٣

شمیر پوهنه

د ښوونځي لپاره

(ریاضي په دري برخو کې)

دریمه برخه

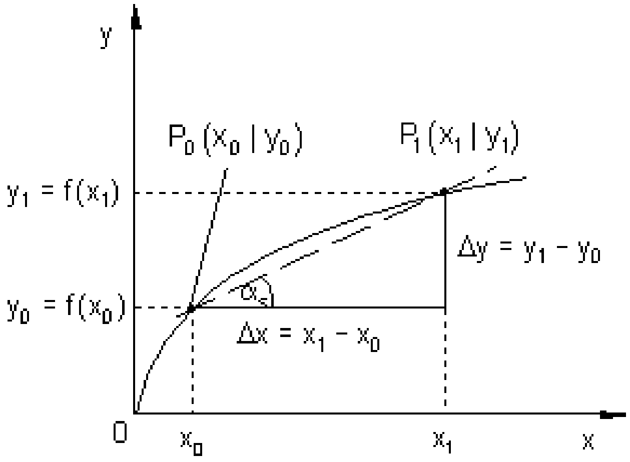
Ketabton.com

لیکونکی:
برینکمن (له برینکمن ن ج څخه)
ژباړی: ډاکتر ماخان (میرې) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره

(ریاضي په درې برخو کې)



دریمه برخه

لیکونکی: پروفیسربرینکمن(له برینکمن ن ج څخه)

ژباړی: ډاکتر ماخان (میرې) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسي لږ ونډه اخستې وي.

کتاب پېژندنه

د کتاب نوم: شميرپوهنه دښوونځي لپاره

ليکونکی: پرفيسور برينکمن

ژباړی   :   ډاکتر ماخان،، ميرى،، شينوارى

makhanshinwari@gmail.com

د خپريدو لړی

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولته

جرمني

چاپ کال   ۲۰۱۲

چاپ چارې   دانش خپرندويې ټولنې تخنيکي څانګه

WWW.danishpress.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې ليکونکي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیواولو ته وړاندې کړي دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګڼانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیې له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کته ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ژباړي مننه

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې زمونږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زمونږ ،، د افغانسان کلتورې ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندويانو او په تيره بيا د مشر تابه څخه زياته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه يې د دې ليکنو زياته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کليوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زياته مننه کوم:

د ښاغلي ډيپلوم انجنير ريحان الدين حساس، ښاغلي ډيپلوم انجنير محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترمانوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بيان، ښاغلي ډيپلوم انجنيرمحمد ايوب بيان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډيپلوم انجنير او ډيپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر ځانګې شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له ميرمن ښاپرۍ څخه ډېره زياته مننه، چې زما د ليکنو- نه دا چې مخه يې نه ده نيولې- پوره ملاتړ کړي.

بيا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن ښار ۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

دریمه برخه:

د ژباړي سريزه	الف
مشتق	۱
...پيل او بنسټونه	۱
جګيدنه او تانجنت	۱
دفرنشلوېش او مشتق	۱۲
د دفرنشل لارې يا قاعدې	۶۵
د جګو درجو مشتق(ابلايتونګنه)	۸۴
تانجنت او نورمال يا ولاړه	۸۹
د يوې تابع د استعمال بيلګه...	۹۱
په ت وليد کې د مشتق استعمال	۹۴
د الجبري توابعو مشتق	۹۷
د مشتق استعمال په طبيعي علومو کې	۱۰۳
ټولګه:	۱۳۹
د سيکانت جګوالي او تا نجنت جګوالي	۱۴۱
مونوتوني – يا يوغرېزوالي	۱۴۵
د يو غرېزوالي خويونه	۱۴۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

افراطي ارزښتونه ۱۵۰

اوړونټکی او زینټکی ۱۵۵

د ګرو یا منخنیو خبرې اترې یا بحث ۱۶۴

نرخشمیرنه د مشتق استعمال په حیث

مشقشمیرنه د ټولګي کار چمتووالي لپاره ۲۹۳

اتیګرالشمیرنه ۳۲۳

پیل راوړنې ۳۲۳

سطحه شمیرنه او بنسټ یا لومړنی تابع ۳۲۵

ناټاکلی انتیګرال ۳۲۸

د نامعلوم اتیګرال څخه و معلوم امتیګرال ته ۳۳۳

د انتیګرېشن پوله بدلون ۳۳۷

له دوه ګرافونو څخه رابندې سطحې شمیرنه ۳۴۴

انتیګزرال د منځ ا رزښت په حیث ۳۵۶

انالیز ۲ ۳۶۰

اکسپوننشل توابع او e - توابع ۳۶۰

د اکس توابعو استعمال ۳۷۸

محور غوڅټکي او اکس. مساوات ۳۸۶

د توان او لوګاریتم توابع ۳۸۹

د اکسپوننشل توابعو لپار د حل لارې ۳۹۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د **e** - توابعو مشتق د ضرب او ځنزیري قانون سره ۴۰۴

د **e** – تابع انتیګرېشن یا ګډونه ۴۱۶

د بدلون سره ټاکلی انتیګرال ۴۱۸

ناټاکلی انتیګرال ۴۲۶

د مشتق او انتیګرال ششمیرنې سره مخامخ کول ۵۵۴

ناپرېکیدنوالی یا متمادیت، ۵۶۷

ناپرېکیدنوالی یا متمادیت، ۵۶۷

مشتقوړوالی(رابیلیدوړوالی) ۵۶۹

انتیګرالوړوالی: ۵۷۲

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې: ۵۷۶

ټوټه انتیګرالونه (یا دضربونوانتیګرال) ۵۷۸

.

.

.

.

.

.

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف

د ژباړې سریزه

ګرانو هیوادوالو او د شمیرپوهنې مینه والو!

د ا ځو کاله د مخه د ځنو شمیرپوهنیزو کلمو په لټه کې د برینکمن د ن ج سره مخامخ شوم. دا چې دې لیکنې ښه خوندویونه یا متن درلود او زیات تمرینونه د حل سره، نو ما وبتیله، چې دا به پښتو ته اړوم. دا یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې زده کوونکي ښوونکي او داسې لړ د شمیرپوهنې سره بلد میندې او پلرونه ترې ګټه اخستلی شي. په دې لیکنه کې هر څه خورا ښه روښانه شوي دي او په مختلفو بیلګو سمبال دي د حلونو یا اوبیونو سره، چې لوستنه یې هر د شمیرپوهنې مینه وال لپاره د پیرځوینې وړ بولم.

کتتاب په درې برخو کې چاپیږي، چې هره برخه یې یوه خپلواکه او د یوې ځانګړې برخې خوندیونه لري. زه په دې باور لرم، چې د شمیرپوهنې مینه وال دا کارداسې لړ په غور وګوري، نو زر به ورسره مینه پیدا کړي.

دا کتابونه هم د هغو ۲۵ ریاضي کتابونو لړۍ ده، چې ما چاپ ته چمتو کړي دي، خو نه پوهیږم، چې څو دا نور به ترې کله چاب شي. که څه پاتې شو، نو هغه به د دې کتابونو سره ن ج ته پورته کړم.

ګرانو لوستونکو!

دا زموږ د هیواد اړتیا لپاره په پوهنیزه اړخ کې په سره تیره اوبه تویول دي. دا کتابونو، چې کوم چې چاپیږي د زر دانو یا پنځه سوه څخه به نه اوړي، نو د یوه پنځوس میلیونه کمو زیات ولس لپاره زردا نې چې چاپیږي، دا خو اصلاً په شمیر کې نه راځي،خو دا به په خروار ګڼو.
په لومړي کتاببرخه کې ځمکچپوهنه یا هندسه ورسره مل ده او په دویمه کتاببرخه کې مې وکتور شمیرنه ورسره زیاته کړې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریمه کتاببرخه مشتق او انتیګرال ته ځانګړې شوې.

ګرانو لوستونکو!

د برینکمن د لیکنو لړۍ د شمیرپوهنې په څانګه کې د ښوونځیو لپاره نوره هم پسې غزېدلې، چې ما هغه د ګرانو لوستونکو لپاره رازباړلې.

دا احصایه یا ستاتیستک دی او د احتمالوالي شمیرنه ده. دا دواړه کتابونه، چې دلته یې تاسو ته ژباړه وړاندې کیږي، هم په زیاتو تمرینونو، اود دوی په اوبیونو یا حلونو سره سمبال ده.

زما په اند، داسې لیکنه په پښتو کې د لومړي ځل لپاره کیږي، چې نومه ونې به دلته هم څه ناڅه ګرانو لوستونوکو ته نابلدې وي، خو پرې پوهیدنه شونې ده. هر څه په روښانه توګه ورکړل شوي.

ګرانو هیوادوالو!

داچې ما یوځای یا نوره هم ښه په یوه وار ډېر کار را ونیوه، نو هرومرو به ناټیکاوي زما له خوا په کې رامنځ ته شوې وي، خو دا به داسې ناټیکاوي نه وي، چې شمیرپوهنیزې ستونځې رامنځ ته کړي. له دې امله له ستاسو څخه زما په ستونځو پوهیدلو له امله زیاته مننه.

په دې هیله ، چې زما په غوښتنو او ستونځو به و پوهیږي په دې لیکنو او ژباړه کې ما ته هیڅ مادي ګټه نه شته. دا دې په ما زموږ د بې وزلي ولس د ډېر مصرف(لګښت) په هکله د یوې کوچنۍ پیرزوینې په حیث وړاندې وي

مننه:

له هر څه د مخه د دې لکچرونو لیکنو لیکونکو شمیرپوهانو یعنې ستر پروفیسور بریکمن څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه بهیې زموږ ولس هم ګټه پورته کړي.

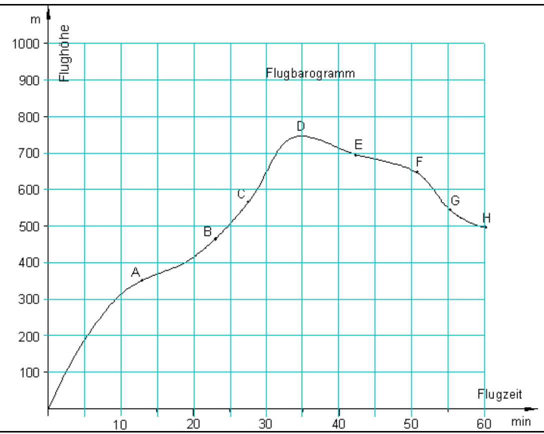
(c) ketabton.com: The Digital Library

دفرنـڅیالشمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

ننوتنه او بنسټونه

جګیدنه او تانجنت:

په یوه ټکي کې د تابع د ګراف میل(جګیدنه)



په الوتکوکې د الوتنې دلیک(الوتنلیک) الې (Flight barogramm)جوړې دي، چې تل د الوتنې جګوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت تابعیت کې رسموي او په هر جگوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پښتو واړوو، نو د لیک بکس به ورته ووایو.

په پورته ګراف کې د یوې الوتکې د الوتنې د بیلا بیلو وختونوجګوالی ښوول شوی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-ایا فکر کوئ، چې په ټکي B کې نسبت و ټکي A ته جګوالی زیات دی؟
-ایا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جګوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جګوالی زیات دی نسبت د G ټکي ته؟

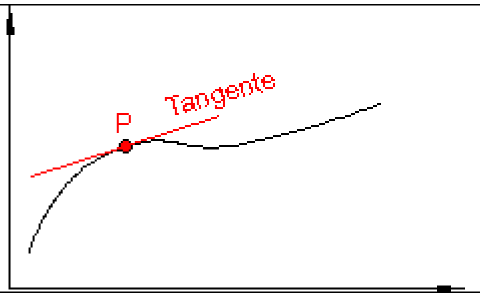
-ایا د یوې کرښې او منحني جګوالی هرچیرته توپیر لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه :

۱ ـ ګورو، چې په یوه منحني کې د ګراف جګوالی هرچیرته برابر نه دی، نو له دې امله باید ټکی په ګوته کړو، چې هلته میل څیړل کیږي.

۲ ـ په لاندې بیلګه کې به روښانه کړو، چې تنها د یوې (سیده)کرښې میل هرچیرته برابر دی، نو له دې امله دلته د یوې کرښې د میل یا جګوالي څخه غږیږو.

بریښي چې لاندې پیژند یا تعریف هوښیارانه یا عاقلانه دی:

پیژند (تعریف): د یوې تابع ګراف میل (جګوالی) د P په یوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د میل د ګراف سره برابر دی	

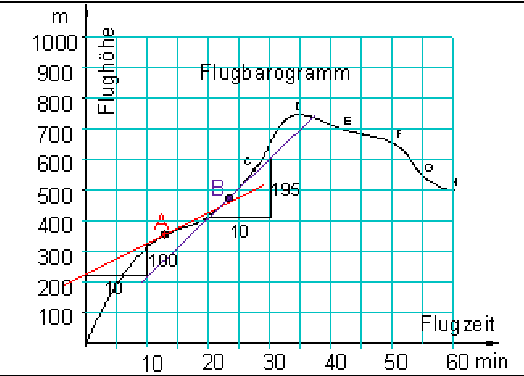
لیدل کیږي چې دلته یو تانجنت د کرښې تعریف لري، چې د لمسټکي(مماس) په چاپیریال کې د امکاناتو سره سم د مماس ټکي ته ښه ور نږدې کیږي.

ددې پیژند یا تعریف له مخې په یوه ټکي کې د یوه ګراف میل(جګیدنه) د یوې کرښې میل دی.

د ګراف د جګیدنې ټاکلو لپاره د A اوB په ټکو هر یوه کې یوه کرښه (تانجنت) انځوروو، چې ګراف ته خورا زیاته نږدې کیږي.

د میل یا جګیدنې مثلث په مرسته جګیدنه په شدل یا ساده ډول شمیرل کیدی شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د A په ټکي کې جګيدنه :

$$\frac{100\text{ m}}{10\text{ min}} = 10\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

د B په ټکي کې جګيدنه :

$$\frac{195\text{ m}}{10\text{ min}} = 19{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

زموږ د بيلګې لپاره میل یا جګيدنه په يوه ټاکلي ټکي کې د لحظوي (سملاسي) ميل د چټکتيا (سرعت) په معنا دی.

دA په ټکی کې : د الوتني وخت نږدې $12{,}5\text{ min}$ ، د ميل یاجګيدني چټکتيا(سرعت) نږدې $10\,\dfrac{m}{\min}$ ده

د B په ټکی کې : د الوتني وخت نږدې $23{,}0\text{ min}$ ، د جګيدني چټکتيا(سرعت) نږدې

$19{,}5\,\dfrac{m}{\min}$ ده.

تانجنت تر اوسه فقط د ليدني له مخې تعريف شوی ، چې د لمسټکي چاپيريال ته خورا ډېر نږدې کيږي. له دې امله ممکن وه، چې د ګراف میل د A اوB په ټکو کې هم یواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی یا بسیا نه کوي.

په يوه ټکي کې د تابع دګراف ميل (جګيدنه):

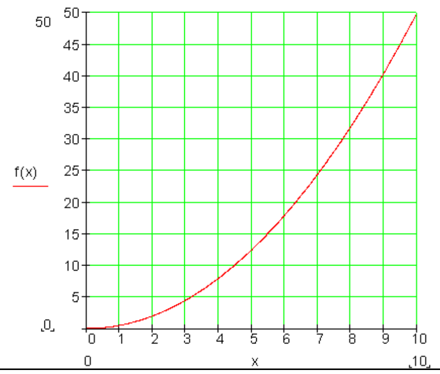
معلومه ده ، چې يو ريلګاډی د تمځای څخه له خوزېدو(حرکت)وروسته خپله چټکتيا(سرعت) په ورو ورو (کراره کراره) زياتوي.وهلې لار(د تمځای څخه لرېوالی) تل زياتيږي. د تمځای څخه لريوالی د چټکتيا يا سرعت په واک کې ده .

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا عمل د لاندې تابعمساوات له لارې لیکلی شو.

دلته د x وخت د ثانیې او د s لار د متر لپاره لیکو $s = f(x) = 0{,}5x^2$

مخامخ : د تابع ګراف



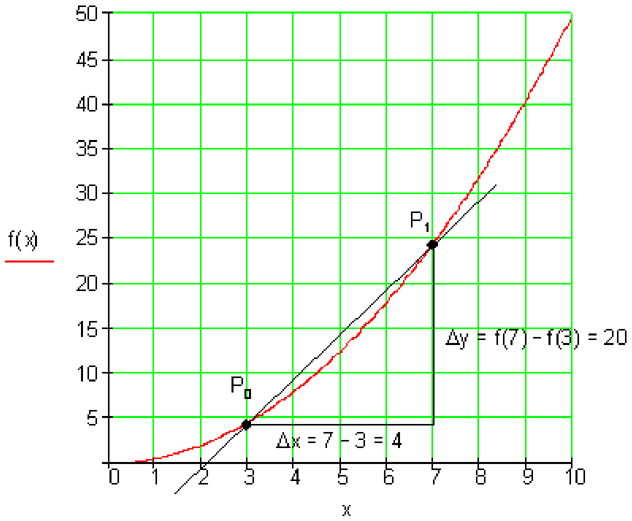
اوس باید منځنی ارزښت(منځنی چټکوالی) Averagerat of change د ۳ ــمې او ۷ ــمې ثانیې ترمنځ وشمیرل شي.

ددې لپاره اړونده سیکانت انځوروو او د هغې چټکوالی شمیرو.

اوس دې د تغیر ارزښت (منځنی چټکوالی) د ۳ ــمې او ۴ ــمې ثانیو ترمنځ وشمیرل شي.

په دریمه ثانیه کې د ارزښت تغیر یا چټکوالی څومره دی؟

د منځنی چټکوالي داسې مخ ته بوزی، چې د ټکو P_0 او P_1 ترمځ واټن تل کوچنی شي، داسې چې ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوزیږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ۳ ــمې او ۷-مې دقیقې ترمنځ منځنی تغیرارزښت (جګوالی)دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(7)-f(3)}{7-3}=\frac{24,5-4,5}{7-3}=\frac{20}{4}=5$$

د ۳ ــمې او ۴ ــمې دقیقې ترمنځ منځنی تغیرارزښت(منځنی جګوالی) دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(3)}{4-3}=\frac{8-4,5}{4-3}=\frac{3,5}{1}=3,5$$

دریمې دقیقې ته د ورنزدې کیدنې شمیرنه

Intervall $[3;x]$	$[3;4]$	$[3;3,1]$	$[3;3,01]$	$[3;3,001]$
$\Delta x = x-3$	1	0,1	0,01	0,001
$\Delta y = f(x)-f(3)$	3,5	0,305	0,03005	0,0030005
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3,5	3,05	3,005	3,0005

پورته شمیرنه په ګوته کوي، چې که ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوزیږي یا ورنزدې شي، نو د تغیر ارزښت(جګیدنه) تل زیاته و ارزښت ۳ ته ورنزدې کیږي.

موږ په دې توګه یو ارزښت لاس ته راوړو، چې لحظوي تغیرارزښت (لحظوي جګیدنې) ته تل ورنږدې کیږي.

که موږ فیزیکي لویي (واحدونه یا یوونونه) په خپله بیلګه کې وکاروو، نو د تغیرارزښت (جګوالي) لپاره m/s باور لري . دا د چټکتیا لپاره یوون(واحد) دی

دا په دې مانا دی،چې د لار-وخت دیاګرام چټکتیا (سرعت) په ګوته کوي.

لحضوي یاسترګو رپ تغیرارزښت شمیرلو ته شمیرنیزه تګلار

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = 0,5x^2$ لپاره په اينټروال $[3;\Delta x]$ کې منځنی تغیر ارزښت(جګوالی)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{0,5(3+\Delta x)^2 - 0,5\cdot 3^2}{\Delta x} = \frac{0,5\left[9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2\right] - 0,5\cdot 9}{\Delta x}$$

$$= \frac{0,5\cdot 9 + 3\Delta x + 0,5(\Delta x)^2 - 0,5\cdot 9}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3+0,5\Delta x)}{\Delta x} = 3 + 0,5\Delta x$$

دا $3+0,5\Delta x$ د منځنی تغیرارزښت دی

که اوس Δx تل کوچنی شي، موږ وایو که Δx د صفر په لور وهځيږي یا لاړشي یعنې ($\Delta x \to 0$) ،نو د منځنی تغیر ارزښت $3+0,5\Delta x$ د3 په لور ځي یا هځيږي.

دا نو اوس لحظوي (د سترګو رپ) تغیرارزښت دی د x_0 په ځای کې.

د دې لپاره لیکو : د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $3+0,5\Delta x \to 3$

یا $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(3+0,5\Delta x) = 3$

پوښتنې

1 - کیمیاوي تعامل د مختلفی چټکتیا سره صورت نیسي. د بیلګی به توګه که ځینک د مالګی به تیزابو کی وچول شئ، نو هایدروجن ترئ ترې راوځي یا رامنح ته کیږیز لاندې جدول د هایدروجن سټ یا مقدار ورکوي، چې د وخت په واک کې دئ یا تابع دي.

وخت پهS	2	4	6	8	10	12
د اوبو سټ یا مقدار په ملي لیترml	21	30,5	35,5	40,5	42,5	43

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- د دې لپاره يو دياګرام وکاږئ.

ب – د هايدروجن توليد په هکله څه وينا کيداي شئ؟

پ - په لاندې انټروالونو کې د تغير ارزښت وشميرئ.
[2 ; 4] ; [4 ; 8] ; [8 ; 12]

دويم - د $f(x)=\frac{1}{4}x^2-x+1$ ؛ تغير ارزښت په انټروالونو
$[1;1,5];[-4;-2,5];[2;t]$ کې

د $t\ t\neq 2;[3;3+h]$ او h>0 سره وشميرئ.

دريم - تابع $f(x)=\frac{3}{4}x^2-3x$ ؛ ورکړ شوې

الف – د f(x) منځنی تغيرارژښت په انټروال I = [2;5] وشميري.

ب - د s(x) سيکانت مساوات په P (2 | f(2)) او Q (5 | f(5)) ټکو کې وټاکئ.

پ _ د f(x) لحضوي تغيرارزښت د x = 2 په ځاي کې وشميرئ.

ت - د f(x) او s(x)ګرافونه په وضعيه قيمتسيستم کې وکاږئ

څلورم - يو جسم په ازاده غورځولو کې داسې حرکت کوي، چې په t وخت کې S(t) = 5.t^2 لار وهي(S په ړتر او t دقيقه).

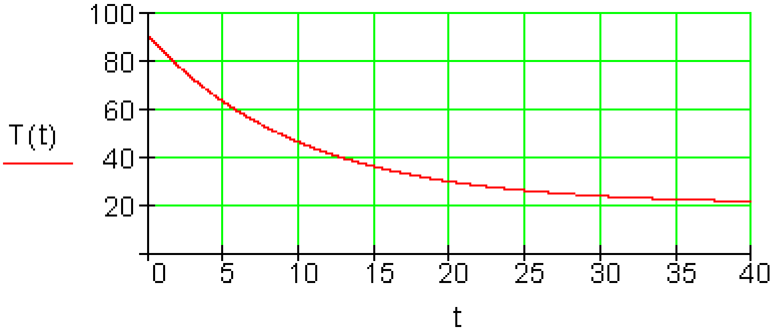
پنځم – يو توليد له خپل جمتووالي وختت څخه وروسته سړيږي.

تمپراتور(تودوخي) $T(t)=20+70e^{-0,1t};\ t\geq 0$ (t په دقيقو، T(t) په څلزيوس درجې

د سړيدو مخته تګ وشميرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیره د تابع $T(t)$ ګراف ښايي.



الف – له کوم حرارت څخه مخ ته ځو؟

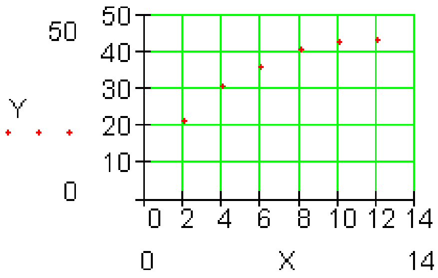
ب – فیریني کوم حرارت لري، که یخه شي؟

پ – په کوم وخت کې چټکتیا(سرعت) ، د هغې سره چې فیریني یخیږي ، خورا لویه ده.

ت _ په لومړیو لسو دقیقو کې د منځنې تودوخې تغیر وشمیرئ.

مفصل حلونه

دلومړي مفصل حل　　　الف –



ب – د هایدروجن تولید د وخت به واحد کی تل کمیږي　　　پ - تغیر اربښت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$[2;4]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30,5-21}{4-2} = 4,75$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[4;8]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{40,5-30,5}{8-4} = 2,5$$

$$[8;12]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{43-40,5}{12-9} = 0,625$$

I	[2 ; 4]	[4 ; 8]	[8 ; 12]
$\frac{ml}{s}$	4,75	2,5	0,625

دویم – د $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$ منځنی تغیر اربښت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$[1;1,5]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1,5)-f(1)}{1,5-1} = \frac{\frac{1}{16}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{8}$$

$$[-4;-2,5]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-2,5)-f(-4)}{-2,5-(-4)} = \frac{\frac{81}{16}-9}{\frac{3}{2}} = -\frac{21}{8}$$

$$[2;t]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(t)-f(2)}{t-2} = \frac{\frac{1}{4}t^2-t+1-\left(\frac{1}{4}\cdot 2^2-2+1\right)}{t-2} = \frac{\frac{1}{4}t^2-t+1}{t-2}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\left(t^2-4t+4\right)}{t-2} = \frac{\frac{1}{4}(t-2)^2}{t-2} = \frac{1}{4}(t-2) \text{ für } t \neq 2$$

$$[3;3+h]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+h)-f(3)}{3+h-3} = \frac{\frac{1}{4}(3+h)^2-(3+h)+1-\left(\frac{1}{4}\cdot 3^2-3+1\right)}{h}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\left(9+6h+h^2\right)-3-h+1-\frac{9}{4}+3-1}{h} = \frac{\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}h^2}{h} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم : الف_ $f(x)=\frac{3}{4}x^2-3x$ منحٔنی تغیر ارزښت به $[2;5]$ کې دی

: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}$

$$f(5)=\frac{3}{4}\cdot 25-3\cdot 5=3{,}75 \quad f(2)=\frac{3}{4}\cdot 4-3\cdot 2=-3 \quad \Delta x=5-2=3$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3{,}75-(-3)}{3}=\frac{6{,}75}{3}=\underline{\underline{2{,}25}}$$

ب – د s(x) سیکانت مساوات چې لهP اوQ ټکو تیریږي، تیک همداسې شمیرل کیږي، لکه کرښه چې له دوه ټکو تیریږي.

P(2;f()) د a) له امله (P(2;-3 لاس ته راځئ

Q(5;f(5) د a) له امله(Q(5;3,75 لاس ته راځئ

$s(x)=a_1\cdot x+a_0$ د $: a_1=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=2{,}25$; سره د (aپوښتنبرخه هم وګورئ:

$$\Rightarrow s(x)=2{,}25x+a_0$$

$$P(2|-3): s(2)=-3 \Leftrightarrow 2{,}25\cdot 2+a_0=-3 \Leftrightarrow a_0=-7{,}5$$

$$\Rightarrow s(x)=2{,}25x-7{,}5$$

د تانجنت جګوالی

پ- لحضوي تغیرارزښت د x = 2 په ځاي کې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{\frac{3}{4}(2+\Delta x)^2-3(2+\Delta x)\underbrace{+3}_{-f(2)}}{\Delta x}$$

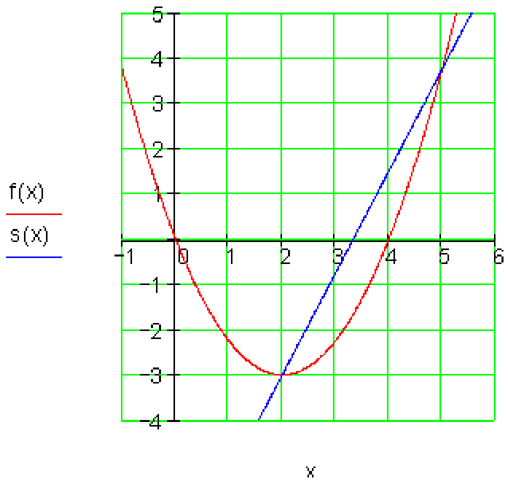
$$=\frac{\frac{3}{4}\left[4+4\Delta x+(\Delta x)^2\right]-6-3\Delta x+3}{\Delta x}=\frac{3+3\Delta x+\frac{3}{4}(\Delta x)^2-6-3\Delta x+3}{\Delta x}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}(\Delta x)^2}{\Delta x}=\frac{3}{4}\Delta x$$

منځنی تغئیرارزښت په انتروال $[2;\Delta x]$ کې.

د $\Delta x\to 0$ لپاره دی: $\frac{3}{4}\Delta x\to 0$

د$f(x)$ لحضوي تغیرارزښت د $x=2$ په ځای کې 0 دی



ت-

ځلورم - لحضوي جټکتیا یا سرعت د لحضوي تغیر ارزښت سره په یوه معنا دی.

$$t=1:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(1+\Delta x)-s(1)}{\Delta x}=10+5\Delta x\Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\Delta x \to 0$ لپاره صدق کوي: $10 + 5\Delta x \to 10$

$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2+\Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره صدق کوي. $20 + 5\Delta x \to 20$

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3+\Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره صدق کوي. $30 + 5\Delta x \to 30$

پنځم – الف- پيلتودوخي کيدی شي له $90\ ^0C$ ګراف څخه ولوستل شي.

ب- تابع ارزښت اسيپتوتيکي د ارزښت $20\ ^0C$ په لور هڅيږي يا ځي.

پ-د سړيدنې چټکتيا په پيل کې خ ورا لويه وي.

ت- $$[0;10]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{T(10) - T(0)}{10 - 0}$$

د $T(10) = 20 + 70 \cdot e^{-0,1\cdot 10} \approx 45,75$ und $T(0) = 20 + 70 \cdot \underbrace{e^{-0,1\cdot 0}}_{1} = 90$ سره

کيږي: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \underline{\underline{-4,425}}$

کميزه يا منفي مخنخښه په دې معنا ده، چې تغيرقيمت منفي دی، د فيريني تودوخي کميږي.

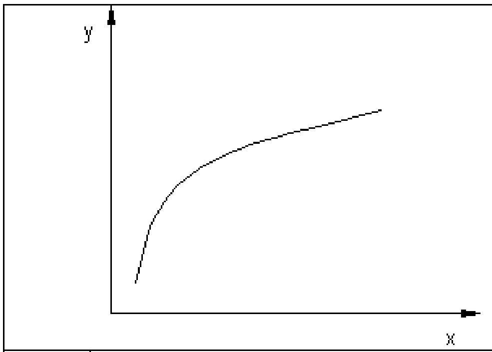
کمښت وېش(تفاضلوېش) او مشتق يا رابيليدنه

د غوڅووني(تقاطع) جګوالي څخه د تانجنت جګوالي ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

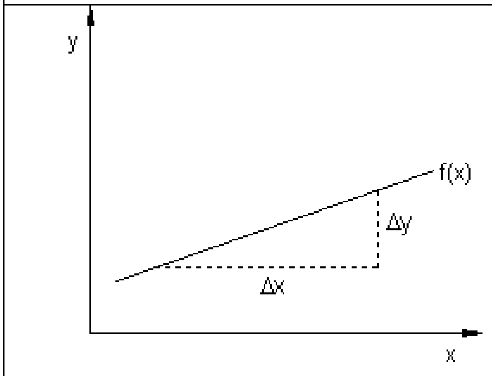
یو تابع $y = f(x)$ او اړونده ګراف دې ورکړ شوی وي.

که د تابع جګیدنې حالت په پام کې ونیسو ،نو ګورو چې د تابع جګیدنه په نږدې ټولو ټکو کې توپیر لري.



یوه ثابته جګېدنه، لکه په کرښیز یا لاینیز تابع $f(x) = a_1x + a_0$ ا کې د

$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = konstant$$

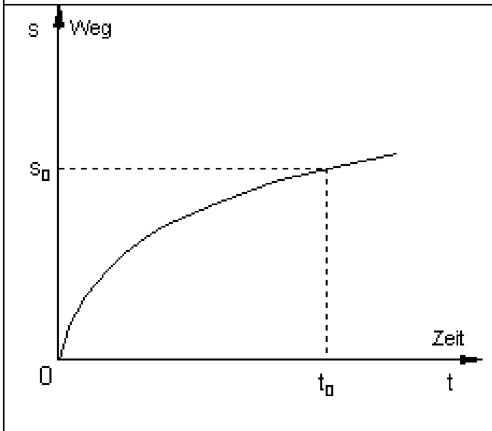


په زیاتو وختونو اړینه ده ، چې د تغیرحالت(د جګېدنې حالت) کې د تابع د تلنې حالت و څېړو.

نو له دې امله لحظوی چټکتیا(همغه وختیزه – یا سملاسي) $v(t_0)$ په لار- وخت دیاګرام کې وڅېړو.

د مشتقشمېرنې په مرسته دا پرابلم حل کېدی شي.

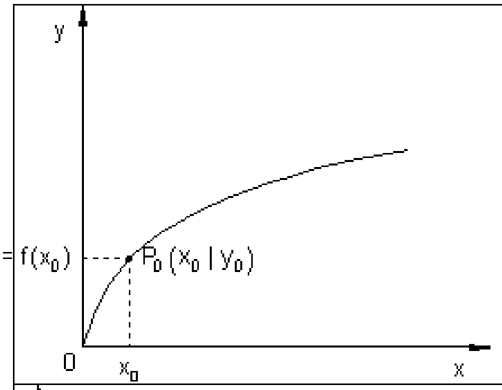
د یوه تابع د جګیدنې ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې differenzieren د مشتق نیونه بلل کیږي.



$t_0 \triangleq$	په پام کې نیولی سترګو رپ
$s_0 \triangleq$	تر دې سترګو رپ پورې و هلې لار

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو تابع $y = f(x)$ او د هغه ګراف دې ورکړ شوی. په ټکي $P_0(x_0 | y_0)$ کې ورکړ شوی وي. ددې ځګوالی پیداکړی شي.

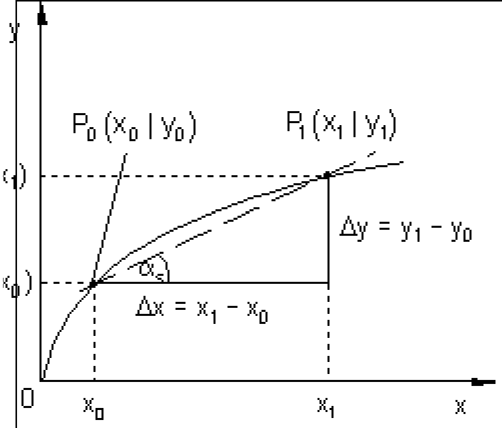


ددې پرابلم د حل لپاره داسې مخ ته ځو، چې لومړی ځګوالی په نږدې توګه (تقریبي) پیدا کوو.

ددې لپاره یو بل ټکی $P_1(x_1 | y_1)$ د P_0 ټکي په نزدې کې ټاکو.

کرښه، چې دواړه ټکي سره تړي ،یعنې سیکانت، یو ځګوالی ښايي، چې د تکو P_1 اوP_0 ترمنځ د تابع ،،منځنی ځګوالی،، په ګوته کوي.

دا د ځګوالیمثلث له لارې ټاکل کیږي.



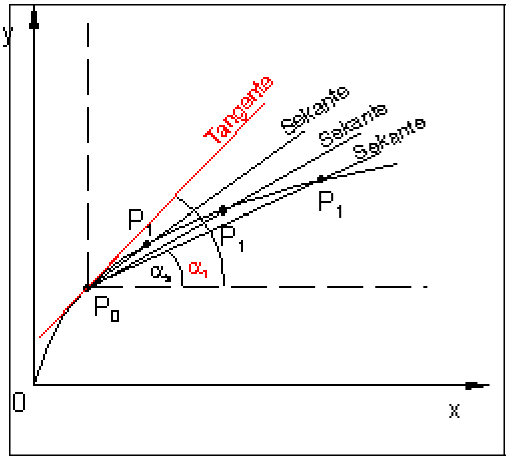
$$\tan \alpha_s = a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

ځګېدو کونج	$\alpha_s \triangleq$
ځګېدوضریب	$a_s \triangleq$

که ټکی P_1 د ټکي P_0 په نزدې کې وټاکو یا ځای په ځا ی کړو، نو دا په ټکي P_0 کې د تابع دنوي سیکانت ځګوالی دی چې باید پیدا شي. که دا کار (تلنه) تل مخ ته بوزو، او ټکی P_1 تل و ټکي P_0 ته ورنزدې کړو، نو د پولې حالت په څېر یوه کرښه منځ ته راځي، چې د تابع ګراف په ټکي P_0 کې لمسوي.

د تانجنت ځګېدنه په ټکي P_0 کې ټیک د تابع د ګراف ځګېدنه په ټکي P_0 کې ښايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



α_t =	د تانجنت د جګوالي (میلان ـ) کونج
a_t =	د تنجنت د جګوالي ضریب

داحالت یا تلنلار کیدی شي د ریاضي له لاري د پوله ارزښت جوړولو په څير افاده شي.

$$\lim_{P_1 \to P_0} \alpha_s = \alpha_t \qquad \lim_{P_1 \to P_0} a_s = a_t$$

کمښتویش(تفاضلوېش Difference quotient) او مشتق

د سیکانت جګیدنه (منځنی تغیر ارزښت)

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

د x لپاره د مساوات ښی خوا ځای په ځای کوو

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

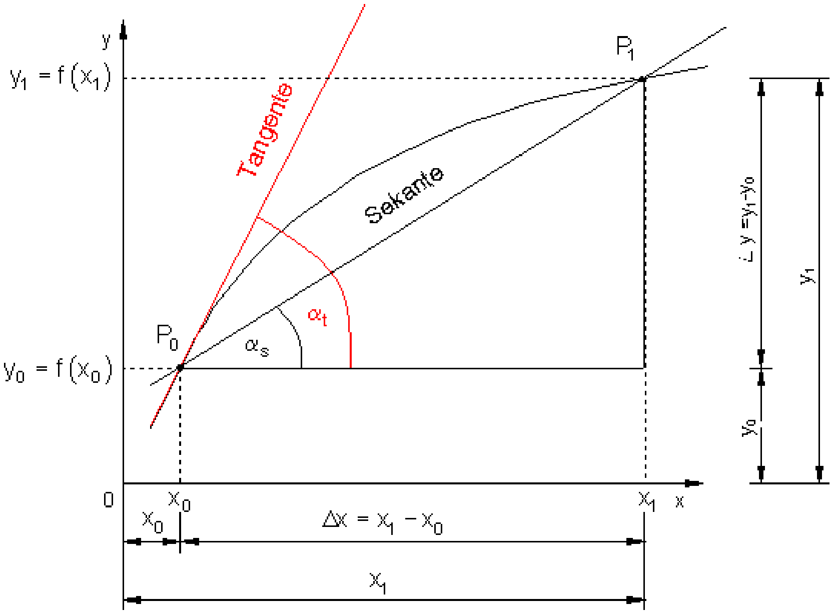
د تنجنت جګیدني سره د پوله ارزښت (حد) له لاري لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

دا مشتق یا لحظوي – د سترکو رپ تغیر ارزښت دی

یا لنډ $$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$



په ورته توګه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څیرني لاندې نیسو:

د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي.
کرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو.
د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند (تعریف):

دفرنځیالوېش(کمښتوېش)

د x_0 په ځای کې د تابع f(x) مشتق یا رابیلیدنه بلل کیږي

تعریف (پیژند):
د تابع لومړی مشتق یا رابیلیدنه دx_0 په ځای کې دتانجنت جګیدنه ورکوي، چې د تابع ګراف یې په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې لمسوي او له دې سره غبرګ د تابع د ګراف جګیدنه ده په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې. دا سړی د تابع جګیدنه هم بولي.

تانجنتجګیدنه په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بیلګې څخه کار اخلو

بیلګه:
تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوارو د $x=x_0$ په ځای کې او په ځانګړي توګه د $x_0=2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمبنتويش(د تفاضل ويش) پيداکوو.

$x=x_0:$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$

اوس د ليميټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضريب ته راځو:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

نو $\underline{\underline{f'(x_0)=2x_0}}$ لرو او د $x_0=2$ لپاره $f'(2)=2\cdot 2=4$ باور لري.

د $x_0=2$ په ځای کې د تابع $y=f(x)=x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0=2$ په ځای کې ميل ياجګوالی 4 لري.(لاندې تکرار شوې)

اوس د ليميټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضريب ته راځو:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

نو $\underline{\underline{f'(x_0)=2x_0}}$ لرو او د $x_0=2$ لپاره $f'(2)=2\cdot 2=4$ باور لري.

د $x_0=2$ په ځای کې د تابع $y=f(x)=x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0=2$ په ځای کې ميل ياجګوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه يې:

پايله يا لاس ته راوړنه يې کيدی شي، د تابع د ګراف له لارې و ازمايل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0\,|\,y_0)=P_0(2\,|\,4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د ميل د مثلث له لارې جګيدنه لاس ته راوړو.

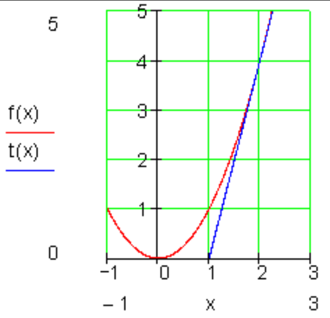
(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه پورته بیلګه کې: $y = f(x) = x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداکوو:

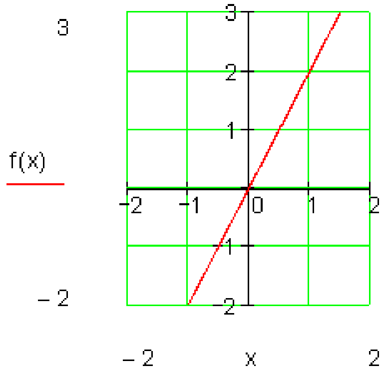
$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$$

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	4

لاندې ګراف وګورئ: ګراف یوه کرښه $f'(x) = 2x$ انځوروي، چې د تابع مشتق بلل کیږي(مخامخ ځیره)



پام:
که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو بیرته یوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکیږي.



د مشتق تابع:
د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنسټ تابع انځوروي، له دې امله دا د میل تابع هم بلل کیږي.

بیلګه:
د $f(x) = x^3$ تابع دې ورکړ شوی دی.
فعالیت: ګران لوستونکي دې د $f(x) = x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.
موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0{}^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

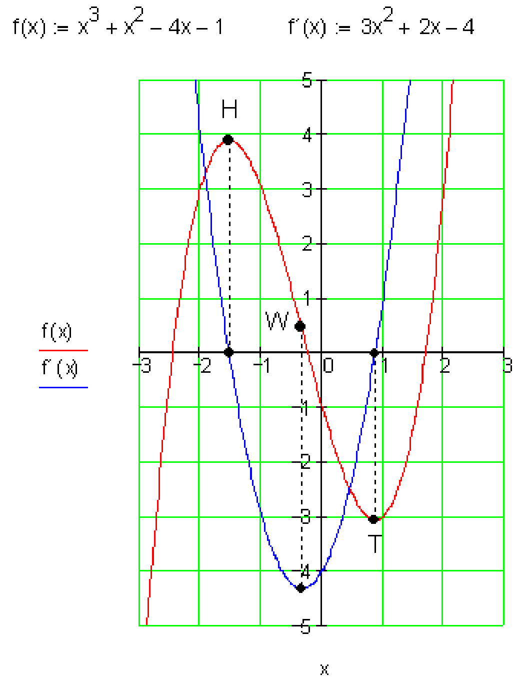
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2)$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2=3x_0^2$$

نو $f'(x_0)=3x_0^2$ د تابع $f(x)=x^3$ مشتق دی په ځای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسې ده: $f'(x_0)=3x_0^2$



د وضعیه کمیاتو- یا پروت ولاړ سیستم کې تابع او د تابع مشتق:

تابع(سوررنګه): $f(x)=x^3+x^2-4x-1$

د تابع مشتق(شین):

$f'(x)=3x^2+2x-4$ ، چې بیرته د مشتق یا د میل تابع ده.

بیلګه۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړ شوې تابع $f(x)=\frac{1}{x}$

غوښتونی: د x_0 په ځای کې د مشتق تابع

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0}{x_0(x_0+\Delta x)}-\frac{(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-x_0-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}\right)=-\frac{1}{x_0^2}$$

نو $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$ د x_0 په ځای کې مشتق دی

د مشتق تابع ده: $\underline{f'(x)=-\frac{1}{x^2}}$

بیلګه ۴ : یوه تابع $f(x)=\sqrt{x}$ دې ورکړ شوې وي.

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق پیداکړئ او د مشتق تابع.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\not{\Delta x}}{\not{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د x_0 په ځای کې د پورته تابع مشتق دی

او د مشتق تابع $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ دی.

د $\mathbf{f(x)=x^q}$ ډول توابعو مشتق د $q\in\mathbb{Q}$ سره.

د شمیرنې په بنسټ مو تر اوسه دا لاندې تر لاسه کړي:

تابع	د مشتق تابع	
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$f'(x)=1\cdot x^0$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2\cdot x$	$f'(x)=2\cdot x^1$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3\cdot x^2$	$f'(x)=3\cdot x^2$
$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f'(x)=-x^{-2}$
$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا پورته پنځه قوانین یو د بل سره پرتله شي، نو کومان ترې لاس ته راځي، چې دا لاندې قوانین به باور ولري:

د توان قانون بې له ښوونې

لومړی: زاړه ضریبونه د ضریب یا فاکتور په حیث د x کېڼ لور (په غربي ادبیاتو کې ورته وایي: ترمخ) ته ولیکی

دویم: نوی اکسپوننت هغه زوړ اکسپوننت دی، چې ۱ ترې کم شوی وي.

بیلګه:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

موږ اوس د څو بنسټیزو توابعو مشتق شمیرنه تر څیړنې لاندې نیسو.

بیلګه ۱:

د یوې ثابتې مشتق :

موږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت یې یوثابت دی

ثابت $y = f(x) = c = Const$

نو د هر x_0ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۲:

يوه f(x)=x خطي(كربنيزه)تابع لرو.

د x_0 په ځای كې غواړو د دې تابع مشتق پيدا كړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$
$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=1$$

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای كې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده يعني يوه ثابته ده.

بيلګه ۳ :

د y=f(x)= c.u(x) دوله تابع مشتق د c=ثابتې سره.

د يوې تابع مشتق، چې له يوې ساده تابع او يوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې=c) سره ضرب شوی وي. يعني

له y=f(x)= c.u(x) څخه لرو:

$$\Rightarrow f'(x)=c\cdot u'(x)$$

ثبوت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x_0) = c\,u(x_0)$ $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot u(x_0+\Delta x) - c \cdot u(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} c \cdot \frac{u(x_0+\Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} c}_{c} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$ $\Leftrightarrow f'(x_0) = \underline{\underline{c \cdot u'(x_0)}}$

بیلګه :

$$f(x) = 3x^4 \quad c = 3 \quad u(x) = x^4 \Rightarrow u'(x) = 4x^3$$
$$f'(x) = c \cdot u'(x) = 3 \cdot 4x^3 = \underline{\underline{12x^3}}$$

پیژند (تعریف): دفرنځیالوېش

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$$

په بیدیا کې ځګوالئ

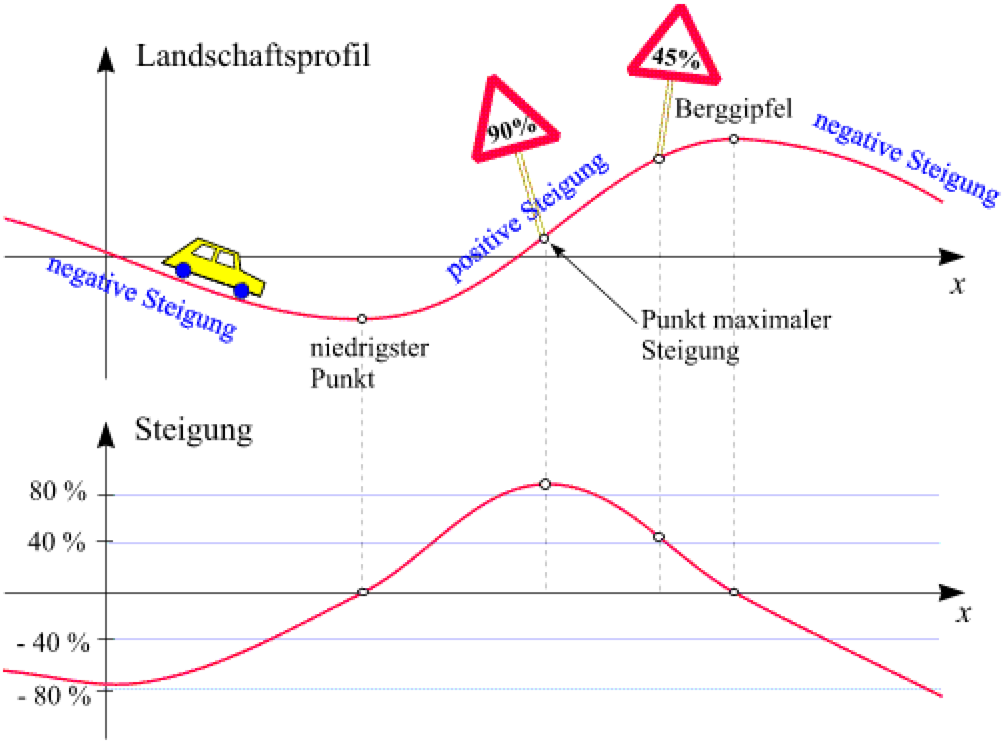
د تابع ګراف د سرک په څیر په فکر کې راولو، چې په بیدیا کې ځګ او ټیټیږي یا کښته پورته ځغلي، نو په ښه توګه یې رسمولئ شو، چې د ګراف خویونه د مشتق سره په اړیکو کې راځي:

په لاندې څیره کې د لغاتونو په ترتیب ژباړه:د بیدیا جوړښت، منفي یا کمیزه ځګیدنه، خورا ټیټ ټکی،زیاتیزه یا مثبته ځګیدنه،د خورا ځګې ځګیدني ټکی، د غره څوکه، منفي ځګیدنه.

پسې لاندې څیره کې: ځګیدنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سرک کښته یا لاندي لور ته د ځانګړي دیاګرام سره د سرک جګیدنه په هر ټکي کې انځور ده، د کومې سره چې یوه دویمه منحني ورکوي.



دیاګرامونه په کره توره وګوری او وهڅیږئ، چې د دویمي منحني خویونه د لومړی منحني له خویونو را برسیره کړی.

چیرته چي سرک خورا تیټ ټکی لري، هلته د جګیدني ارزښت 0% دی. دا په دي معنا چي که موټر له دي ځایه تیریږي په افقي ئا پراته ډول ځغلي او په همدې توره که موټر د غره په څوکه هم و ځغلي.

دا تیک هغه ټکي دي، د کومو په چاپیریال کې چې منفي او مثبته جګیدنه یوبل سره رابندوي یا پولي لري.

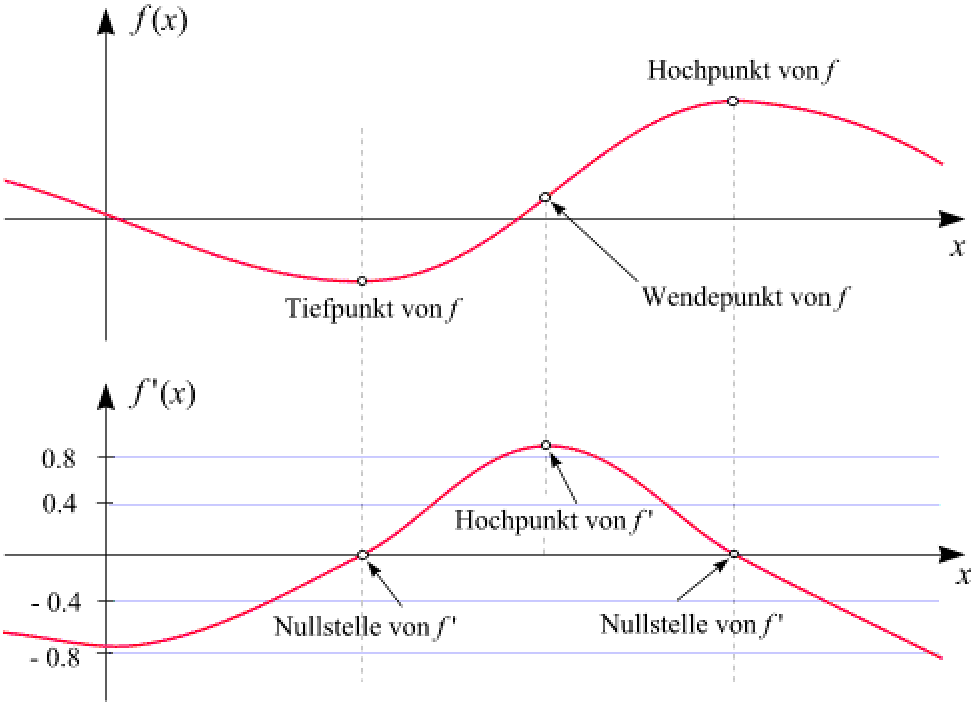
د دې په منځ کې یو چیرته یو ټکی شتون لري، چې هلته جګیدنه ماکزیمال یا خورا لویه ده (په دې بیلګه کې 90%) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

همدي ته ورته په دويمه منحني (کږې) کې يو ه خوکه لري، مګر دا په دې بېديا کې هغه ستره ،،څوکه،، نه ده، مګر که څوک غواړي، نو يوه د ،،جګيدني څوکه،، ده.

اوس دا دواړه کږې يا منحني په ورسره بلده يا معمول رياضيکي ډول په لاندې شکلونو کې ښايو او سره پرتله کوو:

(دالماني ښتو ژباړه له پورته کښته لور له کيڼ وښي لو رته: د fخورا جګ- ياماکسيمال ټکی، د fخوراټيټټکی، د fاوړون- يا د انعطاف ټکی،د f' خورا جګ ټکی، د f' صفرځای د f' صفرځای)



لومړی منحني د f(x) ګراف دی، دويمه منحني يا کږه د مشتق تابع f'(x) ګراف دی.

دا دواړه ګرافونه بيا هم ټيک وګورى او وهځيرى، چې وپوهيرى، چې دا يو د پيل سره په هره برخه کې څنګه يو د بل سره اړيکې لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)$ ګراف دوه ځانګړي ټکي مو سترګو ته راځي: په یوه کې $f(x)$ مینیمال - یا خورا ټیټ ټکی په بل کې $f(x)$ ماکسیمال - یا خورا جګ ټکی دی. په دې ځایونو کې $f(x)$ صفرځایونه لري. هغه ټکی چې هلته د $f(x)$ ګراف خورا ستوغ دی، هغه، هغه د انعطاف ټکی یا اوړونټکی بلل کیږي. دا چې په دې ټکي کې د $f(x)$ مشتق خورا جګ دی (په دې بیلګه کې0,9)، دا د($f'(x)$ عظمي نقطه (خورا جګ ټکی) ده.

د ازادې سترګې سره د هغه ځاي له لاندې منحني څخه ښه ځرکندیږي، نسبت و پورته منحني ته.

د ې بیلګې څخه همدا اوس اټکل کولی شو یا ګومان راوړی شو: که یوه تابع $f(x)$ ولرو، نو د دې $f(x)$ تابع په هکله د $f(x)$ له مشتق څخه ارزښناک معلومات په لا س روړی شو.

دا موږته د ماکسیما او مینیما (د خورا جګ او خورا ټیټ ارزښت) په هکله (چې دا دواړه د افراطي ارزښت تر نامه یادیږي) او په دې هکله چې ګراف چیرته خور یا ستوغ دی، پوره کټور معلومات راکوي.

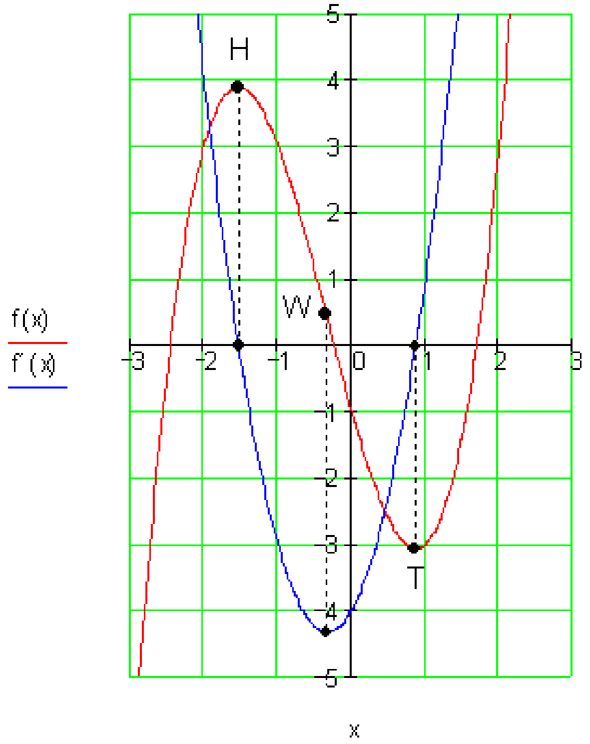
په کواوردینات سیستم (پروت –ولاړ-) کې تابع او د تابع مشتق

تابع : $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$ مشتق: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

د یوه تابع مشتق بیرته تابع دی. موږدا د مشتق تابع یا د جګېدني (میلان) تابع بولو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1$ $f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$



د دواړو توابعو ګراف په یوه قمیتي وضعیه (پروت ولاړ سیستم) کې و کښل شو.

هلته چې تابع f(x) یو جګ ټکی (H) همداسي ټیټ ټکی (T) لري ګراف د مشتق تابع x -محور کې غوځوي،په دې مانا چې د تابع ارزښت دلته صفر دی.

دا روښانه دی، ځکه چې په H او T کې تابع f(x) پروت یا افقي تانجنت لري، دا دا معنا لري، چې په دې ټکي کې د f(x) جګیدنه صفر ده.

د مشتق تابع f'(x) هلته مینیموم لري، چیرته چې د f(x) جګیدنه د H او T ترمنځ په پام ونیول شي د مطلق قیمت له مخې خورا لویه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنېII:

لومړی - د f(x)تابع مشتق د x= 2 او x=u په ځایونو کې وشمیرئ

الف - $f(x)=x^2+3$ ب - $f(x)=\frac{2}{x}$ پ - $f(x)=\frac{1}{x+1}$ ت - $f(x)=\sqrt{x}$

دویم - مشتق یې وشمیرئ

الف - $f(x)=-2x^4+3x^2-4x+2$ ب - $f(x)=0,5x^4-x^3+2,5x^2-8$

پ - $f(x)=\frac{1}{32}x^3+\frac{3}{2}x-4$ ت - $s(t)=-\frac{5}{6}t^2+\frac{2}{3}t+\frac{5}{2}$

ټ - $f(x)=-(x-6)^2(x+1)$ ث- $f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-2\right)^2$

دریم - مشتق یې وشمیرئ:

الف – $f(x)=\frac{1}{16}\left(x^3+x-1\right)$ ب - $f(x)=x\left(x^2-\frac{3}{2}x-4\right)$

پ - $f(x)=ax^4+bx^2+c$ ت - $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

ټ - $f(x)=6x+\frac{5}{x}$ ث - $f(x)=x^3-2x^2+\frac{1}{x}$

څلورم - مشتق یې وشمیرئ:

الف – $f_t(x)=\frac{t}{2}x^4-2tx^3+t^2$ ب - $f_k(x)=\frac{1}{k}x^3+kx^2+(k+1)x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ - $f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x - 3$ ت - $f_t(x) = \frac{1}{2t}\left(x^2 - t\right)^2$

ټ - $f(t) = 5t^3 - 2t + 5$ ث _ $f(z) = -1,5z^3 + 2,5z^2 + z$

ج - $A(u) = \frac{1}{2}u^2 + 3u + 2u + 1$ ح - $A(u) = \frac{1}{2}u\left(u^2 + 1\right)$

پنځم – د $f(x)$ جګوالی د $x = -3$ په ځای کې وشمیرئ او د $f(x)$ قاطع یا غوځتکي د x - محورسره وشمیری .

الف _ $f(x) = 3x^2 - 5$ ب - $f(x) = 4x - \frac{1}{x}$

شپږم - مشتق یې وشمیرئ:

الف _ $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ ب - $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ پ - $f(x) = x + 1$

ت - $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 4$ ټ - $f(x) = 5b\,;\, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ث- $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$

ج - $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$ ح - $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

خ - $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 7$ څ - $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 5x + 8$

مفصل حلونه

لومړی –

الف –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$x = 2:\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{(2+\Delta x)^2 + 3 - (2^2 + 3)}{\Delta x}$$

$$= \frac{4 + 4\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 + 3 - 4 - 3}{\Delta x} = \frac{4\cdot\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}\cdot(4+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 4 + \Delta x$$

$$\Rightarrow f'(2) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x) = \underline{\underline{4}}$$

$$x = u:\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta x) - f(u)}{\Delta x} = \frac{(u+\Delta x)^2 + 3 - (u^2 + 3)}{\Delta x}$$

$$= \frac{u^2 + 2u\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 + 3 - u^2 - 3}{\Delta x} = \frac{2u\cdot\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}\cdot(2u+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2u + \Delta x$$

$$\Rightarrow f'(u) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2u+\Delta x) = \underline{\underline{2u}}$$

ب –

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

$$x = 2:\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{2+\Delta x} - \frac{2}{2}}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{2+\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{2+\Delta x} - \frac{1\cdot(2+\Delta x)}{2+\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{2-1\cdot(2+\Delta x)}{2+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\frac{2-2-\Delta x}{2+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{2+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{2+\Delta x}}{\frac{\Delta x}{1}} = \frac{-1\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(2+\Delta x)} = \frac{-1}{2+\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{2+\Delta x}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

:

:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = u : \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{u+\Delta x} - \frac{2}{u}}{\Delta x} = \frac{\frac{2 \cdot u}{u \cdot (u+\Delta x)} - \frac{2 \cdot (u+\Delta x)}{u \cdot (u+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{2 \cdot u - 2 \cdot (u+\Delta x)}{u \cdot (u+\Delta x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{2 \cdot u - 2 \cdot u - 2 \cdot \Delta x}{u \cdot (u+\Delta x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{-2 \cdot \Delta x}{u \cdot (u+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1}}$$

$$= \frac{-2 \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot u \cdot (u+\Delta x)} = \frac{-2}{u \cdot (u+\Delta x)} = \frac{-2}{u^2 + u \cdot \Delta x}$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{-2}{u^2 + u \cdot \Delta x} \right) = -\frac{2}{u^2}$$

پ –

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$x = 2 : \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2+\Delta x+1} - \frac{1}{2+1}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{1}{3+\Delta x} - \frac{1}{3}}{\Delta x} = \frac{\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot (3+\Delta x)} - \frac{1 \cdot (3+\Delta x)}{3 \cdot (3+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{1 \cdot 3 - 1 \cdot (3+\Delta x)}{3 \cdot (3+\Delta x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{3 - 3 - \Delta x}{3 \cdot (3+\Delta x)}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{3 \cdot (3+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1}} = \frac{-1 \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot 3 \cdot (3+\Delta x)} = \frac{-1}{3 \cdot (3+\Delta x)}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{-1}{3(3+\Delta x)} \right) = -\frac{1}{9}$$

$$x = u : \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{u+\Delta x+1} - \frac{1}{u+1}}{\Delta x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\frac{1\cdot(u+1)}{(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)} - \frac{1\cdot(u+\Delta x+1)}{(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{1\cdot(u+1)-1\cdot(u+\Delta x+1)}{(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)}}{\Delta x} = \frac{\frac{u+1-u-\Delta x-1}{(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)}}{\frac{\Delta x}{1}}$$

$$= \frac{-1\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)} = \frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)} = \frac{-1}{(u+1)(u+1)} = -\frac{1}{(u+1)^2}$$

ت-

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$x = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{2+\Delta x}-\sqrt{2}}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{2+\Delta x}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{2+\Delta x-2}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}\right)} = \frac{1\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$x = u: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta x)-f(u)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{u+\Delta x}-\sqrt{u}}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{u+\Delta x}-\sqrt{u}\right)\cdot\left(\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}\right)}$$

$$= \frac{u+\Delta x-u}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}\right)} = \frac{1\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}\right)} = \frac{1}{\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}}$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}}\right) = \frac{1}{\sqrt{u}+\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم – مفصل حلونه

الف – $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 2 \Rightarrow f'(x) = -8x^3 + 6x - 4$

ب – $f(x) = 0{,}5x^4 - x^3 + 2{,}5x^2 - 8 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x$

پ – $f(x) = \frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x - 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{2}$

ت- $s(t) = -\frac{5}{6}t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{5}{2} \Rightarrow s'(t) = -\frac{5}{3}t + \frac{2}{3}$

ټ –

$$f(x) = -(x-6)^2(x+1) = -x^3 + 11x^2 - 24x - 36 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 22x - 24$$

ث- $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2)^2 = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 - 4x$

دریم – الف – $f(x) = \frac{1}{16}(x^3 + x - 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{16}$

ب – $f(x) = x\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 4\right) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3x - 4$

پ – $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

ت- $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

ث – $f(x) = 6x + \frac{5}{x} = 6x + 5x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 6 - 5x^{-2} = 6 - \frac{5}{x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ج --

$$f(x)=x^3-2x^2+\frac{1}{x}=x^3-2x^2+x^{-1}\Rightarrow f'(x)=3x^2-4x-x^{-2}=3x^2-4x-\frac{1}{x^2}$$

خلورم – مفصل حلونه

الف - $$f_t(x)=\frac{t}{2}x^4-2tx^3+t^2\Rightarrow f_t'(x)=2tx^3-6tx^2$$

ب - $$f_k(x)=\frac{1}{k}x^3+kx^2+(k+1)x\Rightarrow f'_k(x)=\frac{3}{k}x^2+2kx+k+1$$

پ - $$f_a(x)=\frac{1}{4}x^3+ax^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)x-3\Rightarrow f'_a(x)=\frac{3}{4}x^2+2ax+a-\frac{1}{2}$$

ت- $$f_t(x)=\frac{1}{2t}\left(x^2-t\right)^2=\frac{1}{2t}x^4-x^2+\frac{1}{2}t\Rightarrow f_t'(x)=\frac{2}{t}x^3-2x$$

ټ _ $$f(t)=5t^3-2t+5\Rightarrow f'(t)=15t^2-2$$

ث _ $$f(z)=-1{,}5z^3+2{,}5z^2+z\Rightarrow f'(z)=-4{,}5z^2+5z+1$$

ج - $$A(u)=\frac{1}{2}u^2+3u+2u+1\Rightarrow A'(u)=u+5$$

چ - $$A(u)=\frac{1}{2}u\left(u^2+1\right)=\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u\Rightarrow A'(u)=\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}$$

پنځم – مفصل حلونه

الف –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 3x^2 - 5 \Rightarrow f'(x) = 6x \Rightarrow f'(-3) = 6 \cdot (-3) = \underline{\underline{-18}}$$

د $f(x)$ صفرځایونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow f'\left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = 6 \cdot \left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \underline{\underline{\pm 6 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}}}$$

ب –

$$f(x) = 4x - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 4 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(-3) = 4 + \frac{1}{9} = \underline{\frac{37}{9}}$$

د $f(x)$ صفرځایونه :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_{1/2} = \pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f'\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 4 + \frac{1}{\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2} = 4 + \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 + 4 = \underline{\underline{8}}$$

شپږم – مفصل حلونه

الف – $f(x) = 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x + 3$

ب – $f(x) = -x^2 + 2x - 1 \Rightarrow f'(\ ) = -2x + 2$

پ – $f(x) = x + 1 \Rightarrow f'(x) = 1$

ت- $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 4 \Rightarrow f'(x) = x - \frac{1}{3}$

ټ – $f(x) = 5b\,;\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f'(x) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ث ـ $f(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{2}{3}x-1 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}$

ج ـ $f(x)=2x^3+3x^2-4x+2 \Rightarrow f'(x)=6x^2+6x-4$

چ ـ $f(\ )=-\frac{1}{4}x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2} \Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{4}{3}x-\frac{3}{4}$

ح ـ $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-7 \Rightarrow f'(x)=x+3$

خ ـ $f(x)=\frac{3}{4}x^2+5x+8 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x+5$

پوښتنې :

مشتق شمیرنه III

اول- مشتق یې ونیسئ

الف - $f(x)=\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$ ب - $f(x)=-\frac{3}{7}x^2+\frac{4}{9}x+\frac{8}{10}$

پ - $f(x)=x^3-x^2+x+1$ ت - $f(x)=-x^3+x^2-x+7$

ټ - $f(x)=-\frac{3}{4}x^3+2x^2-x+1$ ث - $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+\pi$

ج - $f(x)=4x^3+\pi x^2+bx+c$ چ - $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

ح - $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}x^3-\frac{1}{\pi}x^2+\alpha x$ خ - $f(x)=\frac{4}{5}x^3-\frac{3}{4}x^2+4x+7$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم - مشتق یې ونیسئ

الف - $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 1$ ب - $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 2x + 2$

پ - $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ ت - $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$

ټ - $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - 1$ ث - $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{7}x^2 + 7$

ج - $f(x) = 1$ چ - $f(x) = 0$

ح - $f(x) = 2x^6 - 4x^4 + 2x^2$ خ - $f(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x + 4$

دریم – مشتق یې ونیسئ

الف - $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \sqrt{2} \cdot x$ ب - $f(x) = \sqrt{3} \cdot x^3 - \sqrt{2} \cdot x^2 + 1$

پ - $f(x) = \frac{4}{3\pi}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 1$ ت - $f(x) = 3,5x^2 - 1,5x + 2$

ټ - $f(x) = 0,5x^2 - 2,5x + 1$ ث - $f(x) = 3,1x^2 + \frac{7}{2}x - 7$

ج - $f(x) = 1,5x^3 - 2,5x^2 + 1$ چ - $f(x) = -2,5x^3 + 1,5x^2 - 1$

ح - $f(x) = t \cdot x^3 + 2x^2 - 4x$ خ - $f(x) = 7,2x^2 - 8,2x + b$

څ - ځ -

څلورم – مشتق یې ونیسئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $f(x) = x^{-1}$ ب - $f(x) = \frac{1}{x}$

پ - $f(x) = \frac{2}{3x} + 2$ ت - $f(x) = 2x^{-2} + 3x^{-1} + 2$

ټ - $f(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} + 2x^{-1}$ ث - $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

ج - $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$ چ - $f(x) = \sqrt{x}$ ح - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ خ - $f(x) = \sqrt{x^3}$

ځوابونه

مشتق شمیرنه **III**

مفصل حلونه:

لومړی:

الف - $f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{8}{5}x - \frac{3}{4}$

ب - $f(x) = -\frac{3}{7}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{10} \Rightarrow f'(x) = -\frac{6}{7}x + \frac{4}{9}$

پ - $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

ت - $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 7 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 2x - 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ - $f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + 2x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{9}{4}x^2 + 4x - 1$

ث - $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + \pi \Rightarrow f'(x) = -2x^2 + 3x + 2$

ج – $f(x) = 4x^3 + \pi x^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 12x^2 + 2\pi x + b$

چ - $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

ح - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x^3 - \frac{1}{\pi}x^2 + \alpha x \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{\sqrt{2}}x^2 - \frac{2}{\pi}x + \alpha$

خ - $f(x) = \frac{4}{5}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4x + 7 \Rightarrow f'(x) = \frac{12}{5}x^2 - \frac{3}{2}x + 4$

دویم:

الف - $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 4x + 3$

ب - $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 8x^3 + 6x - 2$

پ - $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 + x - 1$

ت - $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + x^2 - x$

ټ - $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 2x$

ث - $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{7}x^2 + 7 \Rightarrow f'(x) = 3x^3 + \frac{10}{7}x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ج – $f(x)=1 \Rightarrow f'(x)=0$

چ - $f(x)=0 \Rightarrow f'(x)=0$

ح - $f(x)=2x^6-4x^4+2x^2 \Rightarrow f'(x)=12x^5-16x^3+4x$

خ - $f(x)=\frac{3}{4}x^3+\frac{2}{3}x^2-x+4 \Rightarrow f'(x)=\frac{9}{4}x^2+\frac{4}{3}x-1$

دریم:

الف - $f(x)=\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\sqrt{2}\cdot x \Rightarrow f'(x)=4x^2+3x+\sqrt{2}$

ب - $f(x)=\sqrt{3}\cdot x^3-\sqrt{2}\cdot x^2+1 \Rightarrow f'(x)=3\sqrt{3}\cdot x^2-2\sqrt{2}\cdot x$

پ - $f(x)=\frac{4}{3\pi}x^3+\frac{1}{3}x^2+1 \Rightarrow f'(x)=\frac{4}{\pi}x^2+\frac{2}{3}x$

ت - $f(x)=3{,}5x^2-1{,}5x+2 \Rightarrow f'(x)=7x-1{,}5$

ټ - $f(x)=0{,}5x^2-2{,}5x+1 \Rightarrow f'(x)=x-2{,}5$

ث - $f(x)=3{,}1x^2+\frac{7}{2}x-7 \Rightarrow f'(x)=6{,}2x+3{,}5$

ج – $f(x)=1{,}5x^3-2{,}5x^2+1 \Rightarrow f'(x)=4{,}5x^2-5x$

چ - $f(x)=-2{,}5x^3+1{,}5x^2-1 \Rightarrow f'(x)=-7{,}5x^2+3x$

ح - $f(x)=t\cdot x^3+2x^2-4x \Rightarrow f'(x)=3tx^2+4x-4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خ - $f(x) = 7,2x^2 - 8,2x + b \Rightarrow f'(x) = 14,4x - 8,2$

ځلورم:

الف - $f(x) = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

ب - $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

پ - $f(x) = \frac{2}{3x} + 2 = \frac{2}{3}x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-2} = -\frac{2}{3x^2}$

ت - $f(x) = 2x^{-2} + 3x^{-1} + 2 \Rightarrow f'(x) = -4x^{-3} - 3x^{-2}$

ټ - $f(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} + 2x^{-1} \Rightarrow f'(x) = x^{-3} - 2x^{-2}$

ث - $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

ج – $f(x) = x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

چ - $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

ح - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خ - $f(x)=\sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

پوښتنې

IV مشتقشمیرنه

لومړی: مشتق یې ونیسئ

الف- $f(x)=4x^2-3x+2$ ب - $f(x)=-2x^2+6x-4$

پ- $f(x)=2x^3-x^2+1$ ت - $f(x)=-7x^3+2x^2-x+1$

ټ - $f(x)=\left(x^2-3\right)^2$ ث - $f(x)=1-x^3$

ج = $f(x)=1-x^4$ چ - $f(x)=2x^2-x^4$

ح - $f(x)=0,5x^3+3x^2$ خ = $f(x)=-3x^7+1$

دویم: مشتق یې ونیسئ

الف- $f(x)=a+3bx^2$ ب - $f(x)=3x^7-0,5x^3$

پ- $f(x)=0,125x^8-30x^4$ ت - $f(x)=0,01ax^{12}-0,5bx^8$

ټ - $f(x)=3ax^5-0,5bx^4$ ث - $f(x)=0,25x^8+0,5x^{10}$

ج = $f(x)=0,25ax^4+0,5bx^5$ چ - $f(x)=0,5bx^6+0,2ax^5$

ح - $f(x)=-0,5x^5$ خ = $f(x)=0,5x^3+3x^2$

دریم: مشتق یې ونیسئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- $f(x) = -3x^7 + 2x$ ب - $f(x) = 0,5x^3 + 2x$

پ- $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ ت - $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$

ټ - $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$ ث - $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$

ج = $f(x) = \frac{1}{18}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + x^2$ چ - $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

ح - $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2$ خ = $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$

ځلورم:مشتق يې ونيسئ

الف- $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$ ب - $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + x^2$

پ- $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 5$ ت - $f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x + 9$

ټ - $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + x$ ث - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x$

ج = $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 3$ چ - $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$

ح - $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2$ خ = $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 5x$

حلونه

مشتقشميرنهIV

مفصل حلونه:

لومړی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- $f(x)=4x^2-3x+2 \Rightarrow f'(x)=8x-3$

ب - $f(x)=-2x^2+6x-4 \Rightarrow f'(x)=-4x+6$

پ- $f(x)=2x^3-x^2+1 \Rightarrow f'(x)=6x^2-2x$

ت - $f(x)=-7x^3+2x^2-x+1 \Rightarrow f'(x)=-21x^2+4x-1$

ټ - $f(x)=\left(x^2-3\right)^2=x^4-6x^2+9 \Rightarrow f'(x)=4x^3-12x$

ث - $f(x)=1-x^3 \Rightarrow f'(x)=-3x^2$

ج = $f(x)=1-x^4 \Rightarrow f'(x)=-4x^3$

چ - $f(x)=2x^2-x^4 \Rightarrow f'(x)=-4x^3+4x$

ح - $f(x)=0,5x^3+3x^2 \Rightarrow f'(x)=1,5x^2+6x$

خ = $f(x)=-3x^7+1 \Rightarrow f'(x)=-21x^6$

دویم:

الف- $f(x)=a+3bx^2 \Rightarrow f'(x)=6bx$

ب - $f(x)=3x^7-0,5x^3 \Rightarrow f'(x)=21x^6-1,5x^2$

پ- $f(x)=0,125x^8-30x^4 \Rightarrow f'(x)=x^7-120x^3$

ت - $f(x)=0,01ax^{12}-0,5bx^8 \Rightarrow f'(x)=0,12ax^{11}-4bx^7$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ - $f(x)=3ax^5-0,5bx^4 \Rightarrow f'(x)=15ax^4-2bx^3$

ث - $f(x)=0,25x^8+0,5x^{10} \Rightarrow f'(x)=5x^9+2x^7$

ج = $f(x)=0,25ax^4+0,5bx^5 \Rightarrow f'(x)=2,5bx^4+ax^3$

چ - $f(x)=0,5bx^6+0,2ax^5 \Rightarrow f'(x)=3bx^5+ax^4$

ح - $f(x)=-0,5x^5 \Rightarrow f'(x)=-2,5x^4$

خ = $f(x)=0,5x^3+3x^2 \Rightarrow f'(x)=1,5x^2+6x$

دریم:

الف- $f(x)=-3x^7+2x \Rightarrow f'(x)=-21x^6+2$

ب - $f(x)=0,5x^3+2x \Rightarrow f'(x)=1,5x^2+2$

پ- $f(x)=2x^3-3x^2 \Rightarrow f'(x)=6x^2-6x$

ت - $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}$

ټ - $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^2-x$

ث - $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^2 \Rightarrow f'(x)=-x^3+2x$

ج = $f(x)=\frac{1}{18}x^4-\frac{4}{9}x^3+x^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{9}x^3-\frac{4}{3}x^2+2x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چ - $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+1 \Rightarrow f'(x)=x-2$

ح - $f(x)=\frac{3}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{9}{8}x^2-\frac{3}{2}x$

خ = $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+3x \Rightarrow f'(x)=-x^2+3$

ځلورم: الف- $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{8}x^2-3x+\frac{9}{2}$

ب - $f(x)=-\frac{1}{16}x^4+x^2 \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{4}x^3+2x$

پ- / ت - $f(x)=-\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{2}x+9 \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}$

ټ - $f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{4}x^2+x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x+1$

ث - $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{9}{2}$

ج = $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+3 \Rightarrow f'(x)=x^2-1$

چ - $f(x)=x^4-6x^3+12x^2-8x \Rightarrow f'(x)=4x^3-18x^2+24x-8$

ح - $f(x)=\frac{1}{12}x^4-2x^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$

خ = $f(x)=\frac{1}{4}x^4+2x^2+5x \Rightarrow f'(x)=x^3+4x^2+5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

مشتقشمیرنه VI

لومړی: د لاندې توابعو مشتق ونیسئ:

الف- $f(x)=5x^4-4x^3+3x^2-2x+6$ ب - $f(x)=\left(a^2+x^2\right)\left(a^2-x^2\right)$

پ- $f(x)=-2x^4+3x^2-4x+2$ ت - $f(x)=0,5x^4-x^3+2,5x^2-8$

ټ - $f(x)=\frac{1}{32}x^3+\frac{3}{2}x-4$ ث - $f(x)=-\frac{5}{6}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{2}$

دویم: د لاندې توابعو مشفق ونیسئ:

الف- $f(x)=-(x-6)^2(x+1)$ ب - $f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-2\right)^2$

پ- $f(x)=\frac{1}{16}\left(x^3+x-1\right)$ ت - $f(x)=x\left(x^2-\frac{3}{2}x-4\right)$

ټ - $f(x)=ax^4+bx^2+c$ ث - $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

دریم: د لاندې توابعو مشفق ونیسئ:

الف- $f(x)=\frac{k}{2}x^4-2kx^3+k^2$ ب - $f(x)=\frac{1}{k}x^3+kx^2+(k+1)x$

پ- $f(x)=\frac{1}{4}x^3+ax^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)x-3$ ت - $f(x)=\frac{1}{2k}\left(x^2-k\right)^2$

ټ - $f(t)=5t^3-2t+5$ ث - $f(z)=-1,5z^3+2,5z^2+z$

څلورم: د لاندې توابعو مشفق ونیسئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- $A(u)=\frac{1}{2}u^2+3u+2u+1$ ب - $A(u)=\frac{1}{2}u\left(u^2+1\right)$

پ- $f(x)=2\pi x^5-7x^3+\frac{3}{\pi}$ ت - $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+1}$

ټ - $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-1}$ ث - $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$

ج = $f(x)=\frac{4x^2+12x+9}{2x+3}$ چ - $f(x)=\frac{\left(x^2+4x+4\right)^2}{x+2}$

پنځم: نلاندې تابع ورکړ شوې:

۱ $f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2\,;\,x\in\mathbb{R}$

الف- د f(x) تابع جګوالی د x_0 په ځای کې وښایی د $x_0\in[-4\,;-1;\,0;\,1{,}5\,;\,3]$ سره

ب - تابع f(x) په کوم ټکي کې د 3 جګوالي سره تانجنت لري؟

پ- د f(x) په P (2 | f(2)) ټکي باندې د تانجنت مساوات وښايی

ت - د f(x) په P (2 | f(2)) ټکي باندې د نورمال یا عمود مساوات وښايی

ټ - تانجنت او نورمال یا عمود په وضعیهقیمتسیستم کې رسم کړی.

ث – $g(x)=t\cdot f(x)\,;\,t\in\mathbb{R}^*$

د x محور په S_1 او S_2 کې غوڅوي(قطع کوي)

د t د کومو ارزښتونو لپاره تانجنت په S_1 او S_2 یو بل سره عمود دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حلونه

مشتقشمیرنه VI

نتیجې:

لومړی-

الف -

$$f'(x)=20x^3-12x^2+6x-2 \qquad f''(x)=60x^2-24x+6$$
$$f'''(x)=120x-24$$

ب - $f'(x)=-4x^3 \qquad f''(x)=-12x^2 \qquad f'''(x)=-24x$

پ- $f'(x)=-8x^3+6x-4 \qquad f''(x)=-24x^2+6 \qquad f'''(x)=-48x$

ت - $f'(x)=2x^3-3x^2+5x \qquad f''(x)=6x^2-6x+5 \qquad f'''(x)=12x-6$

ټ - $f'(x)=\frac{3}{32}x^2+\frac{3}{2} \qquad f''(x)=\frac{3}{16}x \qquad f'''(x)=\frac{3}{16}$

ث - $f'(x)=-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3} \qquad f''(x)=-\frac{5}{3} \qquad f'''(x)=0$

دويم:

الف- $f'(x)=-3x^2+22x-24 \qquad f''(x)=-6x+22 \qquad f'''(x)=-6$

ب - $f'(x)=2x^3-4x \qquad f''(x)=6x^2-4 \qquad f'''(x)=12x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ- $f'(x)=\frac{3}{16}x^2+\frac{1}{16}$ $f''(x)=\frac{3}{8}x$ $f'''(x)=\frac{3}{8}$

ت - $f'(x)=3x^2-3x-4$ $f''(x)=6x-3$ $f'''(x)=6$

ټ - $f'(x)=4ax^3+2bx$ $f''(x)=12ax^2+2b$ $f'''(x)=24ax$

ث - $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ $f''(x)=6ax+2b$ $f'''(x)=6a$

دریم:

الف- $f'(x)=2kx^3-6kx^2$ $f''(x)=6kx^2-12kx$ $f'''(x)=12kx-12k$

ب - $f'(x)=\frac{3}{k}x^2+2kx+k+1$ $f''(x)=\frac{6}{k}x+2k$ $f'''(x)=\frac{6}{k}$

پ- $f'(x)=\frac{3}{4}x^2+2ax+a-\frac{1}{2}$ $f''(x)=\frac{3}{2}x+2a$ $f'''(x)=\frac{3}{2}$

ت - $f'(x)=\frac{2}{k}x^3-2x$ $f''(x)=\frac{6}{k}x^2-2$ $f'''(x)=\frac{12}{k}x$

ټ - $f'(t)=15t^2-2$ $f''(t)=30t$ $f'''(t)=30$

ث - $f'(z)=-4{,}5z^2+5z+1$ $f''(z)=-9z+5$ $f'''(z)=-9$

څلورم:

الف- $A'(u)=u+5$ $A''(u)=1$ $A'''(u)=0$

ب - $A'(u)=\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}$ $A''(u)=3u$ $A'''(u)=3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ-

$f'(x) = 10\pi x^4 - 21x^2 \qquad f''(x) = 40\pi x^3 - 42x \qquad f'''(x) = 120\pi x^2 - 42$

ت - $f'(x) = 1 \qquad f''(x) = 0 \qquad f'''(x) = 0$

ټ - $f'(x) = 1 \qquad f''(x) = 0 \qquad f'''(x) = 0$

ث - $f'(x) = 1 \qquad f''(x) = 0 \qquad f'''(x) = 0$

ج = $f'(x) = 2 \qquad f''(x) = 0 \qquad f'''(x) = 0$

چ _ $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12 \qquad f''(x) = 6x + 12 \qquad f'''(x) = 6$

پنځم:

الف-

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$$

x	-4	-1	0	$1,5$	3
$f'(x)$	4	$2,5$	2	$1,25$	$0,5$

ب - د P(-2;-5) په ټکي کې د f(x) تانجنت جګوالی 3 لري.

پ- په f(x) باندې د تانجنت مساوات په ټکي (P (2 | f(2) کې: t(x) = x + 1

ت - په ټکي (P (2 | f(2) کې په f(x) باندې د عمود مساوات: n(x) = -x + 5

ټ - ث - د $t_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$ لپاره تانجنتونه په ټکو S_1 او S_2 کې یو په بل عموددي.

مفصل حل:

لومړی: الف-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$$

$$f'(x) = 5\cdot 4x^3 - 4\cdot 3x^2 + 3\cdot 2x^1 - 2\cdot 1 + 0 = \underline{\underline{20x^3 - 12x^2 + 6x - 2}}$$

$$f''(x) = 20\cdot 3x^2 - 12\cdot 2x^1 + 6\cdot 1 - 0 = \underline{\underline{60x^2 - 24x + 6}}$$

$$f'''(x) = 60\cdot 2x^1 - 24\cdot 1 + 0 = \underline{\underline{120x - 24}}$$

ب - $f(x) = (a^2 + x^2)(a^2 - x^2)$

اول- حل د صرب له لارې(د بینوم دریمه جمله)

$$f(x) = a^4 - x^4 \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{-4x^3}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{-12x^2}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{-24x}}$$

دویم – د ضرب د قانون له مخې حل(مفصل)

$$f(x) = \underbrace{(a^2 + x^2)}_{u}\underbrace{(a^2 - x^2)}_{v} \Rightarrow u' = 2x \quad v' = -2x$$

$$f'(x) = u'v + uv' = 2x\cdot(a^2 - x^2) + (a^2 + x^2)(-2x)$$

$$= 2a^2x - 2x^3 - 2a^2x - 2x^3 = \underline{\underline{-4x^3}}$$

$$f''(x) = \underline{\underline{-12x^2}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{-24x}}$$

$$f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 2$$

پ- $f'(x) = -8x^3 + 6x - 4 \qquad f''(x) = -24x^2 + 6 \qquad f'''(x) = -48x$

$$f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 2,5x^2 - 8$$

ت - $f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x \qquad f''(x) = 6x^2 - 6x + 5 \qquad f'''(x) = 12x - 6$

ټ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{32}x^3+\frac{3}{2}x-4$$

$$f'(x)=\frac{1}{32}\cdot 3x^2+\frac{3}{2}\cdot 1-0=\underline{\underline{\frac{3}{32}x^2+\frac{3}{2}}}$$

$$f''(x)=\frac{3}{32}\cdot 2x^1+0=\underline{\underline{\frac{3}{16}x}}\qquad f'''(x)=\frac{3}{16}\cdot 1=\underline{\underline{\frac{3}{16}}}$$

ث –

$$f(x)=-\frac{5}{6}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{2}$$

$$f'(x)=-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}\qquad f''(x)=-\frac{5}{3}\qquad f'''(x)=0$$

دويم: الف- $f(x)=-(x-6)^2(x+1)$

- حل د ضربولو له لارې

$$f(x)=-(x^2-12x+36)(x+1)=-\left[x^3+x^2-12x^2-12x+36x+36\right]$$

$$=-\left[x^3-11x^2+24x+36\right]=-x^3+11x^2-24x-36$$

$$f'(x)=\underline{\underline{-3x^2+22x-24}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{-6x+22}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{-6}}$$

دوي – حل د ځنزيري قانون له مخې.

$$f(x)=-\underbrace{(x-6)^2}_{u}\underbrace{(x+1)}_{v}\qquad u'=2(x-6)\cdot 1=2x-12\qquad v'=1$$

$$f'(x)=-[u'v+uv']=-\left[(2x-12)(x+1)+(x-6)^2\cdot 1\right]=$$

$$-\left[2x^2+2x-12x-12+x^2-12x+36\right]=-\left[3x^2-22x+24\right]=-3x^2+22x-24$$

$$\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{-6x+22}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{-6}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب -

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-2\right)^2$$

اول – حل د ضربولو له لاري

$$f(x)=\frac{1}{2}\underbrace{\left(x^2-2\right)^2}_{2.\ \text{bin. Formel}}=\frac{1}{2}\left(x^4-4x^2+4\right)=\frac{1}{2}x^4-2x^2+2$$

$$f'(x)=\underline{\underline{2x^3-4x}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{6x^2-4}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{12x}}$$

يادونه: په پورته کي 2.bin.Formel د دويم بينوم فرمول په معنا دی.

دويم-د ځنزيري قانون سره حل:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-2\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 2\left(x^2-2\right)\cdot 2x=2x\left(x^2-2\right)=\underline{\underline{2x^3-4x}}$$

$$f''(x)=\underline{\underline{6x^2-4}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{12x}}$$

پ-

$$f(x)=\frac{1}{16}\left(x^3+x-1\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{16}\left(3x^2+1\right)=\underline{\underline{\frac{3}{16}x^2+\frac{1}{16}}}\qquad f''(x)=\underline{\underline{\frac{3}{8}x}}\qquad f'''(x)=\underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

ت –

$$f(x)=x\left(x^2-\frac{3}{2}x-4\right)=x^3-\frac{3}{2}x^2-4x$$

$$f'(x)=\underline{\underline{3x^2-3x-4}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{6x-3}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{6}}$$

د لته به د ضرب قانون استعمال لر غزېدلی وی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت –

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx \qquad f''(x) = 12ax^2 + 2b \qquad f'''(x) = 24ax$$

ث –

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b \qquad f'''(x) = 6a$$

دريم: الف-

$$f(x) = \frac{k}{2}x^4 - 2kx^3 + k^2$$

$$f'(x) = 2kx^3 - 6kx^2 \qquad f''(x) = 6kx^2 - 12kx \qquad f'''(x) = 12kx - 12k$$

ب –

$$f(x) = \frac{1}{k}x^3 + kx^2 + \underbrace{(k+1)}_{\text{Konstante}}x$$

$$f'(x) = \frac{3}{k}x^2 + 2kx + (k+1)\cdot 1 = \underline{\underline{\frac{3}{k}x^2 + 2kx + \underbrace{k+1}_{\text{Konstante}}}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{\frac{6}{k}x + 2k}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{\frac{6}{k}}}$$

يادونه: دلته او په لاندې حل کې Konstante د ثابتې په معنا دی.

پ-

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + \underbrace{\left(a - \frac{1}{2}\right)}_{\text{Konstante}}x - 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2+2ax+\left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot 1=\frac{3}{4}x^2+2ax+a-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{2}x+2a \Rightarrow f'''(x)=\frac{3}{2}$$

ت - $f(x)=\frac{1}{2k}\left(x^2-k\right)^2$

اول – د ضرب له لارې حل (د بينوم دويم فرمول)

$$f(x)=\frac{1}{2k}\left(x^2-k\right)^2=\frac{1}{2k}\left(x^4-2kx^2+k^2\right)=\frac{1}{2k}x^4-x^2+\frac{1}{2}k$$

$$f'(x)=\frac{2}{k}x^3-2x \Rightarrow f''(x)=\frac{6}{k}x^2-2 \Rightarrow f'''(x)=\frac{12}{k}x$$

دويم : د ځنزيري قانون له مخې (ساده دی)

$$f'(x)=\frac{1}{2k}\cdot 2\left(x^2-k\right)\cdot 2x=\frac{2}{k}x\left(x^2-k\right)=\frac{2}{k}x^3-2x$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{6}{k}x^2-2 \Rightarrow f'''(x)=\frac{12}{k}x$$

ټ -

$$f(t)=5t^3-2t+5$$

$$f'(t)=15t^2-2 \qquad f''(t)=30t \qquad f'''(t)=30$$

ث _

$$f(z)=-1{,}5z^3+2{,}5z^2+z$$

$$f'(z)=-4{,}5z^2+5z+1 \qquad f''(z)=-9z+5 \qquad f'''(z)=-9$$

څلورم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف-

$$A(u) = \frac{1}{2}u^2 + 3u + 2u + 1$$

$$A'(u) = u + 5 \qquad A''(u) = 1 \qquad A'''(u) = 0$$

ب –

$$A(u) = \frac{1}{2}u\left(u^2 + 1\right) = \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{2}u$$

$$A'(u) = \underline{\underline{\frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}}} \Rightarrow A''(u) = \underline{\underline{3u}} \Rightarrow A'''(u) = \underline{\underline{3}}$$

د لته به د ضرب قانون لړ. غزيدلى وى.

پ-

$$f(x) = 2\pi x^5 - 7x^3 + \frac{3}{\pi}$$

$$f'(x) = 10\pi x^4 - 21x^2 \qquad f''(x) = 40\pi x^3 - 42x \qquad f'''(x) = 120\pi x^2 - 42$$

ت -

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$$

اول- د تابع ترم د ترم بنه بدلون له لارې ساده كونه:

-

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \frac{(x+1)(x+1)}{x+1} = x + 1$$

$$f'(x) = \underline{\underline{1}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{0}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{0}}$$

دويم – د وېش قانون استعمال (زيات وخت نيسي)

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $u = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow u' = 2x + 2$ سره

او $v = x+1 \Rightarrow y' = 1$ همداسې له $v^2 = (x+1)^2$ څخه لرو:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(2x+2)(x+1) - (x^2+2x+1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x+2-x^2-2x-1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} = \underline{\underline{1}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{0}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{0}}$$

د وېش قانون دې فقط په هغه حالتونو کې اسعمال شي، که تابعترم په بله لار نه شي ساده کيدی.

ټ - $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده کړی

$$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x-1)}{x-1} = x - 1$$

$$f'(x) = \underline{\underline{1}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{0}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{0}}$$

د وېش قانون باندې صرف دظر کيږي.

ث - $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده کړی

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x - 1$$

$$f'(x) = \underline{\underline{1}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{0}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{0}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ویش قانون باندې صرف نظر کیږي.

ج = $f(x)=\dfrac{4x^2+12x+9}{2x+3}$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده کړی

$$f(x)=\frac{4x^2+12x+9}{2x+3}=\frac{(2x+3)(2x+3)}{2x+3}=2x+3$$

$$f'(x)=\underline{2}\Rightarrow f''(x)=\underline{0}\Rightarrow f'''(x)=\underline{0}$$

د ویش له قانون څخه تیریږو

چ - $f(x)=\dfrac{(x^2+4x+4)^2}{x+2}$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده کړی

$$f(x)=\frac{(x^2+4x+4)^2}{x+2}=\frac{\left[(x+2)^2\right]^2}{x+2}=\frac{(x+2)^4}{x+2}=(x+2)^3$$

دویم – ځنزیري قانون استعمال کړی:

$$f'(x)=3(x+2)^2\cdot 1=3\left(x^2+4x+4\right)=\underline{\underline{3x^2+12x+12}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=6x+12\Rightarrow f'''(x)=6$$

د ویش قانون باندې صرف نظر کیږي.

پنځم:

الف-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$$

$$f'(-4) = 2 - \frac{1}{2}\cdot(-4) = 2 + 2 = 4 \qquad f'(-1) = 2 - \frac{1}{2}\cdot(-1) = 2 + \frac{1}{2} = 2{,}5$$

$$f'(0) = 2 - \frac{1}{2}\cdot 0 = 2 \qquad f'(1{,}5) = 2 - \frac{1}{2}\cdot 1{,}5 = 2 - 0{,}75 = 1{,}25$$

$$f'(3) = 2 - \frac{1}{2}\cdot 3 = 2 - 1{,}5 = 0{,}5$$

x	−4	−1	0	1,5	3
f'(x)	4	2,5	2	1,25	0,5

ب - $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت جګیدنه به x0 کې ارزښت 3 لري.

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x_0) = f(-2) = 2\cdot(-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د $P(-2|-5)$ په ټکي کې په f(x) باندې تانجنت ارزښت 3 لري.

پ- $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad P(2|f(2))$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د x0 = 2 سره لرو:

$$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4 - 1 = 3 \qquad f'(2) = 2 - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x-2) + 3 = x - 2 + 3 = \underline{\underline{x+1}}$$

ت –

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad P(2|f(2))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

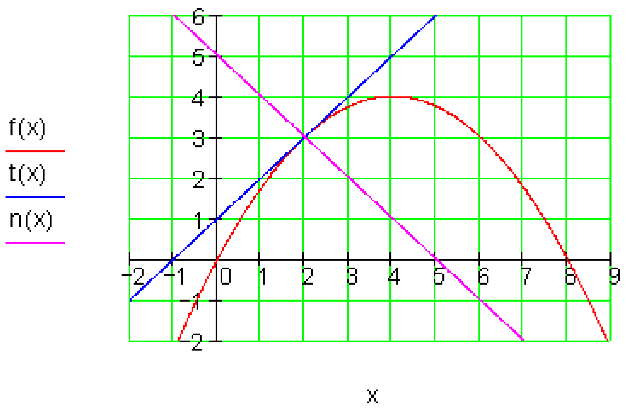
د x0 = 2 سره لرو:

$$n(x) = -\frac{1}{f'(2)}(x - 2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \qquad f'(2) = 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x - 2) + 3 = -x + 2 + 3 = \underline{\underline{-x + 5}}$$

ټ –



ث - $g(x) = t \cdot f(x) = 2tx - \frac{1}{4}tx^2$

د g(x) صفرځایونه:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2tx - \frac{1}{4}tx^2 = 0 \Leftrightarrow x\left(2t - \frac{1}{4}tx\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow S_1(0|0)$$

$$2t - \frac{1}{4}tx = 0 \,|\, -2t \Leftrightarrow -\frac{1}{4}tx = -2t \,|:\left(-\frac{1}{4}t\right) \Leftrightarrow x_2 = 8 \Rightarrow S_2(8|0)$$

د S1 او S2 عمودوالی په دې معنا دی چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

(0)'gد (0,0)S1 په تکي کې د t1(x)تانجنت جګوالی دی. د تانجنت t2(x) جګوالی په تېکي (8,0)S2 کې دې هغه t1(x)ته عمود وي. د دې لپاره باید صدق وکړي:

g'(8)=-1/g'(0) د عمودوالي لپاره شرايط (1)

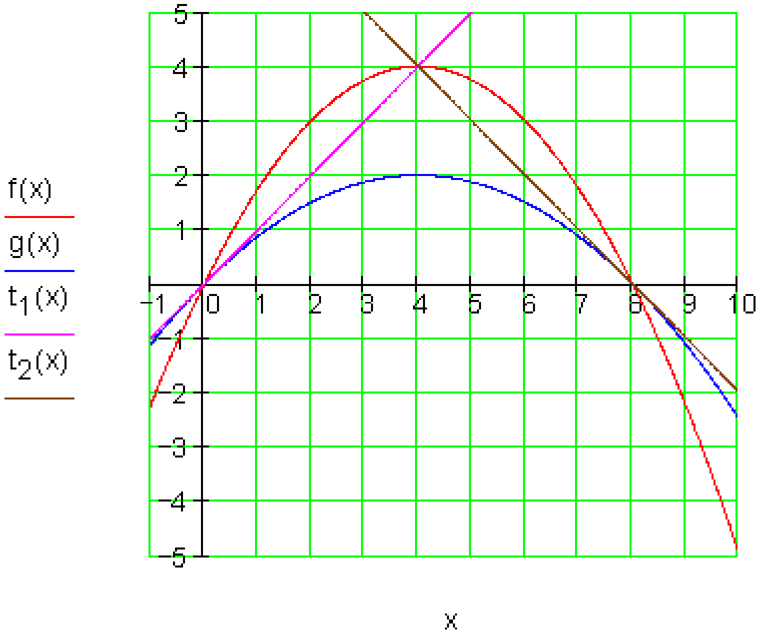
$$g'(x) = 2t - \frac{1}{2}tx \Rightarrow g'(8) = 2t - \frac{1}{2}t \cdot 8 = 2t - 4t = -2t$$

همداسې $g'(0) = 2t$

په (1) کې ځای په ځای کړی

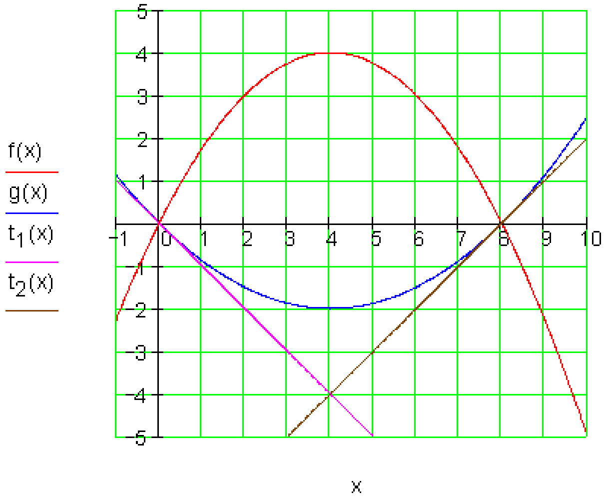
$$-2t = -\frac{1}{2t} \mid \cdot 2t \Leftrightarrow -4t^2 = -1 \mid : (-4) \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow t_{1/2} = \pm\frac{1}{2}$$

د t=1/2 لپاره صدق کوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د t=-1/2 لپاره صدق کوي:



III.3.1د مشتق شمیرني قوانین

قضیه (د جمعې یا زیاتون قاعده):
که یو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعې څخه جوړ وي، نو مشتق یې هم د هر تابع د مشتق د جمعې څخه جوړ دی، یعني:

$$f(x)=u(x)+v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x)=u'(x)+v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0)=u(x_0)+v(x_0)$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]+[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]}{\Delta x}+\frac{[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)}+\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\underline{\underline{u'(x_0)+v'(x_0)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

د دې ورکړ $f(x)=5x^2+3x$, $u(x)=5x^2$, $v(x)=3x$ توابعو شتق وشمیرئ.

ښوونه:

$$f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

د جمعي قاعده تولزه کونه: که چیرې f_1، f_2، ..... f_n توابع او k_1، k_2، .... k_n ثابت عددونه وي نو لرو(بې له ښوونې):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+.....+k_n f_n(x)]'$$
$$=k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+.....+k_n f_n'(x)$$

قضیه (د ضرب قاعده):

که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښایو:

$$(f(x)\cdot g(x)'=f(x)'\cdot g(x)\cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعنې په صورت کې د $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ ورزیاتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي یعنې د دواړو لورو لیمیټ نیسو یا پوله ټاکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

بېلګه:

$$f(x)=x^2\cdot x^3 \quad u(x)=x^2 \quad v(x)=x^3$$
$$\Rightarrow u'(x)=2x \quad v'(x)=3x^2$$
$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)=2x\cdot x^3+x^2\cdot 3x^2=2x^4+3x^4=\underline{\underline{5x^4}}$$

بېلګه:

که $g(x)=x^2-1$ او $h(x)=\sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x)=g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ښوونه:

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x},\ f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د وېش قانون):

f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښایو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښایو(ثبوت کړو).

لومړۍ لار:

لومړی لار یا طریقه یې په لاندې کې ښایو او دویمه لار دې ګران زده کوونکي وښايي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}\quad ,\quad g(x)\neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زيات کړو، نو لرو:

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to 0}g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

يعني لرو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

دویمه لار:

د $\frac{1}{g(x)}$: مشتق غواړو پیدا کړو او ښايوچي دی:

$$(f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\quad(\frac{1}{g(x)})'=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\qquad(*)$$

که $f(x)=\frac{1}{g(x)}$ کيږدو نو لرو:

$$(f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x).h}$$

$$= \frac{\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{-\lim_{h\to 0} g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

که دا $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$ وېش ولرو او وغواړو چې مشتق يې پيدا کړو،نو له پورته ښوونې ، د (*) اړيکې او د ضرب قاعدې له مخې لرو:

$$[\frac{f(x)}{g(x)}]' = [f(x)\frac{1}{g(x)}]'$$

$$= f(x)(\frac{1}{g(x)})' + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= f(x)(\frac{g'(x)}{(g(x))^2}) + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= \frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} + \frac{f'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

يا په لنډه توګه دا لاندې:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

بيلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{x}{x+2}\quad u(x)=x\quad v(x)=x+2$$

$$\Rightarrow u'(x)=1\quad v'(x)=1\quad [v(x)]^2=(x+2)^2$$

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}=\frac{1\cdot(x+2)-x\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{x+2-x}{(x+2)^2}=\frac{2}{(x+2)^2}$$

$$f(x)=\frac{2x^2+x^3}{x^4}\quad u(x)=2x^2+x^3\quad v(x)=x^4$$

$$\Rightarrow u'(x)=4x+3x^2\quad v'(x)=4x^3\quad [v(x)]^2=x^8$$

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}=\frac{(4x+3x^2)\cdot x^4-(2x^2+x^3)\cdot 4x^3}{x^8}$$

$$=\frac{4x^5+3x^6-8x^5-4x^6}{x^8}=\frac{-x^6-4x^5}{x^8}=\frac{-x^5(x+4)}{x^8}=-\frac{x+4}{x^3}$$

بیلګه:

د $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ تابع (د $x^2-4\neq 0$ سره) مشتق غواړو پیدا کړو.

حل: که چیرې $g(x)=x^2$ او $h(x)=x^2-4$

وضع شي نو لرو:
$$g'(x)=2x$$
$$h'(x)=2x$$

او د ویش قانون له مخې لرو:

$$f'(x)=\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]'=\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$=\frac{2x(x^2-4)-x^2.2x}{[x^2-4]^2}$$

$$=\frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تولګه:

کمبنتوېش: (د سيکانت جګيدنه يا منځنی تغير ارزښت)	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
دفرنشلوېش (د تانجنت جګيدنه يا لحضوي تغير ارزښت)	$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
د ثابتي يا تل همغي قانون	$f(x) = c\cdot u(x)$ د c =ثابت تي سره $\Rightarrow f'(x) = c\cdot u'(x)$ يا لند: $f' = c\cdot u'$
د جمعي- يا زياتون قانون	$f(x) = u(x) + v(x)$ $\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$ يا لند: $f' = u' + v'$
د ضرب – يا ځل قانون	$f(x) = u(x)\cdot v(x)$ $\Rightarrow f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$ يا په لنده بنه: $f' = u'\cdot v + u\cdot v'$
د وېش قانون	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ $\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$ يا په لنده بنه: $f' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$
زنځيري قانون:	$f(x) = f[z(x)]$ $\Rightarrow f'(x) = \underbrace{f'(z)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{z'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$ د باندنی مشتق　　دننی مشتق

(c) ketabton.com: The Digital Library

دنورو پسي توابعو مشتق:

مشتق تابعمساوات	تابع مساوات
$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^x$
$f'(x) = \cos(x)$	$f(x) = \sin(x)$
$f'(x) = -\sin(x)$	$f(x) = \cos(x)$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \ln(x)$

بیلکه:

$f(x) = x \cdot e^x$ د ضرب قانون: $u' \cdot v + u \cdot v'$ د $u = x; u' = 1; v = e^x; v' = e^x$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underline{\underline{(x+1)e^x}}$$

سره.

ثابتي دقانون: $f(x) = 3\ln x$ $\quad f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$

$f(x) = x^2 \cdot \ln x$ دضرب قانون: $u' \cdot v + u \cdot v'$ د

$u = x^2; u' = 2x; v = \ln x; v' = \frac{1}{x}$ سره

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = \underline{\underline{(2\ln x + 1)x}}$$

$f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ زنځیری قانون: $f'(x) = f'(z) \cdot z'$

$$z = \frac{1}{2}x \Rightarrow z' = \frac{1}{2} \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = 3\cos(x) - 2\sin(x)$ د جمعي قانونو: $u(x) = 3\cos(x) \quad v(x) = -2\sin(x)$

$$\Rightarrow u'(x) = -3\sin(x) \quad v'(x) = -2\cos(x)$$

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) = \underline{\underline{-3\sin(x) - 2\cos(x)}}$$

3.III : د مشتقشمیرنې قوانین

پوښتنې

مشتقشمیرنه ۷

لومړی: مشتق يې ونيسئ:

الف- $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x$ ب - $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2$

پ- $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2$ ت - $f(x) = 6x^2 - \frac{2}{3}x^4$

ټ - $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3$ ث - $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 3$

ج = $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x$ چ - $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

ح - $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - 5$ خ = $f(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{2}x^2$

دويم: د لاندې توابعو مشتق ونيسئ د دې لپاره تاسو ته معلوم مشتققواعد وکاروئ او قاعده چې کاروئ و ليکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- $f(x)=4x^3$ ب - $f(x)=3e^x$ پ- $f(x)=5\ln x$

ت - $f(x)=x^2+x$ ټ - $f(x)=2x^3-3x^2$ ث - $f(x)=4x^5-2\ln x+3e^x$

ج = $f(x)=x\cdot e^x$ چ - $f(x)=x^2\cdot\ln x$ ح - $f(x)=x^3\cdot(x^2-1)$

دریم: د لاندې توابعو مشتق ونیسئ د دې لپاره تاسو ته معلوم مشتققواعد وکاروئ او قاعده چې کاروئ و لیکئ

الف- $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ ب - $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ پ- $f(x)=\dfrac{(x+1)\cdot e^x}{x}$

ت - $f(x)=(x+1)^2$ ټ - $f(x)=(x^2+1)^2$ ث - $f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$

ج = $f(x)=2ax^3-4bx$ چ - $f(x)=e^{ax}$ ح - $f(x)=e^{-(x-2)}$

څلورم: د لاندی توابعو مشفقونه پیدا کړئ:

الف- $f(x)=3x^3-2x^2+x-7$ ب - $f(x)=x^2\cdot e^x\cdot\sqrt{x}$

پ- $f(x)=\dfrac{x^2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3}}{x^3}$ ت - $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$

ټ - $f(x)=(a^2+x)^2$ ث - $f(x)=(2x^3-3)^2$

پنځم:د لاندی توابعو مشفقونه پیدا کړئ:

الف- $f(x)=\left(x+e^x\right)\cdot\ln x$ ب - $f(x)=\ln(x^2-1)$

پ- $f(x)=(x+1)\cdot e^{(x+1)}$ ت - $f(x)=a\ln x-be^x-3x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت - $f(x)=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$ ث ـ $f(x)=\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}$

شپږم: د لاندې توابعو دریواره مشتق ونیسئ

الف- $f(x)=3x+4$ ب - $f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3$

پ- $f(x)=3x^3+2x^2+x+1$ ت - $f(x)=(2x+1)^3$

ټ - $f(x)=x-x^4+3+x$ ث - $f(x)=1-2x-3x-4x+x^4$

ج = $f(x)=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$ چ ـ $f(x)=4x^3-2x^2+5x-2$

مفصل حلونه

مشتقشمیرنه **V**

یادونه: په لاندې کې (Sr) د جمعي قانون (Pr) د ضرب قانون، Kettenregelځنزیري قانون (Kr) د ثابتي قانون (Qr) د وېش قانون په معنا دي

لورمړی:

الف- $f(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x \Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

ب - $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+x^2 \Rightarrow f'(x)=-2x^2+2x$

پ- $f(x)=-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3+3x^2 \Rightarrow f'(x)=-x^3-\frac{3}{2}x^2+6x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت - $f(x) = 6x^2 - \frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x) = -\frac{8}{3}x^3 + 12x$

ټ - $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \Rightarrow f'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$

ث - $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x^2 - 2$

ج = $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{3}{2}$

چ - $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$

ح - $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - 5 \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 2x - 1$

خ = $f(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{12}x^3 - x$

دويم:

الف- $f(x) = 4x^3$ د ثابتي قانون $\underline{\underline{12x^2}} = f'(x) = 4\cdot(x^3)' = 4\cdot 3x^2$ (Kr)

ب - $f(x) = 3\cdot e^x$ (Kr) $f'(x) = 3\cdot(e^x)' = \underline{\underline{3e^x}}$

پ- $f(x) = 3\cdot \ln(x)$ (Kr) $f'(x) = 3\cdot[\ln(x)]' = 3\cdot\frac{1}{x} = \underline{\underline{\frac{3}{x}}}$

ت - $f(x) = x^2 + x$ د جمعي قانون: $f'(x) = \underline{\underline{2x+1}}$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ - $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ (Sr/Kr) $f'(x) = 2\cdot 3x^2 - 3\cdot 2x = \underline{\underline{6x^2 - 6x}}$

ث - $f(x) = 4x^5 - 2\cdot \ln(x) + 3\cdot e^x$

(Sr/Kr) $f'(x) = 4\cdot 5x^4 - 2\cdot \frac{1}{x} + 3\cdot e^x = \underline{\underline{20x^4 - \frac{2}{x} + 3e^x}}$

ج = $f(x) = x\cdot e^x$ د $u'\cdot v + u\cdot v'$ ضرب قانو د $u = x;\ u' = 1;\ v = e^x;\ v' = e^x$: سره

$f'(x) = 1\cdot e^x + x\cdot e^x = \underline{\underline{(x+1)\,e^x}}$

چ - $f(x) = x^2.\ln x$ (Pr د ضرب قانون) $u'v+uv'$ د $u=x^2;\ u'=2x; v=\ln x; v'=1/x$ سره.

$f(x) = x^2\cdot \ln(x)$ (Pr): $u'\cdot v + u\cdot v'$ mit $u = x^2;\ u' = 2x;\ v = \ln(x);\ v' = \frac{1}{x}$

$f'(x) = 2x\cdot \ln(x) + x^2\cdot \frac{1}{x} = 2x\cdot \ln(x) + x = \underline{\underline{(2\ln x + 1)\,x}}$

ح - $f(x) = x^3\cdot (x^2 - 1)$ (Pr/Sr): $u'\cdot v + u\cdot v'$

د $u = x^3;\ u' = 3x^2;\ v = x^2 - 1;\ v' = 2x$ سره

$f'(x) = 3x^2\cdot (x^2 - 1) + x^3\cdot 2x = 3x^4 - 3x^2 + 2x^4 = \underline{\underline{5x^4 - 3x^2}}$

دريم: الف-د لاندې پېښتو:

$f(x) = \frac{x+1}{x}$ د وېش قانون: $\frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$

د $u = x + 1;\ u' = 1;\ v = x;\ v' = 1;\ v^2 = x^2$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x) = \frac{1\cdot x-(x+1)\cdot 1}{x^2} = \frac{x-x-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

ب –

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \quad (Qr/Sr): \quad \frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$\text{mit } u = x;\ u' = 1;\ v = x+1;\ v' = 1;\ v^2 = (x+1)^2$$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

پ- د... سره

$$f(x) = \frac{(x+1)e^x}{x} \quad (Qr/Pr/Sr): \quad \frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$\text{mit } u = (x+1)e^x;\ u' = e^x+(x+1)e^x;\ v = x;\ v' = 1;\ v^2 = x^2$$

$$f'(x) = \frac{\left[e^x+(x+1)e^x\right]\cdot x-(x+1)e^x\cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{xe^x+x^2e^x+xe^x-xe^x-e^x}{x^2} = \frac{(x^2+x-1)e^x}{x^2}$$

ت –

$f(x) = (x+1)^2$ ځنزيري قانو: $f'(x) = f'(z)\cdot z'$

$$z = x+1 \Rightarrow z' = 1 \quad f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z$$

$$f'(x) = 2(x+1)\cdot 1 = 2(x+1)$$

ټ – $f(x)=(x^2+1)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځنزيري قانون: $f'(x) = f'(z).z'$

$$z = x^2 + 1 \Rightarrow z' = 2x \quad f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z$$
$$f'(x) = 2(x^2+1)\cdot 2x = 4x(x^2+1) = \underline{\underline{4x^3+4x}}$$

ث - $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ ځنزيري قانون $f'(x) = f'(z)\cdot z'$

$$z = \frac{1}{2}x \Rightarrow z' = \frac{1}{2} \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}}}$$

ج = $f(x) = 2ax^3 - 4bx \quad (Sr/Kr) \quad \Rightarrow f(x) = 2\cdot 3ax^2 - 4b = \underline{\underline{6ax^2 - 4b}}$

چ - $f(x) = e^{ax}$ ځنزيري قانون: $f'(x) = f'(z).z'$

$$z = ax \Rightarrow z' = a \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{ax}\cdot a = \underline{\underline{ae^{ax}}}$$

ح –

$f(x) = e^{-(x-2)}$ ځنزيري قانون: $f'(x) = f'(z).z'$

$$z = -(x-2) = -x+2 \Rightarrow z' = -1 \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = e^{-(x-2)}\cdot(-1) = \underline{\underline{-e^{-(x-2)}}}$$

ځلورم:

الف- $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 7 \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{9x^2 - 4x + 1}}$

ب - $f(x) = x^2\cdot e^x\cdot\sqrt{x} = x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot e^x = \underbrace{x^{\frac{5}{2}}}_{u}\cdot\underbrace{e^x}_{v} \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $u = x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow u' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$ او $v = e^x \Rightarrow v' = e^x$ دى سره لرو:

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \cdot e^x + x^{\frac{5}{2}} \cdot e^x = \underline{\underline{\left(\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}\right)e^x}}$$

پ- $f(x) = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3}}{x^3} = \frac{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}}}{x^3} = \frac{x^{\frac{4}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}}{x^3} = \frac{x^{\frac{8}{2}}}{x^3} = \frac{x^4}{x^3} = x \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{1}}$

ت - $f(x) = \frac{2x-1}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

د $u = 2x-1 \Rightarrow u' = 2$ او $v = x+2 \Rightarrow v' = 1$ ده او $v^2 = (x+2)^2$ سره لرو:

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot (x+2) - (2x-1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2} = \underline{\underline{\frac{5}{(x+2)^2}}}$$

ټ - $f(x) = (a^2+x)^2 \Rightarrow f'(x) = 2\left(a^2+x\right) \cdot 1 = \underline{\underline{2\left(a^2+x\right)}}$

ث –

$$f(x) = \left(2x^3-3\right)^2 \Rightarrow f'(x) = 2\left(2x^3-3\right) \cdot 6x^2 = 12x^2\left(2x^3-3\right) = \underline{\underline{24x^5 - 36x^2}}$$

پنځم:

الف-

$$f(x) = \underbrace{\left(x+e^x\right)}_{u} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v} \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $u = x + e^x \Rightarrow u' = 1 + e^x$ او $v = \ln(x) \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$ سره کیري یا لرو:

$$f'(x) = (1+e^x)\cdot\ln(x) + (x+e^x)\cdot\frac{1}{x} = \ln x + \ln x \cdot e^x + 1 + \frac{e^x}{x}$$

ب –

$f(x) = \ln(x^2 - 1)$ زنځیري قانون $f'(x) = f'(z)\cdot z'$

$$z = x^2 - 1 \Rightarrow z' = 2x \quad f(z) = \ln(z) \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2-1}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2-1}$$

پ- $f(x) = (x+1)\cdot e^{(x+1)} \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$

د $u = (x+1) \Rightarrow u' = 1$ او $v = e^{(x+1)} \Rightarrow v' = e^{(x+1)}$ سره

$$f'(x) = 1\cdot e^{(x+1)} + (x+1)e^{(x+1)} = [1 + (x+1)]e^{(x+1)} = (x+2)e^{(x+1)}$$

ت - $f(x) = a\cdot\ln(x) - b\cdot e^x - 3\cdot x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{x} - be^x - 6x$

ټ – $f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

د $u = (x+1)^2 \Rightarrow u' = 2(x+1)$ او $v = (x-1)^2 \Rightarrow v' = 2(x-1)$ او

$v^2 = (x-1)^4$ د سره لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x)=\frac{2(x+1)\cdot(x-1)^2-(x+1)^2\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)\left[2(x+1)(x-1)-2(x+1)^2\right]}{(x-1)^4}=\frac{2(x+1)(x-1)-2(x+1)^2}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{2(x^2-1)-2(x+1)^2}{(x-1)^3}=\frac{2x^2-2-2x^2-4x-2}{(x-1)^3}=\frac{-4x-4}{(x-1)^3}=-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}$$

ث ــ

$$f(x)=\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}=\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{3+x}{3-x}\right)'$$

د ځنزيري قانون له مخې منځشميرنه:

$$\left(\frac{3+x}{3-x}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad u=3+x\Rightarrow u'=1;\ v=3-x\Rightarrow v'=-1;\ v^2=(3-x)^2$$

$$\left(\frac{3+x}{3-x}\right)'=\frac{1\cdot(3-x)-(3+x)\cdot(-1)}{(3-x)^2}=\frac{3-x+3+x}{(3-x)^2}=\frac{6}{(3-x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{6}{(3-x)^2}=\frac{3(3-x)^{\frac{1}{2}}}{(3+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(3-x)^2}=\frac{3(3-x)^{-\frac{3}{2}}}{(3+x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{3}{(3-x)^{\frac{3}{2}}(3+x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{(3-x)(3-x)^{\frac{1}{2}}(3+x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{3}{(3-x)\left[(3-x)(3+x)\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{(3-x)(9-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم:

الف- $f(x)=3x+4 \Rightarrow f'(x)=3 \qquad f''(x)=0 \qquad f'''(x)=0$

ب - $f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3=5x^3-3x-4$
$\Rightarrow f'(x)=15x^2-3 \qquad f''(x)=30x \qquad f'''(x)=30$

پ- $f(x)=3x^3+2x^2+x+1$
$\Rightarrow f'(x)=9x^2+4x+1 \qquad f''(x)=18x+4 \qquad f'''(x)=18$

ت - $f(x)=(2x+1)^3$
$\Rightarrow f'(x)=3(2x+1)^2\cdot 2=6(4x^2+4x+1)=24x^2+24x+6$
$f''(x)=48x+24 \quad f'''(x)=48$

ټ - $f(x)=x-x^4+3+x=-x^4+2x+3$
$\Rightarrow f'(x)=-4x^3+2 \qquad f''(x)=-12x^2 \qquad f'''(x)=-24x$

ث –

$$f(x)=1-2x-3x-4x+x^4=x^4-9x+1$$
$$\Rightarrow f'(x)=4x^3-9 \qquad f''(x)=12x^2 \qquad f'''(x)=24x$$

ج- ثابت یا تل همغه=konstant

$$f(x)=\underbrace{a+b+c^2}_{\text{Konstante}}-x-ax-bx-cx^3-c^3x$$
$$f'(x)=-1-a-b-3cx^2-c^3=-3cx^2-\underbrace{a-b-c^3-1}_{\text{Konstante}}$$
$$f''(x)=-6cx \qquad f'''(x)=-6c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چ -

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$$
$$\Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 4x + 5 \qquad f''(x) = 24x - 4 \qquad f'''(x) = 24$$

د جګو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسې مشتق له لارې لاسته راځي
د $f'(x)$ بیا مشتق نیونې سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دویم مشتقتابع په نامه یادیږي.

