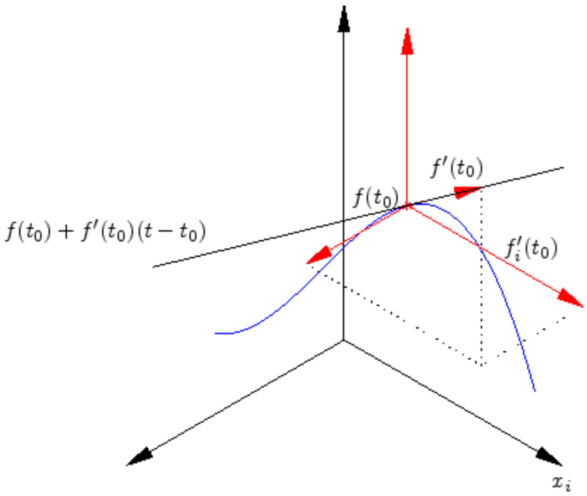
انالیز ۱ Analysis 1

د پوهنتون لپاره لکچرنوټونه

د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیز

یا انالیز دوه



لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتون د شمیرپوهنې یا ریاضي څانګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتون [illegible]

Smakhan1946gmail.com

ژباړی: ډ اکتر ماخان (میرزي) شینواری

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوی څښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلې او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې په لار د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

د کتاب نوم: د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیزې

لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتو د ریاضي څانګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه

ژباړی: ډ اکتر ماخان میرږي شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د چاپ لړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ژباړي مننه

د دې لیکنې مل نورې خپرونې د شتوتګارت د پوهنتون د شمیرپوهنې د څانګې د لکچرونو لړۍ چاپ باندې پیل کیږي

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لرې. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې- زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس- سره مرسته وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

بلواک یا تابع یا فنکشن ۱

کربښيزې توابع ۳

ځلورى- یا مربع فنکشنونه یا – توابع ۴

همغږیز توابع ۶

برعکس – یا په څټ فنکشن ۹

د فنکشنونو یا توابعو سره شمیرنه ۱۱

ننوتي او وتلي - یا مقعر او محدبې توابع ۱۲
پولينوم ۱۵

د پولينومونو سره انترپولیشن ۲۱

د لاګرانج-پولينوم ۲۳

راشنل (کسری یا نسبتي) توابع ۲۵
کمپلکس راشنل- یا کسري توابع ۲۷
په ټوټه مات ټوټه کونه یا تجزیه کونه ۲۸
د حقيقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه ۳۳
د حقيقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه ۳۹
د اویلر-مویورې فرمول ۴۰
تانجنت او کوتاجنت ۴۱
د ارکوس توابع ۴۲
هارمونیک لړځیدنې یا رپیدنې ۴۳
اکسپوننشل توابع ۴۹

ګټه یا ربح ۵۰

ټولیز توان توابع او لوګاریتم ۵۶

د ودې قانون ۵۷

د توان او لوګاریتم لپاره شمیرقوانین ۵۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

های پرابول تابع ۵۹

د یوې پرلپسې پوله ارزښت ۶۲

د کوشي قضیه ۶۶

همغږیز ه پولې ته تلنه ۶۸

د پرلپسې پولې ته تلنه ۷۰

نارېښتونی پوله ارزښت ۷۱

پوله اینفریور او پوله سوپریور ۷۲

پرتله کوونکې قضیه ۷۳

د یوې پرلپسې پنډغالي ټکی ۷۵

ورهولست- مودل ۷۶

ریکورژن ۷۶

د پيPi رکورزیو اپروکسیمیشن ۷۸

د پرلپسیو یا ترادفونو ځانګړي ... ۸۲

د یوې لړۍ پرلپسې ۸۴

هندسي یا ځمککچیزې لړۍ ۸۶

هارموني لړۍ ۸۸

مطلق پولې ته تلونکې لړۍ ۸۹

مایورانت او مینورانت ۹۰

د وېش قضیه ۹۱

د ریښې قضیه ۹۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لایبنیځ قضیه ۹۴

د لړیو ځانګړي پوله ارزښتونه ۹۸

ناپرېکیدنه یا متمادیت ۹۹

یو اړخیز ناپرېکیدنوالی یا متمادیت ۱۰۲

د ناپرېکیدونکو توابعو لپاره ... ۱۰۴
منځ ارزښت جمله ۱۰۷
د دوه سطحو – یا برخو تلنلار ۱۰۹
د ناپرېکیدونکي تابع افرطیت ۱۱۰

برابرډوله ناپرېکیدنوالی ۱۱۱

په ټکي ډول پولې ته تلنه برابرارزښته ... ۱۱۲

د توابعو لړۍ پولې ته تلنه ۱۱۴

توابعو لړۍ ته مایورانت یا پورته پولې ۱۱۶

د اکسپوننشل تابع ضرب انخورونه ۱۱۷
د اکسپوننشال تابع لړۍ انځورونه ۱۱۹

مشتق(رابیلیدنه)

د بنسټتوابعو مشتق یا رابیلیدنه ۱۲۴

د مشتق یارابیلیدنې کرښزوالی ۱۲۷

د ضرب قانون ۱۲۷

د وېش قانون یا لار ۱۲۹

ځنځیری لار یا – قانون ۱۳۰

ایمپلیځیت مشتق نیول ۱۳۲

د لایبنیځ قاعده یا لار ۱۳۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

لوگاریتمي مشتق یا – رابیلیدنه	۱۴۱
د رولې جمله	۱۴۳
منځ ارزښت قضیه	۱۴۴
تولیزه (شوې) منځ ارزښت جمله	۱۴۵
لانداو-سیمبول	۱۴۷
د لو، پیتال قاعده یا لار	۱۴۸
کرښیزاپروکسمیشن (ورنږدېوالی)	۱۵۰
د ناټیکاوي وده	۱۵۱
د نیوټن تلنلار یا – قانون	۱۵۳
د تیلور پولینوم	۱۵۷
حقیقي د تیلور لړۍ	۱۶۱
اکسپوننشل تابع	۱۶۳
د اویلر فرمول	۱۶۵
د لوگاریتم تابع	۱۶۶
بینومیال لړۍ	۱۶۷
د تیلور –لړۍ مشتق او انتیگرال	۱۶۸
د تیلور-لړۍ ضرب	۱۷۰
د تیلور-لړۍ وېش	۱۷۲
د راشنل توابعو تیلور-ودیزېنه	۱۷۴
د یوې تیلور – لړۍ	۱۷۵
د معکوس تابع د تیولور ودیزیینه	۱۷۷
د تیلور ځانگړې لړۍ	۱۷۸
د پاد نږدې ارزښت شمیرنه	۱۷۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکستريما(افراطيت) ۱۸۱

د اکستريم – يا افرطي ازښتونو ازماينت ۱۸۵

پولينوم ۱۸۶

اسيمپتوتې(يو په بل نه پرېوتونکې يا ګاونډيتوب) ۱۹۰

د راشنل- يا کسر توابعو ګاونډ يا اسيمپتوتې ۱۹۱
د کږو يا منحنيو خبرې يا بحث ۱۹۲
ريمن-انتيګرال ۱۹۸

د انتيګرال خويونه ۲۰۱

د انتيګرالشميرنې منځ ارزښت جمله ۲۰۱

بنسټيز – يا ساده توابع ۲۰۳

د بنسټيزو توابعو لومړنې توابع ۲۰۷

ټوټه- يا پارشل انتيګرالونه ۲۰۷

دلتا - تابع ۲۱۲

د متحولو – يا اووښتونو بدلون ۲۱۳

د متحولو – يا اووښتونو بدلون ۲۱۹

ساده راشنل انتيګرالونه د زياتواره قطب سره ۲۲۲

د راشنلتوابعو انيګرالونه ۲۲۵

د ساين او کوساين د ضرب انتيګرالونه ۲۲۷

د کمپلکس تريګونومتيکې توابعو انتيګرالونه ۲۲۸

تريګونومتريکې بدلونونه ۲۳۰

د ساين او کوساين راشنل توابع ۲۳۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

د ځرخیدونو بدنونو ډکی یا حجم ۲۳۶

د یوې کږې یا منحني اوږدوالی ۲۴۱

د ذوزنقې قانون **۲۴۴**

د ګاوس فرمول ۲۴۸

ناڅرګند یا نا معلوم انتیګرال ۲۵۱

د نامعلوم انتیګرال لپاره د پرتلې قضیه ۲۵۵

ګاما تابع یا – فنکشن ۲۵۸

د کوشي اصلي ارزښت ۲۵۹

د انتیګرال لاندې مشتقول ۲۶۰

لایبنیځ-قانون ۲۶۳

د نامعلومو انتیګرالونو مشتقول ۲۶۸

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې،

چاپیدونکې او چاپ ته چمتو لیکنې ۲۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

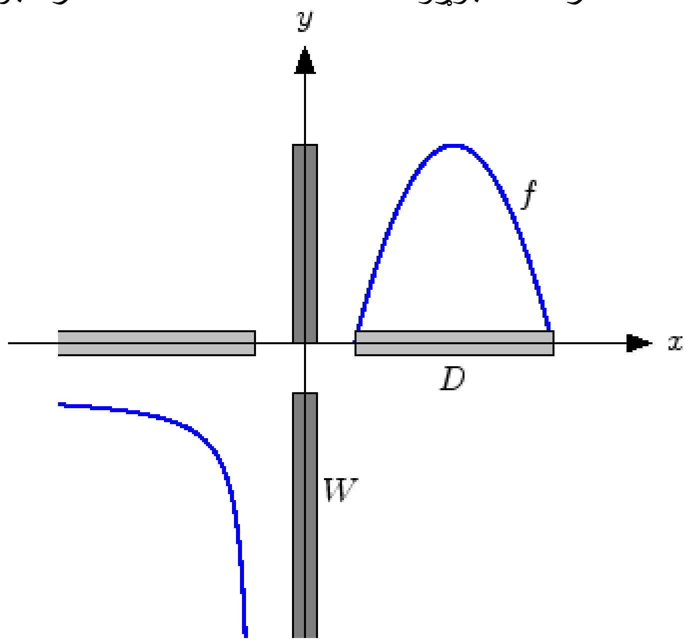
بلواک یا تابع (ټیک یې: فنکشن) Funktion

یو فنکشن یا بلواک یا تابع

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

د تعریف ورشو $D \subseteq \mathbb{R}$ هرتوکی x د ارزښت ډېری $W \subseteq \mathbb{R}$ څخه د یوه ارزښت $f(x)$ سره تنظیموي.

د f ګراف له جوړو (x,y) د $y = f(x)$ سره جوړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د ځيري ځخه چي ليدلکيږي، تعريفورشو (رنه خړه يا پرته) او ارزښت ورشو (تياره خړه يا ولاړه) په x -محور همداسې په y -محور د ګراف پريوتل دي.

ليکونکي: هيوليګ، هورنر، کنش

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعريف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، لومړی دې د په ساده –يا لومړنيو توابعو رامنځ ته کيدونکې بنديزونه يا محدودوالی په پام کې ونيول شي. د تعريف ورشو د توکي لوګاريتم بايد زياتيز يا مثبت وي او د ارزښت ورشو ناکميز يا نامنفي وي:

$3 - x > 0$ او $x \geq 0$.

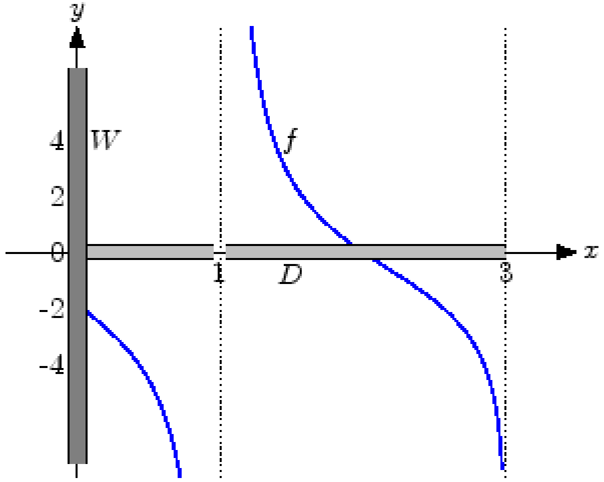
په همدې توګه بايد ماتلاندې يا مخرج صفر نه وي، دا په دې معنا چې $x \neq 1$.

په ټوليزه توګه راکوي:

$$D = [0,3)\backslash\{1\} = [0,1) \cup (1,3).$$

.

د f ارزښت دېرى د ګراف رسموو سره روښانه شي



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې f د $x \in (1,3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نیسي، $W = \mathbb{R}$ باور لري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر،کنش)

لاندې جدول د څو بنسټیزو توابعو تعریفورشو او ارزښت ورشو ښايي.

$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\ln x$	$(0,\infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{x : x = (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$

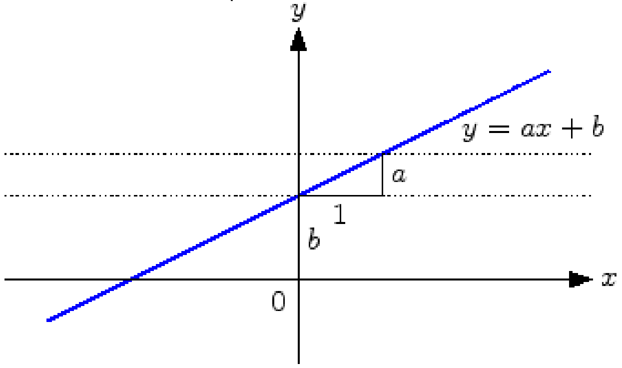
(لیکونکي: هیولیګ، هیورنر،کنش)

کرښیز فنکشنونه یا توابع

د یوه کرښیز فنکشن یا تابع

$$f(x) = ax + b$$

ګراف یوه کرښه ده د a جګیدنې او y -محورغوڅي(محورقاطع) b سره .



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره بديلي انځورونه د ټکي-جګيدنې – بڼه ده

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=a$$

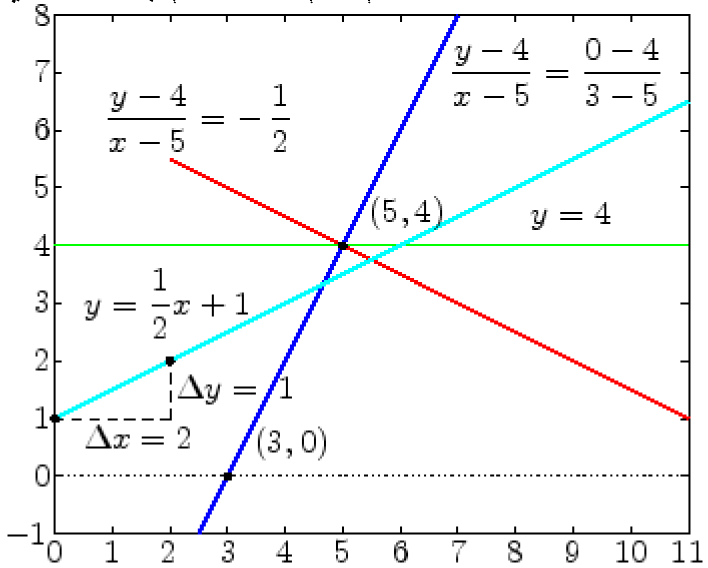
او د دوه-ټکو- بڼه

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},$$

چيرته چې (x_0,y_0) او (x_1,y_1) په کرښه پراته ټکي دي.

(ليکونکي: هيوليګ، هيوررنر)

ځيره د کرښيزو توابعو بيلي بيلي انځوروني په کوته کوي:



ليکونکي: هيوليګ، هيوررنر

ځلورۍ- يا مربع فنکشنونه يا - توابع

د يوه مربع تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

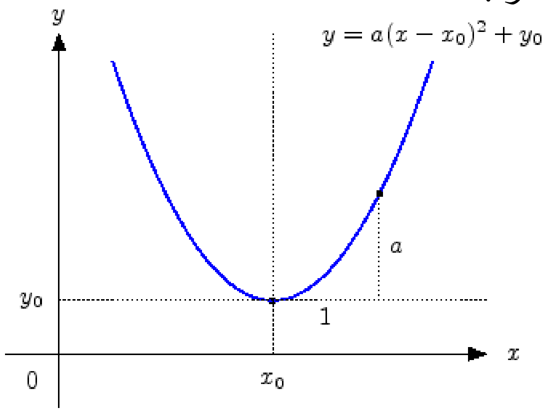
ګراف د لاندې بڼې يو پارابول دی

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د ککرۍ- یا رأسټکي

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right).$$

سره.



پای

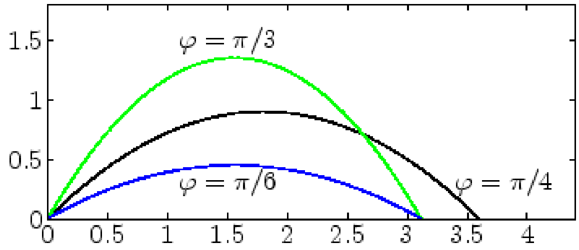
- که يو تن د يوه کونج φ لاندې په يوه v چټکتيا و توغول شي، د الوتنې لار دا لاندې پارابول

$$y = x \tan\varphi - \frac{g}{2v^2 \cos^2\varphi} x^2$$

راکوي ، چيرته چې g د ځمکې بيړه ده يا - تعجيل دی.

لاندې ځيره: مايیل توغول يا غورځول د $v = 6$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مساوات د برابرېدوله خوزښت په x - او y -کمپوننتونو د بيلوني يا ټوټه کوني(که غواړې: تجزيي) څخه لاس ته راځي ، د v پيل چټکتيا سره او د ازاده غوزوني د خوزښت ته پام کوني له لارې:

$$x(t) = vt\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v\cos\varphi}$$

$$y(t) = vt\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow y(x) =$$

$$= \frac{vx\sin\varphi}{v\cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2\cos^2\varphi}\right).$$

د غورځوني واټن دی

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi).$$

دا د $\varphi = \pi/4 \mathrel{\widehat{=}} 45°$ لپاره ماکسيمال دی.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش

همغږيزې توابع Monotone Funktion

(c) ketabton.com: The Digital Library

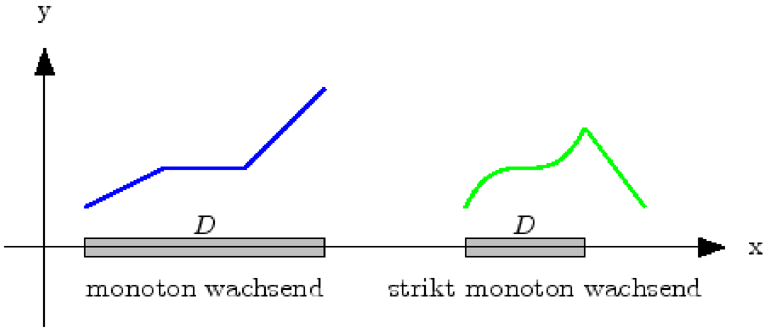
یو تابع f په یوه انټروال D (کره) همغږیز جګیدونکی دی، که وی

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{(<)}{\leq} f(x_2), \quad x_k \in D,$$

همداسي که f ټوټه ډوله ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی، که وي

$$f'(x) \overset{(>)}{\geq} 0$$

د ټولو $x \in D$ لپاره تر ځانله یا جدا ټکي بورې



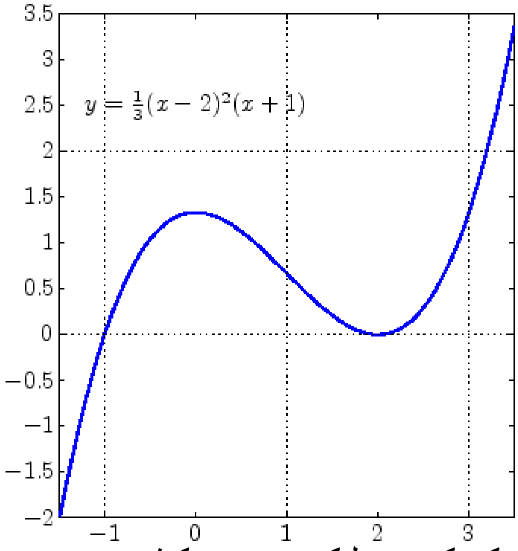
همغږیز جګیدونکي　　　　کره همغږیز جګیدونکي

په ورته توګه (کره) همغږیز ټیټیدونکی تعریفیږي.

یکونکي: هیولیک، هیورنر،کنش

تابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2(x+1)$ په $x = 0$ ځای کي یو جګ- یا ماکسیمال ټکی ($f'(0) = 0, f''(0) < 0$) لري او په $x = 2$ ځای ټیټ-یامینیمال ټکی ($f'(2) = 0, f''(2) > 0$) لري . د $x \leq 0$ او $x \geq 2$ لپاره تابع کره مونوتونجګېدونکي نخ ده او د $0 \leq x \leq 2$ لپاره کره مونوتون ټیټیدونکي نه ده.

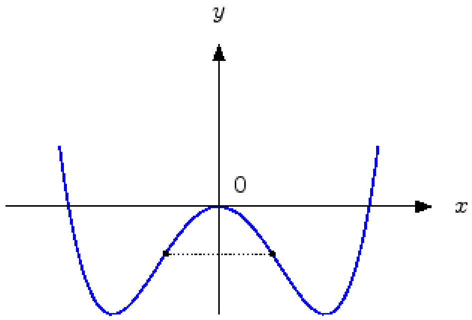
(c) ketabton.com: The Digital Library



یکونکي: هیولیک، هیورنر،کنش

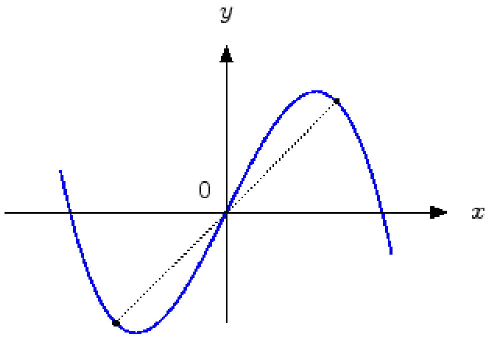
جوړه او ناجوړه – یا جفت او طاق توابع

یو تابع f جوړه دی، که $f(x) = f(-x)$ وي، دا په دې معنا چې که ګراف د y - محور سره سیومتریک وي. یو ناجوړه یا طاق تابع $f(x) = -f(-x)$ دی، او ګراف سرچیني سره تکی سیومتریک دی.



gerade Funktion

جوړه یا جفت تابع



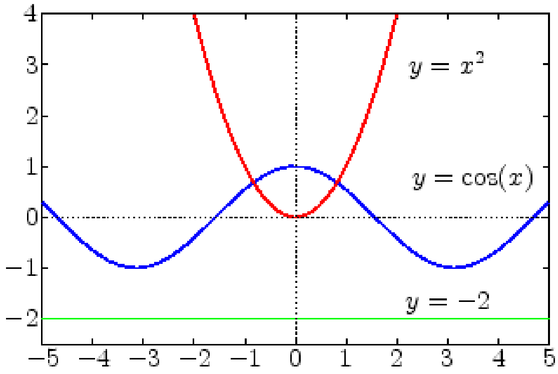
ungerade Funktion

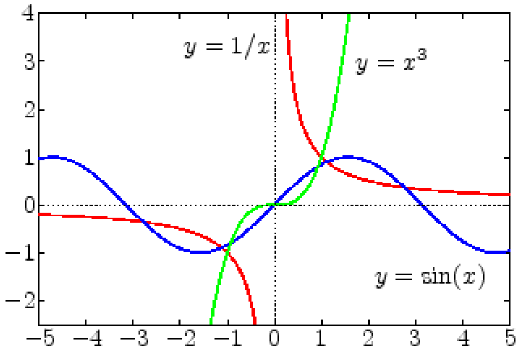
ناجوړه یا طاق تابع

د دوه جوړه توابعو ضرب جوړه تابع دی. برعکس د یوه ناجوړه یا طاق تابع ضرب د یوه جوړه تابع سره ناجوړه دی. د زیاتون یا جمعي او کمښت یا تفریق جوړولو سره د تابع تیپ یا ډول ساتلی پاتيږي.
پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې توابع یو کیڼ لور ته یو ښو جوړه (جفت) او ښي لور ته یو ښو ناجوړه (طاق) توابع ښايي.





د مناسب ترکیب جوړولو سره سړی نوری بیلګې لاس ته رواړي. نو توابع

$$f(x) = x^2\ \cos x - x^3\ \sin x, \qquad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x)\sin x - g(x)x^3$$

ناجوړه دي.
پاي.

برعکس – یا په ښت فنکشن - تابعUmkehrfunktion

د یوه اینجکتیو (په کې -) تابع $f : D \to W$ د تعریفورشو D او ارزښت ورشو $W \subseteq \mathbb{R}$ سره د

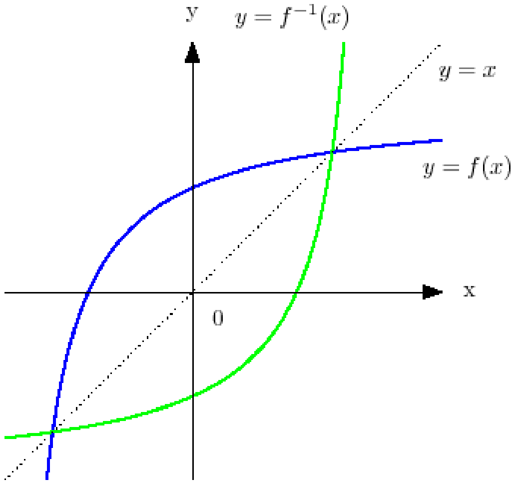
$$f^{-1} : W \to D \subseteq \mathbb{R},\ x \mapsto f^{-1}(x)$$

له لارې تعریف دی. له دې سره لاندې باور لري

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

د برعکس توابعو تعریف ورشو د f ارزښت ورشو ده. د هغه ګراف $y = f^{-1}(x)$ د f د ګراف په لومړي کونجنیمی $(y = x)$ هنداره شوې ښېره ده:

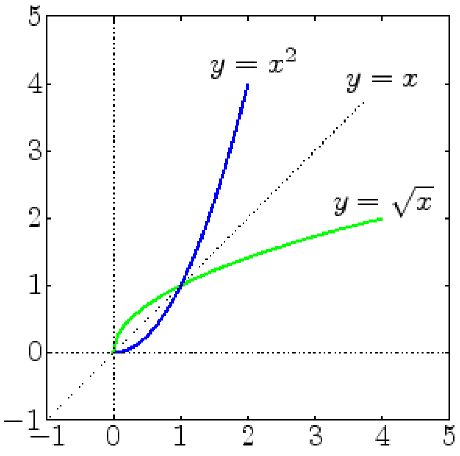
(c) ketabton.com: The Digital Library

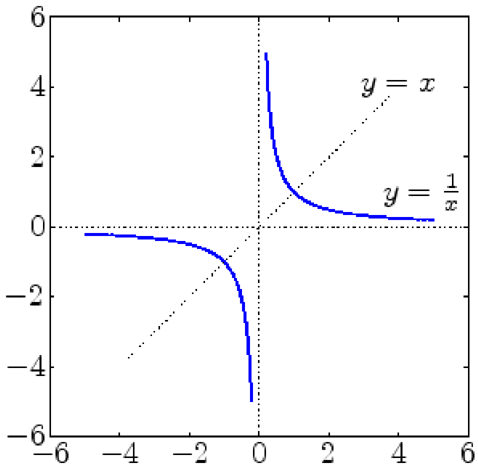


کيدی شي ليکندود $f^{-1}(x)$ مو په ساده توګه د معکوس ارزښت $f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ سره بدلولو ته لار بنود کړي. په ځانګړې توګه ، که د تابع x ارزښت ونه ليکل شي، دا اړيکې دې بايد روښانه وي، چې موخه مو څه ده.

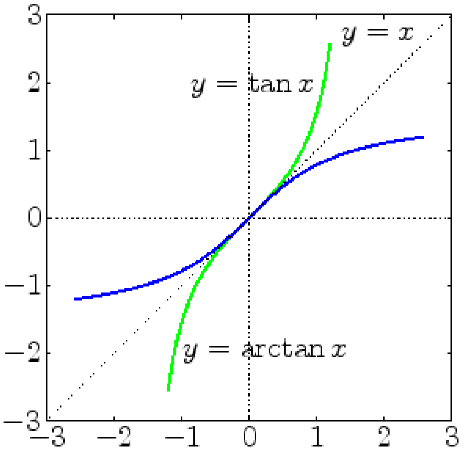
پاې.

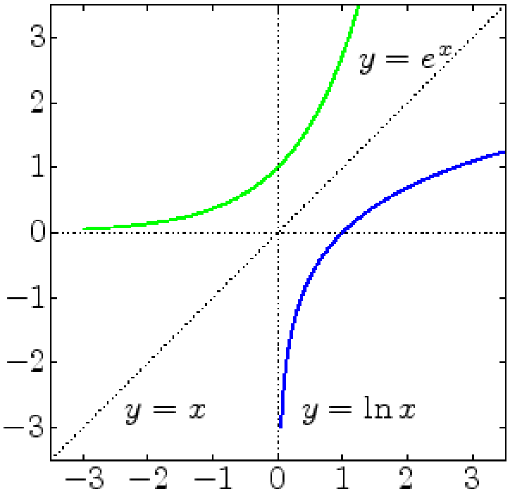
لاندې ځيرې د يو څو بيلګو برعکس - يا په ښت فنکشن يا تابع ښايي.





(c) ketabton.com: The Digital Library





په لاندې جدول کې هر اړونده تعریف ورشو وې ورکړ شوې دي:

f	D	f^{-1}	D
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$
e^x	$\mathbb{R}$	$\ln(x)$	$(0,\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{x\ :\ x=(2z+1)\pi/2\ , z\in\mathbb{Z}\}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

د فنکشنونو یا توابعو سره شمیرنه Rechnen mit Funktionen

د توابعو کرښيز ترکیب تکي دوله تعریف شوی دی، دا په دې معنا چې په توابعو د اړونده عملیو له لارې:

$$(rf+sg)(x)=rf(x)+sg(x).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه ضرب fg او وېش f/g . په وېش کې باید g د صفر سره برابر نه وي..
بالاخره

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

د دوه توابعو يو په بل پسې راوستل يا ځنځيرونه ښايي.
پای.

د بېلګې

$$f(x)=x^2-4, \qquad g(x)=x+2$$

لپاره مختلفې ترنې راکوي

$$(f+2g)(x)= \qquad x^2+2x$$

$$(fg)(x)= \qquad x^3+2x^2-4x-8$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)= \qquad x-2, \qquad x\neq -2$$

په وېش کې تعريفتشځای $x=-2$ له منخه تلونکی يا د جګيدو وړ دی،

ځکه چې صورت يا ماتباندې $x^2-4=(x+2)(x-2)$ هم په $x=-2$ کې يو صفرځای لري.

د f او g يو په بل پسې ترنه يا ځنځيرونه راکوي

$$(f\circ g)(x) = (x+2)^2+4$$

$$(g\circ f)(x) = x^2-2,$$

نو ترنه يا عمليه $\circ$ کموتاتيو يا بدلوړ نه ده.

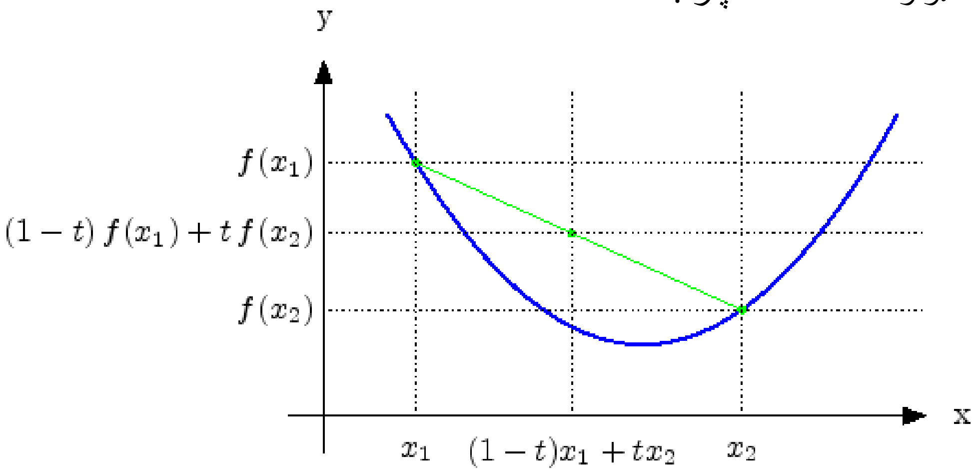
(c) ketabton.com: The Digital Library

ننوتي او وتلي - یا مقعر او محدبې توابع

یو تابع په یوه انتروال D کې(کره) ننوتی دی، که هر ټوټه وونې یا سیکانت د ګراف پورته لور ته پروت وي، دا په دې معناچې

$$f((1-t)\,x_1+tx_2) \overset{(<)}{\leq} (1-t)\,f(x_1)+t\,f(x_2)\,, \quad t\in(0,1)$$

د ټولو $x_i \in D$ لپاره.



که f دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ وي، نو (کره) ننوتنه د ټولو $x\in D$ لپاره د

$$f''(x) \overset{(>)}{\geq} 0$$

سره تر هغه ځانله ټکي پورې ورته یا برابر ارزښته ده.

د ننوتو توابعو زیاتون یا جمعه ننوتي ده. ترنې یا عملیې $/,\cdot,-$ همداسي یو په بل پسې راوړنه یا ځنځیرونه $\circ$ په ټولیزه توګه ننوتوالی نه ساتي. بالاخره هر ننوتی تابع ناپرېکېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه وتلی تابع هم تعریف کیږي. د وتلي تابع لپاره ټوټه وونی یا سیکانت د ګراف کښته لور ته پروت دی، دا په دې معنا چې د x - محور باندې هنداره شوی تابع $-f$ وتلی دی.

پای.

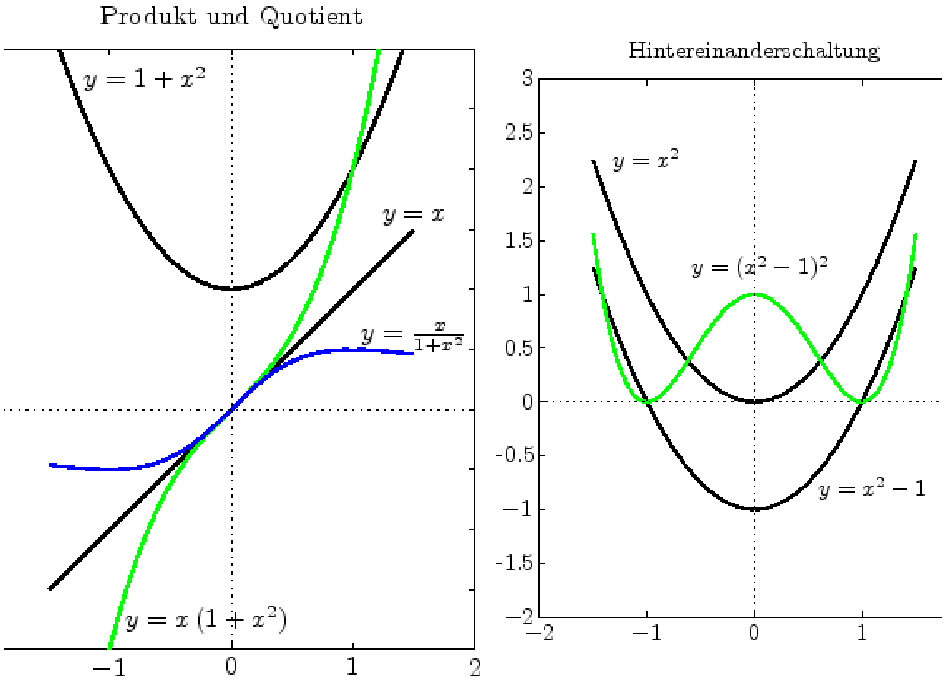
د دوه ننوتو فنکشنونو یا توابعو جمعه یا زیاتون د تعریف څخه ترلی لاس ته راځي:

$$\begin{aligned}
&(f+g)((1-t)x_1+tx_2) \\
&\quad = \quad f((1-t)x_1+tx_2)+g((1-t)x_1+tx_2) \\
&\quad \leq \ (1-t)\,f(x_1)+t\,f(x_2)+(1-t)\,g(x_1)+t\,g(x_2) \\
&\quad = \ (1-t)(f+g)(x_1)+t(f+g)(x_2),
\end{aligned}$$

د کوم سره چې د نابرابرون ننوتوالی د f او g څخه کار اخستل کیږي.
نورې ترنې یا عملیې په ټولیزه توګه ننوتوالی نه ساتي، لکه چې لاندې بیلګې به یې وشایي.

یو په بل پسې ترنه ضرب او ویش

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دې لپاره چې په يوه ټکي کې د تابع ناپرېکدنوالی وښايو، ټاکو $c < a < x < b$.
نو دی

$$x = ta + (1-t)b$$

$$a = sx + (1-s)c$$

د $0 < s,t < 1$ سره. داچې ننوتی دی، نو باور لري

$$f(x) - f(a) \leq (1-t)(f(b) - f(a))$$

همداسي

$$f(x) - f(a) \geq \left(\frac{1-s}{s}\right)(f(a) - f(c)),$$

د $f(a) \leq sf(x) + (1-s)f(c)$ له امله.

د $a \to x$ لپاره s او t د 1 په لور هڅيږي، او له دې سره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0.$$

د $x<a$ لپاره ورته دلیل راوړل کیږي.

پولینوم Polynom

د n درجې یو پولینوم p په لاندې بڼه لیکل کیږي

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

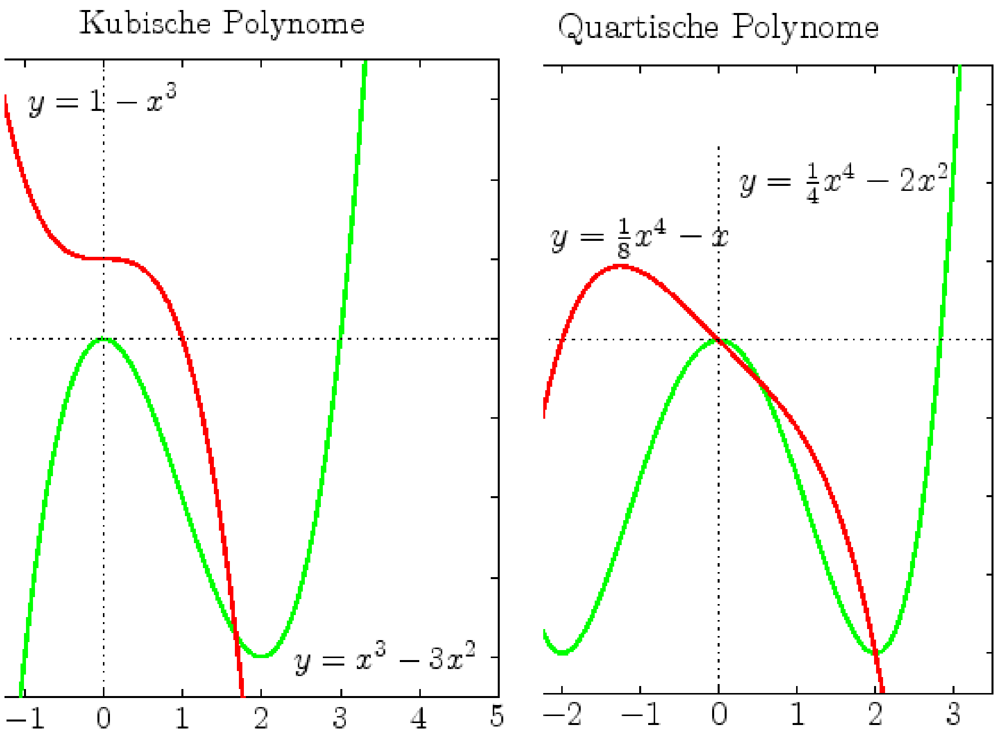
د $a_n\neq 0$ سره.

اووښتوني یا متحولې x او ضریب یا ځلوونی a_k کیدی شي حقیقي – همداسې کمپلکس ګڼونه یا عددونه وي. په اړونده توګه د حقیقي همداسې د کمپلکس پولینوم څخه غږیږو.
لیکونکیة: هیورنر او هیولیګ

لاندې څیرې مکعب ډوله ($n=3$) او کوارتیک ډوله ($n=4$) پولینومونه د څرنګوالي له لورې مختلف تابع ګرافونو سره ښایي.

کوارتیک پولینومونه مکعب پولینومونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



پولینوموېش Polynomdivision

پولینومونو p او q ته د $m = \text{Grad}\, q \leq \text{Grad}\, p = n$ سره یواځني
پولینومونه f او r شتون لري د

$$p = fq + r, \quad \text{Grad}\, f = n - m, \quad \text{Grad}\, r < m.$$

سره.

دا ټوټه ونه کیدی شي د وېش له لارې د باتې یا باقی سره وټاکل شي.

په ځانګي توګه د p د صفرځای t لپاره لاس ته راځي چې $p(x) = f(x)(x - t)$
دی د $\text{Grad}\, f = n - 1$ ږ سره.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د q سره د p وېش څخه لرو

$$\underbrace{a_n x^n + \cdots}_{p(x)} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \underbrace{(b_m x^m + \cdots)}_{q(x)} + p_{n-1}(x)$$

د يوه پاتې يا باقي $p_{n-1}(x) = a'_{n-1} x^{n-1} + \cdots$ سره.

که $m \le n-1$ وي کېدی شي بيا ووېشل شي:

$$p_{n-1}(x) = \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} q(x) + p_{n-2}(x) \,.$$

پروسه پرې کيږي، که د پاتې پولينوم درجه له m کوچنۍ وي، دا په دې معناچې وروسته د $r = p_{n-(n-m+1)}$. سره.

د تل بيا ضرب له لارې لاس ته راځي

$$f(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} + \cdots \,.$$

که t د p صفرځای وي، نو باور لري

$$0 = p(t) = f(t)(t-t) + r(t) = r(t)$$

او له دې سره $r(x) = 0$ ، ځکه چې Grad $r < 1$ دی.

د پولينوم وېش د ليکنيز وېش سره ورته مخ ته تلی شي.

د بيلګې په توګه د $p(x) = 9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2$

او $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$ لپاره لاس ته راځي

$$(\, 9x^5 \,+\, 12x^4 \,+\, 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2\,) : (3x^2 + 2x + 1) =$$
$$= 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{r(x)}{q(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{array}{l}
-(9x^5 + 6x^4 + 3x^3) \\
\hline
6x^4 + 7x^3 + 4x^2 \\
-(6x^4 + 4x^3 + 2x^2) \\
\hline
3x^3 + 2x^2 + 4x \\
-(3x^3 + 2x^2 + x) \\
\hline
3x + 2 = r(x)
\end{array}
$$

نو دی

$$\underbrace{9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2}_{p(x)} = \underbrace{(3x^3 + 2x^2 + x)}_{f(x)} \underbrace{(3x^2 + 2x + 1)}_{q(x)} + \underbrace{(3x + 2)}_{r(x)} .$$

د یوه پولینوم صفرځایونه او فاکتوري کول یا په ضریبونو ټوټه کول

یو د n درجې پولینوم p د څووالي یا تکرار سره ټیک z_k کمپلکس صفرځایونه لري او له دې سره کېدی شي په ورته کرښیزو ضریبونو یا فاکتورونو

$$p(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

ولیکل شي د ثابتې c سره.

که p حقیقی یا قیبل وي، نو کمپلکس صفرځایونه په کنجوګیری جوړو $x_k \pm \mathrm{i}y_k$ رامنځ ته کیږي.

یو حقیقي په ضریبونو لیکل یا فاکتوره کول کېدی شي د کرښیزو فاکتورونو ترڅنګ د لاندې مربع فاکتورونه

$$(z - x_k - \mathrm{i}y_k)(z - x_k + \mathrm{i}y_k) = (z - x_k)^2 + y_k^2$$

هم ولري.

د دویمې درجې پولینوم صفرځایونو لپاره کیدی د منځشپې یا **ABC فرمول(دا د p,q-فرمول ته روته یا همهغسې دی) و کارول شي** او د دریمې او څلورمې درجې پولینومونه د کاردان فرمولونو Cardanischen Formeln له لارې د اکسپلیځیت الجبری افادو یا ویینو په توګه و ټاکل شي.

د جګو درجو پولینومونو لپاره بیا په ټولیزه توګه نومریکي تلنلارې کارول کیوي. که بیا یو صفرځای معلوم وی، نو کېدی شي د ا ړونده کرښیز فاکتورونې یا ضریبونې له لارې

(c) ketabton.com: The Digital Library

و وېشل شي.

$q(z) = p(z)/(z - z_1)$ او $z_2, \ldots, z_n$ د $n - 1$ درجې د پولينوم د د صفرځايونو په توګه وټاکل شي.

د الجبر بنسټيزې جملې په اساس د $1 \geq$ Grad درجې کمپلکس پولينوم يو صفرځاى لري . د پرلپسې پولينوموېشنې د صفرځايونو سره اړونده کربنيز صريبونه يا فاکتورونه له دې سره ضريبونه راکوي.

که p فقط حقيقى صريبونه ولري، نو باور لري

$$\overline{p(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} p_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} p_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} p_k \overline{z}^k = p(\overline{z})$$

يعني د يوه صفرځاى z_0 لپاره هم $p(\overline{z_0}) = \overline{0} = 0$ دى.

د $p(z) = z^3 - 5z^2 + 9z - 5$

په ضريبونو ليکل يا فاکتوره کول ټاکو. پيژنو، چې $z_1 = 1$ يو صفرځاى دى او يو د پولينوم وېش سره لرو

$$p(z)/(z - 1) = z^2 - 4z + 5.$$

د دې مربع پولينوم صفرځايونه د منځشپې فرمول له مخې دي

$$z_{2,3} = 2 \pm i.$$

د دې په تعقيب کمأبکس فاکتورونه لاندې ده

$$p(z) = (z - 1)(z - 2 - i)(z - 2 + i).$$

حقيقى په ضريبونو ليکنه يا صريبونه د دواړو اخرني فکتورونو د ټولګې څخه لاس ته راوړو همداسې سيده د مربع تکميلونې له لارې:

$$z^2 - 4z + 5 = (z - 2)^2 + 1,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې

$$p(z) = (z-1)((z-2)^2+1).$$

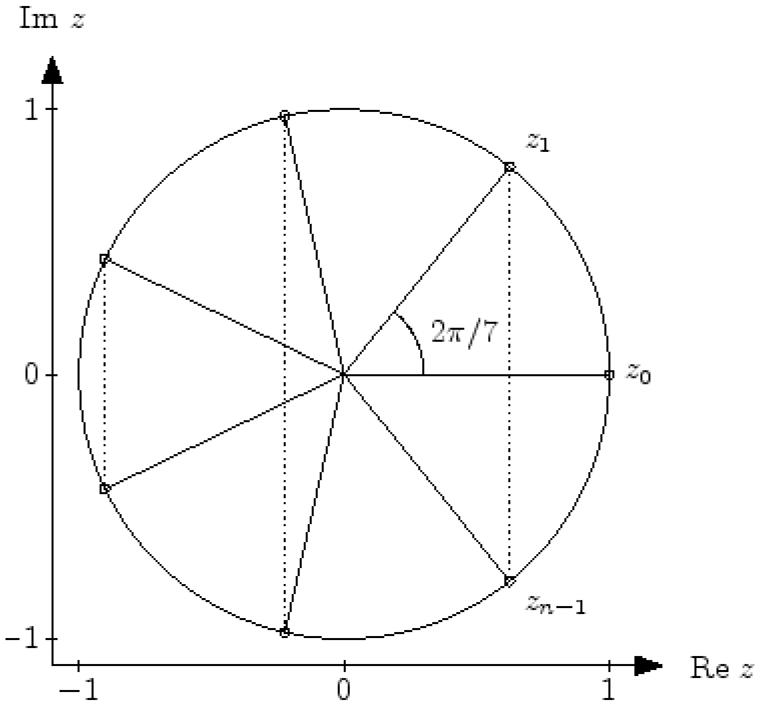
ليکونکي: هيوليګ،هيورنر، کنش

د $p(z) = z^n - 1$ صفرځايونه n -م يوونرېښې يا واحدجذرونه دي

$$z_k = \exp(2k\pi \mathrm{i}/n),\, k = 0, \ldots, n-1.$$

له دې سره کمپلکس فاکتورونه لاس ته راځي

$$p(z) = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \exp(2k\pi \mathrm{i}/n)).$$



د کمپلکس کنجرګيري صفرځايونو ټولګه يا يوځای کونه حقيقي فاکتوري کونه راکوي.

د جوړه n لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(z) = (z-1)(z+1)\prod_{k=1}^{n/2-1}\left(z^2 - 2z\cos(2k\pi/n) + 1\right)$$

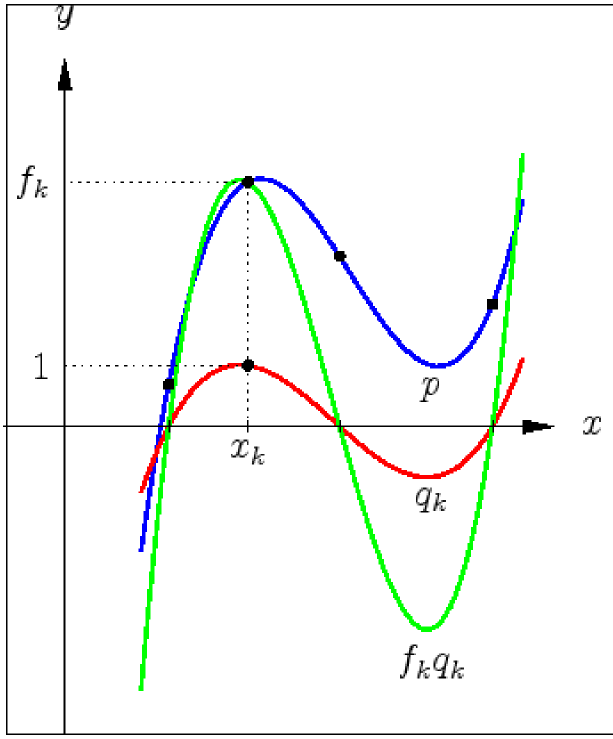
او د ناجوړه یا طاق n لپاره

$$p(z) = (z-1)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(z^2 - 2z\cos(2k\pi/n) + 1\right).$$

پای.

د پولینومونو سره انترپولیشن

په $n+1$ کې تابع ا رزښتونه f_k جوړه په مختلف تکیه ځایونو $x_0,\ldots,x_n$ کیدی شی یواځني د یوه $\leq n$ Gradدرجي پولینوم له لارې انترپولی شي:



$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0,\ldots,n.$$

دا انترپولیشن پولینوم کیدی شي د لاګرانج – بڼه

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

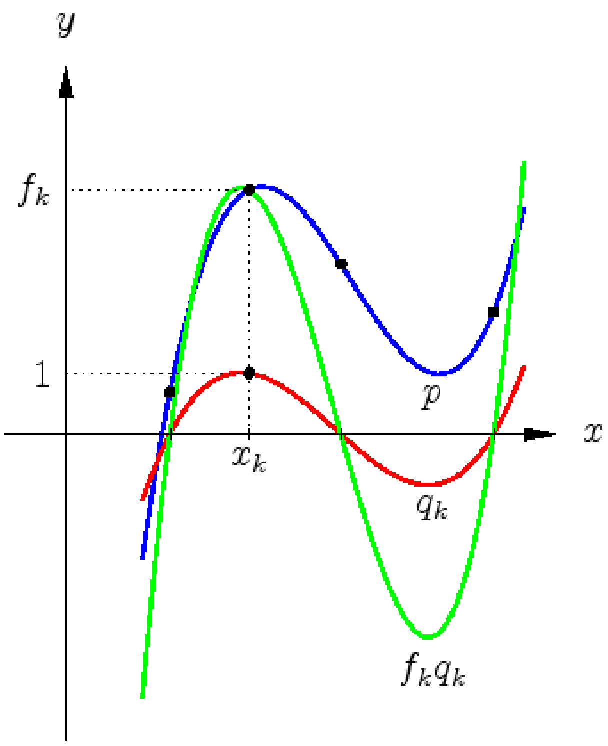
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n\,.$$

دا انترپوليشن پولينوم کيدى شي د لاګرانج – بنه

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x), \quad q_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

انځور شي.



پولينوم q_k د لاګرانج-پولينوم بلل کيږي او په ټکي x_k کې ارزښت 1 لري او په نورو ټولو ټکو x_j کې يې ارزښت صفر دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$q_k(x_j) = \delta_{k,j}$$

د کرونيکر-سومبول δ سره.

د لاګرانج-پولينوم

$$q_k(x_j) = \delta_{j,k}$$

پوره کوي او له دې سره لاس ته راځي

$$p(x_j) = \sum_k f_k \delta_{j,k} = f_j \,,$$

د انترپوليشن شرايط ټول پوره دي.

د دې لپاره چې يواځنوالی وښايو، چې يو بل انترپوليشنپولينوم $\tilde{p}$ شتون لري، کمښت را اخلو يا تر څېړنې نيسو.

$$p - \tilde{p} \,.$$

دا (لږتر لږه) $n+1$ صفرځاونه لري(د انترپوليشن کېدونکي ځايونه x_k)، مګر (زيات له زياته) د n درجو. له دغ سره بايد کمښت کټمټ وي، نو پولينومونه سره توپير نخ لري.

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

په اکويديستانت يا برابرواټنيز تکيه -ځايونو $x_k = kh$ د ارزښتونو توابعو ټيک f_k ګرافيکي انځورونې ته کېدی شي مکعبيز انترپوليشن وکارول شي. له دې سره په تکيه-ځايونو $x_{k+1/2} = (k+1/2)h$ منځ ارزښتونه د

$$f_{k+1/2} = (-f_{k-1} + 9f_k + 9f_{k+1} - f_{k+2})/16$$

له لارې اپروکسيمی شي. دا پروسه تکراريږي، تر هغز چې پوره داتا منځ ته راشي.

