د شمیرپوهنې بنسټونه

ډاکتر ماخان میرې شینواری

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

وينا

د وينا لاندې يوه ژبنيزه افاده يا وېينه پوهيږو، چې د دې لاندې دوه رښتيا ارزښتونو ،، رښتيآ،،(``wahr,,) w همداسې ،، نارښتيا،، يا ناټيک (``falsch,,) f ځخه د يوه سره تنظيم کيدی شي.

ويناوې په لويو تورو A سره په نخښه کيږي : ، او کېدی شي د منطقي يا سم انديزو عمليو سره وتړل شي. بنسټيزې شمېرپوهنيزې ويېنې يا افادې ، چې له نورو افادو ځخه منځ ته نه شي راتلی اکسيومونه بلل کيږي

لاندې بيلګه د دې شميرپوهنې وينا روښانه کوي.

وينا

A : هر طبيعی عدد د لومړنيو عددونو ضرب دی. دا يوه رښتيا وينا ده.

وينا

B : هر لومړنی ګڼ يا عدد ناجوړه يا طاق دی. دا چې 2 جوړه يا حفت عدد او پريم دی، نو وينا نارښتيا ده.

دا تروسه ښوول شوي اټکلونه

C : ناپای ډير د پريم اعدادو غبرګوني شته. دا يوه شميرپوهنيزه وينا ده، ځکه چې دا يا رښتيا ده او يا نا رښتيا. دلته موخه د لومړني عدد د غبرګوني ځخه هغه لومړني ګاونډي ناجوړه عددونه دي ، چې دواړه لومړني عددونه دي ، د بيلګې په توګه.

$$(3,5),\ (5,7),\ (11,13),\dots\ .$$

دا تراوسه حورا لويه د لومړنيو عددونو جوړه (د 19.4.2006 پورې) ده:

$$16869987339975\cdot 2^{171960}\pm 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کره کونې سره

D : د جمعې ۱۳ ـمه یوه د بدبختۍ روځ ده.

دا یوه وینا نه ده، ځکه چې دا په یوه رښتیا ارزښت نه شي تنظیودی.

لیکونکې: هولیګ،هورنر

منطقي(سم اندیزې) ترړنې(که غواړې: عملیی یا نښلونې)

منطقي یا سم اندیزې ویناوې کېدی شي په لاندې جدول کې ورکړ شوو عملیو سره و ترړل شي.

یادونه : له کیڼ و ښي لور ته.

تیک هلته رښتیا، که	وییندود	لیکندود		نومونه
A نارښتیا ده.	نه A	$\neg A$		نه والی
	A او B رښتیا دي	(A او B)	$A \wedge B$	Konjunktion یا د او ترړنه
	A یا B رښتیا ده.	(A یا B)	$A \vee B$	Disjunktion د یا ترړنه
	A او B بیل رښیتا	(یا A یا B)	$A \not\equiv B$	Antivalenz نابرابر ارزښته

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارزښتونه ري			
A نارښتي یا B رښتیا ده	له A څخه B له B څخه A	$A \Rightarrow B$ $B \Leftarrow A$	Implikation ترې لاس ته راوړنه
او B همغه یا برابر رښتیا ارزښتونه لري	(A و B ته برابر ارزښته دي) یا له A څخه B لاس ته راځي او برعکس	$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz برابر ارزښته

د دې لپاره چې په منطقي افادو یا وینو کې نوکان یا قوسونه سپما کړو، کره کوو، چې $\neg$ له $\wedge$ او $\vee$ څخه کلک یا قوي نښلوي او دا بیا له $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ او همداسې له $\not\equiv$.

دا ایمپلیکیشن په پام کې ونیسی، چې B تیک هلته رښتیاه ده، چې A رښتیا وي. له ناتیکو نیونو(فرضیو) ، تیک یا رښتیا او یا هم نارښتیا پایلې را وپستل کیدی شي.

دا د یا ترني لپاره نخښه یوه دv په شان نخښه ده، چې د (vel (lat. oder (لاتین. یا) لپاره ځای په ځای شوې. د یا ترني لپاره کېدی شي چې سومبول ،، + ،، وکارول شي او د او- ترني لپاره ،، · ،،. که سومبول 0 د ناتیک یا غلط لپاره وکارول شي او هر بل ارزښت د رښتیا په ځیر و کارول شي، نو کیدی شي منطقي ترني د طبیعي عددونو شمېرني له لارې هم پر مخ بوتلای شو یا استعمال کړای شو.

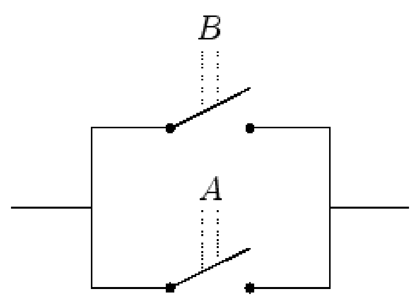
(c) ketabton.com: The Digital Library

په شميروني (کمپيوتر ژبه کې له انګريزي راغلې کليمې NOT (Negation) (نه والی)، AND (Konjunktion (کنجکشن)، OR (Disjunktion) (ديسجنکشن)، يا EXOR oder XOR (exclusive or, Antivalenz) (بې له يا نابرابر ارزښته) او د هغې نه والی(NAND (negierte Konjunktion (نه شوی کنجکشن) ، NOR (negierte Disjunktion) (نه شوی ديسجنکشن) او(NXOR (Äquivalenz (برابرارزښته) لپاره کارول شوي.

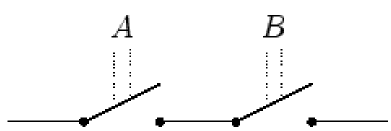
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر، کيمرلې

که وينا د سويچ په څېر انځور کړو، چې تړلې وي، که وينا رښتيا وي، په همدې توګه واز ، که وينا نارښتيا وي، نو کېدی شي مسلسل سويچونه د يا – تړنې په څېر او غبرګ سويچونه د او-تړنې په څېر صورت ومومي .

د يا-تړنه



د او-تړنه

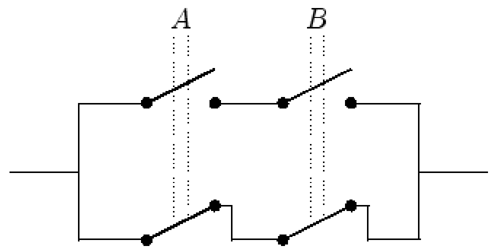


يوه نه-شوې وينا يو سويچ دی، چې تړلی دی، که وينا نارښتيا وي. له دې سره کېدی شي سويچ ځېرې د برابر ارزښته، نابرابر ارزښته او ايمپليکيشن لپاره ورکړل شي.

برابرارزښته : $A \Leftrightarrow B$ همداسي $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

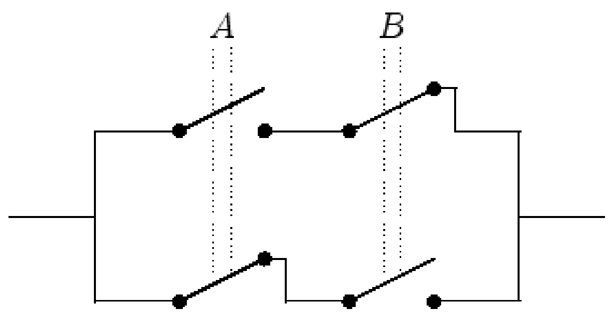
Äquivalenz:

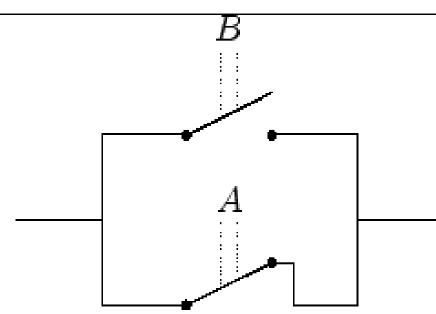
(c) ketabton.com: The Digital Library



نابرابرارزښته: $A \not\equiv B$ همداسي $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Antivalenz:



	ایمپلیکېشن یا ترې لاس ته راتلنه: $A \Rightarrow B$ همداسي $\neg A \vee B$

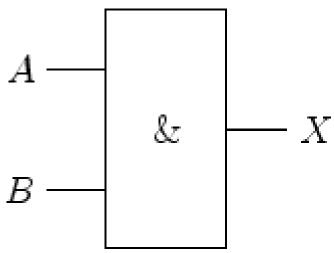
سویچونه کیدی د ترانزیستور له لارې منځ ته راشی یا صورت وومي، چې په جګ یا ټیټ ایښوول شوي شبانونګ جریان مومي یا تیریږي. د (1) ارزښت جګ شپانونګ دی ټیټ یا کم شپانونګ ارزښت (0) دی.

د دین DIN 40900 سره د اړونده (مطلوبه) شپانونګ تعریف ورکول کیږي. دا د ولاړګوډیز (مستطیل) خخه جوړ دی، په کومو کې چې اړونده ټړنې ورکړ شوې دي. یو نه- والی د یوې ګردی(دایرې) سره په نخښنه شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

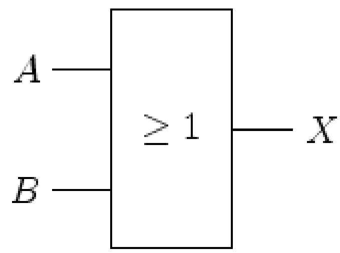
Konjunktion

كنجكشن



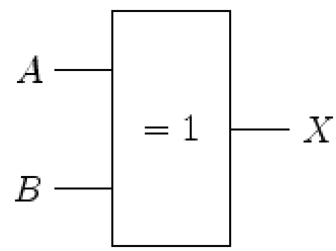
Disjunktion

ديسينكشن



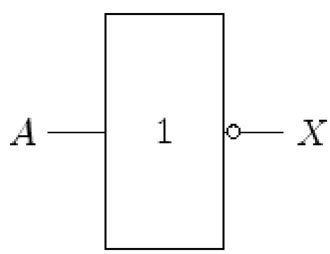
Antivalenz

نابرابرارزښته



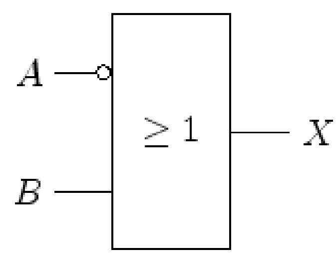
Negation

نه-والی



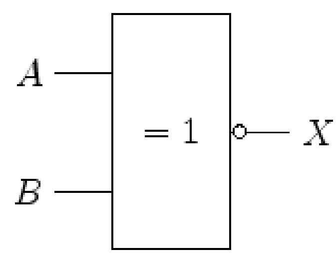
Implikation

ايمپليکېشن



Äquivalenz

برابرارزښته



منطقي عمليو لپاره لاندې کټمتوالی Identitäten باوري دی.

Assoziativgesetze: اسوځياتيو قانون

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

Kommutativgesetze: کموتاتيو يا بدلېدنقانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

De Morgansche Regeln: د دي مورګان قانو

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Distributivgesetze: دیستریبوتیو قانون

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

او نور :

$$\neg(\neg A) = A$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \vee A = A$$

Alternative Darstellungen: الترناتیو یا بدیلیی انځورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایمپلیکشن
Implikation: $A \Rightarrow B \quad = \quad \neg A \vee B \quad = \quad \neg A \Leftarrow \neg B$

Äquivalenz: ا $A \Leftrightarrow B \quad = \quad (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Antivalenz: $A \not\equiv B \quad = \quad (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

بدیلې فرمولونه زیات وخت په ښوونو کې استعمال مومي.

یوه منطقي افاده یا وینه ، چې د رامنځ ته شوې وینا رښتیا ارزښت خپلواکه تل رښتیا همداسې نارښتیا وي، تاوتولوجي Tautologie همداسې کونترادیکشن Kontradiktion بلل کیږي. داسې یوه افاده کړی شي د بڼه بدلون سره همداسې د سره بدله شي. په ځانګړې توګه دا کټمټوالی باور لري:

$$A \vee \neg A = \mathrm{w} \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \neg A = \mathrm{f}\,,$$

همداسې

$$A \vee \mathrm{w} = \mathrm{w} \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{w} = A\,,$$

همداسې

$$A \vee \mathrm{f} = A \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{f} = \mathrm{f}\,.$$

همداسې

لیکونکي: هیولیک،، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مورګان قانون او د دېستریبوتیو قانو کېدی شي وښوول شي، داسې چې د وینا د رښتیا ارزښت لپاره ټول امکانات وځیړل شي. د دې مورګان قانون داپه لاندې جدول کې روښانه شوی دی.

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$, $\neg(A \wedge B)$
w	w	w	f	f	f
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	w
f	f	f	w	w	w

د ایمپلیکېشن، برابرارزښتوالي او نابرابرارزښتوالي لپاره برابر ارزښته شننه له تعریف څخه لاس ته راځي.

د منطقي قانون د روښانه کونې لپاره د وینا

$$\underbrace{|x-1| > 1}_{A} \Longrightarrow \underbrace{(x < 0) \vee (x > 1)}_{B}$$

ښه دلیري.

د د پمورګان قانون سره سم لرو:

$$\neg B = \neg(x < 0) \wedge \neg(x > 1) = (x \geq 0) \wedge (x \leq 1)\,.$$

له دې سره سم ایمپلیکېشن $A \Rightarrow B$ د وینا د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|x-1| \leq 1 \Longleftarrow 0 \leq x \leq 1\,.$$

سره برابرارزښته دی

بیا هم دا نتیجه لاس ته راځي ، که ایمپلیکېشن د تعریف سره سم د

$$(\neg A) \vee B = |x-1| \leq 1 \vee \neg(0 \leq x \leq 1)$$

سره بدل کړي.

د بېلګې په توګه افاده یا وینه

$$L: (A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge B)$$

ساده کوو.. د ایپلیکېشن پهڅای اینبونه او د دېموران قانون له امله لاس ته راځي

$$\neg(A \vee B) \vee (\neg A \wedge B) = (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)\,.$$

د دېتریبوتیو قانون له مخط دا وینا برابرارزښته ده د $\neg A \wedge (\neg B \vee B)$ سره.

پېژندل کیږي، چ د B ارزښت بې اغیزه دی یا ارزښتناک نه دی او $L = \neg A$.

د منطقي افادې L د ازماېښت ته الترناتیو یا بدیلې کېدی شي یو د رښتیا ارزښت جدول هم وکارول یا ا ستعمال شي.

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge B$	L
w	w	f	f	f
w	f	f	f	f
f	w	f	w	w

(c) ketabton.com: The Digital Library

f	f	w	f	w

له دې دا هم لاس ته راځي: $L = \neg A$

کوانتورونه Quantoren

د فرمولو،، شتون لري....،، . ،، د ټولو .... لپاره،، لپاره لنډوني شتونکوانتور $\exists$ او ټول کوانتور $\forall$ استعماليږي.. دا کوانتورونه زيات وخت د $A(p)$ سره په تړاو کې استعماليږي، چې د يوه پارامتر p چې د ډېرۍ يا سټ P توکی دی، په واک کې دي.

Schreibweise ليکندود	Bedeutung معنا
$\exists p \in P: \ A(p)$	يو توکی p له P شتون لري، د هغه لپاره چې $A(p)$ رښتيا دي.
$\forall p \in P: \ A(p)$	د ټولو p لپاره چې له P دی $A(p)$ رښتيا دی.

د دواړو وينا ډولونو د نه٠والي سره کونتوونه هم بدليږي.

$$\neg(\exists p \in P: \ A(p)) = \forall p \in P: \ \neg A(p)$$

$$\neg(\forall p \in P: \ A(p)) = \exists p \in P: \ \neg A(p)$$

دا $\exists!$ ليکن ډول هم روښنی دی د فرمولولو لپاره، چې ،، ټيک يو ... شته،،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوانتورونو د شمېرنې ښوونې لپاره وينا

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \; \forall n \in \mathbb{N}: \; n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon$$

راوړل کيږي. دا په دې معنا چې يوه لړی(ترادف)

$$a_1, a_2, \ldots$$

د 0 په لور يا0 ته هځيږي، دا په دې معنا چې د پوره لوی n لپاره د a_n مطلق ا رزښت د هرې د مخه ورکړشوي بند يا بنديز ε څخه کوچنی دی.

نه-والی داسې لاس ته راځي، چې زړي وينا نه شي او کوانتورونه سره بدل شی،

$$\exists \leftrightarrow \forall .$$

د ايمپليکېشن يا لاس ته راوړني يا – راتلني اينوونه او د مورګين قانون څخه لاس تهراځي

$$\neg(n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon) = \neg(n \leq n_\varepsilon \vee |a_n| < \varepsilon) =$$

$$= n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon .$$

له دې سره د نه شوې وينا دا بڼه لري:

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall n_\varepsilon \; \exists n \in \mathbb{N}: \; n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon .$$

دا په دې معنا چې پرلپسې(ترادف) (a_n) د 0 لورته نه هځيږي . دا په دې معنا چې يو لرزښت $\varepsilon > 0$ شتون لري، چې له هغه پرلپسې $|a_n|$ تل بيا اوړي يا تېرېږي.

ليکونی:ک. هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیده ښوونه

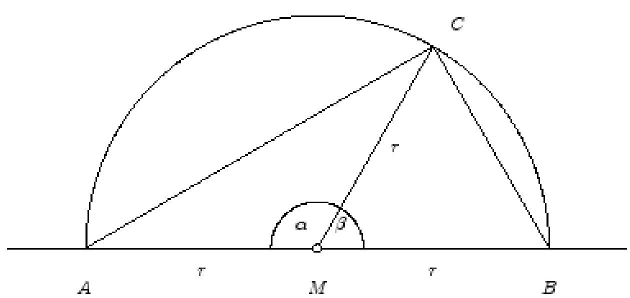
یوه غوښتنه ثبوت) B کېدی شي و ښوول شي، چې هغه له رښتیا وینا A څخه را منځ ته شي او یا په داسې بېرته واړول شي.

$$A \Longrightarrow B\,.$$

ویناوې A کړی شي وړاندنیونې(فرضیې) هم ولري، چې هغه دِ غوښتنې B لپاره اړیینې دي.

لیکونکی: هیولیګ

د بېلګې لپاره یې د تالس جمله را اخلو، چې هر په یوه نیم ګردی(نیم دایره) کې رابند درېګودی(مثلث) ولاړګوډیز یا قایم الزاویه دی.



دا سیده ښوونه په لاندې دوه جملو ولاړه ده:

اول : په یوه مثلث کې د دننیو کونجونو جمعه π ده.

دویم : د یوه برابر پښیز (یا که غواړی: متساوی الاضلاع) مثلث بنسټکونجونه پرابر لوي دي.

که دا په مثلث $\Delta(AMC)$ او $\Delta(CMB)$ و کاروو، نو له دې لاس ته راځي

$$\sphericalangle ACM = \frac{\pi-\alpha}{2}, \qquad \sphericalangle MCB = \frac{\pi-\beta}{2}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sphericalangle ACB = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

او له دې سره دی

او د $\alpha + \beta = \pi$ له امله په $\pi/2$ سره برابر.

ناسیده ښوونه

د دې لپاره چې وښايو چې له يوې وړاندنيونې(فرضيې) V څخه غوښتنه(ثبوت) B لاس ته راځي يعنې ($V \implies B$) ، کېدی شي ونيسو ، چې وينا B د V د وړاندنيونې له امله نارښتيا ده، دا مو يوه تضاد ته بيايي:

$$V \wedge (\neg B) \implies F,$$

د F سره يوه نارښتيا وينا ده، په ځانګړې توګه $F = \neg V$ يا $F = B$.

په ځانګړې توګه باور لري

$$B = (\neg B \implies F) = (\neg B \Rightarrow B),$$

که وړاند نيونې نه وي شوي.

ليکونکي: هيوليک، کنش،اببريين

ایمپلیکېشن ترې لاس ته راتلنه یا - راوړنه

$$V \wedge (\neg B) \implies F$$

د $\neg(V \wedge (\neg B)) \vee F = (\neg V) \vee B \vee F.$ سره برابرارزښته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ایمپلېکشن رښتیا وي، داپه دې معنا چې د شمېرپوهنیزو قوانینو څخه لاس ته راغلی، نو باید غوښتنه(ثبوت) B رښتیا وي، څکه چې $\neg V$ نارښتیا ده او F یا نارښتی او یا د B سره برابر دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د دې ناسیده ښوونې د روښانه ونې لپاره ښایو، چې $\sqrt{2}$ ایراشنل دی، داپه دې معنا چې د مات یا مسر په څېر نه شي انځورېدلای.

$$\neg B:\ \sqrt{2}=\frac{p}{q}$$

نیسو، چې غوښتنه B نارښتیا ده. بس باور لري

د $p,q\in\mathbb{N},\quad \mathrm{ggT}(p,q)=1$ سره .

دلته ggT انګرېزي یې gcdخورا عټ کډپروېشونی (ذوالاضعاف الاقل) دی.

