د شمیرپوهنې بنسټونه

ډاکتر ماخان میرزي شینواری

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

وینا

د وینا لاندې یوه ژبنیزه افاده یا وېینه پوهېږو، چې د دې لاندې دوه رښتیا ارزښتونو ،، رښتیآ،،(``wahr,,) w همداسې ،، نارښتیا،، یا ناټیک (``falsch,,) f څخه د یوه سره تنظیم کیدی شي.

ویناوې په لویو تورو A سره په نخښه کیږي : ، او کېدی شي د منطقي یا سم اندیزو عملیو سره وتړل شي. بنسټیزې شمېرپوهنیزې ویېنې یا افادې ، چې له نورو افادو څخه منځ ته نه شي راتلی اکسیومونه بلل کیږي

لاندې بیلګه د دې شمیرپوهنې وینا روښانه کوي.

وینا

A : هر طبیعی عدد د لومړنیو عددونو ضرب دی. دا یوه رښتیا وینا ده.

وینا

B : هر لومړنی ګڼ یا عدد ناجوړه یا طاق دی. دا چې 2 جوړه یا حفت عدد او پریم دی، نو وینا نارښتیا ده.

دا تروسه ښوول شوي اټکلونه

C : ناپای ډېر د پریم اعدادو غبرګوني شته. دا یوه شمیرپوهنیزه وینا ده، څکه چې دا یا رښتیا ده او یا نا رښتیا. دلته موخه د لومړني عدد د غبرګوني څخه هغه لومړني ګاونډي ناجوړه عددونه دي ، چې دواړه لومړني عددونه دي ، د بیلګې په توګه.

$$(3,5),\ (5,7),\ (11,13),\ldots\ .$$

دا تراوسه حورا لویه د لومړنیو عددونو جوړه (د 19.4.2006 پورې) ده:

$$16869987339975 \cdot 2^{171960} \pm 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کره کوني سره

D : د جمعې ۱۳ –مه یوه د بدبختۍ روځ ده.

دا یوه وینا نه ده، ځکه چې دا په یوه رښتیا ارزښت نه شي تنظیودی.

لیکونکې: هولیګ،هورنر

منطقي(سم اندیزې) تړنې(که غواړې: عملیې یا نښلونې)

منطقي یا سم اندیزې ویناوې کېدی شي په لاندې جدول کې ورکړ شوو عملیو سره و تړل شي.

یادونه : له کیڼ و ښي لور ته.

تیک هلته رښتیا، که	وییندود	لیکندود	نومونه	
A نارښتیا ده.	نه A	$\neg A$	نه والی	
	A او B رښتیا دي	(A او B)	$A \wedge B$	Konjunktion یا د او تړنه
	A یا B رښتیا ده.	(A یا B)	$A \vee B$	Disjunktion د یا تړنه
	A او B بیل رښتیا	(یا A یا B)	$A \not\equiv B$	Antivalenz نابرابر ارزښته

(c) ketabton.com: The Digital Library

			ارزښتونه ري
Implikation ترې لاس ته راوړنه	$A \Rightarrow B$ $B \Leftarrow A$	له A څخه B له B څخه A	A نارښتي یا B رښتیا ده
Äquivalenz برابر ارزښته	$A \Leftrightarrow B$	(A و B ته برابر ارزښته دی) یا له A څخه B لاس ته راځي او برعکس	او B همغه یا برابر رښتیا ارزښتونه لري

د دې لپاره چې په منطقي افادو یا وییینو کې نوکان یا قوسونه سپما کړو، کره کوو، چې $\neg$ له $\wedge$ او $\vee$ څخه کلک یا قوي نښلوي او دا بیا له $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ او همداسې له $\not\equiv$.

دا ایمپلیکیشن په پام کې ونیسی، چې B تیک هلته رښتیاه ده، چې A رښتیا وي. له ناتیکو نیونو(فرضیو) ، تیک یا رښتیا او یا هم نارښتیا پایلې را وېستل کیدی شي.

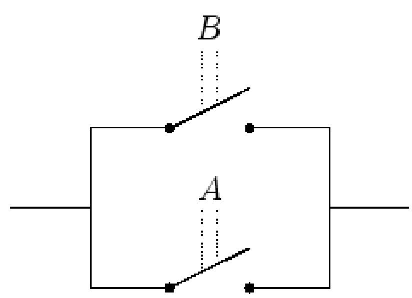
دا د یا ترني لپاره نخښه یوه v د په شان نخښه ده، چې د (vel (lat. oder (لاتین. یا) لپاره ځای په ځای شوې. د یا ترني لپاره کېدی شي چې سومبول ،، $+$ ،، وکارول شي او د او- ترني لپاره ،، $\cdot$ ،،. که سومبول 0 د ناتیک یا غلط لپاره وکارول شي او هر بل ارزښت د رښتیا په ځیر و کارول شي، نو کیدی شي منطقي ترني د طبیعي عددونو شمېرني له لارې هم پر مخ بوتلای شو یا استعمال کړای شو.

په شميروني (کمپيوتر ژبه کې له انګريزي راغلي کليمې NOT (Negation) (نه والی)، AND (Konjunktion (کنجکشن)، OR (Disjunktion) (ديسجنکشن)، يا EXOR oder XOR (exclusive or, Antivalenz) (بې له يا نابرابر ارزښته) او د هغې نه والی NAND (negierte Konjunktion) (نه شوی کنجکشن) ، NOR (negierte Disjunktion) (نه شوی ديسجنکشن) او NXOR (Äquivalenz) (برابرارزښته) لپاره کارول شوي.

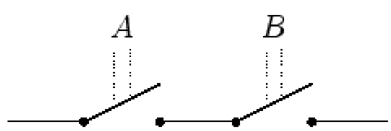
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر، کيمرلې

که وينا د سويچ په څېر انځور کړو، چې تړلي وي، که وينا رښتيا وي، په همدې توګه واز ، که وينا نارښتيا وي، نو کېدی شي مسلسل سويچونه د يا – تړنې په څېر او غبرګ سويچونه د او-تړنې په څېر صورت ومومي .

د يا-تړنه



د او-تړنه

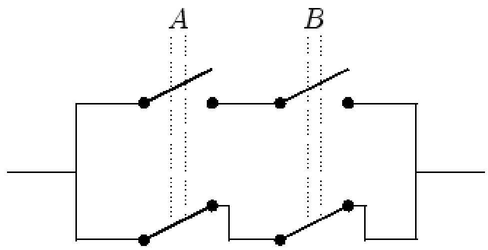


يوه نه-شوې وينا يو سويچ دی، چې تړلی دی، که وينا نارښتيا وي. له دې سره کېدی شي سويچ څېرې د برابر ارزښته، نابرابر ارزښته او ايمپليکيشن لپاره ورکړل شي.

برابرارزښته : $A \Leftrightarrow B$ همداسې $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

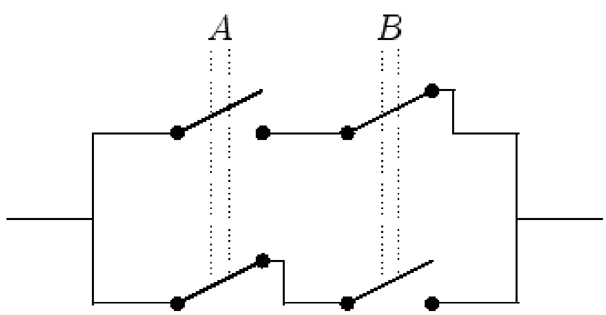
Äquivalenz:

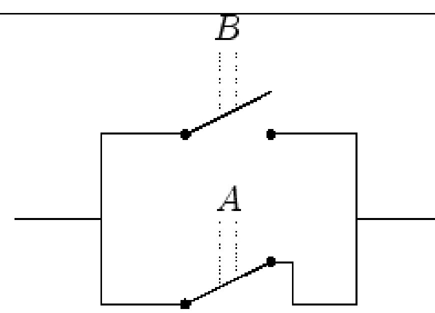
(c) ketabton.com: The Digital Library



نابرابرارزښته: $A \not\equiv B$ همداسي $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Antivalenz:



	ایمپلیکېشن یا ترې لاس ته راتلنه: $A \Rightarrow B$ همداسي $\neg A \vee B$

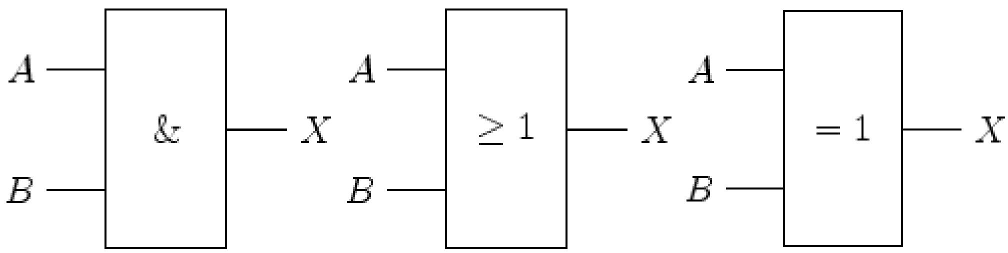
سویچونه کیدی د ترانزیستور له لارې منځ ته راشی یا صورت وموميې، چې په جګ یا ټیټ ایښوول شوي شبانونګ جریان مومي یا تیریږي. د (1) ارزښت جګ شپانونګ دی ټیټ یا کم شپانونګ ارزښت (0) دی.

د دین DIN 40900 سره د اړونده (مطلوبه) شپانونګ تعریف ورکول کیږي. دا د ولاړګوډیز (مستطیل) خخه جوړ دی، په کومو کې چې اړونده ترڼې ورکړ شوې دي. یو نه- والی د یوې ګردی(دایرې) سره په نخښه شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

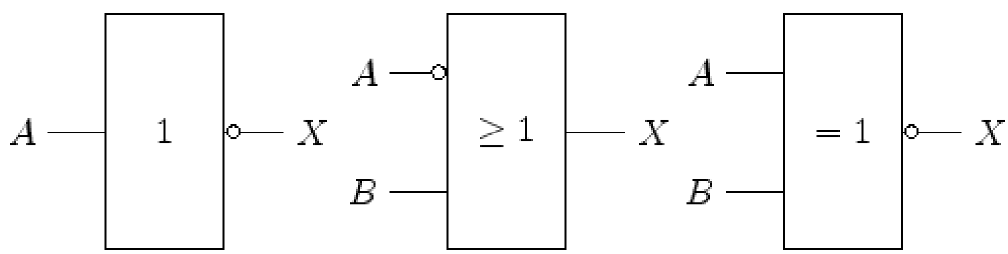
Konjunktion | Disjunktion | Antivalenz

كنجكشن | ديسينكشن | نابرابرارزښته



Negation | Implikation | Äquivalenz

نه-والى | ايمپليكېشن | برابرارزښته



منطقي عمليو لپاره لاندې كټمټوالى Identitäten باوري دی.

Assoziativgesetze: اسوځياتيو قانون

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

Kommutativgesetze: كموتاتيو يا بدلېدنقانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

De Morgansche Regeln: د دې مورګان قانو

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Distributivgesetze: دیستریبوتیو قانون

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

او نور :

$$\neg(\neg A) = A$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \vee A = A$$

Alternative Darstellungen: الترناتیو یا بدیلیی انځورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ايمپليکشن
Implikation: $A \Rightarrow B \quad = \quad \neg A \vee B \quad = \quad \neg A \Leftarrow \neg B$

Äquivalenz: ا $A \Leftrightarrow B \quad = \quad (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Antivalenz: $A \not\equiv B \quad = \quad (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

بديلې فرمولونه زيات وخت په ښوونو کې استعمال مومي.

يوه منطقي افاده يا وينه ، چې د رامنځ ته شوې وينا رښتيا ارزښت خپلواکه تل رښتيا همداسې نارښتيا وي، تاوتولوجي Tautologie همداسې کونتراديکشن Kontradiktion بلل کيږي. داسې يوه افاده کړی شي د ښه بدلون سره همداسې د سره بدله شي. په ځانګړې توګه دا کتمټوالی باور لري:

$$A \vee \neg A = \mathrm{w} \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \neg A = \mathrm{f}\,,$$

همداسې

$$A \vee \mathrm{w} = \mathrm{w} \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{w} = A\,,$$

همداسې

$$A \vee \mathrm{f} = A \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{f} = \mathrm{f}\,.$$

همداسې

ليکونکي: هيوليک،، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مورګان قانون او د دېستريبوتيو قانو کېدی شي وښوول شي، داسې چې د وينا د رښتيا ارزښت لپاره ټول امکانات وڅيړل شي. د دې مورګان قانون داپه لاندې جدول کې روښانه شوی دی.

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$, $\neg(A \wedge B)$
w	w	w	f	f	f
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	w
f	f	f	w	w	w

د ايمپليکېشن، برابرارزښتوالي او نابرابرارزښتوالي لپاره برابر ارزښته شننه له تعريف څخه لاس ته راځي.

د منطقي قانون د روښانه کونې لپاره د وينا

$$\underbrace{|x-1|>1}_{A} \Longrightarrow \underbrace{(x<0)\vee(x>1)}_{B}$$

ښه دليږي.

د د ېمورګان قانون سره سم لرو:

$$\neg B = \neg(x<0) \wedge \neg(x>1) = (x \geq 0) \wedge (x \leq 1)\,.$$

له دې سره سم ايمپليکېشن $A \Rightarrow B$ د وينا د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|x-1| \leq 1 \Longleftarrow 0 \leq x \leq 1\,.$$

سره برابرارزښته دی

بیا هم دا نتیجه لاس ته راځي ، که ایمپلیکېشن د تعریف سره سم د

$$(\neg A) \vee B = |x-1| \leq 1 \vee \neg(0 \leq x \leq 1)$$

سره بدل کړي.

د بېلګې په توګه افاده یا ویېنه

$$L : (A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge B)$$

ساده کوو.. د ایپلیکېشن پېځای اینونه او د دېموران قانون له امله لاس ته راځي

$$\neg(A \vee B) \vee (\neg A \wedge B) = (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)\,.$$

د دېتریبوتیو قانون له مخط دا وینا برابرارزښته ده د $\neg A \wedge (\neg B \vee B)$ سره.

پېژندل کیږي، چ د B ارزښت بې اغیزه دی یا ارزښتناک نه دی او $L = \neg A$.

د منطقي افادې L د ازماېښت ته الترناتیو یا بدیلې کېدی شي یو د رښتیا ارزښت جدول هم وکارول یا ا ستعمال شي.

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge B$	L
w	w	f	f	f
w	f	f	f	f
f	w	f	w	w

(c) ketabton.com: The Digital Library

f	f	w	f	w

له دې دا هم لاس ته راځي: $L = \neg A$

کوانتورونه Quantoren

د فرمولو،، شتون لري....،، . ،، د ټولو .... لپاره،، لپاره لندوني شتونکوانتور $\exists$ او ټول کوانتور $\forall$ استعماليږي.. دا کوانتورونه زيات وخت د $A(p)$ سره په تړاو کې استعماليږي، چې د يوه پارامتر p چې د ډېرى يا سټ P توکى دى، په واک کې دي.

Schreibweise ليکندود	Bedeutung معنا
$\exists p \in P: \; A(p)$	يو توکى p له P شتون لري، د هغه لپاره چې $A(p)$ رښتيا دي.
$\forall p \in P: \; A(p)$	د ټولو p لپاره چې له P دى $A(p)$ رښتيا دى.

د دواړو وينا ډولونو د نه٠والي سره کونتوونه هم بدليږي.

$$\neg(\exists p \in P: \; A(p)) = \forall p \in P: \; \neg A(p)$$

$$\neg(\forall p \in P: \; A(p)) = \exists p \in P: \; \neg A(p)$$

دا $\exists!$ ليکن ډول هم روڼنى دى د فرمولولو لپاره، چې ،، ټيک يو ... شته،،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوانتورونو د شمېرنې ښوونې لپاره وينا

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \; \forall n \in \mathbb{N}: \; n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon$$

راوړل کيږي. دا په دې معنا چې يوه لړۍ(ترادف)

$$a_1, a_2, \ldots$$

د 0 په لور يا0 ته هځيږي، دا په دې معنا چې د پوره لوی n لپاره د a_n مطلق ا
رزښت د هرې د مخه ورکړشوي بند يا بنديز ε څخه کوچنی دی.

نه-والی داسې لاس ته راځي، چې زړي وينا نه شي او کوانتورونه سره بدل شی،

$$\exists \leftrightarrow \forall .$$

د ايمپليکېشن يا لاس ته راوړني يا – راتلني اېنوونه او د مورګېن قانون څخه لاس
تهراځي

$$\neg(n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon) = \neg(n \leq n_\varepsilon \vee |a_n| < \varepsilon) =$$

$$= n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon .$$

له دې سره د نه شوې وينا دا بڼه لري:

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall n_\varepsilon \; \exists n \in \mathbb{N}: \; n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon .$$

دا په دې معنا چې پرلپسې(ترادف) (a_n) د 0 لورته نه هځيږي . دا په دې معنا چې يو
لرزښت $\varepsilon > 0$ شتون لري، چې له هغه پرلپسې $|a_n|$ تل بيا اوړي يا تېرېږي.

ليکونی:ک. هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیده ښوونه

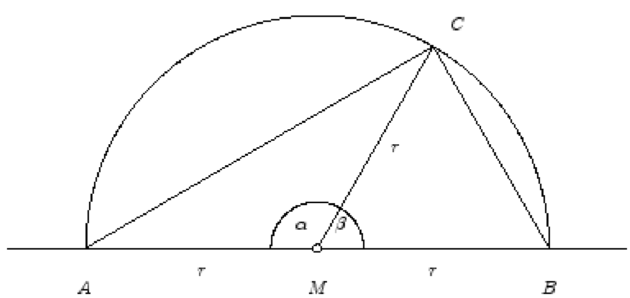
یوه غوښتنه ثبوت) B کېدی شي و ښوول شي، چې هغه له رښتیا وینا A څخه را منځ ته شي او یا په داسې بڼه واړول شي.

$$A \Longrightarrow B .$$

ویناوې A کړی شي وړاندنیونې(فرضیې) هم ولري، چې هغه د ِغوښتنې B لپاره اړیینې دي.

لیکونکی: هیولیګ

د بېلګې لپاره یې د تالس جمله را اخلو، چې هر په یوه نیم ګردی(نیم دایره) کې رابند درېګودی(مثلث) ولاړګوډیز یا قایم الزاویه دی.



دا سیده ښوونه په لاندې دوه جملو ولاړه ده:

اول : په یوه مثلث کې د دننیو کونجونو جمعه π ده.

دویم : د یوه برابر پښیز (یا که غواړی: متساوی الاضلاع) مثلث بنسټکونجونه پرابر لوي دي.

که دا په مثلث $\Delta(AMC)$ او $\Delta(CMB)$ و کاروو، نو له دې لاس ته راځي

$$\sphericalangle ACM = \frac{\pi - \alpha}{2}, \qquad \sphericalangle MCB = \frac{\pi - \beta}{2}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې سره $\sphericalangle ACB = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$ دی

او د $\alpha + \beta = \pi$ له امله په $\pi/2$ سره برابر.

ناسیده ښوونه

د دې لپاره چې وښايو چې له یوې وړاندنیونې(فرضيې) V څخه غوښتنه(ثبوت) B لاس ته راځي یعنې ($V \implies B$) ، کېدی شي ونيسو ، چې وینا B د V د وړاندنیونې له امله نارښتیا ده، دا مو یوه تضاد ته بیایي:

$$V \wedge (\neg B) \implies F,$$

د F سره یوه نارښتیا وینا ده، په ځانګړې توګه $F = \neg V$ یا $F = B$.

په ځانګړې توګه باور لري

$$B = (\neg B \implies F) = (\neg B \Rightarrow B),$$

که وړاند نیونې نه وي شوي.

لیکونکي: هیولیګ، کنش،ابببريښ

ایمپلیکېشن ترې لاس ته راتلنه یا - راوړنه

$$V \wedge (\neg B) \implies F$$

د $\neg(V \wedge (\neg B)) \vee F = (\neg V) \vee B \vee F.$ سره برابرارزښته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ایمپلېکشن رښتیا وي، داپه دې معنا چې د شمېرپوهنیزو قوانینو ځخه لاس ته راغلی، نو باید غوښتنه(ثبوت) B رښتیا وي، ځکه چې $\neg V$ نارښتیا ده او F یا نارښتی او یا د B سره برابر دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د دې ناسیده ښوونې د روښانه ونې لپاره ښایو، چې $\sqrt{2}$ ایراشنل دی، داپه دې معنا چې د مات یا مسر په ځېر نه شي انځورېدلای.

$\neg B:\ \sqrt{2}=\frac{p}{q}$ نیسو، چې غوښتنه B نارښتیا ده. بس باور لري

د . $p,q\in\mathbb{N},\quad \mathrm{ggT}(p,q)=1$ سره .

دلته ggT انګرېزي یې gcdخورا عټ کډېروېشونی (ذوالاضعاف الاقل) دی.

