ته سیومتريک دی، نو په لومړۍ څلورمه کې د انتیگرال شمیرنه بسیا کوي.



د  $u(x) = 1 + x^2$  او  $u'(x) = 2x$  سره د انټیگرالونې تابع بڼه لري. له دې سره دي:  $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$  او  $f'(x) = \ln u$

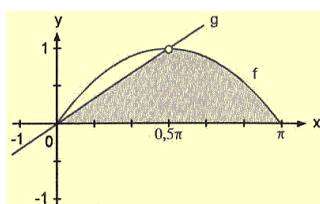
$$A = 2 \cdot \left| \frac{1}{2} \int_0^a \frac{2x}{1+x^2} dx \right| = \left| \left[ \ln(1+x^2) \right]_0^a \right| = \ln(1+a^2) - \ln 1$$

$$A = \ln(1+a^2)$$

برابر ایښونه:

$$\ln(1+a^2) = 1 \Rightarrow 1+a^2 = e \Rightarrow a = \sqrt{e-1}$$

د  $a=1,311$  له پاره منځه‌واره ورکړشوی ارزښت اخلي. یوسلوډري:



$$103. \frac{2}{\pi} = \sin x \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}$$

هوار شمیرنه:

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} x dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx \right|$$

$$A = \left| \left[ \frac{x^2}{\pi} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| + \left| \left[ -\cos x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right| = \frac{\pi}{4} + 1 \frac{\pi+4}{4}$$

غوښتونې سطحه نږدې 1,785 د هوارې یوونونه کچوي.

یوسلوڅلور: د غوڅټکو پراټه ارزښتونه:

$$x \cdot \sin x = 2 \cdot \sin x$$

$$\Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

هوار شمیرنه:

$$A = \left| \int_0^2 (2 \cdot \sin x - x \cdot \sin x) dx \right| + \left| \int_0^{\pi} (2 \cdot \sin x - x \cdot \sin x) dx \right|$$

$$= \left| \left[ -2 \cdot \cos x \right]_0^2 - \int_0^2 x \cdot \sin x dx \right| + \left| \left[ -2 \cdot \cos x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \cdot \sin x dx \right|$$

له

$$u(x) = x, \quad u'(x) = 1 \quad v'(x) = \sin x, \quad v(x) = -\cos x$$

سره ټوټه انټیگرالونه راكوي:

$$A = \left| \left[ -2 \cdot \cos x \right]_0^2 - \left[ -x \cdot \cos x \right]_0^2 - \int_0^2 \cos x dx \right| + \left| \left[ -2 \cdot \cos x \right]_0^{\pi} - \left[ -x \cdot \cos x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x dx \right| +$$

$$= \left| \left[ -2 \cdot \cos x + x \cdot \cos x - \sin x \right]_0^2 \right| + \left| \left[ -2 \cdot \cos x + x \cdot \cos x - \sin x \right]_0^{\pi} \right|$$

$$A = 2 - \sin 2 + |2 - \pi + \sin 2| = 2 - \sin 2 - 2 + \pi - \sin 2 = \pi = 2 \sin 2$$

$$A = 2 - \sin 2 + |2 - \pi + \sin 2| = 2 - \sin 2 - 2 + \pi - \sin 2 = \pi = 2 \sin 2$$

یادونه:

$$|2 - \pi + \sin 2 < 0 \Rightarrow -2 + \pi - \sin 2| = -2 + \pi - \sin 2$$

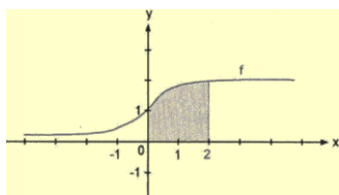
غوښتونکي سطحه ۱,۳۲۳ د سطحې یوونونه کچوي.

یو سل او پښه: د  $f$  گراف صفرخای نه لري او ناپرېکيدونکی دی.

هوار شمیرنه: د  $u(x) = e^x + 1$

او  $u'(x) = e^x$  سره دی:

$$f'(x) = \ln u \quad \text{او} \quad f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$



$$A = \left| 2 \int_0^2 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \right| = \left| [2 \cdot \ln(e^x + 1)]_0^2 \right| = 2 \ln(e^2 + 1) - 2 \cdot \ln 2$$

غوښتونې سطحه د سطحې یوونونو نږدې ۲،۸۶۸ کچوي

یوسلو شپږ: الف: د ډکي- یا حجم فرمول کې ایښوونه:

$$V = \pi \cdot \int_0^4 (2 + \sqrt{x})^2 dx = \pi \cdot \int_0^4 (4 + 4\sqrt{x} + x) dx$$

$$V = \pi \cdot \left[ 4x + \frac{8\sqrt{x^3}}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{136}{3} \pi$$

غوښتونې ډکي (حجم) نږدې ۱۴۲،۴ د فضا یوونونه کچه وي.

