ئەندازە (هندسه)

Geometry

لێکۆڵینی:

دکتۆر ماخان (میری) شینوانی

2012

Ketabton.com

جرمني د بن ښار

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمککچپوهنه (هندسه)

لیکونکی:
ډاکتر ماخان (میرزي) شینواری

ناچاپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

ځمککچپوهنه(بنسټیزه هندسه)

هندسي بنسټیزې کلیمې

ټکی ، کرښه ، هواره(سطحه) ۱
نیمه – یا نیمهواره ۷

کونجکلیمه ۱۱

څرخونپروسه: څرخونکنج : ۱۴

ګراد ۱۵

کونج کلمه ۱۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمککچپوهنه(بنسټیزه هندسه)

هندسي بنسټیزې کلیمی

ټکی ، کرښه ، هواره(سطحه)

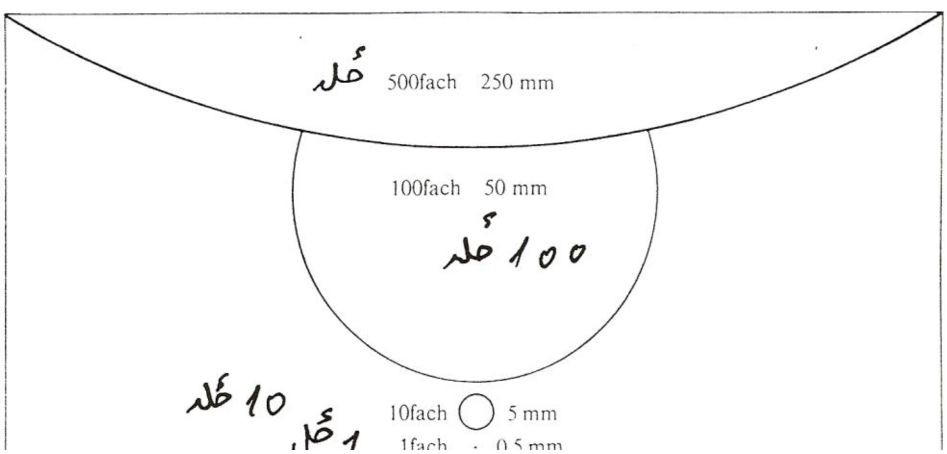
پیژند(تعریف): اویکلید(Euklid) اویکلید وايي، چي ټکی هغه دی چی نور نه شي کوچنی کیدی. ددې پیژند ستونځی په دې کې دي، چی بیا نو د داسی واړه شي ځخه ځنګه کرښه، او هواره جوړیدلی شي. یعنی که ټکی د هندسی اتم (لاتین Atom نه ویشونکی) وي بیا نو ځنګه کیدی شي چی پراخه شي یا وغزیږي؟ یا یی که مایکروسکوپ له لارې لوي کړو، نو پوره ستره هواره نیوی شي په عمل کی د کښلو (رسم ویستلو) له لارې ګورو چی ټکی څرګند غزیدلی یا پراخیدلی شي، لکه څنګه چی لوییدل یعنی غټیدلی شي:
په لاندې کې ګورو، چې ټکی د همدې شمیروني له لارې څومره غټیدلی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : هندسه ځمککچ ته وايي، نو که هندسه ځمککچ پوهنه وبلل شي، د لمړنیو پوهیدلو لپاره به هم سملاسي اسانه وي .همدا اوس هم، له دې امله چي په هندسه کی ډیرځه لیدلکیدی شي او د رانیولو وړ دي).

لنډ: شیان یا لیدیدونکي»رانیولوړ «(یا شي ډوله څرګندیږي، همدومره ستونځی لیدل کیږي، چي نومونه اړوند (تړلی) کره وټاکلی شو، اوهمداسی یي دا اړونده کره ټاکنه روښانه یا فکروړ کړی شو، که څه هم په لومړي وار سره، چی ګوندې دا شکلونه لیدوړ او نیولوړ دي، ساده ښکاري، مګر په خپل دننه کی (خپله ختِه کی) خورا پیچلي دي چي یواځی ور نږدې پیژند(تعریف) یی کیدلی شي او په لاندې کی به راته روښانه شي:

-موږ په لاندې ځیره کی د ټکی غټیدل یا لوییدل ښایو



ګورو چی ټکی هوارې او کرښی ته پراخیدلی شي یعني عملي ځیره ښوونه یا شکل نخښوونه یی د ستونځو سره مل ده، خو سره ددې هم ځنی تیوریکي کره (ټیك) ښوونه یي ضرور ده ، یا نه پرېښودونکی ده. دا پرابلم په مقایسوي- یا د پرتلي په توګه- ساده له منځه وړل کیدی شي: په لاندې کی د تشریح شوو شیانو یا لیدیدونکی لاندې د هغو تیوریتیکی ادیاله(خیالي)ځیره پوهیږو او نه د هغه عملي ریښتینوالی یا ریالیزه کوونه٠ د دې لپاره، چی ځانونه دې له دې ستونځو راوباسلی شو، دا مو د هندسی د ډیری کنځیت ته لارښودوي. د پورته شکلونوسره سره، د هندسي جوړختونو (ځیرو) لاندې ، د ټکو ډیری پوهیږو. یعنی هندسي جوړښتونه بل څه نه دي، بی د ټکو له ډیری٠ داسی تعریفوو:

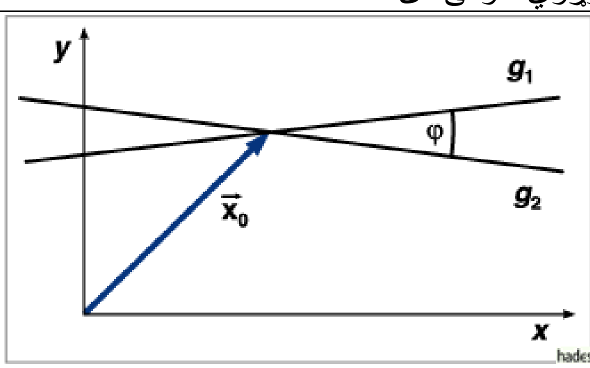
لنډ: ټکی او کرښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند(تعریف) :
یوه هواره یا سطحه د یوې ډیرئ په څیر کلکه نیسو، چی توکی یی ټکی بللکیږي. او په غټو لاتین تورو یی ښایو لکه .....A,B,C,P,Q، په هواره کی یوه برخډیری په نخښه شوې ده، چی توکي يي کرښی بلل کیږي او په کوچنیو لاتیني تورو..... a , b , c , سره ښوول کیږي
یا په بل ډول :یوه هواره E د ناپای ټکو ډیرئ ده. د هوارې هره برخه (چی پخپله پای یا ناپای کیدی شي) د هوارې یا سطحې څیره (فیګور یا شکل) بلل کیږي.

د کښلو(رسمولو، انځورولو هوارې غزول)لکه د بیلګي په توګه د کاغذ دمخ (تخنیکي بندیزونه لري (محدود دي). د هندسي هدفمندئ لپاره باید بیا دا کاغذ هرې لور ته ناپای غزیدل شوی وي او پنډوالی یی صفر ته را کښته شوی وي، ځکه چی یوه هواره دوه دیمینزیونال ده) دوه اړخیز یا دلته ښه دئ چی د اړخ په ځاي خوا وو ایو، ځکه چی اړخ مو د n-ګوډېو لپاره کارولی دئ. د لته یی د خواوو څخه سور او اوږدوالی عبارت دئ . (په دي کتاب کی او بیا دې موضوع کی له وړو څرګندونو تیرېږو او هغه څه چی خورا مهم دي هغه دلته راوړو)۰

لنډ : ټکی هغه کوچنی څه دئ، چي هواره او کرښه ترې جوړیدی شي او له دې امله ټکی دهوارې یا سطحې، چې د ټکوډیرئ جوړوي، توکی دئ۰



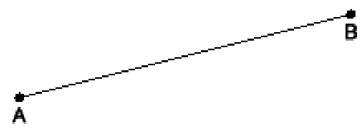
ټکی د دوه کرخو غوڅي له لارې انځوریدی شي ۰ که دوه کرښي g او h پهP کي غوڅي کړي، نو د دې لپاره داسي لیکو:

h = { P □ g}

یا لاندې انځورونه
په لاندې ځیره کي g_1 او g_2
په یوه ټکي کي سره غوڅوي

پیژند :
ټوټه کرښه (پای کرښه یا بنده کرښه) ABد ټولو ټکو هغه ډیرئ ده، چی له ټکيAو B ته د هوارې یا سطحې په دننه کی لنډ واټن یا - فاصله وهي، یعني که دا دواړه ټکي یو بل په لنډ واټن کی د هوارې په دننه کی سره وتړي، چی د غاړې ټکي A او B هم په دې پورې اړه لري. یعني ټکی A او B هم په دې کرښه پراته دي۰داسي لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

A € AB; B € AB يا هغه کرښه، چې دوه ټکی په لنډ واټن کې سره وتړي بندکرښه بلل کيږي، ټکي د کرښې توکي دي	

که بند کرښه د «ځيرکرښې» په څير ونيسو او يا د کاغذ پرمخ کرښی (ختکش) کيږدو نو دا کرښه دواړو لورو ته غزيدلی شي، چې موږ دا کرښه بولو٠

کرښه د ځمککچپوهنې بنسټيزه کليمه ده٠ ليدوږ د اويکليد جيومتري کې دا يوه ناپای غزيدلی کرښی ته وايې، چې ناپای نرۍ وي، د لاندې خويونو سره:
که په يوه کرښه دوه يو له بل بيل ټکي پراته وي، نو د دوي ترمنځ ټوټه کرښه يو لنډ واټن په نخښه کوي، چې موږ ورته ټوټه کرښه يا بند کرښه وايو٠

دا کليمه ټيک زموږ پيژند نه راکوي٠ اوس هندسه په اکسيومونو ودانه ده، چې کرښه او ټکی داسې ورکړ شوي، چې مخ د مخه يې پيژند څرګند ورکړ شوی او نيول شوی يانې موږ يې پيژنو ٠

پيژند يا تعريف :

د بندکرښی (پای AB)- دواړو لورو ناپای غزولوته کرښه (ناپانکرښه) AB يا g ويل کيږي. بندکرښه نو بيا د (ناپاي -) کرښي اصلي برخډيری ده٠

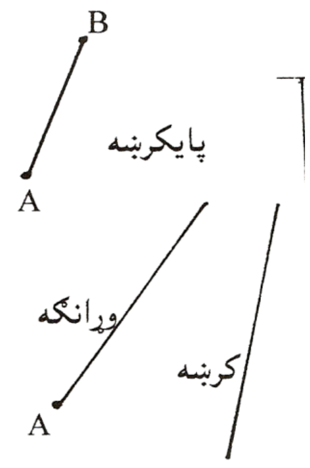
په نخښونه يې g (برخډېری) AB

طبعآ کيدی شي، چی کرښه په يوه لور وغزول شي

پيژند :

که بندکرښه يواځي په يوه لور ناپای وغزول شي،(نا پای) نيمکرښهشي (ناپاي) نيمکرښه يا وړانګه(شعاع) بلل کيږي. نيمکرښه يا وړانګه يوې لورته بنده او بلی لور ته ناپای غزول کيدی شي، يعني پيل لري مګر پای نه لري .

(c) ketabton.com: The Digital Library

 	لنډ: د بندکرښی دواړه لورې بندې ، د نیم کرښي یوه لور بنده او بله وازه او دکرښي دواړه لورې وازي دي. په پورته ځیرو کي د بند کرښی، وړانګي او کرښی توپیر ځرګند دی٠ نیمکرښه د کرښی برخډیری دی

که په یوه هواره کی په یوه کرښه g ټکیPکیښوول شي، نو وایو چیPدgاینځیدیر (inzidiert) کیږي یاټکیPپه کرښهgپروت دی یاgلهPتیریږي اوgد هوارېEسره اینځیدیرت کیږي، په دې حالت کی د اینځیدینځ اړیکو(inzidenzrelationen) یا »پروتوالی اړیکو«ځخه غږیږو٠
که په همغه کرښه له دوه ټکو (په همغه هواره له درې ټکو زیات) زیات ټکي پراته وي، نو دې ته سرې کولینیار(kollinear() کومپلانار(چي په همغه هواره یا ستځه کي شته وي(komplanar) وایي .که یو ټکی P په دوه (زیاتو) کرښو g اوhپروت وي نو دا د gاوh غوځټکی بلل کیږي اوداسی یې لیکو:

$$h= \{ P \cap g\}$$

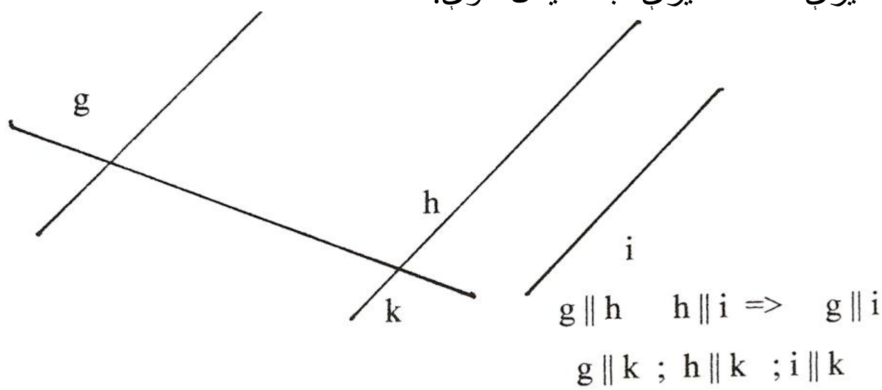
د پام وړ : ټکی د ډیری نوك کی{ } لیکل کیږي(یا د ډیری غیږ کی نیول کیږي)، ځکه چی ناپاںکرښي g او hد ټکو ډیری دي او ټکی P د غوځډیری توکی دی .
که چیرې ډیرې ناپایکرښی په یوه ټکي کی سره غوځی کړي نوکوپونکتال (kopunktal) بلل کیږي، کوپونکتالی ناپای کرښی د ناپاںکرښو غونچه (Büschel)یا بهتره ستوری جوړوي٠

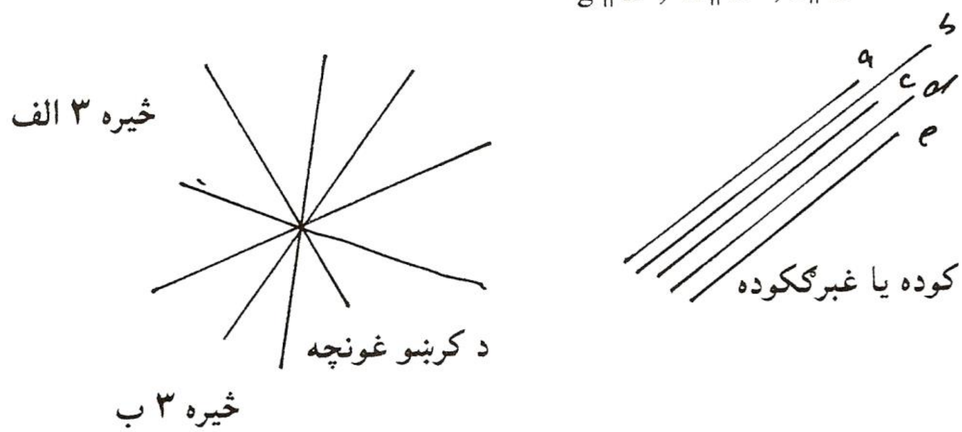
د کرښو کوده(ځیرې ټولې لاندې کښل شوي دي)

پیژند(تعریف) : کرښي g او h بي له ګډو ټکو یابهتره : بی له غوځټکو غبرګکرښی (موازیکرښی) بللکیږي، لیکدود(مطلب د شمیرپوهنی لیکدود) یې د ی g||h

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښی د ناپای ډیرو غوڅټکو سره کټمټ یا (ایدنتیك identisch) بلل کیږي یا مساوي کیږي. دا په دې مانا چی یو په بل پرتی دي. یو بل ته کټمټ کرښی سره غبرګی دی٠
ددې لپاره لیکو: g = h
ناغبرګی کرښی g او h په نخښونه کی داسی په نخښه کیږي: g|/|h (دا دې منل شي، چې دا د ناغبرګ کرښو لیکډول دی یا لیکدود)٠
د لاندې ځیرې شننه د ځیرې کښته لیکل شوې:





هندسی ځیره : یوه هندسي ځیره یوه ناتش ټکیډیرۍ ده.
هغه لاین (یوخوایز یا یو دیمنزیونال (لاتین: په ټولیزه توګه مانا یی: هرې لور ته پراخیدنه، یوې لورته پراخېدونی(1Dimensional) بلل کیږي، که هغه په یوه کرښه پروت وي او ټکی نه وي .
پیژند(تعریف):هغه هندسي ځیره »هواره (Fläche) بلل کیږي، که هغه په یوه هواره هوره (Ebene) پرته وي، مګر نه په یوه ټکي پرته وي ٠ هواره یا سطحه دوه پراخیدونې یا –دیمنزیونال(2 Dimensional)ده٠

په پورته کې د کرښو کوده یا د کرښو ډله سره غبرګې هم دي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته $A < B$ په دې مانا ده چي « A په يوه کربنه g د B تر مخ يعني ځموږ په بلد دود، کيڼ لور ته پرته ده» دا په دې مانا چي په کربنه g ځغاسته باندې لمړی د A ټکی او بيا په ترتيب د B او C ټکو ته راځو. په دې توګه د منځ اړيکی له لارې لوريزې کربنی ته راځو. دا په دې مانا چي داسی کربنی لوريزې کربنی دي. يعني په هغه پخوانی ډول سمت يا لور يی ځرګند دی.

منځ اړيکی $Wz(ABC)$ دا مانا لري چی يا $A<B<C$ او يا $A>B>C$. دا په دې مانا، چي هره کربنه په دوه ډوله لوريزه کيدی شي يعنی سمت يی ټاکل کيدی شي.

تعريف : g دې يوه لوريزه کربنه وي او A دې د g يو ټکی وي، نو د A بدل يا توپيري ټکی کربنه g په دوه برخه‌يريو ويشي: (دلته کربنه ناپای کربنه ده)

$$\{X : X \in g \text{ او } X < A\}, \qquad \{Y : Y \in g \text{ او } Y > A\}$$

که دواړو برخه‌يريو ته ټکی A ورزيات شي، نو له A څخه په g پيداشوې وړانګي منځ ته راځي . A منځ ټکی او g د دواړو، نسبت و A ته يو بل ته مخامخ يا يو د بل په خټ وړانګو وړونکربنه بلل کيږي.

يوه وړانګه د پيلټکی A او له دې توپير ټکی $P(P \neq A)$ له امله يواځنی (يواځنی شمير پوهنيزه کليمه ده او تل دې ورته پام وي، دا په ځيرونه کی زياته کاروول کيږي. دا په دې مانا ، چی بل نه شته) ټاکلی دی. يعنی په دې ټکو بله له دې وړانګي توپيري يا بدله وړانګه نه شته. دا په AP ښوول کيږي. دې AP ته مخامخ يا په خټ وړانګه په AP ښوول کيږي.

تل باور لري:

$$AP^{+} \cap AP^{-} = \{A\} \quad \text{او} \quad AP^{+} \cup AP^{-} = Zw(AP)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که وکتلی شو چی د پای کرښی یو سر له بل څخه د مخه پروت وي، نو پایکرښه لوریزه ده. که A له B مخ ته یا کیڼ لور ته پرته وي نو کرښه په AB ښایو د کرښي لوریزوالی د یوه غشي په مرسته ښوولی شو یعنی: پایکرښه AB او BA یو بل ته مخامخ یا په بل ډول یو بل ته په څټ پرتی دي.

نیمه هواره یا لنډ: نیمهواره

تعریف : هره کرښه g په هغي کرښه پورې اړه نه لرلو ټکو باندي په دوه وازو نیمهوارو باندې ویشي. دوه ټکی د نیمهوارې یوه لور ته ، ټیك او ټیك هلته پراته دي، چی ددې ټکو ترمنځ د کرښي g کوم ټکی نه وي پروت. g د دواړو هرې یوې هوارې ژیکرښه یا لنډه: ژی یا غاړه ده.
د یوې وازې هوارې او ژی کرښی ټولنه نیمهواره جوړوي. یوې ژیکرښي پورې اړونده دواړه نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په څټ نیمهوارې بلل کیري.

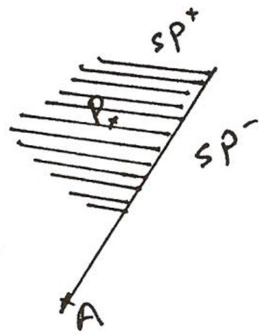
که ټکی A او B له g پیداشوې یا منځ ته راغلی نیمهوارې په یوه لور پراته وي، نو وایو چی A او B د کرښی g په همغه لور پراته دي.

یوه نیمهواره د پیداکرښي او یوه ټکی P له لارې (چې په ژیکرښه g نه وي پروت) یوائځنی ټاکلی ده، یعنې له دې نیمهوارې بدله بله داسی نیمهواره نه شته.

یو ټکیډیری ، چی له یوې وازې نیمهوارې او یوې وړانګې، داسی په نامه هوارجوړوونکی وړانګی ، جوړ وي، جنډه یا بیرغ بلل کیږي. دلته د وازې هوارې ژیکرښه د وړانګي وړونکی کرښه بلل کیږي.

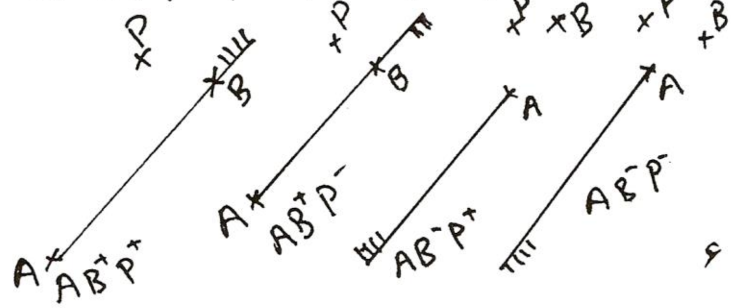
(c) ketabton.com: The Digital Library

وړانګه د جنډې ژیوړانګه ، ددې پیل ټکی د جنډې پیلټکی بلل کیږي. یوه جنډه f د ژیوړانګي s سره او په دې وازه هواره پراته ټکي P سره په sP^+ ښوول کیږي. جنډه د همغې وړونکې وړانګي یا ژیوړانګي s سره ، چې د sP^+ سره مخامخ یا په څټ ده ، د sP^- سره ښایو. (خیره: ۵)



خیره ۵

که په sP^+ همداسی sP^- سومبول، په پورته د وړانګي s لپاره اینبوول شوی سومبول، چې له A و B ته ځي او AB^+ همداسی AB^- بدل کړو یا کیږدو، نو د لاندې سومبولونو $AB^-P^-; AB^-P^+; AB^+P^-; AB^+P^+$ سره کرکترستیك یا ښوول شوې یا ټاکل شوي جنډې ښایي. لاندې خیرې ددې لپاره کاږو:

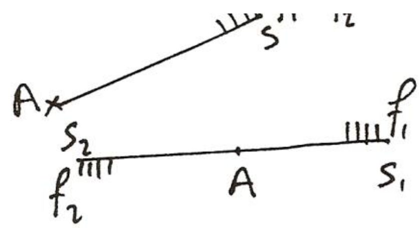


خیره ۶

دلوړ خیرو بیرغونه AB^+P^+ او AB^-P^- یو بل سره مخامخ دي، ځکه چې وړونکی وړانګه او نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په څټ دی(پام دې وي چې مخامخ او په څټ همغه مانا لري یعني همغه یو ډول شمیرنیزې کلیمې دي)،

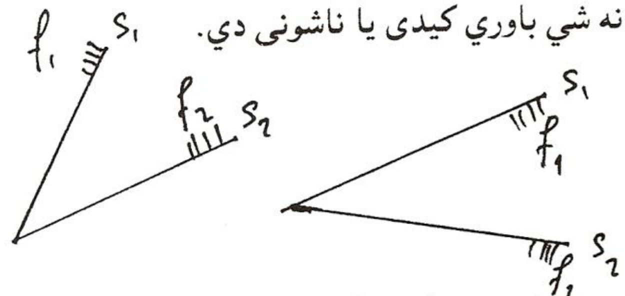
دوه بیرغونه (f_2 , f_1 د همغه پیل ټکي A سره) وپیل ټکي A ته همغه لوریز یا مساویلوریز بلل کیږي، د کولینیارې ژیوړانګو سره، که $f_1 = f_2$ یا f_1 و f_2 ته مخامخ یا په څټ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۷

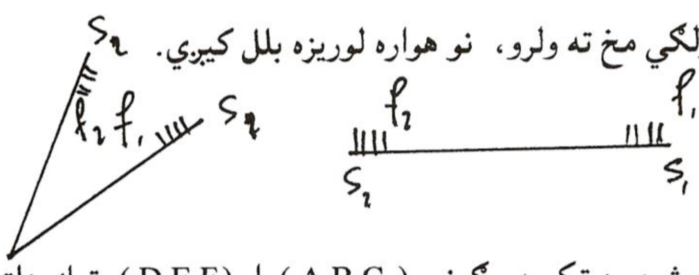
دا دوه بیرغونه یو بل ته مخامخ بلل کیږي د همغه پیلټکي، د ناکولینیارې
ژیوړانګو سره، که د f_1 ژیوړانګه په f_2 یا f_2 ژیوړانګه د f_1 په ژیوړانګه پرته وي
، مګر دواړه امکانات نه شي باوري کیدی یا ناشونی دي.



خیره ۸

د ټولو جنډو ډیریو کی همغه لوریز اړیکی ایکویوالنت یا ورته اړیکی دي. همغه په
دوه ټولګیو د ډیریو ویشنه ممکنوي.
همغه جنډې چی مساوي لوریز نه دي یو بل ته مخامخلوریز یا یو بل ته په ښټلوریز
بلل کیږي. دې ته خو پام شته چی مخامخ یا په ښټ لوریز همغه مانا لري

که دا ډول لوریزټولګي مخ ته ولرو، نو هواره لوریزه بلل کیږي.



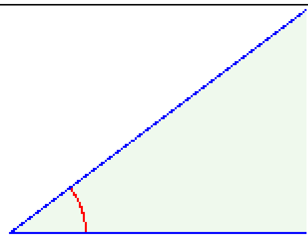
خیره ۹

دوه منظم یا ترتیب شوي د ټکو دریګوني (A,B,C) او (D,E.F) ټیک هلته یا
هلته او هلته همغه څرخونموخه لري(یعنی د څرخونی هدف یی همغه دی)، که

(c) ketabton.com: The Digital Library

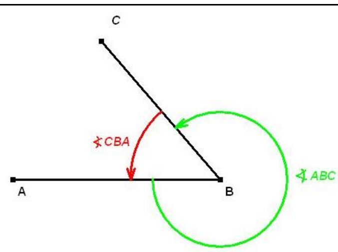
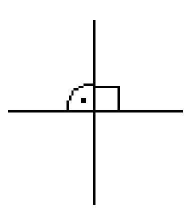
جنډۍ ABC او DEF همغه لوریزې وي. د یوه منظم نه کولینیار یا کولاینې دریګونټېکو (A,B,C) څرخونموخې لاندې د جنډۍ ABC لوریزېولګی پوهیږو.

کونجکلیمه

پیژند (تعریف): په یوه هواره کې، چې دوه وړانګی S 1 او S2 یاني S1/\ S2 د پیل غوښتکی S ولري په هواره یا سطحه E کی کونج β جوړوي .وړانګي د کونج پینی بلل کیږي او پیلټکي S دکونج > ککره (لنډ : کونجککره)بلل کیږي.	

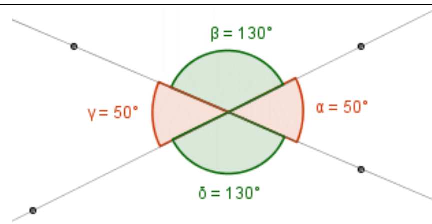
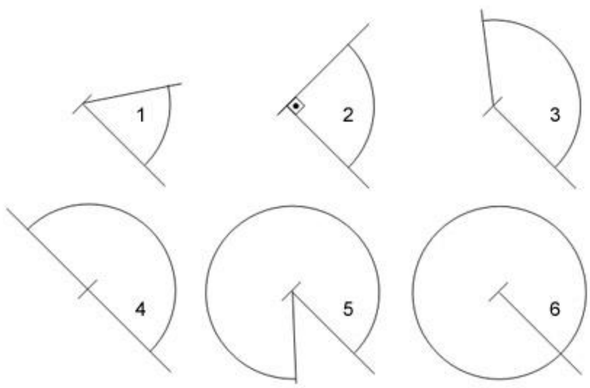
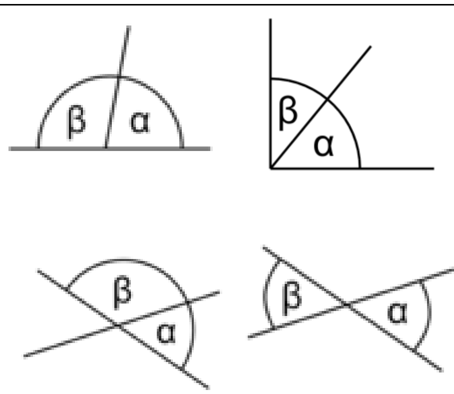
لنډ: دوه کرښې، چې په یوه ټکي کې سره غوځې کړي، کونج جوړوي، چې کرښې د کونج پینې او غوښتکی یې د کونج ککره یا (رآس الزاویه) بلل کږي ۰ پورته څیره دې وکتل شي۰ګونجونه په ګراد (لاتین پل یا لاقدم)کچیږي

د کونجونو رسمونه او نومه ونې

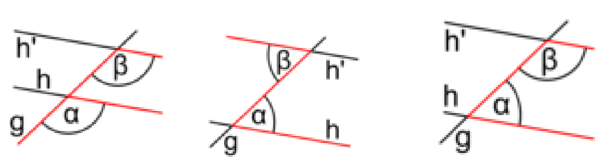
هغه کونج ، چې له ۱۸۰ درجو کوچنی وي هغې ته ننوتی کونج واي او هغه کونج، چې له ۱۸۰ درجو لوي وي هغه ته وتلی کونج واي ننوتی کونج Konvexes Winkel وتلی کونج konkaves Winkel تیره کونج، چې له ۹۰ درجو کوچنی دی، ولاړکونج، چې پوره ۹۰ درجي دی، پخکونج، چې له ۹۰ درجو لوي او له ۱۸۰ درجو کوچنی دی، غزیدلی کونج، چې ۱۸۰ درجي دی ، له پخ زیات- یا د پخ په څټ- یا له پخ اخوا کونج ، چې له ۱۸۰ درجو لوي او له ۳٦۰ درجو کوچنی دی، پوره کونج، چې ۳٦۰ درجی دی۰ دا دې په ګوته وي، چهٔ صفرکونج صفر دی۰	 

یادونه: دا مې ډیر تکرار راوړی، هیله ده، ګران لوستونکي به ورسره ستړي نه شي

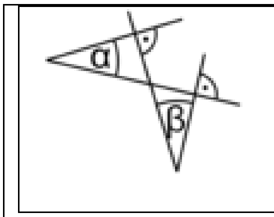
(c) ketabton.com: The Digital Library

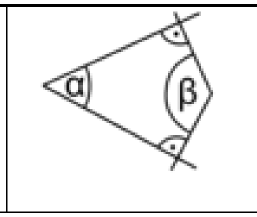
	مخامخ څيره : ککر په ککر کونجونه يورنګيزدي، بدلرنګيز کونجونه ګاونډي بلل کيږي۰
	لاندې کونجونه پخپله ونوموئ‌کړئ ۰
	کمپليمنت يا ۹۰ درجو ته پوره کيدونکي کونجونه(مخامخ څيره دي وکتل شي)۰ په څنګ کې يې سوپليمنت يا ۱۸۰ درجو ته پوره کيدونکی کونجونه ۰مخامخ څيره ۰ مخامخ کونجونه ښی لور ته : ککر په ککره کونجونه۰ کيڼ لور ته : ګاونډي کونجونه

له کيڼ څخه و ښی لور : پوړيز کونجونه ، ردبدلکونجونه



مخامخ کونجونه، چې پښې یې یو په بل ولاړې وي, ۱۸۰ درجو ته یو بل پوره کوي۰ په دې بل حالت کې کونجونه یو بل سره برابر دي۰



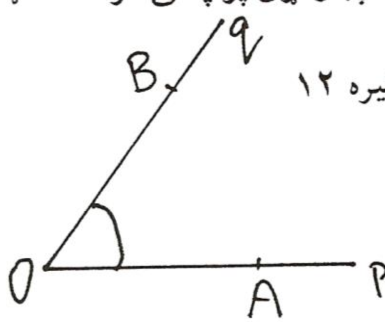


یادونه : ګران لوستونکې به راته بخښنه وکړي، چې د زیاتو کونجونو هغه ورسره بلد نامه سره ښه نه یم بلد، ځکه چۀ په محدب ، مقعر او داسې نورو باندې نه پو هیږم، یواځی له قایم الزاویه څخه پرته۰

یو ګراد Grad لاتین: پل یا قدم

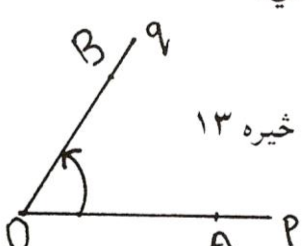
لاندې کونجونه سره توپیر کیږي، چی ایا د پښو لړی پرلپسی کره ټاکلي او ایا د کونج دننه په نخښه شوی دی او که نه.

د کونج دننه په نخښه شوی نه دی: د پښو لړی پرلپسی کره نه ده ټاکلی



خیره ۱۲

بنستیز کونج:
د وړانګو p , q (نامنظمی) جوړې،
د ګډ پیلټکي O سره، د (p,q) ∢
یا (ABC) ∢ په نخښوني
د B ∈ q , A ∈ p سره.
دلته O ککرټکی دی، p او q د کونج پښی دي.



خیره ۱۳

د پښو لړی پرلپسی کره ټاکلی ده:
لوریز بنستیزکونج: د وړانګو p او q
منظمه جوړه د ګډ ټکی O سره د ∢(p,q)
یا AOB ∢ په نخښونی د A ∈ p او B ∈ q سره.

دلته هم لکه د مخه o ککرټکی، p لومړی پښه او q دویمه پښه ده. دا کونج په

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنیزه موخه مثبت لوریز دی

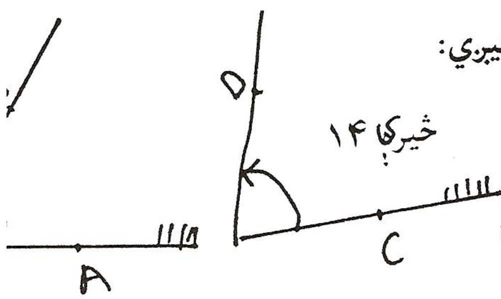
یادونه : هغه د څرخون لور چی د ساعت څرخیو مخامخ یا په بل ډول په څټ ځغلی

مثبتلوریز او هغه چې د ساعتڅرخیو په لور ځغلي مفي لوریز څرخون بلل کیږي.

دوه کو نجونه ټیك هلته او یا هلته او هلته مساویلوریز دي، که د هغو جنډې همغه لوریز یا مساوي لوریزې وي.

لکه په دې څیره کی چی لیدل کیږي:

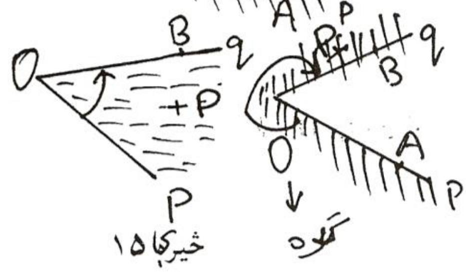
د کونج دننه په نخښبه شوی دی:



د کونجونو لړی پرلپسی یی کره نه ده ټاکل شوې. (بلد یا عادي) کو
بنستیز کونج هواره په دوه برخهېریو M_1 او M_2 ویشي. په نخښبه برخ
بیلګي په توګه په ټکی P کی) د کونج دننه بلل کیږي(د کونجهوار

نخښونه کي : $\measuredangle(p,q;p)$ ، $\measuredangle(AOB;P)$
که دننه یی تش ډیری وي نو
دا کونج صفر کونج دی .

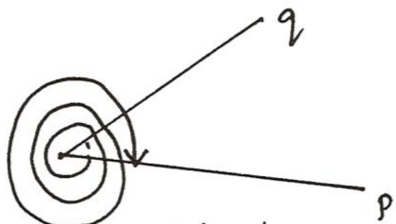
د پینو لړی پرلپسی کره ټاکلی شوې ده
لوریز کونج: په نخښونه $\measuredangle(p,q;p)$
لوریز بنستیز کونج او دننه یی په
نخښونه$p\neq q$، که وي، نو (p,q;p)
او (q,p;p) بدللوریز دي. $(p\neq q)$



(c) ketabton.com: The Digital Library

که دلته هم که د کونجونو دننه تش وي،
نو کونج صفر کونج دی: $\measuredangle(p,q;p)=0°$

څرخونپروسه: څرخونکونج:



خیره ۱۶

لوریز کونج، که د کونج په همغه لور د یوه طبیعی ګڼ یا پیدایښتي ګڼ په اندازه چی یوه پښه یی ځاي په ځاي ده وڅرخول شي، نو د کونج لور کی تغیر نه راځي.

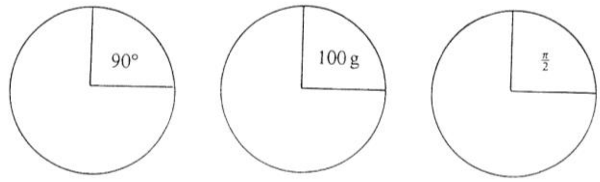
ګراد (لاتاین Grad پل یا قدم)

د کونج لویوالی په مختلفو ډولونو ورکول کیدی شي. د اندازې یوونې (یو یې : یوون) یا واحدونه(یو یې : واحد) لاس ته راځي، چی یو کونج - په یوه ګردۍ کی کښل شوې- په مساوي برخو یا سکتورونو وویشل شي.) سکتور او ګردۍ لپاره دې، د ګردۍ لوست ځاي وکتل شي (و رسره بلد یا مروج یی په 360° مساوي برخو ویشنه ده)
پیژند : 1/360° د یوه پوره کونج 1° (په تورو :یوه درجه. ، لاتین یي gradus = پل قدم) بلل کیږي.
ګراد نور هم په 60° کونجدقیقو ویشل کیږي) 60’ =1° او کونجدقیقه په 60" کونجثانیو(1’= 60’’).

د» ګراد یا درجی« لاندې »زړه درجه«(زوړ ګراد) پوهیدل کیږي. دا د زاړه بابیلوني زاړه شپیتیز سیستم څخه دی. په تریګونومیتري یا کونجکچ کي کونج برسیره پردې په لینده کچ یا - اندازه پاندې هم اندازه کیږي او په ګیودازي (Geodäsie د اندازه کولو تخنیك، - پوهنه یا- علم (په نوي ګراد یا ګون (gon (اندازه کیږي چی دلته ګردۍ په ۴۰۰ برخو ویشل کیږي .دا په جبشمیري کی مودوس"GRAD" « دی .څیرې :

د ګردۍ څلورمی انځورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



شېرڅا ۱۷

لینده کچRAD نوی ګراد GRAD زوړ ګراد DEG

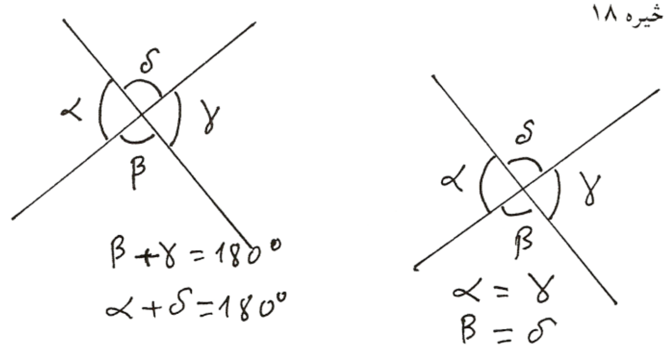
د کونج مثبت- او منفی – یا زیاتون - او کموننخښي د کونججوړونکی یاکونج تولیدیدونکي څرخونلورې څخه لاس ته راځي. کیڼ څرخون (د ساعت د څرخی په څټ څرخیدنه) مثبت- زیاتونمخنخښه مخ ته یعنی کیڼ لور ته لري او ښی څرخون (د ساعت د ځرخولو په لور) منفی – یا کمونمخنخښه مخ ته لري یعني کیڼ لور ته لري. د دوه کونجونو مقایسی یا انډول یا پرتلی لپاره بیا یواځی مطلقه ارزښت مهم دی. مطلقه ارزښت سوچه یا خالص د ځاي ارزښت یا څیفرارزښت دی، بي له مخنخښي. د مطلقه ارزښت همداسی ځاي ارزښت لپاره دې ځما د شمیرپوهنی بنسټیزکتاب وکتل شي۰(په نړیوال جال کې به هم راشي)

بیلګه : $5 = |-5|$, $3 = |3|$دوه کرښی یو د بل سره څلور غوڅکونجونه جوړوي، چی په تولیزه یا عمومي ډول یی جوړه سره مختلفی لوي وي. د بیلګې په توګه که له غوڅکونج غږېږو نو موخه به مو وړوکی کونج وي۰

پیژند :که دوه ناپانکرښی یو بل سره په یو ټکی کي پرېکړي، نو څنګ په څنګ کونجونو ته ګاونډي کونجونه واي، چی دوي یوه پښه ګډه لري او دواړه کونجونه 180° لري (د درجي نخښه کله کله کیڼ لور ته لیکل شوې، خو دا په پوهېدنه کي کومې ستونځې نه رامخ ته کوي) ۰

کونجونه چی ککرې یي سره نښتی یا په بل ډول ککره په ککره وي، هغو ته ککربکونجونه ویل کیږي. ککریکونجونه مساوي لوي دي، دوي یو ګډککریټکی لري او پښی یی یوه یوه په ګډو کرښو پرتی دي .

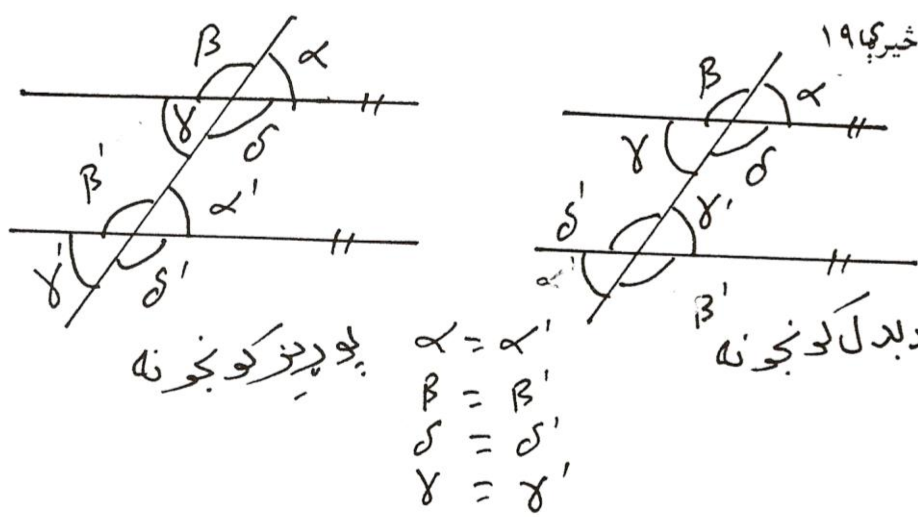
شېره ۱۸



(c) ketabton.com: The Digital Library

خیره‌کونجونه چی ځانونه 180° ته پوره کوي سوپلیمینت (Supplementwinkel) بلل کيږي او کونجونه چی ځانونه 90° درجو ته پوره کوي کومپلیمینتکونجونه (Komplementwinkel)بلل کيږي. دې دواړو کونجونو ته تر یوه نامه لاندې چې راشي پوره کوونکی کونجونه وایي .که دوه غبرگی کرښی g اوh د یوې بلی ناپایکرښي k له خوا غوڅی شي، نو ځلور دننه پریکونجونه منځ ته راځي ۰ دوي د g او h تر منځ، او د k په مختلفو خواوو(او ځلور دباندې پریکونجونه)نه د غبرگکرښو g او hترمنځ، بلکه له دوي دباندې(د k په یوه لور یو دباندنی او یو دننه غوڅ- یا پریکونجونه پوړیزکونجونه بلل کيږي، دوه دننني یا دوه دباندنی غوڅ- یا پریکونجونه چی د k په بیلو لورو پراته وي ردبدلکونجونه بلل کيږي(ځیرې پورته ورکړ شوي دي) ۰

جمله: پوړیز- او رد بدل کونجونه په غوڅغبرگکرښو(غبرگي کرښي، چې له دې کرښي غوڅي شوي دي) کې سره برابر دي



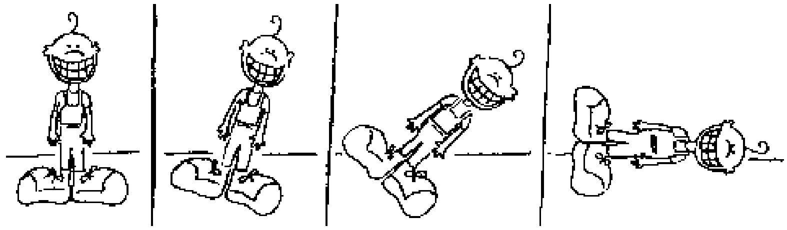
کونج کلمه

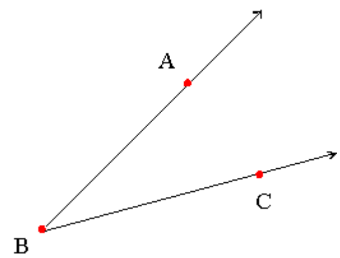
What is an Angleکونج څه شی دی ?

یادونه: لاندې برخه څه تکرار لري، خو بیا بیا راوړنه ښه زده کړه ځان پسي لري۰

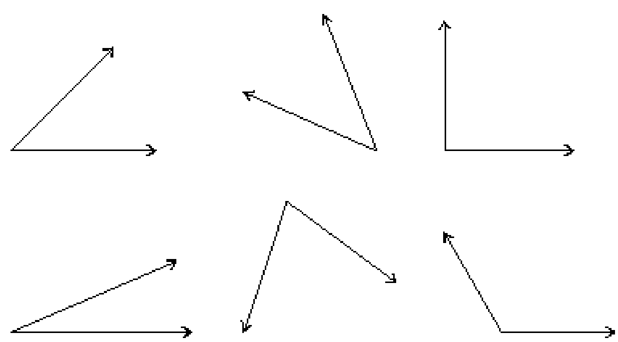
دوه وړانگی، چې یو پای لري او سره غوڅي کړي کونج جوړوي۰ وړانگی د کونج پښي یا اړخونه بلل کېږي او هغه ټکی، چې هلته کرښی غوڅوي ککرټکی يې بولو۰

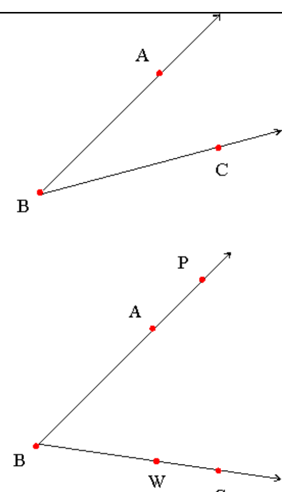
(c) ketabton.com: The Digital Library





Example: دلته د کونجونو ځنې بیلګی راوړو .

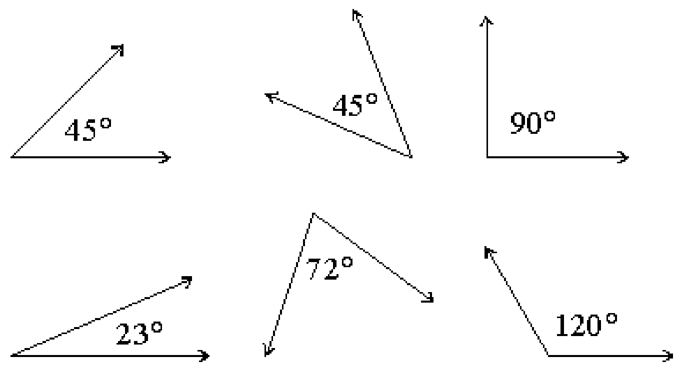


که توري د کونج په خوله کې راشي بنه به وي، خودا هم د لیکني ستونځي دي، چي زه ورسره لاس پهکریوان یم٠ ABC∠ کونجونه داسي بنایو Example: د همغه کونجلپاره بیل بیل نومونه لرودی شو لکه WBA ∠ CBPd∠ ,PBW∠ ,PBC∠ ,	

(c) ketabton.com: The Digital Library

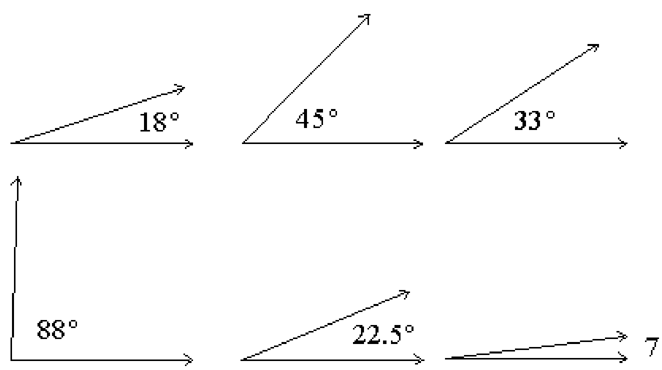
Degrees: د کونج کچوني يوون يا واحد يا يووالی: کونج په درجه کچيري

Example په لاندې کې ځني بيلګي :



تيره کونج ، چې د صفر او ۹۰ درجو ترمنځ وي Angles Acute

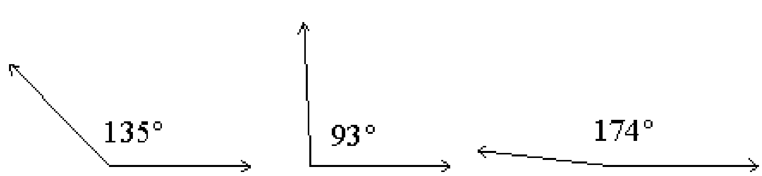
Example لاندې کونجونه تيره دي .



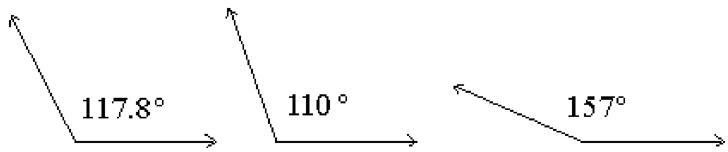
پخ کونجونه Obtuse Angles

پخ کونجونه ، حې د ۹۰ درجو او ۱۸۰ درجو ترمنځ وي پخ کونجونه بلل کيږي.

Example لاندې کونجونه ټولپخ کونجونه دي:



(c) ketabton.com: The Digital Library



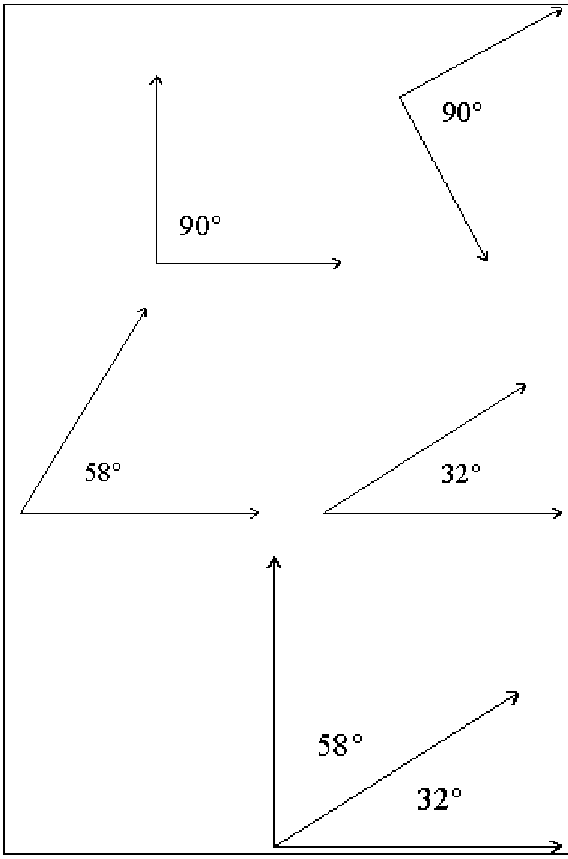
Right Anglesولاړکونج: هغه کونج، چي ۹۰ درجي وي

لاندې دواړه کونجونه ولاړ کونجونه ديExample:

Complementary Anglesکمپليمنت کونجونه: هغه کونجونه، چي يو بل و ۹۰ درجو ته پوره کوي٠کمپليمنټکونجونه بلل کيږي٠ يو کونج د بل کونج کمپليمنت بلل کيږي

بيلګهExample: دا مخامخ دوه کونجونه کمپليمنت کونجونه دي

دوه کونجونه، چي داسي سره يوځاي شي،چي يو ولاړ کونج جوړ کړي،نو دا کونجونه يو له بل سره کمپليمنت دي!

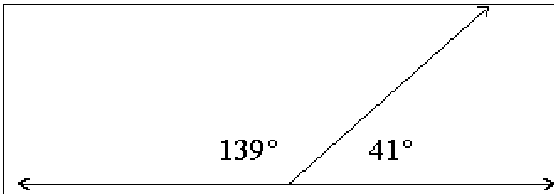
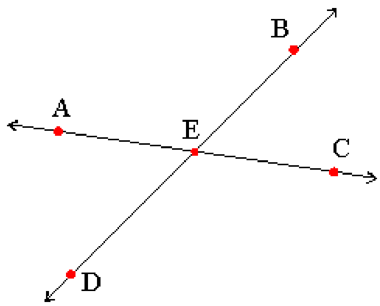
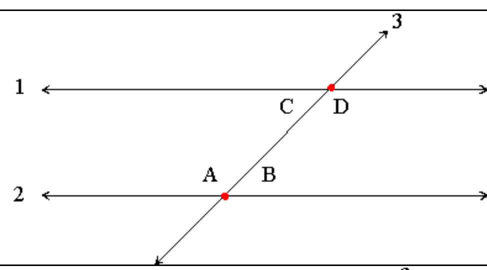
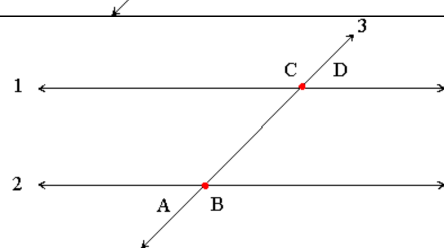


Supplementary Anglesسوپليمنت کونجونه :

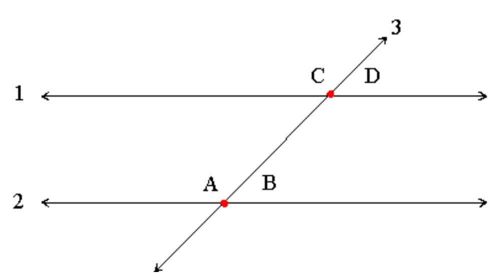
هغه کونجونه، چي ۱۸۰ درجکو ته سره پوره کوي سوپليمنت کونجونه بلل کيږي

بيلګه Example: لاندې دوه کونجونه سوپليمنت دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسي دوه سره ترلي کونجونه، چي ځانونه ۱۸۰ درجو ته پوره کړي سوپليمنت کونجونه جوړوي Vertical Anglesککر په ککر کوجونه: چي دوه کرښي داسي سره غوڅي کړي، لکۀ په لاندي ځيره او کونجونه، همغه ککره ولري ککر په ککره کونجونه بلل کيږي او سره برابر ده , AEB او DEC کونجونه او همداسي BEC او AEDککر په ککره کونجونه دي.	
Alternate Interior Anglesرد بدل دننه کونجونه : په لاندي کي کونجونه Aاو Dهمداسي B او C ردبدل دننني کونجونه او سره برابر دي . A اوB ، C او D ګاونډي کونجوه دي.	
Alternate Exterior Angles ردبدل دباندي کونجونه : په لاندي کي کونجونه B او C ردبدل همداسي A او D بدل - يا ردبدل دباندني کونجونه او سره برابر دي	

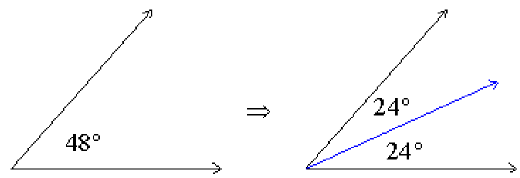
پوريز کونجونه Corresponding Angles دا کونجونه A او C همداسي D او Bپوړيز کونجونه دي او يو له بل سره برابر دي



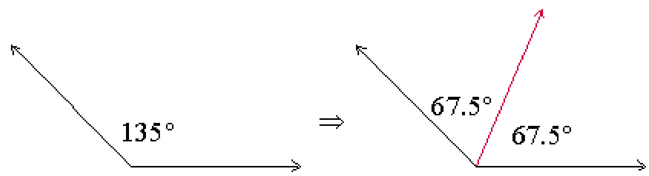
(c) ketabton.com: The Digital Library

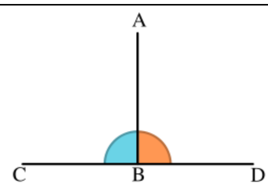
Angle Bisectorکونجنيمى : هغه کرښه، چې کونجونه نيموي کونجنيمى يې بولو

بيلګه Example: د بنې کونج شنه کرښه ، د کيڼ کونج نيمى ده



په بنې کونج کې سره کرښه د کيڼ کونج نيمى ده .



Orthogonal or Perpendicular Lines ولاړې کرښې: هغه کرښې، چې يو په بل نيغې ولاړې وي پرپينډکيولار نوميږي٠(زما وړانديز: نيغې ولاړې کرښې)	

نښلونه:

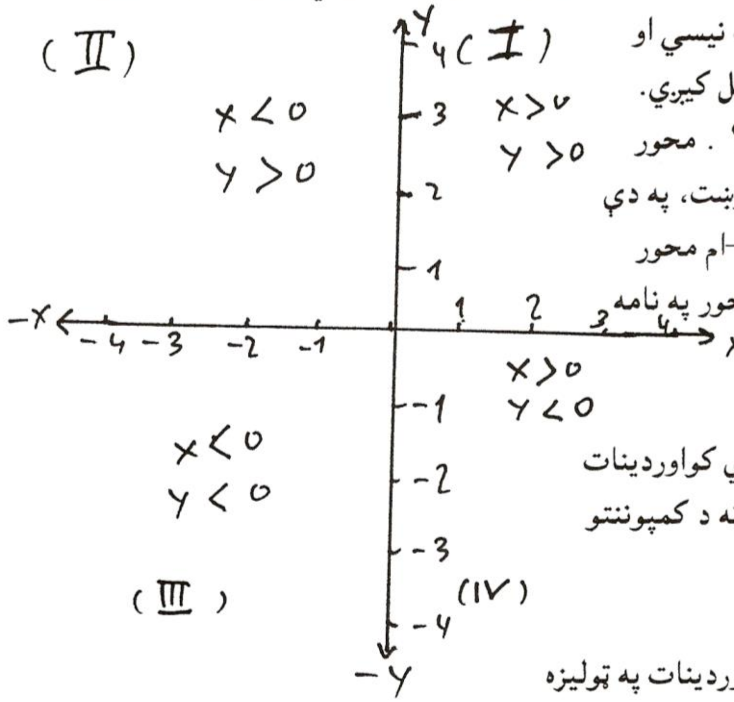
کواوردينات سيستم

يادونه: کواوردينات سيستم ځخه ځموږ موخه پروتولاړسيستم دی. دا په ادبياتو کې په همدسې ياديږي. ما دا دواړه ترمينولوژي کارولي، هيله ده چې ستونځې به پيښې نه کړي.

د شميرپوهنې او همدا ډول د تخنيك په ډيرو څانګو كې د كواوردينات سيستم ډير مهم رول لوبوي. په كارتيزي كواوردينات سيستم كې د هواري هر ټكى P د خپلو دواړو كواوردیناتو(x,y) وركولوسره كره يا ټيك وركړ شوى دى. لمړى كمپوننت يا ابسڅيز (Abszisse) د x –ارزښت يا پروت ارزښت او دوهم كمپوننت يا اوردينات

(c) ketabton.com: The Digital Library

(Ordinate) د y–ارزښت بلل کیږي یا ولاړارزښت. کارتیزي کواوردینات سیستم هواره د دوه یو په بل نیغ ولاړ محورونو (لنډ: ولاړ محورونو) له لارې په څلورو برخوویشي (څلورمی Quadranten) د کوادرانتو نومره بندي یا نمره کول د ساعت څرخیدلو په څټ صورت نیسي او د ښي پورته لور څخه پیل کیږي.

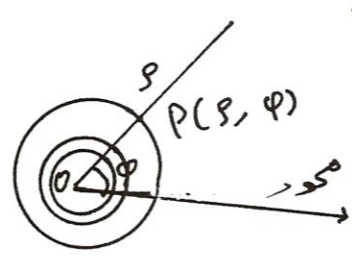


پروتنیغ پروت محور د ۱ . محور یا x–محور یا پروت ارزښت، په دې لوتنیغ ولاړ محور د ۲ –ام محور یا y– محوراو یا ولاړمحور په نامه یادیږي.

څیره ۲۰ : د کارتیزي کواوردینات سیستم څلور کوادرانتونه د کمپوننتو له مخنخښي سره.

د یوه ټکي P(x,y) کواوردینات په ټولیزه توګه اجازه نه لري چې بدل شي، ځکه چې دا کپموننتونه تنظیم شوې یا منظمه جوړه ده. د ځل یا ضرب لمړنی کپموننت د y– محور څخه فاصله ټاکي دوم کپموننت د x– محور څخه. که لمړی کمپوننت منفي وي، نو ټکی د y–محور کینې لور ته

د دریګوډیز ناخپلواکو (تریګونومتریکي مثلاثاتي فنکشنونو) (چې وروسته راغلی) او همدارنګه دپیتاګوراس له بنستېیزی جملی شمیراړونی (څیره ۲۳) کولی شو چې د کارتیزي کواوردینات څخه و پولار کواوردینات ته راشو او سرچپه هم.



څیره ۲۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : د پولارکواوردینات بدلون یا ترانسفورمیشن (Transformation) لاتین : **شکل** اړول یا بدلول) و کارتیزي کواوردینات ته

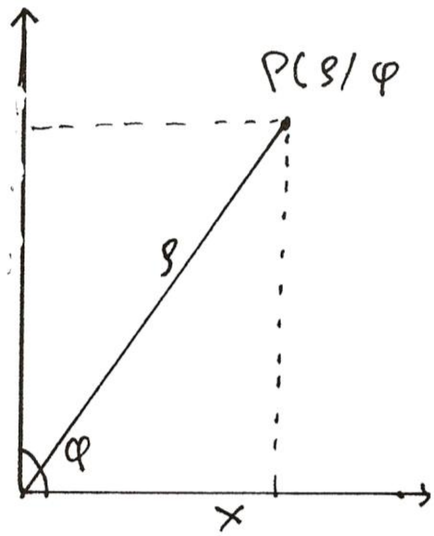
$$x = \rho . \cos \varphi$$
$$y = \rho . \sin \varphi$$

د کارتیزي کواوردینات بدلون یا ترانسفورمیشن و پولارکواوردینات ته

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



ځیره ۲۴

هندسی بنسټیز جوړښتونه:

زه دلته داموضوع اوږده نه څیړم، خو دومره غواړم چي په ګوته کړم، چي تراوسه مو یو څه د هندسی ځنی بنسټیزې کلیمي تشریح کړې او دلته دا غواړم وښایم، چی څنګه ځنی بسټیز شکلونه کښل کیږي، په هغه صورت کی چی له موږ سره ګردونی یا څرخی (څیرکل یا پرکال او که پرکار مو ورته وایه) او کربښی یا خټکش وي یا همداسی کونجکچ د مناسبو ویشنو سره موجود وي. ددې لپاره چی ځنی ستونځی مو له منځه لرې کړي وي باید له دې څیرو یوه لیدید ونکی څیره ولروچی دا د دې څیرو په کښلو یا رسم کولو ممکن کیدی شي. دا د عملي اندازې پرابلومونو حل یا ستنځوبي کي هم مرسته کوي، که د اندازي یوونونه (واحدونه) ونه لرو.

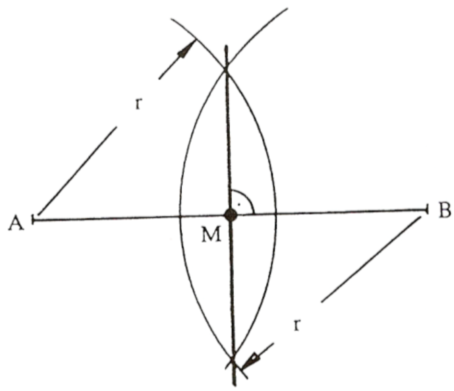
(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ – د AB کرښې نیمول او

۲ – د منځ ولاړکرښې کښل

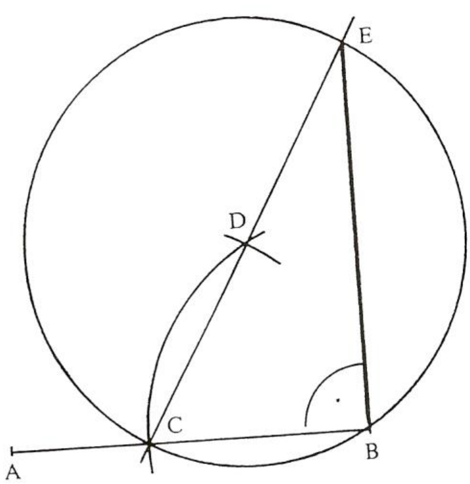
د A او B په هر ټکي یوه ګردۍ د وړانګې $r > (1/2).|AB|$ سره ووهی (سیومتري دوه ګردۍ ځیرې)

د دواړو ټکو تړلکرښه په غوځټکی M کی په کرښه AB منځولاړکرښه ده او دا کرښه په M کی نیموي.



خیره ۲۵

۳ – د یوې کرښې په سرټکي کی د ولاړکرښې جوړول (یا کښل). په B یوه ګردیلینده ووهی د وړانګی $r < |AB|$ سره، چی AB په C کی پرې کړي، وریسي بیا په C یوه ګردیلینده په همغه وړانګه ووهی چی د مخه وهل شوې ګردیلینده په D کی پرې کړي. D د دریمی ګردۍ منځ ټکی دی د وړانګی $r = CD$ سره. چی CD غزولشوې تر ګردۍ په E کی پرې کوي. E نو په B نیغه ولاړه ده. (تالس ګردۍ دې وکتل شي)



خیره ۲۶

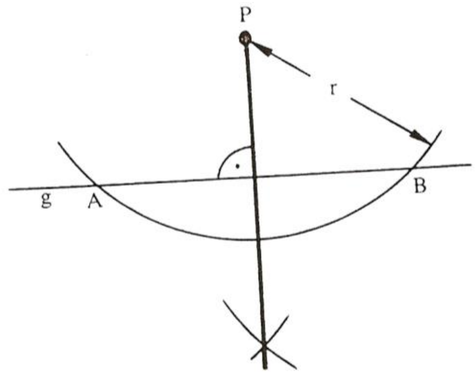
۴ – د ټکي P څخه په کرښه g باندې یوه نیغه ولاړکرښه واچوی ($P \notin g$).

په P کی په وړانګه r یوه ګردۍ ووهی، چی هغه د g له فاصلی(واټن) لوي وي او کرښه g په A او B کی پرې کړي.

اوس نو لکه په (۲) کی الترناتیو:

لکه د (۳) لاندې په کرښې او هندسي دریکوډې.

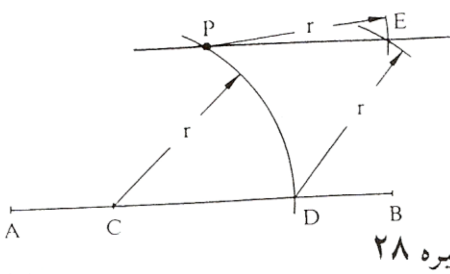
(c) ketabton.com: The Digital Library



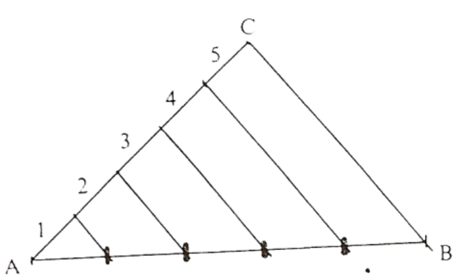
خیره ۲۷

۵ – د AB کرښی سره دټکي P ∉ AB یوه غبرګکرښه جوړول(کښل): د خوښي په یوه ټکي C ∈ AB د وړانګی r = |CP| یوه ګردی ووهی چی کرښه AB په D کی پرې کړي، بیا نو په D او P همغه لینده ووهی چې یو بل سره د E په ټکی کی غو ځوي. دا د PE کرښه د AB کرښی سره غبرګه ده. (دا د روتی نومي څلورګوټي جوړول دي).

الترناتیو : لکه په(۴) کی په ټکي P کی ولاړه کرښه s و AB باندې او بیا همداسی نیغ – یا ولاړکرښه په s د P ټکی کی.



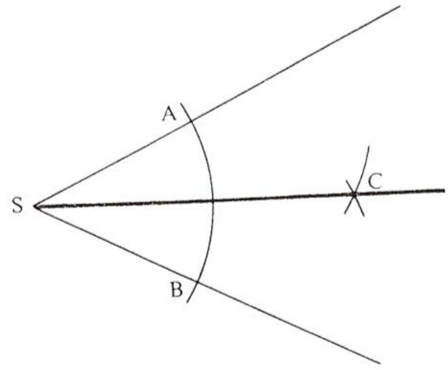
خیره ۲۸



خیره ۲۹

۶ – د یوې کرښی AB ویشل په n مساوي برخو(د بیلګي په توګه ۵) د A ټکی څخه یوه د خوښی وړانګه وغزوی. په دې کرښه بیا n – ځله (دلته ۵ ځله) د خوښي اوږدې کرښی ووهی. اخرنی ټکی C له B سره وتړی او بیا له هر ټکي د BC مرستکرښی سره غبرګی کرښی وکاږی، دا غبرګی کرښی د AB کرښه په (۵) مساوي برخو ویشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

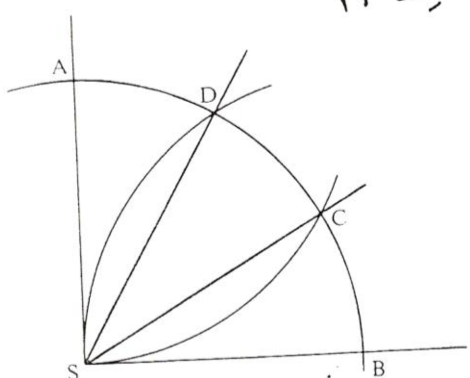


ځیره ۳۲

۷ – د یوه کونج نیمول

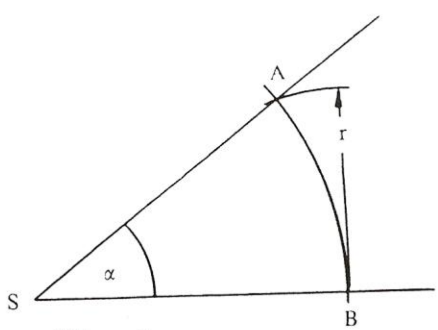
په ککره S یوه د خوښی لینده ووهه چی د کونج پښی په A او B کی پرې کړي، بیا په A او B په همغه وړانګه یو د خوښی ګردیلینده ووهی چی یو بل سره په C کي پرې کړي، پریتکی د S سره وتړی.

۸ – یو ولاړګوډی په درې مساوي برخو هره °30 وویشی



ځیره ۳۱

په ککره S باندې یوه د خوښی ګردیلینده وباسی چی دواړه پښی په A او B کي پرې یا غوڅی کړي او له دې وروسته د ځرښوونکي په همدې بیرته والي یا وازون د A او B ټکو څخه ګردیلیندی وکاږی، اوس د S څخه د C او D په لور وړانګی وکاږی، دا دوه وړانګی دا ولاړ– یا نیغکونج درې مساوي ټوټی کوي یا په درې برابرو برخو ویشي.



ځـ ره ۳۲

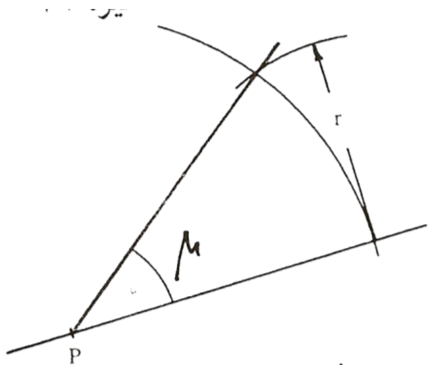
یادونه : هر د خوښی کونج په ځرخی او کرښي باندې په درې مساوي برخو نه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ویشل کیږي، ددې لپاره بیا الجبري مواد په کار دي.

۹ – د μ کونج په یوه ټکي P

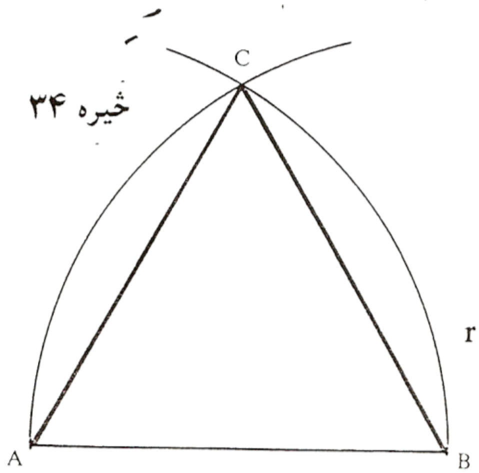
وغزوئ، د ورکړشوي کو نج په ککره S باندې یو ګردیلینده ووهي چې پښې یې په A او B کې پرې کړي، بیا نو په همغه ګردي ووهی چې څرخی د |AB| په اندازه وي. اوس نو دا پریټکی د P سره وتړی.