د نیونې ځخه د مربع کونې او د q^2 سره ضربونې له امله لاس ته راځي

$$2q^2=p^2\,,$$

دا یه دې معنا چې p^2 او له دې سره p یو جوړه یا جفت عدد دی. په ځانګړې توګه یو $r\in\mathbb{N}$ شتون لري د $p=2r$ سره. د $q^2=2r^2$ له امله q هم یو جوړه عدد دی او له دې سره $\mathrm{ggT}(p,q)=2$. دا د نیونې نیونې جوړښت $\neg B$ سره په تضاد کې ده، چې $\mathrm{ggT}(p,q)=1$ ، دا په دې معنا چې

$$(\neg B)\Longrightarrow B\,.$$

له دې امله یا د دې په تعقیب باید غوښتنه B رښتیا وی،

د پوره اندکشن له لارې ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

وینابنې د طبیعي پارامتر سره کېدی شي ډ پوره ایندکشن له لارې وښوول شي. که $A(n)$ یوه د $n \in \mathbb{N}$ په واک کې وینا وي، نو د دې لپاره دې لاندې دواړه د د ښوونې پلونه (قدمونه) روښانه- یا و اخستل شي. .

لومړی : د ایندکشن پیل : ښایو چې $A(1)$ رښتیا دی.

دویم : اینوکشنپایونه یا ختم: ښایو چې د نیونې چې $A(n)$ رښتیا دی(دایندکشن هیوپوتیزې)، لاسته زاځي، چې هم رښتیا دی، یاپه دې معنا چې

$$A(n) \implies A(n+1) .$$

نو دا باوري دی، چې $A(n)$ د ټولو $n \in \mathbb{N}$ لپاره ضدق کوي.

د یوه اندکشن ښوونې سره یو په بل پسې sukzessive دا پسې د تر مخه ځخه لاس ته راځي.

که د اندکشن پیل د $n_0 = 1$ لپاره نه بلکه د $n_0 > 1$ لپاره سرته ورسیږي، نږ وینا بیا فقط د $n \geq n_0$ لپاره صدق کوي.

د مربع(څلورئ) عددونو د جمعې لپاره فرمول

$$A(n): \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) ,$$

کیدی شي د پوره اندکشن سره وښوول شي.

د اندکشن پیل ($A(1)$):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}.$$

د اندکشن پای

$$A(n) \implies A(n+1)):$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{A(n)} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

د اندکشن هیوپوتېزې، لکه چې روښانه شوه، په دریم برابروالي کې استعمال شو.

ډېرۍ(سټ)

یوه ډېرۍ A له توکو $a_1, a_2, \ldots$ جوړه ده یعنې

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}.$$

که توکي د یوه خوی له مخې خوی لرونکي (کرکټرېزه) شي، نو د دې لپاره لیکو

A={a:a د E خوی لري}

د دې لپاره سرې لاندې نخښې کاروي یا استعمالوي:

معنا	لیکندول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a \in A$	a د A توکی دی .
$a \notin A$	a د A توکی دی .
$A \subseteq B$	B د A برخدېرى(برخسټ) ده
$A \subset B$	Bد A برخدېرى(برخسټ) ده
$\|A\|$	دتوکو ګڼون یا تعداد په... کې
$\emptyset$	تشدېرى یا تشسټ

که $|A| < \infty$ همداسي $A = \infty$ باور ولري، نو دلته د پای دېرى همداسي ناپای دېرى څخه غږيږو.

دوه یا څو دېرى برابرزوريزى بلل کيږي، که د دوی د توکو ترمنځ یو بیجکتیو بلواک یا تابع یعنې برعکسکیدونکی بلواک شتون ولري ($|A| = |B|$ د پای دېرى لپاره).

د A د ټول برخو دېرى $\mathcal{P}(A)$ تواندېرى بلل کيږى، دا په دې معنا چې

$$\mathcal{P}(A) = \{B : \; B \subseteq A\}$$

له دې سره باور لري $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$ او $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

ليکونکي: هيوليګ، کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګڼونو (اعدادو) ډېرۍ

د لاندې ګڼونو ډېرۍ لپاره معیاري نخښې استعمال مومي:

طبعي اعداد : $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

ټول اعداد: $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$

راشنل یا هوښیار اعدا: $\mathbb{Q} = \{p/q: \ p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N},\, \mathrm{ggT}(p,q) = 1\}$

ریل یا حقیقي(ریښتوني) اعداد: $\mathbb{R} = \{x: \ x = \lim_{n\to\infty} q_n,\ q_n \in \mathbb{Q}\}$

کومپلکس اعداد: $\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y: \ x, y \in \mathbb{R},\, \mathrm{i}^2 = -1\}$

په همدې توګه لاندلیکنډول هم کارول کیږي:

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ او $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}: \ x > 0\}$ او دې ته ورته یا په همدې ډول

$\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}_0^-$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}_0^+$, $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{Q}_0^-$, $\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}_0^-$.

لیکونکي: کړهیولیګ

په ډېریو کې عملیې

د دوه ډېریو A او B لپاره لاندې علمیې تعریف دي:

ټولنه (اتحاد)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A \cup B = \{x:\ x \in A\ \vee\ x \in B\},$$

غوڅی(قطاع):

$$A \cap B = \{x:\ x \in A\ \wedge\ x \in B\},$$

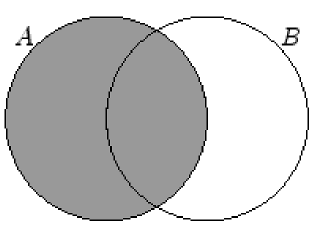
کمبنت یا کمون (تفریق)، پوره کېدونکې ډېری،

$$A \setminus B = \{x:\ x \in A\ \wedge\ x \notin B\},$$

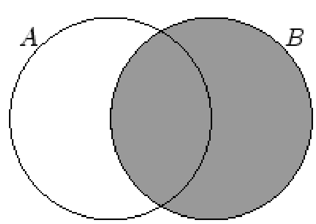
سیوتریکې کمبنت (کمون)

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

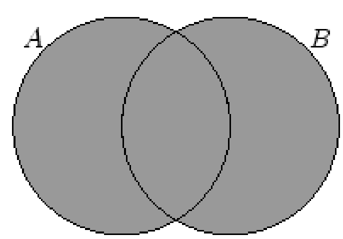
په لاندې ځېرو کې د ډېریو عللیې داسې په نامه ون-دیاګرام Venn-Diagramme سره ښوول شوي دي.



A



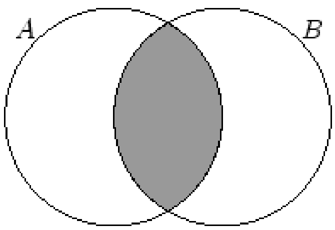
B



تولنه

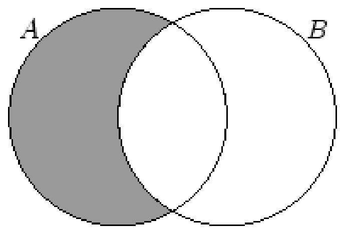
$A \cup B$ Vereinigung:

(c) ketabton.com: The Digital Library



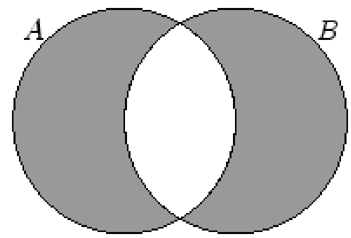
غوځی

$A \cap B$ Schnitt:



کمښت

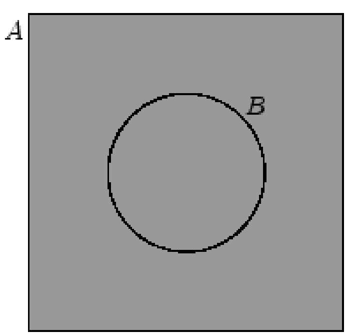
$A \setminus B$ Differenz:



سیومتریکي کمښت

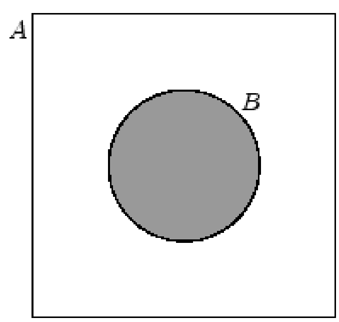
symmetrische $A \Delta B$ Differenz:

که $B \subset A$ وي، نو یوځو دیاګرامونه یو بل سره خوري یا یو په بل پریوځي:



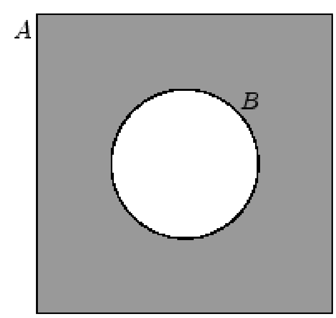
ټولنه

Vereinigung: $A = A \cup B$



غوځی

$B = A \cap B$ Schnitt:



پوره کېدنکي ډېری

Komplementärmenge : $A \setminus B = A \Delta B$

لیکونکي: هولیګ،هورنر، کنیش

د ډېریو عملیو لپاره شمېرقوانین:

اسوځیاتیو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

کموتاتیو یا بدلېدونکی قانون.

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

- Morgansche Regeln:
- د مورګان قانون یا قاعده

$$C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B)$$

$$C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$$

- دیستریبوتیو قانون.

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

دا قوانین د منطیقي قوانینو په کوته کونه هم ده، که د $\cup, \cap$ عملیو په ځای $\wedge, \vee$ کیږدې او $C\backslash$ په ځای $\neg$ کیږدو.

لیکونکي:هیولیګ،هیونر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نمونې په توګه به د دې مورګان لومړی قانون و ښوول شي. باور لري:

$$x \in C\backslash(A \cap B) \Leftrightarrow \qquad x \in C \wedge x \notin (A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B).$$

د ډیستریبوتیو قاونو له مخې اخرنی افاده یا ویینه د لاندې سره برابرارزښته ده

$$(x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in (C\backslash A \cup C\backslash B),$$

له کوم سره چې غوښتونکی کتمتوالی ښوول شوې.

لیکرنکی:ک. هیولیګ

د دې مورګان قاعدې له مخې د بیلګې په توګه لاس ته راځي

$$C \setminus (A \cap C) = (C \setminus A) \cup (C \setminus C) = (C \setminus A) \cup \emptyset = C \setminus A,$$

$$C \setminus (A \cup C) = \qquad (C \setminus A) \cap (C \setminus C) = (C \setminus A) \cap \emptyset = \emptyset.$$

د ډیستریبوتیو قانون د بېلګې په توګه لاس ته راځي:

$$(A \cup B) \cap B \quad = \qquad (A \cap B) \cup (B \cap B) = (A \cap B) \cup B.$$

له دې سره باور لري $(A \cap B) \cup B = B$ ، ځکه چې $(A \cap B) \subseteq B$ دی

کارتېزي ضرب (ځل)

د دوه ډېریو A او B کاتېزي ضرب دواړو ډیریو د ټولو منظمو جوړو ډېری ده:

$$A \times B = \{(a,b):\ a \in A \wedge b \in B\}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري:

$$(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow (a = a' \wedge b = b')\,.$$

داپه دې معنا چې د ډېرى برابروالي ($\{a,b\} = \{b,a\}$) په عکس يا په ځت د لړی پرلپسې غوره ده

په ورته تو ګه n - واره يا ځله کارتېزي ضرب تعريفوو

$$A_1 \times \cdots \times A_n$$

د ټولو منظمو n - ګونونو $(a_1, \ldots, a_n)$ د $a_i \in A_i$ سره . که ډېرى برابرى وي، نوليکو:

$$A^n = A \times \cdots \times A$$

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

اړيکې Relation

که د ډېرى A توکي د ډېرى B له توکو سره په اړيکو کې قرار ولري يا ولاړې وي، نو کېدی شي دا د يوې اړيکې سره افاده يا وويل شي. دا د توکو له منظمو جوړو (a,b) جوړه ده، چې دا د اړيکو له لارې سره تړلي دي. نو يوه اړيکه R د A او B د کارتېزي ضرب برخډېری ده. وايو چې a د b سره په اړيکو کې ده او د دې لپاره ليکو $a\,\mathrm{R}\,b$:

$$a\,\mathrm{R}\,b \Leftrightarrow (a,b) \in R \subseteq A \times B\,.$$

ليکونکي:ژ. هيورنر

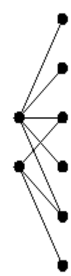
(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړیکو د داتا بانک Relationale Datenbank

یوه نمونه یي بېلګه د اړیکو د ،،داتا-بانک،، دی. دلته د بېلګې په توګه یو د درسونو (لکچرونو) جدول او یو د زده کړو جدول ورکول شوي چې یو له بل سره په اړیکو کې راغلي. دا په لاندې ځېره کې روښانه شوي.

په لاندې کې کیڼ لور ته نومونه دي

Mtr.-Nr.	Name
1000000	Anton Antonius
1000001	Berta Bethel
1000002	Cornelius Cornell
1000003	Damian Damien
1000004	Egon Ekel
1000005	Frank Frankfurth



کوته	درس
V57.01	لوړه شمیرپوهنه ۱
V47.02	د زده کوونکو...

دا هم دلته روښانه شوي چې د یوې ډېرۍ توکي د بلې ډېرۍ د توکو سره په اړیکو کې راځي یا که غواړی :قرار لري.

لیکونکي: بوسلر، هیورنر

د اړیکو خویونه

په یوه ډېرۍ A کې یوه اړیکه $R \subseteq A^2$ په لاندې توګه بلل یا نمول کیږي:

رفلکسیو reflexiv ، که هر توکی د خپل ځان سره په اړیکه کې وي:

$$\forall a \in A : (a,a) \in R$$

سیومتري symmetrisch ، که د توکو لړۍ پرلپسې کوم رول نه لوبوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

انتی سیمتري antisymmetrisch ، که که له سیمتري څخه کټمټوالی لاس ته راشي:

$$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$$

ترانزتیوtransitiv ، که له یوه زنځی څخه منځنی توکی لرې کېدی شي:

$$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

ټوتالي total، که هر دوه توکي لږ تر لږه په یوه لور په اړيکو کې سره راتلی شي:

$$\forall a,b \in A : (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$$

که یوه اړیکه رفلکسیو ، سیومتریک او ترانزیتیو وي، نو دا ،،ورته اړیکې،، (برابرارزښته اړیکي) بلل کیږي. دلته بیا زیات وخت $a \sim b$ د $a \mathrm{R} b$ په ځای لیکل کیږي. یو ورتهاړیکي ډېرۍ A په توکي پردیو برخډېریو ویشي (ورته یا برابر ارزښته ټولګیو)، د کوم سره چې د یوې برخډیرۍ دوه توکي یوبل سره په اړیکو کې دریږي(برابرارزښته دي). په داسې حالت کې چې دوه توکي له مختلفو برخډریو څخه داسې حالت نه لري.
که یوه اړیکه رفلکسیو، انتیسیمتري او ترانزیتیو وي، نو دا یو نیم نظم دی او د دې لپاره $a \le b$ د $a \mathrm{R} b$ په ځای لیکل کیږی. که یو نیم نظم د دې برسېره(سربېره) توتالي وي، نو دا (توتال) نظم بللکیږي او A د $\le$ سره منظمه ده.

لیکونکی:ژ هیورنر

د یوې ډېرۍ M پوتنځډېرۍ $\mathcal{P}(M)$ کې د ډېرۍ خوندیونه یا په کې ځایېدنه $\subseteq$ نیم نظم دی، څکهچې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A \subseteq A$ رفلکسیو انتیترانزیتیو $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ او ترانزیتیو $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ قوانین. که M له یوه زیات توکي ولري، نو خوندیونه نظم نه ی، څکه چې لاندې باور لري:

$$a, b \in M, a \neq b : \{a\} \not\subseteq \{b\} \wedge \{b\} \not\subseteq \{a\},$$

دا په دې معنا چې دا ټوټالي منظمه نه ده.

اړیکي ،، ټیک دومره توکي لري لکه،، د یوې پای ډېرۍ M په تواندېرۍ کې $\mathcal{P}(M)$ برابرارزښته ده څکهچز باور لري : $|A| = |A|$ (رفلکسیو)، $|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|$ (سیومتري)، $|A| = |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$ (ترنزیتیو)

لیکونکی:ژ هیورنر

په یوې ډېرۍ باندې زیات وخت اړیکي یا په همدې ډول پرابرارزښته – اړیکې د توکو د خویونو له لارط تعریفیږي. د بېلګې په توګه دوه اړیکي په

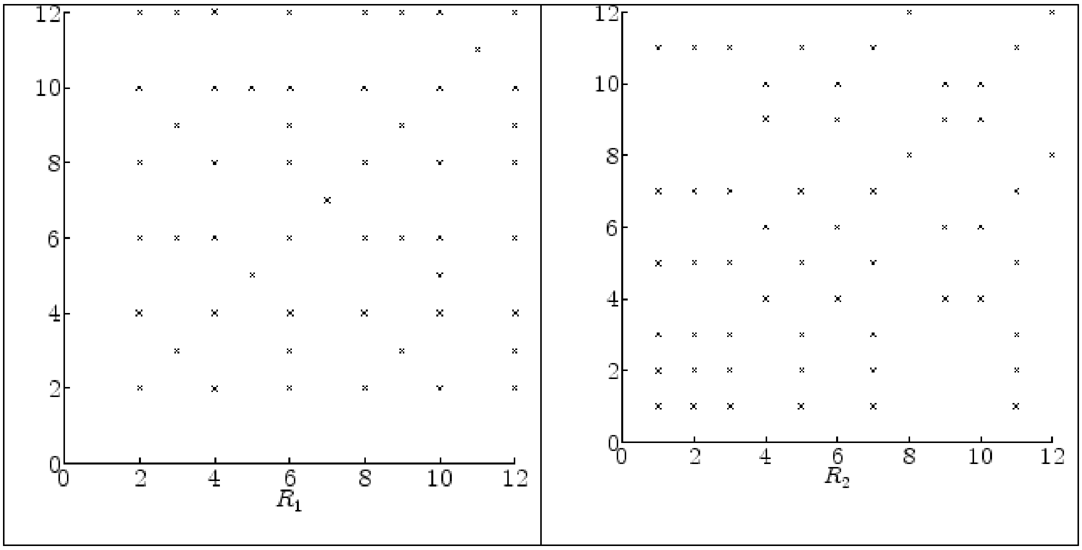
$$M = \{1, 2, \ldots, 12\}$$

کې ترځېړنې لاندې نیسو:

لومړی $x\ R_1\ y$: x او y یو ګډ پروېشونی (مقسوم علیه مشترک) $\neq 1$ لري .

دویم $x\ R_2\ y$: x او y برابرډېر پروېشوني لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیرونه یا یا تابع(بلواک) د $M \times M$ برخدېریو په ځیر د اړیکو ګراف ښايي .
اړیکې R_1 سیومتریک او رفلکسیو دي، مګر نه ترانزیتیو. د بیلګې په توګه $x = 4$ او $y = 6$ کډ پروپښونی 2 لري او $y = 6$ او $z = 9$ کډپروپښونی 3 لري، مګر $x = 4$ او $z = 9$ کډ پروپښونی نه لري. نو

$$(xR_1y \wedge yR_1z) \Rightarrow xR_1z$$

باور نه لري.

اړیکې برابرارزښت –اړیکې دي. رفلکسیویتي، سیومتري او ترادزیتیویتي په ځرګنده توګه پوره دي. برابرارزښته –ټولګې

دي د یوه، دوه، درې ځلور او شپږ پروپښونو سره.

لیکونکې: هیلیګ،کرایخ

فنکشن (بلواک یا تابع)

د یوه فنکشن f لاندې له یوې ډېرې A په یوه ډېرې B باندې یوه قانونمندي پوهیږو، چې هر $a \in A$ توکی په یواځني ډول یو ټاکلي $b = f(a) \in B$ باندې تنظیم کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f : A \longrightarrow B \, .$$

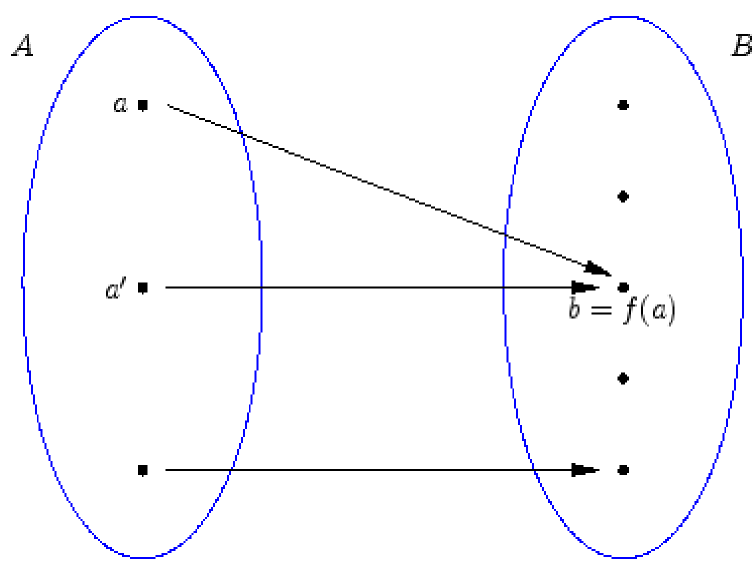
د توکو- نظم لپاره لاندې ليکندود استعماليږي

$$a \mapsto b = f(a)$$

او b د a څېرې يا ارزښت په حيث بلل کيږي او همداسې a د b (د پخوا څېرې)د تعريف توکي په څېر بلل کيږي.

