شمیرپوهنه (رياضي)

د اتم ټولګي لپاره

ليکونکی: ډاکتر ماخان (میرې) شینواری

2016

جرمني د بن ښار

شميرپوهنه (رياضي)

د اتم ټولګي لپاره

ليکونکی: ډاکتر ماخان (ميرزي) شينواری

زما بريښنا پته :

Smakhan1946@gmail.com

نيو ليک

سريزه ۴

ريښتوني يا ريل ګڼونه ۶

ايراشنل – يا ناماتيز ګڼونه... ..۹

ريښتوني يا حقيقی ګڼونه ۹

مات – يا کسري شميرنه ۱۵

د ماتونو د يو پ بل اړونه........ ۱۶

د ماتونوشکيرنلارې ۲۲

د څلورې ريښې نيونې ۲۴

ريښه او توان د ريشنل جګګې ... ۳۴

ريښه بيا يا تکرار ۴۲

توان اوريښه بيا ...له بل کتاب څخه ۵۱

مخنخښې قاعده ۵۴

الجبري کلمي ۸۵

اووښتوني يا واريابلې ۹۲

ترمونه ۹۴

د بينومفرمولونه ۹۸

تناسب يا تجارتي شميرنه ۱۰۱

په سلوکېشميرنه ۱۰۶

ورته واليڅيرونه ۱۱۹

افيني څيروني ۱۳۶

کرښيزبرابرون ۱۴۴

کرښيزبرابرونونه شي پوښتنو ته ... ۱۵۲

کرښيز برابرونونه د يوې
اووښتوني سره ۱۶۱

کرښيز برابرونونه له بل کتاب ۱۶۳

.اړيکې او فنکشن يا څيرونه ۱۸۶

د کرښيز توابعوپهڅټ ... ۱۹۵

ستريو متري ۲۱۲

تجارتي شميرنه تکرار ۲۶۱

د شينواري ليکنې ۲۸۴

د ليکونکي ژند ته لنډه کتنه ۲۸۹

سريزه

دا نړدې څلوېښت کاله کيږي، چې زموږ هيواد هراړخيزه ستونزې لري او هر څه دې اوږده جنګ را خراب کړي

ګرانو هيوادوالو!

د نورو نيمګرتياو په څير زموږ درسي نصاب - په تيره شميرپوهنه - هم ډېره د ناسمون سره مخامخ ده.

که دا کار د دولت په څلورديوالي ونه شو، نو زه به وهڅيږم، چې دا ما ليکلي کتابونه د ن ج له لارې له تاسو سره شريک کړم او دا د نړۍ په ستاندارد.

د ښوونځي په کتابونو کې د ستااتيستيک او احتمالوالي درس نور هم خورا ستونځمن دی، چې زه ترې دلته تيريږم او د ښوونځي د تيرو کتابونو څخه هم هيله ده- که زما کتابونه وړاندې نه شو- چې دابرخې يا سمې يا له درسي نصاب څخه ووېستل شي. په دې برخه باور وکړی، چې نه ليکونکی بوهيږي او نه بل لوستونکی پرې پوهيدلی شي.

زما په دې د ښوونځي کتابونو کې دا برخې نه شته، خو که وخت مې پيدا کړ دا به هم سمې کړم. ما په دې هکله د احتمالوالي او ستاتيستيک کتابونه ژباړلي او همداسې مې په هندسه کې هم احتمالوالي شميرنه راوړي او د ستاتيستيک يو ګتاب مې هم ژباړلي، چې زه به يې په مناسبوخت کې د ليدلو پتې ګرانو لوستونکو ته د ن ج له لارې ورکړم.

دا زما ځني کتابونه او په ډېره مننه د www.ketabton.com ن ج کې ګرانولوستونکوته وړاندې شوي.

د شميرپوهنې سم اند يا منطق زموږ د نصاب په لسم ټولګي کې راغلی او هغه هم لکه ستاتيستيک او ... د پوهيدلو نه دی. دا- لکه څنګه چې بريښي- دومره پيچلی نه دی، نو زه دا درس له دې امله د اوم ټولګي په سرکې راوړم، هيله ده چې ستونځې به رامنځ ته نه کړي.

زه چې ترڅو ستاسو په منځ کې وم او د کار یم، ستاسو چوپړ کې به اوسم. راځئ، چې ستونځوبې(د ستونځو حل) سره شریک کړو.

زه دې لیکنو او پرې قضاوت کولو ته ځانله یم.

تکرار په کې زیات دی، خو د موصوع، نه د خودیونې. وایې چې تکرار د زده کړې مورده، نو پروا نه لري. کمښتونه هم په کې شته. سره د ټولو نیګرتیاوو دا د ښوونځي له پاراه ډېره ګټوره او زه چې پوهیږم، یواځنۍ سمه لیکنه ده.

دا چې سمه لیکنه ، د ځان له امله نه وایم، دګرانو زده کوونکو او ښوونکو له پاره وایم. دا زما لیکنې نه دې، دا ما له نورو کتابونو څخه رانیولي، چې باید سمې وي.

زه به وهڅیږم، چې درسمي ښوونځي کتابونو نا سمونونه له تاسو سره شریک کړم، خو ډېر لږ، یواځې داسې د یادونې له امله.

په ډېره خواشینۍ باید ووایم، چې ملاتړی نه لرم، چې د لیکنې ستونځې راته په ګوته کړي.

د نصاب د غړو څخه مې هیله ده، چې ګټه ترې پورته کړي او په بنسټ یې د ښوونځي لیکنې سمې کړي.

د خوندیونې ټیکاوي کې پوښتنه نه شته، ځکه چې ما هم د نورو لیکنو څخه راټول کړي او هڅیدلی یم، چې سم یې ترې راونیسم.

باور وکړی زه د دې لیکنو سره لږ ستړی شوی یم، نو ځنې ځایونه به داسې نیمګړي پاتې وي، چې ستاسو پوهیدنې ته کوم زیان نه رسوي، د هغې بخښنه دې وي.

کله تمرینونه کم وي او کله تکرار راځي، چې دا بد مه ګڼۍ.

په دې کتابونو ما دومره ځان بوخت کړی، چې باورکړی مغذ مې ترې نورموړ دی، نو له دې امله یې پای نور پایوم یا ورته د پای ټکی ږدم.

١ - ریبنتوني یا ریيل ګڼونه(Real numbers (reele Zahlen

(فرانسوي: په ریښتوني شته – یا- موجود ګڼونه)

١ . ١ - له اوم ټولګي څخه داسي لړ راوړنه.

له دې د مخه چي خپل لوست ته راګرځو، یو ځل لنډ دا په اووم ټولګي کې د شمیرلو بنسټیزو لاروته داسې د یوې یادونې په څیر ګوته نیسو.

د لاندې لیکنو په شمیرنټخښو لیکل دې د ګرانوزده کوونکو دنده وي.

اول: پیداپښتي ګڼونه
موږ.پیداپښتي ګڼونه وڅیرل،چې لاندې شمیرلارې په کې باور لري:

الف: د انډول لار : هریو پیداپښتي ګڼ یا د یوبل پیداپښت ګڼ سره برابر دي،یا ترې لوي دی اویا ترې کوچنی دی. ګران زدهکوونکي دې دا په شمیرننخښو ولیکي.

ب – د جمعي – یا زیاتونلار:

یو : په پیداپښتي ګڼونو کښیو بې اغیزه توکی یعنې صفر شته، چې د هر بل پیداپښتي ګڼ سره زیات شي پخپله همغه ګڼ ورکوي.

دوه: د هرودوه پیداپښتي ګڼونود پاره یودریم پیداپښتي ګڼ شته چې د دواړود زیاتون څخه لاس ته راځي.

درې : دوه پیداپښتي ګڼونه د زیاتون په حالت کېځای بدلولیشي (کموتاتیو لار)

۳ + ۴ = ۴ + ۳

څلور: په زياتون کې د اسوشياتيو لارباوريده:

$4 + (5+2) = (4 + 5) +2 = 4 +5 + 2$

پ - کمونلارې:

د دوه ګنونو کمون په پيداښتي ګنونو کې تيک هلته بار لري، چې له ترېکموني يې له کمونى کوچنى وي. يعني

x-y=z باورلري، تيک هلته که x < y وي. (،،تيک هلته،، په دې مانا، چې مخ ته پسې اوله پسې څخه د مخه لار لاس ته راځي).

6 -2 =4

ت - د ځل – يا ضربلارې : په لاندېې کېدې ګران زده کوونکي دا په کوته شوې لارې په شمرننخښو وليکي.

يو : په پيداښتي ګنونوکې يوناپيلى توکى داسې په نامه يوى شته،چې د هر بل پيداښتي ګن سره په ځل يا ضرب کې ترې همغه ګڼ لاسته راځي: ۱,۵ = ۵

دوه: په ځل يا ضرب کې کموتاتيو قانونو (بدليدنلار)باور لري.

درې : په پيداښتي ګنونو کې اسوشياتيولارباوريده.

څلورم: په پيداښتي ګنونوکې وزياتون ته دېستريبوتيولار باورلري يعني

$A(b+c) = ab+ac$

$3(4+5) = 3.4 + 3.5$

پنځه:د صفرسره ځلبرابرپه صفردي: ويې ليکى

ت : د وېش لارې يا – قوانين: په پيداښتي ګڼونو کې وېش تيک هلته باورلري،چې:

يو: پرووېشونی صفرنه وي.