د ـټکو -فرمول وزنونه

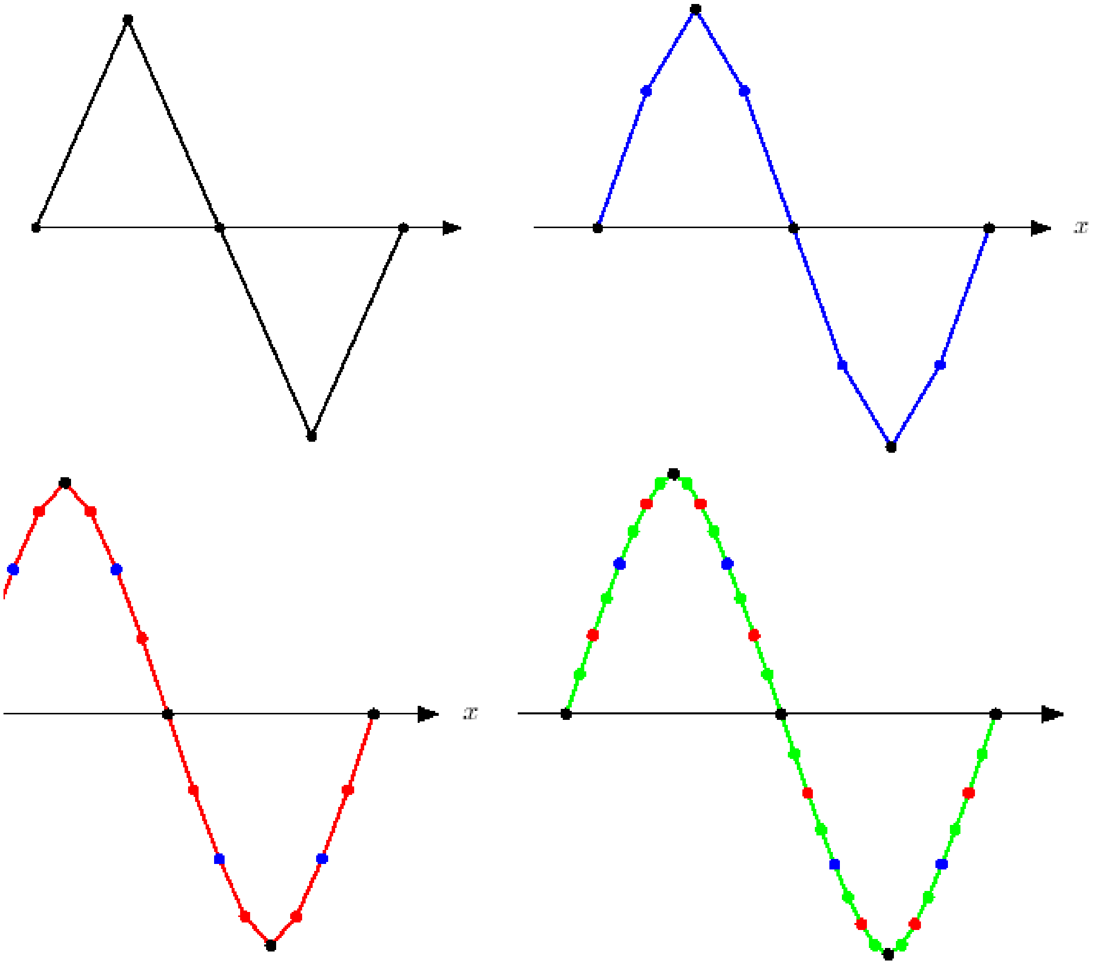
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{9}{16}, -\frac{1}{16}$$

په تکيه-ځايونو $x_{k+1/2}$ د لاګرانژ-پولينوم ارزښتونه دي.
د بېلګې په بتوګه

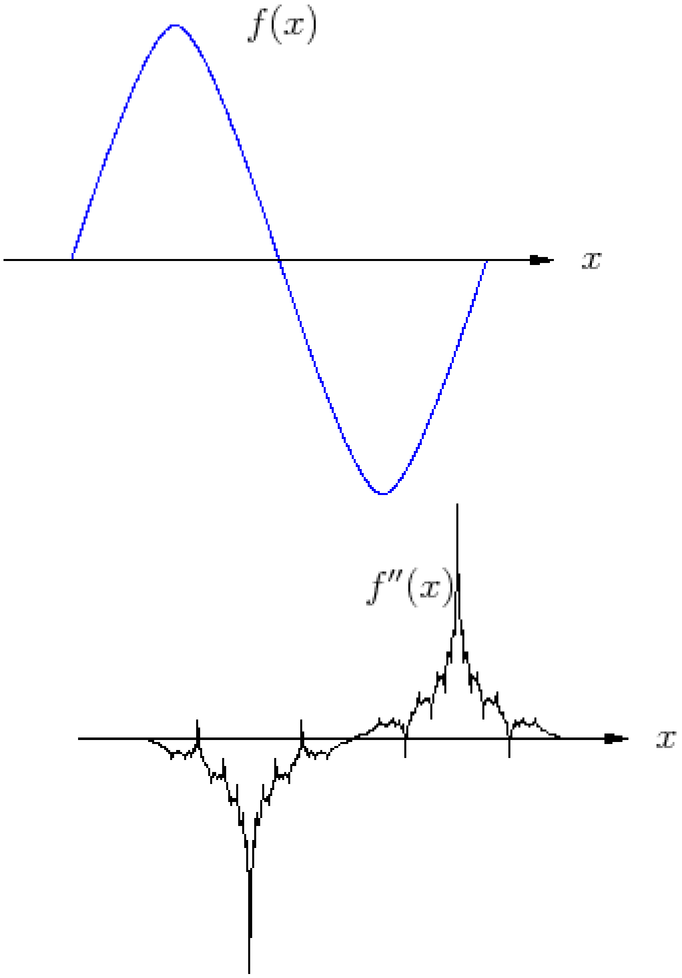
$$-\frac{1}{16} = \left(\frac{x-kh}{(k-1)h-kh} \frac{x-(k+1)h}{(k-1)h-(k+1)h} \frac{x-(k+2)h}{(k-1)h-(k+2)h} \right) \Bigg|_{x=(k+1/2)h} .$$

دی.
د سيمتري په بنسټ او دا چې ضريبونه بايد سيمتريک شي(د ثابتو داتا انترپوليشن) ، بې
له شمېرنې نور ضريبونه راکوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

څيره وتونداتا ښايي او د 4 -ټکو-انترپولیشن د درې څله کاروني يا استعمال له لارې د منځ ته ارغلي ساين تابع اپروکسيميشن . په حقيقت کې دا لاندې کيږ ښودل شوی پوله تابع خوی اغيز لري. مګر په هر حالت فقط لومړی مشتق ناپرېکيدونکی دی.



ښی ګرافيک وېشلی کمښت له لارې ورنړدې يا نږدې دويم مشتق د اته واره انترپولیشن پسې ښايي. سړی د ګراف فراکتال fraktalen (فراکتال: لاتين: مات) خويونه پيژني.

راشنل (کسری يا نسبتي) توابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو ريښتونی تابع r د صورت درجې m او مخرج درجې n سره د دوه پولينمونو وېش دی:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}.$$

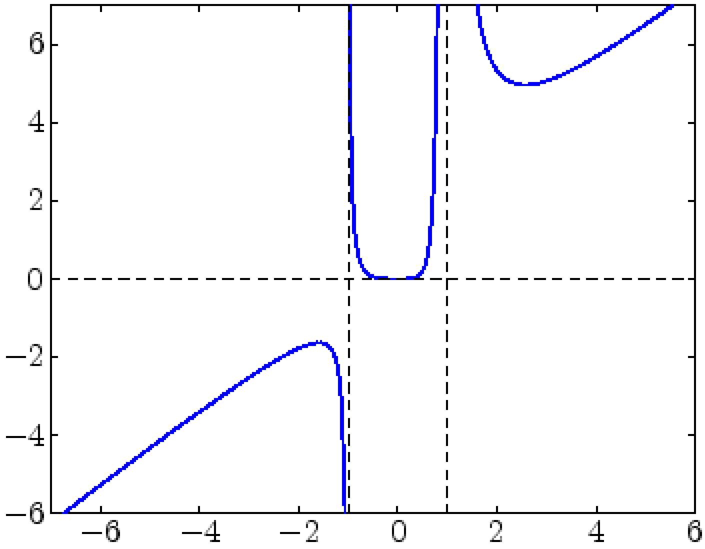
دا انځوونه نا ټوټه ووني بلل کيږي، که p او q کوم ګډ کربنيز ضريب يا فاکتور ونه لري. د مخرج صفرځايونه راشنل تابع r د تعريف تشځايونه دي او د قطبځايونه بلل کيږي. د دوی نظم د صفرځايونو ډېرځلوالی ښايي.

اووښتونې يا متحولې x او ضريبونه a_k, b_k کېدی شي حقيقي يا کمپلکس وي.
اړوند سړی د حقيقي يا کمپلکس راشنل تابع ښخه غږيږي.
لليکونکي : اپپ، هيوليګ

تابع

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

تابع يو سادهقطب په $x = -1$ کې لري او دبل پول په $x = 1$ کې.



(c) ketabton.com: The Digital Library

سړی له تابع f څخه درک کوي، چې په يوه ساده صفرځای کې مخنخښه بدلوي او په يوه ډبل صفرځای کې مخنخښه تغير نه خوري.

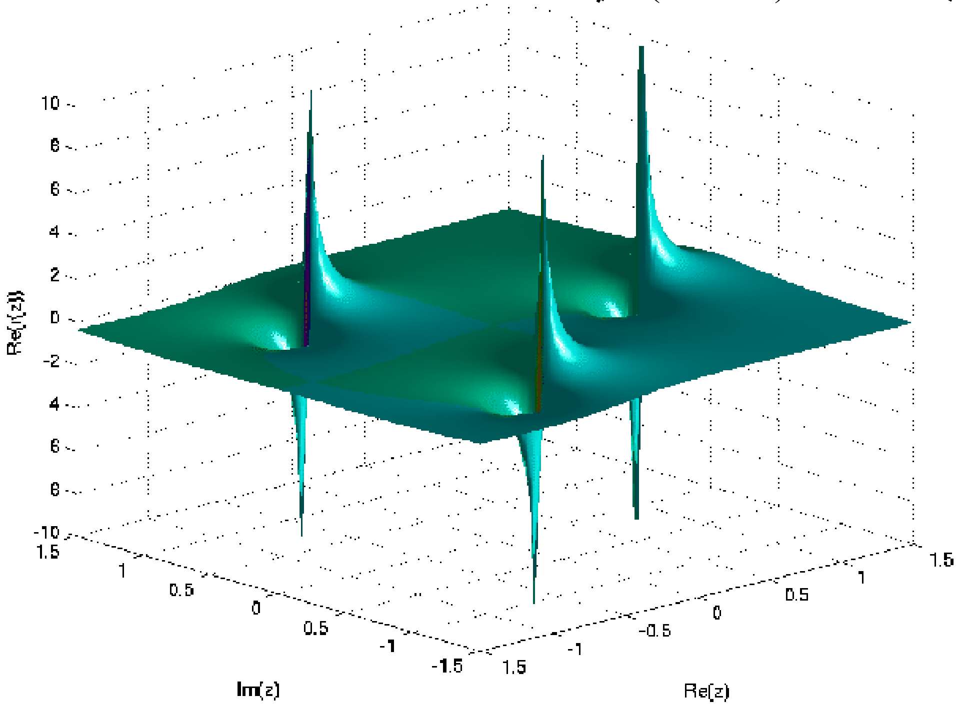
کمپلکس راشنل- يا کسري توابع

$$r(z) = \frac{z^2}{z^3-1}$$

درې صفرځايونه

$$z_1 = 1, z_2 = e^{2\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = e^{-2\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

په يوونگردی (واحددايره) لري



ښيره د r د گراف رييل - او ايماجينار برخه ښايي. له دې سره د رنگوښنه (که چېرې رنگه وه) د r د مطلق ارزښت له لارې تاوکل شوې.

) ليکونکي: اپپ،هيورنر، کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه مات ټوټه کونه يا تجزيه کونه **Partialbruchzerlegung**

يو د m_j نظم راشنل تابع r د n مختلفو صفرځايونو z_j سره ،

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_n)^{m_n}$$

کيدی شي په لاندې ټوټه شي

$$r(z) = f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z), \quad r_j(z) = \frac{a_{j,1}}{z - z_j} + \ldots + \frac{a_{j,m_j}}{(z - z_j)^{m_j}},$$

دلته f د $d = \text{Grad } p - \text{Grad } q$ Grad درجې پولينوم دی ($f = 0$ ، که $d < 0$ وی). راشنل توابع r_j د r په قطبځايونو کې اصلي برخې بلل کيږي. دا د $r(z)$ لوېدنه تشريح کوي د $z \to z_j$ لپاره. پولينوم f کيدی شي د پولينوموېش له لارې وشمېرل شي:

$$p = fq + g, \quad \text{Grad } g < \text{Grad } q\,.$$

دلته g د p په q باندې وېشنې پاتې يا باقي دی. ضريبونه $a_{j,\nu}$ کيدی شي د z^k د ضريبونو د پرتله کونې له لارې په کټوټوالي

$$p(z) = q(z)\left(f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z)\right)$$

وټاکل شي.

د بديل په توګه د اصلي برخو ټاکلو لپاره د پوله ارزښت متود هم کارول کيدی شي.

د قطبونو د خوراځګو ضريبونو لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{j,m_j} = \lim_{z\to z_j}(z-z_j)^{m_j} r(z).$$

د یوه نظم $(m_j > 1)$ قطبخای کې نه شي کېدی ضریبونه $a_{j,1},\ldots,a_{j,m_j-1}$ سیده د پولې ارزښت په توګه وټاکل شي. سړی کړی شي دا اوس شمیرل شوی ترم $a_{j,m_j}/(z-z_j)^{m_j}$ کم کړي او د رکورسیو متود وکاروي.. یو ضریب پرتله کونه د همدا اوس شته ترمونو په پام کې نیولو هم شونې ده.

پوله ارزښت کېدی شي وټاکل شي، داسې چې د r په مخرج کې ضریب $(z-z_j)^{m_j}$ لرې بریښنوول شي او بیا z_j په پاتې کسر یا ــمات کې ځا په ځای شي. په ځانګړې توګه باور لري

$$a_{j,1} = \frac{p(z_j)}{\prod_{k\neq j}(z_j-z_k)}$$

د ساده قطب ځایونو $z_1,\ldots,z_n$ لپاره.
لیکونکي : اپ، هیورنر

د ساده قطبځایونو ($m_j = 1$) لپاره به ټوټه کونه منځ ته راشي. د پولینوم وېش پسې راشنل تابع منځ ته راځي

$$r(z)-f(z) = \frac{g(z)}{q(z)} = \frac{g(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_n)},$$

د کوم سره چې پولینوم $q(z)$ او $g(z)$ ګډ پروېشونی یا مقسوم علیه ونه لري، نیسو ، چې ټول z_j مختلف دي، او $\mathrm{Grad}\ g < n$ باور لري.
د ټوټه کسر ټوټه کوني سره د برابر اېښوونې وروسته

$$\frac{a_1}{z-z_1}+\cdots+\frac{a_n}{z-z_n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a_j = a_{j,1}$ د لاګرانژ -انځورونه د $g(z)$ سره او د q د ضربول سره سړی د
لاس ته راوړي

$$g(z) = \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} (z - z_k) \right) = \sum_{j=1}^{n} \left[a_j \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} (z_j - z_k) \right] \underbrace{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \frac{z - z_k}{z_j - z_k}}_{q_j(z)}$$

دا په ې معناچې د $q_j(z_k) = \delta_{j,k}$ له امله په ګوډیزه نوکانو کې د $g(z_j)$ ازښتونه

$$a_j = g(z_j) / \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} (z_j - z_k).$$

دي. له دې سره لاس ته راځي
په ورته توګه د جګو درجو قطبځایونه هم کار ول کېدی شي. دا مګر تخنیکي لږ پې]لی دی.
لیکونکي : اپ، هیورنر
د

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^3}{z^2 + z - 2}$$

په ټوټه کسر(مات) ټوټه ونه دې وټاکل شي.
دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنی نه ده، باید لومړی یو پولینوم ویش صورت ونیسي. سړی لاس ته راوړي

$$(z^3) : (z^2 + z - 2) = z - 1 + \frac{3z - 2}{z^2 + z - 2},$$

$$\begin{array}{l} -(\underline{z^3 \quad + z^2 - 2z}) \\ \qquad -z^2 + 2z \\ \quad -(\underline{-z^2 - z + 2}) \\ \qquad\quad 3z \quad -2 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(z) = z - 1, \quad g(z) = 3z - 2. \qquad r = f + \frac{g}{q}$$

دا په دې معنا چې د سره .
د دې لپاره چې د ټوټه مات ټوټه ونې اینونه چې لاس ته راوړو باید اوس د r قطبځایونه
وټاکل شي. د منځشپې فرمول سره لاس ته $z_1 = 1$ او $z_2 = -2$ راوړو د مخرج
پلینوم د صفځای په څېر:

$$q(z) = (z-1)(z+2).$$

د g/q ټوټه مات ټوټه ونه له دې سره لاندې بڼه لري

$$\frac{3z-2}{z^2+z-2} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{z+2}.$$

دا اخر پل د ضریبونو a_k ټاکل دي.
د پوله ارزښت متود سره لاس ت ه راځي

$$a_1 = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{3z-2}{z^2+z-2} = \left.\frac{3z-2}{z+2}\right|_{z=1} = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \left.\frac{3z-2}{z-1}\right|_{z=-2} = \frac{8}{3}.$$

او

په ټولیزه توګه لاس ته راځي

$$r(z) = z - 1 + \frac{1/3}{z-1} + \frac{8/3}{z+2}.$$

پای.

راشنل توابع

$$r(z) = \frac{2z^2 - 5z - 3}{z^3 - 3z^2}$$

په $z_1 = 3$ کې یوه سادهقطبځای لري او په $z_2 = 0.$ کې یو دېبل قطبځای لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنۍ ده، پولینوم وېش ته اړتیا نه شته او د په ټوټه کسر ټوټه ونه دا بڼه لري

$$\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\frac{a_1}{z^2}+\frac{a_2}{z}+\frac{a_3}{z-3}.$$

د پوله ارزښت متود سره لرو

$$a_1 = \lim_{z\to 0} z^2\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\left.\frac{2z^2-5z-3}{z-3}\right|_{z=0}=1$$

$$a_3=\lim_{z\to 3}(z-3)\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\left.\frac{2z^2-5z-3}{z^2}\right|_{z=3}=0\,.$$

سرې په ساده ډول کړی شي، چې دا پاتې (هغه په اصطلاح، چې ورته وایو باقي مانده) ضریبونه a_2 په یوه ټکي $z \neq 0,3$ د تابع ارزښتونو د پرتوله کوني له لارې وټاکي.
د بېلګې په توګه د $z = 1$ لپاره لرو

$$\frac{2-5-3}{1-3}=1+a_2+0$$

او سرې $a_2=2$ لاس ته راوړي.
لیکونکي: اپ،هیورنر
د راشنل توابعو لپاره

$$r(z)=\frac{z^2-5z+4}{z^3-3z^2+z+5}$$

لپاره قطبځایونه روښانه نه دي. د ازماېښت له لارې $z_1=-1$ پیداکیږي او بیا د پولینوم وېش سره لاس ته راځي

$$(z^3-3z^2+z+5):(z+1)=z^2-4z+5.$$

.

د نیمي شپې فرمول سره د مخرج نور صفرځایونه $q(z)$ لاس ته راځي

$$z_{2,3}=2\pm i.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره ماتلاندې یا مخرج ضریبه ونه یا فاکتوری کونه

$$q(z) = (z+1)(z-2-i)(z-2+i)$$

لري او د ټوټه کسر ټوټه کونه داسې ده

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-2-i} + \frac{c}{z-2+i}.$$

د دې لپاره چې a, b, c د ضریبونو د پرتلې له لارې وټاکو، د مخرج $q(z)$ سره وپېشو او لرو

$$+ 4 = a(z-2-i)(z-2+i) + b(z+1)(z-2+i) + c(z+1)(z-2-i).$$

د $1, z, z^2$ د ضریبونو د پرتله کونې له لارې د درې ناټاکلو یا نامعلومو a, b او c لپاره یو کرښیز مساوات سیتم لاس ته راځي:

a	b	c	
1	1	1	1
-4	$-1+i$	$-1-i$	-5
5	$-2+i$	$-2-i$	4

د حل په حیث لاس ته $b = i/2$ ، $a = 1,$ او $c = -i/2$ راځي ، دا په دې معنا ، چې

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{i/2}{z-2-i} + \frac{-i/2}{z-2+i}.$$

که اخري دواړه ترمونه سره یوځای کړو، نو حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه لاس ته راځي

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1/4}{z^2-4z+5}.$$

د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو حقیقي ریښتونی یا راشنل تابع r د حقیقي قطبځایونو x_j سره او کمپلکس کنجوګیري قطبځایونو $u_k \pm$ i v_k سره او څو واره والی یا ډېروالی m_j همداسي n_k

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(x) = \prod_j (x - x_j)^{m_j} \prod_k ((x - u_k)^2 + v_k^2)^{n_k}$$

کیدی شي په لاندې بڼه

$$r(x) = f(x) + \sum_j \sum_{\nu \le m_j} \frac{a_{j,\nu}}{(x - x_j)^\nu} + \sum_k \sum_{\mu \le n_k} \frac{b_{k,\mu}(x - u_k) + c_{k,\mu}}{((x - u_k)^2 + v_k^2)^\mu}$$

ټوټه کیږي، د $d = \text{Grad } p - \text{Grad } q$ درجې ($f = 0$ ، که $d < 0$ وي)

یوه پولینوم f سره. د په هر قطبځای زیاتونونو یا د جمعې غړو د ګڼون یا تعداد ډېرواره والی په ګوته کوي. په ځانګړې توګه د ساده قطبځای لپاره باور لري

$$r(x) = f(x) + \sum_j \frac{a_j}{x - x_j} + \sum_k \frac{b_k(x - u_k) + c_k}{(x - u_k)^2 + v_k^2}.$$

پولینوم f کیدی شي دپولینوم وېش له لارې وټاکل شي

$$p = fq + g, \quad \text{Grad } g < \text{Grad } q,$$

دا په دې معنا چې د p g وېش په q باندې پاتې یا باقي دی. ضریبونه کیدی شي د مخرج پولینوم سره له ضرب وروسته دضریبونو د پرتلې له لارې وشمېرل شي. حقیقي ټوټه کسر ټوټه کونه هم کیدی شي د کمپلکس بڼې څخه و کټل شي یا لاس ته راوړل شي، داسې چې سړی کمپلکس کنجوګیري ترمونه سره یوځای کاندې.

ټوټه کونه د ساده قطبځایونو ($m_j = n_k = 1$) لپاره سرته رسیږي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

د r کمپلکس ټوټه کسر ټوټه کونه په دې حالت کې دا لاندې بڼه لري

$$p(x)+\sum_j \frac{a_j}{x-z_j}$$

د z_j سره د مخرج پرلینوم q ساده صفرځایونه او

$$a_j=\lim_{z\to z_j}(z-z_j)r(z).$$

دا q چې حقیقي دی، نو کمپلکس صفرځایونه د کمپلکس کونجږګیري جوړوړپه توګه منځ ته راځي:

$$z_k=u+\mathrm{i}v,\quad z_l=u-\mathrm{i}v=\overline{z_k}.$$

له دې سره د اړونده ترمونو لپاره لاندې ټوټه ونه باور لري

$$\overline{a_k}=\lim_{z\to z_k}\overline{(z-z_k)r(z)}=\lim_{\overline{z}\to z_l}(\overline{z}-z_l)r(\overline{z})=a_l,$$

دا په دې معنا، چې

$$a_k=s+\mathrm{i}t,\quad a_l=s-\mathrm{i}t.$$

د دواړو ترمونو یوځای کونه غوښتونې بڼه راکوي:

$$\frac{s+\mathrm{i}t}{x-u-\mathrm{i}v}+\frac{s-\mathrm{i}t}{x-u+\mathrm{i}v}=\frac{2s(x-u)-2tv}{(x-u)^2+v^2}.$$

د جګو درجو قطبځایونه کیدی شي په ورته توګه تر څیړنې ونیول شي، مګر دلیل راوړنه یې په څرګنده توګه پیچلې ده.

د

$$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{2x^3-9x^2+11x+1}{x^3-4x^2+5x}$$

حقیقي په ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکنه په درې پلونو یا قدمونو وېشل کېږي

(i) دا چې $\mathrm{Grad}\ p\geq\mathrm{Grad}\ q$ دی، لومړی د پلوینوم وېشنه صورت نیسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$(2x^3 - 9x^2 + 11x + 1) : (x^3 - 4x^2 + 5x) = 2$$

$$g(x) = -x^2 + x + 1.$$

پاتې

له دې سره لاس ته راځي

$$r(x) = f(x) + \frac{g(x)}{q(x)} = 2 + \frac{-x^2 + x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x}.$$

(ii) د دې لپاره چې د g/q ټوټه ونې اینوونه یا اسعمال پیداکړو، نو قطبځایونه ټاکو یا پیدا کوو.

د q د صفرځایونو $x = 0$ د نوکانو دباندېکونې وروسته د مبع تکمیل له لارې سرې نور دواړه صفرځایونه لاس ته راوړي:

$$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1^2.$$

دا پاتې صفرځایونه کمپلکس کونجوګیري جوړې $u \pm iv = 2 \pm i$ دي.له دې سره اینوونه په لاندې توګه ده

$$\frac{-x^2 + x + 1}{x((x-2)^2 + 1^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b(x-2) + c}{(x-2)^2 + 1^2}.$$

(iii) د ضریبونو د ټاکنو لپاره د اصلي مخرج q سره ضربیږي او ترې لاس ته راځي

$$-x^2 + x + 1 = a((x-2)^2 + 1^2) + b(x-2)x + cx$$

د $1,\ x$ او x^2 ضریبونو پرتله مو کرښیز مساوات سیستم ته بیایي

$$1 = \qquad 5a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1 = -4a - 2b + c$$
$$-1 = a + b$$

د لاندې حل سره

$$a = \frac{1}{5},\ b = -\frac{6}{5},\ c = -\frac{3}{5}\ .$$

له دې سره حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونه ده

$$r(x) = \frac{1/5}{x} + \frac{-6/5(x-2) + (-3/5)}{(x-2)^2 + 1^2}.$$

د ټاکلو لپاره پوله ارزښت متودونه هم کارول کيږي. که دا ايښوونه يا ځای په ځای کونه
د x سره ضرب شي او $x = 0$ کيږدي، نو لاس ته ترې راځي

$$\frac{1}{2^2 + 1^2} = a + 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{5}.$$

د $x = 2$ ځای په ځای کونې سره c لاس ته راځي:

$$\frac{-2^2 + 2 + 1}{2(0^2 + 1^2)} = \frac{1/5}{2} + \frac{c}{0^2 + 1^2} \Longrightarrow c = -\frac{3}{5}.$$

بالاخره کېدی b د ټکی ازماېښت $x \neq 2$ له لارې ، د بېلګې په توګه $x = 1$ منځ ته راشي.
پای.

د

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکلو په دوه پلونو يا قدمونو کې ترتيبيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(i) د اېښوونې د ټاکلو لومړی قطبځایونه پیدا کیږي. له

$$q(x) = (x^2+1)^2$$

پېژندل کيږي، چې $\pm i$ ډبل صفرځایونه دي، دا په دې معنا چې $u=0$ او $v=1$.
له دې سره دا اېښوونه ده

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{b_1x+c_1}{x^2+1} + \frac{b_2x+c_2}{(x^2+1)^2}.$$

.

(ii) د ضریبونو د ټاکلو له امله دا سړی د اصلي مخرج q سره ضربوي او لاس ته
ترې راوړي

$$x^3 = (b_1x+c_1)(x^2+1)+b_2x+c_2$$

$$= b_1x^3+c_1x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)1.$$

د $1, x, x^2$ او x^3 د ضریبونو پرتله کونه مو کرښيز سیستم ته بیایي

$$1 = b_1$$

$$0 = c_1$$

$$0 = b_1+b_2$$

$$0 = c_1+c_2$$

د لاندې حل سره

$$b_1=1,\; c_1=0,\; b_2=-1,\; c_2=0.$$

بدیلې کیدی شي د کمپلکس ټوټوه کسر تړّ کونې ځخه مخ ته لاړ شو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{a}{z-i} + \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{c}{z+i} + \frac{d}{(z+i)^2}.$$

ضريبونه $c = \overline{a},\ d = \overline{b}$ پوره کوي او د جمعي جوړولو له لارې

$$\frac{a}{z-i} + \frac{c}{z+i},\ \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{d}{(z+i)^2}$$

هم حقيقي تونهکسر توټه کونه لاس ته راوړي

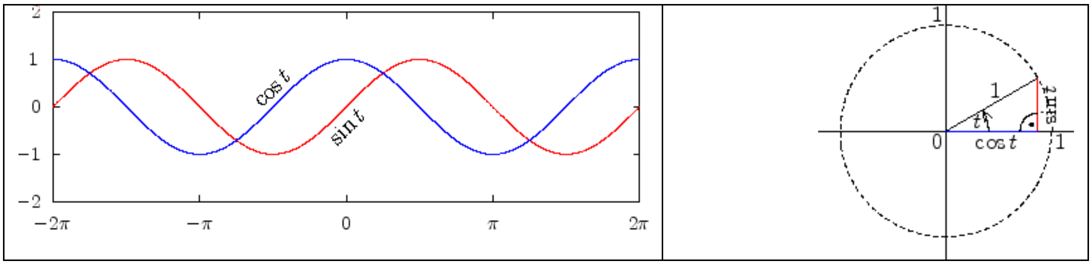
$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}.$$

Sinus und Cosinus   ساين او کوساين

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره په سرچينه په کونج t خرخول شوى ټکى $(1,0)$ کواوردينات نومولکيږي . د تر مختنښي پورې کوساين او ساين په يوه ولاړکوديز يرېکودي (المثلث القايم الزاويه) کې د ولاړ اړخونو(هغه اضلاع وې چې يو د بل سره قلموازاويه جوړه وي) نسبت د نيمى(قطر) سرره په ګوته کوي.



دواړه ګردى توابع يا د دايرې توابع 2π - تلبيرته راګرځېدوني يا 2π - پريوديکي دي او باور لري

$$\cos t = \sin(t + \pi/2)$$

• ,

(c) ketabton.com: The Digital Library

- $\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$,
- $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

یو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

د اویلر-مویورې فرمول **Formel von Euler-Moivre**

یو اکسپوننشل تابع د ایماجینار x -محور سره کېدی شي د $t \in \mathbb{R}$ لپاره د تریګونومتریک(درېګوډي - یا مثلثاتې -) توابع په مرسته افاده شي.

$$\cos t + \mathrm{i} \sin t = \exp(\mathrm{i}t)$$

کوساین او ساین حقیقي – او ایماجینار ګنونه(عددونه) په ګوته کوي د ارزښت (1 سره $|\exp(\mathrm{i}t)| = 1$) .

که پورته فرمول اینورتیر یا معکوس شي ، نو لاس ته راځي

$\cos t$	$= \mathrm{Re}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t}\right)$
$\sin t$	$= \mathrm{Im}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}\right)$.

د اکسپ، کوساین او ساین کټمتوالی اویلر او مویورې ته ځي. دا د جیومتریکي کمپلکس عددونو د انترپولیشن لپاره بنسټ جوړوي او د فوری-انالیوز کې غوره رول لوبوي.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د ساین او کوساین لپاره د زیاتون- یا جمع قضیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

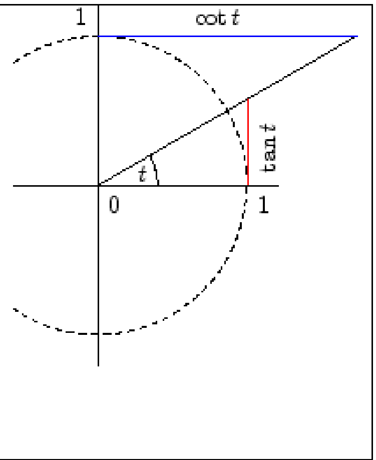
د ګردیتوابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندې اړيکې باور لري:

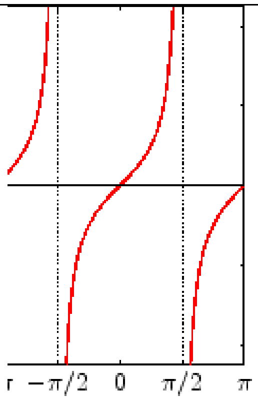
- $$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
- $$\sin(\alpha+\beta)=\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta$$

په ځانګړي توګه دی

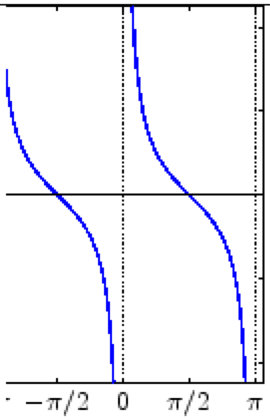
$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\qquad \sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

تانجنت او کوتاجنت **Tangens und Cotangens**





تانجنت



کوناتجنت

د تانجنت او کوتانجنت توابع د

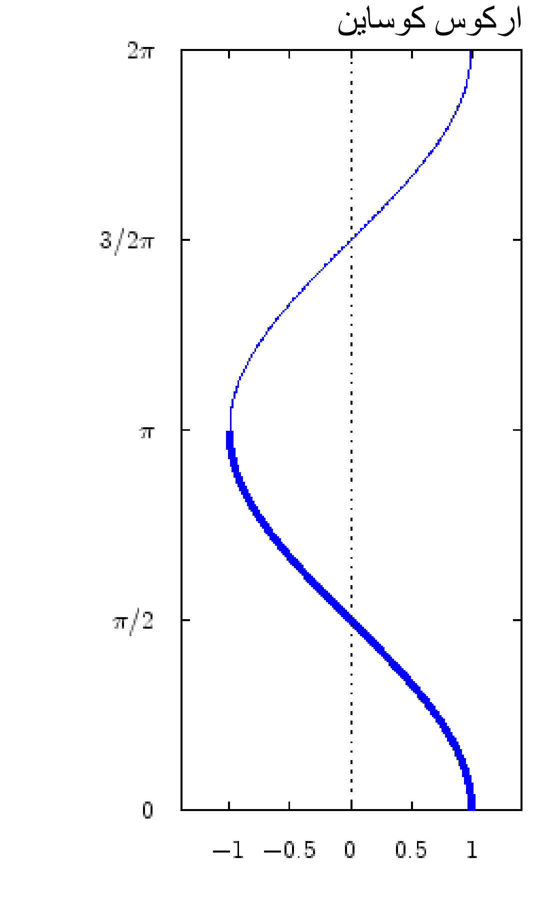
$$\tan t=\frac{\sin t}{\cos t},\qquad \cot t=\frac{\cos t}{\sin t}$$

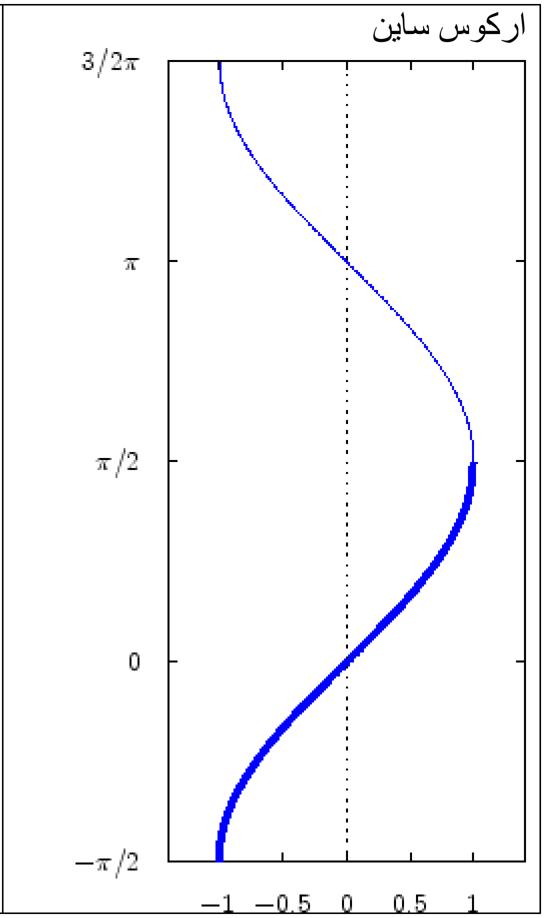
له لارې تعريف دي. دا تر دمخنخښي پورې د ولاړکوډيز درېکوډي(- - مثلث) د ولاړکوډونو Katheten نسبت ورکوي
يو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

د ارکوس توابع **Arcusfunktionen**

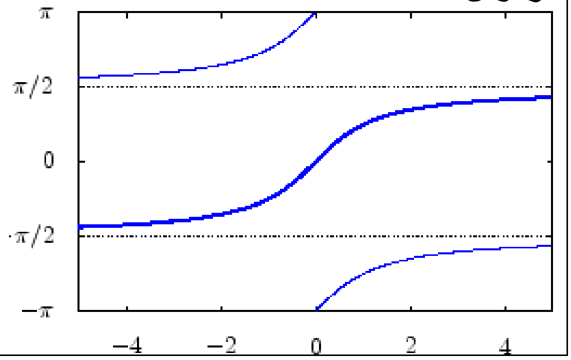




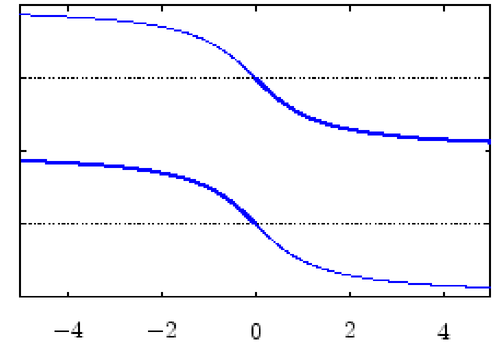
د درېګوډيز (ترېګونومتريکي يا مثلثاتي) توابعو په څېر يا معکوس توابع د arccos, arcsin, arctan, arccot سره بنوول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اركوس تانجنت

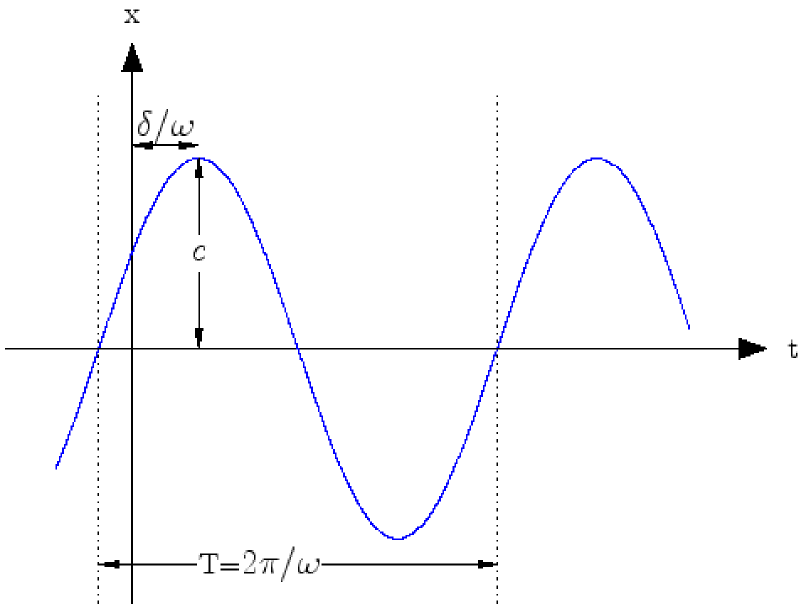


اركوس کوتانجنت



د دي تعريف – او ارزښت ورشو د پورته ځېرې ښخه رانيول کېدی شي.
له دې سره اصلي څانګې غوړې يا پنډې کښل شوي دي.
ليکونکي: هيوليک، کنوپف، کنش

هارمونيک لړځيدني يا رپيدنې
Harmonische Schwingung



(c) ketabton.com: The Digital Library

یو هارمونیکي لړځیدنه د جګوالي Amplitude $c \geq 0$ سرره،د فاز بلځای ته وړنه یا راکښنه δ او فرکونځ ω همداسې پریودېوالی یا تل (بیرته) راګرځیدنه $T = 2\pi/\omega$ لاندې بڼه لري

$$x(t) = c\cos(\omega t - \delta) \ .$$

ورته یا برابر ارزښته انځورونه ده

$$\mathrm{Re}\, c\exp(\mathrm{i}(\omega t - \delta))$$

یا

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

د $a = c\cos(\delta), b = c\sin(\delta)$ سره ، دا په دې معنا چې (c, δ) د (a, b) قطبي کواوردیناتونه دي.
پای.

د پارمتر شمیربدلون د جمعي تیورم څخه لاس ته راځ:

$$c\cos(\omega t - \delta) = c\,(\cos(\omega t)\cos(\delta) + \sin(\omega t)\sin\delta) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = c\cos\delta, \quad b = c\sin\delta.$$

برعکس دی

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \delta = \arctan(b/a) + \varphi$$

د لاندې سره

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{für } a \geq 0 \\ \pi, & \text{für } a < 0 \text{ und } b \geq 0 \\ -\pi & \text{sonst.} \end{cases}$$

پای.

د هارموني رپیدنې یو پر بل پرېوتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

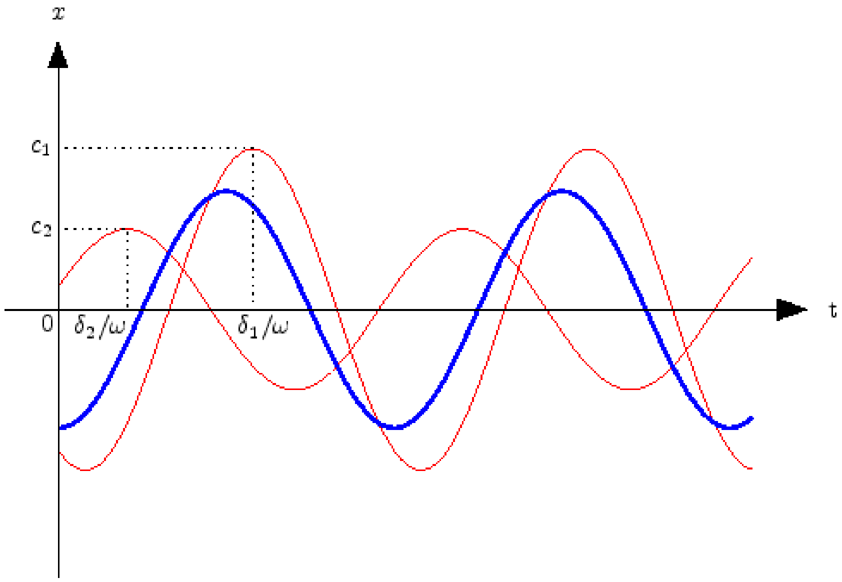
د دوه هارمونې رپېدنو يو پر بل پربوتنه (په ځېره کې غوړ کښل شوي دي)

$$x_k(t) = c_k \cos(\omega t - \delta_k), \quad k = 1, 2,$$

د

امپليتودې سره هارمونيک دي

$$c = \sqrt{c_1^2 + 2\cos(\delta_1 - \delta_2)c_1 c_2 + c_2^2}\,.$$



ليکونکي: هيوليک، کوپف،کنش

د يو پر بل پربوتني کمپلکس بڼه

$$\mathrm{Re}\left(c_1 e^{i\omega t - \delta_1} + c_2 e^{i\omega t - \delta_2}\right) = \mathrm{Re}\left([c_1 e^{-i\delta_1} + c_2 e^{-i\delta_2}]e^{i\omega t}\right)$$

راکوي

$$[\ldots] = ce^{-i\delta} = z$$

او له دې سره

$$c^2 = z\bar{z} = (c_1 e^{-i\delta_1} + c_2 e^{-i\delta_2})(c_1 e^{i\delta_1} + c_2 e^{i\delta_2})\,.$$

$$e^{is} + e^{-is} = 2\cos s$$

د په پام کې نيولو سره ضربونه غوښتنه راکوي..

په بديله ت وګه کېدی شي امپليتود انځوروني

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_k(t) = a_k \cos(\omega t) + b_k \sin(\omega t)$$

څخه وشمېرل شي. سړی لاس ته راوړي

$$c = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}\ .$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

په درځ یا مته باندې کړولو هارموني لړځېدنه یو په بل پرېوځي

$$\cos(\omega t - \delta_k), \quad \delta_k = k\delta,\ k = 0, \ldots, n,$$

د برابر یا همغه فرکونځ او امپلیتود. لړځېدنه د کمپلکس انځوروني په مرسته د دې لاندې حقیقي برخې په حیث لاس ته راځي

$$e^{\mathrm{i}\omega t} + e^{\mathrm{i}(\omega t - \delta)} + \ldots + e^{\mathrm{i}(\omega t - n\delta)} = e^{\mathrm{i}\omega t}\frac{1 - (e^{-\mathrm{i}\delta})^{n+1}}{1 - e^{-\mathrm{i}\delta}}$$

$$= e^{\mathrm{i}\omega t}\frac{e^{-\mathrm{i}\frac{n+1}{2}\delta}(2\mathrm{i}\sin\frac{n+1}{2}\delta)}{e^{-\mathrm{i}\frac{\delta}{2}}(2\mathrm{i}\sin\frac{\delta}{2})} = \left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)e^{\mathrm{i}(\omega t - \frac{n}{2}\delta)}\ .$$

یو په بل پرېوتنه لاندې امپلیتود لري

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

او فاز $(n/2)\delta$.

د $\omega = 0$ سره د ایماجیناربرخې د پرتله کوني له لارې تریګونمتریکی کټمتوالی راکوي.

$$\sin\delta + \ldots + \sin n\delta = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta\sin\frac{n}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\ .$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه لړځېدنو $c_k e^{i\omega_k t}$ يو پر بل پرېوتنه کېدی شي د

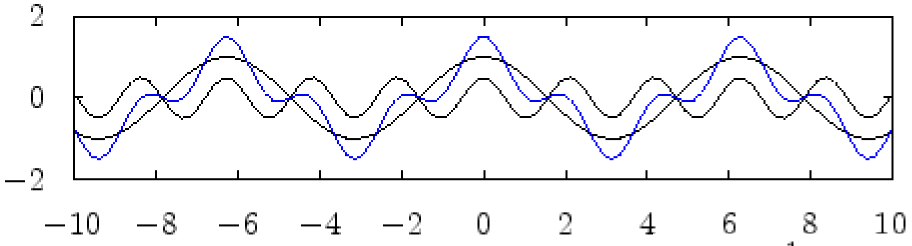
$$c(t)e^{i\bar{\omega}t}, \quad c(t) = c_1 e^{-i\Delta\omega t} + c_2 e^{i\Delta\omega t},$$

په ضرب د $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ او $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$ سره وليکل شي.
لاس ته راغلی داسې په نامه موډوليري رپېدنه ټيک هلته پريوديکي ده، که د فرکونځ
نسبت ω_1/ω_2 راشنل وي.
د موډولي شوی کمپلکس امپليتود مينيمال او ماکسيمال ارزښت همداسې مطلق ارزښت
د $|c_1 - c_2|$ همداسې $c_1 + c_2$ ترمنځ لوړ ټيټ کيږي. په ځانګړي توګه دی

$$c(t) = 2c\cos(\Delta\omega t)$$

د همغي يا برابري امپليتود $c = c_1 = c_2$ لپاره.
لاندې ځيري يو څو بېپيکي حالتونه په ګوته کوي

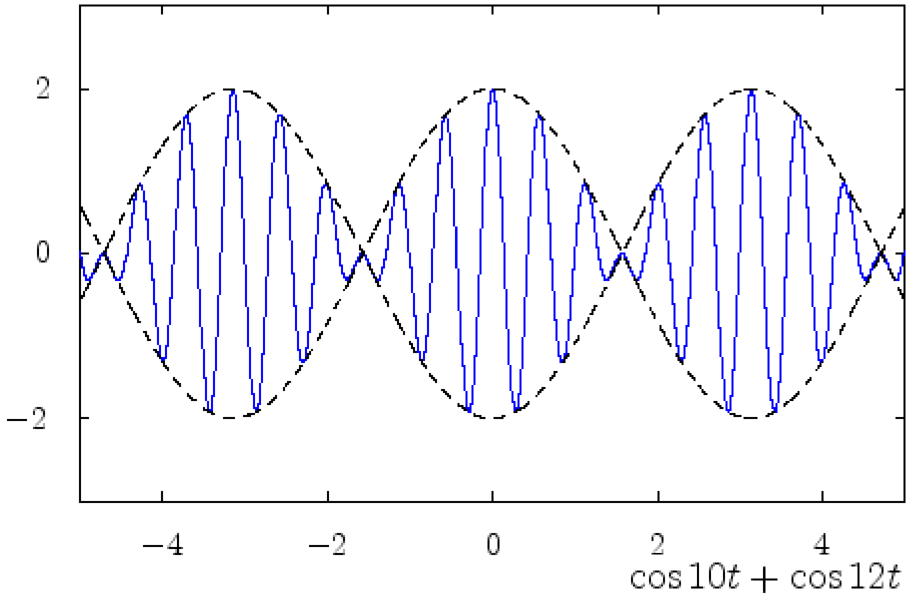
- پريوديکي يو پر بل پرېوتنه periodische Überlagerung



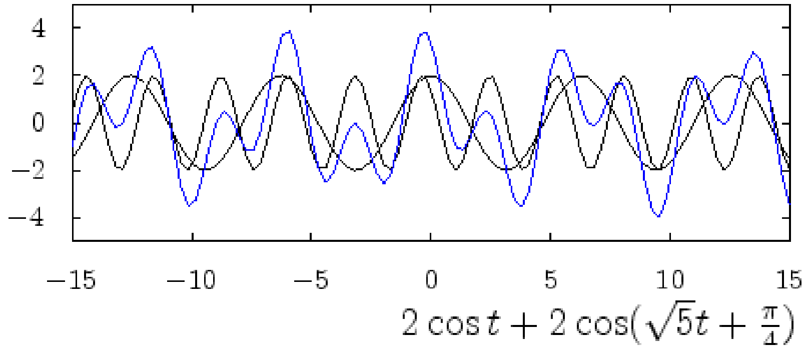
$\cos t + \frac{1}{2}\cos 3t$

- برابر امپليتود c_k او $\omega_1 \approx \omega_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



- aperiodische Überlagerungاپریودیکي یا نه - یو پر بل پرېوتنه



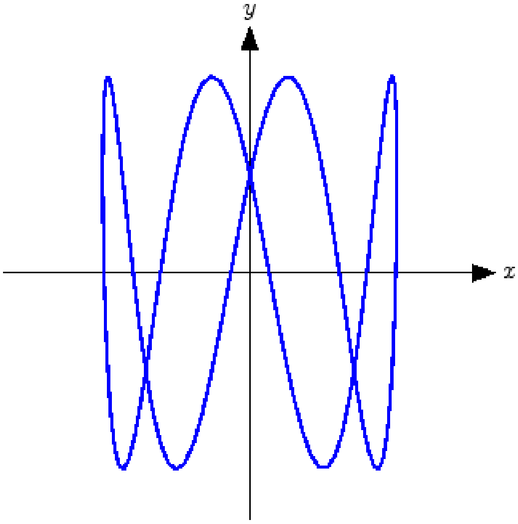
پاي.

د سطي لړځېدنو یو پر بل پرېوتنې د لړځېدنو مختالف لورو (a_1, a_2) او (b_1, b_2)
کرږې یا منحني

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2) ,$$

لاس ته راځي چې د مخترع Lissajous-Figuren لیساجوس –ځیرې بللکیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

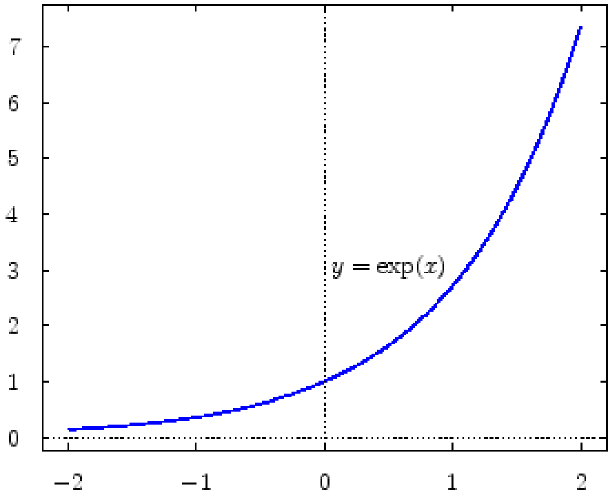


خېره د پارامتر یوه بېلګه بناېي

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_1 = 1\,, \quad \delta_1 = 0\,, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = 4\,, \quad \delta_2 = \frac{\pi}{3}\,.$$

پای.

اکسپوننشل توابع
Exponentialfunktion



توان تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = e^x = \exp(x)$$

$x \in \mathbb{R}$

د اويلر عدد $e = 2.71828...$ سره اکسپونننشل تابع بلل کيږي. دا د ټول
لپاره مثبت ده او د تابع مساوات پوره کوي
$e^{x+y} = e^x e^y$.

$$e^{-x} = 1/e^x$$

په ځانګړې توګه

ګټه يا ربح **Verzinsung**

يوبيل بډايې د – وارهد اخستنې همداسې او ورکوني وروسته د يوې ګټويRate r
($r < 0$ همداسې $r > 0$) د يوې ګټونې فاکتور $(1 + p)$ سره لاندې پاى بډايې
ورکوي

$$y = (1 + p)^n x + \frac{(1 + p)^n - 1}{p} r \, .$$

دلته $p = 1$ د 100% يو ګټه اينوونه ده په کلنۍ ګټه ا چونې سره.

فعاله کلنۍ ګټه د مياشتنۍ ګټونې څخه شمېرل کيږي د يوه ګټې اينونې p_m سره و
لاندې ته

$$p_j = (1 + p_m)^{12} - 1 \geq 12 p_m \, .$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

بنسټ بډايې په همدې لومړني ګټونې پريود کې په پام کې نيول کيږي، اخستنه ههمداسې
اچونه لومړى د ورپسې کال. په لاندې توګه يا د اسې راکوي

$$n = 1: \quad y = x(1 + p) + r,$$
$$n = 2: \quad y = \big(x(1 + p) + r\big)(1 + p) + r.$$

په ټولېزه توګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = \left(\cdots\left(x(1+p)+r\right)(1+p)+r\right)\cdots\right)$$

$$= x(1+p)^n + \left[1+(1+p)+(1+p)^2+\cdots+(1+p)^{n-1}\right]r$$

دا په ګوډېزو نوکانو کې افاده کېدی شي په هندسي جمعه فرمول واړوي او سړی دا ورکړ شوی فرمول لاس ته راوړي.
پای.