لکه د لاندې څېرې څخه چې کتل کيږي، بايد د B توکي د A د يوه توکي د څېرې توکي په توګه رامنځ ته شي او د B يو توکی کېدی شي د A د ډېرو توکو څېره يا نظم وي. په هر حالت بايد د A د هرتوکی لپاره په يواځني توګه يوه څېره شتون ولري، دا په دې معنا چې له هر a څخه بايد يو غشی وتلی وي.

پيژندل کيږي چې څېره زيات تعريفتوکي يا د څېرې پخوانۍ يا نوره هم ښه مخکنۍ لري(دا په دې معنا چې څېره کېدونکی دی)، دلته د بيلګې په توګه a او a'. د څېرونی لپاره کليمه فنکشن هو کارول کيږي، په ځانګړې توګه په ريل ا حقيقي او کمپلکس اناليوزې کې.



ليکونکي: هيوليک،هيورنر،کيمرلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع یا خیروني یا بلواک(تابع) خویونه

د دوه ډېريو A او B ترمنځ یوه تابع

$$f : A \longrightarrow B$$

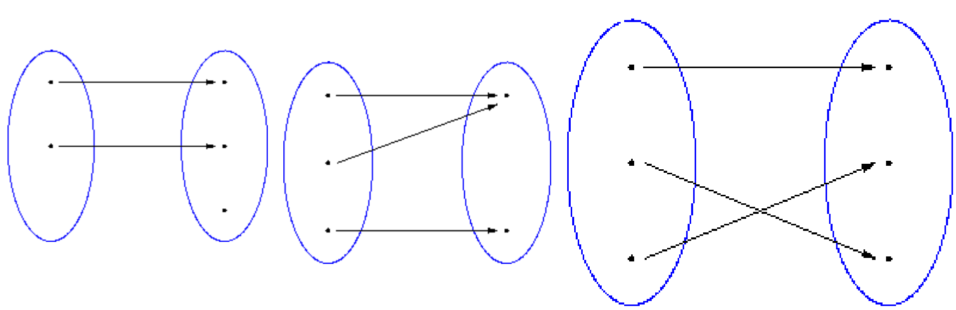
داسې یا په لاندې تګه بلل کیږي:

په کې بلواک injektiv : که د هر $a, a' \in A$ لپاره د $a \neq a'$ سره دا $f(a) \neq f(a')$ صدق وکړي.

په باندې (بلواک) surjektiv : که هر $b \in B$ لپاره یو $a \in A$ شتون ولري د $f(a) = b$ سره.

په (بلواک) bijektiv : که (تابع) f په کې او په باندې وي.

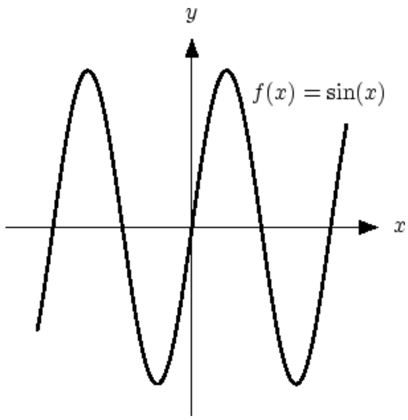
دا کلیمې کېدی شي د ډېری دیاګرام له لارې روښانه شي.



injektivپه کې surjektivپه باندې bijektivپه

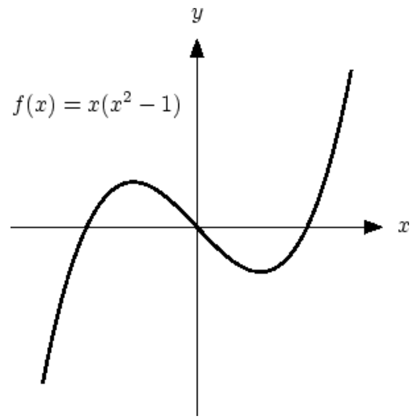
د یو څو بلواکو(توابعو) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ خویونه ورکړ شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



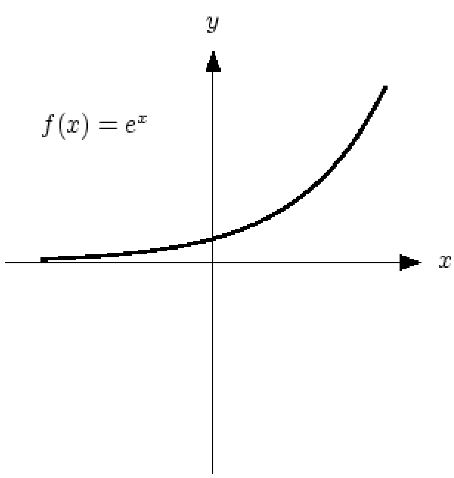
weder injektiv, noch surjektiv

نه په کې او نه په باندې



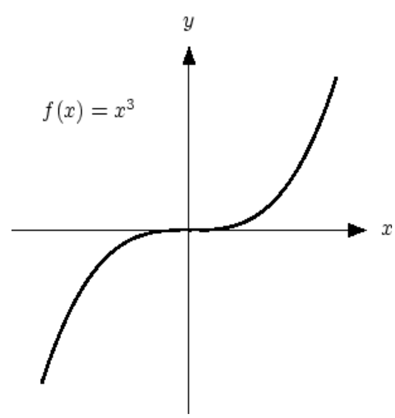
surjektiv, aber nicht injektiv

په باندې، مگر نه په کې



nicht surjektiv, aber injektiv

، نه په باندې مگر په کې



bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv

په، دا په دې معنا چې په کې او په باندې

(c) ketabton.com: The Digital Library

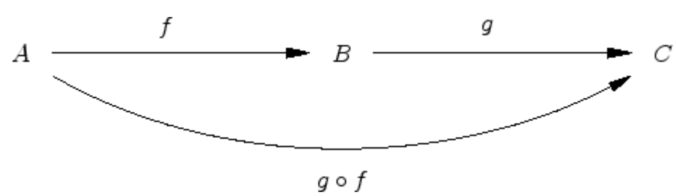
د فنکشنونو (بلواکو یا توتبعو) ترڼه یا عملیې

Verknüpfung von Abbildungen

د دوه فنکشنونو $f : A \to B$ او $g : B \to C$ ترڼه یا کمبوزیشن (زنځیرونه یا سره ګډ ایښونه) د

$$a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad a \in A,$$

له لارې تعریف شوی او په لاندې دیاګرام کې لیدوړ ګرځېدلی.



تابع اسوځیاتیو ده، دا په دې معنا چې $\circ$ ترڼه

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

صدق کوي، مګر په ځرګند ډول کموتاتیو نه ده. .

لیکونکی: هیولیک، کنش

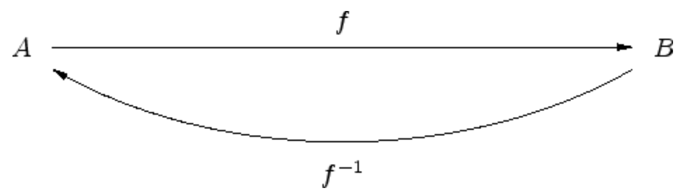
په څټ یا برعکس فنکشن (بلواک یا تابع)Inverse Abbildung

د یوه په فنکشن یا تابع $f : A \to B$ لپاره د

$$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

له لارې په څټ فنکشن یا برعکس تابع $f^{-1} : B \to A$ تعریف ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ځانګړې توګه $a = f^{-1}(f(a))$ دی، داپه دې معنا چې $f^{-1} \circ f$ کټمټ یا ورته تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، کنش

فاکولتې یا فکتوریل Fakultät

د لومړیو n طبیعي اعدادو یا ګڼونو ضرب د

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$$

سره په نخښه کیږی. (لوستل یې : n فاکولتې). له دې سره کلک تړلی یا له دې سره ه کلکه په نړاو کې تش ضرب داسې لیکو: $0! = 1$.

ګڼ یاعدد $n!$ د n مختلو شیانو دمختلفو امکاناتو د ترتیب یا نظم ګڼون یا تعداد ر ښایي

د لوی n لپاره د $n!$ اسیپتوتیکي حالت د سترلینګ Stirlingschen فرمول له لارې په ورته نږدې ډول وښوول شي:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O(1/n)\right).$$

لیکونکي: هیولیګ،هیورنر

د بینوم ضریبونه (ځلووني) Binomialkoeffizient

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $n, k \in \mathbb{N}_0$ لپاره د $n \geq k$ سره د بینوم ضریبونه تعریفوو:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-2)(k-1)k}.$$

د $0! = 1$ له امله په ځانګړې توګه باور لري:

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$$

د بینومي ضریب $\binom{n}{k}$ د n توکو سره یوې ډېرې د k - توکیزو برخډېریو ګڼون یا تعداد ورکوي.

د پاسکال درېګودی(مثلث) Pascalsches Dreieck

د بینوم ضریبونه

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

د لاندې رېکورزیون Rekursion (په بېرته معلومو فرمولونو) په مرسته

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

په یوه درېګډیزې شیما یا شکل، داسې په نامه پاسکال درېګودي کې یا له لارې وشمېرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc}
\binom{0}{k} & & & & & & 1 & & & & & \\
\binom{1}{k} & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
\binom{2}{k} & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
\binom{3}{k} & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
\binom{4}{k} & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow \\
\binom{5}{k} & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

.

ليکونکي: هيوليک، کنش

دا د ښوولو کټمتوالی

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

د $n!$ سره وېشني او $(n-k+1)!\,k!$ سره ضربوني له لارې د

$$n+1 = k + (n+1-k)\,.$$

سره برابرارزښته دی.

ليکونکي: هيوليک، کنش

د بينوم درسي جمله Binomischer Lehrsatz

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بینوم درسي جملې سره کېدی شي د دوه متحولو يا اووښتونو د زياتون يا جمعې توان وشمېرل شي.

د ټولو $n \in \mathbb{N}_0$ لپاره صدق کوي:

$$(a+b)^n =$$

$$a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

په ځانګړي توګه د $n = 2, 3$ لپاره:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

د بینوم جمله کیدی شي د پوره ایدکشن له لارې وښول شي.

د $n = 0$ او $n = 1$ لپاره کتمتوالی د

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k}b^k = \binom{0}{0} a^0b^0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k}b^k = a + b$$

له امله د په خوښه a او b لپاره رښتیا یا ټیک دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیسو چې د n لپاره صدق کوي. نو دی:

$$(a+b)^{n+1}$$

$$= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}$$

$$=$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$$

د بینوم ضریبونو لپاره کتمتوالی Identitäten für Binomialkoeffizienten

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بينوم ضريبونو لپاره لاندې کتوتوالی صدق کوي:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k, \quad n \geq 1,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}, \quad k < n,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}, \quad k > 0.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

لومړي دواړه کتمتوالي ترلي د بينوم د درسي ځخه لاس ته راځي،

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

د ارزښتونو $a = b = 1$ همداسې $a = -b = 1$ سره .

دريم کتوتوالی د ريکورزين فرمول په بيا بيا استعمال له لارې لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

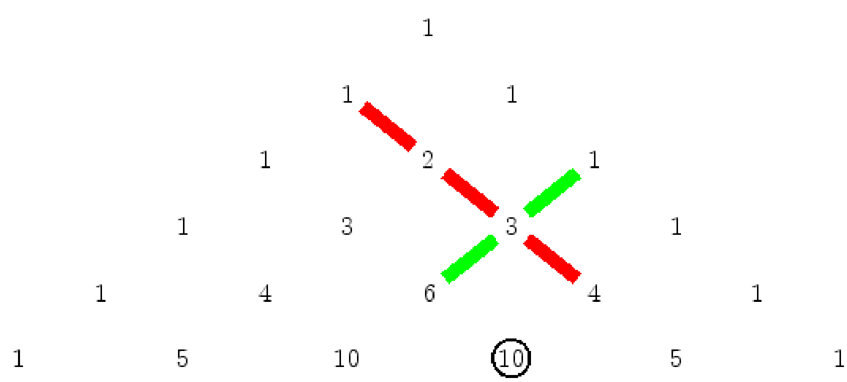
$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\
&= \dots \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{n-k-1}{0} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}.
\end{aligned}$$

په دې مساواتو کې د   په ځای اینولو یا سبستیچیشن Substitution

$(n-k) \leftrightarrow k$

له لارې ځلورم کتمتوالی لاس ته راځي.

دا اخرني دواړه کتوتوالي کېدی شي په پاشکال درېګوډي کې جمعه کوني لخ لارې انځور شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډېريو يا سټونوکمبيناتوريک Kombinatorik von Mengen

(د کمبيناتوريک د نورې زياتې کتنې لپاره دې زما دشميرپوهنې ستر کتاب وکتل شي)

لاندې جدول د مختلفو امکاناتو ګڼون يا تعداد ورکوي، چې د يوې د n مختلفو توکو سره ډېرۍ ځخه k ټوکي ټاکلی شو، د کوم سره چې بايد توپير شي، چې ايا د لړی پرلپسې يو رول لري (ترتيبونه) او تکرار ونه په کې اجازه لري که نه.

	sortiert منظم(د ټاکلو اړخونو له لارې) ترتيب	nicht sortiert نا متظم
له تکرار سره	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
بې له تکرار سره	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

ليکونکي: هيوليک،کنش

لومړی : نا ترتيب يا نا منظم ټاکنه بې له تکرار ځخه

که د لړی پرلپسې په پام کې ونيو لي، نو د لومړي ځل لپاره n امکانات شتون لري، $(n-1)$ امکانات د دويم لپاره ، تر $(n-k+1)$ امکاناتو پورې د k-م توکي لپاره، نو په ټوليزه توګه

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

امکانات شتون لري.

دا بايد د ګڼون يا تعداد $k!$ سره وه وېشل شي چې د k توکو پرموتيشن (د توکو ځای بدلون : لنډ: ځای بدلون) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم : ناتتيب شوي انتخاب د تکرار سره

يو برابرارزښته پرابلم دادی، چې $n-1$ په نځښه شوې (نشاني شوي) د $n+k$ ټکو تر منځ ځای په ځای شي.

$$\bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \bullet$$

$$\triangle \quad \triangle \qquad \triangle \quad \triangle$$

د $(i-1)$ -م او i -م ترمنځ ټکو تعداد چې په 1 کم شوی د i–م توکي تکرارونو سره برابر دی. د لومړي سره سم د ممکنه په نخښه کيدونو تعداد لپاره لاس ته راځي

$$\binom{n+k-1}{n-1},$$

کوم چې په جدول کې ورکړ شوي عدد سره سر خوري.

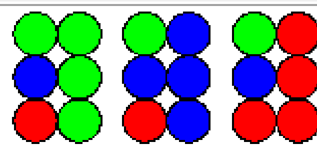
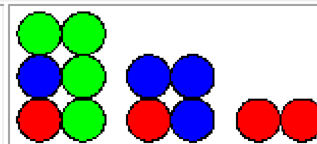
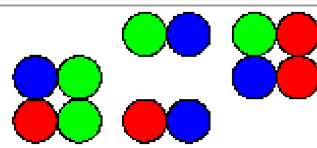
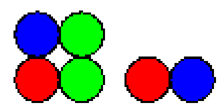
دريم : د تتيب شوي انتخاب لپاره فرمول پسې تړلی لاس ته راځي.

ليکونکي:هيوليک، کنش

په يوه مرتبان کې يو سور يو شين او يو اسماني توپونه (غونډوسکې) پراته دي. په جدول کې د دوه واره راوستنې د امکاناتو تعداد کتل کيږي ($k=2,\ n=3$).

ناترتيب شوي يا نامنظم	ترتيب شوي	
$\binom{n+k-1}{k}$	n^k	د تکرار سره (دبېرته وراچونې سره)

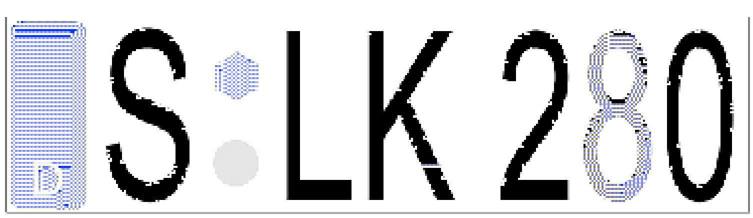
(c) ketabton.com: The Digital Library

		
	$3^2 = 9$	$\binom{3+2-1}{2} = 6$
بې د تکرار سره (نه دبېرته وراچوني سره)	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
		
	$3 \cdot 2 = 6$	$\binom{3}{2} = 3$

ليکونکي:هيوليک، کنش

د موټر نمره Autokennzeichen

د يوه الماني موټر نمره د ايالت يا ښار لپاره د ≤ 3 تورو کمبينېشن ، د ≤ 2 نورو تورو او تر يوه څلورځايز عدد څخه د بېلګي په توګه :



(c) ketabton.com: The Digital Library

له n تورو څخه 26^n کمبینېشنونه شتون لري او له دې سره

$$(26 + 26^2 + 26^3) \cdot (26 + 26^2) \cdot 9999 = 1.28 \cdot 10^{11}$$

ممکنه نمرې (که د ښار یا ایالت د ورسره ور ګډونه په پام کې ونه نیول شي

لیکونکي:هیولیګ، کنش

پوښتنې

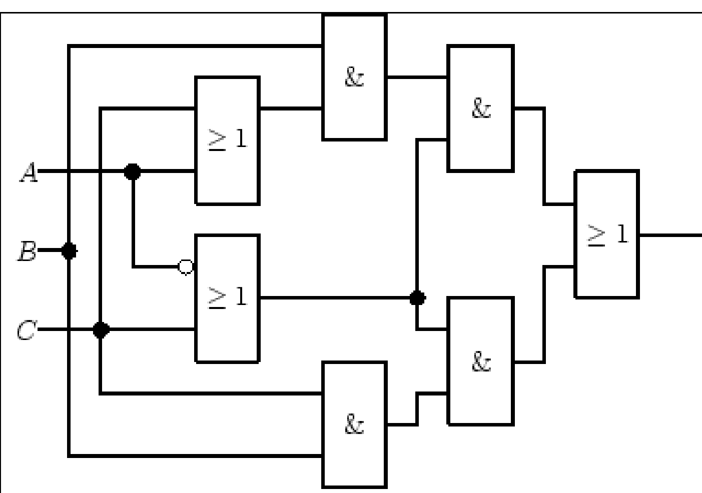
- د ښه بدلون او همداسې د رښتیا جدول سره و و زامیی، چې ایا افادې یا ویېنې تل ټیک دي یعني Tautologien دي:

$$(A \vee B) \Rightarrow ((\neg A \vee B) \wedge (A \Rightarrow \neg A))$$

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$$ پای.

- اړیکې $\Box$, $\Diamond$ د ډېرې پوهنې څخه د منطقي علیو $\{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ لپاره ځای په ځای شوي. په کومو حالتونو کې باور لري:

- محامخ سویچونه(شالتونګونه) ساده کړی:



(c) ketabton.com: The Digital Library

- ډېرى $A, B \neq \emptyset$ ، يوه تابع $f : A \rightarrow B$ همداسې برخډېرى $U, V \subset A$ او $X, Y \subset B$ ورکړ شوي دي. د لاندې اړيکو رښتياوالى همداسې نارښتياوالى د يوې مناسبې برعکس بېلګې په مرسته وښايى:

الف- $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$ ب - $f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$

پ - $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

ت - $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

- د يوه تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ په هکله لاندې وېناوې په فورمال ليکندود افاده کړى:

الف - fپه باندې نه دى ب - f په کې نه دى

پ – f په نه دى ت – fنه په کې او نه په باندې دى

ليکونکى: کريستيا اپيپېښ

- د $n \in \mathbb{N}$ لپاره د پوره ايدکشن له لارې وښايى:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$ **a)**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$ **b)**

- د $n \in \mathbb{N}$ لپاره د پوره ايدکشن له لارې وښايى:

الف : $a_n = n^3 + 5n$ په 6 وېشونى دى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب : $b_n = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ یو طبیعي عدد دی.

- په یوه میلمستیا کې 25 کسان سره یوځای کیږي. څومره لاسونه سره ورکول کیږي، که هر میلمه هر بل مېلمه ته لاس ورکړي. .

