ځمککچپوهنه(هندسه)

Geometry

لیکونکی:

ډاکتر ماخان (میړی) شینواری

2012

Ketabton.com

جرمني د بن ښار

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمککچپوهنه (هندسه)

لیکونکی:
ډاکتر ماخان (میرزي) شینواری

ناچاپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

ځمککچپوهنه(بنسټيزه هندسه)

هندسي بنسټيزې کليمې

ټکی ، کرښه ، هواره(سطحه) ۱
نيمه – يا نيمهواره ۷

کونجکليمه ۱۱

څرخونپروسه: څرخونکنج : ۱۴

ګراد ۱۵

کونج کلمه ۱۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمککچپوهنه(بنسټیزه هندسه)

هندسي بنسټیزې کلیمې

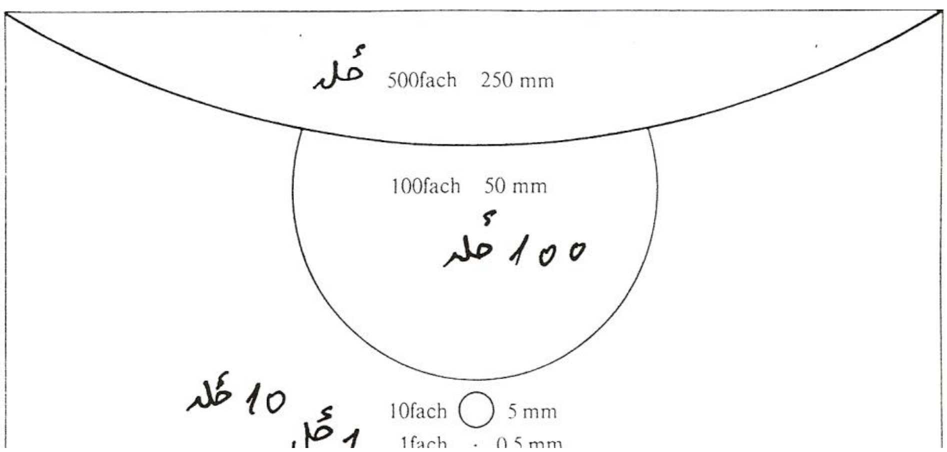
ټکی ، کرښه ، هواره(سطحه)

پیژند(تعریف): اویکلید(Euklid) اویکلید وایي، چي ټکی هغه دی چی نور نه شي کوچنی کیدی. ددې پیژند ستونځی په دې کې دي، چی بیا نو د داسی واړه شي ځخه ځنګه کرښه، او هواره جوړیدلی شي. یعنی که ټکی د هندسی اتم (لاتین Atom نه ویشونکی) وي بیا نو ځنګه کیدی شي چی پراخه شي یا وغزیږي؟ یا یی که مایکروسکوپ له لارې لوي کړو، نو پوره ستره هواره نیوی شي په عمل کی د کښلو (رسم ویستلو) له لارې ګورو چی ټکی څرګند غزیدلی یا پراخیدلی شي، لکه څنګه چی لوییدل یعنی غټیدلی شي:
په لاندې کې ګورو، چې ټکی د همدې شمیروني له لارې څومره غټیدلی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : هندسه ځمککچ ته وايي، نو که هندسه ځمککچ پوهنه وبلل شي، د لمړنيو پوهيدلو لپاره به هم سملاسي اسانه وي .همدا اوس هم، له دې امله چي په هندسه کی ډیرڅه لیدلکیدی شي او د رانيولو وړ دي).
لنډ: شيان يا ليديدونکي»رانيولوړ «(يا شي ډوله څرګنديږي، همدومره ستونځی ليدل کيږي، چي نومونه اړوند (تړلی) کره وټاکلی شو، اوهمداسی يي دا اړونده کره ټاکنه روښانه يا فکروړ کړی شو، که څه هم په لومړي وار سره، چی ګوندې دا شکلونه ليدوړ او نيولوړ دي، ساده ښکاري، مګر په خپل دننه کی (خپله ختڅه کی) خورا پيچلي دي چی يواځی ور نږدې پيژند(تعريف) يی کيدلی شي او په لاندې کی به راته روښانه شي:

-موږ په لاندې څيره کی د ټکی غټيدل يا لوييدل ښايو



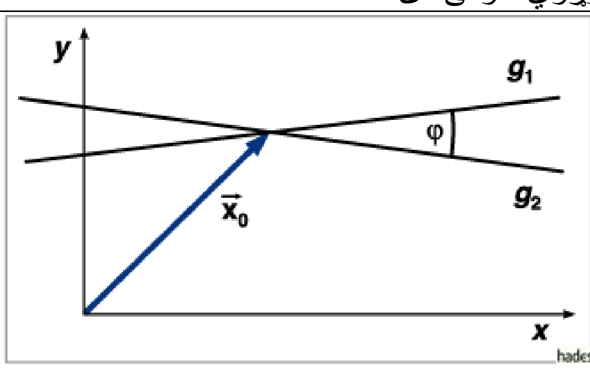
ګورو چی ټکی هوارې او کرښی ته پراخيدلی شي يعني عملي څيره ښوونه يا شکل نخښوونه يی د ستونځو سره مل ده، خو سره ددې هم ځنی تيوريکي کره (ټيك) ښوونه يي ضرور ده ، يا نه پريښودونکی ده. دا پرابلم په مقايسوي- يا د پرتلي په توګه- ساده له منځه وړل کيدی شي: په لاندې کی د تشريح شوو شيانو يا ليديدونکی لاندې د هغو تيوريتيکی اداله(خيالي)څيره پوهيږو او نه د هغه عملي ريښتينوالی يا رياليزه کوونه٠ د دې لپاره، چی ځانونه دې له دې ستونځو راوباسلی شو، دا مو د هندسی د ډيرۍ کنځپت ته لارښودوي. د پورته شکلونوسره سره، د هندسي جوړختونو (څيرو) لاندې ، د ټکو ډيری پوهيږو. يعنی هندسي جوړښتونه بل څه نه دي، بی د ټکو له ډيرۍ٠ داسی تعريفوو:
لنډ: ټکی او کرښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند(تعریف) :
یوه هواره یا سطحه د یوې ډیرئ په څیر کلکه نیسو، چی توکی یی ټکی بللکیږي. او په غټو لاتین تورو یی ښایو لکه   .....A,B,C,P,Q ، په هواره کی یوه برخډیری په نخښنه شوې ده، چی توکي يي کرښی بلل کیږي او په کوچنیو لاتیني تورو..... , a , b , c سره ښوول کیږي
یا په بل ډول :یوه هواره E د ناپای ټکو ډیری ده. د هوارې هره برخه (چی پخپله پای یا ناپای کیدی شي) د هوارې یا سطحې څیره (فیګور یا شکل) بلل کیږي.

د کښلو(رسمولو، انځورولو هوارې غزول)لکه د بیلګي په توګه د کاغذ دمخ (تخنیکي بندیزونه لري (محدود دي). د هندسي هدفمندئ لپاره باید بیا دا کاغذ هرې لور ته ناپای غزیدل شوی وي او پنډوالی یی صفر ته را کښته شوی وي، ځکه چی یوه هواره دوه دیمینزیونال ده) دوه اړخیز یا دلته ښه دئ چی د اړخ په ځاي خوا ووایو، ځکه چی اړخ مو د-n ګوډیو لپاره کارولی دئ. د لته یی د خواوو څخه سور او اوږدوالی عبارت دئ . (په دي کتاب کی او بیا دې موضوع کی له وړو څرګندونو تیریږو او هغه څه چی خورا مهم دي هغه دلته راوړو)۰

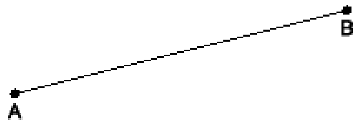
لنډ : ټکی هغه کوچنی څه دئ، چي هواره او کرښه ترې جوړیدی شي او له دې امله ټکی دهوارې یا سطحي، چې د ټکوډیرئ جوړوي، توکی دئ۰



ټکی د دوه کرخو غوڅي له لارې انځوریدی شي ۰ که دوه کرښي g او h په P کي غوڅي کړي، نو د دې لپاره داسي لیکو:
h = { P □ g}
یا لاندې انځورونه
په لاندې ځیره کي g_1 او g_2
په یوه ټکي کي سره غوڅوي

پیژند :
ټوټه کرښه (پای کرښه یا بنده کرښه) ABد ټولو ټکو هغه ډیرئ ده، چی له ټکيAو B ته د هوارې یا سطحي په دننه کی لنډ واټن یا - فاصله وهي، یعني که دا دواړه ټکي یو بل په لنډ واټن کی د هوارئ په دننه کی سره وتړي، چی د غاړې ټکي A او B هم په دې پورې اړه لري. یعني ټکی A او B هم په دې کرښه پراته دي۰داسي لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

A € AB; B € AB يا هغه کرښه، چې دوه ټکی په لنډ واټن کې سره وتړي بندکرښه بلل کيږي، ټکي د کرښې توکي دي	

که بند کرښه د «ځيرکرښې» په څير ونيسو او يا د کاغذ پرمخ کرښی (ختکش) کيږدو نو دا کرښه دواړو لورو ته غزيدلی شي، چې موږ دا کرښه بولو۰

کرښه د ځمککچپوهنې بنسټيزه کليمه ده۰ ليدوړ د اويکليد جيومتري کې دا يوه ناپای غزيدلی کرښی ته وايي، چې ناپای نرئ وي، د لاندې خويونو سره:
که په يوه کرښه دوه يو له بل بيل ټکي پراته وي، نو د دوي ترمنځ ټوټه کرښه يو لنډ واټن په نخښه کوي، چې موږ ورته ټوټه کرښه يا بند کرښه وايو۰

دا کليمه ټيک زموږ پيژند نه راکوي۰ اوس هندسه په اکسيومونو ودانه ده، چې کرښه او ټکی داسې ورکړ شوي، چې مخ د مخه يې پيژند څرګند ورکړ شوی او نيول شوی يانې موږ يې پيژنو ۰

پيژند يا تعريف :

د بندکرښی (پای AB)- دواړو لورو ناپای غزولوته کرښه (ناپانکرښه) AB يا g ويل کيږي. بندکرښه نو بيا د (ناپاي -) کرښي اصلي برخډيری ده۰

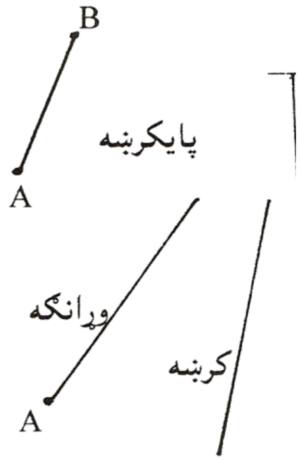
په نخښونه يې g (برخډېرئ)□ AB

طبعآ کيدی شي، چی کرښه په يوه لور وغزول شي

پيژند :

که بندکرښه يوائې په يوه لور ناپای وغزول شي،(نا پای) نيمکرښهشي (ناپاي) نيمکرښه يا وړانګه(شعاع) بلل کيږي. نيمکرښه يا وړانګه يوې لورته بنده او بلی لور ته ناپای غزول کيدی شي، يعني پيل لري مګر پای نه لري .

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډ: د بندکرښی دواړه لورې بندې ، د نیم کرښې یوه لور بنده او بله وازه او دکرښې دواړه لورې وازې دي. په پورته ځیرو کې د بند کرښی، وړانګې او کرښی توپیر ځرګند دی٠ نیمکرښه د کرښی برخډیری دی	

که په یوه هواره کی په یوه کرښه g ټکیPکیښوول شي، نو وایو چیPدgاینځیدیر (inzidiert) کیږي یاټکیPپه کرښهgپروت دیٔ یاgلهPتیریږي اوgد هواریEسره اینځیدیرت کیږي، په دې حالت کی د اینځیدینځ اړیکو(inzidenzrelationen) یا »پروتوالی اړیکو«ځخه غږیږو٠
که په همغه کرښه له دوه ټکو (په همغه هواره له درې ټکو زیات) زیات ټکي پراته وي، نو دې ته سړی کولینیار(kollinear() کومپلانار(چې په همغه هواره یا ستځه کې شته ويkomplanar) وایي .که یو ټکی P په دوه (زیاتو) کرښوg اوhپروت وي نو دا د gاوh غوځټکی بلل کیږي اوداسی یې لیکو:

$$h= \{ P \cap g\}$$

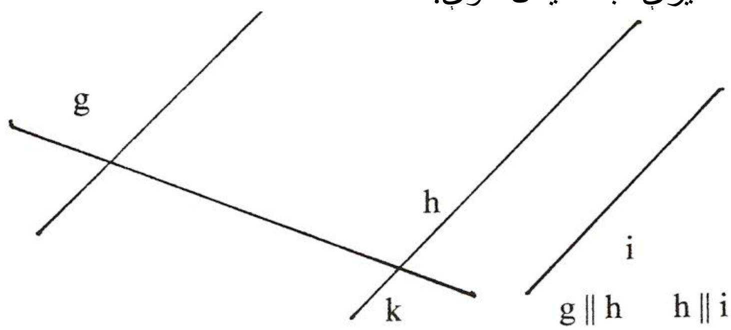
د پام وړ : ټکی د ډیری نوك کی{ } لیکل کیږي(یا د ډیری غیږ کی نیول کیږي)، ځکه چی ناپاکرښي g او hد ټکو ډیری دي او ټکی P د غوځډیری توکی دیٔ .
که چیرې ډیرې ناپایکرښی په یوه ټکي کی سره غوځی کړي نوکوپونکتال (kopunktal) بلل کیږي، کوپونکتالی ناپای کرښی د ناپاکرښو غونچه (Büschel)یا بهتره ستوری جوړوي٠

د کرښو کوده(ځېرې ټولې لاندې کښل شوي دي)

پیژند(تعریف) : کرښي g او h بي له ګډو ټکو یابهتره : بی له غوځټکو غبرګکرښی (موازیکرښی) بللکیږي، لیکدو(مطلب د شمیرپوهنی لیکدود) یې د ی g||h

(c) ketabton.com: The Digital Library

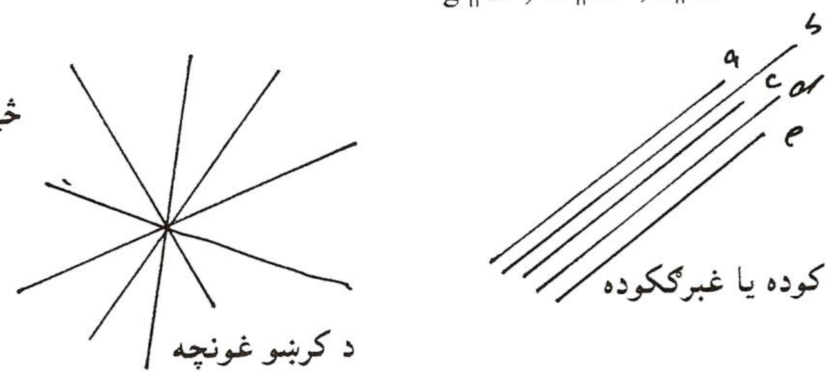
کرښی د ناپای ډیرو غوځټکو سره کټمټ یا (ایدنتیك identisch) بلل کیږي یا مساوي کیږي. دا په دې مانا چی یو په بل پرتی دي. یو بل ته کټمټ کرښی سره غبرګی دی۰
ددې لپاره لیکو: $g = h$
ناغبرګی کرښی g او h په نخښونه کی داسی په نخښه کیږي: $g|/|h$ (دا دې منل شي، چې دا د ناغبرګ کرښو لیکډول دی یا لیکدود)۰
د لاندې ځیرې شننه د ځیرې کښته لیکل شوې:



$g \parallel h \quad h \parallel i \Rightarrow \quad g \parallel i$

$g \parallel k \; ; \; h \parallel k \; ; i \parallel k$

ځیره ۳ الف



کوده یا غبرګکوده

د کرښو غونچه

ځیره ۳ ب

هندسی ځیره : یوه هندسي ځیره یوه ناتش ټکیډیرئ ده.
هغه لاین (یوخوایز یا یو دیمنزیونال (لاتین: په ټولیزه توګه مانا یی: هرې لور ته پراخیدنه، یوې لورته پراخېدونی(1Dimensional) بلل کیږي، که هغه په یوه کرښه پروت وي او ټکی نه وي .
پیژند(تعریف):هغه هندسي ځیره »هواره (Fläche) بلل کیږي، که هغه په یوه هواره هوره (Ebene) پرته وي، مګر نه په یوه ټکي پرته وي ۰ هواره یا سطحه دوه پراخیدونې یا –دیمنزیونال(2 Dimensional)ده۰

په پورته کې د کرښو کوده یا د کرښو ډله سره غبرګې هم دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته $A < B$ په دې مانا ده چي « A په یوه کرښه g د B تر مخ یعني څموږ په بلد دود، کیڼ لور ته پرته ده» دا په دې مانا چي په کرښه g ځغاسته باندې لمړی د A ټکی او بیا په ترتیب د B او C ټکو ته راځو. په دې توګه د منځ اړیکی له لارې لوریزې کرښی ته راځو. دا په دې مانا چي داسی کرښی لوریزې کرښی دي. یعني په هغه پخوانی ډول سمت یا لور یی څرګند دی.

منځ اړیکی $Wz(ABC)$ دا مانا لري چی یا $A<B<C$ او یا $A>B>C$. دا په دې مانا، چي هره کرښه په دوه ډوله لوریزه کیدی شي یعنی سمت یی ټاکل کیدی شي.

تعریف : g دې یوه لوریزه کرښه وي او A دې د g یو ټکی وي، نو د A بدل یا توپیري ټکی کرښه g په دوه برخېږیریو ویشي: (دلته کرښه ناپای کرښه ده)

$$\{ X : X \in g \text{ او } X < A \}, \qquad \{ Y : Y \in g \text{ او } Y > A \}$$

که دواړو برخېږیریو ته ټکی A ورزیات شي، نو له A څخه په g پیداشوې وړانګي منځ ته راځي . A منځ ټکی او g د دواړو، نسبت و A ته یو بل ته مخامخ یا یو د بل په څټ وړانګو وړونکرښه بلل کیږي.

یوه وړانګه د پیلټکی A او له دې توپیر ټکی $P(P \neq A)$ له امله یواځنی (یواځنی شمیر پوهنیزه کلیمه ده او تل دې ورته پام وي، دا په ځیرونه کی زیاته کاروول کیږي. دا په دې مانا ، چی بل نه شته) ټاکلی دی. یعنی په دې ټکو بله له دې وړانګي توپیري یا بدله وړانګه نه شته. دا په AP ښوول کیږي. دې AP ته مخامخ یا په څټ وړانګه په AP ښوول کیږي.

تل باور لري:

$$AP^{+} \cap AP^{-} = \{ A \} \quad \text{او} \quad AP^{+} \cup AP^{-} = Zw(AP)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که وکتلی شو چی د پای کرښی یو سر له بل څخه د مخه پروت وي، نو پایکرښه لوریزه ده. که A له B مخ ته یا کیڼ لور ته پرته وي نو کرښه په AB ښایو د کرښې لوریزوالی د یوه غشي په مرسته ښوولی شو یعنی: پایکرښه AB او BA یو بل ته مخامخ یا په بل ډول یو بل ته په څټ پرتی دي.

نیمه هواره یا لنډ: نیمهواره

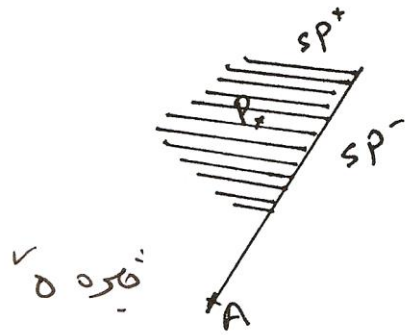
تعریف : هره کرښه g په هغې کرښه پورې اړه نه لرلو ټکو باندې په دوه وازو نیمهوارو باندې ویشي. دوه ټکی د نیمهوارې یوه لور ته ، ټیك او ټیك هلته پراته دي، چی ددې ټکو ترمنځ د کرښې g کوم ټکی نه وي پروت. g د دواړو هرې یوې هوارې ژیکرښه یا لنډه: ژی یا غاړه ده.
د یوې وازې هوارې او ژی کرښی ټولنه نیمهواره جوړوي. یوې ژیکرښې پورې اړونده دواړه نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په څټ نیمهوارې بلل کیږي.

که ټکی A او B له g پیداشوې یا منځ ته راغلی نیمهوارې په یوه لور پراته وي، نو وایو چی A او B د کرښی g په همغه لور پراته دي.

یوه نیمهواره د پیداکرښې او یوه ټکی P له لارې (چې په ژیکرښه g نه وي پروت) یوائځنی ټاکلی ده، یعني له دې نیمهوارې بدله بله داسی نیمهواره نه شته.

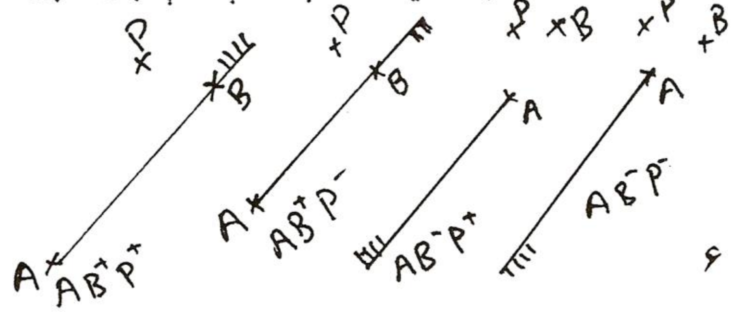
یو ټکیډیری ، چی له یوې وازې نیمهوارې او یوې وړانګې، داسی په نامه هوارجوړوونکی وړانکی ، جوړ وي، جنډه یا بیرغ بلل کیږي. دلته د وازې هوارې ژیکرښه د وړانګې وړونکی کرښه بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



وړانګه د جنډې ژیوړانګه ، ددې پیل ټکی د جنډې پیلټکی بلل کیږي. یوه جنډه f د ژیوړانګي s سره او په دې وازه هواره پراته ټکي P سره په sP^+ ښوول کیږي. جنډه د همغې وړونکې وړانګې یا ژیوړانګي s سره ، چې د sP^+ سره مخامخ یا په څټ ده ، د sP^- سره ښایو. (خیره: ۵)

که په sP^+ همداسی sP^- سومبول، په پورته د وړانګي s لپاره اینښوول شوی سومبول، چې له A و B ته ځي او AB^+ همداسی AB^- بدل کړو یا کیږدو، نو د لاندې سومبولونو AB^-P^-; AB^-P^+; AB^+P^-;AB^+P^+ سره کرکترستیك یا ښوول شوې یا ټاکل شوي جنډې ښایي. لاندې خیرې ددې لپاره کاږو:

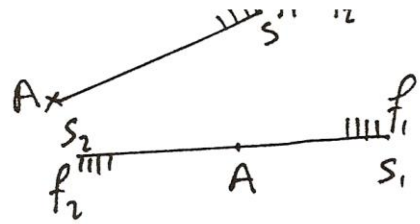


خیره ۶

دلوړې خیرو بیرغونه AB^+P^+ او AB^-P^- یو بل سره مخامخ دې، ځکه چې وړونکی وړانګه او نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په څټ دی(پام دې وي چې مخامخ او په څټ همغه مانا لري یعني همغه یو ډول شمیرنیزې کلیمې دي)،

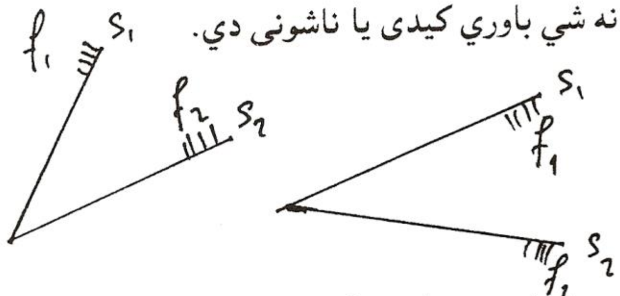
دوه بیرغونه (f_2 , f_1 د همغه پیل ټکي A سره) وپیل ټکي A ته همغه لوریز یا مساویلوریز بلل کیږي، د کولینیارې ژیوړانګو سره، که $f_1 = f_2$ یا f_1 و f_2 ته مخامخ یا په څټ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ثیره ۷

دا دوه بیرغونه یو بل ته مخامخ بلل کیږي د همغه پیلټکي، د ناکولینیارړ ژیوړانګو سره، که د f_1 ژیوړانګه په f_2 یا f_2 ژیوړانګه د f_1 په ژیوړانګه پرته وي ، مګر دواړه امکانات نه شي باوري کیدی یا ناشونی دي.

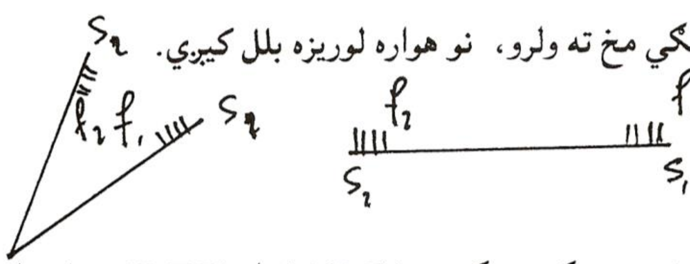


ثیره ۸

د ټولو جنډو ډیریو کی همغه لوریز اړیکی ایکویوالنت یا ورته اړیکی دي. همغه په دوه ټولګیو د ډیریو ویشنه ممکنوي.

هغه جنډې چی مساوي لوریز نه دي یو بل ته مخامخلوریز یا یو بل ته په څټلوریز بلل کیږي. دې ته خو پام شته چی مخامخ یا په څټ لوریز همغه مانا لري

که دا ډول لوریزټولګي مخ ته ولرو، نو هواره لوریزه بلل کیږي.



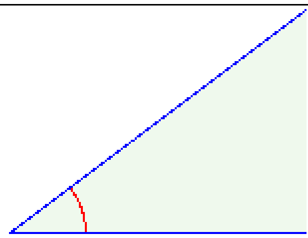
ثیره ۹

دوه منظم یا ترتیب شوي د ټکو دریګوني (A,B,C) او (D,E.F) ټیک هلته یا هلته او هلته همغه څرخونموخه لري(یعنی د څرخونی هدف یی همغه دی)، که

(c) ketabton.com: The Digital Library

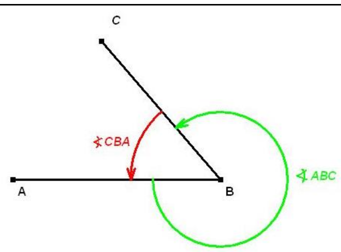
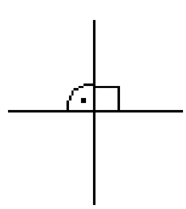
جنډې AB C او DE F همغه لوریزې وي. د یوه منظم نه کولینیار یا کولاینې دریګونټېکو (A,B,C) څرخونموخی لاندې د جنډې AB C لوریزېولګی پوهیږو.

کونجکلیمه

پیژند (تعریف): په یوه هواره کې، چې دوه وړانګی S 1 او S2 یاني S1/\ S2 د پیل غوښتکی S ولري په هواره یا سطحه E کی کونج β جوړوي .وړانګي د کونج پښی بلل کیږي او پیلټکي S دکونج > ککره (لنډ : کونجککره)بلل کیږي.	

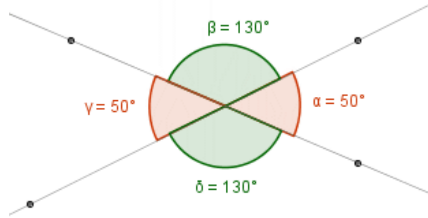
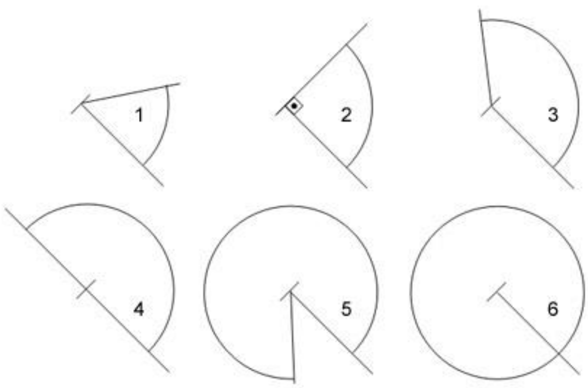
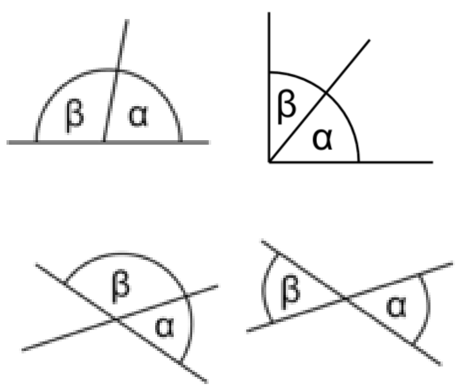
لنډ: دوه کرښې، چې په یوه ټکي کې سره غوڅې کړي، کونج جوړوي، چې کرښې د کونج پښې او غوڅټکی یې د کونج ککره یا (رآس الزاویه) بلل کړي ۰ پورته څیره دې وکتل شي۰ګونجونه په ګراد (لاتین پل یا لاقدم)کچیږي

د کونجونو رسمونه او نومه وني

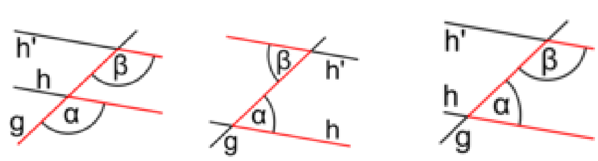
هغه کونج ، چې له ۱۸۰ درجو کوچنی وي هغې ته ننوتی کونج واي او هغه کونج، چې له ۱۸۰ درجو لوی وي هغه ته وتلی کونج واي ننوتی کونج Konvexes Winkel وتلی کونج konkaves Winkel تیره کونج، چې له ۹۰ درجو کوچنی دی، ولاړکونج، چې پوره ۹۰ درجې دی، پخکونج، چې له ۹۰ درجو لوي او له ۱۸۰ درجو کوچنی دی، غزیدلی کونج، چې ۱۸۰ درجې دی ، له پخ زیات- یا د پخ په څټ- یا له پخ اخوا کونج ، چې له ۱۸۰ درجو لوي او له ۳٦۰ درجو کوچنی دی، پوره کونج، چې ۳٦۰ درجی دی۰ دا دې په ګوته وي، چۀ صفرکونج صفر دی۰	 

یادونه: دا مې ډیر تکرار راوړی، هیله ده، ګران لوستونکي به ورسره ستړي نه شي

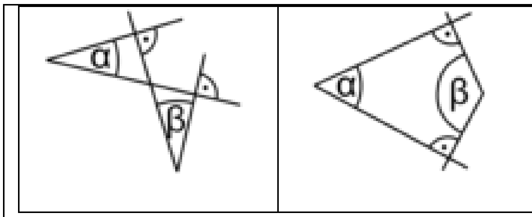
(c) ketabton.com: The Digital Library

مخامخ څیره : ککر په ککر کونجونه یورنګیزدي، بدلرنګیز کونجونه ګاونډي بلل کیږي۰	
لاندې کونجونه پخپله ونوموی‌کړی ۰	
کمپلیمنت یا ۹۰ درجو ته پوره کیدونکي کونجونه(مخامخ څیره دي وکتل شي)۰ په څنګ کې يې سوپلیمنت یا ۱۸۰ درجو ته پوره کیدونکی کونجونه ۰مخامخ څیره ۰ مخامخ کونجونه ښی لور ته : ککر په ککره کونجونه۰ کیڼ لور ته : ګاونډي کونجونه	

له کیڼ څخه و ښی لور : پوړیز کونجونه ، ردبدلکونجونه



(c) ketabton.com: The Digital Library



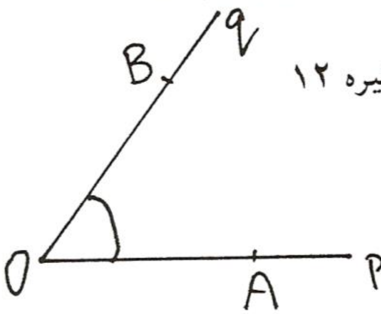
مخامخ کونجونه، چې پښې یې یو په بل ولاړې وي, ۱۸۰ درجو ته یو بل پوره کوي۰ په دې بل حالت کې کونجونه یو بل سره برابر دي۰

یادونه : ګران لوستونکي به راته بخښنه وکړي، چې د زیاتو کونجونو هغه ورسره بلد نامه سره ښه نه یم بلد، ځکه چۀ په محدب ، مقعر او داسي نورو باندې نه پوهیږم، یوائې له قایم الزاويه ڜخه پرته۰

یو ګراد Grad لاتین: پل یا قدم

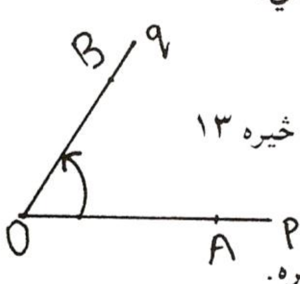
لاندې کونجونه سره توپیر کیږي، چې ایا د پښو لړۍ پرلپسې کره ټاکلي او ایا د کونج دننه په نخښنه شوی دی او که نه.

د کونج دننه په نخښنه شوی نه دی: د پښو لړۍ پرلپسې کره نه ده ټاکلی



خیره ۱۲

بنسټیز کونج:
د وړانګو p , q (نامنظمی) جوړې،
د ګډ پیلټکي O سره، د (p,q) ∢
یا (ABC) ∢ په نخښنوني
د B ∈ q , A ∈ p سره.
دلته O ککرټکی دی، p او q د کونج پښې دي.



خیره ۱۳

د پښو لړۍ پرلپسې کره ټاکلی ده:
لوریز بنسټیزکونج: د وړانګو p او q
منظمه جوړه د ګډ ټکی O سره د (p,q)∢
یا AOB ∢ په نخښنونی د A ∈ p او B ∈ q سره.

دلته هم لکه د مخه o ککرټکی، p لومړی پښه او q دویمه پښه ده. دا کونج په

(c) ketabton.com: The Digital Library

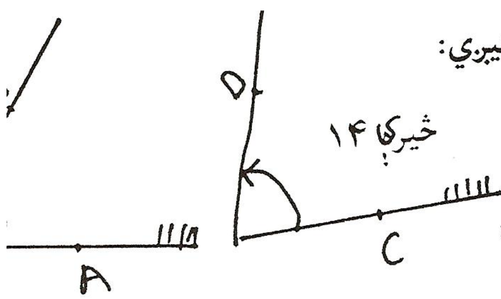
شمیرپوهنیزه موخه مثبت لوریز دی

یادونه : هغه د څرخون لور چی د ساعت څرخیو مخامخ یا په بل ډول په څټ ځغلی

مثبتلوریز او هغه چې د ساعتڅرخیو په لور ځغلي مفي لوریز څرخون بلل کیږي.

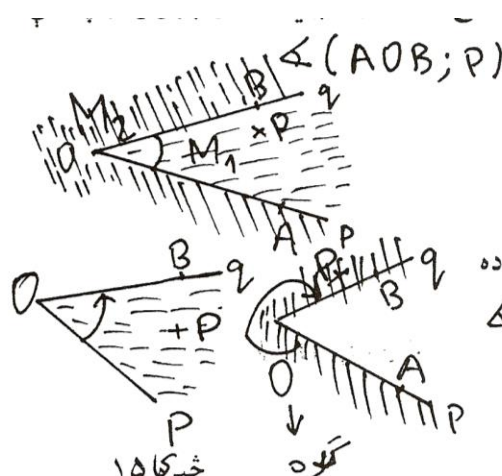
دوه کو نجونه ټیك هلته او یا هلته او هلته مساویلوریز دي، که د هغو جنډې همغه لوریز یا مساوي لوریزې وي.

لکه په دې څیره کی چی لیدل کیږي:



د کونج دننه په نخښنه شوی دی:

د کونجونو لړی پرلپسی یی کره نه ده ټاکل شوې. (بلد یا عادي) کون
بنستیز کونج هواره په دوه برخهډیریو M_1 او M_2 ویشي. په نخښنه برخ
بیلګي په توګه په ټکی P کی) د کونج دننه بلل کیږي(د کونجهوار



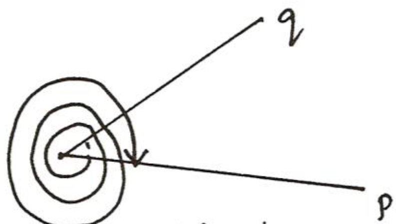
نخښنونه کي: ∡(P,q; P) ، ∡(AOB; P)
که دننه یی تش ډیری وي نو
دا کونج صفر کونج دی .

د پینو لړی پرلپسی کره ټاکلی شوې ده
لوریز کونج: په نخښونه ∡(P,q; P)
لوریز بنستیز کونج او دننه یی په
نخښونه P≠q، که وي، نو (p,q;p)
او (q,p;p) بدللوریز دي. (P≠q)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دلته هم که د کونجونو دننه تش وي،
نو کونج صفر کونج دی: $\measuredangle(p,q;p)=0°$

ځرخونپروسه: ځرخونکونج:



ځیره ۱۶

لوریز کونج، که د کونج په همغه لور د یوه طبیعی ګڼ یا پیدایبنتي ګڼ په اندازه چی یوه پښه یی ځاي په ځاي ده وځرخول شي، نو د کونج لور کی تغیر نه راځي.

ګراد (لاتاین Grad پل یا قدم)

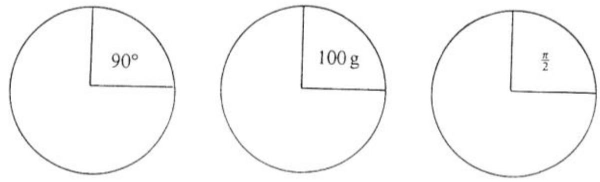
د کونج لویوالی په مختلفو ډولونو ورکول کیدی شي. د اندازې یووني (یو یې : یوون) یا واحدونه(یو یې : واحد) لاس ته راځي، چی یو کونج - په یوه ګردئ کی کښل شوې- په مساوي برخو یا سکتورونو وویشل شي.) سکتور او ګردئ لپاره دې، د ګردئ لوست ځاي وکتل شي (و رسره بلد یا مروج یی په 360° مساوي برخو ویشنه ده)
پیژند : 1/360° د یوه پوره کونج 1° (په تورو :یوه درجه. ، لاتین یي gradus = پل قدم) بلل کیږي.
ګراد نور هم په 60° کونجدقیقو ویشل کیږي) 1°= 60’ او کونجدقیقه په 60" کونجثانیو(1’= 60’’).

د» ګراد یا درجی« لاندې »زړه درجه«(زوړ ګراد) پوهیدل کیږي. دا د زاړه بابیلوني زاړه شپیتیز سیستم څخه دی. په تریګونومیتري یا کونجکچ کي کونج برسیره پردې په لینده کچ یا - اندازه پاندې هم اندازه کیږي او په ګیودازي (Geodäsie د اندازه کولو تخنیك، - پوهنه یا- علم (په نوي ګراد یا ګون (gon (اندازه کیږي چی دلته ګردئ په ۴۰۰ برخو ویشل کیږي .دا په جبشمیري کی مودوس"GRAD" « دئ .څیرې :

د ګردئ څلورمی انځورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیرې۱۷



لینده کچRAD نوی گراد GRAD زوړ گراد DEG

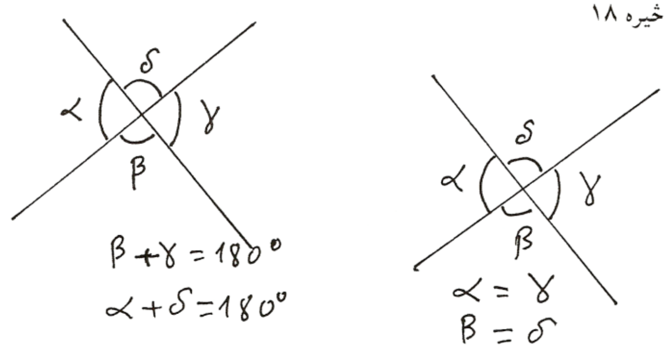
د کونج مثبت- او منفی – یا زیاتون - او کمونننخښي د کونججوړونکی یاکونج تولیدیدونکي ځرخونلورې ځخه لاس ته راځي. کیڼ ځرخون (د ساعت د ځرخی په څټ ځرخیدنه) مثبت- زیاتونمخنخښه مخ ته یعنی کیڼ لور ته لري او ښی ځرخون (د ساعت د ځرخولو په لور) منفی – یا کمونمخنخښه مخ ته لري یعني کیڼ لور ته لري. د دوه کونجونو مقایسی یا انډول یا پرتلی لپاره بیا یواځی مطلقه ارزښت مهم دی. مطلقه ارزښت سوچه یا خالص د ځاي ارزښت یا ځیفرارزښت دی، بي له مخنخښي. د مطلقه ارزښت همداسی ځاي ارزښت لپاره دې ځما د شمیرپوهنی بنسټیزکتاب وکتل شي۰(په نړیوال جال کې به هم راشي)

بیلګه : $5 = |-5|$, $3 = |3|$دوه کرښی یو د بل سره ځلور غوځکونجونه جوړوي، چی په تولیزه یا عمومي ډول یی جوړه سره مختلفی لوي وي. د بیلګې په توګه که له غوځکونج غبرګیږو نو موخه به مو وړوکی کونج وي۰

پیژند :که دوه ناپانکرښی یو بل سره په یو ټکی کي پرېکړي، نو ځنګ په ځنګ کونجونو ته ګاونډي کونجونه واي، چی دوي یوه پښه ګډه لري او دواړه کونجونه 180° لري (د درجي نخښه کله کله کیڼ لور ته لیکل شوې، خو دا په پوهېدنه کي کومې ستونځې نه رامخ ته کوي) ۰

کونجونه چی ککرې یي سره نښتی یا په بل ډول ککره په ککره وي، هغو ته ککرېکونجونه ویل کیږي. ککریکونجونه مساوي لوي دي، دوي یو ګډککریټکی لري او پښی یی یوه یوه په ګډو کرښو پرتی دي .

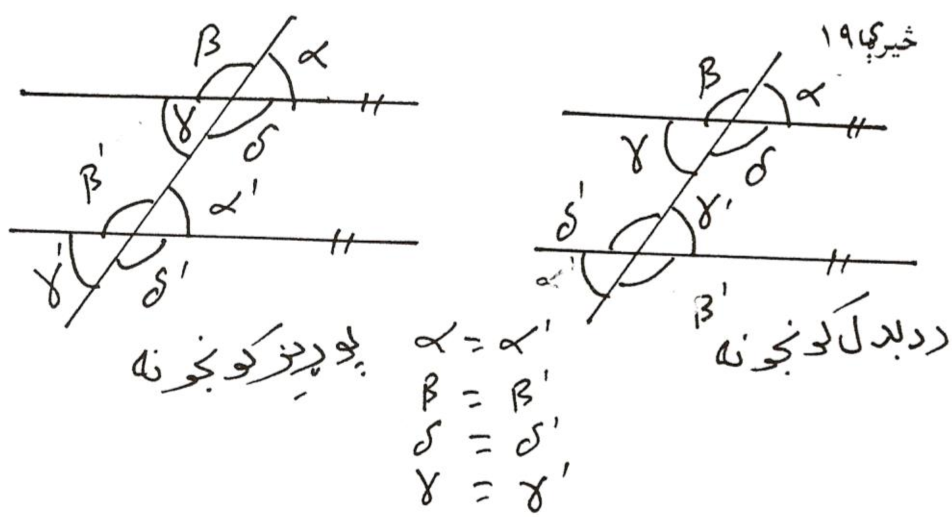
ځیره ۱۸



(c) ketabton.com: The Digital Library

خیره‌کونجونه چی ځانونه °180 ته پوره کوي سوپلیمینت (Supplementwinkel)
بلل کیږي او کونجونه چی ځانونه °90 درجو ته پوره کوي کومپلیمینتکونجونه
(Komplementwinkel)بلل کیږي. دې دواړو کونجونو ته تر یوه نامه لاندې چې
راشي پوره کوونکی کونجونه وایي .که دوه غبرګی کرښی g اوh د یوې بلی ناپایکرښي k
له خوا غوڅی شي، نو څلور دننه پریکونجونه منځ ته راځي ۰ دوي د g او h تر منځ،
,او د k په مختلفو خواوو(او څلور دباندې پرېکونجونه)نه د غبرګکرښو g او hترمنځ،
بلکه له دوي دباندې(د k په یوه لور یو دباندنی او یو دننه غوڅ- یا پریکونجونه
پوړیزکونجونه بلل کیږي، دوه دننني یا دوه دباندنی غوڅ- یا پریکونجونه چی د k په بیلو
لورو پراته وي ردبدلکونجونه بلل کیږي(څېرې پورته ورکړ شوي دي) ۰

جمله: پوړیز- او رد بدل کونجونه په غوڅغبرګکرښو(غبرګي کرښي، چې له دې کرښي
غوڅي شوي دي) کې سره برابر دي



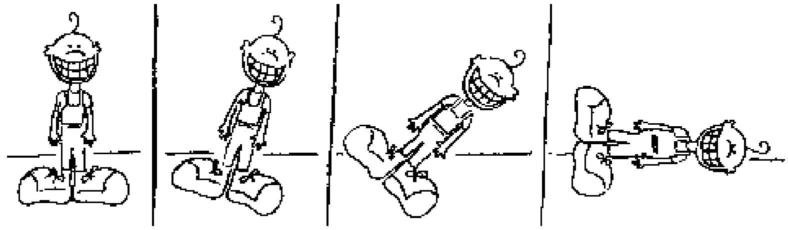
کونج کلمه

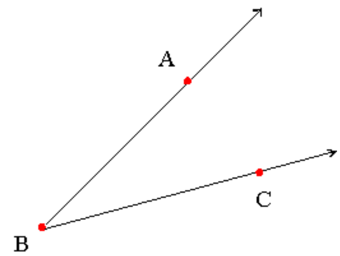
What is an Angleکونج څه شی دی ؟

یادونه: لاندې برخه څه تکرار لري، خو بیا بیا راوړنه ښه زده کړه ځان پسې لري۰

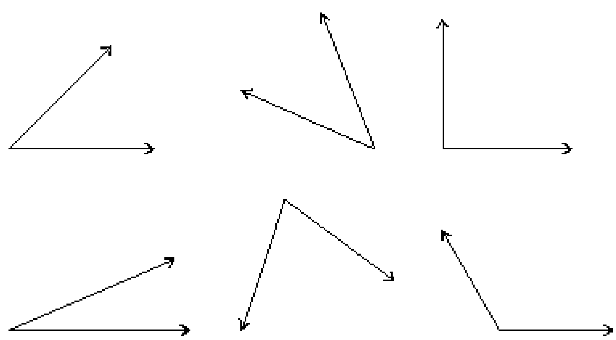
دوه وړانګی، چې یو پای لري او سره غوڅي کړي کونج جوړوي۰ وړانګی د کونج پښي
یا اړخونه بلل کېږي او هغه ټکی، چی هلته کرښی غوڅوي ککرټکی یې بولو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library





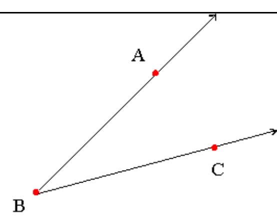
Example: دلته د کونجونو ځنې بيلګی راوړو .

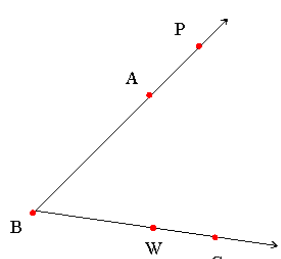


که توري د کونج په خوله کې راشي ښه به
وي، خودا هم د ليکني ستونځې دي، چې زه
ورسره لاس پهګريوان يم٠ ∠ABC
کونجونه داسي ښايو

Example: د همغه کونجلپاره بيل بيل
نومونه لرودی شو لکه

∠PBC, ∠PBW, ∠CBPd ∠WBA ,

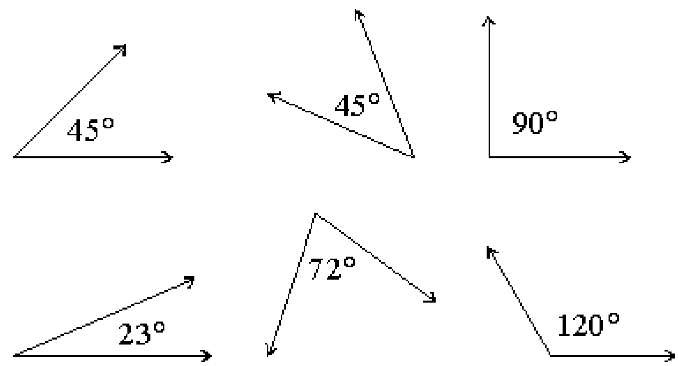




(c) ketabton.com: The Digital Library

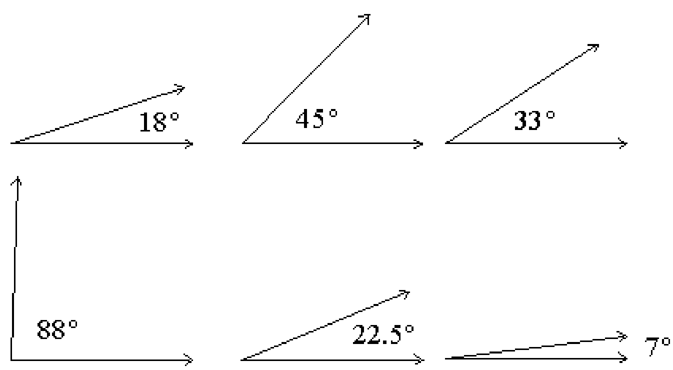
Degrees: د کونج کچوني یوون یا واحد یا یووالی: کونج په درجه کچیږي

Example په لاندې کې ځنې بیلګې :



تیره کونج ، چې د صفر او ۹۰ درجو ترمنځ وي Angles Acute

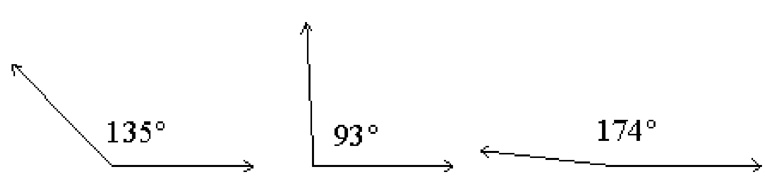
Example لاندې کونجونه تیره دي .



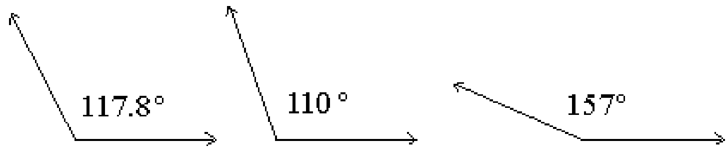
پخ کونجونه Obtuse Angles

پخ کونجونه ، حې د ۹۰ درجو او ۱۸۰ درجو ترمنځ وي پخ کونجونه بلل کیږي.

Example لاندې کونجونه تولیخ کونجونه دي:



(c) ketabton.com: The Digital Library



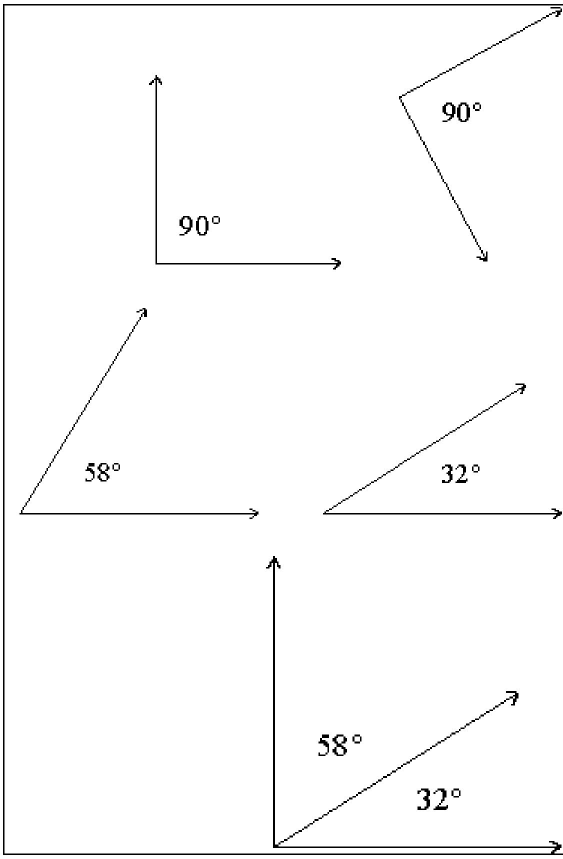
Right Anglesولاړکونج: هغه کونج، چي ۹۰ درجي وي

لاندې دواړه کونجونه ولاړ کونجونه دي:Example

Complementary Anglesکمپلیمنت کونجونه: هغه کونجونه، چي يو بل و ۹۰ درجو ته پوره کوي٠کمپلیمنټکونجونه بلل کيږي٠ يو کونج د بل کونج کمپلیمنت بلل کيږي

بيلګه:Example دا مخامخ دوه کونجونه کمپلیمنت کونجونه دي

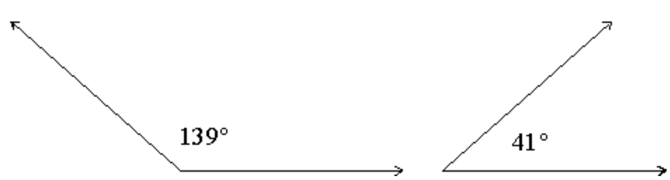
دوه کونجونه، چي داسي سره یوځاي شي،چي يو ولاړ کونج جوړ کړي،نو دا کونجونه يو له بل سره کمپلیمنت دي!



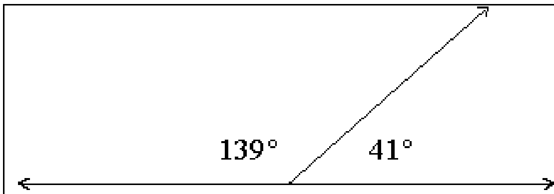
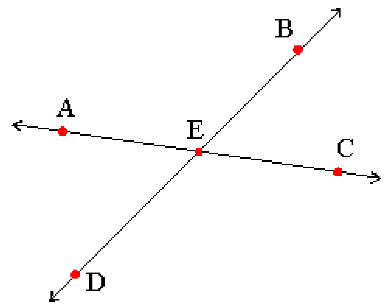
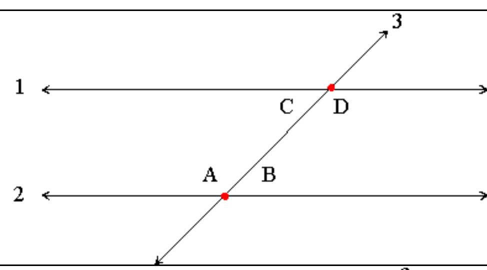
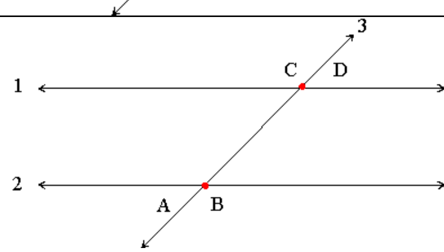
Supplementary Anglesسوپلیمنت کونجونه :

هغه کونجونه، چي ۱۸۰ درجکو ته سره پوره کوي سوپلیمنت کونجونه بلل کيږي

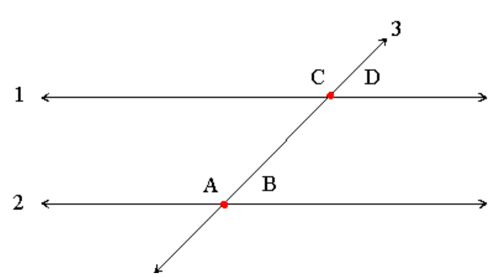
بيلګه :Example لاندي دوه کونجونه سوپلیمنت دي



(c) ketabton.com: The Digital Library

  	داسي دوه سره ترلي کونجونه، چي ځانونه ۱۸۰ درجو ته پوره کړي سوپليمنت کونجونه جوړوي Vertical Anglesککر په ککر کونجونه: چي دوه کرښي داسي سره غوڅي کړي، لکۀ په لاندي ځيره او کونجونه، همغه ککره ولري ککر په ککره کونجونه بلل کيږي او سره برابر ده , AEB او DEC کونجونه او همداسي BEC او AEDککر په ککره کونجونه دي.
 	Alternate Interior Anglesرر بدل دننه کونجونه : په لاندي کي کونجونه Aاو Dهمداسي B او C رربدل دننني کونجونه او سره برابر دي . A اوB ، C او D ګاونډي کونجوه دي.
 	Alternate Exterior Angles رربدل دباندي کونجونه : په لاندي کي کونجونه B او C رربدل همداسي A او D بدل - يا رربدل دباندني کونجونه او سره برابر دي

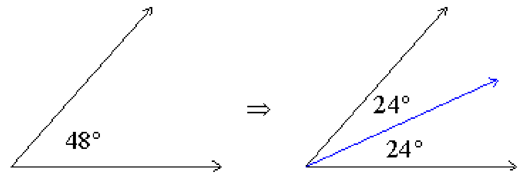
پوړيز کونجونه Corresponding Angles دا کونجونه A او C همداسي D او Bپوړيز کونجونه دي او يو له بل سره برابر دي



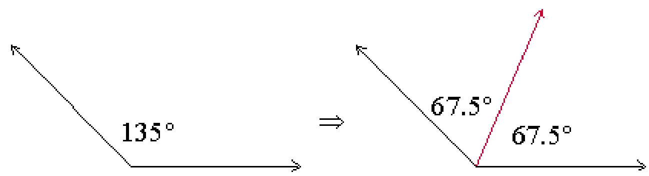
(c) ketabton.com: The Digital Library

Angle Bisectorکونجنیمی : هغه کرښه، چې کونجونه نیموي کونجنیمی یې بولو

بیلګه Example: د ښی کونج شنه کرښه ، د کیڼ کونج نیمی ده

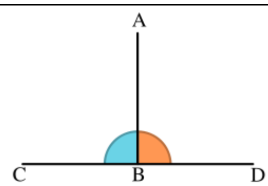


په ښي کونج کې سره کرښه د کیڼ کونج نیمی ده .



Orthogonal or Perpendicular Lines

ولاړې کرښې: هغه کرښې، چې یو په بل نیغې ولاړې وي پرپینډکیولار نومیږي۰(زما وړاندیز: نیغې ولاړې کرښې)



نښلونه:

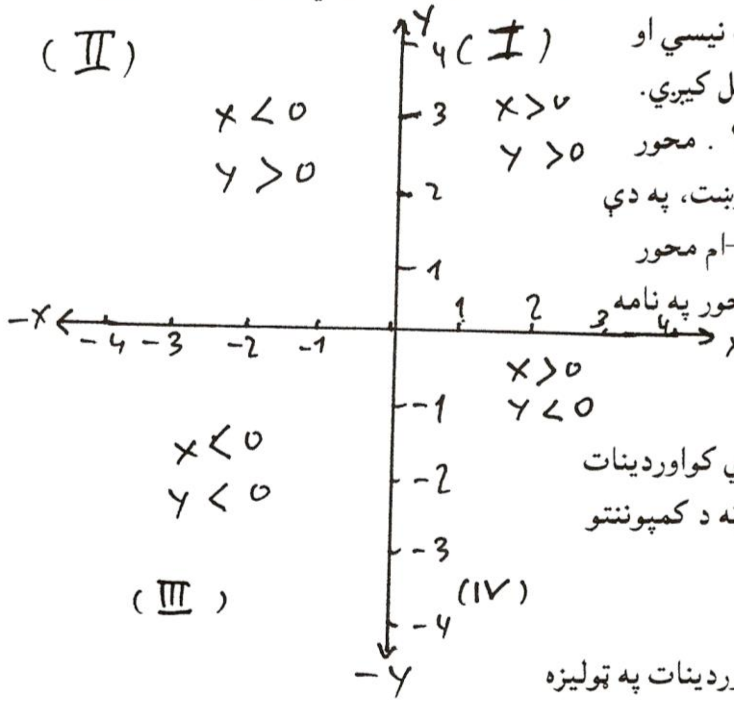
کواوردینات سیستم

یادونه: کواوردینات سیستم ځخه ځموږ موخه پروتولاړسیستم دی. دا په ادبیاتو کې په همدسې یادیږي. ما دا دواړه ترمینولوژي کارولې، هیله ده چې ستونځې به پیښې نه کړي.

د شمیرپوهنی او همدا ډول د تخنیك په ډیرو څانګو کی د کواوردینات سیستم ډیر مهم رول لوبوي. په کارتیزي کواوردینات سیستم کی د هواري هر ټکی P د خپلو دواړو کواوردیناتو(x,y) ورکولوسره کره یا ټیك ورکړ شوی دی. لمړی کمپوننت یا ابسخیز(Abszisse) د x –ارزښت یا پروت ارزښت او دوهم کمپوننت یا اوردینات

(c) ketabton.com: The Digital Library

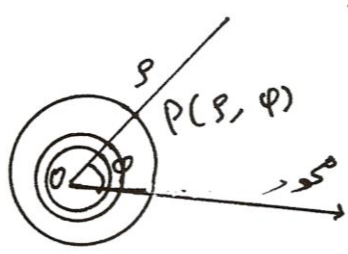
(Ordinate) د y–ارزښت بلل کیږي یا ولاړارزښت. کارتیزي کواوردینات سیستم هواره د دوه یو په بل نیغ ولاړ محورونو (لنډ: ولاړ محورونو) له لارې په څلورو برخوویشي (څلورمی Quadranten) د کوادرانتو نومره بندي یا نمره کول د ساعت څرخیدلو په څټ صورت نیسي او د ښي پورته لور څخه پیل کیږي. پروتنیغ پروت محور د ۱ . محور یا x–محور یا پروت ارزښت، په دې لوتنیغ ولاړ محور د ۲ –ام محور یا y– محوراو یا ولاړمحور په نامه یادیږي.



خیره ۲۰ : د کارتیزي کواوردینات سیستم څلور کوادرانتونه د کمپوننتو له مخنخښي سره.

د یوه ټکي P(x,y) کواوردینات په ټولیزه توګه اجازه نه لري چې بدل شي، څکه چې دا کپمونتتونه تنظیم شوې یا منظمه جوړه ده. د څل یا ضرب لمړنی کپمونتت د y– محور څخه فاصله ټاکي دوم کپمونتت د x– محور څخه. که لمړی کمپوننت منفي وي، نو ټکی د y–محور کینې لور ته

د دریګوډیز ناخپلواکو (تریګونومتریکي مثلاثاتي فنکشنونو) (چې وروسته راغلی) او همدارنګه دپیتاګوراس له بنستېیزی جملی شمیراړونی (خیره ۲۳) کولی شو چې د کارتیزي کواوردینات څخه و پولار کواوردینات ته راشو او سرچپه هم.



خیره ۲۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : د پولارکواوردینات بدلون یا ترانسفورمیشن (Transformation) لاتین : **شکل** اړول یا بدلول) و کارتیزي کواوردینات ته

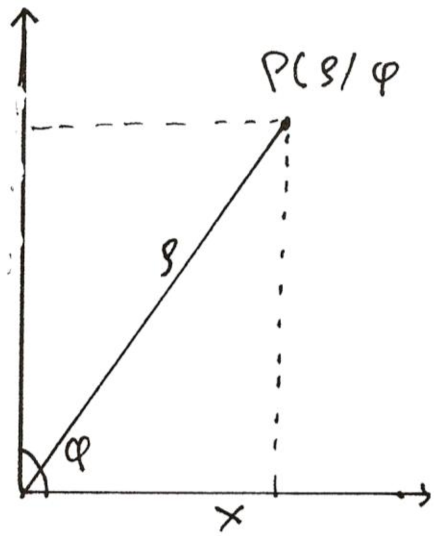
$$x = \rho . \cos \varphi$$
$$y = \rho . \sin \varphi$$

د کارتیزي کواوردینات بدلون یا ترانسفورمیشن و پولارکواوردینات ته

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

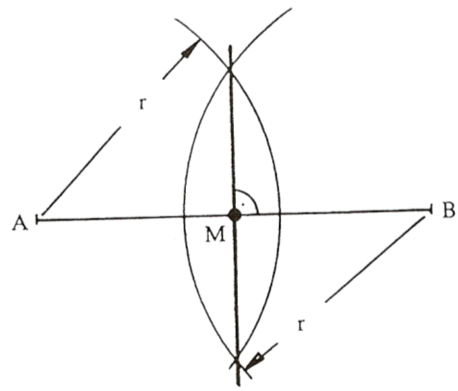


ځيره ۲۴

هندسی بنسټیز جوړښتونه:

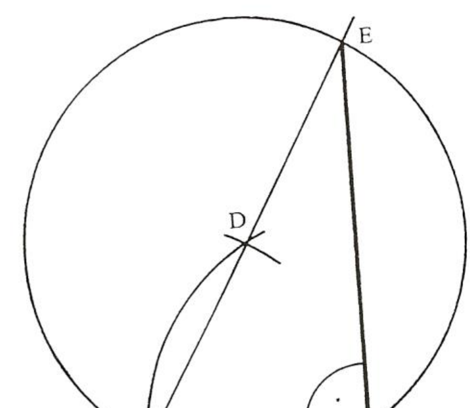
زه دلته داموضوع اوږده نه ځیرم، خو دومره غواړم چي په ګوته کړم، چي تراوسه مو یو څه د هندسی ځنی بنسټیزې کلیمي تشریح کړې او دلته دا غواړم وښایم، چی څنګه ځنی بسټیز شکلونه کښل کیږي، په هغه صورت کی چی له موږ سره ګردونی یا څرخی (ځیرکل یا پرکال او که پرکار مو ورته وایه) او کرښی یا ختکش وي یا همداسی کونجکچ د مناسبو ویشنو سره موجود وي. ددې لپاره چی ځنی ستونځی مو له منځه لرې کړې وي باید له دې ځیرو یوه لیدید ونکی ځیره ولروچی دا د دې ځیرو په کښلو یا رسم کولو ممکن کیدی شي. دا د عملي اندازې پرابلومونو حل یا ستنځوبي کي هم مرسته کوي، که د اندازې یوونونه (واحدونه) ونه لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۵

۱ – د AB کرښی نیمول او
۲ – د منځ ولاړکرښي کښل
د A او B په هر ټکي یوه ګردی د
وړانګی $r > (1/2).|AB|$ سره ووهی
(سیومتري دوه ګردی څیرې)
د دواړو ټکو تړلکرښه په غوڅټکی M
کی په کرښه AB منځولاړکرښه ده
او دا کرښه په M کی نیموي.
۳ – د یوې کرښی په سرټکي کی د
ولاړکرښی جوړول (یا کښل). په B
یوه ګردیلینده ووهی د وړانګی $r < |AB|$ سره، چی AB په C کی پرې کړي، وربسي
بیا په C یوه ګردیلینده په همغه وړانګه ووهی چی د مخه وهل شوې ګردیلینده په D
کی پرې کړي. D د دریمی ګردی منځ ټکی دی د وړانګی $r = CD$

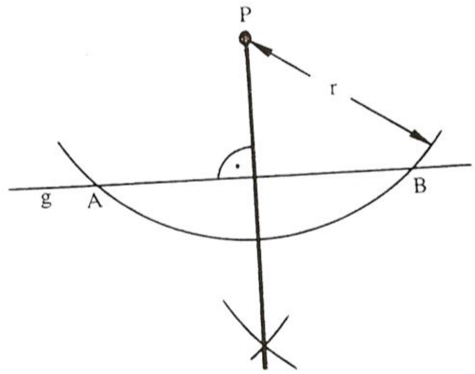


خیره ۲۶ (۳ - پورې اړوند)

سره. چی CD غزولشوې تر ګردی
په E کی پرې کوي. E نو په B نیغه
ولاړه ده. (تالس ګردی دې وکتل شي)

۴ – د ټکي P څخه په کرښه g باندې
یوه نیغه ولاړکرښه واچوی ($P \notin g$).
په P کی په وړانګه r یوه ګردی ووهی،
چی هغه د g له فاصلی(واټن) لوی
وي او کرښه g په A او B کی پرې کړي.
اوس نو لکه په (۲) کی الترناتیو:
لکه د (۳) لاندې په کرښي او هندسي
دریکوډي.

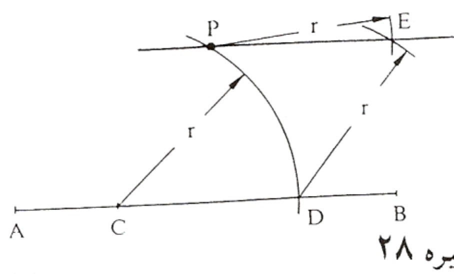
(c) ketabton.com: The Digital Library



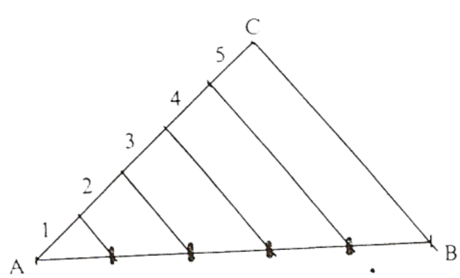
خیره ۲۷

۵ – د AB کرښې سره دټکي $P \notin AB$ یوه غبرګکرښه جوړول (کښل): د خوښې په یوه ټکي $C \in AB$ د وړانګې $r = |CP|$ یوه ګردۍ ووهئ چې کرښه AB په D کې پرې کړي، بیا نو په D او P همغه لینده ووهئ چې یو بل سره د E په ټکي کې غو ځوي. دا د PE کرښه د AB کرښې سره غبرګه ده. (دا د روتې نومې څلورګوټې جوړول دي).

الترناتیو : لکه په (۴) کې په ټکي P کې ولاړه کرښه s و AB باندې او بیا همداسې نیغ – یا ولاړکرښه په s د P ټکي کې.



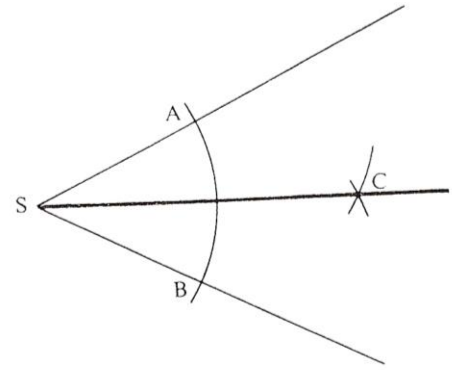
خیره ۲۸



خیره ۲۹

۶ – د یوې کرښې AB ویشل په n مساوي برخو (د بیلګې په توګه ۵) د A ټکي څخه یوه د خوښې وړانګه وغزوئ. په دې کرښه بیا n – ځله (دلته ۵ ځله) د خوښې اوږدې کرښې ووهئ. اخرنی ټکی C له B سره وتړئ او بیا له هر ټکي د BC مرستکرښې سره غبرګې کرښې وکاږئ، دا غبرګې کرښې د AB کرښه په (۵) مساوي برخو ویشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



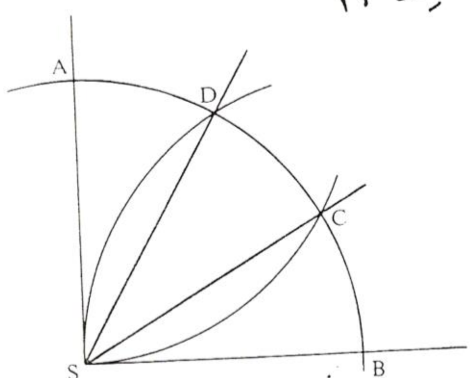
ځیره ۳۲

۷ – د یوه کونج نیمول

په ککره S یوه د خوښی لینده ووهه چی د کونج پښی په A او B کی پرې کړي، بیا په A او B په همغه وړانګه یو د خوښی ګردیلینده ووهی چی یو بل سره په C کي پرې کړي، پریتکی د S سره وتړی.

۸ – یو ولاړګوډی په درې مساوي برخو هره 30° وویشی

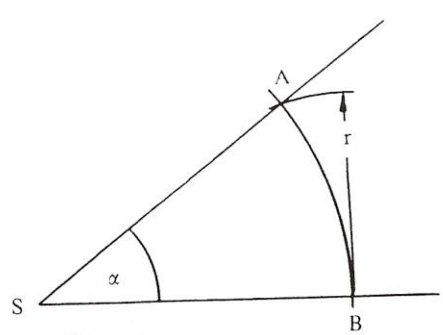
په ککره S باندې یوه د خوښی ګردیلینده وباسی چی دواړه پښی په او B کي پری یا غوڅی کړي او له



ځیره ۳۱

دې وروسته د څرښوونکي په همدې بیرته والي یا وازون د A او B ټکو څخه ګردیلیندی وکاږی، اوس د S څخه د C او D په لور وړانګی وکاږی، دا دوه وړانګی دا ولاړ– یا نیغکونج درې مساوي ټوټی کوي یا په درې برابو برخو ویشي.

یادونه : هر د خوښی کونج په څرخی او کرښي باندې په درې مساوي برخو نه



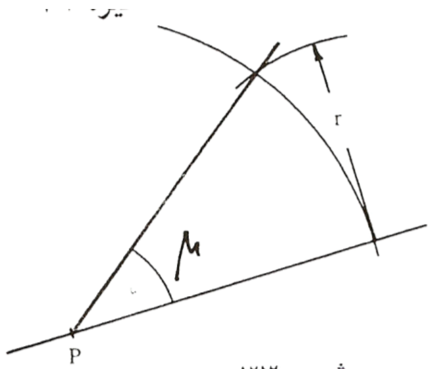
ځـ ه ۳۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

ویشل کیږي، ددې لپاره بیا الجبري مواد په کار دي.

۹ – د µ کونج په یوه ټکي P

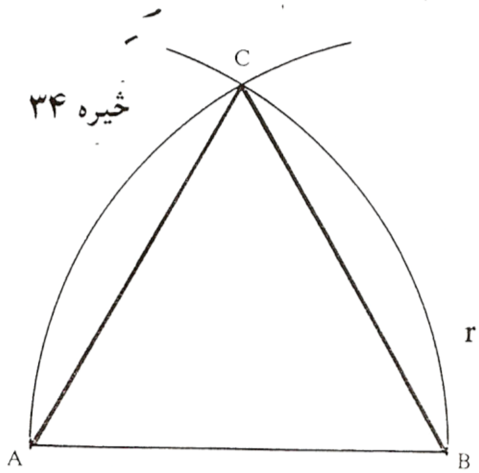
وغزوئ، د ورکړشوي کو نج په ککره S باندې یو ګردیلینده ووهي چې پښې یې په A او B کې پرې کړي، بیا نو په همغه ګردۍ ووهئ چې څرخې د |AB| په اندازه وي. اوس نو دا پرېټکی د P سره وتړئ.