د نیونې څخه د مربع کونې او د q^2 سره ضربونې له امله لاس ته راځي

$$2q^2=p^2\,,$$

دا یه دې معنا چې p^2 او له دې سره p یو جوړه یا جفت عدد دی. په ځانګړې توګه یو $r\in\mathbb{N}$ شتون لري د $p=2r$ سره. د $q^2=2r^2$ له امله q هم یو جوړه عدد دی او له دې سره $\mathrm{ggT}(p,q)=2$. دا د نیونې نیونې جوړښت $\neg B$ سره په تضاد کې ده، چې $\mathrm{ggT}(p,q)=1$ ، دا په دې معنا چې

$$(\neg B)\Longrightarrow B\,.$$

له دې امله یا د دې په تعقیب باید غوښتنه B رښتیا وی،

د پوره اندکشن له لارې ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

وينابنې د طبيعي پارامتر سره کېدی شي د پوره ايندکشن له لارې وښوول شي. که $A(n)$ يوه د $n \in \mathbb{N}$ په واک کې وينا وي، نو د دې لپاره دې لاندې دواړه د د ښوونې پلونه (قدمونه) روښانه- يا و اخستل شي. .

لومړی : د ايندکشن پيل : ښايو چې $A(1)$ رښتيا دی.

دويم : اينوکشنپايونه يا ختم: ښايو چې د نيونې چې $A(n)$ رښتيا دی(دايندکشن هی‌وپوتيزې)، لاسته زاځي، چې هم رښتيا دی، ياپه دې معنا چې

$$A(n) \implies A(n+1).$$

نو دا باوري دی، چې $A(n)$ د ټولو $n \in \mathbb{N}$ لپاره ضدق کوي.

د يوه اندکشن ښوونې سره يو په بل پسې sukzessive دا پسې د تر مخه ځخه لاس ته راځي.

که د اندکشن پيل د $n_0 = 1$ لپاره نه بلکه د $n_0 > 1$ لپاره سرته ورسيږي، نږ وينا بيا فقط د $n \geq n_0$ لپاره صدق کوي.

د مربع(څلوری) عددونو د جمعې لپاره فرمول

$$A(n):\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

کيدی شي د پوره اندکشن سره وښوول شي.

د اندکشن پيل ($A(1)$):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}.$$

د اندکشن پای

$$A(n) \implies A(n+1)):$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{A(n)} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

د اندکشن هیوپوتېزي، لکه چې روښانه شوه، په دریم برابروالي کې استعمال شو.

ډېرۍ(سټ)

یوه ډېرۍ A له توکو $a_1, a_2, \ldots$ جوړه ده یعنې

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}.$$

که توکي د یوه خوی له مخې خوی لرونکي (کرکترېزه) شي، نو د دې لپاره لیکو

A={a:a د E خوی لري}

د دې لپاره سرې لاندې نخښې کاروي یا استعمالوي:

معنا	لیکندول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a \in A$	a د A توکی دی .
$a \notin A$	a د A توکی دی .
$A \subseteq B$	B د A برخډېرۍ(برخسټ) ده
$A \subset B$	دB A برخډېرۍ(برخسټ) ده
$\|A\|$	دتوکو ګڼون یا تعداد په... کې
$\emptyset$	تشډېرۍ یا تشسټ

که $|A| < \infty$ همداسي $A = \infty$ باور ولري، نو دلته د پای ډېرۍ همداسي ناپای ډېرۍ څخه غږيږو.

دوه یا څو ډېرۍ برابرزوریزۍ بلل کيږي، که د دوی د توکو ترمنځ یو بیجکتیو بلواک یا تابع یعنې برعکسکیدونکی بلواک شتون ولري ($|A| = |B|$ د پای ډېرۍ لپاره).

د A د ټول برخو ډېرۍ $\mathcal{P}(A)$ تواندېرۍ بلل کيږی، دا په دې معنا چې

$$\mathcal{P}(A) = \{B : \ B \subseteq A\}$$

له دې سره باور لري $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$ او $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

ليکونکي: هيوليک، کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګڼونو (اعدادو) ډېرۍ

د لاندې ګڼونو ډېرۍ لپاره معیاري نخښې استعمال مومي:

طبعي اعداد : $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

ټول اعداد: $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$

راشنل یا هوښیار اعدا: $\mathbb{Q} = \{p/q: \ p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N},\, \mathrm{ggT}(p,q) = 1\}$

ریل یا حقیقي(ریښتوني) اعداد: $\mathbb{R} = \{x: \ x = \lim_{n\to\infty} q_n,\ q_n \in \mathbb{Q}\}$

کومپلکس اعداد: $\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y: \ x, y \in \mathbb{R},\, \mathrm{i}^2 = -1\}$

په همدې توګه لاندلیکنډول هم کارول کیږي:

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ او $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}: \ x > 0\}$ او دې ته ورته یا په همدې ډول

$\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}_0^-$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}_0^+$, $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{Q}_0^-$, $\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}_0^-$.

لیکونکي: کرهیولیګ

په ډېریو کې عملیې

د دوه ډېریو A او B لپاره لاندې علمیې تعریف دي:

ټولنه (اتحاد)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A \cup B = \{x: \ x \in A \ \vee \ x \in B\},$$

غوڅی(قطاع):

$$A \cap B = \{x: \ x \in A \ \wedge \ x \in B\},$$

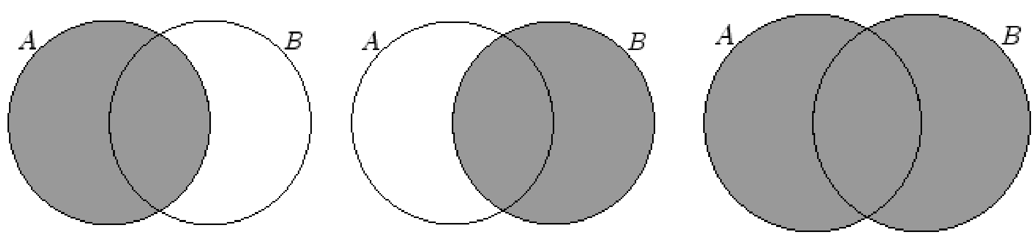
کمبنت یا کمون (تفریق)، پوره کېدونکې ډېری،

$$A \setminus B = \{x: \ x \in A \ \wedge \ x \notin B\},$$

سیوتریکې کمبنت (کمون)

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

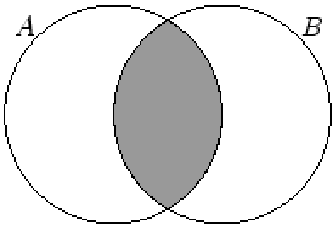
په لاندې څېرو کې د ډېریو عللیې داسې په نامه ون-دیاګرام Venn-Diagramme سره ښوول شوي دي.



تولنه

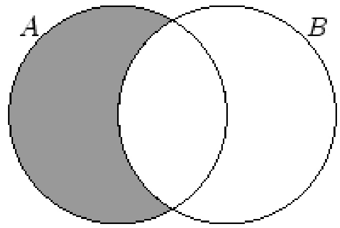
A B $A \cup B$ Vereinigung:

(c) ketabton.com: The Digital Library



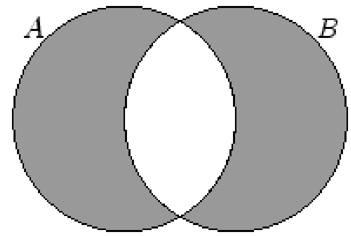
غوځی

$A \cap B$ Schnitt:



كمبنت

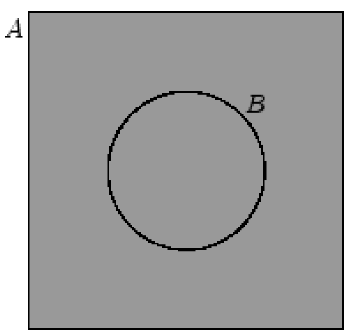
$A \setminus B$ Differenz:



سيومتريکي كمبنت

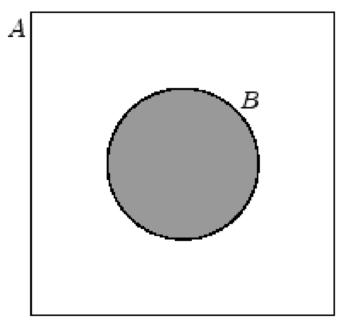
symmetrische $A \Delta B$ Differenz:

که $B \subset A$ وي، نو يوځو دياګرامونه يو بل سره خوري يا يو په بل پريوځي:



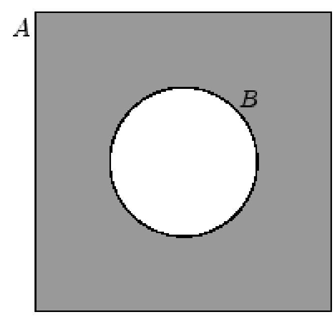
ټولنه

Vereinigung:
$A = A \cup B$



غوځی

$B = A \cap B$ Schnitt:



پوره کېدنکي ډېرى

Komplementärmenge :
$A \setminus B = A \Delta B$

ليکونکي: هوليک،هورنر، کنيش

د ډېريو عمليو لپاره شمېرقوانين:

اسوځياتيو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

کموتاتیو یا بدلېدونکی قانون.

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

- Morgansche Regeln:
- د مورگان قانون یا قاعده

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

- دیستریبوتیو قانون.

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

دا قوانین د منطیقي قوانینو په کوته کونه هم ده، که د $\cup, \cap$ عملیو په ځای $\wedge, \vee$ کیږدېږ او $C\setminus$ په ځای $\neg$ کیږدو.

لیکونکي:هیولیګ،هیونر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نمونې په توګه به د دې مورګان لومړی قانون و ښوول شي. باور لري:

$$x \in C\backslash(A \cap B) \Leftrightarrow \qquad x \in C \wedge x \notin (A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B).$$

د ډیستریبوتیو قاونو له مخې اخرنی افاده یا ویینه د لاندې سره برابرارزښته ده

$$(x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in (C\backslash A \cup C\backslash B),$$

له کوم سره چې غوښتونکی کتمتوالی ښوول شوې.

لیکړنکی:ک. هیولیګ

د دې مورګان قاعدې له مخې د بیلګې په توګه لاس ته راځی

$$C \setminus (A \cap C) = (C \setminus A) \cup (C \setminus C) = (C \setminus A) \cup \emptyset = C \setminus A,$$

$$C \setminus (A \cup C) = \qquad (C \setminus A) \cap (C \setminus C) = (C \setminus A) \cap \emptyset = \emptyset.$$

د ډیستریبوتیو قانون د بېلګې په توګه لاس ته راځي:

$$(A \cup B) \cap B \quad = \qquad (A \cap B) \cup (B \cap B) = (A \cap B) \cup B.$$

له دې سره باور لري $(A \cap B) \cup B = B$ ، ځکه چې $(A \cap B) \subseteq B$ دی

کارتېزي ضرب (ځل)

د دوه ډېریو A او B کاتېزي ضرب دواړو ډیریو د ټولو منظمو جوړو ډېری ده:

$$A \times B = \{(a,b) : \ a \in A \wedge b \in B\}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري:

$$(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow (a = a' \wedge b = b').$$

داپه دې معنا چې د ډېرۍ برابروالي ($\{a,b\} = \{b,a\}$) په عکس يا په ځېټ د لړۍ پرلپسې غوره ده

په ورته تو ګه n - واره يا ځله کارتېزي ضرب تعريفوو

$$A_1 \times \cdots \times A_n$$

د ټولو منظمو n - ګونونو $(a_1, \ldots, a_n)$ د $a_i \in A_i$ سره . که ډېرۍ برابرۍ وي، نوليکو:

$$A^n = A \times \cdots \times A$$

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

اړيکې Relation

که د ډېرۍ A توکي د ډېرۍ B له توکو سره په اړيکو کې قرار ولري يا ولاړې وي، نو کېدی شي دا د يوې اړيکې سره افاده يا وويل شي. دا د توکو له منظمو جوړو (a,b) جوړه ده، چې دا د اړيکو له لارې سره تړلي دي. نو يوه اړيکه R د A او B د کارتېزي ضرب برخډېرۍ ده. وايو چې a د b سره په اړيکو کې ده او د دې لپاره ليکو $a \,\mathrm{R}\, b$:

$$a \,\mathrm{R}\, b \Leftrightarrow (a,b) \in R \subseteq A \times B.$$

ليکونکي:ژ. هيورنر

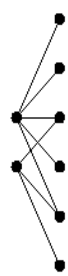
(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړيکو د داتا بانک Relationale Datenbank

يوه نمونه يي بېلګه د اړيکو د ،،داتا-بانک،، دی. دلته د بېلګي په توګه يو د درسونو (لکچرونو) جدول او يو د زده کړو جدول ورکول شوي چي يو له بل سره په اړيکو کي راغلي. دا په لاندي ځېره کي روښانه شوي.

په لاندي کي کيڼ لور ته نومونه دي

درس	کوټه
لوړه شميرپوهنه ۱	V57.01
د زده کوونکو...	V47.02



Mtr.-Nr.	Name
1000000	Anton Antonius
1000001	Berta Bethel
1000002	Cornelius Cornell
1000003	Damian Damien
1000004	Egon Ekel
1000005	Frank Frankfurth

دا هم دلته روښانه شوي چي د يوې ډېرى توکي د بلي ډېرۍ د توکو سره په اړيکو کي راځي يا که غواړی :قرار لري.

ليکونکي: بوسلر، هيورنر

د اړيکو خويونه

په يوه ډېرى A کي يوه اړيکه $R \subseteq A^2$ په لاندي توګه بلل يا نمول کيږي:

رفلکسيوreflexiv ، که هر توکی د خپل ځان سره په اړيکه کي وي:

$$\forall a \in A : (a, a) \in R$$

سيومتري symmetrisch ، که د توکو لړۍ پرلپسي کوم رول نه لوبوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

انتی سیمتري antisymmetrisch ، که که له سیمتري څخه کټمتوالی لاس ته راشي:

$$(a,b) \in R \land (b,a) \in R \Rightarrow a = b$$

ترانزتیوtransitiv ، که له یوه زنځی څخه منځنی توکی لرې کېدی شي:

$$(a,b) \in R \land (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

ټوتالي total، که هر دوه توکي لږ تر لږه په یوه لور په اړیکو کې سره راتلی شي:

$$\forall a,b \in A : (a,b) \in R \lor (b,a) \in R$$

که یوه اړیکه رفلکسیو ، سیومتریک او ترانزیتیو وي، نو دا ،،ورته اړیکې،، (برابرارزښته اړیکې) بلل کیږي. دلته بیا زیات وخت $a \sim b$ د $a \, \mathrm{R} \, b$ په ځای لیکل کیږي. یو ورتهاړیکي ډېرۍA په توکي پردیو برخډېریو ویشي (ورته یا برابر ارزښته ټولګیو)، د کوم سره چې د یوې برخډیرۍ دوه توکي یوبل سره په اړیکو کې دریږي(برابرارزښته دي). په داسې حالت کې چې دوه توکي له مختلفو برخډریو څخه داسي حالت نه لري.
که یوه اړیکه رفلکسیو، انتیسیمتري او ترانزیتیو وي، نو دا یو نیم نظم دی او د دې لپاره $a \leq b$ د $a \, \mathrm{R} \, b$ په ځای لیکل کیږی. که یو نیم نظم د دې برسېره(سربېره) توتالي وي، نو دا (توتال) نظم بللکیږي او A د $\leq$ سره منظمه ده.

لیکونکی:ژ هیورنر

د یوې ډېرۍ M پوتنځډېرۍ $\mathcal{P}(M)$ کې د ډېرۍ خوندیونه یا په کې ځایېدنه $\subseteq$ نیم نظم دی، ځکهچې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A \subseteq A$ رفلکسیو $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ انتیترانزیتیو او
ترانزیتیو $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ قوانین. که M له یوه زیات توکي ولري،
نو خوندیونه نظم نه ی، ځکه چې لاندې باور لري:

$$a, b \in M, a \neq b : \{a\} \not\subseteq \{b\} \wedge \{b\} \not\subseteq \{a\},$$

دا په دې معنا چې دا ټوټالي منظمه نه ده.

اړیکي ،، ټیک دومره توکي لري لکه،، د یوې پای ډېرۍ M په تواندېرۍ کې
$\mathcal{P}(M)$ برابرارزښته ده ځکهچز باور لري : $|A| = |A|$ (رفلکسیو)،
$|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|$ (سیومتري)،
$|A| = |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$ (ترنزیتیو)

لیکونکی:ژ هیورنر

په یوې ډېرۍ باندې زیات وخت اړیکي یا په همدې ډول پرابرارزښته – اړیکې د توکو
د خویونو له لارط تعریفیږي. د بېلګې په توګه دوه اړیکي په

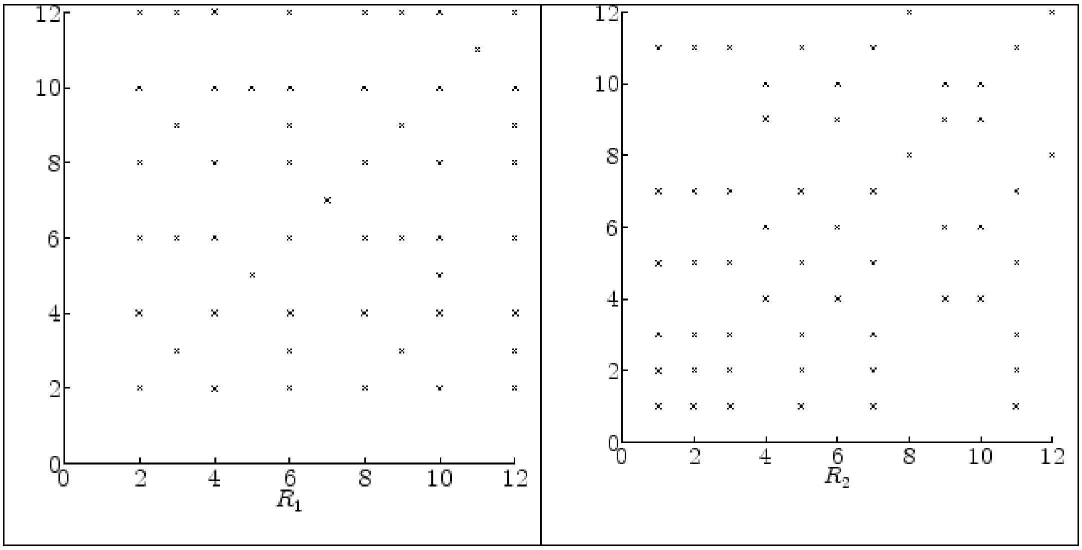
$$M = \{1, 2, \ldots, 12\}$$

کې ترځېرني لاندې نیسو:

لومړی $x\ R_1\ y$: x او y یو ګډ پروېشونی (مقسوم علیه مشترک) $\neq 1$
لري .

دویم $x\ R_2\ y$: x او y برابرډېر پروېشوني لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیرونه یا یا تابع(بلواک) د $M \times M$ برخدېریو په ځیر د اړیکو ګراف ښایي .
اړیکې R_1 سیومتریک او رفلکسیو دي، مګر نه ترانزیتیو. د بیلګې په توګه $x = 4$ او $y = 6$ ګډ پروېشونی 2 لري او $y = 6$ او $z = 9$ ګډپروېشونی 3 لري، مګر $x = 4$ او $z = 9$ ګډ پروېشونی نه لري. نو

$$(xR_1y \wedge yR_1z) \Rightarrow xR_1z$$

باور نه لري.

اړیکې برابرارزښت –اړیکې دي. رفلکسیویتي، سیومتري او ترادزیتیویتي په ځرګنده توګه پوره دي. برابرارزښته –ټولګې

دي د یوه، دوه، درې ځلور او شپږ پروېشونو سره.

لیکونکي: هیلیګ،کرایخ

فنکشن (بلواک یا تابع)

د یوه فنکشن f لاندې له یوې ډېرې A په یوه ډېرې B باندې یوه قانونمندي پوهیږو، چې هر $a \in A$ توکی په یواځني ډول یو ټاکلي $b = f(a) \in B$ باندې تنظیم کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f : A \longrightarrow B\,.$$

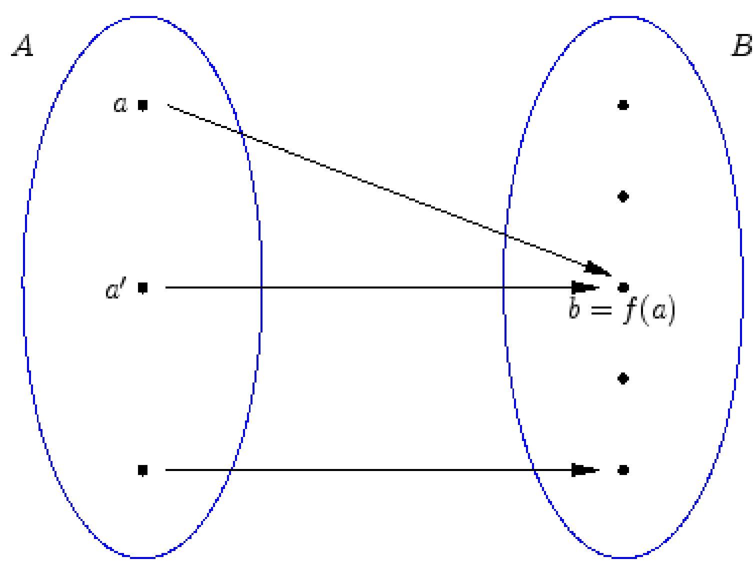
د توکو- نظم لپاره لاندې ليکندود استعماليږي

$$a \mapsto b = f(a)$$

او b د a څېړي يا ارزښت په حيث بلل کيږي او همداسي a د b (د پخوا څېړي)د تعريف توکي په څېر بلل کيږي.