بیلګه:

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \underline{\underline{f''(x) = 6x + 2}}$$

د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow \underline{\underline{f'''(x) = 6}}$$

د $f(x) = \frac{x^3}{3}$ تابع دې ۴ واره مشتق ونیول شي

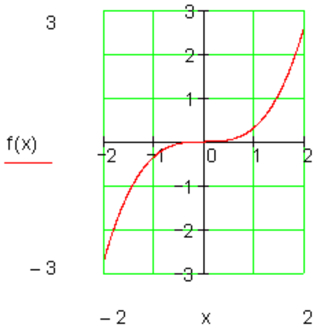
$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$

د تابع ګراف :

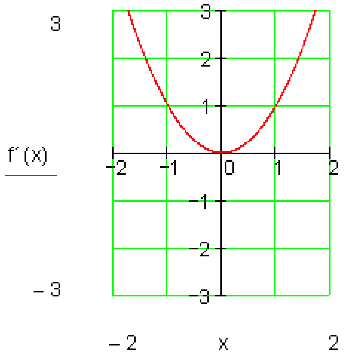
(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

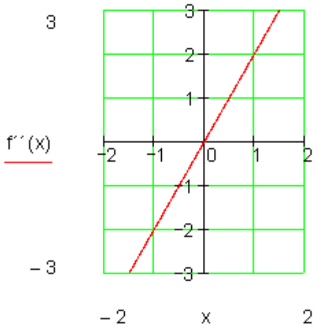
$$f(x) = \frac{x^3}{3}$$



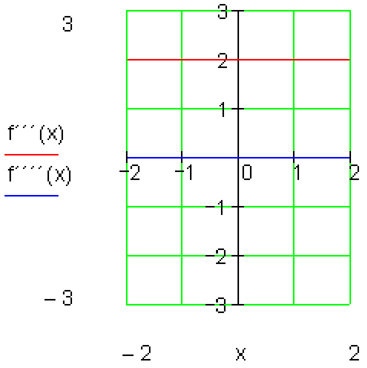
$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = x^2$$



$$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$$



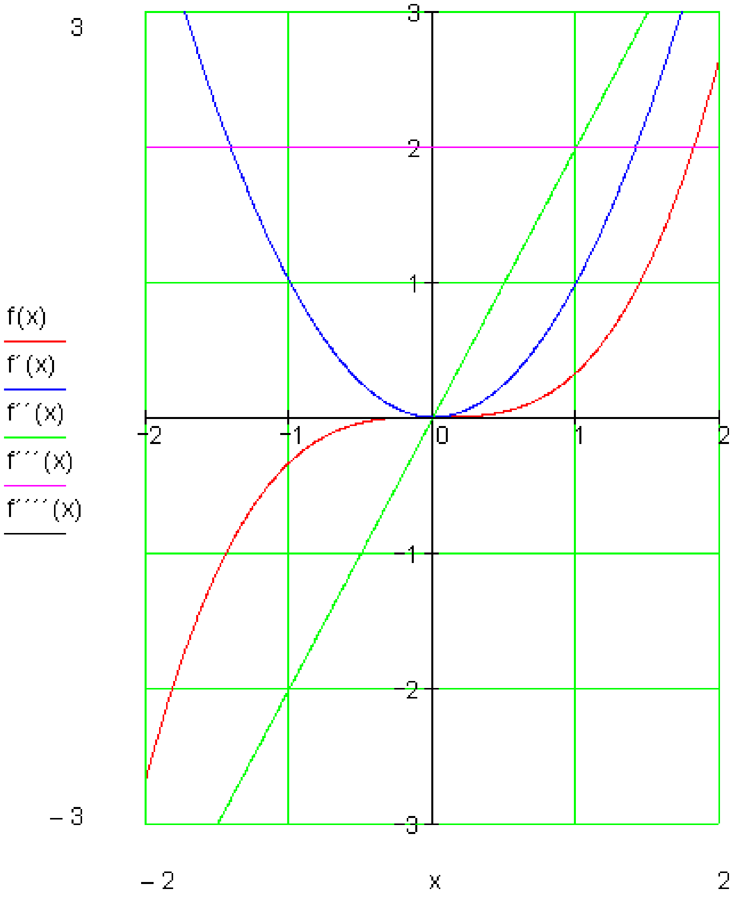
$$f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$



د ټولو توابعو ګراف په یوه پروت ولاړ سیستم کې(دا ګراف د لاندې بیلګې پسې دی)

بیلګې: اول :	$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$ $f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$ $f''(x) = 24x - 4$ $f'''(x) = 24$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دویم:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 24x + \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{9}{2}x - 24$$

$$f'''(x) = \frac{9}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه:

د f(x) لومړی مشتق د f(x) مشتق تابع $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ده :

د f(x) دویم مشتق د f'(x) مشتق تابع $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د f(x) دریم مشتق د f''(x) مشتق تابع $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: یو په خوښه ویاند – یا راشنل تابع f(x) په خوښه د مشتق قابلیت لري.

تانجنت او عمود

د تانجنت جګیدنه

بیلګه:

تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ لرو.

د تانجنت میل: د یوه تابع د ګراف میل په ټکي $P(x_0 \mid f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

موږ $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ مربع تابع لرو

د تابع مشتق $f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

ارزښتجدول:

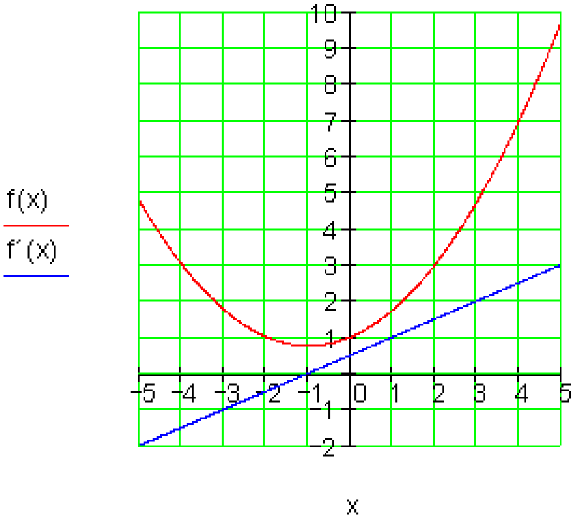
(c) ketabton.com: The Digital Library

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f '(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککرټکی دی: $S(-1,\ 0.75)$
د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د میل تابع ارزښت دی:
دا دا معنی لري، چې په ککرټکي کې د $f'(x)$ میل صفر دی.
تانجنت په s کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛ یعني د $x-$ محور سره غبرګ ځغلي.

ګرافونه:

$$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \qquad f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



بیلګه:
تابع لرو: $f(x)=2x^3+7x^2+x-7$

تانجنت دې پیداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=2x^3+7x^2+x-7 \Rightarrow f'(x)=6x^2+14x+1 \quad P(-2\,|\,f(2)) \Rightarrow x_0=-2$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x_0)f'(-2)=24-28+1=-3$$

$$f(x_0)=f(-2)=-16+28-2-7=3$$

$$\Rightarrow t(x)=-3(x+2)+3=-3x-6+3=\underline{\underline{-3x-3}}$$

پایله:

د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0\,,f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري.

د تانجنت مساوات

$$t(x)=\underbrace{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

جګیدنه

د عمود مساوات

$$n(x)=-\frac{1}{\underbrace{f'(x_0)}}(x-x_0)+f(x_0)\ ;\ f'(x_0)\neq 0$$

جګیدنه

د تانجنت او عمود عمومي فرمولونه:

پیل: تانجنت دې د $f(x)$ ګراف د $P(x_0\,,f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ ګراف د په $P(x_0\,,f(x_0))$ ټکي کې عمود یا ولاړ غوځ کړي.

د تانجنت مساوات: $t(x)=m_t\cdot x+b_t$:

د $m_t=f'(x_0)$ سره لیکو: $t(x)=f'(x_0)\cdot x+b_t \qquad (1)$

دا چې $P(x_0),f(x_0))$ تانجنت یو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0)=f(x_0)\Leftrightarrow f'(x_0)\cdot x+b_t=f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow b_t=f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لر:

$$t(x)=f'(x_0)\cdot x+f(x_0)-f'(x_0)\cdot x_0=f'(x_0)\cdot x_0+f(x_0)$$

$$=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

عمود (نورمال):

د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود ځغلي.

د عمود میل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

بيلګه:

د $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پيدا کړئ:

حل:په لاندې توګه د تابع مشتق نيسو او ګراف يې(څېره لاندې کښل شوې) کاږو:

x	-4	-1	0	1.5	3
$f'(x)$	4	2.5	2	1.25	0.5

لرو: $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت ميل په ټکي x_0 کې د ميل ارزښت 3 لري.

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2\cdot(-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \qquad ,P(2, f(2))$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ په ځاي کې دا لاندې لرو:

$$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4 - 1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x-2) + 3 = x - 2 + 3 = \underline{\underline{x+1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورمال يا عمود پيدا کونه:

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \;,\quad P(2|\,f(2))$$

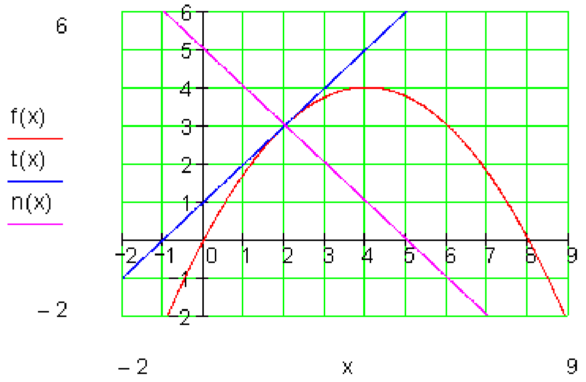
$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x)=\frac{1}{f'(2)}(x-2)+f(2)$$

$$f(2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot(2)^2=4-1=3 \qquad f'(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow n(x)=-\frac{1}{1}(x-2)+3=-x+2+3=\underline{\underline{-x+5}}$$



د يوې تابع د استعمال بيلګه د تانجنت له پاره :

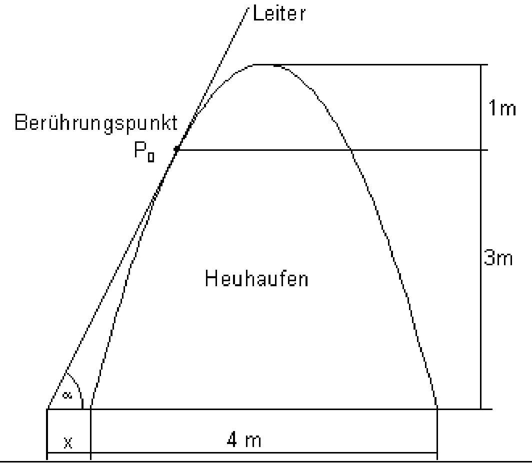
له ځمکې څخه د وښو په توپۍ يوه زينه اېښول کيږي. دا زينه په درې متره جګوالي توپۍ لمسوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وښو توپی دې د یوه کیښکودي پارابول ځیره ولري، چې بنسټ یې ۴ متره سرور دی او ۴ متره جګوالی لري. غواړو په دې یوه زینه کیږدو، چې د وښو توپی سره تانجنت جوړ کړي.

په کومه زاویه(کونج)باید دا زینه کیښنول شي؟

د وښو توپی له بیخ څخه دې په کوم لرېوالي په څمکه دا زینه کیښنول شي؟



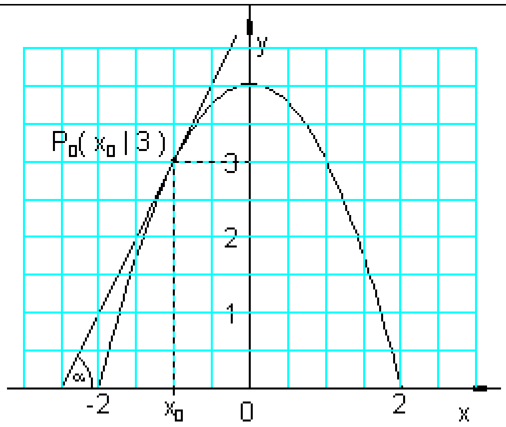
موږ د y محور داسي کاږو،چې د پارابول له ککرې(څوکې) څخه تېرېږي.

پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$
$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$
$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$
$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$



شمیرنه :

د نورو شمیرنو لپاره ارزښت -1 = x_0 کاروو. زینه توپی په $P_0(-1,3)$ ټکي کې لمسوي.موږ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1|3) \Rightarrow x_0 = -1;\ f(x_0) = 3$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $f'(x) = -2x$ سره لاس ته راځي

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

جوړه زاويه: $\tan\alpha = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 63{,}4^0}}$

د زينې او د وښو توپۍ تر منځ واټن د **f(x)** د صفرځای او د تانجنت**t(x)** د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځايونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$
$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2{,}5$$

د x ارزښتونو 2,5- او 2- ترمنځ واټن 0,5 دی.

زينه د وښو د توپۍ له پښو څخه بايد نيم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه تاکل کيږي، چې يو ګراف په تعريف شوي ځای کې لمسوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تولید کې د مشتق استعمال

فعالیت : یوه فابریکه x تولید کوي. په دې تولید د لګښت کیږي، چې دا د تولید په واک کې دی، چې موږ ورته د لګښت تابع وایو او په K(x) سره ښایو.

څنګه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لګښت را ټیټ کړو؟

د لګښت تابع K(x) د تولید سټ(ډېری) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.

که تولید د Δx شاو خوا کې زیات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زیاتیږي.

کمښتویش (تقسیم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځني لګښت زیاتوالی ښایي، د یوه Δx تولید تغیر سره(منځنی تغیر ارزښت)

د x_0 ځای کې لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لګښت بلل کیږي. دا د پوله ارزښت $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کیږي، داپه دې معنې، چې د لګښت د تابعK مشتق.

پیژند : د لګښتتابع **K(x)** مشتق د مشتق ارزښت **K'(x)** په نامه یادوو یا یې پوله لګشت **K'(x)** هم بولو.

بیلګه: د لګښت تابع $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$ دې ورکړ شوې وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکئ، یو ارزښت جدول د **K(x)** او **K'(x)** لپاره وکاږئاو په پروتولاړ سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یې ګراف وکاږئ.

پوله ارزښت د **I = [0 ; 6]** لپاره په ۱ پل(قدو) پراخوالي سره.

ب : د ډېر کم لګښتزاتوالی و ټاکئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې تابع لرو:

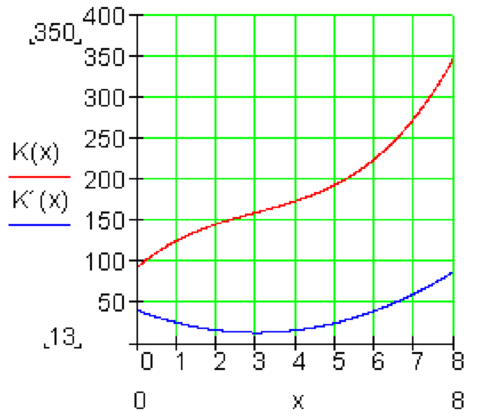
$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

مشتق ارزښت

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزښت جدول

x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40



خورا کم د لګښتزیاتوالی(لګښتجګېدنه) د پارابول **K'(x)** په ککره(څوکه) کې پروت دی ، یعني هلته چې تانجنت **K'(x)** پروت یا افقي دی

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

د تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره :

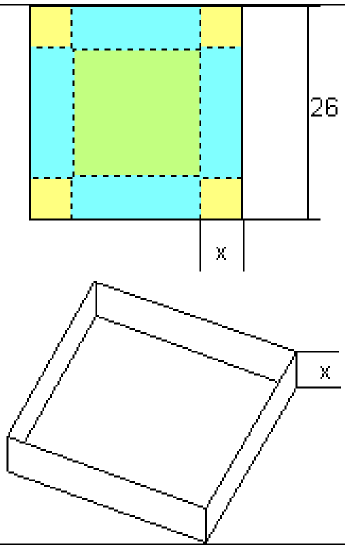
$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

همدا نتیجه موږ د **K'(x)** لپاره جدول څخه هم لوستلی شوه.

نتیجه په دي معنا ده: کوچنی نرخجګوالی د یوه **x = 3** مقدار څخه لاس ته راوړو، دا هلته **13 GE / ME** دی.

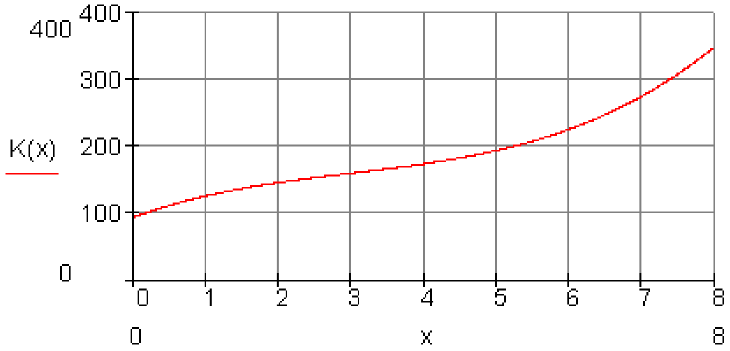
(c) ketabton.com: The Digital Library

د ي، مربع کارتون(د کلک کاغذ څخه جوړ)څخه ، چې ۲۶ سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، چې د x جګوالی لري.
الف: د یوه تابع ترم وټاکی، چې د بکس حجم(ډکی) V د x په واکوالي یا تابعیت کي ښايي.
ب – ګراف وکاږئ او په نردي توګه يي ماکسيما(خورا جګ) حجم و ټاکی.



- د یوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع)K(x) د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړیکي انځوروي، داسي چې x = 1 د 100 ناروغانو معنی او y = 1 دی معنی چې 1000 € / Tag. یوزر یورو په ورځ (1000 € / Tag.) .

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



الف : د مصرف تابع په خپله کتابچه کي ولیکی.
ب : د لګښت تابع مشتق د مشتق لګښت (-مصرف) یا دحدمصرف په نامه یادیږي. تاسو د لګښت زیاتیدنه د ناروغانو په واکوالي یا تابعیت کي تشریح کړی. (د K(x) جګیدونه).
K'(x) وټاکی او ګراف يي په وضعیه سیستم (پروت- ولاړ-سیستم) کي انځور کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ : د ناروغانو د کوم تعداد سره د لګښت زیاتوال خورا کم دی؟ دا قیمتونه وشمیرئ.

د الجبري توابعو مشتق

د الجبري او نورو توابعو پېژندونه: 1- یو بنسټیز تابع الجبري بلل کیږي، که د ترتیب قانون یې د مساواتو له لارې ورکړ شوی وي،په هغو کې چې په ترمونو کې د مساواتو د متحولو سره فقط الجبري عملیی(جمع،تفریق، ضرب، تقسیم(چې مخرج یې صفر نه وي)توانکونه او جذرنیونه(د توان-اوریښي اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي) کارول شوي وي. 2- ناالجبري توابع ترانسځندنت بلل کیږي، لکه اکسپوننشل-ولوګاریمی- او د زاویو توابع. 3- یو الجبري تابع راشنل بللکیږ ي، که د ترتیب قانون یې د یو مساوات سره ورکړ شوی وي، په کوم کې چې ناپای ډیرې راشنل د شمېر عملیی ((جمع،تفریق، ضرب، تقسیم(چې مخرج یې صفر نه وي)توانکونه او جذرنیونه(د توان-اوریښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي)) کارول شوي وي.

بیلګه:

د $f(x)=\sqrt{x}$ تابع ورکړ شوې په x_0 کې د تابع مشتق پیدا کړئ او د مشتق تابع په ګوته کړئ.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو د x_0 په ځای کې $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د تابع $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق دی.

د تیرو درسونو پر بنسټ $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ د مشتق تابع ده.

د $f(x)=x^q \;\; ; \;\; q\in Q$ ډوله توابعو مشتق:

د شمیرنې له مخې لاندې لاس ته را وړنې لرو:

تابع	د مشتق تابع	
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$f'(x)=1\cdot x^0$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2\cdot x$	$f'(x)=2\cdot x^1$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3\cdot x^2$	$f'(x)=3\cdot x^2$
$f(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$f'(x)=-1.x^{-2}$
$f(x)=\sqrt{x}=x\dfrac{1}{2}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}$

که دا پورته پنځه مشتقونه یو د بل سره پرتله کړو، نو اټکل کیږي، چې لاندې جوړښتقانون باور لري:

د توان (پونتځ) قانون بې له ښوونې: 1- مختنې اکسپوننت د متحولې x تر مخ د فاکتور په څېر لیکل کیږي. 2- نوی اکسپوننت همغه پخوانی اکسپوننت دی، چې په یو کم شوی.	د $f(x)=x^q \;\; \Rightarrow f'(x)=q\cdot x^{q-1}$ سره $q\in Q$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: د $f(x)=\frac{1}{x^2}$ مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2} \Rightarrow f'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

بیلګه:

د $f(x)=3x^4$ تابع مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=3x^4 \qquad c=3 \qquad u(x)=x^4 \Rightarrow u'(x)=4x^3$$

$$f'(x)=c\cdot u'(x)=3\cdot 4x^3=12x^3$$

بیلګه:

غواړو د $f(x)$ تابع مشتق د $x=2$ په ځای کې ونیسو:

$$f(x)=x^2+3$$

$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=4+\Delta x$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$$

$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=2u+\Delta x$$

$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2u+\Delta x)=2u$$

بیلګه:

د تا بع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ مشتق د $x=2$ په ځای کې پیداکړئ.

ښوونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{1}{3(3+\Delta x)}$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{3(3+\Delta x)}\right)=-\frac{1}{9}$$

$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}$$

$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}=-\frac{1}{(u+1)^2}$$

بيلګه 2:

(توان(Potence) مشتق، چې طبيعي جګ عدد يا اکسپوننت لري:

موږ د $1,2,3,...$, $y(f(x)=x^n$ تابع لرو او غواړو مشتق يې پيداکړو:

ښوونه: موږ په لاندې توګه مخ ته ځو.

د بينوم جملې په بنسټ په هر x_0 ځای کې دا لاندې باورلري.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{}$$

$$=\frac{\binom{n}{0}x_0^n+\binom{n}{1}x_0^{n-1}h+\binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2+...+\binom{n}{n}h^n-x_0^n}{h}$$

$$=\frac{1}{h}\left(x_0^n+nx_0^{n-2}h+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h^2+...+h^n-x_0^n\right)$$

$$=nx_0^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h+...+h^{n-1}$$

د $h\to 0$ لپاره تابع $y=x^n$ د x_0 په هرځای کې، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابليت لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(dy/dx)_{x=x_0} = f'(x) = nx^{n-1}$$

ددې پورته بېلګې بل ډول ښوونه دې د پوښتنې په ځبر وي.

د زنځیري توابعو مشتق

د u تابع کېدی شي د v تابع سره وتړل شي، که د د باندني تابع(ځنځیروني قاعده)، پېژند ورشو (دتعریف ساحه) $D(u)$ د دنني تابع د $W(v)$ سره ګډ توکي یا عناصر ولري.

ددې لپاره لیکو: $u^{\circ}v(x) = u(v(x))$، که د f تابع د $y = f(x) = u(z)$ سره او $z = v(x)$ وي.

اوس د $x = x_0$ ځای کې د $y = f(g(x))$ تړلي یا ځنځیري تابع مشتقوړوالی څېړو:

$$f(x) = f[g(x)]$$
$$\Rightarrow f'(x) = f'(g) \quad . \quad g'(x)$$

دننني مشتق د باندنی مشتق(دادې ورپورته شي)

ددې لپاره نیسو چې:

1- د $g(x)$ دننني تابع د $x = x_0$ په ځای کې مشتقوړ ده. دانو بیا باید د x_0 په یوه معلوم تعریف شوي چاپیریال کی متمادي(نه پریکیدونکی) وي.

موږ لرو : $g(x+h) -> g(x_0)$ د $h -> 0$ لپاره.

همداسې $g(x_0+h) = g(x_0)+k$ داسې، چې $k -> 0$ د $h -> 0$ لپاره.

2- که د $y = f(z)$ دباندنی تابع په $z = z_0 g(x_0)$ کې د مشتق قابلیت ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = f(g(x))$ کمبنتویش کیدی شي په لاندې ډول ورکړ شي او بڼه(فورم) يې هم بدله شي :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)}$$

$$= \frac{f(z_0+k) - f(z_0)}{k} \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

که $h->0$ لاړه شي (همداسې $k->0$ خواته ځي) نو دا اړیکی مشتق ته ځي:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)} \cdot \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0} \quad ;........(*)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)} \cdot \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

که چیرې د ځای په ځای(فیکس) ځای $x = x_0$ لپار بیرته x نیسو، نو کیدی شي چې $(*)$ فرمول په لاندې لنډ ډول ورکړشي او د $y = (z)$, $z = g(x)$ لپاره باور ولري:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} ;......................................(**)$$

په پام کې دې وي، چې $\frac{dy}{dx}$ د $z = g(x)$ په ځای کې باید ترتیب(تنظیم) شي.

دا $(*)$ فرمول ځنځیري قاعده(لار،قانون) بلل کیږي او د پورته نیونو یا فرضیو سره باوري دی. دا په ساده ډول په یاد لرلی شو، ځکه چې ښی خوا د کینې خوا سره د فورمال dzزیاتیدلو له لارې منځ ته راغلي.

د پورته ښوونې لاس ته راوړنه دا لاندې جمله ده:

جمله :
زنځیري قاعده

(c) ketabton.com: The Digital Library

لرو : $f(z)=f(g(x))$ ، نود $z=g(x)$ تابع په x او د $y=f(z)$ تابع په $z=g(x)$ كي د مشتق قابليت لري يا مشتقوړ دی، نوترلی ورکړ شوی د $y=f(g(x))$ تابع هم په x كې د مشتق قابليت لري او دا باوري كيږي.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{\frac{df}{dg}}{\frac{dx}{dg}}==f\,'(g(x)).g\,'(x)$$

لنډ: $(fog)'(x)=f(g(x))'$

بېلګه:

د $f(x)=(x^2+2)^2$ مشتق ونيسئ.

$$f(x)=\left(x^2+2\right)^2$$

Substitution بدلون $+2 \quad f(z)=z^2 \Rightarrow f'(z)=2z \quad z'(x)=2x$

$$f'(x)=f'(z)\cdot z'(x)=2z\cdot 2x=2\left(x^2+2\right)\cdot 2x=\underline{\underline{4x^3+8x}}$$

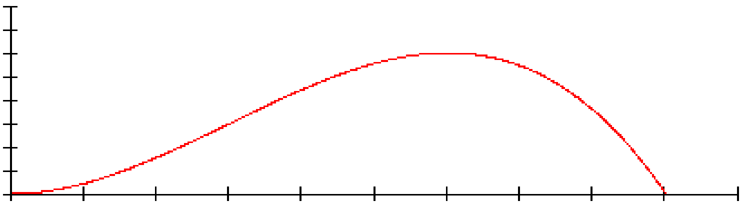
د مشتق استعمال په طبيعي علومو

په رياضياتو كې زيات وخت توابع راوړل كيږي، چې د يوې متحولې(اووبنتوني) x په واک كې وي.

په طبيعي پوهنو كې زيات وخت توابع څيرو، چې د وخت په واک كې وي وي.

لکه په شکل کې د يوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کيږي)

(c) ketabton.com: The Digital Library



فعالیت:

ګران زده کوونکي دي د فزیک د درسونو له مخې د چټکتیا او بیړې تعریفونه ور کړي او د لار، وخت، چټکتیا او بیړې فرمولونه دي ولیکي.

بیلګه:

د یوه په برابرېوله بیړه (تعجیل) غورځول شوي شي لپاره د پیل چټکتیا (لومړنی سرعت) $v_0 = 4\frac{m}{s}$ او $a = 1{,}8\frac{m}{s^2}$ بیړې(تعجیل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

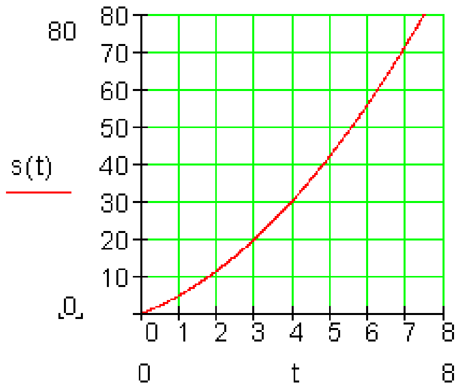
حل: د پورته ورکړشوي د v_0 ارزښت لپاره باور لري: S(t) = 0,9t²+4t

(t په (ثانیه)، s(t) په m (متر))

منځنی چټکتیا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ده) لحظوی(سملاسي) چټکتیا په لاندې ډول ده:

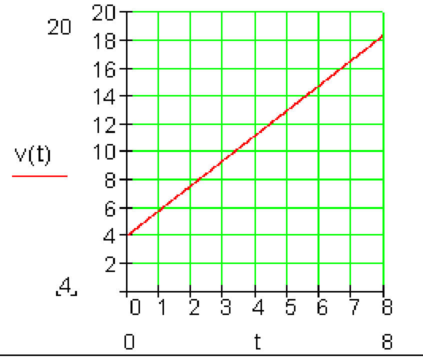
$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$$

$$v = s'(t) = 1{,}8t + 4$$



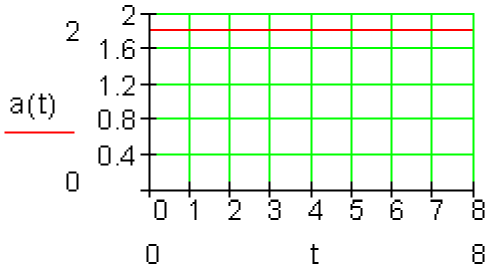
(c) ketabton.com: The Digital Library

په v-t - دیاګرام کې یوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتیا په برابر $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ډول زیاتیږي. دا دلته ثابته ځګېدنه ده او $a = 1,8\frac{m}{s^2}$ بیړه(تعجیل) ده.



د بیړې یا تعجیل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي:

$$v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$



پام : د یوه برابرډوله په بیړه (تعجیلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

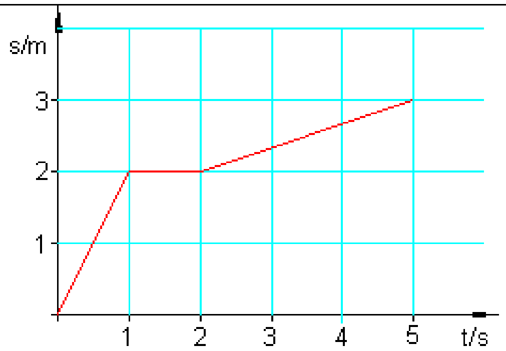
$$a(t) = v'(t) = a \qquad v(t) = s'(t) = at + v_0 \qquad s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

د یوې چټکتیا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره $v(t)=s'(t)$ لرو. د $s'(t)$ لپاره داسې $v(t) = s'(t)$. هم لیکو.

فعالیت:۱) د یوه خوزنده تن یا جسم د لار-وخت-دیاګرام ورکړ شوی.

الف: دا خوزښت تشریح کړی.

ب : دی پورې اړونده د چټکتیا – وخت – دیا ګرام وکاږی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

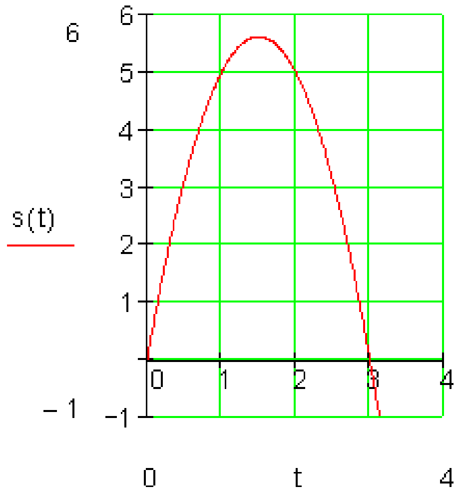
---

۲) یوه تیره د پیل چټکتیا $v_0 = 7\frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\frac{m}{s^2}$ (را تولي (ګردي شوي)سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تیرې چټکتیا (سرعت) صفر دی؟

ب) خورا جګ د میل جګوالی وشمیرئ.



۳) تابع د یوه خوزښت د لار-وخت-دیاګرام ښایي.

الف) د ورځني ژوند څخه یوه بیلګه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه تیک وي.

د منحني تلنه د $t > 3$ لپاره فزیکي څه مفهوم لري؟

ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-دیاګرام په لاندې ډول دی.

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

a او v_0 وټاکئ

پ) د اړونده بیړې – وخت-دیاګرم وکاږئ او دا تشریح کړئ.

یوه منفي چټکتیا (سرعت) څه معنا لري؟

۴) یوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي ،چې د t وخت کې $S(t)= 5.t^2$ لار وهي.

په وختونو $t=1;2;3$ کې لحظوي چټکتیا(سرعت) وښایی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۴ – حل:

لحضوي جټکتیا د سملاسي تغیرارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

$$t=1:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(1+\Delta x)-s(1)}{\Delta x}=10+5\Delta x\Rightarrow$$

د $\Delta x\to 0$ لپاره باور لري: $10+5\Delta x\to 10$

$$t=2:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(2+\Delta x)-s(2)}{\Delta x}=20+5\Delta x\Rightarrow$$

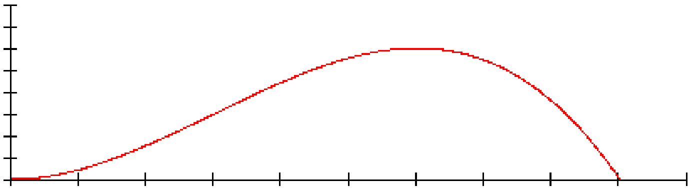
د $\Delta x\to 0$ لپاره باور لري:: $20+5\Delta x\to 20$

$\Delta x\to 0$

$$t=3:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(3+\Delta x)-s(3)}{\Delta x}=30+5\Delta x\Rightarrow f$$

د $\Delta x\to 0$ لپاره باور لري $30+5\Delta x\to 30$

تمرین : لاندې د $f(x)=-\frac{1}{288}x^3+\frac{1}{16}x^2\,;\,x>0$ تابع ګراف او په ورنږدې توګه د فوټبال میدان کې د توپ الوتنې منحني(کږه) ښایي، چې لاندې ځیره لري.



لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف:توپ کوم خورا جګ(ماکسیمال) جګوالی لري او د وهلتکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟

ب : د توپ وهلتکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لرې بیرته ځمکې ته راځي؟

پ : د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهنې ځای څخه ۹ متره لرې او ۲ متره جګ دی. ایا توپ له دې څخه جګ الوزي؟

ت : توپ د تور لاین(د x محور) څخه په ۲ متره جګوالي الوزي. له ګول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوی دی؟

تانجنت او نورمال.

تمرینونه III :

د **f(x)** ګراف تانجنت په ټکي **P(x_0 | f(x_0)).** کې:

1 - $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad x_0 = 2$

2 - $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \qquad x_0 = 2$

3 - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = -1$

4 - $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \qquad x_0 = 1$

5 - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \qquad x_0 = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

6 - $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \qquad x_0 = -\frac{3}{2}$

7 - $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \qquad x_0 = 3$

8 - $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \qquad x_0 = 1$

9 - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 0$

10 - $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 1$

حلونه

تمرینونه مشتقشمیرنه III

نتیجې او مفصل حلونه

نتیجې:

لومړی:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad x_0 = 2 \Rightarrow P_0(2|2) \qquad t(x) = -3x + 8$$

دویم:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \qquad x_0 = 2 \Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow P_0\left(2 \;\middle|\; \frac{11}{4} = 2{,}75\right) \qquad t(x) = -\frac{9}{4}x + \frac{29}{4}$$

دریم:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = -1 \Rightarrow P_0(-1|\,7) \qquad t(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$$

څلورم:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0(1|\,2) \qquad t(x) = 9x - 7$$

پنځم:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0\left(1 \;\middle|\; \frac{1}{2} = 0{,}5\right) \qquad t(x) = -2x + \frac{5}{2}$$

شپږم:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \qquad x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow P_0\left(-\frac{3}{2} \;\middle|\; -\frac{1}{8}\right) \qquad t(x) = \frac{19}{4}x + 7$$

اوم:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \qquad x_0 = 3 \Rightarrow P_0(3\,|-1) \qquad t(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

اتم:

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0\left(1 \;\middle|\; -\frac{9}{2}\right) \qquad t(x) = -6x + \frac{3}{2}$$

نهم:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 0 \Rightarrow P_0(0\,|\,4) \qquad t(x) = -4x + 4$$

لسم:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0(1\,|\,0) \qquad t(x) = -\frac{11}{3}x + \frac{11}{3}$$

مفصل حلونه1

لومړی:

شمیرنه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad x_0 = 2 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

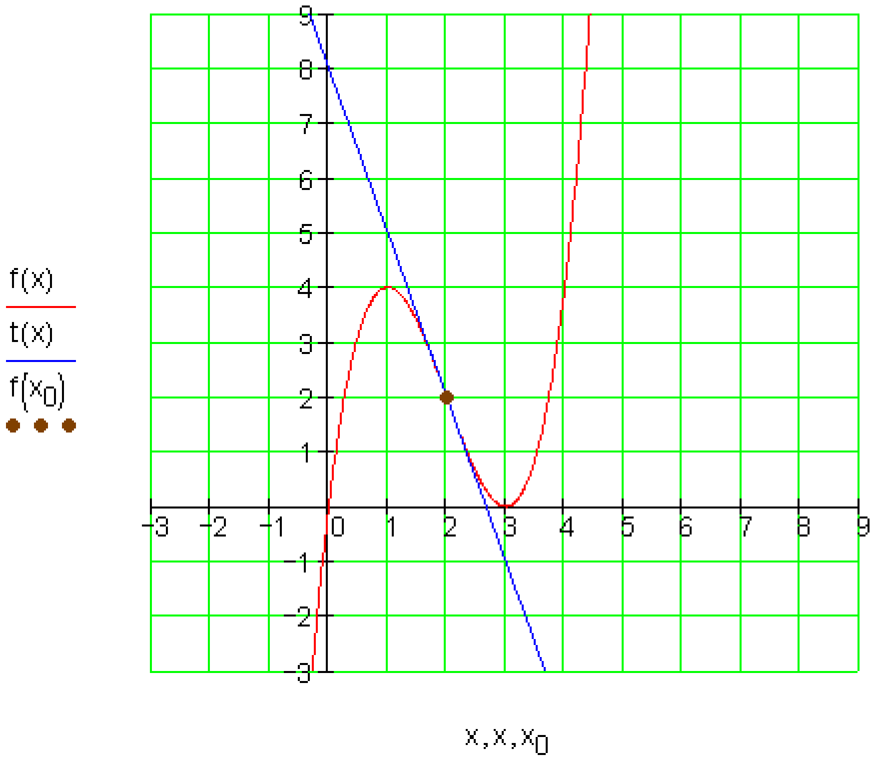
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f'(x_0) = f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$$

$$f(x_0) = f(2) = 8 - 24 + 18 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(2|\,2)}}$$

$$t(x) = -3(x - 2) + 2 = -3x + 6 + 2 = \underline{\underline{-3x + 8}}$$

گرافونه

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad x_0 = 2 \Rightarrow P_0(2|\,2) \qquad t(x) = -3x + 8$$



دویم: شمیرنه:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \qquad x_0 = 2 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{15}{4} \Rightarrow f'(x_0) = f'(2) = \frac{3}{4}\cdot 4 - \frac{9}{2}\cdot 2 + \frac{15}{4} = \frac{12}{4} - \frac{36}{4} + \frac{15}{4} = -\frac{9}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x_0) = f(2) = \frac{1}{4}\cdot 8 - \frac{9}{4}\cdot 4 + \frac{15}{4}\cdot 2 + \frac{9}{4} = \frac{8}{4} - \frac{36}{4} + \frac{30}{4} + \frac{9}{4} = \frac{11}{4} \Rightarrow$$

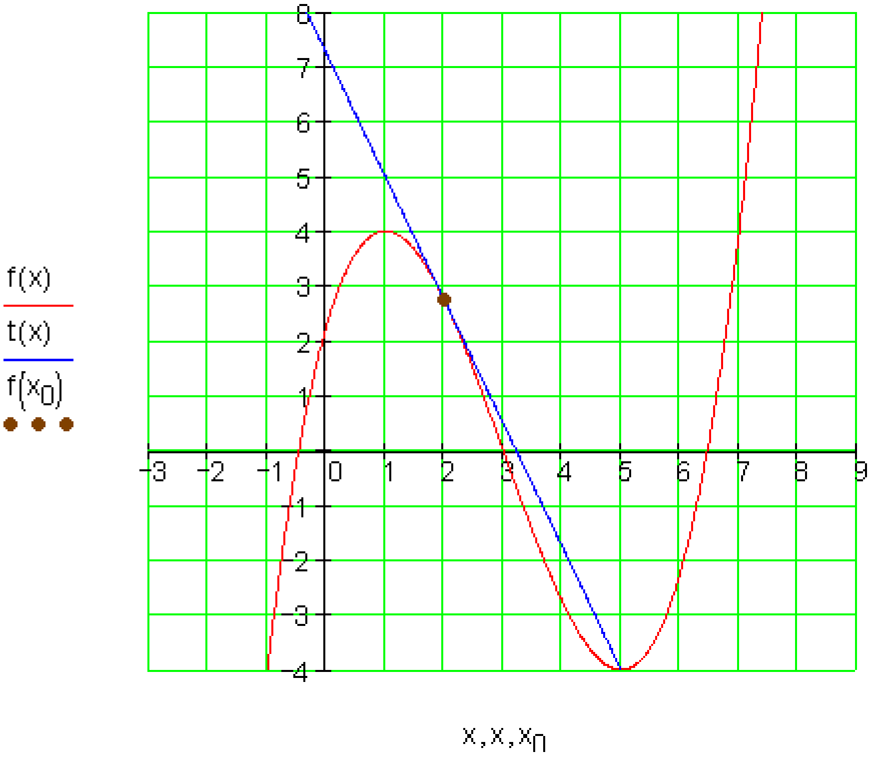
$$\Rightarrow P_0\left(2 \,\middle|\, \frac{11}{4} = 2{,}75\right)$$

$$t(x) = -\frac{9}{4}(x-2) + \frac{11}{4} = -\frac{9}{4}x + \frac{18}{4} + \frac{11}{4} = -\frac{9}{4}x + \frac{29}{4}$$

گرافونه

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \qquad x_0 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0\left(2 \,\middle|\, \frac{11}{4} = 2{,}75\right) \qquad t(x) = -\frac{9}{4}x + \frac{29}{4}$$



دریم: شمیرنه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad x_0=-1 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

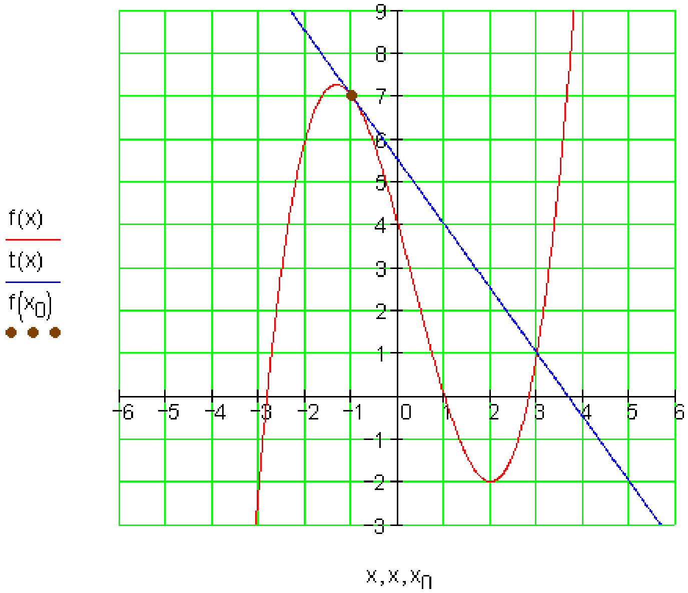
$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x-4 \Rightarrow f'(x_0)=f'(-1)=\frac{3}{2}+1-4=\frac{3}{2}+\frac{2}{2}-\frac{8}{2}=-\frac{3}{2}$$

$$f(x_0)=f(-1)=\frac{1}{2}\cdot(-1)-\frac{1}{2}\cdot 1-4\cdot(-1)+4=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{8}{2}+\frac{8}{2}=7 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(-1|7)}}$$

$$t(x)=-\frac{3}{2}(x+1)+7=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}+\frac{14}{2}=\underline{\underline{-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}}}$$

ګرافونه

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad x_0=-1 \Rightarrow P_0(-1|7) \qquad t(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}$$



خلورم: شمیرنه:

$$f(x)=x^3+3x^2-2 \qquad x_0=1 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x)=3x^2+6x \Rightarrow f'(x_0)=f'(1)=3+6=9$$

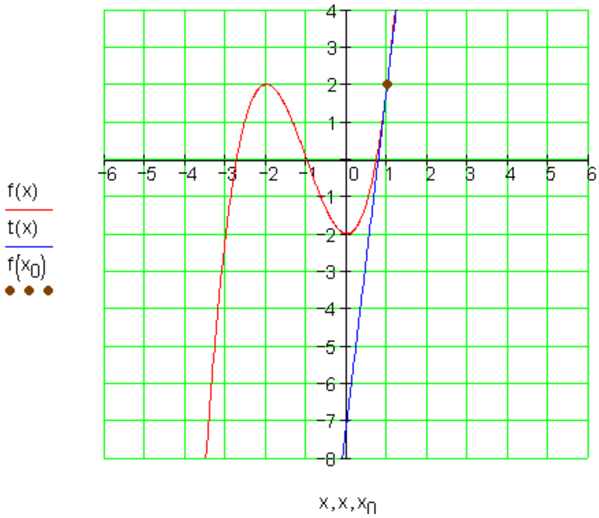
$$f(x_0)=f(1)=1^3+3\cdot 1^2-2=1+3-2=2 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(1|2)}}$$

$$t(x)=9(x-1)+2=9x-9+2=\underline{\underline{9x-7}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګراف

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0(1|\,2) \qquad t(x) = 9x - 7$$



پنځم: شمیرنه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \qquad x_0 = 1 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{5}{2} \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = \frac{3}{2} - 1 - \frac{5}{2} = -2$$

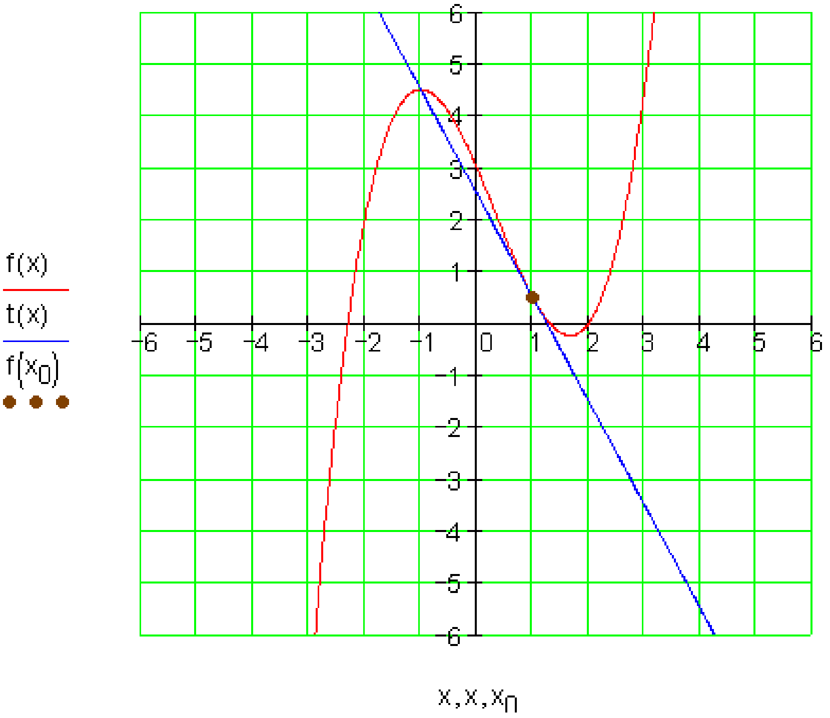
$$f(x_0) = f(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 3 = -\frac{5}{2} + \frac{6}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P_0\left(1\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)}}$$

$$t(x) = -2(x-1) + \frac{1}{2} = -2x + 2 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{-2x + \frac{5}{2}}}$$

ګراف

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0\left(1\,\middle|\,\frac{1}{2} = 0,5\right) \qquad t(x) = -2x + \frac{5}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



شپږم: شمیرنه:

$$f(x)=x^3-x^2-5x-2 \quad x_0=-\frac{3}{2} \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x)=3x^2-2x-5 \Rightarrow f'(x_0)=f'\left(-\frac{3}{2}\right)=3\cdot\frac{9}{4}-2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-5=\frac{27}{4}+\frac{12}{4}-\frac{20}{4}=\frac{19}{4}$$

$$f(x_0)=f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{27}{8}-\frac{9}{4}+\frac{15}{2}-2=-\frac{27}{8}-\frac{18}{8}+\frac{60}{8}-\frac{16}{8}=-\frac{1}{8}\Rightarrow \underline{\underline{P_0\left(-\frac{3}{2}\,\middle|\,-\frac{1}{8}\right)}}$$

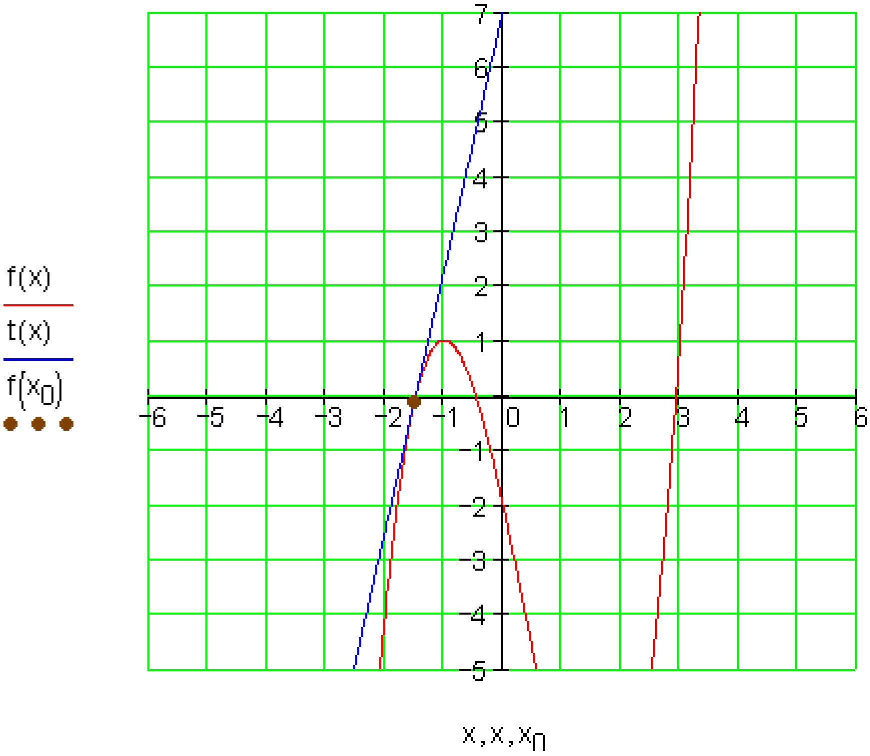
$$t(x)=\frac{19}{4}\left(x+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{8}=\frac{19}{4}x+\frac{57}{8}-\frac{1}{8}=\frac{19}{4}x+\frac{56}{8}=\underline{\underline{\frac{19}{4}x+7}}$$

گراف

$$f(x)=x^3-x^2-5x-2 \quad x_0=-\frac{3}{2}\Rightarrow P_0\left(-\frac{3}{2}\,\middle|\,-\frac{1}{8}\right) \qquad t(x)=\frac{19}{4}x+7$$

:

(c) ketabton.com: The Digital Library



اووم: شميرنه:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \qquad x_0 = 3 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x_0) = f'(3) = \frac{27}{4} - \frac{15}{2} + \frac{1}{2} = \frac{27}{4} - \frac{30}{4} + \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$$

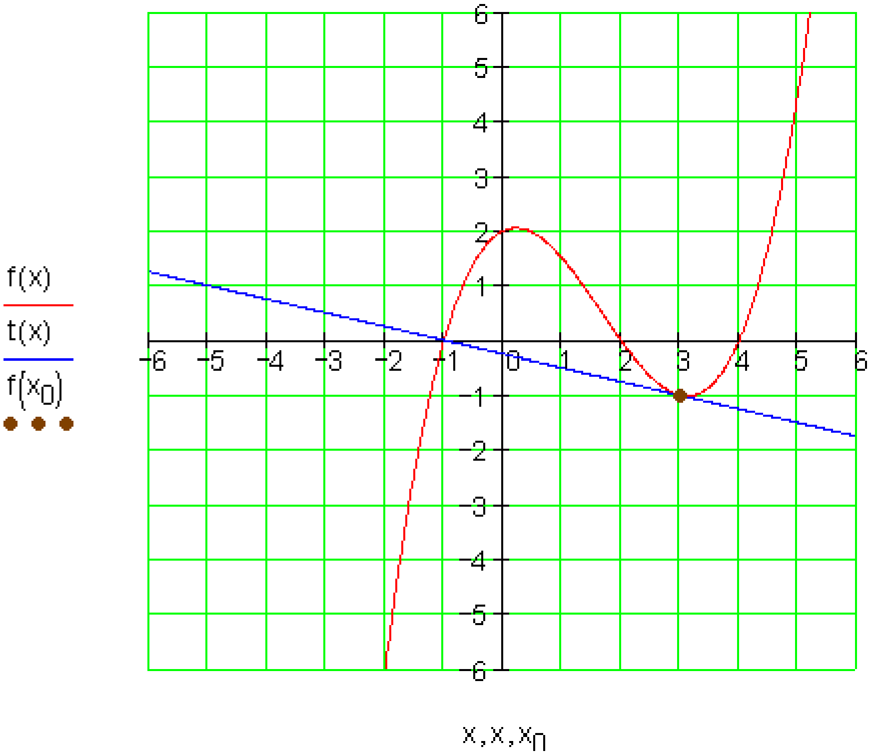
$$f(x_0) = f(3) = \frac{27}{4} - \frac{45}{4} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{27}{4} - \frac{45}{4} + \frac{6}{4} + \frac{8}{4} = -\frac{4}{4} - 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(3|-1)}}$$

$$t(x) = -\frac{1}{4}(x - 3) - 1 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - \frac{4}{4} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}}}$$

ګراف

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \qquad x_0 = 3 \Rightarrow P_0(3|-1) \qquad t(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



اتم: شمیرنه:

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \qquad x_0 = 1 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 3 - 3 - 6 = -6$$

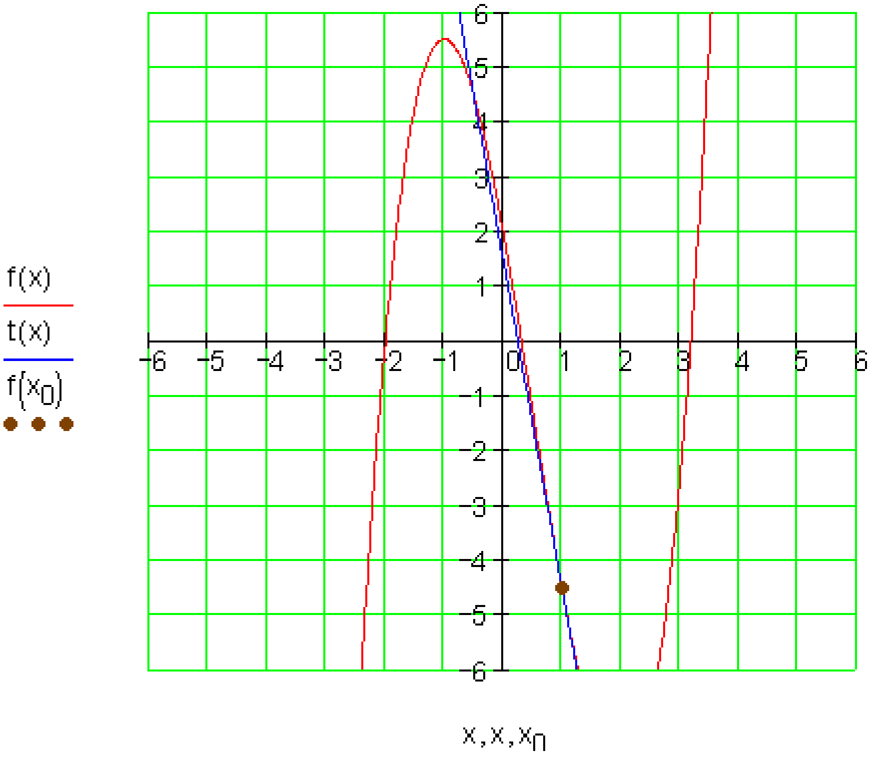
$$f(x_0) = f(1) = 1 - \frac{3}{2} - 6 + 2 = \frac{2}{2} - \frac{3}{2} - \frac{12}{2} + \frac{4}{2} = -\frac{9}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P_0\left(1 \middle| -\frac{9}{2}\right)}}$$

$$t(x) = -6(x - 1) - \frac{9}{2} = -6x + 6 - \frac{9}{2} = -6x + \frac{12}{2} - \frac{9}{2} = \underline{\underline{-6x + \frac{3}{2}}}$$

ګراف

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0\left(1 \middle| -\frac{9}{2} = -4,5\right) \qquad t(x) = -6x + \frac{3}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



نهم: شمیرنه:

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 0 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - 4 \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = -4$

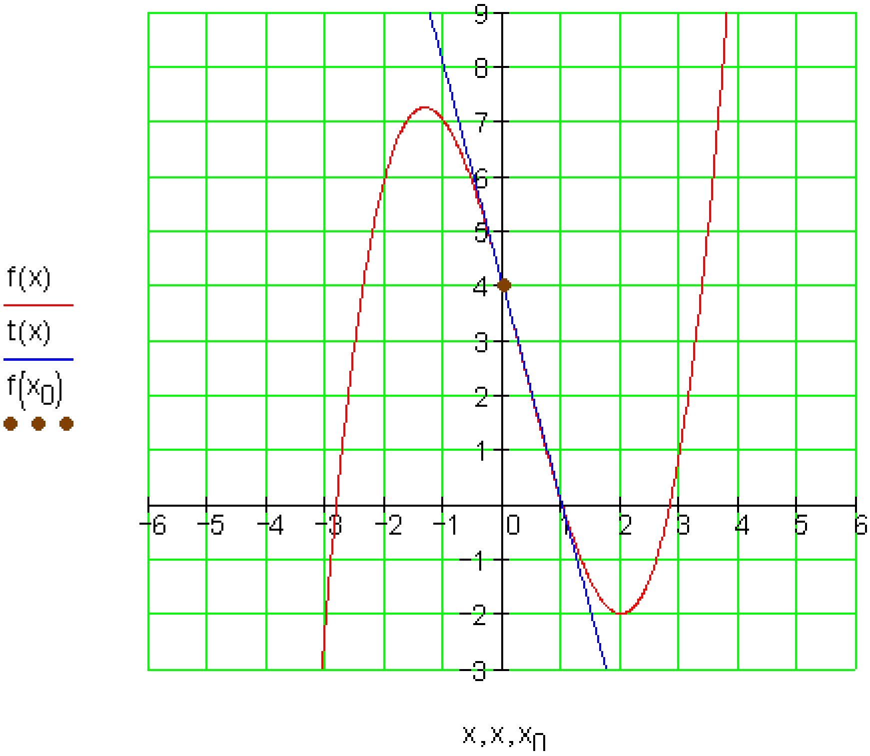
$f(x_0) = f(0) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(0|-4)}}$

$t(x) = -4(x - 0) + 4 = \underline{\underline{-4x + 4}}$

گراف

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 0 \Rightarrow P_0(0|4) \qquad t(x) = -4x + 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library



لسم: شمیرنه:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2-4x+4 \qquad x_0=1 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x)=x^2-\frac{2}{3}x-4 \Rightarrow f'(x_0)=f'(1)=1-\frac{2}{3}-4=\frac{3}{3}-\frac{2}{3}-\frac{12}{3}=-\frac{11}{3}$$

$$f(x_0)=f(1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-4+4=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{12}{3}+\frac{12}{3}=0 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(1|0)}}$$

$$t(x)=-\frac{11}{3}(x-1)+0=\underline{\underline{-\frac{11}{3}x+\frac{11}{3}}}$$

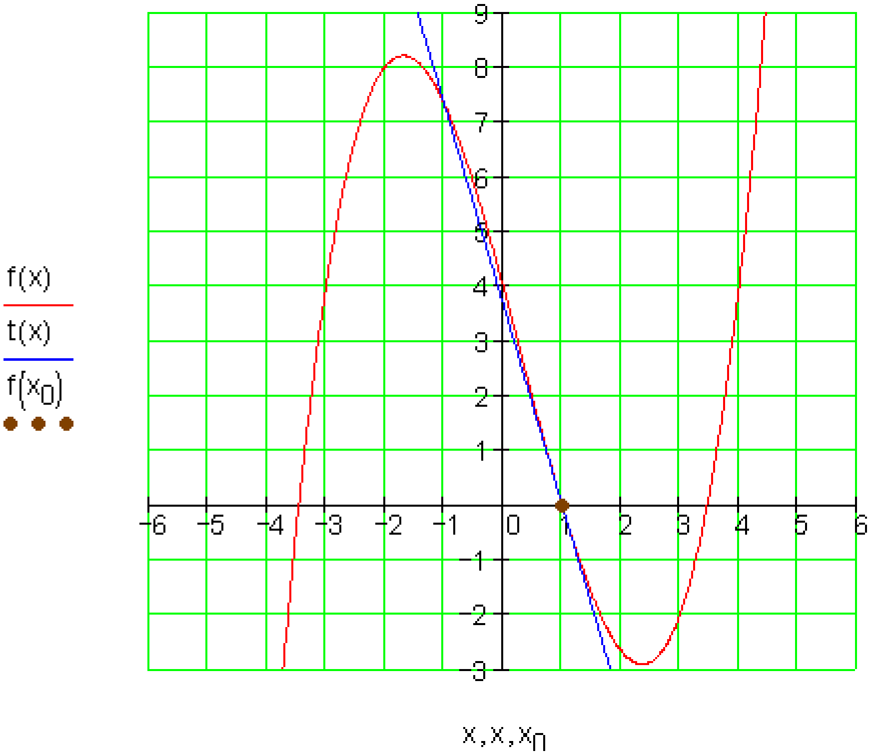
گرافونه:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2-4x+4 \qquad x_0=1 \Rightarrow P_0(1|0) \qquad t(x)=-\frac{11}{3}x+\frac{11}{3}$$

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مشتقشمېرنه VII

لومړی: ورکړشوي تابع: $\text{ı}\; f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x \,;\, x \in \mathbb{R}$

الف- f(x) په کوم ځای کې جګېدنه 2 لري؟

ب- د f(x) جګېدنه په x = 1,5 ځای کی 0,25- ده.

د همدې جګېدنې سره بې له شمېرنې بل ځای ورکړی.

د خپل ګومان په هکله دلیل راوړی

پ - f(x) په کومو ټکو کې پروت یا افقي تانجنت لري؟ مساوات یې ورکړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت - په سرچینه کې په f(x) باندې تانجنت وټاکئ

ټ - په f(x) باندې تانجنت د P (u | f(u)). په ټکي کې وټاکئ

ث - کومه کرښه f(x) په N (3 | 0) ټکي کې عمود غوځوي؟

دویم: – $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^2 - 1;\ x \in \mathbb{R}$ تابع ورکړ شوې

الف – کرکتریستیکي یا خوبیز ټکي و ټاکئ او اړونده تانجنت یې ورکړئ.

ب- په f(x) باندې تانجنت په ی x = 1 او x = -1 د y - محوذ غوځوي یا قطع کوي د دې پوښتنې دلیل راوړئ؟

دریم _ $f(x) = -x^4 + 2x^3;\ x \in \mathbb{R}$ ؛ تابع ورکړ شوې

الف - f(x) د x محور سره او د ټکو په هکله چې هلته افقي تانجنت لري مطالعه کړئ.

ب- t(x) په f(x) د P (1 | f(1)) په ټکي تانجنت دی.

د تانجنت مساوات وټاکئ. د t(x) غوځتکئ د f(x) سره وټاکئ.

پ – په کومو ټکو کې f(x) د 1/8 جګیدنې سره عمود لري؟ د عمود مساوات ورکړئ.

څلور – $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x;\ x \in \mathbb{R}$ ؛ تابع ورکړ شرې ده.

الف- f(x) په کرښیزو ضریبونو تجزیه کړئ او ګراف یې وکاږئ.

ب – په f(x) باندې تانجنتونو مساوات په x = 2 کې وټاکئ او دا تانجنت د الف په وضعیه قیمتسیستم کې رسم کړئ..

پ – ټکئ P (u | f(u)) داسې وټاکئ، چې په P د f(x) په تانجنت د f(x) په سرجینې تانجنت سره غبرګ یعنې موازي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت – په کوم ځاي کې f(x) خورا کوچنی تانجنت لرئ؟

پنځم- یوه تیګه د v0 = 7 m/s پیل چکتیا یا سرعت سره عمود پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت دیاګرام دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10 \frac{m}{s^2}$ سره.

الف- په کوم وختt کې د تیګې جګوالی صفر دی؟

ب- د جګېدنې ماکسیمال جګوالی وشمېرئ.

حلونه

مشتقشمرنه VII

نتیجې او مفصل حلونه

مفصل حلونه:

لومړی:

الف – $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x; f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$

جګوالی پهx0 کې ارزښت 2 لرئ

$$\Rightarrow f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2 - 1 = 2 \Rightarrow \underline{x_{01/2} = \pm 3}$$

تابع دF(x) $x_{1/2} = \pm 3$ په ځایونو کې جګیدنه 2 لري.

ب - $f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ یو پارابول او له دې امله محور سیومتري دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له $f'(1,5)=0,25$ څخه $f'(-0,25)=-0,25$ لاس ته راځي.

د$f(x)$ $x_{1/2} = \pm 1,5$ په ځای کې0,25- جګیدنه لري.

پ–په $f(x)$ یو پروت یا افقي تانجنت په ټکو کې پروت دی، جې هلته جګوالی صفر وي.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$
$$f\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\,;\, f\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3} \Rightarrow P\left(\sqrt{3} \mid -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right);\, Q\left(-\sqrt{3} \mid \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$$

تانجنتونه کرښې دي، د x - محور سره غبرګې ځغلي.

$$t_1(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\,;\, t_2(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

ت –

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x\,;\, f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$$

په سرچینه کې د تانجنت مساوات: x0 = 0

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$f'(x_0) = f'(0) = -1;\, f(x_0) = f(0) = 0$$
$$\Rightarrow t(x) = -1(x - 0) + 0 = \underline{\underline{-x}}$$

ټ –

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x\,;\, f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$$

د تانجنت مساوات د $P(u;f(u))$ په ټکي کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x) = f'(u)(x-u) + f(u)$$

$$f'(u) = \frac{1}{3}u^2 - 1;\ f(u) = \frac{1}{9}u^3 - u$$

$$t(x) = \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)(x-u) + \frac{1}{9}u^3 - u = \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)x - \frac{2}{9}u^3$$

ث – کرښه، چې f(x) په (0 | 3) N کې غوڅوي، په دې ټکي کې عمود ده.

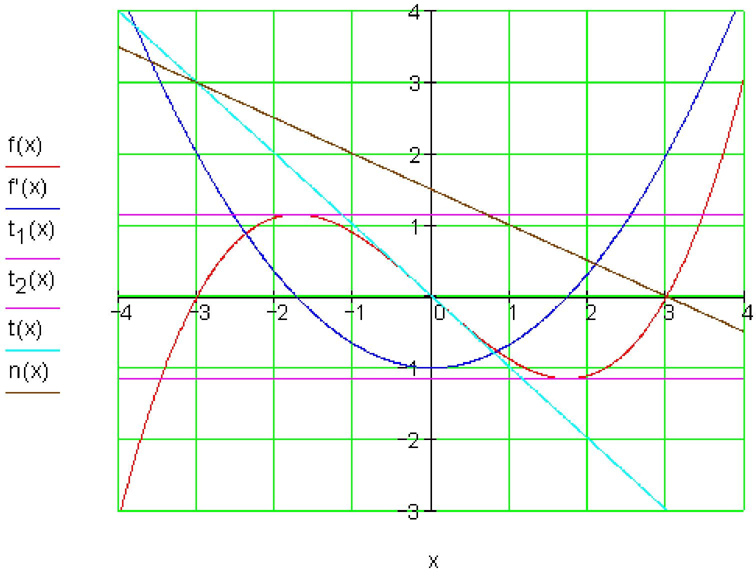
$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x;\ f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1;\ N(3|0) \Rightarrow x_0 = 3$$

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$-\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{2};\ f(x_0) = f(3) = 0$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{2}(x-3) + 0 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

گراف : Die Graphen:



(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم: الف- کرکتریستیک یا خوي ټاکونکي ټکي صفرځايونه دي، چې په دې ټکو کې د تانجنتونو جګوالی دی ، په هغو ياکومو کې چې پروت يا افقي تانجنت شته وي.

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^2 - 1;\ f'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x$$

صفرځايونه: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^2 - 1 = 0$

بي- یا دوه مربعيز مساوات.

د په ځاي اينوونې Substitution له لارې حل يا اوبيونه:

$$x^2 = z \Rightarrow f(z) = \frac{z^2}{4} - \frac{3}{4}z - 1$$

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{z^2}{4} - \frac{3}{4}z - 1 = 0 \Rightarrow z_1 = 4;\ z_2 = -1$$

د Z2 لپاره حل نه شته.

$$z_1 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(2|0);\ P_{x2}(-2|0)}}$$

$$f'(2) = 2^3 - \frac{3}{2}\cdot 2 = \underline{\underline{5}};\ f'(-2) = (-2)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-2) = -8 + 3 = \underline{\underline{-5}}$$

د پروت تانجنت سره ټکي.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$P_2(0|-1);\ P_2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,|\,-\frac{25}{16}\right);\ P_3\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\,|\,-\frac{25}{16}\right)$$

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^2 - 1;\ f'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تانجنت په x = 1 او x = -1 کې.

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$t_1(x) = f'(1)(x-1) + f(1)\,;\; t_2(x) = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$

د ټکي سيومتري له امله

$$f'(1) = -\frac{1}{2}\,;\; f'(-1) = -f'(1) = \frac{1}{2}$$

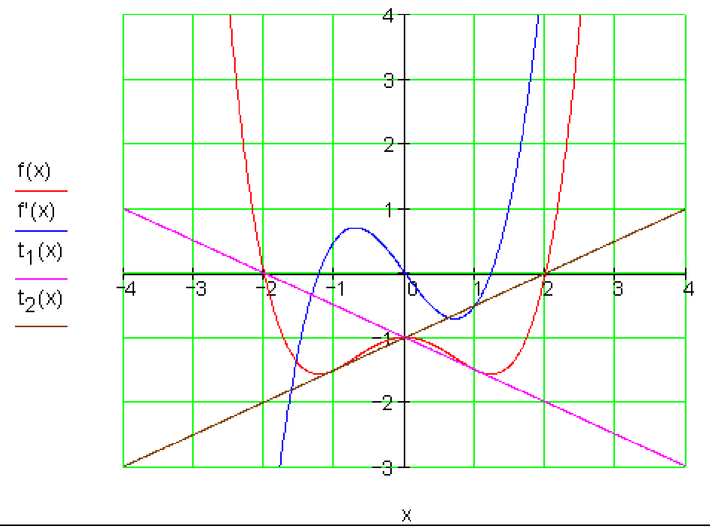
د محور سيومتري له امله

$$f(1) = -\frac{3}{2}\,;\; f(-1) = f(1) = -\frac{3}{2}$$

$$t_1(x) = -\frac{1}{2}(x-1) - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}x - 1$$

$$t_2(x) = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x - 1$$

دواړه تانجنتونه د y محور په ټکي $P_y\,(0;-1)$ کې غوڅوي.
ګرافونه:



(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم: الف- $f(x) = -x^4 + 2x^3 \,;\, f'(x) = -4x^3 + 6x^2$

صفرځايونه : $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 2x^3 = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0 \,;\, x_4 = 2$

$\underline{\underline{P_{x1/2/3}(0|0)}}$ درېواره صفرځاي او $\underline{\underline{P_{x4}(2|0)}}$

پروت يا افقي تانجنتونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 6x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 \,;\, x_3 = \frac{3}{2}$$

$$f(0) = 0 \,;\, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{16} \Rightarrow \underline{\underline{P_{1/2}(0|0) \,;\, P_3\left(\frac{3}{2} \middle| \frac{27}{16}\right)}}$$

ب –

$$f(x) = -x^4 + 2x^3 \,;\, f'(x) = -4x^3 + 6x^2 \,;\, P(1|f(1))$$

پهf(x) تانجنت د x0 = 1 ټکي کې د f'(1) = 2 او f(1) = 1 سره.

له دې لاس ته راځي: t(x) = 2x -1

د t(x)غوځېکی د f(x) سره

$$f(x) = t(x) \Leftrightarrow -x^4 + 2x^3 = 2x - 1 \Leftrightarrow -x^4 + 2x^3 - 2x + 1 = 0$$

د P(1;1) سره ځاي په ځاي کونې يا اينوونې سره ډبل صفرځايونه

$$x_{1/2} = 1 \Rightarrow (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \,:$$

پولينوموېش:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(-x^4+2x^3 \quad -2x+1\right):\left(x^2-2x+1\right)=-x^2+1$$

$$\underline{-\left(-x^4+2x^3-x^2\right)}$$

$$x^2-2x+1$$

$$\underline{-\left(x^2-2x+1\right)}$$

$$-x^2+1=0 \Rightarrow x_{3/4}=\pm 1$$

Q(-1;-3) <= F(-1) = -3 د t(x) د fx) سره یو بل غوځتکی دی.

پ-

$$f(x)=-x^4+2x^3\,;\,f'(x)=-4x^3+6x^2$$

$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

د عمود جګوالی دی:

$$\frac{1}{8}\Rightarrow-\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=-8\Leftrightarrow-4x^3+6x^2=-8\Leftrightarrow-4x^3+6x^2+8=0$$

X = 2 د $-4x^3+6x^2+8=0$ یو حل دی (د ازماینت له لارې پیدا شوی)

هورنر Horner

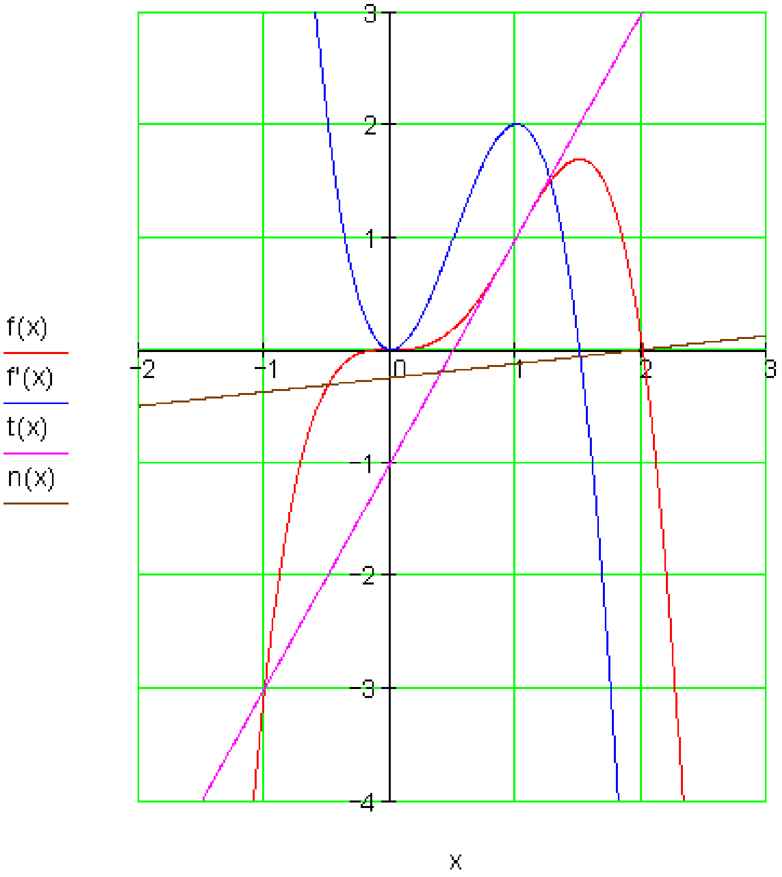
$$\begin{array}{ccccc} & -4 & 6 & 0 & 8 \\ x=2 & & \underline{-8} & \underline{-4} & \underline{-8} \\ & -4 & -2 & -4 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -4x^2-2x-4=0 \\ p=\frac{1}{2}\,;\,q=1\Rightarrow D<0 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بل حل نه شته.

$$x = 2 \Rightarrow x_0 = 2 \Rightarrow n(x) = \frac{1}{8}(x-2) + \underbrace{f(2)}_{0} \Rightarrow n(x) = \underline{\underline{\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}}}$$

گرافونه:

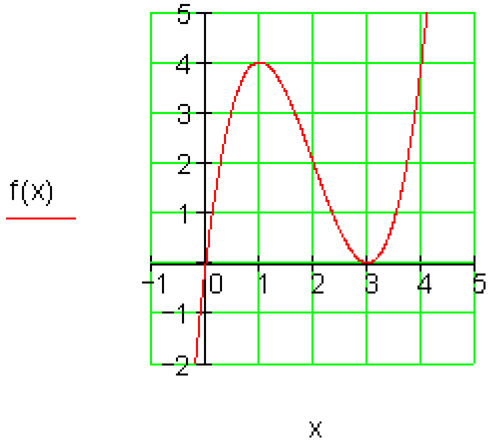


ځلورم:

الف-

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$
$$= x\ \underbrace{(x^2 - 6x + 9)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دپینوم دویم فرمول

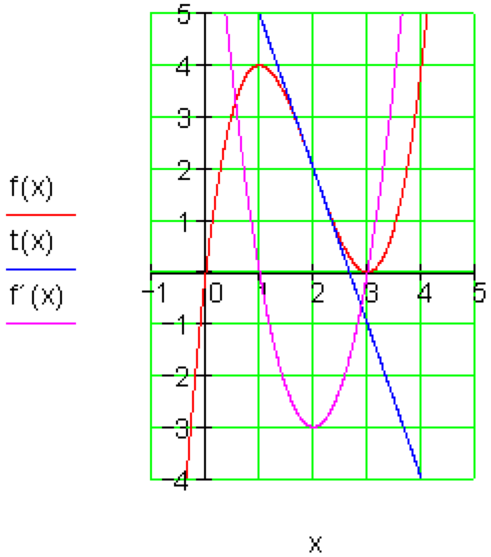
$$= x(x-3)^2$$

$$\Rightarrow P_{x1}(0|0);$$

$$P_{x2/3}(3|0)$$

مماس یا لمستکی

ب-



$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$x_0 = 2$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(2) = -3$$

$$f(2) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = -3(x-2) + 2$$

$$= \underline{\underline{-3x + 8}}$$

پ –

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x;\ f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

تانجنت په سرچینه کې $f'(0) = 9$ جګوالی لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې سره غبرګ هر تانجنت همدا یا برابر جګوالی لري پس هر په P(u;f(u)) ټکي همز

$$f'(u) = 9 \Leftrightarrow 3u^2 - 12u + 9 = 9 \Rightarrow u_1 = 0;\ u_2 = 4$$
$$u_1 = 0 \Rightarrow f(u_1) = f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0|0)}}$$
$$u_2 = 4 \Rightarrow f(u_2) = f(4) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(4|4)}}$$

ت –

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x;\ f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

د $f'(x)$ د $f(x)$ جګېدنه ده، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د هغه مینیموم د هغه غوځېکی یا د تقاطع ټکی دی، هلته $f'(x)$ یو پروت یا افقي تانجنت لري.

شرطونه: $f''(x) = 0$

$F''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

د $x = 2$ په ځای کې $f(x)$ خورا کمه جګېدنه لري.

$f(2) = 2 \Rightarrow$

په $P(2;2)$ ځای کې $f(x)$ خورا کمه جګېدنه لري.

هغه هلته ارزښت $f(2) = -3$ لري.

پنځم:

الف - $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $v_0 = 7\frac{m}{s}$ $: g = 10\frac{m}{s^2}$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v(t) = s'(t) = v_0 - gt$$
$$v(t) = 0 \Leftrightarrow v_0 - gt = 0 \Rightarrow t = 0{,}7\ s$$

وروسته له 0,7S تیګه v(t)=0 سرعت لري

ب – د میلان یا جګېدنې خورا لوي یا ماکسیمال جګوالی

کښته لور ته وتز پارابول دی، چې ککرټکی یا رآس یې د غورځوني ماکسیمال جګوالی ورکوي.

د ککرټکي یا رآس شرطونه: $s'(t) = v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0{,}7\ s$ د دې لپاره پرخه الف وکورئ.

خورا لوي جګوالی: $s(0{,}7) = 2{,}45$

خورا لوي یا ماکسیمال جګوالی 2,45 m دی.

پوښتنې

مشتقشمېرنه VIII

اول – د یوې فابریکې ټول مصرف دME 10 ماکسیمال تولید په K(x) سره ښایو. د یوه ME د خرڅلاو نرخ 28 GE دی.

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$$

الف – د نرختابع مشتق وشمېرئ. (مشتقارزښت تابع یا پوله نرخ تابع) او ګراف یې وکاږئ. ګراف یې تشریح کړئ.

ب - مینیمال یا خورا کم د مشتقلګښت وشمېرئ.

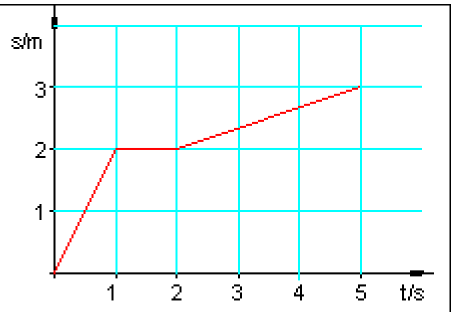
پ – وښایئ، چې د هر تولید ډېرئ یا سټ مشتقنرخ یا مشتقلګښت مثبت دی.

ت – په کومه ورشو کې ګټې فکر وشي؟

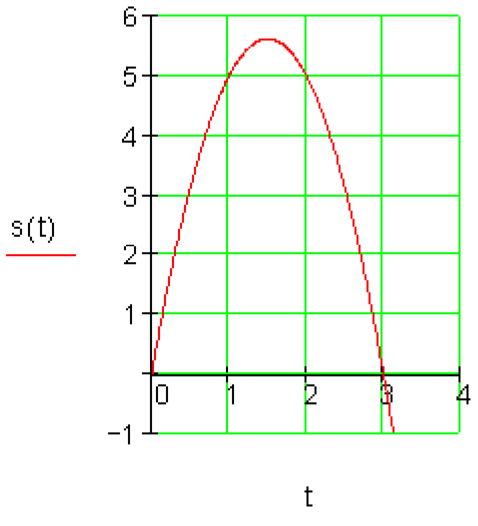
(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ - په کومه ورشو کې ګټه زياتېږي؟

دويم _ د يوه خوځنده جسم يا تن د لار - وخت- دياګرام s(t) ورکړی

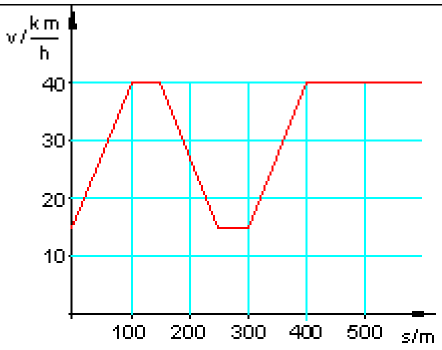
	الف – دا حرکت تشريح کړی پ - د اړونده چټکتيا – وخت – دياګرام رسم کړی، که باور ولري: $v(t) = s'(t)$.

دريم – تابع د يوه خوځښت يا حرکت لار د لار – وخت دياګرام کې ښايي.

الف – يو روځنی بېلګه ورکړی، چې دا لار په کوته کولای شي. د کړې يا منحنې دا لار د $t > 3$ لپاره فزيکي په څه مفهوم دی؟ ب – د دې خوځښت يا حرکت لپاره د لار – وخت – قانون دی: $$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$ a او v_0 و ټاکی. پ – دې سره اړوند د چټکتيا – وخت – دياګرام رسم کړی او دا تشريح کړی. يو منفي سرعت يا چټکتيا په څه معنا دی؟	

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم:

د یوه خوزښت د چټکتیا لار ورکړی. دا دیاګرام تشریح کړی. د ممکنه توټه کرښو تلنلار په هکله ویناوې وکړې.	

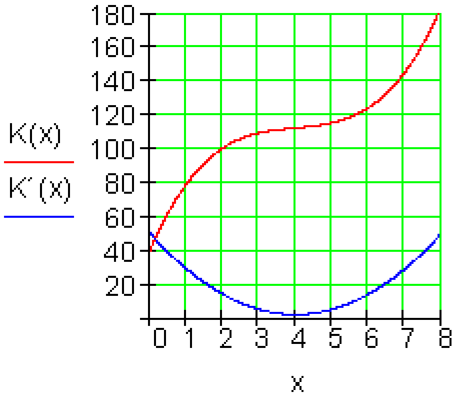
حلونه

مشتقشمیرنه VIII

مفصل ځوابونه:

لومړی:

الف-

الف - $K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$ $K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$ د پولي لګښت ګراف پورته لور ته واز پارابول دی. په ککره یا رآس کې یې پوله لګښت خورا کم دی.	

ب – د خورا کم مشتقلګښت لپاره شرطونه : $K''(x) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$$
$$K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$$
$$K''(x) = 6x - 24$$
$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 24 = 0 \Rightarrow x = 4$$
$$K'(4) = 2$$

له دې لاس ته راځي: د یوه 4ME (څلور ډېرى یا سټ واحدونه)تولید مشتقلګښت د 2GE/ME سره خورا کم دی.

پ –

$K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$ د $K'(4) = 2$ لپاره مثبت دی.

که له نیونې یا فرضیې سره سم $K'(x)$، $x \in \mathbb{R}_+$ مثبت وي، د صفرځاي د لرلو اجازه نه شته.

موږ $K'(x)$ په صفرځایونو څېړو:

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 50 = 0$$
$$\Rightarrow p = -8;\ q = \frac{50}{3};\ D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 16 - \frac{50}{3} < 0$$

له دې لاس ته راځي جې حل یا اوبی نه شته.

مشتقلګښت د هر تولید لپاره مثبت دی.

څه چې د ښوولو وو.

ت – د لاس ته راوړنې (یعنې هر څه چې پلورل شوي وي) تابع: $E(x) = 28x$ (له پوښتنې کولو لاس ته راځي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګټې تابع: $G(x) = E(x) – K(x) = -x^3 + 12 x^2 - 22x – 40$

ګټه هلته کیږي، چې د ګټې تابع مثبت ارزښت لري.

ازمایو:

$G(4) = 0$; $G(5) = 25$ ، پس د $G(x)$ صفرځای $x_1 = 4$ دی.

هورنر:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 12 & -22 & -40 \\ x=4 & & -4 & 32 & 40 \\ \hline & -1 & 8 & 10 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow -x^2 + 8x + 10 = 0$$

$$x_{2/3} = 4 \pm \sqrt{26} \Rightarrow x_2 \approx 9{,}1$$

د $4 \le x \le 9{,}1$ لپاره فابریکه په ګټهکار کوي.

ټ- – د ګټې زیاتیدل څکه، چې $G(x)$ مثبته جګېدنه لري او $G(x) > 0$ دی.

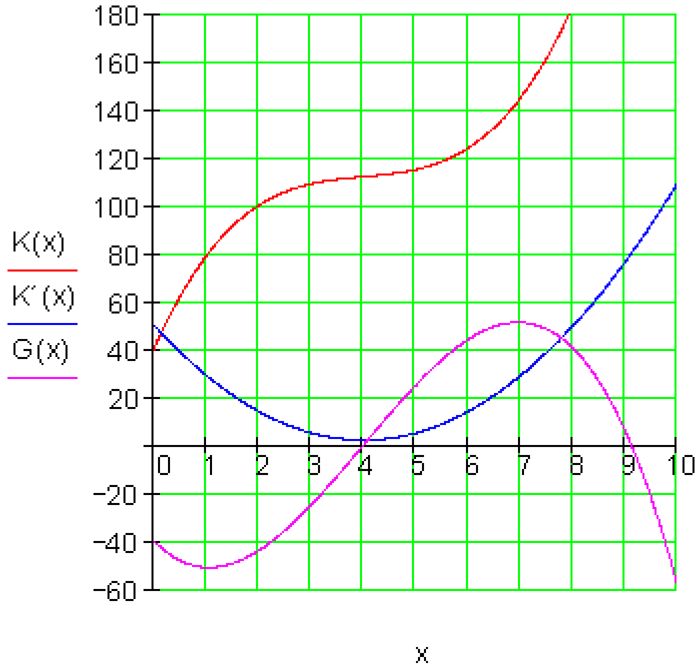
یعنې: $G(x) > 0 \wedge G'(x) > 0$

د $G'(x) = -3x^2 + 24x – 22 > 0$ $x \in \left[4 - \sqrt{\frac{26}{3}} ; 4 + \sqrt{\frac{26}{3}}\right]$ لپاره یا $x \in [1{,}05 ; 6{,}9]$

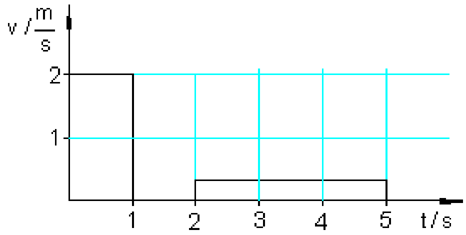
د ګټې زیاتیدنه: $[4 ; 9{,}1] \cap [1{,}05 ; 6{,}9] = [4 ; 6{,}9]$

ګرافونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



دویم:

ب-	الف – له 0 تر 1 s پورې:
	خوزښت د مساوي پاتې چټکتيا سره .v = 2 m/s له 1 تر 2 s پورې. ځاي په ځاي دریدنه: v = 0 m/s له 2 تر 5 s پورې. خوزښت د مساوي پاتې چټکتيا سره: v = 1/3 m/s

دریم: الف – یو شی عمود پورته لور ته غورځول کیږي. د $t > 3$ s لپاره $s < 0$ دی، دا په دي معنا چې دا شی د غورځول ځاي څخه لاندې یا کښته دی.

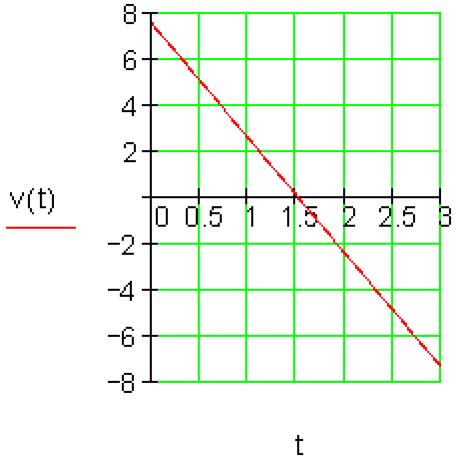
(c) ketabton.com: The Digital Library

ب - $s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t$ د خوزښت مساوات.

د a او v0 د خوزښا لپاره د ګراف له دوه ټکو څخه کار اخلو.

$$P_1(1|5): s(1)=\frac{1}{2}a+v_0=5$$
$$P_2(3|0): s(3)=\frac{9}{2}a+3v_0=0$$
$$a=-5;\ v_0=7,5$$

a<0 په دې معنا، چې دا يو ځنډشوی حرکت دی.

	پ - $v(t)=s'(t)=at+v_0=-5t+7,5$ چټکتیا په پیل کې مثبت ده، دا په دې معنا چېجسم یا بدن پورته لور ته خوزي. مګر دا کمیږي او t = 1,5 s سره صفر دی. بدن هغه خپل خورا جګ جګوالي ته ورسېده. وروسته جګوالی منفي دی، بدن لویږي، هغه ښکته لور ته خوزي.

څلورم:

0 - 100 m: چټکتیا زیاتیږي.

100 - 150 m چټکتیا براپره پټیږي 40 km/h.

150 - 200 m [ټکتیا کمیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

250 - 300 m چټکتیا برابره پاتیږي..15 km/h :

300 - 400 m چټکتیا زیاتیږي.

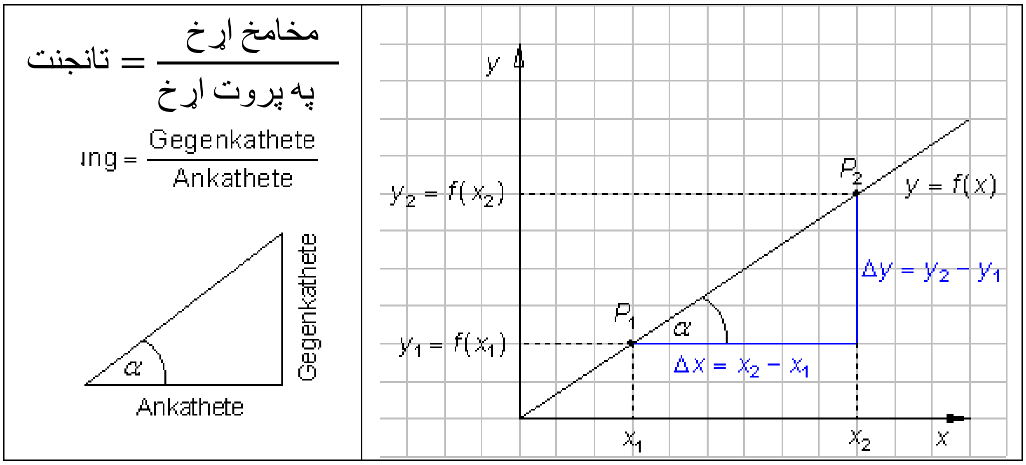
له 400 m   وروسته چټکتیا ثابته پاتیږي. 40 km/h.

روښانه ونه: په کښته لوېدلي سرک په تعجیل یا په بیړه کیږي، پسې سرک هوار دی.

ورپسې سرک مایل په غره پورته کیږي جتکتیا تر 15 km/h پورې کمیږي. پسې کښته لویږي، چې سرعت یا چټکتیا بیرته زیاتیږي. له دې وروسته هغه خورا جګه د 40 km/h چټکتیا یا سرعت   ساتلې پاتیږي په دا پسې لږ پاتې کرښه باندې.

تولګه :

د کرښې جګیدنه:



د کرښې لپاره د جګیدنې فرمول

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{مخامخ اړخ}}{\text{په پروت اړخ}} = \text{جګیدنه} \qquad \text{یا} \qquad \frac{f(x1)-f(x0)}{x1-x0} = \text{جګیدنه}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

ټکی $P_0(2|3)$ او $P_1(5|7)$ په کربنه پراته دي

د $x_0 = 2$ او $f(x_0) = f(2) = 3$ سره

همداسي $x_1 = 5$ او $f(x_1) = f(5) = 7$ د کربښي جګیدنه ده:

جګیدنه= $Steigung = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(5) - f(2)}{5-2} = \frac{7-3}{5-2} = \frac{4}{3}$

د یوې کربښې جګیدنه

موږ لروده: $\Delta x = x_1 - x_0$

موږ دا مساوات په x1 پسي بنه بدلوو

$$\Delta x = x_1 - x_0 \,|+x_0 \Leftrightarrow \Delta x + x_0 = x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

اوس د جګیدنې فرمول کې لیکو:

د $f(x_1)$ په ځای $f(x_0 + \Delta x)$ د $x_1 - x_0$ په ځای Δx

له دې سره د جګیدنې فرمول دا بنه لري:

جګیدنه= $Steigung = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

دا فرمول کمښت وېښ دفرنسوېش بولو.

موږ د دې فرمول باوریوالی د پورته تمرین سره ازمایو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P_0(2|3)$ او $x_0 = 2$ $P_1(5|7)$ او $\Delta x = x_1 - x_0 = 5 - 2 = 3$

جگيدنه=

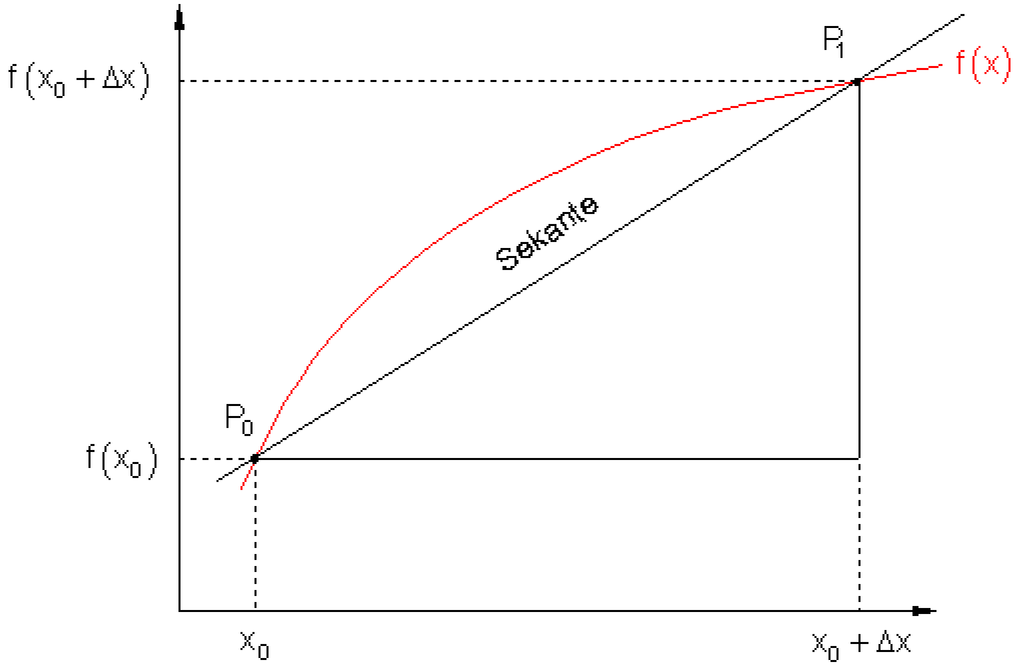
$$\text{Steigung} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(2+3) - f(2)}{3} = \frac{f(5) - f(2)}{3} = \frac{7-3}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

د يوې كربنې باوريوالى كيدى شي هم د كمبنتوپش سره وتاكل شي.

د سيكانت جگيدنه او د تانجنت جگيدنه

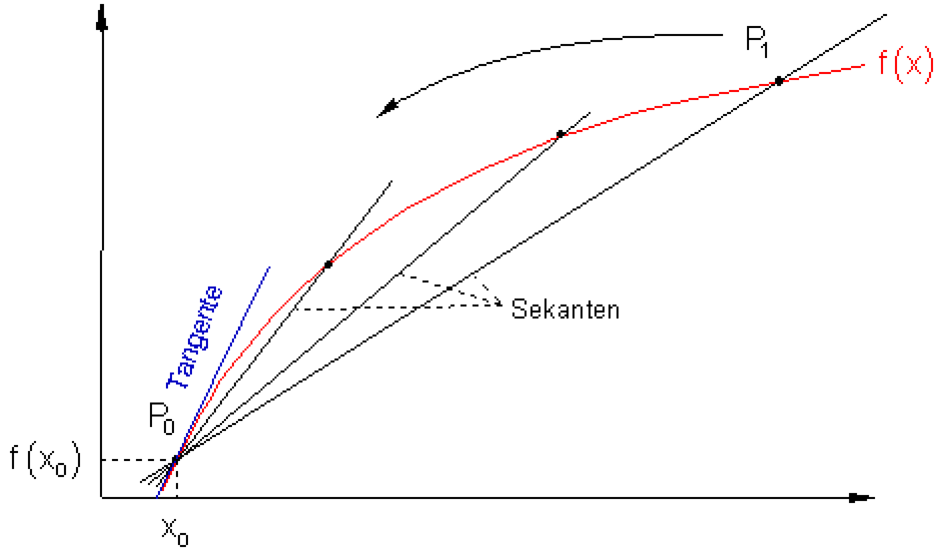
پرابلم: د يوه په خوښه تابع f(x) په ټكي P_0 كي د گراف جگيدنه څومره لويه ده؟

د سيكانت يا ټوټهووني جگيدنه د P_0 او P_1 ترمنځ منځنى جگيدنه.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د سیکانت سره څه پیښیږي، که موږ ټکی P_1 تل پسې د ټکي P_0 په لور و خوزوو یا بوزو؟



سیکانت یا غوڅووني تل د f(x) ګراف ته ور نږدې کیږي.

که P_1 په P_0 ولویږي یا پریوځي، نوره نو بیا سیکانت یا غوڅووني نه شته. دا بیا تانجنت شوی دی.

تانجنت یوه کرښه ده، چې د f(x) ګراف په ټکي P_0 کې لمسوي.

د تعریف یا پیژند له مخې د یوه د ګراف جګیدنه په ټکي P_0 کې د تانجنت د جګوالي سره برابره ده.

کمښتوېش، دفرنشلوېش، مشتق او د جګیدني تابع

د دې لپاره چې د یوه ګراف f(x) د x_0 په ځای کې یعني په ټکي P_0 (x_0 | f(x_0)) کې وشمیرو، کیدی شي دسیکانتجګیدني فرمول لپاره دا ،، دلتا،، تل کوچنی شي، کوم چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټکي P_1 راکښنه د P_0 په لور راکوي يا په ګوته کوي.

(کمبنتوپش) د سيکانت جګيدنه= $\text{Sekantensteigung} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

د ګراف $f(x)$ جګيدنه د x_0 په ځای کې د پوله جوړوني له لارې راکوي يعني

(دفرنځيالوپش) $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

پوله ارزښت په دې معنا، چې ،، x دلتا،، د صفر په لور هڅيږي، يعني په خوښه کوچنی کيږي، بې له دې چې ټيک صفر شي. ک د ،، x دلتا ،، لپاره ارزښت صفر ايښول شوی وی، نو به و يوه نه تعريف شوي افاده ا ووينه لاس ته راوړې وی.

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+0)-f(x_0)}{0}=\frac{f(x_0)-f(x_0)}{0}=\frac{0}{0}$$

تعريف نه

په ياد ولره: د دفرنشلوپش

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}:=f'(x_0):=\frac{dy}{dx}$$

د x_0 په ځای کې د تابع (f(x مشتق يا رابيليدنه بلل کيږي او د x_0 په ځای کې د (f(x جګيدني لپاره يوه کچه ونه ده

د مشتق بيلګه:

تابع $y=f(x)=x^2$ لرو، غواړو د x=x0 په ځای کې مشتق پيداکړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

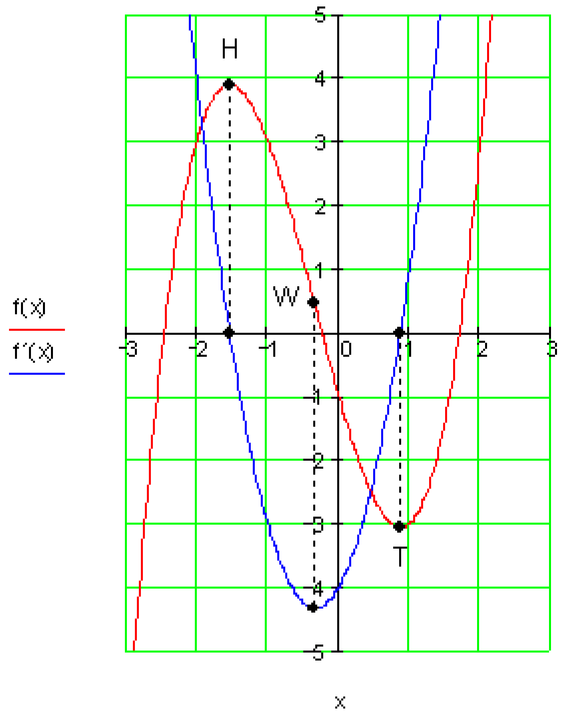
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0+\Delta x) = \underline{\underline{2x_0}}$$

دا چې د $f(x) = x^2$ لپاره ځای $x = x0$ په خوښه ټاکل کیدی شي، د دې تابع لپاره باور لري: (د مشتق- یا رابیلیدني تابع) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1$ $\qquad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$



د مشتق – یا رابیلیدني تابع $f'(x)$ په ځای سړی د جګیدني تابع هم وایي، ځکه چې دا ابع د هر تابع ارزښت x لپاره د x په ځای کې د مشتق شوې تابع جګوالی ورکوي.

دا ترځنګ د یوه تابع ګراف دی، هم داسې د مشتق تابع په یوه کواوردینات سیستم کې انځوروي.

د مشتق – یا رابیلیدني تابع $f'(x)$ په ځای سړی د جګیدني تابع هم وایي، ځکه چې دا ابع د هر تابع ارزښت x لپاره د x په ځای کې د مشتق شوې تابع جګوالی ورکوي.

دا پورته ترځنګ د یوه تابع ګراف دی، هم داسې د مشتق تابع په یوه کواوردینات سیستم کې انځوروي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام ولره:

په افراطي ځایونو (جګټکو، ټیټ ټکو) کې د مشتق تابع هر ځل ارزښت صفر لري.

په اوړونټکو – یا انعطاف ټکوکې (W) د مشتق تابع یو افراطي ځای لري.

یوغړیزوالي

د یوغړیزوالي خویونه:

یوغړیزې توابع(Monotony (یوناني: یوغړیز، برابرېدوله)

جګیدونکې(متزاید)، ټیټیدونکې(متناقص) توابع(جګ-ټیټیدونکې توابع)

که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره دf یوه تابع په یوه اینټروال کې $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$ وي، نو تابع په دې اینټروال کې مونوټون جګیدونکې(- ټیټیدونکې) بلل کیږي، که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري، نو دا $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$کره یا ټینګه مونوټون جګېدونکې (همغږیز ټیټېدونکې) بلل کیږي.

لاندې قواعد، چې له همغږیزوالي په لاس راځي، د همغږیزوالي حالت لپاره ګټور دي.

دf یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې مونوټون جګېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

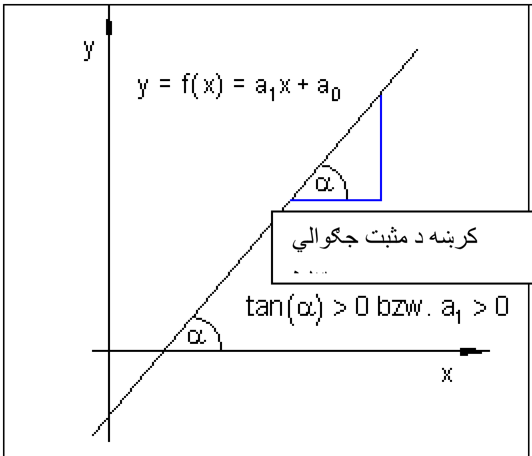
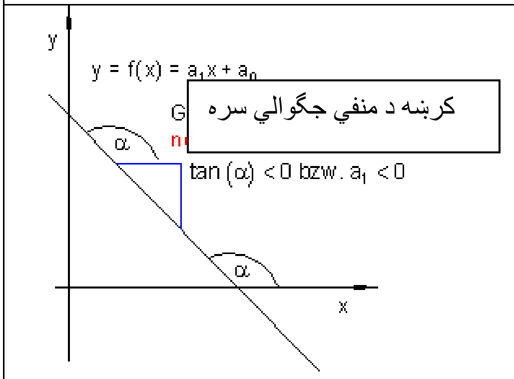
$$x_1, x_2 \in D \ \wedge x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f یو تابع تیک هلته په D کې مونوتون تیټېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1,x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$$

یوغږیزوالی (یکنواخت) Monotony جګتیتوالی، د جګتیتوالی جملې

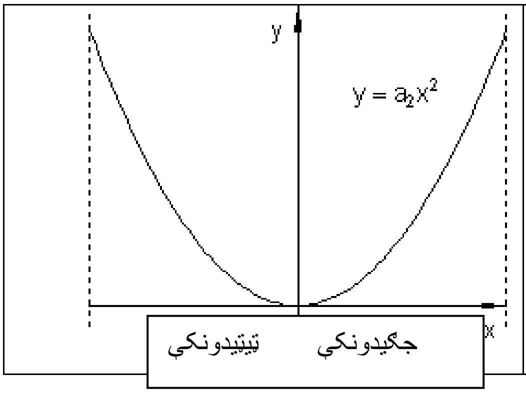
دا $f(x) = a_1x + a_0$ کرښیز (خطي) تابع خورا ساده تابع ده، چې انحنانه لري. ددې لپاره مسئول یې ثابته جګېدنه یا ثابت میل دی، چېرته چې $a_1 = \tan(\alpha)$، د α کرښې او مثبت لوریز د x -محور ترمنځ زاویه(کونج) ده. په مخامخ شکل کې :کرښه د مثبت میل سره $a_1>0 \Leftrightarrow \tan\alpha>0$	
که $0<\alpha<90^0$ یا $0<a_1<\infty$ وي، دا په دې مانا چې $\alpha>0 \vee a_1>0$ همداسې(⇔)، نو کرښه جګیږي. دا دا معنی لري، چې د جګېدونکې x سره د تابع f(x) ارزښت هم جګیږي. په مخامخ شکل کې: کرښه د منفي جګیدنې سره: $\tan\alpha<0$ همداسې(⇔) $a_1<0$	 داپورته داسې دی: $tan\alpha<0$ همداسې $a_1<0$

که $90^0<\alpha<180^0$ یا $-\infty<a_1<0$ وي، دا په دې معنی، چې $\alpha<0$ همداسې $a_1<0$، نو کرښه تیټیږي یا لوېږي. دا په دې معنی، چې د جګیدونکې x سره د تابع f(x) ارزښت کوچنی کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته دواړو حالتونو کې د همغږيزې تابع (يا د جګ-ټيټيدونکي تابع) غږيږو او له يوه مونوتون جګيدونکي تابع څخه، که $a_1 > 0$ وي. له يوې همغږيز يا مونوتون ټيټيدونکي تابع څخه ، که$a_1 < 0$ وي.

دا د مونوټوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کيږي، چې د منحنيو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټوليزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي تانجنت اينبول کيدی شي.



له دې امله د تابع $f(x) = a_2x^2$ لپاره باور لري:

په اينتروال $I_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ کې تابع f(x) مونوتون ټيټيږي. او په اينتروال $I_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې f(x) مونوتون جګيږي.

لکه د کرښې په ګراف کې، چې جګيدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، يعنې جګيدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحني له يوه ټکي څخه بل ټکي ته تغير خوري.

د تانجنت جګيدنه >0 ← منحني مونوتون جګيږي

د تانجنت جګيدنه < 0 ← منخني مونوتون ټيټيږي

د تانجنت جګيدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کيږي.

روښانه ده چې دf(x) تابع لومړی مشتق f'(x) د تابع ميل (جګوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتونی قضيه په لاندې ډول فرمولوو .

قضيه: دf(x) تابع دې په اينتروال Iکې مشتقوړ وي.
١ که د f(x) تابع په اينتروال Iکې همغږيز – يا مونوتون جګيدونکي وي، نو باور لري:
$f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in I$لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

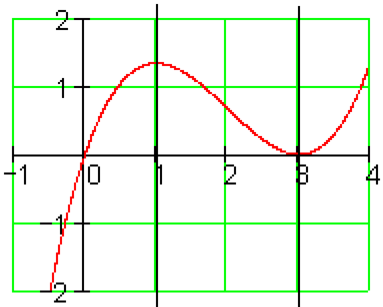
که $f(x)$ په اينتروال I کې مونوتون ټيټيدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in I$ له پاره.

۲ . که $f'(x) \geq 0$ وي، دټولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په اينتروال I کې مونوتون جګيدونکې ده.

که $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په ايترولIال کې مونوتون ټيټيدونکې ده.

۳ که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال Iکې په کلکه مونوتون جګيدونکې ده

که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره،نو $f(x)$ په اينتروال Iکې په کلکه مونوتون ټيټيدوني ده.

د مونوتوني پيژند ورشو (تعريفساحو) ټاکنه بيلګه: د تابع ګراف څخه زيات وخت کېدی شي د مونوتوني ساحې لږ يا زيات ټيک و لوستل شي. د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکې دی. د $I_2 = \{1 < x < 3\}_{\mathbb{R}}$ له پاره $f(x)$ مونوتون ټيټېدونکې ده. د r $I_3 = \{3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګيدونکي ده.	$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$  I_1 wachsend $x < 1$　I_2 fallend $1 < x < 3$　I_3 wachsend $x > 3$ جګيدونکې　ټيټيدونکې　جګيدونکې

باور لري: $f'(x) > 0$ لاس ته راځي: کره مونوتون جګيدونکې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f'(x) < 0:$ لاس ته راځي: کره مونوتون ټيټيدونکی

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

لومړی پل: نا مساوات $f'(x) > 0$ همداسي نامسات $f'(x) < 0:$ حل کوو

دويم پل: د $f'(x)$ توټه کوته په کرښيزو ضربونو يا فاکتورونو

$$f'(x) = (x-1)(x-3)$$

دريم پل : د مخنخښي جدول.

د دوه ضريبونو ضرب تيک هلته زياتيز يا مثبت دی، که دوړه ضريبونه همغه يا برابره مخ نخشه ولري.

يو د دوه ضيبونو ضرب تيک هلته کميز يا منفي دی، که دواړه ضريبونه مختلفي مخنښپولري.

Bereich	$x < 1$ ($x = 1$)	$1 < x < 3$ ($x = 3$)	$x > 3$
$x - 1$	−	+	+
$x - 3$	−	−	+
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$ ist streng monoton	wachsend	fallend	wachsend

f(x) جګيدونکی ټيټيدونکی جګيدونکی کره يوغرېز

بيلګه:دا لاندې ګراف لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

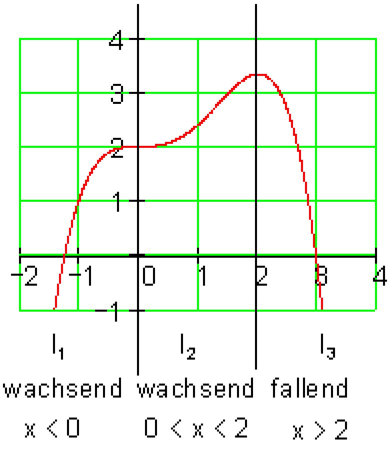
له ګراف څخه لاندې مونوټوني ساحې لوستل کیږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتونج ګېدونکي ده.

د $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$ له پاره f(x)په کلکه مونوتونجګیدونکي ده.

د $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتون ټیټېدونکي ده.

$$f(x) := \frac{-1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2$$



ټیټیدونکي جګیدونکي، جګیدونکي،

له ګراف څخه لاندې مونوټوني ساحې لوستل کیږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتونج ګېدونکي ده.

د $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$ له پاره f(x)په کلکه مونوتونجګېدونکي ده.

د $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتون ټیټیدونکي ده.

ځای اړونده افراطي ټکي

یادونه: که په لیکنه انحرافي ټکي ګورئ،نو هغه افراطي ټکي دي.

ترمخ راوړنه او د کلمې روښانه ونه:

د یوه تابع ګراف زسمونه تر اوسه ناکافي وه، ځکه چې جګ او ټیټ ټکی نه پیژندل کیده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشق شمیرنې له لارې مونږ هڅیږو، چې دا ستونځې حل(اوبې کړو) کړو.