شیره ۳۳

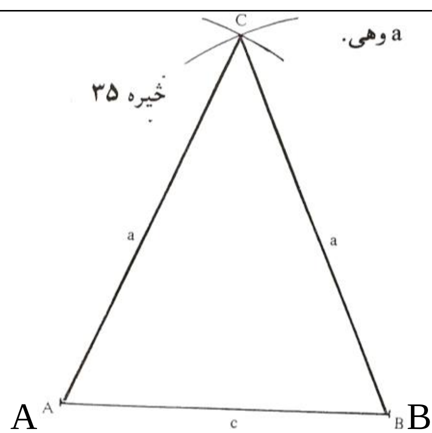
۱۰ – د مساوي اړخیز درېګوډي

کښل: په A او B باندې یوه ګردیلینده ووهئ چې وړانګه یې r = |AB| وي ، چې یو بل په ټکي C کې پرې کړي.



شیره ۳۴

بیانو C دA او B سره ونښلوو، دا لاس ته راغلی درېګوډی مساوي اړخونه لري. په همدې ډول مساوي پښیز درېګوډی انځورېږي، د ورکړشوي بسټ AB=c سره. په A او B یوه یوه پښه وه, a وهئ.

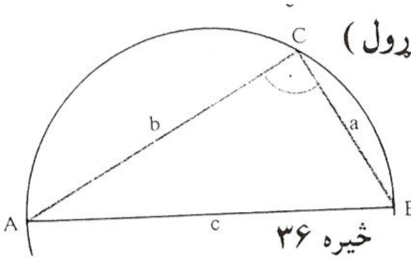


شیره ۳۵

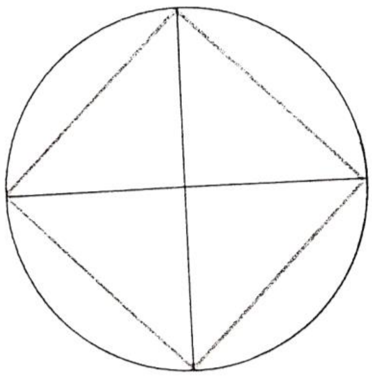
(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – د ولاړکونجیز درېګوډي کښل (جوړول)

هر درېګوډی چي اوږد اړخ یې د یوه ګردي قطر وي، ولاړکونجیز درېګوډی دی.
(د تالس (Thales) جمله وروسته راځي



څیره ۳۶



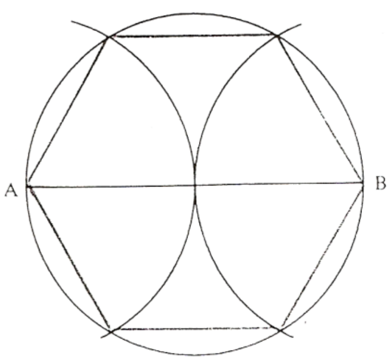
څیره ۳۷

۱۲ – په ګردۍ کی د یوې مربع کښل

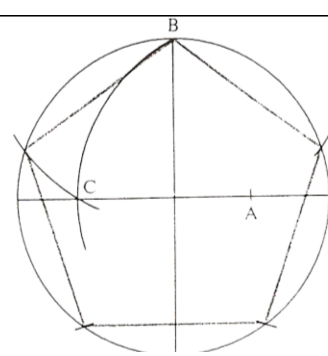
د ګردۍ په منځټکي باندې لکه په (۲) کی دوه یو په بل ولاړ نیمي (قطرونه) وکاږۍ او هغه ټکي چی ګردۍ پرې کړی سره ونښلوۍ.

۱۳ – په یوې ورکړ شوې ګردۍ کی دمنظم پنځه ګوډی کښل:

د ګردۍ وړانګه په A کی نیمه کړۍ ، له A څخه کرښه AB تر C وکاږۍ، |BC| د پنځه ګوډي د اړخ اوږدوالی دی.
(څیره ۳۹)



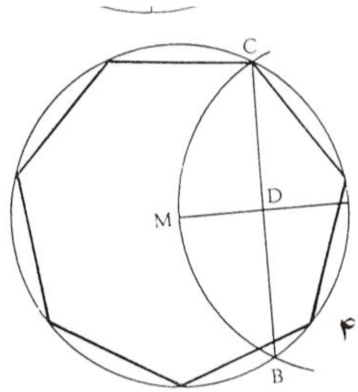
څیره ۳۸

	۱۴ – په ګرۍ کې د منظمم درېګوډي کښل: د نیمي یا قطر اخرني ټکو څخه د ګردۍ وړا نګې په اندازه ګردۍ لینده ووهۍ. د دې ټکو چې ګردۍ پرې کوییوځای کول منظم شپږګوډۍ چوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ – د مساوي اوه گوټي

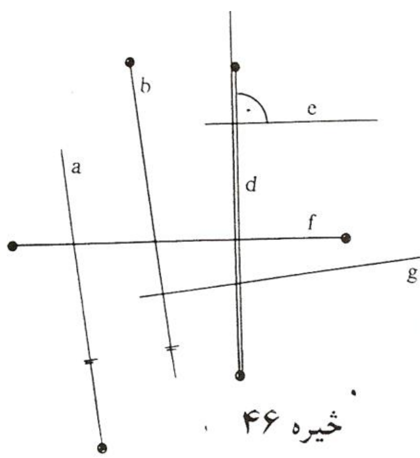
جوړول یا کښل:



شیره ۴۰

د ورکړ شوې گردي دنیمي اخر ټکی A څخه دAM وړانگه په اندازه گردیلینده ووهی چی گردی په B او C کي پرې کوي. د BC کرښه د AM وړانگه په D کي په ولاړکونجي غوڅوي، پس |BD| د مساوي اوه گوډیز د اړخ اوږدوالی دی.

تمرینونه



شیره ۴۶

۱ – په ډیري ژبه باندې یی افاده کړی:

الف – ټکی A په کرښه g پروت دی.

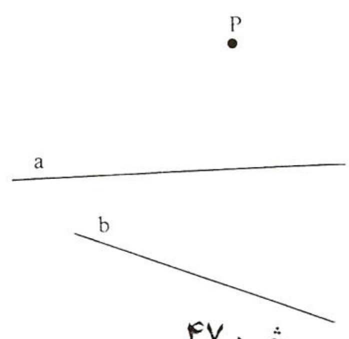
ب – کرښه g د ټکو A او B ترمنځ څغلي

پ – کرښه AB په ناپای کرښه g پرته ده

ت – ټکی C په کرښه . چی له A وبه B ته څغلي، پروت دی.

۲ – په شیره ۴۶ کی څومره ناپاي کرښی، کرښی او وړانگي پرتی دي؟

۳ – کومی کرښی غبرگي، او کومی یو په بل ولاړې پرتی دي؟ دا په سمبولو وکاروی (شیره ۴۷)



شیره ۴۷

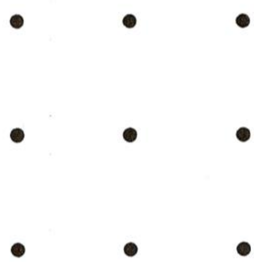
۴ – هرې کرښي ته جوړ کړی :

الف – یوه ولاړه

ب – په ورکړشوي ټکي کی یوه غبرگه (شیره ۴۸)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – د اسمان کومی لورې یو په بل
ولاړې دي؟
۶ – داسی کرښه لار (چی یو بل سره
تړلي وي) وباسی، چی له ټولو
په ځیره ۴۹ کی ورکړ شوو ۹
ټکو تیریږي. دا کرښو تلنه یا کرښو



ځیره ۴۸

خوزیدنه یا تلنه (حرکت)

د یوې هوارې په خپل ځان یویواځنی ځیرونه تلنه یا خوزیدنه (حرکت) بلل کیږي او
په φ ښوول کیږي، که چیرې دا لاندې خویونه ولري:

۱ – د یوې هندسي ځیرې (کرښی، هوارې ، وړانګی ناپایکرښی، نیمهوارې) ځیره ډیري لاندې، یوه هغه هندسي ځیره پوهیږو، د کومی چی په غوښتونکی ځیره ډیري ژیکرښی پیلټکي ، پایټکي په ژیکرښی ، پیلټکي ، پایټکي باندې ځیره شي.

۲ – که f_1 او f_2 دوه جنډې وي ، ~~نو ټیك یوه تلنه شته~~ نو ټیك یوه تلنه φ شته، د $\varphi(f_1)=f_2$ سره.

۳ – که A او B دوه په خوښه ټکي وي، نو یوه تلنه φ شته د $\varphi(A)=B$ او $\varphi(B)=A$ سره

۴ – که p او q دوه وړانګي وي ، د ګډ پیلټکي سره ، نو یوه تلنه φ شته د $\varphi(p)=q$ او $\varphi(q)=p$ سره.

۵ – د تلنو یا خوزیدنو ډیری، د یو په بل پسی ځیرونو ته یو ګروپ جوړوي (د الجبر برخه یا د لیکو الجبر کتاب دې وکتل شي)

د تلنویا خوزیدنو (حرکت) ځانګړي ډولونه دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

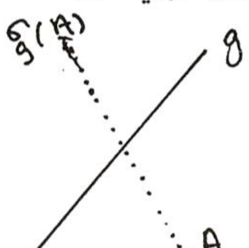
– راکښنه ، چې د ꭇ سره یې ښایو
– ایینونه یا هندارونه، چې د ꞓ سره ښایو
– څرخون چې د ℘ سره یې ښایو
که یو ټکی همداسې یوه کرښه ، چې په خپل ځان څیره شي ، نودا ودې څیرونې ته

یا نسبت ودې څیرونی ته فیکسټکی ځای په ځای ټکی او همداسې فیکس کرښه یا ځای په ځای کرښه بلل کیږي.
راکښنه ꭇ یوه تلنه یا خوزیدنه ده د لاندې ځانګړو خویونو سره

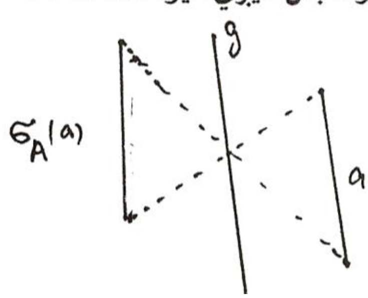
تلنه ۱ (V) : د یوې په خوښه کرښې څیره و هغې کرښې ته غبرګه کرښه ده.
تلنه ۲ (V) : که څیرونه کتمټ څیرونه نه وي، نو هر څیره ټکی د خپل اصل ټکي څخه توپیر لري .

ایینونه یا هندارونه . د ایینونی دوه ډولونه موجود دي:

لمړی : ایینونه σ_g په یوه کرښه g ، چې کرښ ایینونه ورته ویل کیږي، یوه تلنه ده، د لاندې خویونو سره



س ۱ : دکرښې g هر ټکی فیکسټکی یا په خپلځان څیره ټکی دی ، له دې سره کرښه یوه فکسکرښه ده.
س ۲ : دواړه د کرښې g وازې هوارې یو له بل سره بدلیدلی شي.
څیره ۵۲
دوم: ایینونه σ_A په په یوه ټکی ، چې ټکی ایینونه بلل کیږي، یوه تلنه ده ، د لاندې خویونو سره : (څیره ۵۲)

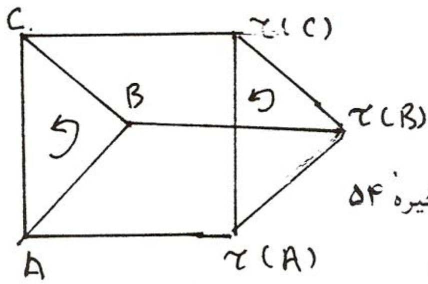


پ ۱ : هره کرښه چې له A تیریږي په خپل ځان داسې څیره کیږي، چې دواړه له A پیداشوې وړانګې یو له بل سره بدلی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ ۲ : هره کرښه و دې کرښې ته غبرګې کرښې باندې څیره کیږي. (څیره ۵۳)

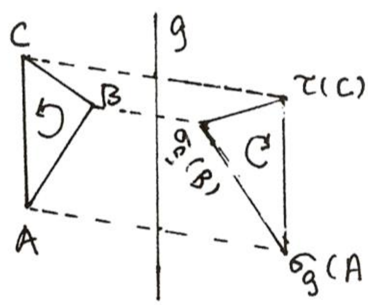
ا څیره ۵۳



لوریزه تلنه یا خوزیدنه:

یوه تلنه φ همغه لوریزه ده ، ټیك هلته یا هلته او هلته، کله چې هره څیره F د $\varphi(F)$ سره همغه لور ولري یا مساوي لوریز وي.

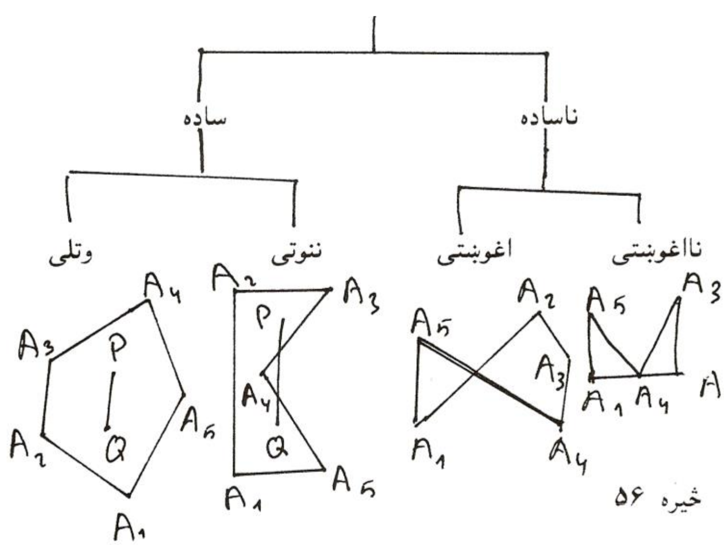
څیره ۵۴



یوه تلنه φ همغه لوریز نه یا نامساویلوریز ده، ټیك هلته یا هلته او هلته، کله چې هره څیره F و$\varphi(F)$ ته مخامخ یا په څټ لوریز وي.

څیره ۵۵

ډېرګوډیز (د بیلګې په توګه پنځه ګوډیز)

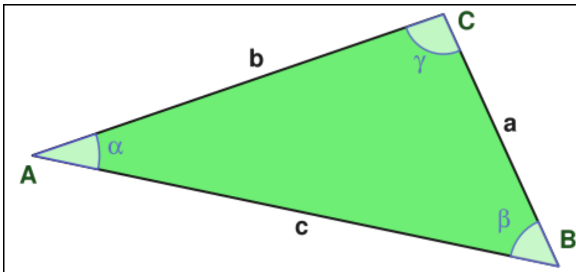


څیره ۵۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو وتلی n− ګوډی منظم بلل کیږي، که د اړخونو اوږدوالی یی برابر وي او دننه کونجنونه یی مساوي یا برابر لوي وي.

درېګوډی (درېګوټی، مثلث)

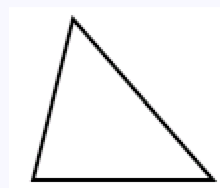
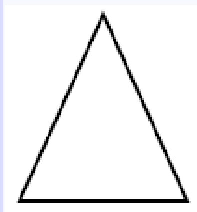
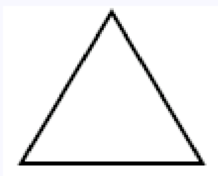
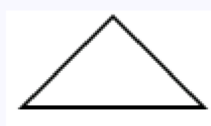
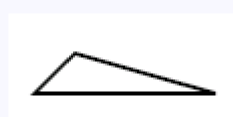
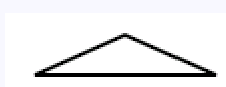
دا چې د دوه ټکو ترمنځ تل یواځی یوه کرښه انځوریدلی شي، نو د یوه شکل لپاره کم له کمه درې ټکی په کار دي، په داسی ډول چی دا ټکي په یوه کرښه نه وي پراته. دا اوس هم په همغه هواره پراته دي. که دا ټکی د خیرې د ګوډټکو په خیر ونیول شي، نو دریګوډی لا سته راځي٠ کرښي، چي درېګوډی په کې راګیر دی یا درېګوډی جوړوي د درېکوډي اړخونه یا هغه عربي یې ضلع بولو٠	 کورو، چې کوجونه الفا ، بیتا او ګاما دي او اړخونه a,b او c دي. په څیره کې ګوډونه په لویو تورو سره په نخښه کیږي یانی A,B او C ګوډونه دي٠

ولې درېګوډی ؟

موږ وایو، چې سپین مې د برګ د کور د ګوډ سره ولید، یا د برګ د پټي یو ګوډ اوبو وړی، په یوه څیره کې یا یوه جوړښت کې دننه د دوه کرښو غوڅې کونج بولو او دباندنی ګوډ ٠ کندهاریان وایی ګوټ٠ دا پروا نه لري، که څوک یې ګوډ ، ګوټ او که کونج بولی یانی درېګوډی، درېګوټی او که درېکونجی بولي ، خو ماته یې درېګوډی نوم ښه برېښي٠ پام دې وي، چې له ما څخه دا نوم درېګوډی نومول شوی، دا څیره ده نارینه نه ده، نو له دې امله به ښه وي، که درېګوډی وبللشي، نوره یې د ګرانو هیوادوالو او د څککچپو هني مینه والو خوښه٠

د درېګوډیو مختلف ډولونه یا تیوپونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	نامنظم کونجونه او اړخونه یې برابر نه دي.	برابرپښیز دوه اړخونه او دوه کونجونه یې برابردي .	برابراړخیز ټول اړخونه او کونجونه یې برابردي .
تیره کونجیز-درېګوډي **ټول کونجونه یې تیره دي یاني له ۹۰ درجو کوچني دي** **<90°.**			
ولاړکونجیز درېګوډی، یو کونج یې ولاړکونج دی			
پڅکونجیز درېګوډی **یو کونج یې پڅ دی یاني له ۹۰ درجې لوي دی.(>90°)**			

د کونجونو الفا ، بیتا او ګاما (α,β,γ) او اړخونو a,b,cله مخې د درېګوډیو مختلف تیوپونه سره بیلیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته ځیرو کې پورته ښی لور ته درېګوډي همغه رسم شوي، خو دا یو دې د بل سره برابر پام کې ونه نیول شي، یانی د یوه درېګوډي پښی دی نابرابرې وي٠ تیره کونجیز درېګوډی، چې دریواړه کونجونه توپیر لري، درې برابرکونجونه لري ، دوه کوجونه یې سره برابر وي، ولاړکونیز، پڅکونجیز، دا هم د برابرو او نا برابرو کونجونو سره ٠ هغه درېګوډی، چې دوه کوجونه یې سره برابر دي، اړخونه یې هم برابر دي او د برابرو کونجونو په مخامخ برابر اړخونه پراته دي٠ دا لاندي ښه ځیرل شوي دي، د ځیرو سرهږ

د درېګوډي یو له بل بیل ډولونه

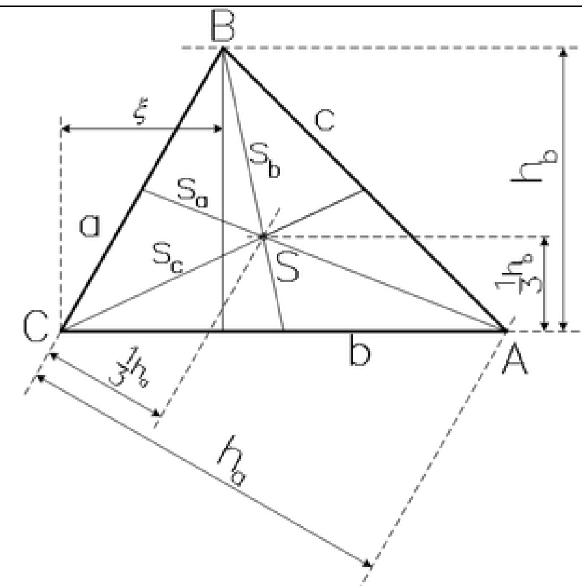
د دریګوډي د پام وړ ټکی

- د دریګوډي هر درې یوډوله کرښی ، یو بل په یوه ټکی کی پرې کوي

- اړخنیمی په S کی

- د کونجنیمی یا نیموونکی په W کی-

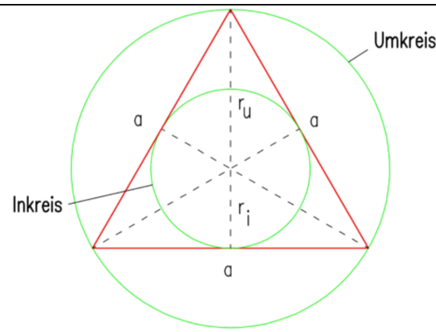
- اړخنیمی د منځ ولاړې (کرښی) په M کی: دا هغه کرښه ده، چې د دېګوډی د اړخ په منځ ولاړه ده، چې موږ یې منځولاړه بولو

	-. جګکرښی یا جګي په H کی دا ټکی د یوه دریګوډي د پام وړ ټکی دي - : له دوي څخه S دروندټکی(د ثقلمرکز) له دوي څخه W د دننه ګردۍ منځ ټکوړانګه او M د دباندې یا راګردې ګردۍ یا نوره هم ښه خورا ښه او مناسبه نوم یې چاپیریالګردۍ منځ ټکی دی (وړانګه) r، د چاپیریالګردۍ منځټکی

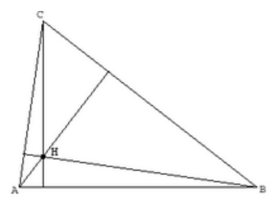
(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هځيرو، چې ځيرې راوړو، د ځيرنې سره يې :

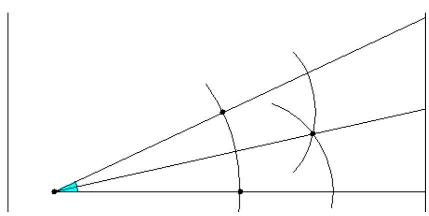
اي ىدرګـيدنوخ Inkrei Umkreis
دهراتاو-يا په راتاوګردی



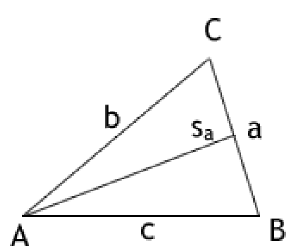
په لاندې ځيره کې ځګې کرښې وينو. دا هغه کرښې دج، چې را په ګوته کوي، چې اړخ د کونې سره کوم ځګی لري او دا کر په يوه ټکی کې غوځوي.



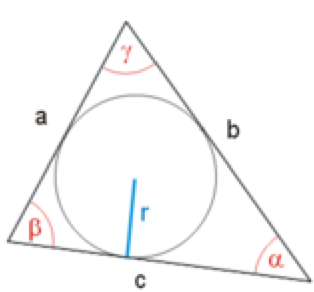
په مخامخ ځيره کې کونجنيمی ګورو او وينو، چې څنګه کښل يا رسم کيږي.



په مخامخ ځيره اړخنيمی کتل کيږي. دا هغه کرښه ده، چې له کونج څخه اړخ نيمی.

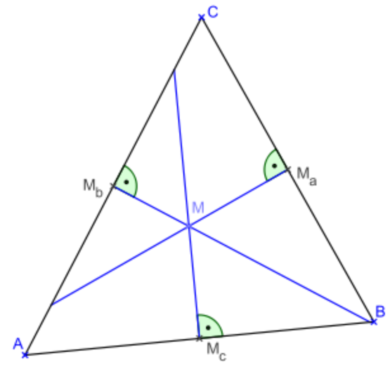


په مخامخ په درېکوډی کې د خوندې ګردی منځټکی د وړانګی سره کتل کيږي.

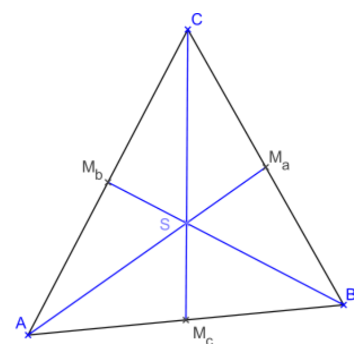


(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ښيره په درېګوډي کې په منځولاړې
ګرښې په ګوته کويو چې پّ لړونده ټکي
کې سره غوڅوي

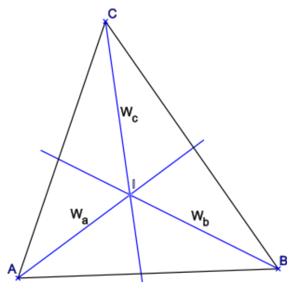


په لاندې مخامخ دريګوډي کې درې
اړخنيمی ورکړ شوي،چې ته يوه ټکي کې
سره غوڅوي

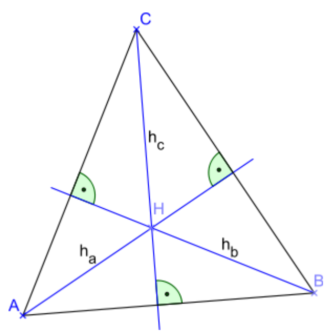


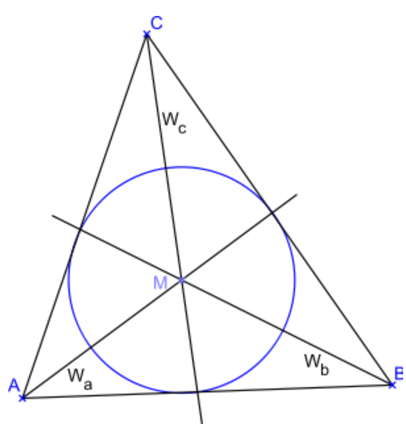
په مخامخ ښيره کې ګوروړ چې کونجنيمی
ی خونديګردی منځتني کې سره غوڅوي

په لاندې درېګوډي کې دې کونخنيمی ديو
جې په يوه ټکي سه پرې کوي



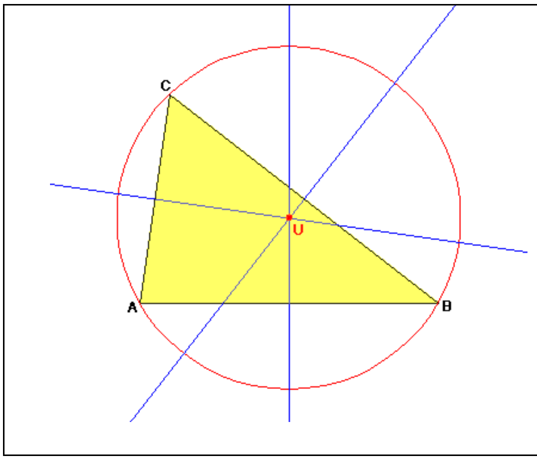
په لاندې ښيره کې د درېګوډي درې جګې
ورکړ شويو چې په يوه ټکي کې سره
غوڅوي



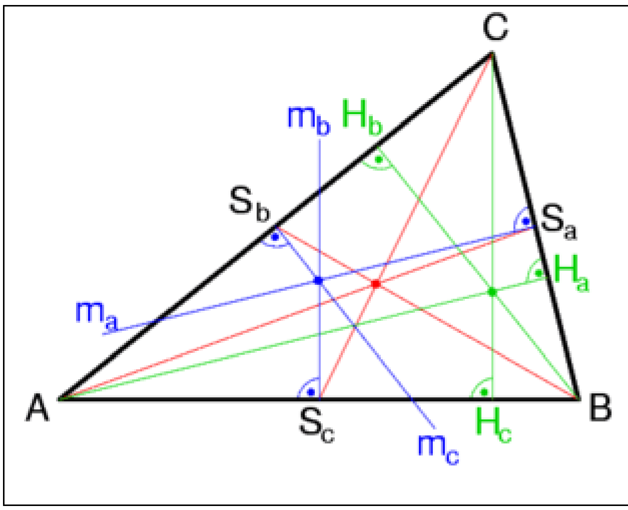


(c) ketabton.com: The Digital Library

په مخامخ ښیره کې د درېګوډی منځولاړې ګوروو چې غوښتککی ېې ی راتاوګردی منځټکي دی



په مخامخ ښیره کې هغه اړخنیمی، چې په اړخ ولاړې دي کتل کیږي، په اړخنیمی ولاړې، جګی او اړخنیمی کتل کیږي، چې دریواړه په یوه کرښه پرتې دي ٠



د جګو غوښتکی (شین)، راتاوګردی منځټکی(اسماني یا زرغون)، دروندټکی(سور) په یوه کرښه پراته دي.

د درېګوډیو جوړید امکانات یا شونتوب: درېګوډي یواځنی جوړیږي (همدا یو درېګوډی او بل، چې له دې درېګوډي توپیر ولري نه شي جوړیدی) ،

-که د دریګوډیو دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي،

-یا دوه اړخونه او له دې اړخونو بند کونج یا

- یو اړخ او ددې اړخ په دواړو سرونو یا اخرونو کونجونه وپیژنو

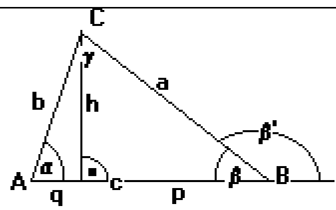
(c) ketabton.com: The Digital Library

یا په همدې ډول هغه دریګوډی، چی دوه اړخونه او د لوي اړخ مخامخ کونج یی پيژندل شوی وي. د کونګروانیڅ جملو کی یی بیلګي راځي .

د دریګوډي پیژندنه لنډ: یو n - ګوډی، چی n=3 وي، دری ګوډی بلل کیږي .

په درېګوډي کی جملی:

په عمومي ډول لاندې جملی باوري یا معتبرې دي چی بي له ثبوته دلته راوړل کیږي.

	۱ - د کونجزیاتون جمله : په درېګوډي کی ټول کونجونه °180 لري °180 = □ + □ + □ په مخامخ څیره ګې β' د β ګاونډی کونج دئ

۲ - د دباندني کو نج جمله: دباندی کونج د ناګاونډیو کونجونو زیاتون یا مجموعی سره مساوي دی،له دې امله د درېګوډي د دباندنیو کونجونو زیاتون °360 لري:

یادونه : ګران د ځمککچ مینه وال دې دا څیره له پ ورتـ ه څ برې څخه پوره کړي ۰:

۳ – درېګوډي نامساوات یا دریګوډي نابرابرونو نه:

په هر درېګوډي کی د دوه اړخونو اوږدوالی زیاتون د دریم اړخ اوږدوالی څخه لوي دئ

$$a + b > c \;;\quad a + c > b \;;\; b + c > a$$

۳ الف-د هر دریګوډي دوه اړخونو اوږدوالي مطلقه ارزښت کمون، توپیر یا فرق د دریم اړخ اوږدوالی همغه- یامطلقه ارښت څخه کوچنی دئ

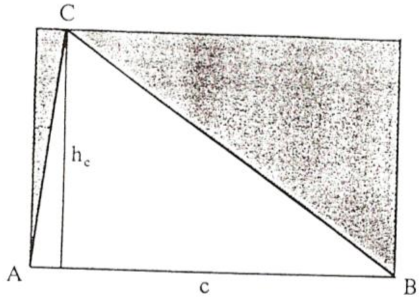
$$|a - b| < c \;;\quad |a - c| < b \;;\quad |b - c| < a$$

۴ - د درېګوډي چاپیریال د دریواړو اړخونو زیاتون دئ $U = a + b + c$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ - د درېکوډی منځهواره (د هوارې دننه) لنډ : هواره (، د یوه اړخ اوږدوالی او په هغی کښلی (نیغ) ولاړ جګوالی(لنډ: جګوالي) د ځل نیمایي دی

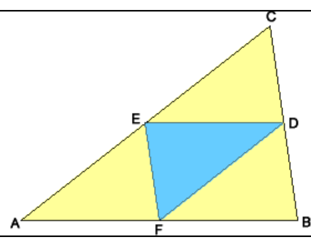
$$F = a.h_a/2 = b.h_b/2 = c.h_c/2$$



د ښووني لپاره يې د يوه لنډ چل ځخه كار اخلو: موږ درېكوډی د جګكرښي په اوږدو باندې په دوه ولاړكونجيو غوځوو او د درېكوډي په اړخ يی ځيره باسو، په دې ډول دوه ولاړكونجيز دريكوډي منځ ته راځی، چی د هغی ټوله هواره، د غوښتونكي درېكوډي هوارې دوه برابره ده.

دا له پورته ځيرې ځخه هم ځرګنديږي.

۶ - د درېكوډي اړخونو نيمايي هغه منځنی درېكوډی جوړوي، د كوم اړخونه چی نيمايي دومره اوږده وې لكه د پيل شوې درېكوډي(د و ړانكي جمله دي وكتل شي

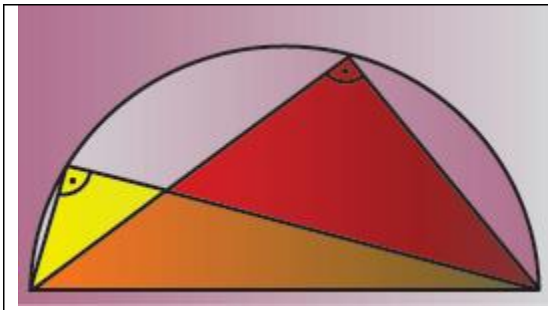


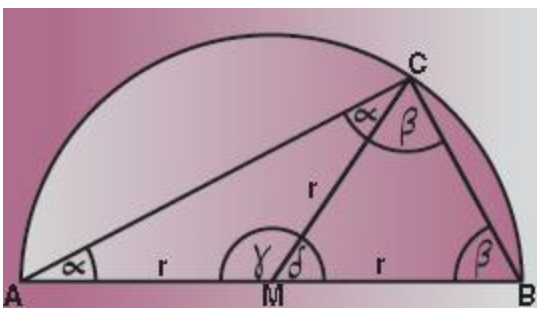
ګورو چی د يوه دريكوډي جګی تل ځرګند نه دی. مګر دا چی د يوه جګي له لارې يو دريكوډی په دوه برخو ويشل كيږي، چی په دې ډل دوه ولاړكونجيز دريكوډي ترې منځ ته راځي، چی دا جګی بيا د پيتاګوراس له لارې -جملی چی وروسته راځي - او يا د تريګونومتري يا كونجكچ متودو يا لارو له لارې ، چی هغه وروسته ځيرل كيږي، لاس ته راوړی شو .

د تالس جملهSatz des Thales:

كه AB د يوې ګردی(دايرې) يوه نيمی (قطر) وي او C په دې ګردی پروت وي، نو درېكوډي

(c) ketabton.com: The Digital Library





ABC په C کې ولاړکونجیز دی.

د دې جملې په څټ یا برعکس دی:

که چیرې درېکوډي ABC په C کې ولاړکونجیز وي، نو C په ګردی پرته ده د نیمې AB سره

د جملې د ښووني لپاره: دا برخه دې دا دلته د ښوونځي شاګردانو لپاره نه وي.

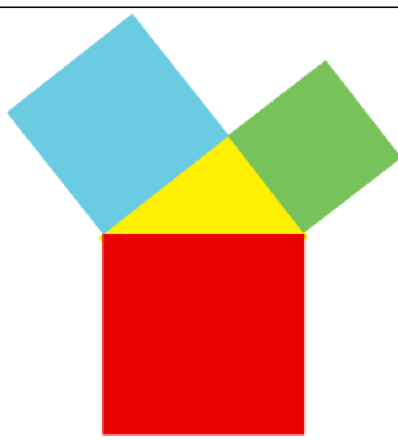
$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180°$$

$$2\alpha + 2\beta = 180°$$

له دې لاس ته راځي

$$\alpha + \beta = 90°$$

د پیتاګوراس (فیثاغورث Satz des Pythagoras)



په یوه ولاړکونیجز درېکوډي کې ، چې کاتیتونه یا ولاړ اړخونه يې a او b وي، د هیپوتینوزی یا اوږد اړخ يې c سره پخ نخښنه ګوو , باور لري

$a^2+b^2=c^2$

د دې جملې په څټ یا برعکس

که د یوه درېکوډي ABC د اړخونو a, b, cلپاره باور ولري

$a^2+b^2=c^2$. $F = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = b.\frac{h_b}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دا درېګوډي په C کې ولاړکونجیز دی یا د پیتاګوارس جمله وایي، چې په یوه ولاړکونجیز درېګوډي کې د هیپوتینیوز(لوي اړخ) ځلورې یا مربع د کاتیتونو(ولاړ اړخونو) د ځلوریو یا مربعګانو د زیاتون سره برابره ده.

ولاړکونجیز درېګوډې یو ولاړ کونج لري یانې ۹۰ درجې کونج

د درېګوډې اوږد اړخ د لوی کونج مخامخ پروت دی ، چې هیپوتینوز *Hypotenuse* یا لوی اړخ بلل کیږي

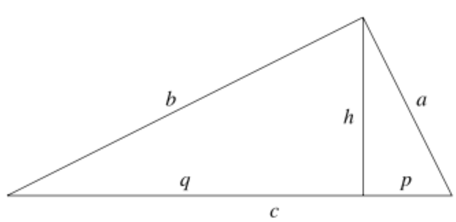
نور دوه اړخونه کاتیتونه *Katheten* یا ولاړ اړخونه بلل کیږي.

لاندې جملې ښایو:

دا جملې ټولې یوځای راوړل شوي

جمله : ولاړ کونجیز درېګوډی a + b + c = U

a.b / 2 = c . hc / 2 = F

د پیتاګوراس جمله	$c^2 = a^2 + b^2$	
د اویکلید د کاتیتونویا ولاړ اړخونو جمله	$a^2 = c \cdot p$	
	$b^2 = c \cdot q$	
	$c = p + q$	
د اویکلید د جګیو جمله	$h^2 = p \cdot q$	

جمله : برابر- یا مساوي پښيز درېګوړی جګی

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$U = 2a + b$$

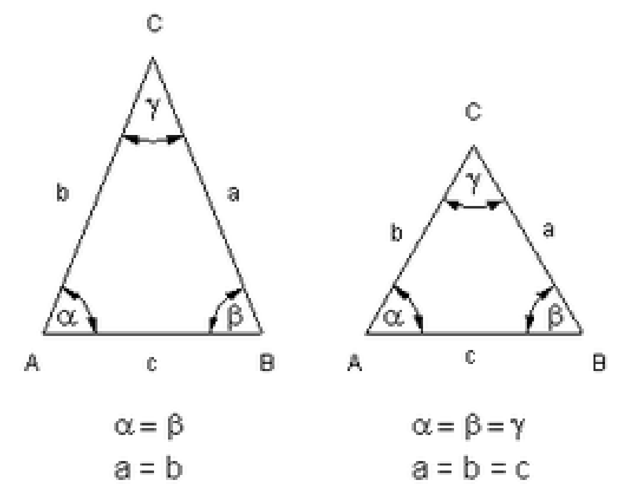
$$F = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = b.\frac{h_b}{2}$$

ځکه چی $h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$ (د پيتاګوراس جملی له مخی(پيتاګوراس جمله وګوری)

جمله : برابر اړخيز درېګوډی :

د يوه برابر اړخيز درېګوډي ټول درې آړخونه برابر دي، دنني کونج ونه برابر لوي دي، له دې امله برابر اړخيز درېګوډي منظمو پوليګونونو پورې اړه لري٠) پوليګون لاتين ډيرکوډيز(Polygonen).

د برابر اړخيز درېګوډي هر کونج ٦٠ درجې دی٠ برابر اړخيز درېګوډي تره کونجيزو ډريوګوډيو په ډله کې دی، ځکه، چې ټول درېکونجونه له ٩٠ درجو کم دي
په دې برسيره يوه برابرااړخيزه درېګوډیيوه برابرپښيزه درېګوډی هم ده٠
ټول برابراړخيزدرېګوډي يو بل ته ورته دی (وروسته راځی)

	په يوه برابراړخيز درېګوډي کی، د يوه اړخ کونجنيمی-، اړخنيمی-، په منځولاړې-اوجګی –يو په بل پريوځي٠ په ورته توګه دا د ضوندي ګردی دباندې ګردی او دروندټکی اړخ جګيو غوڅټکی لپاره هم په يوه برابراړخيز درېګوډي کې باور لري٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته څیره کې کینږ لور ته برابر پښیز - او ښي لور ته برابراړخیز درېګوډۍ دی٠ هر برابر څه یې کښل شوي٠

د یوه برابراړخیز درېګوډی، چې د اړخ اوږدوالی یې a دی، لپاره باور لري

Fläche *A* *هواره یا سطحه*	$A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$
*جګوالی*Höhe *h*	$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$
د چاپیریالګردی وړانګهUmkreisradius *r*	$r = \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{a}{\sqrt{3}}$
د خوندي ګردی وړانګهInkreisradius ρ	$\rho = \frac{\sqrt{3}}{6} a$
*چاپیریال*Umfang *u*	$u = 3 \cdot a$

د برابراړخیز درېګوډي خویونه دې ګران لوستونکي وښايي

د اویکلید د کاتیتونو یا ولاړ اړخونو جمله

دواړه سرې هوارې یو له بل سره او همداسې دوآړه شني هوارې همغه منځهواره لري٠ یا په بل ډول : د سرو او شنو ولاړکوډیو هوارې یو له بل سره برابرې دي٠

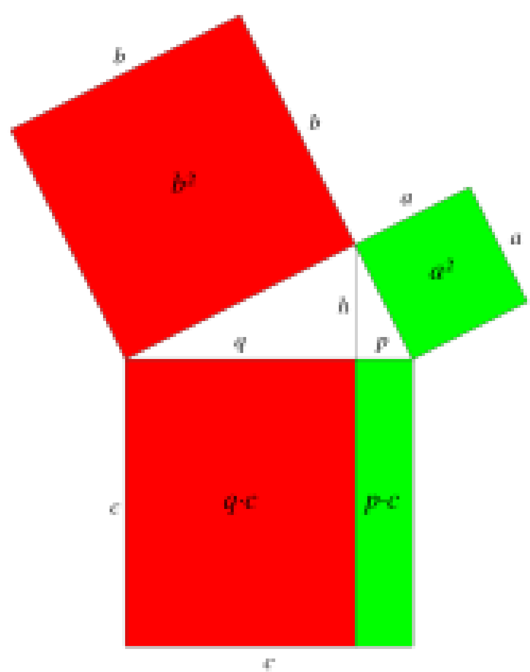
$a^2=pc$ او $b^2=qc$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که a,b,c د ولاړکونجیز درېکوډي اړخونه وي، د هیپوتینوز c سره٠ که دا درېکوډی په جګي h په دوه برخو وویشل شي او p یې هیپوتیوز ټوټه په a ده او qهمداسي ټوټه ده په b، نو باور لري:

په aڅلورى د p او cولاړکونجیز څلورکوډي او په bڅلورى د ولاړکونجیز څلورګوډي، د اړخونو q او cسره هوار برابره ده یانې هواري یا سطحی یې برابرې دي٠

لاندې څیره دې وکتل شي٠ پام دې وي ، چې دا پورته ښونه او دا لاندی سره برابرې دي، خو یوائې څیرې یې بدې دي، دوه ځله ښوونه پروا نه لري٠



فرمول یې :

$$a^2 = p.c$$

$$b^2 = q.c$$

Kathetensatzد کاتیتیونو جمله:دواړه سرې هوارې همغه منځهواره لري او همداسي دواړه شني هواري هم *د اړخ او څلورى د فرمول په څیر په لاندې ډول دي*

$$a^2 = p \cdot c$$

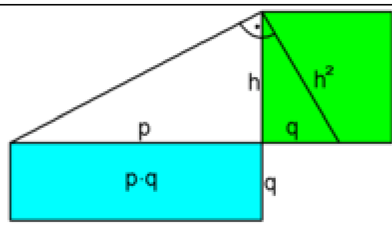
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^2 = q \cdot c$$

د اویکلید جګجمله Höhensatz des Euklid

$$h^2 = p \cdot q$$

د جګجملی د بیاتیونې ښوونه(دا لړ ستونځمنه ده، خو زما يې دا څیره بدلون ښه راځی ګرانو لوستونکو ته په مینه وړاندې کیږي) :



د جګجملی ښوونه : د پیتاګوار اس له جملې $a^2 + b^2 = c^2$

او د بینوم له فرمول

$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

څخه ښوونه لاس ته راځي

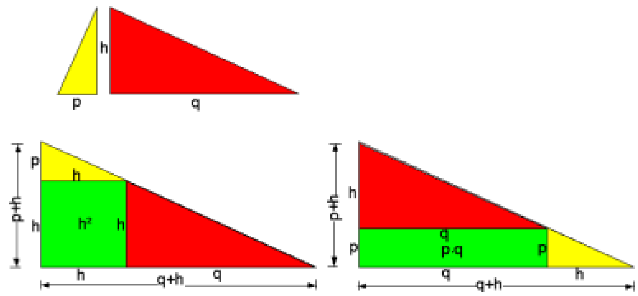
په دیاګرام کې درې درېګودې لیدل کیږي، یو له اړخونو a,b,c, ، بل له اړخونو h,p,a او h,q,b. سره، د دې هریوه درېګودې لپاره د پیتاګوار اس جمله باور لري٠:

$$h^2 = p.q <=> q^2 = pq+q^2 + h^2$$

د پورته بیاتیونې له لارې ښوول کیږي٠

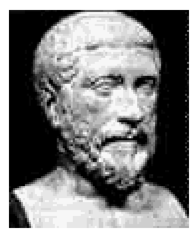
جیومتریکي ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا خیره دې ګران لوستونکی پام ته را وبولي، چې څنګه د ښوونې کار مخ ته ځي

(تمرين)



د ساموس پیتاګوراس Pythagoras von Samos

تکرار: په ولاړکونجیز درېکوډي کې د کاتیتونو(ولاړ اړخونو) د څلوریو یا مربعګانو زیاتون د هیپوتینوز(اوږده اړخ) د څلورۍ سره برابر دی۰

دا جمله د پیتاګواراس جملې ترنامه شهرت لري او د ساموس پیتاګوراس د ژوند سره برابر ځاې نیسي۰ لکه لاندې په ګوته کوي،چې دا انسان له دې خورا زیات وو۰

دا یو له مانا ډک انسان دی »برتراند راسل « Bertrand Russell - ",,

دی د جلبازو مشر دی « هیراکلیت»Heraklit - ",,
Ludwig Börneلودویګ بورنې د هغهٔ په هکله وایې« کله، چې هغه دا جمله پیداکړه، هغه د خدای په نامه سل سوخندر خیرات کړل۰ له هغې وروسته ټول سوخندر لړزیږي، ترهغې، چې نوي څه کشف شي «

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیتاکوراس په570دزکال پخواپه جزیره ساموس کې پیداشوی .
پلالر یې سامي زرګر منیسارښوس **Mnesarchos** دی

چې شل کلن وو د تالس **Thales** په میلت Milet او او انیکشیماندر کې یې زده کړې کولې

د پیتاګوراس ښوونه یا پوهنه Die Lehre Pythagoras

روح نه مري او ځاي بدلوي، داسې، چې له یوه ژوندي څخه وبل ته ځي

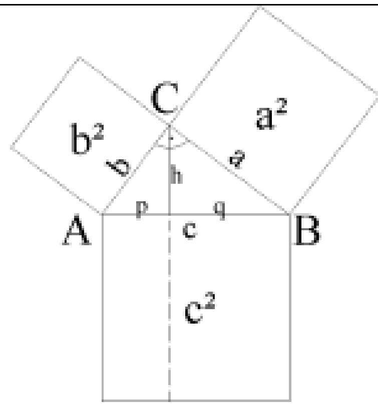
د پیتاګوراس جمله

په یوه ولاړ کونجیز درېګوډي کې د کاتیټونو(ولاړو اړخونو) څلوری زیاتون د هیپوتینوز (اوږده اړخ)له څلوری سره برابر دی

c^2	=	$a^2 + b^2$
$p \cdot c$ (د کاتیتونو جمله)	=	b^2
$q \cdot c$	=	a^2
Kathetensatz کاتیت جمله د		
$p \cdot c + q \cdot c$	=	$a^2 + b^2$
$(c \cdot (p + q)$	=	$a^2 + b^2$

دپورته لپاره لاندې څېره وګورئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د دې جملې د ښوونې لپاره له ۲۰۰ څخه زیاتې اوبیونې یا ښوونې (ثبوتونه) شته

پیلونې او ښوونې

د یوونڅلورى یا یوون مربع څېره

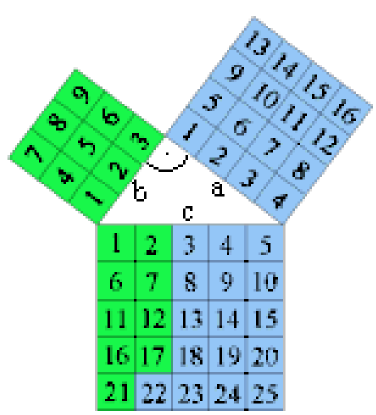
یو ولاړ کونجیز درېګوډى لرو، چې اړخونه یې په لاندې ډول دي

(z.B. a= 3cm; b= 4cm; c= 5cm)

په هر اړخ څلورى جوړوو، لکه لاندې څېره

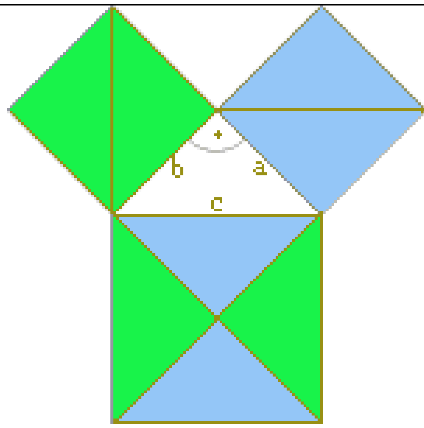
$$25\text{cm}^2 \quad = \quad 9\text{cm}^2 \quad + \quad 16\text{cm}^2$$

$$c^2 \quad = \quad b^2 \quad + \quad a^2$$

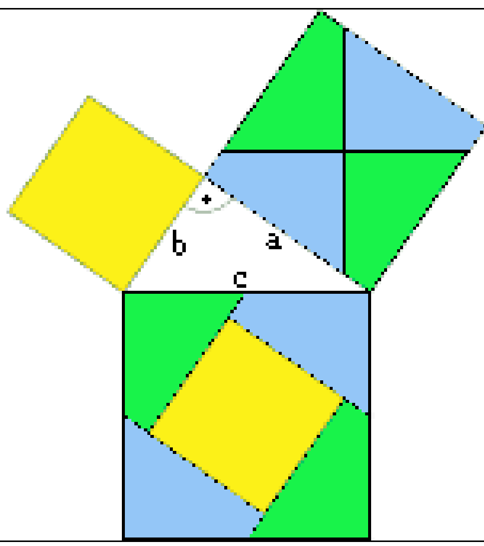


(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې یو برابرپینیز ولاړکونجیز درېګوډی لرو:

	ولاړکونجیز برابربرپینیز درجګوډی، چې اوږد اړخ یې دی (z.B. c=5cm). اړخونه a^2 او b^2 ګورو، نو کره به ورته وګورو، چې څه شوي یاني ځنې ځلوری نیمې شوي او ځنې بیا په ځلور برخو ویشل شوي. که ځیر Jته وګورو، څه کره کولی شو؟

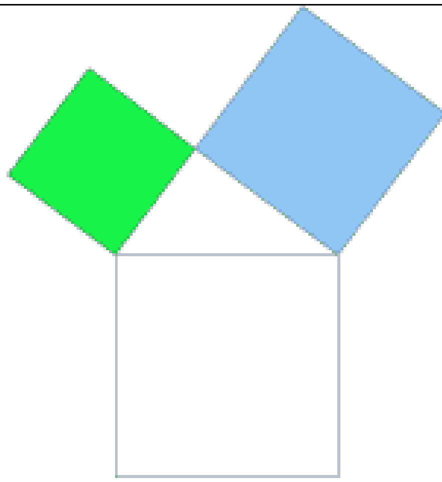
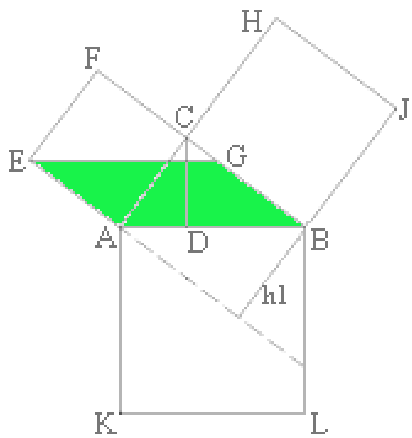
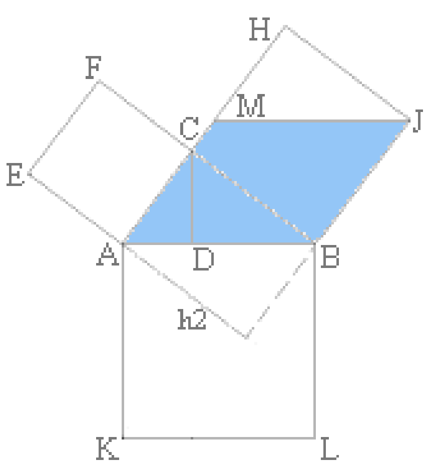
2.2 په خوښه ولاړګوډیز لرو

	دا په خوښه ولاړکونجیز درېګوډی دی (z.B. c= 4,5cm) تالس ګردی د لویې کتیت ځلری له منځ څخه لوي اړخ ته یوه غبرګهکرښه وکاږی او هیپوتینوز ته یوه ولآړه a^2 غوځه کړي. ګران لوستونکي دي له ځیرې څخه پخپلهپه ګوته کړي، چې د لوي اړخ ځلوری د نورو اړونو د ځلوریو سره برابره ده

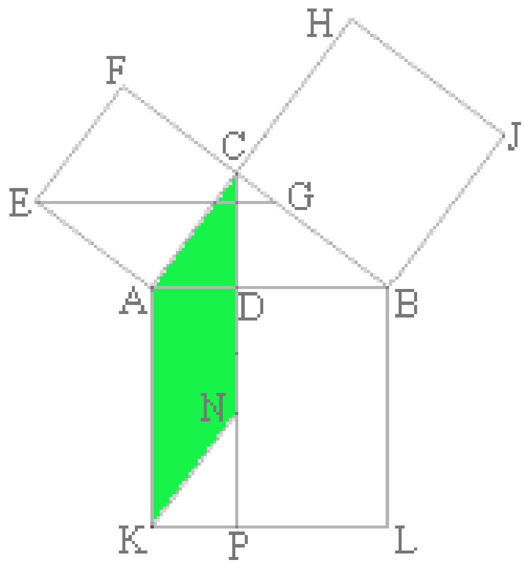
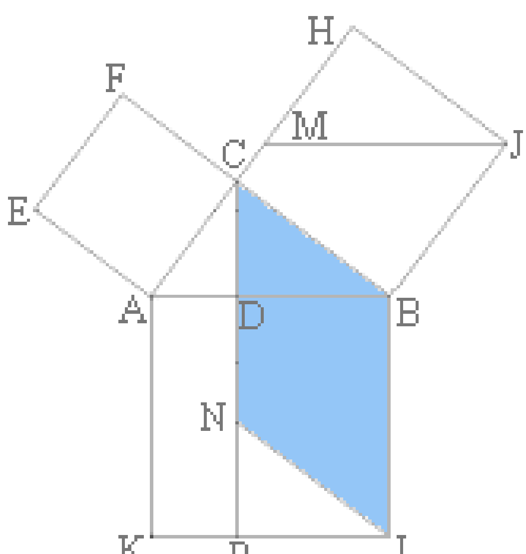
3. د ځیرې ځمککچیزه لاربنودنه

د لوړو ګوډونو یا کاتیتونو ځلوری په درېګوډي ABC کې دننه د غبرګ اړخیز په ځېر غوځ کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

غبرګ اړخیز د لوی اړخ څلوری(مربع) کډیکي باندې د هغې تر یوه اړخ پورې و څرخوی . غبرګ اړخیز (مایلګوډیز) یوه ولاړګوډیز په ډول د لوی اړخ مبع یا څلوری هوارې کې دننه بیاتي کړی	
ښوونه :الف : بیاتیونه: EACF = EABG . 1 ځکه, جې برابر بنسټلاین EA او برابر حګی BJHC = BJMA . 2 ځکه،برابر بنسټلاین BJ او برابر جګی(h) JHلري	 

(c) ketabton.com: The Digital Library

	ب . ځرخون : ۳ . EABG = AKNC د) EA = AC باندې Aځکه په AB = AK (يوې ځلورې اړخونه (دیوې ځلورې اړخونه)
	۴ . BJMA = BCNL ځکه، چې پهB باندې BJ = BC) د يوې ځلورې‌اړخ اوړوالی) BA = BL (د يوې ځلورې اړخونه)

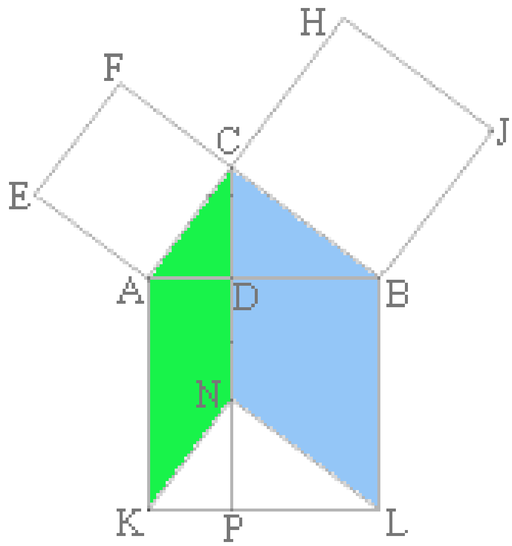
پ . بیاتیونه:

۵ . AKNC = AKPD ځکه، چې همغه بنستلاید AK شر ه نغه جګي KP لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ . NLBC = DPLB ځکه،چې
همغه بنسټلاین BL او همغه جګی PL لري

د پورته دواړو لپاره لاندې خېره وګورئ



له مخامخ خيرې

لاس ته اځي

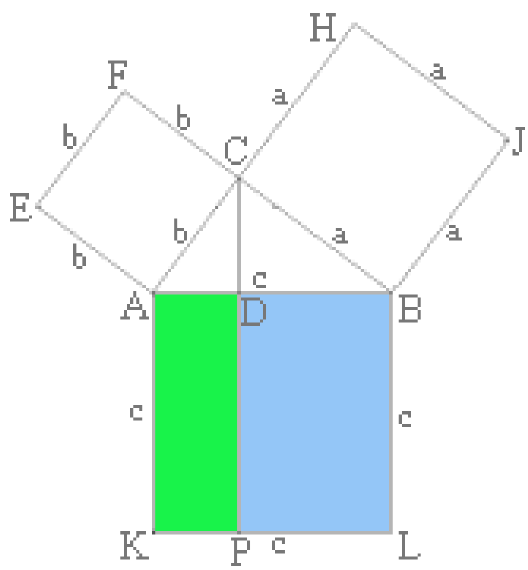
$a^2 = c \cdot DB$

$b^2 = c \cdot AD$

له دې لاس ته راځي :

$c.AD+c.DB=C^2$

$b^2+a^2 = C^2$



بیاتیونه پیل(لاندې خیره)

۱ - په هر دې اته درېګوډیو ځلوری داسې کیږدئ،چې برابر اوږده اړخونه یو په بل پریوزي، لکه چې ګور د یوې ځلوری اړخونه د یوه درېکوډې داړخونو سره برابر دي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

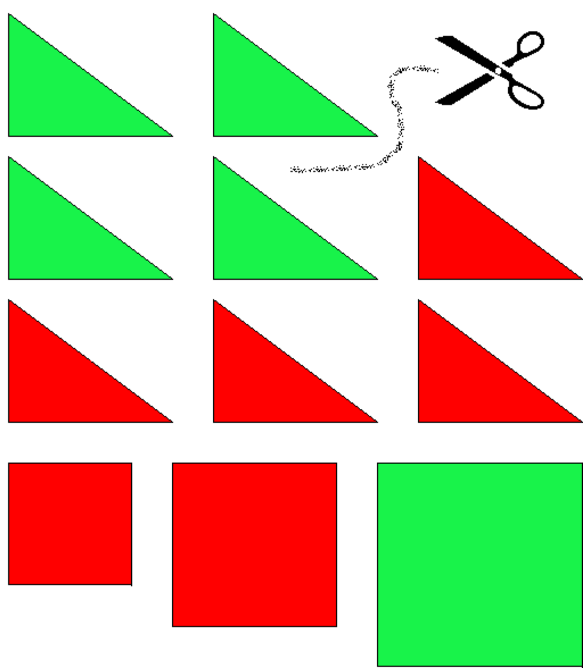
۲ - ټولې سرې څيرې (دوه څلورى اوڅلور درېګوډي) داسې يوځاى كيږدی، چې يوه لويه څلورى منځ ته راشي .

۳ - ټولې شنې څېرې (يوه څلورى او څلور درېګوډي) داسې يوځاى كيږدی، جې يوه لويه څلورى منځ ته   راشي.

۴ - ځان ته باور پيدا کړه،چې دواړه داسې منځ ته راغلې څلورى يو بل پڅه وي.

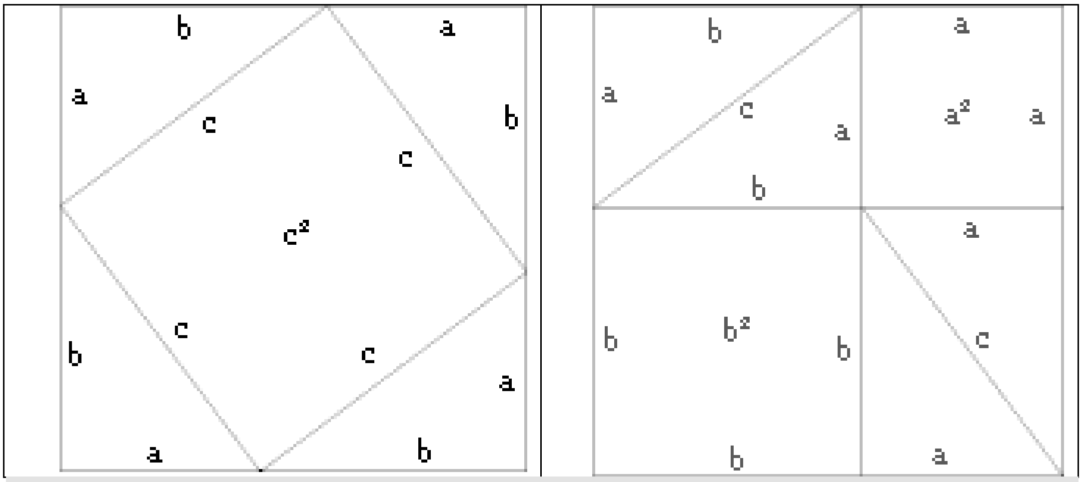
۵ -   ټول درېکوډي لرې کړه، نو دا پاتې شنه څلورى، د هوارې يا سحې له مخې کوچنى يا برابره ده دې نورو دواړو سرو څلويو سره.

د ځواب لپاره دلايل راوړه!



۵. Berechnungsbeweisد شميرلو ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



$4\cdot \frac{1}{2} \cdot a\cdot b + c^2$	=	$(a+b)^2$
$2ab + c^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$
c^2	=	$a^2 + b^2$

دا ځيرې دې د ځمککچپوهنې مينه والو ته وړاندې وي، که وخت پيدا شو دا څه په منځ کې پاتې به هم وژباړل شي او ګرانو لوستونکو ته به وړاندې شي

لاندې ځيره کې د،پيتاګوراس ونه، ليدل کيږي

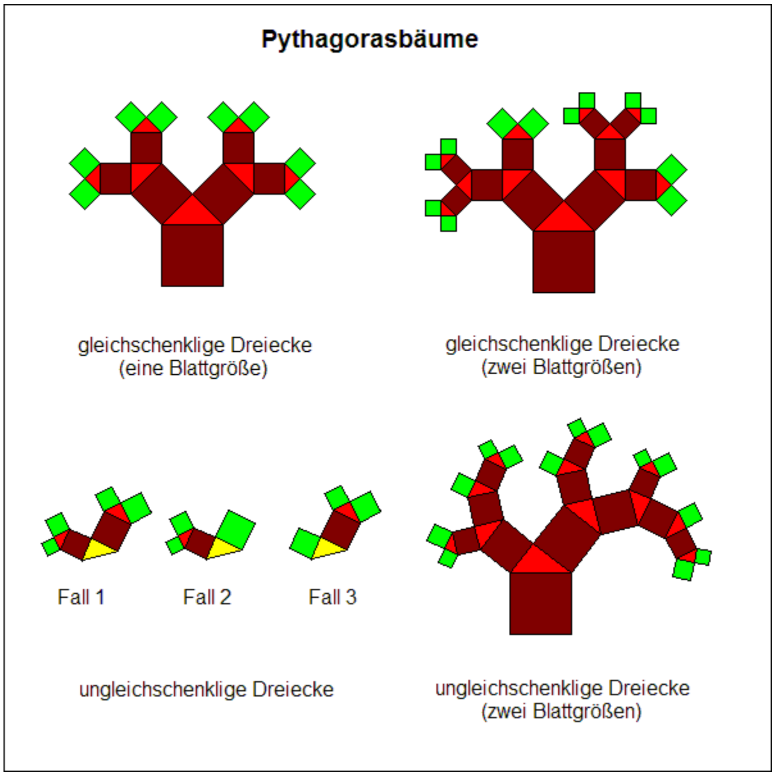
له کينې و ښي-، له پورته و کښته لور ته

برابرپښيز درېګودی (يوه پاڼه لويوالی)

- برابرپښيزدرېګودی(دوه پاڼې لويې)

حالت ۱ تر۳نابرابرپښيز درېګودي- نابرابرپښيز دېګودی(دوه پاڼې لويی)

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرینونه:

۱ – لاندې درېګوټي وکاږی :

a) a = 4 cm ; b = 8 cm ; c = 9 cm

b) a = 8 cm; b = 8 cm ; ß = 50°

c) a = 8 cm ; ß = 40° ; γ = 50°

۲ – د هوارې فرمول په مرسته

وښايې: چې د يوه درېګوټي خواوې يا اړخونه او جګې ، يو له بل سره په څټ اړيکو يا څانییونو يا تناسب پرتې وي.

۳ – درېګوټي د لاندې ورکړو سره کومه هواره لري

a) a = 7 cm ; h_a = m6 cm

b) c = 3 cm ; h_c = 5 cm

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $a = b = c = 6$ cm

d) $a = 10$ cm ; $ß = 45°$; $\gamma = 90°$

۴ – د هوارې اندازولو بل امکانات داسی په نامه د هیرون لیما ورکوي(د سکندریي هیرون Hronsche Dreiecksformel). که دري اړخونه معلوم وي ، نو هواره له لاندې فرمول څخه ټاکل کیږي

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

د $s = U/2 = (a+b++c)/2$ سره

د هوارې شمیرنی لپاره د په باندې ګردی همداسی دننه ګردیو وړانګو څخه هم کار اخستل کیدی شي.

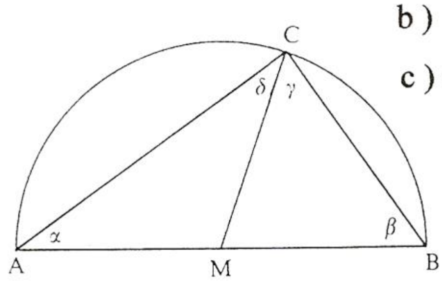
$$F = a.b.c / 4r = s.\varrho = \varrho .U/2 = \frac{\varrho . U}{2}$$

دلته د دننه ګردی او r د دباندې ګردی وړانګی دي. لاندې ټولی پاتی یا نامعلومی لویي د ټولو دریګوډیو لپاره وټاکی :

a) $a = 3$ cm ; $b = 4$ cm ; $c = 5$ cm

b) $a = 5$ cm ; $b = 7$ cm ; $U = 20$ cm

c) $s = 17$ cm ; $= 5$ cm ;
$h_a = 13$ cm $= h_b$

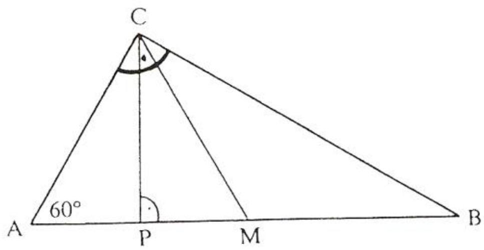


خیره ۸۲

۵ – د هندسی له لارې د لاندې خیرونو په مرسته د تالس جمله وښایی.
(خیره۸۲)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ – څیره ۸۴ یو ولاړکونجیز دریګوټی وښايي د کونج = 90° سره، وښايي چی کربښي $\overline{CP}$ او $\overline{CM}$ کونج په دري مساوي برخو ويشي.



څیره ۸۳

۷ – وي دې a,b,c د پیتاګوراس (فیثاغورس) ګڼون دریګونی. وښايي : (n>m)

a) $a = 2n + 1$; $b = 2n^2 + 2n$;

$c = 2n^2+2n+1$

b) $a = 2nm$; $b = n^2 - m^2$:

$c = n^2 + m^2$

۸ – د ولاړکونجیز دریګوټي پاتی برخی وښایی(نښوونه لکه په لیکنه کی):

a) $h = 4$ cm : $q = 5$ cm ;

b) h) 7 cm; $b = 10$ cm

c) $p = 4$ cm: $q = 12$ cm

۹ – د کانتی یا اړخ یا ژی a اوږدولای څخه د یوه مساوي اړخیز دریګوټي جګوالی وښایی.

۱۰ – وښايي : په یوه مساوي اړخیز دریګوټي کی د دباندې ګردی وړانکه $r = (a/3)\sqrt{3} = 2\rho$ ده او له دې سره سم د دننه ګردی وړانکه په لاندې توګه ده: $\rho = (a/6)\sqrt{3} = r/2$.

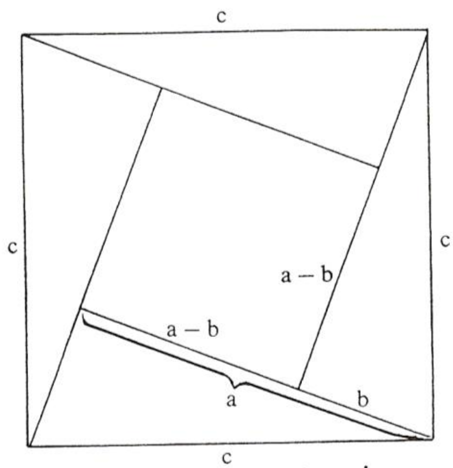
۱۱ – د ورکړشوي هوپوتینوزې سره د یوه ولاړکونجیز دریګوټي هواره کله خورا لویه ده؟ دا په دې مانا چی بله له دې لویه هواره نه وي.

۱۲ – په یوه ولاړکونجیز دریګوټي کی یوه کانتی یا ژی ۳ سانتي متره اوږده ده، بله نیمه دومره اوږده ده (x) ، لکه هیپتوینوزې (2x) نو x وشمیری.

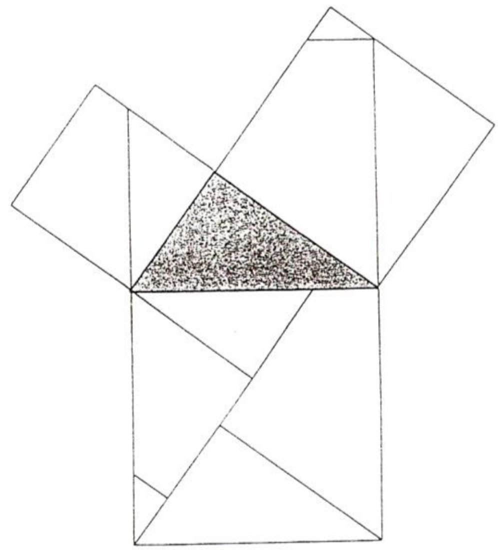
(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ – د یوه ولاړکونجیز مساویپښیز دریکونجي هیپوتینوزې c = 10 cm ده، کیدی شي له دې څخه د یوې پښې اودوالی وشمیرل شي؟

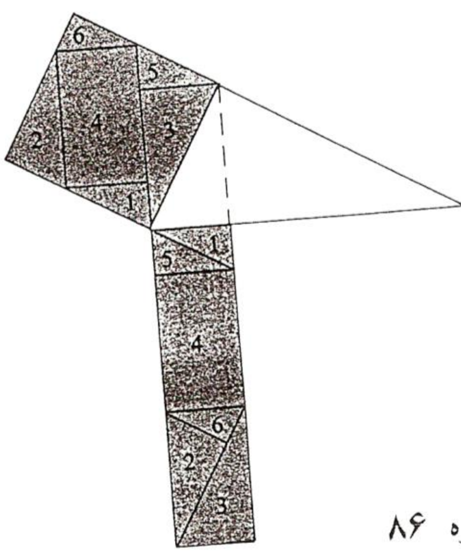
۱۴ – د لاندې څیرو په مرسته دې د پیتاګوراس درسي جمله وښوول شي:



څیره ۸۴



څیره ۸۵



څیره ۸۶

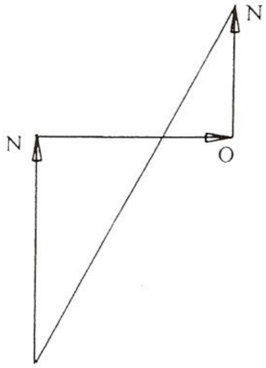
۱۵ – د یوې مربع څخه چې د یوې کانتی یا ژې اوږدوالی یې ۵ سانتي متره وي، یو مساوي هواریز ولاړ– کونجی جوړ کړی، چې د یوې ژې یا اړخ اوږدوالی یي ۴ سانتي متره وي:

الف) د کاتیت له جملی سره

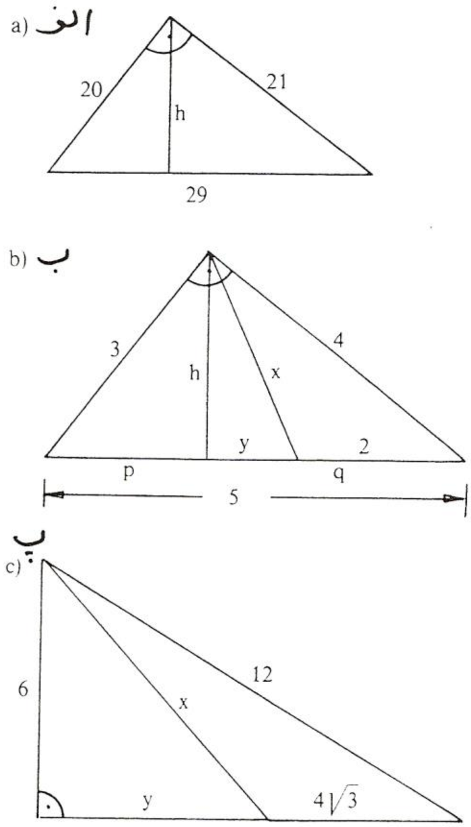
ب) د جګجملی سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ – د کاتیت جملی صدق د
خیرونی په مرسته، د برخه
هوارو د مساویوالی ښوونې
له لارې وښایې« (خیره ۸۶)
۱۷ – په برخه دریګوډیو MPC
(خیره [illegible]/) د پیتاګوراس جمله
استعمال کړی، او په دې بنسټ
د پیوتاګوراس جمله وښایې .
۱۸ – د مساوپېښیز ولاړکونجیز
دریګوډیوپېښی داسی راکړ شوې
الف) ۶ سانتي متره»
ب) ۸ سانتي متره ،
پ) x سانتي متره، هره اړونده
هیپوتینوزې څومره اوږده ده؟
۱۹ – یو موټر ۷ کیلو متره د سهیل لور
ته او ۶ کیلومتره ختیز لور ته او بیا
۴ کیلومتره د سهیل لور ته ځغلې.
دا موټر د خپل وتلځای څخه څومره لرې
دی؟ (خیره ۸۷)
۲۰ – د خپل وتلځای څخه به څومره لرې وي،
که نور هم ۴ کیلو متره د ختیز لور ته
وځغلي؟
۲۱ – دا نامعلومی کرښی په خیره ۸۸کی
وښایې.