لکه د لاندې ځيرې څخه چې کتل کيږي، بايد د B توکي د A د يوه توکي د څېړي توکي په توګه رامنځ ته شي او د B يو توکی کېدی شي د A د ډېرو توکو څېره يا نظم وي. په هر حالت بايد د A د هرتوکی لپاره په يواځني توګه يوه څېره شتون ولري، دا په دې معنا چې له هر a څخه بايد يو غشی وتلی وي.

پيژندل کيږي چې ځيره زيات تعريفتوکي يا د ځيرې پخوانی يا نوره هم ښه مخکنې لري(دا په دې معنا چې ځيره کېدونکی دی)، دلته د بيلګې په توګه a او a'. د ځيرونی لپاره کليمه فنکشن هو کارول کيږي، په ځانګړې توګه په ريل ا حقيقي او کمپلکس اناليوزې کې.



ليکونکي: هيوليک،هيورنر،کيمرلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع یا خیروني یا بلواک(تابع) خویونه

د دوه ډېریو A او B ترمنځ یوه تابع

$$f : A \longrightarrow B$$

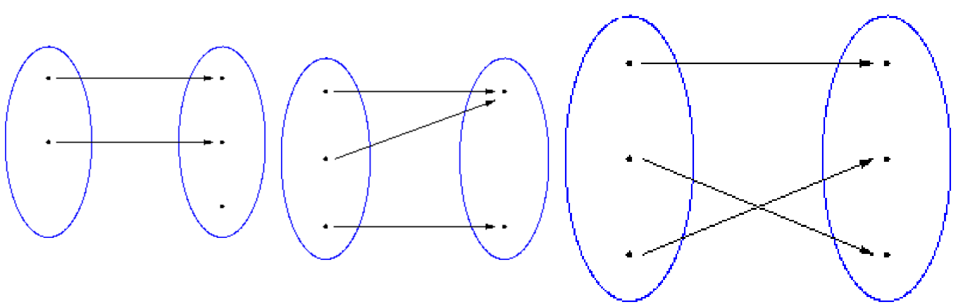
داسې یا په لاندې تګه بلل کیږي:

په کې بلواک injektiv : که د هر $a, a' \in A$ لپاره د $a \neq a'$ سره دا $f(a) \neq f(a')$ صدق وکړي.

په باندې (بلواک) surjektiv : که هر $b \in B$ لپاره یو $a \in A$ شتون ولري د $f(a) = b$ سره.

په (بلواک) bijektiv : که (تابع) f په کې او په باندې وي.

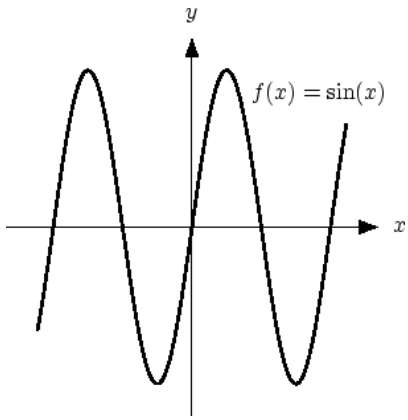
دا کلیمې کېدی شي د ډېری دیاګرام له لارې روښانه شي.



injektivپه کې　　surjektivپه باندې　　bijektivپه

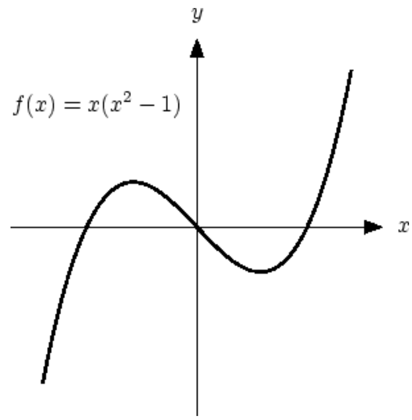
د یو څو بلواکو(توابعو) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ خویونه ورکړ شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



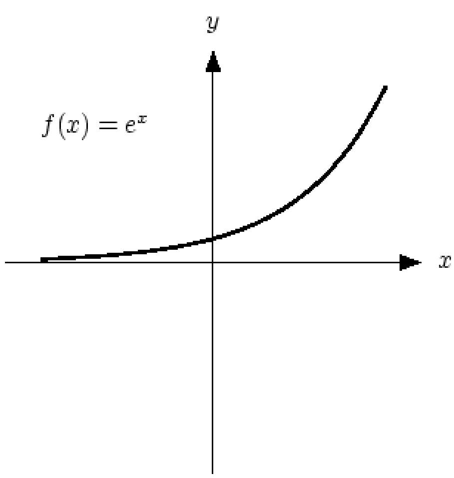
weder injektiv, noch surjektiv

نه په کې او نه په باندې



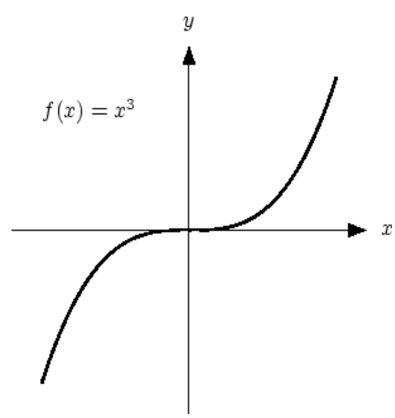
surjektiv, aber nicht injektiv

په باندې، مگر نه په کې



nicht surjektiv, aber injektiv

، نه په باندې مگر په کې



bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv

په، دا په دې معنا چې په کې او په باندې

(c) ketabton.com: The Digital Library

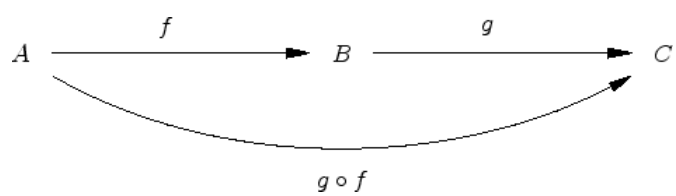
د فنکشنونو (بلواکو یا توتبعو) ترړنه یا عملیې

Verknüpfung von Abbildungen

د دوه فنکشنونو $f : A \to B$ او $g : B \to C$ ترړنه یا کمبوزیشن (زنځیرونه یا سره ګډ ایښونه) د

$$a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad a \in A,$$

له لارې تعریف شوی او په لاندې دیاګرام کې لیدوړ ګرځېدلی.



تابع اسوځیاتیو ده، دا په دې معنا چې $\circ$ ترړنه

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

صدق کوي، مګر په ځرګند ډول کموتاتیو نه ده. .

لیکونکی: هیولیګ، کنش

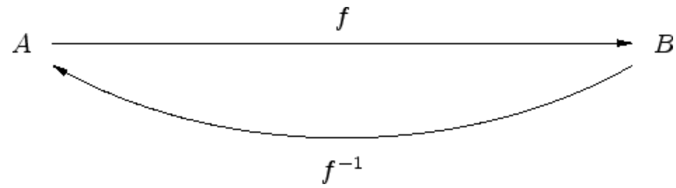
په څټ یا برعکس فنکشن (بلواک یا تابع)Inverse Abbildung

د یوه په فنکشن یا تابع $f : A \to B$ لپاره د

$$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

له لارې   په څټ فنکشن یا برعکس تابع $f^{-1} : B \to A$ تعریف ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ځانګړې توګه $a = f^{-1}(f(a))$ دی، داپه دې معنا چې $f^{-1} \circ f$ کټمټ یا ورته تابع دی.

لیکونکي: هیولیک، کنش

فاکولتې یا فکتوریل Fakultät

د لومړیو n طبیعي اعدادو یا ګڼونو ضرب د

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$$

سره په نخښه کیږی. (لوستل یې : n فاکولتې). له دې سره کلک تړلی یا له دې سره کلکه په نړاو کې تش ضرب داسې لیکو: $0! = 1$.

ګڼ یاعدد $n!$ د n مختلو شیانو دمختلفو امکاناتو د ترتیب یا نظم ګڼون یا تعداد ر ښایي

د لوی n لپاره د $n!$ اسیپتوتیکي حالت د سترلینګ Stirlingschen فرمول له لارې په ورته نږدې ډول وښوول شي:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O(1/n)\right).$$

لیکونکي: هیولیک،هیورنر

د بینوم ضریبونه (ځلوونی) Binomialkoeffizient

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $n,k \in \mathbb{N}_0$ لپاره د $n \geq k$ سره د بینوم ضریبونه تعریفوو:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-2)(k-1)k}.$$

د $0! = 1$ له امله په ځانګړې توګه باور لري:

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$$

د بینومي ضریب $\binom{n}{k}$ د n توکو سره یوې ډېرۍ د k - توکیزو برخډېریو ګڼون یا تعداد ورکوي.

د پاسکال درېګودی(مثلث) Pascalsches Dreieck

د بینوم ضریبونه

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

د لاندې رېکورزیون Rekursion (په بېرته معلومو فرمولونو) په مرسته

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

په یوه درېګډیزې شیما یا شکل، داسې په نامه پاسکال درېګودي کې یا له لارې وشمېرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc}
\binom{0}{k} & & & & & & 1 & & & & & \\
\binom{1}{k} & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
\binom{2}{k} & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
\binom{3}{k} & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
\binom{4}{k} & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow \\
\binom{5}{k} & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

.

لیکونکي: هیولیګ، کنش

دا د ښوولو کټمتوالی

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

د $n!$ سره وېشني او $(n-k+1)!\,k!$ سره ضربوني له لارې د

$$n+1 = k + (n+1-k)\,.$$

سره برابرارزښته دی.

لیکونکي: هیولیګ، کنش

د بینوم درسي جمله Binomischer Lehrsatz

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بینوم درسي جملې سره کېدی شي د دوه متحولو یا اووښتونو د زیاتون یا جمعې توان وشمېرل شي.

د ټولو $n \in \mathbb{N}_0$ لپاره صدق کوي:

$$(a+b)^n =$$

$$a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

په ځانګړي توګه د $n = 2, 3$ لپاره:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

د بینوم جمله کیدی شي د پوره ایدکشن له لارې وښول شي.

د $n = 0$ او $n = 1$ لپاره کټمټوالی د

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k}b^k = \binom{0}{0} a^0b^0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k}b^k = a + b$$

له امله د په خوښه د a او b لپاره رښتیا یا ټیک دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیسو چې د n لپاره صدق کوي. نو دی:

$$(a+b)^{n+1}$$
=
$$(a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$
=
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}$$
=
=
$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1}$$
=
$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k + b^{n+1}$$
=
$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k + b^{n+1}$$
=
$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$$
=

د بینوم ضریبونو لپاره کتمتوالی Identitäten für Binomialkoeffizienten

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بينوم ضريبونو لپاره لاندې کتوتوالى صدق کوي:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k, \quad n \geq 1,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}, \quad k < n,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}, \quad k > 0.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

لومړي دواړه کتمتوالي ترلي د بينوم د درسي څخه لاس ته راځي،

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

د ارزښتونو $a = b = 1$ همداسې $a = -b = 1$ سره .

دريم کتوتوالى د ريکورزين فرمول په بيا بيا استعمال له لارې لاس ته راځي.

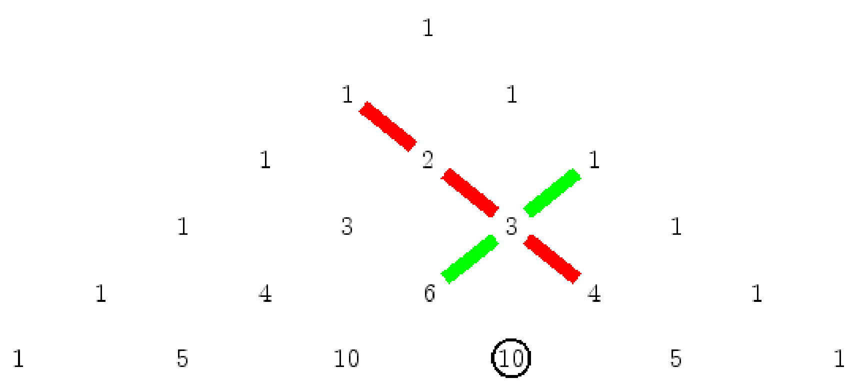
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\
&= \ldots \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \ldots + \binom{n-k-1}{0} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}.
\end{aligned}$$

په دې مساواتو کې د په ځای اینولو یا سبستیچیشن Substitution $(n-k) \leftrightarrow k$

له لارې ځلورم کتمتوالی لاس ته راخي.

دا اخرني دواړه کتوتوالي کېدی شي په پاشکال درېکوډي کې جمعه کوني لخ لارې انځور شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دېريو يا سټونوکمبيناتوريک Kombinatorik von Mengen

(د کمبيناتوريک د نورې زياتې کتنې لپاره دې زما دشميرپوهنې ستر کتاب وکتل شي)

لاندې جدول د مختلفو امکاناتو ګڼون يا تعداد ورکوي، چې د يوې د n مختلفو توکو سره ډېرۍ ځخه k توکي ټاکلی شو، د کوم سره چې بايد توپير شي، چې ايا د لړۍ پرلپسې يو رول لري (ترتيبونه) او تکرار ونه په کې اجازه لري که نه.

	sortiert منظم(د ټاکلو اړخونو له لارې) ترتيب	nicht sortiert نا منتظم
له تکرار سره	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
بې له تکرار سره	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

ليکونکي: هيوليک،کنش

لومړی : نا ترتيب يا نا منظم ټاکنه بې له تکرار ځخه

که د لړۍ پرلپسې په پام کې ونيو لې، نو د لومړي ځل لپاره n امکانات شتون لري، $(n-1)$ امکانات د دويم لپاره ، تر $(n-k+1)$ امکاناتو پورې د k-م توکي لپاره، نو په ټوليزه توګه

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

امکانات شتون لري.

دا بايد د ګڼون يا تعداد $k!$ سره وه وېشل شي چې د k توکو پرموتيشن (د توکو ځای بدلون : لنډ: ځای بدلون) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم : ناتتيب شوي انتخاب د تکرار سره

يو برابرارزښته پرابلم دادی، چې $n-1$ په نځښه شوې (نشاني شوي) د $n+k$ ټکو تر منځ ځای په ځای شي.

$$\bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \bullet$$

$$\triangle \quad \triangle \quad \triangle \quad \triangle$$

د $(i-1)$ -م او i -م ترمنځ ټکو تعداد چې په 1 کم شوی د iــم توکي تکرارونو سره برابر دی. د لومړي سره سم د ممکنه په نخښه کيدونو تعداد لپاره لاس ته راځي

$$\binom{n+k-1}{n-1},$$

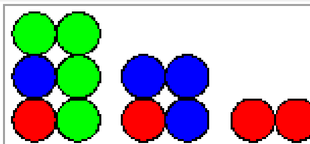
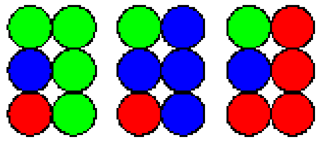
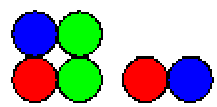
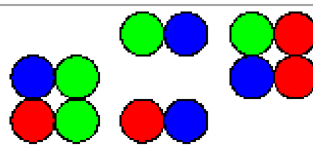
کوم چې په جدول کې ورکړ شوي عدد سره سر خوري.

دريم : د تتيب شوي انتخاب لپاره فرمول پسي تړلی لاس ته راځي.

ليکونکي:هيوليک، کنش

په يوه مرتبان کې يو سور يو شين او يو اسماني توپونه (غونډوسکي) پراته دي. په جدول کې د دوه واره راوستنې د امکاناتو تعداد کتل کيږي ($k=2,\ n=3$) .

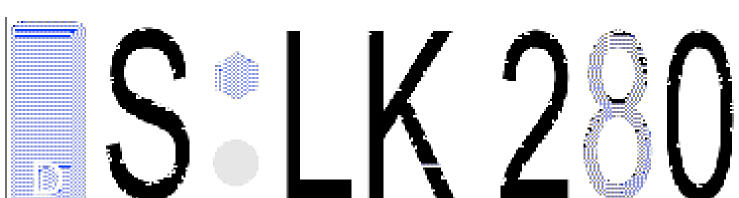
ناترتيب شوي يا نامنظم	ترتيب شوي	
$\binom{n+k-1}{k}$	n^k	د تکرار سره (دبېرته وراچوني سره)

		
$\binom{3+2-1}{2} = 6$	$3^2 = 9$	
$\binom{n}{k}$	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	بې د تکرار سره (نه دبېرته وراچوني سره)
		
$\binom{3}{2} = 3$	$3 \cdot 2 = 6$	

لیکونکي:هیولیک، کنش

د موټر نمره Autokennzeichen

د یوه الماني موټر نمره د ایالت یا ښار لپاره د ≤ 3 تورو کمبینېشن ، د ≤ 2 نورو تورو او تر یوه څلورځایز عدد څخه د بېلګي په توګه :



(c) ketabton.com: The Digital Library

له n تورو څخه 26^n کمبينېشنونه شتون لري او له دې سره

$$(26+26^2+26^3)\cdot(26+26^2)\cdot 9999 = 1.28\cdot 10^{11}$$

ممکنه نمرې (که د ښار يا ايالت د ورسره ور ګډونه په پام کې ونه نيول شي

ليکونکي:هيوليګ، کنش

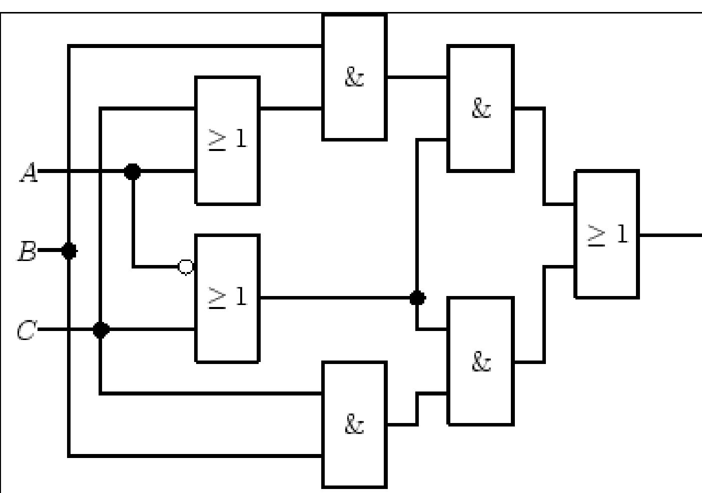
پوښتنې

- د ښه بدلون او همداسې د رښتيا جدول سره و و زاميی، چې ايا افادې يا ويېنې تل ټيک دي يعني Tautologien دي:

$$(A \vee B) \Rightarrow ((\neg A \vee B) \wedge (A \Rightarrow \neg A))$$

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$$ پای.

- اړيکې $\Diamond, \Box$ د ډېرې پوهنې څخه د منطقي عليو $\{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ لپاره ځای په ځای شوي. په کومو حالتونو کې باور لري:

	- محامخ سويچونه(شالتونګونه) ساده کړی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ډېرى $A,B \neq \emptyset$ ، یوه تابع $f : A \to B$ همداسې برخډېرى $U,V \subset A$ او $X,Y \subset B$ ورکړ شوي دي. د لاندې اړیکو ربښتیاوالی همداسې نارښتیاوالی د یوې مناسبې برعکس بېلګې په مرسته وښایی:

الف- $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$ ب - $f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$

پ - $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

ت - $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

- د یوه تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ په هکله لاندې ویناوې په فورمال لیکندود افاده کړی:

الف - fپه باندې نه دی ب - f په کې نه دی

پ – f په نه دی ت – fنه په کې او نه په باندې دی

لیکونکی: کریستیا اپیین

- د $n \in \mathbb{N}$ لپاره د پوره ایدکشن له لارې وښایی:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$ **a)**

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$ **b)**

- د $n \in \mathbb{N}$ لپاره د پوره ایدکشن له لارې وښایی:

الف : $a_n = n^3 + 5n$ په 6 وېشونی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب : $b_n = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ یو طبیعي عدد دی.

- په یوه میلمستیا کې 25 کسان سره یوځای کیږي. څومره لاسونه سره ورکول کیږي، که هر میلمه هر بل مېلمه ته لاس ورکړي. .