د منهتان خرڅول 1626زک مورګن(د ځمکي د کچوني يوون يا واحد دی) 11000 Morgen د يوه حاضر قيمت په رانيولو ګټور تمام شو، ځکه چې په کلنی7 په سلو کې ګټه دا بداېي په کال 2000 زک کې

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1.07)^{374} = 5.857\cdot 10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\hat{=}\ 2.658\cdot 10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

ده(که متمأن بانکونه او د اسعارو رفورم له مخه نه وي نيول شوی يا فرض شوی).
په مياشتنی ګټه لرو

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1+7/1200)^{4488} = 13.030\cdot 10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\hat{=}\ 5.913\cdot 10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

او

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot\exp(0.07\cdot 374) = 14.060\cdot 10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\hat{=}\ 6.380\cdot 10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

د ټوليزې ګټونې سره.
که مورګن د 0.81 Ha هکتارسره وشمېرل شي، نو د منهتان دا نننی سطحه د89 مربعکيلو متره ورکوي. يو کور هلته نن نږدې6500 USD/Quadratmeter امريکايي ډالر په مربع متر ارزښت لري. دا پيسې به د يوه کور تعميرلپاره چې څلور پوړيز وي ورسيږي، چې په ټوله سطحه ونيسي.
پای.

د يوه $x = 200000$ يوروپور ، $n = 30$کلونو لپاره او يوې کره شوې ګټې پېنې $p = 5$ په سلو کې مياشتنی ګټه لاندې ده

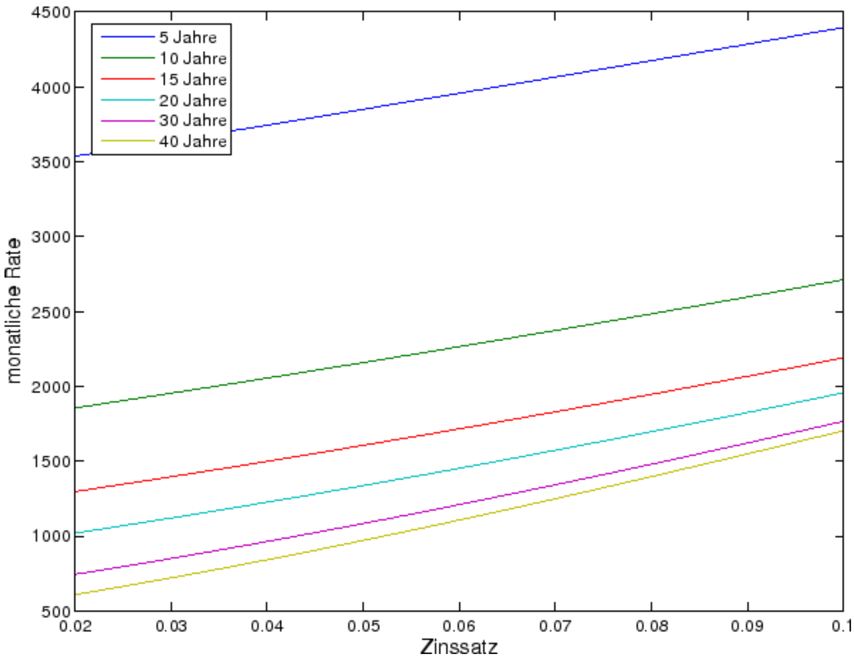
$$p_m = (1+p)^{1/12} - 1 = 0.4074\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او میاشتنۍ رات یا ګټه ده

$$r = \frac{p_m(1+p)^n}{(1+p)^n - 1} x = 1060.11 \,\text{EUR}.$$

د لاندې پسې تړلي له ګټې فرمول څخه د صفرابینووني له لارې د پور ارزښت راکوي او
د $(1+p_m)^{12} = 1+p$ په پام کې نیولو سره .
توله تادیه $30 \cdot 12r = 381639.60$ یورو د پور جمعې څخه د په 90.8 په سلو
کې اوړي(د بانک مزدوري پرې زیاته).



پروت: ګټونه یا د ګټې پېنه ، ولاړ: میاشتنۍ ګټه
ګراف میاشتنۍ ګټه ښايي د یوه 200 000 یورو پور لپاره د ګټې پېنې د ضریب په څېر
د مختلفو وختونو لپاره.
پای.

کلني د پیسو ورکونه $z = 10000$ یور د یوې 7 په سلو کې ګټونې ته د
$n = 12$ کلونو وروسته یوه دا لاندې بڼايي ورکوي

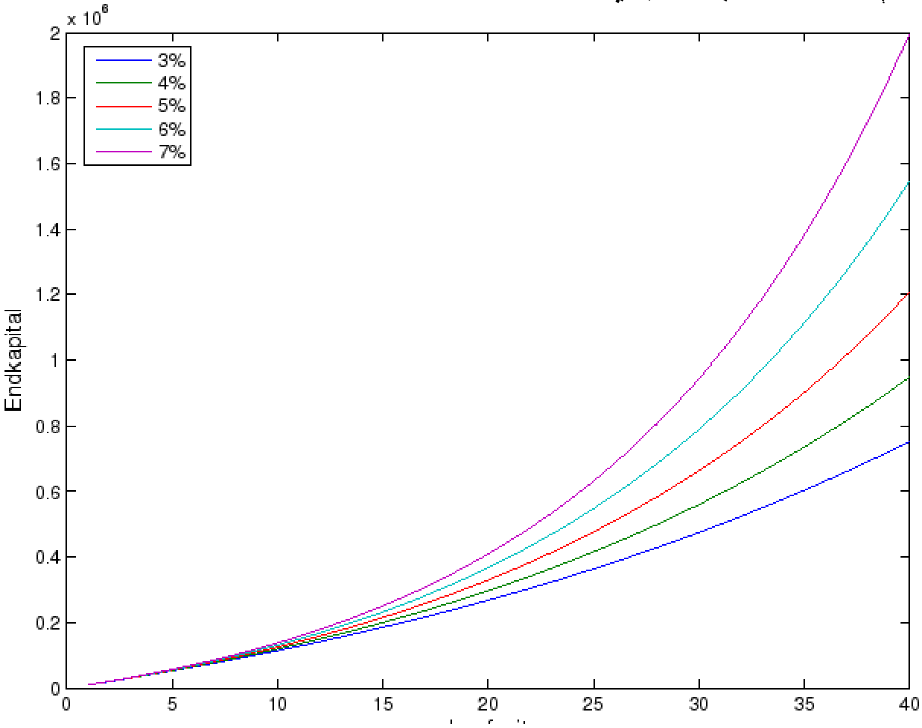
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = \frac{(1+p_j)^n - 1}{p_j} z = \frac{1.07^{12} - 1}{0.07} 10000\,\mathrm{EUR} = 178884.51\,\mathrm{EUR}.$$

د نور لس کاله د ژوند انتظار ته دا د لاندې یوه میاشتنې تقاوت ته بسیا کوي

$$r = \frac{p_m (1+p_j)^{10}}{(1+p_j)^{10} - 1} y = \frac{0.005654 \cdot 1.07^{10}}{1.07^{10} - 1} 178884.51\,\mathrm{EUR} = 2057.17\,\mathrm{EUR},$$

چې د هیپوتیکي(د کورونو جوړولو او اخستلو لپاره ارزانه پور دی) Hypotheken ګټې ته ورته شمېرل کیږي.



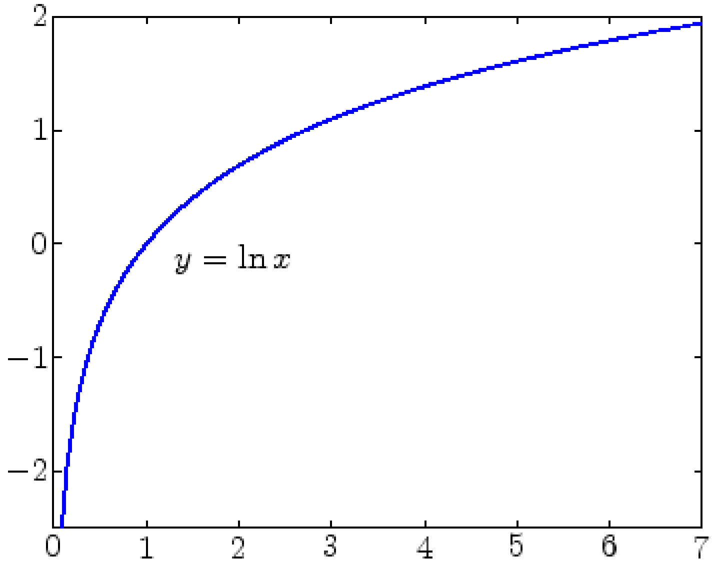
پروت: وخت ،   ولاړ: پای سرمایه
څېره د مختلفو ګټونو لپاره د یوې سرمایې وده ښایي د وخت تېرېدو سره .
پای.

لوګاریتم **Logarithmus**

د لوګارتم تابع د اکسپوننشلتابع معکوس دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y.$$



دا $(0,\infty)$ کره مونوتونن جګېدونکی په $\mathbb{R}$ تنظیموي او لاندې تابعمساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

په ځانګړې توګه دی $\ln(1/x) = -\ln x$.
پای.

د یوې مادې رادیواکتیو له منځه تلنه(په زراتو تجزیه کېدنه) د زره کیدنې قانون

$$N(t) = N(0)e^{-kt}$$

له مخې تشریح کیږي. دلته $N(t)$ د ا تمونو ګڼون یا تعداد دی د t په وخت کې
او $k > 0$ یوه د موادو په واک کې د زره کېدو ثابته ده.

د نیم ارزښت وخت T داسې تعریف دی $N(T) = \frac{1}{2}N(0)$ ، داپه دې معنا چې

$$e^{-kT} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T = \ln 2/k.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د چرنوبل د ریکتور د ړز یا الوتنې سره یو ه ډینګری یا خولې یا مرخېړی په ځنو برخو کې Cäsium-137 د 2000Bq/kg (Bq/kg د رادیواکتیویتی د فعالیت د کچونې لپاره یوون دی) سره د نیمارزښت وخت 29.7 کلونو په وړانګو خور شو.

$$k = \frac{\ln 2}{29.7} = 0.023$$

او له دې سره

$$N(t) = 2000\exp(-0.023t).$$

په المان کې پوله ارزښت .600Bq/kg کې پروت د ی. د

$$600 = 2000\exp(-0.023t) \Rightarrow -0.023t = \ln(0.3) \Rightarrow t \approx 52$$

له امله داپوله ارزښت د ورکړشوو ارزښتونو لپاره ۵۲ کالو وروسته کښته – یا کمیږي.

نیم وخت ارزښت :

Cäsium-134	2 Tage
Cäsium-137	29.7 Jahre
Jod-131	8 Tage
Kohlenstoff-14	5730 Jahre
Kalium-40	1.2 Mrd. Jahre
Plutonium-239	24000 Jahre
Radon-222	3.8 Tage
Radium-226	1600 Jahre
Strontium-90	28 Jahre
Uran-235	800 Mio. Jahre
Uran-238	4.5 Mrd. Jahre

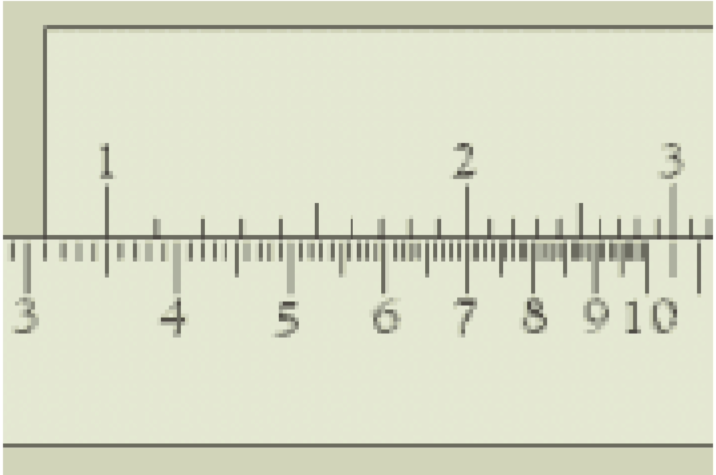
پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتم دا خوی لري، چې د دوه ګڼونو یا عددونود لوګاریتمونو جمعه د دې د دې دوه عددونو د ضرب د لوګاریتم سره برابر دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

په دې توګه کېدی شي چې دوه کرښې(خط کشونه) د لوګاریتم کچوونو سره یو په بل کیږدي او لاس ته راوړنه د دېعددونو جمعه نه بلکه ضرب دی.(د شمېرکښوونې (چې یوې او بلې لورته کښیږي) اصول)



د پورته ځېرې ځخه د بېلګې په توګه ګورو چې $7 = 2 \cdot 3.5$ دی. د لته د پورته کچوونې ۱ د لاندې سکالا په3.5 (لومړی ضریب) کېښول کیږي. بالاخره ۲ د پورته سکالا (دویم ضریب) د ضرب لاس ته راوړنه په لاندې سکالا لوستل کیږي.

پای.

ټولیز توان توابع او لوګاریتم

د $a > 0$ لپاره تعریفوو

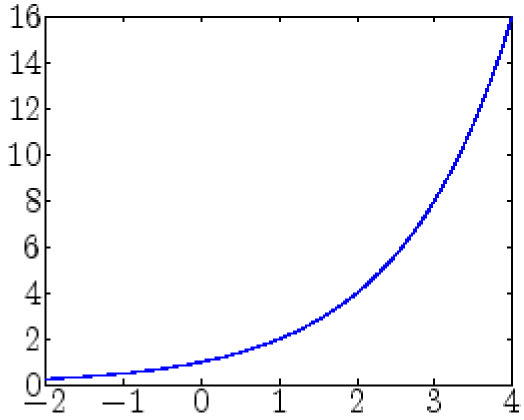
$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

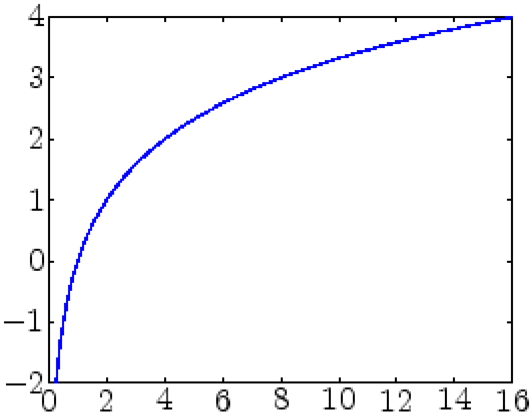
د معکوس یا په څټ تابع سره

$$x = \log_a y, \quad y > 0.$$

په ځانګړې توګه سړی لیکي $\log = \log_{10}$ د لوګاریتم لپاره د 10 بنسټ سره او $\mathrm{ld} = \log_2$ د دوال لوګاریتم لپاره.



$f(x) = 2^x$



$f(x) = \mathrm{ld}(x)$

د ودې قانون

$$y = a^x, \quad a > 0$$

کیدی شي نیم لوګاریتمي دکښل شي. دلته په یوه محور x او په بل محور $\log y$ لیکل کیږي. د x او $\log y$ ترمنځ نسبت د ودې قانون له مخې کرښیز دی او رسم شوې کرښه لاندې جګړ.الی لري

$$m = \log a.$$

یو بل امکان دادی، چې په دواړو محورونو یو لوګاریتمي سکالا وکاروو.
دا د بېلګې په توګه د ناتیکاوي ارزښت لپاره

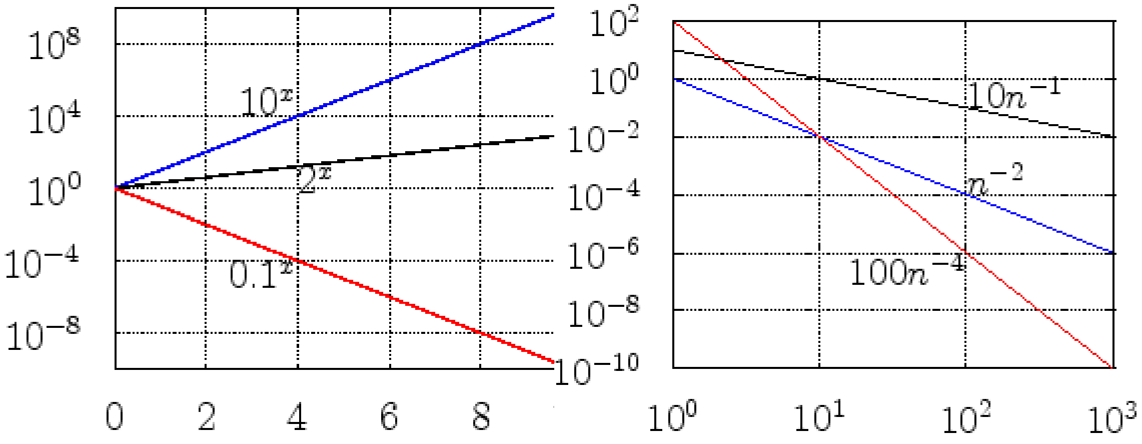
$$\varepsilon \approx c n^{-k}$$

مناسب ده. دا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log \varepsilon = \log c - k \log n \,,$$

د کږې کميز یا منفي چګېدنه ورکوي.



$y = 2^x, 10^x, 0.1^x$ $\quad$ $\varepsilon = 10n^{-1}, n^{-2}, 100n^{-4}$

د توان او لوګاریتم لپاره شمیرقوانین

Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

د اکسپوننشل – او لوګاریتمي توابعو د تعریف او تابع مساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s\, a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s / a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x \,. \end{aligned}$$

برسېره پردې د دوه مختلفو بنسټونو ت رمنځ د شمېربدلون لپاره باور لري

$$\log_b x = \log_b a \; \log_a x \,.$$

په ځانګړې توګه دی

$$\log x = (\log e) \ln x \,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کنوپف

که کیږدو

$$x = a^s, \quad y = a^t,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د توان او لوګاریتم د فرمولونو ورته وال یا برابرارزښتوالی روښانه دی. لومړي دواړه کتمتوالي د تابع مساواتو څخه لاس ته راځي او دریم له تعریف $b^r = e^{r\ln b}$ څخه.:

$$(a^s)^t = (e^{s\ln a})^t = e^{st\ln a} = a^{st}.$$

د شمیبدلون فرمول برابرارزښت دی و لاندې ته

$$x = b^{\log_b a \log_a x},$$

او د ساده ونې له لارې ښی اړخ لاس ته راځي.
لیکونکي: هیولیګ، کنوپف

لاندې دواړه بېلط دشمېقوانین تشریح کوي یا په ګوته کوي.

(i)

$$\ldots^2) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 = 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2) + \mathrm{ld}(2x) = 2\frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\frac{\ln x}{\ln 2}$$

های پرابول تابع **Hyperbelfunktionen**

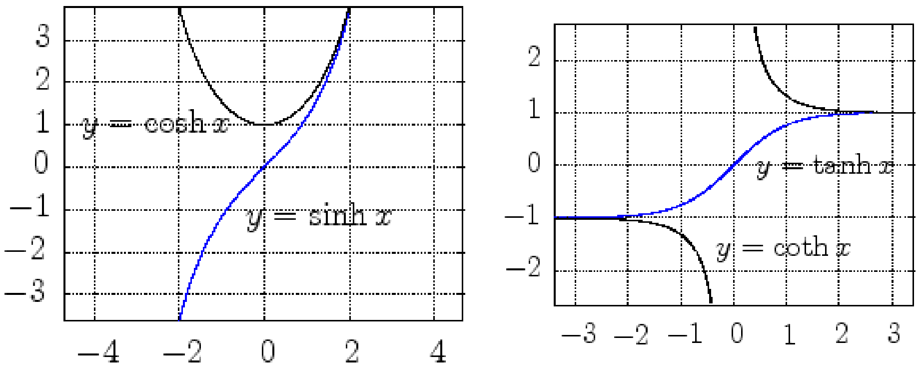
تریګونومتریکي توابعو ته ورته تعریفوو

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

همداسې

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1/\coth x.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

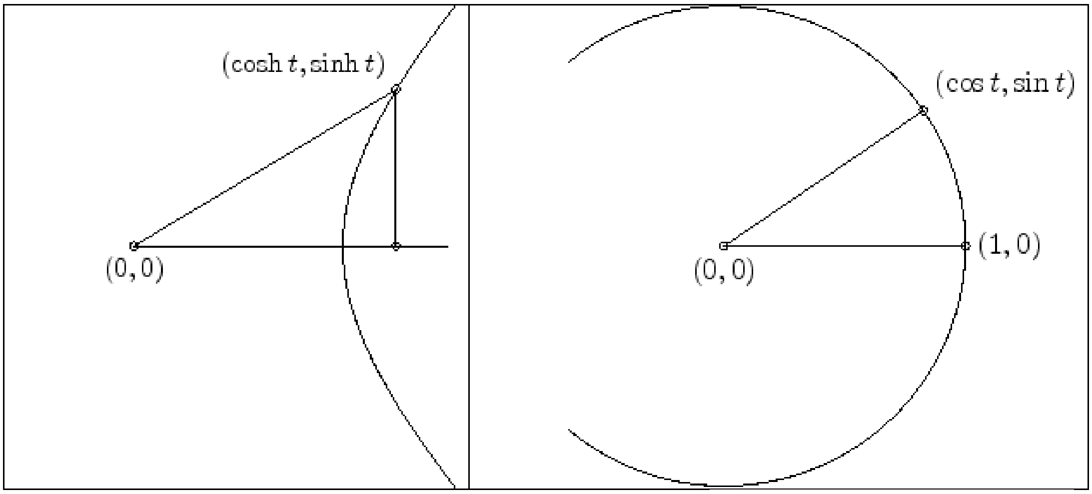


sinh x, cosh x tanh x, coth x

معکوس يا په ښڅ توابع اکسپليثيت يا په روبنانه توگه ورکول کيږي:

$$\text{arsinh}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \qquad -\infty < x < \infty$$
$$\text{arcosh}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \qquad 1 \le x < \infty.$$

د هاپربول تابع نوم د لاندې کتمتوالي څخه رانيول شوی



$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

دا روبنانه کوي، چې د $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ له لارې د هايرابول يو ښاخ پارامتري کيږي..

له $y = (e^x - e^{-x})/2$ څخه د e^x سره ضرب له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

د مربع مساوات دویم حل د $e^x > 0$ له امله باید په پام کې ونه نیول شي. د لوګاریتمي کوني څخه لاس ته راځي

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

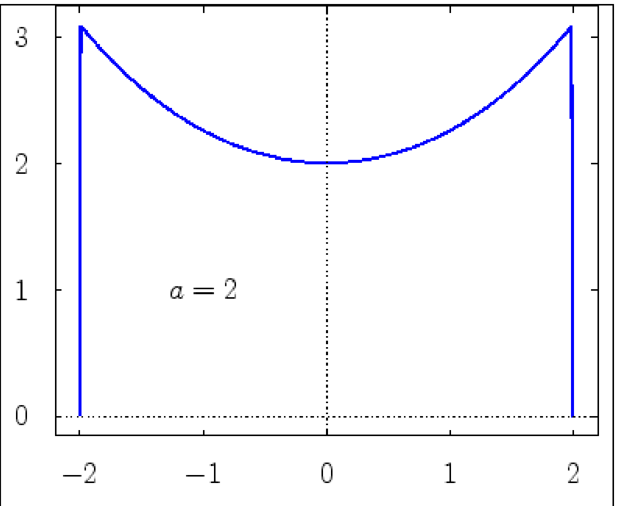
د کوساین هوپربولیک د فرمول څخه پورته ته په ورته توګه لاس ته ره اځي

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}.$$

د لوګاریتم کوني له لارې د په ښت- یا معکوس تابع فرمول لاس ته راځي.
لیکونکي: هیولیک، کنوپف

د یوه هایپارابول په پای ټکو کلک شوي سیم ځګوالی h د خپل وزن له لارې اغیزمنشوی دننی شپانونګ a دی $h(x) = a\cosh(x/a).$ تابع h د لاندې دفرنځیال مساوات حل دی. $h'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + (h')^2}.$	

هایپارابولیکی کتمتوتوالی
Hyperbolische Identitäten

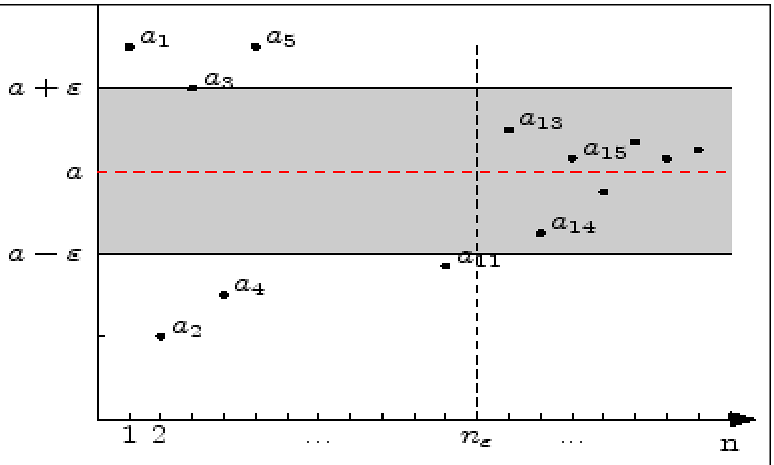
تریګونومتریکي توابعو ته ورته کتمتوالی باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} \sinh(-x) &= -\sinh x \\ \cosh(-x) &= \cosh x \\ \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1\,, \end{aligned}$$

چې د تعریفونوو له لارې کېدی شي نازک شي

د یوې پرلپسې (ترادف)پوله ارزښت
Grenzwert einer Folge

یوه پرلپسی $(a_n) = a_1, a_2, \ldots$ د یوه پوله ارزښت a په لور هځیږي، $a = \lim_{n\to\infty} a_n,$ که هر $\varepsilon > 0$ ته یو n_ε داسې شتون ولري د $\|a_n - a\| < \varepsilon$ $n > n_\varepsilon$ سره د ټولو لپاره	

دا $a_n \to a$ لیکدود هم د یوې پرلپسې د کونورګنت یا پولې ته تلو لپاره کارول کیږي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (a_n) پوله ارزښت ونه لري، نو پرلپسې ديورګنت يا پولې ته نه تلونکې بللکيږي.

پای.

د دې لپاره چې د کونورګنت-قضيه وښايو يعنې
$|a_n - a| < \varepsilon$ د $n > n_\varepsilon$ لپاره
وښايو، کيدی شي لومړی دا افاده $|a_n - a|$ د تخمين کونې له لارې پورته لور ته ساده کړو او بيا داسې په نامه نامساوات د n پسې حل کړو.

که دا د بيلګې په توګه د لاندې پرلپسې لپاره وکارول شي

$$a_n = \frac{n^2+n}{n^2+1},$$

کومه چې پوله ارزښت $a = 1$ لري، يو ممکنه تخمين دی

$$|a_n - a| = \left|\frac{n^2+n}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{n-1}{n^2+1}\right| \le \frac{n}{n^2+1},$$

دا چې $|n-1| \le n$ د ټولو $n \ge 0$ لپاره . پرته له دې $n^2+1 > n^2$ دی او له دې سره $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ هم . نو له دې لاس ته راځي

$$|a_n - a| \le \frac{n}{n^2+1} \le \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

له دې سره $\frac{1}{n} < \varepsilon$ دی، بايد $n > \frac{1}{\varepsilon}$ وي. که n_ε يو طبيعي عدد چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وي ، وټاکو ، نو د ټولو $\varepsilon > 0$ او ټولو $n > n_\varepsilon$ لپاره باور لري.

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرلپسي
$1, q, q^2, \ldots$

د $|q| < 1$ لپاره یو پوله ارزښت 0 لري او د $|q| > 1$ یا $q = -1$ لپاره
دیورګنت دی

د پرلپسیو د پوله ارزښت شمیرنې لارې
Rechenregeln für Grenzwerte bei Folgen

د پولې ته تلونکې پرلپسي (a_n) او (b_n) لپاره د پولو a او b سره باور لري:

- $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n / b_n) = a/b$, falls $b \neq 0$
- لیکونکی: اپپ، هیولیګ

زیاتون او کمښت یا کمون : د دریګوډي نابرابرون څخه لاس ته راځي
$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \to 0.$

ضرب یا ځل: دا چې a_n محدود ده، لرو

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \to 0.$$

وېش: د ټول $n > n_0$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0 \notin \left(b - \frac{|b|}{2}, b + \frac{|b|}{2}\right) \ni b_n \,,$$

او له دې لاس ته راځي

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b-b_n}{bb_n}\right| \leq \text{const}\; |b_n - b| \to 0,$$

دا په دې معنا چې $1/b_n \to 1/b$. د a_n/b_n پولې ته تلنه دهمدا اوس ښوول شوي د پولې ته تلونکو پرلپسيو ضرب قانون څخه لاس ته راځي.

پای.

که دپرلپسيو توکي د n راشنل تابع وي، $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ ، نو کيدی شي پوله ارزښت د خورا جګ توان د لنډونې څخه پيداکړی شو. د بيلګې په توګه دی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-2n^2}{3n^2+4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n-2}{3+4/n} = -\frac{2}{3} \,.$$

په ټوليزه توګه د صورت-درجې j او مخرج-درجې k لپاره باور لري

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_j n^j + \cdots p_0}{q_k n^k + \cdots q_0} = \begin{cases} 0, & \text{für } j < k \\ \frac{p_j}{q_k}, & \text{für } j = k. \end{cases}$$

د $j > k$ لپاره پرلپسې پولې ته نه ځي يعنې ديورګنت ده.

پای.

دمعلومو پوله ارزښتونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

په مرسته لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e\cdot\frac{1}{e} = 1.$$

په پام کې نيسو، چې

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \neq \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n = 1\ ,$$

ځکه چې د ضرب د ضريبونو ګڼون يا تعداد ثابت نه دی.

ليکونکی: هيوليک، کرايخ

د کوشي قضيه Cauchy-Kriterium

يوه پرلپسې (a_n) ټيک هلته پولې ته ځي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو n_ε شتون ولري، داسې چې

$$|a_j - a_k| < \varepsilon$$

د ټول $j,k > n_\varepsilon$ لپاره باور ولري.

د کوشي په نوم نومول شوي قضيې په مرسته د پوله ارزښت ثبوت بې د پوله ارزښت پېژندلو ممکن دی.

ليکونکی: اپپ، هيوليک

د کوشي – قضيې اړينوالی د پوله ارزښت له تعزيف څخه لاس ته راځي:

$$a = \lim a_n \iff |a_m - a| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m > m_\varepsilon$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که کيږدو $n_\varepsilon = m_{\varepsilon/2}$ ، نو لرو

$$|a_j - a_k| \le |a_j - a| + |a - a_k| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

د ټول $j, k > n_\varepsilon$ لپاره، حه چې د ښوولو وو.

دا چې شرط پوره کېدونکی هم دی، ستونځمن دی چې و يې ښايو، او دا د حقيقی عددونو په پوره والي ولاړ دی.

پای.

يوه رکورزيو تعرف شوې پرلپسې (a_n) کېدی شي زيات وخت د کوشي-قضيه د تخمينونې له لارې

$$|a_{n+1} - a_n| \le cq^n$$

د $q \in [0,1)$ سره يې تيکوالی و ازمايل شي. داسې د هندسي پولې ته تلنه د $j < k$ لپاره راکوي

$$|a_j - a_k| \le |a_j - a_{j+1}| + |a_{j+1} - a_{j+2}| + \quad \dots \quad + |a_{k-1} - a_k| \le cq^j\,(1 + q + q^2 + \dots) \le \frac{cq^j}{1-q}.$$

ښی اړخ د $< \varepsilon$ لپاره ده د $j, k > n_\varepsilon = \ln \frac{\varepsilon(1-q)}{c} / \ln q$ لپاره ، نو د کوشي قضيه پوره ده. د ځرګند، د

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \quad a_0 = 1,$$

له لارې رکورزيو تعريف شوې پرلپسې a_n د کونورګنځ قضيې د ثبوت لپاره استعمالوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ايندکشن پيل : $(n=1)$: نامساوات

$$|a_1 - a_0| \leq cq$$

باور لري، که $c = |a_1 - a_0|/q$ کېښول شي.

د ايندکشن پای $(n \to n+1)$: شړی اټکل شوی کمښت يا تفريق د

$$|a_{n+1} - a_n| = |\sqrt{2+a_n} - \sqrt{2+a_{n-1}}| = \left|\frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2+a_n} + \sqrt{2+a_{n-1}}}\right|.$$

په بڼه ښيي.

د اندکشن د نيونې له مخې ښی اړخ $\leq \frac{1}{2\sqrt{2}} cq^n$ دی او د ټاکنې سره
$q = 1/2\sqrt{2} \leq cq^{n+1}$

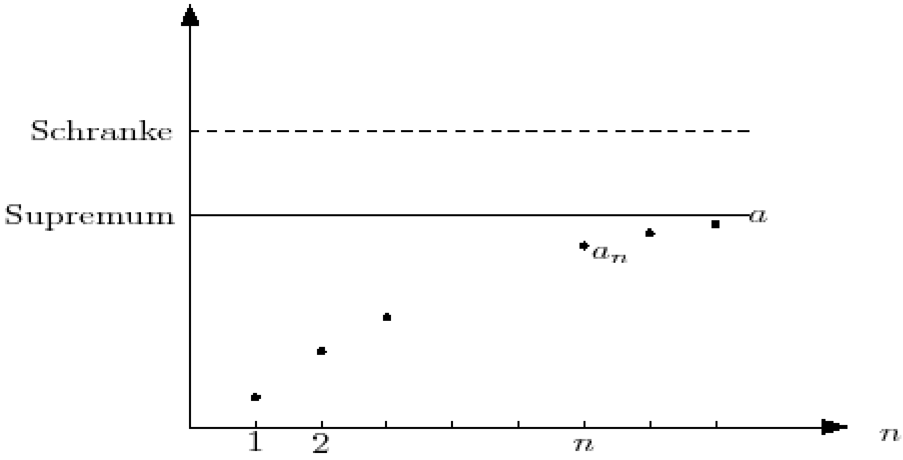
لکه چې غوښتل مو.

پای.

يو غږېزه پولې ته تلنه **Monotone Konvergenz**

يو پرلپسي (a_n) همغږېز جګېدونکي $a_{n+1} \geq a_n$ همداسې همغږېز ټيټېدونکې $a_{n+1} \leq a_n$ بلل کيږي ، که همداسې وي د ټولو n لپاره. دا کره همغږېز جګېدونکي $a_{n+1} > a_n$ همداسې کره همغږېز ټيټېدونکې بلل کيږي ، که همداسې $a_{n+1} < a_n$ وي د ټولو n لپاره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



یوه رابنده یا محدوده ، د $n > n_0$ لپاره همغږیز جګېدونکي یا ټیټېدونکي پرلپسي (a_n) پولې ته تلونکي ده. پوله ارزښت يې د پرلپسي توکو a_n , $n > n_0$. سوپریموم همداسې اینفیموم دی.

لیکونکی: اېپ، هیولیګ

د يوې مونوتون جګېدونکې پرلپسي لپاره د سوپرېموم د تعریف سره، چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو n_ε شتون لري د کوم لپاره چې باور لري

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \le a = \sup_{n>n_0} a_n$$

د همغږيزوالي په بنسټ دی

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \le a_n \le a \quad , \text{ für } \quad n > n_\varepsilon ,$$

نو $a_n \to a$.

د مونوتون ټيټېدونکې پرلپسي لپاره په ورته توګه دلایل راوړل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پرلپسې پولې ته تلنه

Die Konvergenz der Folge

$$a_n = (1+1/n)^n, \quad n = 0, 1, ...,$$

د اویلر عدد e په لور کېدی شي د مونوتون کونورګنت حملې په بنسټ و ښوول شي.
دواړه وړاندنیونې(فرضیې) کېدی شي د بېنوم درسي جملې په مرسته و ښوول شي.

(i) رابندیدنه یا محدودیت: له

$$a_n = (1+1/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \dots$$

او

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} \le \frac{n^k}{1\cdot 2\cdots 2}$$

لاس ته راځي

$$a_n \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \le 3$$

(ii) همغږیزوالی: سړی a_{n+1} هم د بېنوم له جملې سره شماري:

$$a_{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + \binom{n+1}{3}\frac{1}{(n+1)^3} + \dots.$$

که دا په (i)کې د a_n انځورونې سره پرتله کړي، نو سړی کره کوي، چې اړونده ترمونه لوی دي:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{n^k}$$

$$\le \frac{(n+1)\cdot n\cdots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{(n+1)^k} \quad =$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}.$$

دا له نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\frac{n-j}{n} \leq \frac{n+1-j}{n+1}$$

د يوګونوو ضريبونو لپاره. داچې د a_{n+1} لپاره زياتون يا جمعه لا ترم

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

لري لاس ته راځي

$$a_n < a_{n+1}.$$

ناربښتونی پوله ارزښت **Uneigentliche Grenzwerte**

يوه پرلپسې (a_n) دا ناربښتونی پوله ارزښت ∞ ($-\infty$) لري، که د ټولو $a > 0$ لپاره يو n_a شتون ولري، داسې چې

$$a_n > a \ (< -a)$$

باور ولري د ټولو $n > n_a$ لپاره. پرلپسې چې ناريښتونی پوله ارزښت لري، دا ټاکلې ديورګنت ــيا پولې ته نه تلونکې پرلپسې هم بلل کيږي.
ليکونکي:اپپ، هيوليګ، وبپير

د دې لپاره چې وښايو ، چې

$$a_n = \frac{n!}{2^n} \to \infty,$$

دا په دې معنا چې

$$\frac{n!}{2^n} > a$$

د $n > n_a$, لپاره، دا a_n سرې د يوې ساده افادې يا ويينې له لارې کښته لور ته تخمينوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{2 \cdot 2 \cdots 2} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2}.$$

له دې سره له $\frac{n}{4} > a$ همداسې له $n > 4a = n_a$ لرو $a_n > a$

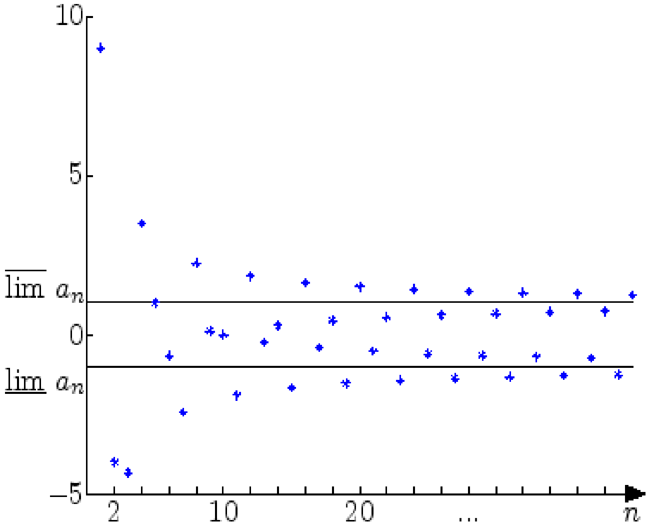
پوله اينفريور او پوله سوپريور(کښته - او پورته پوله ارزښت)

Limes Inferior und Limes Superio

د هرې پرلپسي (a_n) لپاره، په ناصلي حالت کيuneigentlichen Sinn ، يو پوله ارزښت شتون لري.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a_n}\,,\quad \underline{a_n} = \inf_{k\geq n} a_k$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a_n}\,,\quad \overline{a_n} = \sup_{k\geq n} a_k$$



لکه په خيره کې چې شوول شوی دی، پرلپسي (a_n) د همعريزې پرلپسي $(\underline{a_n})$ او $(\overline{a_n})$ له لاري يا نوره هم ښه له لورې رابندې دي:

$$\underline{a_n} \leq a_n \leq \overline{a_n}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که پوله اینفریور او پوله سوپریور یو په بل پریوځي، نو پرلپسي (a_n) پولي ته تلونکې ده او لرو

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n .$$

لیکونکي: اپپ ،هیولیګ

د پولي اینفریور او پولي سوپریور شتون د همهغږیز پولي ته تلنی جملې له لارې ترلې لاس ته راځي، خکه چې پرلپسي

$$\underline{a}_n = \inf_{k\geq n} a_n \ , \quad \overline{a}_n = \sup_{k\geq n} a_n$$

همغږیز جګیدونکې همداسې همغږیز ټیټیدونکې دي.
په روښانه توګه باور لري

$$\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n .$$

که پوله اینفریور او پوله سوپریور همغه ازښت a ولري، نو لا سته راځي

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره، نو $a_n \to a$.

پرتله کوونکې قضیه **Vergleichskriterium**

که د $\lim a_n = a$ او $\lim c_n = c$ سره د پوره کوچنې n لپاره
$a_n \leq b_n \leq c_n$ باور لري، نو دی

$$a \leq \underline{\lim}\, b_n \leq \overline{\lim}\, b_n \leq c.$$

په ځانګړې توګه له $a = c$ د پرلپسي (b_n) کونورګنت لاس ته راځي:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a = c .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی غوښتنه ساده ده، ځکه چې نابرابرون $\leq$ د پولې ته تګ له امله ساتلی پتيري:

$$\inf_{k\geq n} a_n \leq \inf_{k\geq n} b_n \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n .$$

په ورته توګه لرو $\overline{\lim}\, b_n \leq c$.

که پوله ارزښتونه سره برابر وي ($a = c$) ، نو باور لري

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره. له دې سره لرو $b_n \to a$.

پای.

پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

په لاندې نامساوات باندې د پرتلې قضيې استعمال له لارې لاس ته راځي

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} .$$

دلته ښی نابرابرون د بينوم د فرمول څخه باوري دی:

$$1 \leq n \leq 1 + n \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{4}{n} + \cdots$$

په توليزه توګه د ضرب قانون څخه لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^k = 1$$

د $k \in \mathbb{N}$ لپاره . د کم نظم ترمونو د په زياتوالي له امله پوله ارزښت ساتلی پاتيري. د يوه پولينوم

$$p(n) = a_k n^k + \cdots + a_0 \;,\; a_k > 0$$

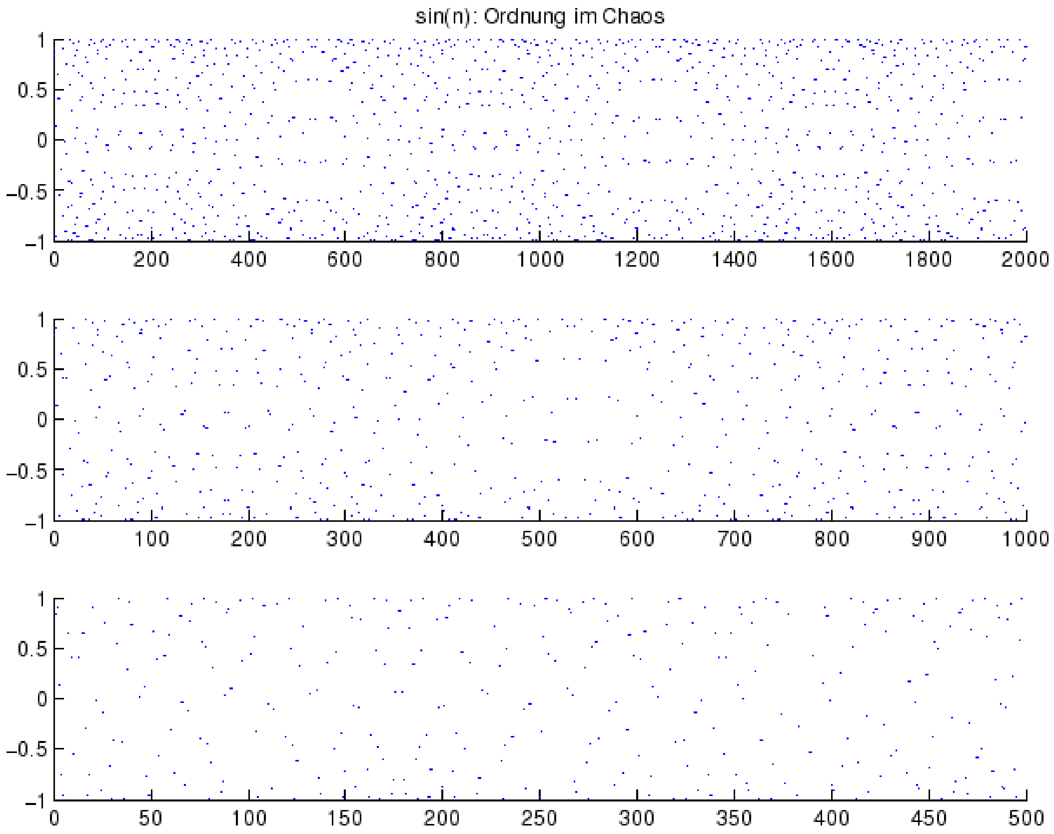
لپاره هم $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1$ دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې پرلپسې پنډغالي ټکی **Häufungspunkt einer Folge**

يوه پرلپسې (a_n) پنډغالي ټکی a لري، که هر انتروال $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ دپرلپسې ناپای ډېر توکي خوندي ولري. دې ته ورته د يوې برخه پرلپسې باور لري، چې a ته ځي. په ځانګړې توګه يوپوله ارزښت د پرلپسې بنډغالي ټکی هم دی.

ځيره پرلپسې $(\sin n)_{n\in N}$ ښايي.



سړی په نږدې توګه د پرلپسې يا ترادف توکو a_n برابروېشنه په انتروال $[-1,1]$ کې پيژني. په ريښتوني ښول کېدی شي، چې په $[-1,1]$ کې هر ټکی د پرلپسې پنډغالي ټکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې پرلپسې يا ترادف (a_n) د پندغالي ټکي د ټاکلو لپاره باید کونورګنت برخه پرلپسې و پيژندل شي.
د بيلګې لپاره

هغه دا دي

$$a_n = \frac{n \sin(n \frac{\pi}{2})}{n + \sin(n \frac{\pi}{2})}$$

$$b_k = a_{2k} = \frac{0}{k}$$

$$c_k = a_{4k+1} = \frac{(4k+1)}{(4k+1)+1}$$

$$d_k = a_{4k+3} = \frac{-(4k+1)}{(4k+1)+1}.$$

له دې سره پنډغالي ټکی لاس ته راځي

$$\lim b_k = 0, \lim c_k = 1, \lim d_k = -1$$

ورهولست- - يا فرهولست- مودل **Verhulst-Modell**

يو بيلجيمي شميرپوه وو : Pierre-François **Verhulst** [vəɾˈhʏlst]
(* 28. Oktober 1804 in Brüssel; † 15. Februar 1849 ebenda)

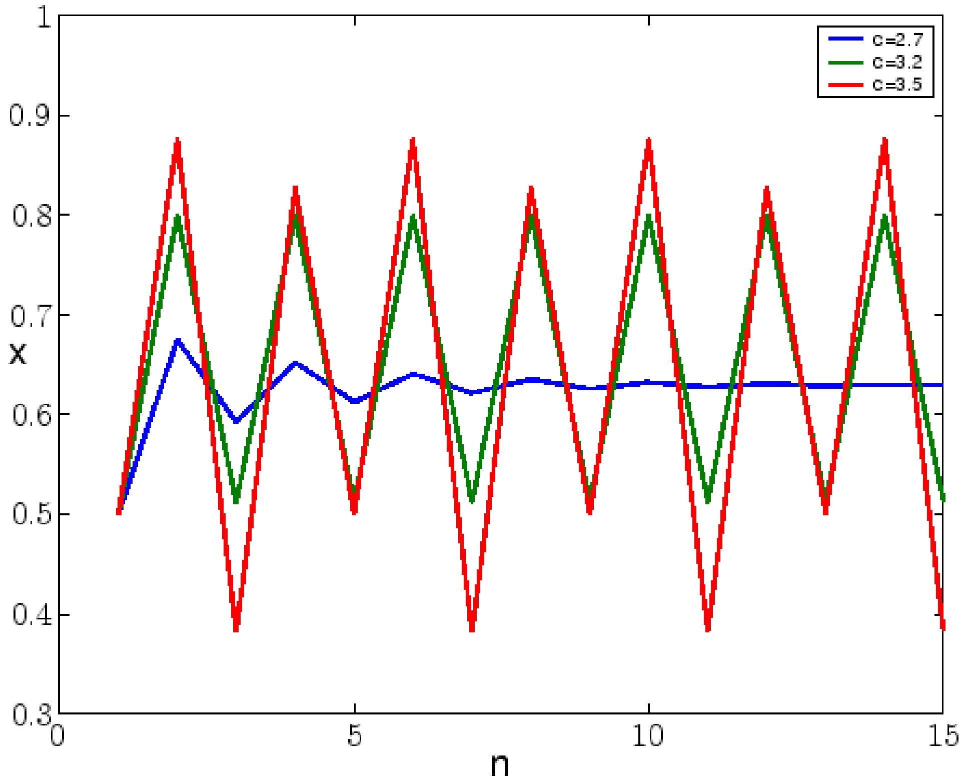
ريکورژن(په ځت ځغاستل) Rekursion

هغه فنکشن، چې د خپل ځان له خوا پيژند لري يا تعريفيږي

$$x_{n+1} = c x_n (1 - x_n)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $c \in (0,4]$ سره د نورمال شوي خلکو ګنوالي x_n وده په ګوته کوي. يو څو تيوپيکي بيلګې د ا لاندې څيره ښايي

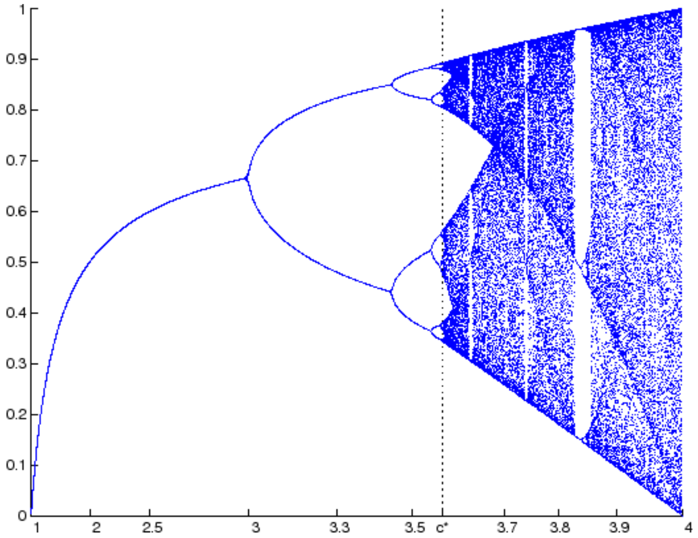


د $c \leq 3$ لپاره x_n د $n \to \infty$ لپاره لاندې پولې ارزښت ته ځي

$$x_* = \frac{c-1}{c}.$$

د $c > 3$ لپاره سرې اوسځليشن ګوري. که پارامتر تل لوی شي، نو د پندغالي - تکو x_* ګنون يا تعداد دوه برابره کيږي د افاظ پارامتر ارزښتونو c_i څخه اوښتلو باندې يعني له دې نور زياتيدلو باندې . دا په لاندې څيره کې کښل شوی دی، په کوم کې چې د تکي x_* د c -محور پورته لور ته ځای په ځای شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n - c_{n-1}}{c_{n+1} - c_n} = 4,69920166\ldots$$

داسي په نامه د انځوروني ثابته ده، چې دا زیات وخت د ځانګو کولو پرابلم کې رول لوبوي.

له پورته ځیرې څخه روښانه کیږي، چې ایتیشن د

$$c > c^* = \lim_{n\to\infty} c_n$$

لپاره یوګډوډیز chaotisches Verhalten حالت ښایي

د پيPi رکورزيو اپروکسیمیشن
Rekursive Approximation von Pi

د a_n او b_n نیم اوږدوالی چې د یوې یوونګردی یا واحد داېرې د $(6 \cdot 2^n)$ -ګوډونو
یا کونجونو په باندې او په کې یعني په دننه اودباندې لاندې ریکورژن پوره کړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}\,, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}\,, \quad a_0 = 2\sqrt{3}\,, b_0 = 3\,,$$

د $\pi = 3.1415926535897932\ldots$ په مرسته اپروکسیمي کیدی شي.
دا فرمول د یوهان فریدریش پفاف Johann Friedrich Pfaff (1765-1825) له خوا
په 1800 زک کال میندل شوی.
ارښمیدس Archimedes (287-212 v. Chr.) د 96 ـګوډونو ($n = 4$) او اټکل
یا تخمین سره اړیکي

$$3.140845\ldots = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3.142857\ldots$$

ومیندلې یا ترې لاس ته راوړې.

د ګردۍ ګڼ یا عدد π له د یو میلیارد ځایونو ډېر شمیرل شوی دی. لاندې جدول د
تاریخي ودې څخه یوه کاپی راکوي.:

Wert	korr. Stellen		Jahr	Autor
				Bibel (1. Könige 7:23)

Autor	Jahr		korr. Stellen	Wert
Bibel (1. Könige 7:23)	550	v. Chr.	0	3
Babylonier	2000	v. Chr.	1	3+1/8
Archimedes	250	v. Chr.	3	223/71 $< \pi <$ 22/7
Liu Hui	263		5	
Tsu Ch'ung Chi	480		7	
Al-Kashi	1429		14	

(c) ketabton.com: The Digital Library

Romanus	1593		15	
Van Ceulen	1596		20	
Van Ceulen	1615		35	
Sharp	1699		71	
Machin	1706		100	
Rutherford	1824		152	
Strassnitzky/Dase	1844		200	
Shanks	1874		527	
Smith/Wrench	1949		1 120	
Reitwiesner u.a.	1949		2 037	
Genuys	1958		10 000	
Shanks/Wrench	1961		100 265	
Guilloud/Filliatre	1966		250 000	
Guilloud/Dichampt	1967		500 000	
Guilloud/Bouyer	1973		1 001 250	
Kanada/Yoshino/Tamura	1982		16 777 206	
Kanada/Tamura/Kubo u.a.	1987		134 217 700	
Chudnovskys	1989		1 011 196 691	

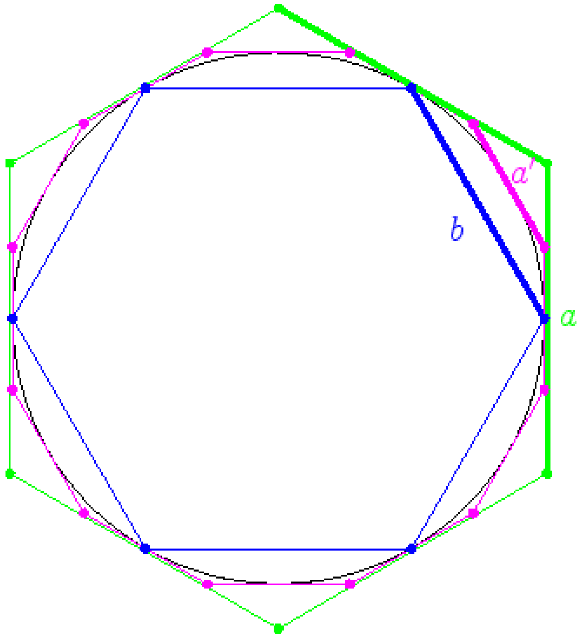
پای.