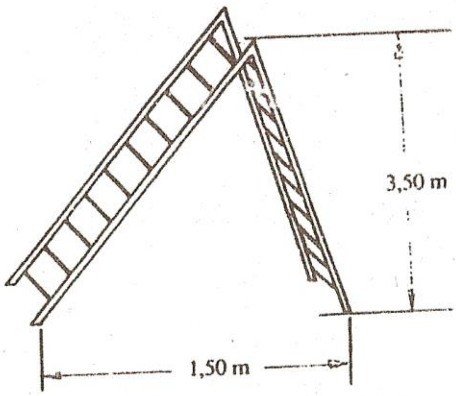
خیره ۸۷



خیره ۸۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – یوه دیوال ته ۵ متره اوږده زینه
ایښول شوې د زینې بیخ له دیوال
۴ ، ۱ متره واټن لري زینه څومره
جګه رسیږي؟



۲۳ – د یوې نقشې، چې د ۱۰۰۰۰۰ : ۱
اندازه ده یو د پلو لار غزیدلي ، چې
د نقشې اوږدوالی ۷ ، ۰ سانتي متره
دی د ځنګلاینونو ۲۵۰ متره او ۴۵۰
متره سره . دا د پلو لار په ریښتونې
څومره اوږده ده ؟

۲۴ – د یوه کور بنسټ فورم یو مساوي‌پښېز
دریکوډی دی

خیره ۸۹

الف) د ۹ سانتي متر په سور یا بر او
جګوالی ۶ ، ۰ سانتي متره د چت له
پورته ژی تر ناوی پورې .

ب) د یوه ۹ متره په سور او۵،۳
متره Sparenlänge د بنسټفورم ۶،۵ متره
جګوالي سره د بنسټفورم سور وشمیرئ.

۲۵ – په یوه رامارته زینه کې ټولې پوړۍ مساوي
اوږدوالی لریهغه په څیوروته ۶۴ کی کښل
شوې د پوړیو واټن وشمیرئ.

۲۶ – پو یوه مساوي پښېز دریکوډي کي چې
چاپیرې یې ۲۵ سانتي متره دی او جګوالی
یې ۲ سانتي متره له بنسټ اړخ څخه کوچنی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړخونه ځومره اوږده دي او جګوالی یی ځومره اوږد دی ؟

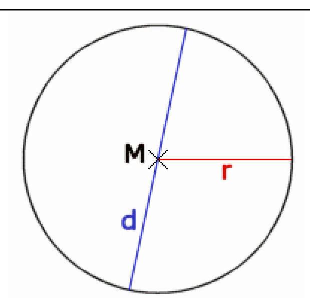
۲۷ – هر یو ټال په زوړند ځغلول شوي رسی تړلی، چی د تړلو ټکی یي د یوه مساویپښیز دریګوډي کونجټکي دي. که وزنوړونکی ۶ متره اوږد او ۱ متر یو له بل لرې په کښتی تړلي وي، نو کښتی ټال ځومره لرې ټال وهلی شي، که دریګوډیبنسټ منځټکی د لار جګ ټکي کی ۲،۵ متره د خپل ژورځای ځخه جګه وي ؟

۲۸ – کوم یو د لاندې دریګوډیو ځخه نه شي کښل کیدی؟

a) a = 3 cm; b = 4 cm ; c = 6 cm b) a = 5 cm ; b = 9 cm ; c = 7 cm c) a = 7 cm ; b = 4 cm ; c = 2 cm d) a = 12 cm ; b = 13 cm ; c = 1 cm

۲۹ – ولی درې اړخیز دریګوډی هیڅوخت ولاړکونجیز دریګوډی نه شي کیدی؟

ګردی (دایره)



پیژند یاتعریف

د یوې هوارې ټول هغه ټکی، کوم چی له یوه ټکی داسی په نامه منځټکي M ځخه همغه- یا برابر واټن r (په نامه وړانګه) ولري، ګردی لاین یا لنډ: ګردی بلل کیږي (مخامخ ځیره)

$$k = \left\{ X \in E | \; |\overline{MX}| = r \right\}$$

ګردی سطحه یا - هواره او ګردی چاپیریال یا - محیط

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پام کی دی وي، چی د ټولو هغو ټکو ډیری، چی واټن یی له M ځخه د r کوچنی یا د rسره برابر وي ګردۍ (موخه ترې ګردۍ منځهواره ده یا ټیك : ګردیټوټه ځما په پام به بهتره وي که دا ګردۍچیترو یا لنډ : چیترو، چې موخه ترې یواځې منځهواره ده، وبولو) بلل کیږي

پیژند: لکه د مخه مو، چې په ګوته کړه، هغه کرښه چی د ګردۍ ژی یو ټکی د منځ ټکی سره ټړي، هغه د ګردۍ وړانګه یا لنډ: وړانګه بلل کیږي، چې په r سره یې ښایو.
پیژند: او هغه کرښه، چې ګردۍ نیموي د ګردۍ نیمونکې کرښه یا لنډ: نیمی (قطر) بلل کیږي او په d سره یې په نخښنه کوو.

پیژند
دګردۍ دننه کونج پوره کونج ۳۸۰ درجي لري.
ګردیچاپیریال د وړانګې r سره په لاندې ډول ورکړ شوی دی

$$u = d \cdot \pi = 2r \cdot \pi$$

او همداسی ګردۍمنځهواره د وړانګي r سره په لاندې توګه ورکول کیږي

$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

$$d = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2r$$

دا لاندې ورکړشوی ګڼ ګردۍ ګڼ بلل کیږي
: $\pi = 3{,}14159265$

یادونه: دا چې ما کله هواره یا سطحه په A یا F او π مې په Pi نخښنه کړې، دا به هیله ده کرانو لوستونکو ته ستونځې پیښې نه کړي.
په پورته کې ورکړ شوی ګردۍ ګڼ « پي » ګورو، چې بیرته راګرځیدونی دی. له دې امله یو ایرشنل ګڼ دی او د مات په څیر نه لیکل کیږي، بلکه له لسمیز (عشاریه) وروستی پریودي کیدونکی ځیفر پرلپسی دی. په کارونه کي یی موږ نزدې شمرنې ته مجبور یو، ځکه چه د جبشمیري د ګنځایونو له امله، چې پای دي یا پوله لري یا رابند(محدود) دي.

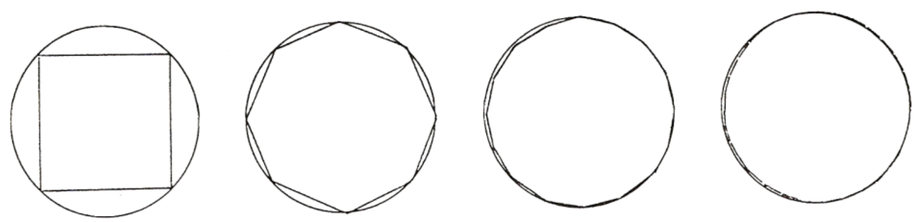
ښنګه سړی په دې بریالی شو چی دا ګڼ پیدا کړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا لار دې په لاندې کی لنډه ورکړ شي:

دا له ارښیمدس څخه پیل کارونه (عملیه) یا تګلار داسې پیل کیږي، چې په ګردۍ کی یو ه څلورۍ یا مربع راګیروي یا رابنده وي او بالاخره یې په منځنیو ولاړو سوکښیسیف یا یو په بل پسې ۸ ، ۱۶، ۳۲ او داسې نورو، لوړ یا جګ کړي یعني په همغه وخت کی دوه برابره کړی .

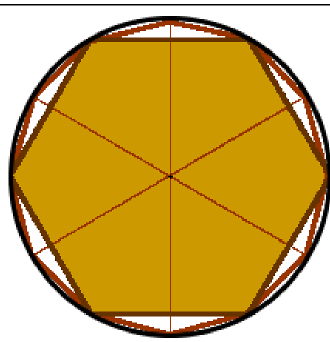
خیره ۱۱۹



یوې ګردۍ ته د یوه n –ګوډي له لارې نږدیونه (نږدې کیدنه)

خیرې ۱۱۹ ښائي چې،

په مخامخ څیرو کې نهه ګوډۍ ورپسې شپږګوډۍ کښل شوي، دي ته ګورو، چې څنګه ګردۍ ته نږدې کیږي



په پورته څیره څو څوګوډیز بریښي او ستره تری راتاو ګردی

پورته څیرو کې یوې ګردۍ ته د یوه n -ګوډي له لارې نږدیونه (نږدې کیدنه)

کتل کیږي، همغه ٦٥٥٣٧ ګوډی، چې ګورو نږدې یا تیک ګردی ده)

د زیاتیدونکي n سره کانتی یا ژۍ یا اړخونه تل کوچني کیږي، چې پخپله له ۱۰۰ یا ۱۵۰ ور رسونو ته په یوه پانه کی د کښلو یا رسمولو څخه وځي یا نه کښل کیږي، په همدې وخت کی د منځنکی څخه د په همغه واټن د تکو ګڼون یا تعداد زیاتیږي (یعنی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګوډتکوتعداد یا ګښون) د مربع پیلګردۍ سره دا څیره تل نزدې کیږي. په ورته توګه د دې چاپیریال او منځهواره هم همغه چاپیریالګردي ته نزدي کیږي. د ګوډتکو زیاتیدو سره د ګردۍ وړانګه هم لوییږي. د هغو چاپیریال او منځهواره تل همغه ډیر کونجی او په همدې توګه د چاپیریالګردي څخه. په روښانه توګه لیدل کیږي چی د چاپیر یالګردۍ او د منځ هوارې د ناپای ډیر n ګوډونو سره د n - ګوډي سره یوځای پریوځي یا یوځای کیږي.

په لاندې جدول کی د چاپیریال ارزښت او په همدې توګه د منځهوارې ارزښت د زیاتیدونکي n ګڼ سره ستابیل (په خپل حالت، چی ډیر تغیر په کی نه راځي) پیژندوړ دي:

منځهواره Fn	چاپریال Un	پیدایښتي ګڼ n
2	5,656854	4
2, 828427	6,122934	8
3,061467	6,242890	16
3,121445	6,273096	32
3,136548	6,280662	64
3,140331	6,282554	128
3,141277	6,283027	256
3,141572	6,283145	512
3,141572	6,283175	1024
3,141587	6,283182	2048
3,141591	6,283184	4096

وروسته به وکتل شي چی څنګه د ګردۍ چاپیری او ګردۍ منځهواره د تریکونومتري یا دریګوډیکچ له لارې ټاکل کیدی شي

پیلبیلګه:

د بانك مدیر ښاغلی کړاو غواړي د کنفرانسونو لپاره یو د ښیښي میز جوړ کړي چی په هره لور یی ۸ کسان ځاي نیولی شي. ایا ددې لپاره یو میز چی ۲ متره نیمی(قطر) ولري

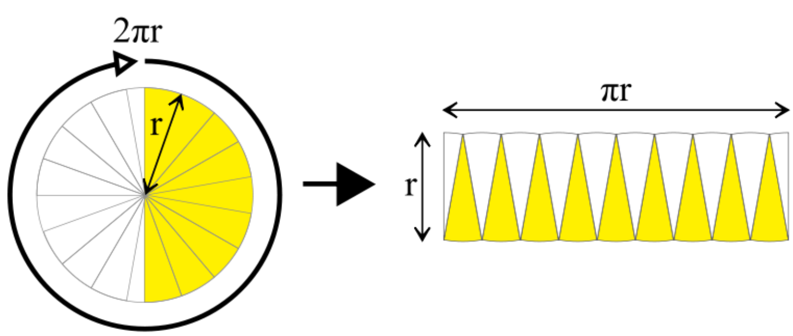
(c) ketabton.com: The Digital Library

بسیا کوي، که د یوه نفر لپاره له ۷۵ څخه تر ۸۰ سانیمتره د میز په سور، ځاي په پام کی نیول شوی وي؟ دا میز به څومره ګران وي، که یو څلوری متر یا مترمربع د کار د معاش سره ۲۵۰ مارکه ګران وي یا ۲۵۰ مارکه ارزښت ولري؟

دمیز چاپیریال دی $U = pi.1m=6,248m^2$ په د هرکنفرانس برخوالو لپاره ۷۵ سانتي متره سرورځاي په پام کی وي، نو د میز چاپیریال دی : 8.75= 600cm

د ۸۰سانتیمتره ځاي د نفر په سر 80.8 = 640cm . منځ ازښت یې 6,2m دی. پس د نېکو هیلو سره ټول خاي نیولی شي
مېز دا هواره لري: $F = \pi.1m = 3142m^2$ او له دي امله 3,142.250=785,40 یاني الماني مارکونه ازښت لري..

په لاندې څیره کي کتل کیږي، چې د ګردی منځهواره نزدې

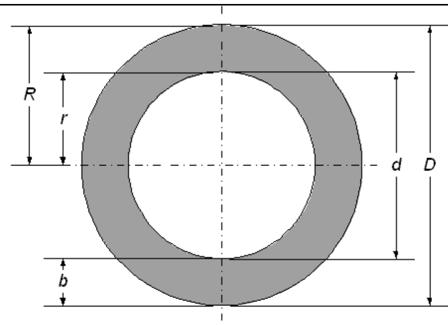


$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

ده (په پورته څیره کي د څیرې کوچنیوالي له امله د ګردی څیره لړ تخریب شوه، خو دا ستونځې پوهوړ دي۰

ګردنېوټه او ګردیبرخه، ګردیکړی

ډير وخت دننه- يا خونديګردۍ له
چاپيريالګردۍ کوچنۍ وي. نو له دې امله د
دوي ترمنځ يوه کړۍ منځ ته راځي، چې د
هغې منځهواره د دواړو ګرديو د کمون يا
توپير څخه شميرل کيږي.



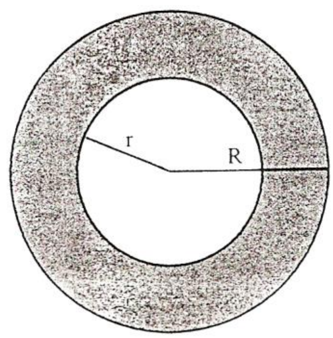
جمله : موږ دوه ګردۍ لرو، چې د
چاپيريالګردۍ يا دباندې ګردۍ وړانګه R
او د دننه ګردۍ يا خوندې ګردۍ وړانګه r

$$F_K = \pi R^2 - \pi r^2$$

ده، نو د

$$F_K = \pi(R^2 - r^2)$$

$$F_K = \pi(R - r)(R + r)$$



خیره ۱۲۰

بل ډول يې: يوې ګرديکړۍ منځهواره ده

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

همداسې کيدی شي، چې د ګرديکړۍ منځهواره د ګرديبرخې د سور او دننه او دباندې ګردۍ د نيميو څخه هم وشميرل شي، چې په لاندې کې يې ګورو:

$$A = (D - b) \cdot b\pi$$

پيلبيلګه:

د کړاو ميز درز پيداکړ. چې له غاړې يا ژۍ پنځه سانتي متره دننه لور ته ځغلي. ښاغلی کړاو فکر کوي ، چې که داميز په پنځه سانتيمتره کوچنی کړی . کوم ميز هواره پاتې کيږي او ګرديکړۍ چې له منځه ځي ګومره لويه ده؟

او د همغه پيل نيونی سره لکه د مخه څومره نفر اوس په ميز ځاي نيولی شي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

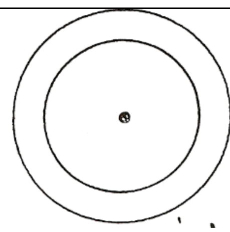
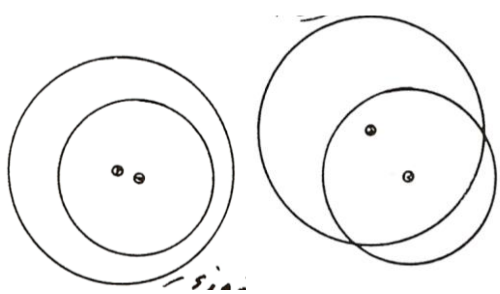
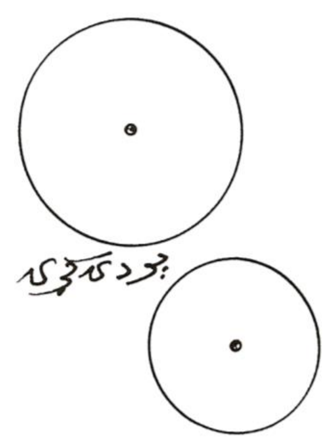
$F = (0,9m)^2.Pi = 2,835m^2$

د ګردیکړی منځهواره او چاپیریا په لاندې ډول دي

$F \quad = 1,95m.0,05m.Pi = 0,30m^2$

$U' = 2,095m.Pi = 5,969m$; $U' :8 = 74,6$ cm

د داسې لړ ستونځو سره بیا هم ټول کسان پر میز ځاي نیولی شي۰

هغه ګردۍ، چې منځټکي يې يو پ بل پريوځي کونځنتري يا راټول يا يومنځي بلل کيږي او پرته له دې دکسځنتري يا نه يومنځي بللکيږي.	
تر هغې چې يوه ګردۍ ټوله په بله کې پرته وي، يدی شي چې د راکښلو له لارې په يومنځي يا کونځنتري ګرديو بدله شي	
	دا يو نايومنځي ګردۍ دي

هغه دوه يا زياتې ګردۍ چې منځ ټکي يې يو په بل پريوځي کونځنتري Konzentrie يا راټول او په غير له دې اکسځينتري Exzentrieيا ناراټول بلل کيږي .تر څو يوه ګردۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټوله په بله کې پرته وي کیدی شي چی د راکښلو له لارې په کونخینتري ګرديو یا راټولګرديو بدلی شي.

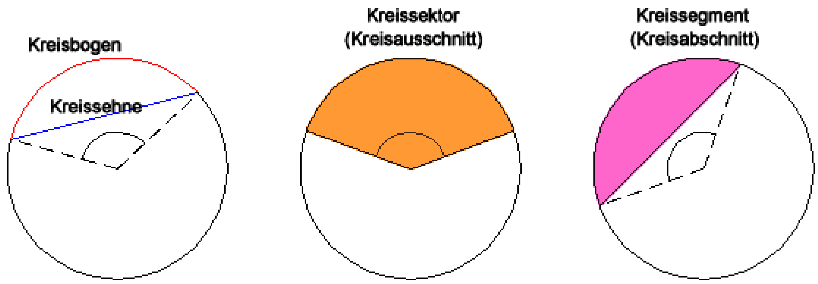
که ګردی یوبل پوره پټي نه کړي، نو د ګډو هوارو یا سطحو(= غوڅډیریو) یا ګډو پاتي یا باقي شمیرنه له ستونځو سره مخامخ کیږي .که ګردۍ یو له بل سره ګډ ټکي ونه لري نو دا ګردۍ یو دبل سره پردۍ بلل کیږي۰

خو پیژندونه یا تعریفونه:

د ګردۍ هغه برخه ګردیټوټه (سګمنت) Segment/ Abschnitt بلل کیږي، که چیرې یوه ګردی د یوې کرښی له لارې یا کرښه باندې غوڅه شي . داسی یوه کرښه غوځکرښه یاغوڅوونی یا ټوټه وونې (سیکانت) Sekante بلل کیږي. غوځکرښه ګردی په دوه ټوټو ویش. که دا کرښه د ګردۍ له منځ څخه تیره شي، نو ګردۍ په دوه برابرو برخو ویشي، چې دا بیا ګردۍ نیموونی بلل کیږ. هغه غوڅوني چی له منځ ټکي تیره شي، د ګردۍ نیمی یا لنډ: نیمی بلل کیږي. که ګردی په یوه ټکي کی لمس کړی نو دا کرښه تانجنت بلل کیږي او که له ګردی څخه دا کرښه دباندې تیره شي نو تیریدونی کرښه بلل کیږي .په ګردۍ د غوځکرښی دننه پرته برخه د ګردۍ ټوټوني (Sehne) یا وتر بلل کیږي .ټوټونی یا Sehne بندکرښه ده په داسی حال کی چی غوڅی ، تنجنت او تیریدونکی ناپاي کرښي یا ـلکه، چې ورسره بلد یو - کرښې دي .د یوه ګردۍ څخه د دوه وړانګو په مرسته کیدی شی یوه برخه راغوڅه شي دا برخه ګردیبرخه یا سکتور Sektor بلل کیږي. د منځټکیکونج یامنځني کونج او لیندۍ (Bogen) b سره. مخامخ څیره ده

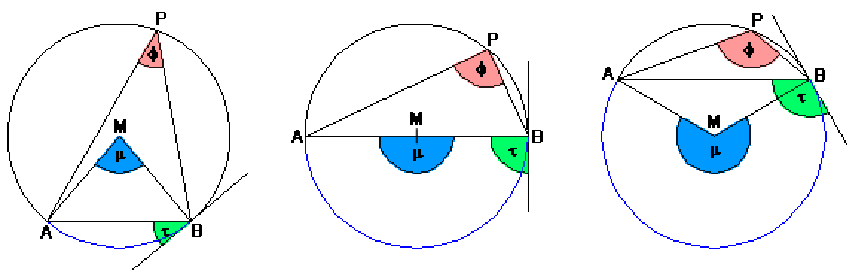
په لاندې څیرو کې د نومونو له الماني څخه په پښتو کوونه له کیڼ وښی لورته:
ګردیلینده Kreisbogen د ګردۍ ټوټه وونې(ټوټوونې) Kreissehne ،
ګردی برخه Kreissektor ،

(c) ketabton.com: The Digital Library



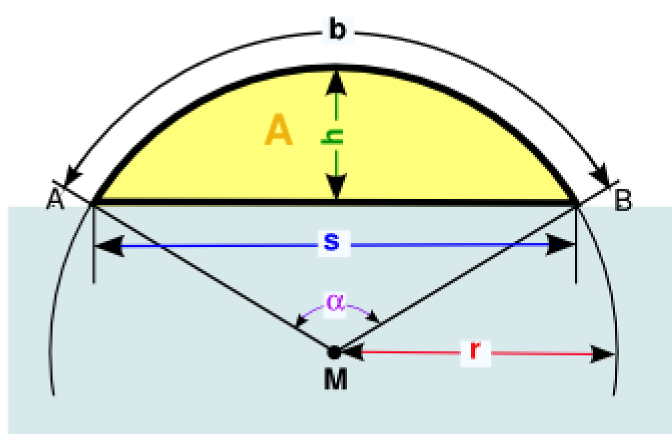
د
پورته ژباړه له کيڼ خخه و ښي لور ته: ګردی- لينده ټوټه وونې، ګردي برخه، ګردی ټوټه
.

په ګردی کې د کونجونو ډولونه:



1. Fall: $\mu < 180°$ 2. Fall: $\mu = 180°$ 3. Fall: $\mu > 180°$

د ګردی ټوټه



(c) ketabton.com: The Digital Library

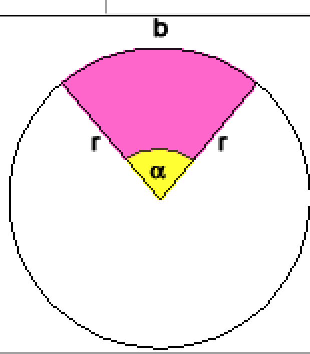
گردی ټوټه Kreissegment ,
د گردی ټوټی لویې:

- α = منځټکیکونج Mittelpunktswinkel
- b = گردیلیندهKreisbogen
- h = ټوټې جگی Segmenthöhe
- r =وړانگه Radius
- s = گردی ټوټه وونې یا - وتر Kreissehne
- A = ټوټې هواره Segmentfläche
- M = گردی - منځټکی Kreismittelpunkt
- Verbindungترنه A-M-B = برابرپنیز درېگودی
-

د گرديټوتې فرمولونه	
!Error $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\alpha,$ $A = \frac{r \cdot b}{2} - \frac{s \cdot (r-h)}{2},$	سطحه مخامخ فرمول Flächeninhalt
$r = \frac{4h^2 + s^2}{8h}$	وړانگهRadius
$s = 2r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$ $s = \frac{2h}{\tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)} = 2h \cdot \cot\left(\frac{\alpha}{4}\right)$	Kreissehne گردی ټوټه وونې (د وروسته لپاره دې په پام کې وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

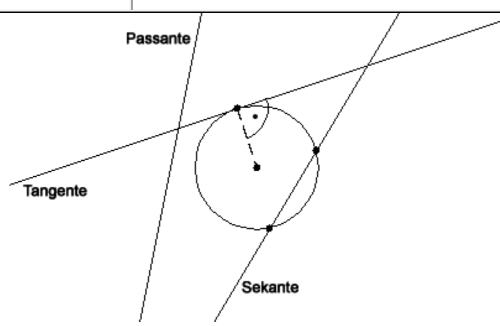
	$h = r - \left(r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right),$ $h = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2},$ $h = \frac{s}{2} \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)$	Segmenthöhe د توټي جګوالی
	$b = 2r \cdot \frac{\alpha \cdot \pi}{360°},$ $b = r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{180°},$ $b = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot (4h^2 + s^2)}{1440h},$	دلينديِ اوږدوالی Bogenlänge
	$\alpha\ ,$ $\alpha = 4 \cdot \arctan\left(\frac{2h}{s}\right)$	Mittelpunktswinkel منځټکيکونج په درجه کچ (Gradmaß)

	Kreissektor کردی برخه يا قطاع

	د کردی برخي يا قطاع فرمولونه
!Error $A = \frac{\alpha}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi$	Flächeninhaltسطحه يا منځهواره

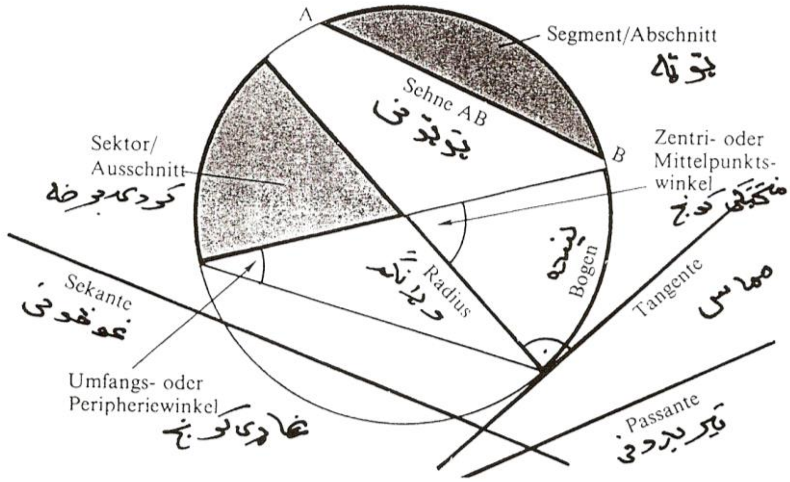
(c) ketabton.com: The Digital Library

د گردی لیندې اوږدوالی	$b = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot r \cdot \pi$
Radiusوړانګه	r
Mittelpunktswinkel (Gradmaß)منځټکیکونج(په درجه کچ	α
Kreiszahlګردیګڼ یا - عدد	!Error $\pi \approx 3{,}1415926536$

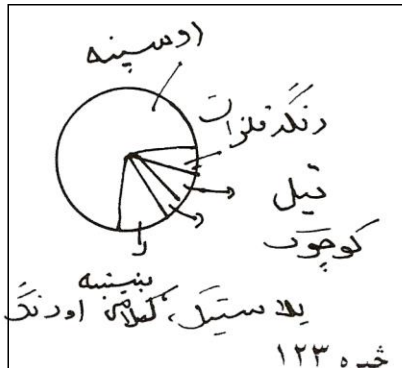
په لاندې خيره کې نومونه: تيريدوني Passante ، تانجنت يا مماس Tangente، غوڅووني Sekante، لاندې خيره کې خو هرڅه روښانه دي.	

د پورته خيرې کې راوړي څه په لاندې خيره کې ټول په لاندې خيره کې ورکړل شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



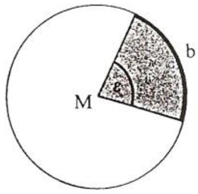
پیلبیلګه: د یوه بنس موټر جوړولو لپاره ۱۷۵۰ کیلوګرامه اومه(خام) مواد په خرڅ رسیږي یامصرفیږي. په دې کی اوسپنه او فولاد ۷۵ په سلو کي ، په پالستي، ښیښني او رنګ ټول ۹ په سلو کی رسیږي، په رنګه فلزونو او ربړ ۶ په سلو کی رسیږي، او تیل ۴ په سلو کی . یو ګردیدیاګرام وکاږئ چی هره برخه په کې ورکړ شوي وي .د ګردي ټوله هواره د ټولو موادو سره مساوي دهٔ) ۱۰۰ په سلو کی (د جوړموادو برخه د ګردبرخی څخه عبارت دئ. یوه د یو په سلو کی برخه به یوه ګردۍبرخه وي د منځکونج سره 360°:100=3,6° وی .

يعني 4%~14,4°;6%~21,6°;9%32,4°;75%=270° څیره دی، چې د هرڅه برخه کې ورنزدې ښوول شوې وي په یوې ګردۍ کې وکښل شي یا لاندې	

د ګردۍ برخې څیره څرګندوي» د منځکونج چې د ، ε سره یې په نخښنه کوو لویوالي

په تناسب برخهواره Fsk او هم لینده b تغیر خوري او لاندې باوري دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\frac{F_{SK}}{F} = \frac{b}{U} = \frac{\varepsilon}{360°}$	ε لويوالي b ده ټکی دیوه یا ګردی راغوځي 

د ډبل برابرون د دويمې برخې څخه باوري دي:

جمله : د ګردۍ برخې د ليندۍ اوږدوالى داسى دئ:

$$b = \frac{n.\varepsilon}{360°} = \frac{2\pi r.\varepsilon}{360°} = \frac{\pi r \varepsilon}{180°}$$

د لومړی برخی څخه د سيکتور يا ګرديبرخى لپاره باوري کيږي

جمله: د سيکتور يا د ګرديبرخى منځهواره په لاندې ډول ده:

$$F_{Sk} = \frac{F.\varepsilon}{360°} = \frac{\pi r^2.\varepsilon}{360°} = \frac{rb}{2}$$

اړيکي $F_{Sk} = \frac{rb}{2}$ د مات $F_{Sk} = \frac{F.b}{n} = \frac{\pi r^2 b}{2\pi r}$ د لندوني څخه منځ ته راغلي

بيلګه: د خام موادو برخی (بيلګه مخ   ) هواره څومره لويه ده، که د ګردی دياګرام ۵ سانتي متره وي ؟

F اوسپنه او فولاد = (25 π : 360°).270 = 0,218.270 = 58,905 cm³

F پلاستيك = 0,216.32,4 = 7,069 cm³

F رنګه فلزات = F ربړ = 0,218.21,6 = 4712 cm³

F تيل = 0,218.14,4 = 3,142 cm³

د ټولو ټوله يا د ټول زياتون بايد د ګردی سطحه يا هواره ورکړي:

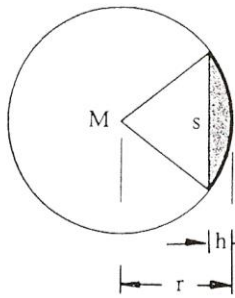
(c) ketabton.com: The Digital Library

$F = \pi r^2 = 78,54\ cm^3$

د برخهوارۍ ددې فرمول سره نور د برخهوارۍ شميرلو لپاره هم کوم جنجال يا پرابلم نه شته. د اخرنى هواره دلته بيا د برخهوارۍ او د دوه وړانگو او ټوټونى څخه جوړ مساوي پښيز دريگوډي کمون دی.

څيره ۱۲۵

گردکه ټوټه



د دريگوډي هوارى لپاره باور لري:

$F = s(r - h) / 2 = 0,5\ r^2 . \sin \varepsilon$

(تريگونومتري دی وکتل شي ....) او

او د دې سره ټوټه سطحه يا هواره

جمله: د گرديټوټى يا سگمنت هوارۍ په لاندې ډول دي:

$$F_{Sg} = F_{Sh} - F$$
$$F_{Sg} = (br/2) - s(r - h) / 2$$
$$F_{Sg} = (\pi r^2 \varepsilon / 360°) - (r^2 \sin \varepsilon)/2$$
$$F_{Sk} = (r^2/2) [\pi \varepsilon/180° - \sin \varepsilon]$$

په کارونه يا عمل کی د ټوټه هوارۍ لپاره گټور نزدې ارزښت $F_{sg} = (2/3)sh$ ښوول شوی دی.

پيلبيلگه: مدير کړاو له څان څخه پوښتي چى ايا د گرديميز په څاي به يو منظم اته کو نجى هدفمند بهتر نه واى؟ نو په اختيار کي هواره او چاپيرى به څومره لوي وي؟

لمړى گرديټوټى شميرو. په ورته ډول لکه د گردي نزدې شميرلو لپاره، د مربع

څخه و ډيرکونجي ته، مخ ته څو او دې د اړخونو اوږدوالى s شميرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځولاړه m، د اته کو نجیز کانتی یا ژی k او بالاخره د دګردیتوبې جګولی h د پیتاګوراس د جملی په مرسته شمیرو.
لاندې لاس ته راځي:

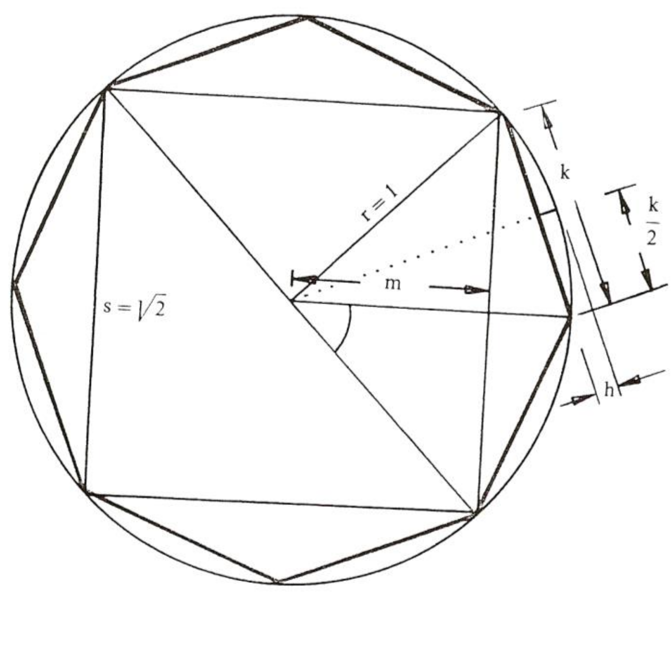
$s = \sqrt{2} \cdot 1 = 1{,}414\ m\ ;\ \ m = \sqrt{a-(1{,}414 : 2)^2} = s / 2 = 0{,}707\ m$

$k = \sqrt{(1 - 0{,}707)^2 + 0{,}707^2} = 0{,}756\ m$

$h = 1 - \sqrt{1 - (0{,}765 : 2)^2} = 0{,}076\ m$

د $\varepsilon = 45°$ له امله $b = 0{,}393\ m$ دی./و له د ې سوه

$F_{\text{توټه}} = 0{,}5 \cdot [0{,}393 \cdot 1 - 1{,}414(1-0{,}076)] = 0{,}039\ m^2$



(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې څخه په هرصورت د ښيښی ميز جوړيږي. ټوله غورزول شوې له دې امله په لاندې توګه ده: $8.0.039 = 0{,}312\ m^2$.ميز اوس لاندې هواره لري

$$F_0 - F_{\text{غورزولشوې}} = 2{,}828\ m^2$$

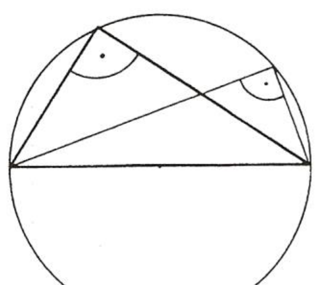
او په همدې توګه لکه د کوچني شوي ګرديهواره د وړانګي $r = 95\ cm$ سره. د کيناستلوځاي سور (k) حتي زيات شوی ، چاپيری اوس $U = 8.0{,}765 = 6{,}123\ m$

دی. نزديونه هم همدا ارزښت ورکوي: $F = 0{,}765.0{,}076 = 0{,}039\ m^2$ او داسی نور.

تريګونومتريکي حل مو زر هدف ته رسوي:

$$F_{\text{ټوټه}} = \pi.1.45:360 - 0{,}5.\sin 45° = 0{,}039 m^2$$

او داسی نور . خيره

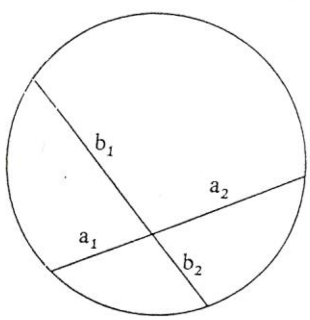


خيره ۱۲۷

ګرديجملی او ګرديخو يونه

د تالس جمله

په نيمه ګردی کی هر پريفري– يا ژی کونج ولاړکونج دی(خيره)



$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

د ټوټونی جمله

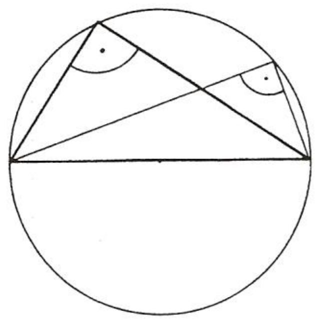
که دوه ګردی ټوټونی په ګردی کی دننه يو بل غوځی کړي نو د غوځبرخو

(c) ketabton.com: The Digital Library

تريګونومتريکي حل مو زر هدف ته رسوي:

$F_{ټوټه} = \pi.1.45:360 - 0,5.\sin45° = 0,039m^2$

او داسې نور . ځيره



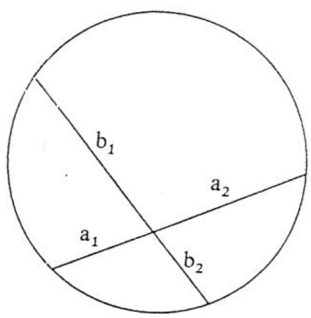
ګرديجملې او ګرديخو يونه

د تالس جمله

په نيمه ګردۍ کې هر پريفري- يا ژۍ کونج ولاړکونج دی(ځيره)

ځيره ۱۲۷

د ټوټونې جمله

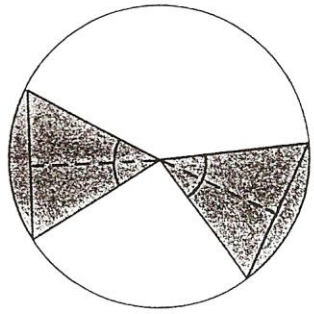


$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

ځيره ۱۲۸

که دوه ګردۍ ټوټونې په ګردۍ کې دننه يو بل غوڅې کړي نو د غوځبرخو خل (ضرب) يې يو ثابت دی

د مساوي ټوټوونو جمله

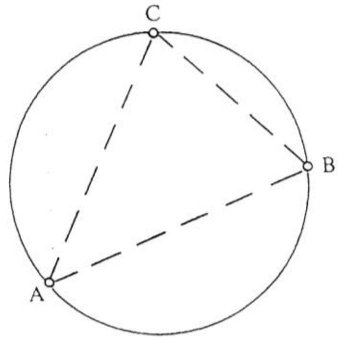


مساي اوږدې ګرديټوټې د ګردي له منځټکي مساوي فاصلې لري، مساوي منځټکي کونجونه، مساوي ګرديلينده، او مساوي ګرديټوټې او مساوي ګرديبرخې لري .

ځيره ۱۳۱

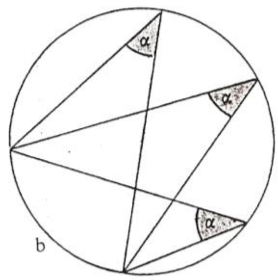
(c) ketabton.com: The Digital Library

د چاپیرګردی جمله



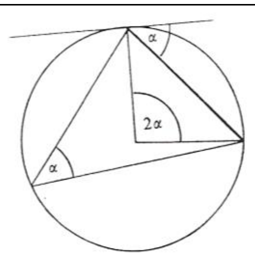
د درې ټکو A, B, C لپاره یوه ګردی موجود ده چې د دریواړو ټکو څخه تیریږي:
دا د دریکونجي ABC چاپیرګردی بلل کیږي
خیره

د پریفري – یا ژیکونج جمله



خیره ۱۳۳

په همغه لینده باندې ټول
پریفري – ژی کونجونه مساوي دي

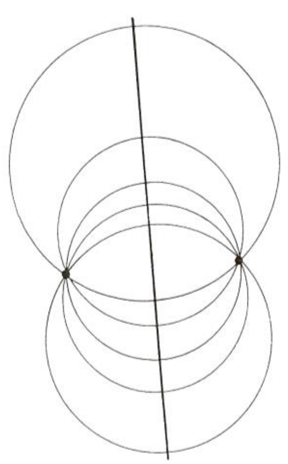


د منځېکي کونج او پریفري – یا ژی کونج جمله:

یو منځېکي کونجدوه برابره دومره لوي دی لکه په دې تړلی پریفري – یا ژی کونج(چاپیریالکونج) مخامخ ځیره.

د منځېکي کونج او د تانجنت کونج – او ټوټونکونج جمله:

د منځېکي کونج دوه برابره دومره لوی دی لکه په دې اړوند تانجنت – یا ټوټه وونې کونج.

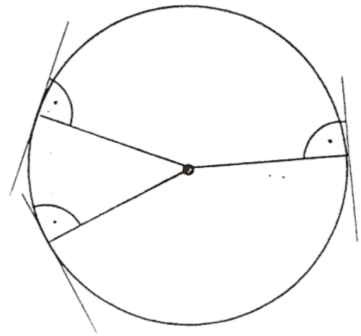


د ګردیو جمله چې په دوه ټکو کې سره غوڅوي:

د ټولو ګردیو یا دایرو منځېکي کونج چې یو بل دوه ټکو او کې غوڅوییو ناپای کرښه باندې، چې ځایلاین (ځایکرښه) وایي پراته دي. مخامخ ځیره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګې او تنجنت جمله



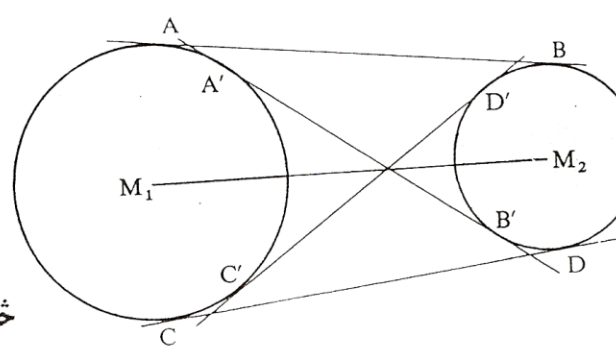
خیره ۱۳۶

په لمستګې پرته وړانګه او اړوند تانجنت سره یو په بل ولاړ یا نیغ پراته دي.

د تانجنت جمله:

د دوه ګردیو د منځ ټکو M_1 او M_2 سره تانجنتونه دنننی (دباندني) تانجنتونه نومیږي که د دوه ګردیو د منځټکوکرښه $M_1 M_2$ غوڅه (غوڅه نه) کړي.که چیرې دوه ګردي ګډ دنننی او دباندني تانجنتونه ولري، پس د داوړو تانجنتونو غوڅټوټې همغه اوږدوالی لري.

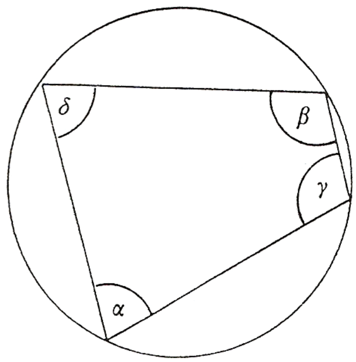
$|AB| = |CD|$ په همدې ډول (<=>) $|A'B'| = |C'D'|$



خیره ۱۳۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټوټوونو څلورګوټي جمله

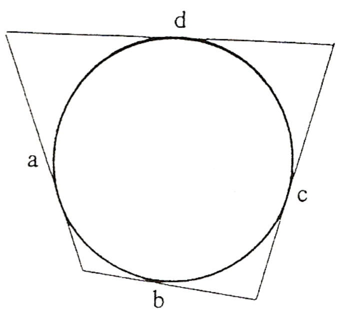


خيره ۱۳۸

د ټوټونوکونجونه چې مخامخ پراته دي يو بل سره 180° باندې پوره کوي.

$\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180°$

د تانجنتونو څلورګوټي جمله



خيره ۱۳۹

د تانجنتونو په څلوکونجي کې د مخامخ کونجونولويوالى د نورو مخامخ کونجونو سره مساوي دى.

$a + c = b + d$

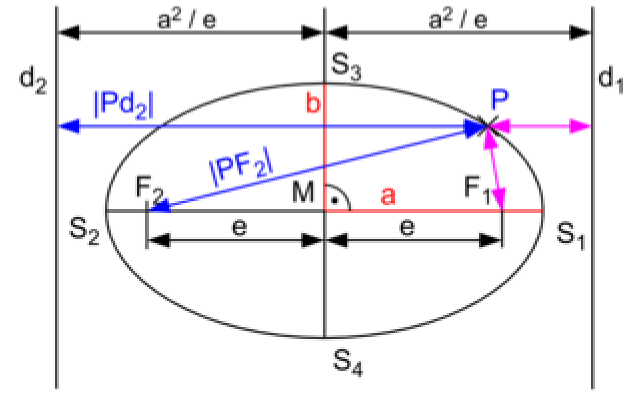
ايليپسی(بيضوي يا هګی) (دلته موخه هواره ده) Ellipse

پيلبيلګه:

د کړاو ميز جوړښت باندې موږ په اته کونجي اوبی يا حل کی تم کړی وو. دا چی په دې ډول يو ميز سره تل د زخمي کيدو خطر موجود دی

پوښتنه رامنځ ته کيږي چی : داسی يو را ګردشوی ښکلی شکل ، چی ګردی نه وي او منظم غوڅ وي، شته، چی د کړاو اړتيا پوره کړي؟ په ريښتونی ، داسی يو اوبی يا حل موجود دی، لکه چی لاندې خيره ښايي .چی هر د غاړې ټکی دوه ټکو واټنونو ته يو ثابت واټن لري

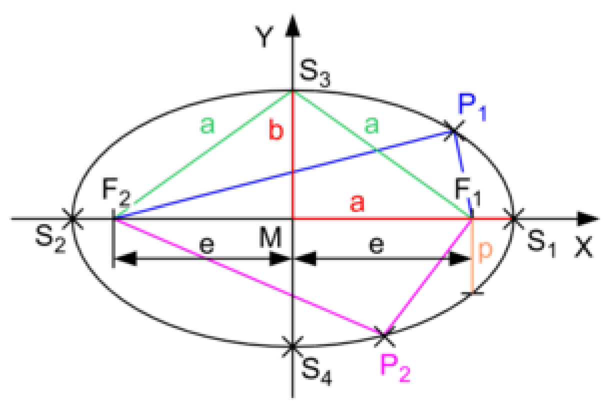
(c) ketabton.com: The Digital Library



پیژند یا تعریف:

د ټولو هغوټکو Pډیري ته چی له دوه ځای په ځاي ټکو F1 او (F2 سوزېدټکی یا بهتره سوزونټکو(څخه ثابته یا همغه واټن یا فاصله لري، ایلیپسی نومیږي

لاندې واټونو یا فاصلو ته سوزونوړانگی وایي. $|PF_2| = r_2 \wedge |PF_1| = r_1$



$$E = \{P \mid |\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = 2a\}$$

منځ ټکي) واړوی M په (Oته د ایلیپسی منځ ټکی وای، e ته د سوزونواټن یا فاصله یا لاینې ایکسځنتریڅیتایت (lineare Exzentrizität) یا لاینې ناراټوله وایي .ددې لویو لپاره لاندې اړیکي باوري دي:

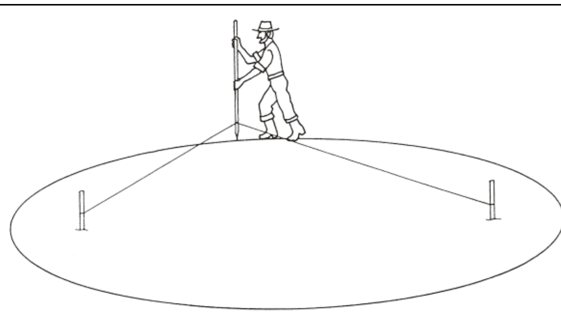
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I........r+r=2a \wedge II........a^2-b^2=e^2$$

په دې کی a او b د ایلیپسی لوي او ووړ نیممحورونه دي. اړیکه I روښانوي، که چیرې د ایلیپسی ټکی P د نیممحور a په اخر کی وټاکل شي، IIد پیوتاګوراس له جملی لاس ته راځي که د P ټکی د b نیممحور په اخر پروت وي .دواړه ناپانکرښی چی د سوزونټکي تیریږي او په دې په O کی ولاړه ناپای کرښه د ایلیپسی سیومیتري محورونه جوړوي .د خوښي په ټکی P کي هره په تانجنت ولاړه کرښه د سوزونوړانګو ترمنځ کونج نیموي .

د ایلیپسی جوړول د باغوان لخوا یا د ایلیپسي باغواني جوړښت:

دا ځیره دې ګران لوستونکي د تمرین په توګه وباسې٠ د یوې رسی، چی په 2 aاوږده وي، په داوړو سرونو کي موږي وتړئ او دا بیا په ځمکه ټکوهي، د یو بل)خوزیدونکی (موږي یا لرګي په مرسته دا پړی راکښ کړئ یا راکاږی او وګرځوی ، دلته کوم شکل چي پیداکیږي ایلیپسی ده او دواړه د پړي د سرونو ټکي چی موږي پرې وهل شوي سوزونټکي دي. ځیره په هر کواوردینات سیسم او یا په یوه میلي متر کاغذ کونځینتري یا راټولو ګردیو په مرسته بل جوړښت امکان پیداکیږي، چی سړی د یوه ټکي دوه ګردۍ د a او b وړانګي ووهي او هره د خوښي وړانګه د ننني ګردۍ په Pb او دباندنی ګردۍ په Pa کی غوڅوي. که د Pb څخه یوه پرته کرښه وویستل شي او د همغه تر Pa دوام، نو هرچیرته یو د ایلیپسی یا هګی یا بیضوي ټکی لاس ته راځي. د ایلیپسی هر ټکی داسی پیدا کیدی شي .پیژندل کیږي چی هر 2 bته غبرګ ټوټونی


ځیره ۱۴۱

د k= a / b فاکتور سره لنډ شوی دی. له دې سره د هوارې دننه هم تغیر خورې ددې فاکتور k په اندازه

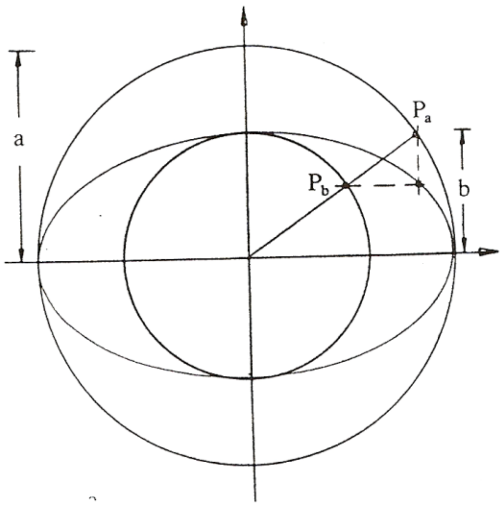
$$\cdot r \Rightarrow \pi r.(k.r) = F(hagai, baizawy)$$

او له دې چی r = a او (k.r =b) د لته r د ګردی » لویه نیمه اکسی(محور) ده

جمله : دایلیپسی هواره ده $F = \pi ab$:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایلیپسی چاپیرونی په ساده ډول نه شي شمیرل کیدی، په عمل کی په زیات وخت کی نزدیونه یا نزدې شمیرنه بسیا کوي.



شیره ۱۴۲

جمله : د ایلیپسی چاپیری:

$U \sim \pi(1,5 . [a+b] - \sqrt{ab})$

او یا ګردي ته ورته ایلیپسی. دا په دې مانا چی $a \sim b$:

$U \sim \pi . \sqrt{2(a^2 + b^2)}$

دا فرمولونه، که $a = b$ وي د ګردي چاپیري ته ځي:

$$U = \pi(1,5 . [a+a] - \sqrt{a^2}) = \pi(3a-a) = 2\pi a = 2\pi \Leftrightarrow$$

اویا په په همدې توګه یا $\Leftrightarrow$

$$U = \pi . \sqrt{2(a^2 + a^2)} = \pi . \sqrt{4a^2} = \pi 2a = 2\pi r$$

بیلګه:

کوم خورا لویوالی د بناغلی کړاو میز په ایلیپسی یانیضوي یا هګي شیره لرودی شي ؟

لوي محور $a = 1m$ پاتي کیږي، کوچنی محور دی: $b = 95cm$، داچی میز باید د درځ ژوروالي پورې غوځ شي. نو له دې امله هواره ده:

$$F = \pi .1.0,95 = 2,985m^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چاپیرې کیږي:

$$U \sim 1(1,5.1.95 - \sqrt{0,95})\ 6,127\ m \quad <=>$$

یا په همدې توګه د بیضوي یا هګۍ و د ګردي فورم ته یا ګردېڅېرې ته نږدې فورم نیسي U ~ 6,128 m. له دې امله هګېڅېره د میز لپاره مساعد اوبې یا حل دی.

تمرینونه

١ – په کالیفورنیا کې د یوزیمیت ملي پارک Yosimite National Park ، خپل ماموت ونو (Mammutbaumbestände) له امله خورا مشهور دی. کوم چاپیرې یې هغه ونه لري چې وړانګه یې ۷ ، ۴ متره وي؟

٢ – د لاس ساعت دقیقه ښونکې ۱،۵ سانتي متره اوږد دی(څرخونمحور–څوکه)، څوکه یې په یوه سانیه، یوه ساعت، یوه ورځ، یوه اونۍ، یوه کال کې څومره لار وهي؟

٣ – ځمکه نږدې ۶۳۷۸ کیلومتره یوه قطبي (اکواتور) وړانګه لري. قطبچاپیرې یې څومره دی ؟

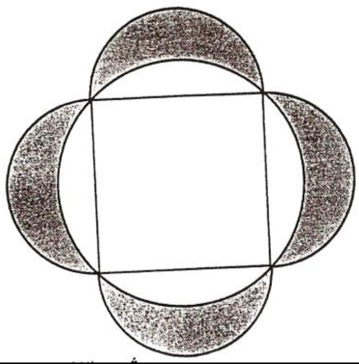
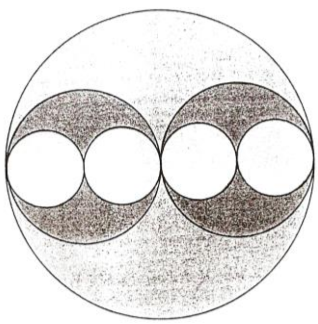
۴ – په خیال کې دې ولرو، چې له اکواتور یا قطب څخه یو پیرې غزوو (۴۰۰۰۰ کیلو متره)، کوم چې د اکواتور یا قطب له چاپیرې څخه یومتر اوږد دی. د یوه ځانګړي تخنیکي چمتووالی له لارې په هرځاي کې د ځمکې څخه په همغه واټن راوړل کیږي. ایا دا واټن پوره لوي دی چې سړی ددې ترمنځ یوه د (ګیرکلی) پاکي وځایوولی شي یا ځاي کړای شي؟

۵ – د غوڅهواره به یې د ځمکې سره څومره وي که د اکواتور یا قطب په اندازه جګ وي؟

۶ – په اکواتور یا قطب دوه ځایونه څومره لري دی، که یو له بل یوه اوږددرجې په

انداه لرې وي؟

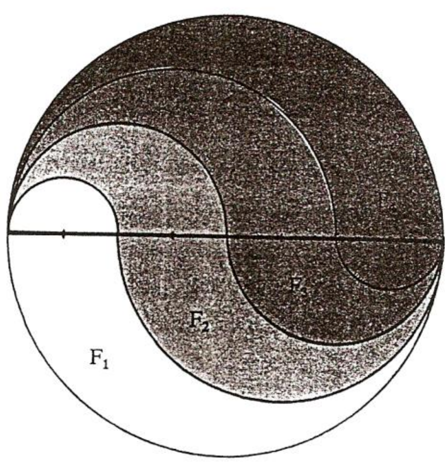
(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د ګردۍ [اپریا ل څنګه تغیرخوري، که د هغه وړانګه دوه رابره شي یا په همدې ډولنیمه شي؟ ۸ – وښایئ: د مربع هواره د څلورمې میاشتو(سپوږمیو) د هوارې سره مساوي ده؟	
د څیرې سره سم د ګردیو هوارمتن یا د هوارو دننه د مساوي وړانګو سره وټاکئ. د ا هره یوه د لویې ګردۍ په سلو کې څومره جوړوي؟ وښایئ، چط څلورو واړو ګردیو چاپېرۍ د همغې وړانګې سره دومره لوي دی لکه د راچاپیره یا دباندې ګردۍ چاپېر. ۱۰ – د یوې مربع د باندې او دننه یوه ګردۍ راګرځیدلې. د دواړو ګردیو هوارې یو بل ته څنګه متناسب دي یا ځانونه نیسي؟	

۱۱ – د دوه ګردیو منځ ټکی د مساوي وړانګې r = 7,2 cm سره، یو له بل دومره لري دي لکه دا وړانګه . د دواړو ګردیو ګډ هواره اندازه کړئ، چې څومره ده؟

۱۲ – په یوه ګردۍ ، چې وړانکه یې r = 10 cm ده، که یوه ګردیکړۍ کیښنول شي، چې هواره یې دومره لویه ده لکه د دننه ګردۍ هواره. د دباندې ګردۍ وړانګه به څومره وي؟

۱۳ – د یوې ګردۍ برخهوارې، F_1 او F_2 ، لکه په څیره ۱۴۵کي چې ورکړ شوي، وښایئ، چې وړانګه یې r = 4 cm



څیره ۱۴۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي. وښايي چې هواره په څلورو مساوي هوارو ټوټه شوې ده (ځيره ن ۱۴۸)

۱۴ – د هغه ګردې وړانګه وښايي ، کوم چې همغه هوارخوندي لري لکه :

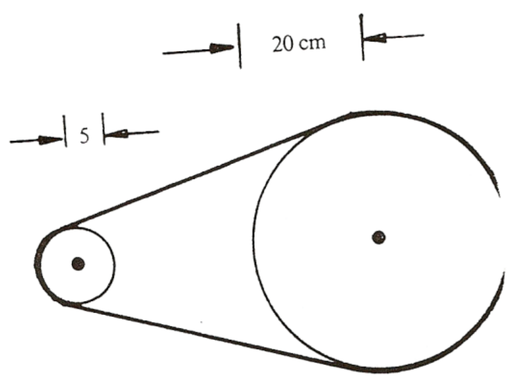
الف) يوه مربع، چې داړخ اوږدوالی يې ۵ سانتي متره وي.

ب) يوه روتی چې نيمي يې ۴ سانتي متره او ۶ سانتي متره وي .

پ) يو مساوي اړخيز دريکونجی چې د اړخ اوږدوالی ۷ سانتي متره وي.

۱۵ – د يوه پنډ پينسيل سره يوه ګردۍ وهل کيږي، چې دننی وړانګه يې ۵ سانتي متره وي. داچې پنسل يو سانتي متره پنډ دی ، نو دا په ريښتينی يوه ګرديکړی ده. د دې ګرديکړی هواره وشميری.

۱۶ – يوه ساتليت يا جوړه، يعنی مصنوعي سپوږمی، له ځمکی په يوه ګردی راڅرخي، چې سرعت يې په سانيه کی ۸ کيلو متره دی . د ځمکڅرخون لپاره دا ۱ ساعت او ۲۸ دقيقو ته ضرورت لري. وښايي چې دا ساتليت يا جوړه سپوږمی يا مصنوعي سپوږمی له ځمکی څخه په کوم جګوالي الوزي؟



ځيره ۱۴۶

۱۷ – د يوه څرخونکړی يا بهتره څرخونپټی په مرسته کيدی شي څرخونحرکت يا څرخونخوزون د يوې ځپی په بلی ځپي راوړل يا واړول شي. په يوه ورکشاپ کی يوه دقيقه يعنی ډيره ټيك اره په بريښنا ماشين چلول کيږي يا په حرکت راوړل کيږي. د ارې خوزون يا حرکت څومره زر يا تيزدی يا چټك دی، که د ماشينڅرخونڅرخی يا ګاډيل (r = 20 cm) په ثانيه کی ۸۰۰ ځله وګرځي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ - کوم چاپیری او هواره الیپسی یا بیضوي یا هګیخیره لري که ولر:

a) a = 40 cm, b = =12 cm, b) a = 6 cm, e = 1 cm

c) r_1 = 4 cm , r_2 = 3 cm , w(r_1,r_2) = 90°

۱۹ - وښايي: په يو په بل پرتو اليپسو کی دی $a_1 = a_2$ او $b_2 = b_1 /2$ ، نو دننی ايلپس بيضوي همدومره لويه ده، لکه په دې دپاسه ايليپسي يا هګيخيرې غاړه.

۲۰ - ځمکه په يوه کال د لمر څخه نزدې د يوې ګردی په څير راڅرخي. ددې چاپيري وړانګه نزدې ۱۵۰ میلیونه کیلومتره ده.

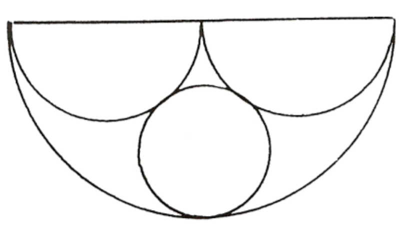
الف) د څرخونلار اوږدوالی څومره دی ؟

ب) په کوم منځنی سرعت (کیلو متره په سانیه کی) ځمکه په خپل چاپیري راڅرخي؟

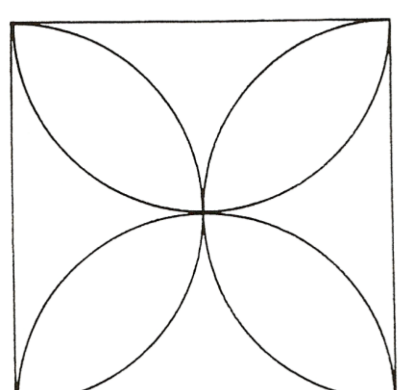
پ) په ورځ کی ځمکه نزدې څومره واټن تی کوي ؟

ت) په ریښتونی ځمکه د لمر څخه په یوه ایلیپسی لار راڅرخي، چی په یوه سوزون ټکي کی پخپله لمر قرار لري. د لته هغه لنډ واټن ځمکه لمر ۱۴۷ میلیونه کیلو متره دی، او لرې واټن يی ۱۵۳ میلیونه کیلو متره دی. په دې ورزيات ورکړو سره کوچنی نيممحور وښايي، او همدا ډول د ايليپسي يا بیضوي هواره او(نزدې) چاپیری هم.

۲۱ - د ټولی هوارې کومه ټوټه برخه رنګ ده؟



خيره ۱۴۷



(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – د دوه ګرديو وړانګی ځان داسی نيسي يا په تنساب کی سره پرتی دي، لکه 8 : 5 په لويه ګردۍ کی يو ګرديبرخه موجود ده ، چی د هغی لينده دومره لويه ده لکه د کوچنی ګردۍ وړانګه r = 10 cm. وشميرۍ

الف– منځتېکي کونج

ب – د ګرديبرخی هواره.

۲۳ – کوم منځتېکي کونج په لينديډ پوري اړه لري، چي

الف) ټيك همدومره لوي وی لکه وړانګه ؟

ب) دوه واره دومره لوي وی لکه وړانګه ؟

پ) نيم دومره لوي وی لکه وړانګه ؟

۲۴ – د يوې ګرديټوټونی منځ ټکي کونج وشميری ، چی هواره يی همدومره لويه وي، که په وړانګه يی چی مربع .

۲۵ – يو مصنوعي ساتليت يا جوړه سپوږمۍ ځمکه په ۲۰۰ کيلو متره جګوالي راګردوي يعني له ځمکي راګرځي يا بهتره له ځمکی راځرخي. د راځرخونوخت يی ۱ ساعت، ۲۸ دقيق او ۲۶ ثانيي دي.

الف – سرعت يی څومره لوي دی؟

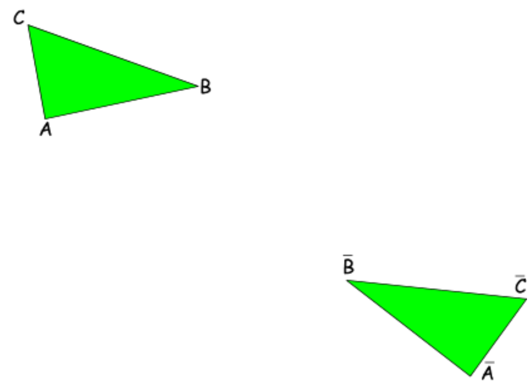
ب – په يوه دقيقه کی څومره لار وهي؟

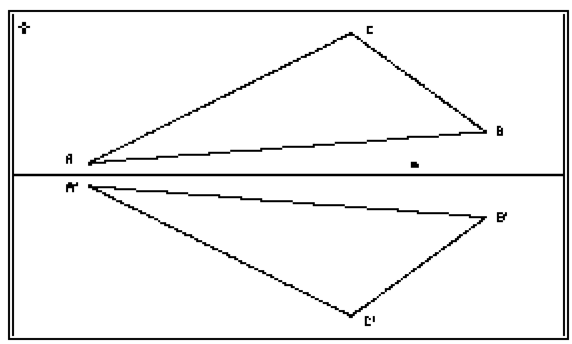
(c) ketabton.com: The Digital Library

کونګروراینخ ځیرونی(برابرې ځیرونې)

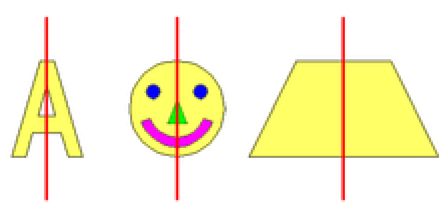
Kongruenzabbildungen

Congruence mapping



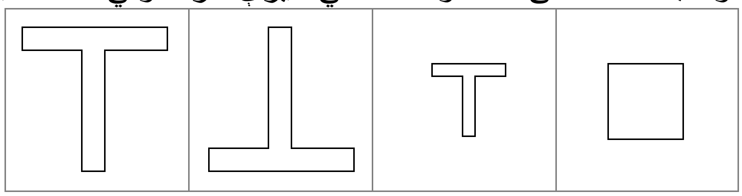


سیومتري ځیرې یا شکلونه Symmetrische Figuren

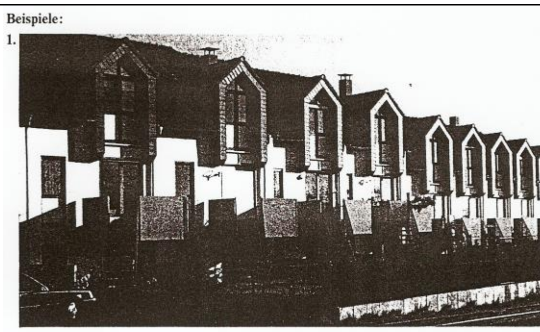


د هوارو څخه مو ولیدل، چی د هغو ترمنځ سیومتري ځیرې یا شکلونه، یعنی داسي په نامه برابرې یا مساوي او نیمایي ځیرې:

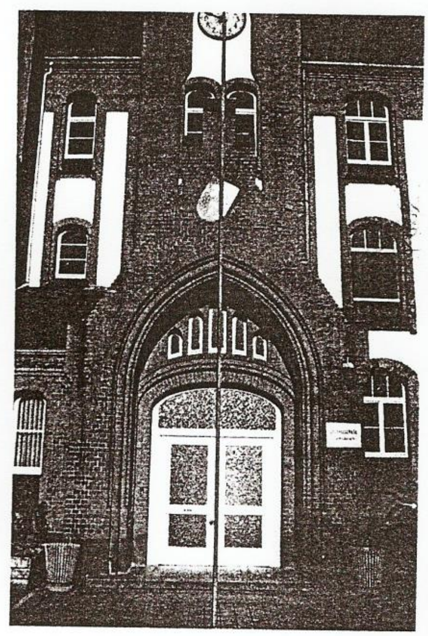
د شمیرپوهنی له مخی د ساده شمیروړتوب له امله تخنیکي، د هغو د ساده بدله ونی له امله، او د بڼکلا له مخی، د هغو د همغسي ځیرې ځرګندوني له امله یو ځانګړی ځاي نیسی)



په پورته ځیره کې کیڼ لور ته دوه د ټي ځیرې یو بل پټوي، کیڼ لور دې د کښلی ټي سره برابرپټوونی ټي وکښل شي٠ دا محور سیومتري ځیرې دي٠
په ځانګړي ډول د اخرني شکلونو ځخه کتل کیږي چی سیومتري تل دا مانا نه لري چی شکلونه دې په دوه نیمو وویشل شي، کیدی شي دوه یا زیات شیان وي ، چي د هغو د ترتیب له امله یو له بل سره خیالي سیومتري اړیکي ولري. دوه یا زیات شکلونه لکه چی ځنګه ضربالمثل وايي چي داسي یو بل ته ورته دي لکه » دوه هګی .» له دې ځایه تر کونګروانیڅ یو پل دی



ځیره ۱۴۹


ځیره ۱۴۸

پیژند : هندسي شکلونه کونګروینځ (برابر) بلل کیږي، که په فورم ، بڼه (ځیره) او لویوالي کی یو بل سره یو شي وي او یواځي ځاي یی یو له بل بیل وي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : زه به وړانديز وکړم، چې کونګرواينخ څيروني » ورته برابرې څيروني » وبولو، ځکه، چې يو بل ته ورته دي او برابرې هم دې ياني که يو پر بل واچول شي يا يو پر بل پريوزي، نو يو بل پټوي٠

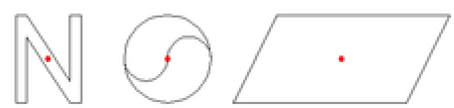
د دوه شيانو A او B د کونګرواينخ د ليکلو سومبول په لاندې ډول دی:

A ~ B <=> A ~ B

د کونګرواينخ خويونه :

١ - کونګروينخ څيرې يا - شکلونه يو په بل پريوځي يا يو بل پټوي .

٢ - کونګروينخ څيرې يا شکلونه د کاغذ په هنري غبرګولو يا غوڅولو په بنسټ، کيدی شي يو په بل پريوځی٠



پورته څيره ټکی سيومتري ده ٠

غوڅول د شمير پوهنی کار نه دی، مګر غبرګول کيدی شي وي.

لنډ : محورهنداروني او کربنهنداروني ، څرخون، ټکيڅيره ونې او راکښني ګونګرواينخ څيره وني دي٠

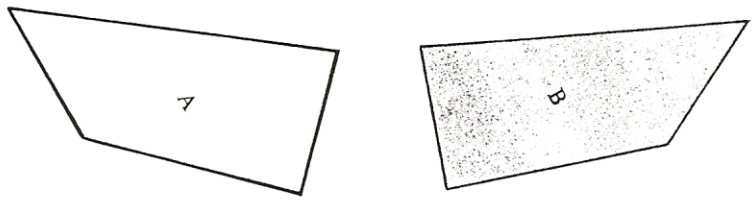
پوښتنه کيږي چی :

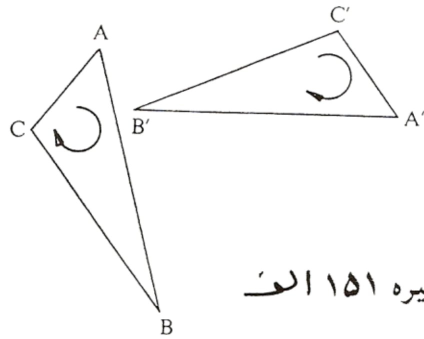
په شميرپوهنه کی عمليي شته چی د هغي په مرسته يا د هغي له لارې يا د هغی په وسيله څيرې يو په بل پريوتی - او پټيدی شي ، داسي کارونی يا عمليي په کړنه يا عمل کی شته او دا کونګرواينخ څيره وني يا څيره کوني بلل کيږي.