که د f(x) لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x) = 0 ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که دf(x) لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x)=0اوf''(x)>0 ولرو نویو نسبي ټیټ ټکمو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: f ' (x) = 0 او0 > f '' (x) ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د افراطي ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چی f ' (x) = 0 وي، او د

f '' (x) مخ نبنه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چی ایا یو ټیټ ټکی(اصغري ټکی)او که جګ ټکی(اعظمي ټکی) مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني اړیینې یا ضرور دي:

۱ – دا اړیکي یواځي د x_0 لپاره ارزښت لري چی د تعریف سټ په دننه کی پروت وي او هلته

د y = f (x) تابع پوره څو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څنډو) او د هغوځایونو له پاره چی هلته f (x) تابع کم یا هیڅ مشتقوړ نه وي، ځانګړو څیړنو ته اړتیا ده.

۲ - شرایط چی f ' (x) = 0 وي (مشتقوړ تابع) یواځی د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی (ضروري یا اړین شرایط) .

۳– شرایط f ' (x) = 0 او $0 \neq$ (x) '' f د بحراني ټکي لپاره یواځی پوره کیدونکی دی او نه ضروري)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه :

د $f(x) = x^2 + 2$ تابع ګراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د ګراف او د مشتق له لارې وټاکئ.

حل:

ګراف: ګراف دې د ګرانو لوستونکو د کور کار وي؟

د بيلګې له ګراف څخه روښانه ده، چې تابع د x=0 په ځاي کې خورا ټيټ ټکی(اصغري-) لري.

د انحراف ټکي له پاره اړيين شرطونه:

۱ – د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x) = 2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 له پاره صفرځاي لري، يعنې دلته يو بحراني ټکي پروت دی.

۲ – د تابع دويم مشتق: $f(x)'' = 2$. دا چې $f''(x) > 0$ دی، نو يو نسبي ټيټ ټکي مخ ته لرو.

بيلګه : د $y = x^4$ تابع د $x = x_0 = 0$ لپاره نسبي ټيټ ټکی لري او باوري دي

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

ګورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوي دی.

د پورته شنني څخه لاندې پيژند ته راځو:

> پيژند : د $x = x_0$ په چاپيريال کې د $y = f(x)$ تعريف شوې تابع يونسبي جګټکی په همدې ډول نسبي ټيټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري:
>
> $f(x) > f(x_0)$ په همدې ډول $f(x) \le f(x_0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : (د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کی مشتقوړ تابع $y = f(x)$ انحرافي لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وایي (یادونه ۲دي مقایسه شي): چیرته چی $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځي د x_0 ځاي په پوښتنه کی راځي، چی د هغي لپاره لرو$f'(x) = 0$ ، خو حمتي نه ده چی $y = f(x)$دي یواکستریموم و لري.

جمله : (د یوه افراطي ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0 \quad , \quad f''(x) \neq 0$$

نو تابع $y = f(x)$هلته یو افراطي ټکی لري. خورا تیټ ټکی مخ ته لرو، که وي:

$$f''(x) < 0$$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي:

$$f''(x) > 0$$

له ښی لور انحنا یا کوږوالی اوله کیڼ لور انحنا یا کوږوالی (مقعر او محدب)

که په یوه اینتروال کي د مشتقوړ تابع f دویم مشتق $f''>0$ وي، نو په دي اینتروال کي ګراف کیڼ کوږ شوی یا کینه انحنا لري او که دویم مشتق $f'' < 0$ وي، نو د تابع ګراف ښی کوږ یا ښی انحنا لري.

دوه ځیرې (د لاندي بېلګي ځیره و باسی ؟-)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

ټول ګونګتابع (راشنل تابع) f د $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کې کینېکوږدی(کینه انحنا لري(ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشوکې ښی کوږ دی(ښی انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (لومړی مشتق(

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$

$f''(x) = 6x - 4$

د $6x-4>0 \Rightarrow x > 2/3$ لپاره کینې ګوږوال (کینه انحنا (ننوتی یامقعر)

د $6x-4<0 \Rightarrow x < 2/3$ لپاره ښی کوږوالی(ښی انحنا(وتلی یامحدب))

بیلګه:

د مات راشنل تابع $f(x) = \frac{1}{x+2}$ ګراف یو های پاررابول دی. د های پارابول کومه څانګه کینه کږه ده یا کینه انحنا لري(مقعر)، او کومه یوه یې ښی کوږوالی - یا ښی انحنا لري(محدب)؟

دویم مشتق : $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$; $f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$

صورت تل مثبت دی.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د های بارابول څانګه ښی کوږوالی یا انحنا لري (وتلی یا مخدب).

د لپاره $x > -2$ مخرج او همداسې ټول کسر(مات) مثبت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

های بارابول کینکوږ دی یا کینه انحنا لري(ننوتی یامقعر).

بېلګه :

د دواړو توابعو $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{x^3}$ کوږوالی(انحنا) دې یو د بل سره پرتله شي.

دواړه توابع د لپاره تعریف دي.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x)=\frac{\sqrt{x^3}}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad g''=\frac{3}{4\sqrt{x}}$$

دویم مشتقونه د $x\in R^+$ لپاره تعریف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف ښی کوږوالی یا انحنا لري، دا یو شي لور ته واز پارابول ښایي.

په همدې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف کیڼ کوږ دی یا کیڼه انحنا لري. اړونده ګراف یو کیڼ کوږوالی یا کیڼه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د انعطاف ټکي(اوړونټکي)

یادونه: ولې اوړونټکی؟

وبه ګورو، چې په دې ټکي کې ګراف خپله لور اړوي، نو ......

موږ له پورته څیرې اټکل کولی شو چی : که د x_0 ځاي کی دا لاندې ولرو

$f''(x)=0$ او

$f'''(x) > 0$، نو یو ښی-کیڼ- انعطاف ټکی (اوړونټکی) مو مخ ته پروت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

برعکس(په څټ):

که وي: $f''(x)=0$ او $f'''(x)<0$ نو یو کیڼ - ښی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

د ا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چی $f''(x)=0$ وي ، داچی دا ښی -کیڼ - او که کیڼ- ښی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f''(x)$ مخ نښه یی ټاکي.

-شرایط $f''(x)=0$ د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړیین یاضروري دي.

د $y=x^4$ لپاره $f''(0)=0$ دی، مگر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

–شرایط $f''(x_0)=0$ او $f'''(x_0)\neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکي دي. گورو چی $y=f(x)=x^5$ تابع د $x=x_0=0$ ځاي کی یو انعطافټکی لري او باوري دي:

$$f'(x)=5x^4 \quad , \quad f'(0)=0$$

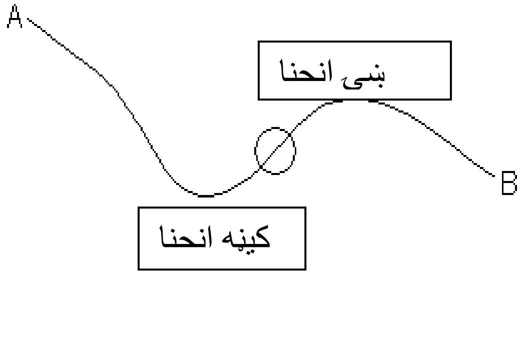
$$f''(x)=20x^3 \quad , f''(0)=0$$

$$f'''(x)=60x^2 \quad , f'''(x)=0$$

گورو چي دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

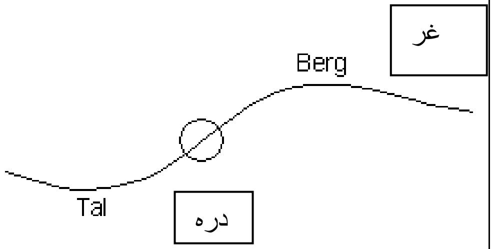
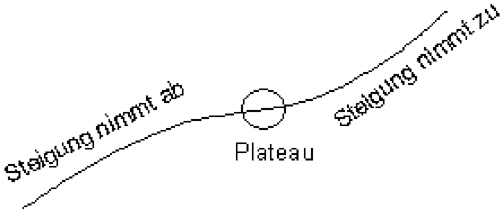
ترمخ راوړني او د کلمې روښانه وني:

د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توگه مخ ته ځو:

د بایسکل ځغاستي چي له A څخه ځغلي د منحنی څخه تیرېږي او B ته رسیږي. د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د اندل حالت د ځغاستي په وخت کې په پام کې ولرئ. د کیڼې منحني(د کیڼ لورې د اندل حالت) څخه وروسته د ښی لورې منحني کې ځغلي.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کيڼي- او ښی منحني(کږې) ترمنځ بايد د بايسکل اندل سيده ولاړ وي(عمود وي)، چې دا د اندل بدلون دی له کيڼي لورې و ښی لورې ته. دا د کيڼي او ښی منحني ترمنځ اوړيدنه ياد انعطاف ټکی بلل کيږي.

تاسو له بايسکل سره په يوه غونډۍ ځغلی. وروسته له هغې، چې له تالي څخه تيريږي، نو لار په ځگيدو پيل کوي. په لومړي سر کې نرم او بيا په نيغه ځگيږي، بيا په دې پسې ځگوالی ببرته کميږي، چې پاس د غونډۍ په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. يو چېرته په غونډۍپورته صفرارزښت ته رسيږي. يو چېرته په لار ځگيدنه خورا لويه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.	
د بايکل ځغلونکي بل حالت، چې له ځنگ دياگرام څخه يې رانيسو: په غره د بايسکل ځغاستميل ياځگيدنه لومړی کميږي، چې له سره ببرته ځگه شي. ددې ترمنځ يوه ساحه شته، د کم ځگوالي سره (يوه نسبتآهواره).ٌ دې نسبتآ هوار ځای کې د توته کرښې ځگيدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونټکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.	 له کيڼ و ښي لور ته: ځگيدنه کميږي، هواره ، ځگيدنه زياتيږي

پوهيږو، چې د يوې تابع لومړی مشتق د تابع د ځگوالی تابع دی، چې له گراف څخه يې ځگوالی لوستل کيږي.دا چې د انعطاف ټکی خورا لوي يا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پيدا کيږي، چې د مشتق تابع انحرافي ارزښتونه پيدا کړو.

دا تلنلار همغښي ده، لکه د پيل تابع **f(x)** لپاره مو ټاکلې. اوس د مشتق تابع **f'(x)** باندې دا کار يا عمل اجرا کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مخکی له دې چی يو لړ جملی د بحراني(جګ – ټيټ -) ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څيرو، غواړو چی دا کليمی تعريف کړو .

دواړه کلمي به د نسبي بحراني ټکي په بڼه کی سره را غونډې شي.

پيژند ۲۰ . ۶ : په يوه چاپيرپال x = x0 کی مشتقوړ تابع y = f (x) يو کيڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کيڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته يو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه يو نسبي ټيټ ټکی ولري.

جمله ۲۰ . ۱۱ : (د يوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x0 کی مشتقوړ تابع y = f (x) اکستريموم لرې نو لرو: f ' (x) = 0

دا جمله موږ ته وايي (يادونه ۲دې پرتله شي): چيرته چی f ' (x) ≠ 0 وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکولپاره يواځي د x0 ځاي په پوښتنه کی راځي، چی د هغي لپاره f ' (x) = 0 وي ، خو حمتي نه ده چی y = f (x)دې يوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په y′ = f' (x) څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله ۲ . ۱۲ : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړيين شرايط):

که په x = x0 کی دوه واره مشتق وړ تابع y = f (x) هلته يو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي:

دلته هم باور لري (يادونه ۴ دې پرتله شي): چيرته چی $f''(x) \neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کيدی چي اوړونټکي موجود وي. مګرچيرته چی f '' (x) = 0 وي ، اوړونټکی شته کېدلی شي، خو اړيين يا ضرور نه ده چی هلته انعطاف ټکی شته وي.

له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۲۰ ، ۱۳:

(د اوړونټکي یا انعطافټکي لپاره پوره کیدونکی شرطونه)که په x = x0 کی درېوار مشتقوړ تابع y = f (x) لپاره وي:

$f''(x) = 0$, او $f'''(x) \neq 0$

نو هلته یو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که f ''' (x) < 0 وي، نو یو کیڼ- ښي – انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د f ''' (x) > 0 لپاره یو ښی-کیڼ-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

شننیزه یا تحلیلي بیلګه:

یادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښه کوو او د x_W سره د انعطاف – یا اوړون ټکی په نښه کوو.

1- تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$

$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$

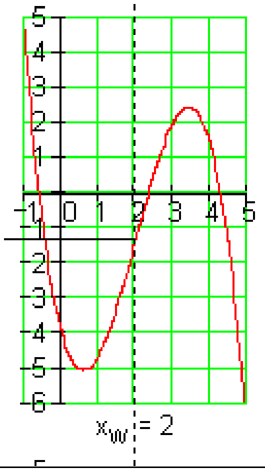
$$f''(x) = -4x + 8$$

$$f'''(x) = -4$$

$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$

$f(2) = -\frac{4}{3}$

$P_W\left(2 \mid -\frac{4}{3}\right)$

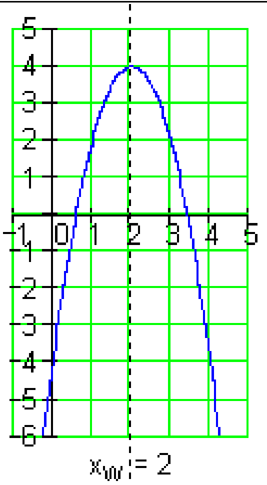


2- دویم مشتق صفر کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 8 = 0$

$\Rightarrow x_W = 2$



د الماني پښتو: د f'(x) صفرځای په xw=2 کې

3- د انعطاف ټکي له مخې ښوونه، چې ایا د انعطاف ټکی شته دی؟

$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$

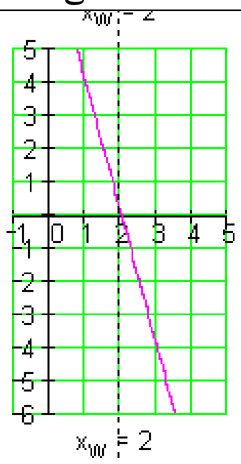
4- په $f(x)$ د انعطاف ځایونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف ټکي ټاکنه

$f(x_W) = f(2) =$

$-\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$

$\Rightarrow P_{W\left(2|-\frac{4}{3}\right)}$

$P_W(21-1.33)$



د الماني پښو: د f''(x) ضفرځای په x_W =2 کې

پام: په انعطاف ځای x_W کې د $f(x)$ گراف کږیږي.

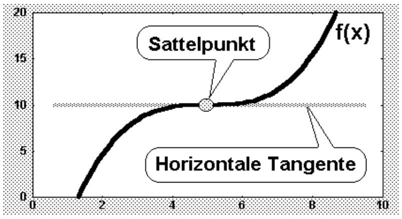
په یوه په خوښه ټکي x_0 کې د کږوني(انحنا) لپاره باور لري:

$f''(x) > 0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کیڼ لور ته کږیږي(انحنا لري) دی.

$f''(x) < 0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ گراف ښی لور ته کږیږي(انحنا کوي)

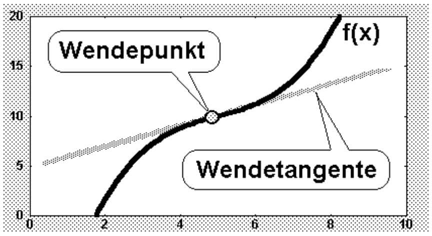
(c) ketabton.com: The Digital Library

یو زینټکی Der Sattelpunkt څه شی دی؟

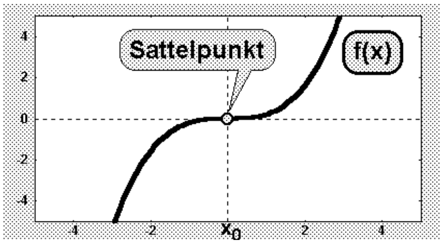


پیژند:

د زینټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:



د پرتلې لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري



توضیح:

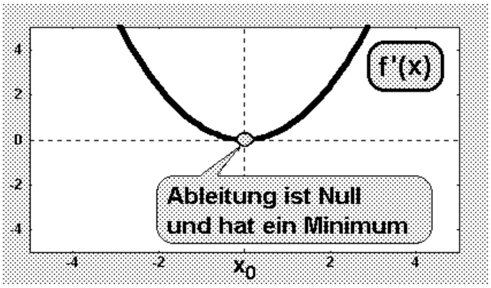
اوس فکر کوو، چې یو زینټکی څنګه د شمېرلو له مخې پیژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانګړي توګه دا مخ ته لرو، چې یو زینټکی له ښي – و کینه انحنا و شمېرو.

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جګوالی په پام کې نیسو، یعنې لومړی مشتق: د زینټکي د مخه د $f(x)$ جګوالي کمیږي، په زینټکي کې صفر ارزښت لري، او له زینټکي څخه وروسته بېرته جګیږي.

یو زینټکی (د ښي – کیڼ – بدلون سره) په دې پیژندل کیږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ یې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي ټیټکی (مینیموم) ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

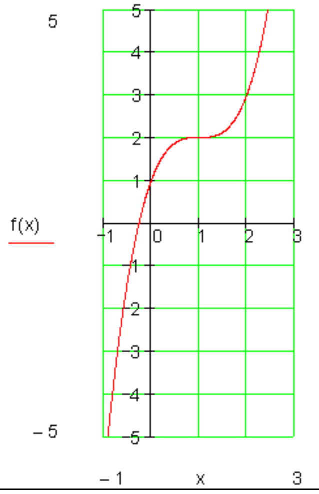


لومړی شرط دی، چې مشتق یعنې $f'(x)$ په زینتکي کې د صفر سره مساوي دی.

زینتکی(بنی-کین-بدلون) $f'(x_0)=0$

دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته یو نسبي مینیموم لري.

دا په دې معنادی، چې بل جګ مشتق $f''(x)$ باید په صفر مساوي وي او مخنبنه له منفي و مثبت ته بدلیږي.
له دې سره سم د زینتکي لپاره پوره کیدونکي قضیه ومیندل شوه:
د زینتکي لپاره جمله(خوي تاکنه)(د بني –کین- انعطاف سره)
الف:د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$
ب : د x_0 په ځا ي کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ یو مینیموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، یعني $f''(x)=0$ دوم مشتق مخنبنه له منفي ځخه و مثبت ته بدلوي.
بل بدیل(د ګرانو دوستانو وړاندیز)

	زینتکی: د انعطاف ټکي یو ځانګړی حالت زینتکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جګیدنې سره.که د کیڼ لور ورتزدې شو فکر کیږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی که ځوک د ښي لور ور نزدې شي فکر کوي، چې یو نسبي ټیټکی مخ ته لرو. اوس دا حالت د ریاضیاتو له لوري ځیرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

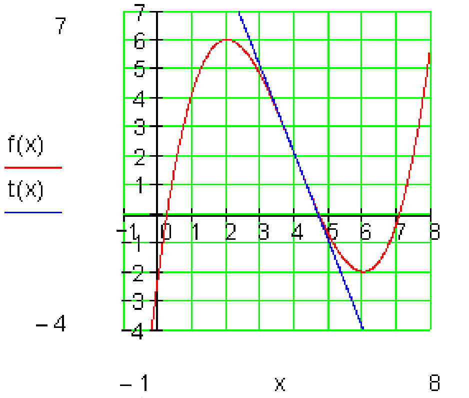
مشتق:	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ $f''(x) = 6x - 6$ $f'''(x) = 6$

$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1$

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ $f'''(1) = 6$	$<=1$ د $x = 1$ سره د انعطاف ټکی	$<=1$ د $x = 1$ سره زینتکی

د انعطاف ټکي لپاره شرايط پوره دي.
دا چې د $f''(1) = 0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زینتکی دی.

د انعطاف ټکي پیداکونه:
د تابع ګراف باندې انعطاف ټکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کيږي. د انعطاف تانجنت هم
همداسې پيدا کيږي لکه د تابع دګراف په يوه ټکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات تاکل کيږي.

$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 2$ $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$ $f''(x)\frac{3}{2}x - 6 \qquad f'''(x) = \frac{3}{2}$ $f''(x_W) = 0 \iff \frac{3}{2}x - 6 = 0$ د $x_W = 4$ او $f'''(x_W) = \frac{3}{2} \neq 0$ د تانجنت $f(x_W) = f(4) = 2 \Rightarrow \underline{P_W(4\|2)}$ مساوات لپاره باور لري. د x_W لپاره د تانجنت مساوات $t(x) = f'(x_W)(x - x_W) + f(x_W)$	 د انعطاف تانجنت د $f(x)$ ګراف د انعطاف په ټکي $P_W(4,2)$ کې غوڅوي او دا لاندې مساوات لري: $t(x) = -3x + 14$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f'(x_W) = f'(4) = -3$ سره په لاندې ډول دي $t(x) = -x(x+4) + 2 = \underline{\underline{-3x+14}}$	

د انعطاف- يا وړون ټکي تانجنت پيداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دګراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کيږي.
د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کيږي، لکه د تانجنت مساوات د ګراف په خوښه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0$ دلته تر څيړنې لاندې نه نيول کيږي.

د کږې يا منحني بحث (Kurven Diskusion) :

تر مخ راوړنه او د کلمې روښانه ونه:

د دې لپاره چې د يوې تابع وکاږلی او تشريح کړای شو، اړين دی چې د ګراف په ځنې په راوتلو يا غوره ټمو او د ګراف په تلنه وپوهيږو.\

داسې د ګراف په غوره خوييز يا کرکتريستيکي خويونو باندې د پوهيدنې او څيړنې ته د کږو يا منحنيو خبرې اترې يا بحث وايو.

د دې لپاره چې د تابع کوم غوره خوي مو له ياده ونه ووځي يا راڅخهپاتې نه شي، نو د داسې څيړنو لپاره سړی بايد سيومتريک مخ ته ولاړ شي او هم تل د څيړنو او شميرنو د لړۍ پرلپسې يا لړې ترتيب په پام کې ونيسي.

په لاندې ډول تلنلار ډېره ګټوره ګڼل شوې

لومړی: تعريفورشو يا ـساحه:

سړی له هر څه د مخه د فنکشن يا تابع تعريفورشو ټاکي، ځکه چې فقط د دې ورشو په دننه کې موخه ور دی چې تابع خويونو څيړنه مخ ته بوزو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم: سيومتري:

سړی کره کوي، چې ايا تابع محوري- اوټکی سيومتری دی.

محورسيمتري سره باور لري: $f(-x)=f(x)$ په دواړو حالتونو کې فنکشن بايد وڅيړل شي.

د ټکي سيومري سره باورل ري: $f(-x)=-f(x)$ فقط بايد د $x \geq 0$ لپاره وڅيړل شي.

په ځنګړې توګه د ټول راشنل يا –خوښيار توابعو لپاره باور لري:

يو ټول راشنل تابع ټيک هلته محور سيمتريک دی، که د هغه ترمونه زاتيدوني يا د جمعي اعظاوې فقط د جوړه يا جفت جګ عدد يا اکسپوننت سره ولري.

يو ټول راشنل تابع ټيک هلته ټکی سيمتريک دی، که د هغه ترمونه نا جوړه يا طاق د زياتيدوني يا د جمعې غړي ولري.

دريم: افراطيت:

د نسبي افراطيت ټاکنې، دا سړی جګ – همداسې ټيټ ټکي بولي.

دا د پراته يا افقي تانجنت سره ټکي هم دي.

ټيټ ټکی= نسبي مينيموم پوره کيدونکي شرطونه: $f'(x_1)=0 \quad \wedge \quad f''(x_1)>0$	جګ ټکی = نسبي ماکسيموم پوره کيدونکي شرطونه: $f'(x_1)=0 \quad \wedge \quad f''(x_1)<0$

څلورم: اوړونټکی(نقطه انعطاف):

د اوړنټکي همداسې زين ټکي ټاکنه.

د اوړنټکي لپاره پوره کيدونکي شرطونه: $f''(x_W)=0 \quad \wedge \quad f'''(x_W)\neq 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

زينتکی (همغه د اس زين څخه دا نوم رانيول شوی)اوړنتکی دی د پراته تانجنت سره.

پنځم: محورغوڅتکي(د محور د تقاطع نقاط):

که د x -محور ارزښت صفر (x = 0) د f(x) په فنکشن ارزښت کې کيښول شي، نو سړی د y –محور سره غوڅتکی(نقطه تقاطع) لاس ته راوړي.

د y - محور سره غوڅتکی $P_y(0 \mid y_s) \Rightarrow f(0)$ وټاکی.

د x- محور سره غوڅتکی(صفرځای) $P_{xi}(x_i \mid 0) \Rightarrow f(x) = 0$

شپږم: ګراف:

دا تراوسه د ټولو راټول شوو معلوماتو سره اوس کیدی شي په زياتو حالتونو کې ګراف انځورکړای شو.

د دې لپاره لومړی يو ارزښت جدول چمتو کيږي.

دا په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه دې وشميرل شي.

دا کيدی شي چې د جبشميرونو سره شوميرل شي او د يا د ټولګنونو يا تام اعدادو x - ارزښتونو لپاره د هورنر شيماپه مرسته.

اوم: کږوالي ځاننيونه(حالت) او يوغږيزوالی.

په اوړونوټکي يا انعطافټکيx_w کې د f د ګراف کږوالی تغير خوري.

د په خوښه ټکي x0 کې د کږوالي لپاره باور ري:

$f''(x0) > 0$ په دې معنا، چې د f(x) ګراف کيڼ کوږ(ننوتی يا مقعر؟؟) دی.

$f''(x0) < 0$ په دې معنا، چې دf(x) ګراف ښي کوږ(وتلی يا محدب) دی:

يوعږيزوالی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x0) \geq 0$ وي، نو $f(x)$ یوغږیز جګیدونکی دی په انتروال I کې

که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x0) \leq 0$ وي، نو $f(x)$ یوغږیز ټیټیدونکی دی په انتروال I کې.

۲ . که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x0) > 0$ وي، نو $f(x)$ کره یا په کلکه یوغږیز

جګیدونکی دی په انتروال I کې

که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x0) < 0$ وي، نو $f(x)$ کره یا په کلکه یوغږیز

ټیټیدونکی دی په انتروال I کې.

لنډ:په اوړونټکي کې د یوه ګراف د کږوالي حالت تغیر خوري

د یوغږیزوالي حالت په افراطي ټکو کې تغیر خوري

اتم: د تعریفورشو ژی ټکي:

د تعریفورشو په ژی ټکو کې د فنکشن څیړنه.

که تعریفورشو محدوه یا رابنده نه وي، نو دواړه پوله ا رزښتونه

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \quad \text{او} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

دې وټاکل شي.

په ډول وبینه یا افاده: د لوی x - ارزښت لپاره سړی د فنکشن ارزښتونو تلنه په زیا تیز یا مثبت لور او هم په کمیزه یا منفي لور څیړي او دا پوښتنه له ځانه کوي، چې فنکشن ارزښتونه په کومه لور ځغلي.

د یوه مفصل کږو بحث خبرې اترې یا بحث:

تعریفورشو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابعبرابرون یا تابع مسوات:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي تعریف ډېرئ یا ــسټ $\underline{\underline{D_f = \mathbb{R}}}$.

فنکشن د ټول حقیقي ارزښتونو لپاره تعریف دی. د ورسره بلده توګه ټول راشنل فنکشنونو دا تل باور لري، خو پرته له دې که څوک وغواړي تعریف ورشو رابنده یا محدود کړي.

سیومتري: دا چې ټول جګګیونه یا اکسپوننتونه جوړه یا جفت دي، نو یو محورسیومتري مخ ده لرو،

باور لري: $f(-x)=-f(x)$ د ټول $x€R$ لپاره.

ګټه په دې کې ده، چې فنکشن ارزښتونه باید فقط د زیاتیزو یا مثبت x -ارزښتونو لپاره وشمیرل شي.

افراطییت:

د افراطي ټکو شمیرلو لپاره تلنلار:

سړی لومړی د $f(x)$ لومړي دوه مشتقونه ټاکي.

د لومړي ومشتق صفراینیوونه د پراته تانجنت ځای راکوي.

که سړی دا ارزښتونه په دویم مشتق کې کیږدي، نو سړی د مخ ته پراته افراطیت په هکله وینا ترلاسه کوي.

(نسبي مامسیموم یا نسبي مینیموم همداسي د افراطي ټکو نه والی).

د افراطي ځایونو x_i ازښتونه که فنکشن مساوات کې کینول شي افراطي ارزښتونه راکوي او له دې سره د افراطي ټکو کواوردیناتونه یا پراته ولاړارزښتونه څرګند دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابعبرابرون یا ـمساوات: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$

مشتقونه: $f'(x) = x^3 - 4x \quad f''(x) = 3x^2 - 4 \quad f'''(x) = 6x$

د افراطي ارزښتون لپاره پوره کید ونکي شرطونه.

$$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0$$

xله نوکانو وباسئ

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 |$$

د صفرضرب جمله له دې لاس ته راځي $x1=0$ همداسې $x^2-4=0$

$$x^2 - 4 = 0 | +4$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 4 | \sqrt{\ }$$
$$\Leftrightarrow |x| = 2 \Rightarrow x_2 = 2 \text{ bzw. } x_3 = -2$$

د پراته تانجنت ځایونه: $\boxed{x_1 = 0}; \boxed{x_2 = 2}; \boxed{x_3 = -2}$

د نسبي ماکسیموم همداسې نسبي مینیموم ښوونه:

$$f''(x_1) = f''(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. für } x_1 = \boxed{x_{E1} = 0 \ (\text{Hochpunkt})}$$
$$f''(x_2) = f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. für } x_2 = \boxed{x_{E2} = 2 \ (\text{Tiefpunkt})}$$
$$f''(x_3) = f''(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. für } x_3 = \boxed{x_{E3} = -2 \ (\text{Tiefpunkt})}$$

افراطي ارزښتونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x_{E1} = 0$ لپاره جګ ټکی

$$f(0) = -\frac{9}{4} = -2{,}25$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(0 \mid -\frac{9}{4}\right) \text{ bzw. } P_{Max}(0 \mid -2{,}25)}$$

د $x_{E2} = 2$: لپاره ټیټکی

$$f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2 - \frac{9}{4} = -\frac{25}{4} = -6{,}25$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{Min1}\left(2 \mid -\frac{25}{4}\right) \text{ bzw. } P_{Min1}(2 \mid -6{,}25)}$$

د $x_{E2} = -2$: لپاره ټیټکي

د محور سیومتري له امله $f(-2) = f(2) = -\frac{25}{4} = -6{,}25$

$$\Rightarrow \boxed{P_{Min2}\left(-2 \mid -\frac{25}{4}\right) \text{ bzw. } P_{Min2}(-2 \mid -6{,}25)}$$

اوړنټکي یا د ا نعطاف ټکي:

د انعطاف ټکو ټاکلو لپاره د شمیرني تلنلار:
د لومړیو دوه مشتقونو برسیره سړی د f(x) دریم مشتق جوړوي یا نیسي.

د دویم مشتق ضفرځایونه ممکنه اوړونټکي دي.
د افراطي ټکو مخ ته پرېوتني یا لرنې ازماېښت لپاره د دویم مشتق شمیرل شوی صفرځای په دریم مشتق کې ایښوول کیږي.

که لاس ته راوړنه د صفر سره برابره نه وي، نو اړونده x - ارزښتونه یو اوړنټکی په ګوته کوي. ځکه چې دا اړونده فنکشن ارزښتونه د x – ارزښتونو د تابع مساوات f(x) ترم کې ایښوولو له لارې لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع مساوات: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$

مشتقونه: $f'(x) = x^3 - 4x \quad f''(x) = 3x^2 - 4 \quad f'''(x) = 6x$

د اوړونټکو لپاره پوره کيدونکي شرطونه:

$$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4 = 0 \mid +4$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = 4 \mid :3$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \mid \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{\frac{4}{3}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}} \text{ bzw. } x_2 = -\sqrt{\frac{4}{3}}$$

ممکنه اوړونټکي: $\boxed{x_{W1} = \sqrt{\frac{4}{3}}}$; $\boxed{x_{W2} = -\sqrt{\frac{4}{3}}}$

په اوړونټکو ښوونه:

$$f'''(x_{W1}) = f'''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 6 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \neq 0;\ f'''(x_{W2}) = f'''\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 6 \cdot \left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \neq 0$$

د $x_{W1} = \sqrt{\frac{4}{3}}$ لپاره اوړونټکی

$$f(x_{W1}) = f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^4 - 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 - \frac{9}{4} = -\frac{161}{36}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{W1}\left(\sqrt{\frac{4}{3}} \,\middle|\, -\frac{161}{36}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(1{,}15 \mid -4{,}47)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x_{W2} = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ لپاره اوړونتکی

$$f\left(x_{W2}\right) = f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\frac{161}{36}$$

د محور سیومتري لهامله

$$\Rightarrow \boxed{P_{W2}\left(-\sqrt{\frac{4}{3}} \mid -\frac{161}{36}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(-1,15 \mid -4,47)}$$

پنځم: محور غوڅتکي یا نقاط تقاطع محور

الف- د y–محور سره غوڅتکي $f(0) = -\frac{9}{4} = -2,25 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid -2,25)}$

ب – د x–محور سره غوڅتکي(صفرځایونه)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} = 0 \mid \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \mid \text{Substitution } x^2 = z$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 8z - 9 = 0$$

په z کې مربع مساوات

$$\Rightarrow p = -8\,;\; q = -9\,;\; D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{8}{2}\right)^2 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = -\left(-\frac{8}{2}\right) \pm \sqrt{25} = 4 \pm 5 \Rightarrow z_1 = 9\,;\; z_2 = -1 < 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(حل نه شته)

په ښت يا برعکس بدلون: $z_1 = x^2 = 9 \Rightarrow |x| = \sqrt{9} \Rightarrow x_1 = 3;\ x_2 = -3$

په $\boxed{P_{x1}(3|0)}$; $\boxed{P_{x2}(-3|0)}$ کي صفرځايونه

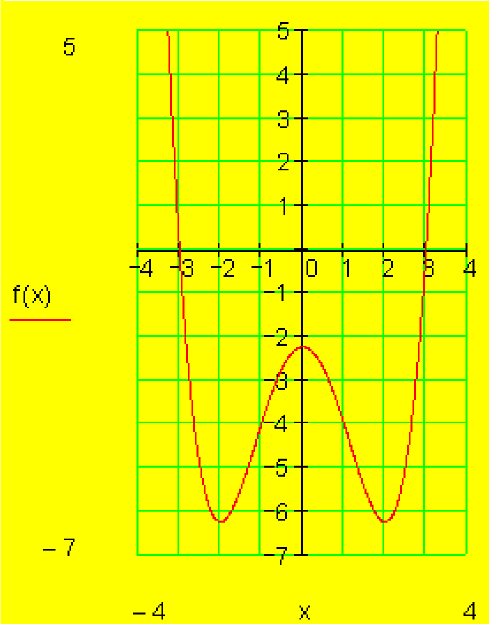
شپږم: ارزښت جدول:

ارزښت جدول د ورزياتو ارزښتونو سره:

$$f(1) = \frac{1}{4} \cdot 1^4 - 2 \cdot 1^2 - \frac{9}{4} = -4;\ f(-1) = f(1) = -4$$

$$f(3{,}25) = \frac{1}{4} \cdot (3{,}25)^4 - 2 \cdot (3{,}25)^2 - \frac{9}{4} \approx 4{,}52;\ f(-3{,}25) = f(3{,}25) \approx 4{,}52$$

		P_{x2}	P_{Min2}	P_{W2}		$P_{Max} = P_y$		P_{W1}	P_{Min1}	P
x	-3,25	-3	-2	-1,15	-1	0	1	1,15	2	
f(x)	4,52	0	-6,25	-4,47	-4	-2,25	-4	-4,47	-6,25	



شپږم: ټولګه:

محور غوځتکي

اکسترم ارزښتونه:

$P_{Min1}(2|-6{,}25);\ P_{Min2}(-2|-6{,}25)$

$P_{Max}(0|-2{,}25)$

اوړونټکي

$P_{W1}\left(\sqrt{\frac{4}{3}} \middle| -\frac{161}{36}\right);\ P_{W2}\left(-\sqrt{\frac{4}{3}} \middle| -\frac{161}{36}\right)$

مورغوځتکي

$P_y(0|-2{,}25);\ P_{x1}(3|0);\ P_{x2}(-3|0)$

د کږوالي يو غبرګوالی نښوتی

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$\left]-\infty;-\sqrt{\frac{4}{3}}\right[\text{ und } \left]\sqrt{\frac{4}{3}};\infty\right[$ او $\left]-\sqrt{\frac{4}{3}};\sqrt{\frac{4}{3}}\right[$ وتلی: کره یوغږیز یتیدونکی $]-\infty;-2[\text{ und }]0;2[$ کره یوغږیز جګیدونکی $]-2;0[\text{ und }]2;\infty[$ ژی تکي $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$

اووم: کږوالي حالت او یوغږیزوالی:

کږوالی د $x0=-2$ لپاره (کین له P_{w2})

$$f''(-2)=3\cdot(-2)^2-4=8>0$$

د $\left]-\infty;-\sqrt{\frac{4}{3}}\right[$ لپاره کینېکوږوالی(ننوتی)

د $x_0=0$ لپاره کوږوالی) د P_{w1} او P_{w2} ترمنځ(

$f''(0)=-4<0$ ښی کوږوالی(وتلی) د $\left]-\sqrt{\frac{4}{3}};\sqrt{\frac{4}{3}}\right[$ لپاره.

د $x0=2$ لپاره کږوالی) د P_{w2} ښي لور ته(

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

f’’(2)=3.2²-4=x>0

کيڼ کوږوالی د $]\infty;\sqrt{\frac{4}{3}}[$ لپاره

کره يا په کلکه قوغږيز تيتيدونکی د $]-\infty;-2[$ لپاره

کره يو غږيزجګيدونکی د]-2;0[لپاره

کره يا په کلکه قوغږيز تيتيدونکی د]0;2[لپاره

کره يو غږيزجګيدونکی د $]2;\infty[$ لپاره

اتم: د تعريفورشو ژی ټکي:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}\right) = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{x^2} - \frac{9}{4x^4}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{x^2} - \frac{9}{4x^4}\right)}_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to-\infty} x^4 = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to\infty} x^4 = \infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty}$$

يوه تابع $y = x^3 + x^2 - 3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بيا په دې رسم کې د تابع افرطي ټکي او د انعطاف ټکي په نخښه کړئ، ربنانه کړئ، چې انحنا چيرته له کيڼې لور و ښی لورې ته او له ښی لورې و کيڼې لورې ته ده.

فعاليت:

- تناظر تعريف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جګ ټکي، ټيټ ټکي او د انعطاف ټکي يې پيدا اکړئ.
- $x^3 + x$
- $3x^3 + x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې یوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پیژنو. مورږ دې بحث ته د منحني بحث وایو. مورږ په دا ډول خبرو اترو کې باید سیستماتیک مخ ته لاړ شو.
په لاندې ډول تلنه ګټوره بلل شوې.

دتعریف ساحه: د تابع څیړنه یواځې په همدې ورشو کې موخه وره ده.
تناظر **Symetry** : باید وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.
د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x) = f(x)$
د مرکزي تناطر لپاره باور لري. $f(-x) = -f(x)$
په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط $x \geq 0$ وڅیړل شي.
په ټولیزه توګه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو ګورو چې که توان(د پولینوم درجه)یې جفت(جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان(د پولینوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

بحراني ټکي **Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جګټکی، ټیټټکی)
د جګټکی یا نسبي جګ ټکي پوره کیدونکي شرطونه:
$f'(x_1) = 0 \ \wedge \ f''(x_1) < 0$

انعطافټکی یا اوړونټکی : Inflection Point

د انعطافټکواو همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کیدونکي شرطونه:
$f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$
زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.
د تابع تقاطع د x او y محورونوسره(د محورونوِغوځټکی):
د $x-$ محور سره ِغوځټکی: $P_{xi}(x_i\,|\,0) \ \Rightarrow \ (x) = 0$
د y محور سره غوځټکی(صفرځای) ټاکي $f(0)$ $P_y(0\,|\,y_s) \ \Rightarrow$
دګراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې ګراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځوریږي. دا راته په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمیرل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کږوالي - یا انحنا حالت او یوغږیزوالی:

د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ ګراف تغیر خوري.

په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:

$f''(x_0) > 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف کیڼه انحنا لري (کونوکس)

$f''(x_0) < 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف ښۍ انحنا لري (کونکاو)

یوغږیزوالی

1- که د ټولو $x \in I$ لپاره وي $f'(x) \geq 0$ ، نو $f(x)$ په انټروال I کې مونوتون جګیږي. که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) \leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انټروال I کې مونوتون ټیټېدونکی دی.

2- که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې کره غښتلې مونوتون جګېدونکی ده.

که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې غښتلې مونوتون جګېدونکی ده.

د پېژند ورشو ژی ټکي:

د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشوکې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ او $\lim_{x \to \infty} f(x)$ ټاکو.

بیلګه :

د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق کونه:

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$
$$y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$$

نسبي بحراني ټکي

$P_{max}(1|2)$ $\quad P_{min}(3|-2)$

انعطافټکی او تانجنت

$y = f_t(x) = -3x + 6 \quad P_W(2|0)$

صفرځایونه:

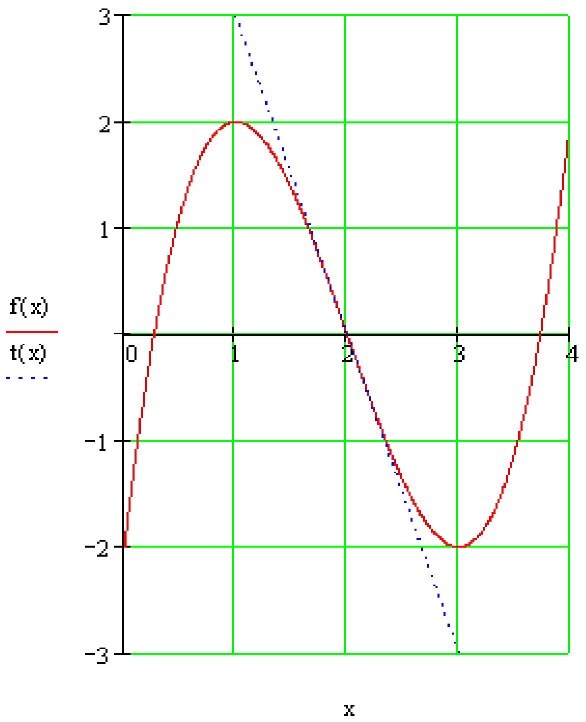
$P_{x2}(3.7|0) \quad P_{x1}(2|0)$

$P_{x3}(0.3|0)$ $\quad$ د $-y$

محور سره غِوښتکی(دقاطع):

$P_y(0|-2)$

$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \qquad t(x) := -3x + 6$



یوغږیزوالی(مونوتوني یاجګ - ټیټوالی) په

$I_1 = \{x \mid -\infty < x \le 1\}_{\mathbb{R}}$ کې

یوغږیز جګیږي. په

$I_3 = \{x \mid 3 \le x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې

یوغږیز جګیږي.

د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$ کې

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \infty$$

سیومتري: نه لري

د کږوالي یا انحنا حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنی کږوالی یا انحنا(وتلی یا محدب) : $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کیڼ کږوالی یا انحنا (مقعریت یا ننوتوالی) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

بیلګه۱ : لومړی: تعریفورشو:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x \qquad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

دویم: سیومتري:

ټکی سیومتریک؛ f(-x)=-f(x) ځکه چې فقط ناجوړه یا طاق جګعدد

دریم: افراطیت:

مشتق:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 4 \Rightarrow f''(x) = -2x \Rightarrow f'''(x) = -2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ bzw. } x_2 = -2$$

$$f''(x_1) = f''(2) = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_1 = 2$$

$$f''(x_2) = f''(-2) = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_2 = -2$$

$$f(x_1) = f(2) = \frac{16}{3} \Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(2 \mid \frac{16}{3}\right)}$$

$$f(x_2) = f(-2) = -\frac{16}{3} \Rightarrow \boxed{P_{Min}\left(-2 \mid -\frac{16}{3}\right)}$$

څلورم: اوړنټکی یا نقطه انعطاف:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Rightarrow x_W = 0$$

$$f'''(x_W) = f'''(0) = -2 \neq 0$$

$$f(x_W) = f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_W(0 \mid 0)}$$

پنځم: مخورغوڅټکی یا نقاط تقاطع محور:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid 0)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{3}x^2 + 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

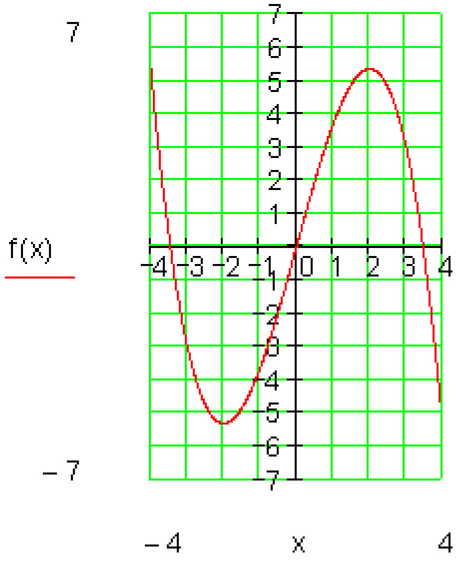
$$-\frac{1}{3}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt{12} \text{ bzw. } x_3 = -\sqrt{12}$$

ضفرځايونه: $\boxed{P_{x1}(0|0)}$; $\boxed{P_{x2}(\sqrt{12}|0)}$; $\boxed{P_{x3}(-\sqrt{12}|0)}$

شپږم: ارزښتجدول او ګراف:

$f(-4) = 5,3$; $f(4) = -5,3$; $f(-3) = -3$; $f(3) = 3$; $f(-1) = -3,7$; $f(1) = 3,7$

		P_{x3}		P_{Min}		P_y P_W P_{x1}		P_{Max}		P_{x2}	
x	-4	$-\sqrt{12}$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\sqrt{12}$	4
$f(x)$	$5,3$	0	-3	$-5,\overline{3}$	$-3,7$	0	$3,7$	$5,\overline{3}$	3	0	$-5,3$



اووم: کږوالي حالت او يوغږيزوالى:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x0=-2$ لپاره (كيڼ له P_W) $f''(-2)>0$ له دې لاس ته راځي كيڼ كوږوال(ننوتی يا كونوكس)$]-\infty;0[$

د $x0=2$ لپاره (ښي له P_W) $f''(2)<2$ له دې لاس ته راځي ښي كوږوالی(كونكاو يا وتلی) $]0;-\infty[$

يوغويزوالی:

د $]-\infty;0[$ لپاره كرهيوغږيز ټيټيدونكی يا لويدونكی

د $]0;-\infty[$ لپاره كره يوغږيز جګيدونكی

د $]2;\infty[$ لپاره كره يوغږيز ټيټيدونكی يا لويدونكی

اتم: د تعريفورشو ژۍ شرايط:

$$\left.\begin{array}{l}
\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{3}x^3+4x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{4}{x^2}\right)\\
=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\cdot\underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{3}+\frac{4}{x^2}\right)}_{-\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=\infty\\
\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\frac{1}{3}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}x^3=-\infty
\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty\\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty\end{array}}$$

بيلګه ۲ :

لومړی:

$$f(x)=\frac{1}{16}x^3-\frac{3}{8}x^2+2 \qquad \boxed{D=\mathbb{R}}$$

دويم: سيمتري:

سيومتري نه شته.

دريم: افراطيت:

مشتق:

$$f(x)=f(x)=\frac{1}{16}x^3-\frac{3}{8}x^2+2\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{16}x^2-\frac{3}{4}x\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{8}x-\frac{3}{4}\Rightarrow f$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'''(x) =$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{3}{16}x - \frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{3}{16}x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_2 = 4$$

$$f''(x_1) = f''(0) = -\frac{3}{4} < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''(4) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_2 = 4$$

$$f(x_1) = f(0) = 2 \Rightarrow \boxed{P_{Max}(0|2)}$$

$$f(x_2) = f(4) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Min}(4|0)}$$

څلورم:اوړنتکی یا نقطه انعطاف:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_W = 2$$

$$f'''(x_W) = f'''(2) = \frac{3}{8} \neq 0$$

$$f(x_W) = f(2) = 1 \Rightarrow \boxed{P_W(2|1)}$$

پنځم: محور غوڅتکي:

$$f(0) = 2 \Rightarrow \boxed{P_y(0|2)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 = 0$$

د P_{min} شمیرنه پە دې معنا وګوری لوړی صفرځای x1=4.
هورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r|rrrr} & \frac{1}{16} & -\frac{3}{8} & 0 & 2 \\ x=4 & & \frac{4}{16} & -\frac{1}{2} & -2 \\ \hline & \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \Rightarrow \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_2 = 4 ; x_3 = -2$$

صفرخایونه: $\boxed{P_{x1/2}(4|0)}$; $\boxed{P_{x3}(-2|0)}$

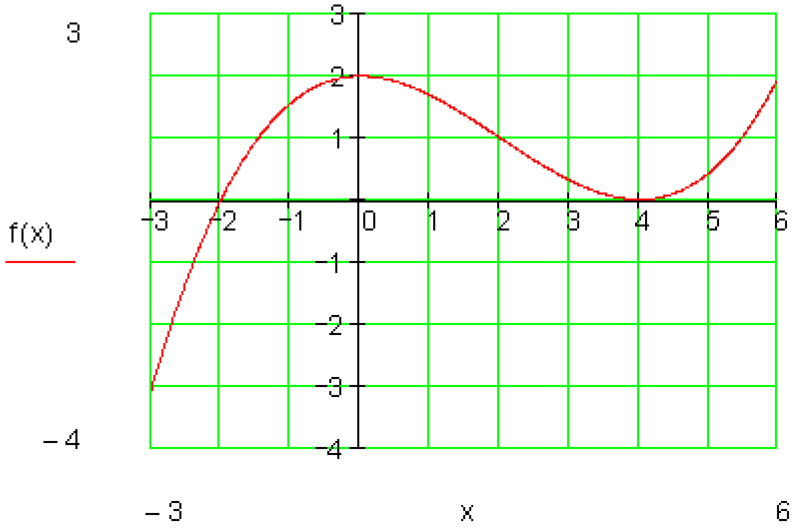
شپږم: ارزښتجدول او ګراف:

ارزښتجدوال:

$f(-3) \approx -3{,}06 ; f(-1) \approx 1{,}56 ; f(1) \approx 1{,}67 ; f(3) \approx 0{,}31 ; f(5) \approx 0{,}44 ; f(6) = 2$

		P_{x3}		P_{Max}		P_W		P_{Min} $P_{x1/2}$		
x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	−3,06	0	1,56	2	1,67	1	0,31	0	0,44	2

ګراف:



(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم: ګرږوالی(ننوتوالی یا مقعربیت) او یوغږیزوالی:
اووم: کږوالي حالت او یوغږیزوالی:
د x0=-2 لپاره (کیڼ له P_W) $f''(0)=-¾<0$ له دې لاس ته راځي ښی کوږوال(ننوتی یا کونوکس) $]-\infty;2[$

د x0=2 لپاره (ښي له P_W) $f''(4) = ¾ > 0$ له دې لاس ته راځي کیڼ کوږوالی(کونکاو یا وتلی) $]2;\infty[$
یوغویزوالی:
د $]-\infty;0[$ لپاره کره یوغږیز جګیدونکی
د $]0;4[$ لپاره کره یوغږیز ټیټیدونکی
د $]4;\infty[$ لپاره کره یوغږیز جګیدونکی

اتم: د تعریفورشو ژی شرایط؛

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{16}x^3-\frac{3}{8}x^2+2\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{1}{16}-\frac{3}{8x}+\frac{2}{x^3}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{16}-\frac{3}{8x}+\frac{2}{x^3}\right)}_{\frac{1}{16}} = \frac{1}{16}\cdot\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{16}\cdot\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\end{array}}$$

بیلګه ۳ :
لومړی: تعریفورشو:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x(x+3)^3 = -\frac{1}{2}x^4-\frac{9}{2}x^3-\frac{27}{2}x^2-\frac{27}{2}x \qquad \boxed{D=\mathbb{R}}$$

دویم: سیمتري: سیوتتري نه شته.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: افراطیت: مشتق د صرب له لارې(قانون)

$$f(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}x}_{u}\underbrace{(x+3)^3}_{v} \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = -\frac{1}{2}x\,;\ v = (x+3)^3\,;\ u' = -\frac{1}{2}\,;\ v' = 3(x+3)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x)} = -\frac{1}{2}(x+3)^3 - \frac{3}{2}x(x+3)^2 = \boxed{-\frac{1}{2}(x+3)^2(4x+3)}$$

$$f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}(x+3)^2}_{u}\underbrace{(4x+3)}_{v} \Rightarrow f''(x) = u'v + uv'$$

$$u = -\frac{1}{2}(x+3)^2\,;\ v = 4x+3\,;\ u' = -(x+3)\,;\ v' = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{f''(x)} = -(x+3)(4x+3) - \frac{1}{2}(x+3)^2\cdot 4 = \boxed{-3(x+3)(2x+3)}$$

$$f''(x) = \underbrace{-3(x+3)}_{u}\underbrace{(2x+3)}_{v} \Rightarrow f'''(x) = u'v + uv'$$

$$u = -3(x+3)\,;\ v = 2x+3\,;\ u' = -3\,;\ v' = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{f'''(x)} = -3(2x+3) - 3(x+3)\cdot 2 = \boxed{-(12x+27)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x+3)^2(4x+3) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -3\,;\ x_3 = -\frac{3}{4}$$

$$f''(x_{1/2}) = f''(-3) = 0 \Rightarrow$$

د افراطیت په هکله وینا نه شته

$$f''(x_3) = f''\left(-\frac{3}{4}\right) = -3\left(-\frac{3}{4}+3\right)\left(2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+3\right) = -\frac{81}{8} = -10{,}125 < 0$$

لاس ته راځي: د $x_3 = -\frac{3}{4}$ لپاره نسبي افراطیت

$x_{1/2} = -3$ د f'(x) دبل صفرځای دی، دا په دې معنا چې د f'(x)مختخښي بدلون د

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

x=-3 په ځا کې نه شته. دا په دې معنا چې $x_{1/2} = -3$ دافراطي ځای نه دي.

$$f(x_3) = f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}+3\right)^3 = \frac{2187}{512} \approx 4{,}27$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(-\frac{3}{4}\Big|\frac{2187}{512}\right) \text{ bzw. } P_{Max}(-0{,}75\,|\,4{,}27)}$$

څلورم: اوړونټکي یا نقاط انعطاف: د لاندې الماني پښتو: اوړونټکی.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3(x+3)(2x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3;\ x_2 = -\frac{3}{2}$$

$$f'''(x_1) = f'''(-3) = -(12\cdot(-3)+27) \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W1} = -3$$

$$f'''(x_2) = f'''\left(-\frac{3}{2}\right) = -\left(12\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+27\right) \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W2} = -\frac{3}{2}$$

$$f(x_{W1}) = f(-3) = -\frac{1}{2}\cdot(-3)(-3+3)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{W1}(-3\,|\,0)}$$

$$f(x_{W2}) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}+3\right)^3 = \frac{81}{32} \approx 2{,}53$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{W2}\left(-\frac{3}{2}\Big|\frac{81}{32}\right) \text{ bzw. } P_{W2}(-1{,}5\,|\,2{,}53)}$$

پنځم: محورغوڅټکي:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y(0\,|\,0)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x(x+3)^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_{2/3/4} = -3$$

صفرځایونه: $\boxed{P_{x1}(0\,|\,0)};\ \boxed{P_{x2/3/4}(-3\,|\,0)}$

شپږم: ارزښتجدول او ګراف:

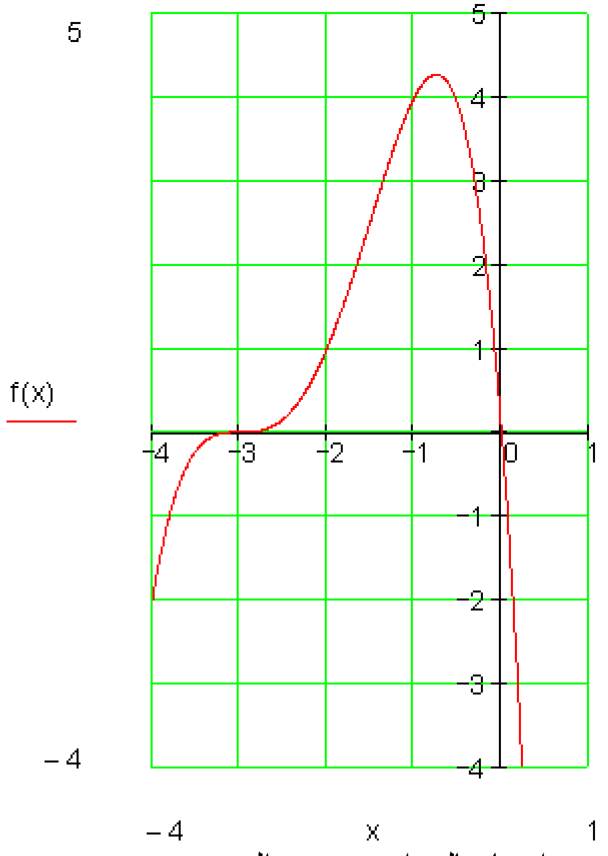
ارزښتجدول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(-4) = -2;\ f(-2) = 1;\ f(-1) = 4;\ f(0,5) \approx -10,72$

		P_{W1} $P_{x2/3/4}$		P_{W2}		P_{Max}	P_{x1}	
x	−4	−3	−2	−1,5	−1	−0,75	0	0,5
f (x)	−2	0	1	2,53	4	4,27	0	−10,72

ګراف:



اووم: د انحنا حالت او يوغړيزوالی:
اووم: كږوالي حالت او يوغړيزوالی:
د $x0=-2$ لپاره (كېنې له P_W) $f''(-2) > 0$ له دې لاس ته راځي كېنې كوږوال(ننوتی يا كونوكس)$]-\infty;0[$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x_0=2$ لپاره (ښي له P_W) $f''(2) < 2$ له دې لاس ته راځي ښي کوږوالی(کونکاو یا وتلی) $]0; -\infty[$

یوغویزوالی:

د $]0; \infty -[$ لپاره کرهیوغږیز ټیټیدونکی یا لویدونکی

د $]-\infty; 0[$ لپاره کره یوغږیز جګیدونکی

د $]2; \infty[$ لپاره کره یوغږیز ټیټیدونکی یا لویدونکی

کږوالی:

د $x_0 = -4$ لپاره (کیڼ له P_{W1}) $f''(-4) = -5 < 0$

لاس ته راځي ښی کوږوالی (کونوکس) $]-\infty; -3[$

د $x_0 = -2$ لپاره (ښي له P_{W1}) $f''(-2) = 1 > 0$

لاس ته راځي کیڼ کوږوالی (کونوکس) $]-3; -1,5[$

د $x_0 = -1$ لپاره (ښی له P_{W2}) $f''(-1) = -2 < 0$

لاس ته راځي ښی کوږوالی(کونکاو) $]-1,5; -\infty[$

یوغږیزوالی:

د مخامخ انتروال لپاره کره یوغږیز جګیدوکی	$]-\infty; -3[$
د مخامخ انتروال لپاره کره یوغږیز جګیدونکی	$\left]-3; -\frac{3}{4}\right[$
د مخامخ انتروال لپاره کره یوغږیز ټیټیدونکی	$\left]-\frac{3}{4}; \infty\right[$

اتم: د تعریفورشو ژۍ ټکي:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^2 - \frac{27}{2}x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^4\left(-\frac{1}{2} - \frac{9}{2x} - \frac{27}{2x^2} - \frac{27}{2x^3}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2} - \frac{9}{2x} - \frac{27}{2x^2} - \frac{27}{2x^3}\right)}_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to-\infty} x^4 = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to\infty} x^4 = -\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه۴ :

لومړی:تعریفورشو:

$$f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \qquad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

دویم: محورسیومتري: $f(-x) = f(x)$ ځکه چې فقط جوړه(جغت) اکسپوننتونه

دریم: افراطیت:

مشتقونه یا رابیلیدني:

$$f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 9x \Rightarrow f''(x) = -12x^2 + 9 \Rightarrow f'''(x) = -24x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 9x = 0 \Leftrightarrow x\left(-4x^2 + 9\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-4x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\frac{3}{2}$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 9 > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{3}{2}\right) = -18 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_2 = \frac{3}{2}$$

$$f''(x_3) = f''\left(-\frac{3}{2}\right) = -18 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_3 = -\frac{3}{2}$$

$$f(x_1) = f(0) = -\frac{81}{16} \approx -5{,}06 \Rightarrow \boxed{P_{Min}\left(0 \mid -\frac{81}{16}\right) \text{ bzw. } P_{Min}(0 \mid -5{,}06)}$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Max1}\left(\frac{3}{2} \mid 0\right) \text{ bzw. } P_{Max1}(1{,}5 \mid 0)}$$

$$f(x_3) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Max2}\left(-\frac{3}{2} \mid 0\right) \text{ bzw. } P_{Max2}(-1{,}5 \mid 0)}$$

څلورم: اوړنتکی یا د انعطاف ټکی:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -12x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$f'''(x_1) = f'''\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -24 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \neq 0 \Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $x_{W1} = \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,87$ کې اوړونټکی(انعطاف-)

$f'''(x_2) = f'''\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -24 \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right) \neq 0$ لاس ته راځي: په $x_{W2} = -\sqrt{\frac{3}{4}} \approx -0,87$

کې اوړونټکی(انعطاف-)

$$f(x_{W1}) = f\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -\frac{9}{4} = -2,25 \Rightarrow \boxed{P_{W1}\left(\sqrt{\frac{3}{4}} \mid -\frac{9}{4}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(0,87 \mid -2,25)}$$

$$f(x_{W2}) = f\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -\frac{9}{4} = -2,25 \Rightarrow \boxed{P_{W2}\left(-\sqrt{\frac{3}{4}} \mid -\frac{9}{4}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(-0,87 \mid -2,25)}$$

پنځم: محورغوځتکي:

$$f(0) = -\frac{81}{16} \approx -5,06 \Rightarrow \boxed{P_y\left(0 \mid -\frac{81}{16}\right) \text{ bzw. } P_y(0 \mid -5,06)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} = 0$$

تراوسه معلوم صفرځایونه $x_1 = \frac{3}{2}; x_2 = -\frac{3}{2}$ (افراطي ټکي وکورئ)

پولینوموېش:

$$\left(-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}\right) : \underbrace{\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)}_{x^2 - \frac{9}{4}}$$

$$\left(-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}\right) : \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) = -x^2 + \frac{9}{4}$$

$$\underline{-\left(-x^4 + \frac{9}{4}x^2\right)}$$

$$\frac{9}{4}x^2 - \frac{81}{16}$$

$$-\left(\frac{9}{4}x^2 - \frac{81}{16}\right)$$

$$-x^2 + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow x_{3/4} = \pm\frac{3}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

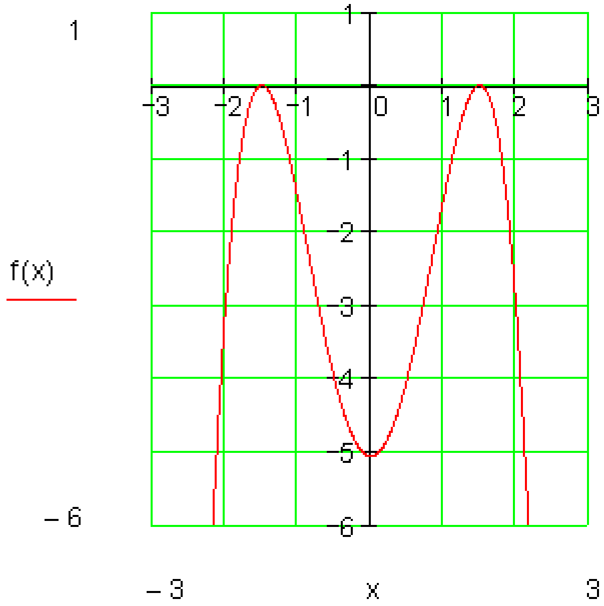
صفرځايونه: $P_{x1/2}\left(\frac{3}{2}\mid 0\right)$; $P_{x3/4}\left(-\frac{3}{2}\mid 0\right)$

شپږم: ارزښت جدول او ګراف:

ارزښتجدول:

$f(-2)\approx -3{,}06 = f(2);\ f(-1)\approx -1{,}56 = f(1)$

		P_{Max2} $P_{x3/4}$		P_{W2}	P_{Min} P_y	P_{W1}		P_{Max1} $P_{x1/2}$	
x	−2	−1,5	−1	−0,87	0	0,87	1	1,5	2
f(x)	−3,06	0	−1,56	−2,25	−5,06	−2,25	−1,56	0	−3,06



اووم: کږوالی يا انحنا:

اووم: کږوالي حالت او يوغږيزوالی:

د $x0=-2$ لپاره (کين له P_W) $f''(-2) > 0$ له دې لاس ته راځي کين کوږوال(ننوتی يا کونوکس)]$0; \infty -$[

د $x0=2$ لپاره (ښي له P_W) $f''(2) < 2$ له دې لاس ته راځي ښي کوږوالی(کونکاو يا وتلی)]$-\infty; 0$[

يوغويزوالی:

د]$0; \infty -$[لپاره کرهيوغږيز تيتيدونکی يا لويدونکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $]-\infty;0[$ لپاره کره یوغږیز جګیدونکی
د $]2;\infty[$ لپاره کره یوغږیز ټیټیدونکی یا لویدونکی
کږوالی:
د $x_0=-1$ لپاره (د P_{W1} او P_{W2} ترمنځ) $f''(-1)=-3<0$
له دې لای ته راځي ښي کږوالی (وتلی یا محدب؟) $\left]-\infty;-\sqrt{\frac{3}{4}}\right[$
د $x_0=0$ لپاره (د P_{W1} او P_{W2} ترمنځ) $f''(0)=9>0$
له دې لای ته راځي ښي کږوالی کیڼ کږوالی: (ننوتی؟) $\left]-\sqrt{\frac{3}{4}};\sqrt{\frac{3}{4}}\right[$
د $x_0=1$ لپاره (له P_{W1} څخه ښی) $f''(1)=-3<0$
له دې لای ته راځي ښي کږوالی (وتلی یا محدب؟) $\left]\sqrt{\frac{3}{4}};\infty\right[$

یوغږیزوالی: د مخامخ لپاره کره یوغږیز جګیدونکی د مخامخ لپاره کره یوغږیز ټیټیدونکی د مخامخ لپاره کره یوغږیز جګیدونکی د مخامخ لپاره کره یوغږیز ټیټیدونکی	$]-\infty;-1{,}5[$ $]-1{,}5;0[$ $]0;1{,}5[$ $]1{,}5;\infty[$

اتم: د تعریفورشو ژی ټکي:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x^4+\frac{9}{2}x^2-\frac{81}{16}\right)=\lim_{x\to-\infty} x^4\left(-1+\frac{9}{2x^2}-\frac{81}{16x^4}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} x^4\cdot\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{9}{2x^2}-\frac{81}{16x^4}\right)}_{-1}=-1\cdot\lim_{x\to-\infty} x^4=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-1\cdot\lim_{x\to\infty} x^4=-\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه:

۱ – تعريف – يا پيژندورشو:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \qquad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

۲ – سيومتري: سيومتري نه شته

۳ – افراطيت-

مشتق

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + 3x^2 \Rightarrow f''(x) = -3x^2 + 6x \Rightarrow f'''(x) = -6x + 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(-x+3) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0;\ x_3 = 3$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 0 \Rightarrow$$

په $x_1 = 0$ کې په افراطي ځای کومه وينه يا افاده نه شته

مګر دا چې $x_{1/2} = 0$ د $f'(x)$ دبل صفرځای دی د $f'(x)$ لپاره په $x_{1/2} = 0$ ځای کې د مخنخبي بدلون نه شته له دي لاس ته راځی، چې په $x_1 = 0$ کې افراطي ځايونه نه شته

$$f''(x_3) = f''(3) = -9 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_3 = 3$$

$$f(x_3) = f(3) = \frac{27}{4} = 6,75 \Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(3 \mid \frac{27}{4}\right) \text{ bzw. } P_{Max}(3 \mid 6,75)}$$

۴ - اوړونټکی يا انعطافټکی: (لاندي الماني: په ... کي اوړونټکی)

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(-3x+6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2$$

$$f'''(x_1) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W1} = 0$$

$$f'''(x_2) = f'''(2) = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W2} = 2$$

$$f(x_{W1}) = f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{W1}(0 \mid 0)}$$

$$f(x_{W2}) = f(2) = 4 \Rightarrow \boxed{P_{W2}(2 \mid 4)}$$

۵ – محورغوڅتکي:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid 0)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3\left(-\frac{1}{4}x + 1\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0;\ x_4 = 4$$

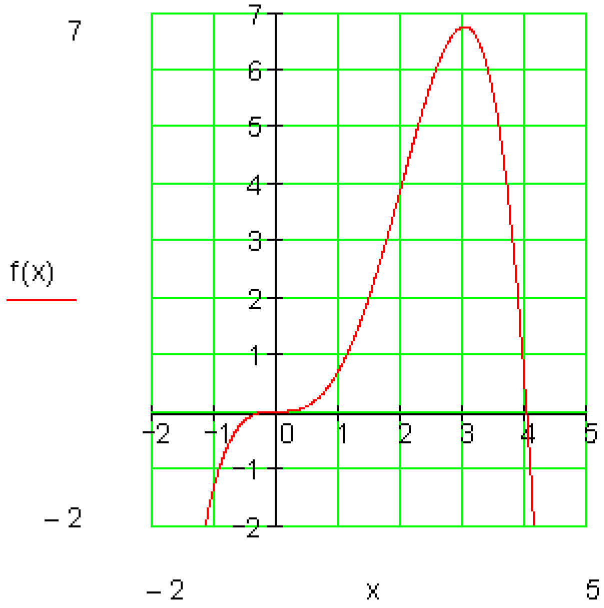
صفرځايونه: $\boxed{P_{x1/2/3}(0 \mid 0)};\ \boxed{P_{x4}(4 \mid 0)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارزښتجدول او ګراف :ارزښتجدول

$f(-1) = -1,25 ; f(1) = 0,75 ; f(4,2) = -3,7$

		P_{W1} $P_{x1/2/3}$ P_y		P_{W2}	P_{Max}	P_{x4}	
x	−1	0	1	2	3	4	4,2
f(x)	−1,25	0	0,75	4	6,75	0	−3,7



کږوالي حالت او يوغږيزوالى:

کږوالى:

د $x_0 = -1$ لپاره (د P_{W1} کيڼ لور ته) $f''(-1)=-9<0$ له دې لاس ته راځي: ښى کږوالى(وتلى) $]-\infty;-0[$

د $x_0 = 1$ لپاره (د P_{W1} او P_{W2} ترمنځ) $f''(1)=3>0$ لاس ته راځي: کيڼ کوږوالى (ننوتى) $]0;2[$

د $x_0 = 3$ لپاره (ښى له P_{W2}) $f''(3)=-9<0$ لاس ته راځي: ښي کږوالى(وتلى) $]2;\infty[$

يوغږيزوالى:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مخامخ لپاره کره یوغریز جګیدونکی	$]-\infty;0[$
د مخامخ لپاره کره یوغریز جګیدونکی	$]0;3[$
د مخامخ لپاره کره یوغریز ټیټیدونکی	$]3;\infty[$

اتم: د تعریفورشو ژی ټکي:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{4}x^4 + x^3\right) = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{x}\right)}_{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to-\infty} x^4 = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to\infty} x^4 = -\infty$$
$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty}$$

افراطي ارزښتونه

تمرینونه د کور کار**I** :

د دریمې درجې ټول یا تام راشنل توابعو افراطي ټکي

د لاندې ټول راشنل(هوښیار) توابعو افراطي ارزښتونه مطالعه کړی او په ممکنه حالت کې یې انحرافي ټکي پیدا کړی.

اول - $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ دویم - $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2$

دریم - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$ څلورم - $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم - $f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{26}{9}$ شپږم - $f(x)=\frac{2}{5}x^3-\frac{22}{5}x^2+14x-10$

اوم - $f(x)=\frac{1}{9}x^3-x^2+3x$ اتم- $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+4$

نهم - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-4$ لسم - $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-3$

حلونه

تمرینونه: مشتقشمیرنه I

نتیجې او مفصل حلونه

نتیجې

اول - $P_{Max}(-2|4)$ $P_{Min}(2|-4)$

دویم - $P_{Max}\left(\frac{8}{3}\approx 2{,}67 \,\middle|\, \frac{128}{27}\approx 4{,}74\right)$ $P_{Min}(0|0)$

دریم - $P_{Max}\left(\frac{4}{3}\approx 1{,}33 \,\middle|\, \frac{128}{27}\approx 4{,}74\right)$ $P_{Min}(4|0)$

څلورم - $P_{Max}\left(\frac{5}{3}\approx 1{,}67 \,\middle|\, \frac{128}{27}\approx 4{,}74\right)$ $P_{Min}(-1|0)$

پنځم - $P_{Max}(-2|6)$ $P_{Min}(4|-6)$

شپږم - $P_{Max}\left(\frac{7}{3}\approx 2{,}33 \,\middle|\, \frac{512}{135}\approx 3{,}79\right)$ $P_{Min}(5|0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوم - انحرافي ټکي نه شته اتم - $P_{Max}(0|4)$ $P_{Min}(4|-4)$

نهم - انحرافي ټکي شتون نه لري.

لسم - $P_{Max}\left(-1-\sqrt{3}\ |\ 3{,}131\right)$ $P_{Min}\left(-1+\sqrt{3}\approx 0{,}732\ |-3{,}797\right)$

پام: د انحرافي ټکو کې رېښه وه، نو د جبشمېرې سره دې شمېرنه وشي، ځکه چې پرته له دې به شمېرنه ډېر وخت ونیسي.

مفصل حلونه

اول – مفصل حل

شمیرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x \qquad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3 \qquad f''(x)=\frac{3}{2}x$$

- د افقي یا پروت محور سره تانجنتونه:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{4}x^2-3}_{\text{مربع مساوات}} = 0|\cdot\frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2-4=0|+4$$

$$\Leftrightarrow x^2=4|\sqrt{\ } \Leftrightarrow |x|=2 \Rightarrow x_1=2 \qquad x_2=-2$$

_ ازماینښت چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1)=f''(2)=\frac{3}{2}\cdot 2=3>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=2$$

$$f''(x_2)=f''(-2)=\frac{3}{2}\cdot(-2)=-3<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=-2$$

- د انحرافي ارزښتونو شمېرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x_1) = f(2) = \frac{1}{4}2^3 - 3\cdot 2 = \frac{8}{4} - 6 = 2 - 6 = -4$$

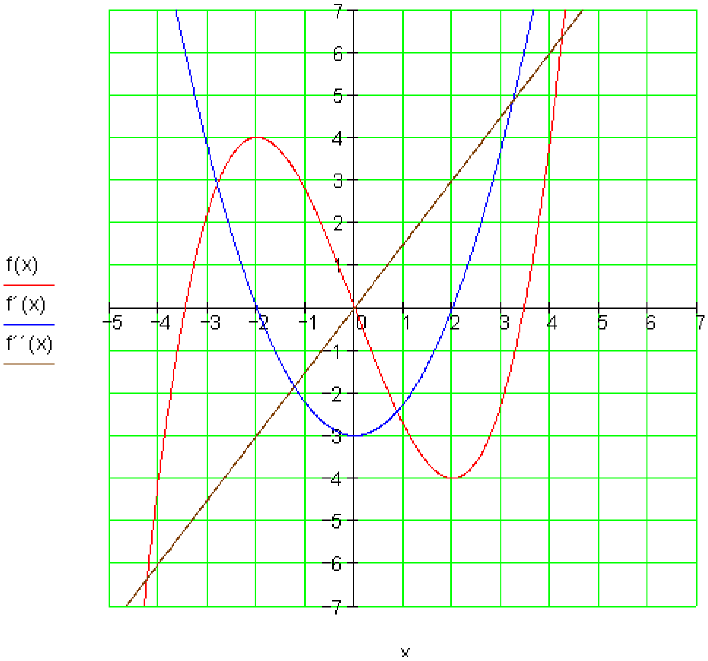
$$f(x_2) = f(-2) = \frac{1}{4}(-2)^3 - 3\cdot(-2) = -\frac{8}{4} + 6 = -2 + 6 = 4$$

- انحرافي ټکي:

$$P_{Min}(2|-4) \qquad P_{Max}(-2|4)$$

ګرافونه:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x \qquad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3 \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x$$



دويم – مفصل حل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 \qquad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x \qquad f''(x) = -3x + 4$$

2 - د پروت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{3}{2}x^2 + 4x}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{3}{2}x + 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-\frac{3}{2}x + 4 = 0 | \cdot (-1) \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 4 = 0 | + 4 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = 4 | \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \Rightarrow \quad x_2 = \frac{8}{3}$$

3 - ازمایښت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(0) = -3 \cdot 0 + 4 = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{8}{3}\right) = -3 \cdot \frac{8}{3} + 4 = -8 + 4 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = \frac{8}{3}$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$f(x_1) = f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2 = 0$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{512}{27} + 2 \cdot \frac{64}{9} = -\frac{256}{27} + \frac{384}{27} = \frac{128}{27}$$

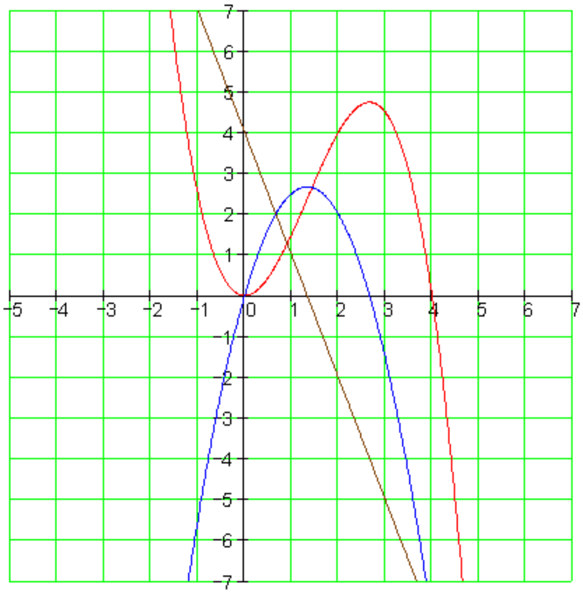
5 – انحرافي ټکي

$$P_{Min}(0|0) \qquad P_{Max}\left(\frac{8}{3} \approx 2{,}67 \;\middle|\; \frac{128}{27} \approx 4{,}74\right)$$

گرافونه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 \qquad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x \qquad f''(x) = -3x + 4$$



دریم - مفصل حل:شمیرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \qquad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 \qquad f''(x) = 3x - 8$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{2}x^2 - 8x + 8}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \,|\cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3} = 0$$

$$p = -\frac{16}{3} \quad q = \frac{16}{3} \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{64}{9} - \frac{16}{3} = \frac{64}{9} - \frac{48}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4 \\ x_2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3 - ازمایښت، چي ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(4) = 3\cdot 4 - 8 = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 4$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{4}{3}\right) = 3\cdot\frac{4}{3} - 8 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = \frac{4}{3}$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$f(x_1) = f(4) = \frac{1}{2}\cdot 4^3 - 4\cdot 4^2 + 8\cdot 4 = \frac{1}{2}\cdot 64 - 64 + 32 = 32 - 64 + 32 = 0$$

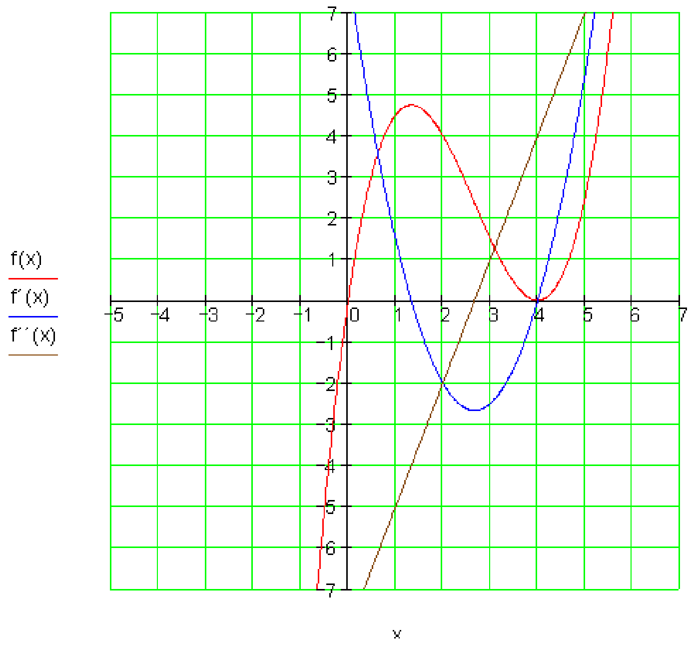
$$f(x_2) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 8\cdot\frac{4}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{64}{27} - 4\cdot\frac{16}{9} + \frac{32}{3}$$

$$= \frac{32}{27} - \frac{192}{27} + \frac{288}{27} = \frac{128}{27}$$

5 - انحرافي ټکي:

$$P_{Min}(4|\,0) \qquad P_{Max}\left(\frac{4}{3} \approx 1{,}33 \;\middle|\; \frac{128}{27} \approx 4{,}74\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \qquad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 \qquad f''(x) = 3x - 8$$



ګرافونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

مفصل حل -

شمیرنه: څلورم:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \qquad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{2} \qquad f''(x) = -3x + 1$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \,\Big|\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0$$

$$p = -\frac{2}{3} \quad q = -\frac{5}{3} \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9} + \frac{5}{3} = \frac{1}{9} + \frac{15}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \Bigg| \quad x_1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -1$$

3 - ازمایینت، چې ایا یو انحرافي تکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''\left(\frac{5}{3}\right) = -3\cdot\frac{5}{3} + 1 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = \frac{5}{3}$$

$$f''(x_2) = f''(-1) = -3\cdot(-1) + 1 = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = -1$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$f(x_1) = f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^3 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{125}{27} + \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{9} + \frac{25}{6} + \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{125}{54} + \frac{75}{54} + \frac{225}{54} + \frac{81}{54} = \frac{256}{54} = \frac{128}{27}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

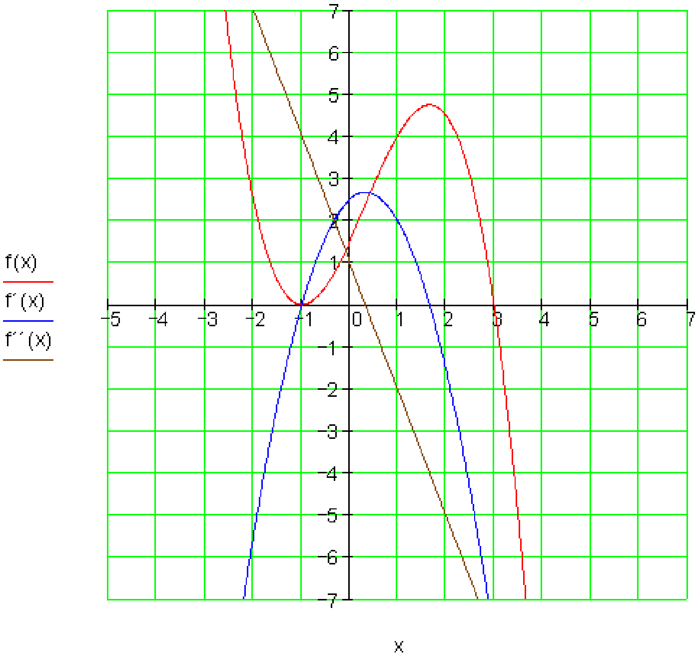
$$f(x_2)=f(-1)=-\frac{1}{2}\cdot(-1)^3+\frac{1}{2}\cdot(-1)^2+\frac{5}{2}\cdot(-1)+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=0$$

5 – انحرافي ټکي

$$P_{Min}(-1|\,0) \qquad P_{Max}\left(\frac{5}{3}\approx 1,67 \;\middle|\; \frac{128}{27}\approx 4,74\right)$$

ګرافونه

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2} \qquad f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+x+\frac{5}{2} \qquad f''(x)=-3x+1$$



پنځم:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{26}{9} \qquad f'(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3} \qquad f''(x)=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$$

2 - د پروت يا افقي تانجنت ځايونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}}_{\text{quadratische Gleichung}}=0|\cdot 3 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0$$

$$p=-2 \quad q=-8 \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+8=9$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{9}=3 \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \;\Bigg|\; \begin{matrix} x_1=1+3=4 \\ x_2=1-3=-2 \end{matrix}$$

3 - ازمایښت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1)=f''(4)=\frac{2}{3}\cdot 4-\frac{2}{3}=\frac{6}{3}=2>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=4$$

$$f''(x_2)=f''(-2)=\frac{2}{3}\cdot(-2)-\frac{2}{3}=-\frac{6}{3}=-2<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=-2$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$f(x_1)=f(4)=\frac{1}{9}\cdot 4^3-\frac{1}{3}\cdot 4^2-\frac{8}{3}\cdot 4+\frac{26}{9}=\frac{1}{9}\cdot 64-\frac{1}{3}\cdot 16-\frac{32}{3}+\frac{26}{9}$$

$$=\frac{64}{9}-\frac{48}{9}-\frac{96}{9}+\frac{26}{9}=-\frac{54}{9}=-6$$

$$f(x_2)=f(-2)=\frac{1}{9}\cdot(-2)^3-\frac{1}{3}\cdot(-2)^2-\frac{8}{3}\cdot(-2)+\frac{26}{9}=\frac{1}{9}\cdot(-8)-\frac{1}{3}\cdot 4+\frac{16}{3}+\frac{26}{9}$$

$$=-\frac{8}{9}-\frac{12}{9}+\frac{48}{9}+\frac{26}{9}=\frac{54}{9}=6$$

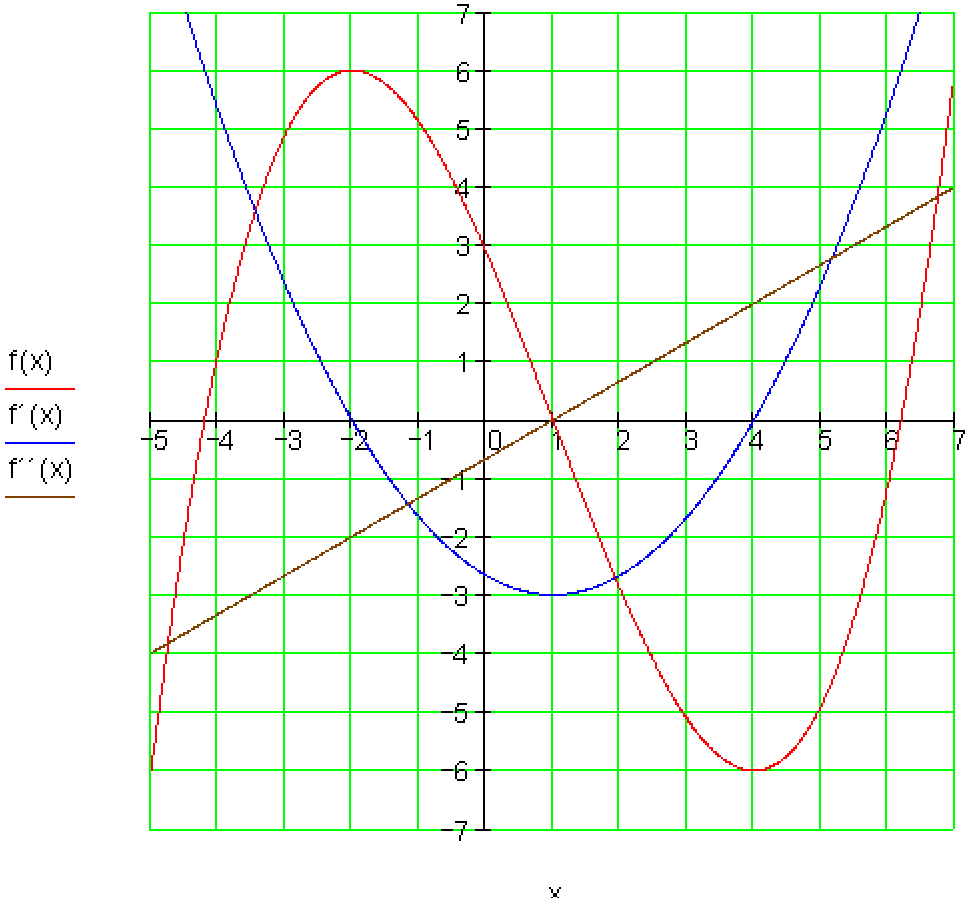
5 - افراطي ټکي

$$\underline{\underline{P_{Min}(4|-6)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max}(-2|6)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

گرافونه

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{26}{9} \qquad f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} \qquad f''(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$



شيږم:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{2}{5}x^3 - \frac{22}{5}x^2 + 14x - 10 \qquad f'(x) = \frac{6}{5}x^2 - \frac{44}{5}x + 14 \qquad f''(x) = \frac{12}{5}x - \frac{44}{5}$$

2 - د پورت يا افقي تانجنت ځايونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \underbrace{\frac{6}{5}x^2-\frac{44}{5}x+14=0}_{\text{quadratische Gleichung}}\Big|\cdot\frac{5}{6}\Leftrightarrow x^2-\frac{22}{3}x+\frac{35}{3}=0$$

$$p=-\frac{22}{3}\quad q=\frac{35}{3}\quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{121}{9}-\frac{35}{3}=\frac{121}{9}-\frac{105}{9}=\frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}\Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\Bigg|\begin{array}{l}x_1=\frac{11}{3}+\frac{4}{3}=\frac{15}{3}=5\\ x_2=\frac{11}{3}-\frac{4}{3}=\frac{7}{3}\end{array}$$

3 - ازمایینت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1)=f''(5)=\frac{12}{5}\cdot 5-\frac{44}{5}=\frac{16}{5}>0\Rightarrow$$

د $x_1=5$ په ځای کې نسپئ مینیموم

$$f''(x_2)=f''\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{12}{5}\cdot\frac{7}{3}-\frac{44}{5}=\frac{28}{5}-\frac{44}{5}=-\frac{16}{5}<0\Rightarrow$$

د $x_2=\frac{7}{3}$ په ځای کې نسبئ مینیموم

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$f(x_1)=f(5)=\frac{2}{5}\cdot 5^3-\frac{22}{5}\cdot 5^2+14\cdot 5-10=50-110+70-10=0$$

$$f(x_2)=f\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^3-\frac{22}{5}\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^2+14\cdot\frac{7}{3}-10=\frac{2}{5}\cdot\frac{343}{27}-\frac{22}{5}\cdot\frac{49}{9}+\frac{98}{3}-10$$

$$=\frac{686}{135}-\frac{3234}{135}+\frac{4410}{135}-\frac{1350}{135}=\frac{512}{135}$$

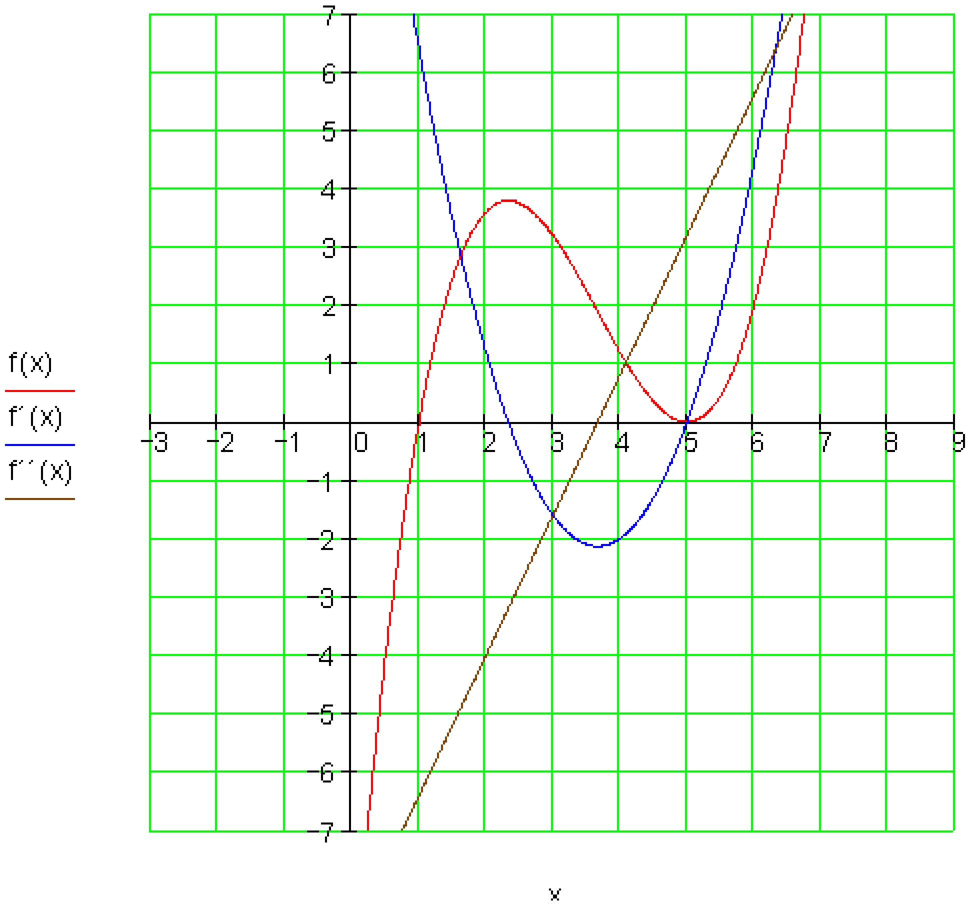
5 - انحرافي ټکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\underline{\underline{P_{Min}(5|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max}\left(\frac{7}{3}\approx 2{,}33 \;\middle|\; \frac{512}{135}\approx 3{,}79\right)}}$$

گرافونه:

$$f(x)=\frac{2}{5}x^3-\frac{22}{5}x^2+14x-10 \qquad f'(x)=\frac{6}{5}x^2-\frac{44}{5}x+14 \qquad f''(x)=\frac{12}{5}x-\frac{44}{5}$$

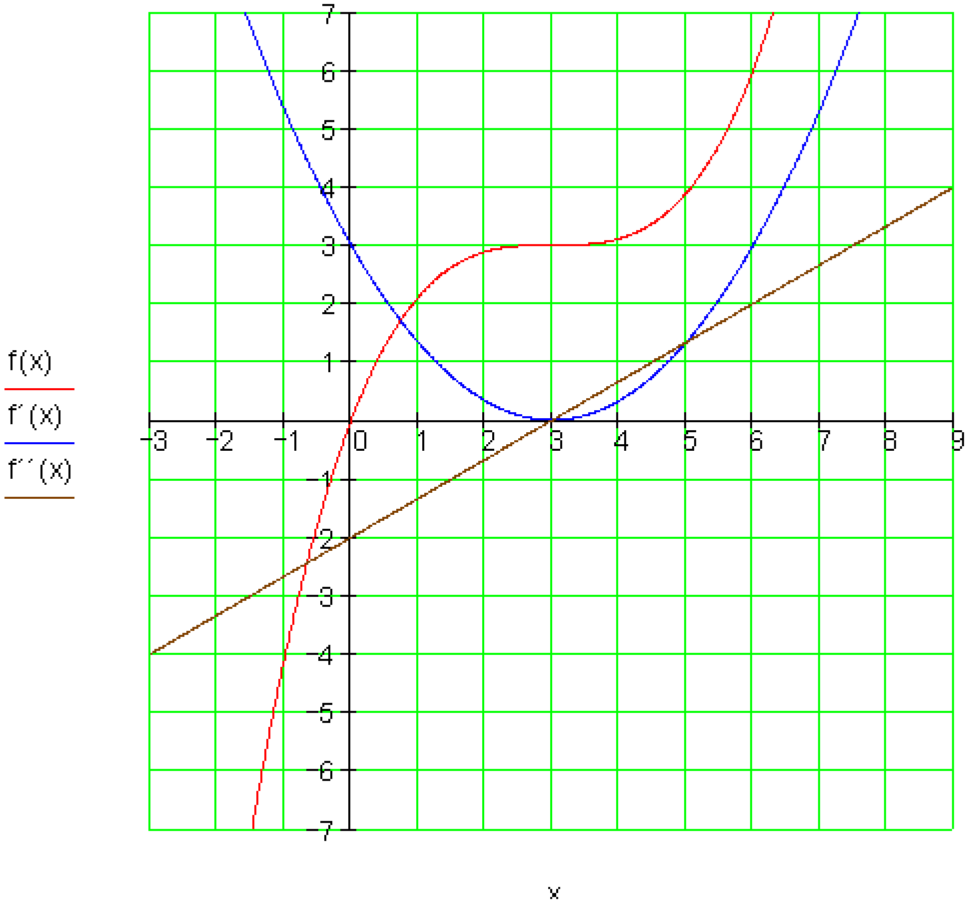


اووم: شمیرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x^2+3x \qquad f'(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+3 \qquad f''(x)=\frac{2}{3}x-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



2 - د پروت يا افقي تانجنت ځايونه:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{3}x^2-2x+3}_{\text{quadratische Gleichung}}=0|\cdot 3 \Leftrightarrow x^2-6x+9=0$$

$$p=-6 \quad q=9 \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=9-9=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{0}=0 \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \;\Bigg|\; \begin{array}{l} x_1=3 \\ x_2=3 \end{array}$$

د لومړي مشتق دبل صفرځايونه په دې معنا دي، چې په دې ځايونو کې انحرافي ارزښتونه نه شته. ازمايښت به هم دا وښايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

3 - ازماینښت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_{1/2}) = f''(3) = \frac{2}{3}\cdot 3 - 2 = 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي، چې افراطي ټکي نه شته

ګرافونه: ګراف د تیر مخ په سر کې راوړل شویاو فرمول یې دا لاندې دی.

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + 3x \qquad f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 \qquad f''(x) = \frac{2}{3}x - 2$$

اتم: شمیرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{3}{4}x^2 - 3x} \quad = 0| \Leftrightarrow x\left(\frac{3}{4}x - 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

مربع مساوات

$$\frac{3}{4}x - 3 = 0| + 3 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 3| \cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow x_2 = 4$$

3 - ازماینښت، چې ایا یو انحرافي اروښتونه مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(0) = \frac{3}{2}\cdot 0 - 3 = -3 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''(4) = \frac{3}{2}\cdot 4 - 3 = 3 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = 4$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

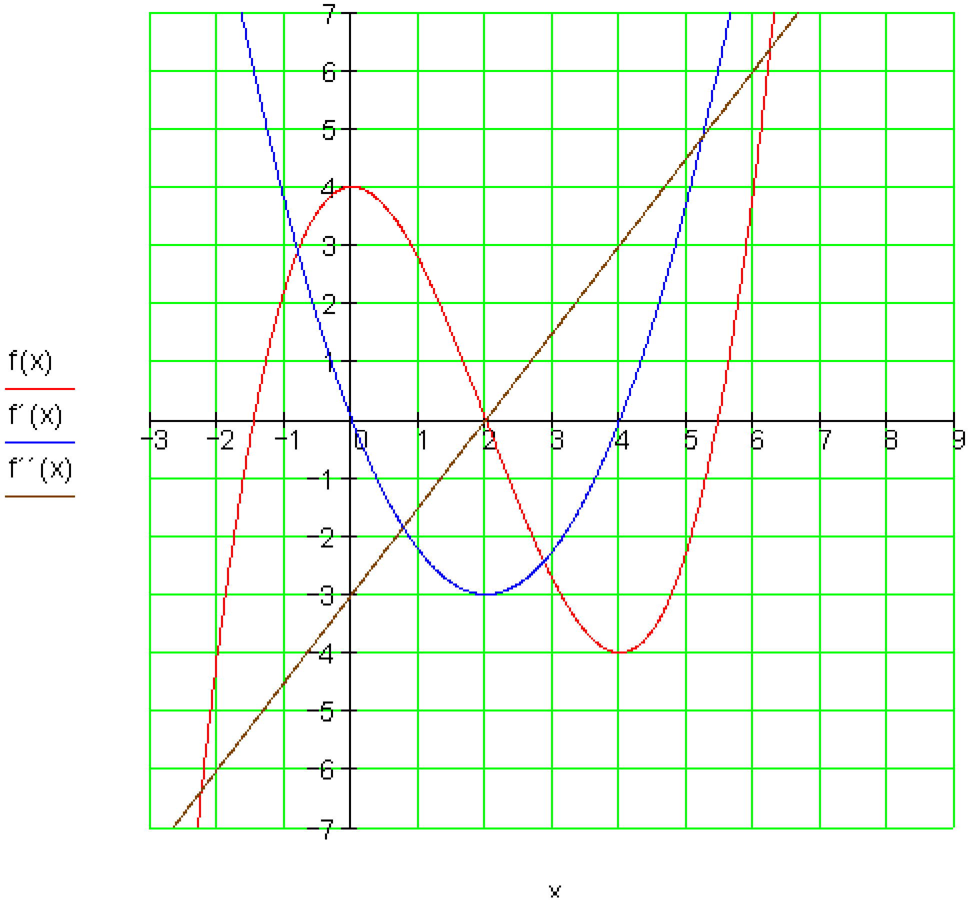
$$f(x_1) = f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^3 - \frac{3}{2} \cdot 0^2 + 4 = 4$$

$$f(x_2) = f(4) = \frac{1}{4} \cdot 4^3 - \frac{3}{2} \cdot 4^2 + 4 = 16 - 24 + 4 = -4$$

5 - انحرافي ټکي

$P_{Min}(4| -4)$ $P_{Max}(0| 4)$

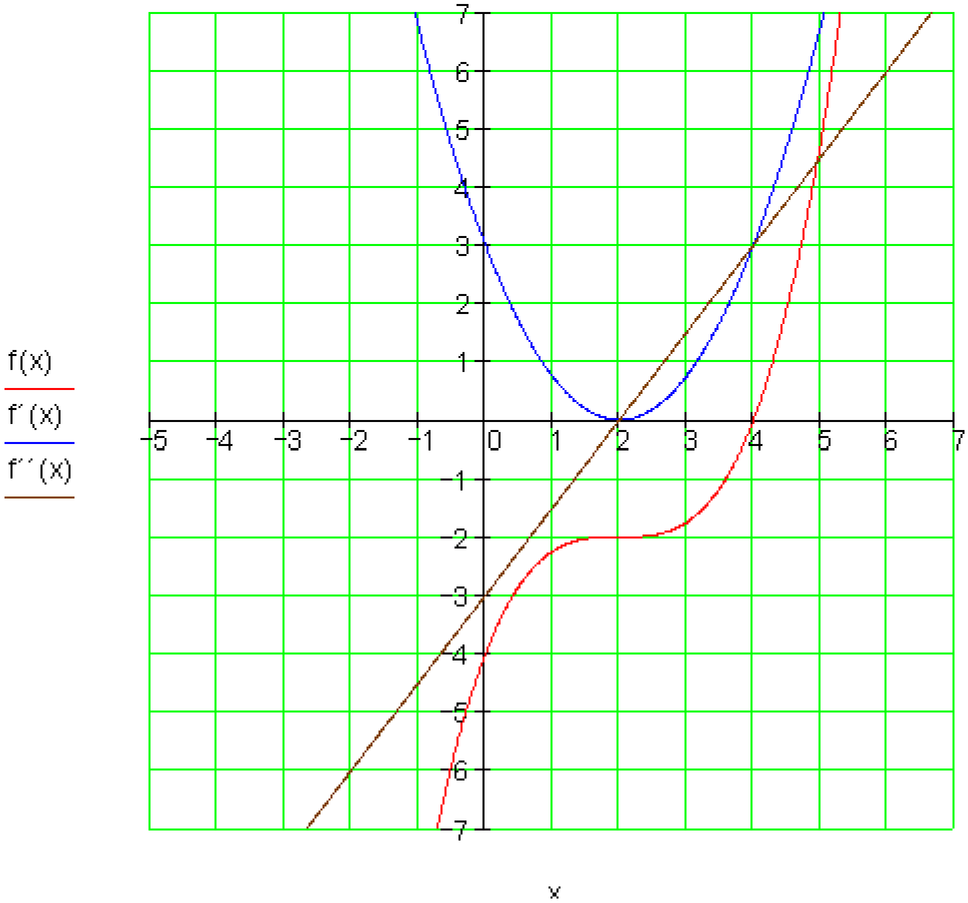
ګرافونه: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4$ $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$ $f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$



نهم: شميرنه: 1 – تابع مساوات د مشتق سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 4 \qquad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$$



2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{4}x^2 - 3x + 3}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \,\Big|\cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$p = -4 \quad q = 4 \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{0} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \;\Bigg|\; \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي مشتق ډبل صفرځايونه په دې معنا دي، چې په دې ځايونو کې انحرافي ارزښتونه نه شته. ازمايښت به هم دا وښايي.

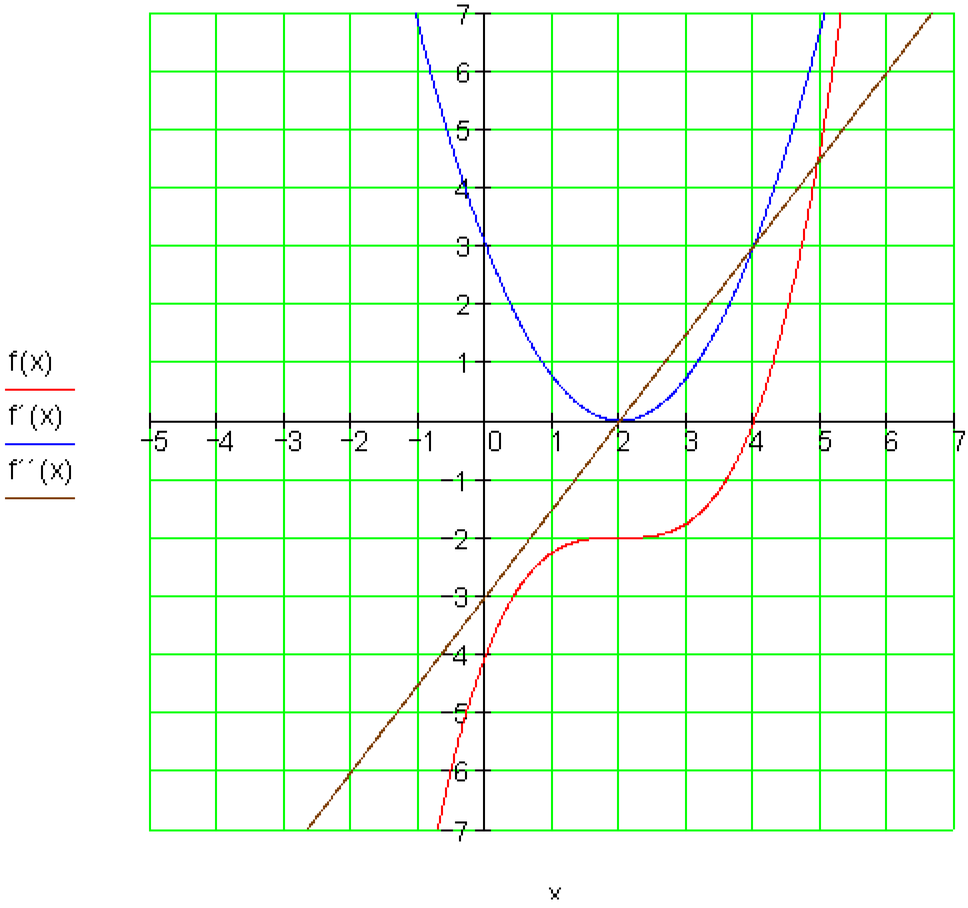
3 - ازمايښت، چې ايا انحرافي ارزښتونه مخ ته لرو:

$$f''(x_{1/2}) = f''(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 - 3 = 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي، چې انحرافي ارزښتونه په $x_{1/2} = 2$ کې نه شته.

ګرافونه: ګراف په ير مخ کې او فمول يې بيا هم دل لاندې:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 4 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم: شمیرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-3 \quad f'(x)=x^2+2x-2 \quad f''(x)=2x+2$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2+2x-2}_{\text{quadratische Gleichung}}=0$$

$$p=2 \quad q=-2 \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+2=3$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{3} \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \;\left|\; \begin{array}{l} x_1=-1+\sqrt{3} \\ x_2=-1-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

3 - ازماینښت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1)=f''\left(-1+\sqrt{3}\right)=2\cdot\left(-1+\sqrt{3}\right)+2=-2+2\sqrt{3}+2=2\sqrt{3}>0$$

$$\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=-1+\sqrt{3}$$

$$f''(x_2)=f''\left(-1-\sqrt{3}\right)=2\cdot\left(-1-\sqrt{3}\right)+2=-2-2\sqrt{3}+2=-2\sqrt{3}<0$$

$$\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=-1-\sqrt{3}$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمېرنه

$$f(x_1)=f\left(-1+\sqrt{3}\right)=\frac{1}{3}\left(-1+\sqrt{3}\right)^3+\left(-1+\sqrt{3}\right)^2-2\left(-1+\sqrt{3}\right)-3\approx-3,797$$

$$f(x_2)=f\left(-1-\sqrt{3}\right)=\frac{1}{3}\left(-1-\sqrt{3}\right)^3+\left(-1-\sqrt{3}\right)^2-2\left(-1-\sqrt{3}\right)-3\approx 3,131$$

شمیرنه د جبشمیري سره سر ته رسیږي

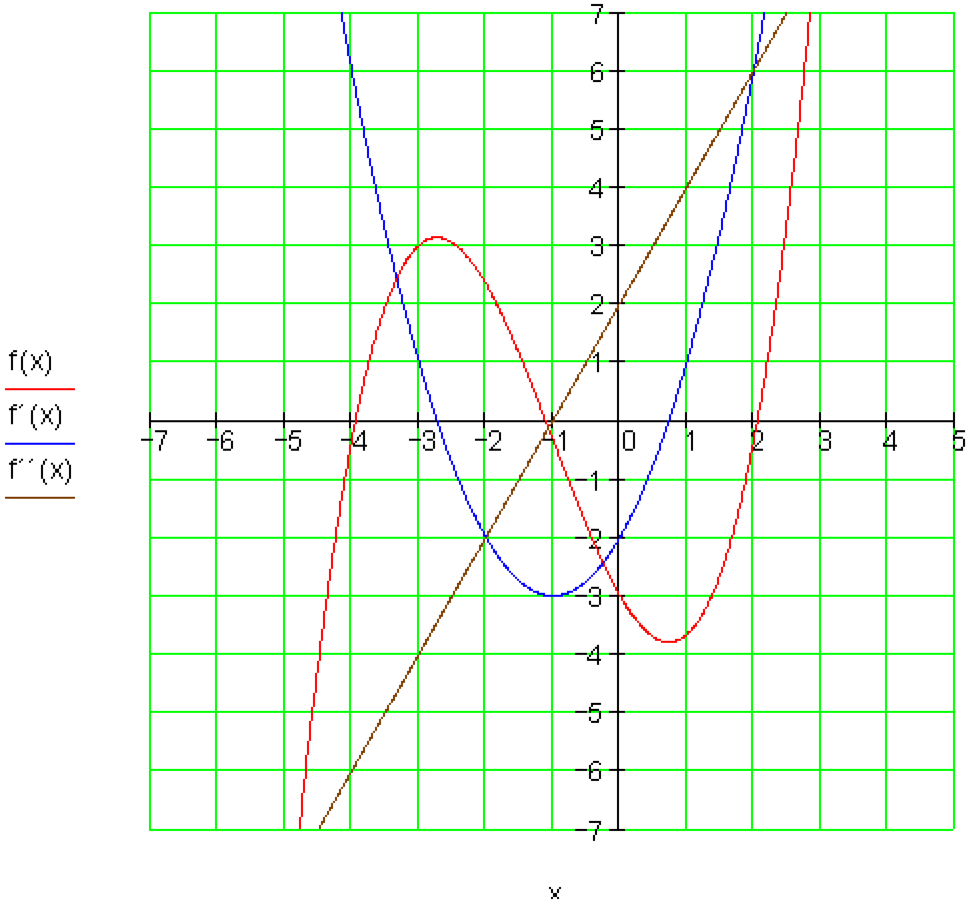
(c) ketabton.com: The Digital Library

5 - انحرافي تکي

$P_{Max}\left(-1-\sqrt{3} \mid 3,131\right)$ $P_{Min}\left(-1+\sqrt{3} \approx 0,732 \mid -3,797\right)$

گرافونه:

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 3 \quad f'(x) = x^2 + 2x - 2 \quad f''(x) = 2x + 2$



پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

IX مشتقشمیرنه

لومړی:

د منحني ټکي د پراته تانجنت سره وشمېرى. ایا دا د منحني ټکي انحرافي ارزښتونه دئ؟ ستا پریکړه په دلایلو روښانه کړه.

الف – $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$ ب - $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$ پ - $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$

دویم: د تابع f(x) د ګراف انحرافي ټکي زشمېرئ. په یوه مناسب وضعیه قیمت سیستم کې یې ګراف وباسی.	$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$
دریم:a داسي وټاکی، چې تابع f(x) په x = 2 کې یو انحرافي ځاي ولرئ. دا کوم ډول انحرافي ځاي دی؟	$f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + ax^2 + 4$ د $x \in \mathbb{R}$ سره
څلورم: یو تابع f(x) ورکړشوی دی. a داسي وټاکی، چې د f(x) د ګراف افراطي ټکی د x -محور باندط پروت وي. ایا دا افراطي ټکی جګ - یا ټیټ ټکی دی؟	$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + a$

پنځم:

تابع f(x) دې انحرافي ارزښت ونه لري. د دې حالت لپاره دي ضریبونه کوم شرایطپورهکړي او f(x) څو صفرځایونه لري؟ ستاسو ځواب په دلایلو روښانه کړی؟	$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم:

تابع $f_a(x) = ax(x+3)^2$ ورکړشوې د $x \in \mathbb{R}$ او $a > 0$. سره.

د خورا جګ اوخورا ټيټيټکي ټرنکرښه د وضعيه قيمت سيسم محور سره مثلث جوړوي.
د مثلث سطحه د a په تابعيت سره پيداکړی. د دې د مخه يو شکل وباسی.

اووم: لاندې په انحرافي ارزښتزنو مطالعه کړی:

الف-

x	0,5	1	1,5	2	2,5
f (x)	1,6666	1,8333	1,75	1,6666	1,8333
f '(x)	0,75	0	−0,25	0	0,75

ب-

x	−3	−2	−1	0	1
f (x)	−0,149	−0,135	0,3678	3	13,591
f '(x)	−0,049	0,1353	1,1036	5	19,027

اتم: اتم - د دلاندې توابعو انحراف او انعطاف ټکو ارزښتونه وشمیری.

سربیره پردې د پوښتنو 6 ,5 ,4 ,1 او7 د محور غوڅټکي (د تضاطع ټکي) وشمیری
او ګرافونه يې وکاږی.

الف - $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$ ب - $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$

پ - $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$ ت - $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3}$

ټ - $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$ ث - $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ج - $f(x) = \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x$

حلونه

مشتقشميرنه IX

مفصل حلونه:

اول - مفصل حلونه:

الف – مشتق:

الف- $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$ مشتق $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}$

پروت يا افقي تانجنت

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$$

مشتق $f'(x)$ د $x_{1/2}$ په ځای کې ساده صفرځايونه لري او مخنخبنه بدلوي. پس $f(x)$ دوه انحرافي ټکي لري.

ب - $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$ مشتق $: f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$

پروت يا افقي تانجنت: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 ; x_2 = 2$

مشتق $f'(x)$ د $x_{1/2}$ په ځای کې ساده صفرځايونه لري او مخنخبنه بدلوي. پس $f(x)$ دوه انحرافي ټکي لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x \quad \text{مشتق} \quad f'(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}$$

پروت (افقي) تانجنت:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}=0 \Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{2}$$

مشتق $f'(x)$د $x_{1/2}$ سره ساده صفرځایونه لري او مخنخبنه بدلوي. پس $f(x)$ دوه انحرافي ارزښتوه لري.

ب -

مشتق: $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^2-x$$

پروت (افقي) تانجنت

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-x=0 \Rightarrow x_1=0\,;\,x_2=2$$

مشتق $f'(x)$د $x_{1/2}$ سره ساده صفرځایونه لري او مخنخبنه بدلوي. پس $f(x)$ دوه افراطي ارزښتوه لري.

پ – $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3-2$ مشتق: $f'(x)=-x^3+3x^2$

پروت (افقي) تانجنت: $f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^3+3x^2 \Rightarrow x_{1/2}=0\,;\,x_3=3$

مشتق $f'(x)$د $x_{1/2}=0$ په ځای کې یو ډبل صفرځای لري، دا په دې معنا چې د مخنخښې بدلېدنه شتون نه لري. پس $f(x)$ په دې ځای کې انحرافي ټکی نه لري. $x_3=3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f'(x) ساده صفرځای دی، هلته د مخنخښې بدلېدنه منځ ته راځي. نو f(x) په دې ځاي کې افراطي ټکی لري.

دویم - مفصل حلونه:

$$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x$$

$$f'(x)=\frac{3}{8}x^2-3x+\frac{9}{2}$$

$$f''(x)=\frac{3}{4}x-3$$

د لوکال افراطي ټکو لپاره اړیین شرتونه:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{8}x^2-3x+\frac{9}{2}=0\,|\cdot\frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2-8x+12=0\Rightarrow p=-8;\ q=12;\ D=4\Rightarrow\boxed{x_1=6};\ \boxed{x_2=2}$$

$$f''(x_1)=f''(6)=\frac{3}{2}\Rightarrow \text{rel Min}\quad f''(x_2)=f''(2)=-\frac{3}{2}\Rightarrow \text{rel Max}$$

$$\text{rel Min: } f(x_1)=f(6)=0\Rightarrow\boxed{P_{min}(6\,|\,0)}$$

$$\text{rel Max: } f(x_2)=f(2)=4\Rightarrow\boxed{P_{max}(2\,|\,4)}$$

یادونه: په پورته کې rel د relative لنډونه ده او د نسبي په معنا دی.