دوه: وېشونی د پرووېشونی ډېر ځله وي.

$$\frac{x}{y} \Leftrightarrow y \neq 0; x = ay; a \in N$$

دويم: تولګڼونه؛

د تولګڼونوسره هم بلد يو، چې دا لاندې شميرلارې يې رايادوو:

اول : دا پورته لوستل شوي د پيداښتي ګڼونو تولې شميرلارې په تولګڼونو کې باوري دي او برسيره پردې کمون بې له بنديزه په کې باورلري، يعنې د هرودوه تولګڼونو لپاره کمون تعريف دی.

دويم:هرزياتيز تولګڼ له پاره يو کميز تولګڼ شته،چېسره ټرل يې صفر يه ځان پسې لري.
يعنې   0= 3-3

دريم: په ځل اوويش کې د مخنخښې اغيز: که کميزه مخنخښه د زياتيزې مخنخښې سره ځل شي،نو لاسته راوړنه يې کميزه ده اودوه زياتيزې اويا دوه کيزې مخنخښې په ځل اوويش کې سره په کارونه کې راوړل شي، نو لاس ته راوړنه يې زياتيزه ده.

بيلګې دې يې ګرن لوسنوکي راوړي.

د ريم : راشنل - ، کسري،يا ماتګڼونه يا که غواړی نسبتي ګڼونه:

دا پورته راولشوي شميرلارې په کسرګڼونو کې باوري دي او پرته له وېش هم بې بنديزه په کې باورلري، چې ماتلاندې صفرنه وي.

وس راځو خپل د درسپيل ته.

۱ . ۱   ايراشنل – يا ناماتيز ګڼونه Irrational numbers

موږ ګڼونه لرو، چی هغه راشنل – یا کسري ګڼونه نه دي یا د (د دوه ټولګڼونو) د مات په ډول نه لیکل کیږي، یانی که موږ د 2 ګڼ یا عدد ریښه(جذر) $\sqrt{2}$ ونیسو، نو داسی یو ګڼ لاس ته راځي، چی هغه په لسمیزه توګه پاي ته نه شي رسیدی.

$\sqrt{2}$ د ...1,41421356 سره

د اویلر ګڼ e د ...2,71828182 سره

ګردی ګڼ (Pi) π د ...3,14159265 سره

د کسري یا راشنل ګڼونوپه څېر یا مخالف ، چې د پای یا پریودیکي لسمیزګڼونو په څیر انځوریدلی شي. ایراشنل - یا ناکسري ګڼونه هغه دي، چې لسمیزه انځورونه یې ناپای ډېر ځایونه په ګوته کوي اوپریودیکي نه دي.   ناکسري ؛ونه په لسمیزه توګه د شمیروني په مخ یا پرده نه ځاییږي یعنې ټل غزیږي.

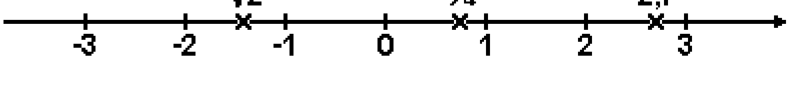
۱ .۲ - ریښتوني - یا حقیقي – یا رییل ګڼونه

Real numbers (reele Zahlen)

(فرانسوي: په ریښتوني شته یا موجود)

د راشنل او ایراشنل ګڼونوټولنی ته رییل ګڼونه وایو(دا چې ټولنه څه شی دی، په ډیری پوهنه یا سیټتیوري کې به ولوستل شي) . ۰

موږ د ګڼونو د ښوولو لپاره لاندې ګڼونکرښه باسو په کومه کې چې له صفر سره پیدایښتي- ، ټول- راشنل-،اراشنل ګڼونه کښل شوي دي یانې   ریل ګڼونکرښه



دا لاندې راوړلشوی درسد ښوونځي لپاره نه دی،خو زه يېدلته راوړم، چېستاسو ښوونکيېپکتلی شی:

پورته مو په ګوته کړل چې $\sqrt{2}$ يو ناکسريز ګڼ دی.

دا لاندېبرخه د ښوونځي له پاره ښايي ستونځمنه وي، خو لوستل يې ښه دي.

کيدی شي ، چې $\sqrt{2}$ ټيک د ماتګنو په انتروالونو کې بندشي(دا کارونه د ،، ډېر انتروال بندول،، په نامه بلل کيږي) د بيلګې په توګه په لاندې ډول د لسميز ماتو له لارې.

څرګنده ده چې ګڼ $\sqrt{2}$ د 1 او 2 ترمنځ بايدپروت وي , $1 < \sqrt{2} < 2$, څکه چې لرو $1^2<2<2^2$, که د کامې وروسته لمړی ځاي ورسره ونيول شي ، نو د ازمائلو له لارې پيدا کيږي

چې $1,4<\sqrt{2}<1,5$, څکه چې لرو $(1,4)^2 = 1,96 < 2 < (1,5)^2 = 2,25$
که د کامې وروسته دوهم ځای هم په نظر کې ونيول شي نو پيدا کيږي
$1,41 < \sqrt{2} < 1,41$,څکه چې داسې دی $(1,41)^2 \times 1,9881 < 2 < (1,41)^2=2,0164$
په دې ترتيب لاندې پرله پسې د ديوالي کولو (د اينتروال يو په بل کې بندولو) په بنسټ لاس ته راځي چې په هر ډول دوام ورکولی شو.

$$1 < \sqrt{2} < 2$$
$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$
$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$
$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$
$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$$

.

.

$$1,414213562 < \sqrt{2} < 1,414213563$$

له دې ځایه بیرته هغه خپل د ښوونځي درس پیل کیږي.

په ریښتوني – یا ریّیل ګڼونډېرۍ کې دا د مخه په نوروګڼونوکېلوستل شوي ټول شمیرقوانین باور لریاو برسیرهپردې په ریل ګڼډېرۍ کې د زیاتیزګڼ رېښه تعریف ده یا د ریښې اېستنې لار په کې باوري ده. یعنې ریلګڼونه ټول د شمیرلواواندازه کولو لارې پوره کوي.

که ولرو: $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$

ګورو چې $x^2 + 1 = 0$ د ریيلګڼ حل یا اوبې نه لري. دلته د دې ګڼونو پراخوالي ته اړتیا پېښېږي چې کمپلکسګڼونو ته پراخ شي، او په ۵ –امه برخه کی به تر څېړنی لاندې ونیول شي.

۱ . ۳ - (له نورو -) رابیلشوی د شمیر قواعد

په دې برخه کې د رییل ګڼونو لپاره رابیل شوي قوانین څیړو، چې د مخه تیرو قواعدو باندې ولاړ دي٠ دلته درانده ټکی دا لاندې دي:

- په رییلګڼونو کی څلور بنستیز شمیرډولونه په ځانګړي توګه په لاندې ډول د نوکانو افادی (وینی) سره شمیرنه (نوکان اینوول)٠ له زیاتون ګډ فاکتورونه یا ځلووني له نوکانو راوستل، د بینومیال فرمولونه٠

- پر صفر ویشنه د ناشونوالی په پام کی ساتنه

- له ماتو (کسرونو) سره شمیرل او په ځانګړي توګه لنډول (واړه کول) پراخول یا غزول او د اصلي ګډ ماتلاندې (مخرج المشترک) جوړول٠ د داسی ماتلاندی(مخرج) چې له ټاکلو او ناټاکلو ترمونو څخه جوړ وي٠

نومونې: کسر ته مات وایو او صورت او مخرج ته موږ ماتباندې او ماتلاندې وایو، چې سملاسي یې په مانا هم پوهیږو٠

ټولې هغه شمیرنلارې، چې دې تیرود ګڼونو ټولګیو کې باورلري طبعاً په ریښتینوګڼون کې هم باوریدي او دا لاندې ترې لاس ته راځي:

جمعه او تفریق (زیاتون او کمون)

د زیاتون او کمون بنستیزو قوانینو څخه، چېدمخه مو لوستلي، لاندې لاس ته راځي

$$- (-a) = a \, , \; . \quad a - b = a + (-b),$$

$$(a+ b + c \ldots -c -d- \ldots) + (e+f + \ldots -g-h- \ldots) = a+b+ \ldots -c-d- \ldots +e+f+ \ldots -g-h- \ldots$$

دا دا مانا لري، چی که چیرې د نوکانو دباندې زیاتوننخښه (د جمع علامه) وي، نو د نوکانو څخه ویستلو کې ګڼ خپله مخنخښه نه بدلوي٠ که د نوکانو د باندی کموننخښه (منفي نخښه) وي، نو د ګڼونو له نوکانو ایستلو په حال کی د نوکانو دننه نخښی بدلیږي٠ یانی کموننخښه زیاتوننخښه او زیاتوننخښه کموننخښه کیږي٠ بیلګه یې لاندې ګورو

$$(a +b+ \ldots -c-d- \ldots)-(e+f+ \ldots -g-h-..)= a+b+ \ldots - c-d- \ldots ..-e-f- \ldots \ldots +g+h+ \ldots$$

په همدې ترتیب کیدی شي نوکان هم ځاي پرځای شي٠

دلته باید مطلق ارزښت هم په ګوته شي ، چی په ګڼکرښه د صفر څخه د یوه رییلګڼ واټن په ګوته کوي، د کوم لپاره چی لیکو :

لکه د بیلګېپه توګه

۱ . ۳ .الف - مطلق عدد یا - ګڼ یا بې اړیکو ګڼ   (absolut number)

دا په دې مانا، چې د دې ګڼ سره زیاتیزه او کمیزه نخښه یا مثبت او منفي نه لیکل کیږي یا یون(واحد) هم ورسره نه وي، دا تیک او تیک یو ګڼ ښایي او بس٠

$|a| = a \; ; \; a > 0$

$|a| = 0 \; ; a = 0$

$|a| = -a \; ; \; < 0$

یانې که a زیاتیزه یا مثبت وي،نو a پخپله لیکواو که a کمیزه یا منفي وي، نو a- لیکواو که a صفر وي نو د هغه لپاره 0 لیکویا دا اندې

$|3|= 3$

$|0| = 0$

$|-3|= -(-3)| =3$

۱ ۰ ۲ ۰ ۲ ځل(ضرب)

د مخ ته تیرو قوانینوبرسیره د ځل لپاره لاندې د مخنخښی قوانین باور لري:

$(+a)(+b) = +ab, (+a)(-b) = -ab , (-a)(-b) = + ab, (-a)(+b) = -ab$

که چیرته ډیر نوکبندونه راګرځیدلی وي، نو دا د ځل قانون پل په پل یا ګام په ګام پر مخ ځی

بیلګه:

$$(a+b)(c-d)(e-f-g) = (ac - ad + bc - bd)(e-f-g)$$

$$= (ace-acf-acg-ade+adf+adg + bce-bcf-bcg-bde-bdf+bdg)$$

د بینومځانګړې لارې: د ځانګړي حالت په توګه د بینوم پیژندل شوی فرمولونه راوړو:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a-b) = a^2 - b^2$$

ګران لوستونکی کولی شي، چې پورته فرمولونه وښايي، چې ټيک دي.

