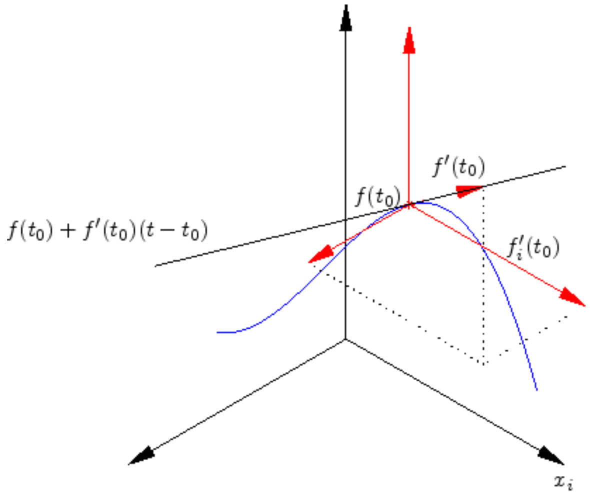
انالیز ۱ **Analysis 1**

د پوهنتون لپاره لکچرنوټونه

د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیز

یا انالیز دوه



لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتون د شمیرپوهنې یا ریاضي څانګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتون څخه

Smakhan1946gmail.com

ژباړی: ډ اکتر ماخان (میرزي) شینواری

د لوی څښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلې او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې په لار د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

د کتاب نوم: د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیزې

لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتو د ریاضي څا نګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه

ژباړی: ډ اکتر ماخان میرې شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د چاپ لړي:

د ژباړې مننه

د دې ليکنې مل نورې خپرونې د شتوتګارت د پوهنتون د شميرپوهنې د څانګې د لکچرونو لړۍ چاپ باندې پيل کيږي

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې- زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس- سره مرسته وي.

سرلیک

سرلیک

سرلیک

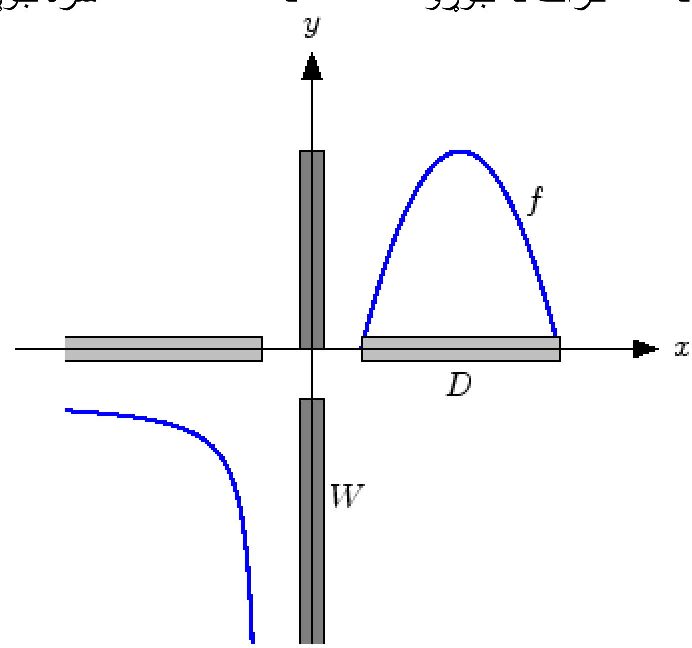
بلواک یا تابع (ټيک يې: فنکشن) **Funktion**

يو فنکشن يا بلواک يا تابع

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

د تعریف ورشو $D \subseteq \mathbb{R}$ هرتوکی x د ارزښت ډېرى $W \subseteq \mathbb{R}$ څخه د یوه ارزښت $f(x)$ سره تنظیموي.

د f ګراف له جوړو (x, y) د $y = f(x)$ سره جوړ دی.



لکه د څيرې څخه چې ليدلکيږي، تعريفورشو (رڼه خړه يا پرته) او ارزښت ورشو (تياره خړه يا ولاړه) په x -محور همداسې په y -محور د ګراف پريوتل دي.

ليکونکي: هيوليګ، هورنر، کنش

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعريف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، لومړی دې د په ساده –يا لومړنيو توابعو رامنځ ته کيدونکې بنديزونه يا محدودوالی په پام کې ونيول شي. د تعريف ورشو د توکي لوګاريتم بايد زياتيز يا مثبت وي او د ارزښت ورشو ناکميز يا نامنفي وي:

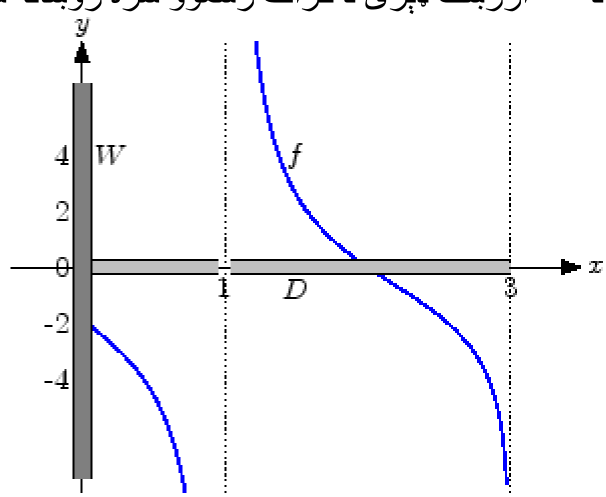
$3 - x > 0$ او $x \geq 0.$

په همدې توګه بايد ماتلاندې يا مخرج صفر نه وي، دا په دې معنا چې $x \neq 1$.

په ټوليزه توګه راکوي:

$$\mathrm{D} = [0,3) \backslash \{1\} = [0,1) \cup (1,3).$$

د f ارزښت ډېرۍ د ګراف رسمو سره روښانه شي



دا چې f د $x \in (1,3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نیسي، $W = \mathbb{R}$ باور لري.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر،کنش)

لاندې جدول د څو بنسټیزو توابعو تعریفورشو او ارزښت ورشو ښايي.

$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\ln x$	$(0,\infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x \,:\, x = (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$

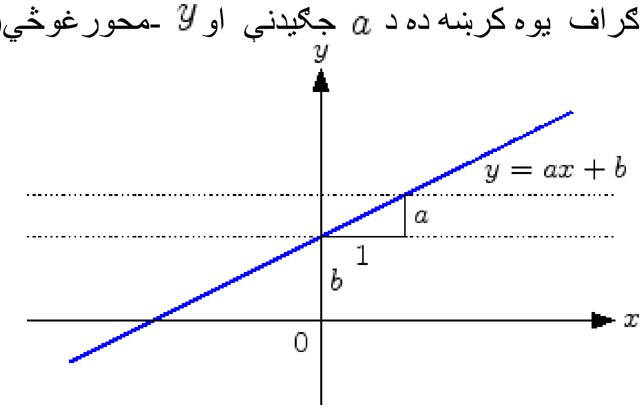
(لیکونکي: هیولیگ، هیورنر،کنش)

کرښیز فنکشنونه یا توابع

د یوه کرښیز فنکشن یا تابع

$$f(x) = ax + b$$

گراف یوه کرښه ده د a جګیدنې او y -محورغوڅي(محورقاطع) b سره .



د دې لپاره بديلي انځورونه د ټکي-جګيدنې – بڼه ده

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=a$$

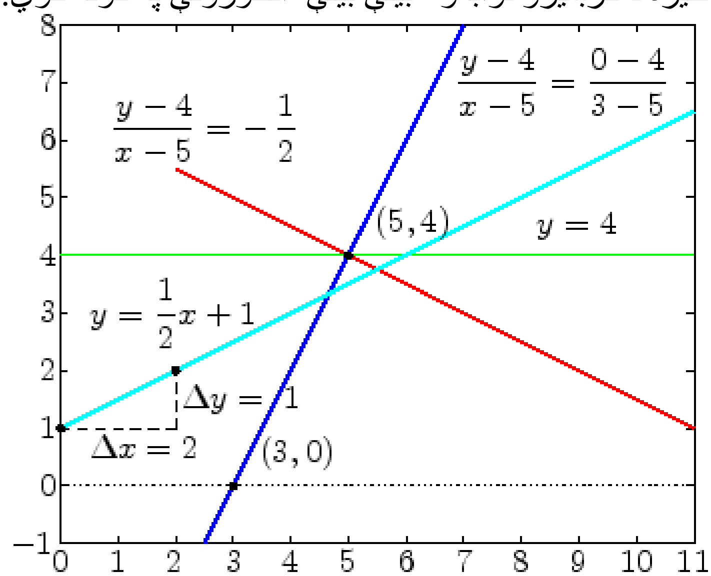
او د دوه-ټکو- بڼه

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},$$

چيرته چې (x_0,y_0) او (x_1,y_1) په کرښه پراته ټکي دي.

(ليکونکي: هيوليګ، هيورنر)

ځيره د کرښيزو توابعو بيلې بيلې انځورونې په کوته کوي:



ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

څلوری- يا مربع فنکشنونه يا - توابع

د يوه مربع تابع

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

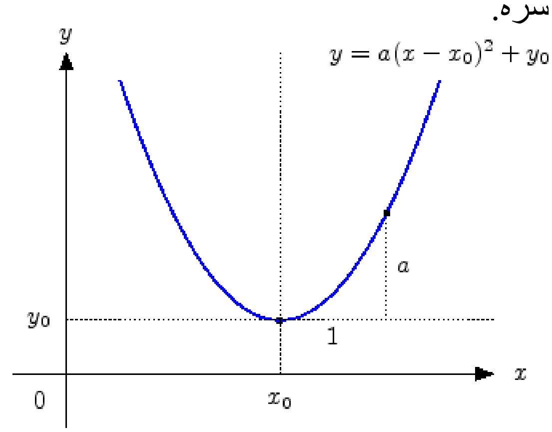
كراف د لاندې بڼې یو پارابول دی

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د ککرۍ- یا رأسټکي

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right).$$

سره.



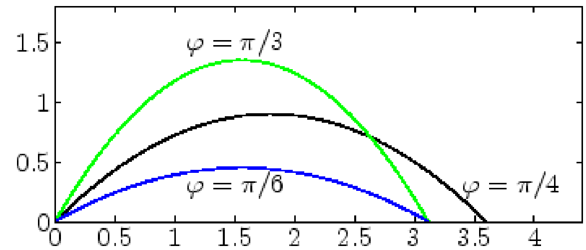
پای

- که یو تن د یوه کونج φ لاندې په یوه v چټکتیا و توغول شي، د الوتنې لار دا لاندې پارابول

$$y = x\tan\varphi - \frac{g}{2v^2\cos^2\varphi}x^2$$

راکوي ، چیرته چې g د ځمکې بیره ده یا - تعجیل دی.

لاندې څیره: مایيل توغول یا غورځول د 6 = v سره.



مساوات د برابرډوله خوزښت په x - او y -کمپوننتونو د بيلوني يا ټوټه کوني(که غواړې: تجزيې) څخه لاس ته راځي ، د v پيل چټکتيا سره او د ازاده غوزوني د خوزښت ته پام کوني له لارې:

$$x(t) = vt\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v\cos\varphi}$$

$$y(t) = vt\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow y(x) =$$

$$= \frac{vx\sin\varphi}{v\cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2\cos^2\varphi}\right).$$

د غورځوني واټن دی

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi).$$

دا د $\varphi = \pi/4 \,\widehat{=}\, 45°$ لپاره ماکسيمال دی.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش

همغږيزې توابع Monotone Funktion

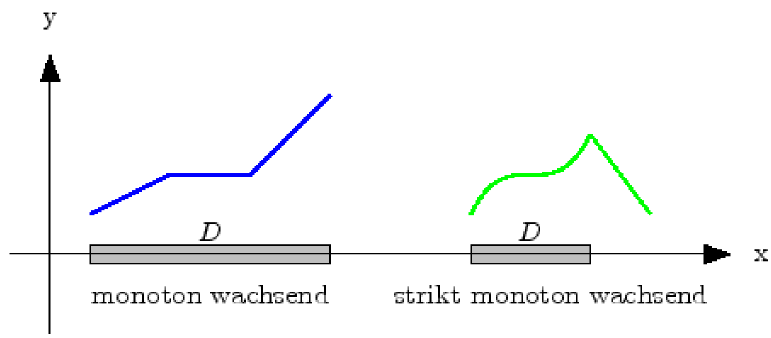
يو تابع f په يوه انتروال D (کره) همغږيز جگيدونکی دی، که وی

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{(<)}{\leq} f(x_2), \quad x_k \in D,$$

همداسي که f ټوټه ډوله ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی، که وي

$$f'(x) \overset{(>)}{\geq} 0$$

د ټولو $x \in D$ لپاره تر ځانله يا جدا ټکي بورې

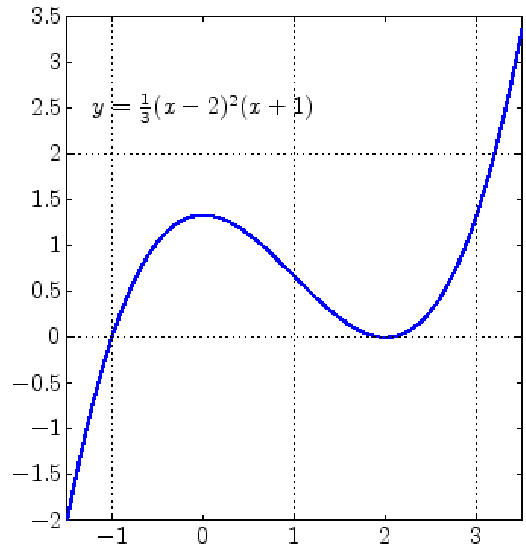


همغږيز جگيدونکي کره همغږيز جگيدونکي

په ورته توگه (کره) همغږيز ټيټيدونکی تعريفيږي.

يکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش

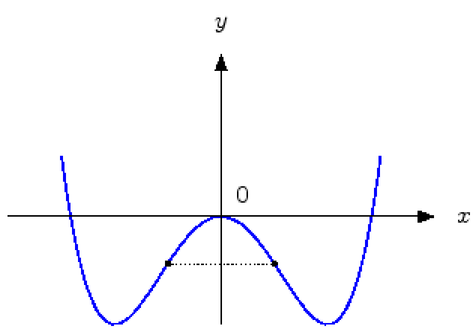
تابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2(x+1)$ په $x = 0$ ځای کي يو جگ- يا ماکسيمال ټکی ($f'(0) = 0, f''(0) < 0$) لري او په $x = 2$ ځای ټيټ-يامينيمال ټکی ($f'(2) = 0, f''(2) > 0$) لري . د $x \leq 0$ او $x \geq 2$ لپاره تابع کره مونوتونجگېدونکي نخ ده او د $0 \leq x \leq 2$ لپاره کره مونوتون ټيټيدونکي نه ده.

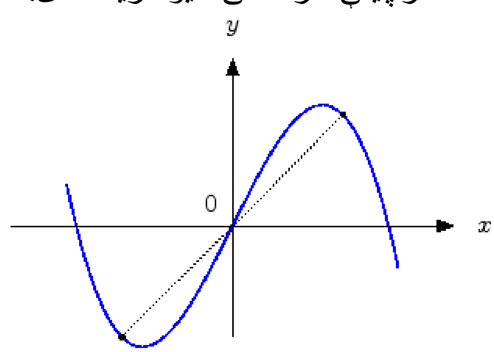


یکونکي: هیولیک، هیورنر،کنش

جوړه او ناجوړه – یا جفت او طاق توابع

یو تابع f جوړه دی، که $f(x) = f(-x)$ وي، دا په دې معنا چې که ګراف د y - محور سره سیومتریک وي. یو ناجوړه یا طاق تابع $f(x) = -f(-x)$ دی، او ګراف سرچینې سره ټکی سیومتریک دی.





gerade Funktion

جوړه یا جفت تابع

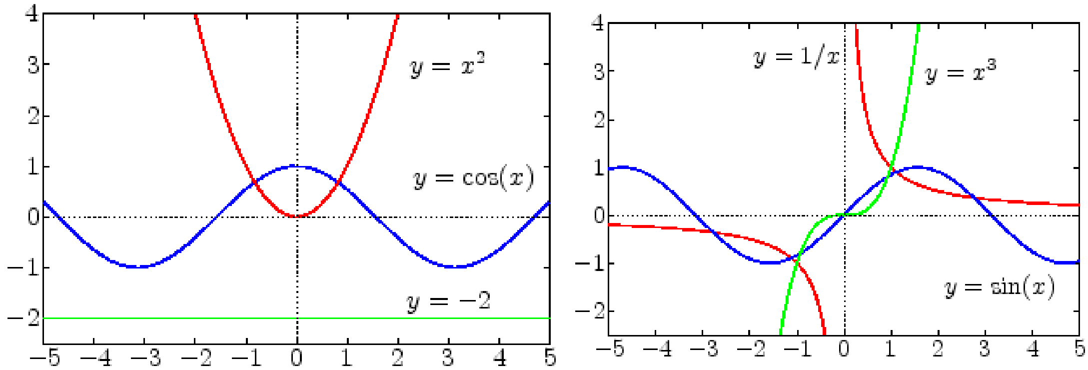
ungerade Funktion

ناجوړه یا طاق تابع

د دوه جوړه توابعو ضرب جوړه تابع دی. برعکس د یوه ناجوړه یا طاق تابع ضرب د یوه جوړه تابع سره ناجوړه دی. د زیاتون یا جمعې او ګمښت یا تفریق جوړولو سره د تابع تیپ یا ډول ساتلی پاتیږي.

پای.

لاندې توابع يو کيڼ لور ته يو څو جوړه (جفت) او ښي لور ته يو څو ناجوړه (طاق) توابع ښايي.



د مناسب ترکيب جوړولو سره سرې نورې بيلګې لاس ته رواړي. نو توابع

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \qquad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x) \sin x - g(x) x^3$$

ناجوړه دي.
پاي.

برعکس – يا په څټ فنکشن - تابع**Umkehrfunktion**

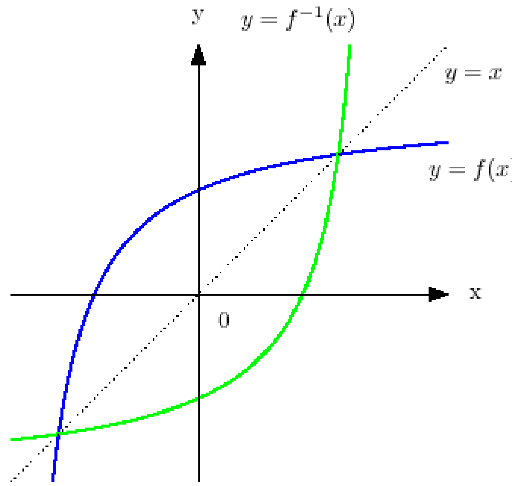
د يوه اينجکتيو (په کې -) تابع $f : D \to W$ د تعريفورشو D او ارزښت ورشو $W \subseteq \mathbb{R}$ سره د

$$f^{-1} : W \to D \subseteq \mathbb{R},\ x \mapsto f^{-1}(x)$$

له لارې تعريف دی. له دې سره لاندې باور لري

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

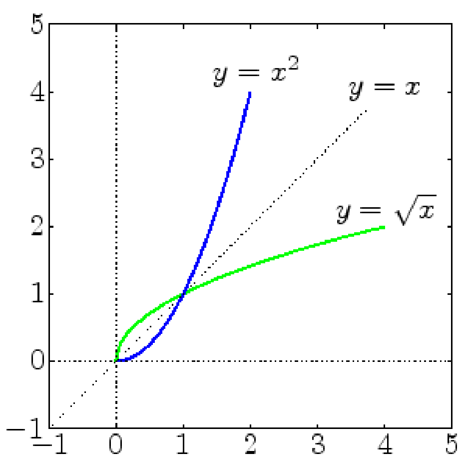
د برعکس توابعو تعريف ورشو د f ارزښت ورشو ده. د هغه ګراف $y = f^{-1}(x)$ د f د ګراف په لومړي کونجنيمی $(y = x)$ هنداره شوې ښېره ده:

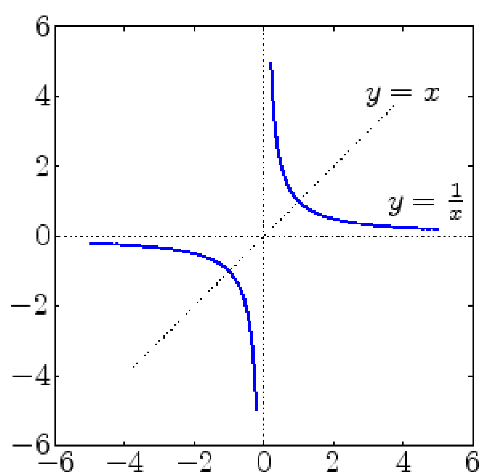


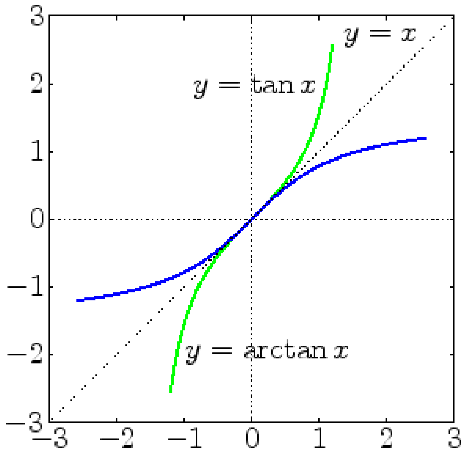
کیدی شي لیکندود $f^{-1}(x)$ مو په ساده توګه د معکوس ارزښت $f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ سره بدلولو ته لار ښود کړي. په ځانګړې توګه ، که د تابع x ارزښت ونه لیکل شي، دا اړیکې دې باید روښانه وي، چې موخه مو څه ده.

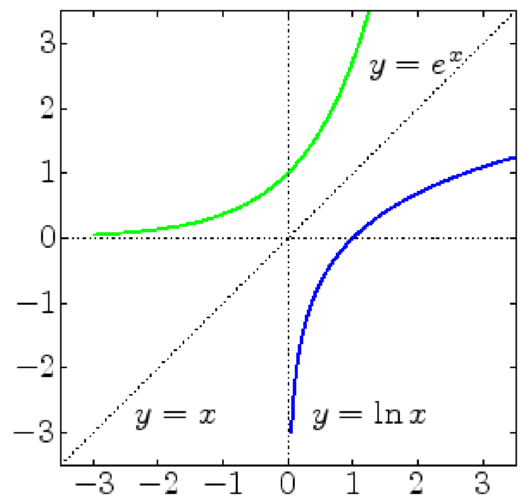
پای.

لاندې ځیرې د یو څو بیلګو برعکس - یا په څپ فنکشن یا تابع ښايي.









په لاندې جدول کې هر اړونده تعریف ورشو وې ورکړ شوې دي:

f	D	f^{-1}	D
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$
e^x	$\mathbb{R}$	$\ln(x)$	$(0,\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{x\ :\ x=(2z+1)\pi/2\ , z\in\mathbb{Z}\}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

د فنکشنونو یا توابعو سره شمیرنه Rechnen mit Funktionen

د توابعو کرښیز ترکیب ټکي دوله تعریف شوی دی، دا په دې معنا چې په توابعو د اړونده عملیو له لارې:

$$(rf+sg)(x)=rf(x)+sg(x).$$

په ورته توګه ضرب fg او وېش f/g . په وېرش کې باید g د صفر سره برابر نه وي..
بالاخره

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

د دوه توابعو یو په بل پسې راوستل یا ځنځیرونه ښایي.
پای.

د بیلګې

$$f(x) = x^2 - 4, \qquad g(x) = x + 2$$

لپاره مختلفې ترنې راکوي

$$(f + 2g)(x) = x^2 + 2x$$

$$(fg)(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x - 2, \qquad x \neq -2$$

په وېش کې تعریفتشځای $x = -2$ له منخه تلونکی یا د جګیدو وړ دی،

ځکه چې صورت یا ماتباندې $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ هم په $x = -2$ کې یو صفرځای لري.

د f او g یو په بل پسې ترنه یا ځنځیرونه راکوي

$$(f \circ g)(x) = (x+2)^2 + 4$$

$$(g \circ f)(x) = x^2 - 2,$$

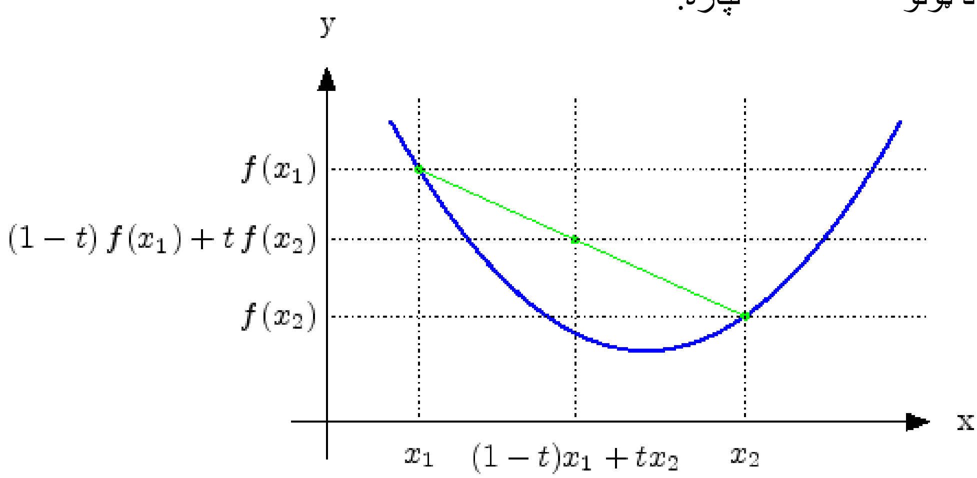
نو ترنه یا عملیه $\circ$ کموتاتیو یا بدلوړ نه ده.

ننوتي او وتلي - یا مقعر او محدبې توابع

یو تابع په یوه انتروال D کې(کره) ننوتی دی، که هر ټوټه ووني یا سیکانت د ګراف پورته لور ته پروت وي، دا په دې معناچې

$$f((1-t)\,x_1 + t x_2) \overset{(<)}{\leq} (1-t)\,f(x_1) + t\,f(x_2)\,, \quad t \in (0,1)$$

د ټولو $x_i \in D$ لپاره.



که f دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ وي، نو (کره) ننوتنه د ټولو $x \in D$ لپاره د

$$f''(x) \overset{(>)}{\geq} 0$$

سره تر هغه ځانله ټکي پورې ورته یا برابر ارزښته ده.

د ننوتو توابعو زیاتون یا جمعه ننوتي ده. تړني یا عملیې $/, \cdot, -$ همداسې یو په بل پسې راوړنه یا ځنځیرونه $\circ$ په ټولیزه توګه ننوتوالی نه ساتي. بالاخره هر ننوتی تابع ناپرېکېدونکی دی.

په ورته توګه وتلی تابع هم تعریف کیږي. د وتلي تابع لپاره ټوټه وونی یا سیکانت د ګراف کښته لور ته پروت دی، دا په دې معنا چې د x - محور باندې هنداره شوی تابع $-f$ وتلی دی.

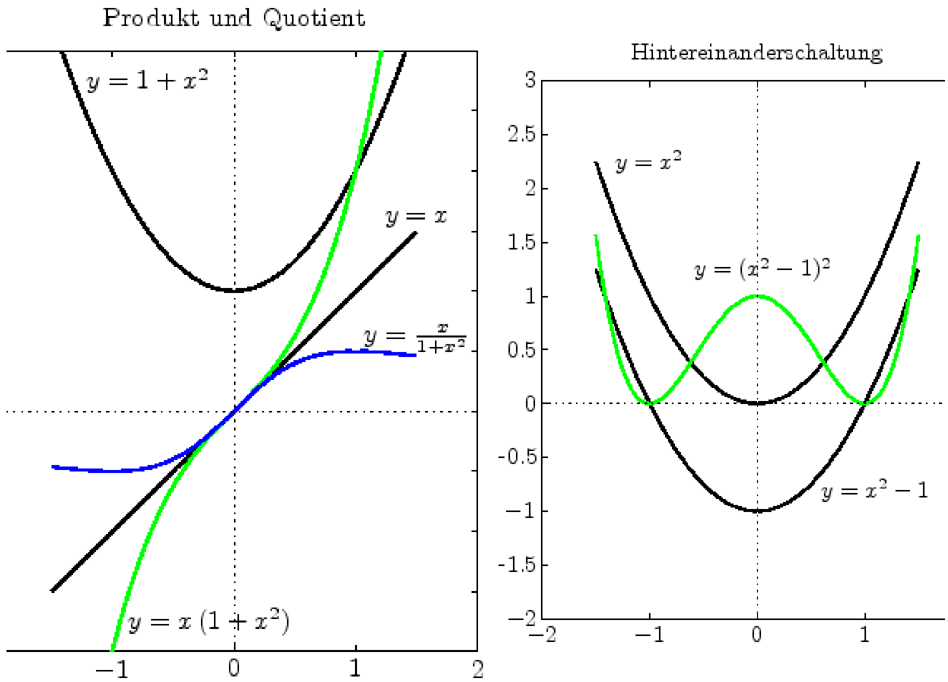
پای.

د دوه ننوتو فنکشنونو یا توابعو جمعه یا زیاتون د تعریف څخه ترلی لاس ته راځي:

$$
\begin{aligned}
&(f+g)((1-t)x_1+tx_2) \\
&\quad = \quad f((1-t)x_1+tx_2)+g((1-t)x_1+tx_2) \\
&\quad \leq \ (1-t)\,f(x_1)+t\,f(x_2)+(1-t)\,g(x_1)+t\,g(x_2) \\
&\quad = \ (1-t)(f+g)(x_1)+t(f+g)(x_2),
\end{aligned}
$$

د کوم سره چې د نابرابرون ننوتوالی د f او g څخه کار اخستل کیږي.
نوري ترنې یا عملیې په ټولیزه توګه ننوتوالی نه ساتي، لکه چې لاندې بیلګې به یې وشایي.

یو په بل پسې ترنه ضرب او ویش



د دې لپاره چې په یوه ټکي کې د تابع ناپرېکدنوالی وښایو، ټاکو $c < a < x < b$. نو دی

$$x = ta + (1-t)b$$

$$a = sx + (1-s)c$$

د $0 < s,t < 1$ سره. داچې ننوتی دی، نو باور لري

$$f(x) - f(a) \leq (1-t)(f(b) - f(a))$$

همداسي

$$f(x) - f(a) \geq \left(\frac{1-s}{s}\right)(f(a) - f(c)),$$

د $f(a) \leq sf(x) + (1-s)f(c)$ له امله.

د $x \to a$ لپاره s او t د 1 په لور هخيري، او له دې سره دی

سرلیک

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0.$$

د $x<a$ لپاره ورته دلیل راوړل کیږي.

پولینوم **Polynom**

د n درجې یو پولینوم p په لاندې بڼه لیکل کیږي

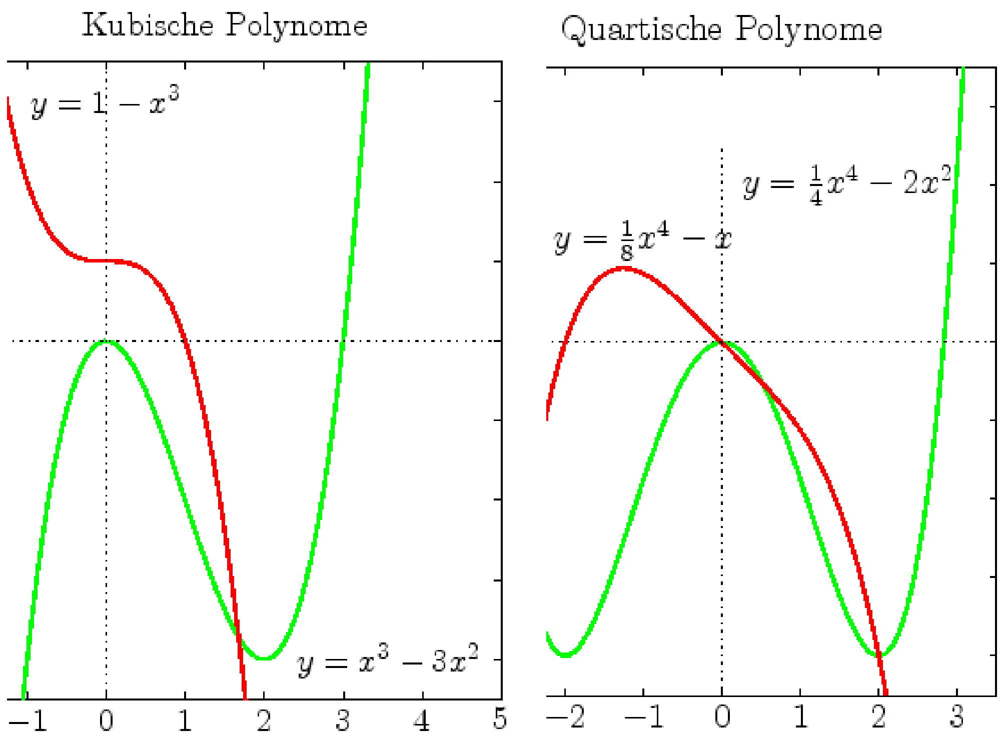
$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

د $a_n\neq 0$ سره.

اووښتوني یا متحولې x او ضریب یا ځلووني a_k کیدی شي حقیقي – همداسې کمپلکس ګڼونه یا عددونه وي. په اړونده توګه د حقیقي همداسې د کمپلکس پولینوم څخه غږیږو.
لیکونکیة: هیورنر او هیولیګ

لاندې ځیرې مکعب ډوله ($n=3$) او کوارتیک ډوله ($n=4$) پولینومونه د ځرنګوالي له لورې مختلف تابع ګرافونو سره ښایي.

کوارتیک پولینومونه مکعب پولینومونه



پولینوموېش Polynomdivision

پولینومونو p او q ته د $m = \text{Grad}\, q \leq \text{Grad}\, p = n$ سره یواځني
پولینومونه f او r شتون لري د

$$p = fq + r, \quad \text{Grad}\, f = n - m, \quad \text{Grad}\, r < m.$$

سره.

دا توټه ونه کیدی شي د وېش له لارې د باتي یا باقی سره وټاکل شي.

په ځانګي توګه د p د صفرځای t لپاره لاس ته راځي چې $p(x) = f(x)(x - t)$
دی د $\text{Grad}\, f = n - 1$. سره.

پای.

د q سره د p وېش څخه لرو

$$\underbrace{a_n x^n + \cdots}_{p(x)} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \underbrace{(b_m x^m + \cdots)}_{q(x)} + p_{n-1}(x)$$

د يوه پاتې يا باقي $p_{n-1}(x) = a'_{n-1} x^{n-1} + \cdots$ سره.

كه $m \leq n-1$ وي کېدی شي بيا ووېشل شي:

$$p_{n-1}(x) = \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} q(x) + p_{n-2}(x) .$$

پروسه پرې كيږي، كه د پاتې پولينوم درجه له m كوچنۍ وي، دا په دې معناچې وروسته د $r = p_{n-(n-m+1)}$. سره.
د تل بيا ضرب له لارې لاس ته راځي

$$f(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} + \cdots .$$

كه t د p صفرځای وي، نو باور لري

$$0 = p(t) = f(t)(t-t) + r(t) = r(t)$$

او له دې سره $r(x) = 0$ ، ځكه چې $\text{Grad } r < 1$ دی.

د پولينوم وېش د ليكنيز وېش سره ورته مخ ته تلی شي.

د بيلګې په توګه د $p(x) = 9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2$

او $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$ لپاره لاس ته راځي

$$(9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2) : (3x^2 + 2x + 1) =$$

$$= 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{r(x)}{q(x)}$$

$$
\begin{array}{r}
-(\,9x^5 + 6x^4 + 3x^3\,) \\
\hline
6x^4 + 7x^3 + 4x^2 \\
-(\,6x^4 + 4x^3 + 2x^2\,) \\
\hline
3x^3 + 2x^2 + 4x \\
-(\,3x^3 + 2x^2 + x\,) \\
\hline
3x + 2 = r(x)
\end{array}
$$

نو دی

$$\underbrace{9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2}_{p(x)} = \underbrace{(3x^3 + 2x^2 + x)}_{f(x)}\underbrace{(3x^2 + 2x + 1)}_{q(x)} + \underbrace{(3x + 2)}_{r(x)}\,.$$

د يوه پولينوم صفرځايونه او فاکتوري کول يا په ضريبونو ټوټه کول

يو د n درجې پولينوم p د څووالي يا تکرار سره ټيک z_k کمپلکس صفرځايونه لري او له دې سره کېدی شي په ورته کرښيزو ضريبونو يا فاکتورونو

$$p(z) = c(z - z_1)\cdots(z - z_n)$$

وليکل شي د ثابتې c سره.

که p حقيقی يا قييل وي، نو کمپلکس صفرځايونه په کنجوګيری جوړو $x_k \pm \mathrm{i}y_k$ رامنځ ته کيږي.

يو حقيقي په ضريبونو ليکل يا فاکتوره کول کېدی شي د کرښيزو فاکتورونو ترڅنګ د لاندې مربع فاکتورونه

$$(z - x_k - \mathrm{i}y_k)(z - x_k + \mathrm{i}y_k) = (z - x_k)^2 + y_k^2$$

هم ولري.

د دويمې درجې پولينوم صفرځايونو لپاره کيدی د منځشپې يا **ABC فرمول(دا د p,q -فرمول ته روته يا همهغسې دی) و کارول شي** او د دريمې او څلورمې درجې پولينومونه د کاردان فرمولونو Cardanischen Formeln له لارې د اکسپليځيت الجبری افادو يا وييېنو په توګه و ټاکل شی.

د جګو درجو پولينومونو لپاره بيا په ټوليزه توګه نومريکي تلنلارې کارول کيوي. که بيا يو صفرځای معلوم وی، نو کېدی شي د ا ړونده کرښيز فاکتورونې يا ضريبونې له لارې

و وېشل شي.
$q(z)=p(z)/(z-z_1)$ او $z_2,\ldots,z_n$ د $n-1$ درجې د پولينوم د د
صفرځايونو په توګه وټاکل شي.
د الجبر بنسټيزې جملې په اساس د Grad ≥ 1 درجې کمپلکس پولينوم يو صفرځاى
لري . د پرلپسې پولينوموېشنې د صفرځايونو سره
اړونده کربنيز صريبونه يا فاکتورونه له دې سره ضريبونه راکوي.

که p فقط حقيقي صريبونه ولري، نو باور لري

$$\overline{p(z)}=\overline{\sum_{k=0}^{n}p_kz^k}=\sum_{k=0}^{n}p_k\overline{z^k}=\sum_{k=0}^{n}p_k\overline{z}^k=p(\overline{z})$$

يعنې د يوه صفرځاى z_0 لپاره هم $p(\overline{z_0})=\overline{0}=0$ دى.

د $p(z)=z^3-5z^2+9z-5$

په ضريبونو ليکل يا فاکتوره کول ټاکو. پيژنو، چې $z_1=1$ يو صفرځاى دى او يو د
پولينوم وېش سره لرو
$p(z)/(z-1)=z^2-4z+5.$

د دې مربع پولينوم صفرځايونه د منځشپې فرمول له مخې دي
$z_{2,3}=2\pm i.$

د دې په تعقيب کمأبکس فاکتورونه لاندې ده

$$p(z)=(z-1)(z-2-i)(z-2+i).$$

حقيقي په ضريبونو ليکنه يا صريبونه د دواړو اخرني فکتورونو د ټولګې څخه لاس ته
راوړو همداسې سيده د مربع تکميلونې له لارې:

$$z^2-4z+5=(z-2)^2+1,$$

دا په دې معنا چې

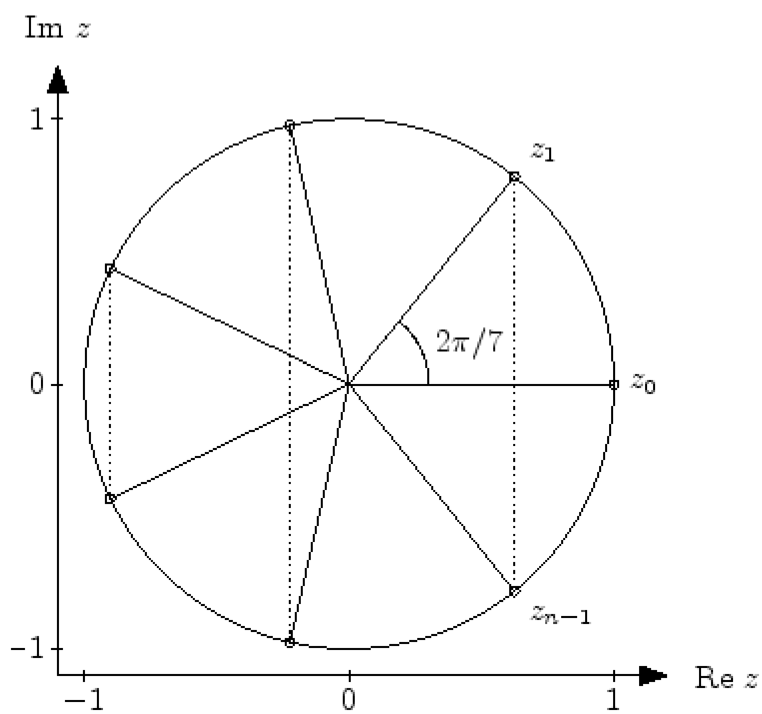
$$p(z) = (z-1)((z-2)^2+1).$$

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر، کنش

د $p(z) = z^n - 1$ صفرځايونه n -م يوونرېښي يا واحدجذرونه دي
$z_k = \exp(2k\pi \mathrm{i}/n), k = 0, ..., n-1.$

له دې سره کمپلکس فاکتورونه لاس ته راځي

$$p(z) = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \exp(2k\pi \mathrm{i}/n)).$$



د کمپلکس کنجرګيري صفرځايونو ټولګه يا يوځای کونه حقيقي فاکتوري کونه راکوي.

د جوړه n لپاره دی

$$p(z) = (z-1)(z+1)\prod_{k=1}^{n/2-1}\left(z^2 - 2z\cos(2k\pi/n) + 1\right)$$

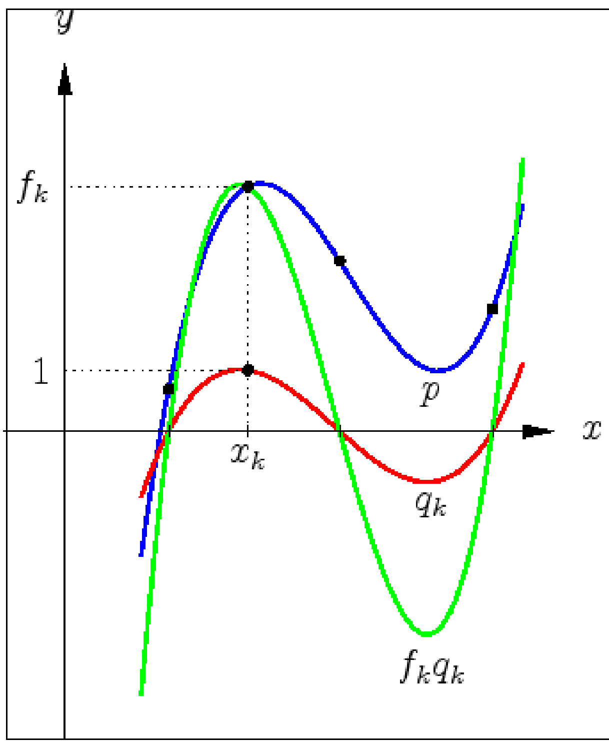
او د ناجوړه يا طاق n لپاره

$$p(z) = (z-1)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(z^2 - 2z\cos(2k\pi/n) + 1\right).$$

پای.

د پولينومونو سره انترپوليشن

په $n+1$ کي تابع ا رزښتونه f_k جوړه په مختلف تکيه ځايونو $x_0,\ldots,x_n$ کيدی شی يواځني د يوه $\leq n$ Gradدرجي پولينوم له لاري انترپولی شي:



$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0,\ldots,n\,.$$

دا انترپوليشن پولينوم کيدی شي د لاګرانج – بنه

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

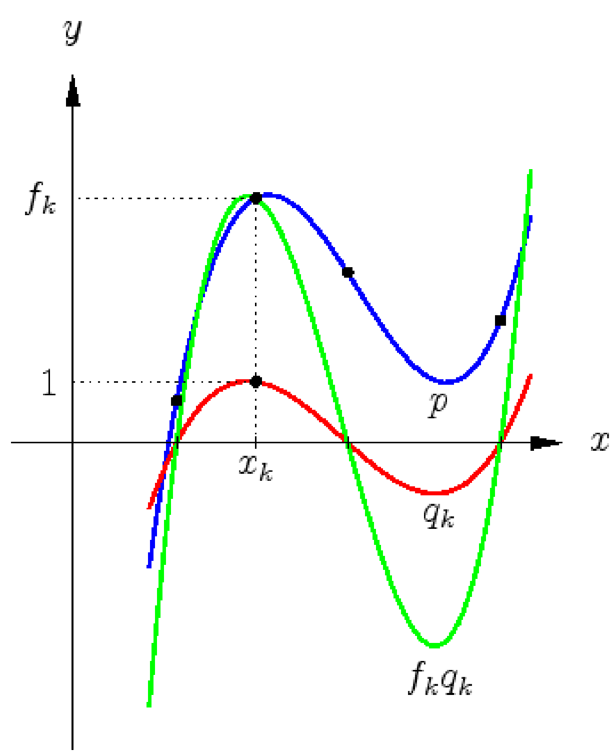
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n\,.$$

دا انترپوليشن پولينوم کيدى شي د لاګرانج – بڼه

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x), \quad q_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

انځور شي.



پولينوم q_k د لاګرانج-پولينوم بلل کيږي او په ټکي x_k کې ارزښت 1 لري او په نورو ټولو ټکو x_j کې يې ارزښت صفر دی:

سرليک

$$q_k(x_j) = \delta_{k,j}$$

د کرونيکر-سومبول δ سره.

د لاګرانج-پولينوم

$$q_k(x_j) = \delta_{j,k}$$

پوره کوي او له دې سره لاس ته راځي

$$p(x_j) = \sum_k f_k \delta_{j,k} = f_j \,,$$

د انترپوليشن شرايط ټول پوره دي.

د دې لپاره چې يواځنوالی وښايو، چې يو بل انترپوليشنپولينوم $\tilde{p}$ شتون لري، کمښت را اخلو يا تر څېړنې نيسو.

$p - \tilde{p}$.

دا (لږ.تر لږ.ه) $n+1$ صفرځاونه لري(د انترپوليشن کېدونکي ځايونه x_k)، مګر (زيات له زياته) د n درجو. له دط سره بايد کمښت کټمټ وي، نو پولينومونه سره توپير نخ لري.

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

په اکويديستانت يا برابرواټنيز تکيه -ځايونو $x_k = kh$ د f_k ارزښتونو توابعو ټيک ګرافيکي انځورونې ته کېدی شي مکعبيز انترپوليشن وکارول شي. له دې سره په تکيه-ځايونو $x_{k+1/2} = (k+1/2)h$ منځ ارزښتونه د

$$f_{k+1/2} = (-f_{k-1} + 9f_k + 9f_{k+1} - f_{k+2})/16$$

له لارې اپروکسيمی شي. دا پروسه تکراريږي، تر هغز چې پوره داتا منځ ته راشي.

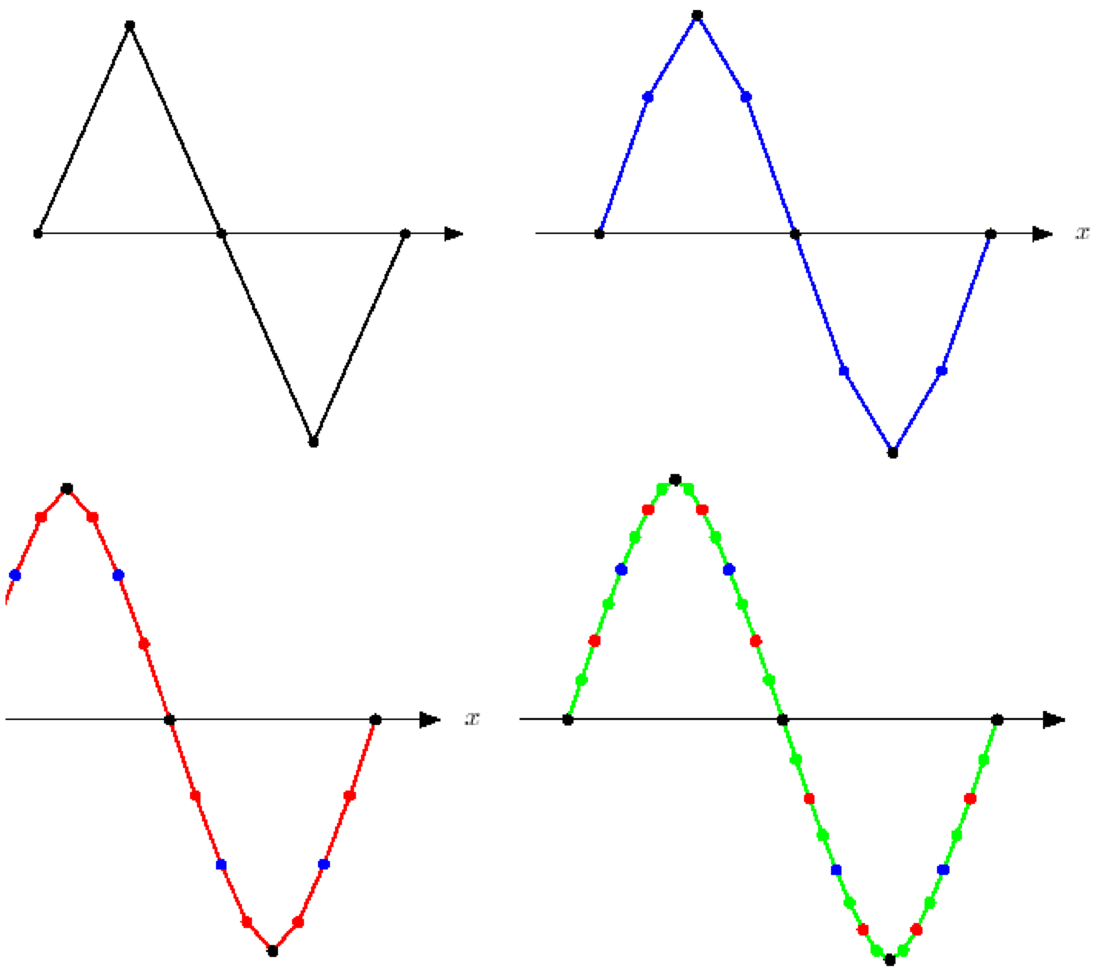
د ــټکو -فرمول وزنونه

$$-\frac{1}{16},\ \frac{9}{16},\ \frac{9}{16},\ -\frac{1}{16}$$

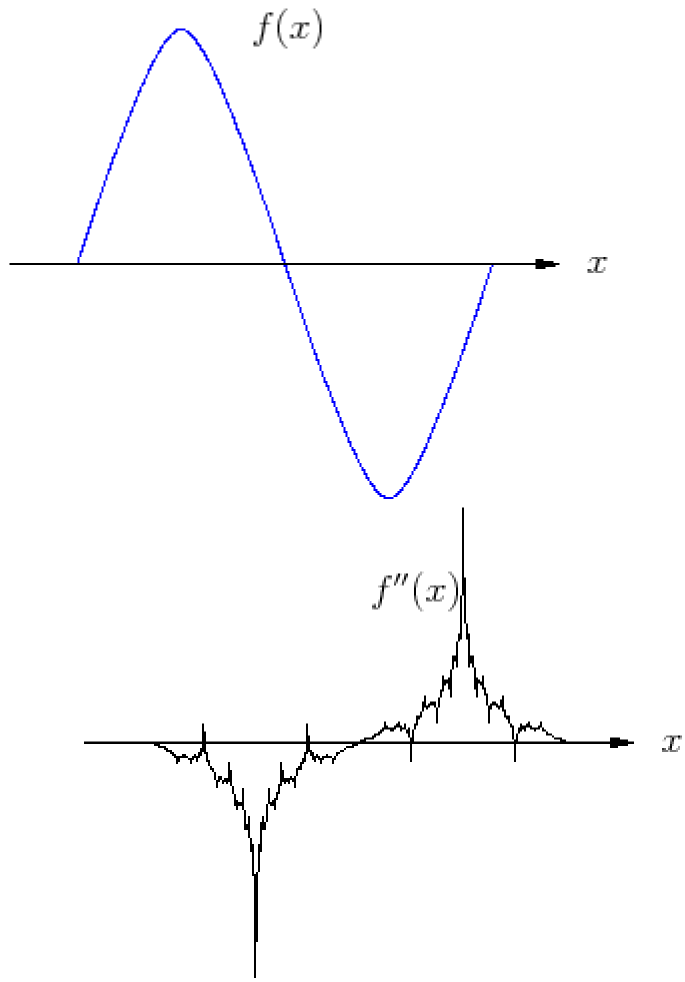
په تکيه-ځايونو $x_{k+1/2}$ د لاګرانژ-پولينوم ارزښتونه دي.
د بېلګې په بتوګه

$$-\frac{1}{16}=\left(\frac{x-kh}{(k-1)h-kh}\,\frac{x-(k+1)h}{(k-1)h-(k+1)h}\,\frac{x-(k+2)h}{(k-1)h-(k+2)h}\right)\Bigg|_{x=(k+1/2)h}.$$

دی.
د سيمتري په بنسټ او دا چې ضريبونه بايد سيمتريک شي(د ثابتو داتا انترپوليشن) ، بې له شمېرنې نور ضريبونه راکوي.



ځيره وتونداتا ښايي او د 4 -ټکو-انترپوليشن د دريځ خله کاروني يا استعمال له لارې د منځ ته ارغلي ساين تابع اپروکسيميشن . په حقيقت کې دا لاندې کيڼ ښودل شوی پوله تابع خوی اغيز لري. مګر په هر حالت فقط لومړی مشتق ناپرېکيدونکی دی.