د ګراف د رسمولو لپاره نور ټکي هم اړیین دي

د y محور سره د تقاطع ټکی $\boxed{P_y(0\,|\,0)}$

صفرځایونه:

$$:f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

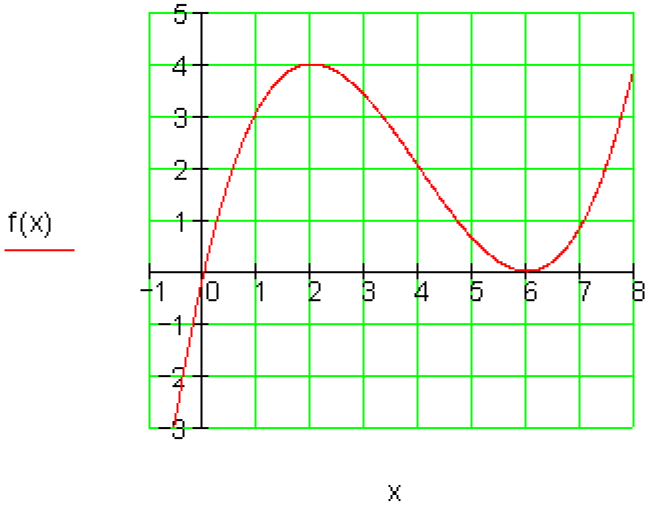
$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}\right)=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}=0 \Rightarrow x_{2/3}=0$$

ډبل صفرځای

ارزښت جدول:

x	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
f (x)	−6,125	0	3,125	4	3,375	2	0,615	0	0,875



دریم:

$$f(x)=-\frac{1}{12}x^3+ax^2+4; \qquad f'(x)=-\frac{1}{4}x^2+2a$$

پیل : په $x = 2$ کې افراطي ټکی په دې معنا دی چې:

$$f'(2)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\cdot 2^2+2a\cdot 2=0 \Leftrightarrow \boxed{a=\frac{1}{4}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له $f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 4$ سره همداسي $f'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$

انحرافي ټکی: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ همداسي x2 = 2

په x1 = 0 کې نسبي مين	$f''(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ $\Rightarrow f''(x_1) = f''(0) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ re
په x2=2 کې نسبي ماکس	$\Rightarrow f''(x_1) = f''(2) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$

څلورم:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + a$$

د انحراف ټکی دې د x محور باندې پروت وي

دا په دې معنا چې : $f(x_E) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

د پراته یا افقي تانجنت ځایونه

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{2}x - 3\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 \text{ und } x_3 = 6$$

د افراطي ځاي شتون په هکله ازمايينت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f''(x_{1/2}) = f''(0) = 0$ لاس ته راځي، چې په $x_{1/2} = 0$ کې افراطي ځای نه شته

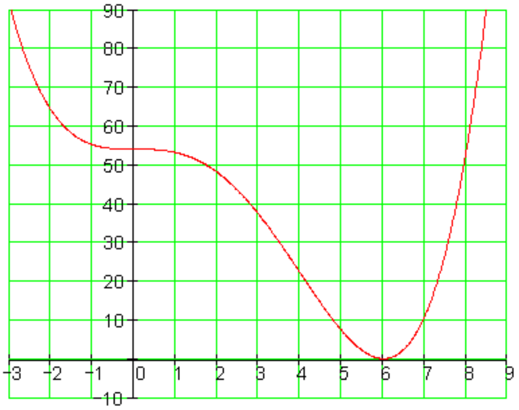
$$f''(x_3) = f''(6) = \frac{2}{3}\cdot 6^2 - 6\cdot 6 = 18 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_3 = 6$$

د a متحولې ټاکنه

$$f(6) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}\cdot 6^4 - 6^3 + a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 54}$$

$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + 54$ د $x_E = 6$ په ځای کې يو نسبي مينيموم لري

دا د x محور باندې پراته دي: $P_{Min}(6|0)$:



ځلورم:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

افراطي ټکي بآيد د x په محور پرآته وي،دآ په دې معنآ چې: $f(x_E)=0$:

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2 \qquad f''(x)=\frac{3}{2}x^2-6x$$

د پرآته محور سره د تآنچنت ځآيونه

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3-3x^2=0 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{2}x-3\right)=0 \Rightarrow x_{1/2}=0 \text{ und } x_3=6$$

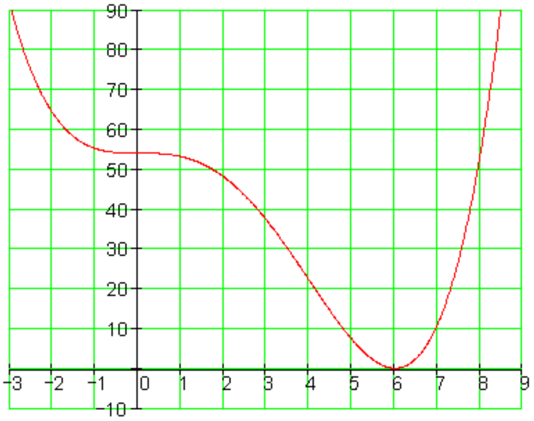
د يوه آکسرېموم شتون آزمايښت : $f''(x_{1/2})=f''(0)=0$:
له دې لاس ته راځي، چې په $x_{1/2}=0$ کې افراطي ځايونه نه شته

د متحولېa ټآکنه:

$$f(6)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}\cdot 6^4-6^3+a=0 \Leftrightarrow \boxed{a=54}$$

$f(x)=\frac{1}{8}x^4-x^3+54$ د $x_E=6$ ځآی کې يو نسبي مينيموم لري.

دآ په x محور پروت دی: $P_{Min}(6\,|\,0)$:



(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم:

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$

که د آنحرآف ټکي شتون ونه لري، بآيد $f'(x) \neq 0$ بآور ولري:

يآ $f'(x) = 0$ د ډبل صفرځآي سره (لومړي مشتق بي له مخنخښې تغير څخه)

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2bx + c = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + \frac{2}{3}bx + \frac{1}{3}c = 0}_{\text{quadratische Gleichung}}$$

$$p = \frac{2}{3}b\,;\; q = \frac{1}{3}c \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{3}c$$

$D<0$: مربع مسآوآت حل نه لرئ، که $\frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{3}c < 0$ وي.

دآ په دې معنآ، چې f(x) په دې حآلت کې پروت يآ آفقي تآنجنت نه لري. دf(x) تابع ګراف له دريمې څلورمې يا ربعې څخه و لومړۍ څلورمې ته ځغلي.

تابع په کلکه همغږيز جګېدونکي د

$D=0$: مربع مساوات ډبل صفرځای لري،که $(1/9)b^2 - (1/3)c = 0$ وي.

دا په دې معنا f(x)چې يو پروت تانجنت لري. مګر دا چې د f'(x) لپاره په دې ځاي کې د مخنخښې تغير نه شته (ډبل صفرځای)، نو f(x) افراطي ځايونه نه لري.

داا چې د مخه پوهيږ چې f(x)افراطي ټکی نه لري، نو f(x) ټيک يو صفرځاي لري.

پنځم:

که د آنحرآف ټکي شتون ونه لري، بآيد0=|f'(x) بآور ولري:

يآ د ډبل صفرځآي سره (لومړي مشتق بي له مخنخښې تغير څخه)

: مربع مسآوآت حل نه لرئ، که وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دآ په دې معنآ، چې په دې حآلت کې پروت یآ آفقي تآنجنت نه لري. د تابع ګراف له دریمې څلورمې یا ربعې څخه و لومړۍ څلورمې ته ځغلي.

تابع په کلکه همغږیز چګیدونکې ده

: مربع مساوات ډبل صفرځای لري،ګه وي.

دا په دې معنا چې یو پروت تانجنت لري. مګر دا چې د   لپاره په دې ځاي کې د مخنخښې تغیر نه شته (ډبل صفرځای)   انحرافي ځایونه نه لري.

داا چې د مخه پوهیږ چې انحرافي ټکی نه شته، تیک یو صفرځاي لري.

شپږم:

$$f(x) = ax(x+3)^2 = ax^3 + 6ax^2 + 9ax$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 12ax + 9a \qquad f''(x) = 6ax + 12a$$

افراطي ټکي:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 12ax + 9a = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -1 \text{ bzw. } x_2 = -3$$

$$f''(x_1) = f''(-1) = 6a\cdot(-1) + 12a = a(-6+12) > 0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_1 = -1$$

$$f''(x_2) = f''(-3) = 6a\cdot(-3) + 12a = (-18+12) < 0 \Rightarrow \text{rel. Max bei } x_2 = -3$$

$$P_{Max} : f(-3) = a\cdot(-3)(-3+3)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Max}(-3\,|\,0)}$$

$$P_{Min} : f(-1) = a\cdot(-1)(-1+3)^2 = -4a \Rightarrow \boxed{P_{Min}(-1\,|\,-4a)}$$

کرښیز مساوات د $P_{Max}(-3\,|\,0)$ او $P_{Min}(-1\,|\,-4a)$ سره.

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4a - 0}{-1-(-3)} = \frac{-4a}{2} = -2a \Rightarrow g(x) = -2ax + a_0$$

د $P_{Max}(-3\,|\,0)$ سره ټکي ازماینت

$$g(-3) = 0 \Leftrightarrow -2a\cdot(-3) + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 = -6a \Rightarrow \boxed{g(x) = -2ax - 6a}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د محور سره غوڅتکي $g(x)$ او $P_y(0|-6a)$ und $P_x(-3|0)$ دي.

د درېکودي یا مثلث سطحه: $A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 6a}{2} = \boxed{9a}$

(د مطلقه ارزښتونو سره کیدی شي وشمیرل شي):

د $a=1$ لپاره ګرافیکي انځورونه.

کربنه د x محور د $P_x(-3|0)$ په تکي کي غوڅوي او د y محور د $P_y(0|-6)$ په تکي کي.

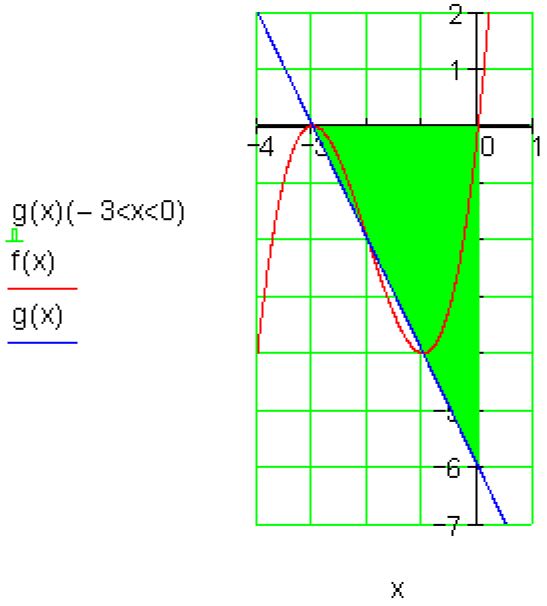
د سطحي شمیرنه د مطلقه ارزښتونو سره کیږي، ځکه چي سطحه تل مثبت ده.

A=g.h/2

د g=3 او h=6 لرو

$$A = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9\ FE$$

په پورته کي FE د سطحي یوون یا واحد په معنا دی.



اووم: الف –

x	0,5	1	1,5	2	2,5
f(x)	1,6666	1,8333	1,75	1,6666	1,8333
f '(x)	0,75	0	−0,25	0	0,75

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه انحرافي ټکي شتون لري:

په x = 1 کې د مخنخښي بدلون لرو د f'(x) لپاره د $\boxed{+} \to \boxed{-} \Rightarrow rel.\ Max.$ د دې لاس ته راځي نسبي ماکسيموم

په x=2 کې د f'(x) لپاره د مخنخښي بدلون مخ ته لرو له $\boxed{-} \to \boxed{+} \Rightarrow rel.\ Min.$ ز له دې لاس ته راځي نسبي مينيموم

ب –

x	−3	−2	−1	0	1
f (x)	−0,149	−0,135	0,3678	3	13,591
f '(x)	−0,049	0,1353	1,1036	5	19,027

په انټروال [-3;-2] کې يو نسبي مينيموم پروت دی

f'(x) يو د مخنخښي تغير لري له منفي و مثبت ته يعني $\boxed{-} \to \boxed{+}$

اتم:

الف – انحرافي ټکي

تابع : $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$

لومړی مشتق: $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}$

دويم مشتق :: $f''(x) = \frac{3}{4}x$

دريم مشتق:- $f'''(x) = \frac{3}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پراته تانجنت سره ځایونه

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$$

ازمایښت چې ایا یو انحرافي ځای مخ ته لرو.

$$f''(x_1) = f''\left(\sqrt{2}\right) = \frac{3}{4}\cdot\sqrt{2} \approx 1,016 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = \sqrt{2}$$

$$f''(x_2) = f''\left(-\sqrt{2}\right) = -\frac{3}{4}\cdot\sqrt{2} \approx -1,016 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -\sqrt{2}$$

د افراطي ارزښتون شمیرنه:

$$f(x_1) = f\left(\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \approx -0,707 \,;\, f(x_2) = f\left(-\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \approx 0,707$$

فراطي ټکي:

$$P_{Min}\left(\sqrt{2} \approx 1,414 \middle| -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \approx -0,707\right) \quad P_{Max}\left(-\sqrt{2} \approx -1,414 \middle| \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \approx 0,707\right)$$

د انعطاف ټکی یا اوړونټکی

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x \qquad f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} \qquad f''(x) = \frac{3}{4}x \qquad f'''(x) = \frac{3}{4}$$

د انعطافټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 0 \Rightarrow x_w = 0$$

د انعطاف ټکي ازمایښت

$$f'''(x_w) = \frac{3}{4} \neq 0 \Rightarrow$$

یا له دې لاس ته راځ: په i $x = x_w = 0$ کې د انعطاف ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف ټکي وضعيه قيمتونه (کواورديناتونه يا پروت ولاړ محورونه)

$$y_w = f(x_w) = f(0) = 0 \Rightarrow P_w(0|0)$$

د $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$ تابع محورغوڅټکي (د محور تقاطع نقاط)

د y محور سره غوڅټکي: $P_y(0|0)$

صفرځايونه:

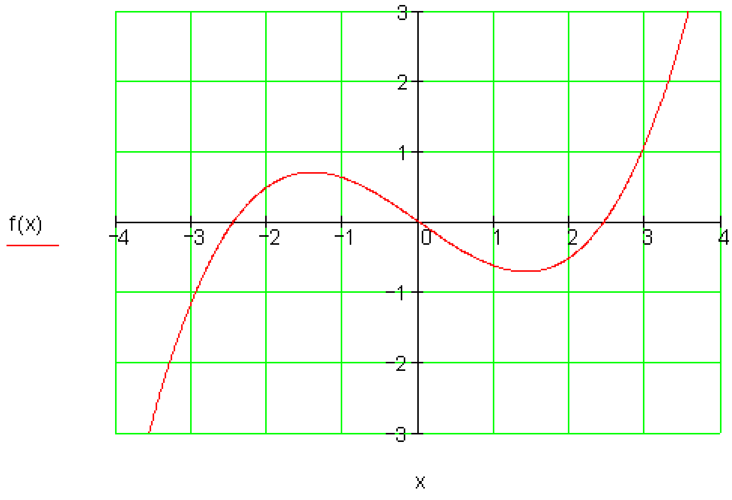
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4} = 0 | + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}x^2 = \frac{3}{4} | \cdot 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x_2 = -\sqrt{6} \qquad x_3 = \sqrt{6}$$



د x محور سره غوڅټکي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P_{x1}(0|0) \quad P_{x2}(-\sqrt{6} \approx -2,449|0) \quad P_{x2}(\sqrt{6} \approx 2,449|0)$$

ب –

انحراف ټکي

تابع : $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$

لومړی مشتق: $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$

دویم مشتق: $f''(x) = x - 1$

د پروت افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$$

ازمایښت، چې ایا انحراف ارزښتونه مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(0) = -1 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = 0$$
$$f''(x_2) = f''(2) = 1 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = 2$$

د انحرافي ټکو شمیرنه

$$f(x_1) = f(0) = 4 \qquad f(x_2) = f(2) = \frac{10}{3}$$

انحرافي ټکي

$$P_{Max}(0|4) \quad P_{Min}\left(2|\frac{10}{3} \approx 3,333\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف – یا اوړونټکی

$$f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4 \qquad f'(x)=\frac{1}{2}x^2-x \qquad f''(x)=x-1 \qquad f'''(x)=1$$

د اوړنټکي یا انعطآفټکي لپاره اړیین شرایط:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Rightarrow x_w=1$$

د انعطافټکي ازمايښت

$$f'''(x_w)=f'''(1)=1\neq 0 \Rightarrow$$

یا له دې لاس ته راځي: په $x=x_w=1$ د انعطاف ټکي

د انعطاف- یا اوړون ټکي وضعیه قیمتونه(پراته لاړ ارزښتونه) یا کواودیناتونه

$$y_w=f(x_w)=f(1)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+4=\frac{22}{6}=3,\bar{6} \Rightarrow \underline{\underline{P_w\left(1 \mid \frac{22}{6}=3,\bar{6}\right)}}$$

د $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4$ محور غوڅټکي:

د y - محور سره غوڅټکی: $P_y(0\mid 4)$

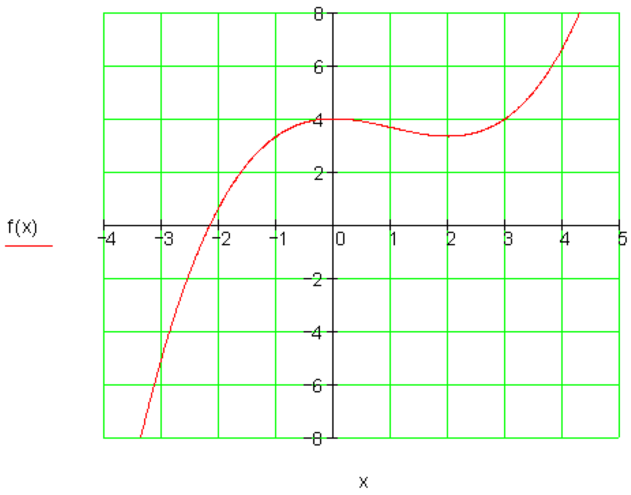
صفرځایونه

$x_1\approx -2{,}175$ نومریکي پیدا شوی

د x - محور سره غوڅټکی.

$$\underline{\underline{P_{x1}(x_1\approx -2{,}175 \mid 0)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پ – افراطي تکي

تابع: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$

لومړی مشتق: $f'(x) = -x^3 + 3x^2$

دویم مشتق: $f''(x) = -3x^2 + 6x$

د پروت محور سره ځایونه.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0; x_3 = 3$$

ازمایښت چې ایا یو افراطي ارزښت مو مخ ته پروت دی:

په0=x1 کې افراطي ارزښت نه شته په 0=x2کې نسبي مکسیموم په3=x3د افراطي تکو شمیرنه	$f''(x_1) = f''(0) = 0 \Rightarrow$ $f''(x_2) = f''(0) = 0 \Rightarrow$ $f''(x_3) = f''(3) = -9 < 0 \Rightarrow$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x_1) = f(0) = -2 \qquad f(x_2) = f(0) = -2 \qquad f(x_3) = f(3) = \frac{19}{4}$$

افراطي ټکي :

$$P_{Max}\left(3 \middle| \frac{19}{4} = 4{,}75\right)$$

اوړونټکی یا د انعطاف ټکی

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$$

$$f'(x) = -x^3 + 3x^2 \qquad f''(x) = -3x^2 + 6x \qquad f'''(x) = -6x + 6$$

د انعطافټکو لپاره اړیین شرایط

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(-3x+6) = 0 \Rightarrow x_{w1} = 0$$

$$-3x + 6 = 0 \Rightarrow x_{w2} = 2$$

د انعطافټکو ازمایښت

$$f'''(x_{w1}) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي چې په $x = x_{w1} = 0$ کې د انعطاف ټکي

$$f'''(x_{w2}) = f'''(2) = -6 \neq 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي چې په $x = x_{w2} = 2$ کې انعطاف ټکي:

د انعطافټکو وضعیه قیمتونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = f(0) = -2$$

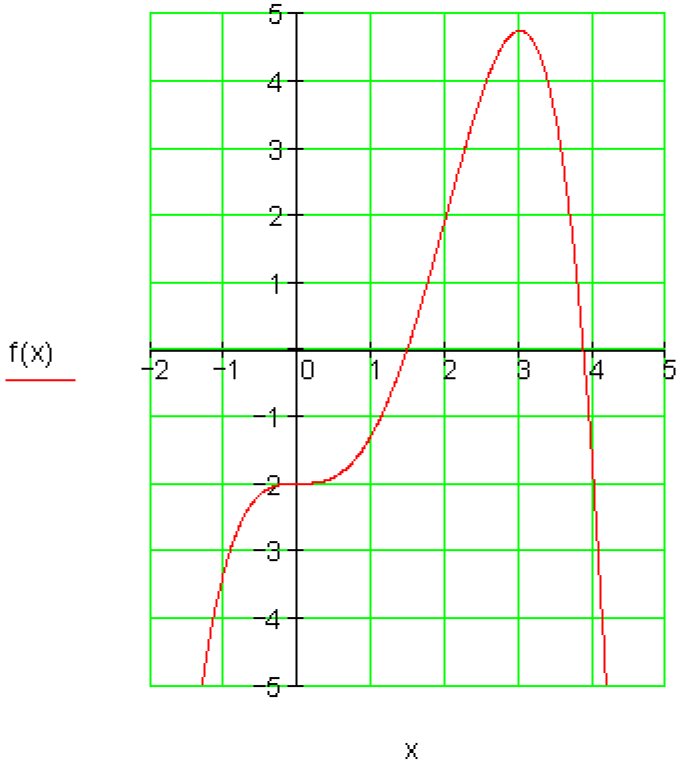
$$y_{w2} = f(x_{w2}) = f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 2^3 - 2 = -4 + 8 - 2 = 2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}(0|-2)}} \qquad \underline{\underline{P_{w2}(2|2)}}$$

د $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$ تابع محور غوڅتکي

دy محور سره غوڅتکی: $P_y(0|-2)$

صفرځايونه: $x_2 \approx 3,861 \qquad x_1 \approx 1,467$



نومريکي پيداشوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x محور سره غوځېکي: $P_{x2}(x_2 \approx 3,861|0)$ $P_{x1}(x_1 \approx 1,467|0)$

ت – افراطي ټکي

تابع: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3}$

لومړی مشتق : $f'(x) = x^2 - 2x - 8$

دویم مشتق: $f''(x) = 2x - 2$

د پروت یا افقي محور سره غوځېکي

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 4$$

ازمایښت چې ایا یو امحرافي ټکی م مخ تخ پروت دی

$$f''(x_1) = f''(-2) = -6 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = -2$$
$$f''(x_2) = f''(4) = 6 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = 4$$

د افراطي ا رزښتون شمېرنه

$$f(x_1) = f(-2) = 18 \qquad f(x_2) = f(4) = -18$$

اافراطي ټکي: $P_{Max}(-2|18) \quad P_{Min}(4|-18)$

ت - انعطافټکی

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3}$$
$$f'(x) = x^2 - 2x - 8 \qquad f''(x) = 2x - 2 \qquad f'''(x) = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انغطافټکو لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x_w = 1$$

د اوړونټکو یا انعطاف ټکو په هکله ازمايښت

$$f'''(x_w) = f'''(1) = 2 \neq 0 \Rightarrow$$

په $x = x_w = 1$ کې د انعطاف ځایونه

د اعطافټکي وضعیه قیمتونه:

$$y_w = f(x_w) = f(1) = \frac{1}{3} - 1 - 8 + \frac{26}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_w(1|0)}}$$

د $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3}$ محور غوځټکي

د y - محور سره غوځټکی: $\underline{P_y\left(0 \middle| \frac{26}{3} = 8,\bar{6}\right)}$

صفرځایونه: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3} = 0$

هورنر :

$$\begin{array}{llllll} & \frac{1}{3} & -1 & -8 & \frac{26}{3} & \\ x = 1 & \downarrow & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{26}{3} & \\ & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{26}{3} & 0 & f(1) = 0 \Rightarrow \quad x_1 = 1 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

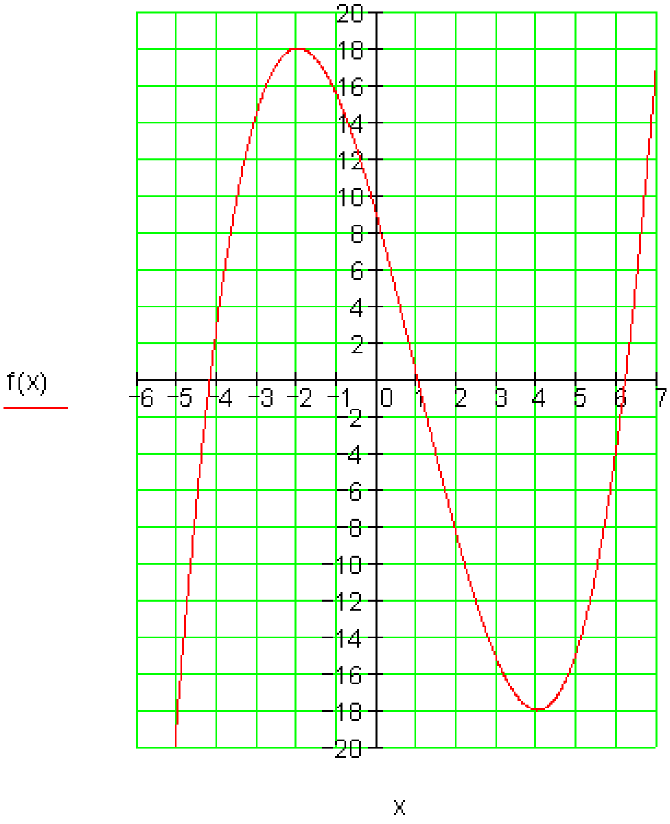
پاتي يا باقي پولينوم:

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{26}{3} = 0 | \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 26 = 0$$

$$p = -2 \qquad q = -26 \qquad \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 26 = 27$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \qquad \begin{array}{l} x_2 = 1 + \sqrt{27} \approx 6,196 \\ x_3 = 1 - \sqrt{27} \approx -4,196 \end{array}$$



د x - محور سره غوځتکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P_{x1}(1|0)$ $P_{x2}(1+\sqrt{27}\approx 6,196|0)$ $P_{x3}(1-\sqrt{27}\approx -4,196|0)$

افراطي ټکي

تابع : $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$

لومړی مشتق : $f'(x)=x^3-2x$

دويم مشتق: $f''(x)=3x^2-2$

ځايونه د پراته محور سره:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^3-2x=0\Rightarrow x_1=0;x_{2/3}=\pm\sqrt{2}$$

ازمايښت چې ايا يو انحرافي ټکی مو مخ ته پروت دی.

$$f''(x_1)=f''(0)=-2<0\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1=0$$
$$f''(x_2)=f''(\sqrt{2})=4>0\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2=\sqrt{2}$$
$$f''(x_3)=f''(-\sqrt{2})=4>0\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_3=-\sqrt{2}$$

د افراطي ارزښتونو شمېرنه :

$f(x_1)=f(0)=0$ $f(x_2)=f(\sqrt{2})=-1$ $f(x_3)=f(-\sqrt{2})=-1$

انحرافي ټکي:

$P_{Max}(0|0)$ $P_{Min1}(\sqrt{2}\approx 1,414|-1)$ $P_{Min2}(-\sqrt{2}\approx -1,414|-1)$

د انعطاف- يا اوړونټکي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2 \qquad f'(x)=x^3-2x \qquad f''(x)=3x^2-2 \qquad f'''(x)=6x$$

د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$\begin{aligned} f''(x)=0 &\Leftrightarrow 3x^2-2=0\,|+2 \\ &\Leftrightarrow 3x^2=2\,|:3 \\ &\Leftrightarrow x^2=\frac{2}{3}\,|\sqrt{\ } \\ &\Leftrightarrow |x|=\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_{w1}=\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad x_{w2}=-\sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

د انعطاع ټکو ازمایښت

$$f'''(x_{w1})=f'''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=6\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w1}=\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}816$$

$$f'''(x_{w1})=f'''\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-6\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w2}=-\sqrt{\frac{2}{3}}\approx -0{,}816$$

د انعطآف ټکو وضعیه قیمتونه:

$$y_{w1}=f(x_{w1})=f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9}-\frac{2}{3}=\frac{1}{9}-\frac{6}{9}=-\frac{5}{9}\approx -0{,}555$$

$$y_{w2}=f(x_{w2})=f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-\frac{5}{9}\approx -0{,}555 \text{ weil } f(-x)=f(x)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}816 \,\middle|\, -\frac{5}{9}\approx -0{,}555\right)}} \qquad \underline{\underline{P_{w2}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\approx -0{,}816 \,\middle|\, -\frac{5}{9}\approx -0{,}555\right)}}$$

د $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$ ا محورغوڅټکي یا د تقاطع ټکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د y محور غوڅتکي: $P_y(0|0)$

صفرځايونه:

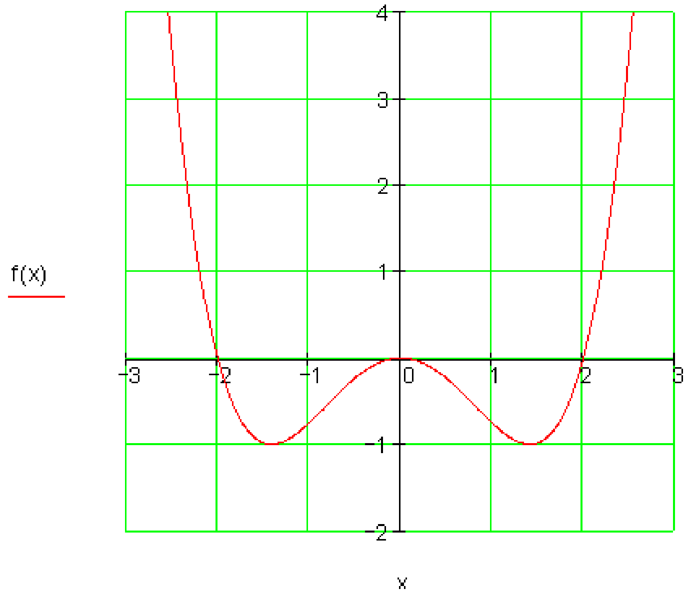
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$\frac{1}{4}x^2 - 1 = 0 | +1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{3/4} = \pm 2$$

د x - محور سره غوڅتکي:

$P_{x1/2}(0|0)$ $P_{x3/4}(\pm 2|0)$



ث –

افراطي ټکي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3$

لومړی مشتق: $f'(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$

دویم مشتق: $f''(x) = 3x^2 - 9x + \frac{9}{2}$

ځایونه د پراته یا افقي تانجنت سره.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 1 = 0$$

لومړی صفرځاي له ګومان سره x1 = 2 ونیسی پاتې یا باقي پولینوم: $x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$

نور حلونه ترې لاس ته راځي: $x_2 = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{33}{16}}; x_3 = \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{33}{16}}$

ازمایښت چې ایا یو انحرافي ټکی لرو:

$$f''(x_1) = f''(2) = -1{,}5 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = 2$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{33}{16}}\right) \approx 1{,}971 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{33}{16}}$$

$$f''(x_3) = f''\left(\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{33}{16}}\right) \approx 6{,}279 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_3 = \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{33}{16}}$$

د انحرافي ټکو شمېرنه

$$f(x_1) = f(2) = 0 \quad f(x_2) = f\left(\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{33}{16}}\right) \approx -0{,}136 \quad f(x_3) = f\left(\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{33}{16}}\right) \approx -3{,}098$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

انحرافي ټکي:

$$P_{Max}(2|0)\quad P_{Min1}\left(\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{33}{16}}\approx 2,686|-0,136\right)\quad P_{Min2}\left(\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{33}{16}}\approx -0,186|-3,098\right)$$

د انعطافټکي یا اوړونټکي:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2+x-3\qquad f'(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x+1$$

$$f''(x)=3x^2-9x+\frac{9}{2}\qquad f'''(x)=6x-9$$

د انعطافټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-9x+\frac{9}{2}=0|:3$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+\frac{3}{2}=0$$

$$p=-3\qquad q=\frac{3}{2}\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{9}{4}-\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

$$x_{w1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\qquad x_{w1}=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 2,366\qquad x_{w2}=\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 0,634$$

د انعطافټکي – یا اوړونټکي ازماینت(لاندې الما ني د اوړونټکی یا انع

$$f'''(x_{w1})=f'''(2,366)=6\cdot 2,366-9\neq 0\Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w1}=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 2,366$$

$$f'''(x_{w1})=f'''(0,634)=6\cdot 0,634-9\neq 0\Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w2}=\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 0,634$$

د انعطافټکي وضعیه قیمتونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_{w1} = f\left(x_{w1}\right) = f\left(2,366\right) = \frac{1}{4}\cdot 2,366^4 - \frac{3}{2}\cdot 2,366^3 + \frac{9}{4}\cdot 2,366^2 + 2,366 - 3 \approx -0,07$$

$$y_{w2} = f\left(x_{w2}\right) = f\left(0,634\right) = \frac{1}{4}\cdot 0,634^4 - \frac{3}{2}\cdot 0,634^3 + \frac{9}{4}\cdot 0,634^2 + 0,634 - 3 \approx -1,80$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}\left(\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}} \approx 2,366 \mid y_{w1} \approx -0,07\right)}} \qquad \underline{\underline{P_{w2}\left(\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,634 \mid y_{w2} \approx -1,80\right)}}$$

د $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3$ ، تابع محور غوڅتکي:

د y - محور سره غوڅکی: $P_y\left(0 \mid -3\right)$

صفرځایونه:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3 = 0$$

هورنر:

$$\begin{array}{cccccc} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} & 1 & -3 \\ x=-1 & \downarrow & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -4 & 3 \\ \hline & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & 4 & -3 & 0 \end{array} \quad f(-1) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = -1$$

باقي یا پاتې پولینوم:

$$\frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 4x - 3 = 0$$

هورنر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{lccccc} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & 4 & -3 & \\ x=2 \downarrow & & \frac{2}{4} & -\frac{5}{2} & 3 & \\ & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} & 0 & f(2)=0 \Rightarrow x_2 = 2 \end{array}$$

لاندې الماني= باقي –یا پاتې پولینوم:

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} = 0 | \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$p = -5 \quad q = 6 \quad \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{25}{4} - \frac{24}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

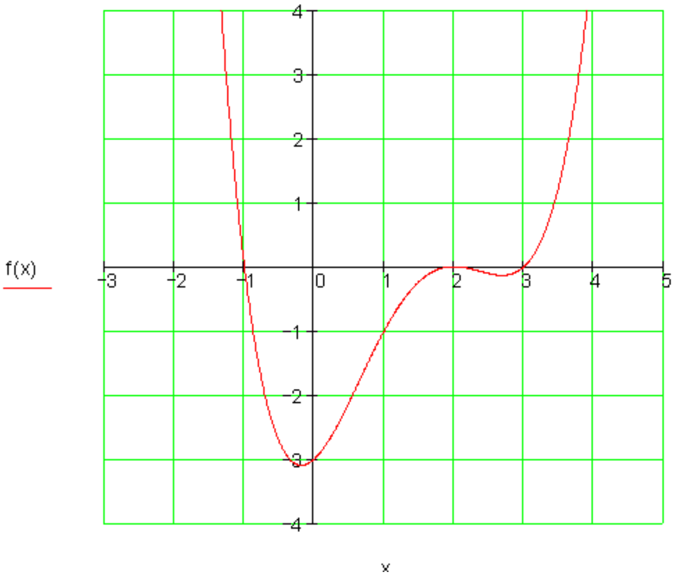
$$x_{3/4} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \qquad x_3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \qquad x_4 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$$

-ارزښتونه د لوېې پسې ترتب کړی: $x_1 = -1 \quad x_{2/3} = 2 \quad x_4 = 3$:

د x -محور سره غوځېکی:

$$\underline{\underline{P_{x1}(-1|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2/3}(2|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x4}(3|0)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ج –

افراطي ټکي

تابع: $f(x)=\frac{1}{27}x^5-\frac{2}{3}x^3+3x$

لومړی مشتق: $f'(x)=\frac{5}{27}x^4-2x^2+3$

دويم مشتق: $f''(x)=\frac{20}{27}x^3-4x$

ځایونه د پراته یا افقي تانجنت سره.

(بي (دوه) مربع مساوات) $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{5}{27}x^4-2x^2+3=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 = 3; x_2 = -3; x_3 = \sqrt{\frac{9}{5}}; x_4 = -\sqrt{\frac{9}{5}}$$

ازمايبنت چې ايا يو افراطي ټکی مخ ته لرو

$$f''(x_1) = f''(3) = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 3$$
$$f''(x_2) = f''(-3) = -8 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -3$$
$$f''(x_3) = f''\left(\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx -3,578 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_3 = \sqrt{\frac{9}{5}}$$
$$f''(x_4) = f''\left(-\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx 3,578 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_4 = -\sqrt{\frac{9}{5}}$$

د افراطي ارزښتون شمېرنه :

$$f(x_1) = f(3) = 0 \qquad f(x_2) = f(-3) = 0$$
$$f(x_3) = f\left(\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx 2,576 \qquad f(x_4) = f\left(-\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx -2,576$$

افراطي ټکي:

$$P_{Min1}(3|0) \quad P_{Max1}(-3|0) \quad P_{Max2}\left(\sqrt{\frac{9}{5}} \approx 1,342 | 2,576\right)$$
$$P_{Min2}\left(-\sqrt{\frac{9}{5}} \approx -1,342 | -2,576\right)$$

اوړونټکي يا د انعطاف ټکي:

$$f(x) = \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x \qquad f'(x) = \frac{5}{27}x^4 - 2x^2 + 3$$
$$f''(x) = \frac{20}{27}x^3 - 4x \qquad f'''(x) = \frac{60}{27}x^2 - 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرایط:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{20}{27}x^3-4x=0$$

$$\Leftrightarrow x\cdot\left(\frac{20}{27}x^2-4\right)=0 \Rightarrow x_{w1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{27}x^2-4|+4$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{27}x^2=4|:\frac{20}{27}$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{27}{5}|\sqrt{\ } \Rightarrow x_{w2/3}=\pm\sqrt{\frac{27}{5}}\approx \pm 2{,}324$$

په انعطاف ټکي ازماېښت:

$f'''(x_{w1})=f'''(0)=-4\neq 0$ لاس ته راځي، په $x=x_{w1}=0$ کې اوړنټکی.

$$f'''(x_{w2})=f'''\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)=\frac{60}{27}\cdot\frac{27}{5}-4=8\neq 0 \Rightarrow$$

لاس ته راځي، په $x=x_{w2}=\sqrt{\frac{27}{5}}$ کې اوړنټکی.

$$f'''(x_{w3})=f'''\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right)=\frac{60}{27}\cdot\frac{27}{5}-4=8\neq 0 \Rightarrow$$

لاس ته راځي، په $x=x_{w2}=-\sqrt{\frac{27}{5}}$ کې اوړنټکی.

د اوړونټکي کواوردیناتونه یا پروتولاړارزښتونه(قمتهای وضعیه؟؟):

$$y_{w1}=f(x_{w1})=f(0)=0$$

$$y_{w2}=f(x_{w2})=f\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)=\frac{1}{27}\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^5-\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^3+3\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)\approx 1{,}115$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_{w3} = f(x_{w3}) = f\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right) = \frac{1}{27}\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^5 - \frac{2}{3}\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^3 + 3\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right) \approx -1,115$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}(0|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{w2}\left(\sqrt{\frac{27}{5}} \approx 2,324 \mid y_{w2} \approx 1,115\right)}}$$

$$\underline{\underline{P_{w3}\left(-\sqrt{\frac{27}{5}} \approx -2,324 \mid y_{w3} \approx -1,115\right)}}$$

د $f(x) = \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x$ ا محورغوځېتکي يا د محور سره د تقاطع تکي.

د y محور سره غوځېتکی: $P_y(0|0)$

صفرځايونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{27}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{1}{27}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 3 = 0$$

بدلون: $x^2=z$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{27}z^2 - \frac{2}{3}z + 3 = 0 | \cdot 27$$

په z کې مربع(څلورئ) مساوات

$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$$

$$p = -18 \qquad q = 81 \qquad \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 - 81 = 0 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{0} = 0$$

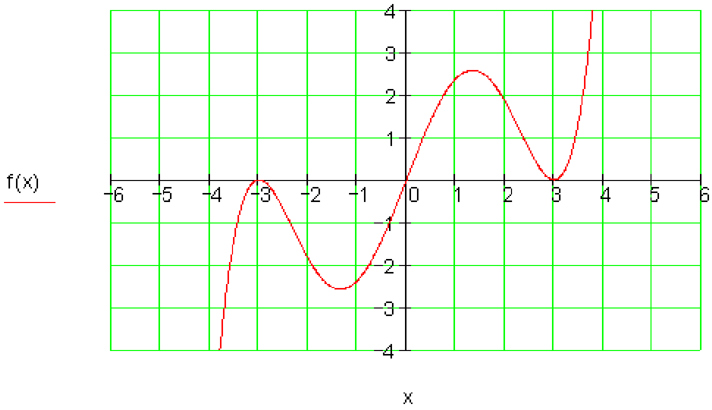
$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \qquad z_1 = 9 \qquad z_2 = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Z_1 = 9 = x^2 \Rightarrow x_{2/3} = \pm 3 \quad Z_2 = 9 = x^2 \Rightarrow x_{4/5} = \pm 3$$

د x -محور سره غوڅټکی.

$$\underline{\underline{P_{x1}(0|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2/3}(-3|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x4/5}(3|0)}}$$



یادونه: دا برخه دلته پای شوه.

3.IX:اوړونټکی یا د انعطاف ټکی او زینټکی

تمرینونه مشتقشمیرنه **II**

لاندې ټول راشنل یا هوښیار توابع د اوړونټکي په هکله وڅیړی او په ورکړ شوي حالت کې اوړون- یا د انعطافټکي وټاکی.

لومړی : $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$ دویم : $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$

دریم: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1$ څلورم: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-1$ شپږم: $f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}$

اووم: $f(x)=-\frac{1}{2}x^4+3x^2-1$ اتم: $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$

نهم: $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3+1$ لسم: $f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{3}{2}x^2-1$

تمرينونه

مشتقشميرنه II

نتيجې او مفصل حلونه

نتيجې:

اول – $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+5 \Rightarrow P_w(2|1)$

دويم – $f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x \Rightarrow P_w\left(\frac{8}{3}\,\middle|\,\frac{64}{27}\right)$

دريم – $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-1 \Rightarrow P_w(2|1)$

څلورم – $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+1 \Rightarrow P_w(2|5)$

پنځم – $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-1 \Rightarrow P_w\left(-1\,\middle|\,\frac{5}{3}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم - $f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}\Rightarrow P_{w\,1/2}(\pm1|-1)$

اوم - $f(x)=-\frac{1}{2}x^4+3x^2-1\Rightarrow P_{w\,1/2}\left(\pm1\,\middle|\,\frac{3}{2}=1{,}5\right)$

اتم – $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\Rightarrow$

اوړونټکی نه شته

نهم - $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3+1\Rightarrow P_{w\,1}(0|1)\quad P_{w\,2}(2|5)$

لسم - $f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{3}{2}x^2-1\Rightarrow P_{w\,1/2}\left(\pm\sqrt{3}\approx1{,}73\,\middle|\,-\frac{19}{4}=-4{,}75\right)$

مفصل حلونه:

لومړی – مفصل حل:

شمیرنه:

اول- د تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+5\qquad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x$$

$$f''(x)=\frac{3}{2}x-3\qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

دویم – د انعطافټکي لپاره اړیین شرطونه:

ممکنه انعطافځای یا اوړونځای دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

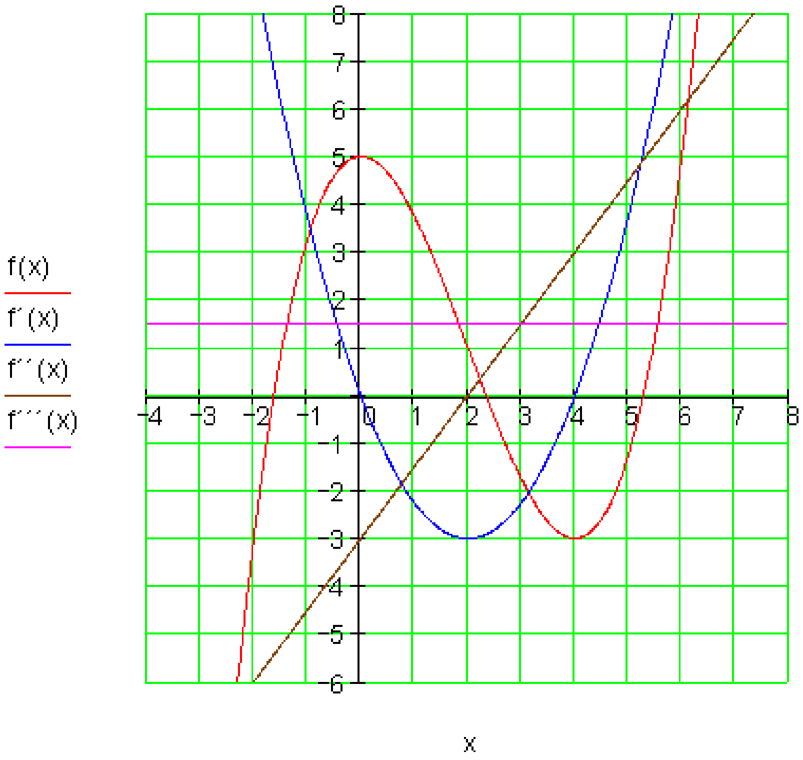
دریم – د دریم مشتق له لارې ښوونه، چې ایا یو انعطاف- یا اوړونټکی لرو:

$$f'''(x) = f'''(2) = \frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = x_W = 2$$

یو ممکنه انعطافځای یا اوړونځایدی.

ځلورم – د انعطافتکي ټاکنه د انعطافځای اینوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_W) = f(2) = \frac{1}{4}\cdot 2^3 - \frac{3}{2}\cdot 2^2 + 5 = \frac{8}{4} - \frac{12}{2} + 5 = 2 - 6 + 5 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_W(2|-1)}}$$



گرافونه :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5 \qquad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3 \qquad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم – مفصل حل:

شمېرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x \qquad f'(x)=\frac{3}{2}x^2-8x+8$$

$$f''(x)=3x-8 \qquad f'''(x)=3$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 3x-8=0\Leftrightarrow x=\frac{8}{3}$$ مکنه اوړنټکی یا د انعطاف ټکی

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x)=f'''\left(\frac{8}{3}\right)=3\neq 0\Rightarrow x=x_W=\frac{8}{3}$$

اوړنټکی یا د انعطافټکی دی

څلورم – د انعطافټکي ټاکنه په f(x) کې د انعطافځای اېښوونې له لارې

$$f(x_W)=f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^3-4\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2+8\cdot\frac{8}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{512}{27}-4\cdot\frac{64}{9}+8\cdot\frac{8}{3}$$

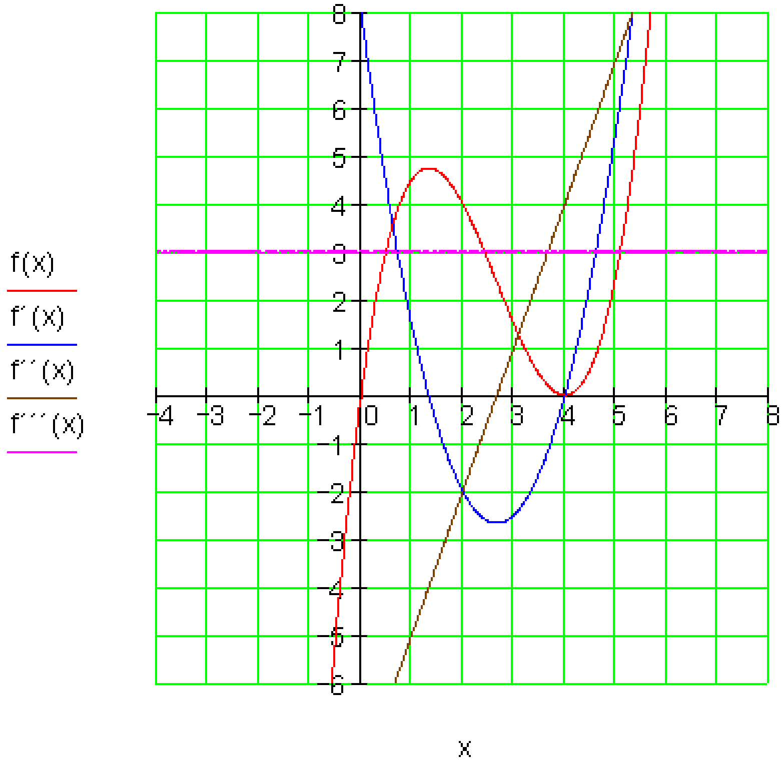
$$=\frac{256}{27}-\frac{768}{27}+\frac{576}{27}=\frac{64}{27}\Rightarrow R_W\left(\frac{8}{3}\approx 2{,}67 \;\middle|\; \frac{64}{27}\approx 2{,}37\right)$$

گرافونه :

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x \qquad f'(x)=\frac{3}{2}x^2-8x+8$$

$$f''(x)=3x-8 \qquad f'''(x)=3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دريم – مفصل حل

شمېرنه:

لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-1 \qquad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+3$$

$$f''(x)=\frac{3}{2}x-3 \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

دويم - د انعطاف ټکي لپاره اړيين شرطونه:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-3=0 \Leftrightarrow x=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ممکنه اوړونټکی یا د انعطاف ټکی دی

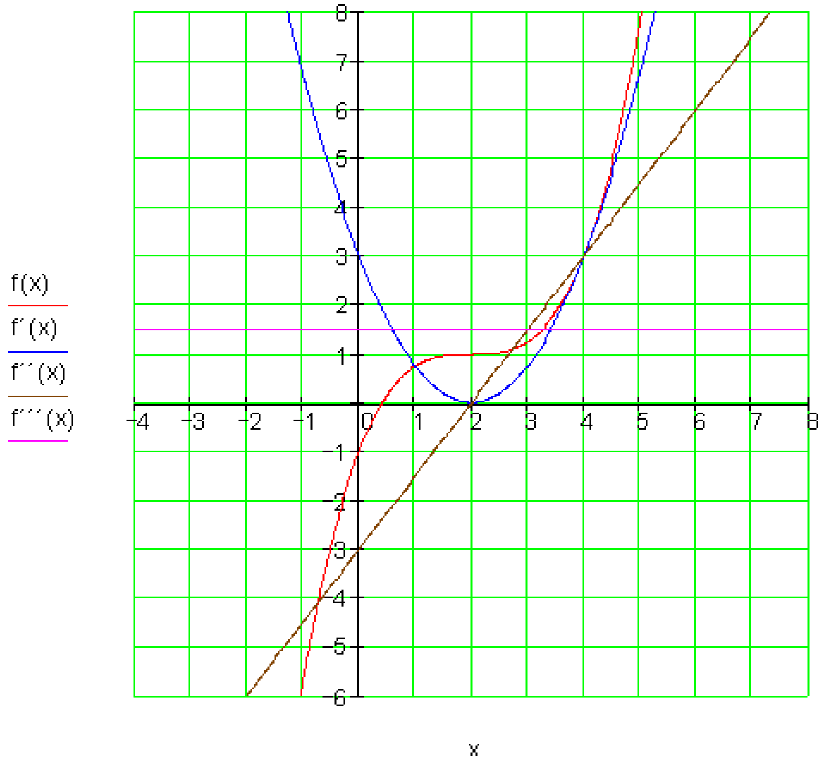
دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x) = f'''(2) = \frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = x_W = 2$$

ممکنه اوړونټکی دی

څلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای اینوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_W) = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = \frac{8}{4} - \frac{12}{2} + 6 - 1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_W(2|1)}}$$



ګرافونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-1 \quad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+3$$

$$f''(x)=\frac{3}{2}x-3 \quad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

ځلورم – مفصل حل:

شميرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+1 \quad f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+3x$$

$$f''(x)=-\frac{3}{2}x+3 \quad f'''(x)=-\frac{3}{2}$$

دويم - د انعطاف ټکي لپاره اړيين شرطونه:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x+3=0 \Leftrightarrow x=2$$

ممکنه اوړونټکي(انعطافټکي) دي.

دريم - د دريم مشتق په مرسته ښوونه، چې ايا يو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x)=f'''(2)=-\frac{3}{2}\neq 0 \Rightarrow x=x_W=2$$

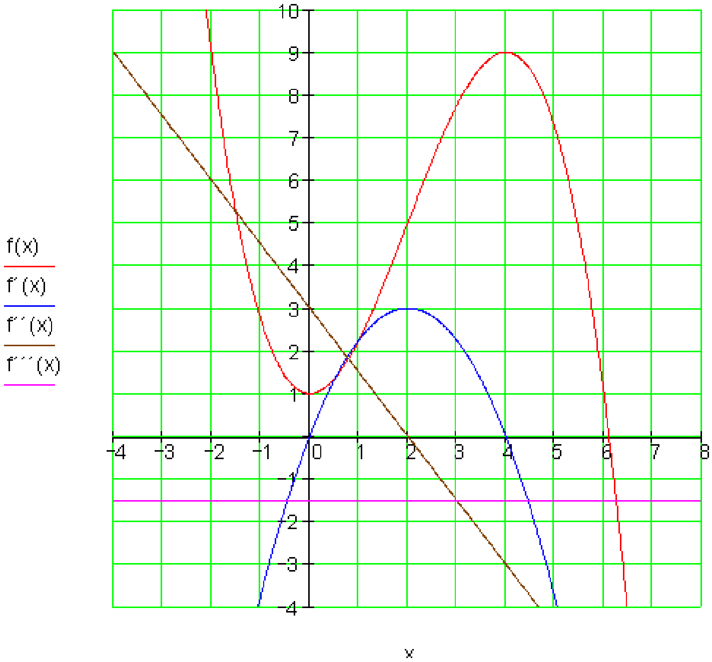
يو انعطافټکی يا اوړونټکی ړی.
ځلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای اينبووني له لارې په f(x) کې

$$f(x_W)=f(2)=-\frac{1}{4}\cdot 8+\frac{3}{2}\cdot 4+1=-2+6+1\Rightarrow \underline{\underline{P_W(2|5)}}$$

گرافونه: $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+1 \quad f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+3x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f''(x) = -\frac{3}{2}x + 3 \quad f'''(x) = -\frac{3}{2}$$



پنځم – مفصل حل:

شمېرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 1 \quad f'(x) = x^2 + 2x - 2$$

$$f''(x) = 2x + 2 \quad f'''(x) = 2$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1\,i$

ممکنه انعطاف- یا اوړونټکی دی

دریم - د دریم مشتق په مرسته بشوونه، چې ایا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

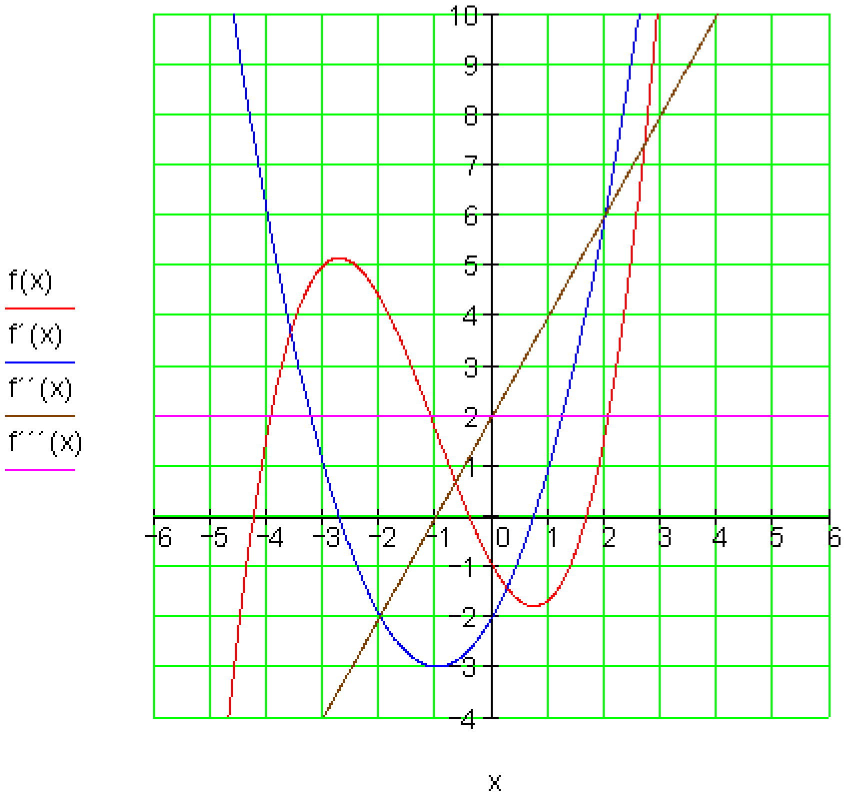
$$f'''(x) = f'''(-1) = 2 \neq 0 \Rightarrow x = x_W = -1$$

يو انعطافټکی دی.

خلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای اينوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_W) = f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 1 = -\frac{1}{3} + 1 + 2 - 1 = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow P_W\left(-1 \,\middle|\, \frac{5}{3} \approx 1,67\right)$$



ګرافونه

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 1 \quad f'(x) = x^2 + 2x - 2 \quad f''(x) = 2x + 2 \quad f'''(x) = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم – مفصل حل:

شمېرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}\quad f'(x)=2x^3-6x\quad f''(x)=6x^2-6\quad f'''(x)=12x$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-6=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm1$$

یو ممکنه انعطاف-یا ا وړونټکی دی.

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا یو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

یو اوړونې-یا انعطافټکی دی

$$f'''(x_1)=f'''(1)=12\cdot1=12\neq0\Rightarrow x_1=x_{W1}=1$$

یو د انعطاف ټکی دی.

$$f'''(x_2)=f'''(-1)=12\cdot(-1)=-12\neq0\Rightarrow x_2=x_{W2}=-1$$

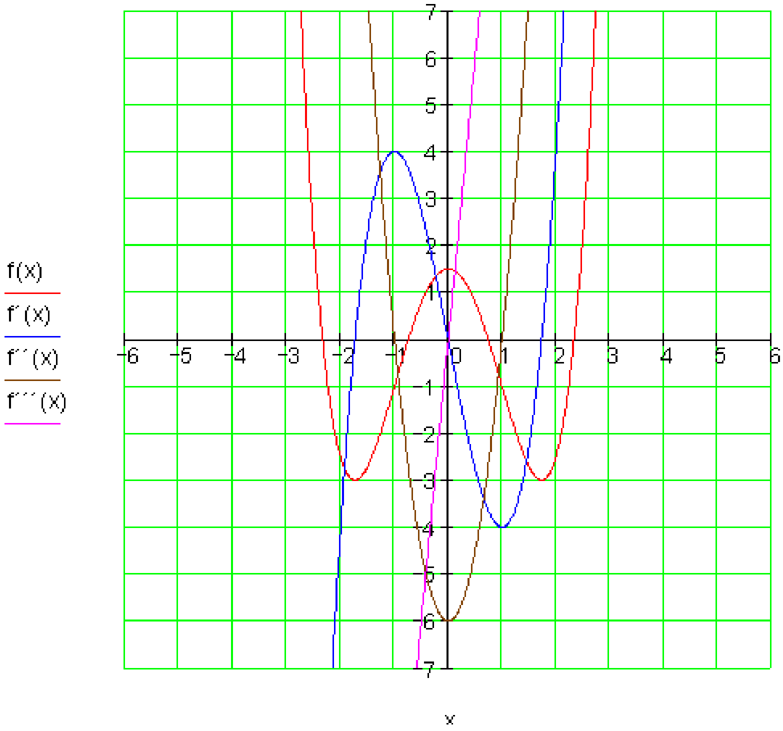
څلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای ایښوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_{W1/2})=f(\pm1)=\frac{1}{2}(\pm1)^4-3\cdot(\pm1)^2+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}-3+\frac{3}{2}=-1\Rightarrow \underline{\underline{P_{W1/2}(\pm1|-1)}}$$

گرافونه:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}\quad f'(x)=2x^3-6x\quad f''(x)=6x^2-6\quad f'''(x)=12x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



اوم – مفصل حل:

شمیرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \quad f'(x) = -2x^3 + 6x \quad f''(x) = -6x^2 + 6 \quad f'''(x) = -12x$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1$$

ممکنه اوړون – د انعطاف ځایونه دي

دریم - د دریم مشتق په مرسته بنوونه، چې ایا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_1) = f'''(1) = -12 \cdot 1 = -12 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو اوړونځای یا انعطاف ځای دی

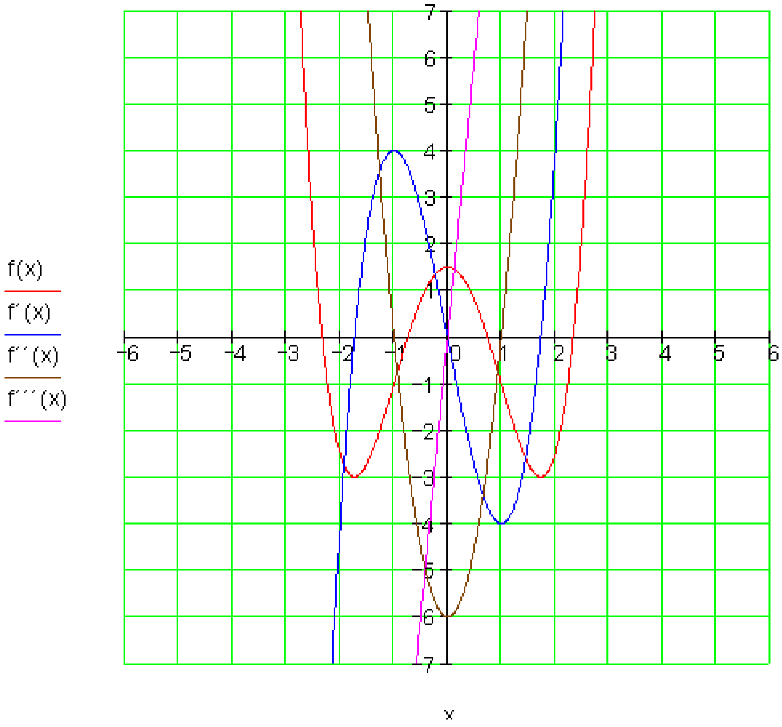
$$f'''(x_2) = f'''(-1) = -12\cdot(-1) = 12 \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = -1 \text{ is}$$

يو اوړونځای یا انعطاف ځای دی

ځلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای اینووني له لارې په f(x) کې

$$f(x_{W1/2}) = f(\pm1) = -\frac{1}{2}(\pm1)^4 + 3\cdot(\pm1)^2 - 1 = -\frac{1}{2} + 3 - 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{W1/2}\left(\pm1 \,\middle|\, \frac{3}{2} = 1{,}5\right)$$



ګرافونه :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \qquad f'(x) = -2x^3 + 6x \qquad f''(x) = -6x^2 + 6$$

$$f'''(x) = -12x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم – مفصل حل:

شمېرنه:

لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2} \quad f'(x)=x^3-3x^2+3x-1$$
$$f''(x)=3x^2-6x+3 \quad f'''(x)=6x-6$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x+3=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=(x-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2}=1s$$

ممکنه اوړنټکي یاد انعطاف ټکي دي

دریم - د دریم مشتق په مرسته بنوونه، چې ایا یو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_{1/2})=f'''(1)=6\cdot 1-6=0 \Rightarrow x_{1/2}=1i$$

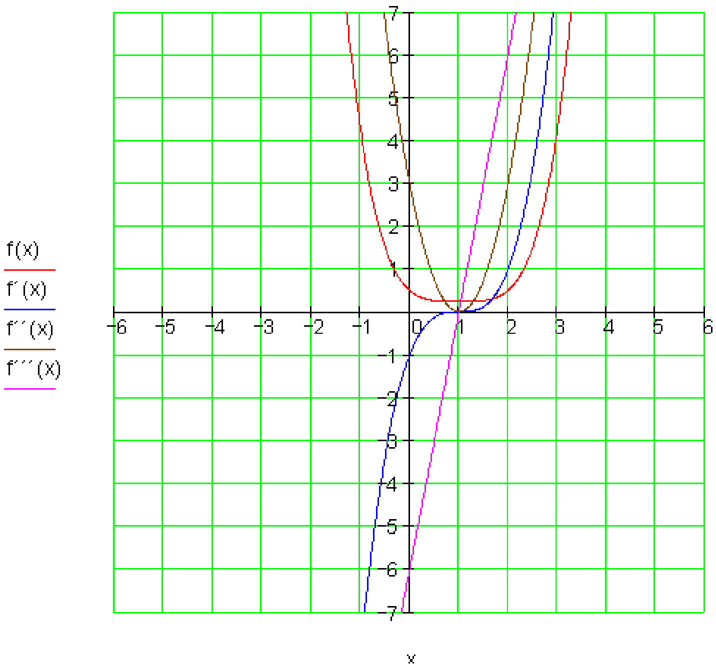
دا د انعطاف ټکی نه دی.

د f(x) ګراف اوړونټکی یا د انعطاف ټکی نه لري.

ګرافونه :

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2} \quad f'(x)=x^3-3x^2+3x-1$$
$$f''(x)=3x^2-6x+3 \quad f'''(x)=6x-6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



نهم – مفصل حل:

شمیرنه:

لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1 \quad f'(x) = -x^3 + 3x^2$$

$$f''(x) = -3x^2 + 6x \quad f'''(x) = -6x + 6$$

دويم - د انعطاف ټکي لپاره اړيين شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(-3x + 6) = 0$$

ممکنه اوړنټکي يا د انعطاف ټکي د ي $\Leftrightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 2$

د پورته ښتو: ممکنه اوړنځای یا د انهطاف ځای دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم - د دریم مشتق په مرسته بنوونه، چې ایا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_1) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = 0$$

یو اوړنځای یا د انعطاف ځای دی

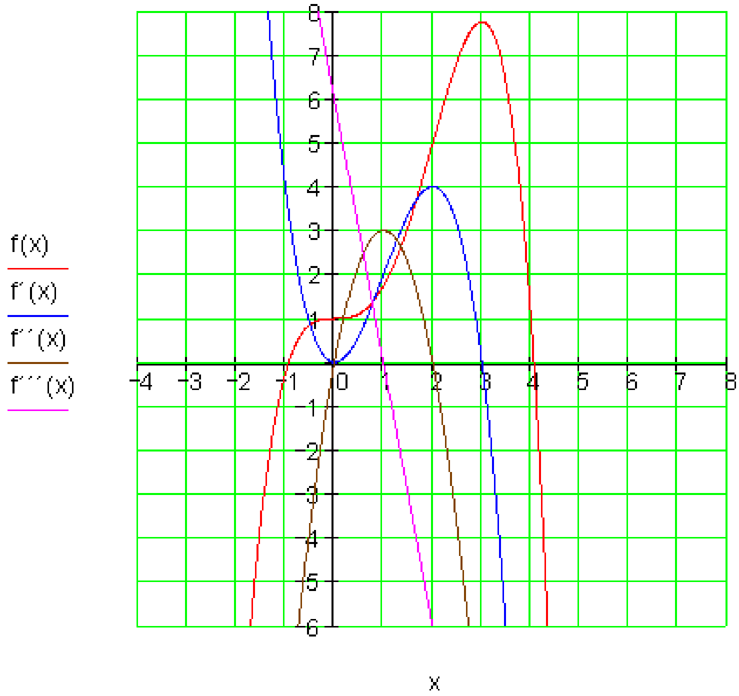
$$f'''(x_2) = f'''(2) = -6 \cdot 2 + 6 = -6 \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = 2$$

یو د انعطاف ځای دی

ځلورم – د انعطافیکي ټاکنه د انعطافځای اینبوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_{W1}) = f(0) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W1}(0|1)}}$$

$$f(x_{W2}) = f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 16 + 8 + 1 = 5 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W2}(2|5)}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

گرافونه (پورته۰:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1 \quad f'(x) = -x^3 + 3x^2 \quad f''(x) = -3x^2 + 6x$$

$$f'''(x) = -6x + 6$$

لسم – مفصل حل:

شمیرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 1 \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x \quad f''(x) = x^2 - 3 \quad f'''(x) = 2x$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$

ممکنه انعطاف- یا اوړونځایونه دي

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_1) = f'''(\sqrt{3}) = 2\cdot\sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = \sqrt{3}$$

یو اعطافځای دی

$$f'''(x_2) = f'''(-\sqrt{3}) = -2\cdot\sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = -\sqrt{3}$$

یوانعطافځای یا اوړونځای دی

څلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای ایښوونې له لارې په f(x) کې

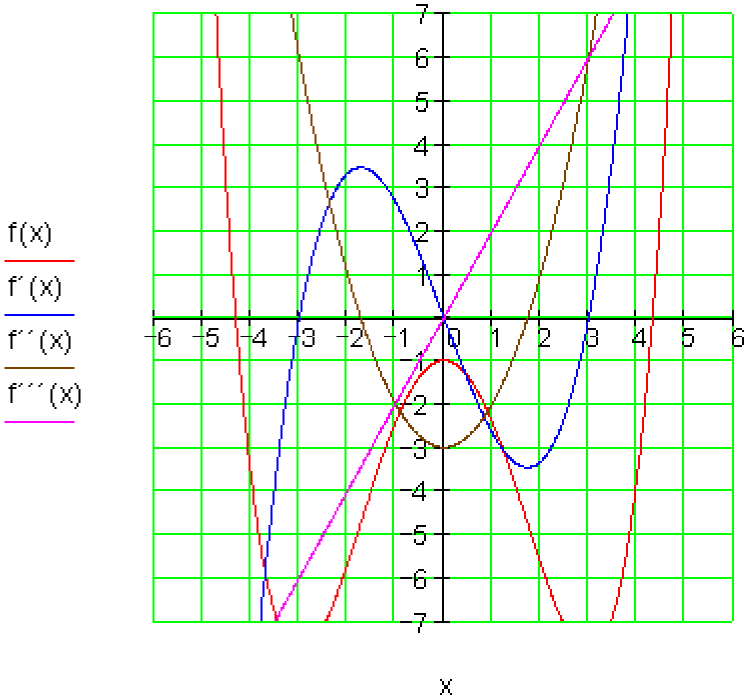
$$f(x_{W1/2}) = f(\pm\sqrt{3}) = \frac{1}{12}(\pm\sqrt{3})^4 - \frac{3}{2}(\pm\sqrt{3})^2 - 1 = \frac{1}{12}\cdot 9 - \frac{3}{2}\cdot 3 - 1$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{9}{2} - 1 = \frac{3}{4} - \frac{18}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{19}{4} \Rightarrow \underline{\underline{P_{W1/2}\left(\pm\sqrt{3} \;\middle|\; -\frac{19}{4} = -4{,}75\right)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

گرافونه:

$$f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{3}{2}x^2-1 \quad f'(x)=\frac{1}{3}x^3-3x \quad f''(x)=x^2-3 \quad f'''(x)=2x$$



حلونه

نتيجې او مفصل حلونه

مشتق د ټولګي کار چمتووالي لپاره

لومړی: الف – $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-2$

ب - نسبي مینیموم = ککرتکی یا د رآس ټکي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P_{Min}(-2|-4) = P_{Sp}(-2|-4)$

پ - $P_{x2}\left(-2-2\cdot\sqrt{2}\approx -4{,}83|0\right)$ $P_{x1}\left(-2+2\cdot\sqrt{2}\approx 0{,}83|0\right)$

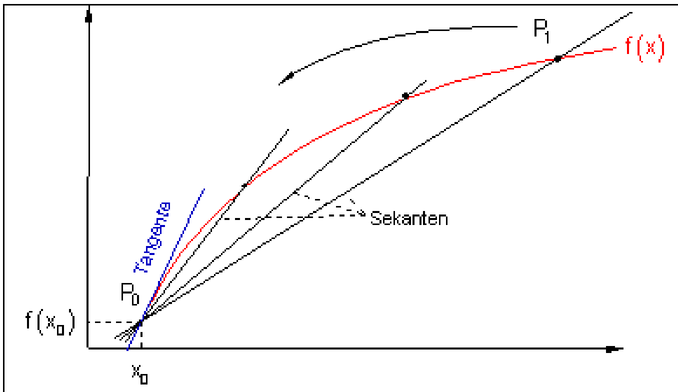
ت - ګرافونه د مفصل حل سره دي.

دویم: د یوه تابع د ګراف جګېدنه په یوه ټکي کې په همغه ټکي کې د تابع د تانجنت د جګوالي سره برابره ده.

دریم:

که ټکی P_1 تل پسې د P_0 په لور وخوزیږي، نو د سیکانت جګوالی تغیر خوري.

که هرڅومره زیات د P_0 ټکي ته نږدې کیږو، په همغه اندازه د سیکانت جګوالی د تانجنت جګوالي ته نږدې کیږي.



څلورم: د x_0 په ځاي کې د تابع لومړی مشتق په ټکي $P(x_0 | f(x_0))$ کې د تانجنت جګوالی دی او له دې سره په دې ټکي کې د $f(x)$ د ګراف جګوالی هم دی.

پنځم: د مشتق تابع $f'(x)$ له دې امله د جګېدنې تابع بلل کیږي، ځکه چې دا په هر ټکي کې د $f(x)$ د جګوالي نمایندګي موي.

شپږم:

الف - $f'''(x) = 0$ $f''(x) = 0$ $f'(x) = 3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب - $f'(x)=15x^2-3 \quad f''(x)=30x \quad f'''(x)=30$

پ - $f'(x)=24x^2+24x+6 \quad f''(x)=48x+24 \quad f'''(x)=48$

ت - $f'(x)=9x^2+4x+1 \quad f''(x)=18x+4 \quad f'''(x)=18$

ټ - $f'(x)=-4x^3+2 \quad f''(x)=-12x^2 \quad f'''(x)=-24x$

ث - $f'(x)=4x^3-9 \quad f''(x)=12x^2 \quad f'''(x)=24x$

ج - $f'(x)=-3cx^2-a-b-c^3-1 \quad f''(x)=-6cx \quad f'''(x)=-6c$

چ - $f'(x)=12x^2-4x+5 \quad f''(x)=24x-4 \quad f'''(x)=24$

ح -
$f'(x)=20x^3-12x^2+6x-2 \quad f''(x)=60x^2-24x+6 \quad f'''(x)=120x-24$

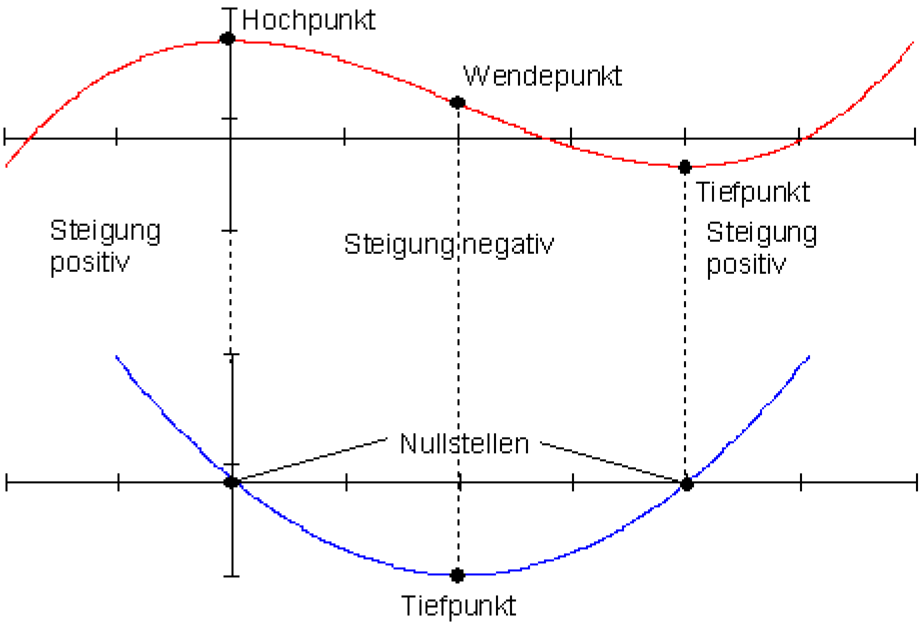
خ - $f'(x)=-4x^3 \quad f''(x)=-12x^2 \quad f'''(x)=-24x$

اووم: $n(x)=\frac{1}{5}x-\frac{22}{5} \quad t(x)=-5x+6$

اتم: پښتو:په ګراف کې له کيڼ و ښي لور او له پورته کښته لورپه په ترتيب.

ټيټ ټکی، اوړونټکی-يا انعطافټکی،جګيدنه مثبت، جګيدنه منفي يا کميزه، ټيټټکی جګيدنه مثبت، صفرځای، ټيټټکی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



پوښتنې

مشتقشمیرنه د تولګي کار د چمتووالي لپاره

لومړی - پارابول په درې ټکو کې:

الف –

د پارابول د تابعمساوات f(x) و ټاکی چې له لاندې ټکو تېرېږي:

$P_1(-4|-2)\quad P_2(-2|-4)\quad P_3(2|4)$

ب – د غوڅتکو یا د تقاطع ټکو وضعیه قیمتونه پیدا کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ – د f(x) محورغوڅتکي پیداکړئ

ت – د f(x) او f'(x)ګرافونه په پروتولاړ سیستم یه د وضعیه قیمتونو سیستم کې وکاږئ.

دویم – په یوه ټکي کې د تابع د ګراف د جګېدنې لاندې څه پوهیږو؟

دریم – یو د لیدلو لپاره رسم وکاږئ او د حملو سره یې تشریح کړئ، چې په یوه ګراف څنګه له سیکانت جګوالي څخه د تانجنت جګوالي ته راځو؟

څلورم – د x_0 په ځا کې د یوې تابع لومړئ مشتق څه معنا لري؟

پنځم – ولې د مشتق تابع د جګوالي تبع هم بلل کېږي؟

شپږم – د لاندې توابعو درېواره مشتق ونیسئ:

آلف - $f(x) = 3x + 4$ ب - $f(x) = 2x - 4 + x^3 - 5x + 4x^3$

پ - $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ ت - $f(x) = (2x+1)^3$

ټ - $f(x) = x - x^4 + 3 + x$ ث- $f(x) = 1 - 2x - 3x - 4x + x^4$

ج - $f(x) = a + b + c^2 - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$ چ - $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$

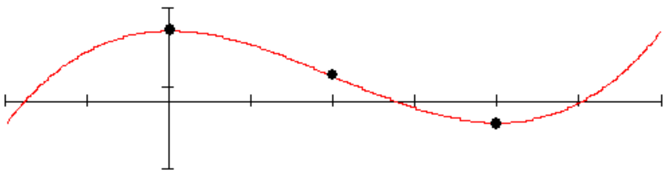
ح - $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$ خ - $f(x) = (a^2 + x^2)(a^2 - x^2)$

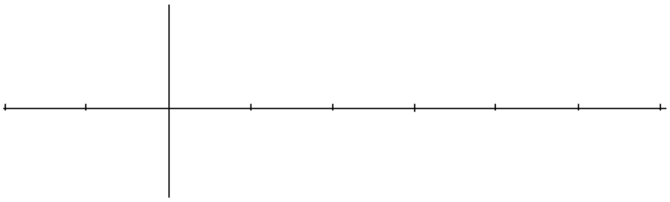
اوم – یوه $f(x) = -x^2 - x + 2$ تابع ورکړ شوې ده.

د $P(2;f(2))$ ټکي لپاره دې د تنجنت او عمود مساوات و ټاکل شي.

اتم – د تابع د ګراف لاندې د تابع د مشتق ګراف وکاږئ او په دواړو ګرافونو کې کرکتریستیکي یا خوي ټاکونکي ټکي په نخښه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library





ځوابونه:

لومړی: الف -

$P_1(-4|-2): f(-4) = 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = -2$

$P_2(-2|-4): f(-2) = 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = -4$

$P_2(2|4): f(2) = 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 4$

a_0	a_1	a_2	
1	−4	16	−2
1	−2	4	−4 II − I
1	2	4	4 III − I
1	−4	16	−2
0	2	−12	−2 | : 2
0	6	−12	6 | : (−6)
1	−4	16	−2
0	1	−6	−1
0	−1	2	−1 III + II
1	−4	16	−2
0	1	−6	−1
0	0	−4	−2

$-4a_2 = -2 \,|: (-4)$

$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{1}{2}}$

$a_1 - 6a_2 = -1 \Leftrightarrow a_1 - 6 \cdot \frac{1}{2} = -1$

$\Leftrightarrow a_1 - 3 = -1 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$

$a_0 - 4a_1 + 16a_2 = -2 \Leftrightarrow a_0 - 4 \cdot 2 + 16 \cdot \frac{1}{2} = -2$

$\Leftrightarrow a_0 - 8 + 8 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P_1\,(-4\,|\,-2): f(-4) = \frac{1}{2}\cdot(-4)^2 + 2\cdot(-4) - 2 = 8 - 8 - 2 = -2$$

$$P_2\,(-2\,|\,-4): f(-2) = \frac{1}{2}\cdot(-2)^2 + 2\cdot(-2) - 2 = 2 - 4 - 2 = -4$$

$$P_3\,(2\,|\,4): f(2) = \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\cdot 2 - 2 = 2 + 4 - 2 = 4$$

ب - د پارابول ککرټکی یو انحرافي ټکی دی.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \quad \Rightarrow f'(x) = x + 2 \quad \Rightarrow f''(x) = 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2\ i$$

ممکنه افراطي ځاي دی

$$f''(x) = f''(-2) = 1 > 0 \Rightarrow rel.$$

په x = -2 کې نسبي مینیموم

$$f(-2) = \frac{1}{2}\cdot 4 - 4 - 2 = 2 - 4 - 2 = -4$$

نسبي مینیموم = ککرټکی: $P_{Min}(-2\,|\,-4) = P_{Sp}(-2\,|\,-4)$

پ –

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \qquad f(0) = -2 \Rightarrow P_y(0\,|\,-2)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 = 0$$

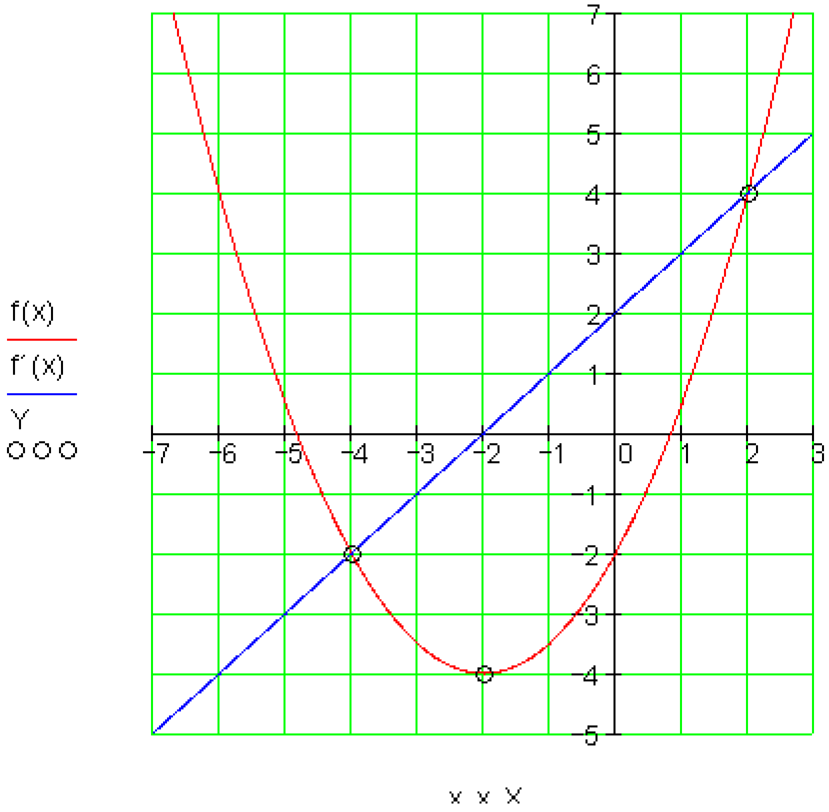
(c) ketabton.com: The Digital Library

د مربع مساوات نورمال بنه

$$p = 4; q = -4 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 + 4 = 8 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \begin{array}{|l} x_1 = -2 + 2 \cdot \sqrt{2} \approx 0,83 \\ x_2 = -2 - 2 \cdot \sqrt{2} \approx -4,83 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow P_{x1}\left(-2 + 2 \cdot \sqrt{2} \approx 0,83 \mid 0\right) \\ \Rightarrow P_{x2}\left(-2 - 2 \cdot \sqrt{2} \approx -4,83 \mid 0\right) \end{array}$$

ت -



شیرم:

ت-

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت – $f(x) = (2 + x)^3$

لومړی - حل د ضربولو له لارې

$$f(x) = (2x+1)^3 = (2x+1)\underbrace{(2x+1)^2}_{1.\ bin.\ Formel} = (2x+1)(4x^2+4x+1)$$

$$= 8x^3 + 8x^2 + 2x + 4x^2 + 4x + 1 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

$$f'(x) = 24x^2 + 24x + 6 \qquad f''(x) = 48x + 24 \qquad f'''(x) = 48$$

دویم د ځنځیري قانون سره حل

$$f'(x) = 3(2x+1)^2 \cdot 2 = 6(2x+1)^2 = 6(4x^2+4x+1) = \underline{\underline{24x^2+24x+6}}$$

$$f''(x) = 2 \cdot 6(2x+1) \cdot 2 = 24(2x+1) = \underline{\underline{48x+24}}$$

$$f'''(x) = \underline{\underline{48}}$$

$f(x)=(2x+1)^3$

لومړی حل د ضربوني قانون له لارې

$$f(x) = (2x+1)^3 = (2x+1)\underbrace{(2x+1)^2}_{1.\ bin.\ Formel} = (2x+1)(4x^2+4x+1)$$

$$= 8x^3 + 8x^2 + 2x + 4x^2 + 4x + 1 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

$$f'(x) = \underline{\underline{24x^2 + 24x + 6}} \qquad f''(x) = \underline{\underline{48x + 24}} \qquad f'''(x) = \underline{\underline{48}}$$

دویم حل د ځنزیري قانون له لارې

$$f'(x) = 3(2x+1)^2 \cdot 2 = 6(2x+1)^2 = 6(4x^2+4x+1) = \underline{\underline{24x^2+24x+6}}$$

$$f''(x) = 2 \cdot 6(2x+1) \cdot 2 = 24(2x+1) = \underline{\underline{48x+24}}$$

$$f'''(x) = \underline{\underline{48}}$$

ج-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \underbrace{a+b+c^2}_{\text{Konstante}} - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$$

$$f'(x) = -1 - a - b - 3cx^2 - c^3 = -3cx^2 - \underbrace{a - b - c^3 - 1}_{\text{Konstante}}$$

$$f''(x) = \underline{\underline{-6cx}} \qquad f'''(x) = \underline{\underline{-6c}}$$

خ- $f(x) = (a^2+x^2)(a^2-x^2)$

لومړی – د ضربولو له لارې) د بینوم دریم قانون)

$$f(x) = a^4 - x^4 \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{-4x^3}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{-12x^2}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{-24x}}$$

دویم: د ضرب قانون سره ضربول

$$= \underbrace{(a^2+x^2)}_{u}\underbrace{(a^2-x^2)}_{v} \Rightarrow u' = 2x \quad v' = -2x$$

$$) = u'v + uv' = 2x\cdot(a^2-x^2) + (a^2+x^2)(-2x) = 2a^2x - 2x^3 - 2a^2x - 2x^3 = \underline{\underline{-4x^3}}$$

$$) = -12x^2 \Rightarrow f'''(x) = -24x$$

اووم:

$f(x) = -x^2 -x +2 \;=>\; f'(x) = -2x - 1$

د تکي $P(2;f(2))$ وضعیه قیمتونه(کواوردیناتونه)

$f(2) = -2^2 - 2 + 2 = -4 -2 +2 = -4 \;=> P(2;-4)$

جګېدنه په $P(2|-4)$ کې.

د تانجنت جګیدنه) $f'(2)=-2.2-1=-5=> mt= -5$

د تانجنت مساوات:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x) = m_t x + b_t = -5x + b_t$$

تانجنت له ټکي P(2|-4) تیریږي له دې لاس ته راځي او په څټ یا برعکس

$$\Rightarrow t(2) = -4 \Leftrightarrow -5 \cdot 2 + b_t = -4 \Leftrightarrow b_t = 6$$

لاس ته راځي t(x)=-5x+6د تانجنت مساوات دی له P(2|-4) لاري.

عمود مساوات:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-5} = \frac{1}{5} \Rightarrow n(x) = \frac{1}{5}x + b_n$$

نورمال له ټکي P(2|-4) تیریږي. لرو:

$$P(2|-4) \Rightarrow n(2) = -4 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \cdot 2 + b_n = -4 \Leftrightarrow b_n = -\frac{22}{5}$$

$$\Rightarrow n(x) = \frac{1}{5}x - \frac{22}{5}$$

د نورمال مساوات دی له P(2|-4) څخه تیریږي.

د فرمول له مخې الترناتیو یا بدیل حل

د f(x) په ګراف په ټکي P(x0;f(x0)) کې تانجنت او عمود.

د تانجنت مساوات

t(x) = f ' (x0)(x – x0) + f(x0)

f'(x0) جګېدنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د عمود مساوات

$$n(x) = -\underbrace{\frac{1}{f'(x_0)}}_{\text{Steigung}}(x - x_0) + f(x_0);\ f'(x_0) \neq 0$$

$$f(x) = -x^2 - x + 2 \Rightarrow f'(x) = -2x - 1 \qquad x_0 = 2$$

$$f'(x_0) = f'(2) = -4 - 1 = -5$$

$$f(x_0) = f(2) = -4 - 2 + 2 = -4$$

$$t(x) = -5(x-2) - 4 = -5x + 10 - 4 = \underline{\underline{-5x + 6}}$$

$$n(x) = \frac{1}{5}(x-2) - 4 = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5} - \frac{20}{5} = \underline{\underline{\frac{1}{5}x - \frac{22}{5}}}$$

پوښتنې

مشتق د تولګي کار لپاره II

اول - تانجنت او عمود:

الف – تابع $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 7$ دې ورکړ شوې وي.

د تانجنت او عمود لپاره دې د $x_0 = 2$ لپاره وشمېرل شي.

ب – تانجنت او عمود د محور سره یو درېګوډی(مثلث) جوړوي.

د دې سطحه وشمېری

دویم – $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x\,;\ x \in \mathbb{R}$ تابع ورکړ شوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - په کومو ځایونو کې f(x)جګېدنه 2 لري؟

ب - د جګېدنه د په ځای کې ده.

بې له شمېرنې یو بل ځای د برابرې جګېدنې سره ورکړی.

ستاسې ګومان مدلل کړی.

پ - f(x) په کومو ځایونو کې پروت یا افقي محور لري؟

مساوات یې ورکړئ.

ت – په f(x) پاندې تانجنت په سرچینه کې وټاکی..

ټ – د تانجنت مساوات په f(x) باندې په ټکي P (u | f(u) کې معلوم کړی

ث – کومه کرښه f(x) په P_x (3 | 0) کې عمود غوڅوي؟

دريم : د څلورمې درجې ټول رینتونی یا تام راشنل تابع ورکړ شوې :

$$f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}$$

الف – ایا د تابع ګراف سیومتریک دی؟ که هو، نو سیومتري کوم ډول ده؟

خپله پرېکړه باوري کړه(یا په دې هکله دلیل راوړه).

ب - نسبي انحراف (خورا جګټکی، خورا ټیټ ټکی) وشمېری.

پ - انعطاف ټکي وشمیرئ او په اوړونټکو یا انعطاف ټکو کې تابع مساوات هم وشمیرئ.

ت – محور غوڅټکي وشمیرئ.

ټ - تراوسه ټولو معلومو ټکو سره ارزښتجدول وکاږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ث – په یوه وضعیه قیمت سیستم کې ګراف نسبتآ ټیک وکاږی. او غوره یا د نخښنه کیدو ځایونه په نخښنه کړی.

(که اړیین وي، له دې سره خپل ارزښت جدول په ځو ټکو وغزوی.

په انتروال [5 ; 5-] = I کې د اندازې شمیروني یا وکچ یوونونوشمیرونی(د کرښي یا خطکش په څیر اله) : کچ واحد یا یوون 1 cm دی)

ج – د ګراف په یوغبږیزوالي وینا وکړی، دا په دې معنا چې د همغږیز جګیدنې همداسي همغږیز ټيټېدني لپاره انتروالونه ورکړی.

ح – د ګراف په انحنا یوه وینا وکړی، دا په دې معنا چې د ښي همداسې د کیڼې انحنا لپاره انتروالونه ورکړی.

خ – د تعریفورشو ژۍ ټکي ورکړی.

څلورم – د تام راشنل تابع ګراف له لاندې ټکو تېرېږي:

$P_1(-1|7)$ $P_2(-2|6)$ $P_3(3|1)$ $P_4(-3|-2)$

د تابع مساوات وشمېری، همداسې د انعطاف ټکی او محورغوځټکي.

ارزښت جدول ورکړئ او ګراف دامکان تر حده په یوه مناسب پروت ولاړ سیستم کې ټیک وکاږی.

که د رسمولو لپاره کوم ټکي کم وو، نو هغه وشمیری.

حلونه:

نتیجې او مفصل حلونه مشتق د تولګي کار ته چمتووالی II

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی:

الف - $n(x)=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$ $t(x)=-4x+10$

پ – دا مثلث یوه د 8,5 د سطحې واحدونو سطحه لري.

دویم:

الف – f(x)تابع د $x_{1/2}=\pm 3$ په ځای کې جګوالی 2 لري.

ب - f'(x) د $x_{1/2}=\pm 1,5$ په ځای کې جګېدنه -0,25 لري.

ت- $t(x)=-x$

ټ- $t(x)=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{2}{9}u^3$ ث- $g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

دریم:

لف – دf(x) ګراف د y محور سره سیومتریک دی، ځکه چې اکسپوننت جوړه (جفت) دی

ب - $P_{max}(0|4,5)$ $P_{min2}\left(\sqrt{12}\approx 3,46|0\right)$ $P_{min1}\left(-\sqrt{12}\approx -3,46|0\right)$

پ - $P_{w1}(2|2)\Rightarrow t_1(x)=-2x+6$ $P_{w2}(-2|2)\Rightarrow t_2(x)=2x+6$

ت - $P_{x3/4}\left(\sqrt{12}\approx 3,46|0\right)$ $P_{x1/2}\left(-\sqrt{12}\approx -3,46|0\right)$ $P_y(0|4,5)$

ټ – ګراف وګورئ.   ث – ارزښت جدول وګورئ.

ج - په $\left]-\infty;-\sqrt{12}\right[$ کې کره یوغږیز ټیټیدونکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پہ $\left]-\sqrt{12};0\right[$ کې کره مونوتو جګيدونکي

پہ $\left]0;\sqrt{12}\right[$ کې کره مونوتون ټيټيدونکي

پہ $\left]\sqrt{12};\infty\right[$ کې کره مونوتون جګيدونکي.

چ-پہ $\left]-\infty;-2\right[$ کې ککينه انحنا يا کوږوالی پہ $\left]-2;2\right[$ کې ښی کوږوالی

پہ $\left]2;\infty\right[$ کې کيڼکوږوال يا انحنا

ح- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

څلورم:

تابع مساوات	$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4$
انحرافي ټکي	$P_{min}(2\mid-2) \qquad P_{max}\left(-\frac{4}{3}=-1,\bar{3}\mid\frac{196}{27}\approx 7,26\right)$
د انعطاف ټکي	$P_w\left(\frac{1}{3}=0,\bar{3}\mid\frac{71}{27}\approx 2,63\right)$
محورغوڅټکي	$P_y(0\mid4) \quad P_{x1}(1\mid0) \quad P_{x2}\left(-\sqrt{8}\approx-2,83\mid0\right) \quad P_{x3}\left(\sqrt{8}\approx 2,83\mid0\right)$

مفصل حلونه:

لومړی:

الف-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{2}x^2+7 \qquad x_0=2 \qquad f'(x)=\frac{1}{4}x^3-3x$$

$$f(x_0)=f(2)=\frac{1}{16}\cdot 16-\frac{3}{2}\cdot 4+7=1-6+7=2$$

$$f'(x_0)=f'(2)=\frac{1}{4}\cdot 8-3\cdot 2=2-6=-4$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=-4(x-2)+2=-4x+8+2=\underline{\underline{-4x+10}}$$

$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)=\frac{1}{4}(x-2)+2=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}+2=\underline{\underline{\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}}}$$

ب – د ملث سطحه = $A=\frac{g.h}{2}$

تانجنت او عمود په $S(x_0|f(x_0))=S(2|2)$: ټکي کې غوځوي. له دې سره لر: h = 2 LE د اوږدوالي دوه واحده. g د t(x) او n(x) د صفرځایونو تر منځ واټندی.

$$t(x)=0\Leftrightarrow -4x+10=0\Leftrightarrow 4x=10\Leftrightarrow x_1=\frac{10}{4}=2,5$$

$$n(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{4}x+\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow \frac{1}{4}x=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x_2=-\frac{12}{2}=-6$$

$$g=6+2,5=8,5\Rightarrow A=\frac{8,5\cdot 2}{2}=\underline{\underline{8,5\,FE}}$$

یادونه: په پورته LE داوږدوالي واحد او FE د سطحې واحد دی.

دویم: الف - $f(x)=\frac{1}{9}x^3-x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$

په x0 کې جګوالی ارزښت 2 لري.

$$\Rightarrow f'(x_0)=2\Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2-1=2\Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2=3\Leftrightarrow x_0^2=9\Rightarrow \underline{\underline{x_{01/2}=\pm 3}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع f(x) له دې سره د $x_{1/2} = \pm 3$ په ځای کې چګوالی ۲ لري.

ب - $f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ یو پارابول او له دې امله محورسیمتریک دی.

د f'(1,25) = -0,25 پسې لاس ته راځي: f'(-1,25x) = -0,25

f'(x) د $\underline{\underline{x_{1/2} = \pm 1{,}5}}$ په ځای کې 0,25- جګېدنه لري.

پ –

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$

$$f\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{3};\ f\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3} \Rightarrow \underline{P\left(\sqrt{3} \mid -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right);\ Q\left(-\sqrt{3} \mid \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)}$$

تانجنتونه کرښې دي، چې دx محور سره غبرګې ځغلي:

$$\underline{\underline{t_1(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{3};\ t_2(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3}}}$$

ت _

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$$

د تانجنت مساوات په سرچینه کې: x0 = 0

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x_0) = f'(0) = -1 \qquad f(x_0) = f(0) = 0$$

$$\Rightarrow t(x) = -1(x - 0) + 0 = \underline{\underline{-x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب –

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$$

د تانجنت مساوات په P(u;f(u)) ټکي کې.

$$t(x)=f'(u)(x-u)+f(u)$$

$$f'(u)=\frac{1}{3}u^2-1 \qquad f(u)=\frac{1}{9}u^3-u$$

$$t(x)=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)(x-u)+\frac{1}{9}u^3-u=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-u\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)+\frac{1}{9}u^3-u$$

$$=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{1}{3}u^3+u+\frac{1}{9}u^3-u=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{3}{9}u^3+\frac{1}{9}u^3=$$

$$=\underline{\underline{\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{2}{9}u^3}}$$

ث - کربنه، چې f(x) په $P_x(3\,|\,0)$ کې غوڅوي، په دې ټکي کې عمود ده.

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1 \qquad P_x(3\,|\,0) \Rightarrow x_0=3$$

$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

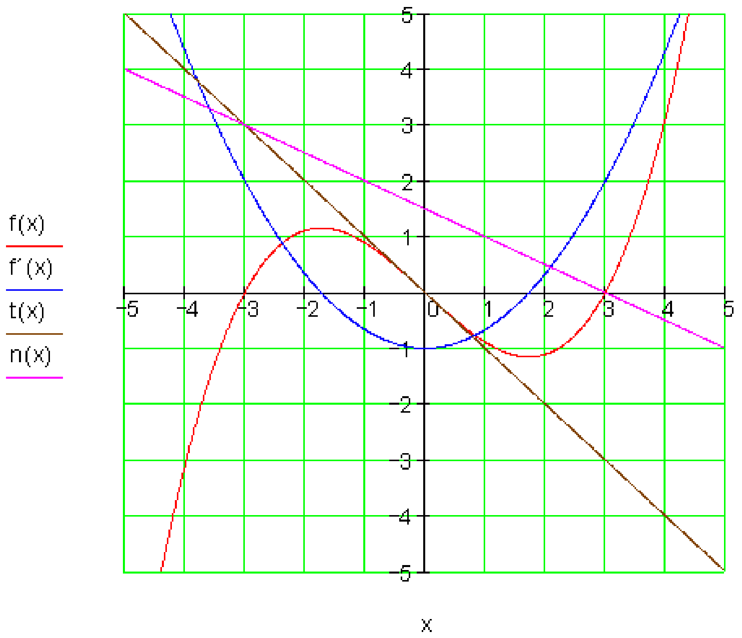
$$f'(x_0)=f'(3)=\frac{1}{3}\cdot 9-1=3-1=2$$

$$f(x_0)=f(3)=\frac{1}{9}\cdot 27-3=3-3=0$$

$$n(x)=-\frac{1}{2}(x-3)+0=\underline{\underline{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}}$$

ث - ګرافونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



دريم: لف- د f(x) ګراف د y محور سره سيومتري دی، ځکه چې فقط جوړه يا جفت اکسپوننت رامنځ ته کيږي.

ب -

$$f(x)=\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x=0\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}\right)=0\Rightarrow x_1=0$$

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^2=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x^2=12\Leftrightarrow x_{2/3}=\pm\sqrt{12}$$

x1= 0 او $x_{2,3}=\pm\sqrt{12}$ ځايونه دي، د پروت يا افقي محور سره.

$$f''(x_1)=f''(0)=-\frac{3}{2}<0\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1=0$$

$$f''(x_{2/3})=f''\left(\pm\sqrt{12}\right)=\frac{3}{8}\cdot12-\frac{3}{2}=\frac{36}{8}-\frac{3}{2}=2>0\Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\Rightarrow$ rel. Min. bei $x_{2/3} = \pm\sqrt{12}$

$$f(x_1) = f(0) = \frac{9}{2} \qquad f(x_{2/3}) = \frac{1}{32}\cdot 144 - \frac{3}{4}\cdot 12 + \frac{9}{2} = 0$$

$$P_{max}(0|4{,}5) \qquad P_{min1}\left(-\sqrt{12} \approx -3{,}46|0\right) \qquad P_{min2}\left(\sqrt{12} \approx 3{,}46|0\right)$$

پ –

$$f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{3}{4}x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$$

$f_{1,2} = \pm 2$ ممکنه اوړونټکي یا د انعطاف ټکي دي.

$$f'''(x_{1/2}) = f'''(\pm 2) = \frac{3}{4}\cdot(\pm 2) \neq 0 \Rightarrow$$

له دې لاسته راځي، چې د انعطاف ټکي په $x_{1/2} = \pm 2$ کې.

$$f(x_{1/2}) = f(\pm 2) = \frac{1}{32}\cdot 16 - \frac{3}{4}\cdot 4 + \frac{9}{2} = \frac{1}{2} - 3 + \frac{9}{2} = 2$$

د انعطاف ټکي دي $P_{w1}(-2|2) \qquad P_{w2}(2|2)$

د انعطاف تانجنت

$$x_0 = -2 \Rightarrow f(x_0) = f(-2) = 2 \qquad f'(x_0) = f'(-2) = -\frac{1}{8}\cdot 8 + \frac{3}{2}\cdot 2 = 2$$

$$t_{\cdot 1}(x) = 2(x+2) + 2 = \underline{\underline{2x+6}}$$

$$x_0 = 2 \Rightarrow f(x_0) = f(2) = 2 \qquad f'(x_0) = f'(2) = \frac{1}{8}\cdot 8 - \frac{3}{2}\cdot 2 = -2$$

$$t_2(x) = -2(x-2) + 2 = \underline{\underline{-2x+6}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت –

$$f(0)=\frac{9}{2}\Rightarrow P_y\left(0\,|\,\frac{9}{2}\right)$$

$$f(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}=0$$ (بي يا دوه مربع مساوات)

$$x^2=z\Rightarrow \frac{1}{32}z^2-\frac{3}{4}z+\frac{9}{2}=0|\cdot 32\Leftrightarrow z^2-24z+144=0$$

$$p=-24 \qquad q=144 \qquad \Rightarrow D=144-144=0\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{0}=0$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}=12\pm 0=12$$

$$z_1=x^2\Leftrightarrow 12=x^2\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{12} \qquad z_2=x^2\Leftrightarrow 12=x^2\Leftrightarrow x_{3/4}=\pm\sqrt{12}$$

$$P_{x1/3}\left(\sqrt{12}\approx 3{,}46\,|\,0\right) \qquad P_{x1/3}\left(-\sqrt{12}\approx -3{,}46\,|\,0\right)$$

ټ – تابع ارزښتونه د جبشميري سره شميرل شوي.

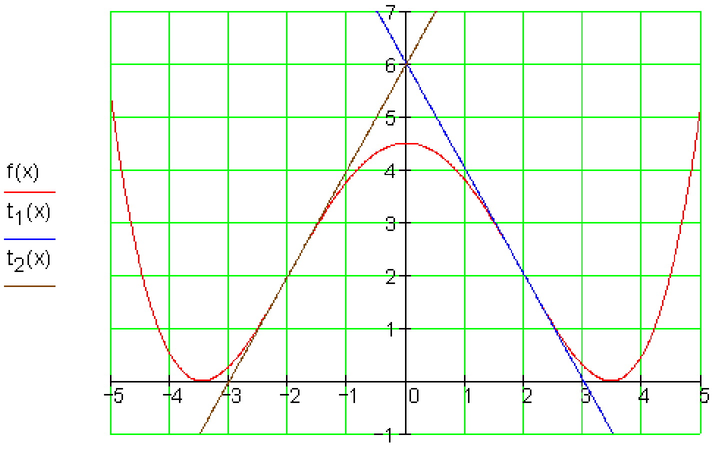
د سيومتري دلايلو په بنسټ بسيا کوي، چې فقط د x مثبت ارزښت لپاره د تابع ارزښتونه وشميرل شي.

x	-5	-4	$-\sqrt{12}\approx -3{,}46$	-3	-2	-1	0
$f(x)$	5,28	0,5	0	0,28	2	3,78	4,5

x	1	2	3	$\sqrt{12}\approx 3{,}46$	4	5
$f(x)$	3,78	2	0,28	0	0,5	5,28

ث-ګرافونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



ج - په $]-\sqrt{12};0[$ کې کله يوغريز جګېدونکى په $]-\infty;-\sqrt{12}[$ کې کره يوغريز ټيټېدونکى

په $]\sqrt{12};\infty[$ کې کله يوغريز جګيدونکى په $]0;\sqrt{12}[$ کې کره يوغريز ټيټيدونکى

د يوغريزوالي حالت له ګراف څخه لوستل شوی.

تغيرات په افراطي ټکو کې رامنځ ته کيږي.

ح - په $]-\infty;-2[$ کې کينه انحنا يا کږرالى په $]-2;2[$ کې ښی انحنا

په $]2;\infty[$ کې کينه انحنا يا کږوالى

د انحنا يا کږوالي حالت له ګراف څخه ولوستل شو.

تغير په اوړون ټکو يا د انعطاف ټکو کې صورت نيسي

خ-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x^4 \left[\frac{1}{32} - \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x^4}}_{\to 0} \right] = \infty$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} x^4 \left[\frac{1}{32} - \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x^4}}_{0} \right] = \infty$$

څلورم: د تابع مساوات شمېرنه :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|7) \Rightarrow f(-1) = 7 \Leftrightarrow -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 7$$

$$P_2(-2|6) \Rightarrow f(-2) = 6 \Leftrightarrow -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 6$$

$$P_3(3|1) \Rightarrow f(3) = 1 \Leftrightarrow 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 1$$

$$P_4(-3|2) \Rightarrow f(-3) = 2 \Leftrightarrow -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = 2$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	7	
1	−2	4	−8	6	II − I
1	3	9	27	1	III − I
1	−3	9	−27	2	IV − I
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	4	8	28	−6	III + 4·II
0	−2	8	−26	−9	IV − 2·II
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	0	20	0	−10	
0	0	2	−12	−7	

له اخرنئ دوه لیکو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$20a_2 = -10 \mid 20 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$2a_2 - 12a_3 = -7 \Rightarrow 2\cdot\frac{1}{2} - 12a_3 = -7 \mid +1$$

$$\Leftrightarrow -12a_3 = -6 \mid (-12) \Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{2}$$

$$-a_1 + 3a_2 - 7a_3 = -1 \Leftrightarrow -a_1 + 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 7\cdot\frac{1}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow -a_1 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -1 \Leftrightarrow -a_1 - 5 = -1 \mid +5$$

$$\Leftrightarrow -a_1 = 4 \mid \cdot(-1) \Leftrightarrow a_1 = -4$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7 \Leftrightarrow a_0 + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 3 = 7 \mid -3 \Leftrightarrow a_0 = 4$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4}}$$

افراطي ټکی:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - 4 \Rightarrow f''(x) = 3x - 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - x - 4 = 0 \mid \cdot\frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow p = -\frac{2}{3};\ q = -\frac{8}{3}$$

$$D = -\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9} + \frac{8}{3} = \frac{25}{9} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left|\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 2 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{4}{3} \end{array}\right.$$

$$f''(x_1) = f''(2) = 3\cdot 2 - 1 = 6 - 1 = 5 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 2$$

$$f''(x_2) = f''\left(-\frac{4}{3}\right) = 3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) - 1 = -4 - 1 = -5 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -\frac{4}{3}$$

$$f(x_1) = f(2) = \frac{1}{2}\cdot 8 - \frac{1}{2}\cdot 4 - 4\cdot 2 + 4 = 4 - 2 - 8 + 4 = -2 \Rightarrow \underline{\underline{P_{Min}(2 \mid -2)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x_2)=f\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{64}{27}-\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{9}+4\cdot\frac{4}{3}+4=-\frac{64}{54}-\frac{16}{18}+\frac{16}{3}+4$$

$$=-\frac{64}{54}-\frac{48}{54}+\frac{288}{54}+\frac{216}{54}=\frac{392}{54}=\frac{196}{27}\Rightarrow \underline{\underline{P_{Max}\left(-\frac{4}{3}\approx 1{,}33\,\middle|\,\frac{196}{27}\approx 7{,}26\right)}}$$

اوړونټکي یا د انعطاف ټکي

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x-4\Rightarrow f''(x)=3x-1\Rightarrow f'''(x)=3$$

$f''(x)=0\Leftrightarrow 3x-1=0\,|+1\Leftrightarrow 3x=1|:3\Leftrightarrow x_w=\frac{1}{3}$ ممکنه انعطافځایونه

$f'''(x_w)=f'''\left(\frac{1}{3}\right)=3\neq 0\Rightarrow x_w=\frac{1}{3}$ یو انعطاف – یا اوړونټکی دی.

$$f(x_w)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{27}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}-4\cdot\frac{1}{3}+4=\frac{1}{54}-\frac{1}{18}-\frac{4}{3}+4$$

$$=\frac{1}{54}-\frac{3}{54}-\frac{72}{54}+\frac{216}{54}=\frac{142}{54}=\frac{71}{27}\Rightarrow \underline{\underline{P_w\left(\frac{1}{3}\approx 0{,}33\,\middle|\,\frac{71}{27}\approx 2{,}63\right)}}$$

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad f(0)=4\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|4)}}$ محورغوځتکي:

$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4=0$ لومړی صفرځای د ازمایښت له لارې. د

هورنر-شیما:

	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-4	4	
$x=1$	$\downarrow$	$\frac{1}{2}$	$\underline{0}$	$\underline{-4}$	$f(1)=0\Rightarrow x_1=1$
	$\frac{1}{2}$	0	-4	0	

(c) ketabton.com: The Digital Library

پاتې يا باقي پولينومونه:

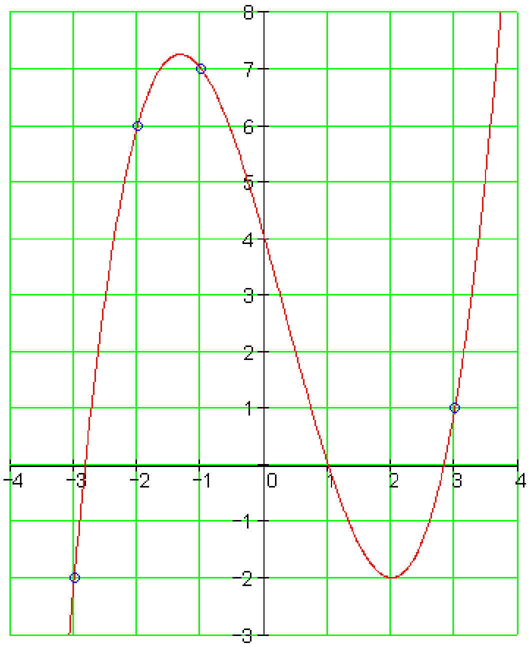
$$\frac{1}{2}x^2 - 4 = 0 \mid +4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 4 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{8}$$

$$\underline{\underline{P_{x1}(1 \mid 0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2/3}\left(\pm\sqrt{8} \approx 2,83 \mid 0\right)}}$$

ارزښتجدول:

x	−3	−2,83	−2	−1,33	−1	0	0,33	1	2	2,83	3
f (x)	−2	0	6	7,26	7	4	2,63	0	−2	0	1

ګراف:



پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتقشمیرنه د ټولګي کار ته چمتووالی III

اول –

د دریمي درجې یو تام یا ټول ریښتونی یا راشنل عدد ورکړ شوی:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$$

الف - مشتقتابع $f'(x)$ معلومه کړی یا وټاکی

ب - د $f'(x)$ تابع بیا مشتق ونیسی، چې له هغې $f''(x)$ تابع منځ ته راشي

پ – د ارزښتجدول لاندې ارزښتونه وشمېری.

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
f (x)	−7	−0,38		3,88	3	1,13		−2,63	−3	−1,38	3
f '(x)	17	9,75	4	−0,25		−4,25	−4	−2,25		5,75	12
f ''(x)	−16	−13	−10	−7		−1	2		8	11	14

ت - د مخه ورکړشوي وضعیه قیمتسیستم کې د $f(x), f'(x)$ او $f''(x)$ ګرافونه رسم کړی.

دویم – لاندې ریښتوني توابع ورکړشوي دي:

دوه الف- $f(x) = 2x^3 - 6x$ دوه ب - $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$

دوه پ - $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10}$ دوه ت $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3$

الف - الف – د سیمتري حالت په هکله وپناوې وکړی

ب- پ – ټکي د پراته تانجنت سره وشمېری

پ- پ – د محومر غوښتکي وټاکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت - یو څو تابع ارزښتونه وشمیرئ او ګراف یې وباسئ

دریم – یو تام ریښتونی تابع له لاندې څلور ټکو تیریږي:

درې الف - $P_1(-1|7); P_2(-2|6); P_3(3|1); P_4(-3|-2)$

درې ب $P_1(1|6); P_2(3|-4); P_3\left(-\frac{1}{2}\Big|\frac{45}{8}\right); P_4\left(-\frac{3}{2}\Big|-\frac{77}{8}\right)$

الف – د تابعمساوات وشمېرئ　ب – د سیمتري حالت باندې یوه وینا وکړئ

پ – د پراته یا افقي تانجنت سره ټکي وشمېرئ

ت – محورغوڅټکي وټاکی یا معلوم کړئ.

یو څو تابع ارزښتونه وشمیرئ او ګراف یې رسم کړئ.

څلورم – د فوټبال لوبه کې د ازاده توپ وهلو د $f(x)$ تابع په نږدې توګه د توپ د الوتنې منحني یا ګرږه ده.

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 ; x > 0$$

الف – توپ کوم ماکسیمال جګوالی غوره کوي او د شوټټکي څخه څومره لرې دی؟

ب – توپ د شوټټکي څخه څومره لرې ښېرته په ځمکه لویږي؟

پ - نه متره لرې د لوبډلې مقاومتدیوال دی، هغه دوه متره جګ دی. ایا توپ له دې اوړي؟

ت - توپ د ګلکربښې څخه په متره جګوالي الوزي. ازاده شوټ له کوم واټن څخه وهل شوی دی؟

پنځم – د لاندې توابعو لپاره کمښتویش وشمېرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

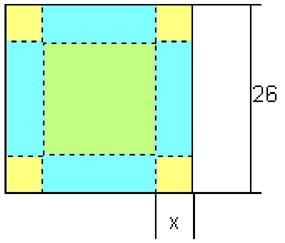
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

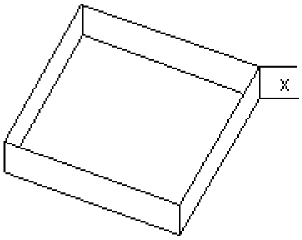
او د یوه رسم په کتنه یې ټولیزه معنا روښانه کړئ.

الف - $f(x) = x^3$ ب - $f(x) = \frac{1}{3}x^2$

شپږم – د یوه مربع کارتون څخه یو کوتی یا مکعب بې له پوښ جوړیږي، چې د اړخونو یا ضلعو اوږدوالی یې 26 دئ او جګوالی یې x دئ ، جوړیږي.

الف – د تابع ترم یې وټاکئ، چې حجم V د x په واکوالي یا تابعیت کې ښایي.





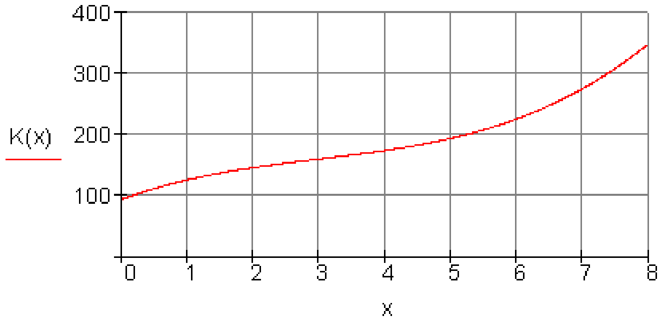
ب – ګراف یې وکاږئ او تقریبي ماکسیمال حجم یې معلوم کړئ

اوم – د یوه رغتون د د لګښتتابع K(x) د ناروغانو ګڼون یا تعداد x او ټولو لګښتونو ترمنځ انځوروي.

x = 1 دې د 100 ناروغانو په معنا، y = 1 د د روځې د زرو یورو / € 1000 Tag په معنا وي.

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



الف - لګښتتابع په خپله کتابچه کې وليکی

ب – د لګښت تابع مشتق د مشتقلګښت يا هم پوله لګښت بولو. دا لګښت زياتېده ښايي، چې ناروغانو تعداد په واک کې ده. (د K(x) چګېدنه).   K'(x) وټاکی او په کواوردیناتسیستم کې يې ګراف رسمکړی.

پ – د ناروغانو کوم تعداد سره د لګښت زياتېدل خورا کم دي؟

دا ارزښت وشمېری.

حلونه

مفصل حلونه

د ټولګي کار لپاره مشتقشميرنه III

لومړی:

الف - $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

ب - $f''(x) = 6x + 2$

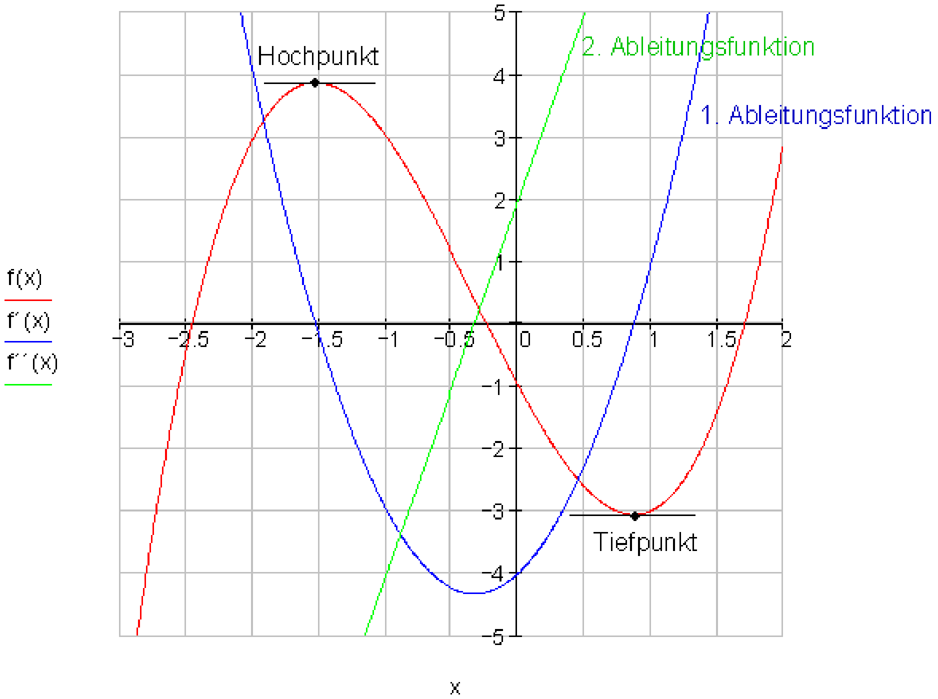
پ – ارزښتچدول

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
f (x)	−7	−0,38	3	3,88	3	1,13	−1	−2,63	−3	−1,38	3
f '(x)	17	9,75	4	−0,25	−3	−4,25	−4	−2,25	1	5,75	12
f "(x)	−16	−13	−10	−7	−4	−1	2	5	8	11	14

ت ګراف:

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \qquad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4 \qquad f''(x) := 6x + 2$



د پورته پښتو له کېن: جګټکی، دویم مشتق، لومړی مشتق، ټیټکی

ت-

(c) ketabton.com: The Digital Library

جګتکی(نسبي ماکس) پروت تانجنت دويم مشتق له صفر کوچنی	$f'(x) = 0$ $f''(x) < 0$
ټيټتکی(نسبي مين) پروت تانجنت دويم مشتق له صفر لوي.	$f'(x) = 0$ $f''(x) < 0$

دويم. يو: الف-

$$f(x) = 2x^3 - 6x \Rightarrow$$

تکی سيمتري، ځکه چې فقط ناجوړه(طاق) اکسپوننت لرو.