دا په لاندې ډول کارولکيږي :

بيلګه:

$$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2 .$$

$$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2 = (by - ax)^2.$$

$$16u^2 - 2v^2 = (4u + 2 v) (4u - 2 v)$$

۱ ۰ ۲ ۰ ۳ ويش

په پام دې کې ولرو، چې b:a د $a = 0$ لپاره کوم مفهوم نه لري۰ پر صفر ويش ناشونی دئ

په ويش کی نوکبندول د زياتون، کمون او ځل په څير ساده نه کيږي۰ په ويش کی د زياتون په ډول ليکل شوی هر توکی په ماتلاندې ويشل کيږي:

بيلګه ۳ ۰ ٤ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 12 abc) : 3ab = a - 2b + 4c$$

يا داسي

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{12abc}{3ab} = a - 2b + 4c$$

د $ab \neq 0$ لپاره

دې لاس ته راوړنې(نتيجې) ته سرې د ګډو ځلوونو يا فاکتورونو يا خپلواکنوک څخه وتلو له لارې هم رسيدلی شي:

$$3a^2b - 6ab^2 + 12\,abc = 3ab(\,a - 2b + 4c)$$

تمرينونه يې څه په اووم ټولکي شته

۱ . ۵ – لاندې اېرېشنل ګنونه د اينتروال بندولو له لارې نژدې تر پنځه ځايونو ټيك پيدا کړئ!

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

تمرينونه نورهم د درس په پای کېراغلي

دا لاندې برخه بيا لږ تکرار راوړو.

۲ - مات – يا کسرشميرنه

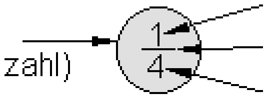
0.1.1.پيلبيلګه

دا برخه په تيرو ټولګيوکې پوره لوستل شوي، خودلته يېبيا هم لږتکرار اړيين بولم.

يوه کټره شوکولادې دې په څلورو کسانو و وېشل شي. هر يوه کس ته څلورمه برخه رسيږي..

د دې لپاره ليکو:

$$1:4 = \frac{1}{4}$$

صورت(ماتباندې) ماتکرښه مخرج(ماتلاندې)		ماتګڼ (- عدد)

د وېشنې بیلګې:

کسر (مات)	د کسانو تعداد	د تختو تعداد(
$3:4=\frac{3}{4}$	4	3
$7:9=\frac{7}{9}$	9	7

کسر یا د کسر عدد(مات یا ماتګڼ):

یو کسر یو عدد دی د دې بڼې سره $=\frac{\text{صورت یا ماتباني}}{\text{مخرج یاماتلاني}}$

صورت او مخرج تام اعداد (ټولګڼونه) ($\in Z$) او مخرج د صفر سره نامساوي ($\neq 0$) دی

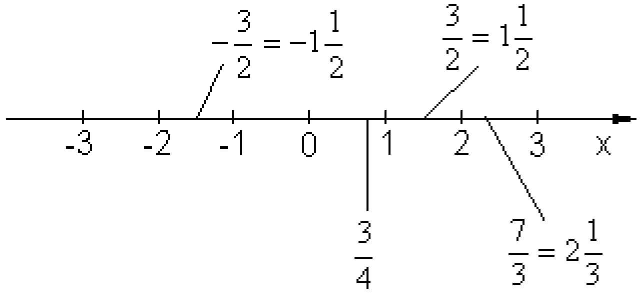
د کسر کرښه یا ماتکرښه د ویش سره په همغه - یا په یوه معنا ده.

منفي (کمیز) کسری عدد(ماتګڼ)

د منفی کسری عدد (کمیز ماتګڼ) بیلګه:

$$(-1):4=\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}$$

0.1.2-کسرونه د اعدادو په کرښه(کنونکرښه) انځورېدلي شي:



ګډوله اعداد(ګنونه)

بیلګه: $\frac{5}{3}=5.3=1$ **باقي** **2 ، نو** $\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$

په څټ (برعکس) $1\frac{2}{3}=\frac{1\cdot 3+2}{3}=\frac{5}{3}$

لسميز كسرونه (لسميز ماتونه)

لسميز كسر (لسميز مات) :

لاندې كين لور ته : زريز، سليز،لسيز، يويز

ښي لور ته: زرميز، سلميز، لسميز(دا، نخښه د لسميز نخښه ده)

ز س ل	ز س ل ي ل س ز 1 3 4 0 , 8 9 5	ز س ل ي

لسميز مات د مات وديزيني وېشني له لارې :

$$1340,895 = 1340 + \frac{8}{10} + \frac{9}{100} + \frac{5}{1000}$$

تعریف (پیژند) لسمیز کسر (لسمیز مات) منځ ته راځي، کله چې کسر(مات) وویشل شي.

که وېشنه پای ته ورسیږي، نو پای لسمیز کسر لاس ته ا ځي .

که وېشنه په یوه ټاکلي قانونمندۍ پرلپسې کې دوام پیدا کړي، نو بیا دا لسمیز کسر ناپای تل بیرته راګرځیدونی - یا ناپای پریودیکي لسمیز کسر بلل کیږي

پای او ناپای پریودیکی (تل بیرته راګرځیدونی) لسمیز ماتونه(کسرونه)

دپای لسمیز کسر بیلګه:

$$\frac{1}{4} = 1:4 = 0,25 \qquad \frac{12}{5} = 12:5 = 2,4$$

د نا پای لسمیز کسر بیلګه :

$$\frac{1}{3} = 1:3 = 0,333\ldots = 0,\overline{3} \qquad \frac{8}{11} = 8:11 = 0,7272\ldots = 0,\overline{72}$$

۲,۲ - یو په بل اړونه د لسمیز کسرونو اړونه په کسرونو:

موږ د 2,245 لپاره لیکلی شو:

$$2,245 = 2 + \frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} = 2 + \frac{200}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{5}{1000} =$$

$$= 2\frac{200+40+5}{1000} = 2\frac{245}{1000} = 2\frac{49}{200}$$

د ناپا پریودیکی (تل بیرته راګرځیدوني) لسمیز کسرونو اړول په کسرونو :

دا راوړنه به لږ ګرانو زده کوونکو ته ستونځمنه وي، خو راوړل یې راته اړیین بریښي. د پوره فکر څخه وروسته دا هم ساده اوپوهوړ کیدی شي.

بیلګه 1 :

$$\begin{array}{r} 10 \cdot 0,\overline{3} = 3,\overline{3} \\ -1 \cdot 0,\overline{3} = 0,\overline{3} \\ \hline 9 \cdot 0,\overline{3} = 3,0 = 3 \end{array}$$

په 9 وېشنه $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ $0,\overline{3} =$

بیلګه ۲ : $0.\overline{58} = ?$

$$\begin{array}{r} 100 \cdot 0,\overline{58} = 58,\overline{58} \\ -1 \cdot 0,\overline{58} = 0,\overline{58} \\ \hline 99 \cdot 0,\overline{58} = 58,00 = 58 \end{array}$$

په 99 وېشنه:

$$0,\overline{58} = \frac{58}{99}$$

بیلګه ۳

$0{,}7\overline{4} = ?$

$$100 \cdot 0{,}7\overline{4} = 74{,}\overline{4}$$
$$-10 \cdot 0{,}7\overline{4} = 7{,}\overline{4}$$
$$90 \cdot 0{,}7\overline{4} = 67{,}0 = 67$$

به 90 وېشنه: $0{,}7\overline{4} = \dfrac{67}{90}$

0.2.4.تمرينونه (ماتشميرنې ته)

لومړی: لاندې 10 کسرونه په لسميز کسرونو واړوی
لاندې کسرونه په لسميز کسرونو واړوی

الف- $\frac{2}{3}$ ب - $\frac{8}{9}$ پ - $5\frac{1}{2}$ ت - $7\frac{7}{11}$ ټ- $4\frac{16}{256}$

دويم: په کيلوگرام يې واړوی او و يې شميری:

$$2{,}5\,t + 8\frac{1}{2}\,dz + 1{,}55\,kg + 0{,}25\,dz + 0{,}3\,t + 12{,}3\,kg$$

دريم: د سپين کورنی د ورځې $1\frac{3}{4}$ ليتره شېدې ته اړتيا لری

الف- د کال مصرف يې څومره جک دی؟

ب- د کال مصرف يې څومره جک دی، که يو ليتر شيدې € 0,79 قيمت ولري؟

څلورم: يو د اوبو مرطبان $43\frac{1}{2}$ ليتره اوبه ځايوي.