خیره ۳۳

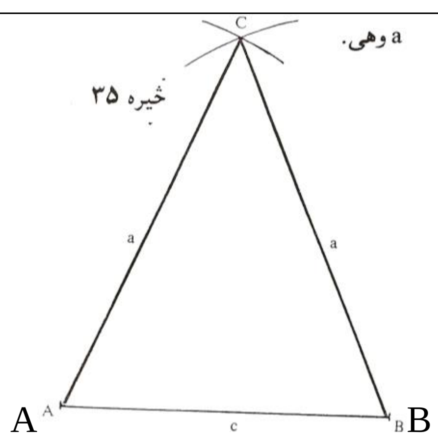
۱۰ – د مساوي اړخیز دریګوډي

کښل: په A او B باندې یوه ګردیلینده ووهی چې وړانګه یې r = |AB| وي ، چې یو بل په ټکي C کی پرې کړي.



خیره ۳۴

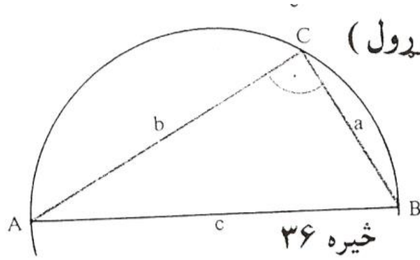
بیانو C د A او B سره ونښلوو، دا لاس ته راغلی دریګوډی مساوي اړخونه لري. په همدې ډول مساوي پښیز دریګوډی انځوریږي، د ورکړشوي بسټ AB=c سره. په A او B یوه یوه پښه وه,



خیره ۳۵

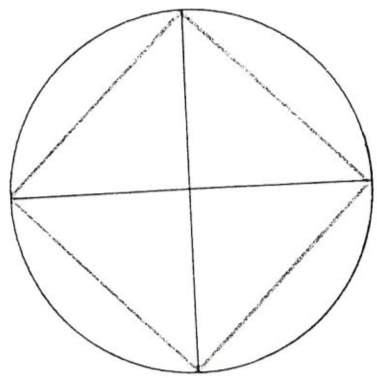
(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – د ولاړکونجيز درېګوډي کښل (جوړول)



هر درېګوډی چي اوږد اړخ يی د يوه ګردي قطر وي، ولاړکونجيز درېګوډی دی.
(د تالس (Thales) جمله ورته وايي)

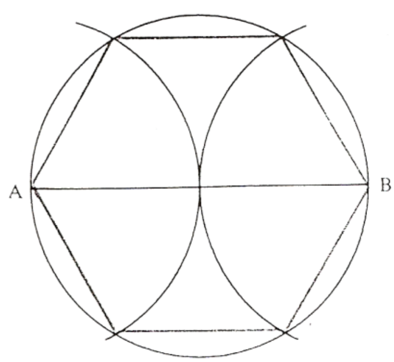
شيره ۳۶



شيره ۳۷

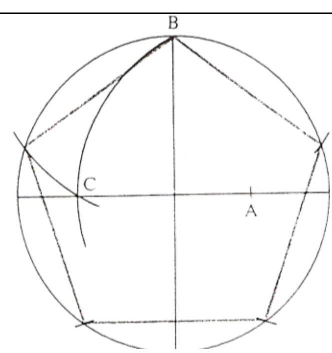
۱۲ – په ګردی کی د يوې مربع کښل

د ګردی په منځټکي باندې لکه په (۲) کی دوه يو په بل ولاړ نيمي (قطرونه) وکاږی او هغه ټکي چی ګردی پرې کړی سره ونښلوی.



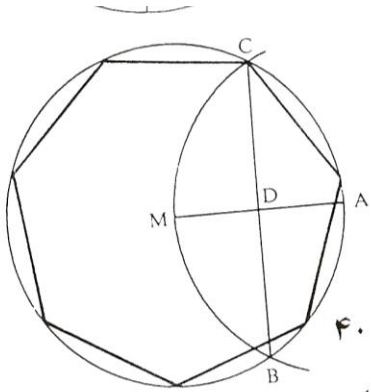
۱۳ – په يوې ورکړ شوې ګردی کی دمنظم پنځه ګوډی کښل: د ګردی وړانګه په A کی نيمه کړی ، له A څخه کرښه AB تر C وکاږی، |BC| د پنځه ګوډي د اړخ اوږدوالی دی.
(شيره ۳۹)

شيره ۳۸

	۱۴ – په ګرۍ کې د منظمم درېګوډي کښل: د نيمي يا قطر اخرني ټکو څخه د ګردۍ وړا نګې په اندازه ګردۍ لينده ووهۍ. د دې ټکو چې ګردۍ پرې کوييوځای کول منظم شپږګوډۍ چوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ – د مساوي اوه ګوټي

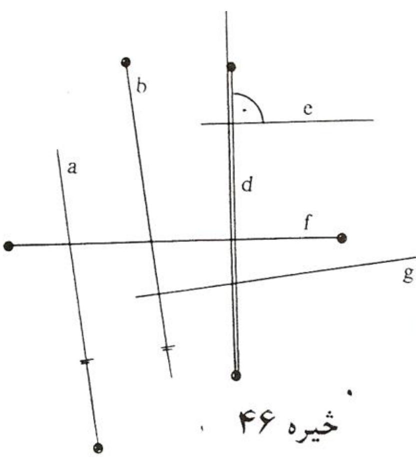


خیره ۴۰

جوړول یا کښل:

د ورکړ شوې ګردي دنیمي اخر ټکی A
څخه دAM وړانګه په اندازه ګردیلینده
ووهی چی ګردی په B او C کي پرې
کوي. د BC کرښه د AM وړانګه
په D کي په ولاړکونجي غوڅوي،
پس |BD| د مساوي اوه ګوټيز د اړخ اوږدوالی دی.

تمرینونه



خیره ۴۶

۱ – په ډیري ژبه باندې یی افاده کړی:

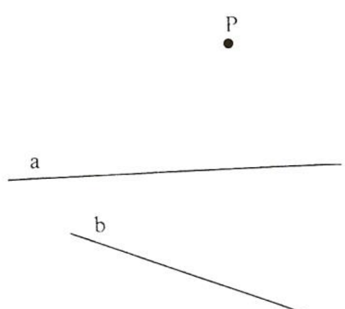
الف – ټکی A په کرښه g پروت دی.

ب – کرښه g د ټکو A او B ترمنځ څغلي

پ – کرښه AB په ناپای کرښه g پرته ده

ت – ټکی C په کرښه . چی له A وبه B ته څغلي، پروت دی،

۲ – په خیره ۴۶ کی څومره ناپاي کرښی، کرښی او وړانګي پرتی دي؟



خیره ۴۷

۳ – کومی کرښی غبرګي، او کومی یو په بل ولاړې پرتی دي؟ دا په سمبولو وکاروی (خیره ۴۷)

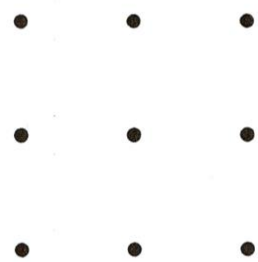
۴ – هرې کرښي ته جوړ کړی :

الف – یوه ولاړه

ب – په ورکړشوي ټکي کی یوه غبرګه (خیره ۴۸)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – د اسمان کومی لورې یو په بل
ولاړې دي؟
۶ – داسی کرښه لار (چی یو بل سره
تړلي وي) وباسی، چی له ټولو
په شیره ۴۹ کی ورکړ شوو۹
ټکو تیریږي. دا کرښو تلنه یا کرښو



شیره ۴۸

خوزیدنه یا تلنه (حرکت)

د یوې هوارې په خپل ځان یویواځنی شیرونه تلنه یا خوزیدنه (حرکت) بلل کیږي او په φ ښوول کیږي، که چیرې دا لاندې خویونه ولري:

ا – د یوې هندسي شیرې (کرښی، هوارې ، وړانګی ناپایکرښی، نیمهوارې) شیره ډیري لاندې، یوه هغه هندسي شیره پوهیږو، د کومی چی په غوښتونکی شیره ډیري ژیکرښی پیلټکي ، پایټکي په ژیکرښی ، پیلټکي ، پایټکي باندې شیره شي.

۲ – که f_1 او f_2 دوه جنډې وي ، ~~نو ټیك یوه تلنه شته~~ نو ټیك یوه تلنه φ شته، د $\varphi(f_1)=f_2$ سره.

۳ – که A او B دوه په خوښه ټکي وي، نو یوه تلنه φ شته د $\varphi(A)=B$ او $\varphi(B)=A$ سره

۴ – که p او q دوه وړانګي وي ، د ګډ پیلټکي سره ، نو یوه تلنه φ شته د $\varphi(p)=q$ او $\varphi(q)=p$ سره.

۵ – د تلنو یا خوزیدنو ډیری، د یو په بل پسی شیرونو ته یو ګروپ جوړوي (د الجبر برخه یا د لیکو... الجبر کتاب دې وکتل شي)

د تلنویا خوزیدنو (حرکت) ځانګړي ډولونه دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

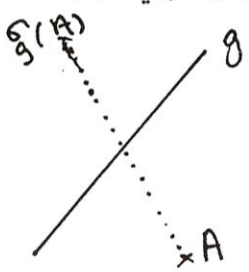
– راکښنه ، چی د τ سره یی ښایو
– ایینونه یا هندارونه، چی د σ سره ښایو
– څرخون چی د δ سره یی ښایو
که یو ټکی همداسی یوه کرښه ، چی په خپل ځان څیره شي ، نودا ودې څیرونی ته

یا نسبت ودې څیرونی ته فیکسټکی ځای په ځای ټکی او همداسی فیکس کرښه یا ځای په ځای کرښه بلل کیږي.
راکښنه τ یوه تلنه یا خوزیدنه ده د لاندې ځانګړو خویونو سره

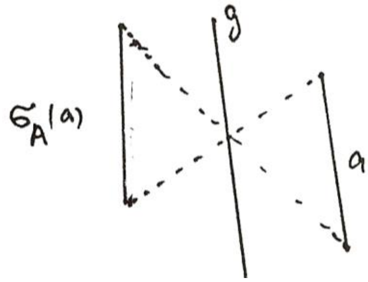
تلنه ۱ (V) : د یوې په خوښه کرښی څیره و هغي کرښی ته غبرګه کرښه ده.
تلنه ۲ (V) : که څیرونه کتمټ څیرونه نه وي، نو هر څیره ټکی د خپل اصل ټکي څخه توپیر لري .

ایینونه یا هندارونه . د ایینونی دوه ډولونه موجود دي:

لمړی : ایینونه σ_g په یوه کرښه g ، چی کرښ ایینونه ورته ویل کیږي، یوه تلنه ده، د لاندې خویونو سره



س ۱ : دکرښی g هر ټکی فیکسټکی یا په خپلځان څیره ټکی دی ، له دې سره کرښه یوه فکسکرښه ده.
س ۲ : دواړه د کرښی g وازې هوارې یو له بل سره بدلیدلی شي.
څیره ۵۲
دوم: ایینونه σ_A په په یوه ټکی ، چی ټکی ایینونه بلل کیږي، یوه تلنه ده ، د لاندې خویونو سره : (څیره ۵۲)

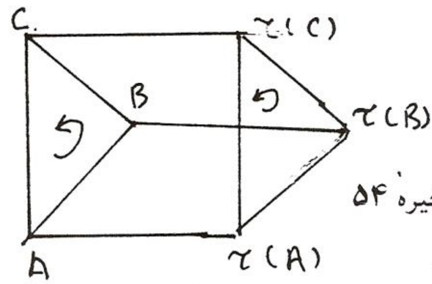


پ ۱ : هره کرښه چی له A تیریږي په خپل ځان داسی څیره کیږي، چی دواړه له A پیداشوې وړانګي یو له بل سره بدلی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

خیره ۵۳

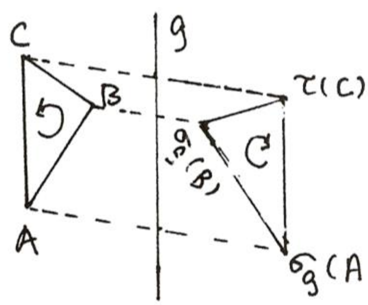
پ ۲ : هره کرښه و دې کرښی ته غبرګی کرښی باندې خیره کیږي. (خیره ۵۴)



لوریزه تلنه یا خوزیدنه:

یوه تلنه φ همغه لوریزه ده ، ټیک هلته یا هلته او هلته، کله چی هره خیره F د $\varphi(F)$ سره همغه لور ولري یا مساوي لوریز وي.

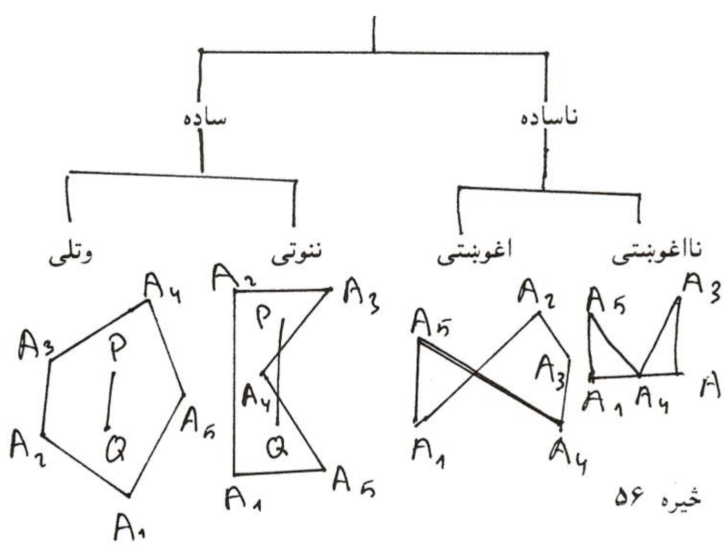
خیره ۵۴



یوه تلنه φ همغه لوریز نه یا نامساویلوریز ده، ټیک هلته یا هلته او هلته، کله چی هره خیره F و $\varphi(F)$ ته مخامخ یا په ځټ لوریز وي.

خیره ۵۵

ډېرګوډېز (د بیلګې په توګه پنځه ګوډېز)



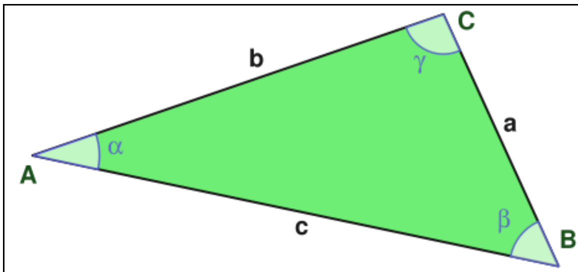
خیره ۵۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو وتلی n− کوډی منظم بلل کیږي، که د اړخونو اوږدوالی یی برابر وي او دننه کونجنونه یی مساوي یا برابر لوي وي.

درېکوډی (درېکوټی، مثلث)

دا چې د دوه ټکو ترمنځ تل یواځی یوه کرښه انځوریدلی شي، نو د یوه شکل لپاره کم له کمه درې ټکی په کار دي، په داسی ډول چی دا ټکي په یوه کرښه نه وي پراته. دا اوس هم په همغه هواره پراته دي. که دا ټکی د ځیرې د کوډټکو په ځیر ونیول شي، نو درېکوډی لا سته راځي٠ کرښي، چي درېکوډی په کې راګیر دی یا درېکوډی جوړوي د درېکوډي اړخونه یا هغه عربي یې ضلع بولو٠

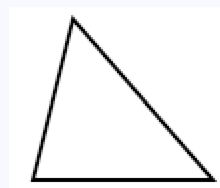
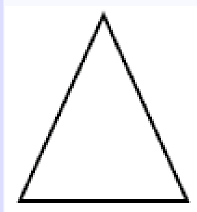
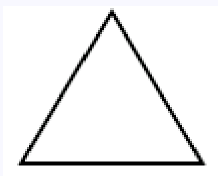
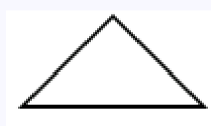
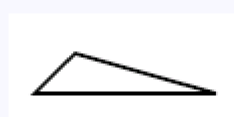
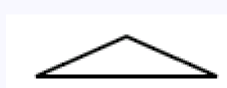


ګورو، چې کوجونه الفا ، بیتا او ګاما دي او اړخونه a,b او c دي. په ځیره کې ګوډونه په لویو تورو سره په نخښنه کیږي یانی A,B او C ګوډونه دي٠

ولې درېکوډی ؟

موږ وایو، چې سپین مې د برګ د کور د ګوډ سره ولید، یا د برګ د پټي یو ګوډ اوبو وړی، په یوه ځیره کې یا یوه جوړښت کې دننه د دوه کرښو غوځی کونج بولو او دباندنی ګوډ ٠ کندهاریان وایی ګوټ٠ دا پروا نه لري، که څوک یې ګوډ ، ګوټ او که کونج بولي یانی درېکوډی، درېګوټی او که درېکونجی بولي ، خو ماته یې درېکوډی نوم ښه برېښي٠ پام دې وي، چې له ما څخه دا نوم درېکوډی نومول شوی، دا ځیره ده نارینه نه ده، نو له دې امله به ښه وي، که درېکوډی وبللشي، نوره یې د ګرانو هیوادوالو او د ځکګچپو هنې مینه والو خوښه٠

د درېکوډیو مختلف ډولونه یا تیوپونه:

	نامنظم کونجونه او اړخونه یې برابر نه دي.	برابرپښیز دوه اړخونه او دوه کونجونه یې برابردي .	برابراړخیز ټول اړخونه او کونجونه یې برابردي .
تیره کونجیز- درېګوډي **ټول کونجونه یې تیره دي یاني له ۹۰ درجو کوچني دي** **<90°.**			
ولاړکونجیز درېګوډی، یو کونج یې ولاړکونج دی			
پڅکونجیز درېګوډی **یو کونج یې پڅ دی یاني له ۹۰ درجې لوي دی.(>90°)**			

د کونجونو الفا ، بیتا او ګاما (α,β,γ) او اړخونو a,b,c له مخې د درېګوډیو مختلف تیوپونه سره بیلیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته څیرو کې پورته ښی لور ته درېګوډي همغه رسم شوي، خو دا یو دې د بل سره برابر پام کې ونه نیول شي، یانی د یوه درېګوډي پښی دی نابرابرې وي٠ تیره کونجیز درېګوډی، چې دریواړه کونجونه توپیر لري، درې برابرکونجونه لري ، دوه کوجونه یې سره برابر وي، ولاړکونیز، پځکونجیز، دا هم د برابرو او نا برابرو کونجونو سره ٠ هغه درېګوډی، چې دوه کوجونه یې سره برابر دي، اړخونه یې هم برابر دي او د برابرو کونجونو په مخامخ برابر اړخونه پراته دي٠ دا لاندي ښه څیړل شوي دي، د څیرو سرهړ.

د درېګوډي یو له بل بیل ډولونه

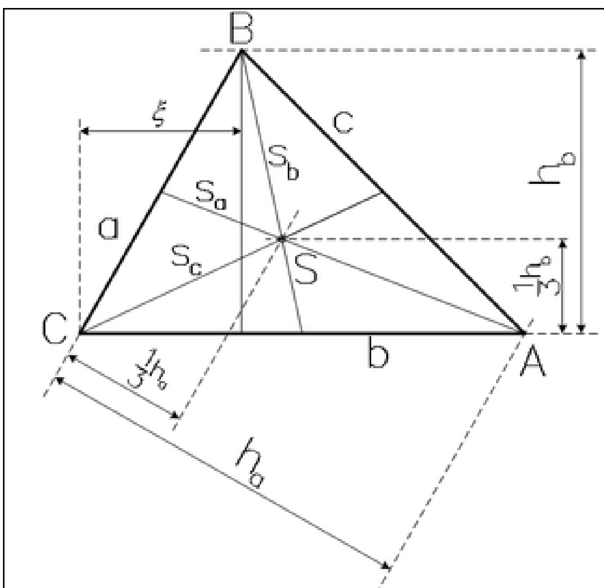
د دریګوډي د پام وړ ټکی

- د دریګوډي هر درې یوډوله کرښی ، یو بل په یوه ټکی کی پرې کوي

- اړخنیمی په S کی

- د کونجنیمی یا نیموونکی په W کی-

- اړخنیمی د منځ ولاړې (کرښی) په M کی: دا هغه کرښه ده، چې د دېګوډی د اړخ په منځ ولاړه ده، چې موږ یې منځولاړه بولو



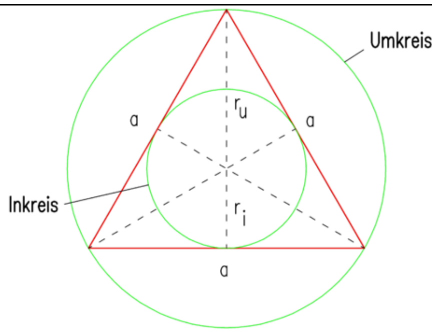
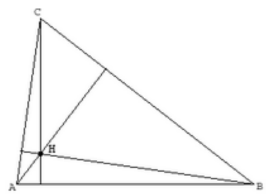
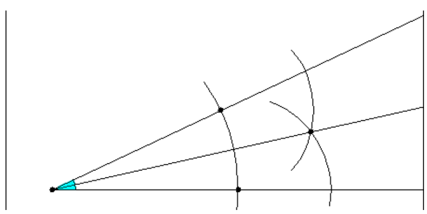
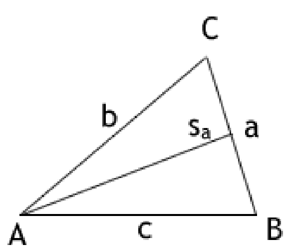
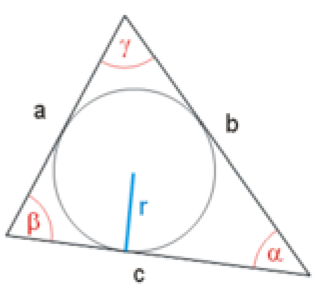
-. جګکرښی یا جګي په H کی

دا ټکی د یوه دریګوډي د پام وړ ټکی دي - :

له دوي څخه S دروندټکی(د ثقلمرکز)

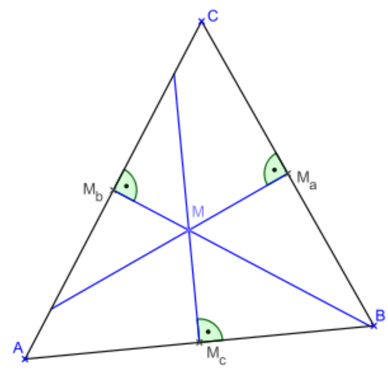
له دوي څخه W د دننه ګردئ منځ ټکوړانګه او M د دباندې یا راګردې ګردئ یا نوره هم ښه خورا ښه او مناسبه نوم یې چاپیریالګردئ منځ ټکی دئ (وړانګه) r، د چاپیریالګردئ منځټکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

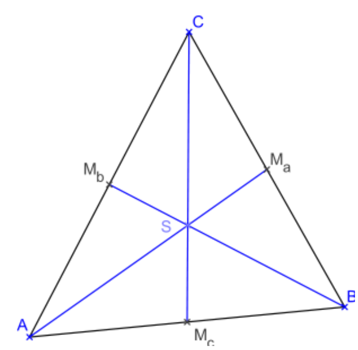
دلته هځېرو، چې ځېرې راوړو، د ځېرنې سره يې : Umkreis Inkrei اي ىدرګـيدنوخ دهراتاو-يا په راتاوګردى	
په لاندې ځېره کې جګې کرښې وينو. دا هغه کرښې دج، چې را په ګوته کوي، چې اړخ د کونې سره کوم جګى لري او دا کر په يوه ټکى کې غوځوي.	
په مخامخ ځېره کې کونجنيمى ګورو او وينو، چې څنګه کښل يا رسم کيږي.	
په مخامخ ځېره اړخنيمى کټل کيږي. دا هغه کرښه ده، چې له کونج څخه اړخ نيمى.	
په مخامخ په درېکوډى کې د خوندي ګردى منځټکى د وړانګى سره کټل کيږي.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ښيره په درېګوډي کې په منځولاړې ګرښې په ګوته کويو چې پّ لږونده ټکي کې سره غوڅوي

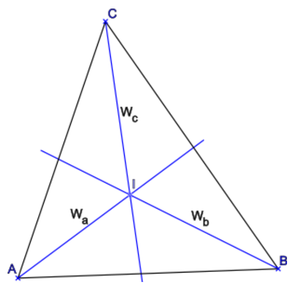


په لاندې مخامخ دريګوډي کې درې اړخنيمی ورکړ شوي،چې ته يوه ټکي کې سره غوڅوي

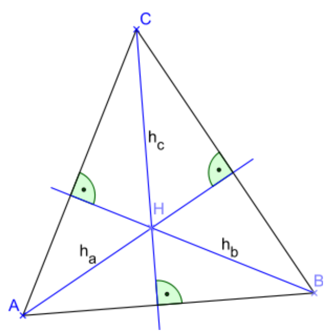


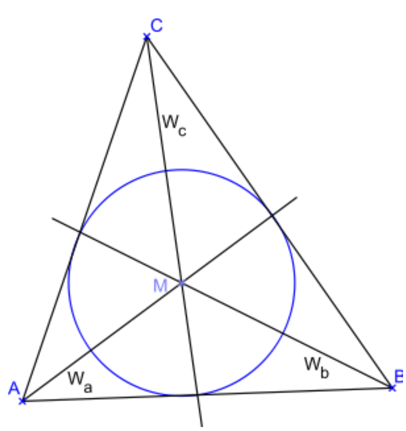
په مخامخ ښيره کې ګورورړ چې کونجنيمی ی خونديګردی منځټتي کې سره غوڅوي

په لاندې درېګوډي کې دې کونخنيمی ديو جې په يوه ټکي سه پرې کوي

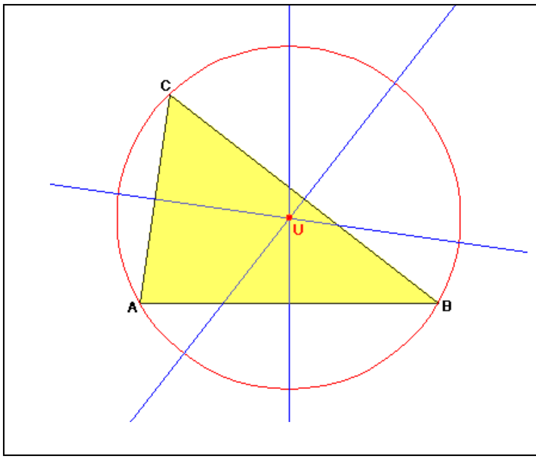


په لاندې ښيره کې د درېګوډي درې جګې ورکړ شويو چې په يوه ټکي کې سره غوڅوي

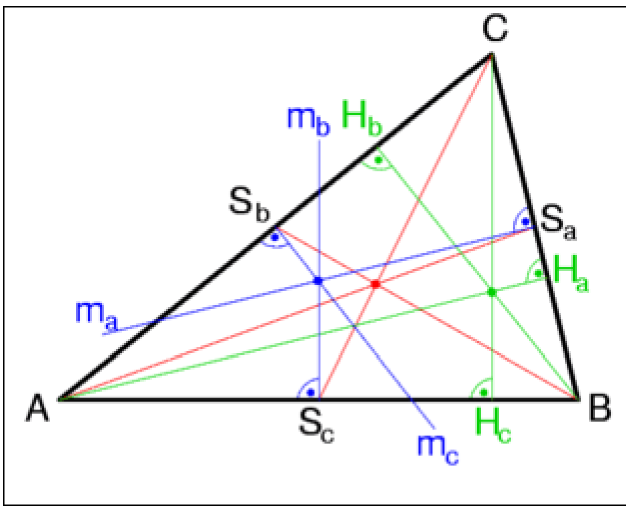




(c) ketabton.com: The Digital Library



په مخامخ خیره کي د درېکوډی منځولاړې
ګوروو چې غوڅېککی پې ی راتاوکردی
منځټکي دی



په مخامخ خیره کې هغه اړخنیمی،
چې په اړخ ولاړې دي کتل کیږي،
په اړخنیمی ولاړې، جګی او
اړخنیمی کتل کیږي، چې دریواړه
په یوه کربنه پرتې دي .

د جګو غوڅټکی (شین)، راتاوګردی منځټکی(اسماني یا زرغون)، دروندټکی(سور) په یوه کربښه پراته دي.

د درېکوډیو جوړید امکانات یا شونتوب: درېکوډي یواځنی جوړیږي (همدا یو درېکوډی او بل، چي له دې درېکوډي توپیر ولري نه شي جوړیدی) ،

-که د دریګوډیو دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي،

-یا دوه اړخونه او له دې اړخونو بند کونج یا

- یو اړخ او ددې اړخ په دواړو سرونو یا اخرونو کونجونه وپیژنو

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا په همدې ډول هغه دریګوډی، چی دوه اړخونه او د لوي اړخ مخامخ کونج یی پیژندل شوی وي. د کونګروا ینځ جملو کی یی بیلګي راځي .

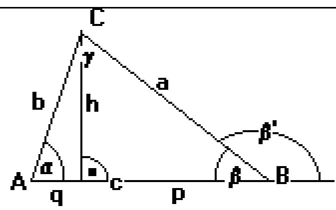
د دریکوډي پیژندنه لنډ: یو n - ګوډی، چی n=3 وي، دری ګوډی بلل کیږي .

په درېګوډي کی جملی:

په عمومي ډول لاندې جملی باوري یا معتبرې دي چی بي له ثبوته دلته راوړل کیږي.

<table>
<tr>
<td>١ - د کونجزیاتون جمله : په درېګوډي کی ټول کونجونه °180 لري

°180 = □ + □ + □

په مخامخ ځیره ګي β' د β ګاونډی کونج دئ</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

٢ - د دباندني کو نج جمله: دباندی کونج د ناګاونډیو کونجونو زیاتون یا مجموعی سره مساوي دی،له دې امله د درېګوډي د دباندنیو کونجونو زیاتون °360 لري:

یادونه : ګران د ځمککچ مینه وال دې دا ځیره له پ ورته ه ځ برې ځخه پوره کړي ۰:

٣ – درېګوډي نامساوات یا دریګوډي نابرابرونو نه:

په هر درېګوډي کی د دوه اړخونو اوږدوالی زیاتون د دریم اړخ اوږدوالی ځخه لوي دئ

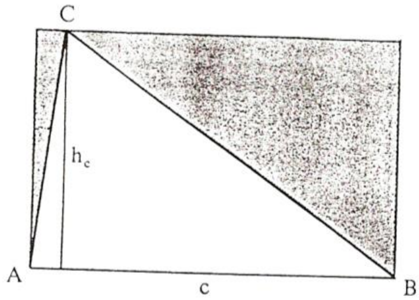
$$a + b > c \;;\quad a + c > b \;;\; b + c > a$$

٣ الف-د هر دریګوډي دوه اړخونو اوږدوالي مطلقه ارزښت کمون، توپیر یا فرق د دریم اړخ اوږدوالی همغه- یامطلقه ارښت ځخه کوچنی دئ

$$|a - b| < c \;;\quad |a - c| < b \;;\quad |b - c| < a$$

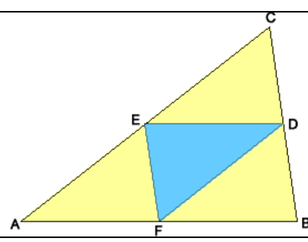
۴ - د درېګوډي چاپیرـال د دریواړو اړخونو زیاتون دئ $U = a + b + c$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	۵ - د درېکوډۍ منځهواره (د هوارې دننه) لنډ : هواره (، د یوه اړخ اوږدوالی او په هغی کښلی (نیغ) ولاړ جګوالی(لنډ: جګوالي) د ځل نیمايي دی $F = a.ha/2 = b.hb/2 = c.hc/2$

د ښووني لپاره يي د يوه لنډ چل ځخه کار اخلو: موږ درېکوډی د جګکرښي په اوږدو باندې په دوه ولاړکونجيو غوڅوو او د درېکوډي په اړخ يی ځيره باسو، په دې ډول دوه ولاړکونجيز دريکوډي منځ ته راځی، چی د هغی ټوله هواره، د غوښتونکي درېکوډي هوارې دوه برابره ده.

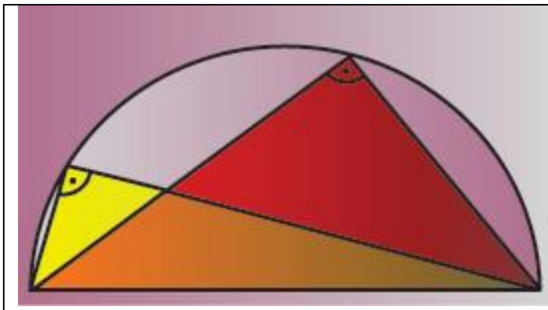
دا له پورته ځيرې ځخه هم ځرګنديږي.

	۶ - د درېکوډي اړخونو نیمايي هغه منځنی درېکوډی جوړوي، د کوم اړخونه چی نیمايي دومره اوږده وي لکه د پيل شوي درېکوډي(د وړانګي جمله دي وکتل شي

ګورو چی د يوه دريکوډي جګی تل ځرګند نه دی. مګر دا چی د يوه جګي له لارې يو دريکوډی په دوه برخو ويشل کيږي، چی په دې ډل دوه ولاړکونجيز دريکوډي ترې منځ ته راځي، چی دا جګی بيا د پيتاګوراس له لارې -جملی چی وروسته راځي - او يا د تريګونومتري يا کونجکچ متودو يا لارو له لارې ، چی هغه وروسته ځيړل کيږي، لاس ته راوړی شو .

	د تالس جمله Satz des Thales: که AB د یوې ګردی(دايرې) يوه نيمی (قطر) وي او C په دې ګردی پروت وي، نو درېکوډي

(c) ketabton.com: The Digital Library

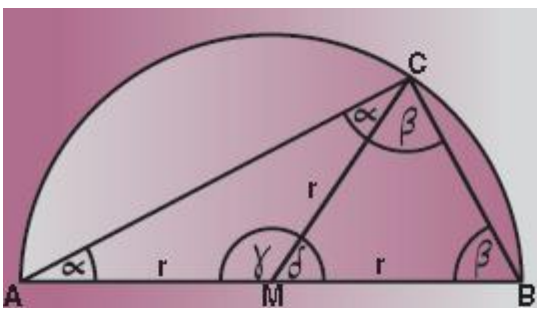


ABC په C کې ولاړکونجیز دی٠

د دې جملې په څټ یا برعکس دی:

که چیرې درېګودې ABC په C کې ولاړکونجیز وي، نو C په ګردی پرته ده د نیمې AB سره

د جملې د ښوونې لپاره: دا برخه دې دا دلته د ښوونځي شاګردانو لپاره نه وي٠



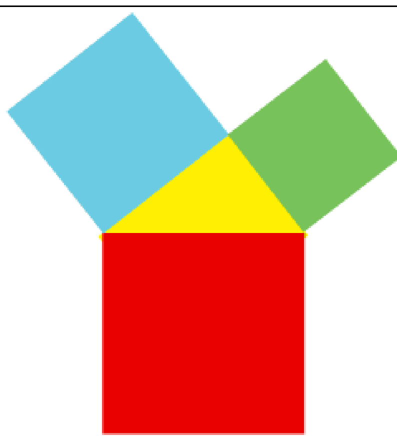
$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180°$$

$$2\alpha + 2\beta = 180°$$

له دې لاس ته راځي

$$\alpha + \beta = 90°$$

د پیتاګوراس (فیثاغورث Satz des Pythagoras)



په یوه ولاړکونیجز درېګودې کې ، چې کاتیتونه یا ولاړ اړخونه یې a او b وي، د هیپوتینوزی یا اوږد اړخ یې c سره پخ نخښنه ګوو , باور لري

$$a^2+b^2=c^2$$

د دې جملې په څټ یا برعکس

که د یوه درېګودې ABC د اړخونو a, b, cلپاره باور ولري

$$a^2+b^2=c^2.\ F = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = b.\frac{h_b}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دا درېګوټي په C کې ولاړکونجیز دی یا د پیتاګوراس جمله وايي، چې په یوه ولاړکونجیز درېګوټي کې د هیپوتینیوز(لوي اړخ) څلورۍ یا مربع د کاتیتونو(ولاړ اړخونو) د څلوریو یا مربعګانو د زیاتون سره برابره ده.

ولاړکونجیز درېګوټی یو ولاړ کونج لري یانې ۹۰ درجې کونج

د درېګوټی اوږد اړخ د لوی کونج مخامخ پروت دی ، چې هیپوتینوز *Hypotenuse* یا لوی اړخ بلل کیږي

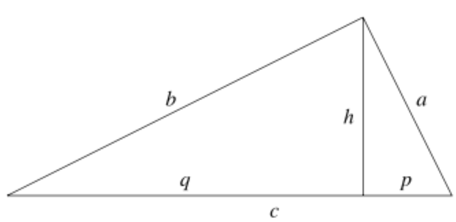
نور دوه اړخونه کاتیتونه *Katheten* یا ولاړ اړخونه بلل کیږي.

لاندې جملې ښایو:

دا جملې ټولې یوځاي راوړل شوي

جمله : ولاړ کونجیز درېګوټی a + b + c = U

a.b / 2 = c . hc / 2 = F

	$c^2 = a^2 + b^2$	د پیتاګوراس جمله
	$a^2 = c \cdot p$	د اویکلید د کاتیتونویا ولاړ اړخونو جمله
	$b^2 = c \cdot q$	
	$c = p + q$	
	$h^2 = p \cdot q$	د اویکلید د جګیو جمله

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : برابر- یا مساوي پښیز درېګوډی جګی

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$U = 2a + b$$

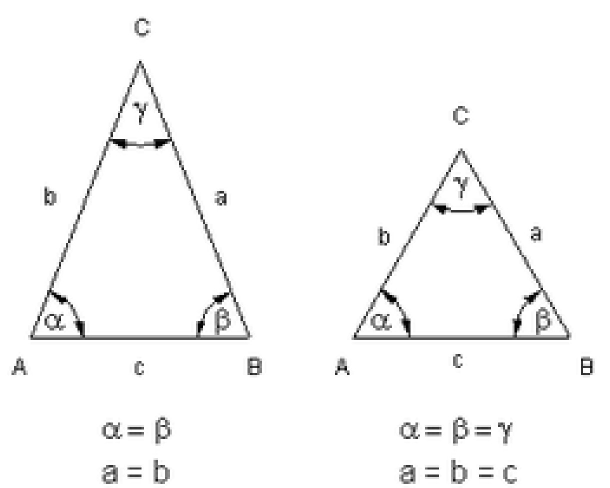
$$F = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = b.\frac{h_b}{2}$$

ځکه چی $h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$ (د پیتاګوراس جملی له مخی(پیتاګوراس جمله وګوری)

جمله : برابر اړخیز درېګوډی :

د یوه برابر اړخیز درېګوډي ټول درې آړخونه برابر دي، دنني کونج ونه برابر لوي دي، له دې امله برابر اړخیز درېګوډي منظمو پولیګونونو پورې اړه لري۰) پولیګون لاتین ډیرکوډیز(<u>Polygonen</u>).

د برابر اړخیز درېګوډي هر کونج ٦٠ درجې دی۰ برابر اړخیز درېګوډي تره کونجیزو ډریوګوډیو په ډله کې دی، ځکه، چې ټول درېکونجونه له ٩٠ درجو کم دي
په دې برسیره یوه برابرااړخیزه درېګوډیيوه برابرپښیزه درېګوډی هم ده۰
ټول برابراړخیزدرېګوډي یو بل ته ورته دی (وروسته راځی)

په یوه برابراړخیز درېګوډي کی، د یوه اړخ کونجنیمی-، اړخنیمی-، په منځولاړې-اوجګی –یو په بل پریوځي۰ په ورته توګه دا د ضوندي ګردی دباندې ګردی او دروندټکی اړخ جګیو غوځټکی لپاره هم په یوه برابراړخیز درېګوډي کې باور لري۰	

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته څیره کې کیڼ لور ته برابر پېنيز - او ښي لور ته برابراړخيز درېګوڼی دی٠ هر برابر څه يې کښل شوي٠

د یوه برابراړخيز درېګوڼی، چې د اړخ اوږدوالی يې a دی، لپاره باور لري

Fläche *A* هواره یا سطحه	$A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$
جګوالیHöhe *h*	$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$
د چاپيريالګردی وړانګهUmkreisradius *r*	$r = \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{a}{\sqrt{3}}$
د خوندي ګردی وړانګهInkreisradius ρ	$\rho = \frac{\sqrt{3}}{6} a$
چاپيريالUmfang *u*	$u = 3 \cdot a$

د برابراړخيز درېګوډي خويونه دې ګران لوستونکي وښايي

د اويکليد د کاتيتونو يا ولاړ اړخونو جمله

دواړه سرې هوارې يو له بل سره او همداسې دوآره شنې هوارې همغه منځهواره لري٠ يا په بل ډول : د سرو او شنو ولاړکوډيو هوارې يو له بل سره برابرې دي٠

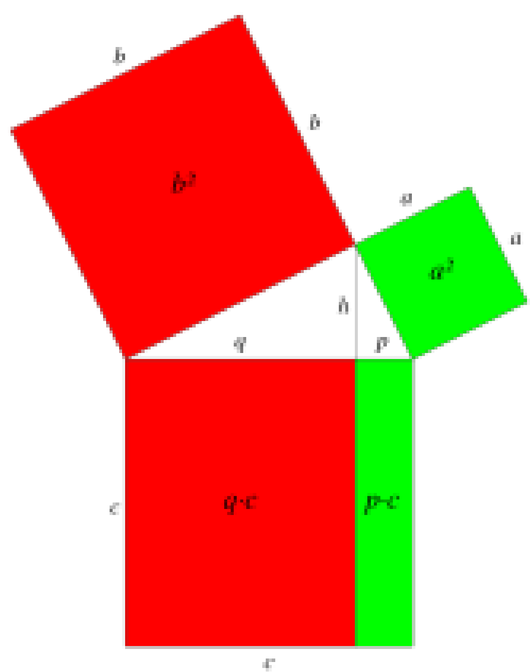
$a^2=pc$ او $b^2=qc$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که a,b,c د ولاړکونجیز درېګوډي اړخونه وي، د هیپوتینوز c سره٠ که دا درېګوډي په جګي h په دوه برخو وویشل شي او p یې هیپوتیوز ټوټه په a ده او qهمداسي ټوټه ده په b، نو باور لري:

په aخلورى د p او cولاړکونجیز خلورګوډي او په bخلورى د ولاړکونجیز خلورګوډي، د اړخونو q او cسره هوار برابره ده یانې هوارې یا سطحی یې برابرې دي٠

لاندې څیره دې وکتل شي٠ پام دې وي ، چې دا پورته ښونه او دا لاندی سره برابرې دي، خو یواځی څیرې یې بدې دي، دوه ځله ښوونه پروا نه لري٠



فرمول یې :

$$a^2 = p.c$$

$$b^2 = q.c$$

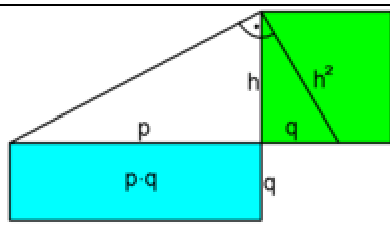
Kathetensatzد کاتیتیونو جمله:دواړه سرې هوارې همغه منځهواره لري او همداسې دواړه شنې هوارې هم *د اړخ او خلورى د فرمول په څیر په لاندې ډول دي*

$$a^2 = p \cdot c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^2 = q \cdot c$$

د اويکليد جګجملهHöhensatz des Euklid

	$h^2 = p \cdot q$ د جګجملی د بیاتیونې ښوونه(دا لړ ستونځمنه ده، خو زما يي دا څيره بدلون ښه راځی ګرانو لوستونکو ته په مينه وړاندې کيږي) :

د جګجملی ښوونه : د پيتاګوراس له جملې $a^2 + b^2 = c^2$

او د بينوم له فرمول

$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

څخه ښوونه لاس ته راځي

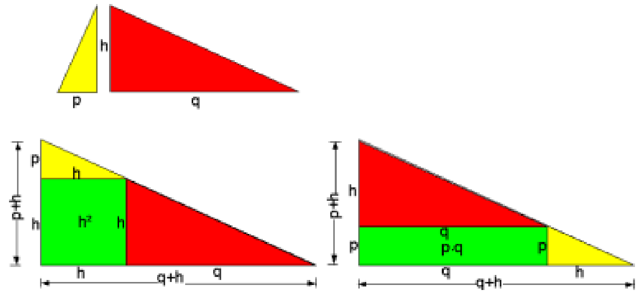
په دياګرام کې درې درېګودي ليدل کيږي، يو له اړخونو a,b,c, ، بل له اړخونو h,p,a او h,q,b. سره، د دې هريوه درېګودي لپاره د پيتاګوراس جمله باور لري۰:

$h^2 = p.q \Leftarrow\Rightarrow q^2 = pq+q^2 + h^2$

د پورته بياتيونې له لارې ښوول کيږي۰

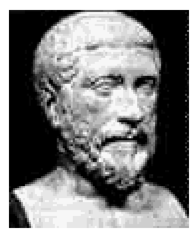
جيومتريکي ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا خیره دې ګران لوستونکی پام ته را وبولي، چې څنګه د ښووني کار مخ ته ځي

(تمرین)



د ساموس پیتاګوراس Pythagoras von Samos

تکرار: په ولاړکونجیز درېکوډي کي د کاتیتونو(ولاړ اړخونو) د څلوریو یا مربعګانو زیاتون د هیپوتینوز(اوږده اړخ) د څلورۍ سره برابر دی٠

دا جمله د پیتاګواراس جملې ترنامه شهرت لري او د ساموس پیتاګوراس د ژوند سره برابر ځاي نیسي٠ لکه لاندې په ګوته کوي،چې دا انسان له دې خورا زیات وو٠

دا یو له مانا ډک انسان دی »برتراند راسل « Bertrand Russell - ",,

دی د جلبازو مشر دی « هیراکلیت»Heraklit - ",,
Ludwig Börneلودویک بورنې د هغۀ په هکله وایې« کله، چې هغه دا جمله پیداکړه، هغه د خدای په نامه سل سوخندر خیرات کړل٠ له هغې وروسته ټول سوخندر لړزیږي، ترهغې، چې نوي څه کشف شي «

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيتاکوراس په570دزکال پخواپه جزيره ساموس کې پيداشوی .
پلالر يې سامي زرګر منيسارښوس **Mnesarchos** دی

چې شل کلن وو د تالس **Thales** په ميلت Milet او انيکشيماندر کې يې زده کړې کولې

د پيتاګوراس ښوونه يا پوهنه Die Lehre Pythagoras

روح نه مري او ځاي بدلوي، داسې، چې له يوه ژوندي څخه وبل ته ځي

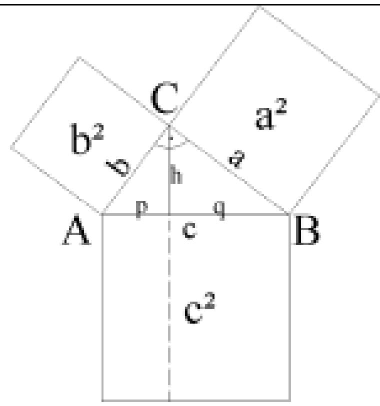
د پيتاګوراس جمله

په يوه ولاړ کونجيز درېګوډي کې د کاتيتونو(ولاړو اړخونو) څلوری زياتون د هيپوتيذوز (اوږده اړخ)له څلوری سره برابر دی

c^2	**=**	**$a^2 + b^2$**
$p \cdot c$ (د کاتيتونو جمله)	=	b^2
$q \cdot c$	=	a^2
Kathetensatz د کاتيت جمله		
$p \cdot c + q \cdot c$	=	$a^2 + b^2$
$(c \cdot (p + q)$	=	$a^2 + b^2$

دپورته لپاره لاندې څېره وګوری

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د دې جملې د ښوونې لپاره له ۲۰۰ څخه زیاتې اوبیونې یا ښوونې (ثبوتونه) شته

پیلونې او ښوونې

د یوونځلورۍ یا یوون مربع څېره

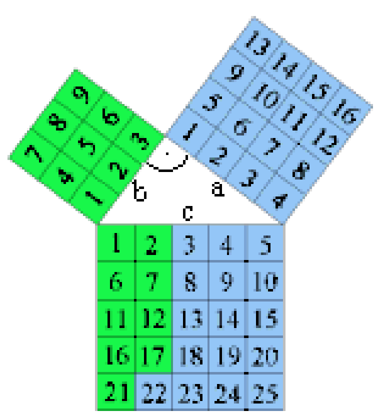
یو ولاړ کونجیز درېګوډی لرو، چې اړخونه یې په لاندې ډول دي

(z.B. a= 3cm; b= 4cm; c= 5cm)

په هر اړخ ځلورۍ جوړوو، لکه لاندې څېره

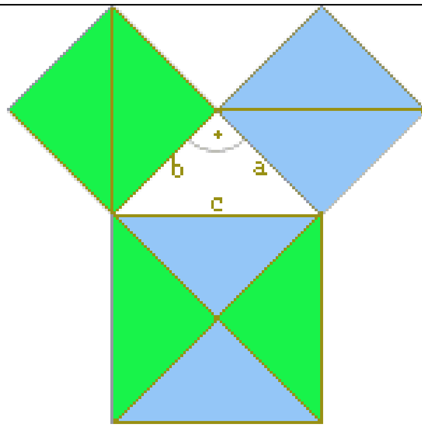
$$25cm^2 = 9cm^2 + 16cm^2$$

$$c^2 = b^2 + a^2$$

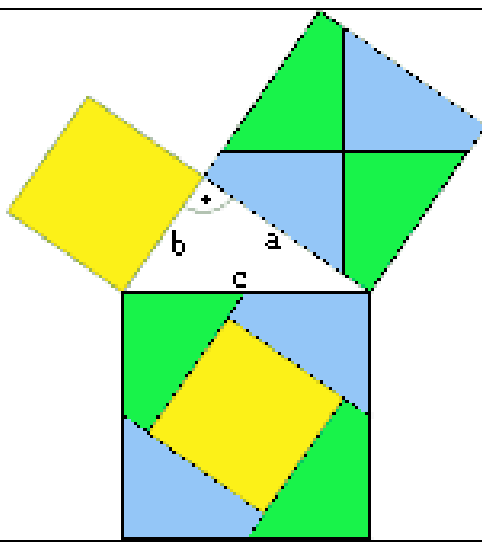


(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې یو برابرپېنیز ولاړکونجیز درېګوړی لرو:

	ولاړکونجیز برابربرپېنیز درجګوړی، چې اوږد اړخ يې دی (z.B. c=5cm). اړخونه a^2 او b^2 ګورو، نو کره به ورته وګورو، چې څه شوي یاني ځنې ځلورې نیمې شوي او ځنې بیا په ځلور برخو ویشل شوي. که ځیر Jته وګورو، څه کره کولی شو؟

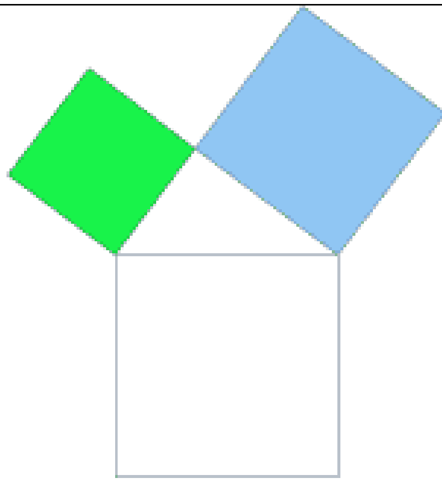
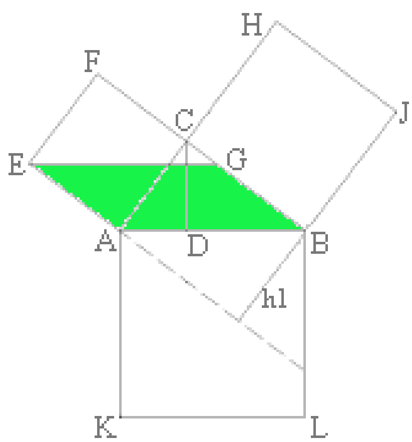
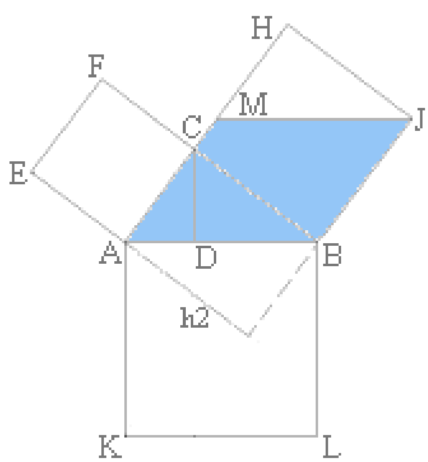
2.2 په خوښه ولاړګوډیز لرو

	دا په خوښه ولاړکونجیز درېګوړی دی (z.B. c= 4,5cm) تالس ګردی د لويي کتیت ځلرۍ له منځ څخه لوي اړخ ته یوه غبرګهکرښه وکاږی او هیپوتینوز ته یوه ولآړه a^2 غوڅه کړي. ګران لوستونکي دې له ځیرې څخه پخپلهپه ګوته کړي، چې د لوي اړخ ځلورۍ د نورو اړونو د ځلوریو سره برابره ده

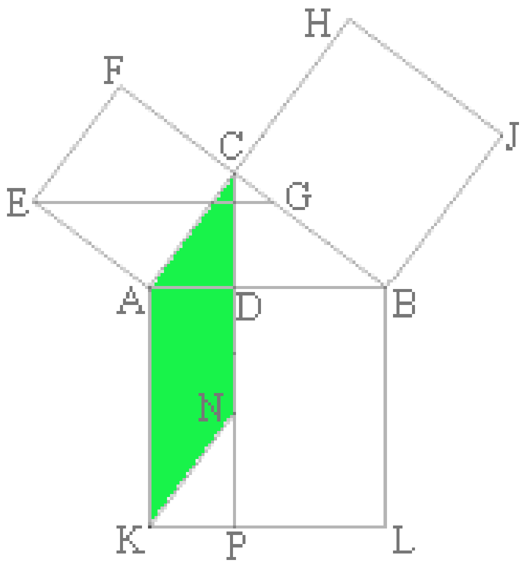
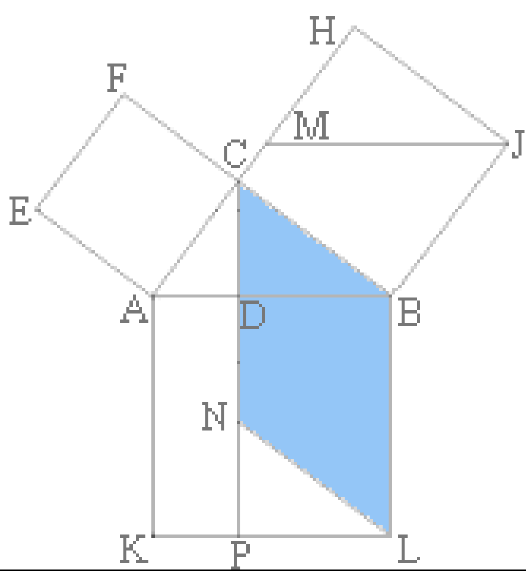
.3 د ځیرې ځمککچیزه لاربنودنه

د لوړو ګوډونو یا کاتیتونو ځلورۍ په درېګوډي ABC کې دننه د غبرګ اړخیز په څېر غوڅ کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

	غبرګ اړخيز د لوی اړخ څلوری(مربع) کډېکي باندې د هغې تر يوه اړخ پوری و ځرخوی . غبرګ اړخيز(مايلګوډيز) يوه ولاړګوډيز په ډول د لوی اړخ مبع يا څلوری هوارې کې دننه بياتي کړی
 	ښوونه :الف : بياتيونه: EACF = EABG . 1 ځکه, جې برابر بنسټلاين EA او برابر حګی BJHC = BJMA . 2 ځکه،برابر بنسټلاين BJ او برابر جګی(h) JHلري

(c) ketabton.com: The Digital Library

	ب . ځرخون : ۳ . EABG = AKNC ځکه پهA باندې EA = AC (د یوې ځلورې اړخونه) AB = AK (دیوې ځلورې اړخونه)
	۴ . BJMA = BCNL ځکه، چې پهB باندې BJ = BC (د یوې ځلورۍاړخ اوړوالی) BA = BL (د یوې ځلورې اړخونه)

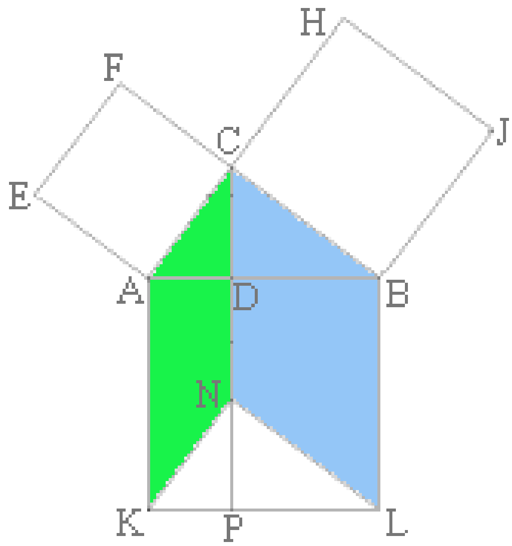
پ . بیاتیونه:

۵ . AKNC = AKPD ځکه، چې همغه بنسټلاید AK شر ه نغه جګې KP لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ . NLBC = DPLB ځکه،چې همغه بنسټلاین BL او همغه جګی PL لري

د پورته دواړو لپاره لاندې ښېره وګورئ



له مخامخ ښېرې

لاس ته اځي

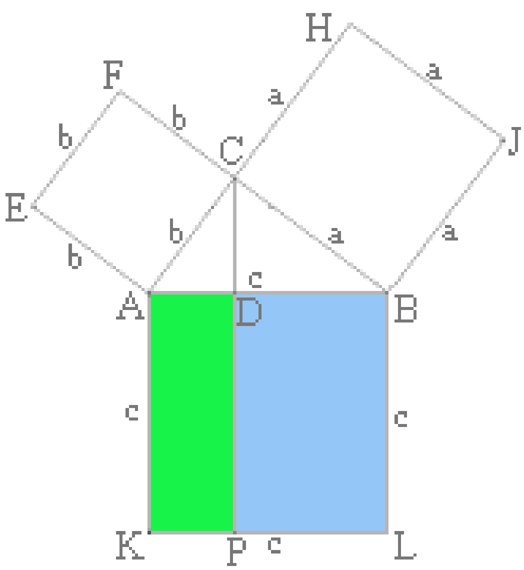
$a^2 = c \cdot DB$

$b^2 = c \cdot AD$

له دې لاس ته راځي :

$c.AD+c.DB=C^2$

$b^2+a^2 = C^2$



بیاتیونه پیل(لاندې ښیره)

۱ - په هر دې اته دریګوډیو ځلورئ داسې کیږدئ،چې برابر اوږده اړخونه یو په بل پریوزي، لکه چې ګور د یوې ځلورئ اړخونه د یوه دریکوډي داړخونو سره برابر دي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

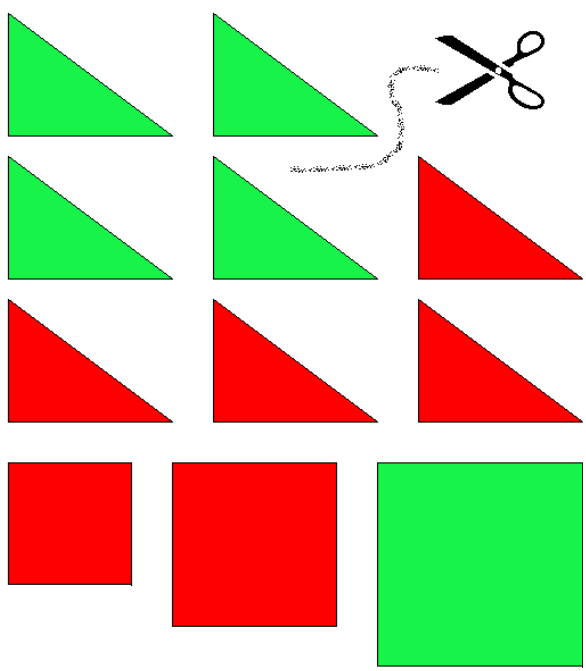
۲ - ټولې سرې څيرې (دوه څلورۍ اوڅلور درېګوټي) داسې يوځای کيږدۍ، چې يوه لويه څلورۍ منځ ته راشي .

۳ - ټولې شنې څېرې (يوه څلورۍ او څلور درېګوټي) داسې يوځای کيږدۍ، جې يوه لويه څلورۍ منځ ته راشي.

۴ - ځان ته باور پيدا کړه،چې دواړه داسې منځ ته راغلې څلورۍ يو بل پټه وي.

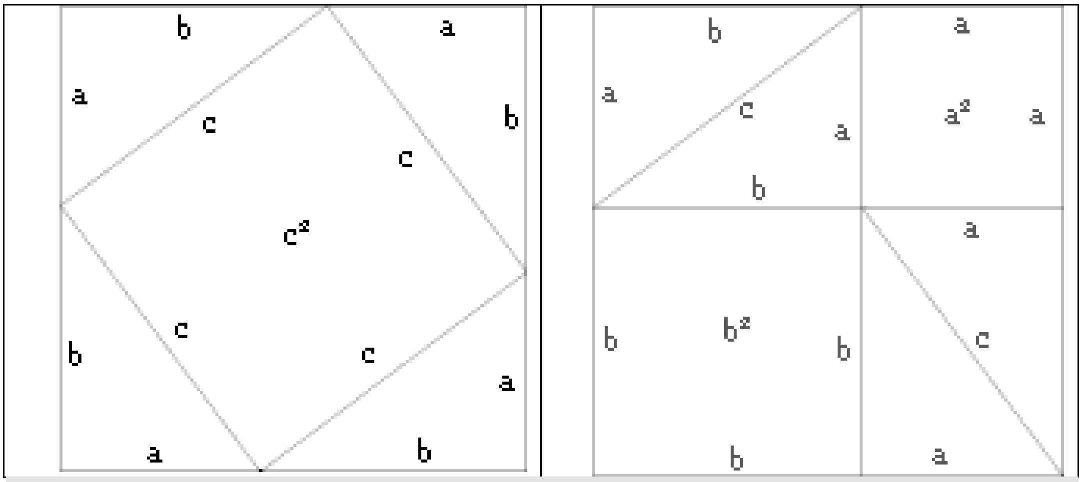
۵ - ټول درېکوټي لرې کړه، نو دا پاتې شنه څلورۍ، د هوارې يا سحې له مخې کوچنۍ يا برابره ده دې نورو دواړو سرو څلويو سره.

د ځواب لپاره دلايل راوړه!



۵. Berechnungsbeweisد شميرلو ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



$4\cdot \frac{1}{2} \cdot a\cdot b + c^2$	=	$(a+b)^2$
$2ab + c^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$
c^2	=	$a^2 + b^2$

دا ځیرې دې د ځمککچپوهنې مینه والو ته وړاندې وي، که وخت پیدا شو دا څه په منځ کې پاتې به هم وژباړل شي او ګرانو لوستونکو ته به وړاندې شي

لاندې ځیره کې د،پیتاګوراس ونه، لیدل کیږي

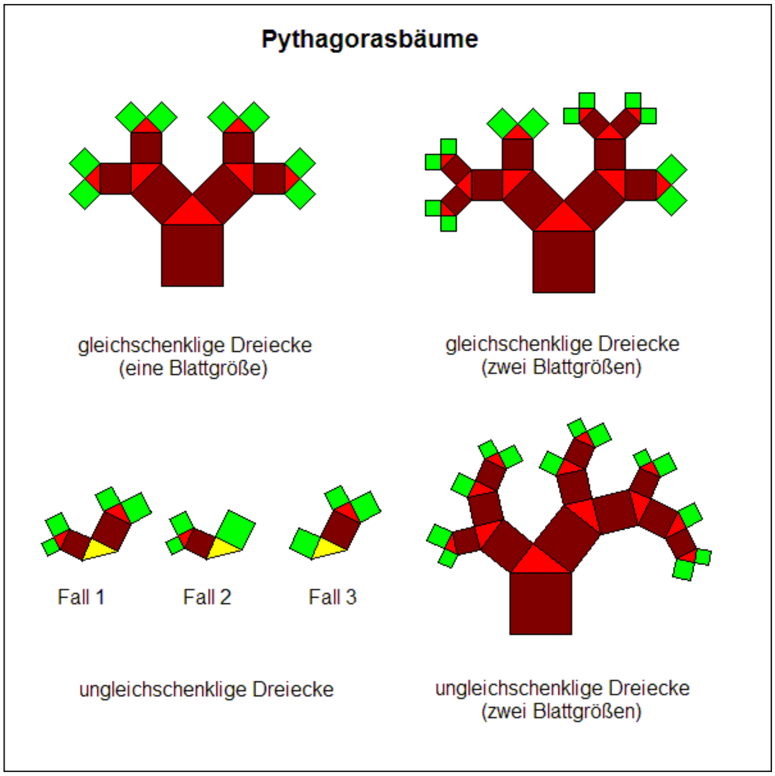
له کیڼ و ښي-، له پورته و کښته لور ته

برابرپښیز درېګوډی (یوه پانډه لویوالی)

- برابرپښیزدرېګوډی(دوه پانډې لویې)

حالت ۱ تر۳نابرابرپښیز درېګوډي- نابرابرپښیز دېګوډی(دوه پانډې لویی)

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرینونه:

۱ – لاندې درېګوټي وکاږئ :

a) a = 4 cm ;   b = 8 cm ;   c = 9 cm

b) a = 8 cm;   b = 8 cm ;   ß = 50°

c) a = 8 cm ;   ß = 40° ;   γ = 50°

۲ – د هوارې فرمول په مرسته

وښايئ: چې د يوه درېګوټي خواوې يا اړخونه او جګې ، يو له بل سره په څټ اړيکو يا څانښونو يا تناسب پرتې وي.

۳ – درېګوټې د لاندې ورکړو سره کومه هواره لري

a) a = 7 cm ; h_a = m6 cm

b) c = 3 cm ; h_c = 5 cm

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $a = b = c = 6\ cm$

d) $a = 10\ cm ;\ ß = 45° ;\ \gamma = 90°$

۴ – د هوارې اندازولو بل امکانات داسی په نامه د هیرون لیما ورکوي(د سکندریي هیرون Hronsche Dreiecksformel). که دري اړخونه معلوم وي ، نو هواره له لاندې فرمول څخه تاکل کیږي

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

د $s = U/2 = (a+b++c)/2$ سره

د هوارې شمیرنی لپاره د په باندې ګردی همداسی دننه ګردیو وړانګو څخه هم کار اخستل کیدی شي.

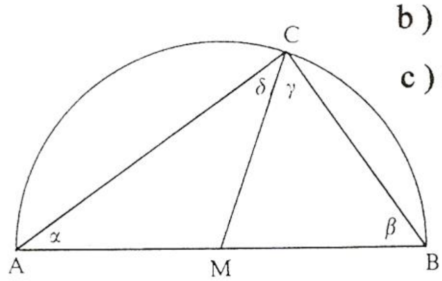
$$F = a.b.c / 4r = s.\rho = \rho .U/2 = \frac{\rho . U}{2}$$

دلته د دننه ګردی او r د دباندې ګردی وړانګی دي. لاندې ټولی پاتی یا نامعلومی لویي د ټولو دریګوډیو لپاره وټاکی :

a) $a = 3\ cm ;\ b = 4\ cm ;\ c = 5\ cm$

b) $a = 5\ cm ;\ b = 7\ cm ;\ U = 20\ cm$

c) $s = 17\ cm ;\ \ = 5\ cm ;$
$h_a = 13\ cm = h_b$

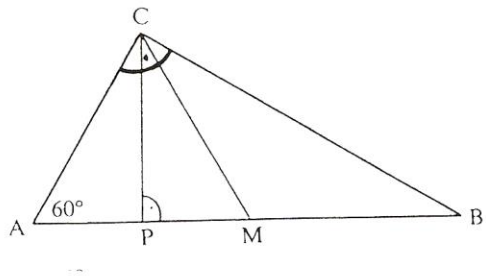


خیره ۸۲

۵ – د هندسی له لارې د لاندې څیرونو په مرسته د تالس جمله وښایی.
(څیره۸۲)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ – څیره ۸۴ یو ولاړکونجیز دریګوړی
ښایي د کونج = 90° سره، وښایي
چې کرښې $\overline{CP}$ او $\overline{CM}$ کونج په
دري مساوي برخو ویشي.



څیره ۸۳

۷ – وي دې a,b,c د پیتاګوراس
(فیثاغورس) ګڼون دریګونی.
وښایي : (n>m)

a) $a = 2n + 1$; $b = 2n^2 + 2n$;

$c = 2n^2+2n+1$

b) $a = 2nm$; $b = n^2 - m^2$:

$c = n^2 + m^2$

۸ – د ولاړکونجیز دریګوړي پاتې برخې وښایی(ښوونه لکه په لیکنه کې):

a) $h = 4$ cm : $q = 5$ cm ;

b) h) 7 cm; $b = 10$ cm

c) $p = 4$ cm: $q = 12$ cm

۹ – د کانتې یا اړخ یا ژۍ a اوږدوالی څخه د یوه مساوي اړخیز دریګوړي
جګوالی وښایی.

۱۰ – وښایي : په یوه مساوي اړخیز دریګوړي کې د دباندې ګردی
وړانګه $r = (a/3)\sqrt{3} = 2\rho$ ده او له دې سره سم د دننه ګردۍ وړانګه په
لاندې توګه ده: $\rho = (a/6)\sqrt{3} = r/2$.

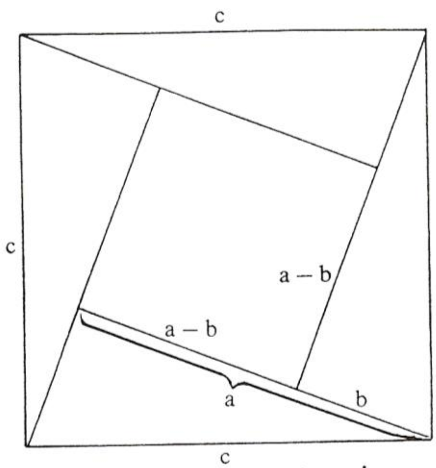
۱۱ – د ورکړشوي هیپوتینوزې سره د یوه ولاړکونجیز دریګوړي هواره کله خورا
لویه ده؟ دا په دې مانا چې بله له دې لویه هواره نه وي.

۱۲ – په یوه ولاړکونجیز دریګوړي کې یوه کانتې یا ژۍ ۳ سانتي متره اوږده ده،
بله نیمه دومره اوږده ده (x) ، لکه هیپتوینوزې (2x) نو x وشمیری.