د ج.ف. پفاف ریکورزیون په ساده هندسي پامکونې باندې ولاړ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګي (تالس) جملې له مخې د a_n لپاره لاس ته راځي:

$$a' : b = \left(\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}\right) : \frac{a}{2} \Leftrightarrow a'a = ba - ba' \Leftrightarrow a' = \frac{ab}{a+b}\,.$$



که $k_n = 3 \cdot 2^n$ د ډېرګوډي نیم د اړخونګېنون یا تعداد په ګوته کړي، نو باور لري

$$a_n = k_n a\,,\; b_n = k_n b \Rightarrow a_{n+1} = k_{n+1} a' = 2k_n \cdot \frac{ab}{a+b}$$

$$= 2\frac{(k_n a)(k_n b)}{k_n a + k_n b} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}\,.$$

د b_n لپاره ریکورزیون کېدی شي د تریګونومتري توابعو په مرسته و بنوول شي. له

$$a_n = k_n 2\tan(\pi/(2k_n))\,, \quad b_n = k_n 2\sin(\pi/(2k_n))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راځي

$$b_{n+1}^2 = 4k_n^2 4\sin^2(\pi/(4k_n))$$
$$= \underbrace{2k_n 2\tan(\pi/(4k_n))}_{a_{n+1}} \underbrace{\cos(\pi/(4k_n)) 2k_n 2\sin(\pi/(4k_n))}_{k_n 2\sin(\pi/(2k_n))=b_n}$$
$$= a_{n+1} b_n \, .$$

د پرلپسيو يا ترادفونو ځانګړي پوله ارزښتونه

يو څو غوره پوله ارزښتونه په لاندې جدول کې راوړل شوي

a_n	$a = \lim_{n\to\infty} a_n$
$\sqrt[n]{n}$	1
$n^\alpha q^n \, , \ \|q\| < 1$	0
$n^{-\alpha} \ln n \, , \ \alpha > 0$	0
$q^n/n!$	0
$n!/n^n$	0
$(1+1/n)^n$	e
$(1-1/n)^n$	$1/e$

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زیات واره کیدی شي پوله ارزښتونه وشمیرل شي، داسې چې سړی د مناسب ښه بدلون له لارې معیاري افادې ته بېرته ولاړ شي. دا د دوه بیلو سره روښانه کیږي.
(i) د پرلپسې پوله ارزښت شمېرلو ته

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{4n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

سړی ږدي

$$m = 2n+3,\ n = \frac{m-3}{2}$$

او لاس ته راوړي

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2m-6}.$$

په دې پسې یا د دې په تعقیب دی

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^2 \cdot \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)\right)^{-6} =$$

$$= e^2 \cdot 1^{-6} = e^2.$$

$$a_n = \binom{3n}{n}/2^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

(ii) د دې لپاره چې د
پوله ارزښت وشمیرو، سړی لیکي

$$a_n = \frac{(3n)(3n-1)\cdots(2n+1)}{n\cdot(n-1)\cdots 1}\cdot\frac{1}{2^n} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3-1/n}{2}\cdots\frac{2+1/n}{2}\right)\cdot\frac{n^n}{n!}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې په نوکانو کې افاده ≥ 1 ده لرو

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$$

د لاندې بڼې پوله ارزښت

$$\frac{a_n \pm b_n}{c_n \pm d_n}$$

په مناسب ډول سړی داسې شمیرې، چې سړی د مطلق ارزښت د لویې پرلپسې توکو سره وویشي:

د بیلګې په توګه دا پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3+\sqrt{n+4})^2}{5n+\ln\, n}$$

که غواړو وشمیرو، نو مات یا کسر په لاندې بڼه لیکو

$$\frac{9+3\sqrt{n+4}+n+4}{5n+\ln\, n} = \frac{13/n+6\sqrt{1/n+4/n^2}+1}{5+(\ln\, n)/n}.$$

دا چې $1/n, 1/n^2$ او $(\ln\, n)/n$ د صفر پهلور ځی، نو پوله ارزښت دا لاندې دی

$$\frac{0+6\cdot\sqrt{0}+1}{5+0} = \frac{1}{5}.$$

د یوې لړۍ پرلپسې (لنډ: لړۍ) پوله ارزښت
Grenzwert einer Reihe

یو زیاتون یا جمعه $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ دډېروو زیاتیدونو سره لړی بلل کیږي. دا د یوې پولې ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

په لور هڅيږي، که ټوټه زياتوونويا – جمعو

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

پرلپسې (s_n) د s لور ته وهڅيږی یا کونورګنت شي. که پوله ارزښت شتون ونه لري نو پرلپسې پولې ته نه تلونکې یا ديورګنت بلل کيږي.
پوله ارزښت کېدی د زياتوونو (هغه عددونه چې یو په بل زياتيږي) د لړۍ پرلپسې په واک کې وي، همداسې اړتيا نه شته چې د نظم بدلون وروسته شتون ولري.

د يوې لړۍ د پولې ته تلنې لپاره اړيين (شرط) دی، چې

$$\lim a_n = 0.$$

فقط په لږو حالتونو کې د يوې لړی روښانه یا اکسپليځيټ شمېرنه ممکن ده. يوه بېلګه يې د ټاکلو لړيو ده د راشنل زياتيدونو سره لکه

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1} = \frac{3}{2}.$$

د ټوټه کسر ټوټه ونې وروسته

$$\frac{2}{n^2 - 1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1},$$

کېدی شي دا لړۍ په

$$(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) + \dots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښه ولیکل شي. تر $\frac{1}{1}$ او $\frac{1}{2}$ پورې ټول زیاتېدونې یو بل له منځه وړي یا پورته کوي، داسې چې پوله ارزښت $\frac{3}{2}$ ته‌رلی لوستل کېدی شي.

د ټوټه زیاتون د کمښت لپاره د ټول $n < m$ لپاره باور لري

$$|s_n - s_m| =$$

$$= |(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}) + \ldots + (\frac{1}{m-3} - \frac{1}{m-1}) + (\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m})| \leq$$

$$\leq \frac{4}{n-1},$$

داچې منځني ترمونه سره پورته کیږي یا له منځه سره وړي. ټوټه زیاتون یا ــجمعه د کوشي – پرلپسې جوړوي:

$$|s_n - s_m| < \varepsilon$$ د لپاره $$n > 1 + \frac{4}{\varepsilon}.$$

و پولې ارزښت ته کمون یا تفریق دی

$$|\frac{3}{2} - s_n| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

بیلګه دا هم ښایي، چې د زیاتوونو یا د جمعې د غړو لړۍ پرلپسې غوره یا ښه روښانه ده.

که لړۍ پرلپسې

$$(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8} - \frac{1}{5}) +$$
$$+ (\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16} - \frac{1}{6}) + \ldots ,$$

وټاکو، نو هر ه په نوکالانو کې افاده $\geq \frac{1}{4}$ ده، نو لړۍ پرلپسې دیورګنت ده.

هندسي یا ځمککچیزې لړۍ
Geometrische Reihe

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمکچیزه لړئ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ تیک هلته پولې ته ځي، $|q| < 1$ وي.
د هندسي زیاتونفرمول سره

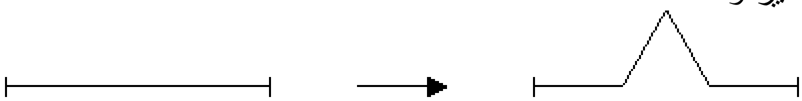
$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

کېدی شي پوله ارزښت وښانه یا اکسپلیڅیت وشمېرل شي:

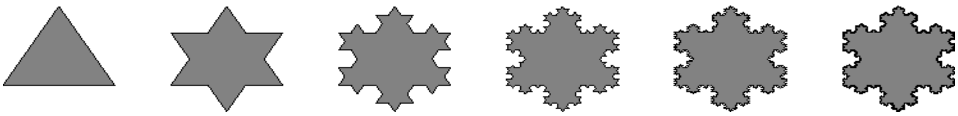
$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1 - q}$$

د $|q| < 1$ لپاره.
پای.

که د یوه برابر اړخیز درېکوډي یا مثلث مخ ته تک سره ژئ د قانون یا قاعدې سره سم کیږدو



نو یوه ډېرئ یا سټ لاس ته راځي د وتلو ژیو سره ، داسې په نامه د کوښ-د واورو پوتې Koch-Schneeflocke.



- $1/3$ -م د واورو پوتی $3 \cdot 4^n$ ژئ لري. دا چې د هر پل سره په ضریب کمیږي، نو د دې خومره والي لپاره لاس ته راځي

د ژیو ګڼون یا – تعداد ضرب د ژیو اوږدوالی:

$$(3 \cdot 4^n)\,(3^{-n}) = 3\,\left(\tfrac{4}{3}\right)^n \to \infty\,,$$

،

دا په دې معنا چې د ژیو اوږدوالی پولې ته نه ځي یا دیورګنت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په n -م پل سره $3 \cdot 4^{n-1}$ برابراړخيز درېګوډي لاس ته راځي د ژيو اوږدوالي 3^{-n} او سطحي $\sqrt{3}/4\,(3^{-n})^2$ په ور زياتوالي سره. په دې توګه د n –م د واورو پوټي د سطحې لپاره راکوي

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\sum_{i=1}^{n}\left(3\cdot 4^{i-1}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(3^{-i}\right)^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\frac{4^{i-1}}{9^{i-1}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^i\right).$$

دا وتلې پوله ډېرۍ په پسې توګه سطحه لري

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-4/9}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

هارموني لړۍ Harmonische Reihe

هارموني لړۍ

$$s = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k},$$

پولې ته نه ځي يا همداسې ناټاکلی پوله ارزښت $s=\infty$ لري.
په ټوليزه توګه لړۍ

$$s_\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\alpha}$$

د $\alpha \le 1$ لپاره ديورګنت او $\alpha > 1$ لپاره پولې ته تلونکې ده. يو څو ځانګړي ارزښتونه د.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots ,$$

$$s_4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots ,$$

$$s_6 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-6} = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots .$$

مطلق پولې ته تلونکې لړۍ **Absolut konvergente Reihen**

که

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

پولې ته لاړ شي، نو لړۍ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ مطلق پولې ته تلونکي بللل کيږي.

د کونورګنت د دې قوي بڼې څخه لرو، چې لړۍ د زياتوونو لړې پرلپسې په خوښه تغير له امله هم کونورګنت ده يعنې پولې ته ځي.

کوښی (کوشي) – کونورګنت قضيه راکوي:

$$\exists n_\varepsilon : |a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m, n > n_\varepsilon$$

د درېګوډي نابرابرون په مرسته د ټوټه زياتون د کمښت لپاره لاس ته راځي:

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \dots + a_n| \le |a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \varepsilon$$

د $m, n > n_\varepsilon$, لپاره ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معناچې د $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ پولې ته تلنه.

مایورانت او مینورانت
Majorante und Minorante

که $|a_n| \le c|b_n|$ د $n \ge n_0$ لباره وي او یو مثبت یا زیاتیزه ثابته، نو د $\sum b_n$ مطلق کونورګنت ځخه د $\sum a_n$ مطلق کونورګنت لاس ته راځي

که برعکس $|a_n| \ge c|b_n|$ وي دیٔولو تر پای ډیرو n لپارهو نو د $\sum |b_n|$ دیورګنت ځخه لاس ته راځي، چې $\sum a_n$ هم مطلق کونورګنت نه ده.

زیاتوخت یا زیات واره هندسي لړۍ $\sum q^n$ او لړۍ $\sum n^{-\alpha}$ د پرتله کونې لړۍ په ځیر کارول کیږي.

د لړۍ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$$

لپاره دی

$$a_n = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{(2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1)} \le 2^{-n}.$$

د دې په تعقیب هندسي لړۍ $\sum 2^{-n}$ یوه مایورانت ده، نو دا پولې ته تلونکې ده.
د لړۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1000}$$

لپاره د $n > 9$ لپاره باور لري

$$a_n \geq \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} .$$

په دې پسې یا په تعقیب هارموني لړۍ یوه مینورانت ده، نو لړۍ پولې ته نه ځي یا دیورګنت ده.

د وېش قضیه Quotientenkriterium

که $a_n \neq 0$ د $n > n_0$ لپاره وي او یو عدد $q \in (0,1)$ شتون ولري د

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \,, \quad n > n_0 \,,$$

سره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. برعکس

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \,, \quad n > n_0 \,,$$

، نو $\sum a_n$ پولې ته نه ځي یا دیورګنت ده.
د پولې ته تلنې لپاره پوره کېدونکې قضیه کېدی شي په ورته بڼه

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

هم ولیکل شي.
په پام کې دې وي، چې پوره کېدونکي پولې ته تلونکي شرطونه رکورزیو د نابرابرون

$$|a_{n+1}| < |a_n| \,, \quad n > n_0 \,,$$

په توګه دی، چې د هغې په بنسټ کومهوینا ممکن نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پای.

که

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,\ \left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|,\ \dots \le q,$$

وي، نو دی

$$|a_{n+k}| \le q|a_{n+k-1}| \le \dots \le q^k|a_n|.$$

له دې سره هندسي لړۍ یوه مینورانت ده.
د دیورګنت لپاره قضیه راکوي، چې

$$0 < |a_n| \le |a_{n+1}| \le \dots$$

د $n > n_0$ لپاره. زیاتیدوني صفرپرلپسي نه جوړوي، له کوم چې د $\sum a_n$ دیورګنت
لاس ته راځي یا پولې ته نه تګ..
پای.

د وېش قاعده کېدی شي ګټوره وي که په لړیو استعمال شي، چې د هغې زیاتووني
فاکولتیت او توانونه خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n / \binom{2n}{n}$$

لپاره د بېلګې په توګه سړی لاس ته راوړي

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3^{n+1}\,(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{3^n\,n!\,n!} = \frac{3\cdot(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}.$$

د دې افادې پوله ارزښت د $n \to \infty$ لپاره $\frac{3}{4}$ دی، پسې(تعقیب) یې لړۍ پولې ته ځي.

د زیاتوونو یو سیده تخمین

$$a_n = \frac{3\cdot 6\cdots 3n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مفصل دی یا ډېر کار غواړي. ضريبونه

$$\frac{3k}{n+k}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

له یو څخه هم لوی دي او هم کوچني. سړی باید مناسبې جوړې سره یوځای کاندي، چې یوه تخمین ته راشي.

د ريښې یا جذرقضيه **Wurzelkriterium**

که یو عدد $q \in [0,1)$ د

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$$

سره شتون ولري د $n > n_0$ لپاره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. که برعکس

$$|a_n| \geq 1$$

وي د ناپای ډېرو n لپاره، نو $\sum a_n$ پولې ته نه تلونکې ده.
د کونورګنت لپاره پوره کېدونکي شرطونه کېدی شي په ورته یا برابر ارزښته بڼې

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

هم وليکل شي.

که $|a_n| \leq q^n$ د $n > n_0$ لپاره باور ولري، نو هندسي لړی یو مایورانت جوړوي.
د ديورګنت لپاره شرط راکوي، چې (a_n) صفر پرلپسې نه ده، ځکه چې $|a_n| \geq 1$ د ناپای ډېرو n لپاره باور لري..

د ريښې قضيه استعما کېدی شي په هغو لړیو ګټوره وي، چې د هغو زياتونونه n -م توان خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \ldots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره سړی د بيلګې په توګه لري

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{|3+(-1)^n|}\,.$$

د دې افادې يا ويينې پرلپسې

$$\frac{|x|}{2}, \frac{|x|}{4}, \frac{|x|}{2}, \dots,$$

د

$$q = \frac{|x|}{2}$$

له لارې يا سره محدود ده. په تعقيب يې لړی د $|x| < 2$ لپاره پولې ته ځي.
همدې نتيجې ته رسو، که سړی پوله سوپريور جوړه کړي.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{2}\,.$$

دا د n –مې ريښې اوسځيليري پرلپسې پولې ته نه ځي بې پروا يا نا غوره يا مهمه نه ده.

د لايبنيځ قضيه **Leibniz-Kriterium**

الترنيري (مخ نخښه بدلونې) لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots$$

پولې ته ځي، که (a_k) يوه مونوتون صفر پرلپسې وي. د لړۍ باقيو يا پاتو لپاره باور لري

$$0 \leq \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k\right| \leq |a_{n+1}|.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې الترنیري جمعې ارزښت کېدی شي تل د لومړي زیاتوني د مطلق ارزښت له لارې اټکل شي.

د اټکل په بنسټ

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots - a_m| \leq |a_{n+1}|$$

د کوښي قضیه پوره ده، او د لپاره د پاتې جمعې اټکل لاس ته راځي.
د دې نامساوات د ښوونې لپاره، چې د لړۍ دپاتې لپاره اټکل راکوي، سړی بې له ټولیزو بندیزونو (o.B.d.A.) $a_{n+1} \geq 0$ نیسي او $s_m - s_n$ د

$$a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0} - \ldots \leq a_{n+1}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي. او د

$$\underbrace{(a_{n+1} - a_{n+2})}_{\geq 0} + \underbrace{(a_{n+3} - a_{n+4})}_{\geq 0} + \ldots \geq -a_m \geq -a_{n+1}$$

له لارې کښته لور ته اټکل کوي

د لایبنیځ قضیې سره د الترنیري هارموني لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2\,;$$

پولې ته تګ لاس ته راځي ، پرلپسې

$$a_n = \frac{1}{n}$$

په روښانه توګه یوه همغږېزه صفر پرلپسې ده. د n –م ټوټه جمعې ناټیکاوی ، دا په دې معنا چې د لړۍ پرلپسې مطلق ارزښ دا لاندې دی

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \ln\, 2 \right| \leq \frac{1}{n+1}\,.$$

د لایبنیځ قصیې دواړه وړاندنیونې غوره دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n} = -\frac{2}{1}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{5}{4}-\dots$$

لړۍ لپاره زیاتووني a_n صفرپرلپسې نه جوړوي. له

$$|s_{n+1}-s_n| = |a_{n+1}| \geq 1$$

څخه ديورګنت لاس ته راځي.

د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max\left(\frac{(-1)^n}{n},\frac{(-1)^n}{2n}\right) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\dots$$

لړې لپاره زیاتوونې a_n همغږيزې نه دي. که يو په بل پسې زياتوني سره يوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي

$$b_n = a_{2n-1}+a_{2n} = -\frac{1}{2(2n-1)}+\frac{1}{2n} = \frac{2n-2}{(4n-2)(2n)} \geq \frac{1}{4n}$$

für $n > 1$.

په تعقيب هاموني لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ يوه مينورانت ده، نو له دې کبله لړی ديورګنت ده.

د اويلر **Euler** ګڼ يا عدد **e** ديوې پرلپسې او يوې لړۍ پولې په حيث
د اويلر عدد $e = 2,71828182845905\dots$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي د یوې پرلپسې او یوې لړۍ پوله ارزښت پّ ځیر انځور شي

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

پای.

د لړۍ پولې ته تلنه له $1/n! \le 4\cdot 2^{-n}$ څخه د مایورانت قضیې په بنسټ لاس ته راځي.

د لاندې دوارو اټکلونو په بنسټ د e سره نومول شوي یا په نخښه شوي پوله ارزښت په لور ځي.

پرلپسې $a_n = (1+1/n)^n$

(a) $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \le e$.

د ښوونې لپاره لومړی په پام کې نیسو چې د $n \ge k \ge 0$ لپاره

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\,\cdots\frac{n-k+1}{n} \le \frac{1}{k!}$$

دی. له دې سره د بینوم فرمول څخه لرو

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \le e$$

او دپوله ارزښت جوړولو سره غوښتنه لرو.

(b) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \ge e$.

د ښوونې لپاره $N \ge 1$ په خوښه تاکو مګر کره او د $n > N$ لپاره لرو:

$$a_n \ge \sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\,\cdots\frac{n-k+1}{n} \ge \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left(\frac{n-N}{n}\right)^N .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{N}{n}\right)^N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$

او د پولې ارزښت جوړولو($N \longrightarrow \infty$) سره غوښتنه.

له (a)او (b) څخه د $\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$ له امله لرو :

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = e.$$

د لړیو ځانګړي پوله ارزښتونه

په لاندې کې د څو غوره لړیو پوله ارزښتونه ورکړ شوي.

.

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q}$$, für $|q| < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

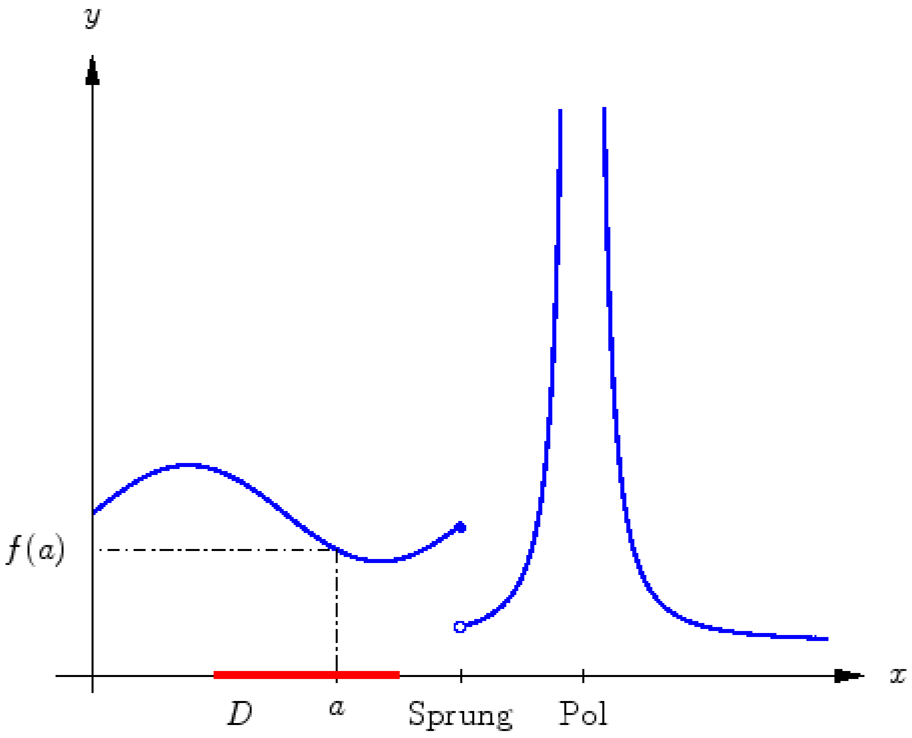
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2} = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\pm\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=e$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k!} = 1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\pm\cdots=\frac{1}{e}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 2^k} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\cdots=\ln 2$$

ناپرپکیدنه یا متمادیت **Stetigkeit**



(c) ketabton.com: The Digital Library

یو تابع f په ټکی a کې ناپرېکیدونکی یا متمادي دی، که د ټولو پرلپسیو (x_n) لپاره د د پولې a سره د تابع ارزښت $f(x_n)$ د $f(a)$ په لور کونورګنت وی یا هڅیږي:

$$x_n \to a \Longrightarrow f(x_n) \to f(a)\,,$$

د پوله ارزښت د تعریف له مخې هر $\varepsilon > 0$ ته یو δ_ε شتون ل ري د $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ سره د $|x - a| < \delta_\varepsilon\,,$ لپاره ، او سړی لیکي

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

.

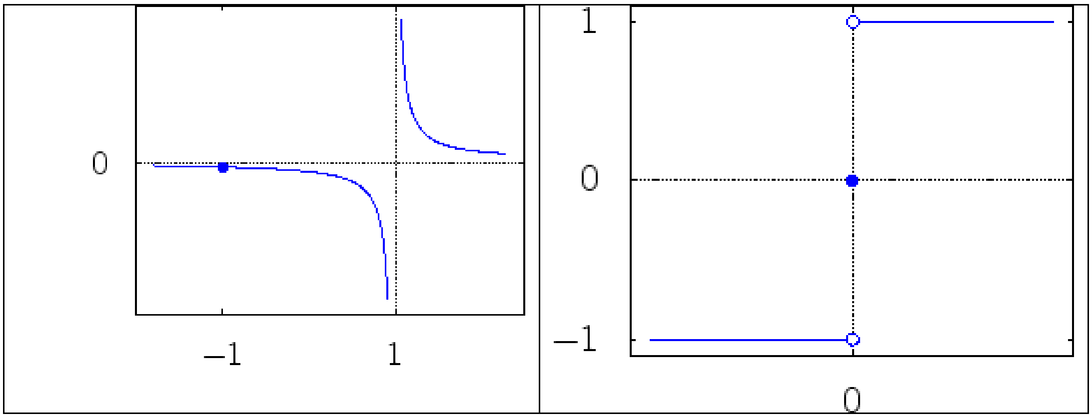
یو تابع په یوه انتروال D ناپرېکیدونکي ده، که دا د D په هر ټکي کې ناپرېکېدونکې وي.

دا په دې معناچې د f ګراف سره تړلی دی، تابع ګام یا ټوپ نه وهي او قطب نه لري (لنډ: نه پرې کیږي او نه ماتیږي).

بالاخره ناپرېکېدنه په دې معنا ده، چې ګراف بې له دې چې (پنسل پورته شي) پرې شي رسم کیږي.

$f(x) = \operatorname{sign}(x)$ فنکشن	$g(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library



پورته دواړه بیلګې د پرېکیدنې مختلف تیوپونه ښايي.

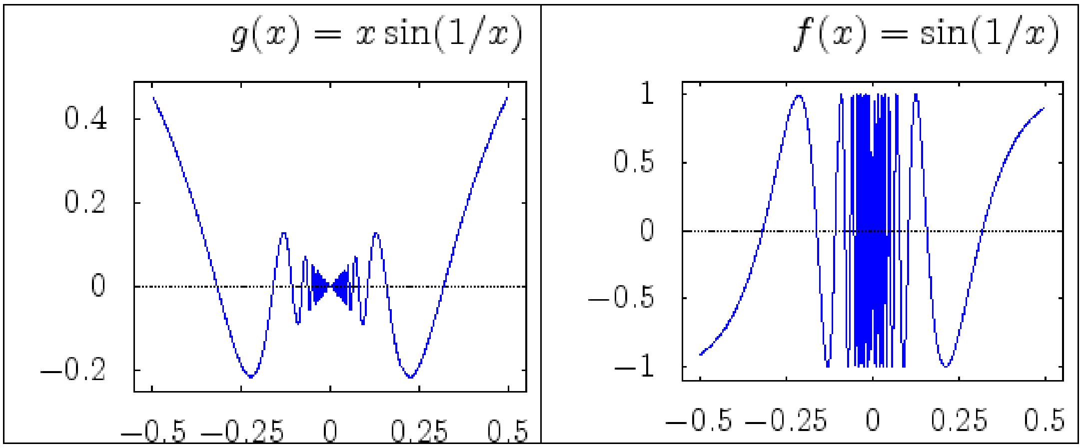
د سیګنوم تابع sign په صفرځای کې یو توپ وهي. په حقیقت کې د تابع ارزښت $\operatorname{sign}(0) = 0$ تعریف دی، مګر د $f(x)$ پوله ارزښت د $x \to 0$ لپاره شتون نه لري.

تابع په $x = \pm 1$ کې تعریفتشیا لري. د $x \to 1$ لپاره $|g(x)|$ د ∞ په لور هڅیږي، g هلته یو قطبځای لري. مګر سره له دې هم پوله ارزښت $\lim_{x \to -1} g(x)$ شتون لري. دا تړلی د کرښیز ضریب $(x+1)$ د لنډوني څخه کتل کیږي.

$$g(x) = \frac{1}{x-1}, \; x \neq -1 .$$

دا یوه له منځه وړونکې یا پورته کیدونکې تعریفتشیا ده. د تابع ارزښت $g(-1) = -\frac{1}{2}$ د تکمیلوني له لارې g په $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ باندې یو ناپرېکیدونکی تابع کیږي.

پای.



تابع (خيرې يې پورته دي)

$f(x) = \sin(1/x)$

په صفر 0کې پرېکيدونکې ده، ځکه چې د $x \to 0$ لپاره د -1 او 1 ترمنځ اوسخيلی کيږي.

برعکس ياپه ښت د تابع

$$g(x) = x\sin(1/x)$$

تعريفتشيا په $x = 0$ کې پورته کيدونکې يا له منځه وړونکې ده.

له

$$0 \le |x\sin(1/x)| \le |x|$$

د $\lim_{x\to 0}|x| = 0$ سره د پرتله کيدونکي قضيې په بنسټ لاس ته راځي

$$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0.$$

له دې امله کيدی شي د g

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g(0) = 0$

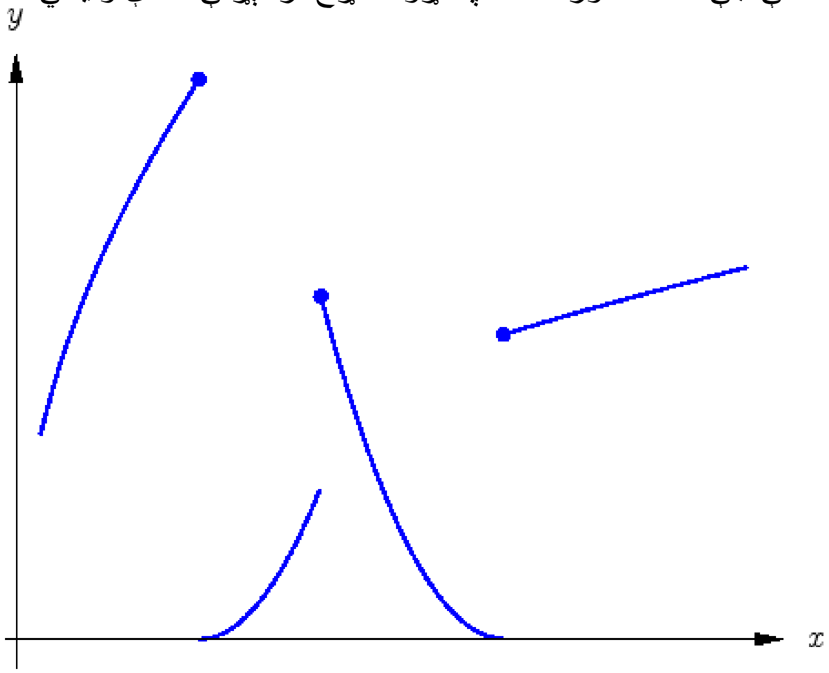
اینوونې له لارې یوه په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکیدونکي تابع ته پوره شي.

یو اړخیز ناپرېکیدنوالی یا متمادیت **Einseitige Stetigkeit**

ناپرېکدنوالي ته ورته سړی کېږي- همداسې ښی ناپرېکېدنوالی تعریفوي

$$\lim_{x\to a-} f(x) = f^-(a)\,, \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = f^+(a),$$

داسې چې د x محور د a په اړونده اړخ ترخېړنې لاندې ونیسي



که د f په یوه ټوټې‌ای تابع ارزښت تعیف وي، نو دا په ګراف کې پنډ په نخښه کېدی شي، چې روښانه شي چې د کېږ- یا ښي اړخ د پولې ارزښت سره سر خوري.

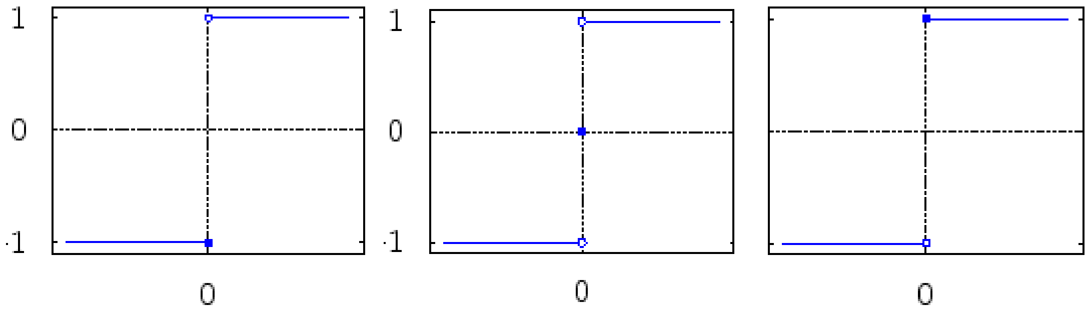
پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع

$$f(x) = x/|x|$$

په ټولو ټکو کې تر تعریفتشیا $x = 0$ پورې ناپرېکیدونکې ده.



که $f(0) = -1$ کېږدو نو تابع به کيڼ اړخيزه او د $f(0) = 1$ سره ښی اړخيزه ناپرېکېدونکې په 0 کې مخ ته لاړه شي. د $f(0) = 0$ لپاره د سيګنوم-تابع

$$f(x) = \mathrm{sign}(x),$$

لاس ته راځي، چې دا په 0 کې نه ښی – او نه کينه ناپرېکېدونکی دی.

د ناپرېکيدونکو توابعو لپاره لارې يا قاعدې

په يوه ټکي a کې ناپرېکېدونکې توابعو f او g لپاره

$rf \quad (r \in \mathbb{R})$

$f \pm g$

fg

f/g (که $g(a) \neq 0$ وي)

$f \circ g$

په a کې ناپرېکيدونکې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته وګه په یوه انټروال D ناپرېکېدونکې تابع همداسي د کيڼ – اوښي اړخيز ناپرېکېدنوالي ځايونو لپاره باور لري.
پای.

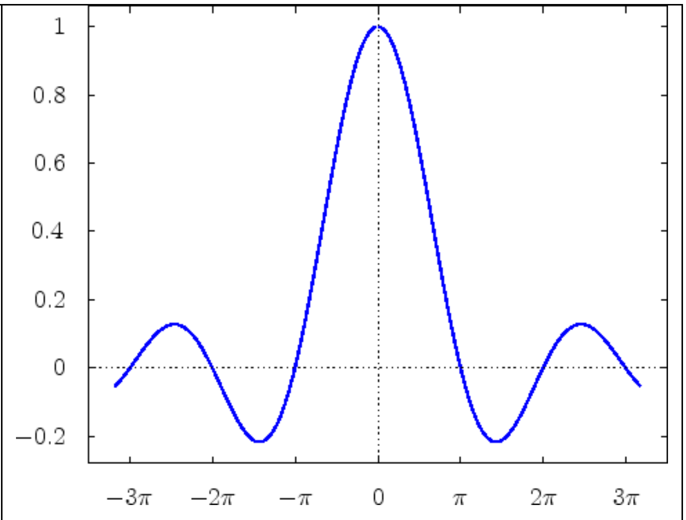
دا لار د پوله ارزښت لپاره اړونده وينا ښخه ترلي لاس ته راځي.
که دبېلګي په ت وګه د ناپرېکېدونکو توابعو کمپوزېشن(ترکيب) تر څېړني ونيسو، د g د ناپرېکېدنوالي ښخه د هرې پرلپسي (x_n) لپاره د پوله ارزښت a سره دا راکوي

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a).$$

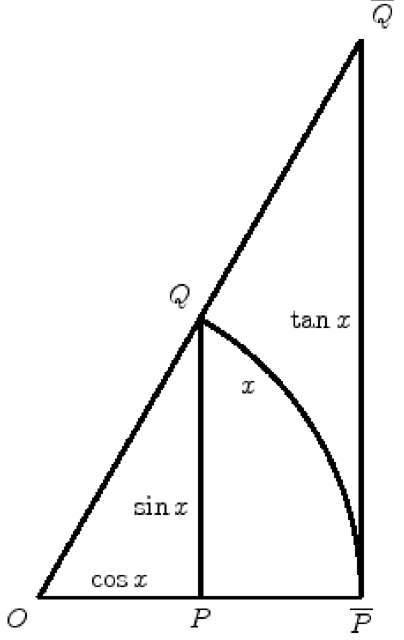
دا چې f هم ناپرېکېدونکی دی، لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(g(a)).$$

پاي.

داسي په نامه sinc - تابع. $f(x) = \operatorname{sinc} x = \dfrac{\sin x}{x}$ د مخ ته بيولو يا دوام $f(0) = 1$ سره په $\mathbb{R}$ باندې ناپېکېدونکي ده. ښوونه يې د ترېګونومتريک توابعو په تخمين پورې اړه لري.	

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ردېګوډي $\Delta(OPQ)$ ، د ګردۍ ټوټه ووني یا $\Delta(O\overline{P}\overline{Q})$ وتر او درېګوډي د سطحو د پرتلې له لارې په څېره کې کتل کیږي، چې

$$\frac{\sin x \cos x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$$

همداسې

$$\frac{1}{\cos x} \geq \operatorname{sinc} x \geq \cos x,$$

د $\sin x/2$ سره وېشني له لارې او د معکوس $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ ارزښت جوړونه. د د پرتلې قضیې څخه لاس ته راځي.

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sinc} x = 1.$$

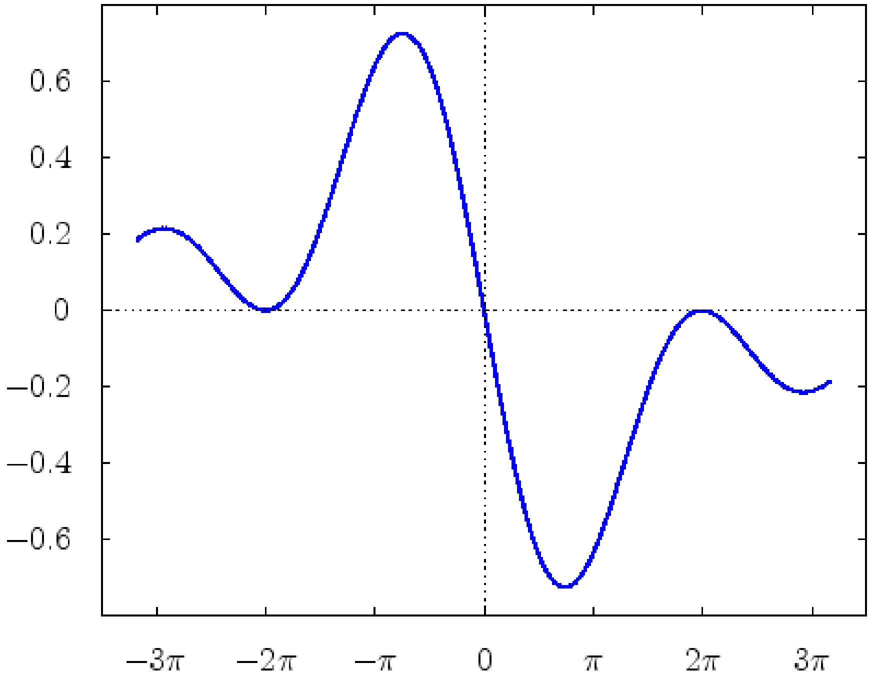
ليکونکي: اپپ، هیولیک

تابع

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$$

د مخ ته وړني $f(0) = 0$ سره په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکیدونکي ده

(c) ketabton.com: The Digital Library



باور لري

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x + 1}\sin x,$$

او له

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0}\sin x = 0$$

لاس ته راځي

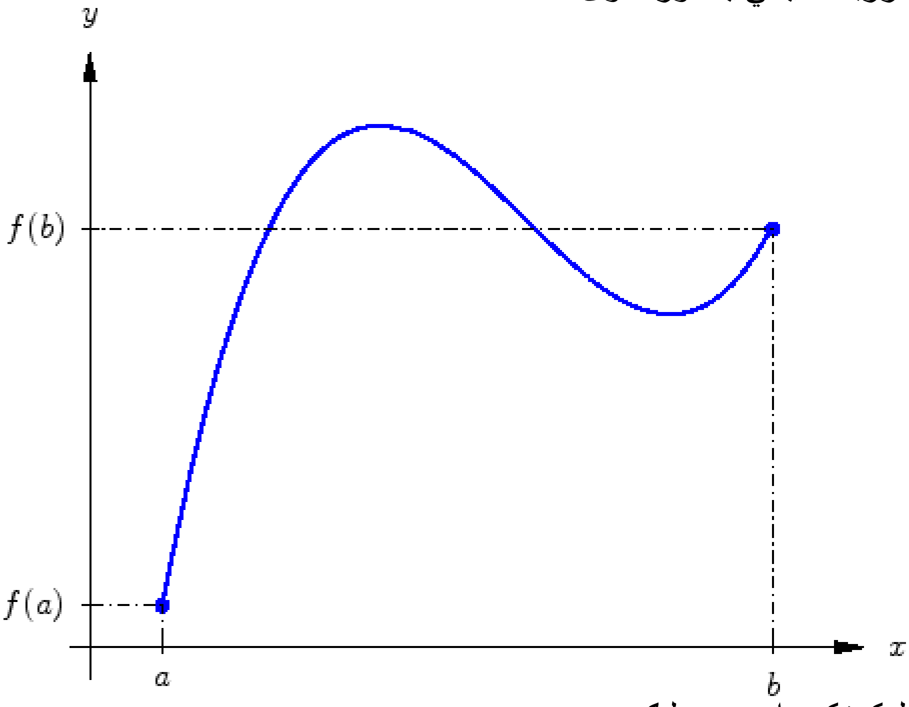
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځ ارزښت جمله **Zwischenwertsatz**

یو ناپرېکېدونی تابع f په یوه بندانتروال $[a, b]$ د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ هر ارزښت نیسي یا غوره کوی.



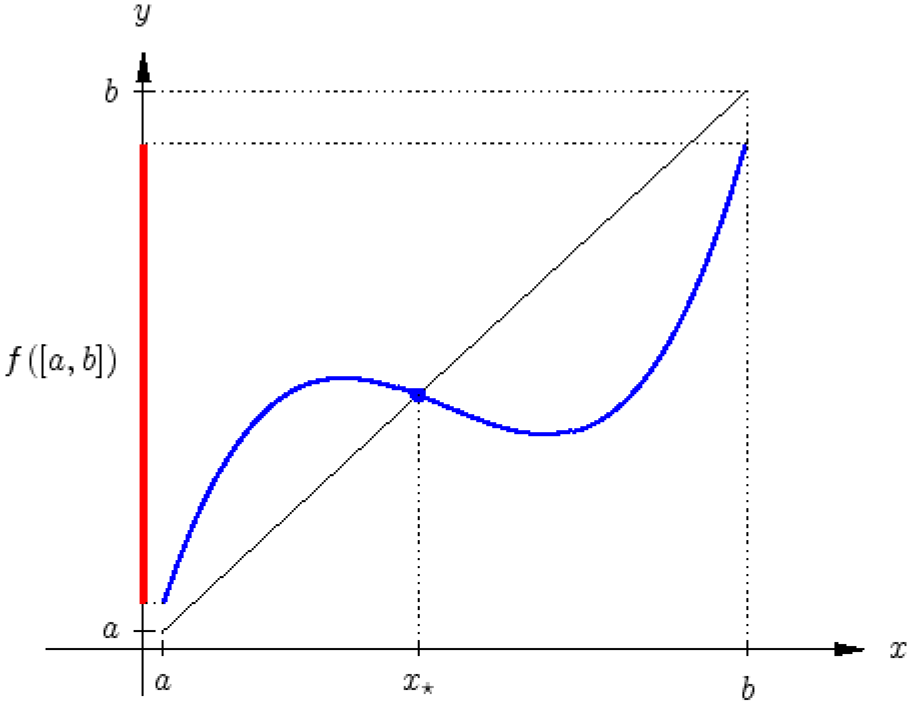
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

که یو تابع f انتروال $[a, b]$ په انتروال $[a, b]$ ناپرېکېدونکی تنظیم کړي، نو یو $x_\star$ شتون لري د

$$x_\star = f(x_\star).$$

سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ناپرېکیدونکې تابع

$$g(x) = f(x) - x$$

لپاره $g(a) \geq 0$ او $g(b) \leq 0$ باور لري. د منځ ارزښت جملې سره د یوه صفرځای $x_\star \in [a,b]$ شتون لاس ته راځي:

د نتپرېکیدونکو توابعو لپاره

$$g(x) = f(x) - x$$

$$g(x_\star) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x_\star) = x_\star$$

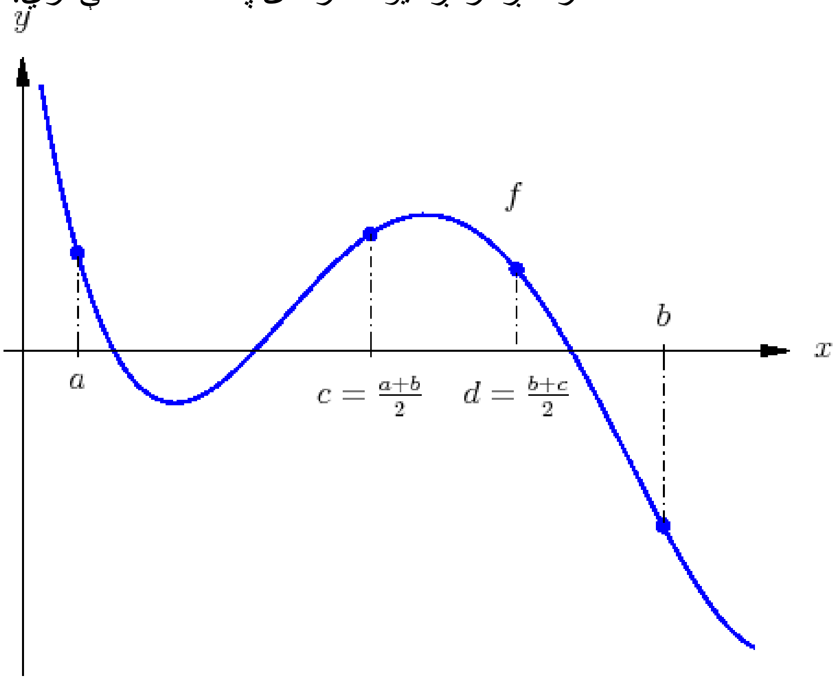
دا په دې معناچې د f یو ځاي په ځای - یا بیکس تکی $x_\star$.

لیکونکي: هیولیګ، کراخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه سطحو – یا برخو تلنلار **Bisektionsverfahren**

د منځ ارزښت جملې په بنسټ یو ناپرېکیدونکی تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ د $f(a)f(b)\leq 0$ سره لږ تر لږه یو صفرځای په $[a,b]$ کې لري.



که دا انتروال نیم شي او f ته د انتروال په ځنځ کې ارزښت ورکړي

$$c=\frac{a+b}{2},$$

نو کیدی شي د مخنښې په مرسته پرېکړه وشي، چې د کوم انتروال په نیمايي کې باید صفرځای پروت وي:

$f(a)f(c)\leq 0$ لاسته راځي ، چې په $[a,c]$, کې صفرځای شتون لري

$f(a)f(c)\geq 0$: لاس ته راځي صفرځاب په $[c,b]$. کې شتون لري

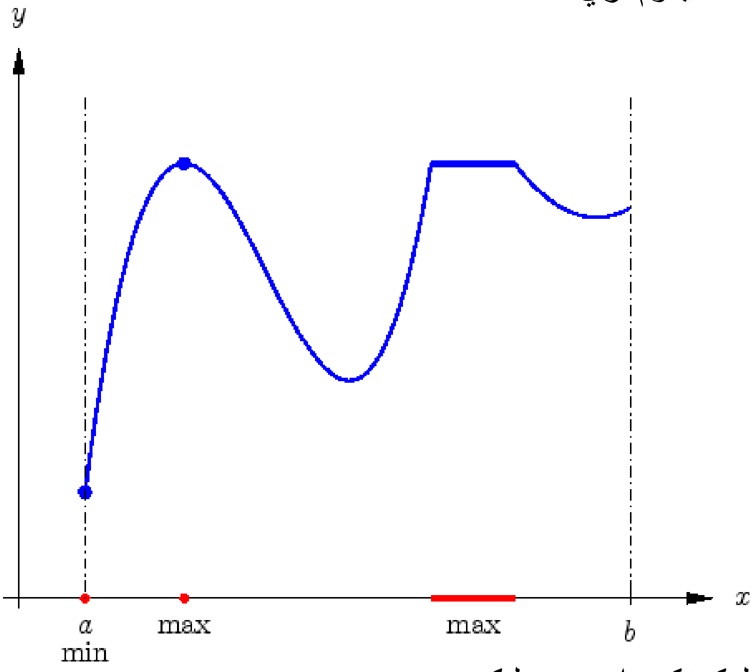
سړی اوس دا اړونده برخه انتروال ټاکي او دااېتریر iteriert (ټیک حل ته ور نږدې کونه) کوي، تر څو د انتروال اوږدوالی غوښتوني ټیکوالي ته ورسيږي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ، پفایل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناپرېکیدونکي تابع افرطیت **Extrema stetiger Funktionen**

یو ناپرېکیدونکی تابع په یوه پای رابند انتروال $[a,b]$ لږ تر لږه یو مینیموم او یو ماکسیموم لري.



ليکونکي: اپپ، هیولیک

یو $c > 0$ شتون لري د
$$(x+y)^n \leq c(x^n+y^n)$$
سره د $x,y \geq 0$ لپاره

د ښووني ته د $x \neq 0$ لپاره (حالت $x = 0$ ساده دی) لیکو

$$z = y/x$$

او ناپرېکیدونکی تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n}.$$

ځیرو.

دا چې $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$ دی، نو یو $b > 0$ شتون لري، داسې چې $f(z) \leq 2$ د $z \geq b$ لپاره باوري کوي. د

$$c = \max\left\{2, \max_{z\in[0,b]} f(z)\right\}$$

سره لاس ته راځي

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n} \leq c$$

او له دې سره پورته غوښتنه

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

برابرډوله ناپرېکیدنوالی Gleichmäßige Stetigkeit

یو تابع f په یوه انتروال D برابرډوله یا برابرارزښته ناپرېکېدونکی دی ، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو δ_ε شتون ولري ، دا سې چې راکړي

$$|x-a| < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow \ |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

د ټولو $x, a \in D$ لپاره.

د f د تنها ناپرېکېدنې په برعکس δ_ε د a په واک کې نه ده. تنهاپه یوه محدود رابند انتروال کې ناپرېکېدنوال کی او برابرارزښته یا – ډوله ناپرېکېدنوالی سره ورته دی.

لیکونکي: هیولیګ، پفایل

په ټکي ډول پولې ته تلنه Punktweise Konvergenz

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توابعو (f_n) یوه پرلپسي په یوه انتروال D ټکي ډوله د پولي تابع f په لور پولي ته ځي.

$$f_n \underset{\text{pktw.}}{\to} f,$$

که $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ وي د ټولو $x \in D$ لپاره.

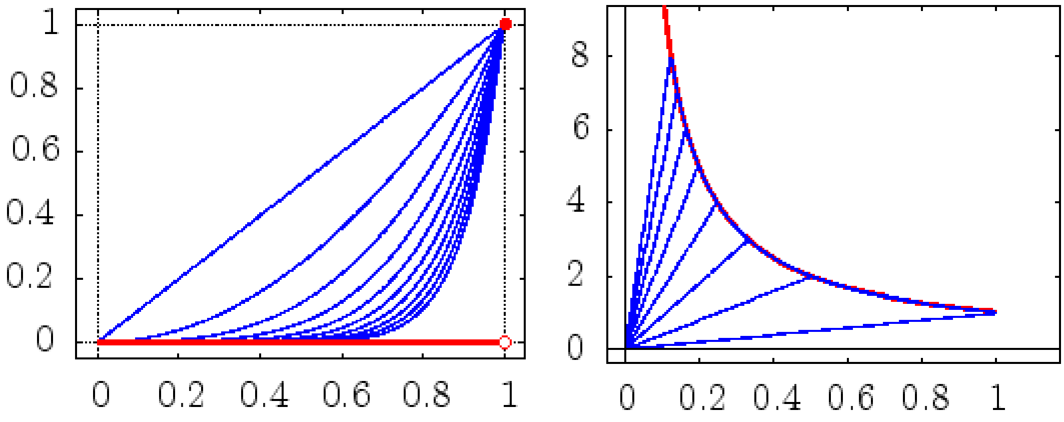
لیکونکي: اپپ، هیولیک

په ټکیډوله پولي ته تلني باید نه دی چي ناپرېکېدنوال او بندوالی ساتلي پاتې شي.

د بېېلګي په توګه د $f_n(x) = x^n$ ټکي ډوله پوله ارزښت په $[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

په بني انتروال پای پرېکېدونکی دی، لکه په کینه څېره کي چي ښوول شوی دی.



د یو کونورګنت لپاره بېلګه چي د نامحدود پوله تابع په لور ښی څېره د پرلپسي سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & 0 < x \le 1/n \\ 1/x, & 1/n < x \end{cases},$$

ښايي ، چې په $(0,1)$ ټکي ډوله د پوله تابع $f(x) = 1/x$ په لور پولې ته ځي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

برابرارزښته يا برابرډوله پولې ته تلنه **Gleichmäßige Konvergenz**

د توابعو يوه پرلپسي (f_n) په يوه انتروال D برابرډوله د يوه پولې تابع f په لور پولې ته ځي،

$$f_n \underset{\text{glm.}}{\longrightarrow} f,$$

که هر $\varepsilon > 0$ ته يو n_ε شتون ولرى، داسې چې

$$n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري.
د کوشي –قضيې په مرسته کېدى شي برابرډوله پولې ته تلنه بې د پولېتابع نسبت څخه تعريف شي. سرى ورته شرطونه لاس ته راوړي، داسې چې

$$m, n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره بايد باور ولري.