له دې ځخه6 بوتلونه هريو0,75 ليتره او 9 بوتلونه هر يو0,7 ليترونه ډکيږي.
په مرطبان کې نورې څو ليتره اوبه پاتې کيږي؟ .
پنځم: $a < b$, $a > ba = b$ چيرته چې a او b دواړه کسرونه انځوروي

الف - $\frac{2}{9}; \frac{2}{6}$ ب - $1; \frac{1}{2}$ پ - $\frac{3}{4}; \frac{5}{7}$ ت - $\frac{1}{2}; \frac{2}{5}$ ټ- $\frac{7}{9}; \frac{11}{10}$

شپږم: وشميری

الف - $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ ب - $\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$ پ - $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}$ ت - $\frac{7}{8}-\frac{2}{7}-\frac{1}{4}$

اوم:وشمیری

الف - $7\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}$ ب - $3\frac{2}{3}+2\frac{2}{6}-4\frac{4}{9}$ پ - $9\frac{2}{5}+1\frac{1}{3}-4\frac{5}{6}$

اتم:وشمیری

الف - $4\cdot\frac{1}{8}$ ب - $\frac{4}{5}\cdot 2$ پ - $1\frac{2}{3}\cdot\left(-2\frac{3}{2}\right)$ ت - $4:\frac{1}{2}$ ټ- $4\frac{5}{6}:1\frac{2}{9}$

نهم:وشمیری:

الف - $\frac{4}{5}-3\frac{1}{10}$ ب - $6\frac{4}{5}-3\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{3}$ پ - $\frac{5}{8}:\frac{1}{2}+1\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{4}-\frac{9}{14}:\frac{3}{7}$

لسم:وشمیری:

الف - $-19+(0{,}5+1{,}75)\cdot 4$ ب - $\left(1{,}\bar{3}\cdot 3-\frac{1}{2}\right):7$ پ - $\frac{3}{4}:\frac{5}{7}$

ت - $\left(2{,}\bar{6}-\frac{1}{3}\right):\left(-1\frac{1}{3}+0{,}\bar{3}\right)$ ټ- $12\cdot\frac{1}{3}+12\cdot\frac{1}{4}-7$

ث- $\left(1{,}\bar{3}\cdot 9-\frac{9}{3}\right):3+\left(-\frac{1}{2}+2\right)$

۲ . ۳ - د ماتو یا کسرونو شمیرنلارې یا - قوانین

لنډونه:Kürzen

لنډونه : کسرونه لنډیږي که صورت او مخرج د همغه عدد سره ووېشل شي.

بیلکه :

$$\frac{2}{6}=\frac{2:2}{6:2}=\frac{1}{\underline{\underline{3}}} \qquad \frac{9}{3}=\frac{9:3}{3:3}=\frac{3}{1}=\underline{\underline{3}}$$

غزونه Erweitern:

کسسرونه غزيږي ، که صورت او مخرج د همغه عدد سره ضرب شي

بيلګه:

$$\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{4}{\underline{\underline{10}}} \qquad \frac{3}{7}=\frac{3\cdot 3}{7\cdot 3}=\frac{9}{\underline{\underline{21}}}$$

برابر – يا همغه نوميز کونه(په يوه مخرج کونه يا د ګډ مخرج(ماتلانديې(جوړونه)

په ګډ مخرج کونه: دوه يا ږيات کسرونه(ماتونه) برابرنوميږ کيږی يا په کډ مخرج کيږی، داسز چې دا وغزول شی او دا بالاخره پراپر مخرج ولری..

دامخرح اصلی مخرج هم بلل کيږی او د (HN) سره يې ښايو.

دا د يوګونو مخرجونو اصلی مخرج يا خورا کوچنی ګډ زياتځلی يا مضرب (ذو الاضعاف الاقل scm) دی.

بيلګه:

$$\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{8}{12}$$
$$\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{9}{12}$$

څکه چې خورا کوچنی ګډ زياتځله يا ذوالاصعافالاقل scm $(3;4)=12$ ، دی

د کسرونو جمعه (زياتون) :

دوه یا ډېر کسرونه یو په بل زیاتوو داسې چې دا له مخه همنومیز شی یعنی د هر ځه له مخه یې باید اصلی مخرج (اصلی ماتلاندې) و ټاکل شی او په پای کې یې صورتونه سره جمعه شي.

بیلګه:

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\Rightarrow HN=12\Rightarrow\frac{2\cdot4}{3\cdot4}+\frac{3\cdot3}{4\cdot3}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\underline{\underline{\frac{17}{12}}}$$

په پورته کې هم HN اصلی مخرج دی.

د کسرونو تفریقول(د ماتونو کمونه):

تفریق یا کمون:

دوه یا زیات کسرونه یو له بل کمیږی، داسې چې دا مخ له مخه همنومیز شی یعنی د هر څه له مخه یې باید اصلی مخرج (اصلی ماتلاندې) و ټاکل شی او بالاخره صورتونه کم یا منفی کړی شی.

بیلګه پیل ناسم دی:

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$$

اصلي ماتلاندې ۱۲

$$\Rightarrow\frac{3\cdot3}{4\cdot3}-\frac{2\cdot4}{3\cdot4}=\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=\frac{1}{12}$$

د کسرونو ضرب (حُل)

کسرونه سره ضربیږی، داسې چې صورت له صورت سره او محرج له مخرج سره ضرب شی.

بېلګه:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 2}{2\cdot 5}=\frac{6}{10}=\underline{\underline{\frac{3}{5}}}$$ یا $$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\underline{\underline{\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}}$$

د کسرونو ویش

وېش: دوه کسرونه وېشل کيږی، داسې چې لومړی کسر د دویم کسر د به برعکس ارزښت (په ځټ) سره ضرب شی.

بیلګه:

$$\frac{2}{3}:\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 2}=\frac{10}{6}=\underline{\underline{\frac{5}{3}}}$$ یا $$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\underline{\underline{\frac{a\cdot d}{b\cdot c}}}$$

ډبل کسرونه

ډبل کسر: یو ډبل کسر بل څه نه دی پرته د کسر ویشنې څخه.

بیلګه:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}=\frac{18}{20}=\underline{\underline{\frac{9}{10}}}$$ یا $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\underline{\underline{\frac{a\cdot d}{b\cdot c}}}$$ ځکه چې $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\underline{\underline{\frac{a\cdot d}{b\cdot c}}}$$

ډبل کسرونو ته نورې یادونې یا پاملرنې:

د حل قاعده: یو ډبل کسر په کسر بدليږی، داسې چې د لومړی کسر صورت د دویم کسر د مخرج سره ضرب شی، چې دا د نوی کسر صورت جوړوی.

د لومړی کسر مخرج د دویم کسر د صورت سره که ضرب شی، نو د دویم کسر مخرج راکوی.

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}=\frac{18}{20}=\underline{\underline{\frac{9}{10}}}$$

که ډبل مات یا کسر پوره نه وی، نو کېدی شی د 1عدد پع استعمال بوره شی

$$\frac{\frac{3}{5}}{6}=\frac{\frac{3}{1}}{\frac{5}{6}}=\frac{3\cdot 6}{1\cdot 5}=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5} \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{3}{4}}{5}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{1}}=\frac{3\cdot 1}{4\cdot 5}=\frac{3}{20}$$

0.3.8.تمرینونه ۱

1: - لاندې ماتونه یا کسرونه په لسمیزو کسرونو واړوی

لف- $\frac{2}{3}$ ب - $\frac{8}{9}$ پ - $5\frac{1}{2}$ ت - $7\frac{7}{11}$ ټ - $4\frac{16}{256}$

دويم: په کيلوګرام kg یي واړوی او ویي شمېرۍ

$$2,5\,t+8\frac{1}{2}\,dz+1,55\,kg+0,25\,dz+0,3\,t+12,3\,kg$$

دریم: د سپین کورنی د ورځې $1\frac{3}{4}$ Liter لیتره شودو ته اړتیا لس

الف کلنی مصرف څومره دی

ب :کلنی ارزښت یا قیمت څومره دی، که یو لیتر شوده 0,79 € قیمت ولري؟

څلورم: یو د شودو مرتبان t $43\frac{1}{2}$ Liter ' لیتره شوده خوندي کولای شي

له دې څخه 6 بوتلونه، چې هریو 0,75 لیتره دی، 9 بوتلونه، چې هر یو یې 0,7 لیتره دی، ډکیږی. نور په مرطبان کې څومره اوبه پاتې کیږی؟

پنځم: – لاندې کسرونه نسبت و لویوالې ته سره پرتله کړی. ولیکۍ a < b , a > b یا ، a = b، چیرته چې a او b هر یو دواړه کسرونه انځوروی.

