

د دفرنخيال - او انتيگرال شميرنو
تمريونه د اوبيونو(حلونو) سره

ليكونکي:

ډاکتر ماخان (میری) شينواری

Ketabton.com

2016

سېزه:

گرانو لوستونکو.
له تولو د مخه مي دا
ما دا درابيليدني او انتيگرالتمريونه راټول
کړي، چې کله ګلې ګنون هم بنه نه دی ورکړ شوی، خو دا کومي یتونځي ځکه نه پېښوي،
چې د تمرنونو اوبيونو کې هم هغه پوښته باید تکرار راشي.
ما غوبښتل، چې د پولي برخي د پاره هم ئنبي پوښتن د اوبيونو سره راورم، خو پري ونځه
تونیدم.

نېوليك

۱ - د دفېرنشل شميرني تمرینونه.....	۳
۲ - د انتيگرالشميرني تمرینونه.....	۱۸
۳ - د دف. تمرینونو اوبيوني.....	۳۲
۴ - د انت. تمرینونو اوبيونه.....	۴۶

رابیلیدنه یا مشتق

گرانو هیواودوالو !

په دی لاندی کوچنی لیکنه کي تاسو ته د دفرنشل او انتیگرال شمیرنو
اصلی تمرینونه له ٦٦ تمرین خخه پیل کيري:

٦٦ (١) کمبنتویش (د تفاضل وبش) ارزښت د P او Q په تکو کي وتاکي.

$$a) P(3,2) , Q(5,4) \quad b) P(2,4) , Q(3,1)$$

٦٧ (٢) د په حای کي د تابع د تانجنت جګوالي وتاکي.

$$a) f(x) = x^2 , x_0 = 2 \quad b) f(x) = 0.5x^2 , x_0 = 3$$

٦٨ (٣) د کمبنتویش (د تفاضل ویش) او مشتق لاندی خه پوهیرو او د دوي تربنځ فوپير خه
دی؟

٦٩ (٤) د یوه تابع د سکانت () لاندی خه پوهیرو او د تانجنت جګبدو لاندی خه پوهیرو؟ او
دوی ترمنځ کومي اړیکې پرتی دي؟

٧٠ (٥) د تابع مشتق د توان قانون له مخي پیداکړي.

$$a) f(x) = x^5 \quad b) f(x) = x^6$$

$$c) f(x) = \frac{1}{x^2} \quad d) f(x) = \frac{1}{x^5}$$

$$e) f(x) = \sqrt{x} \quad f(x) = \sqrt[4]{x^3}$$

$$g) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad h) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

٧١ (٦) د تابع مشتق د ثابت د قانون له مخي پیداکړي.

$$a) f(x) = 0.2x^5 - 3 \quad b) f(x) = 2x^4 + 1$$

$$c) f(x) = \frac{4}{x^2} \quad d) f(x) = \frac{3}{x^3} + 2$$

$$e) f(x) = 6\sqrt{x} \quad f) f(x) = \frac{8}{\sqrt{x}} - 5$$

٧٢ (٧) د تابع د ګراف په مرسته وبنای، چې تول $c + g(x)$ ترمونه همغه مشتق لري.

یاودونه: پابت عدد که هرکوم ارزښت ونیسي.

٧٣ (٨) وبنای، چې د $a \cdot g(x)$ د مشتق سره د ضریب (α وونی) ساتلی پاتي کیزې.

٧٤ (٩) د f تابع مشتق د جمعی قانون سره وبنای

$$a) f(x) = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 1 \quad b) f(x) = x - \sqrt{x}$$

$$c) f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{x^3} \quad d) f(x) = 3x^2 + 0.4x - 5$$

٧٥ (١٠) د f تابع مشتق د ضرب قانون سره وتاکي.

- a) $f(x) = x^3(x^2 - 2x + 1)$ b) $f(x) = (2x^2 + 1)(x - 1)$
 c) $f(x) = (x^2 - 5)(2x^3 + x^2 + x)$ d) $f(x) = (4x^2 - x + 4)(3x + 2)$

٧٦ (١١) د تابع مشتق د وېش قانون له مخي وتاکي.

$$a) f(x) = \frac{x^3 - 1}{4 - x^2} \quad b) f(x) = \frac{2x^2 + x + 3}{x + 1}$$

$$c) f(x) = \frac{4 - x - x^3}{2x^2 + 3} \quad d) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$$

٧٧ (١٢) د وېش قانون له مخي په څټ ارزښت (پر عکس ارزښت) وتاکي.

لاندي کي: د سره

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$$

د سره $g(x) \neq 0$

٧٨ (١٣) د تابع ارزښت د زنځير قانون له مخي وتاکي.

- a) $f(x) = (4x^4 - x)^2$ b) $f(x) = (3x^2 + 4x - 5)^2$
 c) $f(x) = (2x - 7)^3$ d) $f(x) = (5 - 3x^3)^4$

٧٩ (١٤) د لاندي توابعو مشتق وتاکي.

$$a) f(x) = \frac{1}{(2x^2 + x)^3} \quad b) f(x) = \frac{1}{(x - 5)^4}$$

$$c) f(x) = (1 + \sqrt{x})^2 \quad d) f(x) = \sqrt{1 - x^3}$$

٨٠ (١٥) د لاندي توابعو درې واره مشتق ونيسي.

- a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ b) $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 5$
 c) $f(x) = \frac{3x - 4}{x}$ d) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2 - x}$

٨١ (١٦) د يو n -م درجي تابع باید څو واره مشتق ونيول شي چې يوه ثابته تري لاس ته راشي.

٨٢ (١٧) د لاندي توابعو لومری مشتق و تاکي.

- a) $f(x) = \sin 3x$ b) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ c) $f(x) = \sin^2 x$
 d) $f(x) = \tan x + 2 \sin 2x$ e) $f(x) = \sin x^2$ f) $f(x) = \sin \frac{x-1}{x+1}$

٨٣ (١٨) د تابع د لومری مشتق لپاره فرمول و بناياست يا و تاکي.

٨٤ (١٩) د تانجنت تابع لپاره د ساين او کوساين قانون په مرسته د مشتق قانون و بناياست.

٨٥ (٢٠) و بناياست چې د $f(x) = \tan x$ لپاره $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ هم باور لري.

٨٦ (٢١) د وېش قانون له مخي د کوتانجنت قانون پيداکړي او هم د تانجنت قانون له مخي.

(٢٢) ٨٧ ولی د ساین تابع او د کوساین تابع په خوبنې زیات مشتقور دی.

(٢٣) ٨٨ د لاندی توابعو لومړی مشتق وټاکي.

$$a) f(x) = 3 \cdot e^{-2x+1} \quad b) f(x) = e^{x^2+2x-1} \quad c) f(x) = (x-1) \cdot e^x$$

$$d) f(x) = \sqrt{e^x} \quad e) f(x) = x^n \cdot e^e \quad f) f(x) = e^{kx}$$

$$g) f(x) = 2^{\frac{1}{2x}} \quad h) f(x) = (\frac{1}{4})^{3x} \quad i) f(x) = x \cdot a^{\sqrt{x}}$$

$$k) f(x) = \sqrt{e^x + 1} \quad l) f(x) = \frac{e^x}{1-e^x} \quad m) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

بېلګه:

$$\text{مشتق دی پیدا شي. } f(x) = (x^2 + 2) \cdot \lg x \quad (x > 0).$$

د ضرب قانون:

$$v'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 10} \quad v(x) = \lg x \quad u'(x) = 2x \quad u(x) = x^2 + 2$$

$$f'(x) = 2x \cdot \lg x + (x^2 + 2) \frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \cdot (2x \cdot \ln x + x + \frac{2}{x})$$

(٣٤) ٨٩ د لاندی توابعو لومړی مشتق وټاکي يا پیدا کړئ.

$$a) f(x) = \ln \sqrt{x} \quad b) f(x) = \ln(x^2 - 4) \quad c) f(x) = \ln \frac{2}{x^3}$$

$$d) f(x) = \ln \frac{x+1}{x} \quad e) f(x) = x \cdot \log_2 x^2 \quad f) f(x) = (x^4 - 1) \cdot \log$$

$$g) f(x) = \frac{\ln x}{x+2} \quad h) f(x) = \frac{x^4}{\ln x}$$

(٣٥) ٩٠ د لاندی توابعو لپاره خورا لویه تعريف ورشو(ساحه) ورکړئ او لومړی مشتق بې وټاکي.

د تعريف سټ(پېږي) هغه ورشو(ساحه) ورکړئ، په کومه کې چې توابع مشتقور دی.

$$a) f(x) = \sqrt{x+3} \quad b) f(x) = \sqrt{(x-2)(x-4)}$$

$$c) f(x) = x\sqrt{x} \quad d) f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$$

(٣٦) ٩١ ولی باید د ټیک شمېرنې لپاره لوگاریتمي توابعو ته همداسي سوچ وشي، لکه ریننه توابعو ته؟

(٣٧) ٩٢ مه پونسته د لوگاریتمي توابعو لپاره حواب کړئ.

$$a) f(x) = \ln(x^4 - 1) \quad b) f(x) = \ln(2x + 4)$$

٩٣ - د لاندی توابعو لومړی مشتق پیداکړئ.

- a) $f(x) = \frac{2}{5}x^{10} - \frac{1}{5}x^5$ b) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 7x + 8$
- c) $f(x) = 5x^8 - 3x^6 + \frac{10}{x^3} - \frac{8}{x^7}$ d) $f(x)(2x-5)(x^2+11x-3)$
- e) $f(x) = \cos x - 2x \sin x$ f) $f(x) = \sin^3 x$
- g) $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$ h) $f(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$
- i) $f(x) = \frac{3e^x + 1}{2e^x - 1}$ j) $f(x) = \frac{2e^x(x^2 - 3)}{x}$
- k) $f(x) = \frac{1}{x^2} \ln x^2$ l) $f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{1-x}$
- m) $f(x) = \frac{\sin x}{\ln x}$ n) $f(x) = 3x^2 \cdot \lg x$
- o) $f(x) = \ln(\sin x)x$ p) $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1}$
- q) $f(x) = \sqrt[n]{ax+b}$ r) $f(x) = (x^2 + 3)e^{-2x}$

٩٤ - لومرى مشتق و تاکى

- a) $f(x) = \sin^n$ b) $f(x) = (\ln x)^n$
- c) $f(x) = s + \frac{1}{x}$ d) $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^n$

٩٥ - د هري تابع لومرى دري مشتقونه و تاکى

- a) $f(x) = e^{x^2}$ b) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$
- c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ d) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

٩٦ - په کوم تابع کي لومرى مشتق f' د سره برابر دی.

٩٧ - (٤٢)

الف: د کوم تابع لپاره $f'(x) = 2f(x)$ دی؟

ب: د کو تابع لپاره $f'(x) = -f(x)$ دی؟

٩٨ - د $f(x) = \sin x$ مشتق د سره سر خوري يا برابر دی؟

٩٩ - د لاندي توابعو لپاره -م مشتق ته وده ورکړئ.

- a) $f(x) = e^{ax}$ b) $f(x) = \ln(x+1)$

١٠٠ - د لاندي توابعو صفر ځایونه وشمېږئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x - 3 & b) f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 \\
 c) f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x & d) f(x) = x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{12} \\
 e) f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 & f) f(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100
 \end{array}$$

(٤٦) - د دريمى درجي تام راشنل گراف د x -محور د $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ او $x_3 = 4$ په تکو کي غوڅوي.

د تابع مساوات کوم دي، که سربېره پر دي گراف د $P(2, -8)$ تکي څخه هم تپر شي؟
 (٤٧) - د یوه څلورمي درجي تام راشنل تابع د x -محور د $x_1 = 0,5$ او $x_2 = 3$ په تکو کي غوڅوي.

د تابعه ابرون څنګه دي، که برسبېره پردي گراف د y -محور د $P(0,9)$ په تکي کي هم لمس کړي.

(٤٨) - د څلورمي درجي د یوه تام راشنل تابع گراف د وضعیه قیمت سیستم پیل او له $x_1 = -1$ تکي تپريري. د تابع مساوات څنګه دي، که گراف د x -محور هم د $\text{P}(\frac{1}{2}, -\frac{15}{8})$.

سره لمس کړي او په $x_2 = 2$ کي غوڅ کړي.
 (٤٩) - د لاندي توابعو صفرخایوه پیدا کړي.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 4} & b) f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x} \\
 c) f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x - 0.5} & d) f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x}{x + 5}
 \end{array}$$

(٥٠) : د یوه مات راشنل f تابع د $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x + d}$ سره ثابتی او a, b, c د پیدا کړي، که د $(-1, 2)$ او سره صفرخایونه پراته وي او تابع په $x=0$ کي یوه تشخای ولري.

(٥١) : د f_a تابع صفرخایونه پیدا کړي د $f_a(x) = \frac{a^3 x^3 - 8}{ax}$ او $a > 0$ ii سره جي د a په واک کي وي يا تابع وي. د a د کوم ارزښت لپاره f_a په $x_1 = 0,5$ کي صفرخاي لري.

(٥٢) : مات يا کسري راشنل f تابع په $x_1 = 1$ کي د سره دري څله صفرخاي لري.
 د یوې ساحي د ویش په مرسته وڅېږي چې په همدي څلورمه کي صفرخاي کي څغلي او که صفرخاي څلورمه بدلوي.

(٥٣) : د لاندي توابع صفرخایونه وشمېږي.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x} & b) f(x) = \frac{x}{4} \cdot \sqrt{6 - x} \\
 c) f(x) = x \cdot \ln(x + 2) & d) f(x) = (x^2 - 2) \cdot \ln x \\
 e) f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} & f) f(x) = \frac{3x}{\sqrt{2 + x^2}}
 \end{array}$$

۱۰۹(۵۴): دا سې یو ترم و تاکۍ، کوم چې د لاندي پريوديکي یا تل بېرته را گرځدوني توابعو صفر ځایونه ورکوي.

د شمېرنې له لاري صفر ځایونه و نوموئ، چې په انتروال کي پراته وي.

$$a) f(x) = \frac{1}{2} \sin 3x \quad b) f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$c) f(x) = 1 - \sin^2 x \quad d) f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

۱۱۰(۵۵): ولې لاندي توابع صفر ځایونه نه لري؟

$$a) f(x) = \ln(x^2 + 3) \quad b) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$c) f(x) = \frac{e^x}{x+1} \quad d) f(x) = 1 + \sin^2 x$$

۱۱۱(۵۶): ولې کېدى شي چې یو تابع پېر صفر ځایونه ولري، مګر y -محور سره یواحی یو صفر ځای ولري؟

۱۱۲(۵۷): د صفر ځایونو د تعداد په هکله څه ويلاي شي، که د یو f تابع لپاره په تعریفست(-) پېرى) کي یو f^{-1} معکوس تابع هم شته وي؟

۱۱۳(۵۸): د y -محور سره د لاندي توابع غوختکي و شمېرى.

$$a) f(x) = x^3 + 2x - 1 \quad b) f(x) = (x+1) \cdot \ln(x+1)$$

$$c) f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x+2} \quad d) f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$e) f(x) = (x-2) \cdot e^{x-1} \quad f) f(x) = e^{\frac{2}{1-x}}$$

۱۱۴(۵۹): د یوه تام راشنل تابع $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ د $a_0 \neq 0$ د سره کېدى شي د y -محور غوختکي د ساده لوستلو له لاري و تاکل شي. په دې هکله دلایل راوړي.

۱۱۵(۶۰): د $x=1$ او $x=2$ لپاره تابع ارزښتونه و شمېرى او هم د f تابع جګښنه د سره. it $f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1$.

۱۱۶(۶۱): په صفر ځای کې $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ تابع کومه جګښنه لري.

۱۱۷(۶۲): د $f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 0,5x^2 + x - 4$ ګراف په کومو ټکو کي اکېښه لري؟

۱۱۸(۶۳): ګراف په کومو ځایونو کي پروت تانجنت لري؟

بېلګه:

تابع ارزښت او د ګراف $f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x - 1}$, ($x \neq 1$) په $x_0 = -1$ Ҳای کي د جگیدنه غواړو پیاکړو.

$$f(-1) = \frac{1 - 8 + 16}{-1 - 1} = -4,5 \quad \text{تابع ارزښت:}$$

د مات راشنل تابع ۱. مشتق د وېش قانون له مخي تاکل کېږي.

$$f'(x) = \frac{(4x^3 - 16x)(x - 1) - (x^4 - 8x^2 + 16) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{3x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 16x - 16}{(x - 1)^2}$$

جګوالی:

$$f'(-1) = \frac{3 + 4 - 8 - 16 - 16}{4} = -8,25$$

۱۱۹ (۶۴) : د لاندي توابعو ارزښت او جگیدنه د $x = x_0$ په Ҳای کي وشمیري.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 4}{x}, \quad x_0 = 1 \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x}{x}, \quad x_0 = -3$$

۱۲۰ (۶۵) په کومو تکو کي لاندي توابع [جګوالی] m لري؟

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}, \quad m = 2 \quad \text{b) } f(x) = \frac{x - 2}{x^2}, \quad m = -5$$

۱۲۱ (۶۶) : د لاندي توابعو تبع ارزښت او جګوالی (میلان) د $x = 0$ په Ҳای کي پیدا کړئ.

$$\text{a) } f(x) = x \cdot \ln x, \quad x_0 = 1 \quad \text{b) } f(x) = \sin x^2, \quad x_0 = \sqrt{\pi}$$

۱۲۲ (۶۷) په کومو Ҳایونو کي لاندي توابع پروت تانجنت لري؟

$$\text{a) } f(x) = x^2 e^{-x} \quad \text{b) } f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

۱۲۳ (۶۸) د کومو ارزښتونو لپاره د $x_0 = 0$ په Ҳای د ګراف د $f(x) = (x + a) \cdot e^x$.

کي ۲ جګوالی لري؟

۱۲۴ (۶۹) د لاندي توابعو تول Ҳایزې (لوکال) خوراچګ تکي وبنایاست.

$$\text{a) } f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10 \quad \text{b) } f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1$$

$$\text{c) } f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 15x + 7 \quad \text{d) } f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$$

$$\text{e) } f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x \quad \text{f) } f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{10}{3}x^3 + 6x^2 - 2$$

۱۲۵ (۷۰) په وضعیه قیمت سیستم (پروت ولار سیستم) د لاندي توابعو تول خورا جګ تکي وبنایاست:

که د f تابع د $x = 0$ په Ҳای کي یو نسبی خورا جګ تکي پروت وي، نو د مشتق تابع f' ګرف د په $x = 0$ Ҳای کي صفر Ҳای لري.

د دې لپاره د f او د f' ګراف په همغه وضعیه قیمت سیستم کي رسم کړئ.

$$\text{a) } f(x) = x^3 - 3x \quad \text{b) } f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

(٧١) د n -مې درجي يو تام راشنل تابع خورا زيات خومره لوکال (حایز) افراطي چایونه لرودي شي؟

(٧٢) ولی د جگتكىي لپاره شرایط ارىين نه دي؟

(٧٣) د لاندى توابعو لوکال (حایز) انحرافي (افراطي) چایونه و تاكى.

$$a) f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + 8x - 1 \quad b) f(x) = \frac{1}{3}x^4 + 1$$

$$c) f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + \frac{8}{3}x \quad d) f(x) = x^4 - 4$$

(٧٤) د لاندى توابعو تول لوکال انحرافي تكى پيداكرئ.

$$a) f(x) = \frac{x^2 - 12x + 27}{x^2 - 4x + 5} \quad b) f(x) = \frac{x^2}{1-x}$$

$$c) f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2 + 2} \quad d) f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

د نه راشنل توابعو افراطي چایونه

بىلگە:

د تول f اكسپوننشل توابعو د سره لوکال (حایز) افراطي چایونه دى پيداشي.

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x(2+x) \cdot e^x$	١ . مشتق
$f''(x) = (2+2x) \cdot e^x + (2x+x^2) \cdot e^x = (2+4x+x^2) \cdot e^x$	٢ . مشتق

ارىين شرایط

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(2+x) \cdot e^x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2$$

پوره كېدونكىي شرایط

$$\text{او } e^{-2} = \frac{1}{e^2} > 0 \text{ لە } f''(-2) = (2-8+4) \cdot e^{-2} = -2 \cdot e^{-2} < 0$$

$$f''(0) = 2 \cdot e^0 = 2 > 0 \quad f''(0) = 2 \cdot e^0 = 2 > 0$$

د تابع ارزښتونه

$$f(-2) = 4 \cdot e^{-2} \approx 0.54, \quad f(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \\ f(-2) = 4 \cdot e^{-2} \approx 0.54, \quad f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$$

پايله:

تابع (H(-2 | 0,54) او T(0|0) جگتكىي تابع چييتىكى لري.

(٧٥) د لاندى توابعو تول لوکال افراطي تكى پيداكرئ.

- a) $f(x) = e^{-4x^2}$ b) $f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^x$
 c) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ d) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

(٧٦) د تابع تول لوکال افراطی ارزښتونه دي په دې لاندی انتروال کې ولتول شي.
 $-2\pi \leq 2\pi$.

a) $f(x) = \sin^2 x$ b) $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2})$

(٧٧) لاندی توابعو تول لوکال او ګلوبال افراطی ځایونه پیدا کړئ.

- a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$
 c) $f(x) = x - \sqrt{x}$ d) $f(x) = 3 + \sqrt[3]{x^2}$

(٧٨) لومړی د مطلق ارزښت وشمېږي او پسي تول افراطی ارزښتونه وټاکي.

a) $f(x) = |x| + x^2$ b) $f(x) = |x^2 + 2x - 8|$

د مات کسری توابعو د سره د انعطاف تکي (اورونتکي)
 بېلګه:

د تابع د سره د انعطاف تکي پيداکونه
 $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x - 1)^2}, x \neq 1$

د مشتق جورښت د ويژه د قاعدي سره

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x - 1)(x - 1)^2 - (x^2 - x - 2) \cdot 2 \cdot (x - 1)}{(x - 1)^4} \\ &= \frac{(2x - 1)(x - 1) - 2(x^2 - x - 2)}{(x - 1)^3} = \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - 2x^2 + 2x + 4}{(x - 1)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{5 - x}{(x - 1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot (x - 1)^3 - (5 - x) \cdot 3 \cdot (x - 1)^2}{(x - 1)^6} = \frac{-1(x - 1) - 3(5 - x)}{(x - 1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2x - 14}{(x - 1)^4}$$

د انعطاف تکي لپاره اړیبن شرطونه:

$$\frac{2x - 14}{(x - 1)^4} = 0 \Rightarrow 2x - 14 = 0 \Rightarrow x_1 = 7$$

د مخنښي له مخي د پوره کیدونکو شرطونو ازماښت $\dagger''(x)$

$$f''(6) = \frac{12 - 14}{5^4} = -\frac{2}{5^4} < 0, \quad f''(8) = \frac{16 - 14}{7^4} = +\frac{2}{7^4} > 0$$

$$\Rightarrow W(7 / \frac{10}{9})$$

د انعطاف - يا اورونتكى دى. $W(7 / \frac{10}{9})$

١٣٨: د لاندى توابعو د انعطاف تكى پيدا كرئ.

a) $f(x) = \frac{2x - 2}{x^2}$	b) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$
c) $f(x) = \frac{x^3}{3(x-1)^2}$	d) $f(x) = \frac{x^3 - 8}{4x}$

١٣٩: و بنائي، چي د تابع د انعطاف تكى زينتكى دى.

١٤٠: د لاندى توابعو د انعطاف تكى (اورونتكى) پيدا كرئ.

a) $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$	b) $f(x) = \ln \frac{1}{x^2 + 1}$
------------------------------	-----------------------------------

١٤١: په انتروال $0 \leq x \leq 2$ د انعطاف خايونه پيدا كرئ.

a) $f(x) = x + \sin x$	b) $f(x) = 2(1 - \sin 2x)$
------------------------	----------------------------

١٤٢: لاندى كسرى راشنل توابع د تعريف تشاپه اironد و خيرئ.
وبنائي چي ايا دا متمادي(ناپريکيدونكى) له منحه ورونكى تعريف تشايلري او كه قطبخايونه دى.

a) $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$	b) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x + 2}$
c) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3}$	d) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{1 + x}$

١٤٣: و خيرئ، چي ايا لاندى توابع د $x = 0$ په خاي كي ناپريکيدونكى دى.

a) $f(x) = \begin{cases} -2x & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases}$	لپاره $x_0 = 0$	b) $f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq 1 \\ x^2 + 1 & x > 1 \end{cases}$	لپاره $x_0 = 1$
c) $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq 0 \\ e^x & x > 0 \end{cases}$	لپاره $x_0 = 0$	d) $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & x \leq 1 \\ \ln x & x > 1 \end{cases}$	لپاره $x_0 = 1$

١٤٤: د تعريف ست(تعريفدېرى) د كومو توکو لپاره لاندى توابع نه دى تعريف؟

- | | |
|--|--|
| a) $f(x) = x^2 - 2 $
c) $f(x) = \sqrt{2x - 4}$
e) $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ | b) $f(x) = 2x - 1 $
d) $f(x) = x + x + 1 $
f) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ |
|--|--|

١٤٥) لاندي توابع په x_0 کي په مشتقوريتيا باندي و خبرئ.

$$a) f(x) = \begin{cases} \cos x & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0 \quad b) f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1, \quad x_0 = 1 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 1 \\ e^{x-1} & x \geq 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1 \quad d) f(x) = \begin{cases} \ln x & x \leq 1 \\ x - 1 & x > 1, \quad x_0 = 1 \end{cases}$$

١٤٦) او ذ داسي و تاکي، چي f تابع په x_0 کي مشتقور ده

$$a) f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 0 \\ x^2 + 2x & x > 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0 \quad b) f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & x < 1 \\ x + 1 & x \geq 1, \quad x_0 = 1 \end{cases}$$

١٤٧) ولی متماديت د مشورتيا لپاره اړين شرط، مګر مشتقوروالی د متماديت لپاره پوره کېدونکي شرط دی؟

١٤٨) په کوم دليل تام راشنل توابع د $x \in R$ لپاره مشتقور دي؟
دا لاندي توابعو مونوتوني (جگ - تېټوالې) و خبرئ.

- 1) $f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x - 6$
- 2) $f(x) = x^3 + 4$
- 3) $\ln \frac{1}{x+1}$

١٤٩) لاندي تام راشنل توابع په همغږيزوالې خويونو و خبرئ.

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$
c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ | b) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 12x$
d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + 2$ |
|---|---|

١٥٠) د لاندي ماترآشنل توآبعو د مونوتوني حالت د د a په واکوالې کي ورکړئ.

$$a) f(x) = \frac{1}{ax + 2} \quad b) f(x) = \frac{1}{ax^2 + 1}$$

١٥١) و خبرئ، چي ايا لاندي توابع په خپله پېزند ورشو مونوون او که په کلکه مونوتون دي.

$$a) f(x) = \frac{e^x}{2+e^x}$$

$$b) f(x) = 2x^5 - 7$$

$$f(x) = \frac{e^x}{2+e^x}$$

$$b) f(x) = 2x^5 - 7$$

١٥٢ (٩٧): لاندی ناراشنل توابع په یو غږیزوالي خويونو وڅېر.

$$a) f(x) = e^{x^2}$$

$$b) f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$$

١٥٣ (٩٨): په کومه ورشو کي لاندی تام راشنل توابع یو کین کړوالی لري او په کون کي بنی کړوالی لري.

$$a) f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 2$$

$$b) -2x^3 + 3x^2 - x - 4$$

١٥٤ (٩٩): د لاندی مات توابعو ګرافونه هاپارابول څانګي کوم کړوالی لري؟

$$a) f(x) = \frac{1}{4x+1}$$

$$b) f(x) = 3 - \frac{3}{x^2}$$

١٥٥ (١٠٠): په کومه ساحه کي لاندی ناراشنل توابع یو کین او په کوم کي یو بنی کړوالی لري؟

$$a) f(x) = x \cdot e^{2-x}$$

$$b) f(x) = \ln x^2$$

١٥٦ (١٠١): ولی د یوه دريمې درجي تام راشنل تابع ګراف په تل تنه کي یوه بنی انخنا (کړوالی) نه لري.

١٥٧ (١٠٢): ولی یو څلورمه درجه تامرashنل تابع د $f(x) = ax^4 + dx + e$ سره یو تلتلونی کينه انخنا (کړوالی) او بنی انخنا لري؟

١٥٨ (١٠٣): څنګه کېدی شي، چې د یوی f تابع د ۱ . درجي مشتق څه د د ګراف په انخنا قضاوت وکرو؟

١٥٩ (١٠٤): لاندی توابع په ضربهایونو وڅېرئ؟

$$a) f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$$

$$b) f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 4}$$

$$c) f(x) = \frac{x}{x^2 - 3}$$

$$d) f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2}$$

$$d) f(x) = \frac{x + 5}{x^2}$$

$$f) f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 4}{x}$$

١٦٠ (١٠٥): د لاندی توابعو حالت وڅېرئ، که $|x| \rightarrow \infty$ په لور لار شي.

$$a) f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x - 5$$

$$b) f(x) = -3x^4 + x^3 - 2x^2 + x$$

$$c) f(x) = \frac{1}{3}x^5 - x + 6$$

$$d) f(x) = -\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$$

$$e) f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}$$

$$f) f(x) = -x^3 - x^2 - x - \frac{1}{3}$$

١٦١ (١٠٦): د لاندی مات راشنل توابعو حالت وڅېرئ، که $|x| \rightarrow \infty$ په لور لار شي. که شتون ولري، نو د اسيمپتوت (مجانب) همداسي د ورنبردي منحنۍ مساوات ورکړئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - x}{-4x^3 + 2x - 3} & b) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 3} \\
 c) f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 7x - 3}{x^2 + 3} & d) f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5x + 3}{x + 1} \\
 e) f(x) = \frac{-3x^3 + 4x^2 + x - 3}{x^2 - 1} & f) f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x}{x + 1} \\
 g) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 5}{x^4 + 3x^2 - 2x - 3} & h) f(x) = \frac{2x^2 + 4x - 1}{3x^2 - x + 2}
 \end{array}$$

۱۶۲(۱۰۷): د نارئستونی توابعو حالت و خبری، که $|x| \rightarrow \infty$ لار شي.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = 3 + 2^x & b) f(x) = 1 - \ln |x| \\
 c) f(x) = e^{|x|} - 3 & d) f(x) = x + e^x
 \end{array}$$

۱۶۳(۱۰۸): ولی د لپاره په ساده ډول د پولی په هکله وراند و بینه نه شي کېدای:

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = x^3 \cdot \frac{1}{\ln x} & b) f(x) = x \cdot e^{-x}
 \end{array}$$

۱۶۴(۱۰۹): لاندی تامر اشنل شونی اعداد په سیومتری و خبری.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = x^3 + x^2 - 1 & b) f(x) = -x^4 + 2x^2 - 3 \\
 c) f(x) = 3x^3 + x & d) f(x) = x^2 + 1
 \end{array}$$

۱۶۵(۱۱۰): یو و سرچېنی تکي سره تکي سیومتر تام ریښتونی دريمه درجه تابع $H(2,5)$ جګتکي لري. د دي تابع تېټکي کوم وضعیه ارزښتونه لري؟

۱۶۶(۱۱۱): یو د څلورمي درجي تابع د - محور ته سیومتری تابع یو تېټکي په (-3,4) کي لري.