د شمیرپوهني له لومړني کورس څخه

- و ښایې:

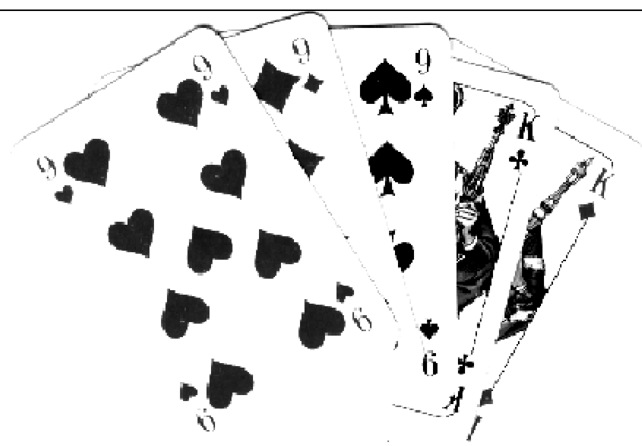
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$$ **a)**

$$\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n+k-\ell}{k} = \binom{n+k}{k+1}$$ **b)**

لاس ته راونې یې په پاسکال درېګوډي کې انځور کړی. لیکونکی: کلاوس هیولیګ

- په یوه د کارتو لوبه کې چې له 32 کارتو جوړه ده(8 ارزښتونه 4 رنګونه) څومره امکانت شته دی، چې فول هوز Full Haus (درې برابرارزښته او دوه برابر ارزښته) کارتې لاس ته راوړل شي؟

د دې لپاره څومره امکانات شته چې دا څېره شوي کارتې د دوه کارتو بدلولو سره یو پوکر(څلور برابر ارزښتونه) لاس ته راوړای شي؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

ازماېښت Test

لومړۍ پوښتنه:

د لاندې منطقي ابادې رښتیا ارزښت پیدا کړئ

$$D: \ (A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \vee A)$$

چې د ویناو A, B, C د رښتیا ارزښتونو تابع یا په واک کې وي.

هر ځل یا'w' او یا 'f' ورکړئ.

دویمه پوښتنه:

ډېرۍ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ او $B = \{4, 5, 6, 7\}$ ورکړئ.

په ګوته کړئ، چې ایا لاندې ویناوې رامنځ ته کیږي که نه(J د هو لپاره او N د نه لپاره)

دریمه پوښتنه:

د دوه هره یوه د درې توکیزه ډېریو A او B ترمنځ څومره اړیکې شتون لري؟

له ې څخه څومره بلواک یا تابع دي او څومره بلواک یې په باندې(سورجکتیو) دي؟

څلورمه پوښتنه:

و څېړئ چې ایا لاندې توابع یا بلواک $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ په باندې، په کې او په دي:

$$\textbf{a)} \quad f(x) = x \sin x \qquad \textbf{b)} \quad f(x) = \exp\left(-x^3 + 1\right)$$

$$\textbf{c)} \quad f(x) = x \ln \frac{1}{|x| + 1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځمه پوښتنه:

څومره پنځه ځایزه ګنونه یا عددونه شتون لري د لاندې سره

الف: پنځه مختلف عددونه

ب) تیک دوه جوړه عددونه

شپږمه پوښتنه:

څومره امکلنات شتون لري، چې ناه کسان په دربییز ګروپ ووېشو؟

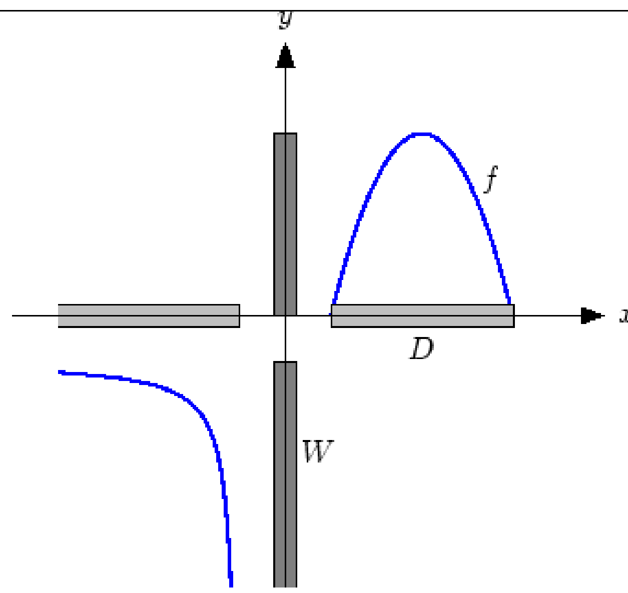
تابع یا فنکشن یا بلواکFunktion

یو فنکشن

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

هر د تعریفورشو $D \subseteq \mathbb{R}$ هر توکی x په یوه د ارزښت ورشو $W \subseteq \mathbb{R}$ په یوه توکي $f(x)$ باندې تنظیموي..

د فنکشن یا بلوتک f ګراف له تکو (x,y) جوړ دی د $y = f(x)$ سره.



لکه د تابع څخه چې لیدل کیږي، د تعیف ورشو (روڼ شین) او د ارزښت ورشو(تیاره خړ) د x – محو ر همداسې د y -محور پرېوستونونه Projektionen دي.

د دې لپاره چې د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعریف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، باید په ساده تابع رامنځ ته شوي بندیزونه په پام کې ونیسو. د لوګاریتم ارګومنت باید مثبت(زیاتیز) وي:

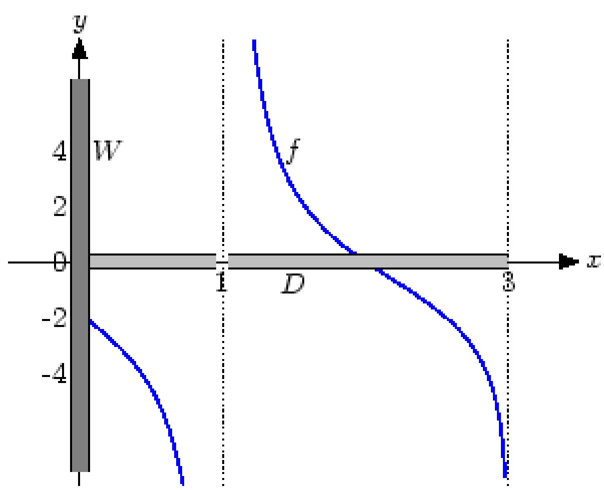
یعني $3-x>0$ او $x \geq 0.$

په هر حالت مخرـ(ماتلاندي) بای صفر نه شي، دا په دې معنا چې $x \neq 1$.

په ټولیزه توګه لاس ته راځي:

$$\mathrm{D} = [0,3)\backslash\{1\} = [0,1) \cup (1,3).$$

د f ارزښت د رسم سره روښانه یا واضح کیږي.



دا چې f د $x \in (1,3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نیسي یا اخلي، نو باور لري. $W = \mathbb{R}$

لیکونکي:هیولیک،هیورنر،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې جدول د څو بنسټيزو بلواک يا توابعو د تعريف - او ارزښت ورشو بنايي:

$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\ln x$	$(0,\infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{x\,:\,x=(2k+1)\pi/2,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$

ليکونکي:هيوليک،هيورنر،کنش

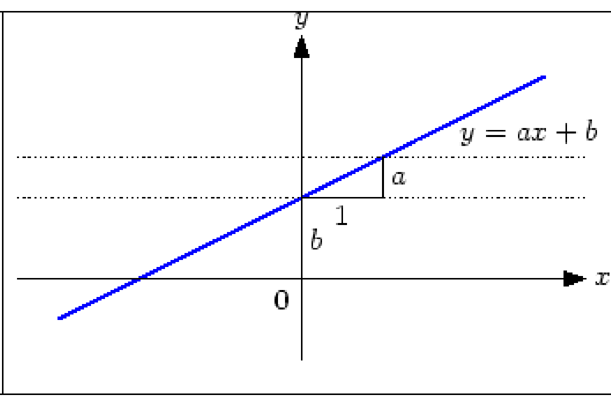
کرښيز فنکشنونه Lineare Funktion

د يوه کرښيز فنکشن

$$f(x) = ax + b$$

ګراف يوه کرښه ده د a جګېدنې

سره او د y -محورغوڅي b سره.



الترناتيو يا بديلي انځورونې يې تکي-جګيدنې-بڼه

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

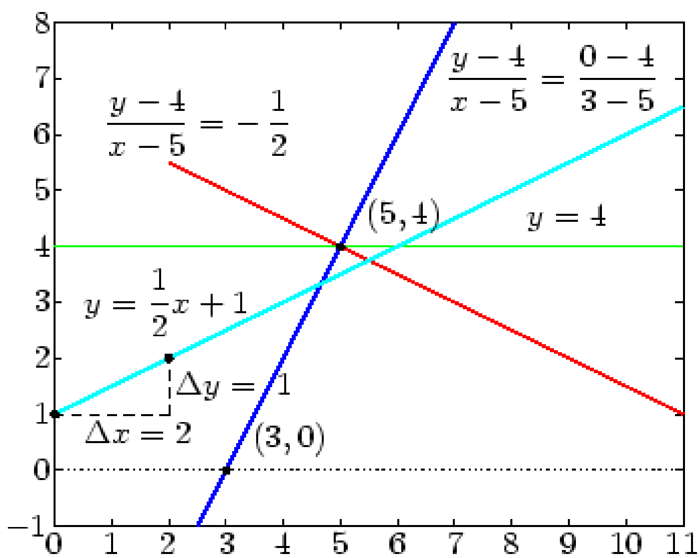
او د دوه ـټکوـبڼه

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

دي ، د کوم سره چې (x_0, y_0) او (x_1, y_1) په کرښه ټکي دي.

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

تابع د کرښيزو فنکشنونو مختلفو انځورونو بڼې ښايي يا په نخښه کوي.



مربعيز فنکشنونه Quadratische Funktion

د يوه مربعيز تابع ګراف

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

يو د

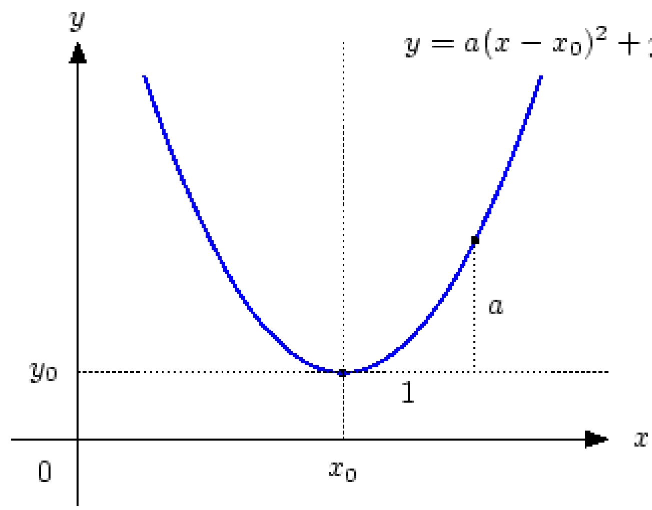
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د بڼې پارابول دی د ککرې

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right) .$$

سره.



مایل ګوزار یا – غورځونه Schräger Wurf

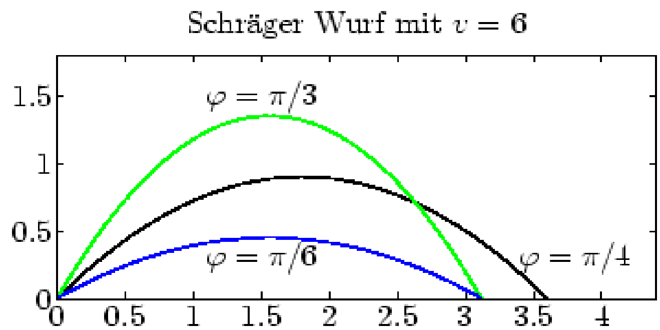
که یو تن د کونج φ لاندې د یوې چټکتیا v سره وغورځول شي، نو د الوتنې لار یې یو پارابول

$$y = x \tan\varphi - \frac{g}{2v^2 \cos^2\varphi} x^2$$

ښايي ، چېرته چې g د ځمکې بیړه(تعجیل) ده.

مایله ګوزارونه یا –غورځونه د v=6 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مساوات د برابردولیز خوزښت څخه لاس ته راځي د پيل چټکتيا v سره په x - او y -کمپوننتونو یا برخو او د همدې وخت د ازادې غورځونې بیره ییز خوزښت سره.:

$$x(t) = vt\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v\cos\varphi}$$

$$y(t) = vt\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \; y(x) = \frac{vx\sin\varphi}{v\cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2\cos^2\varphi}\right).$$

د غورځونې واټن دی:

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi)\,.$$

دا د $\varphi = \pi/4 \,\widehat{=}\, 45°$ لپاره ماکسیمال کیږي.

لیکونکي: هیورنر،هیولیک،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم Polynom

یو د n-م دجي پولینوم p په لاندې بڼه ليکل کيږي:

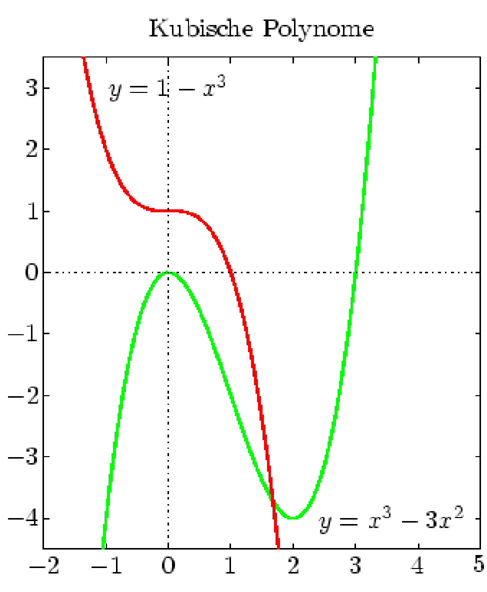
$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

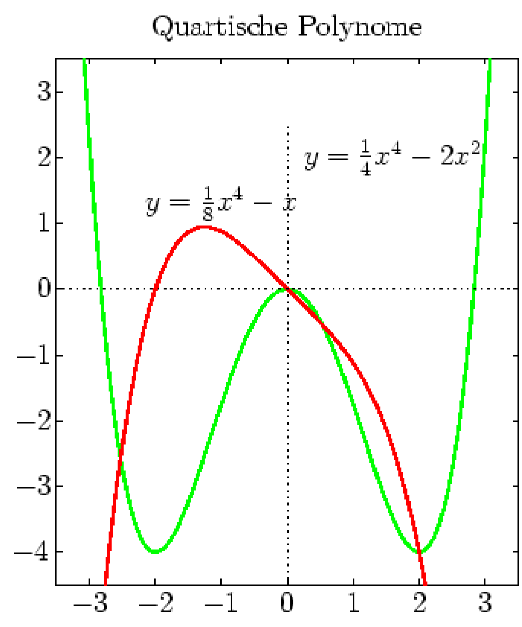
د $a_n \neq 0$ سره .

اووښتوني يا متحوله x او ضريبونه a_k کېدی شي ريښتونی (حقيقی) يا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه له دې امله له حقيقی همداسې کمپلکس پولينومونو غږيږو.

ليکونکي:هيوليک،هيرنر

لاندې توابع مکعبي $n = 3$ او مربعيز $n = 4$ پولينومونه په ګوته کوي، د خرنګوالي (کواليتي) مختلف تابع ګراف سره





ليکونکي: هيورنر، هيوليک،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

راشنل فنکشن یا بلواک(تابع) Rationale Funktion

یو نسبتي تابع د صورت(ماتباندي) درجې m او مخرج(ماتلاندي) درجې n سره یو د دوه پولینومونو وېش دی.

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}\,.$$

دا انځورونه ناوېشوړ irreduzibel بلل کیږي، که p او q کوم ګډ کربنیز ضریب ونه لري.

د مخرج صفرځایونه راشنل تابع r د تعریف تشیاوې دي او د پول ځایونو په نامه یادیږي. د دوی نظم د صفرځایونو ډېرځلوالی دی.

د اووښتوني یا متحولې x او ضریبونه a_k, b_k کېدی شي حقیقي یا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه د حقیقي یا کمپلکس رېښتوني فنکشن څخه غږیږو.

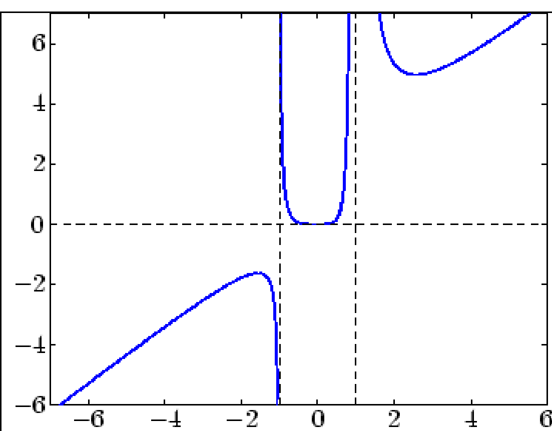
لیکونکي:هیولیک، اپپ

فنکشن

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

په $x = -1$ کې یو ساده قطب لري او

په $x = 1$ کې دبل قطب لري



د تابع څخه پژندل کیږي، چې f په یوه ساده قطب کې مخنخښه بدلوي او په دبل قطب کې مخنخښه نه تغیروي. لیکونکي:هیولیک، اپپ

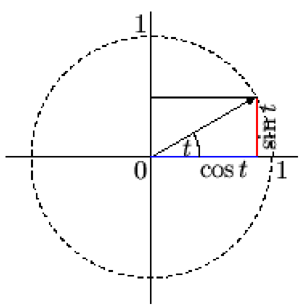
(c) ketabton.com: The Digital Library

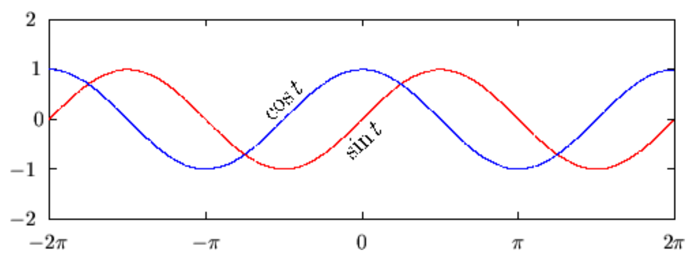
ساین او کوساین Sinus und Kosinus

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره کواودينات چي په سرچينه کي په کونج t ځرخول شوی تکی $(1,0)$ په نخښه کيږي.