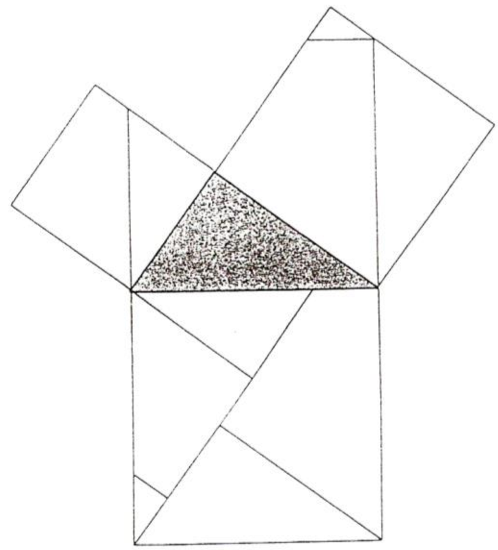
(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ – د یوه ولاړکونجیز مساویپښیز دریکونجي هیپوتینوزې c = 10 cm ده، کیدی شي له دې څخه د یوې پښې اودوالی وشمیرل شي؟

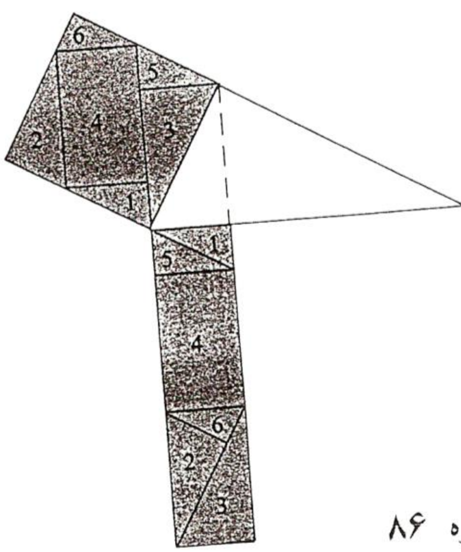
۱۴ – د لاندې څیرو په مرسته دې د پیتاګوراس درسي جمله وښوول شي:



څیره ۸۴



څیره ۸۵



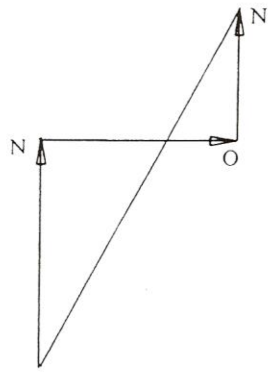
څیره ۸۶

۱۵ – د یوې مربع څخه چې د یوې کانتې یا ژۍ اوږدوالی یې ۵ سانتي متره وي، یو مساوي هواریز ولاړ– کونجی جوړ کړی، چې د یوې ژۍ یا اړخ اوږدوالی یي ۴ سانتي متره وي:

الف) د کاتیت له جملې سره

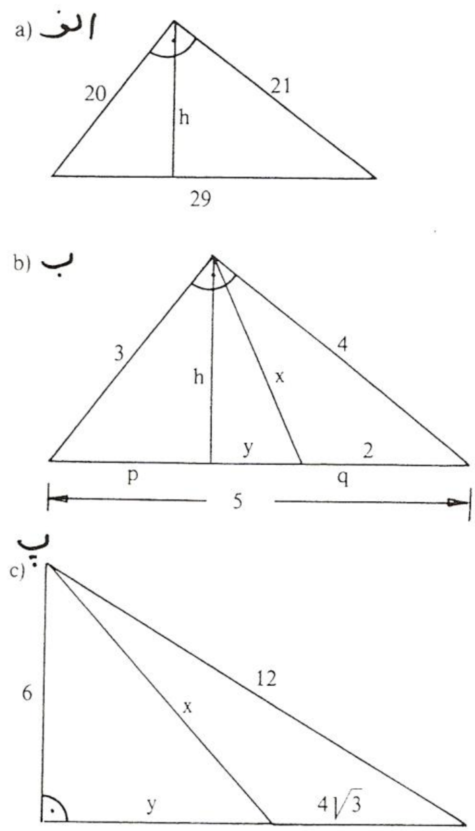
ب) د جګجملی سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۸۷

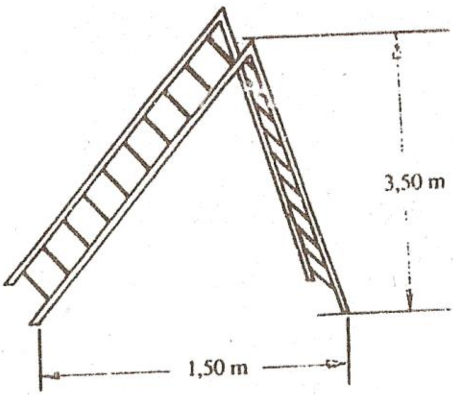
۱۶ – د کاتیت جملی صدق د
خیرونی په مرسته، د برخه
هوارو د مساویوالی ښوونی
له لارې وښایي« (خیره ۸۶)
۱۷ – په برخه دریګوډیو MPC
(خیره ۸۶/) د پیتاګوراس جمله
استعمال کړی، او په دې بنسټ
د پیوتاګوراس جمله وښایي .
۱۸ – د مساوي‌پښیز ولاړکونجیز
دریګوډیوپښی داسی راکړ شوې
الف) ۶ سانتي متره»
ب) ۸ سانتي متره ،
پ) x سانتي متره، هره اړونده
هیپوتینوزې څومره اوږده ده؟
۱۹ – یو موټر ۷ کیلو متره د سهیل لور
ته او ۶ کیلومتره ختیز لور ته او بیا
۴ کیلومتره د سهیل لور ته ځغلي.
دا موټر د خپل وتلځاي څخه څومره لرې
دی؟ (خیره ۸۷)
۲۰ – د خپل وتلځاي څخه به څومره لرې وي،
که نور هم ۴ کیلو متره د ختیز لور ته
وځغلي؟
۲۱ – دا نامعلومی کربنی په خیره ۸۸کی
وښایي.



خیره ۸۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – یوه دیوال ته ۵ متره اوږده زینه
ایښول شوې د زینې بیخ له دیوال
۴ ، ۱ متره واټن لري زینه څومره
جګه رسیږي؟



څیره ۸۹

۲۳ – د یوې نقشې، چې د ۱۰۰۰۰۰ : ۱
اندازه ده یو د پلو لار غزیدلي ، چې
د نقشې اوږدوالی ۷ ، ۰ سانتي متره
دی د ځنګلاینونو ۲۵۰ متره او ۴۵۰
متره سره . دا د پلو لار په ریښتونی
څومره اوږده ده ؟

۲۴ – د یوه کور بنسټ فورم یو مساوي‌پښیز
دریګوډی دی
الف) د ۹ سانتي متر په سور یا بر او
جګوالی ۶ ، ۰ سانتي متره د چت له
پورته ژی تر ناوی پورې .
ب) د یوه ۹ متره په سور او۵،۳
متره Sparenlänge د بنسټفورم ۶،۵ متره
جګوالي سره د بنسټفورم سور وشمیرئ.

۲۵ – په یوه رامارته زینه کی ټولی پوړی مساوي
اوږدوالی لریهغه په څیورونه ۶۴ کی کښېښل
شوي د پوړیو واټن وشمیرئ.

۲۶ – پو یوه مساوي پښیز دریګوډي کي چې
چاپیری یی ۲۵ سانتي متره دی او جګوالی
یی ۲ سانتي متره له بنسټ اړخ څخه کوچنی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړخونه څومره اوږده دي او جګوالی یی څومره اوږد دی ؟

۲۷ – هر یو ټال په زوړند ځغلول شوي رسی تړلی، چی د تړلو ټکی یي د یوه مساویپښیز دریګوډي کونجټکي دي. که وزنوړونکی ۶ متره اوږد او ۱ متر یو له بل لرې په کښتنی تړلي وي، نو کښتنی ټال څومره لرې ټال وهلی شي، که دریګوډیبنسټ منځټکی د لار جګ ټکي کی ۲،۵ متره د خپل ژورځای څخه جګه وي ؟

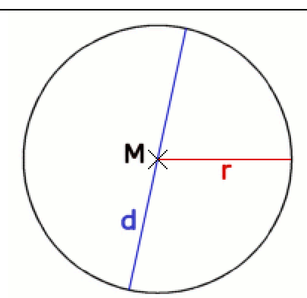
۲۸ – کوم یو د لاندې دریګوډیو څخه نه شي کښل کیدی؟

a) a = 3 cm; b = 4 cm ; c = 6 cm b) a = 5 cm ; b = 9 cm ; c = 7 cm c) a = 7 cm ; b = 4 cm ; c = 2 cm

d) a = 12 cm ; b = 13 cm ; c = 1 cm

۲۹ – ولی درې اړخیز دریګوډی هیڅوخت ولاړکونجیز دریګوډی نه شي کیدی؟

ګردی (دایره)

	پیژند یاتعریف د یوې هوارې ټول هغه ټکی، کوم چی له یوه ټکی داسی په نامه منځټکي M څخه همغه- یا برابر واټن r (په نامه وړانګه) ولري، ګردی لاین یا لنډ: ګردی بلل کیږي (مخامخ ځیره) $k = \{X \in E \mid \|\overline{MX}\| = r\}$ ګردی سطحه یا - هواره او ګردی چاپیریال یا - محیط

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پام کی دی وي، چی د ټولو هغو ټکو ډیری، چی واټن یی له M څخه د r کوچنی یا د rسره برابر وي ګردی (موخه ترې ګردی منځهواره ده یا ټیك : ګردیټوټه ځما په پام به بهتره وي که دا ګردیچیترو یا لنډ : چیترو، چې موخه ترې یواځې منځهواره ده، وبولو) بلل کیږي

پیژند: لکه د مخه مو، چې په ګوته کړه، هغه کرښه چی د ګردی ژی یو ټکی د منځ ټکی سره تړي، هغه د ګردی وړانګه یا لنډ: وړانګه بلل کیږي، چې په r سره یې ښایو.
پیژند: او هغه کرښه، چې ګردی نیموي د ګردی نیمونکې کرښه یا لنډ: نیمی (قطر) بلل کیږي او په d سره یې په نخښنه کوو.

پیژند
دګردی دننه کونج پوره کونج ۳۸۰ درجي لري.
ګردیچاپیریال د وړانګې r سره په لاندې ډول ورکړ شوی دی

$$u = d \cdot \pi = 2r \cdot \pi$$

او همداسی ګردیمنځهواره د وړانګي r سره په لاندې توګه ورکول کیږي

$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

$$d = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2r$$

دا لاندې ورکړشوی ګڼ ګردی ګڼ بلل کیږي
: $\pi = 3,14159265$

یادونه: دا چې ما کله هواره یا سطحه په A یا F او π مې په Pi نخښنه کړې، دا به هیله ده کرانو لوستونکو ته ستونځې پېښې نه کړي.
په پورته کې ورکړ شوی ګردی ګڼ « پي » ګورو، چې بیرته راګرځیدونی دی. له دې امله یو ایرشنل ګڼ دی او د مات په څیر نه لیکل کیږي، بلکه له لسمیز (عشاریه) وروستی پریودي کیدونکی ځیفر پرلپسی دی. په کارونه کې یی موږ نزدې شمرنې ته مجبور یو، ځکه چه د جبشمیري د ګنځایونو له امله، چې پای دي یا پوله لري یا رابند(محدود) دي.

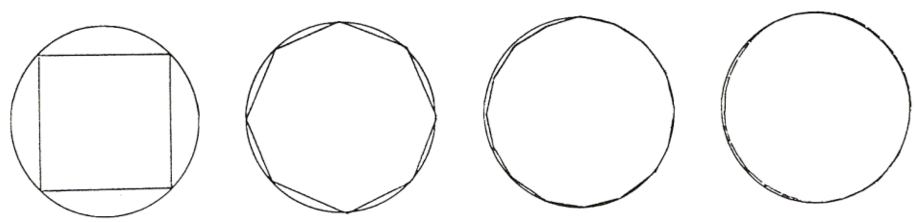
ځنګه سړی په دې بریالی شو چی دا ګڼ پیدا کړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا لار دې په لاندې کی لنډه ورکړ شي:

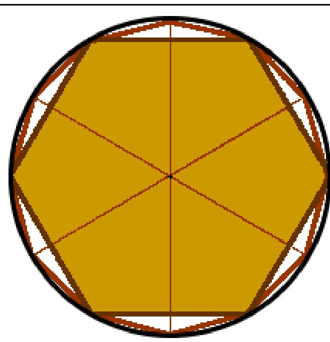
دا له ارښیمدس څخه پیل کارونه (عملیه) یا تګلار   داسی پیل کیږي، چې په ګردۍ کی یو ه څلورۍ یا مربع راګیروي یا رابنده وي او بالاخره یې په منځنیو ولاړو سوکځیسیف یا یو په بل پسی ۸ ، ۱۶، ۳۲ او داسی نورو، لوړ یا جګ کړي یعني په همغه وخت کی دوه برابره کړی .

خیره ۱۱۹



یوې ګردۍ ته د یوه n –ګوډي له لارې نزدیونه (نزدې کیدنه)

خیرې ۱۱۹ جناځي جې

	په مخامخ خیرو کې نهه ګوډۍ ورپسې شپږګوډۍ کښل شوي، دي ته ګورو، چې څنګه ګردۍ ته نزدې کیږي

په پورته خیره څو څوګوډیز بریښي او ستره تری راتاو ګردی

پورته خیرو کې یوې ګردۍ ته د یوه n -ګوډي له لارې نزدیونه (نزدې کیدنه)

کتل کیږي، هغه ٦٥٥٣٧ ګوډۍ، چې ګورو نزدې یا تیک ګردۍ ده)

د زیاتیدونکي n سره کانتی یا ژۍ یا اړخونه تل کوچني کیږي، چې پخپله له ۱۰۰ یا ۱۵۰ ور رسونو ته په یوه پانه کی د کښلو یا رسمولو څخه وځي یا نه کښل کیږي، په همدې وخت کی د منځنکی څخه د په همغه واټن د تکو ګنون یا تعداد زیاتیږي (یعنی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګوډټکوتعداد یا ګڼون) د مربع پیلګردۍ سره دا څیره تل نزدې کیږي. په ورته توګه د دې چاپیریال او منځهواره هم همغه چاپیریالګردي ته نزدې کیږي. د ګوډټکو زیاتیدو سره د ګردۍ وړانګه هم لوییږي. د هغو چاپیریال او منځهواره تل همغه ډیر کونجی او په همدې توګه د چاپیریالګردي څخه. په روښانه توګه لیدل کیږي چی د چاپیر یالګردۍ او د منځ هوارې د ناپاى ډیر n ګوډونو سره د n - ګوډي سره یوځاي پریوځي یا یوځاى کیږي.

په لاندې جدول کی د چاپیریال ارزښت او په همدې توګه د منځهوارې ارزښت د زیاتیدونکي n ګڼ سره ستابیل (په خپل حالت، چی ډیر تغیر په کی نه راځي) پیژندوړ دی:

منځهواره Fn	چاپریال Un	پیدایښتي ګڼ n
2	5,656854	4
2, 828427	6,122934	8
3,061467	6,242890	16
3,121445	6,273096	32
3,136548	6,280662	64
3,140331	6,282554	128
3,141277	6,283027	256
3,141572	6,283145	512
3,141572	6,283175	1024
3,141587	6,283182	2048
3,141591	6,283184	4096

وروسته به وکتل شي چی څنګه د ګردۍ چاپیری او ګردۍ منځهواره د تریکونومتري یا دریګوډیکچ له لارې ټاکل کیدی شي

پیلبیلګه:

د بانك مدیر ښاغلی کړاو غواړي د کنفرانسونو لپاره یو د ښیښي میز جوړ کړي چی په هره لور یی ۸ کسان ځاي نیولی شي. ایا ددې لپاره یو میز چی ۲ متره نیمی(قطر) ولري

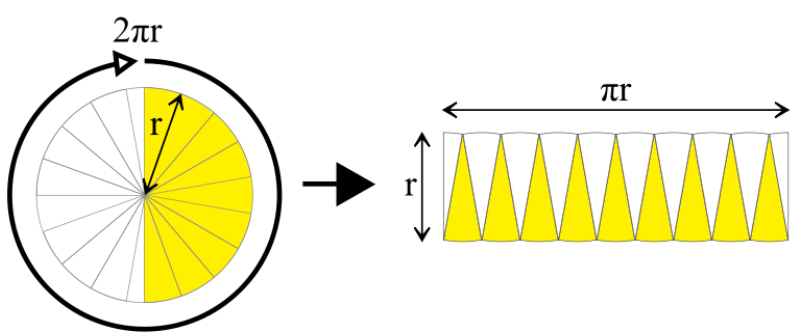
(c) ketabton.com: The Digital Library

بسيا کوي، که د يوه نفر لپاره له ۷۵ څخه تر ۸۰ سانيمتره د ميز په سور، ځاي په پام کی نيول شوی وي؟ دا ميز به څومره ګران وي، که يو څلوری متر يا مترمربع د کار د معاش سره ۲۵۰ مارکه ګران وي يا ۲۵۰ مارکه ارزښت ولري؟

دميز چاپيريال دی U = pi.1m=6,248m² په د هرکنفرانس برخوالو لپاره ۷۵ سانتي متره سرورځاي په پام کی وي، نو د ميز چاپيريال دی : 8.75= 600cm

د ۸۰سانتيمتره ځاي د نفر په سر 80.8 = 640cm . منځ ازښت يې 6,2m دی. پس د نېکو هيلو سره ټول خاي نيولی شي
مېز دا هواره لري: $F = \pi.1m = 3142m^2$ او له دي امله 3,142.250=785,40 ياني الماني مارکونه ازښت لري..

په لاندې څيره کې کتل کيږي، چې د ګردی منځهواره نزدې



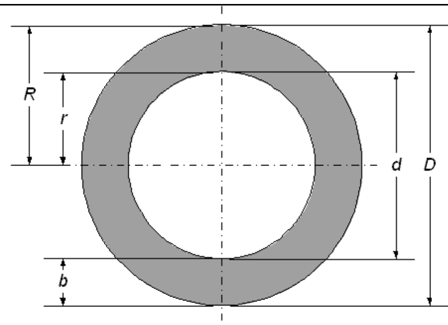
$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

ده (په پورته څيره کې د څيرې کوچنيوالي له امله د ګردی څيره لږ تخريب شوه، خو دا ستونځې پوهوړ دي٠

ګردنېوتېه او ګرديبرخه، ګرديکړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډیر وخت دننه- یا خوندیګردۍ له چاپیریالګردۍ کوچنۍ وي. نو له دې امله د دوي ترمنځ یوه کړۍ منځ ته راځي، چې د هغي منځهواره د دواړو ګردیو د کمون یا توپیر څخه شمیرل کیږي٠

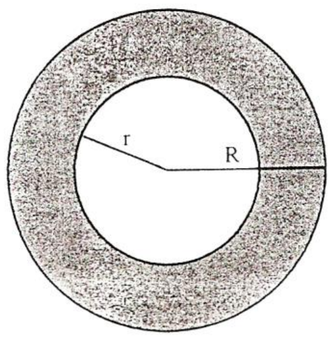


جمله : موږ دوه ګردۍ لرو، چې د چاپیریالګردۍ یا دباندې ګردۍ وړانګه R او د دننه ګردۍ یا خوندې ګردۍ وړانګه r ده، نو د

$$F_K = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$F_K = \pi (R^2 - r^2)$$

$$F_K = \pi (R - r)(R + r)$$



خیره ۱۲۰

بل ډول یې: یوې ګردیکړۍ منځهواره ده

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

همداسې کیدی شي، چې د ګردیکړۍ منځهواره د ګردیبرخي د سور او دننه او دباندې ګردۍ د نیمیو څخه هم وشمیرل شي، چې په لاندې کې یې ګورو:

$$A = (D - b) \cdot b\pi$$

پیلبیلګه:

د کړاو میز درز پیداکړ. چی له غاړې یا ژۍ پنځه سانتي متره دننه لور ته ځغلي. ښاغلی کړاو فکر کوي ، چې که دامیز په پنځه سانتیمتره کوچنی کړی . کوم میز هواره پاتي کیږي او ګردیکړۍ چی له منځه ځي څومره لویه ده؟

او د همغه پیل نیونی سره لکه د مخه څومره نفر اوس په میز ځاي نیولی شي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

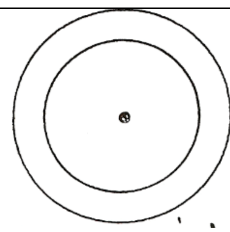
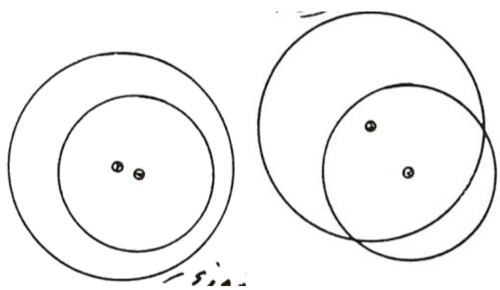
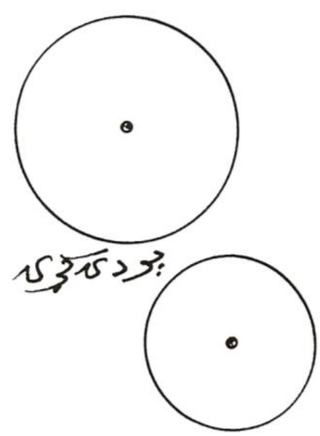
$F = (0,9m)^2.Pi = 2,835m^2$

د گرديکړی منځهواره او چاپيريا په لاندې ډول دي

$F = 1,95m.0,05m.Pi = 0,30m^2$

$U' = 2,095m.Pi = 5,969m$; $U' :8 = 74,6$ cm

د داسې لړ ستونځو سره بيا هم ټول کسان پر ميز ځاي نيولی شي۰

هغه گردۍ، چې منځټکي يې يو پ بل پريوځي کونځنتري يا راټول يا يومنځي بلل کيږي او پرته له دې دکسځنتري يا نه يومنځي بللکيږي.	
تر هغې چې يوه گردۍ ټوله په بله کې پرته وي، يدی شي چې د راکښلو له لارې په يومنځي يا کونځنتري گرديو بدله شي	 دا يو نايومنځي گردۍ دي
	

هغه دوه يا زياتې گردۍ چې منځ ټکي يې يو په بل پريوځي کونځنتري Konzentrie يا راټول او په غير له دې اکسځينتري Exzentrieيا ناراټول بلل کيږي .تر څو يوه گردۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټوله په بله کی پرته وي کیدی شي چی د راکښلو له لارې په کونخینتري ګرديو یا راټولګرديو بدلی شي.

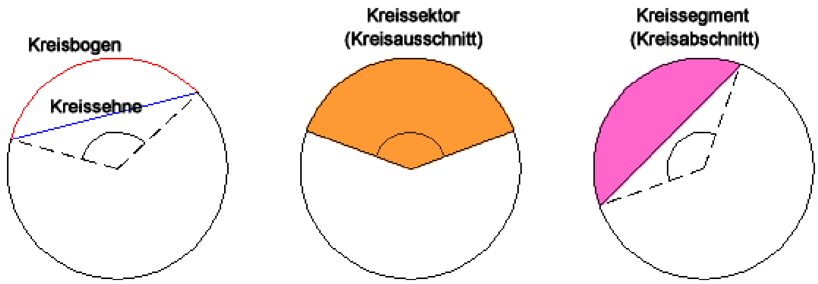
که ګردی یوبل پوره پټې نه کړي، نو د ګډو هوارو یا سطحو(= غوخډيريو) یا ګډو پاتې یا باقي شمیرنه له ستونځو   سره مخامخ کیږي .که ګردۍ یو له بل سره ګډ ټکي ونه لري نو دا ګردۍ یو دبل سره پردۍ بلل کیږي٠

څو پیژندونه یا تعریفونه:

د ګردۍ هغه برخه ګرديټوټه (سګمنت) Segment/ Abschnitt بلل کیږي، که چیرې یوه ګردۍ د یوې کرښی له لارې یا کرښه باندې غوڅه شي . داسی یوه کرښه غوڅکرښه یاغوڅوونی یا ټوټه وونې (سیکانت) Sekante بلل کیږي. غوڅکرښه ګردی په دوه ټوټو ویش. که دا کرښه د ګردۍ له منځ څخه تیره شي، نو ګردۍ په دوه برابرو برخو ویشي، چې دا بیا ګردۍ نیموونې بلل کیږ. هغه غوڅوني چی له منځ ټکي تیره شي، د ګردۍ نیمی یا لنډ: نیمی بلل کیږي. که ګردی په یوه ټکي کی لمس کړی نو دا کرښه تانجنت بلل کیږي او که له ګردی څخه دا کرښه دباندې تیره شي نو تیریدونی کرښه بلل کیږي .په ګردۍ د غوڅکرښی دننه پرته برخه د ګردۍ ټوټوني   (Sehne) یا وتر بلل کیږي   .ټوټونی یا Sehne بندکرښه ده په داسی حال کی چی غوڅی ، تنجنت او تیریدونکی ناپاې کرښي یا -لکه، چې ورسره بلد یو - کرښې دي .د یوه ګردۍ څخه د دوه وړانګو په مرسته کیدی شی یوه برخه راغوڅه شي دا برخه ګرديبرخه یا سکتور Sektor بلل کیږي. د منځټکیکونج یامنځني کونج   او لیندې   (Bogen)   b سره. مخامخ څیره ده

په لاندې څیرو کې د نومونو له الماني څخه په پښتو کوونه له کیڼ وښی لورته:
ګرديلینده Kreisbogen   د ګردۍ ټوټه وونې(ټوټوونې)   Kreissehne   ،
ګردی برخه   Kreissektor ،

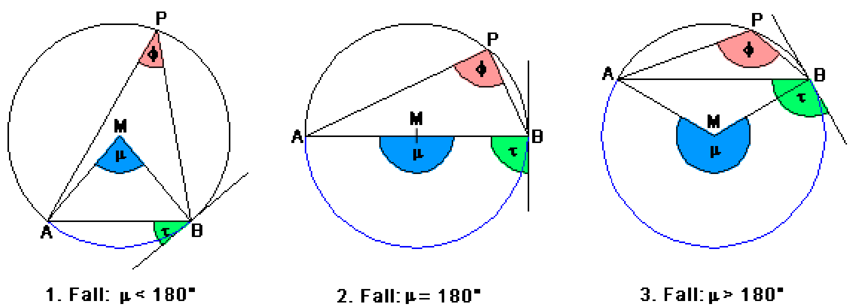
(c) ketabton.com: The Digital Library



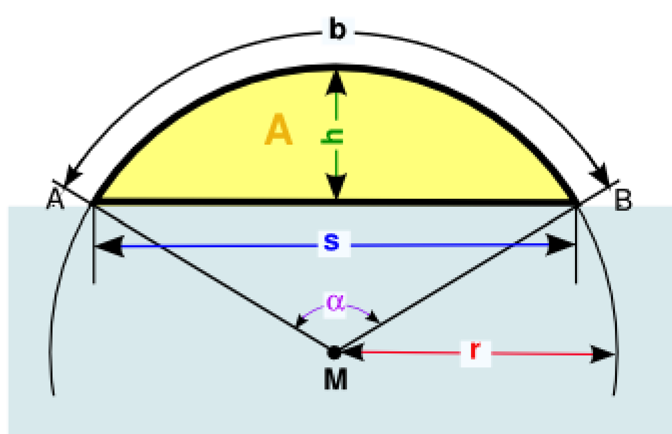
د

پورته ژباړه له کيڼ خخه و ښي لور ته: ګردی- لينده ټوټه ووني، ګردي برخه، ګردی ټوټه
.

په ګردی کې د کونجونو ډولونه:



د ګردی ټوټه



(c) ketabton.com: The Digital Library

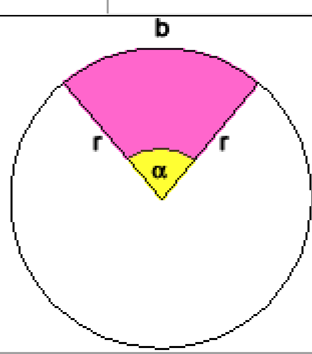
گردی ټوټهKreissegment ,
د گردی ټوټی لویې:

- α = منځټکیکونجMittelpunktswinkel
- b = گردیلیندهKreisbogen
- h = ټوټې جگی Segmenthöhe
- r =وړانگه Radius
- s = گردی ټوټه وونې یا - وتر Kreissehne
- A = ټوټې هواره Segmentfläche
- M = گردی - منځټکی Kreismittelpunkt
- Verbindungترنه A-M-B = برابرپېنیز درېگوډی
-

د گردیټوټې فرمولونه	
!Error $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\alpha,$ $A = \frac{r \cdot b}{2} - \frac{s \cdot (r-h)}{2},$	سطحه مخامخ فرمول Flächeninhalt
$r = \frac{4h^2 + s^2}{8h}$	وړانگهRadius
$s = 2r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$ $s = \frac{2h}{\tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)} = 2h \cdot \cot\left(\frac{\alpha}{4}\right)$	Kreissehne گردی ټوټه وونې (د وروسته لپاره دې په پام کې وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$h = r - \left(r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right),$ $h = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2},$ $h = \frac{s}{2} \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)$	Segmenthöhe د توتي جګوالی
	$b = 2r \cdot \frac{\alpha \cdot \pi}{360°},$ $b = r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{180°},$ $b = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot (4h^2 + s^2)}{1440h},$	دلينديِ اوږدوالی Bogenlänge
	$\alpha\ ,$ $\alpha\ = 4 \cdot \arctan\left(\frac{2h}{s}\right)$	Mittelpunktswinkel منځټکيکونج په درجه کچ (Gradmaß)

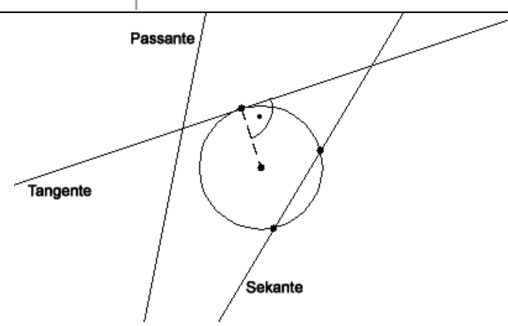
	Kreissektor کردی برخه يا قطاع

د کردی برخي يا قطاع فرمولونه	
!Error $A = \frac{\alpha}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi$	سطحه يا منځهواره Flächeninhalt

(c) ketabton.com: The Digital Library

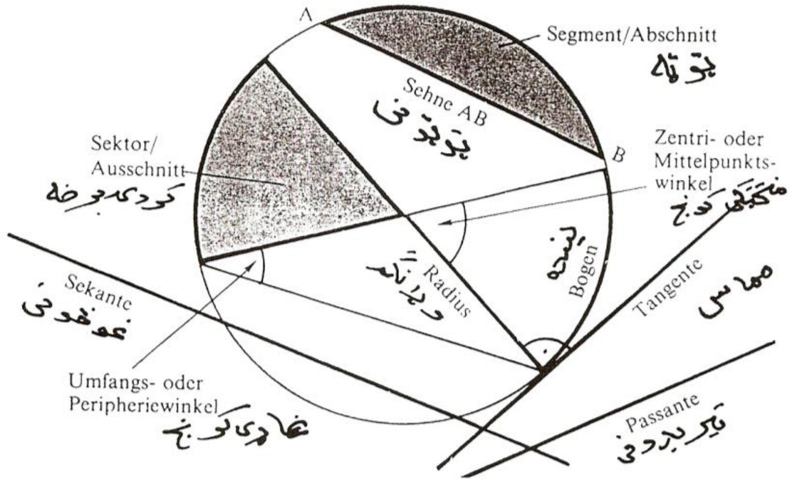
د ګردی لیندۍ اوږدوالی	$b = \frac{\alpha}{180°} \cdot r \cdot \pi$
Radiusوړانګه	r
Mittelpunktswinkel (Gradmaß)منځټکیکونج(په درجه کچ)	α
Kreiszahlګرديګڼ يا - عدد	!Error $\pi \approx 3{,}1415926536$

په لاندې خيره کې نومونه: تيريدونی Passante ، تانجنت يا مماس Tangente، غوڅوونی Sekante، لاندې خيره کې خو هرڅه روښانه دي.

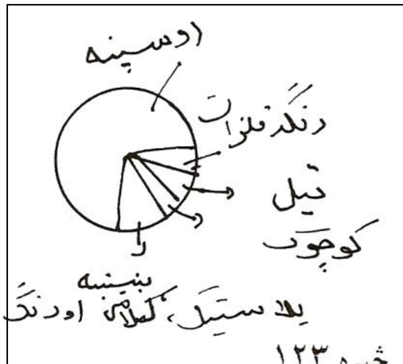


د پورته خيرې کې راوړي څه په لاندې خيره کې ټول په لاندې خيره کې ورکړل شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



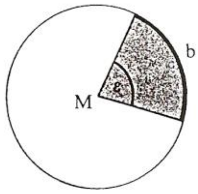
پيلبيلګه: د يوه بنس موټر جوړولو لپاره ۱۷۵۰ کيلوګرامه اومه(خام) مواد په خرڅ رسيږي يامصرفيږي. په دې کی اوسپنه او فولاد ۷۵ په سلو کي ، په پالستي، ښيښي او رنګ ټول ۹ په سلو کی رسيږي، په رنګه فلزونو او ربړ ۶ په سلو کی رسيږي، او تيل ۴ په سلو کی . يو ګرديدياګرام وکاږئ چی هره برخه په کې ورکړ شوي وي .د ګردي ټوله هواره د ټولو موادو سره مساوي دۀ) ۱۰۰ په سلو کی (د جوړموادو برخه د ګردبرخی څخه عبارت دئ. يوه د يو په سلو کی برخه به يوه ګردئبرخه وي د منځکونج سره $360°:100=3,6°$ وی .

	يعني $4\%\sim14,4°;6\%\sim21,6°;9\%32,4°;75\%=270°$ څيره دی، چې د هرڅه برخه کې ورنزدې ښوول شوې وي په يوې ګردئ کې وکښل شي يا لاندې

د ګردئ برخې څيره څرګندوي» د منځکونج چې د ، ε سره يې په نخښنه کوو لويوالي

په تناسب برخهواره Fsk او هم لينده b تغير خوري او لاندې باوري دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\frac{F_{SK}}{F}=\frac{b}{U}=\frac{\varepsilon}{360°}$	 ε لويوالي b ده ټکی دیوه یا ګردی راغونځی

د ډبل برابرون د دويمې برخې څخه باوري دي:

جمله : د ګردی برخې د ليندۍ اوږدوالی داسی دی:

$$b=\frac{n.\varepsilon}{360°}=\frac{2\pi r.\varepsilon}{360°}=\frac{\pi r\varepsilon}{180°}$$

د لومړی برخی څخه د سيکتور يا ګرديبرخی لپاره باوري کيږي

جمله: د سيکتور يا د ګرديبرخی منځهواره په لاندې ډول ده:

$$F_{Sk}=\frac{F.\varepsilon}{360°}=\frac{\pi r^2.\varepsilon}{360°}=\frac{rb}{2}$$

اړيکي $F_{Sk}=\frac{rb}{2}$ د مات $F_{Sk}=\frac{F.b}{n}=\frac{\pi r^2 b}{2\pi r}$ د لندوني څخه منځ ته راغلي

بيلګه: د خام موادو برخی (بيلګه مخ) هواره څومره لويه ده، که د ګردی دياګرام **۵** سانتي متره وي ؟

F اوسپنه او فولاد = (25 π : 360°).270 = 0,218.270 = 58,905 cm^3

F پلاستيك = 0,216.32,4 = 7,069 cm^3

F رنګه فلزات = F ربړ = 0,218.21,6 = 4712 cm^3

F تيل = 0,218.14,4 = 3,142 cm^3

د ټولو ټوله يا د ټول زياتون بايد د ګردی سطحه يا هواره ورکړي:

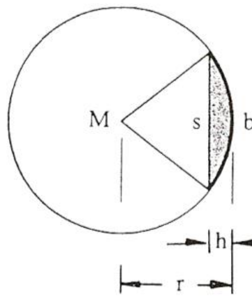
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F = \pi r^2 = 78,54\ cm^3$$

د برخهوارې ددې فرمول سره نور د برخهوارې شمیرلو لپاره هم کوم جنجال یا پرابلم نه شته. د اخرنی هواره دلته بیا د برخهوارې او د دوه وړانگو او ټوټونی څخه جوړ مساوي پښیز دریگوډي کمون دی.

څیره ۱۲۵

گردکه ټوټه



د دریگوډي هواری لپاره باور لري:

$$F = s(r - h) / 2 = 0,5\ r^2 . \sin \varepsilon$$

(تریگونومتري دی وکتل شي ....) او
او د دې سره ټوټه سطحه یا هواره

جمله: د گردیټوټی یا سگمنت هوارې په لاندې ډول دي:

$$F_{Sg} = F_{Sh} - F$$
$$F_{Sg} = (br/2) - s(r - h) / 2$$
$$F_{Sg} = (\pi r^2 \varepsilon / 360°) - (r^2 \sin \varepsilon)/2$$
$$F_{Sk} = (r^2/2) [\pi \varepsilon /180° - \sin \varepsilon]$$

په کارونه یا عمل کی د ټوټه هوارې لپاره گټور نزدې ارزښت $F_{Sg} = (2/3)sh$ ښوول شوی دی.

پیلبیلگه: مدیر کړاو له ځان څخه پوښتي چی ایا د گردیمیز په ځاي به یو منظم اته کو نجی هدفمند بهتر نه وای؟ نو په اختیار کي هواره او چاپیری به څومره لوي وي؟
لمړی گردیټوټی شمیرو. په ورته ډول لکه د گردي نزدې شمیرلو لپاره، د مربع څخه و ډیرکونجي ته، مخ ته ځو او دې د اړخونو اوږدوالی s شمیرو.

منځولاړه m، د اته کو نجیز کانتی یا ژی k او بالاخره د ګردیتهوتبي جګولی h د پیتاګوراس د جملی په مرسته شمیرو.
لاندې لاس ته راځي:

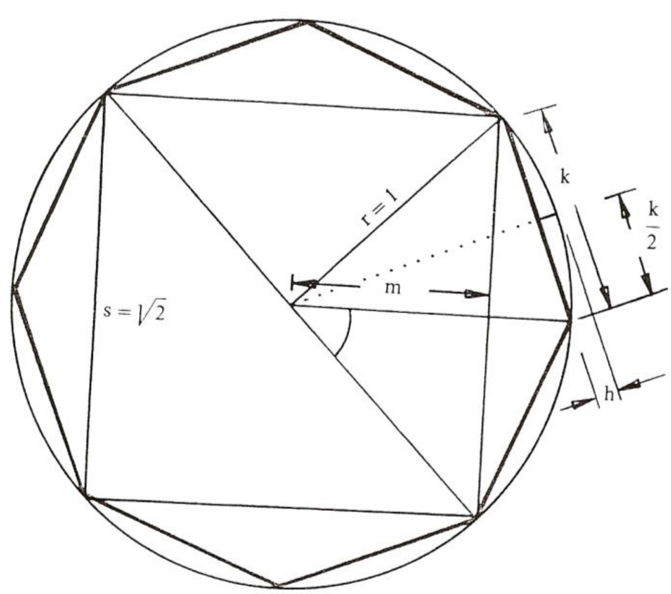
$$s = \sqrt{2} \,.\, 1 = 1,414 \text{ m} \;;\; m = \sqrt{a-(1,414 : 2)^2} = s / 2 = 0,707 \text{ m}$$

$$k = \sqrt{(1 - 0,707)^2 + 0,707^2} = 0,756 \text{ m}$$

$$h = 1 - \sqrt{1 - (0,765 : 2)^2} = 0,076 \text{ m}$$

د $\varepsilon = 45°$ له امله $b = 0,393$ m دی./و له د ې سوه

$F_{\text{توټه}} = 0,5.[0,393.1 - 1,414(1-0,076)] = 0,039 \text{ m}^2$



(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې څخه په هرصورت د ښيښې ميز جوړيږي. ټوله غورزول شوې له دې امله په لاندې توګه ده: $8.0.039 = 0{,}312\ m^2$.ميز اوس لاندې هواره لري

$$F_0 - F_{\text{غورزولشوې}} = 2{,}828\ m^2$$

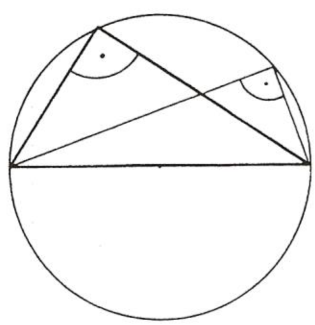
او په همدې توګه لکه د کوچني شوي ګرديهواره د وړانګي $r = 95\ cm$ سره. د کيناستلوځاي سور (k) حتي زيات شوی ، چاپيرى اوس $U = 8.0{,}765 = 6{,}123\ m$

دی. نژديونه هم همدا ارزښت ورکوي: $F = 0{,}765.0{,}076 = 0{,}039\ m^2$ او داسې نور.

تريګونومتريکي حل مو زر هدف ته رسوي:

$$F_{\text{ټوټه}} = \pi.1.45:360 - 0{,}5.\sin 45° = 0{,}039m^2$$

او داسې نور . څيره

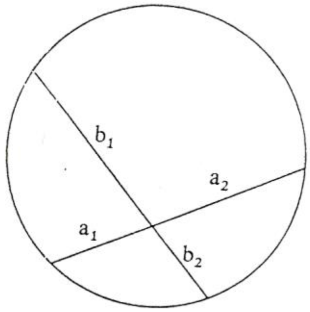


څيره ۱۲۷

ګرديجملې او ګرديخو يونه

د تالس جمله

په نيمه ګردۍ کې هر پريفري– يا ژى کونج ولاړکونج دی(څيره)



$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

د ټوټونى جمله

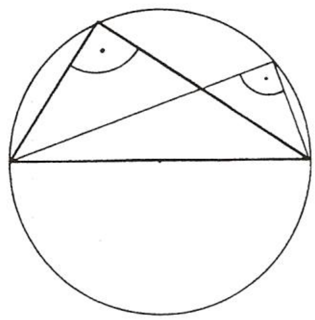
که دوه ګردۍ ټوټونى په ګردۍ کې دننه يو بل غوڅې کړي نو د غوڅبرخو

(c) ketabton.com: The Digital Library

تريګونومتريکي حل مو زر هدف ته رسوي:

$F_{ټوټه} = \pi.1.45:360 - 0,5.\sin45° = 0,039m^2$

او داسې نور . ښيره

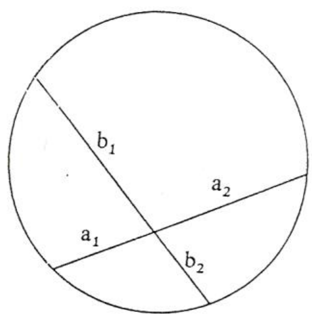


ښيره ۱۲۷

ګرديجملی او ګرديخو يونه

د تالس جمله

په نيمه ګردۍ کی هر پريفري- يا ژی کونج ولاړکونج دی(ښيره)

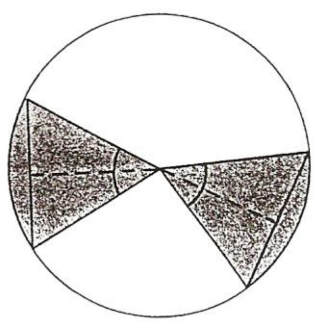


$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

ښيره ۱۲۸

د ټوټونی جمله

که دوه ګردۍ ټوټونی په ګردۍ کی دننه يو بل غوڅی کړي نو د غوڅبرخو ځل (ضرب) يی يو ثابت دی



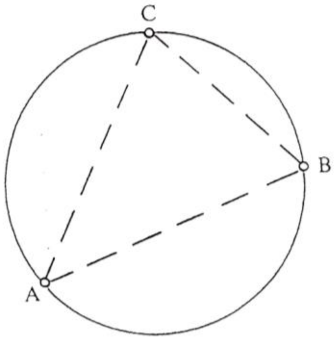
ښيره ۱۳۱

د مساوي ټوټوونو جمله

مساي اوږدې ګرديټوټی د ګردي له منځټکي مساوي فاصلی لري، مساوي منځټکي کونجونه، مساوي ګرديلينده، او مساوي ګرديټوټی او مساوي ګرديبرخی لري .

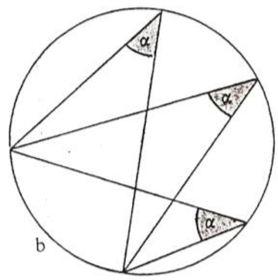
(c) ketabton.com: The Digital Library

د چاپیرګردی جمله

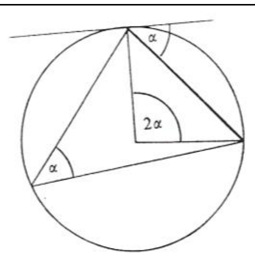


د درې ټکو A, B, C لپاره یوه ګردی موجود ده چې د دریواړو ټکو څخه تیریږي:
دا د دریکونجي ABC چاپیرګردی بلل کیږي
ځیره

د پریفري – یا ژیکونج جمله



ځیره ۱۳۳
په همغه لینده باندې ټول
پریفري – ژی کونجونه مساوي دي

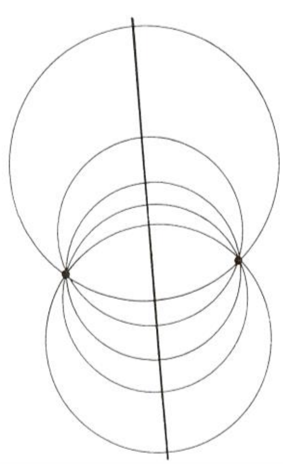


د منځېټکي کونج او پریفري – یا ژی کونج جمله:

یو منځېټکي کونجدوه برابره دومره لوي دی لکه په دې تړلی پریفري – یا ژی کونج(چاپیریالکونج) مخامخ ځیره.

د منځېټکي کونج او د تانجنت کونج – او ټوټونکونج جمله:

د منځېټکي کونج دوه برابره دومره لوی دی لکه په دې اړوند تانجنت – یا ټوټه وونې کونج.

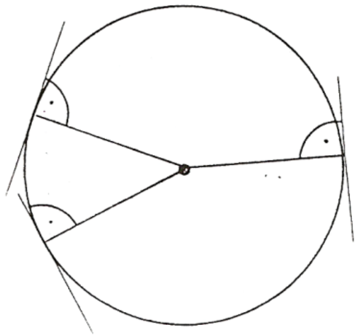


د ګردیو جمله چې په دوه ټکو کې سره غوځوي:

د ټولو ګردیو یا دایرو منځېټکي کونج چې یو بل دوه ټکو او کې غوځوییو ناپای کرښه باندې، چې ځایلاین (ځایکرښه) وایي پراته دي. مخامخ ځیره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګې او تنجنت جمله



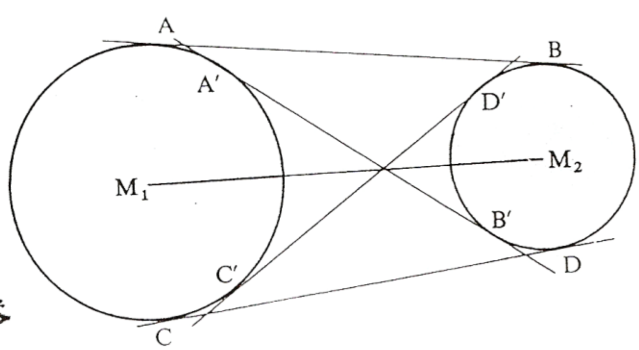
شیره ۱۳۶

په لمستګي پرته وړانګه او اړوند تانجنت سره یو په بل ولاړ یا نیغ پراته دي.

د تانجنت جمله:

د دوه ګردیو د منځ ټکو M_1 او M_2 سره تانجنتونه دنننی (دباندني) تانجنتونه نومیږي که د دوه ګردیو د منځټکوکرښه $M_1 M_2$ غوڅه (غوڅه نه) کړي. که چیرې دوه ګردي ګډ دنننې او دباندني تانجنتونه ولري، پس د داوړو تانجنتونو غوڅټوټې همغه اوږدوالی لري.

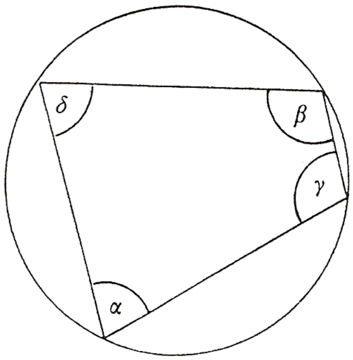
$|AB| = |CD|$ په همدې ډول (<=>) $|A'B'| = |C'D'|$



شیره ۱۳۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

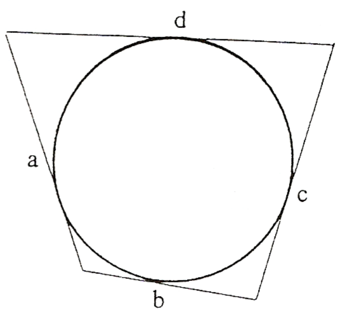
د ټوټوونو څلورګوټي جمله



خیره ۱۳۸

د ټوټونوکونجونه چې مخامخ پراته دي یو بل سره 180° باندې پوره کوي.

$\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180^\circ$



خیره ۱۳۹

د تانجنتونو څلورګوټي جمله

د تانجنتونو په څلوکونجي کی د مخامخ کونجونولویوالی د نورو مخامخ کونجونو سره مساوي دی.

$a + c = b + d$

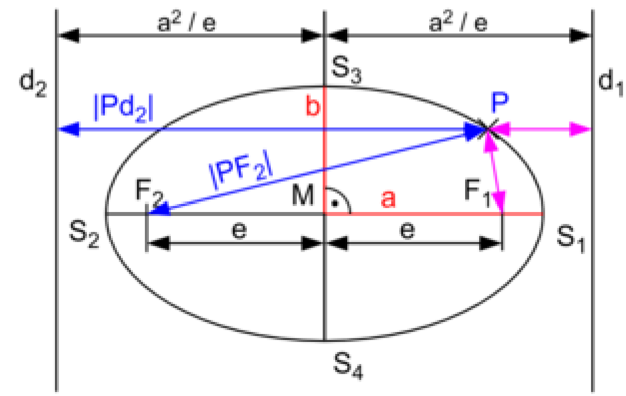
ایلیپسی(بیضوي یا هګی) (دلته موخه هواره ده) Ellipse

پیلبیلګه:

د کړاو میز جوړښت باندې موږ په اته کونجي اوبی یا حل کی تم کړی وو. دا چی په دې ډول یو میز سره تل د زخمي کیدو خطر موجود دی

پوښتنه رامنځ ته کیږي چی : داسی یو را ګردشوی ښکلی شکل ، چی ګردی نه وي او منظم غوځ وي، شته، چی د کړاو اړتیا پوره کړي؟ په ریښتونی ، داسی یو اوبی یا حل موجود دی، لکه چی لاندې خیره ښایي .چی هر د غاړې تکی دوه تکو واټنونو ته یو ثابت واټن لري

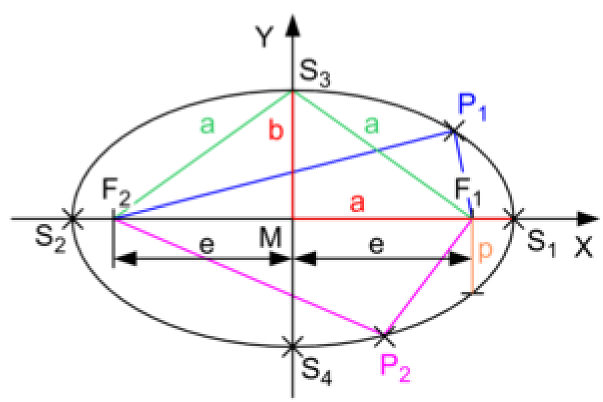
(c) ketabton.com: The Digital Library



پیژند یا تعریف:

د ټولو هغوټکو Pډیري ته چی له دوه ځاي په ځاي ټکو F1 او (F2 سوزېدټکی یا بهتره سوزونټکو(څخه ثابته یا همغه واټن یا فاصله لري، ایلیپسی نومیږي

لاندې واټنونو یا فاصلو ته سوزونوړانګی وايي. $|PF_1| = r_1 \wedge |PF_2| = r_2$



$$E = \{P \mid \left|\overline{F_1P}\right| + \left|\overline{F_2P}\right| = 2a\}$$

منځ ټکي) واړوی M په (Oته د ایلیپسی منځ ټکی وای، e ته د سوزونواټن یا فاصله یا لاینی ایکسځنتریځیتایت (lineare Exzentrizität) یا لاینی ناراټوله وایي .ددې لویو لپاره لاندې اړیکي باوري دي:

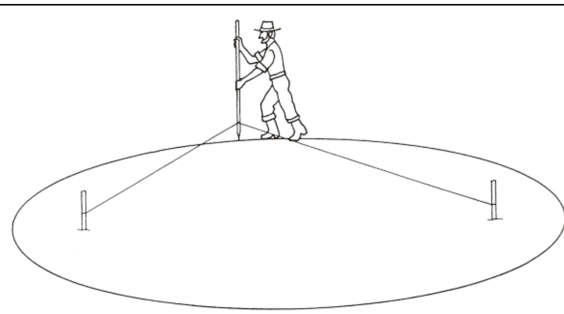
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I........r+r=2a \wedge II........a^2-b^2=e^2$$

په دې کی a او b د ایلیپسی لوي او ووړ نیممحورونه دي. اړیکه I روښانوي، که چیرې د ایلیپسی ټکی P د نیممحور a په اخر کی وټاکل شي، IIد پیوتاګوراس له جملی لاس ته راځي که د P ټکی د b نیممحور په اخر پروت وي .دواړه ناپاګکرښی چی د سوزونټکي تیرېږي او په دې په O کی ولاړه ناپای کرښه د ایلیپسی سیومیتري محورونه جوړوي .د خوښي په ټکی P کي هره په تانجنت ولاړه کرښه د سوزونوړانګو ترمنځ کونج نیموي .

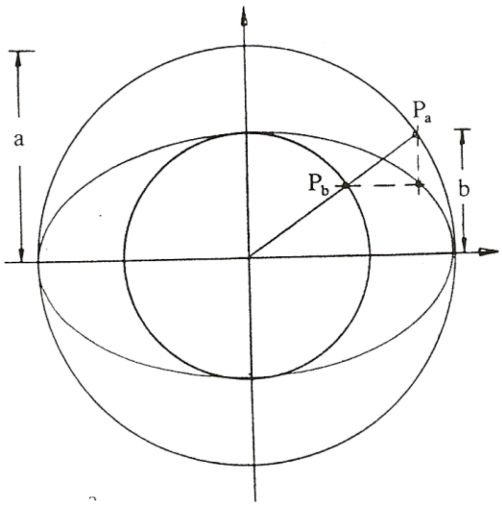
د ایلیپسی جوړول د باغوان لخوا یا د ایلیپسي باغواني جوړښت:

دا څیره دې ګران لوستونکي د تمرین په توګه وباسې٠ د یوې رسی، چی په 2 aاوږده وي، په داوړو سرونو کي موړې وتړئ او دا بیا په ځمکه ټکوهي، د یو بل)خوزیدونکی (موږي یا لرګي په مرسته دا پړی راکښ کړئ یا راکاږی او وګرځوی ، دلته کوم شکل چي پیداکیږي ایلیپسی ده او دواړه د پړي د سرونو ټکي چی موږي پرې وهل شوي سوزونټکي دي. څیره په هر کواوردینات سیسم او یا په یوه میلي متر کاغذد کونځینټري یا راټولو ګردیو په مرسته بل جوړښت امکان پیداکیږي، چی سړی د یوه ټکي دوه ګردۍ د a او b وړانګي ووهي او هره د خوښي وړانګه د ننني ګردۍ په Pb او دباندنی ګردۍ په Pa کی غوڅوي. که د Pb څخه یوه پرته کرښه وویستل شي او د همغه تر Pa دوام، نو هرچیرته یو د ایلیپسی یا هګی یا بیضوي ټکی لاس ته راځي. د ایلیپسی هر ټکی داسی پیدا کیدی شي .پیژندل کیږي چی هر 2 bته غبرګ ټوټونی

 څیره ۱۴۱	د k= a / b فاکتور سره لنډ شوی دئ. له دې سره د هوارې دننه هم تغیر خورې ددې فاکتور k په اندازه $\cdot r \Rightarrow \pi r.(k.r) = F(hagai, baizawy)$ او له دې چی r = a او (k.r =b د لته r د ګردۍ » لویه نیمه اکسی(محور) ده جمله : دایلیپسی هواره ده$F=\pi ab$:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ايليپسي چاپيروني په ساده ډول نه شي شميرل کيدى، په عمل کې په زيات وخت کې نزديونه يا نزدې شميرنه بسيا کوي.



شيره ۱۴۲

جمله : د ايليپسي چاپيرى:

$$U \sim \pi(1{,}5 \,.\, [a+b] - \sqrt{ab})$$

او يا ګردي ته ورته ايليپسي. دا په دې مانا چې $a \sim b$:

$$U \sim \pi \,.\, \sqrt{2(a^2+b^2)}$$

دا فرمولونه، که $a = b$ وي د ګردي چاپيري ته ځي:

$$U = \pi(1{,}5 \,.\, [a+a] - \sqrt{a^2}) = \pi(3a-a) = 2\pi a = 2\pi \Longleftrightarrow$$

اويا په په همدې توګه يا $\Longleftrightarrow$

$$U = \pi \,.\, \sqrt{2(a^2+a^2)} = \pi \,.\, \sqrt{4a^2} = \pi 2a = 2\pi r$$

بيلګه:

کوم خورا لويوالى د بڼاغلی کړاو ميز په ايليپسي يانيضوي يا هګي خيره لرودى شي ؟

لوي محور $a = 1m$ پاتي کيږي، کوچنی محور دی: $b = 95cm$، داچې ميز بايد د درځ ژوروالي پورې غوځ شي. نو له دې امله هواره ده:

$$F = \pi \,.\, 1 \,.\, 0{,}95 = 2{,}985m^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چاپيرى كيږي:

$$U \sim 1(1{,}5.1.95 - \sqrt{0{,}95})\ 6{,}127\ m \iff$$

يا په همدې توګه د بيضوي يا هګۍ و د ګردۍ فورم ته يا ګرديخيرې ته نزدې فورم نيسي U ~ 6,128 m. له دې امله هګيخيره د ميز لپاره مساعد اوبې يا حل دی.

تمرينونه

۱ – په كاليفورنيا کی د يوزيميت ملي پارك Yosimite National Park ، خپل ماموت ونو (Mammutbaumbestände) له امله خورا مشهور دی. کوم چاپيرى يې هغه ونه لري چې وړانګه يې ۷ ، ۴ متره وي؟

۲ – د لاس ساعت دقيقه ښونکی ۱،۵ سانتي متره اوږد دی(څرخونمحور– څوکه)، څوکه يې په يوه سانيه، يوه ساعت، يوه ورځ، يوه اونی، يوه کال کی څومره لار وهي؟

۳ – ځمکه نزدې ۶۳۷۸ کيلومتره يوه قطبي(اکواتور) وړانګه لري. قطبچاپيرى يې څومره دی ؟

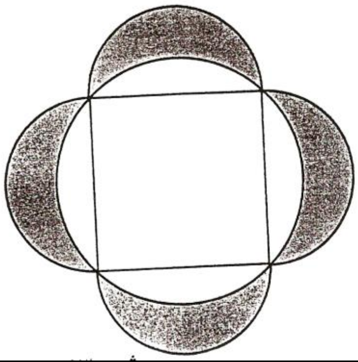
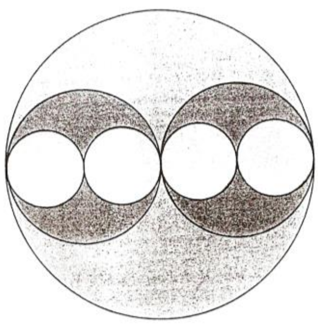
۴ – په خيال کی دې ولرو، چې له اکواتور يا قطب څخه يو پيرى غزوو (۴۰۰۰۰ کيلو متره)، کوم چې د اکواتور يا قطب له چاپيرې څخه يومتر اوږد دی. د يوه ځانګړي تخنيکی چمتووالی له لارې په هرځاي کی د ځمکی څخه په همغه واټن راوړل کيږي. ايا دا واټن پوره لوي دی چې سړی ددې ترمنځ يوه د (ګيرکلی) پاکي وځايوولی شي يا ځاي کړاى شي؟

۵ – د غوځهواره به يې د ځمګې سره څومره وي که د اکواتور يا قطب په اندازه جګ وي؟

۶ – په اکواتور يا قطب دوه ځايونه څومره لري دی، که يو له بل يوه اوږددرجې په

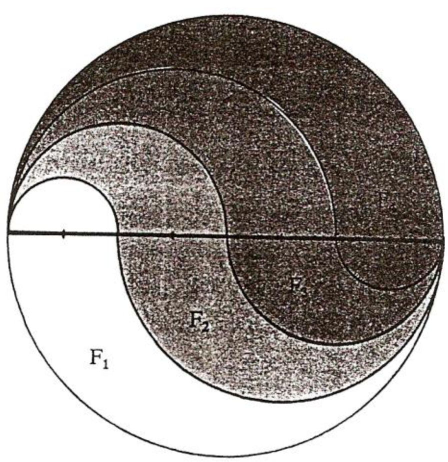
انداه لرې وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

	۷ – د ګردۍ [اپریا ل ځنګه تغیرخوري، که د هغه وړانګه دوه رابره شي یا په همدې ډولنیمه شي؟ ۸ – وښایئ: د مربع هواره د ځلورمې میاشتو(سپوږمیو) د هوارې سره مساوي ده؟
	د ځیرې سره سم د ګردیو هوارمتن یا د هوارو دننه د مساوي وړانګو سره وټاکئ. د ا هره یوه د لویې ګردۍ په سلو کې څومره جوړوي؟ وښایئ، چط ځلورو واړو ګردیو چاپرۍ د همغې وړانګې سره دومره لوي دی لکه د راچاپیره یا دباندې ګردۍ چاپري. ۱۰ – د یوېې مربع د باندې او دننه یوه ګردۍ راګرځیدلې. د دواړو ګردیو هوارې یو بل ته ځنګه متناسب دي یا ځانونه نیسي؟

۱۱ – د دوه ګردیو منځ ټکی د مساوي وړانګي $r = 7,2$ cm سره، یو له بل دومره لري دي لکه دا وړانګه . د دواړو ګردیو ګډ هواره اندازه کړئ، چې څومره ده؟

۱۲ – په یوه ګردۍ ، چې وړانګه یې $r = 10$ cm ده، که یوه ګردیکړۍ کیښنول شي، چې هواره یې دومره لویه ده لکه د دننه ګردۍ هواره. د دباندې ګردۍ وړانګه به څومره وي؟



ځیره ۱۴۵

۱۳ – د یوې ګردۍ برخهوارې، F_1 او F_2 ، لکه په ځیره ۱۴۵ کې چې ورکړ شوي، وښایئ، چې وړانګه یې $r = 4$ cm

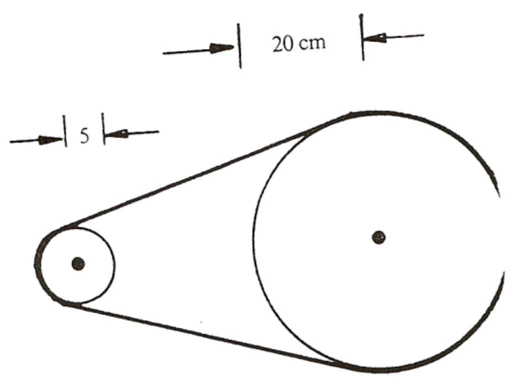
(c) ketabton.com: The Digital Library

وي. وښايي چې هواره په څلورو مساوي
هوارو ټوټه شوې ده (څیره ۱۴۸)

۱۴ – د هغه ګردې وړانګه وښايي ، کوم چې همغه هوارخوندي لري لکه :
الف) یوه مربع، چې داړخ اوږدوالی یې ۵ سانتي متره وي.
ب) یوه روتی چې نیمي یې ۴ سانتي متره او ۶ سانتي متره وي .
پ) یو مساوي اړخیز دریکونجی چې د اړخ اوږدوالی ۷ سانتي متره وي.

۱۵ – د یوه پنډ پینسیل سره یوه ګردۍ وهل کیږي، چې دننی وړانګه یې ۵ سانتي متره وي. داچې پنسل یو سانتي متره پنډ دی ، نو دا په ریښتینی یوه ګردیکړی ده. د دې ګردیکړی هواره وشمیری.

۱۶ – یوه ساتلیت یا جوړه، یعنی مصنوعي سپوږمی، له ځمکی په یوه ګردۍ راڅرخي، چې سرعت یې په سانیه کی ۸ کیلو متره دی . د ځمکڅرخون لپاره دا ۱ ساعت او ۲۸ دقیقو ته ضرورت لري. وښايي چې دا ساتلیت یا جوړه سپوږمی یا مصنوعي سپوږمی له ځمکی څخه په کوم جګوالي الوزي؟



څیره ۱۴۶

۱۷ – د یوه څرخونکړی یا بهتره څرخونپټی په مرسته کیدی شي څرخونحرکت یا څرخونخوزون د یوې څپی په بلی څپي راوړل یا واړول شي. په یوه ورکشاپ کی یوه دقیقه یعنی ډیره ټیك اره په بریښنا ماشین چلول کیږي یا په حرکت راوړل کیږي. د ارې خوزون یا حرکت څومره زر یا تیزدی یا چټك دی، که د ماشینڅرخونڅرخی یا ګاډیل (r = 20 cm) په ثانیه کی ۸۰۰ ځله وګرځي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ – کوم چاپیری او هواره الیپسی یا بیضوي یا هگیخیره لري که ولر:

a) $a = 40$ cm, $b = =12$ cm, b) $a = 6$ cm, $e = 1$ cm

c) $r_1 = 4$ cm , $r_2 = 3$ cm , $w(r_1, r_2) = 90°$

۱۹ – وښايي: په يو په بل پرتو الیپسو کی دی $a_1 = a_2$ او $b_2 = b_1 /2$ ، نو دننی ایلپس بیضوي همدومره لویه ده، لکه په دې دپاسه ایلیپسي یا هگیخیرې غاړه.

۲۰ – ځمکه په یوه کال د لمر څخه نزدې د یوې گردی په څير راڅرخي. ددې چاپیري وړانگه نزدې ۱۵۰ میلیونه کیلومتره ده.

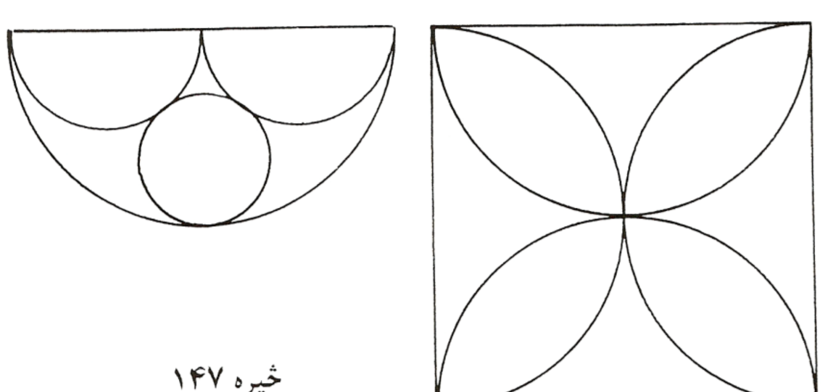
الف) د څرخونلار اوږدوالی څومره دی؟

ب) په کوم منځنی سرعت (کیلو متره په سانیه کی) ځمکه په خپل چاپیري راڅرخي؟

پ) په ورځ کی ځمکه نزدې څومره واټن تی کوي ؟

ت) په ریښتونی ځمکه د لمر څخه په یوه ایلیپسی لار راڅرخي، چی په یوه سوزون ټکي کی پخپله لمر قرار لري. د لته هغه لنډ واټن ځمکه لمر ۱۴۷ میلیونه کیلو متره دی، او لرې واټن یی ۱۵۳ میلیونه کیلو متره دی. په دې ورزیات ورکړو سره کوچنی نیممحور وښايي، او همدا ډول د ایلیپسي یا بیضوي هواره او (نزدې) چاپیری هم.

۲۱ – د ټولی هوارې کومه ټوټه برخه رنگ ده؟



خیره ۱۴۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – د دوه ګردیو وړانګی ځان داسی نیسي یا په تنساب کی سره پرتی دي، لکه 5 : 8 په لویه ګردۍ کی یو ګردیبرخه موجود ده ، چی د هغی لینده دومره لویه ده لکه د کوچنی ګردۍ وړانګه r = 10 cm. وشمیرۍ

الف– منځتټکي کونج

ب – د ګردیبرخی هواره.

۲۳ – کوم منځتټکي کونج په لینديږ پوريږ اړه لري، چي

الف) ټیك همدومره لوي وی لکه وړانګه ؟

ب) دوه واره دومره لوي وۍ لکه وړانګه ؟

پ) نیم دومره لوي وۍ لکه وړانګه ؟

۲۴ – د یويږ ګردیټوټونی منځ ټکي کونج وشمیری ، چی هواره یی همدومره لویه وي، که په وړانګه یی چی مربع .

۲۵ – یو مصنوعي ساتلیت یا جوړه سپوږمۍ ځمکه په ۲۰۰ کیلو متره جګوالي راګردوي یعني له ځمکي راګرځي یا بهتره له ځمکی راڅرخي. د راڅرخونوخت یی ۱ ساعت، ۲۸ دقیق او ۲۶ ثانیي دي.

الف – سرعت یی څومره لوي دۍ؟

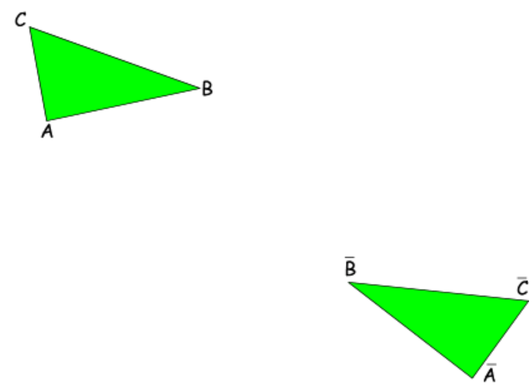
ب – په یوه دقیقه کی څومره لار وهي؟

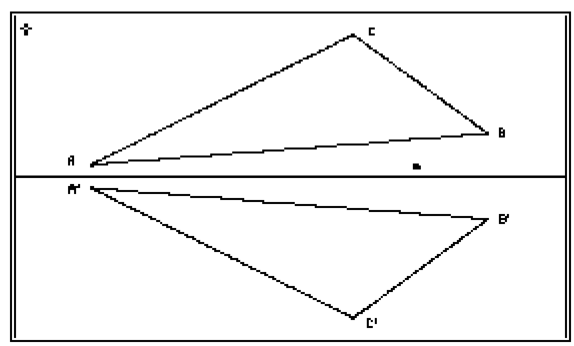
(c) ketabton.com: The Digital Library

كونګروانيخ خيرونی(برابرې خيروني)

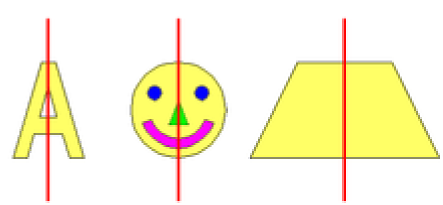
Kongruenzabbildungen

Congruence mapping





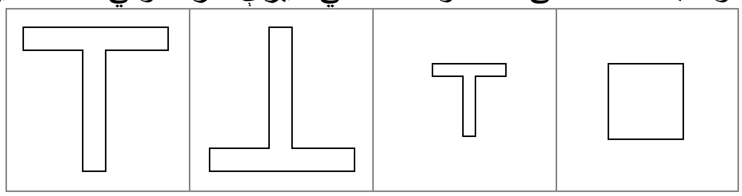
سيومتري خيرې يا شكلونه Symmetrische Figuren



د هوارو څخه مو وليدل، چی د هغو ترمنځ سيومتري خيرې يا شكلونه، يعنی داسي په نامه برابرې يا مساوي او نيمايي خيرې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

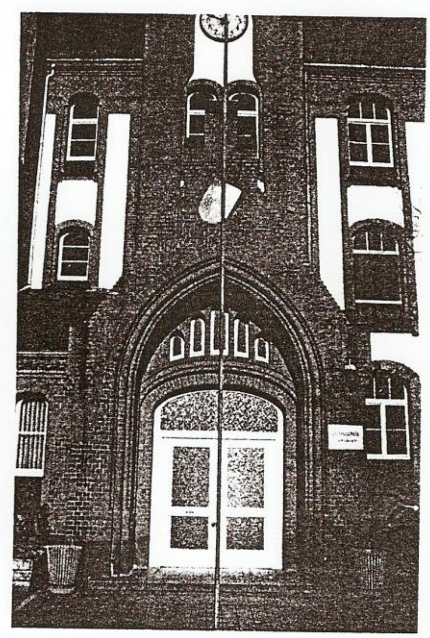
د شمیرپوهنی له مخی د ساده شمیرورتوب له امله تخنیکي، د هغو د ساده بدله ونی له امله، او د ښکلا له مخی، د هغو د همغسي ښیرې ښرګندوني له امله یو ځانګړی ځاي نیسی)



په پورته ښیره کې کینې لور ته دوه د تې ښیرې یو بل پټوي، کینې لور دې د کښلی تې سره برابرپټوونی تې وکښل شي٠ دا محور سیومتري ښیرې دي٠

په ځانګړي ډول د اخرني شکلونو ښخه کتل کیږي چی سیومتري تل دا مانا نه لري چی شکلونه دې په دوه نیمو وویشل شي، کیدی شي دوه یا زیات شیان وي ، چي د هغو د ترتیب له امله یو له بل سره خیالي سیومتري اړیکي ولري. دوه یا زیات شکلونه لکه چی ښنګه ضربالمثل وایي چي داسي یو بل ته ورته دي لکه » دوه هګی .» له دې ځایه تر کونګروانیښ یو پل دی

ښیره ۱۴۹



ښیره ۱۴۸

پیژند : هندسي شکلونه کونګروینښ (برابر) بلل کیږي، که په فورم ، بڼه (ښیره) او لویوالي کی یو بل سره یو شي وي او یواځي ځاي یی یو له بل بیل وي٠

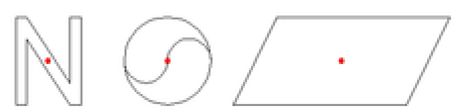
(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : زه به وړاندیز وکړم، چې کونګروواینځ څیروني » ورته برابرې څیروني » وبولو، ځکه، چې یو بل ته ورته دي او برابرې هم دې یانې که یو پر بل واچول شي یا یو پر بل پریوزي، نو یو بل پټوي٠

د دوه شیانو A او B د کونګروواینځ د لیکلو سومبول په لاندې ډول دی:

$$A \sim B \iff A \sim B$$

د کونګروواینځ خویونه :
١ - کونګروینځ څیرې یا - شکلونه یو په بل پریوځي یا یو بل پټوي .
٢ - کونګروینځ څیرې یا شکلونه د کاغذ په هنري غبرګولو یا غوځولو په بنسټ، کیدی شي یو په بل پریوځی٠



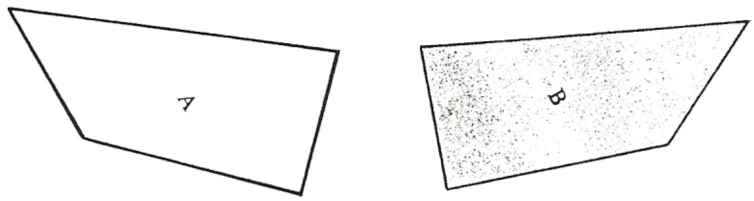
پورته څیره ټکی سیومتري ده ٠
غوځول د شمیر پوهنی کار نه دی، مګر غبرګول کیدی شي وي.