د بل افراطی تکي وضعیه قېمتونو په هکله خه ويلاي شي؟

۱۶۷(۱۱۲): د جوره(جفت) جګعدد(اکسپوننت) سره تام ریښتونی تابع کوم ډول سیومتری لري؟

۱۶۸(۱۱۳): د ناجوره(طاق) جګعدد(اکسپوننت) سره یو تام ریښتونی تابع تېک هلته د سر چېنې سره تکي سیومتری دی، چې مطلق ارزښت صفر شي؟

۱۶۹(۱۱۴): لاندی تام ریښتونی اعداد په سیومتری و خبری.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} & b) f(x) = \frac{x^5 - 2x^3 + x}{x^3 - x} \\
 c) f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^4 + 2x^2 - 3} & d) f(x) = \frac{3}{x^3 - 1}
 \end{array}$$

۱۷۰(۱۱۵): لاندی ناریښتونی اعداد په سیومتری و خبری.

$$a) f(x) = x^2 \cdot e^{|x|} \quad b) f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

په گوته کونه (لارښود): توابع بي له بنسټ کي يادشوی سیومتری خويونو ، نور سیمتری خويونه هم ولري.

١٧١(١١٦): لاندي توابع په بنسټ کي لوستل شوي سیومتری خويونه نه لري. وبنائي چي دا سره له دي هم سیومتریک دي.

$$a) f(x) = (x+2)^2 \quad b) f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$c) f(x) = -(x+1)^2 + 3 \quad d) f(x) = 2 + \frac{1}{x-4}$$

١٧٢(١١٧): لاندي تام ریښتونی اعداد په محدودیت وڅېږي.

$$a) f(x) = x^2 - 2x + 4 \quad b) f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x$$

$$c) f(x) = -(x+3)^2 + 1 \quad d) f(x) = x^3 - 2x + 1$$

١٧٣(١١٨): لاندي کسر ریښتونی اعداد په محدودیت وڅېږي.

$$a) f(x) = 1 - \frac{2}{x+4} \quad b) f(x) = 1 - \frac{2}{x^2 + 4}$$

$$c) f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad d) f(x) = \frac{1}{x^2} - 5$$

١٧٤(١١٩): لاندي ناریښتونی اعداد په محدودیت وڅېږي.

$$a) f(x) = 2 - e^x \quad b) f(x) = x^2 + |x| + 2$$

$$c) f(x) = \sqrt{4-x^2} \quad d) f(x) = 2 + \sin 2x$$

١٧٥(١٢٠): لاندي پوله ارزښتونه وشمېږي.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2^x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{e^x} \quad f) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)$$

١٧٦(١٢١): د لوپیتال قاعدي په مرسته د $x \rightarrow \infty$ توابعو پوله ارزښتونه وشمېږي.

$$a) f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1} \quad b) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$$

١٧٧(١٢٢): لاندي مساوات تېک یو صفرخای لري. دا د تانجنت له لاري نر دوه لسمېزو ځایونو وټاکئ.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = x^3 - 2x - 3 & b) f(x) = x^3 - x^2 - 15 \\ c) f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 5 & d) f(x) = x^5 + x^3 - 20 \end{array}$$

(123) 178: د لاندي توابعو لپاره د $x=0$ په ئاي کي د تانجنت مساوات و تاکي

(124) 179: په کومو تکو کي د لاندي مساواتو لپاره د تانجنت مساوات د ورکر شوي کربني سره غبرگ دي؟

(125) 180: د $x = x_0$ په ئاي کي د لاندي توابعو لپاره د تانجنت مساوات و تاکي

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2, & x_0 = -1 \\ b) f(x) = \frac{3 - x^2}{2x - 1}, & x_0 = 1 \\ c) f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln x, & x_0 = 1 \end{array}$$

(126) 181: د لاندي توابعو لپاره په کومو تکو کي تانجنت د ورکر شوو کربنو سره غبرگ دي؟

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2x - 5, & g: y = 2x \\ b) f(x) = \frac{3x - 4}{x}, & g: y = x + 2 \end{array}$$

(127) 182: تول راشنل تابع f_t د سره له سرچيني څخه تيرپوي.

هله د تانجنت مساوات پيدا کړئ د t په تابعيت کي.

(128) 183: د t د کوم ارزښت لپاره د $x_0 = -3$ په ګراف تانجنت په ڈټکټور ګراف سره غبرګه ده؟

$$g: y = \frac{3}{8}x + 2$$

(129) 184: په تکي $f(x) = (x - t) \cdot e^x$ کي د نه راشنل فنكشن ډې ګراف د سره د تانجنت برابرون یا مساوات و تاکي.

(130) 185: په f تابع د $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 1$ سره په تکي $P(0, -9)$ کي د تانجنت مساوات و تاکي.

(131) 186: د تام ریستونی f تابع د $f(x) = x^3 - 3x - 1$ سره تانجنت په تکي $P(-2, 5)$ کي و تاکي.

(132) 187: د مات ریستونی f تابع د $f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x}$ سره د تانجنت مساوات په تکي $P(-1, -\frac{4}{3})$ و تاکي.

(133) 188: د لاندي تام ریستونی توابعو د انعطاف تکي (اوړونټکي) او د نورمالي مساوات وليکي.

$$a) f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3} \quad b) f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 2x + 10$$

(134) 189: د لاندي تابع د

$$f_t(x) = \frac{4}{3}t^2x^3 + 3tx^2 + 3x \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

سره د انعطاف – يا اوپونتکي مساوات ولیکي.

(١٣٥) : د اکسپوننشم تابع د انعطاف تک او په انعطاف تکي د نورمال مساوات پیداکړي.
 $f(x) = (x - 2) \cdot e^x$

$$(136) 191$$

$$f_t(x) = t \sin x + t \cos x \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

په انتروال $0 \leq x \leq \pi$ کې.

(١٣٧) : د لاندي توابعو لپاره د منحنيو شننيز بحث وکړئ او ګرافونه يې و کابوئ.

- | | |
|---------------------------------|--|
| a) $f(x) = -x^3 + x^2 + 4$ | b) $f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$ |
| c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2$ | d) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ |

(١٣٨) : د لاندي توابعو لپاره د پوره منحنيو يا کېو مطالعه وکړئ او ګرافونه يې و کابوئ.

- | | |
|---|---------------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{x}{4} - \frac{2}{x^2}$ | b) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$ |
| c) $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1}$ | d) $f(x) = \frac{9}{x^2 + 3}$ |

انتیگرالشميرني ته پونتني

1- لاندي نااصلی پولینومونه دي د یوه تول نسبتي- يا راشنل عدد پولینومونو او یوه اصلی پولینوم د جمعي په خبر ولیکل شي.

- | | |
|---|--|
| a) $\frac{x^3 + 7x^2 + 9x - 5}{x + 5}$ | b) $\frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2 - 2}$ |
| c) $\frac{x^3 - 2x^2 + x - 5}{x^3 + 1}$ | d) $\frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$ |
| e) $\frac{x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 3}{x - 2}$ | f) $\frac{x^5 - x^4 + 1}{x^2 + 2}$ |

- ۲

- | | |
|--|---|
| a) $\frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$ | b) $\frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$ |
| c) $\frac{4x + 10}{x^2 + 6x + 8}$ | d) $\frac{-3x^2 + 19x - 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$ |
| e) $\frac{4x^2 + 6x - 20}{x^3 - 4x}$ | f) $\frac{14}{x^2 + 20x + 51}$ |

۳ - د لاندي اصلی پولينومونو په توتنه کسرونو توتنه ونه وکاروئ.

$$a) \frac{3x^2 + 5x + 10}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} \quad b) \frac{3x^2 - 18x + 36}{x^3 - 6x^2 + 9x}$$

$$c) \frac{x^2 + 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1} \quad d) -\frac{x^2 + 13x + 10}{x^3 - 5x^2}$$

۴ - د لاندي اصلی پولينومونو په توتنه کسرونو توتنه گونه ورکړئ.

$$a) \frac{x^2 + 2x - 12}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5} \quad b) \frac{4x^2 - 3x + 8}{x^3 - 2x + 4}$$

$$c) \frac{8x^2 - 16x + 10}{x^3 - 4x^2 + 5x} \quad d) \frac{x}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$$

۵ - د لاندي پولينوم کسرونو په توتنه کسرونو توتنه گونه ړرکړئ.

$$a) \frac{x^3 + 7x^2 + 17x + 17}{x^2 + 6x + 8} \quad b) \frac{2x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 4}{x^2 - 4x + 3}$$

$$c) \frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1} \quad d) \frac{4x^3 + 16x^2 - 7x - 49}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$$

۶ - و بنائي، چي د F تابع د f تابع لومړنی تابع ده.

$$a) f(x) = 2x^2 + 4x - 7, \quad f(x) = 4x + 4$$

$$b) F(x) = (x^2 - x)^3, \quad f(x) = 3 \cdot (2x - 1) \cdot (x^2 - x)^2$$

$$c) F(x) = \sqrt{2x + 1}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$$

$$d) F(x) = 1 + \sin x, \quad f(x) = 3x \cdot \cos 3x$$

$$e) F(x) = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \frac{4}{9}x^3, \quad f(x) = x^2 \cdot (\ln x - 1)$$

۷ - و بنائي، چي د F او G توابع د همغه f تابع لومړنی توابع دي.

$$a) F(x) = x^3 + x + 4, \quad G(x) = x^3 + x + 1$$

$$b) F(x) = (x - 3)^2, \quad G(x) = x^2 - 6x + 4$$

$$c) F(x) = \frac{x + 1}{x + 2}, \quad G(x) = \frac{3x + 5}{x + 2}$$

$$d) F(x) = 1 + \sin x, \quad G(x) = \sin x$$

۱۲ - لاندي ناتاکلې انتیگرالونه پیداکړئ او تېکوالۍ بې و ازماي.

$$\begin{array}{lll}
a) \int x^3 dx & b) \int 7dx & c) \int xdx \\
d) \int (1-x^2)dx & e) \int (x + \frac{1}{x})dx & f) \int (e^x + \cos x)dx \\
g) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx & h) \int \frac{5}{\cos^2 x} dx & i) \\
i) \int u dx & k) \int (2+e^x)dx & l) \int (1+\ln x)dx & m) \int (\sqrt{x} + \sin)dx
\end{array}$$

١٤ - د لاندي تاكلو انتيگرالونو ارزبنت وشمېرى

$$\begin{array}{lll}
a) \int_0^3 4dx & b) \int_{-3}^{-1} xdx & c) \int_1^e \frac{1}{x} dx \\
d) \int_1^e (2 + \frac{1}{x})dx & e) \int_{-1}^0 e^x dx & f) \int_0^{\pi} \sin x dx \\
g) \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4dx & h) \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x} dx & i) \int_{-2}^2 x^3 dx \\
j) \int_2^6 (1+x)dx & k) \int_1^2 (x^2 - x^5)dx & l) \int_{-2}^2 (\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3})dx
\end{array}$$

١٥ = د لاندي تاكلو انتيگرالونو ارزبنت وشمېرى او ارزبنتونه يې سره پرتله کوي.

$$\begin{array}{lll}
a) \int_{-3}^1 3dx \text{ und } - \int_{-3}^1 3dx & b) \int_0^1 (1+e^x)dx \wedge - \int_1^0 (1+e^x)dx \\
c) \int_{-\pi}^0 \sin x dx \wedge - \int_0^{-\pi} \sin x dx
\end{array}$$

١٦ - هر دوه انتيگرالونه د يوه انتيگرال سره انخور کري.

$$\begin{array}{lll}
a) \int_0^{0.5\pi} \cos x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi} \cos x dx , & b) \int_{-1}^0 (x + e^x) dx + \int_0^1 (x + e^x) dx \\
c) \int_2^3 3x^2 dx - \int_5^3 3x^2 dx , & d) \int_{-2}^1 (2+x) dx - \int_{-4}^1 (x + e^x) dx
\end{array}$$

١٧ - د لاندي تاكلو انتيگرالونو لپاره ارزبنت تخمين کري.

$$\begin{array}{lll}
a) \int_{-4}^{-2} e^{x+3} dx & b) \int_0^8 \sqrt{1+x} dx & 1 \\
c) \int_3^5 2^{4-x} dx & d) \int_0^{0.5\pi} \sin^2 x dx
\end{array}$$

۱۹ - د کومو x ارزښتونو لپاره لاندی انتیگرالونه و رکړشوي ارزښتونه لري؟

$$a) \int_1^x 5t^4 dt, \quad la(x) = 31$$

$$b) \int_0^x e^t dt, \quad la(x) = e - 1$$

۲۰ - لاندی انتیگرال توابع ته د انتیگرال توابع و تاکي.

$$a) f(x) = x^2, \quad a = 3, \quad b) f(x) = 2 + e^x, \quad a = 0$$

$$c) f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad a = 0, \quad d) f(x) = 2, \quad a \in IR$$

۲۱ - لاندی ناتاکلي انتیگرالونه پیداکړي

$$a) \int \sqrt[4]{x^3} dx$$

$$b) \int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx$$

$$c) \int \sqrt[6]{x^5} dx$$

$$d) \int x^2 \cdot \sqrt[3]{x} dx$$

$$e) \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx$$

$$f) \int \frac{x^3}{x^4} dx$$

$$g) \int \frac{x^3 \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$h) \int \frac{\sqrt[4]{x^2}}{x \cdot \sqrt{x^3}} dx$$

۲۲ - لاندی ناتاکلي انتیگرالونه پیداکړي

$$a) \int 8x^3 dx$$

$$b) \int -4x^{-2} dx$$

$$c) \int \frac{3}{-x^3} dx$$

$$d) \int \sqrt[3]{3x} dx$$

$$e) \int k \cdot e^x dx$$

$$f) \int -5x^n dx; n \neq 0$$

$$g) \int \frac{\sin x}{2} dx$$

$$h) \int \frac{3a}{2 \cdot \cos^2 x} dx$$

$$i) \int \frac{2\sqrt{x}}{3x^3} dx$$

$$j) \int \frac{-\sqrt{2}}{3x} dx$$

۲۳ - د توان قانون په مرسته يو ثابت ضریب بېل کړي او د دی پسي لاندی ناتاکلي انتیگرال و تاکي.

$$a) \int e^{x+3} dx$$

$$b) \int (4x)^3 dx$$

$$c) \int a \cdot e^{x+b} dx$$

$$d) \int (7x^2)^4 dx$$

۲۴ - لاندی ناتاکلي انتیگرالونه و شمېرۍ

$$a) \int (x^2 + 3x - 4) dx$$

$$b) \int (x - \sqrt{x}) dx$$

$$c) \int (5x^3 - 7x + 4) dx$$

$$d) \int (1+x)^2 dx$$

$$e) \int x^2(x^2 + 2) dx$$

$$f) \int x^2(1+x)(x-1) dx$$

$$g) \int (\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2}) dx$$

$$h) \int (\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5}) dx$$

$$i) \int (5x - \frac{1}{3} + \frac{\cos x}{3}) dx$$

$$k) \int (5 + x^5 + \sin x) dx$$

$$l) \int (e^x - \frac{1}{\sin^2 x}) dx$$

$$m) \int (\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x}) dx$$

۲۵ - لاندی ناتاکلي انتیگرالونه لوړۍ په یوه جمعه واروئ او وریسي انتیگرالونه و تاکي.

$$a) \int \frac{(x^2 - 1)^3}{x} dx$$

$$b) \int \frac{(1 - \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx$$

$$c) \int \frac{e^{2x} + e^{x+2}}{e^x} dx$$

$$d) \int \frac{(3x^2 + 2x - 4)}{x^3} dx$$

۲۶ - لاندی ناتاکلي انتیگرالونه و شمېرۍ.

$$\begin{array}{llll}
 a) \int 3^{x+1} dx & b) \int 2^{-x} dx & c) \int a^{x+b} dx & d) \int \frac{1}{a^x} dx \\
 e) \int 2^x \cdot 3^x dx & f) \int \frac{2^x}{3^x} dx & g) \int \frac{4^{x+3}}{2^x} dx \\
 h) \int \frac{5^x + 3^x}{2^x} dx & i) \int (1+2x^x) dx & j) \int (x-3^x) dx
 \end{array}$$

٢٧ - لاندي ناتاكلی انتيگرالونه وشمپري

$$\begin{array}{ll}
 a) \int \ln 2x^3 dx & b) \int \ln \sqrt{x} dx \\
 c) \int \lg \frac{x}{2} dx & d) \int \log_3 \frac{1}{x} dx
 \end{array}$$

٢٨ - د مشتق د قوانينو په مرسته وبنائي، چي تابع $F = x \cdot \ln x - x$ سره يو لومني تابع ده
و $f(x) = \ln x$ تابع ته

٢٩ - د انتيگرال شمپري په مرسته د عمومي لوگارتيم تابع لپاره د طبيعي لوگارتيم له فرمول
څخه د انتيگرال فرمول راوباسي.

٣٠ - لاندي ناتاكلی انتيگرالونه د بدلون په طريقه وشمپري.

$$\begin{array}{lll}
 a) \int \frac{10}{5x-7} dx & b) \int \frac{12}{(1+3)^4} dx & c) \int \frac{1}{5-4x} dx \\
 d) \int \frac{a}{bx+d} dx & e) \int (5x+7)^3 dx & f) \int (ax+b)^n dx \\
 g) \int \sqrt{4x-2} dx & h) \int \sqrt{ax+b} dx & i) \int \frac{7}{\sqrt{2x+5}} dx \\
 j) \int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx & k) \int \sin 4x dx & l) \int \frac{3}{e^{2x}} dx
 \end{array}$$

$$n) \int \cos(3x + \frac{\pi}{4}) dx \quad o) \int e^{3x-5} dx$$

٣٢ - لاندي ناتاكلی انتيگرالونه وشمپري.

$$\begin{array}{ll}
 a) \int \frac{\ln x}{x} dx & b) \int x(x^2 + 3) dx \\
 c) \int 3x^2(x^3 - 1) dx & d) \int (2x-1)(x^2 - x) dx
 \end{array}$$

$$\int f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} (f(x))^2 + C$$

وشمپري.

٣٣ - د بدلون قاعدي په مرسته

٣٤ - لاندي ناتاكلی انتيگرالونه وشمپري، بنه يې بدله کړئ، که اړین وي.

$$a) \int \frac{x^2}{4+x^3} dx \quad b) \int \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2-1} dx$$

٣٥ په لاندي انتيگرالونه پربکره وکړئ، چې ایا لوګاريتمي يې انتيگرال نيوه کېږي شي او یا د بدلون قانون باید و کارول شي؟

$$a) \int \frac{5x^4}{3+x^5} dx \quad b) \int \frac{5x^4}{(3+x^5)^2} dx \quad c) \int \frac{3x}{(1-x^2)^4} dx$$

$$d) \int \frac{5x}{4-x^2} dx \quad e) \int \frac{\cos x}{3+\sin x} dx \quad f) \int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2} dx$$

٣٦ - لاندي ناتاکلي انتيگرالونه پیدا کړئ. لومړۍ يې بنه بدله کړئ، که اړبین وي.

$$a) \int \frac{4}{x^2+9} dx \quad b) \int \frac{3}{2x^2+2} dx \quad c) \int \frac{1}{x^2+2} dx$$

$$d) \int \frac{2}{3x^2+5} dx \quad e) \int \frac{1}{x^2+a^2} dx \quad f) \int \frac{1}{ax^2+b} dx, ab > 0$$

٣٧ - وبنائي، چې دا لاندي انتيگرالونه (هغه، چې انتيگرال يې نیوں کېږي) صفر خایونه نه لري. پسي تېلې ناتاکلي انتيگرالونه وشمېږي.

$$a) \int \frac{1}{x^2+4x+13} dx \quad b) \int \frac{5}{x^2+2x+2} dx$$

$$c) \int \frac{6}{3x^2+18x+30} dx \quad d) \int \frac{2}{2x^2+8x+58} dx$$

٣٨ لاندي ناتاکلي انتيگرالونه وشمېږي. لومړۍ يې، که اړبین وي، بنه بدله کړئ.

$$a) \int \frac{2}{\sqrt{9-x^2}} dx \quad b) \int \frac{1}{\sqrt{2-4x-x^2}} dx \quad c) \int \frac{1}{\sqrt{2x^2-2}} dx$$

$$d) \int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x-2}} dx \quad e) \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx \quad f) \int \frac{6}{\sqrt{9x^2+9}} dx$$

٣٩ - لاندي ناتاکلي انتيگرالونه وشمېږي، لومړۍ يې که اړبین وي ، بنه بدله کړئ.

$$a) \int \frac{1-x}{x^2+x+1} dx \quad b) \int \frac{2x+1}{x^2+4x+6} dx$$

$$c) \int \frac{3x}{2x^2+2x+8} dx \quad d) \int \frac{x-3}{x^2+8x+17} dx$$

٤٠ - لاندې انتيگرالونه د توهه انتيگرالونی له لاري پیداکړئ يا وشمېږي.

$$a) \int x \cdot e^x dx \quad b) \int x \cdot \sin x dx \quad c) \int x^2 \cdot \ln x dx$$

$$d) \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad e) \int x \cdot e^{2x} dx \quad f) \int x \cdot \sin 2x dx$$

٤١ - لاندي ناتاکلي انتيگرالونه د توهه انتيگرال له لاري وشمېږي. که اړبینوي، نو په ٤٠ م تمرين کي شمېرلې نتيجي وکارومند.

- a) $\int x^2 \cdot \cos x dx$ b) $\int x^2 \cdot e^x dx$
 c) $\int x^2 \cdot e^{2x} dx$ d) $\int x^2 \cdot \cos 2x dx$

د پورته کارولی ریکورزیون () فرمول په مرسته لاندی ناتاکلی انتیگرالونه وشمېری.

- a) $\int x^4 \cdot e^{2x} dx$ b) $\int \sin^4 x dx$
 c) $\int x^3 \cdot e^{2x} dx$ d) $\int \cos^6 x dx$

٤ - لومړی د ټوټه کسر ټوټه ونه سرته ورسوئ او بالاخره لاندی ناتاکلی انتیگرالونه حل کړي.

- a) $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$ b) $\int \frac{1}{x^2 + 6x + 8} dx$
 c) $\int \frac{3x + 2}{x^2 - x - 2} dx$ d) $\int \frac{x^2 - 12x + 12}{x^3 - 4x} dx$

اصلی مات رئښتونی توابع، چې صورت (متلاندی) هم لاینټز یا کربنیز ضریبونه لري.
 ٥ - لومړی به ټوټه کسر ټوټه ونه سرته ورسوئ او بیا لاندی نابلي انتیگرالونه حل کړي

- a) $\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} dx$ b) $\int \frac{3x}{x^2 - 6x + 9} dx$
 c) $\int \frac{x^3 - 1}{x^4 + x^3} dx$ d) $\int \frac{5x^3 - 11x^2 + 5x + 4}{(x-1)^4} dx$

٦ - لومړی د هریوه لپاره په ټوټه کسر ټوټه ونه سرته ورسوئ او بالاخره لاندی ناتاکلی انتیگرالونه وشمېری.

- a) $\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)} dx$ b) $\int \frac{3x + 4}{x^3 - 2x - 4} dx$
 c) $\int \frac{2x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 - x - 2} dx$ d) $\int \frac{7x^2 - 10x + 37}{x^3 - 3x^2 + 9x + 13} dx$

٧ - لومړی د پولینوم ويش سرته ورسوئ او پسي لاندی ناتاکلی انتیگرالونه پیداکړي.

- a) $\int \frac{x^2}{x+1} dx$ b) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{x^2 - 1} dx$
 c) $\int \frac{3x^3 + 5x^2 - 29x - 25}{x^2 + x - 12} dx$ d) $\int \frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1} dx$

٨ - لاندی ناتاکلی انتیگرالونه پیداکړي.

- a) $\int \sqrt{x^2 - 5} dx$ b) $\int \sqrt{5x^2 + 10} dx$
 c) $\int \sqrt{x^2 - 6x + 8} dx$ d) $\int \sqrt{2x^2 + 4x + 6} dx$

٩ - لاندی ناتاکلی انتیگرالونه وشمېری.

$$\begin{array}{ll} a) \int \sqrt{x^2 + 2x} dx & b) \int \sqrt{x^2 - 4x} dx \\ c) \int x \cdot \sqrt{x^2 + 4x + 3} dx & d) \int (x+2) \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 2} dx \end{array}$$

٥ - لاندي ناتاكلی انتيگرالونه وشمپري.

$$\begin{array}{llll} a) \int \frac{x^2}{x} dx & b) \int \frac{1}{x^3} dx & c) \int (1 - 2x^2 + x^3) dx \\ d) \int (x^2 - 3x - 6) dx & e) \int x \cdot \sqrt{x} dx & f) \int x^2 \cdot \sqrt[3]{x} dx & g) \int \frac{x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}} dx \\ h) \int \frac{3x \cdot \sqrt{x^3}}{x^2} dx & i) \int \frac{x^2 + 3x - 2}{x} dx & j) \int \frac{x-5}{\sqrt{x}} dx \end{array}$$

٦ - لاندي ناتاكلی انتيگرالونه وشمپري.

$$\begin{array}{llll} a) \int 2(5 - 4x)^3 dx & b) \int \sqrt{5x + 2} dx & c) \int x \cdot e^{x^2} dx \\ d) \int x^2 \cdot \sqrt{2x^3 - 4} dx & e) \int \frac{3x + 3}{x^2 + 2x + 1} dx & f) \int \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^3} dx \\ i) \int \frac{x}{x^2 + 2x + 3} dx & j) \int \frac{1}{2x^2 + 9} dx & k) \int \frac{x}{x^2 + 2x - 3} dx \\ l) \int \frac{1}{x^2 - 10x + 25} dx & m) \int \sqrt{x^2 + 2x + 3} dx & n) \int \frac{1}{x^2 + 12x + 40} dx \end{array}$$

٧ - لاندي ناتاكلی انتيگرالونه وشمپري.

$$\begin{array}{llll} a) \int \ln(2x - 3) dx & b) \int \cos 3x dx & c) \int 2^{3x+1} dx & d) \int \lg 4x dx \\ e) \int x \cdot \ln x dx & f) \int \sqrt{x} \cdot \ln x dx & g) \int e^x \cdot \cos x dx & h) \int x \cdot \cos x dx \end{array}$$

٨ - و بنائي، چي لاندي وركرل شوي توابع په وركرشوی انتروال کي لمونئ توابع نه
لري، مگر په I کي انتيگراوري دي.
په لاندي انتروال کي يې انتيگرال ارزبنت وركرئ.

$$\begin{array}{ll} a) I = [-2; 5] & b) I = [-3; 4] \\ f(x) = \begin{cases} -x & ; x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x & ; x > 1 \end{cases} & f(x) = \begin{cases} 2 & ; -3 < x \leq -1 \\ 1 & ; -2 < x \leq 1 \\ 2 & ; 1 < x \leq 4 \end{cases} \end{array}$$

٩ - د f تابع د I=[-3,3] سره په انتروال $f(x) = |x-1|$ د x=1 سره مشتقور نه ده،
وبنائي، چي سره له دي هم انتيگرالویر ده.

١٠ - د لاندي توابعو منځني ارزبنت په وركر شوو انتروالونو پيدا کړئ.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = x^2 - 2x + 2 \text{ mit } x \in [-1; 4] \\ b) f(x) = x + 1 \text{ mit } x \in [0; 6] \\ c) f(x) = \sin \text{ mit } x \in [0; \pi] \end{array}$$

د ... سره په معنا mit

٥٦ - و بنایی جي د $f(x)=mx=n$ کربنیز(خطی) تابع $f(x)=mx=n$ منح ارزبنت د سره په انتروال $[a,b]$ نخښه ونه $x_0 = \frac{a+b}{2}$ اعتبار لري..

٥٧ _ په ورکړ شوي انتروال کي د x محور او ګراف ترمنځ سطحي وشمېږي.

$$a) f(x) = x^2 + 1, \quad x \in [-2;1]$$

$$b) f(x) = 2 + \sin x, \quad x \in [0;\pi]$$

$$c) f(x) = -x^2 - 4x - 5, \quad x \in [-3;0]$$

$$d) f(x) = 1 + \frac{1}{x}, \quad x \in [1;e]$$

٥٨ _ د انتروال پورتني پوله b داسي وشمېږي، چي د پاراپول $p: y = x^2 + 2x + 2$ او x -محور ترمنځ سطحه په انتروال $[-2;b]$ کي عدد ٦ ونیسي.

٥٩ _ لاندئ د انتروالپوله a داسي وتاکۍ، چي د پاراپول $p: y = 3\sqrt{x}$ او x -محور تر منح سطحه په انتروال $[a;4]$ کي عدد ١٤ واخلي.

٦٠ - یو پورته لور ته کبنول شوي نورمال پاراپول دي د x -محور سره په انتروال کي $[-1;2]$ یوه سهه د کچ عدد ٩ سره رابنده کړي.

د پاراپول مساوات وتاکۍ.

٦١ - ضریب a داسي وتاکۍ، چي د $f(x)=a \cdot \sin x$ ساین تابع د x -محور سره په انتروال $[0;\pi]$ کي عدد ٤ رابنده کړي.