هر کونګرواينخ څيره يا شکل او لويوالی (منځهواره) ساتي. په دې ډول بايد کونجونه او اوږدوالي ريښتونی وي، چی په دې ډول د برخو تناسب، کربنوتناسب، برخو تناسب غبرګ کرخو تناسب (ځاننيونه) ريښتونی دی. لاندې به وښوول شي چی زيات تر زيات د کونج څرخونلور يا سمت تغير خوړونکي دی، که څرخونلور تغير ونه خوری نو يولوريز کونګروينخ بلل کيږی او که څرخونلور تغير وخوري نو شکلونه مخامخ لوريز يا په څټ يا برعکس کونګروانيخ بلل کيږي

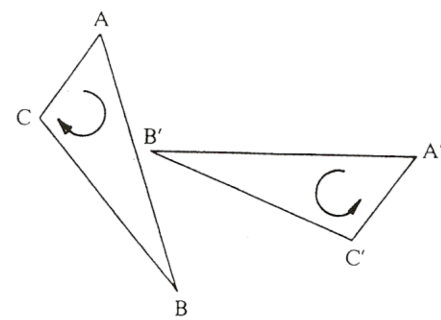
(c) ketabton.com: The Digital Library

ثیره ۱۵۰



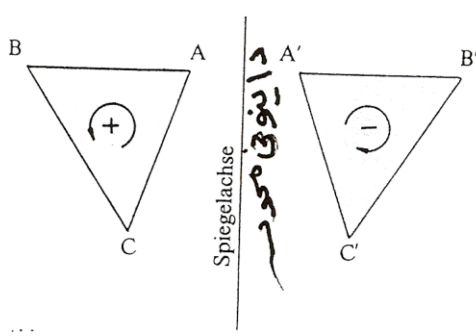


ثیره ۱۵۱ الف



ثیره ۱۵۱ ب

کرښهندارونه(په کرښه منعکسونه) Geradenspiegelung

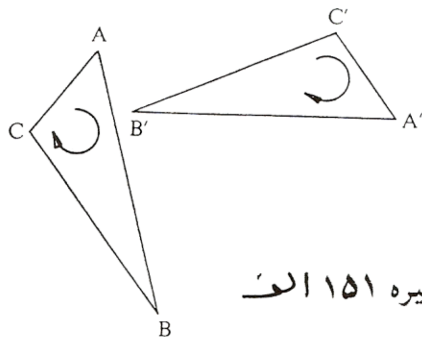


ثیره ۱۵۲

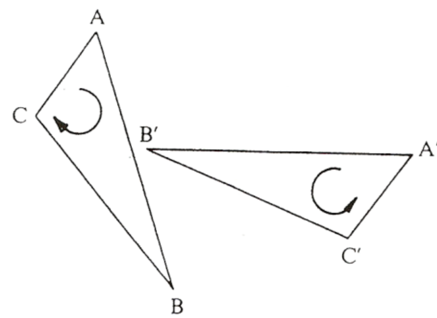
یو کونګروانیځ ثیره ونه مو په پیل ثیرونو کی وښوده. کرښ اینونه یا کرښهندارونه یواځنی مخامخ کونګروینځ ثیره ونهی ده ، ځکه چی د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښیره ۱۵۰

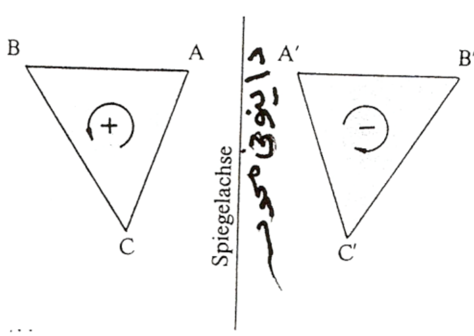


ښیره ۱۵۱ الف



ښیره ۱۵۱ ب

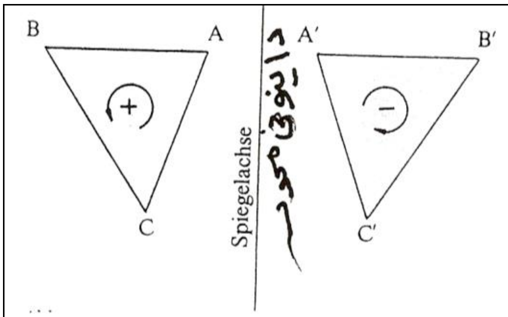
کرښهندارونه(په کرښه منعکسونه) Geradenspiegelung

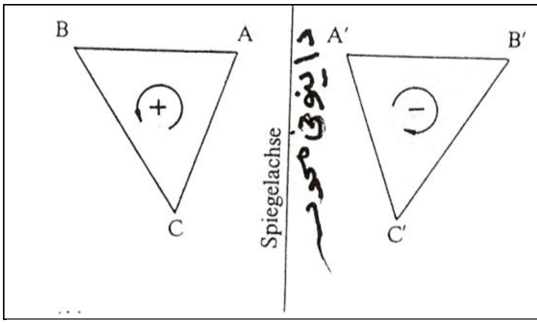


ښیره ۱۵۲

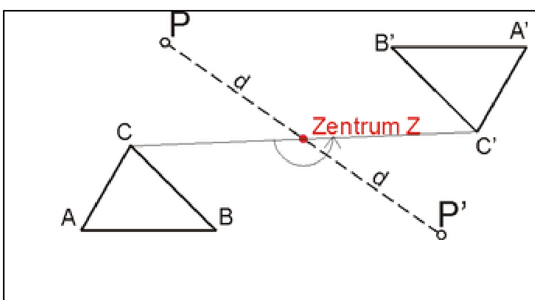
یو کونګروانیخ ښیره ونه مو په پیل ښیرونو کی وښوده. کرښ اینونه یا کرښهندارونه یواځنی مخامخ کونګروینخ ښیره ونهی ده ، ځکه چی د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

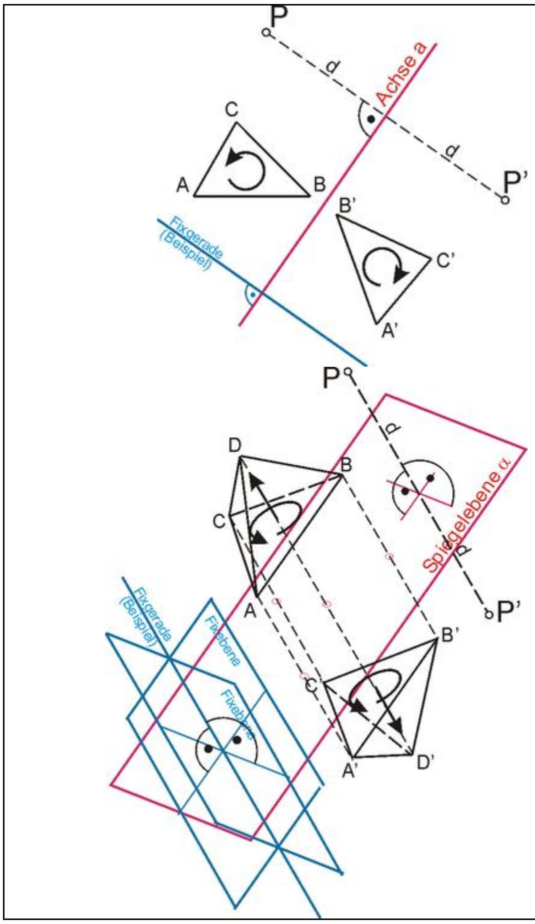
په کربنه هندارونه(پ کربنه منعکسونه): په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانخ تشکیل وښوده. په کربنه انعکاس ورکول یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د زویې د لور منځ ته په کې راځي.	

په کربنه هندارونه(پ کربنه منعکسونه): په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانخ تشکیل وښوده. په کربنه انعکاس ورکول یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د زویې د لور منځ ته په کې راځي. لاندې ځیره دې وکتل شي	

د دري ګوډي ABC مثبت- یا زیاتونلوریز څخه یو منفي لوریز یا کمونلوریز دري ګوډی 'A'B'C جوړېږي .پخپله کربنه g په اینونکی کربنه یا په اینونکربنه یا په هنداروونکربنه بلل کیږي او یا د اینه ونې محور. په دې تول پراته ټکی تغیر نه خوري) ځاي په ځاي ټکی (فیکسټکی) Fixpunkte دی، له دې امله کربنې g ته د ځاي په ځاي ټکوکربنه هم وایي. ټولی په g نغولاړې(لنډ: ولاړې) کربنې د اینه کولو په بنسټ په خپل ځان څیره کیږي، مګر ټول ټکي د g سره د غوښتکي په استثني یا بی له غوښتکي کربنې ټکي د خپلي فاصلی په ساتلو ځاي بدلوي. له دې امله دا کربنې ځاي په ځاي کربنی بلل کیږي ۰
په لاندې څیره کې کیڼ لور ته درې ګوډی په ټکی ، چې د کښلي کربنی منځ ټکی دی ، ښي لور ته څیره کیږي او دا په همدې ټکي۰ کټک کیږي، چې د هر څیره ټکی واټن د همدې ټکي څخه همغ دی لکه د څیره کووني ټکی واټن له دې منځټکی څخه .

په پورته محور اینه ونه کی لیدل کیږي، چې د محور څخه د څیرې او څیره کونکي ټکي سره برابر دي، خو ګورو، چې څرخون لور یې همغه څرخونلور نه ده۰	

(c) ketabton.com: The Digital Library

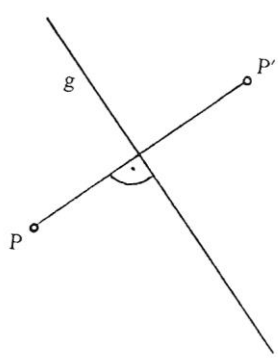


په مخامخ خیره کې اېینه ونې کښل شوي دي

د کرښ اینوونو(هنداروني یا انعکاس) جوړښتخیرنه

۱ - دا ټکي له هر په نخه ټکي (ډیرګوډي کی د کونجټکی او په ګردي کی د منځ ټکی) په g ولاړ یا زوړند پریوځي او دا له g اخوا په فاصله د |Pg|غزوي. (دا د مخه راغلي .)

۲ – ټول ټکی د اصل په ترتیب سره وتړی(په ګردی کی : په M'یو ګر دی د r'=r په وړانګه   ووهئ). د خیرې او پخواخیرې(اصل) د ټولشکل لپاره بیا g سیومتریمحور دی، دا په دې مانا، چی ټوله خیره د اینوني سره په خپل ځان خیره کیږي .

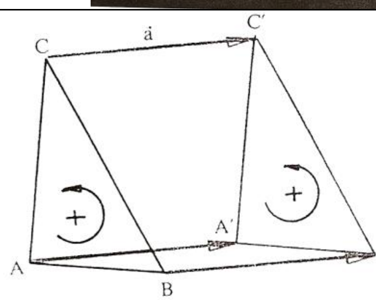


خیره ۱۵۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

هره کرښ اینوونه Sg کیدی شي چې په g بیا کرښ اینونو باندې په همغه محور بیرته راوکرځول شي.دSg په یا په ښت ښیره ونه یا مخامخ ښیره ونه بیرته Sg دی. دا دښیرو زیاتواره ښیره ونو ځانګړی حالت د٠
دلته بیا سړی د ښیره ونو د ځنځیرونو ښخه خبرې کوي او د دې لپاره تړلنخښه »°« په کار اچول کږي. کرښ اینوونه د ګونګراینښو لاندې یو مرکزي ځای یا منځځای لري، ځکه چې ټولی نورې اینونی د کرښ اینوني ځنځیرونو باندې بیرته راګرځول کیږي، لکه چې په لاندې کی به وګورو.

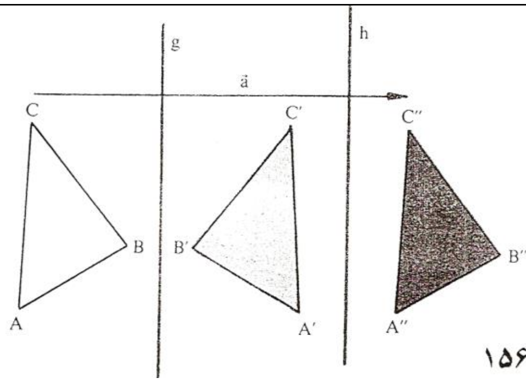
راکښنه یا کښونی Verschiebungen

پیژند : غبرګکښول ،لنډ کښول یا وړل Va د خپل وړلوکتور یا وړونوکتور یا کښونوکتور له لارې یواځنی ټاکلی دی (ددې لپاره د وکتور لوست وګوری٠	
د وکتورونو لاندې مساوي اوږده او په یوه لور غشي پوهیږو، کوم چې د ښیرې وتلتکي په ښیرټکو لوریز وي . (لنډ : د وکتور لاندې یوه لوریزه کربښه پوهیږو، د ځانګړو شرایطو لاندې) د کښونو لپاره پریکړی د وکتور اوږدوالی | a | دی او د وکتور لور. کښول په همغه لور کونګرواینښیروني دي، دا په دې مانا چې د ښرخونلور ساتلی پاتي کیږي٠	 ښیره ۱۵۵

د کښولو جوړښتښیرنه
۱ - په هر نخښه شوي ټکي (په ډیرګوډي کی ګوډونه او په ګردۍ کی منځټکی)د ګښولو وکتور a وکاروی (برابر یا مساوي اوږده، همغه لوراو غبرګ غشی.)
۲ - د وکتورونو اخرټکي سره د اصل په پرلپسي ترتیب ونخلوی. (په ګردیکښونو کی : په اخر ټکي د r وړانګي په اندازه ګردۍ ووهی)کښونه ځاي په ځاټکي نه لري(که د صفر وکتور دي په نامه identität ایدنتیتي یا کټمټ ښیرونی ښخه تیر یا صرف نظر شو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

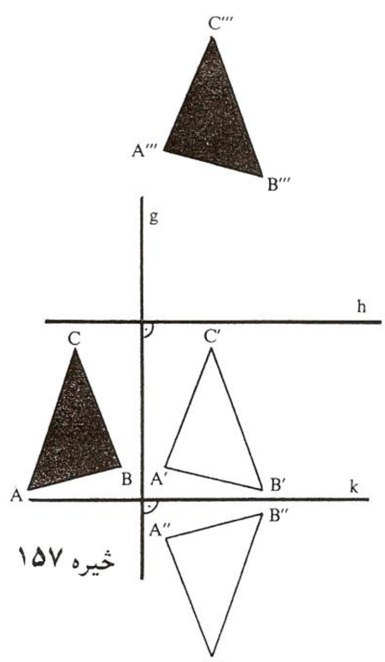
ددې لپاره ټولی له a سره غبرګی کربښي ځاي په ځاي کربښی دي، دا په دې مانا چی دوي په خپل ځان څیره کیږي .هر کښنول یا نوه هم ښنه هره کښنه ونه Va د V-a کښنولو له لارې بیرته راوګرځول کیدی شي.



۱۵۶

دلته a- وکتور د a سره غبرګ او همغومره اوږد دی، مګر په مخامخ یا په څټ لور .هره کښنونه په دوه کربښو g او hله دوه واره اینولو یا هندارونو له لاری بیرته لاس ته راوړونکی ده، چی واټن d یی همدا د کښنولو وکتور نیم اوږدوالی ورکوي. دا بدلون یواځنی نه دی: پس په عمومي ډول باور لري: $V_a = S_g \circ S_h$ د g||h سره او |a| = 2d ، چیرته چی d د g اوh ترمنځ واټن ورکوي.

په یوه ځانګړي ډول یو په بل پسي صورت نیونکی زیات کربښ اینونه دي په دې ځاي کی ذکر شوي وي، څکه چي دا – لکه څنګه ټول نور واریانت یا



خیره ۱۵۷

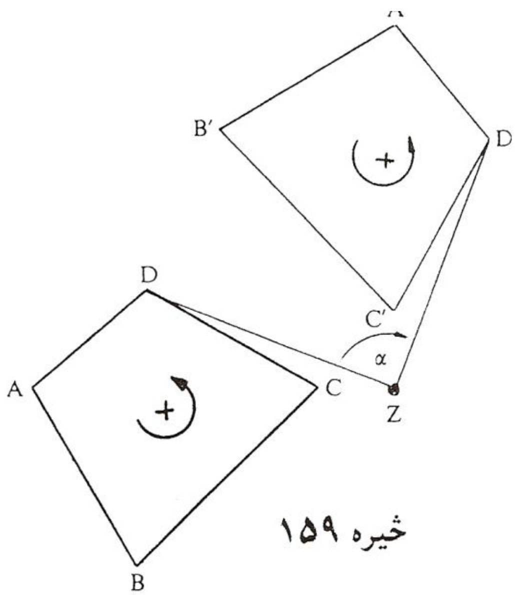
اووښتونی – یو ساده بنستیز فورم نه ورکوي : خویوونکي یا کښووني اینونه.
ټرنه $G_{a;g} = S_g \circ V_a$ یو کښووني اینونه ده،
که $a \parallel g$ وي.
هره کښووني اینونه یا هندارونه د درې کربښ اینونو $S_h \circ S_k \circ S_g$ ټړل دي، چیرته چی کربښي h او k ، کوم چی دکښووني ځاي نیسي، په g نیغی ولاړې دي:
$h \parallel k ; h \perp g$.
یوه کښنوني اینونه ځاي په ځاي ټکي نه لري، مګر g د ځیرووني ځاي په ځاي کربښه ده. هره کښووني اینونه $G_{a;g}$ په $G_{-a;g}$ سره بیرته راکرځول کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرخونونه(ځرخون)

خیره ۱۵۸

تعریف : څرخون $D_{Z;\mu}$ هغه ځیرونه ده، چی په ورکړ شوي ټکي Z (څرخونټکی یا څرخونمنځ) هر اصلی ټکی P په یو ځیره ټکي 'P داسی تنظیم کړي، چی $|PZ| = |P'Z|$ او $w(PZP')=\mu$ چی μ یو د مخه ځاي په ځاي ورکړ شوی کونج دی، د څرخونکونج.



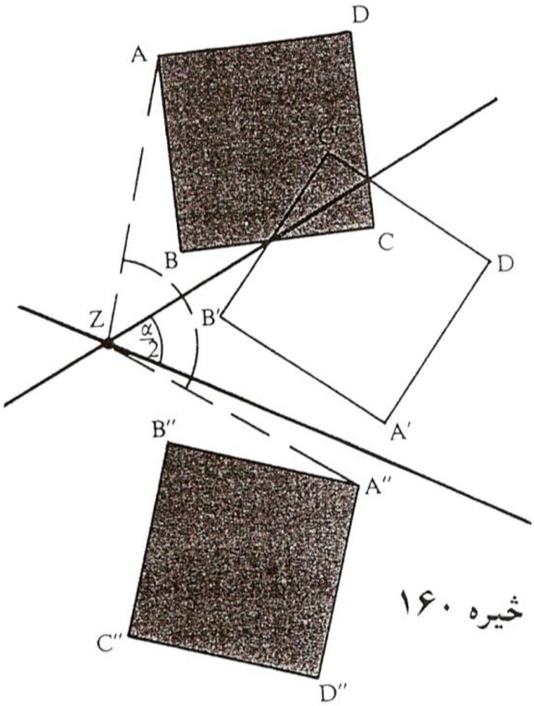
ځیره ۱۵۹

پس یو څرخون د څرخونټکي Z او څرخونکونج ځخه یواځنی ټاکلی دی. د څرخونلور په مخ نخه له مخه ورکړ شوی.
(ددې لپاره دې د مخه تري لوستونه پام کی وي).

دڅرخون جوړښت ځیرنه

۱ – په ټولو په نخښه ټکو (د ډیرکونجیز کونجټکي، په ګردی کی منځټکی) او

(c) ketabton.com: The Digital Library



شیره ۱۶۰

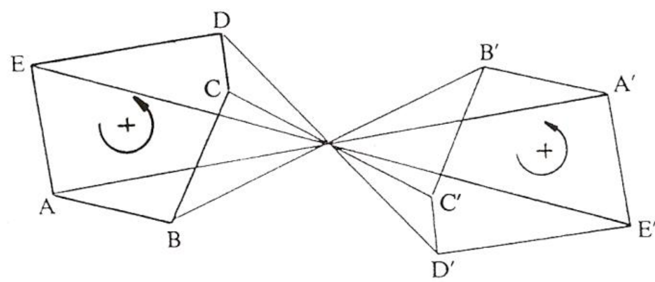
حرخونمنځ Z یوه وړانګه کیږدی . د
هرټکي P واټن PZ په یوه مرستندوي
وړانګه وکاږی، کوم چی له PZ سره
کونج جوړوي.
۲ –لاس ته راغلی ټکی 'P په اصل
پرلپسي ترتیبیو د بل سره ونښلوی
(یا په همدي ډول په 'P یو ګردی
د r' = r په وړانګه ووهی).
څرخون D_z یوه همغه لوریز
کونګروا ینځ څیرونه ده.
که څرخون D_z له څرخون په0° :
ایدنتیتي یا کټمټ، توپیر ولري، نو دا
یواځي یو ځای په ځای ټکی لري: پخپله Z .

(c) ketabton.com: The Digital Library

هر ځرخون D_z د پە کونج کیدی شي چی پە ځرخون D_z پە کونج -
بیرته راوګرځول شي. د جوړښت ځیړنی ځخه پیژندل کیږي، چی هر ځرخون D_z
د دوه کرښي اینوني چی پە ټکی Z کی پە کونج 2/ یو بل غوځوونکو کرښو g
اوh ځاي نیونکی کیدی شي: ځرخون : $D_{Z;\mu} = S_g \circ S_h$
د $h = \{Z\}, \mu = 2.w(g;h)$ g سره. (ځیره)

تعریف : یو ځرخون د ځرخونکونج $\mu = \pm 180°$ سره ټکی اینونه بلل کیږي. دا پە دې مانا چی پە ټکي اینه کیږي.

پە دې توګه ټکی اینونه هم یو همغه لوریز کونګروانیځ ځیرونه ده. (ځیره ۱۲۸)



ځیره ۱۶۱

پە ټکي اینوني جوړښت ځیړنه

۱ – د اصلي ځیرې هر پە نخښه ټکي ځخه یوه کرښه وکاږي، چي لە اینونکي ټکي Z تیره شي، او |PZ| واټن د Z پە بله لور وباسی.
۲ – داسی لاس تە راغلي ټکي پە پرلپسی ترتیب سره ونښلوی. (همداسی پە 'M یو د $r' = r$ وړانګي ګردی ووهی).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه

هره کونګروانیخ څیرونه د کرښی اینونی د ټرلو څخه لاس ته راځي. دلته بیا هر کرښ اینونه څرخون لور بدلوي. له دې امله لرو:

> د کرښ اینونو (څرخونو یا کښونو) جوړه تعداد یا ګڼون یو همغه لوریز کونګروانیخ څیرونه ده. د نا جوړه تعداد یا ګڼون کرښ اینونو (کرښ اینونی یا کښونو اینونی) یو نا همغه لوریز کونګروانیخ څیرونه ده.

دیو په بل پسی د کونګروانیخ څیرونو کارونه بیرته کونګروانیخ څیرونه لاس ته راکوي. دا چی هرکونګروانیخ کرښ اینونه ده نو د پای کونګروانیخ یو په بل پسی اینونه ده. برسیره پر دې هر کونګروانیخ بیرته راګرځیدلی یا په څټ کیدلی شي. که له دوه وو زیات کونګروانیخ څیرونی یو په بل پسی منځ ته راشي ، نو په خوښه اسوځیاتیو را یوځای کیدی شي. الجبري ټول کونګروانیخ څیرونی یو ګروپ جوړوي د ناپیلي کتمټ څیرونی سره، دا په دې مانا چی ناپیلی څیرونه ، چی په کارونه کی تغیر نه راولی کتمټ څیرونه ده. (د ګروپ لپاره دې نښلونی برخه وکتل شي)

په عمل کی د دریګوټ ی کونګروانیځ جملی له پوره اهمیت ډکی دی

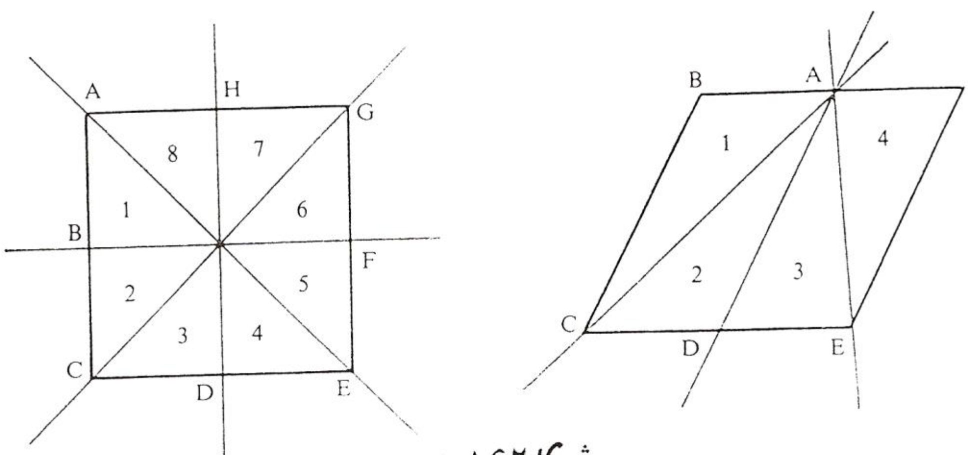
> **کونګروانیخجملی:**
>
> الف) په خپلو دري اړخونو کي (SSS) یا
>
> ب) په دوه اړخونو او لهدې اړخونو رابند کونج کی(SWS) یا
>
> پ) په دوه اړخونو کی او د اوړداړخ مخامخ کونج کی (SSW) یا
>
> ت) په یوه اړخ او دواړو راګیر کونجونو کي (WSW) یو بل سره وخوري یا سره مساوي شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – په یوه غبرگ اړخیز ABCD هندارونی $S_{BC} \circ S_{AB}$ وکاږی.

۲ – د کونگروانیخ جملو په مرسته وښایي، چې غوڅکرښی پیلځیرې په کونگروانیخ برخو توټه کوي.



خیرۍ ۱۶۲

۳ – په یوه بیلگه وښایي :

الف) $S_g \circ S_h \models S_h \circ S_g$

ب) $S_g \circ (S_h \circ V_g) = (S_g \circ S_h) \circ V_g$

۴ – د «هیلگولند» کیشتی او د «کوین ماری» لوي کیښتی ترمنځ واټن **۵** کیلو متره دی . هیلگولند کیشتی په شمال لودیځ ۶۰ درجي(N60°W) دلته N د شمال او W د لودیز لپاره دی، کرښلایني حرکت کوي او «کوین ماري» په **۸۲** درجو جنوب لویدیز لور حرکت کوي (S82°W) دلته S د جنوب لپاره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې وخت کې د «هیلګولند» څخه « کوین ماری » په ۷۰ درجو شمالشرق(N70°O)

دلته O د ختیز لپاره ده، لیدل کیږي.Nord,, Süd, West, Ost

الف) په کوم کونج دواړه لارې یو بل غوځوي ؟

ب) د دې وخت له ځاي څخه به هغه غوڅتکی څومره لرې وي؟

۵ - وي دې ABC یو مساوي پښیز دریګوډی، له بنسټ AB سره، g او h د کونجونو ∝ او ß کونجنیمي دي. وښايي چې دریګوډي ABP اوABQ کونګروراینت دي. (P او Q د مخامخ اړخ سره د کرښو غوڅتکي دي).

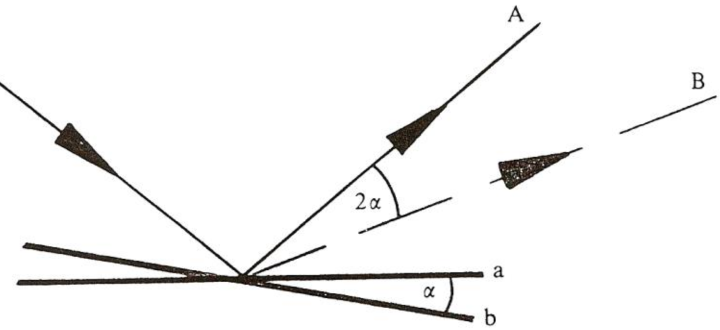
۶ - څومره کورونتځیرونی موجود دی چې لاندې څیزې یی په خپل ځان ځیره کوي: کرښی ، ګردی، غبرګ اړخي، مساوي پښیز دریګوډي ، ولاړ ګوډی، راوتی، مربع، مساوي اړخیز دریګوډي ؟ کتمتځیرونه دې نه په کی شمیرل کیږي.

۷ - یو څرخیدونکی هنداره ، یوه هنداره ده ، چې په یوه خپله ایښوول شوي هواره پروت محور باندې څرخوړ ایښوول شوي. ترتیب په څیره کی له پورته لور انځوریږي.

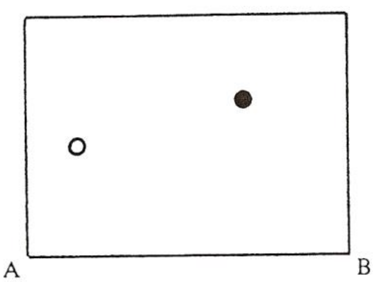
د نور له چینی L څخه یوه وړانګه په هنداره د (a) په ځاي یا ځاینیوون کی پریوزي او د هندارونی یا انعکاس قانون سره سم(پریووتکونج = وتلکونج) د$\overline{OA}$ لور باندې بیرته غورځول- یا اینه کیږي یا منعکس کیږي. اوس نو هنداره د ∝ په کونج د (b) ځاي یا ځاینوون ته راوړل کیږي یا راځرخیږي. دلته نو د نوروړانګه د $\overline{OB}$ په لور هحینداره کیږي یا غورځول کیږي یامنعکس کیږي. وښایی :

$$w(\overline{OA}; \overline{OB}) = 2\propto$$

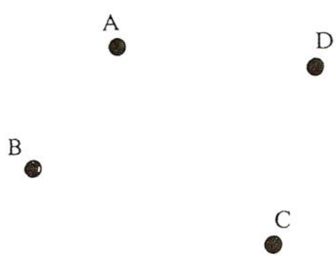
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۱۶۳



خیره ۱۶۴



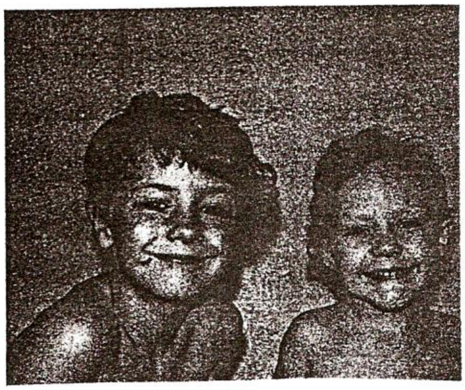
خیره ۱۶۵

۸ – د کوټې منځ کې دوه توپونه ایښول شوي یو سپین او بل تور. د کوټې له دیوالونو څخه توپ بلی لور ته نه شي تللی سپین توپ دې داسی ووهل شي چي تور توپ ووهي.دا د اینه ونی یا انعکاس د قانون سره سم په دیوال AB لګیږي. (حیره) د کرښو لار وکاږئ « تورتوپ – اینه ټکی یاانعکاسټکی – سپین توپ»

۹ – دا د یوه کور څلور برجونه دي، چی په A,B,C,D سره یی ښایو(خیره) داسی یو ځای S شته ، له کوم چی برج A د برج C څخه یا سره پټ شي او برسیره پر دې له دې ځای څخه A د B او D د منځتې په څیر ښکاره شي یا ځان وښايي .؟

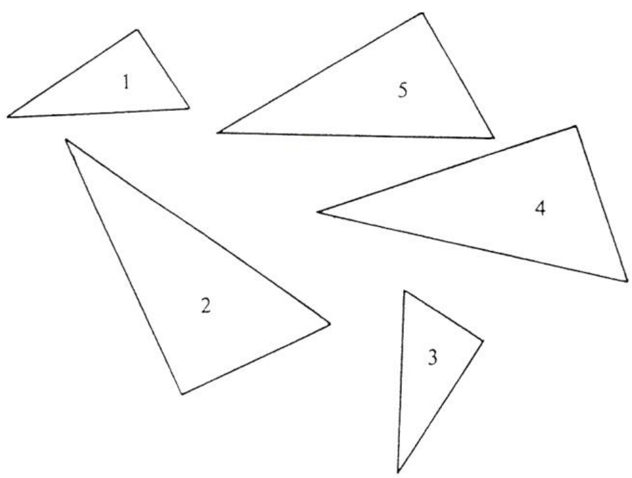
(c) ketabton.com: The Digital Library

ورته والیخیرونه Ähnlichkeisabbildung


خیره ۱۶۶

که چیرې دوه غبرګوني کوچنیان وکتل شي ،نو سم د لاسه ویل کیږي، چی دا دوه یو بل ته ورته دي. شیان یا لیدیدونکي هم یو بل ته ورته بلل کیږي، که ګڼ خویونه یا ګډې نخښې ولري، یعني څرګند یو بل ته ورته وي، مګر سره له دې هم یو له بل توپیر کیدونکی وي. په شمیرپوهنه کی داسی نه شو ویلی چی دا شیان یا لیدیدونکي یو بل ته زیات یا کم ورته دی، دا خیالي قضاوت دی چی په شمیرپوهنه کی داسی قضاوت ځاي نه لري.

پیلبیلګه:



خیره ۱۶۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې درېګوټي د کونجونو $\beta = 60^\circ$, $\alpha = 30^\circ$ او $\gamma = 90^\circ$ سره وکاږي. ددې کونجونو سره له يوه زيات درېګوټي موجود دي، چې په ځانګړي توګه د ولاړ کونج ورکړه يوائيوالی يا يوائيتوب نيول کيدی يا فرض کيدی شي. درېګوټي ۱ او ۲ کونګروائنځ دي، درېګوټي ۲ او ۴ هم، مګر درېګوټي ۱ او يا ۱ او ۴ کونګروائنځ نه دي. سره ددې هم دوي زياتی ګډې نخښې لري (کونج، «بڼه»يا «شکل» يا څيره) دوي يو بل ته ورته دي.

ددوي ترمنځ نور څه ګډ دي يا دوي نور څه ګډ لري؟
له کونګروائنځجملی څخه مخ ته ځو، د اړخونو اوږدوالی اندازه کوو او راته ښايو چه د اړخونو ځانئيونه يا د اړخونو تناسب :

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$

او

$$\frac{|AB|}{|A'''B'''|} = \frac{|BC|}{|B'''C'''|} = \frac{|CA|}{|C'''A'''|}$$

ثابت دی.

پس تعريفوو

تعريف : هوارې څيرې يا شکلونه هلته يو بل ته ورته دي، کله چې د مناسبو پاي کرښو اوږدوالی په همغه ځانئيونه يا تناسب پروت وي او (له دې امله هم) يو د بل سره مناسب کونجونه مساوي لوي وي.

بيلګه : کونګروائنځ څيرې د ورته شکلونو يو ځانګړی حالت دی، په هغوي کی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړشوو اړخونو تناسب يا ځاننيونه تل ۱ دی.
له دې امله بايد –د کونګروانيڅ د ټوليزيدلو يا عموميت – د دريګوډيو لپاره هم ورته جملي موجود وي.
ددوه يا زياتو درېګوډيو ترمنځ يو بل ته ورته والی هلته پروت دی يا شته ، موجود دی، کله يی چی مناسب کونجونه سره يو شی وي او دې کونجونو سره مناسب اړخونه يو د بل سره په همداسی تناسب يا ځاننيونه کی پراته وي يا اړيکو کی).
دا هم د درېګوډيو لپاره باور يااعتبار لري، په داسی ډول– د کونګروانيڅ ځخه پر مخ ځو– چی سړی داسی نومولی د ورته والي جملی ليکلی شي.

د ورته والي جملی: درېګوډی يو بل ته هلته ورته دي، که په لاندې کی سره برابر وي

۱ – د درېګوډيو دريواړو اړخونوپه مناسبه توګه د اړخونو تناسب يا ځاننيونه.

$$a : a' = b : b' = c : c' .$$

او يا

۲ – د دوه يو بل سره مناسبو اړخونوتناسب يا ځاننيونه او له دې بندشوې کونج. دا په دې مانا چي

$$a : a' = b .: b' \quad \text{او} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

او يا

۳ – د دوه مناسبو اړخونو تناسب او د لوي اړخونو مخامخ کونجونومساويوالی. په دې مانا چی: $a : a' = b : b'$ او $\beta = \beta'$ د $a < b$ لپاره او يا $b > a$

۴ – ددوه کونجونواندازې مساويوالی ، چی په دې ډول ټول کونجونه مساوي دي. دا په دې مانا چی :

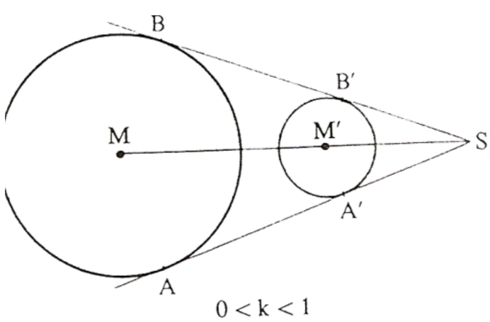
(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول کیدی شي د نورو خیرو لپاره هم د ورته والی جملی تر فرمول لاندې راوړل شي. خیرې یو بل ته ورته دي، که دوي د ځانګړو ورتوني خیروني له لارې یو په بل پریوتی شي.

مهم ورته والي خیرونی منځني راکښنه ده

تعریف: منځني راکښنه $Z_{S,k}$ د ټکي S (د راګښلو منځ) او یوه ګڼ k د راکښلو فاکتور یا ځلونکي په بنسټ یواځنی ټاکلی وي. هر اصلي اوږدوالي ته د منځني راکښنو له لارې په k–ځلی تغیر ورکو ل کیږي.

د k لپاره له صفر تر یو ګڼونه پریښوول کیدی شي. په دې کی بیاپخپله له دې پوهیدی شو چی خیرونه له اصلي کوچنی ده. په دې حالت کی له زبیخلو (کیښکلو) غبرېږو. خیرونه نوره هم د راکښلو باور لري. که k = -1 وي نو اړوند منځني راکښل په راکښل منځ S باندې ټکي اینونه ده. د هر بل منفی ګڼ k |=-1 لپاره کیدی شي k په k =(-1).|k| باندې تجزیه شي. له دې وروسته پورته یادونی په همغه هدف استعمالیږي یا کارول کیږي.

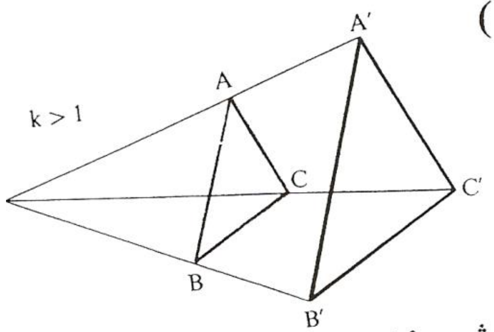


خیره ۱۶۸

یادونه : پام دې وشي چی راکښنه به ښه وي او که غزیدنه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منځراکښنی جوړښتځیړنه(توضیخ)



ځیره ۱۶۹

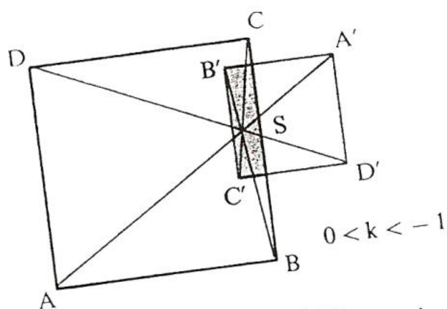
۱ – د اصلي هر په نخښنه ټکي د راکښلو منځ S سره و نخلوی.

۲ – د هر ټکي P لپاره د|PS| پای کرښې په k ځل کیږي(جوړښت ته د 0> k لپاره هم، مقایسه ځیره) او نوې پای کرښه

|'SP|.k = |SP|

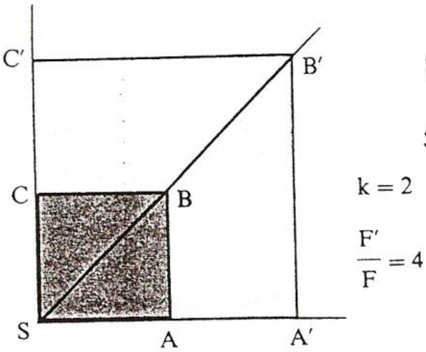
په کرښه چی دټکي S څخه پیل له P, S او 'P تیریږي وکاږی.

۳ – د اصل په ترتیب یا اصل ته ورته ټول ځیره ټکي سره ونښلوی.



ځیره ۱۷۰

دا چی ورته ځیرې (بی له 1 = |k|)
کونګروانیځ نه دي، نو د هوارې دننه یا منځ هم تغیر خوري، مګر که ټولی خواو یا اړخونه په فاکتور k(د بیلګي په توګه 3 = k , 2 = k) تغیر کړو، نو ځیروونکی هواره باید په فاکتورk^2
(یعني $k^2 = 4$,همداسی $k^2 = 9$)
تغیر وخوري.



ځیره ۱۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعريي: په يو منځراکښنو، چی فاکتور k ولري د څيرې هواره 'F او له څيرې دمخه (اصلي) هوارې F ترمنځ لاندنی تناسب يا ځانښيونه موجود دی.

$$F' : F = k^2 \quad \Rightarrow \quad F' = F.k^2$$

د لته د k مخنخښه کوم رول نه لري ځکه چی منفی ځل منفی بیرته مثبت دی.

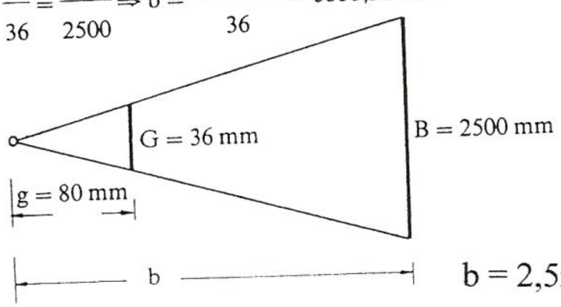
پیلبیلګ:

دیاس(دفیلم دیاس) (فورمات یا لویوالی 24mm.36mm)
په یوه دیوال چی لویوالی یی 2,5 m . 2,5 m دی. د ممکن حده پورې څیره کیږي. د ښه ټیك جوړولوسره یی له عدسي واټن 8cm دی. پریوستونی یا پرویکتور د څیرې دیوال څخه باید څومره لرې وي؟ د دیاس هوراه په څو واره لویه شوې ؟
د دیاس دڅیرونی لپاره لاندې اړیکی باور لري:

$$\frac{\text{د څیرې جګوالی } B}{\text{د دیاسجګوالی } G} = \frac{\text{د څیرې پراخوالي } b}{\text{د دیاس –عدسی لریوالی} g}$$

څیره ۱۷۲

$$\frac{80}{36} = \frac{b}{2500} \Rightarrow b = \frac{2500 \cdot 80}{36} = 5555{,}56 \text{ mm}$$



ممکن ډك په دې مانا، چی 36 mm په 2,5 m باید لوي شي. په دې توګه د پریوستون دیوال –عدسي واټن په لاندې ډول دی :

$$b = 2{,}5\text{m}.0{,}08\text{m} : 0{,}036\text{m}$$
$$\sim 5{,}56\text{m}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

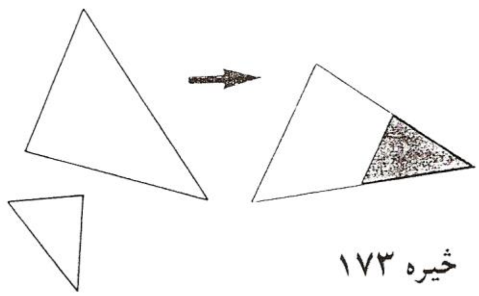
د لویوالی فاکتور یا ځلی دی

$k = 2,5: 0,036 \sim 69,44$

له دې امله د څېرې هواره ده:

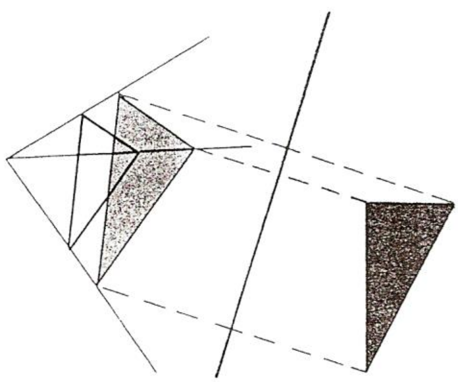
$F' = 69,44^2 . 0,036 . 0,024 = 4,17m^2$

دا د دیاس هوارې 4822,53 واره یا ځله ده.



څېره ۱۷۳

دا روښانه ده، چې ورته څېرې، د څرخونې، راکښلو له لارې او اینونې له لارې یوه پوزیشن ته راوړل کیږ، په کوم چې سم د لاسه د شکلونو د کونجونو د برابرتوب ورته والی پیژندل کیدی شي.



څېره ۱۷۴

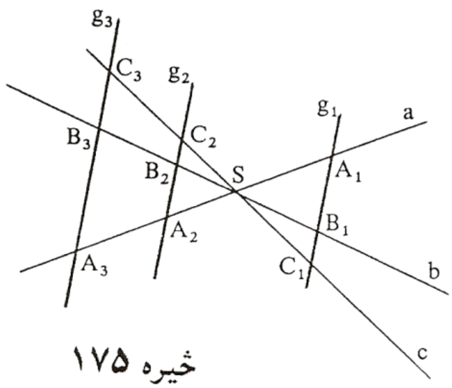
تعریف : هره کونګروا ینځ څېرونه، هر منځراکښونکی او له دوې هر تړلی یا ځنځیري اینښولشوې یا ځای په ځای شوې څېرونی ورته څېرونی بلل کیږي.

دا چې هره ورته څېرونه بیرته یوه داسې څېرونه باندې راګرځي، نو بیخي باور لري : د ورته

(c) ketabton.com: The Digital Library

والي خيروني ډيرى چې پرلپسي سره وتړل شي يا ځنځيري شي ګروپ جوړوی (د ګروپ لپاره دې، چې شميرپوهنيزه کليمه ده، د کتاب پای وکتل شي)
او خيرې او همداسي پيل بيلګه (ډياسپرويکتور) څخه د وړانګي جمله تولیزه يا عمومي کيدی شي.

١ . **وړانګي جمله:** که له يوه ټکي S وتلی وړانګي $a,b,c,\ldots$ له غبرګو کرښو $\ldots$ ، g_2,g_2,g_3 غوڅي شي، نو د يوې وړانګی ټوټی همداسی تناسب کی دی يا همداسی ځان نیسی لکه
د بلی وړانګي ټوټی: دا په دې مانا چی:



خيره ۱۷۵

$$\frac{|SA_1|}{|SA_2|}=\frac{|SB_1|}{|SB_2|}=\frac{|SC_1|}{|SC_2|}$$

او

$$\frac{|SA_1|}{|A_1\,A_3|}=\frac{|SB_1|}{|B_1\,B_3|}=\frac{|SC_1|}{|C_1\,C_3|}$$

په خيره کی د اړيکو ښوونه سم د لاسه په غبرګو کرښو له پوړيزکونجونو او د دريګوډيو ورته والي چی SA_1B_1 او SA_2B_2, SA_1C_1 او SA_2C_2 اوپه همدې ډول د SB_1C_1 او SB_2C_2 سره يی لري.
برسيره پر دې باور لري:

١ . وړانګي جملی په څټ: که له ناپای کرښو.... $g_1\,,\,g_2\,,\,g_3$ څخه د خورې

(c) ketabton.com: The Digital Library

غونچې یا بهتره ستورې کربښو له لارې ټوټې پرېکړې شي، چې یو بل ته ثابتې یا همغه ځای په ځای ځانیونې یا تناسبات څرګندوي، نو دا کربښې یو بل سره غبرګې دي.

۲ . وړانګې جمله:

که له یوه ټکي وتلې وړانګې د غبرګو ناپاکربښو څخه غوڅې شي، نو د دوي ټوټې چې له غبرګو دې ځان داسې نیسي یا په داسې تناسب کې دیلکه هغه د ککرټکي څخه وتلې کچ شوې د وړانګو ټوټې.

$$\frac{|S\ A_1|}{|S\ A_2|} = \frac{|A_1 B_1|}{|A_2 B_2|} = \frac{|S\ B_1|}{|S\ B_2|} = \frac{|B_1 C_1|}{|B_2 C_2|} = \frac{|S\ C_1|}{|S\ C_2|} = \frac{|A_1 C_1|}{|A_2 C_2|}$$

۳ . وړانګې جمله:

په یوه غبرګې ټوټو ځانیونه داسې ده لکه پهدې بلې غبرګې ټوټو ځانیونه یا تناسب:

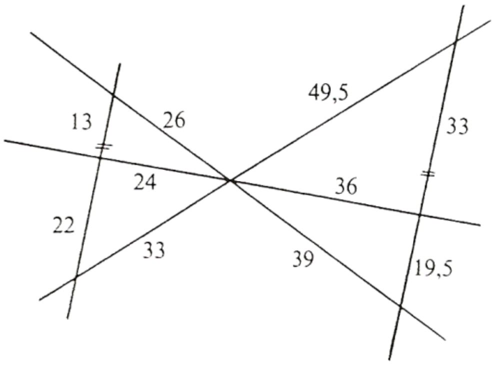
$$\frac{|A_1 B_1|}{|B_1 C_1|} = \frac{|A_2 B_2|}{|B_2 C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1 C_1|}{|B_1 C_1|} = \frac{|A_2 C_2|}{|B_2 C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1 B_1|}{|A_1 C_1|} = \frac{|A_3 B_3|}{|A_3 C_3|}$$

بیلګه :

۱ . د لمړې وړانګې جملې پسې لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . د وړانګو جملو پسی یا له امله باور لري:



خيره ۱۷۶

1. Strahlensatz: $\frac{26}{39} = \frac{24}{36} = \frac{33}{49,5} = \frac{2}{3}$

لمړی وړانګی جمله

2. Strahlensatz: $\frac{24}{22} = \frac{36}{33}$ oder

۲. وړانګی جمله

$\frac{33}{22} = \frac{49,5}{33}$ oder

$\frac{26}{35} = \frac{39}{52,5}$

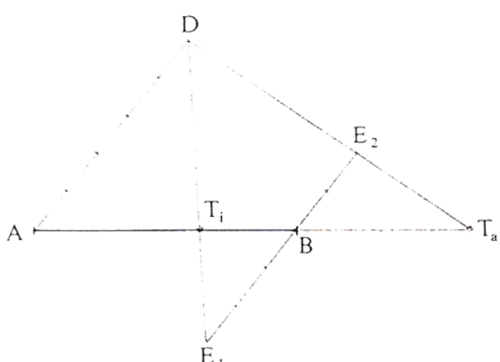
3. Strahlensatz: $\frac{13}{22} = \frac{19,5}{33}$ oder

۳. وړانګی جمله

$\frac{35}{22} = \frac{52,5}{33}$

۲ . د یوې کرښی AB ویشنه یا ټوټونه:

کرښه AB دننه(T_i) په ځاننیونه یا تناسب 5:3 او دباندې (T_a) په تناسب یا ځاننیونه 2 : 5 ویشل کیږي. د دې لپاره د ۲ . وړانګي جمله کارول کیږي یا استعمالیږي:



خيره ۱۷۷

– دننه ټوټوونټکی T_i :

$$\frac{|AD|}{|BE_1|} = \frac{|AT_i|}{|T_iB|} = \frac{5}{3}$$

– د باندې ټوټوونټکی T_a:

$$\frac{|AD|}{|BE_2|} = \frac{|AT_a|}{|T_aB|} = \frac{5}{2}$$

دا جوړښت د ویشنی برسیره

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښو د ځل لپاره هم کارول کیدی شي. نو $|AT_a|$ د $|T_aB|$ دوه نیم واره دی.

۳ . طلایي غوڅی یا –غوڅونه:

په طلای غوڅي یوه د a اوږدوالی کرښه داسی ښوټه کیږي، چی برخه ښوټو د x اوږدوالی همداسی د a - x اوږدوالی لپاره اړیکی $a : x = x : (a-x)$ باور لري. دلته x د دواړو برخه کرښو لویه برخه ده دا ویشنه په هنر او ارښیتکتور کی له مانا ډکه ده یا مهم رول لوبوي. له پورته اړیکو څخه لاس ته راځي: $x^2 = a(a-x)$ او له دې بیا $x = \sqrt{a(a-x)}$ لاس ته راځي. دا په دې مانا چی اوږده کرښه د دوو لنډو کرښو او د ښولی کرښی هندسي منځ دی. که دا فرمول نور هم ښه بدلون غوره کړي او د x په لور اوبی یا حل شي، نو ترې لاس ته راځي :

$x = \sqrt{a^2 - ax}$

$x^2\ a^2 - ax$

$0 = x^2 + 1x - a^2$

$x_{1,2} = -(a/2) \pm \sqrt{(a/2)^2 + a^2}$

$= -(a/2) \pm \sqrt{(5/4)a^2}$

$x_1 = 0{,}5a(\ \ 5 - 1)$ په کار نه راځي

نو لرو: $x \sim 0{,}618a$

د طلایي قاعدې لګه لارې

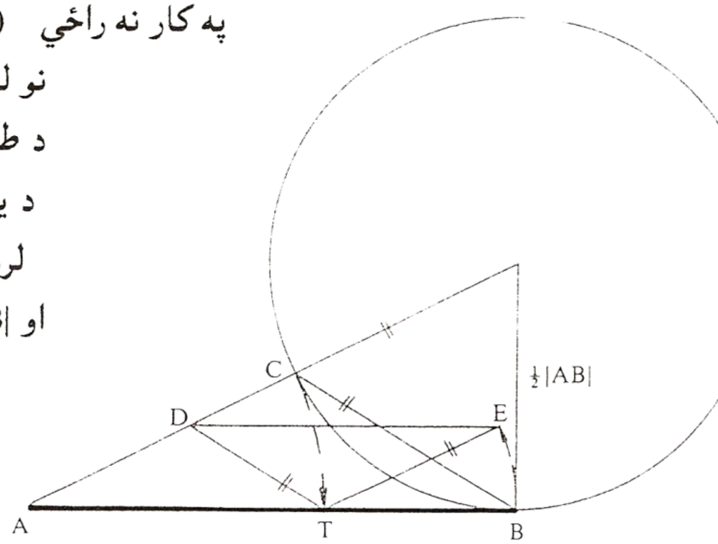
د یوې کرښی $|AB|$ ویشنه

لرو $|AC| = |AT|$

او $|AD| = |TE| = |TB|$

$$\frac{|AB|}{|AT|} = \frac{|AT|}{|TB|}$$

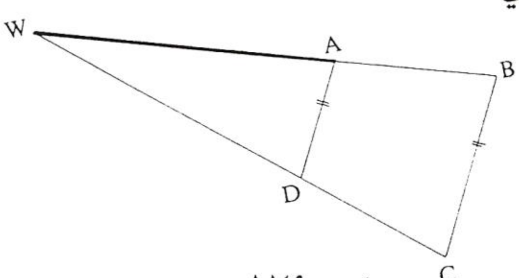
څیره ۱۷۸



(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

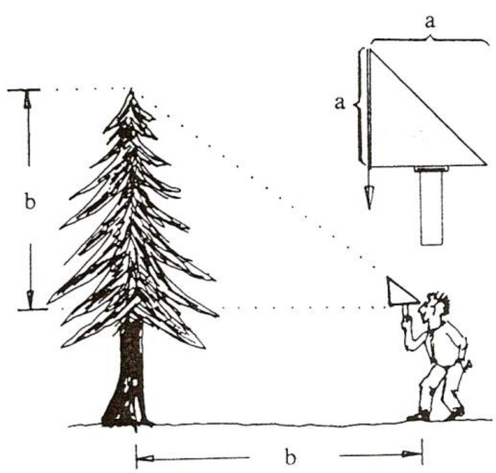
۱ – په کواوردیناتسیستم کی دریګوډی A(2|3), B(6|1), C(3|6) ورکړ شوی دی.
الف) دا دریګوډی د k = 2 په اندازه وغزوی . د غزولو مرکزدې Z(0|0) وي.
ب) دا دریګوډی په S(-2 | -3) وڅرخوی د 140° = ∝ سره. دا څیره دریګوډی په S باندې د k = -1,5 سره وغزوی.
پ) دا دریګوډی په ۴ یوونو سره لمړی کیڼ لورته او بیا په ۵ یوونونو پورته لورته وکښوی، بالاخره یې په x– محور هنداره کړی او بیا یې بالاخره په ټکي (0|-6) د k = -1 سره وغزوی.
۲ – ایا ټول الف) مساوي پښیز ، ب) مساوي اړخیز، پ) ولاړکونجیز دریګوډی یو بل ته ورته دي ؟
۳ – د یوه مکعب پورته هواره د مرکزی غزونی د غزونفکتور یا غزونځل k سره او د هوانیمي غوڅټکي سره د غزولومرکز په څیر، څنګه تغیرېږي؟
۴ – کرښه | AB | =10 cm دننه او دباندې داسی ټوټه کړی، چی په ځانونیونی یا تناسب د 5:2 کی سره پراته وي.
۵ – کرښه | CD| =6,5 cm د «طلای غوڅي قاعدې» له لارې ټوټه کړی.



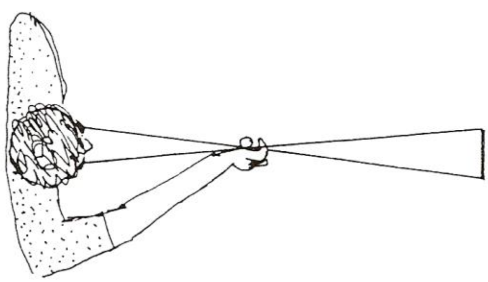
څیره ۱۷۹

۶ – د یوه کتونبرج A (څیره ۱۷۹) څخه دې واټن |AW | یوه ځنګل برخی W ته وټاکل شي.
دري ټکی B, C او D په نخښه کیږي په داسی ډول چی AD||BC وي. اندازه کیږي: |BC| = 125 m : |AB|=75 m او |AD|= 100 m , نو |AW | څومره اوږد دی ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۱۸۰

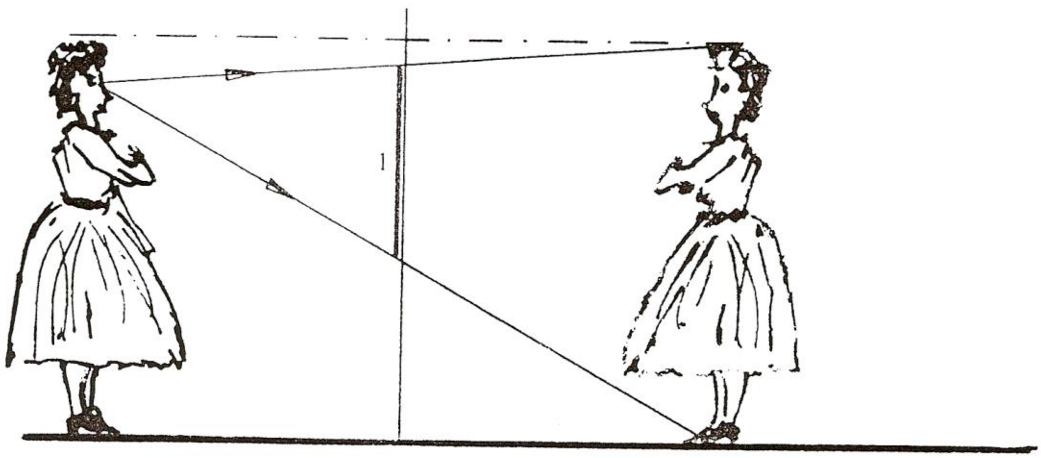


خیره ۱۸۱

۷ – الف) د یوه «ځنګلوالدریګوډي»
سره (خیره) د یوې ونې
جګوالی اندازه کیدی شي. – ونه
خومره لویه ده ، که د ځنګلوال
سترګه له ځمکې څخه ۷۰ ، ۱
متره جګه وي، او دی له ونې
۱۰ متره لرې ولاړ وي؟
ب) څنګه (د یوه څرګندېه واټن)
د یوه شي د جګوالی د خپل
مټ په مرسته نږدې یا تقریبي
اندازه کولی شي؟
لارښود: ۷ ۱الف وګوری)
پ) په عسکری کي د دوه شیانو
د واټن د اندازه کولو لپاره
« د غټې کوتي ګام » تخنیك
کارول کیږي یا استعمالیږي.
دا داسې صورت نیسي چې
لمړی سړی خپله کیڼه سترګه
پټوي او غټه ګوته راوباسي،
لمړی یو انډول ور شی، چې ښي
لور ته پروت دی، اندازه کوي او بیا د ښی سترګي په پټولو سره ټیك هغۀ لټوونکی
موخه د زیر لاندې نیسي. دلته د واټن اندازې ورکونی ته سړی څنګه راځي؟
۸ – میرمن ځانګه غواړي چی په خپله پوره لویوالی ځان د دالیز په هنداره کی
وګوري. په عادي توګه د دالیز د کوچنوالی له امله ۸۰ سانتي متره له هنداري

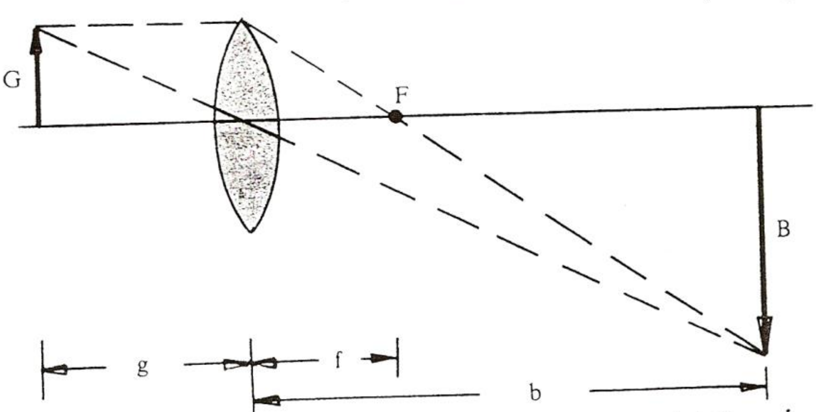
(c) ketabton.com: The Digital Library

لرې، هنداري ته مخامخ ودريږي.دا هنداره بايد څومره کم له کمه جګه وي چې ميرمن ځانګه د سترګو جګوالی چې ۱،۶۵ متره دی ټول لويوالی چې ۱،۷۳ متره دی وګوري؟



څېره ۱۸۲

۹ – د يوې لينزې يا عدسی يا سترګی له لارې په څېره کی د نور څیرونی



څېره ۱۸۳

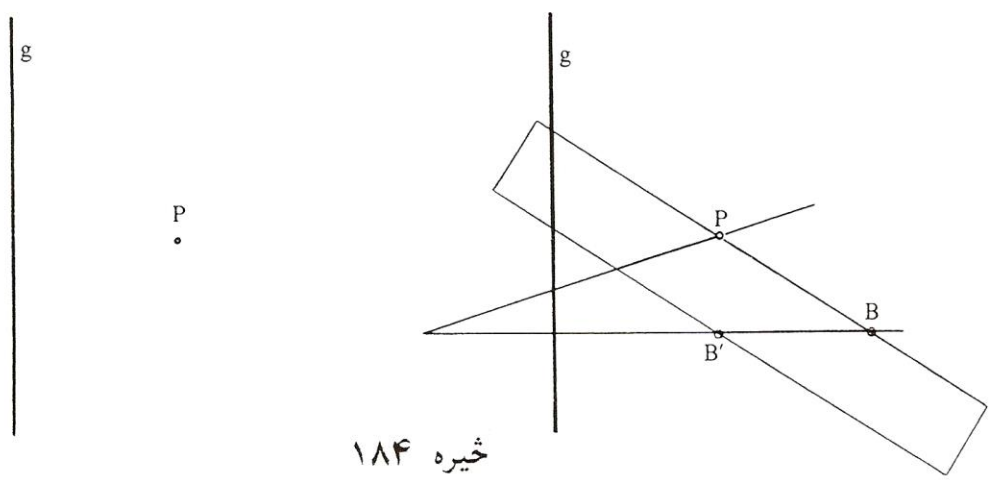
(c) ketabton.com: The Digital Library

جوړښت کتل کیږي. د لینزې یا عدسی لپاره د لینزې یا عدسی مساوات $(1/g)+(1/b) = (1/f)$ باور لري، پخپله د څیرونی لپاره مساوات $B / G = b / g$ باور لري(په لغاتو: د څیرې جګوالی د شي جګوالی سره ځان داسې نیسی لکه د څیرې لریوالی د شي لریوالی ته). دا دواړه اړیکی د وړانګي له جملې راوباسی !

۱۰ – یو ولاړکونجیز دیاپوزیتیویا مثبت دیاس داړخ اوږدوالی ۶، ۳ سانتي متره سره او ۴، ۲ سانتي متره سره یو و هغه ته غبرګ دیوال باندې پریوزې . څیورونی لینزې یا عدسی، دا شی ۱۲ سانتي متره له دیاس او ۸۰، ۴ متره له دیوال لرې دي. د پریوستون دیوال کم له کمه باید څومره وي ؟

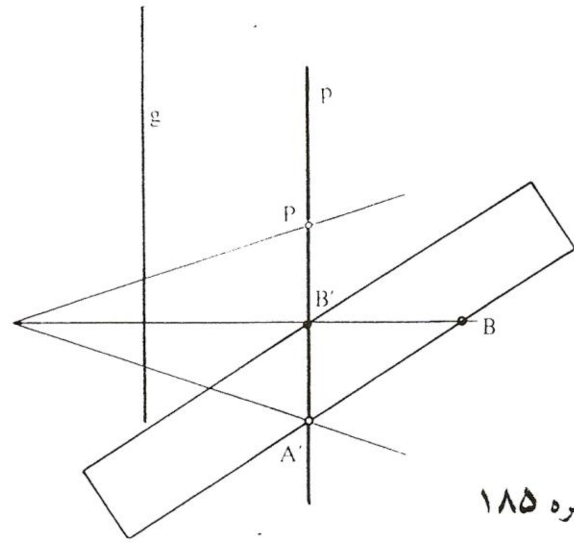
۱۱ – یو د دیوال مربع شکله کړکی، چې اړخ یی ۲۰ سانتي متره اوږد دی له یوه هغه ته غبرګ دیوال څخه ۱۲ متره لرې ده. د هغی کړکۍ څخه څومره لرې باید یوه د پریښنا سرچینه ، چی د ټکي بڼه لري، لرې وي چی له کړکی تیره رڼا یوه د ۱۶ مترمربع هواره روښانه کړي؟

۱۲ – د کوم مرکزې غزوني سره کیدی شي چی یو ګردي دننه دریګوډی په ګردي راګیر یا ګردي دباندې دریګوډي باندې څیره شي؟ ګردی هوارې یو بل سره



څیره ۱۸۴

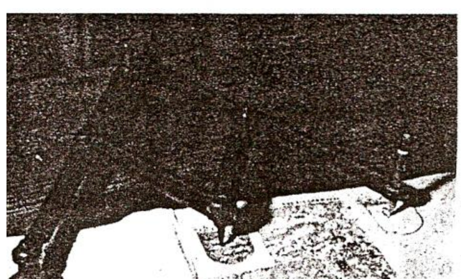
(c) ketabton.com: The Digital Library



 څیره ۱۸۵

په کومه ځانتیونه یا تناسب ځای نیسی یا پرتی دي؟

۱۳ – د دیسارګ (Desarues) د جملی له مخی کیدی شي چی کرښه g په ټکی P جوړه شي ، که ټول رسم الات یوائې یوه لرګي متهه وي (د بیلګي په توګه کرښی یا ختکش) د دوه غبرګو کانتو سره یا اړخونو سره څموړ په اختیار کي وي. په دلایلو روښانه کړی، چی ولی په پرلپسی څیرو جوړښت کی د جوړښت لار کار ورکوي.



څیره ۱۸۶

۱۴ – وښایی چی د هر غبرګ اړخیزABCD لپاره باور لري: که د یوه نیمی د په خوښه ټکي P څخه یوه اړخ ته غبرګه کرښه رسم شي، نوغبرګاړخي منځ ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

راځي، چې ABCD ته منځنۍ یامرکزي ورته دی. د همغه غزولومرکز چېرته پروت دی؟

په دې خویونو د پانتوګراف(Pantograph) یا په ورځنۍ ژبه د ځانې ټونګې دا یوه د رسموولو اله ده قانون هم بینا دی. O په رسمتخته تر زیر لاندې راځي . په پینسل P سره د مخه کښل شوي شیرې باندې حرکت ورکول کیږي، نو په دې توګه دا رسمپینسل یو مرکزي یامنځنۍ ورته شیره رسم کوي (شیره.) په تي مخ کی کښل شوې ده

۱۵ – په یوه ګردۍ کی دوه ټوټونی یا زیني یوبل غوځوي. ټوټی ۱۸ سانتیمتره او ۳۵ سانتي متره دی، د دومی هغه اوږده ټوټه ۳۰ سانتیمتره ده. نا معلومه ټوټه یی وښایی.

۱۶ – څومره لرې سړی کتلی شي

الف) د بحرهوارې ځخه ۴۰ متره جګ اندازه ټوکرۍ

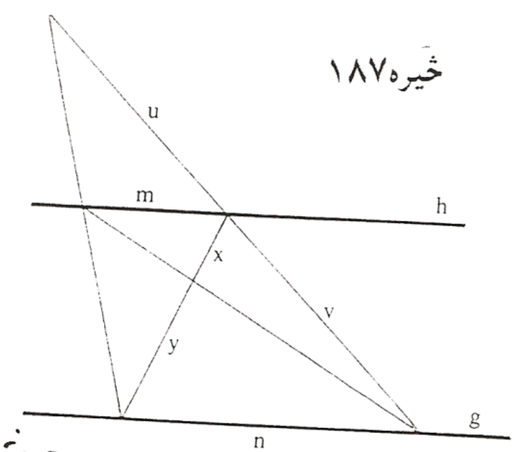
ب) د یوه له ځمکی ۲ کیلو متره جګ هوا پوڼکی یاهوا بالون،

پ) د یوه الوتونکی کوټکی چی د سپوږمی هوارې ځخه۲ کیلومتره جګه وي(r = 1735 km)؟

شیره۱۸۷

۱۷ – د شکل ۱ (شیره

الف) لیاره صدق کوي h || g او



a) $\frac{u}{v} = 1$

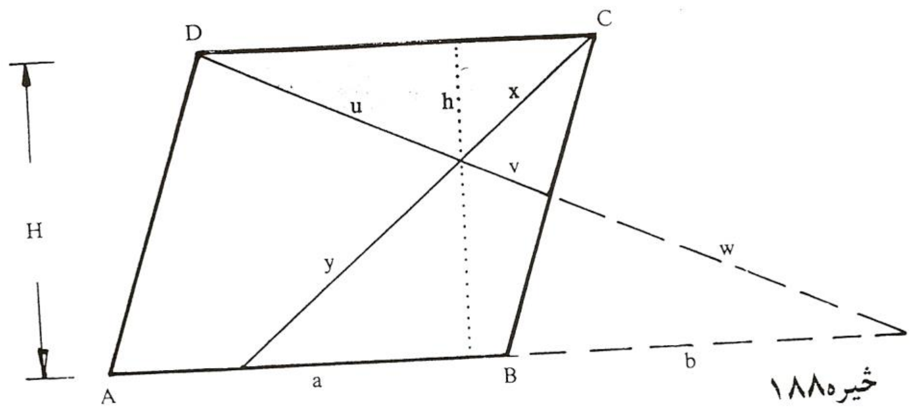
b) $\frac{u}{v} = 0,5$

c) $\frac{u}{v} = \frac{2}{3}$

Berechnen Sie $\frac{x}{y}$. د شمېرې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ – وشمیری u/v او x/y (ثیره ب)
د غبرګاړخیز څومه برخه رنګه ده؟



ثیره۱۸۸

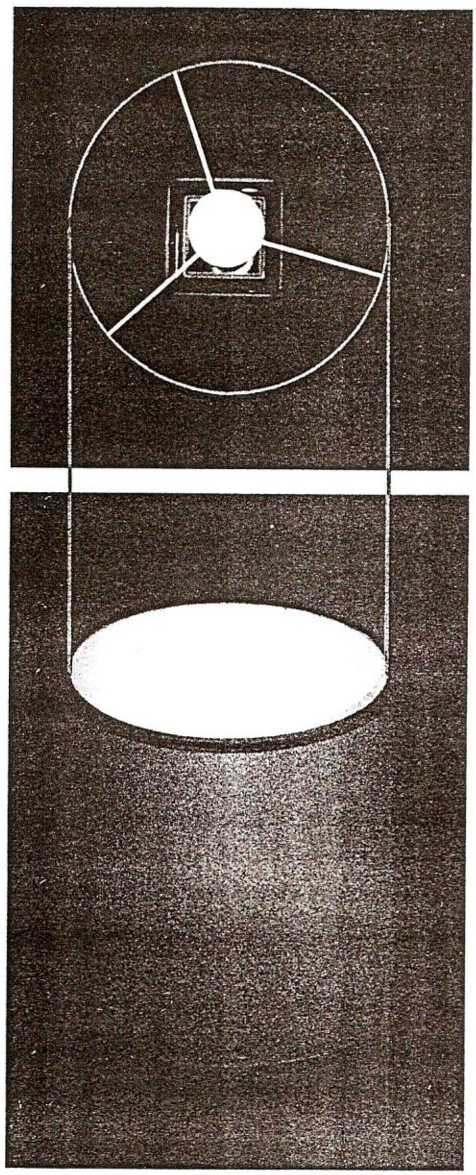
افینی ثیرونی (Affine Abbildungen)

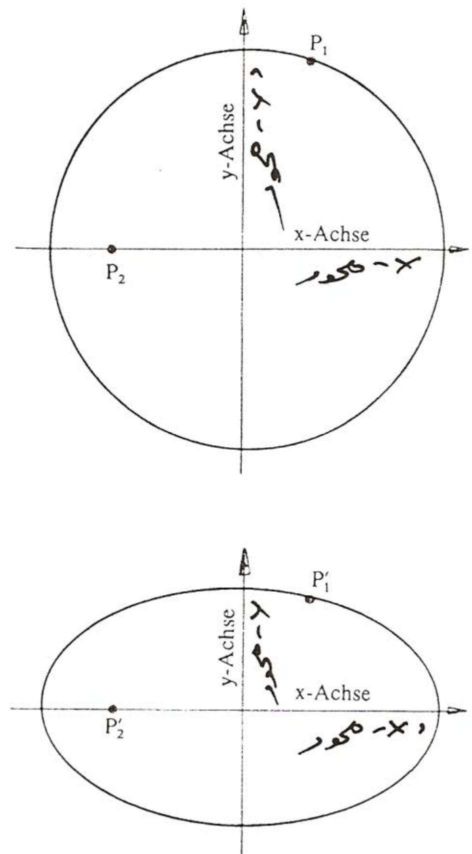
محوري افینیتي Die axiale Affinität

دبیلګي په توګه مو د مخه تیرو درسونو کی وپوښتل، چی ایا موږ له یوې ګردې
ښیښې ټوټې چي لږ څنډه یي ماته ده یوه بله ګرډۍ ټوټه چی وړانګه یی له پخوا

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوچنی وي او يا يو ډيرګوډی جوړولی شو، چی سيومتري او په دې توګه ښکلی .