ښی ګرافيک وښلی کمښت له لارې ورنږدې يا نږدې دويم مشتق د اته واره انترپوليشن پسې ښايي. سړی د ګراف فراکتال fraktalen (فراکتال: لاتين: مات) خويونه پيژني.

راشنل (کسری يا نسبتي) توابع

یو ریښتونی تابع r د صورت درجې m او مخرج درجې n سره د دوه پولینمونو وېش دی:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}.$$

دا انځوونه نا ټوټه وونې بلل کیږي، که p او q کوم ګډ کرښیز ضریب یا فاکتور ونه لري. د مخرج صفرځایونه راشنل تابع r د تعریف تشځایونه دي او د قطبځایونه بلل کیږي. د دوی نظم د صفرځایونو ډېرځلوالی ښايي.

اووښتوني یا متحولې x او ضریبونه a_k, b_k کېدی شي حقیقي یا کمپلکس وي.

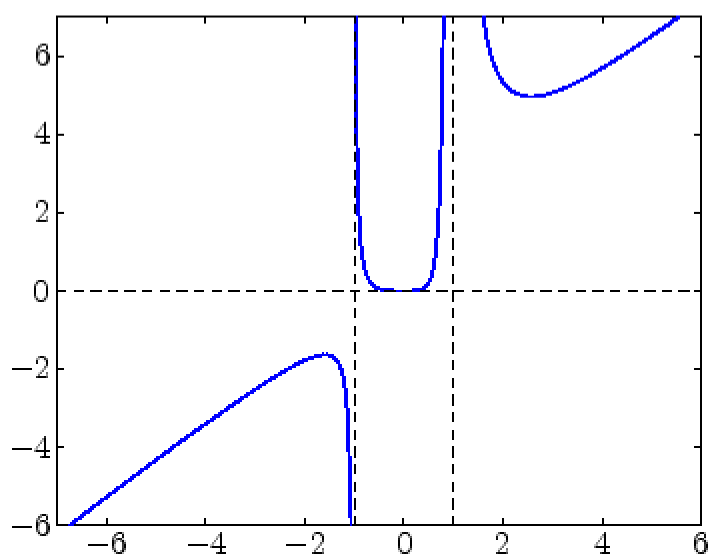
اړوند سړی د حقیقي یا کمپلکس راشنل تابع څخه غږیږي.

للیکونکي : اپپ، هیولیګ

تابع

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

تابع یو سادهقطب په $x=-1$ کې لري او ډبل پول په $x=1$ کې.



سړی له تابع f څخه درک کوي، چې په يوه ساده صفرځای کې مخنخښنه بدلوي او په يوه ډبل صفرځای کې مخنخښنه تغير نه خوري.

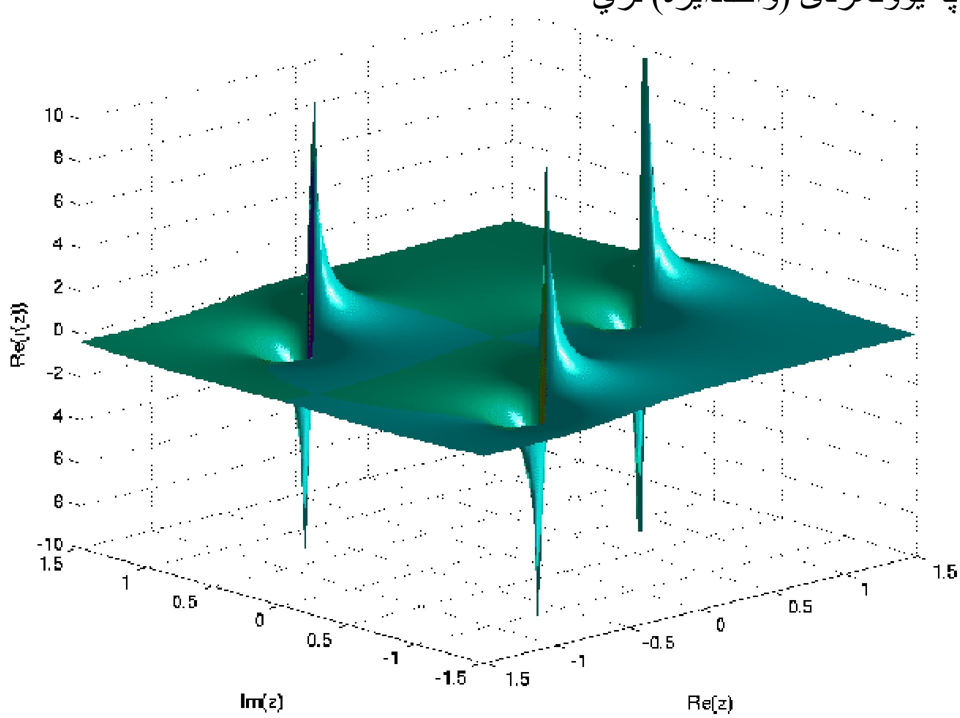
کمپلکس راشنل- يا کسري توابع

$$r(z) = \frac{z^2}{z^3 - 1}$$

درې صفرځايونه

$$z_1 = 1, z_2 = e^{2\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = e^{-2\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

په يوونکردی (واحددايره) لري



څيره د r د ګراف رييل - او ايماجينار برخه ښايي. له دې سره د رنګوېشنه (که چېرې رنګه وه) د r د مطلق ارزښت له لارې تاوکل شوې.

) ليکونکي: اپپ،هيورنر، کنش

په ټوټه مات ټوټه کونه يا تجزيه کونه **Partialbruchzerlegung**

يو د m_j نظم راشنل تابع r د n مختلفو صفرځايونو z_j سره ،

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_n)^{m_n}$$

کيدی شي په لاندې ټوټه شي

$$r(z) = f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z), \quad r_j(z) = \frac{a_{j,1}}{z - z_j} + \ldots + \frac{a_{j,m_j}}{(z - z_j)^{m_j}},$$

دلته f د $d = \mathrm{Grad}\, p - \mathrm{Grad}\, q$ Grad درجې پولينوم دی ($f = 0$ ، که $d < 0$ وی). راشنل توابع r_j د r په قطبځايونو کې اصلي برخې بلل کيږي. دا د $r(z)$ لوېدنه تشريح کوي د $z \to z_j$ لپاره. پولينوم f کيدی شي د پولينوموېش له لارې وشمېرل شي:

$$p = fq + g, \quad \mathrm{Grad}\ g < \mathrm{Grad}\ q\,.$$

دلته g د p په q باندې وېشنې پاتې يا باقي دی. ضريبونه $a_{j,\nu}$ کيدی شي د z^k د ضريبونو د پرتله کونې له لارې په کټوټوالي

$$p(z) = q(z) \left(f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z) \right)$$

وټاکل شي.

د بديل په توګه د اصلي برخو ټاکلو لپاره د پوله ارزښت متود هم کارول کيدی شي.

د قطبونو د خوراځګو ضريبونو لپاره باور لري

$$a_{j,m_j} = \lim_{z \to z_j} (z - z_j)^{m_j} r(z).$$

د یوه نظم $(m_j > 1)$ قطبخای کې نه شي کېدی ضريبونه $a_{j,1}, \ldots, a_{j,m_j-1}$ سیده د پولې ارزښت په توګه وټاکل شي. سړی کړی شي دا اوس شمیرل شوی ترم $a_{j,m_j} / (z - z_j)^{m_j}$ کم کړي او د رکورسیو متود وکاروي.. یو ضریب پرتله کونه د همدا اوس شته ترمونو په پام کې نیولو هم شونې ده.

پوله ارزښت کېدی شي وټاکل شي، داسې چې د r په مخرج کې ضریب $(z - z_j)^{m_j}$ لرې برېښنوول شي او بیا z_j په پاتې کسر یا ـمات کې ځا په ځای شي. په ځانګړې توګه باور لري

$$a_{j,1} = \frac{p(z_j)}{\prod_{k \neq j} (z_j - z_k)}$$

د ساده قطب ځایونو $z_1, \ldots, z_n$ لپاره.
لیکونکي : اپ، هیورنر

د ساده قطبځایونو ($m_j = 1$) لپاره به ټوټه کونه منځ ته راشي. د پولینوم وېش پسې راشنل تابع منځ ته راځي

$$r(z) - f(z) = \frac{g(z)}{q(z)} = \frac{g(z)}{(z - z_1) \cdots (z - z_n)},$$

د کوم سره چې پولینوم $g(z)$ او $q(z)$ ګډ پروېشونی یا مقسوم علیه ونه لري، نیسو ، چې ټول z_j مختلف دي، او $\text{Grad } g < n$ باور لري.
د ټوټه کسر ټوټه کوني سره د برابر اېښوونې وروسته

$$\frac{a_1}{z - z_1} + \cdots + \frac{a_n}{z - z_n}$$

د $a_j = a_{j,1}$ سره او د q د ضربول سره سړی د $g(z)$ د لاګرانژ ـانځورونه لاس ته راوړي

$$g(z) = \sum_{j=1}^{n}\left(a_j \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z - z_k)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left[a_j \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z_j - z_k)\right]\underbrace{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{z - z_k}{z_j - z_k}}_{q_j(z)}$$

دا په ې معناچي د $q_j(z_k) = \delta_{j,k}$ له امله په ګوډیزه نوکانو کي د ازښتونه $g(z_j)$

$$a_j = g(z_j)/\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z_j - z_k).$$

دي. له دې سره لاس ته راځي
په ورته توګه د جګو درجو قطبځایونه هم کار ول کېدی شي. دا مګر تخنیکي لږ پې]لی دی.
لیکونکي : اپ، هیورنر
د

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^3}{z^2 + z - 2}$$

په ټوټه کسر(مات) ټوټه ونه دې وټاکل شي.
دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنی نه ده، باید لومړی یو پولینوم وېش صورت ونیسي. سړی لاس ته راوړي

$$\begin{array}{l} (z^3) : (z^2 \; +z \; -2) = z - 1 + \dfrac{3z - 2}{z^2 + z - 2}, \\ -(\underline{z^3 \quad +z^2 \; -2z}) \\ \qquad -z^2 \; +2z \\ \quad -(\underline{-z^2 \; -z \; +2}) \\ \qquad\quad 3z \quad -2 \end{array}$$

دا په دې معنا چې $f(z) = z - 1, \quad g(z) = 3z - 2.$ د $r = f + \frac{g}{q}$ سره .
د دې لپاره چې د ټوټه مات ټوټه وني اېښونه چې لاس ته راوړو باید اوس د r قطبځایونه وټاکل شي. د منځشپې فرمول سره لاس ته $z_1 = 1$ او $z_2 = -2$ راوړو د مخرج پلینوم د صفځای په څېر:

$$q(z) = (z-1)(z+2).$$

د g/q ټوټه مات ټوټه ونه له دې سره لاندې بڼه لري

$$\frac{3z-2}{z^2+z-2} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{z+2}.$$

دا اخر پل د ضریبونو a_k ټاکل دي.
د پوله ارزښت متود سره لاس ت ه راځي

$$a_1 = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{3z-2}{z^2+z-2} = \left. \frac{3z-2}{z+2} \right|_{z=1} = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \left. \frac{3z-2}{z-1} \right|_{z=-2} = \frac{8}{3}.$$

او

په ټولیزه توګه لاس ته راځي

$$r(z) = z - 1 + \frac{1/3}{z-1} + \frac{8/3}{z+2}.$$

پای.

راشنل توابع

$$r(z) = \frac{2z^2 - 5z - 3}{z^3 - 3z^2}$$

په $z_1 = 3$ کې یوه سادهقطبځای لري او په $z_2 = 0.$ کې یو دبل قطبځای لري.

دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنۍ ده، پولینوم وېش ته اړتیا نه شته او د په ټوټه کسر ټوټه ونه دا بڼه لري

$$\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\frac{a_1}{z^2}+\frac{a_2}{z}+\frac{a_3}{z-3}.$$

د پوله ارزښت متود سره لرو

$$a_1 \qquad =\lim_{z\to 0} z^2\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\left.\frac{2z^2-5z-3}{z-3}\right|_{z=0}=1$$

$$a_3=\lim_{z\to 3}(z-3)\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\left.\frac{2z^2-5z-3}{z^2}\right|_{z=3}=0\,.$$

سړی په ساده ډول کړی شي، چې دا پاتې (هغه په اصطلاح، چې ورته وایو باقي مانده) ضریبونه a_2 په یوه ټکي $z\neq 0,3$ د تابع ارزښتونو د پرتوله کوني له لارې وټاکي.
د بېلګې په توګه د $z=1$ لپاره لرو

$$\frac{2-5-3}{1-3}=1+a_2+0$$

او سړی $a_2=2$ لاس ته راوړي.

لیکونکي: اپ،هیورنر

د راشنل توابعو لپاره

$$r(z)=\frac{z^2-5z+4}{z^3-3z^2+z+5}$$

لپاره قطبځایونه روښانه نه دي. د ازمابښت له لارې $z_1=-1$ پیداکيږي او بیا د پولینوم وېش سره لاس ته راځي

$$(z^3-3z^2+z+5):(z+1)=z^2-4z+5.$$

.

د نیمي شپې فرمول سره د مخرج نور صفرځایونه $q(z)$ لاس ته راځي

$$z_{2,3}=2\pm i.$$

له دې سره ماتلاندې یا مخرج ضريبه ونه یا فاکتوری کونه

$$q(z) = (z+1)(z-2-i)(z-2+i)$$

لري او د ټوټه کسر ټوټه کونه داسې ده

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-2-i} + \frac{c}{z-2+i}.$$

د دې لپاره چې a, b, c د ضريبونو د پرتلې له لارې وټاکو، د مخرج $q(z)$ سره وپشو او لرو

$$+ 4 = a(z-2-i)(z-2+i) + b(z+1)(z-2+i) + c(z+1)(z-2-i).$$

د $1, z, z^2$ د ضريبونو د پرتله کونې له لارې د درې ناټاکلو یا نامعلومو a, b او c لپاره یو کرښيز مساوات سيتم لاس ته راځي:

a	b	c	
1	1	1	1
-4	$-1+i$	$-1-i$	-5
5	$-2+i$	$-2-i$	4

د حل په حيث لاس ته $b = i/2$ $a = 1,$ او $c = -i/2$ راځي ، دا په دې معنا ، چې

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{i/2}{z-2-i} + \frac{-i/2}{z-2+i}.$$

که اخري دواړه ترمونه سره يوځای کړو، نو حقيقي ټوټه کسر ټوټه ونه لاس ته راځي

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1/4}{z^2-4z+5}.$$

د حقيقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزيه

يو حقيقي ريښتونی يا راشنل تابع r د حقيقي قطبځايونو x_j سره او كمپلكس كنجوګيري قطبځايونو $u_k \pm \mathrm{i}\, v_k$ سره او څو واره والی يا ډېروالی m_j همداسې n_k

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(x) = \prod_j (x - x_j)^{m_j} \prod_k ((x - u_k)^2 + v_k^2)^{n_k}$$

كيدی شي په لاندې بڼه

$$r(x) = f(x) + \sum_j \sum_{\nu \le m_j} \frac{a_{j,\nu}}{(x - x_j)^{\nu}} + \sum_k \sum_{\mu \le n_k} \frac{b_{k,\mu}(x - u_k) + c_{k,\mu}}{((x - u_k)^2 + v_k^2)^{\mu}}$$

ټوټه كيږي، د $d = \mathrm{Grad}\ p - \mathrm{Grad}\ q$ درجې ($f = 0$ ، كه $d < 0$ وي) يوه پولينوم f سره. د په هر قطبځای زياتونونو يا د جمعې غړو د ګڼون يا تعداد ډېرواره والی په ګوته كوي. په ځانګړې توګه د ساده قطبځای لپاره باور لري

$$r(x) = f(x) + \sum_j \frac{a_j}{x - x_j} + \sum_k \frac{b_k(x - u_k) + c_k}{(x - u_k)^2 + v_k^2}.$$

پولينوم f كيدی شي دپولينوم وېش له لارې وټاكل شي

$$p = fq + g, \quad \mathrm{Grad}\ g < \mathrm{Grad}\ q,$$

دا په دې معنا چې g د p وېش په q باندې پاتې يا باقي دی. ضريبونه كيدی شي د مخرج پولينوم سره له ضرب وروسته دضريبونو د پرتلې له لارې وشمېرل شي.
حقيقي ټوټه كسر ټوټه كونه هم كيدی شي د كمپلكس بڼې څخه و كټل شي يا لاس ته راوړل شي، داسې چې سرې كمپلكس كنجوګيري ترمونه سره يوځای كاندې.

ټوټه كونه د ساده قطبځايونو ($m_j = n_k = 1$) لپاره سرته رسيږي..

د r کمپلکس ټوټه کسر ټوټه کونه په دې حالت کې دا لاندې بڼه لري

$$p(x)+\sum_j \frac{a_j}{x-z_j}$$

د z_j سره د مخرج پرلینوم q ساده صفرځایونه او

$$a_j=\lim_{z\to z_j}(z-z_j)r(z).$$

دا q چې حقیقي دی، نو کمپلکس صفرځایونه د کمپلکس کونجږګیري جوړوړپه توګه منځ ته راځي:

$$z_k=u+\mathrm{i}v,\quad z_l=u-\mathrm{i}v=\overline{z_k}.$$

له دې سره د اړونده ترمونو لپاره لاندې ټوټه ونه باور لري

$$\overline{a_k}=\lim_{z\to z_k}\overline{(z-z_k)r(z)}=\lim_{\overline{z}\to z_l}(\overline{z}-z_l)r(\overline{z})=a_l,$$

دا په دې معنا، چې

$$a_k=s+\mathrm{i}t,\quad a_l=s-\mathrm{i}t.$$

د دواړو ترمونو یوځای کونه غوښتونې بڼه راکوي:

$$\frac{s+\mathrm{i}t}{x-u-\mathrm{i}v}+\frac{s-\mathrm{i}t}{x-u+\mathrm{i}v}=\frac{2s(x-u)-2tv}{(x-u)^2+v^2}.$$

د جګو درجو قطبځایونه کیدی شي په ورته توګه تر ځیړنې ونیول شي، مګر دلیل راوړنه یې په ځرګنده توګه پیچلې ده.

د

$$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{2x^3-9x^2+11x+1}{x^3-4x^2+5x}$$

حقیقي په ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکنه په درې پلونو یا قدمونو وېشل کیږي

(i) دا چې Grad $p \geq$ Grad q دی، لومړی د پلوینوم وېشنه صورت نیسي:

$$(2x^3 - 9x^2 + 11x + 1) : (x^3 - 4x^2 + 5x) = 2$$

$$g(x) = -x^2 + x + 1.$$
پاتې

له دې سره لاس ته راځي

$$r(x) = f(x) + \frac{g(x)}{q(x)} = 2 + \frac{-x^2 + x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x}.$$

(ii) د دې لپاره چې د g/q ټوټه ونې اینوونه یا اسمعمال پیداکړو، نو قطبځایونه ټاکو یا پیدا کوو.

د q د صفرځایونو $x = 0$ د نوکانو دباندېکونې وروسته د مبع تکمیل له لارې سرې نور دواړه صفرځایونه لاس ته راوړي:

$$x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1^2.$$

دا پاتې صفرځایونه کمپلکس کونجوګیري جوړې $u \pm iv = 2 \pm i$ دي.له دې سره اینوونه په لاندې توګه ده

$$\frac{-x^2 + x + 1}{x((x-2)^2 + 1^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b(x-2) + c}{(x-2)^2 + 1^2}.$$

(iii) د ضریبونو د ټاکنو لپاره د اصلي مخرج q سره ضربیږي او ترې لاس ته راځي

$$-x^2 + x + 1 = a((x-2)^2 + 1^2) + b(x-2)x + cx$$

د x, 1 او x^2 ضریبونو پرتله مو کرښیز مساوات سیستم ته بیایي

$$1 = \qquad 5a$$

$$1 = -4a - 2b + c$$
$$-1 = a + b$$

د لاندې حل سره

$$a = \frac{1}{5},\ b = -\frac{6}{5},\ c = -\frac{3}{5}\ .$$

له دې سره حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونه ده

$$r(x) = \frac{1/5}{x} + \frac{-6/5(x-2) + (-3/5)}{(x-2)^2 + 1^2}.$$

د ټاکلو لپاره پوله ارزښت متودونه هم کارول کيږي. که دا ايښوونه يا ځای په ځای کونه د x سره ضرب شي او $x = 0$ کيږدي، نو لاس ته ترې راځي

$$\frac{1}{2^2 + 1^2} = a + 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{5}.$$

د $x = 2$ ځای په ځای کونې سره c لاس ته راځي:

$$\frac{-2^2 + 2 + 1}{2(0^2 + 1^2)} = \frac{1/5}{2} + \frac{c}{0^2 + 1^2} \Longrightarrow c = -\frac{3}{5}.$$

بالاخره کېدی b د ټکی ازمايښت $x \neq 2$ له لارې ، د بېلګې په توګه $x = 1$ منځ ته راشي.
پای.

د

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکلو په دوه پلونو يا قدمونو کې ترتيبيږي

(i) د اینوونې د ټاکلو لومړی قطبځایونه پیدا کیږي. له

$$q(x) = (x^2+1)^2$$

پیژندل کیږي، چې $\pm i$ ډبل صفرځایونه دي، دا په دې معنا چې $u = 0$ او $v = 1$.
له دې سره دا اینوونه ده

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{b_1x+c_1}{x^2+1} + \frac{b_2x+c_2}{(x^2+1)^2}.$$

(ii) د ضریبونو د ټاکلو له امله دا سړی د اصلي مخرج q سره ضربوي او لاس ته
ترې راوړي

$$\begin{aligned} x^3 &= (b_1x+c_1)(x^2+1)+b_2x+c_2 \\ &= b_1x^3+c_1x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)1. \end{aligned}$$

د $1, x, x^2$ او x^3 د ضریبونو پرتله کونه مو کرښیز سیستم ته بیایي

$$\begin{aligned} 1 &= b_1 \\ 0 &= c_1 \\ 0 &= b_1+b_2 \\ 0 &= c_1+c_2 \end{aligned}$$

د لاندې حل سره
$b_1 = 1,\ c_1 = 0,\ b_2 = -1,\ c_2 = 0$.

بدیلې کیدی شي د کمپلکس ټوټوه کسر ټوّ کونې ښخه مخ ته لاړ شو

$$\frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{a}{z-i} + \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{c}{z+i} + \frac{d}{(z+i)^2}.$$

ضريبونه $c=\overline{a},\ d=\overline{b}$ پوره کوي او د جمعي جوړولو له لارې

$$\frac{a}{z-i}+\frac{c}{z+i},\quad \frac{b}{(z-i)^2}+\frac{d}{(z+i)^2}$$

هم حقيقي توټهکسر توټه کونه لاس ته راوړي

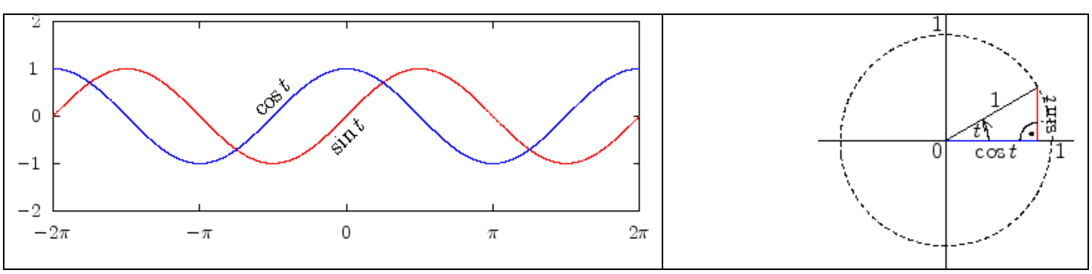
$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}.$$

ساين او کوساين Sinus und Cosinus

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t\in\mathbb{R}$$

سره په سرچينه په کونج t خرخول شوی ټکی $(1,0)$ کواوردينات نومولکيږي . د تر مخنښي پورې کوساين او ساين په يوه ولاړکوديز يرېکوډي (المثلث القايم الزاويه) کې د ولاړ اړخونو(هغه اضلاع وې چې يو د بل سره قلموازاويه جوړه وي) نسبت د نيمی(قطر) سرره په ګوته کوي.



دواړه ګردی توابع يا د داېرې توابع 2π - تلبېرته راګرځېدوني يا 2π - پريوديکي دي او باور لري

$$\cos t = \sin(t+\pi/2)$$

• ,

- $\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$,
- $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

يو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

د اويلر-مويورې فرمول **Formel von Euler-Moivre**

يو اکسپوننشل تابع د ايماجينار x -محور سره کېدی شي د $t \in \mathbb{R}$ لپاره د تريکونومتريک(درېکوډي - يا مثلثاتي -) توابع په مرسته افاده شي.

$$\cos t + \mathrm{i}\sin t = \exp(\mathrm{i}t)$$

کوساين او ساين حقيقي – او ايماجينار ګنونه(عددونه) په ګوته کوي د ارزښت (1 $|\exp(\mathrm{i}t)| = 1$) سره .

که پورته فرمول اينورتير يا معکوس شي ، نو لاس ته راځي

$\cos t$	$= \mathrm{Re}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t}\right)$
$\sin t$	$= \mathrm{Im}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}\right)$.

د اکسپ، کوساين او ساين کټمټوالی اويلر او مويورې ته ځي. دا د جيومتريکي کمپلکس عددونو د انټرپوليشن لپاره بنسټ جوړوي او د فوری-اناليوز کې غوره رول لوبوي.

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د ساين او کوساين لپاره د زياتون- يا جمع قضيه

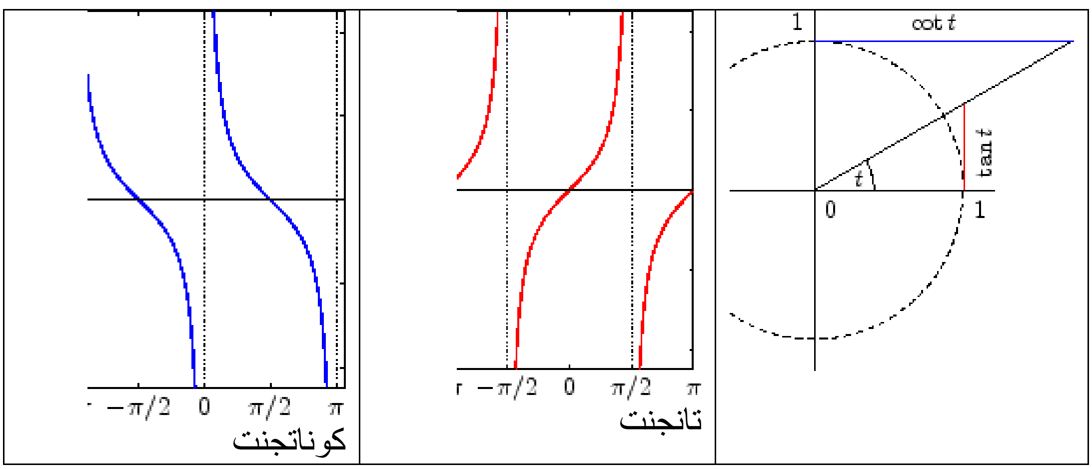
د ګردی‌توابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندې اړیکې باور لري:

- $$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
- $$\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$$

په ځانګړې توګه دی

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

تانجنت او کوتاجنت **Tangens und Cotangens**



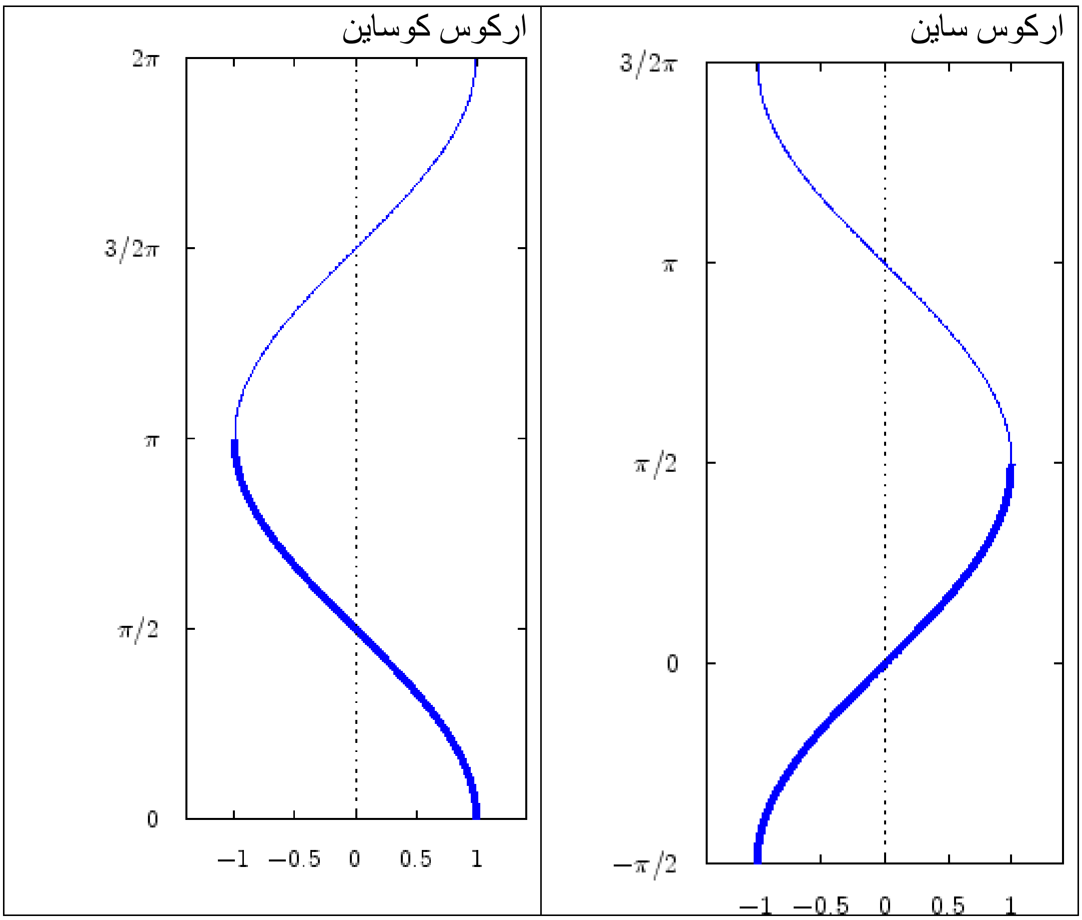
د تانجنت او کوتانجنت توابع د

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

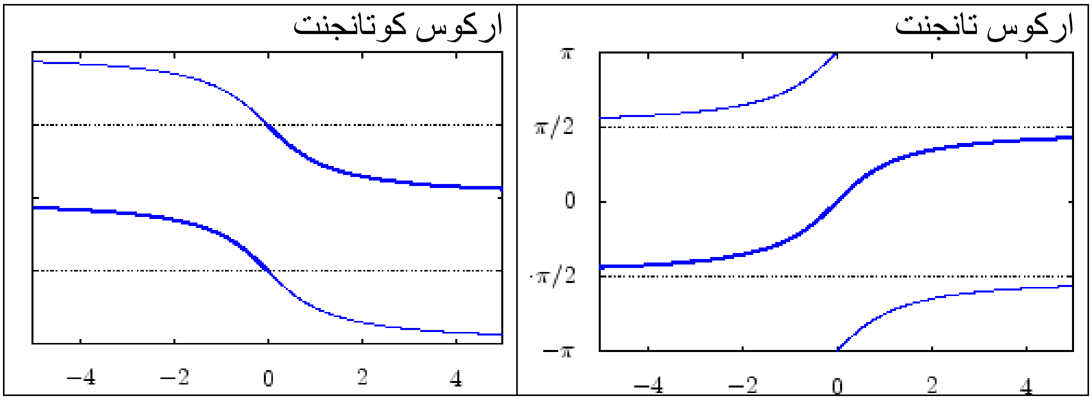
له لارې تعریف دي. دا تر دمخنخښې پورې د ولاړګوډیز درېګوډي(- - مثلث) د ولاړکوډونو Katheten نسبت ورکوي
یو څو ځانګړې ارزښتونه دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

د ارکوس توابع **Arcusfunktionen**



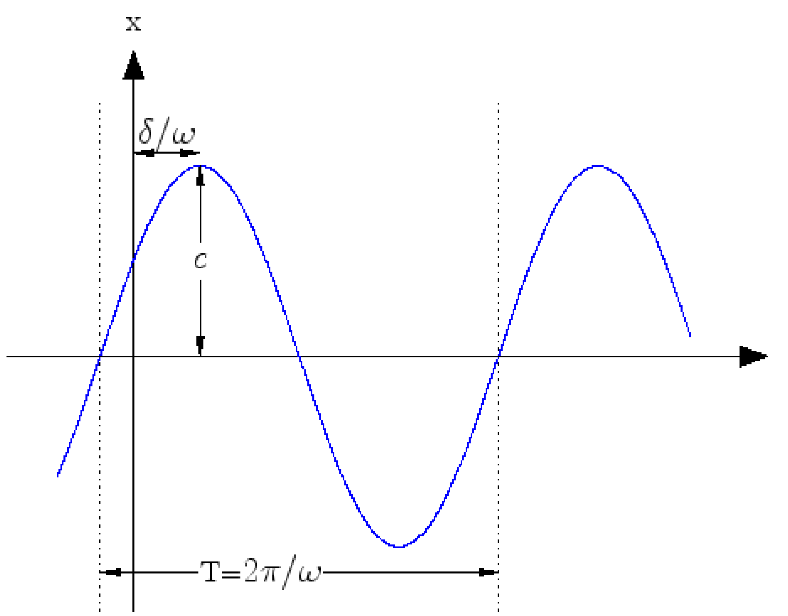
د درېګوډيز (ترېګونومتريکي يا مثلثاتي) توابعو په څټ يا معکوس توابع د arccos, arcsin, arctan, arccot سره ښوول کيږي.



د دي تعريف – او ارزښت ورشو د پورته ښېرې ښخه رانيول كېدى شي.
له دې سره اصلي ښانګې غوړې يا پنډې كښل شوي دي.
ليكونكي: هيوليک، كنويف، كنش

هارمونيک لړځيدني يا رپيدني

Harmonische Schwingung



یو هارمونيکي لړځيدنه د جګوالي Amplitude $c \geq 0$ سرره،د فاز بلځای ته وړنه یا راکښنه δ او فرکونځ ω همداسې پريودېوالی يا تل (بيرته) راګرځيدنه $T = 2\pi/\omega$ لاندې بڼه لري

$$x(t) = c\cos(\omega t - \delta)\ .$$

ورته یا برابر ارزښته انځورونه ده

$$\mathrm{Re}\, c \exp(\mathrm{i}(\omega t - \delta))$$

یا

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

د $a = c\cos(\delta), b = c\sin(\delta)$ سره ، دا په دې معنا چې (c, δ) د (a, b) قطبي کواوردیناتونه دي.

پای.

د پارمتر شميربدلون د جمعي تيورم څخه لاس ته راځ:

$$c\cos(\omega t - \delta) = c\left(\cos(\omega t)\cos(\delta) + \sin(\omega t)\sin\delta\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = c\cos\delta, \quad b = c\sin\delta.$$

برعکس دی

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \delta = \arctan(b/a) + \varphi$$

د لاندې سره

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{für } a \geq 0 \\ \pi, & \text{für } a < 0 \text{ und } b \geq 0 \\ -\pi & \text{sonst.} \end{cases}$$

پای.

د هارموني رپيدنې يو پر بل پرېوتنه

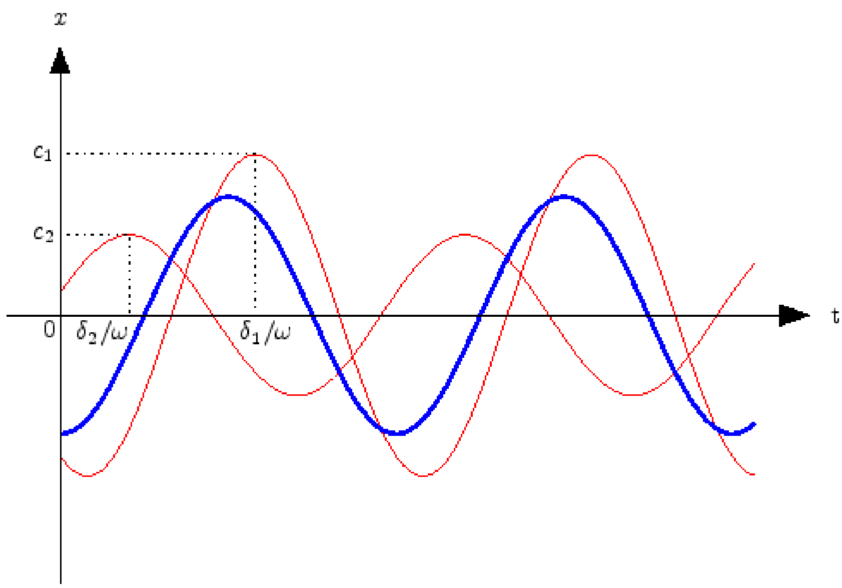
د دوه هارمونې رپېدنو يو پر بل پرېوتنه (په څېره کې غوړ کښل شوي دي)

$$x_k(t) = c_k \cos(\omega t - \delta_k), \quad k = 1,2\,,$$

د

امپلیتودې سره هارمونيک دي

$$c = \sqrt{c_1^2 + 2\cos(\delta_1 - \delta_2)c_1c_2 + c_2^2}\,.$$



ليکونکي: هيوليک، کوپف،کنش

د يو پر بل پرېوتني کمپلکس بڼه

$$\mathrm{Re}\left(c_1e^{\mathrm{i}\omega t-\delta_1} + c_2e^{\mathrm{i}\omega t-\delta_2}\right) = \mathrm{Re}\left([c_1e^{-\mathrm{i}\delta_1} + c_2e^{-\mathrm{i}\delta_2}]e^{\mathrm{i}\omega t}\right)$$

راکوي

$$[\ldots] = ce^{-\mathrm{i}\delta} = z$$

او له دې سره

$$c^2 = z\bar{z} = \left(c_1e^{-\mathrm{i}\delta_1} + c_2e^{-\mathrm{i}\delta_2}\right)\left(c_1e^{\mathrm{i}\delta_1} + c_2e^{\mathrm{i}\delta_2}\right)\,.$$

$$e^{\mathrm{i}s} + e^{-\mathrm{i}s} = 2\cos s$$

د په پام کې نيولو سره ضربونه غوښتنه راکوي..

په بدیله ت وګه کېدی شي امپليتود انځوروني

$$x_k(t) = a_k \cos(\omega t) + b_k \sin(\omega t)$$

ځخه وشمېرل شي. سرِی لاس ته راوړي

$$c = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}\ .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

په درځ يا متِه باندې کړولو هارموني لړځېدنه يو په بل پرېوځي

$$\cos(\omega t - \delta_k), \quad \delta_k = k\delta,\ k = 0, \ldots, n,$$

د برابر يا همغه فرکونځ او امپليتود. لړځېدنه د کمپلکس انځوروني په مرسته د دې لاندې حقيقي برخې په حيث لاس ته راځي

$$e^{\mathrm{i}\omega t} + e^{\mathrm{i}(\omega t - \delta)} + \ldots + e^{\mathrm{i}(\omega t - n\delta)} = e^{\mathrm{i}\omega t} \frac{1 - (e^{-\mathrm{i}\delta})^{n+1}}{1 - e^{-\mathrm{i}\delta}}$$

$$= e^{\mathrm{i}\omega t} \frac{e^{-\mathrm{i}\frac{n+1}{2}\delta}(2\mathrm{i}\sin\frac{n+1}{2}\delta)}{e^{-\mathrm{i}\frac{\delta}{2}}(2\mathrm{i}\sin\frac{\delta}{2})} = \left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\right) e^{\mathrm{i}(\omega t - \frac{n}{2}\delta)}\ .$$

يو په بل پرېوتنه لاندې امپليتود لري

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

او فاز $(n/2)\delta$.

د $\omega = 0$ سره د ايماجينار برخې د پرتله کوني له لارې تريګونمتريکی کتمتوالی راکوي.

$$\sin\delta + \ldots + \sin n\delta = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta \sin\frac{n}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\ .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د دوه لړځېدنو $c_k e^{i\omega_k t}$ یو پر بل پرېوتنه کېدی شي د

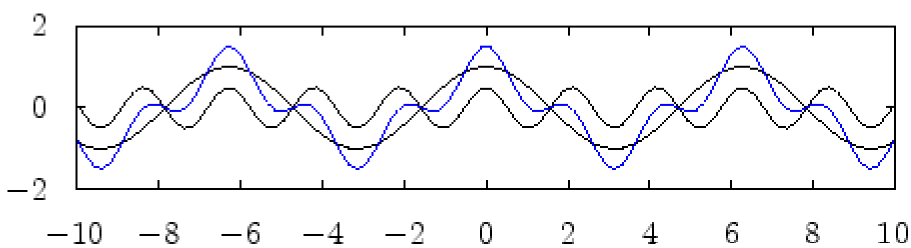
$$c(t)e^{i\bar{\omega}t}, \quad c(t) = c_1 e^{-i\Delta\omega t} + c_2 e^{i\Delta\omega t},$$

په ضرب د $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ او $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$ سره ولیکل شي.
لاس ته راغلی داسې په نامه مودولیري رپېدنه تیک هلته پریودیکي ده، که د فرکونځ نسبت ω_1/ω_2 راشنل وي.
د مودولي شوی کمپلکس امپلیتود مینیمال او ماکسیمال ارزښت همداسي مطلق ارزښت د $|c_1 - c_2|$ همداسې $c_1 + c_2$ ترمنځ لوړ ټيټ کيږي. په ځانګړې توګه دی

$$c(t) = 2c\cos(\Delta\omega t)$$

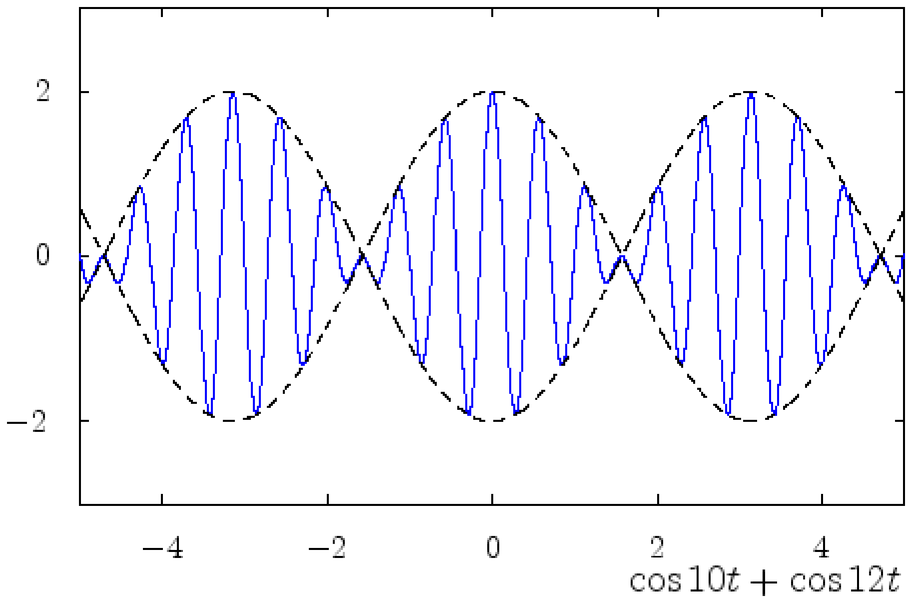
د همغې یا برابرې امپلیتود $c = c_1 = c_2$ لپاره.
لاندې ځیرې یو څو بیپیکي حالتونه په ګوته کوي

- periodische Überlagerung پریودیکي یو پر بل پرېوتنه

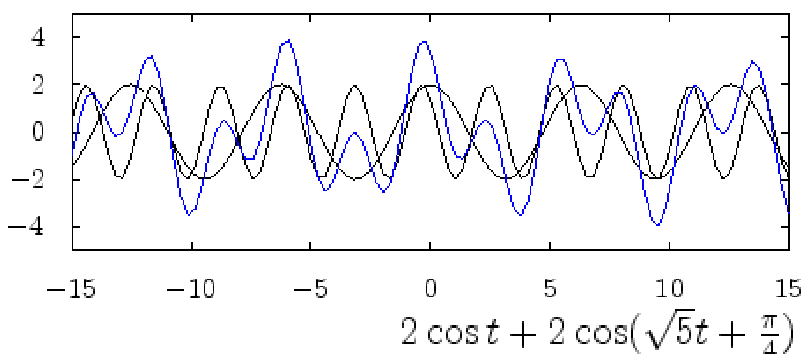


$\cos t + \frac{1}{2}\cos 3t$

- برابر امپلیتود c_k او $\omega_1 \approx \omega_2$



- aperiodische Überlagerungاپريوديکي يا نه - يو پر بل پرېوتنه

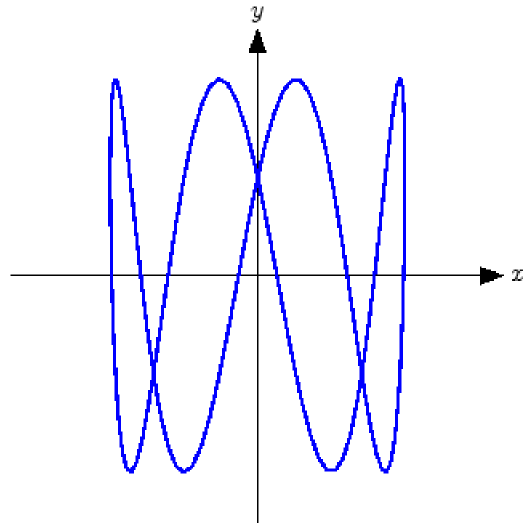


پاي.

د سطي لړځېدنو يو پر بل پرېوتنې د لړځېدنو مختالف لورو (a_1, a_2) او (b_1, b_2) کږې يا منحنې

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2)\,,$$

لاس ته راځي چې د مخترع Lissajous-Figuren ليساجوس –ځيرې بللکيږي.



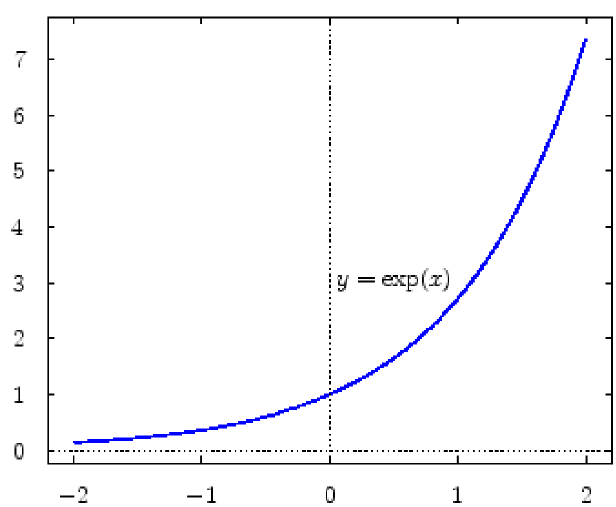
خبره د پارامتر یوه بېلګه بنایي

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_1 = 1\,, \quad \delta_1 = 0\,, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = 4\,, \quad \delta_2 = \frac{\pi}{3}\,.$$

پای.

اکسپوننشل توابع

Exponentialfunktion



توان تابع

$$y = e^x = \exp(x)$$

$x \in \mathbb{R}$

د اويلر عدد $e = 2.71828...$ سره اکسپوننشل تابع بلل کيږي. دا د ټول لپاره مثبت ده او د تابع مساوات پوره کوي
$e^{x+y} = e^x e^y$.

$e^{-x} = 1/e^x$
په ځانګړې توګه

ګټه يا ربح Verzinsung

يوبيل بډايې د – وارهد اخستني همداسي او ورکوني وروسته د يوې ګټوې Rate r
($r < 0$ همداسي $r > 0$) د يوې ګټونې فاکتور $(1+p)$ سره لاندې پای بډايې ورکوي

$$y = (1+p)^n x + \frac{(1+p)^n - 1}{p} r .$$

دلته $p = 1$ د 100% يو ګټه اينسوونه ده په کلنۍ ګټه ا چونې سره.

فعاله کلنۍ ګټه د مياشتنۍ ګټونې څخه شمېرل کيږي د يوه ګټې اينسونې p_m سره و لاندې ته

$$p_j = (1+p_m)^{12} - 1 \geq 12 p_m .$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

بنسټ بډايې په همدې لومړني ګټونې پريود کې په پام کې نيول کيږي، اخستنه ههمداسي اچونه لومړی د ورپسې کال. په لاندې توګه يا د اسې راکوي

$$n = 1: \quad y = x(1+p) + r,$$
$$n = 2: \quad y = \big(x(1+p) + r\big)(1+p) + r.$$

په ټولېزه توګه باور لري

$$\begin{aligned} y &= \quad (\cdots(x(1+p)+r)(1+p)+r)\cdots) \\ &= x(1+p)^n + \left[1+(1+p)+(1+p)^2+\cdots+(1+p)^{n-1}\right]r \end{aligned}$$

دا په ګوډیزو نوکانو کې افاده کېدی شي په هندسي جمعه فرمول واړوي او سړی دا ورکړ شوی فرمول لاس ته راوړي.
پای.

د منهتان خرڅول 1626زک مورګن(د ځمکي د کچوني یوون یا واحد دی) 11000 Morgen د یوه حاضر قیمت په رانیولو ګټور تمام شو، ځکه چې په کلنی7 په سلو کې ګټه دا بډایي په کال 2000 زک کې

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1.07)^{374} = 5.857\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\stackrel{\triangle}{=} 2.658\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

ده(که متمأن بانکونه او د اسعارو رفورم له مخه نه وي نیول شوی یا فرض شوی).
په میاشتنی ګټه لرو

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1+7/1200)^{4488} = 13.030\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\stackrel{\triangle}{=} 5.913\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

او

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot\exp(0.07\cdot374) = 14.060\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\stackrel{\triangle}{=} 6.380\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

د ټولیزې ګټونې سره.
که مورګن د 0.81 Ha هکتارسره وشمېرل شي، نو د منهتان دا نننی سطحه د89 مربعکیلو متره ورکوي. یو کور هلته نن نږدې6500 USD/Quadratmeter امریکایي ډالر په مربع متر ارزښت لري. دا پیسې به د یوه کور تعمیرلپاره چې څلور پوړیز وي ورسیږي، چې په ټوله سطحه ونیسي.
پای.

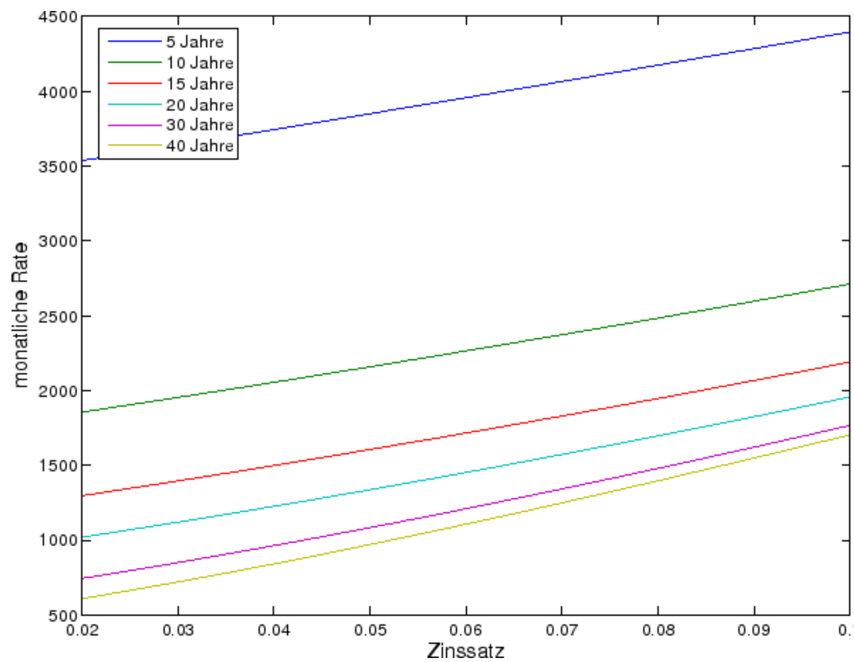
د یوه $x = 200000$ یوروپور ، $n = 30$ کلونو لپاره او یوې کره شوې ګټې پینې $p = 5$ په سلو کې میاشتنی ګټه لاندې ده

$$p_m = (1+p)^{1/12} - 1 = 0.4074\%$$

او میاشتنۍ رات یا ګټېه ده

$$r = \frac{p_m(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}x = 1060.11\,\mathrm{EUR}.$$

د لاندې پسې تړلي له ګټي فرمول څخه د صفراینوونې له لارې د پور ارزښت راکوي او د $(1+p_m)^{12} = 1+p$ په پام کې نیولو سره .
توله تادیه $30 \cdot 12r = 381639.60$ یورو د پور جمعې څخه د په 90.8 په سلو کې اوړي(د بانک مزدوري پرې زیاته).



پروت: ګټونه یا د ګټې پینه ، ولاړ: میاشتنۍ ګټه
ګراف میاشتنۍ ګټه ښایي د یوه 200 000 یورو پور لپاره د ګټې پینې د ضریب په څېر د مختلفو وختونو لپاره.
پای.