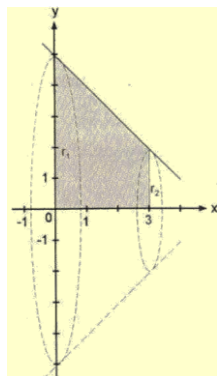
ب: د ډکي فرمول کې ایښوونه:

$$V = \pi \cdot \int_0^4 \left( \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1 \right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^4 \left( \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 12x + 9 \right) dx$$

$$V = \pi \cdot \left[ \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{2} + \frac{7x^3}{3} - 6x^2 + 9x \right]_0^4 = \frac{94}{15} \pi$$

غوښتونې ډکي (حجم) نږدې ۱۹،۶۹ د فضا یوونونه کچه وي.

یوسل او او ه: الف: دانتيگر الشمیرني له لاري د ډکي یا حجم شمیرنه:



$$V = \pi \cdot \int_0^3 (-x + 5)^2 dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^3 (x^2 - 10x + 25) dx$$

$$V = \pi \cdot \left[ \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 25x \right]_0^3 = 39\pi$$

ساده ډکي شمیرنه. څرخونېدن یو پخ مخروط یا گازره راکوي د

$$h = 3 - 0 = 3$$

سره

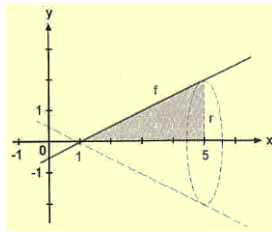
او

$$r_1 = f(0) = 5, \quad r_2 = f(3) = 2$$

$$v = \pi \cdot \frac{3}{3} (5^2 + 5 \cdot 2 + 2^2) = 39\pi$$

هر ځل ۱۲۲،۵ د یوه فضا یوونونه کچه وي.

ب: د انتيگر الشمیرني له لاري د ډکي یا حجم شمیرنه



$$V = \pi \cdot \int_1^5 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)^2 dx$$

$$V = \pi \cdot \int_1^5 \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) dx$$

$$V = \pi \cdot \left[ \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} \right] = \frac{16}{3} \pi$$

ساده ډکیشمیرنه:

څرخونډن یو کیگل انځوروي، د  $r=2$

سر ه  $h=4$

یوسل او یوولس: کرښه د  $y$ -محور په  $y=4$  او د  $x$ -محور په  $x=a$  کې غوڅوي. له دې سره د یوه څرخون له لارې د  $x$ -محور باندې یو کیگل منځ ته راځي د  $r=4$  او  $a=8$  سره.

د پوښهوارې شمیرنه په انټروال  $[0;8]$  د انټیگرالولو له لارې.

$$M = 2\pi \cdot \int_0^8 \left(-\frac{1}{2}x + 4\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4}} dx = 2\pi \cdot \int_0^8 \left(-\frac{1}{2}x + 4\right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} dx$$

$$M = 2\pi \cdot \left[ \frac{\sqrt{5}}{2} \left(-\frac{x^2}{4} + 4x\right) \right]_0^8 = 16\pi \cdot \sqrt{5}$$

ساده شمیرنه

د پوښکرښه:

$$M = \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sqrt{5} = 16\pi \cdot \sqrt{5}$$

د پوښهوارې فرمول:

دواړه شمیرنې د نږدې د  $۸۵،۲۹$  کچپوونونو سره پوښشهوره ورکوي.

یوسل او دولس: د رابیلیدني - یا مشتق تابع:

$$f(x) = 2\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

انټیگرال یې کړی.

$$M = 2\pi \cdot \int_0^4 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx = 2\pi \cdot \int_0^4 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^4 2\sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} dx = 2\pi \cdot \int_0^4 \sqrt{x+1} dx$$

$$= 4\pi \cdot \left[ \frac{2 \cdot \sqrt{(x+1)^3}}{3} \right]_0^4 = \frac{8}{3} \pi (5\sqrt{5} - 1)$$

غوښتونې هواره د نږدې د  $۱۱۲،۴$  کچپوونونو سره پوښشهوره ورکوي.