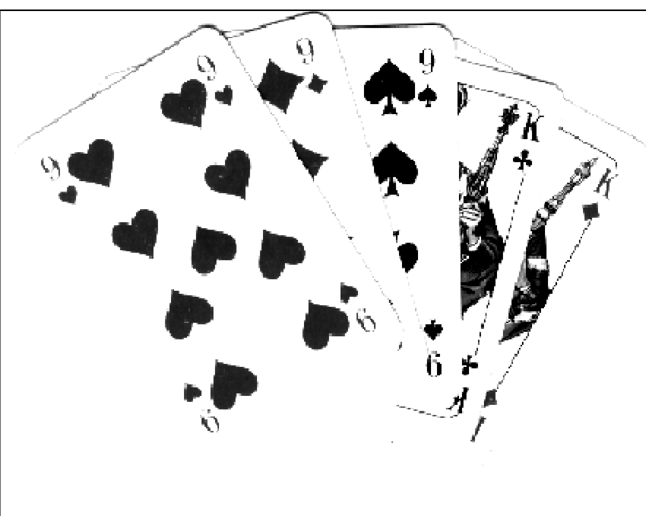
د شمیرپوهنې له لومړني کورس څخه

- و ښایې:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$$ **a)**

$$\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n+k-\ell}{k} = \binom{n+k}{k+1}$$ **b)**

لاس ته راونې یې په پاسکال درېګوډي کې انځور کړی. لیکونکی: کلاوس هیولیګ

	- په یوه د کارتو لوبه کې چې له 32 کارتو جوړه ده(8 ارزښتونه 4 رنګونه) څومره امکانت شته دی، چې فول هوز Full Haus (درې برابرارزښته او دوه برابر ارزښته) کارتې لاس ته راوړل شي؟ د دې لپاره څومره امکانات شته چې دا څېره شوي کارتې د دوه کارتو بدلولو سره یو پوکر(څلور برابر ارزښتونه) لاس ته راوړای شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ازماښت Test

لومړۍ پوښتنه:

د لاندې منطقي ابادې رښتیا ارزښت پیدا کړئ

$$D: \ (A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \vee A)$$

چې د ویناو A, B, C د رښتیا ارزښتونو تابع یا په واک کې وي.

هر ځل یا'w' او یا 'f' ورکړئ.

دویمه پوښتنه:

ډېرئ $A = \{1,2,3,4,5\}$ او $B = \{4,5,6,7\}$ ورکړئ.

په ګوته کړئ، چې ایا لاندې ویناوې رامنځ ته کیږي که نه(J د هو لپاره او N د نه لپاره)

دریمه پوښتنه:

د دوه هره یوه د درې توکیزه ډېریو A او B ترمنځ څومره اړیکې شتون لري؟

له ې څخه څومره بلواک یا تابع دي او څومره بلواک یې په باندې(سورجکتیو) دي؟

څلورمه پوښتنه:

و څېړئ چې ایا لاندې توابع یا بلواک $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ په باندې، په کې او په دي:

$$\textbf{a)} \quad f(x) = x \sin x \qquad \textbf{b)} \quad f(x) = \exp\left(-x^3 + 1\right)$$

$$\textbf{c)} \quad f(x) = x \ln \frac{1}{|x| + 1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځمه پوښتنه:

ځومره پنځه ځایزه ګنونه یا عددونه شتون لري د لاندې سره

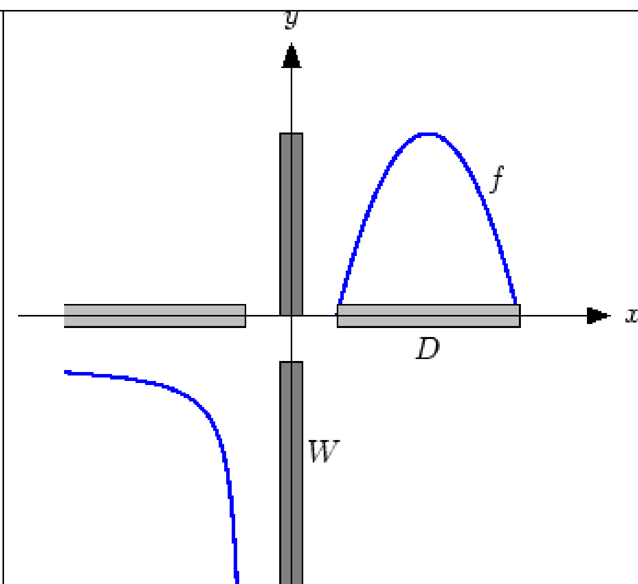
الف: پنځه مختلف عددونه

ب) تیک دوه جوړه عددونه

شپږمه پوښتنه:

څومره امکلنات شتون لري، چې ناه کسان په درېیز ګروپ ووېشو؟

تابع   یا فنکشن یا بلواکFunktion

یو فنکشن $f: D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ هر د تعریفورشو $D \subseteq \mathbb{R}$ هر توکی x په یوه د ارزښت ورشو $W \subseteq \mathbb{R}$ په یوه توکي $f(x)$ باندې تنظیموي.. د فنکشن یا بلوتک f ګراف له تکو (x,y) جوړ دی د $y = f(x)$ سره.	

لکه د تابع څخه چې لیدل کیږي، د تعیف ورشو (روڼ شین) او د ارزښت ورشو(تیاره خړ) د x – محو ر همداسې د y -محور پرېوستونونه Projektionen دي.

د دې لپاره چې د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعريف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، باید په ساده تابع رامنځ ته شوي بنديزونه په پام کې ونيسو. د لوگاريتم ارگومنت باید مثبت(زياتيز) وي:

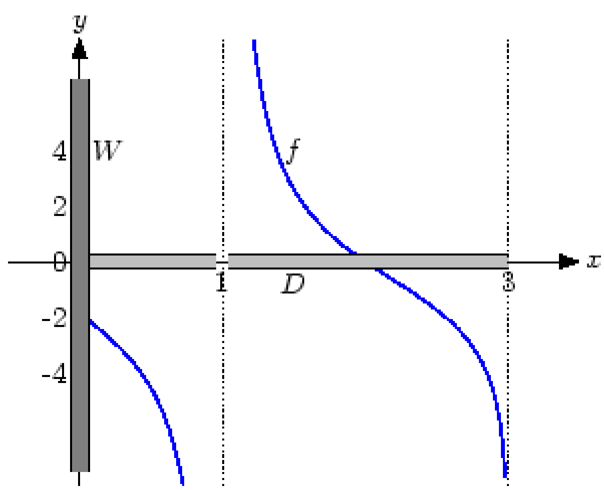
يعني $3-x>0$ او $x\geq 0.$

په هر حالت مخرـ(ماتلاندې) بای صفر نه شي، دا په دې معنا چې $x\neq 1$.

په ټوليزه توگه لاس ته راځي:

$$\mathrm{D}=[0,3)\backslash\{1\}=[0,1)\cup(1,3).$$

د f ارزښت د رسم سره روښانه یا واضح کیږي.



دا چې f د $x\in(1,3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نيسي یا اخلي، نو باور لري. $W=\mathbb{R}$

ليکونکي:هيوليک،هيورنر،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې جدول د څو بنسټيزو بلواک يا توابعو د تعريف - او ارزښت ورشو بنايي:

$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\ln x$	$(0,\infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{x\,:\,x=(2k+1)\pi/2,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$

ليکونکي:هيوليک،هيورنر،کنش

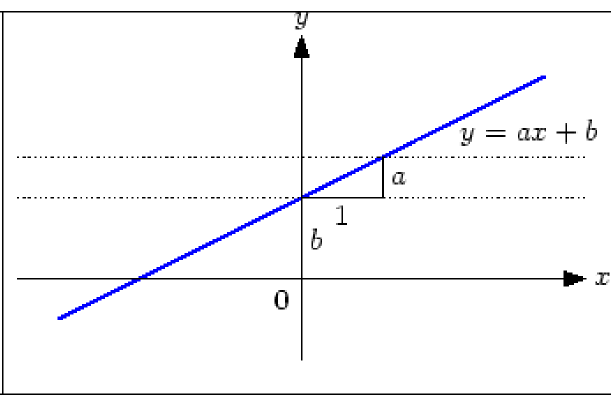
کرښيز فنکشنونه   Lineare Funktion

د يوه کرښيز فنکشن

$$f(x) = ax + b$$

ګراف يوه کرښه ده د a جګېدنې

سره او د y -محورغوځې b سره.



الترناتيو يا بديلې انځورونې يې تکې-جګېدنې-بڼه

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

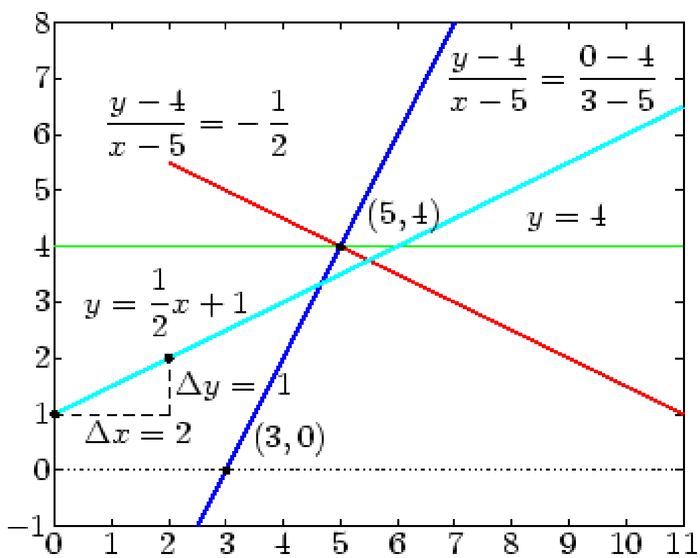
او د دوه -ټکو-بڼه

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},$$

دي ، د کوم سره چې (x_0,y_0) او (x_1,y_1) په کرښه ټکي دي.

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

تابع د کرښيزو فنکشنونو مختلفو انځورونو بڼې ښايي يا په نخښه کوي.



مربعيز فنکشنونه Quadratische Funktion

د يوه مربعيز تابع ګراف

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

يو د

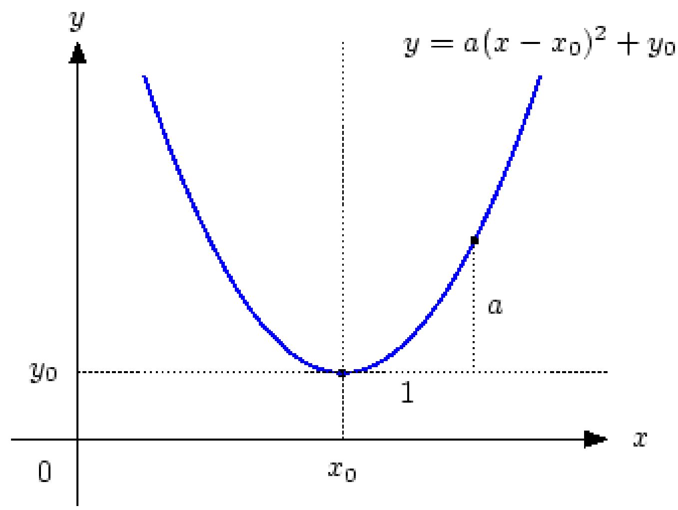
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د بڼي پارابول دی د ککرې

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right).$$

سره.



مایل ګوزار یا – غورځونه Schräger Wurf

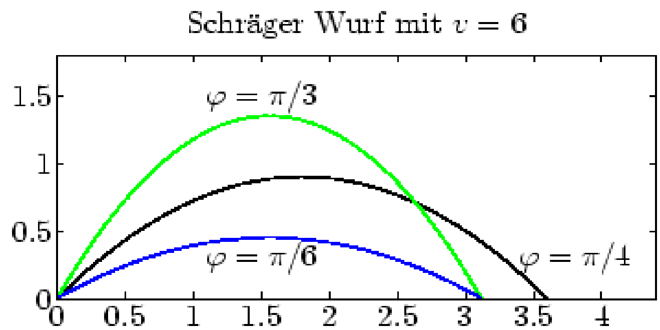
که یو تن د کونج φ لاندې د یوې چټکتیا v سره وغورځول شي، نو د الوتنې لار یې یو پارابول

$$y = x \tan\varphi - \frac{g}{2v^2 \cos^2\varphi} x^2$$

ښايي ، چېرته چې g د ځمکې بيړه(تعجيل) ده.

مایله ګوزارونه یا –غورځونه د v=6 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مساوات د برابردولیز خوزښت څخه لاس ته راځي د پیل چټکتیا v سره په x - او y -کمپوننتونو یا برخو او د همدې وخت د ازادې غورځونې بیړه ییز خوزښت سره.:

$$x(t) = vt\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v\cos\varphi}$$

$$y(t) = vt\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \ y(x) = \frac{vx\sin\varphi}{v\cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2\cos^2\varphi}\right).$$

د غورځوني واټن دی:

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi)\,.$$

دا د $\varphi = \pi/4 \mathrel{\widehat{=}} 45°$ لپاره ماکسیمال کیږي.

لیکونکي: هیورنر،هیولیک،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولينوم Polynom

يو د n-م دجي پولينوم p په لاندې بنه ليکل کيږي:

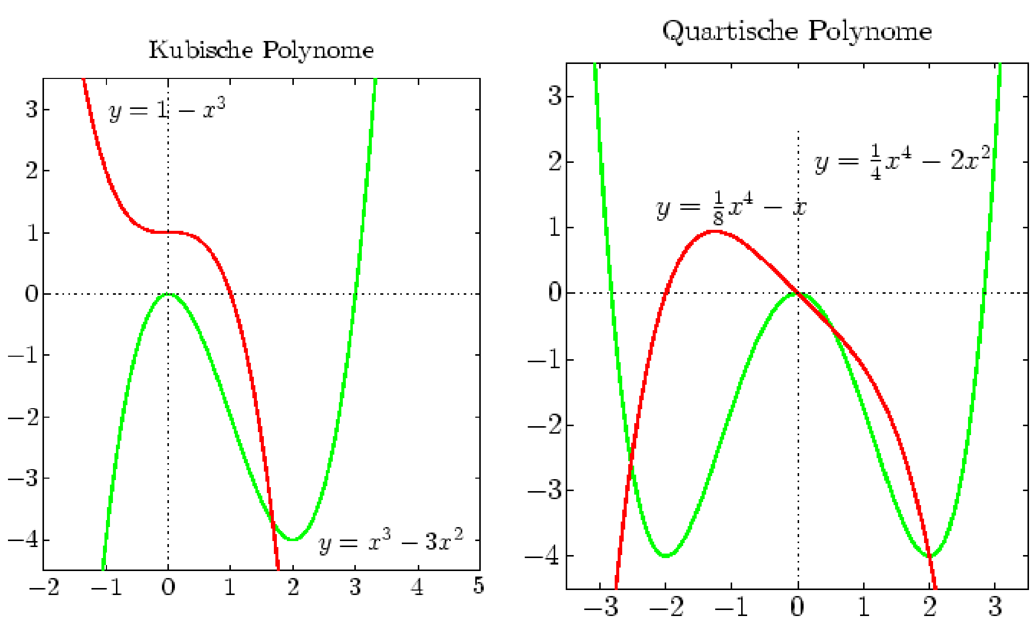
$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

د $a_n \neq 0$ سره .

اووښتوني يا متحوله x او ضريبونه a_k کېدی شي ريښتونی (حقيقی) يا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه له دې امله له حقيقی همداسې کمپلکس پولينومونو غږيږو.

ليکونکي:هيوليک،هيرنر

لاندې توابع مکعبي $n = 3$ او مربعيز $n = 4$ پولينومونه په ګوته کوي، د خرنګوالي (کواليټي) مختلف تابع ګراف سره



ليکونکي: هيورنر،هيوليک،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

راشنل فنکشن یا بلواک(تابع) Rationale Funktion

یو نسبتي تابع د صورت(ماتباندي) درجې m او مخرج(ماتلاندي) درجې n سره یو د دوه پولینومونو ویش دی.

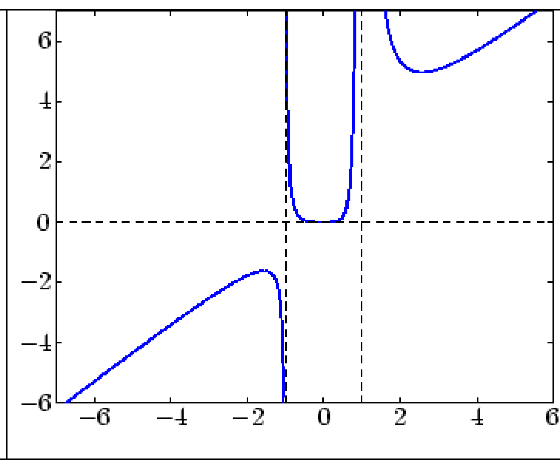
$$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n}\,.$$

دا انځورونه ناوېشوړ irreduzibel بلل کیږي، که p او q کوم ګډ کربنيز ضریب ونه لري.

د مخرج صفرځايونه راشنل تابع r د تعریف تشیاوې دي او د پول ځايونو په نامه یادیږي. د دوی نظم د صفرځايونو دپرځلوالی دی.

د اووښتوني یا متحولي x او ضریبونه a_k, b_k کېدی شي حقیقي یا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه د حقیقي یا کمپلکس رېښتوني فنکشن څخه غږیږو.

لیکونکي:هیولیک، اپپ

فنکشن $f(x)=\frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$ په $x=-1$ کي یو ساده قطب لري او په $x=1$ کي دبل قطب لري	

د تابع څخه پژندل کیږي، چې f په یوه ساده قطب کې مخنخښه بدلوي او په دبل قطب کې مخنخښه نه تغیروي.   لیکونکي:هیولیک، اپپ

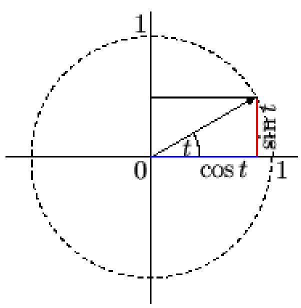
(c) ketabton.com: The Digital Library

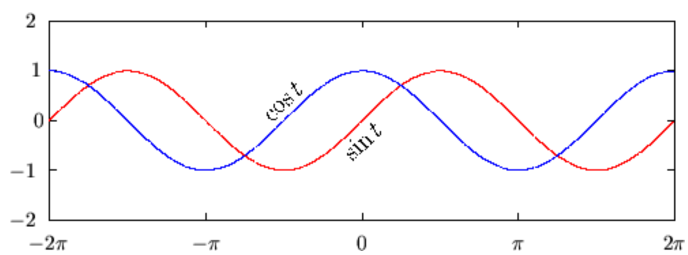
ساین او کوساین Sinus und Kosinus

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره کواودینات چې په سرچينه کې په کونج t ځرخول شوی ټکی $(1,0)$ په نخښنه کيږي.