خيره۱۸۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي. دلته موږ الیپسي سره مخامخ شو.

پوښتنه دا ده چې ایا یوه څېرونه شته چې له ګردۍ څخه الیپسي لاس ته راشي؟

د څېرې۱۸۹ دلیدلو له مخې داسې خیال راپیدا کیږي، چې ګونډي د ګردۍ او ایلیپسي ترمنځ څه خپلوي شته. دا نو بیا دې لاندې پریکړې ته اجازه ورکوي، چې یوه څېرونه باید موجود وي چې د ګردۍ څېرونه ایلیپسی شي.

دا څېرونه باید کوم خویونه ولري؟

موږ بیا د جوړونې نیونې چې د مخه مو کړې رامنځ ته کوو.

ټولې په پراته (افقي) x− محور باندې پراته ټکې ځاي په ځاي پاتېږي: پس د x− محور د ځاي په ځاي ټکو کرښې څېرونه ده. د دې په څټ د y − محور ټول ارزښتونه تغیر خوري. پس هره y−محور سره غبرګه کرښه ځاي په ځاي کرښه ده.

له دې سره موږ د نوې څېرونې لپاره ټول ضروري خویونه راټول کړل: د افینیتي محورa سره یوه محوري افینیتي $A_{a;g;k}$ ، د لورکرښې(کرښه چې لورې یې څرګندوي لنډ یې: لورکرښه) g او د افینیتي فاکتور k |= 0 مخ ته پراته دي، که لاندې شرایط پوره وي :

۱ – هره کرښه 'PP چې له ټکو P او 'P تیره وي د g سره غبرګه ځغلي.

۲ – که *P د'PP او a غوځټکې وي ، نو لرو : |*P*P'| = |k|.|PP.

په دې توګه نو یوه محوري افینیتي، دکرښې −،غبرګ − او ټوټه تناسب یا ځاننیونه ریښتونې ده. اخرنې دا وایي چې په اصلي پایکرښې درې ټکې دا پایکرښه په همغه تناسب یا ځاننیونه پرې کوي، لکه د څېره ټکې په څېره کرښه باندې.

له دې لاندې د محور افینیتي جوړښت څېړنه لاس ته راځي

۱ – له اصلي کرښې په نخه شوي ټکي (د بیلګې په توګه P) څخه وg سره یوه غبرګه کرښه وباسی او ددې غوځټکې د افینیتي محور سره د بیلګې په توګه *P وبولی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – له *P څخه |*P'P*| = k .|PP

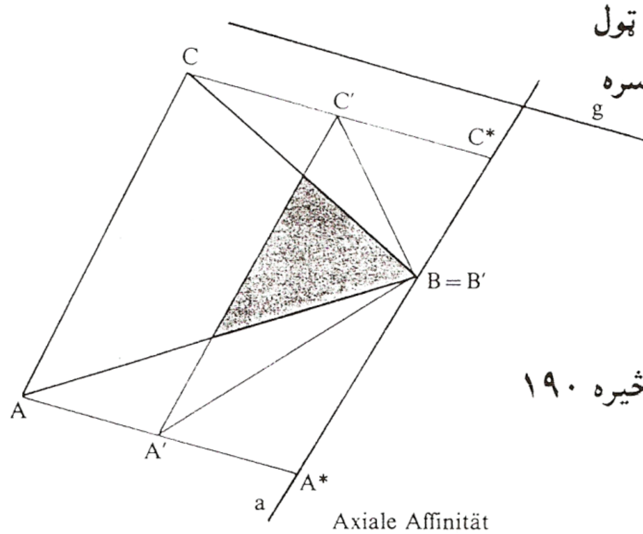
و g ته غبرګي مناسبې کرښې

وکارېږي.

۳ – په دې توګه رامنځ ته شوي ټول

ټکي اصل ته په ورته توګه سره

ونښلوي.

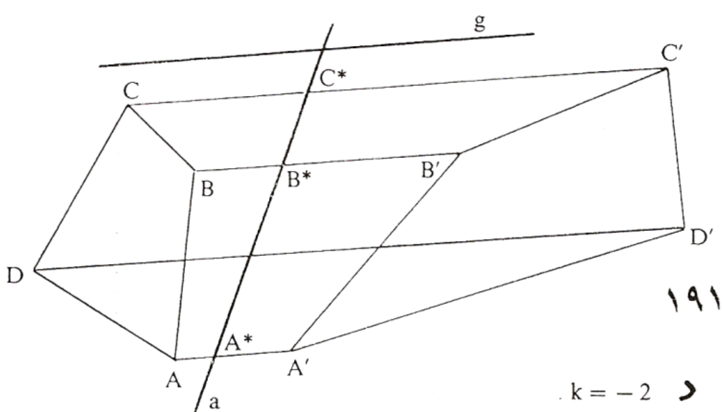


خيره ۱۹۰

Axiale Affinität

د $k = \frac{1}{2}$ سره

اکسیال افینیتي



خيره ۱۹۱

د $k = -2$

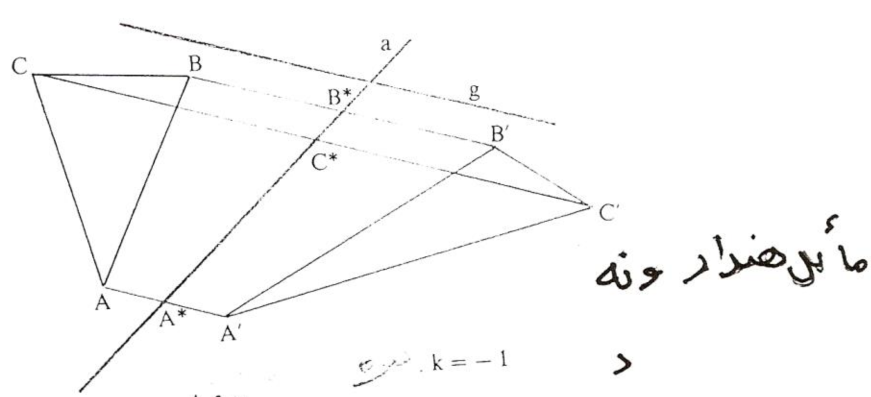
اکسیال افینیتي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k = 1$ لپاره د هوارې هر ټکی ځای په ځای ټکی دی، ځکه چی ټولی پایکرښی تغیر نه خوري. له دې لرو چی $A_{a;g;1}$ کټمټ یا identisch ایدنتیك دي.
د $k > 0$ لپاره P او *P د a په یوه (همغه) خوا پراته دي(څیره) ، د $k < 0$ لپاره د a په بدلوخواوو (ش. ۱۵۷)
یو څیرونه $A_{a;g;k}$ کیدی شي په څیروونی $A_{a;g\,1/k}$ بیرته راوکرځي .

مائیل هندارونه

مائیل هندارونه یوه ځانګړې محوري افینیتي ده : د $k = -1$ لپاره لریوالی یا فاصله |*PP| همدومره ده لکه لریوالی یا واټن یا فاصله |*P'P| . پس مائیل اینونه محوري افینیتي $A_{a;g;-1}$ ده.



څیره ۱۹۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

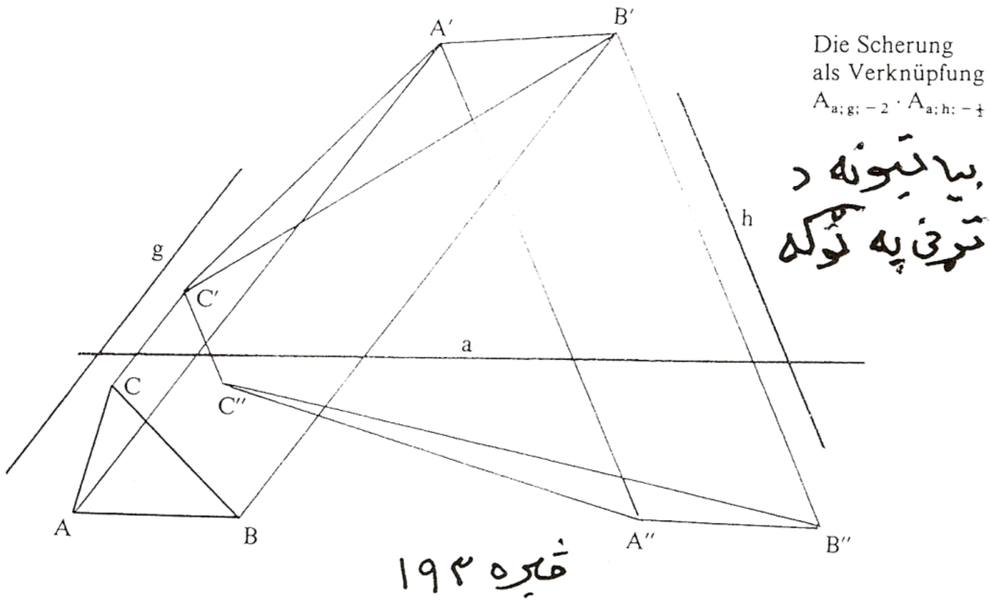
: محوري افینیتي(یو بل سره) تړلو ځانګړي حالتونه:

یاتي کوونه یا بیاتیونه Scherung

: دوه محوري افینیتی(یوبل سره) تړل، چی همغه افنیتي محور a ولري،g او h
مختلفلوري محورونه او یو بل ته مخامخ افینیتي فاکتورونه k او 1 / k ولري، نو
بیاتیونه(بیاتي کونه) ورته وایو.

بیاتیونه(یوبل سره)
: تړلو په څیر:

$A_{a;g;-2} \cdot A_{a;g;-½}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

په بیاتیونی کی، لکه ځنګه په مائیلی اینوني کی د هواری دننه بی تغیره پاتی کیږي، سره ددې چی د یواځنیو یا ټولو شکلونو تغیر خوړلی شي. (تمرین وګوری) په عمومي توګه د ځیرې – او اصلي هوارې لپاره په یوه محوري افینیتي کي باور لري : F'=|k|.F , او یو په بل پسی کارونو یا عملیو اجرا کولو کی هم په همدې ډول F' = |k.... .k|.F:

دا په دې مانا، چی محوري افینیتي په عمومي توګه هوارې ریښتونی نه ده.

محوراینونه

محوراینونه یوه محوري افیتي ده له k = -1 سره. (ځیره ۱۹۲ وګوری)

کونګروانیخ ځیرونه

هره کونګروانیخځیرونه کیدی شي له محوراینونی یوځاي راټوله شي.

منځنی راکښنه(راکښل)

هر منځراکښنه یو افقینه ځیرونه ده.

په عمومي ډول لاندې لاس ته راځي

د ټولو کونګروانیخ ځیرونو، ورته ځیرونو او محوري ځیرونو ډیري، د ټولو افقین ځیرونو ډیری ورکوي. که افینځیرونی یو په پسي اجراشي یو ګروپ جوړوي، داسی په نامه افینګروپ. (ګروپ دې د کتاب په پای کی وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – یو دریګوڼی ABC دې په یوه افین هوارمساوي باندې داسې واړول شي، چیرته چې $|AB| = |AB'|$ او $|$.

۲ – په دریګوڼي $A(3|5)$,: $B(5|4)$; $C(3|1)$ باندې یو محوري افنیتي داسې وکاروي یا استعمال کړی، چې $A'(-3|1)$ او y– محور د افنیتي محور وي.

۳ – د ګردی څیره د $M(2|3)$ او $r = 3$ cm سره وټاکی ، که د x–محور د افینیتي محور وي، په ۱ او ۳ کوادرانت یا څلورمه کي لورکرښه او $k = 2$ د افنینتي فاکتور یا –ځل وي.

۴ – یو دریګوڼی په هوار مساوي پنځه ګوڼي واړوی.

۵ – یوه ګردی دې د نیمي $d = 12$ cm او د افنینیتي فاکتور $k= ½$ سره افینځیره شي. د راپیدا ایلیپسی د هوارې دننه وشمیری. (دوه یو په بل ولاړ محورونه افینیتي محورونه دي چی له منځټکي او لوریزکرښی څخه تیریږي)

۶ – یو تریخ ABCD جوړکړی له $a = 8$ cm ; $c = 3$ cm ; $d = 5$ cm او $\sphericalangle = 40°$. په دې محورې افینیتي لاربنوده کړی، چی د افنیتي محور یی د تریخ منځلاین وي، چی د لورکرښه یي د هغې سره ۵۵ درجي کونج جوړوي او د افنیتي ځل ا –فکتور یی $k = 3/2$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریګوډیکچ یا تریګونومتري Trigonometrie

تعریفونه

د دریګوډیکچ یا تریګونومتري دنده ده چې په هواره یا په هوا کې دریګوډي کچ کړي ، د څانګړوبلواکو له لارې، دې په نامه تریګونومتریبلواکو. برسیره پر دې د دې په مرسته پریودیکی یعنی په منظمه فاصله پرلپسی تکراریدونکې پیښې(موږ یې تل راګرځیدوني بللی شو) څیړل کیږي.

تریګونمتري تر هیپارچ (Hipparch ۱۶۰ - ۱۲۵ له م پخوا) پوري تعقیبیدی شي، وروسته له مصري پتولیموس Patolemäus چې په ۱۶۸ م کال کې مړ شوی او بیا له هندې او عربو شمیرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پیل دا د کارونی یا عملي کیدو د ستونځو سره مخامخ وه. دریګوډیکچ خپل کارونه په استرنومي او فزیك، د ځمککچ یا اندازه کولو، د ځمك اندازونی، نقشو علم، او ابادی او نوتیك Nautik (د کیشتیو د لارو نقشه ویستلو پوهنه) کې مومي.

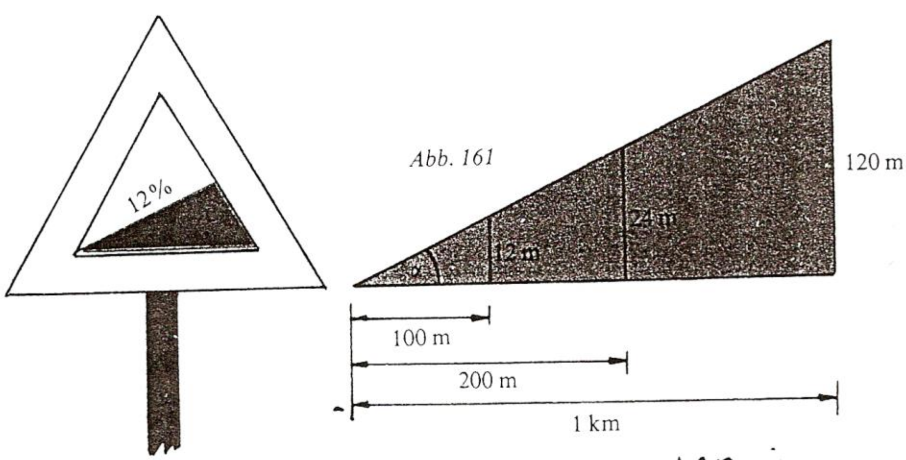
د تریګونومتري مانا یا مهموالی په څانګړي ډول په دې ریښتینوالی یا واقعیت کې نغښتی، چې د دې په مرسته د پایکرښبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي(پام دې وي، چې دا تړاو شمیرپوهینیز مفهوم لري).

پیلبیلګه: د په مانایا مهم جګوالي یا لویدکرښو نخښنه لوحی یا په بله عبارت د زوړي او پیچومی لیکتختی(دې ته دې پام وي چې ما دا کلیمی هر چیرې د زوړي او پیچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چې په هغه مناسب ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي) وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟
پیچومی یا جګوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جګوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیك ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جګوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توګه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جګوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جګوالي لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جګیږي. کتل کیري یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومي یا جګوالي کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځاننیونه و هوارې فاصلي ته تغیر خوري . د پایکربنو تناسب یا ځاننیونه تابث یا ځاي په ځاي پاتیږي او د په سلو کی ګڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جګوالي اوږدوالي معلومات نه

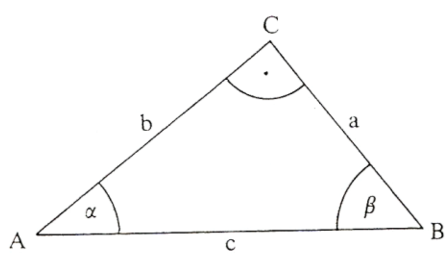


ځیره ۱۹۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکوي همداسي زوړی یا لویدون. په داسي حالت کی هم بیا نورې لوحي هم زوړندې وي.
په همدې ډول پیچومی کیدی شي، لکه په سلو جمله کی، د کونج له لارې هم ورکړشي، چی د سرك ټوټه یی د پرتون سره جوړوي.
تریګونومتري یا د په سلوکی (د پیچومي یا جګوالي تناسب) د پیچومي یا جګوالي ویناوي دي او یا په څرګندو پیچومي کونج یا جګکونج چی سلییز پیچومی یا جګوالی ټاکي. په دې ډول په سلو کی ۱۲ جګوالي سره د پیچومي کونج په لاندې ډول دی $\alpha = 6,48°$.

په پیلبیلګه کي څرګندیږي چی دا پایکرښي د یوه ولاړ دریګوډي اړخونه انځوروي، چی د دوه دریګوډیو تناسب یا ځانیونه د کونج په بلواکسی یا اړتوب ښایی. زیات وخت هیوپوتینوزې (اوږداړخ) په c ښوول کیږي او هغه ته مخامخ کونج په γ . نورې دواړه کتیتی a او b دي او د دوي مخامخ کونجونه α او β.

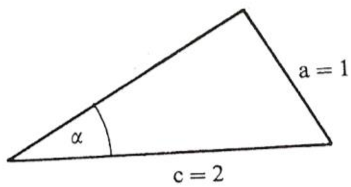


څیره ۱۹۵

اوس نو لاندې جملی باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساینبلواك sinusfunktion: بلیگه:

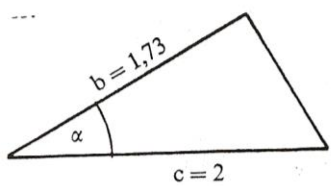


$$\sin\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}$$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

خیره ۱۹۶

کوسایبلوك Cosinusfunktion بیلگه:

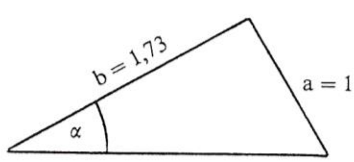


$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرته کتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}$$

$\cos 30° = \frac{1,73}{2} = 0,8660$

خیره ۱۹۷

تنجنتبلواك Tangensfunktion بیلگه:



$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$$

خیره ۱۹۸

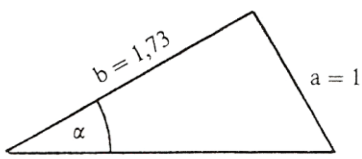
$\tan 30° = \frac{1}{1,73} = 0,577$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : پام دې وي چې د مخامخ کاتیت لاندې د دریګوډي هغه اړخ پوهیږو، چې په هیپوتینوزې پراته کونج ته، چې څموږ موخه وي، مخامخ پروت وي او هغه اړخ چې په همدې کونج پروت وي ، هغه ته په کونج پروت اړخ چې موږ یې لنډ پروت کاتیت بولو.

دا لاندې نور کونجبلواک دي، چې کم کارول کیږي

کوتنجنتبلواک Kotangensfunktion بیلګه



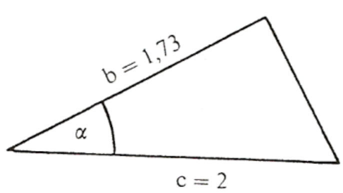
$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{مخاخ کاتیت}}$$

خیره ۱۹۹

$$\cot 30° = \frac{1,73}{1} = 1,73$$

ډیر کم ، د بیلګي په توګه استرونومي کی، لاندې کونجبلواک کارول کیږي

سیکانسبلواک sekansfunktion بیلګه

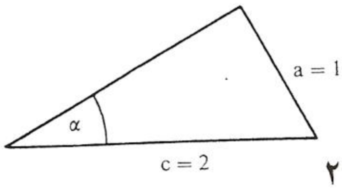


$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{هیپوتینوزې}}{\text{پرته کاتیت}}$$

خیره ۲۰۰

$$\sec 30° = \frac{2}{1,73} = 1,156$$

کوسیکانسبلواك Kosekansfunktion بیلګه:



$\mathrm{Cosec}\,\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزې}}{\text{مخامخ کاتیت}}$

ځیره ۲۰۱

$\mathrm{cosec}\ 30° = \frac{2}{1} = 2$

موږ به زیات وخت لمړنی درې یا په همدې توګه لمړنی څلور بلواکه د کارونی لپاره راونیسو یا وکاروو.

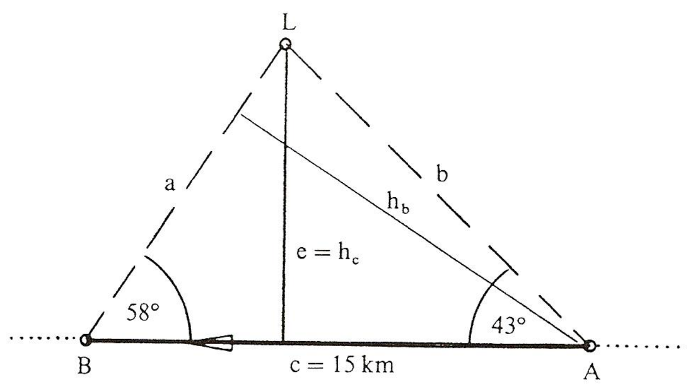
په خوښه دریګوډیو کی شمیرنه

سره له دې چی کونجبلواکي یواځی په ولاړکونجیز دریګوډې کی باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جګوالی په جوړولو کی هر دریګوډی په ولاړو برخه دریګوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکرښي وینا وي د پیل دریګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

> پیلبیلګه
> یوه کیښتی د رڼاډزکړي(کله چی کښتی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کښتی یا یو بل څه ته که یوه کښتی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې څرګندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چی څه پیښ شوي دي). دلته $\sphericalangle = 43°$ د تګ په لور اندازه کیږي او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه تګ پایکربښي $c = 15\ km$ او کونج $\beta = 58°$ وروسته.
په دوم ېز کی کیښتی له ېز رڼااور څخه څومره لرې ده؟
د A څخه و B ته د کیښتی نزدې واټن e د ېزرڼااور څخه څومره لرې دی؟
په A کی له اور څخه څومره لرې وه ؟



څیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 79°$; $\sin\beta = h_b / c$ او $\sin\gamma = h_b / b$

د h_b په لور اوبیول یا حلول او په همدې وخت کی لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin\beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin\gamma$$
$$\Rightarrow c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$
$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58°}{\sin 79°} = 12{,}959\ \text{km}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin \alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin \alpha = 12{,}959 \cdot \sin 43^\circ = 8{,}838 \text{ km}$$

$$\sin \beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin \beta} = \frac{8{,}838}{\sin 58^\circ} = 10{,}421 \text{ km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دریګوډي اړخونوa او b په شمیرنه کی مرستندوي لویی له منځه ځي او باور لري:

د ساین جمله :

په خوښه دریګوډي کی د اړخونو ځاننیونه یاتناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځاننیونه یا تناسب دی.

$\sin \alpha / \sin \beta = a / b$ $\sin \beta / \sin \gamma = b / c$

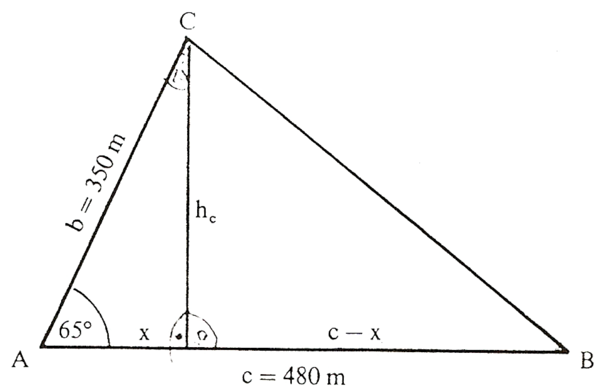
$\sin \gamma / \sin \alpha = c / a$

د ساین جمله په پڅ دریګوډي کي هم باورلري(تمرین دې وکتل شي). ددې سره په یوه دریګوډي کی نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کیږي، چیرته چی دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي.

سړی بیا څه کوي که دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راګیر کونج؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلبیلگه : په یوه د ډبروسکرو کان کی دوه ستنی $b = 350\ m$
او $c = 480\ m$ دي او یو کونج $\alpha = 65°$ ښندوي.
د B څخه و C ته به د نښلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟



شیره ۲۰۳

اوبی یا حل :

جگوالي یا جگی h_c کرښه $AB = c$ په دوه ټوټو x او $c-x$ ویشي.
دلته دی $x = b.\cos\alpha$ ،
ځکه چی $\cos\alpha = x / b$ دی. د پیتاگوراس د جلی له مخی
لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$
او

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 .$$
$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb\cos\alpha$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړخونو اوږدوالی نوموني او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راګرځیدونکی (ځیکلیکي یوناني کلیمه ده ګردی ډوله یا منظم بیرته راګرځیدونکی zyklisch) یو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

کوساین جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$$

په هر یوه دریګوډي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره تږې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاګوراس د جملی عمومیت یا ټولیز ته هم وایي. (تمرین ۶ مخ دې وکتل شي)

د کونجبلواك له لارې یو بل متود، د ډیرګوډي شمیرلو لپاره ، تر څو دا په دریګوډیو ویشل کیدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه یی څرګند وي، پیدا شو.

د دې ټولو سره د څلورګوډي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیداشو:

$$A = 0{,}5.d_1.d_2.\sin\alpha$$

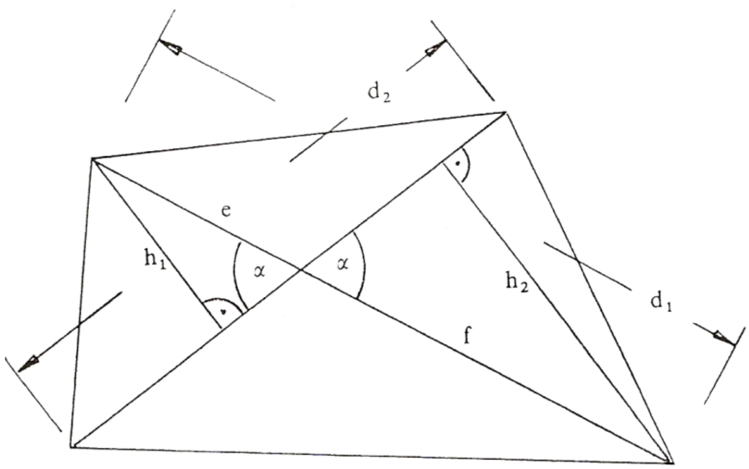
چیرته چي $\alpha = w(d_1; d_2)$ وي .

اوبی یا حل : $A=0{,}5(d_2h_1 + d_2h_2)$

که d_1 په e او f ټوټه یا تجزیه شي ، نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1 = e \cdot \sin \alpha$$
$$h_2 = f \cdot \sin \alpha$$
$$\Rightarrow A = 0,5 \cdot d_2 (e + f) \sin \alpha$$
$$\Rightarrow A = 0,5 \cdot d_2\, d_1 \sin \alpha$$



څیره۲۰۴

د په خوښه کونجونو تریګونومتریکي بلواکي

په اخره برخه کی مو وویل، چی کونجبلواک، نه یواځی د دننه لورته تیرو دریګوړیو لپاره ، بلکه د هغو کونجونو لپاره چی له ۹۰ درجو لوي وي ، هم هدفمند (موخور) تشریحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

دا پراختیا څنګه تصور یا د خیالوړ کیدی شي ؟

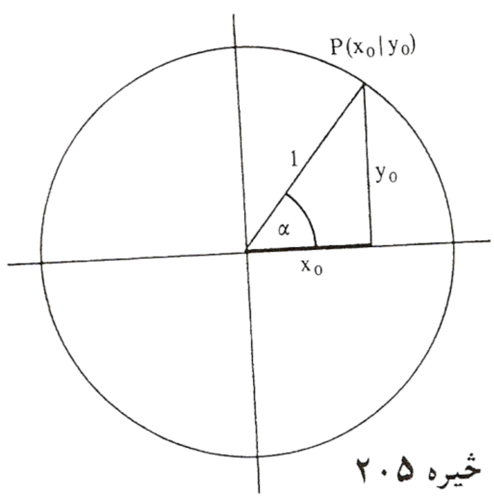
(c) ketabton.com: The Digital Library

په ښه توګه داسی کیدی شي چی په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کی یوه ګردۍ ووهي چی وړانګه یي ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی (دې ته یوونګردۍ ویل کیږي، ځکه چی وړانګه یی یو یوون دی) او د ګردۍ منځټکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردېنات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډی، چی د هغی یو کونج د ګردۍ ښنتریکونج دی، یعنی کونج یی د ګردې په منځ یا ښنتر پروت دی، (ښیره ۱۳۴) کم له کمه یی یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوډی په دننه کی شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړکونجیز دریګوډي ښخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي ښلورمه یا کوادرانت (Quadrant) کی پروت د ی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په ګردۍ ،د کونجټکی $P(x|_0y_0)$ په پام کی نیولو سره، باور لري:

$$\sin\alpha = y_0 / 1 = y_0\,,\quad \cos\alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښی د پریوستون او یا د سیورېدرځونو په ښیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوهونکی مړوند په ښیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محورغبرګي رڼا لاندې راشی.



ښیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کی کیدی شي چی د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

تریګونومتریکي پیتاګوراس:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

چیرته چی $\sin^2\alpha = \sin\alpha \cdot \sin\alpha$ په مانا دی.

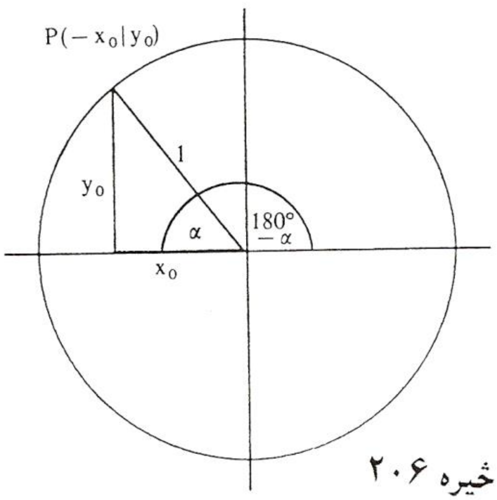
(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي ، چې پوښتنه وشي چې همدا « سيوری » بيا کله لاس ته راتلی شي.
دا حالت بیاهیك هلته لاس ته راځي، چې وړانګه د منفي x –محور سره يو
کونج α جوړ کړي، يعني ښتریکونج يی $180° - \alpha$ وي.
د « سيوروښيرو » څخه لاس ته راځي:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

ځکه چې دا سيوری همغومره اوږد
دی لکه د مخه، مګر اوس له صفر
پيل مخامخ (منفی) لور ښايي.



ښيره ۲۰۶

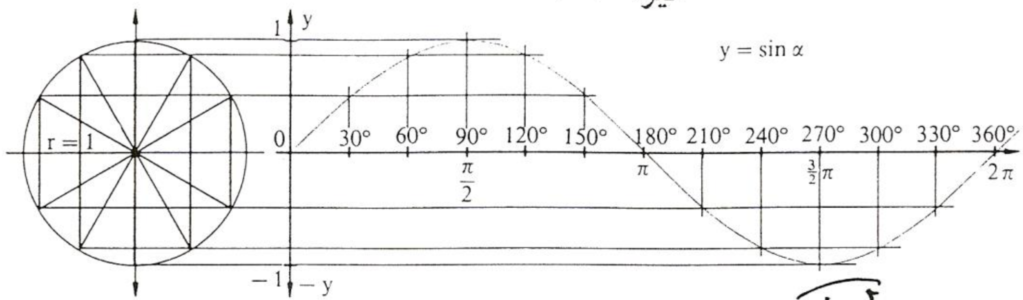
په ورته توګه لاس ته راځی :

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

د کونج $\alpha + 360°$ لپاره بيرته د سرچيني کونج اړيکی لاس ته راځي: همدا ډول
د $\alpha + 720$ لپاره اوهمداسی نور. په دې توګه د په خوښه کونجفنکشنونو يا
کونجبلواکو لپاره د ساين او کوساين بلواك تعريف دي.
د $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ له امله (مقايسه مخ ۱۵۱) دا د تنجنت بلواك لپاره
هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکګرافونه لاس ته راځی

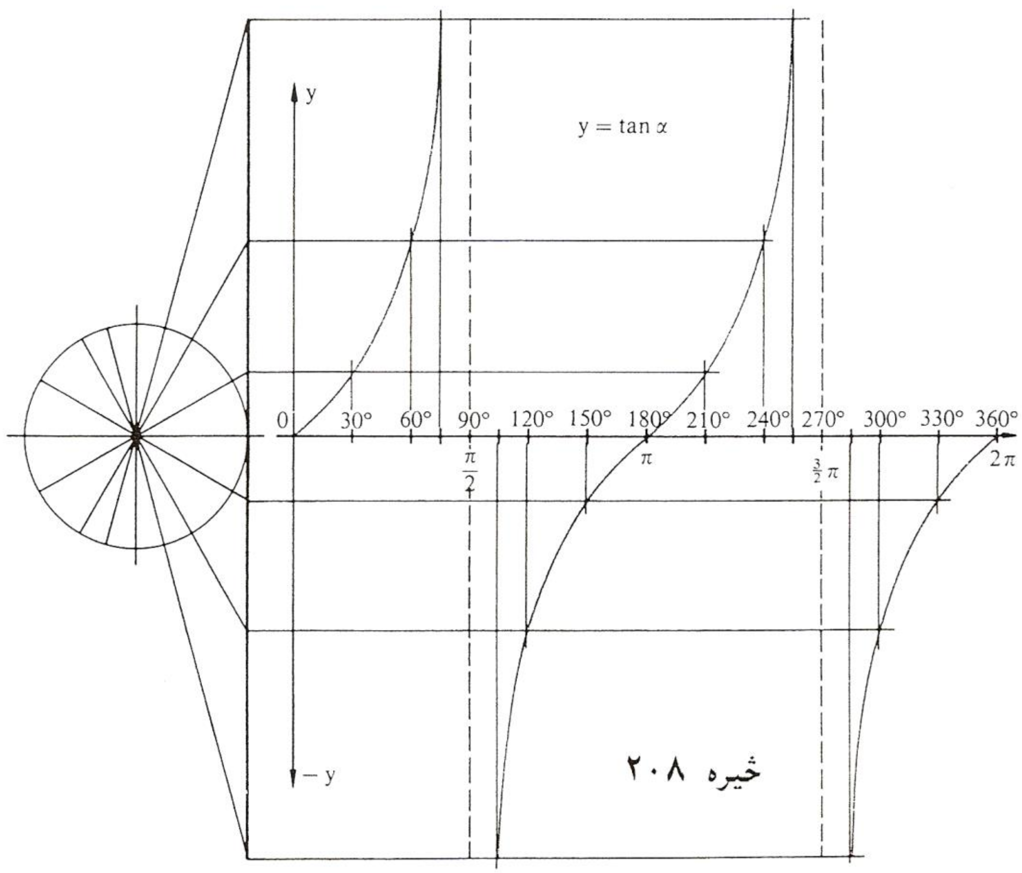
(c) ketabton.com: The Digital Library

شیره ۲۰۷



Die **Sinuskurve**: $y = \sin x$; $x \in \mathbb{R}$; $y \in [-1; 1]$

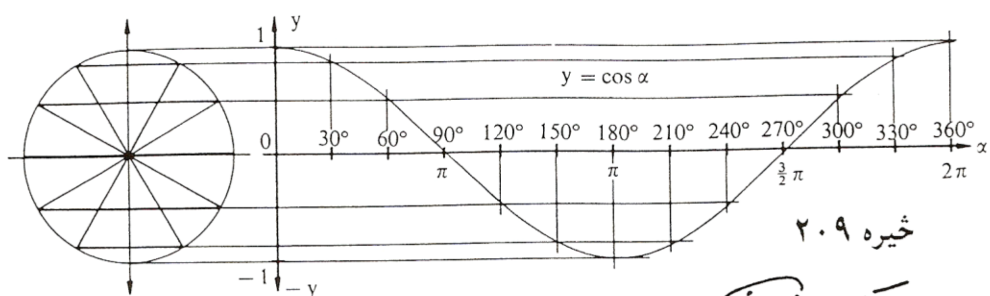
د ساین کږه



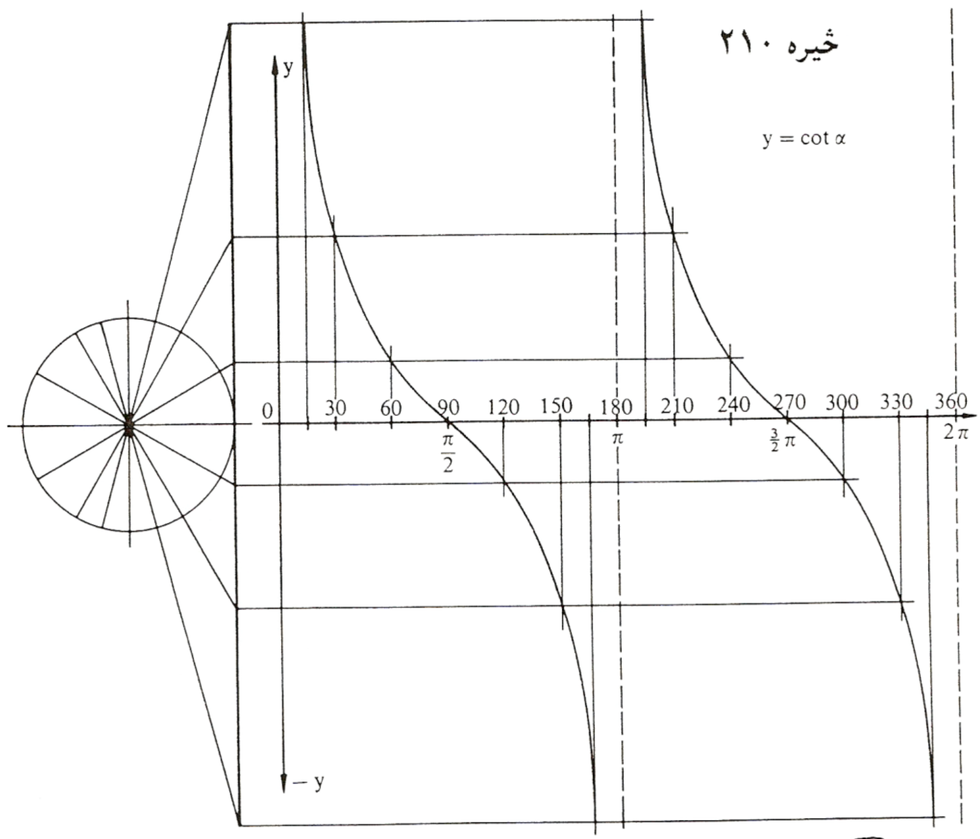
Die **Tangenskurve**: $y = \tan x$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$; $y \in \mathbb{R}$

د تنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library



Die **Kosinuskurve**: $y = \cos x$; $x \in \mathbb{R}$; $y \in [-1; 1]$ دکوساین کج ۵



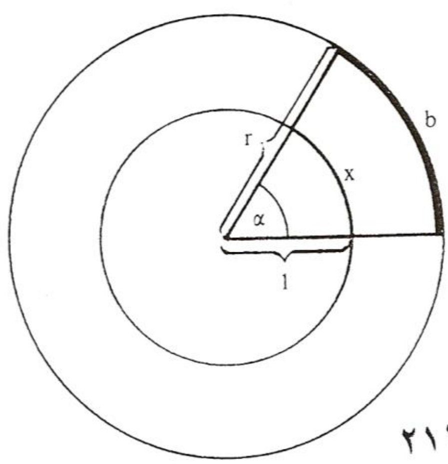
Die **Kotangenskurve**: $y = \cot x$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\}$; $y \in \mathbb{R}$ دکوتنجنت کج ۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

په زړه درجه د کونجکچ یا – اندازې سره بلد یو (دمخه ولیدل، چی ۳۶۰ درجی پوره ګردی ښایي. هغه، چی لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده ، چی ګردی په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دواړو کچیوونونو یا کچواحدونو کی ګډ دي، چی په ګڼونو اندازه کیږي، بی له کچ یوون؛ ارزښتیدیری ریبلګڼونه دي، په داسی حال کي چی وتل ګڼونه (= د تعریف ډیري ګڼونه) یو یوون یا واحد (درجه یا ګون) لري. دا په کارونه یا عمل کی موږ زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.

کونج لويي په واقعیت کی یوون «راد (rad) » لري، مګر دا په کارونه یا عمل کی کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مو نه راهځوي. دا کونجکچونه چی د کونج لپاره په تریګونومتریکی بلواکو کی اینښودل کیږی (د بیلګي په توګه sin)



خیره ۲۱۱

ارګومنت (Argument تعریفډیری) بلل کیږي. په تعریفډیري کی کیدی شي چی نوې درجه ، زړه درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چي په جبشمیري کی همغه مودوس په کار اچول شوي دی(راتلونکی دې وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په برخه ګردیبرخوکی وښوول شو (ګردیبرخی د مخه څیړل شوي دي) چی هر کونج پورې یوه ګردبرخه یا ګردی لینده اړه لري، نو ټولی ګردی پورې ۳۶۰ درجی کونج یا $2\pi r$ اړه لري، یوه کونج ∝ پورې بیا یوه لینده b اړه لري، کومه چی په چاپېرۍ ځانګړې همداسی نیسي لکه په پیل کی∝ و ۳۶۰ درجو ته . دلته ګردیګڼ دی : $\pi = 3,14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پیلبیلګه:

کونج $60° = \propto$ له ګردی د ۱۰ سانتیمتره وړانګي سره یوه په لاندې ډول ګردی لینده $b = 20\pi . 60° : 360° = 10,47$ cm غوځوي یا بیلوي. د ګردی چاپیری دی : $U = 20\pi = 62,83$ cm
همغه کونج ∝ د ۵ سانتي متره وړانګی سره ګردیلینده
$b = 10\pi .60° : 360° = 5,236$ cm
غوځوي. دا ګردی لاندې چاپیری لري: $U = 10 = 31,416$ cm .
له ګردی د وړانګي $r = 1$ cm سره ددې په څټ یا برعکس کونج ګردیلینده
$b = 2\pi . 60°: 360° = 1,047$ cm
غوځوي» د دې ګردي چاپیری فقط $U = 2\pi = 6,283$ دی .

له بیلګي څرګندیږي، چی لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیږي لکه وړانګه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونګردي د وړانګي ۱ سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعریف: په یوونګردي د ګردیلیندی اوږدوالي کچګڼ، چی په څنتریکونج

(c) ketabton.com: The Digital Library

باندې څېره شوي، لينده کچ بلل کيږي. لاندې شميراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180^\circ) . \pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x/\pi)\, 180^\circ = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$$

دا چې د وړانګي څرخون په پوره کونج هم وراوړيدی شي، نو له دې امله د لينده کچ لپاره په خوښه رييلګڼونه پرېښوول شوي.

بيلګې :

$$\alpha = 1^\circ \Leftrightarrow x = \frac{1^\circ}{180^\circ}\pi = 0{,}0175\ (\text{rad}) \qquad \alpha = 180^\circ \Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ}\pi = \pi = 3{,}1416$$

$$\alpha = 30^\circ \Leftrightarrow x = \frac{30^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236 \qquad \alpha = 360^\circ \Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{180^\circ}\pi = 2\pi = 6{,}2832$$

$$\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow x = \frac{45^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854 \qquad \alpha = 720^\circ \Leftrightarrow x = \frac{720^\circ}{360^\circ}\pi = 4\pi = 12{,}5664 \quad \text{usw.;}$$

$$\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472$$

$$\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow x = \frac{90^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \qquad \alpha = -75^\circ \Leftrightarrow x = \frac{-75^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{-5}{12}\pi = -1{,}309$$

ارکوسبلواکي Arcusfunkrionen

زيات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کيږي ، چې لکه په ورکړشوو کرښځاننيونو راپيداشوې کونجونه څنګه معلوميږي يا څنګه راځرګندیږی يا بهتره څنګه ځانونه نيسی. ددې لپاره چې دا پوښتنه ځواب شي، بايد امکانات ولټول شي، چې د کونجبلواك ارزښتونو څخه څنګه بيرته کونج يا په همدې توګه د هغه تعريفډيري ته، په لينده کچ راتلی شو. دا کونجبلواك پريوديکی يا تل بيرته راګرځيدونکي بلواك دی، دا په دې مانا، چې د بلواك ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره يا .

(c) ketabton.com: The Digital Library

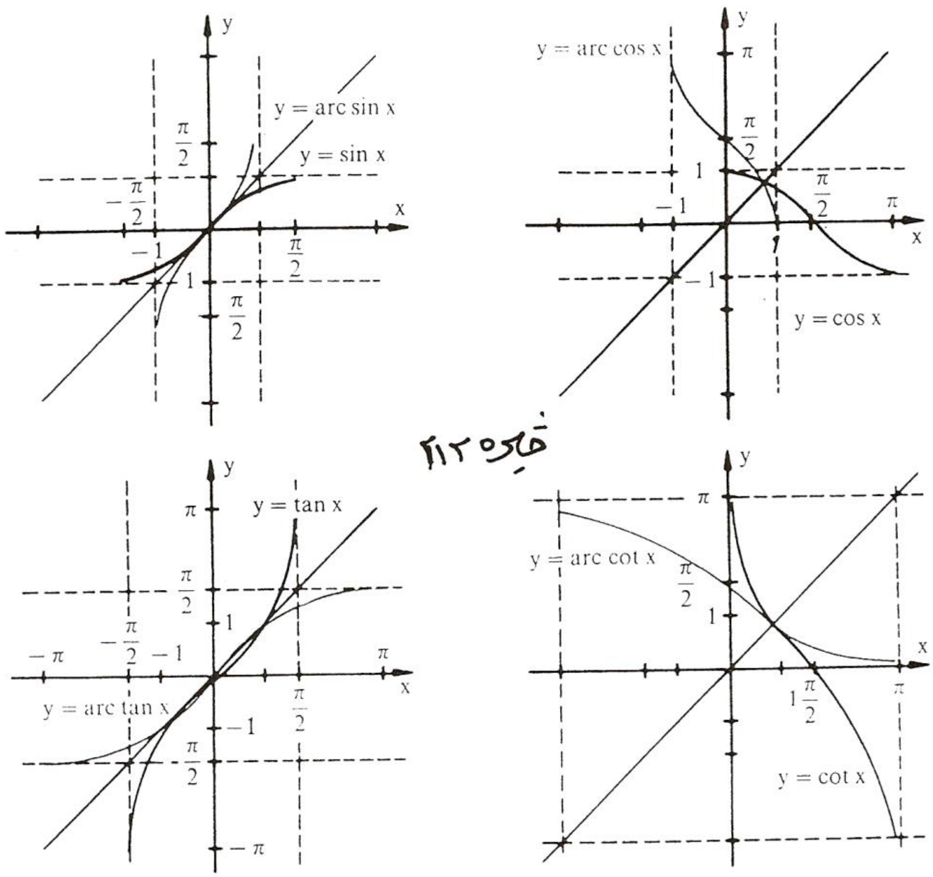
مختلفو واټنونو وروسته، بلواك ارزښتونه تکرارېږي. د دې لپاره چې په څټکيدنه ممکن شي، نو بايد د خپل تعريف ډيرى په يوه برخه ډيري رابند يا محدود شي.

تعريف : د يوه (رابند يا محدود) تريګونومتريکي بلواك په څټ بلواکونه ارکوس بلواك Arcusfunktion بلل کيږي يا څيکلومتريکي بلواك (لاتين :ارکوس Arcus = Bogen = لينده)

دلته (arc sin(x لوستل کيږي »دx ارکوس ساين. د کونجبلواك تعريفډيرى دلته اړونده ارکوسبلواك ارزښتډيرى دی او په څټ ارګومنت يا تعريفډيرى دلته تل يو رييلګڼ دی.

Trigonometrische Funktion تریګونومتریکي بلواک	Arcusfunktion ارکوسبلواک
f: $x \mapsto \sin(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle\| -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arcsin(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle\| -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \mapsto \cos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| 0 \le x \le \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arccos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \{y \| 0 \le y \le \pi\}$
f: $x \mapsto \tan(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle\| -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -\infty < y < \infty\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arctan(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle\| -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \to \cot(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| 0 < x < \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -\infty < x < \infty\}$	f^{-1}: $x \to \operatorname{arccot}(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \{y \| 0 < y < \pi\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



شمیره ۲۱۲

Beispiele: بېلگې :

1. arcsin (0,8) = 0,9273 (rad) = 53,13°

2. arccos (1) = 0 (rad) = 0°

3. arctan (−100) = −1,5608 (rad) = −89,43°

4. arccot (−70) = −0,0143 (rad) = −0,82°

۵ – دا چې کونجبلواك و ارکوسبلاك یو د بل په څټ بلواك دي نو باور لري·

$$\sin(\arcsin(y)) = y; \quad \arcsin(\sin(x)) = x$$
$$\cos(\arccos(y)) = y; \quad \arccos(\cos(x)) = x$$
$$\tan(\arctan(y)) = y; \quad \arctan(\tan(x)) = x$$
$$\cot(\text{arccot}(y)) = y; \quad \text{arccot}(\cot(x)) = x$$

یعنې په لاندې توگه هم

$$\sin(\arcsin(0{,}4)) = \sin(23{,}58°) = 0{,}4$$
$$\arccos(\cos(\pi/3)) = \arccos(0{,}5) = 1{,}0472$$
$$\tan(\arctan(-40)) = \tan(-88{,}5679°) = -39{,}9999$$
$$\text{arccot}(\cot(60°)) = \text{arccot}(0{,}5774) = 1{,}0472$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جبشمیري کارونی یا استعمال لپاره

داچی پخوا معمول جدولونه د بلواك تعریفېدیري او ارزښتېدیري شمیرلو لپاره له کاره غورځول شوي دی او دنده یی ایلکترونیکي ماشینونو نیولی ده، غواړو چي د جبشمیري استعمال په هکله هم څه ووایو
کورکمپیوتر زیات وخت داسی فنکشنونه یا بلواکي لري یا وظیفی په کلك اختیار کی لري، چی د درجي اوړون په لینده کچ او په څپ کوي، مګر شمیردرځ په توګه باید د شمیرونکی په پروګرام کی ځای په ځاي شوی وي.
پوره اسانتیاوې او زیاته کارونه د جبشمیرې په غاړه پرته ده، دلته دې توکمی د < .... > سره په نخښنه شي:
په قاعده کی دریی بلواك ورکړشوي دي : < sin > ; < cos > ; < cot > کوتنجنت بیا داسی شمیرلکیدی شي، د < tan><1/x > . د < INV > – توکمي سره سړی ارکوسبلواك ته راځي: نو < INV><sin > ارکوس ساین دی. په عمومی توګه کونج – بي پروا که په لینده کچ او یا درجه کچ ورکړ شوي وي – باید د فنکشن له مخه ورکړ.

بیلګي

١ لاندې جدول همغه د کارونی یا اتعمال لپاره د جبشمیري چمتووالی ښای :

Winkelmaß کونجکچ	TR-Modus په نخښونه	Beispiel بیلګه
Altgrad زړه درجه	DEG	$\sin 45° = 0{,}7071$
Neugrad نوې درجه	GRAD	$\sin 50^g = 0{,}7071$
Bogenmaß لینده کچ	RAD	$\sin \frac{\pi}{4} = 0{,}7071$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
sin 45°	45⟨sin⟩	0.707106781	DEG
$\sin \frac{\pi}{6}$	⟨π⟩⟨:⟩6⟨sin⟩	0,5	RAD
cot 30°	30⟨tan⟩⟨1/x⟩	1.732050808	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	60(°)	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	$1.047 = \frac{\pi}{3}$	RAD
arccot 2	2⟨1/x⟩⟨INV⟩⟨tan⟩	26.56505118°	DEG
sin 220^g	220⟨sin⟩	−0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چې جبشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه ») د زاړه – یا نوي درجې همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د تکمې <DRG> څخه لاس ته راځي یا د بیلګي په توګه . < MODE >

د ورکړشوي درجه ګڼ اوړون په لینده کچ د < DRG –> > سره سورت نیسي.
بیرته یا په څټ سړی داسی راځي- لکه چې لرل مو- د <INV> – تکمې سره.

بیلګی

60°	⟨DRG⟩	60(rad)
60	⟨DRG⟩	60(grad)
60°	⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨DRG →⟩	60°
60°	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	60°

دلته ګراد نښونه (gard) نوی درجه ده یعنی ګون(gon).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځنی جشمیري په دې برسیره نور زیات امکانات هم لري ، نتیجی یی په ګراد دقیقی، ثانیي اویا لسیز سیستم ورکړ شوي دي. بدلون بیا د تکمی <DMS-Dd> سره صورت نیسی:

26°45′ 30.25°	⟨inv⟩⟨DMS − Dd⟩ ⟨DMS − Dd⟩	26.75° 30°15′

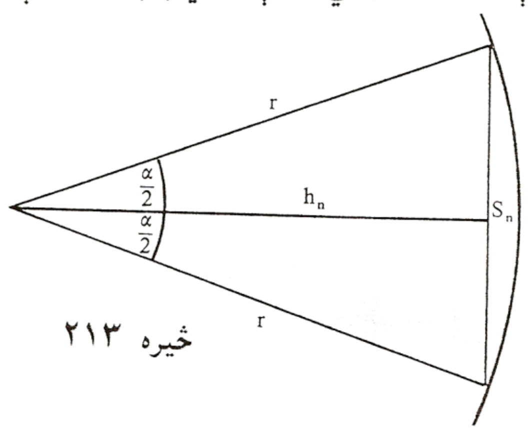
د " "15 °30 " ورکړه کیدی شي د جبشمیري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جبشمیری د لاس کتاب څخه ګټه واخستل شي (یادونه: زه پوهیږم چی داسی شیان موږ متآسفانه په خپل هیواد کي نه لرو ، خو په هر صورت يي ليکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پریښوولی)

پیلبیلګه: دلته دې S_n د یوه منظم n– ګوډي د اړخ اوږدوالی وي، چی په یوه ګردی کی چی وړانګه یی $r = 5$ cm ده، راګیر دی.

الف) وښایي چی

$$S_n = 2r \cdot \sin(180° : n)$$

ب) د یوه داسی n– ګوډي چاپیری U_n وشمیری ، چی $n = 8;16;32;128$ وي، او په نزدې توګه یا تقریبي د دې ګردي چاپیری د دې وړانګي r سره وښایی .



خیره ۲۱۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په همدې ډول n– ګوډی له هوارو A_n څخه په نزدې توګه یا تقریبي د ګردی ـــ هواره A وښایی .

اوبی (حل : هر n– ګوډی کیدی شي په n مساوي دریګوډیو ټوټه کړی شي.
د هغو د ځینتریکونج ∝ لپاره باور لري $360° / n = ∝$. د جګی یا جګوالی h_c
د کبنلو سره په هر مساوي پښیز دریګوډي کي ولاړکونجیزې نیایی د ځنتریکونج
یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\propto}{2} = 360° / 2n = 180° / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n /2) / r = \sin\frac{\propto}{2} \Rightarrow S_n = 2r . \sin\frac{\propto}{2} = 2r . \sin(180° / n)$$

b) $U = n.S_n = 2r.n.\sin (180°/n) = 10n.\sin (180° / n)$

د ارزښتشمیرنو د غلطی مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که په دغه همغه لړپیرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

180° ⟨STO⟩ ⟨:⟩ 8⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 8⟨·⟩ 10⟨=⟩ 30.614675
⟨RCL⟩⟨:⟩ 16⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 16⟨·⟩ 10⟨=⟩ 31.214452
⟨RCL⟩⟨:⟩ 32⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 32⟨·⟩ 10⟨=⟩ 31.365485
⟨RCL⟩⟨:⟩ 64⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 64⟨·⟩ 10⟨=⟩ 31.403312
⟨RCL⟩⟨:⟩ 128⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 128⟨·⟩ 10⟨=⟩ 31.412773

پ) د ډیرګوډي هواره د دریګوډیو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی
د هر دریګوډي هواره ده: $0,5 .S_n . h_n$. د

$$h_n = r.\cos(180° / n)$$

او

$$S_n = 2r . \sin (180°/ n)$$

له امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = n \cdot 0{,}5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0{,}5 \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$$

له دې سره د نړې [illegible]

$$360^\circ \langle STO\rangle \langle : \rangle \; 8 \langle = \rangle \langle SIN\rangle \langle \cdot \rangle \; 8 \langle \cdot \rangle \; 12.5 \langle = \rangle \; 70.710678$$

$$\langle RCL\rangle \langle : \rangle \; 16 \langle = \rangle \langle SIN\rangle \langle \cdot \rangle \; 16 \langle \cdot \rangle \; 12.5 \langle = \rangle \; 76.536686$$

$$\langle RCL\rangle \langle : \rangle \; 32 \langle = \rangle \langle SIN\rangle \langle \cdot \rangle \; 32 \langle \cdot \rangle \; 12.5 \langle = \rangle \; 78.036129$$

$$\langle RCL\rangle \langle : \rangle \; 64 \langle = \rangle \langle SIN\rangle \langle \cdot \rangle \; 64 \langle \cdot \rangle \; 12.5 \langle = \rangle \; 78.413712$$

$$\langle RCL\rangle \langle : \rangle \; 128 \langle = \rangle \langle SIN\rangle \langle \cdot \rangle \; 128 \langle \cdot \rangle \; 12.5 \langle = \rangle \; 78.508279$$

د يوه جشميرې سره ، چي له يوې زخيرې زياتی ولري ، لکه چی پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسيره نورې ثابتي هم زخيره کيدی شي» په يوه منظم پروګراموړ ماشين سره کيدي شي چي د دا ډول شميرنو لپاره د ګوډونو ګڼ څخه ت شو يا د ګوډونو ګڼ باند ې صرفنظر وشي .

د تريګونومتريکي بلواکو خويونه

دا چی کونجکچ په درجه کچ او هم په لينده کچ ورکول کيدی شي، کيدی شي چی يوه کونج بلواك تعريفېږی يا $\propto$ او يا x وي. ددې لپاره چی د يوه بلواك خوي باندې ټينګار وکړو، بايد په لاندې په لينده کچ تکيه وکړو.

د لاندې خويونو لمړی ډله يواځي له تعريفمساوات (د مخه راغلی) او د پيتاګوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرته کاتیت}} = \frac{\frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}}{\frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دي لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \iff \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دې لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دي سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x \; ; \quad 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریګونومتریکي بلواکو کی هیله ده ، چی د پوتنځ لیکدود په پام کی ونیسی.
په لاندې پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

په لاندې کی gegeben ورکړی او gesucht غوښتونی یا پلټونی په مانا دي

gegeben ورکړی / gesucht غوښتونی	sin x	cos x	tan x	cot x
sin x	sin x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

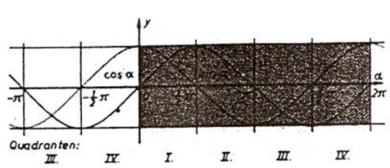
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\tan x$	$\pm\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\dfrac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\tan x}$	$\cot x$

لکه چی د مخه مو په ګوته کړل، کیدی شي چی تریګونومتریکي بلواك د مختلفو ګونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواك ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

تعریف : تریګونومتریکي بلواك ټول پریودیکي یعني بیرته راګرځیدونکی دی، دا په دې مانا، چی د بلواك ارزښتونه په منظمو واټنونو کی تکراریږي. په دې د ساین بلواك او د کوساین بلواك راګرځیدنه (یا ۳۶۰ درجی) لري، کوتنجنتبلواك راګرځیدنه (یا ۱۸۰ درجی (180°)) لري.

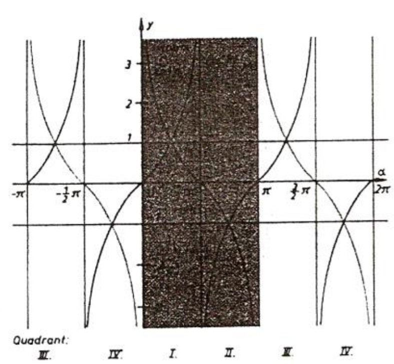
$$\left.\begin{aligned}\sin(x \pm 2k\pi) &= \sin x\\ \tan(x \pm k\pi) &= \tan x\end{aligned}\right\}\quad k \in N$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(x \pm 2k\pi) &= \cos x\\ \cot(x \pm k\pi) &= \cot x\end{aligned}\right\}\quad k \in N$$



خیره ۲۱۴

د ساین - او کوساین فنکشن پریود یا تن راګرځیدنه



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت او کوتانجنت فنکشنونو پریود یا تل بیرته راګرځیدنه:

بیلګي:

بیلګي :

$$\begin{array}{lllll}
\sin 50^\circ & = \sin(50^\circ + 360^\circ) & = \sin(50^\circ - 720^\circ) & = 0{,}76604 & \\
\cos -30^\circ & = \cos(-30^\circ - 360^\circ) & = \cos(-30^\circ + 1080^\circ) & = 0{,}86603 & \\
\tan 2{,}5 & = \tan(2{,}5 - \pi) & = \tan(2{,}5 + 5\pi) & = -0{,}74702 & \\
\cot 10 & = \cot(10 + \pi) & = \cot(10 - \pi) & = 1{,}54235 & \\
\sin 35^\circ & = \sin(180^\circ - 35^\circ) & = -\sin(180^\circ + 35^\circ) & = -\sin(360^\circ - 35^\circ) & = 0{,}573576 \\
\cos 35^\circ & = -\cos 145^\circ & = -\cos 215^\circ & = \cos 325^\circ & = 0{,}81952 \\
\tan 0{,}6109 & = -\tan 2{,}5307 & = \tan 3{,}7525 & = -\tan 5{,}6723 & = 0{,}700208 \\
\cot 0{,}6109 & = -\cot 2{,}5307 & = \cot 3{,}7525 & = -\cot 5{,}6723 & = 1{,}428042
\end{array}$$

که د فنکشن ګراف ته په ځیر شو، نو برسیره پر دې روښانیږي:

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلګی:

	α	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
	35°	145°	215°	325°
sin	0,573576	0,573576	– 0,573576	– 0,573576
cos	0,819152	– 0,819152	– 0,819152	0,819152
tan	0,700208	– 0,700208	0,700208	– 0,700208
cot	1,428148	– 1,428148	1,428148	– 1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځې د جبشمیرې یا کمپیوټر څخه کار اخستل کیږي ، هدفمند بولو، چې یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin x bzw. sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	–	0
cot x bzw. cot α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

دلته د همداېول یا همداسي په معنا دی

له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا ګوماني لاس ته راوړی شو

$$\sin x = \cos(\;\;/2 - x) \qquad \cos x = \sin(\;\;/2 - x)$$
$$\tan x = \cot(\;\;/2 - x) \qquad \cot x = \tan(\;\;/2 - x)$$

دا ګومان کیدی شي په ولاړکونجیز درېګوډي کي د تعریف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

$\sin\;\; = a / c$ او $\cos ß = a / c$

د $\;\; - 90° = ß$ له امله لاس ته راځي :

$\sin\;\; = \cos(90° - \;\;)$

په ورته توګه نور ې غوښتني هم لاس ته راتلی شي.

دا له خیرو څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، څکه د ساین او کوساین بلواکو یا په همدي ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو ګرافونه د $/2$ $x =$ کرښی ته یو بل سره محورسیومتري ځغلي :

له خیرو او بیلګو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

تعریف: د کوساین بلواك جفت دی ، لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

ساین – ، تنجنت – او کوتنجنت بلواك ناجفت دي» د دوي لپاره باور لري:

$$\sin(x) = -\sin(-x), \quad \tan(x) = -\tan(-x) \; ; \; \cot(x) = -\cot(-x)$$

یادونه : په دې نلواکو کې کیدی شي چی x له نوکانو دباندې هم وي:

بیلگی:

$$\sin 60° = -\sin(-60°) = 0{,}86603$$
$$\cos 0{,}75 = \cos(-0{,}75) = -0{,}70711$$
$$\tan 150° = -\tan(-150°) = -0{,}57735$$
$$\cot 1{,}3 = -\cot(-1{,}3) = o{,}27762$$

د زیاتون قضیي یا تیورمونه

دا چي کونجبلواك لاینې نه دي(د فنکشنګراف کرښه نه ده،بلکه کږه ده) ، نو ډېل تعریفډیرې پورې ساده ډېل بلواك ارزښت اړه نه لري.
لکه

$$\sin 30° = 0{,}5 \quad \sin 90° = 1 \quad \sin 180° = 0$$

د داسی په نامه زیاتونمسئلی په مرسته ممکن کیږي، چی د بلواك ارزښت د کونج په دوه برابرولو یا په همدې ډول د دوه کونجونو پو په بل زیاتولو د یوګونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابي کړی شو.

بیلگی :

1. $\sin(x + y) = \sin x . \cos y + \cos x . \sin y$
1'. $\sin(x - y) = \sin x . \cos y - \cos x . \sin y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2 . $\cos(x + y) \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

2 '. $\text{cis}(x - y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$

3 . $\sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

4 . $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$

7. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 - \cos x)}$

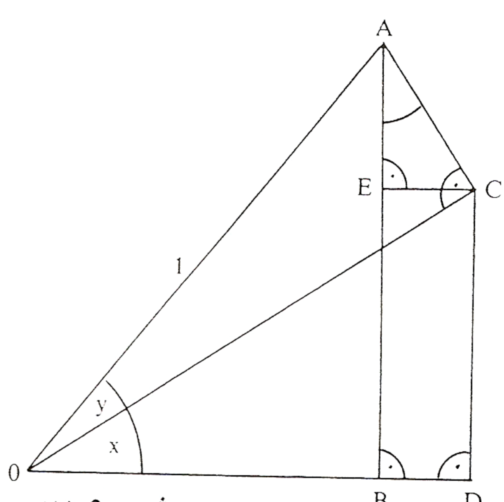
8. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 + \cos x)}$

9. $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

9'. $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

10. $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

10'. $\cot(x - y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$ mit $\cot x \neq \cot y$



(c) ketabton.com: The Digital Library

1. und **2.**:

$|OA| = 1$

$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y$

$|AB| = \sin(x+y); \quad |OB| = \cos(x+y)$

$$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

$$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

برسیره پر دې لرو:

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$
$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د ځای په ځای کولو څخه ښوونه په لاس راځي

$$\sin(x+y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1'. **2'.**:

3. ı **4.**: $x = y$. ځای په ځای کړه

5.: Setze $z + t = x;\ z - t = y \Rightarrow z = \frac{x+y}{2};\ t = \frac{x-y}{2}$ کېږده

پس لرو $\sin x = \sin(z+t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$

$$= \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

همدارنګه $\sin y = \sin(z-t) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

6. ښوونه په ورته توګه څخه راځي

7.: $x = y = z/2$ کېږده

$$\Rightarrow \cos(x+y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2\frac{z}{2} - \cos z \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریښنه نیوني له لارې ښوونه لرو

په (*) کې $\sin^2 z/2$ $1-\cos^2 z/2$کیږده:

۹ – ۱: دا اړیکې له ۱ او اوم او تانجنت پیژند څخه لاس ته راځي

بلواك يا فنكشن $y = a . \sin(bx+c) +d$

لكه چي په پيل کی مو وويل په طبيعت او تخنيك كي ډيرې پيښي شته دی چي تل بيرته راكرځي يا لنډ: راگرځي، يعني پريوديكي دي. د دې د تشريح لپاره په خپل سوچه يا خالصه بڼه تل د ساين بلواك بسيا نه كوي.

دا زيات علتونه لري : لمړی د ساينبلواك د ۱- او ۱ ترمنځ ارزښت نيسي، له بلي لور داواقعي د كونج په واك کی نه دي بلكه د وخت په واك كي دي د يوې راگرځيدنی سره، چی دا په ساده توگه د 2 په ډول نه شي رانيولكيدی. له دې امله د ساين بلواك د دې كارونو د روښانوولو لپاره بايد موډيفيڅير شي يا يی بڼه واوړي. دا بڼه اوړون او د هغی تاثير په لاندې ليدنه کی راټول شويدي، گراف يی ورزياتی څيرونی لپاره دی. په ورته ډول د نورو كونجبلواكو لپاره باور لري په عمل كي مگر يواځي د ساينبلواك (په همدې توگه د هغي مخامخ د كوساين بلواك چي په $\pi/2$ سره راكښل شوی وي) د مانا ډك دي. (لوستل: له ښي لورڅخه)

بلواك	تاثير	دكارونی ساحه	بيلگی
$y = \sin(x)$		ټولی تلبيرته راگرځيدونی تعامولونه	څيره ۲۱۷
$y = \sin(x) +d$	د y – لور پلاندې راکښنه	د یوه مساوي او بدل شپیلاوند لپاره بل بېلولو	څیره ۲۱۸

y = sin(x+c)	د فاز تغیر یا ځای بدلون	په بدل برېښنا جریان کې د برېښنا او شیالونو تخنیکي دوبنسانونه	ځېره ۲۱۹
y = a . sin(x)	د امپلیټود د ځای بدلون فاکتور −1 د 180° فاز ځای بدلون دی	دیوه پندول څوزېدنه	ځېره ۲۲۰
y = sin(bx)	د پېریود تغیر یا بدلون b>1 سرعت 0<b<1 په کراره کېدل b <0 په شا ګرځېدنه کله چې مخ ور دی	دیو بنسټیز ګړدي ځېړنه په یوه وخت داوږدو از رهغې لېږدو لکه په دموټرېک الو یه او از ونو کې	د ځېره ۲۲۱
y = a . sin(bx+c)+d	عمومي حالت	کمپلکس پېریودي جریان یا عمل	ځېره ۲۲۲

تمرینونه

۱ – د لاندې ورکړې سره ځېره بله کړی

4°6' = 4,1° ; 10° , 5' = 10°30

a) 6,75° = b = 120,48° = c) -75,65° =

d) 52°16' = e) 97°13' = f) 44°44' 44" =

۲ – په درجه کچ ي وليکی

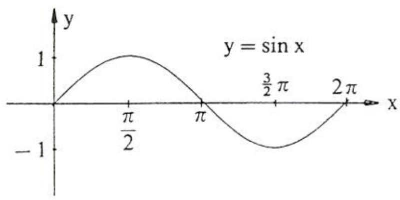
a) x = π/3 , b) x = -π/4 , c) x (2 /3)π

d) x = 4 e) x = -3 f) x = 4,7

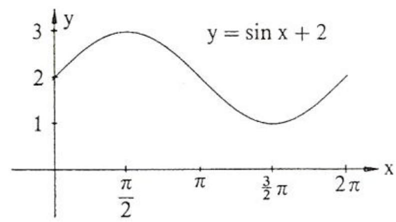
۳ – په لینده کچ یی ولیکي

a) 15° b) -60° c) 540° d) 20°15' e) 15,75°

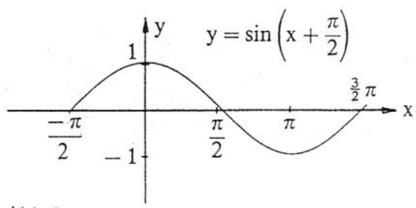
(c) ketabton.com: The Digital Library



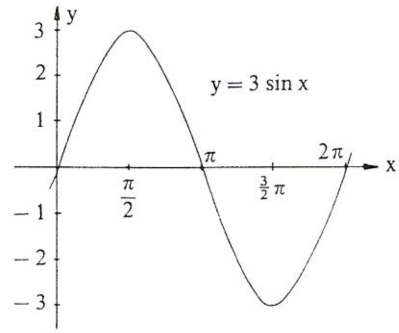
شیره ۲۱۷



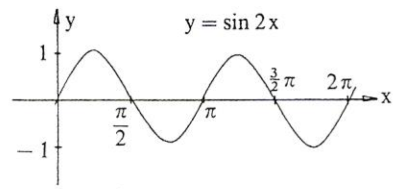
شیره ۲۱۸



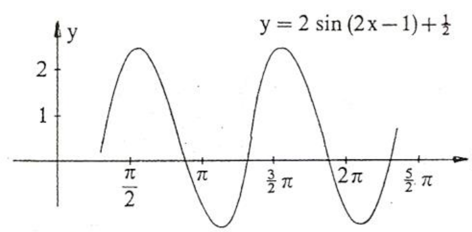
شیره ۲۱۹



شیره ۲۲۰



شیره ۲۲۱



شیره ۲۲۲

د دې بلواك ګراف د ساين کرښې $y = \sin x$ څخه لکه چې ګورو لاس ته راځي:

۱ – د ارزښت دوه ځله کيدل

۲ – د نيمی راګرځيد اوږدوالی باندې پرسيدنه

۳ – په يوه يوون د ښي لور ته راکښنه

۴ – په 2 / 1 پورته لورته 100% راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – وټاکی

a) sin20° b) sin(-30°) c) sin 172° d) din1°4'

e) cos 35° f) cos 380° g) cos(-27°) h) cos47,9°

i) tan 11° k) tan (-15°) l) tan 33,33° m) tan 13°13'

n) cot 870° o) cot (-11°) p) cot 14°14'

q) cot (-2°2')

r) sin α =0,8 s) cos α = 0,9 t) tan α = 2,5

u) cot α =-1 v) sin φ = 0,3 w) cos φ = -0,13

x) tan φ = -4 y) cot φ = 0,3 z) arcsin(x) = π /2

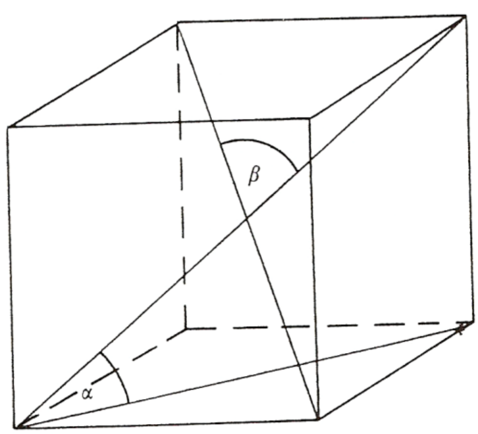
۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی لرو $\gamma = 90°$ او په دې برسیره :

a) a = 7 cm; b = 6cm

b) a = 16cm; = 66°45'

c) c = 5cm; a = 3cm

پاتی ټوټې وشمیرى



خیره ۲۲۳

۶ – په مساوي پښیز دریګوډي

کي (a = پښه ده) دی

a) a= 10cm ; α =80°40'

b) a= 12 cm ; h = 8cm

c) ß = 40°; a = 7cm

پاتی ټوټي وشمیري

۷ – د یوه پڅکونجیز (α > 90°)

دریګوډي لپاره ساین وشمیری

۸ الف) کوساین د یوه پڅ کونجیز

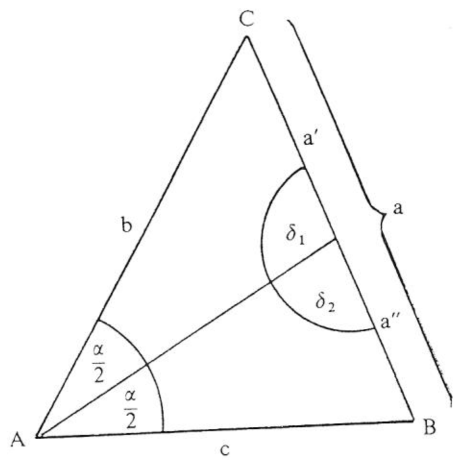
دریګوډي لپاره وشمیری (α > 90°)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟

۹ – په یوه مکعب کی د یوه هوا نیمي او بنستهواري ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟
څیره .د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمیو ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

۱۰ – د دوه ګردیو وړانګی
$r_1 = 5$ cm , $r_2 = 4$ cm
دي او همداسی د منځټکو واټن $|M_1M_2| = 8$cm ورکړ شوی دی.
دد دواړو ګردیو د تماس
مماسونو غوڅکونجی وټاکی
او د کړې غوخونی اوږدوالی .