یوسل او دیارلس: د رابیلیدني - یا مشتق تابع:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^2$$

انټیگرال یې کړی

$$M = 2\pi \cdot \int_1^2 \frac{1}{6} x^3 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} x^4} dx = \frac{1}{3} \pi \cdot \int_1^2 x^3 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} x^4} dx$$

انتیگرال د مخه ویل شوی قانون له لاری ورکوي:

$$u(x) = 1 + \frac{1}{4} x^4 \Rightarrow u'(x) = x^3$$

$$M = \frac{1}{3} \pi \cdot \int_1^2 x^3 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} x^4} dx = \frac{2}{9} \pi \cdot \left[ \sqrt{\left(1 + \frac{1}{4} x^4\right)^3} dx \right]_1^2$$

$$M = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(5\sqrt{5} - \frac{5}{8}\right) = \frac{35}{36} \pi \cdot \sqrt{5}$$

غوښتونې پوښهواره نږدې ۶،۸۳۰ هوار یوونونه په کچه کوي  
یوسل او څوارلس: د کرښې څرخول د  $-x$  محور باندې یو پخ مخروط د  
سره راکوي.  $h = f(5) - f(1) = 6 - 2 = 4$  او  $r_1 = 5$ ,  $r_2 = 1$

د رابیلیدني - یا مشتق تابع

$$f(x) = x + 1 \Rightarrow f'(x) = 1$$

د انتیگرال له لاری د پوښهوارې شمیره:

$$M = 2\pi \cdot \int_1^5 x \cdot \sqrt{2} dx = \pi \cdot \left[ \frac{x^2}{2} \sqrt{2} \right]_1^5 = 25\pi \cdot \sqrt{2} - \pi \cdot \sqrt{2} = 24\pi \cdot \sqrt{2}$$

ساده شمیرنه:

پوښکرښه:

$$s = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4 \cdot \sqrt{2}$$

$$M = \pi \cdot s \cdot (r_1 + r_2) = \pi \cdot 4 \cdot \sqrt{2} (1 + 5) = 24\pi \cdot \sqrt{2}$$

د دواړو بنمیرنو پوښهوارې نږدې ۱۰۶،۶ پوښیوونونه راکوي.

یوسل او پنځلس: کښته لور ته واز پاربول د  $-y$  محور باندې ککرپټکی  $S(0/4)$  لري او زیاتیزه  
 $-x$  محور په  $x=4$  کې غوڅوي.

د رابیلیدني - یا مشتق تابع یا څیرونه.

$$f(x) = -\frac{1}{4} x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} x$$

انتیگرال یې کړی

$$M = 2\pi \cdot \int_0^4 x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} x^2} dx = \pi \cdot \int_0^4 x \cdot \sqrt{4 + x^2} dx$$

بڼه بدلون او په ځای ایښوونه یا بدلون یا سبستچیشن

$$u(x) = 4 + x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$M = \frac{1}{2} \pi \cdot \int_0^4 2x \cdot \sqrt{4 + x^2} dx = \frac{1}{2} \pi \cdot \left[ \frac{x \cdot \sqrt{(4 + x^2)^3}}{3} \right]_0^4$$

$$M = \frac{40}{3} \pi \sqrt{5} - \frac{8\pi}{3}$$

پوښهواره نږدې ۸۵،۲۹ د هوارې یوونونه کچه وي.

یوسل او شپارس: د کرښیز برابرول لیکل

$$y = \frac{(8-4)}{(5-2)}(x-2) + 4$$

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$$

انتیگرالول

$$s = \int_2^5 \sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} dx = \int_2^5 \frac{5}{3} dx = \left[\frac{5x}{3}\right]_2^5 = \frac{25}{3} - \frac{10}{3} = 5$$

ساده شمیرنه

$$s = \sqrt{(5-2)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

دواړه شمیرني ۵ اوږدوالي یوونه راكوي.