دواړه د ګردی يا دايرې توابع کوسان او ساين 2π - پريوديکي (تل بېرته راګرځېدوني) دي او باور لري

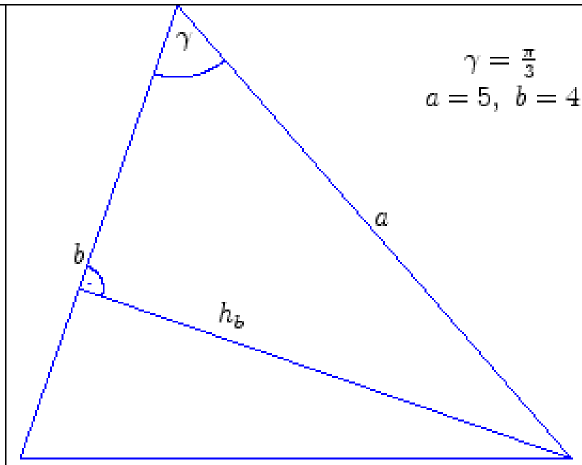
- $\cos t = \sin(t + \pi/2)$,
- $\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$,

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

د تر مختخبني پوري د دايرې تابع د ولاړکوډيز دربېکوډي(قايمالزايه مثلث) د قطر (نيمي) سره چې ا وړدوالی يې 1 دی دو لاړو (عودو) ضلعو اوږدوالی ښايي. يو ځو ځانګړي ارزښتونه يې دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دې لپاره چې د ښېره شوي درېګوډي د سطه وتاکلی شو، لومړی جګوالی h_b شمېرو:

$$\sin\gamma = \frac{h_b}{a} \Rightarrow h_b = a\sin\gamma\,.$$

له دې سره لاس ته راځي:

$$F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma\,.$$

د ورکړ شوو ارزښتونو لپاره لاس تخ راځي:

$$F = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\,.$$

د ساین او کوساین لپاره د جمعي جمله(قضيه)

د داېرې توابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندې اړيکې صدق کوي:

- $$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
- $$\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$$

په ځانګې توګه

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

ليکونکی.ژ.هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع

$$u(t) = \cos(w_1 t) + \cos(w_2 t)$$

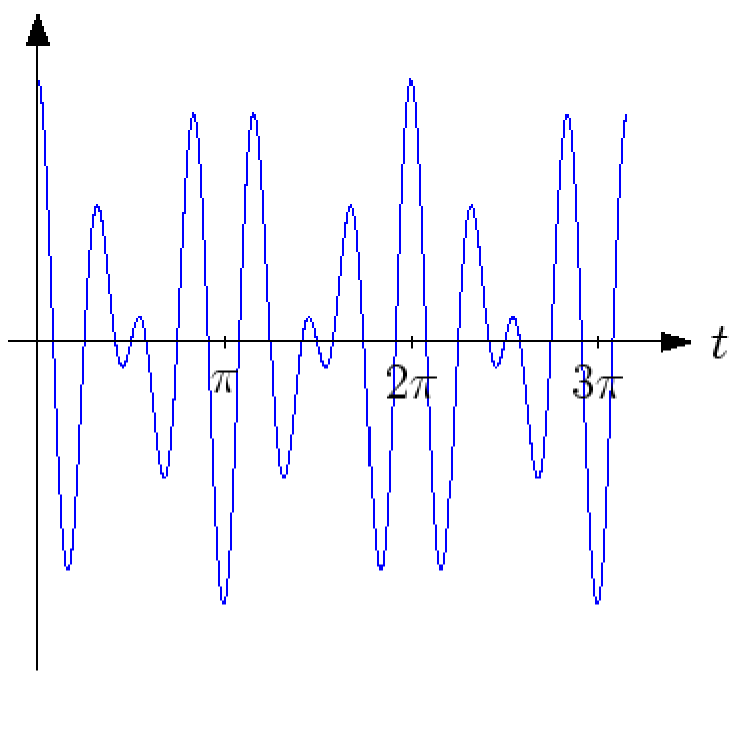
اړيکي د دوه لړزېدنو يو ځای رامنځ ته کېدنه روښانه کوي. د جمعي قضيې په مرسته کېدی شي انځورونه ساده شي. د $\overline{w} = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ او $\Delta w = |w_1 - \overline{w}|$ سره له

$$\cos(\overline{w} - \Delta w t) = \cos(\overline{w}t)\cos(\Delta w t) + \sin(\overline{w}t)\sin(\Delta w t)$$

$$\cos(\overline{w} + \Delta w t) = \cos(\overline{w}t)\cos(\Delta w t) - \sin(\overline{w}t)\sin(\Delta w t)$$

ځخه لاس ته راځي، چې

$$u(t) = 2\cos(\overline{w}t)\cos(\Delta w t)\,.$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بلواک د $w_1 = 7$, $w_2 = 5$ لپاره لړځېدنه ښايي، دا په دې معنا چې $\overline{w} = 6$. ,
او $\Delta w = 1$

$$u(t) = 2\cos(6t)\cos t\,.$$

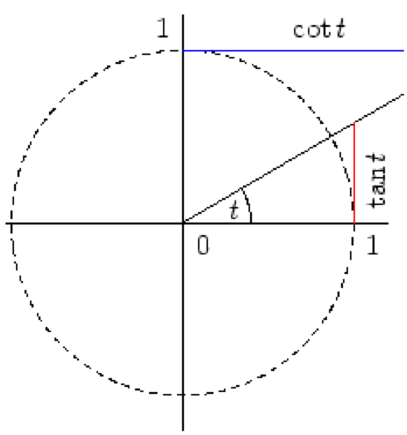
ليکونکي:هيوليک،کرايخ

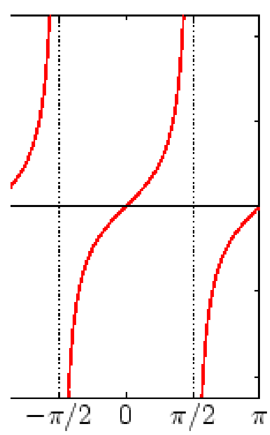
تانجنت او کوتانجنت

توابع تانجنت او کوتانجنت د

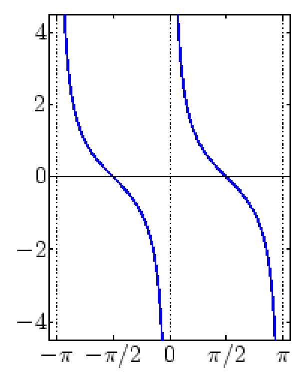
$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

سره تعريف شوي. دا په ولاړګوديز درېګوډي (قايوم الزاويه مثلث) کې د تر مخنخښې پورې د ولاړو اړخونو تناسب ورکوي





Tangens



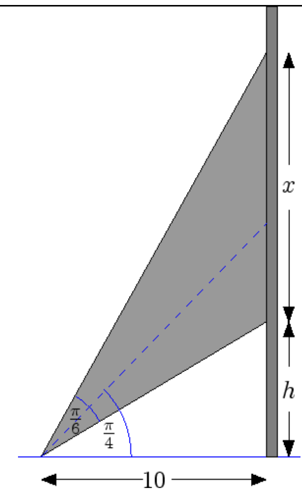
Kotangens

يو څو ځانګړي ارزښتونې دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

تابع د شکل له مخې یو د برېښنا مخروط ، چې په یوه ولاړ دېوال پرېوځي ښايي



د دې لپاره چې خورا لوي یا ماکسیمال پوسېده د تاکلی شو، جوړوو

$$\frac{h}{10} = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{x+h}{10} = \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

که $h = \frac{10}{3}\sqrt{3}$ په دویم مساوات کې ځاېه ځای کړوو نو لاس ته راځي

$$\frac{x}{10} = \sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3},$$

یعنې $x = \frac{20}{3}\sqrt{3}$

لیکونکي:هیولیک،کرایخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننشل توابع(بلواک)

توان تابع

$$y = e^x = \exp(x)$$

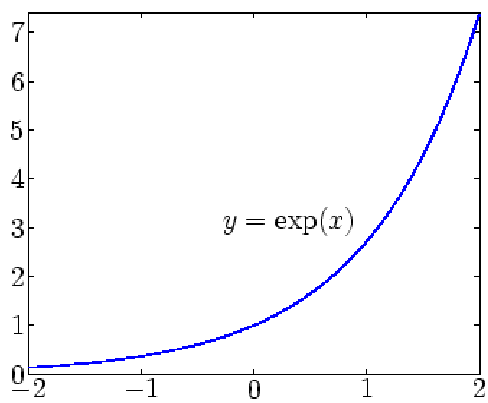
د اویلرEulerschen عدد $e = 2.71828...$ سره اکسپوننشل تابع بلل کيږي. دا د

تولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره مثبت(زاتیز) ده او فنکشنل مساوات

$$e^{x+y} = e^x e^y\ .$$

پوره کوي.

په خانګړې توګه دی $e^{-x} = 1/e^x$.



ليکونکي:هیولیک،هیورنر

اکسپوننشل تابع د ډېرو بیولوژيکي پروسو زیاتوالی روښانه یا تشريح کوي.

د بیلګي په توګه د یوه ساده نفوس مودل متناسب دی د اوسنیو نفوس تعداد $p(t)$
سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې

$$p(t + \Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t))\ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $0 \leftarrow \Delta t$ لپاره دا د ډېروالي قانو د $p(t)$ مودلی کیږي.

لاندې جدول د نړۍ نفوس ښايي د کلني ډېرېدنې سره.(اټکل ارزښت)

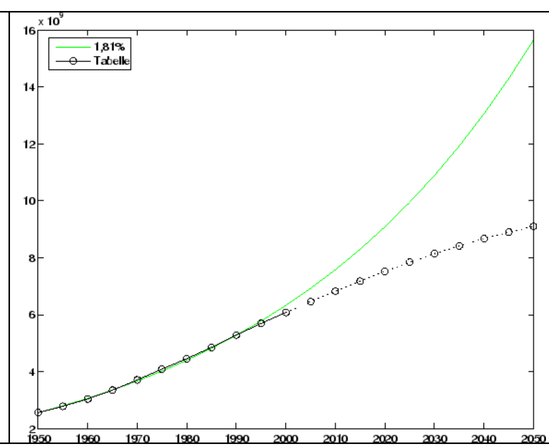
Jahr کال	Bevölkerungszahl د نفوسو تعداد	اټکل ارزښت Rate
1950	2555078074	1.76 %
1955	2779669781	1.87 %
1960	3039332401	2.02 %
1965	3345837853	2.16 %
1970	3707610112	2.05 %
1975	4088224047	1.80 %
1980	4456705217	1.79 %
1985	4854602890	1.77 %
1990	5283755345	1.54 %
1995	5690865776	1.37 %
2000	6080141683	1.25 %
2005	6460553564	1.12 %
2010	6823634553	1.03 %

(c) ketabton.com: The Digital Library

2015	7175675066	0.95 %
2020	7518010600	0.86 %
2025	7840660355	0.76 %
2030	8140344240	0.68 %
2035	8416742278	0.60 %
2040	8668391454	0.53 %
2045	8897073495	0.47 %
2050	9104205830	

کلنی د نفوسو منځنی ډېروالی په کلونو 1950-2000 کې % 1.81 وو. د 1950 کال وروسته د منځني ثابت ډېروالي سره.

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

د نړۍ نفوس به په 2050کال کې 16 میلیارده ته جګ شي(ټکي ټکي شوې کرِه (منحني)). په جدول کې اټکل د نفوسو د کمېدو څخه مخ ته ځي لیکونکي : هیولیګ، هیورنر	

د ګټې ګټه Zinseszins

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه پیلبډایي x د n -واره وکونو همداسي اخستنو د یوې Rate r ($r < 0$

bzwهږداسي . $r > 0$) د یوې ګنې ضریب $(1+p)$ له کبله لاندې پیل پای بدآیي ورکوي :

$$y = (1+p)^n x + \frac{(1+p)^n - 1}{p} r \, .$$

له دې سره $p = 1$ یوه 100% د ګټې د یوې ربحې د کلنۍ اېښوونه په ګوته کوي

موثره کلنۍ ربحه p_j د میاشتنۍ ګټوني ځخه شمېرى کیږي د یوې p_m ربحې (ګټې سره)

$$p_j = (1+p_m)^{12} - 1 \geq 12 p_m \, .$$

لیکونکي : هیولیک، هیورنر

بنستیز ه سرمایه په لومړني ربحېربود کې په پام کې نیول کیږي، اینسوونه او همداسي اخستنه یا راوستنه په لومړي ځل د هر ورپسي کال. دا د ا لاندې راکوي:

$$\begin{aligned} n = 1: &\quad y = x(1+p) + r, \\ n = 2: &\quad y = \big(x(1+p) + r\big)(1+p) + r. \end{aligned}$$

په ټولیزه توګه صدق کوي:

$$y = \Big(\cdots\big(x(1+p)+r\big)(1+p)+r\big)\cdots\Big)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= x(1+p)^n + \Big(1 + (1+p) + (1+p)^2 + \cdots + (1+p)^{n-1}\Big)r$$

دا په نوکانو کې د r افاده کیدی شي د هندسي جمعې فرمول سره واړول شي او سرې دا ورکړل شوی فرمول لاس ته راوړي.

لیکونکي : هیولیک، هیورنر

یو د 100000 یورو پور(قرضه) په کلنې ګټونه او یوې ګټونې یا ربحې % 5 سره د 10 کاله وروسته بېرته ورکړ شي. سرې د

$$y = 0\,,\ n = 10\,,\ p = 0.05\,,\ x = 100000$$

سره ګټه لاس ته راوړي:

$$r = 1.05^{10} \cdot 100000 \frac{0.05}{1.05^{10} - 1}$$

$$= 12950.46$$

د میاشتنی د $\frac{5}{12}\%$ په ګټوني یا په ګټه اېښوونې سره دا راکوي

$$n = 120\,,\ p = \frac{1}{240}$$

په ورته توګه

$$r = \left(\frac{241}{240}\right)^{120} \cdot 100000 \frac{\frac{1}{240}}{(\frac{241}{240})^{120} - 1}$$

$$= 1060.66$$

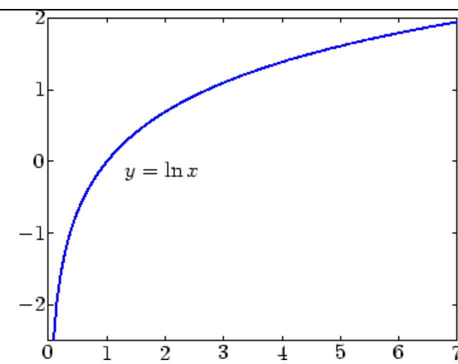
(c) ketabton.com: The Digital Library

د میاشتنی ګټې تادیه کونې ده، کلنی 12727.86 ده. دلته د مخه د ګټې تادیه کونه یو زیان منځ ته راولي. د $\frac{4}{12}$ % سره به دا د لاندې سره برابر وای:

$$\left(\frac{(1+\frac{1}{300})^{12}-1}{\frac{1}{300}}-12\right)\cdot 1060.66 = 235.96\,.$$

لیکونکي : هیولیګ، کرایخ

لوګاریتم Logarithmus

	د لوګاریتم تابع د اکسپوننشل تابع برعکس (په څټ) تابع ده: $y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y.$

دا $(0,\infty)$ په $\mathbb{R}$ کره مونوتون(یوغږیز) کره جګېدونکی تنظیموي او لاندې د تابع مساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

په خانګړې توګه لرو: $\ln(1/x) = -\ln x$

لیکونکی: هیولیګ،کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

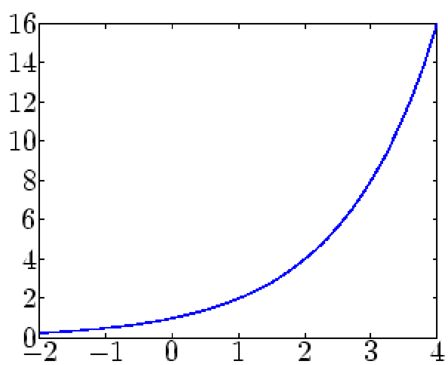
تولیز په توان تابع او لوګاریتم

د $a > 0$ لپاره تعریفوو :

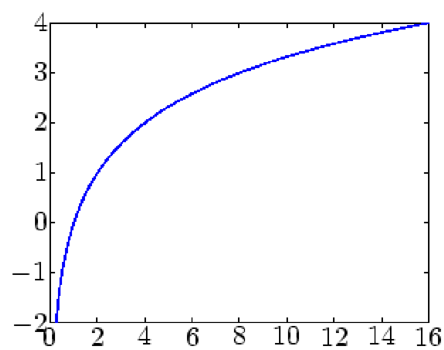
$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

د برعکس تابع(بلواک) $x = \log_a y, \quad y > 0.$ سره

په ځانګي توګه د 10 په بنسټ لوګاریتم لپاره لیکو $\log = \log_{10}$ او ld $= \log_2$ د دوه ګوني یا دوال لوګاریتم لپاره.



$f(x) = 2^x$



$f(x) = \mathrm{ld}(x)$

لیکونکی: هیولیک،کوپف

د توان او لوګاریتم لپاره شمېرقوانین

له تعریفونو او تابعمساواتو ځخه د اکسپوننشل - او لوګاریتمي توابعو لپاره لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s\, a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s/a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x \,. \end{aligned}$$

برسیره (سربېره) پر دې د مختلفو بنسټونو ترمنځ شمېربدلون لپاره اړیکې باور لري:

$$\log_b x = \log_b a\ \log_a x \,.$$

په ځانګړې توګه

$$\log x = (\log e) \ln x \,.$$

لیکونکی: هیولیک،کوپف

لاندې بېلګې د شمېرقاعدو استعمال روښانه کوي .

(i)

$$\ln(4x^2) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 =$$

$$= 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2) +$$

$$(2x) = 2\frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\frac{\ln x}{\ln 2}$$ ld

لیکونکی: هیولیک،کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاريتم شمېرونی

په لوګاريتم کې لاندې قانون باوري دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

له دې کبلخ کېدی شي دوه سکالا يا کچرېرنې يو په بل کېږدو او د نتسجې په توګه نه د دې عددونو جمعه بلکه ضرب لاس ته راځي.

د پورته ځبرې ځخه د بېلګې په توګه لاس ته راړو، چې $3.5 \cdot 2 = 7$. دلته لومړی 1 د پورته سکالا په 3.5 (لومړی ضريب) د په لاندې سکالا شمېرل کيږي. بالاخره 2 د پورته سکالا (دويم ضريب) د ضرب نتيجه په لاندې سکالا لوستل کيږي.

ليکونکي،هيوليک.کوپف، ويپر

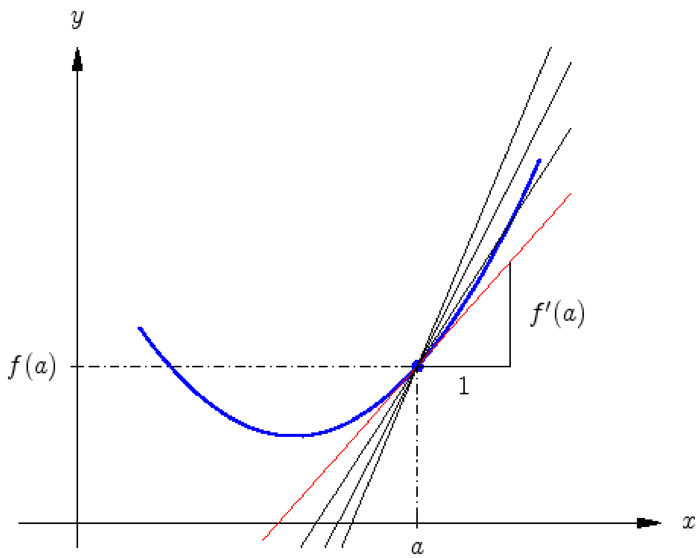
مشتق يا رابېلېدنه Ableitung

يو تابع f په يوه ټکي a کې مشتقوړ دی، که دا د رابېلېدنې يا مشتق په څېر نيوله شوې پوله(ليميټ)

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library



هندسي مشتقوړوالی په دې معنا دی، چې د غ،خوون(قطاعو) جګېدنه چې د

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

سره ورکړل شوي د تانجنت جګوالي په لور و هڅېري یا کورګنت شي.

د دې لپاره $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$ هم لیکو او جګ مشتقونه د $f'', f''', \ldots$ او همداسې د $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$ سره ښایو. یو فنکشن f په یوه ډېرۍ D مشتقوړ بلل کیږي، که $f'(x)$ د ټولو $x \in D$ لپاره شتون ولري.

لیکونکی:هیولیک،کویف

د تابع $f(x) = x^2$ مشتق

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مشتق $f''(x) = 2$ یو ثابت دی.

د یوه په خوښه مونوم $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ لپاره ، بینوم د فرمول په مرسته لاس ته راځي

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1}h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1},$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم ترم h^2 په ګوته کوي.

لیکونکی:هیولیګ،کوپف

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د جمعې قضیې په مرسته وشمېرل شي.

له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

د $t = x + h/2$ سره کمښترېش لاس ته راکوي:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\left((x+h/2)+h/2\right) - \sin\left((x+h/2)-h/2\right)}{h} =$$

$$= \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}.$$

له

$$\lim_{h \to 0} \frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

امله بنی اړخ د $h \to 0$ لپاره د $\cos x$ په لور هڅيږي.

غوره (مهم) مشتقونه

لاندې جدول د غوره توابعو مشتقونه راکوي: :

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		$r \neq 0$, x^r	$r\,x^{r-1}$
e^x	e^x		$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق کرښیزوالی Linearität der Ableitung

مشتق کرښیز دی دا په دې معنا چې د مشتقوړ توابعو f او g لپاره صدق کوي

$$(rf)' = rf', \quad r \in \mathbb{R},$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ضرب یا ځل قانون

د دوه مشتقوړ توابعو f او g مشتق دی

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

تولیز د ضرب $f = f_1 \cdots f_n$ لپاره صدق کوي:

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i}.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ضرب د قانو سره لاس ته رځي

$$\frac{d}{dx}(x^2 \ln x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1).$$

که $\sin x$ د ضریب په حېیث ورزیات کړي، نو بیا د ضرب قانو ن استعمال لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x(x^2 \ln x)\right] = \cos x(x^2 \ln x) + \sin x(x(2\ln x + 1)).$$

په بدیل ډول کېدی شي دا فرمول په دېرواره ضرب وکارول شي او لاس ته اري راوړي

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x(x^2 \ln x)\right] = \cos x(x^2 \ln x) + 2x(\sin x \ln x) + \frac{1}{x}(\sin x\, x^2).$$

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

د وېش قانون Quotientenregel

د دوه مشتقوړ توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړي توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د راشنل تابع

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

مشتق دی:

$$\frac{(1-2x)'(4+3x^2) - (1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2} = \frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2} =$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4+3x^2)^2}$$

د ضرب قانون سره يي بديل لاس تهراخي

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' = (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}\,.$$

ليکونکي:هيوليک،کرايخ

زنځيري قانون

د توابعو دزنځيروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$$

لپاره مشتق دی:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

د $f(y) = z,\ g(x) = y,\ h(x) = z$ سره دا هم ليکل کيږي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

.