څیره ۲۲۴

۱۱ – په یوه دریګوډي کی د یوه
کونجنیمی مخامخ اړخ په داسی
ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه
په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د
ساین جملی په مرسته حل
(اوبی) کړی(څیره۲۲۴).

۱۲ – که یوه بار ځاي ته،
چي ۱،۵۰ متره جګ دی،
یوه زینه ورجګه شي
میلانکونج ∡ دې زیات ترزیات 33° وي، زینه دې څومره لویه وي؟

۱۳ – الف)د یوې پورته ختلی کوڅي جګوالي توپیردې څومره وي، که دا
کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جګه وي؟
ب) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جګوالي توپیر څومره دی ؟
پ) د یوه زوړندې پټیلار، چی ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کی څومره
لوي دی ، که دا د جګوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟

یو د اوبنی یا د اوبو بیلر (کله= ۱۰۰ کیلوګرامه) په یوه پورته خیزول کیږي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

میلانکونج ∠ = 25° لري. د وزنزور په زوړندزور تختی سره غبرګ او نورمال یعنی ولاړ زور(د فشارزور) ولاړ تجزیه یا ټوټه کیږي، دواړه زوره څومره لوي دی ؟ (۱ کیلو ګرام = ۹،۸۱ نیوټن 1 kg = 9,81N).

۱۵ – یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی ۵۳ متره اوږده ده، درول کیږي. درسیو میلانکونج 60° دی په ښنه باندې په کوم جګوالي باید رسی وړلی شي ؟

۱۶ – د یوې ۵۳ متره جګې ونی سیوری ۵ ، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه لمروړانګي په کوم جګوالی یوبل سره مخمامخ کیږي.؟

۱۷ – د یوه ۵ متره جګ کتونټکي (لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چی جګیدونکوج یی ∠ = 18,5° او ښنیټکی یی β=8° لوید کونج ، برج څومره جګ دی ؟ د لیدټکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی ؟

۱۸ – الف) د پیزا (Pisa) کوږ برج ۴۷ متره جګ دی، او څوکه یی د ښنی ټکي څخه ۵۰ ،۴ متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی ؟

ب) د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جګ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي (یعنی د سترګي جګوالی د برج بنسټټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟

پ) د ۵، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي

– که جګوالی یی ۱۶۰ متره وي؟

– که جګوالی یي ۱۳۷ متره وي ؟

ت) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې

– د بل برج څوکه ښکاریږي چی جګوالی یي ۱۴۳ متره وي ؟

–د پاریس د ایفل برج ښکاریږي چی جګوالی یي ۳۰۰ متره دی ؟

۱۹ – د ښیپپس اهرام(CHeopspyramide) ۱۳۷ متره جګوالی لري او د بنسټ

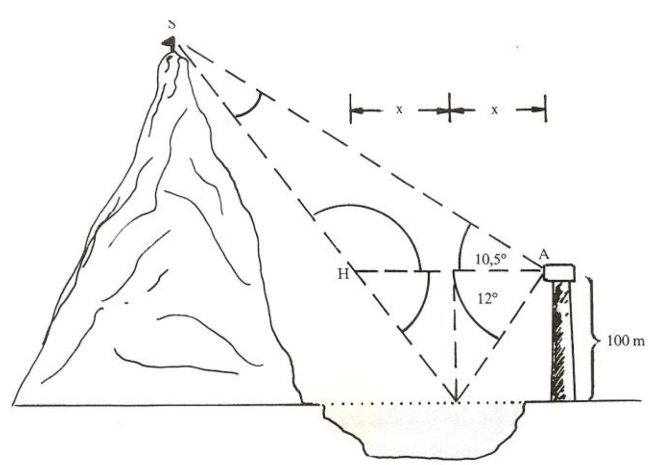
(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري
الف) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟
ب) د څنګهوارې دریواړه دننی کونجونه څومره لوي دي؟

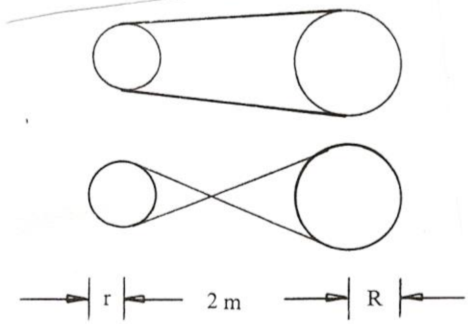
۲۰ – یو ژوری یا قبر –۸ ، ۱ متره ژور دی، بنسټسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی
الف) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی؟
ب) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جګوالی یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟

۲۱ – یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جګوالی لري د بحیرې لور ته 14° میلان لري، د دننه لور ته 28° میلان لري. د ډنډ بنسټ څومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده؟

۲۲ – د ریفلډنډ Riffelsee ښځه یو ښه لید د ماترهورن (ماترنښکر یا د ماترن د غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی دی) اچول کیږي که دا د یوه لیدټکي ځخه چی ۱۰۰ متره جګ دی د ډنډ په لور ښکته وکتل شي، نو د غره د څوکي هندارونه د 12° پریوتکونج لاندې لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج 11° لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ باندې د ماترنښکر څوکه څومره جګه پروته ده؟
څیره



(c) ketabton.com: The Digital Library



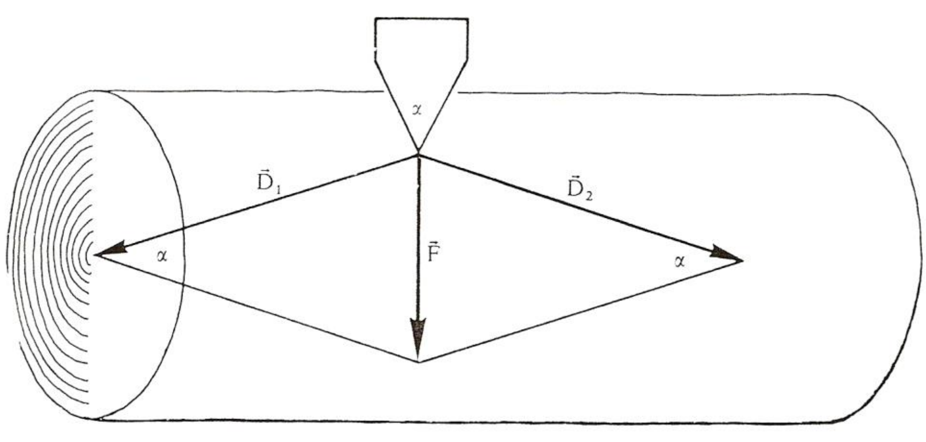
خیره ۲۲۶

۲۳ - الف) یوه د کشولو کړی، چي په دوه دکښولو چیترو باندې راتاو ده، څومره اوږده ده، که لاندې اندازې ولري $r = 22\ cm$, $R = 35\ cm$, $|M_1M_2| = 2m$?

ب) دا کړی به څومره اوږدې وي که د اهیران په څیر له چیتروګانو یا تیکلیو واکی څیدلی وي ؟

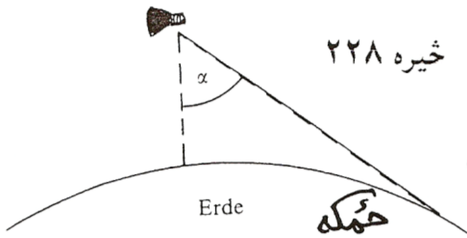
۲۴ الف) د ونی په سته یو کایل (موړی) په څټك د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D څومره لوي دي، کوم چی د ستې درځونه ، که د کایل یا تبرګي کونج $\alpha = 6°$ وي. (حیره ۱۹۴)؟

ب) په کومکایلکونج یا تبرګیکونج لرو: $|D| = |F|$ ؟



خیره ۲۲۷

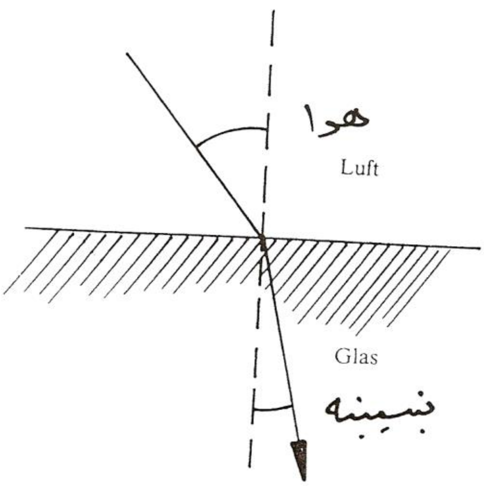
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۸

۲۵ – د یوه الوتماشین څخه ځمکه د یوه ∝ کونج لاندې لیدل کیږي (خیره) دا الوتماشین څومره جګ الوزي ؟ (د ځمکې وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره)

۲۶ – یو ګادی د $v_{\propto} = 120km/h$ سرعت سره روان دی، نو د باران څاڅکی په پټلی د تلنلور باندې په $= 115°$ کونج



خیره ۲۲۹

د چیترو (مطلب د ګاډې د اوسپنې ټیر یا ګاډیل دی) مخامخ ځغلي. له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو د لویدلو سرعت v_g وټاکئ ؟

۲۷ – که د لمروړانګه په دوه مختلفو طبقو ولویږي، نو خپلې لور ته تغیر یا بدلون ورکوي. د سنیلیوس Snellius د ماتقاعدې له مخې کیدی شي چې د ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون وایي، چې پروتوړانګه ، ماتوړانګه او ولاړکرښه یا عمود په بیلیدونکې هوارې په یوه هواره پراته دي او برسیره پر دې لاندې اړیکې باور لري یا صدق کوي:

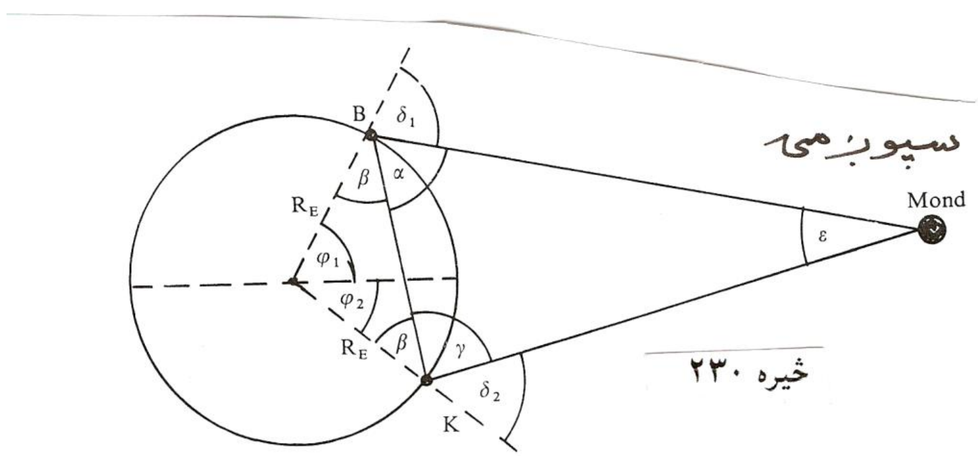
$$\sin \propto \ / \ \sin \beta = n$$

که د رڼاوړانګه په یوه ښیښه (اوبو) پریوزي، نو $n = 1,5 \ (1,33)$ دی وښایي، چې ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چې په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

؟ 10,5°, 15,8°, 27,3° , 41,2°,67,6°,, 72,4°, 81,9°

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۸ – په ۱۸ ا–مه میلادي پیړی کی د سپوږمی لریوالی تریګومتریکي وټاکل شو. په برلین کی (جغرافیوي اوږدوالی $\varphi_1 = 52,52°$) او لکه د ښو هیلو په کونج کی ($\varphi_2 = -33,93°$)، کوم چی په همغه اوږدګراد پراته دي، د سپوږمی سره په همغه وخت کی تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل:
$\delta_1 = 32,08°$ او $\delta_2 = 55,72°$.
وشمیری $|KM|$, ß , $|BK|$ او له دې څخه d_{EM} .



خیره ۲۳۰

۲۹ – لړځیدنیSchwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعني د وخت t تړواك لاندې دي. دا د بلواك $y = a . (\sin(2\pi/T)) .t + k)$ له لارې ورکړ شوي. دلته $(2\pi/T)\, t = x$ هغه کونج دی ، کوم چي په T وخت کی وهلکیږي. $1 / T = f$ د یوه څرخون پریود یا راګرځیدنی وخت په ګوته کوي او د لړځیدنی دوام بلل کیږي» f فرکونځ frequenz بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولو راګرځیدونکو هوارو زیاتون، دباندي هوارې، او ډکي یا حجومونه، د هوارو متن ټولګی سره ده.

ډکي یا حجمونه په مکعبمتر m^3 په همدې توګه د مکعب متر برخه یا څو واره باندې ورکول کیږي، چې یو په بل اړول یی، لکه چی لاندې ګورو، ساده دي

$$1\ m^3 = 1m.1m.1m = 100cm^3.100cm.100cm = 1\ 000\ 000\ cm^3$$

یعنی :

$$1km^3 = 10^9\ m^3$$

$$1m^3 = 10^6\ cm^3$$

$$1cm^3 = 10^3\ mm^3$$

$$1mm^3 = 10^9\ \mu m^3$$

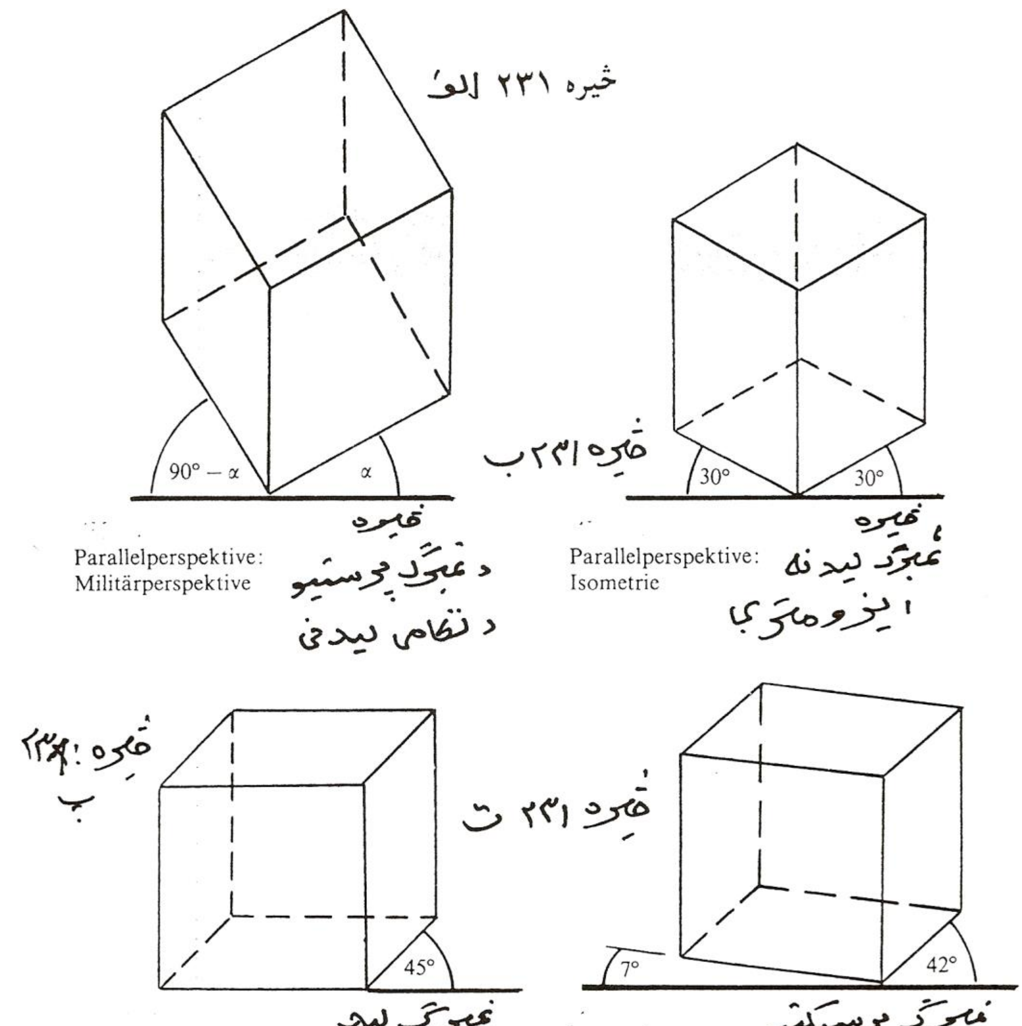
برسیره پردې په پیچلو شکلونو باندې باید یو لیدونکی یا اوپتیکي نظرلاس ته راوړی شو.

د هندسي بدنونو یا تنونو رسمول

په پرینځیپ کی د بدن درې ډوله ګرافیکي انځورونه موجود ده. دام کی ګیرونه ، مایل انځورونه، او دربتخته ئیز پرویکشن Projektion (دریتیخته ئیز پریوستون).

دا هروې یی مختلفې دندې سر ته رسوي.

د دام ګیرونه اصلاً ددې لپاره په کار راځي، چی د بدن ټوله دباندې هوارې وښولی شي. دا که چیرې راګردي پریکړی شي او سره ونښلول شي، نو د هغه بدن څیره جوړولی شي.



Parallelperspektive: Militärperspektive

Parallelperspektive: Isometrie

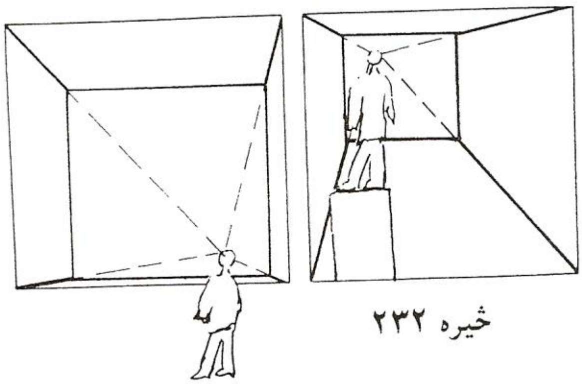
Parallelperspektive: Kavaliersperspektive

Parallelperspektive: Dimetrie

د استعمال وړ د نظراچولو (د نظر لاندې راوړلو) کښل، مایلڅیره کښل دي. دا هوايي پراخيدنه واضح کوي. دلته د کاواليير پرسپکتيو (مائيل له پورته) او يوه (چينډښي پرسپکتيو (مائيل له ښکته) ترمنځ توپير کيږي، مګر د دواړو ترمنځ لاندې ګډه قاعده موجود ده: ليدونکي ته جبهيي (فرونتال) ځغليدونکی لاينونه په

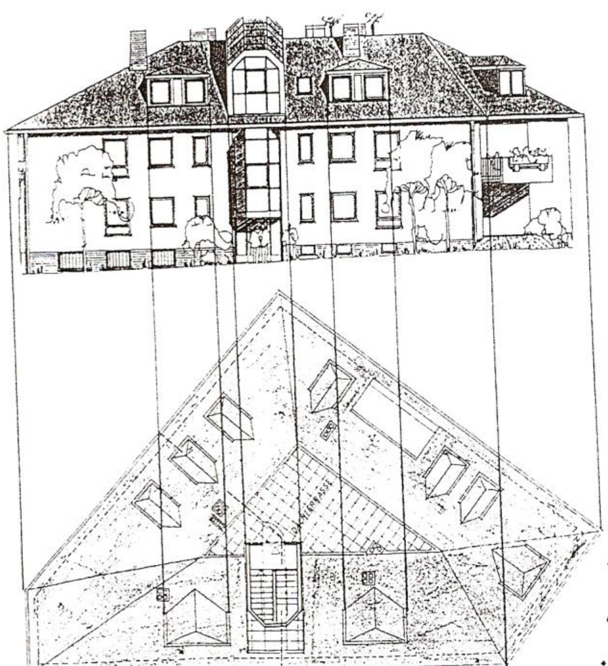
(c) ketabton.com: The Digital Library

نورمال اوږدوالي، له ليدونكي لرې ځغليدونكي لاينونه مائيل او په لنډ ډول كښل كيږي. لنډونه يې د كونج تر واك ده:



خيره ۲۳۲

پروت کونج	30°	45°	60°
لنډوونکی فاکتور	2/3	½	1/3



خيره ۲۳۳

په يوه پرسپكتيو مائيل جوړښت كې طبعاً ځني برخې او نه ځيره شوې د شا خواوې وركيږي، دا په دې مانا چې په كښلو كې نه راځي. له دې امله او په ځانګړي ډول كونجلرونكو بدنونو لپاره درې تختئيزپرويكشن (پريوستون) ګټور دي. دا يو درې ځلي ولاړ پريوستني له لارې منځ ته راځي (الف) بنستيز ضرز يا غوځي هواره، (ب) اړخيزغوځي يا درز هواره (پ) پورته درز يا غوځي هواره او دا زيات وخت په جوړښترسمونو كې استعمال مومي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

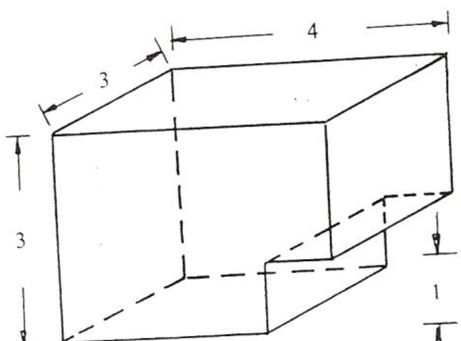
تمرینونه

۱ – د دې ثیره بدن ثخه
دریتختهییز پریوستون وکاږی

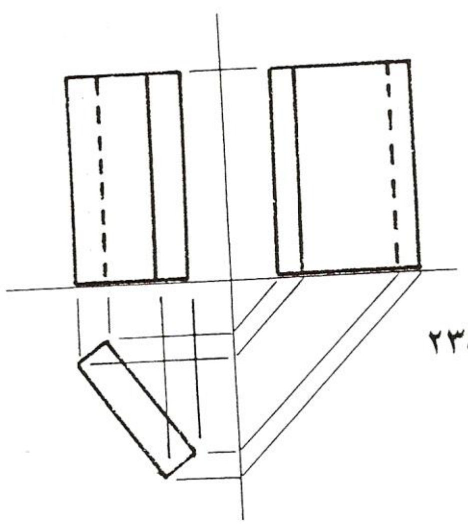
۲ · ددې بدن مائئله ثیره
وکاږی، کوم چې دریتخه ئیزه
ثیره پورې اړه لري.

۳ – د یوې ولاړې ګردي توتی یا
استوانی مایيلی ثیرې غوښتل
کیږي، چې د بنسټ او ولاړ
درځ له لارې ورکړ شوي وي.

۴ – یو شپږاړخي نل یا شپږڅنډیز
نل وباسی په غبرګ پرسپتکیو
انځورونی سره.



ثیره ۲۳۴



ثیره ۲۳۵

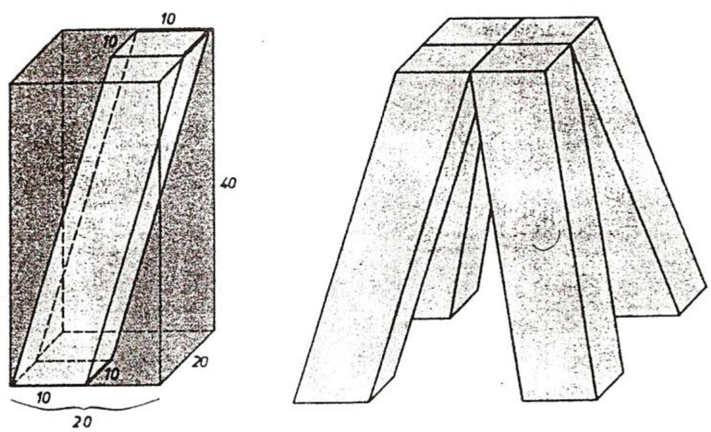
(c) ketabton.com: The Digital Library

پریزماوې Prismen

پیلبیلګه :

۱ = د یوه ستنویا تیرپښو جوړ میز یا Podestپودست(لکه په څیره کی کښل شوی میز) د لاندې جورښت لپاره یو پښ باید څلور پښی د څلوراړخیز لرګیو په څیره شوي شکل اره کړي. یوه پښه څومره ډکی (حجم) لري ؟

. $V = 10^2 . 40 = 4000cm^3$



څیره ۲۳۶

۲ – د یوکږولاړې یا مستقیمی پریزما چی جګوالی یې 12 cm دی دباندې هواره او ډکی (حجم)، چی ځمکه او سر یا سرپوښ یې یو سیومتري تراپیځ وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

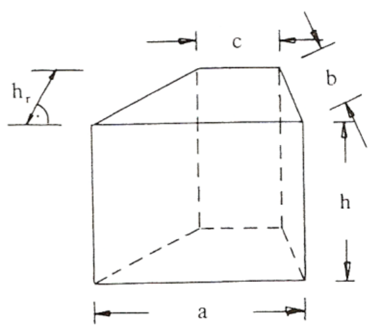
د اړخونو د اوږدوالي $a = 10\ cm$, $c = 6$ او $h_r = 4\ cm$ سره څومره دی؟

د تريخ هواره

$$h_r.(a+c) / 2 = 4.(10+6)/2 = 32cm^2$$

ده، نو ډکی يی په لاندې ډول دی:

$$V = G.h = 32.12 = 384\ cm^3$$



څيره ۲۳۷

د دباندې هوارې لپاره د تريخ اړخ اوږدوالي b ته اړه شته .

دا د پيتاګوراس د جملی په مرسته لاس ته راوړو

$$b = \sqrt{16+4} = 4,47\ cm$$

له دې امله دباندې هواره ده :

$$O = 2.G + (2.b + a\ c),h$$

$$O = 64 + (8,84 + 10 + 6).12$$

$$O = 363,28\ cm^3$$

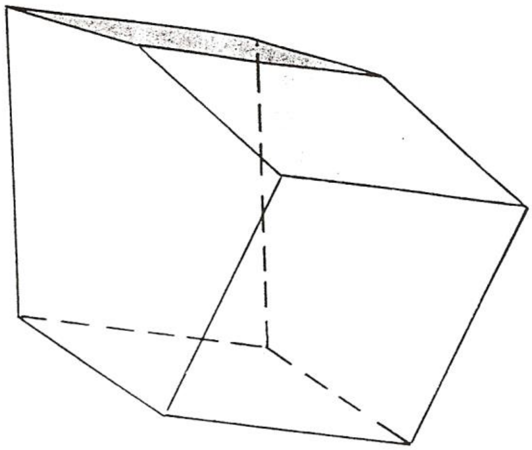
ساده بدنونه هغه دي، چی يواځي په ډيرګوډيو (پوليګونو) بند شوي وي يا يواځي له ډيرګوډيو راګير وي، او ددې ترمنځ د بيلګي په توګه بيا پريزما ده.

تعريف Prisma : داسی يو هندسي بدن، کوم چی له دوه يو بل سره غبرګو او ګونګروانيځو پوليګونويا ډيرګوډيو بند يا راګيروي پريزما بلل کيږي.

د بنسټ او پورته هوارې د کونګروانيځ له امله د اړخونو هوارې غبرګاړخيز دي.
د پورته هوارې (چت) ولاړ اوږدوالی د پريزما جګوالی بلل کيږي. کيدی شي چی د

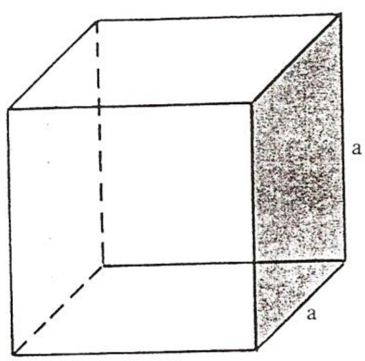
(c) ketabton.com: The Digital Library

يوه اړخ اوږدوالی د جګوالي باور ولري، نو بيا له ولاړې پريزما غبړيږو.



خیره ۲۳۸

د ټولوخورامنظم او په دې ډول خورا ځانګړي پريزما شپږاړخيز يا مکعب دی (وورفل Würfel). دا د دباندنی هوراو ۶ کونګروانيځ مربع خواوې لري، او ژۍ يا اړخونه(کانتی) يی يو په بل نيغي ولاړې دي.



خیره ۲۳۹

جمله : د يوه شپږ اړخيز يا شپږخوايز (مکعب) د دباندې هوارې O او ډکي (حجم) V لپاره باور لري:

$$O = 6a^2$$

$$V = a^3 = a^2 \cdot a = G \cdot h$$

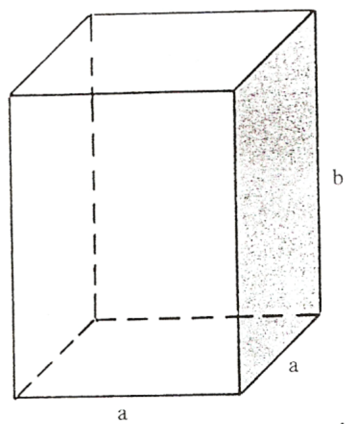
بیلګه : څه شی دروند دی يو کورک(Quark يو شکل لرګي ډوله بدن دی، چی د بوتلونو خولی په پټيږي) مکعب چی د يوه اړخ اوردوالی يی 0,3 m وي او که يو د اوسپنی مکعب چی د اړخ اوږدوالی يي 8 cm (د کورک V سختوالی g/cm³ 0,2 د اوسپنی 7,86 g/cm³)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې د یوه بدن کتله m لاس ته راوړی شو، نو کلکوالی یا دینسرتی یی د ډکي سره ځلوو.

د کورك مکعب ډکی : $V = (30cm)^2 = 27000\ cm^3$

$m = 27000cm^3 .0,2g/cm^3 = 5400\ g$



ځیره ۲۴۰

د اوسپنی مکعب ډکی :

$V = (8cm)^3 = 512\ cm^3$

$m = 512cm^3\ .7,86\ g/cm^3$

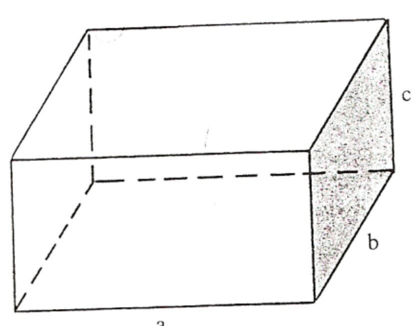
$= 4024\ 32\ g$

د کورکمکعب له دې امله د اوسپنی د مکعب ته نزدې

34% [(5400-4024):4024 ~0,34]

دی یا په بل عبارت، د کورك مکعب نزدې ۳۴ په سلو کی د اوسپنی د مکعب څخه درونډ دی.

که د مکعب سټه(ځمکه) یا بستې او چټ یا سر مربع پاتی شي او نورې خواوې یی تغیر کړي نو یوه مربع ستن(پېښه) لاس ته راځي.



ځیره ۲۴۱

که ځمکه او سر هم یوه ولاړکوډیز ته «ټولیز» شي یا « عمومیت » پیدا کړي، نویو کوادر Quader منځ ته راځي. هغه درې مختلفی اړخنیمي، مگر مساوې هوا نیمي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ا هواقطرونه لري. دا د پیتاګوراس د جملې په مرسته شمیرل کیدی شي.

جمله: د مربع ستن د دباندې هوارې او ډکي (حجم) لپاره صدق کوي:

$$O = 4ab + 2a2$$

$$V = a^2 b$$

د اړخونو نیمیو اوږدوالی په لاندې ډول دی

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}\,; \quad d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

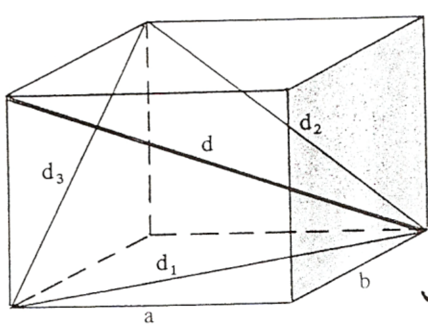
$$d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

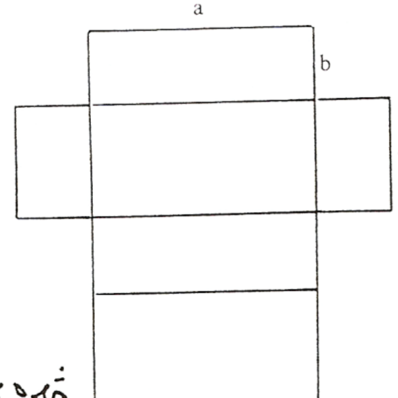
د هوانیمیو لپاره صدق کوي:

$$d = \sqrt{d_1^2 + c^2} = \sqrt{d_2^2 + b^2} = \sqrt{d_3^2 + a^2}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

خیره ۲۴۲ الف





خیره ۲۴۲ ب

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: یو کوادر د کانتو اوږدوالی $a = 5cm$, $b = 4cm$ (بنسټیز هواره $a.b$)
او $c = 12cm$ لري:

د پوښهواره: $M = 2.(5.12+ 4.12) = 216\ cm^2$

دباندې هوار. $O = 2.(5.12 + 4,12 + 5.4) = 256\ cm^2$

ډکی (حجم) : $V = 5.4.12 = 240cm^3$

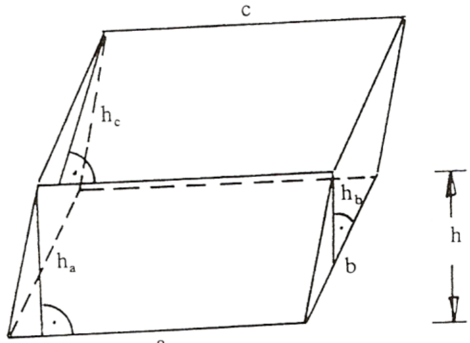
نیمي: $d_1 = \sqrt{25 + 16} = 6,40\ cm,\quad d_2 = \sqrt{25 + 144} = 13\ cm$

$d_3 = \sqrt{16 + 144} = 12,65\ cm$

$\Rightarrow d = \sqrt{25 + 16 + 144} = 13,60\ cm$

یوه مائیل څلوراړخیزه پریزما د جوړه یو بل سره غبرګو کونګروایڼخ څلورکونجیو سره غبرګ اپیپت یا شپات یا په بل عبارت غبرګهواریز بلل کیږي ، چې موږ به یی له دې ورسته همداسی وبولو. د هغو دباندې هواره د هغه د بنسټ– پورته – او اړخهوارې دوه څله ده.

دا د غبرګ اړخیز په څیر شمیرل کیږي او په عمومي ډول باور لري:



څیره ۲۴۳

جمله: د غبرګهواریز دباندې هواره او ډکی دي:

$O = 2.(a.h_a + b.h_b + c.h_c)$

$V = G.h$

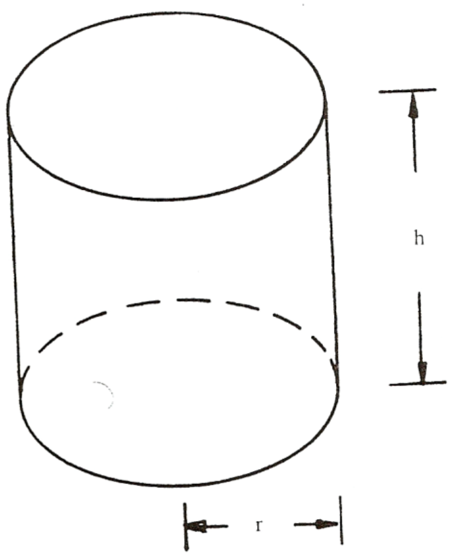
دلته د ډکي شمیرنه د غبرګ اړخیزهوارې په

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیر اجرا کیږي: د بدن جوداشوي توکي يو د بل مخامخ لور تکميلوي:
يو بل عموميت يا ټوليزه به د غير منظم ، مګر په بنسټ يا ځمکه او پورته
کونګروا ينڅ ډيرګوډيز پريښول وی، د هوارې د خواو هوارې بيا غبرګ اړخيز دي.

جمله: د په خوښه پريزما د دباندې هوارې او حجم لپاره باور لري:
د ټولو خواو هوارو زياتون + بنسټيزه هواره . O = 2
بنسټهواره . جګوالی = V

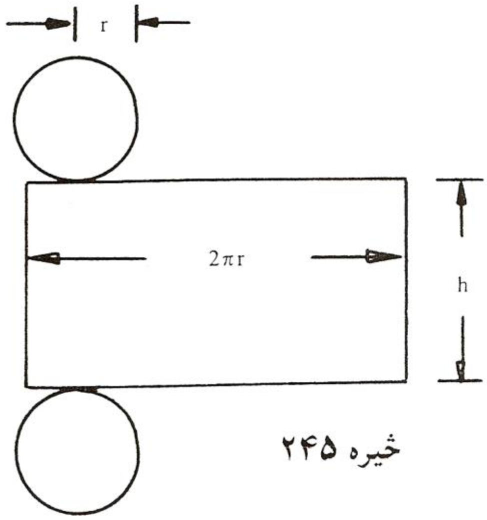
سيليندر (توته يا استوانه يا ستن)



ځيره ۲۴۴

د هغی نيغي (سيخ ولاړې) پريزما
سره ، چی لاندې او باندې يي
سيومتري – ګوډيز وي – څه پيښيږی،
که د کونجونو شمير نور هم زيات شي؟
اوس نو لاندې هواره (او په همدې ډول
پورته هواره هم) په ګردې بدليږي او
دا ډير سره ګوډيز شوي د خواو هوارې
په يوې کږې يا راتاو هوارې بدليږي.
يو بدن يو بل سره کونګروا ينڅ او
غبرګ لاندې پورته ګرديهوارو سره
ګرديتوته يا ګرديسيليندر بلل کيږي.
د دی روښانونی يا توضيح لاندې درې
شيان څرګنديږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۴۵

۱ – د توتی یا استوانه یا
گردیسیلیندر د پریزما سره
خپلوان دی.
۲ – گردي استوانه یا توته پخپله
د په خوښه فورم شوې پورته –
او لاندې هوارو لپاره یو
ځانګړی حالت دی.
۳ – لمړنی ځرګندونه د ولاړ
گردي سلیندر یا توتی یو
ځانګړی مهم حالت وو،
ډکی یا حجم د همغه پرینځیپ
له لارې کیږي لکه د پریزما.
د جال ښوونه یی د
پوښ د خلاصولو له لارې کیږي، له دې سره دوه گردی تړلي راځي چې لاندې
او پورته(دځمکی– او سرپټی هوارې) هوارې دي.

جمله: د یوه ولاړې گردی استوانی یا توتی پوښ، دباندې هوارې او ډکي
لپاره باور لري:

$$M = 2\pi rh$$

$$O = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(r+h)$$

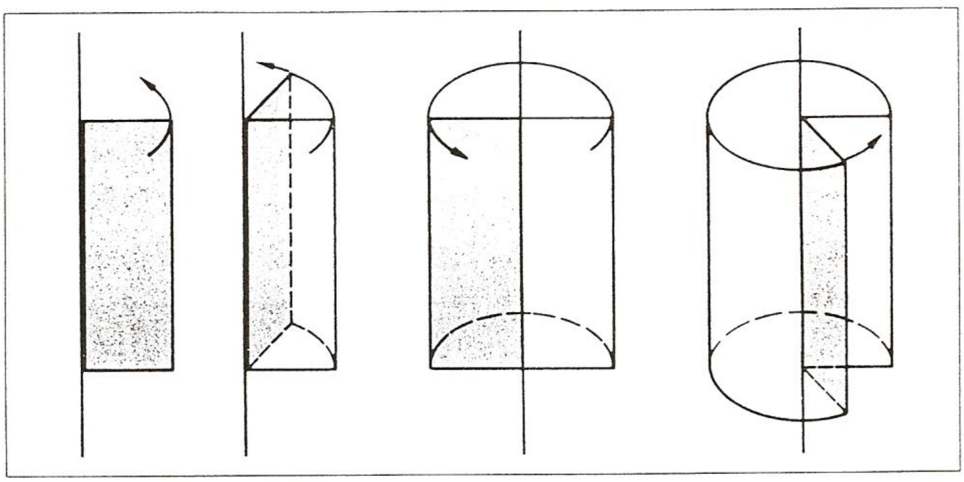
$$V = \pi r^2 h$$

که د یوې استوانی یا توتی څخه منځتکي سیومترې استوانه چی وړانګه یي له
مخکی استوانی یا توتی کوچني وي راوباسل شي، نو دې پاتي ته یی سوری استوانه

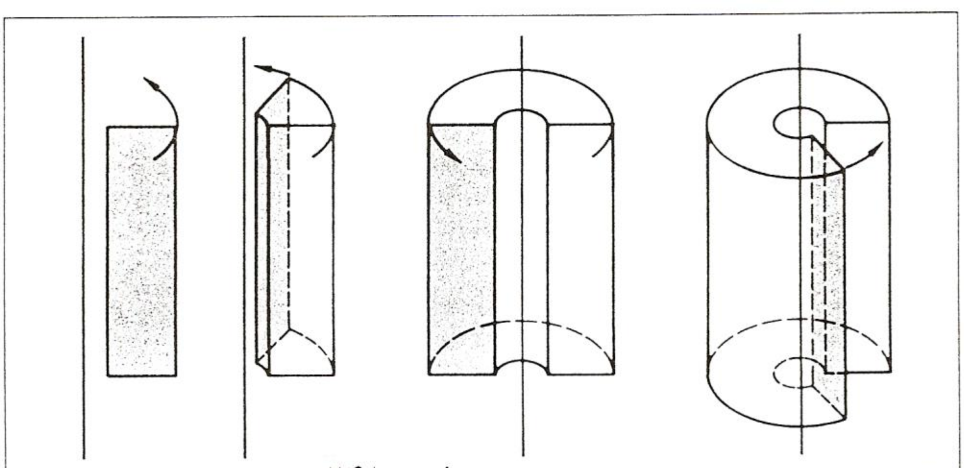
(c) ketabton.com: The Digital Library

که د مخه ونیول شي یا فرض شي، چی دا سلیخ شوي کاغذ 0,1 mm پنډ دی،
نو دلته باید ټول $0{,}491 \cdot 10000 = 4910{,}m^2$ کاغذ سلیخ شوی وي.

د ګردي – او سوری استوانی یا توتې یا ستن لاندې د یوه ولاړکونجیز
څرخون(Rotation) هم په خیال کی راوړلی شو:



څیره ۲۴۷



څیره ۲۴۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – یوه سمه پریزما د شپږکونډیز بنسټ– په همدې ډول سرهوارې سره لرو، چې ۵ سانتي متره جګه ده. هربنسټهوارې اړخ یې ۴ سانتي متره اوږددی. ددې ډکی پوښ او پورته یا ټوله راګرده هواره وشمیری.

۲ – یو غبرګهواری ۸۱ مکعب متره ډکی لري او پورته هواره یا ټوله هواره یې ۱۳۲ مربع سانتي متره ده. جګوالی او د اړخ اړخیز c اوږدوالي یې وښایي، که بنسټ هواره یې د اړخونو اوږدوالی ۵ ،۴ سانتي متره او ۳ سانتي متره ولري او دا دواړه اړخونه وي بل سره د ۶۰ درجو کونج جوړ کړي.

۳ – پورته واره او ډکي څنګه تغیر خوري، که د یوه کوادر اړخونه دوه برابره شي؟

۴ – د یوه کوادر دري اړخونه یو بل سره په ۳:۲:۱ ځاننیونه یا تناسب کی پراته دي، دا څومره اوږد دی، که د دې کوادر ډکي ا مکعب متر وي؟

۵ – یو مکعب د هوانیمی $d = 6\sqrt{3}$ لري. نو ټولهواره، ډکی او اړخ(a , V , O) یی وشمیری.

۶ – د شګو موټر کي چی د بارهوااندازه یا بارډکي اندازه یي 2,82m×1,68m÷0,55 وي، څومره مترمکعب شګه ځایږي، که دا د پورته اړخ یا کانتي پورې ډك شي؟
د باروړونکي د بار وزن ۱۵ ، ۱ ټنه دی په بارولو به څومره ورزیات شوی وي ، که شګه یوه ډیښتی، ټیګوالی یا غلظت $\rho = 2\ g/cm^2$ ولري؟

۷ – په یوه هواره کرښه یو د پټلیو بند باید ډك شي. دا کرښتوټه ۲۵۰ متره اوږده ده، دا پټلیبند ۸ متره جګ دی او په بنستهواره کی ۳۹ متره ، په سر کی ۲۷ متره سرور دی، د ډکولو لپاره به څومره خاوره بسیا وکړي؟

۸ – د سرك جوړولو ماشین څرخونی (د اوسپنی غټ ه استوانه چی سرك پرې پخوې او په سرك یي څرخوې) ۱،۵ ۱ متره نیمی لري او د۲۵ ،۲ متره سرور دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه هواره څومره لويه ده، چې خرخی يی په يوه څرخون وهی؟

۹ – يو بايسکل پمپ د ۵ ، ۲ سانتيمتره اوږد ړنا نيمی لري او د پمپ اوږدوالی ۲۸ سانتيمتره دی، د پمپ تشيا ډکی څومره دی ؟

۱۰ – د دې لپاره، چې د ګيلاس توته په پروتغوخي باندې خيرو يا معاينه کړو، ۲۰۰ ګرامه پارې نه يی ډکوو(ρ = 13,6 g/cm³) . پوهيږو، چې توته هر ځاي کی همغه دننني نيمی لري. دا نيمی څومره دی، که پاره 82 cm جګه وي؟

۱۱ – يوه کچتوته دې، د يوه 5 cm دننه نيمی سره داسی په کچکرښو په ننبه شي، چې د هرو دوه پرلپسی کرښو وي د 5 cm³ ډکی وښايي. د دوه څنګ په څنګ کرښو ترمنځ دې واټن څومره وټاکل شي؟

۱۲ – د يوه ولاړګوډيزې وسپنی ټوټی (25 cm × 20 cm) څخه دې يوه کوتی ، بی له سرپوښ او بيښ څخه جوړه شي. ډکی يی وشميری که الف) چاپيری يی د اوږده اړخ سره برابر وي او ب) که چاپيری يی د لنډ اړخ سره برابر وي؟

۱۳ – د لاندې توتو پاتی کځونه وښايي:

a) r = 5 cm ; h = 12 cm   b) r = 9cm ; V = 120 cm³

c) h = 6,5 cm ; O = 300 cm³   d) M = 282 cm² ; V = 424 cm³

۱۴ – توته څومره ډکی لري، که يو د a اړخ اوږدوالي مکعب په کې خوندي وي؟ پوښ او دباندې يا پاسهواره يی څومره دې؟

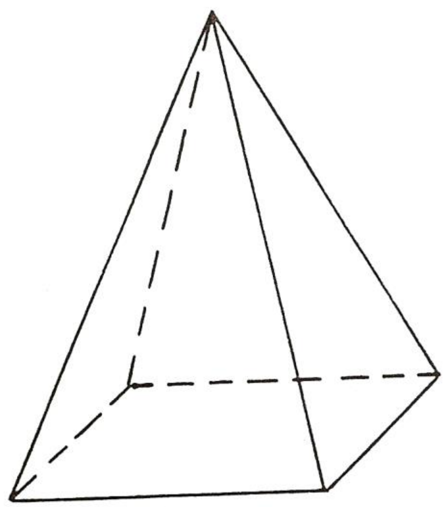
۱۵ – د يوې توتی جګی h او ورانګه r ځانونه (h : r =) 2 : 3 نيسی. ډکی يی 2000 cm³ دی. h , r او M يی وټاکی.

۱۸ – يو ولاړډوله توته يزه ګل کوټی د h = 17 cm جګي سره د سره د سرپوښ او بيښ ايليپسی د دواړو نيممهرونو a = 30 cm او b = 20 cm سره لري. د دې ډکی څومره دی؟

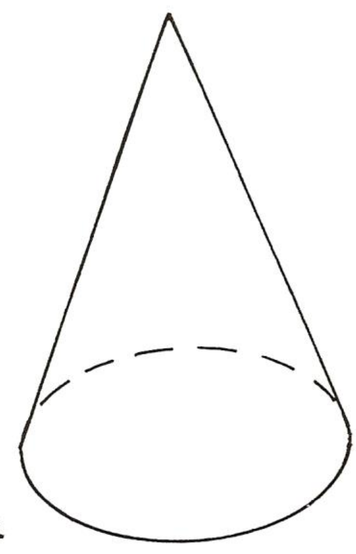
(c) ketabton.com: The Digital Library

اهرامونه او مخروطونه Pyramiden und Kegel

که څه هم دواړه بدنونه بدلو ګروپونو پورې اړه لري- اهرام یواځې هواره راګرځیدهواره لري، مخروط مګر راتاو یا کږه هواره.- بیاهم زیات ګډونوالی لري، نو له دې امله یې یه ګډه غواړو وپیژنو یا معرفي کړو.



خیره ۲۴۹



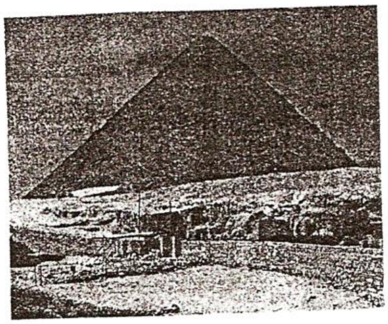
خیره ۲۵۰

پیلبیلګه :

د ۲۵۹۰ او ۲۴۷۰ (م. کال پخوا) ترمنځ په غزه مصر کې په یوه ډیر مصرف د فرعون خیوبس د قبر اهرام خیوبساهرام (Cheopspyramide) جوړ شو. د دې د جوړولو لپاره څه سل زره انسانان په کار واچول شو، چې هغوي نزدې دوه نیم میلیونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

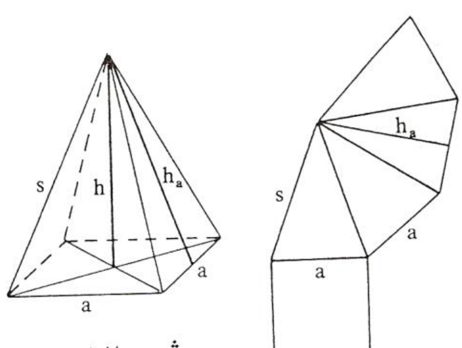
د تیگو بلاکونه پري کړل ، رایي وړل او یو په بل یی طبقه په طبقه یا پوړی په پوړی باید اینښوولي وی. دا د خیوبس اهرام ځومره ډکی (حجم) لري، که هغه یوه لاندې هواره ۲۳۰ متره مربع ولري او جګوالی یی ۱۴۷ متره وي. د هغه لیدوړ دباندې هواره ځومره ده ؟



ځیره ۲۵۱

د خیوبس اهرام د ولاړو اهرامونو ځانګړی حالت جوړوي، ځکه چی د هغی تیره ککره د لاندې هوارې په منځ ټکي نیغه ولاړه ده. هغه اهرامونه چی په هغو کی دا حالت نه وي کاږه یا بهتره مائل اهرامونه بلل کیږي. په عمومي ډول یو اهرام راپورته کیږي، که د ډیرګوډي ګوډونه له ډیرګوډي دباندې ټکي سره ونخلول شي. د کونجونو او سرتیرې نخلونلاین ته اړخکانتی (لنډ : اړخ) وایي . لکه چی د جالښوونه یی ښایي، نو دباندې هواره یي له لاندې اړخ او د اړخیزو دریګوډي د یوځایوالي ځخه لاس ته راځي، چی وروستی یي پوښ هم بللي شو یا بولو.

که د ډکي یا حجم ټاکلو لپاره د خیوبس اهرام په مربع شکلي پوړیزتجزه شوی وي، په فکر کی راولو چی د پوړی جګوالی یی h / n وي. د وړانګي جملی د خورا پورته پوړی د هوارې لپاره لاس ته راځي:



ځیره ۲۵۲

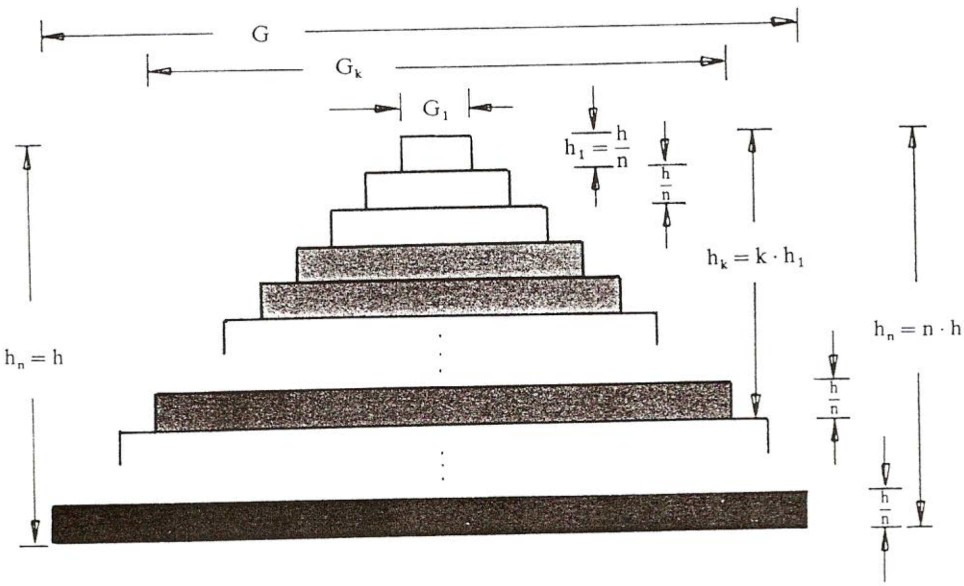
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1^2 : h^2 = G_1 : G \Rightarrow G_1 = G : (h^2 / h_1^2) = G / n^2$$

په ټولیزه توګه (عمومي ډول) :

$$h_k^2 : h^2 = G_k : G$$

$$\Rightarrow G_k = G.(k/n)^2 \quad , G_n = G$$



شیره ۲۵۳

په دې ډول د k –ام زینې پوړي ډکی (حجم) دی

$$V_k = G_k.h / n = Gh.k^2 / n^3$$

د ټولو پوړیو له زیاتون څخه لرو

$$V_{پوړی} = Gh.(1^2+2^2+...+n^2) : n^3$$

$$= Gh\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) : n^3$$

$$= Gh\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوره ایندوکځیون له لارې لرو (دا په دې کتاب کی نه څیړل کیږي. ددې موضو لپاره دې ځما دشمیرپوهنی بنسټیز کتاب وکتل شي)

$$1^2+2^2+3^3+...+n^2 = n(n+1)(2n+1) :6 = (2n^3+3n^2 +n) / 6$$

که د پوړیو شمیر n نور هم لوي شي، نو بیا یی سړی له میلان څخه نه شي توپیرولی. دې ګڼونپوهی اکویوالنت دا دی چی n هرڅومره لوي شي او n په ماتلاندې کی موجودوي نو هغه په هغو غړو صرفنظر کیدی شي یا هغه غړي له پامه ایستل (لرې) کیدی شي.

په دې پوله حالت کي د اهرام ډکی له لاندې اړیکو شمیرل کیږي.

$$V = G.h / 3$$

دا د خیوبس اهرام باندې استعمالوو :

د اړخونو هواروجګوالی له نیمی لاندې اړخ او جګوالي د پیوتاګواراس د جملی له

لاری شمیرل کیږي: $h_a = 115^2 + 147^2 = 186 , 64m$

په دې ډول یی پوښ دی $M = 4.0,5.186,64.230 = 85853,80m^2$

د دباندې هواری څخه نور څه نه لیدل کیږي.

ډکی یی دی : $V = 230^2 .147 = 7776300m^3$

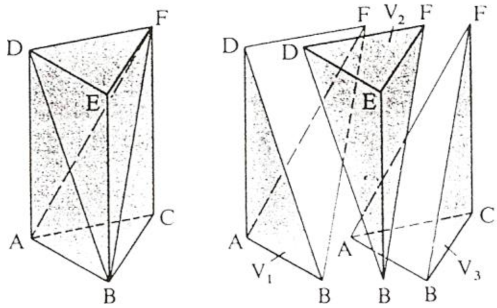
جمله : د یو اهرام د پوښ، دباندې هوارې او ډکي لپاره باور لري:

د اړخونو د ټولو دریګوډیو زیاتون = M

O = M + بنسټهواره

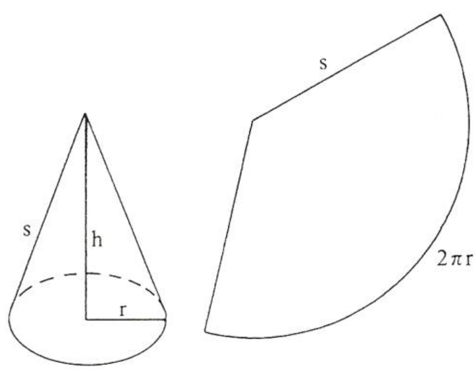
V = بنسټهواره . جګوالی / 3

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۵۴

دا فرمولونه طبعآ د مائیل اهرام لپاره هم باور لري د پوړیو شمیرنه بیا طبعآ یو څه اندازه ستونځي لري‌که چیرې د یوه اهرام بنسټ یوه ګردی ونیسو نو مخروط لاس ته راځي، مخروط سم ولاړ بلل کیږي ، که د هغه تیره ککره یا لنډه: ککره په منځنټکي (نیغه) ولاړه وي، نور ټول مخروطونه مائیل بلل کیږي. دا په لاس کی لرلو له لارې ګورو، چی د اهرام ډکي یا حجم شمیرډول په مخروط باندې هم استعمالیدی شي، که د پوړیو په ځای دلته وړې ستنی په پام کی ونیول شي. لکه په خیره ۷ کي د پوښ خورونه یا پوښ جال ښایي چی پوښ د ګردي ټوټه ده، چی وړانګه یی د بنسټګردي وړانګه ده او لینده یی د ګردی چاپیرونکی کی ورکړ شوی دي:

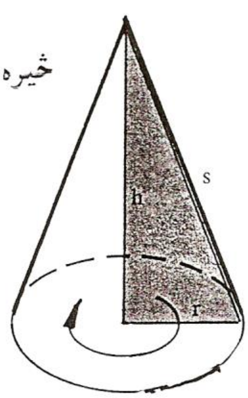


خیره ۲۵۵

$$F_S = b.r/2,$$

پس لرو

$$M = 2\pi r.s/2 = s.\pi.r$$



خیره ۲۵۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

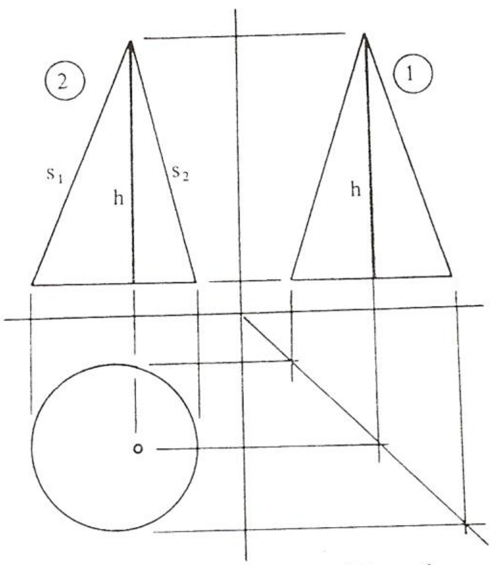
جمله : د ګردي مخروط پوښ، دباندې هواره او حجم لپاره باور لري:

$M = s.\pi r = \pi.r^2 . 360° / \alpha$

د $\alpha = 360° . r / s$ سره

$O = M + \pi r^2 = \pi r (r + s)$

$V = \pi r^2 . h / 3$



خیره ۲۵۷

په پام کی دې وي چی ولاړ مخروط د څرخون په څیر هم په خیال کی راوړل کیدی شي: چی په کانتی یا یوه اړخ د یوه ولاړ دریګوډي څرخون څخه لاس ته راځي.

بیلګه : د ولاړ ګردیمخروط ډکی وشمیری چی د بنستهواري وړانګه یی ۶ سانتیمتره وي د پوښ یو خورا زیات یا عظمي اوږدوالی یی ۱۵ سانتي، او مینیمال پوښ اوږدوالی یی ۱۱ سانتي متره دی؟ د هیرون دریګوډي فرمول سره سړی د غوڅهواري په متن یی اخر ته رسوي. (۲)«

$F = \sqrt{19(19-12)\ (19-15)(19-11)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

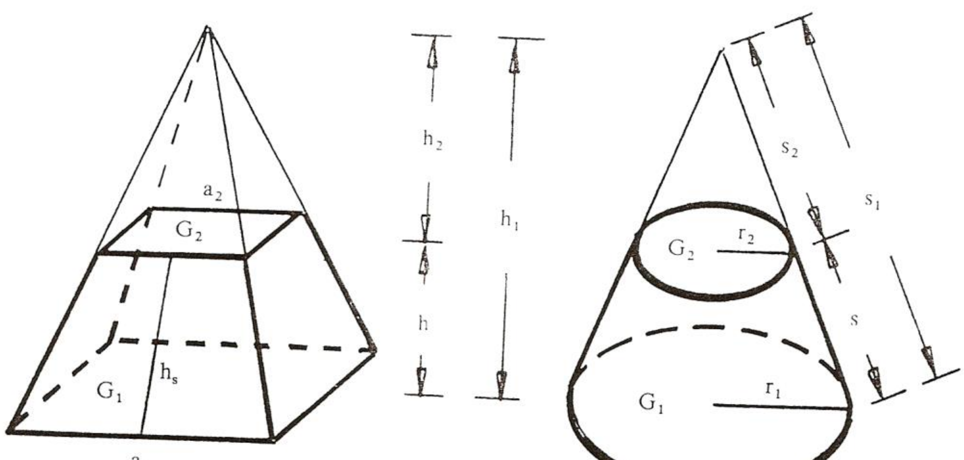
.　　$F = 65{,}238\ cm^2$

,　　$F = d.h / 2 \Rightarrow h = 2F / d = F / r = 10{,}87\ cm$

.　　$\Rightarrow V = \pi r^2 h / 3 = 409{,}79 cm^3$

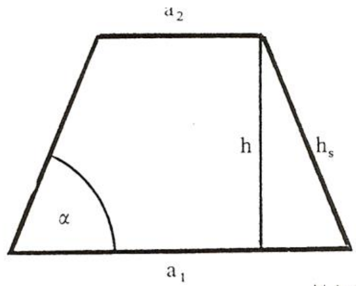
پخ اهرامونه او پخ مخروطونه

که یو اهرام او یا مخروط په یوه اوږدوالي h بنسټهواري ته غبرگ پرې کړی شي، نو پخ اهرام او پخ مخروط ترې راجوړېږي) راپيداکيږي يا منځ ته راځي.
د پخ اهرام پوښهواره د یوه ترپخ څخه عبارت دی چې د دوه دريگوډيو له کمون څخه لاس ته راځي.



څیره ۲۵۸

(c) ketabton.com: The Digital Library



خيره ۲۵۹

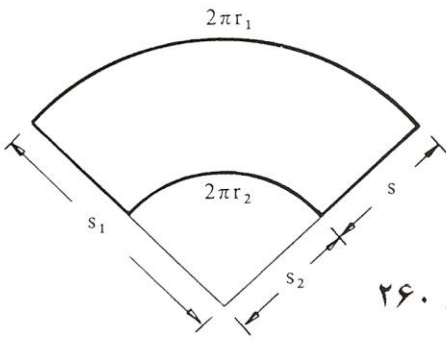
د دوي اوږدوالی د پيوتاګوراس له جملی او يا د ميلانکونج α څخه ټاکل وړ دي.

$h_s = h / \sin\alpha$

د اهرام د بنسټهوارې زيات امکاناتو له امله د پوښهوارې لپاره يو ټوليز فرمول هدفمند نه دی. که بنسټهواره يو منظم n–ګوډی وي، نو لرو :

$M = (U + u). h / 2$

د U بنسټهواری چاپيرونکی ، u د سرپټهوارې يا سرپوښهوارې چاپيری.



خيره ۲۶۰

د ټيټ مخروط جال خيره ۵

په همدې ډول د سم مخروط د دوه ګرديبرخهوارو کمون دی:

$$M = (s_1 2\pi r_1 / 2) - (s_2 .2\pi r_2) / 2)$$
$$= \pi (s_1 r_1 - s_2 r_2)$$

د وړانګي جملی په مرسته لاندې اړيکی پيداکيږي:

$$s_2 : s_1 = r_2 : r_1 <=> s_2 r_1 = s_1 r_2$$
$$=> M = \pi (s_1r_1 - s_2r_1 + s_2r_2 - s_2r_2)$$
$$= \pi [(s_1 - s_2)r_1 + (s_1 - s_2)r_2]$$
$$= \pi s(r+r)$$

د $s = s_1 - s_2$ له امله

ددې لپاره چی دباندې هواره لاس ته راوړو، بايد بنسټ – او سرپټهواره يا سرپوښهواره ور زيات کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دپخڼکي د اولني اهرام او يا مخروط او د پريشوې ځوکې کمون څخه لاس ته راځي، چې دا هم بيرته اهرام او يا مخروط شکلونه لري. (ځيره √ وګورئ)

$$V = G_1.h_1 / 3 - G_2.h_2 / 3 = [G_1(h+h_2) - G_2h_2] / 3$$

دا چې په n–ګوډي کې د اړخ اوږدوالی همداسې د ګرديشميرنه کې وړانګه مربعي ډوله کارول کيږي، د وړانګي له جملې د بنستهوارې او سرپوښهوارې يوبل ته ځانونه داسې نيسي لکه د هغو د واټنونو مربع د سرچينيزې ځوکې څخه.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{h + h_2}{h_2} = \frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (h + h_2) \cdot \sqrt{G_2} = h_2 \cdot \sqrt{G_1}$$

$$\Leftrightarrow h\sqrt{G_2} + h_2\sqrt{G_2} = h_2\sqrt{G_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad h\sqrt{G_2} = h_2(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})$$

$$\Leftrightarrow \quad h_2 = -\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}$$

که د h_2 لپاره پيدا ارزښتونه د ډکيفرمول کې کيښول شي، نو د ترځنګ بيا يواځې هوارې G_1 ، G_2 او G_3 راپيداکيږي.

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[G_1\left(h - \frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right) + G_2\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right] \quad .$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \left[G_1 \cdot h - \frac{G_1 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} + \frac{G_2 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right] \quad .$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[\frac{G_1 h\sqrt{G_2} - G_1 h\sqrt{G_1} - G_1 h\sqrt{G_2} + G_2 h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right] \quad .$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right] \quad .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که اخري اړیکی د $\sqrt{G_2}$ + $\sqrt{G_1}$ سره پراخه شي(د بینوم دریم فرمول)، نو په دې پسی لاس ته راځي:

$$V = \frac{h}{3}\left[\frac{(G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1})(\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1})}{G_2 - G_1}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2^2 - G_1\sqrt{G_1 G_2} + G_2\sqrt{G_1 G_2} - G_1^2}{G_2 - G_1}\right]$$

د ماتباندې ترم څخه د $G_2 - G_1$

$$G_2^2 - G_1\sqrt{G_1G_2} + G_2\sqrt{G_1G_2} - G_1^2 = (G_2 - G_1)(G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)$$

له امله نوکبند شي او بالاخره د لنډونی څخه لاس ته راځي:

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د اهرام ، په همدې ډول د مخروط ډکي.

په پځمخروط کیدی شي د ګردیهوارې فرمول $G_1 = \pi r_1^2$ او $G_2 = \pi r_2^2$ وکارول شي

جمله: د پخ اهرام پوښ ټوله هواره او ډکی :

$M =$ د ټول تراپخ هوارو زیاتون

$$O = G_1 + G_2 + M$$

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د پځمخروط پوښ پاس یا ټوله یا پورته هواره او ډکی :

$$M = \pi s(r_1 + r_2) = \pi(s_1r_1 - s_2r_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$O = \pi s(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi (r_1 s + r_2 s + r_1^2 + r_2^2)$$

$$V = (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\pi h / 3$$

پیلبیلکه

د برنس مجسمی لپاره دې یوه متېه د همغه موادو جوړه شي. دا دې ۱،۵ متره جګ وي، او یوه کتله دې ولري چي ۱۰ ټنه وي (د برنس دیښتي یا کلکوالی $\rho = 8{,}7\ g/cm^3$) په پوښتنه کی یو ګرد (پخمخروط) یا یو مربعشکلی (پخ اهرام) راځي. سرپوښهواره دې ، په اندازه ، ۱ مترمربع لوي وي. نورې اندازې وښايي ؟ د دواړو متېو لپاره شمیرنه ورته ځغلي

$$V = m / \rho = 10t / (8{,}7t/m) = 1{,}149\ m^3$$

دا چی جګوالی او سرپوښ معلوم دي، بنسټ د یومربع مساوات له لارې لاس ته راځي:

$$V = 1{,}149 \qquad = 0{,}5(G_1 + (\sqrt{G_1 .1} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1{,}299 - G_1 = \sqrt{G_1}$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}687 + G^2 - 2598 G_1 = G_1$$

$$\Leftrightarrow \quad G_1^2 - 3{,}598\, G + 1{,}687 = 0$$

$$G_1 = (3{,}598 / 2) \pm \sqrt{(3{,}598 / 2)^2 - 1{,}687}$$

$$G_1 = 1.799 \pm 1{,}245$$

$$\Rightarrow \quad G_1 = 3{,}044 m^2 \quad \text{یا} \quad G_1 = 0{,}549 m^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(دوم اوبی یا حل 0,549، په کار نه راځي ، ځکه چی لاندې هواره به له پورته څخه کوچنی وی)

له دې څخه پورته او لاندې وړانګه لاس ته راځي او نیمی په پخمخروط او په همدې توګه د کانتو یا اړخ اوږدوالی په پخ اهرام کی:

$$a_2 = \sqrt{G_2} = 1m; \quad r_2 = \sqrt{G_2/\pi} = 56,42 \text{ cm} \Rightarrow d_2 = 112,84 \text{ cm}$$

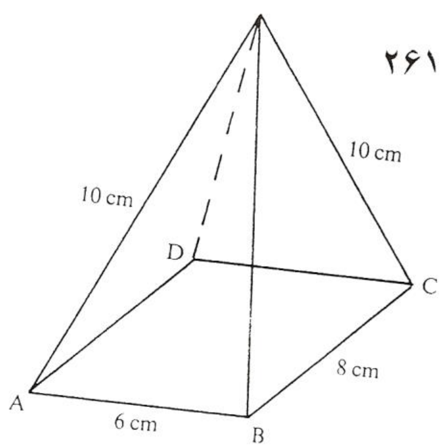
$$a_1 = \sqrt{G_1} = 1,745 \text{ m}; \quad r_1 = \sqrt{G_1/\pi} = 98,42 \text{ cm} \Rightarrow d_1 = 196,85 \text{ cm}$$

د پیتاګوراس له جملی څخه د اړخونو اوږدوالی لاس ته راځي:

$$h_s = \sqrt{h^2 + (a_1 - a_2)^2/4} = 1,546 \Rightarrow M = 8,488 \text{ m}^2$$

$$s = \sqrt{h^2 + (r_2 - r_2)^2} \Rightarrow M = 7,575 \text{ m}^2$$

تمرینونه



شیره ۲۶۱

۱ – د یوه مربع اهرام پاسهواره او ډکی وشمیری ، که وي :

الف) $a = 7$ cm ; $h = 14$ cm

ب) $s = 15$ cm ; $a = 10$ cm

پ) $V = 80$ cm³ ; $h = 10$ cm

ت) $h_a = 13$ cm: $h = 10$ cm

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) $h = 12\ cm\ ;\ s = 18\ cm$

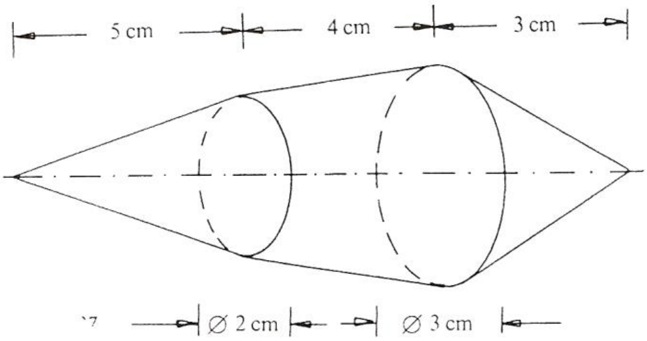
ث) $h_a = 12\ cm;\ \ M = 400cm^2$

۲ – د ځیره شوي اهرام پاسهواره او ډکی وشمیری. (لمړی تړونکرښنه له ټکي A ځخه د جګوالی پښیږګي ته وشمیری)

۳ – په کوم جګوالي دې مربع اهرام بنستهواري ته غبرګ غوځ شي چې ډکی یی نیم شي؟

۴ – یو ولاړ اهرام د بنستیز منظم شپږکونجي سره بنستې لاندې هوارې اړخ یا کانتی $a = 4\ cm$ لري او خوا اړخ اوږدوالی یی $s = 12\ cm$ دی. V او O وشمیری ؟

۵ – د ځیره شوي بدن ډکي وشمیری.