دواړه د ګردی یا دایري توابع کوسان او ساین 2π - پریودیکي (تل بیرته راګرځېدوني) دي او باور لري

- $\cos t = \sin(t + \pi/2)$ ،
- $\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$ ،

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

د تر مخنخښي پوري د داېري تابع د ولاړکوډيز درېګوډي(قايمالزايه مثلث) د قطر (نيمي) سره چي ا وږدوالی يې 1 دی دو لاړو (عودو) ضلعو اوږدوالی ښايي. يو ځو ځانګړي ارزښتونه يې دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

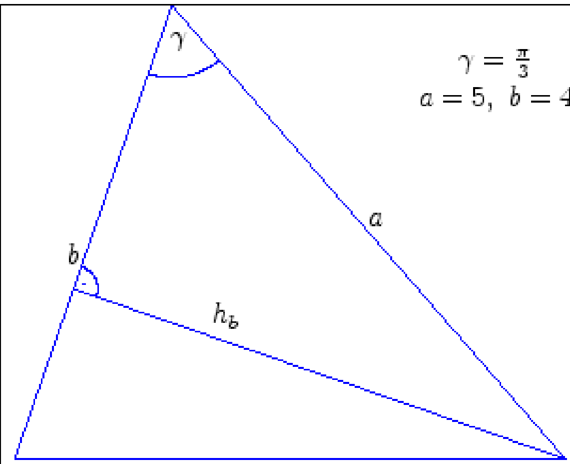
(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د ښېره شوي درېګوډي د سطه وټاکلی شو، لومړی جګوالی h_b شمېرو:

$$\sin\gamma = \frac{h_b}{a} \Rightarrow h_b = a\sin\gamma\,.$$

له دې سره لاس ته راځي:

$$F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma\,.$$



د ورکړ شوو ارزښتونو لپاره لاس تخ راځي:

$$F = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\,.$$

د ساین او کوساین لپاره د جمعي جمله(قضیه)

د داېرې توابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندې اړیکې صدق کوي:

- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$

په ځانګې توګه

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,\qquad \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

لیکونکی.ژ.هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع

$$u(t) = \cos(w_1 t) + \cos(w_2 t)$$

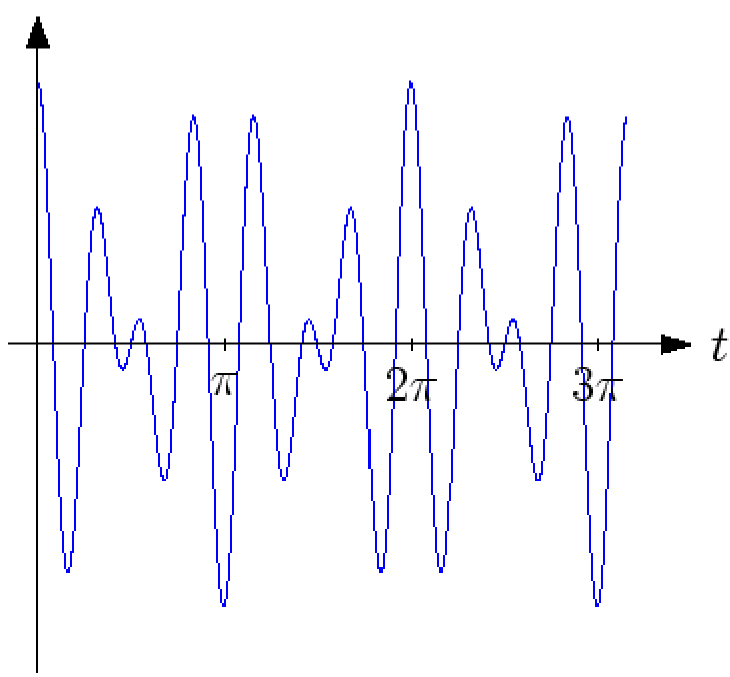
اړيکي د دوه لړزېدنو يو ځای رامنځ ته کېدنه روښانه کوي. د جمعي قضيې په مرسته کېدی شي انځورونه ساده شي. د $\overline{w} = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ او $\Delta w = |w_1 - \overline{w}|$ سره له

$$\cos(\overline{w} - \Delta w t) = \cos(\overline{w}t)\cos(\Delta w t) + \sin(\overline{w}t)\sin(\Delta w t)$$

$$\cos(\overline{w} + \Delta w t) = \cos(\overline{w}t)\cos(\Delta w t) - \sin(\overline{w}t)\sin(\Delta w t)$$

ځخه لاس ته راځي، چې

$$u(t) = 2\cos(\overline{w}t)\cos(\Delta w t)\,.$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بلواک د $w_1 = 7$, $w_2 = 5$ لپاره لړخېدنه ښايي، دا په دې معنا چې $\overline{w} = 6$. ,
$\Delta w = 1$ او

$$u(t) = 2\cos(6t)\cos t\,.$$

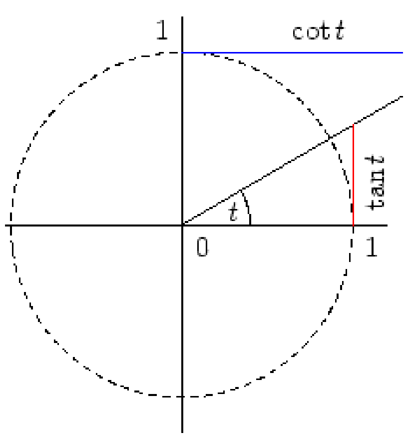
ليکونکي:هيوليک،کرايخ

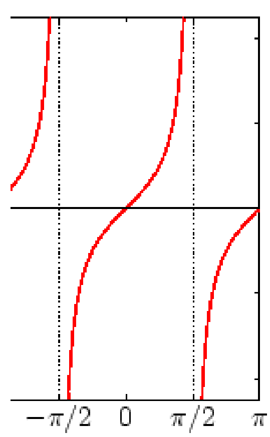
تانجنت او کوتانجنت

توابع تانجنت او کوتانجنت د

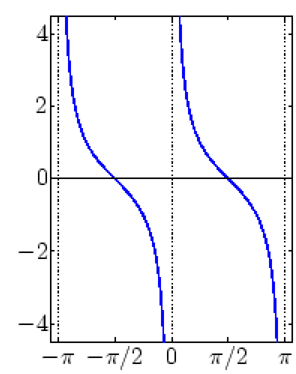
$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

سره تعريف شوي. دا په ولاړکوډيز درېکوډي (قايوم الزاويه مثلث) کې د تر مختخښې پورې د ولاړو اړخونو تناسب ورکوي





Tangens



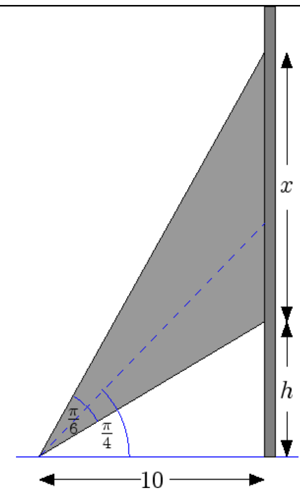
Kotangens

يو څو ځانګړي ارزښتوني دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

تابع د شکل له مخې يو د برېښنا مخروط ، چې په يوه ولاړ دېوال پرېوځي ښايي



د دې لپاره چې خورا لوي يا ماکسيمال پوسېده د تاکلی شو، جوړوو

$$\frac{h}{10} = \tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{x+h}{10} = \tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

که $h = \frac{10}{3}\sqrt{3}$ په دويم مساوات کې ځايه ځای کړوو نو لاس ته راځي

$$\frac{x}{10} = \sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3},$$

يعنې $x = \frac{20}{3}\sqrt{3}$

ليکونکي:هيوليک،کرايخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننشل توابع(بلواک)

توان تابع

$$y = e^x = \exp(x)$$

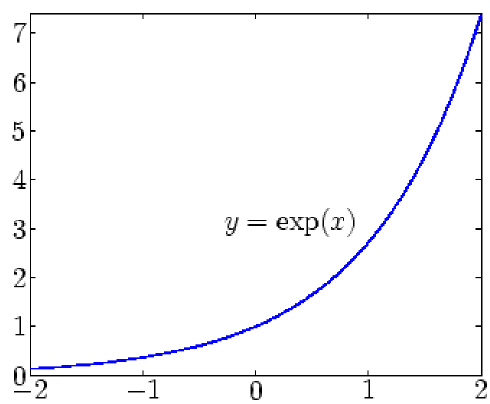
د اویلرEulerschen عدد $e = 2.71828...$ سره اکسپوننشل تابع بلل کيږي. دا د

تولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره مثبت(زاتيز) ده او فنکشنل مساوات

$$e^{x+y} = e^x e^y\ .$$

پوره کوي.

په خانګړي توګه دی $e^{-x} = 1/e^x$.



ليکونکي:هيوليک،هيورنر

اکسپوننشل تابع د ډېرو بيولوژيکي پروسو زياتوالی روښانه يا تشريح کوي.

د بيلګي په توګه د يوه ساده نفوس مودل متناسب دی د اوسنيو نفوس تعداد $p(t)$

سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې

$$p(t + \Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t))\ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\Delta t \rightarrow 0$ لپاره دا د ډېروالي قانو د $p(t)$ مودلی کيږي.

لاندې جدول د نړۍ نفوس ښايي د کلني ډېرېدنې سره.(اټکل ارزښت)

Jahr کال	Bevölkerungszahl د نفوسو تعداد	اټکل ارزښت Rate
1950	2555078074	1.76 %
1955	2779669781	1.87 %
1960	3039332401	2.02 %
1965	3345837853	2.16 %
1970	3707610112	2.05 %
1975	4088224047	1.80 %
1980	4456705217	1.79 %
1985	4854602890	1.77 %
1990	5283755345	1.54 %
1995	5690865776	1.37 %
2000	6080141683	1.25 %
2005	6460553564	1.12 %
2010	6823634553	1.03 %

(c) ketabton.com: The Digital Library

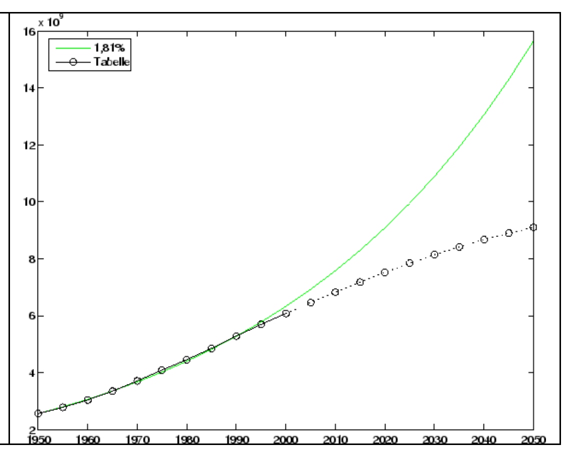
2015	7175675066	0.95 %
2020	7518010600	0.86 %
2025	7840660355	0.76 %
2030	8140344240	0.68 %
2035	8416742278	0.60 %
2040	8668391454	0.53 %
2045	8897073495	0.47 %
2050	9104205830	

کلنی د نفوسو منځنی ډېروالی په کلونو 1950-2000 کې % 1.81 وو. د 1950 کال وروسته د منځني ثابت ډېروالي سره.

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

د نړۍ نفوس به په 2050کال کې 16 میلیارده ته جګ شي(ټکي ټکي شوې کږه (منحني)). په جدول کې اټکل د نفوسو د کمېدو څخه مخ ته ځي

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر



د ګټې ګټه Zinseszins

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه پیلبډایي x د n -واره وکونو همداسي اخستنو د یوې Rate r($r < 0$
bzwهېرداسي . $r > 0$) د یوې ګنې ضریب $(1+p)$ له کبله لاندې پیل پای بدآيي ورکوي :

$$y = (1+p)^n x + \frac{(1+p)^n - 1}{p} r\,.$$

له دې سره $p = 1$ یوه 100% د ګټي د یوې ربحې د کلنۍ اېښوونه په ګوته کوي

موثره کلنۍ ربحه p_j د میاشتنۍ ګټوني څخه شمېرل کیږي د یوې p_m ربحي (ګټې سره)

$$p_j = (1+p_m)^{12} - 1 \geq 12 p_m\,.$$

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر

بنستیز ه سرمایه په لومړني ربحېریود کې په پام کې نیول کیږي، اېښوونه او همداسي اخستنه یا راوستنه په لومړي څل د هر ورپسي کال. دا د ا لاندې راکوي:

$$\begin{aligned} n = 1: &\quad y = x(1+p) + r, \\ n = 2: &\quad y = \big(x(1+p) + r\big)(1+p) + r. \end{aligned}$$

په ټولیزه توګه صدق کوي:

$$y = \Big(\cdots\big(x(1+p)+r\big)(1+p)+r\big)\cdots\Big)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= x(1+p)^n + \big(1 + (1+p) + (1+p)^2 + \cdots + (1+p)^{n-1}\big)r$$

دا په نوکانو کې د r افاده کیدی شي د هندسي جمعې فرمول سره واړول شي او سرې دا ورکړل شوی فرمول لاس ته راوړي.

لیکونکي : هیولیک، هیورنر

یو د 100000 یورو پور(قرضه) په کلنې ګټونه او یوې ګټونې یا ربحې % 5 سره د 10 کاله وروسته بېرته ورکړ شي. سرې د

$$y = 0\,,\ n = 10\,,\ p = 0.05\,,\ x = 100000$$

سره ګټه لاس ته راوړي:

$$r = 1.05^{10} \cdot 100000 \frac{0.05}{1.05^{10} - 1}$$

$$= 12950.46$$

د میاشتنی د $\frac{5}{12}\%$ په ګټونې یا په ګټه اېښوونې سره دا راکوي

$$n = 120\,,\ p = \frac{1}{240}$$

په ورته توګه

$$r = \left(\frac{241}{240}\right)^{120} \cdot 100000 \frac{\frac{1}{240}}{(\frac{241}{240})^{120} - 1}$$

$$= 1060.66$$

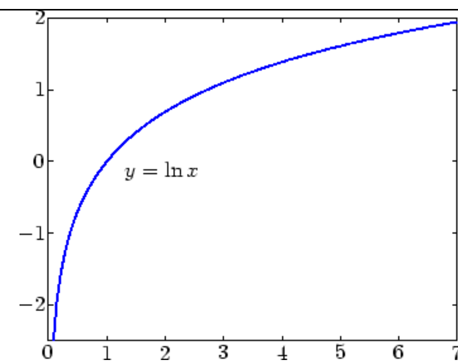
(c) ketabton.com: The Digital Library

د میاشتنی ګټې تادیه کونې ده، کلنی 12727.86 ده. دلته د مخه د ګټې تادیه کونه یو زیان منځ ته راولي. د $\frac{4}{12}$ % سره به دا د لاندې سره برابر وای:

$$\left(\frac{(1+\frac{1}{300})^{12}-1}{\frac{1}{300}}-12\right)\cdot 1060.66 = 235.96\,.$$

لیکونکي : هیولیګ، کرایخ

لوګاریتم Logarithmus

د لوګاریتم تابع د اکسپوننشل تابع برعکس (په ښې) تابع ده: $y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y.$	

دا په $(0,\infty)$ $\mathbb{R}$ کره مونوتون(یوغږیز) کره جګېدونکی تنظیموي او لاندې د تابع مساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

په خانګړې توګه لرو: $\ln(1/x) = -\ln x$

لیکونکی: هیولیګ،کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

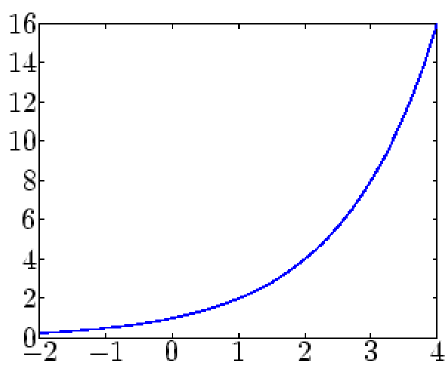
تولیز په توان تابع او لوګاریتم

د $a > 0$ لپاره تعریفوو :

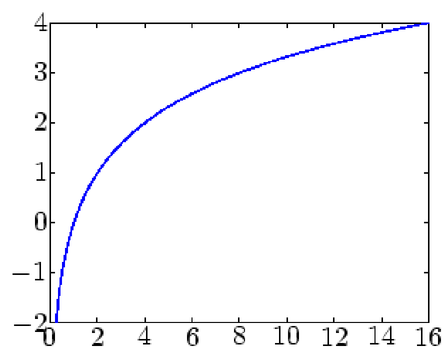
$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

د برعکس تابع(بلواک) $x = \log_a y, \quad y > 0.$ سره

په خانګي توګه د 10 په بنسټ لوګاریتم لپاره لیکو $\log = \log_{10}$ او ld $= \log_2$ د دوه ګوني یا دوال لوګاریتم لپاره.



$f(x) = 2^x$



$f(x) = \mathrm{ld}(x)$

لیکونکی: هیولیک،کویف

د توان او لوګاریتم لپاره شمېرقوانین

له تعریفونو او تابعمساواتو څخه د اکسپوننشل - او لوګاریتمي توابعو لپاره لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s\, a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s/a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t\log_a x\,. \end{aligned}$$

برسیره (سربېره) پر دې د مختلفو بنسټونو ترمنځ شمېربدلون لپاره اړیکې باور لري:

$$\log_b x = \log_b a\ \log_a x\,.$$

په ځانګړې توګه

$$\log x = (\log e)\ln x\,.$$

لیکونکی: هیولیک،کوپف

لاندې بېلګې د شمېرقاعدو استعمال روښانه کوي .

(i)

$$\ln(4x^2) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 =$$

$$= 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2) +$$

$$(2x) = 2\frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\frac{\ln x}{\ln 2}$$ ld

لیکونکی: هیولیک،کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم شمېرونی

په لوګاریتم کې لاندې قانون باوري دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

له دې کبلخ کېدی شي دوه سکالا یا کچرېرنې یو په بل کېږدو او د نتسجې په توګه نه د دې عددونو جمعه بلکه ضرب لاس ته راځي.

د پورته ځېرې ځخه د بېلګې په توګه لاس ته راړو، چې $3.5 \cdot 2 = 7$. دلته لومړی 1 د پورته سکالا په 3.5 (لومړی ضریب) د په لاندې سکالا شمېرل کیږي. بالاخره 2 د پورته سکالا (دویم ضریب) د ضرب نتیجه په لاندې سکالا لوستل کیږي.

لیکونکي،هیولیک.کوپف، ویپر

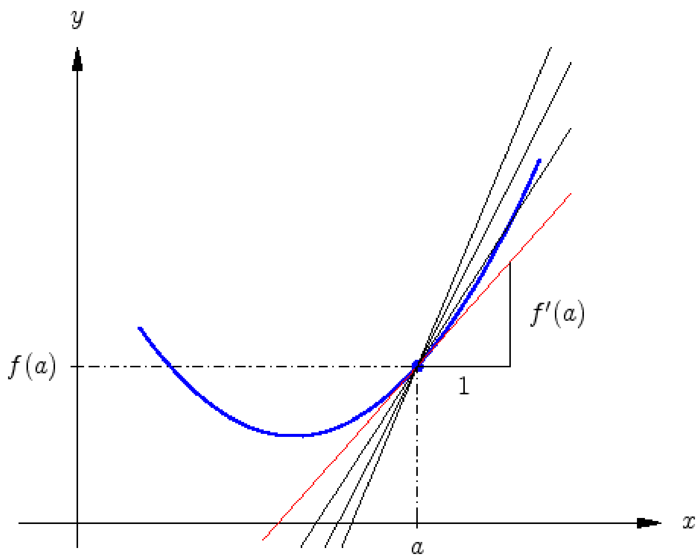
مشتق یا رابېلېدنه Ableitung

یو تابع f په یوه ټکي a کې مشتقوړ دی، که دا د رابېلېدنې یا مشتق په څېر نیوله شوې پوله(لیمیټ)

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library



هندسي مشتقوړوالی په دې معنا دی، چې د غ،خوون(قطاعو) جګېدنه چې د

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

سره ورکړل شوي د تانجنت جګوالي په لور وهڅېږي یا کورګنت شي.

د دې لپاره $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$ هم لیکو او جګ مشتقونه د $f'', f''', \ldots$ او همداسي د $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$ سره ښایو. یو فنکشن f په یوه دېرې D مشتقوړ بلل کیږي، که $f'(x)$ د ټولو $x \in D$ لپاره شتون ولري.

لیکونکی:هیولیک،کویف

د تابع $f(x) = x^2$ مشتق

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مشتق $f''(x) = 2$ یو ثابت دی.

د یوه په خوښه مونوم $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ لپاره ، بینوم د فرمول په مرسته لاس ته راځي

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1}h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1},$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم ترم h^2 په ګوته کوي.

لیکونکی:هیولیک،کوپف

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د جمعي قضیې په مرسته وشمېرل شي.

له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

د $t = x + h/2$ سره کمښترېش لاس ته راکوي:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\left((x+h/2)+h/2\right) - \sin\left((x+h/2)-h/2\right)}{h} =$$

$$= \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}.$$

له

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

امله بنی اړخ د $h \to 0$ لپاره د $\cos x$ په لور هڅېږي.

غوره (مهم) مشتقونه

لاندې جدول د غوره توابعو مشتقونه راکوي: :

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		$r \neq 0$, x^r	$r\,x^{r-1}$
e^x	e^x		$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق کرښیزوالی Linearität der Ableitung

مشتق کرښیز دی دا په دې معنا چې د مشتقوړ توابعو f او g لپاره صدق کوي

$$(r f)' = r f', \quad r \in \mathbb{R},$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ضرب یا ځل قانون

د دوه مشتقوړ توابعو f او g مشتق دی

$$(f g)' = f' g + f g'.$$

تولیز د ضرب $f = f_1 \cdots f_n$ لپاره صدق کوي:

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i}.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ضرب د قانو سره لاس ته رځي

$$\frac{d}{dx}(x^2 \ln x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1).$$

که $\sin x$ د ضریب په حېیث ورزیات کړي، نو بیا د ضرب قانو ن استعمال لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x(x^2\ln x)\right] = \cos x(x^2\ln x) + \sin x(x(2\ln x + 1)).$$

په بدیل ډول کېدی شي دا فرمول په ډېرواره ضرب وکارول شي او لاس ته اري راوړي

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x(x^2\ln x)\right] = \cos x(x^2\ln x) + 2x(\sin x\ln x) + \frac{1}{x}(\sin x\, x^2).$$

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

د وېش قانون Quotientenregel

د دوه مشتقوړ توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړې توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د راشنل تابع

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

مشتق دی:

$$\frac{(1-2x)'(4+3x^2) - (1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2} = \frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2} =$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4 + 3x^2)^2}$$

د ضرب قانون سره يي بديل لاس تهراخي

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' = (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}\,.$$

ليكونكي:هيوليک،كرايخ

زنځيري قانون

د توابعو دزنځيروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

لپاره مشتق دی:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

د $f(y) = z,\ g(x) = y,\ h(x) = z$ سره دا هم ليكل كيږي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

.