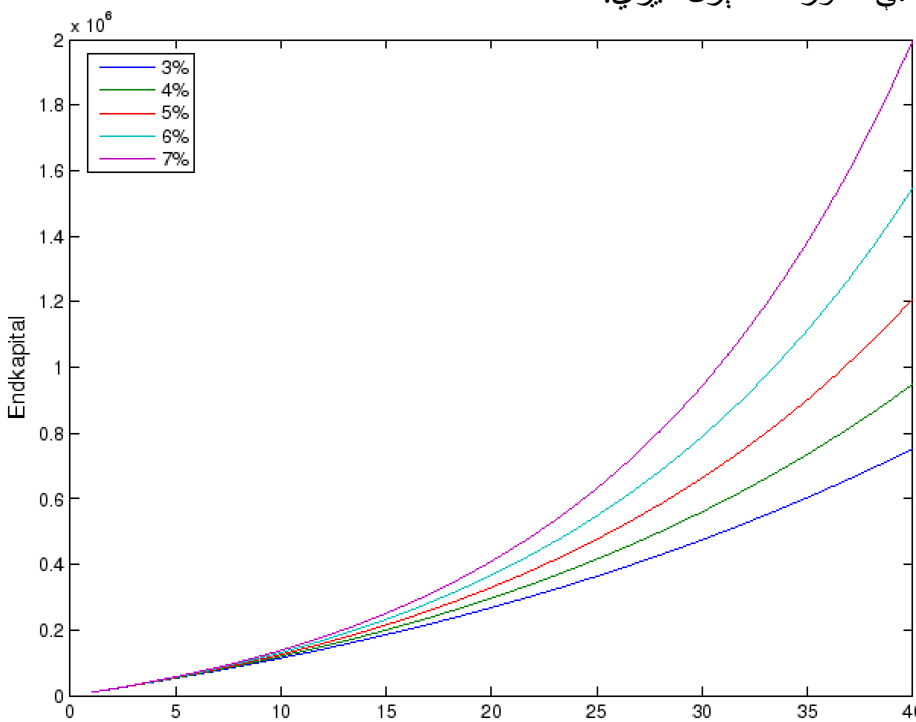
کلنۍ د پیسو ورکونه $z = 10000$ یورو د یوې 7 په سلو کې ګټونې ته د $n = 12$ کلونو وروسته یوه دا لاندې بدایې ورکوي

$$y = \frac{(1+p_j)^n - 1}{p_j} z = \frac{1.07^{12} - 1}{0.07} 10000\,\mathrm{EUR} = 178884.51\,\mathrm{EUR}.$$

د نور لس کاله د ژوند انتظار ته دا د لاندې یوه میاشتنې تقاوت ته بسیا کوي

$$r = \frac{p_m (1+p_j)^{10}}{(1+p_j)^{10} - 1} y = \frac{0.005654 \cdot 1.07^{10}}{1.07^{10} - 1} 178884.51\,\mathrm{EUR} = 2057.17\,\mathrm{EUR},$$

چې د هیپوتیکي(د کورونو جوړولو او اخستلو لپاره ارزانه پور دی) Hypotheken ګټې ته ورته شمېرل کیږي.

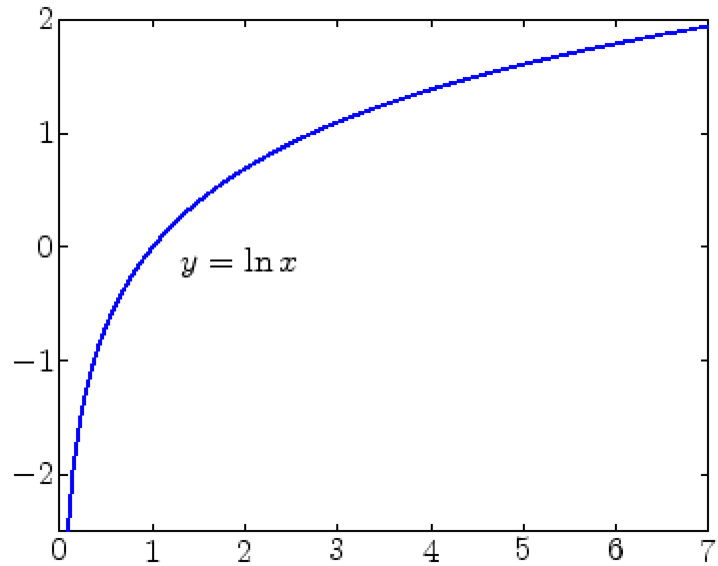


پروت: وخت ،   ولاړ: پای سرمایه
څېره د مختلفو ګټونو لپاره د یوې سرمایې وده ښایي د وخت تېرېدو سره .
پای.

لوګاریتم **Logarithmus**

د لوګارتم تابع د اکسپوننشلتابع معکوس دی:

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y.$$



دا $(0,\infty)$ کره مونوتونن جګېدونکی په $\mathbb{R}$ تنظيموي او لاندې تابعمساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

په ځانګړې توګه دی $\ln(1/x) = -\ln x$. پای.

د يوې مادې راديواکتيو له منځه تلنه(په زراتو تجزيه کېدنه) د زره کيدنې قانون

$$N(t) = N(0)e^{-kt}$$

له مخې تشريح کيږي. دلته $N(t)$ د ا تمونو ګڼون يا تعداد دی د t په وخت کې او $k > 0$ يوه د موادو په واک کې د زره کېدو ثابته ده.

د نيم ارزښت وخت T داسې تعريف دی $N(T) = \frac{1}{2}N(0)$ ، داپه دې معنا چې

$$e^{-kT} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T = \ln 2/k.$$

د چرنوبل د ریکتور د ړز یا الوتنې سره یو ه ډینګری یا خولې یا مرخیړی په څنو برخو کې Cäsium-137 د 2000Bq/kg (Bq/kg د رادیواکتیویتی د فعالیت د کچوني لپاره یوون دی) سره د نیمارزښت وخت 29.7 کلونو په وړانګو خور شو.

$$k = \frac{\ln 2}{29.7} = 0.023$$

او له دې سره

$$N(t) = 2000 \exp(-0.023t).$$

په المان کې پوله ارزښت .600Bq/kg کې پروت د ی. د

$$600 = 2000 \exp(-0.023t) \Rightarrow -0.023t = \ln(0.3) \Rightarrow t \approx 52$$

له امله داپوله ارزښت د ورکړشوو ارزښتونو لپاره ۵۲ کالو وروسته کښته – یا کمیږي.

نیم وخت ارزښت :

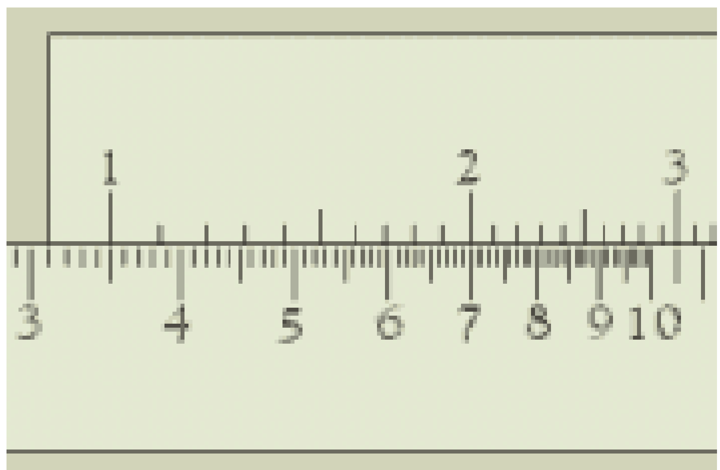
Cäsium-134	2 Tage
Cäsium-137	29.7 Jahre
Jod-131	8 Tage
Kohlenstoff-14	5730 Jahre
Kalium-40	1.2 Mrd. Jahre
Plutonium-239	24000 Jahre
Radon-222	3.8 Tage
Radium-226	1600 Jahre
Strontium-90	28 Jahre
Uran-235	800 Mio. Jahre
Uran-238	4.5 Mrd. Jahre

پای.

لوګاريتم دا خوی لري، چې د دوه ګڼونو يا عددونود لوګاريتمونو جمعه د دې د دې دوه عددونو د ضرب د لوګاريتم سره برابر دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

په دې توګه کېدی شي چې دوه کرښي(خط کشونه) د لوګاريتم کچوونو سره يو په بل کيږدي او لاس ته راوړنه د دېعددونو جمعه نه بلکه ضرب دی.(د شمېرکښوونې (چې يوې او بلې لورته کښيږي) اصول)



د پورته ښېرې ښخه د بېلګې په توګه ګورو چې $3.5 \cdot 2 = 7$ دی. د لته د پورته کچوونې ۱ د لاندې سکالا په3.5 (لومړی ضريب) کېښول کيږي. بالاخره ۲ د پورته سکالا (دويم ضريب) د ضرب لاس ته راوړنه په لاندې سکالا لوستل کيږي.

پای.

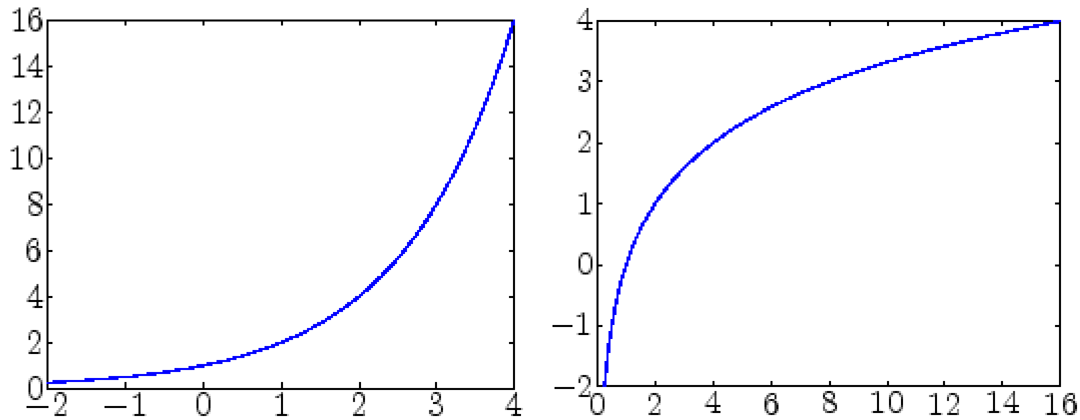
تولیز توان توابع او لوګاريتم

د $a > 0$ لپاره تعريفوو

$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

د معکوس يا په څټ تابع سره
$$x = \log_a y, \quad y > 0.$$

په ځانګړې توګه سرې ليکي $\log = \log_{10}$ د لوګاريتم لپاره د 10 بنسټ سره او $\mathrm{ld} = \log_2$ د دوال لوګاريتم لپاره.



$f(x) = 2^x$ $f(x) = \mathrm{ld}(x)$

د ودې قانون

$$y = a^x, \quad a > 0$$

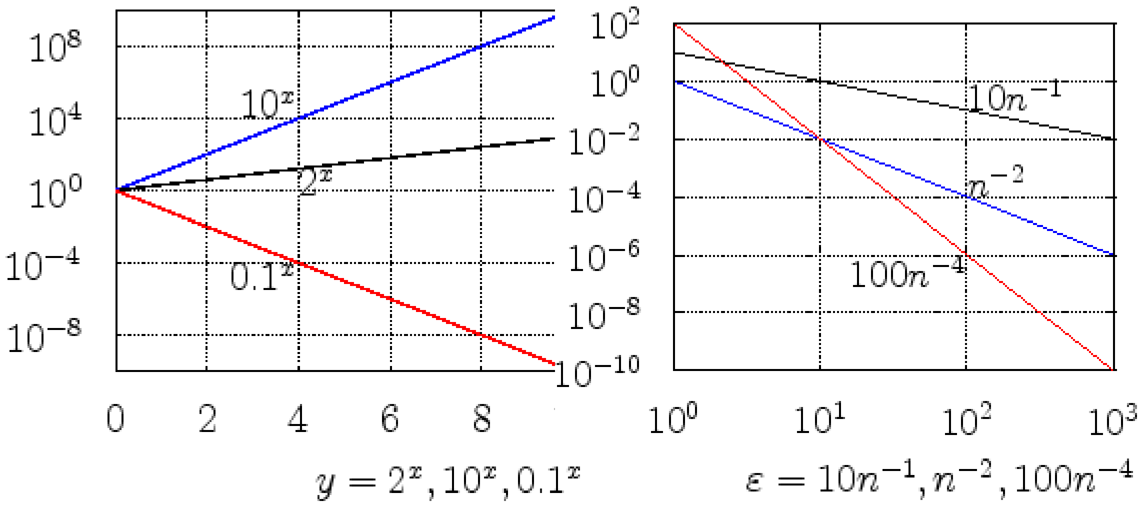
کيدی شي نيم لوګاريتمي دکښل شي. دلته په يوه محور x او په بل محور $\log y$ ليکل کيږي. د x او $\log y$ ترمنځ نسبت د ودې قانون له مخې کرښيز دی او رسم شوې کرښه لاندې جګړالی لري
$$m = \log a.$$

يو بل امکان دادی، چې په دواړو محورونو يو لوګاريتمي سکالا وکاروو.
دا د بېلګې په توګه د ناټيکاوي ارزښت لپاره
$$\varepsilon \approx cn^{-k}$$

مناسب ده. دا چې

$$\log \varepsilon = \log c - k \log n \,,$$

د کرږې کميز يا منفي چګېدنه ورکوي.



د توان او لوګاريتم لپاره شميرقوانين

Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

د اکسپوننشل – او لوګاريتمي توابعو د تعريف او تابع مساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s\, a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s / a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x\,. \end{aligned}$$

برسېره پردې د دوه مختلفو بنسټونو ت رمنځ د شمېربدلون لپاره باور لري

$$\log_b x = \log_b a \, \log_a x\,.$$

په ځانګړې توګه دی

$$\log x = (\log e) \ln x\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کنوپف

که کيږدو

$$x = a^s, \quad y = a^t,$$

نو د توان او لوگاریتم د فرمولونو ورته وال یا برابرارزښتوالی روښانه دی. لومړي دواړه کتمتوالي د تابع مساواتو څخه لاس ته راځي او دریم له تعریف $b^r = e^{r\ln b}$ څخه.:

$$(a^s)^t = (e^{s\ln a})^t = e^{st\ln a} = a^{st}.$$

د شمیبدلون فرمول برابرارزښت دی و لاندې ته

$$x = b^{\log_b a \log_a x},$$

او د ساده وني له لارې ښی اړخ لاس ته راځي.
لیکونکي: هیولیگ، کنوپف

لاندې دواړه بېلط دشمېقوانین تشریح کوي یا په گوته کوي.

(i)

$$^2) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 = 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$$

(ii)

$\log_4(x^2)+$ ld

$$(2x) = 2\frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\frac{\ln x}{\ln 2}$$

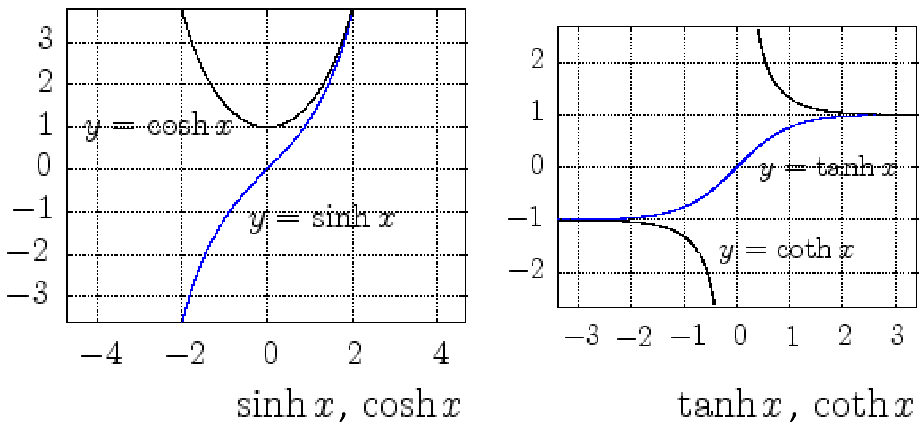
های پرابول تابع **Hyperbelfunktionen**

تریگونومتریکي توابعو ته ورته تعریفوو

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

همداسې

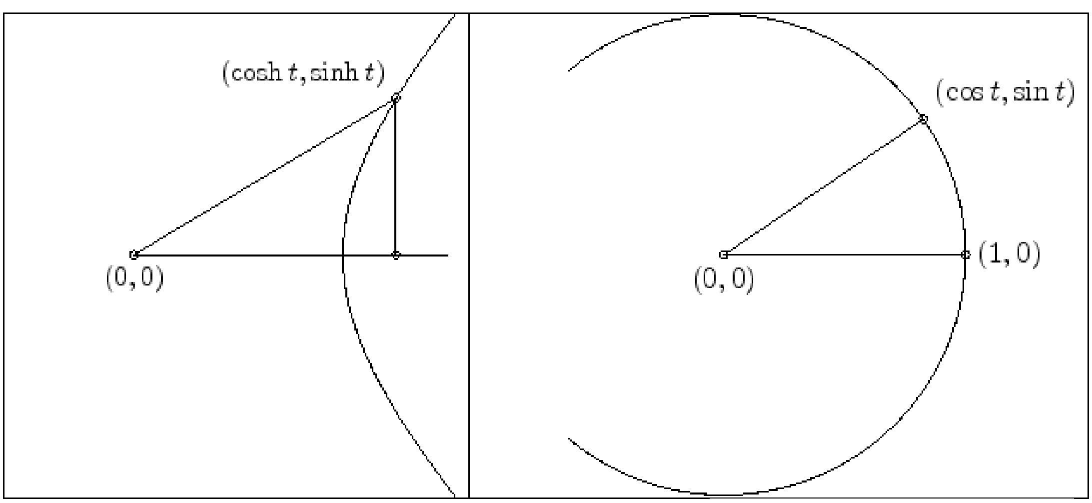
$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = 1/$ coth x.



معکوس یا په ښت توابع اکسپلیثیت یا په روښانه توګه ورکول کیږي:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \qquad & -\infty < x < \infty \\ \operatorname{arcosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \qquad & 1 \le x < \infty. \end{aligned}$$

د هایپربول تابع نوم د لاندې کتمتوالي څخه رانیول شوی



$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

دا روښانه کوي، چې د $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ له لارې د هایرابول یو ښاخ پارامتري کیږي..

له $y = (e^x - e^{-x})/2$ څخه د e^x سره ضرب له لارې لاس ته راځي

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

د مربع مساوات دويم حل د $e^x > 0$ له امله بايد په پام کې ونه نيول شي. د لوګاريتمي کوني څخه لاس ته راځي

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

د کوساين هوپربوليک د فرمول څخه پورته ته په ورته توګه لاس ته ره اځي

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}.$$

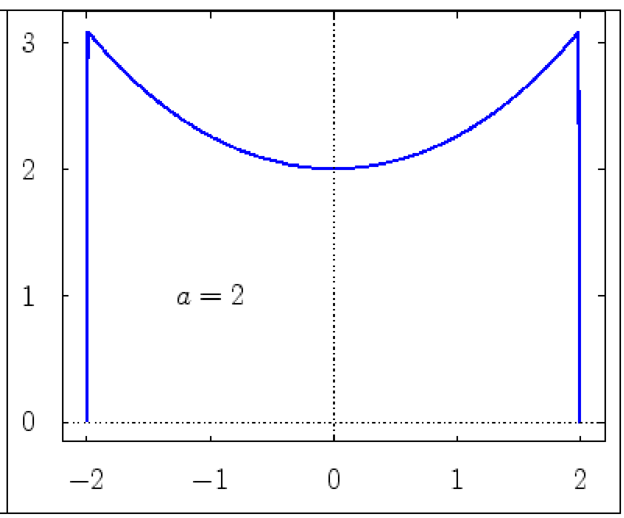
د لوګاريتم کوني له لارې د په خټ- يا معکوس تابع فرمول لاس ته راځي.
ليکونکي: هيوليک، کنوپف

د يوه هايپارابول په پای ټکو کلک شوي سيم ځګوالی h د خپل وزن له لارې اغيزمنشوی دننی شپانونګ a دی

$$h(x) = a\cosh(x/a).$$

تابع h د لاندې دفرنځيال مساوات حل دی.

$$h'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + (h')^2}.$$



هايپارابوليکی کتمتوتوالی

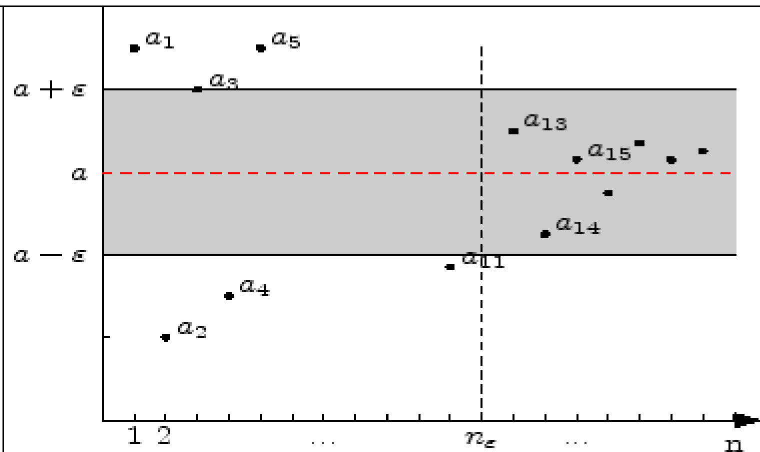
Hyperbolische Identitäten

تريګونومتريکي توابعو ته ورته کتمتوالی باور لري

$$
\begin{aligned}
\sinh(-x) &= -\sinh x \\
\cosh(-x) &= \cosh x \\
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1\,,
\end{aligned}
$$

چې د تعریفونوو له لارې کېدی شي نازک شي

د یوې پرلپسي (ترادف)پوله ارزښت
Grenzwert einer Folge

یوه پرلپسي $(a_n) = a_1, a_2, \ldots$ د یوه پوله ارزښت a په لور هڅیږي، $a = \lim_{n\to\infty} a_n,$ که هر $\varepsilon > 0$ ته یو n_ε داسي شتون ولري د $\lvert a_n - a\rvert < \varepsilon$ $n > n_\varepsilon$ سره د ټولو لپاره	

دا $a_n \to a$ لیکدود هم د یوې پرلپسي د کونورګنت یا پولي ته تلو لپاره کارول کیږي .

که (a_n) پوله ارزښت ونه لري، نو پرلپسې دیورګنت یا پولې ته نه تلونکې بللکیږي.

پای.

د دې لپاره چې د کونورګنت-قضیه وښایو یعنې $|a_n - a| < \varepsilon$ د $n > n_\varepsilon$ لپاره

وښایو، کیدی شي لومړی دا افاده $|a_n - a|$ د تخمین کونې له لارې پورته لور ته ساده کړو او بیا داسې په نامه نامساوات د n پسې حل کړو.

که دا د بیلګې په توګه د لاندې پرلپسې لپاره وکارول شي

$$a_n = \frac{n^2+n}{n^2+1},$$

کومه چې پوله ارزښت $a = 1$ لري، یو ممکنه تخمین دی

$$|a_n - a| = \left|\frac{n^2+n}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{n-1}{n^2+1}\right| \le \frac{n}{n^2+1},$$

دا چې $|n-1| \le n$ د ټولو $n \ge 0$ لپاره . پرته له دې $n^2+1 > n^2$ دی او له دې سره $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ هم . نو له دې لاس ته راځي

$$|a_n - a| \le \frac{n}{n^2+1} \le \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

له دې سره $\frac{1}{n} < \varepsilon$ دی، باید $n > \frac{1}{\varepsilon}$ وي. که n_ε یو طبیعي عدد چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وي ، وټاکو ، نو د ټولو $\varepsilon > 0$ او ټولو $n > n_\varepsilon$ لپاره باور لري.

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

پرلپسي
$1, q, q^2, \ldots$

د $|q| < 1$ لپاره يو پوله ارزښت 0 لري او د $|q| > 1$ يا $q = -1$ لپاره ديورګنت دی

د پرلپسيو د پوله ارزښت شميرنې لارې
Rechenregeln für Grenzwerte bei Folgen

د پولې ته تلونکې پرلپسي (a_n) او (b_n) لپاره د پولو a او b سره باور لري:

- $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n / b_n) = a/b$, falls $b \neq 0$
- ليکونکی: اپپ، هيوليګ

زياتون او کمښت يا کمون : د دريګوډي نابرابرون څخه لاس ته راځي
$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \to 0.$

ضرب يا ځل: دا چې a_n محدود ده، لرو

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \to 0.$$

وېش: د ټول $n > n_0$ لپاره دی

$$0 \notin \left(b - \frac{|b|}{2}, b + \frac{|b|}{2}\right) \ni b_n \,,$$

او له دې لاس ته راځي

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{bb_n}\right| \leq \text{const} \; |b_n - b| \to 0,$$

دا په دې معنا چې $1/b_n \to 1/b$. د a_n/b_n پولې ته تلنه دهمدا اوس ښوول شوي د پولې ته تلونکو پرلپسيو ضرب قانون څخه لاس ته راځي.

پای.

که دپرلپسیو توکي د n راشنل تابع وي، $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ ، نو کیدی شي پوله ارزښت د خورا جګ توان د لنډوني څخه پيداکړی شو. د بيلګې په توګه دی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - 2n^2}{3n^2 + 4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n - 2}{3 + 4/n} = -\frac{2}{3}\,.$$

په ټوليزه توګه د صورت-درجې j او مخرج-درجې k لپاره باور لري

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_j n^j + \cdots p_0}{q_k n^k + \cdots q_0} = \begin{cases} 0, & \text{für } j < k \\ \frac{p_j}{q_k}, & \text{für } j = k. \end{cases}$$

د $j > k$ لپاره پرلپسې پولې ته نه ځي يعنې ديورګنت ده.

پای.

دمعلومو پوله ارزښتونو

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

په مرسته لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e\cdot\frac{1}{e} = 1.$$

په پام کې نيسو، چې

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \neq \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n = 1 ,$$

ځکه چې د ضرب د ضريبونو ګڼون يا تعداد ثابت نه دی.

ليکونکی: هيوليک، کرايخ

د کوشي قضيه Cauchy-Kriterium

يوه پرلپسي (a_n) ټيک هلته پولې ته ځي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو n_ε شتون ولري، داسې چې

$$|a_j - a_k| < \varepsilon$$

د ټول $j, k > n_\varepsilon$ لپاره باور ولري.

د کوشي په نوم نومول شوي قضيې په مرسته د پوله ارزښت ثبوت بې د پوله ارزښت پيژندلو ممکن دی.

ليکونکی: اپپ، هيوليګ

د کوشي – قضيې اړينوالی د پوله ارزښت له تعزيف څخه لاس ته راځي:

$$a = \lim a_n \iff |a_m - a| < \varepsilon \quad \text{für } m > m_\varepsilon$$

که کیږدو $n_\varepsilon = m_{\varepsilon/2}$ ، نو لرو

$$|a_j - a_k| \leq |a_j - a| + |a - a_k| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

د ټول $j, k > n_\varepsilon$ لپاره، حه چې د ښوولو وو.

دا چې شرط پوره کېدونکی هم دی، ستونځمن دی چې و یې ښایو، او دا د حقیقی عددونو په پوره والي ولاړ دی.

پای.

یوه رکورزیو تعرف شوې پرلپسې (a_n) کېدی شي زیات وخت د کوشي-قضیه د تخمینونې له لارې

$$|a_{n+1} - a_n| \leq cq^n$$

د $q \in [0,1)$ سره یې ټیکوالی و ازمایل شي. داسې د هندسي پولې ته تلنه د $j < k$ لپاره راکوي

$$|a_j - a_k| \leq |a_j - a_{j+1}| + |a_{j+1} - a_{j+2}| + \quad \ldots \quad + |a_{k-1} - a_k| \leq cq^j\,(1 + q + q^2 + \ldots) \leq \frac{cq^j}{1-q}.$$

ښی اړخ د $< \varepsilon$ لپاره ده د $j, k > n_\varepsilon = \ln \frac{\varepsilon(1-q)}{c} / \ln q$ لپاره ، نو د کوشي قضیه پوره ده. د څرګند، د

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \quad a_0 = 1,$$

له لارې رکورزیو تعریف شوې پرلپسې a_n د کونورګنځ قضیې د ثبوت لپاره استعمالوي

د ایندکشن پیل : $(n=1)$: نامساوات

$$|a_1 - a_0| \leq cq$$

باور لري، که $c = |a_1 - a_0|/q$ کېښول شي.

د ایندکشن پای $(n \to n+1)$: شړی اټکل شوی کمښت یا تفریق د

$$|a_{n+1} - a_n| = |\sqrt{2+a_n} - \sqrt{2+a_{n-1}}| = \left|\frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2+a_n} + \sqrt{2+a_{n-1}}}\right|.$$

په بڼه ښيي.

د اندکشن د نيونې له مخې ښی اړخ $\leq \frac{1}{2\sqrt{2}} cq^n$ دی او د ټاکنې سره

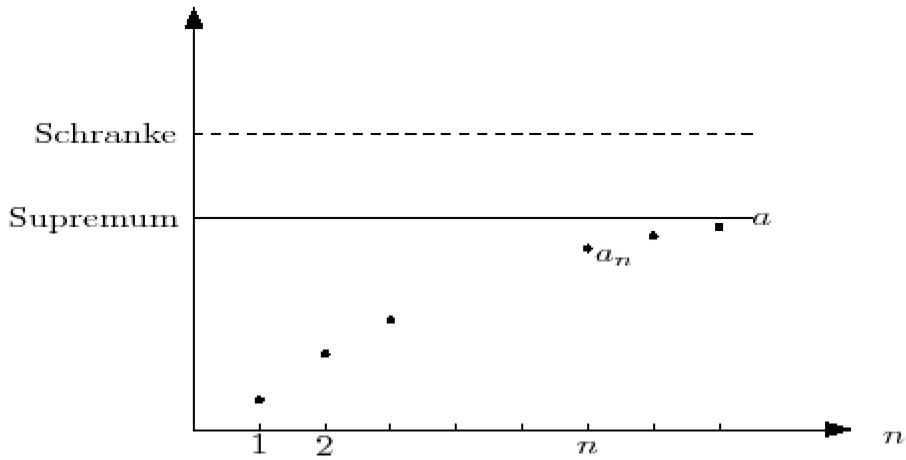
$$q = 1/2\sqrt{2} \leq cq^{n+1}$$

لکه چې غوښتل مو.

پای.

یو غږیزه پولې ته تلنه **Monotone Konvergenz**

یو پرلپسي (a_n) همغږیز جګېدونکي $a_{n+1} \geq a_n$ همداسي همغږیز ټيټېدونکي $a_{n+1} \leq a_n$ بلل کيږي ، که همداسي وي د ټولو n لپاره. دا کره همغږیز جګېدونکي همداسي کره همغږیز ټيټېدونکي بلل کيږي ، که $a_{n+1} > a_n$ همداسي $a_{n+1} < a_n$ وي د ټولو n لپاره.



یوه رابنده یا محدوده ، د $n > n_0$ لپاره همغږیز جګېدونکي یا ټیټېدونکي پرلپسي (a_n) پولې ته تلونکي ده. پوله ارزښت يې د پرلپسي توکو a_n , $n > n_0$. سوپریموم همداسې اینفیموم دی.

لیکونکی: ایپ، هیولیګ

د یوې مونوتون جګېدونکې پرلپسې لپاره د سوپرېموم د تعریف سره، چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو n_ε شتون لري د کوم لپاره چې باور لري

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a = \sup_{n > n_0} a_n$$

د همغږیزوالي په بنسټ دی

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq a \quad \text{, für} \quad n > n_\varepsilon \text{ ,}$$

نو $a_n \to a$.

د مونوتون ټیټېدونکې پرلپسې لپاره په ورته توګه دلایل راوړل کیږي.

د پرلپسي پولې ته تلنه

Die Konvergenz der Folge

$$a_n = (1+1/n)^n, \quad n = 0,1,...,$$

د اویلر عدد e په لور کېدی شي د مونوتون کونورګنت حملې په بنسټ و ښوول شي.
دواړه وړاندنیونې(فرضیې) کېدی شي د بېنوم درسي جملې په مرسته و ښوول شي.

(i) رابندیدنه یا محدودیت: له

$$a_n = (1+1/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + ...$$

او

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} \leq \frac{n^k}{1\cdot 2\cdots 2}$$

لاس ته راځي

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... \leq 3$$

(ii) همغږیزوالی: سړی a_{n+1} هم د بېنوم له جملې سره شماري:

$$a_{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + \binom{n+1}{3}\frac{1}{(n+1)^3} + ...$$

که دا په (i)کې د a_n انځورونې سره پرتله کړي، نو سړی کره کوي، چې اړونده ترمونه لوی دي:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{n^k}$$

$$\leq \frac{(n+1)\cdot n\cdots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{(n+1)^k} \quad =$$

$$= \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}.$$

دا له نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\frac{n-j}{n} \leq \frac{n+1-j}{n+1}$$

د یوګونوو ضریبونو لپاره. داچې د a_{n+1} لپاره زیاتون یا جمعه لا ترم

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

لري لاس ته راځي

$$a_n < a_{n+1}.$$

ناربښتونی پوله ارزښت **Uneigentliche Grenzwerte**

یوه پرلپسي (a_n) دا ناربښتونی پوله ارزښت ∞ ($-\infty$) لري، که د ټولو $a > 0$ لپاره یو n_a شتون ولري، داسې چې

$$a_n > a \quad (< -a)$$

باور ولري د ټولو $n > n_a$ لپاره. پرلپسي چې ناربښتونی پوله ارزښت لري، دا ټآکلې دیورګنت –یا پولې ته نه تلونکې پرلپسې هم بلل کیږي.
لیکونکي:اپپ، هیولیګ، ویپپر

د دې لپاره چې وښایو ، چې

$$a_n = \frac{n!}{2^n} \to \infty,$$

دا په دې معنا چې

$$\frac{n!}{2^n} > a$$

د $n > n_a$, لپاره، دا a_n سرې د یوې ساده افادې یا ویینې له لارې کښته لور ته تخمینوي:

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{2 \cdot 2 \cdots 2} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2}.$$

له دې سره له $\frac{n}{4} > a$ همداسې له $n > 4a = n_a$ لرو $a_n > a$

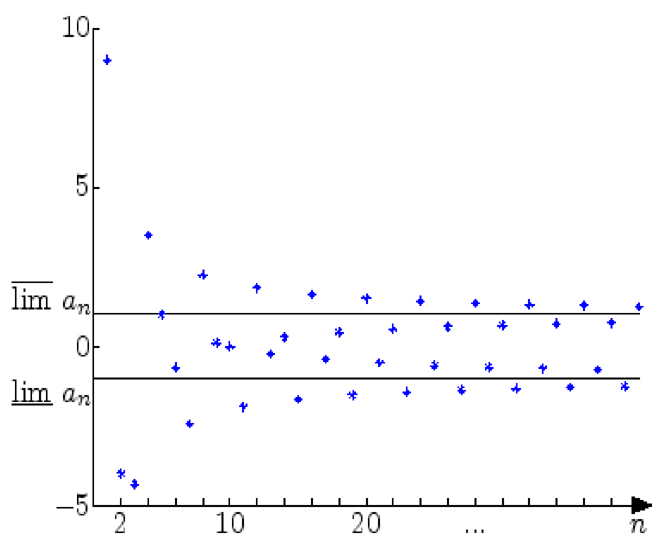
پوله اينفريور او پوله سوپريور(کښته - او پورته پوله ارزښت)

Limes Inferior und Limes Superio

د هرې پرلپسې (a_n) لپاره، په ناصلي حالت کې uneigentlichen Sinn ، يو پوله ارزښت شتون لري.

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a_n}\,,\quad \underline{a_n} = \inf_{k\geq n} a_k$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a_n}\,,\quad \overline{a_n} = \sup_{k\geq n} a_k$$



لکه په خيره کې چې شوول شوی دی، پرلپسې (a_n) د همعريزې پرلپسې $(\underline{a_n})$ او $(\overline{a_n})$ له لارې يا نوره هم ښه له لورې رابندې دي:

$$\underline{a_n} \leq a_n \leq \overline{a_n}.$$

که پوله اېنفریور او پوله سوپریور یو په بل پریوځي، نو پرلپسي (a_n) پولي ته تلونکي ده او لرو

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n\,.$$

لیکونکي: اېپ ،هیولیګ

د پولي اینفریور او پولي سوپریور شتون د همهغږیز پولي ته تلني جملي له لارې ترلې لاس ته راځي، خکه چې پرلپسي

$$\underline{a}_n = \inf_{k\geq n} a_n\ , \quad \overline{a}_n = \sup_{k\geq n} a_n$$

همغږیز جګیدونکي همداسې همغږیز ټیټیدونکي دي.

په روښانه توګه باور لري

$$\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n\,.$$

که پوله اینفریور او پوله سوپریور همغه ازښت a ولري، نو لا سته راځي

$$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره، نو $a_n \to a$.

پرتله کوونکې قضیه **Vergleichskriterium**

که د $\lim a_n = a$ او $\lim c_n = c$ سره د پوره کوچني n لپاره

$a_n \leq b_n \leq c_n$ باور لري، نو دی

$$a \leq \underline{\lim}\, b_n \leq \overline{\lim}\, b_n \leq c.$$

په ځانګړې توګه له $a = c$ د پرلپسي (b_n) کونورګنت لاس ته راځي:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a = c\,.$$

لومړی غوښتنه ساده ده، ځکه چې نابرابرون $\le$ د پولې ته تګ له امله ساتلی پتیږي:

$$\inf_{k\ge n} a_n \le \inf_{k\ge n} b_n \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}\, a_n \le \underline{\lim}\, b_n .$$

په ورته توګه لرو $\overline{\lim}\, b_n \le c$.

که پوله ارزښتونه سره برابر وي ($a = c$) ، نو باور لري

$$a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره. له دې سره لرو $b_n \to a$.

پای.

پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

په لاندې نامساوات باندې د پرتلې قضیې استعمال له لارې لاس ته راځي

$$1 \le \sqrt[n]{n} \le 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} .$$

دلته ښی نابرابرون د بینوم د فرمول څخه باوري دی:

$$1 \le n \le 1 + n \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{4}{n} + \cdots$$

په تولیزه توګه د ضرب قانون څخه لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^k = 1$$

د $k \in \mathbb{N}$ لپاره . د کم نظم ترمونو د په زیاتوالي له امله پوله ارزښت ساتلی پاتیږي. د یوه پولینوم

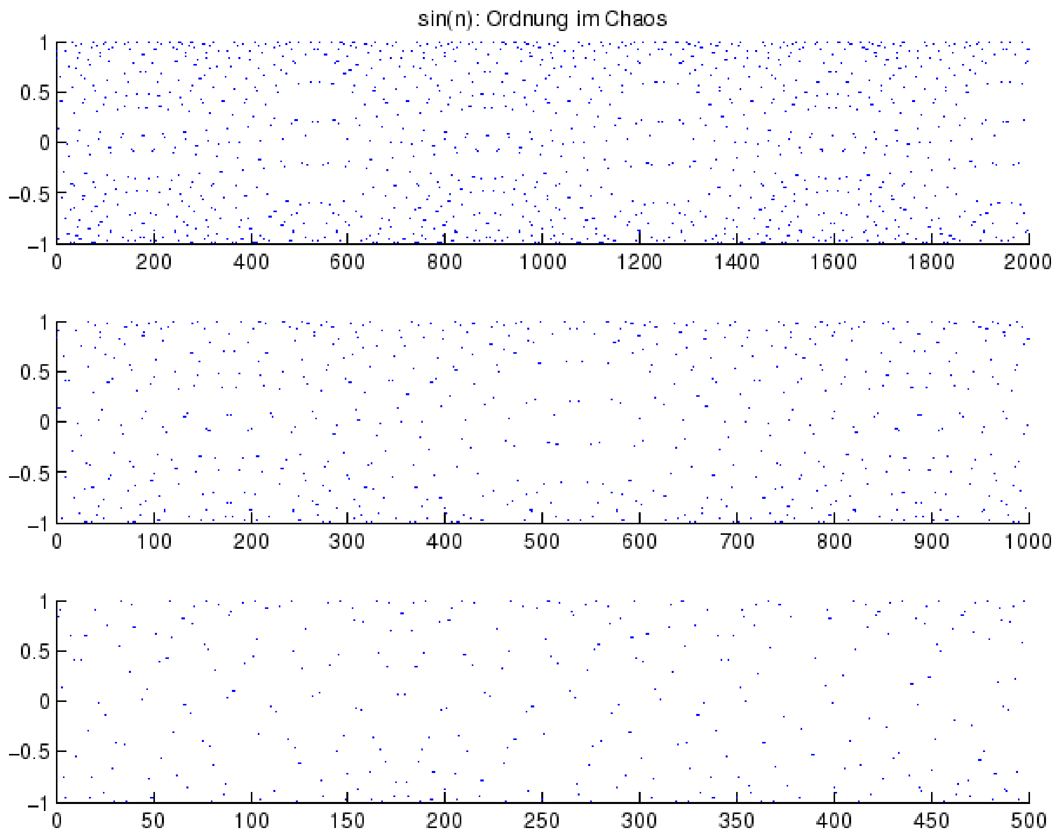
$$p(n) = a_k n^k + \cdots + a_0 \;,\; a_k > 0$$

لپاره هم $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1$ دی .

د يوې پرلپسې پنډغالي ټکی **Häufungspunkt einer Folge**

يوه پرلپسې (a_n) پنډغالي ټکی a لري، كه هر انتروال $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ دپرلپسې ناپای ډېر توکي خوندي ولري. دې ته ورته د يوې برخه پرلپسې باور لري، چې a ته ځي. په ځانګړې توګه يوپوله ارزښت د پرلپسې بنډغالي ټکی هم دی.

خيره پرلپسې $(\sin n)_{n\in \mathrm{N}}$ ښايي.



سرې په نږدې توګه د پرلپسې يا ترادف توکو a_n برابروېشنه په انتروال $[-1,1]$ کې پيژني. په ريښتوني ښول كېدی شي، چې په $[-1,1]$ کې هر ټکی د پرلپسې پنډغالي ټکی دی.

د یوې پرلپسې یا ترادف (a_n) د پندغالي ټکي د ټاکلو لپاره باید کونورګنت برخه پرلپسې و پیژندل شي.
د بیلګې لپاره

هغه دا دي

$$a_n = \frac{n\sin(n\frac{\pi}{2})}{n+\sin(n\frac{\pi}{2})}$$

$$b_k = \quad a_{2k} \qquad = \frac{0}{k}$$

$$c_k = a_{4k+1} \qquad = \frac{(4k+1)}{(4k+1)+1}$$

$$d_k = a_{4k+3} \qquad = \frac{-(4k+1)}{(4k+1)+1}.$$

له دې سره پنډغالي ټکی لاس ته راځي

$$\lim b_k = 0, \lim c_k = 1, \lim d_k = -1$$

ورهولست- - یا فرهولست- مودل **Verhulst-Modell**

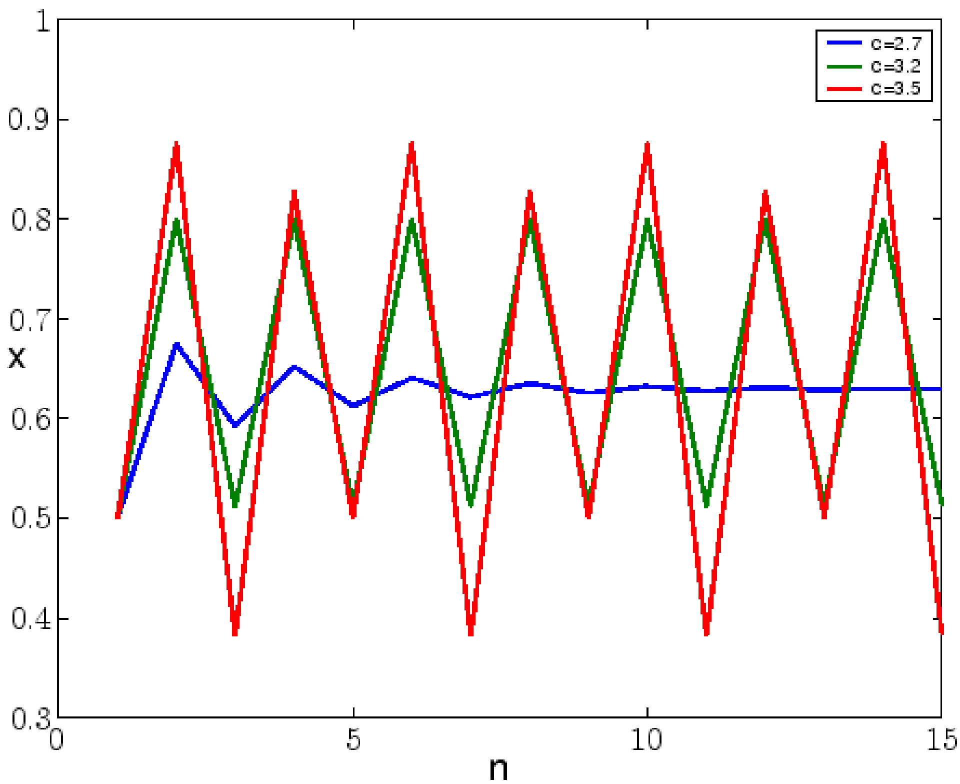
یو بیلجیمي شمیرپوه وو : Pierre-François **Verhulst** [vəɾˈhʏlst] (* 28. Oktober 1804 in Brüssel; † 15. Februar 1849 ebenda)

ریکورژن(په ځتب ځغاستل) Rekursion

هغه فنکشن، چې د خپل ځان له خوا پیژند لري یا تعریفیږي

$$x_{n+1} = cx_n(1-x_n)$$

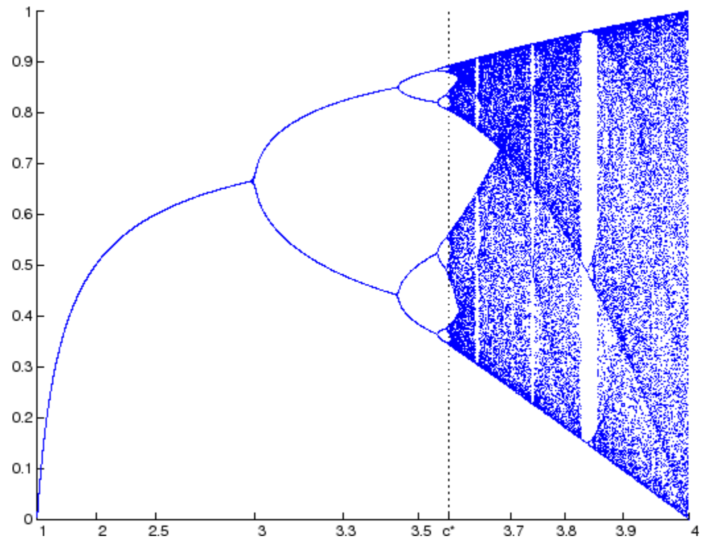
د $c \in (0,4]$ سره د نورمال شوي خلکو ګنوالي x_n وده په ګوته کوي. يو څو تيوپيکي بيلګې د ا لاندې څيره ښايي



د $c \leq 3$ لپاره x_n د $n \to \infty$ لپاره لاندې پولې ارزښت ته ځي

$$x_* = \frac{c-1}{c}\,.$$

د $c > 3$ لپاره سړى اوسځليشن ګوري. که پارامتر تل لوى شي، نو د پندغالي - ټکو x_* ګڼون يا تعداد دوه برابره کيږي د افاط پارامتر ارزښتونو c_i څخه اوښتلو باندې يعني له دې نور زياتيدلو باندې . دا په لاندې څيره کې کښل شوى دى، په کوم کې چې د ټکي x_* د c -محور پورته لور ته ځاى په ځاى شوي دي.



پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n - c_{n-1}}{c_{n+1} - c_n} = 4,69920166\ldots$$

داسي په نامه د انځوروني ثابته ده، چې دا زيات وخت د ځانګو كولو پرابلم كي رول لوبوي.

له پورته ځيرې څخه روښانه كيږي، چې ايتيشن د

$$c > c^* = \lim_{n\to\infty} c_n$$

لپاره يوګډوډيز chaotisches Verhalten حالت ښايي

د پيPi ركورزيو اپروكسيميشن
Rekursive Approximation von Pi

د a_n او b_n نيم اوږدوالی چې د يوې يوونګردی يا واحد داېرې د $(6 \cdot 2^n)$ -ګوډونو يا كونجونو په باندې او په كې يعني په دننه اودباندې لاندې ريكورژن پوره كړي

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}\,, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}\,, \quad a_0 = 2\sqrt{3}\,, \, b_0 = 3\,,$$

د $\pi = 3.1415926535897932\ldots$ په مرسته اپروکسیمي کیدی شي.
دا فرمول د یوهان فریدریش پفاف Johann Friedrich Pfaff (1765-1825) له خوا
په 1800 زکـ کال میندل شوی.
ارښیمیدس Archimedes (287-212 v. Chr.) د 96 –گوډونو ($n = 4$) او اټکل
یا تخمین سره اړیکي

$$3.140845\ldots = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3.142857\ldots$$

ومیندلې یا ترې لاس ته راوړې.

د گردی گڼ یا عدد π له د یو میلیارد ځایونو ډېر شمیرل شوی دی. لاندې جدول د
تاریخي ودې ښخه یوه کاپی راکوي.:

Wert	korr. Stellen		Jahr	Autor Bibel (1. Könige 7:23)

Autor	Jahr		korr. Stellen	Wert
Bibel (1. Könige 7:23)	550	v. Chr.	0	3
Babylonier	2000	v. Chr.	1	3+1/8
Archimedes	250	v. Chr.	3	223/71 $< \pi <$ 22/7
Liu Hui	263		5	
Tsu Ch'ung Chi	480		7	
Al-Kashi	1429		14	

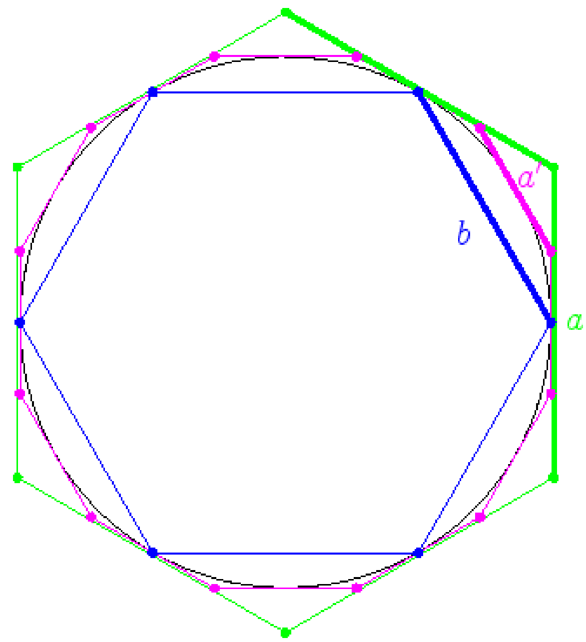
Romanus	1593		15	
Van Ceulen	1596		20	
Van Ceulen	1615		35	
Sharp	1699		71	
Machin	1706		100	
Rutherford	1824		152	
Strassnitzky/Dase	1844		200	
Shanks	1874		527	
Smith/Wrench	1949		1 120	
Reitwiesner u.a.	1949		2 037	
Genuys	1958		10 000	
Shanks/Wrench	1961		100 265	
Guilloud/Filliatre	1966		250 000	
Guilloud/Dichampt	1967		500 000	
Guilloud/Bouyer	1973		1 001 250	
Kanada/Yoshino/Tamura	1982		16 777 206	
Kanada/Tamura/Kubo u.a.	1987		134 217 700	
Chudnovskys	1989		1 011 196 691	

پای.

د ج.ف. پفاف ريکورزيون په ساده هندسي پامکوني باندې ولاړ دی

د وړانګې (تالس) جملې له مخې د a_n لپاره لاس ته راځي:

$$a' : b = \left(\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}\right) : \frac{a}{2} \Leftrightarrow a'a = ba - ba' \Leftrightarrow a' = \frac{ab}{a+b}\,.$$



که $k_n = 3 \cdot 2^n$ د ډېرګوډي نیم د اړخونوګښون یا تعداد په ګوته کړي، نو باور لري

$$a_n = k_n a\,,\ b_n = k_n b \Rightarrow a_{n+1} = \qquad k_{n+1} a' = 2k_n \cdot \frac{ab}{a+b}$$

$$= \quad 2\frac{(k_n a)(k_n b)}{k_n a + k_n b} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}\,.$$

د b_n لپاره ریکورزیون کېدی شي د تریګونومتري توابعو په مرسته و ښوول شي. له

$$a_n = k_n 2\tan(\pi/(2k_n))\,, \quad b_n = k_n 2\sin(\pi/(2k_n))$$

لاس ته راځي

$$\begin{aligned} b_{n+1}^2 &= 4k_n^2 4\sin^2(\pi/(4k_n)) \\ &= \underbrace{2k_n 2\tan(\pi/(4k_n))}_{a_{n+1}} \underbrace{\cos(\pi/(4k_n)) 2k_n 2\sin(\pi/(4k_n))}_{k_n 2\sin(\pi/(2k_n))=b_n} \\ &= a_{n+1} b_n \,. \end{aligned}$$

د پرلپسيو يا ترادفونو ځانګړي پوله ارزښتونه

يو څو غوره پوله ارزښتونه په لاندې جدول کې راوړل شوي

a_n	$a = \lim_{n\to\infty} a_n$
$\sqrt[n]{n}$	1
$n^\alpha q^n\,,\ \|q\| < 1$	0
$n^{-\alpha}\ln n\,,\ \alpha > 0$	0
$q^n/n!$	0
$n!/n^n$	0
$(1+1/n)^n$	e
$(1-1/n)^n$	$1/e$

پای.

زیات واره کیدی شي پوله ارزښتونه وشمیرل شي، داسې چې سړی د مناسب بڼه بدلون له لارې معیاري افادې ته بېرته ولاړ شي. دا د دوه بیلو سره روښانه کیږي.