الف- $\frac{2}{6};\frac{2}{9}$ ب - $1;\frac{1}{2}$ پ - $\frac{3}{4};\frac{5}{7}$ ت - $\frac{1}{2};\frac{2}{5}$ ټ - $\frac{7}{9};\frac{11}{10}$ ث - ج –

6 : وشمیرئ

الف- $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ ب - $\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$ پ - $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}$ ت - $\frac{7}{8}-\frac{2}{7}-\frac{1}{4}$

اوم -و شمیرئ:

الف- $7\frac{1}{2}-3\frac{1}{4}$ ب - $3\frac{2}{3}+2\frac{2}{6}-4\frac{4}{9}$ پ - $9\frac{2}{5}+1\frac{1}{3}-4\frac{5}{6}$

اتم- وشمیرئ

الف- $4\cdot\frac{1}{8}$ ب - $\frac{4}{5}\cdot 2$ پ - $1\frac{2}{3}\cdot\left(-2\frac{3}{2}\right)$ ت - $4:\frac{1}{2}$ ټ - $4\frac{5}{6}:1\frac{2}{9}$

نهم- وشمیرئ

الف- $\frac{4}{5}-3\frac{1}{10}$ ب - $6\frac{4}{5}-3\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{3}$ پ - $\frac{5}{8}:\frac{1}{2}+1\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{4}-\frac{9}{14}:\frac{3}{7}$

لسم- وشمیرئ:

الف- $-19+(0,5+1,75)\cdot 4$ ب - $\left(1,\bar{3}\cdot 3-\frac{1}{2}\right):7$ پ - $\frac{3}{4}:\frac{5}{7}$

ت - $\left(2,\bar{6}-\frac{1}{3}\right):\left(-1\frac{1}{3}+0,\bar{3}\right)$ ټ - $12\cdot\frac{1}{3}+12\cdot\frac{1}{4}-7$

ث - $\left(1,\bar{3}\cdot 9-\frac{9}{3}\right):3+\left(-\frac{1}{2}+2\right)$

۲ .۴ ـ د ځلورۍ رېښې نيونې له پاره داسې مخ ته ځو:

لومړی: د ښي لوري ،د لسميزڅخه په پيل، کيڼ لورته په دوه ،دوه بيلوو او هغه د کيڼ لورته د ګڼ له پاره داسېګڼ پيداکوو، چې ځلورۍ يا ورع يې هغه ګڼ يا ترېکوچنی ګڼ ورکړي. دا د ځلورۍ رېښې لومړی ګڼ دي، يعنې کيڼ لورته ګڼ

دا لاندې بيلګه ګورو

$$\sqrt{2916} = ?$$

د لاس ته راوړنې لومړی ګڼ چې ځلورۍ يا مربع يې له ۲۹ سره برابره يا کوچنی ده، ۵ ګڼ دی. د ۴ سره وروستي يا کيڼ لورته ګڼونه يعنې ۱۶ ړدو،چې ۴۱۶ لاس ته ترې راځي. لرو:

$$\sqrt{2916} = 5$$
$$-15$$
$$.....416$$

د دې له پاره چې د لاس ته راوړنېدويم ځای پيدا کړو،بايد دا (دلته ۱۰۰) ووېشو، چې پاتې يې بايد ۱۶ وي يعنې $4 = 100 : 416$ پاتې ۱۶ . دا پتې ۱۶ اوس 4^2 دی،چې شميرنه يې صفر راکوي، چې له دې سره ۲۹۱۶ يو ځلورۍ – يا مربع ګڼ دی،

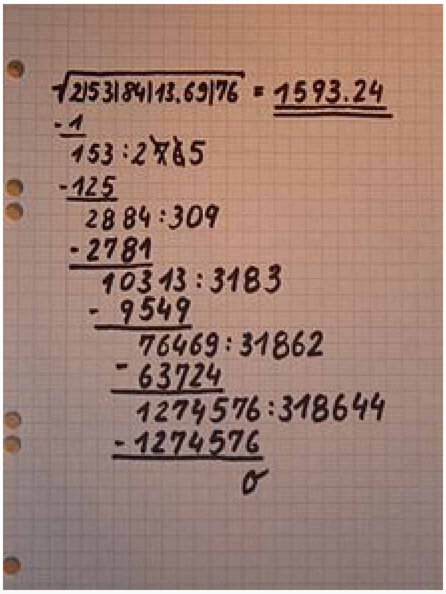
يعنېلرو:

$$\sqrt{2916} = 54$$
$$-25$$
$$.....416$$
$$..-400$$
$$......-16$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$..........0$$

بيلګه: د 2538413,6976 ځلورۍ يا مربع رېښه ونيسی يا وباسی.

په پورته ورکړشوې لار: ډېره ساده ده، چې لږ فکر په کې وشي:

اوبی، حل يا ځواب:



د مربع – یا څلوری ريښه- نیونو ځانګړي حالتونه ۱ :

بیلګي:

لاندې څلوری ريښې وشمیرئ

$$\sqrt{36} =$$
$$\sqrt{3\ 600} =$$
$$\sqrt{360\ 000} =$$

د جبشمیریسره یې اوبیکوو

$$\sqrt{36} = 6$$
$$\sqrt{3\ 600} = 60$$
$$\sqrt{360\ 000} = 600$$

که رېښه وپستونی یا – نیونی په دوه، څلور او یا شپږ صبرونو پای کیږي اوښي لورته یا لومړی گڼ یوځلورې یا مربع عدد وي، نو په ساده توگه په؛ر د ودوه صفرونوپه ځای یوصفرورزیاتیږي.

بیلگه: $\sqrt{8\,100} = 90$

ځکه چې لرو $\sqrt{81} = 9$ او د هر دوه صفرونو لهپارهیو صفر ځای په ځای کوو.

د مربع رېښه نیونې له پاره ځانگړې حالتونه ۲ :

لاندې مربع رېښهوشمیری

$$\sqrt{0,49} =$$
$$\sqrt{0,0049} =$$
$$\sqrt{0,04} =$$

د جبشمیریسره یې اوبی کوو:

$$\sqrt{0,49} = 0,7$$
$$\sqrt{0,0049} = 0,07$$
$$\sqrt{0,04} = 0,2$$

پوښتنې:

۱ – یو ناکسري – یا نامات گڼ څه شي دی؟

۲ –د دې گڼونو دول له پاره یوه بیلگه راوړه.

۳ – دا گڼونه د یوه شمیرونې په پرده لیکل یا انځورکیدی شي؟

۳ – کومه د گڼونو ډېری لاس ته راځي،که کسري اوناکسري گڼونه سره یوځای کړو؟

۲ .۵ - رېښه وېستنه پسې تلنه:

يادونه: كه ووايورېښه وېستنه،موخه به ترې تل څلورى رېښه وېستنه وي.

د يوه ګڼ Z رېښه وېستنه يا – نيونه هغه ګڼ W دى، چې له ځان سره ضرب شي او Z ترې لاس ته راشي. يعني: $W \times W = Z$

د بيلګې په توګه ګڼ$Z = 9$ رېښه$W = 3$ لري او بله رېښه يې 3- ده، ځکه چې $(-3) \times (-3) = 9.$ هم باور لري. د دواړوګڼونو په توان د دوه يا څلورى ګڼ ۹ دى، يعني ټولګڼ.

يادونه: له درسه دباندې وپینه: په هغه وخت كې يوناني شمير Theaitetos von Athen تيايتيتوس د اتن په (۴۱۷ تر ۳۶۸ د ز ک د مخه) ۳۸۰ ل ز ک د مخه ښوولي وو،چې د پيداښتي ګڼونو، تولې رېښې يا يو پيداښتي ګڼ دیاويا ناكسريز-يا نامات ګڼ؟

د رېښه نيونې پرينخيب په بيلګه ښايو:

ګران لوستونكي به پوه شي،چې څه كيږي ا اوپه هر پل پسې بل پل ښنګه اخستشوى دى

دا د يوېساده ليكنيزې بيلګې سره روښانه كوو:

بيلګه: د ګڼ 119025رېښه غواړوونيسو، يعني ؟ = $\sqrt{119025}$

۱ - له ښې لور پيلوو او ګڼونه په دوه، دوه ټوټه كوو

$\sqrt{11|90|25} =$

۲ - ګڼ پيداكوو، چې څلورى يې بيخيكېن لاس ته راكړي.

$$\sqrt{11|90|25} = 3$$

۳ - د د ې مربع د کيڼ لور ګڼ لاندې وليکي

$$\sqrt{11|90|25} = 3$$

$$\begin{array}{r} -9 \\ \hline 2 \end{array}$$

۴ – کمښت يې لکه په ليکنيز وېش کې راوباسی

$$\sqrt{11|90|25} = 3$$

$$\begin{array}{r} -9 \\ \hline 29 \end{array}$$

۵ - Rest پاتې ته وايي 3 .دوه ځله کيږي اول لهپورته يو ګڼ اوبيا دوهګنهراکښتهکيږي، چې په ځهباندې ۳۰ ووېشل شي.. داسي:

$$\sqrt{11|90|25} = 3 \qquad \cdot 2 \qquad 29 : 6 = 4 + \text{Rest}$$

$$\begin{array}{r} -9 \\ \hline 29 \end{array}$$

۶ – پسې پ

$$\sqrt{11|90|25} = 34 \qquad 29 : 6 = 4 + \text{Rest} \qquad 4 \cdot 64 = 256$$

$$\begin{array}{r} -9 \\ \hline 29 \end{array}$$

۷ – پسې

$$\sqrt{11|90|25} = 34 \qquad 29:6 = 4 + \text{Rest} \qquad 4 \cdot 64 = 256$$

$$\begin{array}{r} -9 \\ \hline 290 \\ -256 \\ \hline 34 \end{array}$$

٨ ـ داسي مخته ځو او لرو

$$\sqrt{11|90|25} = 34 \qquad 29:6 = 4 + \text{Rest} \qquad 4 \cdot 64 = 256$$

$$\cdot 2$$

$$\begin{array}{r} -9 \\ \hline 290 \\ -256 \\ \hline 342 \end{array} \qquad 342:68 = 5 + \text{Rest}$$