)ليكونكي:هيوليک، كوپف

د زنځير قانون

$$h(x) = \sin\big(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\big)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د روښانه ونې لپاره تعریفیږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy}\sin(y) g'(x) = \cos\left(\ln(1+x^2)\right) g'(x)\,.$$

د دننني مشتق شمېرنه $g'(x)$ سر له نوې د زنځیري قانو له مخې صورت نیسي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

بدیلي کېدی شي مشتقیزه لیکندود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \cos(y)\frac{1}{w}2x = \cos\left(\ln(1+x^2)\right)\frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

لیکونکي:هیولیک، کوپف

ایمپلیخیت مشتقوړ توابع

د بیلګې په توګه د

$$E:\ x^2 + 3y^2 = 7$$

له لارې ورکړ شوې ایلیپسې (هګۍ یا بیضوي) له لارې لرو:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

همداسې

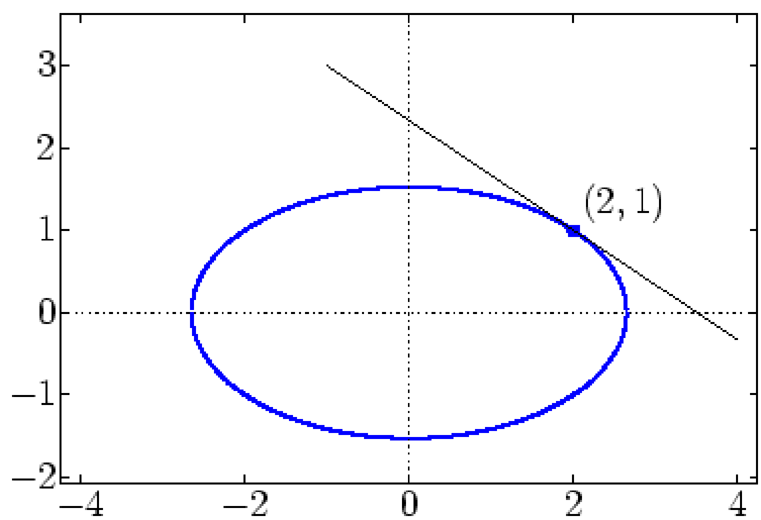
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$$
.

سره د تانجنت جګوالی $y \neq 0$ باندې په یوه ټکي د E له دې سره کېدی شي په

لپاره لاس ته راځي $(2,1)$ وټاکل شي. د بېلګې په توګه د

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$
.



په ورته توګه کېدی شي لوړ یا جګ مشتقونه هم وشمېرل شي. د yy' لپاره د ضرب قانون کارول یا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx}\,(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y'' = -\frac{1+3(y')^2}{3y}$$
.

ټاکلي $y'(x)$ د يوه ټکي د کواوردينات اينوولو او همدا اوس د E بيرته په ارزښت له لارې څرګند ارزښتونه وټاکل شي.

ليمړنکي:هيوليګ،کنپف

لوګاريتمي مشتق

فرمول

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

کېدی شي د بڼې $y = g(x)^{h(x)}$ مشتق نيوني ته د $g(x) > 0$ سره وکارول شي. لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)}\frac{d}{dx}\left(h(x)\ln g(x)\right) .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

تابع

$$f(x) = x^x$$

د $x > 0$ سره مشتق دی.

$$f'(x) = x^x\frac{d}{dx}\ln(x^x) = x^x\frac{d}{dx}(x\ln x) = x^x(\ln x + 1) .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $g(x) = x^{\ln x}$ لپاره لاس ته راخي

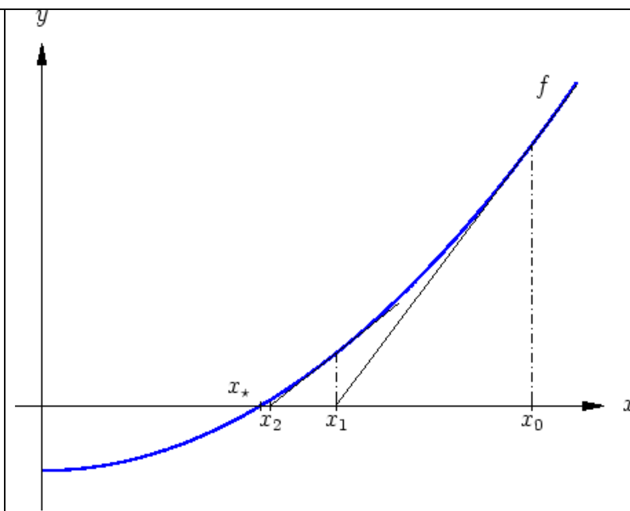
$$g'(x) = x^{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x)^2 = 2x^{\ln x}\frac{\ln x}{x}\,.$$

ليکونکي: ايپ، هيوليګ

نيوټن تلنلار يا قانون Newton-Verfahren

د نيوټن قانون سره د يوه تابع f صفرځای کېدی شي و ټاکل شي. د $x_0, x_1 \ldots$ پرلپسي يا ترادف نږدې ارزښتشمېرنې يا Approximation د کرښيزوالی له لارې وګټل شي. نږدېونه x_{l+1} د تانجنت ِغوځتکی دی په ټکي $(x_l, f(x_l))$ کې د x - محور سره.

$$x_{l+1} = x_l - f(x_l)/f'(x_l)$$



د يوه ساده صفرځای $x_\star$ ($f'(x_\star) \neq 0$) لپاره د نيوټن –ايتراشن Newton-Iteration ځای - لوکالي مربعيز پولې ته هځيږي (کونورګنت) ، دا په دې معنا چې

$$|x_{l+1} - x_\star| \le c\;|x_l - x_\star|^2$$

د پيلټکي x_0 لپاره د $x_\star$ په يوه پوره کوچني چاپيريال کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بابلیانو ریښه (جذر)نیونه

داد بابلیانو څخه کارول شوی ایتراشن(لاتین : تکرار Iteration)

$$x \longleftarrow (x + a/x)/2$$

د یوه مثبت عدد a درېښې شمېرلو لپاره د ټیکې کتنې څخه د نیوټن -تګلار په څېر د $f(x) = x^2 - a$ لپاره ځان راباسي

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

د $a = 2, x_0 = 1$ لپاره نږدې شمېرنې (Approximationen) لاس ته راځي.

1

1.5

1.41666666666666666666666666666666667

1.4142156862745098039215686274509803921568627450980392157

1.41421356237468991062629557889013491011 7

1.41421356237309504880168962350253024361 5

1.41421356237309504880168872420969807857 0

پولې ته تلنه خورا ګړندۍ ده. د هر پل سره د ټیک شوو ځایونوتعداد په نږدې توګه (د کرښې سره په نخښه شوی) دوه واره کیږي. مربعیز پولې ته تلنه کېدی شي په دې بېلګه کې د ساده بڼه بدلون سره وښوول شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{l+1} - \sqrt{a} = (x_l + a/x_l)/2 - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_l}(x_l - \sqrt{a})^2.$$

د نیوټون تلنلار هندسي روښانه ونې ښخه لاس ته راښي، چې $x_0 \neq 0$ د ټولو لپاره تکرار پولې ته ښي.

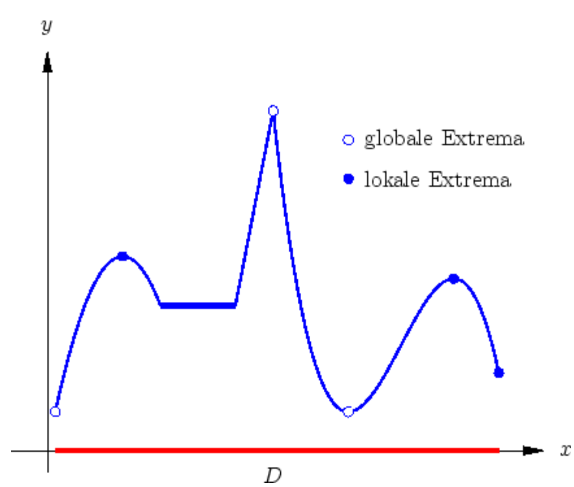
افراطیت Extrema

یو تابع f په a کې په ډېرۍ D یو ښاى اړوند مینیموم لري، که وي:

$$f(a) \le f(x) \quad \forall x \in D.$$

د ښاى اړونده مینیموم سره د تابع ارزښت $f(a)$ په یوه خورا کوچني چاپېریال $(a-\delta, a+\delta) \cap D$ کې مینیموم دی.

ګلوبال او لوکال (مطلق او ښاى اړونده) خورا جګ ارزښتونه (ماکسیموم) په ورته توګه تعریف دي.



په یوه بند انتروال په ټوټه ډول نابرېکېدونی او مشتقوړ تابع کېدی شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتق په په صفرښایونو، پرېکېدښایونو یا ژۍ ټکو کې رامنځ ته شي. دا ډول تیوپ کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته او دتابع ارزښتونو د پرتله کوني له لارې پیدا کړاى شي. لیکونکي:هیورنر،هیولیګ

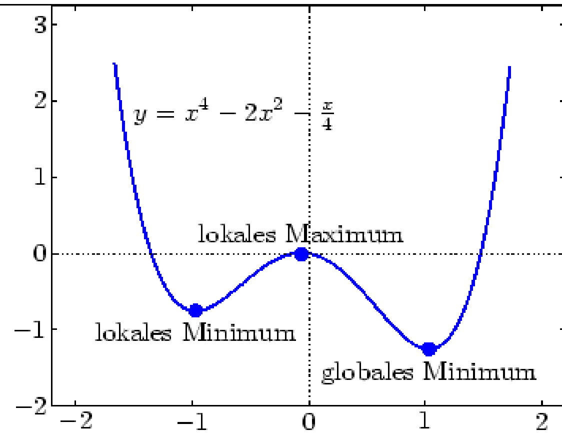
(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې به يو څو تيوپيکي حالتونه تر بحث لاندې راشي يا و څېړل شي.

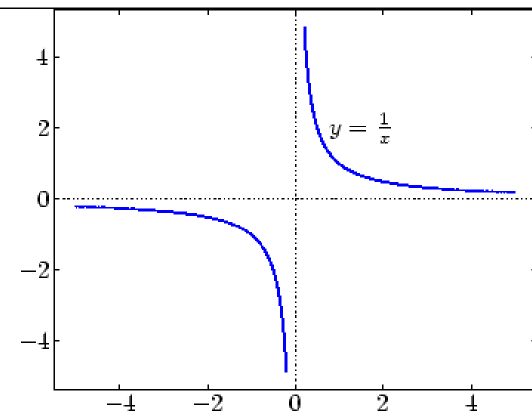
$f(x) = x^4 - 2x^2 - x/4$
تابع
د $D = \mathbb{R}$ سره دوه مينيما لري او يو ماكسيما. مينيمومو د خورا کوچني تابع ارزښت سره مطلقه دی. يو مطلق ماكسيما شتون نه لري، ځکه چې

لپاره $x \to \pm\infty$ د $f(x) \to \infty$

.

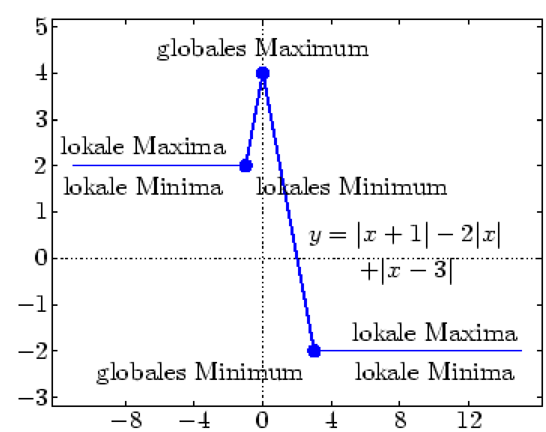


تابع $f(x) = 1/x$ د
$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
سره کوم افراطي ارزښت نه لري.

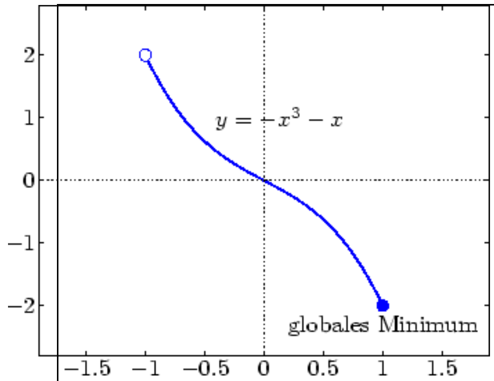


كه يو تابع په واز انتروال كې ثابت وي، نو دا ځايونه (ځاييز (ځای اړونده) يا لوكال) ماكسيمال او هم (ځايز) مينيمال دي،

د يوه كره يوغږيز تابع سره افراطی ارزښتونه د ژی ټكو سره نيول كيږي، كه دا دد تعريفورشو پوري اړه ولري.



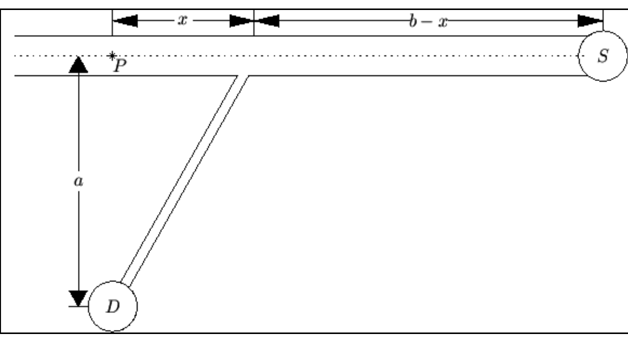
(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

له يوه کلي D څخه يوه ښار S ته يو سرک جوړيږي. کلي ته په واټن a همدا اوس ښار ته يوه شاه لار (ګړندی لار) جوړه ده. د ښار څخه د P ټکي پورې ، چې کلي ته نږدې ګړندی لار پرته ده، اوږدوالی b لري.

سيده کربنيزه توته لار جوړيږي.له کومې چې ښا رته زر رسېدل تظمينوي، که په ګړندی لار له $v_a = 120$ km/h منځنی چټکتيا(سرعت) او $v_n = 60$ km/h په دنوې ځنګيزه توته لار لاړ شي.



واټن $x \geq 0$ د P او فرعي توته سرک ترمنځ په ګړندي د واټن $x \geq 0$ شمېرنه د اړيين وخت د مينيمال کولو له لارې.

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

ښار ته د رسيدو لپاره .

د مشتق صفر اينووونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0\,,$$

راکوي

$$v_a x = v_n\sqrt{a^2+x^2} \quad\Leftrightarrow\quad x_m = a/\sqrt{3}$$

د لوکال انحرافي ځای په څېر. ایا چې دا مینیموم دی، باید دا د وهل شوې لار وخت د انټروال د پای ټکو لپاره و ازمایل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a+b}{v_a}\,, \qquad t(0) = \frac{2a+b}{v_a}\,, \qquad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. نامساوات $t(b) \geq t(x_m)$ ورته دي و دې لاندې ته:

$$t(b) \geq t(x_m) \quad\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{3}a+b$$

$$\Leftrightarrow\quad 4a^2+4b^2 \geq 3a^2+2\sqrt{3}ab+b^2$$

$$\Leftrightarrow\quad a^2-2\sqrt{3}ab+3b^2 = (a-\sqrt{3}b)^2 \geq 0\,.$$

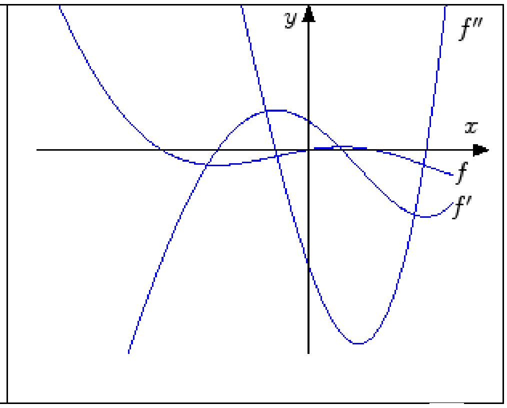
دا اخرني نامساوات تل پوره کیږي، او له دې سره x_m اوپټیمال دی، که $b \geq a/\sqrt{3}$ وي.

په بل حالت کې x_m په انټروال $[0,b]$ کې نه دی پروت او په ژی ټکي b پروت مینیموم ته ، یعنې ښار ته په سیده ترنلار، رسېدی شي.

لیکونکي:هیورنر، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

افراطي ارزښتونو ازماېښت Extremwerttest



د افراطي ارزښتونو ډول يا تيوپ باندې کيدی د جګو مشتقونو په مرسته پرېکړه وشي که f دوه واره ناپرېکېدونکی او مشتقوړ وي او

$$f'(a) = 0 \,, \qquad f''(a) > 0$$

$$(f''(a) < 0) \,,$$

نو f په a کې يو ځای اړونده مينيموم(ماکسيموم) لري. که دويم مشتق د a په ځای کې ورک شي، نو باېد جګ مشتقونه پرېکړې ته راکښل شي يا راوړل شي. که باور ولري:

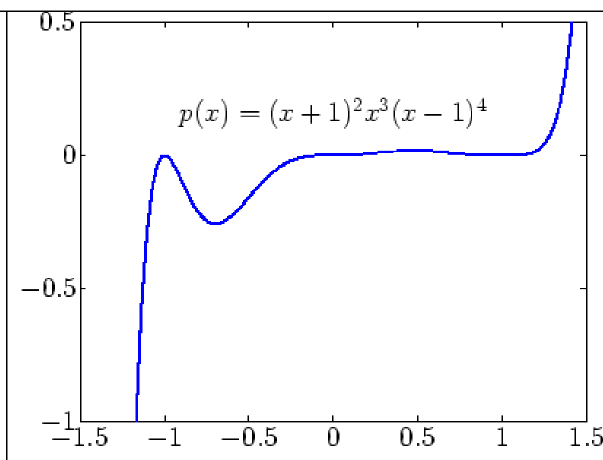
$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{او} \quad f^{(n)}(a) \neq 0 \,,$$

نو f په a کې تيک هلته يو افراطي ځای لري، که جوړه وي. په دې حالتکې f په a کې يو ځای اړونده خورا جګ – يا همداشې خورا ټيټ تکی لري، که $f^{(n)}(a) < 0$ همداسې $f^{(n)}(a) > 0$ وي.

پولينوم

$$p(x) = (x+1)^2 x^3 (x-1)^4$$

په $x = -1$ کې يو ډبل، په $x = 0$ کې يو درېواره او په $x = 1$ کې يو څلورواره صفرځای لري.



(c) ketabton.com: The Digital Library

صدق کوي

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0\,.$$

په $x = -1$ کې p یو مینیموم لري. په $x = 1$ کې p یو ماکس لري، ځکه چې

$$p(1) = \ldots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0\,.$$

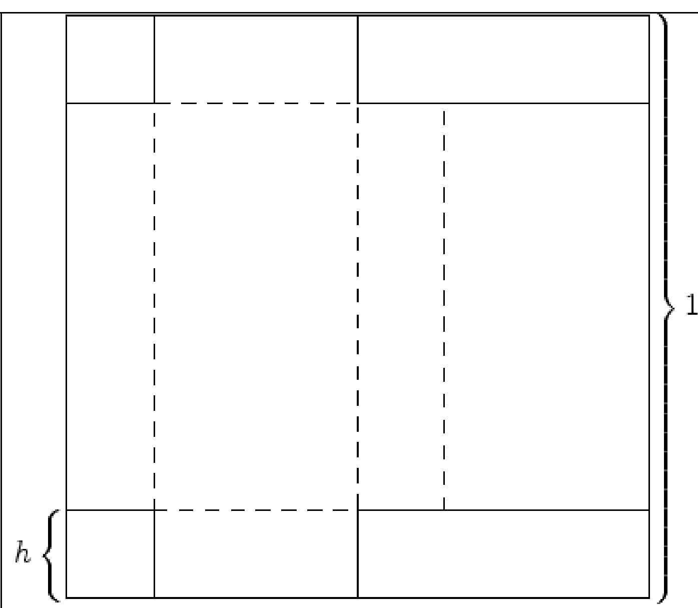
بالاخره د p

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او یو مخنخبنه بدلون په $x = 0$ کې په سرچینه کې افراطي ځای نه شته.

کوتۍ Schachtel

د دې ورکړې شوي غوځ نمونې په مرسته دې د یوه مربع ډوله کارتوني کاغذ څخه خورا لوي کوتۍ جوړشي، چې خورا لوي حجم (ډکې) لري.



(c) ketabton.com: The Digital Library

حجم یا ډکی دی:

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

اوږدوالی سور جګوال

د مشتق صفرځایونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

ترې

$$h = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

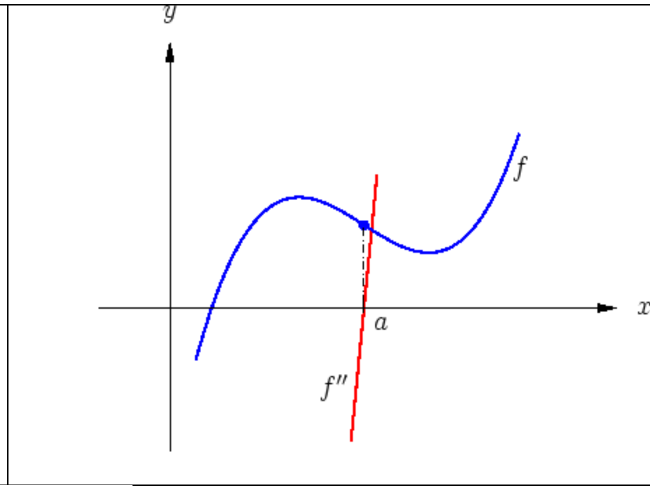
د ممکنه ځای اړونده افراطي ځایونه لاس ته راځي. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور دی او $v(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}$.

دا چې د ژۍ ټکو $h = 0$ او $h = 1/2$ لپاره حجم یا ډکی دی، نو کوتی د $h = 1/6$ لپاره خورا لوي حجم لري.