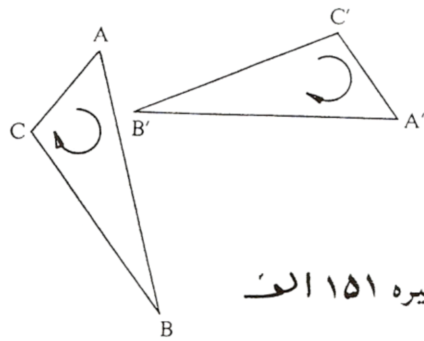
لنډ : محورهنداروني او کرښهنداروني ، څرخون، ټکیڅیره ونې او راکښني ګونګروواینځ څیره ونې دي٠

پوښتنه کیږي چې :
په شمیرپوهنه کی عملیي شته چې د هغي په مرسته یا د هغي له لارې یا د هغی په وسیله څیرې یو په بل پریوتی - او پټیدی شي ، داسي کارونی یا عملیي په کړنه یا عمل کی شته او دا کونګروواینځ څیره ونې یا څیره کوني بلل کیږي.
هر کونګروواینځ څیره یا شکل او لویوالی (منځهواره) ساتي. په دې ډول باید کونجونه او اوږدوالي ریښتونی وي، چی په دې ډول د برخو تناسب، کرښوتناسب، برخو تناسب غبرګ کرخو تناسب (ځاننیونه) ریښتونی دی. لاندې به وښوول شي چی زیات تر زیات د کونج څرخونلور یا سمت تغیر خوړونکي دی، که څرخونلور تغیر ونه خوری نو یولوریز کونګروینځ بلل کیږی او که څرخونلور تغیر وخوري نو شکلونه مخامخ لوریز یا په څټ یا برعکس کونګروانیځ بلل کیږي

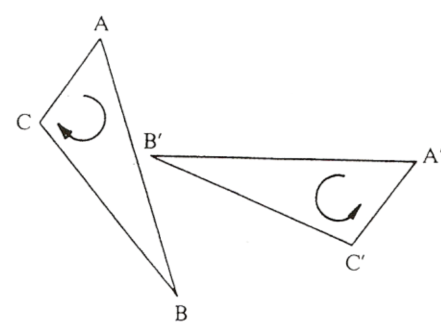
(c) ketabton.com: The Digital Library

ثیره ۱۵۰



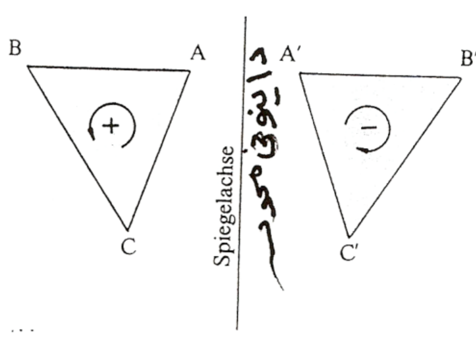


ثیره ۱۵۱ الف



ثیره ۱۵۱ ب

کرښهندارونه(په کرښه منعکسونه) Geradenspiegelung

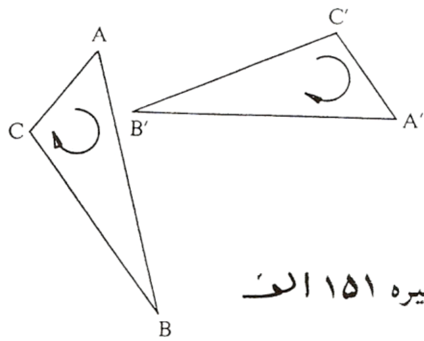


ثیره ۱۵۲

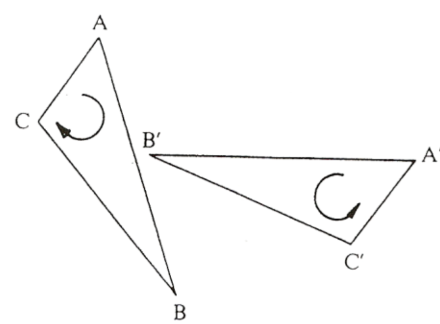
یو کونګروایننځ ثیره ونه مو په پیل ثیرونو کی وښوده. کرښ اینونه یا کرښهندارونه یواځنی مخامخ کونګروینځ ثیره ونهی ده ، ځکه چی د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

خیره ۱۵۰



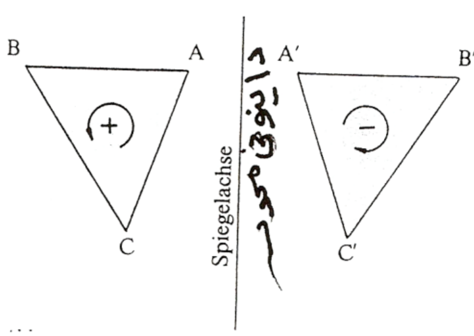
خیره ۱۵۱ الف



خیره ۱۵۱ ب

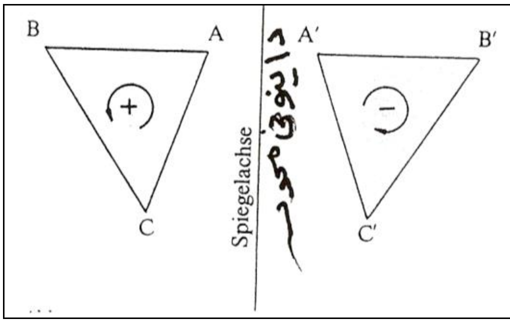
کرښهندارونه(په کرښه منعکسونه Geradenspiegelung **)**

یو کونګروایڼخ خیره ونه مو په پیل خیرونو کی وښوده. کرښ اینونه یا کرښهندارونه یواځنی مخامخ کونګروینخ خیره ونهی ده ، ځکه چی د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

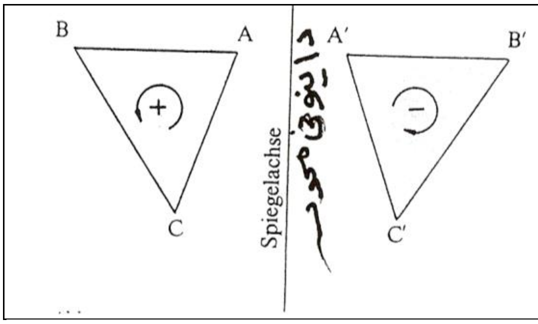


خیره ۱۵۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

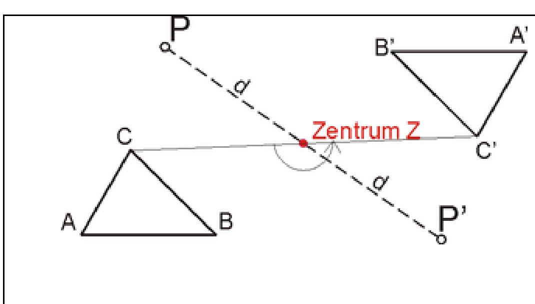


په کرښه هنداورنه(پ کرښه منعکسونه):
په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانځ تشکیل وښووه. په کرښه انعکاس ورکول یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د زویې د لور منځ ته په کې راځي.



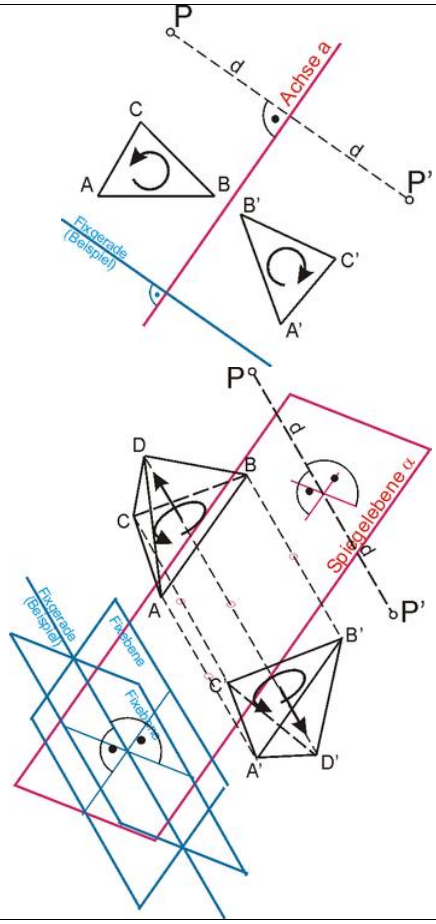
په کرښه هنداورنه(پ کرښه منعکسونه):
په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانځ تشکیل وښووه. په کرښه انعکاس ورکول یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د زویې د لور منځ ته په کې راځي. لاندې ځیره دې وکتل شي

د درې ګوډې ABC مثبت- یا زیاتونلوریز ځخه یو منفي لوریز یا کمونلوریز درې ګوډې A'B'C'جوړیږي. یخپله کرښه g په اینونکی کرښه یا په اینونکرښه یا په هنداروونکرښه بلل کیږي او یا د اینه ونې محور. په دې ټول پراته ټکی تغیر نه خوري) ځای په ځای ټکی (فیکسټکی (Fixpunkte دی، له دې امله کرښی g ته د ځای په ځای ټکوکرښه هم وایي. ټولی په g نغولاړې(لنډ: ولاړې) کرښې د اینه کولو په بنسټ په خپل ځان ځیره کیږي، مګر ټول ټکي د g سره د غوڅټکي په استثني یا بی له غوڅټکي کرښې ټکي د خپلي فاصلی په ساتلو ځای بدلوي. له دې امله دا کرښې ځای په ځای کرښی بلل کیږي ۰
په لاندې ځیره کې کیڼ لور ته درې ګوډی په ټکی ، چې د کښلې کرښی منځ ټکی دی ، ښي لور ته ځیره کیږي او دا په همدې ټکي۰ کتک کیږي، چې د هر ځیره ټکی واټن د همدې ټکي ځخه همغ دیٔ لکه د ځیره کووني ټکی واټن له دې منځټکی ځخه .

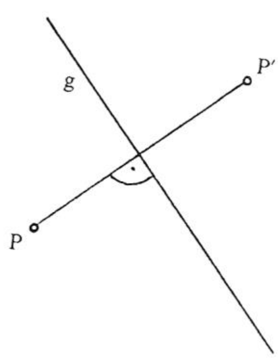


په پورته محور اینه ونه کی لیدل کیږي، چې د محور ځخه د ځیرې او ځیره کونکي ټکي سره برابر دي، خو ګورو، چې ځرخون لور یې همغه ځرخونلور نه ده۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

	په مخامخ ځيره کې اينه ونې کښل شوي دي

د کرښ اينوونو(هنداروني يا انعکاس) جوړښتځيرنه

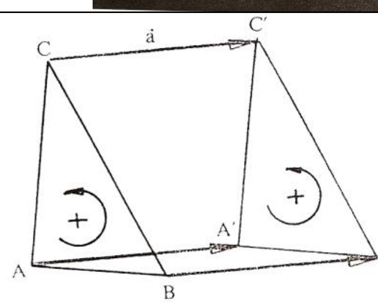
 ځيره ۱۵۳	۱ - دا ټکي له هر په نخه ټکي (ډيرګوډي کی د کونجټکی او په ګردي کی د منځ ټکی) په g ولاړ يا زوړند پريوځي او دا له g اخوا په فاصله د |Pg|غزوي. (دا د مخه راغلي .) ۲ – ټول ټکی د اصل په ترتيب سره وتړی(په ګردی کی : په M'يو ګر دی د r'=r په وړانګه ووهئ). د ځيرې او پخواځيرې(اصل) د ټولشکل لپاره بيا g سيومتريمحور دی، دا په دې مانا، چې ټوله ځيره د اينوني سره په خپل ځان ځيره کيږي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

هره کرښ اینوونه Sg کیدی شي چی په g بیا کرښ اینونو بانديٖ په همغه محور بیرته راوکرځول شي.دSg په یا په څټ څیره ونه یا مخامخ څیره ونه بیرته Sg دی. دا دڅیرو زیاتواره څیره ونو ځانګړی حالت د٠

دلته بیا سړی د څیره ونو د ځنځیرونو څخه خبرې کوي او د دې لپاره تړلنخبنه »°« په کار اچول کږي. کرښ اینوونه د ګونګراینڅو لاندې یو مرکزي ځای یا منځځای لري، ځکه چی تولی نورې اینونی د کرښ اینوني ځنځیرونو بانديٖ بیرته راګرځول کیږي، لکه چی په لاندې کی به وګورو.

راکښنه یا کښونی Verschiebungen

پیژند : غبرګکښول ،لنډ کښول یا وړل Va د خپل وړلوکتور یا وړونوکتور یا کښونوکتور له لارې یواځنی ټاکلی دی (ددې لپاره د وکتور لوست وګوری٠	
د وکتورونو لاندې مساوي اوږده او په یوه لور غشي پوهیږو، کوم چی د څیرې وتلتکي په څیرنټکو لوریز وي . (لنډ : د وکتور لاندې یوه لوریزه کرښه پوهیږو، د ځانګړو شرایطو لاندې) د کښولو لپاره پریکړی د وکتور اوږدوالی | a | دی او د وکتور لور. کښول په همغه لور کونګرواینڅیروني دي، دا په دې مانا چی د څرخونلور ساتلی پاتي کیږي٠	 څیره ۱۵۵

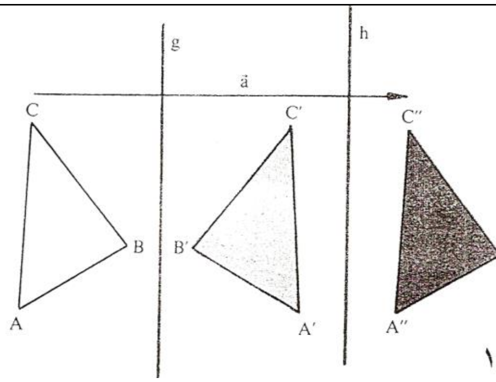
د کښولو جوړښتڅیرنه

۱ - په هر نخښه شوي ټکي (په ډیرګوډي کی ګوډونه او په ګردۍ کی منځټکی)د ګښولو وکتور a وکاږئ (برابر یا مساوي اوږده، همغه لوراو غبرګ غشی.)

۲ - د وکتورونو اخرټکي سره د اصل په پرلپسي ترتیب ونخلوی. (په ګردیکښونو کی : په اخر ټکي د r وړانګي په اندازه ګردۍ ووهی)کښونه ځاي په ځانټکي نه لري(که د صفر وکتور دې په نامه identität ایدنتیتي یا کټمټ څیرونی څخه تیر یا صرف نظر شو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

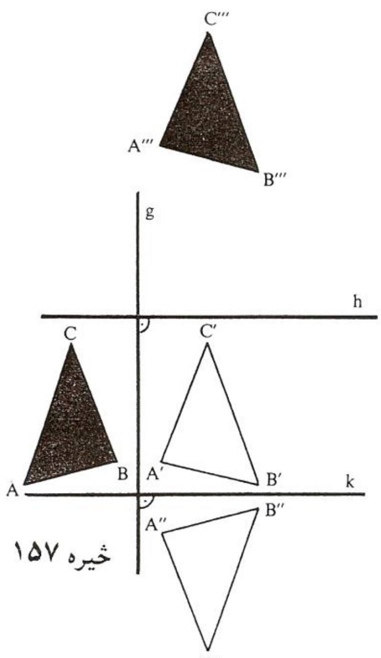
ددې لپاره ټولی له a سره غبرګی کرښي ځاي په ځاي کرښی دي، دا په دې مانا چی دوي په خپل ځان څیره کیږي .هر کښنول یا نوه هم ښنه هره کښنه ونه Va د V-a کښنولو له لارې بیرته راوګرځول کیدی شي.



۱۵۶

دلته a- وکتور د a سره غبرګ او همغومره اوږد دی، مګر په مخامخ یا په څټ لور .هره کښنونه په دوه کرښو g او hله دوه واره اینولو یا هندارونو له لارې بیرته لاس ته راوړونکی ده، چې واټن d یی همدا د کښنولو وکتور نیم اوږدوالی ورکوي. دا بدلون یواځنی نه دی: پس په عمومي ډول باور لري: $V_a = S_g \circ S_h$ د g||h سره او |a| = 2d ، چیرته چی d د g او h ترمنځ واټن ورکوي.

په یوه ځانګړي ډول یو په بل پسي صورت نیونکی زیات کرښ اینونه دي په دې ځاي کی ذکر شوي وي، ځکه چي دا – لکه څنګه ټول نور واریانت یا



خیره ۱۵۷

اووښتونی – یو ساده بنسټیز فورم نه ورکوي : خویوونکي یا کښنوونی اینونه.
ټرنه $G_{a;g} = S_g \circ V_a$ یو کښنوونی اینونه ده،
که a || g وي.
هره کښنووني اینونه یا هندارونه د درې کرښ اینونو $S_h \circ S_k \circ S_g$ ټړل دي، چیرته چی کرښي h او k ، کوم چی دکښنوونی ځاي نیسي، په g نیغی ولاړې دي:
$h \parallel k ; h \perp g$.
یوه کښنوني اینونه ځاي په ځاي ټکي نه لري، مګر g د څیرووني ځاي په ځاي کرښه ده. هره کښنووني اینونه $G_{a;g}$ په $G_{-a;g}$ سره بیرته راګرځول کیدی شي.

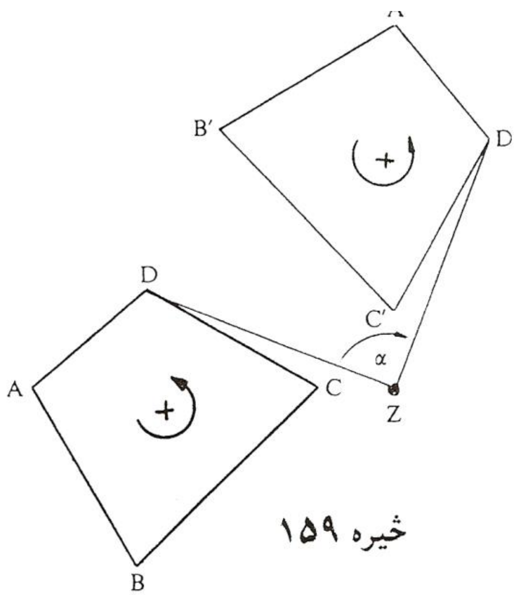
(c) ketabton.com: The Digital Library

ځرخونونه (څرخونې)

خیره ۱۵۸

تعریف : ځرخون $D_{Z;\mu}$ هغه ځیرونه ده، چې په ورکړ شوي ټکي Z (ځرخونټکی یا ځرخونمنځ) هر اصلی ټکی P په یو ځیره ټکي 'P داسې تنظیم کړي، چې $|PZ| = |P'Z|$ او $w(PZP')=\mu$ چې μ یو د مخه ځاي په ځاي ورکړ شوی کونج دی، د ځرخونکونج.

پس یو ځرخون د ځرخونټکي Z او ځرخونکونج ځخه یواځنی ټاکلی دی. د ځرخونلور په مخ نخه له مخه ورکړ شوی.
(ددې لپاره دې د مخه تري لوستونه پام کې وي).

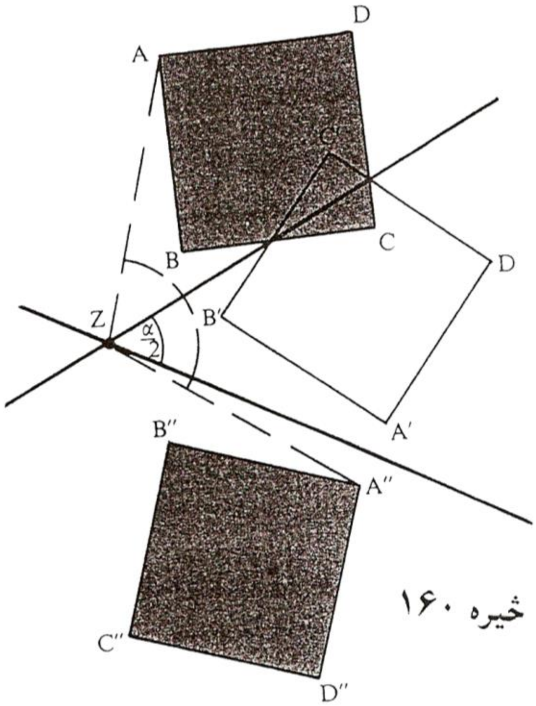


ځیره ۱۵۹

دځرخون جوړښت ځیرنه

۱ – په ټولو په نخښه ټکو (د ډیرکونجیز کونجټکي، په ګردی کی منځټکی) او

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۱۶۰

حرخونمنځ Z يوه وړانګه کيږدی . د هرټکي P واټن PZ په يوه مرستندوي وړانګه وکاږی، کوم چې له PZ سره کونج جوړوي.

۲ –لاس ته راغلی ټکی 'P په اصل پرلپسي ترتيبيو د بل سره ونښلوی (يا په همدې ډول په 'P يو ګردی د r' = r په وړانګه ووهی).

ځرخون D_z يوه همغه لوريز کونګرواينځ ځيرونه ده.

که ځرخون D_z له ځرخون په$0°$:

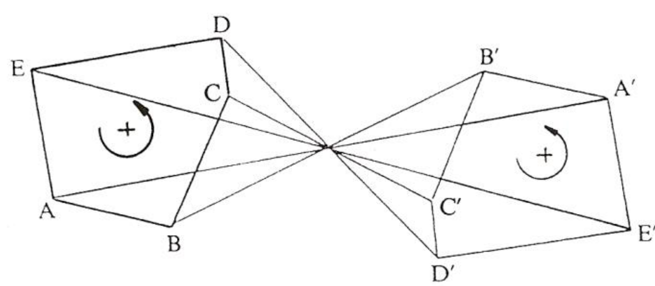
ايدنتيتي يا کټمټ، توپير ولري، نو دا يواځي يو ځاي په ځاي ټکی لري: پخپله Z .

(c) ketabton.com: The Digital Library

هر څرخون D_z د پـه کونج کیدی شي چی پـه څرخون D_z پـه کونج - بیرته راوګرځول شي. د جوړښت ځیړنی څخه پیژندل کیږي، چی هر څرخون D_z د دوه کرښي اینوني چی پـه ټکی Z کی پـه کونج 2/ یو بل غوڅوونکو کرښو g اوh ځاي نیونکی کیدی شي: څرخون : $D_{Z;\mu} = S_g \circ S_h$ د $h = \{Z\}, \mu = 2.w(g;h)$ g سره. (څیره)

تعریف : یو څرخون د څرخونکونج $\mu = \pm 180°$ سره ټکی اینونه بلل کیږي. دا پـه دې مانا چی پـه ټکي اینه کیږي.

پـه دې توګه ټکی اینونه هم یو همغه لوریز کونګروانیڅ څیرونه ده. (څیره ۱۲۸)



څیره ۱۶۱

پـه ټکي اینوني جوړښت څیړنه

۱ – د اصلي څیرې هر پـه نخښـه ټکي څخه یوه کرښـه وکاږي، چي لـه اینونکي ټکي Z تیره شي، او |PZ| واټن د Z پـه بلـه لور وباسی.

۲ – داسی لاس تـه راغلي ټکي پـه پرلپسی ترتیب سره ونښلوی. (همداسی پـه M' یو د r' = r وړانګي ګردی ووهی).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه

هره کونګروا ینځ څیرونه د کرښی اینوني د ترلو څخه لاس ته راځي. دلته بیا هر کرښ اینونه څرخون لور بدلوي. له دې امله لرو:

> د کرښ اینونو (څرخونو یا کښنونو) جوړه تعداد یا ګڼون یو همغه لوریز کونګروا ینځ څیرونه ده. د نا جوړه تعداد یا ګڼون کرښ اینونو (کرښ اینونی یا کښنونو اینونی) یو نا همغه لوریز کونګروا ینځ څیرونه ده.

دیو په بل پسی د کونګروا ینځ څیرونو کارونه بیرته کونګروا ینځ څیرونه لاس ته راکوي. دا چی هرکونګروا ینځ کرښ اینونه ده نو د پای کونګروا ینځ یو په بل پسی اینونه ده. برسیره پر دې هر کونګروا ینځ بیرته راګرځیدلی یا په څټ کیدلی شي. که له دوه وو زیات کونګروا ینځ څیرونی یو په بل پسی منځ ته راشي ، نو په خوښه اسوځیاتیو را یوځای کیدی شي. الجبري ټول کونګروا ینځ څیرونی یو ګروپ جوړوي د ناپیلي کتمټ څیرونی سره، دا په دې مانا چی ناپیلی څیرونه ، چی په کارونه کی تغیر نه راولی کتمټ څیرونه ده. (د ګروپ لپاره دې نښلونی برخه وکتل شي)

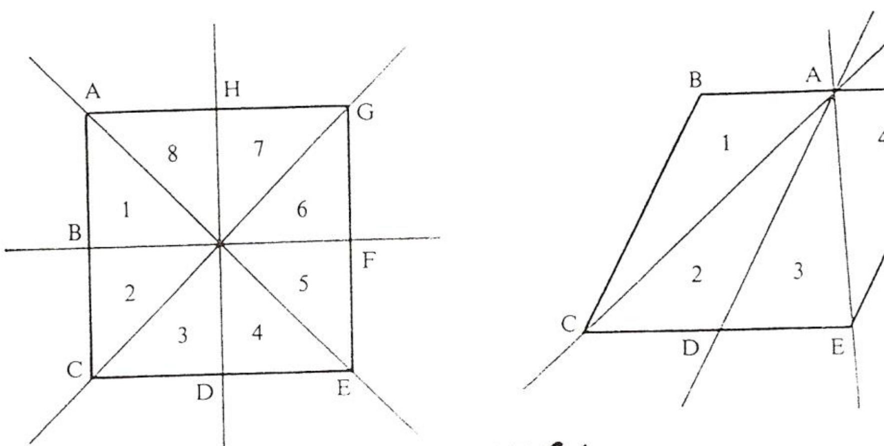
په عمل کی د دریګوټی کونګروا ینځ جملی له پوره اهمیت ډکی دی

> **کونګروا ینځجملی:**
> الف) په خپلو دري اړخونو کي (SSS) یا
> ب) په دوه اړخونو او لهدې اړخونو رابند کونج کی(SWS) یا
> پ) په دوه اړخونو کی او د اوړداړخ مخامخ کونج کی (SSW) یا
> ت) په یوه اړخ او دواړو راګیر کونجونو کي (WSW) یو بل سره وخوري یا سره مساوي شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرينونه

۱ – په يوه غبرګ اړخيز ABCD هندارونی $S_{BC} \circ S_{AB}$ وکاږئ.
۲ – د کونګروانيڅ جملو په مرسته وښايي، چی غوڅکرښی پيلڅيرې په کونګروانيڅ برخو ټوټه کوي.



خيرګ ۱۶۲

۳ – په يوه بيلګه وښايي :
الف) $S_g \circ S_h \models S_h \circ S_g$
ب) $S_g \circ (S_h \circ V_g) = (S_g \circ S_h) \circ V_g$
۴ – د «هيلګولند» کيشتی او د «کوين ماری» لوي کيښتی ترمنځ واټن **۵** کيلو متره دی . هيلګولند کيشتی په شمال لوديځ ۶۰ درجي(N60°W) دلته N د شمال او W د لوديز لپاره دی، کرښلايني حرکت کوي او «کوين ماري» په **۸۲** درجو جنوب لويديز لور حرکت کوي (S82°W) دلته S د جنوب لپاره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې وخت کی د «هیلګولند» څخه « کوین ماری » په ۷۰ درجو شمالشرق(N70°O)

دلته O د ختیز لپاره ده، لیدل کیږي.Nord,, Süd, West, Ost

الف) په کوم کونج دواړه لارې یو بل غوڅوي ؟

ب) د دې وخت له ځاي څخه به هغه غوڅټکی څومره لرې وي؟

۵ – وي دې ABC یو مساوي پښیز دریګوډی، له بنسټ AB سره، g او h د کونجونو ∝ او ß کونجنیمي دي. وښایي چی دریګوډي ABP اوABQ کونګروانیت دي. (P او Q د مخامخ اړخ سره د کرښو غوڅټکي دي).

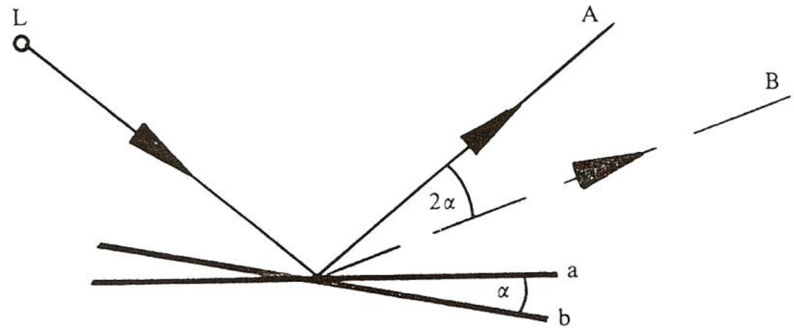
۶ – څومره کورونتخیرونی موجود دی چی لاندې څیرې یی په خپل ځان ځیره کوي: کرښی ، ګردی، غبرګ اړخي، مساوي پښیز دریګوډي ، ولاړ ګوډی، راوتی، مربع، مساوي اړخیز دریګوډي ؟ کتمتخیرونه دې نه په کی شمیرل کیږي.

۷ – یو څرخیدونکی هنداره ، یوه هنداره ده ، چی په یوه خپله اینښوول شوي هواره پروت محور باندې څرخوړ اینښوول شوي. ترتیب په څیره کی له پورته لور انځوریږي.

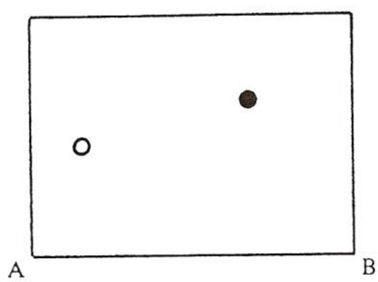
د نور له چینی L څخه یوه وړانګه په هنداره د (a) په ځاي یا ځاینیوون کی پریوزي او د هندارونی یا انعکاس قانون سره سم(پریووتکونج = وتلکونج) د$\overline{OA}$ لور باندې بیرته غورځول- یا اینه کیږي یا منعکس کیږي. اوس نو هنداره د ∝ په کونج د (b) ځاي یا ځاینوون ته راوړل کیږي یا راڅرخیږي. دلته نو د نوروړانګه د $\overline{OB}$ په لور هحینداره کیږي یا غورځول کیږي یامنعکس کیږي. وښایی :

$$w(\overline{OA}; \overline{OB}) = 2\alpha$$

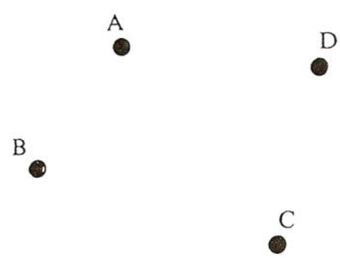
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۱۶۳



خیره ۱۶۴



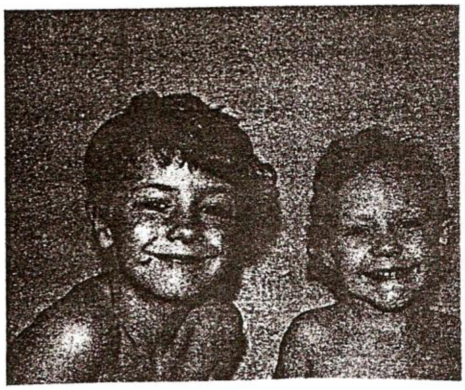
خیره ۱۶۵

۸ – د کوټې منځ کې دوه توپونه ایښول شوي یو سپین او بل تور. د کوټې له دیوالونو څخه توپ بلې لور ته نه شي تللی سپین توپ دې داسې ووهل شي چې تور توپ ووهي.دا د اینه ونی یا انعکاس د قانون سره سم په دیوال AB لګیږي. (حیره) د کرښو لار وکاږئ « تورتوپ – اینه ټکی یاانعکاسټکی – سپین توپ»

۹ – دا د یوه کور څلور برجونه دي، چې په A,B,C,D سره یې ښایو (خیره) داسې یو ځای S شته ، له کوم چې برج A د برج C څخه یا سره پټ شي او برسیره پر دې له دې ځای څخه A د B او D د منځتې په څیر ښکاره شي یا ځان وښایي .؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

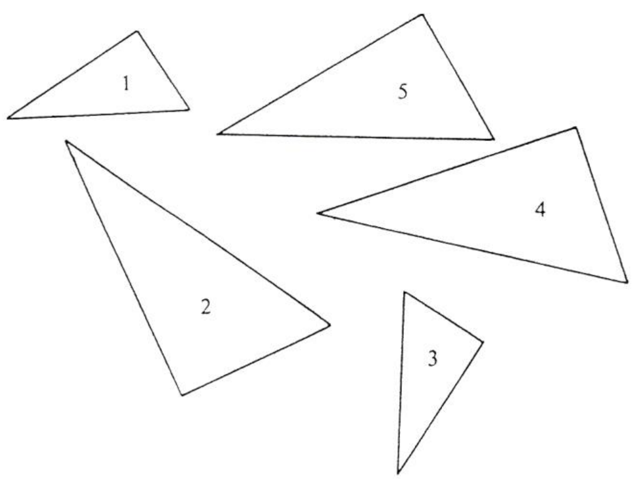
ورته والیخیرونه Ähnlichkeisabbildung



خیره ۱۶۶

که چیرې دوه غبرګوني کوچنیان وکتل شي ،نو سم د لاسه ویل کیږي، چې دا دوه یو بل ته ورته دي. شیان یا لیدیدونکي هم یو بل ته ورته بلل کیږي، که ګډ خویونه یا ګډې نخښې ولري، یعني څرګند یو بل ته ورته وي، مګر سره له دې هم یو له بل توپیر کیدونکی وي. په شمیرپوهنه کی داسی نه شو ویلی چی دا شیان یا لیدیدونکي یو بل ته زیات یا کم ورته دی، دا خیالي قضاوت دی چی په شمیرپوهنه کی داسی قضاوت ځای نه لري.

پیلبیلګه:



خیره ۱۶۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې دريګوټي د کونجونو $\gamma = 90°$ او $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$ سره وکاږي.
ددې کونجونو سره له يوه زيات دريګوټي موجود دي، چې په ځانګړي توګه د ولاړ کونج ورکړه يوائيوالی يا يوائيتوب نيول کيدی يا فرض کيدی شي.
دريګوټي ۱ او ۲ کونګروانيڅ دي، دريګوټي ۲ او ۴ هم، مګر دريګوټي ۱ او يا ۱ او ۴ کونګروانيڅ نه دي. سره ددې هم دوي زياتی ګډې نخښې لري (کونج، «بڼه»يا «شکل» يا څيره) دوي يو بل ته ورته دي.

ددوي ترمنځ نور څه ګډ دي يا دوي نور څه ګډ لري؟
له کونګروانيڅجملی څخه مخ ته ځو، د اړخونو اوږدوالی اندازه کوو او راته ښايو چه د اړخونو ځاننيونه يا د اړخونو تناڅب :

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$

او

$$\frac{|AB|}{|A'''B'''|} = \frac{|BC|}{|B'''C'''|} = \frac{|CA|}{|C'''A'''|}$$

ثابت دی.

پس تعريفوو

تعريف : هوارې څيرې يا شکلونه هلته يو بل ته ورته دي، کله چې د مناسبو پاي کرښو اوږدوالی په همغه ځاننيونه يا تناسب پروت وي او (له دې امله هم) يو د بل سره مناسب کونجونه مساوي لوي وي.

بيلګه : کونګروانيڅ څيرې د ورته شکلونو يو ځانګړی حالت دی، په هغوي کی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړشوو اړخونو تناسب یا ځاننیونه تل ۱ دی.
له دې امله باید –د کونګروانیڅ د ټولیزیدلو یا عمومیت – د دریګوډیو لپاره هم ورته جملې موجود وي.
ددوه یا زیاتو دریګوډیو ترمنځ یو بل ته ورته والی هلته پروت دی یا شته ، موجود دی، کله یی چې مناسب کونجونه سره یو شی وي او دې کونجونو سره مناسب اړخونه یو د بل سره په همداسی تناسب یا ځاننیونه کی پراته وي یا اړیکو کی).
دا هم د دریګوډیو لپاره باور یااعتبار لري، په داسی ډول– د کونګروانیڅ ځخه پر مخ ځو– چې سړی داسی نومولی د ورته والي جملی لیکلی شي.

د ورته والي جملی: دریګوډی یو بل ته هلته ورته دي، که په لاندې کی سره برابر وي

۱ – د دریګوډیو دریواړو اړخونوپه مناسبه توګه د اړخونو تناسب یا ځاننیونه.

$$a : a' = b : b' = c : c' .$$

او یا

۲ – د دوه یو بل سره مناسبو اړخونوتناسب یا ځاننیونه او له دې بندشوې کونج. دا په دې مانا چې

$$a : a' = b .: b' \quad \text{او} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

او یا

۳ – د دوه مناسبو اړخونو تناسب او د لوي اړخونو مخامخ کونجونومساویوالی. په دې مانا چې: $a : a' = b : b'$ او $\beta = \beta'$ د $a < b$ لپاره او یا

۴ – ددوه کونجونواندازې مساویوالی ، چې په دې ډول ټول کونجونه مساوي دي.
دا په دې مانا چې :

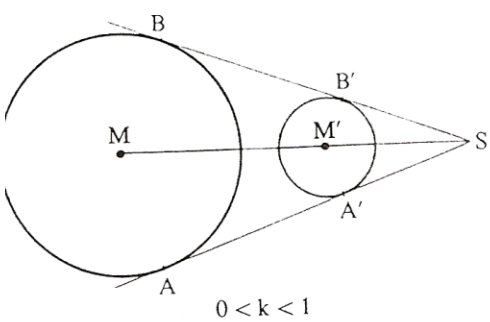
(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول کیدی شي د نورو څیرو لپاره هم د ورته والی جملی تر فرمول لاندې راوړل شي. څیرې یو بل ته ورته دي، که دوي د ځانګړو ورتوني څیروني له لاری یو په بل پریوتی شي.

مهم ورته والي څیرونی منځني راکښنه ده

تعریف: منځني راکښنه $Z_{S,k}$ د ټکي S (د راګښلو منځ) او یوه ګڼ k د راکښلو فاکتور یا ځلونکي په بنسټ یواځنی ټاکلی وي. هر اصلي اوږدوالي ته د منځني راکښنو له لارې په k–ځلی تغیر ورکو ل کیږي.

د k لپاره له صفر تر یو ګڼونه پریښوول کیدی شي. په دې کی بیاپخپله له دې پوهیدی شو چی څیرونه له اصلي کوچنی ده. په دې حالت کی له زبیخلو (کیښکلو) غبرېږو. څیرونه نوره هم د راکښلو باور لري. که k = -1 وي نو اړوند منځني راکښل په راکښل منځ S باندې ټکي اینونه ده. د هر بل منفی ګڼ k |=-1 k لپاره کیدی شي په k =(-1).|k| باندې تجزیه شي. له دې وروسته پورته یادونی په همغه هدف استعمالیږي یا کارول کیږي.

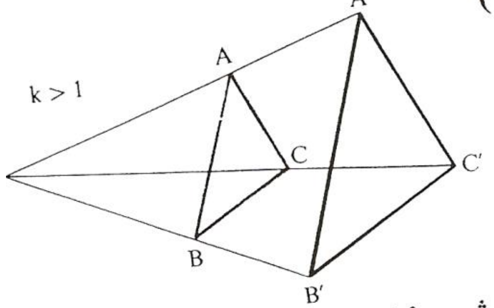


څیره ۱۶۸

یادونه : پام دې وشي چی راکښنه به ښه وي او که غزیدنه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منځراکښنی جوړښتڅېړنه(توضیځ)



ځیره ۱۶۹

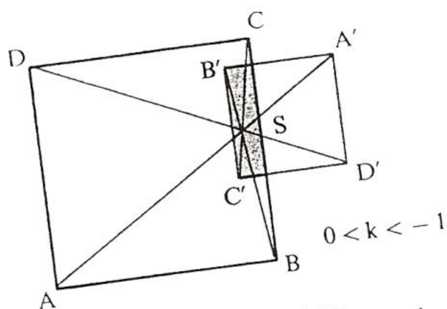
۱ – د اصلي هر په نخښنه ټکي د راکښلو منځ S سره و نخلوی.

۲ – د هر ټکي P لپاره د|PS| پای کرښي په k ځل کیږي(جوړښت ته د 0> k لپاره هم، مقایسه ځیره) او نوي پای کرښه

|'SP|.k = |SP|

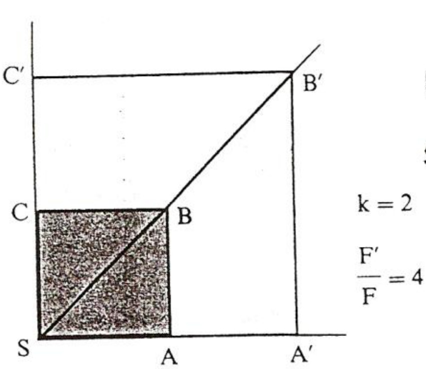
په کرښه چی دټکي S ځخه پیل له P, S او 'P تیریږي وکاږی.

۳ – د اصل په ترتیب یا اصل ته ورته ټول ځیره ټکي سره ونښلوی.



ځیره ۱۷۰

دا چی ورته ځیرې (بی له 1 = |k|) کونګروایناځ نه دي، نو د هوارې دننه یا منځ هم تغیر خوري، مګر که ټولی خواو یا اړخونه په فاکتور k(د بیلګي په توګه 3 = k , 2 = k) تغیر کړو، نو ځیروونکی هواره باید په فاکتور k^2 (یعني $k^2 = 4$, همداسی $k^2 = 9$) تغیر وخوري.



ځیره ۱۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعري: په يو منځراکښنو، چې فاکتور k ولري د ځيرې هواره 'F او له ځيرې دمخه (اصلي) هوارې F ترمنځ لاندنی تناسب یا ځانښیونه موجود دی.

$$F' : F = k^2 \quad \Rightarrow \quad F' = F.k^2$$

د لته د k مخنخښه کوم رول نه لري ځکه چې منفی ځل منفی بیرته مثبت دی.

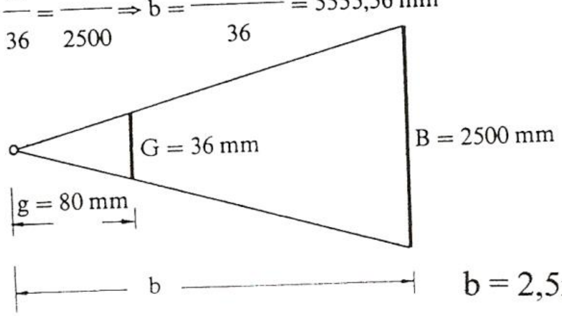
پیلبیلګ:

دیاس(دفیلم دیاس) (فورمات یا لویوالی 24mm.36mm)
په یوه دیوال چې لویوالی یې 2,5 m . 2,5 m دی. د ممکن حده پورې ځیره کیږي. د ښه ټیك جوړلوسره یې له عدسي واټن 8cm دی. پریوستونی یا پرویکتور د ځیرې دیوال څخه باید څومره لرې وي؟ د دیاس هوراه په څو واره لویه شوې ؟
د دیاس دځیرونی لپاره لاندې اړیکی باور لري:

$$\frac{\text{د ځیرې جګوالی } B}{\text{د دیاسجګوالی } G} = \frac{\text{د ځیرې پراخوالي } b}{\text{د دیاس –عدسی لریوالی} g}$$

ځیره ۱۷۲

$$\frac{80}{36} = \frac{b}{2500} \Rightarrow b = \frac{2500 \cdot 80}{36} = 5555{,}56 \text{ mm}$$



ممکن ډك په دې مانا، چې 36 mm په 2,5 m باید لوي شي. په دې توګه د پریوستون دیوال –عدسي واټن په لاندې ډول دی :

$$b = 2{,}5m.0{,}08m : 0{,}036m$$
$$\sim 5{,}56m$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لویوالی فاکتور یا ځلی دی

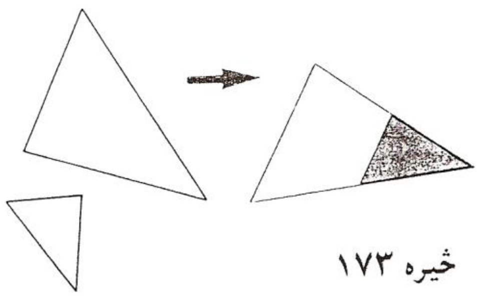
$k = 2{,}5: 0{,}036 \sim 69{,}44$

له دې امله د څیرې هواره ده:

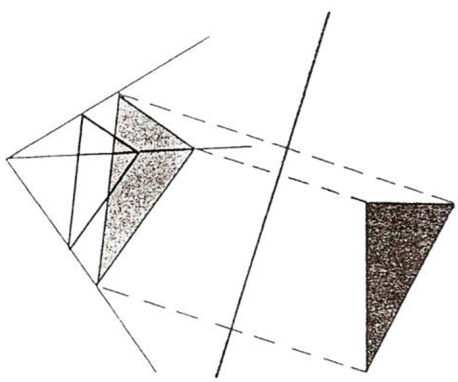
$F' = 69{,}44^2 . 0{,}036 . 0{,}024 = 4{,}17 m^2$

دا د دیاس هوارې 4822,53 واره یا ځله ده.

دا روښانه ده، چې ورته څیرې، د ځرخوني، راکښلو له لارې او اینونی له لارې یوه پوزیشن ته راوړل کیږ، په کوم چې سم د لاسه د شکلونو د کونجونو د برابرتوب ورته والی پیژندل کیدی شي.



څیره ۱۷۳



څیره ۱۷۴

تعریف : هره کونګروا ینځ څیرونه، هر منځراکښونکی او له دوې هر ترلی یا ځنځیري اینښولشوې یا ځای په ځای شوې څیرونی ورته څیرونی بلل کیري.

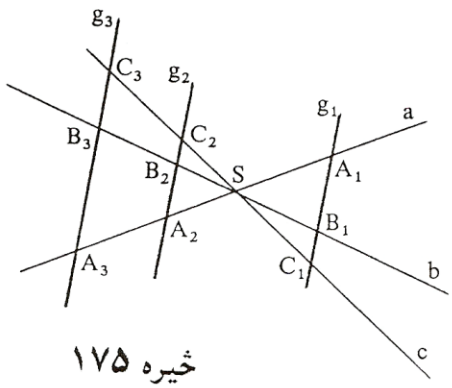
دا چې هره ورته څیرونه بیرته یوه داسې څیرونه باندې راګرځي، نو بیخي باور لري : د ورته

(c) ketabton.com: The Digital Library

والي خیروني ډیری چی پرلپسی سره وتړل شي یا ځنځیري شي ګروپ جوړوی (د ګروپ لپاره دې، چی شمیرپوهنیزه کلیمه ده، د کتاب پای وکتل شي)
او خیرې او همداسي پیل بیلګه (ډیاسپرویکتور) څخه د وړانګي جمله تولیزه یا عمومي کیدی شي.

۱ . وړانګي جمله: که له یوه ټکي S وتلی وړانګي a,b,c،... له غبرګو کرښو.....، g_2, g_2, g_3 غوڅي شي، نو د یوې وړانګی ټوټی همداسی تناسب کی دی یا همداسی ځان نیسی لکه

د بلی وړانګي ټوټی: دا په دې مانا چی:



خیره ۱۷۵

$$\frac{|SA_1|}{|SA_2|} = \frac{|SB_1|}{|SB_2|} = \frac{|SC_1|}{|SC_2|}$$

او

$$\frac{|SA_1|}{|A_1\,A_3|} = \frac{|SB_1|}{|B_1\,B_3|} = \frac{|SC_1|}{|C_1\,C_3|}$$

په خیره کی د اړیکو ښوونه سم د لاسه په غبرګو کرښو له پوړیزکونجونو او د دریګوډیو ورته والي چی SA_1B_1 او SA_2B_2, SA_1C_1 او SA_2C_2 اوپه همدې ډول د SB_1C_1 او SB_2C_2 سره یی لري.

برسیره پر دې باور لري:

۱ . وړانګي جملی په څټ: که له ناپای کرښو.... g_1 , g_2 , g_3 څخه د خورې

(c) ketabton.com: The Digital Library

غونچي یا بهتره ستورې کرښو له لارې ټوټي پرېکړي شي، چي یو بل ته ثابتي یا همغه ځای په ځاي ځاننیوني یا تناسبات څرګندوي، نو دا کرښي یو بل سره غبرګي دي.

۲ . وړانګي جمله:

که له یوه ټکي وتلي وړانګي د غبرګو ناپاکرښو څخه غوڅي شي، نو د دوي ټوټي چي له غبرګو دې ځان داسي نیسي یا په داسي تناسب کي دیلکه هغه د ککرټکي څخه وتلي کچ شوې د وړانګو ټوټي.

$$\frac{|SA_1|}{|SA_2|} = \frac{|A_1B_1|}{|A_2B_2|} = \frac{|SB_1|}{|SB_2|} = \frac{|B_1C_1|}{|B_2C_2|} = \frac{|SC_1|}{|SC_2|} = \frac{|A_1C_1|}{|A_2C_2|}$$

۳ . وړانګي جمله:

په یوه غبرګي ټوټو ځاننیونه داسي ده لکه پهدې بلي غبرګي ټوټو ځاننیونه یا تناسب:

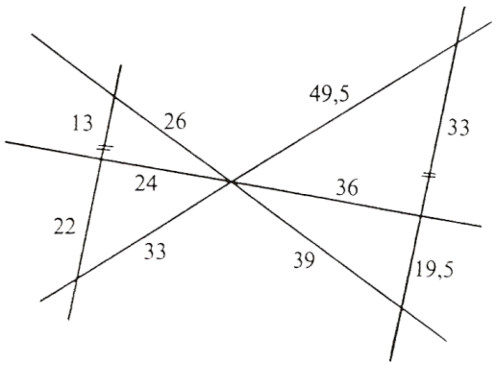
$$\frac{|A_1B_1|}{|B_1C_1|} = \frac{|A_2B_2|}{|B_2C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1C_1|}{|B_1C_1|} = \frac{|A_2C_2|}{|B_2C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1B_1|}{|A_1C_1|} = \frac{|A_3B_3|}{|A_3C_3|}$$

بیلګه :

۱ . د لمړی وړانګي جملي پسی لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . د وړانګو جملو پسی یا له امله باور لري:



خیره ۱۷۶

1. Strahlensatz: $\frac{26}{39} = \frac{24}{36} = \frac{33}{49,5} = \frac{2}{3}$

لمړۍ وړانګې جمله

2. Strahlensatz: $\frac{24}{22} = \frac{36}{33}$ oder

۲. وړانګې جمله

$\frac{33}{22} = \frac{49,5}{33}$ oder

$\frac{26}{35} = \frac{39}{52,5}$

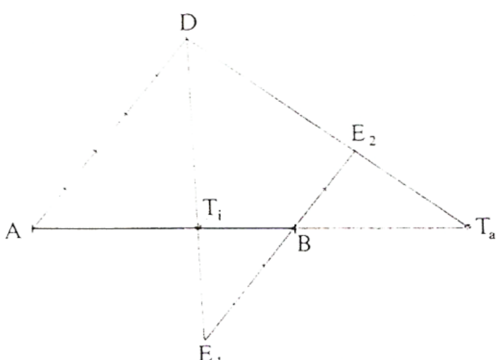
3. Strahlensatz: $\frac{13}{22} = \frac{19,5}{33}$ oder

۳. وړانګې جمله

$\frac{35}{22} = \frac{52,5}{33}$

۲ . د یوې کرښې AB ویشنه یا ټوټونه:

کرښه AB دننه(T_i) په ځاننیونه یا تناسب 5:3 او دباندې (T_a) په تناسب یا ځاننیونه 2 : 5 ویشل کیږي. د دې لپاره د ۲ . وړانګې جمله کارول کیږي یا استعمالیږي:



خیره ۱۷۷

– دننه ټوټوونټکی T_i :

$$\frac{|AD|}{|BE_1|} = \frac{|AT_i|}{|T_iB|} = \frac{5}{3}$$

– د باندې ټوټوونټکی T_a:

$$\frac{|AD|}{|BE_2|} = \frac{|AT_a|}{|T_aB|} = \frac{5}{2}$$

دا جوړښت د ویشنې برسیره

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښو د ځل لپاره هم کارول کیدی شي. نو $|AT_a|$ د $|T_aB|$ دوه نیم واره دی.

۳ . طلایي غوڅې یا –غوڅونه:

په طلای غوڅي یوه د a اوږدوالی کرښه داسی ټوټه کیږي، چی برخه ټوټو د x اوږدوالی همداسی د a - x اوږدوالی لپاره اړیکی $a : x = x : (a-x)$ باور لري. دلته x د دواړو برخه کرښو لویه برخه ده دا ویشنه په هنر او ارښیتکتور کی له مانا ډکه ده یا مهم رول لوبوي. له پورته اړیکو څخه لاس ته راځي: $x^2 = a(a-x)$ او له دې بیا $x = \sqrt{a(a-x)}$ لاس ته راځي. دا په دې مانا چی اوږده کرښه د دوو لنډو کرښو او د ټولی کرښی هندسي منځ دی. که دا فرمول نور هم ښه بدلون غوره کړي او د x په لور اوبی یا حل شي، نو ترې لاس ته راځي :

$x = \sqrt{a^2 -ax}$

$x^2\ a^2 -ax$

$0 = x^2 +1x -a^2$

$x_{1,2} = -(a/2) \pm \sqrt{(a/2)^2 + a^2}$

$= -(a/2) \pm \sqrt{(5/4)a^2}$

$x_1 = 0,5a(\ 5 -1)$ په کار نه راځي

$x \sim 0,618a$ نو لرو:

د طلایي قاعدې لګه لارې

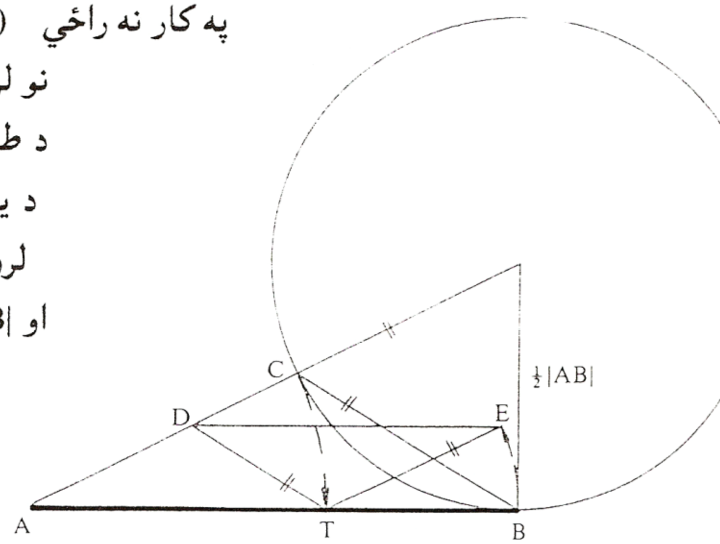
د یوې کرښی $|AB|$ ویشنه

لرو $|AC| = |AT|$

او $|AD| = |TE| = |TB|$

$$\frac{|AB|}{|AT|} = \frac{|AT|}{|TB|}$$

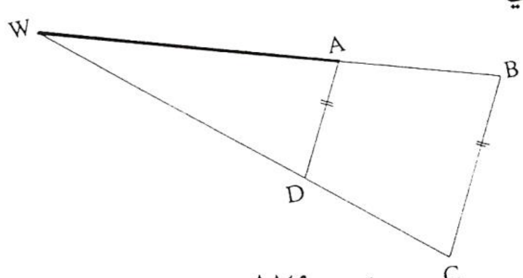
خیره ۱۷۸



(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

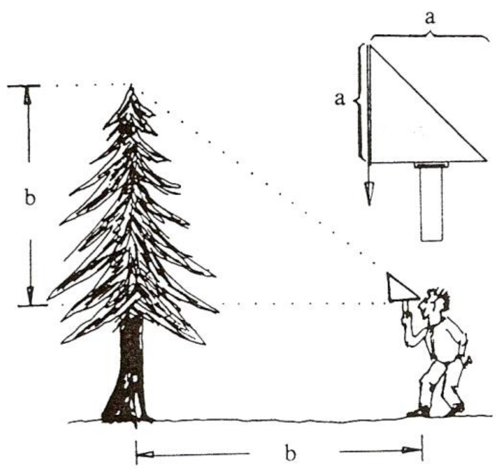
۱ – په کواوردیناتسیستم کی دریګوډی A(2|3), B(6|1), C(3|6) ورکړ شوی دی.
الف) دا دریګوډی د $k = 2$ په اندازه وغزوی . د غزولو مرکزدې Z(0|0) وي.
ب) دا دریګوډی په (S(-2 | -3 وڅرخوی د $140°$ = ∢ سره. دا څیره دریګوډی په S باندې د $k = -1,5$ سره وغزوی.
پ) دا دریګوډی په ۴ یوونو سره لمړی کینې لورته او بیا په ۵ یوونونو پورته لورته وکښوی، بالاخره یې په x– محور هنداره کړی او بیا یې بالاخره په ټکي (0|-6) د $k = -1$ سره وغزوی.
۲ – ایا ټول الف) مساوي پښیز ، ب) مساوي اړخیز، پ) ولاړکونجیز دریګوډی یو بل ته ورته دي ؟
۳ – د یوه مکعب پورته هواره د مرکزی غزونی د غزونفکتور یا غزونځل k سره او د هوانیمي غوځټکي سره د غزولومرکز په څیر، څنګه تغیریږي؟
۴ – کرښه $| AB | =10$ cm دننه او دباندې داسی ټوټه کړی، چی په ځاننیونی یا تناسب د $5:2$ کی سره پراته وي،
۵ – کرښه $| CD| =6,5$ cm د «طلای غوځي قاعدې» له لارې ټوټه کړی.
۶ – د یوه کتونبرج A (څیره ۱۷۹) څخه دې واټن |AW| یوه ځنګل برخی W ته وټاکل شي.
دري ټکی B, C او D په نخښه کیږي په داسی ډول چی AD||BC وي. اندازه کیږي: $| AB|=75$ m : $|BC| = 125$ m او $| AD|= 100$ m , نو |AW| څومره اوږد دی ؟



څیره ۱۷۹

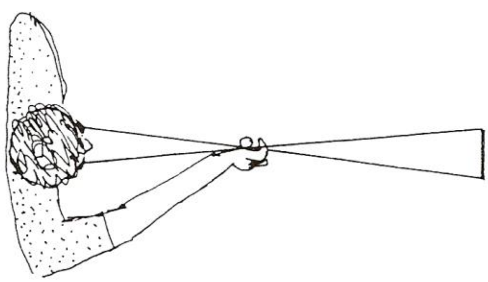
(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – الف) د یوه «ځنګلوالدریګوډي»
سره (ځیره) د یوې ونې
جګوالی اندازه کیدی شي. – ونه
څومره لویه ده ، که د ځنګلوال
سترګه له ځمکې څخه ۱،۷۰
متره جګه وي، او دی له ونې
۱۰ متره لرې ولاړ وي؟



ځیره ۱۸۰

ب) څنګه (د یوه څرګندېډه واټن)
د یوه شي د جګوالی د خپل
متې په مرسته نږدې یا تقریبي
اندازه کولی شي؟
لارښود: ۷ الف وګوری)

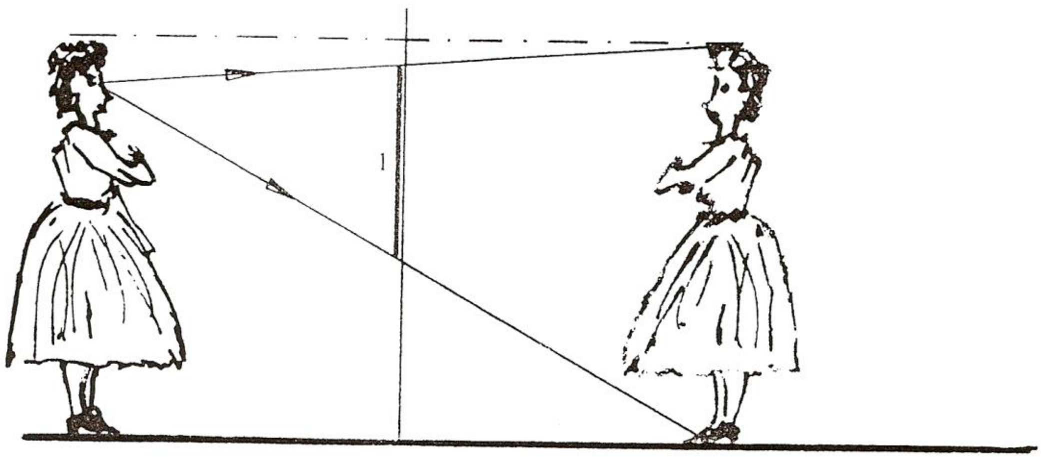


ځیره ۱۸۱

پ) په عسکرۍ کې د دوه شیانو
د واټن د اندازه کولو لپاره
« د غټې کوټې ګام » تخنیك
کارول کیږي یا استعمالیږي.
دا داسې صورت نیسي چې
لمړی سړی خپله کینه سترګه
پټوي او غټه ګوته راوباسي،
لمړی یو انډول وړ شي، چې ښې
لور ته پروت دی، اندازه کوي او بیا د ښی سترګې په پټولو سره ټیك هغهٔ لټوونکی
موخه د زیر لاندې نیسي. دلته د واټن اندازې ورکونی ته سړی څنګه راځي؟
۸ – میرمن ځانګه غواړي چې په خپله پوره لویوالی ځان د دالیز په هنداره کې
وګوري. په عادې توګه د دالیز د کوچنوالی له امله ۸۰ سانتي متره له هندارې

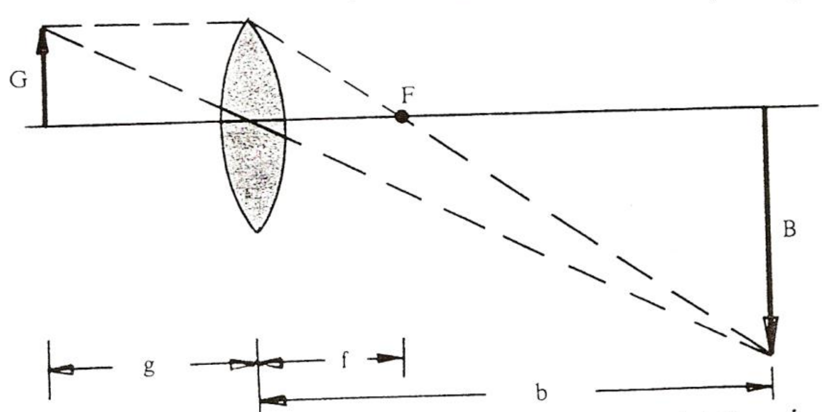
(c) ketabton.com: The Digital Library

لرې، هنداري ته مخامخ ودريږي.دا هنداره بايد څومره کم له کمه جګه وي چې ميرمن ځانګه د سترګو جګوالی چې ۶۵، ۱ متره دی ټول لوړوالی چې ۷۳ ،۱ متره دی وګوري؟



څيره ۱۸۲

۹ – د يوې لينزې يا عدسی يا سترګی له لارې په څيره کی د نور څيروني



څيره ۱۸۳

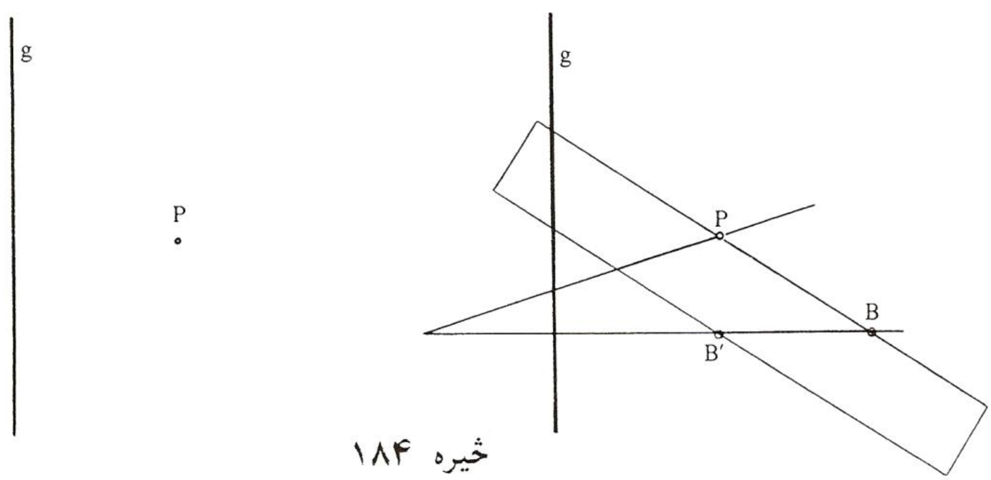
(c) ketabton.com: The Digital Library

جوړښت کتل کیږي. د لینزې یا عدسی لپاره د لینزې یا عدسی
مساوات $(1/g)+(1/b) = (1/f)$ باور لري، پخپله د څیرونی لپاره
مساوات $B / G = b / g$ باور لري(په لغاتو: د څیرې جګوالی د شي جګوالی
سره ځان داسی نیسی لکه د څیرې لریوالی د شي لریوالی ته). دا دواړه
اړیکی د وړانګي له جملی راوباسی !

۱۰ – یو ولاړکونجیز دیاپوزیتیویا مثبت دیاس داړخ اوږدوالی ۶ ،۳ سانتي متره
سره او ۴ ،۲ سانتي متره سره یو و هغه ته غبرګ دیوال باندې پریوزي .
څیورونی لینزې یا عدسی، دا شی ۱۲ سانتي متره له دیاس او ۸۰ ،۴ متره
له دیوال لرې دي. د پریوستون دیوال کم له کمه باید څومره وي ؟

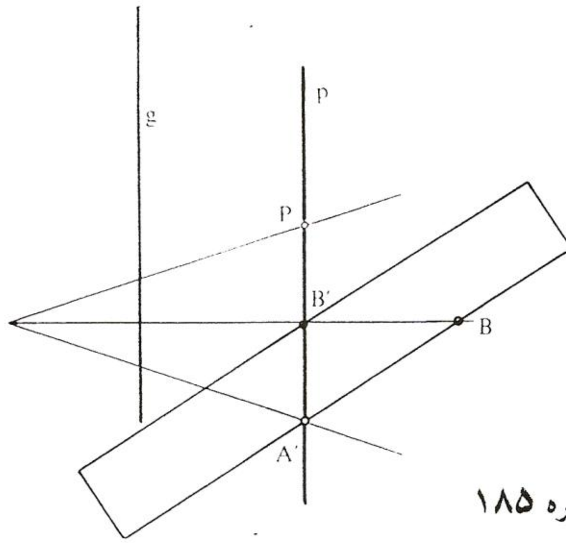
۱۱ – یو د دیوال مربع شکله کړکی، چي اړخ یی ۲۰ سانتي متره اوږد دی له یوه
هغه ته غبرګ دیوال څخه ۱۲ متره لرې ده. د هغی کړکۍ څخه څومره
لرې باید یوه د پرېښنا سرچینه ، چی د ټکي بڼه لري، لرې وي چی له کړکی
تیره رڼا یوه د ۱۶ مترمربع هواره روښانه کړي؟

۱۲ – د کوم مرکزې غزوني سره کیدی شي چی یو ګردي دننه دریګوډی په ګردي
راګیر یا ګردي دباندې دریګوډي باندې څیره شي؟ ګردی هوارې یو بل سره



څیره ۱۸۴

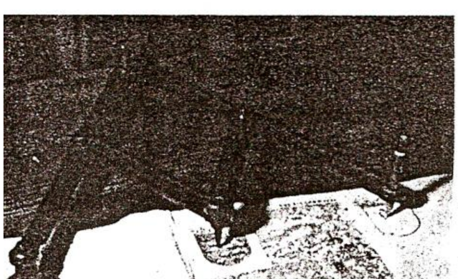
(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیره ۱۸۵

په کومه ځاننیونه یا تناسب ځای نیسی یا پرتی دي؟

۱۳ – د دیسارګ (Desarues) د جملې له مخې کیدی شي چې کرښه g په ټکی P جوړه شي ، که ټول رسم الات یوائځي یوه لرګي متړه وي (د بیلګي په توګه کرښی یا ختکش) د دوه غبرګو کانتو سره یا اړخونو سره ځموږ په اختیار کي وي. په دلایلو روښانه کړی، چې ولی په پرلپسی ځیرو جوړښت کی د جوړښت لار کار ورکوي.



ځیره ۱۸۶

۱۴ – وښایي چې د هر غبرګ اړخیزABCD لپاره باور لري: که د یوه نیمی د په خوښه ټکي P څخه یوه اړخ ته غبرګه کرښه رسم شي، نوغبرګاړخي منځ ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

راځي، چې ABCD ته منځنی یامرکزې ورته دی. د همغه غزولومرکز چیرته
پروت دی؟
په دې خویونو د پانتوګراف(Pantograph) یا په ورځنی ژبه د ځانی ټونګی
دا یوه د رسموولو اله ده قانون هم بینا دی. O په رسمتخته تر زیر لاندې
راځي . په پینسل P سره د مخه کښل شوي څیرې باندی حرکت ورکول کیږي،
نو په دې توګه دا رسمپینسل یو مرکزي یامنځنی ورته څیره رسم کوي
(څیره.) په تي مخ کی کښل شوې ده

۱۵ – په یوه ګردی کی دوه ټوټونی یا زیني یوبل غوځوي. ټوټی ۱۸ سانتیمتره او
۳۵ سانتي متره دی، د دومی هغه اوږده ټوټه ۳۰ سانتیمتره ده. نا معلومه
ټوټه یی وښایی.

۱۶ – څومره لرې سړی کتلی شي
الف) د بحرهوارې څخه ۴۰ متره جګ اندازه ټوکری
ب) د یوه له ځمکی ۲ کیلو متره جګ هوا پوړنکی یاهوا بالون،
پ) د یوه الوتونکی کوټکی چی د سپوږمی هوارې څخه۲ کیلومتره
جګه وي($r = 1735$ km)؟

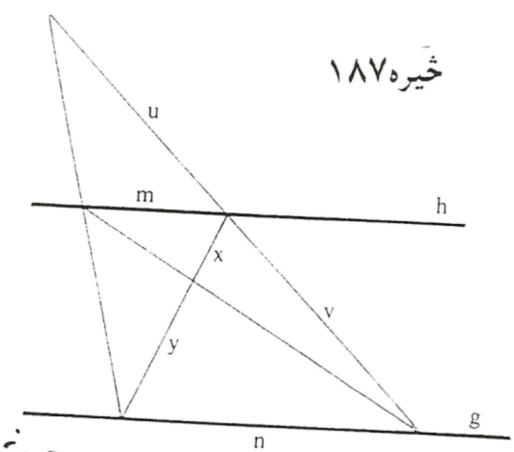
څیره۱۸۷

۱۷ – د شکل ۱ (څیره
الف) لپاره صدق کوي $g \parallel h$ او

a) $\frac{u}{v} = 1$

b) $\frac{u}{v} = 0,5$

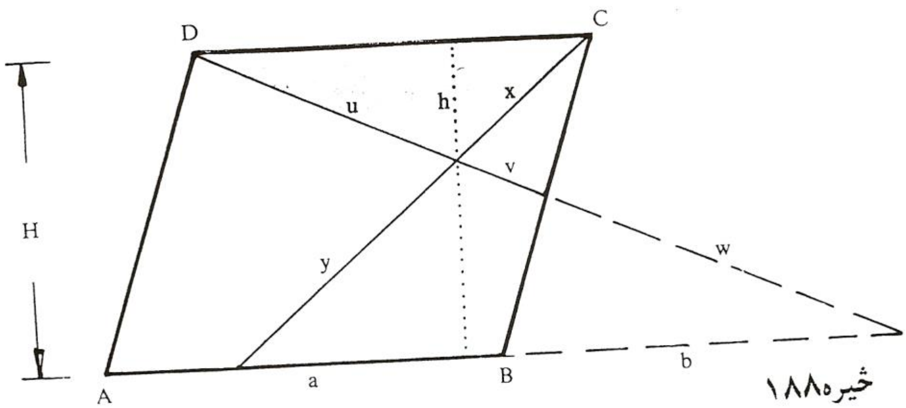
c) $\frac{u}{v} = \frac{2}{3}$



Berechnen Sie $\frac{x}{y}$. د شمېرې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ – وشمیری u / v او x / y (ثیره ب)
د غبرګاړخیز ثومه برخه رنګه ده؟



ثیره۱۸۸

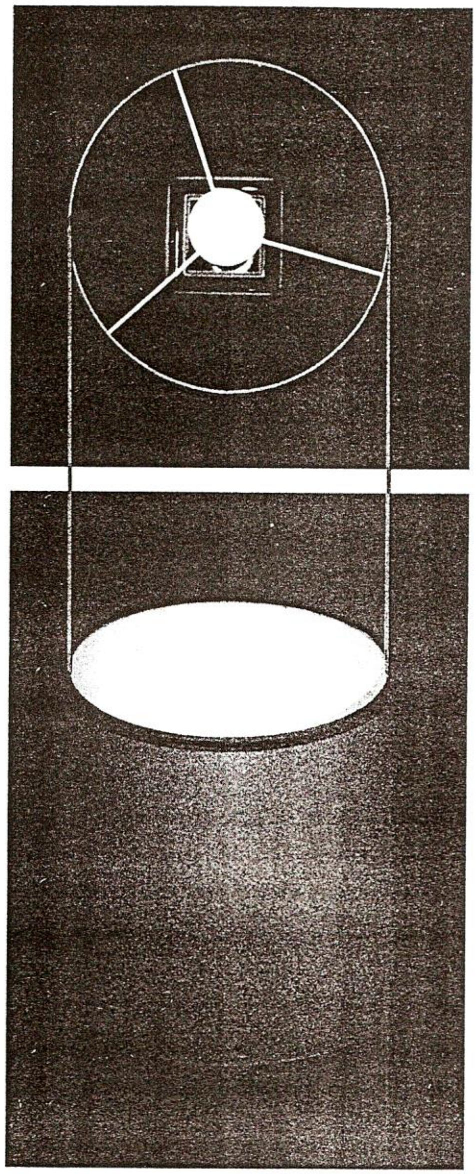
افینی ثیرونی (Affine Abbildungen)

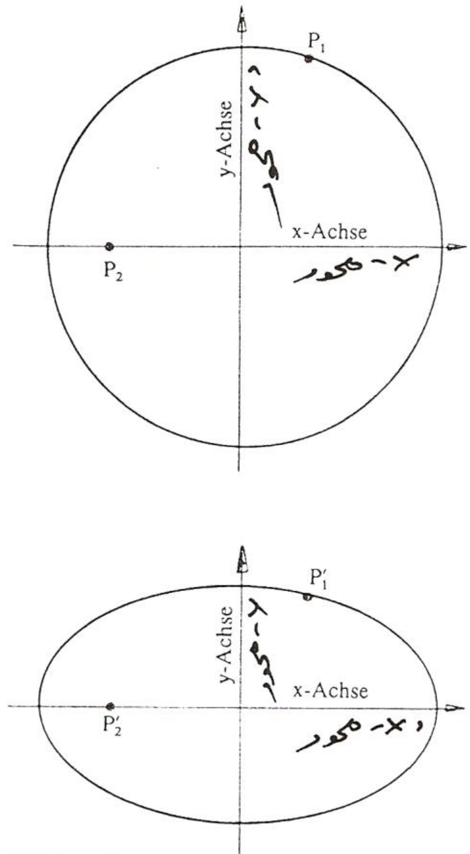
محوري افینیتي Die axiale Affinität

دبیلګي په توګه مو د مخه تیرو درسونو کی وپوښتل، چی ایا مونږ له یوې ګردې ښیښې ټوټې چې لږ ځنډه یې ماته ده یوه بله ګرډی ټوټه چی وړانګه یی له پخوا

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوچنی وي او یا یو ډیرګوډی جوړولی شو، چی سیومتري او په دې توګه ښکلی





خیره۱۸۹

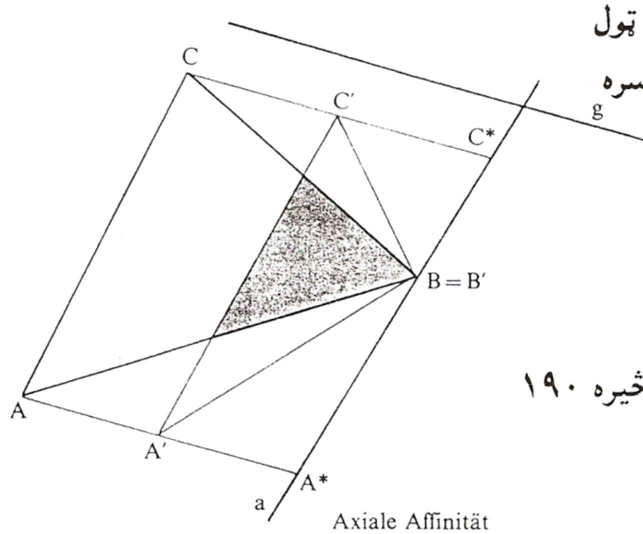
(c) ketabton.com: The Digital Library

وي. دلته موږ الیپسي سره مخامخ شو.
پوښتنه دا ده چې ایا یوه څېرونه شته چې له ګردۍ څخه الیپسي لاس ته راشي؟
د څېرې ۱۸۹/ دلیدلو له مخې داسې خیال راپیدا کیږي، چې ګونډې د ګردۍ او ایلیپسي ترمنځ څه خپلوي شته. دا نو بیا دې لاندې پریکړې ته اجازه ورکوي، چې یوه څېرونه باید موجود وي چې د ګردۍ څېرونه ایلیپسي شي.
دا څېرونه باید کوم خوېونه ولري؟
موږ بیا د جوړونې نیونې چې د مخه مو کړي رامنځ ته کوو.
ټولې په پراته (افقي) x– محور باندې پراته ټکي ځاي په ځاي پاتېږي: پس د x– محور د ځاي په ځاي ټکو کرښې څېرونه ده. د دې په څټ د y – محور ټول ارزښتونه تغیر خوري. پس هره y–محور سره غبرګه کرښه ځاي په ځاي کرښه ده.
له دې سره موږ د نوې څېرونې لپاره ټول ضروري خویونه راټول کړل: د افینیتي محورa سره یوه محوري افینیتي $A_{a;g;k}$ ، د لورکرښې (کرښه چې لورې یې څرګندوي لنډ یې: لورکرښه) g او د افینیتي فاکتور $|k| = 0$ مخ ته پراته دي، که لاندې شرایط پوره وي :
۱ – هره کرښه PP' چې له ټکو P او P' تیره وي د g سره غبرګه ځغلي.
۲ – که *P د PP' او a غوځټکي وي ، نو لرو : $|P^*P'| = |k|.|PP^*|$.
په دې توګه نو یوه محوري افینیتي، دکرښې –،غبرګ – او ټوټه تناسب یا ځاننیونه ریښتونې ده. اخرنۍ دا وایي چې په اصلي پایکرښې درې ټکي دا پایکرښه په همغه تناسب یا ځاننیونه پرې کوي، لکه د څېره ټکي په څېره کرښه باندې.