صدق کوي: $f(-x) = -f(x)$

ب – $f(x) = 2x^3 - 6x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6$

د پروت محور سره ټکي.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 | +6 \\ &\Leftrightarrow 6x^2 = 6 | : 6 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -1 \end{aligned}$$

د x1 = 1 او x2 = -1 په ځايونو کې افقي تانجنتونه شتون لري.

د y وضعيه قيمت شمېرنه

$$f(x_1) = f(1) = 2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -4 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(1| -4)}}$$

$$f(x_2) = f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(-1| 4)}}$$

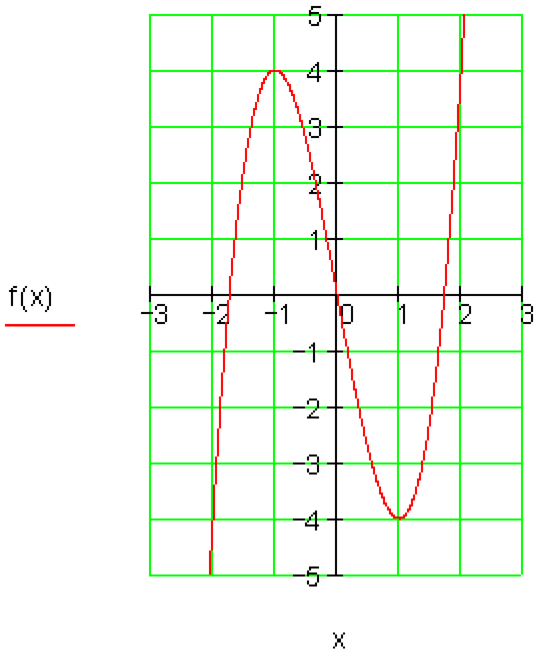
(c) ketabton.com: The Digital Library

پ – د $f(x) = 2x^3 - 6x$ محورغوڅتکي

$$P_y : f(0) = 0 \Rightarrow P_y(0|0)$$

صفرځایونه:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(2x^2 - 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$2x^2 - 6 = 0 | +6$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 = 6 | :2$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$$
$$P_{x1}(0|0) ; P_{x2}(\sqrt{3}|0) ; P_{x3}(-\sqrt{3}|0)$$



ت-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 2x^3 - 6x$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 = 4$$

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = -f(2) = -4$$

د سیومتري ټکي له امله

x	−2	−1,73	−1	0	1	1,73	2
f(x)	−4	0	4	0	−4	0	4

دویم. دوه:

الف –

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4 \Rightarrow$$

سیومتري مخ ته نه لرو، ځکه چې نه فقط جوړه(جفت) یا فقط ناجوړه (طاق) اکسپوننتونه لرو.

ب –

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 12x$$

ټکي له پراته تانجنت سره.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 12x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(6x + 12) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$6x + 12 = 0 | -12$$
$$\Leftrightarrow 6x = -12 | :6$$
$$\Leftrightarrow x_2 = -2$$

د $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$ او په ځایونو کې پراته تانجنتونه شتون لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دy وضعیه قیمتونو شمیرنه

$$f(x_1) = f(0) = -4 \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0|-4)}}$$

$$f(x_2) = f(-2) = 2(-2)^3 + 6(-2)^2 - 4 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(-2|4)}}$$

پ –

د $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$ ا محورغوڅتکي یا د تقاطع ټکي.

$$P_y : f(0) = -4 \Rightarrow P_y(0|-4)$$

صفرځایونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2 - 4 = 0$$

یو صفرځاس د ازمایښت له لارې پیداکوو.

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 2\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 - 4 = 4$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2\cdot(-1)^3 + 6\cdot(-1)^2 - 4 = 0 \mid$$

د x1 = -1 سره صفرځاي.

د هورنر شیما له لارې پولینوم راکښته یا کمه ونه

	2	6	0	−4
x = −1	↓	−2	−4	4
	2	4	−4	0

یا کم شوی پولینوم:

$$2x^2 + 4x - 4 = 0 \mid : 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$p = 2\,;\; q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{3}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -1 + \sqrt{3} \\ x_3 = -1 - \sqrt{3} \end{array} \right.$$

$$P_{x1}(-1|0)\,;\; P_{x2}\left(-1+\sqrt{3}\,|\,0\right)\,;\; P_{x3}\left(-1-\sqrt{3}\,|\,0\right)$$

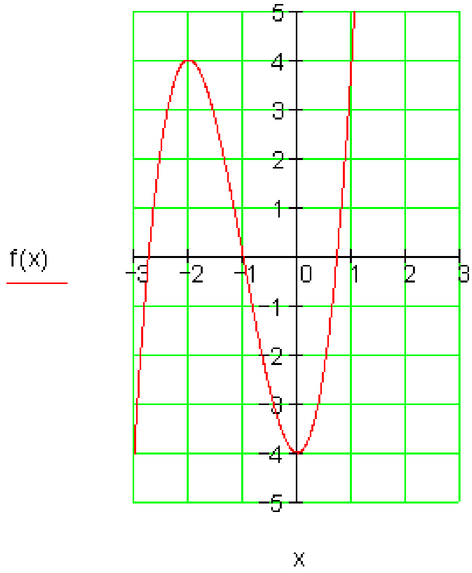
$$\text{bzw. } P_{x1}(-1|0)\,;\; P_{x2}(0{,}73\,|\,0)\,;\; P_{x3}(-2{,}73\,|\,0)$$

ت ــ

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$$

$$x = -3 \Rightarrow f(-3) = 2\cdot(-3)^3 + 6\cdot(-3)^2 - 4 = -4$$

x	−3	−2,73	−2	−1	0	0,73	1
f (x)	−4	0	4	0	−4	0	4



(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم. دري:

الف -

$$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}\Rightarrow$$

محورسیومتري، حکه چې حوړه یا جفت اکسپوننت مخ ته لرو.

صدق کوي: $f(-x)=f(x)$

ب –

$$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}\Rightarrow f'(x)=\frac{4}{10}x^3-\frac{18}{5}x$$

د پراته یا افقي تانجنت سره غوښتکي.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{4}{10}x^3-\frac{18}{5}x=0$$
$$\Leftrightarrow x\left(\frac{4}{10}x^2-\frac{18}{5}\right)=0\Rightarrow x_1=0$$
$$\frac{4}{10}x^2-\frac{18}{5}=0\,\Big|+\frac{18}{5}$$
$$\Leftrightarrow\frac{4}{10}x^2=\frac{18}{5}\,\Big|:\frac{4}{10}$$
$$\Leftrightarrow x^2=9\Rightarrow x_{2/3}=\pm 3$$

په $x_1=0$ und $x_2=3$ und $x_3=-3$ ځایونو کې پراته تانجنتونه شتون لري

د y وضعیه قیمتونو کواوردیناتونه شمیرل.

$$f(x_1)=f(0)=\frac{81}{10}\qquad\Rightarrow \underline{P_1\left(0\,\Big|\,\frac{81}{10}\right)}\ \text{bzw. } P_1(0\,|\,8{,}1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x_2) = f(3) = \frac{1}{10}\cdot 3^4 - \frac{9}{5}\cdot 3^2 + \frac{81}{10} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(3|0)}}$$

$f(x_2) = f(-3) = f(3) = 0$ د محورسیومتري له امله لاس ته راځي $\underline{\underline{P_3(-3|0)}}$

پ –

د $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10}$ محورغوڅېدونکي یا د محور د تقاطع ټکي

$$P_y : f(0) = \frac{81}{10} \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0\left|\frac{81}{10}\right.\right)}}$$

همداسي $P_y(0|8.1)$.

صفرځایونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} = 0 \text{ Substitution: } x^2 = z$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}z^2 - \frac{9}{5}z + \frac{81}{10} = 0 | \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$$

$$p = -18 ; q = 81 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 - 81 = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} z_1 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3 \\ z_2 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{3/4} = \pm 3 \end{array} \right.$$

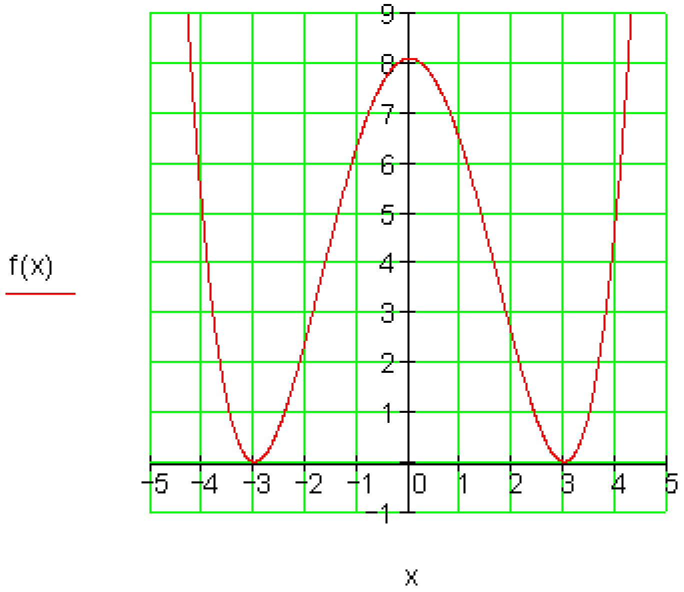
$\underline{\underline{P_{x1/3}(3|0) ; P_{x2/4}(-3|0)}}$ دواړه دبل صفرځایونه دي

دا په دې معنا، چې ګراف په دې ځای کې د x محور لمسوي.

داسې لمس ټکي یا مماسونه تل هم ټکي دي د پراته تانجنت سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت – خیره چې وروسته وی بنه به وی، خو څه وکړو. مخ باید برابر شي.



$$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}$$

$$x=1\Rightarrow f(1)=\frac{1}{10}\cdot 1^4-\frac{9}{5}\cdot 1^2+\frac{81}{10}=6,4$$

د محور سیمتري له امله $x=-1\Rightarrow f(-1)=f(1)=6,4$

$$x=2\Rightarrow f(2)=\frac{1}{10}\cdot 2^4-\frac{9}{5}\cdot 2^2+\frac{81}{10}=2,5$$

د محور سیومتري له امله $x=-2\Rightarrow f(-2)=f(2)=2,5$

$$x=4\Rightarrow f(4)=\frac{1}{10}\cdot 4^4-\frac{9}{5}\cdot 4^2+\frac{81}{10}=4,9$$

د محور سیومتري له امله $x=-4\Rightarrow f(-4)=f(4)=4,9$

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
f (x)	4,9	0	2,5	6,4	8,1	6,4	2,5	0	4,9

دويم. څلور:

الف –

$$f(x)=\frac{1}{5}x^4-\frac{4}{5}x^3 \Rightarrow$$

يعنې له دې لرو چې: سيومتري مو مخ ته نه ده پرته،

ځکه چې نه فقط جفت(جوړه) او نه فقط طاق(ناجوړه) اکسپوننتونه مخ ته لرو.

ب –

$$f(x)=\frac{1}{5}x^4-\frac{4}{5}x^3 \Rightarrow f'(x)=\frac{4}{5}x^3-\frac{12}{5}x^2$$

ټکي د پراته تانجنت سره

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x^3-\frac{12}{5}x^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{4}{5}x-\frac{12}{5}\right)=0 \Rightarrow x_{1/2}=0$$

$$\frac{4}{5}x-\frac{12}{5}=0 \,|+\frac{12}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5}x=\frac{12}{5} \,|:\frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow x=3 \Rightarrow x_3=3$$

د $x_{1/2}=0$ او $x_3=3$ ځايونو کې پروت تانجنت شته.

د y کواورديناتو شمېرل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x_1) = f(x_2) = f(0) = 0 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_{1/2}(0|0)}}$$

$$f(x_3) = f(3) = \frac{1}{5}\cdot 3^4 - \frac{4}{5}\cdot 3^3 = -5{,}4 \Rightarrow \underline{\underline{P_3(3|-5{,}4)}}$$

پ –

د $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3$ محورغوڅتکي

$$P_y : f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|0)}}$$

صفرځايونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3\left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0$$

$$\frac{1}{5}x - \frac{4}{5} = 0 \,|\, + \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}x = \frac{4}{5} \,|\cdot 5$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow x_4 = 4$$

$$\underline{\underline{P_{x1/2/3}(0|0)\,;\,P_{x4}(4|0)}}$$

ت –

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{5}\cdot 1^4 - \frac{4}{5}\cdot 1^3 = -0{,}6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

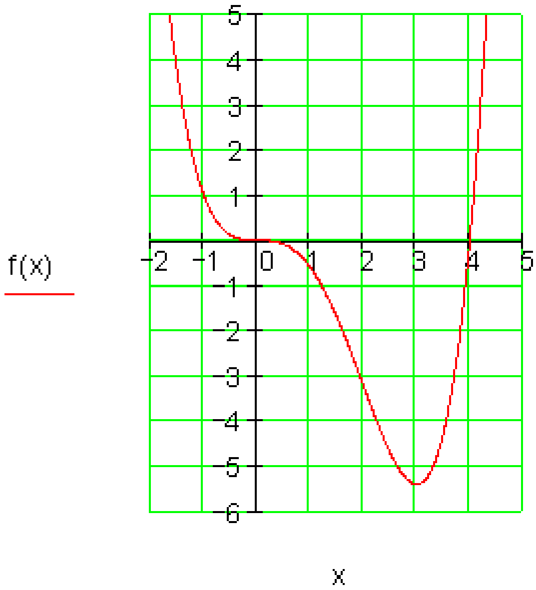
$$x=-1 \Rightarrow f(-1)=\frac{1}{5}\cdot(-1)^4-\frac{4}{5}\cdot(-1)^3=1$$

$$x=2 \Rightarrow f(2)=\frac{1}{5}\cdot 2^4-\frac{4}{5}\cdot 2^3=-3,2$$

$$x=-2 \Rightarrow f(-2)=\frac{1}{5}\cdot(-2)^4-\frac{4}{5}\cdot(-2)^3=9,6$$

$$x=5 \Rightarrow f(5)=\frac{1}{5}\cdot 5^4-\frac{4}{5}\cdot 5^3=25$$

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	9,6	1	0	−0,6	−3,2	−5,4	0	25



یادونه : د $x = 0$ په ځای کې د $f(x)$ ګراف پروت تآنجنت لري، مګر هلته نه چګښکی پروت دی او نه ټیټ ټکی.

دا په دې معنا، جې د پراته تآنجنت سره ځایونه حتمي نه ده چي افراطي ځایونه وي. مګر آفراطي ټکي پروت تآنجنت لري.

دريم. يو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف-

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|7) \Rightarrow f(-1) = -1\cdot a_3 + 1\cdot a_2 - 1\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = 7$$

$$P_2(-2|6) \Rightarrow f(-2) = -8\cdot a_3 + 4\cdot a_2 - 2\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = 6$$

$$P_3(3|1) \Rightarrow f(3) = 27\cdot a_3 + 9\cdot a_2 + 3\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = 1$$

$$P_4(-3|-2) \Rightarrow f(-3) = -27\cdot a_3 + 9\cdot a_2 - 3\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = -2$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	7	
1	−2	4	−8	6	II − I
1	3	9	27	1	III − I
1	3	9	−27	−2	IV − I
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	$\|\cdot(-1)$
0	4	8	28	−6	$\|:4$
0	−2	8	−26	−9	$\|:(-2)$
1	−1	1	−1	7	
0	1	−3	7	1	
0	1	2	7	−1,5	III − II
0	1	−4	13	4,5	IV − II
1	−1	1	−1	7	
0	1	−3	7	1	
0	0	5	0	−2,5	
0	0	−1	6	3,5	

$$5a_2 = -2{,}5 \,|:5$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -0{,}5 = -\frac{1}{2}}$$

$$-a_2 + 6a_3 = 3{,}5$$

$$\Leftrightarrow 0{,}5 + 6a_3 = 3{,}5 \,|-0{,}5$$

$$\Leftrightarrow 6a_3 = 3 \,|:6$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 0{,}5 = \frac{1}{2}}$$

$$a_1 - 3a_2 + 7a_3 = 1$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 1{,}5 + 3{,}5 = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = 1 - 1{,}5 - 3{,}5 = -4}$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 4 - 0{,}5 - 0{,}5 = 7$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = 7 - 4 + 0{,}5 + 0{,}5 = 4}$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4}}$$

ب -

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4\Rightarrow$$

سیومتري مخ ته نه لرو

ځکه چې نه فقط جوړه او نه فقط ناجوړه یعنې طاق اکسپوننت شتون لري

پ –

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x-4$$

ټکي د پرآته تآنجنت سره

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}x^2-x-4=0\,|:\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}=0$$

$$p=-\frac{2}{3};\ q=-\frac{8}{3}\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{9}+\frac{24}{9}=\frac{25}{9}\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l}x_1=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=\frac{6}{3}=2\\ x_2=\frac{1}{3}-\frac{5}{3}=-\frac{4}{3}\end{array}\right.$$

د $x_1=2$ او $x_2=-4/3$ په ځای کې پرآته تآنجنتونه شتون لري

د Y کوآوردیناتتونه و شمیری

$$x_1)=f(2)=\frac{1}{2}\cdot 2^3-\frac{1}{2}\cdot 2^2-4\cdot 2+4=-2\qquad\Rightarrow \underline{\underline{P_1(2\,|\,-2)}}$$

$$x_2)=f\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^3-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+4=\frac{196}{27}\Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P_2\left(-\frac{4}{3}\approx -1{,}33 \mid \frac{196}{27}\approx 7{,}26\right)$$

ت-

د $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4$ محور غوځتکی یا نقطه تقاطع

$$P_y : f(0)=4 \Rightarrow P_y(0\mid 4)$$

صفرځای وه

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4=0$$

$$\begin{array}{cccccc|l} & 1/2 & -1/2 & -4 & 4 & \\ x=1 & \downarrow & 1/2 & 0 & -4 & \Rightarrow x_1 = 1 \text{ ist Nullstelle} \\ & 1/2 & 0 & -4 & 0 & \end{array}$$

پاتې يا باقي پولينوم:

$$\frac{1}{2}x^2-4=0\mid +4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2=4\mid \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow x^2=8 \Rightarrow x_{2/3}=\pm\sqrt{8}$$

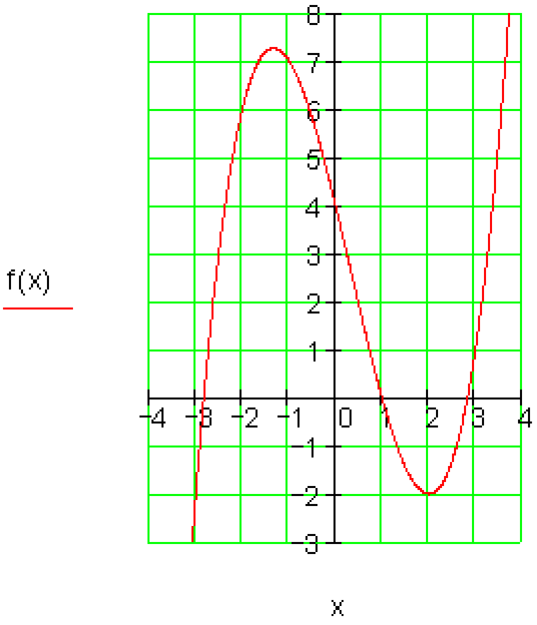
$$P_{x1}(1\mid 0);\ P_{x2}\left(\sqrt{8}\approx 2{,}83\mid 0\right);\ P_{x3}\left(-\sqrt{8}\approx -2{,}83\mid 0\right)$$

ټ-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

x	−3	−2,83	−2	−1,33	−1	0	1	2	2,83	3
f(x)	−2	0	6	7,26	7	4	0	−2	0	1



دریم. دوه:

الف-

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|6) \quad \Rightarrow f(1) = 1\cdot a_3 + 1\cdot a_2 + 1\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = 6$$

$$P_2(3|-4) \quad \Rightarrow f(3) = 27\cdot a_3 + 9\cdot a_2 + 3\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = -4$$

$$P_3\left(-\frac{1}{2}\middle|\frac{45}{8}\right) \quad \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}\cdot a_3 + \frac{1}{4}\cdot a_2 - \frac{1}{2}\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = \frac{45}{8}$$

$$P_3\left(-\frac{3}{2}\middle|-\frac{77}{8}\right) \quad \Rightarrow f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}\cdot a_3 + \frac{9}{4}\cdot a_2 - \frac{3}{2}\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = -\frac{77}{8}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	6	$\|\cdot 8$
1	3	9	27	−4	$\|\cdot 8$
1	−1/2	1/4	−1/8	45/8	$\|\cdot 8$
1	−3/2	9/4	−27/8	−77/8	$\|\cdot 8$
8	8	8	8	48	
8	24	72	216	−32	II − I
8	−4	2	−1	45	III − I
8	−12	18	−27	−77	IV − I
8	8	8	8	48	$\|:8$
0	16	64	208	−80	$\|:4$
0	−12	−6	−9	−3	$\|:3$
0	−20	10	−35	−125	$\|:5$
1	1	1	1	6	
0	4	16	52	−20	$\|:4$
0	−4	−2	−3	−1	III + II
0	−4	2	−7	−25	IV + II
1	1	1	1	6	
0	1	4	13	−5	
0	0	14	49	−21	$\|:7$
0	0	18	45	−45	$\|:9$
1	1	1	1	6	
0	1	4	13	−5	
0	0	2	7	−3	
0	0	2	5	−5	IV − III
1	1	1	1	6	
0	1	4	13	−5	
0	0	2	7	−3	
0	0	0	−2	−2	

$-2a_3 = -2 \,|: (-2)$

$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$

$2a_2 + 7a_3 = -3$

$\Leftrightarrow 2a_2 + 7 = -3 \,| -7$

$\Leftrightarrow 2a_2 = -10 \,|: 2$

$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -5}$

$a_1 + 4a_2 + 13a_3 = -5$

$\Leftrightarrow a_1 - 20 + 13 = -5 \,| +7$

$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6$

$\Leftrightarrow a_0 + 2 - 5 + 1 = 6 \,| +2$

$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = 8}$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب –

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \Rightarrow$$

سیومتري مخ ته نه لرو، ځکه چې نه فقط جفت او نه فقط طاق اکسپوننتونه مخ ته لرو.

پ –

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 10x + 2$$

تکي د افقي تانجنت سره

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 2 = 0 |: 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$p = -\frac{10}{3};\ q = \frac{2}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{25}{9} - \frac{6}{9} = \frac{19}{9} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{19}{9}}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{19}{3}} \approx 3,12 \\ x_2 = \frac{5}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}} \approx 0,214 \end{array} \right.$$

په $x_1 = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{19}{3}}$ او $x_2 = \frac{5}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}}$ ځایونو کې پراته تانجنتونه شته.

د y کواوردیناتو شمیرنه

$$f(x_1) = f\left(\frac{5}{3} + \sqrt{\frac{19}{3}}\right) \approx f(3,12) \approx -4,06 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(3,12 \mid -4,06)}}$$

$$f(x_1) = f\left(\frac{5}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}}\right) \approx f(0,214) \approx 8,21 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_2(0,214 \mid 8,21)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت –

د $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ محورغوڅتکي

$$P_y : f(0) = 8 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|8)}}$$

صفرځایونه

لاني الماني: لومړی صفرځای

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$$

	1	−5	2	8	
x = 1	↓	1	−4	−2	
	1	−4	−2	6	⇒ $x_1 = -1$ ist Nullstelle
	1	−5	2	8	
x = −1	↓	−1	6	−8	
	1	−6	8	0	

پاقي یا پاتې پولینومونه: $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$p = -6\ ;\ q = 8 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 9 - 8 = 1 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = 3 + 1 = 4 \\ x_3 = 3 - 1 = 2 \end{array} \right.$$

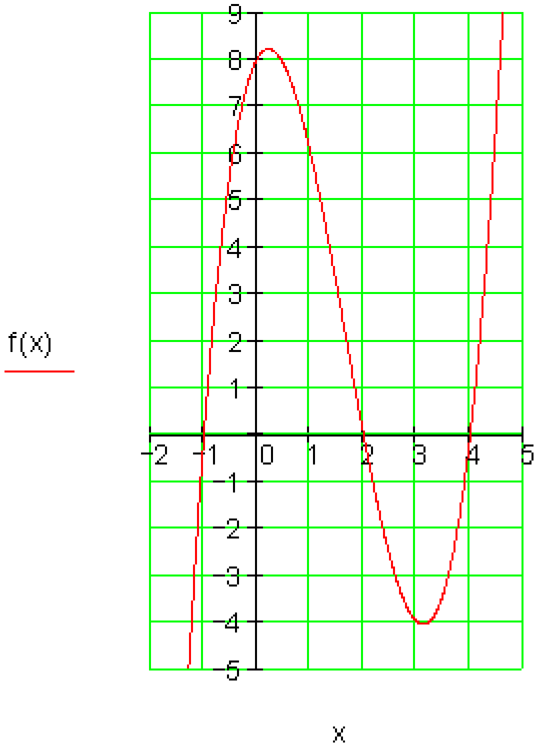
$$\underline{\underline{P_{x1}(-1|0)\ ;\ P_{x2}(4|0)\ ;\ P_{x3}(2|0)}}$$

ټ-

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

x	−1,5	−1	−0,5	0	0,21	1	2	3	3,12	4
f(x)	−9,6	0	5,6	8	8,21	6	0	−4	−4,06	0

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځلورم: الف –

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{96}x^2 + \frac{1}{8}x$$

د توپ ماکسیمال جګوالی د الوتني لار جګترکی دی، له دې امله یو ټکی دی، د پراته تانجنت سره.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{96}x^2 + \frac{1}{8}x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{96}x + \frac{1}{8}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-\frac{1}{96}x + \frac{1}{8} = 0| + \frac{1}{96}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{96}x \mid \cdot 96$$

$$\Leftrightarrow 12 = x \Rightarrow x_2 = 12$$

$$f(12) = -\frac{1}{288} \cdot 12^3 + \frac{1}{16} \cdot 12^2 = 3 \Rightarrow P(12 \mid 3)$$

جګټکی دی.

توپ يو د درې متره ماکسيمال جګوالي ته رسيږي. او له دې امله د شوټټکي يا وهلټکي څخه 12 متره لرې دی.

ب–

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

د صفرځايونه غواړو پيدا کړو.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(-\frac{1}{288}x + \frac{1}{16}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$-\frac{1}{288}x + \frac{1}{16} = 0 \mid + \frac{1}{288}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16} = \frac{1}{288}x \mid \cdot 288$$

$$\Leftrightarrow \frac{288}{16} = x \Rightarrow x_3 = 18$$

توپ د وهلټکي څخه په 18 متره لرېوالي بيرته ځمکې ته رالويږي

پ – $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شوټټکي څخه په نهه متره لري د توپ جګوالی دې پیدا شي.

$$f(9) = -\frac{1}{288}\cdot 9^3 + \frac{1}{16}\cdot 9^2 \approx 2,53$$

توپ د مقاومت دیوال څخه چې دوه متره لرې دی په 2,53 m جګوالي پورته الوزي.

ت –

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

غواړو ځاي پیدا کړو چې هلته توپ الوتنه دوه متره جګوالی لري.

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 = 2$$

د ازمائېښت له لارې حل:

$$f(15) \approx 2,344$$

$$f(15,5) \approx 2,086$$

$$f(15,6) \approx 2,028$$

$$\boxed{f(15,65) \approx 1,998}$$

ازاد شوټ یا ازاد وهل له۱،۹۹۸

پنځم: الف –

$$f(x) = x^3 \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0+\Delta x) = (x_0+\Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0^2\cdot\Delta x + 3x_0\cdot(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$f(x_0) = x_0^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^3+3x_0^2\cdot\Delta x+3x_0\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x_0^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x_0^2\cdot\Delta x+3x_0\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(3x_0^2+3x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}3x_0^2+\underbrace{3x_0\cdot\Delta x}_{\to 0}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{\to 0}=3x_0^2$$

ب –

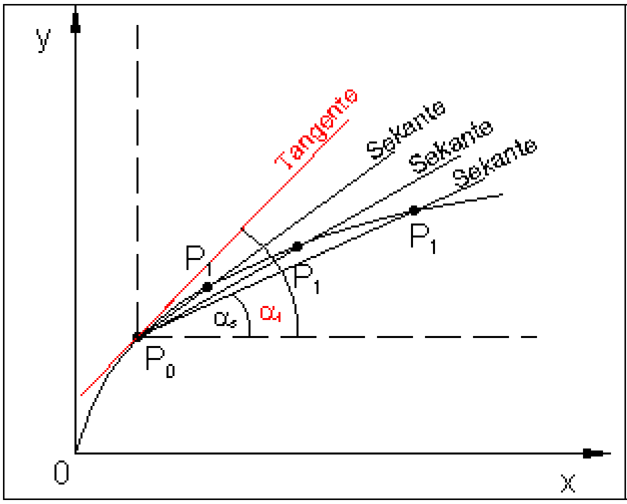
$$f(x)=\frac{1}{3}x^2 \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0+\Delta x)=\frac{1}{3}(x_0+\Delta x)^2=\frac{1}{3}\left(x_0^2+2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)$$

$$f(x_0)=\frac{1}{3}x_0^2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\left(x_0^2+2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)-\frac{1}{3}x_0^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\left(2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{3}\left(2x_0+\underbrace{\Delta x}_{\to 0}\right)=\frac{2}{3}x_0$$



که P_1 و P_0 ته ورنزدې
کیښول شي، نو د نوې
سیکانت جګوالي به په دې
ځاي کې د تابع جګوالی د P_0
په ټکي کې وي، چې باید پیدا
شي. که دا کار په کلکه مخ
ته یوړل شي او ټکی P_1 تل
زیات و P_0 ټکي ته نږدې
شي، نو د پولې ځاي په ځیر

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوه کرښه لاس ته راځي، دا د تابعګراف فقط په ټکي P_0 کې لمسوي. په ټکي P_0 کې د تابعګراف تانجنت. د تانجنت جګوالی په دې ټکي P_0 کې ټيک د تابع جګوالی په P_0 کې.

شپږم:

الف – حجم يا ډکی : V = l.b.h

$$\left.\begin{array}{l} l = 26 - 2x \\ b = 26 - 2x \\ h = x \end{array}\right| \Rightarrow V(x) = (26 - 2x)(26 - 2x)x = 4x^3 - 104x^2 + 676x$$

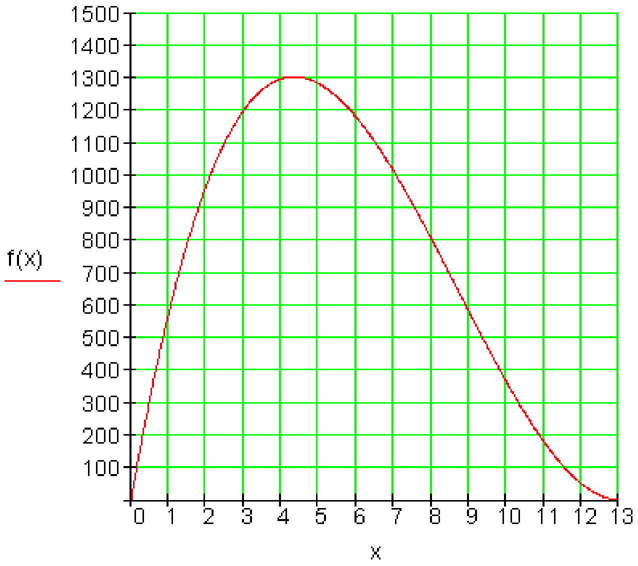
د کوټې حجم يا ډکی د يوه دريمې درجې ترم له لارې ټاکل کيږي:

$$V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 676x$$

ب – $V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 676x$

ارزښت جدول:

x	0	2	4	6	8	10	12
f(x)	0	968	1296	1176	800	360	48



(c) ketabton.com: The Digital Library

ماکسیمال حجم یا ډکی په جګتکي کې، له دې لاس ته راځي: پروت یا افقي تانجنت.

$$V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 676x \Rightarrow V'(x) = 12x^2 - 208x + 676$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 208x + 676 = 0$$

د دې مربع مساوات حل څخه لرو: $t\ x_1 = 13;\ x_2 = 13/3 \approx 4,33$

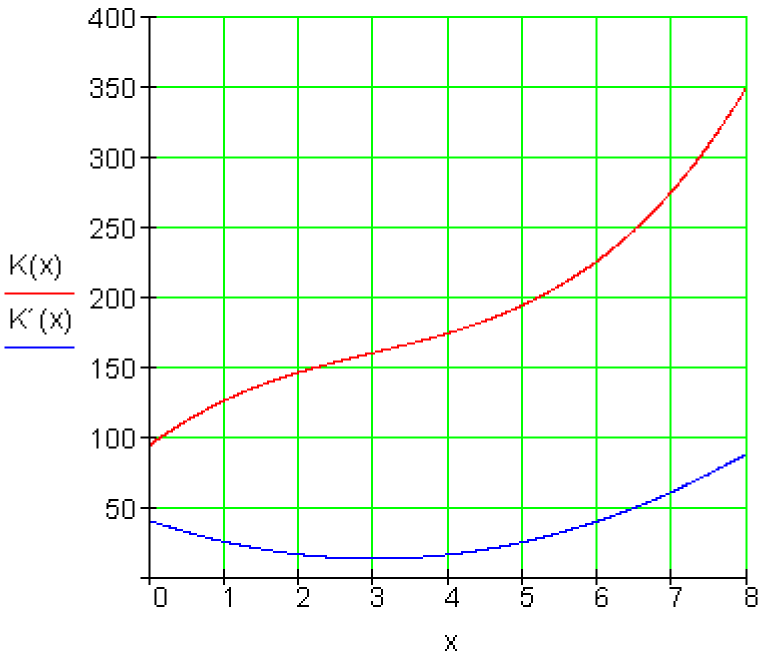
$$V\left(\frac{13}{3}\right) \approx 1302$$

د x=13/3 cm له ټاکلو د کوتۍ حجم یا ډکی $v \sim 1302m^3$ ماکسیمال دی.

حجم یا ډکی دی:

اووم:

الف \ ب



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94 \Rightarrow K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزښتجدول

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40	61	88

پ –

د K'(x) ګراف يو پارابول دی، هغه چې د لګښت زياتوالی ښايي. د لګښت خورا کم زياتوالی د پارابول له ککرتکي يا رآس ټکي سره لاس ته راځي.

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94 \Rightarrow K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

د پارابول په ککرتکي کې پروت تانجنت.

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3$$
$$K'(3) = 13$$

د x = 3 ناروغانو ګڼون يا تعداد (300 ناروغان) د لګښت زياتوالی له نورو خورا کم دی. K'(3) = 13 په دې معنا چې 130 € / Tag په روځ . يا په بل ډول ويل شوي: که په دې ناروغانو ته يو بل راشي، دا په دې معنا چې x = 3,01 . د يوه ورزيات ناروغ لپاره لګښت دی: K(3,01) - K(3) = 160,13 - 160 = 0,13

که دا ارزښتونه له 1000 سره ضرب شي، نو د روځې لاس ته ترې 130 €/Tag يورو راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتيګرالشميرنه

انتيګرالشميرنې لپاره پيل راوړنې

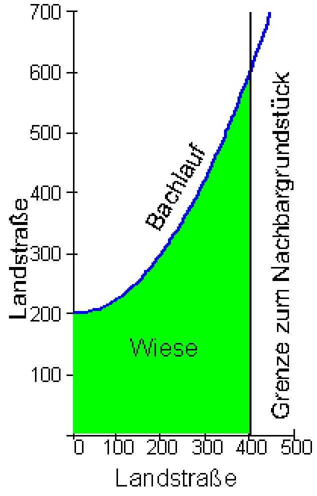
موږ د ځمککچپوهنې يا هندسې له لارې بلد يو چې د کرښو رابند تنونو يا جسمونوسطحه او ډکی يا حجم څنګه وشميرو.
که يوه سطحه له ګرږې (-کربښې) رابنده وي، نو څه بايد وشي؟
دا مو انتيګرال شميرنې ته رابولي.

پيلبيلګه

دا څيره شوی چمن خرڅيږي. له پورته لور د ويالې را بند دی او له ښې لور د ګاونډي ځمکه ده او کيڼ لور ته کوڅه او له کښته لور هم د يوې کوڅې را بند دی.

ددی لپاره چې چمن وپلورل شي، بايد سطحه وپيژندل شي.

د پلورونکی لپاره سطحه بايد نزدې پوره مګر هيڅکله کمه ونه شميرل شي. اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پيسې بايد ورکړي، خو هيڅکله ځمکه د اصل څخه زيات ونه شميرل شي.



وروسته له دې چې رانيوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پيسو په تاديه سره يوځای کيږي او په دې هکله موافقه کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = \frac{1}{400}x^2 + 200$ د تابع مساوات لري.

د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

هره توټه(مستطیل پټۍ) 50m سره وره ده او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د تولو پټیو، سطحه یو ځای شمیرو.

$200 \cdot 50 = 10000$

$206 \cdot 50 = 10300$

$225 \cdot 50 = 11250$

$256 \cdot 50 = 12800$

$300 \cdot 50 = 15000$

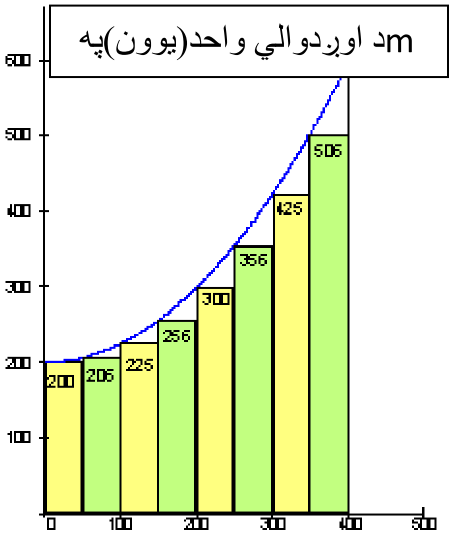
$256 \cdot 50 = 12800$

$425 \cdot 50 = 21250$

$506 \cdot 50 = 25300$

$\underline{123700}$

ځمکه په لاندې ډول په اوږدو توټو(پټیو) توټه کیږي



د اخستونکي لپاره توله سطحه نږدې $\boldsymbol{123700\ m^2}$ ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره توټه(پټۍ) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د تولو پټیو سطحه یوځای شمیرو.

$206 \cdot 50 = 10300$

$225 \cdot 50 = 11250$

$256 \cdot 50 = 12800$

$300 \cdot 50 = 15000$

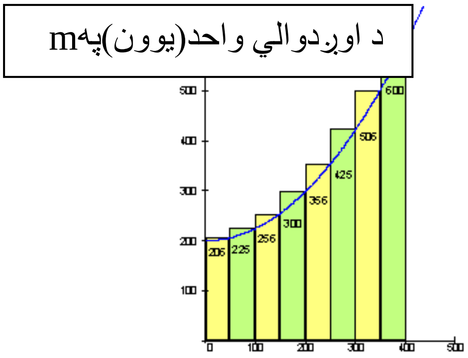
$356 \cdot 50 = 12800$

$425 \cdot 50 = 21250$

$506 \cdot 50 = 25300$

$600 \cdot 50 = 30000$

$\underline{143700}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

....

دا د پلورونکي له پاره د ټولي سطحي مساحت نږدې $143700\ m^2$ دی.
اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قيمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قيمتونو منځ ارزښت يو بل سره ومني. يعنې د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700 + 143700}{2} = 133700\ unt^2$$

دا به وروسته د تاکلي انتيګرال برخه (په مخ) کې وشميرو، چې ريښتونی ارزښت يې $133333\bar{3}m^2$ دی.

د اخستونکي په بيلګه کې دا ډول شميرنه ،،**لاندنۍ جمعي جوړول**،، بلل کيږي.
د پلورونکي په بيلګه دا ډول شميرنه،، **پورتنۍ جمعي جوړول**،، بلل کيږي.
دا د سطحې ريښتونی ارزښت يو چيرته په دا منځ کې پروت دی.
بايد ددې له پاره يوه لار پيدا کړو، چې رښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

سطحه او لومړنی تابع:

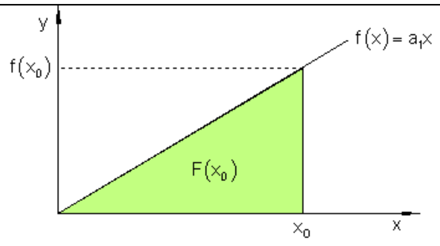
سطحې تابع ته ترمخ راوړنه:

د تابع $f(x) = a_1 x$ ګراف په کارتيزي وضعيه سيستم (پروت ولاړسيستم) په سرچينه کې يوه کرښه انځوروي.
يو تابع غواړو پيدا کړو، چې د ګراف او x -محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي يا تابعيت کې سطحه په ګوته کوي.
دا چې دا جوړه شوې سطحه يو مثلث دی، نو حل يې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته

$A = \frac{g \cdot h}{2}$ ساده پيدا کيږي:

زموږ د مسألې لپاره متحوله داسې تغيروو:

$$A \to F(x_0);\ g \to x_0;\ h \to f(x_0) = a_1 x_0$$



$$F(x_0) = \frac{x_0 \cdot f(x_0)}{2}$$

د $f(x_0) = a_1 x_0$ سره په لاندې ډول دی:

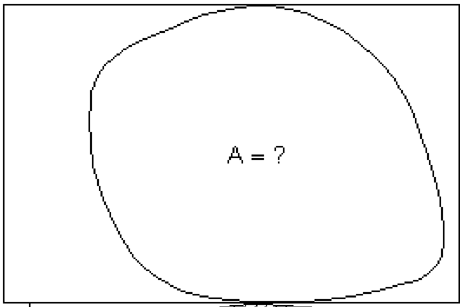
$$F(x_0) = \frac{x_0 \cdot a_1 x_0}{2} = \frac{a_1}{2} x_0^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

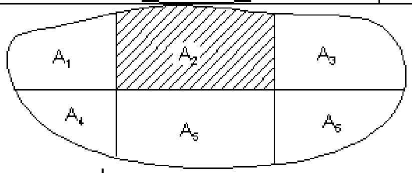
تابع $F(x_0)$ د گراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي(تابعیت) کې تشریح کوي یا ښايي. موږ دا تابع د **سطحې تابع** بولو.

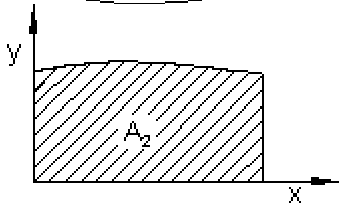
د سطحې پرابلم:

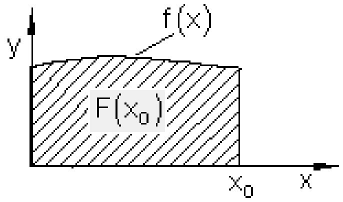
پخوانیو یونانیانو ته دا د منحني څخه رابندې سطحې شمیرلو اصول معلوم وو. دا دمشتق شمیرنه، چې موږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پیړۍ‌پاي کې) د طبیعي علومو پوهانو لايبنيخ او نیوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.

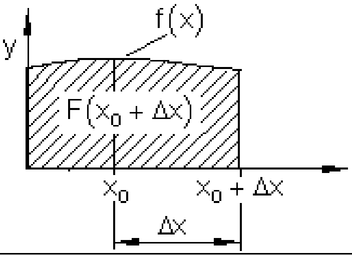


هره له کږوکږښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو(قدمونو)، چې په هغې کې فقط یوه یوه کږه کرښه رامنځ ته کیږي. نورې ټولې رابندوني سیده کرښیزې دي. هره یوه د سطحې برخه(د بیلګې په توګه دلته A_2) کېدی شي د وضعیه قیمتونو سیستم کې د یوې سطحی په څېر انځور شي، چې د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي. که له کږوکږښو رابند گراف د f(x) متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې ایا یو تابع شته چې د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظیم کړي، لکه په پیلبېلګه کې؟ که داسې یو تابعF شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محورارزښت تنظیم وي، نو باید د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$ په سطحه $F(x_0+\Delta x)$ باندې تنظیم کړای شي.



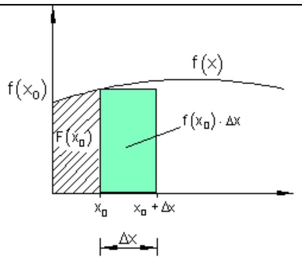
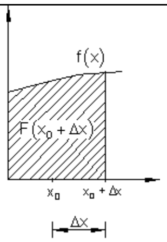
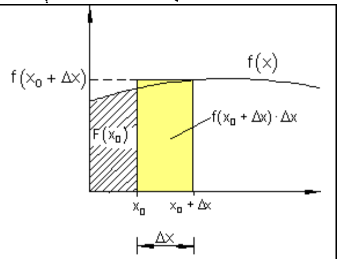






(c) ketabton.com: The Digital Library

پـه یوه څلورضلعي(مستطیل) کې د سطحې رابندول:
یا د سطحۍ پـه کوتیو کې بندول:

<table>
<tr>
<td>
د منحني لاندې پـه نخښـه شوې سطحـه لـه ریښتوني سطحې څـه کوچنۍ ده.</td>
<td>
$F(x_0+\Delta x)$
ریښتونې سطحـه ده.</td>
<td>
د منحني لاندې پـه نخښـه شوې سطحـه د ریښتوني سطحې څخـه لویـه ده</td>
</tr>
</table>

کـه د سطحې پټې (یا کوچنې مستطیلونه)هرڅومره کوچنې شي، پـه همغـه اندازه د اصلې سطحې د مساحت څخـه یې توپیر کمیږي.
دا اړودوالی د ریاضیاتو لـه مخې پـه لاندې توګـه فرمول بندي کیدی شي:

$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$

دا مو دې لاندې نابرابرونونویا نامساواتو تـه راهڅوي

$$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x) \le F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad | F(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \le f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |:\Delta x$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) \le \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \le f(x_0+\Delta x)$$

لیمیټ یې نیسو(پوله یې پیدا کوو):

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$$

$$f(x_0) \le F'(x_0) \le f(x_0)$$

$$f(x_0) \le F'(x_0) = f(x_0)$$

نو لرو: $\underline{\underline{F'(x_0)=f(x_0)}}$

دا پـه دې معنا، چې د سطحې $F(x)$ مشتق د کږې کرښې د تـابع ارزښت $f(x_0)$ سره پـه x_0 ځای کې برابر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ ليکو:

$$\boxed{F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)} \quad \text{يا} \quad F'(x_0)=\frac{dF(x_0)}{dx}=f(x_0)$$

که موږ بريالي شو، داسي يو تابع F(x) پيداکړو چې مشتق يې د رابندې کړې f(x)تابع وي، نو F(x) د سطحې تابع دی.
که موږ يو تابع د لومړني تابع څخه رابيل کړويعني مشتق يې ونيسو، نو دا مشتق کول بولو. د يوې سطحې تابع پيدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی.

سرې کړی شي فورمال ووايي:
د يوې سطحې مساحت تابع، چې پيداکړو، دا معنا لري چې انتيګرالول يې شميرو.
د يوه ساده توان تابع په بيلګه د احساس له مخې يوه لار پيداکيدی شي، چې دا څنګه ايتيګرالوي.

توانتابع :

$$f(x)=x^3 \quad \Rightarrow f'(x)=3\cdot x^{3-1}=3x^2$$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په يو کميږي او پوتنختابع د زاړه پوتنخ سره ضربيږي.
انتيګرالونه (زياتونه ياورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په يو جګيږي اوپوتنختابع په نوي اګسپوننت وېشل کيږي.

دا همدا اوس ازمايو:

پوتنختابع:

$$f(x)=3x^2 \quad \Rightarrow F(x)=\frac{3}{2+1}x^{2+1}=\underline{\underline{x^3}}$$

تابع F(x) د f(x) بنسټتابع (لومړنی تابع يا ساده تابع) بلل کيږي، ځکه چې f(x) له F(x) څخه لاس ته ارځي يا را پيداکيږي يا راځيږي.

ناټاکلی انتيګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

و به ګورو، چې نا ټاکلی انتیګرال د لومړنی تابع لپاره بل نوم دی.

که دیوې ورکړ شوې f(x) تابع F(x) لومړنی تابع، یعنې F(x) وپېژنو، نو د یوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د f(x) د ټولو لومړنیو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه یو حقیقي عدد دی).

موږ د f(x) تابع د F(x) لومړنی تابع ټاکنه یا اینتګرلونه هم بولو او ددې له پاره لیکو:

$$\frac{dF}{dx}=f(x) \Leftrightarrow dF(x)=f(x)dx \Leftrightarrow F(x)=\int dF(x)=\int f(x)dx$$

نو لرو : $F(x)=\int f(x)\,dx$

دا تراوسه فورمال لیکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.

موږ لومړنی توابع پلټو

بیلګه:

لومړنی تابع F(x) دې پیدا شي، چې مشتق یې f(x) = 2x دی.

قاعده داسې ده $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x\,dx$

موږ ازمایو:

$F(x)=x^2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$

$F(x)=x^2+2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$. په ټولیزه توګه باور لري:

$F(x)=x^2+C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x)=2x=f(x)$

دواړه توابع په ثابت غړي کې یو له بل توپیر لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره

هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله باید دې خپلې لار ته تغیر ورکړو.

قاعده(لار): باور لري: $\boxed{\int f(x)\,dx=F(x)+C}$

د لومړنیو توابعو سټ(ډېری)

د بنسټ توابعو لومړني توابع

بیلګه ښایي، چې د تابع f(x) لپاره نه یواځې یو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې یوائې ثابت عدد کې یو له بل سره توپیر لري، چې دا د f(x) د لومړنییو توابعو سټ بولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه

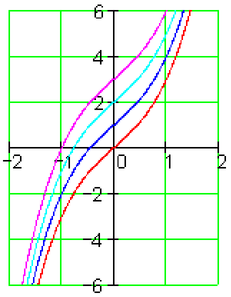
یو لومړنی‌تابع $F(x)$ دې پیدا شي، چې د هغه مشتق $f(x) = 3x^2 + 2$ وي.

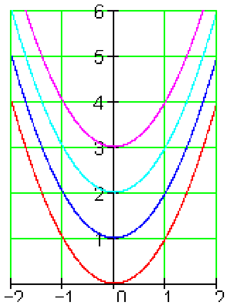
$F(x) = x^3 + 2x + C$ ، ځکه چې $F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x)$

د ټولو لومړنيو توابعو ډېرى دې د منحنيو ډلې په څير انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې يو له بل توپير لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بیلګې وکتل شي.

$F(x) = x^3 + 2x + C$ $\qquad$ $F(x) = x^2 + C$





تمرینونه

لومړنی تابع پیداکړی

لاندی$f(x)$ توابعو ته لومړنی توابع$F(x)$ پیداکړی

اول - $f(x) = x^2$ دویم - $f(x) = 2x^2$ دریم - $f(x) = x$

څلورم - $f(x) = -2x$ پمځم - $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ شپږم - $f(x) = -\frac{1}{4}x$

اوم - $f(x) = x^3$ اتم - $f(x) = 4x^3$ نهم - $f(x) = 2$

لسم - $f(x) = x + 1$ یولسم - $f(x) = x^2 + x - 3$ دولسم - $f(x) = x^n ; n \in \mathbb{N}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حلونه

تمرينونه انتيګرال ششميرنه

مفصل حلونه

اول - $f(x)=x^2 \Rightarrow F(x)=\frac{1}{3}x^3+C$ ازماييبنت

$$F'(x)=\frac{1}{3}\cdot 3x^2+0=x^2=f(x)$$

دوري $f(x)=2x^2 \Rightarrow F(x)=\frac{2}{3}x^3+C$ ازمايينت

$$:F'(x)=\frac{2}{3}\cdot 3x^2+0=2x^2=f(x)$$

دريم - $f(x)=x \Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}x^2+C$ ازمايينت

$$F'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2x^1+0=x=f(x)$$

څلورم - $f(x)=-2x \Rightarrow F(x)=-x^2+C$ ازمايينت

$$:F'(x)=-2x^1+0=-2x=f(x)$$

پنځم - $f(x)=\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow F(x)=\frac{1}{6}x^3+C$ ازمايينت

$$F'(x)=\frac{1}{6}\cdot 3x^2+0=\frac{1}{2}x^2=f(x)$$

شپږم - $f(x)=-\frac{1}{4}x \Rightarrow F(x)=-\frac{1}{8}x^2+C$ ازمايينت

$$F'(x)=-\frac{1}{8}\cdot 2x^1+0=-\frac{1}{4}x=f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

اوم - $f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$ ازمايينت

$$F'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 + 0 = x^3 = f(x)$$

اتم - $f(x) = 4x^3 \Rightarrow F(x) = x^4 + C$ ازمايينت

$$F'(x) = 4x^3 + 0 = 4x^3 = f(x)$$

نهم - $f(x) = 2 \Rightarrow F(x) = 2x + C$ ازمايينت $: F'(x) = 2 \cdot 1x^0 + 0 = 2 = f(x)$

لسم - $f(x) = x + 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C$ ازمايينت

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x^1 + 1x^0 + 0 = x + 1 = f(x)$$

يولسم - $f(x) = x^2 + x - 3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$ ازمايينت

$$: F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2x^1 - 3 \cdot 1x^0 + 0 = x^2 + x - 3 \Rightarrow f(x)$$

دولسم - $f(x) = x^n ; n \in \mathbb{N} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ ازمايينت

$$F'(x) = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)x^n + 0 = x^n = f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناټاكلي انتيګرال څخه و ټاكلي انتيګرال ته

ترمخ راوړنه یا وړاندراوړنه

موږ ولیدل، چې څنګه یو تابع f(x) ته لومړنی تابع F(x) منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د یوې ورجمع کوونکې ثابتې له امله یو له بل توپیر لري.

لرو: تابع $f(x)=3x^2+2$ او د دې د لومړنیو توابعو سټ $f(x)=x^3+2x+C$

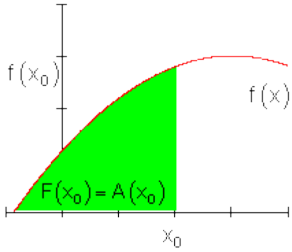
پیژند : د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع f(x) ته ،،ناټاکلی انتیګرال ،، بلل کیږي او ددې له پاره لیکو: $\boxed{\int f(x)dx=F(x)+C}$

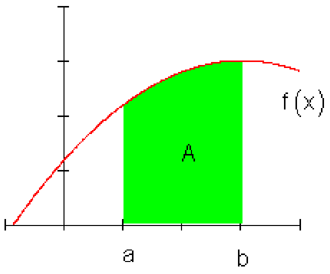
د مشتق- او انتیګرالشمیرنې ترمنځ اړیکې کیدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

جمله(قضیه) : د ناټاکلی انتیګرالشمیرنه د مشتقشمیرنې برعکس انځوروي

$$\frac{d[f(x)]+C}{dx}=[F(x)+C]'=f(x)$$

د تابع د ګراف لاندې او د انتروال [a ; b] تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.

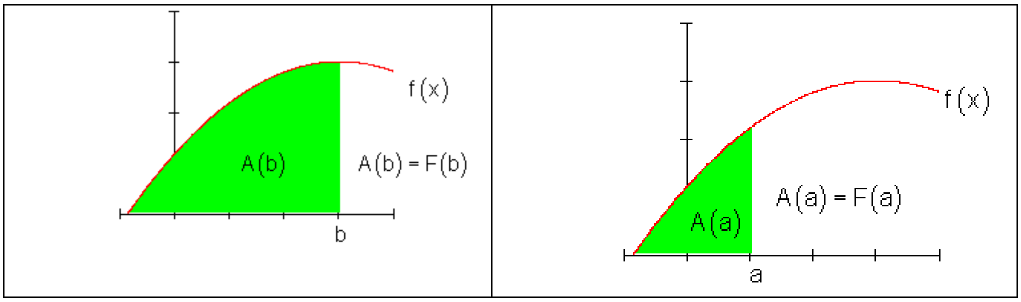




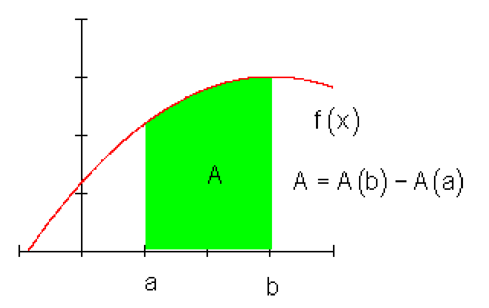
(c) ketabton.com: The Digital Library

....

د یوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لاربشوده وي:
د یوې سطحې، چې د یوې په پام کې نیولې f(x) تابع ګراف لاندې ده تر x_0 ځای پورې او یوې F'(x) تابع، چې دF(x) تابع مشتق د x_0 ځای د f تابع د تابع ارزښت سره د x_0 په ځای کې برابر وي، ترمنځ اړیکې شته دی، یعني $F'(x)=f(x)$



د انتروال [a,b] حدونو ترمنځ سطحې پیداکول د تابع د ګراف سطحو د کمښت څخه په ځای (A(b)) b او سطحې په (A(a)) a ځای کې . یعني A= A(b) – A(a)په همدې توګه F= F(b) – F(a) لاس ته راځي.

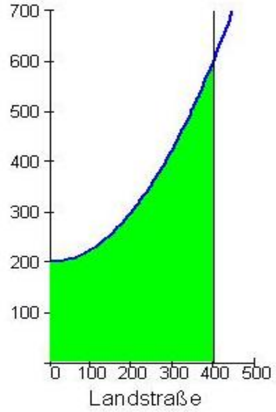


په انتروال [a,b] کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنیو توابعو تفریق دی:

$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx$$

دا انتیګرال ټاکلی انتیګرال هم بلل کیږي.
جمله :
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پیل بیلګه کې راوړې د چمن سطحه وشمیرو.
ثابته له تفریق سره لرې کیږي. په عمل کې د دې مسآلې د حل لپاره یوه بله لار ګتوره راوستلې یا ګټوره بنوولې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



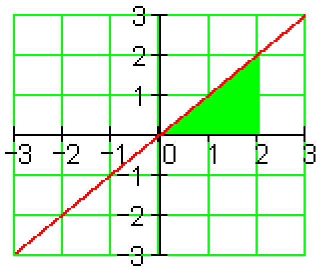
$$A=\int_0^{400}\left(\frac{1}{400}x^2+200\right)dx=\frac{1}{1200}x^3+200\cdot x\,\Big|_0^{400}$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400\left[\frac{1}{1200}0^3+200\cdot 0\right]$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400=\underline{\underline{133333.\bar{3}}}$$

دريم: د ساده سطحو شميرنه

بيلګه ۱ :



په انتروال $0 \le x \le 2$ کې د $f(x)$ او د x -محورترمنځ سطحه غواړو پيداکړو

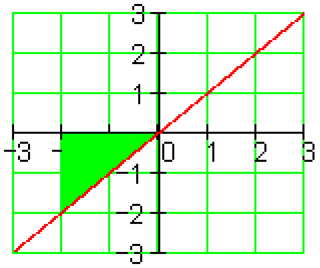
$f(x)=x$

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^2$$

$$=\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{4}{2}-0=\underline{\underline{2\,FE}}$$

FE د سطحې يوون يا واحد دی.

بيلګه ۲ :



په انترو $-2 \le x \le 0$ کې د x-محور ترمنځ سطحه غواړو پيداکړو

$f(x)=x$

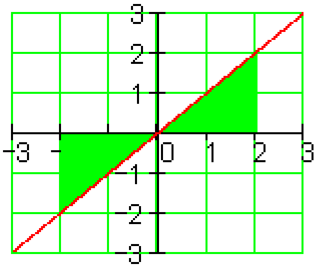
$$\int_{-2}^0 f(x)\,dx=\int_{-2}^0 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^0$$

$$=\frac{0^2}{2}-\frac{(-2)^2}{2}=0-\frac{4}{2}=\underline{\underline{-2\,FE}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

بيلګه ۳ :

په انټروال : ≤ 2- کې د x-محور ترمنځ سطحه غواړو پيدا کړو $f(x) = x$ $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right\|_{-2}^{2}$ $= \frac{2^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{4}{2} = 0\ FE$	

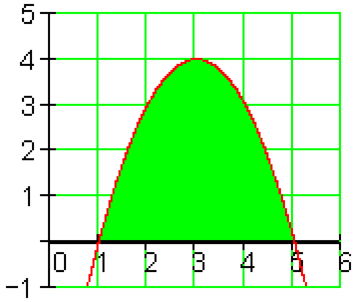
شميرنه ښايي، چې د x -محور پورته لور ته سطحه زياتيزه يا مثبت ده او د x – محور کښته لور ته سطحه کميزه يا منفي ګڼل کيږي.

په بيلګه ۳ کې سطحې يو بل مخامخ سره له منځه وړي يا پورته کوي.

که فزيکي سطحه څيرو، نو انتيګرال بايد ووېشل شي او ارزښتونه وشميرل شي.

$$\int_{-2}^{2} x\,dx = \left|\int_{-2}^{0} x\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2} x\,dx\right| = \left|\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{0}\right| + \left|\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{2}\right| = \left|\frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right| + \left|\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right| = 2 + 2 = 4\ FE$$

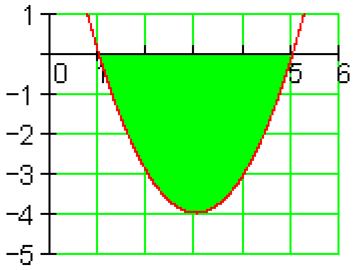
بيلګه ۴ :

$A = \int_{1}^{5} f(x)\,dx = \int_{1}^{5} \left(-x^2 + 6x - 5\right) dx$ $= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 5x\right]_{1}^{5}$ $= \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{6 \cdot 5^2}{2} - 5 \cdot 5\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{6 \cdot 1^2}{2} - 5 \cdot 1\right)$ $= \left(-\frac{125}{3} + 75 - 25\right) - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right)$ $= -\frac{125}{3} + \frac{225}{3} - \frac{75}{3} + \frac{1}{3} - \frac{9}{3} + \frac{15}{3} = \frac{32}{3}$ $\Rightarrow A \approx 10{,}67\ FE$	په انټروال $1 \le x \le 5$ کې د f(x) او د x -محور ترمنځ سطحه غواړو پيدا کړو $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ 

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

بیلګه ۵:

په انتروال $1 \le x \le 5$ کې د $f(x)$ اود x -محور ترمنځ سطحه غواړو پیدا کړو $f(x) = x^2 - 6x + 5$  	$A = \int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 \left(x^2 - 6x + 5\right) dx$ $= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 5x\right]_1^5$ $= \left(\frac{5^3}{3} - \frac{6\cdot 5^2}{2} + 5\cdot 5\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{6\cdot 1^2}{2} + 5\cdot 1\right)$ $= \left(\frac{125}{3} - 75 + 25\right) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 5\right)$ $= \frac{125}{3} - \frac{225}{3} + \frac{75}{3} - \frac{1}{3} + \frac{9}{3} - \frac{15}{3} = -\frac{32}{3}$ $\Rightarrow A \approx \underline{\underline{-10{,}67\ FE}}$

جمله: سطحه پروتځای او مخنخښه

$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx > 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ او سطحه د x -محور پورته لور ته پرته ده

$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx < 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ او سطحه د x -محور کښته لور ته پرته ده.

د انتیګرېشن پولو بدلول:

څه پیښیږي، که د انتیګرېشن پولې سره بدلې شي؟

بیلګه ۶ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = x$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2$$

$$= \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} - 0 = 2\,FE$$

FE د سطحې يوون يا واحد دی.

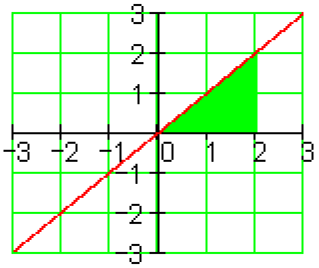
د انتيګرېشن پولې سره بدلوو:

2 2 2 |2

$$= \frac{0^2}{2} - \frac{2^2}{2} = 0 - \frac{4}{2} = -2\,FE$$

د دې لپاره چې سطحه مثبت يا زياتيزه شي بايد له (1-) سره ضرب شي.

په انتروال $0 \le x \le 2$ کې د $f(x)$ او د x - محورترمنځ سطحه غواړو پيداکړو



بيلګه ۷ :

د انتيګرېشن پولې سره بدليږي

$$A = \int_5^1 f(x)\,dx = \int_5^1 \left(-x^2 + 6x - 5\right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 5x\right]_5^1$$

$$= \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{6\cdot 1^2}{2} - 5\cdot 1\right) - \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{6\cdot 5^2}{2} - 5\cdot 5\right)$$

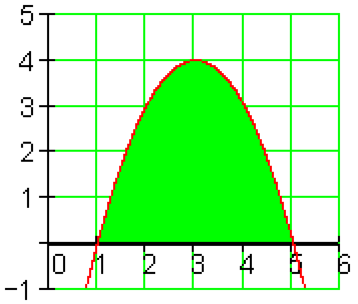
$$= \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right) - \left(-\frac{125}{3} + 75 - 25\right)$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{9}{3} - \frac{15}{3} + \frac{125}{3} - \frac{225}{3} + \frac{75}{3} = -\frac{32}{3}$$

$$\Rightarrow A \approx -10{,}67\,FE$$

په انتروال $1 \le x \le 5$ کې د $f(x)$ اود x -محور ترمنځ سطحه غواړو پيدا کړو

$f(x) = -x^2 + 6x - 5$



$$A = \int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 \left(-x^2 + 6x - 5\right) dx$$

$$\approx 10{,}67\,FE$$

جمله: د پولې بدلولو سره د انتيګرېشن مخنخښه بدليږي.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{oder} \quad -\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ٨ :

په انترو $-2 \le x \le 0$ کي د x-محور ترمنځ سطحه غواړو پيداكړو

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} -x\,dx = -\int_{-2}^{0} x\,dx$$

پولي بدلوو

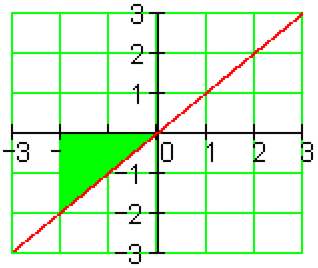
$$= \int_{0}^{-2} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{-2}$$

$$= \frac{(-2)^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} - 0 = 2\ FE$$

بيلګه ٢ :

په انترو $-2 \le x \le 0$ کي د x-محور ترمنځ سطحه غواړو پيداكړو

$f(x) = -x$



تمرينونه:

انتيګرال شميرنه II:

لاندې ټاكلي انتيګرالونه وشميرى.

يو - $\int_{1}^{3} x\,dx$ دوه - $\int_{0}^{3} (x^2 - 1)\,dx$ درې - $\int_{-2}^{2} 4\,dx$ څلور - $\int_{3}^{4} dx$

پنځه - $\int_{0}^{4} (2x - 5)\,dx$ شپږ - $\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{2}x^2 - 4\right) dx$

اوه- $\int_{-3}^{3} (x^3 + 2x)\,dx$ اته - $\int_{-1}^{2} \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\right) dx$

نهه - $\int_{-4}^{4} \left(2x^2 - \frac{1}{8}x^4\right) dx$ لس - $\int_{2}^{3} (3x - 6)^3\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

حلونه

انتيګرال شميرنه II

نتيجې

لومړی- $\int_1^3 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3 = \underline{\underline{4}}$

دويم:- $\int_0^3 \left(x^2-1\right)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^3 = \underline{\underline{6}}$

دريم- $\int_{-2}^2 4\,dx = [4x]_{-2}^2 = \underline{\underline{16}}$

ځلورم- $\int_3^4 dx = [x]_3^4 = \underline{\underline{1}}$

پنځم- $\int_0^4 (2x-5)\,dx = \left[x^2-5x\right]_0^4 = \underline{\underline{-4}}$

شپږم: $\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{2}x^2-4\right)dx = \left[\frac{1}{6}x^3-4x\right]_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \approx \underline{\underline{-15,085}}$

اووم- $\int_{-3}^3 \left(x^3+2x\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_{-3}^3 = \underline{\underline{0}}$

اتم- $\int_{-1}^2 \left(x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x\right]_{-1}^2 = \underline{\underline{-\frac{21}{4}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم- $\int_{-4}^{4}\left(2x^2-\frac{1}{8}x^4\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{40}x^5\right]_{-4}^{4}=\frac{512}{15}$

لسم- $\int_{2}^{3}(3x-6)^3\,dx=\left[\frac{27}{4}x^4-\frac{162}{3}x^3+\frac{324}{2}x^2-216x\right]_{2}^{3}=\frac{27}{4}$

مفصل حلونه:

لومړی- $\int_{1}^{3}x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{3}=\frac{1}{2}\cdot3^2-\frac{1}{2}\cdot1^2=\frac{1}{2}\cdot9-\frac{1}{2}\cdot1=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=\frac{8}{2}=4$

د ویم-

$$\int_{0}^{3}\left(x^2-1\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{0}^{3}=\frac{1}{3}\cdot3^3-3-\left(\frac{1}{3}\cdot0^3-0\right)=3^2-3-(0)=9-3=6$$

دریم- $\int_{-2}^{2}4\,dx=[4x]_{-2}^{2}=4\cdot2-4\cdot(-2)=8+8=16$

څلورم- $\int_{3}^{4}dx=[x]_{3}^{4}=4-3=1$

پنځم-

$$\int_{0}^{4}(2x-5)\,dx=\left[x^2-5x\right]_{0}^{4}=4^2-5\cdot4-\left(0^2-5\cdot0\right)=16-20-0=-4$$

شپږم-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}\left(\frac{1}{2}x^2-4\right)dx=\left[\frac{1}{6}x^3-4x\right]_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}=\frac{1}{6}\cdot\left(\sqrt{8}\right)^3-4\cdot\sqrt{8}-\left(\frac{1}{6}\cdot\left(-\sqrt{8}\right)^3-4\cdot\left(-\sqrt{8}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 8\cdot\sqrt{8}-4\cdot\sqrt{8}-\left(-\frac{1}{6}\cdot 8\cdot\sqrt{8}+4\cdot\sqrt{8}\right)=\frac{8}{6}\cdot\sqrt{8}-\frac{24}{6}\cdot\sqrt{8}+\frac{8}{6}\cdot\sqrt{8}-\frac{24}{6}\cdot\sqrt{8}$$

$$=-\frac{32}{6}\cdot\sqrt{8}=\underline{\underline{-\frac{16}{3}\cdot\sqrt{8}\approx-15{,}085}}$$

اووم –

$$\int_{-3}^{3}\left(x^3+2x\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_{-3}^{3}=\frac{1}{4}\cdot 3^4+3^2-\left(\frac{1}{4}\cdot(-3)^4+(-3)^2\right)$$

$$=\frac{81}{4}+9-\left(\frac{81}{4}+9\right)=\underline{\underline{0}}$$

اتم -

$$\int_{-1}^{2}\left(x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 2^4-\frac{1}{6}\cdot 2^3+\frac{3}{2}\cdot 2^2-4\cdot 2-\left[\frac{1}{4}\cdot(-1)^4-\frac{1}{6}\cdot(-1)^3+\frac{3}{2}\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)\right]$$

$$=\frac{16}{4}-\frac{8}{6}+\frac{12}{2}-8-\left[\frac{1}{4}\cdot 1-\frac{1}{6}\cdot(-1)+\frac{3}{2}\cdot 1+4\right]$$

$$=4-\frac{4}{3}+6-8-\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{3}{2}+4\right]$$

$$=2-\frac{4}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{3}{2}-4=-\frac{24}{12}-\frac{16}{12}-\frac{3}{12}-\frac{2}{12}-\frac{18}{12}=-\frac{63}{12}=\underline{\underline{-\frac{21}{4}}}$$

نهم: مفصل حل(اوبيونه):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-4}^{4}\left(2x^2-\frac{1}{8}x^4\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{40}x^5\right]_{-4}^{4}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 4^3-\frac{1}{40}\cdot 4^5-\left[\frac{2}{3}\cdot(-4)^3-\frac{1}{40}\cdot(-4)^5\right]$$

$$=\frac{128}{3}-\frac{1024}{40}-\left[\frac{2}{3}\cdot(-64)-\frac{1}{40}\cdot(-1024)\right]$$

$$=\frac{128}{3}-\frac{1024}{40}-\left[-\frac{128}{3}+\frac{1024}{40}\right]=\frac{128}{3}-\frac{1024}{40}+\frac{128}{3}-\frac{1024}{40}$$

$$=\frac{256}{3}-\frac{2048}{40}=\frac{256}{3}-\frac{256}{5}=\frac{1280}{15}-\frac{768}{15}=\frac{512}{15}$$

لسم:

$$\int_{2}^{3}(3x-6)^3\,dx=\int_{2}^{3}(3x-6)^2\cdot(3x-6)\,dx=\int_{2}^{3}\left(9x^2-36x+36\right)\cdot(3x-6)\,dx$$

$$=\int_{2}^{3}\left(27x^3-162x^2+324x-216\right)dx$$

$$=\left[\frac{27}{4}x^4-\frac{162}{3}x^3+\frac{324}{2}x^2-216x\right]_{2}^{3}$$

$$=\frac{27}{4}\cdot 3^4-\frac{162}{3}\cdot 3^3+\frac{324}{2}\cdot 3^2-216\cdot 3-\left[\frac{27}{4}\cdot 2^4-\frac{162}{3}\cdot 2^3+\frac{324}{2}\cdot 2^2-216\cdot 2\right]$$

$$=\frac{2187}{4}-1458+\frac{2916}{2}-648-108+\frac{1296}{3}-648+432$$

$$=\frac{2187}{4}-1458+1458-648-108+432-648+432$$

$$=\frac{2187}{4}-540=\frac{2187}{4}-\frac{2160}{4}=\frac{27}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توابعو ترمنځ سطحه

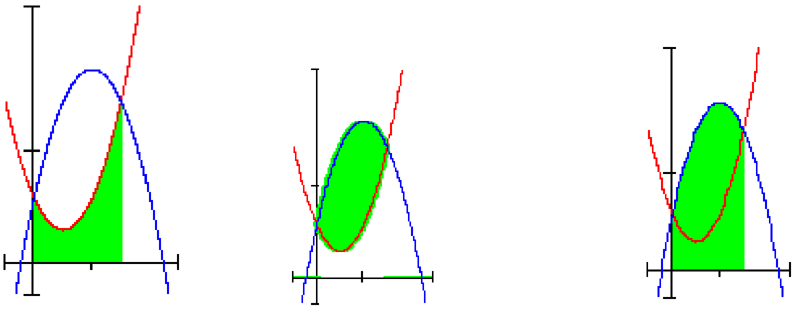
له دوه ګرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شميرنه:

ننوتنه: د يوه ډنډ يا يوه بند څېره دې دلته راوړل شي يا ديوه پټي ٍچې له ګړو پولو را بند وي.

فعاليت:

- که داسي يو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنګه وشمېرو؟

په څنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کيږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدى شي د ټاکلو اينتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شيما څخه مخ ته ځو :



$$A = A_1 - A_2$$

د اينتګرال جوړونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

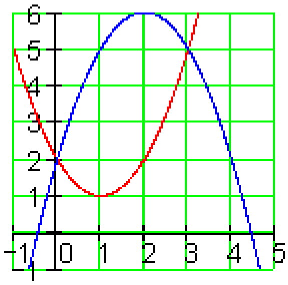
$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

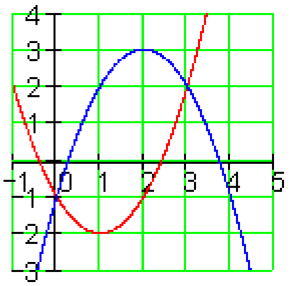
$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$
$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه بايد تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت څخه کووچنی ارزښت بايد کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

لکه چې پوهيږو، د يوې سطحې مخنښه ددې په واک کې ده، چې ايا سطحه د **x** - محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ څېړو، چې ايا دا تاثيرات په پورتنۍ بيلګه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د **y** -محور په درې واحدونو(يوونونو) کښته لورته بيايو او سطحې نوې شمېرو.





که د ليد له مخې قضاوت وکړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوځتکي هم او له دې سره د انتيکرال حدونه بې تغيره پاتيږي.

$$g(x) = -x^2 + 4x - 1 \text{ و } f(x) = x^2 - 2x - 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځای په ځای کونه:

$$A=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$$

د $f(x)-g(x)=2x^2-6x$ سره کیږي:

$$A=\int_0^3 (2x^2-3x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9=18-27=\underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنيو ترمنځ سطحه فزيکي سطحه ښايي، بايد لاس ته راوړنه يو مثبت عدد وي.

دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

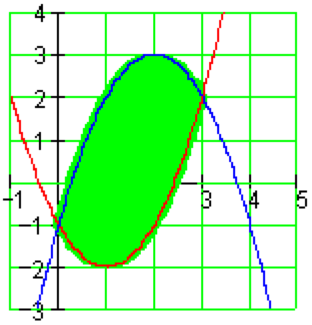
$$A=\left|\int_0^3 (2x^2-6x)\,dx=\left|\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3\right|=\left|\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9\right|=\left|18-27\right|=\left|-9\right|=\underline{\underline{9}}\right|$$

د دې متود تولیزه ونه(عمومیت) :

د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه:

که یوه سطحه د یوې پورته او یوې کښته منحني څخه رابنده وي، چې تابع f(x) او تابع g(x) پورې اړه و لري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې دول شمېرل کیږي.

$$A=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

....

د انتیګرالونې حدونه a او b د x – محور د دواړو ګرافونو د وضعیه قېیمتونو غوڅېکي دي.

تمرینونه:

د توابعو ګرافونو تر منځ سطحه.

د لاندې فنکشنونو(توابعو) ترمنځ سطحه وټاکۍ او دواړه ګرافونه په یوه پروتولاړ سیستم کې وکاږۍ. شمیرل شوې سطحې کرښه کرښه کړۍ.

لومړی- $f(x) = x^2 - x - 6 \,;\, g(x) = 4x - 10$

دویم- $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3 \,;\, g(x) = 3x$

دریم - $f(x) = 0{,}75\left(x^2 - 5x + 4\right) ;\, g(x) = 0{,}75x + 3$

څلورم- $f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4} \,;\, g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$

پنځم - $f(x) = (x-2)^2 - 4 \,;\, g(x) = x - 1$

شپږم- $f(x) = x^2 - 4x + 1;\, g(x) = -x^2 + 2x + 1$

اووم- $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3 \,;\, g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

اتم - $f(x) = x^2 + 3x \,;\, g(x) = 0{,}5x^2$

نهم- $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 1;\, g(x) = 2x^2 + 2x + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم- $f(x) = -0{,}5x^2 + 2\,;\, g(x) = -\frac{1}{9}(x-1)^2 + 1$

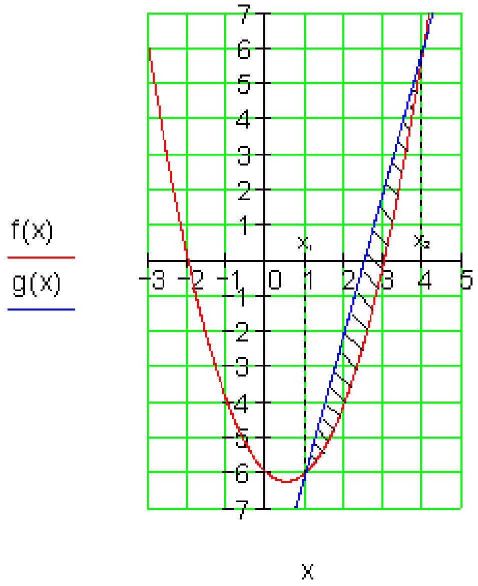
مفصل جلونه یا اوبیوني

$$f(x) = x^2 - x - 6\,;\, g(x) = 4x - 10$$
$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ und } x_2 = 4$$

$$A = \left|\int_1^4 [f(x) - g(x)]\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x\right]_1^4\right|$$
$$= \left|\frac{1}{3}\cdot 4^3 - \frac{5}{2}\cdot 4^2 + 4\cdot 4 - \left[\frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{5}{2}\cdot 1^2 + 4\cdot 1\right]\right| = \underline{\underline{4{,}5}}$$

لومړی –

د دواړ ګرافونو ترمنځ سطحه 4,5 FE به له دې وروسته او د مخه د سطحي واحد یا FE) یوون وي)ده.



دویم -

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3\,;\; g(x) = 3x$$

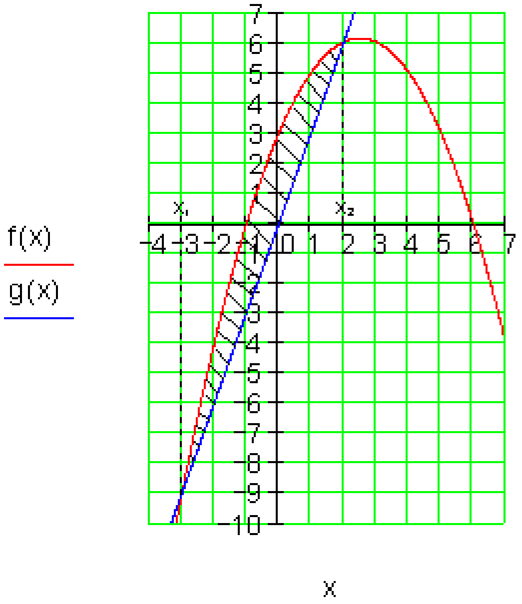
$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3 \text{ und } x_2 = 2$$

$$\int_{-3}^{2} \left[f(x) - g(x) \right] dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 3x \right]_{-3}^{2}$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot 2^3 - \frac{1}{4}\cdot 2^2 + 3\cdot 2 - \left[-\frac{1}{6}\cdot(-3)^3 - \frac{1}{4}\cdot(-3)^2 + 3\cdot(-3) \right] = \frac{125}{12} \approx \underline{\underline{10{,}417}}$$

د دواړو ګرافونو ترمنځ سطحه 10,417 FE ده.

يادونه: سرې کړې شي چې شميرنه بې له مطلق ارزښت مخ ته بوزي، که سرې له نتايجو يا لاس ته راوړنو، که منفي ارزښت ولري، مطلق ارزښت جوړ کړي.



دريم –

(c) ketabton.com: The Digital Library

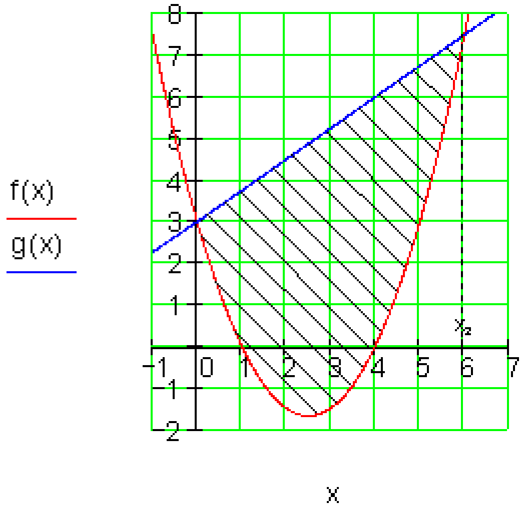
$$f(x) = 0{,}75\left(x^2 - 5x + 4\right) = 0{,}75x^2 - 3{,}75x + 3\,;\ g(x) = 0{,}75x + 3$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}75x^2 - 4{,}5x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 6$$

$$\int_0^6 \left[f(x) - g(x)\right] dx = \left[\frac{0{,}75}{3}x^3 - \frac{4{,}5}{2}x^2\right]_0^6 = \frac{0{,}75}{3}\cdot 6^3 - \frac{4{,}5}{2}\cdot 6^2 = -27$$

$$A = \left|\int_0^6 \left[f(x) - g(x)\right] dx\right| = |-27| = \underline{\underline{27}}$$

د دواړو ګرافونو ترمنځ سطحه 27 FE ده.



ځلورم –

$$f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4}\,;\ g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{13}{2}x + \frac{15}{2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = -5 \text{ und } x_2 = -\frac{3}{2}$$

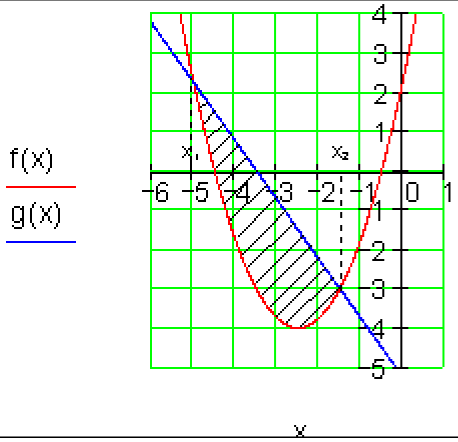
او $x_2 = -\frac{3}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-5}^{-\frac{3}{2}}[f(x)-g(x)]\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{13}{4}x^2+\frac{15}{2}x\right]_{-5}^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3+\frac{13}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-\left[\frac{1}{3}\cdot(-5)^3+\frac{13}{4}\cdot(-5)^2+\frac{15}{2}\cdot(-5)\right]=-\frac{343}{48}$$

$$A=\left|\int_{-5}^{-\frac{3}{2}}[f(x)-g(x)]\,dx\right|=\left|-\frac{343}{48}\right|\approx \underline{\underline{7,146}}$$



د دواړو ګرافونو ترمنځ سطحه نږدې 7,146 FE ده.

پنځم -

$$f(x)=(x-2)^2-4=x^2-4x\,;\ g(x)=x-1$$

$$f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow x^2-5x+1=0\Leftrightarrow x_1=\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}\ \text{und}\ x_2=\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}$$

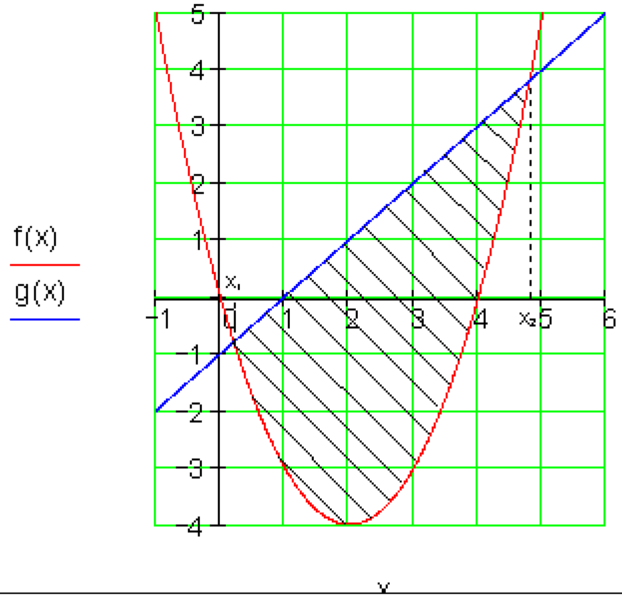
$$\int_{\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}}^{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}}[f(x)-g(x)]\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+x\right]_{\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}}^{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}\right)^3-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}\right)^2+\left(\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\left[\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}\right)^3-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}\right)^2+\left(\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}\right)\right]=-\frac{7}{2}\cdot\sqrt{21}\approx-16{,}039$$

$$A=\left|\int_{\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}}^{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}}\left[f(x)-g(x)\right]dx\right|=\left|-\frac{7}{2}\cdot\sqrt{21}\right|\approx\underline{\underline{16{,}039}}$$



د دواړو ګرافونو ترمنځ سطحه نږدې يا څه ناڅه 16,039 FE ده.

شېرم –

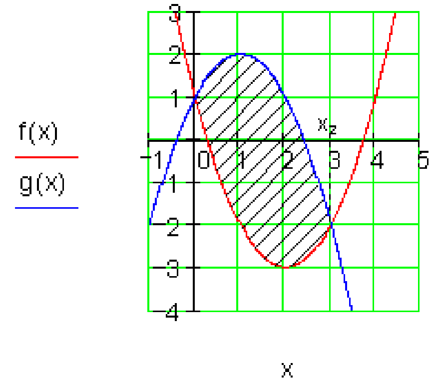
$$f(x)=x^2-4x+1;\ g(x)=-x^2+2x+1$$

$$f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow 2x^2-6x=0\Leftrightarrow x_1=0 \text{ und } x_2=3$$

$$\int_0^3\left[f(x)-g(x)\right]dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot3^3-3\cdot3^2=-9$$

$$A=\left|\int_0^3\left[f(x)-g(x)\right]dx\right|=|-9|=\underline{\underline{9}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د دواړو ګرافونو ترمنځ سطحه 9 FE ده.

اووم –

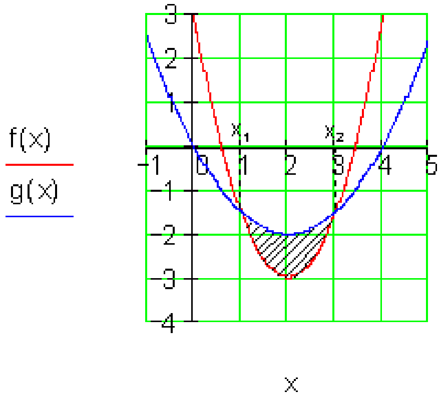
$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3\,;\; g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ und } x_2 = 3$$

$$\int_1^3 [f(x) - g(x)]\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 3^3 - 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3 - \left[\frac{1}{3}\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right] = -\frac{4}{3}$$

$$A = \left|\int_1^3 [f(x) - g(x)]\,dx\right| = \left|-\frac{4}{3}\right| = \underline{\underline{\frac{4}{3}}} \approx 1,333$$

	د دواړو ګرافونو ترمنځسطحه څه ناڅه یا نږدې 1,333 FE ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

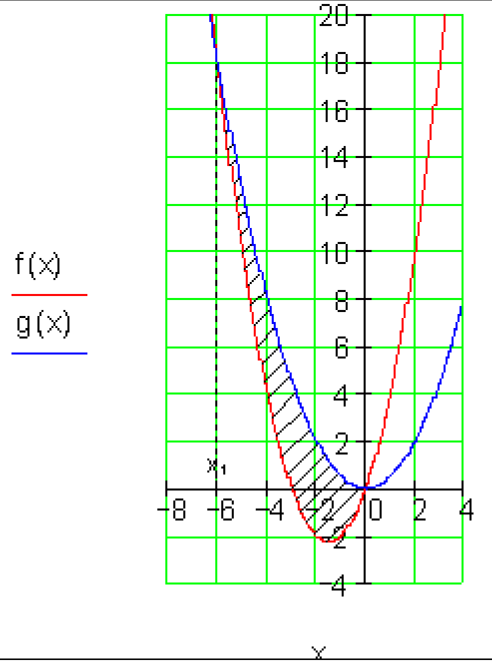
اتم -

$$f(x) = x^2 + 3x\,;\; g(x) = 0,5x^2$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 0,5x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x_1 = -6 \text{ und } x_2 = 0$$

$$\int_{-6}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx = \left[\frac{0,5}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2\right]_{-6}^{0} = -\left[\frac{0,5}{3}\cdot(-6)^3 + \frac{3}{2}\cdot(-6)^2\right] = -18$$

$$A = \left|\int_{-6}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx\right| = |-18| = \underline{\underline{18}}$$



د دواړو ګرافونو ترمنځ سطحه 18 FE ده.

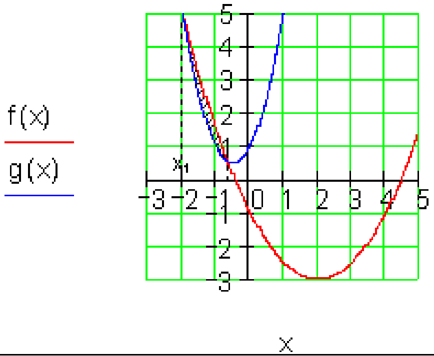
نهم -

$$f(x) = 0,5x^2 - 2x - 1;\; g(x) = 2x^2 + 2x + 1$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -1,5x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ und } x_2 = -\frac{2}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-2}^{-\frac{2}{3}}[f(x)-g(x)]\,dx=\left[-\frac{1,5}{3}x^3-2x^2-2x\right]_{-2}^{-\frac{2}{3}}$$
$$=-\frac{1,5}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-\left[-\frac{1,5}{3}\cdot(-2)^3-2\cdot(-2)^2-2\cdot(-2)\right]$$
$$=\frac{16}{27}\approx 0,593$$

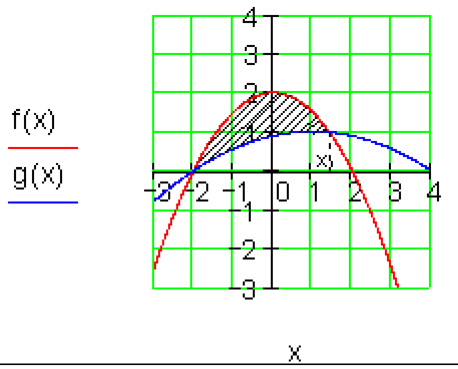
	ددواړو ګرفاون ترمنځ سطحه نږدې 0,593 FE ده.

لسم-

$$f(x)=-0,5x^2+2;\; g(x)=-\frac{1}{9}(x-1)^2+1=-\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{9}x+\frac{8}{9}$$
$$f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow-\frac{7}{18}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{10}{9}=0\Leftrightarrow x_1=-2 \text{ und } x_2=\frac{10}{7}$$

$$\int_{-2}^{\frac{10}{7}}[f(x)-g(x)]\,dx=\left[-\frac{7}{54}x^3-\frac{1}{9}x^2+\frac{10}{9}x\right]_{-2}^{\frac{10}{7}}$$
$$=-\frac{7}{54}\cdot\left(\frac{10}{7}\right)^3-\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{10}{7}\right)^2+\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{7}-\left[-\frac{7}{54}\cdot(-2)^3-\frac{1}{9}\cdot(-2)^2+\frac{10}{9}\cdot(-2)\right]$$
$$=\frac{128}{49}\approx 2,612$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

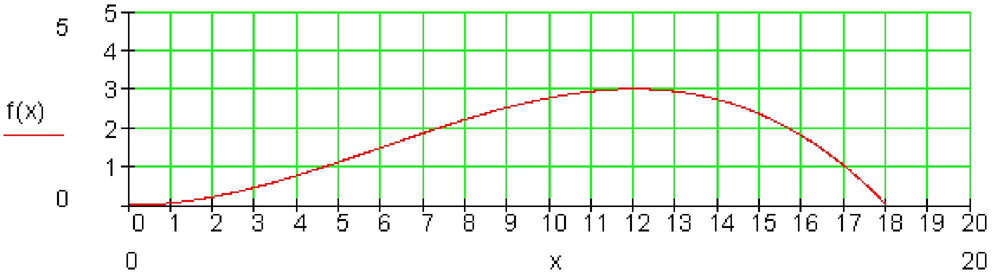
ددواړو ګرافونو ترمنځ سطحه نږدې 2,612 FE ده.	

انتیګرال د منځ- ارزښت په حیث یا توګه

f(x)_د [a ; b] په انتروا کې انتیګرال د منځ ارزښت په تګه(حیث)

د یوه ازاد غونډوسکي وهلو فکشن f(x)ګراف په فوټبال لوبه کې په نږدې توګه د غونډوسکې (کرې) الوتنو کرښه یا منحني ده.

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$



د غونډوسکې(کرې) وهلو یا شوټ ځخه وروسته د7 m او ترمنځ 16 m دغونډوسکې کرښه کوم د الوتنې منخنی جګوالی لري؟

لومړی د دې ورشو لپاره ا رزښت جدول جوړوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

x_i	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(x_i)$	1,872	2,222	2,531	2,778	2,941	3	2,934	2,722	2,344	1,778

د شمیرل شووفنکشن ارزښتونو f(x) منځ- ارزښت فرمول $\overline{f(x)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ جوړیږي.
زموږ د بیلګې لپاره $n = 10$ دی،، نو باور لري:

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} f(x_i)$$
$$= \frac{1}{10}\cdot(1{,}872 + 2{,}222 + 2{,}531 + 2{,}778 + 2{,}941 + 3 + 2{,}934 + 2{,}722 + 2{,}344 + 1{,}778)$$
$$= \frac{25{,}122}{10} = 2{,}512$$

له دې سره غونډوسکه په انتروال [16 ; 7]کې منځني د 2,512 m الوتنجګوالی لري. که سرې دا تلنه په شډلو یا نریو پلونو(قمونو) واخلي، نو د منځي ارزښت بله لاس ته راوړنه به ترې را ووځي یا لاس ته راشي.

د x -ارزښتونو 16 ;13 ;10 ;7 سره د منځني ارزښت لپاره به 2,34 m لاس ته راغلي وای.

د x -ارزښتونو ..... ;8,5 ;8 ;7,5 ;7 سره د منخنی ارزښت لپاره به 2,555 m لاس ته راغلي وای.

په روښانه تګه لیدل کیږي، چې هرڅومره x -پلونه نري واخستل شي په همغه اندازه منځنی ارزښت ټیک لاس ته راوړل کیږي.

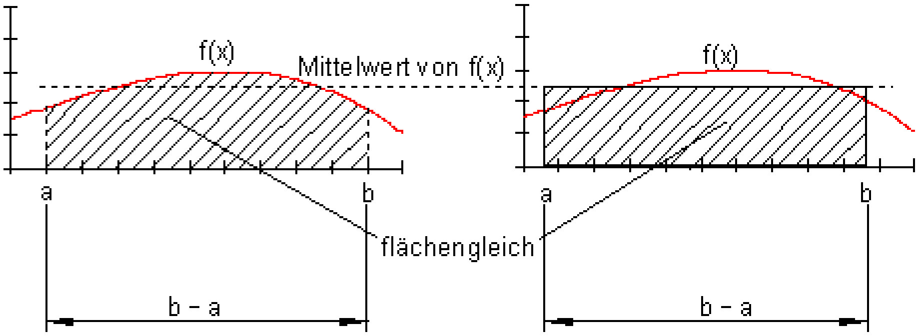
دا تلنلار د ټاکلي انتیګرال له لارې غواړو غوره کړو:
للومړی نیسو، چې فنکشن f(x) په انتروال [a;b] کې تعریف دی یا پیژند لري او زیاتیز یا مثبت. فنکشن د انتروال[a;b] په منځکې کوم ارزښت غوره کوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکلی اتیګرال $\int_a^b f(x)dx$

په انتروال [a;b] کې د فنکشن د ګراف لاندې سطحه انځوروي.

مونږ اوس د دې په مخ د ولاړکوډیز یا مستطیل ډوله، له دې سطحې سره برابره کرښیزه سطحه ، په لاندې ډول ږدو:



د ولاړکوډیز یا مستطیل پرت ولاړډوله(-عمودي) اړخ د انتروال[a;b] د اوږدوالي سره یعنيb-a د سره برابر دی.

داروښانه کیږي، که چیرې د فنکشن f(x) منځ- ارزښت په انتروال [a;b] کې په پورته کرښونه کې د ولاړ کوډیز د جګوالي په څیر تعریف شي.

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

د فنکشن(x)f منځ- ارزښت

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

د یوه دا تا لړۍ سره په پرتله کونه

دا زمونږ په بیلګه باندې په دې معنا دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \text{ mit } a = 7 \text{ und } b = 16 \text{ folgt:}$$

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{16-7}\int_7^{16}\left(-\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2\right)dx = \frac{1}{9}\left[-\frac{1}{4\cdot 288}x^4 + \frac{1}{3\cdot 16}x^3\right]_7^{16}$$

$$= \frac{1}{9}\left(\left[-\frac{1}{1152}\cdot 16^4 + \frac{1}{48}\cdot 16^3\right] - \left[-\frac{1}{1152}\cdot 7^4 + \frac{1}{48}\cdot 7^3\right]\right) = \underline{\underline{2,598}}$$

بال به له دې سره په انتروال [7 ; 16] کې د 2,598 m منځنی جګوالی لرودي.

ټاکلي انتيګرال له دې سره د جمعې يا زياتون د کلمې تل پاتې ټولنيزوالی کيږي. دا پهدې معنا، چې سړی هرڅومره کوچني x - پلونه واخلي، همغومره سړی د فنکشن منځ ارزښت ته نږدې راځي. د زاتونو يا د جمعې د اجزاوو کا اعضاوو ګڼون يا تعداد زياتيږي يا لوييږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

انالیزی

--اکسپوننشل توابع او e - توابع

پیل

تراوسه راته معلومو توابعو کې توابع رامنځ ته کیده، چې اکسپوننتونه یا جګعددونه یې عددونه وو:

توانتوابع: $f(x) = a \cdot x^q$ د $q \in \mathbb{R}$: سره .

بیلګه: $f(x) = 2x^3$

توابع د مثبت بنسټ سره، د هغه سره چې خپلواکه متحوله x د اکسپوننت یا جګعدد سره رامنځ ته کیږي، اکسپوننشل تابع بلل کیږي.

د اکپوننشل تابع لپاره بیلګه:

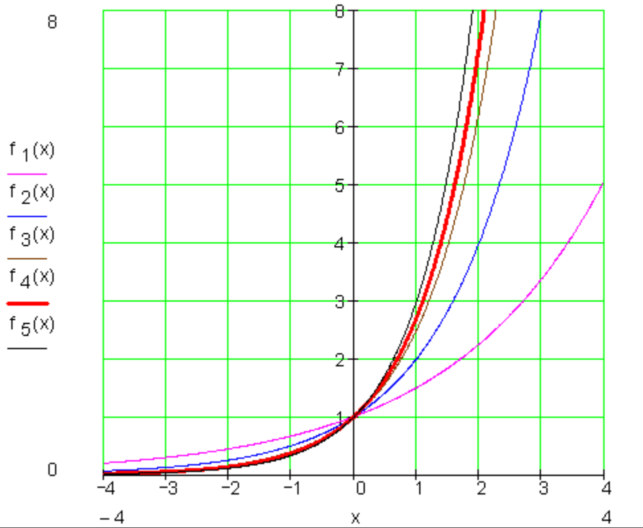
$f_1(x) = 1{,}5^x \quad f_2(x) = 2^x \quad f_3(x) = 2{,}5^x \quad f_4(x) = e^x \quad f_5(x) = 3^x$

اعداد **e ; 2,5 ; 2 ; 1,5** او **3** بنسټ جوړوي او x اکسپو ننت یا جګعدد(جګګڼ).

بنسټ **e** د اویلر عدد باندې مشهور دی او فقریبي ارزښت یې 2,71828 دی.

دا به وروسته هم به نورو راوړونو کې غوره رول ولوبوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د اکپوننشل تابع ګراف د مختلفو بنسټونو سره.

دا سور رنګه انځور د اړونده اکسپوننشل تابع دe بنسټ پورې اړه لري، چې e تابع هم بلل کیږي.

پام ته راتلنه یا برېښیدنه:

- ټول په وضعیه قیمتسیستم کې ګرافونه د y - محور د $Py(0\,|\,1)$ په ټکي کې غوڅوي (قطع کوي)

- د منفي x - ارزښت لپاره ټول ګرافونه د x - محور ته نزدې کیږي. د منفي x - محور په داسې حالتونو کې اسیمپتوت بلل کیږي. داسې هم ویلای شو، چې په داسې حالاتو کې د منفي x - رازښت ځان اسیمپتوتیکي د x - محور ته ورنږدې کوي.

په ریاضیکي یا شمېرپوهنیز ډول داسې لیکو : $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$

د مثبت - ارزښت لپاره د تابع ارزښت له ټول پولو اوړي یعنې د ناپای په لور ځي.

شمیرپوهنیز لیکدود یې داسې دی: $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- په وضعیه قیمتسیستم کې انځورشویو ګرافونو ټول تابع ارزښتونه مثبت دي، ځکه چې د اکسپوننشل توابعو لپاره مثبت اجازه لري.

دا په دې معنا چې په داسې حالت کې صفرځایونه نه شته.

پېژند(هعریف)

د $f(x) = a^x$ r تابع د $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ او $x \in \mathbb{R}$ سره اکسپوننشل تابع د a په بنسټ بلل کېږي.

دا د **e** عدد له کومه منځ ته راځي؟

د ربحې شمېرنې څخه دې عدد e منځ ته راشي یا وده وکړي.

دلته په هر د فرمولونو ټولګه کې خوندي د ربحې فرمول استعمالېږي.

n: د ربحې د برخې ګټون یا تعداد K0 : پیلپانګهKn د n: کاله ورسته د ربحې برخه p : د ربحې بنسټ یا ښنه په %	n: K_0 K_n p: $$K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

په کلنۍ ګټۀ دې ګټه ونه دوه برابره شي. پس د ګټې ښنه له p = 100% ټاکل کېږي داسې چې p/100 = 1 وي.

په یو کال د ډېرو د ګټې برخو سره، پانګه د ګټې-ګټې سره ډېر ځله په ګټه اچول کېږي.. دلته د ګټې پښه یا بېخ د ګټېبرخو باندې و وېشل شي.

د انګې په ګټه اچول د کال روسته د $p = 100\% \Rightarrow \frac{p}{100} = 1$ سره

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^1 = K_0(1+1)^1 = \underline{\underline{K_0 \cdot 2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پانګې ګټونه د یو کال وروسته په نیمکلنه ګټونه د $t\ \frac{p}{2\cdot 100}=\frac{1}{2}$ سره.

$$K_2=K_0\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=K_0\cdot 2,25$$

د پانګې ګټونه یا په ګټې اچونه له یو کال ورسته په میاشتنۍ ګټونه د $t\ \frac{p}{12\cdot 100}=\frac{1}{12}$ سره

$$K_{12}=K_0\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}=K_0\cdot 2,61\ldots$$

د پانګې په ګټې اچونه له یو کال ورسته په روځنۍ ګټونه د $\frac{p}{360\cdot 100}=\frac{1}{360}$ سره

$$K_{360}=K_0\left(1+\frac{1}{360}\right)^{360}=K_0\cdot 2,7145\ldots$$

د پانګې ګټونه یا په ګټې اچونه له یو کال ورسته په ساعته ګټونه د $\frac{p}{8640\cdot 100}=\frac{1}{8640}$ سره.

$$K_{8640}=K_0\left(1+\frac{1}{8640}\right)^{8640}=K_0\cdot \underbrace{2,7181\ldots}_{\approx e}$$

د پانګې ګټونه یا په ګټې اچونه له یو کال ورسته په nګټونه د $\frac{p}{n\cdot 100}=\frac{1}{n}$ سره.

$$K_n=K_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

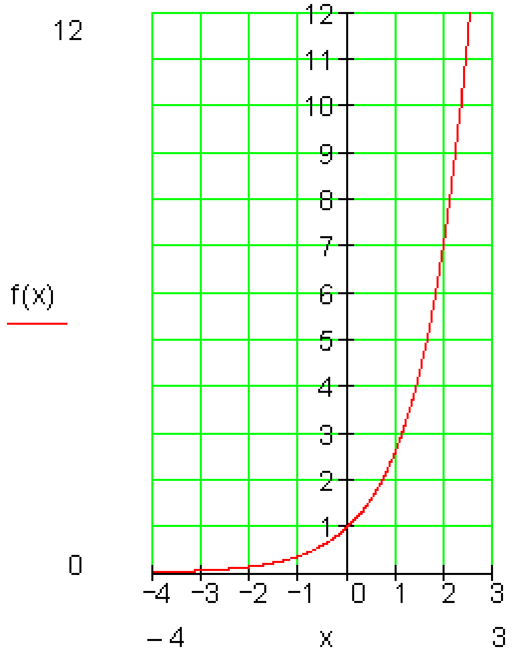
....

که په هره لحظه میاشتکې په ګټه واچول شي (یعنې په ناپای ډېرو ګټونو ناپای $n \to$) نو د یو کال وروسته لاندې پانګه لاس ته راوړي:

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} K_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot e$$

دا په دې معنا چې پانګه د e ضریب سره ډېرځله شوه،

د e- تابع $f(x) = e^x$ بنستسز خویونه



تابع ارزښت

$f(0) = 1$
$f(1) = e \approx 2{,}72$
$f(2) = e^2 \approx 7{,}39$
$f(-1) = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$
$f(-2) = \frac{1}{e^2} \approx 0{,}14$

پوله ارزښت

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\quad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$

$\ni x \in \mathbb{R}$ د $f(x) = e^x > 0$ f

لپاره

د e - تابع صفرځای نه لري، د انحراف ټکي نه لري او هم د انعطاف ټکي نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د e - تابع هندارونه یا معکوسونه، راکښنه او غزونه

په ورته توګه، لکه نورمال پارابولونه د مطلوبه عملیو سره نور پارابولونه منځ ته راځي، کیدی شي د e - توابعو د ګراف د راکښني، غزوني او هنداروني سره نور اکسپوننشل توابع وګټل یا لاس ته راوړل شي.

هندارونه یا معکوسونه:

د y -محور باندې منعکس شوې

$f_2(x) = e^{-x}$

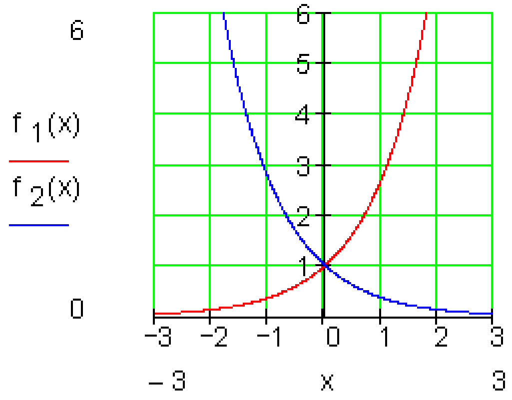
دy - محور سره غوڅټکی

$f_2(0) = e^{-0} = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0|1)$

ژی پوله ارزښت

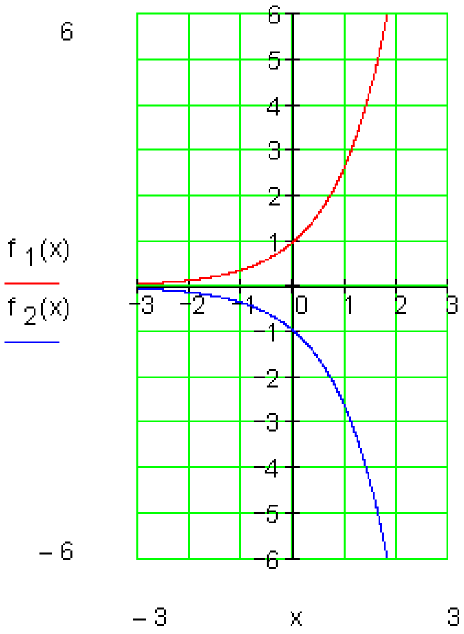
$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$

کوم صفرځایونه، انحرافي ټکي او ادعطافټکي نه شته



د x په محور هندارونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



$f_2(x) = -e^x$

د y– محور سره غوڅتکی

$f_2(0) = -e^0 = -1 \Rightarrow P_y(0|-1)$

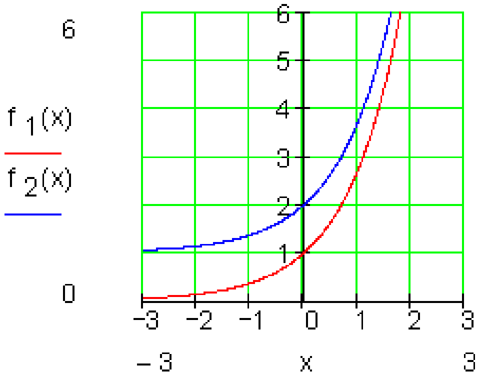
ژی یا د غاړې پوله ارزښت

$\lim_{x\to -\infty}(-e^x) = 0$

، $\lim_{x\to \infty}(-e^x) = -\infty$

کوم صفرځایونه، انحرافي ټکي او
د انعطافټکي نه شته

د **y** په لور راکښنه



په یوه واحد پورته لور ته راکښنه

$f_2(x) = e^x + 1$

د y - محور سره غوڅتکی

$f_2(0) = e^0 + 1 = 1+1 = 2 \Rightarrow P_y(0|2)$

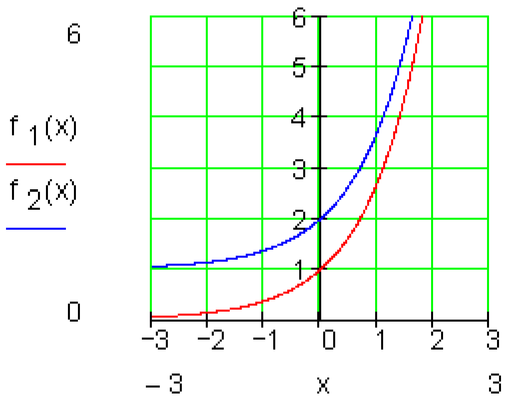
د ژی پوله ارزښت

$\lim_{x\to -\infty}(e^x + 1) = 1$ $\lim_{x\to \infty}(e^x + 1) = \infty$

کوم صفرځایونه، انحرافي ټکي او
ادعطافټکي نه شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه واحد پورته لور ته راکښنه



$f_2(x) = e^x + 1$

د y - محور سره غوڅټکی

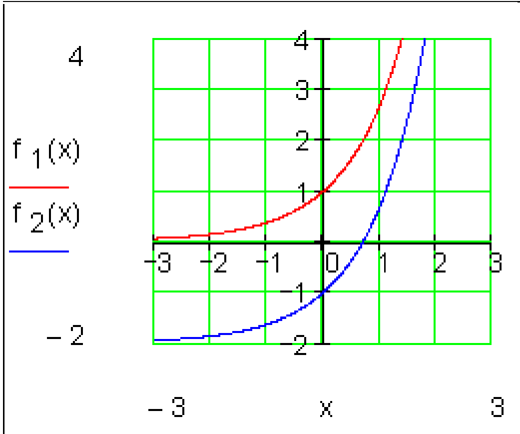
$f_2(0) = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow P_y(0|2)$

د ژی پوله ارزښت

$\lim_{x \to -\infty}(e^x + 1) = 1 \qquad \lim_{x \to \infty}(e^x + 1) = \infty$

کوم صفرځایونه، انحرافي ټکي او ادعطافټکي نه شته

په دوه واحده کښته لور ته راکښنه



$f_2(x) = e^x - 2$

د y – محور سره غوڅټکی

$f_2(0) = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1 \Rightarrow P_y(0|-1)$

ژی یا د غاړي ارزښت

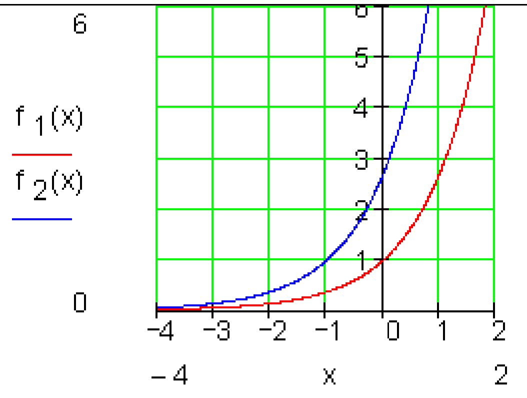
$\lim_{x \to -\infty}(e^x - 2) = -2 \qquad \lim_{x \to \infty}(e^x - 2) = \infty$

انحرافي او د انعطاف ټکي نه شته

صفرځا په انتروال [1 ; 0] کي.

د **x** محور باندې راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library



په یوه واحد کین لور ته راکښنه

$f_2(x) = e^{x+1}$

د - محور سره غوڅټکی

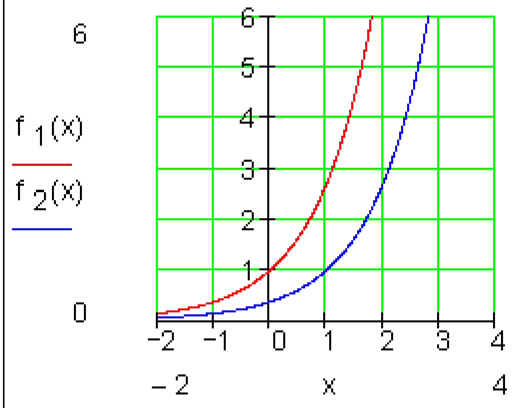
$f_2(0) = e^1 \approx 2{,}72 \Rightarrow P_y(0 | e \approx 2{,}72)$

ژی یا غاړې پوله ارزښت

$\lim_{x\to-\infty}(e^{x+1}) = 0 \qquad \lim_{x\to\infty}(e^{x+1}) = \infty$

صفرځایونه، انحرافي -او د انعطاف ټیش نه شته

په یوه واحد ښي لور ته راکښنه



$f_2(x) = e^{x-1}$

د y - محور سره غوڅټکی

$f_2(0) = e^{-1} \approx 0{,}37 \Rightarrow P_y(0 | e^{-1} \approx 0{,}37)$

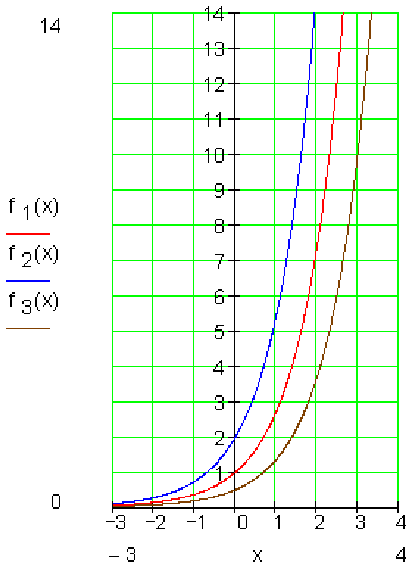
ژی پوله ارزښت

$\lim_{x\to-\infty}(e^{x-1}) = 0 \qquad \lim_{x\to\infty}(e^{x-1}) = \infty$

صفرځایونه، د انحراف ټکي او انعطافټکي نه شته

غزونه (کیښکودنه) د **y** په لور

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ضریب $k = 2$ سره غزونه

$$f_2(x) = 2 \cdot e^x$$

د **y** - محور سره غوڅونه

$$f_2(0) = 2 \cdot e^0 = 2 \Rightarrow P_y(0|\,2)$$

ژی پوله ارزښت

$$\lim_{x \to -\infty} \left(2 \cdot e^x\right) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \left(2 \cdot e^x\right) = \infty$$

د ضریب $k = \frac{1}{2}$ سره کیښکودنه

$$f_3(x) = \frac{1}{2} e^x$$

د **y** - محور سره غوڅتکی

$$f_3(0) = \frac{1}{2} \cdot e^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow P_y\left(0|\,\frac{1}{2}\right)$$

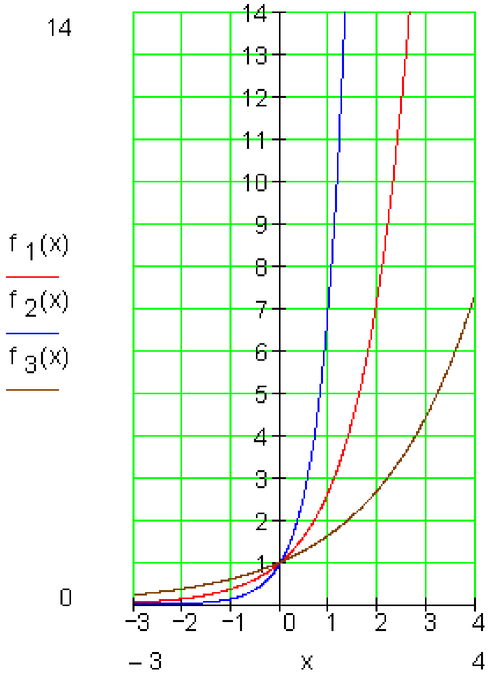
ژی پوله ارزښت

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^x\right) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^x\right) = \infty$$

صفرځایونه، انحرافتکي او انعطافتکي نه شته.