لیکونکي: هیولیک،هیورنر

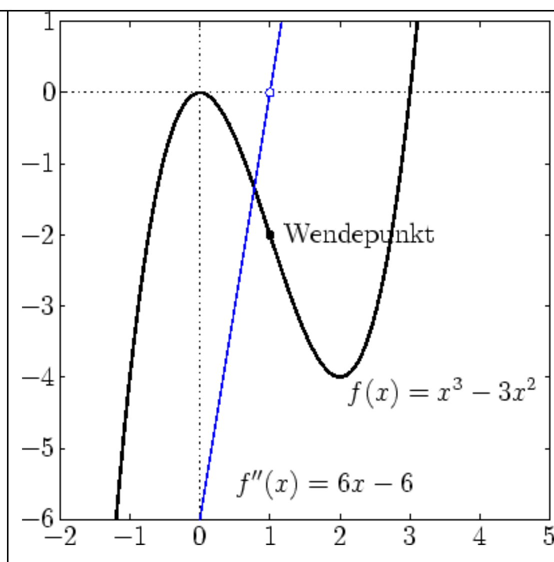
اوړونټکي (نقاط انعطاف Wendepunkte)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يو تابع f په يوه اوړونټکي a کي دويم مشتق مخنخبنه بدلوي (يعني په دې ټکي کې تابع خپله لور بل لور ته اړوي) .	

د يوه پوره هوار تابع لپاره اړين دى، چې $f''(a) = 0$ او پوره دى، چې $f'''(a) \neq 0$

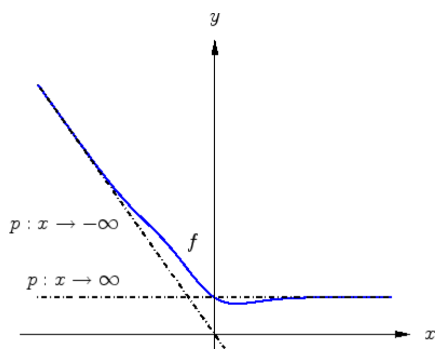
ليکونکي: هيوليک،هيورنر

تابع يو مکعبي پولينوم ښايي. دا چې دويم مشتق کرښيز دى، نو ټيک يو اوړونټکى(د انعطاف ټکى) شتون لري ليکونکي: هيوليک، هيورنر	

ګاونډې يا لند: ګاونډ (مجاورتها Asymptoten)

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو تابع د یوه تابع f اسیمپتوت دی ، که $f(x)-p(x)\to 0$ وي د $x\to\infty$ یا د $x\to -\infty.$ لپاره.



په ورسره بلد ډول p د f په څېر یوه ساده بڼه لري او د دې په چوپړکې ، چې د $f(x)$ د څرنګوالي حالت د لوی x لپاره وڅېړي.

د ځانګړو معناو کرښيز اسيمپتوتونه $p(x)=ax+b$ دي. دوي د نورو ترڅنګ د منحني یا کږو بحث کې یو رول لوبوي.

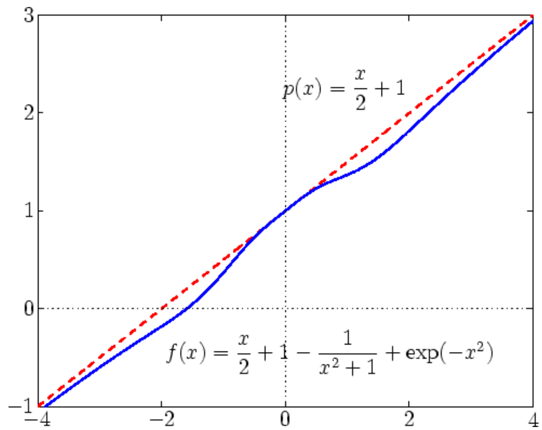
لیکونکي: هیولیګ، هیوررنر

د یوه څېره شوي یا متشکل شوي تابع $f(x)$ لپاره د $|x|\to\infty$ لپاره تناسب د کرښيزو ترمونو له خوا ټاکل کيږي، څکه چې

$$\lim_{|x|\to\infty}\exp(-x^2)=\lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=0\,.$$

له دې لاس ته راړني سره کرښه $p(x)=x/2+1$ اسیمپتوت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د راشنلتابع ګاونډ یا- اسیمپتوتونه Asymptoten rationaler Funktionen

یو راشنل تابع

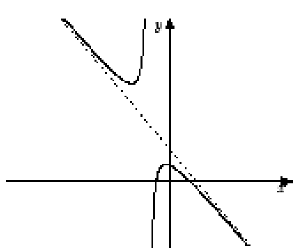
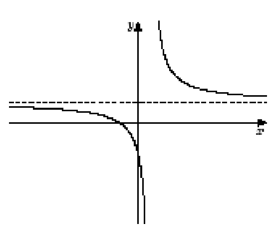
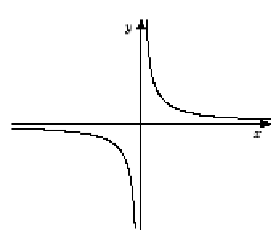
$$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

تیک هلته یو کږښیز اسیمپتوت لري که $q+1$ له ګراد یادرجي $p \leq$ وي.

د Grad p < Grad q لپاره باور لري

$$\lim_{p\to\pm\infty} r(x)=0\,,$$

داپه دې معنا چې د x -محور اسیمپتوت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $q+1$ Grad $p \leq$ Grad $q \leq$ Grad e لپاره اسيمپتوټ لاس ته راځي د پولينوموېش له خوا:

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

د Grad q $\tilde{p} <$ Grad سره. اسيمپتوټ پرته (افقي) ده $(a = 0)$ ، که Grad q $p =$ Grad. وي.

که د صورا درجه له يوه څخه زياته د محرج له درجې لويه وي، نو يوه اسيمپتوتيکي پولينوم لري د ≥ 2 درجې

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د راشنل توابعو

$$r_1 = \frac{4x+3}{2x+1}$$ او $$r_2 = \frac{2x^2}{x+1}$$

لپاره دپولينوم وېش له لارې لاس ته راځي:

$$r_1(x) = 0x + 2 + \frac{1}{2x+1}$$

او

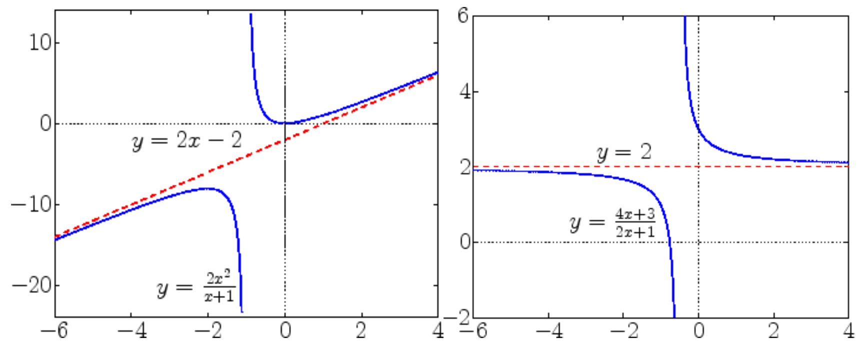
$$r_2(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x+1}$$

اسيمپتوټ يا ګاونډ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y_1 = 2$ او $y_2 = 2x - 2$.

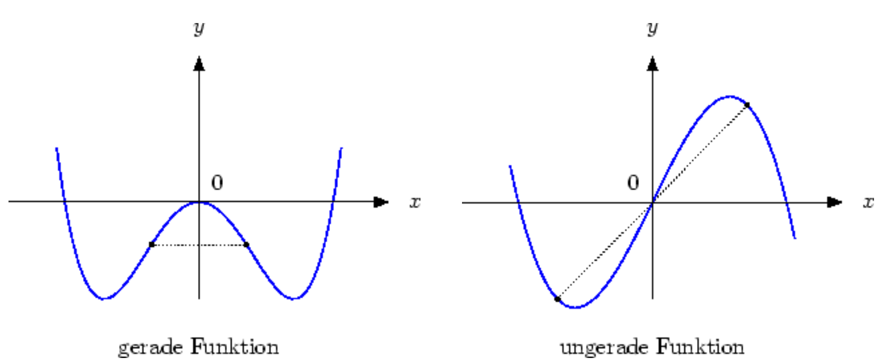
دا دوه بېلګې په لاندې ځېرو کې روښانه شوې دي.



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

سیومتري Symmetrie

یو تابع f جوړه(جفت) دی، که $f(x) = f(-x)$ وي ، دا په دې معنا، چې که ګراف د y-محور ته سیومتري وي. د یوه ناجوړه (تاق) تابع لپاره $f(x) = -f(-x)$ دی، او ګراف و سرچینې ته ټکی سیومتریک دی.

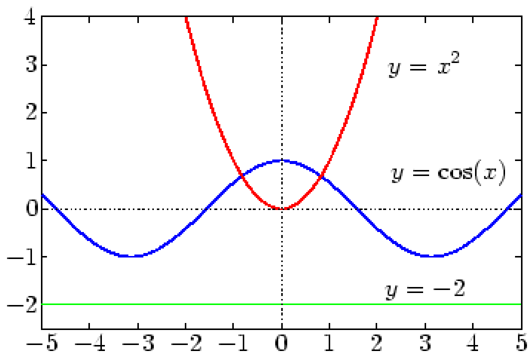


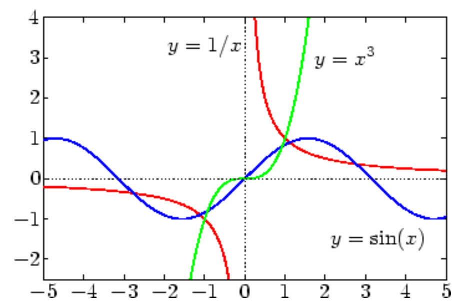
(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جوړه او ناجوړه توابعو ضرب جوړه دی. د دې برعکس د یوه جوړه او یوه ناجوړه تابع ضرب ناجوړه یا طاق دی. د جمعې او تفریق جوړولو سره ډول ساتلی پټیږي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر،کنش

دا لاندې څېره ښي لور ته یوڅو جوړه او کیڼ لور ته یو څو ناجوړه توابع ښایي.





د مناسبو کمبینېشنونو جوړولو سره نورې بېلګې لاس ته راځي. نو توابع

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \qquad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x)\sin x - g(x)x^3$$

ناجوړه دي.

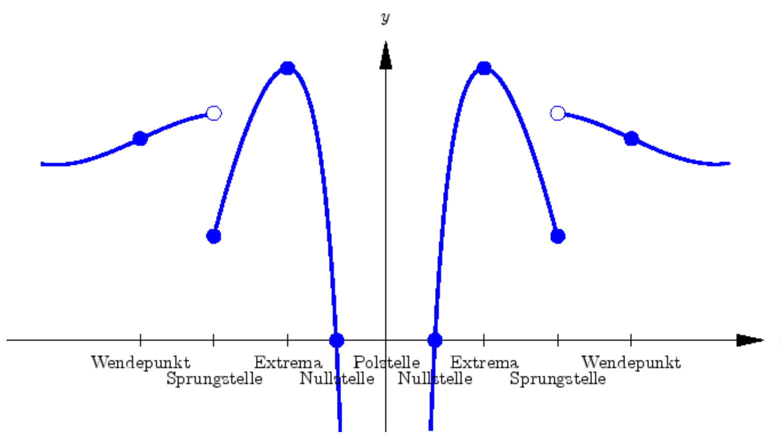
لیکونکي: هیولیک، هیورنر،کنش

د کرو یا منحنیو خبرې اترې(بحث)

د یوې تابع د ځرنګوالي حالت د قضاوت لپاره کېدی شي لاندې ټکي په پام کې ولرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- سیومتر Symmetrien
- Periodizität تل بېرته راګرځېدنوالی
- پرېکېدنځایونه Unstetigkeitsstellen
- (Nullstellen → Vorzeichen مختخبنه (صفرځایونه
- (Extrema → Monotoniebereiche همغږېزوالي وشوګاني) افراپیت
- (Wendepunkte → Konvexitätsbereiche د کونوکسی ورشو) اوړونټکی د انعطافنقطه
- قطبځایونه Polstellen
- اسمپتوتي یا ګاوندیتوبونه Asymptoten



د توابعو داسې یو تحلیل د ګړو خبرې اترې یا د منحنیو بحث بلل کیږي

لیکونکي: هیولیګ، هیوررنر

د ګړو بحث ښوول یا روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin(3x)$$

خیړو .

سیمتري: دا چې $\sin x = -\sin(-x)$ ناجوړه تابع دی..

(c) ketabton.com: The Digital Library

تل ببرته راګرځېدنه یا پریودیځیتي: تابع پخپله لکه د ساین تابع پخپله 2π - پریودي ده او په راتلونکي کې فقط په انتروال $[-\pi, \pi]$ ترڅېړنې راځي.

د پرېکېدنې ځایونه: تابع له ناپرېکدونکو توابعو مرکبه جوړه شوې او له دې امله پرېکېدنځایونه نه لري.

صفرځایونه: د جمعي(زیاتون) قضیې سره $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$ دی:

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع په 0 او $\pm\pi$ کې صفرځایونه لري..

افراطیت: تابع

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\ \cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x \stackrel{!}{=} 0$$

د $\cos x = 0$ یا $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره ورکیږي ، نو

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$$

دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف او پریودیکي ده، ژیټکي ترڅېړنې نه راځي.

د دویم مشتق د مخنخښې یعنې

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\ \sin x$$

مخنخښې او تابع ارزښتونو د پرتله کونې له لارې کېدی شي د افراطیت تیوب یا ډول وټاکل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اوړونټکی(نقطه انعطاف)

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x \stackrel{!}{=} 0$$

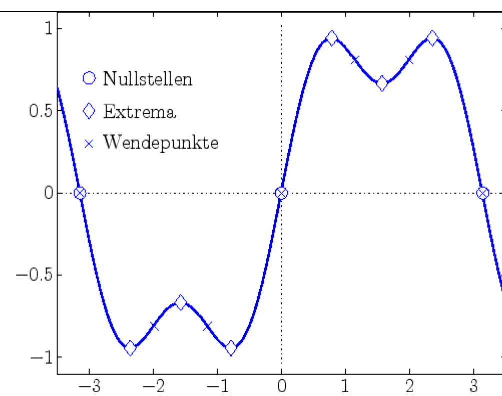
د $\sin x = 0$ يا $\sin x = \pm\sqrt{5/6}$ لپاره پوره دی، دا په دې معنا چې

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

په دې ځای کې درېم مشتق صفر نه دی. نو تابع په $(0,0)$ او $(\pm\pi,0)$ کې اوړونټکي لري، همداسي په $(-1.99,-0.81)$ ، $(-1.15,-0.81)$ ، $(1.15,0.81)$ او $(1.99,0.81)$ کې نږدې ازښتونه لري.

قطبونه : ناپرېکیدونکي توابع قطبځایونه نه لري.

اسیمپتوتونه: تابع پریودیکي او نا ثابت دی، نو اسیومپتوتونه نه لري.



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه :

د یوه کړې بحث د ښوونې لپاره یو تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترڅېړنې لاندې نیول کیږی.

سیومتري: صورت ناجوړه(طاق) او مخرج جوړه(جفت) دی. نو تابع ناجوړه دی، داپه دې معنا چې سرچینې ته ټکی سیومتریک دی.

پریودیوالی یا تل ببرته راګرځېدنوالی: تابع پریودیکي نه دی.

د پرېکېدنې ځایونه: صفرځایونه ± 1 د صورت صفرځایونه نه دي . له دې سره f په $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ باندې ناپرېکېدونکی دی.

صفرځایونه: صورت د $x = 0$ لپاره ورکیږی.

افراطیت:

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2-1)^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

دا چې تابع ساده صفځایونه لري، نو افراطیت فقط ځای اړوند دی. افراطي ارزښتونه دي:

$(-2, -4/5)$ ځای اړوند خورا جګ ټکی ، $(2, 4/5)$ ځای اړوند خورا ټیټ ټکی.

له دې سره کېدی شي، چې د f ډول یا ټیپ د کوالیتاتیو حالت څخه. دا چې $f(x) \to -\infty$ د $x \to -\infty$ او $x \to -1$ لپاره ، باید په انتروال

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(-\infty,-1)$ کې يو ځای اړونده مينيموم ولري. په ورته توګه په $(1,\infty)$ کې لږ تر لږه يو ځای اړونده خورا ټيټ ارزښت.

اوړونتکی (نقطه انعطاف) :

$$f''(x) = \frac{-80x^5+398x^3+42x}{20(x^2-1)^3} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

په دې ځای کې دريم مشتق صفر نه دی.

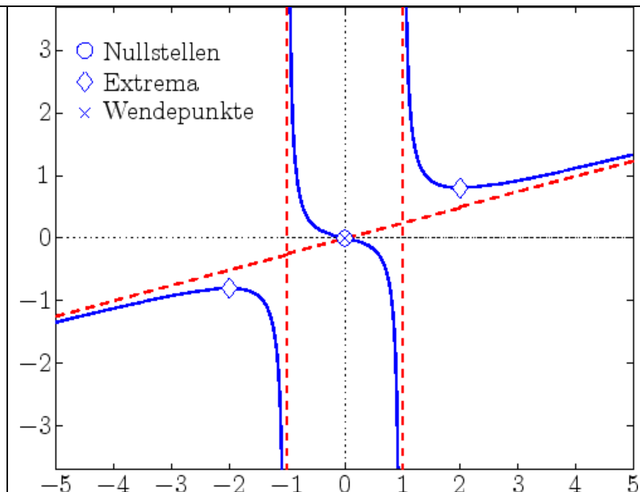
قطبځايونه: تابع په $x=\pm1$ کې ساده صفرځايونه لري،

اسيمپتوتونه: ديوه پولينوم وېش څخه

$p(x)=5x/20+0=x/4$

د اسيمپتوت په توګه لرو.

ليکونکي:هيوليک،هيورنر



بېلګه:

د کږې يا منحني بحث لپاره لاندې تابع تر څېړنې لاندې نيسو:

$$f(x)=e^{-x^2}+\frac{4|x|}{e^4}$$

سيومتر:

داچې x^2 او $|x|$ جوړه دې تابع جوړه دی، داپه دې معنا چې سيومتريک و y-محور ته.

پريوديوالی: تابع پريوديک نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرېکړېدنځایونه: تابع د ناپرېکړېدنتوابعو څخه مرکبه (یوځای اینول) شوې ده او له دې امله پرېکړېدنځایونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت توابعولپاره ټول مشتقونهپه صفرځای کې پرېکړېدونکي دي.

صفرځایونه: اکسپوننشل تابع تل مثبتّ(زاتیزه) ده، د مطلق ارزښت تابع نامنفي ده. نو صفرځایونه نه شته.

افراطیت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\operatorname{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\,.$$

سربېره پردې دې کریتیکل ټکی $x = 0$ په پام کې وي، چېرته چې مشتق پرېکړېدونکی دی.

تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف دی، د x د $\pm\infty$ په لور حالت ته دې پام وي.

دا چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره f لږ ترلږه یو مطلق مینیموم لري، مګر هیڅ مطلق ماسیموم. پرتله د y - ارزښت کریتیکل ټکي

$$(-2, 9/e^4) \qquad (0,1) \qquad (2, 9/e^4)$$

ښایي، چې په $x = \pm 2$ کې مطلق مینیموم نیولکیږي. داچې f په انتروال $[-2,2]$ یو مینیموم او هم یو ماکسیموم لري، لاس ته راځي چې $(0,1)$ یو ځای اړونده مینیموم دی.

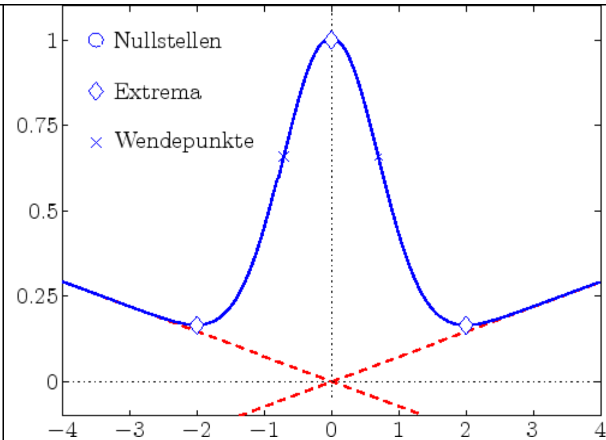
اوړونټکي :

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

دیم مشتق په دې ځای کې $\neq 0$ دی.