٦٢ - د کربنی $g: y=0,5x+2$ او د پروټولار سیستم(وضعيه قېمت تر منح) سطحه وشمېږي.

د ساده شمېرنې له لاري یې و ازمايې.

٦٣ - د ګراف او X محور ترمنځ سطحه وشمېږي.

$$a) f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{13}{4}x + 3 \quad b) f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x$$

$$c) f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \quad d) f(x) = -x^2 + 6x - 5$$

٦٤ - په ورکړ شوي انتروال کي د ګراف او x محور ترمنځ سطحه وشمېږي.

$$a) f(x) = x - 2, \quad x \in [-2;3]$$

$$b) f(x) = x^2 - x - x, \quad x \in [1;5]$$

$$c) f(x) = x^2 - 8x + 12, \quad x \in [0;8]$$

٦٥ - د اکسپونشنل منخي $y = e^x$ سره او د پاراپول $p: y = -x^2 - 1$ سره رابنده سطحه په انتروال $[0;1]$ کي وشمېږي.

٦٦ - د کربنی $g: y=2x+2$ د ساین $h: y=\sin x$ منخي د سره او له اينتروال $[0;2\pi]$ خخه رابنده سطحه وشمېږي.

٦٧ - پارابولونه $y = x^2 - 3$ د سره او p_2 د $y = 2x^2 + 1$ سره په اينتروال $[1; 2]$ کي یوه سطحه را بنده وي. دا رابنده سطحه و شمېرئ.

٦٨ - د پارابول P د $y = \sqrt{x}$ سره او كربنه g يې د $y = -x - 1$ سره په اينتروال $[0; 4]$ کي رابنده سطحه لرو. دا رابنده سطحه و شمېرئ.

٦٩ - په اينتروال $[-2; 1]$ د كربني g_1 د $y = x + 3$ سره او g_2 د $y = 2x + 1$ د څخه را بنده سطحه و شمېرئ.

٧١ - پارابول p د $y = x^2 - 6x + 5$ سره او كربنه g د $y = -x + 1$ سره رابنده سطحه. د دي سطحي مساحت و شمېرئ.

٧٢ - د g یوه كربنه يو پارابول p د $y = x^2 + 2$ سره په $x_1 = -1$ او $x_2 = 2$ کي غوڅوي. د كربني او پارابول څخه رابندي سطحي مساحت و شمېرئ.

٧٣ - د g یوه كربنه يو پارابول p د $y = 0,5x^2 + x + 4$ سره په $x_1 = -2$ او $x_2 = 4$ تکو کي غوڅوي. د دي كربني او پارابول څخه رابندي سطحي مساحت و شمېرئ.

٧٤ - د دواړو پارابولونو p_1 د $y = -2x^2 + 8x - 3$ سره او p_2 د $y = x^2 - 4x + 6$ سره را بندی سطحي مساحت و شمېرئ؟

٧٥ - د دواړو پارابولونو p د $y = 4\sqrt{x}$ سره او p_2 د $y = 0,5x^2$ سره رابندي سطحي مساحت و شمېرئ؟

٧٦ - د بارابول p د $y = 2\sqrt{x}$ سره او كربني g د $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ سره رابندي سطحي مساحت و شمېرئ.

٧٧ - د ساين د منحنۍ ګراف او د کوساين د منحنۍ ګراف یو بل په انتروال $0 \leq x \leq 2\pi$ کي غوڅوي. د دواړو ګوڅتکو تر منځ له واړو منحنۍ رابندي سطحي مساحت و شمېرئ.

٧٨ - د تابع f په ګراف پروت تانجنت د $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ سره او د $x=0$ په ځای کي د تابع د ګراف سره رابندي سطحي مساحت و شمېرئ.

٧٩ - د هغې سطحي مساحت و شمېرئ، چې د $x=0$ په ځای کي په پارابول $y = x^2$ عمود د دي بارابول څخه را بنده وي.

٨٠ - د f تابع ګراف د t $y = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$ سره د x محور سره سطحه پوره رابندي. د دي مساحت و شمېرئ.

۸۱ - د f تابع گراف د $y = \frac{x^3 - 8}{4x^2}$ سره همداسی دری کربنی د مساواتو او $y = \frac{1}{4}x, x = 1$ سره $x = b$ پوره رابنده سطحه لرو. $(b > 1)$ د b کوم ارزښت لپاره د سطحی مساحت $1,5$ دی؟

۸۲ - د p_1 پارابول د $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}$ سره او p_2 پارابول د $y = x^2 - 3x + 3$ سره پوره رابنده سخه لرو. د دی سطحی مساحت و بشایاست.

۸۳ - د f تابع گراف د $y=a.(1-\sin 2x), (a>0)$ سره او د وضعیه قیمت په I (اوله) مربع کي (قیمتوونو خخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو. د کومو ارزښتونو لپاره د سطحی مساحت $\pi - 2$ سطحی یونونه (واحدونه) دی.

۸۴ - د f گراف د $y = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x$ سره یوه هواره او g د $y = -x^2 + 6x$ سره یوه هواره پوره رابندي. د دی هواري خونديونه يا دنه هواره وشميري.

۸۵ - د f گراف د $y = \sqrt{16 - 2x}$ سره د پروتولار محور سره توله هواره پوره بندوي. د دی هواري دنه هواره وشميري.

۸۶ - الف: د f گراف د $y = \frac{48x}{(x+2)^3}$ سره ، د x -محور يا - څرخونی او د $x=a(a>0)$ کربنې یوه هواره توله پوره رابندي. د کوم ارزښت له پاره دا هواره د هواري ۸ د یونونه کچه وي.

ب - د f گراف د $y = \frac{48x}{(x+2)^3}$ سره ، د x -محور یا څرخونی او کربنې $x=4$ یوه هواره توله پوره رابندي. د د کوم ارزښت له پاره هواره د هواري ۱۰ یونونه کچه وي.

۸۷ - د f گراف د $y = x \cdot e^{0,5x}$ سره ، د x -محور او کربنې $x=1$ یوه هواره پوره رابندي. د دی هواري دنه وشميري.

۸۸ - د f گراف د $y = e^x(x-1)$ سره د پروتولار محورونو سره یوه هواره پوره رابندي. د دی هواري دنه هواره وشميري.

۸۹ - د f گراف د $y = -2x^3 - 3x^2$ سره د پروتولار محورونو سره یوه هواره پوره رابندي. د دی هواري دنه هواره وشميري.

۹۰ - د f گراف د $y = x^2 \cdot (\ln x - 1)$ سره ، د x -محور او کربنې $x=-5$ یوه هواره پوره رابندي. د دی هواري دنه وشميري.

۹۱ - د f گراف د سره او د محور یوه هواره پوره رابندوی.
 $y = e^{\frac{1}{4}x+1}$ سره، کربنه $x=a$ او $x=a+2$ د کوم ارزبنت له پاره به ددی هواره دننه هواره خورا لویه وي.

۹۲ - د f گراف د سره د کواوردیات محورونو سره یوه هواره پوره رابندوی.
 $y = \sqrt{9-4x}$ د دی هواری دننه وشمیری.

۹۳ - د f گراف د سره، کربنه $x=1$ او $x=4$ د گاوند يا اسیمپتوت سره توله هواره پوره رابندوی.
 $y = \frac{x^3 + 12}{2x^2}$ د دی هواری دننه وشمیری.

۹۴ - د f گراف د سره، د x -محور سره توله هواره پوره رابندوی.
 $y = \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2 + 23x - 15)$ د دی هواری دننه وشمیری.

۹۵ - د هواری منخهواره وشمیری، چي کربنه $g(x) = x^2 - 5x + 7$ د پارابول p د سره غوچوي.

۹۶ - د هواری منخهواره وتاکی، چي د تابع f کوم گراف يي د $y = 2(1 - \cos(x/2))$ سره په انتروال $[0, 4\pi]$ د x -محور سره رابندوی.

۹۷ - گراف f د سره د پروتولار سیستم يا کواوردینات محور سره یوه هواره پوره رابندوی.
 $y = 3 \cdot \sqrt{9-x}$ د دی هواری منخهواره وشمیری.

۹۸ - پارابول $p: y = x^3 - 2ax^2 + a^3$ د x -محور سره او د کربني $a > 1$ له پاره د x -محور سره يوه هواره یوه هواره د ۰,۷۵ یوه هواره د $x=1$ هواریونو (واحدونو) خوندیونی سره رابندوی. د پارامتر a ارزبنت وتاکی.

۹۹ - د یوه تابع $f: y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$ په سرچینه کي نورماله د دی تابع د گراف سره یوه هواره رابندوی.
 د دی هواری منخهواره وبنایی.

۱۰۰ - د یوه تابع $f: y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$ گراف د x -محور سره هیوه هواره رابندوی.
 په کوم نسبت دا په سرچینه کي کربنه او د f جگتكی دا هواره وېشي؟

۱۰۱ - د هواری منخهواره وشمیری، چي د $f: y = \frac{x^2}{1+x^2}$ له گراف، د x -محور او کربني $x=1$ څخه رابنده وي.

102 - د گراف، د x -محور ، کربنه $x=a$ او $x=-a$ یوه هواره رابندي. د کوم ارزبنت د پاره د دی هواري منخهواره د هواري یوون ۱ ارزبنت لري؟

103 - کربنه $y = \frac{2}{\pi}x$ ، ساين کره او د x -محور یوه هواره په لومړۍ څلورۍ کي رابندي. د دی هواري منخهواره وشميري.

104 - د تابع $f: y = x \cdot \sin x$ او $g: y = 2 \cdot \sin x$ ګرافونه د $0 \leq x \leq \pi$ د پاره یوه واره رابندي. د دی هواري منخهواره یا سطحه وشميري.

105 - د تابع $f: y = \frac{2e^x}{e^x + 1}$ ګراف د پروتولار سیستم محورونه او کربنه $x=2$ یوه هواره رابندي. دا منخهواره (د دی هواري منځ) وشميري.

106 لاندي د څرخیدونکي بدنونو ګراف په x محور څرخي. د داسي منځ ته راغلو څرخېدونو تتونو حجمونه(دکي) وشمېږي.

$$a) f(x) = 2 + \sqrt{x}, \quad I = [0; 4] \quad b) f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2, \quad I = [2; 4]$$

107 د لاندي څرخېدونکو بدنونو ګرافونه د x محور باندي څرخي داسي منځ ته راغلي حجمونه(دکي) وشمېږي او په ساده حساب سره یې وشمېږي.

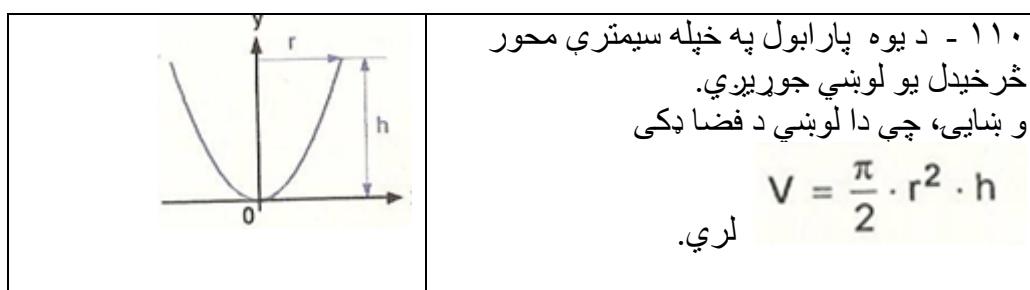
$$a) f(x) = -x + 5, \quad I = [0; 3] \quad b) f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad I = [1; 5]$$

108 د لاندي توابعو د څېخون له لاري منځ ته راغلو تتونو حجم وشمېږي.

$$a) f(x) = \sqrt{x}, \quad I = [0; 4] \quad b) f(x) = (x-2)^2, \quad I = [1; 3]$$

109 - د لاندي توابعو ګراف د y په محور څرخي. داسي منځ ته راغلي تتونه وشمېږي او په ساده شمېرنه سره وشمېږي.

$$a) f(x) = x + 1, \quad I = [1; 4] \quad b) f(x) = -\frac{1}{2}x + 2, \quad I = [0; 4]$$



۱۱۱ - کربنه د $y = -\frac{1}{2}x + 4$ د پروتولار سیستم سره یوه هواره رابندوی.
د دی څرخون تن پوبنډهواره څومره لویه ده، چې د x -محور باندي څرخون له لاري منځ ته راخي؟
د انتیگرال شمیرني سره ووشمیری او ساده هم.

۱۱۲ - څرخون بدن پوبنډهواره څومره لویه ده، چې د x -محور په انتروال $[0;4]$ باندي د پارابول د $y = 2 \cdot \sqrt{x}$ سره له څرخون څخه منځ ته راخي.

۱۱۳ - د پارابول p د سره د څرخون له لاري په انتروال $[1;2]$ د x -محور باندي یو څرخون بدن منځ ته راخي. د دی بدن پوبنډهواره وشمیری.

۱۱۴ - د کربني g د $y = x + 1$ سره د y -محور باندي په انتروال $[1,5]$ یو څرخونبندن جوروی.

د دی بدن پوبنډهواره د انتیگرال سره وشمیری او د ساده شمیرني له لاري یې وازمایي.

۱۱۵ - پارابول p د $y = -x^2 + 4$ سره په لومړۍ څلوري کې د کواوردينات له محورونو سره یوه هواره پوره رابندوی.
د بدن پوبنډهواره وشمیری کومه چې د دی بدن د څرخون له لاري د y -محور سره منځ ته راخي.

۱۱۶ - د انتیگرالشمیرني په مرسته د AB کربني د $(2,4)$ او $(5,8)$ سره.
د ساده شمیرني سره دا لاس ته راوړنه و ازمایي.

۱۱۷ - په لومړۍ څلوري کې د پارابول اوږدوالي د پارابول p د پاره د سره په انتروال $[0,1]$ کې وشمیری.

یوسل او اټلس: وڅیری، چې ایا کوم یو له دی لاندی ناتاکلو انتیگرالونو څخه پوله ارزښت لري.

$$a) \int_{-\infty}^0 e^x dx \quad b) \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx \quad c) \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x}{(x^2+2)^3} dx$$

یو سل او نولس: د جګن یا اکسپوننټ د کوم ارزښت له پاره دا ناتاکلو انتیگرال $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ یو پوله ارزښت لري؟

یوسل او شل: لاندی توابع د انتروال د یوی پولی له پاره پېژند نه لري یا نه دی تعريف.
وڅیری، چې ایا دا تاکلو انتیگرال په دی انتروال یو پوله ارزښت لري؟

- | | |
|---|--|
| a) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$, $I = [0; 1]$ | b) $f(x) = \ln x$, $I = [0; 1]$ |
| c) $f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$, $I = [1; 2]$ | d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $I = [-1; 1]$ |
| e) $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 8}$, $I = [0; 2]$ | f) $f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x}$, $I = [0; 1]$ |

د دفرنسل مساوات پونهنتو ته حوابونه

د 66 (1) او 67(2) تمرینونو حواب:

$$66. a) m = \frac{4-2}{5-3} = 1 \quad b) m = \frac{1-4}{3-2} = -3$$

$$67. a) f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4 + \Delta x)}{\Delta x} = 4$$

$$b) f'(3) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0.5(3 + \Delta x)^2 - 0.5 \cdot 3^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3 + 0.5\Delta x)}{\Delta x} = 3$$

68(3): کمبنتویش (د تفاضلونو ویش) د دکری (منحنی) د دوه تکو P او Q ترمنځ جګوالی دی. مشتق د کبری په یوه تکي P د تانجنت جګوالی دی.

مشتق د کمبنتویتویش پوله ارزښتدي، که Q و P ته نزدی شي یا وهخيري.

69(4): د غوڅونی یا قطاع جګوالی د منحنی په تاکلی انتروال کې د منحنی جګوالی دی.

د تانجنت جګوالی په یوه تاکلی تکي کې د منحنی جګوال لپاره یوه اندازه ده.

د تانجنت جګوالی د غوڅونی یا قطاع د جګډنی انتروال کوچني کول دي.

70. a) $f'(x) = 5x^4$ b) $f'(x) = 6x^5$
 c) $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$, $x \neq 0$ d) $f'(x) = -\frac{5}{x^6}$, $x \neq 0$
 e) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$ f) $f'(x) = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$, $x > 0$
 g) $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$, $x > 0$ h) $f'(x) = -\frac{3}{3\sqrt[3]{x^4}}$, $x > 0$

71. a) $f'(x) = x^4$ b) $f'(x) = 8x^3$
 c) $f'(x) = -\frac{8}{x^3}$, $x \neq 0$ d) $f'(x) = -\frac{9}{x^4}$, $x \neq 0$
 e) $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$, $x > 0$ f) $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x^3}}$, $x > 0$

72(7): د تابع گراف د $f(x) = g(x) + c$ سره د g له گراف څخه د y په لور د غږګ راکښني له لاري منځ ته راحیز
 د ګراف د x_0 په ځای کې د هر c ارزښت لپاره همغه جګوالی لري لکه د g ګراف. له دي امله $f'(x) = g'(x)$.

73(8): د تابع گراف د $f(x) = a \cdot g(x)$ د ګراف د x په محور عمود غزوونی څخه منځ ته راحی. د f ګراف له دی امله د x_0 په ځای کې a څله جګوالی لري لکه د g ګراف. او په همدي دوی a څله یا واره مشتق. له دي امله $f'(x) = a \cdot g'(x)$ دی.

74. a) $f'(x) = 16x^3 - 9x^2 + 2x - 1$ b) $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$
 c) $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{x^4}$, $x \neq 0$ d) $f'(x) = 6x + 0.4$

75. a) $f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2$ b) $f'(x) = 6x^2 - 4x + 1$
 c) $f'(x) = 10x^4 + 4x^3 - 27x^2 - 10x - 5$ d) $f'(x) = 36x^2 + 10x + 10$

76. a) $f'(x) = \frac{-x^4 + 12x^2 - 2x}{(4-x^2)^2}$, $|x| \neq 2$
 b) $f'(x) = \frac{2(x^2 + 2x - 1)}{(x+1)^2}$, $x \neq -1$
 c) $f'(x) = \frac{2x^4 + 7x^2 + 16x + 3}{(2x^2 + 3)^2}$, $x \in IR$
 d) $f'(x) = \frac{-x^4 - 2x^2 + 4x - 1}{(x^3 - 2x^2 + x)^2}$, $x \neq 0 \text{ und } x \neq 1$

77(12): د $v(x) = g(x)$ او $u(x) = 1$ سره د ويش قاعدي کې ځای په ځای کولو له لاري لاس ته راحي:

$$77. \quad f'(x) = \frac{0 \cdot g(x) - 1 \cdot g'(x)}{g(x) \cdot g(x)} = \frac{-g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$$

78. a) $f'(x) = 32x^3(4x^4 - 3)$
 b) $f'(x) = 2(6x+4)(3x^2 + 4x - 5) = 4(3x+2)(3x^2 + 4x - 5)$
 c) $f'(x) = 6(2x-7)^2$ d) $f'(x) = -36x^2(5 - 3x^3)^3$

79. a) $f'(x) = \frac{12x+3}{(2x^2+x)^4}$, $D = IR \setminus \left\{ -\frac{1}{2}; 0 \right\}$
 b) $f'(x) = -\frac{4}{(x-5)^5}$, $x \neq 5$
 c) $f'(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $x > 0$ d) $f'(x) = -\frac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}$, $x < 1$

80. a) $f'''(x) = 6$ b) $f'''(x) = 48x + 18$
 c) $f'''(x) = 10x^4 + 4x^3 - 27x^2 - 10x - 5$ d) $f'''(x) = \frac{18}{(2-x)^4}$, $x \neq 2$

(81) د هر مشتق نيوني سره د په توان عدد يا اكسپوننت په 1 کمېري. د ممشتق پسي خورا جگ اکسپوننت کيږي. د لاندې بنې یو ترم منځ ته راخي: $f_{(x)}^{(n)} = k \cdot x^0 = k \cdot 1 = k$ او له دي سره ثابته .

81. a) $f'(x) = 3\cos 3x$
 b) $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
)84 c) $f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$ d) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 4\cos 2x$
 e) $f'(x) = 2x \cos x$ f) $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \cos \frac{x-1}{x+1}$, $x \neq -1$

81. a) $f'(x) = n \cdot \cos x \cdot \sin^{n-1} x$
 سره د وېشقاعده استعمال ته چان رامنځ ته کوي: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ د : (

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

85. $f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$$f(x) = \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\tan^2 x}$$

(86) لومړۍ امکانات د ټټۍري قانون له مخي:

$$f'(x) = -\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

(87) د ساین همداسی د کوساین توابع مشتق بیرته یوه له همدى توابعو ده، پس بیا مشتقر دی.

88. a) $f'(x) = -6 \cdot e^{-2x+1}$

b) $f'(x) = 2(x+1)e^{x^2+2x-1}$

c) $f'(x) = x \cdot e^x$

d) $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x}} = \frac{1}{2}\sqrt{e^x}$

e) $f'(x) = x^{n-1}e^x(n+x)$

f) $f'(x) = k \cdot e^{kx}$

g) $f'(x) = -\frac{1}{2x^2} \cdot 2^{\frac{2}{2x}} \cdot \ln 2, x \neq 0$

h) $f'(x) = -3 \ln 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{3x}$

i) $f'(x) = 1 \cdot a^{\sqrt{x}} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot a^{\sqrt{x}} \cdot \ln a = a^{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{x}{2\sqrt{x}} \cdot \ln a\right), x > 0$

j) $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$

k) $f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)+e^x \cdot e^x}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x - e^{2x} + e^{2x}}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x}{(1-e^x)^2}, x \neq 0$

l) $f'(x) = \frac{e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^0 - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{2 \cdot (\sqrt{x})^2} : () 89$

دا چې $\ln \sqrt{x}$ فقط د $x > 0$ لپاره تعریف دی، نو د x سره اختیاط په کار دی.

پنه بدلون به راکری: $e \ f(x) = \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2x}$:

د ترم د تولو $x \neq 0$ لپاره تعریف دی مگر د مشتق تابعه دومره لوی تعریف سټ نه

شي لرودی لکه f یې چې لري، نو د (1) له مخي مشتق تابع هم د $x > 0$ لپاره تعریف ده.

b) $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}, |x| > 2$

(c) د (1) تابع f د $x > 0$ لپابه تعریف ده. دلته هم د زنخیري قانون څخه بنه بدلون مساعد دی.

(د لته د $x \neq 0$ له امله ممکن دی) $f(x) = \ln 2 - 3 \ln x \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{x}$

د ' f تعریف ست باید د f تعریف ست برخه ست وی. له دی امله د (1) له مخي مشتقور
دی د $x > 0$ لپاره او نه د لپاره $x \neq 0$

$$d) f(x) = \ln(x+1) - \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)}, \quad x < -1 \vee x > 0$$

$$e) f(x) = 2x \cdot {}_2 \log x \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot 1 \cdot {}_2 \log x + 2x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 2}$$

$$f'(x) = 2 \frac{\ln x}{\ln 2} + 2 \frac{1}{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2} (\ln x + 1), \quad x > 0$$

$$f) f'(x) = 4x^3 \cdot \lg x + (x^4 - 1) \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{4x^3 \ln x}{\ln 10} + \frac{x^3}{\ln 10} - \frac{1}{x \ln 10}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 10} (4x^3 \ln x + x^3 - \frac{1}{x}), \quad x > 0$$

$$g) f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x+2) - \ln x \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{(x+2) - x \ln x}{x(x+2)^2}, \quad x > 0$$

$$h) f'(x) = \frac{4x^3 \ln x - x^4 \cdot \frac{1}{x}}{\ln x \cdot \ln x} = \frac{4x^3 \ln x - x^3}{(\ln x)^2} = \frac{x^3 \cdot (4 \ln x - 1)}{(\ln x)^2}, \quad x > 0$$

() 90 : ماکسیمال تعریف ست (- ببری)

الف: ماکسیمال تعریف ست: $x + 3 \geq 0 \Rightarrow D = \{x | x \geq -3\}$ $x_2 = 4$ $x > 0$

$$\text{لومری مشتق: } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

دا چې مخرج باید صفر نه وی، نو د $-3 < x$ لپاره مشتقور دی.

$$b) (x-2)(x-4) \geq 0 \Rightarrow D = \{x | x \geq 4 \vee x \leq 2\}$$

$$f'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}$$

$$b) (x-2)(x-4) \geq 0 \Rightarrow D = \{x | x \geq 4 \vee x \leq 2\}$$

$$f'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}$$

د f تابع د $x_1 = 2$ او لپاره مشتقور ده.

$$c) D = IR_0^+, \quad f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}; \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

د f تابع د لپاره مشتقور ده. $x \in R^+$ له امله $D = R$ دی $x^2 + 2 \geq 2$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}, \quad \text{له دی امله } f \text{ په ټول تعریف ست باندي مشتقور دی.}$$

د فقط د $x > 0$ لپاره تعریف دی. $f(x) = \ln x : () 91$

د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع د تولو $x \neq 0$ لپاره تعريف ده. $f'(x)$ تابع د لوگاریتمي تابع مشتق په څېر نه شي کېدى د f دتعريفست خه لوی تعريف سټ ولري. پس f' فقط د $x > 0$ لپاره تعريف ده.

$$92) \quad a) \quad D = \{x | x > 1\}, \quad f'(x) = \frac{4x^3 x^4 - 1}{4x^3}$$

تابع $g(x) = \frac{4x^3}{x^4 - 1}$ به د تولو $|x| \neq 1$ لپاره تعريف تعريف واي. د f لپاره د مشتق تابع f' فقط د $|x| > 1$ لپاره تعريف وي. داله دي سره په ټول تعريف سټ کي شته دي.

$$b) \quad D = \{x | x > -2\}, \quad f'(x) = \frac{2}{2x+4} = \frac{1}{x+2}$$

د مشتق تابع په ټول تعريف سټ کي شتون لري يا شته دي.

$$93. \quad a) \quad f'(x) = 4x^9 - x^4$$

$$b) \quad f'(x) = 12x^3 - 12x^2 + 22x - 7$$

$$c) \quad f'(x) = 40x^7 - 18x^5 - \frac{30}{x^4 + \frac{56}{x^8}}$$

$$d) \quad f'(x) = 6x^2 + 34x - 61$$

$$e) \quad f'(x) = 3 \sin x - 2x \cos x$$

$$f) \quad f'(x) = 3 \cos x \cdot \sin^2 x$$

$$g) \quad f'(x) = e^x - e^{-x}$$

$$h) \quad f'(x) = x^2 e^x$$

$$i) \quad f'(x) = \frac{5e^x}{(2e^x - 1)^2}$$

$$k) \quad f'(x) = \frac{2e^x(x^3 + x^2 - 3x + 3)}{x^2}$$

$$l) \quad f'(x) = \frac{2(1 - \ln x^2)}{x^3}$$

$$m) \quad f'(x) = \frac{\ln x - x + 1}{(1-x)^2}$$

$$n) \quad f'(x) = \frac{x \cos x \ln x - \sin x}{x \cdot (\ln x)^2}$$

$$o) \quad f'(x) = \frac{3x}{\ln 10} (2 \ln x + 1)$$

$$p) \quad f'(x) = \frac{1}{\tan x}$$

$$q) \quad f'(x) = \frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x+1}}$$

$$r) \quad f'(x) = \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x}$$

$$s) \quad f'(x) = e^{-2x} (-2x^2 + 2x - 6)$$

$$94. \quad a) \quad f'(x) = n \cdot \cos x \cdot \sin^{n-1} x$$

$$b) \quad f'(x) = \frac{n \cdot (\ln x)^{n-1}}{x}$$

$$c) \quad f'(x) = \frac{a}{n \cdot \sqrt[n]{(ax+b)^{n-1}}}$$

$$d) \quad f'(x) = -\frac{n}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n-1}$$

$$95. \quad a) \quad f'(x) = 2xe^{x^2}, \quad f''(x) = 2e^{x^2}(1+2x^2), \quad f'''(x) = 4xe^{x^2}(3+2x^2)$$

$$b) \quad f'(x) = 2 \cos^2 x x - 1, \quad f''(x) = -4 \sin x \cdot \cos x, \quad f'''(x) = -8 \cos^2 x + 4$$

$$c) \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^2}, \quad f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$d) \quad f'(x) = (x^2 + 2x)e^x, \quad f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x, \quad f'''(x) = (x^2 + 6x + 6)e^x$$

96 () د طبیعی اکسپوننسل تابع $f(x) = e^x$ له امله تول مشقونه د و تونمشتی یا پیلمشتی برابر دی.