)ليکونکي:هيوليک، کوپف

د زنځير قانون

$$h(x) = \sin\left(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د روښانه ونې لپاره تعریفیږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy}\sin(y)g'(x) = \cos\left(\ln(1+x^2)\right)g'(x)\,.$$

د دننني مشتق شمېرنه $g'(x)$ سر له نوې د زنځیري قانو له مخې صورت نیسي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

بدیلي کېدی شي مشتقیزه لیکندود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \cos(y)\frac{1}{w}2x = \cos\left(\ln(1+x^2)\right)\frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

لیکونکي:هیولیک، کوپف

ایمپلیځیت مشتقوړ توابع

د بیلګې په توګه د

$$E:\ x^2 + 3y^2 = 7$$

له لارې ورکړ شوې ایلیپسي (هګۍ یا بیضوي) له لارې لرو:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

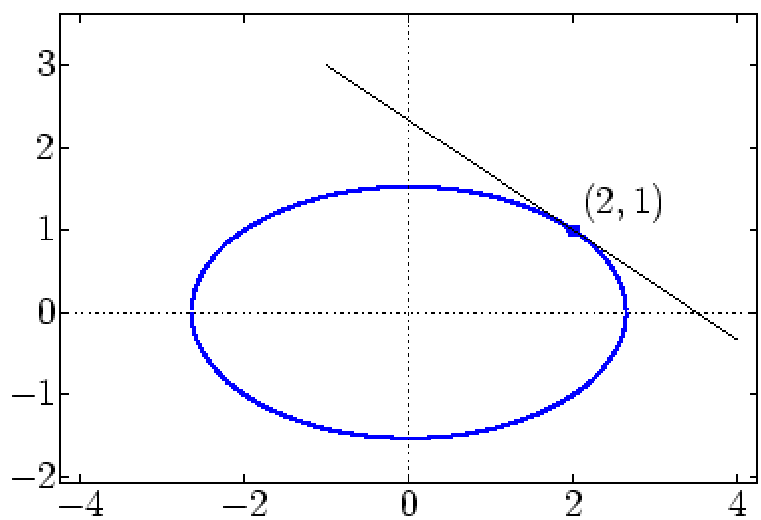
همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$$
.

سره د تانجنت جګوالی $y \neq 0$ باندې په یوه ټکي د E له دې سره کېدی شي په لپاره لاس ته راځي $(2,1)$ وټاکل شي. د بېلګې په توګه د

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$
.



په ورته توګه کېدی شي لوړ یا جګ مشتقونه هم وشمېرل شي. د yy' لپاره د ضرب قانون کارول یا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx}\,(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y'' = -\frac{1+3(y')^2}{3y}$$
.

ټاکلي $y'(x)$ د يوه ټکي د کواوردينات اينوولو او همدا اوس د E بيرته په ارزښت له لارې څرګند ارزښتونه وټاکل شي.

ليمږنکي:هيوليګ،کنپف

لوګاريتمي مشتق

فرمول

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

کېدی شي د بڼې $y = g(x)^{h(x)}$ مشتق نيوني ته د $g(x) > 0$ سره وکارول شي. لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)}\frac{d}{dx}\big(h(x)\ln g(x)\big)\ .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

تابع

$$f(x) = x^x$$

د $x > 0$ سره مشتق دی.

$$f'(x) = x^x\frac{d}{dx}\ln(x^x) = x^x\frac{d}{dx}(x\ln x) = x^x(\ln x + 1)\ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $g(x) = x^{\ln x}$ لپاره لاس ته راخي

$$g'(x) = x^{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x)^2 = 2x^{\ln x}\frac{\ln x}{x}\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

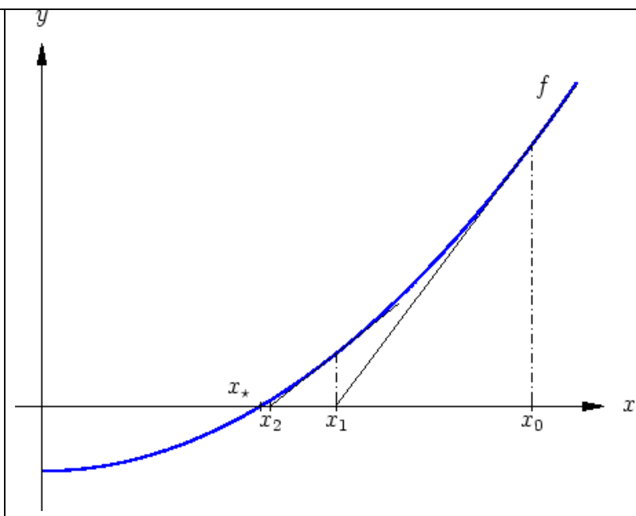
نیوټن تلنلار یا قانون Newton-Verfahren

د نیوټن قانون سره د یوه تابع f صفرځای کېدی شي و تاکل شي.

د $x_0, x_1 \, \ldots$ پرلپسي یا ترادف نږدي ارزښتشمېرني یا Approximation د کرښیزوالی له لارې وګټل شي. نږدېونه

x_{l+1} د تانجنت ِغوښتکی دی په $(x_l, f(x_l))$ ټکي کې د x - محور سره.

$$x_{l+1} = x_l - f(x_l)/f'(x_l)$$



د یوه ساده صفرځای $x_\star$ ($f'(x_\star) \neq 0$) لپاره د نیوټن –ایتراشن Newton-Iteration ځای - لوکالي مربعیز پولې ته هځیږي (کونورګنت) ، دا په دې معنا چې

$$|x_{l+1} - x_\star| \leq c\ |x_l - x_\star|^2$$

د پیلټکي x_0 لباره د $x_\star$ په یوه پوره کوچني چاپیریال کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بابلیانو ریښه (جذر)نیونه

داد بابلیانو څخه کارول شوی ایتراشن(لاتین : تکرار Iteration)

$$x \longleftarrow (x + a/x)/2$$

د یوه مثبت عدد a دریښي شمېرلو لپاره د ټیکي کتني څخه د نیوټن -تګلار په څېر د $f(x) = x^2 - a$ لپاره ځان راباسي

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

د $a = 2, x_0 = 1$ لپاره نږدې شمېرني (Approximationen) لاس ته راځي.

1

1.5

1.41666666666666666666666666666666666667

1.41421568627450980392156862745098039215 7

1.41421356237468991062629557889013491011 7

1.41421356237309504880168962350253024361 5

1.41421356237309504880168872420969807857 0

پولې ته تلنه خورا ګړندۍ ده. د هر پل سره د ټیک شوو ځایونوتعداد په نږدې توګه (د کرښې سره په نخښه شوی) دوه واره کیږي. مربعیز پولې ته تلنه کېدی شي په دې بېلګه کې د ساده بڼه بدلون سره وښوول شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{l+1}-\sqrt{a}=(x_l+a/x_l)/2-\sqrt{a}=\frac{1}{2x_l}(x_l-\sqrt{a})^2.$$

$x_0 \neq 0$

د نیوټون تلنلار هندسي روښانه وني ښخه لاس ته راځي، چي د ټولو لپاره تکرار پولي ته ځي.

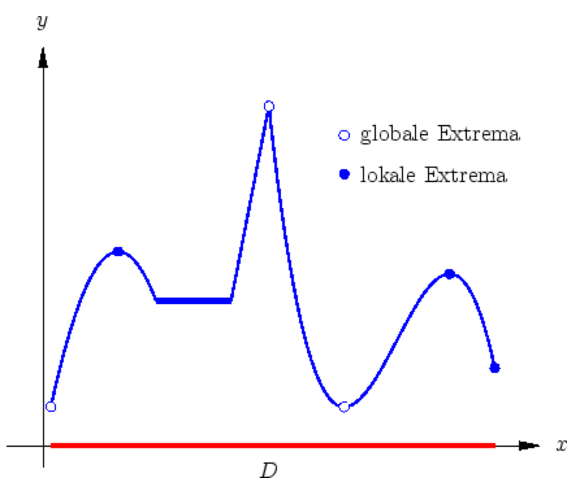
افراطیت Extrema

یو تابع f په a کي په ډېرى D یو ځاى اړوند مینیموم لري، که وي:

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in D.$$

د ځاى اړونده مینیموم سره د تابع ارزښت $f(a)$ په یوه خورا کوچني چاپیریال $(a-\delta, a+\delta) \cap D$ کي مینیموم دى.

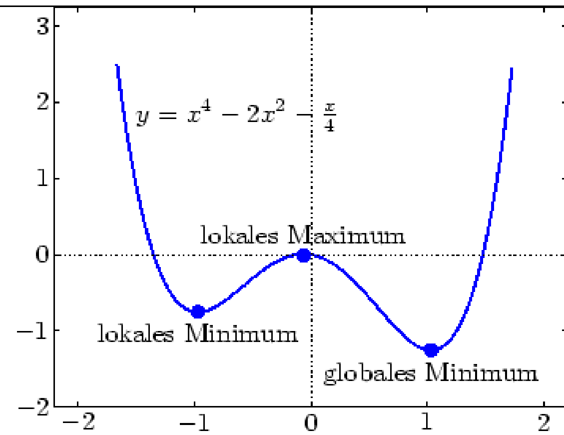
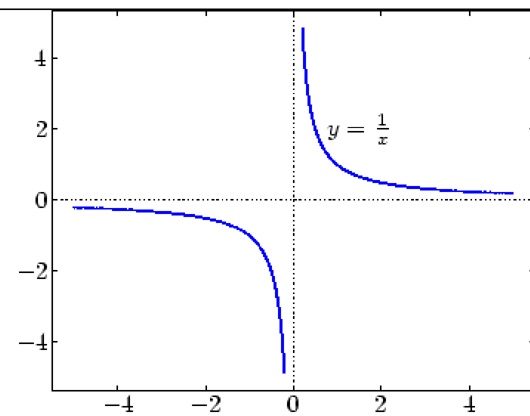
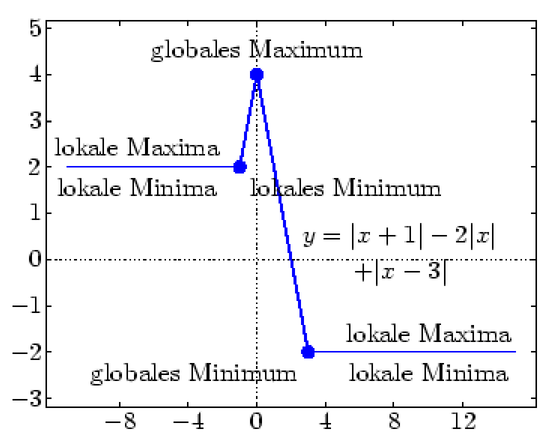
ګلوبال او لوکال (مطلق او ځاى اړونده) خورا جګ ارزښتونه (ماکسیموم) په ورته توګه تعریف دي.



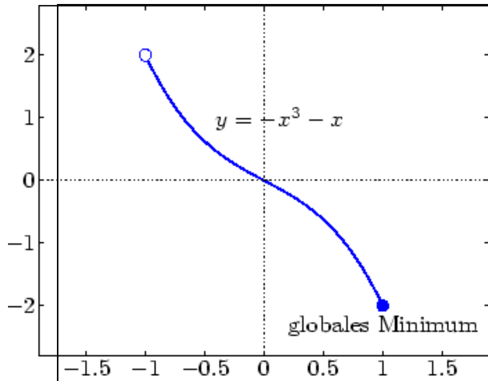
په یوه بند انتروال په ټوټه ډول نابرېکېدونى او مشتقوړ تابع کېدى شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتق په په صفرځایونو، پرېکېدځایونو یا ژۍ ټکو کې رامنځ ته شي. دا ډول ټیوپ کېدى شي د جګو مشتقونو په مرسته او دتابع ارزښتونو د پرتله کوني له لارې پیدا کړاى شي. لیکونکي:هیورنر،هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې به یو څو تیوپیکي حالتونه تر بحث لاندې راښي یا و څېړل شي.

تابع $f(x) = x^4 - 2x^2 - x/4$ د $D = \mathbb{R}$ سره دوه مینیما لري او یو ماکسیما. مینیمومو د خورا کوچني تابع ارزښت سره مطلقه دی. یو مطلق ماکسیما شتون نه لري، ځکه چي د $f(x) \to \infty$ لپاره $x \to \pm\infty$.	
تابع د $f(x) = 1/x$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ سره کوم افراطي ارزښت نه لري. که یو تابع په واز انټروال کې ثابت وي، نو دا ځایونه (څاییز (ځای اړونده) یا لوکال) ماکسیمال او هم (څاېز) مینیمال دي، د یوه کره یوغږیز تابع سره افراطی ارزښتونه د ژی ټکو سره نیول کیږي، که دا دد تعریفورشو پوري اړه ولري.	 

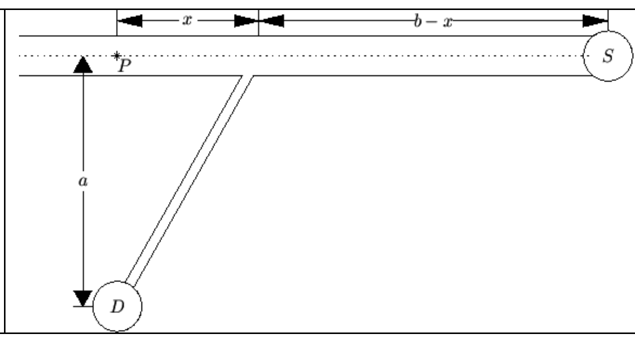
(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: هيوليک، هيورنر

له يوه کلي D څخه يوه ښار S ته يو سرک جوړيږي. کلي ته په واټن a همدا اوس ښار ته يوه شاه لار (ګړندی لار) جوړه ده. د ښار څخه د P ټکي پورې، چې کلي ته نږدې ګړندی لار پرته ده، اوږدوالی b لري.

سيده کرښيزه توګه لار جوړيږي.له کومې چې ښا رته زر رسېدل تظمينوي، که په ګړندی لار له $v_a = 120$ km/h منځنی چټکتيا(سرعت) او $v_n = 60$ km/h په دنوې څنګيزه توګه لار لاړ شي.



واټن $x \geq 0$ د P او فرعي توګه سرک ترمنځ په ګړندي د واټن $x \geq 0$ شمېرنه د اړيين وخت د مينيمال کولو له لارې.

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

ښار ته د رسيدو لپاره .

د مشتق صفر اينوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0\,,$$

راکوي

$$v_a x = v_n\sqrt{a^2+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_m = a/\sqrt{3}$$

د لوکال انحرافي ځای په څېر. ایا چې دا مینیموم دی، باید دا د وهل شوې لار وخت د انتروال د پای ټکو لپاره و ازمایل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a+b}{v_a}\,, \qquad t(0) = \frac{2a+b}{v_a}\,, \qquad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. نامساوات $t(b) \geq t(x_m)$ ورته دي و دې لاندې ته:

$$t(b) \geq t(x_m) \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{3}a+b$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a^2+4b^2 \geq 3a^2+2\sqrt{3}ab+b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2-2\sqrt{3}ab+3b^2 = (a-\sqrt{3}b)^2 \geq 0\,.$$

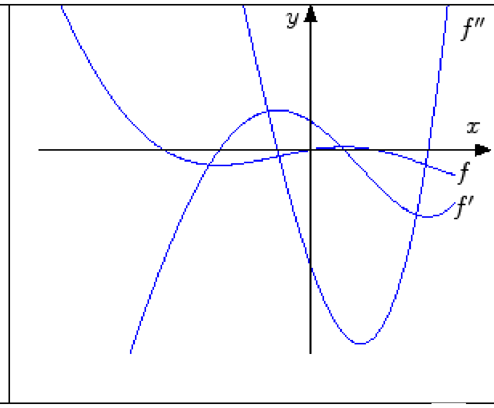
دا اخرني نامساوات تل پوره کیږي، او له دې سره x_m اوپټیمال دی، که $b \geq a/\sqrt{3}$ وي.

په بل حالت کې x_m په انتروال $[0,b]$ کې نه دی پروت او په ژی ټکي b پروت مینیموم ته ، یعنې ښار ته په سیده ټرنلار، رسېدی شي.

لیکونکي:هیورنر، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

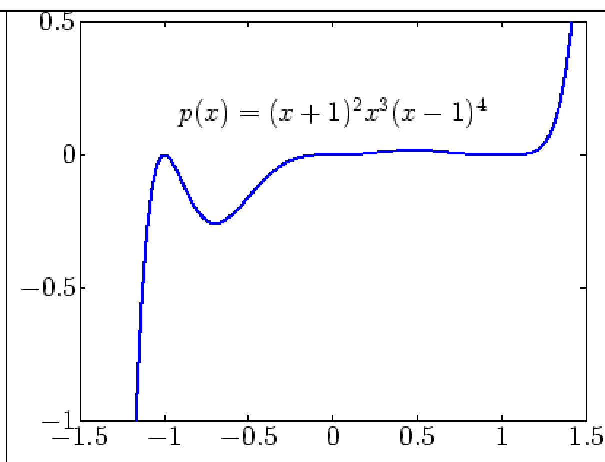
افراطي ارزښتونو ازماېښت Extremwerttest

د افراطي ارزښتونو ډول یا تیوپ باندې کیدی د جګو مشتقونو په مرسته پرېکړه وشي که f دوه واره ناپرېکېدونکی او مشتقوړ وي او $f'(a) = 0\,, \qquad f''(a) > 0$ $(f''(a) < 0)\,,$	

نو f په a کې یو ځای اړونده مینیموم(ماکسیموم) لري. که دویم مشتق د a په ځای کې ورک شي، نو باېد جګ مشتقونه پرېکړې ته راکښل شي یا راوړل شي. که باور ولري:

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{او} \quad f^{(n)}(a) \neq 0\,,$$

نو f په a کې تیک هلته یو افراطي ځای لري، که جوړه وي. په دې حالتکې f په a کې یو ځای اړونده خورا جګ – یا همداشي خورا تیټ ټکی لري، که $f^{(n)}(a) < 0$ همداسي $f^{(n)}(a) > 0$ وي.

پولینوم $p(x) = (x+1)^2 x^3 (x-1)^4$ په $x = -1$ کې یو ډبل، په $x = 0$ کې یو درېواره او په $x = 1$ کې یو څلورواره صفرځای لري.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

صدق کوي

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0\,.$$

په $x=-1$ کې p یو مینیموم لري. په $x=1$ کې p یو ماکس لري، ځکه چې

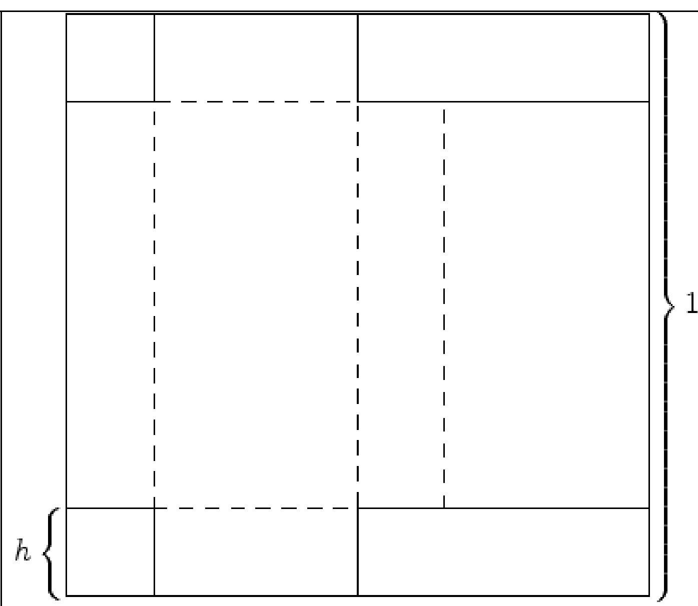
$$p(1) = \ldots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0\,.$$

بالاخره د p

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او یو مخنخښه بدلون په $x=0$ کې په سرچینه کې افراطي ځای نه شته.

کوتۍ Schachtel

	د دې ورکړې شوي غوښ نمونې په مرسته دې د یوه مربع ډوله کارتوني کاغذ څخه خورا لوي کوتۍ جوړشي، چې خورا لوي حجم (ډکۍ) لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حجم یا ډکی دی:

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

اوږدوالی سور جګوال

د مشتق صفرځایونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

تريې

$$h = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

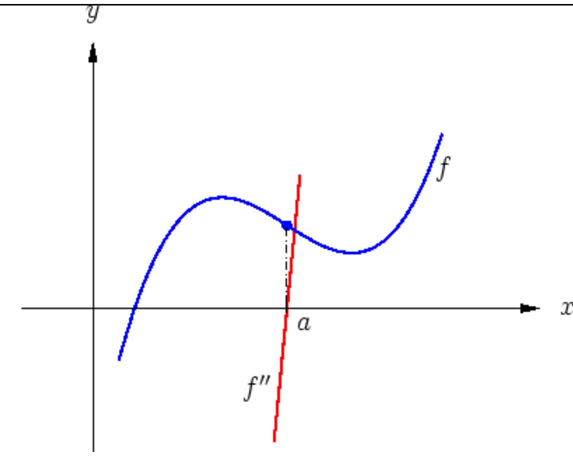
د ممکنه ځای اړونده افراطي ځایونه لاس ته راځي. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور دی او $v\left(1/6\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}$.

دا چې د ژی ټکو $h = 0$ او $h = 1/2$ لپاره حجم یا ډکی دی، نو کوتی د $h = 1/6$ لپاره خورا لوي حجم لري.