(i) د پرلپسې پوله ارزښت شمېرلو ته

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{4n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

سړی ږدي

$$m = 2n + 3,\ n = \frac{m-3}{2}$$

او لاس ته راوړي

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2m-6}.$$

په دې پسې یا د دې په تعقیب دی

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^2 \cdot \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)\right)^{-6} =$$

$$= e^2 \cdot 1^{-6} = e^2.$$

$$a_n = \binom{3n}{n} / 2^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

(ii) د دې لپاره چې د

پوله ارزښت وشمیرو، سړی لیکي

$$a_n = \frac{(3n)(3n-1)\cdots(2n+1)}{n\cdot(n-1)\cdots 1} \cdot \frac{1}{2^n} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3-1/n}{2}\cdots\frac{2+1/n}{2}\right)\cdot\frac{n^n}{n!}.$$

دا چې په نوکانو کې افاده ≥ 1 ده لرو

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$$

د لاندې بڼې پوله ارزښت

$$\frac{a_n \pm b_n}{c_n \pm d_n}$$

په مناسب ډول سرې داسې شمیرې، چې سرې د مطلق ارزښت د لویې پرلپسې توکو سره ووېشې:
د بیلګې په توګه دا پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3+\sqrt{n+4})^2}{5n+\ln\, n}$$

که غواړو وشمیرو، نو مات یا کسر په لاندې بڼه لیکو

$$\frac{9+3\sqrt{n+4}+n+4}{5n+\ln\, n} = \frac{13/n+6\sqrt{1/n+4/n^2}+1}{5+(\ln\, n)/n}.$$

دا چې $1/n, 1/n^2$ او $(\ln\, n)/n$ د صفر پهلور ځی، نو پوله ارزښت دا لاندې دی

$$\frac{0+6\cdot\sqrt{0}+1}{5+0} = \frac{1}{5}.$$

د یوې لړی پرلپسې (لنډ: لړی) پوله ارزښت
Grenzwert einer Reihe

یو زیاتون یا جمعه $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ دېپروو زیاتیدونو سره لړی بلل کیږي. دا د یوې پولې ارزښت

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

په لور هڅيږي، که ټوټه زیاتوونويا – جمعو

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

(s_n) پرلپسي د s لور ته وهڅیږی یا کونورگنت شي. که پوله ارزښت شتون ونه لري نو پرلپسي پولي ته نه تلونکي یا دیورگنت بلل کیږي.
پوله ارزښت کېدی د زیاتوونو (هغه عددونه چې یو په بل زیاتيږي) د لړۍ پرلپسي په واک کې وي، همداسې اړتیا نه شته چې د نظم بدلون وروسته شتون ولري.

د یوې لړۍ د پولي ته تلني لپاره اړیين (شرط) دی، چې

$$\lim a_n = 0.$$

فقط په لږو حالتونو کې د یوې لړۍ روښانه یا اکسپلیڅیټ شمېرنه ممکن ده. یوه بېلګه یې د ټاکلو لړیو ده د راشنل زیاتیدونو سره لکه

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1} = \frac{3}{2}.$$

د ټوټه کسر ټوټه وني وروسته

$$\frac{2}{n^2 - 1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1},$$

کېدی شي دا لړۍ په

$$(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) + \dots$$

بنه ولیکل شي. تر $\frac{1}{1}$ او $\frac{1}{2}$ پورې ټول زیاتېدونې یو بل له منځه وړي یا پورته کوي،
داسې چې پوله ارزښت $\frac{3}{2}$ ترلی لوستل کېدی شي.
د ټوټه زیاتون د کمښت لپاره د ټول $n < m$ لپاره باور لري

$$|s_n - s_m| =$$

$$= |(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}) + \ldots + (\frac{1}{m-3} - \frac{1}{m-1}) + (\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m})| \le$$

$$\le \frac{4}{n-1},$$

داچې منځني ترمونه سره پورته کیږي یا له منځه سره وړي. ټوټه زیاتون یا ـجمعه د کوشي – پرلپسي جوړوي:

$$|s_n - s_m| < \varepsilon$$ د لپاره $$n > 1 + \frac{4}{\varepsilon}.$$

و پولې ارزښت ته کمون یا تفریق دی

$$|\frac{3}{2} - s_n| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

بیلګه دا هم ښایي، چې د زیاتوونو یا د جمعې د غړو لړۍ پرلپسي غوره یا ښه روښانه ده.

که لړۍ پرلپسې

$$(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8} - \frac{1}{5}) +$$
$$+ (\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16} - \frac{1}{6}) + \ldots,$$

وټاکو، نو هر ه په نوکاانو کې افاده $\geq \frac{1}{4}$ ده، نو لړۍ پرلپسې دیورګنت ده.

هندسي یا ځمککچیزې لړۍ
Geometrische Reihe

ځمکچیزه لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ تیک هلته پولې ته ځي، $|q| < 1$ وي.
د هندسي زیاتونفرمول سره

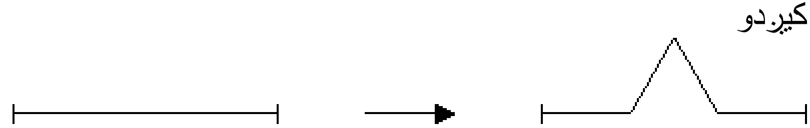
$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

کېدی شي پوله ارزښت وښانه یا اکسپلیڅیت وشمېرل شي:

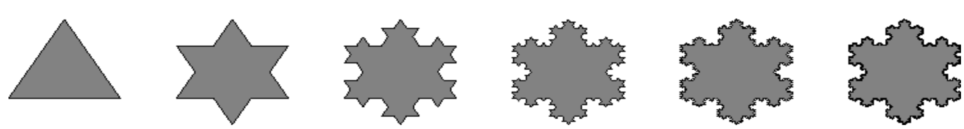
$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}$$

د $|q| < 1$ لپاره.
پای.

که د یوه برابر اړخیز درېکوډي یا مثلث مخ ته تک سره ژۍ د قانون یا قاعدې سره سم کیږدو



نو یوه ډېرۍ یا ستې لاس ته راځي د وتلو ژیو سره ، داسې په نامه د کوښ-د واورو پوتې Koch-Schneeflocke.



- $1/3$-م د واورو پوتی $3 \cdot 4^n$ ژۍ لري. دا چې د هر پل سره په ضریب کمیږي، نو د دې خومره والي لپاره لاس ته راځي

د ژیو ګښون یا – تعداد ضرب د ژیو اوږدوالی:

$$(3 \cdot 4^n)\,(3^{-n}) = 3\,\left(\tfrac{4}{3}\right)^n \to \infty\,,$$

،

دا په دې معنا چې د ژیو اوږدوالی پولې ته نه ځي یا دیورګنت دی.

په n -م پل سره $3\cdot 4^{n-1}$ برابراړخيز درېګوډي لاس ته راځي د ژيو اوږدوالي 3^{-n}

او سطحې $\sqrt{3}/4\,(3^{-n})^2$ په ور زياتوالي سره. په دې توګه د n –م د واورو پوټي د سطحې لپاره راکوي

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\sum_{i=1}^{n}\left(3\cdot 4^{i-1}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(3^{-i}\right)^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\frac{4^{i-1}}{9^{i-1}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^i\right).$$

دا وتلې پوله ډېرۍ په پسې توګه سطحه لري

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-4/9}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

هارموني لړۍ Harmonische Reihe

هارموني لړۍ

$$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k},$$

پولې ته نه ځي يا همداسې ناټاکلې پوله ارزښت $s=\infty$ لري.

په ټوليزه توګه لړۍ

$$s_\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\alpha}$$

د $\alpha\leq 1$ لپاره ديورګنت او $\alpha>1$ لپاره پولې ته تلونکې ده. يو څو ځانګړي ارزښتونه د.

$$s_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots ,$$

$$s_4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots ,$$

$$s_6 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-6} = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots .$$

مطلق پولې ته تلونکې لړۍ **Absolut konvergente Reihen**

که

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

پولې ته لاړ شي، نو لړۍ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ مطلق پولې ته تلونکې بللل کیږي.

د کونورګنت د دې قوي بڼې ځخه لرو، چې لړۍ د زیاتوونو لړې پرلپسې په خوښه تغیر له امله هم کونورګنت ده یعنې پولې ته ځی.

کوښی (کوشي) – کونورګنت قضیه راکوي:

$$\exists n_\varepsilon : |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m,n > n_\varepsilon$$

د درېګودي نابرابرون په مرسته د توته زیاتون د کمښت لپاره لاس ته راځي:

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \cdots + a_n| \le |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon$$

د $m,n > n_\varepsilon$, لپاره ،

دا په دې معناچې د $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ پولې ته تلنه.

مايورانت او مينورانت
Majorante und Minorante

که $|a_n| \leq c|b_n|$ د $n \geq n_0$ لباره وي او يو مثبت يا زياتيزه ثابته، نو د $\sum b_n$ مطلق کونورګنت ځخه د $\sum a_n$ مطلق کونورګنت لاس ته راځي

که برعکس $|a_n| \geq c|b_n|$ وي دېولو تر پاى ډيرو n لپارهو نو د $\sum |b_n|$ ديورګنت ځخه لاس ته راځي، چې $\sum a_n$ هم مطلق کونورګنت نه ده.

زياتوخت يا زيات واره هندسي لړۍ $\sum q^n$ او لړۍ $\sum n^{-\alpha}$ د پرتله کونې لړۍ په ځير کارول کيږي.

د لړۍ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$$

لپاره دى

$$a_n = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{(2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1)} \leq 2^{-n}.$$

د دې په تعقيب هندسي لړۍ $\sum 2^{-n}$ يوه مايورانت ده، نو دا پولې ته تلونکې ده.
د لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1000}$$

لپاره د $n > 9$ لپاره باور لري

$$a_n \geq \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} .$$

په دې پسې يا په تعقيب هارموني لړۍ يوه مينورانت ده، نو لړۍ پولې ته نه ځي يا ديورګنت ده.

د وېش قضيه Quotientenkriterium

که $a_n \neq 0$ د $n > n_0$ لپاره وي او يو عدد $q \in (0,1)$ شتون ولري د

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q , \quad n > n_0 ,$$

سره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. برعکس

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 , \quad n > n_0 ,$$

، نو $\sum a_n$ پولې ته نه ځي يا ديورګنت ده.

د پولې ته تلنې لپاره پوره کېدونکې قضيه کېدی شي په ورته بڼه

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

هم وليکل شي.

په پام کې دې وي، چې پوره کېدونکي پولې ته تلونکي شرطونه رکورزيو د نابرابرون

$$|a_{n+1}| < |a_n| , \quad n > n_0 ,$$

په توګه دی، چې د هغې په بنسټ کومهوينا ممکن نه ده.

پای.

که

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\,,\ \left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|\,,\ \ldots\ \leq q\,,$$

وي، نو دی

$$|a_{n+k}| \leq q|a_{n+k-1}| \leq \ldots \leq q^k|a_n|\,.$$

له دې سره هندسي لړۍ یوه مینورانت ده.
د دیورګنت لپاره قضیه راکوي، چې

$$0 < |a_n| \leq |a_{n+1}| \leq \ldots$$

د $n > n_0$ لپاره. زیاتیدونې صفرپرلپسي نه جوړوي، له کوم چې د $\sum a_n$ دیورګنت
لاس ته راځي یا پولې ته نه تګ..
پای.

د وېش قاعده کېدی شي ګټوره وي که په لړیو استعمال شي، چې د هغې زیاتووني
فاکولتیت او توانونه خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \Big/ \binom{2n}{n}$$

لپاره د بېلګې په توګه سړی لاس ته راوړي

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3^{n+1}\,(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{3^n\,n!\,n!} = \frac{3\cdot(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}\,.$$

د دې افادې پوله ارزښت د $n \to \infty$ لپاره $\frac{3}{4}$ دی، پسې(تعقیب) یې لړۍ پولې ته ځي.

د زیاتوونو یو سیده تخمین

$$a_n = \frac{3\cdot 6\cdots 3n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$$

مفصل دی یا ډېر کار غواړي. ضریبونه

$$\frac{3k}{n+k}\,, \quad k = 1,\ldots,n\,,$$

له یو څخه هم لوی دي او هم کوچني. سړی باید مناسبې جوړې سره یوځای کاندي، چې یوه تخمین ته راشي.

د ریښې یا جذرقضیه **Wurzelkriterium**

که یو عدد $q \in [0,1)$ د

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$$

سره شتون ولري د $n > n_0$ لپاره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. که برعکس

$$|a_n| \geq 1$$

وي د ناپای ډېرو n لپاره، نو $\sum a_n$ پولې ته نه تلونکې ده.
د کونورګنت لپاره پوره کېدونکې شرطونه کېدی شي په ورته یا برابر ارزښته بڼې

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

هم ولیکل شي.

که $|a_n| \leq q^n$ د $n > n_0$ لپاره باور ولري، نو هندسي لړی یو مایورانت جوړوي.
د دیورګنت لپاره شرط راکوي، چې (a_n) صفر پرلپسې نه ده، ځکه چې $|a_n| \geq 1$ د ناپای ډېرو n لپاره باور لري..

د ریښې قضیه استعما کېدی شي په هغو لړیو ګټوره وي، چې د هغو زیاتونونه n -م توان خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \ldots$$

لپاره سړی د بیلګې په توګه لري

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{|3+(-1)^n|}\,.$$

د دې افادې یا وېینې پرلپسې

$$\frac{|x|}{2}, \frac{|x|}{4}, \frac{|x|}{2}, \ldots,$$

د

$$q = \frac{|x|}{2}$$

له لارې یا سره محدود ده. په تعقیب یې لړی د $|x| < 2$ لپاره پولې ته ځي.
همدې نتیجې ته رسو، که سړی پوله سوپریور جوړه کړي.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{2}\,.$$

دا د n –مې ریښې اوسځیلیري پرلپسې پولې ته نه ځي بې پروا یا نا غوره یا مهمه نه ده.

د لایبنیځ قضیه Leibniz-Kriterium

الترنیري (مخ نخښه بدلوني) لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots$$

پولې ته ځي، که (a_k) یوه مونوتون صفر پرلپسې وي. د لړۍ باقیو یا پاتو لپاره باور لري

$$0 \le \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k\right| \le |a_{n+1}|.$$

د يوې الترنيري جمعې ارزښت کېدی شي تل د لومړي زياتوني د مطلق ارزښت له لارې اټکل شي.

د اټکل په بنسټ

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots - a_m| \leq |a_{n+1}|$$

د کوښنې قضيه پوره ده، او د لپاره د پاتې جمعې اټکل لاس ته راځي.
د دې نامساوات د ښوونې لپاره، چې د لړی دپاتې لپاره اټکل راکوي، سړی بې له تولیزو بنديزونو (o.B.d.A.) $a_{n+1} \geq 0$ نيسي او $s_m - s_n$ د

$$a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0} - \ldots \leq a_{n+1}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي. او د

$$\underbrace{(a_{n+1} - a_{n+2})}_{\geq 0} + \underbrace{(a_{n+3} - a_{n+4})}_{\geq 0} + \ldots \geq -a_m \geq -a_{n+1}$$

له لارې کښته لور ته اټکل کوي

د لايبنيځ قضيې سره د الترنيري هارموني لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2\,;$$

پولې ته تګ لاس ته راځي ، پرلپسې

$$a_n = \frac{1}{n}$$

په روښانه توګه يوه همغږيزه صفر پرلپسې ده. د n –م ټوټه جمعې ناټيکاوی ، دا په دې معنا چې د لړی پرلپسې مطلق ارزښ دا لاندې دی

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \ln 2\right| \leq \frac{1}{n+1}\,.$$

د لايبنيځ قصيې دواړه وړاندنيونې غوره دي.

د

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{n+1}{n} = -\frac{2}{1}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{5}{4}-\dots$$

لړی لپاره زیاتووني a_n صفرپرلپسي نه جوړوي. له

$$|s_{n+1}-s_n| = |a_{n+1}| \geq 1$$

څخه ديورګنت لاس ته راځي.

د

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}_{\max}\left(\frac{(-1)^n}{n},\frac{(-1)^n}{2n}\right) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\dots$$

لړۍ لپاره زیاتوونې a_n همغږیزې نه دي. که یو په بل پسې زیاتوني سره یوځای کړو،
نو لاس ته ترې راځي

$$b_n = a_{2n-1}+a_{2n} = -\frac{1}{2(2n-1)}+\frac{1}{2n} = \frac{2n-2}{(4n-2)(2n)} \geq \frac{1}{4n}$$

für $n > 1$.

په تعقیب هامونې لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ یوه مینورانت ده، نو له دې کبله لړۍ دیورګنت ده.

د اویلر**Euler** ګڼ یا عدد **e** دیوې پرلپسي او یوې لړۍ پولې په حیث
د اویلر عدد $e = 2,71828182845905\dots$

کیدی شي د یوې پرلپسې او یوې لړۍ پوله ارزښت پّ ځیر انځور شي

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

پای.

د لړۍ پولې ته تلنه له $1/n! \le 4\cdot 2^{-n}$ څخه د مایورانت قضیې په بنسټ لاس ته راځي.

پرلپسې $a_n = (1+1/n)^n$ د لاندې دواړو اټکلونو په بنسټ د e سره نومول شوي یا په نخښنه شوي پوله ارزښت په لور ځي.

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \le e$$

. (a)

د ښوونې لپاره لومړی په پام کې نیسو چې د $n \ge k \ge 0$ لپاره

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \;\le\; \frac{1}{k!}$$

دی. له دې سره د بینوم فرمول څخه لرو

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \le e$$

او دپوله ارزښت جوړولو سره غوښتنه لرو.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \ge e.$$ (b)

د ښوونې لپاره $N \ge 1$ په خوښه تاکو مګر کره او د $n > N$ لپاره لرو:

$$a_n \ge \sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \ge \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left(\frac{n-N}{n}\right)^N.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \geq \underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{N}{n}\right)^{N} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$

او د پولې ارزښت جوړولو($N \longrightarrow \infty$) سره غوښتنه.

له (a)او (b) څخه د $\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$ له امله لرو :

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = e.$$

د لړيو ځانګړي پوله ارزښتونه

په لاندې کې د څو غوره لړيو پوله ارزښتونه ورکړ شوي.

.

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q} \quad \text{, für } |q| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

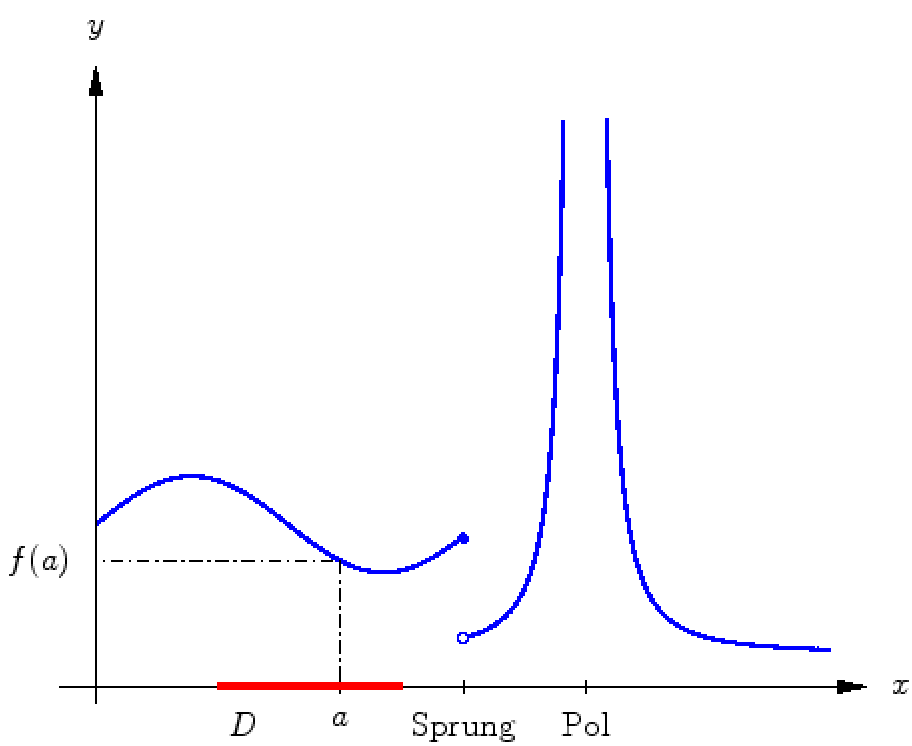
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2} = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\pm\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=e$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k!} = 1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\pm\cdots=\frac{1}{e}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 2^k} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\cdots=\ln 2$$

ناپرېکيدنه يا متماديت **Stetigkeit**



يو تابع f په ټکی a کې ناپرېکيدونکی يا متمادي دی، که د ټولو پرلپسيو (x_n) لپاره د د پولې a سره د تابع ارزښت $f(x_n)$ د $f(a)$ په لور کونورګنت وی يا هڅيږي:

$$x_n \to a \Longrightarrow f(x_n) \to f(a)\,,$$

د پوله ارزښت د تعريف له مخې هر $\varepsilon > 0$ ته يو δ_ε شتون ل ري د $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ سره د $|x - a| < \delta_\varepsilon\,,$ لپاره ، او سړی ليکي

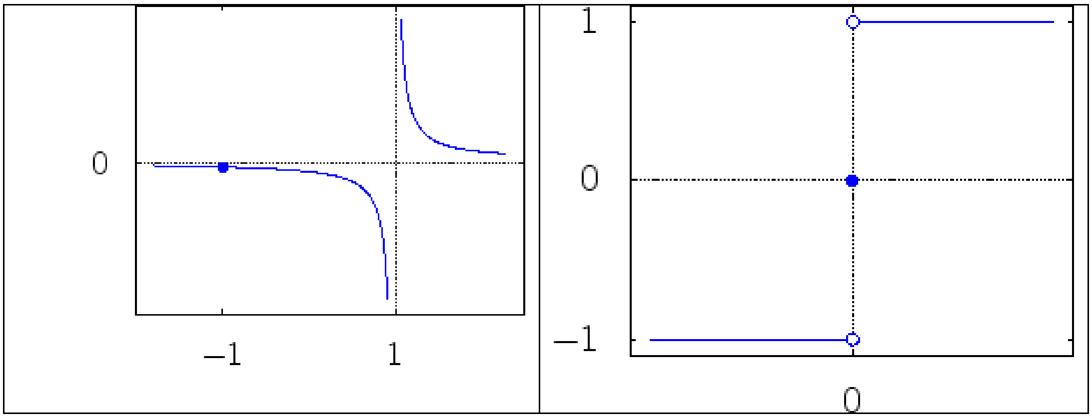
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\,.$$

يو تابع په يوه انتروال D ناپرېکيدونکې ده، که دا د D په هر ټکي کې ناپرېکېدونکې وي.

دا په دې معناچې د f ګراف سره تړلی دی، تابع ګام يا ټوپ نه وهي او قطب نه لري (لنډ: نه پرې کيږي او نه ماتيږي).

بالاخره ناپرېکېدنه په دې معنا ده، چې ګراف بې له دې چې (پنسل پورته شي) پرې شي رسم کيږي.

فنکشن $f(x) = \operatorname{sign}(x)$	فنکشن $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$



پورته دواړه بیلګې د پرېکیدنې مختلف تیوپونه ښايي.

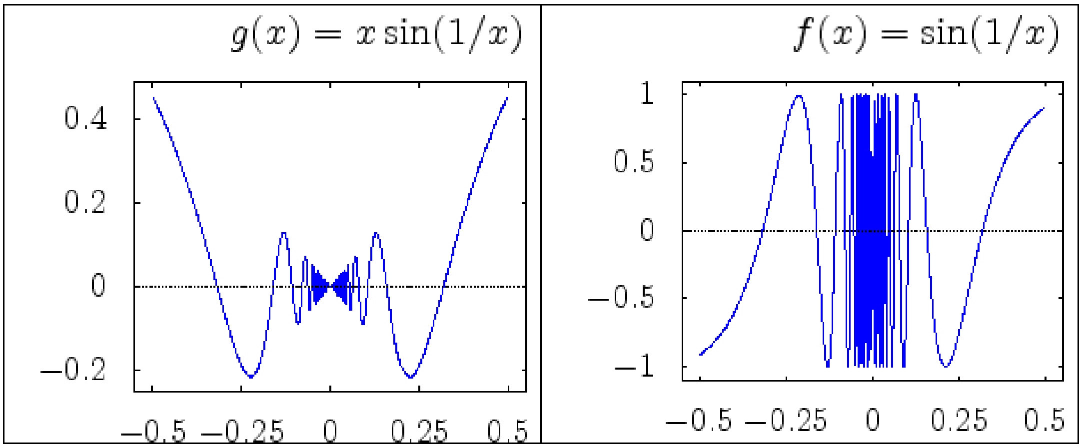
د سیګنوم تابع sign په صفرځای کې یو توپ وهي. په حقیقت کې د تابع ارزښت $\operatorname{sign}(0)=0$ تعریف دی، مګر د $f(x)$ پوله ارزښت د $x \to 0$ لپاره شتون نه لري.

تابع په $x=\pm 1$ کې تعریفتشیا لري. د $x \to 1$ لپاره $|g(x)|$ د ∞ په لور هڅیږي، g هلته یو قطبځای لري. مګر سره له دې هم پوله ارزښت $\lim_{x \to -1} g(x)$ شتون لري. دا ترلی د کرښیز ضریب $(x+1)$ د لنډوني څخه کتل کیږي.

$$g(x)=\frac{1}{x-1},\ x \neq -1 .$$

دا یوه له منځه وړونکې یا پورته کیدونکې تعریفتشیا ده. د تابع ارزښت $g(-1)=-\frac{1}{2}$ د تکمیلوني له لارې g په $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ باندې یو ناپرېکیدونکې تابع کیږي.

پای.



تابع (خيرې يې پورته دي)

$$f(x) = \sin(1/x)$$

په صفر 0کې پرېکيدونکي ده، ځکه چې د $x \to 0$ لپاره د -1 او 1 ترمنځ اوسخيلی کيږي.

برعکس يا په ښتې د تابع

$$g(x) = x\sin(1/x)$$

تعريفتشيا په $x = 0$ کې پورته کيدونکې يا له منځه وړونکې ده.

له

$$0 \le |x\sin(1/x)| \le |x|$$

د $\lim_{x\to 0}|x| = 0$ سره د پرتله کيدونکي قضيې په بنسټ لاس ته راځي

$$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0.$$

له دې امله کيدی شي د g

سرلیک

$g(0) = 0$

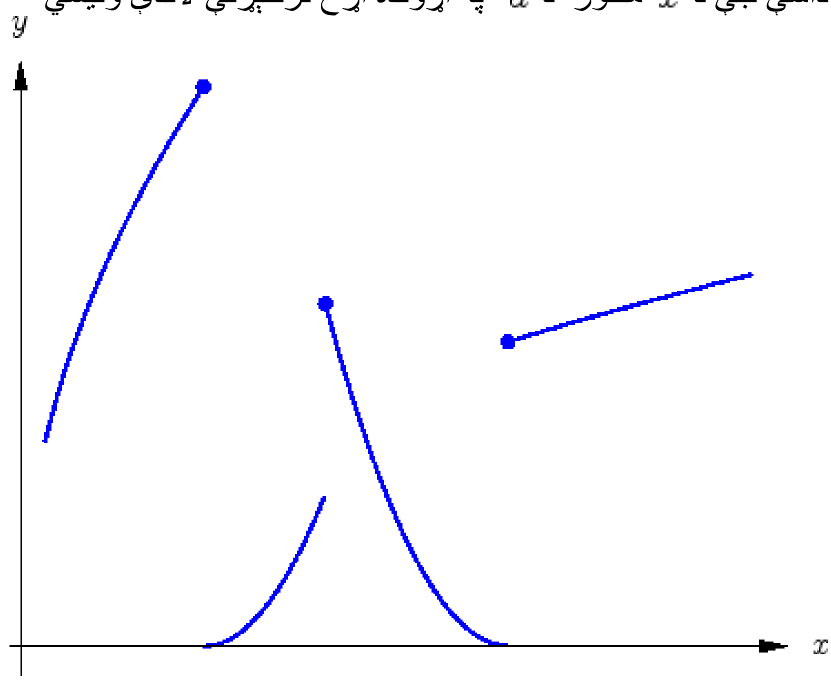
اینووني له لارې یوه په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکیدونکي تابع ته پوره شي.

یو اړخیز ناپرېکیدنوالی یا متمادیت **Einseitige Stetigkeit**

ناپرېکدنوالي ته ورته سړی کیږ- همداسې ښی ناپرېکېدنوالی تعریفوي

$$\lim_{x\to a-} f(x) = f^{-}(a)\,, \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = f^{+}(a),$$

داسې چې د x محور د a په اړونده اړخ ترڅېړنې لاندې ونیسي



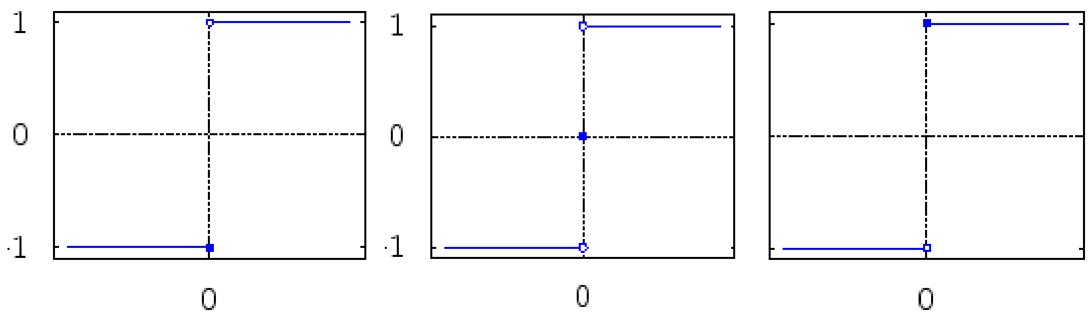
که د f په یوه ټوټځای تابع ارزښت تعیف وي، نو دا په ګراف کې پنډ په نخښه کېدی شي، چې روښانه شي چې د کیږ- یا ښي اړخ د پولې ارزښت سره سر خوري.

پای.

تابع

$$f(x) = x/|x|$$

په ټولو ټکو کې تر تعریفتشیا $x = 0$ پورې ناپرېکېدونکې ده.



که $f(0) = -1$ کېږدو نو تابع به کیڼ اړخیزه او د $f(0) = 1$ سره ښی اړخیزه ناپرېکېدونکې په 0 کې مخ ته لاړه شي. د $f(0) = 0$ لپاره د سیګنوم-تابع

$$f(x) = \mathrm{sign}(x),$$

لاس ته راځي، چې دا په 0 کې نه ښۍ – او نه کینه ناپرېکېدونکې دی.

د ناپرېکېدونکو توابعو لپاره لارې یا قاعدې

په یوه ټکي a کې ناپرېکېدونکې توابعو f او g لپاره

$rf \quad (r \in \mathbb{R})$

$f \pm g$

fg

f/g (که $g(a) \neq 0$ وي)

$f \circ g$

په a کې ناپرېکېدونکې دي.

په ورته وګه په یوه انتروال D ناپرېکېدونکې تابع همداسې د کېږ – اوښي اړخيز ناپرېکېدنوالي ځايونو لپاره باور لري.
پای.

دا لار د پوله ارزښت لپاره اړونده وينا ښخه ترلې لاس ته راځي.
که دبېلګې په ت وګه د ناپرېکېدونکو توابعو کمپوزېشن(ترکيب) تر ښېړنې ونيسو، د g
د ناپرېکېدنوالي ښخه د هرې پرلپسې (x_n) لپاره د پوله ارزښت a سره دا راکوي

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a).$$

دا چې f هم ناپرېکېدونکې دی، لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(g(a)).$$

پاي.

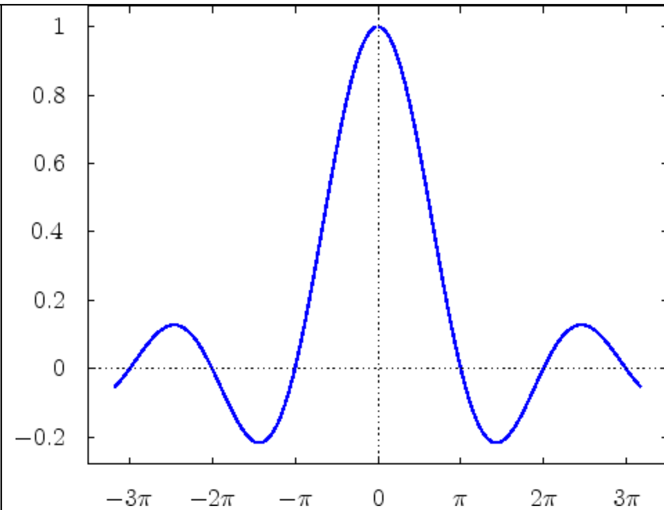
داسې په نامه sinc - تابع.

$$f(x) = \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$$

د مخ ته بيولو يا دوام

$$f(0) = 1$$

سره په $\mathbb{R}$
باندې ناپيکېدونکې ده.
ښوونه يې د ترېګونومتريک توابعو په تخمين پورې اړه لري.



د ردېکوډي $\Delta(OPQ)$ ، د ګردی ټوټه ووني یا $\Delta(O\overline{P}\,\overline{Q})$ وتر او درېکوډي د سطحو د پرتلې له لارې په ښېره کې کتل کیږي، چې

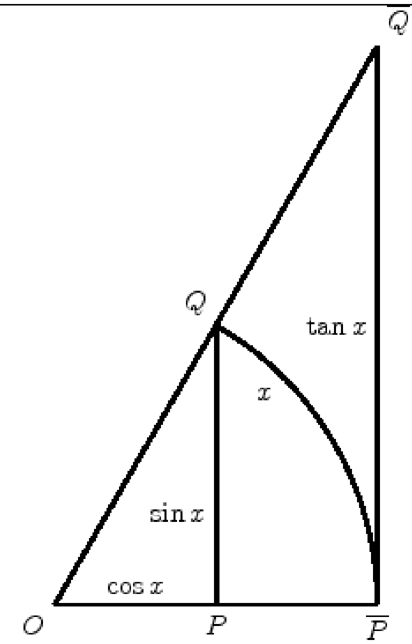
$$\frac{\sin x\cos x}{2} \le \frac{x}{2} \le \frac{\tan x}{2}$$

همداسې

$$\frac{1}{\cos x} \ge \operatorname{sinc} x \ge \cos x,$$

د $\sin x/2$ سره وېشني له لارې او د معکوس ارزښت جوړونه. د $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ د پرتلې قضیې څخه لاس ته راځي.

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sinc} x = 1.$$

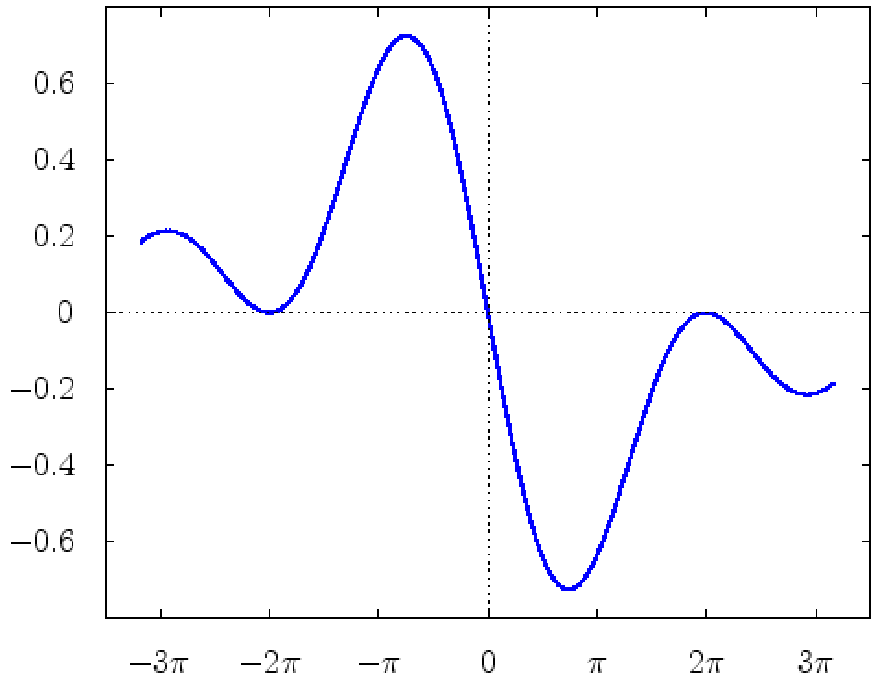


لیکونکي: اپپ، هیولیک

تابع

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$$

د مخ ته وړنې $f(0)=0$ سره په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکیدونکې ده



باور لري

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x + 1}\sin x,$$

او له

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0}\sin x = 0$$

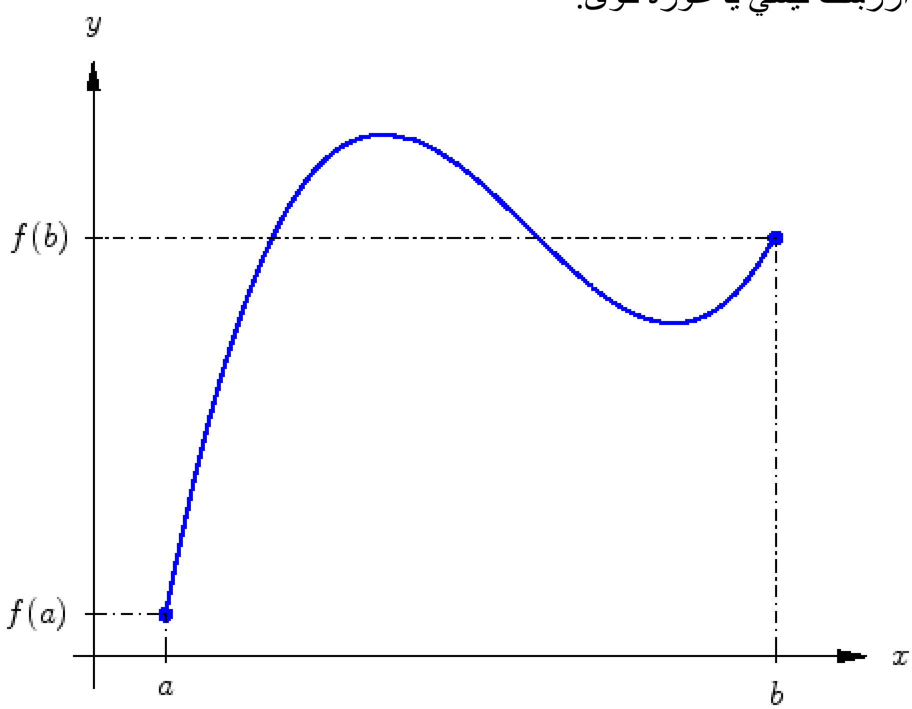
لاس ته راځي

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

منځ ارزښت جمله Zwischenwertsatz

یو ناپرېکېدونی تابع f په یوه بندانتروال $[a,b]$ د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ هر ارزښت نیسي یا غوره کوی.

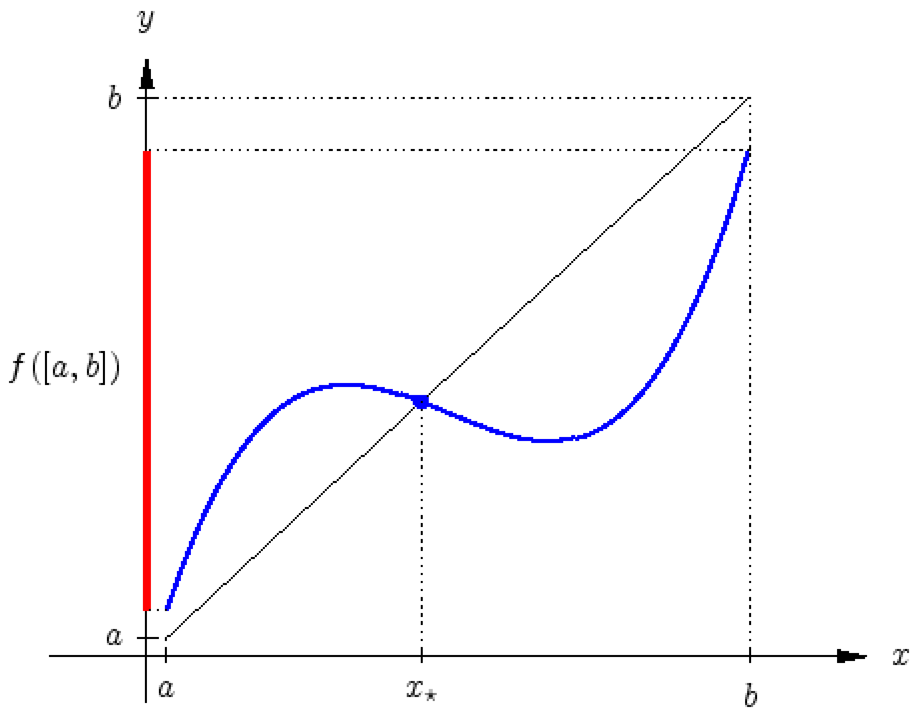


لیکونکي: اپپ، هیولیګ

که یو تابع f انتروال $[a,b]$ په انتروال $[a,b]$ ناپرېکېدونکی تنظیم کړي، نو یو $x_\star$ شتون لري د

$$x_\star = f(x_\star).$$

سره.



د ناپرېکيدونکې تابع

$$g(x) = f(x) - x$$

لپاره $g(a) \geq 0$ او $g(b) \leq 0$ باور لري. د منځ ارزښت جملې سره د يوه صفرځای $x_\star \in [a,b]$ شتون لاس ته راځي:

د نتپرېکيدونکو توابعو لپاره

$$g(x) = f(x) - x$$

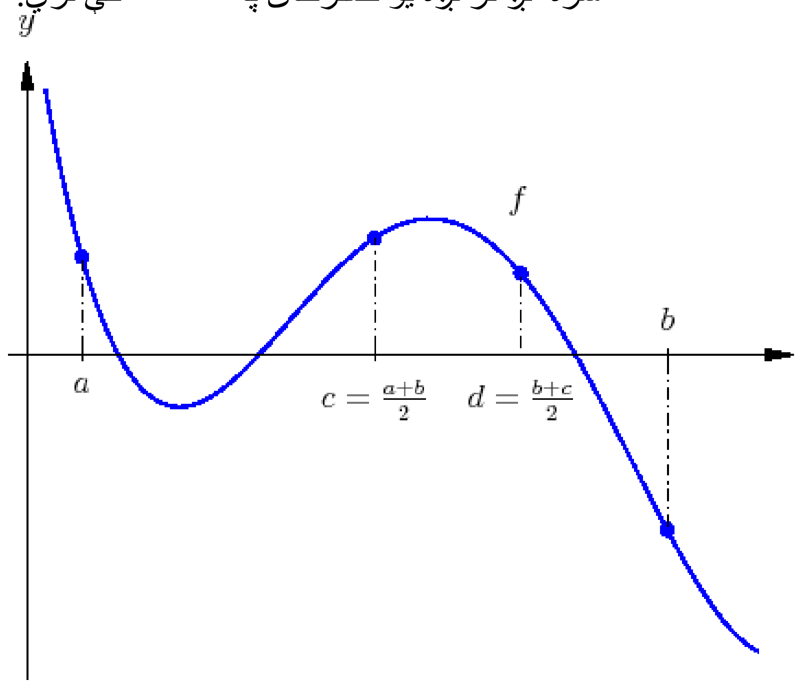
$$g(x_\star) = 0 \Leftrightarrow f(x_\star) = x_\star$$

دا په دې معناچې د f يو ځاي په ځای - يا بيکس تکی $x_\star$.
ليکونکي: هيوليک، کراخ

د دوه سطحو – یا برخو تلنلار **Bisektionsverfahren**

د منځ ارزښت جملې په بنسټ یو ناپرېکیدونکی تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ د

$f(a)f(b) \leq 0$ سره لږ تر لږه یو صفرځای په $[a,b]$ کې لري.



که دا انتروال نیم شي او f ته د انتروال په ةنځ کې ارزښت ورکړي

$$c = \frac{a+b}{2}$$ ،

نو کیدی شي د مخنخښې په مرسته پرېکړه وشي، چې د کوم انتروال په نیمایي کې باید صفرځای پروت وي:

$f(a)f(c) \leq 0$ لاسته راځي ، چې په $[a,c]$, کې صفرځای شتون لري

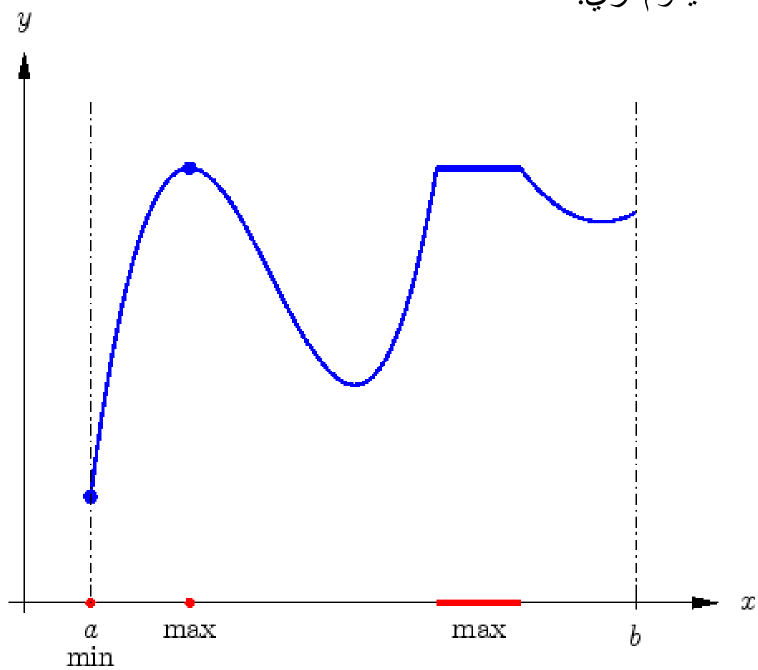
$f(a)f(c) \geq 0$: لاس ته راځي صفرځاب په $[c,b]$. کې شتون لري

سړی اوس دا اړونده برخه انتروال ټاکي او دااېتریر iteriert (ټیک حل ته ور نږدې کونه) کوي، تر څو د انتروال اوږدوالی غوښتوني ټیکوالي ته ورسیږي.

لیکونکي: اپپ، هیولیک، پفایل

د ناپرېکيدونکي تابع افرطيت Extrema stetiger Funktionen

يو ناپرېکيدونکی تابع په يوه پای رابند انتروال $[a,b]$ لږ تر لږه يو مينيموم او يو ماکسيموم لري.



ليکونکي: اپپ، هيوليک

يو $c > 0$ شتون لري د

$(x+y)^n \leq c(x^n+y^n)$

سره د $x,y \geq 0$ لپاره

د بنووني ته د $x \neq 0$ لپاره (حالت $x = 0$ ساده دی) ليکو

$z = y/x$

او ناپرېکيدونکی تابع

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n}.$$

څیړو.

دا چې $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$ دی، نو یو $b > 0$ شتون لري، داسې چې $f(z) \le 2$ د $z \ge b$ لپاره باوري کوي. د

$$c = \max\left\{2, \max_{z\in[0,b]} f(z)\right\}$$

سره لاس ته راځي

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n} \le c$$

او له دې سره پورته غوښتنه

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

برابرډوله ناپرېکیدنوالی Gleichmäßige Stetigkeit

یو تابع f په یوه انتروال D برابرډوله یا برابرارزښته ناپرېکېدونکی دی ، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو δ_ε شتون ولري ، دا سې چې راکړي

$$|x-a| < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

د ټولو $x, a \in D$ لپاره.

د f د تنها ناپرېکېدنې په برعکس δ_ε د a په واک کې نه ده. تنهاپه یوه محدود رابند انتروال کې ناپرېکېدنوال کی او برابرارزښته یا – ډوله ناپرېکېدنوالی سره ورته دی.

لیکونکي: هیولیګ، پفایل

په ټکي ډول پولې ته تلنه Punktweise Konvergenz

د توابعو (f_n) یوه پرلپسي په یوه انتروال D ټکي ډوله د پولي تابع f په لور پولي ته ځي.

$$f_n \underset{\text{pktw.}}{\longrightarrow} f,$$

که $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ وي د ټولو $x \in D$ لپاره.

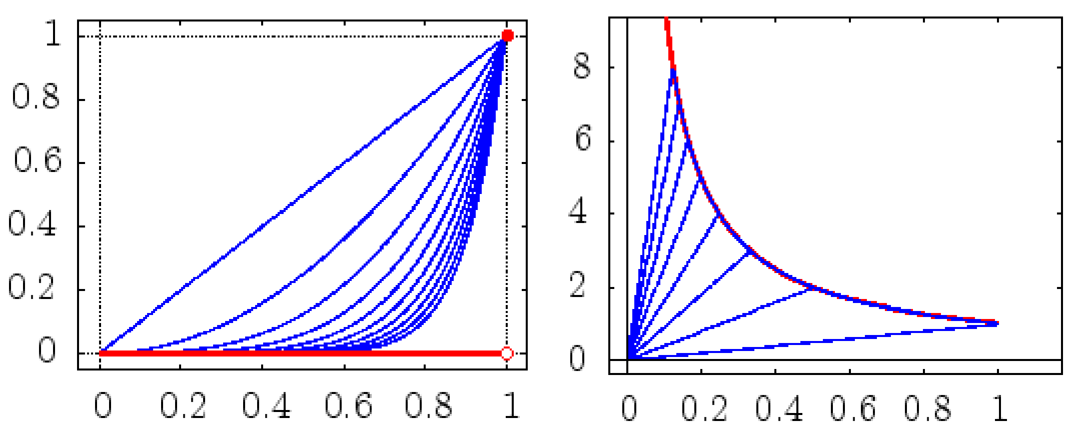
لیکونکي: اپپ، هیولیگ

په ټکيډوله پولي ته تلني باید نه دی چي ناپرېکېدنوال او بندوالی ساتلي پاتي شي.

د بېلګي په توګه د $f_n(x) = x^n$ ټکي ډوله پوله ارزښت په $[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

په ښي انتروال پای پرېکېدونکی دی، لکه په کینه څېره کي چي ښوول شوی دی.



د یو کونورګنت لپاره بېلګه چي د نامحدود پوله تابع په لور ښی څېره د پرلپسي سره

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 < x \le 1/n \\ 1/x, & 1/n < x \end{cases},$$

ښايي ، چې په $(0,1)$ ټکي ډوله د پوله تابع $f(x) = 1/x$ په لور پولې ته ځي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

برابرارزښته يا برابرډوله پولې ته تلنه Gleichmäßige Konvergenz

د توابعو يوه پرلپسي (f_n) په يوه انتروال D برابرډوله د يوه پولې تابع f په لور پولې ته ځي،

$$f_n \underset{\text{glm.}}{\longrightarrow} f,$$

که هر $\varepsilon > 0$ ته يو n_ε شتون ولرى، داسې چې

$$n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري.
د کوشي ~~-~~قضيې په مرسته کېدى شي برابرډوله پولې ته تلنه بې د پولېتابع نسبت څخه تعريف شي. سرى ورته شرطونه لاس ته راوړي، داسې چې

$$m, n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره بايد باور ولري.

که توابع f_n ناپرېکېدونکي وي، نو پوله تابع f هم ده.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د درېګوډي نامساواتو څخه لرو

$$|f(x_0) - f(x)|$$

$$\le |f(x_0) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)|$$

$$\le |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|.$$

د په خوښه $\varepsilon > 0$ ته د برابرډوله کونورګنت له امله يو n_ε شتون لري، داسې چې د $n > n_\varepsilon$ لپاره

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall\, y \in D$$

باوري کوي. د يوه داسې n لپاره اخرنی او لومړنی ترم $< \varepsilon$ دي، که $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ وي. دا له $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$ لاس ته راځي او له دې سره د $x \to x_0$ $f(x) \to f(x_0)$ لپاره.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د توابعو لړۍ پولې ته تلنه Konvergenz von Funktionenreihen

يوه د توابعو f_k لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ټکي ډوله (برابرډوله) پولې ته تلونکې ده، که دا د لاندې ټوټه جمعې يا زياتون $s_n = \sum_{k \le n} f_k$ لپاره دا حالت ولري.

يوه کلکونه يې مطلق پولې ته تلنه ده، چې د هغې سرره د $\sum_n |f_n|$ د برابرډوله پولې ته تلنې لپاره غوښتل کيږي. په دې حالت کې پولې ته تلنه د لړۍ يوه نظم بدلون لپاره هم ساتلی پاتيږي.
د تعريف سره سم دا وينا وې په تابع پرلپسيوو هم د باور وړ دي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

په لاندې کې د يو څو تيوپيکي بيلګو حالتونه ښولکيږي

(i) د توابعو لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(1-x)^k = x\left[1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots\right]$$

په $[0,1]$ ټکي ډوله پولې ته ځي. د هندسي لړی لپاره فرمولپه مرسته پوله تابع لاس ته راځي

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

دا چې په $x = 0$ کې پرېکېدونکی دی، کېدی شي لړی برابرډوله کونورګنت نه وي.

(ii) د $x \in [0,1]$ لپاره لړی

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \pm \cdots$$

د لایبنیخ ــپولې ته تلنې له امله ($\frac{x^k}{k}$ همغږیز صفر پرلپسې ده). دا چې د لړی پاتې د لایبنیخ پسې د

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-x)^k}{k} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} \right| \leq \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

له لارې اټکل کېدی شي، لړیٔ په $[0,1]$ حتی برابرډوله پولې ته ځي. مګر سره له دې په $[0,1]$ باندې مطلق پولې ته نه ځي، ځکه چې $\sum(1/k)$ دیورګنت ده.

(iii) لړی

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots$$

په $[-1,1]$ باندې مطلق پولې ته ځي، ځکه چې

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right| - \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{x^k}{k^2}\right| = \sum_{k=n+1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

باور لري، او

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

پولې ته ځي.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

توابعو لړۍ ته مایورانت یا پورته پولې
Majorante bei Funktionenreihen

د پوره لوی n لپاره باور لري

$$|f_n(x)| \le ca_n\,, \quad x \in D\,,$$

اوکه لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ پولې ته ځي، بیا نو لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

مطلق پولې ته تلونکې ده.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

وینا تړلې د اعدادو لړۍ لپاره د مایورانت له جملې لاس ته راځي، ځکه چې د ټولو $x \in D$ لپاره لرو

$$\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| - \sum_{k=1}^{m} |f_k(x)| \le c \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د یوه ضرب د پوله ارزښت په حیث انځور شي:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n \ , x \in \mathbb{R},$$

په هر انټروال $[-a,a]$ د برابرډوله پولې ته تګ سره.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

لومړی به د

$$f_n(x) = (1 + x/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{x}{n} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{x^n}{n^n} .$$

برابرډوله پولې ته تلنه و ښوول شي. دې ته سړی ترې کار اخلي یا استعمالوي، چې

(i)

د $a^k/k! \to 0$ په خوښه $a \ge 0$ لپاره ؛

(ii)

$p_{n,j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}$ د هر $j \in \mathbb{N}$ لپاره یو مونوتون جګېدونکې د 1

په لور تلونکې پرلپسي ده.