یوسل او اولس: رابیلید خیره ونه یا مشتقتابع:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}}\sqrt{x}$$

انتیگرال یې کړی

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\sqrt{x}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{16}x} dx$$

سبستیچیوشن یا بدلون یا په خای ایښوونه:

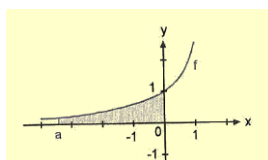
$$u(x) = 1 + \frac{9}{16}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{9}{16} \Rightarrow dx = \frac{16}{9} du$$

$$s = \frac{16}{9} \int_0^1 \sqrt{u} du = \frac{16}{9} \left[ \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{16}x\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$s = \frac{32}{27} \cdot \left( \sqrt{\left(\frac{25}{16}\right)^3} - \sqrt{3} \right) = \frac{32}{27} \cdot \left( \frac{125}{64} - 1 \right) = \frac{61}{54}$$

غوښتونې لینده اوږدوالی ۱،۱۲۹ اوږدوالي یوونونه کچه وي.

یوسل او اتلس: الف: انتیگرال یې کړی



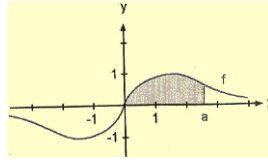
$$\int_a^0 e^x dx = [e^x]_a^0 = 1 - e^a$$

پولي ټاکنه:

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a) = 1$$

ناتاکلی انتیگرال پوله ارزښت ۱ لري.

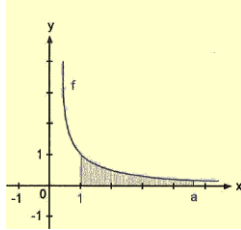
ب: انتیگرال یې ونیسی



$$\int_a^0 e^x dx = [e^x]_a^0 = 1 - e^a$$

$$= \frac{1}{2} \cdot [\ln(x^2 + 1)]_0^a = \frac{1}{2} \ln(a^2 + 1)$$

پ: انتیگرال کری



$$\int_1^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^a x^{-\frac{1}{2}} dx$$

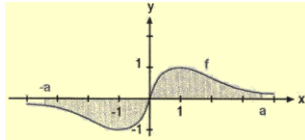
$$= \left[ 2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^a = [2\sqrt{x}]_1^a = 2(\sqrt{a} - 1)$$

پوله ارزبنت شمیرنه:

$$2(\sqrt{a} - 1) \rightarrow \infty \text{ د } a \rightarrow \infty \text{ له پاره هڅیري:}$$

له دې سره یا له دې امله ناتاکلی انیگرال پوله ارزبنت نه لري او په پای کې یا بالاخره دوه برابرول.

ت: د f گراف پیل یا سرچینې سره ټکیسیومتریکی دی. له دې سره ټاکلی انیگرالونه په انټروالونو  $[0/a]$  او  $[-a/0]$  کې د ارزبنت له مخې برابر مگر د مختلفو مخنځبنو سره. په انټروال  $[-a/a]$  کې له دې امله ټاکلی انیگرال ارزبنت صفر نیسي.



$$d) \int_0^a \frac{4x}{(x^2 + 2)^3} dx = \int_0^a \frac{2x}{(x^2 + 2)^3} dx$$

بدلون یا په ځای ایښوونه.

$$u(x) = x^2 + 2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$2 \int_0^a \frac{2x}{(x^2 + 2)^3} dx = 2 \int_0^a \frac{1}{(u(x))^3} du = 2 \cdot \left[ -\frac{1}{2 \cdot (u(x))^2} \right]_0^a$$

$$A = 2 \cdot \left[ \frac{-1}{2(x^2 + 2)^2} \right]_0^a = -\frac{1}{(a^2 + 2)^2} - \left(-\frac{1}{4}\right)$$

پوله ارزبنت ټاکنه

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{(a^2 + 2)^2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

یو سل او نولس: انیگرالونه الف:

$$\int_1^a \frac{1}{x^p} dx = \int_1^a x^{-p} dx = \left[ \frac{x^{-p+1}}{1-p} \right]_1^a = \left[ \frac{1}{(1-p) \cdot x^{p-1}} \right]_1^a$$

$$= \frac{1}{(1-p) \cdot a^{p-1}} - \frac{1}{1-p}$$

له دې امله ترم  $a \rightarrow \infty$  د  $\frac{1}{(1-p) \cdot a^{p-1}} - \frac{1}{1-p}$  له پاره یو پوله ارزبنت باید ولري او

ماتلاندي  $= \frac{1}{(1-p) \cdot a^{p-1}}$  باید د جگیدونکي a له پاره لوي یا جگ شي، له دې امله

باید a یو زیاتیز جگن یا اکسیوننت ولري.