لیکونکي: هیولیک،هیورنر

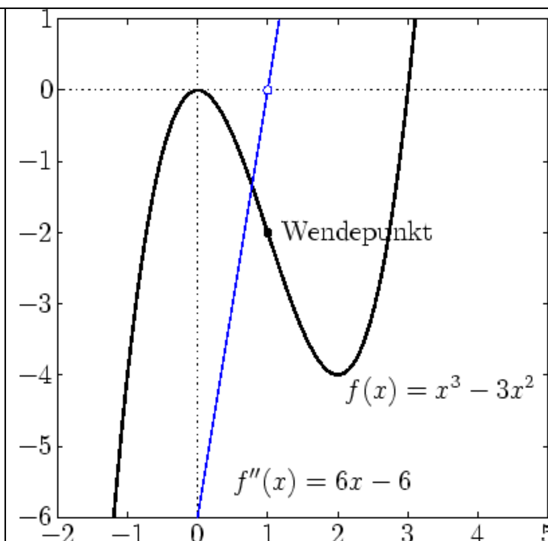
اوړونټکي (نقاط انعطاف Wendepunkte)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو تابع f په یوه اوړونټکي a کې دویم مشتق مختخبنه بدلوي (یعني په دې ټکي کې تابع خپله لور بل لور ته اړوي) .	

د یوه پوره هوار تابع لپاره اړین دی، چې $f''(a) = 0$ او پوره دی، چې $f'''(a) \neq 0$

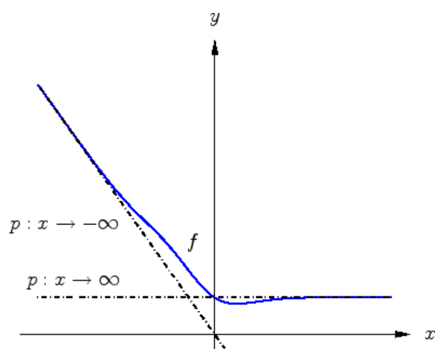
لیکونکي: هیولیک،هیورنر

تابع یو مکعبي پولینوم ښايي. دا چې دویم مشتق کرښیز دی، نو ټیک یو اوړونټکی(د انعطاف ټکی) شتون لري لیکونکي: هیولیک، هیورنر	

ګاونډیې یا لنډ: ګاونډ (مجاورتها (Asymptoten

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو تابع د یوه تابع f اسیمپتوت دی ، که $f(x)-p(x)\to 0$ وي د $x\to\infty$ یا د $x\to-\infty$. لپاره.



په ورسره بلد ډول p د f په څېر یوه ساده بڼه لري او د دې په چوپېرکې ، چې د $f(x)$ د څرنګوالي حالت د لوی x لپاره وڅېړي.

د ځانګړو معناو کربنیز اسیمپتوتونه $p(x)=ax+b$ دي. دوي د نورو ترڅنګ د منحني یا کږو بحث کې یو رول لوبوي.

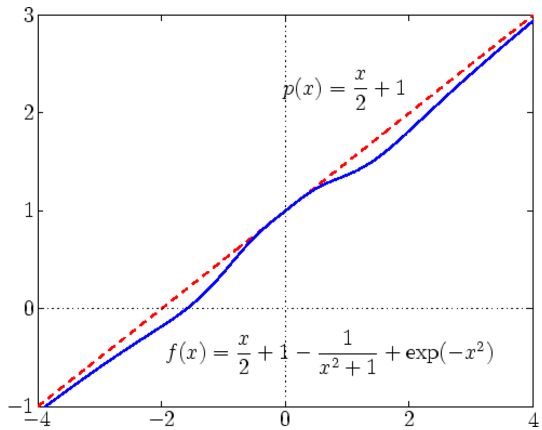
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د یوه څېره شوي یا متشکل شوي تابع $f(x)$ لپاره د $|x|\to\infty$ لپاره تناسب د کربنیزو ترمونو له خوا تاکل کیږي، ځکه چې

$$\lim_{|x|\to\infty}\exp(-x^2)=\lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=0\,.$$

له دې لاس ته راړنې سره کربنه $p(x)=x/2+1$ اسیمپتوت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د راشنلتابع ګاوند یا- اسیمپټوتونه Asymptoten rationaler Funktionen

یو راشنل تابع

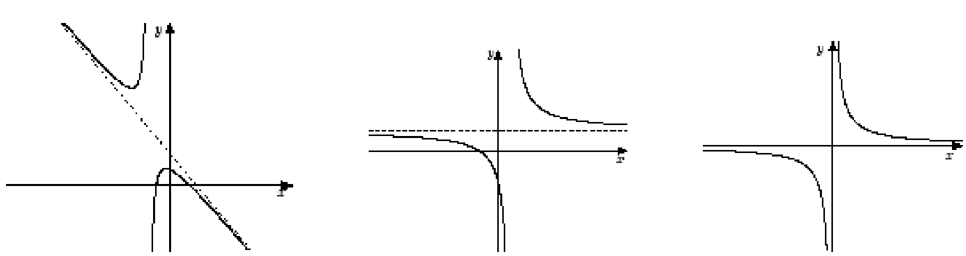
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

تیک هلته یو کربښز اسیمپټوت لري که $q+1$ له ګراد یادرجې $p \leq$ وي.

د Grad q <Grad p لپاره باور لري

$$\lim_{p \to \pm\infty} r(x) = 0 \,,$$

داپه دې معنا چې د x -محور اسیمپټوت دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د $q+1$ Grad $p \leq$ Grad $q \leq$ Grad e لپاره اسیمپتوت لاس ته راځي د
پولینوموېش له خوا:

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

د Grad q $\tilde{p} <$ Grad سره. اسیمپتوت پرته (افقي) ده $(a = 0)$ ، که
Grad q $p =$ Grad. وي.

که د صورا درجه له یوه څخه زیاته د محرج له درجې لویه وي، نو یوه اسیمپتوتیکي
پولینوم لري د ≥ 2 درجې

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د راشنل توابعو

$$r_1 = \frac{4x+3}{2x+1}$$ او $$r_2 = \frac{2x^2}{x+1}$$

لپاره دپولینوم وېش له لارې لاس ته راځي:

$$r_1(x) = 0x + 2 + \frac{1}{2x+1}$$

او

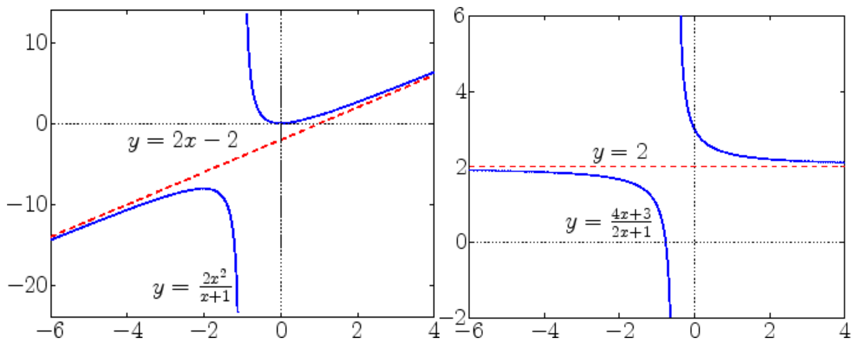
$$r_2(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x+1}$$

اسیمپتوت یا ګاونډ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y_1 = 2$ او $y_2 = 2x - 2$.

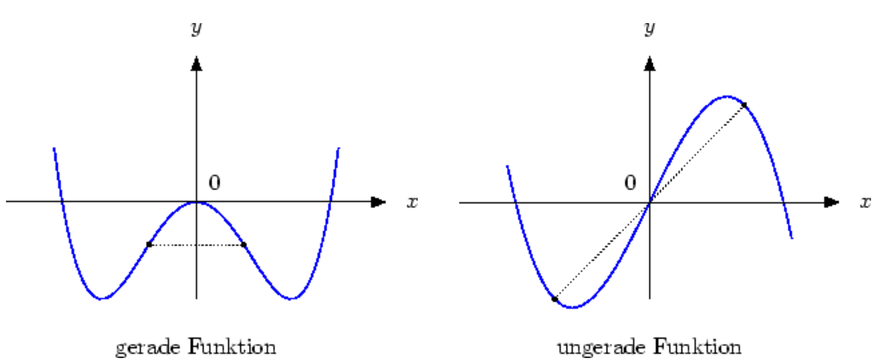
دا دوه بېلګې په لاندې ځېرو کې روښانه شوې دي.



ليکونکي: هيوليک، هيورنر

سيومتري Symmetrie

يو تابع f جوړه(جفت) دی، که $f(x) = f(-x)$ وي ، دا په دې معنا، چې که ګراف د y-محور ته سيومتري وي. د يوه ناجوړه (تاق) تابع لپاره $f(x) = -f(-x)$ دی، او ګراف و سرچينې ته ټکی سيومتريک دی.

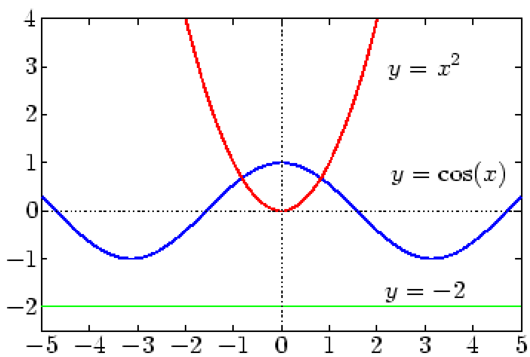


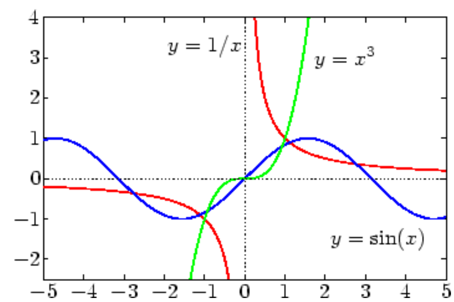
(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جوړه او ناجوړه توابعو ضرب جوړه دی. د دې برعکس د یوه جوړه او یوه ناجوړه تابع ضرب ناجوړه یا طاق دی. د جمعې او تفریق جوړولو سره ډول ساتلی پټیږي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر،کنش

دا لاندې څېره ښي لور ته یوڅو جوړه او کیڼ لور ته یو څو ناجوړه توابع ښايي.





د مناسبو کمبینېشنونو جوړولو سره نورې بېلګې لاس ته راځي. نو   توابع

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \qquad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x) \sin x - g(x) x^3$$

ناجوړه دي.

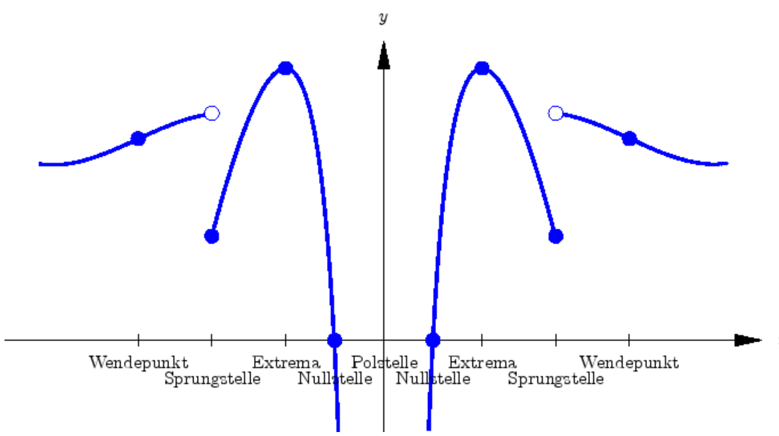
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر،کنش

د کږو یا منحنیو خبرې اترې(بحث)

د یوې تابع د څرنګوالي حالت د قضاوت لپاره کېدی شي لاندې ټکي په پام کې ولرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- سیومتر Symmetrien
- Periodizität تل بېرته راګرځېدنوالی
- Unstetigkeitsstellen پرېکېدنځایونه
- (Nullstellen ⟶ Vorzeichen مخنښنه (صفرځایونه
- (Extrema ⟶ Monotoniebereiche همغږیزوالي وشوګاني) افراییت
- (Wendepunkte ⟶ Konvexitätsbereiche د کونوکسی ورشو) اوړونتېکی د انعطافنقطه
- Polstellen قطبځایونه
- Asymptoten اسمپتوتي یا ګاونډیتوبونه



د توابعو داسي یو تحلیل د ګرو خبرې اترې یا د منحنیو بحث بلل کیږي

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د کږو بحث ښوول یا روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin(3x)$$

خیږو .

سیمتري: دا چې $\sin x = -\sin(-x)$ ناجوړه تابع دی..

(c) ketabton.com: The Digital Library

تل ببرته راګرځېدنه يا پريوديځيتي: تابع پخپله لکه د ساين تابع پخپله 2π - پريودي ده او په راتلونکي کې فقط په انتروال $[-\pi,\pi]$ ترڅېړنې راځي.

د پرېکېدنې ځايونه: تابع له ناپرېکدونکو توابعو مرکبه جوړ هشوې او له دې امله پرېکېدنځايونه نه لري.

صفرځايونه: د جمعي(زياتون) قضيې سره $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$ دی:

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع په 0 او $\pm\pi$ کې صفرځايونه لري..

افراطيت: تابع

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\, \cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x \overset{!}{=} 0$$

د $\cos x = 0$ يا $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره ورکيږي ، نو

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4 .$$

دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعريف او پريوديکي ده، ژيټکي ترڅېړنې نه راځي.

د دويم مشتق د مخنخښې يعنې

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\, \sin x$$

مخنخښې او تابع ارزښتونو د پرتله کونې له لارې کېدی شي د افراطيت تيوپ يا ډول وټاکل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اوړونټکی(نقطه انعطاف)

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x \overset{!}{=} 0$$

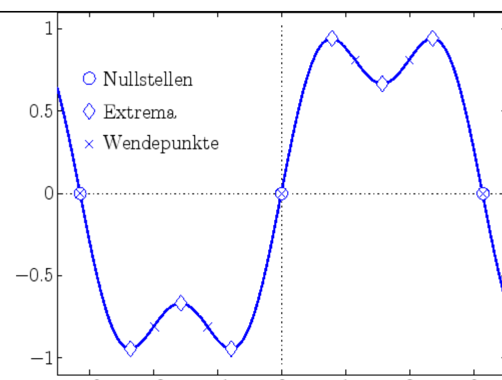
د $\sin x = 0$ یا $\sin x = \pm\sqrt{5/6}$ لپاره پوره دی، دا په دې معنا چې

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی. نو تابع په $(0,0)$ او $(\pm\pi,0)$ کې اوړونټکي لري، همداسي په $(-1.99,-0.81)$, $(-1.15,-0.81)$, $(1.15,0.81)$ او $(1.99,0.81)$ کې نږدې ازبنتونه لري.

قطبونه : ناپرېکیدونکي توابع قطبځایونه نه لري.

اسیمپتوتونه: تابع پریودیکي او نا ثابت دی، نو اسیومپتوتونه نه لري.



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه :

د یوه کړې بحث د ښوونې لپاره یو تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترخېړنې لاندې نیول کیږی.

سیومتري: صورت ناجوړه(طاق) او مخرج جوړه(جفت) دی. نو تابع ناجوړه دی، داپه دې معنا چې سرچینې ته ټکی سیومتریک دی.

پریودیوالی یا تل ببرته راګرځېدنوالی: تابع پریودیکي نه دی.

د پرېکېدنې ځایونه: صفرځایونه ± 1 د صورت صفرځایونه نه دي . له دې سره f په $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ باندې ناپرېکېدونکی دی.

صفرځایونه: صورت د $x = 0$ لپاره ورکیږی.

افراطیت:

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2-1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

دا چې تابع ساده صفځایونه لري، نو افراطیت فقط ځای اړوند دی. افراطي ارزښتونه دي:

$(-2, -4/5)$ ځای اړوند خورا جګ ټکی ، $(2, 4/5)$ ځای اړوند خورا ټیټ ټکی.

له دې سره کېدی شي، چې د f ډول یا ټیپ د کوالیتاتیو حالت ښخه. دا چې $f(x) \to -\infty$ د $x \to -\infty$ او $x \to -1$ لپاره ، باید په انتروال

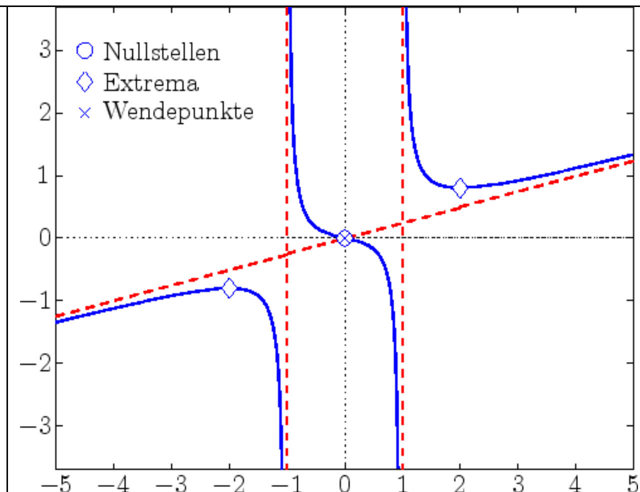
(c) ketabton.com: The Digital Library

$(-\infty,-1)$ کي يو ځای اړونده مينيموم ولري. په ورته توګه په $(1,\infty)$ کي لږ تر لږه يو ځای اړونده خورا ټيټ ارزښت.

اوړونټکی (نقطه انعطاف) :

$$f''(x)=\frac{-80x^5+398x^3+42x}{20(x^2-1)^3}\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

په دې ځای کي دريم مشتق صفر نه دی.

قطبځايونه: تابع په $x=\pm1$ کي ساده صفرځايونه لري، اسيمپتوتونه: ديوه پولينوم ويش خخه $p(x)=5x/20+0=x/4$ د اسيمپتوت په توګه لرو. ليکونکي:هيوليک،هيورنر	

بېلګه:

د کږې يا منحني بحث لپاره لاندې تابع تر څېړنې لاندې نيسو:

$$f(x)=e^{-x^2}+\frac{4|x|}{e^4}$$

سيومتر:

داچې x^2 او $|x|$ جوړه دې تابع جوړه دی، داپه دې معنا چې سيومتريک و y-محور ته.

پريوديوالی: تابع پريوديک نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرېکېدنځایونه: تابع د ناپرېکېدنتوابعو څخه مرکبه (یوځای ایښول) شوې ده او له دې امله پرېکېدنځایونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت توابعولپاره ټول مشتقونهپه صفرځای کې پرېکېدونکي دي.

صفرځایونه: اکسپوننشل تابع تل مثبتّ(زاتیزه) ده، د مطلق ارزښت تابع نامنفي ده. نو صفرځایونه نه شته.

افراطیت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\text{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2 \,.$$

سرېېره پردې دې کریتیکل ټکی $x = 0$ په پام کې وي، چېرته چې مشتق پرېکېدونکی دی.

تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف دی، د x د $\pm\infty$ په لور حالت ته دې پام وي.

دا چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره f لږ ترلږه یو مطلق مینیموم لري، مګر هیڅ مطلق ماسیموم. پرتله د y - ارزښت کریتیکل ټکي

$$(-2, 9/e^4) \qquad (0,1) \qquad (2, 9/e^4)$$

ښایي، چې په $x = \pm 2$ کې مطلق مینیموم نیولکیږي. داچې f په انتروال $[-2, 2]$ یو مینیموم او هم یو ماکسیموم لري، لاس ته راځي چې $(0,1)$ یو ځای اړونده مینیموم دی.

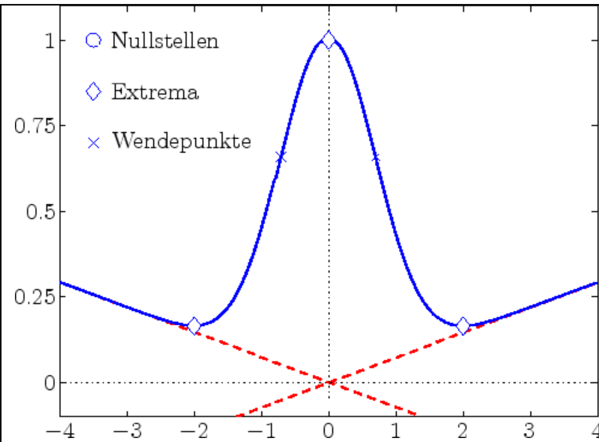
اوړونټکي :

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

دیم مشتق په دې ځای کې $\neq 0$ دی.