٩ ـ مخ ته ځو

$$\sqrt{11|90|25} = 345 \qquad 29:6 = 4 + \text{Rest} \qquad 4 \cdot 64 = 256$$

$$\begin{array}{r} -9 \\ \hline 290 \\ -256 \\ \hline 342 \end{array} \qquad 342:68 = 5 + \text{Rest} \qquad 5 \cdot 685 = 3425$$

١٠ ـ لرو

$$\sqrt{11|90|25} = \underline{\underline{345}} \qquad 29:6 = 4 + \text{Rest} \qquad 4 \cdot 64 = 256$$

$$\begin{array}{r} -9 \\ \hline 290 \\ -256 \\ \hline 3425 \\ -3425 \\ \hline 0 \end{array} \qquad 342:68 = 5 + \text{Rest} \qquad 5 \cdot 685 = 3425$$

لند بيا:

$$\sqrt{11|90|25} = \underline{\underline{345}} \qquad 29:6 = 4 + \text{Rest} \qquad 4\cdot 64 = 256$$

$$342:68 = 5 + \text{Rest} \qquad 5\cdot 685 = 3425$$

$$\begin{array}{r} -9 \\ \hline 290 \\ -256 \\ \hline 3425 \\ -3425 \\ \hline 0 \end{array}$$

بيلګه

دلته هځيږو، چې ددو يعن ۲ ه رېښه وټاکو	دلته د يوه لشميز ګڼ رېښه پيدا کوو، چې ښی لور ته يې څلور ځايونه دي يعنې د لسميز نخښبښيلورته دا اوورسره طبيعی عددونه په دوه دوه برخوټوته کوو او لکه چېبلد يومخ ته ځو، نو لو.
$\sqrt{2,000000000000} = 1,414213...$ $\underline{1}$ 100 $\underline{96}$ 400 $\underline{281}$ 11900 $\underline{11296}$ 60400 $\underline{56564}$ 383600 $\underline{282841}$ 10075900 $\underline{8485269}$ 1590631 ...	$\sqrt{5|50|46,54|44} = \underline{\underline{234,62}}$ $\underline{4}$ 150 $\underline{129}$ 2146 $\underline{1856}$ 29054 $\underline{28116}$ 93844 $\underline{93844}$ 0

د لاندې ګڼونو ريښه ونيسی:

961
5.929
13.225

ما ريښه او توان پهخپلو څو کتابونو کې راوړي. دا تکرارد‌لته راوړم. دا به ړ ګرانوزدهکوونکو لهپارهګټور وي.ور سرهسترې کيږی‌مه.

۳ – ريښه او توان له ريشنل جګګڼ (اکسپوننت) سره

يادونه: دا دريښې او توان برخه ډېره بيا، بيا راغلي. هيله ده چې ورسره سترېبه نه شی لرو

$$x^n = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{a}$$

د $n \in \mathbb{N}^*,\ a \geq 0,\ x \geq 0$ سره

اوس خپل پام دې ښې لور برابرون ته را اړوو.

دا برابرون $x = \sqrt[n]{a}$ د $n \in \mathbb{N}^*,\ a \geq 0,\ x \geq 0$: سره

داسې لولو:

په پورته کې x دa د n-مه ريښه (جذر) بلل کيږي. او $\sqrt[n]{\ }$ د n -مې ريښې نخښه ده.

پيژند ۰

د يوه نا كميز (نامنفي) ګڼ a لپاره n -مه رېښه هغه نا كميز ګڼ b دی، د كوم لپاره چې باور لري: $b^n = a$

د دې لپاره ليكو:

$$b = \sqrt[n]{a}, n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$a \geq 0, b \geq 0............$$

دلته a راديكاند Radikand ، يا ګڼ، چې رېښه (جذر) يې نيولكيږي(مورد ارېښه نيووني يا رېښه ويستونی بولو) او n درېښې جګګڼ(اكسپوننت) او b د رېښې ارزښت يا رېښه ارزښت بلل كيږي۰

بايد پردې ټينګار وشي، چې ځلورۍ رېښه يواځې د نامنفی راديكاند يا رېښه ويستوني (رېښه نيوني) $a \geq 0$ راوستل كيږي يا نيول كيږي او پخپله په لاندې توګه يو نامنفي - يا ناكميز ارزښت لري يانی

$$b = \sqrt[n]{a} \geq 0$$

د دې كره كوني لپاره لاندې يادوني شوي دي:

۱ – د جوړه $n = 2,4,6,\ldots$ لپاره د $a<0$ سره رېښه b په رييلګڼونو كې نه شته، كوم ، چې (4,8) پوره كړي ځكه، چې د b جوړه په توان تل نامنفي يا ناكميز يانې زياتيز ګڼ دی۰

۲ – د جوړه او مثبت - يا زياتيز برابرون $b^n = a$

په ختيه په رېښتوني دوه رييل اوبيوني ياحلونه لري د بيلګې په توګه $b^2 = 4$-

یانې $n = 2$ او $a = 4$ اوبیونې $b_1 = 2, b_2 = -2$ دي۰

د دې لپاره، چې د رادیکاند د شمیرلو کارونې یواځنی سرته ورسولی شو، باید د یوې اوبیونې لپاره پریکړه وکړو، نو له دې امله موږ مثبت ارزښت غوره بول

۳ – د ناجوړه . $n= 1 , 3 , 5$ او $a\geq 0$ لپاره

$$b^n = a$$

تل یواځني زیاتیز(مثبت) اوبی یا حل لري یانې $b\geq 0$

٤ – د ناجوړه n او کیمز یا منفي a لپاره $b^n = a$ تل یواځې یو منفي اوبی لري۰ یانې $b < 0$ د بیلگې په توگه دا $b^3= -8$ یواځې اوبی $b = -2$ لري.

په هر صورت باید د جوړه...$n=2,4,6$ گڼونو لپاره $a\geq 0,b\geq 0$ وغوښتل شي، ځکه چې په بل صورت کې به یا ریښه شته نه وي او یا به یواځنی اوبی نه لري، یانې څو اوبی به شته وي

د ناجوړه یا طاقو,...$n = 1,3,5$ لپاره کیدی شي، چې له دواړو غوښتنو تیر شو۰ دلته به یواځې تاوان یا زیان دا وي، چې د تولو ممکن حالتونو لپاره به بیل بیل د ریښې د قوانینو غوره کولو ته اړ کیږو۰ له بلې خوا به ریښی د قوانینو ترتیبول د پوتنځ لپاره ، چې پورته ایښول شوي بندیزونه nقوانینو لپاره ستونځمن وي۰ له دې امله د ناجوړه ریښو

اکسپوننت غوره کوو او د یواځني یو اوبی لپاره 2- د 8- = b^3 او نه

$$-2 = \sqrt[3]{-8}$$

بیلکه $-2=-\sqrt[3]{8}$ لیکو۰ په دې اړوند او د یادو شوو نیونو په بنسټ دې دا لاندې اوبی په گوته شوی وي

$$\sqrt{a^2} = a, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,10)$$

ځلورۍ- یا مربع ریښه $\sqrt{a^2}$ د ټولو ریيلګڼونو a لپاره تعریف شوي٠ د نامثبت یا نازیاتیز ې a لپاره به (4,10) په داسی حال کې، چې د منفي aلپاره به بیا د (4,10) اوبی منفي وي، کوم، چې نيونه $b \geq 0$ نفې کوي یا ردوي٠

په ځانګړوحالتونوکې به د (4 , 10) ښول شویو حالتونو استعمال لاندې مخامخوالي لاس ته راولي، لکه :

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2, \sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = -2$$

یانې د 2- = 2 سره٠

د (10 , 4) ټیک داسې لیکل کیدی شي:

د ریښې له پیژند (4 , 9) , (4 , 8) سره سم کیدی شي، چې لاندې باوري د ریښې قوانین ولي

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,12)$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b}, b > 0 \ldots\ldots. (4,13)$$

$$\sqrt{a}.\sqrt[m]{a} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,14)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4,15)$$

پّه پورته کې (۴،۱۴) ټیک ته دی د $\sqrt{a}$ په ځای باید وي $\sqrt[n]{a}$

پورته د (4,15),(414),(413,),(4.12) ترمنځ باید لږ واټن وي، خو کومه ترې ناسمه پوهیدنه نه رامخ ته کوي ٠ دلته پیژندل کیږي، چې د ریښې قوانین د پوتنځقوانینو ته، چې

په(4,2) تر (4,6)پورې ورکړ شوي،د پرتلې وړ دي٠ په رښتيا چې دا د پوتنځقوانينو لاس ته راتلی شي، که پوتنځ د ريشنل اکسپوننت سره په لاندې ډول تعريف شي يا يې لاندې پيژند ورکړ شي٠

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m ....(4,16)$$

د… $a \geq 0$, $n = 1,2,3,\ldots$, $m = 1 , 2 , 3\ 4 \ldots$ لپاره

د بيلګې په توګه (١٦ ، ٤) په لاندې ډول ليکل کيږي

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{(1/n)+(1/m)} = a^{(n+m)/n.m} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}}$$

دا اړيکې (4,16) کيدی شي منفي $m = -1,-2,-3,\ldots$ ته هم پراخه شي، چيرته، چې (4,17) په ټينګه – يا کره باور ولري

$$a^{-(m/n)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a > 0................$$

بې له بنديزونو د خوښې ځګو n اوm لپاره د پوتنځقوانين (2 ,4) تر (4,6) باور لري، خو

يوازې هلته، چې نه ورکيدونو بنستونو يانې a>0, b>0 نيونه شوې وي٠

د ريښې شميرلو لپاره بايد اساساَ د(4,16) له مخې ريشنل اکسپوننتونه واوړي او له (4,2) تر (4,6) استعمال کړي