: () 97
 (الف) د تابع $f'(x) = 2e^{2x} = 2f(x)$ مشتق لری.
 (ب) د تابع $f'(x) = -e^{-x} = -f(x)$ مشتق لری

: () 98
 د تابع خلورم مشتق لری. $f(x) = \sin x$
 همداسی د لپاره باور لری سره. $f(x) = \cos x$

$$99. \quad a) \quad f'(x) = ae^{ax}, \quad f''(x) = a^2 e^{ax}, \quad f'''(x) = a^3 e^{ax}, \dots \quad f_{(x)}^{(n)} = a^n e^{ax}$$

$$b) \quad f'(x) = \frac{1}{x+1}, \quad f''(x) = -1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{(x+1)^2}, \quad f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{(x+1)^3}$$

$$f^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (x+1)^{-n}$$

100. a) $N_1(-30), N_2(-0.5/0), N_3(2/0)$ b) $N_1(0/0), N_2(2/0), N_3(4/0)$
 b) $N_1(0/0), N_2(2/0), N_3(4/0)$ d) $N_1(-\frac{1}{2}/0), N_2(\frac{1}{2}/0), N_3(\frac{1}{3}/0)$
 d) $N_1(-2/0), N_2(-1/0), N_3(1/0), N_4(3/0)$
 e) $N_1(-5/0), N_2(2/0)$

() 101 : بدو (پاپیل) سره $f(2) = -8, a = \frac{1}{2}$ د $f(x) = a(x=2) \cdot x \cdot (x-4)$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 4x \quad \text{لاس ته راوونه:}$$

() 102 : بدو (پاپیل) سره $f(0) = 9, a = 4$ د $f(x) = a \cdot (x-3)^2(x-0.5)^2$
 پایله: $f(x) = 4x^4 - 28x^3 + 61x^2 - 42x + 9$

() 103 : پاپیل سره $f(\frac{1}{2}) = -\frac{15}{8}; a = \frac{10}{9}$ د $f(x) = a(x+1)^2 \cdot x \cdot (x-2)$

$$f(x) = \frac{10}{9}x^4 - \frac{10}{3}x^2 - \frac{20}{9}x = \frac{10}{9}(x^4 - 3x^2 - 2x) \quad \text{پایله:}$$

() 104 : الف) د = $R \setminus \{-4\}$ بدو (پاپیل):

$$N_1(0,5|0), N_2(3|0) \quad \text{پایله:}$$

$$b) \quad D = IR \setminus \{0\}; \quad N_1(-2/0), \quad n_2(2/0)$$

$$c) \quad D = IR \setminus \{0,5\}; \quad N_1(-1/0), \quad n_2(3/0)$$

$$d) \quad D = IR \setminus \{-5\}; \quad N_1(0/0), \quad n_2(1/0)$$

() 105 : او $d = 0$ په تابع کي سملاسي بدو، نو لاس ته راحي:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 0.25 - 0.5}{x}$$

$$a^3x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{8}{a^3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{2^3}{a^3}} = \frac{2}{a} \text{ د: () 106}$$

$$N\left(\frac{2}{a}, 0\right)$$

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4$$

() 107 $x=1$ په پوره کوچني چاپریال کي صفر تل مثبت دی. صورت د $x > 1$ لپاره مثبت دی او $x < 0$ لپاره منفي. د سره مخنځښه بدليزري او له دي سره سه بدلون د 4 څلورمي(ربع) خخه و 1 څلورمي(ربع) سره صورت نيسې.

$$() 108 \text{ (الف) د } e^{-x} > 0 \Rightarrow N_1(-1, 0), N_2(1, 0) \text{ لپاره.}$$

$$\text{ب) او له دي سره سه } f(x) = 0 \text{ د } x \leq 6 \text{ لپاره تعريف دي. د } f(x) = 0 \text{ د } 6 - x = 0 \Rightarrow N_2(6, 0) \text{ او لپاره. د } x = 0 \Rightarrow N_1(0, 0)$$

() 108 (ب) او $f(x) = \ln(x+2)$ د لپاره تعريف دي.
 $\ln(x+2) = 0 \Rightarrow x+2=1 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow N_2(-1/0)$ او $x=0 \Rightarrow N_1(0,0)$
 لپاره
 ت) او $\ln x$ د لپاره $f(x) = 0$ د لپاره تعريف دی. د $f(x) = 0$
 $N_2(1, 0) = 0 \Rightarrow N_1(\sqrt{2}, 0)$
 يادونه: د دساوات دويم حل مو (1) صفرهای ته بیاپیو ځکه چې $x = -\sqrt{2}$ تعريف سټ پوري اړه نه لري.

$$\text{ت) } f(x) = 0 \text{ دی، ځکه چې } \frac{1+x}{x-x} = 1 \Rightarrow 1+x=1-x \Rightarrow x=0 \Rightarrow N(0/0)$$

$$\text{ث) } f(x) = 0 \text{ دی، ځکه چې } \frac{1+x}{x-x} = 1 \Rightarrow 1+x=1-x \Rightarrow x=0 \Rightarrow N(0/0)$$

$$\text{ج) } f(x) = 0 \text{ دی، ځکه چې } 3x=0 \Rightarrow N(0,0)$$

$$() 109 \text{ د } 3x=k\pi \text{ سره صفرهایونه په } k \in \mathbb{Z} \text{ کي پراته دی.}$$

په ورکړ شوي انتروال کي په دې ځایونو کې:
 $-2\pi - 5\frac{\pi}{3}, -4\frac{\pi}{3}, -\pi, -2\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \pi, 2\frac{\pi}{3}, \pi, 4\frac{\pi}{3}, 5\frac{\pi}{3}, 2\pi$
 ب) صفرهایونه په $i x = (k - \frac{1}{4}) \cdot \pi = (4k - 1)\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ کي پراته دی.

$$\text{په ورکړ شوي انتروال کي صفرهایونه: } i - \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

$$\text{پ) صفرهایونه په } x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ کي پراته دی.}$$

$$\text{په ورکړ شوي انتروال کي صفرهایونه: } i - \frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$$

ت) صفر حایونه په $x = k \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = (3k+1) \cdot \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$ کي پراته دي.
په ور کړ شوي انتروال کي صفر حایونه: $-\frac{11}{6}\pi, -\frac{4}{3}\pi, -\frac{5}{6}\pi, -\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{5}{3}\pi$

- (110) (الف) د $x=1$ لپاره $\ln x=0$ دی. د $x^2 \geq 3$ له امله $x^2+3 \geq 0$ دی او له دی سره
د $\ln x=1$ لپاره اړیین ارزښت 1 نه شي نیولی.
- (ب) د $x^2+1 \geq 1$ دی او له دی امله په کوم حای کي صفر نه دی. دلته مخرج بي معنا دی.
پ) د $e^x > 0$ تولو $x \in R$ لپاره دی. دلته هم مخرج بي معنا دی.
ت) د $\sin^2 x \geq 0$ له امله $1+\sin^2 x \geq 1$ دی او له دی امله په کوم حای کي صفر نه دی.

(111) () : یوه تابع یو تنظيم $f(x) \rightarrow x$ دی، د کوم سره چې د یوه x سره یواخنی یو
 $f(x)$ ترتیب یا تنظيم شوی وي. له دی امله کېدی شي $x=0$ سره ټیک یو $f(x)$ تابع
ارزښت تنظيم شوی وي. او له دی سره ټیک یو غوڅتکی د y محور سره ولري. او په څت
کېدی شي د تعريف سټ یو ارزښت سټ په دېرو توکو تنظيم شوی وي. د $f(x)=0$ تابع ارزښت کېدی شي دېرو اره رامنځ ته شي، چې د دېرو صفر حایونو په معنا دی.

(112) () : که یوه تابع د خپل تعريف سټ باندي بر عکس کېدونکي وي، باید سربېره پردي
نظم $x \rightarrow f(x)$ یواخنی وي (یعنی معکوس کېدونکي هم وي)، دا په دی معنا چې
تابع ارزښت ټیک یو وار نیول کېدی شي، چې بېلا بېل صفر حایونه ناممکنوی.

$$113. \quad a) S_y(0/-1) \quad b) S_y(0/0)$$

$$c) S_y(0/0) \quad b) S_y(0/\frac{4}{3})$$

$$e) S_y(0/-\frac{2}{e}) \quad b) S_y(0/e^2)$$

$$f(0) = a_n \cdot 0 = a_{n-1} \cdot 0 + \dots + a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0 \quad ()114$$

یو تام راشنل تابع د y محور تل د هغه په مطلق ارزښت کي غوڅوي .
115). $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 1$, $f(1) = -1$, $f'(1) = -3$; $f(2) = -1$, $f'(2) = 7$

$$x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2 \quad f'(x) = 3x^2 - 2x - 2 \quad ()116$$

$$\text{جگنه: } f'(-1) = 3, f'(0) = -2, f'(2) = 6$$

$$117. \quad f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 1; \quad P_1(0/-4), P_2(0.5/-3.47), P_3(1/-3)$$

$$118. \quad f'(x) = x^2 - x - 6 \quad ; \quad P_1(-2/11), P_2(3/-\frac{1}{2})$$

$$119. \quad a) \quad f'(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 4}{x^2} ; \quad f(1) = 4, f'(1) = -3$$

$$b) \quad f(-3) = 6, f'(-3) = -8$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 4) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2 + 4}{x^2} \quad (120)$$

$$2 = \frac{x^2 + 4}{x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = x^2 + 4 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2$$

که $x_1 \wedge x_2$ په تابع ارزښت کي کېږدو، نو لاس ته تري راخي:

b) $P(-1/-3)$

$$121. \quad a) f(1) = 0, \quad f'(x) = \ln x + 1, \quad f'(1) = 1 \quad b) f(\sqrt{\pi}) = 0, \quad f'(\sqrt{\pi}) = -\sqrt{\pi}$$

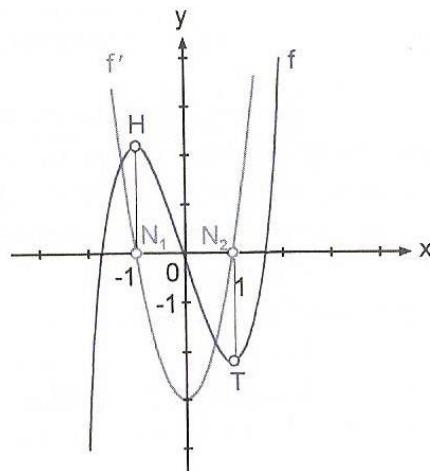
$$122. \quad a) f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}, \quad x_1, x_2 = 2 \quad b) x_1 = 0$$

$$f'(x) = (x + a + 1) \cdot e^x \quad (123)$$

$$2 = e^0 \cdot (0 + a + 1) \Rightarrow 2 = a + 1 \Rightarrow a = 1$$

- | | |
|------------------------------|--|
| 124. a) $H(-1/15), T(3/-17)$ | b) $H(-1/4.5), T(2/-9)$ |
| c) $H(0.5/10.5), T(2.5/5.5)$ | d) $H(0/5), T_1(-\sqrt{2}/1), T_2(\sqrt{2}/1)$ |
| e) $H(-2/48), T(2/-48)$ | f) $H(2/3\frac{1}{3}), T_1(0/-2), T_2(3/2.5)$ |

الف: د f ګراف یو خورا جګ تکي H په -1 کي لري او خورا تيit تکي T په 1 کي. د ګراف په دي ځایونو کي د f' ګراف صفر ځایونه $N_1 \wedge N_2$ لري.



ب) د f ګراف یو جګتکي H په 2 کي لري او یو تيit تکي T په 0 کي لري. په دي ځایونو کي د f' ګراف صفر ځایونه $N_1 \wedge N_2$ لري.

تابع f د n -مي درجي یو تول هوبنیار یا راشنل تابع یو د $(n-1)$ -مي درجي د مشتق تابع لري. د $(n-1)$ -مي درجي تابع زیات له زیاته $n-1$ صفر ځایونه لري. له دي امله n -مي درجه تول راشنل تابع زیا له زیاته $n-1$ انحرافي ځایونه لري.

شی د انحراف تکي په هکله پرېکره وشي.

که په x_0 کي د لومرى مشتق روسته د مخنخنى تغير له مثبت خخه و منفي ته صورت ونيسي، f د x_0 په ھاي کي يو جگتكى لري، سره له دى چي شرایط $f''(x) < 0$ پوره نه دى.

$$(128) \quad \begin{aligned} f'(x) &= 2x^2 + 8x + 8 \\ f''(x) &= 4x + 8 \\ \text{د انحرافي ارزبنت لپاره اريين شرطونه } f'(x) &= 0 \\ 2x^2 + 8x + 8 = 0 &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{aligned}$$

د پوره كېدونكى شرایط لپاره شرطونه: $f''(-2) = 0$
د مخنخنى تغير ازمايىت: $f'(-3) = 18 - 24 + 8 = 2, f'(-1) = 2 - 8 + 8 = 2$
دا چي د پوره كېدونكى شرایطو چخه كوم يو پوره نه دى، د f گراف انحراف ھاي نه لري.

$$\begin{aligned} \text{ب) لومرى مشتق: } f'(x) &= \frac{4}{3}x^3 \\ f''(x) &= 4x^2 \quad x_1 = 0 \\ \text{د مشتق: } f'(x) &= \frac{4}{3}x^3 \Rightarrow x = 0 \\ \text{د مخنخنى بدلون له امله } f'(1) = \frac{4}{3} &\text{ او } f'(-1) = -\frac{4}{3} \\ \text{د } f \text{ تابع تىيتىكى } T(0,1) \text{ لري} \\ \text{پ) لومرى مشتق: } f'(x) &= \frac{4}{3}x^3 - 4x + \frac{8}{3} \\ f''(x) &= 4x^2 - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{د انحرافتكى لپاره اريين شرایط: } f'(x) &= 0 \\ \frac{4}{3}x^3 - 4x + \frac{8}{3} = 0 &\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{د پوره كېدونكى شرایط لپاره ازمايىت: } f''(-2) &= 4 \cdot 4 - 4 = 12 \\ \text{لە دى لاس تە راھى چي } T(-2, -8) \text{ تىيتىكى دى.} \\ f''(1) &= 4 \cdot 1 - 4 = 0 \end{aligned}$$

د $x = 1$ رە د لومرى مشتق د مخنخنى ازمايىت.
 $f'(0) = \frac{8}{3}, f'(3) = \frac{4}{3} \cdot 27 - 4 \cdot 3 + \frac{8}{3} = 26 \frac{1}{3}$
 د $x = 1$ لپاره د لومرى مشتق د مخنخنى تغير مخ تە نه لرو. لە دى امله $T(-2, -8)$ وائنى د انحراف تكى دى.
 ت) د $f(x) = 4x^3 = 0$ لە امله كېدى شي انحرافى ھايونه د $x_1 = 0$ ھاي پراته وي. د $f'(-1) = -4 \wedge f'(1) = 4$ د مخنخنى تغير د يوه تىيتىكى $T(0, -4)$ لپاره پوره كېدونكى شرایط پوره كوي.

129. a) $T(4/-1)$, $H(1.5/9)$
 c) $T(0/-2)$
130. a) $H(0/1)$
 c) $T(0/1)$
- b) $T(0/0)$, $H(2/-4)$
 d) $T(-1/-0.5)$, $H(1/0.5)$
- b) $H(-3/0)$, $T(1/-5.44)$
 T(0/0)

$$f'(x) = 2\cos x \sin x = \sin 2x \quad (131)$$

دويم مشتق: $f''(x) = 2\cos 2x$

ارين شرایط: $f'(x) = 0$

د) لومري مشتق $r_x = k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ د $\sin 2x = 0$

-لپاره په رکشوي انتروال کي د
 $-2\pi, -\frac{3}{2}\pi, -\pi, -\frac{1}{2}\pi, 0, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$

$$f''(k \cdot \frac{\pi}{2}) 2\cos(2k \cdot \frac{\pi}{2}) = 2\cos k\pi = \begin{cases} 1, & k = 2n \\ -1, & k = 2n+1 \end{cases}$$

د) تابع لاندي جگ تکي

$$H_1(-\frac{3}{2}\pi/1), H_2(-\frac{1}{2}\pi/1), H_3(\frac{1}{2}\pi/1), H_4(\frac{3}{2}\pi/1)$$

او لاندي تېتىكى

لري. $T_1(-2\pi/0), T_2(-\pi/0), T_3(0/0), T_4(\pi/0), T_5(2\pi/0)$

ب) د) دويم مشتق $f'(x) = 0$ د لپاره $x_1 = 0$ کي د
 جگتكى لري که په دويم مشتق کي كېنۇل شى. او تېتىكى لري د سره.
 $x_2 = -2\pi \wedge x_3 = 2\pi$

(الف) د) f تعریف ساحه: $D = \{x | x \leq -1 \vee x \geq 0\}$

$$\text{لومرى مشتق: } f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

داد $x_1 = -1 \wedge x_2 = 0$ لپاره له D تعریف نه ده.

لرو $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -0.5$ د لپاره.

دا د x_1 په تعریف ست پوري اړه نه لري يا په تعریف ست کي نه دی پروت، نوله پيله کوم انحرافي ارزښت گومان ته نه راخي.

د) $f(x) \geq 0$ لمه د $x \in D$ لپاره دژى تکو مطالعه عمومي تېت تکي
 $T_1(-1, 0) \wedge T_2(0, 0)$ منځ ته راوري.

ب) د) f تعریف ست: $D = R$

$$\text{لومرى مشتق } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

لرو $f'(x) = 0$ د لپاره. په $x_1 = 0$ کي د مخنخنى بدلو سره د لومري
 مشتق يو لوکال تېت تکي $T(0, \sqrt{3})$ راكوي. د $f(x) \geq \sqrt{3}$, $x \in D$ له امله دا يو توليز
 تکي دى.

پ) د) f تعریف ورشو: $D = R_0^+$

لومړۍ مشتق $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ د $x_1 = 0$ لپاره چې $x_1 \in D$ وي تعریف نه دی.

لرو $f'(x) = 0$ د $1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$ لپاره. د ژړی تکي مطالعه لوکال جګړکي $H(0,0)$ راکوي.

د $x \rightarrow \infty$ لپاره $f(x) \rightarrow \infty$ هڅري.، نوله دې امله $(0,25, -0,5)$ $T(0,25, -0,5)$ تولیز تیټکي دی.

ت) د f تعریفسټ: $D = R$

لومړۍ مشتق: $f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}$ د $x_1 = 0$ لپاره تعریف نه دی.

له دې سره لومړۍ د کومو انحرافي تکو ګوان نه کېږي. د $x_1 = 0$ مطالعو څخه لرو $= 3$.

نور تول تکي د $f(x) = 3 + \sqrt[3]{x^2} \geq 3$ له امله یو لوی تابع ارزښت لري. $T(0,3)$ یو تولیز تیټکي دی.

(الف) لرو 133

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 & x \geq 0 \\ -x + x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + 2x & x \geq 0 \\ -1 + 2x & x < 0 \end{cases}$$

د $x \geq 0$ لپاره د $f'(x) = 0$ له امله د $x_1 = 0,5$ لپاره کوم انحرافي ارزښت شتون نه لري. په همدي کمې د $x \leq 0$ لپاره هم.

$$f(0) = \begin{cases} 0 + 0^2 = 0 \\ -0 + 0^2 = 0 \end{cases}$$

دا نور تول د f تابع ارزښونه له $T(0,0)$ څخه لوی دي، نو دا تولیز مینیموم دی.

ب) ليکندود پرته د مطلقه ارزښت یا له مطلقه ارزښت ازاد ليکودود:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 8 & -4 < x < 2 \\ x^2 + 2x - 8 & x < -4 \vee x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 = 0 & \Rightarrow x_1 = -1 \\ 2x + 2 = 0 & \end{cases}$$

په انټروال کي حل نه شته تابع یو د $H(-1,9)$ لوکال تیټکي لري، همداسي $T_1(-4,0) \wedge T_2(2,0)$ ژړی تکي د تولیز تیټکو په خبر.

134. a) $W_1(-2/-8\frac{2}{3})$, $W_2(2//-4\frac{2}{3})$

b) $W(2/-1)$

پ) دې $x_1 = 0$ لپاره. دا چې $f''(0) = 2.0 = 0$ هم دي او $f''(x) = x^2$ د $x_1 = 0$ د چاپېریال کې د مخنځښي بدلون نه لري، نو f کوم د انعطاف تکي نه لري.

t) $W(2,-1)$

(الف) دا یواحنۍ $(-1,0)$ د انعطاف تکي حتی زینټکي دی.

(ب) ارین شرایط 0 د $f''(x) = 0$ د $x_1 = 1 \wedge x_2 = \frac{1}{3}$ لپاره بوره دي.

د $W_1(1, \frac{43}{81})$ له امله $f'(1)=0 \wedge f'''(1)\neq 0$ زینتکی دی.

(136) د انعطاف تکی دی ، مگر زینتکی نه دی. $W_2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

دارین شرایطو لپاره باید دویم مشتق صفر وي. د دویم مشتق درجه د تول هوپنیار(راشنل) n -م درجی تابع لپاره $n-2$ دی. د $(n-2)$ -م درجی مساوات زیات په ارین شرایذو کی له زیاته $n-2$ حلونه شتون لري. له دی امله یو د n -می درجی تول راشنل تابع زیات له زیاته $n-2$ د انعطاف تکی (اوپونتکی) لري.

(137) یو د انحراف تکی په همدي وخت کی د انعطاف تکی نه شي کېدی. د انعطاف تکی لپاره ارین شرایط $f''(x)=0$ دی. د انحرافتکو لپاره پوره کېدونکي شرایط شرطونه $f''(x)\neq 0$ دی، نو دا یو تضاد دی.

$$138. \quad a) W(3/\frac{4}{9}) \quad b) W_1(-3/-\frac{1}{4}), W_2(0/0), W_3(3/\frac{1}{4}) \\ c) W(0/0) \quad d) W(2/0)$$

$$139. \quad f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}, \quad f''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$$

د ممکنه انعطاف تکی په حیث. $f''(x)=0 \Rightarrow x_1=0$

$$f''(-0.5) = \frac{-0.25 - 3}{(-0.75)^3} = +\frac{3.25}{0.75^3} > 0$$

$$f''(0.5) = \frac{0.25 + 3}{(-0.75)^3} = -\frac{3.25}{0.75^3} < 0$$

له امله $W(0,0)$ د انعطاف تکی دی او د $f'(0) = \frac{0+0}{1} = 0$ له امله حتی زینتکی.

(140) الف : د انعطاف تکی په $\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}$ کی پراته دی.

په تابع مساوات کي اينسوونه او گردونه يي لاندي د انعطاف تکي ورکوي: $W_1(-1, 22, -0, 27), W_2(0, 0), W_3(-1, 22, -0, 27)$

ب) د انعطاف تکي په 1 او -1 کي پراته دی. په تابع مساوات کي يي اينسوونه او گردونه يي لاندي د انعطاف تکي ورکوي:

$$W_1(-1, -0, 69), W_2(1, -0, 69)$$

$$141. \quad a) f'(x) = 1 + \cos x, \quad f''(x) = -\sin x$$

د $\sin x = 0$ کي د انعطاف تکي لري.

ب) د انعطاف تکي په $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ کي پراته دی.

$$142. \quad a) \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} = x+3$$

په $x=2$ کي د $f(2)=5$ سره یوه له منھهت لوونکي تعریفتشيا پرته ده.

ب) دا چي تجزيه شونې نه ده، نو f په $x = -2$ کي يو قطبتكی لري د مخنخني بدلون سره.

$$c) \frac{x}{x^2 - 3} = \frac{x}{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}$$

تابع په $x_2 = \sqrt{3}$ او $x_1 = -\sqrt{3}$ کي قطبتكی لري د مخنخني تغېر سره.

$$d) \frac{x^2 - 1}{1 + x} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = x - 1$$

په $x = -1$ کي f د $f(-1) = -2$ سره يوه ناپرېکدونکي له منه تلونکي يا وړنکي تعريفشيا لري.

متأسفانه چي تولي پوبنتتي په کي نه دي ھواب شوي.
دا په دېر ومنى. نور مي له وسه پوره نه دي، چي پسې وګرهم.

د انتیگرال پوبنتتو ته ھوابونه

د لومرۍ پوبنتتي اوبي يا حل:

1. a) $\frac{x^3 + 7x^2 + 9x - 5}{x + 5} = x^2 + 2x + 1$
- b) $\frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2 - 2} = x^2 - 1 - \frac{1}{x^2 - 2}$
- c) $\frac{x^3 - 2x^3 + x - 5}{x^3 + 1} = 1 - \frac{2x^2 - x + 6}{x^3 + 1}$
- d) $\frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1} = x - 1$
- e) $\frac{x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 3}{x - 2} = x^3 + 4x^2 + 2x - 1 + \frac{1}{x - 2}$
- f) $\frac{x^5 - x^4 + 1}{x^2 + 2} = x^3 - x^2 - 2x + 2 + \frac{4x - 3}{x^2 + 2}$

دويم - الف: د کسر په کربنیز ضریبونو ټوته کونه يا تجزيه

$$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$$

داراكوي

$$\frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}$$

$$A=4, B=1, C=-3$$

دا مو ټوته کسر ټوته کونی ته بیاپی.

$$\frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = \frac{4}{x-2} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+3}$$

ب - د مخرج په کربنیز ضریبونو ټوته کونه یا تجزیه
 $x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$

پ - د مخرج جربنیز ضریبونو ټوته کونه یا تجزیه
 $x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$

په ټوته کسر ټوته کونه:

$$\frac{4x+10}{x^2 + 6x + 8} = \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x+4}$$

1. a) $\frac{x^3 + 7x^2 + 9x - 5}{x+5} = x^2 + 2x - 1$
- b) $\frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2 - 2} = x^2 - 1 - \frac{1}{x^2 - 2}$
- c) $\frac{x^3 - 2x^2 + x - 5}{x^3 + 1} = 1 - \frac{2x^2 - x + 6}{x^3 + 1}$
- d) $\frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1} = x - 1$
- e) $\frac{x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 3}{x - 2} = x^3 + 4x^2 + 2x - 1 + \frac{1}{x-2}$
- f) $\frac{x^5 - x^4 + 1}{x^2 - 2} = x^3 - x^2 - 2x + 2 + \frac{4x - 3}{x^2 + 2}$

دویم: (الف) د ماتلاندی یا مخرج په کربنیزه ضریبونو ټوته کونه (تجزیه)
2. a) $(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = (x-2)(x+3)$

$$\frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}$$

د سره $C = -3$ او $A=4; B=1$

دا مو ټوته مات (کسر) ټوته وني ته لارښودوي
 $2x^2 + 20 + 12 \quad 4 \quad 1 \quad 3$

$$A = 4, \quad B = 1, \quad C = -3$$

$$\frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = \frac{4}{x-2} + \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+3}$$

ب) د ماتلاندي يا مخرج په کربنیزه ضریبونو توته کونه يا تجزیه

$$x^3 - x = (x-1) \cdot x \cdot (x+1)$$

پارشلکسر توته کونه

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

پ) د مخرج يا ماتلاندي په کربنیز ضریبونو توته کونه

$$x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$$

پارشلکسر توته کونه

$$\frac{4x+10}{x^2 + 6x + 8} = \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x+4}$$

ت) د مخرج په کربنیز ضریبونو توته کونه

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-1)(x+2)$$

$$d) \quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-1)(x+2)$$

$$\frac{-3x^2 + 19x - 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

$$e) \quad x^3 - 4x = (x-2) \cdot x \cdot (x+2)$$

$$\frac{4x^2 + 6x - 20}{x^3 - 4x} = \frac{1}{x-2} + \frac{5}{x} - \frac{2}{x+2}$$

پارشلکسر توته کونه

$$\frac{-3x^2 + 19x - 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

ت) د مخرج په کربنیز ضریبونو توته کونه

$$x^3 - 4x = (x-2) \cdot x \cdot (x+2)$$

پارشلکسر توته کونه

$$\frac{4x^2 + 6x - 20}{x^3 - 4x} = \frac{1}{x-2} + \frac{5}{x} - \frac{2}{x+2}$$

ث) د مخرج په کربنیز ضریبونو توته کونه

$$f) \quad x^2 + 20x + 51 = (x+3)(x+17)$$

پارشلکسر توته کونه

$$\frac{14}{x^2 + 20x + 51} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+17}$$

دریم: الف) د مخرج په کربنیز ضریبونو توته کونه

$$3. \quad a) \quad x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = (x-2) \cdot (x+2)^2$$

$$\frac{3x^2 + 5x + 10}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}$$

$$b) \quad x^3 - 6x^2 + 9x = (x-3)^2 \cdot x$$

$$\frac{3x^2 - 18x + 36}{x^3 - 6x^2 + 9x} = -\frac{1}{x-3} + \frac{3}{(x-3)^2} + \frac{4}{x}$$

پ: د ماتلاندی یا مخرج په کربنیز څلونو یا ضریبونو توته کونه

$$c) \quad x^4 - 2x^2 + 1 = (x-2)^2 \cdot (x+1)^2$$

په توته مات توته کونه:

$$\frac{x^2 + 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1} = -\frac{3}{4(x-1)} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2}$$

ت) د مخرج په کربنیز ضریبونو توته کونه

$$d) \quad x^3 - 5x^2 = (x-5) \cdot x^2$$

$$-\frac{x^2 + 13x + 10}{x^3 - 5x^2} = -\frac{4}{x-5} + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$$

پارشلکسر توته کونه

څلورم: الف) د مخرج په کربنیز ضریبونو توته کونه

$$4. \quad a) \quad x^3 + 2x^2 + 6x + 5 = (x^2 + x + 5)(x + 1)$$

پارشلکسر توته کونه

$$\frac{-x^2 + 2x - 12}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5} = \frac{2x + 3}{x^2 + x + 5} - \frac{3}{x + 1}$$

ب) د مخرج په کربنیز ضریبونو توته کونه

$$b) \quad x^3 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x + 2)$$

پارشلکسر توته کونه

$$\frac{4x^2 - 3x + 8}{x^3 - 2x + 4} = \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{3}{x + 2}$$

د مخرج په کربنیز ضریبونو توته کونه

$$c) \quad x^3 - 4x^2 + 5x = (x^2 - 4x + 5) \cdot x$$

پارشلکسیر توته کونه

$$\frac{8x^2 + 16x + 10}{x^3 - 4x^2 + 5x} = \frac{6x - 8}{x^2 - 4x + 5} + \frac{2}{x}$$

ت) د مخرج په کربنیز ضریبونو توته کونه

$$d) x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)(x + 1)$$

پارشلکسیر توته کونه

$$\frac{x}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{x + 1}$$

پنځم: (الف) پولینوم وېش

$$5. a) \frac{x^3 + 7x^2 + 17x + 17}{x^2 + 6x + 8} = x + 1 + \frac{2x + 11}{x^2 + 6x + 8}$$

توته کسر توته کونه

$$\frac{x^3 + 7x^2 + 17x + 17}{x^2 + 6x + 8} = x + 1 + \frac{3}{2(x+2)} + \frac{3}{2(x+4)}$$

ب) پولینوم وېش

$$b) \frac{2x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 4}{x^2 - 4x + 3} = 2x^2 + 1 + \frac{x + 1}{x^2 - 4x + 3}$$

توته کسر توته کونه

$$\frac{2x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 4}{x^2 - 4x + 3} = 2x^2 + 1 - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3}$$

ب) پولینوم وېش

$$c) \frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1} = 2 + \frac{x^2 + 2}{x^3 - 1}$$

توته کسر توته کونه

$$\frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1} = 2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

ت) پولینوم وېش

$$d) \frac{4x^3 + 16x^2 - 7x - 49}{x^3 + 4x^2 + x - 6} = 4 - \frac{11x + 25}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$$

توته کسر توته کونه

$$\frac{4x^3 + 16x^2 - 7x - 49}{x^3 + 4x^2 + x - 6} = 4 - \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+3}$$

شېړم: (الف) د بنوونې لپاره مشتق $(x') F'$ جوړېږي.