که توابع f_n ناپرېکېدونکي وي، نو پوله تابع f هم ده.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د درېګوډي نامساواتو څخه لرو

$$|f(x_0) - f(x)|$$

$$\le |f(x_0) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)|$$

$$\le |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د په خوښه $\varepsilon > 0$ ته د برابرډوله کونورګنت له امله يو n_ε شتون لري، داسې چې د $n > n_\varepsilon$ لپاره

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall\, y \in D$$

باوري کوي. د يوه داسې n لپاره اخرنی او لومړنی ترم $< \varepsilon$ دي، که $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ وي. دا له $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$ لاس ته راځي او له دې سره $f(x) \to f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د توابعو لړۍ پولې ته تلنه Konvergenz von Funktionenreihen

يوه د توابعو f_k لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ټکي ډوله (برابرډوله) پولې ته تلونکې ده، که دا د $s_n = \sum_{k \le n} f_k$ لاندې ټوټه جمعې يا زياتون لپاره دا حالت ولري.

يوه کلکونه يې مطلق پولې ته تلنه ده، چې د هغې سرره د $\sum_n |f_n|$ د برابرډوله پولې ته تلنې لپاره غوښتل کيږي. په دې حالت کې پولې ته تلنه د لړۍ يوه نظم بدلون لپاره هم ساتلی پاتيږي.

د تعريف سره سم دا وينا وې په تابع پرلپسيوو هم د باور وړ دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په لاندې کې د يو څو تيوپيکي بيلګو حالتونه ښولکيږي

(i) د توابعو لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(1-x)^k = x\left[1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $[0,1]$ تکې ډوله پولې ته ځي. د هندسي لړی لپاره فرمولپه مرسته پوله تابع لاس ته راځي

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

دا چې په $x = 0$ کې پرېکېدونکی دی، کېدی شي لړی برابرډوله کونورګنت نه وي.

(ii) د $x \in [0,1]$ لپاره لړی

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \pm \cdots$$

د لايبنيځ –پولې ته تلنې له امله ($\frac{x^k}{k}$ همغږيز صفر پرلپسې ده). دا چې د لړی پاتې د لايبنيځ پسې د

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-x)^k}{k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}\right| \le \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \le \frac{1}{n+1}$$

له لارې اټکل کېدی شي، لړی په $[0,1]$ حتی برابرډوله پولې ته ځي. مګر سره له دې په $[0,1]$ باندې مطلق پولې ته نه ځي، ځکه چې $\sum(1/k)$ ديورګنت ده.

(iii) لړی

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $[-1,1]$ باندې مطلق پولې ته ځي، ځکه چې

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right|-\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{x^k}{k^2}\right|=\sum_{k=n+1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

باور لري، او

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

پولې ته ځي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

توابعو لړۍ ته مایورانت یا پورته پولې
Majorante bei Funktionenreihen

د پوره لوی n لپاره باور لري

$$|f_n(x)|\leq ca_n\,,\quad x\in D\,,$$

اوکه لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ پولې ته ځي، بیا نو لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n$$

مطلق پولې ته تلونکې ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

وینا تړلې د اعدادو لړۍ لپاره د مایورانت له جملې لاس ته راځي، ځکه چې د ټولو $x\in D$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)| - \sum_{k=1}^{m}|f_k(x)| \leq c \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د یوه ضرب د پوله ارزښت په حیث انځور شي:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n \;, x \in \mathbb{R},$$

په هر انتروال $[-a,a]$ د برابرېوله پولې ته تګ سره.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

لومړی به د

$$f_n(x) = (1+x/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{x}{n} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{x^n}{n^n}\,.$$

برابرېوله پولې ته تلنه و ښوول شي. دې ته سړی ترې کار اخلي یا استعمالوي، چې

(i)

$a^k/k! \to 0$ د په خوښه $a \geq 0$ لپاره؛

(ii)

$p_{n,j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}$ د هر $j \in \mathbb{N}$ لپاره یو مونوتون جګېدونکې د 1

په لور تلونکې پرلپسې ده.

د دې لپاره چې د کوشي فرمول استعمال کړو، سړی کمښت یا تفریق

$f_m(x) - f_n(x)$ په لاندې بڼه لیکي

$$\sum_{j=0}^{k-1}(p_{m,j}-p_{n,j})\frac{x^j}{j!} + \sum_{j=k}^{m} p_{m,j}\frac{x^j}{j!} - \sum_{j=k}^{n} p_{n,j}\frac{x^j}{j!}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k<n<m$ سره .

د $|x|\le a$ لپاره د $a\ge 1$ او $k\ge 2a$ سره د اخرنیو زیاتېدونو ارزښت هر ځل

$$\le \frac{a^k}{k!}\underbrace{\left(1+\frac{a}{k+1}+\frac{a^2}{(k+1)(k+2)}+\cdots\right)}_{\le 2},$$

$< \varepsilon/3$ دی، نو د(i) پسې د یوه پوره لوي ټاکلې k لپاره.

د (ii) پسې یا له مخې دی

$$|p_{m,j}-p_{n,j}|<\frac{\varepsilon/3}{ka^k}$$

د $m,n>N_j(\varepsilon)$ لپاره، اوله دې سره کیدی شي د لومړنۍ جمعې هره زیاتېدونې د $f_m(x)-f_n(x)$ په توته کیدو د $\frac{\varepsilon/3}{k}$ له لارې اټکل کړي. په ټولیزه توګه لرو

$$|f_m(x)-f_n(x)|<k\frac{\varepsilon/3}{k}+2\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\quad m,n>\max_{j<k}N_j(\varepsilon)\,.$$

د

برابرډوله پولې ته تلنې په بنسټ په هر انتروال $[-a,a]$ باندې د پولې تابع $f=\lim_{n\to\infty}f_n$ ناپرېکېدونکې ده. بسیا کوي، چې $f(x)=e^x$ د راشنل پروت محور $x=p/q$ لپاره وښایو. د یوې برخه پرلپسې $n=mp$ په راوړنې سره د e د تعریف څخه لاس ته راځي

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{x}{mp}\right)^{mp}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{p}{mpq}\right)^{mpq/q}=e^{p/q}$$

د $t\longmapsto t^{p/q}$ ناپرېکېدنې له امله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشال تابع لړۍ انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د يوې لړی د پولع ارزښت په تګه انځور شي:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \ , x \in \mathbb{R},$$

د هر انټروال $[-a,a]$ برابرډوله پولې ته تلنې سره.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

اوس د ضرب انځورونې ته ورته والی ښولکيږي:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

دا ترلی د تیلور-لړۍ په څېر د جمعې د روښانه ونې څخه لاس ته راځي. د $x > 0$ لپاره دا لاندې سيده ښوونه ستونځمنه ده، سره له دې بې له مشتق منځ راوځي.

د $\lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n$ سړی پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{x}{n}\right)^j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{x^j}{j!} \underbrace{\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-j+1)}{n\cdot n\cdots n}}_{\le 1} \right)$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي او د

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{x^j}{j!} \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-j+1)}{n\cdot n\cdots n} \right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\geq \sum_{j=0}^{m}\left(\frac{x^j}{j!}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{j-1}(1-k/n)\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{m}\frac{x^j}{j!}$$

د یوه په خوښه $m \in \mathbb{N}$ کښته لور ته اټکل کوي. د $m \to \infty$ لپاره د پوله ارزښت جوړولو څخه وروسته د دواړو آټکلونو یو بل سره برابروالی لاس ته راځي.

یوه ورته دلیل راوړنه د $x < 0$ لپاره همم شوني ده، که سړی مثبت او منفي برخه په دې منځ ته راغلې جمعه کې ځانله یا جداوڅیړي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

اکسپوننشا تابع د ډېرې بیلوژیکي ودې پروسې تر څیړنې لاندې نیسي. د بیلګې په توګه په یو ساده د د قومونو ودې مودل کې د زېږېدنې ګڼون یا تعداد متناسب دی د د ورځنې اوسیدونکو تعداد $p(t)$ سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې

$$p(t+\Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t)) \,.$$

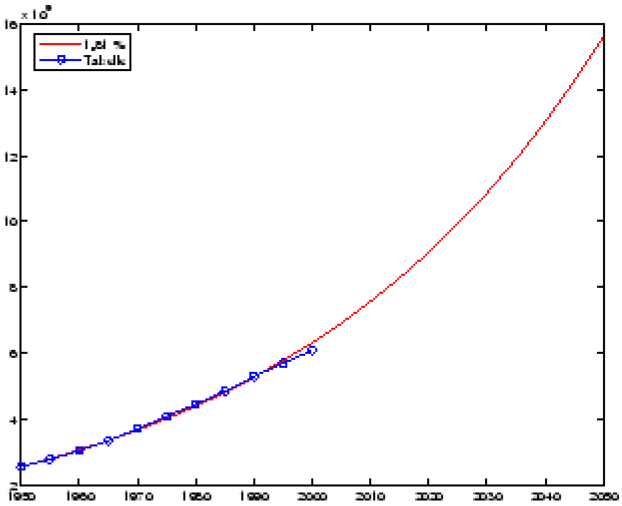
د $\Delta t \to 0$ لپاه دا د ودې قانون

$$p(t) = ce^{\lambda t} \;, \qquad c = p(0) \;,$$

له لارې مودلي کیږي.

کال	د نفوسو تعداد په میلیونو	ونډه
	2555	
1950	2779	1.76 %
1955	3039	1.87 %
1960	3345	2.02 %
1965	3707	2.16 %
1970	4088	1.80 %
1975	4456	1.80 %
1980	485	1.79 %
1985	5283	1.77 %
1990	5690	1.54 %
1995	6080	1.37 %
2000		1.25 %

(c) ketabton.com: The Digital Library



(کينړ) جدول د نړی اوسېدونکي $p(t)$ ښايي همداسي کلنی د ودې تعداد(اټکل شوی ارزښت). کلنی منځنۍ د ودې زياتون (ريټ) په کلونو 1950-2000کې % 1.81 وو. له 1950 کال څخه به د ثابت منځني اکسپوننشل ودې سره

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

به د نړی اوسېدونکي په کال 2050 کې 16 ميليارده وګنل شي(ټکي په ټکي شوې کرہ يا منحني).

ليکونکي: هيوليګ، هيوررنر

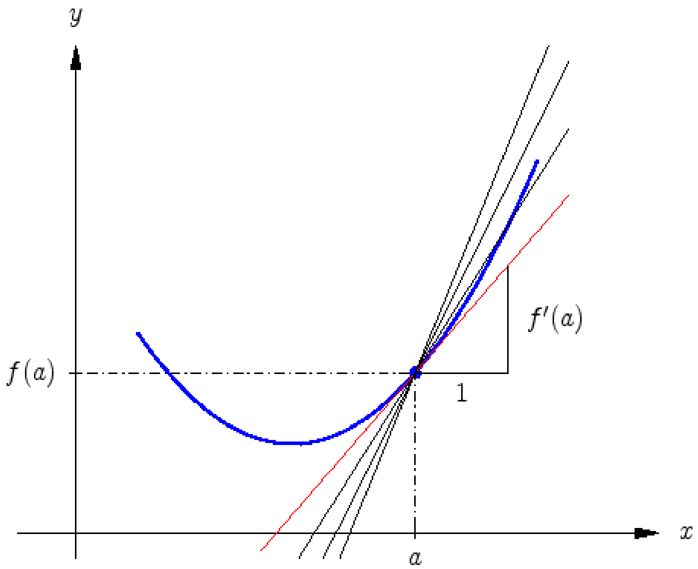
مشتق(رابيليدنه) Ableitung

يو تابع f په ټکي a کې مشتقوړ يا رابېلېدوړ دی، که د مشتق په نوم نومول شوې پوله ارزښت

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري..

(c) ketabton.com: The Digital Library



مشتقوړوالی یا رابیلیدوړوالی هندسي په دې معنا دی، چې د ټوټه ونې یا سیکانت جګوالی له

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

څخه د ورکړشوي تانجنت جګوالي په لور وهڅيږي یا کونورګنت شي(پوله يې ونیول شي).

سرې داسې هم لیکي:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{dy}{dx}$$

د $y = f(x)$ سره . دا لیکدود یا ه-دول په کمبنت وېش کي $\Delta x \to 0$ پولي ته تګ ښايي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جګ مشتقونه د $f'', f''', \ldots$ همداسې $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$ سره په نخښه کيږي.

يو تابع f په يوه ډېرۍ يا سټ D باندې مشتقوړ بلل کيږي، که $f'(x)$ د ټول $x \in D$ لپاره شتون ولري.

د تابع $f(x) = x^2$ د مشتق لپاره د تعريف سره سم لرو:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x\,.$$

دويم مشتق $f''(x) = 2$ ثابت دی.

په ټوليزه توګه يو د خوښې مونوم , $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ لپاره د بينوم فرمول په مرسته لرو

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1} h + O(h^2)}{h} = n x^{n-1}\,,$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم h^2 ترمونه په نخښه کوي.

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د زياتون – يا جمعې قضيې په مرسته وشمېرل شي له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

څخه د کمښت وېش لپاره د $t = x + h/2$ سره راکوي

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\left((x+h/2)+h/2\right) - \sin\left((x+h/2)-h/2\right)}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}.$$

د

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

له امله د $h \to 0$ لپاره ښی اړخ د $\cos x$ په لور هڅيږي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د بنسټتوابعو مشتق یا رابیلیدنه

لاندې جدول د غوره بنسټتوابعو مشتق ښايي:

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		x^r, $r \neq 0$	$r\,x^{r-1}$
e^x	e^x		$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\cot x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د مشتق یارابیلیدنې کربنزوالی **Linearität der Ableitung**

مشتق کربنیز دی، دا په دې معناچې د مشتقوړ توابعو f او g لپاره باور لري

$$(rf)' = rf', \quad r \in \mathbb{R},$$
$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ضرب قانون **Produktregel**

د دوه مشتقوړ توابعو f او g د ضرب مشتق دی

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

په ټولیزه توګه د ضرب $f = f_1 \cdots f_n$ لپاره باور لري

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i}.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د تعریف څخه تړلی راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د پولینوم

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

مشتق د $x = 1,2,3$ په ځایونو کې ټاکل کیږي. دا چې د هر کرښیز ــضریب مشتق 1 دی، د ضرب له لارې یا قاعدې څخه لرو

$$p'(1) = (1-2)(1-3) = 2,$$

$$p'(2) = (2-1)(2-3) = -1,$$

$$p'(3) = (3-1)(3-2) = 2.$$

په ورته توګه سړی د

$$p(x) = (x-1)\cdots(x-n),$$

لپاره شایي، چې

$$p'(k) = (-1)^{n-k}(n-k)!\,(k-1)!$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی د $k = 1, \ldots, n$ لپاره.
(Autoren: Höllig/Hörner/Knesch)

د وېش قانون یا لار Quotientenregel

د دوه مشتقوړ توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړې توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

د راشنل توابعو مشتق دی

$$\frac{(1-2x)'(4+3x^2) - (1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4+3x^2)^2}$$

په بدیلي ډول د ضرب قانون سره لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' =$$

$$= (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}\,.$$

(Autoren: Höllig/Kreitz

ځنځیری لار یا - قانون **Kettenregel**

د توابعو د ځنځیروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$$

لپاره مشتق دی

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

.

د $f(y) = z,\ g(x) = y,\ h(x) = z$ سره سړی لیکي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د تعریف څخه ترلی لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\begin{aligned}(f(g(x)))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= \lim_{\tilde{h}\to 0}\frac{f(g(x)+\tilde{h}))-f(g(x))}{\tilde{h}}\,\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(g(x))g'(x),\end{aligned}$$

چیرته چې $\tilde{h} = g(x+h) - g(x)$ دی.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ځنځيري قانو د روښنه کولو ته تعریفیږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy} s\, h(x) = \sin\big(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\big)\; x^2))g'(x)\,.$$

د دنتني مشتق $g'(x)$ شمېرلو ته د سره د ځنځیر قانون کارول کيږي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

په بدیلي توګه کېدی شي د مشتق لیکدود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \cos(y)\frac{1}{w}2x = \cos\left(\ln(1+x^2)\right)\frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

ایمپلیڅیت مشتق نیول Implizites Differenzieren

که یو تابع $y = f(x)$ ایمپلیڅیت وي، دا په دې معناچې یو برابرون په x او y کې ورکړ شوی، داسې چې دواړه خواوي د x پسې مشتق کېدی شي. دلته یواځې په $y = y(x)$ کې افادو باندې ځنځیري قانون استعمالیږي.

د بېلګې په توګه سړی د

$$E:\ x^2 + 3y^2 = 7$$

له لارې ورکړ شوې ایلیپسې یا هګۍ

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

همداسې

$$y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$$

.

لاس ته راوړي.

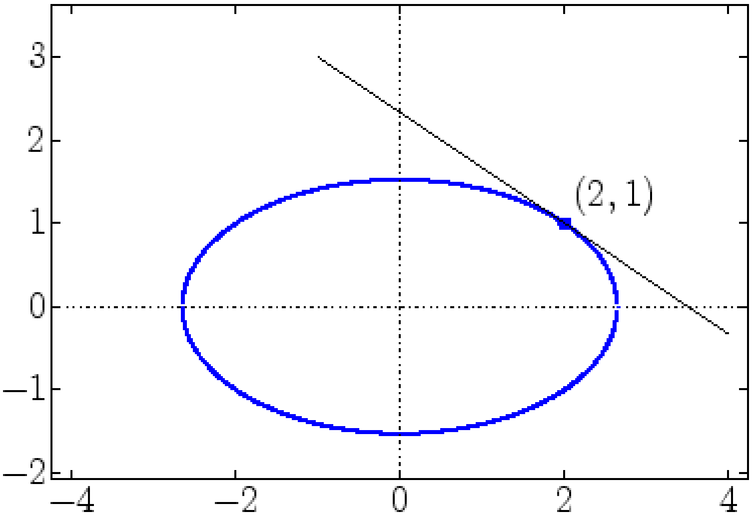
له دې سره کېدی شي د E په یوه ټکي د $y \neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي.

د بېلګې په توګه د $(2,1)$ لپاره په لاس راځي

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه جګ مشققونه شمېرل کیږي. د yy' لپاره دضرب قانون د استعمال سره دی

$$\frac{d}{dx}(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

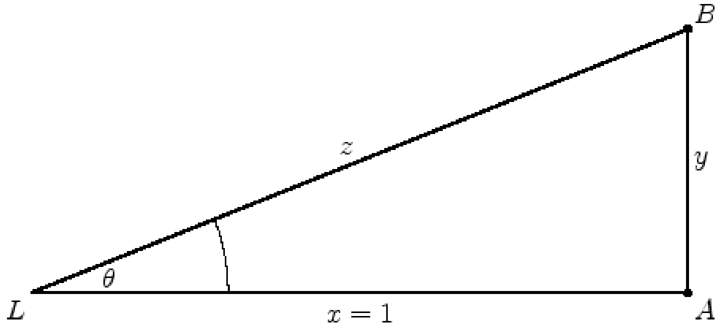
$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

.

کیدی شي په E باندې د یوه ټکي ځا په ځای کول او همدا د $y'(x)$ ارزښتونو پیژندلو له لارې ځرګند ازښتونه ټاکي
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

په ټکي L کې یو د برېښنا یا رڼا برج دی د یوه ځرخېدونکي بېجلۍ یا ګروپ سره، چې د رڼا وړانګه یې د ټکو A او B له لارې تللی 1 km کربنيز لرې دښته لویږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



وړانګه غورځونکی د یوه څرخون لپاره 2 ثانیو ته اړتیا لري، دا په دې معنا چې

$$\frac{d\theta}{dt} = \pi$$

. د رڼاوړانکې پوزيشن يا ځای په دښته کې دی

$$y(t) = x \tan\theta(t).$$

له دې سره د چټکتيا لپاره لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dt} = 1\pi \frac{1}{\cos^2(\theta)} \longrightarrow \infty \quad \text{für} \quad \theta \to \frac{\pi}{2},$$

دا په دې معنا چې سوری يې له رڼا چټک دی.

يو ټيکه معالعه لاندې راکوي. د دې وخت توپير په پام کېنيولو له امله رڼا B ته د په وخت $t = \frac{\theta}{\pi} + \frac{z}{c}$ ورسيږي، دکوم سره چې $c = 300000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ د رڼا چټکتيا ده،

له دې سره لرو

$$\frac{\theta'}{\pi} = 1 - \frac{z'}{c}.$$

وروسته د t پسې د $z^2 = y^2 + 1$ مشتق راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$zz' = yy', \qquad \frac{z'}{y'} = \frac{y}{z} = \sin(\theta).$$

د θ' او z' اېښوونه په

$$y' = \frac{\theta'}{\cos^2(\theta)}$$

کې بالاخره راکوي

$$y' = \frac{1}{\cos^2(\theta)}\left(\pi - \frac{\pi}{c}y'\sin\theta\right)$$

همداسې

$$y' = \frac{c \cdot 1\pi}{c\,\cos^2(\theta) + 1\pi\sin(\theta)}$$

.

د $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ لپاره اوس $y' \longrightarrow c$ هڅېږي، د اینشټاین د تیوري سره په هم غږۍ
کې باور لري

t

$$y' \longrightarrow \infty \qquad \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} \rightarrow -\frac{c}{\pi},$$

für

$$\theta \approx 4.781 \in \left(\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

داپه دې معناچې د لپاره بېرته سړی یوو خورا لویه چټکتیا
لاس ته راوړي. سوری له دې امله د رڼا ګړندی دی. دا د اینشټاین تیوري سره په تضاد
کې نه دی، ځکه چې سړی یو ه پیښنه ,Phänomen ګوري، نا دا خورنده ماده. د ،،ساده
$300000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$
څېړونکي،، لپاره بو نا ښه احساس پاتیږي دا په هر صورت له څخه
ورو خوزي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لايبنيځ قاعده يا لار **Leibniz-Regel**

د يوه ضرب n -م مشتق دی

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

.

(Autoren: Höllig/Kopf)

د   په حالت کې باور لري

$$(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''$$

او د لپاره دی

$$(fg)''' = (f'g + fg')'' = (f''g + 2f'g' + fg'')' =$$

$$= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

ټوليزه ښوونه د اندکشن له لارې صورت په n نيسي د بينوميال ضريبونو لپاره د ريکورزين په پام کې نيولو سره.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د $x = 0$ په ځا کې دې د

$$f(x)\, g(x) = x^9 \cos(\sin x)$$

يولسم مشتق وشمېرل شي.

د دې لپاره لومړی له دې څخه کار اخلو، چې د $x = 0$ لپاره د مونوم f فقط 9 -م مشتق د صفر سره نابرابر دی:

$$f^{(9)}(0) = 9!\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لایبنیخ- فرمول له دې سره فقط په یوه ترم راکمه وي.

$$(fg)^{(11)}\,|_{x=0} = \binom{11}{2}\, f^{(9)}(0)\, g^{(2)}(0)\,.$$

د ځنځیري قانون سره لرو یا لاس ته اځي

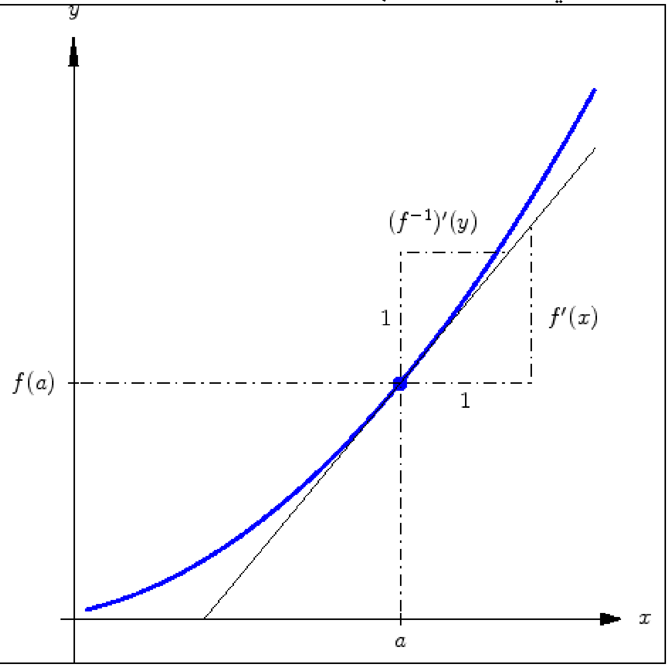
$$g'(x) = -\sin(\sin x)\,\cos x$$

$$g''(x) = -\cos(\sin x)\cos^2 x + \sin(\sin x)\sin x,$$

یعني $g''(0) = -1$. له دې سره غوښتونی مشتق دا لاندې دی

$$\binom{11}{2}\, 9!\,(-1) = -\frac{1}{2}\,(11!)\,.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف



که یو تابع $y = f(x)$ د $f'(x) \neq 0$ سره f ناپرېکېدونکي مشتقوړ وي، نو د x په یوه چاپېریال کې معکوس وړ دی ، او باور لري $(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1},$ همداسي $dx/dy = (dy/dx)^{-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه په څېره کې چې ليدل کيږي، د f او f^{-1} ځګوالي معکوس دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

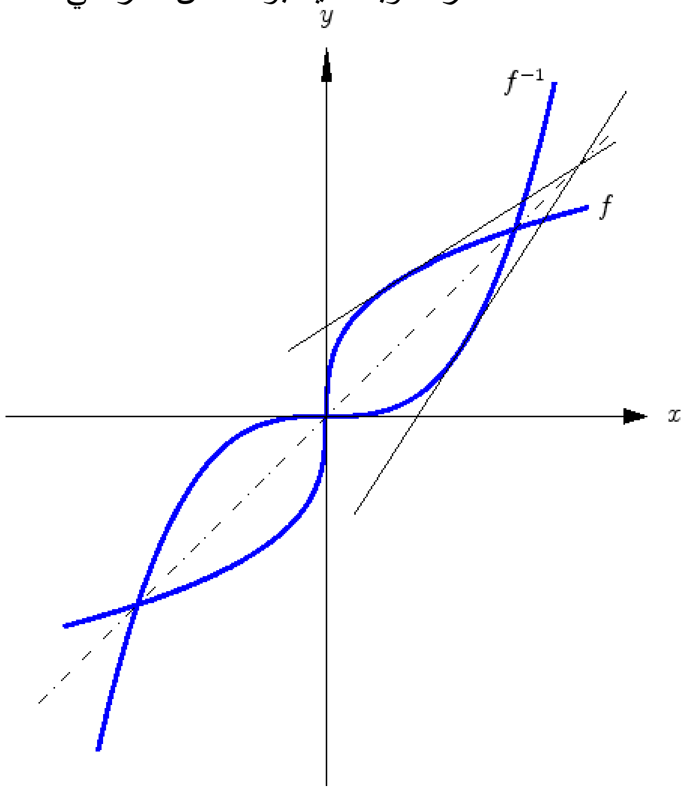
که کيږدو $g = f^{-1}$ ، نو لاس ته راوړو

$$x = g(f(x))$$

او د ځنځيري قانون سره مشتقونه

$$1 = g'(f(x))f'(x) .$$

د $y = f(x)$ سره غوښتنه يا ثبوت لاس ته راځي



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د f او f^{-1} جګوالی په اړونده د x او y په ځایونو کې سره معکوس دي، روښانیږي، که په پام کې ونیول شي، چې f او f^{-1} یو بل ته سیومتریک دي.

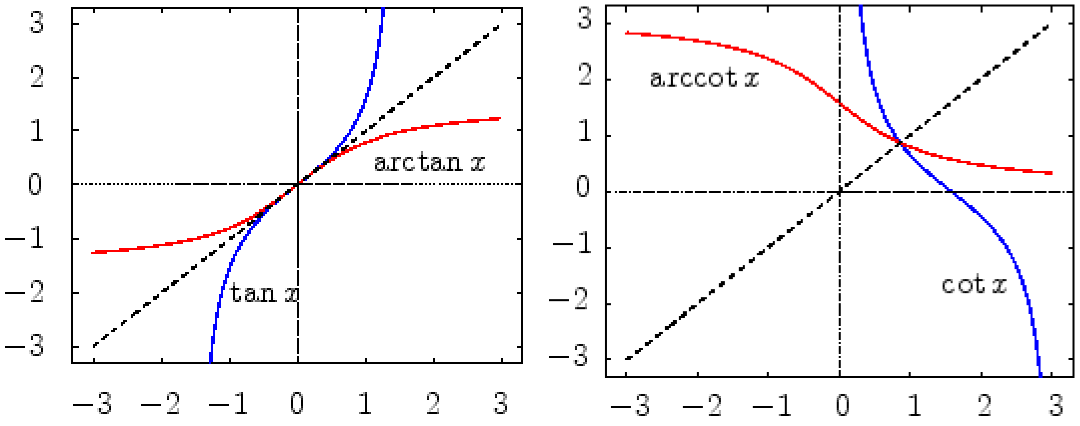
لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

دا چې د تانجنت تابع د $x = \arctan y$ معکوس تابع مشتق وټاکو، لومړی شمیرو

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} = \cos^2 x.$$



ښی اړخ اوس باید د y تابع په څېر ولیکل شي. د دې لپاره کټوټوالی کارول کیږي یا استعمالیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + y^2$$

او لاس ته راوړي

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \frac{1}{1+y^2}.$$

په ورته توګه د کوتانجنت په څېټ- یا معکوس تابع ښایو.

$$\frac{d}{dy}\operatorname{arccot} y = -\frac{1}{1+y^2}.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

ع

$y = f(x) = x(1-x$

ء انتروالونو

$(-\infty, 1/2$

او

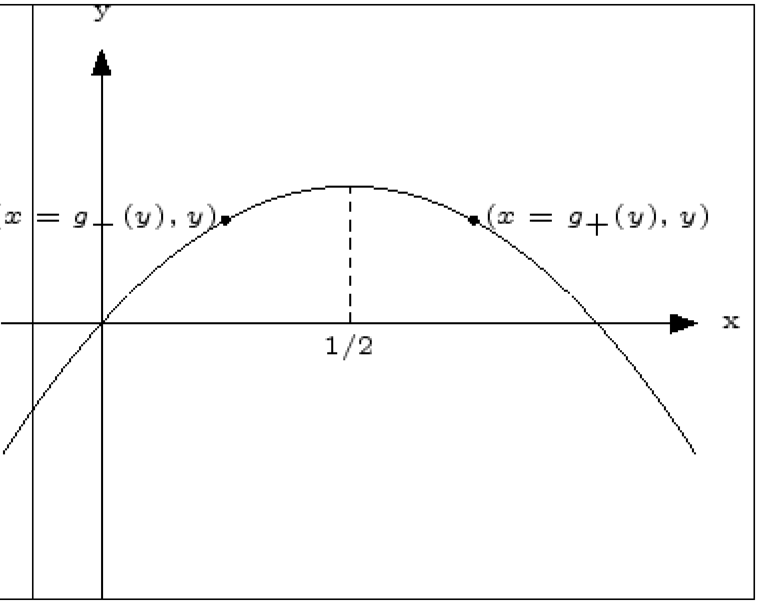
$[1/2, \infty$

هر وار په

ټ – یامعکوس تابع

$x = g(y$

لري.



(c) ketabton.com: The Digital Library

په دواړو حالتونو کې باور لري

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1-2x}\,.$$

بل یې مشتقنیول راکوي

$$g''(y) = \left(\frac{1}{1-2x}\right)'\frac{dx}{dy} = \frac{2}{(1-2x)^2}\frac{1}{1-2x}\,.$$

په ځانګړي ډول د $x = 1, y = 0$ لپاره لاس ته راځي

$$g'(0) = 1, \quad g''(0) = -2\,.$$

مشتقونه شمېرلوړ دي، بې له دې چې معکوس تابع باید روښنه جوړه شي. دا ټیک هلته شونی دی، چې که سړی د y تابع د په څېر $g'(y)$ و لیکي. په دې بیلګه کې دا شوندی دی، څکه x د y تابع په څېر لیکل کېدی شي:

$$g_{\pm}(y) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - y}\,.$$

پورته ارزښتونه داسې شمېرل کېدی شي، دکومو سره چې د هغوی د ارزښتجوړې $(1,0)$ اړونده څانګه باید وټاکل شي.

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

لوګاریتمي مشتق یا - رابیلیدنه **Logarithmische Ableitung**

دا فرمول

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

کیدی شي د $g(x) > 0$ سره د $y = g(x)^{h(x)}$ بڼې توابعو مشتقیدو ته وکارول شي. سړی لاس ته راوړي

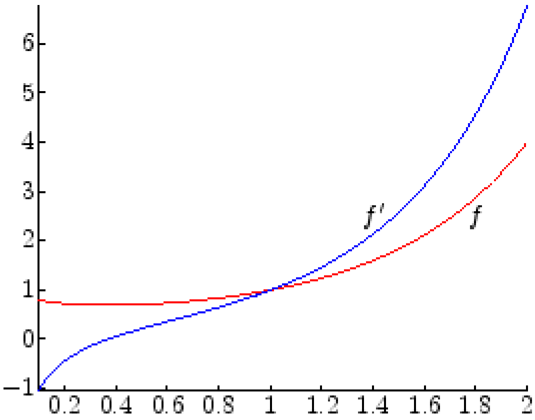
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx}\left(h(x)\ln g(x)\right) .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د $x > 0$ سره تابع
$f(x) = x^x$
لپاره مشتق دی

$$f'(x) = x^x \frac{d}{dx}\ln(x^x) = x^x \frac{d}{dx}(x\ln x) = x^x(\ln x + 1) .$$



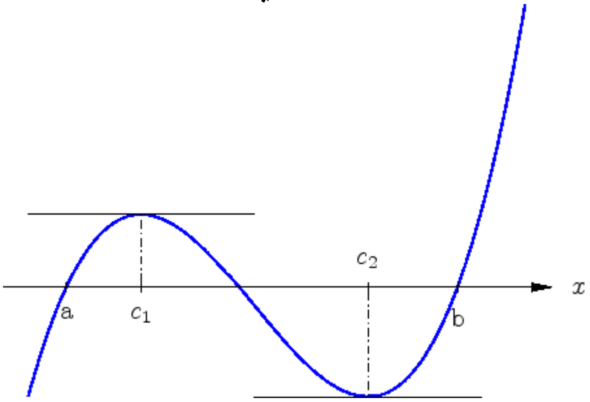
$\ln\ f(x) = x\ \ln\ x$
د $x \to 0$ لپاره د صفر په لور هخیري، نو x^x د
$e^0 = 1$ په لور. نو تابع په صفرځای کې ښي اړخیز ناپرېکېدونکي ده. د مشتق لپاره f
دا حالت نه دی. د $x^x \to 1$ او $\ln\ x + 1 \to -\infty$ له امله د $x \to 0$ لپاره
په صفر یو ولاړ یا عمود تانجنت لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د رولې جمله Satz von Rolle

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه ناپرېکيدونکي مشتقوړ تابع f مشتق د $f(a) = f(b) = 0$ سره لږ تر لږه يو صفرځای $c \in (a,b)$ لري.



توليز باور لري: که يو تابع په يوه انتوال $[a,b]$ کې n صفرځايونه ولري (د ډېروار والي په شمول)، نو هلته kـم مشتق $\geq n-k$ صفرځايونه لري.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

دا چې f ناپرېکېدونکی دی، نو د افراطي ارزښت جملې له امله په $[a,b]$ کې ټکي c او d شتون لري دا لاندې باوري کوي

$$f(c) = \min_{x\in[a.b]} f(x)$$

$$f(d) = \max_{x\in[a.b]} f(x) .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که f ناثابت وي(د ثابت f حالت ساده دی)، نو $f(c) < f(d)$ باور لري. له دې امله لږ ترلږه د دې دواړو ټکو څخه يو يې په (a,b) کې پروت دی . دا چې f مشتقوړ دی بايد د دې ځايز يا لوکال افراطيت لپاره مشتق ورک – يا صفر شي.

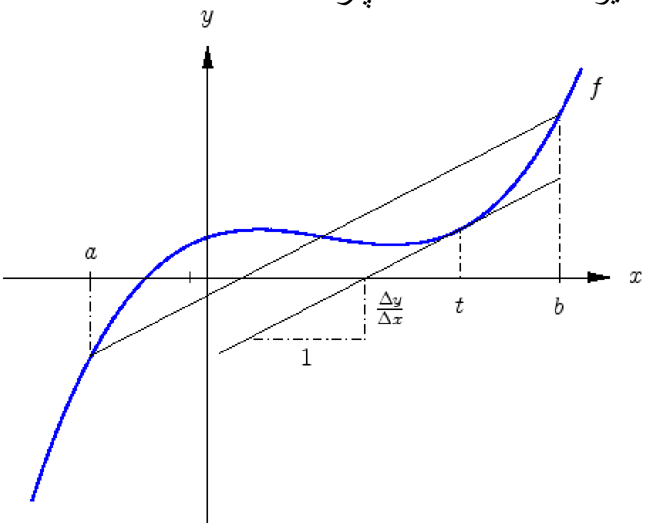
ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

منځ ارزښت قضيه Mittelwertsatz

د يوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b-a)$$

د يوه $t \in (a,b)$ لپاره



هندسي دا کټوټوالی په دې معنا دی، چې تانجنت په يوه ټکي کې غبرګ دی د له پای ټکو $(a, f(a))$ او $(b, f(b))$ تېرېدونکي ټوټه ونې يا وتر سره. داسي هم ليکو

$$\Delta y = f'(t)\Delta x$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د یوې تابع

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

لپاره $g(a) = g(b) = 0$ باور لري. دا چې f ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی، نو g هم ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی او د رولې د جملې پر بنسټ یو $t \in (a,b)$ شتون لري د لاندې سره

$$0 = g'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

همداسې

$$f(b) - f(a) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

ټولیزه (شوې) منځ ارزښت جمله **Verallgemeinerter Mittelwertsatz**

که f او g ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع وي، نو $t \in (a,b)$ یو شتون لري د لاندې سره

$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t).$$

که برسېره پردې په (a,b) باندې $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو سرې کړی شي هم

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هم وليکي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تابع
$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) - f(b)g(a) + f(a)g(b)$$

لپاره $h(a) = h(b) = 0$ باور لري. دا چې f او g ناپرېکېدونکي مشتقوړ دي،
نو h هم ناپرېکېدونکې مشتقوړ دی او د پورته د رولې د جملې سره سره سم يو $t \in (a,b)$ شتون لري د لاندې سره.

$$0 = h'(t) = (f(b) - f(a))g'(t) - (g(b) - g(a))f'(t)$$

bzw. همداسې
$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t).$$

که (a,b) په باندې $g'(x) \neq 0$ وي. نو د منځ ارزښت جملې سره سم $g(b) - g(a) \neq 0$ هم او سړی لاس ته راوړي.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

لانداو-سيمبول Landau-Symbole

سړی ليکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$f(x) = O(g(x)) \qquad (x \to a) ,$$

که یو ثابت c شتون ولري، دسې چې $|f(x)| \le c|g(x)|$ وي a ته پوره نږدې x لپاره .

د $|f(x)|/|g(x)|$ د 0 په لور هڅېږي، نو سړی په اړونده توګه ليکدود کاروي

$$f(x) = o(g(x))$$

.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د بينوم له جملې څخه لاس ته راځي

$$(1+x)^n = 1 + nx + O(x^2) \quad (x \to 0)$$

په څټ – يا معکوس جوړونې د $1 - nx$ سره دغزونې وروسته لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^n} &= \frac{1}{1+nx+O(x^2)} \\ &= \frac{1-nx}{1-(nx)^2+O(x^2)} = \frac{1-nx}{1+O(x^2)} \\ &= 1 - nx + O(x^2) . \end{aligned}$$

د $x \to \infty$ لپاره دی

$$(1+x)^s = O(x^s)$$

د ټولو $s \in \mathbb{R}$ لپاره.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناپرېکیدنه او مشتقوړوالی کیدی شي د لاګرانژ فرمول په مرسته تعریف شي.

یو تابع f په $x = a$ کې ناپرېکېدونکی دی، که وي

$$f(x) - f(a) = o(1) \quad (x \to a) .$$

مشفقوړوالی د

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r$$

سره په یوه معنا دی د

$$r = o(h) \quad (|h| \to 0) .$$

سره.

د یوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړتابع لپاره د تېلور –ودې څخه هغه تېره $r = O(h^2)$ اټکل لاس ته راځي

لیکونکي:کلاوس، هیولیګ،

د لو، پیتال قاعده یا لار **Regel von l'Hospital**

که دوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع f او g په a کې یوه ګډ صفرځای یا قطبځای ولري، نو باور لري

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

که ښی پوله ارزښت شتون ولري(په ورکړ شوي حالت کې په ناپای کې)

د ټولیزه منځ ارزښت جملې په بنسټ د x او a تر منځ یو t شتون لري د لاندې سره

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که سړی ، د یوه ناپای پوله ارزښت په موخه، $f'(t)/0$ یعنې داسې $\pm\infty$ په معنا کړي.

له دې $a \to x$ سره هم $a \to t$ ځي، نو سملاسي راکوي

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ليکونکي: اپپ، هیولیګ،

د لو، پيتال د جملې استعمال د يو څو بېلګو لړيو په بنسټ روښانه کيږي

د $0/0$ لپاره:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{3x^2-7x+4} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2}{6x-7} = -1$$

د $-\infty/\infty$ لپاره :

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} -x = 0$$

د ټولو $\infty \to x$ لپاره:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi/2-\arctan x}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = 1$$

دېواره استعمال:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2\cos(x) - x\sin(x)} = 0$$

په دې بېلګو کې دې پام وي، چې د شمېرلو پوله ارزښت شتون د لوپيتال قاعدې د استعمال پسې د منځته راغلې پوله ارزښت د شتون له لارې تضمين دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

کرښيز اپروکسميشن (ورنږدېوالی) **Lineare Approximation**

د يوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + R$$

د لاندې پاتې غړي سره

$$R = \frac{1}{2} f''(t)(\Delta x)^2 = O((\Delta x)^2)$$

او د t د x او ترمنځ $x+\Delta x$ سره.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

تابع

$$g(y) := f(y) - f(x) - f'(x)(y-x) -$$

$$- \frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}(y-x)^2$$

د $y = x + \Delta x$ لپاره يو ډبل يا دوه واره $y = x$ لپاره يو صفرځای لري او د صفرځای لي. د رولې د جملې په تعقيب يو $y = x + \Delta x$ شتون لري د لاندې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$0 = g''(t)$	$= f''(t) - 2\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}$

همداسې

$f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x$	$= \dfrac{1}{2}f''(t)(\Delta x)^2\,.$

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د ناټيکاوي وده **Fehlerfortpflanzung**

د يوه کچ – يا اندازونې ارزښت $\Delta x = \tilde{x} - x$ مطلق ناټيکاوی يا يو

نږدېوالی $x \approx \tilde{x}$ ښايي نو د يوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره

$$|\Delta y| = |f'(x)||\Delta x| + o(\Delta x)$$

باور لري د $\Delta y = f(\tilde{x}) - f(x)$ سره. په اړونده توگه د نسبي ناټيکاوی لپاره باور لري

$$\frac{|\Delta y|}{|y|} = \left(|f'(x)|\,\frac{|x|}{|y|}\right)\frac{|\Delta x|}{|x|} + o(\Delta x)$$

که $x, y \neq 0$ وي. په نوکانو کې افاده c_r د x په ځای کې د f د کنديشن عدد بلل کيږي.

د ترم $o(\Delta x)$ د پرېښږږلو يعنې له منځه وړلو له لارې کېدی شي د ناټيکاوي نږديوالس اټکل شي. د دې سره کېدی شي د ټيک مشتق ارزښت په ځای مناسب بنديزونه هم وکارول شي:

$$|\Delta y| \leq c_a|\Delta x|\,, \quad c_a \geq \max_{|t-x|\leq|\Delta x|} |f'(t)|\,.$$

په ا ړونده توگه $c_r = c_a\frac{|x|}{|y|}$ د نسبي ناټيکاوي لپاره يو بنديز يا لنډ: بند دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

یو کونج $\vartheta \in (0,\pi/2)$ کېدی شي د کاټېټونو یا ولاو اړخونو د نسبت څخه په جګېدونکي درېګوډي کې داسې وټاکو :

$$\vartheta = \arctan(y/x)\,.$$

که y د کره ځای په ځای x سره کچ کړو، نو کېدی شي ضریب c_a د مطلق ناټیکاوي لپاره د

$$\left|\frac{d\vartheta}{dy}\right| = \left|\frac{1/x}{1+y^2/x^2}\right| = \left|\frac{x}{x^2+y^2}\right|$$

له لارې اټکل شي. افاده د $y=0$ لپاره ماکسمال کیږي، او سړی لاس ته $c_a = \frac{1}{x}$ راوړي، دا په دې معنا چې

$$|\Delta\vartheta| \le |1/x|\ |\Delta y|\ .$$

لویې ناټیکیاوی د کوچني x لپاره غزیږي. په ورته توګه د نسبي ناټیکاوي د قوی کېدني فکتور لپاره هم باور لري

$$c_r = \max_y \left|\frac{x}{x^2+y^2}\frac{y}{\vartheta}\right|\ .$$

که دا لاندې تخمین وکارول شي

$$|\vartheta| \ge |\sin\vartheta| = \left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\,,$$

،

نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c_r \le \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le 1\,.$$

نو نږدېوالي ډول باور لري

$$\frac{|\Delta\vartheta|}{|\vartheta|} \le \frac{|\Delta y|}{|y|}\,,$$

دا په دې معنا چې نسبي فکتور نه غښتلی کیږي

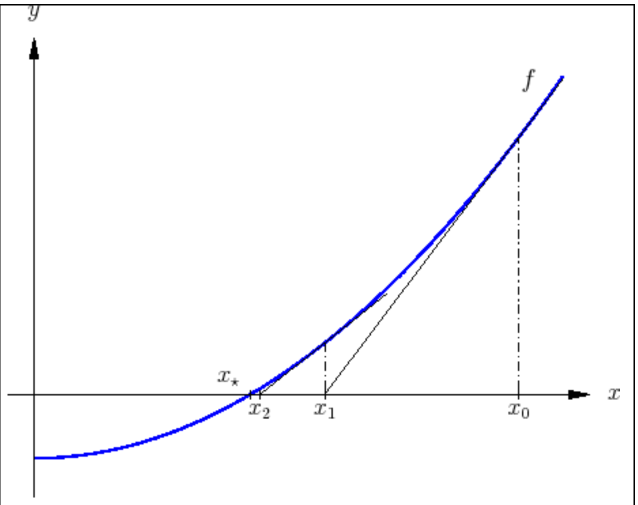
لیکونکي: کلاوس، هیولیک،

د نیوټن تلنلار یا - قانو Newton-Verfahren

د نیتن تلنلار سره کېدی شي د یوه تابع f صفرځای x_* نومریک وټاکل شي. د نږدېوني یا اپروکسمیشن پرلپسي $x_0, x_1 \ldots$ د کرښیزوالي ښخه ګټل کیږي.

نږدېوالی $x_{\ell+1}$ د x -محور سره د تانجنت غوښتکی دی په ټکی $(x_\ell, f(x_\ell))$ کې :

$$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$$



د یوه ساده صفرځای x_* ($f'(x_*) \neq 0$) لپاره د نیوټن – ایتریشن لوکال مربع پولې ته ځي، دا په دې معناچې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|x_{\ell+1} - x_*| \le c \ |x_\ell - x_*|^2$$

د پیلټکي x_0 لپاره د x_* په یوه پوره کوچني چاپریال کې.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د تیلور -نږدې ارزت Taylor-Approximation له لارې سږی

$$0 = f(x_*) = f(x_\ell) + f'(x_\ell)(x_* - x_\ell) + r$$

لاس ته راوړي د پاتې غړي

$$r = \frac{1}{2} f''(t_\ell)(x_* - x_\ell)^2 \,,$$

سره د یوه t_ℓ لپاره چې د x_* او x_ℓ ت رمنځ پرته ده. که د انترپولیشن قاعده کې کیږدو

$$f(x_\ell) = f'(x_\ell)(x_\ell - x_*) - r$$

،

نو لالاس ته راځي

$$x_{\ell+1} = x_* - r / f'(x_\ell) \,.$$

د $f'(x_\ell) \ne 0$ لپاره لرو

$$|x_{\ell+1} - x_*| = c_\ell |x_\ell - x_*|^2, \quad c_\ell = \frac{1}{2} \ \left| \frac{f''(t_\ell)}{f'(x_\ell)} \right| \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $f'(x_*) \neq 0$ باور ولري، نو c_ℓ د ناپريکيدنبأه امله د x_ℓ لپاره په يوه د x_* چاپيريال $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ کې مخدود دی:

$$c_\ell \leq c\,.$$

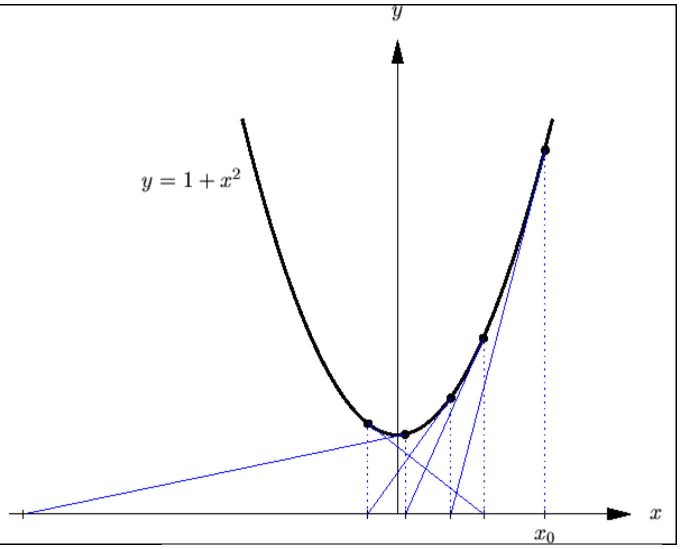
له ې سره د مربع يا ځلوريز پولې ته تګ لاس ته راځي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

که په لاندې مساوات د نيټن قانون وکاروو

$$f(x) = x^2 + 1 = 0$$

،
نو اتريشن(پل په پل اصلي حل ته وردرډې کېدنه) لاس ته راځي

$$x_{l+1} = \frac{1}{2}\left(x_l - \frac{1}{x_l}\right)\,.$$

f په پام کې د ې وي. چې حقيقي حل نه لري، نيوټن تلنلار يا قانون په حقيقي پيل ارزښت x_0 سره پولې ته نه شي تللی. (x_l) په رښتيا کې پرلپسي يو ګډوډ حالت غوره کوي. د کټمتوالي په مرسته	

$$\cot(2\phi) = \frac{1}{2}\left(\cot\phi - \frac{1}{\cot\phi}\right)$$

پرلپسي (x_ℓ) کېدی شي اکسپليځيټ ورکړل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_0 = \cot\phi \implies x_\ell = \cot(2^\ell\phi).$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

ها له بابلیانو څخه کارول شوی ایتریشن یا پل پل مخ ته تلنه یا تکرار
$$x \longleftarrow (x + a/x)/2$$

$$f(x) = x^2 - a$$

د یوه حقیقی عدد a د ریښي شمېرلو ته په ټیکه مطالعه د لپاره د نیوتن تلنلار په حیث ځان ښايي:

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

د $a = 2, x_0 = 1$ لپاره نږدې شمېرنه یا اپروکسیمېشن لاس ته راوړو.

1

1.5

1.41666666666666666666666666666666667

1.41421568627450980392156862745098039215 7

1.41421356237468991062629557889013491011 7

1.41421356237309504880168962350253024361 5

1.41421356237309504880168872420969807857 0

کونورګنځ فوق العاده ګړندی دی. د هر پل سره د د ټیکو ځایونو(ترې لاندې کرښه تېره ده) تعداد په نږدې توګه دوه واره کیږي. په دې بېلګه کې مربع پولې ته تلنه کېدی شي د ساده بڼې بدلون له لارې هم وښوول شي:

$$x_{\ell+1} - \sqrt{a} = (x_\ell + a/x_\ell)/2 - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_\ell}(x_\ell - \sqrt{a})^2.$$

$x_0 \neq 0$

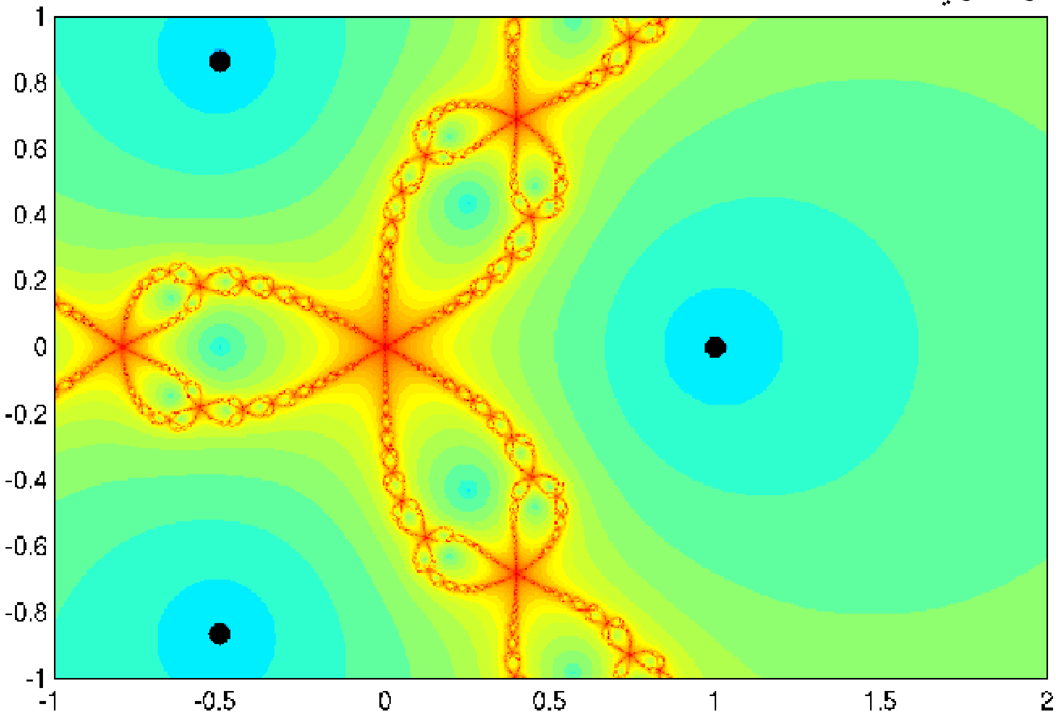
د نیټن-تلنلار د هندسي روښانه ونې څخه لرو، چې په نږدې توګه شمېرنه د لپاره پولې ته تلونکې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې څېره   د لاندې مساوات لپاره د کمپلکس نيوتن-اېترشن پولي ته تلنه ښايي

$$z^3 - 1 = 0$$

د حلونو $z = \exp(2\pi i k/3)$ سره. مختلف رنګونه د پولي ته تلني ورشو ګاني ښايي د همغه يا اړونده صفرځای لپاره. تياره رنګه شوط ځايونه ګړندی پولي ته تلنه په ګوته کوي.