له دې لاندې د محور افینیتي جوړښت څېړنه لاس ته راځي
۱ – له اصلي کرښې په نخه شوي ټکي (د بیلګي په توګه P) څخه وg سره یوه غبرګه کرښه وباسې او ددې غوځټکې د افینیتي محور سره د بیلګي په توګه *P وبولې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – له *P څخه |PP*|. k = |P'P*|
و g ته غبرګي مناسبې کرښې
وکاږئ.
۳ – په دې توګه رامنځ ته شوي ټول
ټکي اصل ته په ورته توګه سره
ونښلوي.

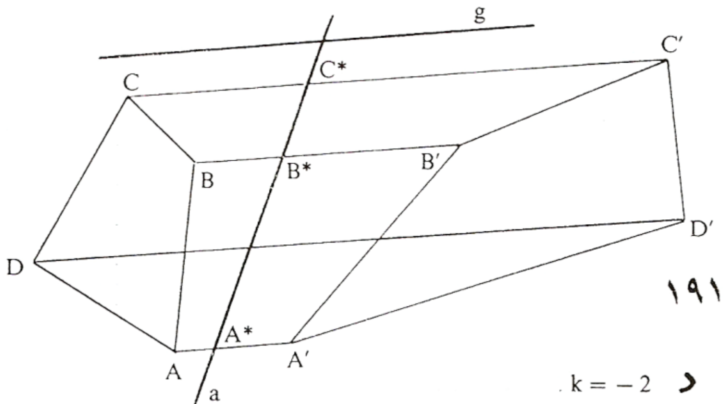


شیره ۱۹۰

Axiale Affinität

د $k = \frac{1}{2}$ سره

آکسیال افینیتي



شیره ۱۹۱

د $k = -2$

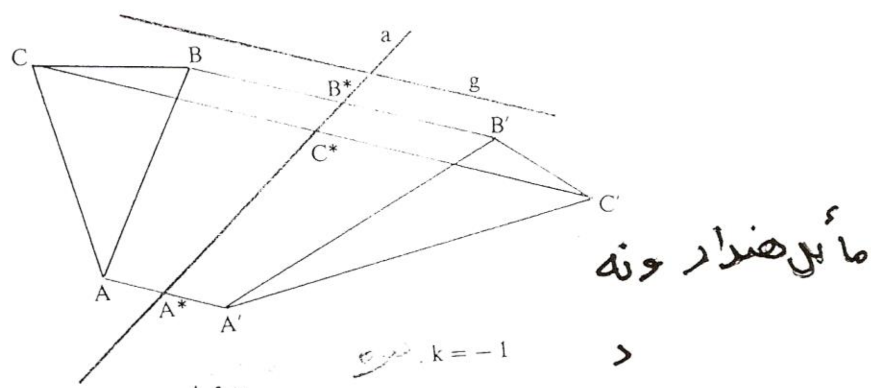
آکسیال افینیتي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k = 1$ لپاره د هوارې هر ټکی ځای په ځای ټکی دی، ځکه چی ټولی پایکرښی تغیر نه خوري. له دې لرو چی $A_{a;g;1}$ کټمټ یا identisch ایدنتیك دي.
د $k > 0$ لپاره P او *P د a په یوه (همغه) خوا پراته دي(څیره) ، د $k < 0$ لپاره د a په بدلوخواوو (ش. ۱۵۷)
یو څیرونه $A_{a;g;k}$ کیدی شي په څیرووني $A_{a;g\ 1/k}$ بیرته راوکرځي .

مائیل هندارونه

مائیل هندارونه یوه ځانګړې محوري افینیتي ده : د $k = -1$ لپاره لریوالی یا فاصله |*PP| همدومره ده لکه لریوالی یا واټن یا فاصله |*P'P| . پس مائیل اینونه محوري افینیتي $A_{a;g;-1}$ ده.



څیره ۱۹۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

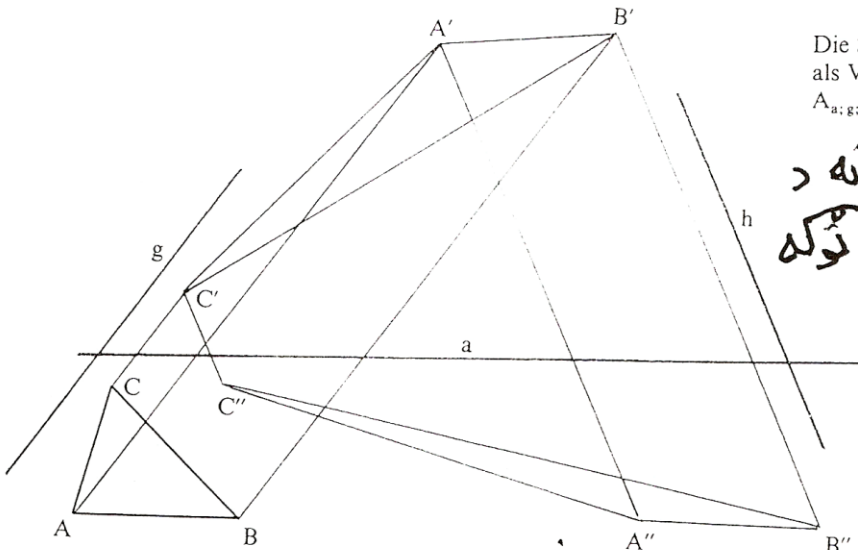
: محوري افينيتي(يو بل سره) تړلو ځانګړي حالتونه:

ياتي كوونه يا بياتيونه Scherung

: دوه محوري افينيتی(يوبل سره) تړل، چې همغه افنيتي محور a ولري،g او h
مختلفلوري محورونه او يو بل ته مخامخ افينيتي فاکتورونه k او 1 / k ولري، نو
ياتيونه(بياتي كونه) ورته وايو.

ياتيونه(يوبل سره)
: تړلو په ځير:

$A_{a;g;-2} \cdot A_{a;g;-½}$



Die Scherung
als Verknüpfung
$A_{a;g;-2} \cdot A_{a;h;-\frac{1}{2}}$

د بياتيونه
تړنې په توګه

شمېره ۱۹۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بیاتیونی کی، لکه ځنګه په مائیلی اینوني کی د هواری دننه بی تغیره پاتی کیږي، سره ددې چی د یواځنیو یا ټولو شکلونو تغیر خوړلی شي. (تمرین وګوری) په عمومي توګه د ځیرې – او اصلي هوارې لپاره په یوه محوري افینیتي کي باور لري : $F'=|k|.F$, او یو په بل پسی کارونو یا عملیو اجرا کولو کی هم په همدې ډول $F' = |k_{...}.k|.F$:

دا په دې مانا، چی محوري افینیتي په عمومي توګه هوارې ریښتونی نه ده.

محوراینونه

محوراینونه یوه محوري افیتي ده له $k = -1$ سره. (ځیره ۱۹۲ وګوی)

کونګروانیخ ځیرونه
هره کونګروانیخځیرونه کیدی شي له محوراینونی یوځاي راټوله شي.

منځنی راکښنه(راکښل)
هر منځراکښنه یو افڤینه ځیرونه ده.

په عمومي ډول لاندې لاس ته راځي

د ټولو کونګروانیخ ځیرونو، ورته ځیرونو او محوري ځیرونو ډیري، د ټولو افڤین ځیرونو ډیري ورکوي. که افینځیرونی یو په پسي اجراشي یو ګروپ جوړوي، داسی په نامه افینګروپ. (ګروپ دې د کتاب په پای کی وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – یو دریګوړی ABC دې په یوه افین هوارمساوي باندې داسی واړول شي، چیرته چی $|AB| = |AB'|$ او .

۲ – په دریګوړي $A(3|5)$,: $B(5|4)$; $C(3|1)$ باندې یو محوري افنیتي داسی وکاروي یا استعمال کړی، چی $A'(-3|1)$ او y– محور د افنیتي محور وي.

۳ – د ګردی ځیره د $M(2|3)$ او $r = 3$ cm سره وټاکی ، که د x–محور د افنیتي محور وي، په ۱ او ۳ کوادرانت یا څلورمه کي لورکرښه او $k = 2$ د افنینتي فاکتور یا –ځل وي.

۴ – یو دریګوړی په هوار مساوي پنځه ګوډي واړوی.

۵ – یوه ګردی دې د نیمي $d = 12$ cm او د افنینیتي فاکتور $k = ½$ سره افینځیره شي. د راپیدا ایلیپسی د هوارې دننه وشمیری. (دوه یو په بل ولاړ محورونه افینیتي محورونه دي چی له منځټکي او لوریزکرښی څخه تیریږي)

۶ – یو تریخ ABCD جوړکړی له $a = 8$ cm ; $c = 3$ cm ; $d = 5$ cm او $\sphericalangle = 40°$. په دې محورې افینیتي لارښوده کړی، چی د افنیتي محور یی د تریخ منځلاین وي، چی د لورکرښه یي د هغي سره ۵۵ درجي کونج جوړوي او د افنیتي ځل ا –فکتور یی $k = 3/2$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریګوډیکچ یا تریګونومتري Trigonometrie

تعریفونه

د دریګوډیکچ یا تریګونومتري دنده ده چې په هواره یا په هوا کې دریګوډي کچ کړي ، د ځانګړوبلواکو له لارې، دې په نامه تریګونومتریبلواکو. برسیره پر دې د دې په مرسته پریودیکې یعنې په منظمه فاصله پرلپسې تکراریدونکې پیښې(موږ یې تل راګرځیدوني بللی شو) څیړل کیږي.

تریګونمتري تر هیپارچ (Hipparch ۱۶۰ – ۱۲۵ له م پخوا) پوري تعقیبیدی شي، وروسته له مصري پتولیمویس Patolemäus چې په ۱۶۸ م کال کې مړ شوی او بیا له هندې او عربو شمیرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پیل دا د کارونې یا عملي کیدو د ستونځو سره مخامخ وه. دریګوډیکچ خپل کارونه په استرنومي او فزیك، د ځمککچ یا اندازه کولو، د ځمك اندازونې، نقشو علم، او ابادی او نوتیك Nautik (د کیشتیو د لارو نقشه ویستلو پوهنه) کې مومي.

د تریګونومتري مانا یا مهموالی په ځانګړي ډول په دې ریښتینوالی یا واقعیت کې نغښتې، چې د دې په مرسته د پایکرښبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي(پام دې وي، چې دا تړاو شمیرپوهینیز مفهوم لري).

پیلبیلګه: د په مانایا مهم جګوالي یا لویدکرښو نخښنه لوحی یا په بله عبارت د زوړي او پیچومی لیکتختی(دې ته دې پام وي چې ما دا کلیمی هر چیرې د زوړي او پیچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چې په هغه مناسب ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي) وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟
پیچومی یا جګوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جګوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیك ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جګوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توګه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جګوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جګوالي لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جګیږي. کتل کیري یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومي یا جګوالي کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځانیونه و هوارې فاصلي ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځاننیونه تابث یا ځاي په ځاي پاتیږي او د په سلو کی ګڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جګوالي اوږدوالي معلومات نه

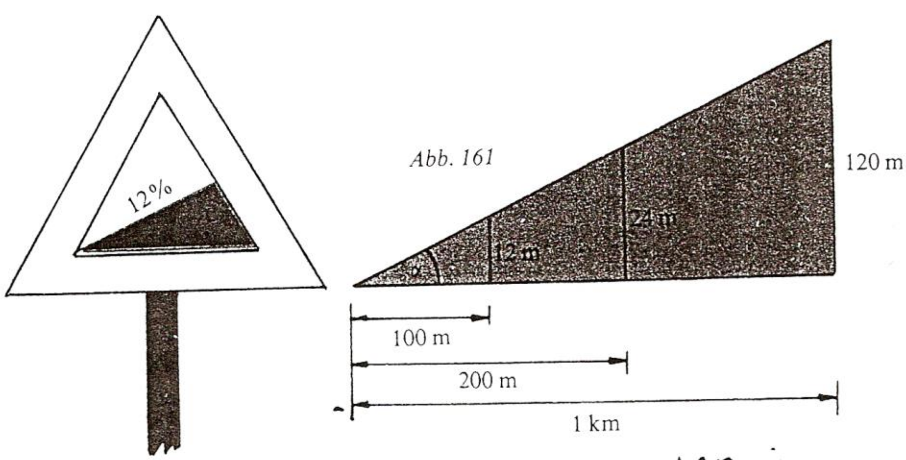


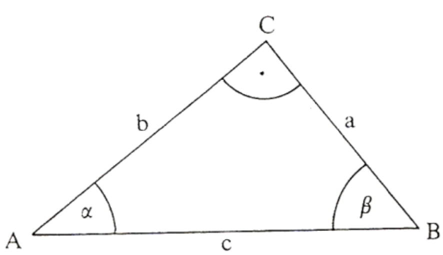
Abb. 161

ځیره ۱۹۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکوي همداسي زوړی یا لویدون. په داسي حالت کی هم بیا نورې لوحي هم زوړندې وي.
په همدې ډول پیچومی کیدی شي، لکه په سلو جمله کی، د کونج له لارې هم ورکړشي، چی د سرك ټوټه یی د پرتون سره جوړوي.
تریګونومتري یا د په سلوکی (د پیچومي یا جګوالي تناسب) د پیچومي یا جګوالي ویناوي دي او یا په څرګندو پیچومي کونج یا جګکونج چی سلییز پیچومی یا جګوالی ټاکي. په دې ډول په سلو کی ۱۲ جګوالي سره د پیچومي کونج په لاندې ډول دی $\alpha = 6,48°$.

په پیلبیلګه کي څرګندیږي چی دا پایکرښي د یوه ولاړ دریګوډي اړخونه انځوروي، چی د دوه دریګوډیو تناسب یا ځانیونه د کونج په بلواکی یا اړتوب ښایی. زیات وخت هیوپوتینوزې (اوږداړخ) په c ښوول کیږي او هغه ته مخامخ کونج په γ . نورې دواړه کتیتی a او b دي او د دوي مخامخ کونجونه α او β.

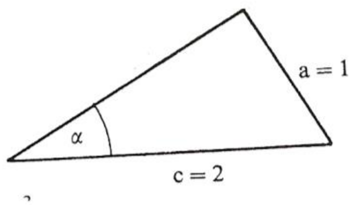


ځیره ۱۹۵

اوس نو لاندې جملی باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساینبلواک sinusfunktion: بلیگه:

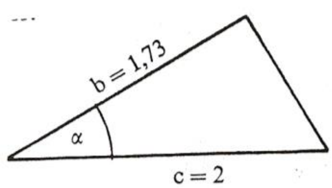


$$\sin\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}$$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

خیره ۱۹۶

کوساینبلوک Cosinusfunktion بیلگه:

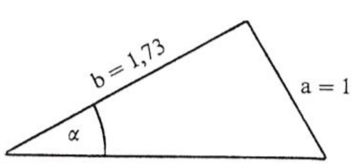


$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرته کتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}$$

$\cos 30° = \frac{1,73}{2} = 0,8660$

خیره ۱۹۷

تنجنتبلواک Tangensfunktion بیلگه:



$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$$

خیره ۱۹۸

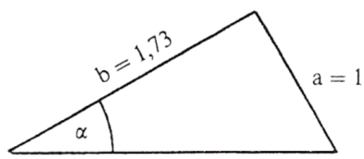
$\tan 30° = \frac{1}{1,73} = 0,577$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : پام دې وي چې د مخامخ کاتیت لاندې د دریګوډي هغه اړخ پوهیږو، چې په هیپوتینوزې پراته کونج ته، چې څموږ موخه وي، مخامخ پروت وي او هغه اړخ چې په همدې کونج پروت وي ، هغه ته په کونج پروت اړخ چې موږ یې لنډ پروت کاتیت بولو.

دا لاندې نور کونجبلواك دي، چې کم کارول کیږي

کوتنجنتبلواك Kotangensfunktion بیلګه



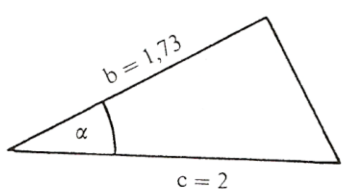
$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{مخاخ کاتیت}}$$

خیره ۱۹۹

$$\cot 30° = \frac{1{,}73}{1} = 1{,}73$$

ډیر کم ، د بیلګي په توګه استرونومي کی، لاندې کونجبلواك کارول کیږي

سیکانسبلواك sekansfunktion بیلګه



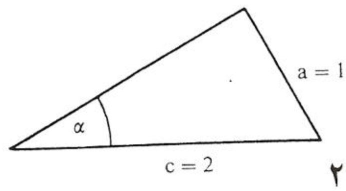
$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{هیپوتینوزې}}{\text{پرته کاتیت}}$$

ثیره ۲۰۰

$$\sec 30° = \frac{2}{1{,}73} = 1{,}156$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوسیکانسبلواک Kosekansfunktion بیلګه:



$$\mathrm{Cosec}\,\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزي}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

ځیره ۲۰۱

$\operatorname{cosec} 30° = \frac{2}{1} = 2$

موږ به زیات وخت لمړنی درې یا په همدې توګه لمړنی ځلور بلواکه د کارونی لپاره راونیسو یا وکاروو.

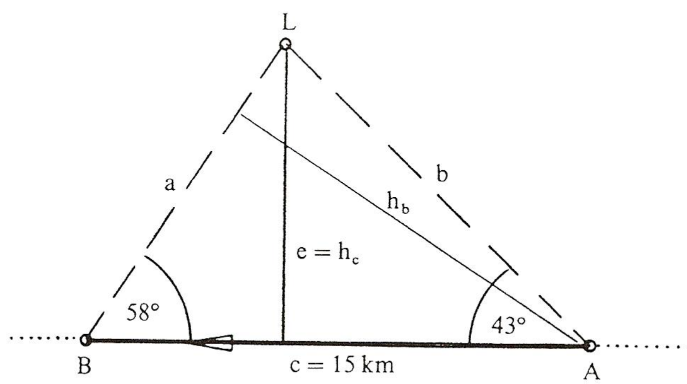
په خوښه دریګوډیو کی شمیرنه

سره له دې چی کونجبلواکي یواځی په ولاړکونجیز دریګوډي کی باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جګوالی په جوړولو کی هر دریګوډی په ولاړو برخه دریګوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکرښي وینا وي د پیل دریګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

پیلبیلګه
یوه کیښتی د رڼاډزکړي(کله چی کښتی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کښتی یا یو بل ځه ته که یوه کښتی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې ځرګندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چی ځه پیښ شوي دي). دلته $\alpha = 43°$ د تګ په لور اندازه کیږي او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه تګ پایکرښي $c = 15\ km$ او کونج $\beta = 58°$ وروسته.
په دوم ړز کی کیښتی له ړز رڼااور څخه څومره لرې ده؟
د A څخه و B ته د کیښتی نزدې واټن e د ړزرڼااور څخه څومره لري دی؟
په A کی له اور څخه څومره لرې وه ؟



شیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 79°$; $\sin\beta = h_b / c$ او $\sin\gamma = h_b / b$

د h_b په لور اوبیول یا حلول او په همدې وخت کی لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin\beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin\gamma$$
$$\Rightarrow c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$
$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58°}{\sin 79°} = 12{,}959\ km$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin\alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin\alpha = 12{,}959 \cdot \sin 43° = 8{,}838 \text{ km}$$

$$\sin\beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin\beta} = \frac{8{,}838}{\sin 58°} = 10{,}421 \text{ km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دریګوډي اړخونوa او b په شمیرنه کې مرستندوي لویی له منځه ځي او باور لري:

د ساین جمله :

په خوښه دریګوډي کې د اړخونو ځاننیونه یاتناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځاننیونه یا تناسب دی.

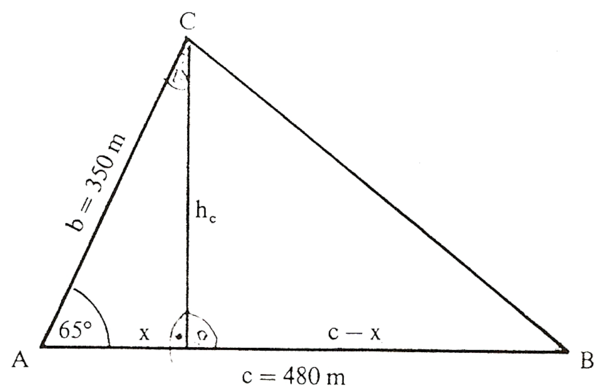
$\sin\alpha / \sin\beta = a / b$ $\sin\beta / \sin\gamma = b / c$

$\sin\gamma / \sin\alpha = c / a$

د ساین جمله په پڅ دریګوډي کي هم باورلري(تمرین دې وکتل شي). ددې سره په یوه دریګوډي کی نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کیږي، چیرته چی دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي.
سړی بیا څه کوي که دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راګیر کونج؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلبیلګه : په یوه د ډبروسکرو کان کې دوه ستنې b = 350 m
او c = 480 m دي او یو کونج $\alpha = 65°$ ښندوي.
د B ځخه و C ته به د نښلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟



ځیره ۲۰۳

اوبې یا حل :
جګوالې یا جګې h_c کرښه AB = c په دوه ټوټو x او c-x ویشي.
دلته دي $x = b.\cos\alpha$ ،
ځکه چې $\cos\alpha = x / b$ دي. د پیتاګوراس د جلې له مخې
لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$
او

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 .$$

$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb\cos\alpha$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړخونو اوږدوالي نوموني او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راګرځیدونکی (ځیکلیکي یوناني کلیمه ده ګردی ډوله یا منظم بیرته راګرځیدونکی zyklisch) یو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

کوساین جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$$

په هر یوه دریګوټي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاګوراس د جملی عمومیت یا ټولیز ته هم وایي. (تمرین ۶ مخ دې وکتل شي)

د کونجبلواك له لارې یو بل متود، د ډیرګوټي شمیرلو لپاره ، تر څو دا په دریګوټیو ویشل کیدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه یی څرګند وي، پیدا شو.

د دې ټولو سره د څلورګوټي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیداشو:

$$A = 0,5.d_1.d_2.\sin\alpha$$

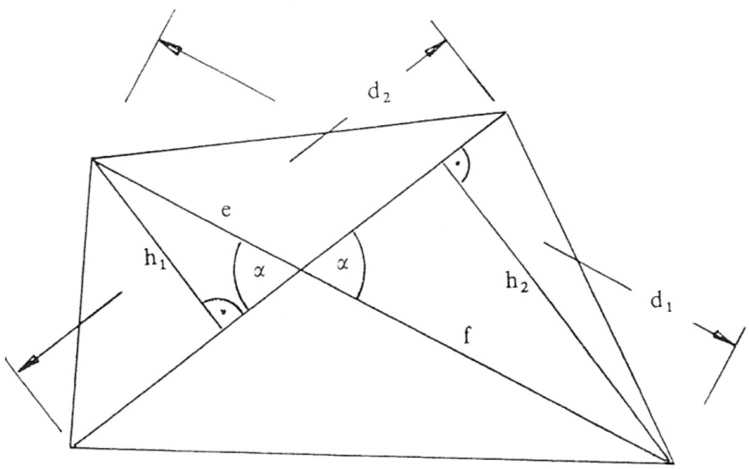
چیرته چي $\alpha = w(d_1; d_2)$ وي .

اوبی یا حل : $A=0,5(d_2h_1 + d_2h_2)$

که d_1 په e او f ټوټه یا تجزیه شي ، نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1 = e \cdot \sin \alpha$$
$$h_2 = f \cdot \sin \alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2 (e + f) \sin \alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2 \, d_1 \, \sin \alpha$$



شیره۲۰۴

د په خوښه کونجونو تریګونومتریکي بلواکي

په اخره برخه کې مو وویل، چې کونجبلواک، نه یواځې د دننه لورته تیرو دریګوډیو لپاره ، بلکه د هغو کونجونو لپاره چې له ۹۰ درجو لوي وي ، هم هدفمند (موخور) تشریحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

دا پراختیا څنګه تصور یا د خیالوړ کیدی شي ؟

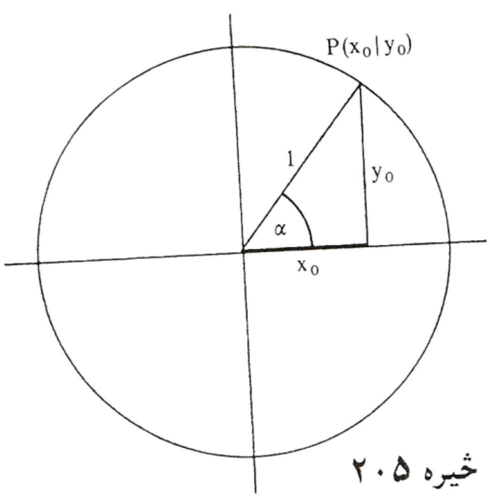
(c) ketabton.com: The Digital Library

په ښه توګه داسی کیدی شي چی په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کی یوه ګردۍ ووهي چی وړانګه یي ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی (دې ته یوونګردۍ ویل کیږي، ځکه چی وړانګه یی یو یوون دۍ) او د ګردۍ منځټکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردینات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډۍ، چی د هغی یو کونج د ګردۍ ځنتریکونج دۍ، یعنی کونج یی د ګردې په منځ یا ځنتر پروت دۍ، (خیره ۱۳۴) کم له کمه یی یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوډۍ په دننه کی شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړکونجیز دریګوډي ځخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي ځلورمه یا کوادرانت (Quadrant) کی پروت د ی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په ګردۍ ،د کونجټکی $P(x|_0y_0)$ په پام کی نیولو سره، باور لري:

$$\sin\alpha = y_0 / 1 = y_0 , \quad \cos\alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښی د پریوستون او یا د سیورېدرځونو په ځیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوهونکی مړوند په ځیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محورغبرګي رڼا لاندې راشی.



خیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کی کیدی شي چی د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

تریګونومتریکي پیتاګوراس:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

چیرته چی $\sin^2\alpha = \sin\alpha . \sin\alpha$ په مانا دۍ.

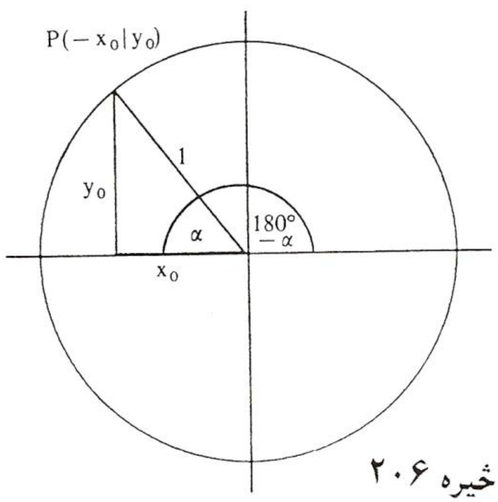
(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي ، چی پوښتنه وشي چی همدا « سیوری » بیا کله لاس ته راتلی شي.
دا حالت بیاهیك هلته لاس ته راځي، چی وړانګه د منفي x –محور سره یو کونج ∝ جوړ کړي، یعني ځنتریکونج یی∝ - °180 وي.
د « سیوروځیرو » څخه لاس ته راځي:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

ځکه چی دا سیوری همغومره اوږد دی لکه د مخه، مګر اوس له صفر پیل مخامخ (منفی) لور ښایي.



خیره ۲۰۶

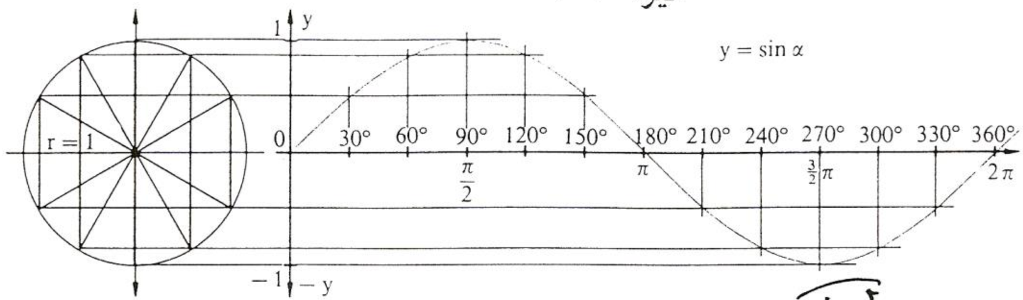
په ورته توګه لاس ته راځی :

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

د کونج ∝+°360 لپاره بیرته د سرچیني کونج اړیکی لاس ته راځي: همدا ډول د ∝+720 لپاره اوهمداسی نور. په دې توګه د په خوښه کونجفنکشنونو یا کونجبلواکو لپاره د ساین او کوساین بلواك تعریف دي.
د $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ له امله (مقایسه مخ ۱۵۱) دا د تنجنت بلواك لپاره هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکګرافونه لاس ته راځی

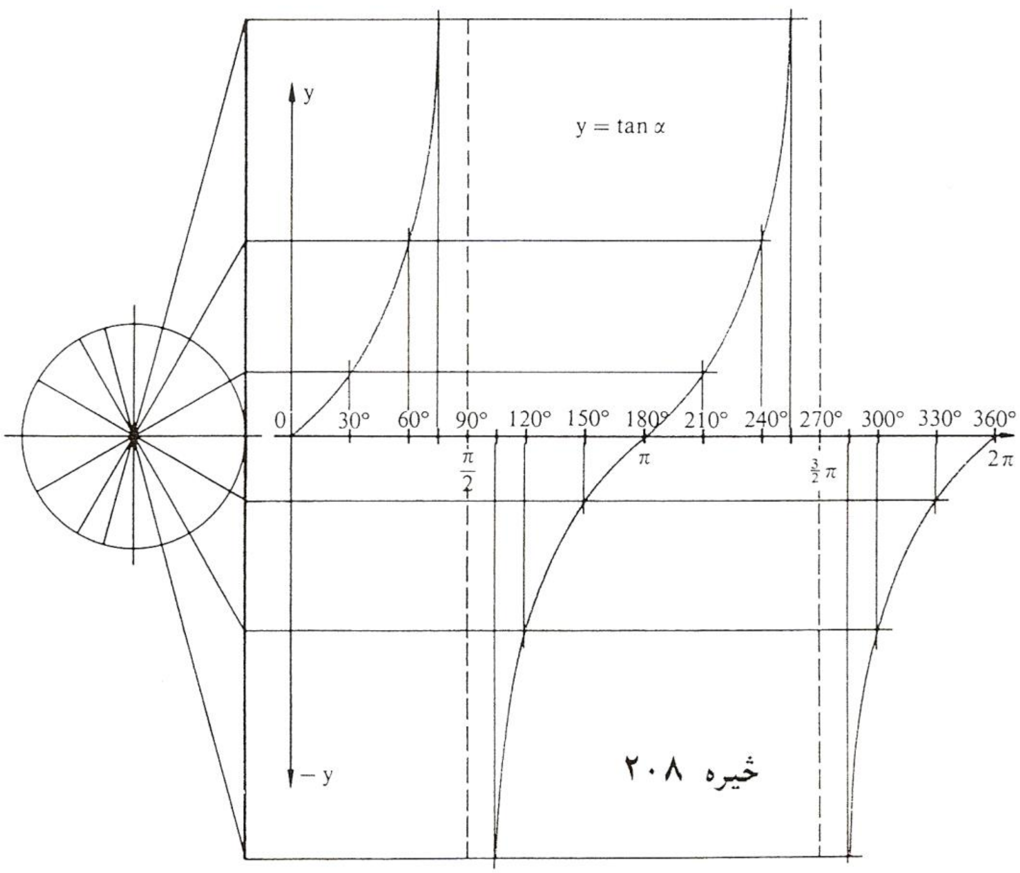
(c) ketabton.com: The Digital Library

شیره ۲۰۷



Die **Sinuskurve**: $y = \sin x$; $x \in \mathbb{R}$; $y \in [-1; 1]$

د ساین کږه

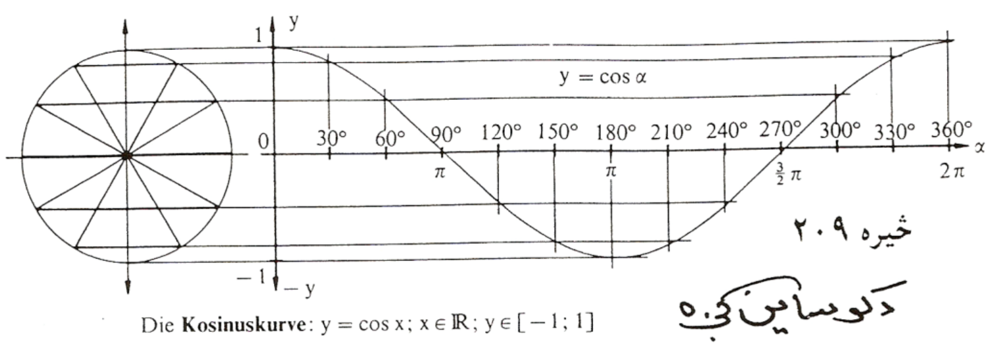


شیره ۲۰۸

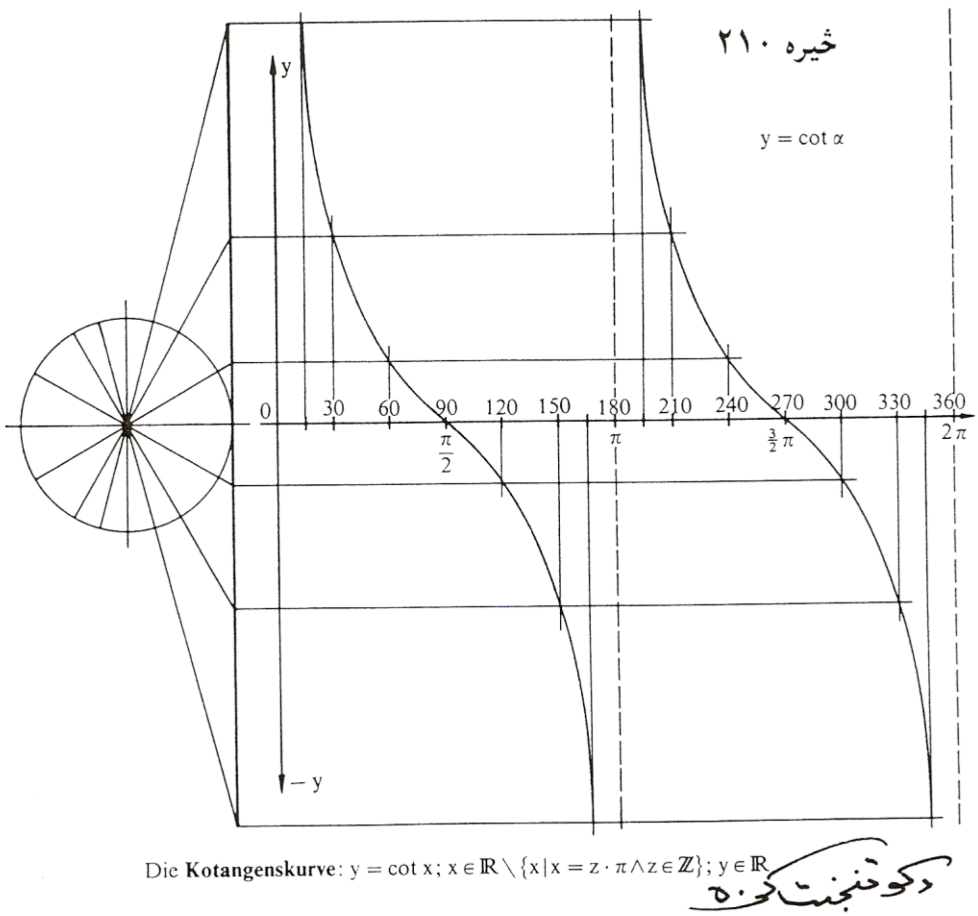
Die **Tangenskurve**: $y = \tan x$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$; $y \in \mathbb{R}$

د تنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library



Die **Kosinuskurve**: $y = \cos x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$



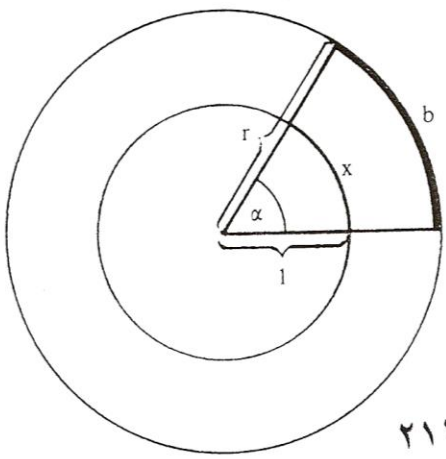
Die **Kotangenskurve**: $y = \cot x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

په زره درجه د کونجکچ یا – اندازې سره بلد یو (دمخه ولیدل، چې ۳۶۰ درجې پوره ګردی ښایي. هغه، چې لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده ، چې ګردی په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دواړو کچیوونونو یا کچواحدونو کی ګډ دي، چې په ګڼونو اندازه کیږي، بی له کچ یوون ارزښتډیری رییلګڼونه دي، په داسی حال کي چی وتل ګڼونه (= د تعریف ډیري ګڼونه) یو یوون یا واحد (درجه یا ګون) لري. دا په کارونه یا عمل کی موږ زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.

کونج لویي په واقعیت کی یوون «راد (rad) » لري، مګر دا په کارونه یا عمل کی کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مو نه راهځوي. دا کونجکچونه چی د کونج لپاره په تریګونومتریکی بلواکو کی اینښودل کیږی (د بیلګي په توګه sin)



خیره ۲۱۱

ارګومنت (Argument تعریفډیری) بلل کیږي. په تعریفډیري کی کیدی شي چی نوې درجه ، زړه درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چي په جبشمیري کی همغه مودوس په کار اچول شوي دی(راتلونکی دې وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په برخه گرديبرخوکی وښوول شو (گرديبرخی د مخه ښيړل شوي دي) چی هر کونج پورې يوه گردبرخه يا گردی لينده اړه لري، نو ټولی گردی پورې ۳۶۰ درجی کونج يا $2\pi r$ اړه لري، يوه کونج ∝ پورې بيا يوه لينده b اړه لري، کومه چی په چاپېرۍ ځانگړهمداسی نيسي لکه په پيل کی∝ و ۳۶۰ درجو ته . دلته گرديگڼ دی : $\pi = 3,14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پيلبيلگه:

کونج $\propto = 60°$ له گردی د ۱۰ سانتيمتره وړانگي سره يوه په لاندې ډول گردی لينده $b = 20\pi . 60° : 360° = 10,47$ cm غوځوي يا بيلوي. د گردی چاپيری دی : $U = 20\pi = 62,83$ cm

همغه کونج ∝ د ۵ سانتي متره وړانگی سره گرديلينده

$$b = 10\pi .60° : 360° = 5,236 \text{ cm}$$

غوڅوي. دا گردی لاندې چاپيری لري: $U = 10 = 31,416$ cm .

له گردی د وړانگي $r = 1$ cm سره ددې په څېر يا برعکس کونج گرديلينده

$$b = 2\pi . 60°: 360° = 1,047 \text{ cm}$$

غوڅوي» د دې گردي چاپيری فقط $U = 2\pi = 6,283$ دی .

له بيلگي څرگنديږي، چی لينده اندازه په همغه اندازه زياتيږي لکه وړانگه. له دې امله کيدی شي خپله شميرنه په يوونگردي د وړانگي ۱ سره رابنده يا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعريف: په يوونگردي د گرديلیندی اوږدوالي کچگڼ، چی په څنتريکونج

(c) ketabton.com: The Digital Library

باندې څېره شوي، لېنده کچ بلل کيږي. لاندې شميراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180^\circ).\pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x/\pi)\,180^\circ = \frac{x}{\pi}\cdot 180^\circ$$

دا چې د وړانګي څرخون په پوره کونج هم وراوړيدی شي، نو له دې امله د لېنده کچ لپاره په خوښه ريبلګڼونه پرېښوول شوي.

بيلګې :

$$\alpha = 1^\circ \Leftrightarrow x = \frac{1^\circ}{180^\circ}\pi = 0{,}0175\ (rad) \qquad \alpha = 180^\circ \Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ}\pi = \pi = 3{,}1416$$

$$\alpha = 30^\circ \Leftrightarrow x = \frac{30^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236 \qquad \alpha = 360^\circ \Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{180^\circ}\pi = 2\pi = 6{,}2832$$

$$\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow x = \frac{45^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854 \qquad \alpha = 720^\circ \Leftrightarrow x = \frac{720^\circ}{360^\circ}\pi = 4\pi = 12{,}5664 \quad \text{usw.;}$$

$$\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472$$

$$\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow x = \frac{90^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \qquad \alpha = -75^\circ \Leftrightarrow x = \frac{-75^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{-5}{12}\pi = -1{,}309$$

ارکوسبلواکي Arcusfunkrionen

زيات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کيږي ، چې لکه په ورکړشوو کرښځانيونو راپيداشوې کونجونه څنګه معلوميږي يا څنګه راڅرګنديږی يا بهتره څنګه ځانونه نيسی. ددې لپاره چې دا پوښتنه ځواب شي، بايد امکانات ولټول شي، چې د کونجبلواك ارزښتونو څخه څنګه بيرته کونج يا په همدې توګه د هغه تعريفهيري ته، په لېنده کچ راتلی شو. دا کونجبلواك پريوديکی يا تل بيرته راګرځيدونکي بلواك دی، دا په دې مانا، چې د بلواك ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره يا .

(c) ketabton.com: The Digital Library

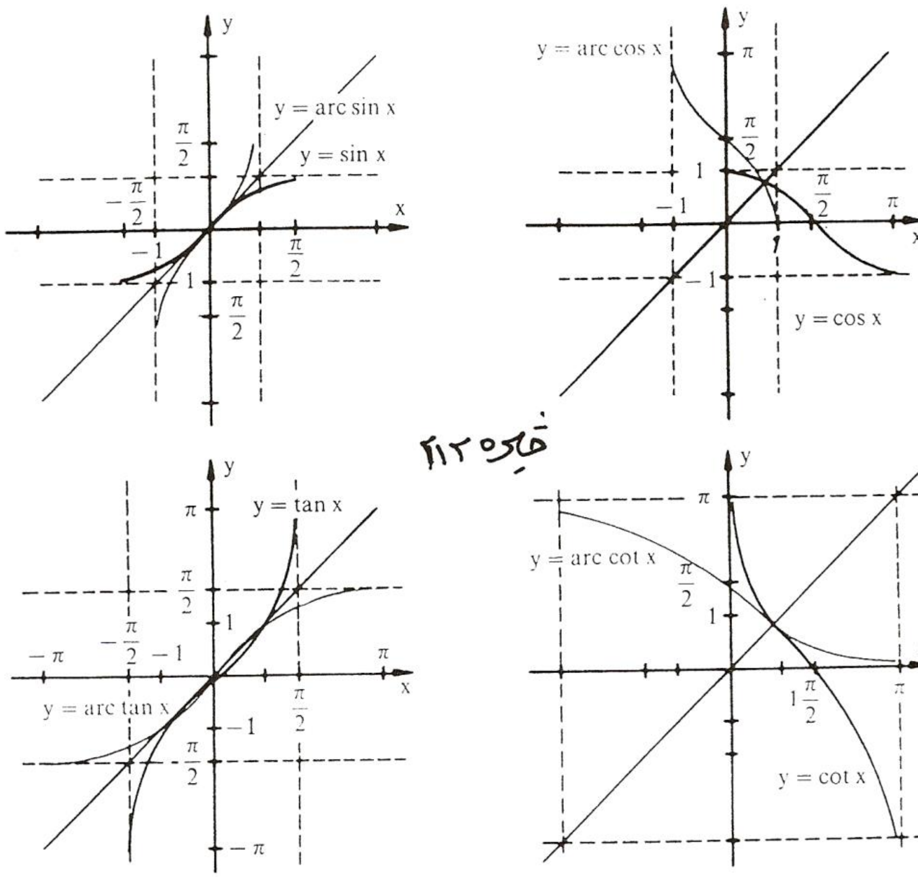
مختلفو واټنونو وروسته، بلواك ارزښتونه تكراريږي. د دې لپاره چې په څرګنديدنه ممكن شي، نو بايد د خپل تعريف ډيرى په يوه برخه ډيري رابند يا محدود شي.

تعريف : د يوه (رابند يا محدود) تريګونومتريكي بلواك په څټ بلواكونه اركوس بلواك Arcusfunktion بلل كيږي يا څيكلومتريكي بلواك (لاتين :اركوس Arcus = Bogen = لينده)

دلته (arc sin(x لوستل كيږي »د x اركوس ساين. د كونجبلواك تعريفډيرى دلته اړونده اركوسبلواك ارزښتډيرى دى او په څټ اركومنت يا تعريفډيرى دلته تل يو رييلګڼ دى.

Trigonometrische Funktion تريګونومتريكي بلواك	Arcusfunktion اركوسبلواك
f: $x \mapsto \sin(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle\| -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arcsin(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle\| -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \mapsto \cos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 \le x \le \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arccos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 \le y \le \pi\}$
f: $x \mapsto \tan(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle\| -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arctan(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle\| -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \to \cot(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 < x < \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < x < \infty\}$	f^{-1}: $x \to \operatorname{arccot}(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 < y < \pi\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



څېره ۲۱۲

Beispiele: بېلګې:

1. arcsin (0,8) = 0,9273 (rad) = 53,13°
2. arccos (1) = 0 (rad) = 0°
3. arctan (−100) = −1,5608 (rad) = −89,43°
4. arccot (−70) = −0,0143 (rad) = −0,82°

۵ – دا چې کونجبلواك و ارکوسبلاك يو د بل په څټ بلواك دي نو باور لري.

sin (arcsin (y)) = y;   arcsin (sin (x)) = x
cos (arccos (y)) = y;   arccos (cos (x)) = x
tan (arctan (y)) = y;   arctan (tan (x)) = x
cot (arccot (y)) = y;   arccot (cot (x)) = x

يعنې په لاندې توګه هم

sin (arcsin (0,4)) = sin (23,58°) = 0,4
arccos (cos (π/3)) = arccos (0,5) = 1,0472
tan (arctan (−40) = tan (−88,5679°) = − 39,9999
arccot (cot (60°)) = arccot (0,5774) = 1,0472

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جبشمیري کارونی یا استعمال لپاره

داچی پخوا معمول جدولونه د بلواك تعریفېدیري او ارزښتېدیري شمیرلو لپاره له کاره غورځول شوي دی او دنده یی ایلکترونیکي ماشینونو نیولی ده، غواړو چي د جبشمیري استعمال په هکله هم څه ووایو

کورکمپیوتر زیات وخت داسی فنکشنونه یا بلواکي لري یا وظیفی په کلك اختیار کی لري، چی د درجي اوړون په لینده کچ او په څپ کوي، مګر شمیردرځ په توګه باید د شمیرونکی په پروګرام کی ځای په ځاي شوی وي.

پوره اسانتیاوې او زیاته کارونه د جبشمیرې په غاړه پرته ده، دلته دې توکمی د < .... > سره په نخښنه شي:

په قاعده کی دریی بلواك ورکړشوي دي : < cot > ; < cos > ; < sin > کوتنجنت بیا داسی شمیرلکیدی شي، د < tan><1/x > . د < INV > – توکمي سره سړی ارکوسبلواك ته راځي: نو < INV><sin > ارکوس ساین دی. په عمومی توګه کونج – بي پروا که په لینده کچ او یا درجه کچ ورکړ شوي وي – باید د فنکشن له مخه ورکړ.

بیلګي

١ لاندې جدول همغه د کارونی یا اتعمال لپاره د جبشمیري چمتووالی ښای :

Winkelmaß کونجکچ	TR-Modus په نخښنونه	Beispiel بېلګه
Altgrad زړه درجه Neugrad نوې درجه Bogenmaß لینده‌کچ	DEG GRAD RAD	$\sin 45° = 0{,}7071$ $\sin 50^{g} = 0{,}7071$ $\sin \frac{\pi}{4} = 0{,}7071$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
sin 45°	45⟨sin⟩	0.707106781	DEG
$\sin\frac{\pi}{6}$	⟨π⟩⟨:⟩6⟨sin⟩	0,5	RAD
cot 30°	30⟨tan⟩⟨1/x⟩	1.732050808	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	60(°)	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	$1.047=\frac{\pi}{3}$	RAD
arccot 2	2⟨1/x⟩⟨INV⟩⟨tan⟩	26.56505118°	DEG
sin 220^g	220⟨sin⟩	−0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چی جبشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه») د زاړه – یا نوي درجی همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د تکمی <DRG> خخه لاس ته راځی یا د بیلګي په توګه < MODE >.

د ورکړشوي درجه ګڼ اوړون په لینده کچ د < <-- DRG > سره سورت نیسي.
بیرته یا په ختې سړی داسی راځي– لکه چی لرل مو– د <INV> – تکمی سره.

بیلګی

60°	⟨DRG⟩	60(rad)
60	⟨DRG⟩	60(grad)
60°	⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨DRG →⟩	60°
60°	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	60°

دلته ګراد نښونه (gard) نوی درجه ده یعنی ګون(gon).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځنې جشميري په دې برسيره نور زيات امکانات هم لري ، نتيجې يې په ګراد دقيقې، ثانيې اويا لسيز سيستم ورکړ شوي دي. بدلون بيا د تکمۍ <DMS-Dd> سره صورت نيسي:

26°45′ 30.25°	⟨inv⟩ ⟨DMS – Dd⟩ ⟨DMS – Dd⟩	26.75° 30°15′

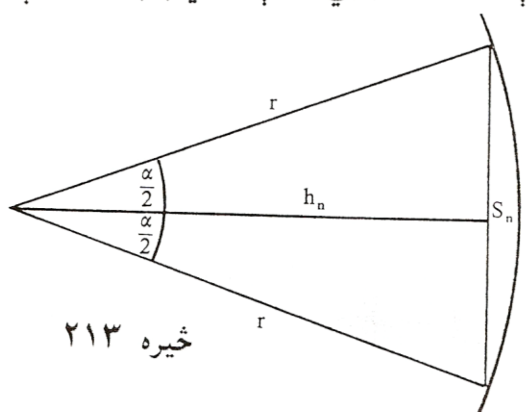
د " 30° 15" " ورکړه کيدی شي د جبشميري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جبشميرۍ د لاس کتاب څخه ګټه واخستل شي (يادونه: زه پوهيږم چې داسې شيان موږ متآسفانه په خپل هيواد کې نه لرو ، خو په هر صورت يې ليکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پريښوولی)

پيلبيلګه: دلته دې S_n د يوه منظم n– ګوډي د اړخ اوږدوالی وي، چې په يوه ګردۍ کې چې وړانګه يې r = 5 cm ده، راګير دی.

الف) وښايې چې

$$S_n = 2r \cdot \sin(180° : n)$$

ب) د يوه داسې n– ګوډي چاپيرې U_n وشميرئ ، چې n = 8;16;32;128 وي، او په نږدې توګه يا تقريبي د دې ګردي چاپيرې د دې وړانګې r سره وښايئ .



خيره ۲۱۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په همدې ډول n– ګوډی له هوارو A_n څخه په نزدې توګه یا تقریبي د ګردی ــــ هواره A وښایی .

اوبی (حل : هر n– ګوډی کیدی شي په n مساوي دریګوډیو ټوټه کړی شي.
د هغو د ځینتریکونج ∝ لپاره باور لري n / 360° = ∝ . د جګی یا جګوالی h_c
د کښلو سره په هر مساوي پښیز دریګوډي کي ولاړکونجیزې نیایی د څنتریکونج یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\alpha}{2} = 360° / 2n = 180° / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n /2) / r = \sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow S_n = 2r . \sin\frac{\alpha}{2} = 2r . \sin(180° / n)$$

b) $U = n.S_n = 2r.n.\sin(180°/n) = 10n.\sin(180° / n)$

د ارزښتشمیرنو د غلطی مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که په دغه همغه لړپیرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

180° ⟨STO⟩ ⟨ : ⟩ 8 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 8 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 30.614675
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 16 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 16 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 31.214452
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 32 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 32 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 31.365485
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 64 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 64 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 31.403312
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 128 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 128 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 31.412773

پ) د ډیرګوډي هواره د دریګوډیو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی
د هر دریګوډي هواره ده: $0,5 .S_n . h_n$. د

$$h_n = r.\cos(180° / n)$$

او

$$S_n = 2r . \sin(180°/ n)$$

له امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = n \cdot 0{,}5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0{,}5 \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$$

له دې سره د نړۍ [illegible]

360° ⟨STO⟩ ⟨ : ⟩ 8 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 8 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 70.710678
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 16 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 16 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 76.536686
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 32 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 32 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 78.036129
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 64 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 64 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 78.413712
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 128 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 128 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 78.508279

د یوه جشمیرې سره ، چې له یوې زخیرې زیاتی ولري ، لکه چی پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسیره نورې ثابتي هم زخیره کیدی شي» په یوه منظم پروګرامونړ ماشین سره کیدي شي چې د دا ډول شمیرنو لپاره د ګوډونو ګڼ ځخه ت شو یا د ګوډونو ګڼ باند ې صرفنظر وشي .

د تریګونومتریکي بلواکو خویونه

دا چی کونجکچ په درجه کچ او هم په لینده کچ ورکول کیدی شي، کیدی شي چی یوه کونج بلواك تعریفېدیری یا ∝ او یا x وي. ددې لپاره چی د یوه بلواك خوي باندې ټینګار وکړو، باید په لاندې په لینده کچ تکیه وکړو.
د لاندې خویونو لمړۍ ډله یواځي له تعریفمساوات (د مخه راغلی) او د پیتاګوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرته کاتیت}} = \frac{\frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}}{\frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دې لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \iff \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دې لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دې سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x \; ; \quad 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریګونومتریکي بلواکو کې هیله ده ، چې د پوتنځ لیکدود په پام کې ونیسی.
په لاندې پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

په لاندې کې gegeben ورکړې او gesucht غوښتونی یا پلټونی په مانا دي

gegeben ورکړې / gesucht غوښتونې	sin x	cos x	tan x	cot x
sin x	sin x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

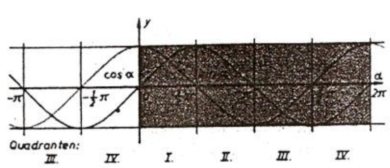
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\tan x$	$\pm\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\dfrac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\tan x}$	$\cot x$

لکه چی د مخه مو په ګوته کړل، کیدی شي چی تریګونومتریکي بلواك د مختلفو ګونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواك ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

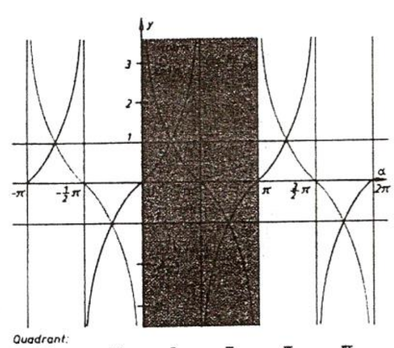
تعریف : تریګونومتریکي بلواك ټول پریودیکي یعني بیرته راګرځیدونکی دی، دا په دې مانا، چی د بلواك ارزښتونه په منظمو واټنونو کی تکراریږي. په دې د ساین بلواك او د کوساین بلواك راګرځیدنه (یا ۳۶۰ درجی) لري، کوتنجنتبلواك راګرځیدنه (یا ۱۸۰ درجی (180°)) لري.

$$\left.\begin{aligned}\sin(x \pm 2k\pi) &= \sin x\\ \tan(x \pm k\pi) &= \tan x\end{aligned}\right\}\quad k \in N$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(x \pm 2k\pi) &= \cos x\\ \cot(x \pm k\pi) &= \cot x\end{aligned}\right\}\quad k \in N$$



ځیره ۲۱۴
د ساین - او کوساین فنکشن پریودیک راګرځیدنه



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت او کوتانجنت فنکشنونو پریود یا تل بیرته راګرځیدنه:

بیلګې:

بیلګې :

$$
\begin{aligned}
&\sin 50^\circ &&= \sin(50^\circ + 360^\circ) &&= \sin(50^\circ - 720^\circ) &&= 0{,}76604 \\
&\cos -30^\circ &&= \cos(-30^\circ - 360^\circ) &&= \cos(-30^\circ + 1080^\circ) &&= 0{,}86603 \\
&\tan 2{,}5 &&= \tan(2{,}5 - \pi) &&= \tan(2{,}5 + 5\pi) &&= -0{,}74702 \\
&\cot 10 &&= \cot(10 + \pi) &&= \cot(10 - \pi) &&= 1{,}54235 \\
&\sin 35^\circ &&= \sin(180^\circ - 35^\circ) &&= -\sin(180^\circ + 35^\circ) &&= -\sin(360^\circ - 35^\circ) &&= 0{,}573576 \\
&\cos 35^\circ &&= -\cos 145^\circ &&= -\cos 215^\circ &&= \cos 325^\circ &&= 0{,}81952 \\
&\tan 0{,}6109 &&= -\tan 2{,}5307 &&= \tan 3{,}7525 &&= -\tan 5{,}6723 &&= 0{,}700208 \\
&\cot 0{,}6109 &&= -\cot 2{,}5307 &&= \cot 3{,}7525 &&= -\cot 5{,}6723 &&= 1{,}428042
\end{aligned}
$$

که د فنکشن ګراف ته په ځیر شو، نو برسیره پر دې روښانیږي:

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلګې:

	α	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
	35°	145°	215°	325°
sin	0,573576	0,573576	– 0,573576	– 0,573576
cos	0,819152	– 0,819152	– 0,819152	0,819152
tan	0,700208	– 0,700208	0,700208	– 0,700208
cot	1,428148	– 1,428148	1,428148	– 1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځې د جبشمیرې یا کمپیوټر څخه کار اخستل کیږي ، هدفمند بولو، چې یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin x bzw. sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	–	0
cot x bzw. cot α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

دلته د همداډول یا همداسي په معنا دی

له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا ګوماني لاس ته راوړی شو

sinx = cos (/2 -x) cos x = sin (/2 -x)
tan x = cot (/2 - x) cot x = tan (/2 -x)

دا ګومان کیدی شي په ولاړکونجیز درېګوډي کي د تعریف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

sin = a / c او cos ß = a / c

د – ß = 90° له امله لاس ته راځي :

sin = cos (90° -)

په ورته توګه نور ې غوښتني هم لاس ته راتلی شي.

دا له څیرو څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، څکه د ساین او کوساین بلواکو یا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو ګرافونه د /2 = x کرښی ته یو بل سره محورسیومتري څغلي :

له څیرو او بیلګو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

تعریف: د کوساین بلواك جفت دی ، لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

ساین – ، تنجنت – او کوتنجنت بلواك ناجفت دي» د دوي لپاره باور لري:

$$\sin(x) = -\sin(-x),\ \tan(x) = -\tan(-x)\ ;\ \cot(x) = -\cot(-x)$$

یادونه : په دې نلواکو کې کیدی شي چی x له نوکانو دباندې هم وي:

بیلگی:

$$\sin 60° = -\sin(-60°) = 0{,}86603$$
$$\cos 0{,}75 = \cos(-0{,}75) = -0{,}70711$$
$$\tan 150° = -\tan(-150°) = -0{,}57735$$
$$\cot 1{,}3 = -\cot(-1{,}3) = o{,}27762$$

د زیاتون قضیي یا تیورمونه

دا چې کونجبلواك لاینې نه دي(د فنکشنگراف کرښه نه ده،بلکه کږه ده) ، نو ډېل تعریفډیرې پورې ساده ډېل بلواك ارزښت اړه نه لري.
لکه

$$\sin 30° = 0{,}5 \quad \sin 90° = 1 \quad \sin 180° = 0$$

د داسی په نامه زیاتونمسئلی په مرسته ممکن کیږي، چی د بلواك ارزښت د کونج په دوه برابرولو یا په همدې ډول د دوه کونجونو پو په بل زیاتولو د یوگونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابي کړی شو.

بیلگی :

1 . $\sin(x + y) = \sin x \,.\cos y + \cos x \,.\, \sin y$

1' . $\sin(x - y) = \sin x \,.\, \cos y - \cos x \,.\, \sin y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2 . $\cos(x + y) \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

2 '. $cis(x - y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$

3 . $\sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

4 . $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

7. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 - \cos x)}$

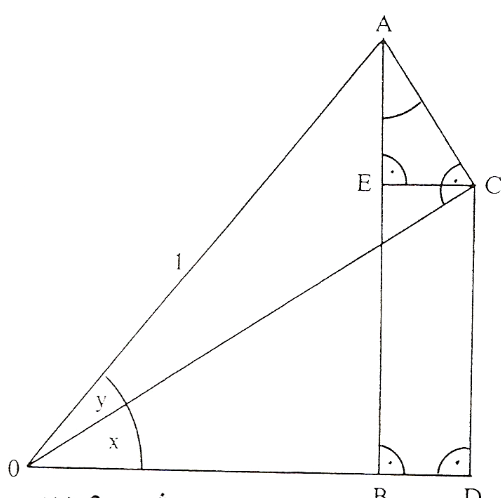
8. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 + \cos x)}$

9. $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

9′. $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

10. $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

10′. $\cot(x - y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$ mit $\cot x \neq \cot y$



(c) ketabton.com: The Digital Library

1. und **2.**:

$|OA| = 1$

$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y$

$$|AB| = \sin(x+y); \quad |OB| = \cos(x+y)$$

$$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

$$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

برسېره پردې پوهېږو:

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$
$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د ځای په ځای کولو څخه ښوونه په لاس راځي

$$\sin(x+y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1'. **2'.**:

3. **4.**: $x = y$. ځای پر ځای کړه

5.: Setze $z + t = x; \; z - t = y \Rightarrow z = \frac{x+y}{2}; \; t = \frac{x-y}{2}$ کېږده

پس لرو

$$\sin x = \sin(z+t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$$
$$= \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

همداراز

$$\sin y = \sin(z-t) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

6. ښوونه په ورته توګه ښکاره ده

7.: $x = y = z/2$ کېږده

$$\Rightarrow \cos(x+y) = \cos z = \cos 2\cdot\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2\frac{z}{2} - \cos z \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریښنه نیوني له لارې ښوونه لرو

په (*) $sin^2 z/2$ کې $1-cos^2 z/2$ کیږده:

۹ – ۱: دا اړیکې له ۱ او اوم او تانجنت پیژند څخه لاس ته راځي

بلواك يا فنكشن $y = a . \sin(bx+c) +d$

لكه چې په پيل كې مو وويل په طبيعت او تخنيك كې ډيرې پيښې شته دی چې تل بيرته راكرځي يا لنډ: راګرځي، يعني پريوديكي دي. د دې د تشريح لپاره په خپل سوچه يا خالصه بڼه تل د ساين بلواك بسيا نه كوي.
دا زيات علتونه لري: لمړی د ساينبلواك د ۱- او ۱ ترمنځ ارزښت نيسي، له بلې لور داواقعي د كونج په واك كی نه دي بلكه د وخت په واك كي دي د يوې راګرځيدنی سره، چې دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانيولكيدی. له دې امله د ساين بلواك د دې كارونو د روښانوولو لپاره بايد موډيفيځير شي يا يې بڼه واوړي. دا بڼه اوړون او د هغی تاثير په لاندې ليدنه كی راټول شويدي، ګراف يې ورزياتی ځيرونی لپاره دی. په ورته ډول د نورو كونجبلواكو لپاره باور لري په عمل كي مګر يواځي د ساينبلواك (په همدې توګه د هغي مخامخ د كوسابن بلواك چې په $\pi/2$ سره راكښل شوی وي) د مانا ډك دي. (لوستن: له ښي لور څخه)

بیلګی	دکارونی ساحه	تاثیر	بلواك
فقره ۲۱۷	ټولی تلبیرته راګرځیدونی تعامولونه		$y = \sin (x)$
فقره ۲۱۸	د یوه مساوي او بدل شپیالونګ یو په بل پرلوتن	د y-لور ته بانډې راکښنه	$y = \sin(x) +d$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځېره ۲۱۹	په بدل بوټینا جریان کې د بوټینا او ښیالو تګ تخمین دوښانو نه	د فاز تغییر یا ځای بدلون	y = sin(x+c)
ځېره ۲۲۰	د یوه پندول خوځېدنه	د امپلیتود د ځای بدلون فاکتور -1 د 180° فاز ځای بدلون دی	y = a . sin(x)
ځېره ۲۲۱	د یوه بنسټیزې غږیزې څېرې نه بېړه وخت دا د څپې زه دهغې لپاره لکه په دغو زینګ الو په او ازو لوکي	د یو ویو تغییر یا بدلون b>1 سرعت 0<b<1 په کرار کېدل b<0 په شا ګرځېدنه لکه مخکې دی	y = sin(bx)
ځېره ۲۲۲	کمپلکس پریودیک جریان یا عمل	عمومي حالت	y = a . sin(bx+c)+d

تمرینونه

۱ – د لاندې ورکړې سره ځیره بله کړی

4°6' = 4,1° ; 10° , 5' = 10°30

a) 6,75° = b = 120,48° = c) -75,65° =

d) 52°16' = e) 97°13' = f) 44°44' 44" =

۲ – په درجه کچ ي ولیکی

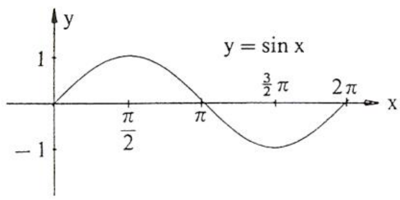
a) $x = \pi/3$, b) $x = -\pi/4$, c) $x (2/3)\pi$

d) x = 4 e) x = -3 f) x = 4,7

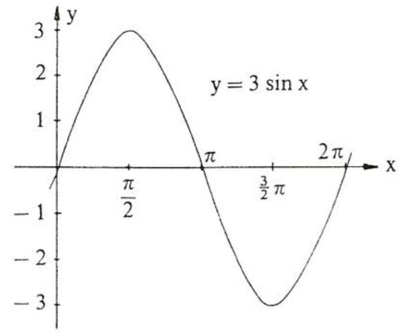
۳ – په لینده کچ یی ولیکي

a) 15° b) -60° c) 540° d) 20°15' e) 15,75°

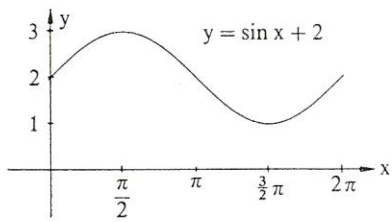
(c) ketabton.com: The Digital Library



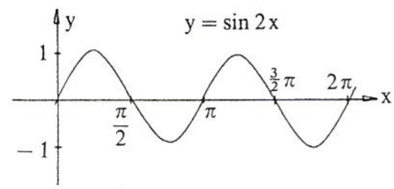
شیره ۲۱۷



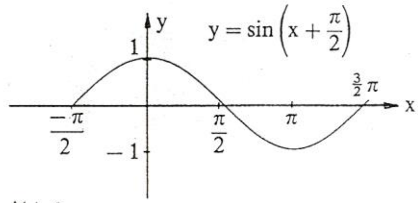
شیره ۲۲۰



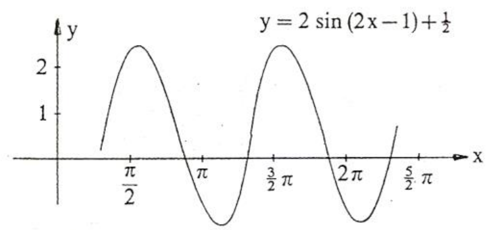
شیره ۲۱۸



شیره ۲۲۱



شیره ۲۱۹



شیره ۲۲۲

د دې بلواك ګراف د ساین کرېږ $y = \sin x$ څخه لکه چی ګورو لاس ته راځي:

۱ – د ارزښت دوه ځله کیدل

۲ – د نیمی راګرځید اوږدوالی باندې پرسیدنه

۳ – په یوه یوون د ښي لور ته راکښنه

۴ – په $1/2$ پورته لورته 100% راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – وټاکی

a) sin20° b) sin(-30°) c) sin 172° d) din1°4'

e) cos 35° f) cos 380° g) cos(-27°) h) cos47,9°

i) tan 11° k) tan (-15°) l) tan 33,33° m) tan 13°13'

n) cot 870° o) cot (-11°) p) cot 14°14'

q) cot (-2°2')

r) sin α =0,8 s) cos α = 0,9 t) tan α = 2,5

u) cot α =-1 v) sin φ = 0,3 w) cos φ = -0,13

x) tan φ = -4 y) cot φ = 0,3 z) arcsin(x) = π /2

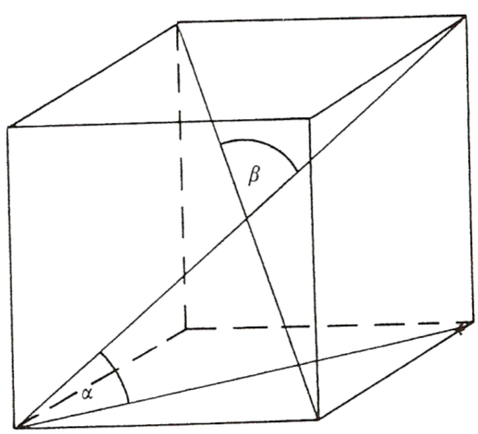
۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی لرو $\gamma = 90°$ او په دې برسیره :

a) a = 7 cm; b = 6cm

b) a = 16cm; = 66°45'

c) c = 5cm; a = 3cm

پاتی توټې وشمیری



شیره ۲۲۳

۶ – په مساوي پښیز دریګوډي

کي (a = پښه ده) دی

a) a= 10cm ; α =80°40'

b) a= 12 cm ; h = 8cm

c) ß = 40°; a = 7cm

پاتی توټې وشمیري

۷ – د یوه پڅکونجیز (α > 90°)

دریګوډي لپاره ساین وشمیری

۸ الف) کوساین د یوه پڅ کونجیز

دریګوډي لپاره وشمیری (α > 90°)

(c) ketabton.com: The Digital Library

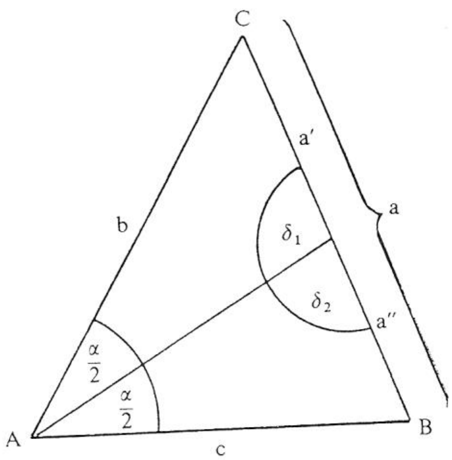
ب) په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟

۹ – په یوه مکعب کی د یوه هوا نیمي او بنستهواري ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟ څیره .د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمیو ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

۱۰ – د دوه ګردیو وړانګی

$r_1 = 5$ cm , $r_2 = 4$ cm

دي او همداسی د منځټکو واټن $|M_1M_2| = 8$cm ورکړ شوی دی.
دد دواړو ګردیو د تماس مماسونو غوڅکونجی وټاکی او د کلړي غوځونی اوږدوالی .