د  $p > 1$  له پاره ناپاکلی انتیگرال پوله ارزښت لري  $\frac{1}{1-p}$ .

یوسل او شل: الف: تابع یا څیره ونه  $f$  په  $x=0$  کې زیاتیز دی.

$$\int_u^1 \frac{x^3+1}{x} dx = \int_u^1 \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \ln x\right]_u^1 = \frac{1}{3} - \frac{u^3}{3} - \ln u$$

د  $u \rightarrow 0$  له پاره  $\frac{1}{3} - \frac{u^3}{3} - \ln u \rightarrow \infty$  هڅیږي.

ناپاکلی انتیگرال شتون نه لري.

ب: تابع یا څیرونه یا فنکشن  $f$  په  $x=0$  کې قطبځای لري.

$$\int_u^1 \ln x dx = [x \cdot \ln x - x]_u^1 = u - u \cdot \ln u - 1$$

د لو پینال له مخې دی

$$u \cdot \ln u = \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \Rightarrow \frac{d}{du} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} = \frac{1}{-1} = -u \Rightarrow u \cdot \ln u \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$$

د  $u \rightarrow 0$  له پاره له دې سره هڅیږي:  $u - u \cdot \ln u - 1 \rightarrow -1$

پ: څیرونه یا تابع  $f$  په  $x=1$  کې قطبځای لري.

$$\int_u^2 \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx = \int_u^2 \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} dx = \int_u^2 (\sqrt{x}+1) dx = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + x\right]_u^2$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} + 2 - \frac{2\sqrt{u^3}}{3} - u$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} + 2 - \frac{2\sqrt{u^3}}{3} - u\right) = \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3} = \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx = \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}$$

ت: څیرونه یا تابع  $f$  په  $x=1$  کې قطبځای لري.

په ورکوشوي ورشو کې صفرځایونه مخ نه دي پراته.

د چې د  $f$  گراف  $y$ -محور ته سی، متریک پروت دی نو یوه برخ انټروال کې هوار شمیرنه بسیا کوي.

$$\int_0^u \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arcsin x]_0^u = \arcsin u - 0 = \arcsin u$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} \arcsin u = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

ب: تابع  $f$  په  $x=2$  کې قطبځای لري

$$\int_0^u \frac{x^2}{x^3-8} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3-8} dx = \frac{1}{3} \cdot [\ln|x^3-8|]_0^u = \frac{1}{3} (\ln(u^3-8) - \ln 8)$$

د  $u > 2$  له پاره لرو:  $\ln(u^3-8) \rightarrow -\infty$

ت: څیرونه یا تابع  $f$  په  $x=1$  کې قطبځای لري.

$$f) \int_u^1 \frac{e^x}{1-e^x} dx = -\int_u^1 \frac{-e^x}{1-e^x} dx = -\left[\ln|1-e^x|\right]_u^1 = -\ln(e-1) + \ln|1-e^u|$$

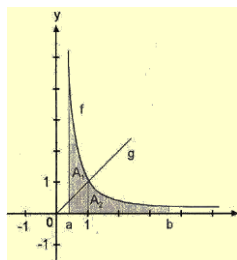
د  $u \rightarrow 0$  له پاره هڅیږي:  $\ln|1-e^u| \rightarrow -\infty$

ناتاکلی انټیگرال شتون نه لري.

یو سل او یووېشت: دواړه گرافونه په  $p(1/1)$  کې غوڅوي.

برخهوارې په انټروالونو  $[0/1]$  او  $[1/\infty]$  پرتې دي.

هوارشمیرنه د  $A_2$  له پاره د گرافونو په منځ کې هوارې په څیر.



$$121. \int_a^1 \left(\frac{1}{x^2} - x\right) dx = \left[-\frac{1}{x} - \frac{x^2}{2}\right]_a^1$$

$$= -1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{a} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{1}{a} - \frac{3}{2}$$

د  $a \rightarrow 0$  له پاره هڅیږي:

$$\frac{a^2}{2} + \frac{1}{a} - \frac{3}{2} \rightarrow \infty$$

برخهواره  $A_1$  کومه پوله ارزښت نه لري.

د برخهوارې  $A_2$  شمیرنه د دوه برخهوارو په څیر:

$$\int_0^1 x dx + \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \frac{1}{2} - \frac{1}{b} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{b}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{b}\right) = \frac{3}{2}$$

برخهواره  $A_2$  پوله ارزښت  $\frac{3}{2}$  لري.



**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**