د جمعي قانون او د توان قانون:

$$a) F'(x) = 2 \cdot 2x + 4 = 4x + 4$$

ب) خنزيرې قانون:

$$F(x) = u^3 \quad u(x) = x^2 - x, \quad u'(x) = 2x - 1$$

$$F'(x) = 3 \cdot (2x - 1) \cdot (x^2 - x)^2$$

—

ئۇزىرىي قانون

$$6. \quad a) \quad F'(x) = 2 \cdot 2x + 4 = 4x + 4$$

$$b) \quad F(x) = u^3 \quad u(x) = x^2 - x, \quad u'(x) = 2x - 1$$

$$F'(x) = 3 \cdot (2x - 1) \cdot (x^2 - x)^2$$

$$c) \quad F(x) = \sqrt{u} \quad u(x) = 2x + 1, \quad u'(x) = 2$$

$$F'(x) = 2 \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$d) \quad F'(x) = 0 + 3 \cdot \cos 3x = 3 \cdot \cos 3x$$

$$e) \quad F'(x) = x^2 \cdot \ln x + \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} - \frac{4}{9} \cdot 3x^2 = x^2 \cdot \ln x + \frac{1}{3} x^2 - \frac{4}{3} x^2$$

$$F'(x) = x^2 \cdot \ln x - x^2 = x^2 \cdot (\ln x - 1)$$

$$7. \quad a) \quad F'(x) = 3x^2 + 1, \quad G'(x) = 3x^2 + 1$$

$$F'(x) = G'(x)$$

$$b) \quad F'(x) = 2(x - 3) = 2x - 6, \quad G'(x) = 2x - 6$$

$$F'(x) = G'(x)$$

$$c) \quad F'(x) = \frac{1 \cdot (x+2) - (x+1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2},$$

$$G'(x) = \frac{3 \cdot (x+2) - 3x + 5 \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$$

$$F'(x) = G'(x)$$

$$d) \quad F'(x) = 0 + \cos x = \cos x, \quad G'(x) = \cos x$$

$$F'(x) = G'(x)$$

$$8. \quad a) \quad F(x) = x^2 + c$$

$$2 = 1^2 + c \Rightarrow c = 1$$

$$b) \quad F(x) = x^2 + 1$$

$$-2 = \sin \pi + c \Leftrightarrow -2 = 0 + c \Rightarrow c = -2$$

$$c) \quad F(x) = e^x + c$$

$$3 = e^0 + c \Leftrightarrow 3 = 1 + c \Rightarrow c = 2$$

$$d) \quad F(x) = 2x^3 + c$$

$$0 = 2 \cdot (-1)^3 + c \Leftrightarrow 0 = -2 + c \Rightarrow c = 2$$

9. a) $F'(x) = f(x)$
 $f(x) = F'(x) = 4x + 1$
- b) $f(x) = F'(x) = 3x^2 - 3$
- c) $f(x) = F'(x) = 1 + 2 \cdot \cos x$
- d) $f(x) = F'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x \cdot (1+x)$

لیم: د یوی بلواکی یا تابع f تول بنستیزی تابع F یوایحی په یوی ثابتی c یو له بل توپیریری.
 له دی امله دا یوه ډله (شار) جوروی، چي y-لور باندی راکنلشون گراف دی.
 یولسم: دراپیلیدنی لار (د مشتق قانون) لاس ته راونه یا نتیجه راکوی.

11. a) $\int \sin x dx = -\cos x + c, c \in IR$
- b) $\int (x+4) dx = \frac{x^2}{2} + 4x + c, c \in IR$
- c) $\int 2 dx = 2x + c, c \in IR$
- d) $\int (1 - \cos x) dx = x - \sin x + c, c \in IR$

دولسم : الف؛ د انتیگریشن اووبنتونی یا واریابلی s سره راکوی:
 ب : د انتیگریشن اووبنتونی یا واریابلی u سره راکوی:
 پ : د انتیگریشن اووبنتونی یا واریابلی t سره راکوی:

12. a) $\int ms^2 dx = \frac{1}{3} mx^3 + c$
- b) $\int u \cdot \sin t du = \frac{1}{2} u^2 \cdot \sin t + c$
- c) $\int at dt = \frac{1}{2} at^2 + c$
- d) $\int \frac{1}{4} v^3 \cdot \sqrt{e} dv = \frac{1}{16} v^4 \cdot \sqrt{e} + c$

دیار لسم:

13. a) $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} = c$ b) $\int 7 dx = 7x + c$
- c) $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$ d) $\int (1 - x^2) dx = x - \frac{x^3}{3} + c$
- e) $\int (x + \frac{1}{x}) dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + c$ f) $\int (e^x + \cos x) dx = e^x + \sin x + c$
- g) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$ h) $\int \frac{5}{\cos^2 x} dx = 5 \tan x + c$
- i) $\int u dx = ux + c$ k) $\int (2x + e^x) dx = 2x + e^x + c$
- l) $\int (1 + \ln x) dx = x \cdot \ln x + c$ m) $\int (\sqrt{x} + \sin x) dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \cos x + c$

خوار لسم:

$$14. \quad a) \int_0^3 4dx = [4x]_0^3 = 4 \cdot 3 - 4 \cdot 0 = 12$$

$$b) \int_{-3}^{-1} xdx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-3}^{-1} = \frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-3)^2}{2} = -4$$

$$c) \int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

$$d) \int_1^e (2 + \frac{1}{x}) dx = [2x + \ln|x|]_1^e = 2e + \ln e - (2 + \ln 1) = 2e - 1$$

$$e) \int_{-1}^0 e^x dx = [e^x]_{-1}^0 = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{e}(e-1)$$

$$f) \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 - (-1) = 2$$

$$g) \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{\cos^2 x} dx = [\tan x]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}(3 - \sqrt{3})$$

$$h) \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\cos^2 x} dx = [\tan x]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}(3 - \sqrt{3})$$

$$i) \int_{-2}^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = 4 - 4 = 0$$

$$k) \int_2^6 (1+x) dx = \left[x + \frac{x^2}{2} \right]_2^6 = 6 + \frac{6^2}{2} - (2 + \frac{2^2}{2}) = 6 + 18 - 2 - 2 = 20$$

$$l) \int_1^2 (x^2 - x^5) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} \right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{2^6}{6} - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^6}{6} \right) = -\frac{49}{6}$$

$$m) \int_{-2}^0 \left(\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3} \right) dx = \left[\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{9} \right]_{-2}^0 = 0 + 0 - \left(\frac{(-2)^4}{16} + \frac{(-2)^3}{9} \right) = -\frac{1}{9}$$

پنځاس:

$$15. \quad a) \int_{-3}^1 3dx = [3x]_{-3}^1 = 3 - (-9) = 12 \quad ; \quad - \int_1^{-3} 3dx = [3x]_1^{-3} = -(-9 - 3) = 12$$

$$b) \int_0^1 (1 + e^x) dx = [x + e^x]_0^1 = e \quad ; \quad - \int_0^1 (1 + e^x) dx = -[x + e^x]_0^1 = e$$

$$c) \int_{-\pi}^0 \sin x dx = [\cos x]_{-\pi}^0 = -2 \quad ; \quad - \int_0^{-\pi} \sin x dx = -[-\cos x]_0^{-\pi} = -2$$

شپار لسم:

16. a) $\int_0^\pi \cos x dx$

b) $-\int_{-1}^1 (x + e^x) dx$

c) $\int_2^3 3x^2 dx - \int_5^3 3x^2 dx = \int_2^3 3x^2 dx + \int_3^5 3x^2 dx = \int_2^5 3x^2 dx$

d) $\int_{-2}^1 (2+x) dx - \int_{-4}^1 (2+x) dx = \int_{-2}^1 (2+x) dx + \int_1^4 (2+x) dx = \int_{-2}^4 (2+x) dx$

اولسم:

17. a) $\int_1^{2e} \frac{1}{x} dx = \ln 2e$; $\int_1^e \frac{1}{x} dx + \int_e^{2e} \frac{1}{x} dx = \ln e - \ln 1 + \ln 2e - \ln e = \ln 3e$

b) $\int_{-1}^2 6x^2 dx = 18$; $\int_{-1}^0 6x^2 dx + \int_0^2 6x^2 dx = 2 + 16 = 18$

c) $\int_0^\pi \sin x dx = 2$; $\int_0^{0.5\pi} \sin x dx + \int_{0.5\pi}^\pi \sin x dx = 1 + 1 = 2$

اتلسه:

الف: د اکسپوننسل تابع $f(x) = e^{x+3}$ گراف يو غربيز جگيدونکي. له دي امله د انتروال $[-4, -2]$ د ژي ارزبنتونه غوبنتونکي بنديزونه راكوي.

18. a) $e^{-4+3} \cdot (-2 - (-4)) \leq \int_{-4}^{-2} e^{x+3} dx e^{-2+3} \cdot (-2(-4))$

$$e^{-1} \cdot 2 \leq \int_{-4}^{-2} e^{x+3} dx \leq e^1 \cdot 2 \Leftrightarrow \frac{2}{e} \leq \int_{-4}^{-2} e^{x+3} dx \leq 2e$$

ب: د كربنيز تابع $f(x) = \sqrt{x}$ گراف يو غربيز جگيدونکي دي. د ريني تابع $f(x) = 1 + x$ مونوتوني له امله د $f(x) = \sqrt{1+x}$ گراف هم يو غربيز جگيدونکي دي. له دي سره د انتروال $[0, 8]$ ژي ارزبنتونه غوبنتونکي بنديزونه يا که غواری بندونه دي.

b) $\sqrt{1+0} \cdot (8-9) \leq \int_0^8 \sqrt{1+x} dx \leq \sqrt{1+8} \cdot (8-0)$

$$\Leftrightarrow 8 \leq \int_0^8 \sqrt{1+x} dx \leq 24$$

پ:

د تابع $f(x) = a^x$ گرافونه اکسپوننسل گوري يا منحي دي، چي د $a < 1$ له پاره يو غربيز لويدونکي دي. له دي سره د $\frac{1}{2} < 1$ گراف د $f(x) = 2^{4-x} = 2^4 \cdot 2^{-x} = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ له امله يو غيز لويدونکي اکسپوننسل گوري ده.

د انتروال $[3; 5]$ دواړه ژي غوبنتونکي بنديزونه يا ديوالونه دي.

$$2^{4-5} \cdot (5-3) \leq \int_3^5 2^{4-x} dx \leq 2^{4-3} \cdot (5-3) \Leftrightarrow 1 \leq \int_3^5 2^{4-x} dx \leq 4$$

ت: د $f(x) = \sin^2 x$ گراف د $0 \leq x \leq 1$ سره ترلى دي يا رابند دي. له دي سره 0 او 1 غوبنتونکي بنديزونه دي.

$$0 \cdot (0.5\pi - 0) \leq \int_0^{0.5\pi} \sin^2 x dx \leq 1 \cdot (0.5\pi - 0) \Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{0.5\pi} \sin^2 x dx \leq \frac{1}{2}\pi$$

نولسم: الف : انتيگرال بشن

$$\int_1^x 5t^4 dt = x^{5-1}$$

$$l_a(x) = 31 \Rightarrow x^5 - 1 = 31 \Leftrightarrow x^5 = 32 \Rightarrow x = 2$$

ب : انتيگرال بشن

$$\int_0^x e^t dt = e^x - 1$$

$$l_a(x) = e - 1 \Rightarrow e^x - 1 = e - 1 \Leftrightarrow e^x = e \Rightarrow x = 1$$

سلم:

$$20. \quad a) \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} - 9 \quad b) \int_0^x (2 + e^t) dt = 2x + e^x - 1$$

$$c) \int_0^x \frac{1}{\cos^2 t} dt = \tan x \quad d) \int_a^x 2 dt = 2(x - a)$$

يوجيشتم:

$$21. \quad a) \int \sqrt[4]{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{4}} dx = \frac{4}{7} x \cdot \sqrt[4]{x^3} + c$$

$$b) \int \frac{1}{\sqrt[2]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{5}{4} \sqrt[5]{x^4} + c$$

$$c) \int \sqrt[6]{x^5} dx = \int x^{\frac{5}{6}} dx = \frac{6}{11} x \cdot \sqrt[6]{x^5} + c$$

$$d) \int x^2 \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{7}{3}} dx = \frac{3}{10} x^3 \cdot \sqrt[3]{x} + c$$

$$e) \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = -\frac{2}{\sqrt{x}} + c$$

$$f) \int \frac{x^3}{x^4} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$g) \int \frac{x^3 \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{18}{6} + \frac{2}{6} - \frac{2}{3}} dx = \int x^{\frac{17}{6}} dx = \frac{6}{23} x^3 \cdot \sqrt[6]{x^5} + c$$

$$h) \int \frac{\sqrt[4]{x^2}}{x \cdot \sqrt{x^3}} dx = \int x^{\frac{2}{4} - \frac{4}{4} - \frac{6}{4}} dx = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} + c$$

دوه و پنجم:

22. a) $\int 8x^3 dx = 8 \int x^3 dx = 2x^4 + c$
- b) $\int -4x^{-2} dx = -4 \int x^{-2} dx = \frac{4}{x} + c$
- c) $\int \frac{3}{-x^3} dx = - \int \frac{1}{x^3} dx = \frac{3}{2x^2} + c$
- d) $\int \sqrt[3]{3x} dx = \sqrt[3]{3x} \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3\sqrt[3]{3}}{4} x \cdot \sqrt[3]{x} + c$
- d) $\int k \cdot e^x dx = k \int e^x dx = k \cdot e^x + c$
- f) $\int -5x^n dx = -5 \int x^n dx = -\frac{5}{n+1} x^{n+1} + c ; n \neq -1$
- g) $\int \frac{\sin x}{2} dx = \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x + c$
- h) $\int \frac{3a}{2 \cdot \cos^2 x} dx = \frac{3a}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{3a}{2} \tan x + c$
- i) $\int \frac{2\sqrt{x}}{3x^3} dx = \frac{2}{3} \int x^{-\frac{5}{2}} dx = -\frac{4}{9\sqrt{x^3}} + c = -\frac{4\sqrt{x}}{9x^2} + c$
- k) $\int \frac{-\sqrt{2}}{3x} dx = -\frac{\sqrt{2}}{3} \int \frac{1}{x} dx = -\frac{\sqrt{2}}{3} \ln |x| + c$

23. a) $\int e^{x+3} dx = \int e^x \cdot e^3 dx = e^3 \int e^x dx = e^3 \cdot e^x + c = e^{x+3} + c$

b) $\int (4x)^3 dx = \int 4^3 \cdot x^3 dx = 4^3 \int x^3 dx = 4^3 \cdot \frac{1}{4} x^4 + c = 16x^4 + c$

c) $\int a \cdot e^{x+b} dx = a \cdot e^b \int e^x dx = a \cdot e^b \cdot e^x + c = a \cdot e^{x+b} + c$

d) $\int (7x^2)^4 dx = 7^4 \int x^8 dx = 7^4 \cdot \frac{1}{9} x^9 + c = \frac{7^4 \cdot x^9}{9} + c = \frac{2401 \cdot x^9}{9} + c$

24. a) $\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x + c$ b) $\frac{x^2}{2} - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + c$
 c) $\frac{5x^4}{4} - \frac{7x^2}{2} + 4x + c$ d) $\frac{x^3}{3} + x^2 + x + c$
 e) $\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + c$ f) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + c$
 g) $\frac{3x \cdot \sqrt[3]{x}}{4} - \frac{1}{x} + c$ h) $-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} + c$
 i) $\frac{5x^2}{2} - \ln|x| + \frac{\sin x}{3} + c$ k) $5x + \frac{x^6}{6} - \cos x + c$
 l) $e^x + \cot x + c$ m) $\tan x + \ln|x| + c$

25. a) $\int \frac{(x^2-1)^3}{x} dx = \int \left(x^5 - 3x^3 + 3x - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^6}{6} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + c$

b) $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2 + \sqrt{x} \right) dx = 2\sqrt{x} - 2x + \frac{2x \cdot \sqrt{x}}{3} + c$

c) $\int \frac{e^{2x} + e^{x+2}}{e^x} dx = \int (e^x + e^2) dx = e^x + x \cdot e^2 + c$

d) $\int \frac{3x^2 + 2x - 4}{x^3} dx = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) dx = 3 \cdot \ln|x| - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + c$

26. a) $\int 3^{x+1} dx = \int 3 \cdot 3^x dx = 3 \int 3^x dx = \frac{3 \cdot 3^x}{\ln 3} + c = \frac{3^{x+1}}{\ln 3} + c$

b) $\int 2^{-x} dx = \int \frac{1}{2^x} dx = \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln \frac{1}{2}} + c = -\frac{1}{2^x \cdot \ln 2} + c$

c) $\int a^{x+b} dx = a^b \int a^x dx = a^b \cdot \frac{a^x}{\ln a} + c = \frac{a^{x+b}}{\ln a} + c$

d) $\int \frac{1}{a^x} dx = \int \left(\frac{1}{a}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^x}{\ln \frac{1}{a}} + c = -\frac{1}{a^x \cdot \ln a} + c$

e) $\int 2^x \cdot 3^x dx = \int 6^x dx = \frac{6^x}{\ln 6} + c$

f) $\int \frac{2^x}{3^x} dx = \int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln \frac{2}{3}} + c = \frac{2^x}{3^x \cdot (\ln 2 - \ln 3)}$

g) $\int \frac{4^{x+3}}{2^x} dx = \int \frac{4^3 \cdot 4^x}{2^x} dx = 4^3 \int 2^x dx = \frac{4^3 \cdot 2^x}{\ln 2} + c = \frac{2^{6+x}}{\ln 2} + c$

h) $\int \frac{5^x + 3^x}{2^x} dx = \int \left(\left(\frac{5}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x \right) dx$
 $= \frac{5x}{2^x \cdot (\ln 5 - \ln 2)} + \frac{3^x}{2^x \cdot (\ln 3 - \ln 2)} + c$

i) $\int (1 + 2^x) dx = x + \frac{2^x}{2} - \frac{3^x}{\ln 3} + c$

27. a) $\int \ln 2x^3 dx = \int (\ln 2 + 3 \ln x) dx = x \cdot \ln 2 + 3(x \cdot \ln x - x) + c$
 $= x \cdot (\ln 2 + 3 \cdot \ln x - 3) + c$

b) $\int \ln \sqrt{x} dx = \int \frac{1}{2} \ln x dx = \frac{1}{2} x \cdot \ln x - \frac{x}{2} + c = x \cdot (\ln \sqrt{x}) - \frac{1}{2} + c$

c) $\int \lg \frac{x}{2} dx = (\lg x - \lg 2) dx = \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln 10} + c$
 $= \frac{x \cdot (\ln x - 1 - \ln 2)}{\ln 10} + c$

d) $\int 3 \log \frac{1}{x} dx = - \int 3 \log x dx = \frac{x - x \cdot \ln x}{\ln 3} + c$

$$28. \quad F(x) = x \cdot \ln x - x$$

$$F'(x) 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x = f(x)$$

$$29. \quad {}_a \log x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\int {}_a \log x dx = \int \frac{\ln x}{\ln a} dx = \frac{1}{\ln a} \cdot \int \ln x dx = \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln a} + c$$

$$30. \quad a) \ u = 5x - 7 \quad , \quad dx = \frac{du}{5}$$

$$\int \frac{10}{5x-7} dx = \frac{10}{5} \int \frac{1}{u} du = 2 \ln(5x-7) + c$$

$$b) \ u = 1 + 3x \quad , \quad dx = \frac{du}{3}$$

$$\int \frac{12}{(1+3x)^4} dx = \frac{12}{3} \int \frac{1}{u^4} du = -\frac{4}{3(1+3x)^3} + c$$

$$c) \ u = 5 - 4x \quad , \quad dx = \frac{du}{4}$$

$$\int \frac{1}{5-4x} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{1}{u} du = -\frac{1}{4} \ln(5-4x) + c$$

- d) $u = bx + d \quad , \quad dx = \frac{du}{b}$
- $$\int \frac{a}{bx+d} dx = \frac{a}{b} \int \frac{1}{u} du = \frac{a}{b} \cdot \ln(bx+d) + c$$
- e) $u = 5x + 7 \quad , \quad dx = \frac{du}{5}$
- $$\int (5x+7)^x dx = \frac{1}{5} \int u^3 du = \frac{(5x+7)^4}{20} + c$$
- f) $u = ax + b \quad , \quad dx = \frac{du}{a}$
- $$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \int u^n du \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c \quad , \quad n \neq -1$$
- g) $u = 4x - 2 \quad , \quad dx = \frac{du}{4}$
- $$\int \sqrt{4x-2} dx = \frac{1}{4} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{6} \sqrt{(4x-2)^3} + c$$
- h) $u = ax + b \quad , \quad dx = \frac{du}{a}$
- $$\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{1}{a} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3a} \sqrt{(ax+b)^3} + c$$
- i) $u = 2x + 5 \quad , \quad dx = \frac{du}{2}$
- $$\int \frac{7}{\sqrt{2x+5}} dx = \frac{7}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \sqrt{2x+5} + c \backslash$$
- k) $u = ax + b \quad , \quad dx = \frac{du}{a}$
- $$\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{1}{a} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{2}{2a} \sqrt{(ax+b)^3} + c$$
- l) $u = 4x \quad , \quad dx = \frac{du}{4} ; \quad \int \sin 4x dx = \frac{1}{4} \int \sin u du = -\frac{1}{4} \cos 4x + c$
- m) $u = -2x \quad , \quad dx = -\frac{du}{2} ; \quad \int \frac{3}{e^{2x}} dx = -\frac{3}{2} \int e^u du = -\frac{3}{2} 2e^{2x} + c$
- n) $u = 3x + \frac{\pi}{4} \quad , \quad dx = \frac{du}{3}$
- $$\int \cos(3x + \frac{\pi}{4}) dx = \frac{1}{3} \int \cos u du = \frac{1}{3} \sin(3x + \frac{\pi}{4}) + c$$
- o) $u = 3x - 5 \quad , \quad dx = \frac{du}{3} ; \quad \int e^{3x-5} dx = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^{3x-5} + c$

یوپرسم: الف: بنه بدلون:

$$\int \frac{x}{3+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{3+x^2} dx$$

په ځای اېښونه یا سبستیچیوشن: $x = 3 + x^2$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln(3 + x^2) + c \quad \text{کېردى او انتیگرال يې ونیسی:}$$

$$b) \int \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{2+x^2}} dx$$

$$u = 2 + x^2 = 2x \quad \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \sqrt{2+x^2} + c$$

$$c) \int \frac{x^2}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{1+x^3}$$

$$u = 1+x^3 \quad u' = 3x^2 \quad \frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{3} \ln(1+x^3) + c$$

$$d) \int x \cdot (x^2 - 5)^3 dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot (x^2 - 5)^3$$

$$u = x^2 - 5 \quad u' = 2x$$

$$\frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{8} \ln(x^2 - 4)^4 + c$$

$$e) \int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot e^{x^2} dx$$

$$u = x^2 \quad u' = 2x$$

$$\frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$f) \int x \cdot \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot \sin x^2 dx$$

$$u = x^2 \quad u' = 2x$$

$$\frac{1}{2} \int \sin u du = c - \frac{1}{2} \cos x^2$$

$$g) u = 1+e^x \quad u' = e^x$$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln(1+e^x) + c$$

$$g) u = 1+x \quad u' = e^x$$

$$\int u^3 du = \frac{1}{4} (x^2 + x)^4 + c$$

$$i) \int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^3}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{\sqrt{4+x^3}} dx$$

$$u = 4+x^3 \quad u' = 3x^2$$

$$\frac{1}{3} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3} \sqrt{4+x^3} + c$$

$$k) \int x^3 \cdot \ln^4 dx = \frac{1}{4} \int 4x^3 \cdot \ln x^4 dx$$

$$u = x^4 \quad u' = 4x^3$$

$$\frac{1}{4} \int \ln u du = \frac{1}{4} x^4 \cdot (\ln x^4 - 1) + c$$

$$32. \quad a) \quad f(x) = \ln x \quad ; \quad \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + c$$

$$b) \quad f(x) = x^2 + 3 ; \quad \int x(x^2 + 3) dx = \frac{1}{2} (x^2 + 3)^2 + c$$

$$c) \quad f(x) = x^3 - 1 ; \quad \int 3x^2(x^3 - 1) dx = \frac{1}{2} (x^3 - 1)^2 + c$$

$$d) \quad f(x) = x^2 - x ; \quad \int (2x - 1)(x^2 - x) dx = \frac{1}{2} (x^2 - x)^2 + c$$

$$33. \quad f(x) = u \quad \frac{du}{dx} = f'(x) \Rightarrow f'(x) dx = du$$

$$\int f(x) \cdot f'(x) dx = \int u du = \frac{1}{2} u^2 + c = \frac{1}{2} (f(x))^2 + c$$

$$34. \quad a) \quad \int \frac{x^2}{4+x^3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{4+x^3} dx = \frac{1}{3} \ln |4+x^3| + c$$

$$b) \quad \int \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 - 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 3x^2 - 1} dx = \frac{1}{3} \ln |x^3 + 3x^2 - 1| + c$$

$$c) \quad \int \frac{5}{x+2} dx = 5 \int \frac{1}{x+2} dx = 5 \ln |x+2| + c$$

$$d) \quad \int \frac{3e^x}{e^x - 5} dx = 3 \int \frac{e^x}{e^x - 5} dx = 3 \ln |e^x - 5| + c$$

$$e) \quad \int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + c$$

$$f) \quad \int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + c$$

$$35. \quad a) \quad g(x) = 3 + x^5 \quad g'(x) = 5x^4$$

$$\int \frac{5x^4}{3+x^5} dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |3+x^5| + c$$

$$b) \quad u = 3 + x^5$$

$$\int \frac{5x^4}{(3+x^5)^2} dx = \int \frac{g'(x)}{(g(x))^2} dx = \int u^{-2} du = -\frac{1}{3+x^5} + c$$

c) $u = 1-x^2$

$$\int \frac{3x}{4-x^2} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{-2x}{(1-x^2)^4} dx = -\frac{3}{2} \int u^{-4} du = -\frac{1}{2(1-x^2)^3} + c$$

d) $g(x) = 4-x^2 \quad g'(x) = -2x$

$$\int \frac{5x}{4-x^2} dx = -\frac{5}{2} \int \frac{-2x}{4-x^2} dx = -\frac{5}{2} \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = -\frac{5}{2} \ln|4-x^2| + c$$

e) $g(x) = 3+\sin x \quad g'(x) = \cos x$

$$\int \frac{\cos x}{3+\sin x} dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|3+\sin x| + c$$

f) $u = 1-\cos x$

$$\int \frac{\sin x}{3+(1-\cos x)^2} dx = \int \frac{g'(x)}{(g(x))^2} dx = \int u^{-2} du = -\frac{1}{1-\cos x} + c$$

36. a) $\int \frac{4}{x^2+9} dx = \frac{4}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} dx = \frac{4}{3} \arctan \frac{x}{3} + c$

b) $\int \frac{3}{2x^2+2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \arctan x + c$

c) $\int \frac{1}{x^2+2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{x \cdot \sqrt{2}}{2} + c$

d) $\int \frac{2}{3x^2+5} dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2+\frac{5}{3}} dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{\frac{5}{3} \cdot \left(\left(\frac{x \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2+1\right)} dx$
 $= \frac{2}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{x \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2+1} dx = \frac{2}{\sqrt{15}} \cdot \arctan \frac{x \cdot \sqrt{15}}{5} + c$

e) $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$

f) $\int \frac{1}{ax^2+b} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{x^2+\frac{b}{a}} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\frac{b}{a} \cdot \left(\left(\frac{x \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2+1\right)} dx$
 $= \frac{1}{b} \int \frac{1}{\left(\frac{x \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2+1} dx = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan \frac{x \cdot \sqrt{ab}}{b} + c \text{ mit } ab > 0$

و ه دېرىسم: الف: د $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-9}$ له امله ماتلاندي پولينوم صفر ئايونه نه لري، نو له دي
امله په كربنيزو چلونو يا ضريبونو نه توتە كىري ياتوتە ور نه ده.
اوبيونه يا حل د اركوس تانجنت تابع په مرسته لاس ته راتلى شي.