څیره ۲۲۴

۱۱ – په یوه دریګوډي کی د یوه کونجنیمی مخامخ اړخ په داسی ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د ساین جملی په مرسته حل (اوبی) کړی(څیره۲۲۴).

۱۲ – که یوه بار ځاي ته، چي ۵۰ ،۱ متره جګ دی، یوه زینه ورجګه شي میلانکونج ∡ دې زیات ترزیات 33° وي، زینه دې څومره لویه وي؟

۱۳ – الف)د یوې پورته ختلی کوڅي جګوالي توپیردې څومره وي، که دا کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جګه وي؟

ب) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جګوالي توپیر څومره دی ؟

پ) د یوه زوړندې پټیلار، چی ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کی څومره لوي دی ، که دا د جګوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟

یو د اوبنی یا د اوبو بیلر (کله= ۱۰۰ کیلوګرامه) په یوه پورته خیزول کیږي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

میلانکونج ∡ = 25° لري. د وزنزور په زوړندزور تختی سره غبرگ او نورمال یعنی ولاړ زور(د فشارزور) ولاړ تجزیه یا ټوټه کیږي، دواړه زوره څومره لوي دی ؟ (۱ کیلو گرام = ۹ ، ۸۱ نیوټن 1 kg = 9,81N).

۱۵ – یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی ۵۳ متره اوږده ده، درول کیږي. درسیو میلانکونج 60° دی په ینبه باندې په کوم جگوالي باید رسی وړلی شي ؟

۱۶ – د یوې ۵۳ متره جگې ونی سیوری ۵ ، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه لمرووړانگي په کوم جگوالی یوبل سره مخمامخ کیږي.؟

۱۷ – د یوه ۵ متره جگ کتونتکي (لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چی جگیدونکوج یی ∡ = 18,5° او ینبیتکی یی ß=8° لوید کونج ، برج څومره جگ دی ؟ د لیدتکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی ؟

۱۸ – الف) د پیزا (Pisa) کوږ برج ۴۷ متره جگ دی، او څوکه یی د ینبی ټکي څخه ۵۰ ،۴ متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی ؟

ب) د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جگ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي (یعنی د سترگي جگوالی د برج بنستټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چی د برج له بنستې څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟

پ) د ۵، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي

– که جگوالی یی ۱۶۰ متره وي؟

– که جگوالی یي ۱۳۷ متره وي ؟

ت) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنستې څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې

– د بل برج څوکه ښکاریږي چی جگوالی یي ۱۴۳ متره وي ؟

–د پاریس د ایفل برج ښکاریږي چی جگوالی یي ۳۰۰ متره دی ؟

۱۹ – د ښیپپس اهرام(CHeopspyramide) ۱۳۷ متره جگوالی لري او د بنستې

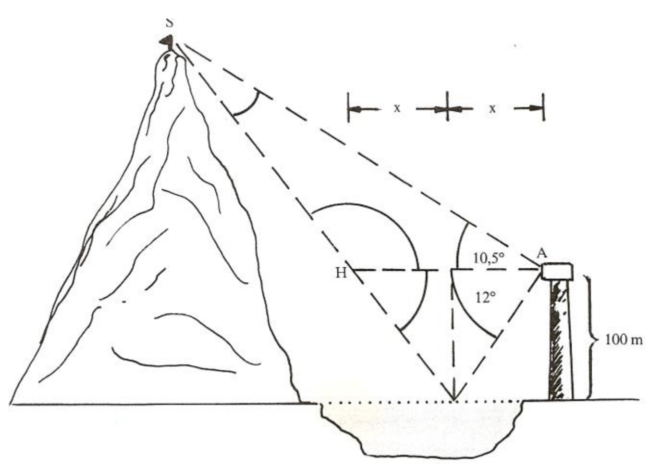
(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري
الف) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟
ب) د څنگهوارې دریواړه دننی کونجونه څومره لوي دي؟

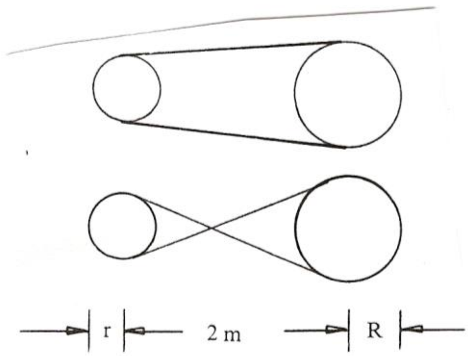
۲۰ – یو ژوری یا قبر –۸ ، ۱ متره ژور دی، بنسټسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی
الف) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی؟
ب) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جگوالی یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟

۲۱ – یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جگوالی لري د بحیرې لور ته $14°$ میلان لري، د دننه لور ته $28°$ میلان لري. د ډنډ بنسټ څومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده؟

۲۲ – د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو ښه لید د ماترهورن (ماترنښکر یا د ماترن د غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی دی) اچول کیږي که دا د یوه لیدټکي څخه چی ۱۰۰ متره جگ دی د ډنډ په لور ښکته وکتل شي، نو د غره د څوکي هندارونه د $12°$ پریوتکونج لاندې لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج $11°$ لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ باندې د ماترنښکر څوکه څومره جگه پروته ده؟
څیره



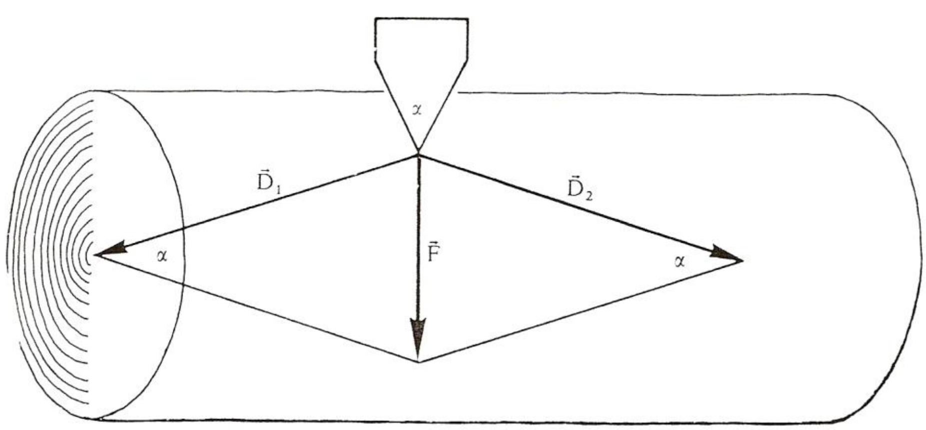
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۶

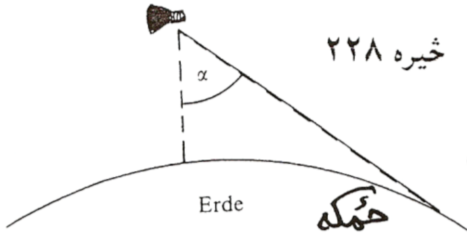
۲۳ – الف) یوه د کشولو کړی، چي په دوه دکښنولو چیترو باندې راتاو ده، څومره اوږده ده، که لاندې اندازې ولري
$r = 22\ cm$, $R = 35\ cm$,
$|M_1M_2| = 2m$?
ب) دا کړی به څومره اوږدې وي که د اهیران په خیر له چیتروګانو یا تیکلیو ډاکی څیدلی وي ؟

۲۴ الف) د ونی په ستنه یو کایل (موږی) په څټك د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D څومره لوي دي، کوم چی د ستنی درځونه ، که د کایل یا تبرګي کونج $\alpha = 6°$ وي. (حیره ۱۹۴)؟
ب) په کومکایلکونج یا تبرګیکونج لرو: $|D|=|F|$ ؟



خیره ۲۲۷

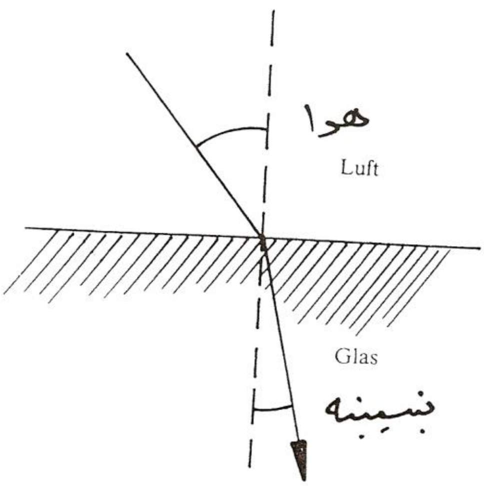
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۸

۲۵ – د یوه الوتماشین څخه ځمکه د یوه ∝ کونج لاندې لیدل کیږي (خیره) دا الوتماشین څومره جګ الوزي ؟ (د ځمکې وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره)

۲۶ – یو ګاډی د $v_\propto = 120km/h$ سرعت سره روان دی، نو د باران څاڅکي په پټلی د تلنلور باندې په $115°$ = کونج



خیره ۲۲۹

د چیترو (مطلب د ګاډي د اوسپنی تیر یا ګاډیل دی) مخامخ ځغلي. له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو د لویدلو سرعت v_g وټاکی ؟

۲۷ – که د لمروړانګه په دوه مختلفو طبقو ولویږي، نو خپلی لور ته تغیر یا بدلون ورکوي. د سنیلیوس Snellius د ماتقاعدې له مخې کیدی شي چې د ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون وایي، چې پروتوړانګه ، ماتوړانګه او ولاړکرښه یا عمود په بیلیدونکی هوارې په یوه هواره پراته دي او برسیره پر دې لاندې اړیکې باور لري یا صدق کوي:

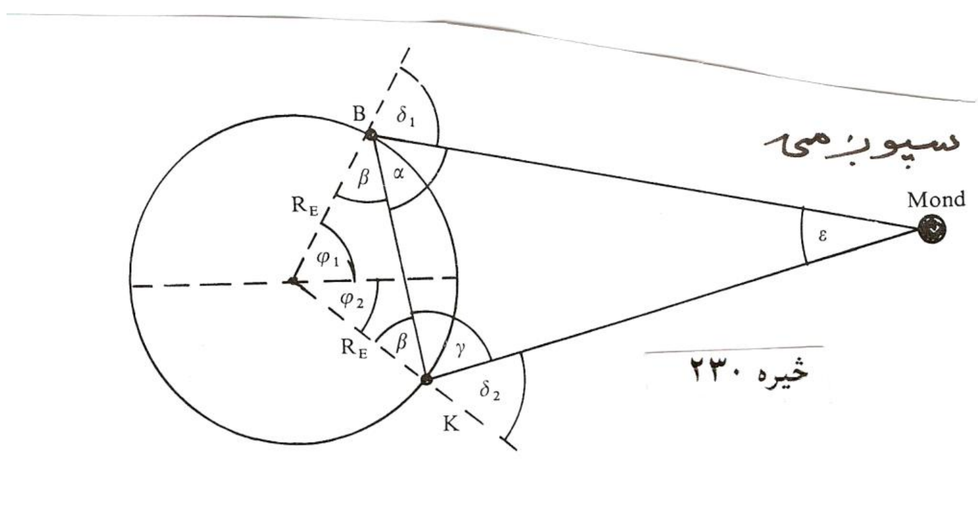
$$\sin \propto \; / \; \sin \beta = n$$

که د رڼاوړانګه په یوه ښیښه (اوبو) پریوزي، نو $n = 1{,}5\ (1{,}33)$ دی وښایې، چې ماتکونجونه څومره لوی دي، کوم چې په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

؟ 10,5°, 15,8°, 27,3° , 41,2°,67,6°,, 72,4°, 81,9°

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۸ – په ۱۸ ا–مه میلادي پیړۍ کې د سپوږمۍ لریوالی تریګومتریکي وټاکل شو. په برلین کې (جغرافیوي اوږدوالی $\varphi_1 = 52,52°$) او لکه د ښو هیلو په کونج کې ($\varphi_2 = -33,93°$)، کوم چې په همغه اوږدګراد پراته دي، د سپوږمۍ سره په همغه وخت کې تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل:
$\delta_1 = 32,08°$ او $\delta_2 = 55,72°$.
وشمیرئ $|KM|$, ß , $|BK|$ او له دې څخه d_{EM} .



خیره ۲۳۰

۲۹ – لړځیدنی Schwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعني د وخت t تړواك لاندې دي. دا د بلواك $y = a . (\sin (2\pi/T)) .t + k)$ له لارې ورکړ شوي. دلته $(2\pi / T)\, t = x$ هغه کونج دی ، کوم چې په T وخت کې وهلکیږي. $1 / T = f$ د یوه څرخون پریود یا راګرځیدنی وخت په ګوته کوي او د لړځیدنی دوام بلل کیږي» f فرکونځ frequenz بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولو راګرځیدونکو هوارو زیاتون، دباندې هوارې، او ډکي یا حجومونه، د هوارو متن ټولګی سره ده.
ډکي یا حجمونه په مکعبمتر m^3 په همدې توګه د مکعب متر برخه یا څو واره باندې ورکول کیږي، چی یو په بل اړول یی، لکه چی لاندې ګورو، ساده دي

$$1\ m^3 = 1m.1m.1m = 100cm^3.100cm.100cm = 1\ 000\ 000\ cm^3$$

یعنی :

$$1km^3 = 10^9\ m^3$$

$$1m^3 = 10^6\ cm^3$$

$$1cm^3 = 10^3\ mm^3$$

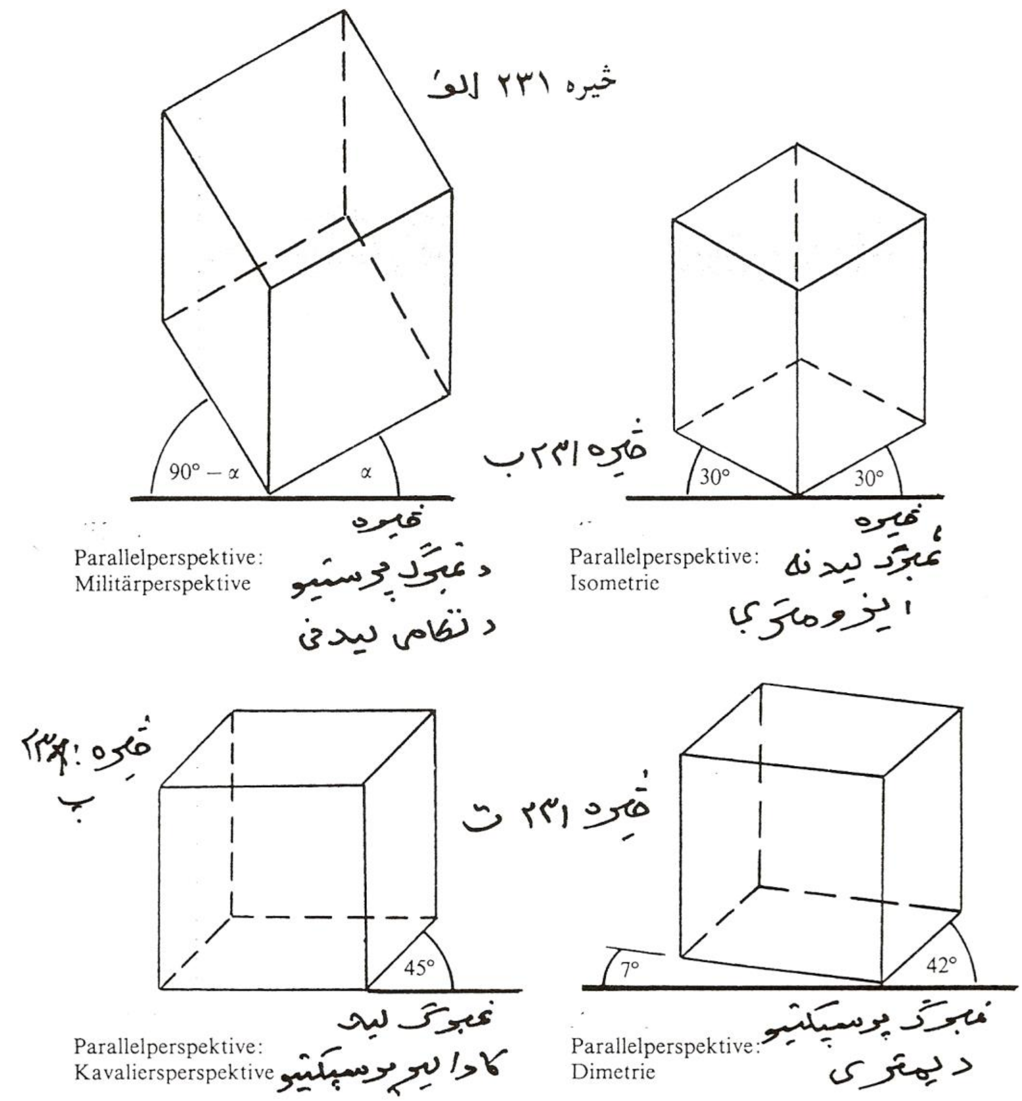
$$1mm^3 = 10^9\ \mu m^3$$

برسیره پردې په پیچلو شکلونو باندې باید یو لیدونکی یا اوپتیکي نظرلاس ته راوړی شو.

د هندسي بدنونو یا تنونو رسمول

په پرینځیپ کی د بدن درې ډوله ګرافیکي انځورونه موجود ده. دام کی ګیرونه ، مایل انځورونه، او درېتخته ئیز پرویکشن Projektion (دریتیخته ئیز پریوستون).
دا هروې یی مختلفې دندې سر ته رسوي.
د دام ګیرونه اصلاً ددې لپاره په کار راځي، چی د بدن ټوله دباندې هوارې وښولی شي. دا که چیرې راګردي پریکړی شي او سره ونښلول شي، نو د هغه بدن ځیره جوړولی شي.

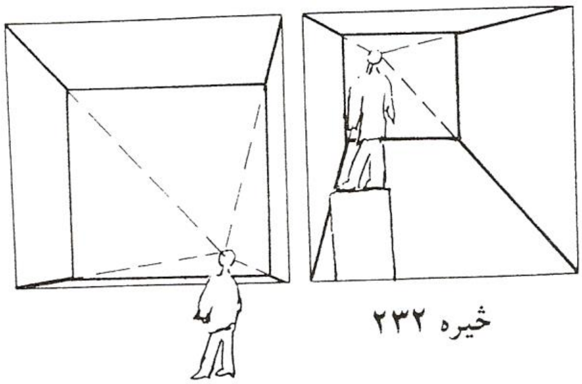
(c) ketabton.com: The Digital Library



د استعمال وړ د نظراچولو (د نظر لاندې راوړلو) کښل، مایلشیره کښل دي. دا هوايي پراخیدنه واضح کوي. دلته د کاوالیر پرسپکتیو (مائیل له پورته) او یوه (چینهښی پرسپکتیو (مائیل له ښکته) ترمنځ توپیر کیږي، مګر د دواړو ترمنځ لاندې ګډه قاعده موجود ده: لیدونکي ته جبهيي (فرونتال) ځغلیدونکی لاینونه په

(c) ketabton.com: The Digital Library

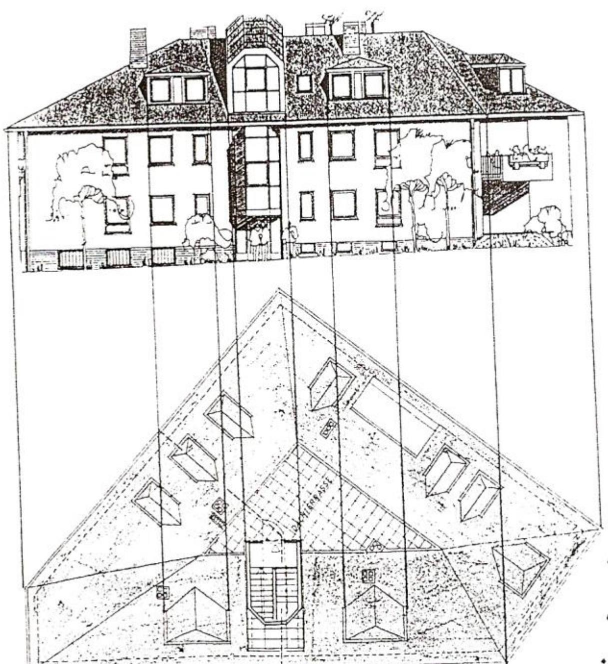
نورمال اوږدوالي، له ليدونكي لرې ځغليدونكي لاينونه مائيل او په لنډ ډول كښل كيږي. لنډونه يې د كونج تر واك ده:



پروت كونج	30°	45°	60°
لنډوونكى فاكتور	2/3	½	1/3

خيره ۲۳۲

په يوه پرسپكتيو مائيل جوړښت كې طبعاً ځني برخې او نه څيره شوې د شا خواوې وركيږي، دا په دې مانا چې په كښلو كې نه راځي. له دې امله او په ځانګړي ډول كونجلرونكو بدنونو لپاره درې تختئيزپرويكشن (پريوستون) كټور دی. دا يو درې ځلي ولاړ پريوستني له لارې منځ ته راځي (الف) بنستيز ضرز يا غوځي هواره، (ب) اړخيزغوځي يا درز هواره (پ) پورته درز يا غوځي هواره او دا زيات وخت په جوړښترسمونو كې استعماك مومي.



خيره ۲۳۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

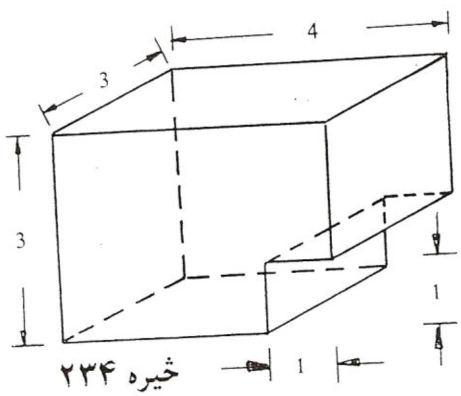
تمرینونه

۱ – د دې ځیره بدن څخه
دریتختهییز پریوستون وکاږی.

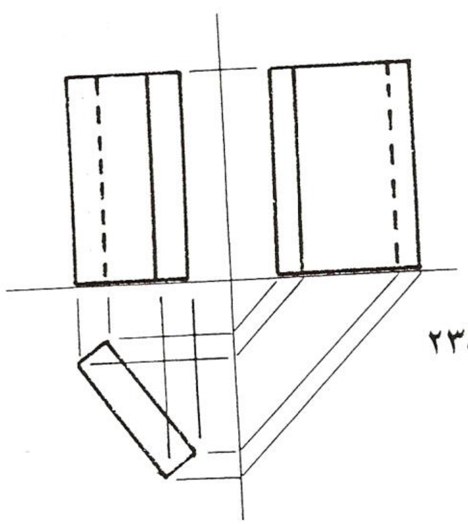
۲ • ددې بدن مائئله ځیره
وکاږی، کوم چی دریتخه ئیزه
ځیره پورې اړه لري.

۳ – د یوې ولاړې ګردي توتی یا
استوانی مایيلی ځیرې غوښتل
کیږي، چی د بنسټ او ولاړ
درځ له لارې ورکړ شوي وي.

۴ – یو شپږاړخي نل یا شپږڅنډیز
نل وباسی په غبرګ پرسپتکیو
انځورونی سره.



ځیره ۲۳۴



ځیره ۲۳۵

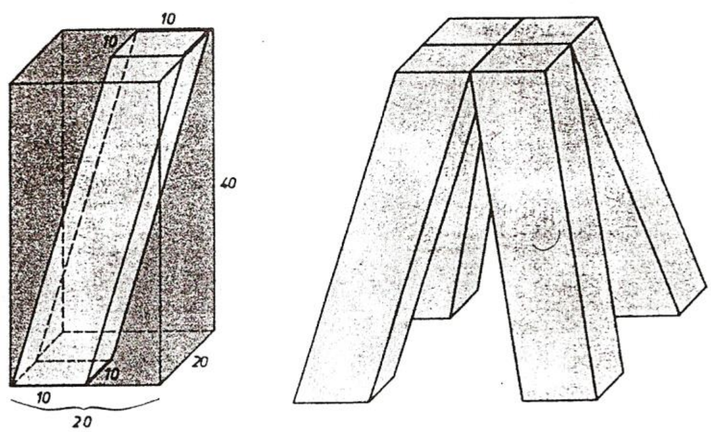
(c) ketabton.com: The Digital Library

پریزماوې Prismen

پیلبیلګه :

۱ = د یوه ستنویا تیرپښو جوړ میز یا Podestپودست(لکه په څیره کی کښل شوی میز) د لاندې جوربښت لپاره یو پښ باید څلور پښی د څلوراړخیز لرګیو په څیره شوي شکل اره کړي. یوه پښه څومره ډکی (حجم) لري ؟

. $V = 10^2 . 40 = 4000cm^3$



څیره ۲۳۶

۲ – د یوکږولاړې یا مستقیمی پریزما چی جګوالی یي 12 cm دی دباندې هواره او ډکی (حجم)، چی ځمکه او سر یا سرپوښ یی یو سیومتري تراپیځ وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړخونو د اوږدوالي $c = 6$, $a = 10$ cm او $h_r = 4$ cm سره څومره دی؟

د تریخ هواره

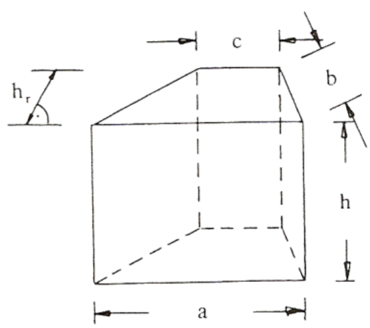
$$h_r.(a+c) / 2 = 4.(10+6)/2 = 32cm^2$$

ده، نو ډکی یی په لاندې ډول دی:

$$V = G.h = 32.12 = 384 \text{ cm}^3$$

د دباندې هوارې لپاره د تریخ اړخ اوږدوالي b ته اړه شته .

دا د پیتاګوراس د جملی په مرسته لاس ته راوړو



څیره ۲۳۷

$$b = \sqrt{16+4} = 4{,}47 \text{ cm}$$

له دې امله دباندې هواره ده :

$$O = 2.G + (2.b + a\ c), h$$

$$O = 64 + (8{,}84 + 10 + 6).12$$

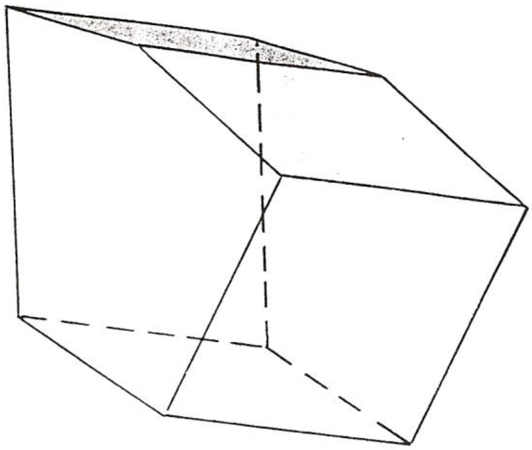
$$O = 363{,}28 \text{ cm}^3$$

ساده بدنونه هغه دي، چی یواځي په ډیرګوډیو (پولیګونو) بند شوي وي یا یواځي له ډیرګوډیو راګیر وي، او ددې ترمنځ د بیلګي په توګه بیا پریزما ده.

تعریف Prisma : داسی یو هندسي بدن، کوم چی له دوه یو بل سره غبرګو او ګونګروانځو پولیګونویاډیرګوډیو بند یا راګیروي پریزما بلل کیږي.

د بنسټ او پورته هوارې د کونګروانځ له امله د اړخونو هوارې غبرګاړخیز دي.
د پورته هوارې(چت) ولاړ اوږدوالی د پریزما جګوالی بلل کیږي. کیدی شي چی د

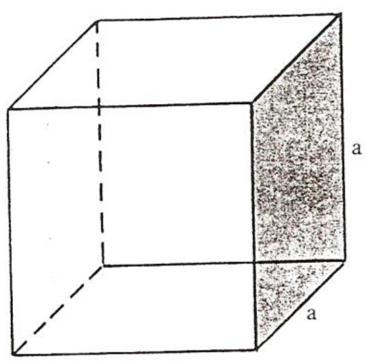
(c) ketabton.com: The Digital Library



شیره ۲۳۸

یوه اړخ اوږدوالی د جګوالي باور ولري، نو بیا له ولاړې پریزما غبرګیږو.

د ټولوخورامنظم او په دې ډول خورا ځانګړې پریزما شپږاړخیز یا مکعب دی (وورفل Würfel) . دا د دباندنی هوراو ۶ کونګروانیځ مربع خواوې لري، او ژی یا اړخونه(کانتی) یی یو په بل نیغي ولاړې دي.



خیره ۲۳۹

جمله : د یوه شپږ اړخیز یا شپږخوایز(مکعب) د دباندې هوارې O او ډکي (حجم) V لپاره باور لري:

$$O = 6a^2$$

$$V = a^3 = a^2 . a = G . h$$

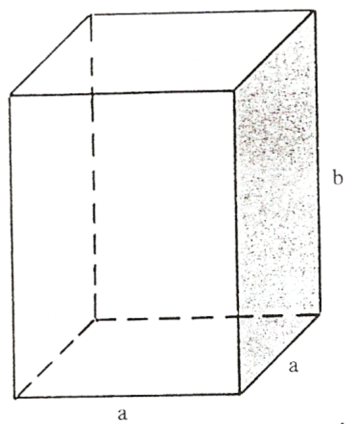
بیلګه : څه شی دروند دی یو کورک(Quark یو شکل لرګي ډوله بدن دی، چی د بوتلونو خولی په پټیږي) مکعب چی د یوه اړخ اوردوالی یی 0,3 m وي او که یو د اوسپنی مکعب چی د اړخ اوږدوالی یي 8 cm (د کورک V سختوالی g/cm³ 0,2 د اوسپنی 7,86 g/cm³)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې د یوه بدن کتله m لاس ته راوړی شو، نو کلکوالی یا دېنسټی یی د ډکي سره ځلوو.

د کورك مکعب ډکی : $V = (30cm)^2 = 27000\ cm^3$

$m = 27000cm^3\ .0{,}2g/cm^3 = 5400\ g$



شیره ۲۴۰

د اوسپنی مکعب ډکی :

$V = (8cm)^3 = 512\ cm^3$

$m = 512cm^3\ .7{,}86\ g/cm^3$

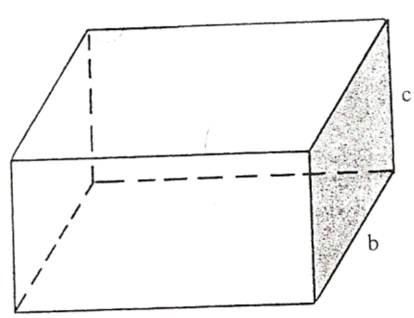
$= 4024\ 32\ g$

د کورکمکعب له دې امله د اوسپنی د مکعب ته نزدې

34% [(5400-4024):4024 ~0,34]

دی. یا په بل عبارت، د کورك مکعب نزدې ۳۴ په سلو کی د اوسپنی د مکعب څخه دروند دی.

که د مکعب سټه(ځمکه) یا بسټ او چټ یا سر مربع پاتی شي او نورې خواوې یی تغیر کړي نو یوه مربع ستن(پېنه) لاس ته راځي.



شیره ۲۴۱

که ځمکه او سر هم یوه ولاړکوډیز ته «ټولیز» شي یا « عمومیت » پیدا کړي، نویو کوادر Quader منځ ته راځي. هغه درې مختلفی اړخنیمي، مګر مساوي هوا نیمي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ا هواقطرونه لري. دا د پیتاګوراس د جملې په مرسته شمیرل کیدی شي.

جمله: د مربع ستن د دباندې هوارې او ډکې (حجم) لپاره صدق کوي:

$$O = 4ab + 2a2$$

$$V = a^2 b$$

د اړخونو نیمیو اوږدوالی په لاندې ډول دی

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}\,; \quad d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

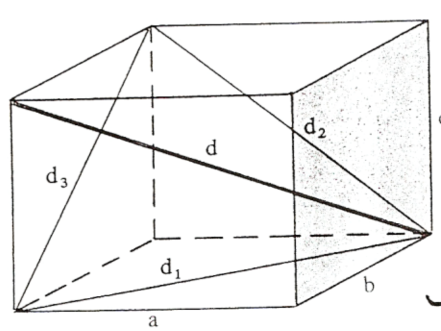
$$d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

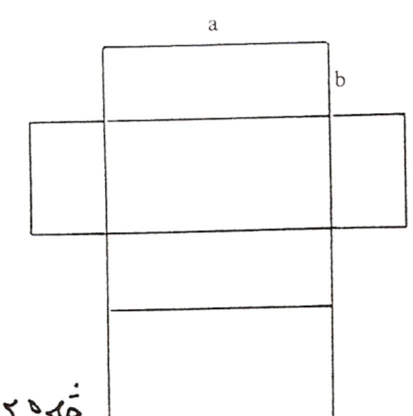
د هوانیمیو لپاره صدق کوي:

$$d = \sqrt{d_1^2 + c^2} = \sqrt{d_2^2 + b^2} = \sqrt{d_3^2 + a^2}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

خیره ۲۴۲ الف





خیره ۲۴۲ ب

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: یو کوادر د کانتو اوږدوالی $a = 5cm$, $b = 4cm$ (بنسټیز هواره a.b)
او $c = 12cm$ لري:

د پوښهواره: $M = 2.(5.12 + 4.12) = 216\ cm^2$

دباندې هوار. $O = 2.(5.12 + 4,12 + 5.4) = 256\ cm^2$

ډکی (حجم) : $V = 5.4.12 = 240cm^3$

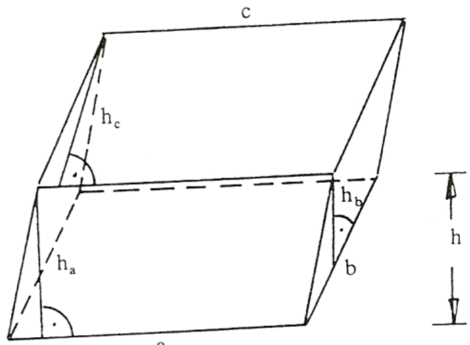
نیمي: $d_1 = \sqrt{25 + 16} = 6,40\ cm$, $d_2 = \sqrt{25 + 144} = 13\ cm$

$d_3 = \sqrt{16 + 144} = 12,65\ cm$

$\Rightarrow d = \sqrt{25 + 16 + 144} = 13,60\ cm$

یوه مائیل څلوراړخیزه پریزما د جوړه یو بل سره غبرګو کونګروایڼخ څلورکونجیو سره غبرګ اپیپت یا شپات یا په بل عبارت غبرګهواریز بلل کیږي ، چې موږ به یی له دې ورسته همداسی وبولو. د هغو دباندې هواره د هغه د بنسټ- پورته – او اړخهوارې دوه څله ده.

دا د غبرګ اړخیز په څیر شمیرل کیږي او په عمومي ډول باور لري:



څیره ۲۴۳

جمله: د غبرګهواریز دباندې هواره او ډکی دي:

$O = 2.(a.h_a + b.h_b + c.h_c)$

$V = G.h$

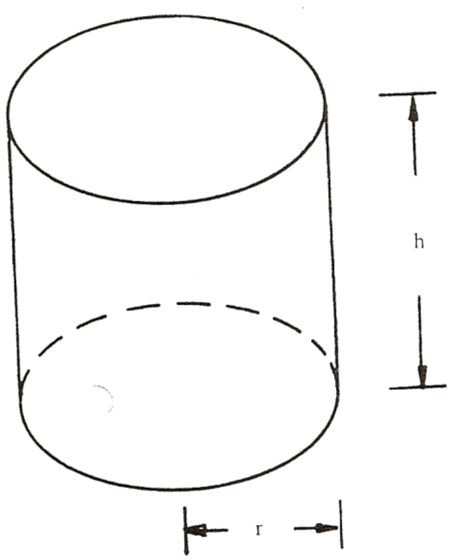
دلته د ډکي شمیرنه د غبرګ اړخیزهوارې په

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیر اجرا کیږي: د بدن جوداشوي توکي یو د بل مخامخ لور تکمیلوي:
یو بل عمومیت یا ټولیزه به د غیر منظم ، مګر په بنسټ یا ځمکه او پورته
کونګروا ینځ ډیرګوډیز پرېښول وی، د هوارې د خواو هوارې بیا غبرګ اړخیز دي.

جمله: د په خوښه پریزما د دباندې هوارې او حجم لپاره باور لري:
د ټولو خواو هوارو زیاتون + بنسټیزه هواره . 2 = O
بنسټهواره . جګوالی = V

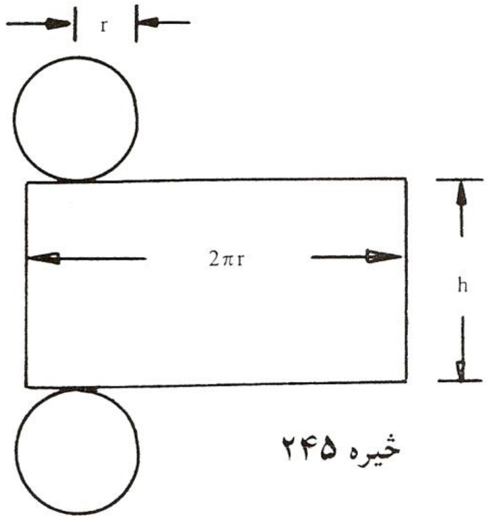
سیلیندر(توته یا استوانه یا ستن)



ځیره ۲۴۴

د هغی نیغي(سیخ ولاړې) پریزما
سره ، چی لاندې او باندې یې
سیومتري – ګوډیز وي – څه پیښیږی،
که د کونجونو شمیر نور هم زیات شي؟
اوس نو لاندې هواره (او په همدې ډول
پورته هواره هم) په ګردي بدلیږي او
دا ډیر سره ګوډیز شوي د خواو هوارې
په یوې کږې یا راتاو هوارې بدلیږي.
یو بدن یو بل سره کونګروا ینځ او
غبرګ لاندې پورته ګردیهوارو سره
ګردیتوته یا ګردیسیلیندر بلل کیږي.
د دی روښانونی یا توضیح لاندې درې
شیان ځرګندیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۴۵

۱ – د توتی یا استوانه یا ګردیسیلیندر د پریزما سره خپلوان دی.
۲ – ګردي استوانه یا توته پخپله د په خوښه فورم شوې پورته – او لاندې هوارو لپاره یو ځانګړی حالت دی.
۳ – لمړنی څرګندونه د ولاړ ګردي سلیندر یا توتی یو ځانګړی مهم حالت وو، ډکی یا حجم د همغه پرینځیپ له لارې کیږي لکه د پریزما . د جال ښوونه یی د پوښ د خلاصولو له لارې کیږي، له دې سره دوه ګردی تړلي راځي چې لاندې او پورته(دځمکی– او سرپټی هوارې) هوارې دي.

جمله: د یوه ولاړې ګردی استوانی یا توتی پوښ، دباندې هوارې او ډکي لپاره باور لري:

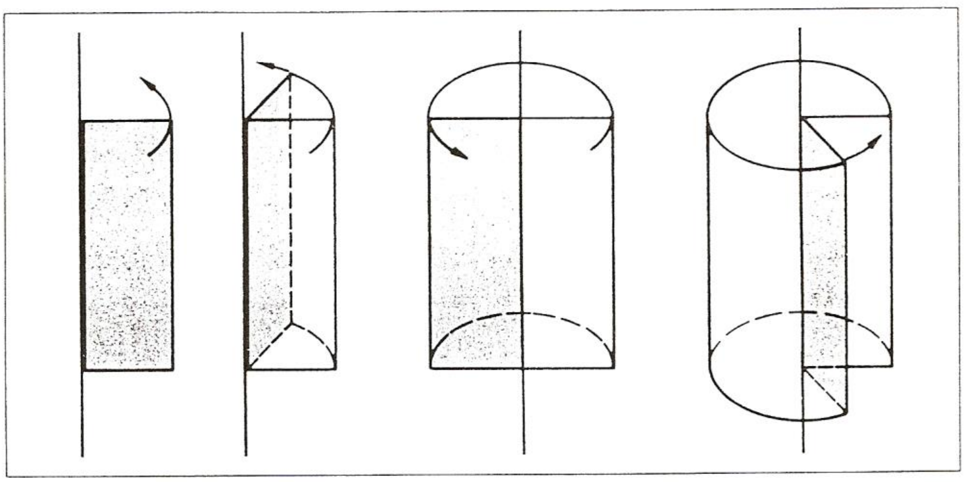
$$M = 2\pi rh$$
$$O = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(r+h)$$
$$V = \pi r^2 h$$

که د یوې استوانی یا توتی څخه منځنکي سیومترې استوانه چې وړانګه یي له مخکی استوانی یا توتی کوچني وي راوباسل شي، نو دې پاتي ته یی سوری استوانه

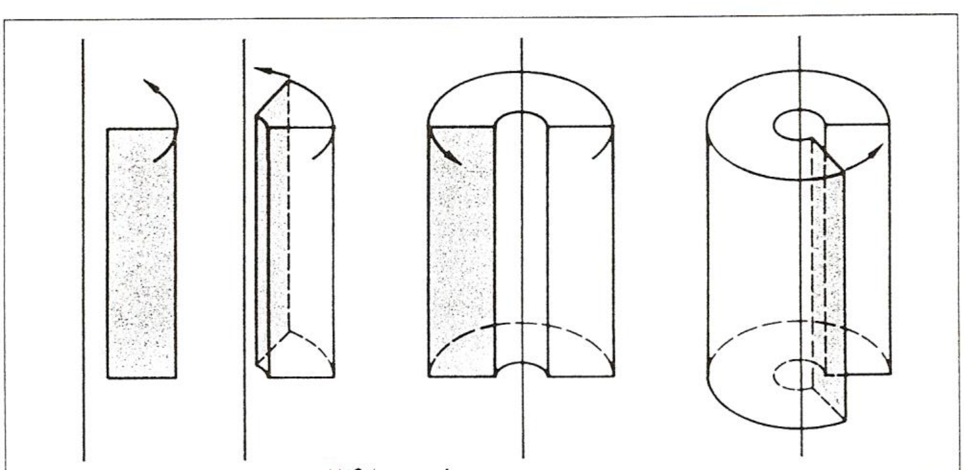
(c) ketabton.com: The Digital Library

که د مخه ونیول شي یا فرض شي، چی دا سلیخ شوي کاغذ 0,1 mm پنډ دی، نو دلته باید ټول $0,491 \,.\, 10000 = 4910,m^2$ کاغذ سلیخ شوی وي.

د ګردي – او سوری استوانی یا توتې یا ستن لاندې د یوه ولاړکونجیز څرخون(Rotation) هم په خیال کی راوړلی شو:



خیره ۲۴۷



خیره ۲۴۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – یوه سمه پریزما د شپږکونږیز بنسټ– په همدې ډول سرهوارې سره لرو، چې ۵ سانتي متره جګه ده. هربنسټهوارې اړخ یې ۴ سانتي متره اوږددی. ددې ډکې پوښ او پورته یا ټوله راګرده هواره وشمیری.

۲ – یو غبرګهواری ۸۱ مکعب متره ډکی لري او پورته هواره یا ټوله هواره یې ۱۳۲ مربع سانتي متره ده. جګوالی او د اړخ اړخیز c اوږدوالي یې وښایي، که بنسټ هواره یې د اړخونو اوږدوالی ۵ ،۴ سانتي متره او ۳ سانتي متره ولري او دا دواړه اړخونه وي بل سره د ۶۰ درجو کونج جوړ کړي.

۳ – پورته واره او ډکي څنګه تغیر خوري، که د یوه کوادر اړخونه دوه برابره شي؟

۴ – د یوه کوادر دري اړخونه یو بل سره په ۱:۲:۳ څاننیونه یا تناسب کی پراته دي، دا څومره اوږد دی، که د دې کوادر ډکي ۱ مکعب متر وي؟

۵ – یو مکعب د هوانیمی $d = 6\sqrt{3}$ لري. نو ټولهواره، ډکی او اړخ(a , V , O) یی وشمیری.

۶ – د شګو موټر کي چی د بارهواندازه یا بارډکي اندازه یي 2,82m×1,68m÷0,55 وي، څومره مترمکعب شګه ځایږي، که دا د پورته اړخ یا کانتي پورې ډك شي؟
د باروړونکي د بار وزن ۱۵ ، ۱ ټنه دی په بارولو به څومره ورزیات شوی وي ، که شګه یوه ډیبنتی، ټیګوالی یا غلظت $\rho = 2\ g/cm^2$ ولري؟

۷ – په یوه هواره کربنه یو د پټلیو بند باید ډك شي. دا کربښتوټه ۲۵۰ متره اوږده ده، دا پټلیبند ۸ متره جګ دی او په بنسټهواره کی ۳۹ متره ، په سر کی ۲۷ متره سرور دی، د ډکولو لپاره به څومره خاوره بسیا وکړي؟

۸ – د سرك جوړولو ماشین څرخونی (د اوسپنی غټ ه استوانه چی سرك پرې پخوې او په سرك یي څرخوې) ۱۵ ، ۱ متره نیمی لري او د۲۵ ،۲ متره سرور دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه هواره څومره لویه ده، چې خرخی یی په یوه څرخون وهی؟

۹ – یو بایسکل پمپ د ۵ ، ۲ سانتیمتره اوږد رڼا نیمی لري او د پمپ اوږدوالی ۲۸ سانتیمتره دی، د پمپ تشیاډکی څومره دی ؟

۱۰ – د دې لپاره، چې د ګیلاس توته په پروتغوخي باندې ځیرو یا معاینه کړو، ۲۰۰ ګرامه پارې نه یی ډکوو(ρ = 13,6 g/cm³) . پوهیږو، چې توته هر ځاي کی همغه دننی نیمی لري. دا نیمی څومره دی، که پاره 82 cm جګه وي؟

۱۱ – یوه کچتوته دې، د یوه 5 cm دننه نیمی سره داسی په کچکرښو په نښه شي، چې د هرو دوه پرلپسی کرښو وي د 5 cm³ ډکی وښایي. د دوه ځنګ په ځنګ کرښو ترمنځ دې واټن څومره وټاکل شي؟

۱۲ – د یوه ولاړګوډیزې وسپنی ټوټی (25 cm × 20 cm) څخه دې یوه کوتی ، بی له سرپوښ او بیښ څخه جوړه شي. ډکی یی وشمیری که الف) چاپیری یی د اوږده اړخ سره برابر وي او ب) که چاپیری یی د لنډ اړخ سره برابر وي؟

۱۳ – د لاندې توتو پاتی کځونه وښایي:

a) r = 5 cm ; h = 12 cm b) r = 9cm ; V = 120 cm³

c) h = 6,5 cm ; O = 300 cm³ d) M = 282 cm² ; V = 424 cm³

۱۴ – توته څومره ډکی لري، که یو د a اړخ اوږدوالي مکعب په کې خوندي وي؟ پوښ او دباندې یا پاسهواره یی څومره دي؟

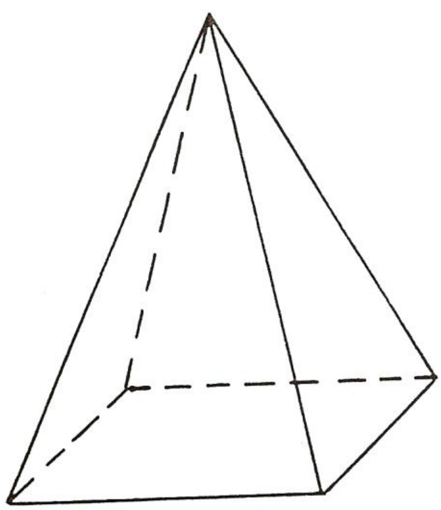
۱۵ – د یوې توتی جګی h او وړانګه r ځانونه (h : r =) 2 : 3 نیسی. ډکی یی 2000 cm³ دی. h , r او M یی وټاکی.

۱۸ – یو ولاړډوله توته یزه ګل کوټی د h = 17 cm جګي سره د سره د سرپوښ او بیښ ایلیپسی د دواړو نیممهرونو a = 30 cm او, b = 20 cm سره لري. د دې ډکی څومره دی؟

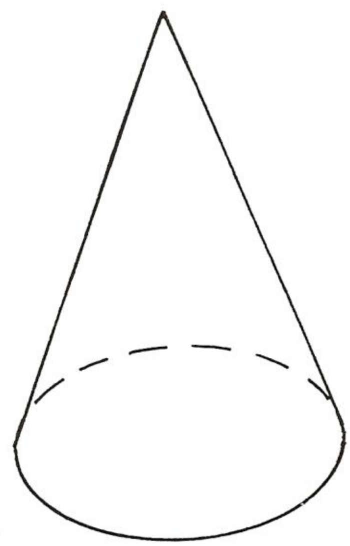
(c) ketabton.com: The Digital Library

اهرامونه او مخروطونه Pyramiden und Kegel

که څه هم دواړه بدنونه بدلو ګروپونو پورې اړه لري- اهرام يواځې هواره راګرځيدهواره لري، مخروط مګر راتاو يا کږه هواره.- بياهم زيات ګډونوالی لري، نو له دې امله يې يه ګډه غواړو وپيژنو يا معرفي کړو.



خیره ۲۴۹



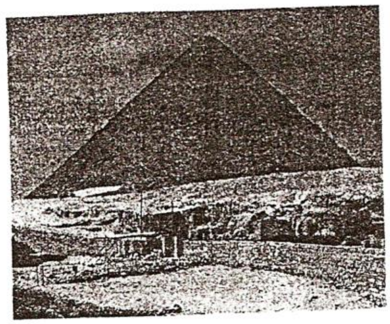
خیره ۲۵۰

پيلبيلګه :

د ۲۵۹۰ او ۲۴۷۰ (م. کال پخوا) ترمنځ په غزه مصر کی په يوه ډير مصرف د فرعون خيوبس د قبر اهرام خيوبساهرام (Cheopspyramide) جوړ شو. د دې د جوړولو لپاره څه سل زره انسانان په کار واچول شو، چی هغوي نزدې دوه نيم ميليونه

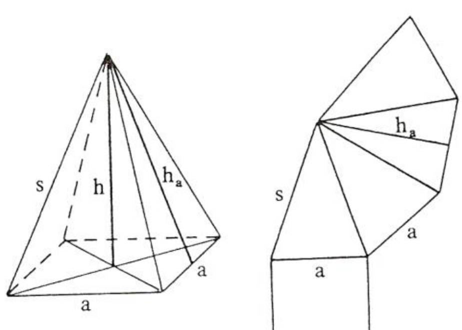
(c) ketabton.com: The Digital Library

د تیګو بلاکونه پري کېړل ، رایي وړل او یو په بل یی طبقه په طبقه یا پوړی په پوړی باید اینښوولي وی. دا د خیوبس اهرام ځومره ډکی (حجم) لري، که هغه یوه لاندې هواره ۲۳۰ متره مربع ولري او جګوالی یی ۱۴۷ متره وي. د هغه لیدوړ دباندې هواره ځومره ده ؟



خیره ۲۵۱

د خیوبس اهرام د ولاړو اهرامونو ځانګړی حالت جوړوي، ځکه چی د هغی تیره ککره د لاندې هوارې په منځ ټکي نیغه ولاړه ده. هغه اهرامونه چی په هغو کی دا حالت نه وي کاږه یا بهتره مائل اهرامونه بلل کیږي. په عمومي ډول یو اهرام راپورته کیږي، که د ډیرګوډي ګوډونه له ډیرګوډي دباندې ټکي سره ونخلول شي. د کونجونو او سرتیرې نخلونلاین ته اړخکانتی (لنډ : اړخ) وایي . لکه چی د جالښوونه یی ښایي، نو دباندې هواره یي له لاندې اړخ او د اړخیزو دریګوډي د یوځایوالي څخه لاس ته راځي، چی وروستی یي پوښ هم بللي شو یا بولو.



ځیره ۲۵۲

که د ډکي یا حجم ټاکلو لپاره د خیوبس اهرام په مربع شکلي پوړیزتجزه شوی وي، په فکر کی راولو چی د پوړی جګوالی یی h / n وي. د وړانګي جملی د خورا پورته پوړی د هوارې لپاره لاس ته راځي:

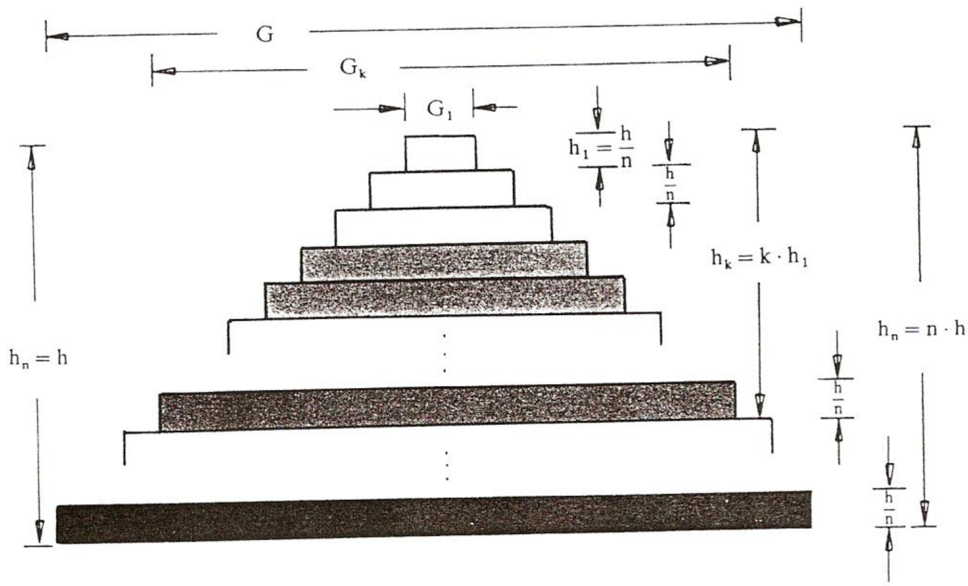
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1^2 : h^2 = G_1 : G \Rightarrow G_1 = G :(h^2 / h_1^2) = G / n^2$$

په ټولیزه توګه (عمومي ډول) :

$$h_k^2 : h^2 = G_k : G$$

$$\Rightarrow G_k = G.(k/n)^2 \quad , G_n = G$$



خیره ۲۵۳

په دې ډول د k –ام زینې پوړې ډکې (حجم) دی

$$V_k = G_k.h / n = Gh.k^2 / n^3$$

د ټولو پوړیو له زیاتون څخه لرو

$$V_{\text{پوړی}} = Gh.(1^2+2^2+...+n^2): n^3$$

$$= Gh\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\right): n^3$$

$$= Gh\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوره ایندوکڅیون له لارې لرو (د ا په دې کتاب کی نه څیړل کیږي. ددې موضو لپاره دې ځما دشمیرپوهنی بنسټیز کتاب وکتل شي)

$1^2+2^2+3^3+...+n^2 = n(n+1)(2n+1) :6 = (2n^3+3n^2 +n) / 6$

که د پوړیو شمیر n نور هم لوي شي، نو بیا یی سړی له میلان څخه نه شي توپیرولی. دې ګڼونپوهی اکویوالنت دا دی چی n هرڅومره لوي شي او n په ماتلاندې کی موجودوي نو هغه په هغو غړو صرفنظر کیدی شي یا هغه غړي له پامه ایستل (لرې) کیدی شي.
په دې پوله حالت کي د اهرام ډکی له لاندې اړیکو شمیرل کیږي.

$V = G.h / 3$

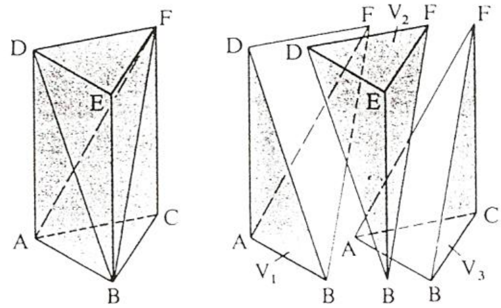
دا د خیوبس اهرام باندې استعمالوو :
د اړخونو هواروجګوالی له نیمی لاندې اړخ او جګوالي د پیوتاګوراس د جملی له

لاری شمیرل کیږي: $h_a = 115^2 + 147^2 = 186 , 64m$
په دې ډول یی پوښ دی $M = 4.0,5.186,64.230 = 85853,80m^2$
د دباندې هواری څخه نور څه نه لیدل کیږي.
ډکی یی دی : $V = 230^2 .147 = 7776300m^3$

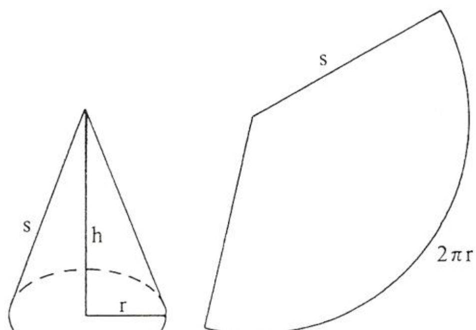
جمله : د یو اهرام د پوښ، دباندې هوارې او ډکي لپاره باور لري:
د اړخونو د ټولو دریګوډیو زیاتون = M
O = M + بنسټهواره
V = بنسټهواره . جګوالی / 3

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا فرمولونه طبعاً د مائیل اهرام لپاره هم باور لري د پوړيو شمیرنه بیا طبعاً یو څه اندازه ستونځي لریکه چیرې د یوه اهرام بنسټ یوه گردی ونیسو نو مخروط لاس ته راځي، مخروط سم ولاړ بلل کیږي ، که د هغه تیره ککره یا لنډه: ککره په منځتکي (نیغه) ولاړه وي، نور ټول مخروطونه مائیل بلل کیږي. دا په لاس کی لرلو له لارې گورو، چی د اهرام ډکي یا حجم شمیرډول په مخروط باندې هم استعمالیدی شي، که د پوړیو په ځاي دلته وړې ستنی په پام کی ونیول شي. لکه په څیره کي د پوښ خورونه یا پوښ جال ښایي چی پوښ د گردي ټوټه ده، چی وړانگه یی د بنسټگردي وړانگه ده او لینده یی د گردی چاپیرونکی کی ورکړ شوی دي:



څیره ۲۵۴



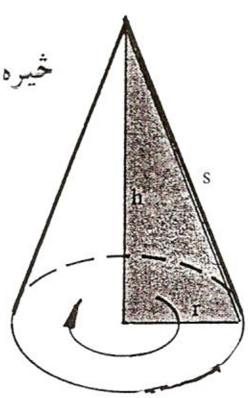
څیره ۲۵۵

$$F_S = b.r / 2 ,$$

پس لرو

$$M = 2 \pi r.s / 2 = s.\pi .r$$

څیره ۲۵۶



(c) ketabton.com: The Digital Library

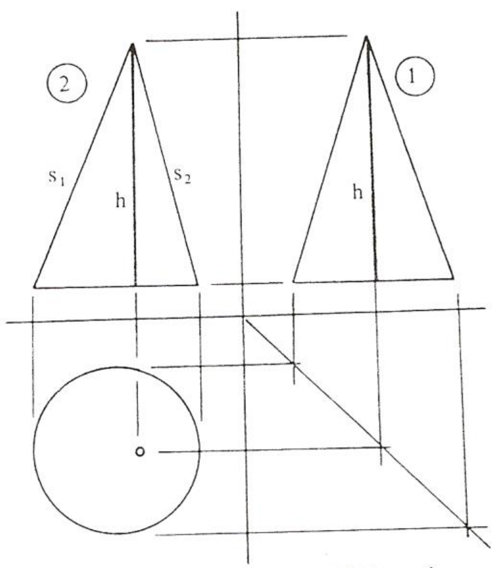
جمله : د ګردي مخروط پوښ، دباندې هواره او حجم لپاره باور لري:

$$M = s.\pi r = \pi.r^2 . 360° / \alpha$$

د $\alpha = 360° . r / s$ سره

$$O = M + \pi r^2 = \pi r (r + s)$$

$$V = \pi r^2 . h / 3$$



خیره ۲۵۷

په پام کی دې وي چی ولاړ مخروط د څرخون په څیر هم په خیال کی راوړل کیدی شي: چی په کانتی یا یوه اړخ د یوه ولاړ دریګوټي څرخون څخه لاس ته راځي.

بیلګه : د ولاړ ګردیمخروط ډکی وشمیری چی د بنستهواري وړانګه یی ۶ سانتیمتره وي د پوښ یو خورا زیات یا عظمي اوږدوالی یی ۱۵ سانتي، او مینیمال پوښ اوږدوالی یی ۱۱ سانتي متره دی؟ د هیرون دریګوټي فرمول سره سمی د غوځهوارې په متن یی اخر ته رسوي. (۲)«

$$F = \sqrt{19(19\text{-}12)\ (19\text{-}15)(19\text{-}11)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

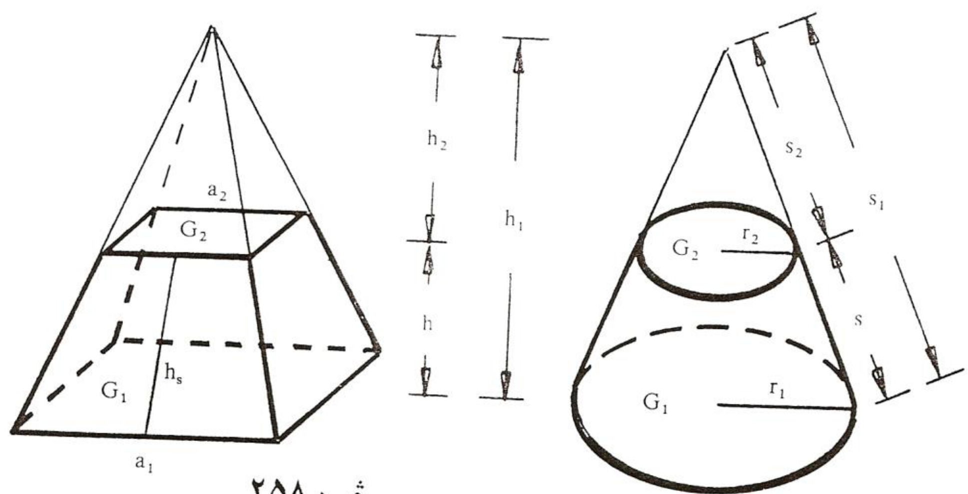
$$F = 65{,}238\ cm^2$$

$$F = d.h / 2 \Rightarrow h = 2F / d = F / r = 10{,}87\ cm$$

$$\Rightarrow V = \pi r^2 h / 3 = 409{,}79 cm^3$$

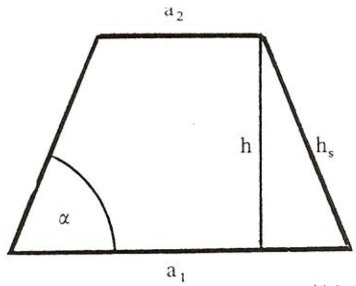
پخ اهرامونه او پخ مخروطونه

که یو اهرام او یا مخروط په یوه اوږدوالي h بنسټهواري ته غبرګ پرې کړی شي، نو پخ اهرام او پخ مخروط ترې راجوړیږي) راپیداکیږي یا منځ ته راځي.
د پخ اهرام پوښهواره د یوه تریخ څخه عبارت دی چی د دوه دریګوډیو له کمون څخه لاس ته راځي.



څیره ۲۵۸

(c) ketabton.com: The Digital Library



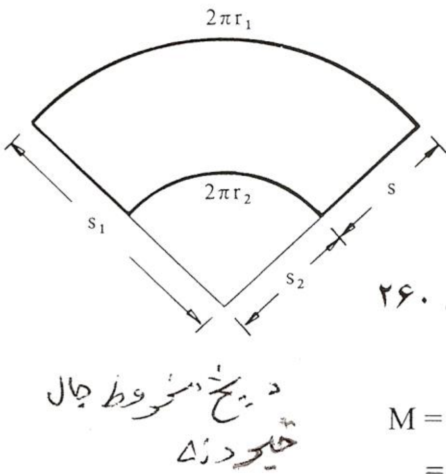
خیره ۲۵۹

د دوي اوږدوالی د پیوتاګوراس له جملی او یا د میلانکونج ∝ څخه ټاکل وړ دي.

$h_s = h / \sin\alpha$

د اهرام د بنسټهوارې زیات امکاناتو له امله د پوښهوارې لپاره یو تولیز فرمول هدفمند نه دی. که بنسټهواره یو منظم n–ګوډی وي، نو لرو :

$M = (U + u). h / 2$



د U بنسټهواری چاپیرونکی ، u د سرپټهوارې یا سرپوښهوارې چاپیری.

خیره ۲۶۰

په همدې ډول د سم مخروط د دوه ګردیبرخهوارو کمون دی:

$$M = (s_1\, 2\pi\, r_1 / 2) - (s_2\, .2\pi\, r_2) / 2)$$
$$= \pi\ (s_1\, r_1 - s_2 r_2)$$

د وړانګي جملی په مرسته لاندې اړیکی پیداکیږي:

$$s_2 : s_1 = r_2 : r_1 <=> s_2 r_1 = s_1 r_2$$
$$=> M = \pi (s_1r_1 - s_2r_1 + s_2r_2 - s_2r_2)$$
$$= \pi [(s_1 - s_2)r_1 + (s_1 - s_2)r_2]$$
$$= \pi\ s(r+r)$$

د $s = s_1 - s_2$ له امله

ددې لپاره چی دباندې هواره لاس ته راوړو، باید بنسټ – او سرپټهواره یا سرپوښهواره ور زیات کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دپخښکي د اولني اهرام او یا مخروط او د پریشوې څوکی کمون څخه لاس ته راځي، چې دا هم بیرته اهرام او یا مخروط شکلونه لري. (څیره $\sqrt{}$ وګوری)

$$V = G_1.h_1 / 3 \; - G_2.h_2 / 3 = [G_1(h+h_2) - G_2h_2]/ 3$$

دا چي په n–ګوټي کی د اړخ اوږدوالی همداسی د ګردیشمیرنه کی وړانګه مربعي ډوله کارول کیږي، د وړانګي له جملی د بنسټهوارې او سرپوښهوارې یوبل ته څانونه داسی نیسي لکه د هغو د واټنونو مربع د سرچینیزې څوکی څخه.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{h + h_2}{h_2} = \frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (h + h_2) \cdot \sqrt{G_2} = h_2 \cdot \sqrt{G_1}$$

$$\Leftrightarrow h\sqrt{G_2} + h_2\sqrt{G_2} = h_2\sqrt{G_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad h\sqrt{G_2} = h_2(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})$$

$$\Leftrightarrow \quad h_2 = -\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}$$

که د h_2 لپاره پیدا ارزښتونه د ډکیفرمول کی کیښول شي، نو د ترځنګ بیا یواځي هوارې G_1 , G_2 او G_3 راپیداکیږي.

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[G_1\left(h - \frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right) + G_2\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \left[G_1 \cdot h - \frac{G_1 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} + \frac{G_2 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[\frac{G_1 h\sqrt{G_2} - G_1 h\sqrt{G_1} - G_1 h\sqrt{G_2} + G_2 h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که اخري اړیکی د $\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1}$ سره پراخه شي(د بینوم دریم فرمول)، نو په دې پسی لاس ته راځي:

$$V = \frac{h}{3}\left[\frac{(G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1})(\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1})}{G_2 - G_1}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2^2 - G_1\sqrt{G_1G_2} + G_2\sqrt{G_1G_2} - G_1^2}{G_2 - G_1}\right]$$

د ماتباندې ترم څخه $G_2 - G_1$ د

$$G_2^2 - G_1\sqrt{G_1G_2} + G_2\sqrt{G_1G_2} - G_1^2 = (G_2 - G_1)(G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)$$

له امله نوکبند شي او بالاخره د لنډونی څخه لاس ته راځي:

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د اهرام ، په همدې ډول د مخروط ډکي.

په پڅمخروط کیدی شي د ګردیهوارې فرمول $G_1 = \pi r_1^2$ او $G_2 = \pi r_2^2$ وکارول شي

جمله: د پڅ اهرام پوښ ټوله هواره او ډکی :

د ټول تراپخ هوارو زیاتون = M

$$O = G_1 + G_2 + M$$

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د پڅمخروط پوښ پاس یا ټوله یا پورته هواره او ډکی :

$$M = \pi s(r_1 + r_2) = \pi(s_1r_1 - s_2r_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$O = \pi s(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi (r_1 s + r_2 s + r_1^2 + r_2^2)$$

$$V = (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\pi h / 3$$

پیلبیلکه

د برنس مجسمی لپاره دې یوه مته د همغه موادو جوړه شي. دا دې ۱،۵ متره جګ وي، او یوه کتله دې ولري چي ۱۰ ټنه وي (د برنس دینتي یا کلکوالی $\rho = 8,7\ g/cm^3$) په پوښتنه کی یو ګرد (پخمخروط) یا یو مربعشکلی (پخ اهرام) راځي. سرپوښهواره دې ، په اندازه ، ۱ مترمربع لوي وي. نورې اندازې وښايي ؟ د دواړو متو لپاره شمیرنه ورته ځغلي

$$V = m / \rho = 10t / (8,7t/m) = 1,149\ m^3$$

دا چي جګوالی او سرپوښ معلوم دي، بنسټ د یومربع مساوات له لارې لاس ته راځي:

$$V = 1,149 \qquad = 0,5(G_1 + (\sqrt{G_1 .1} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1,299 - G_1 \qquad = \sqrt{G_1}$$

$$\Rightarrow \quad 1,687 + G^2 - 2598 G_1 = G_1$$

$$\Leftrightarrow \quad G_1^2 - 3,598\ G + 1,687 \quad = 0$$

$$G_1 = (3,598 / 2) \pm \sqrt{(3,598 / 2)^2 - 1,687}$$

$$G_1 = 1.799 \pm 1,245$$

$$\Rightarrow \quad G_1 = 3,044 m^2 \quad \text{یا} \quad G_1 = 0,549 m^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(دوم اوبی یا حل 0,549، په کار نه راځي ، ځکه چی لاندې هواره به له پورته څخه کوچنی وی)
له دې څخه پورته او لاندې وړانګه لاس ته راځي او نیمی په پخمخروط او په همدې توګه د کانتو یا اړخ اوږدوالی په پڅ اهرام کی:

$a_2 = \sqrt{G_2} = 1m$; $r_2 = \sqrt{G_2/\pi} = 56,42$ cm
$=> d_2 = 112,84$ cm

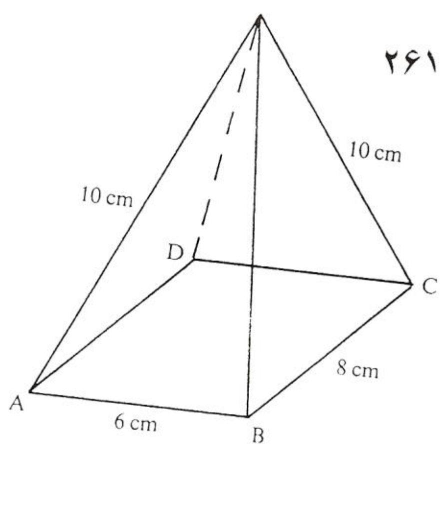
$a_1 = \sqrt{G_1} = 1,745$ m ; $r_1 = \sqrt{G_1/\pi} = 98,42$ cm
$=> d_1 = 196,85$ cm

د پیتاګوراس له جملی څخه د اړخونو اوږدوالی لاس ته راځي:

$h_s = \sqrt{h^2 + (a_1 - a_2)^2/4} = 1,546 => M = 8,488\ m^2$

$s = \sqrt{h^2 + (r_2 - r_2)^2} => M = 7,575\ m^2$

تمرینونه



شیره ۲۶۱

۱ – د یوه مربع اهرام پاسهواره او ډکی وشمیری ، که وي :

الف) $a = 7$ cm ; $h = 14$ cm

ب) $s = 15$ cm ; $a = 10$ cm

پ) $V = 80\ cm^3$; $h = 10$ cm

ت) $h_a = 13$ cm: $h = 10$ cm

(c) ketabton.com: The Digital Library

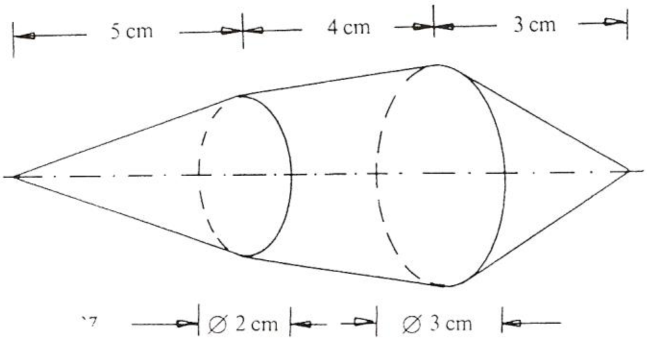
ت) $h = 12\ cm\ ;\ s = 18\ cm$

ث) $h_a = 12\ cm;\ M = 400cm^2$

۲ – د ثیره شوي اهرام پاسهواره او ډکی وشمیرۍ. (لمړی ترونکرښه له ټکي A ځخه د جګوالی پښیپکي ته وشمیرۍ)

۳ – په کوم جګوالي دې مربع اهرام بنستهواري ته غبرګ غوځ شي چې ډکی یی نیم شي؟

۴ – یو ولاړ اهرام د بنستیز منظم شپږکونجي سره بنستې لاندې هوارې اړخ یا کانتی $a = 4\ cm$ لري او خوا اړخ اوږدوالی یی $s = 12\ cm$ دی. V او O وشمیرۍ ؟



۵ – د ثیره شوي بدن ډکي وشمیرۍ.