ځیره ۲۶۲

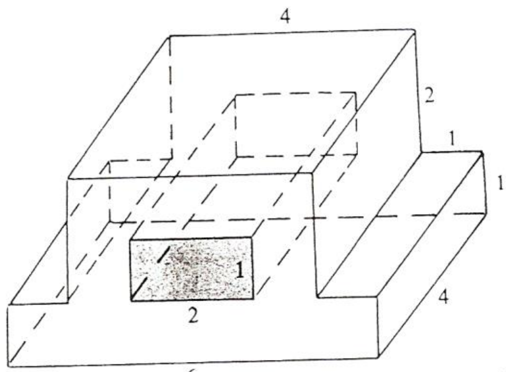
یادونه: ∅ د نیمی یا قطر په مانا دی، چې [illegible]

۶ – د یوه ګردیګرد برج سر یا سر دې نوی پټ شي. د سرپوښ د هوارې د اندازې لپاره سرپوښوونکی د برج ترمخ داسی ولاړ دی یا داسی ځای نیسي، چي پوښ اوږدوالی s د ۷۵ درجو په یوه کونج ګوري، کوم چی ټیك د سر میلان په ګوته کوي، د سرپوښ هواره څومره لویه ده، که برج ۵۰ متره جګ وي او د برج نیمي ۱۲ متره وي؟ سرپوښوونکی د برج ځخه ۱۰ متره لرې ولاړ دی او د سترګو جګوالی یی ۸۰ ، ۱ متره دی.

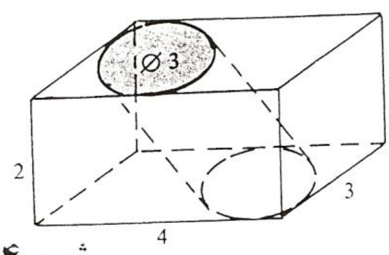
(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د یوه برج اهرامډوله سرپوښ چی بنسټ یی مربع او اړخ اوږدوالی یی دی په
وسپنه دې پټ شي اړخکانتې یی ۱۴خ متره ده د سرپوښ هواره یی څومره ده؟
دا چت به څومره ارزښت ولري، که یو مترمربع سرپوښول د هرڅه سره ۹۵
المان مارکه ارزښت ولري؟

۸ – د څیره شوو بدنونو پاسهواره وشمیری(ورکړه په سانتي متر)



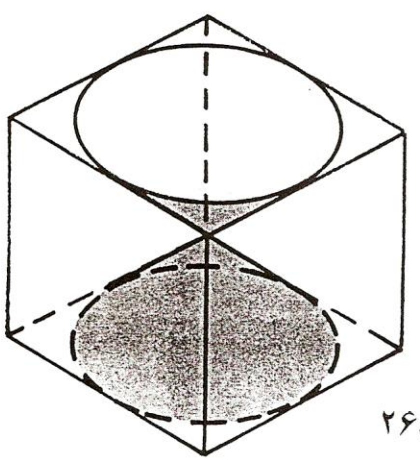
څیره ۲۶۳



څیره ۲۶۴

۹ – د پورته څیره شوي بدن ډکی وشمیری.

۱۰ –په مختلف کارتونو کی مخروط
ډوله خالیګاوې برمه کیږي:
الف) په یوه مکعب چی اړخ
اوږدوالی یا کانتی اوږدوالی
یی $a = 60$ cm دی، یو مخروط
د جګوالی $h = d = a$ سره
ب) په یوه مکعب کی
د $a = 60$ cm یو سیومتري



څیره ۲۶۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیابولو (لاتین:Diavolo = شیطان)

پ) په دوه سمو ګردیاستوانو د $h = 2r = 60\ cm$ هم یو مخروط او یو دیابولو، دا موږ د شګو ساعت په څیر پیژنو . د تشځای ډکي او په همدې ډول

د نور پاتی بدن ډکی هم وشمیری.

۱۱ – یو مربع اهرام ($h = 2a = 10\ cm$) بنسټهوارې ته غبرګ په دوه برخو ویشل کیږي. د غوڅهوارې واټن دې بنسټهوارې ته $0{,}75h$; $0{,}5h$; $0{,}25h$ وي.
د هر برخه بدن ډکي وشمیرۍ.

۱۲ – ددې لپاره چی یو ګردیډوله فیلترکاغذ د فیلتر لپاره استعمال کړی شی، دا سړی یو څلورمه برخه ګردۍ باندې را غبرګوي ، وازی باید څومره وازکونجی ولري، ددې لپاره چی فیلتر جوړ شي.

۱۳ – یو مخروط ډوله کچګیلاس دې ټیك ۱ لیتر ځاي کړي. هغه ۱۵ سانتي متره جګ دی. د هغه نیمی (یا نیمی ګردۍ) دې څومره لوي وي.

۱۴ – ۵ مکعب متره شګه یوې ټوپۍ باندې اچول کیږي. دا ستوریکونج ۴۵ درجی دی . جګی او نیمی یي څومره لوي دي؟

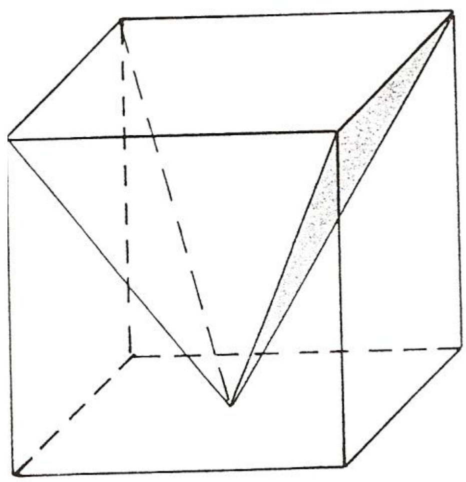
۱۵ – یو مخروط ډوله د اوبو ګیلاس دې د نیمایي پورې له اوبو ډك شي. دا اوبه په ګیلاس کی څومره جګی ولاړې دي؟

۱۶ – یو کافیواله یوه مخروط ډوله د شربت ګیلاس د شربت څخه ډکوي چی اندازه ۱۵ سانتي متره جګه ده. دی دا ګیلاس د یو سانتي متره پورې کم له شربت ډکوي. دا په دې توګه په سلو کی څومره شربت سپما کوي

۱۷ – په څیره ۲۰۶ کی ورکړ شوی اهرام ډکی وشمیری

۱۸ – په یوه چت باندې یو د وښو چتپټووني، چي ۵ ، ۴ متره جګ دی اینښوول کیږي، چی اړخ اوږدوالی یی $a = 12{,}5\ m$ متره او $b = 9\ m$ متره .دي. د

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۶۶

چت پورته کانتی یا پورته اړخ ۷ متره اوږد دی . د چتپټوونې ډکی وشمیرئ او همداسی د چتپټې سرهواره هم وشمیرئ.

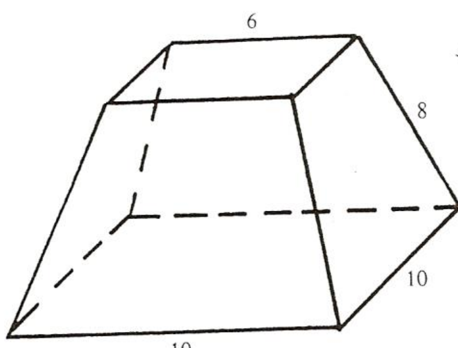
۱۹ – د یو دوه متره ژور بنسټ لپاره څومره خاوره باید راوویستل شي، که پوره ژی یا غاړه یی ۱۰ متره د غاړې اوږدوالی ولري او ستورېکونج –یعنی هغه کونج چی د غاړې یا اړخ سره د کنلو په لور جوړوي– یی ۶۰ درجی وي؟

۲۰ – د یوه هواډکی څومره مائیلوالی لري، که د یوه ونی ستنې هوا ډکی شمیرلو لپاره چی مخروط ډوله دی د موټې قاعده وکارول شي، د لاندې سره

$V^* = \pi h\,[(r_1 + r_2)/2]^2$

د $r_1 = 10$ cm سره

او $r_2 = 5$ cm



خیره ۲۶۷

۲۱ – څومره مسو ټوټه په کار ده، چی څیره شوې مسخولی جوړه کړای شو (وکړنی په ضیس متر؟ (څیره ۲۶۷ .

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – جوړ شوي کارپوټې حومره درنې دي (اندازه په سانتي متره)

۲۳-د لاندې پخمخروطونو M ,O او V وشمیری

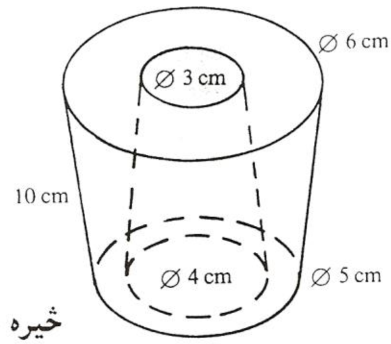
پخ کیګل مخروط

Kegelstümpfe:

a) $r_1 = 12$ cm; $r_2 = 10$ cm; $h = 8$ cm

b) $r_1 = 9$ cm; $r_2 = 7$ cm; $s = 6$ cm

c) $r_1 = 5$ cm; $h = 7$ cm; $s = 8$ cm

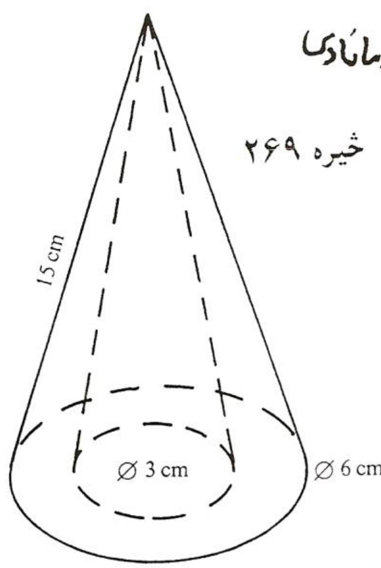


خیره ۲۶۸

Eisenwerkstück $\varrho = 6{,}5$ g/cm³

د اوسپنې کار ټوټه

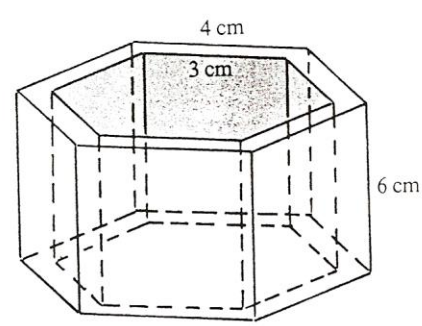
څ په دې ګالونو کې هم دګلی پرسانادی
با غلط



خیره ۲۶۹

Kunststoffmodell $\varrho = 2{,}5$ g/cm³

پلاستیک مودل



خیره ۲۷۰

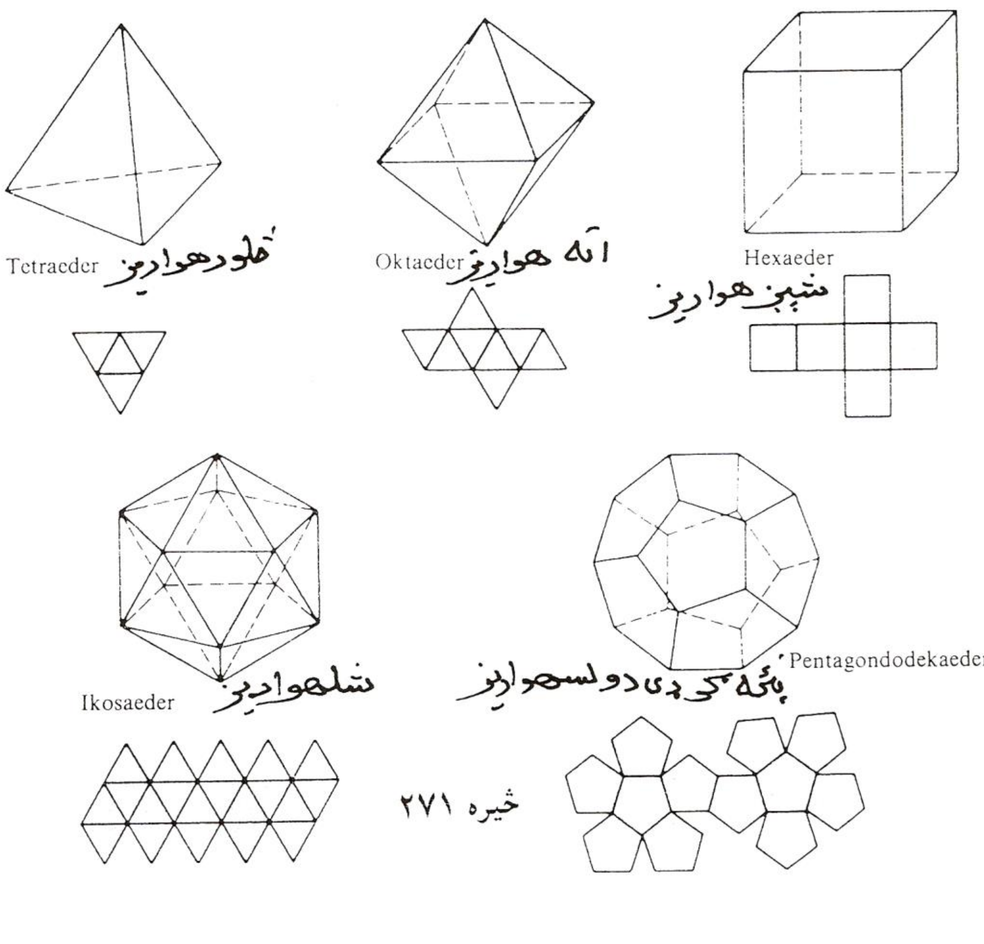
Messingsechskantrohr $\varrho = 8{,}3$ g/cm³

د مسنګ شپږ اړخیزه ټوټه

(c) ketabton.com: The Digital Library

منظم ډیرهواریز

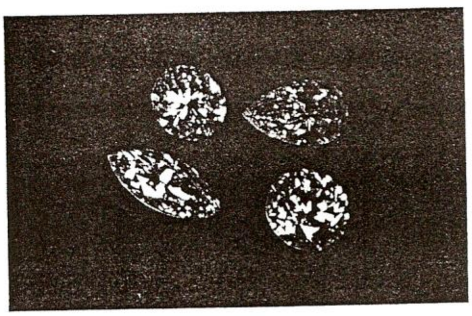
ټول بدنونه ، کوم چې یواځې بندهواري لري یا له وارو رابند وي، پولوئیدر (یوناني : ډیر هواریز) نومیږي. موږ به دا له دې وروسته دا ډیرهواریز وبولو. د دوي ترمنځ ټيك پنځه منظم یو بل ته ناورته بدنونه. دا د شمیرپوهنی له اړخه په ځانګړې توکه په زړه پورې دي، ځکه چې پاس هوارې او ډکي يي بند دي، دا په دې مانا چې د فرمولونو له لاې انځوریدلی شي، او په دې برسیره ، ځکه چې طبعي کریستال دا شکلونه یا فورمونه یا خیرې لري.



خیره ۲۷۱

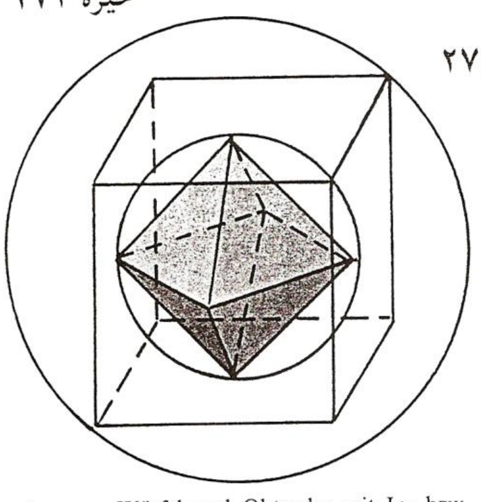
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پنځه منظم بدنونه‌د هواروبندهواريز ابو کهګ هواربنديزدي : تيترائيدر (څلورهواريز Tetraeder) ، هيکسائيدرHexaeder (شپږهواريز ، مکعب) اوکتائيدرOktaeder (اته هواريز) دوديکائيدر (دولس هواريز ، د خپل اړخهوارو له امله پنتاګون دوديکائيدرPentagondodekaeder پنځه ګوډي دولسهواريزه بلل کيږي)، او په همدې توګه ايکوزائيدر Ikosaeder(شلهواريز) څيرې په تير مخ کی.


څيره ۲۷۲

بيلګی

د مالګي تيګي مکعب جوړوي، کوپفرسولفيد مينرال Fahlerz تيترائيدر، د ګوګړو کريستال دوديکائيدر او الون (کاليوم الومينيوم سولفات) اوکتائيدر جوړوي.


څيره ۲۷۳

Würfel und Oktaeder mit In- bzw. Umkugeln

منظمډيرهواريز پلاتوني (افلاطوني) (خيالی platonische) بدنونه هم ياديږي، ځکه چی يوناني فيلوسوف او شميرنپوه (۴۲۷ تر ۳۴۷ د م. پخوا) په دې نظر وو، چی څلور پخواني عناصر اور، خاوره، اوبه، او هوا په خپل واړه فورم تيترائيدر، ايکوزائيدر، اوکتائيدر او هيکسائيدر په ګوته کوي. د هغه په فکر جهان پخپله يو دوديکائيدر فورم لروده. په دې پنځو هر يوه بدن کي کيدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي يوه ګردې دننه او دباندې وکښل شي. که دا يو په بل کی دننه شي يا په بل عبارت دننه راګير شي، نو په دې توګه شپږ دننه – او شپږ دباندې هوارې لاس ته راځي ، کومو چی کيپلر Kepler دې عقيدې ته راوستی شو ، کوم (چی هغه وخت معلوم) شپږ پلانيت به په داسی لاره ګرځي، چی د هغوي نيممحورونه د داسی دننه – او دباندېغونډې وړانګو سره برابر شي.

لاندې جدول د دې منظم پولوئيدر ډېرهواريزومعلومو لويو پوره معلومات ورکوي.

Polyeder	e	f	k	l	m	α	r	ϱ	O	V
Tetraeder	4	4	6	3	3	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{12}\sqrt{6}$	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Hexaeder	8	6	12	4	3	90°	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}$	$6a^2$	a^3
Oktaeder	6	8	12	3	4	60°	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$	$2a^3\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Dodekaeder	20	12	30	5	3	108°	$\frac{a\sqrt{3}+a\sqrt{15}}{4}$	$\frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{15a^3+7a\sqrt{5}}{4}$
Ikosaeder	12	20	30	3	5	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{a\sqrt{27}+a\sqrt{15}}{12}$	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{15a^3+5a^3\sqrt{5}}{12}$

د لته حروف لاندې ماناوې لرې . a = د کانټې يا اړخ اوږدوالی ، e = د ګوډونو ګڼ (تعداد) f = د هواروګڼ. k = بدن اړخونوګڼ، l = د هوارو اړخونو ګڼ، m = په هرکونج کی د کانتو يااړخونو ګڼ، α = د ګاونډيو هوارو ترمنځ کونج، r = د چاپيرګردې وړانګه ، ϱ = د دننهګردې وړانګه ، O = پاس هواره يا پورته يا ټوله هواره ، V = ډکې.

پنځه يوون ډيرهواريز (Einheitspolyeder) لاندې (a = 1) ارزښتونه لرې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

Polyeder	r	ϱ	O	V
Tetraeder	0,6124	0,2041	1,7321	0,1179
Hexaeder	0,8660	0,5	6	1
Oktaeder	0,7071	0,4082	3,4641	0,4714
Dodekaeder	1,4013	1,1135	20,6457	7,6631
Ikosaeder	0,9511	0,7558	8,6603	2,1817

د اویلر د ډیرهواریز جمله، د په خوبنه ډیرهواریز لپاره یو ټاکنمساوات راکوي، د ګوډګښون e ، اړخګښون k او هوارګښون f لپاره:

د اویلر ډیرګوډي یا پولوئید جمله : $e + f - k = 2$

په هرصورت داجمله یواځي د کونوکس یا ننوتو پولوئید یا ډیرهواریز لپاره باور لري، یعنی هغه ، چی په کومو کی ټول نیمي د بدن په دننه کی ځغلي، یعنی منظمو ډیرهواریز لپاره.

بیلګي:

کوادر : $8 + 6 - 12 = 2$

اوکتائید : $6 + 8 - 12 = 2$

دودیکائید $20 + 12 - 30 = 2$

غونډاری یا غونډوسکه(کره) او غونډاري برخې

ولې غونډاری یا غوندوسکه؟

که تاسو د انګرېزي فوټبال په عربي ژباړه په عربي وګورئ، نو کرة قدم به ترې واخلی.

(په لاندې کې ما د غونډاري یا غونډوسکې په ځای غونډی لکلی، چې ښه او ټیک نومونه نه ده.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

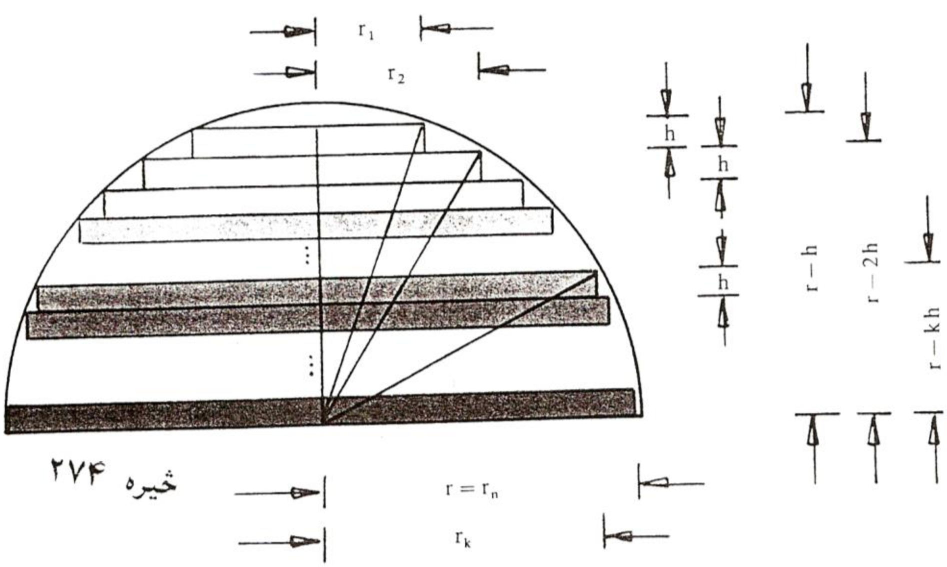
د هندسې یا ځمککچپوهنې له مخې غونډاری یا غونډوسکه د ټولو هغو ټکو ټولګه ده یا د هغو ټکو ځای دی، چې له یوه په

کلکه یاکره ټاکلی ټکی M څخه چې د غونډۍ منځټکی بلل کیږی همغه واټن r ولري.

غونډۍ نه یواځې د جګدرجئیز یا لوړ سیومتري(هره نیمی په همغه وخت کی سیومتري محور دی) له امله د بدنونو ترمنځ یو ځانګړي رول لري، بلکه هغه موږ انسانانو لپاره هم د مانا ډکه ده، ځکه چې ځمکه (نزدې) یو غونډۍ شکل لري . د بیلګي په توګه په کارتوګرافي کی ځمکه اوږدګردیو (میریدیانی Meridiane) باندې ویشل کیږي. په مریدیانی باندې هر واټن د ځمکی وړانکی R ته بیا یوه لینده په ګوته کوي. د ډکي ټاکلو لپاره بیا غونډۍ) ګردی استوانی ته ورته) په کوچنیو ستن ډوله چیتروګانو (کردې ټوټی، چې موږ ورته په هسکه مینه کی چیټرو وایو . د مات منګی څخه ګردې څیرې جوړیږي، ټوټه ده) ټوټه کیږي، چې جګوالی یی h = r / n دی. د یوګونو چیتروګانو وړانګو لپاره باور لري یا صدق کوي(د پیتاګوراس جمله) : کیدی شی د چیترو په ځای ټیکلی ولیکو

$$r_1^2 = r^2 - (r-h)^2 \Rightarrow V_1 = \pi r_1^2 h$$

$$r_2^2 = r^2 - (r-2h)^2 \Rightarrow V_2 = \pi r_2^2 h$$



څیره ۲۷۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوئ لیز

$$r_k^2 = r^2 - (r - kh)^2 \Rightarrow V_k = \pi r_k^2 h$$
$$r_k^2 = r^2 - (r^2 + k^2 h^2 - 2rkh)$$
$$r_k^2 = 2rkh - k^2 h^2$$
$$r_k^2 = \frac{2r^2 \cdot k}{n} - \left(\frac{rk}{n}\right)^2$$
$$r_k^2 = r^2\left(\frac{2k}{n} - \frac{k^2}{n^2}\right) \Rightarrow V_k = \pi r^3 \left(\frac{2k}{n^2} - \frac{k^2}{n^3}\right)$$

$$V_{ges.} = \pi r^3 \left[\frac{2}{n^2}(1 + 2 + \dots + n) - \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3 \left[\frac{2}{n^2}\left(\frac{n}{2}(n+1)\right) - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3 \left[\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3 \left[\frac{2}{3} + \frac{3}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right]$$

که د «ستنګیو» ګڼون تلم پورته لاړ شي، نو په نوکانو کی لمړی ترم د مانا دی او لاس ته راځي

نیمغونډۍ

V نیمغونډۍ $= (2/3)\pi r^3 \Rightarrow V_{غونډۍ} = \frac{4}{3}\pi r^3$

د غونډي د پاس هوارې د شمیرلو لپاره دا په خورا زیاتو برخه هوارو ویشي. که دا د ګوډ یا کونج ټکي د منځټکي سره ونښلول شي نو دا یو د اهرامشکل بدن ځان ته غوره کوي د r جګوالي سره.

د دې ټولو اهرامونو ډکیو زیاتون د غونډې ډکی ورکوي. دا د خورا زیاتو هوارو لپاره په نزدې توګه بسیا کوي، که چیرې څوك په پام کی ونه نیسی، چې دا سره د کمو استنثاوو کتل کیږي چې پوره هوار نه دي. برسیره پر دې باید د دې بنسټ هوارو زیاتون د غونډي پاس هوارې سره برابر وي. له دې امله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

غونډي V = د اهرامونوډکیو زیاتون = r. (3 / 1) .

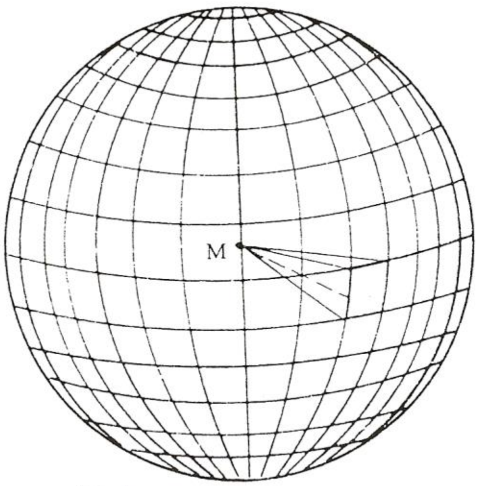
د غونډي پاس یا ټوله هواره

$(1/3).\ r.\ O$ د غونډ $= (4/3)\pi r^3$

O د غونډي $= 4\pi r^2$

په ټولیزه یا عمومي توګه باور لري

$O = 4\pi r^2 \quad , V = (4/3) \quad r^3$



ځیره ۲۷۵

پیلبیلګه:

منځنی ځمکوړانګه ۶۳۷۰ کیلو متره ده . د ځمکی پاسهواره او ډکی څومره دي؟ ځمکه څومره کتله لري،که د ځمکي منځنی سختوالی $5{,}514\ g/cm^3$ د مخه ونیول شي یا فرض شي؟

$O = 5{,}10.10^8\ km^2$,

$V = 1{,}08\ .\ 10^{12}\ km^3$;

$m = 5{,}97.10^{24}\ kg$

د خالیغونډي ډکی همداسی لاس ته راځي لکه د یوې خالي استواني ډکی (د مخه لوستل شوی دی) د دوه یو په بل کی پرتو کونځینتري غونډیو توپیر یا کمون:

$$V_{خالیغونډی} = (4/3)\ \pi\ (r_1^3 - r_2^3) \quad .$$

پیلبیلګه:

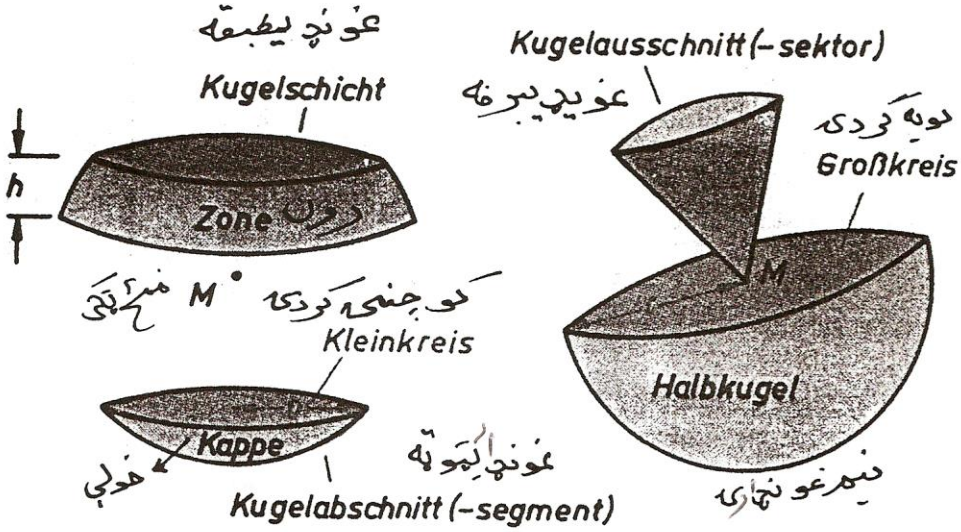
د اوسپنی خالیغونډی کومه کتله لري ، که د باندنینیمی یي ۱۲ سانتیمتره او

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دیوال پنډوالی یی ۸ ملیمتره (دیښتی یا سختوالی یا ټینګوالی) وي؟

$V = (4/3)\pi(6^3 - 5{,}2^3) = 315{,}8\ cm^3; \quad m = V \cdot \rho = 2463{,}25\ g$

اوس غونډيبرخی په پام کی نیسو. په ټولیزه توګه لاندې بنسټیز فورمونه مخ ته لـه: کړو:



خیره ۲۷۶

ددې یوه ټوټه یا زیاتې ټوټې داسی منځ ته راځي ، چی غونډی د یوې یا یا زیاتو ګردیو له خوا غوڅه شي. که داغوڅی د غونډي له منځټکي تیر شي، نو دوه نیمغونډي او یوه لویه ګردی د غوڅهوارې په څیر منځ ته راځي. که غوڅی له منځټکي تیر نه شي، نو دوه غونډيټوټی منځ ته راځي. د دوه داسی غوڅیو ترمنځ یوه غونډيطبقه منځ ته راځي. که له غونډي یو مخروت ډوله ټوټه رابیله شي، نو غونډيبرخه منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرتله کړی) د دواړو خولیو د یو بل سره مساوي کیښوولو له لارې لرو:

$$\rho_1^2 h_2 - \rho_2^2 h_1 + hh_1h_2 = 0$$

دا بالاخره مور لاندې ته لاربښودوي:

$$V = \frac{\pi h (3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + h^2)}{6}$$

د غونډیبرخي ډکي یا غونډیبرخي حجم داسی لاس ته راځي، چی د یوه مخروط او او د ګردیتهوټی ډکي سره زیات کړو:

$$V = \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3} + \frac{\pi \rho^2 (r - h)}{3}$$

دلته بیرته اړیکی (*) کارول کیږي، چی په لاندې ډول څیره بدولون ترې لاس ته راځي $\rho^2 = h(2r - h)$. په دې توګه د ρ^2 لپاره ځاي په ځاي کوي او له دې لاس ته راځي :

$$V = \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3} + \frac{\pi h (2r - h)(r - h)}{3}$$

$$\Leftrightarrow V = \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3} + \frac{2\pi r^2 h}{3} - \pi r h^2 + \frac{\pi h^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{2\pi r^2 h}{3}$$

له د (*) په مرسته ځ کا په ځای نښی لو لاس ته راځي

$$V = \frac{2}{3}\pi h \left(\frac{\rho^2 + h^2}{2h}\right)^2 = \frac{\pi}{6h}(\rho^2 + h^2)^2$$

د غونډیتهوټی پوښهواره M ، چی د غونډیخولی نومیږي او یا کاردینالخولی بلل کیږي، په همغه فکر شمیرل کیږي لکه د غونډي پاس یا ټوله هواره . که د غونډیبرخی د ډیرو اهرامونو د زیاتون په څیر په پام کی ولرو، نو د هغی بنستهواره همغه غونډیخولی ده. (کړی شو چی غونډیخولی په ځاي کپره ولیکو) نو لرو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Mr / 3 = 2\pi r^2 h / 3 \quad \Leftrightarrow \quad M = 2\pi rh$$

که د (*) له لارې بدل شي، نو د غونډېکپرې لپاره لاس ته راځي :

$$M = \pi .(\varrho^2 + h^2)$$

د ټولهوارې د لاس ته راوړلو لپاره دې بيا يوائې د بنسټګردی هواره ور زياته شي. د غونډيطبقی پوښهوارې ته د غونډيزون Kugelzone وايي. دا د دوه کپرو له کمون څخه لاس ته راځي. ټوله هواره يا پاسهواره يې داسی لاس ته راځي، چی بنسټهواره او سرپوښګردې هوارې وززيات شي. د غونډيټوټې پاس هواره داسی لاس ته رځي، چی د غونډيکپرې هوارېته د مخروطپوښ ورزيات شي.

د غونډارې برخو لپاره لاندې فرمولونه باور لري.

د غونډارې ټوټه غونډارې خولی	$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h) = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho^2 + h^2)$ $M = 2\pi rh = \pi(\varrho^2 + h^2)$ (Kugelkappe) $O = 2\pi rh + \pi\varrho^2 = \pi(2\varrho^2 + h^2)$
غونډارې ټيکلی غونډارې زون	$V = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)$ $M = 2\pi rh$ (Kugelzone) $O = \pi(2rh + \varrho_1^2 + \varrho_2^2)$
غونډارې برخه	$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{6h}(\varrho^2 + h^2)^2$ $O = \pi r(2h + \varrho)$

بیلګه:

۱ – د پنيرخرخ د يوه غونډيطبقي فورم يا بڼه لري. د هغه پاس هواره او ډکی وشميرئ، که وي : $\varrho_1 = \varrho_2 = 25$ cm او $h = 20$ cm.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V = (20\pi / 6)(3.25^2 + 3.25^2 + 20^2) = 43458,70\ cm^2$$
$$= 34,458\ dm^2$$

وړانګه r د پیتاګوراس د جملي په مرسته لاس ته راځي :

$$r^2 = \rho_1^2 + (h / 2)^2 \Rightarrow r^2 = 25^2 + 10^2 \Rightarrow r = 26,93\ cm$$

نو لرو

$$O = \pi (2.26,93.20 + 2.25^2) = 7310,59cm2 = 73,11\ dm^2$$

۲ – یو دلوبی لاټو یا لوبی څرخی د غونډیټوټی بڼه لري د ټولجګوالی $r = 16\ cm$ او سور $b = 2\rho = 10\ cm$ سره. د هغه ډکی او پاسهواره څومره لوي دي؟

د خولی جګوالی د پیتاګوراس د جملی په مرسته لاس ته راځي :

$$(r - h)^2 + \rho^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = - 2rh + h^2 + \rho^2 = r^2$$
$$\Leftrightarrow h^2 - 2rh + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow h^2 - 32h + 25 = 0$$

د دواړو اوبیو یا حلونو $h_1 = 31,2\ cm$ او $h_2 = 0,8\ cm$ سره.

داچی $h < r$ ، نو باید یواځي دوم اوبی یا حل د کارونی یا ګټور وي. له دې امله لاس ته رځي

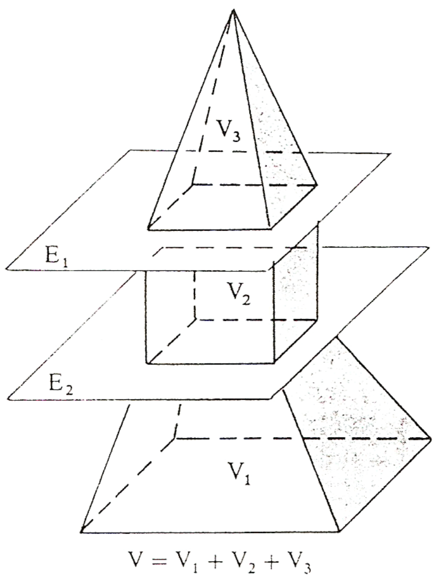
$$V = 2\pi .16^2 . 0,8 : 3 = 428,93\ cm^3$$
$$O = 16\pi(2 . 0,8 + 5) = 331,75\ cm^2$$

په خوښه جوړشوي یا فورم شوي بدنونه

لکه څنګه مو چی زیات تر پام تیر شو، ګټوور دی چی د یوه پیچلي بدن د ډکي یا پاسهوارې د شمیرلو لپاره دا بدن په ګټوره توګه یا هدفمند ډول ټوټی ټوټي کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول ساده برخه بدنونه منځ ته راځي، کوم چې ض معلومو فرمولونو له لارې شمیرل کیدی شي.

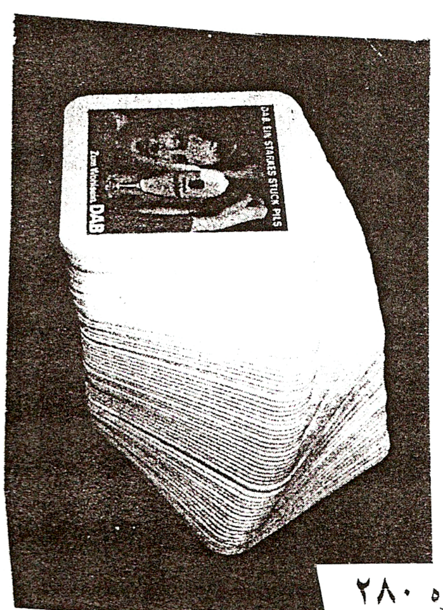


خیره ۲۷۹

بیلګي :

ددې څیره شوي بدن ډکی له یوه پنځ اهرام، کوادر یا غبرګاړخیز یا مکعب او یوه اهرام څخه لاس ته راځي.دا جوتیږي، که بدن په دوه غوځیو په هوارو E_1 او E_2 ټوټه شي .

د بیاتیونی له لارې کیدی شي چې زیات بدنونه یوبل سره پرتله یا مقایسه شي(مخروط، اهرامونه) د ګیلاس ایښولو ټوټی(داسی ډبل کاغذونه دي چې د پیالیلاندې یا ریمکابي یا پشکاب په څیر وي او ګیلاسونه پرې ایښوول کیږي) چې یو په بل ایښول شوي په پام کی نیسو. د دې ټوټو د څرخولو ، یا ځاي بدلولو له لارې جګوالی او ډکی نه بدلیږي. له دې منځ ته راغلی پوړی په پام کی نه نیول کیږي، ځکه چې په تیوري کی

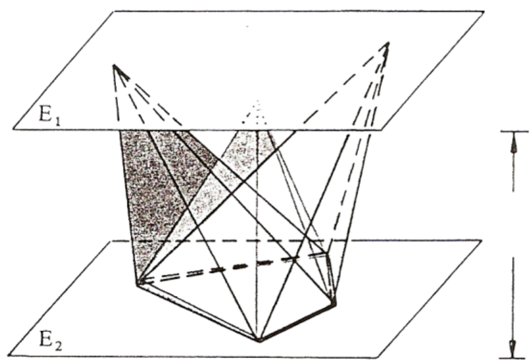


څیره ۲۸۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا بدن د ناپای زیاتو طبقو څخه جوړ دی، چی پنډوالي یی په پام کي نه نیول کیږي د دې نور ورزیات استعمال د کاوالیری Cavalieri پرنځیپ دی

جمله :
دوه بدنونه همغه ډکی یا برابر ډکي لري، که د هغو ټول پراته غوڅي په همغه واټن بنسټهوارې ته پراته وي.



په دې کی ضرور نه دی چي غوڅهوارې دی کونګروایڼخ وي!

څیره ۲۸۱ : دا بیاتي شوي اهرامونه ډکي برابر دي، ځکه چی همغه جګي او برابر بنسټهوارې لري: $V = (1/2)G.h$ د کوچنیو واټنونوسره هره غوڅهواره چی د بنسټهوارې سره غبرګه وي، په اهرامونوکی هواربرابر غوڅهوارې خوړوي

دا د غونډېکي شمیرلو لپاره یو ښکلی میتود رامنځ ته کوي.
د یوې ګردي استوانی یا ګردیټوټی څخه چی وړانګه r لري او 2r جګ دی دوه د څوکو یا ککرې له لارې یو بل ته مخامخ مخروطونه غوڅوي (یو دیابولو) د $r = h$ سره.
داپاتی خالیفورم یوه د شګو ساعت پوښ راپه ګوته کوي. د یوې دومی همغی سره برابر ې ګردي استوانی یا ګردیټوتی د وړانګي r په اندازه یو غونډی راغوڅوو. د سیومتري له امله بسیا کوي که لاندې نیمغونډی او د «شګو» ساعتنیمی تر څیرنی لاندی ونیسو. هره غوڅهواره یوه بسټهوارې سره غبرګه هواره راکوي، په غونډې کی ګردی په شګوساعتپوښ کی

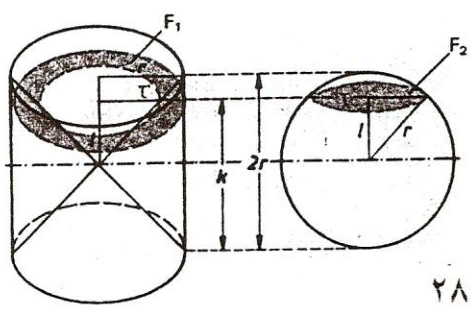
(c) ketabton.com: The Digital Library

ګردیګوته یا ګردیکړی. دلته دې 'r د دیابولو څخه منځ ته راغلي ګردۍ وړانګه وي. r د غونډیغوځیګردي وړانګه .

د هوارو لپاره چې واټن 1 له همغه بدن منځټکي ولري، باور لري:

$$F_S = \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi (r^2 - r'^2)$$

$$F_K = \pi r^2 = \pi (r^2 - 1^1)$$



خیره ۲۸۲

د وړانګي جملی څخه، برسیره په دې لاس ته راځي: (د نښکوساعت)

$$r' / r = 1 / r \Rightarrow r' = 1$$

$$\Rightarrow F_S = \pi (r^2 - 1^2) F_K$$

دواړه بدنونه ګورو چې ډکیمساوی یا ډکیبرابر دي.

اوس د استوانی ډکی $V_Z = \pi r^2 h = 2\pi r^3$ دی، څکه چې $h = 2r$ دی .

د دیابولو ډکی دی :

$$V_D = (2\pi r^2 / 3).(h/2) = \pi r^2 .h / 3 = (2/3)\pi r^2$$

او له دې سره د شګوساعت – او نیمغونډي ډکی :

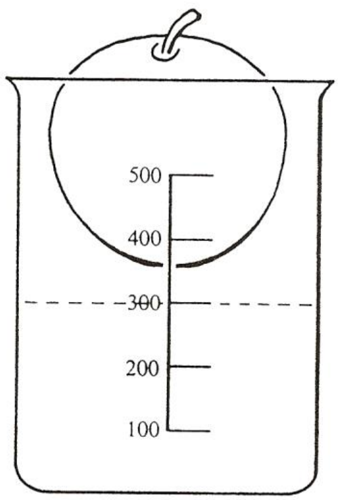
$$V_K = V_Z - V_D = 2\pi r^3 - (2/3)\pi r^3$$

$$V_K = (6/3)\pi r^3 - (2/3)\pi r^3 = (4/3)\pi r^3$$

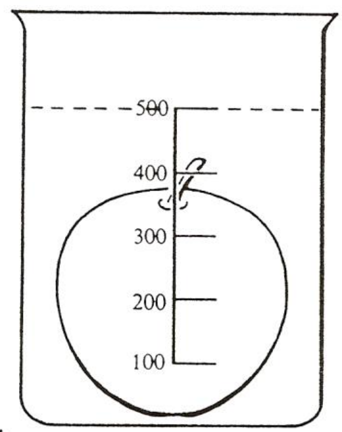
د پوره نامنظم شکلونو ډکی د شمیرپوهنی له لارې یا هیڅ نه شمیرل کیږي او یا پوره ټیك د پیچلو شمیرنپوهنو متوضو سره هم نه شمیرل کیږي. لکه د یوې منې یا د یوه

(c) ketabton.com: The Digital Library

الو ډکی یواځي فزیکی متودونه یا طریقی مرسته کوي چی ډکي یی وشمیرل شي. لکه په لاندې ځیرو کي ، ځي روښانه شوی دی.



خیره ۲۸۳



ځیره ۲۸۴

تمرینونه

۱ – د هغه بدن ډکی څومره لوي دی ، چمنځ ته راځي، که د مکعب په هره هواره یو ولاړ اهرام کیښول شي د s = a سره؟

۲ – یو تیترائیدر څلورهوایز بدن او یو غونډی برابر پاسهوارې لري. د هغوي ډکی په کوم تناسب یو بل سره پراته دي یا کومه ځاننیونه یو بل سره لري؟

۳ – هر منظم پولوئید لپاره یوه دننه غونډی شته . چی د هغه هره هواره په منځټکي کی لمس کوي. ددې وړانګه دی r وي. د پولوئید ډ ګی اوV اوO پاسهوارې $V = O.r / 3$ لپاره دلایل راوړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام وکړی چی پولوئیدر په اهرامونو توټه شي چی وړانګه r ولري، په
ډول چي د پولوئید هر اړخهواره د داسی یوه اهرام بنسټهواره وي.

۴ – د المان د پارلمان په سر منه او اټیران چی له طیلا جوړ دي د پارلمان د
ډانګ سره غبرګ د قدرت نخښنه جوړوي. دا د پارلمان منه به څومره
وي، که دا د پاکی طیلا څخه جوړ وي($19,3\ g / cm^3$ ~ρ ; $10\ cm$ ~
اټیران وزن ثابت یا ځای په ځای پاتیږي)؟

۵ – یوه غونډۍ، توته، اهرام (د هغو بنسټهواره) برابر وړانګی لري، د اه
غونډۍ جګوالی یا جګی داسی وټاکی ، چی الف) همغه ډکي لري» د
برابره پاسهواري لري.

۶ – د یوه غونډۍ ډوله تیلو څاڅکي څخه، چی ۵ میلي متره نیمی لري، له
توئیږي د یوې ګردی ډوله تیلو پرده جوړوي، چی نیمی ئی ۱ متر . دا
څومره پنډه ده؟

۷ – د یوې سابونپوټکی دیوال به څومره لوي وي، چی دباندنی نیمی یی
سانتي متره وي، کوم چی له څاڅکی جوړ دی، چی نیمی یی ۵ میلي م

۸ – یوه د ښیښی غونډۍ د دابضنی نیمی سره، چی ۱۲ سانتي متره دی ۲
وزن لري یا درند دی. د هغی دیوال څومره لوي دی ($2,6g / cm3$ ~

۹ – یو هوا بالون یو ۲۵ متره نیمی لري.

الف) دا دننه سمڅ یا غار یی څومره درونډ دی، که د یو مربع متر و
وزن ۴۵ ګرامه وي؟ ب) ډکی څومره وزن لري که
هایدروجن ($\rho = 9.10^{-5}\ g / cm^3$) د ډکي مادې په څیر وکارول شي؟

۱۰ – یو مکعب کی یو غونډاری یا غونډۍ د خورا لوي ډکی سره خونډي
په یوه غونډاري چی خورا کم ډکی ولری راګیر یا خونډي کیږي.د م
اړخ اوږدوالی $5\ cm$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف د ټول تن غوڅی څیره وباسی .

ب) د دواړو غونډارو ډکی او پاسهواره وشمیری .

۱۱ – د لاندې هوايي بدنونو ډکي او پاس هوارې څومره لويي دي:

الف) سپوږمی ($r = 1735\ km$)

ب) مارس ($r = 3430\ km$)

پ) وینوس ($r = 6305\ km$)

ت) جوپيتر (ر ($r = 71800\ km$)

۱۲ – د کورکغونډي($\rho = 0,25\ g/cm^3$) د ۳۶ سانتي متره نیمي سره یوه غونډيډوله د پارې زړی($\rho = 11,4\ g/cm^3$) لري. دا د پاربزړی څومره لوي دی، که غونډی تر نیمايي په ابو کی ډوبه شي؟

۱۳ – د یوه لوي سرې سرې ۴۰۰ میلیونه غونډيډوله د سرپوښکی لري، هر یوه د نیمي $0,3\ mm$ سره. د ټولو پوښکیو ګډه پاسهواره څومره ده؟

۱۴ – یو غونډی ، چی وړانګه یی $r = 10\ cm$ ده، د یوې هوارې څخه په ۳ سانتي متره ، له منځ یا کوکز څخه، واټن غوڅیږي. د دواړو برخو غوڅهوارې او ډکي وشمیری.

۱۵ – د پاتی یاد نایادو برخو M,V,h او r د لاندې غونډيبرخو لویوالی وشمیری

a) $r = 6\ cm$; $h = 5\ cm$ b) $M = 50\ cm^2$; $h = 3\ cm$

c) $h = r = 7\ cm$ d) $M = 700cm^2$; $r = 10\ cm$

۱۶ – د ځمکی پاسهوارې کومه برخه د ۱۰۰۰۰ متره جګوالی څخه لیدل کیدی شي(د ځمکی وړانګه ۶۳۷۰ کیلومتره ده)

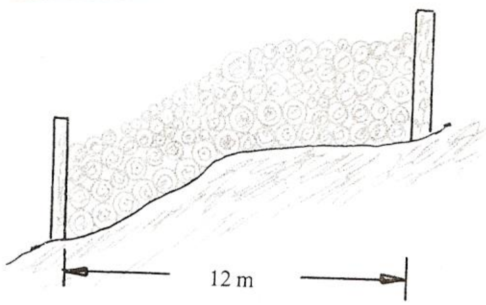
۱۷ – د یوه غونډي نیمی په څلورو برابرو برخو ویشل کیږي٠ په ټوټهټکو کی په نیمی ولاړې درې هوارې اچول کیږي. په کوم څاننیونه یا تناسب کی

الف) د پوښهوارې ، ب) د راپیدا شوو یا منځ ته راغلو غونډي برخو

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره پراته دي؟

۱۸ – په یوه غونډي کی، له منځ څخه لیدلو یا کتلو سره ، هوایی(دلته مطلب د غونډي ترمنځ هوا یا د هواډکی دی) پرسیدنه، د دریواړو کواوردیناتو څخه برابردي. که دا یو له بل توپیر ولري، نو د الیپسوئید څخه غږیږو، چی اصلی محورونه یی a,b او c دي. د ایلیپسوئید ډکی د فرمول V = (4 /3) a.b.c له مخی شمیرل کیږي. ځکه په رینبتونی غونډی نه دی، بلکه یو الیپسوئید، چی اصلي محورونه یي a = c = 6378 km (د اکواتور وړانګه) او b = 6357 km (قطبي وړانګه) لوي دي. (که په کلکه ونیول شي نو د اکواتوروړانګو ترمنځ یو کوچنی توپیر شته) د ځمکي ډکی وشمیری او د مخ ته تیر غونډي او غونډي برخي کی لوستلو سره یی پرتله کړی)



خیره ۲۸۵

۱۹ –په یوه زوړندي یا پیچومی باندي ۱ متر اوږد لرګی ډیری شوی، لکه په خیره ۲۸۵کی چی لیدل کیږي. څومره د هوامتر لرګی دا 1,20 m جګه د لرګوډیری لري.

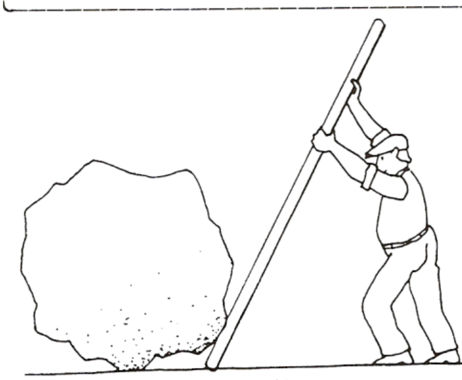
(c) ketabton.com: The Digital Library

‌وکتورشمیرنه

نځورونه

پیلبیلکه

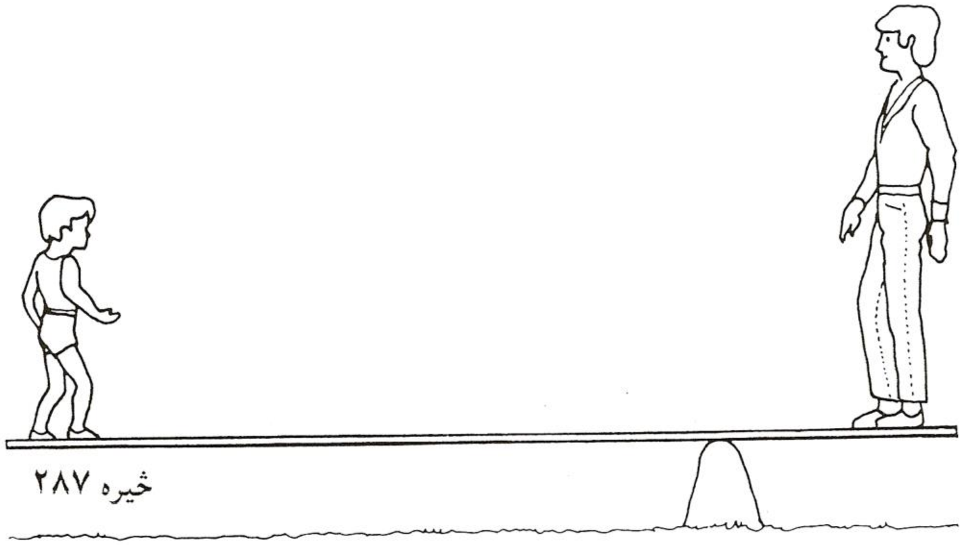
یوه درنديږ تیګی ته څنګه سړی حرکت ورکولی شي؟ طبعآ کیدی شي چي وړل یی وازمائل شي، مګر دا پوره ستونځی لري او دا لانديږ طریقه یی ساده ده: د تیګی لانديږ سړی یوه تخته یا اړم نښلوي او یا ورلانديږ کوي، د بل سر نه یی لانديږ لور ته زور کوي یا لانديږ لور ته زور په واردوي. تیګه یو ځرخونحرکت بانديږ راځي.
ددې حالت لپاره د اړم قانون صدق کوي« زور د زوراړم = بار د بار اړم» .
که تیکه په پوره اندازه اوږده (او ستابیل) وي، کیدی چی یو ډیر نازورور سړی هم کړی شي، چی خورا درانده بارونه پورته کړي.



خیره ۲۸۶

یا دا حالت د پورته پیلبیلګي سره ټیك
روښانه ځرګند شوی ؟ هیڅ نه پیښیږي،
که څوك په اړم ښکته یا پورته زور ونه
کړي بلکه یا راکښ یا ورپوريږ وهي.
مونږ باید دا پوښتنه نوره هم روښانه کړو
او د زورارزښت سره دزورتاثیر لور هم په
شپله لوبه کی ورداخل کړو. ددې هدف لپاره
وکتور سره شمیرنه کړي.

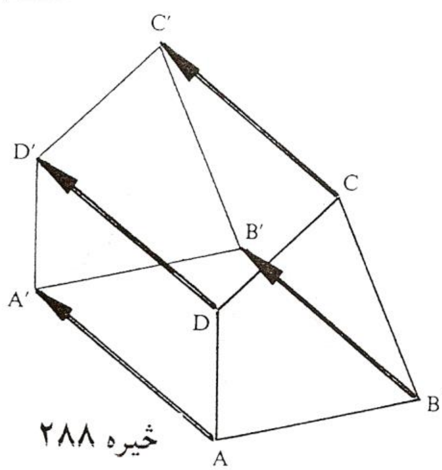
(c) ketabton.com: The Digital Library



ځيره ۲۸۷

تعريف : وکتور د يوه ارزښت او يوه لور سره تعريف دی. **تل د يوه غشي په** ځير انځوريږي. اوږدوالی د وکتور ارزښت (ګڼ ارزښت) ، په هواکی يی ځاي لور او د غشي ځوکه د وکتورلور موخه يا هدف ښايي.

دوکتورونو لپاره د کارونی ساحی

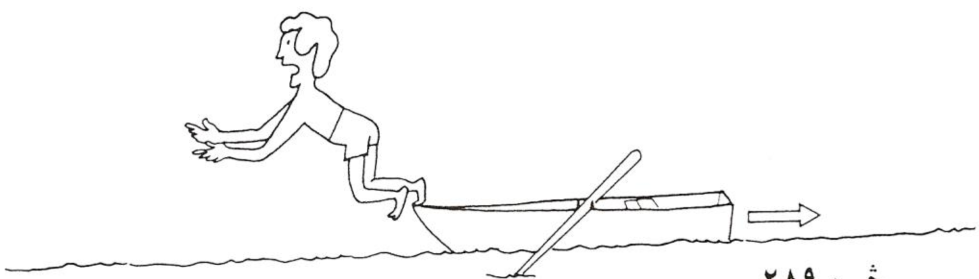


ځيره ۲۸۸

ګڼونه د مخنځښی سره کيدی شي د وکتور په حيث واضح شي. په فزيك کی کښول، لکه زورونه، سرعتتونه، لاري کيدی شي د وکتورونو په ځير انځور شي. (د جلالکوټ ځخه و ځيره ✓ کښول په وکتور سره په ښنه کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

و هسکی مینی ته رابنایی، چی دا لار دا دوه ځایونه سره ونخلوي او دا هم رابنایي چی څومره اږده ده. وکتور دا را په ګوته کوي، چی ایا څوك له جلاکوټ څخه هسکی مینی ته ځي او که له هسکی مینی څخه جلالکوټ ته)



څیره ۲۸۹

داچی یو وکتور د خپل پیلټکي او پایټکي سره ورکړ شوی دی، کیدی شي چی دا ټکي هم د هغه په انځورونه کی استعمال شي.

تعریف: هغه وکتور چي له ټکي P و ټکي Q ته لاربنودوي، د $\overrightarrow{PQ}$ سره په نخښه کيږي.

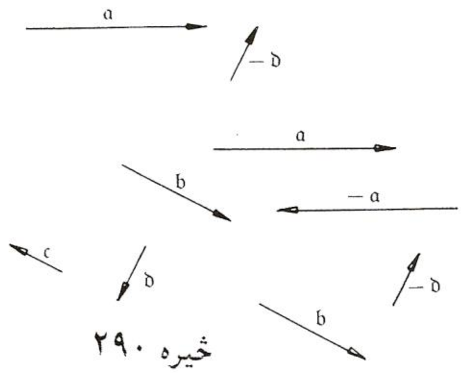
بل ډول لیګدودونه یی دي: $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = \vec{a}$.

په راکښلو سره که ټکی 'P د P څیره او ټکي 'Q د ټکي Q څیره وي، نو د $\overrightarrow{PQ}$ اوږدوالی او لورد $\overrightarrow{P'Q'}$ یو بل سره برابر دي. له دې امله دا باید برابر ولیدل شي یا وګڼل شي. یو وکتور له دې امله یو غشی نه دی بلکه ډیر یوبل سره غبرګ او کوګراینخ غشي دي. له دې امله د ورته ټولګي ځخه هم غبږیدی شو. (دا دې ځما په لمړي د شمیتپوهنی کتاب کي وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

څيره   وکتورو نه د ایکویوالنځېولګی

په څیر: دوه وکتورونه ټیك هلته سره برابر دي، که هغه همغه ارزښت(اوږدوالی) او همغه لور ولري.



څیره ۲۹۰

تعریف

د **a** مطلقه ارزښت a = |**a**| دی. a

تل یو نامنفي ګڼ دی .

وکتورونه د ارزښت ۱ سره موږ یوونوکتورونه یا واحدوکتورونه بولو.

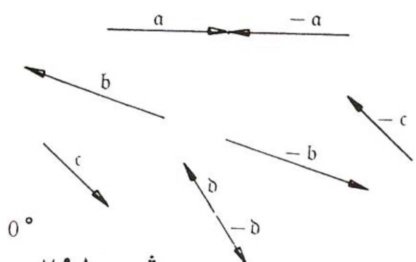
وکتورونه د همغه ارزښت سره مګر د مخامخ لور سره مخامخ یا په ځټ وکتورونه بلل کیږي:

$$|\mathbf{a}| = |-\mathbf{a}| = a$$

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = -\overrightarrow{QP} = -(-\mathbf{a})$$

یواځنی وکتور د 0 (صفر) ارزښت سره صفروکتور **0** دی :

$$\overrightarrow{AA} = \mathbf{a} \Rightarrow |\overrightarrow{AA}| = |\mathbf{a}| = 0$$

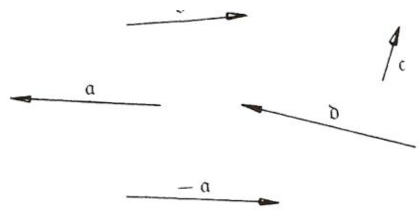


څیره ۲۹۱

دا چی وکتورونه له ټکي وټکي ته لاري روښانه کوي، کیدي شي چی د وکتورونو د توضیح لپاره کواوردینات یا پروت ولاړ سیستمونه (محورونه) هم وکارول شي:

تعریف: وکتورکواردینات د پیل او پای ټکو توپیر یا کمون څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



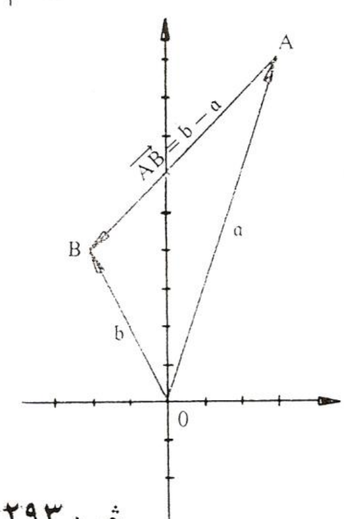
خیره ۲۹۲

په هواره کي : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix}$

په هوا کی : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix}$

خیره وکتورونه او د هغوي ارزښتونه(اوږدوالی):

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{-a}| = 2,5 \;;\; |\mathbf{b}| = 2 \;;\; |\mathbf{c}| = 1 \;;\; |\mathbf{v}| = 3$



خیره ۲۹۳

بیلګي:

وي دي A(3|9) او B(-2|4) پیل– او پایټکي . نو د A او B څخه ټاکلی وکتور کواوردینات په لاندې ډول لاس ته راځي :

$$a = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad b = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

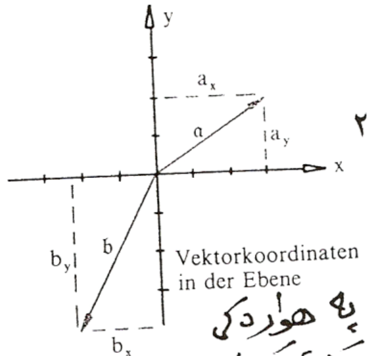
$$c = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$-c = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 9-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

جمله: د وکتور ارزښت د پیتاګوراس له جملی څخه لاس ته راځي او دا د یوګونو کواودیناتو له لارې :

په هواره کی: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

په هوا کې: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$



په هوار کې وکتورکواوردینات

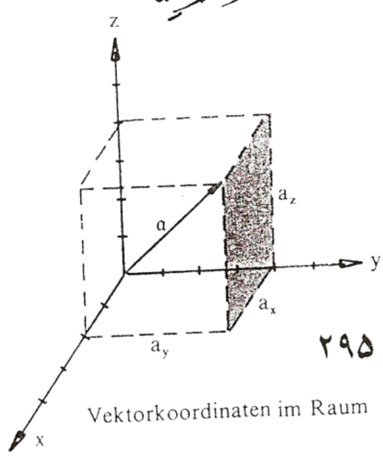
شیره ۲۹۴

بیلګې :

$$a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |b| = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11{,}31$$

$$c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |c| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{77} \approx 8{,}77$$



په هوا کې وکتورکواوردینات

شیره ۲۹۵

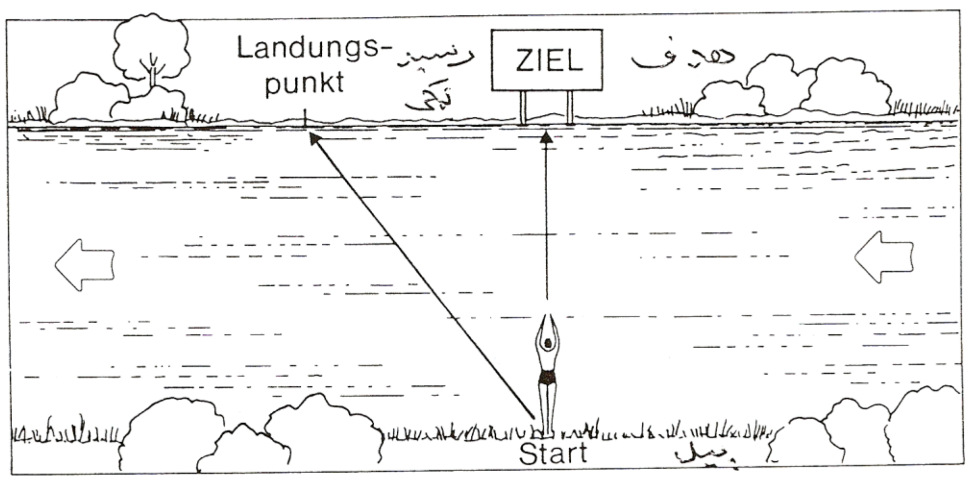
وکتورزیاتون او s–ځلوون یا ضربول

پیلبیلګه: یو لامبووهونکی د سین بلی لور ته د سین په سور یا پلنو لامبی، دا په دې مانا چې اوبه روانی دي. سره له دې چې دا تل سیده لامبي ، دا نه شي کولی چې هغه د لمبا ځای ته مخامخ ځای ته ولمبیدی شي.د روانو اوبو څخه د ځان سره وور کیږي. په ټولیزه –

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا عمومي توګه ده یو مائل حرکت وکړ یا مایل یي ولمبل، کومکی چی د ده د لمبا سرعت او د سین سرعت یو په بل زیات شوي دي.

ګرافیکی د وکتورزیاتون داسی صورت نیسي، چی د دواړو سرعتونو وکتورغشي په خپلو پیل ټکو یو په بل ږدي او دا هر یو د یوه غبرګ اړخیز سره یوځایی وصل کوي. د غبرګ اړخیز نیمی د دواړو سرعت وکتورونو زیاتون ، چی له پیل ټکی پیل کیږي انځوروي. یعنی د لامبووهونکي او د اوبو د سرعت زیاتون ، ځموږ په ځیره کی «



ځیره ۲۹۶

تعریف: وکتورونو ګرافیکی سره زیاتیږي، که د دوهم وکتور پیلټکی د لمړي وکتور په پاګي کیښول شي یعنی د غشی په سر کیښول شي او داسی وریسی . دا زیاتون وکتور نو بیا د لمړي وکتور د پیل ټکی د دوهم وکتور یا د ځنځیر اخرني وکتور د څوکی یا غشي سر پورې غزول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خیرونو څخه دا لاندې هم لاس ته راتلی شي

جمله : د زیاتونوکتور کواودینات همداسی کمونوکتور د پیلوکتور د زیاتوز همداسی کوم څخه لاس ته راځي.

په هوارونی

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

په فضاکې

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

بېلګه

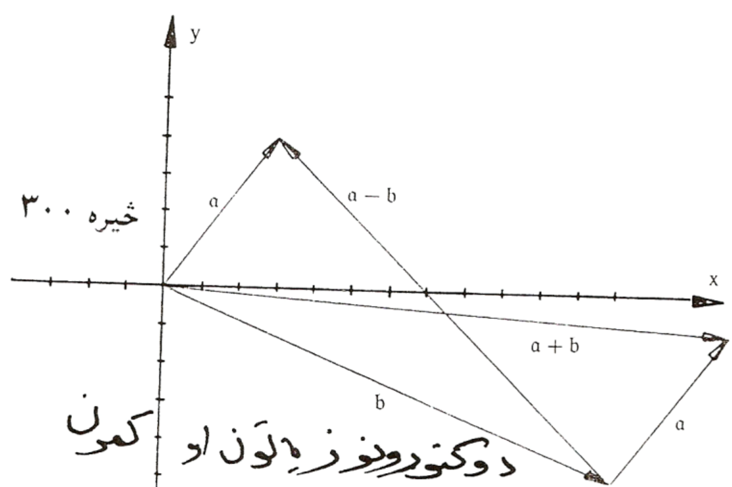
1. $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad |a| = 5 \quad |b| = 13$

$$\Rightarrow a + b = \begin{pmatrix} 3 + 12 \\ 4 \ - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a - b = \begin{pmatrix} 3 - 12 \\ 4 \ + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$b - a = \begin{pmatrix} 12 - 3 \\ -5 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$|a - b| = |b - a| \approx 12{,}73; \quad |a + b| \approx 15{,}03$$



Addition und Subtraktion von Vektoren

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. $\mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 3+0 \\ 2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{c} = \begin{pmatrix} 4-7 \\ 3-8 \\ 2+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \begin{pmatrix} 4+2+7 \\ 3-0+8 \\ 2-5-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} 4+4 \\ 3+3 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \mathfrak{a}$$

دا وروستنی بیلګه د وکتورونو د ځلولو لپاره ده چې له ګڼونو سره ځل شوي (s– ځلون یا · ضربونه) یعنی د سکالار سره ځلونه :

تعریف : وي دې s یو ریل ګڼ (سکالار هم نومیږي) **a** یو وکتور. نو s.**a** = **a**.s هغه وکتور لاس ته راکوي ، چې همغه لور ولري لکه **a** او s –واره اوږدوالی ولري. وکتور **a** له s سره ځلیږي، که د وکتور هر کومپوننت د s سره ځل شي:

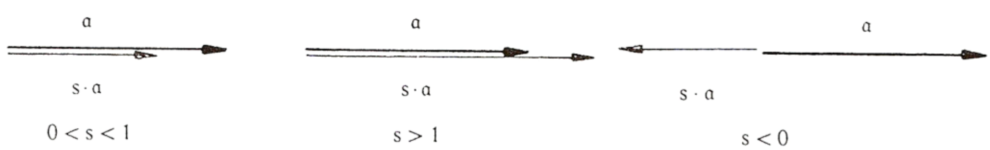
په فضا کې ، $s \cdot \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} s \cdot a_x \\ s \cdot a_y \\ s \cdot a_z \end{pmatrix}$ په هواره کې $s \cdot \mathfrak{a} = \begin{pmatrix} s \cdot a_x \\ s \cdot a_y \end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad s_1 = 4; \quad s_2 = -0{,}5$$

$$\Rightarrow s_1 \cdot a = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot 7 \\ 4 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 28 \\ 36 \end{pmatrix}; \quad s_2 \cdot a = \begin{pmatrix} -0{,}5 \cdot 5 \\ -0{,}5 \cdot 7 \\ -0{,}5 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -3{,}5 \\ -4{,}5 \end{pmatrix}$$

هندسي د يوه وكتور ځلونه د يوه رييلګڼ سره د هغه وكتور منځنی غزونه ده د ځلوونی يا فاكتور s په اندازه. د وكتور پيلتڼګی د كرښمنځ يا غزونمنځ دی.
دلته د $|s| > 1$ سره وكتور اوږديږي يا غزيږي» او د $|s| < 1$ سره وكتور لنډيږي.
د $|s| = 1$ لپاره د وكتور ارزښت تغير نه خوري. كه $s < 0$ وي، نو د وكتور لور راپه ځتې كيږي يا راګرځي يا برعكس كيږي.



څیره ۳۰۱: د وکتورa ځلونه د یوه رئیل ګڼ s سره.

كه $s = 0$ وي ، نو s.**a** صفر وكتور **0** دی .

جمله :په ټوله توګه يا مجموعه کی د سکالار سره د وکتور ځلونو لپاره ل اندې شمير قاعدې باور لري:

$$|s.\mathbf{a}| = |s|.|\mathbf{a}|$$
$$(s_1 + s_2).\mathbf{a} = s_1.\mathbf{a} + s_2.\mathbf{a}$$
$$s.(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s.\mathbf{a} + s.\mathbf{b}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې:

$$1.\quad \left|-3\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix}-9\\-12\\-15\end{vmatrix} \approx 21{,}21$$

$$\left|-3\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = |-3|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = 3\cdot\sqrt{50} \approx 21{,}21$$

$$2.\quad (4-6)\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$$

$$(4-6)\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} - 6\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\28\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-18\\42\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$$

$$3.\quad 3\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\right] = 3\begin{pmatrix}7\\-9\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\-27\\9\end{pmatrix}$$

$$3\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\right] = 3\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\-9\\33\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\18\\24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\-27\\9\end{pmatrix}$$

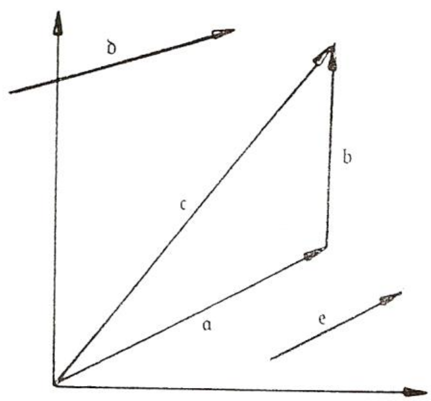
که یو وکتور د بل وکتور زیاتواره په څیر انځور کړی شي، نو دواړه وکتورونه لاینې بلواک بلل کیږي، په غیر له دې لاین خپلواک بلل کیږي.
ټیک په لاندې توګه افده کیږي:

تعریف: دوه وکتورونه **a** او **b** لاینې بلواک دي، که چیرې (یواځنی ټاکلی) رییلګڼ s (سکالار) موجود وي د کوم لپاره چې **s.a = b** باور ولري.
دا وکتورونه لاینخپلواک دی، که انځورونه **s.a = b** د هیڅکوم رییل ګڼ s لپاره ممکنه نه وي.