سرې د پولې ته تلني ورشو په روښانه توګه fraktal مات خوي پيژني

د تيلور پولينوم**Taylor-Polynom**

د تيلور پولينوم   Das Taylor-Polynom

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه تابع f انترپولیری (ارزښت چې د دوه ټکو ترمنځ پروت وي) مشتق په ټکي a

$$p_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)\,,\ k = 0, \ldots, n$$

تر ت نظم n پورې، دا په دې معنا چې .

که f یو $(n+1)$-واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ وي، نو باور لري

$$f(x) = p_n(x) + R, \quad R = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

د یوه t لپاره چې د a او x ترمنځ وي.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

سیده پسې شمیرنه د f او p_n مشتق یو بل سره توافق یا یوغږیزوالی ښايي. د پاتې غړي R د پوره کیدو یا تکمیل ته سړی د تیلور پولینوم په یوه بل ترم غزوي:

$$q(y) = p_n(y) + c(y-a)^{n+1}\,.$$

ثابته داسې ټاکل شوې، چې $q(x) = f(x)$ وي. پسې $q - f$ یو صفرځای لري د $n+1$ د ډېروالي سره په $y = a$ کې او یو بل صفرځای په $y = x$ کې، په ټولیزه نو $n+2$ صفرځایونه . درولې جملې پسې باید $(n+1)$-م مشتق باید لږ تر لږه یو صفرځای t ولري:

$$0 = q^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(t) = c(n+1)! - f^{(n+1)}(t)\,.$$

له

$$R = f(x) - p_n(x) = q(x) - p_n(x) = c(x-a)^{n+1}$$

څخه د پاتې غړي غوښتونې بڼه راکوي.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساين تابع $f(x) = \sin x$ مشتقونه دي

$$f' = \cos x, \quad f'' = -\sin x, \quad f''' = -\cos x, \quad f^4 = f = \sin x, \ldots .$$

د ارزښتونو

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^4(0) = f = 0, \ldots .$$

سره لومړي د تيلور پولينومونه د ساين تابع دي.

$$p_1(x) = x$$

$$p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$p_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$p_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

په ورته توګه د کوساين تابع لپاره هم باور لري

$$p_0(x) = 1$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$p_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

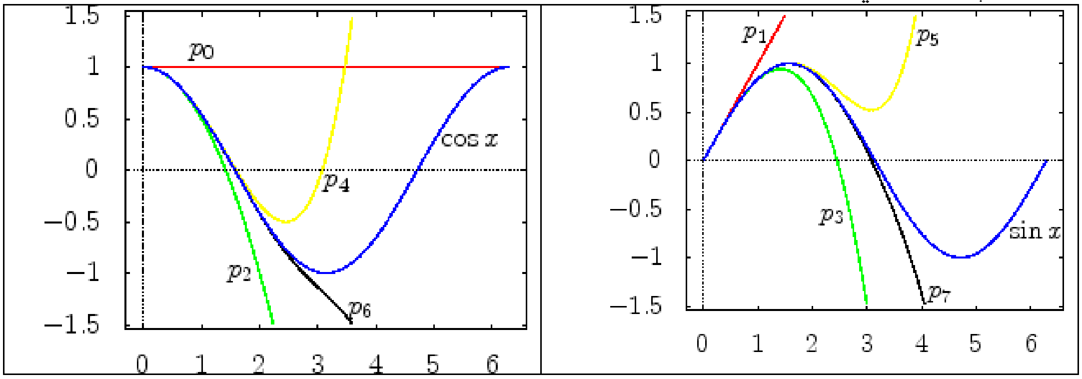
نږدې شمېرنه یا اپروکسیمېشن د ډېر کوچني x لپاره خورا دقیق دی. د بېلګې په توګه کېدی شي د نږدېوني ناتیکاوی

$$\sin 0.1 \approx p_4(0.1) = 0.09983\ldots$$

د

$$|R| = \frac{|\cos t|}{5\,!}\,0.1^5 \le \frac{1}{12000000} \le 10^{-7}$$

له لارې اټکل شي.



لکه د څېړې څخه چې لیدل کیږي، نږدې شمېرنه د لوی x لپاره لومړی د جګو درجو سره پوره ټیک یا دقیق وي. په جدول کې د څو د x - ارزښت لپاره ناتیکاوي ورکړل شوي دي.

x	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$
$p_1(x)$	3.1416	0.5708	0.1812	0.0783	0.0405	0.0236
$p_3(x)$	2.0261	0.0752	0.0102	0.0025	0.0008	0.0003
$p_5(x)$	0.5240	0.0045	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
$p_7(x)$	0.0752	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

(c) ketabton.com: The Digital Library

$p_0(x)$	2.0000	1.0000	0.5000	0.2929	0.1910	0.1340
$p_2(x)$	2.9348	0.2337	0.0483	0.0155	0.0064	0.0031
$p_4(x)$	1.1239	0.0200	0.0018	0.0003	0.0001	0.0000
$p_6(x)$	0.2114	0.0009	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ليکونکي: اپپ، هیولیګ،

حقيقي د تيلور لړۍ Reelle Taylor-Reihe

په يوه ټکي x_0 کې د يوه ناپای ډېرواره مشتقوړ تابع f د تيلور لړۍ د يوې په توان لړۍ يوه وده ده:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n, \quad a_n=\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(x_0)\,.$$

د $x \in \mathbb{R}$ لپاره لړۍ او همداسې ټول مشتقونه په يوه انتروال (x_0-r, x_0+r) کې مطلق پولې ته تلونکي دي او د $|x-x_0|>r$ لپاره پولې ته نه تلونکي دي. د $|x-x_0|=r$ لپاره بې له نورو څېړنو د لړېی پولې ته تلنې په هکله وېناوي ناشونې دي.

د ودې ټکي د واټن لپاره بند(بنديز) r د پولې ته تلنې يا کونورګنت –وړانګې په نامه ياديږي او د فرمول

$$r=\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\;|a_n|^{1/n}\right)^{-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره شمېرل کيږي. له دې سره ارزښتونه $r = 0$ او $r = \infty$ شوني دي. په دې حالت کې د کونورګنت انتروال یا تش دی او یا ټول $\mathbb{R}$ دی.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

د ریښې قضیې په بنسټ دی

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right|} = \frac{1}{r}\,|x-a|\,.$$

په توګه د $|x-a| < r$ لپاره د تېلرو-اړی یوې ته ځي او د $|x-a| > r$ لپاره پولې ته نه ځي. د $|x-a| = r$ لپاره نوري څېړنې اړيينې دي یا نورو څېړنو ته اړتیا ده.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

تابع

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

په 0کې برابرډوله ناپرېکېدونکې ده. دا پسې دپوره اینډکشن له لارې ښوول کېدی شي، چې ټول مشتقونه د

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(1/x)}{\exp((1/x)^2)}$$

بڼې دي، د یوه مناسب پولینوم p_n سره. دا چې د $x \to 0$ (همداسې د $1/|x| \to \infty$) لپاره اکسپوننشل تابع نسبت یوه پولینوم ته په قوت یا قوي جګیږي، نو ټول پولینومونه په $x = 0$ ځای کې ارزښت 0لري. اړونده تیلور-لړی نو له دې امله صفر لړی ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0x^k .$$

داچې د f لپاره $f(x) \neq 0$ دی، نو د تيلور-لړۍ د $x \neq 0$ سره فقط د $x = 0$ لپاره يو بل سره برابر يا يو غږيز دي، دا په دې معنا چې د پولې ته تلنې وړانګه r 0 ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

اکسپوننشل تابع

$$f(x) = \exp(x)$$

لاندې مشتق لري

$$f^{(n)}(x) = \exp(x) .$$

که د $x = 0$ په ځای کې وارزول شي ، ترې لاس ته راځي

$$f^{(n)}(0) = 1 .$$

د دې په تعقيب د اکسپوننشل تابع د تيلور-لړۍ لاندې بڼه لري

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} .$$

دا چې

$$\lim_{k\to\infty} 1/\sqrt[k]{k!} = 0 ,$$

،

نو $r = \infty$ دی، دا په دې معنا چې د تيلورر-لړۍ په ټول $\mathbb{R}$ پولې ته ځي يا کونورګنت ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې لپاره تابع

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

په$a = 4$ ودیز کېږي.
ددې لپاره لومړی مشتقونه جوړېږي:

$-\frac{1}{2}\, x^{-3/2}$	=	$f'(x)$
$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\, x^{-5/2}$	=	$f''(x)$
.	.	.
.	.	.
	.	.
$(-1)^n\, 2^{-n} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot x^{-\frac{2n+1}{2}}$.	=	$f^n(x)$

په ودیزېنې ټکي د قیمت اینووونې یا -وضع کونې سره سړی د تیلور-ضریبوننه لاس ته راوړي

$$c_n = \frac{f^{(n)}(4)}{n!} = (-1)^n\, \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}\, 2^{-2n-1}\,.$$

د لړۍ لومړي درې ترمونه دي

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\,(x-4) + \frac{3}{128}\,(x-4)^2 + \cdots\,.$$

د دې لپاره چې د ضریبونو وړانګه r وټاکو، په پام کې نیسو

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{2n}\,2^{-2n} \le c_n \le \frac{1}{2}\,2^{-2n}\,.$$

له دې سره دی

$$\frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/(4n)} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{c_n} \le \frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/2}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

دا چې دی لاس ته

$$r = \frac{1}{(1/4)} = 4$$

راځي .

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د اويلر فرمول

$$\exp(\mathrm{i}t) = \cos t + \mathrm{i}\sin t$$

کيدی شي د تيلور-وديزيېنې په مرسته

$$\cos t = \qquad 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \ldots$$

$$\sin t = \qquad t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \ldots$$

د کوساين - او ساين توابع منځ ته راوړل شي. له

$$-\frac{t^2}{2} = \frac{(\mathrm{i}t)^2}{2}, \quad -\frac{t^3}{6} = \frac{\mathrm{i}^2 t^3}{3!}, \quad +\frac{t^4}{24} = \frac{(\mathrm{i}t)^4}{4!}, \quad +\frac{t^5}{120} = \frac{\mathrm{i}^4 t^5}{5!}, \ldots$$

څخه لاس ته راځي

$$\cos t = \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^2 k}{(2k)!}$$

$$\mathrm{i}\sin t = \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

او د زياتون يا جمعې له لارې د تيلور –وديزيېنې له لارې د اويلر فرمول لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} \exp(\mathrm{i}t) &= 1 + \mathrm{i}t - \frac{t^2}{2!} - \mathrm{i}\frac{t^3}{3!} \cdots \\ &= 1 - \frac{t^2}{2!} \pm \cdots + \mathrm{i}(t - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots) \\ &= \cos t + \mathrm{i}\sin t\,. \end{aligned}$$

ليکونکي: اپپ، هيوليگ،

د لوګاريتم تابع

$$f(x) = \ln x$$

لاندې مشتق لري

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}\,.$$

په دې پسې مرربعيز د تيلور –پولينوم په ټکي $a = 1$ کې دی

$$p(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2\,.$$

باقی – يا پاتې غړی دابنه لري

$$\begin{aligned} r(x) = f(x) - p(x) &= \frac{1}{3!}\, f'''(\xi)\,(x-1)^3 \\ &= \frac{1}{3\,\xi^3}(x-1)^3 \end{aligned}$$

د ξ سره، چې د x او 1 ترمنځ پروت دی. ناټيکاوی د ممکن کوچني ξ لپاره خورا غټ دی. سړی اټکل لاس ته راوړي

$$|r(x)| \leq \frac{1}{3}\left|\frac{x-1}{\min(1,x)}\right|^3\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x \in [0.75, 1.25]$ لپاره ناتیکاوی دی

$$\leq \frac{1}{3}\left|\frac{1/4}{3/4}\right|^3 = \frac{1}{81}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ،

بینومیال لړی Binomialreihe

تابع

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

د $\alpha \in \mathbb{R}$ سره یوه تیلور-لړی لري

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

د $|x| < 1$ لپاره ، د کوم سره چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

تولیز شوی بینوم ضریب دی

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

دا تړلي لاس ته راځي، چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لړۍ

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

د وېش قضيې

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k}x^k}\right|=|x|\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right|=|x|<1\,.$$

له مخې پولې ته ځي
ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تيلور ـــلړۍ مشتق او انتيګرال
Differentiation und Integration von Taylor-Reihen

د يوې د تيلور- لړۍ

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k\,,\quad c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,,$$

کېدی شي غړي ډوله يا يې غړي په غړي مشتق او انتيګرال ونيول شي:

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}(x-a)^k$$

$$\int f(x)dx=c+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k-1}}{k}(x-a)^k\,.$$

په دواړو عمليو کې د پولې ته تلنې وړانګه بې تغيره پاتېږي.

ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بينوملړی

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} t^3 + \cdots ,$$

څخه د $t = -x^2$ او $\alpha = -1/2$ سره لاس ته راځي

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} x^{2k}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \cdots .$$

د انتيګرال له لارې او همداسې د

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} , \quad \arcsin(0) = 0$$

په پام کې نيولو سره د غړي په غړي انتيګرال له لارې داوده لاس ته راځي

$$\text{arcs} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د انتيګرا

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

نږدې ډوله شميرنه د تيلور-اکسپوننشل تابع باندې لاس ته راولي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{k!}\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)}\,.$$

د نومريکي نږدېوني پخ حيث د $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ لپاره لاندې ارزښتونه لاس ته راځي

k=0: 1
k=1: 0.66666666666667
k=2: 0.76666666666667
k=3: 0.74285714285714
k=4: 0.74748677248677
k=5: 0.74672919672920
k=6: 0.74683603433603
k=7: 0.74682280682281
k=8: 0.74682426573971
k=9: 0.74682412070118
(Autoren: App/Höllig)

د تيلور-لړۍ ضرب **Multiplikation von Taylor-Reihen**

د تيلور – لړۍ کېدی شي غړي په غړي سره ضرب شي:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_n(x-a)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k\right) = \sum_{k=9}^{\infty} c_k(x-a)^k$$

د لاندې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} f_{k-j} b_j \, .$$

د ضرب د کونورګنت وړانګه د دواړو ضریبونو د پولې ته تلنې وړانګې د مینیموم سره برابره ده.

لیکونکي: ، هیولیک، کرایخ

د لاندې تابع د تیلور – لړۍ شمیرنې ته

Zur Berechnung der Taylor-Reihe der Funktion

$$f(t) = e^{-t}\cos(\omega t)$$

سړی کړی شي د اکسپوننشل تابع د تیلور – لړۍ او د کوساین –تابع وکاروي

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots$$

$$\cos = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} \pm \cdots \, .$$

د ضرب څخه د لومړي ترم لپاره لاس ته راځي

$$e^{-t}\cos(\omega t) = 1 - t + \frac{1-\omega^2}{2!}t^2 + \left(\frac{\omega^2}{2!} - \frac{1}{3!}\right)t^3 + \cdots \, .$$

$$e^{-t}\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(e^{(\mathrm{i}\omega - 1)t}\right)$$

بدیلي کېدی شي هم و کارول شي:

$$e^{-t}\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^k t^k}{k!}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \mathrm{Re}\left(1 + (\mathrm{i}\omega - 1)t + \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^2}{2!}t^2 + \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^3}{3!}t^3 \cdots\right)$$

$$= 1 - t + \frac{1 - \omega^2}{2!}t^2 + \frac{3\omega^2 - 1}{3!}t^3 + \cdots .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تيلور-لړۍ وېش **Division von Taylor-Reihen**

د دوه تيلور – لړيو وېش

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x-a)^k \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x-a)^k, \qquad g_0 \neq 0,$$

د ضريبونو پرتلې له لارې کېدی شي له کتوتوالي

$$(q_0 + q_1u + \ldots)(g_0 + g_1u + \ldots) = f_0 + f_1u + \ldots\ , \quad u = x - a\,,$$

څخه وټاکل شي:

$$q_0g_0 = f_0 \quad \longrightarrow \quad q_0$$

$$q_1g_0 + q_0g_1 = f_1 \quad \longrightarrow \quad q_1$$

$$\vdots$$

$$q_n = (f_n - q_{n-1}g_1 - \ldots - q_0g_n)/g_0 \quad \longrightarrow \quad q_n .$$

ليکونکي: هيوليګ، اپريبن

د $q(x) = \tan x$ تر 5نظم پورې وديزونې لپاره ړدو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(q_1x + q_3x^3 + q_5x^5 + \ldots)\underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots\right)}_{\cos x} = \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots}_{\sin x}.$$

له دې سره همدا اوس وکارول شو، چې تانجنت $\tan x$ ناجوړه(طاق) دی، دا په دې معنا چې $q_0 = q_2 = \ldots = 0$.
د ضريبونوو له پرتلې څخه لرو:

$$\begin{aligned} q_1x &= & x &\longrightarrow & q_1 &= 1,\\ \left(-\frac{q_1}{2} + q_3\right)x^3 &= & -\frac{1}{6}x^3 &\longrightarrow & q_3 &= \frac{1}{3},\\ \left(\frac{q_1}{24} - \frac{q_3}{2} + q_5\right)x^5 &= & \frac{1}{120}x^5 &\longrightarrow & q_5 &= \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ، اپرينس

د راشنل توابعو تيلور-وديزېنه
Taylor-Entwicklung rationaler Funktionen

د يوه راشنل تابع $r(z)$ د تيلور –وديزېينه په ټکي $z = a$ کې کېدی شي د کمپلکس پارشل جمعې په مرسته وټاکل شي، دا په دې معناچې r د يوه پولينوم او د بنسټ تابع

$$\frac{1}{(u-z)^j} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j-1} \frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+j}}.$$

جمعه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوګونو زیاتونونو(د جمعې اعضاوې) د کونورګنت وړانګې د ودیزېنې ټکي د قطب

نقطو د واټن $|u-a|$ سره برابره ده

لیکونکي: کلاوس هیولیګ

ودیزېنه یا وده د بینوم لړۍ یو ځانګړی حالت دی:

$$\frac{1}{(u-z)^j}=\frac{1}{((u-a)-(z-a))^j}=(u-a)^{-j}(1+x)^{-j},$$

$$, \quad x=-\frac{z-a}{u-a}.$$

بدیلي کېدی شي په ټکي $z=a$ کې مشتق وشمېرل شي او د n-م د تیلور ضریبونو لپاره لاس ته راوړو

$$\frac{j\cdot(j+1)\cdots(j+n-1)}{n!}=\binom{n+j-1}{n}(u-a)^{-j-n}.$$

د

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n+j-1}{j-1}^{1/n}=1$$

له امله د کونورګنت یا پولې ته تلنې وړانګه $|u-a|$ ده .

لیکونکي: کلاوس هیولیګ

د ښوونې لپاره د

$$r(z)=\frac{1}{z^2-z}=-\frac{1}{z}-\frac{1}{1-z}$$

وده په $a=3$ وتاکل شي. د لومړي ترم لپاره د تولیز فرمول څخه د $u=0$ او $j=1$ سره لاندې د تیلور n -م ضریب لاس ته راوړي

$$\binom{n}{0}(-3)^{-(n+1)},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-3))^n, \quad |z-3| < 3 .$$

دا ترې لاس ته راغلې هندسي لړۍ کېدی شي سیده هم لاس ته اروړل شي. دا د دویم ترم په بنسټ ښوول کیږی. سړی لیکي

$$-\frac{1}{1-3-(z-3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(z-3)/(-2)}$$

او لاس ته راوړي

$$-\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-2))^n, \quad |z-3| < 2 .$$

د دواړو لړیو زیاتون یا جمعه دا وده راکوي

$$\frac{1}{z^2-z} = \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)(z-3) + O((z-3)^2) .$$

لیکونکي: کلاوس هیولیک

د یوې تیلور – لړۍ معکوس ارزښت تکرار شمیرنه
Iterative Berechnung des Kehrwerts einer Taylor-Reihe

که $g(0) \neq 0$ وي، نو کېدی شي د ایترېشن له لارې

$$f \;\longleftarrow\; 2f - gf^2$$

له $f(x) = 1/g(0)$ څخه په وتو د معکوس ارزښت $f = 1/g$ وده وشمېرل شي.
د لته په هر پل کې د تیکو ترمونو تعداد یا ګڼ،ن دوه برابره کیږي.

دا متود د نیوتن تلنلار د $\frac{1}{f} - g = 0$ د یوه حل f تاکل په ګوته کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: کلاوس هيوليګ، اپپريښ

د پولۍ ته تلنې وينا کيدی شي د کټوټوالي

$$f_{\mathrm{neu}} - \frac{1}{g} = -g\left(f_{\mathrm{alt}} - \frac{1}{g}\right)^2$$

حخه ولوستل شي، څکه چې له $f_{\mathrm{alt}} - 1/g = O(x^n)$ لاس ته

$$f_{\mathrm{neu}} - 1/g = O(x^{2n})$$

راځي .

ليکونکي: کلاوس هيوليګ، اپپريښ

د

$$f(x) = 1/g(x) = 1/\cos x$$

تيلور وديزيينه کېدی شي لکه چې په تعقيب يې پل په پل وشمېرل شي. له

$$g = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)\,, \quad f_0 = 1$$

څخه په وته لاس ته راځي

$$f_1 = 2\cdot 1 - g\cdot 1^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$$

$$f_2 = 2(1+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4) - g\,(1+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4)^2 + O(x^6)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6)\,.$$

سملاسې له دوه پلونو (قدمونو) وروسته لومړي شپږ ترمونه ټيک دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$ سره له ضرب پسې د تانجنت لړۍ راکوي

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

ليکونکي: کلاوس هيوليگ، اپپريښ

د معکوس تابع د تيولور وديزيينه

Taylor-Entwicklung der Umkehrfunktion

د يوه تابع f د معکوس تابع $g(x)$ د تيلور ضريبونه د $f'(a) \neq 0$ سره په ټکي $b = f(a)$ کې کېدی شي د $g(f(x)) = x$ له مشفونې و ټاکل شي :

$$g(b) = a$$

$$g'(b)\, f'(a) = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(b)$$

$$g''(b)\, f'(a)^2 + g'(b)\, f''(a) = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(b)$$

$$\vdots$$

دا منځ ته راغلې مساوات کېدی شي تل پسېsukzessive د مشتقونو $g'(b),\, g''(b), \dots$ پسې وشمېرل شي.

ليکونکي: کلاوس هيوليگ، اپپريښ

د $f(x) = \sin x$, $g(x) = \arcsin x$ او $a = 0$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g(0) = 0$$

$$g'(0)\cos 0 = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(0) = 1$$

$$g''(0)\cos^2 0 - g'(0)\sin 0 = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(0) = 0$$

$$'(0)\cos^3 0 - g''(0)(-\sin 0) + g''(0)\cos 0(-\sin 0) + g'(0)(-\cos 0) = 0 \quad \longrightarrow \quad g'''(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$\arcsin x = x + \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

دا په دې معنا چې . که په پام کې ونیول شي، جې د یوه ناجوړه یا طاق تابع په څېر – یا معکوس تابع ناجوړه ده، نو سملاسي یې ودیزیېنه تر پنځم ترم پورې ټیک ده.
لیکونکي: کلاوس هیولیګ، اپیریش

د تیلور ځانګړې لړۍ Spezielle Taylor-Reihen

$$(1 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots \quad -1 < x \le 1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{t} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}B_{2k}x^{2k-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{ar} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots \quad |x| < 1$$

$$\mathrm{arcc} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots\right) \quad |x| < 1$$

$$\mathrm{arctar} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots \quad |x| < 1$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د پاد نږدې ارزښت شميرنه **Pade-Approximation**

د يوه تابع $f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots$ د (m,n) - پاد-نږدې ارزښت شمېرنه يو راشنل تابع دی د صورت – يا ماتباندې درجې m او مخرج يا ماتلاني درجې n سره، چې د f سره د $z \to 0$ لپاره تر ځګو درجو ترمونو همغږيز کيږي يا سره برابريږي:

$$\frac{p(z)}{q(z)} - f(z) = O(z^{m+n+1}).$$

پولينومونه $p(z) = a_0 + \cdots + a_m z^m$ او $q(z) = b_0 + \cdots + b_n z^n$ کېدی شي د ضريبونو د پرتلې له لارې وټاکل شي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د q سره د ضرب وروسته لاس ته راوړو

$$(a_0 + a_1 z + \cdots) - (c_0 + c_1 z + \cdots)(b_0 + b_1 z + \cdots) = cz^{m+n+1} + \cdots ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او لاس ته راځي، چې د $k \leq m+n$, z^k ضريبونه بايد ورک شي:

$$k=0: \quad a_0 - c_0 b_0 = 0$$
$$k=1: \quad a_1 - c_0 b_1 - c_1 b_0 = 0$$
$$\cdots .$$

دا کښته – يا لامدې ټاکل شوى هوموجېن کربښيز مساوات سيستم ($m+n+1$ مساوات د $m+n+2$ متحولو يا ناټاکلو سره) راکوي، چې تل حل لري.
دا چې f په صفر کې قطب نه لري، راکوي $b_0 = 0$ ، چې $a_0 = 0$ راکوي. له دې امله کېدى شي د ممکنه لنډونو وروسته د q لومړي له صفر توبېرېدونکي ضريبونه د 1 سره برابر ايښول کېښولی شي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د اکسپوننشل توابعو لپاره د (m,n)-پاد-نږدې ارزښت شمېرنې ته مساوات سيستم په لاندې ډول دى.

$$0 = a_0 - b_0$$

$$0 = a_1 - b_1 - b_0$$

$$\cdots$$

$$0 = a_m - b_m - \cdots - \frac{1}{m!} b_0$$

$$0 = b_{m+1} - \cdots - \frac{1}{(m+1)!} b_0$$

$$\cdots$$

$$0 = \frac{1}{m!} b_n - \cdots - \frac{1}{(m+n)!} b_0 .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حل لپاره د بيلګي په توګه لاس ته راوړی شو

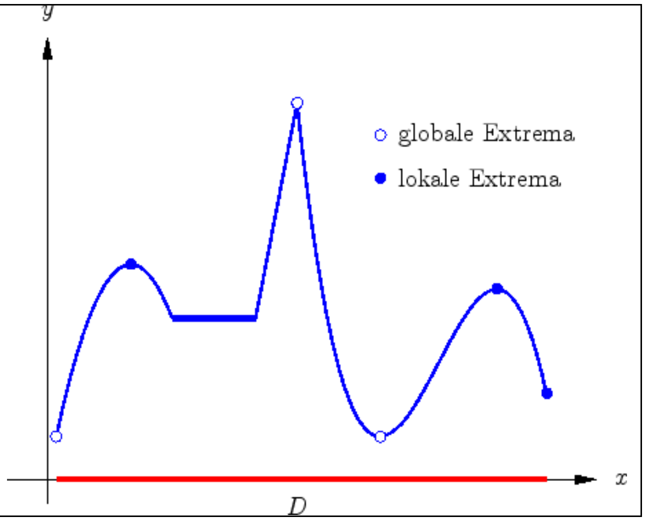
$$r_{1,1}(x) = \frac{1+x/2}{1-x/2}, \quad r_{2,2}(x) = \frac{1+x/2+x^2/12}{1-x/2+x^2/12}.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

اکستريما(افراطيت) **Extrema**

تابع f په a کې په يوه ډېرۍ(سټ) D يو تولېز يا ګلوبال مينيموم لري، که وي
$f(a) \le f(x) \quad \forall x \in D.$

په يوه ځايېز – يا لوکال مينيموم $f(a)$ کې د تابع ارزښت فقط په يوه کوچني]اپېريال $(a-\delta, a+\delta) \cap D$ کې مينيمال دی.
ګلوبال او لوکال مينيموم سره ورته تعريف دي.



په يوه رابند انتروال د يوه ټوټه ډوله ناپرېکېدونکی او مشتقوړ تابع لپاره کېدی شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتقونو په صفرځايونو ، پرېکېدونکي ځايونو او يا په ژئ ځايونو کې رامنځ ته شي. تيوپ يا ډول يې کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته او د ت ابع ارزښتونو د پرتلې له لارې پيداشي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر
د يوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع لپاره د لوکال مينيموم سره د تعريفورشو په دننني ټکي a کې د مشتق لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

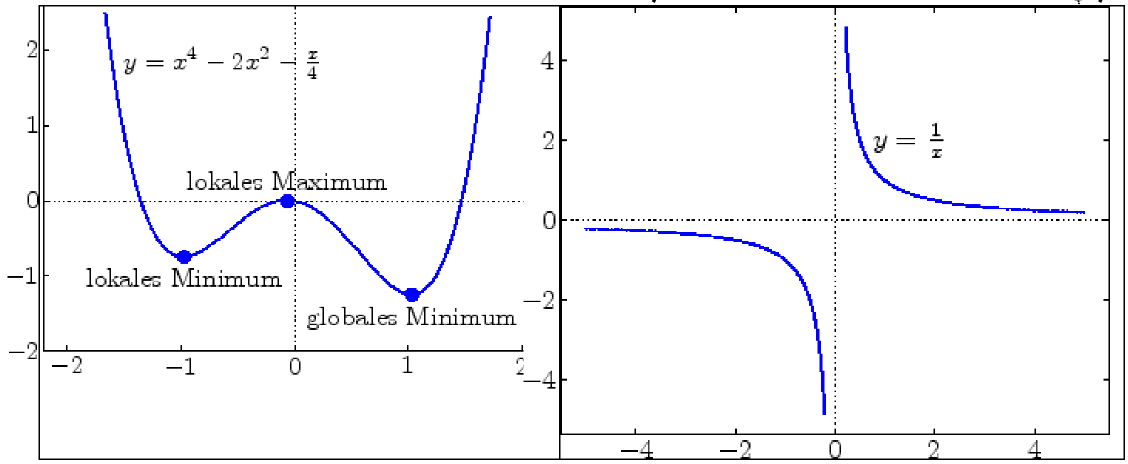
$$f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \geq 0}} \frac{\overbrace{f(a+h) - f(a)}^{\geq 0}}{h} \geq 0$$

او

$$f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \leq 0}} \frac{\overbrace{f(a+h) - f(a)}^{\geq 0}}{h} \leq 0$$

نو $f'(a) = 0$. يعني د تعريف ورشو په دننه کې په يوه لوکال افراطيت کې بايد مشتق صفر وي يا f هلته مشتقوړ نه وي.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

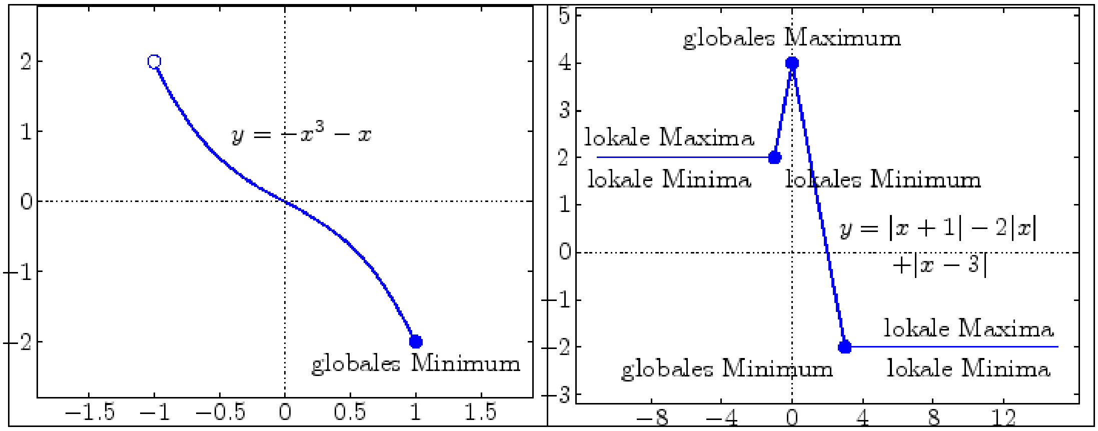
په لاندې کې به يو څو تيپيکي حالتونه وځيرل شي.
تابع $f(x) = x^4 - 2x^2 - x/4$ د $D = \mathbb{R}$ سره دوه مينيما اوېو متکسيما لري.
مينيموم د کوچني تابع ارزښت سره ګلوبال دی. يو ګلوبال ماکسيموم شتون نه لي ، ځکه چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره دی.



تابع $f(x) = 1/x$ د $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ سره اکستيم يا افراطي ارزښتونه نه لري.که يو تابع په يوه واز انتروال ثابت وي، نو دا ځايونه هم (لکال) ماکسيما او هم) لوکال) مينيما دي.

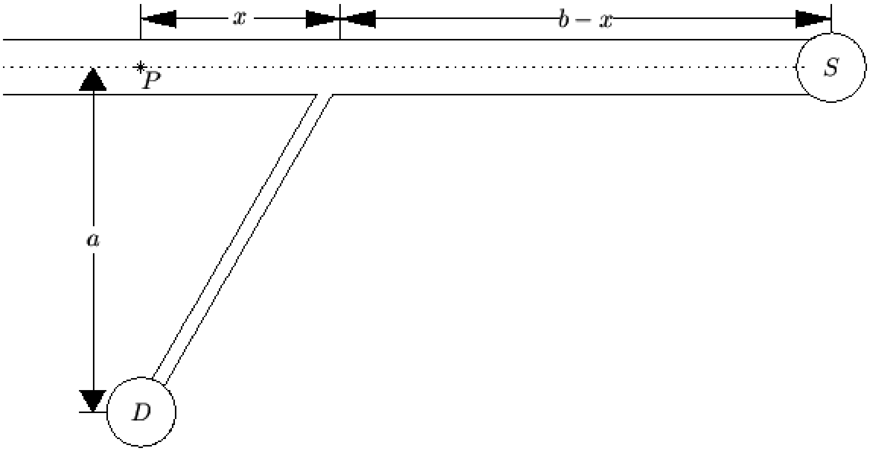
(c) ketabton.com: The Digital Library

يوه کره همغږيز – يا مونوتون تابع سره افراطي ارزښتونه په ژی ټکو کې نيول کيږي، که دا تعريفورشو پورې تعلق ولري يا اړوند وی.



ليکونکي: هيوليک، هيورنر

له يوه کلي D څخه يوه ښار S ته يوترنسرک جوړيږي. په واټن a همدا اوس له کلي و ښار ته يو سرک جوړ دی له ښار څخه تر ټکي P پورې لار ، هغه سرک چې کلي ته بل يا پسي نږدې پروت دی، اوږدوالی b لري.
دا سيده کرښيز ټوټه لار بايد داسي جوړه وي، چې د ښار ګرندی رسيدنه شووني يا تظمين وي، که د يوه منځني [ټکتيا km/h $v_a = 120$ د $v_n = 60$ په واټن په نوي څنګيز يا فرعي سرک څخه لاړ شو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د P او د څنګيز سرک ترمنځ واټن $x \geq 0$ د ټاکلو لپاره د مینیمی – یا کموني له لارې اړین وخت

ښار ته د خوزښت لپاره دی

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

د مشتق صفرځایونه

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0\,,$$

راکوي

$$v_a x = v_n\sqrt{a^2 + x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_m = a/\sqrt{3}$$

یعنې ممکنه لوکال اکستېرم ځاي په (0, b)کې. ایا چې دا مینیموم دی، باید د خوزښت وخت سره په انتروالټکو کې د پرتلې له لارې وټاکل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a + b}{v_a}\,, \qquad t(0) = \frac{2a + b}{v_a}\,, \qquad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. د ښي پایټکو لپاره باور لري

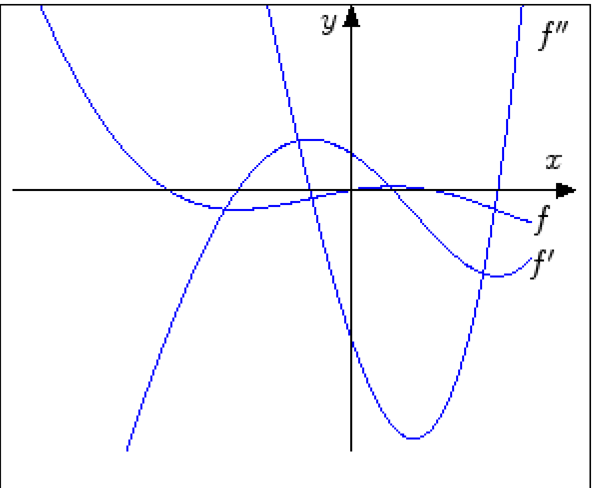
$$\begin{aligned} t(b) \geq t(x_m) \Leftrightarrow & \quad 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}a + b \\ \Leftrightarrow & \quad 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2 \\ \Leftrightarrow & \quad a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

اخرنی مساوات تل پوره دی، او له دې سره x_m اوپټیمال یا اغیز من دی، که په غوره انتروال $(0, b)$ کې پروت وي.: $b \geq a/\sqrt{3}$. په بل حالت کې به مینیموم په ژۍ ټکي b ته ، یعنې ښار ته د سیده تړنې، سره ورسیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکوڼکي: هیولیګ، هیوررنر

د اکستریم – یا افرطي ازښتونو ازماېښت Extremwerttest

د یوه افراطی ارزښت تیوپ یا ډول په هکله کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته پرېکړه وشي. که f یو دوه واره ناپرېکیدونکی مشتقوړ تابع وي او $f'(a) = 0, \quad f''(a) > 0$ $(f''(a) < 0)$, ولرو،	

نو f په a کې یو ځاییز مینیموم(ماکسیموم) لري. که د a په ځای کې دویم مشتق ورک شي یا صفر شي، نو باید جګ مشتقونه پرېکړې ته را وړاندې شي. که باور ولري

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(a) \neq 0,$$

نو f په a کې تیک هلته یو افراطیت لري، که جوړه وي. په دې حالت کې f په a کې یو لوکال یا ځای اړونده ماکسیموم همداسې مینیموم لري، که $f^{(n)}(a) < 0$ همداسې $f^{(n)}(a) > 0$ وي.

لیکوڼکي:اپپ، هیولیګ

د ښوونې لپاره و f ته سرې د a په ځای کې د $n-1$ درجې د تیلور-پولینوم کاروي د باقي یا پاتې

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-a)^n$$

غړي سره او په پام کې نیسي، چې د $f^{(n)}(t)$ او د $f^{(n)}(a)$ لپاره(او له دې سره هم د t لپاره) a ته په بوره نږدېوالي همغه یا برابره مخنخښه ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناجوړه يا طاق n لپاره له $x < a$ څخه و $x > a$ ته په تلنې کې د پورته مساوات ښى اړخ يو د مخنښي بدلون لري. د دې پسې $f(x) - f(a)$ هم هلته د مخنښي بدلون لري او د a د f افراطي ځاى نه دى.

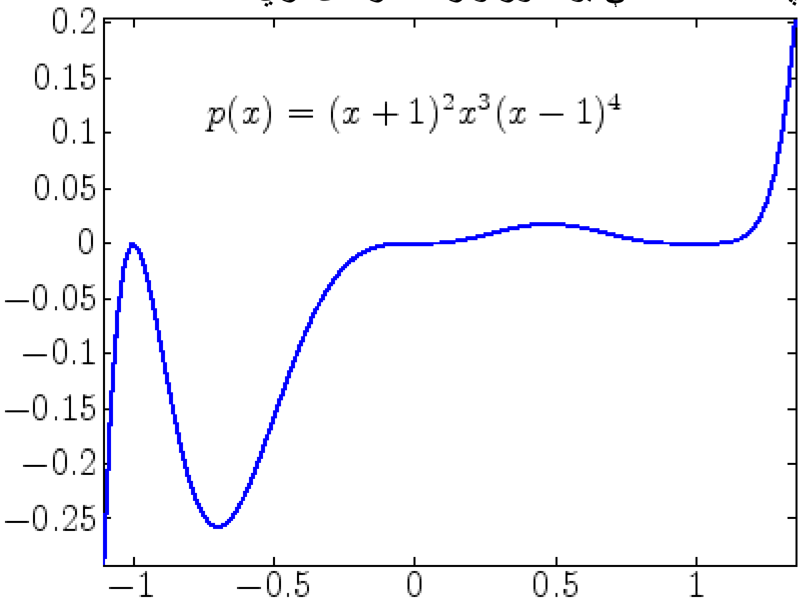
د جوړه n لپاره د $x \neq a$ لپاره تل $(x-a)^n > 0$ دى. د $f^{(n)}(a) < 0$ په حالت کې د $x \neq a$ لپاره او x چې a ته پوره نږدې پروت دى $f(x) < f(a)$ لاس ته راځي. نو تابع f په دې حالت کې په a کې يو لوکال ماکسيموم لري . حالت $f^{(n)}(a) > 0$ په ورته توګه يو لوکال ميموم راکوي.

ليکونکي:اپپ، هيوليک

پولينوم

$$p(x) = (x+1)^2 x^3 (x-1)^4$$

په $x = -1$ کې يو دبل صفرځاى ، په $x = 0$ کې يو درېواره صفرځاى لري او په $x = 1$ کې يو څلور واره صفرځاى لري.



باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0\,.$$

په $x = -1$ کې p یو ماکسیموم لري. په $x = 1$ کې p یو مینیموم، څکه چې

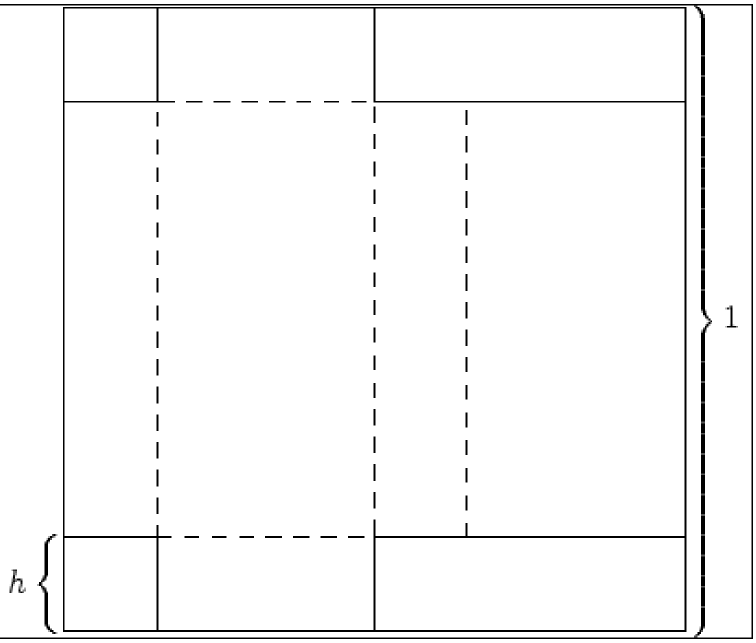
$$p(1) = \ldots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0\,.$$
،

بالاخره p د

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او په $x = 0$ کې یو مخنخښې بدلون له امله په سرچینه کې افراطي ځایونه نه لري.

لیکونکي:اپپ، هیولیگ

د دې ورکړ شوي غوڅنموني په مرسته دې د مربعیز ټوټه کارتونونو څخه دې ممکنه د لوی حجم صندق جوړ شي	

ډکی یا حجم دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

اوږدوالی سور جګوالی

د مشتق صفرځايونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

راکوي

$$= \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

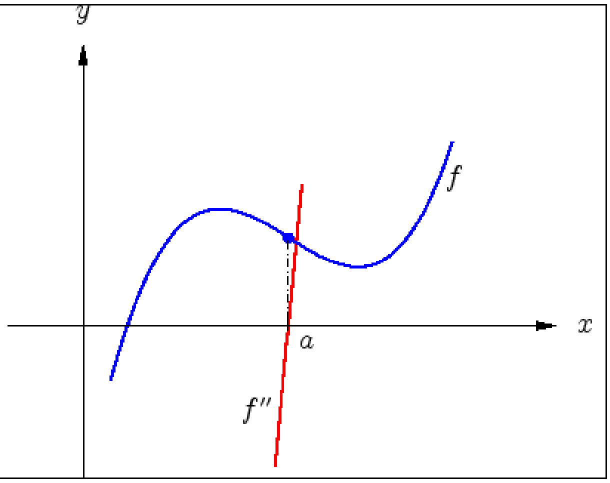
يعني ممکنه افراطي ځايونه. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور دی او

$$v(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}\,.$$

دا چي د ژی ټکو $h = 0$ او $h = 1/2$ لپاره ډکی يا حجم صفر 0 دی، صندق د $h = 1/6$ لپاره ماکسيمال ډکی يا حجم لري.

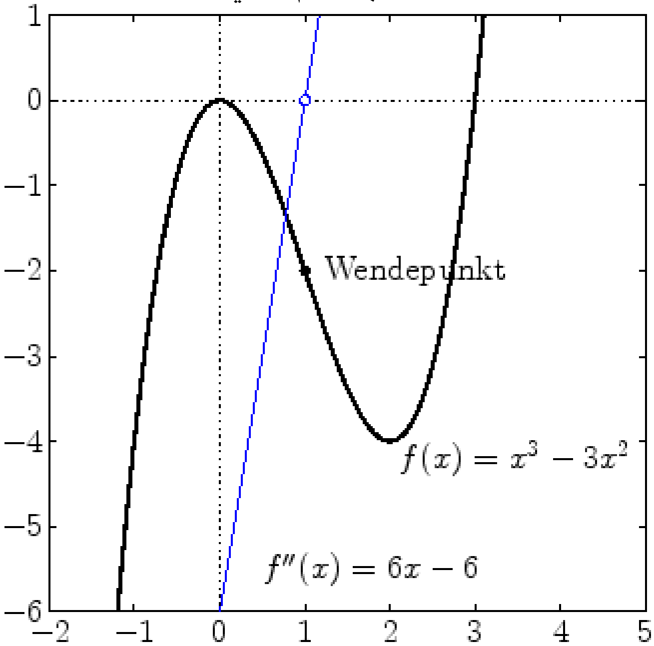
ليکونکي:ايپ، هيوليک

اوړونټکي(نقطه انعطاف) Wendepunkte

د يوه تابع f په يوه اوړنټکي a کي دويم مشتق مخنخښه بدلوي. د يوه پوره هوار تابع لپاره اړين دی، چي $f''(a) = 0$ وي او پوره $f'''(a) \neq 0$ کيدونکي، چي وي. ليکونکي: هيوليک، هيورنر	

(c) ketabton.com: The Digital Library

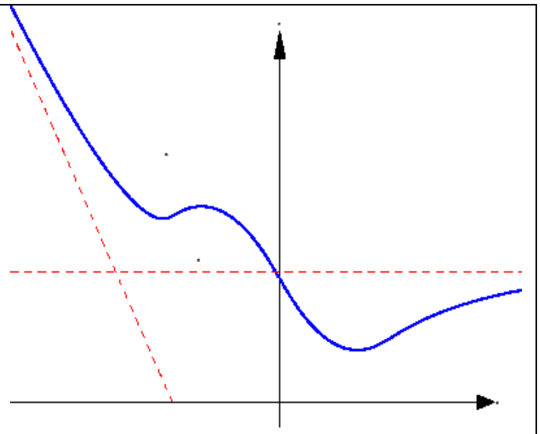
مشتق یو kubisches پولینوم ښايي.



دا چې د ویم مشتق کرښیز دی، تل ټیک یو افراطی ټکی ښتون لري.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

اسیمپتوتي(یو په بل نه پرېوتونکي یا ګاونډی) **Asymptoten**

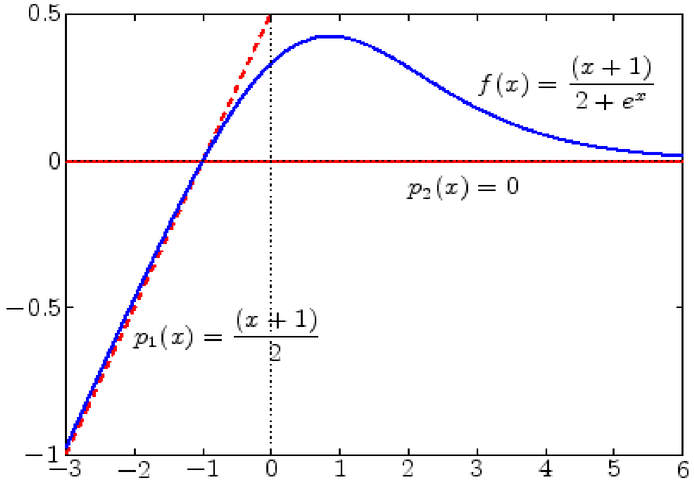
د f یو کرښیز تابع $p(x) = ax + b$ یو اسیمپتوت یا ګاونډی دی، که د $x \to \infty$ یا $x \to -\infty$، لپاره $f(x) - p(x) \to 0$ وي. لکه په ښېره کې چې ښوول شوی دی، ګاونډ د تابع f حالت د لوي x لپاره تشریح کوي. لیکونکي: هیولیک، هیورنر	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{x+1}{2+e^x}$$

ګاونډ وټاکو پوله ارزښتونه $x \to \pm\infty$ ځانله تر ځېړنې نیسو.



د $x \to \infty$ لپاره دی

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)\cdot e^{-x}}{2\cdot e^{-x}+1}$$

$$= \frac{0}{0+1} = 0\,.$$

له دې سره د x محور ګاونډ یا اسیمپټوت دی

د $x \to -\infty$ لپاره e^x د 0 په لور هڅیږي او

$$p(x) = \frac{x+1}{2}$$

ګاونډ دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د راشنل- یا کسر توابعو ګاونډ یا اسیمپټوټې
Asymptoten rationaler Funktionen

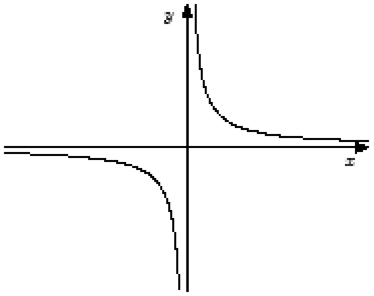
یو راسنل تابع

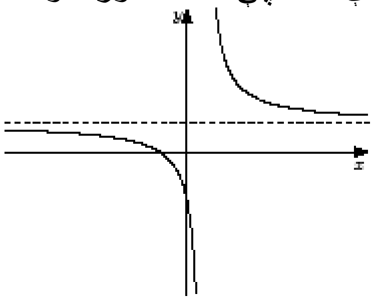
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

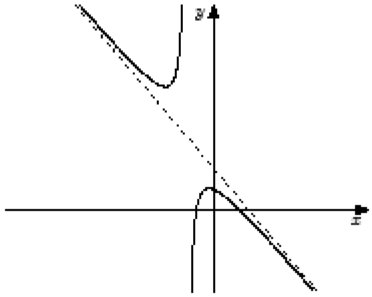
تیک هلته یو کرښیز ګاونډ لري، که $\text{Grad}\ p \le \text{Grad}\ q + 1$ وي.
د $\text{Grad}\ p < \text{Grad}\ q$ لپاره باور لري

$$\lim_{p \to \pm\infty} r(x) = 0\,,$$

دا په دې معنا چې x - محور ګاونډ دی.







د $\text{Grad}\ q \le \text{Grad}\ p \le \text{Grad}\ q + 1$ لپاره سړی کرښیز ګاونډ د پولینوم وېش سره لاس ته راوړي :

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

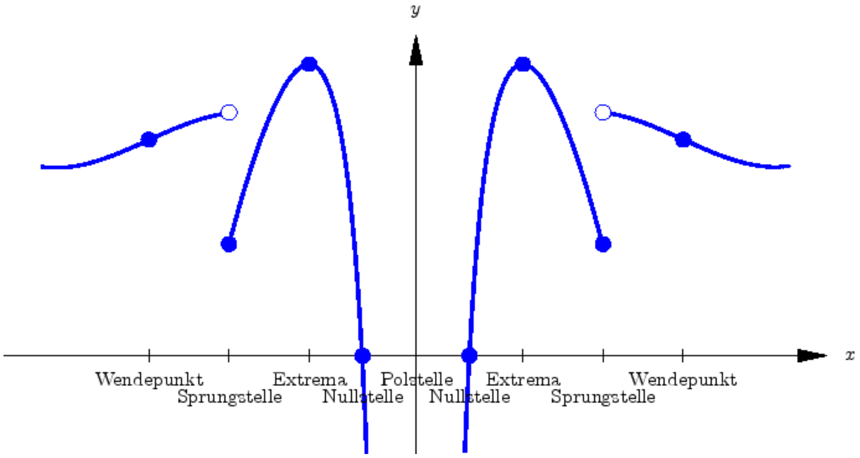
د q Grad $\tilde{p} <$ Grad سره. اسیمپتوت پروت یا افقي, $(a = 0)$ دی، که Grad q Grad $p =$ وي.

که د صورت درجه د مخرج له درجې له یو زیات وي، نو $r(x)$ د لوي x لپاره د یوه پولینوم سره، چې ≥ 2 درجه وي اپروکسیمي کیږي.
لیکونکي: هیولیک، هیوررنر

د کږو یا منحنیو خبرې یا بحث Kurvendiskussion

د یوه تابع د څومره والي حالت باندې قضاوت ته لاندې نخښې کیدی شي رامخ ته شي:

- Symmetrien سیومتري
- Periodizität تل بیرته راګرځیدنه
- Unstetigkeitsstellen پرېکیدنوالي ځایونه
- Nullstellen ($\longrightarrow$ Vorzeichen) صفرځایونه(مخنخښه $\longrightarrow$)
- Extrema ($\longrightarrow$ Monotoniebereiche) اکستریما (همغږیزوالي ورشوګاني $\longrightarrow$)
- Wendepunkte ($\longrightarrow$ Konvexitätsbereiche) اوړونټکی) ننوتلوالي ورشوګاني $\longrightarrow$)
- Polstellen قطبځایونه
- Asymptoten اسیپتوتونه یا ګاونډي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع یو اړونده تحلیل د کړو خبرې اترې یا بحث بلل کیږي
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د کړوخبرو اترو د ښګندونې لپاره یو تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\ \sin(3x)$$

تر ښېړنې نیول کیږي.