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 13} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2 + 9} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2 + 1} dx$$

$$= \frac{1}{3} \arctan \frac{x+2}{3} + c$$

$$ب: د \quad x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{-1}$$

اوبيونه يا حل د اركوس تانجنت تابع په مرسته لاس ته راتلى شي.

$$\int \frac{5}{x^2 + 2x + 2} dx = 5 \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = 5 \arctan(x+1) + c$$

$$پ: د \quad x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{-1}$$

اوبيونه يا حل د اركوس تانجنت تابع په مرسته لاس ته راتلى شي.

$$\int \frac{6}{3x^2 + 18x + 30} dx = \frac{6}{3} \int \frac{1}{x^2 + 6x + 10} dx = 2 \int \frac{1}{(x+3)^2 + 1} dx$$

$$ت: د \quad x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-25}$$

اوبيونه يا حل د اركوس تانجنت تابع په مرسته لاس ته راتلى شي.

$$\int \frac{2}{2x^2 + 8x + 58} dx = \int \frac{1}{x^2 + 4x + 29} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2 + 25} dx$$

$$= \frac{1}{25} \int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{5}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{5} \arctan \frac{x+2}{5} + c$$

$$38. \quad a) \quad \int \frac{2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} dx = 2 \arcsin \frac{x}{3} + c$$

$$b) \quad \int \frac{1}{\sqrt{2-4x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{6-(2+x)^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)^2}} dx$$

$$= \arcsin \frac{x+2}{\sqrt{6}} + c$$

$$c) \int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + c$$

$$d) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 5}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 - 6}} dx = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-1}{\sqrt{6}}\right)^2 - 1}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} du = \ln \left| \frac{x-1}{\sqrt{6}} + \sqrt{\left(\frac{x-1}{\sqrt{6}}\right)^2 - 1} \right| + c_1$$

$$= \ln \left| \frac{x-1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{x^2 - 2x - 5} \right| + c_1$$

$$= \ln |x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x - 5}| - \ln \sqrt{6} + c_1 = \ln |x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x - 5}| + c$$

$$e) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}} dx = \ln |x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}| + c$$

$$f) \int \frac{6}{\sqrt{9x^2 + 9}} dx = 6 \int \frac{1}{3\sqrt{x^2 + 1}} dx = 2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = 2 \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}| + c$$

39. a) $\int \frac{1-x}{x^2+x+1} dx = -\int \frac{1}{x^2+x+1} (2x-2) dx = -\int \frac{1}{x^2+x+1} (2x+1-3) dx$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + 2 \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \ln |x^2 + x + 1| + \sqrt{3} \cdot \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

b)
$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^2+4x+6} dx &= \int \frac{2x+4-3}{x^2+4x+6} dx \\ &= \int \frac{2x+4}{x^2+4x+6} dx - 3 \int \frac{1}{(x+2)^2+2} dx \\ &= \int \frac{2x+4}{x^2+4x+6} dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx \\ &= \ln|x^2+4x+6| - \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \arctan \frac{x+2}{\sqrt{2}} + c \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{2x^2+2x+8} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{x}{x^2+x+4} dx = \frac{3}{2} \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}}{x^2+x+4} dx \\ &= \frac{3}{4} \int \frac{2x+1}{x^2+x+4} dx - \frac{3}{4} \int \frac{1}{\frac{15}{4} \cdot \left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)^2+1\right)} dx \\ &= \frac{3}{4} \int \frac{2x+1}{x^2+x+4} dx - \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)^2+1} dx \\ &= \frac{3}{4} \ln|x^2+x+4| - \frac{\sqrt{15}}{10} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{15}} + c \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \int \frac{x-3}{x^2+8x+17} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-6)}{x^2+8x+17} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+8-14)}{x^2+8x+17} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+8}{x^2+8x+17} dx - \int \frac{7}{x^2+8x+17} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+8}{x^2+8x+17} dx - 7 \int \frac{1}{(x+4)^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+8x+17| - 7 \cdot \arctan(x+4) + c \end{aligned}$$

40. a) $u(x) = x$ mit $u'(x) = 1$ und $v'(x) = e^x$ mit $v(x) = e^x + c_1$
- $$\begin{aligned} \int x \cdot e^x dx &= x \cdot (e^x + c_1) - \int 1 \cdot (e^x + c_1) dx \\ &= x \cdot e^x + c_1 x - \int e^x dx - \int c_1 dx = (x - 1) \cdot e^x + c \end{aligned}$$
- b) $u(x) = x$ mit $u'(x) = 1$ und $v'(x) = \sin x$ mit $v(x) = -\cos x + c_1$
- $$\begin{aligned} \int x \cdot \sin x dx &= x \cdot (-\cos x + c_1) - \int 1 \cdot (-\cos x + c_1) dx \\ &= -x \cdot \cos x + c_1 x + \int \cos x dx - \int c_1 dx = -x \cdot \cos x + \sin x + c \end{aligned}$$
- c) $u(x) = \ln x$ mit $u'(x) = \frac{1}{x}$ und $v'(x) = x^2$ mit $v(x) = \frac{x^3}{3} + c_1$
- $$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \ln x dx &= \left(\frac{x^3}{3} + c_1 \right) \cdot \ln x - \int \left(\frac{x^3}{3} + c_1 \right) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x + c_1 \ln x - \frac{x^3}{9} - c_1 \ln x + c = \frac{x^3}{3} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + c \end{aligned}$$
- d) $u(x) = \ln x$ mit $u'(x) = \frac{1}{x}$ und $v'(x) = x^{-2}$ mit $v(x) = -\frac{1}{x} + c_1$
- $$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x^2} dx &= \left(-\frac{1}{x} + c_1 \right) \cdot \ln x - \int \left(-\frac{1}{x} + c_1 \right) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= -\frac{1}{x} \cdot \ln x + c_1 \ln x - \frac{1}{x} - c_1 \ln x + c = -\frac{1}{x} \cdot (\ln x + 1) + c \end{aligned}$$
- e) $u(x) = x$ mit $u'(x) = 1$ und $v'(x) = e^{2x}$ mit $v(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + c_1$
- $$\begin{aligned} \int x \cdot e^{2x} dx &= x \cdot \left(\frac{1}{2} e^{2x} + c_1 \right) - \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} + c_1 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} x \cdot e^{2x} + c_1 x - \frac{1}{4} e^{2x} - c_1 x + c = \frac{1}{4} e^{2x}(2x - 1) + c \end{aligned}$$
- f) $u(x) = x$ mit $u'(x) = 1$ und $v'(x) = \sin 2x$ mit $v(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + c_1$
- $$\begin{aligned} \int x \cdot \sin 2x dx &= x \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + c_1 \right) - \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + c_1 \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} x \cos 2x + c_1 x + \frac{1}{4} \sin 2x - c_2 x + c = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c \end{aligned}$$

41. a) $\int x^2 \cdot \cos x dx = x^2 \cdot \sin x - 2 \int x \cdot \sin x dx + c_1$
 $\int x^2 \cdot \cos x dx = x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \sin x + c.$
- b) $\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2 \int x \cdot e^x dx + c_1$
 $\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x - 2e^x + c = e^x \cdot (x^2 - 2x + 2) + c.$
- c) $\int x^2 \cdot e^{2x} dx = \frac{x^2 \cdot e^{2x}}{2} - \int 2x \cdot \frac{e^{2x}}{2} dx + c_1$
 $= \frac{x^2 \cdot e^{2x}}{2} - \int x \cdot e^{2x} dx + c_1$
 $\int x^2 \cdot e^{2x} dx = \frac{x^2 \cdot e^{2x}}{2} - \frac{1}{4} e^{2x}(2x - 1) + c = \frac{1}{4} e^{2x}(2x^2 - 2x + 1) + c.$
- d) $\int x^2 \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin 2x - \int 2x \cdot \frac{\sin 2x}{2} dx + c_1$
 $= \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin 2x - \int x \cdot \sin 2x dx + c_1$

$$\int x^2 \cdot \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin 2x + \frac{1}{2} x \cdot \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

42. a) $\int x^4 \cdot e^{2x} \, dx = \frac{e^{2x}}{2} \cdot \left(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + \frac{3}{2} \right) + c$

b) $\int \sin^4 x \, dx = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cdot \cos x - \frac{3}{8} \sin x \cdot \cos x + \frac{3}{8} x + c$

c) $\int x^3 \cdot e^x \, dx = e^x \cdot (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$

d) $\int \cos^6 x \, dx$

$$= \frac{1}{6} \cos^5 x \cdot \sin x + \frac{5}{24} \cos^3 x \cdot \sin x + \frac{5}{16} \cos x \cdot \sin x + \frac{5}{16} x + c$$

43. a) $\int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x \, dx + c_1$

$$= \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx + c_1$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx + c_2$$

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + x + c_2$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2} + c$$

b) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \ln x \cdot \ln x - \int \frac{\ln x}{x} \, dx + c_1$

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + c$$

c) $\int e^x \cdot \sin x \, dx = -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x \, dx + c_1$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x \, dx + c_1$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x \, dx + c_2$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x \cdot (\sin x - \cos x) + c$$

d) $\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \sin x \cdot \sin x - \int \cos x \cdot \sin x \, dx + c_1$

$$\int \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin^2 x + c$$

44. a) $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} \, dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} \, dx = \frac{1}{2} \frac{|x-1|}{|x+1|} + c$$

ب : کيردى

$$x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$$

د توتە كسرۇنۇ اينىنونە

$$\frac{1}{x^2 + 6x + 8} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+4} \quad A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$$

كيردى او انتىگرال يى ونىسى

$$\int \frac{1}{x^2 + 6x + 8} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+2} \, dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+4} \, dx = \frac{1}{2} \ln \frac{|x+2|}{|x+4|} + c$$

$$= \sqrt{\frac{|x+2|}{|x+4|}} + c$$

پ : ماتلاندی توتە كىرى

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

د توتە مات لە پارە اپىسونە

$$\frac{3x+2}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \quad A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{3x+2}{x^2-x-2} dx = \frac{8}{3} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \frac{8}{3} \ln |x-2| + \frac{1}{3} \ln |x+1| + c$$

ت : مالتاندی توتە كونە

$$d) \quad x^3 - 4x = (x(x-2)(x+2))$$

$$\frac{x^2 + 12x + 12}{x^3 - 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2}$$

$$د توتە مات توتە كونو اپىسونە$$

$$سرە \quad A = -3, \quad B = 5, \quad C = -1$$

كېيىنول او بىنلىگەرنى يول

$$\int \frac{x^2 + 12x + 12}{x^3 - 4x} dx = -3 \int \frac{1}{3} dx + 5 \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{1}{x+2} dx$$

$$= -3 \ln |x| + 5 \ln |x-2| - \ln |x+2| + c$$

$$45. \quad a) \quad x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2$$

$$\frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} dx = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} dx = 6 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x+1} dx + 9 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

$$= 6 \ln |x| - \ln |x+1| - \frac{9}{x+1} + c$$

$$b) \quad x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

$$\frac{3x}{x^2 - 6x + 9} dx = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{3x}{x^2 - 6x + 9} dx = 3 \int \frac{1}{x-3} dx + 9 \int \frac{1}{(x-3)^2} dx$$

$$= 3 \ln |x-3| - \frac{9}{x-3} + c$$

$$c) \quad x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

$$\frac{3x}{x^2 - 6x + 9} dx = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + - \frac{D}{x+1}$$

$$A = -1, \quad B = 1, \quad C = -1, \quad D = 2$$

،

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{x^2 - 6x + 9} dx &= - \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^3} dx + 2 \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= 3 \ln |x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + 2 \ln |x+1| \end{aligned}$$

ت : ماتلاندي توته کونه

د امله يوه په کربنیز څلدونو يا ضریبونو توته
کونه مخ ته لرو

د توته ماتونو توته کونه رو دويا حئی په ھای کوو

$$\frac{5x^3 - 11x^2 + 5x + 4}{(x-1)^4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{(x-1)^4}$$

سره $A = 5, \quad B = 4, \quad C = -2, \quad D = 3$

کيردى او لنتىگرال يې ونيسى

$$\begin{aligned} &\int \frac{5x^3 - 11x^2 + 5x + 4}{(x-1)^4} dx \\ &= 5 \int \frac{1}{x-1} dx + 4 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{(x-1)^3} dx + 3 \int \frac{1}{(x-1)^4} dx \\ &= 5 \int \frac{1}{x-1} dx + 4 \int \frac{1}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{(x-1)^3} dx + 3 \int \frac{1}{(x-1)^4} dx \end{aligned}$$

شپر خلوپنتم. الف:
ماتلاندی توته کونه

$$(x^2 - x)(x^2 + 4) = x(x-1)(x^2 + 4)$$

د توته ماتونو توتهونی له پاره ایشونه

$$\frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2 + 4}$$

سره. $A = 2$, $B = -2$, $C = 2$, $D = 4$

کېرىدى او انتىگرال يې وئىسى:

$$\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx - 2 \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2x+4}{x^2 + 4} dx$$

$$= 2 \ln |x| - 2 \ln |x-1| + \int \frac{2x}{x^2 + 4} dx + 2 \int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx$$

$$= 2 \ln |x| - 2 \ln |x-1| + \ln(x^2 + 4) + \arctan \frac{x}{2} + c$$

b) $x^3 - 2x - 4 = (x-2)(x^2 + 2x + 2)$

$$\frac{3x+4}{x^3 - 2x - 4} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+c}{x^2 + 2x + 2}$$

$A = 1$, $B = -1$, $C = -1$

$$\int \frac{3x+4}{x^3 - 2x - 4} dx = \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 2} dx$$

$$= \ln |x-2| - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 2x + 2| + c$$

c) $x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(x^2 + x + 1)$

$$\frac{2x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 - x - 2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+c}{x^2 + x + 1}$$

لە پاره $A = 1$, $B = 1$, $C = -1$ د

$$\int \frac{2x^2 - 2x + 3}{x^3 - x^2 - x - 2} dx = \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2 + 2x + 1} dx$$

$$= \ln |x-2| + \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx$$

d) $x^3 - 3x^2 + 9x + 13 = (x+1)(x^2 - 4x + 13)$

$$\frac{7x^2 - 10x + 37}{x^3 - 3x^2 + 9x + 13} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+c}{x^2 + 4x + 13}$$

$$\begin{aligned} A &= 3, \quad B = 4, \quad C = -2 \\ \int \frac{7x^2 - 10x + 37}{x^3 - 3x^2 + 9x + 13} dx &= 3 \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{4x-2}{x^2 + 4x + 13} dx \\ &= 3 \ln |x+1| + 2 \int \frac{2x-4}{x^2 + 4x + 13} dx + \frac{2}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2 + 1} dx \\ &= 3 \ln |x+1| + 2 \ln |x^2 - 4x + 13| + 2 \arctan \frac{x-2}{3} + c \end{aligned}$$

$$47. \quad a) \quad x^2 : (x+1) = x-1 + \frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx = \int x dx - \int 1 dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln |x+1| + c$$

$$b) \quad (x^3 - 2x^2 + x + 5) : (x^2 - 1) = x - 2 + \frac{2x+3}{x^2 - 1}$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{x^2 - 1} = x - 2 + \frac{5}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{x^2 - 1} dx &= \int x dx - \int 2 dx + \frac{5}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{5}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln |x+1| + c \end{aligned}$$

$$c) \quad (3x^3 + 5x^2 - 29x - 25) : (x^2 + x - 12) = 3x + 2 + \frac{5x-1}{x^2 + x - 12}$$

$$\frac{3x^3 + 5x^2 - 29x - 25}{x^2 + x - 12} = 3x + 2 + \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+4}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^3 + 5x^2 - 29x - 25}{x^2 + x - 12} dx &= 3 \int x dx + \int 2 dx + 2 \int \frac{1}{x-3} dx + 3 \int \frac{1}{x+4} dx \\ &= \frac{3x^2}{2} + 2x + 2 \ln |x-3| + 3 \ln |x+4| + c \end{aligned}$$

$$d) \quad (2x^3 + x^2) : (x^3 - 1) = 2 + \frac{x^2 + 2}{x^3 - 1}$$

$$\frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1} = 2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1} dx &= \int 2dx + \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \\ &= 2x + \ln|x-1| + \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c \end{aligned}$$

$$d) \int \sqrt{2x^2 + 4x + 6} dx = \sqrt{2} \int \sqrt{(x+1)^2 + 2} dx$$

په ٿاي ايمنونه يا سبستيچيشن
 $u = x + 1$

$$\begin{aligned} &\int \sqrt{2x^2 + 4x + 6} dx \\ &= \frac{x+1}{2} \sqrt{2x^2 + 4x + 6} + 2\sqrt{2} \cdot \ln|x+1 + \sqrt{2x^2 + 4x + 6}| + c \end{aligned}$$

$$49. \quad a) \int \sqrt{x^2 + 2x} dx = \int \sqrt{(x+1)^2 - 1} dx$$

$$u = x + 1$$

$$\int x^2 + 2x dx = \frac{x+1}{2} \sqrt{x^2 + 2x} - \frac{1}{2} |x+1 + \sqrt{x^2 + 2x}| + c$$

$$b) \int \sqrt{x^2 - 4x - 5} dx = \int \sqrt{(x-2)^2 - 9} dx$$

$$u = x - 2$$

$$\int \sqrt{x^2 - 4x - 5} dx = \frac{x-2}{2} \sqrt{x^2 - 4x - 5} - \frac{9}{2} \ln \geq |x-1 + \sqrt{x^2 - 4x - 5}| + c$$

$$c) \int x \sqrt{x^2 + 4x + 3} dx = \int x \sqrt{(x+2)^2 - 1} dx$$

$$u = x + 2 \Rightarrow x = u - 2$$

$$\int (u - 2\sqrt{u^2 - 1}) du - 2 \int u \sqrt{u^2 - 1} du$$

$$\int x \sqrt{x^2 + 4x + 3} dx$$

$$= \frac{\sqrt{(x^2 + 4x + 3)^3}}{3} - (x+2)\sqrt{x^2 + 4x + 3} - \ln|x+2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3}| + c$$

$$d) \int (x+2)\sqrt{x^2+2+2}dx = \int (x+2)\sqrt{(x+1)^2+1}dx$$

په ټای اینسوونه:

$$u = x+1 \Rightarrow x = u-1$$

$$\begin{aligned} \int (u+1)\sqrt{u^2+1}du &= \int u\sqrt{u^2+1}du + \int u^2+1du \\ \int (x+2)\sqrt{x^2+2x+2}dx &= \frac{\sqrt{(x^2+2x+2)^3}}{3} + \frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{3}{2}\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}| + c \end{aligned}$$

50. a) $\int \frac{x^2}{6}dx = \frac{x^3}{18} + c$

b) $\int \frac{1}{x^3}dx = -\frac{1}{2x^2} + c$

c) $\int (1-2x^2+x^3)dx = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + c$

d) $\int (x^2-3x-6)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 6x + c$

e) $\int x \cdot \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} \cdot x^2 \cdot \sqrt{x} + c$

f) $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{7}{3}} dx = \frac{3}{10} \cdot x^3 \cdot \sqrt[3]{x} + c$

g) $\int \frac{x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}} dx = \int x^{\frac{13}{10}} dx = \frac{10}{23} \cdot x^{\frac{23}{10}} + c = \frac{10}{23} \cdot x^2 \cdot \sqrt[10]{x^3} + c$

h) $\int \frac{3x \cdot \sqrt{x^3}}{x^2} dx = 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx = 3 \int \sqrt{x} dx = 2x\sqrt{x} + c$

i) $\int \frac{x^2+3x-2}{x} dx = \int \left(x+3-\frac{2}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln|x| + c$

k) $\int \frac{x-5}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\sqrt{x}-\frac{5}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 10\sqrt{x} + c$

51. a) $u = 5-4x$

$$\int 2(5-4x)^3 dx = -\frac{2}{4} \int u^3 du = -\frac{1}{8}(5-4x)^4 + c$$

b) $u = 5x+2$

$$\int \sqrt{5x+2} dx = \frac{1}{5} \int \sqrt{u} du = \frac{2}{15} \sqrt{(5x+2)^3}$$

c) $u = g(x) = x^2 \quad , \quad g'(x) = 2x$

$$\int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

d) $u = g(x) = 2x^3 - 4 \quad , \quad g'(x) = 6x^2$

$$\int x^2 \cdot \sqrt{2x^3-4} dx = \frac{1}{6} \int 6x^2 \cdot \sqrt{2x^3-4} dx = \frac{1}{6} \int \sqrt{u} du = \frac{\sqrt{(2x^3-4)^3}}{9} + c$$

e) $u = g(x) = x^2 + 2x + 1 \quad , \quad g'(x) = 2x + 2$

$$\int \frac{3x+3}{x^2+2x+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1} dx = \frac{3}{2} \ln|x^2+2x+1| + c$$

f) $u = g(x) = 2 + \sin x \quad , \quad g'(x) = \cos x$

$$\int \frac{\cos x}{(2+\sin x)^3} dx = \int \frac{1}{u^3} du = -\frac{1}{2(2+\sin x)^2} + c$$

g) $\int \frac{1}{2x^2+9} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2} \cdot x}{3}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{3\sqrt{2}} \int \frac{1}{u^2+1} du$

$$\int \frac{1}{2x^2+9} dx = \frac{1}{3\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2}}{3} x + c = \frac{1}{6} \sqrt{2} \arctan \frac{\sqrt{2}}{3} x + c$$

h) $u = g(x) = x^2 - 4 \quad , \quad g'(x) = 2x$

$$\int \frac{x^2}{x^2-4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-4} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2-4| + c$$

i) $\frac{x}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} ; \quad A = \frac{1}{4} \quad , \quad B = \frac{3}{4}$

$$\int \frac{x}{x^2+2x-3} dx = \frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{3}{4} \ln|x+3| + c$$

k) $\int \sqrt{x^2+2x+3} dx = \int \sqrt{(x+1)^2+2} dx$

l) $\int \sqrt{x^2+2x+3} dx = \int \sqrt{(x+1)^2+2} dx$

$$= \frac{x+1}{2} \sqrt{x^2+2x+3} + \ln|x+1 + \sqrt{x^2+2x+3}| + c$$

m) $\int \frac{1}{x^2+12x+40} dx = \int \frac{1}{(x+6)^2+4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x+6}{2}\right)^2+1} dx$

$$= \frac{1}{2} \arctan \frac{x+6}{2} + c$$

52. a) $u = 2x - 3$

$$\int \ln(2x-3)dx = \frac{1}{2(2x-3)} + c$$

b) $u = 3x$

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x + c$$

c) $u = 3x + 1$

$$\int 2^{x+1} dx = \frac{2^{x+1}}{3 \ln 2} + c = \frac{2^{x+1}}{\ln 8} + c$$

d) $u = 4x$

$$\int \lg 4x dx = \int (\lg 4 + \lg x) dx = x \lg 4 + \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln 10} + c$$

e) $u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}, v' = x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} + c_1$

$$\int x \cdot \ln x dx = \left(\frac{x^2}{2} + c_1 \right) \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + c_1 \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x + c_1 - \frac{x^2}{4} = c_1 \ln x + c = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

f) $u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}, v' = \sqrt{x} \Rightarrow v = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c_1$

$$\int \sqrt{x} \cdot \ln x dx = \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c_1 \right) \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c_1 \right) dx$$

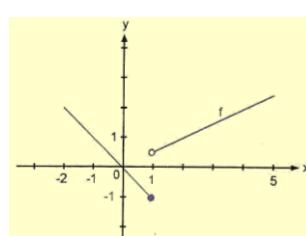
$$= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \cdot \ln x + c_1 \ln x - \frac{4}{9} \sqrt{x^3} - c_1 \ln x + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \cdot \ln x - \frac{4}{9} \sqrt{x^3} + c$$

g) $u = e^x \Rightarrow u' = e^x, v' = \cos x \Rightarrow v = \sin x + c_1$

$$= \int x \cos x dx = x \cdot (\sin x + c_1) - \int (\sin x + c_1) dx$$

$$= x \cdot \sin x + c_1 x + \cos x - c_1 x + c = x \cdot \sin x + \cos x + c$$

درېپنځوس: الف: یو بنستیز تابع f دی لاندی خپله ولري



53. a) $F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + c & x \leq 1 \\ \frac{x^2}{4} + c & x > 1 \end{cases}$

دا د او

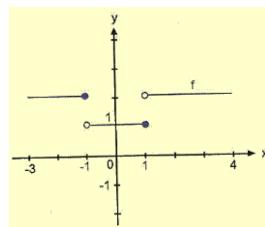
$$\lim_{x \rightarrow 1} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} x = \frac{1}{2}$$

لله امله د $x=1$ په ځای کې مشتقور نه ده او له دی امله f بنستیز تابع نه ده.
د دوه نه پړکیدونکو توابعو انتیگرېشن:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^5 f(x)dx &= \int_{-2}^1 -xdx = \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 + \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^5 \\ &= -\frac{1}{2} - (-2) + \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{2}\end{aligned}$$

دا د f تابع په ورکړووی اترووال کي انتيګرېشنور دهو سره له دي چي دا پرېکيدونکي ده او بنسټيز تابع هم نه دي.

ب: تابع f دی لاندی څيره ولري:



$$b) f(x) = \begin{cases} 2x + c & -3 < x \leq -1 \\ x + c & -1 < x \leq 1 \\ 2x + c & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

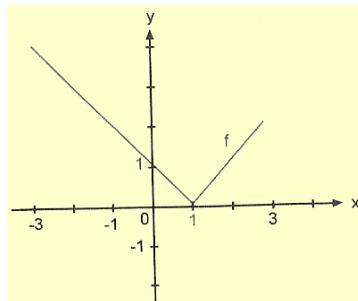
دا په ځایونو $x=1$; $x=-1$ کي انتيګرالور نه ده، نوله دی سره f بنسټيز تابع نه ده. د دري نهپرېکيدونکو توابعو انتيګرال:

$$\begin{aligned}\int_{-3}^4 f(x)dx &= \int_{-3}^{-1} 2dx + \int_{-1}^1 2dx [2x]_{-3}^{-1} + [x]_{-1}^1 + [2x]_1^4 \\ &= -2 + 6 + 1 + 1 + 8 - 2 = 12\end{aligned}$$

څلورپنځوس: ارزښتازاده ليکنه راكوي:

$$54. f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$$

د تابع f یو بنسټيزه تابع باید لاندی څيره ولري



$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + c & x \geq 1 \\ -\frac{x^2}{2} + x + c & x < 1 \end{cases}$$

د

$$F'(1) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1} F'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (-x+1) = 0$$

له امله په ځای کي بنوونه ده (تابع ارزښت برابر پوله ارزښت):

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{x^2}{2} + x + c$$

$$\frac{1}{2} - 1 + c_1 = -\frac{1}{2} + 1 = c_2$$

$$c_1 = 1 + c_2$$

له دی سره تابع f ناپرېکيدونکي، مشتقور بنسټيز تابع F لري.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + c & x \leq 1 \\ -\frac{x^2}{2} + x + c & x > 1 \end{cases}$$

پنځه پنځوس: الف: د f پارابول پورته لورته واز دی د ککری تکي $S(1;1)$ سره. دا یواحی د x -محور پورته لورته هغلي.

$$55. \quad a) \int_{-1}^4 (x^2 - 2x + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right]_{-1}^4 = \frac{40}{0} + \frac{10}{3} = \frac{50}{3}$$

منځ ارزښت

$$f(x_0) \cdot 4 - (-1) = \frac{50}{3} \Rightarrow f(x_0) = \frac{10}{3}$$

د اړونده ارزښتونو ایښوونه

$$\frac{10}{3} = x^2 - 2x + 2$$

$$x^2 - 2x - \frac{4}{3} \Rightarrow x_1 = 1 - \frac{\sqrt{21}}{3}, \quad x_2 = 1 + \frac{\sqrt{21}}{3}$$

ب: د f ګراف چګیدونکي کربنه ده د y -محور غوځي $y=1$ سره. دا د ورکړشوي انتروال سره یواحی له دی سره x -محور پورته لورته هغلي.

$$b) \int_0^6 (x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^6 = 24 - 0 = 24$$

منځ ارزښت

$$f(x_0) \cdot (6-0) = 24 \Rightarrow f(x_0) = 4$$

د اړونده x -ارزښتونو سره ایښوونه.

$$x+1=4 \Rightarrow x_0=3$$

پ: ساینکړه د ورکړشوي انتروال کي x -محور پورته لورته هېټه ده.

$$c) \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 1 + 1 = 2$$

منځ ارزښت

$$f(x_0) \cdot (\pi - 0) = 2 \Rightarrow f(x_0) = \frac{2}{\pi}$$

د ورکړشوي اړونده x -محور لپاره ږدو:

$$\sin x = \frac{2}{\pi}$$

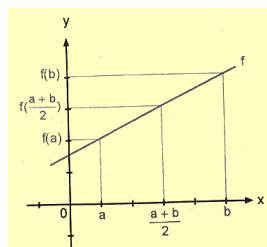
$$\Rightarrow x = \arcsin \frac{2}{\pi} \Rightarrow x_1 \approx 0.690, \quad x_2 \approx 2.451$$

شپږ پنځوس:

$$56. \quad a) \int_a^b (mx + n) dx = \left[\frac{mx^2}{2} + nx \right]_a^b = \frac{bm^2}{2} + bn - \frac{a^2 m}{2} - an$$

$$= \frac{m}{2} (b^2 - a^2) + n(b - a) = (b - a) \left(\frac{m}{2} (b + a) + n \right)$$

منځ ارزښت:



$$\begin{aligned}
 f(x_0) \cdot (b-a) &= (b-a) \left(\frac{m}{2} (b+a) + n \right) \Rightarrow x = \frac{a+b}{2} \\
 &= \frac{m}{2} (b+a) + n = mx \Rightarrow \frac{m}{2} (b+a) = mx \Rightarrow x = \frac{a+b}{2} \\
 &\Rightarrow \int_a^b (mx + n) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a)
 \end{aligned}$$

د دی خالت له پاره چي کربنه د x -محور پورته لور ته ټغلي، نتيجه (۱) باوري کليري، چي
د تراپيچ فرمول سره سر خوري، که مور اوږدوالي $(b-a)$ د جګوالي په څير او د تابع ارزښت
 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
د منځارزښت په حیث نيسو

$$A = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a)$$

اوه پنځوس: الف: د f ګراف د x -محور یواحی پورته لور ته پروت دی.

$$\int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-2}^1 = 6$$

د سطحي یونونو سره $A = 6$

ب - د f ګراف د x -محور یواحی پورته لور ته پروت دی.

$$b) \int_0^\pi (2 + \sin x) dx = [2x - \cos x]_0^\pi = 2\pi + 2 \Rightarrow A = (2\pi + 2) \approx 8.283$$

د سطحي یونونه $A = (2\pi + 2) \approx 8.283$ سطحي واحدونو يا یونونونو سره
پ: دا کښته لور ته واز پارابل کر تکي $(-1; -2)$ لري او له دی سره یواحی د x -محور
کښته لور ته پروت دی،

$$c) \int_{-3}^0 (-x^2 - 4x - 5) dx = - \int_{-3}^0 (x^2 + 4x + 5) dx = - \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x \right]_{-3}^0 = -6$$

د هواري يا سطحي یونونونه يا واحدونه. $A = -6$

ت: یواحی صفرخای $(0; -1)$ دی، یواحني قطبخای په $x_1 = 0$ کي پروت دی. د f ګراف په
ورکړ شوي انتروال کي ناپرېکیدونکي دی او یواحی د x -محور پورته لور ته پرته ده.

$$d) \int_1^e \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx = [x + \ln x]_1^e = e$$

د سطحي یونونه $\sim 2,718$ د سطحي یونونونو سره:

اته پنځوس: دا پورته لور ته واز پارابل کر تکي $(-1, 1)$ لري او له دی سره یواحی د x -
محور پورته لور ته پروت دی،
ایښونه:

$$\int_{-2}^b (x^2 + 2x + 2) dx = 6$$

$$\frac{b^3}{3} + b^2 + 2b + \frac{8}{3} = 6$$

$$b^3 + 3b^2 + 6b - 10 = 0$$

لومړی حل: $b=1$

د پولینومو بش. $(b^3 + 3b^2 + 6b - 10) : (b-1) = b^2 + 4b + 10$

له امله بل کوم اوبي يا حل شتون نه لري. $b_{2,3} = -2 \pm \sqrt{4-10}$

نه پنځوس: د ګراف یواحی په لومړی څلوری کي او له دي امله د x -محور پورته لور ته پروت دی.

$$\int_a^4 3\sqrt{x} dx = 14$$

$$2\sqrt{4^3} - 2\sqrt{a^3} = 14$$

$$16 - 2\sqrt{a^3} \cdot 14 \Rightarrow a = 1$$

غوبښتونې د انتېگرال لاندي پوله $a=1$ ده.