(c) ketabton.com: The Digital Library

غزونه (کینکودنه) د **x** په لور

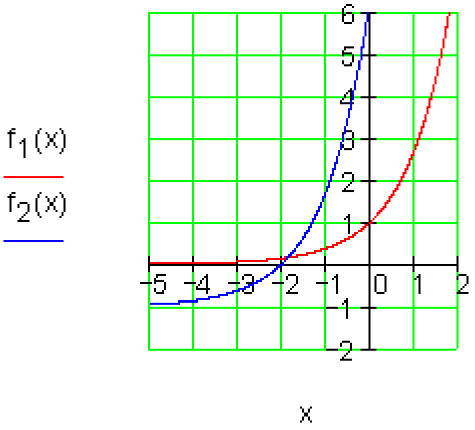
د ضریب $k=\frac{1}{2}$ سره غزونه $f_2(x)=e^{2\cdot x}$ د **y** - محور سره غوځونه $f_2(0)=e^0=1\Rightarrow P_y(0\mid 1)$ ژی پوله ارزښت $\lim_{x\to -\infty}\left(e^{2\cdot x}\right)=0 \qquad \lim_{x\to \infty}\left(e^{2\cdot x}\right)=\infty$ د ضریب 2 سره راکښنه $f_3(x)=e^{\frac{1}{2}x}$ د **y** - محور سره غوځتکی $f_3(0)=e^0=1\Rightarrow P_y(0\mid 1)$ ژی پوله ارزښت $\lim_{x\to -\infty}\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)=0 \qquad \lim_{x\to \infty}\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)=\infty$ صفرځایونه، انحراف ارزښتونه او انعطافتکي نه شته.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د e تابعو هندارونه، راکښنه او غزونه په خوښه یو له بل سره کمبینیر یا نښلول کېدي یعني شمېرنئزې عملیې په اجرا کېدی شي .

د **x** - او **y** – محورونو راکښنه:

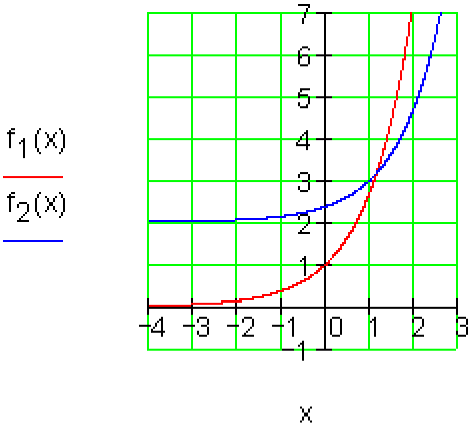
$f_1(x) := e^x \qquad f_2(x) := e^{x+2} - 1$



$f_2(x)$ له $f_1(x)$ منځ ته راغلی د x په محور د راکښنې له لارې په دوه واحدونو کين لور ته.

د y -محور باندې په یوه واحد د کښته لور ته .

$f_1(x) := e^x \qquad f_2(x) := e^{x-1} + 2$



تمرینونه:

د e - تابع گرآف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنستیزې تابع e^x راکښنه، هندارونه یاانعکاس ، او بڼه بدلون وښایاست.

هر تابع ګراف او د بنستیز تابع ګراف په یوه مناسب وضعیه قیمتسیستمکي و کاږی او د محور سره يي غوڅېکی(د تقاطع نقطه) .

د ګراف په مرسته ولولی:

پوله ارزښت یا حد (لیمیت) ، صفرځایونه که شته وي او د انعطاف ټکي.

یادونه: فقط په انتروآل [10 ; 10-] کي تآبع آرزښتونه په پآم کي ونیسی.

Für= د لپاره

اول - $f(x)=e^x\,;\,g(x)=e^{-x}$ für $[-4;4]$ دویم - $f(x)=-e^x$ für $[-5;3]$

دریم - $f(x)=e^{\frac{1}{3}x}$ für $[-4;4]$ خلورم - $f(x)=2e^{\frac{1}{2}x}$ für $[-4;4]$

پنځم - $f(x)=\frac{1}{2}e^{x+3}$ für $[-5;3]$ شپږم - $f(x)=e^{x-2}-3$ für $[-4;4]$

اوم - $f(x)=e^{-(x+2)}-1$ für $[-5;3]$

اتم - $f(x)=2\cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)}-2$ für $[-2;6]$

نهم - $f(x)=-10e^{-\frac{1}{2}(x+4)}+3$ für $[-4;4]$

لسم - $f(x)=(x-2)e^{\frac{1}{4}x}$ für $[-10;5]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نتيجې:

د اکسپوننشل تابع تمرينونه

مفصل حل

لومړی - مفصل حل

$f(x)=e^{x}$ بنستيزه تابع

$f(0)=e^{0}=1 \Rightarrow P_y(0|1)$

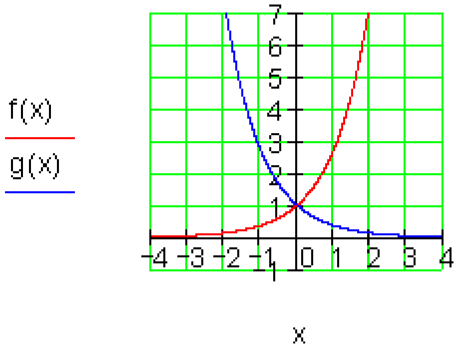
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

$f(x)=e^{-x}$ په y په هنداره شوې

$f(0)=e^{-0}=1 \Rightarrow P_y(0|1)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=0$

$f(x) := e^{x}$ $g(x) := e^{-x}$



دويم - مفصل حل

$f(x)=-e^{x}$ له د -محور سره غوځتکي

لاس ته راځي که په x - محور هنداره شي.

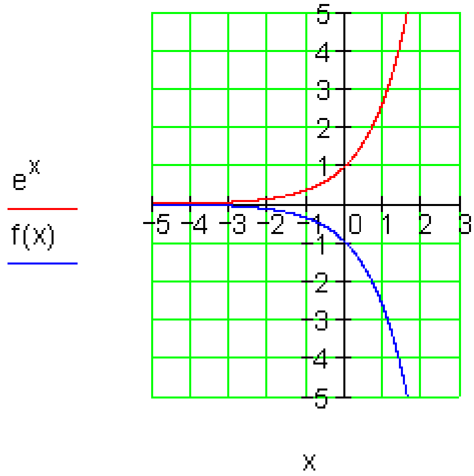
$f(0)=-e^{0}=-1 \Rightarrow P_y(0|-1)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

صفرځايونه: نه شته

انحرافي ارزښتونه: نه شته

انعطافتکي : نه شته



(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم – مفصل حل

$f(x) = e^{\frac{1}{3}x}$ له e^x دغزوني له لارې د x په لور د ضريب 3 سره لاس ته راځي

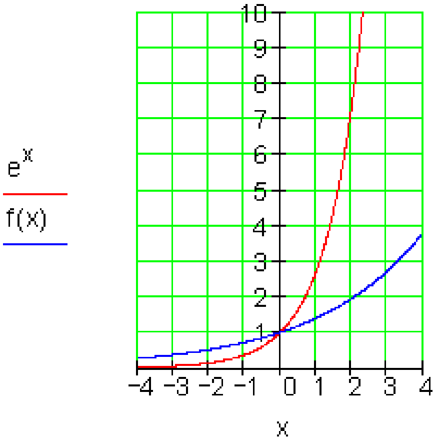
$$f(0) = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0|1)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0;\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

صفرځايونه نه شته

د انحرافي ارزښتونه: شته

انعطافټکي : نه شته

$$f(x) := e^{\frac{1}{3}\cdot x}$$



ځلورم – مفصل حل

$f(x) = 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ له e^x منځ ته راځي د x په لور د ضريب 2 سره د غزوني له لارې د y په محور د غزوني له لارې د ضريب 2 سره.

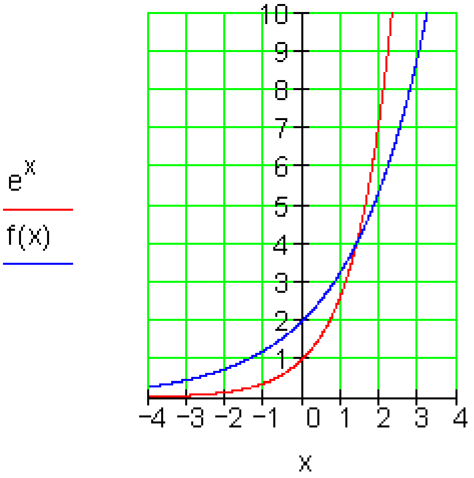
$$f(0) = 2\cdot e^0 = 2 \Rightarrow P_y(0|2)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0;\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

صفرځايونه نه شته ه

انحرافي ارزښتونه: نه شته

انعطافټکي: شته

$$f(x) := 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم – $f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{x+3}$ له e^x لاس ته راځي د x په منفي لور د راکښنې له لارې په 3 کچواحده، د کېنسکودلو له لارې د y په لور ر باندې د ضریب 1/2 سره

$$f(0)=\frac{1}{2}\cdot e^3\approx 10$$

$$\Rightarrow P_y\left(0\left|\frac{1}{2}\cdot e^3\approx 10\right.\right)$$

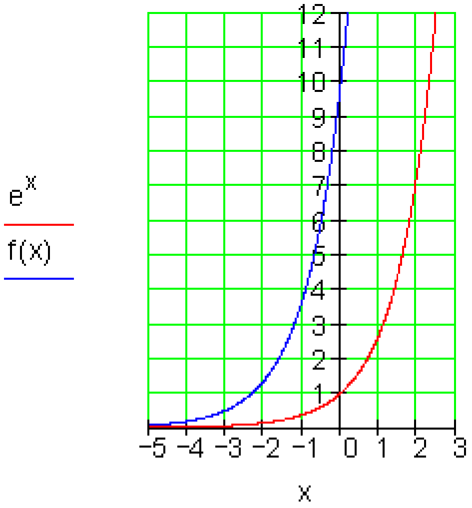
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

صفرځایونه: نه شته

افراطي ارزښتونه: شته

انعطافټکي: شته

$$f(x):=\frac{1}{2}\cdot e^{x+3}$$



شپږم – $f(x)=e^{x-2}-3$ له e^x منځ ته راځي د منفي y لور باندې په 3 دسطحي واحده، د x په مثبته لور د راکښنې له لارې په 2 سطحي واحده.

$$f(0)=e^{-2}-3\approx -2{,}86$$

$$\Rightarrow P_y\left(0\,|\,e^{-2}-3\approx -2{,}86\right)$$

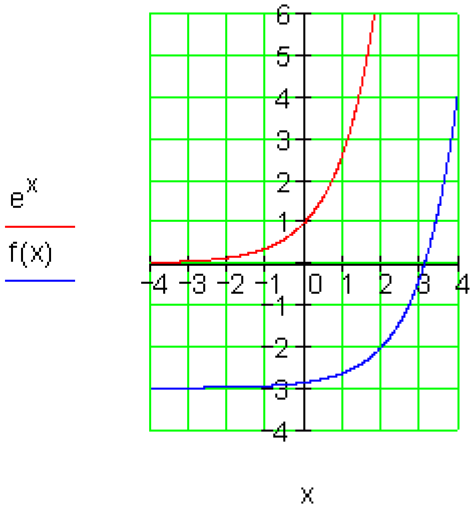
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-3;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

صفرځایونه: په x~3,2

انحرافي ارزښتونه : نه شته

انعطافټکي: نه شته

$$f(x):=e^{x-2}-3$$



اوم – مفصل حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = e^{-(x+2)} - 1$ له e^x منځ ته راځي د y په محور د هندارونې له لارې، د y په منفي لور په یو سطحي واخد. دx په منفي لور په 2 سطحي واحده غزول.

$$f(0) = e^{-2} - 1 \approx -0{,}86$$

$$\Rightarrow P_y\left(0 \mid e^{-2} - 1 \approx -0{,}86\right)$$

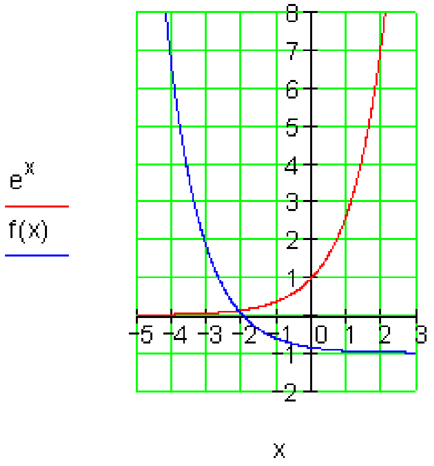
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty;\ \lim_{x\to\infty} f(x) = -1$$

صفرځایونه : په x ~-1,8 کې

انحرافي ارزښتونه: نه شته

انعطافټکي: نه شته

$f(x) := e^{-(x+2)} - 1$



اتم – $f(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)} - 2$

له e^x منځ ته راځي د y په محور د هندارونې له لارې د y په منفي لور راکښل په 2 واحده. دx په مثبت لور په 1 سطحي واحد راکښل. د y په مثبته لور په 2 واحده غزوني. د x په لور د2 واحده سره

$$f(0) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}} - 2 \approx 1{,}3$$

$$\Rightarrow P_y\left(0 \mid 2 \cdot e^{\frac{1}{2}} - 2 \approx 1{,}3\right)$$

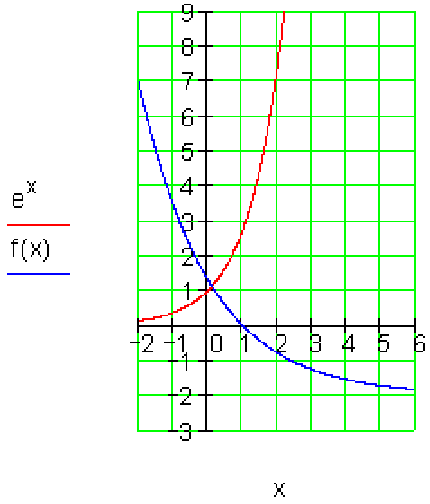
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty;\ \lim_{x\to\infty} f(x) = -2$$

صفرځایونه : په x~1,2 کې

انحرافي ارزښتونه : شته

انعطافټکي: نه شته

$f(x) := 2 \cdot e^{\frac{-1}{2} \cdot (x-1)} - 2$



(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم – $f(x) = -10e^{-\frac{1}{2}(x+4)} + 3$ له e^x منځ ته راځي دy په ممحور هنداروني له ارې د x په محور هنداروني ، د y په مثبته لور په 3 سطحي واحده را کښنه د x په منفي لور په 4 سطحي واحده راکښنه د y په لور غزونه د 10 ضريب سره. د x په لور غزوني د 2 ضريب سره.

$$f(0) = -10e^{-2} + 3 \approx 1{,}65$$

$$\Rightarrow P_y\left(0 \,|\, -10e^{-2} + 3 \approx 1{,}65\right)$$

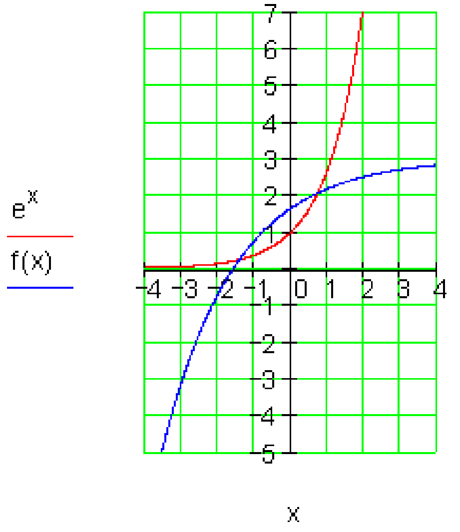
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \,;\, \lim_{x\to\infty} f(x) = 3$$

صفرځايونه: په x~-1,6 کې.

انحرافي ارزښتونه: نه شته

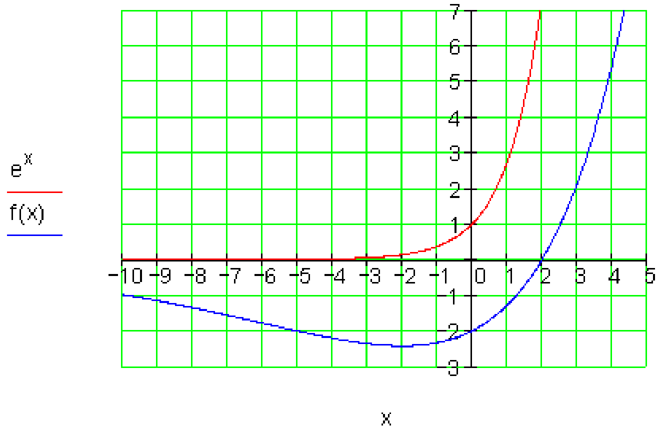
انعطافټکي: نه شته

$$f(x) := -10 \cdot e^{\frac{-1}{2}\cdot(x+4)} +$$



لسم – مفصل حل

$$f(x) := (x-2)\cdot e^{\frac{1}{4}\cdot x}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښيز مساوات u(x) = x - 2 د e- تابع $v(x)=e^{\frac{1}{4}x}$ سره نښلول کيږي. له دې دا

تابع لاس ته راځي: $f(x)=u(x)\cdot v(x)=(x-2)\,e^{\frac{1}{4}x}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

په x = 2 کې صفرځای په x~-2 کې د انحراف ارزښت په 6- ~ x کې د انعطاف ټکی.

د اکسپوننشل توابعو کارونه یا استعمال

د تآبع مسآوآتو جوړونه

په طبيعت کې يې څيرنه:

د اکپوننشل توابعو مشتق

د تابع مساواتو جوړښت

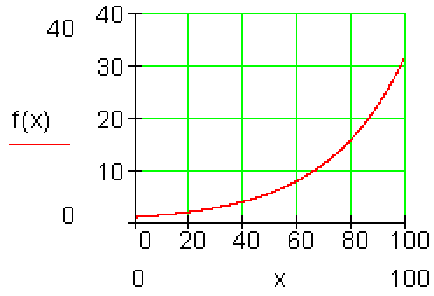
کولي باکتريا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوټې ويش (حجره وېش) له لارې زياتيږي. و مساعدو شرايطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقيقو کې ځان تجزيه کوي. د غه عمليې لپاره يو ارزښت جدول : او ګراف يې کاږو. دلته د x اووښتوني (متغيره) په دقيقو د وخت لپاره ده.

د y متحوله د باکتريا ګانو د تعداد لپاره ده.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته جدول کې : x = دقیقې y = د بکتریاو تعداد



اوس مو دنده داده تابعیزې (د تابعو-) اړیکې د f(x) د یوه مساوات په بڼه وټاکو.

هرې ۲۰ دقیقې د بکتریاو تعداد یا ګڼون دوه برابره کیږي، دا په دې معنا چې دا د ۲۰ دقیقو وروسته نتیجه د دوه سره ضرب شي

لاندې ږدو یا لیکو: $f(x) = 2^{x}$

دلته f(x) د بکتریاو تعداد دی او x د دقیقو تعداد.

د دې تابع مساوات سره د بکتریاو تعداد هره دقیقه دوه برابره کوي.

د بام اوفکر وروسته موږ د تابع مساوات لاندې نتیجې ته رسیږو، چې دا شي حالت ټیک روښانه کوي یا تشریح کوي:

$$f(x) = 2^{\frac{1}{20}x}$$

Probe: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 2^0 = 1$; $x = 20 \Rightarrow f(20) = 2^1 = 2$; $x = 40 \Rightarrow f(40) = 2^2 = 4$

ډېروالی، لکه چې دلته مو راووړ ، د اکسپوننشل ودې یا - زیاتوالي په نامه نوموو. یوه تابع چې داسې یوه تلنه تشریح کوي، اکسپوننشل تابع بولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینیزې پوښتنې

د اکسپوننشل تابع د تابع مساوات د لاندې شرایطو سره باید څنګه وبرېښي:

الف – د باکتریو تعداد (ګڼون) هر پځلس دقیقې دوه براپره کیږي.

ب – هر دېرش دقیقي د پاکتریو تعداد درې برابره کئږي.

پ - مورږ په مطالعه یا کتلو پیل کوو، چې $n_0 = 1000\,000\,000$ د باکتریو تعداد شته یا موجود وي او تعداد يې هر پنځه څلوېښت دقیقې پنځه برابره کیږي.

ت - د کتلو پیل سره $n_0 = 1000\,000\,000$ باکتریې شته دي او هرې 45 min دقیقې د باکتریو تعداد د $e = 2{,}718$ په ضریب یا څلووني زیاتیږي.

هر لس دقیقې د n_0 تعداد نیمیږي.

حل :

الف $f(x) = 2^{\frac{1}{15}x}$ ب - $f(x) = 3^{\frac{1}{30}x}$

پ_ $f(x) = 1000\,000\,000 \cdot 5^{\frac{1}{45}x} = 1 \cdot 10^9 \cdot 5^{\frac{1}{45}x}$ ت -

$f(x) = 100\,000 \cdot e^{\frac{1}{45}x} = 1 \cdot 10^5 \cdot e^{\frac{1}{45}x}$ mit $e = 2{,}718$

ټ – تعداد يې = منفي دېرېدنه $f(x) = n_0 \cdot 2^{-\frac{1}{10}x}$ ٦

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام : توابع چې د زیاتیدو پروسې ښیېي، اکسپوننشل توابع بلل کیږي. تولیز تابع مساوات یې دي:

د $f(x) = n_0 \cdot a^{k \cdot x}$ ر

n_0 = Anzahl zur Zeit $t = 0$; $a \in \mathbb{R}^+$; $k, x \in \mathbb{R}$ ، 0 = په وخت t د تعداد =n0

سره د وخت

اکسپوننشل ډېرېدنه یا اکسپوننشل کیدنه د ژوند په زیاتو ورشو ګانو کې کتل کیدای شي:

په بیالوژي کې (د باکتریو ډېرېدنه او کمیدنه)

په اوکولوګي کې (د حیواناتو ډېرېدنه یا زېږنده)

په اقتصاد کې (د ربح له لارې د پانګې زیاتیدنه)

په فزیکي او تخنیکي مسائلو کې (د رادیو اکتیو موادو تجزیه)

په روغتیا کې (د دوا اغیزه)

د **e** - تابع ته ځانګړې بیلګې

اکسپوننشل وده کونه

د باکتریا شتون د یوه **e** -تابع وروسته زیاتیږي.

د $n_0 = 2000$ باکتریاګاني شتون په ۴ ساعتونو کې په کوم ارزښت زیاتیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له څومره ساعته وروسته دا باکرتیاوې $f(x) = n_0 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} \cdot t}$ د پیل ارزښت= n_0 ،
وخت په ساعت= t سره 10 000 ته جګیږي؟

د تابع ګراف څنګه بریشي؟

د باکتریاو تعداد له څلور ساعته وروسته:

$$f(x) = n_0 \cdot e^{k \cdot x} \Rightarrow f(4) = 2000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} \cdot 4} = \underline{\underline{2600}}$$

له څو ساعته وروسته دا باکتریا وې 10 000 دي؟

ا ېښوونه: $f(x) = 2\,000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} t} = 10\,000$

د دې لپاره چې جګ عدد یا ګڼt وټاکلی شو، نو باید اکسپوننشل مساوات
$2\,000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} t} = 10\,000$ حل کړو.

دا د لوګاریتم سره کیدی شي. د دې لپاره باید لاندې د لوګاریتم قوانین وکارول شي:
$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ او $\ln e^x = x$.

د اکسپوننشل مساوات حل:

$$\ln\left(2\,000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} t}\right) = \ln 10\,000$$

$$\Leftrightarrow \ln 2\,000 + \frac{17\,221}{262\,551} \cdot t = \ln 10\,000 \mid -\ln 2\,000$$

$$\Leftrightarrow \frac{17\,221}{262\,551} \cdot t = (\ln 10\,000 - \ln 2\,000) \mid \cdot \frac{262\,551}{17\,221}$$

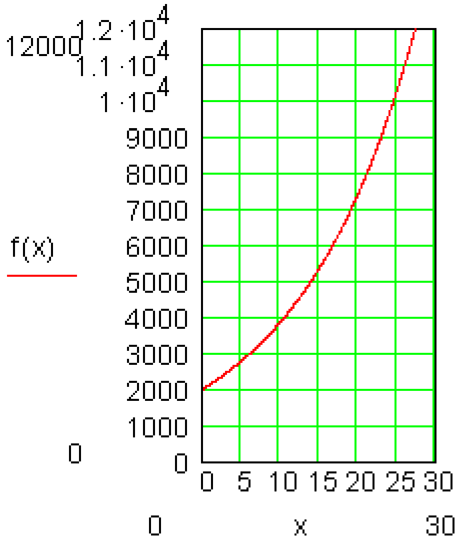
$$\Leftrightarrow t \approx 24{,}54$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

د نږدې 24,5 ساعته وروسته

10000 باکتریاوې دي



اکسپوننشل کمیدنه یا کمښت

رادیو اکتیو مواد په برابر وخت کې تل په همغه ضریب تجزیه کېږي.

د هغو نیم ارزښت وخت ښخه لرو، چې له نیم وخت وروسته څومره فعالیت شتون لري.
فعالیت A(x) په مګاپیککورل (تجزیه په ثانیه کې Megabecquerel (1 MBq = 10^6 Zerfälle pro Sekunde) کچ یا اندازه کېږي.

د طبي معاینو لپاره یود Jod 131 د 1 نیم ارزښت وخت (t_h) 8 روځې کارول کېږي.

ناروغ ته A_0 = 4000 MBq ورکول کېږي.

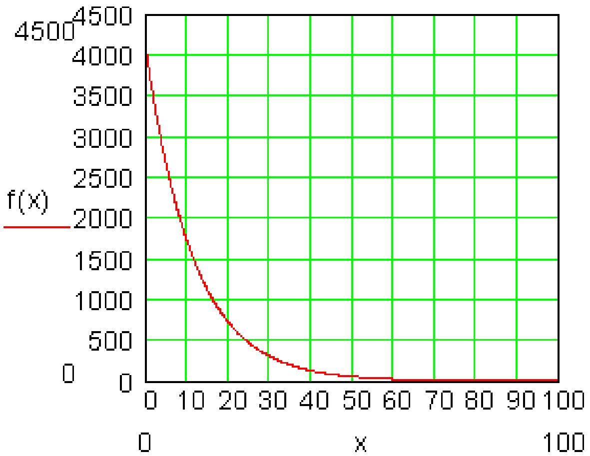
(c) ketabton.com: The Digital Library

د ....

څومره نیم ارزښتوخت یا همداسې روځو وروسته په بدن کې د پاتې فعالیت ماکسیمال
تردې وخته 400 MBq دی؟

ګراف رسم کړی ، تقریبي وخت ولولی او ټیک ارزښت یې وشمېری.

د رادیو اکتیو تجزیې قانون: $A(x) = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{t_h} \cdot t}$ دلته په معنا دی: پیلفعالیت په
MBq نیمارزښت وخت = t_h په روځو، t =وخت په روځو.

د تابع مساوات:	
$A(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{t_h} \cdot t}$ $= 4000 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{8} \cdot t}$ حل $A(t) = 4000 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{8} \cdot t} = 400$ $\Leftrightarrow \ln\left(4000 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{8} \cdot t}\right) = \ln 400$ $\Leftrightarrow \ln 4000 - \frac{\ln 2}{8} \cdot t = \ln 400$ $\Leftrightarrow t = \frac{8}{\ln 2}(\ln 4000 - \ln 400)$ $\Leftrightarrow t = \frac{8}{\ln 2} \cdot \ln 10 \approx \underline{\underline{26,575}}$	

د 27 روځو وروسته، نږدې له 3 نیمارزښت وخت وروسته کمښت په بدن کې
نږدې400 MBq دی.

د عدد e ، طبیعي لوګاریتم او د e - تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

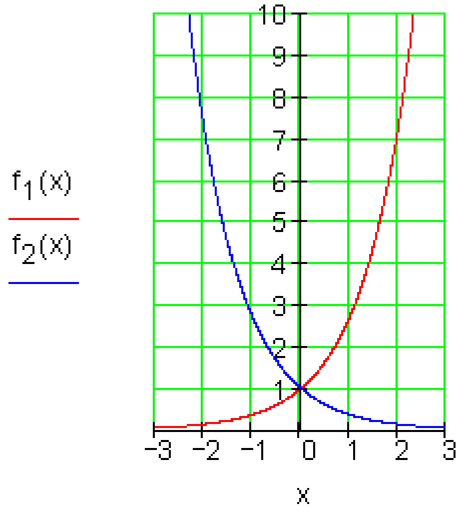
$e = 2{,}718\,281\,828\ldots$ $e^{x} = b \Leftrightarrow x = \ln b$

$e^{\ln b} = b$ z.B. $e^{\ln(x-1)} = x - 1$

$\ln e^{x} = x$ z.B. $\ln e^{-\frac{1}{k}\cdot x} = -\frac{1}{k}\cdot x$

$\ln 1 = 0$ $\ln e = 1$

<table>
<tr>
<td>
$f_1(x) := e^{x}$ $f_2(x) := e^{-}$



</td>
<td>
گراف له II د I په لور ځغلي.

که اکسپوننت زاتیز یامثرت وي، نو گراف همغږیز جگیدونکی دی.

که اکسپوننت کیمز یا منفي وي، ن و گراف همریز لریری یا ټیټیږي.

صفرځای نه شته.

د لوی x - ارزښت لپاره گراف تل د x - محور ته نږدې کیږي.

ټول گرافونه له ټکي P (0 | 1) تیریږي.
</td>
</tr>
</table>

هر اکسپوننشل تابع یا بلواک د e -تابع له لارې کښل کیدی شي.

Mit $f(x) = a^{x}$ und $a = e^{\ln a}$ gilt:

$$f(x) = a^{x} = \left(e^{\ln a}\right)^{x} = e^{(\ln a)\cdot x} = e^{x\cdot \ln a}$$

له دې بنسته به په لاندې برخه کې داکسپوننشل تابع فقط د e –تابع تر ځیرنې لاندې ونیل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: محور غوښتکي او اکسپوننشل مساوات

پیلبیلګې

بیلګه ۱

د لاندې تابع غوښتکي یا نقاط تقاطع باید وټاکل شي:

$$f(x)=-\frac{3}{4}\cdot e^{-\frac{1}{2}(x+4)}$$

د y-محور سره غوښتکی د لاندې اینوونې له لارې پیدا کیدی شي:

$$y_s=f(0)$$

$$f(0)=-\frac{3}{4}\cdot e^{-\frac{1}{2}(0+4)}=-\frac{3}{4}\cdot e^{-2}\approx-0{,}102\Rightarrow \underline{P_y\left(0\,\middle|\,-\frac{3}{4}\cdot e^{-2}\approx-0{,}102\right)}$$

د x- محور سره غوښتکی دلاندې اینوونې څخه لاس ته راځي:

$$f(x)=0\Leftrightarrow-\frac{3}{4}\cdot e^{-\frac{1}{2}(x+4)}=0$$

له دې لاس ته راځي چې غوښتکي نه شته، ځکه چې $e^{-\frac{1}{2}(x+4)}\neq 0$ دی د ټول $x\in\mathbb{R}$ لپاره.

د x -محور سره غوښتکي د f (x) د صفرځایونو له لارې پیدا کیږي. تابع f (x) صفرځای نه لري، ځکه چې دا د x په لور غزېدل او د x په لور راکښلي e – تابع دی. دا برسیره پرته له دې د y -محور او x -محور باندې هنداره یا منعکس شوی دی،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل تابع بڼه $f(x) = a \cdot e^{u(x)}$ د $a \in \mathbb{R}$ سره د y -محور سره فقط یو غوڅتکی لري مګر کوم صفرځای نه لري. ځکه $e^{u(x)} \neq 0$ د ټول $x \in \mathbb{R}$ لپاره.

بیلګه ۲ :

د لاندې تابع غوڅتکي غواړو پیدا کړو

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x+1} - 2 \cdot e^{x+1}$$

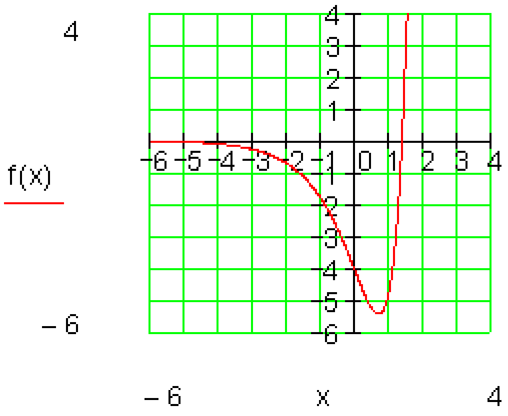
د y -محور سره غوڅتکی: $y_s = f(0)$

$$y_s = f(0) = \frac{1}{2} \cdot e^1 - 2 \cdot e^1 = -\frac{3}{2} \cdot e \approx -4{,}08 \Rightarrow P_y\left(0 \mid -\frac{3}{2} \cdot e \approx -4{,}08\right)$$

د دې لپاره چې د x –محور سره غوڅتکي وټاکلی شو، دا کار ستر دی. د دې لپاره د f (x) صفرځایونه باید وټاکل شي.

د د ی لپاره چي د x -محور سره غوڅتکی، یعنې د اکسپوننشل تابع صفرځای وټاکو، دا په ډیرو حالتونو کي غوښتونی دی، چي اکسپوننشل تابع حل کړو. د دې معلومو عملیو د پاسه یا پرته، کوم چي د مساوات د حل لپاره کارول کیږي، د اکسپوننشل مساوات د حل لپاره اړین دی، چي د توان- او لوګاریتم قونین راته جوت وي.	$f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x+1} - 2 \cdot e^{x+1}$ د x محور سره غوڅتکی: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2} \cdot e^{2x+1} - 2 \cdot e^{x+1} = 0}_{\text{Exponentialgleichung}}$ اکسپوننشل مساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\frac{1}{2}\cdot e^{2x+1} - 2\cdot e^{x+1} = 0 \,|\, + 2\cdot e^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot e^{2x+1} = 2\cdot e^{x+1} \,|\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow e^{2x+1} = 4\cdot e^{x+1} \,|: e^{x+1}$$

$\Leftrightarrow \frac{e^{2x+1}}{e^{x+1}} = 4 \,|$ توانقانون

اکسپوننت ساده کونه

$\Leftrightarrow e^{2x+1-(x+1)} = 4 \,|$

$\ln(\;)$ $\Leftrightarrow e^{x} = 4 \,|$ لوګاريتمونه

$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}\right) = \ln(4) \,|$ د لوګاريتم قانون

$$\Leftrightarrow x\cdot \underbrace{\ln(e)}_{1} = \ln(4)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(4) \approx 1{,}39 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{x}\left(\ln(4) \approx 1{,}39 \,|\, 0\right)$$

د توان – او لوګاريتم قوانين

د توان – او لوګاريتم غوره قوانين سره رايوځای کړي.

توانقوانين:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

د لوګاريتم تعريف:

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b)$	$e^x = b \Leftrightarrow x = \ln(b)$	$10^x = b \Leftrightarrow x = \lg(b)$

د لوګاريتم قوانين د e په بنسټ

$\ln(b \cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$	$\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c)$	$a = e^{\ln(a)}$	$e^0 = 1$
$\ln(b^c) = c \cdot \ln(b)$	$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a}$	$\ln(1) = 0$	$\ln(e) = 1$

تمرينونه:

د توان او لوګاريتم قوانينو استعمال.

د لاندې توان او لوګاريتمي ترمونو د توان او لوکاريتمي قوانينو په استعمال سره بنه بدله کړی.

اول – $\left(e^x + e^{-x}\right)^2$ دويم - $\left(e^x - e^{-x} + 5\right) \cdot e^x$

دريم - $\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}$ خلورم - $e^{-x} \cdot e^{-x+2} \cdot e^{2x-3}$

پنځم - $\frac{1}{e^{2x}} + 3\left(e^{-x}\right)^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2$ شپږم - $e^{\ln(2k)} - 2k \cdot e^{\ln(2)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- اوم $\ln\left(e^2\right)-3\ln\left(\frac{e}{2}\right)$ - اتم $\ln\left(2e^2\right)+\ln\left(\frac{e}{2}\right)$

- نهم $e^{\ln(k)+1}$ - لسم $\frac{2}{3}e^{-\ln\left(\frac{3}{4}k\right)}$

د اکسپوننشل مساوات لپاره د حل لارې

د اکسپوننشل مساوات له لارې حل

یو اکسپوننشل مساوات دی، د لاندې بېه بدلون له مخې

چې د اکسپوننشل مقاېسې سره حل کیدی شي.

یو حل د اکسپوننشل مقاېسې له مخې فقط هلته ممکن دی، که وکړای شو، د مساوات دواړه خواو ته ترمونه په داسې بېه ولیکلای شو، چې د برابر بنسټ سره توانونه لاس ته راوړو. متآسفانه چې دا تل شوونې نه دي لکه لاندې بیلګه به چې وښایي:

د اکسپوننشلمساوات لپاره د حل لارې

د اکسپوننشل پرتله کونې له لارې حل

$$e^{2x+4}-e^{x-1}=0$$

اکسپوننشل مساوات دی، چې له لاندې بېه بدلون

$$e^{2x+4}=e^{x-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې د اکسپوننش پرتله کونې سره حل کيدی شي.

$$e^{2x+4} = e^{x-1} \Leftrightarrow 2x+4 = x-1 \Leftrightarrow 2x+4 = x-1 \Rightarrow \underline{x=-5}$$

ازماېښت:

$$e^{-10+4} - e^{-5-1} = e^{-6} - e^{-6} = 0$$

د اکسپوننشل له لارې حل فقط هلته شونی دی، چې که وکړای شو، چې پهدواړولورو ترم داسي بڼه بدل کړو، چې د برابر بنسټ سره توانونه لاس ته راوړو. دا متآسفانه تل شوني نه دي، لکه چې لاندې بيلګه يې په ګوته کوي:

د لوګاريتموس سره حل

$$\frac{1}{2e^x} - 3 = 0 \mid +3 \Leftrightarrow \frac{1}{2e^x} = 3 \mid \cdot 2e^x \Leftrightarrow 1 = 6 \cdot e^x \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{6}$$

دلته اکپوننشله مقايسه شووني نه ده.

دا د لوګاريتم نيولو له لارې کېدی شي:

$$\ln(e^x) = \ln\left(\frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow x \cdot \underbrace{\ln(e)}_{1} = \underbrace{\ln(1)}_{0} - \ln(6) \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -\ln(6)}}$$

دا په لوګاريتم نيولو سره پيل په زياتو حالتونو کې برياو ته بيايې. مګر يا اګر چې اکسپوننشلمساوات، په کومو کې چې جمعه يا تفريق منځ ته راشي، نه شي کېدی لوګاريت يې ونيول شي. دلته هڅه کېدی شي، دا د بدلون (د ځاي نيوونکي واريابلې اينوونه) له لارې حل کړو.

د بدلون(په ځای د بلې متحولې اينول) له لآر حل

$$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$$ بدلون: $e^x = u \text{ und } e^{2x} = u^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow u^2 - 5u + 4 = 0$$

مربع مساوات دی د $u_1 = 1; u_2 = 4$ حل سره

په ځټ بدلون او د لوګاریتم نیولو له لارې حل.

$$u_1 = e^{x_1} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = \ln(1) = 0}}$$
$$u_2 = e^{x_2} = 4 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = \ln(4)}}$$

اکسپوننشل مساوات ته مفصلې بېلګې

بیلګه ۱:

$2e^{3x} - 6e^{x} = 0 \mid +6e^{x}$ $\Leftrightarrow 2e^{3x} = 6e^{x} \mid :2$ د لوګاریتم نیولو له لار حل $\Leftrightarrow e^{3x} = 3e^{x} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln(e^{3x}) = \ln(3\cdot e^{x})$ $\Leftrightarrow 3x\cdot\ln(e) = \ln(3) + \ln(e^{x})$ $\Leftrightarrow 3x\cdot\ln(e) = \ln(3) + x\cdot\ln(e)$ $\Leftrightarrow 3x = \ln(3) + x \mid -x$ $\Leftrightarrow 2x = \ln(3) \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{2}\ln(3)}}$	ازماییښت $2e^{3\cdot\frac{1}{2}\ln(3)} - 6e^{\frac{1}{2}\ln(3)} = 0$ $\Leftrightarrow 2e^{\frac{3}{2}\ln(3)} - 6e^{\frac{1}{2}\ln(3)} = 0$ $\Leftrightarrow 2\left(e^{\ln(3)}\right)^{\frac{3}{2}} - 6\left(e^{\ln(3)}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow 2\cdot 3^{\frac{3}{2}} - 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow 2\cdot 3\cdot 3^{\frac{1}{2}} - 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} - 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0\ (w)$

بیلګه ۲:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	ازمايينت
$x \cdot e^x - 3x = 0$ $\Leftrightarrow x\left(e^x - 3\right) = 0$ $\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$ und $e^x - 3 = 0 \mid +3$ د لوګاريم له لارې حل $\Leftrightarrow e^x = 3 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) = \ln(3)$ $\Leftrightarrow x \cdot \ln(e) = \ln(3)$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = \ln(3)}}$	$x_1 = 0$ $0 \cdot e^0 - 3 \cdot 0 = 0$ $\Leftrightarrow 0 \cdot 1 = 3 \cdot 0 = 0$ $\Leftrightarrow 0 = 0\ (w)$ $x_2 = \ln(3)$ $\ln(3) \cdot e^{\ln(3)} - 3 \cdot \ln(3) = 0$ $\Leftrightarrow \ln(3) \cdot 3 - 3 \cdot \ln(3) = 0$ $\Leftrightarrow 3 \cdot \ln(3) - 3 \cdot \ln(3) = 0\ (w)$

بیلګه ۳:

؟ $e^{2x} - \frac{17}{2}e^x + 4 = 0$ بدلون $: u = e^x \Rightarrow u^2 - \frac{17}{2}u + 4 = 0$

په څټ بدلون

د مربع مساوات حل

$$p = -\frac{17}{2};\ q = 4;$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{289}{16} - \frac{64}{16} = \frac{225}{16} \Rightarrow \sqrt{D} = \frac{15}{4}$$

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$u_1 = \frac{17}{4} + \frac{15}{4} = \frac{32}{4} = 8$$

$$u_2 = \frac{17}{4} - \frac{15}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$u_1 = 8 \Leftrightarrow e^x = 8 \mid \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) = \ln(8)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = \ln(8)}}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \mid \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \ln(e) = \ln(1) - \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = -\ln(2)}}$$

بیلګه ۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{2}{1+e^x} = -2\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2} \,|\, :2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+e^x} = -\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1\cdot\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^x\right)\left(1+e^x\right)} = -\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^2} = -\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2} \,|\cdot\left(1+e^x\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 1+e^x = -\left(e^x-4\right) \quad \Leftrightarrow \quad 1+e^x = -e^x+4 \,|\, +e^x-1$$

$$\Leftrightarrow 2e^x = 3 \,|\, \ln(\ ) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(2\cdot e^x\right) = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2)+\ln\left(e^x\right) = \ln(3) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2)+x\cdot\ln(e) = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2)+x = \ln(3) \,|\, -\ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(3)-\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

بیلګه ۵:

$$e^{2x+4} - 3e^{x+2} + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2\cdot(x+2)} - 3e^{x+2} + 2 = 0$$

Substitution: $u = e^{x+2} \Rightarrow u^2 - 3u + 2 = 0$

د مربع مساوات حل پـه ختـ بدلون

$u_1 = 2 \Leftrightarrow e^{x+2} = 2 \,|\, \ln(\ )$	$p = -3\,;\ q = 2\,;$
$\Leftrightarrow (x+2)\ln(e) = \ln(2)$	$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4} - \frac{8}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow x+2 = \ln(2) \,|\, -2$	$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$
$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -2+\ln(2)}}$	$u_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$
$u_2 = 1 \Leftrightarrow e^{x+2} = 1 \,|\, \ln(\ )$	$u_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$
$\Leftrightarrow (x+2)\ln(e) = \ln(1)$	
$\Leftrightarrow x+2 = 0 \,|\, -2$	
$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = -2}}$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

..................................-------...

تمرينونه: اكسپوننشلمساوات.

لاندې اكسپوننشل مساوات تاسو ته له معلومې لارې وشميرى.

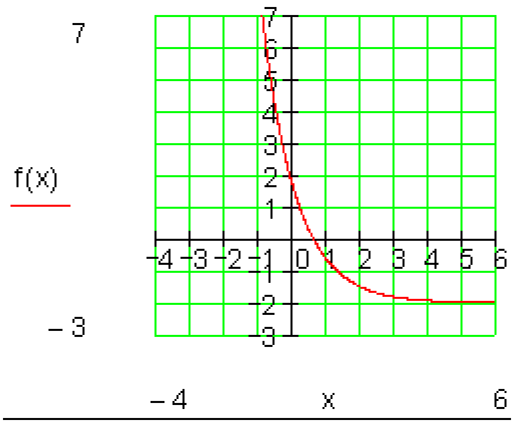
اول - $6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0$ دويم — $\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1$ دريم — $\frac{1}{2}e^{x}-e^{x+1}=0$

خلورم — $(3+2x)\,e^{x-1}=0$ پنځم — $-2x^{2}e^{-x+2}=0$

شپږم — $-\frac{1}{5}e^{x}-1+10e^{-x}=0$ اوم — $4-3e^{-\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}x}$ اتم - $-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x}$

نهم - $\frac{2x}{e^{x}+1}=0$ لسم - $\left(2-e^{x}\right)^{2}=\left(e^{x}-3\right)^{2}$

<u>د محور ونو غوڅتكي وشميرى</u>



$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{2-x}-2$$

$$y_s=f(0)=\frac{1}{2}\cdot e^{2}-2\approx 1{,}7$$

$$\Rightarrow P_y\left(0\,\middle|\,\frac{1}{2}\cdot e^{2}-2\approx 1{,}7\right)$$

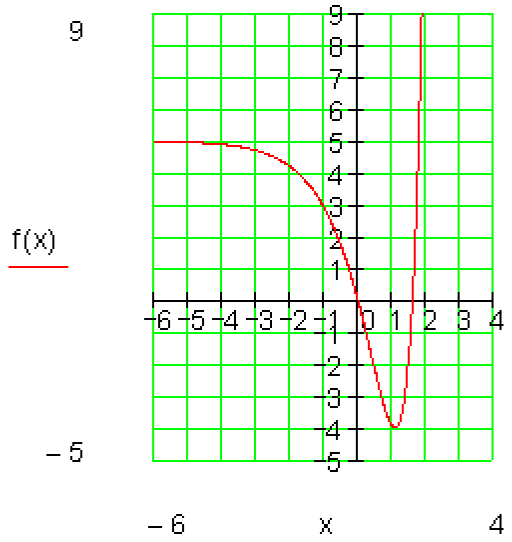
$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot e^{2-x}-2=0\,|+2$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot e^{2-x}=2\,|\cdot 2\Leftrightarrow e^{2-x}=4\,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow 2-x=\ln(4)\Leftrightarrow x=2-\ln(4)$$

$$\Rightarrow P_x\left(x=2-\ln(4)\approx 0{,}614\,|\,0\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$f(x) = e^{2x} - 6 \cdot e^{x} + 5$ $y_s = f(0) = 1 - 6 + 5 = 0 \Rightarrow P_y(0\|0)$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 6 \cdot e^{x} + 5 = 0$ بدلون: $e^{x} = u \Rightarrow e^{2x} = u^2$ $u^2 - 6u + 5 = 0$ د مربع مساوات حل $u_1 = 5; u_2 = 1$ $u_1 = 5 \Rightarrow e^{x_1} = 5 \Rightarrow x_1 = \ln(5) \approx 1{,}61$ $u_2 = 1 \Rightarrow e^{x_1} = 1 \Rightarrow x_2 = \ln(1) = 0$ $P_{x1}(\ln(5) \approx 1{,}61\|0); P_{x2}(\ln(1) = 0\|0)$

حلونه

تمرینونه توان او د لوګاریتم قوانین

نتیجي

اول - $\left(e^{x} + e^{-x}\right)^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2$

دویم – $\left(e^{x} - e^{-x} + 5\right) \cdot e^{x} = e^{2x} + 5 \cdot e^{x} - 1$

دریم - $\dfrac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}} = e^{4x-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- شلورم $e^{-x} \cdot e^{-x+2} \cdot e^{2x-3} = \frac{1}{e}$

- پنځم $\frac{1}{e^{2x}} + 3\left(e^{-x}\right)^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2 = 0$

- شپږم $e^{\ln(2k)} - 2k \cdot e^{\ln(2)} = -2k$

- اوم $\ln\left(e^2\right) - 3\ln\left(\frac{e}{2}\right) = 3 \cdot \ln(2) - 1$

- اتم $\ln\left(2e^2\right) + \ln\left(\frac{e}{2}\right) = 3$

- نهم $e^{\ln(k)+1} = k \cdot e$

لسم – $\frac{2}{3}e^{-\ln\left(\frac{3}{4}k\right)} = \frac{8}{9k}$

مفصل حلونه

اول –

$$\left(e^x + e^{-x}\right)^2 = e^x \cdot e^x + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-x} \cdot e^{-x}$$
$$= e^{x+x} + 2 \cdot e^{x-x} + e^{-x-x}$$

$$= e^{2x} + 2 \cdot e^0 + e^{-2x}$$

د $e^0 = 1$ سره کیږي

$$= e^{2x} + 2 \cdot 1 + e^{-2x} = \underline{\underline{e^{2x} + e^{-2x} + 2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم –

$$\left(e^{x}-e^{-x}+5\right)\cdot e^{x}=e^{x}\cdot e^{x}-e^{-x}\cdot e^{x}+5\cdot e^{x}$$
$$=e^{x+x}-e^{-x+x}+5\cdot e^{x}$$
$$=e^{2x}-e^{0}+5\cdot e^{x}=e^{2x}-1+5\cdot e^{x}=\underline{\underline{e^{2x}+5\cdot e^{x}-1}}$$

دريم –

$$\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}=e^{3x+1}\cdot e^{-(-x+2)}=e^{3x+1-(-x+2)}=e^{3x+1+x-2}=\underline{\underline{e^{4x-1}}}$$

څلورم –

$$e^{-x}\cdot e^{-x+2}\cdot e^{2x-3}=e^{-x+(-x+2)+2x-3}=e^{-x-x+2+2x-3}=e^{-1}=\underline{\underline{\frac{1}{e}}}$$

پنځم –

$$\frac{1}{e^{2x}}+3\left(e^{-x}\right)^{2}-\left(\frac{2}{e^{x}}\right)^{2}=e^{-2x}+3\cdot e^{-2x}-\left(\frac{4}{e^{2x}}\right)=4\cdot e^{-2x}-4\cdot e^{-2x}=\underline{\underline{0}}$$

شپږم –

$$e^{\ln(2k)}-2k\cdot e^{\ln(2)}$$

د $e^{\ln(x)}=x$ سره كيږي

$$e^{\ln(2k)}-2k\cdot e^{\ln(2)}=2k-2k\cdot 2=2k-4k=\underline{\underline{-2k}}$$

اوم –

$$\ln\left(e^{2}\right)-3\ln\left(\frac{e}{2}\right)=2\cdot\ln(e)-3\left[\ln(e)-\ln(2)\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\ln(e)=1$ سره کیري

$$= 2\cdot 1-3\left[1-\ln(2)\right] = 2-3+3\cdot\ln(2) = \underline{\underline{3\cdot\ln(2)-1}}$$

اتم –

$$\ln\left(2e^2\right)+\ln\left(\frac{e}{2}\right) = \ln(2)+\ln\left(e^2\right)+\ln(e)-\ln(2)$$
$$= \ln(2)+2\cdot\ln(e)+\ln(e)-\ln(2) = 3\cdot\ln(e) = \underline{\underline{3}}$$

نهم –

$$e^{\ln(k)+1} = e^{\ln(k)}\cdot e^1 = \underline{\underline{k\cdot e}}$$

لسم –

$$\frac{2}{3}e^{-\ln\left(\frac{3}{4}k\right)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{e^{\ln\left(\frac{3}{4}k\right)}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}k} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{1}{1}}{\frac{3k}{4}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3k} = \underline{\underline{\frac{8}{9k}}}$$

حلونه

تمرینونه د اکسپوننشل مساوات حلونه

نتیجې او مفصل حلونه

نتیجې

اول – $6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0 \Rightarrow x = 1-\ln(2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم – $\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{e}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}\ln(4+2e)$

دریم – $\frac{1}{2}e^{x} - e^{x+1} = 0 \Rightarrow$

له دې لاس ته راغلي چې حل نه شته

څلورم – $(3+2x)e^{x-1} = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

پنځم – $-2x^{2}e^{-x+2} = 0 \Rightarrow x = 0$

شپږم – $-\frac{1}{5}e^{x} - 1 + 10e^{-x} = 0 \Rightarrow x_1 = \ln(5)$

اوم – $4 - 3e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow x_1 = 2\ln(3)\ \text{und}\ x_2 = 0$

اتم – $-\frac{3}{4}e^{-2x} + 5 = e^{-x} \Rightarrow x_1 = -\ln(2)$

نهم – $\frac{2x}{e^{x}+1} = 0 \Rightarrow x = 0$

لسم – $\left(2 - e^{x}\right)^{2} = \left(e^{x} - 3\right)^{2} \Rightarrow x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$

مفصل حلونه

اول –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3}{2}e^{2-2x}=6\,|:\frac{3}{2} \quad\Leftrightarrow\quad e^{2-2x}=4\,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow 2-2x=\ln(4)\,|-2 \quad\Leftrightarrow\quad -2x=\ln(4)-2\,|:(-2) \quad\Leftrightarrow\quad x=1-\frac{1}{2}\ln(4)$$

$$\Leftrightarrow x=1-\ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=1-\ln(2)}}$$

دویم –

$$\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{1}{2}e=1\,|+\frac{1}{2}e \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{4}e^{4x}=1+\frac{1}{2}e\,|\cdot 4 \quad\Leftrightarrow\quad e^{4x}=4+2e\,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow\quad 4x=\ln(4+2e)\,|:4 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=\frac{1}{4}\ln(4+2e)}}$$

دریم –

$$\frac{1}{2}e^{x}-e^{x+1}=0\,|\cdot 2 \quad\Leftrightarrow\quad e^{x}-2e^{x+1}=0\,|+2e^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow\quad e^{x}=2e^{x+1}\,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow\quad \ln\left(e^{x}\right)=\ln\left(2e^{x+1}\right) \quad\Leftrightarrow\quad x=\ln(2)+\ln\left(e^{x+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad x=\ln(2)+x+1\,|-x$$

$$\Leftrightarrow\quad 0=\ln(2)+1\,|-1 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(2)=-1$$

تضاد ⇔ حل نه شته

څلورم –

$$(3+2x)e^{x-1}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3+2x=0\,|-3$$

$$\Leftrightarrow\quad 2x=-3\,|:2 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=-\frac{3}{2}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

e^{x-1} تابعا e^x ا ده، چې په یو واحد د x محور ښي لور ته راکښل شوې ده.

تابع ا e^x ا صفرځای نه لري.

پنځم –

$$-2x^2e^{-x+2}=0$$

$$-2x^2e^{-x+2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x^2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=0}}$$

e^{-x+2} i تابع e^{-x} ده چې په 2EH (په ۲ یوونه یا واحده) د x محور کیڼ لور ته راکښل شوې ده..

تابع e^{-x} صفرځتی نه لري.

شپږم – لاندې الماني : بدلون

$$-\frac{1}{5}e^x-1+10e^{-x}=0 \text{ Substitution } u=e^x \Leftrightarrow -\frac{1}{5}u-1+\frac{10}{u}=0\,|\cdot u$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{5}u-1+\frac{10}{u}=0\,|\cdot(-5) \quad \Leftrightarrow \quad u^2+5u-50=0$$

$$p=5\,;\,q=-50 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{25}{4}+\frac{200}{4}=\frac{225}{4} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{15}{2}$$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\,\Bigg| \begin{array}{l} u_1=-\frac{5}{2}+\frac{15}{2}=5 \\ u_2=-\frac{5}{2}-\frac{15}{2}=-10 \end{array}$$

$$u_1=5 \Leftrightarrow e^x=5 \Leftrightarrow x_1=\ln(5)$$

$$u_2=-10 \Leftrightarrow e^x=-10 \Rightarrow$$

حل نه دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوم – الماني: بدلون

$$4-3e^{-\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}x} \text{ Substitution } u=e^{\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow 4-\frac{3}{u}=u \mid \cdot u$$

$$\Leftrightarrow 4u-3=u^2 \mid -u^2 \quad \Leftrightarrow \quad -u^2+4u-3=0 \mid \cdot(-1) \quad \Leftrightarrow \quad u^2-4u+3=0$$

$$p=-4\,;\, q=3 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4-3=1 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{1}=1$$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \left| \begin{array}{l} u_1=2+1=3 \\ u_2=2-1=1 \end{array} \right.$$

$$u_1=3 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x}=3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x=\ln(3) \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=2\ln(3)}}$$

$$u_2=1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x=\ln(1) \Leftrightarrow x_2=2\underbrace{\ln(1)}_{0} \Leftrightarrow \underline{\underline{x_2=0}}$$

اتم – الماني: بدلون ،

$$-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x} \text{ Substitution } u=e^{-x} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}u^2+5=u \mid -u$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}u^2-u+5=0 \mid :\left(-\frac{3}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad u^2+\frac{4}{3}u-\frac{20}{3}=0$$

$$p=\frac{4}{3}\,;\, q=-\frac{20}{3} \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{4}{9}+\frac{60}{9}=\frac{64}{9} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{64}{9}}=\frac{8}{3}$$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \left| \begin{array}{l} u_1=-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}=2 \\ u_2=-\frac{2}{3}-\frac{8}{3}=-\frac{11}{3} \end{array} \right.$$

$$u_1=2 \Leftrightarrow e^{-x}=2 \Leftrightarrow -x=\ln(2) \Leftrightarrow \underline{x_1=-\ln(2)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u_2 = -\frac{11}{3} \Leftrightarrow e^{-x} = -\frac{11}{3} \Leftrightarrow -x = \underbrace{\ln\left(-\frac{11}{3}\right)}_{\text{nicht definiert}} \Rightarrow$$

تعریف نه دی

له دې لاس ته راځي چې حل نه دی.

نهم –

$$\frac{2x}{e^x+1} = 0 \,|\cdot\left(e^x+1\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 0}}$$

لسم –

$$\left(2-e^x\right)^2 = \left(e^x-3\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4-4e^x+e^{2x} = e^{2x}-6e^x+9 \,|-e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 4-4e^x = -6e^x+9 \,|+6e^x \quad \Leftrightarrow \quad 4+2e^x = 9 \,|-4 \quad \Leftrightarrow \quad 2e^x = 5 \,|:2$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{5}{2} \,|\ln(\ ) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)}}$$

خلورم: د **e** -تا بع مشتق یا رابیلیدنه

د ضرب- او زنځیري قانون سره

د **e** -تا بع مشتق یا رابیلیدنه

د **e** -تا بع مشتق یا رابیلیدنه د ساده لارو له لارې نه شي پیداکیدلای، د دې لپاره یوې ،،جګې شمیرپوهنې یا ریاضي،، ته ا ړتیا ده. دلته به یو لیدوړ متود انځور شي، له دې خطر سره هم، چې شمیرپوهنیز متخصصین یا شمیرپوهان به بغاوت وکړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = f(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

په پام کې نیسو چې باور لري: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} \cdot e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

موږ د تل کوچني کیدونکي Δx ــ ارزښت لپاره د $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ خاننیونه څیړو

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې ځاننیونې یا حالت په بنسټ لاس ته راوړو چې باور لري: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$

دا ځموږ د شمیرنې لپاره په دې معنا دی:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که د x_0 په ځای x ولیکو، نو باور لري: $f(x) = e^x$ او $f'(x) = e^x$

اکسپوننشل تابع $f(x) = e^x$ مشتق $f'(x) = e^x$ لري د e په بنسټ اکسپوننشل تابع یو تابع دی، په کوم کې چې تابع او مشتق سره برابر دي. د $f'(x) = e^x$ ــ تابع دمشتق سره ځان بیرته تولیدوي یا جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د **e** -تابع د مشتق یا بیلیدني لپاره بنستقوانین:

د **e** -تابع هندارونه، غزونه او راکښنه مو دې ته بیايي، =ې اکسپوننت یا ځګعدد(-ګڼ) نه تنها فقط د x اووښتونې یا متحوله خوندي لري.

د نورو توابعو سره د نښلونو له لارې نوې توابع منځ ته راځي، په کومو کې چې د e– تابع د فاکتور یا ضریب په څیر خوندي ده. په داسې حالتونو کې د مشتق لپاره نور قوانین د غوښتلو دي.

د زیاتیز یا مثبت x په لور په 3 یوونونو یا واحدونو د e - تابع راکښنه او د په لور په 2 ضریبونو غزونه د دوه ضریبونو یوه زنځرونه ورکوي.

$$f(x)=e^{\frac{1}{2}(x-2)}=e^{u(x)}\ \text{mit}\ u(x)=\frac{1}{2}(x-2)$$

یو زنځیري تابع انځوروي.

د دې مشتق داسې دی

زنځیري لار یا قاعده:

$$f(x)=e^{u(x)}\Rightarrow f'(x)=u'(x)\cdot e^{u(x)}$$

$$u(x)=\frac{1}{2}(x-2)\Rightarrow u'=\frac{1}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}(x-2)}$$

یو د e - تابع ترڼه د یو کرښیز تابع سره تر څیرنې لادې نیسو:

$f(x)=(2x-1)\cdot e^{x}$ نو دا د ضرب د قانون سره مشتق کوو یا رابیلوو.

د ضرب قانون یا -لار:

$$f(x)=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u(x) = (2x-1) \Rightarrow u'(x) = 2 \text{ und } v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x-1) \cdot e^x = \left[2 + (2x-1)\right] \cdot e^x = \underline{\underline{(2x+1) \cdot e^x}}$$

دې قوانينو ته بيلګې

اول - $f(x) = e^{2-x} \Rightarrow f'(x) = (-1) \cdot e^{2-x} = \underline{\underline{-e^{2-x}}}$

دويم –

$$f(x) = e^{\frac{1}{4}x+4} \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{\frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{4}x+4}}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{\frac{1}{16} \cdot e^{\frac{1}{4}x+4}}}$$

دريم –

$$f(x) = (x-2) \cdot e^{-x}$$

$$\text{mit } u = (x-2) \Rightarrow u' = 1 \text{ und } v = e^{-x} \Rightarrow v' = -e^{-x} \text{ wird}$$

$$f'(x) = u'v + uv' = 1 \cdot e^{-x} + (x-2) \cdot \left(-e^{-x}\right) = e^{-x} - (x-2) \cdot e^{-x}$$

$$= \left[1 - (x-2)\right] \cdot e^{-x} = \underline{\underline{(3-x) \cdot e^{-x}}}$$

څلورم –

$$f(x) = ax \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\text{mit } u = ax \Rightarrow u' = a \text{ und } v = e^{-\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow v' = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \text{ wird}$$

$$f'(x) = u'v + uv' = a \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + ax \cdot \left(-x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)$$

$$= a \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} - ax^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = \underline{\underline{a \cdot \left(1 - x^2\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دپرواره مشتق یا رابیلیدنه:

د کرو یا منحنیو خبرو اترو یا بحث سره زیات وخت درې مشتقونه د توابعو د څېړنو لپاره غوښتونکي یا اړین دي.

$f(x) = (2x+4)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ (د یوه کرښیز او e–تابع ضرب)

د $u = (2x+4) \Rightarrow u' = 2$ او $v = e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ سره کیږی

$$f'(x) = u'v + uv' = 2\cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (2x+4)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \left[2 + (2x+4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{-x\cdot e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

د $u = -x \Rightarrow u' = -1$ او $v = e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ سره کیږي

$$f''(x) = u'v + uv' = -1\cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (-x)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

د $u = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow u' = \frac{1}{2}$ او $v = e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ سره کیږي

$$f'''(x) = u'v + uv' = \frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x} + \left(\frac{1}{2}x - 1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x} =$$

$$= \underline{\underline{\left(1 - \frac{1}{4}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

د هر مشتق یا رابیلیدني سره د e -تابعضریب بې تغیره پاتیږي. که دا له نوکانو راووځي، نو نور مشتقونه یا رابیلیدني ساده په لاس راوړی شو یا شمیرلی شو.

د مشتقتابع صفرځایونه کیدی شي زیات وخت ساده ولوستل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

د e تابع مشتقI

د لاندې توابعو درې ځله مشتق وشمېرى

اول - $f(x)=4\cdot e^{2x}$ دويم - $f(x)=e^{x+4}$ دريم - $f(x)=2\cdot e^{2-4x}$ څلور م-

$f(x)=4x-2\cdot e^{-2x}$ پنځه - $f(x)=x\cdot e^{-2x}$ شپږم - $f(x)=2x\cdot e^{2-x}$ اوم -

$f(x)=(x+2)\cdot e^{x}$ اتم - $f(x)=(1-x)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ نهم - $f(x)=(1+x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$ لسم -

$f(x)=t\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

حلونه

د e تابع مشتقI

نتيجې او مفصل حلونه

نتيجې

اول — $f(x)=4\cdot e^{2x}\Rightarrow f'(x)=8\cdot e^{2x};\ f''(x)=16\cdot e^{2x};\ f'''(x)=32\cdot e^{2x}$

دويم — $f(x)=e^{x+4}\Rightarrow f'(x)=e^{x+4};\ f''(x)=e^{x+4};\ f'''(x)=e^{x+4}$

دريم -

$f(x)=4x-2\cdot e^{-2x}\Rightarrow f'(x)=4+4\cdot e^{-2x};\ f''(x)=-8\cdot e^{-2x};\ f'''(x)=16\cdot e^{-2x}$

څلورم -

$f(x)=2\cdot e^{2-4x}\Rightarrow f'(x)=-8\cdot e^{2-4x};\ f''(x)=32\cdot e^{2-4x};\ f'''(x)=-128\cdot e^{2-4x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم -

$$f(x) = x \cdot e^{-2x} \Rightarrow f'(x) = (1-2x) \cdot e^{-2x} \; ; \; f''(x) = (4x-4) \cdot e^{-2x} \; ; \; f'''(x) = (12-8x) \cdot e^{-2x}$$

شپږم -

$$f(x) = 2x \cdot e^{2-x} \Rightarrow f'(x) = (2-2x) \cdot e^{2-x} \; ; \; f''(x) = (2x-4) \cdot e^{2-x} \; ; \; f'''(x) = (6-2x) \cdot e^{2-x}$$

اوم -

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{x} \Rightarrow f'(x) = (x+3) \cdot e^{x} \; ; \; f''(x) = (x+4) \cdot e^{x} \; ; \; f'''(x) = (x+5) \cdot e^{x}$$

اتم –

$$f(x) = (1-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \; ; \; f''(x) = \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \; ; \; f'''(x) = \left(-\frac{5}{8} - \frac{1}{8}x\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

نهم -

$$f(x) = (1+x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \; ; \; f''(x) = \frac{1}{4} \cdot (x-3) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \; ; \; f'''(x) = \frac{1}{8} \cdot (5-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

لسم –

$$f(x) = t \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = t \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot x\right) \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \; ; \; f''(x) = \frac{1}{16} \cdot t \cdot (x-8) \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \; ; \; f''' = \frac{1}{64} \cdot t \cdot (12-x) \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

مفصل حلونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

اول –

$$f(x) = 4 \cdot e^{2x}$$
$$f'(x) = 2 \cdot 4 \cdot e^{2x} = \underline{\underline{8 \cdot e^{2x}}}$$
$$f''(x) = 2 \cdot 8 \cdot e^{2x} = \underline{\underline{16 \cdot e^{2x}}}$$
$$f'''(x) = 2 \cdot 16 \cdot e^{2x} = \underline{\underline{32 \cdot e^{2x}}}$$

دویم –

$$f(x) = e^{x+4}$$
$$f'(x) = 1 \cdot e^{x+4} = \underline{\underline{e^{x+4}}}$$
$$f''(x) = 1 \cdot e^{x+4} = \underline{\underline{e^{x+4}}}$$
$$f'''(x) = 1 \cdot e^{x+4} = \underline{\underline{e^{x+4}}}$$

دریم –

$$f(x) = 2 \cdot e^{2-4x}$$
$$f'(x) = -4 \cdot 2 \cdot e^{2-4x} = \underline{\underline{-8 \cdot e^{2-4x}}}$$
$$f''(x) = -4 \cdot (-8) \cdot e^{2-4x} = \underline{\underline{32 \cdot e^{2-4x}}}$$
$$f'''(x) = -4 \cdot 32 \cdot e^{2-4x} = \underline{\underline{-128 \cdot e^{2-4x}}}$$

څلورم –

$$f(x) = 4x - 2 \cdot e^{-2x}$$
$$f'(x) = 4 - 2 \cdot (-2) \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{4 + 4 \cdot e^{-2x}}}$$
$$f''(x) = -2 \cdot 4 \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{-8 \cdot e^{-2x}}}$$
$$f'''(x) = -2 \cdot (-8) \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{16 \cdot e^{-2x}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم – $f(x) = x \cdot e^{-2x}$

د $u = x \Rightarrow u' = 1$ او $v = e^{-2x} \Rightarrow v' = -2 \cdot e^{-2x}$ سره

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot \left(-2 \cdot e^{-2x}\right) = 1 \cdot e^{-2x} - 2x \cdot e^{-2x} = (1-2x) \cdot e^{-2x}$$

$f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ د $u = 1-2x \Rightarrow u' = -2$ او $v = e^{-2x} \Rightarrow v' = -2 \cdot e^{-2x}$ له
سره

$$f''(x) = -2 \cdot e^{-2x} + (1-2x) \cdot \left(-2 \cdot e^{-2x}\right) = \left[-2 - 2 \cdot (1-2x)\right] \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{(4x-4) \cdot e^{-2x}}}$$

$f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ د $u = 4x-4 \Rightarrow u' = 4$ او $v = e^{-2x} \Rightarrow v' = -2 \cdot e^{-2x}$
سره

$$f'''(x) = 4 \cdot e^{-2x} + (4x-4) \cdot \left(-2 \cdot e^{-2x}\right) = \left[4 - 2 \cdot (4x-4)\right] \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{(12-8x) \cdot e^{-2x}}}$$

شپږم –

$f(x) = 2x \cdot e^{2-x}$ د $u = 2x \Rightarrow u' = 2$ او $v = e^{2-x} \Rightarrow v' = -1 \cdot e^{2-x}$ سره

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 2 \cdot e^{2-x} + 2x \cdot \left(-1 \cdot e^{2-x}\right) = (2-2x) \cdot e^{2-x}$$

$f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ د $u = 2-2x \Rightarrow u' = -2$ او $v = e^{2-x} \Rightarrow v' = -1 \cdot e^{2-x}$ سره

$$f''(x) = -2 \cdot e^{2-x} + (2-2x) \cdot \left(-1 \cdot e^{2-x}\right) = \left[-2 - (2-2x)\right] \cdot e^{2-x} = (2x-4) \cdot e^{2-x}$$

$f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ د $u = 2x-4 \Rightarrow u' = 2$: او $v = e^{2-x} \Rightarrow v' = -1 \cdot e^{2-x}$ سره

$$f'''(x) = 2 \cdot e^{2-x} + (2x-4) \cdot \left(-1 \cdot e^{2-x}\right) = \left[2 - (2x-4)\right] \cdot e^{2-x} = \underline{\underline{(6-2x) \cdot e^{2-x}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوم –

$f(x)=(x+2)\cdot e^{x}$ د $u=x+2\Rightarrow u'=1$ او $v=e^{x}\Rightarrow v'=e^{x}$ سره

$$f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'=1\cdot e^{x}+(x+2)\cdot e^{x}=\left[1+(x+2)\right]\cdot e^{x}=\underline{\underline{(x+3)\cdot e^{x}}}$$

$f''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=x+3\Rightarrow u'=1$ او $v=e^{x}\Rightarrow v'=e^{x}$ سره

$$f''(x)=1\cdot e^{x}+(x+3)\cdot e^{x}=\left[1+(x+3)\right]\cdot e^{x}=\underline{\underline{(x+4)\cdot e^{x}}}$$

$f'''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=x+4\Rightarrow u'=1$ او $v=e^{x}\Rightarrow v'=e^{x}$ سره

$$f'''(x)=1\cdot e^{x}+(x+4)\cdot e^{x}=\left[1+(x+4)\right]\cdot e^{x}=\underline{\underline{(x+5)\cdot e^{x}}}$$

اتم –

$f(x)=(1-x)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ د $u=1-x\Rightarrow u'=-1$ او $v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'=-1\cdot e^{\frac{1}{2}x}+(1-x)\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\left[-1+\frac{1}{2}(1-x)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$f''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\Rightarrow u'=-\frac{1}{2}$ او $v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$f'''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x\Rightarrow u'=-\frac{1}{4}$ او $v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$

سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'''(x) = -\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x\right)\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x\right)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\left(-\frac{5}{8}-\frac{1}{8}x\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

نهم – $f(x) = (1+x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$

د $u = 1+x \Rightarrow u' = 1$ او $v = e^{-\frac{1}{2}x+2} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$ سره

$$f'(x) = u'\cdot v + u\cdot v' = 1\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} + (1+x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\right) = \left[1-\frac{1}{2}(1+x)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} = \frac{1}{2}\cdot(1-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

د $f''(x) = u'\cdot v + u\cdot v'$ $u = \frac{1}{2}\cdot(1-x) \Rightarrow u' = -\frac{1}{2}$ او

$v = e^{-\frac{1}{2}x+2} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$ سره

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} + \frac{1}{2}\cdot(1-x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\right) = \left[-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(1-x)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

$$= \left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} = \frac{1}{4}\cdot(x-3)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

د $f'''(x) = u'\cdot v + u\cdot v'$ $u = \frac{1}{4}\cdot(x-3) \Rightarrow u' = \frac{1}{4}$ او

$v = e^{-\frac{1}{2}x+2} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'''(x)=\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}+\frac{1}{4}\cdot(x-3)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\right)=\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{8}(x-3)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

$$=\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{8}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}=\underline{\underline{\frac{1}{8}\cdot(5-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}}}$$

لسم –

$f(x)=t\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ د $u=t\cdot x\Rightarrow u'=t$ او $v=e^{-\frac{1}{4}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ سره

$$f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'=t\cdot e^{-\frac{1}{4}x}+t\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right)=\left[t-\frac{1}{4}\cdot t\cdot x\right]\cdot e^{-\frac{1}{4}x}=\underline{\underline{t\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}}}$$

$f''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=t\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot x\right)\Rightarrow u'=-\frac{1}{4}\cdot t$ او

$v=e^{-\frac{1}{4}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ سره

$$f''(x)=-\frac{1}{4}t\cdot e^{-\frac{1}{4}x}+t\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot x\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right)=\left[-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}\cdot t\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot x\right)\right]\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\cdot t+\frac{1}{16}\cdot t\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}=\frac{1}{16}\cdot t\cdot(x-8)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

$f'''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=\frac{1}{16}\cdot t\cdot(x-8)\Rightarrow u'=\frac{1}{16}\cdot t$ او

$v=e^{-\frac{1}{4}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'''(x)=\frac{1}{16}\cdot t\cdot e^{-\frac{1}{4}x}+\frac{1}{16}\cdot t\cdot(x-8)\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right)=\left[\frac{1}{16}t-\frac{1}{64}\cdot t\cdot(x-8)\right]\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$=\left(\frac{3}{16}\cdot t-\frac{1}{64}\cdot t\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}=\underline{\underline{\frac{1}{64}\cdot t\cdot(12-x)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}}}$$

پنځم: د e -تابع انتيګرېشن يا ګډونه

پيل:په څټ کتنې را تولوني سره د انتيګرالشميرنې ځخه لاندې ځرګند دي:

که د يو په خوښه انتيګرالوړ تابع $f(x)$ انتيګرال ونيول شي، نو سرې يو بنسټ تابع لاس ته راوړي: $F(x)=\int f(x)\,dx$

تابع $f(x)$ د انتيګرالوني تابع هم بلل کيږي.

باور لري: $F(x)=\int f(x)\,dx \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$

دا په دې معنا، چې که بنسټ تابع مشتق شي يا يې مشتق ونيول شي، نو سرې بيرته د انتيګراليدنې تابع لاس ته راوړي. دا ډېر يکه موږ ته ممکنوي چې د مشتقولو له لارې د انتيګرال نتيجه و ازمايو.

بيلګه:

$f(x)=x^2 \Rightarrow F(x)=\int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+C$ مشتق شوی: $F'(x)=x^2=f(x)$

که په e -تابع استعمال شي، له کوم چې موږ پوهيږو، چې د مشتق سره پخپله بيرته توليديږي يا منځ ته راځي په دې معنا دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي دي $F(x)=\int f(x)\,dx=e^x+C$ د ټولو توابعو f(x) بنسټ ډېرئ یا سټ، نو

$F'(x)=f(x)=\left[e^x+C\right]'=e^x$ دی

(۱) د e-تابع انتیګرال: $\int e^x\,dx=e^x+C$

د e –تابع د مشتق سره دې په دې حالت کې، په کوم کې چې د e –تابع جګعدد یا اکسپوننت نه ځانله د اووبنتوني یا متحولي x ځخه جوړ وو، زنځیرقانون استعمال شي. په انتیګرېشن کې د انتیګرالیدونکې تابع دې داسې وتاکل شي، چې د (۱) انتیګرال کیدی شي

ټولیز انتیګرال د بدلون قاعدې سره

$$f(x)=e^{-x}\Rightarrow F(x)=\int e^{-x}\,dx$$

$$\text{Substitution}: u(x)=-x\Rightarrow u'(x)=\frac{du(x)}{dx}=-1\Rightarrow dx=-du$$

$$\Rightarrow \int e^{-x}\,dx=-\int e^{u}\,du=-e^{u}+C$$

په ځت بلون: $\Rightarrow F(x)=\int e^{-x}\,dx=\underline{\underline{-e^{-x}}}$

ازمايښت: $F(x)=-e^{-x}+C\Rightarrow F'(x)=(-1)\cdot\left(-e^{-x}\right)=e^{-x}=f(x)$

بیلګه:

$$f(x)=e^{2x-1}\Rightarrow F(x)=\int e^{2x-1}\,dx$$

$$\text{Substitution}: u(x)=2x-1\Rightarrow u'(x)=\frac{du(x)}{dx}=2\Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\Rightarrow \int e^{2x-1}\,dx=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

$$\Rightarrow F(x)=\int e^{2x-1}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x-1}+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ازماېښت:
$$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x-1}+C\Rightarrow F'(x)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x-1}=e^{2x-1}=f(x)$$

بیلګه:

$$f(x)=e^{2x-1}\Rightarrow F(x)=\int e^{2x-1}\,dx$$
$$\text{Substitution}: u(x)=2x-1\Rightarrow u'(x)=\frac{du(x)}{dx}=2\Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$
$$\Rightarrow\int e^{2x-1}\,dx=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$
$$\Rightarrow F(x)=\int e^{2x-1}\,dx=\underline{\frac{1}{2}e^{2x-1}+C}$$

ازماېښت:
$$F(x)=2\cdot e^{-\frac{1}{2}(1-x)}+C\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot e^{-\frac{1}{2}(1-x)}=e^{-\frac{1}{2}(1-x)}=f(x)$$

د بدلون سره ټاکلی انټیګرال

د دې لپاره چې د ګراف او x محور ترمنځ سطحه وشمیرو، زیات وخت باید یو ټاکلی انټیګرال حل شي. دلته مو هم د بدلون لار حل ته لاربنودوي. د بدلون له لارې حل لپاره دوه متودونه یا واریانت شتون لري.

لومړئ لار یا واریانت :

$$f(x)=e^{\frac{1}{2}x-1}\Rightarrow A=\int_{-1}^{1}e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx$$

بدلون:

$$u(x)=\frac{1}{2}x-1\Rightarrow u'(x)=\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\Rightarrow dx=2\cdot du$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرال عمومي حل:

$$\int e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx = 2\cdot\int e^{u}\,du = 2\cdot e^{u} + C \Rightarrow 2\cdot e^{\frac{1}{2}x-1} + C$$

د ټاکلي انتیګرال په حیث یې وشمیرئ(بې له ثا بتي یا همغې C سره)

$$A = \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx = 2\cdot\left[e^{\frac{1}{2}x-1}\right]_{-1}^{1} = 2\cdot\left[e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}}\right] \approx 2\cdot 0{,}3834 = \underline{\underline{0{,}7668}}$$

دویمه لار یا واریانت:

$$\text{Variante 2: } f(x) = e^{\frac{1}{2}x-1} \Rightarrow A = \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx$$

بدلون:

$$u(x) = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2\cdot du$$

پولې هم بدلیږي:

لاندې یا کښته پوله:

$$ug = u(-1) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

پورته پوله:

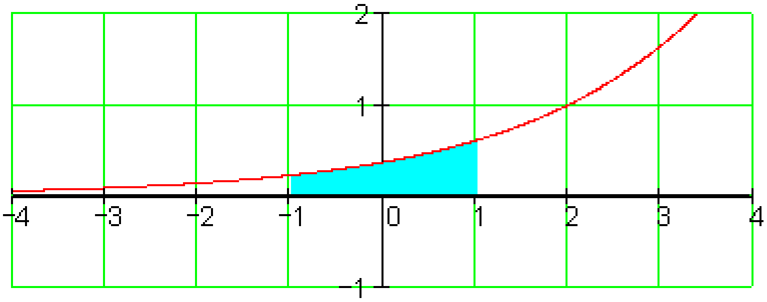
$$og = u(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$A = \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx = 2\cdot\int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} e^{u}\,du = 2\cdot\left[e^{u}\right]_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} = 2\cdot\left[e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}}\right] \approx 2\cdot 0{,}3834 = \underline{\underline{0{,}7668}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دویمه واریابلې کې د انیګرال لاندې او پورته پولې هم بدلې یا سبستیتویرت شوې. له دې لارې په زیاتو حالتونو کې شمیرن زیاتوالی راکمیږي.

$$f(x) := e^{\frac{1}{2}\cdot x-1} \qquad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0.7668$$



تمرینونه

د ساده توابعو انتیګرالونه

د لاندې تابعو انتیګرال وشمیری. د اول تر ځلورم تمرینونو پورې د ازمایښت له لارې کنترول کړی.

اول - $\int -e^{-x}\,dx$ دویم - $\int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx$ دریم - $\int 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$ ځلورم - $\int \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}\,dx$

پنځم - $\int_0^2 e^{1-x}\,dx$ شپږم- $\int_{-1}^2 e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ اوم - $\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$ اتم - $\int_0^{\ln(2)} -\frac{1}{2}e^{-x}\,dx$ نهم -

لسم - $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx$ $\int_0^4 -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حلونه

تمرینونه د توابعو انتیګرالونه

نتیجې او مفصل حلونه

اول – $F(x)=\int -e^{-x}\,dx = e^{-x}+C \quad Probe: F(x)=e^{-x}+C \Rightarrow F'(x)=-e^{-x}$

دویم –

$$F(x)=\int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{4}e^{2x}+C \quad Probe: F(x)=\frac{1}{4}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$$

دریم -

$$F(x)=\int 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = -8\cdot e^{-\frac{1}{4}x}+C$$

ازمایینت:

$$: F(x)=-8\cdot e^{-\frac{1}{4}x}+C \Rightarrow F'(x)=2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

ځلورم - $F(x)=\int \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}\,dx = \frac{1}{4}\cdot e^{3x-4}+C$

ازمایینت: $F(x)=\frac{1}{4}\cdot e^{3x-4}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}$

پنځم - $\int_0^2 e^{1-x}\,dx = e^{1}-e^{-1}=e-\frac{1}{e}\approx 2,350$

شپږم –

$$\int_{-1}^{2} e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2\cdot\left[e^{1}-e^{-\frac{1}{2}}\right]\approx 4,224$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوم - $\int_{1}^{2} e^{4-2x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[e^{2}-e^{0}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[e^{2}-1\right] \approx 3{,}195$

اتم – $\int_{0}^{\ln(2)} -\frac{1}{2}e^{-x}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\left[e^{0}-e^{-\ln(2)}\right] = -\frac{1}{2}\cdot\left[1-\frac{1}{e^{\ln(2)}}\right] = -\frac{1}{2}\cdot\left[1-\frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{4}$

نهم - $\int_{1}^{2} \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx = 2\cdot\left[e^{2}-e^{0}\right] = 2\cdot\left[e^{2}-1\right] \approx 12{,}778$

لسم - $\int_{0}^{4} -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = -2\left[e^{0}-e^{-1}\right] \approx -1{,}264$

اول – مفصل حل:

$$F(x) = \int F'(x)\,dx = \int -e^{-x}\,dx = -\int e^{-x}\,dx$$

بدلون $u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

$$-\int e^{-x}\,dx = -\int (-1)\cdot e^{u}\,du = \int e^{u}\,du = e^{u}+C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int -e^{-x}\,dx = \underline{e^{-x}+C}$$

ازمايښت: $F(x) = e^{-x}+C \Rightarrow F'(x) = -e^{-x}$

دويم – مفصل حل

$$F(x) = \int F'(x)\,dx = \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون: $u(x) = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}du$

$$\int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}e^{u}\,du = \frac{1}{4}\int e^{u}\,du = \frac{1}{4}e^{u} + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \underline{\frac{1}{4}e^{2x} + C}$$

ازمایینت: $Probe: F(x) = \frac{1}{4}e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

دریم – مفصل حل

$$F(x) = \int F'(x)\,dx = \int 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = 2\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$

بدلون: $u(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow dx = -4\cdot du$

$$\int 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = 2\int (-4)\cdot e^{u}\,du = -8\int e^{u}\,du = -8\cdot e^{u} + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = \underline{-8\cdot e^{-\frac{1}{4}x} + C}$$

ازمایینت: $Probe: F(x) = -8\cdot e^{-\frac{1}{4}x} + C \Rightarrow F'(x) = 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

خلورم – $F(x) = \int F'(x)\,dx = \int \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}\,dx = \frac{3}{4}\int e^{3x-4}\,dx$

بدلون : $u(x) = 3x - 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{3}\cdot du$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{3}\cdot e^{u}\,du = \frac{1}{4}\int e^{u}\,du = \frac{1}{4}\cdot e^{u} + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}\,dx = \underline{\frac{1}{4}\cdot e^{3x-4} + C}$$

ازمايښت: $F(x) = \frac{1}{4}\cdot e^{3x-4} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}$

پنځم – بدلون: $\int_0^2 e^{1-x}\,dx$: $u(x) = 1-x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې پولې: $u(0) = 1-0 = 1$ پورته پولې: $u(2) = 1-2 = -1$

$$\int_0^2 e^{1-x}\,dx = \int_1^{-1}(-1)\cdot e^{u}\,du = -\int_1^{-1} e^{u}\,du = \int_{-1}^{1} e^{u}\,du = \left[e^{u}\right]_{-1}^{1} = e^{1} - e^{-1} = e - \frac{1}{e} \approx \underline{\underline{2,350}}$$

شپږم - مفصل حل

بدلون: $\int_{-1}^{2} e^{\frac{1}{2}x}\,dx$: $u(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow dx = 2\cdot du$

لاندې پولې: $u(-1) = \frac{1}{2}\cdot(-1) = -\frac{1}{2}$ پورته پولې: $u(2) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$

$$\int_{-1}^{2} e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{1} e^{u}\,du = 2\cdot\left[e^{u}\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} = 2\cdot\left[e^{1} - e^{-\frac{1}{2}}\right] \approx \underline{\underline{4,224}}$$

اوم – مفصل حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$ بدلون: $u(x)=4-2x \Rightarrow \frac{du}{dx}=-2 \Leftrightarrow dx=-\frac{1}{2}\cdot du$

لاندې پولې: $u(2)=4-4=0$ پورته پولې: $u(1)=4-2=2$

$$\int_1^2 e^{4-2x}\,dx=-\frac{1}{2}\int_2^0 e^u\,du=\frac{1}{2}\int_0^2 e^u\,du=\frac{1}{2}\cdot\left[e^u\right]_0^2=\frac{1}{2}\cdot\left[e^2-e^0\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[e^2-1\right]\approx \underline{\underline{3{,}195}}$$

اتم – مفصل حل

$\int_0^{\ln(2)} -\frac{1}{2}e^{-x}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\ln(2)} e^{-x}\,dx$ بدلون: $u(x)=-x \Rightarrow \frac{du}{dx}=-1 \Leftrightarrow dx=-du$

لاندې پولې: $u(0)=0$ پورته پولې: $u(\ln(2))=-\ln(2)$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\ln(2)} e^{-x}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^{-\ln(2)}(-1)\cdot e^u\,du=\frac{1}{2}\int_0^{-\ln(2)} e^u\,du=-\frac{1}{2}\int_{-\ln(2)}^{0} e^u\,du$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left[e^u\right]_{-\ln(2)}^{0}=-\frac{1}{2}\cdot\left[e^0-e^{-\ln(2)}\right]=-\frac{1}{2}\cdot\left[1-\frac{1}{e^{\ln(2)}}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left[1-\frac{1}{2}\right]=\underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

یادونه: $e^{\ln(a)}=a \Rightarrow e^{\ln(2)}=2$

نهم – مفصل حل

بدلون: $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx=4\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون:

$$u(x) = 4 - 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2 \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{2}du$$

لاندې پولې: $u(1) = 4 - 2 = 2$: پورته پولې: $u(2) = 4 - 4 = 0$

$$4\int_1^2 e^{4-2x}\,dx = 4\int_2^0 \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^u\,du = -2\int_2^0 e^u\,du = 2\int_0^2 e^u\,du$$
$$= 2\cdot\left[e^u\right]_0^2 = 2\cdot\left[e^2 - e^0\right] = 2\cdot\left[e^2 - 1\right] \approx \underline{\underline{12{,}778}}$$

لسم – مفصل حل

$$\int_0^4 -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^4 e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$

بدلون: $u(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow dx = -4\cdot du$:

لاندې پولې: $u(0) = 0$ پورته پولې: $u(4) = -\frac{1}{4}\cdot 4 = -1$

4

$$-\frac{1}{2}\int_0^4 e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{-1}(-4)\cdot e^u\,du = 2\int_0^{-1} e^u\,du = -2\int_{-1}^0 e^u\,du$$
$$= -2\cdot\left[e^u\right]_{-1}^0 = -2\left[e^0 - e^{-1}\right] \approx \underline{\underline{-1{,}264}}$$

شپږم: ناټاکلی انټیګرال:

د طبيعي عدد وده د ګټې ګټې شميرنې په مرسته د يو کال وروسته د پانګې ګټه د $1 = 100\% = p$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot p = K_0 (1+p) = K_0 \cdot 2$$

د یو کال وروسته د نیم کال د پانګې په ګټوني د p = 1 / 2 سره

$$K_2 = K_0 \left(1+\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,25}}$$

د یو کال وروسته د میاشتې د پانګې په ګټوني د p = 1 / 12 سره

$$K_{12} = K_0 \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,61...}}$$

د یو کال وروسته په روځنۍ په بانګې ګټوني د p = 1 / 360 سره

$$K_{360} = K_0 \left(1+\frac{1}{360}\right)^{360} = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,7145...}}$$

د یو کال وروسته په ساعتي د پانګې په ګټوني د p = 1 / 8640 سره

$$K_{8640} = K_0 \left(1+\frac{1}{8640}\right)^{8640} = \underline{K_0 \cdot \underbrace{2,7181...}_{\approx e}}$$

د پانګې ګټونه د یوه کال وروسته د n ګټوني سره

$$K_n = K_0 \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

که په هره لحظه کې پیسې په ګټه واچول شي (یعني ناپاي ډېرې ګټونې ناپای$\to n$)،
نو نو له یو کال وروسته یوه پانګه لاس ته راوړي د :

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} K_0 \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot e$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا پانګه په e ضریب ډېرځلې شوه.

په ډېرو جبشمپریوکې یوه د e –تابعتکمه لري د Pi دکمیو ته ورته.

د اویلر د عدد ارزښت یو ناپای نه پریودیکي یعنې نه ببرته راګرځېدونکی لسمیز کسر(مات).

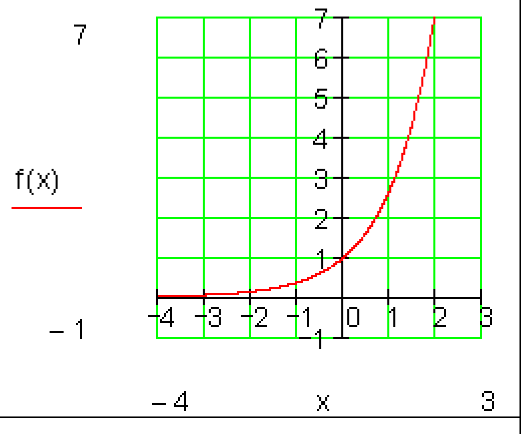
عدد e د اکسپوننشل تابع بنسټ جوړوي.

باور لري $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ د e تابع دابنه لري: $f(x) = a\cdot e^{b\cdot x}$

د e ارزښت په 3ځایونو راګرد شوی: e = 2,718

د e ارزښت په 9 ځایونو راګرد شوی: e = 2,718 281 828

د **e** -تابع ته ځیرنه

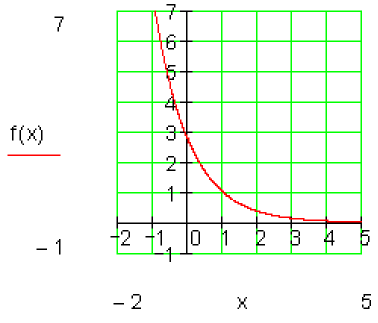
د e–تابع نورماله $f(x) = e^x$ د y-محور سره غوڅتکی $f(0) = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0 \mid 1)$ ژئ پوله ارزښت $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$	
د y – محور باندې هنداره شوی $f(x) = e^{-x}$ د y –محور سره غوڅتکی	

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(0) = e^{-0} = e^{0} = 1 \Rightarrow P_y(0|1)$$

ژئ پوله ارزښت

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$$



په یوه واحد(یوون) کښته لور ته راکښلی

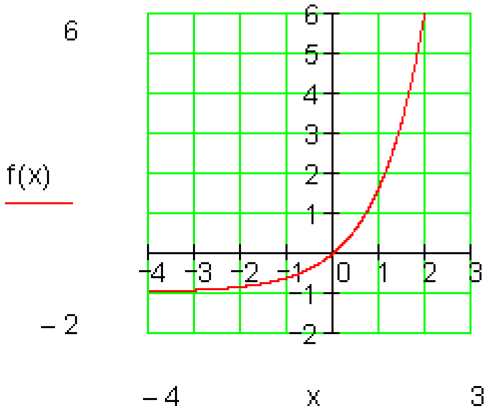
$$f(x) = e^{x} - 1$$

د y ـمحور سره غوڅتکی

$$f(0) = e^{0} - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow P_y(0|0)$$

ژئ پوله ارزښت

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{x} - 1\right) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(e^{x} - 1\right) = -1$$



په یوه واحد(یوون) کښته لور ته راکښلی

$$f(x) = e^{-(x-1)}$$

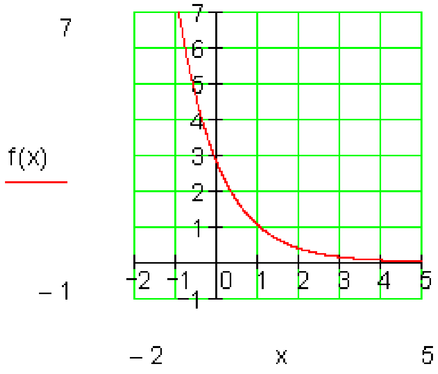
د y ـمحور سره غوڅتکی

$$f(0) = e^{-(0-1)} = e^{1} = e \Rightarrow P_y(0|e)$$

$$f(1) = e^{-(1-1)} = e^{0} = 1 \Rightarrow P(1|1)$$

ژئ پوله ارزښت

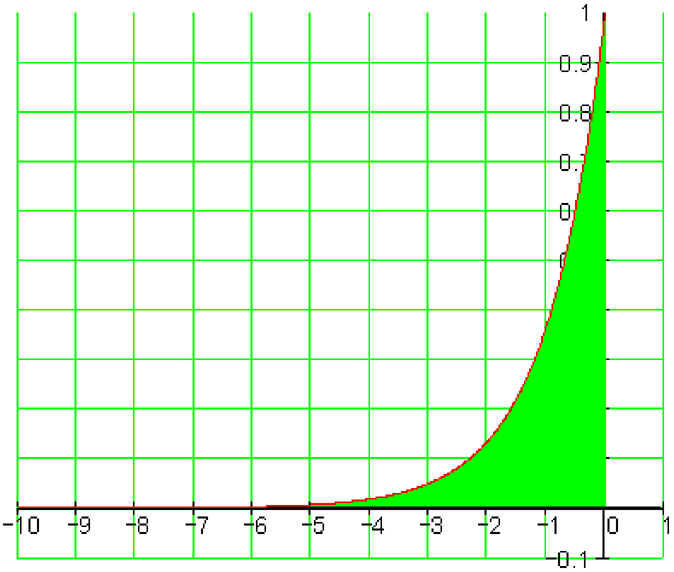
$$\lim_{x\to\infty} e^{-(x-1)} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{-(x-1)} = \infty$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

ناټاکلی انتیګرال

بیلګه:



د $f(x) = e^x$ د ګراف او د x-محور ترمنځ ټوله سطحه دې په $(-\infty ; 0]$ کې وشمیرل شي، يعنې

$$A = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$$

تراوسه د ټاکلي انتیګرال کښته او پورته پولې اعداد وو.

یعنې د انتیګریشنورشو محدوده یا رابنده وه.

اوس د انتیګرسشن ورشو نوره رابنده نه ده.

دا ډول انتیګرال نا څرګند یا نا معلوم یا نا اصلي انتیګرال بلل کیږي د نابند انتیګریشن ورشو سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا انتیګرال له ي درې بڼو څخه په یوه بڼه راتلی شي.

$\int_a^\infty f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$

د داسې ا نتیګرالونو شمیرلو لپاره سړی داسې مخ ته ځي:

لومړی سړی انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ د پای انتروال [a,b] لپاره شمیري، پسې د اړونده وېناو یا افادو څخه د $a \to -\infty$ یا $a \to \infty$ همداسې $b \to -\infty$ یا $b \to \infty$ لپاره پوله ارزښتونه جوړوي.

فورمال دا داسې لیدل کیږي:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^x f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\,dx$$

زموږ د سطحې شیمرلو لپاره دا په داسې توګه معلومیږي.

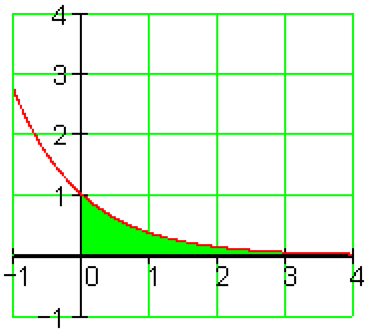
$$f(x) = e^x$$

$$A = \int_{-\infty}^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[e^x\right]_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^0 - e^a\right] = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^0}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^a}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا د y-محور باندې هنداره شوی د e-تابع د $f(x) = e^{-x}$ سره باید په انټروال $[0;\infty)$ کې برابره سطحه ولري.

$$A = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx$$

بدلون:

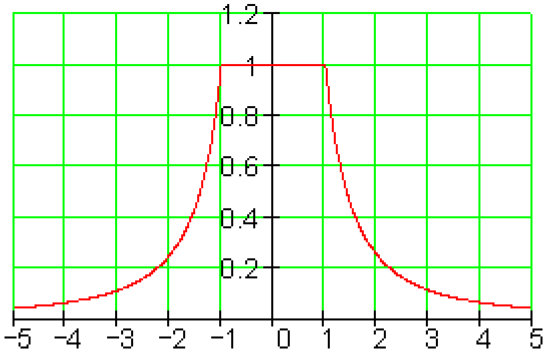
$$: u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0\,;\,u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b} e^u \frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b} e^u\,du = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^u\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^u\right]_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty}\left[e^0 - e^{-b}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} e^0 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$



د یوه ترکیبي یا ګډوله تابع لپاره بیلګه:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{für } x < -1 \\ 1 & \text{für } -1 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

د انټیګرال (په برخو) ټوټه کونه

$$A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترمخ راوړنه:

د سیومتري دلایلو له امله باور لري: $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ ۱

داسې چې دا نتیګرال فقط یو ځل باید وشمیرل شي

$$\int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = [1]-[-1] = 1+1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{b} = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0} - \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1} = 0-(-1) = \underline{\underline{1}}$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{2} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} = 1+2+1 = \underline{\underline{4}}$$

پوښتنې

د e- تابع سره انتیګرالونه

د سطحې مساحت شمېرنه

اول – لاندې انتیګرالونه وشمېری او اړونده سطحه یې کرښې ژکرښې کړی.

الف - $\int_{0}^{1} e^x\,dx$ ب - $\int_{-1}^{0} e^x\,dx$ پ – $\int_{-3}^{0} e^x\,dx$

دویم – لاندې انتیګرالونه وشمېری او اړونده سطحه یې کرښې ژکرښې کړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $\int_0^1 (e^x - 1)\, dx$ ب - $\int_0^3 (e^x - 1)\, dx$ پ - $\int_{-\infty}^0 e^x\, dx$

دریم – لاندې انتیګرالونه وشمېرى او اړونده سطحه يې کرښې ژکرښې کړى.

الف - $\int_0^1 e^{-x}\, dx$ ب - $\int_{-1}^2 e^{-x}\, dx$ پ - $\int_0^\infty e^{-x}\, dx$

څلورم – لاندې انتیګرالونه وشمېرى او اړونده سطحه يې کرښې ژکرښې کړى.

الف - $\int_0^3 e^{-(x-3)}\, dx$ ب - $\int_1^3 e^{-(x-2)}\, dx$ پ - $\int_3^\infty e^{-(x-3)}\, dx$

پنځم – لاندې انتیګرالونه وشمېرى.

الف - $\int_0^3 (e^x - x + 1)\, dx$ ب - $\int_0^4 3 \cdot e^{x+2}\, dx$ پ - $\int_0^5 (e^x + e^{-x})\, dx$

شپږم – د k د کوم ارزښت لپاره دا انتیګرال ورکړشوي ارزښتونه لري؟

الف - $\int_0^2 k \cdot e^x\, dx = \frac{1}{2} e$ ب - $\int_0^4 (e^x - k \cdot x)\, dx = 4$ پ - $\int_0^k e^x\, dx = 2 \cdot e$

اوم – لاندې انتیګرالونه وشمېرى.

الف - $\int_0^{\ln(2)} (e^{2x} - 2e^x)\, dx$ ب - $\int_0^{\ln(k)} (e^{2x} - k \cdot e^x)\, dx$ پ - $\int_0^4 \left(\frac{1}{4} e^x - 2e^{\frac{1}{2}x}\right) dx$

اتم – لاندې انتیګرالونه وشمېرى او اړونده سطحه يې کرښې - کرښې کړى.

الف –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = e^x - 1 \quad \text{für} \quad 0 \le x \le 2$$
$$g(x) = f(2) \cdot e^{-(x-2)} \quad \text{für} \quad 2 \le x < \infty$$
$$A = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^\infty g(x)\,dx$$

ب –

$$f(x) = e^x - 1 \quad \text{für} \quad 0 \le x \le 3$$
$$g(x) = f(3) \cdot e^{-(x-3)} \quad \text{für} \quad 3 \le x < \infty$$
$$A = \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^\infty g(x)\,dx$$

نهم – لاندې انتیګرالونه وشمېرى او اړونده سطحه یې کرښې - کرښې کړى.

الف -

$$f(x) = e^x - 1 \quad \text{für} \quad 0 \le x \le 4$$
$$g(x) = f(4) \cdot e^{-(x-4)} \quad \text{für} \quad 4 \le x < \infty$$
$$A = \int_0^4 f(x)\,dx + \int_4^\infty g(x)\,dx$$

ب -

$$f(x) = e^x - 1 \quad \text{für} \quad 0 \le x \le k$$
$$g(x) = f(k) \cdot e^{-(x-k)} \quad \text{für} \quad k \le x < \infty$$
$$A = \int_0^k f(x)\,dx + \int_k^\infty g(x)\,dx$$

حلونه

د e تابع انتیګرالونه ا

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحي شمېرنه

نیجې او مفصل حلونه

نتیجې

اول -

الف - $\int_0^1 e^x\,dx \approx 1,718$ ب - $\int_{-1}^0 e^x\,dx \approx 0,632$ پ - $\int_{-3}^0 e^x\,dx \approx 0,905$

دویم -

الف - $\int_0^1 \left(e^x - 1\right)dx \approx 0,718$ ب - $\int_0^3 \left(e^x - 1\right)dx \approx 16,086$ پ - $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = 1$

دریم -

الف - $\int_0^1 e^{-x}\,dx \approx 0,632$ ب - $\int_{-1}^2 e^{-x}\,dx \approx 2,583$ پ - $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$

څلورم -

الف - $\int_0^3 e^{-(x-3)}\,dx \approx 19,086$ ب - $\int_1^3 e^{-(x-2)}\,dx \approx 2,350$ پ - $\int_0^\infty e^{-(x-3)}\,dx = 1$

پنځم -

الف - $\int_0^3 \left(e^x - x + 1\right)dx \approx 17,586$ ب - $\int_0^4 3\cdot e^{x+2}\,dx \approx 1188,119$

پ - $\int_0^5 \left(e^x + e^{-x}\right)dx \approx 148,406$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

شپږم -

الف - $\int_0^2 k\cdot e^x\,dx = \frac{1}{2}\cdot e \Leftrightarrow k \approx 0{,}213$ ب - $\int_0^4 \left(e^x - k\cdot x\right)dx = 4 \Leftrightarrow k \approx 6{,}2$ پ - $\int_0^k e^x\,dx = 2e \Leftrightarrow k \approx 1{,}862$

اوم -

الف - $$\int_0^{\ln(2)} \left(e^{2x} - 2e^x\right)dx = \int_0^{\ln(2)} e^{2x}\,dx - 2\cdot\int_0^{\ln(2)} e^x\,dx = -\frac{1}{2}$$

ب - $$\int_0^{\ln(k)} \left(e^{2x} - ke^x\right)dx = \int_0^{\ln(k)} e^{2x}\,dx - k\cdot\int_0^{\ln(k)} e^x\,dx = -\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2}$$

پ -

$$\int_0^4 \left(\frac{1}{4}e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}\right)dx = \frac{1}{4}\cdot\int_0^4 e^x\,dx - 2\cdot\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx = \frac{1}{4}e^4 - 4e^2 + \frac{15}{4} \approx -12{,}175$$

اتم - الف - $$\int_0^2 \left(e^x - 1\right)dx + \int_2^\infty f(2)\cdot e^{-(x-2)}\,dx = 2e^2 - 4 \approx 10{,}778$$

ب - $$\int_0^3 \left(e^x - 1\right)dx + \int_3^\infty f(3)\cdot e^{-(x-3)}\,dx = 2e^3 - 5 \approx 35{,}171$$

نهم - الف - $$\int_0^4 \left(e^x - 1\right)dx + \int_4^\infty f(4)\cdot e^{-(x-4)}\,dx = 2e^4 - 6 \approx 103{,}196$$

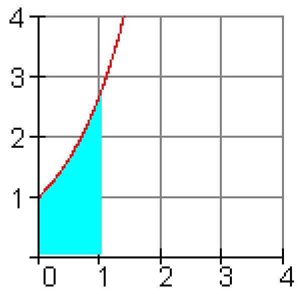
ب – $$\int_0^k \left(e^x - 1\right)dx + \int_k^\infty f(k)\cdot e^{-(x-k)}\,dx = 2e^k - k - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مفصل حلونه:

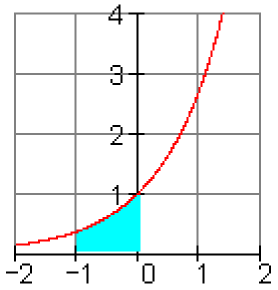
لومړی –

الف –



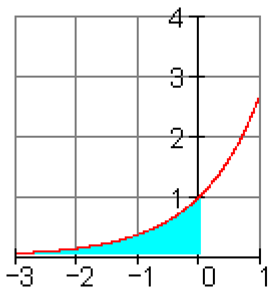
$$\int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1 \approx 1,718$$

ب –



$$\int_{-1}^0 e^x\,dx = e^x\Big|_{-1}^0 = e^0 - e^{-1} = 1 - e^{-1} \approx 0,632$$

پ –

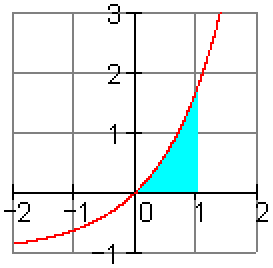


$$\int_{-3}^0 e^x\,dx = e^x\Big|_{-3}^0 = e^0 - e^{-3} = 1 - e^{-3} \approx 0,950$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

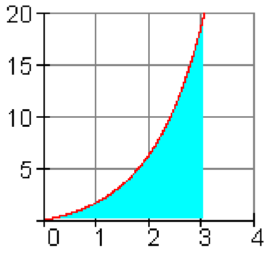
دويم:

الف-



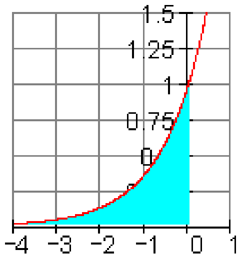
$$\int_0^1 (e^x - 1)\,dx$$
$$= e^x - x \Big|_0^1$$
$$= e^1 - 1 - (e^0 - 0)$$
$$= e - 1 - 1 \approx 0{,}718$$

ب –



$$\int_0^3 (e^x - 1)\,dx$$
$$= e^x - x \Big|_0^3$$
$$= e^3 - 3 - (e^0 - 0)$$
$$= e^3 - 3 - 1 \approx 16{,}086$$

پ –



$$\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^x\,dx$$

لومړی بې له پوله ارزښت جوړولو شمېرنه

$$\int_a^0 e^x\,dx = e^x \Big|_a^0 = e^0 - e^a = 1 - e^a$$

د پوله ارزښت جوړول

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty} (1 - e^a)$$
$$= 1 - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^a}_{0} = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^0 e^x\,dx = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم:

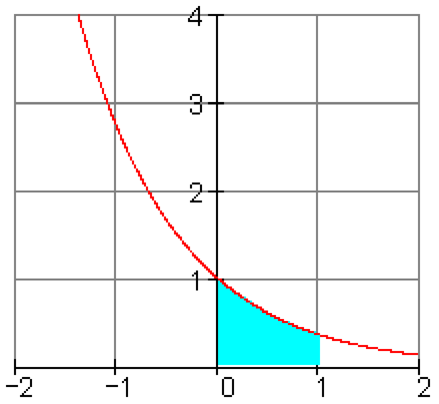
الف-

$\int_0^1 e^{-x}\, dx$ I د بدلون له لارې حل

بدلون $: u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې یا کښته پوله: $u(0) = 0$ پورته بوله : $u(1) = -1$

$$\Rightarrow -\int_0^{-1} e^u\, du = \int_{-1}^{0} e^u\, du = e^u \Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632$$



ب –

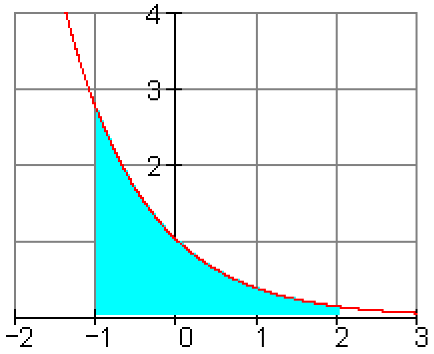
$\int_{-1}^{2} e^{-x}\, dx$ د بدلون له لارې حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون: $u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې بوله : $u(-1) = -(-1) = 1$: پورته پوله: $u(2) = -2$

$$\Rightarrow -\int_{1}^{-2} e^{u}\, du = \int_{-2}^{1} e^{u}\, du = e^{u}\Big|_{-2}^{1} = e^{1} - e^{-2} = e - e^{-2} \approx 2,583$$



پ –

$\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{a \to \infty} \int_{0}^{a} e^{-x}\, dx$ حلو لومړی بې لهه پولپجوړولو.