د دې لپاره چې د کوشي فرمول استعمال کړو، سړی کمښت یا تفریق

$f_m(x) - f_n(x)$ په لاندې بڼه لیکي

$$\sum_{j=0}^{k-1} (p_{m,j} - p_{n,j})\frac{x^j}{j!} + \sum_{j=k}^{m} p_{m,j}\frac{x^j}{j!} - \sum_{j=k}^{n} p_{n,j}\frac{x^j}{j!}$$

د $k<n<m$ سره .

د $|x|\le a$ لپاره د $a\ge 1$ او $k\ge 2a$ سره د اخرنیو زیاتېدونو ارزښت هر څل

$$\le \frac{a^k}{k!}\underbrace{\left(1+\frac{a}{k+1}+\frac{a^2}{(k+1)(k+2)}+\cdots\right)}_{\le 2},$$

دی، نو د(i) پسې $<\varepsilon/3$ د یوه پوره لوي ټاکلې k لپاره.

د (ii) پسې یا له مخې دی

$$|p_{m,j}-p_{n,j}|<\frac{\varepsilon/3}{ka^k}$$

د $m,n>N_j(\varepsilon)$ لپاره، اوله دې سره کیدی شي د لومړنی جمعې هره زیاتېدونې د $f_m(x)-f_n(x)$ په توته کیدو د $\frac{\varepsilon/3}{k}$ له لارې اټکل کړي. په ټولیزه توګه لرو

$$|f_m(x)-f_n(x)|<k\frac{\varepsilon/3}{k}+2\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\quad m,n>\max_{j<k}N_j(\varepsilon).$$

د

برابرډوله پولې ته تلنې په بنسټ په هر انتروال $[-a,a]$ باندې د پولې تابع $f=\lim_{n\to\infty}f_n$ ناپرېکېدونکې ده. بسیا کوي، چې $f(x)=e^x$ د راشنل پروت محور $x=p/q$ لپاره وښایو. د یوې برخه پرلپسې $n=mp$ په راوړنې سره د e د تعریف څخه لاس ته راځي

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{x}{mp}\right)^{mp}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{p}{mpq}\right)^{mpq/q}=e^{p/q}$$

د $t\longmapsto t^{p/q}$ ناپرېکېدنې له امله.

د اکسپوننشال تابع لړۍ انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د یوې لړی د پولع ارزښت په تګه انځور شي:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \ , x \in \mathbb{R},$$

د هر انتروال $[-a,a]$ برابرډوله پولې ته تلنې سره.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

اوس د ضرب انځورونې ته ورته والی ښولکیږي:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

$x > 0$

دا ترلی د تیلور-لړۍ په څېر د جمعې د روښانه ونې څخه لاس ته راځي. د لپاره دا لاندې سیده ښوونه ستونځمنه ده، سره له دې بې له مشتق منځ راوځي.

د $\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n$ سرې پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{x}{n}\right)^j = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{x^j}{j!}\underbrace{\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-j+1)}{n\cdot n\cdots n}}_{\leq 1}\right)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي او د

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{x^j}{j!}\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-j+1)}{n\cdot n\cdots n}\right)$$

$$\geq \sum_{j=0}^{m}\left(\frac{x^j}{j!}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{j-1}(1-k/n)\right)$$
$$= \sum_{j=0}^{m}\frac{x^j}{j!}$$

د یوه په خوښه $m \in \mathbb{N}$ کښته لور ته اټکل کوي. د $m \to \infty$ لپاره د پوله ارزښت جوړولو څخه وروسته د دواړو آټکلونو یو بل سره برابروالی لاس ته راځي.
یوه ورته دلیل راوړنه د $x < 0$ لپاره همم شوني ده، که سړی مثبت او منفي برخه په دې منځ ته راغلي جمعه کې ځانله یا جداوڅیړي.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

اکسپوننشا تابع د ډېرې بیلوژیکي ودې پروسې تر څیړنې لاندې نیسي. د بیلګې په توګه په یو ساده د د قومونو ودې مودل کې د زیږېدنې ګڼون یا تعداد متناسب دی د د ورځنې اوسیدونکو تعداد $p(t)$ سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې

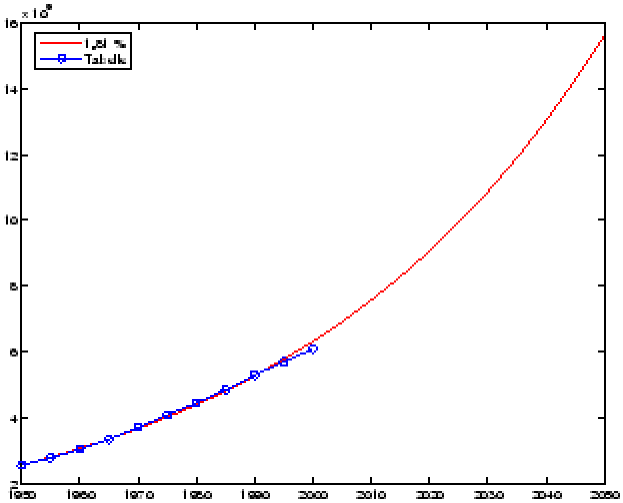
$$p(t+\Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t)) .$$

د $\Delta t \to 0$ لپاه دا د ودې قانون

$$p(t) = ce^{\lambda t} , \qquad c = p(0) ,$$

له لارې مودلي کیږي.

کال	د نفوسو تعداد په میلیونو	ونډه
	2555	
1950	2779	1.76 %
1955	3039	1.87 %
1960	3345	2.02 %
1965	3707	2.16 %
1970	4088	1.80 %
1975	4456	1.80 %
1980	485	1.79 %
1985	5283	1.77 %
1990	5690	1.54 %
1995	6080	1.37 %
2000		1.25 %



(کينڼ) جدول د نړۍ اوسېدونکي $p(t)$ ښايي همداسي کلنۍ د ودې تعداد(اټکل شوی ارزښت). کلنۍ منځنۍ د ودې زياتون (ريټ) په کلونو 1950-2000کې 1.81 % وو. له 1950 کال څخه به د ثابت منځني اکسپوننشل ودې سره

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

به د نړۍ اوسېدونکي په کال 2050 کې 16 ميلیارده وګنل شي(ټکي په ټکي شوې کږه يا منحني).

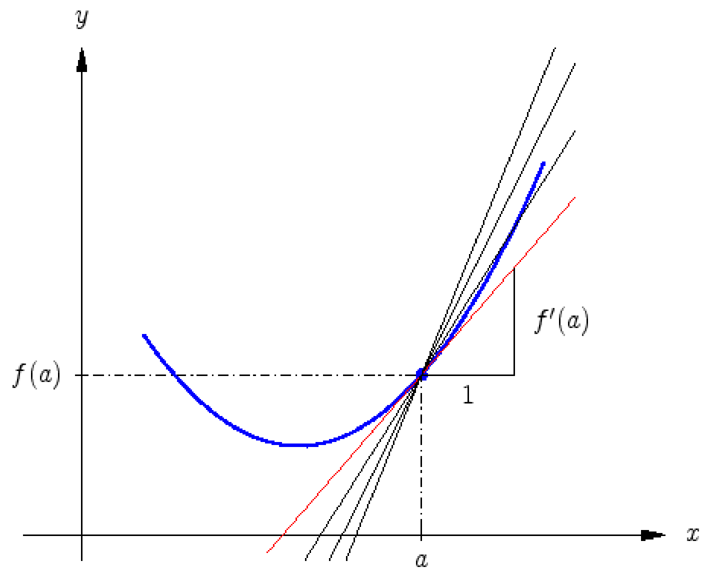
ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

مشتق(رابيليدنه) Ableitung

يو تابع f په ټکي a کې مشتقوړ يا رابېلېدوړ دی، که د مشتق په نوم نومول شوې پوله ارزښت

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري..



مشتقوړوالی يا رابيليدوړوالی هندسي په دې معنا دی، چې د ټوټه ونې يا سيکانت جګوالی له

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

ځخه د ورکړشوي تانجنت جګوالي په لور وهڅيږي يا کونورګنت شي(پوله يې ونيول شي).

سرړی داسې هم ليکي:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{dy}{dx}$$

د $y = f(x)$ سره . دا ليکدود يا ه‍دول په کمبنت وپش کې $\Delta x \rightarrow 0$ پولې ته تګ ښايي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}\ .$$

جګ مشتقونه د $f'', f''', \ldots$ همداسې $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$ سره په نخښه کیږي.

یو تابع f په یوه ډېرۍ یا سټ D باندې مشتقوړ بلل کیږي، که $f'(x)$ د ټول $x \in D$ لپاره شتون ولري.

د تابع $f(x) = x^2$ د مشتق لپاره د تعریف سره سم لرو:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x\,.$$

دویم مشتق $f''(x) = 2$ ثابت دی.

په ټولیزه توګه یو د خوښې مونوم $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, لپاره د بینوم فرمول په مرسته لرو

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1} h + O(h^2)}{h} = n x^{n-1}\,,$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم h^2 ترمونه په نخښه کوي.

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د زیاتون – یا جمعې قضیې په مرسته وشمېرل شي له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

څخه د کمبنت وېش لپاره د $t = x + h/2$ سره راکوي

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\left((x + h/2) + h/2\right) - \sin\left((x + h/2) - h/2\right)}{h}$$

$$= \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}.$$

د

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

له امله د $h \to 0$ لپاره ښی اړخ د $\cos x$ په لور هڅیږي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د بنسټتوابعو مشتق یا رابیلیدنه

لاندې جدول د غوره بنسټتوابعو مشتق ښايي:

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		x^r, $r \neq 0$	$r\,x^{r-1}$
e^x	e^x		$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

د مشتق یارابیلیدنې کربنزوالی **Linearität der Ableitung**

مشتق کربنیز دی، دا په دې معناچې د مشتقوړ توابعو f او g لپاره باور لري

$$(rf)' = rf', \quad r \in \mathbb{R},$$
$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

د ضرب قانون **Produktregel**

د دوه مشتقوړ توابعو f او g د ضرب مشتق دی

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

په ټولیزه توګه د ضرب $f = f_1 \cdots f_n$ لپاره باور لري

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i}.$$

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

د تعریف څخه ترلی راکوي

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د پولینوم
$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

مشتق د $x = 1, 2, 3$ په ځایونو کي ټاکل کیږي. دا چې د هر کرښیز ضریب مشتق 1 دی، د ضرب له لارې یا قاعدې څخه لرو

$$p'(1) = (1-2)(1-3) = 2,$$
$$p'(2) = (2-1)(2-3) = -1,$$
$$p'(3) = (3-1)(3-2) = 2.$$

په ورته توګه سرې د
$$p(x) = (x-1)\cdots(x-n),$$
لپاره شایي، چې
$$p'(k) = (-1)^{n-k}\,(n-k)!\,(k-1)!$$

دی د $k = 1, \ldots, n$ لپاره.
(Autoren: Höllig/Hörner/Knesch)

د وېش قانون یا لار **Quotientenregel**

د دوه مشتقوړ توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړي توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

د راشنل توابعو مشتق دی

$$\frac{(1-2x)'(4+3x^2) - (1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4+3x^2)^2}$$

په بديلي ډول د ضرب قانون سره لاس ته راوړو

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' =$$

$$= (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}\,.$$

(Autoren: Höllig/Kreitz

Kettenregel ځنځیری لار یا - قانون

د توابعو د ځنځیروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

لپاره مشتق دی

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

.

د $f(y) = z,\ g(x) = y,\ h(x) = z$ سره سړی لیکي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د تعریف څخه تړلی لاس ته راځي

$$\begin{aligned}(f(g(x)))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= \lim_{\tilde{h}\to 0}\frac{f(g(x)+\tilde{h}))-f(g(x))}{\tilde{h}}\,\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(g(x))g'(x),\end{aligned}$$

چیرته چې $\tilde{h} = g(x+h) - g(x)$ دی.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ځنځیري قانو د روښنه کولو ته تعریفیږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy}\,\text{s}\,h(x) = \sin\Big(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\Big)\cdot x^2)\big)g'(x)\,.$$

د دننني مشتق $g'(x)$ شمېرلو ته د سره د ځنځیر قانون کارول کیږي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

په بدیلي توګه کېدی شي د مشتق لیکدود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \cos(y)\frac{1}{w}2x = \cos\left(\ln(1+x^2)\right)\frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

ايمپليخيت مشتق نيول Implizites Differenzieren

که يو تابع $y = f(x)$ ايمپليخيت وي، دا په دې معناچې يو برابرون په x او y کې ورکړ شوی، داسې چې دواړه خواوي د x پسې مشتق کيدی شي. دلته يواځې په $y = y(x)$ کې افادو باندې ځنځيري قانون استعماليږي.

د بېلګې په توګه سړی د

$$E:\ \ x^2 + 3y^2 = 7$$

له لارې ورکړ شوې ايليپسې يا هګۍ

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

همداسې

$$y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$$

.

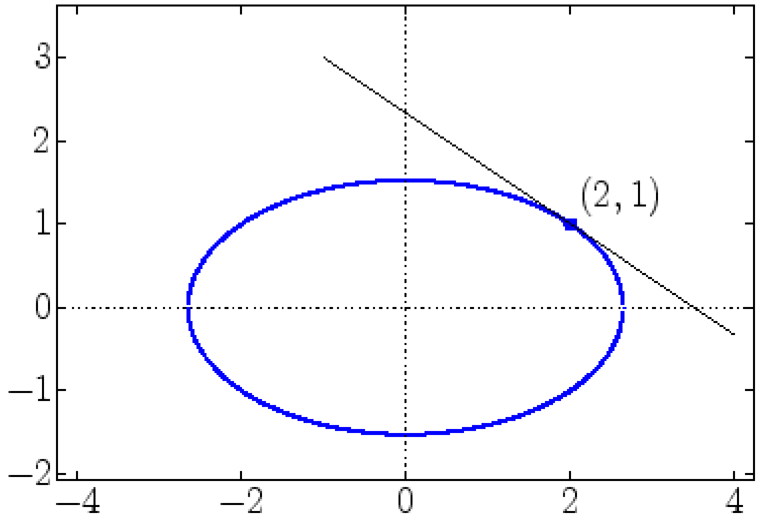
لاس ته راوړي.

له دې سره کېدی شي د E په يوه ټکي د $y \neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي.

د بېلګې په توګه د $(2,1)$ لپاره په لاس راځي

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$

.



په ورته توګه جګ مشققونه شمېرل کیږي. د yy' لپاره دضرب قانون د استعمال سره دی

$$\frac{d}{dx}\left(2x + 6yy'\right) = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

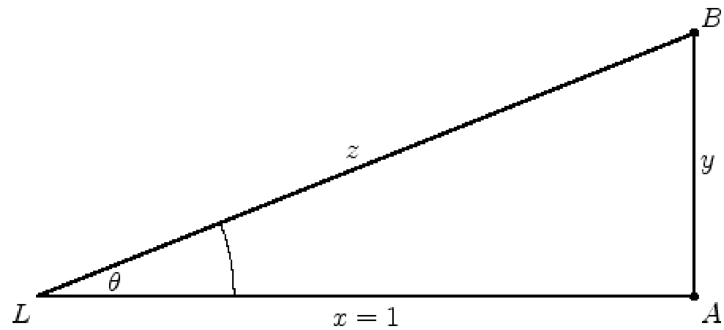
له دې لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

.

کیدی شي په E باندې د یوه ټکي ځا په ځای کول او همدا د $y'(x)$ ارزښتونو پیژندلو له لارې ځرګند ازښتونه ټاکي
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

په ټکي L کې یو د برېښنا یا رڼا برج دی د یوه ځرخېدونکي بېجلی یا ګروپ سره، چې د رڼا وړانګه یې د ټکو A او B له لارې تللی $1\ \mathrm{km}$ کرښیز لرې دښته لویږي.



وړانګه غورځونکی د یوه څرخون لپاره 2 ثانیو ته اړتیا لري، دا په دې معنا چې

$$\frac{d\theta}{dt} = \pi$$

. د رڼاوړانکې پوزیشن یا ځای په دښته کې دی

$$y(t) = x \tan\theta(t).$$

له دې سره د چټکتیا لپاره لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dt} = 1\pi \frac{1}{\cos^2(\theta)} \longrightarrow \infty \quad \text{für} \quad \theta \to \frac{\pi}{2},$$

دا په دې معنا چې سوری یې له رڼا چټک دی.

یو ټیکه معالعه لاندې راکوي. د دې وخت توپیر په پام کېنیولو له امله رڼا B ته د په وخت $t = \frac{\theta}{\pi} + \frac{z}{c}$ ورسیږي، دکوم سره چې $c = 300000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ د رڼا چټکتیا ده،
له دې سره لرو

$$\frac{\theta'}{\pi} = 1 - \frac{z'}{c}.$$

وروسته د t پسې د $z^2 = y^2 + 1$ مشتق راکوي

$$zz' = yy', \qquad \frac{z'}{y'} = \frac{y}{z} = \sin(\theta).$$

د θ' او z' ایښوونه په

$$y' = \frac{\theta'}{\cos^2(\theta)}$$

کې بالاخره راکوي

$$y' = \frac{1}{\cos^2(\theta)}\left(\pi - \frac{\pi}{c}y'\sin\theta\right)$$

همداسې

$$y' = \frac{c\cdot 1\pi}{c\,\cos^2(\theta) + 1\pi\sin(\theta)}$$

.

د $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ لپاره اوس $y' \longrightarrow c$ هڅیږي، د اینشټاین د تیوري سره په هم غږۍ
کې باور لري

t

$$y' \longrightarrow \infty \qquad \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} \rightarrow -\frac{c}{\pi},$$

für

$$\theta \approx 4.781 \in \left(\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

داپه دې معناچې د لپاره ښېرته سړی یوو خورا لویه چټکتیا
لاس ته راوړي. سوری له دې امله د رڼا ګړندی دی. دا د اینشټاین تیوري سره په تضاد
کې نه دی، ځکه چې سړی یو ه پیښنه Phänomen, ګوري، نا دا خورنده ماده. د ،،ساده

$300000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$

ښېرونکي،، لپاره بو نا ښه احساس پاتیږي دا په هر صورت له ښخه
ورو خوزي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د لايبنيخ قاعده يا لار**Leibniz-Regel**

د يوه ضرب n -م مشتق دی

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

.

(Autoren: Höllig/Kopf)

د پـه حالت کې باور لري

$$(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''$$

او د لپاره دی

$$(fg)''' = (f'g + fg')'' = (f''g + 2f'g' + fg'')' =$$

$$= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

ټوليزه ښوونه د اندکشن له لارې صورت پـه n نيسي د بينوميال ضريبونو لپاره د ريکورزين په پام کې نيولو سره.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د $x = 0$ پـه ځا کې دې د

$$f(x)\,g(x) = x^9 \ \cos(\sin x)$$

يولسم مشتق وشمېرل شي.

د دې لپاره لومړی له دې څخه کار اخلو، چې د $x = 0$ لپاره د مونوم f فقط 9 -م مشتق د صفر سره نابرابر دی:

$$f^{(9)}(0) = 9!\,.$$

د لایبنیځ- فرمول له دې سره فقط په یوه ترم راکمه وي.

$$(fg)^{(11)}\,|_{x=0}=\binom{11}{2}\,f^{(9)}(0)\,g^{(2)}(0)\,.$$

د ځنځیري قانون سره لرو یا لاس ته راځي

$$g'(x)=-\sin(\sin x)\,\cos x$$

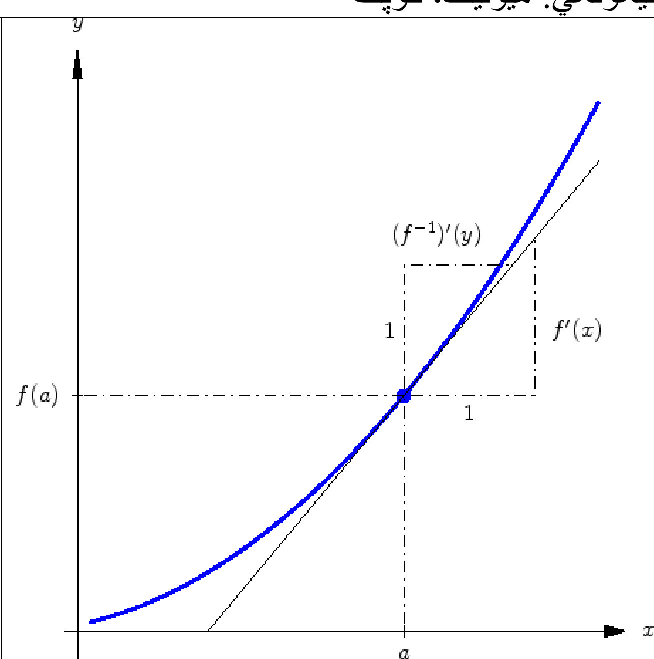
$$g''(x)=-\cos(\sin x)\cos^2 x+\sin(\sin x)\sin x,$$

یعني $g''(0)=-1$. له دې سره غوښتونی مشتق دا لاندې دی

$$\binom{11}{2}\,9!\,(-1)=-\frac{1}{2}\,(11!)\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

که یو تابع $y=f(x)$ د $f'(x)\neq 0$ سره f ناپرېکېدونکي مشتقوړ وي، نو د x په یوه چاپېریال کې معکوس وړ دی ، او باور لري $(f^{-1})'(y)=f'(x)^{-1}$, همداسې $dx/dy=(dy/dx)^{-1}$.



لکه په څېره کې چې ليدل کيږي، د f او f^{-1} جګوالي معکوس دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

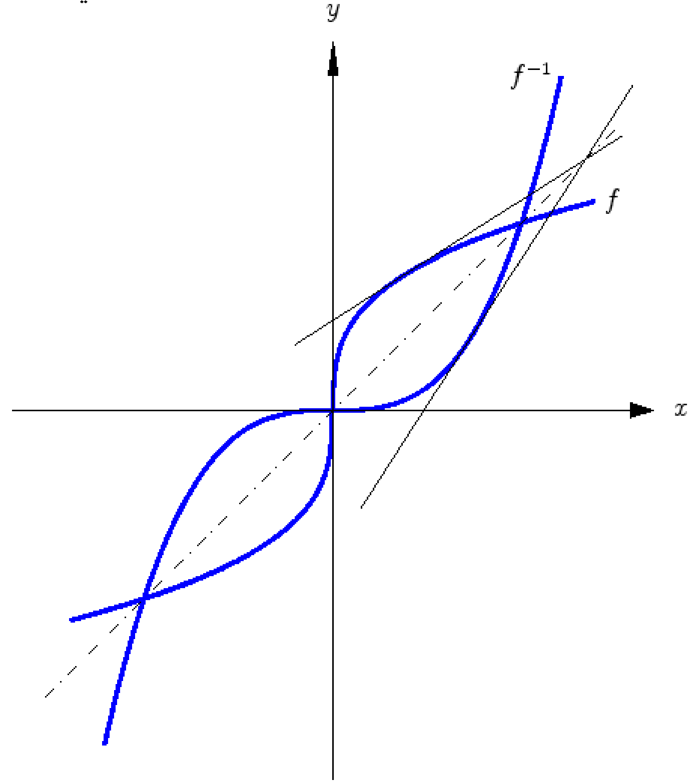
که کيږدو $g = f^{-1}$، نو لاس ته راوړو

$$x = g(f(x))$$

او د ځنځيري قانون سره مشتقونه

$$1 = g'(f(x))f'(x) .$$

د $y = f(x)$ سره غوښتنه يا ثبوت لاس ته راځي



دا چې د f او f^{-1} جګوالی په اړونده د x او y په ځایونو کې سره معکوس دي، روښانيږي، که په پام کې ونیول شي، چې f او f^{-1} یو بل ته سیومتریک دي.

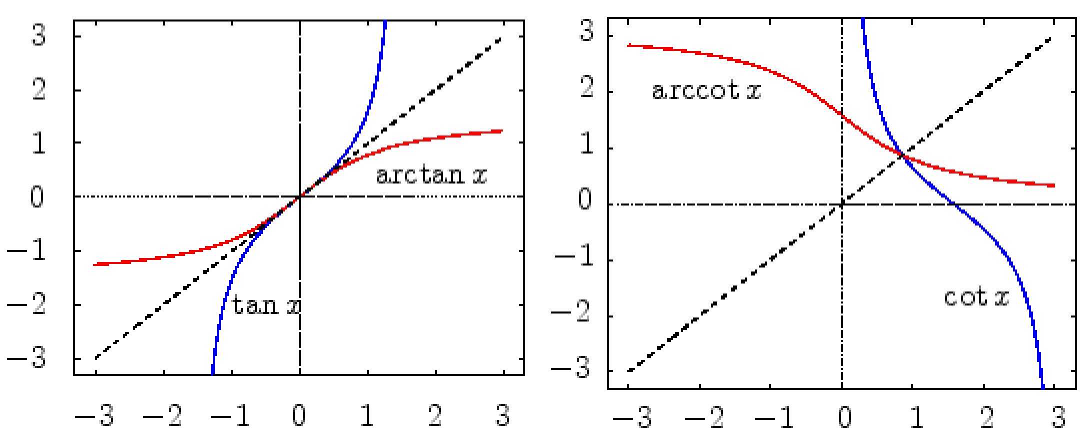
لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

دا چې د تانجنت تابع د $x = \arctan y$ معکوس تابع مشتق وټاکو، لومړی شمېرو

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} = \cos^2 x.$$



بنی اړخ اوس باید د y تابع په څېر ولیکل شي. د دې لپاره کټوتوالی کارول کیږي یا استعمالیږي.

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + y^2$$

او لاس ته راوړي

$$\frac{d}{dy}\,\mathrm{arctan}y = \frac{1}{1+y^2}.$$

په ورته توګه د کوتانجنت په څېټ- یا معکوس تابع ښایو.

$$\frac{d}{dy}\,\mathrm{arccot}y = -\frac{1}{1+y^2}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

ع

$y = f(x) = x\,(1-x$

ء انتروالونو

$(-\infty, 1/2$

او

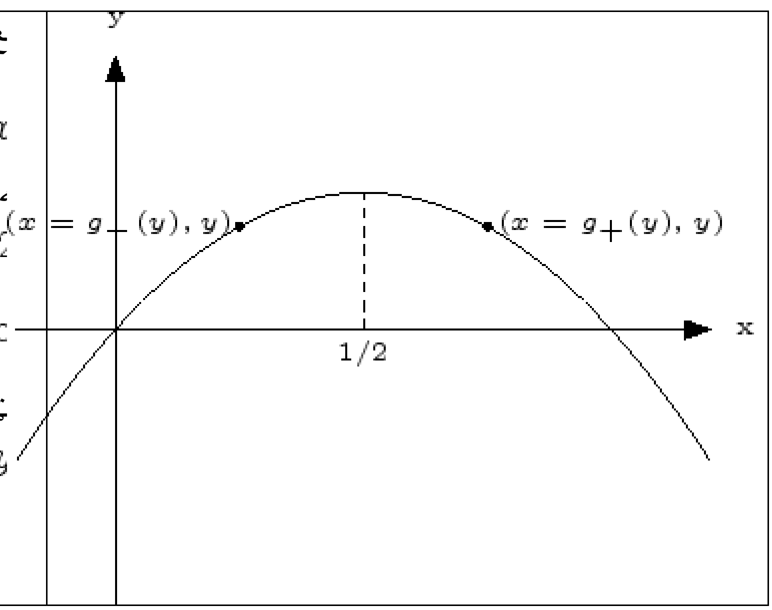
$[1/2, \infty$

هر وار په

ټ – یامعکوس تابع

$x = g(y$

لري.



په دواړو حالتونو کې باور لري

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1-2x} \,.$$

بل یې مشتقنیول راکوي

$$g''(y) = \left(\frac{1}{1-2x}\right)' \frac{dx}{dy} = \frac{2}{(1-2x)^2}\frac{1}{1-2x} \,.$$

په ځانګړي ډول د $x = 1, y = 0$ لپاره لاس ته راځي

$$g'(0) = 1, \quad g''(0) = -2 \,.$$

مشتقونه شمېرلوړ دي، بې له دې چې معکوس تابع باید روښنه جوړه شي. دا ټیک هلته شونی دی، چې که سړی د y تابع د په څېر $g'(y)$ و لیکي. په دې بیلګه کې دا شوندی دی، ځکه x د y تابع په څېر لیکل کېدی شي:

$$g_{\pm}(y) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - y} \,.$$

پورته ارزښتونه داسې شمېرل کېدی شي، دکومو سره چې د هغوی د ارزښتجوړې $(1,0)$ اړونده څانګه باید وټاکل شي.

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

لوګاریتمي مشتق یا - رابیلیدنه **Logarithmische Ableitung**

دا فرمول

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

کیدی شي د $g(x) > 0$ سره د $y = g(x)^{h(x)}$ بڼې توابعو مشتقیدو ته وکارول شي. سړی لاس ته راوړي

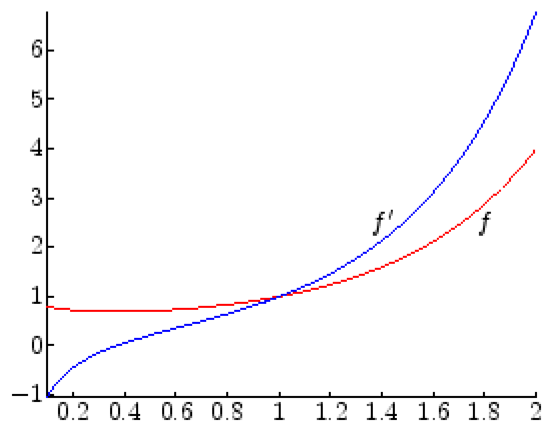
$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx}\big(h(x)\ln g(x)\big) .$$

ليکونکي: اېپ، هيوليک،

د $x > 0$ سره تابع $f(x) = x^x$

لپاره مشتق دی

$$f'(x) = x^x \frac{d}{dx}\ln(x^x) = x^x \frac{d}{dx}(x\ln x) = x^x(\ln x + 1) .$$

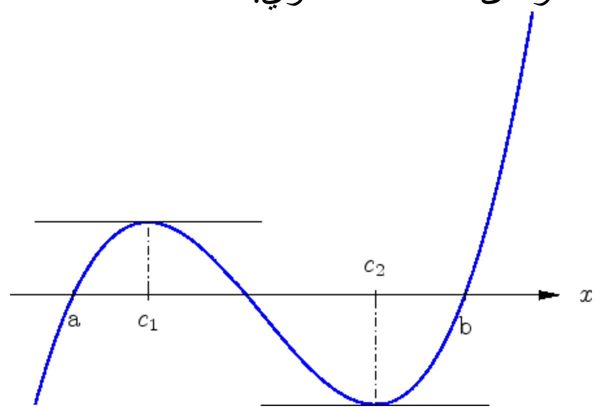


د $x \to 0$ لپاره $\ln f(x) = x \ln x$ د صفر په لور هڅيري، نو x^x د $e^0 = 1$ په لور. نو تابع په صفرځای کې ښي اړخيز ناپرېکېدونکي ده. د مشتق لپاره f دا حالت نه دی. د $x^x \to 1$ او $\ln x + 1 \to -\infty$ له امله د $x \to 0$ لپاره f په صفر يو ولاړ يا عمود تانجنت لري.

ليکونکي: اېپ، هيوليک،

د رولې جمله **Satz von Rolle**

د یوه ناپرېکیدونکي مشتقوړ تابع f مشتق د $f(a)=f(b)=0$ سره لږ تر لږه یو صفرځای $c \in (a,b)$ لري.



تولیز باور لري: که یو تابع په یوه انتوال $[a,b]$ کې n صفرځایونه ولري (د دېږوار والي په شمول)، نو هلته kـم مشتق $\geq n-k$ صفرځایونه لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

دا چې f ناپرېکېدونکی دی، نو د افراطي ارزښت جملې له امله په $[a,b]$ کې ټکي c او d شتون لري دا لاندې باوري کوي

$$f(c) = \min_{x\in[a.b]} f(x)$$

$$f(d) = \max_{x\in[a.b]} f(x) .$$

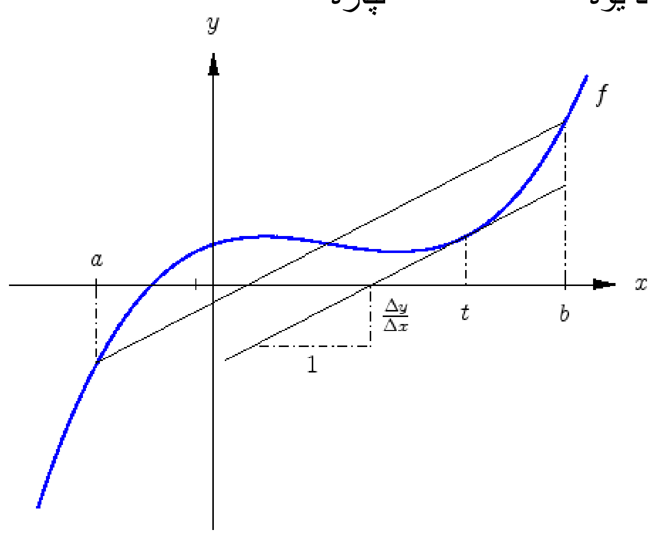
که f ناثابت وي(د ثابت f حالت ساده دی)، نو $f(c) < f(d)$ باور لري. له دې امله لږ ترلږه د دې دواړو ټکو څخه یو یې په (a,b) کې پروت دی . دا چې f مشتقوړ دی باید د دې ځایز یا لوکال افراطیت لپاره مشتق ورک – یا صفر شي.
لیکونکي: اپپ، هیولیک،

منځ ارزښت قضیه **Mittelwertsatz**

د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b-a)$$

د یوه $t \in (a,b)$ لپاره



هندسي دا کتوتوالی په دې معنا دی، چې تانجنت په یوه ټکي کې غبرګ دی د له پای ټکو $(a, f(a))$ او $(b, f(b))$ تېرېدونکي توټه ونې یا وتر سره. داسي هم لیکو

$$\Delta y = f'(t)\Delta x$$

.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د يوې تابع

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

لپاره $g(a) = g(b) = 0$ باور لري. دا چې f ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی، نو g هم ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی او د رولې د جملې پر بنسټ يو $t \in (a,b)$ شتون لري د لاندې سره

$$0 = g'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

همداسې

$$f(b) - f(a) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

تولیزه (شوې) منخ ارزښت جمله **Verallgemeinerter Mittelwertsatz**

که f او g ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع وي، نو $t \in (a,b)$ يو شتون لري د لاندې سره

$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t) .$$

که برسېره پردې په (a,b) باندې $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو سړی کړی شي هم

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

هم وليکي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تابع
$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) - f(b)g(a) + f(a)g(b)$$

لپاره $h(a) = h(b) = 0$ باور لري. دا چې f او g ناپرېکېدونکي مشتقوړ دي،
نو h هم ناپرېکېدونکي مشتقوړ دی او د پورته د رولې د جملې سره سره سم يو $t \in (a,b)$ شتون لري د لاندې سره.

$$0 = h'(t) = (f(b) - f(a))g'(t) - (g(b) - g(a))f'(t)$$

bzw. همداسې
$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t)\,.$$

که (a,b) په باندې $g'(x) \neq 0$ وي. نو د منځ ارزښت جملې سره سم $g(b) - g(a) \neq 0$ هم او سړی لاس ته راوړي.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

لانداو-سيمبول Landau-Symbole

سړی ليکي

$$f(x) = O(g(x)) \qquad (\ x \to a)\ ,$$

که يو ثابت c شتون ولري، دسې چې $|f(x)| \le c|g(x)|$ وي a ته پوره نږدې x لپاره .

د $|f(x)|/|g(x)|$ د 0 په لور هڅيږي، نو سړی په اړونده توګه ليکدود کاروي

$$f(x) = o(g(x))$$

.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د بينوم له جملې څخه لاس ته راځي

$$(1+x)^n = 1 + nx + O(x^2) \quad (x \to 0)$$

په ځېټ – يا معکوس جوړوني د $1-nx$ سره دغزوني وروسته لاس ته راځي

$$\frac{1}{(1+x)^n} = \frac{1}{1+nx+O(x^2)}$$

$$= \frac{1-nx}{1-(nx)^2+O(x^2)} = \frac{1-nx}{1+O(x^2)}$$

$$= 1 - nx + O(x^2)\,.$$

د $x \to \infty$ لپاره دی

$$(1+x)^s = O(x^s)$$

د ټولو $s \in \mathbb{R}$ لپاره.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

ناپرېکیدنه او مشتقوړوالی کیدی شي د لاګرانژ فرمول په مرسته تعریف شي.

یو تابع f په $x = a$ کې ناپرېکېدونکی دی، که وي

$$f(x) - f(a) = o(1) \quad (x \to a).$$

مشفقوړوالی د

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r$$

سره په یوه معنا دی د

$$r = o(h) \quad (|h| \to 0).$$

سره.

د یوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړتابع لپاره د تېلور ـودې څخه هغه تېره

$$r = O(h^2)$$

اټکل لاس ته راځي

لیکونکي:کلاوس، هیولیګ،

د لو، پیتال قاعده یا لار **Regel von l'Hospital**

که دوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع f او g په a کې یوه ګډ صفرځای یا قطبځای ولري، نو باور لري

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

که ښی پوله ارزښت شتون ولري(په ورکړ شوي حالت کې په ناپای کې)

د ټولیزه منځ ارزښت جملې په بنسټ د x او a تر منځ یو t شتون لري د لاندې سره

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

که سړی ، د يوه ناپای پوله ارزښت په موخه، $f'(t)/0$ يعني داسي $\pm\infty$ په معنا کړي.

له دې $x \to a$ سره هم $t \to a$ ځي، نو سملاسي راکوي

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د لو، پيتال د جملې استعمال د يو څو بېلګو لړيو په بنسټ روښانه کيږي

د $0/0$ لپاره:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{3x^2-7x+4} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2}{6x-7} = -1$$

د $-\infty/\infty$ لپاره :

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} -x = 0$$

د ټولو $x \to \infty$ لپاره:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi/2-\arctan x}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = 1$$

دېواره استعمال:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}$$

$$= \qquad \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2\cos(x) - x\sin(x)} = 0$$

په دې بېلګو کې دې پام وي، چې د شمېرلو پوله ارزښت شتون د لوپيتال قاعدې د استعمال پسې د منځته راغلي پوله ارزښت د شتون له لارې تضمين دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

کرښيز اپروکسميشن (ورنږدېوالی) Lineare Approximation

د يوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + R$$

د لاندې پاتې غړي سره

$$R = \frac{1}{2}f''(t)(\Delta x)^2 = O((\Delta x)^2)$$

او د t د x او ترمنځ $x+\Delta x$ سره.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

تابع

$$g(y) := f(y) - f(x) - f'(x)(y-x) -$$

$$-\frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}(y-x)^2$$

د $y = x + \Delta x$ لپاره يو صفرځای لري او د $y = x$ لپاره يو دېل يا دوه واره صفرځای لي. د رولې د جملې په تعقيب يو $y = x + \Delta x$ شتون لري د لاندې سره

$0 = g''(t)$	$= f''(t) - 2\frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}$

همداسې

$f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x$	$= \frac{1}{2}f''(t)(\Delta x)^2 .$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د ناټیکاوي وده **Fehlerfortpflanzung**

د یوه کچ – یا اندازونې ارزښت $\Delta x = \tilde{x} - x$ مطلق ناټیکاوی یا یو

نږدېوالی $x \approx \tilde{x}$ ښایي نو د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره

$$|\Delta y| = |f'(x)||\Delta x| + o(\Delta x)$$

باور لري د $\Delta y = f(\tilde{x}) - f(x)$ سره. په اړونده توګه د نسبي ناټیکاوی لپاره باور لري

$$\frac{|\Delta y|}{|y|} = \left(|f'(x)|\,\frac{|x|}{|y|}\right)\frac{|\Delta x|}{|x|} + o(\Delta x)$$

که $x, y \neq 0$ وي. په نوکانو کې افاده c_r د x په ځای کې د f د کندیشن عدد بلل کیږي.

د ترم $o(\Delta x)$ د پرېښږړلږ یعنې له منځه وړلو له لارې کېدی شي د ناټیکاوي نږدیوالس اټکل شي. د دې سره کېدی شي د ټیک مشتق ارزښت په ځای مناسب بندیزونه هم وکارول شي:

$$|\Delta y| \leq c_a|\Delta x|\,, \quad c_a \geq \max_{|t-x|\leq|\Delta x|} |f'(t)|\,.$$

په ا ړونده توګه $c_r = c_a\frac{|x|}{|y|}$ د نسبي ناټیکاوي لپاره یو بندیز یا لنډ: بند دی

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

یو کونج $\vartheta \in (0,\pi/2)$ کېدی شي د کاټېټونو یا ولاو اړخونو د نسبت څخه په جګېدونکي درېګوډي کې داسې وټاکو :

$$\vartheta = \arctan(y/x)\,.$$

که y د کره ځای په ځای x سره کچ کړو، نو کېدی شي ضریب c_a د مطلق ناټیکاوي لپاره د

$$\left|\frac{d\vartheta}{dy}\right| = \left|\frac{1/x}{1+y^2/x^2}\right| = \left|\frac{x}{x^2+y^2}\right|$$

له لارې اټکل شي. افاده د $y=0$ لپاره ماکسمال کیږي، او سړی لاس ته $c_a = \frac{1}{x}$ راوړي، دا په دې معنا چې

$$|\Delta\vartheta| \le |1/x|\ |\Delta y|\ .$$

لویې ناټیکیاوی د کوچني x لپاره غزیږي. په ورته توګه د نسبي ناټیکاوي د قوی کېدني فکتور لپاره هم باور لري

$$c_r = \max_y \left|\frac{x}{x^2+y^2}\frac{y}{\vartheta}\right|\ .$$

که دا لاندې تخمین وکارول شي

$$|\vartheta| \ge |\sin\vartheta| = \left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\,,$$

،

نو لاس ته راځي

$$c_r \leq \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1\,.$$

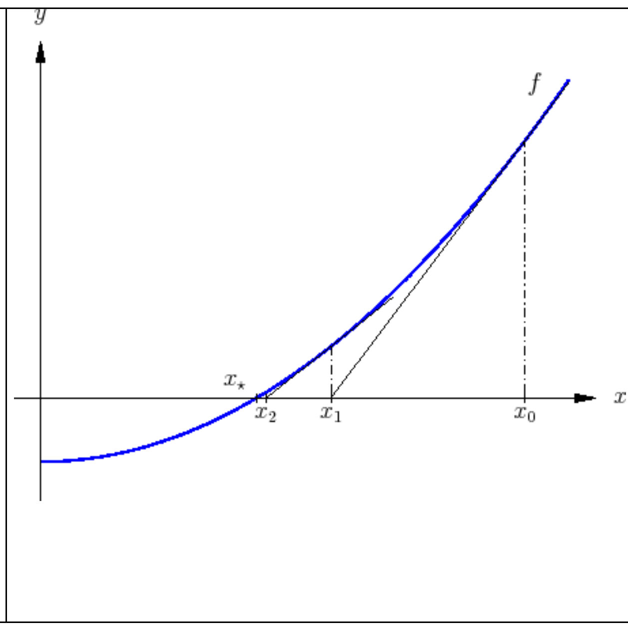
نو نږدېوالي ډول باور لري

$$\frac{|\Delta\vartheta|}{|\vartheta|} \leq \frac{|\Delta y|}{|y|}\,,$$

دا په دې معنا چې نسبي فکتور نه غښتلی کیږي

لیکونکي: کلاوس، هیولیک،

د نیوټن تلنلار یا - قانو **Newton-Verfahren**

د نیتن تلنلار سره کېدی شي د یوه تابع f صفرځای x_* نومریک وټاکل شي. د نږدېوني یا اپروکسمیشن پرلپسي $x_0, x_1 \ \ldots$ د کرښیزوالي څخه کټل کیږي. نږدېوالی $x_{\ell+1}$ د x -محور سره د تانجنت غوښتکی دی په تکی $(x_\ell, f(x_\ell))$ کې : $x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$	

د یوه ساده صفرځای x_* ($f'(x_*) \neq 0$) لپاره د نیوټن – ایتریشن لوکال مربع پولي ته ځي، دا په دې معناچې

$$|x_{\ell+1} - x_*| \le c \ |x_\ell - x_*|^2$$

د پيلټکي x_0 لپاره د x_* په يوه پوره کوچني چاپريال کې.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

د تيلور -نږدې ارزت Taylor-Approximation له لارې سږی

$$0 = f(x_*) = f(x_\ell) + f'(x_\ell)(x_* - x_\ell) + r$$

لاس ته راوړي د پاتې غړي

$$r = \frac{1}{2} f''(t_\ell)(x_* - x_\ell)^2 \,,$$

سره د يوه t_ℓ لپاره چې د x_* او x_ℓ ت رمنځ پرته ده. که د انترپوليشن قاعده کې
کيږدو

$$f(x_\ell) = f'(x_\ell)(x_\ell - x_*) - r$$

،

نو لالاس ته راځي

$$x_{\ell+1} = x_* - r/f'(x_\ell) \,.$$

د $f'(x_\ell) \neq 0$ لپاره لرو

$$|x_{\ell+1} - x_*| = c_\ell |x_\ell - x_*|^2, \quad c_\ell = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(t_\ell)}{f'(x_\ell)} \right| \,.$$

که $f'(x_*) \neq 0$ باور ولري، نو c_ℓ د ناپریکیدنبأه امله د x_ℓ لپاره په یوه د x_* چاپیریال $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ کې مخدود دی:

$c_\ell \leq c$.

له ې سره د مربع یا څلوریز پولې ته تک لاس ته راځي.

لیکونکي: ایپ، هیولیک،

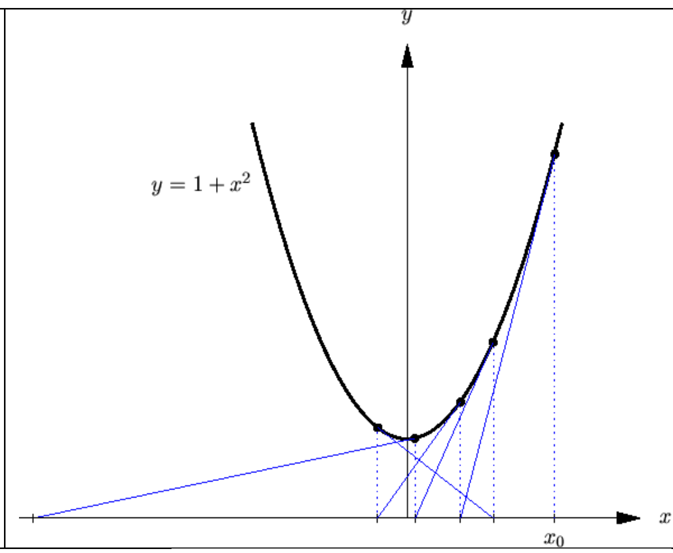
که په لاندې مساوات د نیټن قانون وکاروو

$$f(x) = x^2 + 1 = 0$$

،

نو اتریشن(پل په پل اصلي حل ته وردرېدې کېدنه) لاس ته راځي

$$x_{l+1} = \frac{1}{2}\left(x_l - \frac{1}{x_l}\right) .$$

f په پام کې د ې وي. چې حقیقي حل نه لري، نیوټن تلنلار یا قانون په حقیقي پیل ارزښت x_0 سره پولې ته نه شي تللی. (x_l) په رښتیا کې پرلپسي یو ګډوډ حالت غوره کوي. د کټمتوالي په مرسته	

$$\cot(2\phi) = \frac{1}{2}\left(\cot\phi - \frac{1}{\cot\phi}\right)$$

پرلپسي (x_ℓ) کېدی شي اکسپلیځیټ ورکړل شي:

$$x_0 = \cot\phi \implies x_\ell = \cot(2^\ell\phi).$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

ها له بابليانو څخه کارول شوی ايترېشن يا پل پل مخ ته تلنه يا تکرار
$$x \longleftarrow (x + a/x)/2$$

د يوه حقيقی عدد a د رينښي شمېرلو ته په ټيکه مطالعه د $f(x) = x^2 - a$ لپاره د نيوتن تلنلار په حيث ځان ښايي:

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

د $a = 2, x_0 = 1$ لپاره نږدې شمېرنه يا اپروکسيمېشن لاس ته راوړو.

<u>1</u>

<u>1</u>.5

<u>1.41</u>66666666666666666666666666666667

<u>1.41421</u>5686274509803921568627450980392157

<u>1.41421356237</u>4689910626295578890134910117

<u>1.414213562373095048801689</u>623502530243615

<u>1.414213562373095048801688724209698078570</u>

کونورګنځ فوق العاده ګړندی دی. د هر پل سره د د ټيکو ځايونو(ترې لاندې کرښه تېره ده) تعداد په نږدې توګه دوه واره کيږي. په دې ښېلګه کې مربع پولې ته تلنه کېدی شي د ساده ښې بدلون له لارې هم وښوول شي:

$$x_{\ell+1} - \sqrt{a} = (x_\ell + a/x_\ell)/2 - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_\ell}(x_\ell - \sqrt{a})^2.$$

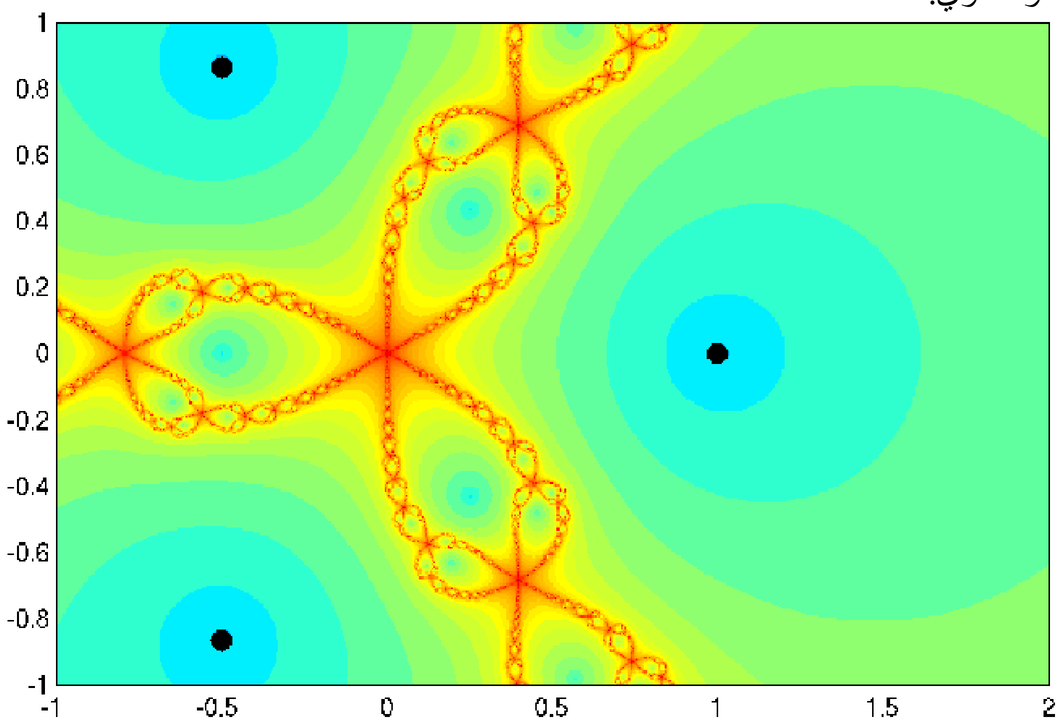
د نيټن-تلنلار د هندسي روښانه ونې څخه لرو، چې په نږدې توګه شمېرنه د $x_0 \neq 0$ لپاره پولې ته تلونکې ده.

ليکونکي: اېپ، هيوليک،

لاندې څېره د لاندې مساوات لپاره د کمپلکس نيوټن-اېټرشن پولي ته تلنه ښايي

$$z^3 - 1 = 0$$

د حلونو $z = \exp(2\pi i k/3)$ سره. مختلف رنګونه د پولي ته تلني ورشو ګاني ښايي د همغه يا اړونده صفرځاى لپاره. تياره رنګه شوط ځايونه ګړندى پولي ته تلنه په ګوته کوي.



سرى د پولي ته تلني ورشو په روښانه توګه fraktal مات خوي پيژني

د تيلور پولينوم**Taylor-Polynom**

د تيلور پولينوم Das Taylor-Polynom

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

د یوه تابع f انترپولیری (ارزښت چې د دوه ټکو ترمنځ پروت وي) مشتق په ټکي a

$$p_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)\,,\ k=0,\dots,n$$

تر ت نظم n پورې، دا په دې معنا چې .