په هواره (R^2) کی تل دري وکتورونه لائنې بلواک دي. په هوا (R^3) کی تل ۴ وکتورونه لاینبلواک دي. په هواره زیات تر زیاته ۲ او په هوا کی زیات تر زیات

(c) ketabton.com: The Digital Library

دري وکتورونه لاینیخپلواك کیدی شي.



خیره ۳۰۲

لايني بلواك وکتورونه	لايني خپلواك وکتورونه د بیلګی پو توګه
$\{a, e\}$	$\{a, b\}$
$\{a, b, c\}$	$\{b, c\}$
$\{a, c, d\}$	$\{e, d\}$

بیلګي:

۱ – وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix}$ لايني بلواك دي ، ځکه چی

$$s.\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -3.s = 6 \\ 6.s = -12 \\ 11.s = -22 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = -2 \\ s = -2 \\ s = -2 \end{matrix}$$

۲ – په خټ یا برعکس، وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$ لاینیخپلواك دی، ځکه چی
:

$$s.\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -4.s = 10 \\ 6.s = 15 \\ 8.s = 20 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = -2,5 \\ s = 2,5 \\ s = 2,5 \end{matrix}$$

ګورو، چی دلته سره ګډ یا مساوي s نه شي پیداکیدی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وکتورونو لاینی خپلواکوالي او لاینی بلواکوالی په هواره او هوا کي د وکتورونو انځورونو لپاره په کارول کیدي شي:

لکه څنګه چې ټکی په کواوردیناتو کی تعریفیږي چی خپل واټن له محور څخه بیانوي، نو همداسی کیدی شي چې وکتورونه ، ځانونه، په خوښه داسی وکتورونو روښانه یا بیان کړي، چې ځغاستلور یی یو ددې کواوردیناتو محور وي..

تعریف:

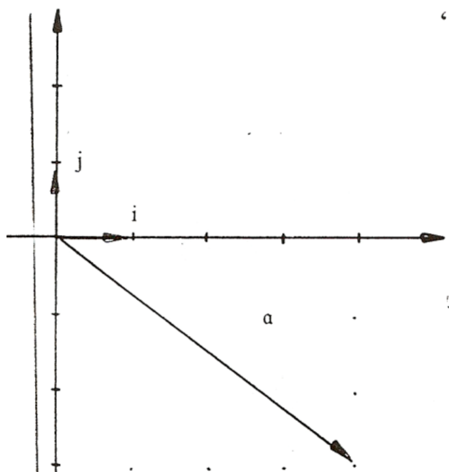
وکتورونه : $i=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $j=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په هواره کي، همداسی

وکتورونه $i=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ او $j=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ په هوا کي او $k=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

بنسټ وکتورونه بلل کیږي. دا مثبتمحور لو په ګوته کوي او ددې لپاره باور لري:

$$|\mathbf{i}|=|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=1$$

هر وکتور کیدی چی په هواره کی له i او j او په هوا کي د i, j او k وکتورونو په نامه لاینی کمبیناشن په څیر د بنسټ وکتورونو څخه انځور کړی شي.



څیره ۳۰۳

بیلګي:

$$a=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=4\cdot i-3\cdot j=4\cdot i+(-3)\cdot j$$

$$b=\begin{pmatrix}-3\\11\\6\end{pmatrix}=-3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+11\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=-3i+11j+6k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پای کی یو نظر په الجبري جوړښت، چی وکتورونه یی د زیاتون او کمون په بنسټ او د رییلګڼونو سره څلونی له لارې لري:

د ټولو وکتورونو ډیری V په هواره کی (همدا ډول په هوا کی) د زیاتون په نسبت یو زیاتون کموتاتیو ګروپ جوړوي (د ګروپ تعریف وروسته)، ځکه چی لرو :

اول - $a+b \in V$ د ټولو b, a لپاره ، چی له V وي رابندیدنه

دوم - $(a+b)+c = a+(b+c)$ د ټولو c, b, a لپاره، چی له V وي اسوشیاتیو قانون

دریم - $0+a = a+0$ صفر وکتور 0 ناپییلی توکی دی

څلورم - $a+(-a) = (-a)+a = 0$ هر وکتور ته یو په څټ وکتور یعني مخامخ وکتور موجود دی

پنځم - $a+b = b+a$ د ټولو a, b لپاره، چی له V وي. کموتاتیو قانون

برسیره پر دې د څلوونی لپاره د یوه ریل ګڼ سره باور لري:

شپږم - $s.a \in V$ د ټولو a لپاره ، چی له V وي

اووم - $1.a = a$ د ټولو a لپاره، چی له V وي

اتم - $(m+n).a = m.a + na$ د ټولو رییلګڼون m او n لپاره او هر وکتور a لپاره ، چی له V وي.

نهم - $m.(a+b) = m.a + n.b$ د ټولو وکتورونو a او b لپاره چي له V وي او هر رییل ګڼ m لپاره.

په ټولګیزه توګه یو داسی جوړښتخویونه د وکتورهوایا ۰ فضا تر نامه یادیږي.

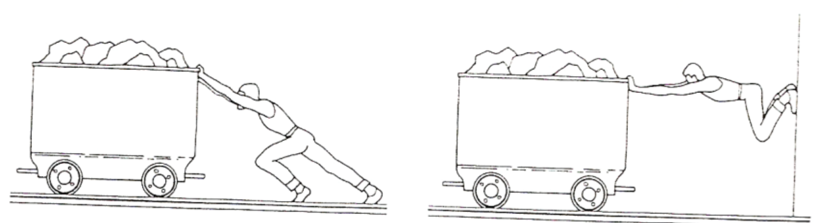
(c) ketabton.com: The Digital Library

سکالار ځل

وکتورونهٔ لکه چی ومو ليدل٬کيدی شي چی سره زيات شي او يا د يوه رييلګڼ سره ځل شي . کيدی شي، چی وکتورونه يو له بل سره هم ځل کړی شي؟
دا حتی په دوه توپيريدونکو ډولونو ممکن دی . يو واريانت يو د يوې لوي په توګه، بيرته يو وکتورهوا جوړوي(د مخه لوستل شوی دی)، بل يی د يوې لوي په توګه سکالار لاس ته راکوي، چی دا يواځي ارزښت لرې او لور نه لري.

پيلبيلګه :

په پخوا وختونو کی د سکرو د کانو واګونونه په لاس راکښل کيده. دلته دا پوښتنه رامنځ ته کيږي، چی ولی کارګر واګون مخته راکښوده او په همدې توګه ټيلواهه، ددې لپاره چی موټر سم پورته کړي؟



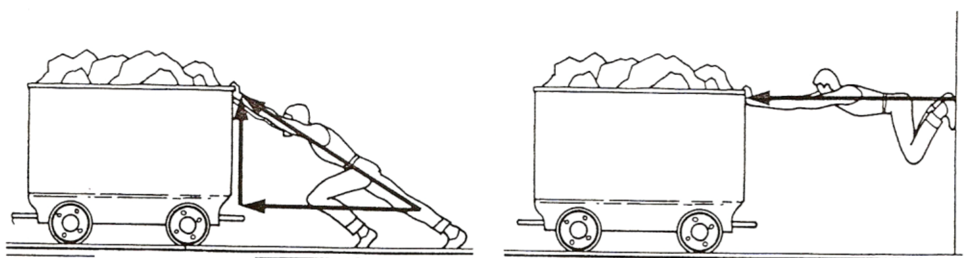
خيره ۳۰۴

ددې پوښتنی سره موږ د دوه وکتوري لويو سره سر او کا رلرو: زور او لار، چی د هغو ځل په فزيك کی «کار» بلل کيږي. هغه زور چی واګون په حرکت کی راولی، بايد د واګون په لور واچول شي يا د واګون په لور تاثير وکړي. يو په پورته   لور اچولی زور کړی شي چی واګون پورته کړي. هر مايل تاثير کوونکی زور کيدی شي د وکتور زياتون قانون له لارې په يوه واګون سره غبرګ او بل په دې ولاړ زور ټوټه کړي يا تجزيه کړي. يواځي پروت زور واګون د مخ لور ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

په حرکت راولي. په دې توګه واردونکی زور او مؤثر زور په ټولیزه توګه همغه یو زور نه دی. دا د دې پوښتنې ځواب هم دې، چې ولي کارګر د مخ لور ته تکیه وهي.: هغه رسی چې د هغې له لارې زور اچول کیږي، نزدې ځمکې سره غبرګه ځغلي (= لار) ، (نزدې د مټو ټول زور کیدی شي مؤثر واقع شي. هر څومره چې کونج د ځمکې او رسی ترمنځ مایل وي، همغومره زیات زور بې تاثیره پاتې کیږي.

دا په کار اچولی زور ، په دوه یو په بل ولاړو کمپوننتو (زورونو) ټوټه کیدل یو ولاړکونجیز دریګوډی جوړوي، دا لار سره غبرګ زور د F.cos∝ په څیر لاس ته راځي . کار W = F.s.cos∝ پخپله په برخلاف د جوړښتلوی زور او لار – لور نه لري، بلکه یواځې ارزښت لري:
دا یو سکالار دی.



څیره ۳۰۵

تعریف:

د دوه وکتورونو **a** او **b** یو **a . b** سکالار ځل لاندي(ویل کیږي **a** ځل **b**) یو یواځنی ریل ګڼ پوهیدل کیږی ،

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| .\cos\alpha = a.b.\cos\alpha$$

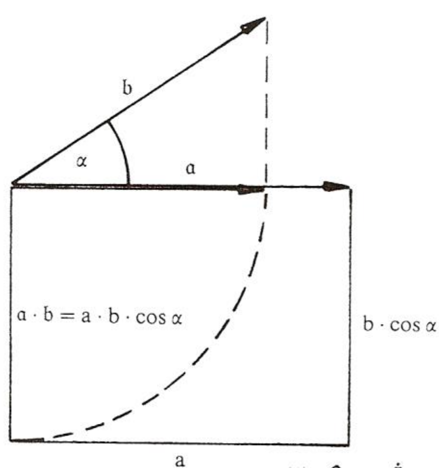
(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته کونج ∝ د a او b وکتورونو ترمنځ کونج دی .

هندسي سکالار ځل د یوه ولاړکونجیز هوارمتن دی یا هواره ده د اړخونو a او b.cos∝ سره (د b پریوستون په a). داسی یوه هواره هلته موجود ده٬که له دې وکتورونو هیڅ یو هم د صفر اوږدوالی ونه لري او یا 0 =| cos∝ ، یعني 90° ≠ ∝ده.

د b ولاړ پریوستون په a کله کله په ∝ سره ښول کیږي: $b_a = b.\cos\alpha$

$$\mathbf{a.b} = a.b_a$$



ځیره ۳۰۶

> **جمله:** د دوه وکتورونو a |= 0 او b |= 0 سکالار ځل هلته او هلته صفر دی، کله چی دواړه یو په بل ولاړ وي:
>
> $$\mathbf{a . b = 0} \iff \mathbf{a \perp b}$$

بیلګه:

د یوه ولاړکونجیز کواوردینات سیستم (Orthono.-rmalbasis اورتونورمالبنسټ) یو په بل نیغ ولا ړ دي. له دې امله له دوه مختلفو وکتورونو ځل صفر دی او د یوه بنسټوکتور سکالار ځل د ځان سته تل ۱ دی :

$$\mathbf{i.i = j.j = k.k = 1} \quad , \quad \mathbf{i.j = j.k = k.i = 0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د د زیاتون څخه په بل ډول، د وکتورډیری نسبت و سکالار ځل ته ترلی یا رابند نه دی . د سکالار ځل د په خوښه وکتورونو ځل د هغه ډیري څخه راوباسی، چی عملیه په کی اجرا کیږي، دا په دې مان چی دا نتیجه بیرته وکتور نه دی یعنی د وکتو په ډیري کی هم نه دی پروت. دلته اسوشیاتیو قانون هم باور نه لري:

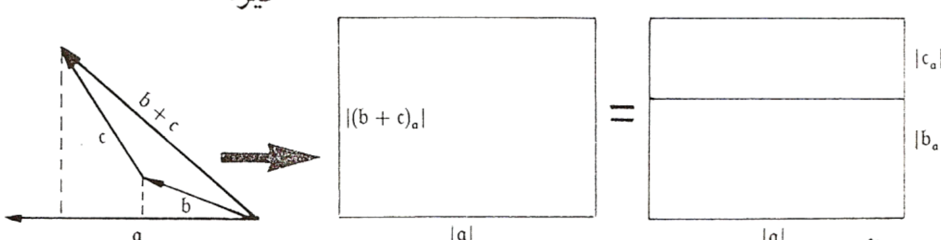
$$a.(b.c) = a.|b|.|c| \cos(b.c)$$

د a یو زیتځله دی او په څپ : $(a.b).c = |a|.|b|.\cos(a.b).c$ د c یو زیاتځل دی.

سره له دې هم باورلري:

سکالار ځل کموتاتیو دی :	$a.b = b.a$
او وکتور زیاتون ته دیستربوتیو دی.	$a.(b+c) = a.b+a.c$

خیره ۳۰۷



Das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ دستوبیوتیو قانون :

کموتاتیو قانون په کمپوننتوانځورونو له لارې او بنسټ وکتورونو له لارې ساده ښوول یا ثابت کیدی شي. د بیلګي په توګه په هواره کی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a \cdot b = (a_x \cdot i + a_y \cdot j) \cdot (b_x \cdot i + b_y \cdot j)$$
$$a \cdot b = a_x i \cdot b_x i + a_y j \cdot b_x i + a_x i \cdot b_y j + a_y j \cdot b_y j$$
$$a \cdot b = a_x b_x i \cdot i + a_y b_x j \cdot i + a_x b_y i \cdot j + a_y b_y j \cdot j$$
$$a \cdot b = a_x b_x \cdot 1 + a_y b_x \cdot 0 + a_x b_y \cdot 0 + a_y b_y \cdot 1$$
$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y$$
$$a \cdot b = b_x a_x + b_y a_y = b \cdot a$$

په ورته ډول دا د دري او زيات کمپوننتوکتورنو لپاره هم ښوول کيدي شي:

تعريف : د سکالار ځل د کمپوننت انځوروني لپاره باور لري:

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_y \\ b_y \end{pmatrix} = a_x a_y + b_x b_y \quad \text{bzw.} \quad a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

همداسی

د **a** او **b** ترمځ کونج په لان دې ډول ټاکل کيږي:

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}.$$

د---

ردوه وکتورونو ترمنځ رابند کونج α شميرنه د تير مخ مساواتو څخه لاس ته راځي بيلګي:

1. $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow a \cdot b = (-3) \cdot 10 + 5 \cdot 6 = 0$

also auch $\cos \alpha = \dfrac{0}{\sqrt{(9+25)} \cdot \sqrt{(100+36)}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$

2. $a = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = a = \sqrt{81+9} = \sqrt{90}; \quad |b| = b = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

$a \cdot b = 9 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) = 18 - 15 = 3 \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{3}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{29}} \approx 0{,}05872 \Rightarrow \alpha \approx 86{,}63°$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورځل

پيبيلګه:
که چيرې په يوه سوري جام کي اوبه واچوی او بيا سوری خلاس کړی او يا که چيرې تاسو يو لاسمينځي يا لمباډنه ډك کړی وي، نو که چيرې اوبه بندی راوباسی اوبه په ښيلوريز څرخون ډوله حرکت له سوري وځي .
دا داوبو تويدل د دروند ورن په ذريعه منځ ته راځي ، په ښي لور څرخيدنه اوبه د کوريوليسزور Corioliskraft له لارې منځ ته راځي. دا د کشولو زور په حرکت کوونکي سيستم کی بايد وکتل شي يا تر نظر لاندې وي، او دا د ځمکی په ځانڅرخون له لارې کتل کيديشي.

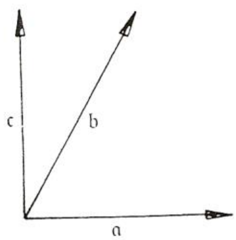
د دوه وکتوري لويو يو بل باندې تاثير له امله (حرکت يا خوزيدنه د دروندزور په بنسټ او د ځمکی څرخون له امله خوزيدنه يا حرکت) يوه بله لويه ، چيدا هم وکتوري لويه ده منځ ته راځي. د دريواړه، د لور له امله ، په يوائنی ګډاړيکو کی سره پرتی دي، او او د دريمی ارزښت کيدی شي د نورو دوهو ارزښتونو لاس ته راوړو. په ټوليزه توګه باور لري:

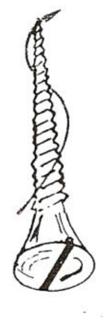
تعريف :
د وکتورځل $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ لاندې (**a** اټيران **b**) يو وکتور پوهيږو، چی لاندې خويونه ولري
اول . دا وکتوردريګوني **a,b,c** په لړپيرلپسی يو ښی سيستم جوړوي
دوم. وکتور **c** په وکتورونو **a** او **b** نيغ ولاړدی، يعنی په هغی هواره هم چی د دوه وکتورونه په کی پراته دي.

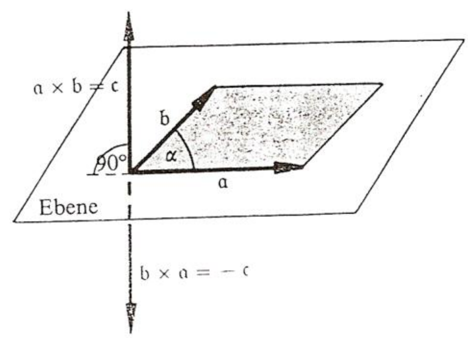
(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم. د وکتور **c** ارزښت د **a** او **b** څخه جوړ غبرګ اړخیز سره مساوي دی

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}|\,.\,\sin(\mathbf{a};\mathbf{b}) = a.b.\sin\alpha$$







خیره ۳۰۸ : یو ښي سیستم کیدی شي، چی د پیچیمیخ له لارې وښوول شي:
که پیچیمیخ له **a** و **b** ته وځرخول شي، نو میخ د **c** په لور خوزي یا حرکت کوي

خیره ۳۰۹

خیره ۳۰۹ : وکتور ځل او هندسي اهمیت یی

پس که د وکتور وکتور ځل صفر وکتور وي ، نو یا یو له دې دواړو وکتورونو صفروکتور دی او یا دواړه سره غبرګ پراته دي(دا په دې مانا ، چی $\alpha = 0$ او یا $\alpha = 180°$)

جمله: وکتور **c** د دیترمینانت په مرسته د وکتورونو **a** او **b** د کمپوننتو له لارې لاس ته راوړ کیدي شي

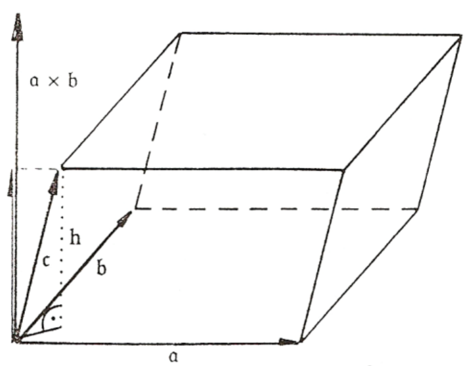
$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & a_x & b_x \\ j & a_y & b_y \\ k & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$c = a \times b = (a_y\, b_z - b_y\, a_z)\, i + (a_z\, b_x - b_z\, a_x)\, j + (a_x\, b_y - b_x\, a_y)\, k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپاتخل Spatprodukt یا غبرګهواریزي خل

د وکتورخلونه ارزښت هغه غبرګهواریزې هواره ده، کومه چې له دواړو وکتورونو غزیږي. یو دریخوایز یا دریدمینزیونال وینه و غبرهواریز ته شپات یا بیرته همغه شپږهواریز وایي (دا د مخه لوستل شوی) دا کیدی شي، چې له درې وکتورونو ځخه غزیدلی فکر ته راوړل شي. د دې ډکی داسی شمیرل کیږي، چې بنستهواره د جګي سره خل کړای شي. دا جګي د c ولاړ پریوستون دی، په $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. یو هندسي بدنیز Stereometrische اوبی یا حل له دې امله د c او $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ د سکالارخل له لارې لاس ته راوړ لکیږي.



ځیره ۳۱۰

تعریف :
د وکتورونو **a , b** او **c** ځخه غزیدلی
شپات یا غبرګهواریز (Parallelepiped)
ډکی دلاندې خل ځخه شمیرل کیږي:

$$V_{Spat} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

دا غبرګهواریزخل مثبت دی، که وکتورونه
a ,b , c
په دې ترتیب یو لړیپرلسی ښی سیستم جوړ کړي، په غیر له دې بیا منفی دی.

تر هغی ، چې بنستهواره د یوه وکتور له لارې ځان ښای یا ښوول کیږي یا ځان ځرګندوي، نو دا ډکي یو سکالار دی .
په ادبیاتو کی دا د خل اټیران نخښنه ، چې په نوکانو کی نیول شوې، زیات وخت نه

(c) ketabton.com: The Digital Library

یکل کیږي، یعنی لیکو: $(a\times b)\cdot c = a.b.c$، غبرکهواریزخل شمیرنه د
:یترمینانت شمیرنی له لور صورت نیسي:

$$(a \times b)\cdot c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$(a \times b)\cdot c = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

داچی دا اتپیرانخل لکه د مخه مو چی وویل د بنستپوکتورونو د لاینی کومبینیشن په ځیر انځوریدلی شي، دا بیرته په یوه له دې کمپوننتو، کومی چی له صفر توپیر لري.

بیلګه:

د هغه غبرګهواریز ډکی ځومره لوي دی، چی دد لاندې وکتورونو ځخه غزیدلی وي؟

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};\quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ او } c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{aufgespannt wird?}$$ له دې چی غزیږي

$$abc = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$abc = 2\cdot(-2)\cdot 6 + 0\cdot(-3)\cdot 4 + 3\cdot(-1)\cdot 5 - 3\cdot(-2)\cdot 4 - 2\cdot(-3)\cdot 5 - 0\cdot(-1)\cdot 6$$

$$abc = -24 + 0 - 15 + 24 + 30 - 0 = 15$$

غبرګهواریز نو ډکی 15 V.E لري (یعنی ۱۵ (V,E) ډکیبوونونه یا –واحدنه)

تمرینونه

۱ – دواړه وکتورونه $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ورکړشوي دي. په یوه کواوردیناتسیستم کی دا لاندې رسم کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

. رسم کړی

a) a + 3b , b) 0.5a - 3b , c) 2(a + b)

او په هروار یی نتیجه د کمپوننت په ډول ورکړی؟

۱ – په هوا یا فضا کی ټکی O(0|0|0) , A(1|2|3). B(2|-1|4) او C(-5|7|9) ورکړ شوي دي، لاندې وکتورونه په کمپوننت لیکدود څه نومیږي یا څه ډول دي؟

a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ e) $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BC}$ f) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$

د دې وکتورونو ارزښتونه څومره لوي دي؟

۲ – که په یوه هواره کی دوه وکتورونه a او b لایني خپلواك وي، نو هر بل د دې هوارې وکتور د دې دوه وکتورونو a او b د لایني کمبینیشن په څیر انځوریدلی شي. a او b بنسټ جوړوي.

وکتور c د مساوات $c = k_1a + k_2b$ له لارې د لایني کمبینیشن په څیر د رییلو گنونو k_1 او k_2 سره انځور کړی. له دې دوه مساوات د k_1 او k_2 ناپیژندونکو سره جوړ کړی. (د دې لپاره دې زما د شیمرپوهنی کتاب وکتل شي)

$$a=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$$

$$a)\ c=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\qquad b)\ c=\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}\qquad c)\ c=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$$

۴ – وي دي : $a=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ او $b=\begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}$ ، وشمیری:

a) a.b b) -a.b c) a.a d) b.b

e) a.(b.a) f) a.(b.a).a

او د دواړو وکتورنو ترمنځ کونج.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – کونجونه $\alpha = w(a,b)$, $\beta = w(b,c)$, $\gamma = w(a,c)$ د وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

لپاره وټاکئ/: .

۶ – د تریګونومتري یا کونجکچ د کوساین جمله، لکه د مخه مو چې لوستلې د سکالارځل په مرسته وشمیرئ.

۷ – د تالس جمله، چې د مخه مو لوستلې د سکالارځل په مرسته وشمیرئ:

۸ – په خوښه دریګوډي ABC لپاره د پیتاګوراس جمله او د هغې په څټ وشمیرئ:

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \iff |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$$

۹ – د مختنه لوستل شوو کاتیت جمله او جګجمله وکتوري وښایې.

۱۰ – د یوه په خوښه غبرګهواریز ABCD لپاره وشمیرئ:

۱۱ – الف) د غبرګ اپیپت یا غبرګهواریز ډکي وشمیرئ، چې له

وکتورونو $b = 3$, $a = 1$ او $c = -2$ څخه غزیدلی وي.

ب) دا څه مانا لري ، که وي : $(a \times b) . c = 0$ ؟

پ) د یوې بیلګې په مرسته وښایې، چې اتیرانځل اسوځیاتیو نه دی.

ت) د وکتورونو $b = 0$, $a = 2$ او $c = k. 4$ له لاري یو غبرګ

اپیپت ورکړ شوی دی، چې ډکی یې ۸ یوونونه دي. k به څومره لویه وي؟

۱۲ – یوه سپورتي الوتکه د 250 km/h په سرعت د N60°O په لور الوځي. سملاسی له جنوب څخه باد لږیږي. دا باد یو د 75 km /h سرعت لري او دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

الوتکه له پیللارې اړوي. دا نوې الوتللور وټاکی او د الوتکی نوی سرعت!

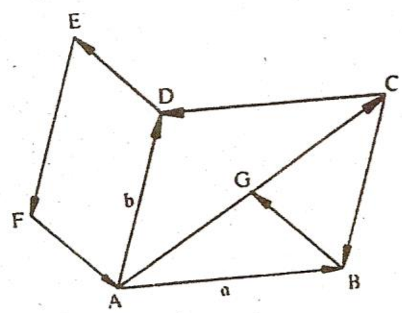
۱۳ – د وکتورونو a اوb لپاره کله لاندې اړیکی باورلري ؟

$a)\ |a+b| < |a|+|b|\ ,\qquad b)\ |a+b| = |a|+|b|$

۱۴ – لاندېوکتورونه ورکړشوي دي:

$a=\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix};\ b=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix};\ c=\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix};\ d=\begin{pmatrix}-45\\30\end{pmatrix};\ e=\begin{pmatrix}20\\4\end{pmatrix};\ f=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix};\ g=\begin{pmatrix}-2,5\\-0,5\end{pmatrix}$

وکتورونه c تر g (که ممکن وي) د وکتورونو a یاb د ډیرواره په څیر انځور کړی.



۱۵ – ناټاکلی وکتورونه د a او b د وکتورونو لاینې کمبینیشن په څیر انځور کړی. (څیره)

۱۶ – یو دریګوډی ABC په

$a=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}.$

سره ورکړ شوی دی. داړخ اوږدوالی او دننني کوجونه وشمیری.

۱۷ – په یوه څلورګوډي کی دی $a=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}.$

$c=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ und او $d=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

د نیمی اوږدوالی وشمیری او د هغی غوڅکونج ($\leq 90°$)

۱۸ – یوه کیښتی د ټکی O څخه د $r=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ په لور خوزیږي یا حرکت کوي، دا کیښتی تګلور دی، باد د $w=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ په لور لږیږي.

الف) د بادزور F_|_ برخه څومره لویه ده، چی په زیګل باندې ولاړ پریوزي. یا تاثیر کوي؟ دا زور کومه لور لري؟

ب) د F برخزور له $F \perp$ څخه څومره لوي دی، ك ومه چې کیښتی د مخ په لور بیا یي؟

۱۹ – یو بار، چې ۱۰۰۰۰ نیوټونه دی د دوه مائلو ستنو سره نیول شوی. جوړښت يې يو مساوي ښيز دريګوډی جوړوي ، د بنسټ ۶ متره سره او د ښی اوږدوالی (د ستنی اوږدوالی) ۵ متره دی.

الف د وشن زور په ضواړو ستنو څنګه تاثیر اچوي؟

ب) د دې برخه زور ولاړ او پراته کمپونتوتونه څومره لوي دي؟

۲۰ –د وکتور v کواوردینات و اورتوګونالبنستهونو $\binom{1}{0}$ او $\binom{0}{1}$ ته وشمیری، که $|v| = 5$ وي او v د وکتور $\binom{1}{0}$ سره یو د $55°$ کونج جوړ کړي.

۲۱ – وي دې $a + b + c = v$. وشمیری : $a.d + b.v + c.d$

۲۲ – د څلور ټکو A, B, C, D او همداسی E, F, G, H سره یو غبرګ اړخيز ورکړشوی دی. د لاندې ورکړنو یا شرطونو سره د هغو هوارې وشمیری

a) A = (0 | 6 | 0) , B =(8|4|0), C = (6|16|0)

b) E = 1,5|2,5|3,5) , F = (0.5|0|2,5) , G = (1 | 0,5| 4,5

هغه تراوسه ورك یا نامعلوم ټکی (D همداسی H) چیرته پروت دی؟

۲۳ –اهرام د بنسټ هوارې د کونجونو

A = (1|0|2) , B = (3|3|7) = , C = (4|2|12) , D =(2| - 1| 7)

سره کوم ډکی لري، چې څوکه یی S =(2 |4 |15) وي؟

لارښودنه: لمړی خپل ځان وپوهوي، چې ایا کونجونه ریښتیا په یوه هواره کی پراته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تجار تي شميرنه

ځاننيونيز يا متناسب او په ځښ ياچپه ځاننيونيز يامتناسب بلواك (فنكشنونه)، دربېقضيه

په ورځني ژوند کی دې ته اړتیا پیښیږي چی ورکړ شوې لویی (یا ډیروالي) یو د بل سره انډول (مقایسه) کړای شي. د بیلګي په توګه د څپلیو لویوالی د ځمکی ارزښت، د میاشتني معاش یو د بل سره انډول. د دوه داسی ګڼونوa او b د انډول لپاره په زیات وخت کي کمون b - a کفایت کوي. دلته نو بیا د دې دوه ګڼونو a اوb له توپیر څخه غږیږو. په ډیرو وختونو کی دا بسیا (کفایت) نه کوي چي د دوه ګڼونو کمون د هغوله توپیر ځخه لاس ته راوړو.

پیلبیلګه:

دوه پټي یو $1800\ m^2$ اوبل $2000\ m^2$ یو له بل $200\ m^2$ توپیر لري. دا د پټیو لویووالی که $400\ m^2$ او $600\ m^2$ وي، نو ترمنځ کمون هم همدا دی. څه به ووایو که د دواړو ځمکو ویش د یوه میراث ویش وي؟

هر ځل به دا یو $200\ m^2$ ډیره لاس ته راولي نسبت و دې بل ته. ګورو چی په دوم ویش کی $400m^2/600m^2$ د لمړي میراثخور لپاره تاوان نسبت و لمړي ویش $1800m^2/2000m^2$ ته زیات دی.

دا په دې مانا، چی که هرڅومره ځمکه لویه وي نو په همغه اندازه د دواړو میراثخورو ترمنځ توپیر کمیږي.

دا مختنه پرته بیلګه ښایی، چي په داسی حالتونو کي دانډول لویي یو بل سره په تناسب یا ځاننیونه کی راوستل کیدي شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف: که a او b دوه له صفر مختلفی لویي یا کښونه ږوي، نو a / b ویش یا a: b د a تناسب یا څاننیونه وb ته بلل کیږي.

بیلګه: ۱ – د ځمکو $400m^2$ او $600m^2$ لویوالی یو بل سره 3/2 = 0,6 = 400/600 تناسب جوړوي یا یو بل سره څانیسي. دا کوچنی ځمکه(پټی) د لوي پټي %66,6 جوړوي.

۲ – د پټیو $1800m^2$ او $2000m^2$ لویوالی یو بل سره په

1800/2000=0,9=9/10

تناسب یا څاننیونه کی پراته دي. دا کوچنی پټی د لوي پټي %90 جوړوي.

۳ – د مودل ګاډي TT لاین(لیکو یا پټلیو) او الماني ګاډو د لیکو یا پټلیو سور یو بل سره په لاندې تنساب کی پراته دي

12mm/1435mm = 0,00836 ~ 1/120 .

۴ – که یو کړندی په 30 دقیقو کي 70km ځغلي، نو د وهل شوې فاصلي سرعت تناسب ووخت ته په لاندې ډول دی.

s/t = 70km / ½ h =140[km/h] = 140km/h .

۵ – د یوه هوموژین بدن(د مساویډوله مواد جوړ) سختوالی ρ د هغه د کتلی(g) څاننیونه یا تناسب دی ، د هغه بدن ډکي(cm3) ته

$$\rho = m / V \, [g / cm^3]$$

د یوه لرګي بلاك سختوالی(کثافت)، چی درې کیلو ګرامه دروند او څلور زره مکعب سانتیمتره ډکی(حجم) لري، $0,75 \, g / cm^3$ دی

$3000g / 4000 \, cmw = 0,75 \, g/cm^3 = \rho$ سختوالی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ غواړو، چې اوس ځانونه د بلواك دوه ځانګړو تيپونو يا ډولونو ته متوجه کړو، دا څنګه، چې موږ په ورځني ژوند کی ډير واره ورسره مخامخ کيږو، چې له دې امله يي پيژندنه ځموږ لپاره خورا مهمه ده.

پيلبيلګه:

۱ – د يوه نل څخه په 3 دقيقو کی ۱۲ ليتره اوبه راوځي. څو ليتره اوبه به په يوه ورځ کي له دې نل څخه راووځي، څومره په يوه کال کی؟

که په درې دقيقو کي ۱۲ ليتره اوبه له نل څخه راوځي، نو په يوه دقيقه کی بايد ۴ ليتره اوبه او په ۲۴ ساعتونو يا ۱۴۴۰ دقيقو کی

طبعاً 5760 = 4 . 1440 ليتره اوبه راوځي. او په دې تعقيب په يوه کال کی 2102400 = 360 . 5760 ليتره او يا ۲۱۰۲۴ هيکتوليتر اوبه بهيږي.

۲ – څلور کارګر يو ه بنستې کنده په ۹ ساعتونو کی راپورته اوکانکريټوي. څومره وخت درې کارګره ضرورت لري او څومره وخت به ۱۰ کارګر ضرورت ولري چی دا ځمکه راپورته کړي اوهم کانکريټ کړي؟

که څلور کارګره ددې لپاره ۹ ساعته ضرورت لري، نو يو کارګر ددې لپاره حتماً زيات وخت په کار لري، يعني څلور ځله زيات وخت، پس ۳۶ ساعته، نو درې کارګر په تعقيب 12 = 3 : 36 ساعته او لس کارګر 3,6 = 10 : 36 ساعته = درې ساعتونه او ۳۶ دقيقي ضرورت لري چی دا ځمکه وکني او کانکريټ کړي.

په دواړو حالتونو کی يو نظم منځ کی پروت دی، دقيق په لمړی بيلګه کی فنکشن وخت —> د اوبو مقدار او په دومه بيلګه کی فنکشن کارګر —> د کارساعتونه.

مګر داوړه فنکشنونه پوره په خپل راوړون ډول کی يو له بل توپيرېږي:

۱ – څومره ډير وخت چی تيريږي په همغه اندازه زياتی اوبه له نل بهيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – څومره چې کارګر زیاتیږي همغومره د کار وخت کمیږي
دې ته ورته د ورکړشوو فنکشنونویا بلواکو شمیرپوهنیزیا ماتیماتیکي لیکدود
د فنکشن ورکړدود مختلف لیدل کیږي.

۱– فنکشن f : وخت (دقیقه) ⟵ د اوبو ډیرى(ل)

د فنکشن لیکدود (فنکشن لیکلوقانون) لري $x \to 4x$

په دې ډول د فنکشن مساوات داسې بریښي $y = 4x \quad ; \quad x \in Q^{+}_{0}$

۲ – فنکشن g : کارګر (څو دانې) ⟵ د کاروخت (ساعت h)

د فنکشن لیکدود لري $x \to 36/x$

په دې ډول د اړوند یا مربوط فنکشن مساوات داسې بریښي $y = 36/x \; ; \; x \in N$

تعریف:

یوه لویه x و هغې ته تنظیم شوې لوي y ته سیده متناسب سیده ځانثیونه
(په نخښه کې $y \sim x$) بللکیږي که د هغوي تناسب یاځا ننیونه
(ویش) y / x تل یو ثابت ارزښت وساتي : یعنی $y / x = k$ وي.
بلواك(تابع) یا فنکشن $y = kx$ (ثابت –k) د تناسب یا ځاننیونی څلوونی
یا فاکتور بلل کیږي.
یوه لویه هغې بلی تنظیم شوی لویي ته ناسیده متناسب ده یا ناسیده
ځاننیونه کی ده، که د هغو څل تل یوثابت ارزښت وساتي: یعني

$$y.x = k \iff y = k/x$$

بلواك یا فنکشن $y = k/x$ چپه یا په څټ متناسب (antiproportional)
یا په څټ ځاننیونکی بلواك یا فنکشن بلل کیږي.

متناسب فنکشن $y = kx$ د یوې لوي دوه برابره، نیم برابر، n –برابره پورې د
بلی لویي هم دوه برابره، نیم برابره یا n–برابره پورې اړه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په چپه یا په څټ متناسب فنکشن $y = k / x$ کی دوه برابره، نیم برابر ... n – برابره پورې د بلې لوي نیم برابر، دوه برابر ... 1/n–برابره تعلق لري(اړه لري) .
په چپه یا په څټ متناسب فنکشن $y = k/x$ کی د چپه یا ناسیده متناسبوالي څخه خبرې کیږي. که متناسب او چپه یا په څټ متناسب فنکشنونه په یوه کواوردینات کی انځور شي، نو لیدل کیږي چی متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون پورته کیدونکی او چپه یا په څټ متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون لویدونکي دي (د مونوتون کلیمو لپاره دې ځما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي)

بیلګي :

۱ – سیده تناسب یا سیده ځاننیونه:

الف : په شي اخستلو کی د ډیري ارزښت سیده متناسب دی

ارزښت(افغانی) ډیری (کلیوګرام)

ب : په تیزوالی یاسرعت کی وهل شوې لار د وخت سره سیده متناسب ده

s(km) –> t(s)

۲ – ناسیده تناسب یا ناسیده ځاننیونه

الف : یوې معلومی لار وهلو لپاره تعجیل هغه په بر کی نیولي وخت سره ناسیده متناسب دی: که هرڅومره تعجیل زیات وي په همغه اندازه وخت کمیږي.

ب : د وچو شودو د یوه څرګند ټاکلي ټول وزن د وړونکوتیو ګڼه ناسیده متناسب ده د هرې کوتۍ یویزوزن سره: که هرڅومره زیاتی کوتۍ په کار واچول شي په همغه ګڼون د کوتیو وزن کمیږي.

تعریف: د لاندې ډول $a/b = c/d$ یا $a:b = c:d$ مساوات د تناسب مساوات یا ځاننیونیز برابرون بلل کیږي (ویل کیږي چی a و b ته ځان داسی نیسي (یا داسی انډول کی ده) لکه c و d ته) دلته a او d د تناسب یا انډول

(c) ketabton.com: The Digital Library

دباندني غړي دي او b او c د انډول دننی غړي. په هر تنساب کی د دباندنیو غړوځل د دننیو غړو د ځل سره برابر دی:

$$a / b = c / d \quad <=> \quad a . d = c . b$$

اوس ځان باوري کولی شو چی د دننیو غړو بدلول او یا د دباندینو غړو بدلول یو د بل سره په تناسب یا انډول کی تغیر نه راولي. کیدی شي چی ټول دنني غړي د دباندینیو غړو سره بدل شي:

$$a/b = c/d \quad <=> \quad a/c = b/d \quad <=> \quad c/a = d/b \quad <=> \quad b/a = d/c$$

له دې امله کیدی شي چی یو دبل سره برابر زیات تناسبونه یا انډولونه د یو په بل پسی راتلونکو تناسوبونو په څیر ولیکل شي:

$$a/b=c/d = e/f \quad <=> \quad a:c:e = b:d:f$$

دلته باید په پام کی وي چی ویش ځانله صورت نیسي یعني تل د دوه ګڼونو،

بیلګي :

۱ – له 21 / 7 = 15 / 5 څخه لاس ته راځي 7.15 = 5.21 یا 7 / 21 = 15/5
یا 15/21=5/7 یا 7/5 = 21/15 .

۲ – د 2/3 = 4/6 = 8/12 لپاره لیکو 12:6:3 = 8:4:2

۳ – یو تناسب چی دننه او دباندې غړي يي یو له بل سره برابر وي ناپریکیدونکی تناسب بولو. په ناپریکیدنکی تنساب یا انډول a:m=m:b یا m:a = b:m کی m منځنی متناسب انډولی بلل کیږي. منځنی متناسب د نورو دوو غړو a او b جیومتریکي منځ دی.:

$$a / m = m / b \quad <=> \quad m^2 = a.b \quad => \quad m = \sqrt{a.b}$$

د a = 16 او b = 9 لپاره m = 12 منځنی متناسب داسی دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$16/12 = 12/9$

۴ څلور انډولونه متناسب یا ځانئیونیزڅنګه لیکل کیږي؟

$18/x=8/5 \quad <=> \quad 18 . 5 = 8x \quad => \quad x = (18 . 5) / 8 = 11,25$

په ترتیب تنساسب یا ځانئیونه یا انډول کی باور لري: $18 / 11,25 = 8 / 5$

زیات وخت مود تکست وظیفی د تناسبمساواتو (انډول برابرون) ته لاربنودوي، نو بیا دريِ ورکړشوو لویو ته څلورم تنساب یا انډول غوښتل کیږي. د داسی وظیفو لپاره سیده یا ناسیده تناسب یوه غوره رول لوبوي. داسی پوښتنی د دریقضی شمیرني یا پاي(ختم) شمیرنی لاندې شهرت لري.
د دریقضي شمیرني اصلي پرابلم په دې کی دی، چی د وظیفي ورکول باید څرګند یا روښانه شي، چی ایا دا یوسیده متناسب او که چپه یا په ځټ متنساب بلواك (تابع) یا فنکشن دی.

د دري قضي پوښتنی کولو څخه لاندې تکامل منځ ته راځي :
۱ – یوه د شرایطو قضیه، کومه چی ټولی ضروري ورکوني په ګوته کوي.
۲ – یوه د پوښتنی قضیه چی غوښتونکی لو یه x متن کي یا خوندي لري او له هغي سیده یا ناسیده د ځواب تناسب ته تکامل ورکوي.
۳ – یوه پایقضیه، په کوم کی چی له یوه یوون (واحد) په ورته یامناسب ډیرون پاي ورکول کیږي.

پیلبیلګه:
یوه الوتکه له الف ځاي تر ب ځاي پورې چی ۸۰۰ کیلومتره واټن دی په ۶ ساعتو او ۴۰ دقیقوکی تی کوي، دا الوتکه به ۲۲۰۰ کیلومتره لار په څو ساعتوکی ووهي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د درې جملی له لارې يي ځواب:

الف – د شرايطو قضيه........... 800km - 6h 40 min

يا................ 800km - 400 min

ب – د پوښتنی قضيه .. .. 2200 km - x min

پ – پايقضيه.......... 200km - 400/4min = 100min

2200km - 11.100 min = 1100 min

دا الوتکه به په دې ترتيب د 2200km اوږده واټن لپاره

1100min = 18h20min

ضرورت ولري.

د دې وظيفه د ټيك ځواب لپاره ضروري نيوني دا وي چی سيده تناسب وپيژندل شي: هرڅومره چی د الوتلو واټن لرې کيږي په همغه اندازه الوتکه زيات وخت په بر کی نيسي.

يعنی 2200km اوږد واټن په داسی انډول يا تناسب کی دی لکه 400min و 800 km ته:

$$x / 2200 = 400/800$$

د اکويوالنځ فورم(ځيرې–) اوړون له لارې څخه ځواب x لاس ته راځي:

$$x = (400 . 2200) / 800 = 1100$$

۲ – ۴ کارګر د يوه ديوال وهلو لپاره پنځه ورځي ضرورت لري. د ناروغي له امله يو کارګر د کارلري پاتيږي. دا راکمه يا راکوچنی ډله اوس څنګه مشغول ده؟ دلته يو ناسيده تناسب يا ځانښيونه لرو:

هرڅومره چی کارګر کم وي په همغه اندازه وخت زياتيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تناسب سره شمیرنه	ددریجملی سره شمیرنه
غوښتونکی کاروخت x د ۵ ورځو سره داسی تناسب کی دی لکه ۴ کارګر و درې کارګرو ته $x/5 = 4/3 \iff x = (4.5)/3 = 20/3$ ورځی	۴ کارګر – ۵ ورځي ۱ کارګر – ۵ . ۴ ورځي ۳ کارګر – ۳ / ۲۰ ورځي پس ۳ کاګر – $6\frac{2}{3}$ ورځ

یوځاي شوې درې قضیه:

د ۳۰ جوړه کالیو ګنډلو لپاره ۱۲ درزیان ۲۰ د کار ورځي ضرورت لري. څومره ورځی به ۱۰ درزیان د ۷۰ جوړه کالیو لپاره ضرورت ولري؟

لمړی دریقضیه	دومه درې قضیه
(سیده متناسب)	(ناسیده متناسب)
۳۰ جوړه کالي	۱۲ درزیان – ۲۰ ورځي
۷۰ جوړه کالي	۱۰ درزیان – x ورځي

هرڅومره چی کالی زیات وي همغومره زیاتی ورځي، هرڅومره چی درزیان زیات وي همغومره لږې ورځي

۱۰ جوړه کالی –	۱۲ درزیان –	ورځی
۷۰ جوړه کالی	۱۲ درزیان	ورځی
۷۰ جوړه کالي	۲ درزیان –	ورځي
۷۰ جوړه کالي	۱۰ درزیان	ورځي

پس لرو

$x = (20.7.6)/(3.5) = 56$ ورځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – لاندې ځاننیونې یا تناسبونه ساده افاده کړی

a) 200t : 2 kg b) 6 m : 6 km

c) 4km / 30min d) 3,2 t : 400dm³

۲ – یوه موټر د ۵۵۰۰ کیلو متره اوږدې لار لپاره ۳۸۵ لیتره ډیزل وسزول

الف) په دې تګډول ۵۰ لیتره ډیزل د څومره لار لپاره بسیا کوي؟

ب) د یوې ۴۳۰ کیلو متره لار لپاره به دا موټر څومره ډیزل مصرف کړي؟

۳ – که غواړو چې د یوه موټر سره د الف ټکی څخه و ب ته ورسیږو ، نو د ۶۰ کیلومتره په ساعت ته درینیم اعته ضرورت لرو. د الف څخه ب ته سړی په څومره وخت کي رسیدلي شي، که د موټر سرعت په لاندې ډول وي:

a) 50km / h b) 110 km / h?

۴ – یو ښار پلان د ۱ : ۱۰۰۰۰ تناسب یا ځاننیونه ورکړ شوی دی. لاندې واټنونه په ریښتونی څومره دی ؟

a) 5 cm b) 33 mm c) 1 dm

۵ – یو ۸۱ ګڼ څنګه په داسی په ۲ زیاتونونو ټوټه کیدی شي، چی ځاننیونه یا تناسب یی داسی وي لکه : 5 : 4 ؟

۶ – د یوه ګڼ او ۵ کمون ځان نیونه یا تناسب و ۷ ته داسی دی ، لکه چی د ۵ کمون ودې ګڼ سره، چی ۴ ته ځا نیسی یا و ۴ ته تناسب یا ځاننیونه؟ دا ګڼ کوم دی؟

۷ – یو فاو وې موټر ۸۰ کیلو متره په ساعت کي ځغلي او په دې پسی په ۱۲۰ متره کی وروسته یو بی ایم وې موټر ۱۲۰ کیلو په ساعت کی ځغلي.

الف) بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چی د فاو وې څخه مخ ته شي؟

ب) بي ایم وې په دې وخت کی څومره واټن وهلی دی؟

پ) دا بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چي له فاو وې موټر څخه ۴۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

متره مخ ته شي ؟
۸ – د سونګ سکرو سوزلو له امله د کولنډیاوکسید غاز پیداکیږي. د سونګ سکرو او د راپیدا کولنډیاوکسید Kohlendioxid (Co_2) ترمنځ تناسب یا ځاننیونه 11 : 3 ده.
څو ګرامه سونګسکاره به ۱۰۰ ګرامه کولینډیاکسید رامنځ ته کیږي؟
۹ – له دریو یو په بل اغیزهمند غاښورڅرخي د ۴۸ ، ۳۶ همداسی ۱۶ ښاغونو سره دا کوچنی څرخی ۴۰۰ واري په یوه دقیقه کی ګرځي یا څرخی.
نور دواړه غاښورڅرخی څو واره څرخی یا ګرځی؟
۱۰ – ۹۰۰ تیږي، چی ۳۶ سانتي متره سور لري ۴۰۵۰ کیلو ګرامه وزن لري.
۱۱۰۰ تیږې به څومره وزن ولري، که د همغو موادو جوړې وي او سور یی ۲۴ سانتي متره وي؟
۱۱ – یو د زدکوونکو ورځپاڼه « هیلی »د رحمان بابا د لیسی څخه راوځی د دې لپاره چی د ورځپاڼو ۱۲۰۰ توکه وترل شي ، څلور زدکوونکی ۳ ساعته کار پرې کوي.
څومره زدکوونکی په کار دې، چی ۲۱۰۰ توکه ورځپاڼی په ټیك دوه ساعته کی وتړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په سلو کی – -Prozent ، په زرو کی – - Primille

ګټه– -Zins او د ګټې د ګټې شمیرنه Zinseszinsrechnung

مورږ د a / b یا c / d ډولونو انډولونه او یا په همدې ډول ویشنه په مساواتو و ازمایل. د ماتشمیرنی په چوکاټ کی(ځما د شمیرپوهنی کتاب دې وکتل شي) به وښوول شي چی ځنګه بنسټیز نظم په داسی ماتو کی ټاکل کیدی شي. د انډول یا مقایسې لپاره دا هم وړاندېکوولی شو چی دواړه مات لاندې په ګډ ماتلاندې چی 100 وي پراخ شي. دا کم له کمه په نزدې ډول په هر مات کی کیدی شي.

پیلبیلګه:

یو جوړ جامې، چې په ۲۳۰ افغانی پلورل کیدي، په ۴۰ افغانی ګرانی شي د ګرانښت تناسب یا ځاننیونه یی و اولنۍ ارزښت ته څومره دی؟

دا تناسب ۴۰/۲۳۰ کیدی شي نزدې په یوه مات چی مات لاندې یې «۱۰۰» وي انځور شي، دا کیدی شي چی د ویشنی له لارې داسی صورته ونیسي:

40 / 230 = 0,1739 پس 40 / 230 ~ 17,39 / 100

قیمتیدل د لمړني قیمت 0,1739 ځله راکوي. داسې هم وایو چی قیمتیدل په سلو کی نزدې ۱۷ دي.

تعریف: د یوه بنسټیزارزښت G سلمه برخه ددې ګڼ 1 په سلو کی بلل کیږي، او ددې لپاره لیکو 1% د G دی G/100 , په همدې ډول % P له G

(c) ketabton.com: The Digital Library

ا لیکه

د ګڼې ارزښت W = P.G/100 له لارې ټاکل کیږي، P په سلو کی جمله او W په سلو کی ارزښت بلل کیږي.

بنسټ ارزښت G ځان و 100 ته داسی نیسي لکه د په سلو کی ارزښت W د په سلو کی جملی P ته، پس

$$\frac{G}{100} = G / 100 = W / P = \frac{W}{P}$$

$$\Leftrightarrow G \cdot P = 100 \cdot W$$

د اخرني مساوات څخه د فورم اړولو له لارې لاس ته راځي

جمله:

د په سلو کی ټاکنه	بنسټ ارزښت	په سلو کی ارزښت
P = 100 . W / G	G = 100.W/ P	W = G.P / 100

بیلګی:

۱ – د په سلو کی ارزښت	بنسټ ارزښت	په سلو کی ټاکنه
= 16,80 DM	د 120 DM	14 %

۲ – یو نفر باید د یوه نوي بایسکل لپاره 40 , 60 DM یعنی المانی مارکونه د مالیا لپاره (14%) ادا کړي

دا بایسکل څو ارزښت لري، بی له مالیا، او دا د مالیا سره څو ارزښت لري؟

که د 40,60DM په سلو کی ارزښت د په سلو کی ټاکنی 14% وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو بايد 40,60 / 14DM د 1% د بنسټارزښت برابر وي. په دې پسې بنسټ ارزښت (= 100%) د G = (40,60 / 14)100DM = 290 DM لاس ته راځي.

له دې سره بايسکل ۲۹۰ مارکونه بې ماليا ارزښت لري او ۶۰ ، ۳۳۰ ماروکونه د ماليا سره.

کيد ی شي، چې سملاسی هم د ماليا سره ارزښت ته راشو، که د دې لپاره يو بنسټ ارزښت د ۱۱۴ په سلو کی کيښول شي يا وضعه شي:

G = (40,60 / 14). 114DM = 330,60 DM

۳ – يو جوړ کالي چې ۱۵۰ مارکونه ارزښت لري په ۱۰ په سلو کی ګرانيږي، دا کالي تر ډير ځنډ نه پلورل کيږي، نو له دې امله يې بيا دوکانواله په ۱۰ په سلو کی ارزانوي. پوښتنه داده، چې ايا داکالي به اوس هم ۱۵۰ مارکونه ارزښت ولري، که څنګه؟

طبعاً نه ، ځکه چې ګرانوالی په ۱۰ ٪ مارکونو زياتوالی يې په سرچينيز ارزښت دی ، مګر دا ارزنښت يې په دې اوسني ارزښت، چې 150 + 150.10% = 165DM په بنسټ منځ ته راځي. له دې امله دا کالي د ارزنښت وروسته اوس

165 - 165.10% = 165 - 16,50 = 145,50DM

مارکونه دی. که يوه ورکړه شوې بنسټ ارزښت لپاره د يوه سلونې ارزښت سميرل کيږي، کيدی شي چې دا د يوه سانمل له لارې وشي.

بيلګي:

اول) د ۳۵۰ ماروکونو ۱۴ ٪ کی داسی شميرل کيږي: 350.0,14 = 49 DM

دوم) که د ۴۵۶۸ کيلو ګرامه بنسټ ارزښت په ۲۲ ٪ کم شي، نو لاس ته راځي:

4568(1 - 0,22) = 4568.0,78 = 3563,04 DM

دريم) که د 2303 m² بنسټ ارزښت په 24% جګ شي، نو لاس ته ترې راځي«

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2303.(1+0,24) = 2303 \ .1,24 = 2855,72 \ m^2$$

لاندې بنستېاکنی یا بنستې مقدارونه دی په مات بڼه ورکړ شي :

$1\% = \frac{1}{100}$	$1\frac{1}{4}\% = \frac{1}{80}$	$1\frac{1}{3}\% = \frac{1}{75}$	$1\frac{2}{3}\% = \frac{1}{60}$
$2\frac{1}{2}\% = \frac{1}{40}$	$3\frac{1}{3}\% = \frac{1}{30}$	$4\frac{1}{6}\% = \frac{1}{24}$	$5\% = \frac{1}{20}$
$6\frac{1}{4}\% = \frac{1}{16}$	$6\frac{2}{3}\% = \frac{1}{15}$	$8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12}$	$11\frac{1}{9}\% = \frac{1}{9}$
$12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$	$16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$	$20\% = \frac{1}{5}$	$25\% = \frac{1}{4}$
$33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$	$50\% = \frac{1}{2}$	$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$	$75\% = \frac{3}{4}$

د یوه بنستې– یا ستېه ارزښت G یو په زرمه برخه ۱ پرومیلی (لاتین) واي، چې مونږ یی دلته هم د زرو څخه ۱ بولو:

۱ په زرو کی 1 ‰ له G دی G / 1000

د پرومیلی یا په زرو کی شمیرنی لپاره له دې وروسته انډولګښ ۱۰۰۰ (په ماتلاندې کی) ، 1000‰ له دې سره یو ستېه ارزښت دی.

بیلګه :

4,7 ‰ له 3690DM دې: 17,34DM

مونږ غواړو، چې دا اوس د په سلو کی شمیرنی یو ځانګړي بڼې سره مشغول کړو. په ورځني ژوند کی خلك د کور جوړولو لپاره یا د یوې مغازې جوړولو لپاره پیسی (بډایي یا سرمای) پوروي او دا زیات وخت په نوې نړۍ کی له بانکونو څخه، د پور ورکولو له لارې پورورکوونکی څه پیسی باید لاس ته راولی، د ارزښت بايللو تر نامه، چې دې ته د سرمايي ګټه وايي. په بانکی معاملو کی د فعالی ا و غیر فعالی ګټې ترمنځ توپیر باید وشي. فعاله ګټه بانك د پوروړی څخه د ورکړشوې پور په مقابل کي لاس ته راوړي، د دې په څټ یا برعکس څوك چې په بانك کی شمیرکتابچه خلاصوي او په بانك کی پیسی سپما کوي ، نو دمرکزې یا ملي بانك په هدایت د

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیسو د سپما لپاره سپماکونکي هم څه پیسي لاس ته راوړي، چي دې ته به موږ د سپما ګټه ووایو ، په هر صورت په ځنی هیوادونو کي د پورګټی او سپما ګټی ترمنځ توپیر باید له ۲ په سلو کی تر درې په سلو کی څخه زیات نه وي.

په پرینځیپ کی باید د ساده ګټی او داسی په نامه د ګټی ګټی ترمنځ شمیرنو کی توپیر وشي . په داسی حال کی، چی په ساده ګټه کی پوروړی د پورشوي مقدار په بدل کی یوه ټاکلی ګټه ورکوي، چی هغه زیات وخت د یوه کال په منځ کي یعنی د یوه کال تیریدلو سره ټاکل شوې وي او دا ګټه د کال په اخر کی په منظمه توګه ورکول کیږي یا ادا کیږي.

د ګټی ګټی په شمیرلو کی د هغه غونډ وخت ګټه شمیرل کیږی ، چی په هغی کی د ګټی ګټه هم خوندې یا شامل ده، دلته هغه د هرکال ګټه د هغی لمړنی بډایي ته ورزیاتیږي او بیا د ټولو ګټه د بل کال لپاره شمیرل کیږی او په همدې ډول وړپسی د دوه او یا زیاتو کالو.

لمړی غواړو، چی یواځی ساده ګټی شمیرلو سره ځان په کار واچوو:

پیلبیلګه

یوه د ۳۵۰۰ مارکونو بډایي یا سرمایه په بانکی شمیرنه کي په بانك کی اینښولکیږي، چي کلنی ګټه یی 4,5% ده. له 3,5 کالو وروسته دا سرمایه اینښونکي په بانکی شمیرنه کي څومره پیسی لري؟

دلته په پوره هدایت ساده ګټونه مخ ته پرته وي، که څه هم په معمولی توګه داسی شمیرنو کی د ګټی ګټه هم شمیرل کیږي. د په سلو کی شمیرنو بنسټ ارزښت دلته هغه ګټوونکی بډایي یا سرمایه K (بنسټسرمایه) ده، او د په سلو کی ارزښت ګټه Z ده (په المانی مارکونو) ، د په سلوکی مقدار ، چی ما کله په سلو کي ټاکنه(یعنی په سلو کي څومره اندازه) بللی په %).

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې په دنده یا شمیرنه کي ګټه غوښتل شوې(دمخه برخه دې، یعني د په سلو کي ارزښت دې وکتل شي) ددې لپاره لاس ته راځي

$$Z = K.p / 100 = 3500.4,5 / 100 = 157,50DM$$

دا د یوه کال لپاره ګټه ده ، په بنسټیزه بڼایي ، چې۳۵۰۰ مارکونه دي. په درینیمو کالو کی په ساده ګټونه بڼایي، چی بانکی شمیر یی واز کړی 3,5 .157,50 = 551,25DM لاس ته راوړي. په دې توګه به په سپما کتابچه کي 3500 + 551,25 = 4051,25DM (مارکونه) وي.

د ګټې وخت t لکه، چې ومو لیدل یو کال ، زیات یا کم کیدی شي. ، بیا نو په بانکي شمیرنه کي د یوه کال لپاره ۱۲ میاشتي نیسی، چی د هرې میاشتي لپاره ۳۰ ورځي ټاکي، یعنی په ټولیزه توګه ۳۶۰ ورځو په بنسټ بیا بانکی شمیرنی صورت نیسی. د ورځو په بنسټ بانکي شمیرنو کي هغه د سپما ورځ ورسره شمیرل کیږي(د سپماورځ Wertstellung یا Valutierung)، هغه ورځ، چی پیسی بیرته له بانګ اخستلي کیږي یا له بانك بیرته پورته کیږي، نه ورسره شمیرل کیږي.

د ګټې فرمول: $Z = K.p / 100$. د ورځنی ګټې فرمول: $Z = K.p.t / 100.360$

بیلګی

لمړی : ۴۵۰۰ مارکونه له ۳ . ۷ . ۱۹۸۷ څخه تر ۱۵ . ۹ ۱۹۹۰ پورې څومره ګټه کوي، که ګټه 4 , 75% وي.

د ګټې وخت د ورځو په بنسټ شمیرو: t = 12 +60+3.360 = 1152 ورځي.

د ورځنی فرمول له مخی لاس ته راځي:

$$Z = K.p.t / 100.360 = 4500.4,75.1152 / 100.360 = 684DM$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم : یوې ښځی په ۱۵ . ۳ . ۱۹۸۷ باندې ۷۹۰ مارکه په بانکي سپما کتابچه کیښوول، او دا پیسی یی بیرته په ۲۰ . ۲ . ۱۹۸۸ له بانك څخه راواخستلی. دې بډایي یا سرمایي څومره ګټه وکړه:

- $p = Z.100.360 / K.t = 30.100.360 / 790.335 = 4{,}0809 \Rightarrow p \sim 4{,}08\%$

دریم : په څومره وخت کی کیدی شي، چی ۱۰۰۰ مارکونه د ساده ګټې په بنسټ ۲۰۰۰ مارکونو ته جګه شي، که بډایي په 4 , 5% ګټه سپما شوې وي؟

- $t = Z.100.360 / K.p = 1000.100.360 / 1000.4{,}5 = 8000$

ورځي ۸۰۰۰ = ۲۲ کاله او ۸۰ ورځی

څلورم : یو بډایی ، چی لاتري یی ختلی په ساده ګټونه ، چی ۷ ،۶ په سلو کی ده له بانك څخه د میاشتی ۲۰۰۰ مارکونه ګټه اخلي.

دا د لاترې ختنه به څومره جګه وي؟

موږ دا د ګټې فرمول د بډایی په لور اړوو یابدلوو:

- $K = Z.100.360 / p.t = 2000.100.360 / 6{,}7\ .30 = 358208{,}95DM$

لکه چی پوهیږو، بانکونوپرکسیس یا کار کی د ګټی ګټونه معمول ده، او له دې زیات نه. د ګټی ګټه کلنی شمیرل کیږي او بډایي ته ورزیاتیږي.

یو پیلبډایي K_0 ، د یوه کال په اوږدوالی کی د یوې ګټی ټاکه یامقدار $p\%$ سره په ګټه اچول کیږي، د کال په اخر کی د یوې ګټی

$$K_1 = K_0 + K_0\ (p / 100) = K_0\ (1 + p / 100) \quad \bullet\bullet\bullet$$

سره په سپماکتابچه کی لیکل شوې ده.

دلته $K_0.p / 100$ د یوه کال را اچولی ګټه ده، د یو کال په پیلبډایي K_0 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټول دوه کاله وروسته دا پیلبډایي د همغی پنبیګټی یا ګټی پیل سره داسی لویه شوې

$$K_2 = (K_0 + K_0 . P / 100) + (K_0 + K_0 . P/100).(P/100)$$
$$= K_0 + K_0.P/100 + (K_0.P/100)(P/100)$$

که K_0 له نوکانو یا غیږ دباندې ونیول شي نو لاس ته راځي:

$$K_2=K_0(1+2.P/ 100 + P^2 / 100) = K_0(1+ P/100)^2 = K_1(1+ P/100)$$

له درې کاله وروسته دا بډایي یا سرمایه ده:

$$K_3=K_0(1 + P/100)^3 \qquad K_3=K_2(1 + P/100)$$

که دا شمیرنه په ورته توګه دوام پیداکړي، نو د t کالو وروسته په ټولیزه توګه لاندې بډایي لاس ته تري راځی

$$K_t = K_0 . (1 + P/100)^t = K_{t-1} . (1 + P/100)$$

د (1 + p/100) لپاره غواړود لنډونی له امله q ولیکو، q ګټی فاکتوریا ګټی ځلونی بلل کیږي:

$$q = 1 + p / 100$$

ددې ساده ونی سره لاس ته راځي: د ګټی ګټی فرمول: یوه بډایي K_0 د t کالو وروسته د p% کلنی ګټي باندې(د ګټی جګیدنه) په $K_t = K_0 (1 + p / 100) = K_0.q^t$ لویه شوې

بیلګه : له درینیمو کلو وروسته په ۴،۵ ٪ ګټه ۳۵۰۰ مارکونه په کوم ارزښت لوییږي؟

$K_{3,5} = K_0. q^t = 3500.1,045^{3,5} = 4082,96$ DM مارکونه

د ګټیګټی شمیرنی سره بډایي $K_0 , K_1 , K_2 , K_3 , ..., K_t$ یوه هندسی پرلپسی جوړوي(ددې لپاره دې ځما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي) دا د پیلبډایي K او ځلوونې $q = 1 + p / 100$ سره ، ګرافیکی که وکتل شي، نو د ګټی لوییدنی فنکشن $K_t = K_0 . q^t$ یو اکسپوننشل بلواك انځوروي. د تعریفډیري $D = Q$ سره.

ساده ګټه اچونی بیا یو لایني فنکشن $K_t = = K_0 (1 + p.t / 100) ; t C Q$ په نخښه کوي.له دې امله بډایي په ساده ګټه اچونه دومره چټکه نه لوییږي، لکه چی په یوه دګټی ګټی اچونی باندې.

بیلګی: ۱ – یو د ۴۷۰۰ افغانیو مقدار یا ارزښت دې د پنځه کلونو لپاره په ساده ګټه اچونه او ب) په د ګټی ګټی اچونی چی ۵۷، ۴ ٪ دی ایښوول کیږي. دا هر پایبډایي څومره لویه ده؟

a) $K_5=K_0(1 + P.t/100) = 4700(1+ 4,75 . 5/ 100) = 5816,25$ Af

$K_5= K_0 + 1116,25 = 5816,25$ Af

b) $K_5 = k_0. q^t = 4700 . 1,0475^5 = 5927,45$ Af

۲ – یوه بډایي د ۵۰۰۰۰ افغانیو په ۳.۵.۹۷ واچول شوه او باید په ۳۱.۱۲.۲۰۰۱ راووستل شي. څومره په ۴.۵ ٪ ګټه باندې لوي شوی دی، که پوره کلونه (له۱۲.۳۱–۱.۱) په ګټه واچول شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$K = [K_0 + K_0.p.t / 100.360].(1 + p/100)^n$
$= [\ 50000 + 50000.4{,}5.237 / 36000].1{,}045^4$
$K = 61392.35$ Af

د لویو t , q , K_0 او K_t په ګټه فاکتور کی افاده کیدو لپاره رامنځ ته کیږي. د ګټې اخستنی وروسته کیدی شي د سرچینیزې بڼايي K_0 پوښتنه رامنځ ته شي، چې د t کلونو په p % ګټونه یا ګټه و بڼایي K_t ته بيايي. K_0 د K_t د بڼايي د اوس وخت یا حال یا نغد ارزښت بلل کیږي. د K_0 شمیرنه په ورکړشوې بڼايي K_t ته چې بیاي دیسکونتونه Diskuntierung یا ګټوني بلل کیږي:

تعریف: د نغدارزښت فرمول $K_0 = \frac{K_t}{(1+\frac{p}{100})^t} = \frac{K_t}{q^t} = K_t.(\frac{1}{q})^t$

دلته $(1/q)$ د ګټوني فاکتور بلل کیږي. د نغدارزښت فرمول له $K_t = K_0.q^t$ اړیکو څخه لاس ته راغلی ، چې د K_0 په لور اوبی یا حل شوي.

بیلګې:

۱ – یو نیکه غواړې د خپل لمسی د پنځمی زیږیدنی له امله یو څه ئیسی بانك کی سپما کړي، د ۵٪ په ګټه . دا پیصي بهه څومره یا دا مقدار به څومره لوي، چې دا لمسی په خپله ۲۵ کالیزه ۲۰۰۰۰ مارکونهلاس ته راوړي؟ باید په بانك یکی ۲۳ ، ۹۶۱۲ مارکونه کیښوول شي یا سپما شي..

۲ –د یوه کور خرڅلاو کی دوه اخستونکی مختلف اوفرت یا وړاندیزونه کوي « علاقمند الف ۱۵۰۰۰۰ مارکونه نغد ، ۱۲۰۰۰۰ مارکونه له دوه کاله وروسته او نور ۱۵۰۰۰۰ مارکونه د ټولیزه توګه له شپږ کاله وروسته ادا کړي یعني د کور مالك ته ورکړي.
علاقمند ب غواړي، چې ۱۳۰۰۰۰ مارکونه نغد ، ۱۵۰۰۰۰ مارکونه له دري کالو وروسته او ۱۴۰۰۰۰ مارکونه له نورو دوه کالو وروسته ورکړي.
کوم یو علاقمند ګټور دی، که موږ ٪۸ ګټهٔ ونیولي شو یا فرض کړای شو؟
دا چې دواړه ارزښتونه یا وړاندیزونه یو له بل سره پرتله کړاي شو، نو باید دواړه نغد ارزښت ته راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه:

یوه د ۸۰۰۰ مارکونو بډایي ، کومه چې د ګټې په ګټونه ولاړه ده، باید ۶٪ کلنی ګټې د څلورو کالو لپاره په بانګ کی پاتي شي یا کیښوول شي. بډایي به څومره لویه وي په الف) کلني ، ب) نیمکلنی، خ) میاشتنی، او ت) په ورځنی ګټونه؟

تمرینونه:

۱ – یو جوړ کالي په ارزښت یا نیه کی ۵ ،۴ ٪ کمشو» د دې کالیو لومړنیی نیه ۲۵۰ ماکرونه وه . اوس دا کالي کومه نیه لري؟

۲ – یو پطلون په ۵ ، ۴ ٪ ارزان شو، دا پطلون او س ۲۵۰ مارکونه ارزښت لري. دې پطلون پخوا کومه بیه درلوده؟

۳ – د یوه جاکټ بیه په ۷۰ مارکونوه راکمیږي، دې پخوا ۲۵۰ مارکونه بیه لروده، اوس دا څومره بیه لري یا حومره قمته ده؟

۴ – یو جوړ دریشی په ۹۸ مارکونوګرانیږي او اوس ۴۵۰ مارکونه بیه لري. د ا ګرانښت په سلو کی څومره دی؟

۵ – رابات یو د بیي راکومن دی، چی اخستونکی ته د ځانګړو شرایطو لاندې ورکول کیږي. سکونتو یو بیه کمون دی، چې اخستونکی ته د نغدو پیسو ورکولو له امله ورکول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) یو د ۵۷ ، ۸۵۰ مارکونو شمیر، یعنی په کاغذ لیکل شوې بیه په ګوته شوې: د لسو ورځو ترمنځ نغد اداکولو په حالت کی ۳٪ سکونتو.
دلته څومره پیسی ورکول کیږي؟

ب) یو اخستونکی د خپل نوي لاس ته راوړي بایسکل کی ۲۰ ٪ رابات لاس ته راوړي، او دا چی هغه پیسی ندې ورکوي، بر سیرهٔ پردې ۲ ٪ سکونتو هم ورکول کیږي. دا باسکل او س دی د دې لپاره بایسکل لپاره ۱۵۶ مارکونه ادا کوي.
دې بایسکل د سکونتو او ربات د مخه څومره بیه لروده؟

۶ – په یوه نغدپیسوبیه ۱۴ ٪ کی د مالیي ورزیاتیږي او ۳ ٪ ربات ورکول کږي.
که پخپله ځان ته شمیر لیلی لیکی شی ، ته به مالیه لومړی ورزیاته کړې او که لمړی به ربات له شمیر کم کړې؟
دا نغده ارزښت به څومره جګ شي، که لومړی مالیه ورزیاته شي او بیا ربات ترې کم شي؟

۷ – اباسین خپ کور دننه په ۱۱۰۰۰۰ ماروکونو بیمه کړی. دی ددې بیمی پوره کوونو لپاره کلنی ۵ ،۱ په زرو ګټه باید نیمی ته ادا کړي. دا څومره ده؟

۸ – یوه ګازره په منځنی توګه 0,5‰ ویټامین A لري. څو ګرامه ګازرې به ۱۵ ملي ګرامه ویټامین A ولري؟

۹ – په یوه موټربیولو کنترول کی د یوه موټرځغلونکی څخه د ازماینی لپاره وینه اخستل کیږي. معاینه دا نتیجه ورکوي، چی موټرځغلوونکی 1,7‰ الکول په وینه کی لري. دابه څو مترمکعبه الکول وي، که ونیسو، چی د وینی ډکی ۷ لیتره وي؟

۱۰ – د ارزښتکاغذ (دا په بانك کی څه کاغذونه دې، چي خلك يی اخلی، په کلنی ټاکلی ګټی سره) یو پیسی اینبوونکی ددضیویدند Dividende (کلنی ګټهٔ ده) ۲۷۰ مارکونه اخلي. څموره پیسیبه هغه اینبودلي وي، که یوه بډایي په ۵ ، ۷ ٪ ګټهٔ اینبوول شوې وي ؟

۱۱ – اباسین په یوه بانکی حساب کی ۷۰۰۰ مارکونه اچوي. له کوم وخت وروسته په ساده ۴ ٪ کی ګټونه، دی ۸۰۰ مارکونه لاس ته راوړي؟

۱۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پېښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کي شمیرنه، د کټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

(c) ketabton.com: The Digital Library

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو يې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزۍ پښتو او عربي + درۍ ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۵ ــ د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ ــ د افغانستان په هکله سپیني خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

ــ د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پوري ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان په اولني نوم میرې شینواری د اروابښادې پښتو او اروابښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکي میني د لومړني ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګي پیل او د دویم ټولګي څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي ځانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې ځانګه او اباسین نومیږي. ځانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library