$\int_{0}^{a} e^{-x}\, dx$ د بدلون له لارې حل

بدلون $u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

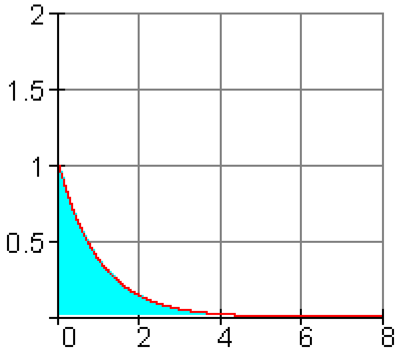
(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې یا کښته پوله: $u(0) = -0 = 0$ پورته پوله: $u(a) = -a$:

$$\Rightarrow -\int_0^{-a} e^u\,du = \int_{-a}^{0} e^u\,du = e^u\Big|_{-a}^{0} = e^0 - e^{-a} = 1 - e^{-a}$$

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}\,dx = 1 - \underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a}}_{0} = 1 \Rightarrow \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$$

پوله تاکنه:



خلورم: الف-

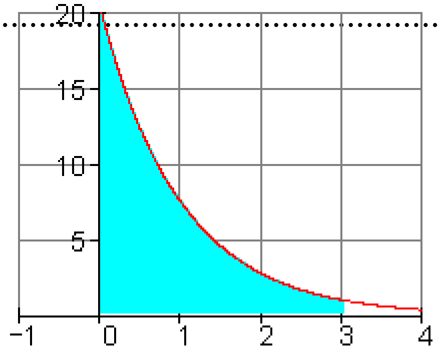
د بدلون له لارې حل $\int_0^3 e^{-(x-3)}\,dx$ I

بدلون $: u(x) = -(x-3) = -x+3 \Rightarrow u'(x) = \dfrac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې بوله : $u(0) = -(0-3) = 3$: پورته پوله: $u(3) = -(3-3) = 0$:

$$\Rightarrow -\int_3^0 e^u\,du = \int_0^3 e^u\,du = e^u\Big|_0^3 = e^3 - e^0 = e^3 - 1 \approx 19{,}086$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

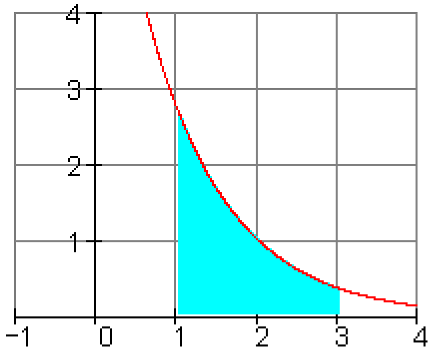


ب – $\int_1^3 e^{-(x-2)}\,dx$ I د بدلون له لارې حل

بدلون $: u(x) = -(x-2) = -x+2 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې پوله : $u(1) = -(1-2) = 1$: پورته پوله: $u(3) = -(3-2) = -1$

$$\Rightarrow -\int_1^{-1} e^u\,du = \int_{-1}^{1} e^u\,du = e^u\,\Big|_{-1}^{1} = e^1 - e^{-1} = e - e^{-1} \approx 2{,}350$$



پ-

$$\int_3^{\infty} e^{-(x-3)}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_3^{a} e^{-(x-3)}\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

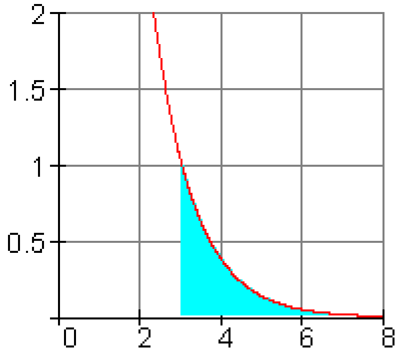
$$\int_3^a e^{-(x-3)}\,dx$$

د بدلون له لارې حل

بدلون: $u(x) = -(x-3) = -x+3 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې پوله : $u(3) = -(3-3) = 0$ پورته پوله: $u(a) = -a+3$

پوله جوړونه: $\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-(x-3)}\,dx = 1 - \underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a+3}}_{0} = 1 \Rightarrow \int_0^\infty e^{-(x-3)}\,dx = 1$



پنځم: الف -

$$\int_0^3 (e^x - x + 1)\,dx = e^x - \frac{1}{2}x^2 + x\,\Big|_0^3$$

$$= e^3 - \frac{1}{2}\cdot 9 + 3 - \left(e^0 - \frac{1}{2}\cdot 0 + 0\right)$$

$$= e^3 - \frac{9}{2} + 3 - 1 = e^3 - \frac{5}{2} \approx 17{,}586$$

ب –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^4 3\cdot e^{x+2}\,dx = 3\cdot\int_0^4 e^{x+2}\,dx$$

د بدلون له لارې حل

بدلون: $u(x)=x+2 \Rightarrow u'(x)=\frac{du}{dx}=1 \Leftrightarrow dx=du$

لاندې پوله : $u(0)=0+2=2$ پورته پوله: $u(4)=4+2=6$:

$$\Rightarrow 3\cdot\int_2^6 e^u\,du = 3\cdot\int_2^6 e^u\,du = 3\cdot e^u\,\Big|_2^6 = 3\cdot\left(e^6-e^2\right)\approx 1188{,}119$$

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

پ –

$$\int_0^5\left(e^x+e^{-x}\right)dx = \underbrace{\int_0^5 e^x\,dx}_{I} + \underbrace{\int_0^5 e^{-x}\,dx}_{II} = I+II$$

$$I:\int_0^5 e^x\,dx = e^x\,\Big|_0^5 = e^5-e^0 = e^5-1$$

$$II:\int_0^5 e^{-x}\,dx =$$

= د بدلون له لارې حل

بدلون $:u(x)=-x \Rightarrow u'(x)=\frac{du}{dx}=-1 \Leftrightarrow dx=-du$

لاندې پوله : ، $u(0)=0$ پورته پوله: $u(5)=-5$

$$\Rightarrow -\int_0^{-5} e^u\,du = \int_{-5}^0 e^u\,du = e^u\,\Big|_{-5}^0 = e^0-e^{-5} = 1-e^{-5}$$

$$\int_0^5\left(e^x+e^{-x}\right)dx = I+II = e^5-1+1-e^{-5} = e^5-e^{-5}\approx 148{,}406$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم:

الف:

$$\int_0^2 k\cdot e^x\,dx=\frac{1}{2}\cdot e$$

$$\int_0^2 k\cdot e^x\,dx=k\cdot\int_0^2 e^x\,dx=k\cdot e^x\Big|_0^2=k\cdot\left(e^2-e^0\right)=k\cdot\left(e^2-1\right)$$

برابر کیږدی: $k\cdot\left(e^2-1\right)=\frac{1}{2}\cdot e\,|:\left(e^2-1\right)$

$$\Leftrightarrow k=\frac{\frac{1}{2}\cdot e}{\left(e^2-1\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e}{e^2-1}\approx 0,213$$

ب –

$$\int_0^4\left(e^x-k\cdot x\right)dx=4$$

$$\int_0^4\left(e^x-k\cdot x\right)dx=e^x-\frac{1}{2}kx^2\Big|_0^4=e^4-\frac{1}{2}k\cdot 16-\left(e^0-0\right)=e^4-8k-1$$

برابر کیږدی: $e^4-8k-1=4\,|-e^4+1$

$$\Leftrightarrow -8k=-e^4+5\,|:(-8)$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{-e^4+5}{-8}=\frac{1}{8}e^4-\frac{5}{8}\approx 6,2$$

پ - لاند المانی: برابر کیږدی

$$\int_0^k e^x\,dx=2e$$

$$\int_0^k e^x\,dx=e^x\Big|_0^k=e^k-e^0=e^k-1$$

gleichsetzen : $e^k-1=2e\,|+1$

$$\Leftrightarrow e^k=2e+1\,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^k\right)=\ln(2e+1)$$

$$\Leftrightarrow k\cdot\underbrace{\ln(e)}_{1}=\ln(2e+1)$$

$$\Leftrightarrow k=\ln(2e+1)\approx 1,862$$

اووم: حل : الف-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{\ln(2)} \left(e^{2x} - 2e^x\right) dx = \underbrace{\int_0^{\ln(2)} e^{2x}\, dx}_{I} - 2\cdot \underbrace{\int_0^{\ln(2)} e^x\, dx}_{II} = I - 2\cdot II$$

د بدلون له لارې حل = $I: \int_0^{\ln(2)} e^{2x}\, dx =$

بدلون: $: u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}du$

لاندې پوله : $u(0)=2.0=0$ پورته پوله: $u(\ln(2))=2.\ln(2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{2\cdot\ln(2)} e^u\, du = \frac{1}{2}e^u \Big|_0^{2\cdot\ln(2)} = \frac{1}{2}\left(e^{2\cdot\ln(2)} - e^0\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\underbrace{e^{\ln(2)}}_{2}\right)^2 - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2^2 - 1\right) = \frac{3}{2}$$

$$II: \int_0^{\ln(2)} e^x\, dx = e^u \Big|_0^{2\cdot\ln(2)} = \underbrace{e^{\ln(2)}}_{2} - e^0 = 2 - 1 = 1$$

$$\int_0^{\ln(2)} \left(e^{2x} - 2e^x\right) dx = I - 2\cdot II = \frac{3}{2} - 2\cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

ب-

$$\int_0^{\ln(k)} \left(e^{2x} - ke^x\right) dx = \underbrace{\int_0^{\ln(k)} e^{2x}\, dx}_{I} - k\cdot \underbrace{\int_0^{\ln(2)} e^x\, dx}_{II} = I - k\cdot II$$

د = بدلون له لارې حل $I: \int_0^{\ln(k)} e^{2x}\, dx =$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون:
$$u(x)=2x \Rightarrow u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \Leftrightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

لاندې پوله : u(0)=2.0=0 پورته پوله: u(ln(k)= 2.ln(k)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{2\cdot\ln(k)} e^u\,du=\frac{1}{2}e^u\Big|_0^{2\cdot\ln(k)}=\frac{1}{2}\left(e^{2\cdot\ln(k)}-e^0\right)=\frac{1}{2}\left[\Big(\underbrace{e^{\ln(k)}}_{k}\Big)^2-1\right]=\frac{1}{2}\left(k^2-1\right)$$

$$II:\int_0^{\ln(k)} e^x\,dx=e^u\Big|_0^{2\cdot\ln(k)}=\underbrace{e^{\ln(k)}}_{k}-e^0=k-1$$

$$\int_0^{\ln(k)}\left(e^{2x}-ke^x\right)dx=I-k\cdot II=\frac{1}{2}\left(k^2-1\right)-k\cdot(k-1)=-\frac{1}{2}k^2+k-\frac{1}{2}$$

پ-

$$\int_0^4\left(\frac{1}{4}e^x-2\cdot e^{\frac{1}{2}x}\right)dx=\frac{1}{4}\cdot\underbrace{\int_0^4 e^x\,dx}_{I}-2\cdot\underbrace{\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx}_{II}=\frac{1}{4}\cdot I-2\cdot II$$

$$I:\int_0^4 e^x\,dx=e^x\Big|_0^4=e^4-e^0=e^4-1$$

$$II:\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx=$$

د بدلون له لارې حل

بدلون:
$$u(x)=\frac{1}{2}x \Rightarrow u'(x)=\frac{du}{dx}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow dx=2du$$

لاندې پوله : $u(0)=\frac{1}{2}\cdot 0=0$ پورته پوله: $u(4)=\frac{1}{2}\cdot 4=2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow 2\cdot\int_0^2 e^u\,du = 2\cdot e^u\Big|_0^2 = 2\left(e^2-e^0\right) = 2e^2-2$$

$$\int_0^4\left(\frac{1}{4}e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}\right)dx = \frac{1}{4}\cdot I - 2\cdot II = \frac{1}{4}\cdot\left(e^4-1\right) - 2\cdot\left(2e^2-2\right)$$

$$= \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{4} - 4e^2 + 4 = \frac{1}{4}e^4 - 4e^2 + \frac{15}{4} \approx -12{,}157$$

اتم: الف-

$$f(x) = e^x - 1 \qquad g(x) = f(2)\cdot e^{-(x-2)} \text{ mit } f(2) = e^2-1$$

$$A = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^\infty g(x)\,dx = \underbrace{\int_0^2\left(e^x-1\right)dx}_{I} + \left(e^2-1\right)\underbrace{\int_2^\infty e^{-(x-2)}\,dx}_{II} = I + \left(e^2-1\right)\cdot II$$

$$I: \int_0^2\left(e^x-1\right)dx = e^x - x\Big|_0^2 = e^2 - 2 - \left(e^0-0\right) = e^2-3$$

$$II: \int_2^\infty e^{-(x-2)}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_2^a e^{-(x-2)}\,dx$$

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

د بدلون له لارې حل $\int_2^a e^{-(x-2)}\,dx$

بدلون:

$$u(x) = -(x-2) = -x+2 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

لاندې پوله : $u(2) = -(2-2) = 0$ پورته پوله: $u(a) = -a+2$

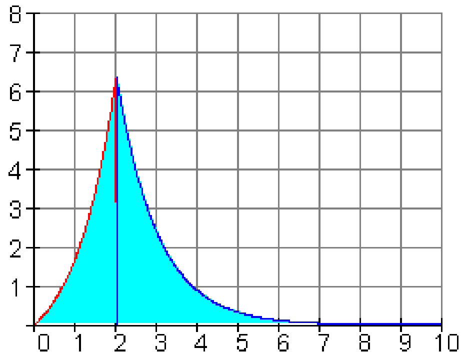
$$\Rightarrow -\int_0^{-a+2} e^u\,du = \int_{-a+2}^0 e^u\,du = e^u\Big|_{-a+2}^0 = e^0 - e^{-a+2} = 1 - e^{-a+2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوله ارزښت جوړونه

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-(x-2)}\,dx = 1-\underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a+2}}_{0} = 1 \Rightarrow \int_2^\infty e^{-(x-2)}\,dx = 1$$

$$A = I+\left(e^2-1\right)\cdot II = e^2-3+\left(e^2-1\right)\cdot 1 = e^2-3+e^2-1 = 2e^2-4 \approx 10{,}778$$



ب- $g(x) = f(3)\cdot e^{-(x-3)}$ د $f(x) = e^x-1$ $f(3) = e^3-1$ سره

$$A = \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^\infty g(x)\,dx = \underbrace{\int_0^3 \left(e^x-1\right)dx}_{I} + \left(e^3-1\right)\underbrace{\int_3^\infty e^{-(x-3)}\,dx}_{II} = I+\left(e^3-1\right)\cdot II$$

$$I: \int_0^3 \left(e^x-1\right)dx = e^x - x\,\Big|_0^3 = e^3-3-\left(e^0-0\right) = e^3-4$$

$$II: \int_3^\infty e^{-(x-3)}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_3^a e^{-(x-3)}\,dx\ L$$

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

$$\int_3^a e^{-(x-3)}\,dx$$

د بدلون له لارې حل

لاندې پوله : $u(3) = -(3-3) = 0$ پورته پوله: $u(a) = -a+3$

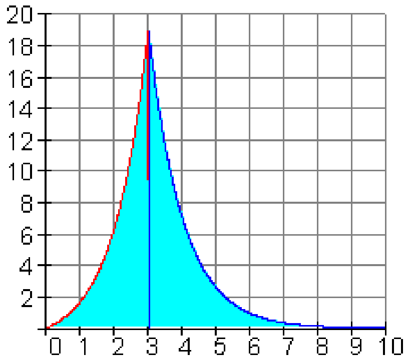
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow -\int_{0}^{-a+3} e^{u}\,du = \int_{-a+3}^{0} e^{u}\,du = e^{u}\Big|_{-a+3}^{0} = e^{0} - e^{-a+3} = 1 - e^{-a+3}$$

پوله جوړونه

$$\lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a} e^{-(x-3)}\,dx = 1 - \underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a+3}}_{0} = 1 \Rightarrow \int_{3}^{\infty} e^{-(x-3)}\,dx = 1$$

$$A = I + \left(e^{3}-1\right)\cdot II = e^{3} - 4 + \left(e^{3}-1\right)\cdot 1 = e^{3} - 4 + e^{3} - 1 = 2e^{3} - 5 \approx 35{,}171$$



نهم:

الف-

$$f(x) = e^{x} - 1 \qquad g(x) = f(4)\cdot e^{-(x-4)} \text{ mit } f(4) = e^{4} - 1$$

$$A = \int_{0}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{\infty} g(x)\,dx = \underbrace{\int_{0}^{4}\left(e^{x}-1\right)dx}_{I} + \left(e^{4}-1\right)\underbrace{\int_{4}^{\infty} e^{-(x-4)}\,dx}_{II} = I + \left(e^{4}-1\right)\cdot II$$

$$I: \int_{0}^{4}\left(e^{x}-1\right)dx = e^{x} - x \Big|_{0}^{4} = e^{4} - 4 - \left(e^{0} - 0\right) = e^{4} - 5$$

$$II: \int_{4}^{\infty} e^{-(x-4)}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{4}^{a} e^{-(x-4)}\,dx \;L$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

$\int_{4}^{a} e^{-(x-4)}\, dx$ L

د بدلون له لارې حل

بدلون:

$$u(x) = -(x-4) = -x+4 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

لاندې پوله : $u(4) = -(4-4) = 0$ پورته پوله: $u(a) = -a+4$

$$\Rightarrow -\int_{0}^{-a+4} e^{u}\, du = \int_{-a+4}^{0} e^{u}\, du = e^{u}\,\Big|_{-a+4}^{0} = e^{0} - e^{-a+4} = 1 - e^{-a+4}$$

پوله ارزښت جوړونه

$$\lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a} e^{-(x-4)}\, dx = 1 - \underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a+4}}_{0} = 1 \Rightarrow \int_{4}^{\infty} e^{-(x-4)}\, dx = 1$$

$$A = I + \left(e^{4}-1\right)\cdot II = e^{4} - 5 + \left(e^{4}-1\right)\cdot 1 = e^{4} - 5 + e^{4} - 1 = 2e^{4} - 6 \approx 103{,}196$$

ب-

$$f(x) = e^{x} - 1 \qquad g(x) = f(k)\cdot e^{-(x-k)} \text{ mit } f(k) = e^{k} - 1$$

$$A = \int_{0}^{k} f(x)\, dx + \int_{k}^{\infty} g(x)\, dx = \underbrace{\int_{0}^{k}\left(e^{x}-1\right) dx}_{I} + \left(e^{k}-1\right)\underbrace{\int_{k}^{\infty} e^{-(x-k)}\, dx}_{II} = I + \left(e^{k}-1\right)\cdot II$$

$$I: \int_{0}^{k}\left(e^{x}-1\right) dx = e^{x} - x\,\Big|_{0}^{k} = e^{k} - k - \left(e^{0} - 0\right) = e^{k} - k - 1$$

$$II: \int_{k}^{\infty} e^{-(x-k)}\, dx = \lim_{a\to\infty}\int_{k}^{a} e^{-(x-k)}\, dx \text{ L}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

$$\int_k^a e^{-(x-k)}\,dx$$

د بدلون له لارې حل

بدلون: $u(x)=-(x-k)=-x+k \Rightarrow u'(x)=\dfrac{du}{dx}=-1 \Leftrightarrow dx=-du$

لاندې پوله : $u(k)=-(k-k)=0$ ؛ پورته پوله: $u(a)=-a+k$

$$\Rightarrow -\int_0^{-a+k} e^u\,du=\int_{-a+k}^{0} e^u\,du=e^u\,\Big|_{-a+k}^{0}=e^0-e^{-a+k}=1-e^{-a+k}$$

پوله ارزښت جوړونه

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-(x-k)}\,dx=1-\underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a+k}}_{0}=1\Rightarrow\int_k^\infty e^{-(x-k)}\,dx=1$$

$$A=I+\left(e^k-1\right)\cdot II=e^k-k-1+\left(e^k-1\right)\cdot 1=e^k-k-1+e^k-1=2e^k-k-2$$

پوښتنې

مشتق – او انتیګرالشمیرنه

ګډې وډې پوښتنې

لومړی - د لاندې پوتنخ – او لوګاریتم ترمونو بڼه بدله کړی د توان – او لوګاریتم قوانینو د استعمال له لارې .

الف - $\left(e^x+e^{-x}\right)^2$ ب – $\left(e^x-e^{-x}+5\right)\cdot e^x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم – د اکسپوننشل مساوات تاسو ته معلومې لارې حل کړی.

الف - $6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0$ ب - $\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1$

دریم – د لاندې توابعو مشتق وشمېرئ.

الف - $f(x)=e^{-4x}-e^{4x}$ ب - $f(x)=\frac{3}{2}e^{-5x^2-3x}$

څلورم – د لاندې توابعو انتیګرال وشمېرئ او د مشتق سره یې نتیجې کنترول کړی.

الف - $f(x)=\frac{1}{16}\left(x^2-3e^x\right)$ ب - $f(x)=x^3-2x^2+4x+\frac{3}{x}$

پنځم – تاسو ته د معلوم قانون له مخې د لاندې توابعو مشتق وشمېرئ.

الف - $f(x)=(x+a)^2-e^{2x-3}$ ب - $f(x)=\left(1-e^{ax}\right)^2$

شپږم - لاندې انتیګرالونه وشمېرئ.

الف - $\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ ب - $\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$

اوم – $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ ı تابع ورکړ شوې.

الف – د [5 ; 4-] لپاره ارزښت جدول وکاږئ او ګراف یې ګرښیز کړی. د y - محور، له تیتتکي او x –محور څخه تېرېدوکی y - محور سره غبرګي کرښي ترمنځ سطحه په نخښنه کړی.

ب – نسپي مینیموم $T(x_e \mid f(x_e))$ وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ - د الف لاندې په نخښه شوې سطحه وشمېرئ.

اتم - د 3 –مې درجې تام راشنل تابع د x -محور په (0 | 4-) P کې غوڅوي او په (0 | 2) T کې یو تیټتکی لري. په P تانجنت د د y - محور په (48 | 0) P_y کې غوڅوي. د f(x) تابع مساوات او د t(x) تانجنت مساوات وشمېرئ او ګراف یې کرښې-کرښې کړئ.

غوښتنه:

ټول هوښیا-یا راشنل توابع یابلواک، ټیټ ټکي، محورغوڅټکي، مشتق، تانجنتمساوات، ګاوس-الګوریتم.

نهم – د $f(x)=\frac{5}{4}x^4-3x^2-8$ تابع مساوات ورکړشوي دي. انحرافي ارزښتونه وشمېرئ او د ګراف او x –محور منځ سطحه وشمېرئ، چېرته چې صفرځایونه د انتیګرال پولې جوړوي. ګراف یې وکاږئ او شمېرلې سطحه یې په نخښه کړئ.

غښتنې:

افراطي ارزښتونه، صفرځایونه، بیمربع مساوات، ټاکلی انتیګرال.

حلونه (اوبیونې)

مشتق – او انتیګرالشمیرنه

نتیجې او مفصل حلونه.

نتیجې:

اول – نتیجې

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}=e^{2x}+e^{-2x}+2$

ب - $\left(e^{x}-e^{-x}+5\right)\cdot e^{x}=e^{2x}+5\cdot e^{x}-1$

دویم – نتیجې

الف - $6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0\Rightarrow x=1-\ln(2)$

ب- $\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1\Rightarrow x=\frac{1}{4}\ln(4+2e)$

دریم – نتیجې

الف - $f(x)=e^{-4x}-e^{4x}\Rightarrow f'(x)=-4\left(e^{-4x}+e^{4x}\right)$

ب - $f(x)=\frac{3}{2}e^{-5x^{2}-3x}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}(-10x-3)e^{-5x^{2}-3x}$

$$f(x)=\frac{1}{16}\left(x^{2}-3e^{x}\right)\Rightarrow\int f(x)\,dx=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}x^{3}-3e^{x}\right]+C$$

$$f(x)=x^{3}-2x^{2}+4x+\frac{3}{x}\Rightarrow\int f(x)\,dx=\frac{1}{4}x^{4}-\frac{2}{3}x^{3}+2x^{2}+3\cdot\ln|x|+C$$

پنځم - الف - $f(x)=(x+a)^{2}-e^{2x-3}\Rightarrow f'(x)=2\left(x+a-e^{2x-3}\right)$

ب - $f(x)=\left(1-e^{ax}\right)^{2}\Rightarrow f'(x)=-2a\cdot e^{ax}\left(1-e^{ax}\right)$

شپږم – نتیجې:

الف - $\int_{0}^{4}e^{\frac{1}{2}x}\,dx=2\cdot e^{2}-2\approx 12,778$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب - $\int_{1}^{2} e^{4-2x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot e^{2} - \frac{1}{2} \approx 3,195$

اوم – نتیجې:

د $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ لپاره ارزښت جدول.

الف -

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
f (x)	7,46	4,59	2,9	1,95	1,5	1,43	1,73	2,46	3,83	6,17

ب –ټیټتکی: $T\left(\ln(2) \mid \sqrt{2}\right)$

پ – په نخښه شوې سطحه 1FE (FE د سطحې واحد) ده

اتم – نتیجې:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^{3} - 4x + \frac{16}{3};\ t(x) = 12x + 48$$

نهم – نتیجې:

$$P_{Max}(0 \mid -8);\ P_{Min_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5}\right);\ P_{Min_2}\left(\sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5}\right)$$

سطحه: $A = |-32| = 32\,FE$ (FE د سحې یوونونه یا واحدونه)

مفصل ځوابونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی:

$$\underbrace{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}_{\text{1. bin. Formel}} = e^{2x}+2\cdot e^{x}\cdot e^{-x}+e^{-2x}$$

الف- $$= \underline{\underline{e^{2x}+e^{-2x}+2}}$$

$$\left(e^{x}-e^{-x}+5\right)\cdot e^{x} = e^{2x}-\underbrace{e^{-x}\cdot e^{x}}_{1}+5\cdot e^{x}$$

$$= e^{2x}-1+5\cdot e^{x}$$

ب – $$= \underline{\underline{e^{2x}+5\cdot e^{x}-1}}$$

دویم:

الف –

$$6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0\,|\,-6$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}e^{2-2x}=-6\,|\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{2-2x}=4\,|\,\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2-2x}\right)=\ln(4)$$

$$\Leftrightarrow 2-2x=\ln(4)$$

د $\ln(4)=\ln\left(2^{2}\right)=2\cdot\ln(2)$ له امله باور لري:

$$\Leftrightarrow 2-2x=2\cdot\ln(2)\,|\,-2$$

$$\Leftrightarrow -2x=2\cdot\ln(2)-2\,|:(-2)$$

$$\Leftrightarrow x=-\ln(2)+1=\underline{\underline{1-\ln(2)\approx 0{,}307}}$$

ب -

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{e}{2} = 1 \mid + \frac{e}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{4x} = 1 + \frac{e}{2} \mid \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow e^{4x} = 4 + 2e \mid \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{4x}\right) = \ln(4 + 2e)$$

$$\Leftrightarrow 4x = \ln(4 + 2e) \mid : 4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(4 + 2e)}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{\frac{1}{4}\ln(4 + 2e) \approx 0{,}561}}$$

دریم:

الف -

$$f(x) = e^{-4x} - e^{4x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -4 \cdot e^{-4x} - 4 \cdot e^{4x}$$

$$= \underline{\underline{-4\left(e^{-4x} + e^{4x}\right)}}$$

ب -

$$f(x) = \frac{3}{2}e^{-5x^2 - 3x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = (-10x - 3) \cdot \frac{3}{2}e^{-5x^2 - 3x}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{3}{2}(10x + 3)e^{-5x^2 - 3x}}}$$

$$f(x) = \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^x\right)$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^x\right)dx$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(x^2 - 3e^x\right)dx$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}x^3 - 3e^x\right] + C}}$$

څلورم: الف –

$$F'(x) = \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^x\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب ــ

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow F(x) = \int\left(x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3\cdot\ln|x| + C$$

یادونه: $\int\frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$F'(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 3\cdot\frac{1}{x}$$

پنځم:

ب ــ	الف ــ
ب ــ $f(x) = \left(1-e^{ax}\right)^2$ د زنځیري قانون سره $\Rightarrow f'(x) = \underbrace{2\cdot\left(1-e^{ax}\right)}_{\text{äußere Abl.}}\cdot\underbrace{a\cdot\left(-e^{ax}\right)}_{\text{innere Abl.}}$ دننی مشتق دباندنی مشتق $= -2a\cdot e^{ax}\left(1-e^{ax}\right)$	الف ــ $f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3}$ $\Rightarrow f'(x) = 2\cdot(x+a)\cdot 1 - 2\cdot e^{2x-3}$ $= 2x + 2a - 2\cdot e^{2x-3}$ $= 2\left(x + a - e^{2x-3}\right)$

شپږم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف –

$$\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx \quad \text{Substitution: } u(x) = \frac{1}{2}x$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2du$$

$$\text{ug: } u(0) = 0\,;\ \text{og: } u(4) = 2$$

$$2\cdot\int_0^2 e^u\,du = 2\cdot e^u\Big|_0^2 = 2\cdot e^2 - 2\cdot e^0$$

$$= 2\cdot e^2 - 2 \approx 12{,}778$$

ب – بدلون

$$\int_1^2 e^{4-2x}\,dx \quad \text{Substitution: } u(x) = 4 - 2x$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = -2 \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}du$$

$$\text{ug: } u(1) = 2\,;\ \text{og: } u(2) = 0$$

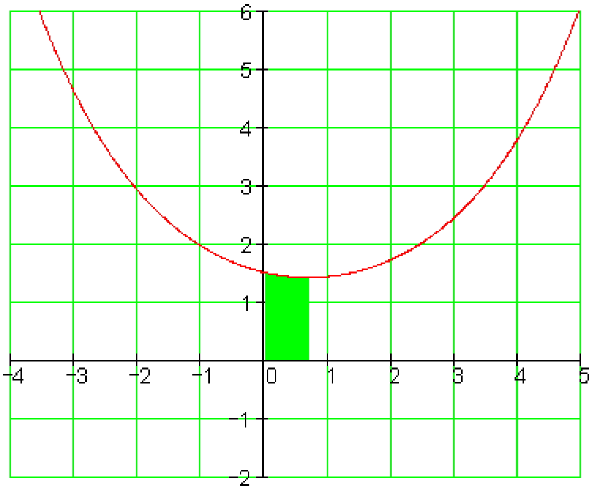
$$-\frac{1}{2}\cdot\int_2^0 e^u\,du = \frac{1}{2}\cdot\int_0^2 e^u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot e^u\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\cdot e^2 - \frac{1}{2}\cdot e^0$$

$$= \frac{1}{2}\cdot e^2 - \frac{1}{2} \approx 3{,}95$$

اووم: الف – د $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ لپاره ارزښت جدول

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	7,46	4,59	2,9	1,95	1,5	1,43	1,73	2,46	3,83	6,17



(c) ketabton.com: The Digital Library

ب –   د نسبي مینیموم یا خورا کوچني ارزښت شمیرنه:

$$f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}=0\,|+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\;|\cdot 4$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x}=2e^{-\frac{1}{2}x}\;|\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow e^{x}=2\,|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow x=\ln(2)$$

افراطي ځای.   افراطي ارزښت:

$$f(x_e)=f(\ln(2))=e^{-\frac{1}{2}\ln(2)}+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\ln(2)}$$

$$=2^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

تیټ ټکی: $\underline{\underline{T\left(\ln(2)\,|\,\sqrt{2}\right)}}$

پ –   د سطحې شمیرنه:

$$f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\ln(2)} f(x)\,dx=\int_0^{\ln(2)}\left(e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}\right)dx=\underbrace{\int_0^{\ln(2)}\left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx}_{I}+\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\ln(2)}\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)dx}_{II}$$

$$I:\quad \int_0^{\ln(2)}\left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx\quad u(x)=-\frac{1}{2}x\Rightarrow\frac{du}{dx}=-\frac{1}{2}\Rightarrow dx=-2du$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u(0)=0 \quad u(\ln(2))=-\frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\Rightarrow -2\int_0^{-\frac{1}{2}\ln(2)} e^u\,du = 2\int_{-\frac{1}{2}\ln(2)}^{0} e^u\,du = 2\left[e^u\right]_{-\frac{1}{2}\ln(2)}^{0} = 2\left[e^0 - e^{-\frac{1}{2}\ln(2)}\right]$$

$$II: \quad \frac{1}{2}\int_0^{\ln(2)}\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)dx \quad u(x)=\frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2du$$

$$u(0)=0 \quad u(\ln(2))=\frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{1}{2}\ln(2)}\left(e^u\right)du = \int_0^{\frac{1}{2}\ln(2)}\left(e^u\right)du = \left[e^u\right]_0^{\frac{1}{2}\ln(2)} = e^{\frac{1}{2}\ln(2)} - e^0$$

$$I+II: \quad 2e^0 - 2e^{-\frac{1}{2}\ln(2)} + e^{\frac{1}{2}\ln(2)} - e^0 = 1 - 2\cdot 2^{-\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{1}}$$

په نخښه شوې سطحه ارزښت 1FE (د سطحې یوون یا واحد) لري

اتم:

د پرابلم تحلیل:

د دریمې درجې ام راشنل (ریښتیني) تابع لپاره: $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

I. په$T(2|0)$ کې تیټ ټکی په دې معنا دی:

1. $x_1 = 2$ د f(x) صفرځای دی، یعني $f(x_1)=f(2)=0$.

2. $x_T = 2$ د f(x) افراطي ځای دی، یعني $f'(x_T)=f'(2)=0$.

II. $P(-4|0)$د f(x) صفرځای دی، یعني$f(-4)=0$.

III. په $P(-4|0)$ کې تانجنت د y -محور په $a_{0T}=48$ کې غوڅوي، یعني $t(0)=48$

او $t(0)=48$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضریبونوو مساواتو لیکل:

$$I1. \quad \Rightarrow f(2)=0 \Leftrightarrow a_3\cdot 2^3 + a_2\cdot 2^2 + a_1\cdot 2 + a_0 = 0$$
$$\Leftrightarrow 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0$$

مساوات ۱ .

$$I2. \quad \Rightarrow f'(2)=0 \text{ mit } f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_0 = 0$$
$$f'(2)=0 \Leftrightarrow 3a_3\cdot 2^2 + 2a_2\cdot 2 + a_0 = 0$$
$$\Leftrightarrow 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 0$$

مساوات ۲ .

$$II \quad \Rightarrow f(-4)=0 \Leftrightarrow a_3\cdot(-4)^3 + a_2\cdot(-4)^2 + a_1\cdot(-4) + a_0 = 0$$
$$\Leftrightarrow -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 0 \qquad \text{Gleichung III}$$

مسوات ۳ .

III. د تانجنت مساوات: $t(x) = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0)$

د $x_0 = -4$ سره $f(x_0) = f(-4) = 0$ باور لري، ځکه چې $x_0 = -4$ د f(x) صفرځایونه دي.

$$f'(x_0) = f'(-4) = 3a_3\cdot(-4)^2 + 2a_2\cdot(-4) + a_0$$
$$= 48a_3 - 8a_2 + a_1$$
$$\text{also } t(x) = f'(x)\cdot(x-x_0) = (48a_3 - 8a_2 + a_1)(x+4)$$
$$t(0) = 48 \Leftrightarrow (48a_3 - 8a_2 + a_1)\cdot 4 = 48$$
$$\Leftrightarrow 192a_3 - 32a_2 + 4a_1 = 48 \qquad \text{Gleichung IV}$$

پورته:مساوات IV .

له دې سره اوس ټول د ضریبونو مساوات معلوم دي:

$$I \quad 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0$$
$$II \quad 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 0$$
$$III \quad -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 0$$
$$IV \quad 192a_3 - 32a_2 + 4a_1 = 48$$

د مساواتسیستم ځواب د ګاس-الګوریتم له لارې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	2	4	8	0	
0	1	4	12	0	
1	−4	16	−64	0	III − I
0	4	−32	192	48	I : 4
1	2	4	8	0	
0	1	4	12	0	
0	−6	12	−72	0	III + 6·II
0	1	−8	48	12	IV − II
1	2	4	8	0	
0	1	4	12	0	
0	0	36	0	0	
0	0	−12	36	12	

$$3a_2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 0}$$

$$-12a_2 + 36a_3 = 12$$

$$\Leftrightarrow 36a_3 = 12 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{3}}$$

$$a_1 + 4a_2 + 12a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 12\cdot\frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -4}$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 - 8 + 8\cdot\frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = \frac{16}{3}}$$

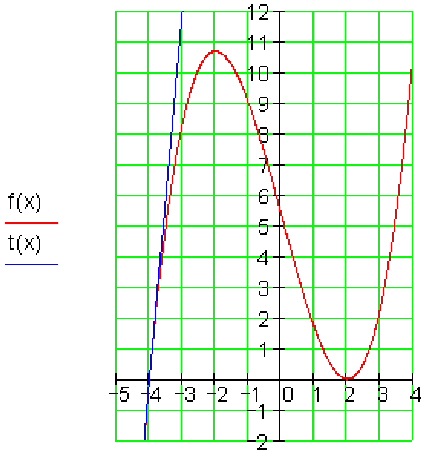
Funktionsgleichung:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + \frac{16}{3}}}$$

د پورته الماني پينتو: تابع مساوات.

د تانجنت مساوات:

$$t(x) = (48a_3 - 8a_2 + a_1)(x+4) = \left(\frac{48}{3} - 4\right)(x+4) = \underline{\underline{12x + 48}}$$



نهم:

اول: افراطي ارزښتونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8$$

و y محور ته سیمتریک ده.

$$\Rightarrow f(-x) = f(x)$$

په کې نسبي ماکسیموم

$$f'(x) = 5x^3 - 6x \,;\, f''(x) = 15x^2 - 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^3 - 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(5x^2 - 6) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \,;\, x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 15 \cdot 0^2 - 6 = -6 < 0 \Rightarrow \text{rel Max bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = 15 \cdot \left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 - 6 = 15 \cdot \frac{6}{5} - 6 = 12 > 0 \Rightarrow \text{rel Min bei } x_2 = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$f''(x_3) = f''\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = 15 \cdot \left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 - 6 = 15 \cdot \frac{6}{5} - 6 = 12 > 0 \Rightarrow \text{rel Min bei } x_3 = -\sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$f(x_1) = f(0) = -8 \Rightarrow \underline{\underline{P_{Max}(0 \mid -8)}}$$

$$f(x_2) = f(x_3) = f\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = \frac{5}{4}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^4 - 3\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2 - 8 = -\frac{49}{5}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{Min_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5}\right); P_{Min_2}\left(\sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5}\right)}}$$

دوه:

د سطحې شمیرنه صفرځایونه:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8 = 0$$

بدلون: $x^2=z$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}z^2 - 3z - 8 = 0 \Leftrightarrow z^2 - \frac{12}{5}z - \frac{32}{5} = 0 \Rightarrow z_1 = 4 \mid$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسي $z_2 = -\frac{8}{5}$. (حل نه شته)

$z_1 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2$ همداسي؛ $x_2 = 2$. د انتيګريشن پولې دي.

د سطحې انتيګرال:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{3} \left(\frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8\right) dx = \left[\frac{x^5}{4} - x^3 - 8x\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left[\frac{2^5}{4} - 2^3 - 8\cdot 2\right] - \left[\frac{(-2)^5}{4} - (-2)^3 - 8\cdot(-2)\right] = -32$$

سطحه: A=|-32| =32FE (FE د سطحې واحد يا يوون)

$P_{Max}(0\,|\,-8)$

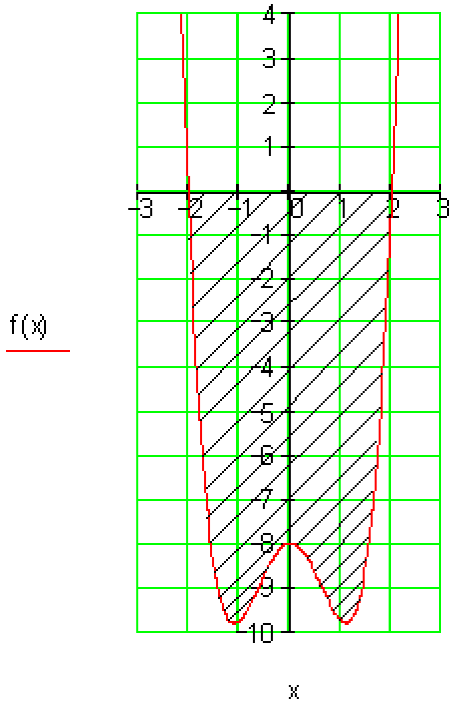
$P_{Min_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\,\middle|\,-\frac{49}{5}\right)$

bzw. $P_{Min_1}(-1{,}09\,|\,-9{,}8)$

$P_{Min_1}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\,\middle|\,-\frac{49}{5}\right)$

bzw. $P_{Min_1}(1{,}09\,|\,-9{,}8)$

x	−2,2	−2	−1,5	−1
f(x)	6,76	0	−8,42	−9,75
x	−0,5	0	0,5	1
f(x)	−8,67	−8	−8,67	−9,75
x	1,5	2	2,2	
f(x)	−8,42	0	6,76	



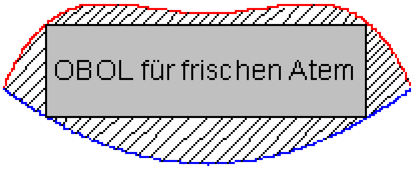
پوښتني

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق – او انتیگرالشمېرنې ته د استعمال پوښتنې

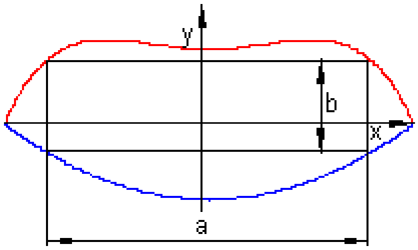
د اعلاناتو تختې او ګډوله پوښتنې.

لومړی:

 $f(x) = -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2;\ g(x) = \frac{1}{18}x^2 - 2$	دا تر څنګ د اعلاناتو تخته(خوله د یوه په کې خوندي ولاړکوډیز یا مستطیل سره، چې خوزنده اعلانات په کې انځور شوي دي) باید داسې جوړه شي، چې په کې خوندي مستطیل ممکنه خورا لویه سطحه ولري. د خولې د غاړې کرښې یا منحنی د په څنګ کې توابعو د تابع مساواتو له لارې انځورېږي:

الف- د خولې پورته برخه کوم تابع ښايي او کوم دا کښته برخه؟ خپل ځواب مدلل کړی.

ب –

	د دې مودول جوړونکې د ځغلند لیک لپاره د مستطیل یا ولاړکوډیز تیکې کچې ته اړتیا لري. د مستطیل اړخ a او b اړخ داسې وټاکی، چې سطحه ماکسیمال شي. سطحه څومره لویه ده؟ د اوږدوالي یوون یا واحد متر دی.

پ-

دا ټوله خوله دې په یوه دکور په یوه دیوال کې ورګډه یعنې وکښل شي، د دې لپاره د جوړولو انجنر اړینې سطحې ته اړتیا لري.

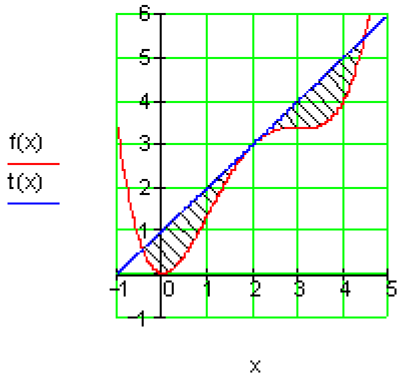
(c) ketabton.com: The Digital Library

....

ت- دا کرښه شوې سطحه دې د خورا ارزښتناک برطبنا رانه رنګ سره جوړه شي. د یوه مربع متر په پوښ ورکونه یا رنګونه € 120 قیمت لري. ټوله پوښونه به څومره قیمت ولري؟

غوښتنه: مشتق، افراطي ارزښتونه، د ګرافونو ترمنځ سطحه.

دویم:

	د f(x) او t(x) ګرافونو ترمنځ سطحه وټاکئ، که t(x) د f(x) تانجنت په P(2 | f(2)) ټکي کې انځور کړي. $f(x)=\frac{1}{8}x^4-x^3+\frac{9}{4}x^2$

غوښتنه: تانجنت، صفرځایونه، هورنر، ټاکلی انتیګرال

دریم:

تابع ورکړ شوی: $f_a(x)=a\cdot x^2\cdot e^{3-2x}$ $x\in\mathbb{R};\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

الف-د f(x) صفرځایونه وټاکئ او خپلې نتیجې په کومنتار روښانه کړئ.

ب – د پراته تانجنت سره ټکي پیداکړئ او د دې ټکو پروتځای په هکله یوه وینا وکړئ.

غږښتنه: مشتق، -تابع، د ضرب قانون، زنځیري قانون.صفرضرب. تانجنتونه، پراته.

ځوابونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق او انتیګرالشمیرنې ته د استعمال پوښتنې

نتیجې

الف- $g(x) = \frac{1}{18}x^2 - 2$ د خوله لاندط برخه ښايي.

$f(x) = -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2$ د خوله پورته برخه ښايي.

ب – د ولاړګوډیز یا مستطیل خورا لویه سطحه $23{,}095\ m^2$ ده.

پ – د خولې لپاره د کور په دیواله په ټولییزه توګه $36{,}267\ m^2$ سطحې ته اړتیا شته.

ت – کرښیزه سطحه د ټولې سطحې او د ولاړګوډیز یا مستطیل کمښت یا تفریق دی. دا نږدې $13{,}172\ m^2$ دی. د پوښونې قیمت € 1580,65 دی. دویم: غړښتونکې سطحه 2,939 FE (د سطحې واحد یا یوون) ده.

دریم:

الف- $x_{1/2} = 0$ یواځن صفرځای دی، ځکه چې دبل منځ ته راځي، د f(x) ګراف د x - محور په همدې ځای کې لمسوي.

ب- ټکي د پراته تانجنت سره په $x_1 = 0$ او $x_2 = 1$ کې پراته دي. ټول ټکي P_{1a} د کواوردینات یا پروت ولاړسیستم په سرچینه کې په $P_{1a}(0 | 0)$ کې پراته دي. ټول P_{2a} ټکي د محور y ته غبرګې باندې په واټن کې پراته دي او کواوردینات $P_{2a}(1 | ae)$ لري.

مفصل ځوابونه:

الف- د خولې لاندې برخه د مربع تابع له لارې روښانه یا تشیح کیږي. پورته برخه د ۴.درجې یوه ټول هوښیار یا راشنل تابع له لارې.

$g(x) = \frac{1}{18}x^2 - 2$ د خولې لاندې-یا کښته برخه ښايي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2$ د خولې پورته بخه ښايي.

ب-دا چې د f(x) او g(x) ګرافونه د y محور سره سيمتريک ځغلي، نو دا خوندي ولاړګوډيز يا مستطيل هم د y محور ته سيمتريک دی.

د y محور a په دوه برابرو برخو وېشي.

د دې لپاره چې اړخ يا خواb د a په واکوالي کې وټاکو، نو ولاړګوډيز يا مستطيل د ولاړو ګډونو يا قيموزاويو پورته او کښته کواورديناتونو ته اړتيا لرو.

پورته ولاړ يا قايم ګوډ يا کونج: $\left(\frac{a}{2} \middle| f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$ کښته ولاړګوډ: $\left(\frac{a}{2} \middle| g\left(\frac{a}{2}\right)\right)$.

د y محور مطلق کمښت اړخ b راکوي. د دې لپاره د ولاړګوډيز يا مستطيل همغه اړونده د y کواورديناتونه شميرو.

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{486}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^4 + \frac{1}{54}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 = -\frac{1}{486}\cdot\frac{a^4}{16} + \frac{1}{54}\cdot\frac{a^2}{4} + 2$$

$$= -\frac{1}{7776}a^4 + \frac{1}{216}a^2 + 2 > 0$$

$$g\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{18}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{18}\cdot\frac{a^2}{4} - 2$$

$$= \frac{1}{72}a^2 - 2 < 0$$

د b د اوږدوالي لپاره نو باور لري:

داچې $b(a) = f\left(\frac{a}{2}\right) + \left|g\left(\frac{a}{2}\right)\right|$ $g\left(\frac{a}{2}\right) < 0$ ist, دی، نو $\left|g\left(\frac{a}{2}\right)\right| = -g\left(\frac{a}{2}\right)$ باور لري او له دې سره دا لاندې

$$b(a) = f\left(\frac{a}{2}\right) - g\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{7776}a^4 + \frac{1}{216}a^2 + 2 - \left(\frac{1}{72}a^2 - 2\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= -\frac{1}{7776}a^4 + \frac{1}{216}a^2 + 2 - \frac{3}{216}a^2 + 2$$

$$= -\frac{1}{7776}a^4 - \frac{2}{216}a^2 + 4 = -\frac{1}{7776}a^4 - \frac{1}{108}a^2 + 4$$

دا چې د b اړخ د a په واک کې دی، نو سړی دا هم وايي چې b د a فنکشن دی یعنې b(a).

د ولاړګوډیز A مساحت د هغه د ا ړخونو ضرب دی.

$$A(a) = a \cdot b(a) = a \cdot \left(-\frac{1}{7776}a^4 - \frac{1}{108}a^2 + 4\right)$$

$$= -\frac{1}{7776}a^5 - \frac{1}{108}a^3 + 4a$$

د A(a) د افراطي ارزښت ټاکل د a ارزښت راکوي، چې د هغه لپاره د ولاړګوډيز سطحه خورا ـــیا ماکسیمال لوییږي.

(په لاندې کې د الماني پښو: بدلون، حل نه شته،

$$A'(a) = -\frac{5}{7776}a^4 - \frac{3}{108}a^2 + 4\,;\; A''(a) = -\frac{20}{7776}a^3 - \frac{6}{108}a$$

$$A'(a) = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{7776}a^4 - \frac{3}{108}a^2 + 4 = 0 \,|\cdot\left(-\frac{7776}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow a^4 + \frac{3\cdot 7776}{108\cdot 5}a^2 - \frac{4\cdot 7776}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + \frac{216}{5}a^2 - \frac{31104}{5} = 0 \text{ Substitution: } a^2 = z$$

$$\Leftrightarrow z^2 + \frac{216}{5}z - \frac{31104}{5} = 0 \Rightarrow p = \frac{216}{5}\,;\; q = -\frac{31104}{5}$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{108}{5}\right)^2 + \frac{31104}{5} = \frac{11664}{25} + \frac{155520}{25} = \frac{167184}{25}$$

$$= \frac{1296}{25}\cdot 129 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1296}{25}\cdot 129} = \frac{36}{5}\sqrt{129}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} z_1 = -\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129} = a^2 \\ z_2 = -\frac{108}{5} - \frac{36}{5}\sqrt{129} < 0 \Rightarrow \end{array} \right.$$

حل نه شته

$$a^2 = -\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129} \Rightarrow |a| = \sqrt{-\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129}}$$

$$a_1 = \sqrt{-\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129}}\ ;\ a_2 = -\sqrt{-\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129}}$$

$a_1 = \frac{6}{5}\sqrt{-15 + 5\sqrt{129}} \approx 7,757$ د یو څو بڼه بدلونونو سره.

داچې د z_2 ریښه یا جذر نه شي نیول کیدی او د a لپاره ارزښت باید زیاتیز یا مثبت وي، باید د a د(A(a یو افراطي ځای وي. دا د (A(a د دویم مشتق سره ازمایلی شو.

$A''(a_1) < 0$ د

$$A''(a_1) = -\frac{20}{7776}a_1^3 - \frac{6}{108}a_1$$

او $a_1 > 0$ د

له امله.

د ارزښت $a_1 = \frac{6}{5}\sqrt{-15 + 5\sqrt{129}}$ لپاره

د ولاړګوډیز یا مستطیل سطحه ماکسیمال یا خورا لویه ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې ګراف، چې د خولې پورته برخه جوړوي، د x = 0 په ځای کې يو مينيموم يا خوراکوچنی ارزښت په ګوته کوي ((2 | 0) P_{Min})، بايد وازمايل شي، چې د ولاړګوډيز يا مستطيل پورته اړخ له دې څخه کښته پروت دی.

$$\text{Also ob } f\left(\frac{a_1}{2}\right) < 2 \text{ ist.}$$

$$f\left(\frac{a_1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{5}\sqrt{5\sqrt{129}-15}\right) \approx 1{,}813 < 2$$

شميرنه د جبشميري سره صورت نيسي. نتيجه تصديقوي، چې د مستطيل پورته ا ړخ د f(x) د خورا کوچني ارزښت کښته لور ته پروت دی

اوس کيدی شي د مستطيل مساحت د جبشميري سره و شميرل شي.
د الماني پښتو: ولاړکوډيز يا مستطيل.

$$A_{\text{Rechteck}} = A(a_1) = -\frac{1}{7776}a_1^5 - \frac{1}{108}a_1^3 + 4a_1$$

$$A_{\text{Rechteck}} = A(a_1) = A\left(\frac{6}{5}\sqrt{5\sqrt{129}-15}\right) \approx 23{,}095$$

د ولاړګوډيز خورا لوی ارزښت يا ماکسيماله لويه نږدې $23{,}095\ m^2$ مساحت لري.

پ- د خولې ټول مساحت د f(x) اوg(x) توابعو ګرافونو ترمنځ پروت دی. دا د انتګرال په مرسته ميندل کيدی شي. د دې لپاره بايد لومړی د انتيګرېشن پولې وټاکل شي.

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2 - \left(\frac{1}{18}x^2 - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 - \frac{3}{54}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{486}x^4 - \frac{1}{27}x^2 + 4 = 0 \,|\cdot(-486)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 18x^2 - 1944 = 0 \text{ Substitution: } z = x^2$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 18z - 1944 = 0 \Rightarrow p = 18;\ q = -1944$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 + 1944 = 2025 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{2025} = 45$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګریشن پولې د x لپاره حل نه شته	$\left\| z_1 = -9+45 = 36 = x^2 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 6 \right.$ $\left\| z_2 = -9-45 = -54 < 0 \Rightarrow \right.$	$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$

د $f(x) - g(x) = -\frac{1}{486}x^4 - \frac{1}{27}x^2 + 4$: سره د ګرافونو ترمنځ سطحې لپاره باور لري:

لاندې الماني: خوله

$$A_{Mund} = A = \int_{x_1}^{x_2} \left[f(x) - g(x) \right] dx = \int_{-6}^{6} \left(-\frac{1}{486}x^4 - \frac{1}{27}x^2 + 4 \right) dx$$

$$= -\frac{1}{5 \cdot 486}x^5 - \frac{1}{3 \cdot 27}x^3 + 4x \Big|_{-6}^{6}$$

$$= -\frac{7776}{2430} - \frac{216}{81} + 24 - \left(\frac{7776}{2430} + \frac{216}{81} - 24 \right)$$

$$= -\frac{15552}{2430} - \frac{432}{81} + 48 = \frac{544}{15} \approx 36,267$$

دپه دیوال د خولې لپاره ټولټال $36,267\ m^2$ سطحې ته اړتیا شته.

ت- کربښیزه سطحه د ټولې سطحې او د ولاړګوډیز د سطحې د کمون یا تفریق سره برابره ده.

په لاندط کې د الماني پښتو له کین څخه ښي لورته: کربښیز، خوله، مستطیل یا ولاړ کوډیز

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_{schraffiert} = A_{Mund} - A_{Rechteck} = \frac{544}{15} - A\left(\frac{6}{5}\sqrt{5\sqrt{129} - 15}\right) \approx 13{,}172$$

د $1m^2$ پوښونې قيمت 120€ دی.

$$\text{ټول قيمت} = 120\,€ \cdot A_{schraffiert} = 1580{,}65\,€$$

يادونه:

د دې لپاره چې د ګردونې ناټيکاوي مخه ونيول شي، بايد د جبشميري شميرنې سره منځارزښتونه ذخيره شي.

$$\text{ټول قيمت} = 120\,€ \cdot 13{,}172 = 1580{,}64\,€$$

د ګردوونې ناټيکاوي ته يادونه.
تر شوونتيا پورې چې د ګردونې ناټيکاوي مخه ونيولی شو، بايد د جبشميري شميرنې سره منځارزښتونه ذخيره شي. مګر په ډېرو حالتونو کې د لسميز يا اعشاريې(کوما) وروسته درې ځايونه بسيا کوي. په لاندې کې دې د لسميز وروسته د ۳ ځايونو ټيکاوي سره سرته ورسول شي. د الماني : ولاړګوډيز، خوله، کرښيزه سطحه، خوله، مستطيل

$$a_1 \approx 7{,}757$$

$$A_{Rechteck} \approx -\frac{1}{7776}\cdot(7{,}757)^5 - \frac{1}{108}\cdot(7{,}757)^3 + 4\cdot 7{,}757 \approx 23{,}095$$

$$A_{Mund} \approx 36{,}267$$

$$A_{schraffiert} = A_{Mund} - A_{Rechteck} \approx 36{,}267 - 23{,}095 \approx 13{,}172$$

$$\text{ټول ارزښت} \approx 120\,€ \cdot 13{,}172 \approx 1580{,}64\,€$$

دويم: حل

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + \frac{9}{4}x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تانجنت په f(x)باندې په [P(2|f(2) کې

f(2)=3 له دې لاس ته راځي ، چې t(x) د f(x) ګراف په تکي P(2|f(2)) کې لمسوي

تانجنتمساوات $t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$: د $x_0=2$ t سره

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x \Rightarrow f'(x_0)=f'(2)=1$$

او د $f(x_0)=f(2)=3$ t سره باور لري: $t(x)=1\cdot(x-2)+3$ یعني $\boxed{t(x)=x+1}$

د تانجنت غوځېتکي همداسې لمسېتکي د f(x) د ګراف سره

$$t(x)-f(x)=x+1-\left(\frac{1}{8}x^4-x^3+\frac{9}{4}x^2\right)=-\frac{1}{8}x^4+x^3-\frac{9}{4}x^2+x+1$$

$$t(x)-f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{8}x^4+x^3-\frac{9}{4}x^2+x+1=0$$

بربېښي چې تانجنت د f(x) ګراف په تکي P(2|3) کې لمسوي، کیدی شي $x_{1/2}=2$ ل حلونه وي.

هورنر:

	$-\frac{1}{8}$	1	$-\frac{9}{4}$	1	1
$x=2$		$-\frac{1}{4}$	$\frac{6}{4}$	$-\frac{6}{4}$	$-\frac{4}{4}$
	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{4}$	0
$x=2$		$-\frac{1}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{2}{4}$	
	$-\frac{1}{8}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	

$$\Rightarrow -\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow x_{3/4}=2\pm\sqrt{6}$$

داچې تانجنت د f(x) ګراف په تکي P(2|3) کې لمسوي (دبل صفرځای)، کیدی شي غوښتونې سطحه د لاندې انتیګرال سره وشمیرل شي.

$$A=\int_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}}\left[t(x)-f(x)\right]dx=\int_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}}\left[-\frac{1}{8}x^4+x^3-\frac{9}{4}x^2+x+1\right]dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \left[-\frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right]_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}} \approx 2,939$$

غوښتونې سطحه 2,939 FE (د سطحې واحد يا يوون) ده.

دريم:

الف-

$$f_a(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x}$$

د صفرځايونو لپاره اينونه: $f_a(x) = 0 \Leftrightarrow a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x} = 0$

ترڅيرنې لاندې نيول کيږي، چې د کوم x ارزښت لپاره ضرب ضريبونه (د ځل ځلووني) صفر کيږي.

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ يو ثابتلی ضريب دی، چې هيڅ صفرکيدای نه شي.

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 0$ يو دبل صفرځای دی.

د e^{3-2x} : $e^{3-2x} = e^{-(2x-3)}$ څيرنه

له $e^{-(2x-3)}$ ، e^{-2x} څخه د xمحور ښی لور ته په ۳ واحده يا يوون د راکښنې له لارې منځ ته راځي ه.

دا چې e^{-2x} صفرځای نه لري، نو $e^{-(2x-3)}$ هم صفرځای نه لري.

له دې سره $x_{1/2} = 0$ يواځنی صفرځای دی، ځکه چې دبل منځ ته راځي، د f(x) گراف د x محور په دې ځای کې لمسوي.(پروت تانجنت)

ب-

$f_a(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x}$ په پاته تانجنت باندې څيرنه

د پراته تانجنت لپاره شرطونه: $f'_a(x) =$

د ضرب قاونو له لارې مشتق: $f'_a = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$u = a \cdot x^2 \,;\, v = e^{3-2x} \Rightarrow u' = 2a \cdot x \,;\, v' = -2e^{3-2x}$$

$$\Rightarrow f'_a(x) = 2ax \cdot e^{3-2x} + ax^2 \cdot \left(-2e^{3-2x}\right)$$

$$= 2ax \cdot e^{3-2x} - 2ax^2 \cdot e^{3-2x} = 2a \cdot e^{3-2x}\left(x - x^2\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow 2a \cdot e^{3-2x}\left(x - x^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\,;\, x_2 = 1$$

ا e^{3-2x} صفرکیدی نه شي(برخه الف وګورئ)

د پراته محور سره غوڅتکي

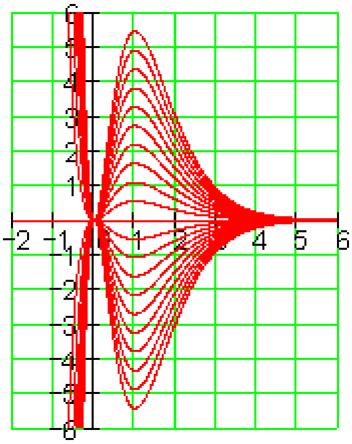
$$f_a(x_1) = f_a(0) = a \cdot 0^2 \cdot e^3 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_{1a}(0|0)}}$$

$$f_a(x_2) = f_a(1) = a \cdot 1^2 \cdot e^{3-2} = a \cdot e \Rightarrow \underline{P_{2a}(1|a \cdot e)}$$

ټول ټکي P_{1a} د کواوردینات په سرچینه پراته دي، له پارامتر a څخه خپلواک دي.

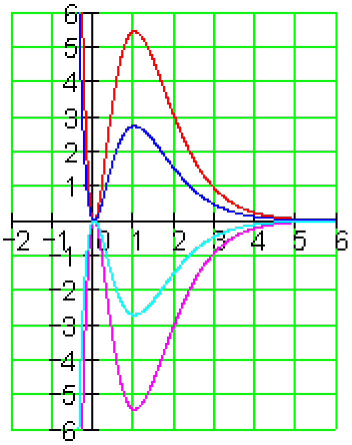
ټول ټکی P_{2a} د y محور ته غبرګه باندې پراته دي: x=1

$f_a(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x} \quad x \in \mathbb{R}\,;\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$f_a(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x} \quad x \in \mathbb{R}$

د $a \in \{-2; -1; 1; 2\}$ لپاره

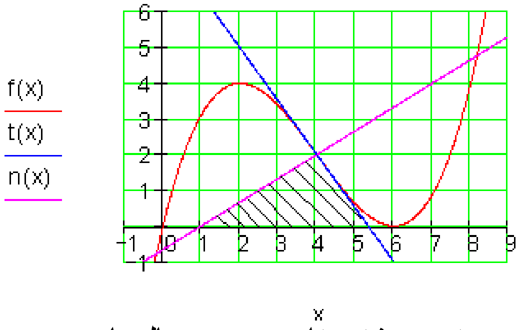


پوښتني: مشتق او انتیګرالشمیرنه II

ګډوله پوښتني

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی:



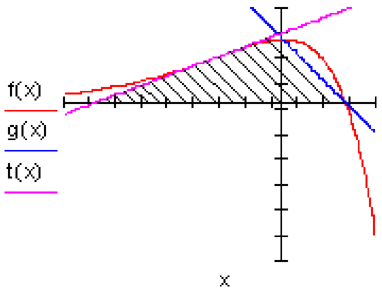
غوښتني: مشتق،تانجنت، نورمال يا عمود، صفرځايونه، د درې ګودي سطحه.

د درېګودي مساحا، چې د تانجنت t(x) او نورمالي يا عمود n(x) له لاري د x محور سره جوړيږي، وشميرى:

t(x) په ټکي P(4|2) کې په f(x) تانجنت دی

$$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x$$

دويم:



د په نخښه شوي درېګودي يا مثلث سطحه وشميرى، که

$$f(x)=(2-x)e^{\frac{1}{2}x}$$

وي.

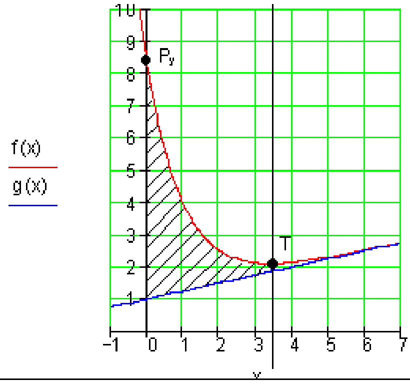
g(x) د f(x) محور-غوښتکي له لاري کرښه ده.

t(x) د f(x) اوړنتانجنت يا د انعطاف تانجنت دی

غوښتنه: محورغوښتکي، اوړون – يا د انعطاف ټکي، اوړنتانجنت يا د انعطاف تانجنت، د کرښو غوښتکي.

دريم: تابع ورکړ شوي ده:

$$f(x)=e^{2-x}+\frac{1}{4}x+1 \qquad x\in\mathbb{R}$$



الف- د f(x) غوښتکی د y محور سره وشميرى.

ب- د کرښي g(x) مساوات وټاکی. دا کرښه څه غوره والی يا معنا لري؟

پ- ټيټتکی $T(x_e \mid f(x_e))$ وشميرى.

ت- دا په نخښه شوي سطحه وشميرى.

ټ- سطحه په کوم ارزښت تغير خوري، که ښی پوله د ناپای په لور لاړه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوښتنه: e - تابع ، محورغوځټکي، مشتق، سطحه، انتیګریشن، ناپای انتیګرال.

ځوابونه

مشتق او انتیګرال ته ګډوله پوښتنېII

نتیجي او مفصل ځوابونه

نتیجې

لومړی:

د درېګوډی مساحت نږدې FE ...4,333 د سطحې یوون یا واحد دی.

دویم: د درېګوډي سطحه نږدې 8,606 FE د سطحې واحد دی.

دریم:

الف- $P_y\left(0\,|\,e^2+1\right)$ bzw. $P_y\left(0\,|\,8{,}389\right)$ همداسې

ب- کرښه د ګراف اسینمپټوټي جوړوي.

د اسیمپټوټي د تابع مساوات دی: $g(x)=\frac{1}{4}x+1$

ټیټټکی: $T\left(2+\ln(4)\,|\,\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\ln(4)\right)\approx(3{,}386\,|\,2{,}097)$

ت-په نخښه شوې سطحه ده:

$$A=e^2-e^{-\ln(4)}=e^2-\frac{1}{4}\approx 7{,}139$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت- $A = e^2 \approx 7,389$

په دې ارزښت سطحه تغیر خوري، که ښۍ پوله د ناپای په لور لاړه شي.

مفصل ځوابونه:

لومړی:

د $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$ په $P(4|2) \Rightarrow x_0 = 4$ له لارې تانجنت

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f(x_0) = f(4) = 2 ; f'(x_0) = f'(4) = -\frac{3}{2}$$

$$t(x) = -\frac{3}{2}(x-4) + 2 = -\frac{3}{2}x + 8$$

$$n(x) = \frac{2}{3}(x-4) + 2 = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

د تانجنت غوځتکی د x محور سره:

$$t(x) = 0 \Leftrightarrow x_t = \frac{16}{3}$$

د نورمالي غوځتکی د x محور سره.

$$n(x) = 0 \Leftrightarrow x_n = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د درېګوډي سطحه: $A = \frac{g \cdot h}{2}$ د $g = x_t - x_n = \frac{16}{3} - 1 = \frac{13}{3}$

او $h = 2 \Rightarrow A = \frac{\frac{13}{3} \cdot 2}{2} = \frac{13}{3} FE$ (دسطحې يوون يا واحد) سره.

دويم: $f(x) = (2-x)e^{\frac{1}{2}x}$

اول: د محورغوڅټکو شميرنه.

د y محور سره غوڅټکی:

$$f(0) = (2-0)e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = 2e^0 = 2 \Rightarrow P_y(0|2)$$

د x محور سره غوڅټکی

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x)e^{\frac{1}{2}x} = 0 \Leftrightarrow (2-x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$$

ضريب ، $e^{\frac{1}{2}x}$ نه صفر کيږي، نو $\underline{\underline{P_{x1}(2|0)}}$.

دوه: کرښه د د محور غوڅټکو $P_y(0|2)$ او $P_{x1}(2|0)$ له لارې.

$$g(x) = a_1x + a_0 \quad a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-2}{2-0} = -1 \Rightarrow g(x) = -x + a_0$$

ازماېښت: $P_y(0|2)$ $g(0) = 2 \Leftrightarrow -0 + a_0 = 2 \Rightarrow a_0 = 2$

$$\Rightarrow \underline{\underline{g(x) = -x + 2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

درې: اووړون – یا انعطافټکی

$$f(x)=(2-x)e^{\frac{1}{2}x}=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$$

$$u=(2-x)\,;\,u'=-1;\,v=e^{\frac{1}{2}x}\,;\,v'=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x)=-1\cdot e^{\frac{1}{2}x}+(2-x)\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\left[-1+\frac{1}{2}(2-x)\right]e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}x\cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x\cdot e^{\frac{1}{2}x}=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f''(x)=u'v+uv'$$

$$u=-\frac{1}{2}x\,;\,u'=-\frac{1}{2};\,v=e^{\frac{1}{2}x}\,;\,v'=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$$

$$u=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right);\,u'=-\frac{1}{4};\,v=e^{\frac{1}{2}x}\,;\,v'=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'''(x)=-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}x\right)e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}=0\Leftrightarrow 1+\frac{1}{2}x=0\Leftrightarrow\underline{\underline{x_w=-2}}$$

$$f'''(x_w)=f'''(-2)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}(-2)\right)e^{\frac{1}{2}(-2)}=\frac{1}{4e}\neq 0$$

$$\Rightarrow x_w=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا اړونټکی یا انعطافټکی دی.

$$y_w = f(x_w) = f(-2) = (2-(-2))e^{\frac{1}{2}(-2)} = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$$

$$\Rightarrow W\left(-2 \,|\, \frac{4}{e}\right)$$

څلور: د اوړونټکي یا انعطاف ټکي تانجنت

$$f(x) = (2-x)e^{\frac{1}{2}x} \qquad f'(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} \qquad W\left(-2 \,|\, \frac{4}{e}\right)$$

$$f'(x_w) = f'(-2) = -\frac{1}{2}(-2) \cdot e^{\frac{1}{2}(-2)} = \frac{1}{e}$$

$$f(x_w) = f(-2) = (2-(-2))e^{\frac{1}{2}(-2)} = \frac{4}{e}$$

$$\Rightarrow t(x) = \frac{1}{e}(x+2) + \frac{4}{e} = \frac{1}{e}x + \frac{6}{e}$$

$t(x) = f'(x_w)(x - x_w) + f(x_w)$ د $x_w = -2$: سره لرو

پنځه: د x محوراو g(x)=-x+2 سره د اوړونتانجنت یا انعطافتانجنت غوڅټکي

$$t(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e}x + \frac{6}{e} = 0 \Leftrightarrow x = -6$$

د انعطافټکي یا اونټکي صفرځایونه.

$$t(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{e}x + \frac{6}{e} = -x + 2 \Leftrightarrow x_s = \frac{2e-6}{1+e}$$

$$y_s = g(x_s) = -\frac{2e-6}{1+e} + 2 = \frac{6-2e}{1+e} + 2 = \frac{8}{1+e}$$

د درېګوډي یامثلث جګوالی دی.

شپږ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د درېګودي د مساحت شمیرنه
د درېګودي یا مثلث جګوالی:

$$h = y_s = \frac{8}{1+e}$$

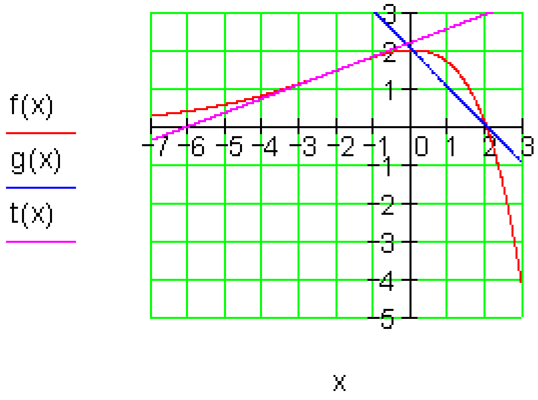
سطحه: A=g.h/ 2

g له x=-6 څخه د واټن په حیث تر
x=2 => g=8 پورې.

$$A = \frac{8\cdot\frac{8}{1+e}}{2} = 4\cdot\frac{8}{1+e}$$

$$= \frac{32}{1+e} \approx 8{,}606\,FE$$

(د سطحې یوون یا واحد)



دریم:

الف- $$f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1$$

د y محور سره د غوخې لپاره شرطونه:

$$y_s = f(0) \Leftrightarrow y_s = e^{2-0} + \frac{1}{4}\cdot 0 + 1 = e^2 + 1 \approx 8{,}389$$

$$\Rightarrow P_y\left(0 \mid e^2+1\right) \text{ bzw. } P_y\left(0 \mid 8{,}389\right)$$

پورته: bzw = همداسې.

ب- $$f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1$$

g(x) د f(x) اسیمپتوت یا ګاونډ(مجانب) دی داپه دې معنا، چې د f(x) ګراف د لوی x ارزښتونو لپاره د g(x) په لور ځغلي.

$e^{2-x} = e^{-(x-2)}$ د لوی x ارزښت لپاره د صفر په لور ځغلي، داسې چې f(x) د لوی x ارزښت لپاره فقط نور د برخترم $\frac{1}{4}x+1$ له لارې ټاکل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو له دې د ګاونډ یا مجانب د تابعمساوات $: g(x) = \frac{1}{4}x + 1$ دی.

پ-

$$f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1 \Rightarrow f'(x) = -e^{2-x} + \frac{1}{4} \Rightarrow f''(x) = e^{2-x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{2-x} + \frac{1}{4} = 0 \mid + e^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = e^{2-x} \mid \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln\left(e^{2-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln(1) - \ln(4) = 2 - x$$

$$\Leftrightarrow -\ln(4) = 2 - x$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \ln(4) \Rightarrow$$

افراطي ارزښت په $\text{ei } x_e = 2 + \ln(4) \approx 3{,}386$ کې

$$f''(x_e) = f''(2 + \ln(4)) = e^{2-(2+\ln(4))} = e^{2-2-\ln(4)}$$

$$= e^{-\ln(4)} = e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_e = 2 + \ln(4) \approx 3{,}386$$

$$f(x_e) = f(2 + \ln(4)) = e^{2-(2+\ln(4))} + \frac{1}{4}(2 + \ln(4)) + 1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln(4) + 1 = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\ln(4) \approx 2{,}097$$

ټیټټکی:

$$\underline{\underline{T\left(2 + \ln(4) \mid \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\ln(4)\right)}} \approx (3{,}386 \mid 2{,}097)$$

ت- په نخښه شوې سطحه د f(x) او g(x) ګرافونو ترمنځ په انتروال $[0; x_e]$ کې پرته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

د $A = \int_0^{x_e} \left[f(x) - g(x) \right] dx$ r او $t\, f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1$ ι سره $g(x) = \frac{1}{4}x + 1$

کیږي $f(x) - g(x) = e^{2-x}$ او له دې سره $A = \int_0^{x_e} e^{2-x}\, dx$

بدلون:

$$u = 2 - x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du \quad x_e = 2 + \ln(4)$$

لاندې پوله u(0)=2 پورته پوله: $u(x_e) = 2 - (2 + \ln(4)) = -\ln(4)$

$$A = -\int_2^{-\ln(4)} e^u\, du = \int_{-\ln(4)}^{2} e^u\, du = \left[e^u \right]_{-\ln(4)}^{2} = e^2 - e^{-\ln(4)} = e^2 - \frac{1}{4} \approx 7{,}139$$

ټ- په نخښه شوې سطحه د f(x) او g(x)ګرافونو ترمنځ په انتروال $[0;\infty]$ کې پرته ده

د $A = \int_0^{\infty} \left[f(x) - g(x) \right] dx$ او $f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1$ سره $g(x) = \frac{1}{4}x + 1$

کیږي $f(x) - g(x) = e^{2-x}$

او له دې سره

$A = \int_0^{\infty} e^{2-x}\, dx$ یو نا معلوم؟؟؟ انتیګرال دی له دې لاس ته راځي $A = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{2-x}\, dx$

بدلون: u=2 => du/dx =-1 => dx=-du

لاند پوله u(0)=2 پورته پوله: u(b)02-b

$$A = \lim_{b\to\infty} \left(-\int_2^{2-b} e^u\, du \right) = \lim_{b\to\infty} \int_{2-b}^{2} e^u\, du = \lim_{b\to\infty} \left[e^u \right]_{2-b}^{2} =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[e^2 - e^{2-b} \right] = e^2 \approx 7{,}389$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځکه چي $\lim_{b\to\infty} e^{2-b} = \lim_{b\to\infty} e^{-(b-2)} = 0$

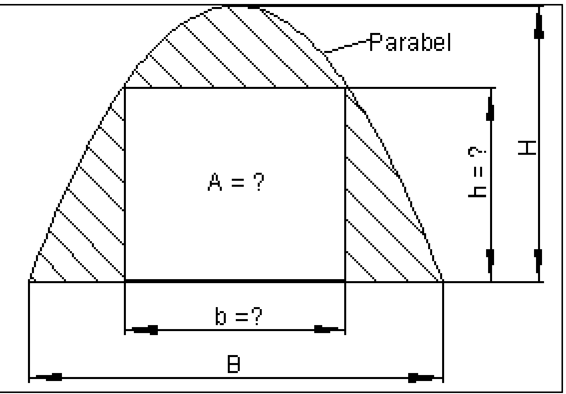
پوښتنې

مشتق او انتیګرال شمیرنه III

ګډوله پوښتنې

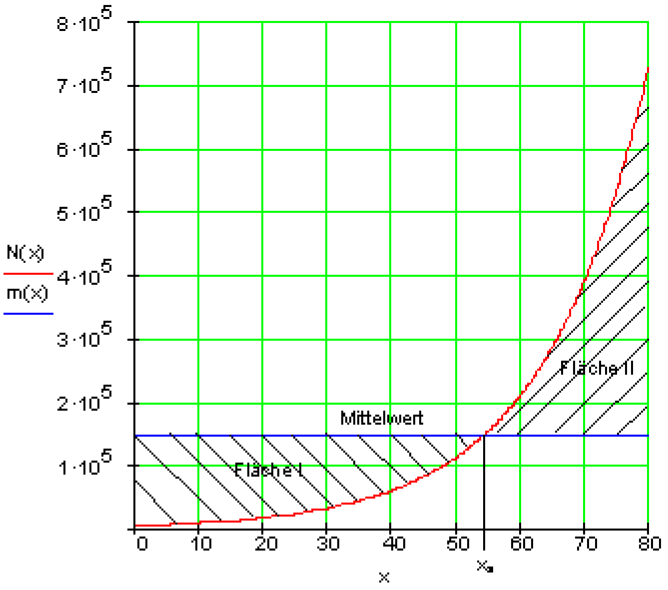
لوړمی:

په یوه پارابول ډوله دیوال دې یوه ولاړګوډیزه کړکۍ کیښول شي، تر ځمکې رسیږي. د دیوال کچه $B = 4\ m$, (سور) $H = 4\ m$ (جګوالی) ده.

	الف- کړکۍ باید کومه کچه (سور او جګوالی) ولري، له کومې سره چي د کړکۍ سطحه خورا لویه یا ماکسیمال شي؟ د کړکۍ سطحه څومره ده؟ ب- دا د دیوال پاتې سطحه دې رنګ شي. دا سطحه څومره لویه ده.

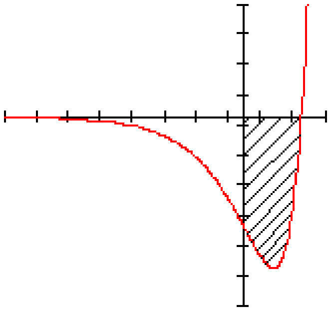
غوښتنې: د ککرۍ ټکي مساوات، افراطي ارزښت شمیرنه، ټاکلی انتیګرال، ریښه قانونونه.دویم: د یوې باکتریا کلتور(وده) اکسپوننشل جګیږي. د 48 ساعته په دننه کې دبکتریاو ګڼون یا تعداد له 5000 و 100000 ته زیات کړ.(100000همداسې x ، وخت په ساعت)

(c) ketabton.com: The Digital Library

	الف- د ودي تابع وټاکی. ب- د باکتریاو تعداد د کوم وختپه دننه کي دوه برابره کیږي؟ پ- د لومړیو 80 ساعتونو د بکتریاو د تعداد منځارزښت جوړ کړی. ت- په ځنګ ګراف کي د ودي تابع N(x) او منځ ارزښت m(x) کښل یا ځیره شوي. وښایی چي دواړه په نخښه شوي سطحي برابري لویي دي. دا روښانه کړی، چي دا ولي داسي باید وي.

غوښتني: تابع ، توانقوانین، لوګاریتم قوانین، اکسپوننشلمساوات، منځ ارزښت، ټاکلی انتیګرال.

دریم:

	وركړشوي تابع $f(x) = e^{2x} - 4 \cdot e^{x}$ وټاکی: محورغوڅتکي، تیټتکي، اوړون-انعطافتکي په نخښه شوي سطحه وټاکی:

پوښتني: اکسپوننشلمساوات، افراطي ارزښتونه، د بدلون له لاري انتیګرال.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځوابونه
مشتق او انتیګرال شمیرنه III

ګډوله پوښتنې
نتیجې او مفصل ځوابونه

نتیجې:
لومړی:
الف-

د کړکۍ سور: $b = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx \underline{\underline{2,309\,m}}$

د کړکۍ جګوالی: $h = f\left(\frac{b}{2}\right)$ mit $\frac{b}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}$ und $f(x) = -x^2 + 4$

$$h = -\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\right)^2 + 4 = -\frac{4}{9}\cdot 3 + 4 = -\frac{4}{3} + 4 = \underline{\underline{\frac{8}{3} \approx 2,\overline{6}\,m}}$$

د کړکۍ سطحه: $\underline{\underline{A = h\cdot b = \frac{8}{3}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}} \approx 6,158\,m^2}}$

ب- پاتې سطحه: د پارابول منځ کې سطحه تر ې کم د کړکۍ سطحه.

پاتې – یا باقي سطحه: $\frac{32}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{16}{3}} \approx \underline{\underline{4,508\,m^2}}$

دویم:
الف- د ودې تابع دی:

$$N(t) = 5000\cdot e^{\frac{1}{48}\ln(20)t}$$

ب- د باکتریا تعداد هر تول 11,106 ساعتونه دوه برابره کیږي
پ- په منځنۍ توګه په لومړیو 80 ساعتونو کې146570 باکتریاوې شتون لري
ت-تابعm(x) = m دودې تابع N(x) منځ ارزښت جوړوي. د سطحی برخه(سطحهI)
، چې د m(x) = m لاندې یا کښته لور ته پرته ده باید تیک همدومره لویه وي لکه د

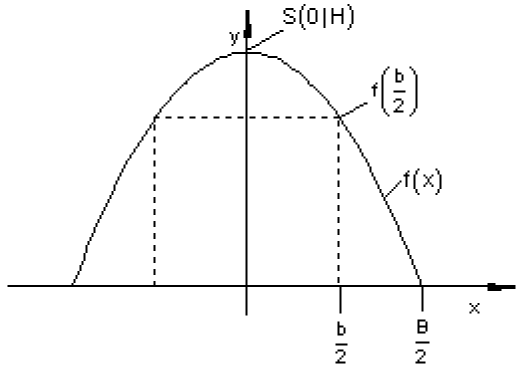
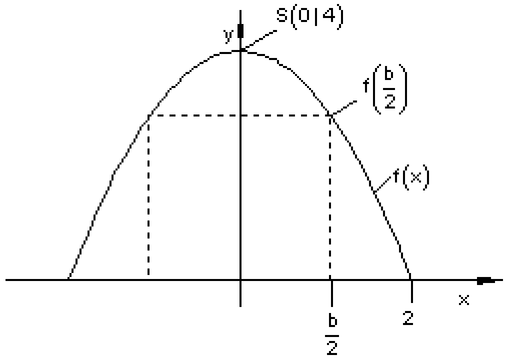
(c) ketabton.com: The Digital Library

سطحې برخه(سطحه II)، چې د m(x) = m پورته لور ته پرته ده. دا د منځ ارزښت ځخه لاس ته راځي. دا چې اوس N(x) د سطحېI په ورشو يا ساحه کې کښته لورته پروت دی، هلته د امتيګرال ارزښت کميز يا منفي دی. داچې N(x) د سطحی II په ورشو يا ساحه کې پورته لور پروت دی، هلته د انتيګرال ارزښت زياتيز يا مثبت دی. نو د دې پسې يا تعقيب بايد په ټوله سطحه د انتيګرال منځ ارزښت صفر وي.

دريم:

د y محور سره غوځتکی:	: $P_y(0 \mid -3)$
د x محور سره غوځتکی:	: $P_x(\ln(4) \mid 0)$ bzw. $P_x(1{,}39 \mid 0)$
تتيتکی:	$P_{Min}(\ln(2) \mid -4)$ bzw $P_{Min}(0{,}69 \mid -4)$
اوړن-يا د انعطاف ټکی:	$P_w(0 \mid -3)$
په نخښه شوې سطحه: bzw=همداسي	$A = \left\lvert -\frac{9}{2} \right\rvert = \frac{9}{2} FE = 4{,}5 FE$

مفصل حلونه

لومړی: د پرابلم يا مسئلې رياضي کونه عمومي :	
د B = 4 m, H = 4 m لپاره خانګړی	

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف –

ږدو: $f(x)=a_2x^2+4$ د S(0|4) له امله ککرې ټکی

$$P(2|0)\Rightarrow f(2)=0\Leftrightarrow a_2\cdot 2^2+4=0\,|-4$$
$$\Leftrightarrow 4a_2=-4\,|:4$$
$$\Leftrightarrow a_2=-1$$

د پارابول مساوات: f(x)=-x²+4

د مستطیل یا ولاړګوډیز سطحه A=b.h د $h=f\left(\frac{b}{2}\right)=-\left(\frac{b}{2}\right)^2+4=-\frac{b^2}{4}+4$ سره

$$\Rightarrow A(b)=b\cdot\left(-\frac{b^2}{4}+4\right)=-\frac{1}{4}b^3+4b$$

د A(b) خورا جګ ارزښت غواړو پیدا کړو(افراطي ارزښت)

$$A(b)=-\frac{1}{4}b^3+4b\Rightarrow A'(b)=-\frac{3}{4}b^2+4\Rightarrow A''(b)=-\frac{3}{2}b$$

د افراطي ارزښت لپاره اړیین شرطونه:

$$A'(b)=0\Leftrightarrow -\frac{3}{4}b^2+4=0\,|:-4$$
$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}b^2=-4\,|:\left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow b^2=\frac{16}{3}\,|\sqrt{\ }$$
$$\Leftrightarrow |b|=\frac{16}{3}\Rightarrow b_1=\sqrt{\frac{16}{3}}\text{ bzw. }b_2=-\sqrt{\frac{16}{3}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b1 ارزښتوو يا رانيسو، ځکه چې کميزه يا منفي سطحه نه لرو يا نه شته.

په افراطيت ازماېښت:

$$A''(b_1)=A''\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right)=-\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}}<0\Rightarrow \text{rel. Max. bei } b_1=\sqrt{\frac{16}{3}}$$

د کړکۍ سور: $\underline{\underline{b=\sqrt{\frac{16}{3}}\approx 2,309\text{ m}}}$

د کړکۍ جګوالی: $h=f\left(\frac{b}{2}\right)$ د $\frac{b}{2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}}=\frac{4}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}=2\cdot\sqrt{\frac{3}{9}}=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}$:

او $f(x)=-x^2+4$ سره کيږي

$$h=-\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\right)^2+4=-\frac{4}{9}\cdot 3+4=-\frac{4}{3}+4=\frac{8}{3}\approx 2,\bar{6}\text{ m}$$

د کړکۍ سطحه: $\underline{\underline{A=h\cdot b=\frac{8}{3}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}}\approx 6,158\text{ m}^2}}$

ب – پاتې سطحه: د پارابول لاندط يا ګښته سطحه ترې کم يا منفي د کړکۍ سطحه.

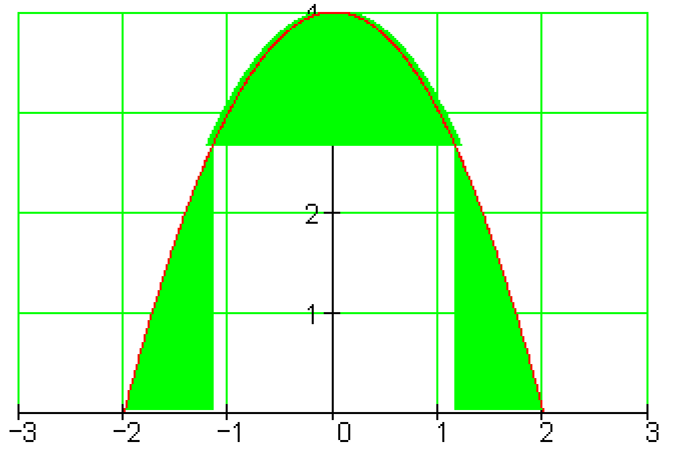
د پارابول لاندې سطحه:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{2}\left(-x^2+4\right)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-2}^{2}$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot 2^2+4\cdot 2-\left[-\frac{1}{3}\cdot(-2)^3+4\cdot(-3)\right]$$

$$=-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}+8=16-\frac{16}{3}=\frac{32}{3}\approx 10,\bar{6}\text{ m}^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پاتې یا باقي سطحه:

$$\frac{32}{3}-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{16}{3}}\approx 4,508\ m^2$$

دویم –

الف - د ودې تابع لپاره ایننوونه: $N(t)=N_0\cdot e^{k\cdot t}$ د $N_0=5000$ سره.

د ۴۸ ساعته وروسته باور لري: $N_{48}=N_0\cdot e^{48\cdot k}$ د $N_{48}=100000$ سره.

د ودې فامتور یا ضیب یا ځلوونی دې وټاکل شي.

$$N_{48}=N_0\cdot e^{48\cdot k}\ |:N_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{N_{48}}{N_0}=e^{48\cdot k}\ |\ln$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{N_{48}}{N_0}\right)=\ln\left(e^{48\cdot k}\right)=48k\ |:48$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{48}\cdot\ln\left(\frac{N_{48}}{N_0}\right)=k$$

د عددونو سره $k=\frac{1}{48}\cdot\ln\left(\frac{100000}{5000}\right)=\frac{1}{48}\cdot\ln(20)$ کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ودې ضریب: $k = \frac{1}{48} \cdot \ln(20) \approx 0,0624$:

له دې سره د ودې تابع ده: $N(t) = 5000 \cdot e^{\frac{1}{48} \cdot \ln(20) \cdot t}$:

ب – د باکتریانو تعدا یا ګنون دبل یا دوه برابره کیږي

اینوونه: $2 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{\frac{1}{48}\ln(20) \cdot t} \quad | : N_0$

$$\Leftrightarrow 2 = e^{\frac{1}{48}\ln(20) \cdot t} \quad | \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln(2) = \ln\left(e^{\frac{1}{48}\ln(20) \cdot t}\right) = \frac{1}{48}\ln(20) \cdot t \;|: \frac{1}{48}\ln(20)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{\frac{1}{48}\ln(20)} = t \Leftrightarrow t = \frac{48 \cdot \ln(2)}{\ln(20)} \approx 11,106$$

هر 11,106 ساعته د باکتریاو تعداد دوه برابره کیږي.

پ – د ۸۰ ساعته وروسته منځ ارزښت

$$m = \frac{1}{80}\int_0^{80} N(t)\, dt = \frac{1}{80}\int_0^{80} N_0 \cdot e^{k \cdot t}\, dt = \frac{N_0}{80}\int_0^{80} e^{k \cdot t}\, dt$$

بدلون: $u(t) = k \cdot t \Rightarrow \frac{du}{dt} = k \Rightarrow dt = \frac{1}{k} du$:

لاندې پوله : u(0)=k.0=0 پورته پوله:u(80)=80k

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$m=\frac{N_0}{80}\left(\frac{1}{k}\int_0^{80k} e^u\,du\right)=\frac{N_0}{80k}\left[e^u\right]_0^{80k}=\frac{N_0}{80k}\left(e^{80k}-1\right)$$

د $N_0=5000$ او $k=\frac{1}{48}\ln(20)$ سره کیږي

$$m=\frac{5000}{\frac{80}{48}\ln(20)}\left(e^{\frac{80}{48}\ln(20)}-1\right)=\frac{5000}{\frac{5}{3}\ln(20)}\left(e^{\frac{5}{3}\ln(20)}-1\right)$$

$$=\frac{15000}{5\cdot\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right)=\underline{\underline{\frac{3000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right)\approx 146569{,}767}}$$

په منځنی توګه په لومړنیو 80 ساعتو کې 146570, اکتیاو ې شتون لري.

ت ــ $m(x)=m$ $N(x)=N_0\cdot e^{k\cdot x}$ ثابت یا همغه دی(د پوښتنې پ برخه وګورئ)

موږ انتیګرال جوړوو، کوم چې د دواړو پولو ترمنځ سطحه انځوروي.

$$\int_0^{80}\left(N(x)-m\right)dx=\int_0^{80}\left(N_0\cdot e^{k\cdot x}-m\right)dx=N_0\int_0^{80} e^{k\cdot x}\,dx-m\int_0^{80}dx$$

انتیګرالI: $\int_0^{80} e^{k\cdot x}\,dx$ د بدلون له لارې حل u(x)=k.x

$$\frac{du}{dx}=k\Rightarrow dx=\frac{1}{k}du$$

لاندې پوله : u(0)=k.0=0 پورته پوله:u(80)=80k

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{80} e^{k\cdot x}\,dx = \frac{1}{k}\int_0^{80k} e^{u}\,du = \frac{1}{k}\left[e^{u}\right]_0^{80k} = \frac{1}{k}\left(e^{80k}-1\right)$$

انتيګرال II :

$$\int_0^{80} dx = [x]_0^{80} = 80$$

$$N_0\int_0^{80} e^{k\cdot x}\,dx - m\int_0^{80} dx = \frac{N_0}{k}\left(e^{80k}-1\right) - 80m$$

ارزښتونه کيږدئ يا وضعه کړئ

$$N_0 = 5000\,;\ k = \frac{1}{48}\ln(20)\,;\ m = \frac{3000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right)$$

$$\frac{N_0}{k}\left(e^{80k}-1\right) - 80m = \frac{5000}{\frac{1}{48}\ln(20)}\left(e^{80\cdot\frac{1}{48}\ln(20)}-1\right) - \frac{80\cdot 3000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right)$$

$$= \frac{240000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right) - \frac{240000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right) = 0$$

تابع m(x) = m د ودې تابع N(x) منځ ارزښت جوړوي. د سطحې (برخه I) د m(x) کښته لور ته بايد ټيک همدومره لويه وي، لکه د سطحې برخه (برخهII) ، چې د m(x) پورته لور ته پرته ده. دا له منځ ارزښت څخه راځي يا لرو. دا چې د N(x) د سطحې I په ورشو کې د m(x) کښته لور ته پروت دی ، هلته د انتيګرال ارزښت کميز يا منفي دی. دا چې N(x) د سطحې I I په ورشو کې د m(x) پورته لور ته پروت دی، نو هلته د انيتګرال ارزښت زياتيز يا مثبت دی. د دې په تعقيب يا په دې پسې د انتيګرال په ټوله سطحه کې چې منځ ارزښت يې جوړ شو، نو منځ ارزښت بايد په صفر برابر وي. پورته شميرنه په ګوته کوي، چې دا حالت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

دریم -

لومړی: محور غوځتکي:

$$f(x) = e^{2x} - 4 \cdot e^{x}$$

د y محور سره غوځتکي

$$y_s = f(0) = e^{0} - 4 \cdot e^{0} = 1 - 4 = -3 \Rightarrow \underline{P_y(0 \mid -3)}$$

دx محور سره غوځتکي

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4 \cdot e^{x} = 0$$ (اکسپوننشل مساوات)

د حل اینسوونه د لوګاریتم له لارې:

$$e^{2x} - 4 \cdot e^{x} = 0 \mid +4 \cdot e^{x}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = 4 \cdot e^{x} \mid \ln(\ )$$

( )lnپه دې معنا چې د دواړو اړخونو لوګاریتم ونیسئ

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}\right) = \ln\left(4 \cdot e^{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \ln(e) = \ln(4) + x\ln(e)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \ln(4) + x \mid -x$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(4) \approx 1{,}39 \Rightarrow$$

صفرځایونه: $\underline{\underline{P_x(\ln(4) \mid 0)}}$ همداسي $\underline{\underline{P_x(1{,}39 \mid 0)}}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم:

$$f(x) = e^{2\cdot x} - 4\cdot e^{x} \,;\, f'(x) = 2e^{2\cdot x} - 4e^{x} \,;\, f''(x) = 4e^{2\cdot x} - 4e^{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2\cdot x} - 4e^{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2\cdot x} = 4\cdot e^{y} \;|:2$$

$$\Leftrightarrow e^{2\cdot x} = 2\cdot e^{x} \;|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2\cdot x}\right) = \ln\left(2\cdot e^{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x\cdot\ln(e) = \ln(2) + x\cdot\ln(e)$$

$\Leftrightarrow 2x = \ln(2) + x \Rightarrow x_e = \ln(2)$ د پراته تانجنت سره ځای دی)

$$f''(x_e) = f''(\ln(2)) = 4\cdot e^{2\cdot\ln(2)} - 4\cdot e^{\ln(2)} = 4\cdot\left(e^{\ln(2)}\right)^2 - 4\cdot e^{\ln(2)}$$

له $e^{\ln(2)} = 2$ سره کیږي

$$f''(\ln(2)) = 4\cdot 2^2 - 4\cdot 2 = 8 > 0 \Rightarrow \text{ rel Min für } x_e = \ln(2)$$

$$y_e = f(\ln(2)) = e^{2\cdot\ln(2)} - 4\cdot e^{\ln(2)} = \left(e^{\ln(2)}\right)^2 - 4\cdot e^{\ln(2)} = 2^2 - 4\cdot 2 = -4$$

$$\Rightarrow P_{Min}(\ln(2)\,|\,-4) \text{ bzw } P_{Min}(0{,}69\,|\,-4)$$

دریم: اوړنتکی یا د انعطاف ټکی f’’(x)00 او $f'''(x) \neq 0$

$$f(x) = e^{2\cdot x} - 4\cdot e^{x} \,;\, f'(x) = 2\cdot e^{2\cdot x} - 4\cdot e^{x} \,;\, f''(x) = 4\cdot e^{2\cdot x} - 4\cdot e^{x}\,;$$

$$;\, f'''(x) = 8\cdot e^{2x} - 4\cdot e^{x}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4\cdot e^{2\cdot x} - 4\cdot e^{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot e^{2\cdot x} = 4\cdot e^{x} \;|:4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځکه چي $\Leftrightarrow e^{2\cdot x} = e^{x} \Rightarrow x_w = 0$ 2x=x فقط د x=0 لپاره کیدونکی دی.

$f'''(x_w) = f'''(0) = 8\cdot e^0 - 4\cdot e^0 = 8\cdot 1 - 4\cdot 1 = 4 \neq 0 \Rightarrow x_w = 0$ صفرځای دی

$$f(x_w) = f(0) = e^0 - 4\cdot e^0 = 1 - 4\cdot 1 = -3 \Rightarrow \underline{\underline{P_w(0|-3)}}$$

ځلورم:

$$\int_0^{\ln(4)} f(x)\,dx = \int_0^{\ln(4)} \left(e^{2\cdot x} - 4\cdot e^{x}\right) dx = \int_0^{\ln(4)} e^{2\cdot x}\,dx - 4\int_0^{\ln(4)} e^{x}\,dx$$

برخه انتیګرال د بدلون له لارې حلونه. الماني= او له دې سره

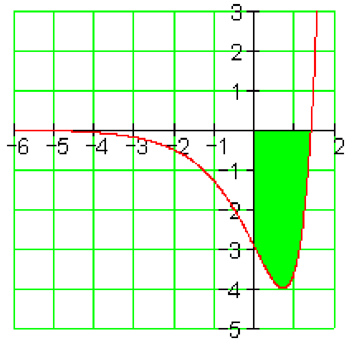
$$\int e^{2\cdot x}\,dx \text{ Substitution: } u(x) = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

$$\frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u} \Rightarrow \int e^{2\cdot x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2\cdot x} \text{ und mit } \int e^{x}\,dx = e^{x}$$

$$\int_0^{\ln(4)} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2\cdot x} - 4e^{x}\right]_0^{\ln(4)} = \left[\frac{1}{2}e^{2\cdot\ln(4)} - 4e^{\ln(4)}\right] - \left[\frac{1}{2}e^{0} - 4e^{0}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cdot 16 - 4\cdot 4\right] - \left[\frac{1}{2}\cdot 1 - 4\cdot 1\right] = -\frac{9}{2}$$

$$A = \left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}FE = \underline{\underline{4,5\,FE}}$$



په پورته کې FE (د سطحي یوون یا واحد)

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

پوښتنې

مشتق- او انتیګرالشمیرنې ته د استعمال پوښتنې II

Infusion او ګډې وډېپوښتنې

لومړی:

د عملیات وروسته ناروغ ته اینفوزیون Infusion (اینفوزیون Infusion لاتین کلمه ده، چي له *infundere* اخست شوی او دلته د ،،څاڅکي څاڅکي،، په مانا ده، چې بدن ته ننوځي) اخلي یا اینفوزیون ورکوي. څېره دوزې Dosierung ښایي چې ناروغ ته یوه 24 ساعته وخت په انتروال کې ورکول کیږي. دوزې په دې معنا دی: په وخت کې mg/h. پیل کیږي د1 mg/h دوزې سره.

الف- د دوزې ورکونو تلنه وښایې.

ب- د دوزې تلنه د یوه لاندې اکسپوننشل تابع سره مودل کیږي.

$$f(x) = n_0 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$$

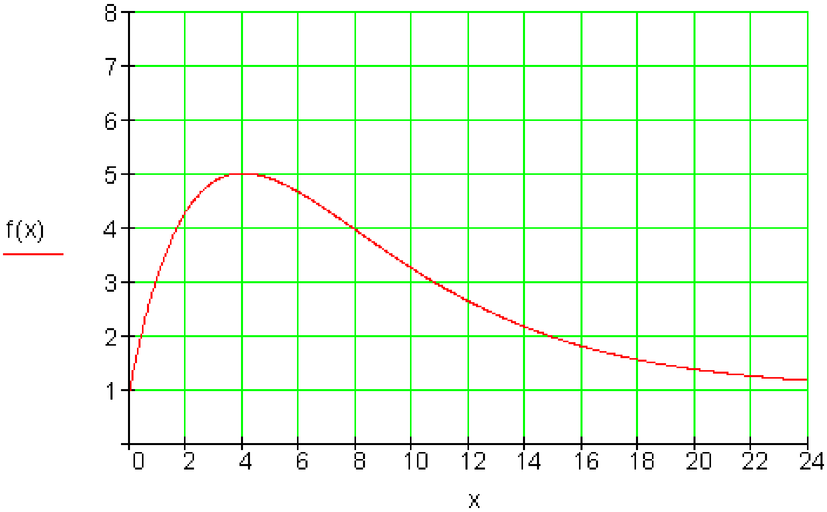
د او لپاره مناسب ارزښتونه وسمیری، که له ساعته وروسته یو خورا لجګه دوزې ورکونه د دا نوره بس شي.

تابع مساوات څنګه دي؟

پ- په کوم وخت کې د دوزې کمیدنه به زور سره صورت نیسي؟

ت- د ورکړ شوې دوا ډېری یا سټ وشمیری، که اینفوزیون 24 صورت ونیي.

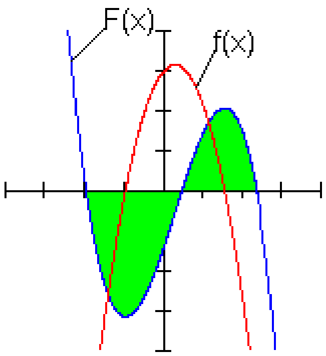
(c) ketabton.com: The Digital Library



غوښتنه: e - تابع ، مشتق، افراطي ارزښتونه، اوړنټکی یا د انعطاف ټکی، ټاکلی انتیګرال.

دویم: لاندې تابع ورمړ شوی دی:

$$f(x) = -2x^2 + x + 3$$

	الف-د بنسټ تابع F(x) ګراف د ټکي (0 | 2-) له لارې ځغلي. د F(x) تابع مساوات وټاکی. ب- دا په ځنګ کې د ګراف په نخښه شوې سطحه وشمیرې. د شمیرنې تیکوالی: د لسمیز یا عشاریه څخه درځایه وروسته.

غوښتنه: ټول راشنل یا هوښیار. بنسټ تابع، c وټاکی، صفرځایونه، ټاکلی انتیګرال.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حلونه(اوبیونې)

مشتق- او انتیګرالشمېرنې ته داستعمال پوښتنې II

نتیجې او مفصل حلونه

اول – نتیجې:

الف – د تلنو تشریح:

دوزې ورکونه له 1 mg/h څخه پیل کیږي. بیا یوغږیزه جګیږي، چې ۴ ساعته وروسته د5 mg/h یو خورا حګ ارزښت ته ورسیږي. له دې وذوسته تیټیږي، لوړمی په زور یا قوي، بیا لږ په زور، یو غږیزکمیږي.

ب – د دوزې ورکونې تابع مساوات دي:

$$f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

پ – د دوزې ورکونې کموالی د x = 8 ساعته وروسته په زور یا قوي دی. دا ا وړنځای یا انعطافځای دی.

ت -

$$M = \int_0^{24} \left(1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right) dx = 24 - 112e^{-5} + 16e \approx 66,738$$

په 24 ساعته کې د ورکړ شوو د دارو ډېری یا سټ نږدې 67 mg دی.

دویم – نتیجه.

الف- د بنسټتابع F(x) تابعمساوات داسي دي:

$$F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

ب – د په نخښه شوې سطحې منحنی‌لاندې یا مساحت نږدې دی:

$$A \approx 4,955 + 2,522 \approx 7,477 \ FE$$

FE د سطحې واحد یا یوون

اول- مفصل حل : دلته ټ نه شته؟؟؟

الف – د تلنې تشریح یا روښانونه:

دوزې ورکونه له 1 mg/h څخه پیل کیږي. بیا یوغږیزه جګیږي، چې ۴ ساعته وروسته د5 mg/h یو خورا حګ ارزښت ته ورسیږي. له دې وذوسته ټیټیږي، لوړمی په زور یا قوي، بیا لږ په زور، یو غږیزکمیږي.

ب – د دوزې ورکونې تابع مساوات دي:

$$A \approx 4,955 + 2,522 \approx 7,477 \ FE$$

FE د سطحې واحد یا یوون

پ -

اېښوونه: $f(x) = n_0 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$

پیلدوزېورکونه: $n_0 = 1 mg/h \Rightarrow f(x) = 1 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$

د $x=4$ ساعته وروسته خورا لویه یاماکسیمال دوزې ورکونه په دې معنا:

$f(x)$ په $x=4$ کې پروت یا افقي تانجنت لري، یعني $f'(x) = 0$

$f'(x)=u'v+uv'$ د $u=a.x$ او $v = e^{k \cdot x}$ همداسې $u'=a$ او $v' = k \cdot e^{k \cdot x}$ د سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x) = a\cdot e^{k\cdot x} + a\cdot x\cdot e^{k\cdot x} = a\cdot e^{k\cdot x}(1+k\cdot x)$$

$$f'(4) = 0 \Leftrightarrow a\cdot e^{4k}(1+4\cdot k) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1+4\cdot k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 1+a\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

له x=4 ساعته وروسته: f(4)=5

$$f(4) = 5 \Leftrightarrow 1+4a\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot 4} = 5$$

$$\Leftrightarrow 1+4a\cdot e^{-1} = 5 \Leftrightarrow a = e$$

د دوزې ورکوني تابع مساوات: $f(x) = 1+e\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

ث – د دوزې ورکوني تغیر ارزښت(د وخت په واکوالي کې) د لومړي مشتق سره ټاکل کیږي. د دې ماکسیموم په اوړونټکي یا انعطافټکي کې پروت دی.

$$f(x) = 1+e\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

لومړی مشتق

$$f'(x) = u'v+uv' \text{ mit } u = e\cdot x \text{ und } v = e^{-\frac{1}{4}x}$$

همداسې u’=e او $v' = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$

$$f'(x) = e\cdot e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{e}{4}x\cdot e^{-\frac{1}{4}x} = e\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\left(1-\frac{1}{4}x\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مشتق

$$f''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v = 1 - \frac{1}{4}x$$

همداسې $u' = -\frac{1}{4} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ او $v' = -\frac{1}{4}$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (1 - \frac{1}{4}x) - \frac{1}{4} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = -\frac{1}{4} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (2 - \frac{1}{4}x)$$

د اوښتون ځای (د انعطاف ځای) لپاره شرایط $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{4}x = 0 \Rightarrow x_w = 8$

دریم مشتق

$$f'''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = -\frac{1}{4} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v = 2 - \frac{1}{4}x$$

همداسې $u' = \frac{1}{16} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ او $v' = -\frac{1}{4}$

$$f'''(x) = u' = \frac{1}{16} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (2 - \frac{1}{4}x) + \frac{1}{16} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = \frac{1}{16} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (3 - \frac{1}{4}x)$$

$$f'''(x_w) = f'''(8) = \frac{1}{16} e \cdot e^{-2} \cdot (3 - \frac{1}{4}8) = \frac{1}{16} e^{-1} \neq 0$$

له دې لاس ته راځي، چې $\Rightarrow x_w = 8$ د f(x) اوښتونځای(د انعیاف ځای)

د ګولۍ ورکولو Dosierungوخت له8 = x ساعته وروسته خورا قوي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

ت – د ورکړشوو ګولیو یا دارو ډېریو یا ستونو سطحه د ګراف او دx محور ترترمنځ ده، ځکه چيmg/h.h=mg .

د دې سره د یوې پیجکارۍ وخت ۲۴ ساعتونه بنسټ دی.

Menge = ډېرۍ

$$f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow Menge = M = \int_0^{24} f(x)\,dx = \int_0^{24}\left(1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right)dx$$

د پهI کې او په II کې یعني $I = \int_0^{24} 1dx$ او $II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$ د انتیګرال د وېشنې په حیث

داسې چې باور لري: K=I+e.II

$$I = \int_0^{24} 1dx = [x]_0^{24} = 24$$

$II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$ د توته انتیګرال له لارې حل د $\int u \cdot v'dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx$: سره.

$$u(x) = x; v'(x) = e^{-\frac{1}{4}x}; u'(x) = 1; v(x) = \int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$

ترمنځ شمیرنه

د بدلون له لارې حل: $\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$: u(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{4} \Rightarrow dx = -4\,du$$

$$\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = -4\int e^{u}\,du = -4e^{u} = -4e^{-\frac{1}{4}x} = v$$

$$\int x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = x \cdot (-4e^{-\frac{1}{4}x}) - \int 1 \cdot (-4e^{-\frac{1}{4}x})\,dx = -4x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + 4\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$

$$= -4x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} - 16e^{-\frac{1}{4}x} = -4e^{-\frac{1}{4}x}(x+4)$$

$$\Rightarrow II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = \left[-4e^{-\frac{1}{4}x}(x+4)\right]_0^{24} = -4e^{-6}(24+4) - [-4 \cdot 4] =$$

$$= -112e^{-6} + 16$$

$$\Rightarrow M = I + e \cdot II = 24 + e\left(-112e^{-6} + 16\right) = 24 - 112e^{-5} + 16e \approx 66{,}738$$

په 24 ساعته کې به نږدې د 67 mg دواډېرى يا سټ ورکړ شي.

دویم – مفصل حل

الف –

$$f(x) = -2x^2 + x + 3$$

$$I(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(-2x^2 + x + 3\right)dx = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$$

$$P(-2\,|\,0) \Rightarrow I(-2) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 + 3 \cdot (-2) + C = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{3} + 2 - 6 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3}$$

$$F(x) = I(x) + C \Rightarrow \underline{\underline{F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب – د انتیګریشن پولې لپاره د F(x) صفرځایونه وټاکی.

$$F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}$$

معلوم دی.

	$-2/3$	$1/2$	3	$-4/3$
$x_1 = -2$	$\downarrow$	$4/3$	$-22/6$	$4/3$
	$-2/3$	$11/6$	$-2/3$	0

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{11}{6}x - \frac{2}{3} = 0 \mid : \left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x^2 - \frac{11}{4}x + 1 = 0$$

$$p = -\frac{11}{4};\ q = 1 \Rightarrow D = \frac{57}{64}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{11}{8} + \sqrt{\frac{57}{64}} \approx 2,319 \\ x_3 = \frac{11}{8} - \sqrt{\frac{57}{64}} \approx 0,431 \end{array} \right.$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left| \int_{x_1}^{x^2} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx \right|$$

$$\text{mit } x_1 = -2;\ x_2 = \frac{11}{8} - \sqrt{\frac{57}{64}};\ x_3 = \frac{11}{8} + \sqrt{\frac{57}{64}}$$

$$A_1 = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$= -\frac{1}{6}x_2^4 + \frac{1}{6}x_2^3 + \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_1^4 - \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{4}{3}x_1 \approx -4,995$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_2 = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x\Big|_{x_2}^{x_3}$$
$$= -\frac{1}{6}x_3^4 + \frac{1}{6}x_3^3 + \frac{3}{2}x_3^2 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_2^4 - \frac{1}{6}x_2^3 - \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{4}{3}x_2 \approx 2,522$$
$$A \approx 4,955 + 2,522 \approx \underline{\underline{7,477}}$$

پوښتنې

مشتق او انتیګرال شمیرنې ته پارامتریک پوښتنېI

پوښتنې د e تابع سره

لومړی: تابع $f_k(x) = e^{2x} - k \cdot e^x$ ورکړشوی د k>0او $x \in \mathbb{R}$ لپاره

الف-محور غوڅټکي، که شتون ولري، وشمیرئ .

ب- افراطي ټکي، که شتون ولري، وشمیرئ.

پ- اوړنټکي، که شتون ولري، وشمیرئ.

ت ـــد تعریف ورشو د پولو یا حدونو لپاره تابع ارزښتونه وټاکئ

ټ- د محورغوڅټکو او x -محور ترمنځ سطحهA_k وټاکئ.

ث- د $x \in \{-3; -2,5; \ldots; 1; 1,5\}$ لپاره ارزښتجدول جوړ کړئ او د $k \in \{2; 3; 4; 5\}$ لپاره ګراف په پروتولاړ- یا کواوردینات سیستم کې وکاږئ.

ج-د f_k (x) د ټیټ ټکو ځایکرږه(ځای منحني) f_{ok} (x) وشمیرئ او دا په پروت ولاړسیستم کې وکاږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k = 5$ لپاره سطحه A_k وشميرئ.

دويم: د $k>0$ او $x \in \mathbb{R}$ لپاره تابع $f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ ورکړ شوی.

الف- په محورغوڅټکو f_k وڅيړئ ا و دا وشميرئ.

ب- د $f_k(x)$ لومړي دريږ مشتقونه جوړ کړئ يا وشميرئ.

پ- f_k په افراطي ټکو باندې وڅيرئ او دا وشميرئ.

ت – f_k په اوړونټکو يا انعطافټکو باندې وڅيرئ او دا وشميرئ.

ټ- د تعريفورشو د پولې لپاره تابع ارزښت وټاکئ.

ث – د افراطي ټکو لپاره ځايکړه يا –منحني $f_{ok}(x)$ وټاکئ.

ج- د محورونو غوڅټکو اوx –محور ترمنځ سطحه A_k وټاکئ

ح- لاندې ارزښت جدول وکاروئ او په يوه پروتولاړ-يا کواوردينات سيستم کې د $f_1(x); f_2(x); f_3(x); f_4(x)$ او ځايوکرې $f_{ok}(x)$ لپاره ګراف وکاږئ. د غوره ټکو (محوغوڅټکي، افراطي- ا و اوړونټکو) ارزښتونه د جبشميري سره وشميرئ.

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	−0,16	−0,27	−0,43	−0,7	−1,12	−1,75	−2,62	−3,59	−3,94	−1,13	12,7
$f_2(x)$	−0,16	−0,26	−0,42	−0,67	−1,03	−1,5	−1,94	−1,74	1,08	12,5	49,8
$f_3(x)$	−0,16	−0,26	−0,41	−0,63	−0,94	−1,25	−1,26	0,11	6,1	26,2	86,9
$f_4(x)$	−0,16	−0,25	−0,4	−0,6	−0,85	−1	−0,58	1,95	11,1	39,8	124

خ= د$k = 1$ لپاره سطحه A_k وشميرئ او دا په يوه پروتولاړسيستم کې په نخښنه کړئ.

حلونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق او انتیګرال ته پارامتریک پوښتنې

نتیجې او مفصل حلونه

اول - نتیجې

الف -

$P_{k_x}\left(\ln(k)\,|\,0\right)$ $P_{k_y}\left(0\,|\,1-k\right)$

ب –

ټیټټکی: $P_{k_{Min}}\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\middle|-\frac{1}{4}k^2\right)$

پ - اوړونټکی: $P_{k_w}\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\middle|-\frac{3}{16}k^2\right)$

ت -

$\lim_{x\to\infty} f_k(x)=\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f_k(x)=0$

ټ - مفصل حل وګورئ

ث - سطحه: $A_k=\left|-\frac{1}{2}k^2+k-\frac{1}{2}\right|$

ج – دټولوټیټکو لپاره د دځایمنحني د تابع مساوات: $f_{ok}(x)=-e^{2x}$

چ – د k = 5 لپاره سطحه 8 FE (۸ یوونه یا واحده)ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم - نتيجې

الف –

د ټولو $k \in \mathbb{R}$ لپاره د y–محور سره يو غوڅيدونکی ټکی شتون لري $P_{k_y}\left(0 \mid \frac{k}{4}-2\right)$

د ټولو $k > 0$ لپاره د x–محور سره يو غوڅيدونکی ټکی شتون لري $P_{k_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0\right)$

ب –

$$f_k'(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - e^{\frac{1}{2}\cdot x} \qquad f_k''(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - \frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

پ – د ټول $k > 0$ لپاره يو نسبي خورا ټيټ ټکی شتون لري

$$P_{k_{Min}}\left(2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right) \mid -\frac{4}{k}\right)$$

ت – د ټول $k > 0$ لپاره يو اوړونکی يا د انعطاف ټکی شتون لري

$$P_{k_w}\left(2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right) \mid -\frac{3}{k}\right)$$

ټ - $\lim_{x\to\infty} f_k(x) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f_k(x) = 0$

ث –

$f_{0k}(x) = -e^{\frac{1}{2}\cdot x}$ د $f_k(x)$ د ټيټ ټکي ځايګړه يا منحني ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ج - سطحه : $A_k = \left|-\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4\right|$

چ – مفصل حل وګورى.

ح - سطحه $A_1 = 12,25$ FE

اول – مفصل حلونه:

الف – دy - محور سره غوڅېدنکي

$$f_k(x) = e^{2x} - k \cdot e^x$$

$$y_s = f_k(0) = e^{2 \cdot 0} - k \cdot e^0 = 1 - k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}(0 \mid 1-k)}}$$

دx – محور سره غوڅېدنکي (صفرځایونه)

له نوکانو باسل $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - k \cdot e^x = 0 \mid e^x$

د صفرضرب جمله وکاروئ $\Leftrightarrow \underbrace{(e^x - k)}_{=0} \cdot \underbrace{e^x}_{\neq 0} = 0 \mid$

$$e^x - k = 0 \mid +k \Leftrightarrow e^x = k \mid \ln(\ ) \Leftrightarrow x = \ln(k)$$

$$\underline{\underline{P_{k_x}(\ln(k) \mid 0)}}$$

ب – د انحراف ټکي:

$$f_k(x) = e^{2x} - k \cdot e^x$$

$$f_k'(x) = 2 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = (2 \cdot e^x - k) \cdot e^x$$

$$f_k''(x) = 4 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = (4 \cdot e^x - k) \cdot e^x$$

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow (2 \cdot e^x - k) \cdot e^x = 0 \mid :$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفرضرب جمله وکاروئ

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{k}{2}\right)$$

یو ممکنه افراطي ځای دی

د دویم مشتق له لارې یې شمیرنه: $f_k''(x) \neq 0$

$$f_k''(x) = f_k''\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\right) = 4 \cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{k}{2}\right)} - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} = 4 \cdot \left(e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}\right)^2 - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}$$

د $e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} = \frac{k}{2}$ سره کیږي:

$$f_k''(x) = 4 \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{2} = 4 \cdot \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} = k^2 - \frac{k^2}{2} = \frac{k^2}{2} > 0$$

په $x = x_E = \ln\left(\frac{k}{2}\right)$ کې یو نسبي خورا ټیټټکي(مینیموم) شتون لري.

افراطي ارزښت:

$$y_{k_E} = f_k(x_E) = f_k\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\right) = e^{2\cdot\ln\left(\frac{k}{2}\right)} - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} = \left(\frac{k}{2}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{2} = \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}k^2 - \frac{2}{4}k^2 = -\frac{1}{4}k^2$$

له دې لاس ته راځي خورا ټیټټکی(مینیموم): $\underline{\underline{P_{k_{Min}}\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right) \mid -\frac{1}{4}k^2\right)}}$

پ – د انعطاف ټکي یا اوړونټکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_k''(x) = 4 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = \left(4 \cdot e^x - k\right) \cdot e^x$$

$$f_k'''(x) = 8 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = \left(8 \cdot e^x - k\right) \cdot e^x$$

د او ړونتکي یا د ا نعطاف ټکي لپاره اړیین او پوره کیدونکي شرطونه:

$$f_k''(x) = 0 \wedge f_k'''(x) \neq 0$$

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(4 \cdot e^x - k\right) \cdot e^x = 0|$$

د صفرضرب جمله وکاروئ

$$4 \cdot e^x - k = 0 + k \Leftrightarrow 4 \cdot e^x = k|:4 \Leftrightarrow e^x = \frac{k}{4}|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{k}{4}\right)$$

یو ممکنه اوړنوتکی دی

د دریم مشتق له لارې یې ازماېښت: $f_k'''(x) \neq 0$

$$f_k'''(x) = f_k'''\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\right) = 8 \cdot e^{2 \cdot \ln\left(\frac{k}{4}\right)} - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{4}\right)} = 8 \cdot \left(\frac{k}{4}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{4} =$$

$$= \frac{8}{16}k^2 - \frac{1}{4}k^2 = \frac{1}{4}k^2 \neq 0$$

په $x = x_w = \ln\left(\frac{k}{4}\right)$ کې یو اوړونتکی یا انعطافتکی پورت دی.

$$y_{k_w} = f_k(x_w) = f_k\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\right) = e^{2 \cdot \ln\left(\frac{k}{4}\right)} - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{4}\right)}$$

$$= \left(\frac{k}{4}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{4} = \frac{k^2}{16} - \frac{k^2}{4} = \frac{1}{16}k^2 - \frac{4}{16}k^2 = -\frac{3}{16}k^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې لاس ته راځي، چې اوړونټکی دی:

$$\underline{\underline{P_{k_w}\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\left|-\frac{3}{16}k^2\right.\right)}}$$

ت - د تعریفورشو د پولو لپاره د تابع ارزښتونه:

ټا کل کیږي: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_k(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-k\cdot e^{x}\right)=\lim_{x\to-\infty} e^{2x}-k\cdot\lim_{x\to-\infty} e^{x}=0-k\cdot 0=0$$

د $x\to-\infty$ لپاره د x محور د $f_k(x)$ اسیمپتوت دی.

$$\lim_{x\to\infty} f_k(x)=\lim_{x\to\infty}\left(e^{2x}-k\cdot e^{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\left(e^{x}-k\right)\cdot e^{x}\right]=\infty$$

د $x\to\infty$ لپاره د $f_k(x)$ تابع ارښتونه أه ټولو پولو اوړي یا وده کوي.

ټ – د سطحه د د محورغوځېکو ترمنځ:

صفرځایونه :

$$x_1=\ln(k)\Rightarrow$$

د سطحې انتیګرال دی: $A_k=\left|\int_0^{\ln(k)} f_k(x)\,dx\right|$

$$\int_0^{\ln(k)} f_k(x)\,dx=\int_0^{\ln(k)}\left(e^{2x}-k\cdot e^{x}\right)dx=\underbrace{\int_0^{\ln(k)} e^{2x}\,dx}_{I}-k\cdot\underbrace{\int_0^{\ln(k)} e^{x}\,dx}_{II}=I-k\cdot II$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I: \int_0^{\ln(k)} e^{2x}\,dx \text{ Substitution: } u(x) = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

$$\text{ug:}\quad u(0) = 2\cdot 0 = 0 \quad \text{og:}\quad u(\ln(k)) = 2\cdot\ln(k)$$

$$\int_0^{\ln(k)} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\cdot\ln(k)} e^{u}\,du = \left[\frac{1}{2}e^{u}\right]_0^{2\cdot\ln(k)} = \frac{1}{2}e^{2\cdot\ln(k)} - \frac{1}{2}e^{0} = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}$$

$$II: \int_0^{\ln(k)} e^{x}\,dx = \left[e^{x}\right]_0^{\ln(k)} = e^{\ln(k)} - e^{0} = k - 1$$

$$\int_0^{\ln(k)} f_k(x)\,dx = I - k\cdot II = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2} - k\cdot(k-1) = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2} - k^2 + k = -\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2}$$

له دې سره سطحه کیږي: $\underline{\underline{A_k = \left|-\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2}\right|}}$

ث – ارزښت جدول او د منحنیو ګرافونه (د منحنیو ډله) .