که f یو $(n+1)$-واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ وي، نو باور لري

$$f(x) = p_n(x) + R, \quad R = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

د یوه t لپاره چې د a او x ترمنځ وي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

سیده پسې شمیرنه د f او p_n مشتق یو بل سره توافق یا یوغرېزوالی ښايي. د پاتې غړي R د پوره کیدو یا تکمیل ته سړی د تیلور پولینوم په یوه بل ترم غزوي:

$$q(y) = p_n(y) + c(y-a)^{n+1}\,.$$

ثابته داسې ټاکل شوې، چې $q(x)=f(x)$ وي. پسې $q-f$ یو صفرځای لري د $n+1$ د ډېروالي سره په $y=a$ کې او یو بل صفرځای په $y=x$ کې، په ټولیزه نو $n+2$ صفرځایونه . درولې جملې پسې باید $(n+1)$-م مشتق باید لږ تر لږه یو صفرځای t ولري:

$$0 = q^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(t) = c(n+1)! - f^{(n+1)}(t)\,.$$

له

$$R = f(x) - p_n(x) = q(x) - p_n(x) = c(x-a)^{n+1}$$

څخه د پاتې غړي غوښتونې بڼه راکوي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د ساين تابع $f(x) = \sin x$ مشتقونه دي

$$f' = \cos x, \quad f'' = -\sin x, \quad f''' = -\cos x, \quad f^4 = f = \sin x, \ldots .$$

د ارزښتونو

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^4(0) = f = 0, \ldots .$$

سره لومړي د تيلور پولينومونه د ساين تابع دي.

$$p_1(x) = x$$

$$p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$p_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$p_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

په ورته توګه د کوساين تابع لپاره هم باور لري

$$p_0(x) = 1$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$p_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}.$$

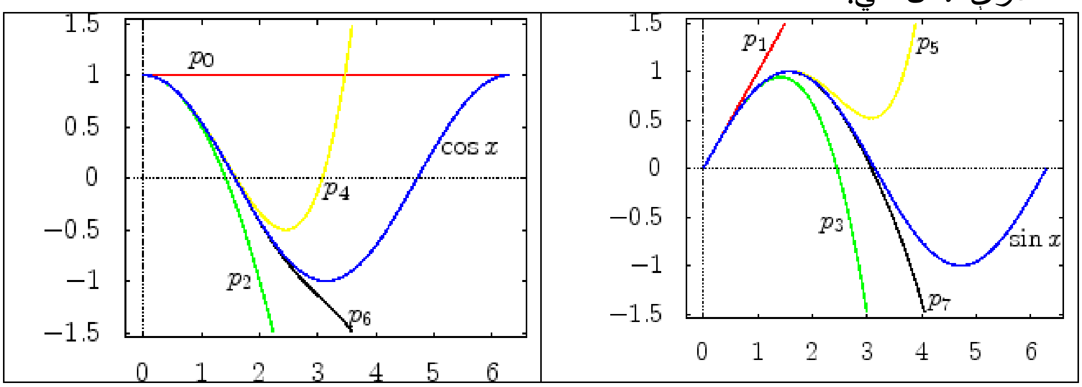
نږدې شمېرنه یا اپروکسیمېشن د ډېر کوچني x لپاره خورا دقیق دی. د بېلګې په توګه کېدی شي د نږدېوني ناټیکاوی

$$\sin 0.1 \approx p_4(0.1) = 0.09983\ldots$$

د

$$|R| = \frac{|\cos t|}{5\,!}\,0.1^5 \leq \frac{1}{12000000} \leq 10^{-7}$$

له لارې اټکل شي.



لکه د خبرې خخه چې لیدل کېږي، نږدې شمېرنه د لوی x لپاره لومړی د ځګو درجو سره پوره ټیک یا دقیق وي. په جدول کې د څو د x - ارزښت لپاره ناټیکاوي ورکړل شوي دي.

x	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$
$p_1(x)$	3.1416	0.5708	0.1812	0.0783	0.0405	0.0236
$p_3(x)$	2.0261	0.0752	0.0102	0.0025	0.0008	0.0003
$p_5(x)$	0.5240	0.0045	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
$p_7(x)$	0.0752	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

$p_0(x)$	2.0000	1.0000	0.5000	0.2929	0.1910	0.1340
$p_2(x)$	2.9348	0.2337	0.0483	0.0155	0.0064	0.0031
$p_4(x)$	1.1239	0.0200	0.0018	0.0003	0.0001	0.0000
$p_6(x)$	0.2114	0.0009	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

حقيقي د تيلور لړۍ **Reelle Taylor-Reihe**

په يوه ټکي x_0 کې د يوه ناپای ډېرواره مشتقوړ تابع f د تيلور لړۍ د يوې په توان لړۍ يوه وده ده:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{n!} \, f^{(n)}(x_0) \,.$$

د $x \in \mathbb{R}$ لپاره لړۍ او همداسې ټول مشتقونه په يوه انټروال $(x_0 - r, x_0 + r)$ کې مطلق پولې ته تلونکي دي او د $|x - x_0| > r$ لپاره پولې ته نه تلونکي دي. د $|x - x_0| = r$ لپاره بې له نورو څېړنو د لړېی پولې ته تلنې په هکله ويناوې ناشونې دي.

د ودې ټکي د واټن لپاره بند(بنديز) r د پولې ته تلنې يا کونورګنت –وړانګې په نامه يادېږي او د فرمول

$$r = \left(\varlimsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

سره شمېرل کيږي. له دې سره ارزښتونه $r=0$ او $r=\infty$ شوني دي. په دې حالت کې د کونورګنت انتروال يا تش دی او يا ټول $\mathbb{R}$ دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د ريښي قضيې په بنسټ دی

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right|} = \frac{1}{r}\,|x-a|\,.$$

په توګه د $|x-a|<r$ لپاره د تېلرو-اړۍ يوې ته ځي او د $|x-a|>r$ لپاره پولې ته نه ځي. د $|x-a|=r$ لپاره نوري څېړنې اړييني دي يا نورو څېړنو ته اړتيا ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

تابع

$$f(x)=\begin{cases}\exp(-1/x^2), & \text{für } x\neq 0\\ 0, & \text{für } x=0\end{cases}$$

په 0کې برابرډوله ناپرېکېدونکې ده. دا پسې دپوره ايندکشن له لارې ښوول کېدی شي، چې ټول مشتقونه د

$$f^{(n)}(x)=\frac{p_n(1/x)}{\exp((1/x)^2)}$$

بڼې دي، د يوه مناسب پولينوم p_n سره. دا چې د $x\to 0$ (همداسې د $1/|x|\to\infty$) لپاره اکسپوننشل تابع نسبت يوه پولينوم ته په قوت يا قوي جګيږي، نو ټول پولينومونه په $x=0$ ځای کې ارزښت 0لري. اړونده تيلور-لړۍ نو له دې امله صفر لړۍ ده

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0x^k .$$

داچې د $f(x) \neq 0$ $x \neq 0$ لپاره f دی، نو د تيلور-لړۍ د سره فقط د $x = 0$ لپاره يو بل سره برابر يا يو غږيز دي، دا په دې معنا چې د پولې ته تلنې وړانګه r 0 ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

اکسپوننشل تابع

$$f(x) = \exp(x)$$

لاندې مشتق لري

$$f^{(n)}(x) = \exp(x) .$$

که د $x = 0$ په ځای کې وارزول شي ، ترې لاس ته راځي

$$f^{(n)}(0) = 1 .$$

د دې په تعقيب د اکسپوننشل تابع د تيلور-لړۍ لاندې بڼه لري

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} .$$

دا چې

$$\lim_{k\to\infty} 1/\sqrt[k]{k!} = 0 ,$$

نو $r = \infty$ دی، دا په دې معنا چې د تيلورر-لړۍ په ټول $\mathbb{R}$ پولې ته ځي يا کونورګنت ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د بيلګې لپاره تابع

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

په $a = 4$ وديز کيږي.

ددې لپاره لومړی مشتقونه جوړيږي:

$f'(x)$	=	$-\frac{1}{2}\, x^{-3/2}$
$f''(x)$	=	$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\, x^{-5/2}$
.	.	.
.	.	.
.	.	
$f^{n}(x)$	=	$(-1)^n\, 2^{-n} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot x^{-\frac{2n+1}{2}}\, .$

په وديزېنې ټکي د قيمت اېښووونې يا -وضع کونې سره سړی د تيلور-ضريبوننه لاس ته راوړي

$$c_n = \frac{f^{(n)}(4)}{n!} = (-1)^n\, \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}\, 2^{-2n-1}\, .$$

د لړۍ لومړي درې ترمونه دي

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\,(x-4) + \frac{3}{128}\,(x-4)^2 + \cdots\, .$$

د دې لپاره چې د ضريبونو وړانګه r وټاکو، په پام کې نيسو

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{2n}\,2^{-2n} \leq c_n \leq \frac{1}{2}\,2^{-2n}\, .$$

له دې سره دی

$$\frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/(4n)} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{c_n} \leq \frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/2}\, .$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

دا چي دی لاس ته

$$r = \frac{1}{(1/4)} = 4$$

راځي .

ليکونکي: اپپ، هيوليگ،

د اويلر فرمول

$$\exp(\mathrm{i}t) = \cos t + \mathrm{i}\sin t$$

کيدی شي د تيلور-وديزيېنې په مرسته

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \dots$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \dots$$

د کوساين - او ساين توابع منځ ته راوړل شي. له

$$-\frac{t^2}{2} = \frac{(\mathrm{i}t)^2}{2}, \quad -\frac{t^3}{6} = \frac{\mathrm{i}^2 t^3}{3!}, \quad +\frac{t^4}{24} = \frac{(\mathrm{i}t)^4}{4!}, \quad +\frac{t^5}{120} = \frac{\mathrm{i}^4 t^5}{5!}, \dots$$

څخه لاس ته راځي

$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^2 k}{(2k)!}$$

$$\mathrm{i}\sin t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

او د زياتون يا جمعې له لارې د تيلور –وديزيېنې له لارې د اويلر فرمول لاس ته راوړو

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{i}t) &= 1 + \mathrm{i}t - \frac{t^2}{2!} - \mathrm{i}\frac{t^3}{3!} \cdots \\ &= 1 - \frac{t^2}{2!} \pm \cdots + \mathrm{i}(t - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots) \\ &= \cos t + \mathrm{i} \sin t\,.\end{aligned}$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د لوګاريتم تابع

$$f(x) = \ln x$$

لاندې مشتق لري

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}\,.$$

په دې پسې مرربعيز د تيلور –پولينوم په ټکي $a = 1$ کې دی

$$p(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2\,.$$

باقی – يا پاتې غړی دابنه لري

$$\begin{aligned}r(x) = f(x) - p(x) &= \frac{1}{3!}\, f'''(\xi)\,(x-1)^3 \\ &= \frac{1}{3\,\xi^3}(x-1)^3\end{aligned}$$

د ξ سره، چې د x او 1 ترمنځ پروت دی. ناټيکاوی د ممکن کوچني ξ لپاره خورا غټ دی. سړی اټکل لاس ته راوړي

$$|r(x)| \leq \frac{1}{3}\left|\frac{x-1}{\min(1,x)}\right|^3\,.$$

د $x \in [0.75, 1.25]$ لپاره ناتیکاوی دی

$$\leq \frac{1}{3}\left|\frac{1/4}{3/4}\right|^3 = \frac{1}{81}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ،

بینومیال لړی Binomialreihe

تابع

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

د $\alpha \in \mathbb{R}$ سره یوه تیلور-لړی لري

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

د $|x| < 1$ لپاره ، د کوم سره چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

تولیز شوی بینوم ضریب دی

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

دا ترلي لاس ته راځي، چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,.$$

لړی

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

د وېش قضيي

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k}x^k}\right|=|x|\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right|=|x|<1\,.$$

له مخې پولې ته ځي
ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

د تيلور ــلړی مشتق او انتيګرال
Differentiation und Integration von Taylor-Reihen

د يوې د تيلور- لړی

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k\,,\quad c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,,$$

کېدی شي غړي ډوله يا يې غړي په غړي مشتق او انتيګرال ونيول شي:

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}(x-a)^k$$

$$\int f(x)dx=c+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k-1}}{k}(x-a)^k\,.$$

په دواړو عمليو کې د پولې ته تلنې وړانګه بې تغيره پاتېږي.

ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

د بينوملړۍ

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + \cdots,$$

 څخه د $t = -x^2$ او $\alpha = -1/2$ سره لاس ته راځي

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} x^{2k}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \cdots.$$

د انتيګرال له لارې او همداسې د

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arcsin(0) = 0$$

په پام کې نيولو سره د غړي په غړي انتيګرال له لارې داوده لاس ته راځي

$$\arcs\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د انتيګرا

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

نږدې ډوله شميرنه د تيلور-اکسپوننشل تابع باندې لاس ته راولي

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} \,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)} \,.$$

$\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$

د نومريکي نږدېوني پخ حيث د لپاره لاندې ارزښتونه لاس ته راځي

k=0: 1
k=1: 0.66666666666667
k=2: 0.76666666666667
k=3: 0.74285714285714
k=4: 0.74748677248677
k=5: 0.74672919672920
k=6: 0.74683603433603
k=7: 0.74682280682281
k=8: 0.74682426573971
k=9: 0.74682412070118
(Autoren: App/Höllig)

د تيلور-لړۍ ضرب **Multiplikation von Taylor-Reihen**

د تيلور – لړۍ کېدی شي غړي په غړي سره ضرب شي:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_n (x-a)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k\right) = \sum_{k=9}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

د لاندې سره

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} f_{k-j} b_j \ .$$

د ضرب د کونورګنت وړانګه د دواړو ضریبونو د پولې ته تلنې وړانګې د مینیموم سره برابره ده.

لیکونکي: ، هیولیک، کرایخ

د لاندې تابع د تیلور – لړۍ شمیرنې ته

Zur Berechnung der Taylor-Reihe der Funktion

$$f(t) = e^{-t}\cos(\omega t)$$

سړی کړی شي د اکسپوننشل تابع د تیلور – لړۍ او د کوساین –تابع وکاروي

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots$$

$$\cos = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} \pm \cdots .$$

د ضرب څخه د لومړي ترم لپاره لاس ته راځي

$$e^{-t}\cos(\omega t) = 1 - t + \frac{1-\omega^2}{2!}t^2 + \left(\frac{\omega^2}{2!} - \frac{1}{3!}\right)t^3 + \cdots .$$

$$e^{-t}\cos(\omega t) = \operatorname{Re}\left(e^{(\mathrm{i}\omega - 1)t}\right)$$

بدیلي کېدی شي هم و کارول شي:

$$e^{-t}\cos(\omega t) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^k t^k}{k!}\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(1 + (\mathrm{i}\omega - 1)t + \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^2}{2!}t^2 + \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^3}{3!}t^3 \cdots\right)$$

$$= 1 - t + \frac{1 - \omega^2}{2!}t^2 + \frac{3\omega^2 - 1}{3!}t^3 + \cdots .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تيلور-لړۍ وېش **Division von Taylor-Reihen**

د دوه تيلور – لړيو وېش

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x-a)^k \,/\, \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x-a)^k, \qquad g_0 \neq 0,$$

د ضريبونو پرتلې له لارې کېدی شي له کټوټوالي

$$(q_0 + q_1 u + \ldots)(g_0 + g_1 u + \ldots) = f_0 + f_1 u + \ldots\ , \quad u = x - a\,,$$

څخه وټاکل شي:

$$\begin{aligned} q_0 g_0 &= f_0 &\longrightarrow\quad& q_0 \\ q_1 g_0 + q_0 g_1 &= f_1 &\longrightarrow\quad& q_1 \\ &&& \vdots \\ q_n = (f_n - q_{n-1}g_1 - \ldots - q_0 g_n)/g_0 &&\longrightarrow\quad& q_n\,. \end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ، اپريبن

د $q(x) = \tan x$ تر 5نظم پورې وديزونې لپاره ړدو:

$$(q_1x + q_3x^3 + q_5x^5 + \dots)\underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots\right)}_{\cos x} = \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots}_{\sin x}.$$

له دې سره همدا اوس وکارول شو، چې تانجنت $\tan x$ ناجوړه(طاق) دی، دا په دې معنا چې $q_0 = q_2 = \dots = 0$.
د ضريبونوو له پرتلې څخه لرو:

$$\begin{aligned}
q_1x &= & x &\longrightarrow & q_1 &= 1,\\
\left(-\frac{q_1}{2} + q_3\right)x^3 &= & -\frac{1}{6}x^3 &\longrightarrow & q_3 &= \frac{1}{3},\\
\left(\frac{q_1}{24} - \frac{q_3}{2} + q_5\right)x^5 &= & \frac{1}{120}x^5 &\longrightarrow & q_5 &= \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ، اپريښ

د راشنل توابعو تيلور-وديزېنه

Taylor-Entwicklung rationaler Funktionen

د يوه راشنل تابع $r(z)$ د تيلور –وديزيېنه په ټکي $z = a$ کې کېدی شي د کمپلکس پارشل جمعې په مرسته وټاکل شي، دا په دې معناچې r د يوه پولينوم او د بنسټ تابع

$$\frac{1}{(u-z)^j} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j-1} \frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+j}}.$$

جمعه ده.

د يوګونو زياتونونو(د جمعي اعضاوې) د کونورګنت وړانګې د وديزېنې ټکي د قطب نقطو د واټن $|u-a|$ سره برابره ده
ليکونکي: کلاوس هيوليګ

وديزېنه يا وده د بينوم لړۍ يو ځانګړی حالت دی:

$$\frac{1}{(u-z)^j} = \frac{1}{((u-a)-(z-a))^j} = (u-a)^{-j}(1+x)^{-j},$$

$$, \quad x = -\frac{z-a}{u-a}.$$

بديلي کېدی شي په ټکي $z=a$ کې مشتق وشمېرل شي او د n-م د تيلور ضريبونو لپاره لاس ته راوړو

$$\frac{j\cdot(j+1)\cdots(j+n-1)}{n!} = \binom{n+j-1}{n}(u-a)^{-j-n}.$$

د

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n+j-1}{j-1}^{1/n} = 1$$

له امله د کونورګنت يا پولې ته تلنې وړانګه $|u-a|$ ده .
ليکونکي: کلاوس هيوليګ

د ښووني لپاره د

$$r(z) = \frac{1}{z^2-z} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z}$$

وده په $a=3$ وتاکل شي. د لومړي ترم لپاره د توليز فرمول څخه د $u=0$ او $j=1$ سره لاندې د تيلور n-م ضريب لاس ته راوړي

$$\binom{n}{0}(-3)^{-(n+1)},$$

دا په دې معنا چې

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-3))^n, \quad |z-3| < 3\,.$$

دا ترې لاس ته راغلې هندسي لړۍ کېدی شي سیده هم لاس ته اروړل شي. دا د دویم ترم په بنسټ ښوول کیږی. سړی لیکي

$$-\frac{1}{1-3-(z-3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(z-3)/(-2)}$$

او لاس ته راوړي

$$-\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-2))^n, \quad |z-3| < 2\,.$$

د دواړو لړیو زیاتون یا جمعه دا وده راکوي

$$\frac{1}{z^2-z} = \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)(z-3) + O((z-3)^2)\,.$$

لیکونکي: کلاوس هیولیک

د یوې تیلور – لړۍ معکوس ارزښت تکرار شمیرنه
Iterative Berechnung des Kehrwerts einer Taylor-Reihe

که $g(0) \neq 0$ وي، نو کېدی شي د ایترېشن له لارې

$$f \;\longleftarrow\; 2f - gf^2$$

له $f(x) = 1/g(0)$ څخه په وتو د معکوس ارزښت $f = 1/g$ وده وشمېرل شي.
د لته په هر پل کې د ټیکو ترمونو تعداد یا ګڼ،ن دوه برابره کیږي.

دا متود د نیوتن تلنلار د $\frac{1}{f} - g = 0$ د یوه حل f ټاکل په ګوته کوي

لیکونکي: کلاوس هیولیک، اپیریش

د پولې ته تلنې وینا کیدی شي د کټوټوالي

$$f_{\mathrm{neu}} - \frac{1}{g} = -g\left(f_{\mathrm{alt}} - \frac{1}{g}\right)^2$$

حخه ولوستل شي، ځکه چې له $f_{\mathrm{alt}} - 1/g = O(x^n)$ لاس ته

$$f_{\mathrm{neu}} - 1/g = O(x^{2n})$$

راځي .

لیکونکي: کلاوس هیولیک، اپیریش

د

$$f(x) = 1/g(x) = 1/\cos x$$

تیلور ودیزیبنه کېدی شي لکه چې په تعقیب یې پل په پل وشمېرل شي. له

$$g = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)\,, \quad f_0 = 1$$

څخه په وته لاس ته راځي

$$f_1 = 2\cdot 1 - g\cdot 1^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$$

$$f_2 = 2(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4) - g\,(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4)^2 + O(x^6)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6)\,.$$

سملاسې له دوه پلونو (قدمونو) وروسته لومړي شپږ ترمونه ټیک دي.

د $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots$ سره له ضرب پسې د تانجنت لړۍ راکوي

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \ldots$$

ليکونکي: کلاوس هيوليک، اپيريښ

د معکوس تابع د تيولور وديزيينه
Taylor-Entwicklung der Umkehrfunktion

د يوه تابع f د معکوس تابع $g(x)$ د تيلور ضريبونه د $f'(a) \neq 0$ سره په ټکي $b = f(a)$ کې کېدی شي د $g(f(x)) = x$ له مشفونې و ټاکل شي :

$$g(b) = a$$

$$g'(b)\, f'(a) = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(b)$$

$$g''(b)\, f'(a)^2 + g'(b)\, f''(a) = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(b)$$

$$\vdots$$

دا منځ ته راغلي مساوات کېدی شي تل پسېsukzessive د مشتقونو $g'(b),\, g''(b), \ldots$ پسې وشمېرل شي.

ليکونکي: کلاوس هيوليک، اپيريښ

د $f(x) = \sin x$, $g(x) = \arcsin x$ او $a = 0$ لپاره لرو

$$g(0) = 0$$

$$g'(0)\cos 0 = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(0) = 1$$

$$g''(0)\cos^2 0 - g'(0)\sin 0 = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(0) = 0$$

$$'(0)\cos^3 0 - g''(0)(-\sin 0) + g''(0)\cos 0(-\sin 0) + g'(0)(-\cos 0) = 0 \quad \longrightarrow \quad g'''(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$\arcsin x = x + \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

دا په دې معنا چې . که په پام کې ونیول شي، جې د یوه ناجوړه یا طاق تابع په څېر – یا معکوس تابع ناجوړه ده، نو سملاسي یې ودیزیېنه تر پنځم ترم پورې ټیک ده.

لیکونکي: کلاوس هیولیګ، اپیریښ

د تیلور ځانګړې لړۍ Spezielle Taylor-Reihen

$$(1 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots \quad -1 < x \leq 1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{t} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}B_{2k}x^{2k-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{ar} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots \quad |x| < 1$$

$$\mathrm{arcc} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots\right) \quad |x| < 1$$

$$\mathrm{arctar} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots \quad |x| < 1$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د پاد نږدې ارزښت شميرنه **Pade-Approximation**

د يوه تابع $f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots$ د (m,n) - پاد-نږدې ارزښت شمېرنه يو راشنل تابع دی د صورت – يا ماتباندې درجې m او مخرج يا ماتلاني درجې n سره، چې د f سره د $z \to 0$ لپاره تر ځګو درجو ترمونو همغږيز کيږي يا سره برابريږي:

$$\frac{p(z)}{q(z)} - f(z) = O(z^{m+n+1})\,.$$

پولينومونه $p(z) = a_0 + \cdots + a_m z^m$ او $q(z) = b_0 + \cdots + b_n z^n$ کېدی شي د ضريبونو د پرتلې له لارې وټاکل شي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د q سره د ضرب وروسته لاس ته راوړو

$$(a_0 + a_1 z + \cdots) - (c_0 + c_1 z + \cdots)(b_0 + b_1 z + \cdots) = c z^{m+n+1} + \cdots\,,$$

او لاس ته راځي، چې د $k \le m+n$, z^k ضريبونه بايد ورک شي:

$$k=0: \quad a_0 - c_0 b_0 = 0$$
$$k=1: \quad a_1 - c_0 b_1 - c_1 b_0 = 0$$
$$\dots .$$

دا کښته – يا لامدې ټاکل شوی هوموجېن کربښيز مساوات سيستم ($m+n+1$ مساوات د $m+n+2$ متحولو يا ناټاکلو سره) راکوي، چې تل حل لري.
دا چې f په صفر کې قطب نه لري، راکوي $b_0 = 0$ ، چې $a_0 = 0$ راکوي. له دې امله کېدی شي د ممکنه لنډونو وروسته د q لومړي له صفر توبېرېدونکي ضريبونه د 1 سره برابر اېښول کېښولی شي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د اکسپوننشل توابعو لپاره د (m,n) -پاد-نږدې ارزښت شمېرنې ته مساوات سيستم په لاندې ډول دی.

$$0 = a_0 - b_0$$

$$0 = a_1 - b_1 - b_0$$

$$\dots$$

$$0 = a_m - b_m - \dots - \frac{1}{m!} b_0$$

$$0 = b_{m+1} - \dots - \frac{1}{(m+1)!} b_0$$

$$\dots$$

$$0 = \frac{1}{m!} b_n - \dots - \frac{1}{(m+n)!} b_0 .$$

د حل لپاره د بیلګي په توګه لاس ته راوړی شو

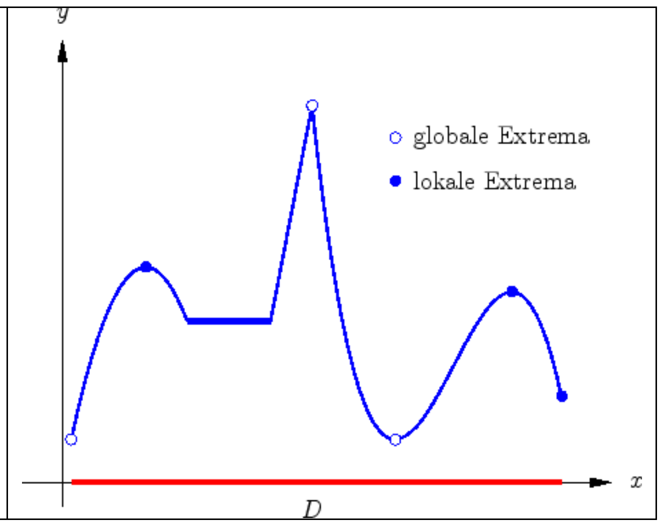
$$r_{1,1}(x) = \frac{1+x/2}{1-x/2}, \quad r_{2,2}(x) = \frac{1+x/2+x^2/12}{1-x/2+x^2/12}.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

اکستریما(افراطیت) **Extrema**

تابع f په a کې په یوه ډېرۍ(سټ) D یو تولیز یا ګلوبال مینیموم لري، که وي
$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in D.$

په یوه ځاییز – یا لوکال مینیموم $f(a)$ کې د تابع ارزښت فقط په یوه کوچني]اپیریال $(a-\delta, a+\delta)\cap D$ کې مینیمال دی.
ګلوبال او لوکال مینیموم سره ورته تعریف دي.



په یوه رابند انتروال د یوه ټوټه ډوله ناپرېکېدونکی او مشتقوړ تابع لپاره کېدی شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتقونو په صفرځایونو ، پرېکېدونکي ځایونو او یا په ژۍ ځایونو کې رامنځ ته شي. تیوپ یا ډول یې کېدی شي د ځګو مشتقونو په مرسته او د تابع ارزښتونو د پرتلې له لارې پیداشي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر
د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع لپاره د لوکال مینیموم سره د تعریفورشو په دننني ټکي a کې د مشتق لپاره لرو

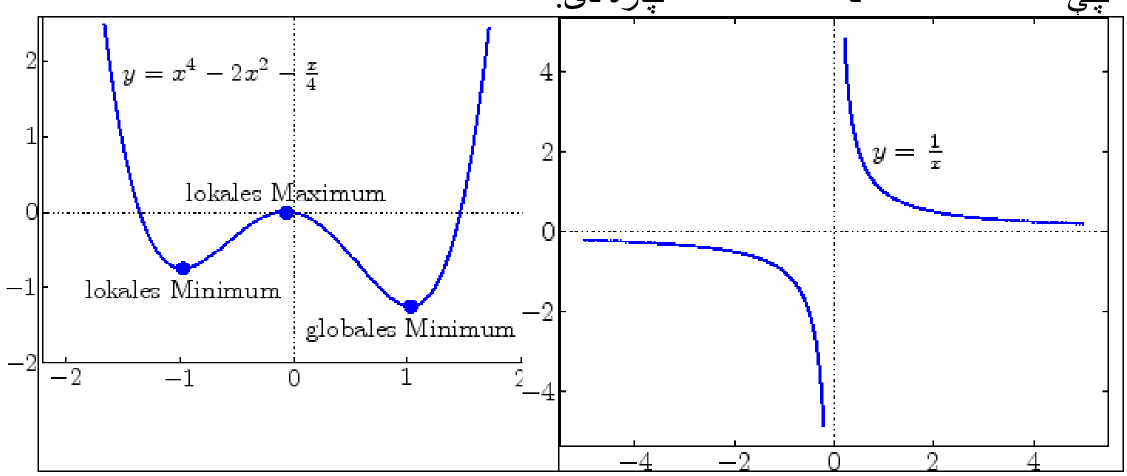
$$f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \geq 0}} \overbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}^{\geq 0} \geq 0$$

او

$$f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \leq 0}} \overbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}^{\geq 0} \leq 0$$

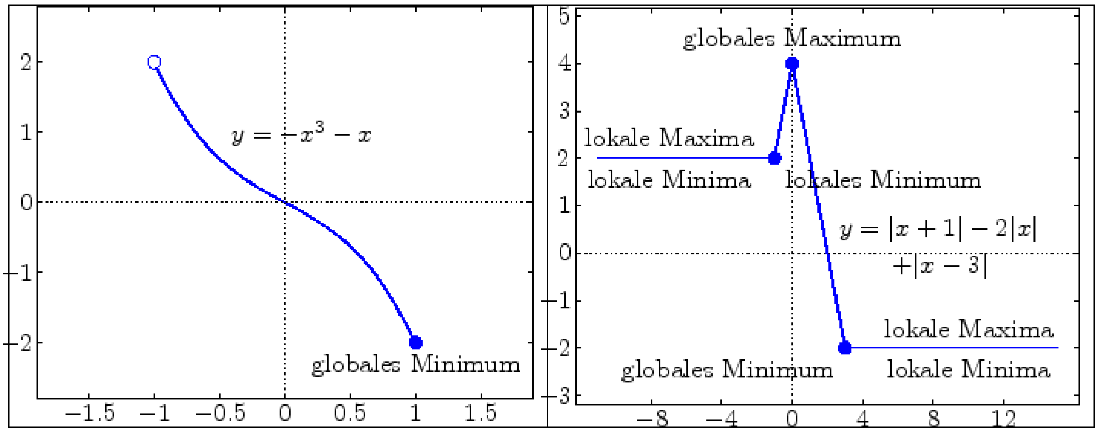
نو $f'(a) = 0$. يعني د تعريف ورشو په دننه کې په يوه لوکال افراطيت کې بايد مشتق صفر وي يا f هلته مشتقوړ نه وي.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

په لاندې کې به يو څو تيپيکي حالتونه وڅيړل شي.
تابع $f(x) = x^4 - 2x^2 - x/4$ د $D = \mathbb{R}$ سره دوه مينيما اويو متکسيما لري.
مينيموم د کوچني تابع ارزښت سره ګلوبال دی. يو ګلوبال ماکسيموم شتون نه لي ، ځکه چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره دی.



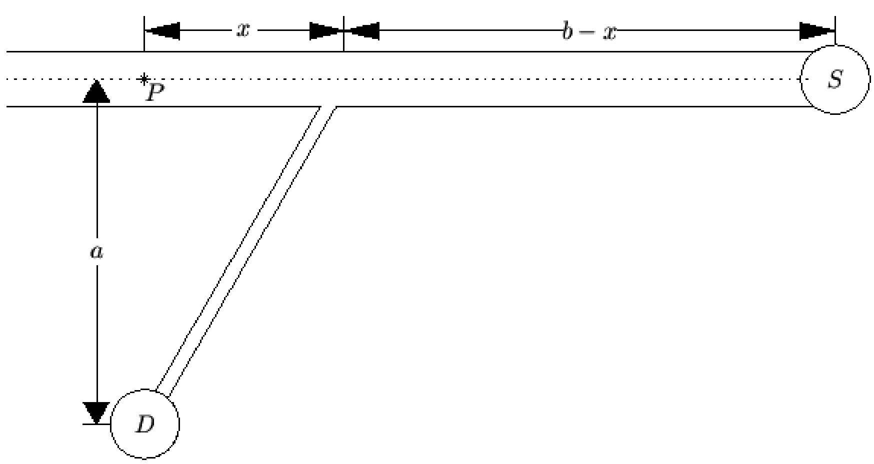
تابع $f(x) = 1/x$ د $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ سره اکستيمم يا افراطي ارزښتونه نه لري.که يو تابع په يوه واز انتروال ثابت وي، نو دا ځايونه هم (لکال) ماکسيما او هم) لوکال) مينيما دي.

یوه کره همغږیز – یا مونوتون تابع سره افراطي ارزښتونه په ژۍ ټکو کې نیول کیږي، که دا تعریفورشو پورې تعلق ولري یا اړوند وی.



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

له یوه کلي D څخه یوه ښار S ته یوترنسرک جوړیږي. په واټن a همدا اوس له کلي و ښار ته یو سرک جوړ دی له ښار څخه تر ټکي P پورې لار ، هغه سرک چې کلي ته بل یا پسي نږدې پروت دی، اوږدوالی b لري.
دا سیده کرښیز توته لار باید داسي جوړه وي، چې د ښار ګرندی رسیدنه شووني یا تظمین وي، که د یوه منځني [ټکتیا km/h $v_a = 120$ د $v_n = 60$ په واټن په نوي ځنګیز یا فرعي سرک څخه لاړ شو.



د P او د ځنګيز سرک ترمنځ واټن $x \geq 0$ د ټاکلو لپاره د مينيمى – يا کموني له لارې اړين وخت

ښار ته د خوزښت لپاره دی

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

د مشتق صفرځايونه

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0 \,,$$

راکوي

$$v_a x = v_n \sqrt{a^2 + x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_m = a/\sqrt{3}$$

يعنې ممکنه لوکال اکستېرم ځاي په $(0, b)$کې. ايا چې دا مينيموم دی، بايد د خوزښت وخت سره په انتروالټکو کې د پرتلې له لارې وټاکل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a + b}{v_a} \,, \qquad t(0) = \frac{2a + b}{v_a} \,, \qquad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{v_a}$$

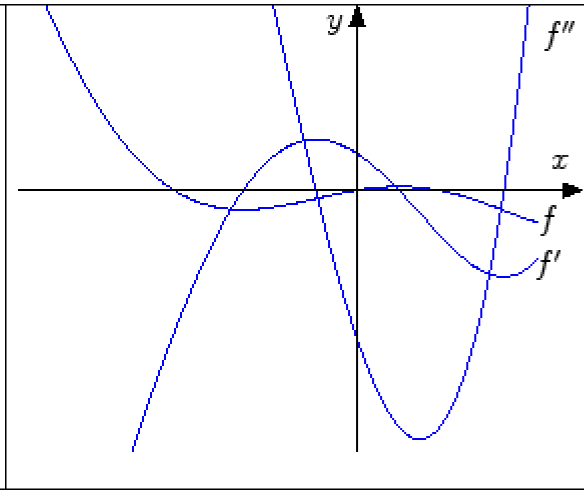
په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. د ښي پايټکو لپاره باور لري

$$\begin{aligned} t(b) \geq t(x_m) \Leftrightarrow &\quad 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}a + b \\ \Leftrightarrow &\quad 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2 \\ \Leftrightarrow &\quad a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \geq 0 \,. \end{aligned}$$

اخرنی مساوات تل پوره دی، او له دې سره x_m اوپټيمال يا اغيز من دی، که په غوره انتروال $(0, b)$ کې پروت وي.: $b \geq a/\sqrt{3}$. په بل حالت کې به مينيموم په ژۍ ټکي b ته ، يعنې ښار ته د سيده تړنې، سره ورسيږي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د اکستریم – یا افرطي ازښتونو ازماېښت **Extremwerttest**



د یوه افراطی ارزښت تیوپ یا ډول په هکله کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته پرېکړه وشي.

که f یو دوه واره ناپرېکیدونکی مشتقوړ تابع وي او

$f'(a)=0,\qquad f''(a)>0$

$(f''(a)<0),$ ولرو،

نو f په a کې یو ځاییز مینیموم(ماکسیموم) لري. که د a په ځای کې دویم مشتق ورک شي یا صفر شي، نو باید جګ مشتقونه پرېکړې ته را وړاندې شي. که باور ولري

$$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(a)\neq 0,$$

نو f په a کې تیک هلته یو افراطیت لري، که جوړه وي. په دې حالت کې f په a کې یو لوکال یا ځای اړونده ماکسیموم همداسي مینیموم لري، که $f^{(n)}(a)<0$ همداسي $f^{(n)}(a)>0$ وي.

لیکونکي:اېپ، هیولیک

د ښووني لپاره و f ته سرې د a په ځای کې د $n-1$ درجې د تیلور-پولینوم کاروي د باقي یا پاتي

$$f(x)-f(a)=\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-a)^n$$

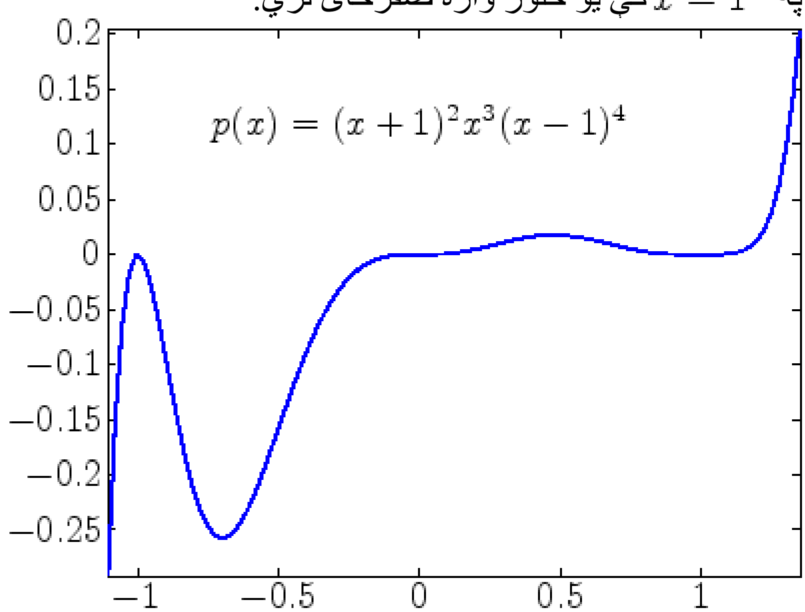
غړي سره او په پام کې نیسي، چې د $f^{(n)}(t)$ او د $f^{(n)}(a)$ لپاره(او له دې سره هم د t لپاره) a ته په بوره نږدېوالي همغه یا برابره مخنښه ولري.

د ناجوړه یا طاق n لپاره له $x < a$ څخه و $x > a$ ته په تلنې کې د پورته مساوات
بنی اړخ یو د مخنخښې بدلون لري. د دې پسې $f(x) - f(a)$ هم هلته د مخنخښې
بدلون لري او a د f افراطي ځای نه دی.
د جوړه n لپاره د $x \neq a$ لپاره تل $(x - a)^n > 0$ دی. د $f^{(n)}(a) < 0$ په
حالت کې د $x \neq a$ لپاره او x چې a ته پوره نږدې پروت دی $f(x) < f(a)$
لاس ته راځي. نو تابع f په دې حالت کې په a کې یو لوکال ماکسیموم لري . حالت
$f^{(n)}(a) > 0$ په ورته توګه یو لوکال میموم راکوي.
لیکونکي:ایپ، هیولیک

پولینوم

$$p(x) = (x+1)^2 x^3 (x-1)^4$$

په $x = -1$ کې یو ډبل صفرځای ، په $x = 0$ کې یو دریواره صفرځای لري او
په $x = 1$ کې یو څلور واره صفرځای لري.



باور لري

$$p(-1)=p'(-1)=0, \quad p''(-1)=2(-1)^3(-2)^4<0\,.$$

په $x=-1$ کې p یو ماکسیموم لري. په $x=1$ کې p یو مینیموم، خکه چي

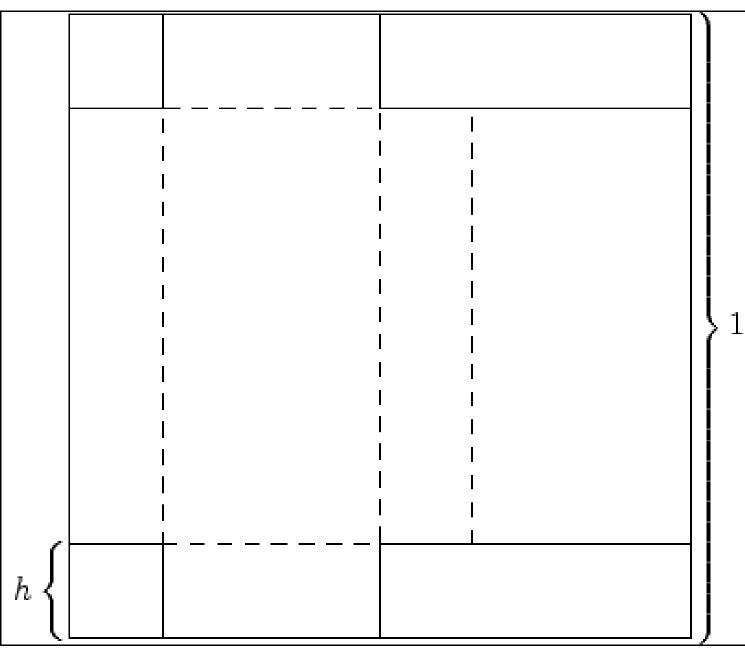
$$p(1)=\ldots=p'''(1)=0, \quad p^{(4)}(1)=2^2 1^3 4!>0\,.$$ ،

بالاخره د p

$$p(0)=p'(0)=p''(0)=0, \quad p'''(0)=3!(-1)^4\neq 0$$

له امله او په $x=0$ کې یو مخنخښې بدلون له امله په سرچینه کې افراطي ځایونه نه لري.

لیکونکي:اپپ، هیولیګ

د دې ورکړ شوي غوڅنمونې په مرسته دې د مربعيز ټوټه کارتونونو څخه دې ممکنه د لوی حجم صندق جوړ شي	

ډکی یا حجم دی

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

جګوالی سور اوږدوالی

د مشتق صفرځایونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \overset{!}{=} 0$$

راکوي

$$= \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

یعني ممکنه افراطي ځایونه. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور دی او

$$v(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}.$$

دا چې د ژی ټکو $h = 0$ او $h = 1/2$ لپاره ډکی یا حجم صفر0 دی، صندق د $h = 1/6$ لپاره ماکسیمال ډکی یا حجم لري.

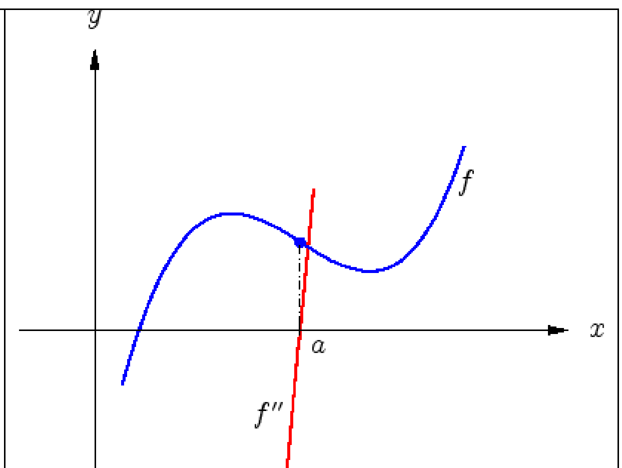
لیکونکي:اېپ، هیولیګ

اوړونټکي(نقطه انعطاف) **Wendepunkte**

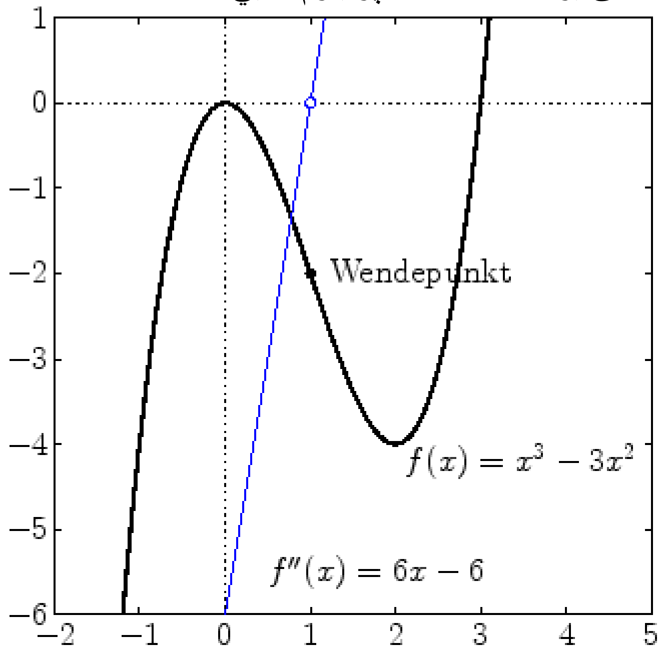
د یوه تابع f په یوه اوړنټکي a کې دویم مشتق مخنښه بدلوي.

د یوه پوره هوار تابع لپاره اړین دی، چې $f''(a) = 0$ وي او پوره $f'''(a) \neq 0$ کېدونکي، چې وي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

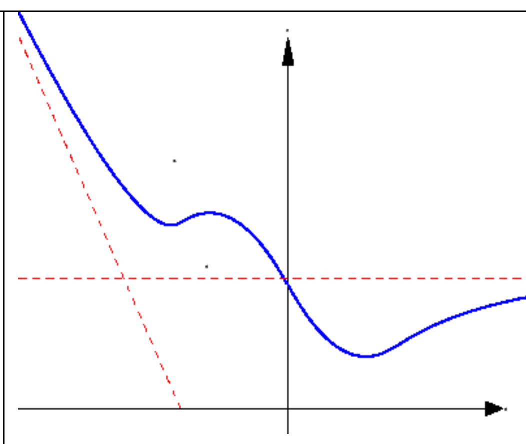


مشتق يو kubisches پولينوم ښايي.



دا چې د ويم مشتق کرښيز دی، تل ټيک يو افراطی ټکی شتون لري.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

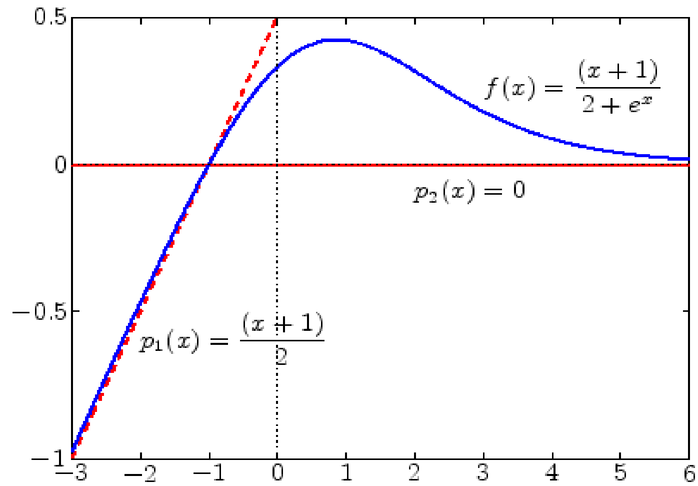
اسيمپتوتې(يو په بل نه پرېوتونکي يا ګاونډی) **Asymptoten**

يو کرښيز تابع $p(x) = ax + b$ د f يو اسيمپتوت يا ګاونډی دی، که د $x \to \infty$ يا $x \to -\infty$ لپاره $f(x) - p(x) \to 0$ وي. لکه په څېره کې چې ښوول شوی دی، ګاونډ د تابع f حالت د لوي x لپاره تشريح کوي. ليکونکي: هيوليک، هيورنر	

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{x+1}{2+e^x}$$

ګاونډ وټاکو پوله ارزښتونه $x \to \pm\infty$ ځانله تر څېړنې نیسو.



د $x \to \infty$ لپاره دی

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)\cdot e^{-x}}{2\cdot e^{-x}+1}$$

$$= \frac{0}{0+1} = 0\,.$$

له دې سره د x محور ګاونډ یا اسیمپتوت دی

د $x \to -\infty$ لپاره e^x د 0 په لور هځیږي او

$$p(x) = \frac{x+1}{2}$$

ګاونډ دی.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د راشنل- یا کسر توابعو ګاونډ یا اسیمپټوټې
Asymptoten rationaler Funktionen

یو راسنل تابع

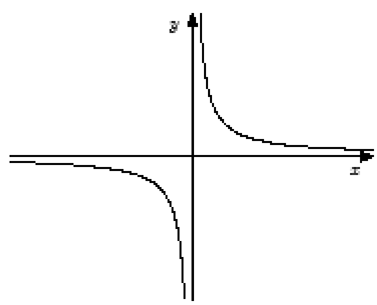
$$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

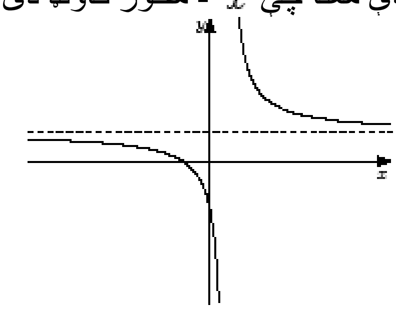
تیک هلته یو کرښیز ګاونډ لري، که $\text{Grad } p \leq \text{Grad } q+1$ وي.

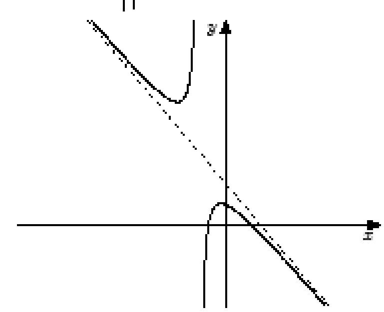
د $\text{Grad } p < \text{Grad } q$ لپاره باور لري

$$\lim_{p\to\pm\infty} r(x)=0\,,$$

دا په دې معنا چې x - محور ګاونډ دی.







د $\text{Grad } q \leq \text{Grad } p \leq \text{Grad } q+1$ لپاره سړی کرښیز ګاونډ د پولینوم وېش سره لاس ته راوړي :

$$r(x)=ax+b+\frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

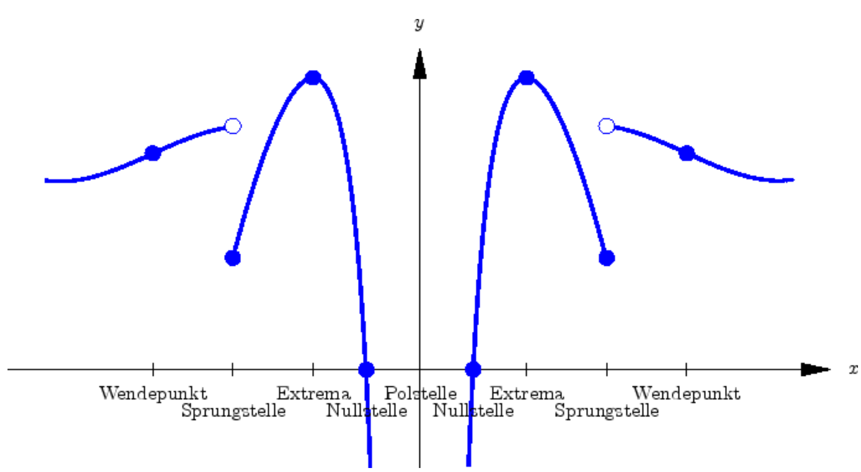
د q Grad $\tilde{p} <$ Grad سره. اسیمپتوت پروت یا افقي, $(a = 0)$ دی، که Grad q Grad $p =$ وي.

که د صورت درجه د مخرج له درجې له یو زیات وي، نو $r(x)$ د لوي x لپاره د یوه پولینوم سره، چې ≥ 2 درجه وي اپروکسیمي کیږي.
لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د کږو یا منحنیو خبرې یا بحث Kurvendiskussion

د یوه تابع د خومره والي حالت باندې قضاوت ته لاندې نخښې کیدی شي رامخ ته شي:

- Symmetrien سیومتري
- Periodizität تل بیرته راګرځیدنه
- Unstetigkeitsstellen پرېکیدنوالي ځایونه
- Nullstellen ($\longrightarrow$ Vorzeichen) صفرځایونه(مخنخښه $\longrightarrow$)
- Extrema ($\longrightarrow$ Monotoniebereiche) اکستریما (همغږیزوالي ورشوګاني $\longrightarrow$)
- Wendepunkte ($\longrightarrow$ Konvexitätsbereiche) اوړونټکی) ننوتلوالي ورشوګاني $\longrightarrow$)
- Polstellen قطبځایونه
- Asymptoten اسیپتوتونه یا ګاونډي



د تابع یو اړونده تحلیل د کرو خبرې اترې یا بحث بلل کیږي
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د کرو‌خبرو اترو د ښکندوني لپاره یو تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\,\sin(3x)$$

تر څېړنې نیول کیږي.

سیمتري : داچې $\sin x = -\sin(-x)$ دی ، نو تابع ناجوړه دی

تل بیرته راګرځېدنه یا پریودیځیتيPeriodizität : تابع لکه د ساین تابع پخپله 2π - پریودیکي دی او له دې امله په لاندې کې فقط په انتروال $[-\pi,\pi]$ کې راوړل کیږي.

د پرېکېدنوالي ځایونه : تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره یرځای شوی، له دې امله برکېدنځاینه نه لري.

صفرځایونه: د زیاتو- یا جمعه نقضیې سره $[-\pi,\pi]$ دی

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\,\sin^3 x = \sin x\,\underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع صفرځایونه په 0 او $\pm\pi$ کې لري.
افراطیت: مشتق

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\,\cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x$$

صفر دی د $\cos x = 0$ یا د $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره ، نو
$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$

دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف او تلبیرته راګرځېدونې ده، ژئ ترڅېړنې لاندې نه نیسو.