قطبځایونه: تابع قطبځایونه نه لري. اسیمپتوتونه: دا چې e^{-x^2} له $\lvert x \rvert$ څخه د $x \to \infty$ لپاره ګړندی د صفر په لور درومي، تابع اسیمپتوت $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ او ی: لیکونکي هیورنر، هیولیک	

د ریمن انتیګرال Riemann-Integral

دیوه توټه ډوله (په توټه توټه کې) ناپرېکېدونکی تابع f ټاکلی انتیګرال د

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

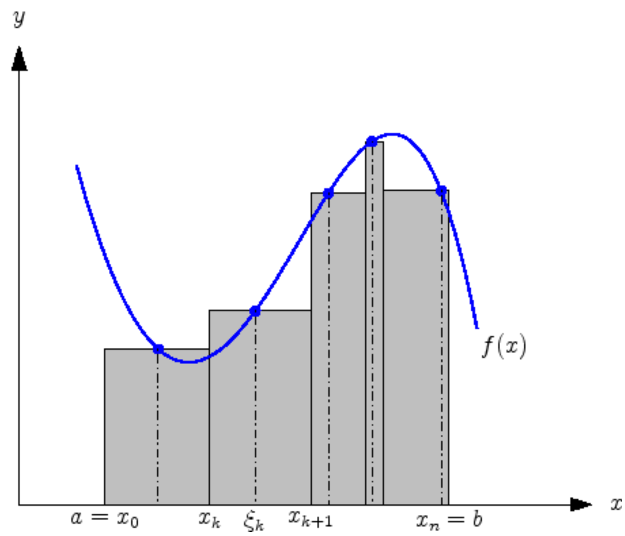
له خوا یا سره تعریف دی. دلته $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ د $[a,b]$ توټه ونه بنایي،

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\,, \qquad |\Delta| = \max_k \Delta x_k\,,$$

د انتروال ماکسیمال اوږدوالی دی او

ξ_k په خوښه ټکی دی په k -م انتروال کې. د انتیګرال تعریف په بنې لور جمعې د ریمن – جمعو په نامه یادیږی.

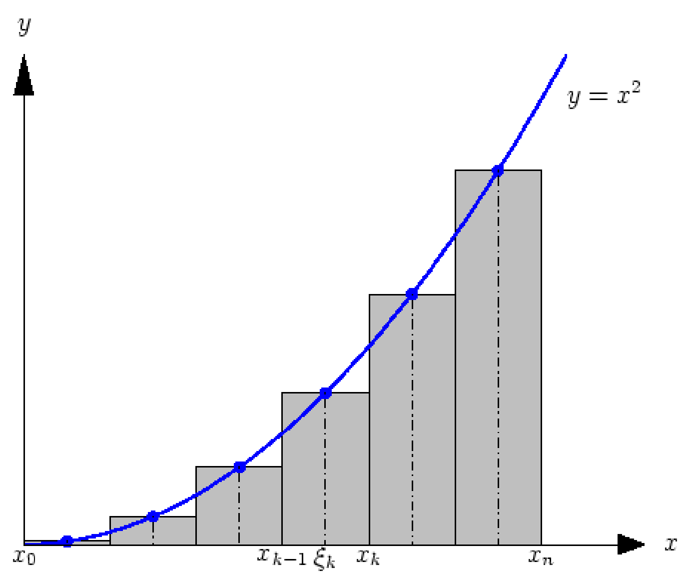
(c) ketabton.com: The Digital Library



د مثبت f لپاره $\int_a^b f(x)\,dx$ د سطحې مساحت دی د f د ګراف لاندې.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنرو ويپر

د $\int_0^1 x^2\,dx$ د ريمن انتيګرال په حيث راوړنې سره کېدی شي د ټوټه ونو پرلپسې(ترادف)



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta_n : x_i = i/n \,,\, i = 0, \ldots, n \,,$$

وکارول شي د ارزښت شوو ځايونو

$$\xi_i = (2i-1)/(2n) \,,\, i = 1, \ldots, n \,,$$

سره د n -مې ټوټه ونې لپاره.

د تعريف سره سم لاس ته راځي:

$$\int f_{\Delta_n} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{2i-1}{2n} \right)^2 = \frac{1}{4n^3} \left(4 \sum_{i=1}^{n} i^2 - 4 \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \right)$$

$$= \frac{1}{4n^3} \left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

او له دې سره

$$\lim_{n \to \infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

.

بنسټيزه تابع Stammfunktion

يو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټيز تابع ده، او د دې لپاره ليکو

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټول بنسټيزو توابعو ډېرۍ يا سټ د ی ، چې د f ناټاکلی انټيګرال بلل کيږي. د انټيګرېشن ثابته په خوښه ده. د بېلګې په توګه

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

د $F_a(a) = 0$ سره يو ممکنه بنسټتابع دی.

د ټولو ساده توابعو لپاره د داسې بنسټيزو توابعو داسې اکسپليځيټ ورکړه ممکنه نه ده، د دې لپاره بيلګه ده: $f(x) = \exp\left(x^2\right)$.

هر تابع

$$F_1(x) = x^3 + 2\,,\quad F_2(x) = x^3\,,\quad F_3(x) = x^3 - 1$$

د

$$f(x) = x^2\,.$$

يو بنسټيز تابع دی.

د $f(x) = \frac{1}{x}$ لپاره د $c > 0$ سره

$$F(x) = \ln(c|x|)$$

يو بنسټيز تابع دی.

ليکونکي: هيوليک،کرايځ

د انټيګرال شمېرنې اصلي جمله

(c) ketabton.com: The Digital Library

که F د یوه ناپرېکړدونکي تابع f بنستیزه تابعوي، داپه دې معن، چې $f = F'$ ،
نو باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

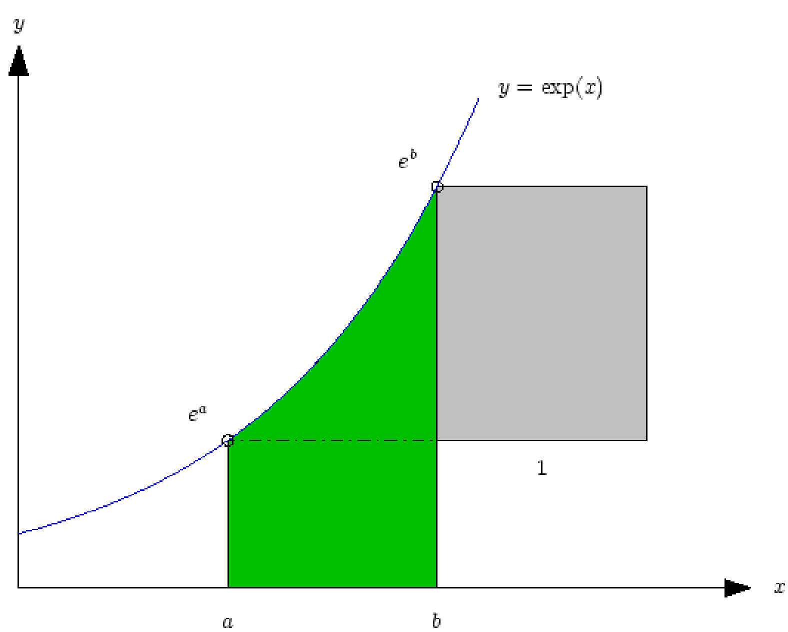
همداسې په لنډ لیکډول

$$\int_a^b f = [F]_a^b \ .$$

یو ټاکلی انتیګرال کېدی شي د بنستیزو توابعو د انتوال په پای ټکو کې د تابع ارزښتونو د کمښت په ځبر وشمېرل شي.

لیکونکي: هیورنر، هیولیک

د اکسپوننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشلتابع دی او له دې امله لرو:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a\,.$$

د a او b ترمنځ دګراف سطحه مساوي ده د سور 1 او د تابع ارزښتونو دجګوالي واټن څخه جوړ ولاړګوديز (مستطيل).

د لوګاريتمي تابع $F(x) = \ln(x)$ مشتق $F'(x) = 1/x\,,\; x \in \mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x\,dx = \ln(b) - \ln(a)\,, \quad a,b \in \mathbb{R}^+\,.$$

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

د $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ يو بنسټيز تابع $F(x) = \arctan x$ دی . په تعقيب لرو

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

د کمښت سره verifiziert ، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

د $f(x) = \tan x$ بنسټيز تابع دی:

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

د دې پايله ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{\pi/4} \tan x\, dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347\,.$$

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

يو پلانېټ د M کتلې سره يو د ګراويتيشن (راکښنې ورشو) ورشو توليدوي، چې په يوه تن يا بدن د m کتلې سره يوه قوه $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ استعمالوي. د لته γ د ګراويتيشن ثابته ده او x د درونډ ټکو (د ثقل مرکزونو) واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره بنسټيز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې يو بدن د a څخه و b ته په واټن يوسي، بايد کار

$$\int_a^b F(x)\, dx = \gamma m M \int_a^b \frac{1}{x^2}\, dx = -\left[\gamma m M/x\right]_a^b$$

$$= \gamma m M(1/a - 1/b)$$

سرته ورسيږي .

د a لپاره مساوي د پلانت وړانګه او $b \to \infty$ کېدی شي د کينېټيکي انرژي سره د مساوي اينسوني له امله داسي په نامه د تېښتي چټکتيا يا سرعت v و ټاکل شي،داپه دې معنا چې چټکتيا ، چې اړيينه ده، د يوه پلانېټ ګراويتېشن ورشو څخه وو تلی شي:

$$\frac{m}{2}v^2 = \gamma \frac{mM}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma \frac{2M}{a}}\,.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2$ km/s. لرو.

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوره – یا راوتلي بنسټیز توابع

لاندې جدول د زیات رامنځ ته کېدونکو توابعو $f(x)$ د بنسټیزو توابعو $F(x)$ جدول ښایي.

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
$x^s\,,\ s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

لیکونکي: هیورنر، هیولیک

ټوټه انتیګرالونه Partielle Integration

د ضرب قانو $(fg)' = f'g + fg'$ له مخې د ناټاکیو انتیګرالولپاره یو ورته فرمول لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

په اړونده توګه د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لرو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

له دې سره دې په پام کې وي، چې د ژۍ ترمونه $[fg]_a^b$ ورکیږي، که یو له دې دواړو توابعو په انټروال ټکو کې صفر وي. دا د پریودیکي توابعو لپارهم ورکیږي ، د پریودې اوږدوالي $(b-a)$ سره.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

له

$$\int (1+x)^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\,(1+x)^{\alpha+1} + c$$

د $\alpha \neq -1$ لپاره

لرو

$$\int \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1+x}}\,dx = x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه شمېرل کيږي

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sqrt{1-x}}_{v'}\,dx = \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx$$

$$= \qquad 0-\left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د اووښتونو (واريابلو) بدلونVariablensubstitution

د زنځيري قانون څخه

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

د يوه بدلون $y = g(x)$ لپاره د بنستيتوابعو جوړولو له لارې لاس ته راځي

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y) + c = \int f(y)\,dy\,.$$

په ورته توګه د ټاکلو انتيګرالونو لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

د دفرنشل په مرسته کېدی شي دا تابع په لاندې بڼه وليکل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

که په انتیګراند کې دننني مشتق پېژندوږ وي، لکه د بېلګې په تګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx\,,$$

لپاره ، نو د بدلون استعمال خورا ساده دی. په دې بېلګه کې ږدو

$$y = g(x) = \ln x\,, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

او لاس ته راځي

$$\int g(x)^2\, g'(x)\,dx = \int y^2\,dy = \frac{1}{3}y^3 + c\,.$$

د په څټ بدلون له لارې لاس تهراځي

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c\,.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

په تیپیک ډول د بدلون له لارې سرې هڅېږي چې انتیګرال ساده کړي.دبېلګې په توګه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y}-1}\,dy$$

لپاره په نږدې توګه ږدو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله ترانسفورمي شوی ناټاکلی انتيګرال راکوي.

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\frac{dy}{dx}\,dx$$
=

$$= \int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)\,dx$$

$$= \int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c\,.$$

د $x = e^y$ په ځت يا برعکس بدلون سره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2}\left|\frac{e^y-1}{e^y+1}\right| + c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د مرکاتور پرپوستون Mercator-Projektion

بنسټتابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کېدی شي د بدلون

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1+\sin x}{\cos x}, \qquad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\, dx,$$

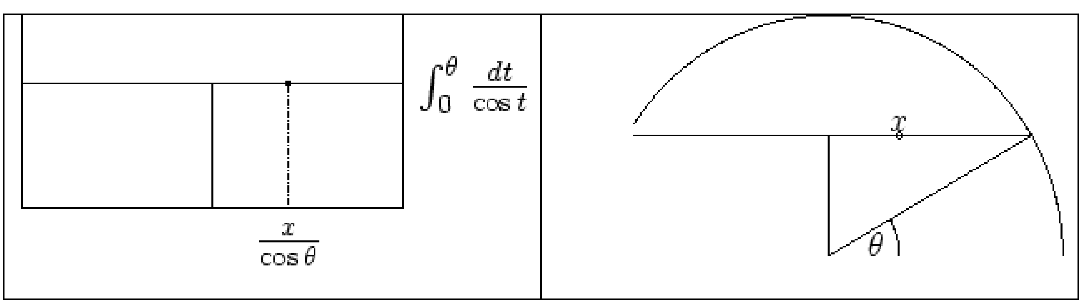
سره وشمېرل شي.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int (\cos x)^{-1} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} du$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

$$= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c.$$

يو استعمال د مرركاتور پرېوستون دی. دلته د ځکي پوښ سطحه کرنجساتونکي يا کرنجيښتوني په يوه سطحه پريوځي يا پری ايستلی شي.



دلته سور درجه يا عرض البلد په اړيکو $1/\cos\theta$ غزول شوی.

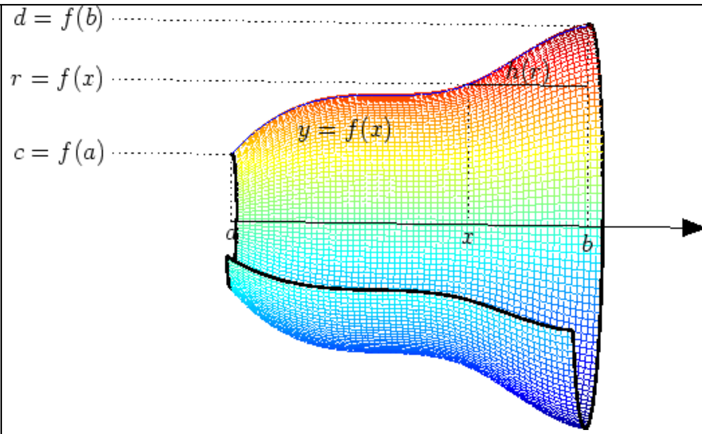
ليکونکي: هيوليک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څرخېدونکو بدنونو ډکی(حجم) Volumen von Rotationskörpern

په x -محور د تابع $r = f(x) \ge 0$, $a \le x \le b$ د څرخېدني له امله جوړ شوی بدن V ډکی(حجم) کېدی شي د ګردی ډوله(دایره ډوله) پروټِ غوڅيو انتيګرال له لاري و شمېرل شي:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx\,.$$



په بديلي ډول کېدی شي توټې(استواني) پوښ له لاري هم وشمېرل شي

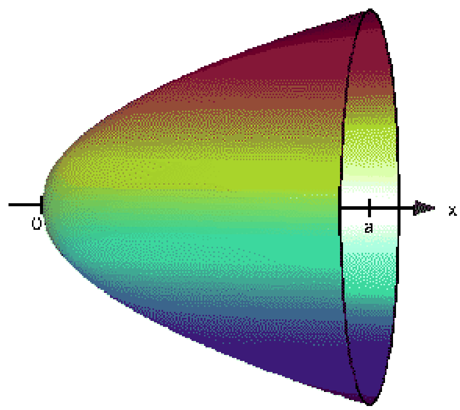
$$V = \pi c^2(b-a) + 2\pi \int_c^d r\,h(r)\,dr\,,$$

د کوم سره چې c همداسي d مینیمال همداسي ماکسیمال وړانګي r دي او $h(r)$ په بدن کې خوندي توټي پوښ تول جګوالی دي د وړانګي r سره. دا بدیل د تولو له مخه د همغږيز وړانګي تابع f لپاره موخه ور دی.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

دا جوړ یا ځېره شوی پارابولوید د x – محور باندي د کرې $y = \sqrt{x}$ څرخون سره منځ ته اځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ځرخون بدن د فرمول سره سم ډکی)حجم) دی:

$$\pi \int_0^a \left(\sqrt{x}\right)^2 \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{1}{2}\pi a^2 \, .$$

په بدیلې توګه د توتې پوښ باندې انتیګرال له لارې منځ ته راځي. 1

$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r(a-r^2)dr = 2\pi \left[-\frac{1}{4}(a-r^2)^2\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\pi a^2 \, .$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Diss . Uni. Wien Algebren .

Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, Dissertation at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په الما‌ن کې

،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپېدو یې پیل کېږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينكمن ليكنې چې له پرينكمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

٣ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې كتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لكچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ١

٧ – اناليزې ٢

٨ – كرښيز الجبر

٩ - د شميرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنكشنل اناليز

١٢ – وكتور شميرنه

نورې ژباړې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲-   داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته

تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزۍ پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویېونو په پښتو روښانه ونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرزي شینواری د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکي میني د لومړني ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته

د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګي پیل او د دویم ټولګي څخه ګام او پای). د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

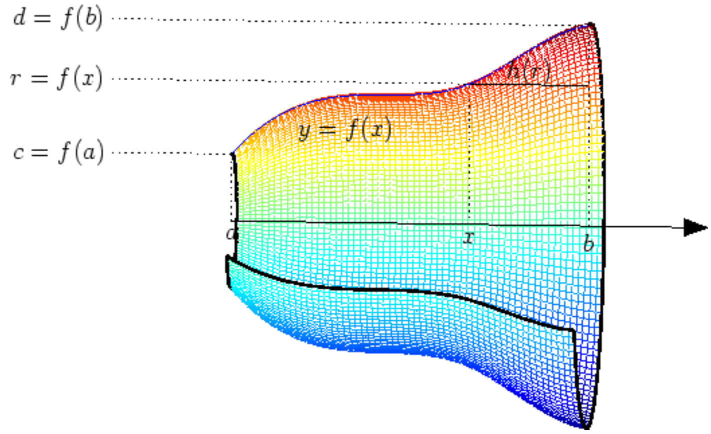
ماخان میرزي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کي د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې. ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۱۹ ۹۷ څخه همدا د کتابونو لیکلو او د ژباړې دنده په غاړه اخستې، چې خپل فکر تر شونې پولې پورې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شمیرپوهنې بنسټونه



لیکونکي.: پروفیسور هیولیګ او ډله یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

له مات. ن ج ثخه

ژباړې : ډاکتر ماخان میرې شینوالری

وینا ۱

منطقي(سم اندیزې) ترنې ۲
کوانتورونه ۱۱
سیده ښوونه ۱۳
ناسیده ښوونه ۱۴
ایمپلیکېشن ترې لاس ته راتلنه یا – راوړنه ۱۴
د پوره اندکشن له لارې ښوونه ۱۶
د مربع(څلورئ) عددونو د جمعې لپاره فرمول ۱۶
ډېرئ(سټ) ۱۷
د ګڼونو (اعدادو) ډېرئ ۱۹
په ډېریو کې عملیې ۱۹
کارتېزي ضرب (ځل) ۲۳
اړیکې ۲۴
د اړیکو د داتا بانک ۲۵
د اړیکو خویونه ۲۵
فنکشن ۲۸
د تابع یا څیروني یا بلواک(تابع) خویونه ۳۰
د فنکشنونو ۳۲
په څټ یا برعکس فنکشن ۳۲
فاکولتې یا فکتوریل ۳۳
د بینوم ضربیونه ۳۳
د پاسکال درېګودی ۳۴
د بینوم درسي جمله ۳۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بينوم ضريبونو لپاره كټمټوالى ۳۸
د دېريو يا سټونوكمبيناتوريک ۴۰
كربنيز فنكشنونه ۴۹
مربعيز فنكشنونه ۵۰
مايل ګوزار يا – غورځونه ۵۱
پولينوم ۵۳
راشنل فنكشن يا بلواک(تابع) ۵۴
ساين او كوساين ۵۵
تانجنت او كوتانجنت ۵۸
اكسپوننشل توابع(بلواک) ۶۰
د ګټې ګټه ۶۳
لوګاريتم ۶۵
تولېز په توان تابع او لوګاريتم ۶۶
د لوګاريتم شمېرونی ۶۸
مشتق يا رابېلېدنه ۶۸
غوره (مهم) مشقونه ۷۱
د مشتق كربنيزوالى ۷۲
ايمپليځيت مشتقوړ توابع ۷۵
لوګاريتمي مشتق ۷۷
نيوټن تلنلار يا قانون ۷۸
د بابليانو ريښه (جذر)نيونه ۷۹
افراطيت ۸۰
د مشتق صفر اينوونه ۸۲
افراطي ارزښتونو ازمايښت ۸۴
كوتیٔ ۸۵
ګاونډې ۸۸
د راشنلتابع ګاونډ يا- اسيمپټوتونه ۸۹
سيومتري ۹۱
د كږو يا منحنيو خبرې اترې(بحث) ۹۲
د ريمن انتيګرال ۹۹
بنسټيزه تابع ۱۰۱
د انتيګرال شميرنې اصلي جمله ۱۰۳
غوره – يا راوتلي بنسټيز توابع ۱۰۶
د اووښتونو (واريابلو) بدلون ۱۰۸
د مركاتور پرېوستون ۱۱۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځرخیدونکو بدنونو ډکی(حجم) ۱۱۲
پوښتنه: ۱۱۵
د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې: ۱۱۹
د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او
ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي ۱۲۱

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library