سیمتري : داچې $\sin x = -\sin(-x)$ دی ، نو تابع ناجوړه دی

تل بیرته راګرځېدنه یا پریودیښتيPeriodizität : تابع لکه د ساین تابع پخپله 2π - پریودیکي دی او له دې امله په لاندې کې فقط په انتروال $[-\pi, \pi]$ کې راوړل کیږي.

د پرېکېدنوالي ځایونه : تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره یرځای شوی، له دې امله برکېدنځاینه نه لري.

صفرځایونه: د زیاتو- یا جمعه نقضیې سره $[-\pi, \pi]$ دی

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\ \sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع صفرځایونه په 0 او $\pm\pi$ کې لري.

افراطیت: مشتق

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\ \cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x$$

صفر دی د $\cos x = 0$ یا د $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره ، نو

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$$

دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف او تلبېرته راګرځېدونې ده، ژئ ترښېړنې لاندې نه نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دويم مشتق د محنخښي ښخه

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\,\sin x$$

او د تابع ارزښت د پرتله کوني له لارې کېدی شي د افراطيت تيوپ يا ډول وټاکل شي:

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اوړونټکی یا د انعطاف ټکیWendepunkte :

دويم مشتق

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\,\sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x$$

$$\sin x = \pm\sqrt{5/6}$$

صفر دی د $\sin x = 0$ لپاره يا ، دا په دې معنا چې

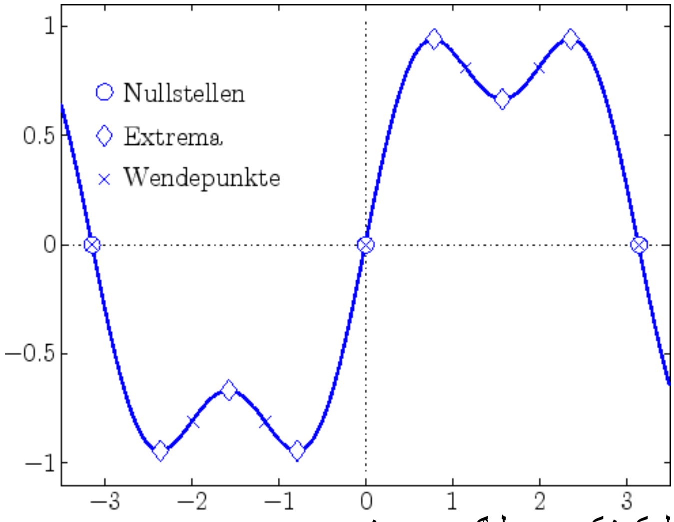
$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

دا چې په دې ځای کې دريم مشتق نه ورکيږي. تابع f اوړونټکی په $(0,0)$ او $(\pm\pi, 0)$ کې لري همداسې په نږدې توګه په $(-1.99, -0.81)$ ، $(1.15, 0.81)$, $(-1.15, -0.81)$ او $(1.99, 0.81)$ کې.

قطبځايونه**Polstellen** : ناپرېکېدونکي توابع قطبځايونه نه لري.

ګاونډي **Asymptoten** : تابع پريوديکې او نه ثابت دی، نو ګاونډي يا اسيپتوت يا مجاورتونه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د يوې کږې خبرو يا بحث روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترخيرني لاندې نيول کيږي.
سيومتري : صورت ناجوړه او مخرج جوړه دی. تابع نو له دې امله ناجوړه دی، دا په دې معنا چې سرچينې ته سيومتريک دی.
پريوديځيتي يا (تل) بيرته راګرځيدنه: تابع پريوديک نه دی.
برېکيدنځايونه: د مخرج صورت صفرځايونه ± 1 د صورت صفرځايونه نه دي. له دې سره f په $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ ناپرېکيدونکی دی.
صفرځايونه: صورت د $x = 0$ لپاره ورکيږي.
افراطيت :

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2-1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

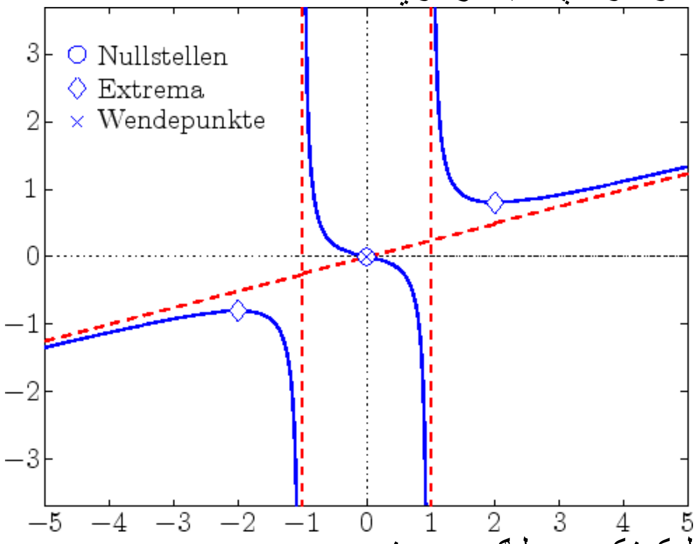
دا چې تابع ساده صفرځايونه لري، افراطيت فقط لوکال يا ځای اړوند دی. د f د ځومره والي حالت خخه کيدی شي تيوب يا ډول لاس ته راشي. دا چې $f(x) \to -\infty$ د $x \to -\infty$ او $x \to -1$ لپاره دی، بايد انتروال $(-\infty, -1)$ يو ماکسيموم ولري. په ورته توګه $(1, \infty)$ لږ تر لږه يو مينيموم لري. نو د مشتق صفرځايونو ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

سړی یو لوکال ماکسیموم په $(-2,-4/5)$ او یو لوکال مینیموم په $(2,4/5)$ کي لاس ته راوړي.
اوړونټکي یا نقاط انعطاف:

$$f''(x)=\frac{-80x^5+398x^3+42x}{20(x^2-1)^3}\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad x=0$$

داچې په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی، نو $(0,0)$ یو اوړونټکی دی.
قطبځایونه: تابع په $x=\pm1$ کې ساده قطبځایونه لري.
اسیمپتوت یا ګاونډېتوب: یو د پولینوم وېش $p(x)=5x/20+0=x/4$ د ګاونډتوب په حیث راکوي



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د کړې خبرو اترو د ښوولو یا روښانه کولو ته تابع

$$f(x)=e^{-x^2}+\frac{4|x|}{e^4}$$

څېړل کیږي.

سیمټري : دا چې x^2 او $|x|$ جوړه دي، تابع جوړه دی، دا په دې معنا چې سیمټر و y - محور ته.
پریودیځیتي یا تل ببرته راګرځېدنه: تابع پریودیک نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرېکړېدنوالي ځایونه: تابع له ناپرېکړېدونکو توابعو څخه سره یوځای شوې ده او له دې امله پرېکړېدنځایونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت تابع لپاره په هرحالت مشتق په صفرټکي کې ناپرېکړېدونکی نه دی.
صفرځایونه: اکسپوننشل توابع تل مثبت یا زیاتیز دي، د مطلق ارزښت تابع نه منفي دي. نو صفرځایونه نه شته.
افراطیت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\operatorname{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\,.$$

برسیره پردې دې افراطی ټکی په $x = 0$ کې ،څېړل شي، چېرته چې مشتق پرېکړېدونکی دی. دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف دی، نو د x لپاره د $\pm\infty$ ته د تلنې حالت هم باید په پام کې ونیول شي.
دا چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره دی، نو f لږ تر لږه یو ګلوبال مینیموم لري، مګر کلوبال ماکسیموم نه لري. د y ارزښت په پرتله کریتیکال ټکی

$$(-2, 9/e^4) \qquad (0,1) \qquad (2, 9/e^4)$$

ښایي، چې ګلوبال مینیموم په $x = \pm 2$ کې نیول کیږي. دا چې f په انتروال $[-2,2]$ کې مینیموم او هم یو ماکسیموم لري، ترې لاس ته راځي چې $(0,1)$ یو لوکال ماکسیموم دی.
اوړونټکی یا د انعطاف ټکی:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

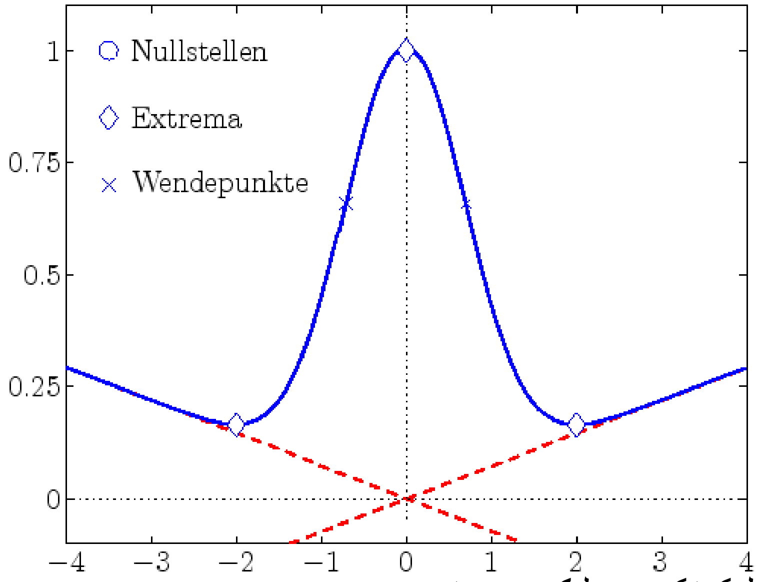
دریم مشتق په دې ځایونو $0 \neq$ کې دی. ترې لاس ته راځي چې f یو اوړنټکی

$$\left(\pm 1/\sqrt{2},\ e^{-1/2} + \frac{4}{\sqrt{2}\,e^4}\right).$$

لري.
قطبځایونه: تابع قطبځایونه نه لري.

ګاونډي یا مجاورتها: دا چې e^{-x^2} د $|x|$ لپاره د صفر په لور ګړندی دی، تابع ګاونډیان $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ او $p_-(x) = \frac{-4x}{e^4}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

ریمن-انتیګرال Riemann-Integral

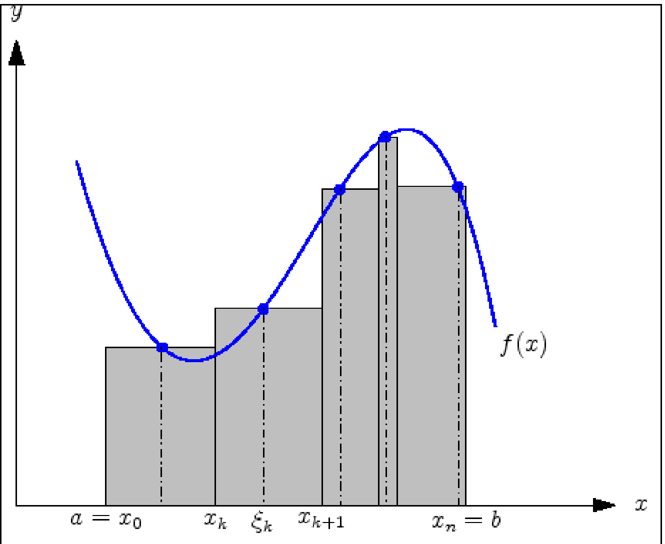
د یوه ناپرېکېدونکي تابع f یو تاکلی انتیګرال د

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0}\int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

<table>
<tr>
<td>
له لارې تعریف شوی دی. دلته د $\Delta:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ یوه توټه کونه ښايي،

$$|\Delta| = \max_k \Delta x_k\ ,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\ ,$$

یو ماکسیمال انټروال دی او ξ_k په k – م انټروال یو په خوښه ټکی دی. د انتیګرال تعریف په ښی لور زیاتون یاجمعه د ریمن زیاتون یا – جمعه بلل کیږي.
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتیز یا مثبت f لپاره $\int_a^b f(x)\,dx$ د f د ګراف کښته لورته سطحه په ګوته کوي

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر، ویپپر

که $f(x)$ ناپرېکیدونکی مشتقوړ وي، نو د مشتقشمېرنې د منځ ارزښت جملې څخه د لپاره باور لري

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le (x_2 - x_1) \max_{x\in[x_1,x_2]} |f'(x)|$$

Δ_i دې د ټوټه ونو یوه پرله پسې وي د $|\Delta_i| \to 0$ سره. د تابع پرلپسې دوه توکي Δ_m او Δ_n را اخلو او د Δ ټوټه ونه را اخلو، چې د Δ_m او Δ_n د نورو یا ورېسې یل لاندې ټوټه کونو له لارې منځ ته راځي ، چېرته چې Δ_m د لاندې یا ورپسې ټوټه ونو ټکي $x_i\,,\, i = 0, \ldots, k_m$ دي او Δ ټکي $z_i\,,\, i = 0, \ldots, k$ لري، نو د $\zeta_j \in [z_{j-1}, z_j]$ سره باور لري

$$\left|\int f_\Delta - \int f_{\Delta_m}\right| = \left|\sum_{j=1}^{k} f(\zeta_j)\,\Delta z_j - \sum_{i=1}^{k_m} f(\xi_i)\,\Delta x_i\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1}\le z_{j-1}<z_j\le x_i} (f(\zeta_j) - f(\xi_i))\Delta z_j\right|$$

$$\le |\Delta_m| \max_{t\in[a,b]} |f'(t)| \underbrace{\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1}\le z_{j-1}<z_j\le x_i} \Delta z_j}_{b-a} .$$

په ورته تګه باور لري

$$\left|\int f_\Delta - \int f_{\Delta_n}\right| = O(|\Delta_n|)\,,$$

او له دې سره

$$\left|\int f_{\Delta_m} - \int f_{\Delta_n}\right| \to 0$$

د $n, m \to \infty$ لپاره . د ريمن –زياتون نو يوه کوشي-پرلپسي جوړوي، نو پولې ته تلونکي دي.

په ورته توګه د دوه پرلپسيو و همغې يا برابرې پولې ته تلنه وښوول شي.

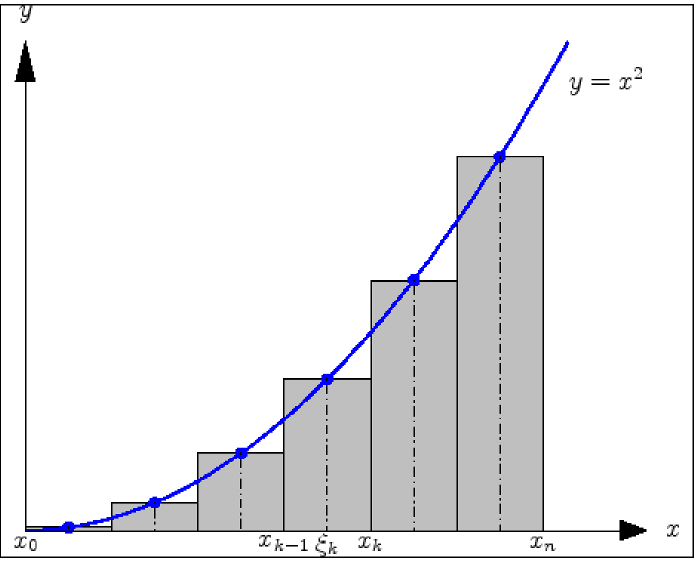
د توته ناپرېکېدونکو f ښوونه تخنيکي داسي لږ پېچلي ده. سړی د f د ناپرېکېدني انټروال بېل يا جدا ترخېړني نيسي او هلته د برابرړوله ناپرېکېدني ځخه ګټه اخلي:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le \varepsilon \qquad \text{für} \quad |x_1 - x_2| < \delta\,.$$

دا اټکل د منځ ارزښت جملې په ځای رامنځ ته کيږي او نور دلايل په ورته وګه مخ ته بيولکيږي.

ليکونکي: هيوليګ، هيوررنر

ريمن –انتيکرال په حيث د $\int_0^1 x^2\,dx$ شمېرلو کيدی شي د توته ونې پرلپسي وکارول شي د n-م توته ونې لپاره د ارزښتونو ځايونو $\xi_i = (2i-1)/(2n)\,,$ $,\ i = 1, \dots, n\,,$ سره.



د تعريف سره سم لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$\int f_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4n^3} \left(4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right)$$

$$\frac{1}{4n^3} \left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

او له دې سره .

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د انتيګرال خويونه **Eigenschaften des Integrals**

دا لاندې ټاکلی انتيګرال دا لاندې خويونه لري :

$$\int f + g = \int f + \int g \quad \int r f = r \int f$$

کرښيزوالس, ،

$$f \le g \implies \int f \le \int g$$

همغږيزوالی :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

زياتون يا جمعه

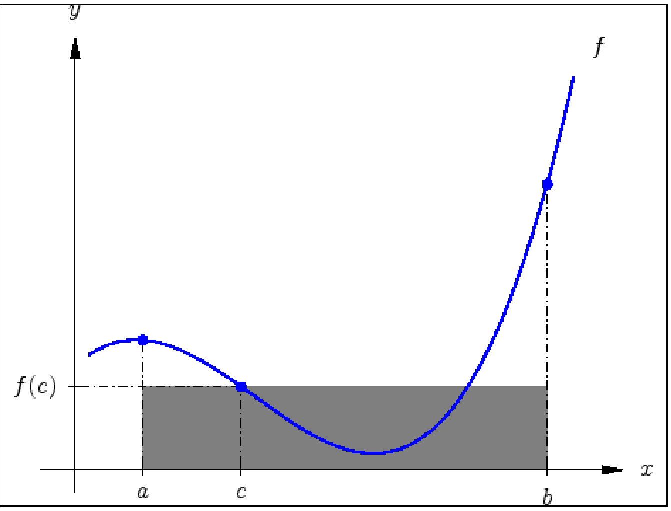
$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

د وروستيو خويونو د همغږيزونې له امله سړی تعريفوي: .

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د انتيګرالشميرنې منځ ارزښت جمله
Mittelwertsatz der Integralrechnung

(c) ketabton.com: The Digital Library

که f او g په $[a,b]$ ناپرېکېدونکي توابع وي او g د مخنخښي بدلون ونه لري ، نو $c \in [a,b]$ شتون لري د $\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g.$ سره	

په ځانګي توګه ، لکه په خبره کې چې ليدوړ دي، دی $\int_a^b f = (b-a)f(c)$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

بې له تولېزو بنديزونو دې $g \geq 0$ وي. د انتيګرال د اتکل له لارې

$$(\min_{[a,b]} f)\, g(x) \leq f(x)g(x) \leq (\max_{[a,b]} f)\, g(x)$$

لاس ته راځي

$$(\min_{[a,b]} f) \int g \leq \int fg \leq (\max_{[a,b]} f) \int g .$$

دا چې f د منځارزښت جملې له مخې د $\min f$ او $\max f$ ترمنځ هر ارزښت نيسي، نو غوښتونی برابروالی راکوي.

په تولېزه توګه وړاندنيونه ده، چې g د مخنخښي بدلون نه لري، اړيين، لکه د بېلګې

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x^2\, dx}_{>0} = \int_{-1}^{1} x \cdot x\, dx \neq c \int_{-1}^{1} x\, dx = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځخه لیدل کیږی.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

بنسټیز – یا ساده توابع **Stammfunktion**

یو تابع F د f بنسټیز ت ابع دی، او د دې لپاره لیکو سره د $F' = f$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

د ټولو بنسټیز توابعو ډېرۍ لپاره، چې د f ناټاکلي انتیګرال بلل کیږي.
د انتیګرالونې ثابته c په خوښه ده. د بېلګې په توګه دی

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$F_a(a) = 0$$

د سره یو ممکنه لومړی یا بنسټیزه تابع.
نه ټولو بنسټیزو توابعو ته داسې روښانه د بنسټیزو توابعو اکسپلیځیت ورکړه شونې ده،

$$f(x) = \exp\left(x^2\right)$$

یوه بېلګه ده .
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د انتیګرالشمیرنې اصلي جمله یا قضیه **Hauptsatz der Integralrechnung**

که F د یوه ناپرېکېدونکي تابع f بنسټیز یا لومړنی تابع وي ، دا په دې معنا چې $f = F'$ وي، نو باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

همداسې په لنډه لیکندول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f = [F]_a^b .$$

يو بنئتيز انتيګرال کېدی شي د انتروال په پای ټکو کې د بنسټيزو توابعو د تابع ارزښتونو د کمښت په ډول وشمېرل شي
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

که دواړه خواوې د b تابع په څېر راوړل شي، نو بسيا کوي وښايو، چې دواړه خواوې برابر مشتق لري، ځکهچې د $b = a$ لپاره ارزښت سره سرخوري(دواړه خواوې صفر دي).
د کيڼ اړخ لپاره لرو

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{b+h} f - \int_a^b f \right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f .$$

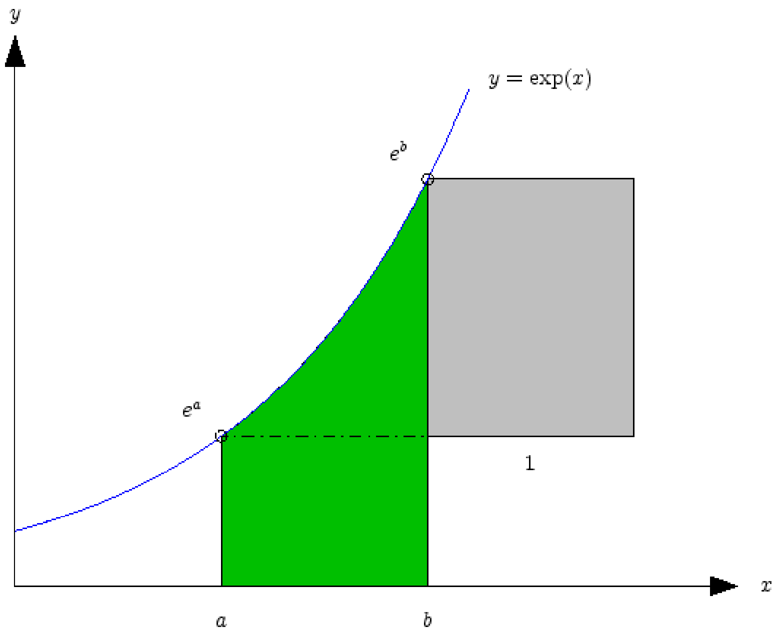
د منځ ارزښت جملې پسې يا په تعقيب انتيګرال مساوي دی په $(b + h - b)\, f(c)$
د $c \in (b, b + h)$ سره.
پوله ارزښت برابر دی په $f(b)$. دا د ښي اړخ د مشتق سره سر خوري يا يو غبرېز دی
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د اکسپننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشل تابع دی او له دې امله دی

$$\int_a^b e^x\, dx = e^b - e^a .$$

د a د او b ترمنځ ګراف لاندې سطحه برابره د ولاړګوډېزر(مستطيل) د سطحې سره د سور 1 او د تابع ارزښت دواټن د اوږدوالي په حيث.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لوکايتم تابع $F(x) = \ln(x)$ مشتق $F'(x) = 1/x\,,\ x \in \mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x\,dx = \ln(b) - \ln(a)\,, \quad a,b \in \mathbb{R}^+\,.$$

د $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ يو بنسټيز تابع $F(x) = \arctan x$ دی . د دې په تعقيب دی

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

د مشتقوني ځخه لاس ته راځي، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = \tan x$ یو بنسټیز تابع دی

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

په تعقیب دی:

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347 .$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د M کتلي یو ستوری یو د کښنولو ورشو تولیدوي، چې د هغې له خوا په یوه کتله m یو زور $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ واردوي . دلته γ د ګراویټیشن یا راکښنې قوه ده او x د دروندتکو ترمنځ واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره یو لومړنی یا بنسټیز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې یو تن له واټن a و واټن b ته یوړولی شو ، باید کار

$$\int_a^b F(x) \, dx = \gamma m M \int_a^b \frac{1}{x^2} \, dx = -\left[\gamma m M/x\right]_a^b = \gamma m M(1/a - 1/b)$$

سرته ورسیږي.

د a لپاره د ستوري د وړانګې سرره برابر او $b \to \infty$ کېدی شي د برابر اینښوونې له لارې د کینیتیکي انرژي سره چې داسې په نامه د تېښتې چټکتیا v ټاکي دا په دې معنا چې چټکتیا ، چې اړین ده، چې د یوه ستوري راکښنقوه پرېښودی شي یا راکښنقوې څخه ووځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{m}{2}v^2 = \gamma\frac{mM}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma\frac{2M}{a}}\,.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2\,\mathrm{km/s}$. دی .
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د بنسټيزو توابعو لومړني توابع Stammfunktionen der Grundfunktionen

لاندې جدول بنسټيزو توابعو $f(x)$ ته لومړني توابع $F(x)$ ښايي

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
$x^s\,,\ s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

ټوټه- يا پارشل انتيګرالونه Partielle Integration

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق د ضرب قانون $(fg)' = f'g + fg'$ څخه په ورته توګه فرمول بندي له لارې د ناټاکلي انتيګرال لپاره راکوي:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

په اړونده توګه د ناټاکلو انتيګرالونو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

لپاره باور لري. د لته دې په پام کې ونيول شي، چې د ژۍ ترم $[fg]_a^b$ ورکيږي، که د دواړو توابعو څخه يو يې د انتروال پای ټکو کې صفر وي. په همدې توګه د پريوديکي تابع لپاره د پريود اوږدوالي $(b-a)$ کې هم له منځه ځي.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

له $\int (1+x)^\alpha\,dx = \dfrac{1}{\alpha+1}(1+x)^{\alpha+1} + c$ څخه د $\alpha \neq -1$ لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \int \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1+x}}\,dx &= x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx \\ &= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c. \end{aligned}$$

په ورته توګه شميرل کيږي

$$\begin{aligned} \int_0^1 \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1-x}}\,dx &= \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx \\ &= 0 - \left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,. \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو لوګاریتمي ضریب د یو ځل ټوټه انتیګرالونې له لارې له منځه تلی شي.
د بیلګې په توګه دی

$$\int x^n(\ln|x|)\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1}\,\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + c\,.$$

په دې ډول کیدی شي په خوښه پولینومونه

$$\sum_{j,k} a_{j,k}x^j(\ln|x|)^k$$

په x او $\ln|x|$ کې انتیګرال شي یا انتیګرال ونیول شي.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د ټوټه اتیګرالونې له لارې کېدی شي د پولینوم درجه کمه شي. د بېلګې په توګه دی

$$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x\,dx$$
$$= x^n e^x - n x^{n-1} e^x + \int n(n-1)x^{n-2}e^x\,dx$$
$$= \cdots$$
$$= e^x \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x^k + c\,.$$

په دې توګه نېدی شي د $n \in \mathbb{N}$, $x^n\,e^{\beta x}$, بنې ترمونوکمبینېشن په خوښه انتیګرال شي یا یې انتیګرال ونیول شي. لیکونکي: هیولیک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x^n \cos x$ او $x^n \sin x$ ضربونه کېدی شي د ډېرواره ټوټه انتيګرالونې له لارې انتيګرال شي:

$$\int x^n \left\{ \begin{matrix} \cos x \\ \sin x \end{matrix} \right\} dx = x^n \left\{ \begin{matrix} \sin x \\ -\cos x \end{matrix} \right\} - \int n x^{n-1} \left\{ \begin{matrix} \sin x \\ -\cos x \end{matrix} \right\} dx$$
$$= \ldots .$$

د تکرار ټوټه انتيګرالوني له لارې بالاخره ضريب x^k له منځه ځي. په دې توګه کېدی شي د په خوښه پولينوم توابعو لومړنی تابع په x, $\sin x$ او $\cos x$ کې وشمېرل شي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

له $\cosh'(x) = \sinh(x)$, $\sinh'(x) = \cosh(x)$ څخه لاس ته راځي

$$\int e^x \sinh(x)\, dx = e^x \cosh(x) - \int e^x \cosh(x)\, dx$$
$$= e^x \cosh(x) - e^x \sinh(x) + \int e^x \sinh(x)\, dx$$

او له دې سره لکه چې برېښي

$$e^x \cosh(x) = e^x \sinh(x),$$

يو په ځرګنده توګه مخامخوالی يا تضاد دی.
ناټيکاوی په اخرنظ پايونه کې پروت دی – د انتيګرالنيوني ثابته بايد په پام کې ونيول شي:

$$e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} + c\,.$$

د $c = 1$ ټاکنه مو ټيکې نتيجې ته لارښودوي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ټوټه انتيګرالوني سره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx,\ (a \neq 0).$$

د ویم ځل انتیګرالونه مو بېرته برابر انتیګرال ته ته بیایي، او له دې سره لاس ته راځي:

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{ae^{ax}\sin(bx) - be^{ax}\cos(bx)}{a^2+b^2} + c$$

بدیلي سړی

کړی شي د اویلر-مویورې فرمول هم د پورته ډول انتیګرال شمېرنو ته استعمال کړي. د

$$\cos(t) = \mathrm{Re}\,(\exp(\mathrm{i}t))$$

بېلګې په توګه له لاس ته راځي

$$\int_0^{\pi} e^t\cos(t)\,dt\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi}\exp(t+\mathrm{i}t)\,dt\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\exp(t+\mathrm{i}t)}{1+\mathrm{i}}\right]_0^{\pi}\right)$$

$$= \qquad \mathrm{Re}\left(\frac{-e^{\pi}-1}{1+\mathrm{i}}\right) = -(e^{\pi}+1)/2\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

له

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = -\int_{-\pi}^{\pi} n\cos(nx)\left(-\frac{1}{m}\cos(mx)\right)dx$$
$$= \frac{n^2}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx$$

د $m \neq n$ لپاره لرو

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0\,.$$

په پام کې دې ونیول شي، چې د تابع پریودیځیتي یا تل بېرته رتګرځېدنه په ټوټه انتیګرالونه کې د ژې شرایط له منځه ځي. د $m = n$ لپاره د لومړي مساوات او

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx=2\pi\,.$$

په ورته توګه سړی د تابع $\cos(mx)$ اورتوګونالیتي ښايي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

Delta-Funktion دلتا - تابع

د دیراکDiracsche دلتا-تابع δ د

$$\int_{\mathbb{R}}\delta f=f(0)$$

له لارې تعریف دی، د کوم سره چې یو په خوښه ناپرېکیدونکی تابع دی، چې د یوه انتروال (a,b) دباندې وکیږي. د ټوټه انتیګرالوني په مرسته یا په یوه پوله پروسه کېدی شي δ د Heavisideschen ټوپتابع د مشتق ټولیزوالي

$$H(x)=\begin{cases}1, & \text{für } x>0\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

په حیث تشریح کیدی شي.

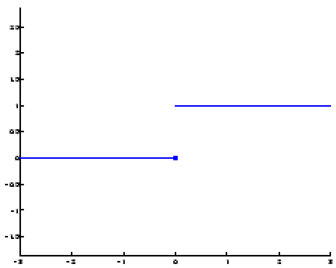
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

که $0\in(a,b)$ وي، نو د ټوټه انتیګرال سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{b}H'f&=[Hf]_a^b-\int_a^b Hf'\\&=-\int_0^b f'=-[f]_0^b\\&=f(0)\end{aligned}$$

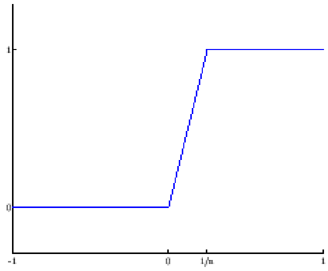
او له دې سره $\int H'f=\int\delta f$.

(c) ketabton.com: The Digital Library



Heaviside-Funktion

H

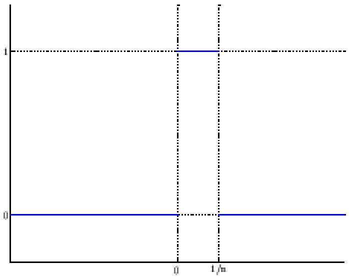


نږدېوالی

H_n

Näherung

der Heaviside-Funktion



نږدېوالی

$\delta_n = H'_n$

Näherung

der Delta-Funktion

په د پوله پروسې سره د جوړ شوې د Heavyside-Funktion اپروکسیمیشن سره سړی بدیل لاس ته راوړي :

$$\int_a^b H'_n f = n \int_0^{1/n} f = f(t_n) \to f(0)\,.$$

له دې سره د اخرني مساوات لپاره د منځ ا رزښت جمله کارول شوې.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د متحولو – یا اووښتونو بدلون **Variablensubstitution**

د ځنځیري قاونو

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

څخه د بدلون $y = g(x)$ لپاره لومړنیو تابع جوړولو له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y) + c = \int f(y)\,dy .$$

په ورته توګه د ټاکلي انتيګرال لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

.

د دفرنشل کونو په ورسته کېدی شي دا فرمول په لاندې بڼه

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

وليکل شي.

يو ساده ځانګړی حالت يو کرښيز متحول بدلون دی

$$x \mapsto y = px + q .$$

په دې حالت کې دی

$$\int f(px+q)\,dx = \frac{1}{q}F(y) + c$$

همداسې

$$\int_a^b f(px+q)\,dx = \frac{1}{p}\,[F]_{pa+q}^{pb+q} .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د انتيګرال

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x} dx$$

لپاره بدلون $dx = \frac{1}{\varepsilon}du$, $u = \varepsilon x$ او د انتيګرالونې پولو ترانسفورميشن $x = \pi/\varepsilon \leftrightarrow u = \pi$ راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

په ټولیزه توګه د یو بدلون $u = rx$ سره باور لري

$$\frac{dx}{x} \to \frac{du}{u}$$

او له دې سره

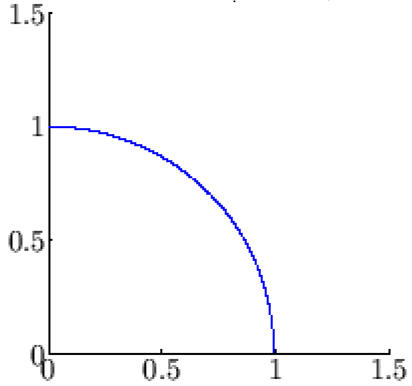
$$\int_a^b f(rx)\frac{dx}{x} = \int_{ra}^{rb} f(u)\frac{du}{u}.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

تابع

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \le x \le 1,$$

دا جوړه شوې څلورمه برخه ګردۍ یا څلورمه برخه دایره ښایي



له دې سره د انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}.$$

که بدلن $x = 0 \to u = 0$ ، $dx = \cos u\, du$ ، $x = \sin u$ وکارول شي او
$x = 1 \to u = \frac{\pi}{2}$
، نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\,,$$

لکه ځنګه چې انتظار کېده. د اخرني مساوات لپاره دا لاندې

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 u + \cos^2 u\,du = \frac{\pi}{2}$$

وکارول شو.

په عجیبه ډول بدلون $x = \cos u,\quad dx = -\sin u\,du$,

او $x = 0 \rightarrow u = -\pi/2$ $x = 1 \rightarrow u = 2\pi$ په برېښنده توګه یوه ناټیکه نتیجه راکوي:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} -\sin^2 u\,du = -\frac{5\pi}{4}.$$

څه ناټیک وو؟ په کلکه نیولې توګه باور لري

$$\sqrt{1-\cos^2 u} = |\sin u|$$

او له دې سره

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} |\sin u|(-\sin u)du = \frac{\pi}{4}.$$

د لاندې انتیګرال لپاره

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

بدلون $y = (x-3)/2 \quad dx = 2dy$, راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ورپسي بدلون f $y = \cosh t$, $dy = \sinh t\, dt$ سره د

$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ له امله لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} &= \int \frac{\sinh t\, dt}{\sinh t}\\ &= \int dt = t + c\\ &= \operatorname{arcosh} y + c\\ &= \operatorname{arcosh}((x-3)/2) + c\\ &= \ln\left(\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right) + c\end{aligned}$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس تهراځي

$$\begin{aligned}\int_5^7 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} &= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) - \ln 1\\ &= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}).\end{aligned}$$

که په انتګرالېدونکي کې دننه مشتق پېژندل کیږي، لکه د بېلې په توګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx\,,$$

لپاره، نو د بدلون قانون په ځانګړې توګه ساده دی. په دې بېلګه کې

$$y = g(x) = \ln x\,, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

ځای په ځای کوو او لاس ته راوړو

$$\int g(x)^2\, g'(x)\, dx = \int y^2\, dy = \frac{1}{3}y^3 + c\,.$$

د په څټ یا معکوس بدلون سره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\, dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

په تيوپيکي توګه سړی هڅيږي چې د بدلون له لارې انتيګرالېدونکی ساده کړي. د بېلګې په توګه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y}-1}\, dy$$

لپاره نږدې دی چې

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

کيږدي. دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله دا ترانسفورمي شوی ناټاکلی انتيګرال راکوي

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\, \frac{dy}{dx}\, dx = \int \frac{x^2}{x^2-1}\, dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right) dx$$

$$\int 1\, dx + \int \frac{1}{x^2-1}\, dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c\,.$$

د $x = e^y$ دبېرته بدلون له لارې بالاخره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2}\left|\frac{e^y-1}{e^y+1}\right| + c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

لومړی (بنسټيزه -) تابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

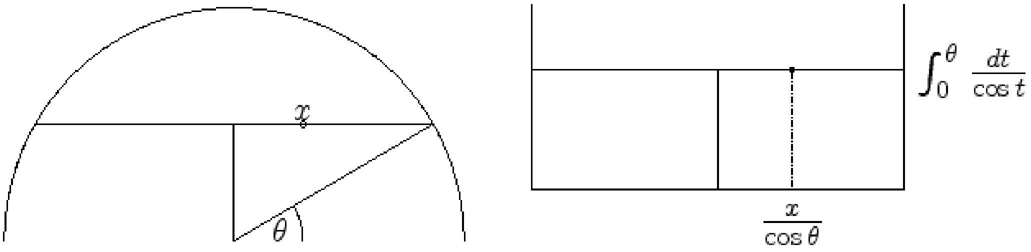
کیدی شي د بدلون سره

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1+\sin x}{\cos x}, \qquad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx,$$

وشمېرل شي:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos x} &= \int (\cos x)^{-1} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} du \\ &= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c.\end{aligned}$$

یو کارونه یې د Mercator-Projektion دی. له دې سره د ځمکې بورته سطحه کونجرینتونې په سطحه برېوځي.



د سور گردی (طول البلد) له دې سره د $1/\cos\theta$ په نسبت سره غزیږي.

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

ساده راشنل انتیگرالیدونکې د ساده قطب سره
Elementare rationale Integranden mit einfachen Polen

د درې بنستیتیوپه راشنل توابعو لومړنی توابع دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \qquad \frac{1}{a}\ln|x+b/a|+c$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \qquad \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+c$$

$$\int \frac{(x-a)dx}{(x-a)^2+b^2} = \qquad \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+c$$

ليکونکي: هيوليگ، کوپف

فرمولونه کېدی شي ترلي د مشتق له لارې پسې وشمېرل شي. بديل يې د انتيگرال ساده بڼه بدلونونه شوني دي.

له $\int dy/y = \ln|y|+c$ لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x+b/a} = \frac{1}{a}\ln|x+b/a|+c.$$

د بڼه بدلون پسې

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{((x-a)/b)^2+1}$$

بدلون $dx = b\,dy$, $y=(x-a)/b$ راکوي

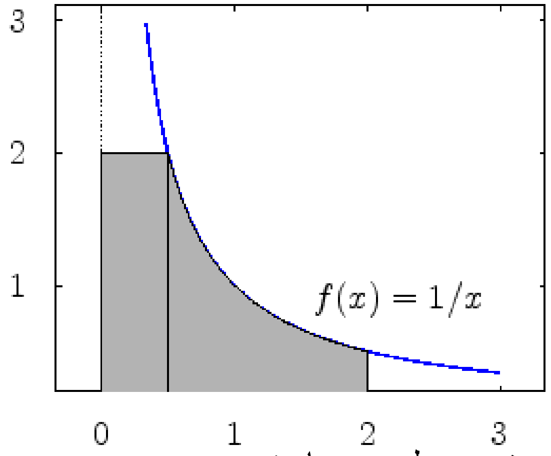
$$\frac{1}{b}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{b}\arctan y + c = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+c.$$

د بدلون , $y=(x-a)^2+b^2$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{(x-a)\,dx}{(x-a)^2+b^2} = \qquad \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln|y|+c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

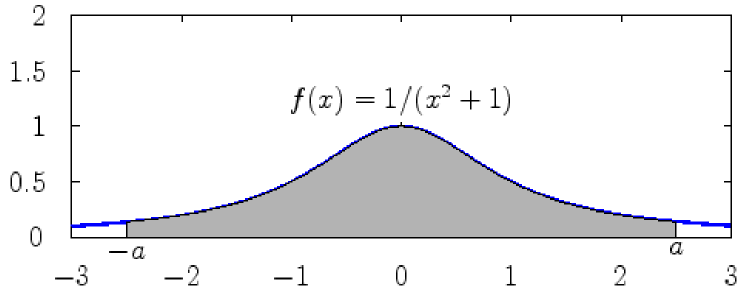
$$= \qquad \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+c.$$



د خړې سطحې مساحت د

$$2\frac{1}{2}+\int_{1/2}^{2}\frac{1}{x}dx = 1+\ln 2-\ln\frac{1}{2} = 1+\ln 4$$

له لارې شمېرل کيږي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف



د $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ د ګراف لاندې سطحه داسې شمېرل کيږي

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}\arctan a-\arctan(-a) \longrightarrow \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$r(x) = \frac{3x+6}{2x^2-4x+10}$$

لومړی تابع ټاکلو لپاره، لومړی د مخرج مربعتکمیلونه جوړیږي:

$$2(x^2-2x+5) = 2((x-1)^2+2^2)\,.$$

په اړونده توګه صورت هم بڼه بدلیږي:

$$3(x+2) = 3((x-1)+3)\,.$$

له دې سره کېدی شي د ستاندارد افادې په توګه ټوټه یا تجزیه شي:

$$r(x) = \frac{3}{2}\,\frac{x-1}{(x-1)^2+2^2} + \frac{9}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2+2^2}\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int r(x)\,dx = \frac{3}{4}\,\ln\left((x-1)^2+4\right) + \frac{3}{4}\,\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c\,.$$

د ټاکلی انتیګرال $\int_1^3 r(x)\,dx$ لپاره سرې د پولو د په ځای اینوونې له لارې لومړنۍ تابع لاس ته راوړي

$$\frac{3}{4}\left(\ln 8 - \ln 4 + \arctan(1) - \arctan(0)\right) = \frac{3}{4}\,\ln 2 - \frac{3}{16}\,\pi\,.$$

لیکونکي: هیولیګ،

ساده راشنل انتیګرالونه د زیاتواره قطب سره

Elementare rationale Integranden mit mehrfachen Polen

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = -\frac{1}{n}(x-a)^{-n} + c\,.$$

د ډېرواره کمپلکس کنجوګيري قطبځايونو کې د اړونده مربع

$$q(x) = (x-a)^2 + b^2$$

ضربيونو لپاره باور لري

$$\int \frac{c(x-a)+d}{q(x)^{n+1}}\,dx = \frac{d(x-a)}{2b^2n\,q(x)^n} - \frac{c}{2n\,q(x)^n} + \frac{d(2n-1)}{2b^2n}\int \frac{dx}{q(x)^n}\,.$$

د ګراد يا درجې ردکشن د لومړنې تابع رکورزيو شمېرنه شوونې کوي.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

لومړنی فرمول د $y = x-a$ او $dx = dy$ د د بدلون له لارې لاس ته راځي:

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = \int y^{-n-1}dy = -\frac{1}{n}y^{-n} + c\,.$$

د دويم فرمول د ښوونې لپاره لومړی يو ساده د رکوزيون فرمول منځ ته راځي.

د ټوټه انتيګرالونې سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\int \frac{y^2}{(1+y^2)^{k+1}}\,dy \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\left(\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} - \int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}}\right)\,.\end{aligned}$$

له دې کتمتوالی منځ ته راځي

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}} = \frac{y}{2k(1+y^2)^k} + \frac{2k-1}{2k}\int \frac{1}{(1+y^2)^k}\,dy\,.$$

له دې سره اوس د بدلون $y = \frac{x-a}{b}$ سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}} = \frac{1}{b^{2n+2}} \int \frac{dx}{((\frac{x-a}{b})^2+1)^{n+1}}$$
$$= \frac{1}{b^{2n+1}} \int \frac{dy}{(1+y^2)^{n+1}}$$
$$= \frac{1}{b^{2n+1}} \left(\frac{y}{2n(1+y^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{dy}{(1+y^2)^n} \right)$$
$$= \frac{x-a}{2b^2n((x-a)^2+b^2)^n} + \frac{2n-1}{2b^2n} \int \frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^n} .$$

ترم

$$\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\, dx$$

کيدی شي د بدلون $y=(x-a)^2+b^2$ له لارې وشميرل شي، څکه چې په صورت کې د y مشتق ځای لري:

$$\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\, dx = \frac{c}{2} \int \frac{dy}{y^{n+1}}$$
$$= \frac{c}{2(-n)y^n}$$
$$= -\frac{c}{2n((x-a)^2+b^2)^n} .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د انتيګرال

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+9)^2}\, dx$$

لپاره په ټوليز فرمول کې د اېښوونې وروسته د ډېرواره قطبونو سره د $a=0, b=3, c=2, d=1$ او $n=1$ سره راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{-2}{2(x^2+9)}+\frac{x}{18(x^2+9)}+\frac{1}{18}\int\frac{1}{x^2+9}\,dx$$

او د بنه بدلون پسې

$$\frac{x-18}{18(x^2+9)}+\frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\arctan(\frac{x}{3})+c\right)$$
$$=\frac{x-18}{18(x^2+9)}+\frac{1}{54}\arctan(\frac{x}{3})+c'.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د راشنلتوابعو انيګرالونه **Integration rationaler Funktionen**

د حقيقي ټوټه کسر ټوټه ونې له لارې کېدی شي يو حقيقي راشنل تابع د لاندې درې ساده بنسټيوپ جمعې

$$ax^n\,,\quad \frac{c}{(ax+b)^n}\,,\quad \frac{c(x-a)+d}{((x-a)^2+b^2)^n}$$

د $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}_0$ سره انځور شي. د لومړنيو توابعو په مرسته کېدی شي د دې بنسټيتوابعو لپاره د په خوښه راشنلتوابعو لپاره لومړنۍ توابع وټاکل شي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د

$$\int r(x)dx,\quad r(x)=\frac{x^5+10x^3+5^2-x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

د شمېرلو لپاره لومړی يو ټوټه کسر ټوټه ونه سرته رسوو.
د پولينوم وېش پسې ،

$$r(x)=x+\frac{2x^3+5x^2+8x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

اود مخرج ضربيونو جوړولو پسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$x^4+8x^2-9=(x+1)(x-1)(x^2+9)\,,$$

لاس ته راځي

$$r(x)-x=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{cx}{x^2+9}+\frac{d}{x^2+9}\,.$$

که د اصلي مجراج سره ضب شي، نو لاس ته راځي

$$2x^3+5x^2+8x+25$$

$$= \quad a(x-1)(x^2+9)+b(x+1)(x^2+9)+(cx+d)(x^2-1)$$

$$x^3(a+b+c)+x^2(-a+b+d)+x(9a+9b-c)+1(-9a+9b-d)$$

او د ضريبونو د پرتلې $a=-1$, $b=2$, $c=1$ او $d=2$ له لارې.
يوګوني ترمونه کېدی اوس ساده انتيګرال شي:

$$\int\frac{x^5+10x^3+5^2-x+25}{x^4+8x^2-9}$$

$$= \quad \int xdx+\int\frac{-dx}{x+1}+\int\frac{2dx}{x+1}+\int\frac{xdx}{x^2+9}+\int\frac{2dx}{x^2+9}$$

$$\frac{1}{2}x^2-\ln|x+1|+2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+9)+\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+c.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ساين او کوساين د ضرب انتيګرالونه

د $a^2 \neq b^2$ لپاره د زياتون-يا جمعې قضيې څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = -\frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c.$$

په ځانګړې توګه د ټولګنیزو یا تامعددې a, b لپاره انتیګارل په پریودیکي انټروال $[-\pi, \pi]$ باندې ورکیږي. د ټوټه انتیګرالونې په مرسته لاس ته راځي

$$\int \sin^n(ax)dx - \frac{1}{na}\sin^{n-1}(ax)\cos(ax) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(ax)dx$$

$$\int \cos^n(ax)dx\ \frac{1}{na}\sin(ax)\cos^{n-1}(ax) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(ax)dx.$$

داسې کیدی شي اکسپوننت سوکڅسیو یا تل کم شي. د $n = 2$ لپاره په ځانګړې توګه لاس ته راځي

$$\int \sin^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + c$$

$$\int \cos^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + c.$$

په ځانګړې توګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi$$

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره .
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

که د لومړۍي کټمټوالي د ښي اړخ مشتق ونيول شي، نو سړی لاس ته راوړي

$$\frac{1}{2}\cos\left((a-b)\,x\right) - \frac{1}{2}\cos\left((a+b)\,x\right) .$$

د زياتون – يا جمعي قضيه راکوي

$$\frac{1}{2}\left(\cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx) - \cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx)\right) =$$

$$= \sin(ax)\sin(bx) ,$$

کوم چې د کيڼ لور د انتيګرال سره سر خ وري.

د $\cos^2(ax)$ او $\sin^2(ax)$ لومړنی تابع کېدی شي د ټوټه انتيګرال سره وشمېرل شي. د بېلګې په توګه دی

$$\int \sin(ax)\sin(ax)\,dx$$

=

$$-\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) - \int \left(-\frac{1}{a}\cos(ax)\right)\left(a\cos(ax)\right)\,dx$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) + \int \left(1-\sin^2(ax)\right)\,dx .$$

د $\int \sin^2(ax)\,dx$ پسې حل کونه غوښتونی لومړنی تابع راکوي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د کمپلکس تريګونومتيکي توابعو انتيګرالونه

Integration komplexer trigonometrischer Polynome

له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^{\mathrm{i}kx}\,dx = \frac{1}{\mathrm{i}k}e^{\mathrm{i}kx} + c, \quad 0 \neq k \in \mathbb{Z},$$

څخه د کمپلکس تریګونومتریکي پولینومونو لپاره لاس ته راځي

$$p(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{\mathrm{i}kx}\,,$$

داسې چې
dass

$$\int p(x)\,dx = c + c_0 x + \sum_{0 \neq |k| \leq n} \frac{c_k}{\mathrm{i}k} e^{\mathrm{i}kx}$$

همداسې
sowie

$$\int_{\pi}^{\pi} p = 2\pi c_0$$

باور لري.

د اویلر-مویورې فرمول په مرسته کېدی شي په دې توګه په خوښه پولینومونه په $\sin(kx)$ او $\cos(kx)$ کې انتیګرال شي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\,dx$$

شمdرلو ته د اویلر-مویورې فرمول په مرسته انتیګرال   په لاندې توګه لیکل کیږي

$$\frac{1}{16}\left(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}\right)^4 = \frac{6}{16} + \sum_{k \neq 0} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $2\pi\frac{6}{16} = \frac{3}{4}\pi$ د انتيګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي.

بديلي کيدی شي ټوټه انتيګرال وکارول شي:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \int \sin x \sin^3 x \, dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3\int \cos^2 x \sin^2 x \, dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3\int \sin^2 x \, dx - 3\int \sin^4 x \, dx.\end{aligned}$$

که په $\sin^4 x$ انتيګرال ښی لور ته راوړل شي، نو د درجې کموالی راکوي

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \, dx = -\frac{1}{4} \left[\cos x \sin^3 x\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx \, .$$

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = \pi$$

په مرسته سړی $\frac{3}{4}\pi$ هم د انتيګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي
ليکونکي: هيوليک، پفايل

ټريګونومتريکي بدلونونه **Trigonometrische Substitutionen**

د لاندې بدلونونو په مرسته کېدی شي د ساده الجبري انتيګراليدونکو يوه لړۍ اکسپليځيت يا په ښه هځرګنده توګه وشمېرل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = a\sin t: \quad dx = a\cos t\,dt \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$$
$$x = a\tan t: \quad dx = a/\cos^2 t\,dt \quad \sqrt{a^2 + x^2} = a/\cos t$$
$$x = a/\cos t: \quad dx = a\sin t/\cos^2 t\,dt \quad \sqrt{x^2 - a^2} = a\tan t$$

په بل حالت کې باید د ريښې د پروت محور متحولې لومړی په مربعيز تکميلېدونکې بڼه راړل شي.
ليکونکي: هيوليک، پفايل

د انتيګرال

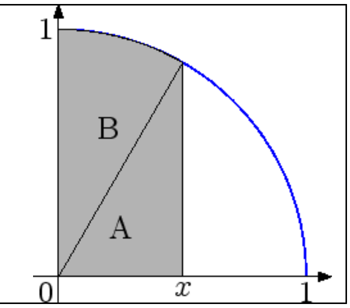
$$\int_0^{1/2} \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

لپاره بدلون $x = \sin t,\ dx = \cos t\,dt$ او د پولو اعیارول $x = 0 \rightarrow t = 0$
او $x = 1/2 \rightarrow t = \pi/6$ راکوي

$$\int_0^{\pi/6} \cos^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}(\sin t\cos t + t)\right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

ناټاکلی انتيګرال دی

$$\int \sqrt{1 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c.$$



انتيګرال کيدی شي د يوه ساده هندسي يا ځمکګچيز اند(فکر) سره هم وټاکل شي

لکه د څيرې څخه چې ليدل کيږي، د $\sqrt{1 - x^2}$ د ګراف لاندې سطحه په دوه برخسطحو ودانه يا جوړه ده.