د دويم مشتق د محنخبني څخه

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x$$

او د تابع ارزښت د پرتله کوني له لارې کېدی شي د افراطيت تيوپ يا ډول وټاکل شي:

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اوړونټکی یا د انعطاف ټکیWendepunkte **:**

دويم مشتق

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x$$

$$\sin x = \pm\sqrt{5/6}$$

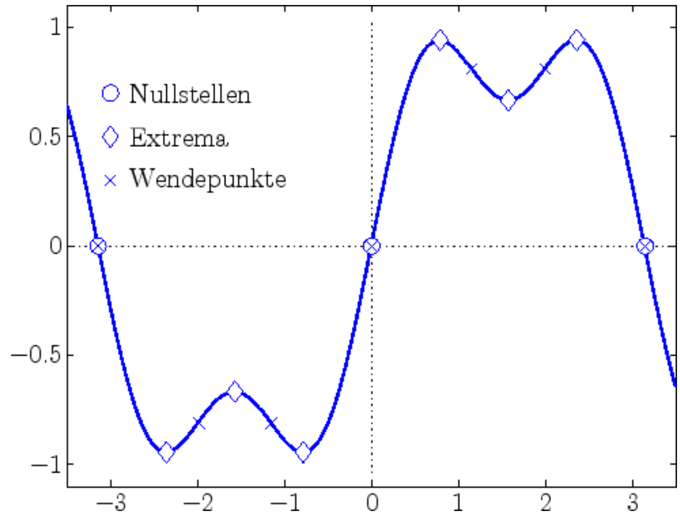
صفر دی د $\sin x = 0$ لپاره یا ، دا په دې معنا چې

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

دا چې په دې ځای کې دريم مشتق نه ورکيږي. تابع f اوړونټکی په $(0,0)$ او $(\pm\pi, 0)$ کې لري همداسې په نږدې توګه په $(-1.99, -0.81)$ ، $(1.15, 0.81)$, $(-1.15, -0.81)$ او $(1.99, 0.81)$ کې.

قطبځايونه**Polstellen** : ناپرېکېدونکي توابع قطبځايونه نه لري.

ګاونډي **Asymptoten** : تابع پريوديکي او نه ثابت دی، نو ګاونډي يا اسيپتوت يا مجاورتونه نه لري.



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د یوي کرښې خبرو یا بحث روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترخیرني لاندې نیول کیږي.
سیومتري : صورت ناجوړه او مخرج جوړه دی. تابع نو له دې امله ناجوړه دی، دا په دې معنا چې سرچینې ته سیومتریک دی.
پریودیځیتي یا (تل) بیرته راګځیدنه: تابع پریودیک نه دی.
برېکیدنځایونه: د مخرج صورت صفرځایونه ± 1 د صورت صفرځایونه نه دي. له دې سره f په $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ ناپرېکېدونکی دی.
صفرځایونه: صورت د $x = 0$ لپاره ورکیږي.
افراطیت :

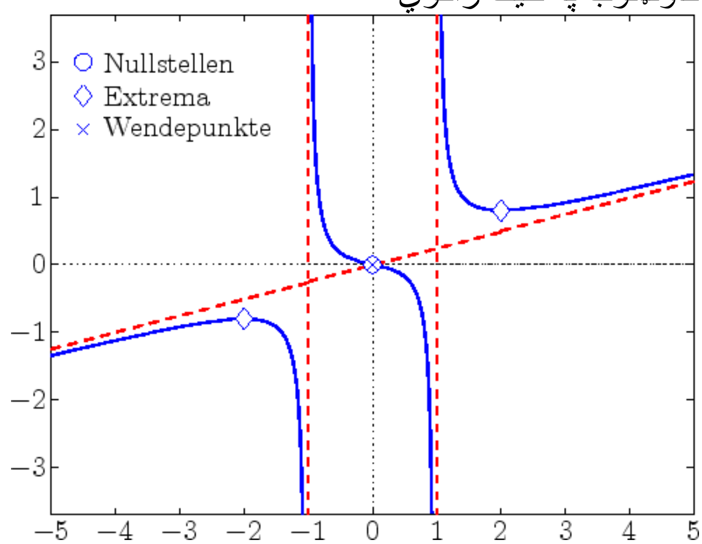
$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2-1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

دا چې تابع ساده صفرځایونه لري، افراطیت فقط لوکال یا ځای اړوند دی. د f د ځومره والي حالت خخه کیدی شي تیوپ یا ډول لاس ته راشي. دا چې $f(x) \to -\infty$ د $x \to -\infty$ او $x \to -1$ لپاره دی، باید انتروال $(-\infty, -1)$ یو ماکسیموم ولري. په ورته توګه $(1, \infty)$ لږ تر لږه یو مینیموم لري. نو د مشتق صفرځایونو ته

سړی یو لوکال ماکسیموم په $(-2,-4/5)$ او یو لوکال مینیموم په $(2,4/5)$ کې لاس ته راوړي.
اوړونټکي یا نقاط انعطاف:

$$f''(x) = \frac{-80x^5 + 398x^3 + 42x}{20(x^2-1)^3} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

داچې په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی، نو $(0,0)$ یو اوړونټکی دی.
قطبځایونه: تابع په $x = \pm 1$ کې ساده قطبځایونه لري.
اسیمپتوت یا ګاوندېتوب: یو د پولینوم ویش $p(x) = 5x/20 + 0 = x/4$ د ګاونډتوب په حیث راکوي



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د کړې خبرو اترو د ښوولو یا روښانه کولو ته تابع

$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{4|x|}{e^4}$$

څېړل کیږي.

سیمتري : دا چې x^2 او $|x|$ جوړه دي، تابع جوړه دی، دا په دې معنا چې سیمتر و y - محور ته.
پریودیځیتي یا تل بېرته راګرځېدنه: تابع پریودیک نه دی.

پرېکېدنوالي ځايونه: تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره يوځای شوې ده او له دې امله پرېکېدنځايونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت تابع لپاره په هرحالت مشتق په صفرټکي کې ناپرېکېدونکی نه دی.
صفرځايونه: اکسپوننشل توابع تل مثبت يا زياتيز دي، د مطلق ارزښت تابع نه منفي دي. نو صفرځايونه نه شته.
افراطيت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\mathrm{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\,.$$

برسيره پردې دې افراطی ټکی په $x = 0$ کې ،څېړل شي، چېرته چې مشتق پرېکېدونکی دی. دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعريف دی، نو د x لپاره د $\pm\infty$ ته د تلنې حالت هم بايد په پام کې ونيول شي.
دا چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره دی، نو f لږ تر لږه يو ګلوبال مينيموم لري، مګر کلوبال ماکسيموم نه لري. د y ارزښت په پرتله کريتيکال ټکی

$$(2, 9/e^4) \qquad (0, 1) \qquad (-2, 9/e^4)$$

ښايي، چې ګلوبال مينيموم په $x = \pm 2$ کې نيول کيږي. دا چې f په انتروال $[-2, 2]$ کې مينيموم او هم يو ماکسيموم لري، ترې لاس ته راځي چې $(0, 1)$ يو لوکال ماکسيموم دی.
اوړونټکی يا د انعطاف ټکی:

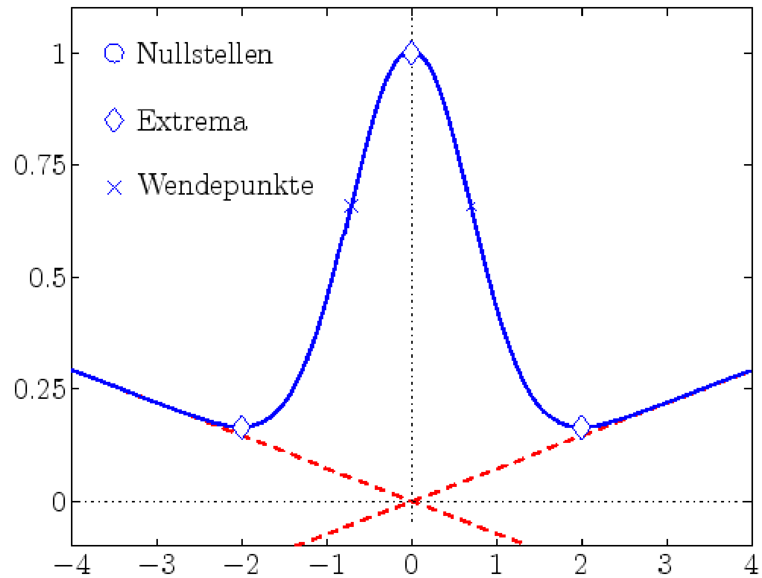
$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

دريم مشتق په دې ځايونو $\neq 0$ کې دی. ترې لاس ته راځي چې f يو اوړونټکی

$$\left(\pm 1/\sqrt{2},\ e^{-1/2} + \frac{4}{\sqrt{2}\,e^4}\right).$$

لري.
قطبځايونه: تابع قطبځايونه نه لري.

ګاونډي يا مجاورتها: دا چې e^{-x^2} د $|x|$ لپاره د صفر په لور ګړندی دی، تابع ګاونډيان $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ او $p_-(x) = \frac{-4x}{e^4}$ لري.



ليکونکي: هيوليک، هيورنر

ريمن-انتيګرال Riemann-Integral

د يوه ناپرېکېدونکي تابع f يو تاکلى انتيګرال د

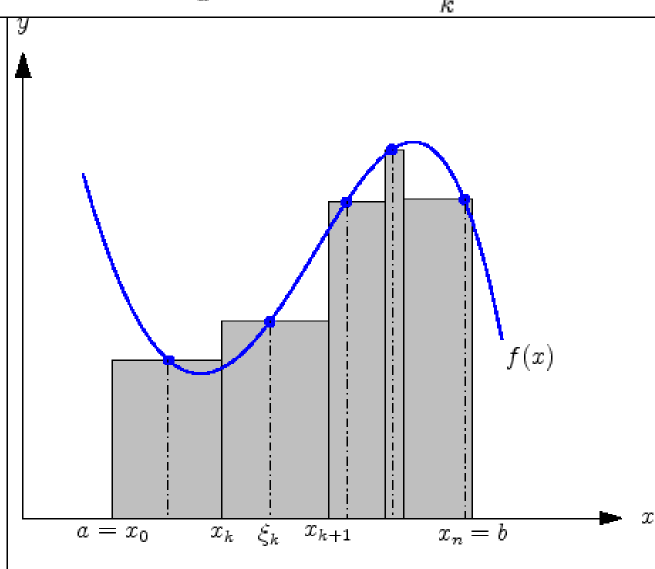
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0}\int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

له لارې تعريف شوى دى. دلته د $\Delta:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ يوه توټه کونه بنايي،

$$|\Delta| = \max_k \Delta x_k\ ,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\ ,$$

ξ_k يو ماکسيمال انتروال دى او په k – م انتروال يو په خوښه ټکى دى. د انتيګرال تعريف په بنى لور زياتون ياجمعه د ريمن زياتون يا – جمعه بلل کيږي.



د زياتيز يا مثبت f لپاره $\int_a^b f(x)\,dx$ د f د گراف کښنته لورته سطحه په گوته کوي

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر، ويپپر

که $f(x)$ ناپرېکيدونکی مشتقوړ وي، نو د مشتقشمېرنې د منځ ارزښت جملې څخه د لپاره باور لري

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_2 - x_1) \max_{x \in [x_1, x_2]} |f'(x)|$$

Δ_i دې د ټوټه ونو يوه پرله پسې وي د $|\Delta_i| \to 0$ سره. د تابع پرلپسې دوه توکي Δ_m او Δ_n را اخلو او د Δ ټوټه ونه را اخلو، چې د Δ_m او Δ_n د نورو يا ورپسې يل لاندې ټوټه کونو له لارې منځ ته راځي، چېرته چې Δ_m د لاندې x_i , $i = 0, \ldots, k_m$ يا ورپسې ټوټه ونو ټکي دي او Δ ټکي z_i , $i = 0, \ldots, k$ لري، نو د $\zeta_j \in [z_{j-1}, z_j]$ سره باور لري

$$\left| \int f_\Delta - \int f_{\Delta_m} \right| = \left| \sum_{j=1}^{k} f(\zeta_j)\,\Delta z_j - \sum_{i=1}^{k_m} f(\xi_i)\,\Delta x_i \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1} \leq z_{j-1} < z_j \leq x_i} (f(\zeta_j) - f(\xi_i))\Delta z_j \right|$$

$$\leq |\Delta_m| \max_{t \in [a,b]} |f'(t)| \underbrace{\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1} \leq z_{j-1} < z_j \leq x_i} \Delta z_j}_{b-a} .$$

په ورته تگه باور لري

$$\left|\int f_\Delta - \int f_{\Delta_n}\right| = O(|\Delta_n|)\,,$$

او له دي سره

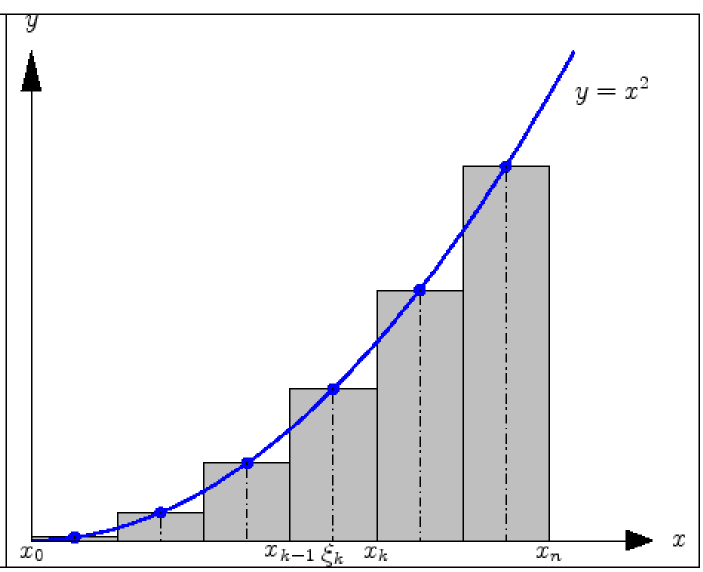
$$\left|\int f_{\Delta_m} - \int f_{\Delta_n}\right| \to 0$$

د $n, m \to \infty$ لپاره . د ريمن –زياتون نو يوه كوشي-پرلپسي جوړوي، نو پولې ته تلونكي دي.
په ورته توګه د دوه پرلپسيو و همغې يا برابرې پولې ته تلنه وښوول شي.
د توته ناپرېكېدونكو f ښوونه تخنيكي داسي لږ پېچلې ده. سرې د f د ناپرېكېدني انتروال ښېل يا جدا ترخېړني نيسي او هلته د برابرېدوله ناپرېكېدني څخه ګټه اخلي:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le \varepsilon \qquad \text{für} \quad |x_1 - x_2| < \delta\,.$$

دا اټكل د منځ ارزښت جملې په ځای رامنځ ته كيږي او نور دلايل په ورته وګه مخ ته بيولكيږي.
ليكونكي: هيوليک، هيوررنر

ريمن –انتيګرال په حيث د $\int_0^1 x^2\,dx$ شمېرلو كيدى شي د توته وني پرلپسي وكارول شي د n -م توته وني لپاره د ارزښتونو ځايونو $\xi_i = (2i-1)/(2n)\,,$ $, i = 1, \ldots, n\,,$ سره.



د تعريف سره سم لاس ته راځي

$$\int f_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4n^3}\left(4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right)$$

$$\frac{1}{4n^3}\left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

او له دې سره .

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د انتيګرال خويونه Eigenschaften des Integrals

دا لاندې ټاکلی انتيګرال دا لاندې خويونه لري :

کرښيزوالس,
$$\int f + g = \int f + \int g \quad , \quad \int rf = r\int f$$

همغږيزوالی :
$$f \le g \implies \int f \le \int g$$

زياتون يا جمعه
$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

د وروستيو خويونو د همغږيزونې له امله سرې تعريفوي: .

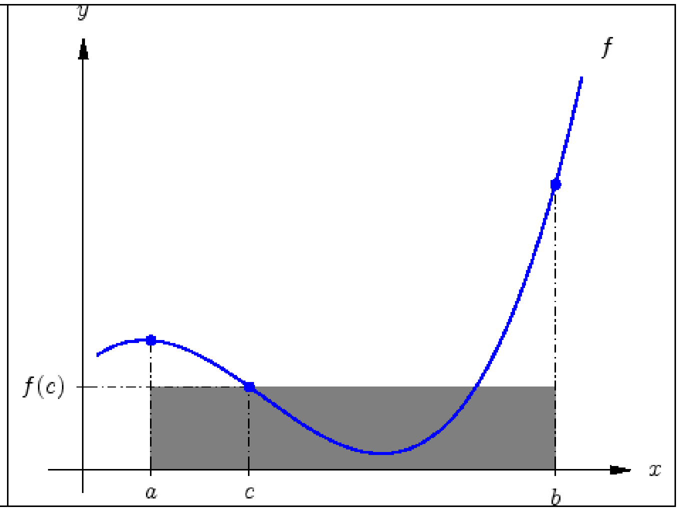
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د انتيګرالشميرنې منځ ارزښت جمله
Mittelwertsatz der Integralrechnung

که f او g په $[a,b]$
ناپرېکېدونکي توابع وي او g د
مخنخښي بدلون ونه لري ، نو
$c \in [a,b]$ شتون لري د

$$\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g.$$

سره



په ځانګي توګه ، لکه په څېره کې چې ليدوړ دي، دی $\int_a^b f = (b-a)f(c)$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

بې له ټولیزو بندیزونو دې $g \ge 0$ وي. د انتيګرال د اټکل له لارې

$$\left(\min_{[a,b]} f\right) g(x) \le f(x)g(x) \le \left(\max_{[a,b]} f\right) g(x)$$

لاس ته راځي

$$\left(\min_{[a,b]} f\right) \int g \le \int fg \le \left(\max_{[a,b]} f\right) \int g\,.$$

دا چې f د منځارزښت جملې له مخې د $\min f$ او $\max f$ ترمنځ هر ارزښت نيسي، نو غوښتونی برابروالی راکوي.

په ټولېزه توګه وړاندنيونه ده، چې g د مخنخښي بدلون نه لري، اړيين، لکه د بېلګې

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}_{>0} = \int_{-1}^{1} x \cdot x\,dx \ne c \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

ځخه لیدل کیږی.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

بنسټیز – یا ساده توابع Stammfunktion

یو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټیز ت ابع دی، او د دې لپاره لیکو

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

د ټولو بنسټیز توابعو ډېرۍ لپاره، چې د f ناټاکلي انتیګرال بلل کیږي.
د انتیګرالونې ثابته c په خوښه ده. د بېلګې په توګه دی

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

د $F_a(a) = 0$ سره یو ممکنه لومړی یا بنسټیزه تابع.
نه ټولو بنسټیزو توابعو ته داسې روښانه د بنسټیزو توابعو اکسپلیځیت ورکړه شونې ده،

$$f(x) = \exp\left(x^2\right)$$

یوه بېلګه ده .
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د انتیګرالشمیرنې اصلي جمله یا قضیه
Hauptsatz der Integralrechnung

که F د یوه ناپرېکېدونکي تابع f بنسټیز یا لومړنی تابع وي ، دا په دې معنا چې $f = F'$ وي، نو باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

همداسې په لنډه لیکندول

$$\int_a^b f = [F]_a^b \,.$$

یو بنئتیز انتیګرال کېدی شي د انتروال په پای ټکو کې د بنسټیزو توابعو د تابع ارزښتونو د کمښت په ډول وشمېرل شي
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

که دواړه خواوې د b تابع په څېر راوړل شي، نو بسیا کوي وښایو، چې دواړه خواوې برابر مشتق لري، ځکهچې د $b = a$ لپاره ارزښت سره سرخوري(دواړه خواوې صفر دي).
د کینې اړخ لپاره لرو

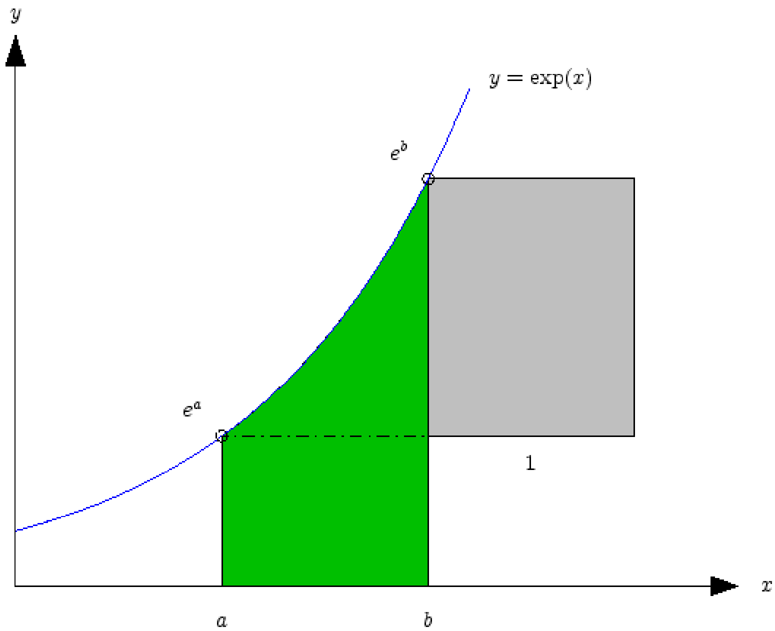
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{b+h} f - \int_a^b f \right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f \,.$$

د منځ ارزښت جملې پسې یا په تعقیب انتیګرال مساوي دی په $(b+h-b)\,f(c)$ د $c \in (b, b+h)$ سره.
پوله ارزښت برابر دی په $f(b)$. دا د ښي اړخ د مشتق سره سر خوري یا یو غړیز دی
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د اکسپننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشل تابع دی او له دې امله دی

$$\int_a^b e^x \, dx = e^b - e^a \,.$$

د د a او b ترمنځ ګراف لاندې سطحه برابره د ولاړګوډېزر(مستطیل) د سطحې سره د سور 1 او د تابع ارزښت دواټن د اوږدوالي په حیث.



د لوکايتم تابع $F(x) = \ln(x)$ مشتق $F'(x) = 1/x\,,\ x \in \mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x\,dx = \ln(b) - \ln(a)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}^+ .$$

د $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ يو بنستيز تابع $F(x) = \arctan x$ دی . د دې په تعقيب دی

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} .$$

د مشتقوني څخه لاس ته راځي، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

د $f(x) = \tan x$ یو بنستیز تابع دی

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

په تعقیب دی:

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = -[\ln(\cos x)]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347 .$$

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د M کتلي یو ستوری یو د کښولو ورشو تولیدوي، چې د هغې له خوا په یوه کتله m یو زور $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ واردوي . دلته γ د ګراویتیشن یا راکښنې قوه ده او د x دروندټکو ترمنځ واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره یو لومړنی یا بنستیز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې یو تن له واټن a و واټن b ته یوړولی شو ، باید کار

$$\int_a^b F(x)\,dx = \gamma mM \int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = -[\gamma mM/x]_a^b = \gamma mM(1/a - 1/b)$$

سرته ورسیږي.

د a لپاره د ستوري د وړانګې سرره برابر او $b \to \infty$ کېدی شي د برابر اینوونې له لارې د کینیتیکي انرژي سره چې داسې په نامه د تېښتې چټکتیا v تاکي دا په دې معنا چې چټکتیا ، چې اړین ده، چې د یوه ستوري راکښنقوه پرېښودی شي یا راکښنقوې څخه ووځي:

$$\frac{m}{2}v^2 = \gamma\frac{mM}{a} \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{\gamma\frac{2M}{a}}\,.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2\,\text{km/s}.$ دی .
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د بنسټیزو توابعو لومړني توابع Stammfunktionen der Grundfunktionen

لاندې جدول بنسټیزو توابعو $f(x)$ ته لومړني توابع $F(x)$ ښايي

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
$x^s\,,\ s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x\cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

ټوټه- یا پارشل انتیګرالونه Partielle Integration

د مشتق د ضرب قانون $(fg)' = f'g + fg'$ څخه په ورته توګه فرمول بندي له لارې د ناټاکلي انتیګرال لپاره راکوي:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

په اړونده توګه د ناټاکلو انتیګرالونو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

لپاره باور لري. د لته دې په پام کې ونیول شي، چې د ژۍ ترم $[fg]_a^b$ ورکیږي، که د دواړو توابعو څخه یو یې د انتروال پای ټکو کې صفر وي. په همدې توګه د پریودیکي تابع لپاره د پریود اوږدوالي $(b-a)$ کې هم له منځه ځي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

له $\int (1+x)^\alpha\,dx = \dfrac{1}{\alpha+1}\,(1+x)^{\alpha+1} + c$ څخه د $\alpha \neq -1$ لپاره لاس ته راځي

$$\int \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1+x}}\,dx = x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c.$$

په ورته توګه شمیرل کیږي

$$\int_0^1 \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1-x}}\,dx = \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx$$

$$= 0 - \left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,.$$

يو لوګاريتمي ضريب د يو ځل ټوټه انتيګرالونې له لارې له منځه تلی شي.
د بيلګې په توګه دی

$$\int x^n(\ln|x|)\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1}\,\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + c.$$

په دې ډول کيدی شي په خوښه پولينومونه

$$\sum_{j,k} a_{j,k}x^j(\ln|x|)^k$$

په x او $\ln|x|$ کې انتيګرال شي يا انتيګرال ونيول شي.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ټوټه اتيګرالونې له لارې کېدی شي د پولينوم درجه کمه شي. د بېلګې په توګه دی

$$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x\,dx$$
$$= x^n e^x - n x^{n-1} e^x + \int n(n-1)x^{n-2} e^x\,dx$$
$$= \cdots$$
$$= e^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x^k + c.$$

په دې توګه نېدی شي د $n \in \mathbb{N}$, $x^n\,e^{\beta x}$, بنې ترمونوکمبينېشن په خوښه انتيګرال شي يا يې انتيګرال ونيول شي. ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د $x^n \cos x$ او $x^n \sin x$ ضربونه کېدی شي د ډېرواره ټوټه انتیګرالونې له لارې انتیګرال شي:

$$\int x^n \left\{ \begin{array}{c} \cos x \\ \sin x \end{array} \right\} dx = x^n \left\{ \begin{array}{r} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} - \int n x^{n-1} \left\{ \begin{array}{r} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} dx$$
$$= \ldots .$$

د تکرار ټوټه انتیګرالوني له لارې بالاخره ضریب x^k له منځه ځي. په دې توګه کېدی شي د په خوښه پولینوم توابعو لومړنی تابع په x, $\sin x$ او $\cos x$ کې وشمېرل شي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

له $\cosh'(x) = \sinh(x)$, $\sinh'(x) = \cosh(x)$ څخه لاس ته راځي

$$\int e^x \sinh(x)\, dx = e^x \cosh(x) - \int e^x \cosh(x)\, dx$$
$$= e^x \cosh(x) - e^x \sinh(x) + \int e^x \sinh(x)\, dx$$

او له دې سره لکه چې برېښي
$$e^x \cosh(x) = e^x \sinh(x),$$

یو په څرګنده توګه مخامخوالی یا تضاد دی.
ناټیکاوی په اخرنظ پایونه کې پروت دی – د انتیګرالنیوني ثابته باید په پام کې ونیول شي:
$$e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} + c .$$

د $c = 1$ ټاکنه مو ټیکې نتیجې ته لاربنودوي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ټوټه انتیګرالوني سره لرو

سرليک

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx,\ (a \neq 0).$$

د ويم ځل انتيګرالونه مو بېرته برابر انتيګرال ته ته بيايي، او له دې سره لاس ته راځي:

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{ae^{ax}\sin(bx) - be^{ax}\cos(bx)}{a^2+b^2} + c$$

بديلي سړی

کړی شي د اويلر-مويورې فرمول هم د پورته ډول انتيګرال شمېرنو ته استعمال کړي. د

$$\cos(t) = \mathrm{Re}\left(\exp(\mathrm{i}t)\right)$$

بېلګې په توګه له لاس ته راځي

$$\int_0^\pi e^t\cos(t)\,dt\,\mathrm{Re}\left(\int_0^\pi \exp(t+\mathrm{i}t)\,dt\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\exp(t+\mathrm{i}t)}{1+\mathrm{i}}\right]_0^\pi\right)$$

$$= \qquad \mathrm{Re}\left(\frac{-e^\pi - 1}{1+\mathrm{i}}\right) = -(e^\pi+1)/2\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

له

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = -\int_{-\pi}^{\pi} n\cos(nx)(-\frac{1}{m}\cos(mx))\,dx$$
$$= \frac{n^2}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx$$

د $m \neq n$ لپاره لرو

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0\,.$$

په پام کې دې ونيول شي، چې د تابع پريوديځيتي يا تل بېرته رتګرځېدنه په ټوټه انتيګرالونه کې د ژی شرايط له منځه ځي. د $m = n$ لپاره د لومړي مساوات او

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

څخه لاس ته راځي

$$2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx=2\pi\,.$$

په ورته توګه سړی د تابع $\cos(mx)$ اورتوګونالیتي ښايي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

دلتا - تابع Delta-Funktion

د ديراکDiracsche دلتا-تابع δ د

$$\int_{\mathbb{R}}\delta f=f(0)$$

له لارې تعريف دی، د کوم سره چې يو په خوښه ناپرېکيدونکی تابع دی، چې د يوه انتروال (a,b) دباندې وکيږي. د ټوټه انتيګرالوني په مرسته يا په يوه پوله پروسه کېدی شي δ د Heavisideschen ټوپتابع د مشتق ټوليزوالي

$$H(x)=\begin{cases}1, & \text{für } x>0\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

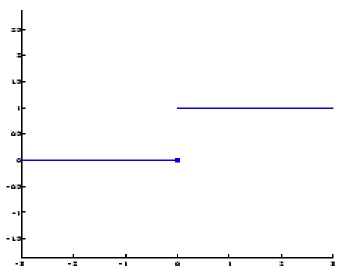
په حيث تشريح کيدی شي.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

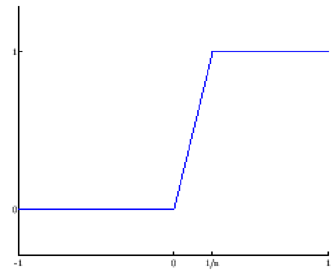
که $0\in(a,b)$ وي، نو د ټوټه انتيګرال سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{b}H'f&=[Hf]_{a}^{b}-\int_{a}^{b}Hf'\\&=-\int_{0}^{b}f'=-[f]_{0}^{b}\\&=f(0)\end{aligned}$$

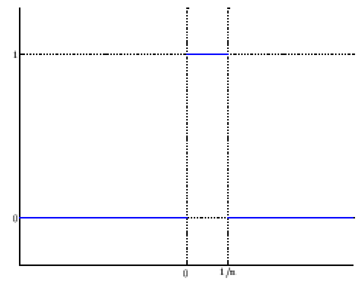
او له دې سره $\int H'f=\int\delta f$.



Heaviside-Funktion H



نږدېوالی H_n Näherung der Heaviside-Funktion



نږدېوالی $\delta_n = H_n'$ Näherung der Delta-Funktion

په د پوله پروسې سره د جوړ شوې د Heavyside-Funktion اپروکسیمیشن سره سرِی بدیل لاس ته راوړې :

$$\int_a^b H_n' f = n \int_0^{1/n} f = f(t_n) \to f(0)\,.$$

له دې سره د اخرنې مساوات لپاره د منځ ا رزښت جمله کارول شوې.
لیکونکې: هیولیګ، کوپف

د متحولو – یا اووښتونو بدلون Variablensubstitution

د ځنځیرې قاوانو

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

څخه د د بدلون $y = g(x)$ لپاره لومړنیو تابع جوړولو له لارې لاس ته راځې

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y) + c = \int f(y)\,dy\,.$$

په ورته توګه د ټاکلي انتيګرال لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

.

د دفرنشل کونو په ورسته کېدی شي دا فرمول په لاندې بڼه

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

وليکل شي.

يو ساده ځانګړی حالت يو کرښيز متحول بدلون دی

$$x \mapsto y = px + q\,.$$

په دې حالت کې دی

$$\int f(px+q)\,dx = \frac{1}{q}\,F(y) + c$$

همداسې

$$\int_a^b f(px+q)\,dx = \frac{1}{p}\,[F]_{pa+q}^{pb+q}\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د انتيګرال

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x}\,dx$$

لپاره بدلون $u = \varepsilon x\,,$ $dx = \frac{1}{\varepsilon}du$ او د انتيګرالونې پولو ترانسفورميشن

$x = \pi/\varepsilon \leftrightarrow u = \pi$ راکوي

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

په ټولیزه توګه د یو بدلون $u = rx$ سره باور لري

$$\frac{dx}{x} \to \frac{du}{u}$$

او له دې سره

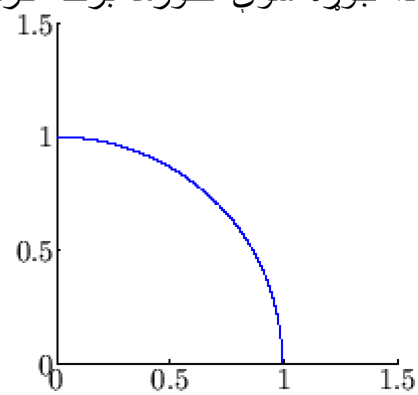
$$\int_a^b f(rx)\frac{dx}{x} = \int_{ra}^{rb} f(u)\frac{du}{u}.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

تابع

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \le x \le 1,$$

دا جوړه شوې څلورمه برخه ګردۍ یا څلورمه برخه دایره ښایي



له دې سره د انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}.$$

که بدلن $x = \sin u,\ dx = \cos u\, du,\ x = 0 \to u = 0$ وکارول شي او $x = 1 \to u = \frac{\pi}{2}$ ، نو لاس ته راځي

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\,,$$

لکه څنګه چې انتظار کېده. د اخرني مساوات لپاره دا لاندې

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 u + \cos^2 u\, du = \frac{\pi}{2}$$

وکارول شو.

په عجيبه ډول بدلون $x = \cos u,$, $dx = -\sin u\, du$

$x = 0 \to u = -\pi/2$

او $x = 1 \to u = 2\pi$ په برېښنده توګه يوه ناټيکه نتيجه راکوي:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} -\sin^2 u\, du = -\frac{5\pi}{4}.$$

څه ناټيک وو؟ په کلکه نيولې توګه باور لري

$$\sqrt{1-\cos^2 u} = |\sin u|$$

او له دې سره

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} |\sin u|(-\sin u)du = \frac{\pi}{4}.$$

د لاندې انتيګرال لپاره

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

بدلون $y = (x-3)/2$, $dx = 2dy$ راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}\,.$$

د ورپسې بدلون f $y = \cosh t$, $dy = \sinh t\, dt$ سره د

$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ له امله لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} &= \int \frac{\sinh t\, dt}{\sinh t} \\
&= \int dt = t + c \\
&= \operatorname{arcosh} y + c \\
&= \operatorname{arcosh}((x-3)/2) + c \\
&= \ln\left(\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right) + c
\end{aligned}$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس تهراځي

$$\begin{aligned}
\int_5^7 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} &= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) - \ln 1 \\
&= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

که په انتګرالېدونکي کې دننه مشتق پېژندل کیږي، لکه د بېلې په توګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx\,,$$

لپاره، نو د بدلون قانون په ځانګړې توګه ساده دی. په دې بېلګه کې

$$y = g(x) = \ln x\,, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

ځای په ځای کوو او لاس ته راوړو

$$\int g(x)^2\, g'(x)\, dx = \int y^2\, dy = \frac{1}{3}y^3 + c\,.$$

د په ښې یا معکوس بدلون سره لرو

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

په تیوپیکي توګه سړی هڅیږي چې د بدلون له لارې انتیګرالېدونکی ساده کړي. د بېلګې په توګه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y}-1}\,dy$$

لپاره نږدې دی چې

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

کیږدي. دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله دا ترانسفورمي شوی ناټاکلی انتیګرال راکوي

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\frac{dy}{dx}\,dx = \quad \int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)\,dx$$

$$\int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c\,.$$

د $x = e^y$ دبېرته بدلون له لارې بالاخره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2}\left|\frac{e^y-1}{e^y+1}\right| + c\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

لومړی (بنسټیزه -) تابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

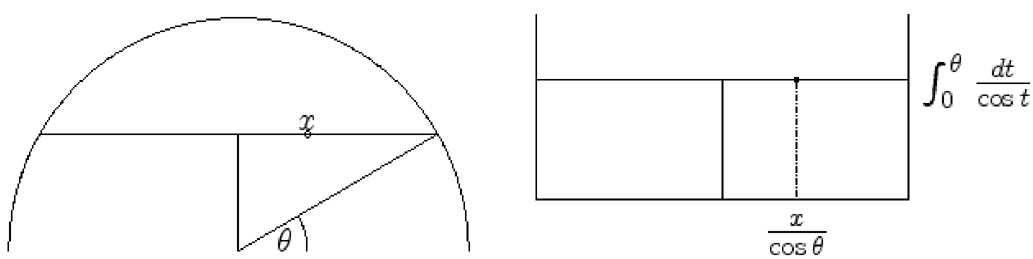
کیدی شي د بدلون سره

$$u=\frac{1}{\cos x}+\tan x=\frac{1+\sin x}{\cos x},\qquad du=\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx,$$

وشمېرل شي:

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\cos x} &= \int(\cos x)^{-1}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1}du\\ &= \int\frac{du}{u} = \ln|u|+c\\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos x}+\tan x\right|+c.\end{aligned}$$

یو کارونه يې د Mercator-Projektion دی. له دې سره د ځمکې بورته سطحه کونجريښتوني په سطحه برېوځي.



د سور ګردی (طول البلد) له دې سره د $1/\cos\theta$ په نسبت سره غزيږي.

ليکونکي: هيوليک، کوپف

ساده راشنل انتيګراليدونکي د ساده قطب سره
Elementare rationale Integranden mit einfachen Polen

د درې بنستيتيوپه راشنل توابعو لومړنی توابع دي

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|x+b/a|+c$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+c$$

$$\int \frac{(x-a)dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+c$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

فرمولونه کېدی شي ترلي د مشتق له لارې پسې وشمېرل شي. بديل يې د انتيګرال ساده بڼه بدلونونه شوني دي.

له $\int dy/y = \ln|y|+c$ لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x+b/a} = \frac{1}{a}\ln|x+b/a|+c.$$

د بڼه بدلون پسې

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{((x-a)/b)^2+1}$$

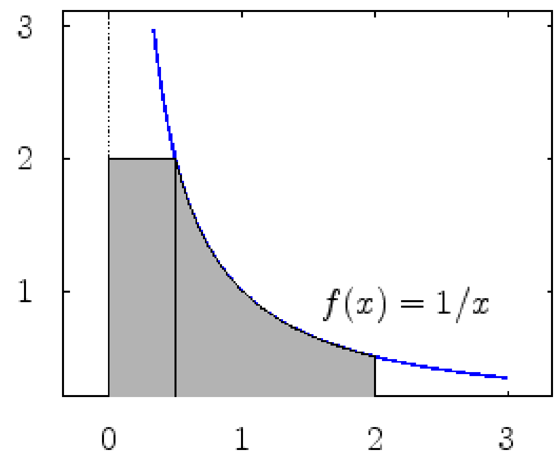
بدلون $dx = b\,dy$, $y=(x-a)/b$ راکوي

$$\frac{1}{b}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{b}\arctan y+c = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+c.$$

د بدلون , $y=(x-a)^2+b^2$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{(x-a)\,dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln|y|+c$$

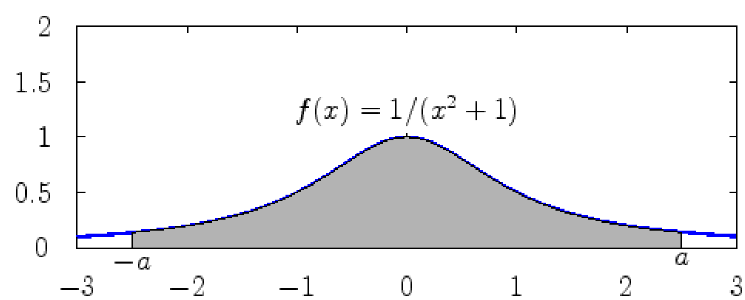
$$= \qquad \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+c.$$



د خړې سطحې مساحت د

$$2\frac{1}{2}+\int_{1/2}^{2}\frac{1}{x}dx = 1+\ln 2-\ln\frac{1}{2} = 1+\ln 4$$

له لارې شمېرل کېږي.
لیکونکي: هیولیک، کوپف



د $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ د ګراف لاندې سطحه داسې شمېرل کېږي

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}\arctan a-\arctan(-a)\longrightarrow\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د

$$r(x) = \frac{3x+6}{2x^2-4x+10}$$

لومړی تابع ټاکلو لپاره، لومړی د مخرج مربعتکمیلونه جوړیږي:

$$2(x^2-2x+5) = 2((x-1)^2+2^2)\,.$$

په اړونده توګه صورت هم بڼه بدلیږي:

$$3(x+2) = 3((x-1)+3)\,.$$

له دې سره کېدی شي د ستاندارد افادې په توګه ټوټه یا تجزیه شي:

$$r(x) = \frac{3}{2}\,\frac{x-1}{(x-1)^2+2^2} + \frac{9}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2+2^2}\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int r(x)\,dx = \frac{3}{4}\,\ln\left((x-1)^2+4\right) + \frac{3}{4}\,\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c\,.$$

د ټاکلی انتیګرال $\int_1^3 r(x)\,dx$ لپاره سړی د پولو د په ځای اینووني له لارې لومړنی تابع لاس ته راوړي

$$\frac{3}{4}\left(\ln 8 - \ln 4 + \arctan(1) - \arctan(0)\right) = \frac{3}{4}\,\ln 2 - \frac{3}{16}\,\pi\,.$$

لیکونکي: هیولیګ،

ساده راشنل انتیګرالونه د زیاتواره قطب سره
Elementare rationale Integranden mit mehrfachen Polen

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره دی

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = -\frac{1}{n}(x-a)^{-n} + c\,.$$

د ډېرواره کمپلکس کنجوګیري قطبځایونو کې د اړونده مربع ضریبونو
$$q(x) = (x-a)^2 + b^2$$
لپاره باور لري

$$\int \frac{c(x-a)+d}{q(x)^{n+1}}\,dx = \frac{d(x-a)}{2b^2n\,q(x)^n} - \frac{c}{2n\,q(x)^n} + \frac{d(2n-1)}{2b^2n}\int \frac{dx}{q(x)^n}\,.$$

د ګراد یا درجې ردکشن د لومړنې تابع رکورزیو شمېرنه شوونې کوي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

لومړنی فرمول د $y = x - a$ او $dx = dy$ د د بدلون له لارې لاس ته راځي:
$$\int (x-a)^{-n-1}dx = \int y^{-n-1}dy = -\frac{1}{n}y^{-n} + c\,.$$

د دویم فرمول د ښوونې لپاره لومړی یو ساده د رکوزیون فرمول منځ ته راځي.

د ټوټه انتیګرالونې سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\int \frac{y^2}{(1+y^2)^{k+1}}\,dy\\ &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\left(\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} - \int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}}\right)\,.\end{aligned}$$

له دې کټمټوالی منځ ته راځي
$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}} = \frac{y}{2k(1+y^2)^k} + \frac{2k-1}{2k}\int \frac{1}{(1+y^2)^k}\,dy\,.$$

له دې سره اوس د بدلون $y = \frac{x-a}{b}$ سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}} &= \frac{1}{b^{2n+2}} \int \frac{dx}{((\frac{x-a}{b})^2+1)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{b^{2n+1}} \int \frac{dy}{(1+y^2)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{b^{2n+1}} \left(\frac{y}{2n(1+y^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{dy}{(1+y^2)^n} \right) \\ &= \frac{x-a}{2b^2n((x-a)^2+b^2)^n} + \frac{2n-1}{2b^2n} \int \frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^n} .\end{aligned}$$

ترم

$$\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\, dx$$

کیدی شي د بدلون $y = (x-a)^2 + b^2$ له لارې وشمیرل شي، ځکه چې په صورت کې د y مشتق ځای لري:

$$\begin{aligned}\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\, dx &= \frac{c}{2} \int \frac{dy}{y^{n+1}} \\ &= \frac{c}{2(-n)y^n} \\ &= -\frac{c}{2n((x-a)^2+b^2)^n} .\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د انتیګرال

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+9)^2}\, dx$$

لپاره په ټولیز فرمول کې د اینښووني وروسته د ډېرواره قطبونو سره د $a = 0, b = 3, c = 2, d = 1$ او $n = 1$ سره راکوي

$$\frac{-2}{2(x^2+9)} + \frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{1}{18}\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$$

او د بنه بدلون پسې

$$\frac{x-18}{18(x^2+9)} + \frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\arctan(\frac{x}{3}) + c\right)$$
$$= \frac{x-18}{18(x^2+9)} + \frac{1}{54}\arctan(\frac{x}{3}) + c'\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د راشنلتوابعو انیګرالونه Integration rationaler Funktionen

د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونې له لارې کېدی شي یو حقیقي راشنل تابع د لاندې درې ساده بنسټتیوپ جمعي

$$ax^n\,,\quad \frac{c}{(ax+b)^n}\,,\quad \frac{c(x-a)+d}{((x-a)^2+b^2)^n}$$

د $n \in \mathbb{N}_0\,,\ a,b,c,d \in \mathbb{R}$ سره انځور شي. د لومړنیو توابعو په مرسته کېدی شي د دې بنسټتوابعو لپاره د په خوښه راشنلتوابعو لپاره لومړنی توابع وټاکل شي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د

$$\int r(x)dx,\quad r(x) = \frac{x^5+10x^3+5^2-x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

د شمېرلو لپاره لومړی یو ټوټه کسر ټوټه ونه سرته رسوو.
د پولینوم وېش پسې ،

$$r(x) = x + \frac{2x^3+5x^2+8x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

اود مخرج ضریبونو جوړولو پسې

$$x^4 + 8x^2 - 9 = (x+1)(x-1)(x^2+9)\,,$$

لاس ته راځي

$$r(x) - x = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx}{x^2+9} + \frac{d}{x^2+9}\,.$$

که د اصلي مجراج سره ضب شي، نو لاس ته راځي

$$\begin{aligned} & 2x^3 + 5x^2 + 8x + 25 \\ = \quad & a(x-1)(x^2+9) + b(x+1)(x^2+9) + (cx+d)(x^2-1) \\ & x^3(a+b+c) + x^2(-a+b+d) + x(9a+9b-c) + 1(-9a+9b-d) \end{aligned}$$

او د ضريبونو د پرتلې $c=1$,$b=2$,$a=-1$ او $d=2$ له لاري.
يوګوني ترمونه کېدی اوس ساده انتيګرال شي:

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^5 + 10x^3 + 5^2 - x + 25}{x^4 + 8x^2 - 9} \\ = \quad & \int x\,dx + \int \frac{-dx}{x+1} + \int \frac{2dx}{x+1} + \int \frac{xdx}{x^2+9} + \int \frac{2dx}{x^2+9} \\ & \frac{1}{2}x^2 - \ln|x+1| + 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+9) + \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c. \end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ساين او کوساين د ضرب انتيګرالونه

د $a^2 \neq b^2$ لپاره د زياتون-يا جمعې قضيې څخه لاس ته راځي

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = -\frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c\,.$$

په ځانګړې توګه د ټولګڼيزو يا تامعددې a,b لپاره انتيګارل په پريوديکي انټروال $[-\pi,\pi]$ باندې ورکيږي. د ټوټه انتيګرالونې په مرسته لاس ته راځي

$$\int \sin^n(ax)dx - \frac{1}{na}\sin^{n-1}(ax)\cos(ax) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(ax)dx$$

$$\int \cos^n(ax)dx\ \frac{1}{na}\sin(ax)\cos^{n-1}(ax) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(ax)dx\,.$$

داسې کيدی شي اکسپوننت سوکښيو يا تل کم شي. د $n = 2$ لپاره په ځانګړې توګه لاس ته راځي

$$\int \sin^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + c$$

$$\int \cos^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + c\,.$$

په ځانګړې توګه باور لري

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi$$

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره .
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

که د لومړۍ کتمتوالي د ښي اړخ مشتق ونیول شي، نو سړی لاس ته راوړي
$$\frac{1}{2}\cos\left((a-b)\,x\right) - \frac{1}{2}\cos\left((a+b)\,x\right) .$$

د زیاتون – یا جمعي قضیه راکوي
$$\frac{1}{2}\left(\cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx) - \cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx)\right) =$$

$$= \sin(ax)\sin(bx)\,,$$

کوم چې د کیڼ لور د انتیګرال سره سر خ وري.

د $\cos^2(ax)$ او $\sin^2(ax)$ لومړنی تابع کېدی شي د ټوټه انتیګرال سره وشمېرل شي. د بېلګي په توګه دی

$$\int \sin(ax)\sin(ax)\,dx$$
=
$$-\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) - \int \left(-\frac{1}{a}\cos(ax)\right)\left(a\cos(ax)\right)\,dx$$
=
$$-\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) + \int \left(1-\sin^2(ax)\right)\,dx\,.$$

د $\int \sin^2(ax)\,dx$ پسي حل کونه غوښتونی لومړنی تابع راکوي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د کمپلکس تریګونومتیکي توابعو انتیګرالونه
Integration komplexer trigonometrischer Polynome
له

$$\int e^{\mathrm{i}kx}\,dx = \frac{1}{\mathrm{i}k}e^{\mathrm{i}kx} + c\,, \quad 0 \neq k \in \mathbb{Z}\,,$$

څخه د کمپلکس تريګونومتريکي پولينومونو لپاره لاس ته راځي

$$p(x) = \sum_{|k|\leq n} c_k e^{\mathrm{i}kx}\,,$$

داسې چې

dass

$$\int p(x)\,dx = c + c_0 x + \sum_{0\neq|k|\leq n} \frac{c_k}{\mathrm{i}k}e^{\mathrm{i}kx}$$

همداسې

sowie

$$\int_{\pi}^{\pi} p = 2\pi c_0$$

باور لري.

د اوېلر-مويورې فرمول په مرسته کېدی شي په دې توګه په خوښه پولينومونه

په $\sin(kx)$ او $\cos(kx)$ کې انتيګرال شي.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\,dx$$

شمdرلو ته د اوېلر-مويورې فرمول په مرسته انتيګرال په لاندې توګه ليکل کيږي

$$\frac{1}{16}\left(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}\right)^4 = \frac{6}{16} + \sum_{k\neq 0} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

او $2\pi\frac{6}{16} = \frac{3}{4}\pi$ د انتيګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي.

بديلي کيدی شي ټوټه انتيګرال وکارول شي:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \int \sin x \sin^3 x\, dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3\int \cos^2 x \sin^2 x\, dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3\int \sin^2 x\, dx - 3\int \sin^4 x\, dx.\end{aligned}$$

که په $\sin^4 x$ انتيګرال ښی لور ته راوړل شي، نو د درجې کموالی راکوي

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\, dx = -\frac{1}{4}\left[\cos x \sin^3 x\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx\,.$$

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx = \pi$$

په مرسته سرې $\frac{3}{4}\pi$ هم د انتيګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي
ليکونکي: هيوليک، پفايل

تريګونومتريکي بدلونونه **Trigonometrische Substitutionen**

د لاندې بدلونونو په مرسته کېدی شي د ساده الجبري انتيګراليدونکو يوه لړۍ اکسپليځيت يا په ښه هڅرګنده توګه وشمېرل شي.

سرلیک

$$\begin{array}{lll} x = a\sin t : & dx = a\cos t\,dt & \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t \\ x = a\tan t : & dx = a/\cos^2 t\,dt & \sqrt{a^2 + x^2} = a/\cos t \\ x = a/\cos t : & dx = a\sin t/\cos^2 t\,dt & \sqrt{x^2 - a^2} = a\tan t \end{array}$$

په بل حالت کې باید د ریښې د پروت محور متحولې لومړی په مربعیز تکمیلېدونکې بڼه راړل شي.
لیکونکي: هیولیک، پفایل

د انتیګرال

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

لپاره بدلون $x = \sin t,\ dx = \cos t\,dt$ او د پولو اعیارول $x = 0 \to t = 0$
او $x = 1/2 \to t = \pi/6$ راکوي

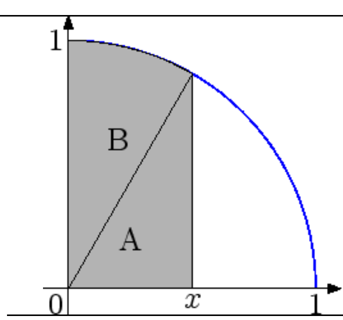
$$\int_0^{\pi/6} \cos^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}(\sin t\cos t + t)\right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\,.$$

ناټاکلی انتیګرال دی

$$\int \sqrt{1 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c\,.$$

انتیګرال کیدی شي د یوه ساده هندسي یا ځمککچیز اند(فکر) سره هم وټاکل شي

لکه د ځیرې ښخه چې لیدل کیږي، د $\sqrt{1 - x^2}$ د ګراف لاندې سطحه په دوه برخسطحو ودانه یا جوړه ده.



د درېګوډي سطحي مساحت $A = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2}$ دی   او د ګردی برخط یا قطاع مساحت د $t = \arcsin x$ کونج سره $B = \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\arcsin x$ ده. د دې سطحو د

مساحت جمعه کيدل غوښتونې سطحه راکوي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د انتيګرال

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

لپاره د بدلون $x = \tan t, \quad dx = 1/\cos^2 t\, dt$ څخه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt/\cos^2 t}{\tan t/\cos t} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln|\tan\frac{t}{2}| + c,$$

د کوم سره چې اخرنی مساوات د ښی اړخ د مشتق نيولو له لارې ازمايل کېدی شی.
د بېرته بدلون له لارې لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln|\tan(\frac{1}{2}\arctan x)| + c.$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= \ln|\tan\frac{\pi}{4}| - \ln|\tan\frac{\pi}{8}| \\ &= \ln 1 - \ln\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right) \\ &= \ln(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د انتيګرال

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

لپاره بدلون $y=(x-3)/2$, $dx=2dy$ راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}\,.$$

د پسي بدلون $y=\frac{1}{\cos t}$, $dy=\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt, \sqrt{y^2-1}=\tan t$ سره n لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1}{\cos t}+\tan t\right| + c\,,$$

د کوم سره چې اخرنی برابروالی د ښی خوا د مشتق نیوني له لارې ازمایل کیدی شي.
د په څټ یا معکوس بدلون پسې د

$$\sin t=\sqrt{1-(1/y)^2}, t=\arccos y=\arcsin\sqrt{1-(1/y)^2}$$

سره لومړنی تابع دلاس ته راځي

$$\ln\left|y+y\sin\left(\arccos\frac{1}{y}\right)\right|+c= \qquad \ln\left|y+y\sqrt{1-\left(\frac{1}{y}\right)^2}\right|+c$$

$$=\ln\left|\frac{x-3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right|+c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ساین او کوساین راشنل توابع
Rationale Funktionen von Sinus und Cosinus

د بدلون

$$x = \tan(t/2)$$

سره د يوه په خوښه راشنل تابع r لپاره لاس ته راځي

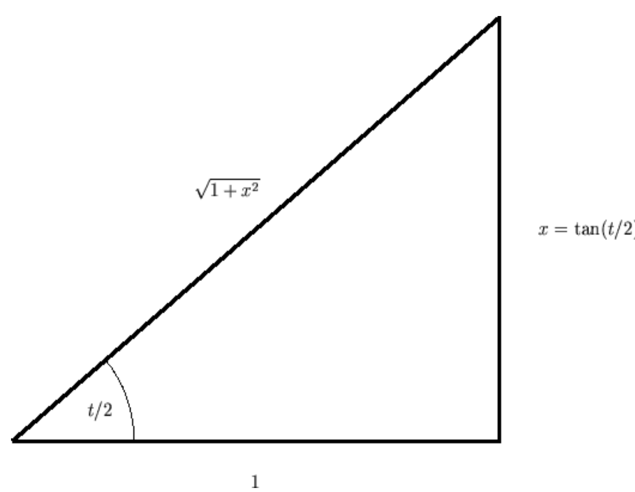
$$\int r(\cos t, \sin t)\, dt = \int r\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right)\frac{2}{1+x^2}\, dx\,.$$

له دې سره ترېگونومتريکي تابع کېدی شي په يوه راشنل انتيگرال واړوي، کوم چې د ټوټه کسر ټوټه ونې سره شمېرل کېدی شي.