ثیره ۲۶۲

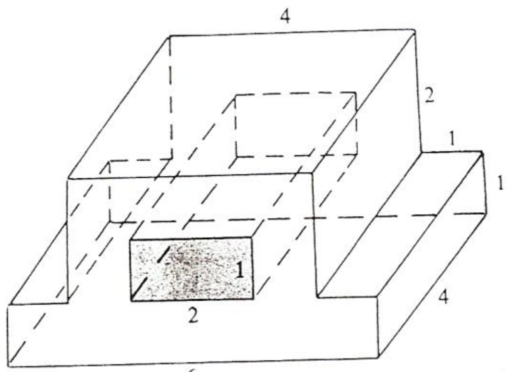
یادونه: ∅ د نیمي یا قطر په مانا ده [illegible]

۶ – د یوه ګردیګرد برج سر یا سر دې نوي پټ شي. د سرپوښ د هوارې د اندازې لپاره سرپوښوونکی د برج ترمخ داسی ولاړ دی یا داسی ځای نیسي، چې پوښ اوږدوالی s د ۷۵ درجو په یوه کونج ګوري، کوم چی ټیك د سر میلان په ګوته کوي، د سرپوښ هواره ځومره لویه ده، که برج ۵۰ متره جګ وي او د برج نیمي ۱۲ متره وي؟ سرپوښوونکی د برج ځخه ۱۰ متره لرې ولاړ دی او د سترګو جګوالی یی ۱،۸۰ متره دی.

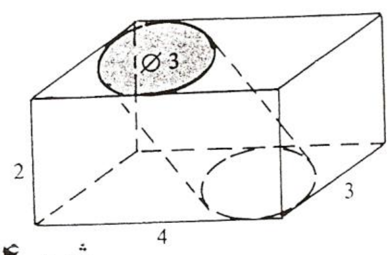
(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د یوه برج اهرامډوله سرپوښ چې بنسټ یې مربع او اړخ اوږدوالی یې a = 12cm دی په وسپنه دې پټ شي اړخکانتې یې ۱۴خ متره ده د سرپوښ هواه یې څومره ده؟
دا چت به څومره ارزښت ولري، که یو مترمربع سرپوښول د هرڅه سره ۹۵ المان مارکه ارزښت ولري؟

۸ – د څیره شوو بدنونو پاسهواره وشمیری(ورکړه په سانتي متر)

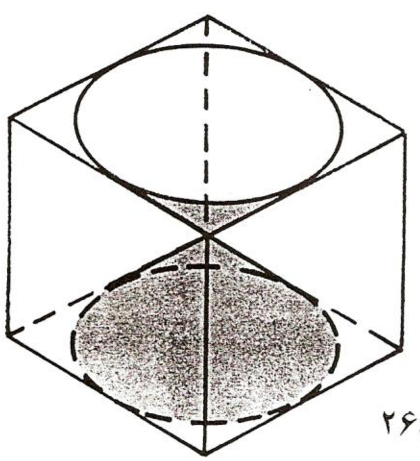


څیره ۲۶۳



څیره ۲۶۴

۹ – د پورته څیره شوي بدن ډکی وشمیری.
۱۰ –په مختلف کارټوټو کی مخروط ډوله خالیګاوې برمه کیږي:
الف) په یوه مکعب چې اړخ اوږدوالی یا کانتی اوږدوالی یی a = 60 cm دی، یو مخروط د جګوالی h = d = a سره
ب) په یوه مکعب کی د a = 60 cm یو سیومتري



څیره ۲۶۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیابولو (لاتین:Diavolo = شیطان)

پ) په دوه سمو ګردیاستوانو د h = 2r = 60 cm هم یو مخروط او یو دیابولو، دا مور د شګو ساعت په څیر پیژنو . د تشځاي ډکي او په همدې ډول

د نور پاتی بدن ډکی هم وشمیری.

۱۱ – یو مربع اهرام (h = 2a = 10 cm) بنستهواري ته غبرګ په دوه برخو ویشل کیږي. د غوڅهوارې واټن دې بنستهوارې ته 0,25h ; 0,5h ; 0,75h وي.
د هر برخه بدن ډکي وشمیری.

۱۲ – ددې لپاره چې یو ګردیډوله فیلترکاغذ د فیلتر لپاره استعمال کړی شی، دا سړی یو څلورمه برخه ګردی باندې را غبرګوي ، وازی باید څومره وازکونجی ولري، ددې لپاره چی فیلتر جوړ شي.

۱۳ – یو مخروط ډوله کچګیلاس دې ټیك ۱ لیتر ځاي کړي. هغه ۱۵ سانتي متره جګ دی. د هغه نیمی (یا نیمی ګردی) دې څومره لوي وي.

۱۴ – ۵ مکعب متره شګه یوې ټوپی باندې اچول کیږي. دا ستوریکونج ۴۵ درجی دی . جګی او نیمی یي څومره لوي دي؟

۱۵ – یو مخروط ډوله د اوبو ګیلاس دې د نیمایي پورې له اوبو ډك شي. دا اوبه په ګیلاس کی څومره جګی ولاړې دي؟

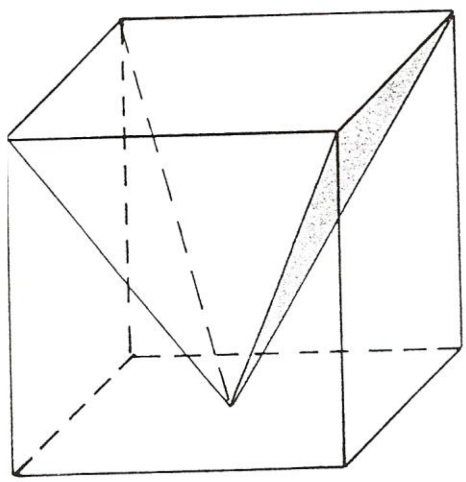
۱۶ – یو کافیواله یوه مخروط ډوله د شربت ګیلاس د شربت څخه ډکوي چی اندازه ۱۵ سانتي متره جګه ده. دی دا ګیلاس د یو سانتي متره پورې کم له شربت ډکوي. دا په دې توګه په سلو کی څومره شربت سپما کوي

۱۷ – په څیره ۲۶۶ کی ورکړ شوی اهرام ډکی وشمیری

۱۸ – په یوه چت باندې یو د وښو چتپټوونی، چي ۵ ، ۴ متره جګ دی ایښوول کیږي، چی اړخ اوږدوالی یی a = 12,5 m متره او b = 9 m متره .دي. د

(c) ketabton.com: The Digital Library

چت پورته کانتی یا پورته اړخ ۷ متره اوږد دی . د چتپتوونې ډکی وشمیری او همداسی د چتپتې سرهواره هم وشمیری.



خیره ۲۶۶

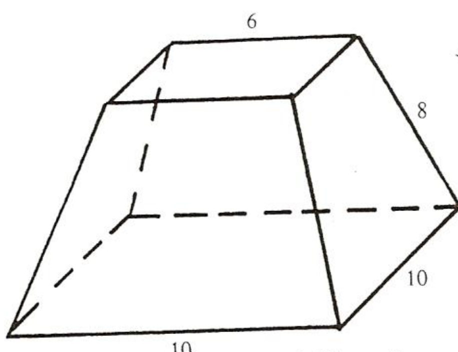
۱۹ – د یو دوه متره ژور بنسټ لپاره څومره خاوره باید راوویستل شي، که پوره ژی یا غاړه یی ۱۰ متره د غاړې اوږدوالی ولري او ستورېکونج –یعنی هغه کونج چی د غاړې یا اړخ سره د کنلو په لور جوړوي– یی ۶۰ درجی وي؟

۲۰ – د یوه هواډکیڅومره مائیلوالی لري، که د یوه ونی ستنی هوا ډکی شمیرلو لپاره چی مخروط ډوله دی د موټې قاعده وکارول شي، د لاندې سره

$V^* = \pi h\,[(r_1 + r_2)/2]^2$

د $r_1 = 10\ cm$ سره

او $r_2 = 5\ cm$ ...



خیره ۲۶۷

۲۱ – څومره مسو ټوټه په کار ده، چی خیره شوې مسخولی جوړه کړای شو(وکړنی په ضیس متر؟ (خیره ۲۶۷ .

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – جوړ شوي کارپوټی حومره درنی دي (اندازه په سانتي متره)

۲۳-د لاندې پخمخروطونو M,O او V وشمیری

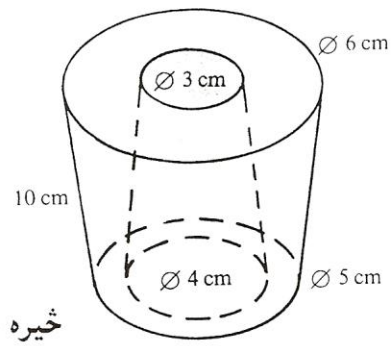
پخ کیګل مخروط

Kegelstümpfe:

a) $r_1 = 12\,cm$; $r_2 = 10\,cm$; $h = 8\,cm$

b) $r_1 = 9\,cm$; $r_2 = 7\,cm$; $s = 6\,cm$

c) $r_1 = 5\,cm$; $h = 7\,cm$; $s = 8\,cm$

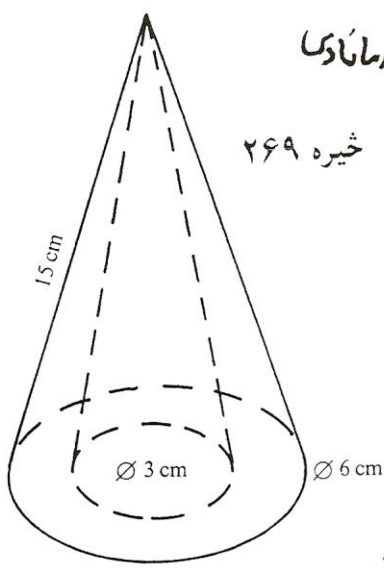


خیره ۲۶۸

Eisenwerkstück $\varrho = 6{,}5\ g/cm^3$

د اوسپنې کار لوټه

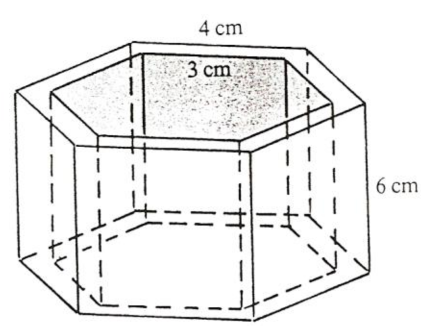
څ په دې کالونو کې هم دکلمې پرسانادی
با غلظت



خیره ۲۶۹

Kunststoffmodell $\varrho = 2{,}5\ g/cm^3$

پلاستیک مودل



خیره ۲۷۰

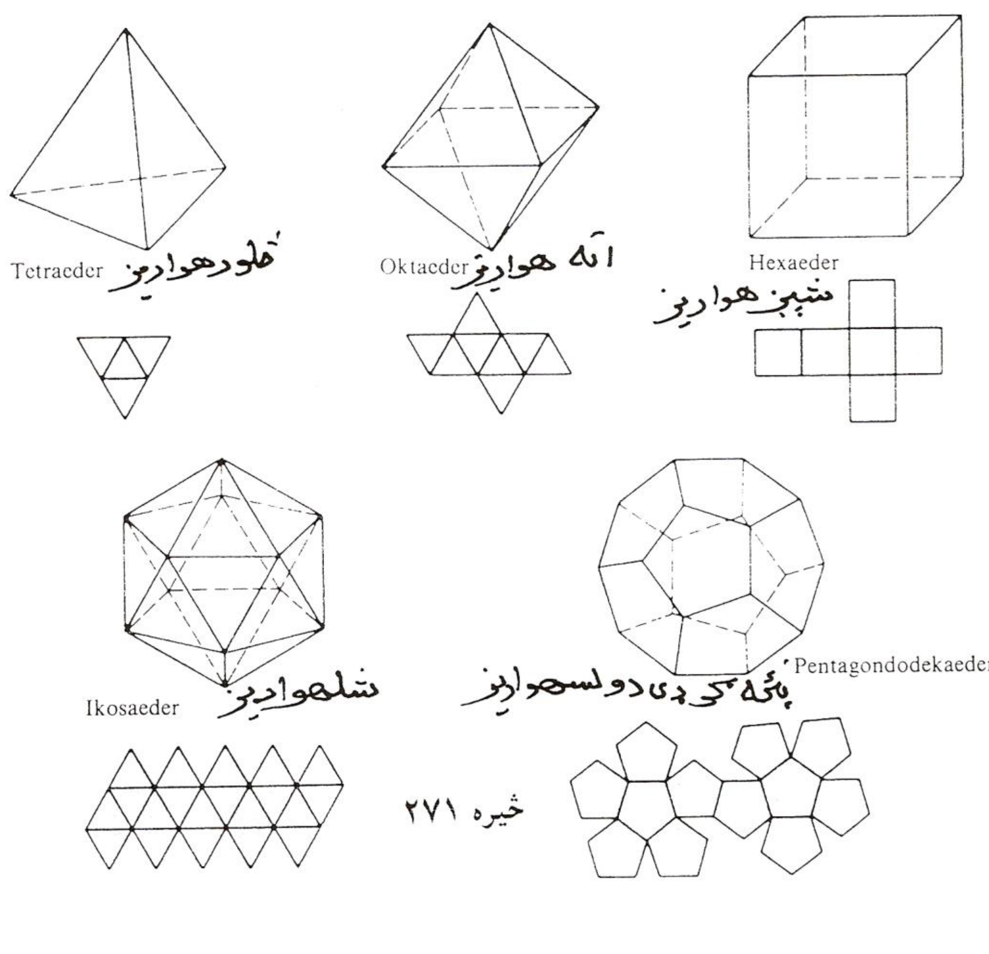
Messingsechskantrohr $\varrho = 8{,}3\ g/cm^3$

د مسنګ شپږ اړخیزه لوټه

(c) ketabton.com: The Digital Library

منظم ډیرهواریز

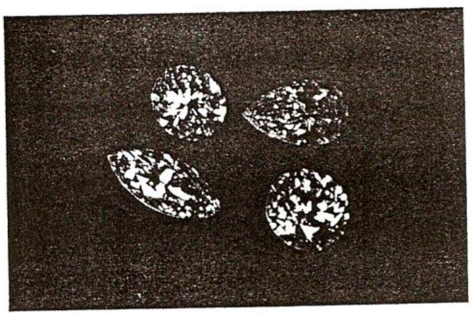
ټول بدنونه ، کوم چې یواځې بندهواري لري یا له‌وارو رابند وي، پولوئیدر (یوناني : ډیر هواریز) نومیږي. موږ به دا له دې وروسته دا ډیرهواریز وبولو.
د دوي ترمنځ ټیك پنځه منظم یو بل ته ناورته بدنونه. دا د شمیرپوهنی له اړخه په ځانګړې توکه په زړه پورې دي، ځکه چې پاس هوارې او ډکې یې بند دي، دا په دې مانا چې د فرمولونو له لاې انځوریدلی شي، او په دې برسیره ، ځکه چې طبعي کریستال دا شکلونه یا فورمونه یا خیرې لري.



خیره ۲۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پنځه منظم بدنونهد هواروبندهواریز ابو کهگ هواربندیزدي : تیترائیدر (څلورهواریز Tetraeder) ، هیکسائیدرHexaeder (شپږهواریز ، مکعب) اوکتائیدرOktaeder (اته هواریز) دودیکائیدر (دولس هواریز ، د خپل اړخهوارو له امله پنتاګون دودیکائیدرPentagondodekaeder پنځه ګوډي دولسهواریزه بلل کیږي)، او په همدې توګه ایکوزائیدر Ikosaeder(شلهواریز) څیرې په تیر مخ کی.

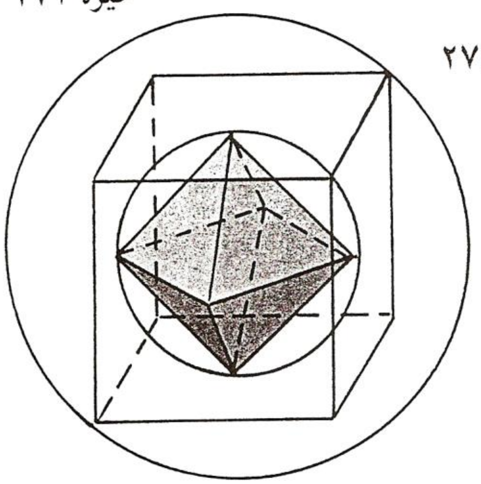


څیره ۲۷۲

بیلګی

د مالګي تیګي مکعب جوړوي، کوپفرسولفید مینرال Fahlerz تیترائیدر، د ګوګړو کریستال دودیکائیدر او الون (کالیوم الومینیوم سولفات) اوکتائیدر جوړوي.

څیره ۲۷۳



Würfel und Oktaeder mit In- bzw. Umkugeln

مکعب او اته هواریز د یوه کی ... او په راکړ غونډیو ...

منظمږیرهواریز پلاتوني (افلاطوني) (خیالی platonische) بدنونه هم یادیږي، ځکه چی یوناني فیلوسوف او شمیرنپوه (۴۲۷ تر ۳۴۷ د م. پخوا) په دې نظر وو، چی څلور پخواني عناصر اور، خاوره، اوبه، او هوا په خپل واړه فورم تیترائیدر، ایکوزائیدر، اوکتائیدر او هیکسائیدر په ګوته کوي. د هغه په فکر جهان پخپله یو دودیکائیدر فورم لرووه. په دې پنځو هر یوه بدن کي کیدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي يوه ګردې دننه او دباندې وکښل شي. که دا يو په بل کې دننه شي يا په بل عبارت دننه راګير شي، نو په دې توګه شپږ دننه – او شپږ دباندې هوارې لاس ته راځي ، کومو چې کيپلر Kepler دې عقيدې ته راوستی شو ، کوم (چې هغه وخت معلوم) شپږ پلانيت به په داسې لاره ګرځي، چې د هغوي نيممحورونه د داسې دننه – او دباندېغونډې وړانګو سره برابر شي.

لاندې جدول د دې منظم پولوئيدر ډيرهواريزومعلومو لويو پوره معلومات ورکوي.

Polyeder	e	f	k	l	m	α	r	ϱ	O	V
Tetraeder	4	4	6	3	3	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{12}\sqrt{6}$	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Hexaeder	8	6	12	4	3	90°	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}$	$6a^2$	a^3
Oktaeder	6	8	12	3	4	60°	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$	$2a^3\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Dodekaeder	20	12	30	5	3	108°	$\frac{a\sqrt{3}+a\sqrt{15}}{4}$	$\frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{15a^3+7a\sqrt{5}}{4}$
Ikosaeder	12	20	30	3	5	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{a\sqrt{27}+a\sqrt{15}}{12}$	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{15a^3+5a^3\sqrt{5}}{12}$

د لته حروف لاندې ماناوې لرې . a = د کانټې يا اړخ اوږدوالی ، e = د ګوډونو ګڼ (تعداد) f = د هواروګڼ. k = بدن اړخونوګڼ، l = د هوارو اړخونو ګڼ، m = په هرکونج کې د کانتو يااړخونو ګڼ، α = د ګاونډيو هوارو ترمنځ کونج، r = د چاپيرګردي وړانګه ، ϱ = د دننۀ ګردي وړانګه ، O = پاس هواره يا پورته يا ټوله هواره ، V = ډکي.

پنځه يوون ډيرهواريز (Einheitspolyeder) لاندې (a = 1) ارزښتونه لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

Polyeder	r	ϱ	O	V
Tetraeder	0,6124	0,2041	1,7321	0,1179
Hexaeder	0,8660	0,5	6	1
Oktaeder	0,7071	0,4082	3,4641	0,4714
Dodekaeder	1,4013	1,1135	20,6457	7,6631
Ikosaeder	0,9511	0,7558	8,6603	2,1817

د اويلر د ډيرهواريز جمله، د په خوښه ډيرهواريز لپاره يو ټاکنمساوات راکوي، د ګوډګنېون e ، اړخګنېون k او هوارګنېون f لپاره:

د اويلر ډيرګوډي يا پولوئيد جمله : $e + f - k = 2$

په هرصورت داجمله يواځي د کونوکس يا ننوتو پولوئيد يا ډيرهواريز لپاره باور لري، يعنی هغه ، چی په کومو کی ټول نيمي د بدن په دننه کی ځغلي، يعنی منظمو ډيرهواريز لپاره.

بيلګي:

کوادر : $8 + 6 - 12 = 2$

اوکتائيد : $6 + 8 - 12 = 2$

دوديکائيد $20 + 12 - 30 = 2$

غونډاری يا غونډوسکه(کره) او غونډاري برخې

ولې غونډاری يا غوندوسکه؟

که تاسو د انګرېزي فوټبال په عربي ژباړه په عربي وګورئ، نو کرهٔ قدم به ترې واخلی.

(په لاندې کې ما د غونډاري يا غونډوسکې په ځای غونډی لکلی، چې ښه او ټيک نومونه نه ده.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

د هندسې یا ځمککچپوهنې له مخې غونډاری یا غونډوسکه د ټولو هغو ټکو ټولګه ده یا د هغو ټکو ځای دی، چې له یوه په

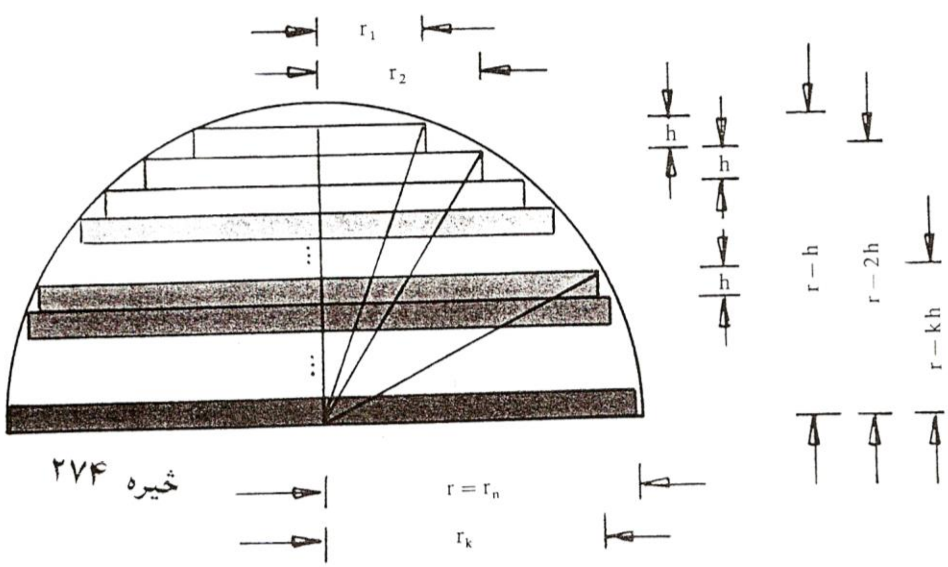
کلکه یاکره ټاکلی ټکی M څخه چې د غونډۍ منځټکی بلل کیږی همغه واټن r ولري.

غونډۍ نه یواځې د جګدرجئیز یا لوړ سیومتري(هره نیمی په همغه وخت کی سیومتري محور دی) له امله د بدنونو ترمنځ یو ځانګړي رول لري، بلکه هغه موږ انسانانو لپاره هم د مانا ډکه ده، ځکه چې ځمکه (نزدې) یو غونډۍ شکل لري . د بیلګې په توګه په کارتوګرافي کی ځمکه اوږدګردیو (میریدیانی Meridiane) باندې ویشل کیږي. په مریدیانی باندې هر واټن د ځمکی وړانګی R ته بیا یوه لینده په ګوته کوي. د ډکي ټاکلو لپاره بیا غونډۍ) ګردی استوانی ته ورته) په کوچنیو ستن ډوله چیتروګانو (کردې ټوټی، چې موږ ورته په هسکه مینه کی چیټرو وایو . د مات منګی څخه ګردې څیرې جوړیږي، ټوټه ده) ټوټه کیږي، چې جګوالی یی $h = r / n$ دی. د یوګونو چیتروګانو وړانګو لپاره باور لري یا صدق کوي(د پیتاګوراس جمله) :

$$r_1^2 = r^2 - (r-h)^2 \Rightarrow V_1 = \pi r_1^2 h$$
$$r_2^2 = r^2 - (r-2h)^2 \Rightarrow V_2 = \pi r_2^2 h$$

.

.



څیره ۲۷۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګ لیز

$$r_k^2 = r^2 - (r - kh)^2 \Rightarrow V_k = \pi r_k^2 h$$
$$r_k^2 = r^2 - (r^2 + k^2h^2 - 2rkh)$$
$$r_k^2 = 2rkh - k^2h^2$$
$$r_k^2 = \frac{2r^2 \cdot k}{n} - \left(\frac{rk}{n}\right)^2$$
$$r_k^2 = r^2\left(\frac{2k}{n} - \frac{k^2}{n^2}\right) \Rightarrow V_k = \pi r^3\left(\frac{2k}{n^2} - \frac{k^2}{n^3}\right)$$

$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) - \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{n^2}\left(\frac{n}{2}(n+1)\right) - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{3} + \frac{3}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right]$$

که د «ستنګیو» ګڼون تلم پورته لاړ شي، نو په نوکانو کی لمړی ترم د مانا دی‌او لاس ته راځي

نیمغونډۍ

$V_{\text{نیمغونډۍ}} = (2/3)\pi r^3 \Rightarrow V_{\text{غونډۍ}} = \frac{4}{3}\pi r^3$

د غونډي د پاس هوارې د شمیرلو لپاره دا په خورا زیاتو برخه هوارو ویشي. که دا د ګوډ یا کونج ټکي د منځټکي سره ونښلول شي نو دا یو د اهرامشکل بدن ځان ته غوره کوي د r جګوالي سره.

د دې ټولو اهرامونو ډکیو زیاتون د غونډې ډکی ورکوي. دا د خورا زیاتو هوارو لپاره په نزدې توګه بسیا کوي، که چیرې څوك په پام کی ونه نیسی، چې دا سره د کمو استنثاوو کتل کیږي چی پوره هوار نه دي. برسیره پر دې باید د دې بنسټ هوارو زیاتون د غونډي پاس هوارې سره برابر وي. له دې امله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

غونډي V = د اهرامونوډکیو زیاتون $= r.(1/3)$.

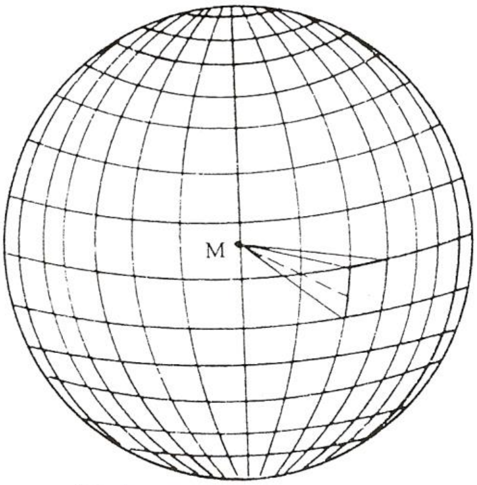
د غونډي پاس یا ټوله هواره

$(1/3).r.O$ د غونډي $= (4/3)\pi r^3$

O د غونډي $= 4\pi r^2$

په ټولیزه یا عمومي توګه باور لري

$O = 4\pi r^2 \quad , V = (4/3) \quad r^3$



څیره ۲۷۵

پیلبیلګه:

منځنی ځمکوړانګه ۶۳۷۰ کیلو متره ده . د ځمکې پاسهواره او ډکی څومره دي؟ ځمکه څومره کتله لري، که د ځمکي منځنی سختوالی 5,514 g/cm³ د مخه ونیول شي یا فرض شي؟

$O = 5{,}10.10^8\ km^2$,

$V = 1{,}08\ .\ 10^{12}\ km^3$;

$m = 5{,}97.10^{24}\ kg$

د خالیغونډي ډکی همداسی لاس ته راځي لکه د یوې خالي استواني ډکی (د مخه لوستل شوی دی) د دوه یو په بل کی پرتو کونځینتري غونډیو توپیر یا کمون:

$$V_{\text{خالیغونډی}} = (4/3)\ \pi\ (r_1^3 - r_2^3) \quad .$$

پیلبیلګه:

د اوسپنی خالیغونډی کومه کتله لري ، که د باندنینیمی یي ۱۲ سانتیمتره او

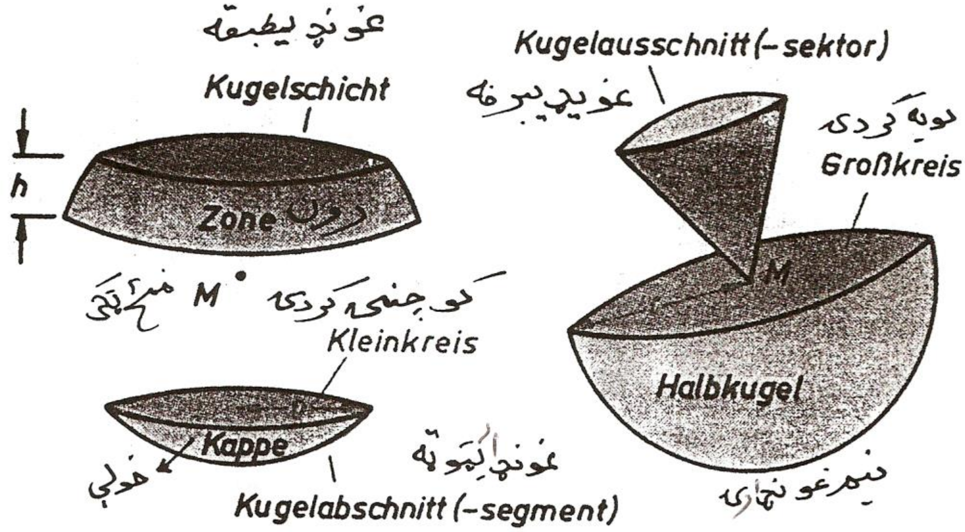
(c) ketabton.com: The Digital Library

د دیوال پنډوالی یی ۸ ملیمتره (دیبنتی یا سختوالی یا ټینګوالی) وي؟

$$V = (4/3)\pi(6^3 - 5,2^3) = 315,8\ cm^3; \quad m = V \cdot \rho = 2463,25\ g$$

اوس غونډیبرخی په پام کی نیسو. په ټولیزه توګه لاندې بنسټیز فورمونه مخ ته

له: (رو:



خیره ۲۷۶

ددې یوه ټوټه یا زیاتې ټوټې داسی منځ ته راځي ، چی غونډی د یوې یا یا زیاتو ګردیو له خوا غوڅه شي. کهٔ داغوڅی د غونډي له منځټکي تیر شي، نو دوه نیمغونډي او یوه لویه ګردی د غوڅهوارې په څیر منځ ته راځي. که غوڅی له منځټکي تیر نه شي، نو دوه غونډیټوټی منځ ته راځي. د دوه داسی غوڅیو ترمنځ یوه غونډیطبقه منځ ته راځي. که له غونډي یو مخروط ډوله ټوټه رابیله شي، نو غونډیبرخه منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرتله کړی) د دواړو خولیو د یو بل سره مساوي کیښوولو له لارې لرو:

$$\varrho_1^2 h_2 - \varrho_2^2 h_1 + hh_1h_2 = 0$$

دا بالاخره مور لاندې ته لاربښودوي:

$$V = \frac{\pi h (3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2}{6}$$

د غونډیبرخي ډکي یا غونډیبرخي حجم داسی لاس ته راځي، چی د یوه مخروط او او د ګردیتهوټی ډکي سره زیات کړو:

$$V = \frac{\pi h^2 (3r-h)}{3} + \frac{\pi \varrho^2 (r-h)}{3}$$

دلته بیرته اړیکی (*) کارول کیږي، چی په لاندې ډول ځیره بدولون ترې لاس ته راځي $\varrho^2 = h\,(2r - h)$. په دې توګه د ϱ^2 لپاره ځاي په ځاي کوي او له دې لاس ته راځي :

$$V = \frac{\pi h^2 (3r-h)}{3} + \frac{\pi h (2r-h)(r-h)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3} + \frac{2\pi r^2 h}{3} - \pi r h^2 + \frac{\pi h^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \frac{2\pi r^2 h}{3}$$

له r د (*) په مرسته ځ کا په ځای نسئی لو لاس ته راځي

$$V = \frac{2}{3}\pi h \left(\frac{\varrho^2 + h^2}{2h}\right)^2 = \frac{\pi}{6h}\left(\varrho^2 + h^2\right)^2$$

د غونډیتهوټی پوښهواره M ، چی د غونډیخولی نومیږي او یا کاردینالخولی بلل کیږي، په همغه فکر شمیرل کیږي لکه د غونډي پاس یا ټوله هواره . که د غونډیبرخی د ډیرو اهرامونو د زیاتون په ځیر په پام کی ولرو، نو د هغی بنسټهواره همغه غونډیخولی ده. (کړی شو چی غونډیخولی په ځاي کپره ولیکو) نو لرو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Mr / 3 = 2\pi r^2h / 3 \iff M = 2\pi rh$$

که د (*) له لارې بدل شي، نو د غونډېکپرې لپاره لاس ته راځي :

$$M = \pi.(\varrho^2 + h^2)$$

د ټولهوارې د لاس ته راوړلو لپاره دې بيا يواځې د بنسټګردی هواره ور زياته شي. د غونډيطبقي پوښهوارې ته د غونډيزون Kugelzone وايي. دا د دوه کپرو له کمون څخه لاس ته راځي. ټوله هواره يا پاسهواره يې داسی لاس ته راځي، چی بنسټهواره او سرپوښګردي هوارې وززيات شي. د غونډيټوټې پاس هواره داسی لاس ته رځي، چی د غونډيکپرې هوارېته د مخروطپوښ ورزيات شي.

د غونډارې برخو لپاره لاندې فرمولونه باور لري.

د غونډارې ټوټه غونډارې خولی	$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h) = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho^2 + h^2)$ $M = 2\pi rh = \pi(\varrho^2 + h^2)$ (Kugelkappe) $O = 2\pi rh + \pi\varrho^2 = \pi(2\varrho^2 + h^2)$
غونډارې ټيکلی غونډارې زون	$V = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)$ $M = 2\pi rh$ (Kugelzone) $O = \pi(2rh + \varrho_1^2 + \varrho_2^2)$
غونډارې برخه	$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{6h}(\varrho^2 + h^2)^2$ $O = \pi r(2h + \varrho)$

بيلګه:

۱ – د پنيرڅرخ د يوه غونډيطبقي فورم يا بڼه لري. د هغه پاس هواره او ډکی وشميرۍ، که وي : $\varrho_1 = \varrho_2 = 25$ cm او $h = 20$ cm.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V = (20\pi / 6)(3.25^2 + 3.25^2 + 20^2) = 43458,70 \text{ cm}^2$$
$$= 34,458 \text{ dm}^2$$

وړانګه r د پیتاګوراس د جملي په مرسته لاس ته راځي :

$$r^2 = \rho_1^2 + (h / 2)^2 \Rightarrow r^2 = 25^2 + 10^2 \Rightarrow r = 26,93 \text{ cm}$$

نو لرو

$$O = \pi (2.26,93.20 + 2.25^2) = 7310,59\text{cm2} = 73,11 \text{ dm}^2$$

۲ – یو دلوبی لاټو یا لوبی ځرخی د غونډیتوټی بڼه لري د ټولجګوالی $r = 16$ cm او سور $b = 2\rho = 10$ cm سره. د هغه ډکی او پاسهواره څومره لوي دي؟

د خولی جګوالی د پیتاګوراس د جملی په مرسته لاس ته راځي :

$$(r - h)^2 + \rho^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = - 2rh + h^2 + \rho^2 = r^2$$
$$\Leftrightarrow h^2 - 2rh + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow h^2 - 32h + 25 = 0$$

د دواړو اوبیو یا حلونو $h_1 = 31,2$ cm او $h_2 = 0,8$ cm سره.

داچی $h < r$ ، نو باید یواځي دوم اوبی یا حل د کارونی یا ګټور وي. له دې امله لاس ته رځي

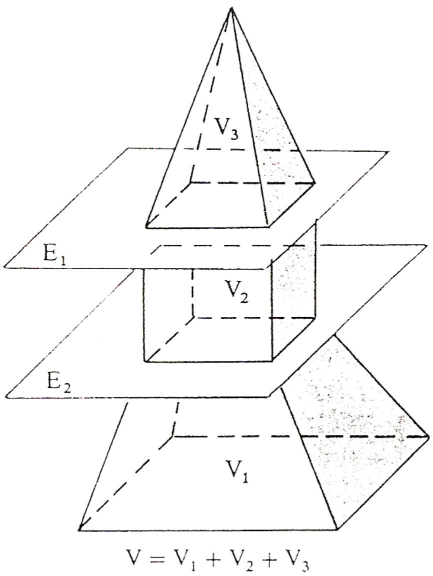
$$V = 2\pi .16^2 . 0,8 : 3 = 428,93 \text{ cm}^3$$
$$O = 16\pi(2 . 0,8 + 5) = 331,75 \text{ cm}^2$$

په خوبنه جوړشوي یا فورم شوي بدنونه

لکه څنګه مو چی زیات تر پام تیر شو، ګټوور دی چی د یوه پیچلي بدن د ډکي یا پاسهوارې د شمیرلو لپاره دا بدن په ګټوره توګه یا هدفمند ډول ټوټی ټوټي کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول ساده برخه بدنونه منځ ته راځي، کوم چې ض معلومو فرمولونو له لارې شمیرل کیدی شي.



ښېره ۲۷۹

بیلګي :

ددې ښېره شوي بدن ډکی له یوه پڅ اهرام، کوادر یا غبرګاړخیز یا مکعب او یوه اهرام څخه لاس ته راځي.دا جوتیږي، که بدن په دوه غوڅیو په هوارو E_1 او E_2 ټوټه شي .

د بیاتیونی له لارې کیدی شي چې زیات بدنونه یوبل سره پرتله یا مقایسه شي(مخروط، اهرامونه) د ګیلاس اینبولو ټوټی(داسی ډبل کاغذونه دي چې د پیالیلاندې یا ریمکابي یا پشکاب په ځیر وي او ګیلاسونه پرې اینبوول کیږي) چې یو په بل اینبول شوي په پام کی نیسو. د دې ټوټو د څرخولو ، یا ځاي بدلولو له لارې جګوالی او ډکی نه بدلیږي. له دې منځ ته راغلی پوړی په پام کی نه نیول کیږي، ځکه چې په تیوري کی

ښېره ۲۸۰

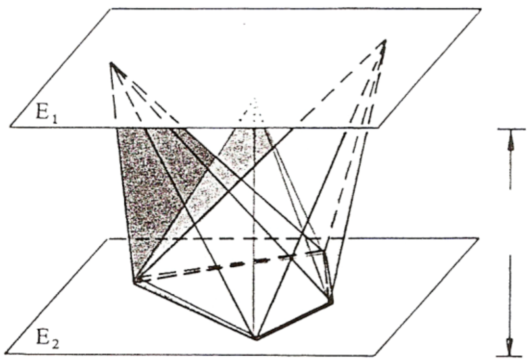
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا بدن د ناپای زیاتو طبقو څخه جوړ دی، چی پنډوالي یی په پام کي نه نیول کیږي د دې نور ورزیات استعمال د کاواليری Cavalieri پرنځيپ دی

جمله :

دوه بدنونه همغه ډکی یا برابر ډکي لري، که د هغو ټول پراته غوځي په همغه واټن بنسټهوارې ته پراته وي.

په دې کی ضرور نه دی چي غوځهوارې دی کونګرواینځ وي!



څیره ۲۸۱ : دا بیاتي شوي اهرامونه ډکي برابر دي، څکه چی همغه جګي او برابر بنسټهوارې لري: $V = (1/2)G.h$ د کوچنیو واټنونوسره هره غوځهواره چی د بنسټهوارې سره غبرګه وي، په اهرامونوکی هواربرابر غوځهوارې خوړوي

دا د غونډیډکي شمیرلو لپاره یو ښکلی میتود رامنځ ته کوي. د یوې ګردي استوانی یا ګردیټوټی څخه چی وړانګه r لري او 2r جګ دی دوه د څوکو یا ککرې له لارې یو بل ته مخامخ مخروطونه غوځوي (یو دیابولو) د $r = h$ سره. داپاتی خالیفورم یوه د شګو ساعت پوښ راپه ګوته کوي. د یوې دومی همغی سره برابر ې ګردي استوانی یا ګردیتوتی د وړانګي r په اندازه یو غونډی راغوځوو. د سیومتري له امله بسیا کوي که لاندې نیمغونډی او د «شګو» ساعتنیمی تر څیرنی لاندی ونیسو. هره غوځهواره یوه بسټهوارې سره غبرګه هواره راکوي، په غونډي کی ګردی په شګوساعتپوښ کی

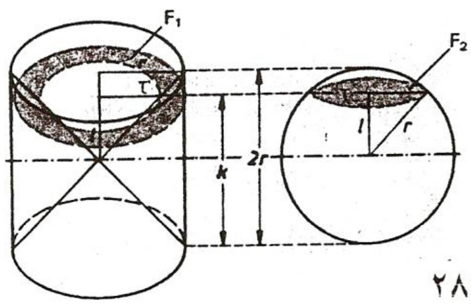
(c) ketabton.com: The Digital Library

ګردیګوته یا ګردیکړی. دلته دې 'r د دیابولو څخه منځ ته راغلي ګردی ورانګه وي. r د غونډیغوخیګردي ورانګه .

د هوارو لپاره چې واټن 1 له همغه بدن منځټکي ولري، باور لري:

$$F_S = \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi (r^2 - r'^2)$$

$$F_K = \pi r^2 = \pi (r^2 - 1^1)$$



خیره ۲۸۲

د ورانګي جملی څخه، برسیره په دې لاس ته راځي: (د نتګوساعت)

$$r' / r = 1 / r \Rightarrow r' = 1$$

$$\Rightarrow F_S = \pi (r^2 - 1^2) F_K$$

دواړه بدنونه ګورو چې ډکیمساوی یا ډکیبرابر دي.

اوس د استوانی ډکی $V_Z = \pi r^2 h = 2\pi r^3$ دی، څکه چې $h = 2r$ دی .

د دیابولو ډکی دی :

$$V_D = (2\pi r^2 / 3).(h/2) = \pi r^2 .h / 3 = (2/3) \pi r^2$$

او له دې سره د شګوساعت – او نیمغونډي ډکی :

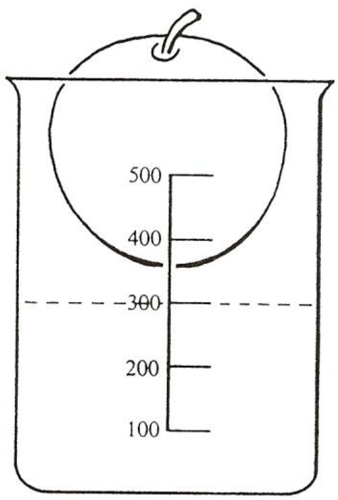
$$V_K = V_Z - V_D = 2\pi r^3 - (2/3)\pi r^3$$

$$V_K = (6/3)\pi r^3 - (2/3)\pi r^3 = (4/3)\pi r^3$$

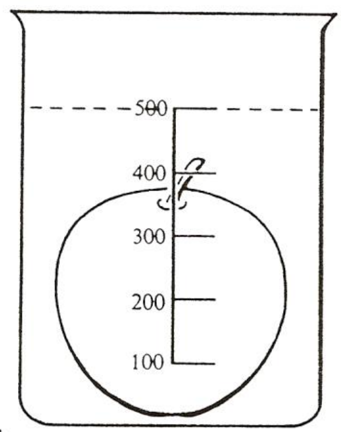
د پوره نامنظم شکلونو ډکی د شمیرپوهنی له لارې یا هیڅ نه شمیرل کیږي او یا پوره ټیك د پیچلو شمیرنپوهنو متوضو سره هم نه شمیرل کیږي. لکه د یوې منې یا د یوه

(c) ketabton.com: The Digital Library

الو ډکی یواځي فزیکی متودونه یا طریقی مرسته کوي چی ډکي یی وشمیرل شي. لکه په لاندې ځیرو کي ، ځي روښانه شوی دی.



ځیره ۲۸۳



ځیره ۲۸۴

تمرینونه

۱ – د هغه بدن ډکی څومره لوي دی ، چمنځ ته راځي، که د مکعب په هره هواره یو ولاړ اهرام کیښول شي د s = a سره؟

۲ – یو تیترائیدر څلورهوایز بدن او یو غونډی برابر پاسهوارې لري. د هغوي ډکی په کوم تناسب یو بل سره پراته دي یا کومه ځاننیونه یو بل سره لري؟

۳ – هر منظم پولوئید لپاره یوه دننه غونډی شته . چی د هغه هره هواره په منځټکي کی لمس کوي. ددې وړانګه دی r وي. د پولوئید ډ ګی اوV اوO پاسهوارې V = O.r / 3 لپاره دلایل راوړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام وکړی چی پولوئیدر پـه اهرامونو ټوټه شي چی وړانګه r ولري، په
ډول چي د پولوئید هر اړخهواره د داسی یوه اهرام بنسټهواره وي.

۴ – د المان د پارلمان په سر منه او اټیران چی له طیلا جوړ دي د پارلمان د
ډانګ سره غبرګ د قدرت نخښنه جوړوي. دا د پارلمان منه به څومره
وي، که دا د پاکی طیلا څخه جوړ وي($\rho \sim 19{,}3\ g/cm^3$; $\sim 10\ cm$
اټیران وزن ثابت یا ځای په ځای پاتیږي)؟

۵ – یوه غونډی، توته، اهرام (د هغو بنسټهواره) برابر وړانګی لري، د اه
غونډی جګوالی یا جګی داسی وټاکی ، چی الف) همغه ډکي لري» د
برابره پاسهواري لري.

۶ – د یوه غونډی ډوله تیلو څاڅکي څخه، چی ۵ میلي متره نیمی لري، له
توئیږي د یوې ګردی ډوله تیلو پرده جوړوي، چی نیمی ئی ۱ متر . دا
څومره پنډه ده؟

۷ – د یوې سابونپوړکی دیوال به څومره لوي وي، چی دباندنی نیمی یی
سانتي متره وي، کوم چی له څاڅکی جوړ دی، چی نیمی یی ۵ میلي م

۸ – یوه د ښیښی غونډی د دابضنی نیمی سره، چی ۱۲ سانتي متره دی ۲
وزن لري یا درند دی. د هغی دیوال څومره لوي دی ($2{,}6g/cm3 \sim$

۹ – یو هوا بالون یو ۲۵ متره نیمی لري.

الف) دا دننه سمڅ یا غار یی څومره دروند دی، که د یو مربع متر و
وزن ۴۵ ګرامه وي؟ ب) ډکی څومره وزن لري که
هایدروجن ($\rho = 9.10^{-5}\ g/cm^3$) د ډکي مادې په څیر وکارول شي؟

۱۰ – یو مکعب کی یو غونډاری یا غونډی د خورا لوي ډکی سره خوندي ک
په یوه غونډاري چی خورا کم ډکی ولری راګیر یا خوندي کیږي.د م
اړخ اوږدوالی 5 cm دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف د ټول تن غوځی ځیره وباسی .

ب) د دواړو غونډارو ډکی او پاسهواره وشمیری .

۱۱ - د لاندې هوایي بدنونو ډکي او پاس هوارې څومره لویي دي:

الف) سپوږمی ($r = 1735\ km$)

ب) مارس ($r = 3430\ km$)

پ) وینوس ($r = 6305\ km$)

ت) جوپیتر (ر ($r = 71800\ km$)

۱۲ - د کورکغونډي($\rho = 0,25\ g / cm^3$) د ۳۶ سانتي متره نیمي سره یوه غونډیډوله د پارې زرې ($\rho = 11,4\ g / cm^3$) لري. دا د پاربزرې څومره لوي دی، که غونډی تر نیمایي په ابو کی ډوبه شي؟

۱۳ - د یوه لوي سرې سرې ۴۰۰ میلیونه غونډیډوله د سرپوښکی لري، هر یوه د نیمي $0,3\ mm$ سره. د ټولو پوښکیو ګډه پاسهواره څومره ده؟

۱۴ - یو غونډی ، چی ورانګه یی $r = 10\ cm$ ده، د یوې هوارې څخه په ۳ سانتي متره ، له منځ یا کوکز څخه، واټن غوځیږي. د دواړو برخو غوځهوارې او ډکي وشمیری.

۱۵ - د پاتی یاد نایادو برخو M, V, h او r د لاندې غونډیبرخو لویوالی وشمیری

a) $r = 6\ cm$; $h = 5\ cm$ b) $M = 50\ cm^2$; $h = 3\ cm$

c) $h = r = 7\ cm$ d) $M = 700 cm^2$; $r = 10\ cm$

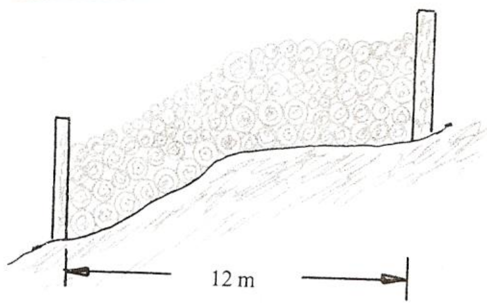
۱۶ - د ځمکی پاسهوارې کومه برخه د ۱۰۰۰۰ متره جګوالی څخه لیدل کیدی شي(د ځمکی ورانګه ۶۳۷۰ کیلومتره ده)

۱۷ - د یوه غونډي نیمی په څلورو برابرو برخو ویشل کیږي. په ټوټهټکو کی په نیمی ولاړې درې هوارې اچول کیږي. په کوم ځاننیونه یا تناسب کی
الف) د پوښهوارې ، ب) د راپیدا شوو یا منځ ته راغلو غونډي برخو

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره پراته دي؟

۱۸ – په یوه غونډي کی، له منځ څخه لیدلو یا کتلو سره ، هوایی(دلته مطلب د غونډي ترمنځ هوا یا د هواډکی دی) پرسیدنه، د دریواړو کواوردیناتو څخه برابردي. که دا یو له بل توپیر ولري، نو د الیپسوئید څخه غبرګېږو، چی اصلی محورونه یی a,b او c دي. د ایلیپسوئید ډکی د فرمول $V = (4/3) \ a.b.c$ له مخی شمیرل کیږي. ځکه په ریښتونی غونډی نه دی، بلکه یو الیپسوئید، چی اصلي محورونه یي $a = c = 6378$ km (د اکواتور وړانګه) او $b = 6357$ km (قطبي وړانګه) لوي دي. (که په کلکه ونیول شي نو د اکواتوروړانګو ترمنځ یو کوچنی توپیر شته) د ځمکي ډکی وشمیری او د مخ ته تیر غونډي او غونډي برخي کی لوستلو سره یی پرتله کړی)



خیره ۲۸۵

۱۹ –په یوه زوړندي یا پیچومی باندي ۱ متر اوږد لرګی ډیری شوی، لکه په خیره ۲۸۵کی چی لیدل کیږي. څومره د هوامتر لرګی دا 1,20 m جګه د لرګوډیری لري.

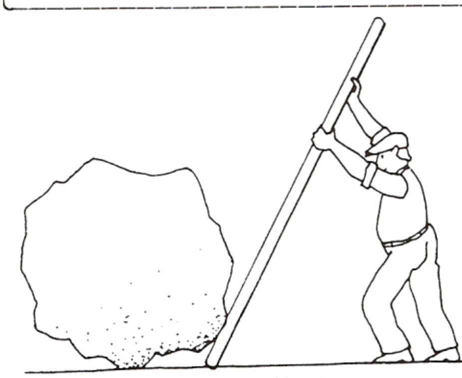
(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه

نځورونه

پیلبیلګه

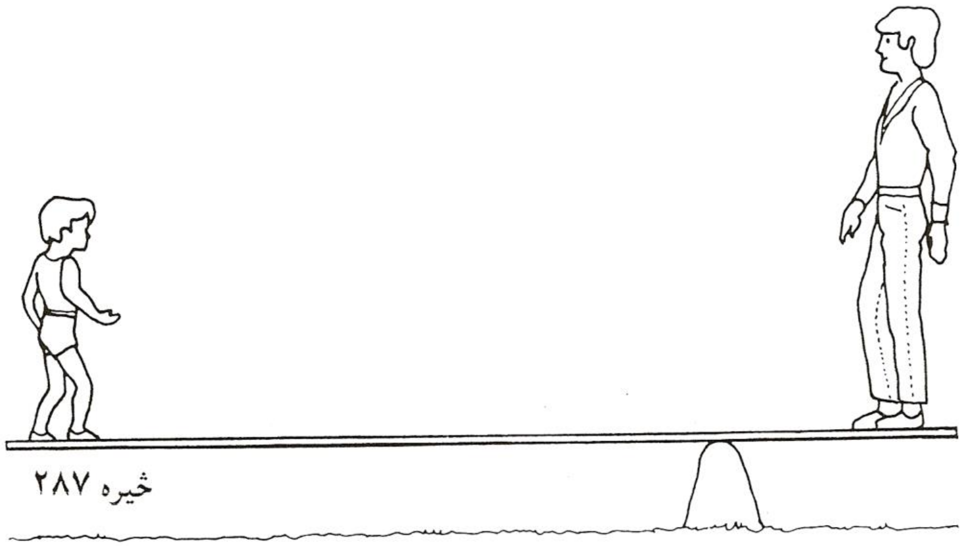
یوه درنديږ تیګی ته څنګه سړی حرکت ورکولی شي؟ طبعآ کیدی شي چي ورل
یی وازمائل شي، مګر دا پوره ستونځی لري او دا لاندې طریقه یی ساده ده: د
تیګی لاندې سړی یوه تخته یا اړم ننېلوي او یا ورلاندې کوي، د بل سر نه یی
لاندې لور ته زور کوي یا لاندې لور ته زور په واردوي. تیګه یو څرخونحرکت
باندې راځي.
ددې حالت لپاره د اړم قانون صدق کوي« زور د زوراړم = بار د بار اړم» .
که تیکه په پوره اندازه اوږده (او ستابیل) وي، کیدی چي یو ډیر نازورور
سړی هم کړی شي، چی خورا دراننده بارونه پورته کړي.



یا دا حالت د پورته پیلبیلګي سره ټیك
ښکاره ونبانه څرګند شوی ؟ هیڅ نه پیښیږي،
که څوك په اړم ښکته یا پورته زور ونه
کړي بلکه یا راکښ یا ورپوري وهي.
موږ باید دا پوښتنه نوره هم روښانه کړو
او د زورارزښت سره دزورتاثیر لور هم په
شپله لوبه کی ورداخل کړو. ددې هدف لپاره
وکتور سره شمیرنه کړي.

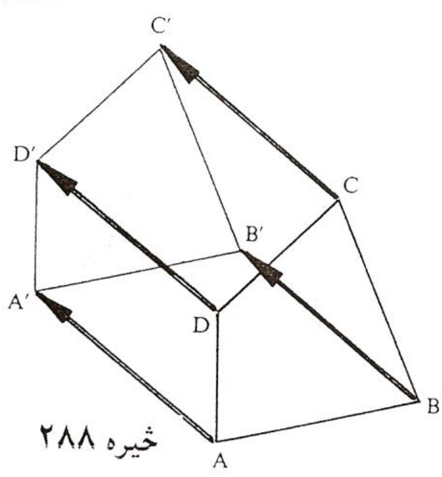
خیره ۲۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیره ۲۸۷

تعریف : وکتور د یوه ارزښت او یوه لور سره تعریف دی. **تل د یوه غشي په ځیر انځورېږي.** اوږدوالی د وکتور ارزښت (ګڼ ارزښت) ، په هواکی یی ځاي لور او د غشي څوکه د وکتورلور موخه یا هدف ښايي.



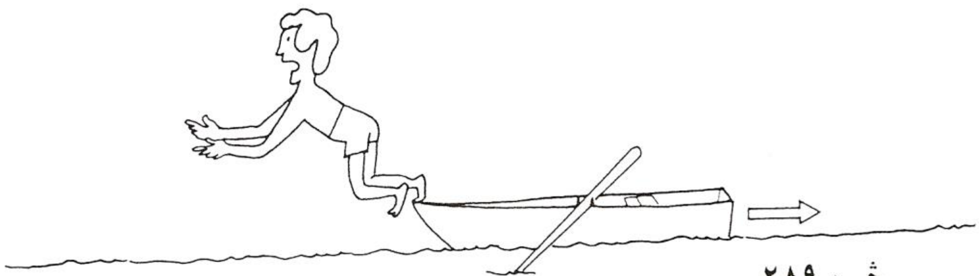
ځیره ۲۸۸

دوکتورونو لپاره د کارونی ساحی

ګڼونه د مخنخښی سره کیدی شي د وکتور په حیث واضح شي. په فزیك کی ګښول، لکه زورونه، سرعتتونه، لارې کیدی شي د وکتورونو په ځیر انځور شي. (د جلالکوټ څخه و ځیره ✓ ګښول په وکتور سره په ښه کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

و هسکی مینی ته رابنایی، چی دا لار دا دوه ځایونه سره ونخلوي او دا هم رابنايي چی څومره اړده ده. وکتور دا را په ګوته کوي، چی ایا څوك له جلاکوټ څخه هسکی مینی ته ځي او که له هسکی مینی څخه جلالکوټ ته)



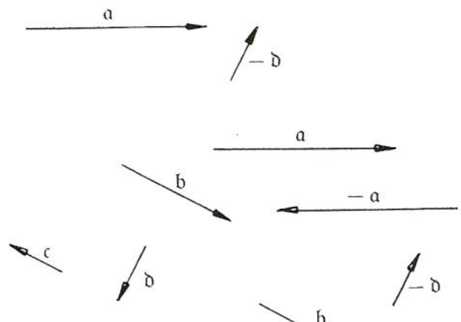
څیره ۲۸۹

داچي يو وکتور د خپل پيلټکي او پايټکي سره ورکړ شوی دی، کيدی شي چی دا ټکي هم د هغه په انځورونه کی استعمال شي.

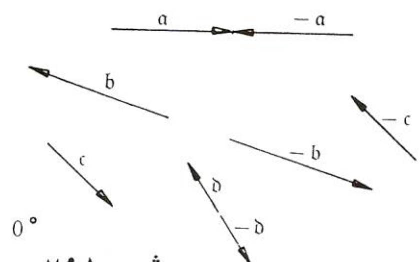
تعریف: هغه وکتور چي له ټکي P و ټکي Q ته لاربنودوي، د $\overrightarrow{PQ}$ سره په نخښه کیږي.
بل ډول لیکدودونه یی دي: $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = \vec{a}$.

په راکښلو سره که ټکی 'P د P څیره او ټکي 'Q د ټکي Q څیره وي، نو د $\overrightarrow{PQ}$ اوږدوالی او لورد $\overrightarrow{P'Q'}$ یو بل سره برابر دي. له دې امله دا باید برابر ولیدل شي يا وګڼل شي. یو وکتور له دې امله یو غشی نه دی بلکه ډیر یوبل سره غبرګ او کوګروراینخ غشي دي. له دې امله د ورته ټولګي ځخه هم غبرېدی شو. (دا دې ځما په لمړي د شمیتپوهنی کتاب کي وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library



ثيره ۲۹۰



ثيره ۲۹۱

ثيره وکتورو نه د ايکويوالنځتېولګی

په ثير: دوه وکتورونه ټيك هلته سره برابر دي، که هغه همغه ارزښت(اوږدوالی) او همغه لور ولري.

تعریف

د **a** مطلقه ارزښت $a = |\mathbf{a}|$ دی. a تل یو نامنفي ګڼ دی.

وکتورونه د ارزښت ۱ سره موږ یوونوکتورونه یا واحدوکتورونه بولو.

وکتورونه د همغه ارزښت سره مګر د مخامخ لور سره مخامخ یا په څټ وکتورونه بلل کیږي:

$$|\mathbf{a}| = |-\mathbf{a}| = a$$

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = -\overrightarrow{QP} = -(-\mathbf{a})$$

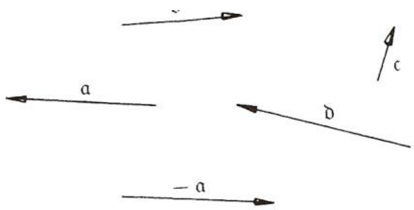
یواځنی وکتور د 0 (صفر) ارزښت سره صفروکتور **0** دی:

$$\overrightarrow{AA} = \mathbf{a} \Rightarrow |\overrightarrow{AA}| = |\mathbf{a}| = 0$$

دا چی وکتورونه له ټکي وټکي ته لارې روښانه کوي، کیدې شي چی د وکتورونو د توضیح لپاره کواوردینات یا پروت ولاړ سیستمونه (محورونه) هم وکارول شي:

تعریف: وکتورکواردینات د پیل او پای ټکو توپیر یا کمون څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۹۲

په هواره کې : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix}$

په هوا کې : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix}$

خیره وکتورونه او د هغوي ارزښتونه(اوږدوالی):

$|\mathbf{a}| = |-\mathbf{a}| = 2,5$; $|\mathbf{b}| = 2$; $|\mathbf{c}| = 1$; $|\mathbf{v}| = 3$

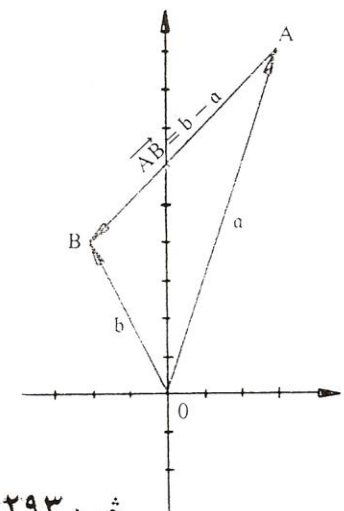
بیلګې:

وي دې $A(3|9)$ او $B(-2|4)$ پیل- او پایټکي . نو د A او B څخه ټاکلی وکتور کواوردینات په لاندې ډول لاس ته راځي :

$$a = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad b = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$-c = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 9-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

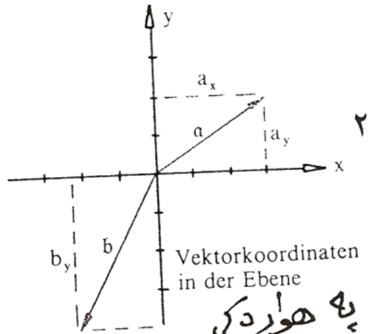


خیره ۲۹۳

جمله: د وکتور ارزښت د پیتاګوراس له جملې څخه لاس ته راځي او دا د یوګونو کواودیناتو له لارې :

په هواره کې: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

په هوا کې: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$



شيره ۲۹۴

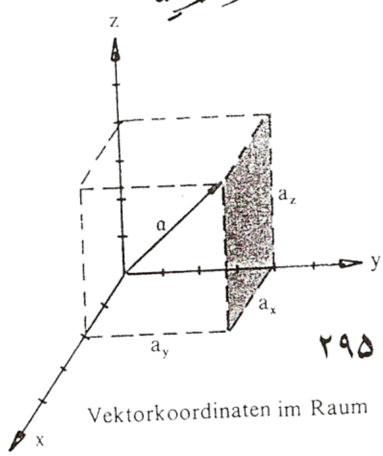
په هوارډکې وکتورکواوردینات

بیلګې :

$$a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |b| = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11{,}31$$

$$c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |c| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{77} \approx 8{,}77$$



شيره ۲۹۵

Vektorkoordinaten im Raum

په هواکې وکتورکواوردینات

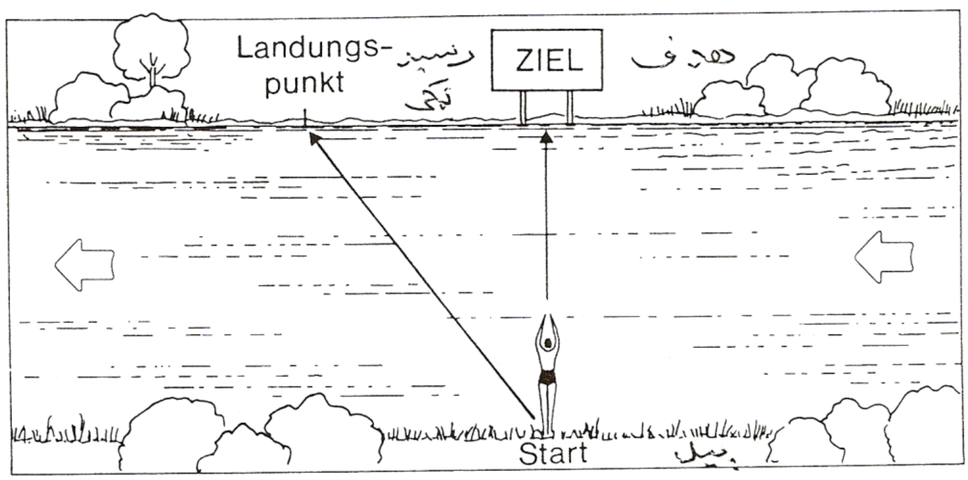
وکتورزیاتون او s–ځلوون یا ضربول

پیلبیلګه: یو لامبووهونکی د سین بلې لور ته د سین په سور یا پلنو لامبی، دا په دې مانا چې اوبه روانې دي. سره له دې چې دا تل سیده لامبي ، دا نه شي کولی چې هغه د لمبا ځاي ته مخامخ ځاي ته ولمبیدی شي.د روانو اوبو څخه د ځان سره وور کیږي. په ټولیزه –

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا عمومي توګه ده یو مائل حرکت وکړ یا مایل یي ولمبل، کومکي چی د ده د لمبا سرعت او د سین سرعت یو په بل زیات شوي دي.

ګرافیکی د وکتورزیاتون داسی صورت نیسي، چی د دواړو سرعتونو وکتورغشي په خپلو پیل ټکو یو په بل ږدي او دا هر یو د یوه غبرګ اړخیز سره یوځایی وصل کوي. د غبرګ اړخیز نیمی د دواړو سرعت وکتورونو زیاتون ، چی له پیل ټکی پیل کیږي انځوروي. یعنی د لامبووهونکي او د اوبو د سرعت زیاتون ، ځمور. په ځیره کی «



ځیره ۲۹۶

تعریف: وکتورونو ګرافیکی سره زیاتیږي، که د دوهم وکتور پیلټکی د لمړي وکتور په پاګي کینبول شي یعنی د غشی په سر کینبول شي او داسی وریسی . دا زیاتون وکتور نو بیا د لمړي وکتور د پیل ټکی د دوهم وکتور یا د ځنځیر اخرني وکتور د څوکی یا غشي سر پورې غزول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خیرونو ځخه دا لاندې هم لاس ته راتلی شي

جمله : د زیاتونوکتور کواودینات همداسی کمونوکتور د پیلوکتور د زیاتوز همداسی کوم ځخه لاس ته راځي.

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

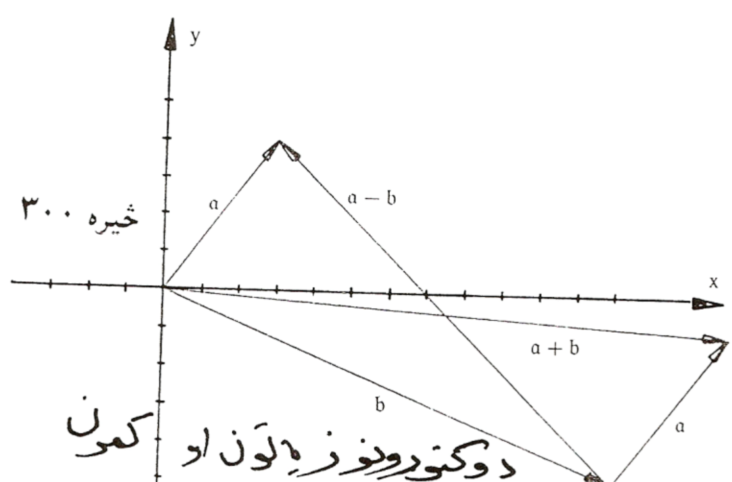
1. $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad |a| = 5 \quad |b| = 13$

$$\Rightarrow a + b = \begin{pmatrix} 3 + 12 \\ 4 \ \ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a - b = \begin{pmatrix} 3 - 12 \\ 4 \ \ + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$b - a = \begin{pmatrix} 12 - 3 \\ -5 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$|a - b| = |b - a| \approx 12{,}73; \quad |a + b| \approx 15{,}03$$



Addition und Subtraktion von Vektoren

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\mathbf{2.}\ a=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix};\quad c=\begin{pmatrix}7\\8\\-9\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a+b=\begin{pmatrix}4-2\\3+0\\2+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$$

$$a-c=\begin{pmatrix}4-7\\3-8\\2+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-5\\11\end{pmatrix}$$

$$a-b+c=\begin{pmatrix}4+2+7\\3-0+8\\2-5-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\11\\-12\end{pmatrix}$$

$$a+a=\begin{pmatrix}4+4\\3+3\\2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\6\\4\end{pmatrix}=2\cdot a$$

دا وروستنی بیلګه د وکتورونو د ځلولو لپاره ده چی له ګڼونو سره ځل شوي (s– ځلون یا · ضربونه) یعنی د سکالار سره ځلونه :

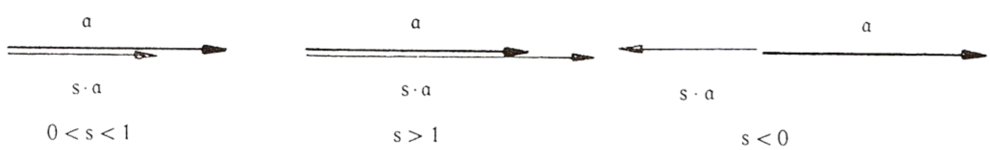
تعریف : وي دې s یو ریل ګڼ (سکالار هم نومیږي) **a** یو وکتور. نو s.**a** = **a** . s هغه وکتور لاس ته راکوي ، چی همغه لور ولري لکه **a** او s –واره اوږدوالی ولري. وکتور **a** له s سره ځلیږي، که د وکتور هر کومپوننت د s سره ځل شي:

په هوا کې $s\cdot a=\begin{pmatrix}s\cdot a_x\\s\cdot a_y\\s\cdot a_z\end{pmatrix}$ ، په هواره کې $s\cdot a=\begin{pmatrix}s\cdot a_x\\s\cdot a_y\end{pmatrix}$

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad s_1 = 4; \quad s_2 = -0{,}5$$

$$\Rightarrow s_1 \cdot a = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot 7 \\ 4 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 28 \\ 36 \end{pmatrix}; \quad s_2 \cdot a = \begin{pmatrix} -0{,}5 \cdot 5 \\ -0{,}5 \cdot 7 \\ -0{,}5 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -3{,}5 \\ -4{,}5 \end{pmatrix}$$

هندسي د یوه وکتور ځلونه د یوه رییلګڼ سره د هغه وکتور منځنی غزونه ده د ځلوونی یا فاکتور s په اندازه. د وکتور پیلټکی د کرښمنځ یا غزونمنځ دی.
دلته د $|s| > 1$ سره وکتور اوږدیږي یا غزیږي» او د $|s| < 1$ سره وکتور لنډیږي.
د $|s| = 1$ لپاره د وکتور ارزښت تغیر نه خوري. که $s < 0$ وي، نو د وکتور لور راپه ښت کیږي یا راګرځي یا برعکس کیږي.



خیره ۳۰۱: د وکتورa ځلونه د یوه رئیل ګڼ s سره.

که $s = 0$ وي ، نو $s.\mathbf{a}$ صفر وکتور **0** دی .

جمله :په ټوله توګه یا مجموعه کی د سکالار سره د وکتور ځلونو لپاره ل اندې شمیر قاعدې باور لري:

$$|s.\mathbf{a}| = |s|.|\mathbf{a}|$$
$$(s_1 + s_2).\mathbf{a} = s_1.\mathbf{a} + s_2.\mathbf{a}$$
$$s.(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s.\mathbf{a} + s.\mathbf{b}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې:

$$1.\quad \left|-3\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix}-9\\-12\\-15\end{vmatrix} \approx 21{,}21$$

$$\left|-3\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = |-3|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = 3\cdot\sqrt{50} \approx 21{,}21$$

$$2.\quad (4-6)\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$$

$$(4-6)\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} - 6\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\28\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-18\\42\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$$

$$3.\quad 3\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\right] = 3\begin{pmatrix}7\\-9\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\-27\\9\end{pmatrix}$$

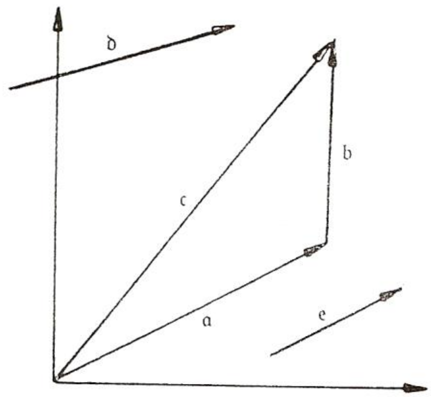
$$3\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\right] = 3\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\-9\\33\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\18\\24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\-27\\9\end{pmatrix}$$

که یو وکتور د بل وکتور زیاتواره په څیر انځور کړی شي، نو دواړه وکتورونه لاینې بلواك بلل کیږي، په غیر له دې لاین خپلواك بلل کیږي.
ټیك په لاندې توګه افده کیږي:

تعریف: دوه وکتورونه **a** او **b** لاینې بلواك دي، که چیرې (یواځنی ټاکلی) رییلګڼ s (سکالار) موجود وي د کوم لپاره چې **s.a = b** باور ولري.
دا وکتورونه لاینخپلواك دی، که انځورونه **s.a = b** د هیڅکوم رییل ګڼ s لپاره ممکنه نه وي.