اړتيا لرو، چې د پوتنځ او ريښې سره شميرلو د قوانينو استعمال نيونې تل و ازمايلی شو٠ په ځانګړي ډول د بنسټ نه منفيتوب کمونوالی يا نامنفيوالی يا مثبتتوب(مثبتوالی يا زياتونوالی) پريږدو، چې لاندې ناسم پاې کيدډول وښايو٠

$$\sqrt{-a} = (-a)^{1/2} = (-a)^{2/4} = \sqrt[4]{(-a)^2} = \sqrt[4]{a^2} = a^{2/4} = a^{1/2} = \sqrt{a}$$

برابرون يوازې د دې ساده حالت $a = 0$ لپاره شته دی يا باور لري، د $a \neq 0$ لپاره a– او يا a کميزمنفي دي، دا په دې مانا، چې a ياa– پيژند نه لري يا تعريف نه دی٠

د توان قوانين د توان سره شميرلو، چې راشنل جګ لري، په لاندې بيلګو کې روښانه کوو:

پام: په لاندې بيلګو کې دا تراوسه د شمير بنسټيز قوانين ټول راغلي، د نو ورسره بلدېدونکو ګرانو لوستونکو ته دې دا روښانه وي، چې د لږ فکر وروسته هرڅه روښانه کيدی شي٠ شميرنه يې لږ وخت نيسي، که غواړی پخپله يې يو ځل وشميری٠

بيلګه ٤ ٠ ٦

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \{(125)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} = (125)^{\frac{1}{6}} = (5^3)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = 2,2361$$

بيلګه ٤ ٠ ٧

$$\frac{a^2\sqrt{b}c^{-2}}{\sqrt[3]{a^2b^{-3}}} : \frac{d^2\sqrt{c}}{\sqrt[5]{d}\,a^{-5}} = \{a^{(2-\frac{2}{3})}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{-2}\} : \{a^5c^{-2}d^{(2-\frac{1}{5})}\} =$$

$$= a^{(2-\frac{2}{3}-5)}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{(-2-\frac{1}{2})}d^{(-2+\frac{1}{5})} = a^{-\frac{11}{3}}b^{\frac{7}{2}}c^{-\frac{5}{2}}d^{-\frac{9}{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{b^7}}{\sqrt[3]{a^{11}}.\sqrt{c^5}.\sqrt[5]{d^9}} = \frac{b^3.\sqrt{b}.c^2}{a^3.\sqrt[3]{a^2}.c^2.\sqrt{c}..d^5.\sqrt{d^4}}$$

بيلګه ٤ ٠ ٨

$$8.\sqrt[3]{343} - 4.\sqrt[3]{125} + 5\sqrt[3]{8} - 5\sqrt[3]{729}$$

$$= 8.\sqrt[3]{7^3} - 4\sqrt[3]{5^3} + 5.\sqrt[3]{2^3} - 5.\sqrt[3]{3^6} = 8.7 - 4.5 + 5.2 - 5.9 = 1$$

بيلګه ٤ ٠ ٩

$$5.\sqrt{63}-2.\sqrt{175}-\sqrt{343}+3.\sqrt{28}$$
$$=5.\sqrt{7.3^2}-2.\sqrt{7.5^2}-\sqrt{7.7^2}+3.\sqrt{7.2^2}=$$
$$=5.3\sqrt{7}-2.5\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+3.2.\sqrt{7}=$$
$$=15.\sqrt{7}-10.\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+6.\sqrt{7}=4.\sqrt{7}$$

بیلګه ٤ ۰ ١۰

$$\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{(a-\sqrt{a^2-b^2}).(a+\sqrt{a^2-b^2})}=$$
$$=\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2}=\sqrt{a^2-a^2+b^2}=|b|$$

د $|a| \geq |b|$ لپاره

د مختلفو شمیرلو لپاره موخور دی، چې مات لاندې کې منځ ته راغلې ریښې له منځه یوسو (د ماتلاندې ریشنل کول۰)

که په ماتلاندې کې یوه ریښه $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ د فاکتور یا ځلووني په څیررامنځ ته شي، نو دا د وظیفي لپاره یوازې اړیین ده چې (m < n (m , n >0 او $m,n \in Z$ په پام کې راوړو

کارونه یا عملیه په لاندې ډول اجرا کیږي(N*|= 0 , a > 0)

$$Z\big/N=\frac{Z}{N}=\frac{Z}{N*\sqrt[n]{a^m}}=\frac{Z.a^{1-\frac{m}{n}}}{N*a^{\frac{m}{n}}.a^{1-\frac{m}{n}}}=\frac{Z.\sqrt[n]{a^{n-m}}}{N*a},..........(4,18)$$

بیلګه

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{3}}=\frac{3}{2.3^{\frac{1}{3}}}=\frac{3.3^{\frac{2}{3}}}{2.3.3^{\frac{2}{3}}}=\frac{3^{1+\frac{2}{3}}}{2.3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}=\frac{3^{\frac{5}{3}}}{2.3}=\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{1}{2.\sqrt[3]{9}}$$

که په ماتلاندې کې د ځلورى- يا مربع ريښي زياتون يا کمون وي $N=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ نو ماتلاندې له مات $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ سره غزوو او د بينوم فرمول استعمال سره له $a>0$ او $b>0$، چې $a\neq b$ وي لاس ته راځي:

$$\frac{Z}{N}=\frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}).(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{a-b},\ldots(4,19)$$

بيلګه

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

بيلګه

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

ټولګه: د $a>0, b>0$ ريیل او $m,n\in N(n\neq 0)$

همدا ډول $\alpha,\beta\in R$ ييلو لپاره باور لري

$$a^{0}=1,\frac{1}{a^{\alpha}}=a^{-\alpha},\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}},\sqrt[n]{a^{m}}=(\sqrt[n]{a})^{m}=a^{\frac{m}{n}}$$

$$a^{\alpha}\cdot b^{\alpha}=(ab)^{\alpha},a^{\alpha}.a^{\beta}=a^{\alpha+\beta},a^{\varepsilon}:a^{\beta}=a^{\alpha-\beta},(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha.\beta}$$

دا پورته موضوع تر دې ځایه بسیا کوي، که نور څه مخته راتلل، چې اړیين وو، هغه به بیا په ګډه ورزیاتوو، خو دا بیا تکرار یې که سترېکیدونکی دیګتوربه هم وي،

بیا تکرار: ریښه برابرون

په پوتنځشمیرنه کې مو لروده: $a^n = x$

په دې ډول برابرونونو کې مو توان ارزښت x غوښتل پیداکړو، په داسې حال کې ، چې بنسټa او جګګڼ n څرګند وو. بیلګه : $10^2 = x$

د برابرونو نوې بڼه

اوس غواړو د برابرونون نوې بڼه وپیژنو: $x^n = a$

یوه بېلګه به يې برابرون $x^3 = 8$ وي .

په دې برابرون کې دا نوی دی، چې بنسټ x پلټل کیږي، په داسې حال کې ، چې جګګڼ nاو توان ارزښت a ورکړ شوي دي.

په برابرون $x^n=a$ کې غوښتونکي بنسټ x ته نوی نوم او ځانګړي نخښه ورکوو: بنسټ x د a n –مه ریښه بولو او ددې لپاره لیکو.

$$x^n = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{a}$$

د $n \in \mathbb{N}^*, a \geq 0, x \geq 0$ سره

لوستل: x په جګ n برابر a برابر یابرابر ارزښته *equivalence* دی د x برابر دa د n –مې ریښې سره . نخښه $\sqrt{\ }$ داسې په نامه ریښه نخښه ده.

په نخښه وني

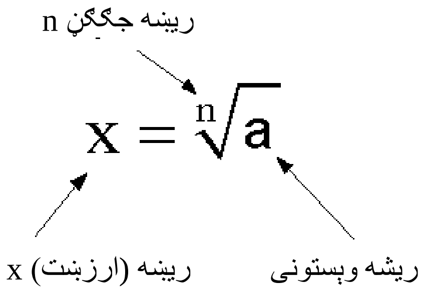
د مخه درس کې مو وپیژندل: $x^n = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{a}$

د $n \in \mathbb{N}^*, a \geq 0, x \geq 0$ سره

د لته په کین برابرون کې ،، n ،، جګګڼ ، په ښي لاس بیا ریښه جګګڼ یا ریښه جګ بلل کیږي یا n -مه ریښه.

ګڼ a د برابرون کین لور توان ارزښت او ښې برابرون کې یې رادیکاند یا ریښه ایستونی یا ریښه نیونی یانې هغه ګڼ، چې ریښه یې نیول کیږي، بلل کیږي. .