سربېره پردې دې محورغوڅټکي، ټیټټکي او د انعطاف ټکي و ارزښت جدول وروشمېرل شي.

$$P_{k_y}(0\,|\,1-k);P_{k_x}(\ln(k)\,|\,0);P_{k_{Min}}\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\Big|-\frac{1}{4}k^2\right);P_{k_w}\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\Big|-\frac{3}{16}k^2\right)$$

K=2

$$P_{2_y}(0\,|\,-1);P_{2_x}(\ln(2)\approx 0,69\,|\,0);P_{2_{Min}}\left(\ln\left(\frac{2}{2}\right)=0\,|\,-1\right);P_{2_w}\left(\ln\left(\frac{2}{4}\right)\approx -0,69\,|\,-0,75\right)$$

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_2(x)$	−0,1	−0,16	−0,25	−0,37	−0,6	−0,85	−1	−0,58	1,95	11,1	21,6

K=3

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P_{3_y}(0|-2); P_{3_x}(\ln(3)\approx 1{,}1|0); P_{3_{Min}}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)=0{,}41|-2{,}25\right); P_{3_w}\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\approx -0{,}29|-1{,}69\right)$

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_3(x)$	−0,15	−0,24	−0,39	−0,62	−0,97	−1,45	−2	−2,23	−0,77	6,64	15,85

$k=4$:

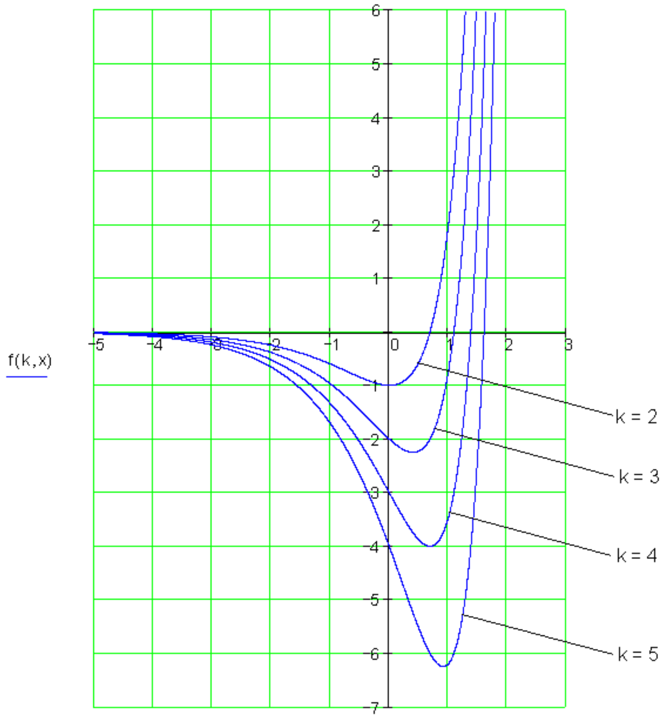
$P_{4_y}(0|-3); P_{4_x}(\ln(4)\approx 1{,}39|0); P_{4_{Min}}\left(\ln\left(\frac{4}{2}\right)=0{,}69|-4\right); P_{4_w}\left(\ln\left(\frac{4}{4}\right)=0|-3\right)$

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_4(x)$	−0,2	−0,32	−0,52	−0,84	−1,34	−2,06	−3	−3,88	−3,48	2,16	10,1

$k=5$:

$P_{5_y}(0|-4); P_{5_x}(\ln(5)\approx 1{,}61|0); P_{5_{Min}}\left(\ln\left(\frac{5}{2}\right)=0{,}92|-6{,}25\right); P_{5_w}\left(\ln\left(\frac{5}{4}\right)\approx 0{,}22|-4{,}69\right)$

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_5(x)$	−0,25	−0,4	−0,66	−1,07	−1,7	−2,67	−4	−5,53	−6,2	−2,32	4,34



(c) ketabton.com: The Digital Library

ج - د محليمنحني لپاره تيټتکو شميرنه:

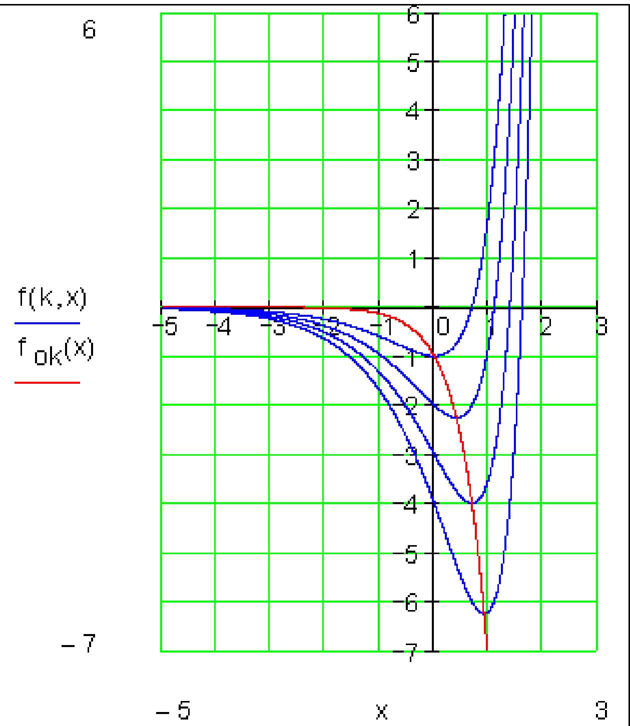
$$P_{k_{Min}}\left(\underbrace{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}_{x} \,\middle|\, \underbrace{-\frac{1}{4}k^2}_{y}\right) \Rightarrow x=\ln\left(\frac{k}{2}\right) \quad (1) \qquad y=-\frac{1}{4}k^2 \quad (2)$$

(۱) له k پسي حل کړئ:

$$x=\ln\left(\frac{k}{2}\right)\Big|\, e \quad \Leftrightarrow \quad e^x=e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad e^x=\frac{k}{2} \quad \Leftrightarrow \quad k=2\cdot e^x$$

نتيجه په (۲) کې کيږدئ:

$$y=-\frac{1}{4}k^2=-\frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot e^x\right)^2=-\frac{1}{4}\cdot 4\cdot e^{2x}=-e^{2x}$$



له دې سره د ټولو تيټتکو لپارهد تابع مساوات شي:

$$f_{ok}(x)=-e^{2x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چ – د $k = 5$ لپاره:

له $A_k = \left|-\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2}\right|$ e) څخه لاس ته راوړنه

$$A_5 = \left|-\frac{1}{2}\cdot 5^2 + 5 - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{25}{2} + 5 - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{25}{2} + \frac{10}{2} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{16}{2}\right| = |-8| = 8$$

د $k = 5$ لپاره سطحه 8 یونه یا واحده ده.

دویم – مفصل حلونه الف – د y - محور سره غوښتکي:

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y_s = f_k(0) = \frac{1}{4}k\cdot e^0 - 2\cdot e^{\frac{1}{2}0} = \frac{k}{4} - 2 \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}\left(0 \mid \frac{k}{4} - 2\right)}}$$

د ټولو $k \in \mathbb{R}$؛ لپاره د y - محور سره غوښتکي شتون لري.

د x - محور سره غوښتکي(صفرځایونه):

$$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} = 0 \mid + 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^x = 2\cdot e^{\frac{1}{2}x} \mid \cdot \frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{8}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}x} \mid \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\right) + \ln\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{8}{k}\right) + \frac{1}{2}\cdot\ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\right) + \frac{1}{2}x \mid -\frac{1}{2}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{8}{k}\right) | \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right) \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right) | 0\right)}}$$

د ټولو k>0 لپاره دx - محور سره غوځېکي شتون لري (صفرځایونه).

پ – مشتقونه

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}k\cdot e^x - e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}k\cdot e^x - \frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

ث – انحراف ټکي

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad f_k'(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - e^{\frac{1}{2}x} \quad f_k''(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

د افراطي ټکو لپاره پوره کیدونکي شرطونه: $f_k'(x) = 0 \quad \wedge \quad f_k''(x) \neq 0$

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^x - e^{\frac{1}{2}\cdot x} = 0 | + e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^x = e^{\frac{1}{2}\cdot x} | \cdot \frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{4}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}x} | \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{4}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right) = \ln\left(\frac{4}{k}\right) + \frac{1}{2}\cdot\ln\left(e^x\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{4}{k}\right) + \frac{1}{2}x | -\frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{4}{k}\right) | \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)$$

ممکنه افراطي ځایونه

$$f_k''(x) = f_k''\left(2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)\right) = \frac{1}{4}k \cdot e^{2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)} - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)} = \frac{1}{4}k \cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)^2} - \frac{1}{2} \cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}k \cdot \left(\frac{4}{k}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{k} = \frac{1}{4}k \cdot \frac{16}{k^2} - \frac{2}{k} = \frac{4}{k} - \frac{2}{k} = \frac{2}{k} > 0$$

د ټولو $k>0$ لپاره .

له دې لاس ته راځي، چې نسبي اکسترېموم(تیټتکی) په $x = x_{k_{Min}} = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)$ کې

$$y_{k_{Min}} = f_k\left(x_{k_{Min}}\right) = \frac{1}{4}k \cdot e^{2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)} - 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)} = \frac{1}{4}k \cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)^2} - 2 \cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}k \cdot \left(\frac{4}{k}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4}{k} = \frac{1}{4}k \cdot \frac{16}{k^2} - \frac{8}{k} = \frac{4}{k} - \frac{8}{k} = -\frac{4}{k}$$

$$\Rightarrow \underline{P_{k_{Min}}\left(2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) | -\frac{4}{k}\right)}$$

د ټولو $k > 0$ لپاره یو نسبي اکسترېمومو) تیټتکی) شتون لري.

ت ــ $f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} \quad f_k''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_k'''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

د انعطاف ټکی یا اوړونټکی: $f_k''(x) = 0 \quad \wedge \quad f_k'''(x) \neq 0$

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} = 0 \mid + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} \mid \cdot \frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{2}{k} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} \mid \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln\left(\frac{2}{k} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}\right) = \ln\left(\frac{2}{k}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln(e^x)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{2}{k}\right) + \frac{1}{2}x \mid - \frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{2}{k}\right) \mid \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right)$$

ممکنه اوړونټکی یا انعطافټکي

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} = 0 \mid + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} \mid \cdot \frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{2}{k} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} \mid \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln\left(\frac{2}{k} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}\right) = \ln\left(\frac{2}{k}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln(e^x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{2}{k}\right) | \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) \text{ möç}$$

ممکنه اوړونټکي یا د انغطاف ټکي

د لاندې پېښتو: د... لپاره.

$$f_k'''(x) = f_k'''\left(2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right)\right) = \frac{1}{4}k \cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)} - \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)} = \frac{1}{4}k \cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)^2} - \frac{1}{4} \cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}k \cdot \left(\frac{2}{k}\right)^2 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{k}\right) = \frac{1}{4}k \cdot \frac{4}{k^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} \neq 0$$

د $k>0$ لپاره.

$$\Rightarrow x = x_{k_w} = 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right)$$

یو اوړونټکی یا د انعطاف ټکی دی.

$$y_{k_w} = f_k\left(x_{k_w}\right) = \frac{1}{4}k \cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)} - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)} = \frac{1}{4}k \cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)^2} - 2 \cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}k \cdot \left(\frac{2}{k}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{2}{k}\right) = \frac{1}{4}k \cdot \frac{4}{k^2} - 2 \cdot \frac{2}{k} = \frac{1}{k} - \frac{4}{k} = \frac{1}{k}(1-4) = -\frac{3}{k}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{k_w}\left(2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) | -\frac{3}{k}\right)}}$$

د$k>0$ لپاره یو اوړنوکی شتون لري

ټ – د تعریف ورشو د پولو لپاره د تابع ارزښتونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_k(x)=\frac{1}{4}k\cdot e^x-2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x)=\frac{1}{4}k\cdot\underbrace{\lim_{x\to-\infty} e^x}_{\to 0}-2\cdot\underbrace{\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{\to 0}=\frac{1}{4}k\cdot 0-2\cdot 0=0$$

د $x\to-\infty$ لپاره ټول تابع ارزښتونه د 0 په لور ځغلي. له دې سره د x–محور اسمپتوت يت ګاونډ(مجانب) دی.

$$\lim_{x\to\infty} f_k(x)=\frac{1}{4}k\cdot\underbrace{\lim_{x\to\infty} e^x}_{\to\infty}-2\cdot\underbrace{\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{\to\infty}=\frac{1}{4}k\cdot\infty-2\cdot\infty$$

حلوړ نه دی.
مګر دا چې e^x د $x\to\infty$ لپاره نسبت $e^{\frac{1}{2}\cdot x}$ ته ګړندی له ټولو پولو اوړي، کيدی د کمون يا تفريق د پام کې لرنې له امله له دې څخه مخ ته لاړ شو، چې $\lim_{x\to\infty} f_k(x)=\infty$; باور لري

ث - د ټيټتکو ځايزه يا محلي منحني

$$P_{k_{Min}}\left(\underbrace{2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)}_{x}\,\Big|\,\underbrace{-\frac{4}{k}}_{y}\right)\Rightarrow x=2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)\quad(1)\quad y=-\frac{4}{k}\quad(2)$$

(1) د k په لور يا پسې حل کړئ او (2) کې ځاي په ځاي کړئ د ځای کرښ(-منحني) تابع مساوات ورکوي.

$$x=2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)\Big|:2\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{2}\cdot x=\ln\left(\frac{4}{k}\right)\Big|e^{(\,)}\quad\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}\cdot x}=e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\quad e^{\frac{1}{2}\cdot x}=\frac{4}{k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ښتټ ارزښت يې جوړ کړئ

$$\Leftrightarrow \quad e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{k}{4} | \cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad k = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x}$$

په(2) کي ځای په ځای کړې

$$y = -\frac{4}{k} = -\frac{4}{4 \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x}} = -\frac{4}{4} \cdot \frac{1}{e^{-\frac{1}{2}\cdot x}}$$

$$= -\frac{1}{e^{-\frac{1}{2}x}} = -e^{\frac{1}{2}\cdot x} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f_{ok}(x) = -e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$f_{ok}(x)$ د $f_k(x)$ د تیټتکي ځای کره(-منحني) ده

ج - د سطحي د مساحت شمېرنه

$f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ دا انتیګرال باید حل شي $A_k = \left| \int_0^{x_k} f_k(x)\, dx \right|$

$$\int f_k(x)\, dx = \frac{1}{4}k \cdot \int e^x\, dx - 2 \cdot \int e^{\frac{1}{2}x}\, dx$$

د $\int e^x\, dx = e^x + C$ او $\int e^{\frac{1}{2}x}\, dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$ سره باور لري:

$$\int f_k(x)\, dx = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

د پوله اینوونې وروسته لرو: $ug = 0; \quad og = x_k = 2 \cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\right)^2$ کیږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{x_k} f_k(x)\,dx = \frac{1}{4}k\cdot e^{\ln\left(\frac{8}{k}\right)^2} - 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right)} - \left(\frac{1}{4}k\cdot e^0 - 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0}\right)$$

$$= \frac{1}{4}k\cdot\left(\frac{8}{k}\right)^2 - 4\cdot\frac{8}{k} - \frac{1}{4}k + 4 = \frac{1}{4}k\cdot\frac{64}{k^2} - \frac{32}{k} - \frac{1}{4}k + 4$$

$$= \frac{16}{k} - \frac{32}{k} - \frac{1}{4}k + 4 = \frac{1}{k}(16-32) - \frac{1}{4}k + 4 = -\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4 \Rightarrow \underline{\underline{A_k = \left|-\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4\right|}}$$

چ - رارتلی یا په گته شوی تکی تکي

$k = 1$

$$P_{k_y}\left(0 \mid \frac{1}{4}k - 2\right) \Rightarrow P_{1_y}\left(0 \mid \frac{1}{4}\cdot 1 - 2\right) \Rightarrow P_{1_y}(0 \mid -1{,}75)$$

$$P_{k_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0\right) \Rightarrow P_{1_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{1}\right) \mid 0\right) \Rightarrow P_{1_x}(4{,}16 \mid 0)$$

$$x_{k_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{1_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{1}\right) \approx 2{,}77 \Rightarrow f_1\left(x_{1_{Min}}\right) = -4 \Rightarrow P_{1_{Min}}(2{,}77 \mid -4)$$

$$x_{k_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{1_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{1}\right) \approx 1{,}39 \Rightarrow f_1\left(x_{1_w}\right) = -3 \Rightarrow P_{1_w}(1{,}39 \mid -3)$$

$k = 2$

$$P_{k_y}\left(0 \mid \frac{1}{4}k - 2\right) \Rightarrow P_{2_y}\left(0 \mid \frac{1}{4}\cdot 2 - 2\right) \Rightarrow P_{2_y}(0 \mid -1{,}5)$$

$$P_{k_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0\right) \Rightarrow P_{2_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{2}\right) \mid 0\right) \Rightarrow P_{2_x}(2{,}77 \mid 0)$$

$$x_{k_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{2_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{2}\right) \approx 1{,}39 \Rightarrow f_2\left(x_{2_{Min}}\right) = -2 \Rightarrow P_{2_{Min}}(1{,}39 \mid -2)$$

$$x_{k_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{2_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{2}\right) = 0 \Rightarrow f_2\left(x_{2_w}\right) = -1{,}5 \Rightarrow P_{2_w}(0 \mid -1{,}5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$k = 3$

$$P_{k_y}\left(0 \mid \frac{1}{4}k - 2\right) \Rightarrow P_{3_y}\left(0 \mid \frac{1}{4}\cdot 3 - 2\right) \Rightarrow P_{3_y}(0 \mid -1{,}25)$$

$$P_{k_x}\left(2\cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0\right) \Rightarrow P_{3_x}\left(2\cdot \ln\left(\frac{8}{3}\right) \mid 0\right) \Rightarrow P_{3_x}(1{,}96 \mid 0)$$

$$x_{k_{Min}} = 2\cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{3_{Min}} = 2\cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0{,}58 \Rightarrow f_3\left(x_{3_{Min}}\right) \approx$$

$$\approx -1{,}33 \Rightarrow P_{3_{Min}}(0{,}58 \mid -1{,}33)$$

$$x_{k_w} = 2\cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{3_w} = 2\cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx -0{,}81 \Rightarrow f_3\left(x_{3_w}\right) = -1 \Rightarrow P_{3_w}(-0{,}81 \mid -1)$$

$k = 4$

$$P_{k_y}\left(0 \mid \frac{1}{4}k - 2\right) \Rightarrow P_{4_y}\left(0 \mid \frac{1}{4}\cdot 4 - 2\right) \Rightarrow P_{4_y}(0 \mid -1)$$

$$P_{k_x}\left(2\cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0\right) \Rightarrow P_{4_x}\left(2\cdot \ln\left(\frac{8}{4}\right) \mid 0\right) \Rightarrow P_{4_x}(1{,}39 \mid 0)$$

$$x_{k_{Min}} = 2\cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{4_{Min}} = 2\cdot \ln\left(\frac{4}{4}\right) = 0 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{Min}}\right) = -1 \Rightarrow P_{4_{Min}}(0 \mid -1)$$

$$x_{k_w} = 2\cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{4_w} = 2\cdot \ln\left(\frac{2}{4}\right) \approx -1{,}39 \Rightarrow f_4\left(x_{4_w}\right) = -0{,}75 \Rightarrow$$

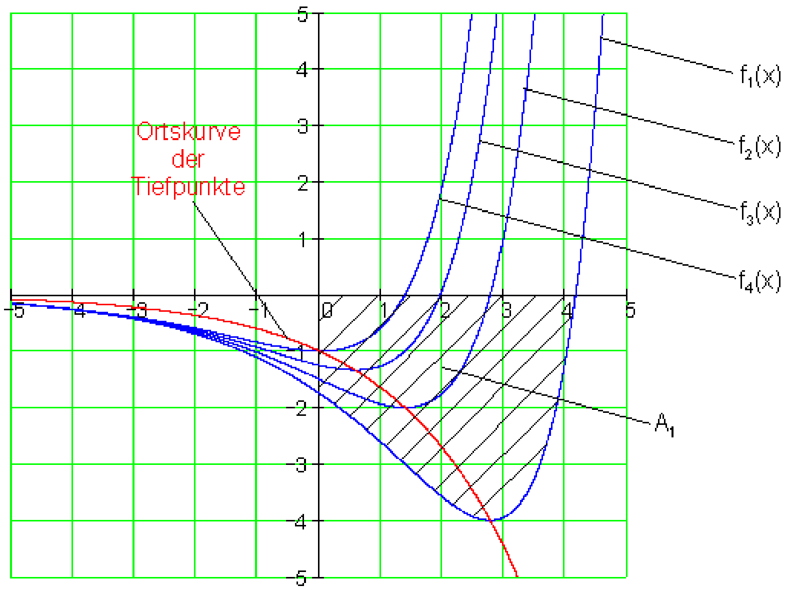
$$\Rightarrow P_{4_w}(-1{,}39 \mid -0{,}75)$$

د تابع ګراف

$$f(k,x) := \frac{1}{4}\cdot k\cdot e^{x} - 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} \qquad f_{ok}(x) := -e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

د تيتيکي لپاره ځای کړّ

(c) ketabton.com: The Digital Library



ح – معلومه سطحه :

$$A_k = \left|-\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4\right| \text{ für } k = 1 \text{ gilt:}$$

$$A_1 = \left|-\frac{16}{1} - \frac{1}{4}\cdot 1 + 4\right| = \left|-16 + 4 - \frac{1}{4}\right| = \left|-12 - \frac{1}{4}\right| = |-12,25| = \underline{\underline{12,25FE}}$$

پوښتنې

مشتق – او انتیګرال شمیرنو ته پوښتنې

د e -تابع سره پوښتنې.

لومړی: د k>0 او $x \in \mathbb{R}$ لپاره تابع $f_k(x) = (k - x)e^{\frac{1}{2}x}$ ورکړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- محورغوڅېټکي، که شتون ولري، وشمیرئ.

ب- افراېی ټکي، ه شتون ولري، وشمیرئ.

پ-اوړونټکی یا د انعطاف ټکي، که شتون ولري، وشمیرئ.

ت- د تعریفورشو پوله ارزښت لپاره تابعارزښتونه وټاکئ.

ټ- د محورغوڅېټکو او x – محور ترمنځ سطحه A_k وټاکئ.

ث- په یو پروتولاړ یا کواورد یناتسیستم کې د $x \in \{-5;-4;...;4;5\}$ او $k \in \{1;2;3;4\}$ لپاره ارزښت جدول وکاږئ.

ج- د لاندې ځایګړو یا ـمنحنیو مساواتابع وشمیرئ:

د $f_k(x)$ د جګټکي ځایکړه یا ـمنحني $f_{okh}(x)$ او

د $f_k(x)$ د جګټکي اوړونټکي یا د انعطافټکي $f_{okw}(x)$ او دا په یوه پروتولاړسیستم (قیمتوضعیه؟؟) کې وکاږئ.

چ- د $k = 4$ لپاره سطحه A_4 وشمیرئ او دا په پروتولاړسیستم(یا قیمت وضعیه) کې وکاږئ.

دویم: د $k \in \mathbb{R}$ او $x \in \mathbb{R}$ لپاره دې تابع $f_k(x) = (x^2 - k) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ ورکړ شوې وي.

الف- محور غوڅېټکي، که شتون ولري، وشمیرئ. د کوم k ارزښت لپاره صفرځای شتون لري؟

ب- د $f_k(x)$ لومړي درې مشتقونه وشمیرئ.

پ- $f_k(x)$ د افراطي ځایونو په هکله وڅېړی او د افراطیت او د k په واکولي یا تابعیت باندې یې یوه وینا (دا چې وینا څه شی دی ، د سم ا ند یا منطق برخ کې یې کتلی شئ) وکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت - $f_k(x)$ په اوړونځاییونو بندې د k په واکلوالي کې وڅېړئ.

ټ- د په واکوالي کې دې د A_k سطحه د صفرځایونو او د x –محور ترمنځ وشمیرل شي.

مرستموقف: $\int x^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = \left(2x^2 - 8x + 16\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$

ث- په یوه پروتولاړسیستم یا د وضعیهقیمت سیستم کې د $k \in (-4; -2; 0; 2; 4)$ لپاره ګراف وکاږئ.

د لاندې ارزښت جدول ځخه داتا وکاروئ.

x	−10	−8	−6	−4	−2	0	2
$f_{-4}(x)$	0,7	1,25	1,99	2,71	2,94	4	21,75
$f_{-2}(x)$	0,69	1,21	1,89	2,44	2,21	2	16,31
$f_0(x)$	0,67	1,17	1,79	2,17	1,47	0	10,97
$f_2(x)$	0,66	1,14	1,69	1,89	0,74	−2	5,44
$f_4(x)$	0,65	1,1	1,59	1,62	0	−4	0

برسیره پردې، که غوښتوني ووو،صفرځایونه، افراطي ځایونه او اوړونټکي یا د انعطاف ټکي.

ج- د سطحه وشمیرئ او سطحه په پروته- ولاړسیستم یا وضعیه قیمت سیسم کې په نخښه کړئ.

حلونه

مشتق او انتیګرالشمیرنې ته پارامتریکي پوښتنې II

نتیجې او مفصل حلونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

اول – نتیجې

الف - $P_{k_x}(k|0)$ $P_{k_y}(0|k)$

ب –

جګټکی : $P_{k_{Max}}\left(k-2\,|\,2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)$

ث –

$\lim_{x\to\infty} f_k(x) = -\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = 0$

ټ -

سطحه: $A_k = \left|4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - 2k - 4\right|$

د ځایکرې یا ځایمنحني د جګټکو لپاره تابع مساوات:	$f_{okh}(x) = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$
د ځایکرې یا ځایمنحني د د تولو انعطافټکو لپاره تابع مساوات:	$f_{okw}(x) = 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$

k = 4 17,556 FE

دویم – نتیجې :

الف -

$P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k}\,|\,0\right)$ $P_{k_y}(0|-k)$

ب –

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

$$f_k'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$f_k''(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$f_k'''(x) = \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}k + 3\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

پ - د$k>-4$ لپاره د $x_1 = -2+\sqrt{4+k}$ په ځای کې یو نسبي خورا ټیټ ټکی پروت دی.

د $k>-4$ لپاره د $x_2 = -2-\sqrt{4+k}$ په ځای کې یو نسبي خورا جګ ټکی پروت دی.

ت - $x_1 = -4+\sqrt{8+k}$ یو اوړنټکی یا انعطا فټکی، که $k>-8$ وي.

$x_2 = -4-\sqrt{8+k}$ یو اوړنټکی یا انعطا فټکی، که $k>-8$ وي.

ټ -

ث – مفصل حل وګوری

ج – سطحه $A_4 = 11,772$ FE

اول – مفصل حلونه

الف د y –محور سره غوښتکی:

$$f_k(x) = (k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y_s = f_k(0) = (k-0)\cdot e^{\frac{1}{2}0} = k\cdot 1 = k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}(0|k)}}$$

د x –محور سره غوښتکی(صفرځایونه):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_k(x)=0 \Leftrightarrow \left(\underbrace{k-x}_{0}\right)\cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0}=0$$

د پیتاګوراس(فیثاغرث) جمله وکاروئ

$$k-x=0|+x \Leftrightarrow k=x \Leftrightarrow x=k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_x}(k|0)}}$$

ب – د انحراف ټکي

$$f_k(x)=(k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x)=u'v+uv'\ r$$

د $u=k-x \Rightarrow u'=-1$ او $v=e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x)=-1\cdot e^{\frac{1}{2}x}+(k-x)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k-1\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x)=u'v+uv'$$

د $u=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k-1 \Rightarrow u'=-\frac{1}{2}$ او $v=e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f_k''(x)=-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k-1\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x)=u'v+uv'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $u=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1 \Rightarrow u'=-\frac{1}{4}$ او $l\,v=e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f_k'''(x)=u'v+uv' \text{ mit } u=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1 \Rightarrow u'=-\frac{1}{4} \text{ und } v=e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x)=u'v+uv'$$

د $u=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1 \Rightarrow u'=-\frac{1}{4}$ او $v=e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f_k'''(x)=-\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left(-\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}k-\frac{3}{4}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x)=0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k-1\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}=0$$

د پیتاګوراس جمله وکاروئ

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k-1=0 \Leftrightarrow x=k-2$$

$$\Leftrightarrow x=k-2\ i$$

یو ممکنه افراطي ځای دی.

د دویم مشتق(رابیلیدني) سره یي ازمایښت: $f_k''(x)\neq 0$

$$f_k''(x)=f_k''(k-2)=\left[-\frac{1}{4}(k-2)+\frac{1}{4}k-1\right]\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}=-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}<0$$

په $x=x_E=k-2$ کې یو نسبي خرا تیتیکی (خورا جګ ټکی) شتون لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

افراطي ارزښتونه:
$$y_{k_E} = f_k(x_E) = f_k(k-2) = [k-(k-2)]\cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}$$

له دې لاس ته رځی، چې ټټکی:
$$\underline{\underline{P_{k_{Max}}\left(k-2 \,|\, 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)}}$$

پ – د انعطاف ټکي]

$$f_k''(x) = \left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x} \qquad f_k'''(x) = \left(-\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}k-\frac{3}{4}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

د اوړونټکي یا انعطافټکي لپاره اړین- یا ضروري شرایط:

$$f_k''(x) = 0 \wedge f_k'''(x) \neq 0$$

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0|$$

د پیتاګوراس جمله وکاروئ یا استعمال کړئ

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1=0 \Leftrightarrow x = k-4$$

په $x = x_w = k-4$ کې یو اوړونټکی یا د انعطافټکی شته.

$$y_{k_w} = f_k(x_w) = f_k(k-4) = [k-(k-4)]\cdot e^{\frac{1}{2}(k-4)} = 4\cdot e^{\frac{1}{2}k-2}$$

له دې لاس ته را ځي، چې اوړونټکی دی:

$$\underline{\underline{P_{k_w}\left(k-4 \,|\, 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}\right)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت – د تعریف ورشو پولې لپاره د تابع ارزښتونه.

تاکو: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_k(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim_{x\to-\infty} (k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} = 0$$

د $x\to\infty$ لپاره د x-محور د $f_k(x)$ ګاونډ(مجاورت یا ا سیمپتوت) دی.

ټ – صفرځای: $x_1 = k$ له دې لاس ته راځي د سطحې انتیګرال $A_k = \left|\int_0^k f_k(x)\,dx\right|$

$$\int_0^k f_k(x)\,dx = \int_0^k (k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx$$

د ټوټه – یا پارشل انتیګرال له لارې حل لومړی ټولیز یا عمومي

$$\int \underbrace{(k-x)}_{u(x)}\cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{v'(x)}\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

$$u(x) = k - x \Rightarrow u'(x) = -1$$

$$v'(x) = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v(x) = \int e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2\cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$$

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = \int (-1)\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = -2\cdot\int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = -4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\int f_k(x)\,dx = (k-x)\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - \left(-4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right) + C = 2k\cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

$$\int_0^k f_k(x)\,dx = \left[2k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - 2x\cdot e^{\frac{1}{2}x} + 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right]_0^k$$

$$= 2k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - 2k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} + 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - \left(2k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0} - 2\cdot 0\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0} + 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0}\right) = 4\cdot e^{\frac{1}{2}k} - 2k - 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_k = \left|4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - 2k - 4\right|$$

له دې سره سطحه کيږي يا ده:

ث – ارزښاجدول او د کږو يا منحنی کودې (گزافونه).

محور غوڅتکي، تيتيکي او اوړونتکي يا د ا نعطاف تکي دې برسيره ارزښت جدول ته وروشميرل شي.

$$P_{k_y}(0|k);\quad P_{k_x}(k|0);\quad P_{k_{Max}}\left(k-2\,|\,2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right);\quad P_{k_w}\left(k-4\,|\,4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}\right)$$

$k=1:$

$$P_{1_y}(0|1);\quad P_{1_x}(1|0);\quad P_{1_{Min}}\left(-1|\,2\cdot e^{-\frac{1}{2}}\approx 1{,}21\right);\quad P_{1_w}\left(-3\,|\,4\cdot e^{-\frac{3}{2}}\approx 0{,}89\right)$$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,49	0,68	0,89	1,1	1,21	1	0	−2,72	−8,96	−22,17	−48,73

$k=2:$

$$P_{2_y}(0|2);\quad P_{2_x}(2|0);\quad P_{2_{Min}}\left(0|\,2\cdot e^{0}=2\right);\quad P_{2_w}\left(-2|\,4\cdot e^{-1}\approx 1{,}47\right)$$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_2(x)$	0,57	0,81	1,12	1,47	1,82	2	1,65	0	−4,48	−14,78	−36,55

$k=3:$

$$P_{3_y}(0|3);\quad P_{3_x}(3|0);\quad P_{3_{Min}}\left(1|\,2\cdot e^{\frac{1}{2}}\approx 3{,}3\right);\quad P_{3_w}\left(-1|\,4\cdot e^{-\frac{1}{2}}\approx 2{,}43\right)$$

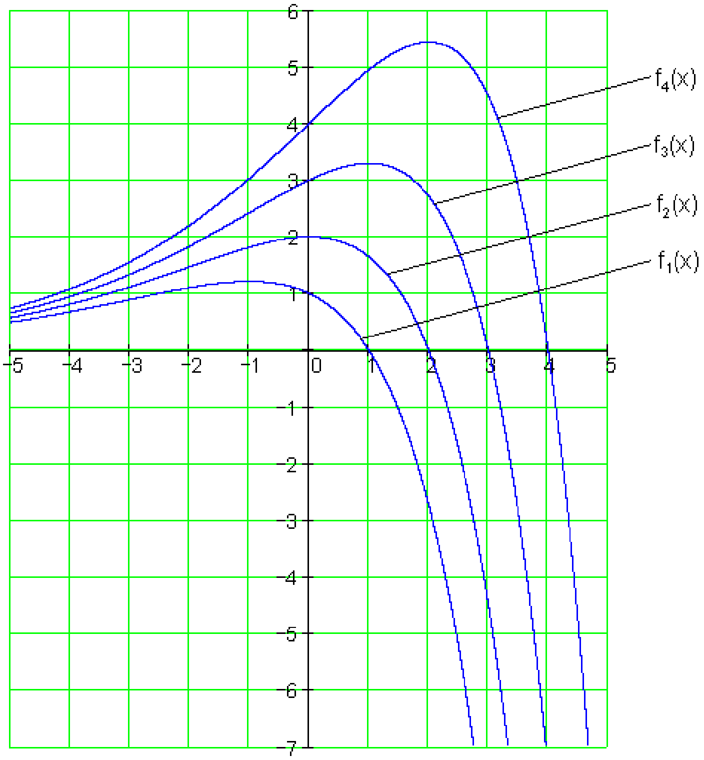
x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_3(x)$	0,66	0,95	1,34	1,84	2,43	3	3,3	2,72	0	−7,39	−24,36

K=4 :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P_{4_y}(0|4);\quad P_{4_x}(4|0);\quad P_{4_{Min}}(2|2\cdot e^1 \approx 5{,}44);\quad P_{4_w}(0|4\cdot e^0 = 4)$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_4(x)$	0,74	1,08	1,56	2,21	3,03	4	4,95	5,44	4,48	0	−12,18



ج ـ د ځای یا محلي منحني شمیرنه :

$$P_{k_{Max}}\left(\underbrace{k-2}_{x}\,\middle|\,\underbrace{2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}}_{y}\right) \Rightarrow x = k-2 \quad (1) \qquad y = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1} \quad (2)$$

(۱) په k پسې حل کړئ: $x = k-2 \quad \Leftrightarrow \quad k = x+2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نتخجه په (۲) کې کيږدئ:

$$y = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(x+2)-1} = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x+1-1} = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

له دې سره دټولو جګټکو لپاره د ځای کرې يا ځای-منحني تابعمساوا ت کيږي:

$$\underline{\underline{f_{okh}(x) = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}}}$$

$$P_{k_w}\left(\underbrace{k-4}_{x} \mid \underbrace{4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}}_{y}\right) \Rightarrow x = k-4 \quad (1) \quad y = 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2} \quad (2)$$

(۱) په k پسې حل کړئ:

$$x = k-4 \quad \Leftrightarrow \quad k = x+4$$

نتيجه په (۲) کې کيږدئ

$$y = 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(x+4)-2} = 4\cdot e^{\frac{1}{2}x+2-2} = 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

له دې سره د ټولو اوړنټکو يا انعطافټکو لپاره د تابعمساوات دي:

$$\underline{\underline{f_{okw}(x) = 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}}}$$

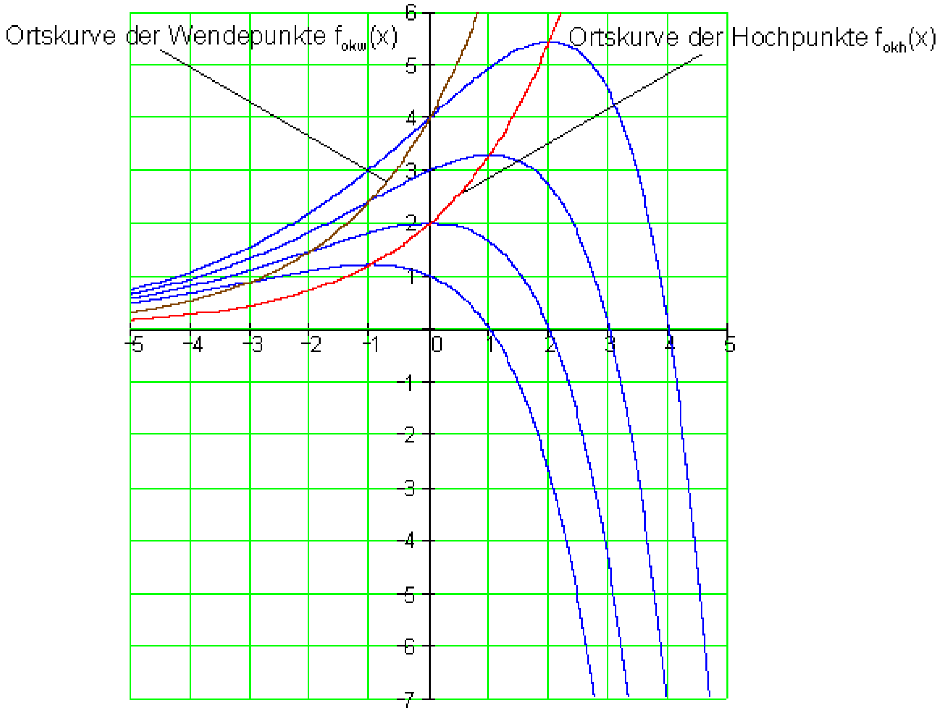
لاندې له کيڼ و ښي لور ته:

د جګټکي... ځايمنحني د اوړونټکی يا انعطافټکي منحنۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د الماني پښتو: له کيڼ څخه ښي لور ته: د اوړونټکي یا انعطافټکي ځای کرږه

د جګټکي ځای کرږه.



ح – د $k = 4$ لپاره سطحه:

$$A_k = \left|4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - 2k - 4\right|$$

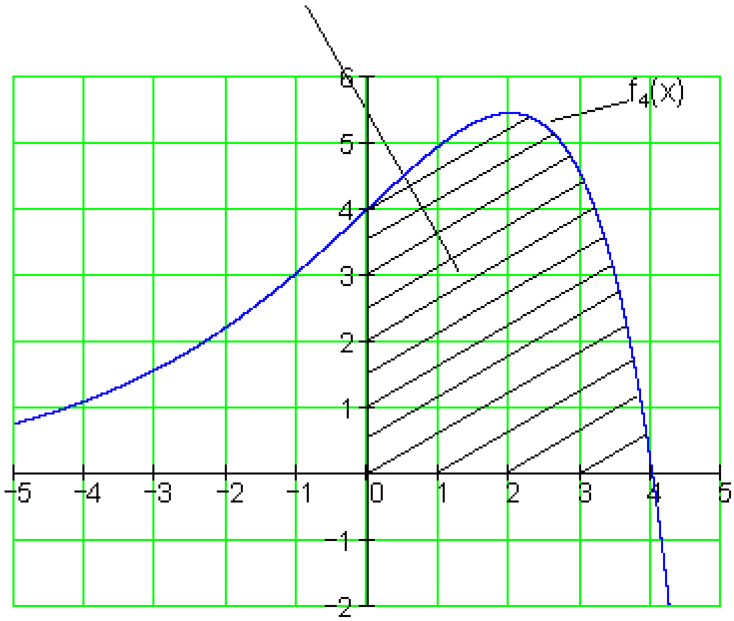
نیجه له ټ څخه

$$A_4 = \left|4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 4} - 2 \cdot 4 - 4\right| = \left|4 \cdot e^2 - 8 - 4\right| = \left|4 \cdot e^2 - 12\right| \approx 17{,}556$$

د $k = 4$ لپاره سطحه $\underline{\underline{17{,}556\ FE}}$ (یونه یا وحدونه)ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

A_4 د محورغوڅتکو او x -محور ترمنځ سطحه.



دويم – مفصل حل

الف –

د y –محور سره غوڅتکی:

$$f_k(x) = \left(x^2 - k\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$y_s = f_k(0) = \left(0^2 - k\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = -k \cdot 1 = -k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}(0 \mid -k)}}$$

د x - محور سره غوڅتکی(صفرځايونه):

د پيتاګوراس جمله وکاروئ

$$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\underbrace{x^2 - k}_{=0}\right) \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2} \cdot x}}_{\neq 0} = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2 - k = 0 | +k \iff x^2 = k | \sqrt{\ } \iff |x| = \sqrt{k}$$

$$\iff x_{k_{x1/2}} = \pm\sqrt{k} \text{ für } k \geq 0 \Rightarrow \underline{P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k} \mid 0\right)}$$

صفرځایونه فقط د $k \geq 0$ لپاره شتون لري.

ب - مشتقونه

$$f_k(x) = \left(x^2 - k\right) \cdot e^{\frac{1}{2} x}$$

$$f_k'(x) = u'v + uv'$$

د $u = x^2 - k \Rightarrow u' = 2x$ او $v = e^{\frac{1}{2} \cdot x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ سره

$$f_k'(x) = 2x \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} + \left(x^2 - k\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$f_k''(x) = u'v + uv'$$

د $u = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k \Rightarrow u' = x + 2$ او $v = e^{\frac{1}{2} \cdot x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ سره

$$f_k''(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} + \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$f_k'''(x) = u'v + uv'$$

د $u = \frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2 \Rightarrow u' = \frac{1}{2}x + 2$ او $v = e^{\frac{1}{2} \cdot x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} x}$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_k'''(x)=\left(\frac{1}{2}x+2\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+\left(\frac{1}{4}x^2+2x-\frac{1}{4}k+2\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}=\left(\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{8}k+3\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

پ - د افراط ټکي:

$$f_k'(x)=0\Leftrightarrow\left(\underbrace{\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}k}_{0}\right)\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{\neq 0}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}k=0|\cdot 2\quad\Leftrightarrow\quad x^2+4x-k=0$$

$$p=4;\quad q=-k\quad\Rightarrow\quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4+k\quad\Rightarrow\quad\sqrt{D}=\sqrt{4+k}$$

د$k\geq 0$ لپاره شتون لري

$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$	$x_1=-2+\sqrt{4+k}$ $x_2=-2-\sqrt{4+k}$	د$k\geq 0$ لپاره

د$-4\geq k$ لپاره x_1 او x_2 ځایونه دي د پراته-ولاړ تانجنت سره

د $0 > k$لپاره پروت-ولاړ تانجنت نه شته

د افراطیت ډول: $f_k''(x_{1/2})\neq 0$

$$f_k''(x_{1/2})=\left(\frac{1}{4}x_{1/2}^2+2\cdot x_{1/2}-\frac{1}{4}k+2\right)\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x_{1/2}}}_{>0}$$

که $0 <$ (...) وي، نو لاس ته راځي، چې په $x_{1/2}$ کې مینیموم یا خوراټیټ ټکی لرو.

که $0 >$ (...) وي، نو لاس ته راځي، چې په $x_{1/2}$ کې ماکسیموم یا خورا جګ ټکی لرو

منځشمیرنه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$: x_1^2 = \left(-2+\sqrt{4+k}\right)^2 = 8-4\cdot\sqrt{4+k}+k$$

$$x_2^2 = \left(-2-\sqrt{4+k}\right)^2 = 8+4\cdot\sqrt{4+k}+k$$

$$\left(\frac{1}{4}x_1^2+2\cdot x_1-\frac{1}{4}k+2\right)=\left[\frac{1}{4}\cdot\left(8-4\cdot\sqrt{4+k}+k\right)+2\cdot\left(-2+\sqrt{4+k}\right)-\frac{1}{4}k+2\right]=$$

$$=\sqrt{4+k}>0$$

د $x_1 = -2+\sqrt{4+k}$ په ځای کې یو نسبي مینیموم پروت دی، که $k > -4$ وي.

$$\left(\frac{1}{4}x_2^2+2\cdot x_2-\frac{1}{4}k+2\right)=\left[\frac{1}{4}\cdot\left(8+4\cdot\sqrt{4+k}+k\right)+2\cdot\left(-2-\sqrt{4+k}\right)-\frac{1}{4}k+2\right]=$$

$$=-\sqrt{4+k}<0$$

د $x_2 = -2-\sqrt{4+k}$ په ځای کې یو نسبي خورا تیټتکی پروت دی، که $k > 0$ وي.

د $k=-4$ لپاره $\sqrt{4+k}=0$ دی، یعنې $f_k''(x_{1/2})=0$ په دې حالت کې د $x_{1/2}$ په ځای کې په حقیقت کې یو پروت-ولاړ تانجنت شتون لري مګر نه افراطي ارزښت.

ت ــ د انعطاف ټکی یا اوړونټکی

$$f_k''(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{4}x^2+2x-\frac{1}{4}k+2\right)}_{=0}\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{\neq 0}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2+2x-\frac{1}{4}k+2=0|\cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+8x-k+8=0$$

$$p=8;\quad q=-k+8 \quad \Rightarrow \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=16-(-k+8)=16+k-8=8+k$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left|\begin{array}{l} x_1=-4+\sqrt{8+k} \\ x_1=-4-\sqrt{8+k}\end{array}\right. \quad \text{für } k\geq -8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k \geq 0$ لپاره x_1 او x_2 ممکنه اوړونټکي یا د انعطاف ټکي دي.

د $k < 0$ لپاره اوړونټکي نه شته

د اوړونځایونو ازماېښت: $f_k'''(x_{1/2}) \neq 0$

$$f_k'''(x_{1/2}) = \left(\frac{1}{8}x_{1/2}^2 + \frac{3}{2}x_{1/2} - \frac{1}{8}k + 3\right) \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2} \cdot x_{1/2}}}_{\neq 0}$$

که $(...) \neq 0$ وي نو لاس ته راځي، چې اوړونټکی په $x_{1/2}$ کې.

منځشمیرنه:

$$: x_1^2 = \left(-4 + \sqrt{8+k}\right)^2 = 24 - 8 \cdot \sqrt{4+k} + k$$

$$x_2^2 = \left(-4 - \sqrt{8+k}\right)^2 = 24 + 8 \cdot \sqrt{4+k} + k$$

$$\frac{1}{8}x_1^2 + \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{8}k + 3 = \left[\frac{1}{8}\left(24 - 8 \cdot \sqrt{4+k} + k\right) + \frac{3}{2}\left(-4 + \sqrt{8+k}\right) - \frac{1}{8}k + 3\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{8+k} \neq 0$$

$x_1 = -4 + \sqrt{8+k}$ د $k > -8$ لپاره یو اوړنځای یا د انعطاف ځای دی.

$$\frac{1}{8}x_2^2 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{8}k + 3 = \left[\frac{1}{8}\left(24 + 8 \cdot \sqrt{4+k} + k\right) + \frac{3}{2}\left(-4 - \sqrt{8+k}\right) - \frac{1}{8}k + 3\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{8+k} \neq 0$$

$x_2 = -4 - \sqrt{8+k}$ د $k > -8$ لپاره یو اوړونټکی یا د انعطافټکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ- د سطحې د مساحت ټولیزه شمیرنه

$P_{k \times 1/2}\left(\pm\sqrt{k} \mid 0\right)$ صفرځایونه فقط د $k \geq 0$ لپاره شتون لري

دا انتیګرال غواړو وشمیرو:

$$\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x)\,dx = \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \left(x^2 - k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = \underbrace{\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} x^2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx}_{I} - k\cdot \underbrace{\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx}_{II} = I - k\cdot II$$

ټولیز حل I مخ له مخه ورکول کیږي

$$\int x^2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = \left(2x^2 - 8x + 16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

حل II:

$$\int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx \quad \text{Substitution: } u(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2\cdot du$$

$$\Rightarrow \int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = 2\cdot\int e^u\,du = 2\cdot e^u = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

سره راټولول یا یوځای کول:

$$\int f_k(x)\,dx = I - k\cdot II = \left(2x^2 - 8x + 16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - k\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C =$$

$$= \left(2x^2 - 8x + 16 - 2k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

د پولو ځای په ځای کونه یا ایښونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x)\,dx = \left[\left(2x^2-8x+16-2k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right]_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}$$

$$=\left(2k-8\sqrt{k}+16-2k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}-\left(2k+8\sqrt{k}+16-2k\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}$$

$$=\left(-8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}-\left(8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}$$

د فزیکي سطحې پاره باور لري:

$$A_k=\left|\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x)\,dx\right|=\left|\left(-8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}-\left(8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}\right|$$

الف-

K=-4

$k<0$ صفرځای نه شته، ځکه چې $P_{k_y}(0|-k)\Rightarrow P_{-4_y}(0|4)$

افراطي ځای نه شته، ځکه د k=-4 لپاره شرط $k>-4$ پوره نه دی

$$x_{k_{w1}}=-4+\sqrt{8+k}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{-4_{w1}}=-4+\sqrt{8-4}=-4+\sqrt{4}=-2\Rightarrow f_{-4}\left(x_{-2_{w1}}\right)\approx 2{,}94$$

$$x_{-4_{w2}}=-4-\sqrt{8-4}=-4-\sqrt{4}=-6\Rightarrow f_{-4}\left(x_{-4_{w2}}\right)\approx 1{,}99$$

K=-2

$k<0$ صفرځای نه شته، ځکه چې $P_{k_y}(0|-k)\Rightarrow P_{-2_y}(0|2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x_{k_{Min}} = -2 + \sqrt{4+k} \Rightarrow$ ›

$$\Rightarrow x_{-2_{Min}} = -2 + \sqrt{4-2} = -2 + \sqrt{2} \approx -0,59 \Rightarrow f_{-2}\left(x_{-2_{Min}}\right) \approx 1,75$$

$$x_{-2_{Max}} = -2 - \sqrt{4-2} = -2 - \sqrt{2} \approx -3,41 \Rightarrow f_{-2}\left(x_{-2_{Max}}\right) \approx 2,48$$

$x_{k_{w1}} =$

$$= -4 + \sqrt{8+k} \Rightarrow x_{-2_{w1}} = -4 + \sqrt{8-2} = -4 + \sqrt{6} \approx -1,55 \Rightarrow f_{-2}\left(x_{-2_{w1}}\right) \approx 2,03$$

$$x_{-4_{w2}} = -4 - \sqrt{8-2} = -4 - \sqrt{6} \approx -6,45 \Rightarrow f_{-2}\left(x_{-2_{w2}}\right) \approx 1,73$$

$k = 0$

$P_{k_y}(0|-k) \Rightarrow P_{0_y}(0|0)$

$P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k}\,|\,0\right) \Rightarrow P_{0_{x1/2}}(0|0)$ دبل صفرځایونه

$$x_{k_{Min}} = -2 + \sqrt{4+k} \Rightarrow x_{0_{Min}} = -2 + \sqrt{4+0} = -2 + \sqrt{4} = 0 \Rightarrow f_0\left(x_{0_{Min}}\right) = 0$$

$$x_{0_{Max}} = -2 - \sqrt{4+0} = -2 - \sqrt{4} = -4 \Rightarrow f_0\left(x_{0_{Max}}\right) \approx 2,17$$

$$x_{k_{w1}} = -4 + \sqrt{8+k} \Rightarrow x_{0_{w1}} = -4 + \sqrt{8+0} = -4 + \sqrt{8} \approx -1,17 \Rightarrow f_0\left(x_{0_{w1}}\right) \approx 0,76$$

$$x_{0_{w2}} = -4 - \sqrt{8+0} = -4 - \sqrt{8} \approx -6,83 \Rightarrow f_0\left(x_{0_{w2}}\right) \approx 1,53$$

$k = 2$

$P_{k_y}(0|-k) \Rightarrow P_{2_y}(0|-2)$

$P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k}\,|\,0\right) \Rightarrow P_{2_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{2} \approx \pm 1,41\,|\,0\right)$

$$x_{k_{Min}} = -2 + \sqrt{4+k} \Rightarrow x_{2_{Min}} = -2 + \sqrt{4+2} = -2 + \sqrt{6} \approx 0,45 \Rightarrow f_2\left(x_{2_{Min}}\right) \approx -2,25$$

$$x_{2_{Max}} = -2 - \sqrt{4+2} = -2 - \sqrt{6} \approx -4,45 \Rightarrow f_2\left(x_{2_{Max}}\right) \approx 1,92$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{k_{w1}} = -4+\sqrt{8+k} \Rightarrow x_{2_{w1}} = -4+\sqrt{8+2} = -4+\sqrt{10} \approx -0,84 \Rightarrow f_2\left(x_{2_{w1}}\right) \approx -0,85$$

$$x_{2_{w2}} = -4-\sqrt{8+2} = -4-\sqrt{10} \approx -7,16 \Rightarrow f_2\left(x_{2_{w2}}\right) \approx 1,37$$

$k = 4$

$P_{k_y}(0|-k) \Rightarrow P_{4_y}(0|-4)$

$P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k}\,|\,0\right) \Rightarrow P_{4_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{4} = \pm 2\,|\,0\right)$

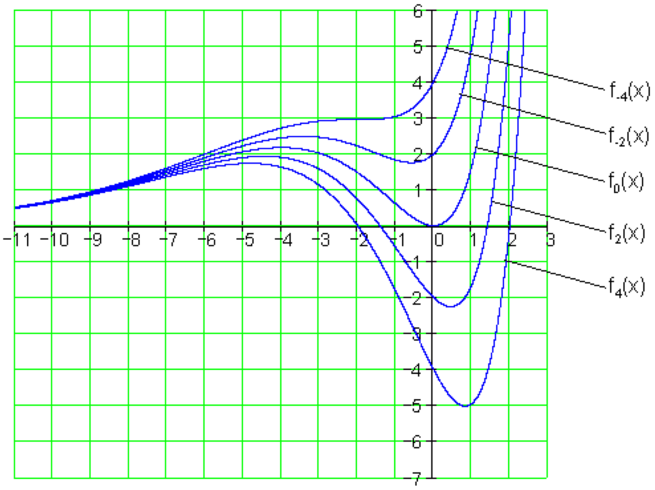
$$x_{k_{Min}} = -2+\sqrt{4+k} \Rightarrow x_{4_{Min}} = -2+\sqrt{4+4} = -2+\sqrt{8} \approx 0,83 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{Min}}\right) \approx -5,01$$

$$x_{4_{Max}} = -2-\sqrt{4+4} = -2-\sqrt{8} \approx -4,83 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{Max}}\right) \approx 1,73$$

$$x_{k_{w1}} = -4+\sqrt{8+k} \Rightarrow x_{4_{w1}} = -4+\sqrt{8+4} = -4+\sqrt{12} \approx -0,54 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{w1}}\right) \approx -2,84$$

$$x_{4_{w2}} = -4-\sqrt{8+4} = -4-\sqrt{12} \approx -7,46 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{w2}}\right) \approx 1,24$$

د $f_k(x) = \left(x^2-k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$ $k \in \mathbb{R}$ او $x \in \mathbb{R}$ لپاره



د فزیکي سطحې لپاره باور لري:

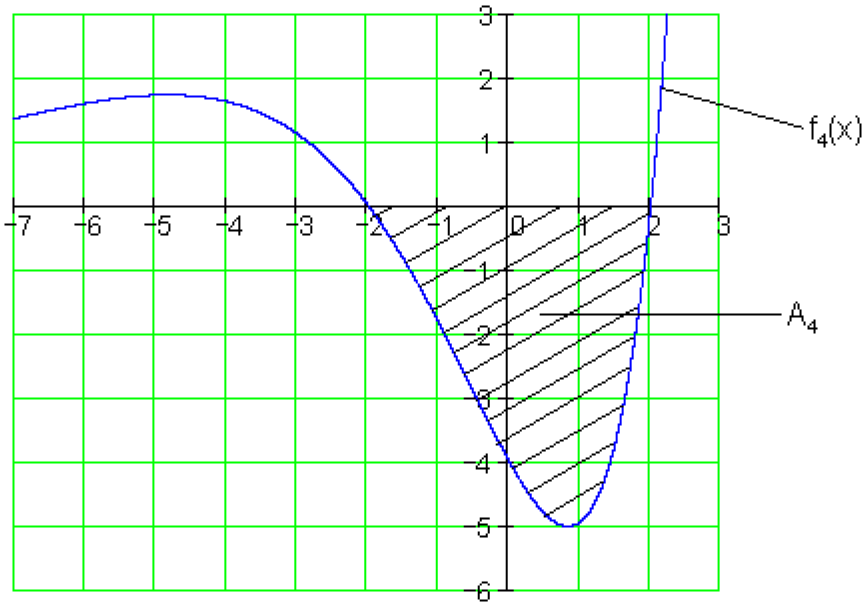
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_k = \left|\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x)\,dx\right| = \left|\left(-8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{k}} - \left(8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{k}}\right|$$

په ځانګړې توګه د k=4 لپاره باور لري:

$$A_4 = \left|\int_{-\sqrt{4}}^{\sqrt{4}} f_4(x)\,dx\right| = \left|\left(-8\sqrt{4}+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{4}} - \left(8\sqrt{4}+16\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{4}}\right|$$

$$= \left|(-8\cdot 2+16)\cdot e-(8\cdot 2+16)\cdot e^{-1}\right| = \left|-32\cdot e^{-1}\right| \approx \left|-11{,}772\right| = \underline{\underline{11{,}772 FE}}$$



ساده مشتق- او انتیګرالشمیرنه (د یوه ساده تابع رابیلونه او ورګډونه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع	مشتق	بنستیزه تابع
$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$
$f(x)=k$	$f'(x)=0$	$F(x)=k\cdot x+C$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad (n\neq -1)$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	$F(x)=e^x+C$
$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\cdot\ln(a)$	$F(x)=\frac{1}{\ln(a)}a^x+C \quad (a>0,\, a\neq 1)$
$f(x)=\ln(x)$	$f'(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=x\cdot\ln(x)-x+C \quad (x>0)$
$f(x)=\sin(x)$	$f'(x)=\cos(x)$	$F(x)=-\cos(x)+C$
$f(x)=\cos(x)$	$f'(x)=-\sin(x)$	$F(x)=-\cos(x)+C$
$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}=-x^{-2}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert+C \quad (x\neq 0)$

د مشتق ـ او انتیګرالشمیرنو سره مخامخ کول

د ثابتې قانون

$f(x)=k\cdot u(x)$ mit $k=$ konstant $\int f(x)\,dx=\int k\cdot u(x)\,dx=k\cdot\int u(x)\,dx$ ثابته يا همغه =	$f(x)=k\cdot u(x)$ mit $k=$ konstant $\Rightarrow f'(x)=k\cdot u'(x)$ ثابته يا همغه =

(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr>
<td>بیلګه:
$f(x)=3x^4 \quad k=3 \quad u(x)=x^4$
$\Rightarrow u'(x)=4x^3$
$f'(x)=k\cdot u'(x)=3\cdot 4x^3=\underline{\underline{12x^3}}$</td>
<td>بیلګه:
$f(x)=3x^2 \Rightarrow k=3 \quad u(x)=x^2$
$\int f(x)\,dx=3\cdot\int u(x)\,dx=3\cdot\int x^2\,dx$
$=3\cdot\frac{x^3}{3}+C=\underline{\underline{x^3+C}}$</td>
</tr>
<tr>
<td>د جمعي قانون Summenregel
$f(x)=u(x)\pm v(x)$
$\Rightarrow f'(x)=u'(x)\pm v'(x)$</td>
<td>$f(x)=u(x)\pm v(x)$
$\int f(x)\,dx=\int u(x)\,dx\pm\int v(x)\,dx$</td>
</tr>
<tr>
<td>بیلګه: $f(x)=5x^2+3x$
$u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$
$\Rightarrow u'(x)=10x \quad v'(x)=3$
$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$</td>
<td>بیلګه:
$f(x)=x^2+x+1$
$\int f(x)\,dx=\int x^2\,dx+\int x\,dx+\int 1\,dx$
$=\underline{\underline{\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C}}$</td>
</tr>
</table>

د مشتقشمیرنې لپاره نور قوانین

د ضرب قانون: $f(x)=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow$ in Kurzform: $\boxed{f'=u'\cdot v+u\cdot v'}$

بیلګه: دالماني پښتو: د... او... سره

$f(x)=x\cdot e^x$ mit $u(x)=x$ und $v(x)=e^x$

$f'=u'\cdot v+u\cdot v'$

$u'(x)=1;\ v'(x)=e^x$

$f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x=\underline{\underline{(x+1)e^x}}$

د وېش قانون:دالماني پښتو : په لنده بڼه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ لاس ته اوړنه په لنده بڼه $f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

بیلګه: $f(x) = \frac{e^x}{x}$ د $u(x) = e^x$ او $v(x) = x$ سره

$$f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$u'(x) = e^x \,;\, v'(x) = 1;\, v^2 = x^2$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{(x-1)\, e^x}{x^2}$$

ځنځیزي قانون: د الماني پښتو: کیږ: د باندنی مشتق ښی: دننی مشتق

$$f(x) = f\left[z(x)\right] \Rightarrow f'(x) = \underbrace{f'(z)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{z'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

دننی مشتق   دباندنی مشتق

بیلګه: $f(x) = e^{2x}$

د $z = 2x$ سره $f(z) = e^z$ لاس ته راځي

$$f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

$$f'(z) = e^z \,;\, z'(x) = 2 \Rightarrow f'(x) = e^z \cdot 2 = 2 \cdot e^{2x}$$

تمرینونه : د مشتق تمرینونه د ضربقانون، وېش قانون، او زنځیري قاونو سره

د لاندې توابعو مشتق تاسو ته د معلومو قوانینو له مخې وشمېرۍ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اول – $f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3}$ دویم- $f(x) = \left(1-e^{ax}\right)^2$

دریم - $f(x) = \left(e^{2x} + e^{-x}\right)^2$ خلورم - $f(x) = (x+1)e^x$

پنځم - $f(x) = (3-2x)e^{-\frac{1}{2}x}$ شپږم - $f(x) = a(x-3)e^{4x-3}$ اوم -

اتم - $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$ نهم - $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ $f(x) = \frac{x}{x-1}$ لسم - $f(x) = \frac{1}{x}\left(x^2-4\right)$

د انتیګرالشمیرنې لپاره نورې لارې یا قوانین

د انتیګرالونو پوله بدلونه:

د انتیګرېشن پولو بدلون له لارې د انتیګرال مختخښه تغیر خوري	$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ oder $-\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$

دا په نخښه شوې سطحه دې وشمیرل ش

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(3e^x - 6x^2\right) dx$$

$$= 3\int_0^1 e^x\,dx - 6\int_0^1 x^2\,dx =$$

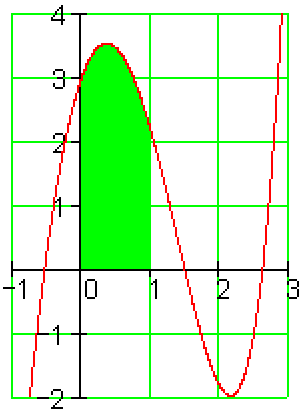
$$3\int_0^1 e^x\,dx + 6\int_1^0 x^2\,dx$$

$$= \left[3e^x\right]_0^1 + \left[2x^3\right]_1^0$$

$$= 3e^1 - 3e^0 + 2\cdot 0 - 2\cdot 1$$

$$= 3e^1 - 5 \approx 3,155$$

$f(x) := 3e^x - 6x^2$

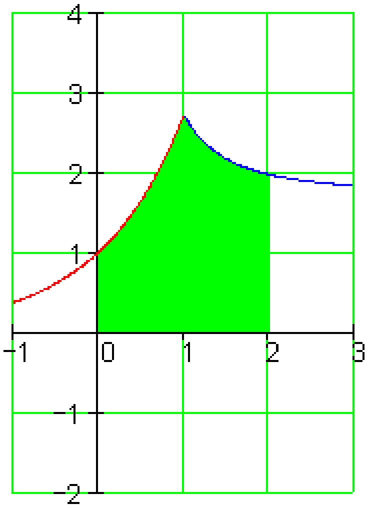


(c) ketabton.com: The Digital Library

صفرانتیګرال

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$	که په تاکلي اتیګرال کې کښته اوپورته پولې سره برابرې یامساوي وي، نود تاکلي انتیګرال ارزښت صفر دی.

د انتګروال جمعه

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$	د ټول انتیګرال ارزښت په برخه ساحو انتیګرالونو د جمعه کوني یا یو پر بل زیاتوني له لارې منځ ته راځي.
$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} + (e-1) & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ په نخښه شوې سطحه دې وشمیل $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + e - 1\right) dx$ $= \left[e^x\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x} + e \cdot x - x\right]_1^2$ $= e^1 - e^0 + \left[-\frac{1}{2} + 2e - 2\right] - [-1 + e - 1]$ $\approx 3,937$	

تمرینونه: مشتق – او انتیګرالشمېرنه د **e** تابع سره.

د لاندې توابعو مشتق وشمېرئ.

اول - $f(x) = e^{-4x} - e^{4x}$ دویم - $f(x) = \frac{3}{2} e^{-5x^2 - 3x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم - $f(x) = -4e^{x}\left(e^{-x}+3\right)$ څلورم - $f(x) = -e^{t-x} - 2t\cdot e^{-tx}$

پنځم - $f(x) = t\cdot e^{2-3x} - 6e^{x^2+3}$ شپږم - $f(x) = t\left(e^{-x} - 3x^2\right)$

د لاندې توابعو انتیګرال ونیسئ ا و د مشتق له لاې یې تیکوالی و ازمایئ

اوم - $f(x) = \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^{x}\right)$ اتم - $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}$

نهم - $f(x) = t\cdot x - \frac{3}{2}e^{x} + t^2 + 2e$ لسم - $f(x) = t^2x\left(x^2 - 8x\right)$

ځوابونه:

د مشتق تمرینونه د ضربقانون، وېش قانون، او زنځیري قاونو سره

نتیجې او مفصل ځوابونه. نتیجې:

لومړی - $f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3} \Rightarrow f'(x) = 2\left(x + a - e^{2x-3}\right)$

دویم: $f(x) = \left(1-e^{ax}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = -2a\cdot e^{ax}\left(1-e^{ax}\right)$

دریم: $f(x) = \left(e^{2x}+e^{-x}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = 2\left(e^{2x}+e^{-x}\right)\cdot\left(2e^{2x}-e^{-x}\right)$

څلورم:- $f(x) = (x+1)e^{x} \Rightarrow f'(x) = (x+2)e^{x}$

پنځم: $f(x) = (3-2x)e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow f'(x) = \left(x - \frac{7}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم: $f(x) = a(x-3)e^{4x-3} \Rightarrow f'(x) = a \cdot e^{4x-3}(4x-11)$

اووم: $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2+2x-1}{e^x}$

اتم: $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

نهم: $f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$

لسم: $f(x) = \frac{1}{x}(x^2-4) = x - \frac{4}{x} = x - 4x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$

مفصل ځوابونه

لومړی:

د لاندې الماني پښتو: زنځيري لار يا قانو

$$f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3} = u(x) - v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) - v'(x)$$

$$\text{Kettenregel: } \quad u(x) = (x+a)^2 \Rightarrow u'(x) = 1 \cdot 2(x+a)$$

$$v(x) = e^{2x-3} \Rightarrow v'(x) = 2 \cdot e^{2x-3}$$

$$f'(x) = 2(x+a) - 2 \cdot e^{2x-3} = \underline{\underline{2\left(x+a-e^{2x-3}\right)}}$$

دويم:

$$f(x) = \left(1-e^{ax}\right)^2 = f\left[z(x)\right] \Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

دننني مشتق: $z(x) = \left(1-e^{ax}\right) \Rightarrow z'(x) = -a \cdot e^{ax}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دننني مشتق: $z(x) = \left(1 - e^{ax}\right) \Rightarrow z'(x) = -a \cdot e^{ax}$

دباندنی مشتق: $f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z = 2\left(1 - e^{ax}\right)$

$$f'(x) = 2\left(1 - e^{ax}\right) \cdot \left(-a \cdot e^{ax}\right) = \underline{\underline{-2a \cdot e^{ax}\left(1 - e^{ax}\right)}}$$

دريم: $f(x) = \left(e^{2x} + e^{-x}\right)^2 = f\left[z(x)\right] \Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$

دننني مشتق: $z(x) = \left(e^{2x} + e^{-x}\right) \Rightarrow z'(x) = 2e^{2x} - e^{-x}$

دباندنی مشتق: $f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z = 2\left(e^{2x} + e^{-x}\right)$

$$f'(x) = \underline{\underline{2\left(e^{2x} + e^{-x}\right) \cdot \left(2e^{2x} - e^{-x}\right)}}$$

څلورم:

$$f(x) = (x+1)\,e^x = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = (x+1);\ u' = 1;\ v = e^x;\ v' = e^x$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x+1)\,e^x = \left[1 + (x+1)\right]e^x = \underline{\underline{(x+2)\,e^x}}$$

پنځم:

$$f(x) = (3-2x)\,e^{-\frac{1}{2}x} = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = (3-2x);\ u' = -2;\ v = e^{-\frac{1}{2}x};\ v' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x) = -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (3-2x) \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) = -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}(3-2x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x} =$$

$$= \underline{\underline{\left(x - \frac{7}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم:

$$f(x)=a(x-3)e^{4x-3}=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$$

$$u=a(x-3);\ u'=a;\ v=e^{4x-3};\ v'=4e^{4x-3}$$

$$f'(x)=a\cdot e^{4x-3}+a(x-3)\cdot 4e^{4x-3}=\underline{\underline{a\cdot e^{4x-3}(4x-11)}}$$

اووم:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}=\frac{u(x)}{v(x)}\Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$u=x^2+1;\ u'=2x;\ v=e^x;\ v'=e^x;\ v^2=e^x\cdot e^x$$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot e^x-\left(x^2+1\right)e^x}{e^x\cdot e^x}=\underline{\underline{\frac{-x^2+2x-1}{e^x}}}$$

اتم:

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$u=e^x-1;\ u'=e^x;\ v=e^x+1;\ v'=e^x;\ v^2=\left(e^x+1\right)^2$$

$$f'(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x\left[\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)\right]}{\left(e^x+1\right)^2}=\underline{\underline{\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}}}$$

نهم:

$$f(x)=\frac{x}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$u=x;\ u'=1;\ v=x-1;\ v'=1;\ v^2=(x-1)^2$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-x\cdot 1}{(x-1)^2}=\underline{\underline{-\frac{1}{(x-1)^2}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم:

$$f(x)=\frac{1}{x}\left(x^2-4\right)=x-\frac{4}{x}=x-4x^{-1}$$

$$f'(x)=1-\left(-1\cdot 4x^{-2}\right)=\underline{\underline{1+\frac{4}{x^2}}}$$

ځوابونه

د کور د e - تابعو مشتق او انتیګرالونه I

نتیجې او مفصل ځوابونه . نتیجې:

لومړی:

$$f(x)=e^{-4x}-e^{4x}\Rightarrow f'(x)=-4e^{-4x}-4e^{4x}=\underline{\underline{-4\left(e^{-4x}+e^{4x}\right)}}$$

دویم:

$$f(x)=\frac{3}{2}e^{-5x^2-3x}\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{\frac{3}{2}(-10x-3)\,e^{-5x^2-3x}}}$$

دریم :

$$f(x)=-4e^x\left(e^{-x}+3\right)=-4\underbrace{e^x\cdot e^{-x}}_{1}-12e^x=-4-12e^x\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{-12e^x}}$$

څلورم:

$$f(x)=-e^{t-x}-2t\cdot e^{-tx}\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{e^{t-x}+2t^2\cdot e^{-tx}}}$$

پنځم:

$$f(x)=t\cdot e^{2-3x}-6e^{x^2+3}\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{-3t\cdot e^{2-3x}-12x\cdot e^{x^2+3}}}$$

شپږم:

$$f(x)=t\left(e^{-x}-3x^2\right)=t\cdot e^{-x}-3t\cdot x^2\Rightarrow f'(x)=-t\cdot e^{-x}-6t\cdot x=\underline{\underline{-t\left(e^{-x}+6x\right)}}$$

اووم:

$$f(x)=\frac{1}{16}\left(x^2-3e^x\right)\Rightarrow F(x)=\frac{1}{16}\int\left(x^2-3e^x\right)dx=\underline{\underline{\frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}x^3-3e^x\right]+C}}$$

$$F'(x)=\frac{1}{16}\left(x^2-3e^x\right)=f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم:

$$f(x)=x^3-2x^2+4x+\frac{3}{x}\Rightarrow F(x)=\int\left(x^3-2x^2+4x+\frac{3}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+2x^2+3\cdot\ln|x|+C$$

$$F'(x)=x^3-2x^2+4x+3\cdot\frac{1}{x}=f(x)$$

نهم:

$$f(x)=t\cdot x-\frac{3}{2}e^x+t^2+2e\Rightarrow F(x)=\int\left(t\cdot x-\frac{3}{2}e^x+t^2+2e\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}t\cdot x^2-\frac{3}{2}e^x+t^2\cdot x+2e\cdot x+C$$

$$F'(x)=t\cdot x-\frac{3}{2}e^x+t^2+2e=f(x)$$

لسم:

$$f(x)=t^2x\left(x^2-8x\right)=t^2\left(x^3-8x^2\right)\Rightarrow F(x)=t^2\int\left(x^3-8x^2\right)dx=$$

$$t^2\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{8}{3}x^3\right)+C$$

$$F'(x)=t^2\left(x^3-8x^2\right)=t^2x\left(x^2-8x\right)=f(x)$$

مفصل ځوابونه:

لومړی:

$$f(x)=e^{-4x}-e^{4x}\Rightarrow f'(x)=-4e^{-4x}-4e^{4x}=-4\left(e^{-4x}+e^{4x}\right)$$

مشتق د ضرب قانون له مخې مخ ته بیول کیږي

دويم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{3}{2}e^{-5x^2-3x}\Rightarrow f'(x)=(-10x-3)\cdot\frac{3}{2}\cdot e^{-5x^2-3x}$$
$$=\frac{3}{2}(-10x-3)e^{-5x^2-3x}=\underline{\underline{-\frac{3}{2}(10x+3)e^{-5x^2-3x}}}$$

دریم:

$$f(x)=-4e^{x}\left(e^{-x}+3\right)=-4\cdot e^{x}\cdot e^{-x}-4\cdot 3\cdot e^{x}$$
$$=-4\cdot e^{x-x}-12\cdot e^{x}=-4\cdot e^{0}-12\cdot e^{x}$$
$$=-4-12\cdot e^{x}\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{-12e^{x}}}$$

څلورم:

$$f(x)=-e^{t-x}-2t\cdot e^{-tx}\Rightarrow f'(x)=(-1)\left(-e^{t-x}\right)-\left(-t\cdot 2t\cdot e^{-tx}\right)$$
$$=\underline{\underline{e^{t-x}+2t^{2}\cdot e^{-tx}}}$$

پنځم:

$$f(x)=t\cdot e^{2-3x}-6e^{x^2+3}\Rightarrow f'(x)=-3t\cdot e^{2-3x}-2x\cdot 6e^{x^2+3}$$
$$=\underline{\underline{-3t\cdot e^{2-3x}-12x\cdot e^{x^2+3}}}$$

شپږم:

$$f(x)=t\left(e^{-x}-3x^{2}\right)=t\cdot e^{-x}-3t\cdot x^{2}$$
$$\Rightarrow f'(x)=-t\cdot e^{-x}-2\cdot 3t\cdot x=-t\cdot e^{-x}-6t\cdot x=\underline{\underline{-t\left(e^{-x}+6x\right)}}$$

اووم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^x\right)$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^x\right) dx = \frac{1}{16}\int\left(x^2 - 3e^x\right) dx = \underline{\underline{\frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}x^3 - 3e^x\right] + C}}$$

$$F'(x) = \frac{1}{16}\left(3 \cdot \frac{1}{3}x^2 - 3e^x\right) = \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^x\right) = F(x)$$

اتم:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow F(x) = \int\left(x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}\right) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 + 3 \cdot \ln|x| + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3 \cdot \ln|x| + C}}$$

$$F'(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 3 \cdot \frac{1}{x} = f(x)$$

یادونه: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \text{ und } f(x) = \ln|x| \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

نهم:

$$f(x) = t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e$$

$$\Rightarrow F(x) = \int\left(t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e\right) dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}t \cdot x^2 - \frac{3}{2}e^x + t^2 \cdot x + 2e \cdot x + C}}$$

$$F'(x) = \frac{2}{2}t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e = t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e = f(x)$$

لسم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = t^2x\left(x^2 - 8x\right) = t^2\left(x^3 - 8x^2\right)$$

$$\Rightarrow F(x) = t^2\int\left(x^3 - 8x^2\right)dx = t^2\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3\right) + C$$

$$F'(x) = t^2\left(\frac{4}{4}x^3 - 3\cdot\frac{8}{3}x^2\right) = t^2\left(x^3 - 8x^2\right) = t^2x\left(x^2 - 8x\right) = f(x)$$

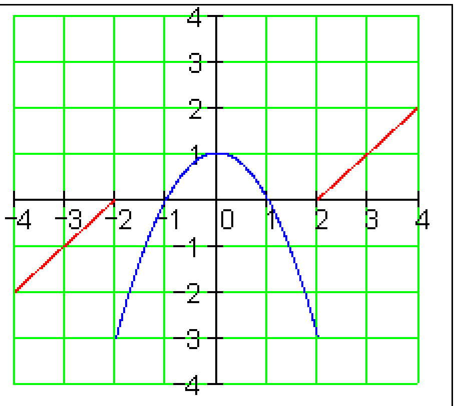
اتم: ناپرېکيدنوالی یا متمادیت، مشتق وړوالی او انتيګرالوړوالی

د ناپرېکيدنوالي یا متمادين کلمه دې لیدوړ روښانه یا تشریح شي.

یو تابع **f(x)** هلته په یوه انتروال [a ; b] کې متمادي یا ناپرېکيدونکی دی، که چیرې څوک وکړای شي، چې د تابع ګراف د انتروال له یوه سر څخه تر بله سره پورې داسې وکښلای شي، چې د پنسل څوکه له ځایه پورته کيدو ته اړ نه شي.

یا که چیرې تابع **f(x)** د ګراف ټکي د یوه انتروال [a ; b] په دننه کې بې له کنډلو یا نښلولو یو بل سره نښتي وي، بې له دې چې کوم ټوپونه ترې رامنځ ته شي، نو بیا تابع f(x) په انتروال [a ; b] کې ناپرېکيدونکي یا متمادي دی.

بیلګه:

موږ سره یوځای اینول شوې تابع څیړو $$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{für } -\infty < x < -2 \\ -x^2+1 & \text{für } -2 \le x \le 2 \\ x-2 & \text{für } 2 < x < \infty \end{cases}$$ په ځایونو $x_1 = -2$ او $x_2 = 2$ کې د f(x) ګراف ټوپونه کوي یابښایي. په دې ځایونو کې f(x) پرېکيدونک یا نامتمادي دی.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

-----...

د متمادي یا ناپرېکیدونکو توابعو لپاره بیلګې:

هر ټولراشنل تابع په خپل تعریفورشو ناپرېکیدونکی دی.

هر مات-یا کسري تابع په خپل تعریفورشو ناپرېکیدونکی دی.(یعني فقط هلته پرېکیدونکی دی، چیرته چې ماتلاندې یا مخرج صفرځیونه لري، ځکه چې هلته تابع تعریف نه ده).

د طبیعي پوهنو ټولګیزې یا کلاسیکي څېړنو لپاره باورلري: طبیعت ټوپونه نه وهي.

د وخت سره د نباتاتو او نورو ژوندیو وده.

له دې امله ټولې طبیعي پیښې ناپریکیدونکې یا متمادي ځغلي.په یوه بخار دېګ کې د تودوخې جګوالی.

پرېکیدونکې یا نامتمادي(ټوپډوله) تغیرات هم شته لکه د پوست قیمت جګیدل یا د شیانو په نرخ کې ارزاني.

د ناپرېکیدنوالي یا متمادیت شمیرپوهنیز تعریف یاپیژند:

د $f(x)$ تعریفدېرئ یا ـــسټ دې D_f وي او ارزښتدېرئ یئ W_f.

تابع $f(x)$ د $x = x_0$ په ځای کې د $x_0 \in D_f$ سره ټیک هلته ناپرېکیدونکې یا متمادي ده، که

← تابع ارزښت $f(x_0)$ شتون لري، دا په دې معنا چې $f(x_0) \in W_f$ ،

← د $x = x_0$ لپاره د $f(x)$ پوله ارزښت شتون لري

او د یوه ټاکلي عدد g سره برابر دی او که

← $f(x_0) = g$ باور ولري.

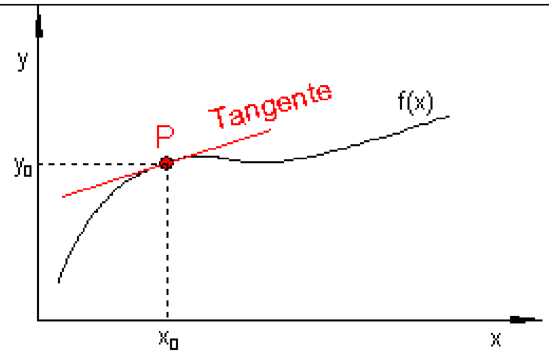
که له دې شرایطو فقط یو هم پوره نه وي، نو بیا تابع $f(x)$ د $x = x_0$ په ځای کې پرېکیدونکې یا نامتمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتقوړوالی(رابیلیدوړوالی)

موږ لومړی د يوه فنکشن مشتقوړوالی فقط لیدنيز راوړو

بیلگه: د لومړی مشتق د x_0 په ځای کې د فنکشن جګوالی راکوي، چې د فنکشن ګراف په ټکي $P_0\ (\ x_0 \mid y_0\ )$ کې لمسوي ا و له دې سره په همدې وخت کې په ټکي $P_0\ (\ x_0 \mid y_0\ )$ کې د فنکشنګراف جګوالی دی.
سرې د فنکشن جګیدنه هم وايي.
له دې لاس ته راوړنو سره تابع د x_0 په ځای کې تیک هلته مشتقوړده، که یو یواځنی جګوال شتون ولري



د x_0 په ځای کې د يوه فنکشن مشتقوړوالي شرطونه:
فنکشن باید دx_0 په ځای کې ناپرېکیدونکې وي.

دا شرط اړین دی مګر نه پوره کیدونکی، لکه چې لاندې بیلګه بنايي.

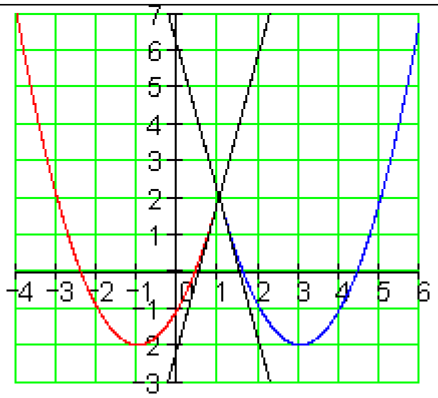
بیلګه: دا ترڅنګ خیرونه(فنکشن) د د فنکشن $f(x)$ګراف د

$f(x) = x^2 + 2x - 1$	د $x<1$ لپاره
$f(x) = x^2 - 6x + 7$	د $x \geq 1$ لپاره

سره بنايي.

په ټکي (1,2) کې یواځنی تانجنت شتون نه لري

$$t_1(x) = 4x - 2$$
$$t_2(x) = -4x + 6$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: فنکشن $f(x)$ په $x = 1$ کې متمادي یا ناپرېکیدونکی دی، هلته ټوپ نه شته.

مګر موږ په ټکي $P(1 | 2)$ کې دوه مختلف تانجنتونه لرو. دا په دې معنا چې د $x = 1$ لپاره هم دوه مختلف د تانجنتونو جګوالی لرو، یعنې دوه مشتقونه یا رابیلیدنې.

دا په دې معنا مشتقفنکشن په $x = 1$ ځای کې یواځنی نه دی.

دا په ځان پسې لري، چې فنکشن $f(x)$ په $x = 1$ ځای کې مشتقوړ نه دی.

لیدنیز یا د لیدلو له مخې دا په دې معنادی چې:

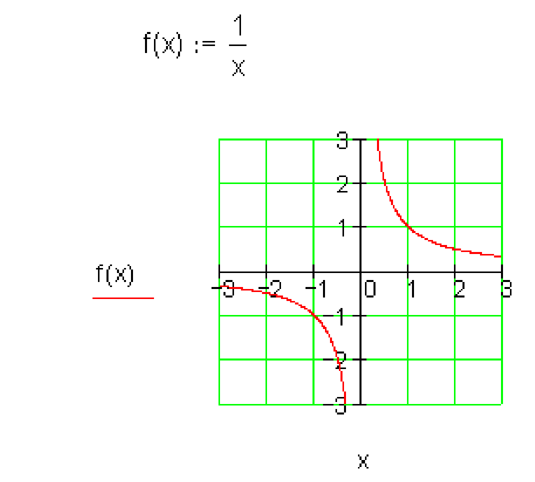
یو فنکشن $f(x)$ د x_0 په ځای کې مشتقوړ یا رابیلیدوړدی، که په دې ځای کې یې مشتق یا رابیلیدنه یواځنی وي، یعنې ټیک یو تانجنت شتون ولري.

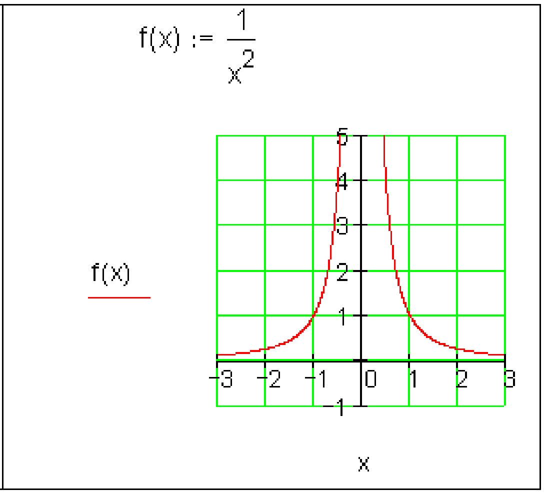
سرې دا هم ویلی شي، هغه ځای کې چې ګراف څوکه ولري یا را مات شوی یعنې ګوډ ولري(را مات وي) ، فنکشن وشتقوړ نه دی.

په څټ (برعکس) دا د ناپرېکیدنې یا متمادیت لپاره په دې معنادی:

که فکشن د x_0 په ځای کې مشتقوړ وي، نو دا هلته ناپرېکیونکی یا متمادي هم دی.

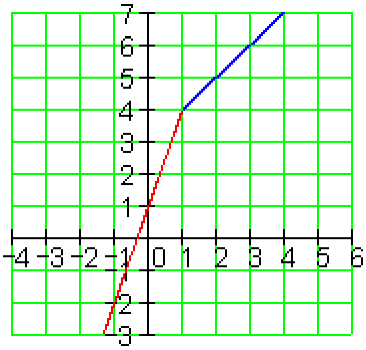
نورې





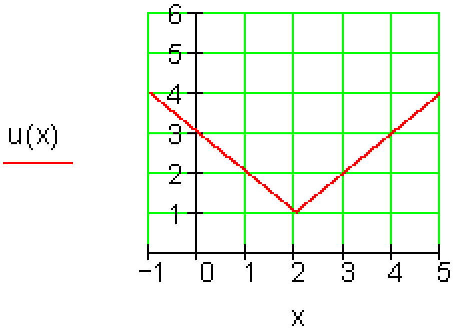
(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړه فنکشنونه، که غوټرې توابع، د په ځای کې مشتقوړ نه دي، ځکه چې دا هلته تعریف نه دي یا پېژند نه لري.



د x_0 په ځای کې فنکشن په حقیقت کې ناپرېکېدونکی دی، مګر مشتقوړ نه دی(ګود لري یا مات دی)

$u(x) := |x-2| + 1$



دx_0 په ځای کې په حقیقت کې یا په رینتیني ناپرېکېدونکی یا متمادي دی، مګر مشتق نه شته (څوکه)

د مشتقوړوالي شمیرپوهنیز پېژند یا تعریف:

ښی ناپرېکېدونکي پوله	کینه ناپرېکېدونکي پوله
د کمبنتوېش فنکشن	د کمبنتوېش فنکشن
$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x > x_0$	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x < x_0$

که د کین اړخ او د ښي اړخ کمبنتوېش فنکشنونه سره برابر وي، نو $f(x)$ د x_0 په ځای کې مشتقوړ دی.

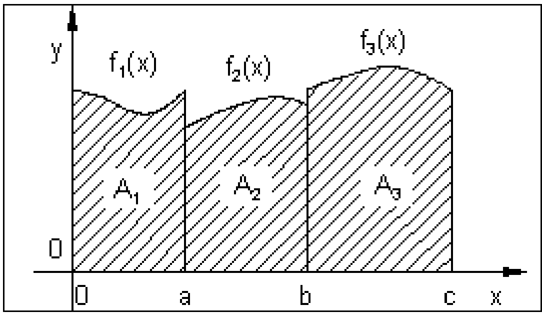
بیا نو یو مشتق$f'(x_0)$ شتون لري ، د تانجنت جګوالی د ګراف په ټکي($x_0; f(x_0)$) کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتیګرالورولی:

تابع انتیګرالوړ دی، که دا لږ تر لږه توته ډېرله یا توته په توته متمادي یا ناپرېکیدونکی وي.

يلګه:



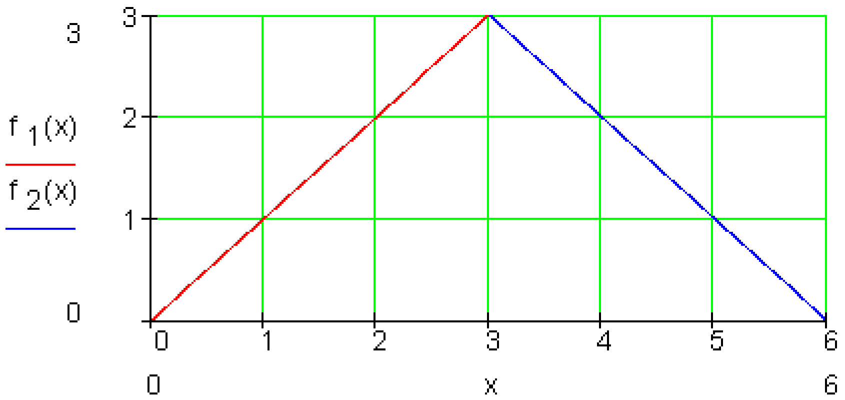
کرښه شوي سطحه دې پيدا شي

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$= \int_0^a f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \int_b^c f_3(x)\,dx$$

د درې ګوټي یا مثلث سطحه غواړو پیدا کړو.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x \text{ für } (0 \le x < 3) \\ f_2(x) = -x + 6 \text{ für } (3 \le x \le 6) \end{cases}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^3 f_1(x)\,dx + \int_3^6 f_2(x)\,dx$$

$$= \int_0^3 x\,dx + \int_3^6 (-x+6)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 + \left[-\frac{x^2}{2} + 6x\right]_3^6$$

$$= \frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} + \left[\left(-\frac{6^2}{2} + 6\cdot 6\right) - \left(-\frac{3^2}{2} + 6\cdot 3\right)\right] = \underline{\underline{9\,FE}}$$

(پورته FE د سطحې یوون یا واحد)

سره له دې ي تابع د (3 | 3) P په ځای کې مشتقوړ یا رابیلیدوړ نه دی، کیدی شي سطحه له دوه برخ ـانتیګرالونو پیدا شي.

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کیږي لکه لاندې بلګه:

بیلګه:
عواړو د $f(x)=e^x$ مشتق پیدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پیدا کولي شو، یعنې لرو:

$$f(x)=e^x \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx = \int e^x dx = e^x + C$$

ګورو، چې $F'(x)=e^x = f(x)$ دی.

که ولرو: $f(x)=e^{2x}$ او د پورته په څیر لاړ شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx = \int e^{2x} dx \neq e^{2x} + C$$

$F'(x)=2e^{2x} \neq f(x)$ **دی، که** $F(x)=e^{2x}+C$ **وي**
له دې امله د بدلون قانون ته اړیو:

د ناټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې

تراوسه مو فقط د هغو انتیګرالونو پوښتنې ځواب کړې، چې د اده توابعو مشتق باندې بیرته اړول کیده. دا سې له دې لارې لاسته رغلي بنسټ انتیګرالونو د نورو ټول حلونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

بنسټ کیښود. د بنسټ انتیګرالونو کارونه یا استعمال تل شونی نه دی، لکه لاندې بیلګه چې ښایي.

بیلګه: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

بدلون : $u(x)=2x=u$

جوړ کړئ: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{du}{2}$

$$\int f(x)dx=\int e^{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

نو لرو: $F(x)=\int(x)dx=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

ازمایښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بیلګه : وښایی چې باور لري.

$$f(x)=(x+1)^2 \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(x+1)^2dx.$$

بدلون $u(x)=x+1=u$ جوړ کړی

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=1 \Rightarrow dx=\frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx=\int u^2\frac{du}{1}=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C$$

بیرته- یا په څټ بدلون: $\frac{u^3}{3}+C=\frac{(x+1)^3}{3}+C$

نو: $\int(x)dx=\int(x+1)^2dx=\frac{(x+1)^2}{3}+C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه :

و بنايي چې باور لري:

$$f(x)=(3x+6)^3 \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(3x+6)^3dx$$

بدلون: $u(x)=3x+6=u$

جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=3 \Rightarrow dx=\frac{du}{3}$

$$\int f(x)dx=\int u^3\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int u^3du=\frac{u^4}{12}+C$$

بېرته بدلون: $\frac{u^4}{12}(3x+6)^4+C$

نو لرو: $\int(x)dx=\int(3x+6)^3dx=\frac{1}{12}(3x+6)^4+C$

بيلګه :

$$f(x)=x\cdot\ln\left(x^2\right)\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx=?$$

بدلون : $u(x)=x^2=u$

جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2x\Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$

$$\int f(x)\,dx=\int x\cdot\ln(u)\cdot\frac{1}{2x}du=\frac{1}{2}\int\ln(u)\,du=\frac{1}{2}\left[u\cdot\ln(u)-u+C\right]=\frac{1}{2}u\cdot\ln(u)-\frac{1}{2}u+C$$

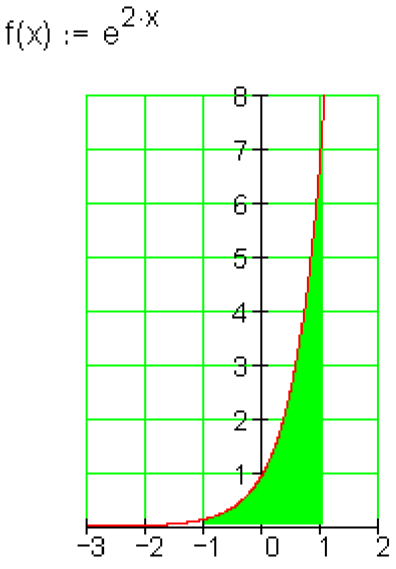
بېرته بدلون: $\frac{1}{2}u\cdot\ln(u)-\frac{1}{2}u+C=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(x^2\right)-\frac{1}{2}x^2+C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو: $\int f(x)\,dx = \int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(x^2\right)-\frac{1}{2}x^2+C$

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې:

ټاکلي انتیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کیږي.

 	بیلګه : **وښایاست:** $f(x)=e^{2x} \quad \Rightarrow F(x)=\int_{-1}^{1} e^{2x}dx$ د انتیګرال حل د بدلون له لارې: ۱ – بدلون $u(x)=2x$ ۲ – د dx په ځای کیږدی $u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \quad \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$ ۳ – د پولو بدلون - لاندې پوله $u(-1)=-2$ - پورته پوله $u(1)=2$ ۴ - په انتیګرال کې ځا په ځای کړی $\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^u du=\frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-2}^{2}=\frac{1}{2}\left[e^2-e^{-2}\right]=\underline{\underline{3.627}}$

بیلګه :

$$f(x)=2x\cdot\ln(x^2) \quad \Rightarrow F(x)=\int_{1}^{2} 2x\cdot\ln(x^2)dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ – بدلون $u(x) = x^2$

۲ – د ځای په په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

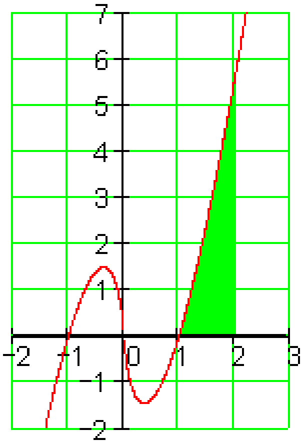
- لاندې پوله $u(1) = 1$
- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ – په انتيګرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u) du = [u \cdot \ln(u) - u]_1^4$$

$$= [4 \cdot \ln(4) - 4] - [1 \cdot \ln(1) - 1] \approx \underline{\underline{2.545}}$$

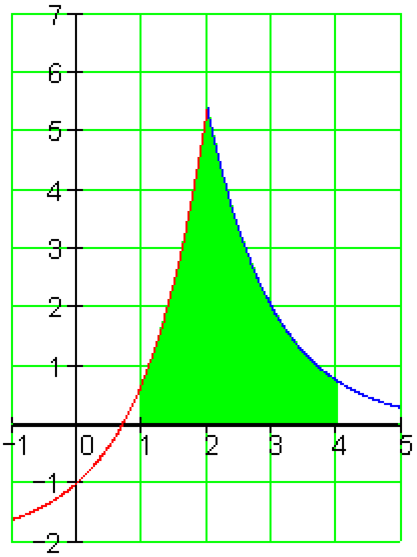
$$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$$



بیلګه :

$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 \\ (e^2 - 2)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x < 2$ له پاره د $x \geq 2$ له پاره

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A=\underbrace{\int_1^2\left(e^x-2\right)dx}_{I_1}+\underbrace{\int_2^4\left(e^2-2\right)e^{-(x-2)}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1=\int_1^2\left(e^x-2\right)dx=\left[e^x-2x\right]_1^2=e^2-e-2$$

$$I_2=\left(e^2-2\right)\int_2^4 e^{-(x-2)}\,dx$$

$$u(x)=-(x-2)=-x+2$$

$$\frac{du}{dx}=-1\Rightarrow dx=-du\,;\ u(2)=0\,;\ u(4)=-2$$

$$I_2=-\left(e^2-2\right)\int_0^{-2}e^u\,du=\left(e^2-2\right)\int_{-2}^{0}e^u\,du$$

$$=\left(e^2-2\right)\cdot\left[e^u\right]_{-2}^{0}=e^2+2e^{-2}-3$$

$$I=I_1+I_2=e^2-e-2+e^2+2e^{-2}-3=\underline{\underline{7{,}331}}$$

Partialy Integration ټوټه انتیګرالونه

ټوټه انتیګرالونه، چې ضرب انتیګرالونه هم بلل کیږي، په انتیګرالشمیرنه کې د لومړنیو توابعو ټاکلو یا شمیرلو لپاره امکان دی. دا کیدی شي د مشتقشمیرنې د برعکسکونی په څیر وګڼل شي.

د ټوټه انتیګرالوني له پاره لاندې قانون کارول کیږي، چې د متمادي (نه پرېکیدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري:.

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x=\left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b-\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

دا قانون ټیک هلته ګټور دی، که د f مشتقنیولو سره یو ساده تابع منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضرب قانون (د ضرب مشتقنیونې) څخه لرو:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتیګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

یا همدغسې، لکه په زیاتو ریاضي کتابونو کې چې پیداکیږي.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو یا ترمونو لپاره ګتور دی، چې لومړی ځان په ناټاکلي انتیګرال محدود کړو، چې دا نا اړینو حدونو څخه چې لید مو رابندوي، ازاد یو.

بیلګه:
د بیلګې په توګه لاندی انتیګرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

یو ساده انتیګرالیدونکې تابع $g'(x)$ او همداسې یو ساده مستقکیدونکي تابع $f(x)$ لټوو. نیسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د $\ln(x)$ انتیګرالونه نوې راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نیسو)مشتق کوو) او انتیګرالوو، نو لرو:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ او } g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکبنه:

اوس دئ u اوv په خوبنه توابع وي.U او V دې د u اوV لومړني توابع وي ، او همداسې دې u' او v' دu او v مشتقونه وي.

u تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري، v تابع ده چې د انتیګرالونې له پاره لومړیتوپ لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

ټوټه انتیګرالونې لار(طریقې)

د ټوټه انتیګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلګه :

کله کله کیدی شي ګټور وي، جی د مساوات بنیٔ لور ته ټوټه انتیګرال د څو واره انتیګرالونې وروسته بیرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کیڼ لور انتیګرال سره یوځای کولی شو.

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

که کیږدو f(x) = cos(x) او g'(x) = sin(x) ، نو ترې لرو:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دواړو لورو ته وتون انتيګرال ورزيات کړو، نو راکوي:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که واړه لورې په 2 وويشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\cos^2(x) + C$$

بيلګه ۲ :

د ځنو انتيګرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د g'(x) له پاره يو ترم وټاکو چې په انتيګرالونې کې هيڅ يا کو تغير خوري، لکه د بېلګې په توګه اکسپوننشل تابع او يا مثلثاتي توابع. نو کيدی شي دا بل ترم ،،له منځه يوورل شي،،.

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

که هر ځل ex = g'(x) کيږدو او د f(x) له پاره، د انتيګرال لاندی ترم ، نو ترې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned}\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x &= [e^x\cdot(2-x^2)] - \int e^x\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - \int 2\cdot e^x\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - [2\cdot e^x]\\ &= [e^x\cdot(2-x^2+2x-2)]\\ &= [e^x\cdot(2x-x^2)] + C\end{aligned}$$

بيلګه ۳ :

که له انتيګرال لاندي فقط يو ترم ولرو، چې د هغه لومړنی تابع بې له جدول ارزښت څخه پاي ته نه رسيږي(نه پايول کيږي)(نه ختميږي) کيدی شي کله کله د ورزياتونې له لارې(ناخرګند شته) ضريب "1" توته انتيګرال شي.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = 1$ کیږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x &= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln(x) - x + C\end{aligned}$$

.

جمله :

مونږ د دې لاندې انتیګرال نیسو:

$$\int x\cos(x)\,dx$$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= \int u\,dv \\ &= uv - \int v\,du \\ &= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx \\ &= x\sin(x) + \cos(x) + C.\end{aligned}$$

C د انتیګرالونې یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انتیګرالونې د استعمال سره د انتیګرالونو لکه

$$\int x^2 e^x\,dx \quad \text{او} \quad \int x^3 \sin(x)\,dx$$

کیده شي په همدې لار حل شي:

یوه په زړه پورې بیلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په پوره کره والي ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولري.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتیګرالوني استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\, dx$

$dv = e^x\, dx$ داسې چې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\, dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیګرال حل شي، نو د ټوټه انتیګرالوني قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x);\ du = \cos(x)\, dx$

$v = e^x;\ dv = e^x\, dx$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\, dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\, dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\, dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتیګرال که کیڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2 \int e^x \cos(x)\, dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\, dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

C د انتیګرالونې یوه په خوښه ثابته ده

د کور کار:

انتیګرال د بدلون له لارې د لاندې انتیګرالونو ځوابونه، همداسې شمیرنه

لومړی: $\int \frac{3}{4x+1}\,dx$ دویم: $\int_0^2 \frac{4}{4-x}\,dx$

دریم: $\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx$ څلورم: $\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx$

پنځم: $\int_{-2}^{2} \frac{10}{(x-4)^5}\,dx$ شپږم: $\int_{-2}^{2} e^{1-x}\,dx$

اووم: $\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ اتم: $\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$

نهم: $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx$ لسم: $\int_0^2 \left(x-1-e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$

ځوابونه

انتیګرال د ساده بدلون له لارې

نتیجې: لومړی:

$$\int \frac{3}{4x+1}\,dx = \frac{3}{4}\cdot \ln(4x+1) + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم:

$$\int_0^2 \frac{4}{4-x}\,dx = 4\cdot\ln(4) - 4\cdot\ln(2) = 4\cdot\ln(2) \approx 2{,}773$$

دزیم:

$$\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx = \frac{2}{1-x} + C$$

څلورم:

$$\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2x-1)^2} + C$$

پنځم:

$$\int_{-2}^2 \frac{10}{(x-4)^5}\,dx = -\frac{5}{2}\left[\frac{1}{16} - \frac{1}{1296}\right] = -\frac{25}{162} \approx -0{,}154$$

شپږم:

$$\int_{-2}^2 e^{1-x}\,dx = e^3 - e^{-1} \approx 19{,}718$$

اووم:

$$\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2\cdot e^2 - 2\cdot e^0 = 2\cdot e^2 - 2 \approx 12{,}778$$

اتم:

$$\int_1^2 e^{4-2x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot e^2 - \frac{1}{2}\cdot e^0 = \frac{1}{2}\cdot e^2 - \frac{1}{2} \approx 3{,}195$$

نهم:

$$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx = 2\cdot e^2 - 2\cdot e^0 = 2\cdot e^2 - 2 \approx 12{,}788$$

لسم:

$$\int_0^2 \left(x - 1 - e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx = -2\cdot e^0 - \left(-2\cdot e^{-1}\right) = -2 + 2\cdot e^{-1} \approx -1{,}264$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځوابونه

انتیګرال د ساده بدلون له لارې

مفصل ځوابونه

لومړی:

$$\int \frac{3}{4x+1}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 4x+1 \qquad \frac{du}{dx} = 4 \Rightarrow dx = \frac{1}{4}du$$

$$\frac{3}{4}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{3}{4}\cdot \ln(u) + C$$ د $u = 4x+1$ سره

$$\int \frac{3}{4x+1}\,dx = \underline{\underline{\frac{3}{4}\cdot \ln(4x+1) + C}}$$

دویم:

$$\int_0^2 \frac{4}{4-x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 4-x$$

$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$ لاندې پوله $u(0) = 4$ پورته پوله $u(2) = 4-2 = 2$

$$-4\int_4^2 \frac{1}{u}\,du = 4\int_2^4 \frac{1}{u}\,du = \left[4\cdot \ln(u)\right]_2^4 = 4\cdot \ln(4) - 4\cdot \ln(2)$$

$$= 4\left[\ln(4) - \ln(2)\right] = 4\cdot \ln\left(\frac{4}{2}\right) = 4\cdot \ln(2) \approx \underline{\underline{2{,}773}}$$

دریم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 1-x \qquad \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$$

د u=1-x سره $-2\int \frac{1}{u^2}\,du = -2\int u^{-2}\,du = -2\cdot\frac{1}{-1}\cdot u^{-1} = \frac{2}{u}$

$$\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx = \frac{2}{1-x} + C$$

څلورم:

$$\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 2x-1 \qquad \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

د U=2x-1 سره $\frac{6}{2}\int \frac{1}{u^3}\,du = 3\int u^{-3}\,du = 3\cdot\frac{1}{-2}\cdot u^{-2} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{u^2}$

$$\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2x-1)^2} + C$$

پنځم:

$$\int_{-2}^{2} \frac{10}{(x-4)^5}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = x-4 \qquad \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = du$$

لاندې پوله $u(-2) = -2-4 = -6$ پورته پوله $u(2) = 2-4 = -2$

$$10\int_{-6}^{-2} \frac{1}{u^5}\,du = 10\int_{-6}^{-2} u^{-5}\,du = \left[10\cdot\frac{1}{-4}\cdot u^{-4}\right]_{-6}^{-2} = -\frac{5}{2}\cdot\left[\frac{1}{u^4}\right]_{-6}^{-2}$$

$$= -\frac{5}{2}\left[\frac{1}{16} - \frac{1}{1296}\right] = -\frac{25}{162} \approx -0{,}154$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم:

$$\int_{-2}^{2} e^{1-x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 1-x \qquad \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$$

لاندې پوله $u(-2) = 1-(-2) = 3$ پورته پوله $u(2) = 1-2 = -1$

$$-\int_{3}^{-1} e^{u}\,du = \int_{-1}^{3} e^{u}\,du = \left[e^{u}\right]_{-1}^{3} = \underline{\underline{e^{3} - e^{-1} \approx 19{,}718}}$$

اووم:

$$\int_{0}^{4} e^{\frac{1}{2}x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = \frac{1}{2}x \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2du$$

لاندې پوله u(0)=0 پورته پوله u(4)=2

$$2\int_{0}^{2} e^{u}\,du = 2\left[e^{u}\right]_{0}^{2} = 2\cdot e^{2} - 2\cdot e^{0} = \underline{\underline{2\cdot e^{2} - 2 \approx 12{,}778}}$$

اتم:

$$\int_{1}^{2} e^{4-2x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 4-2x \qquad \frac{du}{dx} = -2 \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}du$$

لاندې پوله u(1)=4-2=2 پورته پوله u(2)=4-4=0

$$-\frac{1}{2}\int_{2}^{0} e^{u}\,du = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} e^{u}\,du = \left[\frac{1}{2}e^{u}\right]_{0}^{2} = \frac{1}{2}\cdot e^{2} - \frac{1}{2}\cdot e^{0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot e^{2} - \frac{1}{2} \approx 3{,}195}}$$

نهم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx = 4\int_1^2 e^{4-2x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 4-2x \qquad \frac{du}{dx} = -2 \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}du$$

لاندې پوله $u(1) = 4-2 = 2$ پورته پوله $u(2) = 4-4 = 0$

$$-4\cdot\frac{1}{2}\int_2^0 e^u\,du = 2\int_0^2 e^u\,du = \left[2e^u\right]_0^2 = 2\cdot e^2 - 2\cdot e^0 = \underline{\underline{2\cdot e^2 - 2 \approx 12{,}788}}$$

لسم:

$$\int_0^2 \left(x-1-e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx = \int_0^2 (x-1)\,dx - \int_0^2 e^{-\frac{1}{2}x}\,dx$$

$$\text{1. Integral: } \int_0^2 (x-1)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 4 - 2 - (0) = 0$$

$$\text{2. Integral: } -\int_0^2 e^{-\frac{1}{2}x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = -\frac{1}{2}x \qquad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} \Rightarrow dx = -2du$$

لاندې پوله $u(0) = 0$ پورته پوله $u(2) = -\frac{1}{2}\cdot 2 = -1$

$$= (-1)(-2)\int_0^{-1} e^u\,du = 2\int_0^{-1} e^u\,du = -2\int_{-1}^0 e^u\,du = \left[-2e^u\right]_{-1}^0$$

$$= -2\cdot e^0 - \left(-2\cdot e^{-1}\right) = \underline{\underline{-2 + 2\cdot e^{-1} \approx -1{,}264}}$$

د ټوټه انتیګرالونو لپاره څو نوربط بیلګې

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرته د دوه توابعو انتیګرال غواړو وشمیرو، نو په زیاتو حالتونو کې دا تراوسه روښانه یا معلومه د انتیګرال لار مو بریا ته نه بیایي.

$$f(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = ?$$

Substitution: $u(x) = x^2 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$

$$\int f(x)\,dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u \cdot \ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

د بدلون په بیرته په ځت: $\frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$

نو: $$\int (x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$$

دا انتیګرال د بدلون قانون سره حل کیدی شي، دا چې د بدلون له لارې ضریب له منځه ځي. په عادي ډول دا حالت نه دی.

$$f(x) = x \cdot \ln(x) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln(x)\right)dx = ?$$

دا انتیګرال د بدلون له لارې نه شي حل کیدی. موږ د ضرب قانون لپاره د مشتقشمیرنې څخه یوه اینوونې یا په ځای کونې ته وده ورکوو.

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

د ثابتې په پام کې نه نیولو له امله د دفرنځیال او انتیګرال بنسټ حملې له لارې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f'(x)\,dx = f(x) = u(x)\cdot v(x)$$

د $f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$ سره په دې پسې باید هم باور ولري

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx + \int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)$$

د $\int u(x)\cdot v'(x)\,dx$ پسي د بنه بدلون له امله راکوي:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

د $\int u'(x)\cdot v(x)\,dx$ پسي د بنه بدلون له امله راکوي:

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

د دې بنه بدلون په رېښتوني یا حقیقت کې دا د دوه ضربیونو انتیګرال حل نه شو، مګر د u او v' په همدې توګه د u' او v هوښیاره ټاکنه کیدی شي دا وییته یا افاده داسې بنه بدل شي، چې ا نتیګرال یې کیدی شي حل شي

بیلګه ۱

$$\int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^x}_{v'}\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^x \Rightarrow v = \int e^x\,dx = e^x$$

$$\int x\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - e^x + C = \underline{\underline{(x-1)e^x + C}}$$

بیلګه ۲

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{k\cdot x}}_{v'}\, dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\, dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

د بدلون له لاې حل $\quad v' = e^{k\cdot x} \Rightarrow v = \int e^{k\cdot x}\, dx$

$$v = \int e^{k\cdot x}\, dx$$

بدلون $\quad u = k\cdot x \Rightarrow \frac{du}{dx} = k \Rightarrow dx = \frac{1}{k} du$

په څټ يا بيرته بدلون: $\quad v = \int e^{k\cdot x}\, dx = \frac{1}{k} e^{k\cdot x}$

$$\int x\cdot e^{k\cdot x}\, dx = u\cdot v - \int u' v\, dx = x\cdot \frac{1}{k} e^{k\cdot x} - \int 1\cdot \frac{1}{k} e^{k\cdot x}\, dx = \frac{x}{k} e^{k\cdot x} - \frac{1}{k} \underbrace{\int e^{k\cdot x}\, dx}_{\frac{1}{k} e^{k\cdot x}}$$

$$= \frac{x}{k} e^{k\cdot x} - \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k} e^{k\cdot x} = \frac{x}{k} e^{k\cdot x} - \frac{1}{k^2} e^{k\cdot x} = \left(\frac{x}{k} - \frac{1}{k^2}\right) e^{k\cdot x} + C$$

بيلکه ۳ :

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v'}\, dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\, dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = \ln(x) \Rightarrow v = x\cdot \ln(x) - x$$

$$\int x\cdot \ln(x)\, dx = x\cdot (x\cdot \ln(x) - x) - \int 1\cdot (x\cdot \ln(x) - x)\, dx$$

$$\Leftrightarrow \int x\cdot \ln(x)\, dx = x^2\cdot \ln(x) - x^2 - \int x\cdot \ln(x)\, dx + \int x\, dx \;\Big|\; + \int x\cdot \ln(x)\, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Leftrightarrow 2\cdot\int x\cdot\ln(x)\,dx = x^2\cdot\ln(x) - x^2 + \frac{1}{2}x^2 \;|:2$$

$$\Leftrightarrow \int x\cdot\ln(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln(x) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C \quad (x>0)$$

بيلګه ۴

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{v'}\,dx = u\cdot v - \int u'v\,dx \qquad u = x^2 \Rightarrow u' = 2x \qquad v' = e^{2x} \Rightarrow v = \int e^{2x}\,dx$$

منخ شميرنه

$$\int e^{2x}\,dx \quad \text{Substitution: } u = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

$$\boxed{\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}} \quad \text{په څټ بدلون} \quad \Rightarrow \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u}$$

$$\int x^2\cdot e^{2x}\,dx = \underbrace{x^2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}}_{u\cdot v} - \int \underbrace{2x}_{u'}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{v}\,dx = \frac{1}{2}x^2\cdot e^{2x} - \int x\cdot e^{2x}\,dx$$

$$\int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{v'}\,dx = u\cdot v - \int u'v\,dx \qquad u = x \Rightarrow u' = 1 \qquad v' = e^{2x} \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

(پورته وګورى)

$$\int x\cdot e^{2x}\,dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x\cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\underbrace{\int e^{2x}\,dx}_{\frac{1}{2}e^{2x}} = \frac{1}{2}x\cdot e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

$$\int x^2 \cdot e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{2x} - \underbrace{\int x \cdot e^{2x}\,dx}_{\frac{1}{2}x\cdot e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}} = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{2x} - \left(\frac{1}{2}x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}x \cdot e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} = \underline{\underline{\frac{1}{4}\left(2x^2 - 2x + 1\right)e^{2x} + C}}$$

دا بیلگه ښايي، چې په انتیګرال کې زیات وخت ډېري تګلارې یو په بل پسې کارول کیږي. دا چې د ټوټه انتیګرال منځنۍ پایله (لاس ته راوړنّ) زیات وخت څرګند یا معلوم دي، سړی دې دا د یوه انتګرئشن جدول په ښه په یاد کې وساتي.

د انتیګرېشن نورې تګلارې او تخنیکونه هم شته، چې په دې ځای کې دې ترڅېرنې لاندې دې نه نیول کیږي. د بیلګې په توګه دې ماتنسبي انتیګرېشن د ټوټه مات یا کسر ټوټه ونې په ګوته شي.

یوڅو ناټاکلي انتیګرالونه:

لومړی: $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

دویم: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \quad x \neq 0$

دریم : $\int e^x\,dx = e^x + C$

څلورم: $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad a > 0;\ a \neq 1$

پنځة $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad n \neq -1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم: $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$

اووم: $\int x(ax+b)^n\,dx = \frac{a(n+1)x-b}{a^2(n+1)(n+2)}(ax+b)^{n+1} + C \quad n \neq -1; -2$

اتم: $\int \frac{1}{x(ax+b)}\,dx = -\frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + C$

نهم: $\int \frac{x}{ax+b}\,dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$

لسم : $\int_0^\infty \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}\,dx = 0$

یولسم: $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

دولسم: $\int x \cdot e^{ax}\,dx = \frac{1}{a^2}(ax-1)e^{ax} + C$

ديارلسم: $\int_{-1}^{1} a^x\,dx = \frac{a^2-1}{a \cdot \ln(a)} \quad a > 0$

څوارلسم: $\int \ln(x)\,dx = x \cdot \ln(x) - x + C \quad x > 0$

پنځلسم: $\int [\ln(x)]^2\,dx = x \cdot [\ln(x)]^2 - 2x \cdot \ln(x) + 2x + C \quad x > 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپاړسم: $\int x^n \ln(x)\,dx = x^{n+1}\left(\frac{\ln(x)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) + C \quad x > 0;\, m \neq -1$

اولسم: $\int \frac{[\ln(x)]^n}{x}\,dx = \frac{[\ln(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad x > 0;\, n \neq -1$

اتلسم: $\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)} = \ln|\ln(x)| + C \quad x > 1$

نولسم: $\int \frac{1}{x \cdot [\ln(x)]^n} = -\frac{1}{(n-1)\left([\ln(x)]^{n-1}\right)} + C \quad x > 1;\, n \neq 1$

یوځو ټاکلي انتیګرالونه:

لمړی: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$ دويم: $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx = \pi$

دريم: $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx = \pi$ څلورم: $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$

پنځم: $\int_0^\infty \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}$ شپږم: $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

اووم: $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 1$ ا تم: $\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{ax-x^2}}\,dx = \frac{3}{8}a^2\pi$

نـهم: $\int_0^\infty \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}\,dx = 0$ لسم: $\int_0^{2b} \sqrt{2bx-x^2}\,dx = -\frac{b^2\pi}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوولسم: $\int_{-1}^{1} a^x\,dx = \dfrac{a^2-1}{a\cdot\ln(a)} \quad a>0$ دولسم: $\int_{0}^{\infty} e^{-x}x^n\,dx = n! \quad n\in\mathbb{N}$

ديارلسم: $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$ څوارلسم: $\int_{0}^{\infty} \dfrac{x}{e^x+1}\,dx = \dfrac{\pi^2}{12}$

پنځلسم: $\int_{0}^{\infty} \dfrac{x}{e^x-1}\,dx = \dfrac{\pi^2}{6}$ شپاړلسم: $\int_{0}^{1} \dfrac{\ln(x)}{x+1}\,dx = -\dfrac{\pi^2}{12}$

اوولسم: $\int_{0}^{1} \dfrac{\ln(x)}{x-1}\,dx = \dfrac{\pi^2}{6}$ اتلسم: $\int_{0}^{1} \dfrac{\ln(x+1)}{x^2+1}\,dx = \dfrac{\pi}{8}\cdot\ln(2)$

نولسم: $\int_{0}^{1} \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}\,dx = \dfrac{\pi^2}{8}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دویم:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Diss . Uni. Wien

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):
دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):
څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د احتمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):
پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):
شپږم: د شمیرپوهنې انګریزي – پښتو ډکشنري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):
اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):
اتم: دفرنځيال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003
نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):
لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

.يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،ميرې،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

بن- المان، کابل – افغانستان ۲۰۱۲ ز ک

ژباړې:

لاندې د برينککن ليکنې چې له پرينمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه

۵ – احصایه یا ستاتیستیک

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر ښستونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

-۲۲   داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته

تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزۍ پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویيونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميرې شينواری د اروابښادې پستو او اروابښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمريز کې د شينوارو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مينې د لومړنې ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه وو) څخه وروسته د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پيل او د دويم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپمتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتريش برس، چې هلته يې د شميرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

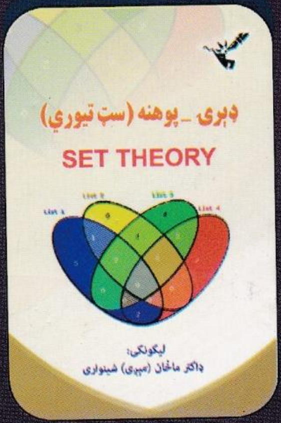
ماخان ميرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د ميرمن ښاپيرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتريش ته راغی. ده له ميرمن ښاپيری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

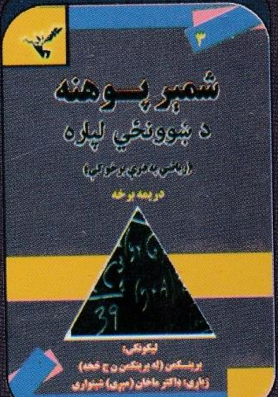
دوي ته لوي څښتن په اتريش ويانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چې څانګه او اباسين نوميږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سايکولوژي لوستلي.

ماخان شينواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو ليکلو اوو د ژباړې دنده يې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه ساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډاکتر ماخان (مېرې) شینواری





د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه ـ جرمني
VEREIN ZUR FORDERUNG DER
AFGHANISCHEN KULTUR E.V

د خپرونو لړ (۱۲۹)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library