په هواره (R^2) کی تل درې وکتورونه لائنې بلواك دي. په هوا (R^3) کی تل ۴ وکتورونه لاینبلواك دي. په هواره زیات تر زیاته ۲ او په هوا کی زیات تر زیات

(c) ketabton.com: The Digital Library



شیره ۳۰۲

دري وکتورونه لاینیخپلواك کیدی شي.

لايني بلواك وکتورونه	لاينې خپلواك وکتورونه د بيلګې پو توګه
$\{a, e\}$	$\{a, b\}$
$\{a, b, c\}$	$\{b, c\}$
$\{a, c, d\}$	$\{e, d\}$

بیلګي:

۱ – وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix}$ لايني بلواك دي ، ځکه چې

$$s.\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -3.s = 6 \\ 6.s = -12 \\ 11.s = -22 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = -2 \\ s = -2 \\ s = -2 \end{matrix}$$

۲ – په ځټ یا برعکس، وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$ لاینیخپلواك دی، ځکه چې :

$$s.\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -4.s = 10 \\ 6.s = 15 \\ 8.s = 20 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = -2,5 \\ s = 2,5 \\ s = 2,5 \end{matrix}$$

ګورو، چې دلته سره ګډ یا مساوي s نه شي پيداکیدی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

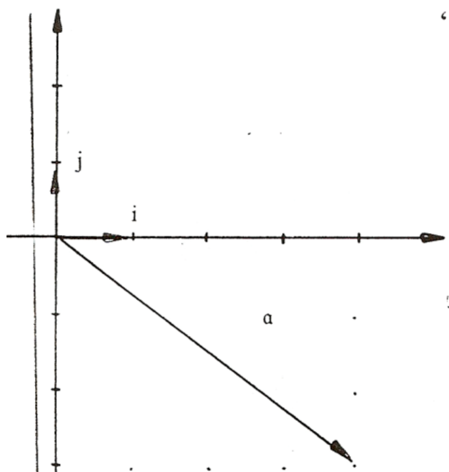
د وکتورونو لايني خپلواکوالي او لايني بلواکوالي په هواره او هوا کي د وکتورونو انځورونو لپاره په کارول کيدي شي:

لکه څنګه چی ټکی په کواوردیناتو کی تعریفیږي چی خپل واټن له محور څخه بیانوي، نو همداسی کیدی شي چی وکتورونه ، ځانونه، په خوښه داسی وکتورونو روښانه یا بیان کړي، چی ځغاستلور یی یو ددې کواوردیناتو محور وي..

تعریف:

وکتورونه : $i=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $j=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په هواره کي، همداسی

وکتورونه $i=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ او $j=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ په هوا کي او $k=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$



شیره ۳۰۳

بنسټ وکتورونه بلل کیږي. دا مثبتمحور لو په ګوته کوي او ددې لپاره باور لري:

$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$$

هر وکتور کیدی چی په هواره کی له i او j او په هوا کي د i , j او k وکتورونو په نامه لايني کمبيناشن په څیر د بنسټ وکتورونو څخه انځور کړی شي.

بیلګي:

$$a=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=4\cdot i-3\cdot j=4\cdot i+(-3)\cdot j$$

$$b=\begin{pmatrix}-3\\11\\6\end{pmatrix}=-3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+11\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=-3i+11j+6k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پای کې يو نظر په الجبري جوړښت، چې وکتورونه يې د زياتون او کمون په بنسټ او د رييلګڼونو سره ځلونی له لاري لري:

د ټولو وکتورونو ډیری V په هواره کې (همدا ډول په هوا کې) د زیاتون په نسبت یو زیاتون کموتاتیو ګروپ جوړوي (د ګروپ تعریف وروسته)، ځکه چې لرو :

اول – $a+b \in V$ د ټولو b, a لپاره ، چې له V وي رابندیدنه

دوم – $(a+b)+c = a+(b+c)$ د ټولو c, b, a لپاره، چې له V وي اسوشیاتیو قانون

دریم – $0+a = a+0$ صفر وکتور 0 ناپییلی توکی دی

څلورم – $a+(-a) = (-a)+a = 0$ هر وکتور ته یو په څټ وکتور یعني مخامخ وکتور موجود دی

پنځم – $a+b = b+a$ د ټولو a, b لپاره، چې له V وي. کموتاتیو قانون

برسیره پر دې د ځلوونی لپاره د یوه ریل ګڼ سره باور لري:

شپږم – $s.a \in V$ د ټولو a لپاره ، چې له V وي

اووم – $1.a = a$ د ټولو a لپاره، چې له V وي

اتم – $(m+n).a = m.a + na$ د ټولو رییلګڼون m او n لپاره او هر وکتور a لپاره ، چې له V وي.

نهم – $m.(a+b) = m.a + n.b$ د ټولو ړکتورونو a او b لپاره چي له V وي او هر رییل ګڼ m لپاره.

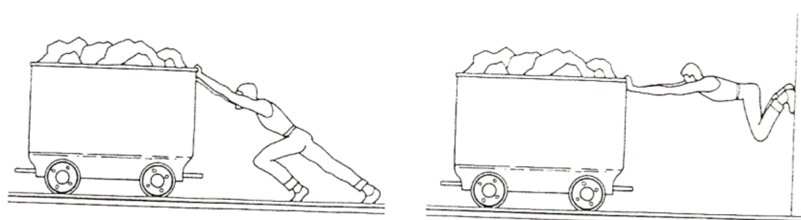
په ټولګیزه توګه یو داسې جوړښتخویونه د وکتورهوایا ، فضا تر نامه یادیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سکالار ځل

وکتورونهٔ لکه چې ومو لیدل٬کیدی شي چې سره زیات شي او یا د یوه ریبلګڼ سره ځل شي . کیدی شي، چې وکتورونه یو له بل سره هم ځل کړی شي؟
دا حتی په دوه توپیریدونکو ډولونو ممکن دی . یو واریانت یو د یوې لوي په توګه، بیرته یو وکتورهوا جوړوي(د مخه لوستل شوی دی)، بل یی د یوې لوي په توګه سکالار لاس ته راکوي، چې دا یوائې ارزښت لرې او لور نه لري.

پیلبیلګه :
په پخوا وختونو کی د سکرو د کانو واګونونه په لاس راکښل کیده. دلته دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې ولی کارګر واګون مخته راکښوده او په همدې توګه ټیلواهه، ددې لپاره چې موټر سم پورته کړي؟



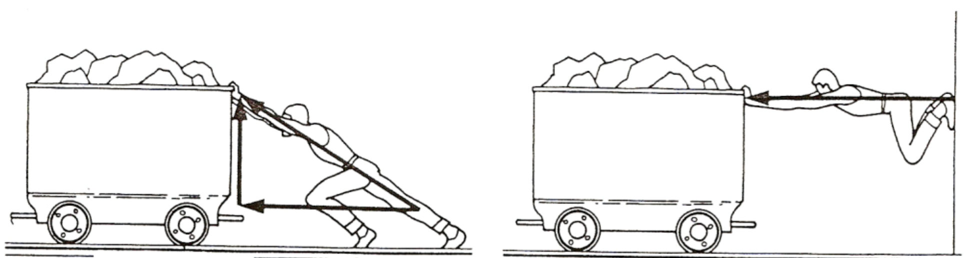
خیره ۳۰۴

ددې پوښتنی سره موږ د دوه وکتوري لویو سره سر او کا رلرو: زور او لار، چې د هغو ځل په فزیك کی «کار» بلل کیږي. هغه زور چې واګون په حرکت کی راولی، باید د واګون په لور واچول شي یا د واګون په لور تاثیر وکړي. یو په پورته   لور اچولی زور کړی شي چې واګون پورته کړي. هر مایل تاثیر کوونکی زور کیدی شي د وکتور زیاتون قانون له لارې په یوه واګون سره غبرګ او بل په دې ولاړ زور ټوټه کړي یا تجزیه کړي. یوائې پروت زور واګون د مخ لور ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

په حرکت راولي. په دې توګه واردونکی زور او مؤثر زور په ټولیزه توګه همغه یو زور نه دی. دا د دې پوښتنې ځواب هم دې، چې ولې کارګر د مخ لور ته تکیه وهي.: هغه رسی چې د هغی له لارې زور اچول کیږي، نږدې ځمکې سره غبرګه ځغلي (= لار) ، (نږدې د متهو ټول زور کیدی شي مؤثر واقع شي. هر څومره چې کونج د ځمکې او رسی ترمنځ مایل وي، همغومره زیات زور بې تاثیره پاتې کیږي.

دا په کار اچولی زور ، په دوه یو په بل ولاړو کمپوننتو (زورونو) ټوټه کیدل یو ولاړکونجیز دریګوډی جوړوي، دا لار سره غبرګ زور د $F.\cos\alpha$ په څیر لاس ته راځي . کار $W = F.s.\cos\alpha$ پخپله په برخلاف د جوړښتلوی زور او لار – لور نه لري، بلکه یواځې ارزښت لري:
دا یو سکالار دی.



خیره ۳۰۵

تعریف:

د دوه وکتورونو **a** او **b** یو **a . b** سکالار ځل لاندې (ویل کیږي **a** ځل **b**) یو یواځنی ریل ګڼ پوهیدل کیږی ،

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| .\cos\alpha = a.b.\cos\alpha$$

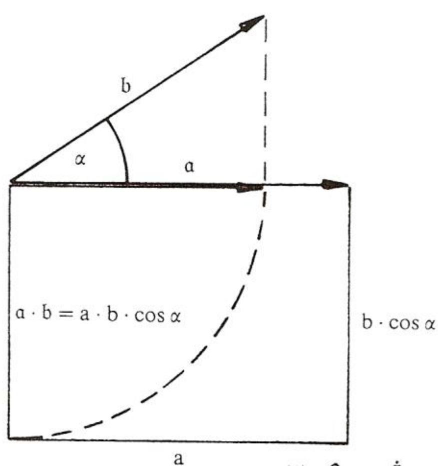
(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته کونج ∝ د a او b وکتورونو ترمنځ کونج دی .

هندسي سکالار ځل د یوه ولاړکونجیز هوارمتن دی یا هواره ده د اړخونو
او b.cos∝ سره (د b پریوستون په a). داسی یوه هواره هلته موجود
ده، که له دې وکتورونو هیڅ یو هم د
صفر اوږدوالی ونه لري او
یا $\cos\alpha \neq 0$ ، یعني $\alpha \neq 90°$ ده.

د b ولاړ پریوستون په a کله کله
په ∝ $b_a = b.\cos\alpha$ سره ښول کیږي:

$$\mathbf{a.b} = a.b_a$$



خیره ۳۰۶

جمله: د دوه وکتورونو $\mathbf{a} \neq 0$
او $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ سکالار ځل هلته او هلته
صفر دی، کله چی دواړه یو په بل ولاړ
وي:

$$\mathbf{a.b = 0} \iff \mathbf{a \perp b}$$

بیلګه:

د یوه ولاړکونجیز کواوردینات سیستم (Orthono_rmalbasis اورتونورمالبنسټ)
یو په بل نیغ ولاړ دي. له دې امله له دوه مختلفو وکتورونو ځل صفر دی او د یوه
بنسټوکتور سکالار ځل د ځان سره تل ۱ دی :

$$\mathbf{i.i = j.j = k.k = 1} \quad , \quad \mathbf{i.j = j.k = k.i = 0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د د زیاتون ځخه په بل ډول، د وکتورډیری نسبت و سکالار ځل ته ترلی یا رابند نه دی . د سکالار ځل د په خوښه وکتورونو ځل د هغه ډیري ځخه راوباسی، چی عملیه په کی اجرا کیږي، دا په دې مان چی دا نتیجه بیرته وکتور نه دی یعنی د وکتو په ډیري کی هم نه دی پروت. دلته اسوشیاتیو قانون هم باور نه لري:

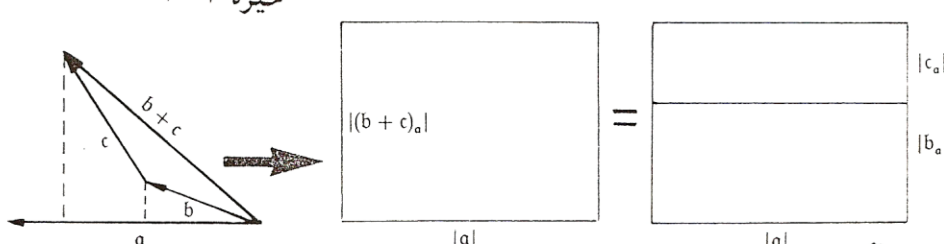
$$a.(b.c) = a.|b|.|c| \cos(b.c)$$

د **a** یو زیتځله دی او په ځپ : **(a.b).c= |a|.|b|.cos(a.b).c** د **c** یو زیاتځل دی.

سره له دې هم باورلري:

سکالار ځل کموتاتیو دی :	**a.b= b.a**
او وکتور زیاتون ته دیستربوتیو دی.	**a.(b+c) = a.b+a.c**

ځیره ۳۰۷



Das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ دستوبیوتیو قانون :

کموتاتیو قانون په کمپوننتوانځورونو له لارې او بنسټ وکتورونو له لارې ساده ښوول یا ثابت کیدی شي. د بیلګي په توګه په هواره کی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a \cdot b = (a_x \cdot i + a_y \cdot j) \cdot (b_x \cdot i + b_y \cdot j)$$
$$a \cdot b = a_x i \cdot b_x i + a_y j \cdot b_x i + a_x i \cdot b_y j + a_y j \cdot b_y j$$
$$a \cdot b = a_x b_x i \cdot i + a_y b_x j \cdot i + a_x b_y i \cdot j + a_y b_y j \cdot j$$
$$a \cdot b = a_x b_x \cdot 1 + a_y b_x \cdot 0 + a_x b_y \cdot 0 + a_y b_y \cdot 1$$
$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y$$
$$a \cdot b = b_x a_x + b_y a_y = b \cdot a$$

په ورته ډول دا د دري او زيات کمپوننتوکتورنو لپاره هم ښوول کيدي شي:

تعريف : د سکالار ځل د کمپوننت انځوروني لپاره باور لري:

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_y \\ b_y \end{pmatrix} = a_x a_y + b_x b_y \quad \text{bzw.} \quad a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

همدارنګه

د **a** او **b** ترمځ کونج په لاندې ډول ټاکل کيږي:

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}.$$

د دوه وکتورونو ترمنځ رابند کونج α شميرنه د تير مخ مساواتو څخه لاس ته راځي بيلګې:

1. $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow a \cdot b = (-3) \cdot 10 + 5 \cdot 6 = 0$

also auch $\cos \alpha = \dfrac{0}{\sqrt{(9+25)} \cdot \sqrt{(100+36)}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$

2. $a = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = a = \sqrt{81+9} = \sqrt{90}; \quad |b| = b = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

$a \cdot b = 9 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) = 18 - 15 = 3 \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{3}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{29}} \approx 0{,}05872 \Rightarrow \alpha \approx 86{,}63°$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورځل

پیبیلګه:
که چیرې په یوه سوري جام کي اوبه واچوئ او بیا سوری خلاس کړی او یا که چیرې تاسو یو لاسمینځي یا لمباړنې ډك کړی وي، نو که چیرې اوبه بندی راوباسی اوبه په ښیلوریز څرخون ډوله حرکت له سوري وځي .
دا داوبو تویدل د دروند ورن په ذریعه منځ ته راځي ، په ښي لور څرخیدنه اوبه د کوریولیسزور Corioliskraft له لارې منځ ته راځي. دا د کشولو زور په حرکت کوونکي سیستم کی باید وکتل شي یا تر نظر لاندې وي، او دا د ځمکی په ځانڅرخون له لارې کتل کیدیشي.

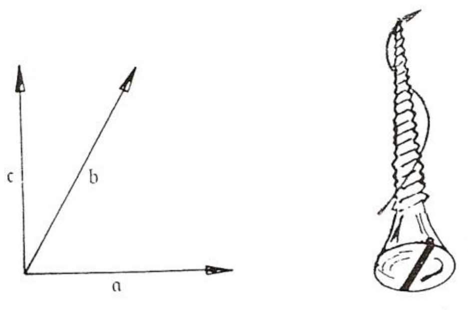
د دوه وکتوري لویو یو بل باندې تاثیر له امله (حرکت یا خوزیدنه د دروندزور په بنسټ او د ځمکی څرخون له امله خوزیدنه یا حرکت) یوه بله لویه ، چیدا هم وکتوري لویه ده منځ ته راځي. د دریواړه، د لور له امله ، په یواځنی ګډاړیکو کی سره پرتی دي، او او د دریمی ارزښت کیدی شي د نورو دوهو ارزښتونو لاس ته راوړو. په ټولیزه توګه باور لري:

تعریف :
د وکتورځل $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ لاندې (**a** اټیران **b**) یو وکتور پوهیږو، چی لاندې خویونه ولري
اول . دا وکتوردریګوني **a,b,c** په لړیپرلپسی یو ښی سیستم جوړوي
دوم. وکتور **c** په وکتورونو **a** او **b** نیغ ولاړدی، یعنی په هغی هواره هم چی د دوه وکتورونه په کی پراته دي.

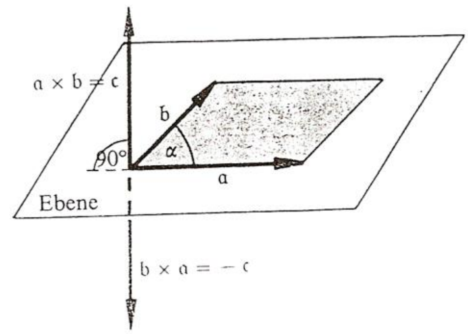
(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم. د وکتور **c** ارزښت د **a** او **b** څخه جوړ غبرګ اړخیز سره مساوي دی

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}| . \sin(\mathbf{a};\mathbf{b}) = a.b.\sin\alpha$$



خیره ۳۰۸ : یو ښی سیستم کیدی شي، چی د پیچیمیخ له لارې وښوول شي: که پیچیمیخ له **a** و **b** ته وځرخول شي، نو میخ د **c** په لور خوزي یا حرکت کوي



خیره ۳۰۹

خیره ۳۰۹ : وکتور ځل او هندسي اهمیت یی

پس که د وکتور وکتور ځل صفر وکتور وي ، نو یا یو له دې دواړو وکتورونو صفروکتور دی او یا دواړه سره غبرګ پراته دي(دا په دې مانا، چی $\alpha = 0$ او یا $\alpha = 180°$)

جمله: وکتور **c** د دیترمینانت په مرسته د وکتورونو **a** او **b** د کمپونتتو له لارې لاس ته راوړ کیدي شي

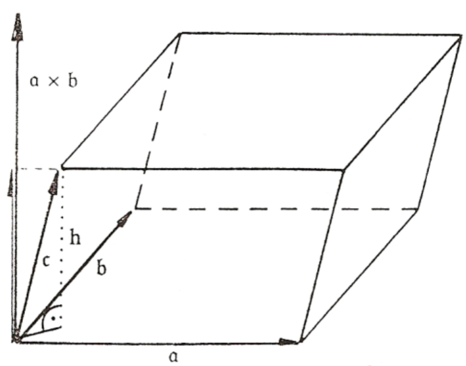
$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & a_x & b_x \\ j & a_y & b_y \\ k & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$c = a \times b = (a_y b_z - b_y a_z)\, i + (a_z b_x - b_z a_x)\, j + (a_x b_y - b_x a_y)\, k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپاتځل Spatprodukt یا غبرګهواریزي ځل

د وکتورځلونه ارزښت هغه غبرګهواریزې هواره ده، کومه چې له دواړو وکتورونو غزیږي. یو دریخوایز یا دریدمینزیونال وینه و غبرهواریز ته شپات یا بیرته همغه شپږهواریز وایي (دا د مخه لوستل شوی) دا کیدی شي، چې له درې وکتورونو څخه غزیدلی فکر ته راوړل شي. د دې ډکی داسی شمیرل کیږي، چې بنسټهواره د جګي سره ځل کړای شي. دا جګي د c ولاړ پریوستون دی، په $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. یو هندسي بدنیز Stereometrische اوبی یا حل له دې امله د c او $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ د سکالارځل له لارې لاس ته راوړ لکیږي.



خیره ۳۱۰

تعریف :

د وکتورونو $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ او $\mathbf{c}$ څخه غزیدلی شپات یا غبرګهواریز (Parallelepiped) ډکی دلاندې ځل څخه شمیرل کیږي:

$$V_{Spat} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

دا غبرګهواریزځل مثبت دی، که وکتورونه $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ په دې ترتیب یو لړیپرلسی ښی سیستم جوړ کړي، په غیر له دې بیا منفی دی.

تر هغی ، چې بنسټهواره د یوه وکتور له لارې ځان ښای یا ښوول کیږي یا ځان څرګندوي، نو دا ډکي یو سکالار دی .

په ادبیاتو کی دا د ځل اټیران نخښه ، چې په نوکانو کی نیول شوې، زیات وخت نه

(c) ketabton.com: The Digital Library

یکل کیږي، یعنی لیکو: $(a\times b)\cdot c = a.b.c$ ، غبرګهواریزځل شمیرنه د
دیترمینانت شمیرنی له لور صورت نیسي:

$$(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix} i & j & l \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

داچی دا اتیرانځل لکه د مخه مو چی وویل د بنستېوکتورونو د لاینې کومبینیشن په څیر انځوریدلی شي، دا بیرته په یوه له دې کمپوننتو، کومی چی له صفر توپیر لري.

بیلګه:

د هغه غبرګهواریز ډکی څومره لوي دی، چی دد لاندې وکتورونو څخه غزیدلی وي؟

$$a=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\quad \text{او} \quad c=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$ aufgespannt wird? له دې چې غزیږي

$$abc=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$abc = 2\cdot(-2)\cdot 6 + 0\cdot(-3)\cdot 4 + 3\cdot(-1)\cdot 5 - 3\cdot(-2)\cdot 4 - 2\cdot(-3)\cdot 5 - 0\cdot(-1)\cdot 6$$

$$abc = -24 + 0 - 15 + 24 + 30 - 0 = 15$$

غبرګهواریز نو ډکی 15 V.E لري (یعنی ۱۵ (V,E) ډکیبوونونه یا –واحدنه)

تمرینونه

۱ – دواړه وکتورونه $a=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ او $b=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ورکړشوي دي. په یوه کواوردیناتسیستم کی دا لاندې رسم کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

رسم کړی .

a) $a + 3b$, b) $0.5a - 3b$, c) $2(a + b)$

او په هروار یی نتیجه د کمپوننت په ډول ورکړی؟

۱ – په هوا یا فضا کی ټکی $O(0|0|0)$, $A(1|2|3)$. $B(2|-1|4)$ او $C(-5|7|9)$ ورکړ شوي دي، لاندې وکتورونه په کمپوننت لیکدود څه نومیږي یا څه ډول دي؟

a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BC}$ f) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

د دې وکتورونو ارزښتونه څومره لوي دي؟

۲ – که په یوه هواره کی دوه وکتورونه a او b لایني خپلواك وي، نو هر بل د دې هوارې وکتور د دې دوه وکتورونو a او b د لایني کمبینیشن په څیر انځوریدلی شي. a او b بنسټ جوړوي.

وکتور c د مساوات $c = k_1a + k_2b$ له لارې د لایني کمبینیشن په څیر د ریبلو ګڼونو k_1 او k_2 سره انځور کړی. له دې دوه مساوات د k_1 او k_2 ناپیژندونکو سره جوړ کړی. (د دې لپاره دې زما د شیمرپوهنی کتاب وکتل شي)

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $c = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ c) $c = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

۴ – وي دې : $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$ ، وشمیرئ:

a) $a.b$ b) $-a.b$ c) $a.a$ d) $b.b$

e) $a.(b.a)$ f) $a.(b.a).a$

او د دواړو وکتورنو ترمنځ کونج.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – کونجونه $\alpha = w(a,b)$, $\beta = w(b,c)$, $\gamma = w(a,c)$ د وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

لپاره وټاکی ؟.

۶ – د تریګونومتري یا کونجکچ د کوساین جمله، لکه د مخه مو چی لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیری.

۷ – د تالس جمله، چی د مخه مو لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیری:

۸ – په خوښه دریګوډي ABC لپاره د پیتاګوراس جمله او د هغی په څټ وشمیری:

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \iff |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$$

۹ – د مختنه لوستل شوو کاتیت جمله او جګجمله وکتوري وښایی.

۱۰ – د یوه په خوښه غبرګهواریز ABCD لپاره وشمیری:

۱۱ – الف) د غبرګ اپیپت یا غبرګهواریز ډکي وشمیری، چی له

وکتورونو $b = 3$, $a = 1$ او $c = -2$ څخه غزیدلی وي.

ب) دا څه مانا لري ، که وي : $(a \times b) . c = 0$ ؟

پ) د یوې بیلګي په مرسته وښایي، چی اتیرانځل اسوځیاتیو نه دی.

ت) د وکتورونو $b = 0$, $a = 2$ او $c = k. 4$ له لارې یو غبرګ

اپیپت ورکړ شوی دی، چی ډکی یی ۸ یوونونه دی. k به څومره لویه وي؟

۱۲ – یوه سپورتي الوتکه د 250 km/h په سرعت د N60°O په لور الوځي.
سملاسی له جنوب څخه باد لېږېږي. دا باد یو د 75 km /h سرعت لري او دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

الوتکه له پیللاري اړوي. دا نوې الوتللور وټاکی او د الوتکی نوی سرعت!

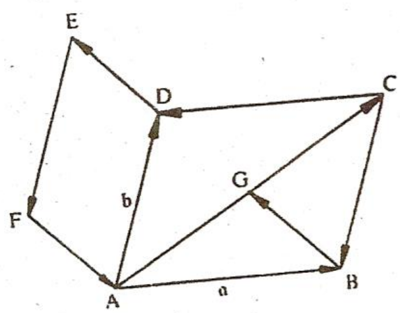
۱۳ – د وکتورونو a او b لپاره کله لاندې اړیکی باورلري ؟

a) |a + b| < | a | + | b | , b) | a + b | = | a | + | b |

۱۴ – لاندې وکتورونه ورکړشوي دي:

$a = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; $c = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$; $d = \begin{pmatrix} -45 \\ 30 \end{pmatrix}$; $e = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}$; $f = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; $g = \begin{pmatrix} -2,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$

وکتورونه c تر g (که ممکن وي) د وکتورونو a یا b د ډیرواره په څیر انځور کړی.



۱۵ – ناټاکلی وکتورونه د a او b د وکتورونو لاینې کمبینیشن په څیر انځور کړی. (څیره)

۱۶ – یو دریګوډی ABC په

$a = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$

سره ورکړ شوی دی. دا ړخ اوږدوالی او دننني کوجونه وشمیری.

۱۷ – په یوه څلورګوډي کی دی $a = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$

$c = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und او $d = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

د نیمی اوږدوالی وشمیری او د هغی غوڅکونج ($\leq 90°$)

۱۸ – یوه کیښتی د ټکی O څخه د $r = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ په لور خوزیږي یا حرکت کوي، دا کیښتی تګلور دی، باد د $w = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ په لور لګیږي.

الف) د بادزور F⊥ برخه څومره لویه ده، چی په زیګل باندې ولاړ پریوزي یا تاثیر کوي؟ دا زور کومه لور لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د F برخزور له F_|_ څخه څومره لوي دی، ك ومه چی کیښتی د مخ په لور بیایي؟

۱۹ – یو بار، چی ۱۰۰۰۰ نیوټونه دی د دوه مایلو ستنو سره نیول شوی. جوړښت یی یو مساوي پښیز دریګوډی جوړوي ، د بنسټ ۶ متره سره او د پښی اوږدوالی (د ستنی اوږدوالی) ۵ متره دی.

الف د وشن زور په ضواړو ستنو څنګه تاثیر اچوي؟

ب) د دې برخه زور ولاړ او پراته کمپونتوتونه څومره لوي دي؟

۲۰ –د وکتورv کواوردینات و اورتوګونالبنستونو($\binom{4}{0}$) او($\binom{0}{4}$) ته وشمیری، که 5 = |v| وي او v د وکتور($\binom{1}{0}$) سره یو د 55° کونج جوړ کړي.

۲۱ – وي دې a + b + c = v . وشمیری : a.d + b.v+ c.d

۲۲ – د څلور ټکوD , C , B ,A او همداسی E , F , G , H سره یو غبرګ اړخیز ورکړشوی دی. د لاندېې ورکړنو یا شرطونو سره د هغو هوارې وشمیری

a) A = (0 | 6 | 0) , B =(8|4|0), C = (6|16|0)

b) E = 1,5|2,5|3,5) , F = (0.5|0|2,5) , G = (1 | 0,5| 4,5

هغه تراوسه ورك یا نامعلوم ټکی (D همداسی H) چیرته پروت دی؟

۲۳ –اهرام د بنسټ هوارې د کونجونو

A = (1|0|2) , B = (3|3|7) = , C = (4|2|12) , D =(2| - 1| 7)

سره کوم ډکی لري، چی څوکه یی (15| 4| 2)= S وي؟

لارښودنه: لمړی خپل ځان وپوهوي، چی ایا کونجونه ریښتیا په یوه هواره کی پراته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تجار تي شميرنه

ځانيونيز يا متناسب او په څټ ياچپه ځانيونيز يامتناسب بلواك (فنكشنونه)، دريقضيه

په ورځني ژوند کی دې ته اړتيا پيښيږي چی ورکړ شوې لويی (يا ډيروالي) يو د بل سره انډول (مقايسه) کړای شي. د بيلګي په توګه د ځپليو لويوالی د ځمکی ارزښت، د مياشتني معاش يو د بل سره انډول. د دوه داسی ګڼونوa او b د انډول لپاره په زيات وخت کي کمون a - b کفايت کوي. دلته نو بيا د دې دوه ګڼونو a اوb له توپير څخه غږيږو. په ډيرو وختونو کی دا بسيا (کفايت) نه کوي چي د دوه ګڼونو کمون د هغوله توپير ځخه لاس ته راوړو.

پيلبيلګه:
دوه پټي يو $1800\ m^2$ اوبل $2000\ m^2$ يو له بل $200\ m^2$ توپير لري. دا د پټيو لويووالی که $400\ m^2$ او $600\ m^2$ وي، نو ترمنځ کمون هم همدا دی. څه به ووايو که د دواړو ځمکو ويش د يوه ميراث ويش وي؟
هر ځل به دا يو $200\ m^2$ ډيره لاس ته راولي نسبت و دې بل ته . ګورو چی په دوم ويش کی $400m^2/600m^2$ د لمړي ميراثخور لپاره تاوان نسبت و لمړي ويش $1800m^2/2000m^2$ ته زيات دی .
دا په دې مانا، چی که هرڅومره ځمکه لويه وي نو په همغه اندازه د دواړو ميراثخورو ترمنځ توپير کميږي.

دا مخته پرته بيلګه ښايي، چي په داسی حالتونو کي دانډول لويي يو بل سره په تناسب يا ځانيونه کی راوستل کيدي شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف: که a او b دوه له صفر مختلفې لويي يا کمیتونه وي، نو a / b ويش يا a: b د a تناسب يا ځانښيونه وb ته بلل کيږي.

بيلګه: ۱ – د ځمکو $400m^2$ او $600m^2$ لويوالی يو بل

سره $400/600 = 0,6 = 2/3$ تناسب جوړوي يا يو بل سره ځانیسي. دا

کوچنی ځمکه (پټی) د لوي پټي %66,6 جوړوي.

۲ – د پټيو $1800m^2$ او $2000m^2$ لويوالی يو بل سره په

$$1800/2000=0,9=9/10$$

تناسب يا ځانښيونه کې پراته دي. دا کوچنی پټی د لوي پټي %90

جوړوي.

۳ – د مودل ګاډي TT لاين (ليکو يا پټليو) او الماني ګاډو د ليکو يا پټليو

سور يو بل سره په لاندې تنساب کی پراته دي

$$12mm/1435mm = 0,00836 \sim 1/120 .$$

۴ – که يو کړندی په 30 دقيقو کي 70km ځغلي، نو د وهل شوې فاصلي

سرعت تناسب ووخت ته په لاندې ډول دی.

$$s/t = 70km / ½\ h = 140[km/h] = 140km/h .$$

۵ – د يوه هوموژين بدن (د مساويډوله موادو جوړ) سختوالی ρ د هغه د

کتلی (g) ځانښيونه يا تناسب دی ، د هغه بدن ډکي (cm3) ته

$$\rho = m / V [g / cm^3]$$

د يوه لرګي بلاك سختوالی (كثافت)، چې دري کيلو ګرامه درونډ او څلور

زره مکعب سانتيمتره ډکی (حجم) لري، $0,75\ g / cm^3$ دی

$$3000g / 4000\ cmw = 0,75\ g/cm^3 = \text{سختوالی}\ \rho .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ غواړو، چې اوس ځانونه د بلواك دوه ځانګړو تيپونو يا ډولونو ته متوجه کړو، دا څنګه، چې موږ په ورځني ژوند کی ډير واره ورسره مخامخ کيږو، چې له دې املـه يي پيژندنه ځموږ لپاره خورا مهمه ده.

پيلبيلګه:

۱ - د يوه نل څخه په 3 دقيقو کی ۱۲ ليتره اوبه راوځي. څو ليتره اوبه به په يوه ورځ کي له دې نل څخه راووځي، څومره په يوه کال کی؟

که په درې دقيقو کي ۱۲ ليتره اوبه له نل څخه راوځي، نو په يوه دقيقه کی بايد ۴ ليتره اوبه او په ۲۴ ساعتونو يا ۱۴۴۰ دقيقو کی

طبعاً $5760 = 4 . 1440$ ليتره اوبه راوځي. او په دې تعقيب په يوه کال کی $2102400 = 360 . 5760$ ليتره او يا ۲۱۰۲۴ هيکتوليتر اوبه بهيږي.

۲ - څلور کارګر يو ه بنستې کنده په ۹ ساعتونو کی راپورته اوکانکريټوي. څومره وخت درې کارګره ضرورت لري او څومره وخت به ۱۰ کارګر ضرورت ولري چی دا ځمکه راپورته کړي اوهم کانکريټ کړي؟

که څلور کارګره ددې لپاره ۹ ساعته ضرورت لري، نو يو کارګر ددې لپاره حتماً زيات وخت په کار لري، يعني څلور ځله زيات وخت، پس ۳۶ ساعته، نو درې کارګر په تعقيب $12 = 3 : 36$ ساعته او لس کارګر $3,6 = 10 : 36$ ساعته = درې ساعتونه او ۳۶ دقيقي ضرورت لري چی دا ځمکه وکني او کانکريټ کړي.

په دواړو حالتونو کی يو نظم منځ کی پروت دی، دقيق په لمړی بيلګه کی فنکشن وخت —> د اوبو مقدار او په دومه بيلګه کی فنکشن کارګر —> د کارساعتونه.

مګر داوړه فنکشنونه پوره په خپل راوړون ډول کی يو له بل توپيريږي:

۱ - څومره ډير وخت چی تيريږي په همغه اندازه زياتی اوبه له نل بهيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – څومره چې کارګر زیاتیږي همغومره د کار وخت کمیږي
دې ته ورته د ورکړشوو فنکشنونویا بلواکو شمیرپوهنیزیا ماتیماتیکي لیکدود
د فنکشن ورکړدود مختلف لیدل کیږي.

۱– فنکشن f : وخت (دقیقه) ⟵ د اوبو ډیری(ل)
د فنکشن لیکدود (فنکشن لیکلوقانون) لري $x \to 4x$
په دې ډول د فنکشن مساوات داسې بریښي $y = 4x \;;\; x \in Q^{+}_{0}$

۲ – فنکشن g : کارګر (څو دانې) ⟵ د کاروخت (ساعت h)
د فنکشن لیکدود لري $x \to 36/x$
په دې ډول د اړوند یا مربوط فنکشن مساوات داسې بریښي $y = 36/x \;;\; x \in N$

تعریف:

یوه لویه x و هغې ته تنظیم شوې لوي y ته سیده متناسب سیده ځاننیونه
(په نخښه کې$y \sim x$) بللکیږي که د هغوي تناسب یاځا ننیونه
(ویش) y / x تل یو ثابت ارزښت وساتي : یعنی $y / x = k$ وي.
بلواك(تابع) یا فنکشن $y = kx$ (ثابت –k) د تناسب یا ځاننیونې څلوونې
یا فاکتور بلل کیږي.

یوه لویه هغې بلې تنظیم شوې لویي ته ناسیده متناسب ده یا ناسیده
ځاننیونه کې ده، که د هغو ځل تل یوثابت ارزښت وساتي: یعني

$$y.x = k \iff y = k/x$$

بلواك یا فنکشن $y = k/x$ چپه یا په څټ متناسب (antiproportional)
یا په څټ ځاننیونکی بلواك یا فنکشن بلل کیږي.

متناسب فنکشن $y = kx$ د یوې لوي دوه برابره، نیم برابر، n –برابره پورې د
بلې لویې هم دوه برابره، نیم برابره یا n–برابره پورې اړه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په چپه یا په څټ متناسب فنکشن $y = k / x$ کی دوه برابره، نیم برابر ... n − برابره پورې د بلي لوي نیم برابر، دوه برابر ... 1/n−برابره تعلق لري (اړه لري) .
په چپه یا په څټ متناسب فنکشن $y = k/x$ کی د چپه یا ناسیده متناسبوالي څخه خبرې کیږي. که متناسب او چپه یا په څټ متناسب فنکشنونه په یوه کواوردینات کی انځور شي، نو لیدل کیږي چی متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون پورته کیدونکی او چپه یا په څټ متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون لویدونکي دي (د مونوتون کلیمو لپاره دې ځما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي)

بیلګي :

۱ − سیده تناسب یا سیده ځانئیونه:
الف : په شي اخستلو کی د ډیري ارزښت سیده متناسب دی
ارزښت(افغانی) ډیری (کلیوګرام)
ب : په تیزوالی یاسرعت کی وهل شوې لار د وخت سره سیده متناسب ده
$s(km) \to t(s)$
۲ − ناسیده تناسب یا ناسیده ځانئیونه
الف : یوې معلومی لار وهلو لپاره تعجیل هغه په بر کی نیولي وخت سره ناسیده متناسب دی: که هرڅومره تعجیل زیات وي په همغه اندازه وخت کمیږي.
ب : د وچو شودو د یوه څرګند ټاکلي ټول وزن د وړونکوتیو ګڼه ناسیده متناسب ده د هرې کوتۍ یویزوزن سره: که هرڅومره زیاتی کوتۍ په کار واچول شي په همغه ګڼون د کوتیو وزن کمیږي.

تعریف: د لاندې ډول $a/b = c/d$ یا $a:b = c:d$ مساوات د تناسب مساوات یا ځانئیونیز برابرون بلل کیږي (ویل کیږي چی a و b ته ځان داسی نیسي (یا داسی انډول کی ده) لکه c و d ته) دلته a او d د تناسب یا انډول

(c) ketabton.com: The Digital Library

دباندني غړي دي او b او c د انډول دننی غړي. په هر تنساب کی د دباندنیلو غړوځل د دننیو غړو د ځل سره برابر دی:

$$a / b = c / d \iff a . d = c . b$$

اوس ځان باوري کولی شو چی د دننیو غړو بدلول او یا د دباندینو غړو بدلول یو د بل سره په تناسب یا انډول کی تغیر نه راولي. کیدی شی چی ټول دنني غړي د دباندینیو غړو سره بدل شي:

$$a/b = c/d \iff a/c = b/d \iff c/a = d/b \iff b/a = d/c$$

له دې امله کیدی شي چی یو دبل سره برابر زیات تناسبونه یا انډولونه د یو په بل پسی راتلونکو تناسوبونو په څیر ولیکل شي:

$$a/b=c/d = e/f \iff a:c:e = b:d:f$$

دلته باید په پام کی وي چی ویش ځانله صورت نیسي یعني تل د دوه ګڼونو،

بیلګي :

۱ – له $21 / 7 = 15 / 5$ څخه لاس ته راځي $7.15 = 5.21$ یا $7 / 21 = 15/5$ یا $15/21=5/7$ یا $21/15 = 7/5$.

۲ – د $8/12 = 4/6 = 2/3$ لپاره لیکو $8:4:2 = 12:6:3$

۳ – یو تناسب چی دننه او دباندې غړي یي یو له بل سره برابر وي ناپریکیدونکی تناسب بولو. په ناپریکیدنکی تنساب یا انډول $a:m=m:b$ یا $m:a = b:m$ کی m منځنی متناسب انډولی بلل کیږي. منځنی متناسب د نورو دوو غړو a او b جیومتریکي منځ دی.:

$$a / m = m / b \iff m^2 = a.b \implies m = \sqrt{a.b}$$

د $a = 16$ او $b = 9$ لپاره $m = 12$ منځنی متناسب داسی دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$16/12 = 12/9$

۴ څلور انډولونه متناسب یا ځاننیونیزڅنګه لیکل کیږي؟

$18/x=8/5 \quad <=> \quad 18 . 5 = 8x \quad => \quad x = (18 . 5) / 8 = 11,25$

په ترتیب تنساسب یا ځاننیونه یا انډول کی باور لري: $18 / 11,25 = 8 / 5$

زیات وخت مود تکست وظیفی د تناسبمساواتو (انډول برابرون) ته لاربنودوي، نو بیا دريٍ ورکړشوو لویو ته څلورم تنساب یا انډول غوښتل کیږي. د داسی وظیفو لپاره سیده یا ناسیده تناسب یوه غوره رول لوبوي. داسی پوښتنی د دریقضی شمیرني یا پاي(ختم) شمیرنی لاندې شهرت لري.

د دریقضي شمیرني اصلي پرابلم په دې کی دی، چی د وظیفي ورکول باید څرګند یا روښانه شي، چی ایا دا یوسیده متناسب او که چپه یا په ځټ متنساب بلواك (تابع) یا فنکشن دی.

د دري قضي پوښتنی کولو څخه لاندې تکامل منځ ته راځي :

۱ – یوه د شرایطو قضیه، کومه چی ټولی ضروري ورکوني په ګوته کوي.

۲ – یوه د پوښتنی قضیه چی غوښتونکی لو یه x متن کي یا خوندي لري او له هغي سیده یا ناسیده د ځواب تناسب ته تکامل ورکوي.

۳ – یوه پایقضیه، په کوم کی چی له یوه یوون(واحد) په ورته یامناسب ډیرون پاي ورکول کیږي.

پیلبیلګه:

یوه الوتکه له الف ځاي تر ب ځاي پورې چی ۸۰۰ کیلومتره واټن دی په ۶ ساعتو او ۴۰ دقیقوکی تی کوي، دا الوتکه به ۲۲۰۰ کیلومتره لار په څو ساعتوکی ووهي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دريٖ جملي له لارې یي ځواب:

الف – د شرایطو قضیه........... 800km - 6h 40 min

یا............... 800km - 400 min

ب – د پوښتنی قضیه .. .. 2200 km - x min

پ – پایقضیه.......... 200km - 400/4min = 100min

2200km - 11.100 min = 1100 min

دا الوتکه به په دې ترتیب د 2200km اوږده واټن لپاره

1100min = 18h20min

ضرورت ولري.

د دې وظیفه د ټیك ځواب لپاره ضروري نیوني دا وي چی سیده تناسب وپیژندل شي: هرڅومره چی د الوتلو واټن لږ کیږي په همغه اندازه الوتکه زیات وخت په بر کی نیسي.

یعنی 2200km اوږد واټن په داسی انډول یا تناسب کی دی لکه 400min و 800 km ته:

$$x / 2200 = 400/800$$

د اکویوالنځ فورم(ځیرې–) اوړون له لارې څخه ځواب x لاس ته راځي:

$$x = (400 . 2200) / 800 = 1100$$

۲ – ۴ کارګر د یوه دیوال وهلو لپاره پنځه ورځي ضرورت لري. د ناروغي له امله یو کارګر د کارلري پاتیږي. دا راکمه یا راکوچنی ډله اوس څنګه مشغول ده؟ دلته یو ناسیده تناسب یا ځانیونه لرو:

هرڅومره چی کارګر کم وي په همغه اندازه وخت زیاتیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددریجملی سره شمیرنه	د تناسب سره شمیرنه
۴ کارګر – ۵ ورځي ۱ کارګر – ۵ . ۴ ورځي ۳ کارګر – ۳ / ۲۰ ورځي پس ۳ کاګر – $6\frac{2}{3}$ ورځ	غوښتونکی کاروخت x د ۵ ورځو سره داسی تناسب کی دی لکه ۴ کارګر و درې کارګرو ته x/5 = 4/3 <=> x = (4.5)/3 = 20 / 3 ورځی

یوځاي شوې درې قضیه:

د ۳۰ جوړه کالیو ګنډلو لپاره ۱۲ درزیان ۲۰ د کار ورځي ضرورت لري. څومره ورځی به ۱۰ درزیان د ۷۰ جوړه کالیو لپاره ضرورت ولري؟

لمړی دریقضیه	دومه درې قضیه
(سیده متناسب)	(ناسیده متناسب)
۳۰ جوړه کالي	۱۲ درزیان – ۲۰ ورځي
۷۰ جوړه کالي	۱۰ درزیان – x ورځي

هرڅومره چی کالی زیات وي همغومره زیاتی ورځي، هرڅومره چی درزیان زیات وي همغومره لږې ورځي

۱۰ جوړه کالی –	۱۲ درزیان –	ورځی
۷۰ جوړه کالی	۱۲ درزیان	ورځی
۷۰ جوړه کالي	۲ درزیان –	ورځي
۷۰ جوړه کالي	۱۰ درزیان	ورځي

پس لرو

x = (20.7.6)/(3.5) = 56 ورځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – لاندې ځانښیونې یا تناسبونه ساده افاده کړی

a) 200t : 2 kg   b) 6 m : 6 km

c) 4km / 30min   d) 3,2 t : 400dm³

۲ – یوه موټر د ۵۵۰۰ کیلو متره اوږدې لار لپاره ۳۸۵ لیتره ډیزل وسزول

الف) په دې تګلاره ۵۰ لیتره ډیزل د څومره لار لپاره بسیا کوي؟

ب) د یوې ۴۳۰ کیلو متره لار لپاره به دا موټر څومره ډیزل مصرف کړي؟

۳ – که غواړو چی د یوه موټر سره د الف ټکی څخه و ب ته ورسیږو ، نو د ۶۰ کیلومتره په ساعت ته درینیم اعته ضرورت لرو. د الف څخه ب ته سړی په څومره وخت کي رسیدلي شي، که د موټر سرعت په لاندې ډول وي:

a) 50km / h   b) 110 km / h?

۴ – یو ښار پلان د ۱ : ۱۰۰۰۰ تناسب یا ځانښیونه ورکړ شوی دی. لاندې واټنونه په ریښتونی څومره دی ؟

a) 5 cm   b) 33 mm   c) 1 dm

۵ – یو ۸۱ ګڼ څنګه په داسی په ۲ زیاتونونو ټوټه کیدی شي، چی ځانښیونه یا تناسب یی داسی وي لکه : 5 : 4 ؟

۶ – د یوه ګڼ او ۵ کمون ځان نیونه یا تناسب و ۷ ته داسی دی ، لکه چی د ۵ کمون ودې ګڼ سره، چی ۴ ته ځا نیسی یا و ۴ ته تناسب یا ځانښیونه؟ دا ګڼ کوم دی؟

۷ – یو فاو وې موټر ۸۰ کیلو متره په ساعت کي ځغلي او په دې پسی په ۱۲۰ متره کی وروسته یو بی ایم وې موټر ۱۲۰ کیلو په ساعت کی ځغلي.

الف) بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چی د فاو وې څخه مخ ته شي؟

ب) بي ایم وې په دې وخت کی څومره واټن وهلی دی؟

پ) دا بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چي له فاو وې موټر څخه ۴۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

متره مخ ته شي ؟
۸ – د سونګ سکرو سوزلو له امله د کولنډیاوکسید غاز پیداکیږي. د سونګ
سکرو او د راپیدا کولنډیاوکسید Kohlendioxid (CO_2) ترمنځ تناسب یا
څاننیونه 3 : 11 ده.
څو ګرامه سونګسکاره به ۱۰۰ ګرامه کولینډیاکسید رامنځ ته کیږي؟
۹ – له دریو یو په بل اغیزهمند غاښورڅرخي د ۴۸ ، ۳۶ همداسی ۱۶ ښاغونو
سره دا کوچنی څرخی ۴۰۰ واري په یوه دقیقه کی ګرځي یا څرخی.
نور دواړه غاښورڅرخی څو واره څرخی یا ګرځی؟
۱۰ – ۹۰۰ تیږي، چی ۳۶ سانتي متره سور لري ۴۰۵۰ کیلو ګرامه وزن لري.
۱۱۰۰ تیږې به څومره وزن ولري، که د همغو موادو جوړې وي او سور
یی ۲۴ سانتي متره وي؟
۱۱ – یو د زدکوونکو ورځپاڼه « هیلی »د رحمان بابا د لیسی څخه راوځی د
دې لپاره چی د ورځپاڼو ۱۲۰۰ توکه وتړل شي ، څلور زدکوونکی ۳
ساعته کار پرې کوي.
څومره زدکوونکی په کار دې، چی ۲۱۰۰ توکه ورځپاڼی په ټیك دوه
ساعته کی وتړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په سلو کی – -Prozent ، په زرو کی – - Primille

ګټه– -Zins او د ګټې د ګټې شمیرنه Zinseszinsrechnung

مور د a / b یا c / d ډولونو انډولونه او یا په همدې ډول ویشنه په مساواتو و ازمایل. د ماتشمیرنی په چوکاټ کی(ځما د شمیرپوهنی کتاب دې وکتل شي) به وښوول شي چی څنګه بنسټیز نظم په داسی ماتو کی ټاکل کیدی‌شي. د انډول یا مقایسي لپاره دا هم وړاندېکوولی شو چی دواړه مات لاندې په ګڼ ماتلاندې چی 100 وي پراخ شي. دا کم له کمه په نزدې ډول په هر مات کی کیدی شي.

پیلبیلګه:

یو جوړ جامي، چي په ۲۳۰ افغانی پلورل کیدي، په ۴۰ افغانی ګرانی شي د ګرانښت تناسب یا ځاننیونه یی و اولنۍ ارزښت ته څومره دی؟

دا تناسب ۴۰/۲۳۰ کیدی شي نزدې په یوه مات چی مات لاندې یي «۱۰۰» وي انځور شي، دا کیدی شي چی د ویشنی له لارې داسی صورته ونیسي:

$$40 / 230 = 0{,}1739 \quad \text{پس} \quad 40 / 230 \sim 17{,}39 / 100$$

قیمتیدل د لمړني قیمت 1739, 0 ځله راکوي. داسي هم وایو چی قیمتیدل په سلو کی نزدې ۱۷ دي.

تعریف: د یوه بنسټیزارزښت G سلمه برخه ددې ګڼ 1 په سلو کی بلل کیږي، او ددې لپاره لیکو %1 د G دی G/100 , په همدې ډول % P له G

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګټې ارزښت $W = P.G/100$ له لارې ټاکل کیږي، P په سلو کې جمله او W په سلو کې ارزښت بلل کیږي.

بنسټ ارزښت G ځان و 100 ته داسې نیسي لکه د په سلو کې ارزښت W د په سلو کې جملې P ته، پس

$$\frac{G}{100} = G / 100 = W / P = \frac{W}{P}$$

$$\Leftrightarrow \quad G \cdot P = 100 \cdot W$$

د اخرني مساوات څخه د فورم اړولو له لارې لاس ته راځي

جمله:

د په سلو کې ټاکنه	بنسټ ارزښت	په سلو کې ارزښت
$P = 100 \cdot W / G$	$G = 100.W/ P$	$W = G.P / 100$

بیلګې:

۱ – د په سلو کې ارزښت	بنسټ ارزښت	په سلو کې ټاکنه
= 16,80 DM	د 120 DM	14 %

۲ – یو نفر باید د یوه نوي بایسکل لپاره 40 , 60 DM یعنی المانی مارکونه د مالیا لپاره (14%) ادا کړي
دا بایسکل څو ارزښت لري، بې له مالیا، او دا د مالیا سره څو ارزښت لري؟
که د 40,60DM په سلو کې ارزښت د په سلو کې ټاکنې 14% وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو باید 40,60 / 14DM د 1% د بنسټارزښت برابر وي. په دې پسې
بنسټ ارزښت (= 100%) د G = (40,60 / 14)100DM = 290 DM
لاس ته راځي.
له دې سره بایسکل ۲۹۰ مارکونه بې مالیا ارزښت لري او ۶۰ ، ۳۳۰
ماروکونه د مالیا سره.
کید ی شي، چې سملاسی هم د مالیا سره ارزښت ته راشو، که د دې لپاره یو
بنسټ ارزښت د ۱۱۴ په سلو کی کېښول شي یا وضعه شي:

$$G = (40,60 / 14).\ 114DM = 330,60\ DM$$

۳ – یو جوړ کالي چې ۱۵۰ مارکونه ارزښت لري په ۱۰ په سلو کی ګرانیږي، دا
کالي تر ډېر څنډ نه پلورل کیږي، نو له دې امله یی بیا دوکانواله په ۱۰ په
سلو کی ارزانوي. پوښتنه داده، چې ایا داکالي به اوس هم ۱۵۰ مارکونه
ارزښت ولري، که څنګه؟
طبعاً نه ، ځکه چې ګرانوالی په ۱۰ ٪ مارکونو زیاتوالی یی په سرچینیز ارزښت
دی ، مګر دا ارزنښت یی په دې اوسني ارزښت، چې 150 + 150.10% = 165DM
په بنسټ منځ ته راځي. له دې امله دا کالي د ارزنښت وروسته اوس

$$165 - 165.10\% = 165 - 16,50 = 145,50DM$$

مارکونه دی. که یوه وړې ستوې بنسټ ارزښت یا ره د په سلو کې
ارزښت سمبول کېږي، کېدی شي چې دا د یوه سانګل له لارې وښي.

بیلګي:

اول) د ۳۵۰ ماروکونو ۱۴ ٪ کی داسی شمیرل کیږي: 350.0,14 = 49 DM
دوم) که د ۴۵۶۸ کیلو ګرامه بنسټ ارزښت په ۲۲ ٪ کم شي، نو لاس ته راځي:

$$4568(1 - 0,22) = 4568.0,78 = 3563,04\ DM$$

دریم) که د 2303 m² بنسټ ارزښت په 24% جګ شي، نو لاس ته ترې راځي«

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2303.(1+0,24) = 2303\ .1,24 = 2855,72\ m^2$$

لاندې بنسټهاکنی یا بنسټ مقدارونه دی په مات بڼه ورکړ شي :

$1\% = \frac{1}{100}$	$1\frac{1}{4}\% = \frac{1}{80}$	$1\frac{1}{3}\% = \frac{1}{75}$	$1\frac{2}{3}\% = \frac{1}{60}$
$2\frac{1}{2}\% = \frac{1}{40}$	$3\frac{1}{3}\% = \frac{1}{30}$	$4\frac{1}{6}\% = \frac{1}{24}$	$5\% = \frac{1}{20}$
$6\frac{1}{4}\% = \frac{1}{16}$	$6\frac{2}{3}\% = \frac{1}{15}$	$8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12}$	$11\frac{1}{9}\% = \frac{1}{9}$
$12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$	$16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$	$20\% = \frac{1}{5}$	$25\% = \frac{1}{4}$
$33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$	$50\% = \frac{1}{2}$	$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$	$75\% = \frac{3}{4}$

د یوه بنسټ– یا سټه ارزښت G یو په زرمه برخه ۱ پرومیلی (لاتین) واي، چې مونږ یی دلته هم د زرو څخه ۱ بولو:

۱ په زرو کی 1 ‰ له G دی G / 1000

د پرومیلی یا په زرو کی شمیرنی لپاره له دې وروسته انډولګښ ۱۰۰۰ (په ماتلاندې کی) ، 1000‰ له دې سره یو سټه ارزښت دی.

بیلګه :

4,7 ‰ له 3690DM دې: 17,34DM

مونږ غواړو، چې دا اوس د په سلو کی شمیرنی یو ځانګړي بڼی سره مشغول کړو. په ورځني ژوند کی خلك د کور جوړولو لپاره یا د یوې مغازې جوړولو لپاره پیسی (بډایي یا سرمای) پوروي او دا زیات وخت په نوې نړی کی له بانکونو څخه، د پور ورکولو له لارې پورورکوونکی څه پیسی باید لاس ته راولی، د ارزښت بایللو تر نامه، چې دې ته د سرمایي ګټه وایي. په بانکی معاملو کی د فعالی ا و غیر فعالی ګټی ترمنځ توپیر باید وشي. فعاله ګټه بانك د پوروړی څخه د ورکړشوې پور په مقابل کي لاس ته راوړي، د دې په څټ یا برعکس څوك چې په بانك کی شمیرکتابچه خلاصوي او په بانك کی پیسی سپما کوي ، نو دمرکزې یا ملي بانك په هدایت د

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیسو د سپما لپاره سپماکونکي هم څه پیسي لاس ته راوړي، چې دې ته به موږ د سپما ګټه ووایو ، په هر صورت په ځنی هیوادونو کي د پورګټې او سپما ګټې ترمنځ توپیر باید له ۲ په سلو کی تر دريږ په سلو کی څخه زیات نه وي.

په پرینځیپ کی باید د ساده ګټې او داسی په نامه د ګټې ګټې ترمنځ شمیرنو کی توپیر وشي . په داسی حال کی، چې په ساده ګټه کی پوروړی د پورشوي مقدار په بدل کی یوه ټاکلی ګټه ورکوي، چې هغه زیات وخت د یوه کال په منځ کي یعنی د یوه کال تیریدلو سره ټاکل شوې وي او دا ګټه د کال په اخر کی په منظمه توګه ورکول کیږي یا ادا کیږي.

د ګټې ګټې په شمیرلو کی د هغه غونډ وخت ګټه شمیرل کیږی ، چې په هغی کی د ګټې ګټه هم خوندي یا شامل ده، دلته هغه د هرکال ګټه د هغی لمړنی بډایي ته ورزیاتیږي او بیا د ټولو ګټه د بل کال لپاره شمیرل کیږی او په همدې ډول ورپسی د دوه او یا زیاتو کالو.

لمړی غواړو، چې یوائې ساده ګټې شمیرلو سره ځان په کار واچوو:

پیلبیلګه

یوه د ۳۵۰۰ مارکونو بډایي یا سرمایه په بانکی شمیرنه کي په بانك کی اینښولکیږي، چي کلنی ګټه یی 4,5% ده. له 3,5 کالو وروسته دا سرمایه اینښونکي په بانکی شمیرنه کي څومره پیسی لري؟

دلته په پوره هدایت ساده ګټونه مخ ته پرته وي، که څه هم په معمولی توګه داسی شمیرنو کی د ګټې ګټه هم شمیرل کیږي. د په سلو کی شمیرنو بنسټ ارزښت دلته هغه ګټوونکی بډایي یا سرمایه K (بنسټسرمایه) ده، او د په سلو کی ارزښت ګټه Z ده (په المانی مارکونو) ، د په سلوکی مقدار ، چی ما کله په سلو کي ټاکنه(یعنی په سلو کي څومره اندازه) بللی په %).

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چی په دنده یا شمیرنه کي ګټه غوښتل شوې(دمخه برخه دې، یعني د په سلو کي ارزښت دې وکتل شي) ددې لپاره لاس ته راځي

$$Z = K.p / 100 = 3500.4,5 / 100 = 157,50DM$$

دا د یوه کال لپاره ګټه ده ، په بنسټیزه بڼه‌ایي ، چی۳۵۰۰ مارکونه دي. په درینیمو کالو کی په ساده ګټونه بڼه‌ایي، چی بانکی شمیر یی واز کړی 3,5 .157,50 = 551,25DM لاس ته راوړي. په دې توګه به په سپما کتابچه کي 3500 + 551,25 = 4051,25DM (مارکونه) وي.

د ګټې وخت t لکه، چی ومو لیدل یو کال ، زیات یا کم کیدی شي. ، بیا نو په بانکي شمیرنه کي د یوه کال لپاره ۱۲ میاشتي نیسی، چی د هرې میاشتي لپاره ۳۰ ورځي ټاکي، یعنی په ټولیزه توګه ۳۶۰ ورځو په بنسټ بیا بانکی شمیرنی صورت نیسی. د ورځو په بنسټ بانکي شمیرنو کي هغه د سپما ورځ ورسره شمیرل کیږي(د سپماورځ Wertstellung یا Valutierung)، هغه ورځ، چی پیسی بیرته له بانګ اخستلي کیږي یا له بانك بیرته پورته کیږي، نه ورسره شمیرل کیږي.

د ګټې فرمول: Z = K.p / 100 . د ورځنی ګټې فرمول: Z = K.p.t / 100.360

بیلګی

لمړی : ۴۵۰۰ مارکونه له ۳ . ۷ . ۱۹۸۷ څخه تر ۱۵ . ۹ . ۱۹۹۰ پورې څومره ګټه کوي، که ګټه 4 , 75% وي.

د ګټې وخت د ورځو په بنسټ شمیرو: t = 12 +60+3.360 = 1152 ورځي.

د ورځنی فرمول له مخی لاس ته راځي:

$$Z = K.p.t / 100.360 = 4500.4,75.1152 / 100.360 = 684DM$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم : یوې ښځې په ۱۵ . ۳ . ۱۹۸۷ باندې ۷۹۰ مارکه په بانکي سپما کتابچه کېښوول، او دا پیسې یې بیرته په ۲۰ . ۲ . ۱۹۸۸ له بانك څخه راواخستلې. دې بډایي یا سرمایي څومره ګټه وکړه:

- $p = Z.100.360 / K.t = 30.100.360 / 790.335 = 4{,}0809 \Rightarrow p \sim 4{,}08\%$

دریم : په څومره وخت کې کیدی شي، چې ۱۰۰۰ مارکونه د ساده ګټې په بنسټ ۲۰۰۰ مارکونو ته جګه شي، که بډایي په 4 , 5% ګټه سپما شوې وي؟

- $t = Z.100.360 / K.p = 1000.100.360 / 1000.4{,}5 = 8000$

ورځې ۸۰۰۰ = ۲۲ کاله او ۸۰ ورځې

څلورم : یو بډایی ، چې لاټري یې ختلې په ساده ګټونه ، چې ۷ ،۶ په سلو کې ده له بانك څخه د میاشتی ۲۰۰۰ مارکونه ګټه اخلي.

دا د لاټرې ختنه به څومره جګه وي؟

موږ دا د ګټې فرمول د بډایی په لور اړوو یابدلوو:

- $K = Z.100.360 / p.t = 2000.100.360 / 6{,}7 .30 = 358208{,}95DM$

لکه چې پوهیږو، بانکونوپرکسیس یا کار کې د ګټې ګټونه معمول ده، او له دې زیات نه. د ګټې ګټه کلنی شمیرل کیږي او بډایي ته ورزیاتیږي.

یو پیلبډایي K_0 ، د یوه کال په اوږدوالی کې د یوې ګټې ټاکه یامقدار $p\%$ سره په ګټه اچول کیږي، د کال په اخر کې د یوې ګټې

$$K_1 = K_0 + K_0 (p / 100) = K_0 (1 + p /100) \quad \cdots$$

سره په سپماکتابچه کې لیکل شوې ده.

دلته $K_0.p / 100$ د یوه کال را اچولی ګټه ده، د یو کال په پیلبډایي K_0 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټول دوه کاله وروسته دا پیلبډایي د همغې پېنبیګټې یا ګټې پیل سره داسې لوېه شوې

$$K_2 = (K_0 + K_0 . P / 100) + (K_0 + K_0 . P/100).(P/100)$$
$$= K_0 + K_0.P/100 + (K_0.P/100)(P/100)$$

که K_0 له نوکانو یا غیږ دباندې ونیول شي نو لاس ته راځي:

$$K_2=K_0(1+2.P/ 100 + P^2 / 100) = K_0(1+ P/100)^2 = K_1(1+ P/100)$$

له درې کاله وروسته دا بډایي یا سرمایه ده:

$$K_3=K_0(1 + P/100)^3 \qquad K_3=K_2(1 + P/100)$$

که دا شمیرنه په ورته توګه دوام پیداکړي، نو د t کالو وروسته په ټولیزه توګه لاندې بډایي لاس ته ترې راځي

$$K_t = K_0 . (1 + P/100)^t = K_{t-1} . (1 + P/100)$$

د ($1 + p/100$) لپاره غواړود لنډونی له امله q ولیکو، q ګټې فاکتوریا ګټې ځلونی بلل کیږي:

$$q = 1 + p / 100$$

ددې ساده ونی سره لاس ته راځي: د ګټې ګټې فرمول: یوه بډایي K_0 د t کالو وروسته د p% کلنی ګټې باندې(د ګټې جګیدنه) په $K_t = K_0 (1 + p / 100) = K_0.q^t$ لویه شوې

بیلګه : له درینیمو کلو وروسته په ۴،۵ ٪ ګټه ۳۵۰۰ مارکونه په کوم ارزښت لوییږي؟

$K_{3,5} = K_0,. q^t = 3500.1,045^{3,5} = 4082,96$ DM مارکونه

د ګټیګټې شمیرنې سره بډایي $K_0 , K_1 , K_2 , K_3 , ..., K_t$ یوه هندسي پرلپسی جوړوي(ددې لپاره دې ځما د شمیرپوهنې کتاب وکتل شي) دا د پیلبډایي K او ځلوني $q = 1 + p / 100$ سره ، ګرافیکی که وکتل شي، نو د ګټې لوییدنی فنکشن $K_t = K_0 . q^t$ یو اکسپوننشل بلواك انځوروي. د تعریفډیري $D = Q$ سره.

ساده ګټه اچونې بیا یو لایني فنکشن $K_t = = K_0 (1 + p.t / 100) ; t C Q$ په نخښه کوي.له دې امله بډایي په ساده ګټه اچونه دومره چټکه نه لوییږي، لکه چې په یوه دګټې ګټې اچونې باندې.

بیلګې: ۱ – یو د ۴۷۰۰ افغانیو مقدار یا ارزښت دې د پنځه کلونو لپاره په ساده ګټه اچونه او ب) په د ګټې ګټې اچونې چې ۵۷، ۴ ٪ دې اینښول کیږي. دا هر پایبډایي څومره لویه ده؟

a) $K_5=K_0(1 + P.t/100) = 4700(1+ 4,75 . 5/ 100) = 5816,25$ Af

$K_5= K_0 + 1116,25 = 5816,25$ Af

b) $K_5 = k_0. q^t = 4700 . 1,0475^5 = 5927,45$ Af

۲ – یوه بډایي د ۵۰۰۰۰ افغانیو په ۳.۵.۹۷ واچول شوه او باید په ۳۱.۱۲.۲۰۰۱ راووستل شي. څومره په ۴.۵ ٪ ګټه باندې لوي شوی دی، که پوره کلونه (له۱۲.۳۱-۱.۱) په ګټه واچول شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$K = [K_0 + K_0.p.t / 100.360].(1 + p/100)^n$$
$$= [50000 + 50000.4{,}5.237 / 36000].1{,}045^4$$
$$K = 61392.35\ Af$$

د لویو K_0, q, t او K_t په ګټه فاکتور کی افاده کیدو لپاره رامنځ ته کیږي. د ګټي اخستنی وروسته کیدی شي د سرچینیزي بډایي K_0 پوښتنه رامنځ ته شي، چی د t کلونو په p % ګټونه یا ګټه و بډایي K_t ته بیایي. K_0 د K_t د بډایي د اوس وخت یا حال یا نغد ارزښت بلل کیږي. د K_0 شمیرنه په ورکړشوي بډایي K_t ته چی بیاي دیسکونتونه Diskuntierung یا ګټوني بلل کیږي:

تعریف: د نغدارزښت فرمول $$K_0 = \frac{K_t}{(1+\frac{p}{100})^t} = \frac{K_t}{q^t} = K_t.(\frac{1}{q})^t$$

دلته $(1/q)$ د ګټوني فاکتور بلل کیږي. د نغدارزښت فرمول له $K_t = K_0 .q^t$ اړیکو څخه لاس ته راغلی ، چی د K_0 په لور اوبی یا حل شوي.

بیلګي:

١ – یو نیکه غواړي د خپل لمسی د پنځمی زیږیدنی له امله یو څه ئیسی بانک کی سپما کړي، د ٪۵ په ګټه . دا پیصي بهه خومره یا دا مقدار به څومره لوي، چی دا لمسی په خپله ۲۵ کالیزه ۲۰۰۰۰ مارکونهلاس ته راوړي؟ باید په بانك یکی ۲۳ ، ۹۶۱۲ مارکونه کیښوول شي یا سپما شي..

۲ –د یوه کور خرڅلاو کی دوه اخستونکی مختلف اوفرت یا وړاندیزونه کوي « علاقمند الف ۱۵۰۰۰۰ مارکونه نغد ، ۱۲۰۰۰۰ مارکونه له دوه کاله وروسته او نور ۱۵۰۰۰۰ مارکونه د ټولیزه توګه له شپږ کاله وروسته ادا کړي یعني د کور مالك ته ورکړي.

علاقمند ب غواړي، چی ۱۳۰۰۰۰ مارکونه نغد ، ۱۵۰۰۰۰ مارکونه له دري کالو وروسته او ۱۴۰۰۰۰ مارکونه له نورو دوه کالو وروسته ورکړي.

کوم یو علاقمند ګټور دی، که موږ ٪۸ ګټهٔ ونیولي شو یا فرض کړای شو؟ دا چی دواړه ارزښتونه یا وړاندیزونه یو له بل سره پرتله کړاي شو، نو باید دواړه نغد ارزښت ته راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

یوه د ۸۰۰۰ مارکونو بډايي ، کومه چې د ګټې په ګټونه ولاړه ده، باید ٪۶ کلنی ګټې د څلورو کالو لپاره په بانګ کی پاتي شي یا کیښوول شي. بډايي به څومره لویه وي په الف) کلني ، ب) نیمکلنی، خ) میاشتنی، او ت) په ورځنی ګټونه؟

تمرینونه:

۱ – یو جوړ کالي په ارزښت یا نیه کی ۵ ،۴ ٪ کمشو» د دې کالیو لومړنیی نیه ۲۵۰ ماکرونه وه . اوس دا کالي کومه نیه لري؟

۲ – یو پطلون په ۵ ، ۴ ٪ ارزان شو، دا پطلون او س ۲۵۰ مارکونه ارزښت لري. دې پطلون پخوا کومه بیه درلوده؟

۳ – د یوه جاکټ بیه په ۷۰ مارکونوه راکمیږي، دې پخوا ۲۵۰ مارکونه بیه لروده، اوس دا څومره بیه لري یا حومره قمته ده؟

۴ – یو جوړ دریشی په ۹۸ مارکونوګرانیږي او اوس ۴۵۰ مارکونه بیه لري. د ا ګرانښت په سلو کی څومره دی؟

۵ – رابات یو د بیې راکومن دی، چې اخستونکی ته د ځانګړو شرایطو لاندې ورکول کیږي. سکونتو یو بیه کمون دی، چې اخستونکی ته د نغدو پیسو ورکولو له امله ورکول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) یو د ۵۷ ، ۸۵۰ مارکونو شمیر، یعنی په کاغذ لیکل شوې بیه په ګوته شوې: د لسو ورځو ترمنځ نغد اداکولو په حالت کی ۳٪ سکونتو.
دلته څومره پیسی ورکول کیږي؟

ب) یو اخستونکی د خپل نوي لاس ته راوړي بایسکل کی ۲۰ ٪ رابات لاس ته راوړي، او دا چی هغه پیسی نديې ورکوي، بر سیرهٔ پردې ۲ ٪ سکونتو هم ورکول کیږي. دا باسکل او س دی د دې لپاره بایسکل لپاره ۱۵۶ مارکونه ادا کوي.
دې بایسکل د سکونتو او ربات د مخه څومره بیه لروده؟

۶ – په یوه نغدپیسوبیه ۱۴ ٪ کی د مالیي ورزیاتیږي او ۳ ٪ ربات ورکول کېږي.
که پخپله ځان ته شمیر لیلی لیکی شی ، ته به مالیه لومړی ورزیاته کړې او که لمړی به ربات له شمیر کم کړې؟
دا نغده ارزښت به څومره جګ شي، که لومړی مالیه ورزیاته شي او بیا ربات ترې کم شي؟

۷ – اباسین خپ کور دننه په ۱۱۰۰۰۰ ماروکونو بیمه کړی. دی ددې بیمی پوره کوونو لپاره کلنی ۵ ،۱ په زرو ګټه باید نیمی ته ادا کړي. دا څومره ده؟

۸ – یوه ګازره په منځنی توګه 0,5‰ ویټامین A لري. څو ګرامه ګازرې به ۱۵ ملي ګرامه ویټامین A ولري؟

۹ – په یوه موټربیولو کنترول کی د یوه موټرځغلونکی څخه د ازماینی لپاره وینه اخستل کیږي. معاینه دا نتیجه ورکوي، چی موټرځغلوونکی 1,7‰ الکول په وینه کی لري. دابه څو مترمکعبه الکول وي، که ونیسو، چی د وینی ډکی ۷ لیتره وي؟

۱۰ – د ارزښتکاغذ (دا په بانك کی څه کاغذونه دي، چي خلك یی اخلی، په کلنی ټاکلی ګټی سره) یو پیسی اینبوونکی ددضیویدند Dividende (کلنی ګټهٔ ده) ۲۷۰ مارکونه اخلي. څموره پیسیبه هغه اینبودلي وي، که یوه بډایي په ۵ ، ۷ ٪ ګټهٔ اینبوول شوې وي ؟

۱۱ – اباسین په یوه بانکی حساب کی ۷۰۰۰ مارکونه اچوي. له کوم وخت وروسته په ساده ۴ ٪ کی ګټونه، دی ۸۰۰ مارکونه لاس ته راوړي؟

۱۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

(c) ketabton.com: The Digital Library

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ -   شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه   د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک   دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی   ۱

۷ – انالیزې   ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنستونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپیني خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پوري ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان په اولني نوم میرې شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړني ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپټبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبرورۍ تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلي.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library