	قطبځایونه: تابع قطبځایونه نه لري. اسیمپتوتونه: دا چې e^{-x^2} له $\lvert x \rvert$ څخه د $x \to \infty$ لپاره ګړندی د صفر په لور درومي، تابع اسیمپتوت $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ او ی: لیکونکي هیورنر، هیولیک

د ریمن انتیګرال Riemann-Integral

دیوه توټه ډوله (په توټه توټه کې) ناپریکېدونکی تابع f تاکلی انتیګرال د

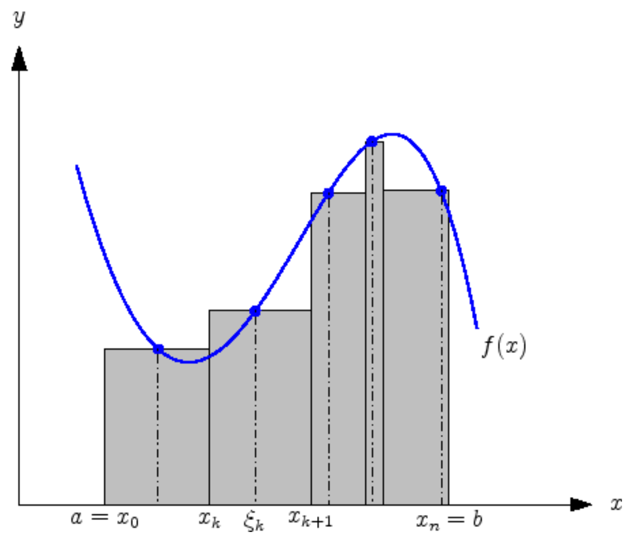
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta| \to 0} \int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

له خوا یا سره تعریف دی. دلته $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ د $[a,b]$ توټه ونه ښایي،

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\,, \qquad |\Delta| = \max_k \Delta x_k\,,$$

د انټروال ماکسیمال اوږدوالی دی او ξ_k په خوښه ټکی دی په k -م انټروال کې. د انتیګرال تعریف په ښي لور جمعي د ریمن – جمعو په نامه یادیږي.

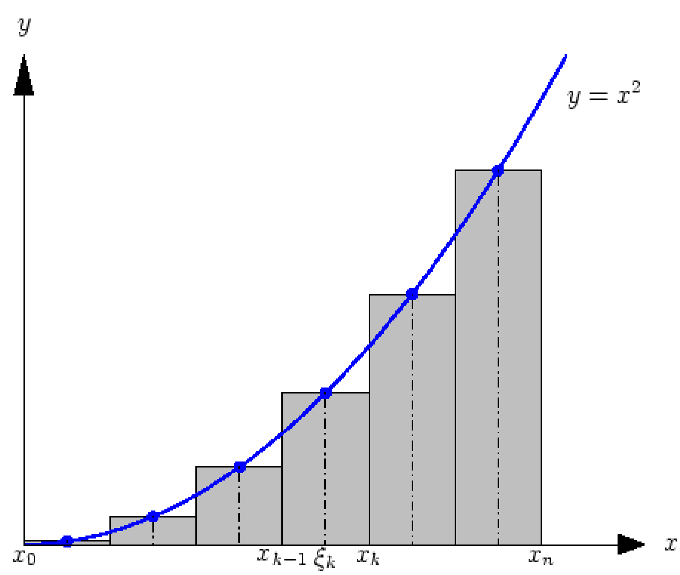
(c) ketabton.com: The Digital Library



د مثبت f لپاره $\int_a^b f(x)\,dx$ د سطحې مساحت دی د f د ګراف لاندې.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنرو ویپر

د $\int_0^1 x^2\,dx$ د ریمن انتیګرال په حیث راوړنې سره کېدی شي د ټوټه ونو پرلپسې(ترادف)



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta_n : x_i = i/n \, , \; i = 0, \ldots , n \, ,$$

وکارول شي د ارزښت شوو ځایونو

$$\xi_i = (2i-1)/(2n) \, , \; i = 1, \ldots , n \, ,$$

سره د n -مې ټوټه ونې لپاره.

د تعریف سره سم لاس ته راځي:

$$\int f_{\Delta_n} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{2i-1}{2n} \right)^2 = \frac{1}{4n^3} \left(4 \sum_{i=1}^{n} i^2 - 4 \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \right)$$

$$= \frac{1}{4n^3} \left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

او له دې سره

$$\lim_{n\to\infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

.

بنسټيزه تابع Stammfunktion

يو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټيز تابع ده، او د دې لپاره ليکو

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټول بنسټيزو توابعو ډېرۍ يا سټ د ی ، چې د f ناټاکلی انتيګرال بلل کيږي. د انتيګرېشن ثابته په خوښه ده. د بېلګې په توګه

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

د $F_a(a) = 0$ سره يو ممکنه بنسټتابع دی.

د ټولو ساده توابعو لپاره د داسې بنسټيزو توابعو داسې اکسپليځيټ ورکړه ممکنه نه ده، د دې لپاره بيلګه ده: $f(x) = \exp\left(x^2\right)$.

هر تابع

$$F_1(x) = x^3 + 2\,, \quad F_2(x) = x^3\,, \quad F_3(x) = x^3 - 1$$

د

$$f(x) = x^2\,.$$

يو بنسټيز تابع دی.

د $f(x) = \frac{1}{x}$ لپاره د $c > 0$ سره

$$F(x) = \ln(c|x|)$$

يو بنسټيز تابع دی.

ليکونکي: هيوليک،کرايڅ

د انتيګرال شمېرنې اصلي جمله

(c) ketabton.com: The Digital Library

که F د یوه ناپرېکېدونکي تابع f بنسټيزه تابعوي، داپه دې معن، چې $f = F'$ ، نو باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

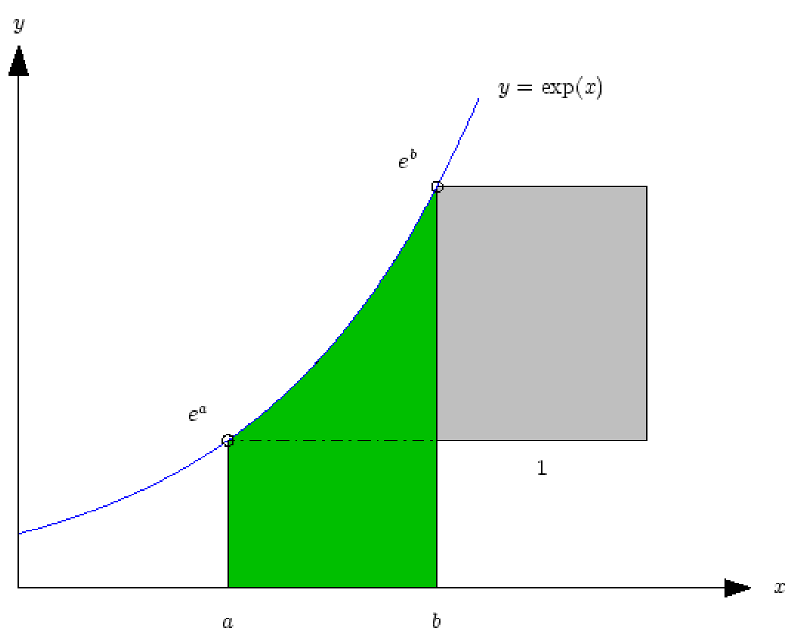
همداسې په لنډ ليکډول

$$\int_a^b f = [F]_a^b \ .$$

يو ټاکلی انتيګرال کېدی شي د بنسټيزو توابعو د انتوال په پای ټکو کې د تابع ارزښتونو د کمښت په څېر وشمېرل شي.

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

د اکسپوننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشلتابع دی او له دې امله لرو:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a\,.$$

د a او b ترمنځ دګراف سطحه مساوي ده د سور 1 او د تابع ارزښتونو دجګوالي واټن ځخه جوړ ولاړګوډیز (مستطیل).

د لوګاریتمي تابع $F(x)=\ln(x)$ مشتق $F'(x)=1/x\,,\ x\in\mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x\,dx = \ln(b)-\ln(a)\,,\quad a,b\in\mathbb{R}^+\,.$$

لیکونکي: هیورنر، هیولیک

د $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ یو بنسټیز تابع $F(x)=\arctan x$ دی . په تعقیب لرو

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1)-\arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

د کمښت سره verifiziert ، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

د $f(x)=\tan x$ بنسټیز تابع دی:

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

د دې پایله ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347 \, .$$

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

يو پلانېت د M کتلې سره يو د ګراويتيشن (راکښنې ورشو) ورشو توليدوي، چې په يوه تن يا بدن د m کتلې سره يوه قوه $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ استعمالوي. د لته د γ ګراويتيشن ثابته ده او x د دروند ټکو (د ثقل مرکزونو) واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره بنستيز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې يو بدن د a څخه و b ته په واټن يوسي، بايد کار

$$\int_a^b F(x) \, dx = \gamma m M \int_a^b \frac{1}{x^2} \, dx = -\left[\gamma m M / x\right]_a^b$$

$$= \gamma m M (1/a - 1/b)$$

سرته ورسيږي .

د a لپاره مساوي د پلانت وړانګه او $b \to \infty$ کېدی شي د کينېتيکي انرژي سره د مساوي اينسوني له امله داسې په نامه د تېښتې چټکتيا يا سرعت v و ټاکل شي،داپه دې معنا چې چټکتيا ، چې اړيينه ده، د يوه پلانېت ګراويتېشن ورشو څخه وو تلی شي:

$$\frac{m}{2} v^2 = \gamma \frac{mM}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma \frac{2M}{a}} \, .$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2$ km/s. لرو.

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوره – یا راوتلي بنسټیز توابع

لاندې جدول د زیات رامنځ ته کېدونکو توابعو $f(x)$ د بنسټیزو توابعو $F(x)$ جدول ښایي.

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
x^s , $s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\|x\|$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x)-x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

لیکونکي: هیورنر، هیولیک

ټوټه انتیګرالونه Partielle Integration

د ضرب قانو $(fg)' = f'g + fg'$ له مخې د ناټاکیو انتیګرالولوپاره یو ورته فرمول لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

په اړونده توګه د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لرو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

له دې سره دې په پام کې وي، چې د ژئ ترمونه $[fg]_a^b$ ورکيږي، که یو له دې دواړو توابعو په انتروال ټکو کې صفر وي. دا د پریودیکي توابعو لپارهم ورکیږي ، د پریودې اوږدوالي $(b-a)$ سره.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

له

$$\int (1+x)^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\,(1+x)^{\alpha+1} + c$$

د $\alpha \neq -1$ لپاره

لرو

$$\begin{aligned}\int \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1+x}}\,dx &= x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx \\ &= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c.\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه شمېرل کيږي

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sqrt{1-x}}_{v'}\,dx = \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx$$

$$= \quad 0 - \left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د اووښتونو (واريابلو) بدلونVariablensubstitution

د زنځيري قانون څخه

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

د يوه بدلون $y = g(x)$ لپاره د بنسټتوابعو جوړولو له لارې لاس ته راځي

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y) + c = \int f(y)\,dy\,.$$

په ورته توګه د ټاکلو انتيګرالونو لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

د دفرنشل په مرسته کېدی شي دا تابع په لاندې بڼه وليکل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

که په انتیګراند کې دننني مشتق پیژندوړ وي، لکه د بېلګې په تګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx\,,$$

لپاره ، نو د بدلون استعمال خورا ساده دی. په دې بېلګه کې ږدو

$$y = g(x) = \ln x\,,\quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

او لاس ته راځي

$$\int g(x)^2\,g'(x)\,dx = \int y^2\,dy = \frac{1}{3}y^3 + c\,.$$

د په څټ بدلون له لارې لاس تهراځي

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c\,.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

په تیپیک ډول د بدلون له لارې سړی هڅیږي چې انتیګرال ساده کړي.دبېلګې په توګه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y}-1}\,dy$$

لپاره په نږدې توګه ږدو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله ترانسفورمي شوى ناټاکلى انتيګرال راکوي.

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\frac{dy}{dx}\,dx$$
=

$$= \int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)\,dx$$

$$= \int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c\,.$$

د $x = e^y$ په ځت يا برعکس بدلون سره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2}\left|\frac{e^y-1}{e^y+1}\right| + c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د مرکاتور پرپوستونMercator-Projektion

بنسټتابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

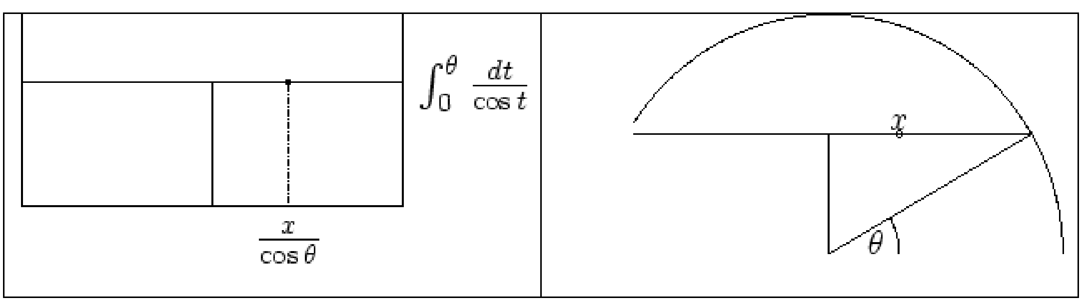
کېدی شي د بدلون

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1+\sin x}{\cos x}, \qquad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\, dx,$$

سره وشمېرل شي.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int (\cos x)^{-1}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} du \\ &= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c. \end{aligned}$$

یو استعمال د مررکاتور پرېوستون دی. دلته د ځکي پوښ سطحه کږنجساتونکي یا کږنجيښتوني په یوه سطحه پریوځي یا پری ایستلی شي.

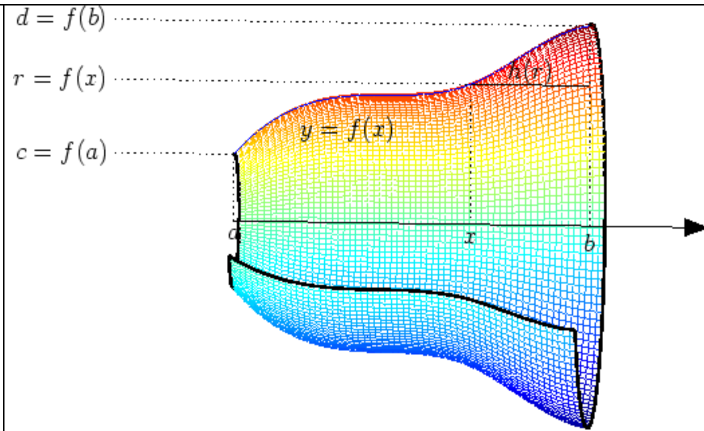


دلته سور درجه یا عرض البلد په اړیکو $1/\cos\theta$ غزول شوی.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څرخېدونکو بدنونو ډکی(حجم) Volumen von Rotationskörpern

په x -محور د تابع $r = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$ د څرخېدني له امله جوړ شوی بدن V ډکی(حجم) کېدی شي د ګردی ډوله(دایره ډوله) پروتِ غوڅیو انتیګرال له لاري و شمیرل شي: $$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx\,.$$	

په بدیلي ډول کېدی شي توټې(استواني) پوښ له لارې هم وشمېرل شي

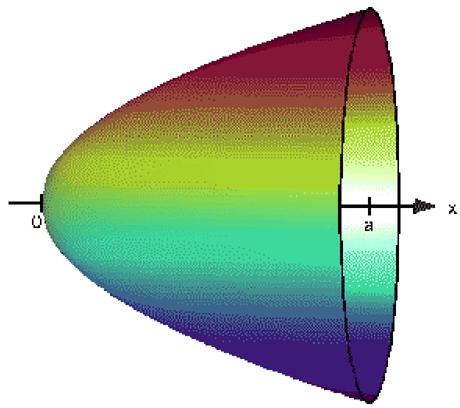
$$V = \pi c^2 (b-a) + 2\pi \int_c^d r\,h(r)\,dr\,,$$

د کوم سره چې c همداسي d مینیمال همداسي ماکسیمال وړانګي r دي او $h(r)$ په بدن کې خوندي توټي پوښ تول جګوالی دي د وړانګي r سره. دا بدیل د تولو له مخه د همغږیز وړانګي تابع f لپاره موخه ور دی.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

دا جوړ یا څېره شوی پارابولوید د x – محور باندې د کرې $y = \sqrt{x}$ څرخون سره منځ ته اځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ځرخون بدن د فرمول سره سم ډکی)حجم) دی:

$$\pi \int_0^a \left(\sqrt{x}\right)^2\, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{1}{2}\pi a^2\,.$$

په بديلې توګه د توتې پوښ باندې انتيګرال له لارې منځ ته راځي. 1

$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r(a-r^2)dr = 2\pi\left[-\frac{1}{4}(a-r^2)^2\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\pi a^2\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Diss . Uni. Wien Algebren .

Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, Dissertation at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولي اړتياوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲-   داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته

تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرې شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولې.

د هسکې مینې د لومړنې بنوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته

د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(بنوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای). د ۱۹۶۶ تر سپټبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي ځانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

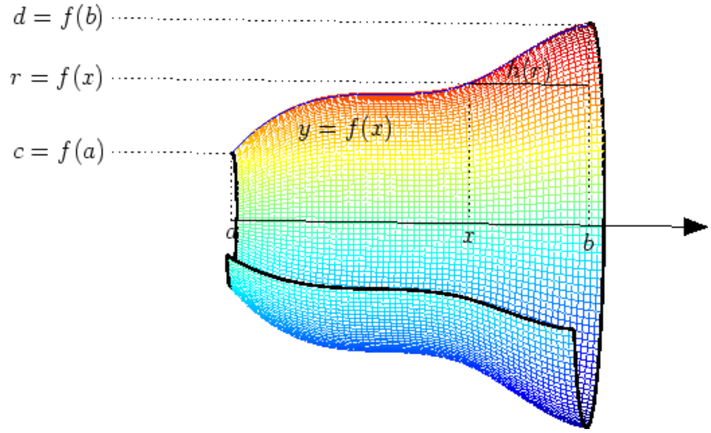
ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن بناپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن بناپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې ځانګه او اباسین نومیرې. ځانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې. ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو لیکلو او د ژباړې دنده په غاړه اخستې، چې خپل فکر تر شونې پولې پورې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شمیرپوهنې بنسټونه



لیکونکي.: پروفیسور هیولیګ او ډله یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

له مات. ن ج څخه

ژباړي : ډاکتر ماخان میرِ.ي شینوالری

وینا ۱

منطقي(سم اندیزې) تړنې ۲
کوانتورونه ۱۱
سیده ښوونه ۱۳
ناسیده ښوونه ۱۴
ایمپلیکېشن ترې لاس ته راتلنه یا – راوړنه ۱۴
د پوره اندکشن له لارې ښوونه ۱۶
د مربع(څلورۍ) عددونو د جمعي لپاره فرمول ۱۶
ډېرۍ(سټ) ۱۷
د ګڼونو (اعدادو) ډېرۍ ۱۹
په ډېریو کې عملیې ۱۹
کارتېزي ضرب (ځل) ۲۳
اړیکې ۲۴
د اړیکو د داتا بانک ۲۵
د اړیکو خویونه ۲۵
فنکشن ۲۸
د تابع یا څیروني یا بلواک(تابع) خویونه ۳۰
د فنکشنونو ۳۲
په څټ یا برعکس فنکشن ۳۲
فاکولتې یا فکتوریل ۳۳
د بینوم ضربیونه ۳۳
د پاسکال درېګودی ۳۴
د بینوم درسي جمله ۳۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بينوم ضريبونو لپاره كټمټوالى ۳۸
د دېريو يا ستونوكمبيناتوريک ۴۰
كرښيز فنكشنونه ۴۹
مربعيز فنكشنونه ۵۰
مايل ګوزار يا – غورځونه ۵۱
پولينوم ۵۳
راشنل فنكشن يا بلواک(تابع) ۵۴
ساين او كوساين ۵۵
تانجنت او كوتانجنت ۵۸
اكسپوننشل توابع(بلواک) ۶۰
د ګټي ګټه ۶۳
لوګاريتم ۶۵
تولیز په توان تابع او لوګاريتم ۶۶
د لوګاريتم شمېرونى ۶۸
مشتق يا رابېلېدنه ۶۸
غوره (مهم) مشقونه ۷۱
د مشتق كرښيزوالى ۷۲
ايمپليځيت مشتقوڼ توابع ۷۵
لوګاريتمي مشتق ۷۷
نيوټن تلنلار يا قانون ۷۸
د بابليانو ريښه (جذر)نيونه ۷۹
افراطيت ۸۰
د مشتق صفر اينوونه ۸۲
افراطي ارزښتونو ازمايښت ۸۴
كوتئ ۸۵
ګاونډي ۸۸
د راشنلتابع ګاونډ يا- اسيمپټوتونه ۸۹
سيومتري ۹۱
د كږو يا منحنيو خبرې اترې(بحث) ۹۲
د ريمن انتيګرال ۹۹
بنسټيزه تابع ۱۰۱
د انتيګرال شميرنې اصلي جمله ۱۰۳
غوره – يا راوتلي بنسټيز توابع ۱۰۶
د اووښتونو (واريابلو) بدلون ۱۰۸
د مركاتور پرېوستون ۱۱۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څرخیدونکو بدنونو ډکی(حجم) ۱۱۲
پوښتنه: ۱۱۵
د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې: ۱۱۹
د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او
ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي ۱۲۱

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library