د درېګوډي سطحې مساحت $A = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2}$ دی او د ګردی برخط يا قطاع مساحت د $t = \arcsin x$ کونج سره $B = \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\arcsin x$ ده. د دې سطحو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

مساحت جمعه کیدل غوښتونې سطحه راکوي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د انتیګرال

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

لپاره د بدلون $x = \tan t, \quad dx = 1/\cos^2 t\, dt$ څخه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt/\cos^2 t}{\tan t/\cos t} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln|\tan\frac{t}{2}| + c,$$

د کوم سره چې اخرنی مساوات د ښی اړخ د مشتق نیولو له لارې ازمایل کېدی شی.
د بېرته بدلون له لارې لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln|\tan(\frac{1}{2}\arctan x)| + c.$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln|\tan\frac{\pi}{4}| - \ln|\tan\frac{\pi}{8}|$$
$$= \ln 1 - \ln\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right)$$
$$= \ln(1+\sqrt{2}).$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د انتیګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

لپاره بدلون $y=(x-3)/2$, $dx=2dy$ راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}.$$

د $y=\frac{1}{\cos t}$, $dy=\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt, \sqrt{y^2-1}=\tan t$ پسې بدلون n سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1}{\cos t}+\tan t\right| + c,$$

د کوم سره چې اخرنی برابروالی د ښی خوا د مشتق نیوني له لارې ازمایل کیدی شي.
د په څټ یا معکوس بدلون پسې د

$$\sin t = \sqrt{1-(1/y)^2}, t = \arccos y = \arcsin\sqrt{1-(1/y)^2}$$

سره لومړنی تابع دلاس ته راځي

$$\ln\left|y+y\sin\left(\arccos\frac{1}{y}\right)\right|+c = \ln\left|y+y\sqrt{1-\left(\frac{1}{y}\right)^2}\right|+c$$

$$=\ln\left|\frac{x-3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right|+c.$$

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

د ساین او کوساین راشنل توابع
Rationale Funktionen von Sinus und Cosinus

د بدلون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = \tan(t/2)$$

سره د یوه په خوبنه راشنل تابع r لپاره لاس ته راځي

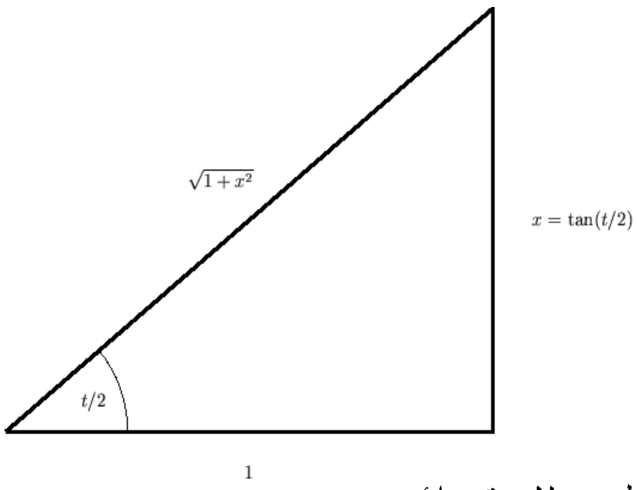
$$\int r(\cos t, \sin t)\, dt = \int r\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right) \frac{2}{1+x^2}\, dx\,.$$

له دې سره تریګونومتریکي تابع کېدی شي په یوه راشنل انتیګرال واړوي، کوم چې د ټوټه کسر ټوټه ونې سره شمېرل کېدی شي.

لیکونکي: هیولیګ، اپریش

لکه د ځیرې څخه چې لیدل کیږي، باور لري

$$\cos(t/2) = 1/\sqrt{1+x^2}\,, \quad \sin(t/2) = x/\sqrt{1+x^2}$$



له دې لاس ته راځي

$$dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2(t/2)}\, dt = \frac{1}{2}\,(1+x^2)\, dt$$

همداسې

$$\cos t = \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2) = \frac{1-x^2}{1+x^2}\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin t = 2\cos(t/2)\sin(t/2) = \frac{2x}{1+x^2}\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، اپريين

د بدلون $x = \tan(t/2)$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{1+x^2}{2x}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} = \ln|\tan(t/2)| + c.$$

په اړونده تګه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$= \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c\,.$$

د $x = \tan(t/2)$ د بېرته بدلون پسې لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1+\tan(t/2)}{1-\tan(t/2)}\right| + c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، اپريين

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څرخیدونو بدنونو ډکی یا حجم Volumen von Rotationskörpern

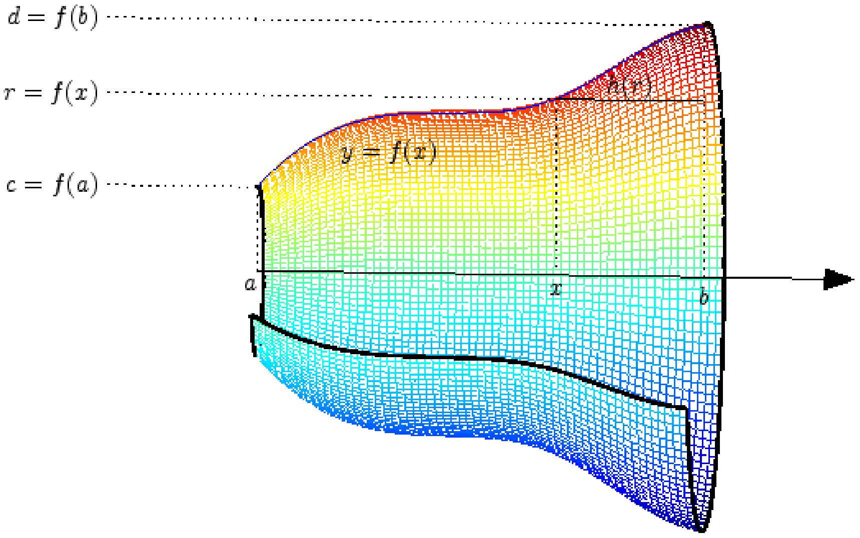
$r = f(x) \geq 0$

د V ډکی حجم د x په محور جوړ شوي بدن د تابع ګراف ,

$a \leq x \leq b$

د څرخون له لارې کېدی شي انتیګرېشن له لارې په ګردی ډوله غوڅي یا تقاطع باندې شمېرل کیدی شي:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx .$$



بدیلي کېدی شي د توتې پوښ باندې انتیګرال شي.

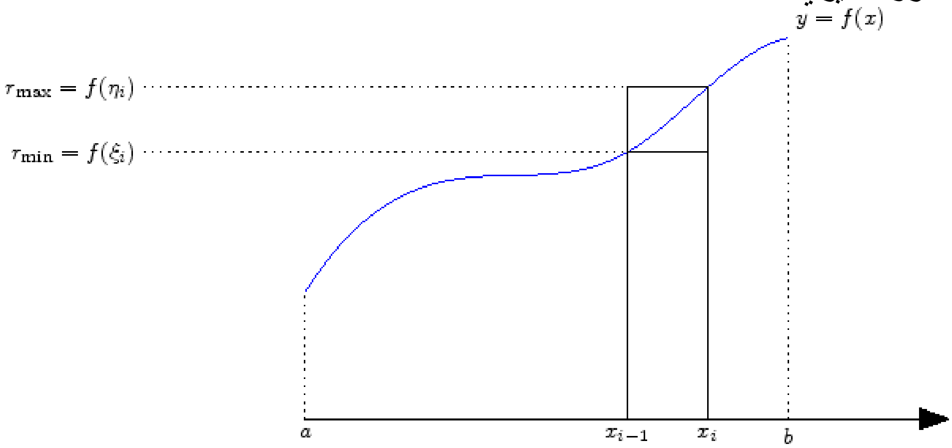
$$V = \pi c^2 (b - a) + 2\pi \int_c^d r \, h(r) \, dr ,$$

چیرته چې c همداسې d مینیمال همداسي ماکسیما وړانګه r او $h(r)$ په بدن کې خوندې توتې پوښ ټول جګوالی دی د وړانګې r سره. دا واریانت له ټولو د همغږیز وړانګې تابع f لپاره موخ وره ده.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي فرمول د ښووني لپاره په څېره کي کښل شوی اپروکسیمیشن یا نږدېوالی کارول کیږي.



یوه ټوټه کوني Δ یوه انتروال $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 \ldots n$, لپاره کېدی شي
ډکی(حجم) د یوې ټوټي

له لاري د مینیمال وړانګي $f(\xi_i)$ سره او یوې ټوټي د ماکسیمال وړانګي $f(\eta_i)$
سره رابند شي. د ټول حجم V لپاره نو بیا باور لري

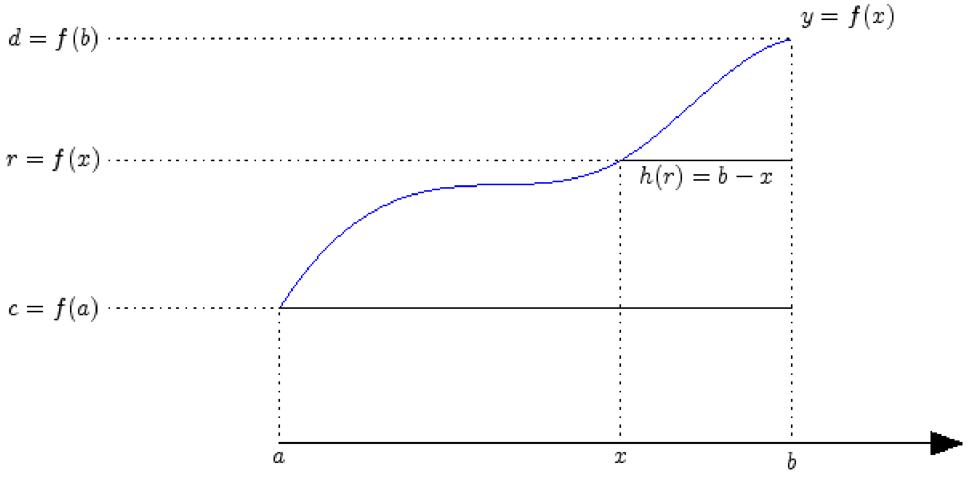
$$\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)^2 \Delta x_i \le V \le \pi \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)^2 \Delta x_i \; ,$$

د $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ سره. دواړه دباندني ترمونه د ریمن-جمعه ده، چې د انتیګرال
ارزښت لور ته ځي، یعني باور لري

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

ددویم فرمول د ښووني لپاره لومړی نیول کیږي، چې f همغږیز جګېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $r=f(x)$, $dr=f'(x)\,dx$ همداسي د $x=f^{-1}(r)$ سره لاس ته راځي

$$2\pi\int_{c=f(a)}^{d=f(b)} h(r)r\,dr = \pi\int_a^b \underbrace{(b-x)}_{u}\underbrace{2f(x)f'(x)}_{v'}\,dx$$

$$= \pi\,(b-x)f(x)^2\Big|_a^b + \pi\int_a^b f(x)^2\,dx$$

$$= \underbrace{-\pi(b-a)c^2}_{\text{innerer Zylinder}} + \pi\int_a^b f(x)^2\,dx\,,$$

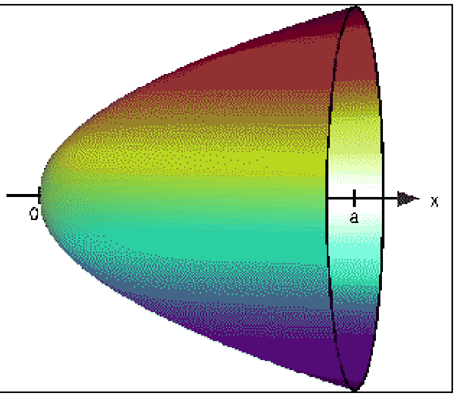
څه چې دويم فرمول په ګوته کوي.

د همغږيز ټيټېدونکي توابعو لپاره کېدی شي په ورته توګه مخ ته ولاړ شو. په ټوليز حالت کې دا د همغږيزوالي ورشو د ټوټه کوني له لارې لاس ته راځي

ليکونکي: هيوليګ، هيوررنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا څیره شوی پارابولويید د کرښې یا منحني
$y = \sqrt{x}$
د څرخون یا څرخېدو له
لارې د x په محور څېره شوی .



د څرخیدونکي بدن د څرخیدنې قانون سره سم ډکی یا حجم دی

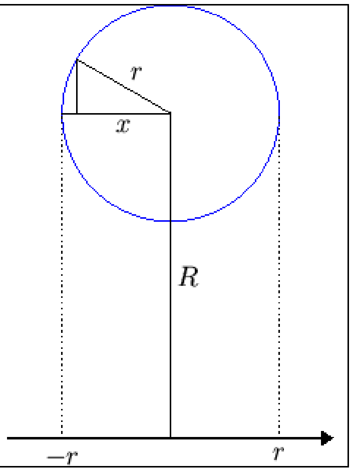
$$\pi \int_0^a (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{1}{2} \pi a^2 \, .$$

بدیلي د توتې پوښ بادې انتیګرلونې له لارې لاس ته راوړي

$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r(a - r^2) dr = 2\pi \left[-\frac{1}{4}(a - r^2)^2 \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \pi a^2 \, .$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

یو توروس (د ګردی یا داېرې کړی
(Torus دیوې ګردی دڅرخون څخه منځ
ته راځي د وړانګې r سره په یوه محور د
منځ ټکي څخه په R واټن.



(c) ketabton.com: The Digital Library

ډکی یا حجم د دوه څرخیدونکو بدنونو د کمښت څخه شمیرل کیږي

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= 4\pi \int_{-r}^{r} R\sqrt{r^2 - x^2}\, dx .$$

د بدلون $dx = r \cos\varphi\, d\varphi$, $x = r \sin\varphi$ سره لاس ته راځي

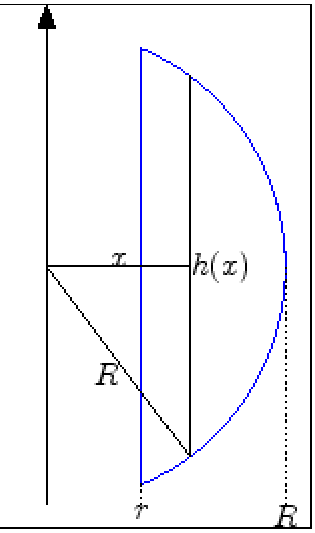
$$V = 4\pi R r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, r \cos\varphi\, d\varphi$$

$$= 4\pi R r^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 R r^2 ,$$

ځکه چې

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2} .$$

لکه چې ښکاره شوی یو له غونډاري د R په وړانګې په پراته محور د وړانګې r سره رابیله شوې توته ده.



د دې لپاره چې ډکي یا حجم شمېرو، د وړانګې $x, r \leq x \leq R$ سره په توته پوښ انتیګرال نیولکیږي . د $R = 5, r = 3$ لپاره د $h(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V = 2\pi \int_r^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 2\pi \left[-\frac{2}{3} \left(R^2 - x^2\right)^{3/2} \right]_r^R$$

$$= \frac{4}{3}\pi(25-9)^{3/2} = \frac{256}{3}\pi\,.$$

د يوې کږې يا منحني اوږدوالى **Länge einer Kurve**

د يوې کږې L اوږدوالى د ناپرېکېدونکي مشتقوړ پارامتريک کولو $t \mapsto p(t)$ سره، $a \leq t \leq b$ ، دى

$$\int_a^b |p'(t)|\, dt\,.$$

پّ ځانګړې توګه د يوې کږې لپاره په xy -سطحه د پارامتريک انځورونې $p(t) = (x(t), y(t))$ سره باور لري

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt\,.$$

په ځانګړې توګه ديوه تابع $y = f(x)\,,\ x \in [c,d]$ ګراف لاندې اوږدوالى لري

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx\,.$$

د $p(a)$ او $p(t)$ ترمنځ د کږو ټوټو اوږدوالى ،

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)|\, d\tau\,,$$

کيدى شي د کانونيکي کږې پارمتر په توګه وکارول شي. سړى داسې په نامه د کږې اوږدوالي پسې پارمتري کونه لاس ته راوړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

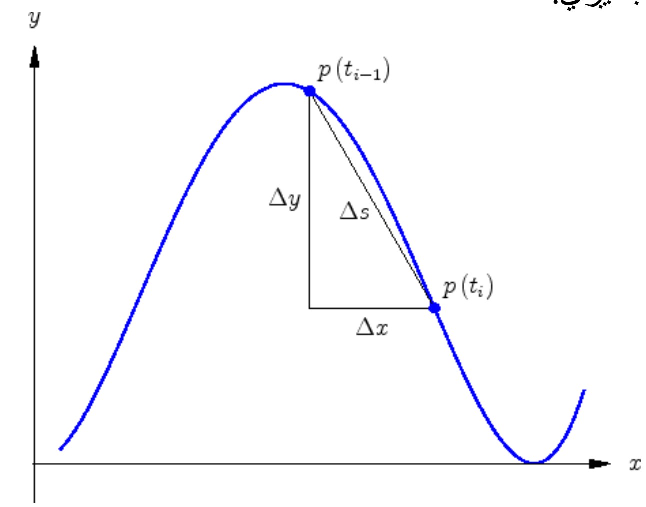
$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1 .$$

د نورمي تانجنت کرښې په بنسټ د کانونيکي پارمتري کونې لپاره باور لري

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s))\, ds$$

د C د L اوږدوالي سره.
ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

د يوې مسطحې کرښې د اږودوالي شميرنې لپاره د پارامتر انټروال بيه ټوټو وېشل کيږي او يو برخه انټروال $[t_{i-1}, t_i]$ لپاره کږه د پای ټکو د ترونکرښې له لارې ځای بدليږي يا بدليږي.



د انټګرال د منځ ارزښت جملې سره بيا باور لري:

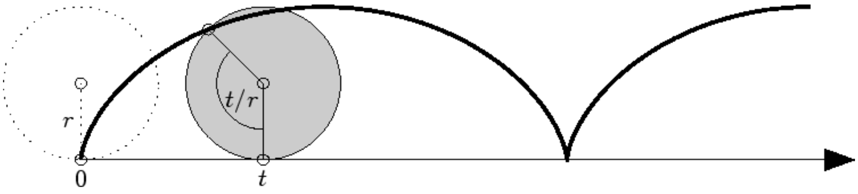
$$\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(p_1'(\xi_i))^2 + (p_2'(\eta_i))^2}\, \Delta t_i ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ سره . دا اخرنی ویینه یا افرده د ورکړ شوي انتیګرال د یمن-زیاتون یا -جمعي دی.
په ورته تګه د ډېرپراخېدونکي یا ډېربعدیز ي کږې لپاره د مشتق نورم د انتیګرال په بنه راکوي.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

که د r وړانګي سره یوه ګردی یا داېره د په محور ګرځوو یا وڅرخوو، نو ژي ټکی یو ځیکلویید تشریح کوي.



د سرچینې لپاره د پیل ټکي په حیث

$$\begin{aligned} x(t) &= t + r\cos(3\pi/2 - t/r) = t - r\sin(t/r) \\ y(t) &= r + r\sin(3\pi/2 - t/r) = r - r\cos(t/r) \end{aligned},$$

د $t \in [0, 2\pi r]$ سره ، د یوې ګږې لیندې یو پارمتري کونه ده.
د لیندې اوږدوالی دی

$$L = \int_0^{2\pi r} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi r} \sqrt{(1 - \cos(t/r))^2 + (\sin(t/r))^2}\, dt\,.$$

د بدلون $s = t/r$, $dt = r\,ds$ او کتمتوالي

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\,, \quad 1 - \cos(2\varphi) = 2\,\sin^2\varphi$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره لاس ته راځي

$$L = \quad r\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos(s))}\,ds = r\int_0^{2\pi} 2\sin(s/2)\,ds = 8\,r\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

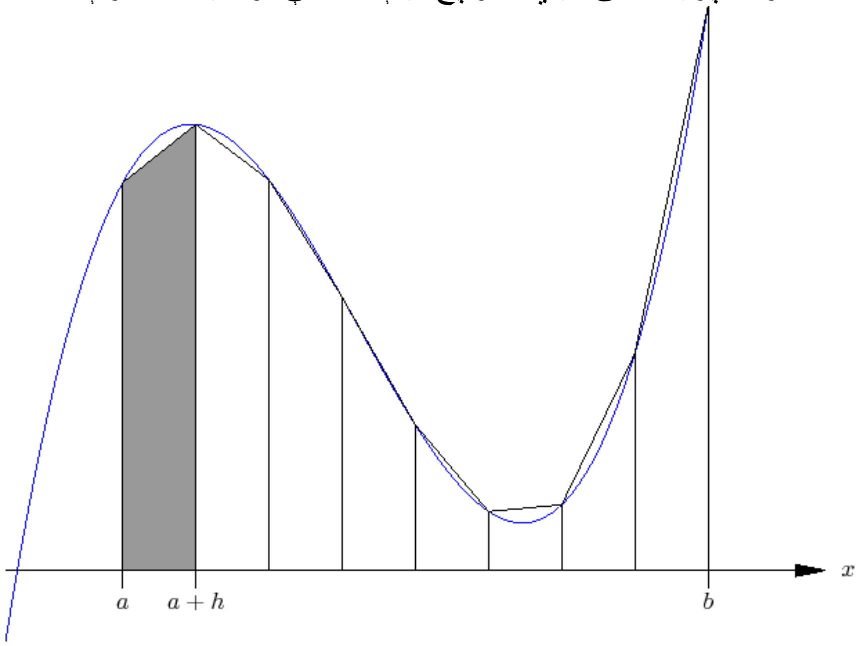
د ذوزنقي قانون **Trapez-Regel**

نږديوالی

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx s_h f =$$

$$= h(f(a)/2 + f(a+h) + \cdots + f(b-h) + f(b)/2)$$

انتيګرال اپروکسيمی کوي د تراپخ يوې سطحې زياتون له لارې.



د يوه دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ تابع د ناتيکاوي پاره باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_h f - \int_a^b f = \frac{b-a}{12} f''(r) h^2,$$

د $r \in [a,b]$ لپاره.

په ټیکه توګه ناټیکاوی د خویو یا هوارو توابعو لپاره ګاونډیز یا اسیمپټوتیکي وده لري

$$s_h f - \int_a^b f = c_1 (f'(b) - f'(a)) h^2 + c_2 (f'''(b) - f'''(a)) h^4 + \dots$$

له f او h څخه خپلواکې ثابتې c_j سره. له دې څخه لاس ته راځي، چې د تراپچ قانون د $(b-a)$-پریودیکي توابعو لپاره خورا دقیق دی. ناټیکاوی ګړندی د صفر په لور ځي نسبت هر h-توان ته.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

په یوه ا نتروال ناټیکاوی دی

$$\frac{h}{2}(f(0) + f(h)) - \int_0^h 1 \cdot f = \int_0^h (t - h/2) f'(t)\, dt.$$

بیا ټوټه انتیګرالونه او منځ ا رزښت جملهې استعمال راکوي

$$-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h) f''(t)\, dt = \underbrace{-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h)\, dt}_{h^3/12} \; f''(r).$$

په ټوټه انتروال باندې د جمعې پسې سړی لاس ته راوړي

$$\frac{1}{12} h^3 \sum_{i=1}^{n} f''(r_i).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمعه کیدی شي د

$$n \min f'' \leq \sum f''(r_i) \leq n \max f''$$

له لارې اټکل شي. د ترمنځارزښت جملې پسې بالاخره لاس ته راځي

$$\sum f''(r_i) = nf''(r) = \frac{b-a}{h} f''(r)\,,$$

$r \in [a,b]$

د یوه سره.

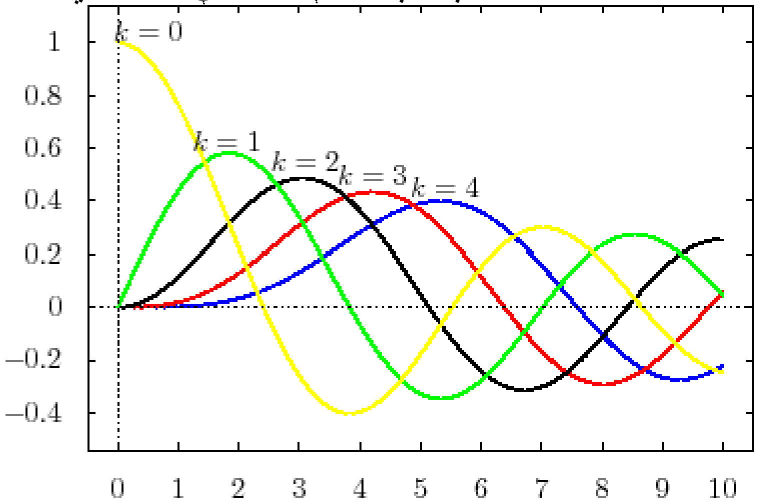
د ګاونډ یا مجانب ناټیکاوي ودې ښوونه اوړده ده. دا د باقي غړي په تل ټوټه انتیګرالونه ولاړه ده او د ژی ترمونو په یوه مناسبه کارونه یا استعمال.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د بسل-تابعBessel-Funktionen $\mathcal{J}_k$ د ټولګنیز k لپاره دا لاندې انتیګرال انځورونه لري

$$\mathcal{J}_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(kz - x\sin(z))}_{f(z)}\,dz$$

او د $k = 0, \ldots, 4$ لپاره په لاندې ځیره کې انځور دي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تراپخ قانو شمیرلو سره شړی کاروي، چې

$$\frac{1}{2}\left(f(a) + f(a+2\pi)\right) = f(a)$$

او دا چې f جوړه دی. که ټکي

$$z_i = -\pi + \frac{1+2i}{2}\,\frac{2\pi}{n},$$

وټاکو ، نو جمعه

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(z_i) = 2\sum_{i=n/2}^{n-1} f(z_i)$$

دې جوړه شي.

لکه د $\mathcal{J}_1(2)$ لاندې نږدېونه یا اپرکسیمیشن د $n = 4, 8, \ldots 64$ ټکو سره ښایي، پولې ته تلنه فوقالعاده ګړندۍ ده.

n	
4	0.45464871341284084769800993295587
8	0.57655235602472460377030331810649
16	0.57672480775615774487465153090293
32	0.57672480775687338720244824226913
64	0.57672480775687338720244824226913

دا د ذوزنقي قانون جګ تیکاوی د خوی پریودیکي انتیګرال لپاره یوپیک دی او کېدی شي د ناټیکاوي د یوهه ټیکې انځورونې ، د اویلر-ماکلورن-Euler-Maclaurinschen د جمعي فرمول مدلل کړای شي.

لیکونکي: هیولیګ، هیوررنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس فرمول Gauß-Formel

د n –مې درجې يا نظم د ګاوس فرمول په نږدې بڼه يا ډول د يوه تابع انتيګرال ټاکي د انتيګرال د انتربوليشن پولينوم له لارې د n -مې درجې د لاګرانژ پولينومونو په صفرځايونو $x_1 < \cdots < x_n$ کې:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(x_i\right)$$

د w_i سره د لاګرانژپولينوم

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

په انتوال $[-1,1]$ باندې.

فرمول د $< 2n$ Grad درجې پولينوم لپاره ټيک دی او د ټولو له مخه د تحليلی توابعو لپاره خورا ټيک دی. ټول وزنونه w_i زياتيز يا مثبت دي، او تکيه ځايونه x_i په انتګريشن انتروال $(-1,1)$ کې پراته دي. دا د ګاوس پارامتر تر 10 -م نظم پورې جدولي شوی او په لاندې جدول کې ورکړ شوی دی

n	x_i	w_i
2	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1
3	0 $\pm\frac{1}{5}\sqrt{15}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$
4	$\pm\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$ $\pm\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{36}\sqrt{30}$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{36}\sqrt{30}$
5	0 $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245-14\sqrt{70}}$ $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245+14\sqrt{70}}$	$\frac{128}{225}$ $\frac{161}{450}+\frac{13}{900}\sqrt{70}$ $\frac{161}{450}-\frac{13}{900}\sqrt{70}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس پارامتر x' او w' د خوښي انټګریشنانټروال $[a,b]$ لپاره د کرښیز تراسفورمېشن له لارې لاس ته راځي:

$$x_k' = a + \frac{b-a}{2}(x_k+1), \quad w_k' = \frac{b-a}{2} w_k .$$

لومړی ښایو، چې نږدې ټاکنه د $<n$ Grad درجې د پلوینوم f لپاره ټیک دی. دا د لاندې څخه لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_a^b p_k(x)\,dx\right) f(x_k) = \int_a^b \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_k(x) f(x_k)}_{=q(x)}\ dx .$$

داچې p_k نسبت و ټکو x_k ته د لاګرانژ پولینومونه دي، q په دې ټکو کې و f ته انټرپولیشنپولینوم دی او داسې له f سره همغږیز کیږي.

د ځانګړو ټکو ټاکلو له لارې کېدی شي حتی د $<2n$ Grad درجې پولینوم f ټیک انټیګرال شي.

دې ته f د پولینومېش په مرسته داسې لیکو

$$f(x) = p(x)s(x) + r(x)$$

د n Grad درجې لژندر-پولینوم p او د. $<n$ Grad دجې پولینومونه r او s.

که $p(x_k) = 0$ په پام کې ونیول شي، نو لکه پورته لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_a^b p_k(x)\,dx\right)\left(p(x_k)s(x_k) + r(x_k)\right)$$

$$= \int_a^b \sum_{k=1}^{n} p_k(x) r(x_k)\,dx = \int_a^b r(x)\,dx .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له بلې خوا باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (p(x)s(x)+r(x))\,dx = \int_a^b p(x)s(x)\,dx + \int_a^b r(x)\,dx = \int_a^b r(x)\,dx\,,$$

ځکه چې p د $<n$ Grad درجې پولینوم ته اورتوګونال دی.
د وزن زاتیزوالی یا مثبتوالي د کټمټوالي څخه لاس ته راځي

$$w_k = \int p_k = \sum_i w_i\,p_k(x_i) = \sum_i w_i\,p_k(x_i)^2 = \int p_k^2\,.$$

د اخرنې تر مخ یا وړاندې مساوات د $p_k(x_i) = \delta_{k,i}$ له امله باور لري، او اخرنی، داچې p_k^2 $<2n$ Gradدرجه لري، نو د ګاوس-فرمول له لارې ټیک انتیګرال کیدی شي.
د ګاوس-فرمول د روښانه ولو ته لاندې جدول د مختلفو انتیګراندونو یا انتیګرال کېدونکو نږدې ټاکل یا اپروکسیمیشن ښایي.

n	$\int_1^1 e^{-x^2}\,dx$	$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$	$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,dx$
1	2.000000	2.000000	0.968245
2	1.433062	1.848571	0.891006
3	1.498679	1.851976	0.879356
4	1.493334	1.851936	0.876417
5	1.493663	1.851937	0.875306

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرني انتیګرال کې ورو پولې ته تلنې دلیل په $x = 1$ کې زینګولاریتي ده.

د ګاوس-فرمول فقط خویو یا هواروglatt (یو تابع خوی یا هوار تابع یو ماتماتیکي تابع دی، چې ناپرېکېدونکی او ناپای زیات مشتقوړ وي توابعو ته ډېر دقیق دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

ناڅرګند یا نا معلوم انتیګرال **Uneigentliches Integral**

د یو په یوه انتروال $[a, b)$ توته ډوله ناپرېکېدونکی تابع f لپاره کېدی شي د

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b-} \int_a^c f$$

له لارې د انتیګرال کلیمه په ناپای انتروالونو ($b = \infty$) او نامحدودو انتیګرالیدونکو($f(b) = \pm\infty$) وغزول شي.
په ورته توګه زینګولاریتي په لاندې یا په دواړو پولو مطالعه شي. په اخرني حالت کې باید پوله ارزښت د پرلپسې $c \to a+$, $d \to b-$ د ټاکنو څخه خپلواک وي.

د یوه ناټاکلي انتیګرال د شتون لپاره پوره کېدونکي د f مطلق انتیګرالوړوالی دی، دا په دې معناچې

$$\int_c^d |f(x)| \leq$$ ثابت

د ټول برخه انتروالونو $[c, d] \subset (a, b)$ لپاره.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ناټاکلي انتیګرال د شمیرلو لپاره

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $b > 0$ لپاره ټاکي

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b = -e^{-b} + 1\,.$$

له دې سره سړی لاس ته راوړي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+1\right) = 1\,.$$

که پوله ارزښت ساده شمېرل کېدونکی وي، نو سړی پسې ترلي ناټاکلې پولې کاروي، داپه دې معنا چې سړی لیکي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

او دا په راوړل شوې بیلګه کې.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ناټکلو انتیګرالونو

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx\,.$$

لپاره د بدلون $y = \ln(x)$, $dy = dx/x$
سره سړی لاس ته راوړي

$$\int_2^b \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{y^r}\,dy = \begin{cases} \dfrac{(\ln(b))^{1-r} - (\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,, & r \neq 1 \\ \ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2))\,, & r = 1 \end{cases}.$$

په دې پسې د $b \to \infty$ لپاره پوله ارزښت ټیک هلته شتون لي، که $r > 1$ باور ولري. په دې حالت کې دی

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)^r}\,dx = -\frac{(\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ناټاکلي انتيګرال

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx\,.$$

لپاره انتيګرالېدونکی په پورته انتيګرال پولي $x = \frac{\pi}{2}$ سيګولار دی. سړی د $0 < b < \frac{\pi}{2}$ لپاره لاس ته راوړي

$$\int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \left[-2\sqrt{\cos(x)}\right]_0^b = -2\sqrt{\cos(b)} + 2\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \left(-2\sqrt{\cos(b)} + 2\right) = 2\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ناټاکلي انتيګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx\,.$$

لپاره

$$\arctan(x) + \ln(1+x^2)$$

د انتيګراليدونکو بنسټ- يا ساده تابع دی. ناټيکه ايښوونه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\arctan(x) + \ln(1+x^2)\right]_{-b}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(2\arctan(b)\right) = \pi$$

د ناټاکلي انتيګرال لپاره راکوي. د تعريف سره سم د ناټاکلي انتيګرال پورته او کښته پولې بايد يو له بل خپلواک و څېړل شي. داچې نه پوله ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{c\to-\infty}\int_c^0 \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to-\infty}\left(-\arctan(c)-\ln(1+c^2)\right)$$

او نه پوله ارزښت

$$\lim_{d\to\infty}\int_0^d \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx \quad = \lim_{d\to\infty}\left(\arctan(d)+\ln(1+d^2)\right)$$

شتون لري، دا ناټاکلی انتيګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx$$

هم شتون نه لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د نامعلوم انتيګرال لپاره د پرتلې قضيه

Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale

که f د g لپاره يو مايورانت وي، داپه دې معناچې

$$|f(x)| \le |g(x)| \quad a < x < b$$

باور لري، نو د g د مطلق انتيګرالوړوالي څخه د انتيګرال

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

شتون لاس ته راځي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

فقط د پوله ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b-} \int_a^c f$$

شتون ترخیړنې لاندې نیول کیږي. په نورو حالتونو کې په ورته توګه مخ ته ځو.
تابع

$$r(c) = \int_a^c |f|$$

برابرغږیزه جګېدونکې ده او پورته لور ته د $\int_a^b |g|$ له لارې رابنده یا محدود ده. په دې پسې د r د $c \to b-$ لپاره پولې ته تلونکی دی او له دې امله $\int_a^b |f|$ شتون لري.
تابع

$$s(c) = \int_a^c (f + |f|)$$

همم برابرغږیزه جګېدونکې ده او د $2\int_a^b |g|$ له لارې رابنده یا محدود. پسې s هم د $c \to b-$ لپاره پولې ته تلونکی دیاو له دې امله $\int_a^b (f + |f|)$ شتون لری.
له دې څخه د

$$\int_a^b f = \int_a^b (f + |f|) - \int_a^b |f| .$$

شتون لاس ته راځي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د پرتلع تلبع لپاره زیات وخت $f(x) = x^r$ کارول کیږي.
د $0 < a < b < \infty$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b x^r\,dx = \begin{cases} \dfrac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}, & r \neq -1 \\ \ln(b)-\ln(a), & r=-1. \end{cases}$$

دا ترم د $b \to \infty$ لپاره ټيک هلته پولې ته تلونکی دی، که $r < -1$ باور ولري، دا په دې معناچې انتيګرال

$$\int_1^\infty x^r\,dx$$

شتون ولري ټيک د $r < -1$ لپاره.

د $a \to 0+$ لپاره ټيک هلته پوله ارزښا لاس ته راځي، که $r > -1$ باور ولري، دا په دې معنا چې انتيګرال

$$\int_0^1 x^r\,dx$$

ټيک د $r > -1$ لپاره شتون ولري.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د دې لپاره چې د نامعلوم انتيګرال شتون د

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

په حيث وښايو ، سړی دا انتيګرال په دوه برخو ټوټه کوي.

دا چې $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ دی، نو لاندې انتيګرال شتون لري

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په انتروال $[1,\infty]$ د نامعلوم انتیګرال لپاره د ټوټه انتیګرالوني له لارې لاس ته راځي

$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\,.$$

د $b\to\infty$ لپاره لومړی ترم د $\cos(1)$ په لور ځي او دویم د پرتلې قضیې له مخې پولې ته ځي، ځکه چې

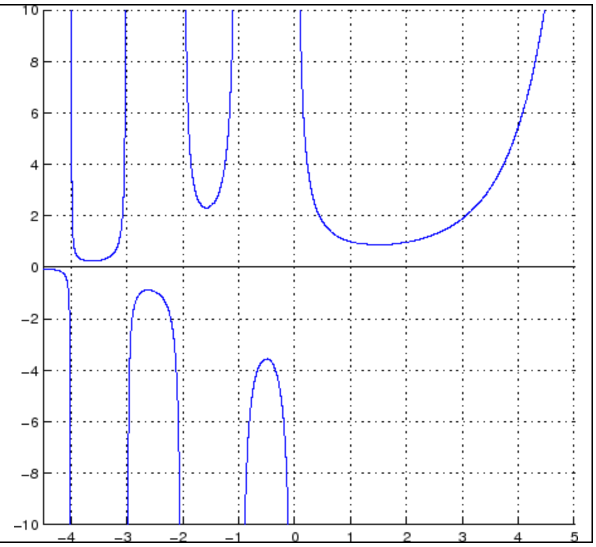
$$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \le \left|\frac{1}{x^2}\right|\,.$$

سره له دې چې د تابع کوم ورکړ شوی لومړی – یا بنسټیز تابع نه لري، کېدی شي د نامعلوم انتیګرال ارزښت وټاکي. .

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

لیکونکي: اېپ، هیولیک

ګاما تابع یا - فنکشن Gamma-Funktion

	د $$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt,$$ $$x\in(0,\infty)\,,$$ له اري تعریف شوی ګاما تابع فنکشنل مساوات پوره کوي $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,.$$ په ځانګړې توګه $\Gamma(n+1)=n!$, $n\in\mathbb{N}$. دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشنل مساواتو په مرسته کېدی شي ګاما-تابع د کمیز پروت یا x محور لپاره هم تعریف کړی شي. لکه د جوړ شوي تابع ګراف ښخه چې لیدل کیږي، دا ساده قطبونه د $x = 0, -1, \ldots$ لپاره لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

انتیګرال

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

فقط د $0 < x < 1$ لپاره پرابلم جوړوي. په دې حالت کې انتیګرال د

$$t^{x-1}e^{-t} \le t^{x-1}$$

له امله د پرتلې قضیې له مخې پولي ته تلونکی دی.

انتیګرال

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

هم د پرتلې قضیې په بنسټ شتون لري او اټکلونه

$$t^{x-1}e^{-t} \le t^{-2}$$

د پوره لوي t لپاره بسیا کوي.
د ټوټه انتیګرال سره لاس ته راځي

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_{t=0}^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t}\,dt$$
$$= 0 + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\Gamma(x)\,,$$

او له دې سره د پوره اینډکشن په مرسته او $\Gamma(1) = 1$ د $n \in \mathbb{N}$ لپاره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Gamma(n+1) = n!\,.$$

د ګاما تابع د ګاوس تعريف

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

د تابع يوه روښانه ونه په ټول $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$ اجازه ژاکوي.

.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د کوشي اصلي ارزښت **Cauchyscher Hauptwert**

د يوه په $x = c \in (a,b)$ کې زيګولار تابع f لپاره سړی

$$\mathrm{CHW}\int_a^b f = \lim_{h\to 0+}\left(\int_a^{c-h} f + \int_{c+h}^b f\right)$$

د کوشي اصلي ارزښت په څېر تعريفوي

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د ټيپيکي بېلګې په څېر د کوشي اصلې ارزښت

$$\mathrm{CHW}\int_{-a}^{a} x^k\,dx\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,,$$

شمېرل کيږي.

د $k=-1$ لپاره دی

$$\int_{-a}^{-h}\frac{dx}{x} + \int_h^a \frac{dx}{x} = \ln|h| - \ln|a| + \ln|a| - \ln|h| = 0\,.$$

د انتيګراليدونکي د انتی سيمتري په دليل د CHW ورکيږي په يو سيمتري انتروال لپاره.

د $k \neq -1$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-a}^{-h} x^k\,dx + \int_h^a x^k\,dx = \frac{1}{k+1}\left((-h)^{k+1} - (-a)^{k+1} + a^{k+1} - h^{k+1}\right)$$

د ناجوړه يا طاق k لپاره دا ا فاده يا ويينه او له دې سره د کوشي اصلي ارزښت صفر دی. د زياتيز يا مثبت جوړه(حفت) k لپاره دا د $2/(k+1)a^{k+1}$ په لور هځيږي.
په ساده توگه د کوشي اصلي ارزښت د رگولار انتيگرال سره سره خوري يا يوعږيز کيږي. د $k=-2,-4,\ldots$ لپاره برعکس يا د دې په خلاف هم انتيگرال او هم د کوشي اصلي ارزښت شتون نه لري.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د انتيګرال لاندې مشتقول Differenzieren unter dem Integral

انتيګرال $\int_a^b f(x,t)\,dx$ د ناپرېکېدونکې تابع f لپاره د t ناپرېکېدونکی تابع دی. که f_t ناپرېکېدونکی وي، ن و باور لري

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b f_t(x,t)\,dx\,.$$

ليکونکي: هيوليګ،کنيش

د دې لپاره چې د

$$g(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$$

ناپرېکېدنه په ټکي $t_0 \in (c,d)$ کې وښايو، له دې څخه کار اخلو، چې f په ولاړګوډيز $[a,b]\times[c,d]$ کې برابرډوله ناپرېکېدونکی دی. هر $\varepsilon > 0$ ته له دې امله يو $\delta > 0$ شتون لري داسې چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f(x,t)-f(x,t_0)|<\varepsilon$$

باور لري د ټولو x او $|t-t_0|<\delta$ لپاره. د دې t لپاره نو دی

$$|g(t)-g(t_0)|\leq\int_a^b|f(x,t)-f(x,t_0)|\,dx<\varepsilon(b-a)\,.$$

له دې سره g ناپرېکېدونکی دی.

که f_t ناپرېکېدونکی وي، نو لاس ته راځي

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\int_a^b\frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\,dx=$$

$$=\int_a^b\frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t+s)\,ds\,dx\,,$$

د کوم سره چې

$|f_t(x,t+s)-f_t(x,t)|<\varepsilon$ دی د ټولو $h<\delta$. لپاره.

له دې امله کېدی شي د دفرنسل وېش کمښت و

$$\int_a^b f_t(x,t)\,dx=\int_a^b\frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t)\;ds\,dx$$

ته د

$$(b-a)\frac{1}{h}\,h\,\varepsilon$$

له لارې اټکل شي او د h سره د صفر په لور هڅېږي.

لیکونکي: بوسسلر، هیولیګ،کنیش

بسل- توابعBessel-Funktionen دا لاندې د انتیګرال انځورونه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin t - nt)\,dt, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

دا دا لاندې د دفرنځيال مساوات پوره کوي

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0 .$$

دا کېدی شي د انتيګرا لاندې د دفرنځيال سره وازمايل شي. لومړی دی

$$J_n'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\sin(x\sin t - nt)}_{v}\,\underbrace{\sin t}_{u'}\,dt$$

$$\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi} \cos t\cos(x\sin t - nt)\,dt - \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 t\cos(x\sin t - nt)\,dt$$

$$J_n''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin t - nt)\sin^2 t\,dt$$

که $J_n'(x)$, $J_n(x)$ او $J_n''(x)$ د دفرنځيال مساوات په کېن لور کښيښول شي او له π سره ضرب شي، له کوم سره چې $\xi = x\sin t - nt$ کيښول شي، نو لاس ته راځي

Se

$$-x^2\int_0^{\pi} \cos\xi\sin^2 t\,dt - x^2\int_0^{\pi} \cos^2 t\cos\xi\,dt + nx\int_0^{\pi} \cos t\cos\xi\,dt + x^2\int_0^{\pi} \cos\xi\,dt - n^2\int_0^{\pi} \cos\xi\,dt$$

$$= nx\int_0^{\pi} \cos t\cos\xi\,dt + x^2\int_0^{\pi} \cos\xi\,dt - n^2\int_0^{\pi} \cos\xi\,dt$$

$$= n\int_0^{\pi} (x\cos t - n)\cos(x\sin t - nt)\,dt$$

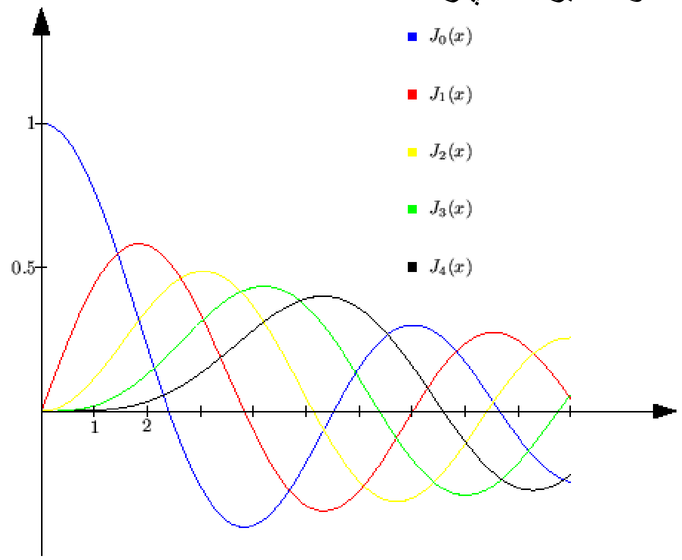
(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

=

$$n\sin(x\sin t - nt)|_0^\pi = 0$$

د ټول ګنيز n لپاره.



ځېره 5 لومړني د بسل توابع بنايي .
ليکونکي: بوسسلر ، هيوليک،کنيش

لايبنيځ-قانونLeibniz-Regel

د ناپرېکېدونکو مشتقوړ توابعو a, b او f لپاره دی

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x,t)dx + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t)$$

ليکونکي: بوسسلر ، هيوليک،کنيش

که انتيګرال له $g(t)$ سره وبنوول شي او ځا په ځا کړو

$$V(t) = (a(t), b(t), t)\,, \quad U(c,d,e) = \int_c^d f(x,e)\,dx\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $g = U \circ V$ دی او فرمول د ځنځيري قانون له لارې لاس ته راځي:

$$g'(t) = U'(V(t))\, V'(t), \quad V' = (a', b', 1).$$

له دې سره د U ټوټه مشتقونه دا لاندې دي

$$U_c(c,d,e) = -f(c,e),$$

$$U_d(c,d,e) = f(d,e), \quad U_e(c,d,e) = \int_c^d f_e(x,e)\, dx\,,$$

او د $g'(t)$ لپاره په افاده يا ويېنه کې اېښوولو سره غوښتنه راکوي.

ليکونکي: بوسسلر، هيوليګ،کنيش

د لايبنيځ فرمول سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dt}\int_0^{\sqrt{t}} e^{x^2/t}\, dx = \int_0^{\sqrt{t}} -\frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t}\, dx + e\frac{d}{dt}\sqrt{t}$$

$$= -\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

بيا مشتقول يې راکوي

$$\frac{d}{dt}\left(-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}\right)$$

$$=$$

$$\int_0^{\sqrt{t}} 2\frac{x^2}{t^3} e^{x^2/t} + \frac{x^4}{t^4} e^{x^2/t}\, dx - \frac{e}{2t^{3/2}} - \frac{e}{4t^{3/2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2tx^2 + x^4}{t^4} e^{x^2/t}\, dx - \frac{3e}{4t^{3/2}}$$

بدیلي لومړی کېدی شي بدلون $x = \sqrt{t}y$, $dx = \sqrt{t}\, dy$ ولیکي او دا انتیګرال لاس ته راوړي

$$g(t) = \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy$$

د کره یا ځای په ځای پولو سره . نو کېدی شي

$$g'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\, dx$$

او

$$g''(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy = -\int_0^1 \frac{1}{4t^{3/2}} e^{y^2}\, dy$$

$$= -\int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{4t^2} e^{x^2/t}\, dx$$

په ساده توګه وشمیرل شي.
د لومړي مشتق لپاره د فرمول مساوات روښانه نه دي، خو کېدی شي اسان د ټوټه انتیګرالوني سره و ازمایل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}} = \qquad -\frac{1}{2t}\int_0^{\sqrt{t}} \underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\frac{2x}{t}e^{x^2/t}}_{u'}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$-\frac{1}{2t}\left[xe^{x^2/t}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{t}} + \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$= \qquad \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\,dx$$

د دويم برابرون مشتق کېدی شي په ورته توګه و ښوول شي.
ليکونکي: هيوليګ،کنيش

په t پسې د انتيګرال د مشتق

$$\int_{t^2}^{e^t} \frac{\cos(tx)}{x}\,dx$$

لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
&\int_{t^2}^{e^t} -\sin(tx)\,dx + \frac{\cos(te^t)}{e^t}\,\frac{d}{dt}e^t - \frac{\cos(t^3)}{t^2}\,\frac{d}{dt}t^2 \\
&= \frac{1}{t}\,\cos(te^t) - \frac{1}{t}\,\cos(t^3) + \cos(te^t) - \frac{2}{t}\,\cos(t^3) \\
&= \left(\frac{1}{t}+1\right)\cos(te^t) - \frac{3}{t}\,\cos(t^3)
\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ،کنيش

د دفرنشل مساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(t) - \lambda u(t) = f(t)$$

یو زره یا کوچنی حل u_p کېدی شي دهوموجېن مساوات حل $\exp(\lambda t)$ د سوپر پوزېشن له لارې و کتل شي:

$$u_p(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds\,.$$

د لايبنيخ فرمول په بنسټ دی

$$u_p'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\, ds = \int_0^t \lambda \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\, ds + f(t)\frac{d}{dt}t$$

$$= \lambda \int_0^t \lambda e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds + f(t)$$

په دفرنشل مساوات کې د $u_p(t)$ او $u_p'(t)$ د اینوولو له لارې کېدی شي حل تصديق شي.
ليکونکي: هيوليګ،کنيش

د نامعلومو انتيګرالونو مشتقول

Differenzieren uneigentlicher Integrale

که توابع f او f_t ناپرېکېدونکې وي او د $t \in (c,d)$ لپاره باور ولري

$$|f(x,t)| \le \psi(x), \qquad \int_0^\infty \psi < \infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f_t(x,t)| \le \varphi(x), \qquad \int_0^\infty \varphi < \infty,$$

نو کيدی شي د انتيګرال د نخښې لاندې مشتق ونيول شي:

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty f(x,t)\,dx = \int_0^\infty f_t(x,t)\,dx\,, \quad c<t<d.$$

په ورته توګه وېناوې د محدودو انتيګرالېدونکو سره د نامعلومو انتيګرالونو لپاره باور لري.

ليکونکي: هيوليک،کنيش

د دې لپاره چې وښايو، چې

$$\int_0^\infty \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h} - f_t(x,t)\,dx$$

د $h \to 0$ لپاره د 0 په لور هڅيږي، انتيګرال توټه کيږي:

$$\int_0^\infty \dots = \int_0^b \dots + \int_b^\infty \dots$$

دويمه زياتېدونکې يا د جمعې غړی د نيونې له مخې د

$$\left|\int_b^\infty \frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t+s)\,ds - f_t(x,t)\,dx\right| \le \int \frac{1}{h}\, h\varphi(x) + \varphi(x)\,dx = 2\int_b^\infty \varphi(x)\,dx$$

له لارې اټکل شي. دا انتيګرال له $< \varepsilon$ کيږي. د پوره لويې b لپاره. د دې b لپاره لومړی زياتېدونکی $< \varepsilon$ دی د پوره کوچني h لپاره.، څکه چې د پای انتيګريشن انټروال لپاره د انتيګرال لاندې مشتق کېدی شي.

ليکونکي: هيوليک،کنيش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاما تابع مشتقونه

$$\Gamma(t)=\int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}\,dx,\quad t>0\,,$$

دي

$$\Gamma^{(k)}\,(t)=\int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}(\ln x)^k\,dx\,.$$

مشتقیدنه په حق ده، ځکه چې انتیګرالېدونکي $f(x,t)=e^{-x}x^{t-1}(\ln x)^k$ یو
برابرډوله مایورانت لري:

$$|f(x,t)|\le e^{-x}\,x^{r-1}\,x^k\le ce^{-x/2},\quad x\ge 1$$

او

$$|f(x,t)|\le x^{1/r-1}|\ln x|^k\le cx^{1/(2r)-1}\,,\quad x\le 1$$

د $t\in[1/r,r]$ لپاره. د دې لپاره وکارول شو، چې

$$\lim_{x\to\infty}x^\alpha e^{-\beta x}=0,\quad \lim_{x\to 0+}x^\alpha|\ln x|^\beta=0$$

د ټولو $\alpha,\beta>0$ لپاره
لیکونکي: بوسسلر، هیولیګ،کنیش

دا د پارامتر په واک کې انتیګرال

$$g(t)=\int_0^\infty \sin(xt)\,\frac{dx}{x}$$

مطلق پولې ته تلونکی نه دی، له دې امله برابر ډوله مایورانت هم نه لري.
د لته مو د t پسې د انتیګرال لاندې یو فورمال دفرنځیشن یوه تضاد ته لاربښودوي.
فورمال مشتق

$$g'(t)=\int_0^\infty \cos(xt)\,dx$$

یو پولې ته نه تلونکی انتیګرال دی. له بلې خوا یو واریابل بدلون $y=xt$,
$dy=t\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

راکوي

$$g(t)=\int_0^{\infty}\sin(y)\,\frac{dy}{y}=\frac{\pi}{2}\,.$$

مشتق په دې لاس ته راوړنه کېمېټ صفر دی.
لیکونکي: بوسسلر، هیولیګ،کنیش

د ۲۰۱۱ ز ک د مارچ لسم
برى د لوى خښتن سره دى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کي شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

٣ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ١

٧ – انالیزې ٢

٨ – کرښيز الجبر

٩ - د شميرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل انالیز

١٢ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

١٣ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

١۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما لیکنې

onn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲-   داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته   تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزۍ پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویپونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library