شپیټه: یو پورته لورته کښولشوی نورمال پارابول تابع مساوات $y=x^2 + a$ لري د $a > 0$ سره.

$$\int_{-1}^2 (x^2 + a) dx = 9$$

$$3 + 3a = 9 \Rightarrow a = 2$$

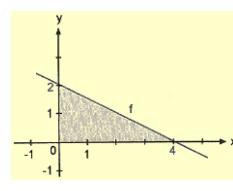
$$y = x^2 + 2$$

يوشپیټه: د f انتروال د $\pi < x < 0$ له پاره صفرهای نه لري. دا یاد x -محور پورته لور ته او یاکښته لور ته پروت دی.

$$\left| \int_0^\pi a \cdot \sin x dx \right| = 4$$

$$|2a| = 4 \Rightarrow a_1 = 2, a_2 = -2$$

د $a_1 = 2$ یاد $a_2 = -2$ په حالتونو کي په ورکړشوي انتروال کي د سطحي کچه ۴ ده. ۶۲: د سطحي شمیرنه د انتېگرال له لاري یا د انتېگرال سره



$$\int_0^4 \left(-\frac{1}{2}x + 2 \right) dx = \left[\frac{x^2}{4} - 2x \right]_0^4 = 4$$

د سطحي ساده شمیرنه

$$A = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$$

الف: صفرهایونه $N_1(-4;0); N_2(1;0)$ ۶۳

$$A = \left| \int_{-4}^1 \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{13}{4}x + 3 \right) dx \right| + \left| \int_1^3 \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{13}{4}x + 3 \right) dx \right|$$

$$A = \left| \int_{-4}^1 \left[\frac{x^4}{16} - \frac{13x^2}{8} + 3x \right]_1^3 \right| + \left| \int_1^3 \left[\frac{x^4}{16} - \frac{13x^2}{8} + 3x \right]_1^3 \right| = \left| 23 \frac{7}{16} \right| + |-2|$$

$$A = 25 \frac{7}{16}$$

د غوبنتوني سطحي منهجاري کچه $\frac{7}{16}$ د.

صفرخاينه: $N_1(-2;0); N_2(0;0); N_3(3,0)$

$$A = \left| \int_{-2}^0 \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2} + 3x \right) dx \right| + \left| \int_0^3 \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2} + 3x \right) dx \right|$$

$$A = \left| \left[-\frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} \right]_{-2}^0 \right| + \left| \left[-\frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 \right| = 10 \frac{13}{24}$$

پ: صفرخاينه: $N_1(0;0); N_2(2;0); N_3(4,0)$

$$c) A = \left| \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \right| + \left| \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_0^2 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 \right]_2^4 \right| = 8$$

غوبنتوني منهجاره د هواري \wedge واحدونه کچکوي

ت: صفرخاينه: $N_1(1;0); N_2(5;0)$

$$d) A = \left| \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5) dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x \right]_1^5 \right| = 10 \frac{2}{3}$$

د غوبنتوني سطحي منهجاري کچه $10 \frac{2}{3}$ د.

څلورشپیته:

الف: صفرخاينه: $N_1(2;0)$

$$A = \left| \int_{-2}^2 (x - 2) dx \right| + \left| \int_2^3 (x - 2) dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^2 \right| + \left| \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3 \right| = 8 \frac{1}{2}$$

غوبنتوني هواردننه د هواري وونونو يا واحدونو کچه $8 \frac{1}{2}$ د.

ب: صفرخاينه: $N_1(-2;0); N_2(3;0)$

$$A = \left| \int_1^3 (x^2 - x - 6) dx \right| + \left| \int_3^5 (x^2 - x - 6) dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x \right]_1^3 \right| + \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x \right]_3^5 \right| = 20$$

غوبنتوني هواردننه د هواري وونونو يا واحدونو کچه ۲۰ د.

پ : صفر خایونه: $N_1(2;0); N_2(6;0)$

$$c) A = \left| \int_0^2 (x^2 - 8x + 12) dx \right| + \left| \int_2^6 (x^2 - 8x + 12) dx \right| + \left| \int_6^8 (x^2 - 8x + 12) dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x \right]_0^2 \right|^2 + \left| \left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x \right]_2^6 \right|^6 + \left| \left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x \right]_6^8 \right|^8$$

$$A = 32$$

غوبنتونی هواردنن د هواريونونو يا واحدونو چه ۳۲ ده.

پنه شپيته: اكسپونشنل - يا جگن $y = e^x$ کره يواحی د x -محور پورته لور ته پرته ده. دا کبته لور ته واز پارابول $y = -x^2 - 1$ د ککري تکي $S(0;-1)$ سره د x -محور کبته لور ته پروت ده. له امله دواره گرافونه يو بل نه غوچوي.

$$65. A = \left| \int_0^1 (e^x + x^2 + 1) dx \right| = \left| \left[e^x + \frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 \right| = e + \frac{1}{3}$$

غوبنتونی سطحه $\frac{3e+1}{3}$ د سطحي يوونونه يا واحدونه وركوي

شپر شپيته: جگدونکي کربنه د محور په کي غوچوي. لهدي سره دا په لومري څلوري کي د ساينکري پورته لور ته ځيلي. په ورکړشوي انټروال کي د دواړو کړو غوچتيکي نه شته.

$$66. A = \left| \int_0^{2\pi} (2x + 2 - \sin x) dx \right| = \left| \left[x^2 + 2x + \cos x \right]_0^{2\pi} \right| = 4\pi^2 + 4\pi$$

غوبنتونی سطحه $\frac{4\pi(\pi+1)}{3}$ د سطحي يوونونه يا واحدونه وركوي اوه شپيته: د

$$67. x^2 - 3 = 2x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = -4$$

له امله دواره کربني يو بل نه غوچوي

$$A = \left| \int_{-1}^2 (2x^2 + 1 - (x^2 - 3)) dx \right| = \left| \int_{-1}^2 (x^2 + 4) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-1}^2 \right|^2 = 15$$

اته شپيته: پارابول $y = \sqrt{x}$ تول په لومري څلورمه کي ځيلي. هغه د لوېدونکو (نزولي) کربنو

محور برخه سره ۱- نه غوچوي.

$$68. A = \left| \int_0^4 (\sqrt{x} - (-x - 1)) dx \right| = \left| \int_0^4 (\sqrt{x} + x + 1) dx \right| = \left| \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_0^4 \right|^4$$

$$A = 17 \frac{1}{3}$$

غوبنتونی منخهواره $\frac{1}{3} 17$ د سطحي يوونونه کچکوي.

ننه شپيته: د غوختکي شميرنه

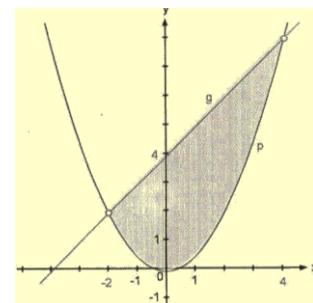
$$69. \quad 2x+1 = x+3 \Rightarrow x=2$$

دواره

$$A = \left| \int_{-2}^1 (x+3 - (2x+1)) dx \right| = \left| \int_{-2}^1 (-x+2) dx \right| = \left| \left[-\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 \right| = 7 \frac{1}{2}$$

غوبنتونی منخهواره 7,5 د سطحي يوونونه کچکوي.

اويا:



$$0.5x^2 = x+4$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 4$$

هواره يا سطحه وشميرى

$$A = \left| \int_{-2}^4 (x+4 - \frac{x^2}{2}) dx \right| = \left| \left[\frac{x^2}{2} + 4x - \frac{x^3}{6} \right]_{-2}^4 \right|$$

$$A = 18$$

غوبنتونېد سطحي دننه د سطحي ۱۸ يوونونه کچکوي.

يو اويا: د غوختکو پروتمحور

$$x^2 - 6x + 5 = -x + 1$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_1, \quad x_2 = 4$$

هواري يا سطحي وسميرى

$$A = \left| \int_1^4 (-x+1 - (x^2 - 6x + 5)) dx \right| = \left| \int_1^4 (x^2 + 5x - 4) dx \right|$$

$$A = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right]_1^4 \right| = \frac{9}{2}$$

د غوبنتوني هوري يا سطحي کچيونونه $\frac{9}{2}$ دي،

دوه اويا: د كرښيز برابرونونو ليکل

$$f(-1) = 3, \quad f(2) = 6$$

د كرښيز برابرونونو دوه تکي بنه

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

$$y = \frac{6 - 3}{2 - (-1)} (x - (-1)) + 3$$

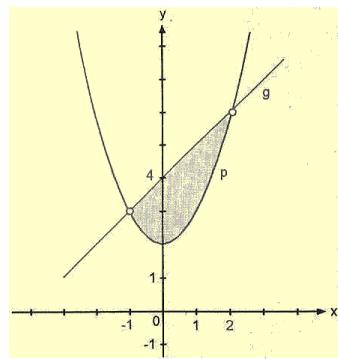
$$y = x + 4$$

هواري يا سطحي شميرنه:

$$A = \left| \int_{-1}^2 (x + 4) - (x^2 + 2) dx \right|$$

$$= \left| \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx \right|$$

$$A = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 \right| = \frac{9}{2}$$



غوبنتوني منخهواره 4,5 د سطحي يوونونه کچکوي.

هواري شميرنه:

$$A = \left| \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 3 - (x^2 - 4x + 6)) dx \right| = \left| \int_1^3 (-3x^2 + 12x - 9) dx \right|$$

$$A = \left| \left[-x^3 + 6x^2 - 9x \right] \right| = 4$$

پنځه اویا: د غوڅتکو پراته ارزښتونه:

$$4\sqrt{x} = \frac{x^2}{2}$$

$$16x = \frac{x^4}{4}$$

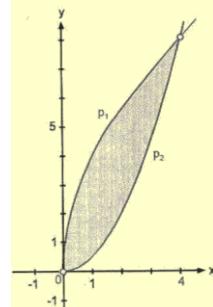
$$64x = x^4$$

$$x^4 - 64x = 0$$

$$x(x^3 - 64) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$$

هوارشميرنه:



$$A = \left| \int_0^4 (4\sqrt{x} - \frac{x^2}{2}) dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{8\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{6} \right]_0^4 \right|^4 = \frac{32}{3}$$

غوبنتوني منخهواره $\frac{32}{3}$ د سطحي يوونونه کچکوي.

شپراویا: د غوڅتکو پراته ارزښتونه:

$$2\sqrt{x} = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$6\sqrt{x} = 2x + 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$\Rightarrow x_1 = 1$ ، $x_2 = 4$
د سطحي يا هواري شميرنه:

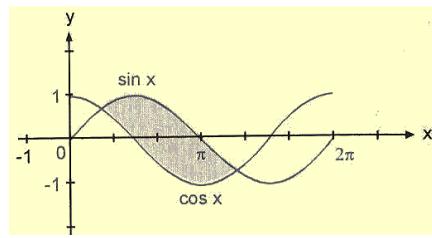
$$A = \left| \int_1^4 (4\sqrt{x} - (\frac{2}{3}x + \frac{4}{3})) dx \right| = \left| \int_1^4 (2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}) dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{x^2}{3} - \frac{4x}{3} \right]_1^4 \right| = \frac{1}{3}$$

غوبنتونې منخهواره $\frac{1}{3}$ د سطحي يوونونه چکوي.

اوه اویا: د غوختکو پراته ارزښتونه:

$$77. \sin x = \cos x$$



$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1$$

$$\tan x$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} , x_2 = \frac{5\pi}{4}$$

د هواري شميرنه:

$$A = \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{5\pi} (\sin x - \cos x) dx \right|$$

$$A = \left| [(-\cos x - \sin x)]_{\frac{\pi}{4}}^{5\pi} \right| = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) = 2\sqrt{2}$$

غوبنتونې منخهواره $2\sqrt{2}$ د سطحي يوونونه چکوي.

اته ويا: د تانجنت برابرون ليکل:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$تابع ارزښتونه $f(2) = 1$$$

$$جګیدنه په $x_0 = 2$: $f'(2) = 5$$$

$$د اينونه په $f(x_0) = y_0 = 1$ او $x_0 = 2$$$

$$کي $y = m(x - x_0) + y_0$: $y = 5(x - 2) + 1$$$

$$د تانجنت برابرون دی: $y = 5x - 9$$$

اينونه :

$$x^3 - 2x^2 + x - 1 = 5x - 9$$

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$$

پولینومو بش:

$$(x^3 - 2x^2) - 4x + 8 : (x - 2) = x^2 - 4$$

$$\Rightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 2$$

د دويم گه غوختکي د پروتمحور ارزبنت: $x_1 = -2$

د هواري شميرنه:

$$A = \left| \int_{-2}^2 (x^3 - 2x^2 + x - 1)(5x - 9) dx \right| = \left| \int_{-2}^2 (x^3 - 2x^2 - 4x + 8) dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 8x \right]_{-2}^2 \right| = \frac{64}{3}$$

غوبنتوني منخهواره $\frac{64}{3}$ د سطحي يوونونه کچکوي.

ننه اويا: نورمالبرابرون

لومړۍ رابيلينه یا لومړۍ مشتق:

$$f'(x) = 2x$$

تابع ارزبنت $f(-1)$

$$f(-1) = 1$$

تاجنجنځيدهن په $x_0 = -1$: کې
 $f'(-1) = -2$

کې د نورمال جګيدنه: $x_0 = -1$: په

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

نورمالبرابرون:

$$y = \frac{1}{2}(x - (-1)) + 1$$

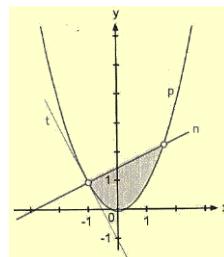
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

د دويم گه غوختکي د پروتمحور ارزبنت

$$x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{3}{2}$$

نورمال د $x_2 = \frac{3}{2}$ په څای کې د پارابول سره یو بل گه غوختکي لري.

د هواري شميرنه:



$$A = \left| \int_{-1}^{1.5} \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - x^2 \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1.5} \right| = \frac{125}{48}$$

غوبنتوني سطحه $\frac{125}{48}$ د سطحي يوونونه ده.

يوانيا: په $x=0$ کې پېژند. یا تعریفتشيا ده.

له دي سره په ورکړشوي انټروال کې د f تابع ناپربکيونکي ده،

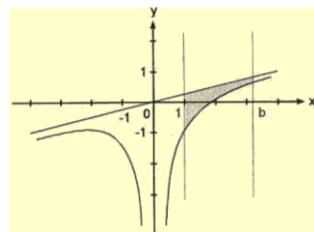
يو اتيا: د غوختکو د پروت محور ارزبنتونه:

$$\frac{1}{4}x = \frac{x^3 - 8}{4x^2} \Leftrightarrow x^3 = x^3 - 8$$

کربنه د تابع له گراف سره گد تکي نه لري. (دا د گراف گاوند يا اسيمپتوتي ده)
ايندونه:

$$A = \left| \int_1^b \left(\frac{1}{4}x - \frac{x^3 - 8}{4x^2} \right) dx \right| = \left| \int_1^b \left(\frac{x}{4} - \frac{x}{4} + \frac{2}{x^2} \right) dx \right| = \left| \int_1^b \frac{2}{x^2} dx \right|$$

$$A = \left| \left[-\frac{2}{x} \right]_1^b \right| = \left| -2 \cdot \frac{1}{b} + 2 \right|$$



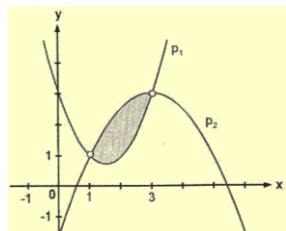
د امله دی $b > 1$

$$-2 \cdot \frac{1}{b} + 2 > 0$$

$$-2 \cdot \frac{1}{b} + 2 = \frac{3}{2} \Rightarrow b = 4$$

د $b=4$ له پاره هواره ورکرسوي ارزبنت غوره کوي يا اخلي.

دوه اتيا: د غوختکو د پروت محور ارزبنتونه:



$$x^2 - 3x + 3 = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$$

د هواري شميرنه په انتروال $[1,3]$ کي سرته رسيري.

د هواري شميرنه:

$$A = \left| \int_1^3 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2} - (x^2 - 3x + 3) \right) dx \right|$$

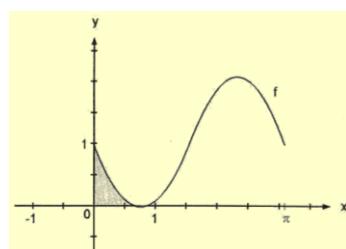
$$A = \left| \int_1^3 \left(-\frac{3}{2}x^2 + 6x - \frac{9}{2} \right) dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{2} + 3x - \frac{9x}{2} \right]_1^3 \right| = 2$$

غوبنتوني هواري د هواري دوه یوونونه ده.

دری اتیا: د $a - \sin 2x \geq 0$ او $a > 0$ له امله د f - گراف د x -محور یواحی پورته لور ته پروت دی. (د $a=1$ له پاره په چنگ کي خيره وکوري)

صفرخایونه:

صفرخایونه له a چلواک دي.



$$1 - \sin 2x \geq 0$$

$$1 - \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

د هواري شميرنه له پيل تر لو مردي صفرخای پوري شميرل کيري.

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} a(1 - \sin 2x) dx \right| = a \cdot \left| \left[x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right|$$

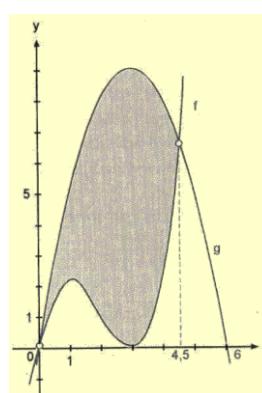
$$A = a \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) - a \cdot \left(0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{a}{4} \cdot (\pi - 2)$$

برابر ایتسونه:

$$\pi - 2 = \frac{a}{4} \cdot (\pi - 2) \Rightarrow a = 4$$

د له پاره هوارع ورکړشوي ارزښت هوره کوي. $a = 4$

څلوراتیا: د غوڅټکو پروت محور



$$\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x = -x^2 + 6$$

$$\frac{2}{3}x^3 - 3x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = \frac{9}{2}$$

د هواري شمیرنه:

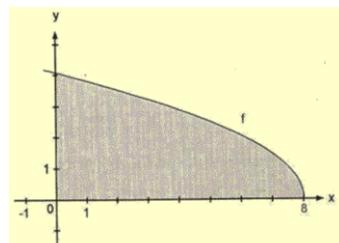
$$A = \left| \int_0^{4.5} \left(-x^2 + 6x - \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 6x \right) dx \right| \\ = \left| \int_0^{4.5} \left(-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \right) dx \right| \\ A = \left[-\frac{1}{6}x^4 + x^3 \right]_0^{4.5} = \left(\frac{9}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{4}$$

غوبنتونې هواره کچوي. $\left(\frac{9}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{4}$

پنځه اتیا: صفر ځایونه

$$0 = \sqrt{16 - 2x} \Rightarrow x = 8$$

هوار شمیرنه



$$A = \left| \int_0^8 \sqrt{16 - 2x} dx \right|$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(16 - 2x)} \right]_0^8$$

$$A = \frac{64}{3}$$

غوبنتونې هواره $A = \frac{64}{3}$ هوار بیوونو نه کچوي.

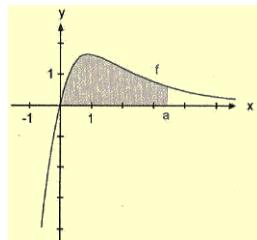
شپراتیا: الف: تابع په $x=-2$ کي پیژندت شکای لري.

يواخنی صفر ځای د

$$86. \quad a) \frac{48x}{(x+2)^3} = 0 \Rightarrow 48x = 0$$

له امله په $x_2 = 0$ کي دي.

له دي امله ګراف د $a > 0$ له پاره ناپرېکيدونکي دی په لومري انتروال $[0, a]$ کي د سطحي شمېرنه ده:



$$\frac{48x}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}$$

$$\frac{48x}{(x+2)^3} = \frac{Ax^2 + (4A+B)x + 4A + 2B + C}{(x+2)^3}$$

د ضرېبونو یا څلولونو پرته کونه

$$A = 0$$

$$4A + B = 48$$

$$4A + 2B + C = 0 \Rightarrow A = 0, \quad B = 0, \quad C = -96$$

انتيگرال یې کړي

$$\int_0^a \frac{48x}{(x+2)^3} dx = \int_0^a \left(\frac{48}{(x+2)^2} - \frac{96}{(x+2)^3} \right) dx = \left[-\frac{48}{x+2} + \frac{48}{(x+2)^2} \right]_0^a \\ = \left[-48 \frac{x+1}{(x+2)^2} \right]_0^a = -48 \cdot \left(\frac{a+1}{(a+2)^2} - \frac{1}{4} \right)$$

د له پاره د هواري یوونونه $A = 8$

$$8 = -48 \cdot \left(\frac{a+1}{(a+2)^2} - \frac{1}{4} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{12} = \frac{a+1}{(a+2)^2} \Leftrightarrow 0 = a^2 - 8a - 8$$

د $a > 0$ له امله $a = 4 + \sqrt{24} \approx 8.900$ یواخنی حل دي.

د $a = 8.900$ له پاره د هوار ییونونه غوبښتونی ارزښت نیسي

ب: پارامتر t په صفر ځای کوم اغیز نه لري.

موږ په بلډول لیکو:

$$y = \frac{tx}{(x+2)^3} = t \cdot \frac{x}{(x+2)^3}$$

اووس د $t = 48$ له پاره د برخی الف سره پرته کول شونی دي.

$$y = \frac{48x}{(x+2)^3} = 48 \cdot \frac{x}{(x+3)^3}$$

د ناتاکلي انتيگرال لاس ته راونې کيدی شي له برخی الف هم ونیوں شي.

$$\int_0^4 t \frac{x}{(x+2)^3} dx = - \left[-t \cdot \frac{x+1}{(x+2)^3} \right]_0^4 = \frac{1}{9} t$$

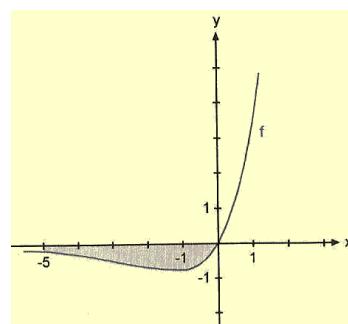
د هواري یوونونون له پاره ایشونه.

$$\frac{1}{9} t = 10 \Rightarrow t = 90$$

د $t = 90$ له لپاره د هوري یوونونه غوبښتلی ارزښت نیسي.

اووه اتیا: صفر ځایونه:

$0 = x \cdot e^{0.5x} > 0$
 گراف د $e^{0.5x} > 0$ له امله يواخنى صفرخای په کي لري.



له دي سره د هواري شميرنه
 په انتروال [-5,0] کي کيري.
 توتنه - يا پارسل انتيگرالونه.

$$u(x) = x \quad \text{سره} \quad u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^{0.5x} \quad \text{سره} \quad v(x) = 2e^{0.5x}$$

$$\begin{aligned} \int_{-5}^0 x \cdot e^{0.5x} dx &= [2x \cdot e^{0.5x}]_{-5}^0 - \int_{-5}^0 2 \cdot e^{0.5x} dx \\ &= [2x \cdot e^{0.5x}]_{-5}^0 - [4 \cdot e^{0.5x}]_{-5}^0 \\ &= [2x \cdot e^{0.5x}(x-2)]_{-5}^0 \\ &= -4 + 14 \cdot \sqrt{e^{-5}} \end{aligned}$$

دا چي هواره د - محور کبنته لور ته پرته ده، ناتاکلى انتيگرال کمیز يا منفي گن ارزبنت لري.

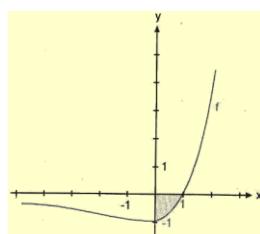
غوبنتوني منخهواره د هواري نبردي ۲، ۸۵۱ یوونونه کچوي.

اته اتيا: صفرخایونه

$$0 = e^x(x-1)$$

د له امله گراف د $e^x > 0$

لله پاره يواخنى صفرخای په $x = 1$ کي لري.



لله دی سره د سطحي شميرنه په انتروال [0,1] کي کيري.

توتنه انتيگرالونه

$$u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^x$$

$$v'(x) = e^x$$

$$v(x) = e^x$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x(x-1)dx &= [e^x(x-1)]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [e^x(x-1)]_0^1 - [e^x]_0^1 \\ &= [e^x(x-2)]_0^1 = 2 - e \approx -0.718 \end{aligned}$$

دا چي هواره د - محور کبنته لور ته پرته ده، ناتاکلى انتيگرال کمیز ٻن ارزبست لري.

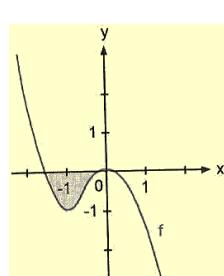
غوبنتوني منخهواره 0.718 د هواري یوونونه کچه وي.

نهه اتيا: صفرخایونه:

$$-2x^2 - 3x^2 = 0$$

$$-x^2(2x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -1.5, \quad x_{2,3} = 0$$

د دواړو صفرخایونو په منځ کي د هواري شميرنه:

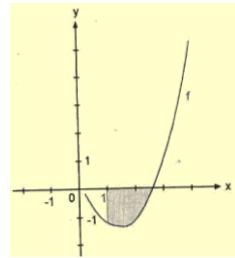


$$A = \left| \int_{-1.5}^0 (-2x^3 - 3x^2) dx \right|$$

$$A = \left| \left[-\frac{x^4}{2} - x^3 \right]_{-1.5}^0 \right| = \left| -\frac{27}{32} \right|$$

غوبنتونې منځهواره 0,844 د هواري یوونونه کچه وي.

نوي: صفرخایونه:
 تابع (يا خیرونه) f یواخې د $x > 0$ له پاره پیژند لري يا تعریف ده.
 نو له دی امله یواخنى صفرخای د $\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$ لپاره په $x = e$ شتون لري.
 کي



توبته انتیگرالونه
 $u(x) = \ln x - 1$

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = x^2$$

$$v(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^2 \cdot (\ln x - 1) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \cdot (\ln x - 1) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \cdot (\ln x - 1) \right]_1^e - \left[\frac{x^3}{9} \right]_1^e \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{4x^3}{9} \right]_1^e = \frac{1}{9}(4 - e^3) \approx -1.787 \end{aligned}$$

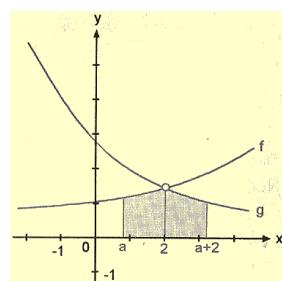
دا چې هواره د x -محور لاندې پرته ده، نو دا تاکلی انتیگرال یو کمیز ئن ارزښت لري.

غوبنتونې هواره 1.787 هوار یوونونه کچ کوي.
 یونوی: د جګکنونو د پرته له مخي د غوڅښو شمیرل

$$e^{\frac{1}{4}x} = e^{-\frac{1}{4}x+1}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x &= -\frac{1}{4}x + 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

هواره ګرافونه په $x = 2$ کي غوڅوي.
 د هوارشمیرنې اینیونه:



دوارهبرخهواري د x -محور پورته لور ته پرتی دي، نو
 له دی امله د تاکلی انتیگرال ارزښتونه زاتیز يا مثبت دي،
 له دی امله د ارزښت لیکنډول څخه تیریرو.

$$A = \int_a^2 a^{\frac{1}{4}x} dx + \int_2^{a+2} e^{-\frac{1}{4}x+1} dx = \left[4e^{\frac{1}{4}x} \right]_a^2 + \left[-4e^{-\frac{1}{4}x+1} \right]_2^{a+2}$$

$$= 4e^{\frac{1}{2}} - 4e^{\frac{1}{4}a} - 4e^{-\frac{1}{4}a - \frac{1}{2} + 1} + 4e^{-\frac{1}{2} + 1}$$

$$A = 4 \cdot \left(2e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{4}a} - e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}} \right)$$

د ئای اروند اکسترموم له پار اريين شرط دى:

$$A'(a) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}a} + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$0 = -e^{\frac{1}{4}a} - e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{\frac{1}{4}a} - e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{4}a = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$$

پوره كيدونكى شرطونه.

$$A''(a) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}a} - \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}}$$

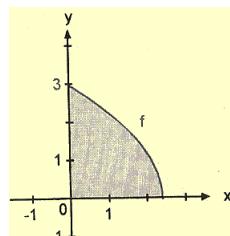
$$A''(1) = -\frac{1}{4}\sqrt[4]{e} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{4}(\sqrt[4]{e} + \sqrt{e}) < 0$$

د $a=2$ له پاره هواره ممکن ستره خونديونه غوره كوي. له دى امله هواره په انترووال [1,3] كي پرتە ده.