ليکونکي: هيوليگ، اپريش

لکه د څيرې څخه چې ليدل کيږي، باور لري

$$\cos(t/2) = 1/\sqrt{1+x^2}\,, \quad \sin(t/2) = x/\sqrt{1+x^2}$$



له دې لاس ته راځي

$$dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2(t/2)}\,dt = \frac{1}{2}\,(1+x^2)\,dt$$

همداسې

$$\cos t = \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2) = \frac{1-x^2}{1+x^2}\,,$$

$$\sin t = 2\cos(t/2)\sin(t/2) = \frac{2x}{1+x^2}\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، اپريبش

د بدلون $x = \tan(t/2)$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{1+x^2}{2x}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} = \ln|\tan(t/2)| + c.$$

په اړونده تګه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$= \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c\,.$$

د $x = \tan(t/2)$ د بېرته بدلون پسې لاس ته راځي

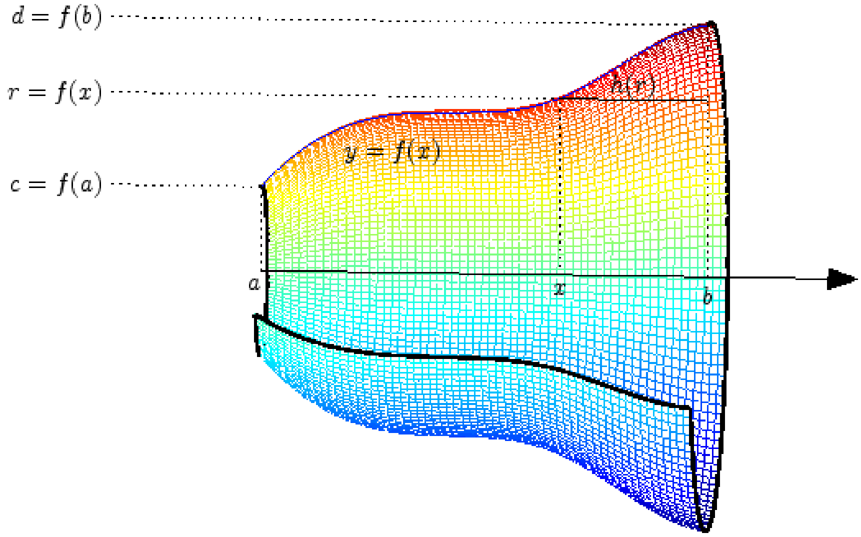
$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1+\tan(t/2)}{1-\tan(t/2)}\right| + c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، اپريبش

د څرخیدونو بدنونو ډکی یا حجم **Volumen von Rotationskörpern**

د V ډکی حجم د x په محور جوړ شوي بدن د تابع ګراف $r = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$
د څرخون له لارې کېدی شي انتیګرېشن له لارې په ګردی ډوله غوښي
یا تقاطع باندې شمېرل کیدی شي:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \, .$$

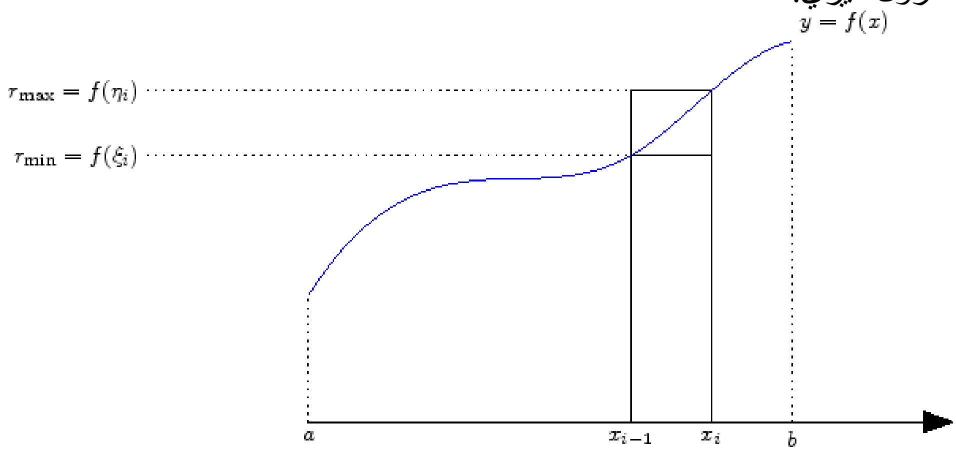


بدیلي کېدی شي د توتې پوښ باندې انتیګرال شي.

$$V = \pi c^2 (b - a) + 2\pi \int_c^d r \, h(r) \, dr \, ,$$

چیرته چې c همداسې d مینیمال همداسي ماکسیما وړانګه r او $h(r)$ په بدن کې
خوندي توتې پوښ تول جګوالی دی د وړانګې r سره. دا واریانت له تولو د همغږیز
وړانګې تابع f لپاره موخ وره ده.
لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د لومړي فرمول د ښووني لپاره په ځېره کي کښل شوی اپروکسيميشن يا نږدېوالی کارول کيږي.



يوه ټوټه کوني Δ يوه انتروال $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 \ldots n,$ لپاره کېدی شي ډکی(حجم) د يوې توټي

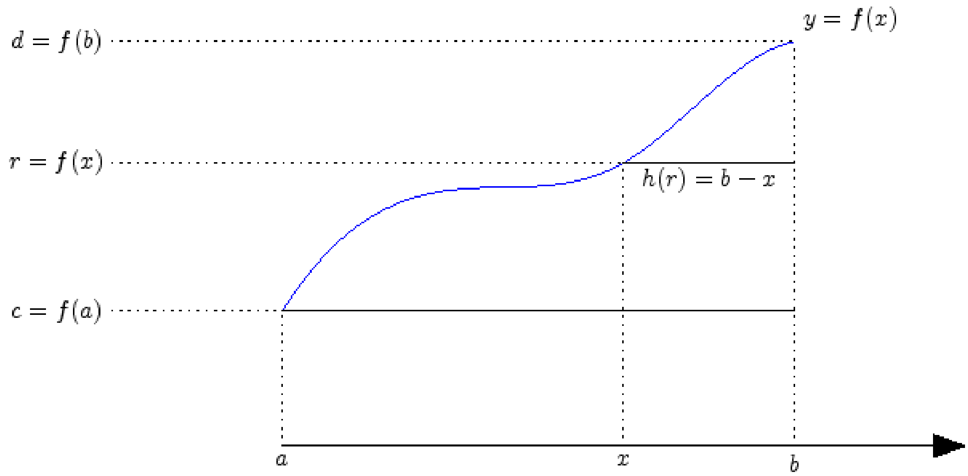
له لارې د مينيمال وړانګي $f(\xi_i)$ سره او يوې توټي د ماکسيمال وړانګي $f(\eta_i)$ سره رابند شي. د ټول حجم V لپاره نو بيا باور لري

$$\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)^2 \Delta x_i \leq V \leq \pi \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)^2 \Delta x_i \,,$$

د $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ سره. دواړه دباندني ترمونه د ريمن-جمعه ده، چې د انتيګرال ارزښت لور ته ځي، يعني باور لري

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

ددويم فرمول د ښووني لپاره لومړی نيول کيږي، چې f همغږيز جګېدونکی دی.



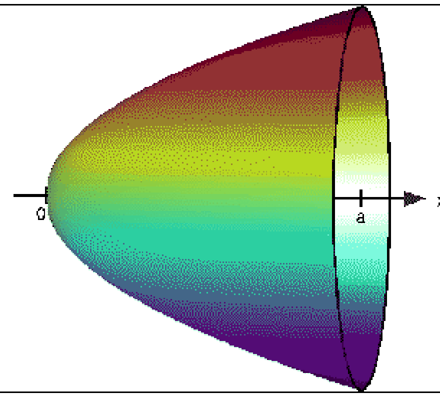
د $dr = f'(x)\,dx$, $r = f(x)$ همداسي د $x = f^{-1}(r)$ سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
2\pi \int_{c=f(a)}^{d=f(b)} h(r) r\,dr &= \pi \int_a^b \underbrace{(b-x)}_{u}\underbrace{2f(x)f'(x)}_{v'}\,dx \\
&= \pi\,(b-x)f(x)^2\Big|_a^b + \pi \int_a^b f(x)^2\,dx \\
&= \underbrace{-\pi(b-a)c^2}_{\text{innerer Zylinder}} + \pi \int_a^b f(x)^2\,dx\,,
\end{aligned}$$

څه چې دويم فرمول په ګوته کوي.

د همغږيز تيټېدونکي توابعو لپاره کېدی شي په ورته توګه مخ ته ولاړ شو. په توليز حالت کې دا د همغږيزوالي ورشو د تونه کوني له لارې لاس ته راځي

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

	دا څیره شوی پارابولویید د کرږي یا منحني $y=\sqrt{x}$ د څرخون یا څرخېدو له لارې د x په محور څېره شوی .

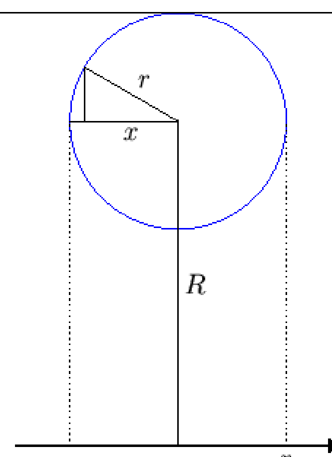
د څرخیدونکي بدن د څرخیدني قانون سره سم ډکی یا حجم دی

$$\pi\int_0^a\left(\sqrt{x}\right)^2\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a=\frac{1}{2}\pi a^2\,.$$

بدیلي د توتي پوښ بادي انتیګرلوني له لارې لاس ته راوړي

$$2\pi\int_0^{\sqrt{a}}r(a-r^2)dr=2\pi\left[-\frac{1}{4}(a-r^2)^2\right]_0^{\sqrt{a}}=\frac{1}{2}\pi a^2\,.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

	یو توروس (د ګردی یا داېرې کړی (Torus دیوې ګردی دڅرخون څخه منځ ته راځي د وړانګې r سره په یوه محور د منځ ټکي څخه په R واټن.

ډکی یا حجم د دوه څرخیدونکو بدنونو د کمښت څخه شمیرل کیږي

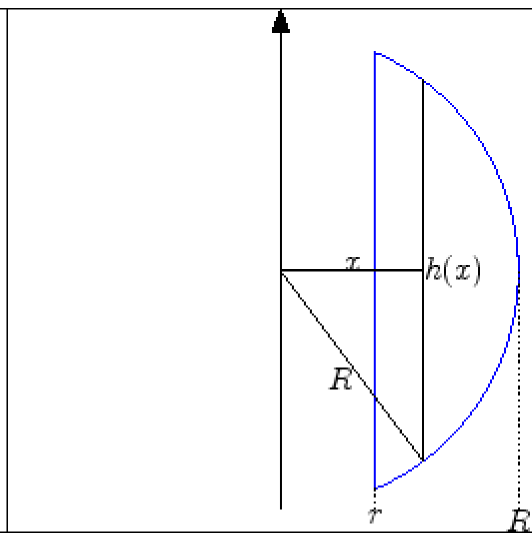
$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(R+\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} \left(R-\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx$$

$$= 4\pi \int_{-r}^{r} R\sqrt{r^2-x^2}\, dx .$$

د بدلون $x = r \sin\varphi$, $dx = r \cos\varphi\, d\varphi$ سره لاس ته راځي

$$V = 4\pi Rr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, r \cos\varphi\, d\varphi$$

$$= 4\pi Rr^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 Rr^2 ,$$



ځکه چې

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2} .$$

لکه چې څېره شوی یو له غونډاري د R په وړانګې په پراته محور د وړانګې r سره رابیله شوې توته ده.

د دې لپاره چې ډکي یا حجم شمېرو، د وړانګې $x, r \le x \le R$ سره په توته پوښ انتیګرال نیولکیږي . د $R = 5, r = 3$ لپاره د $h(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ سره لاس ته راځي

$$V = 2\pi \int_r^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = 2\pi \left[-\frac{2}{3}\left(R^2 - x^2\right)^{3/2}\right]_r^R$$
$$= \frac{4}{3}\pi(25-9)^{3/2} = \frac{256}{3}\pi\,.$$

د يوې کږې يا منحني اوږدوالی **Länge einer Kurve**

د يوې کږې L اوږدوالی د ناپرېکېدونکي مشتقوړ پارامتريک کولو $t \mapsto p(t)$ سره، $a \le t \le b$ ، دی

$$\int_a^b |p'(t)|\,dt\,.$$

پّ ځانګړې توګه د يوې کږې لپاره په xy -سطحه د پارامتريک انځورونې $p(t) = (x(t), y(t))$ سره باور لري

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt\,.$$

په ځانګړې توګه ديوه تابع $y = f(x)\,,\ x \in [c,d]$ ګراف لاندې اوږدوالی لري

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx\,.$$

د $p(a)$ او $p(t)$ ترمنځ د کږو ټوټو اوږدوالی ،

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)|\,d\tau\,,$$

کيدی شي د کانونيکي کږې پارمتر په توګه وکارول شي. سرې داسې په نامه د کږې اوږدوالي پسې پارمتري کونه لاس ته راوړي :

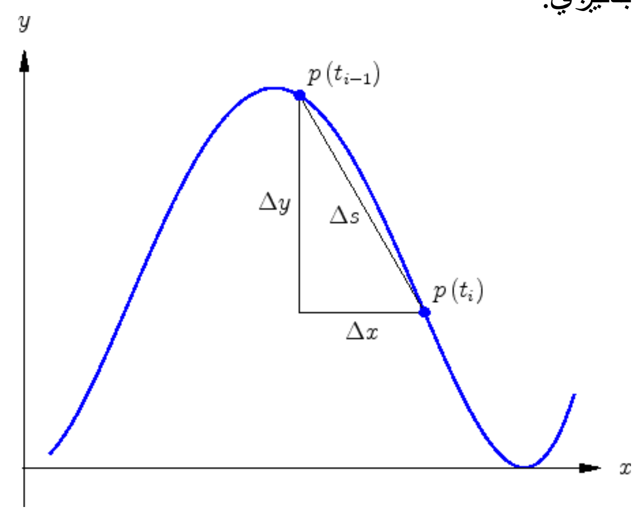
$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1 .$$

د نورمي تانجنت کرږې په بنسټ د کانونيکي پارمتري کوني لپاره باور لري

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s))\, ds$$

د C د L اوږدوالي سره.
ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

د يوې مسطحې کرږې د اږودوالي شميرنې لپاره د پارامتر انټروال بيه ټوټو وېشل کيږي او يو برخه انټروال $[t_{i-1}, t_i]$ لپاره کږه د پای ټکو د تږونکربنې له لارې ځای بدليږي يا بدليږي.



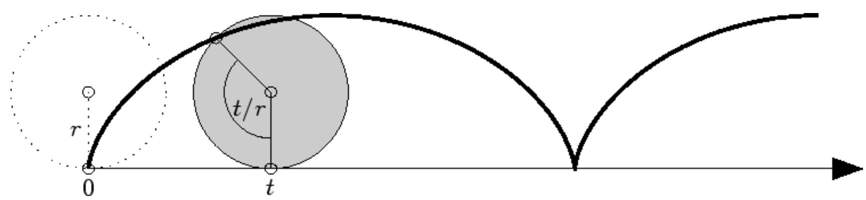
د انتګرال د منځ ارزښت جملې سره بيا باور لري:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(p_1'(\xi_i))^2 + (p_2'(\eta_i))^2}\, \Delta t_i ,$$

د $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ سره . دا اخرنۍ ويېنه يا افرده د ورکړ شوي انتيګرال د يمن- زياتون يا ـجمعې دی.
په ورته تګه د ډېرپراخېدونکي يا ډېربعديز ې کرږې لپاره د مشتق نورم د انتيګرال په بڼه راکوي.
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

که د r وړانګې سره يوه ګردۍ يا داېره د په محور ګرځوو يا وځرخوو، نو ژي تکی يو څيکلوييد تشريح کوي.



د سرچينې لپاره د پيل ټکي په حيث

$$
\begin{aligned}
x(t) &= t + r\cos(3\pi/2 - t/r) = t - r\sin(t/r) \\
y(t) &= r + r\sin(3\pi/2 - t/r) = r - r\cos(t/r)
\end{aligned},
$$

د $t \in [0, 2\pi r]$ سره ، د يوې ګرږې ليندې يو پارمتري کونه ده.
د ليندې اوږدوالی دی

$$L = \int_0^{2\pi r} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi r} \sqrt{(1-\cos(t/r))^2 + (\sin(t/r))^2}\, dt\,.$$

د بدلون $s = t/r$, $dt = r\, ds$ او کټمټوالي

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\,, \quad 1 - \cos(2\varphi) = 2\,\sin^2\varphi$$

سره لاس ته راځي

$$L = \quad r\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos(s))}\,ds = r\int_0^{2\pi} 2\sin(s/2)\,ds = 8\,r\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

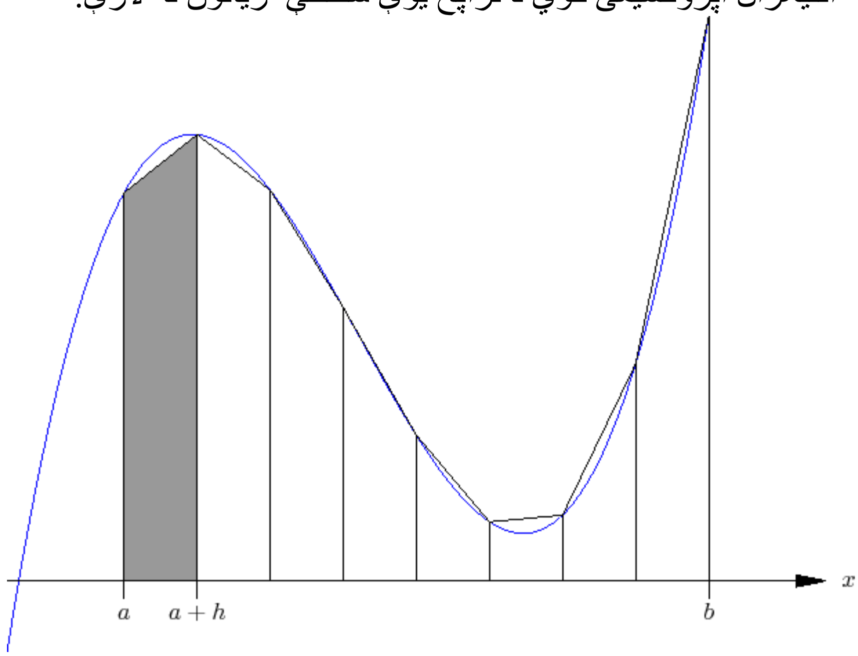
د ذوزنقې قانون **Trapez-Regel**

نږديوالی

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx s_h f =$$

$$= h(f(a)/2 + f(a+h) + \cdots + f(b-h) + f(b)/2)$$

انتيګرال اپروکسيمی کوي د تراپخ يوې سطحې زياتون له لارې.



د يوه دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ تابع د ناتيکاوي پاره باور لري:

$$s_h f - \int_a^b f = \frac{b-a}{12} f''(r) h^2,$$

د $r \in [a,b]$ لپاره.

په ټیکه توګه ناټیکاوی د خویو یا هوارو توابعو لپاره ګاونډیز یا اسیمپټوټیکي وده لري

$$s_h f - \int_a^b f = c_1 (f'(b) - f'(a)) h^2 + c_2 (f'''(b) - f'''(a)) h^4 + \ldots$$

له f او h څخه خپلواکې ثابتې c_j سره. له دې څخه لاس ته راځي، چې د تراپچ قانون د $(b-a)$-پریودیکي توابعو لپاره خورا دقیق دی. ناټیکاوی ګړندی د صفر په لور ځي نسبت هر h-توان ته.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

په یوه ا نتروال ناټیکاوی دی

$$\frac{h}{2}(f(0) + f(h)) - \int_0^h 1 \cdot f = \int_0^h (t - h/2) f'(t)\, dt.$$

بیا ټوټه انټیګرالونه او منځ ا رزښت جملهې استعمال راکوي

$$-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h) f''(t)\, dt = \underbrace{-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h)\, dt}_{h^3/12}\; f''(r).$$

په ټوټه انتروال باندې د جمعې پسې سړی لاس ته راوړي

$$\frac{1}{12} h^3 \sum_{i=1}^{n} f''(r_i).$$

جمعه کیدی شي د

$$n\ \min f'' \le \sum f''(r_i) \le n\ \max f''$$

له لارې اټکل شي. د ترمنځارزښت جملې پسې بالاخره لاس ته راځي

$$\sum f''(r_i) = nf''(r) = \frac{b-a}{h} f''(r)\,,$$

$r \in [a,b]$

د یوه سره.

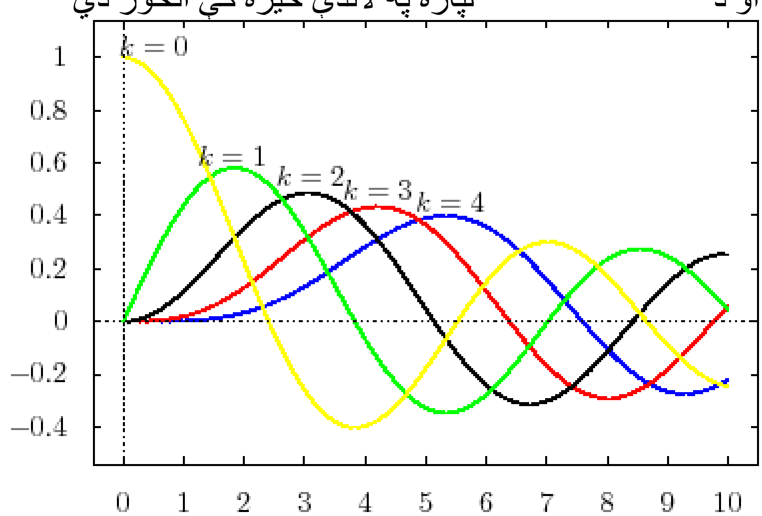
د ګاونډ یا مجانب ناټیکاوي ودي ښوونه اوړده ده. دا د باقي غړي په تل ټوټه انټیګرالونه ولاړه ده او د ژی ترمونو په یوه مناسبه کارونه یا استعمال.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د بسل-تابعBessel-Funktionen $\mathcal{J}_k$ د ټولګنیز k لپاره دا لاندې انټیګرال انځورونه لري

$$\mathcal{J}_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(kz - x\sin(z))}_{f(z)}\, dz$$

او د $k = 0, \ldots, 4$ لپاره په لاندې ډول کې انځور دي



د تراپخ قانو شمیرلو سره شړی کاروي، چې

$$\frac{1}{2}\left(f(a)+f(a+2\pi)\right)=f(a)$$

او دا چې f جوړه دی. که ټکي

$$z_i=-\pi+\frac{1+2i}{2}\,\frac{2\pi}{n},$$

وټاکو ، نو جمعه

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)=2\sum_{i=n/2}^{n-1} f(z_i)$$

دې جوړه شي.

لکه د $\mathcal{J}_1(2)$ لاندې نږدېونه یا اپرکسیمیشن د $n=4,8,\dots 64$ ټکو سره ښایي، پولې ته تلنه فوقالعاده ګړندی ده.

n	
4	$\underline{0}.45464871341284084769800993295587$
8	$\underline{0.576}55235602472460377030331810649$
16	$\underline{0.576724807756}15774487465153090293$
32	$\underline{0.5767248077568733872024482422691}3$
64	$\underline{0.5767248077568733872024482422691}3$

دا د ذوزنقي قانون جګ تیکاوی د خوی پریودیکي انتیګرال لپاره یوپیک دی او کېدی شي د ناټیکاوي د یوهه ټیکې انځورونې ، د اویلر-ماکلورن-Euler-Maclaurinschen د جمعي فرمول مدلل کړای شي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د ګاوس فرمول Gauß-Formel

د n –مې درجې یا نظم د ګاوس فرمول په نږدې بڼه یا ډول د یوه تابع انتیګرال ټاکي د انتیګرال د انتربولیشن پولینوم له لارې د n-مې درجې د لاګرانژ پولینومونو په صفرځایونو $x_1 < \cdots < x_n$ کې:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(x_i\right)$$

د w_i سره د لاګرانژپولینوم

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

په انتوال $[-1,1]$ باندې.

فرمول د $< 2n$ Grad درجې پولینوم لپاره ټیک دی او د ټولو له مخه د تحلیلی توابعو لپاره خورا ټیک دی. ټول وزنونه w_i زیاتیز یا مثبت دي، او تکیه ځایونه x_i په انتګریشن انتروال $(-1,1)$ کې پراته دي. دا د ګاوس پارامتر تر 10 -م نظم پورې جدولي شوی او په لاندې جدول کې ورکړ شوی دی

n	x_i	w_i
2	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1
3	0 $\pm\frac{1}{5}\sqrt{15}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$
4	$\pm\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$ $\pm\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{36}\sqrt{30}$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{36}\sqrt{30}$
5	0 $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245-14\sqrt{70}}$ $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245+14\sqrt{70}}$	$\frac{128}{225}$ $\frac{161}{450}+\frac{13}{900}\sqrt{70}$ $\frac{161}{450}-\frac{13}{900}\sqrt{70}$

د ګاوس پارامتر x' او w' د خوښي انتګریشنانتروال $[a,b]$ لپاره د کرښیز تراسفورمېشن له لارې لاس ته راځي:

$$x_k' = a + \frac{b-a}{2}(x_k+1), \quad w_k' = \frac{b-a}{2} w_k .$$

لومړی ښنایو، چې نږدې ټاکنه د $< n$ Grad درجې د پلوینوم f لپاره ټیک دی. دا د لاندې څخه لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b p_k(x)\, dx \right) f(x_k) = \int_a^b \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_k(x) f(x_k)}_{=q(x)}\ dx .$$

داچې p_k نسبت و ټکو x_k ته د لاګرانژ پولینومونه دي، q په دې ټکو کې و f ته انترپولیشنپولینوم دی او داسې له f سره همغږیز کیږي.

د ځانګړو ټکو ټاکلو له لارې کېدی شي حتی د $< 2n$ Grad درجې پولینوم f ټیک انتیګرال شي.

دې ته f د پولینومونېش په مرسته داسې لیکو

$$f(x) = p(x)s(x) + r(x)$$

د n Grad درجې لژندر-پولینوم p او د. $< n$ Grad دجې پولینومونه r او s.

که $p(x_k) = 0$ په پام کې ونیول شي، نو لکه پورته لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b p_k(x)\, dx \right) \left(p(x_k)s(x_k) + r(x_k) \right)$$

$$= \int_a^b \sum_{k=1}^{n} p_k(x) r(x_k)\, dx = \int_a^b r(x)\, dx .$$

له بلې خوا باور لري

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b (p(x)s(x)+r(x))\,dx\\ &= \int_a^b p(x)s(x)\,dx + \int_a^b r(x)\,dx\\ &= \int_a^b r(x)\,dx\,,\end{aligned}$$

ځکه چې p د $< n$ Grad درجې پولينوم ته اورتوګونال دی.
د وزن زاتيزوالی يا مثبتوالی د کټمټوالي څخه لاس ته راځي

$$w_k = \int p_k = \sum_i w_i\, p_k(x_i) = \sum_i w_i\, p_k(x_i)^2 = \int p_k^2\,.$$

د اخرنې تر مخ يا وړاندې مساوات د $p_k(x_i) = \delta_{k,i}$ له امله باور لري، او اخرنی، داچې p_k^2 $< 2n$ Gradدرجه لري، نو د ګاوس-فرمول له لارې ټيک انتيګرال کيدی شي.
د ګاوس-فرمول د روښانه ولو ته لاندې جدول د مختلفو انتيګراندونو يا انتيګرال کېدونکو نږدې ټاکل يا اپروکسيميشن ښايي.

n	$\int_1^1 e^{-x^2}\,dx$	$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$	$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,dx$
1	2.000000	2.000000	0.968245
2	1.433062	1.848571	0.891006
3	1.498679	1.851976	0.879356
4	1.493334	1.851936	0.876417
5	1.493663	1.851937	0.875306

په اخرني انتيګرال کې ورو پولې ته تلنې دليل په $x = 1$ کې زينګولاريتي ده.

د ګاوس-فرمول فقط خويو يا هوارو glatt (يو تابع خوی يا هوار تابع يو ماتماتيکي تابع دی، چې ناپرېکېدونکی او ناپای زيات مشتقوړ وي توابعو ته ډېر دقيق دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ناڅرګند يا نا معلوم انتيګرال Uneigentliches Integral

د يو په يوه انتروال $[a, b)$ توته ډوله ناپرېکېدونکی تابع f لپاره کېدی شي د

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b-} \int_a^c f$$

له لارې د انتيګرال کليمه په ناپای انتروالونو ($b = \infty$) او نامحدودو انتيګراليدونکو($f(b) = \pm\infty$) وغزول شي.
په ورته توګه زينګولاريتي په لاندې يا په دواړو پولو مطالعه شي. په اخرني حالت کې بايد پوله ارزښت د پرلپسې $c \to a+$, $d \to b-$ د ټاکنو څخه خپلواک وي.

د يوه ناټاکلي انتيګرال د شتون لپاره پوره کېدونکي د f مطلق انتيګرالوړوالی دی، دا په دې معناچې

$$\int_c^d |f(x)| \leq \text{ثابت}$$

د ټول برخه انتروالونو $[c, d] \subset (a, b)$ لپاره.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ناټاکلي انتيګرال د شميرلو لپاره

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx\,.$$

د $b > 0$ لپاره ټاکي

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b = -e^{-b} + 1\,.$$

له دې سره سړی لاس ته راوړي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+1\right) = 1\,.$$

که پوله ارزښت ساده شمېرل کېدونکی وي، نو سړی پسې تړلي ناټاکلې پولې کاروي، داپه دې معنا چې سړی لیکي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 0-(-1) = 1$$

او دا په راوړل شوې بیلګه کې.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ناټکلو انتیګرالونو

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx\,.$$

لپاره د بدلون $y = \ln(x)$, $dy = dx/x$
سره سړی لاس ته راوړي

$$\int_2^b \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{y^r}\,dy = \begin{cases} \dfrac{(\ln(b))^{1-r}-(\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,, & r \neq 1 \\ \ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2))\,, & r = 1 \end{cases}.$$

په دې پسې د $b\to\infty$ لپاره پوله ارزښت ټیک هلته شتون لي، که $r > 1$ باور ولري. په دې حالت کې دی

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)^r}\,dx = -\frac{(\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ناټاکلي انتيګرال

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx\,.$$

لپاره انتيګرالېدونکی په پورته انتيګرال پولي $x = \frac{\pi}{2}$ سيګولار دی. سړی د $0 < b < \frac{\pi}{2}$ لپاره لاس ته راوړي

$$\int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \left[-2\sqrt{\cos(x)}\right]_0^b = -2\sqrt{\cos(b)} + 2\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \left(-2\sqrt{\cos(b)} + 2\right) = 2\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ناټاکلي انتيګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx\,.$$

لپاره

$$\arctan(x) + \ln(1+x^2)$$

د انتيګراليدونکو بنسټ- يا ساده تابع دی. ناټيکه ايښوونه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\arctan(x) + \ln(1+x^2)\right]_{-b}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(2\arctan(b)\right) = \pi$$

د ناټاکلي انتيګرال لپاره راکوي. د تعريف سره سم د ناټاکلي انتيګرال پورته او کښته پولې بايد يو له بل څخه خپلواک و څېړل شي. داچې نه پوله ارزښت

$$\lim_{c\to-\infty}\int_c^0 \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to-\infty}\left(-\arctan(c)-\ln(1+c^2)\right)$$

او نه پوله ارزښت

$$\lim_{d\to\infty}\int_0^d \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx \quad = \lim_{d\to\infty}\left(\arctan(d)+\ln(1+d^2)\right)$$

شتون لري، دا ناټاکلی انتیګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+2x}{1+x^2}\,dx$$

هم شتون نه لري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د نامعلوم انتیګرال لپاره د پرتلې قضیه
Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale

که f د g لپاره یو مایورانت وي، داپه دې معناچې

$$|f(x)| \le |g(x)| \qquad a < x < b$$

باور لري، نو د g د مطلق انتیګرالوړوالي څخه د انتیګرال

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

شتون لاس ته راځي

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

فقط د پوله ارزښت

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b-} \int_a^c f$$

شتون ترڅېړنې لاندې نيول کېږي. په نورو حالتونو کې په ورته توګه مخ ته ځو.
تابع

$$r(c) = \int_a^c |f|$$

برابرغږېزه جګېدونکې ده او پورته لور ته د $\int_a^b |g|$ له لارې رابنده يا محدود ده. په دې پسې د r لپاره $c \to b-$ پولې ته تلونکی دی او له دې امله $\int_a^b |f|$ شتون لري.
تابع

$$s(c) = \int_a^c (f + |f|)$$

همم برابرغږېزه جګېدونکې ده او د $2\int_a^b |g|$ له لارې رابنده يا محدود. پسې s هم د $c \to b-$ لپاره پولې ته تلونکی دیاو له دې امله $\int_a^b (f + |f|)$ شتون لری.
له دې څخه د

$$\int_a^b f = \int_a^b (f + |f|) - \int_a^b |f| \cdot$$

شتون لاس ته راځي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د پرتلع تلبع لپاره زيات وخت $f(x) = x^r$ کارول کېږي.
د $0 < a < b < \infty$ لپاره دی

$$\int_a^b x^r\,dx = \begin{cases} \dfrac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}, & r \neq -1 \\ \ln(b)-\ln(a), & r = -1\,. \end{cases}$$

دا ترم د $b \to \infty$ لپاره تیک هلته پولې ته تلونکی دی، که $r < -1$ باور ولري، دا په دې معناچې انتیګرال

$$\int_1^\infty x^r\,dx$$

شتون ولري تیک د $r < -1$ لپاره.

د $a \to 0+$ لپاره تیک هلته پوله ارزښا لاس ته راځي، که $r > -1$ باور ولري، دا په دې معنا چې انتیګرال

$$\int_0^1 x^r\,dx$$

تیک د $r > -1$ لپاره شتون ولري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د دې لپاره چې د نامعلوم انتیګرال شتون د

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

په حیث وښایو ، سړی دا انتیګرال په دوه برخو توته کوي.

دا چې $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ دی، نو لاندې انتیګرال شتون لري

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx\,.$$

په انتروال $[1,\infty]$ د نامعلوم انتيګرال لپاره د ټوټه انتيګرالوني له لارې لاس ته راځي

$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\,.$$

د $b\to\infty$ لپاره لومړی ترم د $\cos(1)$ په لور ځي او دويم د پرتلې قضيې له مخې پولې ته ځي، ځکه چې

$$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \le \left|\frac{1}{x^2}\right|\,.$$

سره له دې چې د تابع کوم ورکړ شوی لومړی – يا بنسټيز تابع نه لري، کېدی شي د نامعلوم انتيګرال ارزښت وټاکي. .

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

ګاما تابع يا - فنکشن Gamma-Funktion

د

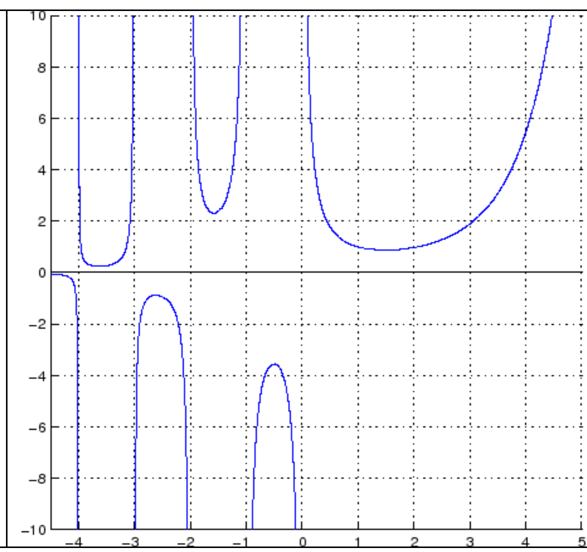
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt,$$

$$x\in(0,\infty)\,,$$

له ارې تعريف شوی ګاما تابع فنکشنل مساوات پوره کوي

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,.$$

په ځانګړې توګه $\Gamma(n+1)=n!$, $n\in\mathbb{N}$. دی.



د فنکشنل مساواتو په مرسته کېدی شي ګاما-تابع د کمیز پروت یا x محور لپاره هم تعریف کړی شي. لکه د جوړ شوي تابع ګراف څخه چې لیدل کیږي، دا ساده قطبونه د $x = 0, -1, \ldots$ لپاره لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

انتیګرال

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

فقط د $0 < x < 1$ لپاره پرابلم جوړوي. په دې حالت کې انتیګرال د $t^{x-1} e^{-t} \le t^{x-1}$ له امله د پرتلې قضیې له مخې پولې ته تلونکی دی.

انتیګرال

$$\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

هم د پرتلې قضیې په بنسټ شتون لري او اټکلونه $t^{x-1} e^{-t} \le t^{-2}$

د پوره لوي t لپاره بسیا کوي.
د ټوټه انتیګرال سره لاس ته راځي

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_{t=0}^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t}\, dt$$
$$= 0 + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt = x\Gamma(x)\,,$$

او له دې سره د پوره اینډکشن په مرسته او $\Gamma(1) = 1$ د $n \in \mathbb{N}$ لپاره لاس ته راځي

$$\Gamma(n+1) = n!\,.$$

د ګاما تابع د ګاوس تعريف

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

د تابع يوه روښانه ونه په ټول $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$ اجازه زاکوي.

.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د کوشي اصلي ارزښت Cauchyscher Hauptwert

د يوه په $x = c \in (a,b)$ کې زيګولار تابع f لپاره سړی

$$\mathrm{CHW}\int_a^b f = \lim_{h\to 0+}\left(\int_a^{c-h} f + \int_{c+h}^b f\right)$$

د کوشي اصلي ارزښت په څېر تعريفوي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ټيپيکي بېلګې په څېر د کوشي اصلې ارزښت

$$\mathrm{CHW}\int_{-a}^{a} x^k\,dx\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,,$$

شمېرل کيږي.

د $k=-1$ لپاره دی

$$\int_{-a}^{-h}\frac{dx}{x} + \int_h^a \frac{dx}{x} = \ln|h| - \ln|a| + \ln|a| - \ln|h| = 0\,.$$

د انتيګراليدونکي د انتی سيمتري په دليل د CHW ورکيږي په يو سيمتري انتروال لپاره.

د $k \neq -1$ لپاره دی

$$\int_{-a}^{-h} x^k\,dx + \int_{h}^{a} x^k\,dx = \frac{1}{k+1}\left((-h)^{k+1} - (-a)^{k+1} + a^{k+1} - h^{k+1}\right)$$

د ناجوړه یا طاق k لپاره دا ا فاده یا ویښه او له دې سره د کوشي اصلي ارزښت صفر دی. د زیاتیز یا مثبت جوړه(حفت) k لپاره دا د $2/(k+1)a^{k+1}$ په لور هڅیږي.
په ساده توګه د کوشي اصلي ارزښت د رګولار انتیګرال سره سره خوري یا یوعړیز کیږي. د $k=-2,-4,\dots$ لپاره برعکس یا د دې په خلاف هم انتیګرال او هم د کوشي اصلي ارزښت شتون نه لري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د انتیګرال لاندې مشتقول **Differenzieren unter dem Integral**

انتیګرال $\int_a^b f(x,t)\,dx$ د ناپریکېدونکي تابع f لپاره د t ناپریکېدونکی تابع دی. که f_t ناپریکېدونکی وي، ن و باور لري

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b f_t(x,t)\,dx\,.$$

لیکونکي: هیولیګ،کنیش

د دې لپاره چې د

$$g(t) = \int\limits_a^b f(x,t)\,dx$$

ناپریکېدنه په ټکي $t_0 \in (c,d)$ کې وښایو، له دې څخه کار اخلو، چې f په ولاړګوډیز $[a,b]\times[c,d]$ کې برابرډوله ناپریکېدونکی دی. هر $\varepsilon > 0$ ته له دې امله یو $\delta > 0$ شتون لري داسې چې

$$|f(x,t)-f(x,t_0)|<\varepsilon$$

باور لري د ټولو x او $|t-t_0|<\delta$ لپاره. د دې t لپاره نو دی

$$|g(t)-g(t_0)|\le\int_a^b |f(x,t)-f(x,t_0)|\,dx<\varepsilon(b-a)\,.$$

له دې سره g ناپرېکېدونکی دی.

که f_t ناپرېکېدونکی وي، نو لاس ته راځي

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\int_a^b \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\,dx=$$

$$=\int_a^b \frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t+s)\,ds\,dx\,,$$

د کوم سره چې

$$|f_t(x,t+s)-f_t(x,t)|<\varepsilon$$

دی د ټولو $h<\delta\,.$ لپاره.

له دې امله کېدی شي د دفرنسل وېش کمښت و

$$\int_a^b f_t(x,t)\,dx=\int_a^b \frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t)\;ds\,dx$$

ته د

$$(b-a)\frac{1}{h}\,h\,\varepsilon$$

له لارې اټکل شي او د h سره د صفر په لور هڅيږي.

ليکونکي: بوسسلر، هيوليک،کنيش

بسل- توابعBessel-Funktionen دا لاندې د انټيګرال انځورونه لري

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)\,dt, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

دا دا لاندې د دفرنځيال مساوات پوره کوي

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0 .$$

دا کېدی شي د انتيګرا لاندې د دفرنځيال سره وازمايل شي. لومړی دی

$$J_n'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \underbrace{\sin(x\sin t - nt)}_{v}\,\underbrace{\sin t}_{u'}\,dt$$

$$\frac{n}{\pi}\int_0^\pi \cos t\cos(x\sin t - nt)\,dt - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \cos^2 t\cos(x\sin t - nt)\,dt$$

$$J_n''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)\sin^2 t\,dt$$

که $J_n'(x)$, $J_n(x)$ او $J_n''(x)$ د دفرنځيال مساوات په کيڼ لور کښيښول شي او له π سره ضرب شي، له کوم سره چې $\xi = x\sin t - nt$ کيښول شي، نو لاس ته راځي

Se

$$-x^2\int_0^\pi \cos\xi\sin^2 t\,dt - x^2\int_0^\pi \cos^2 t\cos\xi\,dt + nx\int_0^\pi \cos t\cos\xi\,dt + x^2\int_0^\pi \cos\xi\,dt - n^2\int_0^\pi \cos\xi\,dt$$

$$= nx\int_0^\pi \cos t\cos\xi\,dt + x^2\int_0^\pi \cos\xi\,dt - n^2\int_0^\pi \cos\xi\,dt$$

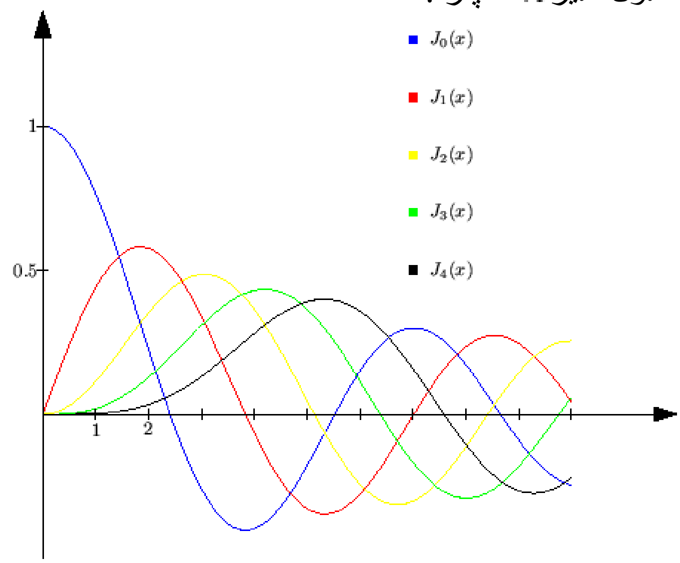
$$= n\int_0^\pi (x\cos t - n)\cos(x\sin t - nt)\,dt$$

سرليک

$$=$$

$$n\sin(x\sin t - nt)\big|_0^\pi = 0$$

د ټول ګنيز n لپاره.



څېره 5 لومړني د بسل توابع ښايي .
ليکونکي: بوسسلر ، هيوليک،کنيش

Leibniz-Regelلايبنيځ-قانون

د ناپرېکېدونکو مشتقوړ توابعو $a,\ b$ او f لپاره دی

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x,t)dx + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t)$$

ليکونکي: بوسسلر ، هيوليک،کنيش

که انتيګرال له $g(t)$ سره وښوول شي او ځا په ځا کړو

$$V(t) = (a(t), b(t), t)\,,\quad U(c,d,e) = \int_c^d f(x,e)\ dx\,,$$

نو $g = U \circ V$ دی او فرمول د ځنځیري قانون له لارې لاس ته راځي:

$$g'(t) = U'(V(t))\, V'(t), \quad V' = (a', b', 1)\,.$$

له دې سره د U ټوټه مشتقونه دا لاندې دي

$$U_c(c,d,e) = -f(c,e),$$

$$U_d(c,d,e) = f(d,e), \quad U_e(c,d,e) = \int_c^d f_e(x,e)\, dx\,,$$

او د $g'(t)$ لپاره په افاده یا ویېنه کې اینوولو سره غوښتنه راکوي.
لیکونکي: بوسسلر، هیولیګ،کنیش

د لایبنیځ فرمول سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dt}\int_0^{\sqrt{t}} e^{x^2/t}\, dx = \int_0^{\sqrt{t}} -\frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\, dx + e\frac{d}{dt}\sqrt{t}$$

$$= -\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

بیا مشتقول یې راکوي

$$\frac{d}{dt}\left(-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}\right) =$$

$$\int_0^{\sqrt{t}} 2\frac{x^2}{t^3}e^{x^2/t} + \frac{x^4}{t^4}e^{x^2/t}\, dx - \frac{e}{2t^{3/2}} - \frac{e}{4t^{3/2}}$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2tx^2 + x^4}{t^4} e^{x^2/t}\, dx - \frac{3e}{4t^{3/2}}$$

بديلي لومړی کېدی شي بدلون $x = \sqrt{t}y$, $dx = \sqrt{t}\, dy$ ولیکي او دا انتیګرال لاس ته راوړي

$$g(t) = \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy$$

د کره یا ځای په ځای پولو سره . نو کېدی شي

$$g'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\, dx$$

او

$$g''(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy = -\int_0^1 \frac{1}{4t^{3/2}} e^{y^2}\, dy$$

$$= -\int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{4t^2} e^{x^2/t}\, dx$$

په ساده توګه وشمیرل شي.
د لومړي مشتق لپاره د فرمول مساوات روښانه نه دي، خو کېدی شي اسان د ټوټه انتیګرالونې سره و ازمایل شي:

$$-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}} = \qquad -\frac{1}{2t}\int_0^{\sqrt{t}} \underbrace{x}_{v}\underbrace{\frac{2x}{t}e^{x^2/t}}_{u'}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$-\frac{1}{2t}\left[xe^{x^2/t}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{t}} + \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t}e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$= \qquad \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t}e^{x^2/t}\,dx$$

د دويم برابرون مشتق کېدی شي په ورته توګه و ښوول شي.
ليکونکي: هيوليګ،کنيش

په t پسې د انتيګرال د مشتق

$$\int_{t^2}^{e^t} \frac{\cos(tx)}{x}\,dx$$

لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int_{t^2}^{e^t} -\sin(tx)\,dx + \frac{\cos(te^t)}{e^t}\,\frac{d}{dt}e^t - \frac{\cos(t^3)}{t^2}\,\frac{d}{dt}t^2 \\ = \frac{1}{t}\cos(te^t) - \frac{1}{t}\cos(t^3) + \cos(te^t) - \frac{2}{t}\cos(t^3) \\ = \left(\frac{1}{t}+1\right)\cos(te^t) - \frac{3}{t}\cos(t^3)\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ،کنيش

د دفرنشل مساوات

$$u'(t) - \lambda u(t) = f(t)$$

یو زره یا کوچنی حل u_p کېدی شي دهوموجېن مساوات حل $\exp(\lambda t)$ د سوپر پوزېشن له لارې و کتل شي:

$$u_p(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds\,.$$

د لايبنيڅ فرمول په بنسټ دی

$$u_p'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\, ds = \int_0^t \lambda \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\, ds + f(t)\frac{d}{dt}t$$

$$= \lambda \int_0^t \lambda e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds + f(t)$$

په دفرنشل مساوات کې د $u_p(t)$ او $u_p'(t)$ د اينوولو له لارې کېدی شي حل تصديق شي.

ليکونکي: هيوليګ،کنيش

د نامعلومو انتيګرالونو مشتقول

Differenzieren uneigentlicher Integrale

که توابع f او f_t ناپرېکېدونکې وي او د $t \in (c,d)$ لپاره باور ولري

$$|f(x,t)| \leq \psi(x), \qquad \int_0^\infty \psi < \infty$$

$$|f_t(x,t)| \le \varphi(x), \qquad \int_0^\infty \varphi < \infty,$$

نو کيدی شي د انتيګرال د نخښې لاندې مشتق ونيول شي:

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty f(x,t)\,dx = \int_0^\infty f_t(x,t)\,dx\,, \quad c < t < d\,.$$

په ورته توګه ويناوې د محدودو انتيګرالېدونکو سره د نامعلومو انتيګرالونو لپاره باور لري.

ليکونکي: هيوليک،کنيش

د دې لپاره چې وښايو، چې

$$\int_0^\infty \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h} - f_t(x,t)\,dx$$

د $h \to 0$ لپاره د 0 په لور هڅيږي، انتيګرال توټه کيږي:

$$\int_0^\infty \ldots = \int_0^b \ldots + \int_b^\infty \ldots$$

دويمه زياتېدونکې يا د جمعې غړی د نيونې له مخې د

$$\left|\int_b^\infty \frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t+s)\,ds - f_t(x,t)\,dx\right| \le \int \frac{1}{h}\,h\varphi(x) + \varphi(x)\,dx = 2\int_b^\infty \varphi(x)\,dx$$

له لارې اټکل شي. دا انتيګرال له $< \varepsilon$ کيږي. د پوره لويې b لپاره. د دې b لپاره لومړی زياتېدونکی $< \varepsilon$ دی د پوره کوچني h لپاره.، ځکه چې د پای انتيګريشن انتروال لپاره د انتيګرال لاندې مشتق کېدی شي.

ليکونکي: هيوليک،کنيش

د ګاما تابع مشتقونه

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\, dx, \quad t > 0\,,$$

دي

$$\Gamma^{(k)}(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} (\ln x)^k \, dx\,.$$

مشتقيدنه په حق ده، ځکه چې انتيګرالېدونکي $f(x,t) = e^{-x} x^{t-1} (\ln x)^k$ يو
برابرډوله مايورانت لري:

$$|f(x,t)| \le e^{-x}\, x^{r-1}\, x^k \le c e^{-x/2}, \quad x \ge 1$$

او

$$|f(x,t)| \le x^{1/r-1} |\ln x|^k \le c x^{1/(2r)-1}\,, \quad x \le 1$$

د $t \in [1/r, r]$ لپاره. د دې لپاره وکارول شو، چې

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0, \quad \lim_{x\to 0+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$$

د ټولو $\alpha, \beta > 0$ لپاره

ليکونکي: بوسسلر، هيوليګ،کنيش

دا د پارامتر په واک کې انتيګرال

$$g(t) = \int_0^\infty \sin(xt)\, \frac{dx}{x}$$

مطلق پولې ته تلونکی نه دی، له دې امله برابر ډوله مايورانت هم نه لري.
د لته مو د t پسې د انتيګرال لاندې يو فورمال دفرنځيشن يوه تضاد ته لاربښودوي.
فورمال مشتق

$$g'(t) = \int_0^\infty \cos(xt)\, dx$$

يو پولې ته نه تلونکی انتيګرال دی. له بلې خوا يو واريابل بدلون , $y = xt$
$dy = t\,dx$

سرلیک

راکوي

$$g(t) = \int_0^\infty \sin(y)\,\frac{dy}{y} = \frac{\pi}{2}\,.$$

مشتق په دي لاس ته راوړنه کېمتې صفر دی.
لیکونکي: بوسسلر، هیولیګ،کنیش

د ۲۰۱۱ ز ک د مارچ لسم
بری د لوی څښتن سره دی.

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د کټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

٣ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ١

٧ – انالیزې ٢

٨ – کرښیز الجبر

٩ - د شمیرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل انالیز

١٢ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

١٣ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

١۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

onn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲-   داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزۍ پښتو او عربي + درۍ ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویبونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څېر- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)