دوه نوي: فرخاينونه:

$$0 = \sqrt{9 - 4x} \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$

گراف د پارابل د خرانگي يا يوي برحه بنائي، چي كين لور ته از دى، كوم چي د x -محور پورته لور ته پروت دى. غښتوني هواره له دى سره په انترووال [0;2, 25] كي پرتە ده. د هواري شميرنه:



$$A = \left| \int_0^{\frac{9}{4}} \sqrt{9 - 4x} dx \right|$$

$$A = \left| \left[-\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(9 - 4x)^3} \right]_0^{\frac{9}{4}} \right|^{\frac{9}{4}} = \left| \frac{1}{6} \sqrt{9^3} \right| = \frac{9}{2}$$

غښتوني هواره $\frac{9}{2}$ د هواري يوونونه كچوي.

$$0 = -e^{\frac{1}{4}a} - e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{\frac{1}{4}a} - e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{4}a = -\frac{1}{4}a + \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$$

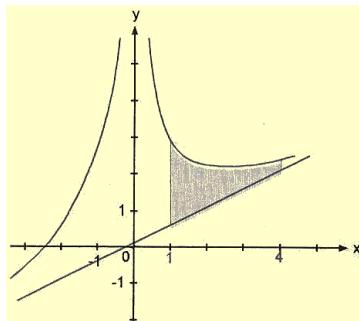
پوره کیدونی شرطونه

$$A''(a) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}a} - \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}a} \cdot e^{\frac{1}{2}}$$

$$A''(1) = -\frac{1}{4}\sqrt[4]{e} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{4}(\sqrt[4]{e} + \sqrt{e}) < 0$$

د له پاره هواره ممکن ستره خونديونه غوره کوي. له دي سره هواره په انتروال [1,3] کي پرته ده.

درې نوي: تابع يا خironه په $x=0$ کي پېژندتىشاي لري. په انتروال [1;4] کي ناپرېکيدونكى دى.



$$A = \left| \int_1^4 \left(\frac{x^2 + 12}{2x^2} - \frac{1}{2}x \right) dx \right|$$

$$A = \left| \int_1^4 \left(\frac{1}{2}x - \frac{6}{x^2} - \frac{1}{2}x \right) dx \right| = \left| \int_1^4 \left(\frac{6}{x^2} \right) dx \right| = - \left| \left[-\frac{6}{x} \right]_1^4 \right| = \frac{9}{2}$$

9
2

وېنتونى منحهواره $\frac{9}{2}$ د هواري يوونونه کچوي.

خلونوي: صفرخایونه

از مېنېښت يو لوړي صفرخای راکوي، د $x_1 = 1$ سره

پولینومو بش

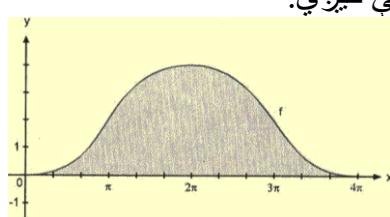
$$\begin{aligned} (x^3 - 9x^2 + 23x - 15) : (x-1) \\ = x^2 - 8x + 15 \end{aligned}$$

نور صفرخایونه دی:

$$x_2 = 3, \quad x_3 = 5$$

له دي سره هوارشمیرنه په

برخه انتروالونو [3;5] او [3;5] کي کيري.



هوارشمیرنه:

$$A = \left| \int_0^{4\pi} 2\left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) dx \right| = 2 \cdot \left| \left[x - 2 \sin \frac{x}{2} \right]_0^{2\pi} \right|$$

غوبنتونې هواره ۲۵، ۱۳ د هواريونونه لري.

اوه نوي: صفرخایونه:

$$3 \cdot \sqrt{9-x} = 0$$

$$\Rightarrow x = 9$$

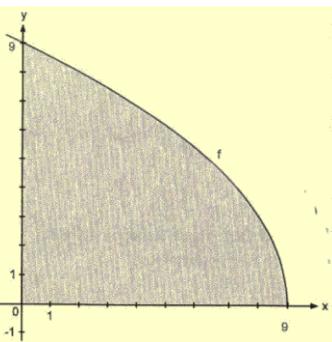
له دي سره غوبنتونې هواره په
انتروال $[0; 9]$ کي پرته ده

$$A = \left| 3 \int_0^9 \sqrt{9-x} dx \right|$$

$$= 3 \left[-\frac{2}{3} \sqrt{(9-x)^3} \right]_0^9$$

$$A = 54$$

غوبنتونې منځهواره ۵۴ د هواري يوونونه کچه کوي.



اټه نوي: صفرخایونه:

$$0 = x^3 - 2ax^2 + a^2x$$

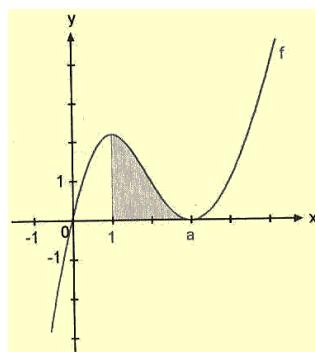
$$0 = x(x^2 - 2ax + a^2)$$

$$\Rightarrow x_1 = 0$$

$$0 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$\Rightarrow x_{2/3} = a$$

$0 < x < 1$ د له امله پارabol د
له پاره صفرخای نه لري



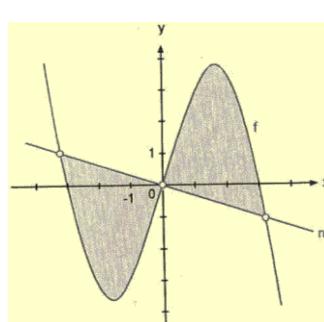
د هوارشمیرني ايندونه:

$$A = \left| \int_0^1 (x^3 - 2ax^2 + a^2x) dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2ax^3}{3} + \frac{a^2x^2}{2} \right]_0^1 \right| = \frac{11}{4}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{2a}{3} + \frac{a^2}{2} = \frac{11}{4} \Leftrightarrow 6a^2 - 8a - 30 = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{5}{3}, \quad a_2 = 3$$

$a > 1$ د له امله $a=3$ یواحني اوبي يا حل دی.
نه نوي:



$$99. \quad f'(x) = -x^2 + 3$$

$$f'(0) = 3$$

$$\Rightarrow m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}$$

دا چي کربنه سرچينه يزه – يا پيلکرننه ده ، نو برابرن بي دي :

د غوختکو د پروتمور ارزښتونه:

$$\frac{1}{3}x = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$$

$$\frac{1}{3}x(x^2 - 10) = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{10}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{10}$$

هوارشميرنه:

دا چي د f په برابرونونو کي یواحی ناجوره کګکونه منځ تهراخي، له دي امله د ګراف سرچيني ته تکي سيموتريک دی. نو له دي سره بسیا کوي چي هواره په یوه برخ انټروال کي وشميرو.

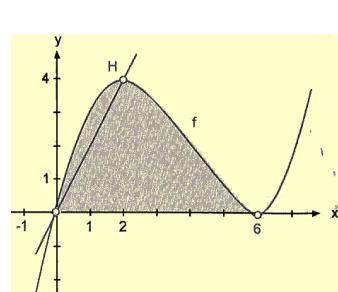
$$A = 2 \cdot \left| \int_0^{\sqrt{10}} \left(-\frac{1}{3}x - \left(-\frac{1}{3}x^3 + 3x \right) \right) dx \right| = 2 \cdot \left| \int_0^{\sqrt{10}} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{10}{3}x \right) dx \right|$$

$$A = 2 \cdot \left[\frac{x^4}{12} - \frac{5x^2}{3} \right]_0^{\sqrt{10}} = 2 \cdot \frac{25}{3} = \frac{50}{3}$$

50

خورا لويه منځهواره $\frac{50}{3}$ د هواري یوونونه گچوي.

سل :



$$\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x = 0$$

$$\frac{1}{8}x(x^2 - 12x + 36) = 0$$

$$\frac{1}{8}x(x - 6)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_{2/3} = 6$$

جګړکي

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

$$0 = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

$$0 = \frac{3}{8}(x^2 - 8x + 12)$$

$$\Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = 6$$

د

$$f''(x) = \frac{3}{4}x - 3 \Rightarrow f''(2) = -\frac{3}{2} < 0 \quad x = 2$$

له امله د $x=2$ له پاره دا یومکسومو په گوتهکوي.
د کربنیز برابرون لیکنه

$$f(2) = 4$$

$$y = \frac{4-0}{2-0}(x-0)+0 \Rightarrow y = 2x$$

د منخهواري شمیرنه:
توله هواره:

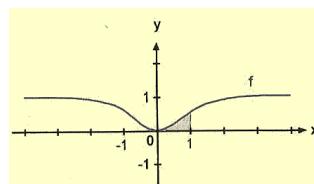
$$A = \left| \int_0^6 \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{32} - \frac{x^3}{2} + \frac{9x^2}{4} \right]_0^6 \right|$$

د برخهواري له پاره اینسونه

$$A = \left| \int_0^6 \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 2x \right) dx \right| = \left| \int_0^2 \left(\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 2x \right) dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{x^4}{32} - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^2}{4} \right]_0^2 \right| = \frac{3}{2}$$

یوسل او یو: صفرخایونه:



$$\begin{aligned} 0 &= \frac{x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow x^2 = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

د هوارېشمیرنه:

موخه ور بنه بدلون مو یوه ساده انتیگرال نه بیابی.

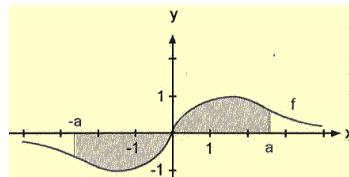
$$A = \left| \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \right| = \left| \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx \right|$$

$$A = \left| \int_0^1 \left(\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \right| = \left| \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} \right) dx \right| = \left| \left[x - \arctan x \right]_0^1 \right|$$

$$A = 1 - \arctan 1 - 0 + \arctan 0 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

غوبنتونې منخهواره 0,215 ھواریوونونه کچه وي.

یوسل ودوه:



$$0 = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow x = 0$$

د هواري شمیرني له پاره اینسونه:

دا چي گراف پيل يا سرچيني تکي ته سیومتریک دی، نو په لومړۍ خلورمه کې د انتیگرال شمیرنه بسیا کوي.

د سره د انتیگرالونی تابع بنه او $u'(x) = 2x$

$$f'(x) = \ln u \quad \text{لري. له دي سره دي:} \quad f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$A = 2 \cdot \left| \frac{1}{2} \int_0^a \frac{2x}{1+x^2} dx \right| = \left| [\ln(1+x^2)]_0^a \right| = \ln(1+a^2) - \ln 1$$

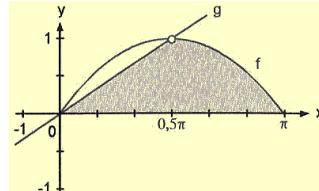
$$A = \ln(1+a^2)$$

برابر اینونه:

$$\ln(1+a^2) = 1 \Rightarrow 1+a^2 = e \Rightarrow a = \sqrt{e-1}$$

د a=1,311 له پاره منخهواره ورکړشوي ارزښت اخلي.

يوسلودري:



$$103. \frac{2}{\pi} = \sin x \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}$$

هوارشمیرنه:

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} x dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx \right|$$

$$A = \left| \left[\frac{x^2}{\pi} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| + \left| \left[-\cos x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right| = \frac{\pi}{4} + 1 \frac{\pi+4}{4}$$

غوبنتوني سطحه نو دي 1,785 د هواري یوونونه کچوي.

يوسلو څلور: د غوختکو پراته ارزښتونه:

$$x \cdot \sin x = 2 \cdot \sin x$$

$$\Rightarrow x_1 = 2, x_2 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

هوارشمیرنه:

$$A = \left| \int_0^2 (2 \cdot \sin x - x \cdot \sin x) dx \right| + \left| \int_0^\pi (2 \cdot \sin x - x \cdot \sin x) dx \right| \\ = \left| [-2 \cdot \cos x]_0^2 - \int_0^2 x \cdot \sin x dx \right| + \left| [-2 \cdot \cos x]_2^\pi - \int_2^\pi x \cdot \sin x dx \right|$$

ا

$$u(x) = x, u'(x) = 1 \quad v'(x) = \sin x, v(x) = -\cos x$$

سره توته انتیگرالونه راکوي:

$$A = \left| [-2 \cdot \cos x]_0^2 - [-x \cdot \cos x]_2^\pi - \int_0^2 \cos x dx \right| + \left| [-2 \cdot \cos x]_2^\pi - [-x \cdot \cos x]_0^2 - \int_2^\pi \cos x dx \right| + \\ = \left| [-2 \cdot \cos x + x \cdot \cos x - \sin x]_0^2 \right| + \left| [-2 \cdot \cos x + x \cdot \cos x - \sin x]_2^\pi \right|$$

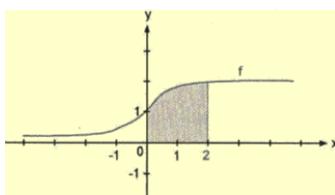
$$A = 2 - \sin 2 + |2 - \pi + \sin 2| = 2 - \sin 2 - 2 + \pi - \sin 2 = \pi = 2 \sin 2$$

$$A = 2 - \sin 2 + |2 - \pi + \sin 2| = 2 - \sin 2 - 2 + \pi - \sin 2 = \pi = 2 \sin 2 \quad \text{يادونه:}$$

$$|2 - \pi + \sin 2| < 0 \Rightarrow |2 - \pi + \sin 2| = -2 + \pi - \sin 2$$

غوبنتونکي سطحه ۱،۳۲۲ د سطحي یوونونه کچوي.

يو سل اوپنخه: د f گراف صفرخای نه لري او ناپرېكيدونکي دى.



هوارشميرنه: د $u(x) = e^x + 1$ سره دى:

$$f'(x) = \ln u \quad f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$A = \left| 2 \int_0^2 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \right| = \left| \left[2 \cdot \ln(e^x + 1) \right]_0^2 \right| = 2 \ln(e^2 + 1) - 2 \cdot \ln 2$$

غوبنتونى سطحه د سطحي يوونونو نبردي ۲،۸۶۸ کچوي

يوسلوشپر: الف: د بکي- يا حجم فرمول كي اينسونه:

$$V = \pi \cdot \int_0^4 (2 + \sqrt{x})^2 dx = \pi \cdot \int_0^4 (4 + 4\sqrt{x} + x)^2 dx$$

$$V = \pi \cdot \left[4x + \frac{8\sqrt{x^3}}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{136}{3} \pi$$

غوبنتونى بکي (حجم) نبردي ۱۴۲,۴ د فضا يوونونه كچه وي.

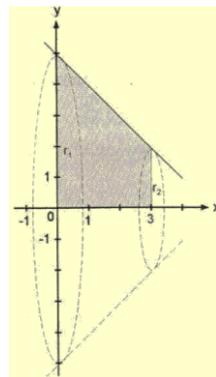
ب: د بکي فرمول كي اينسونه:

$$V = \pi \cdot \int_0^4 \left(\frac{1}{2}(x-2)^2 + 1 \right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 12x + 9 \right) dx$$

$$V = \pi \cdot \left[\frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{2} + \frac{7x^3}{3} - 6x^2 + 9x \right]_2^4 = \frac{94}{15} \pi$$

غوبنتونى بکي (حجم) نبردي ۱۹,۶۹ د فضا يوونونه كچه وي.

يوسل او اوه: الف: دانتيگرالشميرنى له لاري د بکي يا حجم شميرنه:



$$V = \pi \cdot \int_0^3 (-x + 5)^2 dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^3 (x^2 - 10x + 25) dx$$

$$V = \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} - 5x^2 + 25x \right]_0^3 = 39\pi$$

ساده بکي شميرنه. خرخونىن يو پچ مخروط يا گازرە راكوي د

$$h = 3 - 0 = 3$$

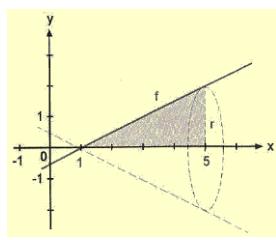
سره او

$$r_1 = f(0) = 5, \quad r_2 = f(3) = 2$$

$$v = \pi \cdot \frac{3}{3} (5^2 + 5 \cdot 2 + 2^2) = 39\pi$$

هر حل ۱۲۲,۵ د يوه فضايي وونونه كچه وي.

ب: دانتيگرالشميرنى له لاري د بکي يا حجم شميرنه



$$V = \pi \cdot \int_1^5 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right)^2 dx$$

$$V = \pi \cdot \int_1^5 \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) dx$$

$$V = \pi \cdot \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} \right] = \frac{16}{3}\pi$$

ساده ډکیشمیرنه:

څرخونبدن یو کیگل انځوروی، $D=2r$
 $r=4$ سره $h=4$

یوسل او یوولس: کربنه د y -محور په $y=4$ او د x -محور په $x=a$ کي غوڅوي.
له دي سره د یوه څرخون له لاري د x -محور باندي یو کیگل منځ ته راخي د $r=4$ او
 $a=8$ سره.

د پښهواري شميرنه په انټروال $[0;8]$ د انتیگرالولو له لاري.

$$M = 2\pi \cdot \int_0^8 \left(-\frac{1}{2}x + 4 \right) \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4}} dx = 2\pi \cdot \int_0^8 \left(-\frac{1}{2}x + 4 \right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} dx$$

$$M = 2\pi \cdot \left[\frac{\sqrt{5}}{2} \left(-\frac{x^2}{4} + 4x \right) \right]_0^8 = 16\pi \cdot \sqrt{5}$$

ساده شميرنه

د پښکربنه:

$$M = \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sqrt{5} = 16\pi \cdot \sqrt{5}$$

د پښهواري فرمول:

دواره شميرني د نړدي د ۲۹، ۸۵ کچيونونو سره پښهواره ورکوي.
یوسل او دولس: د رابيليندي – یا مشتق تابع:

$$f(x) = 2\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

انتیگرال یې کړي.

$$M = 2\pi \cdot \int_0^4 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx = 2\pi \cdot \int_0^4 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^4 2\sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} dx = 2\pi \cdot \int_0^4 \sqrt{x+1} dx$$

$$= 4\pi \cdot \left[\frac{2 \cdot \sqrt{(x+1)^3}}{3} \right]_0^4 = \frac{8}{3}\pi(5\sqrt{5} - 1)$$

غوبنتونې هواره د نړدي د ۱۱۲، ۴ کچيونونو سره پښهواره ورکوي.

یوسل او ديارلس: د رابيليندي – یا مشتق تابع:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^2$$

انتیگرال یې کړي

$$M = 2\pi \cdot \int_1^2 \frac{1}{6}x^3 \cdot \sqrt{1+\frac{1}{4}x^4} dx = \frac{1}{3}\pi \cdot \int_1^2 x^3 \cdot \sqrt{1+\frac{1}{4}x^4} dx$$

انتیگرال د مخه ویل شوی قانون له لاری ورکوي:

$$u(x) = 1 + \frac{1}{4}x^4 \Rightarrow u'(x) = x^3$$

$$M = \frac{1}{3}\pi \cdot \int_1^2 x^3 \cdot \sqrt{1+\frac{1}{4}x^4} dx = \frac{2}{9}\pi \cdot \left[\sqrt{\left(1+\frac{1}{4}x^4\right)^3} \right]_1^2$$

$$M = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(5\sqrt{5} - \frac{5}{8}\right) = \frac{35}{36}\pi \cdot \sqrt{5}$$

غوبنستوني پونېھواره نوردي ٦، ٨٣٠ هواريوونونه په کچه کوي
پوسل او څوارلس: د کربني څرخول د x-محور باندي یو پچ مخروط د
سره راکوي. $h = f(5) - f(1) = 6 - 2 = 4$ $r_1 = 5$ ، $r_2 = 1$

د رابيليدني – يا مشتقتابع

$$f(x) = x + 1 \Rightarrow f'(x) = 1$$

د انتیگرال له لاری د پونېھواري شمیره:

$$M = 2\pi \cdot \int_1^5 x \cdot \sqrt{2} dx = \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2} \sqrt{2} \right]_1^5 = 25\pi \cdot \sqrt{2} - \pi \cdot \sqrt{2} = 24\pi \cdot \sqrt{2}$$

ساده شمیرنه:

پونېکرښه:

$$s = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4 \cdot \sqrt{2}$$

$$M = \pi \cdot s \cdot (r_1 + r_2) = \pi \cdot 4 \cdot \sqrt{2}(1+5) = 24\pi \cdot \sqrt{2}$$

د دواړو بنمیرنو پونېھواري نوردي ٦، ٩٠ پونېیوونونه راکوي.

پوسل او پنځلس: کښته لور ته واز پاربول د y-محور بادي کكريتکي (S(0/4) لري او زياتيزه
x-محور په $x=4$ کي غوڅوي.

د رابيليدني – يا مشتق تابع يا څیرونه.

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x$$

انتیگرال یې کړي

$$M = 2\pi \cdot \int_0^4 x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{4}x^2} dx = \pi \cdot \int_0^4 x \cdot \sqrt{4+x^2} dx$$

بنهيدلون او په ځای اينسوونه يا بدلون يا سبستيچيونشن

$$u(x) = 4 + x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$M = \frac{1}{2}\pi \cdot \int_0^4 2x \cdot \sqrt{4+x^2} dx = \frac{1}{2}\pi \cdot \left[\frac{x \cdot \sqrt{(4+x^2)^3}}{3} \right]_0^4$$

$$M = \frac{40}{3}\pi\sqrt{5} - \frac{8\pi}{3}$$

پونېھواره نوردي ٢٩، ٨٥ د هواري یوونونه کچه وي.

یوسل او شپارس: د کربنیز برابرون لیکل

$$y = \frac{(8-4)}{(5-2)}(x-2) + 4$$

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$$

انتیگرالول

$$s = \int_2^5 \sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} dx = \int_2^5 \frac{5}{3} dx = \left[\frac{5x}{3}\right]_2^5 = \frac{25}{3} - \frac{10}{3} = 5$$

ساده شمیرنه

$$s = \sqrt{(5-2)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

دواره شمیرنی ۵ اوردوالي یوونه راکوي.

یوسل او اولس: رابیلید خیره ونه يا مشتقتابع:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}}\sqrt{x}$$

انتیگرال يي کرى

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\sqrt{x}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{16}x} dx$$

سبستیچیوشن يا بدلون يا په ھای اینسوونه :

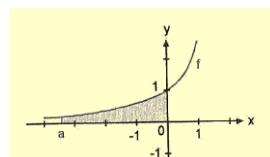
$$u(x) = 1 + \frac{9}{16}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{9}{16} \Rightarrow dx = \frac{16}{9}du$$

$$s = \frac{16}{9} \int_0^1 \sqrt{u} du = \frac{16}{9} \left[\frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{16}x \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$s = \frac{32}{27} \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{25}{16}\right)^3} - \sqrt{3} \right) = \frac{32}{27} \cdot \left(\frac{125}{64} - 1 \right) = \frac{61}{54}$$

غوبنتونی لينده اوردوالي ۱۲۹ یوونونه کچه وي.

یوسل او اتس: الف: انتیگرال يي کرى



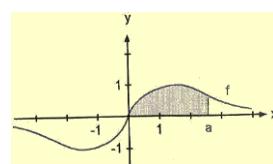
$$\int_a^0 e^x dx = [e^x]_a^0 = 1 - e^a$$

پولي تاکنه:

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a) = 1$$

ناتاکلی انتیگرال پوله ارزښت ۱ لري.

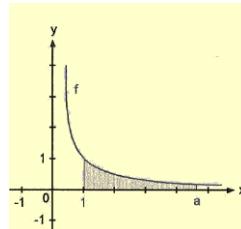
ب : انتیگرال يي ونيسي



$$\int_a^0 e^x dx = [e^x]_a^0 = 1 - e^a$$

$$= \frac{1}{2} \cdot [\ln(x^2 + 1)]_0^a = \frac{1}{2} \ln(a^2 + 1)$$

پ: انتیگرال کړی



$$\int_1^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^a x^{-\frac{1}{2}} dx$$

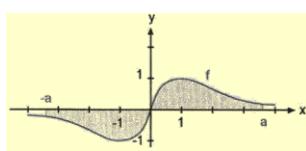
$$= \left[2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^a = \left[2\sqrt{x} \right]_1^a = 2(\sqrt{a} - 1)$$

پوله ارزښت شمیرنه:

د $\infty \rightarrow a$ له پاره هڅیري: $2(\sqrt{a} - 1) \rightarrow \infty$

له دي سره يا له دې امله ناتاکلی انتیگرال پوله ارزښت نه لري او په پای کې يا بالاخره دوه برابروال.

ت: د f ګراف پیل یا سرچینې سره تکیسیومتریک دی. له دې سره تاکلی انتیگرالونه په انټروالونو $(-a/0]$ کې د ارزښت له مخې برابر مګر د مختلفو مخنځښو سره. په انټروال $[-a/a]$ کې له دې امله تاکلی انتیگرال ارزښت صفر نیسي.



$$d) \int_0^a \frac{4x}{(x^2 + 2)^3} dx = \int_0^a \frac{2x}{(x^2 + 2)^3} dx$$

بدلون یا په ځای اینسوونه.

$$u(x) = x^2 + 2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$2 \int_0^a \frac{2x}{(x^2 + 2)^3} dx = 2 \int_0^a \frac{1}{(u(x))^3} du = 2 \cdot \left[-\frac{1}{2 \cdot (u(x))^2} \right]_0^a$$

$$A = 2 \cdot \left[\frac{-1}{2(x^2 + 2)^2} \right]_0^a = -\frac{1}{(a^2 + 2)^2} - (-\frac{1}{4})$$

پوله ارزښت تاکنه

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{(a^2 + 2)^2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

يو سل او نولس: انتیگرالونه الف:

$$\int_1^a \frac{1}{x^p} dx = \int_1^a x^{-p} dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{1-p} \right]_1^a = \left[\frac{1}{(1-p) \cdot x^{p-1}} \right]_1^a$$

$$= \frac{1}{(1-p) \cdot a^{p-1}} - \frac{1}{1-p}$$

له دې امله ترم $a \rightarrow \infty$ د $\frac{1}{(1-p) \cdot a^{p-1}} - \frac{1}{1-p}$ له پاره یو پوله ارزښت باید ولري او

ماتلاندي $= \frac{1}{(1-p) \cdot a^{p-1}}$ باید د جګیدونکي a له پاره لوی یا جګ شي، له دې امله

باید a یو زیاتیز جګکن یا اکسپوننت ولري.

د $p > 1$ له پاره ناتاکلی انتیگرال پوله ارزبست $\frac{1}{1-p}$ لري.

يوسل او شل: الف: تابع يا خيره ونه f په $x=0$ کي زياتيز دی.

$$\int_u^1 \frac{x^3+1}{x} dx = \int_u^1 (x^2 + \frac{1}{x}) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \ln x \right]_u^1 = \frac{1}{3} - \frac{u^3}{3} - \ln u$$

$$\text{هخيري.} \quad \frac{1}{3} - \frac{u^3}{3} - \ln u \rightarrow \infty \quad \text{له پاره} \quad u \rightarrow 0$$

ناتاکلی انتیگرال شتون نه لري.

ب: تابع يا خironه يا فنكشن f په $x=0$ کي قطبئاي لري.

$$\int_u^1 \ln x dx = [x \cdot \ln x - x]_u^1 = u - u \cdot \ln u - 1$$

د لو پيتال له مخي دي

$$u \cdot \ln u = \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \Rightarrow \frac{\frac{d}{du} \ln u}{\frac{d}{du} \frac{1}{u}} = \frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = -u \Rightarrow u \cdot \ln u \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$$

د $u \rightarrow 0$ له پاره له دی سره هخيري:

پ: خironه يا تابع f په $x=1$ کي قطبئاي لري.

$$\begin{aligned} \int_u^2 \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} dx &= \int_u^2 \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} dx = \int_u^2 (\sqrt{x}+1) dx = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + x \right]_u^2 \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} + 2 - \frac{2\sqrt{u^3}}{3} - u \end{aligned}$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} + 2 - \frac{2\sqrt{u^3}}{3} - u \right) = \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3} = \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} dx = \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}$$

ت: خironه يا تابع f په $x=1$ کي قطبئاي لري.

په وركوشوي ورشو کي صفرخایونه مخ نه دی پراته.

د چي د f گراف y -محور ته سى، متريک پروت دیو نو بروه برخ انتروال کي هوارشمیرنه بسيا کوي.

$$\int_0^u \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arcsin x]_0^u = \arcsin u - 0 = \arcsin u$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} \arcsin u = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

ت: تابع f په کي $x=2$ کي قطبئاي لري

$$\int_0^u \frac{x^2}{x^3-8} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3-8} dx = \frac{1}{3} \cdot [\ln|x^3-8|]_0^u = \frac{1}{3} (\ln(u^3-8) - \ln 8)$$

د $u > 2$ له پاره لرو: $\ln(u^3-8) \rightarrow -\infty$

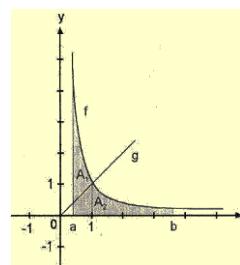
ث: خironه يا تابع f په $x=1$ کي قطبئاي لري.

$$f) \int_u^1 \frac{e^x}{1-e^x} dx = -\int_u^1 \frac{-e^x}{1-e^x} dx = -\left[\ln|1-e^x| \right]_u^1 = -\ln(e-1) + \ln|1-e^u|$$

د له پاره هخيري: $\ln|1-e^u| \rightarrow -\infty$ $u \rightarrow 0$

ناتاکلي انتيگرال شتون نه لري.

يو سل او يووبشت: دواړه ګرافونه په $p(1/1)$ کي غوځوي.
برخهواري په انتروالونو $[0/1]$ او $[1/\infty]$ پرته دي.
هوارشمیرنه د A_2 له پاره د ګرافونو په منځ کي هواري په څير.



$$121. \int_a^1 \left(\frac{1}{x^2} - x \right) dx = \left[-\frac{1}{x} - \frac{x^2}{2} \right]_a^1$$

$$= -1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{a} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{1}{a} - \frac{3}{2}$$

د له پاره هخيري: $\frac{a^2}{2} + \frac{1}{a} - \frac{3}{2} \rightarrow \infty$ $a \rightarrow 0$

برخهواره A_1 کومه پوله ارزښت نه لري.

د برخهواري A_2 شمیرنه د دوه برخهوارو په څير:

$$\int_0^1 x dx + \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \frac{1}{2} - \frac{1}{b} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{b}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{b} \right) = \frac{3}{2}$$

برخهواره A_2 پوله ارزښت $\frac{3}{2}$ لري.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library