په کيڼ لور کي x بنسټ   او په ښي لور کي بيا ريښه يا ريښه ارزښت بلل کيږي. دا ګوماني يا   شمېرل شوی ريښه ارزښت   “Radizieren„يا ،،ريښه ويستونی،، بولو.
په لاندي څېره کي يې نومونه راټول شوي



په $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ کي ريښه جګګڼ ۲ نه ليکو

دوه بېلګي:

د ۸ ۳ – مه ريښه غواړو پيداکړو $\sqrt[3]{8} = x$

د پيژند له مخي ريښه x د برابرون اوبی يا حل دی: $x^3 = 8$

موږ غواړو ګڼ   په ګومان وښايو، ازماېښت ورروسته پوهيږو، چي دا ګڼ x=2 دی، ځکه   چي لرو $2^3 = 8$

ددي سره مو د ۸ دريمه ريښه بيداکړه: $\boxed{\sqrt[3]{8} = 2}$

بېلګه ۲ :

د 1/8 دريمه ريښه غواړو پيداکړو: $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = x$

د پيژند له مخي ريښه x د برابرون اوبی دی $x^3 = \frac{1}{8}$

موږ غواړو ګڼ   په ګومان و x وښايو،   1 / 4 ; 1/3 ; ½ ماتونه د x   لپاره ځای په ځای کوو، ګورو،چي همدا اوس د x=1/2   لپاره برابرون   x=1/2   پوره کوي

ياني $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

له دې سره مو د 1/8   دريمه ريښه پيداکړه

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

تمرینونه (لړی ته او   پرلپسي ته پخپله پام وکړی)

① $\sqrt[3]{64} = x$

⑤ $\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = x$

⑦ $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = x$

④ $\sqrt[3]{27} = x$

③ $\sqrt[5]{32} = x$

⑥ $\sqrt[3]{125} = x$

② $\sqrt[3]{\frac{1}{64}} = x$

د ريښي دوه ګوني ماناوي

د د ې برې په پيل کي مو د توان د x د ريښه د $x^n=a$ برابرون د اوبيوني په څېر وټاکه(تعريف کړ)

$$x^n = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{a}$$

ددي سره مو لاندې بنديزونه راوړل.

$n \in \mathbb{N}^*,\ a \geq 0,\ x \geq 0$

دلته غواړو وښايو، چې ولې مو ږ ناکميز x ته اجازه ورکوو.

اوس د x يوه ريښه راوړو د جوړه ريښي توان سره

$$\sqrt[2]{9} = x$$

د ريښي پيژند(-تعريف) د ريښي x د $x^2=9$ اوبيونه ده. ياني

$$\sqrt[2]{9} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 9$$

ښي برابرون دوه اوبيوني (3+او-3) لري. ددي سره به اوس کيڼ لور هم اوس دوه اوبيوني (3+او-3) لرودی.
له دي سره به ريښي دوه يزه شمېرنيزه څرګندونه (افاده) لرودی.
اوس نوره هم پيچلي پسي راځي: د درې ريښو اوبيوني به بيا کېدی شوی، اته اوبيوني ولري. د بېلګي په توګه:

$$\sqrt[2]{9} + \sqrt[2]{4} + \sqrt[2]{16} =$$

اوبيوني به يي د بېلګي په توګه : 3+2+4يا 3-2+4 يا 4-2-3 او يا ... وی.
د دې لپارهو چې د دې ډېرارزښتوالي مخه ونيسو په لکه نيسو،چې
د $x = \sqrt[n]{a}$ ريښه د برابرون $x^n = a$ ناکميزه
اوبيونه ده

کميز ريښه نيوونی
موږ دا لاند ټاکندی (تعريف) ورکړ

$$x = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow \quad x^n = a$$

د لاندي بديزونو سره

$$n \in \mathbb{N}^*, \quad a \geq 0, \quad x \geq 0$$

موږ دويم بنديز راوړو، دا په دې مانا، چې ولي کميز ريښه نيونی نه پرېږدو؟
موږ د دواړو اوبيونو (جوړه او ناجوړه ريښه توانونو) لپاره بېل بېل ځوابونه ورکوو:
جوړه ريښه توان.
موږ يوه ريښه څېړو د جوړه ريښه توان سره

$$\sqrt[2]{-8} = x$$

موږ دا تراوسه زده کړو خويونو له مخې لرو

$$\sqrt[2]{-8} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -8$$

دا بې پروا ده، چې د بنې برابرون لپاره کوم ګڼ ولیکو، هیڅکله -8 لاس ته ترې نه راځي، ځکه، چې که یو ګڼ په توان د دوه شي تل ترې یو زیاتیز ګڼ لاس ته راځي او هېڅکله ترې کمیز ګڼ لاس ته نه راځي.

ناجوړه ریښه توان

اوس به موږ په دې فکر راشو، چې کم له کمه به د ناجوړه ریښه توان لپاره یو کمیز ریښه نیوونی(رادیکاند) د راوړنې یا پرېښوني وي، ځکه، چې د یوه اړونده توان برابرون د ناجوړه توان په حالت کې تل یوه اوبیونه لري (دلته: -2) یانې لرو

$$\sqrt[3]{-8} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = -8 \Leftrightarrow \quad x=(-2)$$

دا باید په یاد راوړو، چې په دې هکله د شمېرپوهانو تر منځ جګړه شته:
ځنې په دې نظر دي، چې یوه ریښه د کمېز ریښه توان سره (دلته ۳-) او کمیز ریښه نیووني سره (دلته ۸ -) نه دی ټاکلی یا تعریف شوی نه دی.
موږ هم په دې نظر یو ، نه یواځې له دې امله، چې په ځنو هېوادونو د بېلګې په توګه المان د صنعت نورم DIN1302 قانون کې په ټینګه نیول شوی.
د DIN1302   دلیل د دویمې برخې په پای کې ورکوو

د پروفیو (کره مسلکي لوستونکو) لپاره :

د کمېز ریښه نیونی سره داسې بې مفهومه لاسته راوړنې لرودی شو لکه :2=2–

ساده کونه

$$\sqrt[6]{64} = 2$$

$$=$$

دریښه جګی غزوو

$$\sqrt[3\cdot 2]{(-8)^2}$$

$$= \quad \sqrt[3]{-8} = -2$$

د متحده اضلاعو شمېرپوهان یې د ځان لپاره ساده کوي او داسې مخ ته ځي:

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$ د $a \geq 0$ او ناجوړه $n =$ سره

ددې د پوهیدلو لپاره لومړی باید ریښه خویونه یا ریښه قوانین وپیژنو:

په توان کونه د ریښه نیوني په ښت کونه ده

لاندې برابرون لرو

$$x^n = a$$ د $n \in \mathbb{N}^*,\ a \geq 0,\ x \geq 0$ سره

د پېژند په بنسټ کېدی شي دالاندې برابرون وليکو(برابرارزښتوالی):

$$x = \sqrt[n]{a}$$ د $n \in \mathbb{N}^*,\ a \geq 0,\ x \geq 0$ سره

اوس د لومړي برابرون ازښت په دويم برابرون کې ځای په ځای کوو، نو لرو

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$ د $n \in \mathbb{N}^*,\ a \geq 0,\ x \geq 0$ سره

دا فرمول موږ ته دا لاندې را په ګوته کوي:

په توانکونه (لنډ: په توانونه) د ريښه نيوني په څټ کونه ده

دا پورته کېدی شي، چې د ريښي د بل پېژند يا تعريف په څېر ونيول شي.
دا فرمول وايي، چې: که د يوه ګڼ a د بېلګې په توګه n –مه رښيه ونيسو او بيا دا ګڼ دn –م توان ته جګ کړو، بېرته a لاس ته راځي (ددې لپاره ورسته تمرين شته) ومو ليدل، چې په توان کونه د ريښه نيوني په څټ د شمېرنې عمليه ده.

يوه بيلګه : $\sqrt[3]{a^3} = 3$

د ريښي يو بديل يا الترناتيو پېژند يا تعريف:

د پورته سره ليکل شوي پېژند ته لاندې پېژند يا تعريف هم بايد يو ځل ګرانو لوستونکو ته وړاندې شوی وي:

د يوه ناکميز ګڼ a n –مه ريښه هغه ناکميزه ګڼ دی، چې که د n په توان شي بېرته a ترې لاس ته راشي.

دلته مو هم وليدل،چې ريښه نيونی بايد يو ناکميز ګڼ وي. دا مو د مخه هم همداسې د ريښې پېژند کې ټاکلي وو.

په توانکونه د ريښه نيوني په څټ کوني ته تمرينونه

❶ $\left(\sqrt[2]{9}\right)^{2} =$

❷ $\left(\sqrt[17]{747}\right)^{17} =$ د $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ سره

❸ $\left(\sqrt[42]{4711}\right)^{42} =$ د $z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}^*$ سره

❹ $\left(\sqrt[5]{a}\right)^{5} =$

❺ $\left(\sqrt[2n]{z}\right)^{2n} =$

کارونه: ريښه برابرون

روښانه ونه

موږ کره کړل، چې شمېرکارونه(-عمليه) ريښه نيونه له منځه وړي..

ددې څخه د ريښه برابرونونو کې کټه خستل کيږي، چې دا موږ په يوه پراخه کورس کې منځ ته را اچوو.

بېلګه :

لاندې برابرون اوبې (حل) کيږي

$$\sqrt[2]{x+4} = 3$$

ليکلی شو $\left(\sqrt[2]{x+4}\right)^{2} = 3^{2}$

کېن لور ۲ ــامه ريښه او ۲ ــم توان يو بل پورته کوي، نو لرو

$$x + 4 = 9$$

اوس ۴ ښي لورته راوړو ، نو لرو : $x = 5$

که دا ارزښت په پورته لومړني برابرون کې ځا ی په ځا کړو، لاندې لرو

$$\sqrt[2]{5+4}=3$$
$$\sqrt[2]{9}=3$$
$$3=3\ \checkmark$$

دا، چې له دې یوه رښتیا وینا لاس ته راځي یانې(3=3) ، نو   x=5   رښتیا دی

ريښه نیونه د په توان کووني په څېټ
پيل
په تېر مخ کې مو ولیدلوچې توان نیونه د ريښه نیوني په څټ دی.
اوس غواړو وښايو، چې ددې وینا په څټ هم باور لري. ريښه نيونه (   ) د پوتنخ نيوني
په څټ دی
فرمول
موږ لاندې برابرون په پام کې نیسو

$$x^n=b \qquad \left(b,x\in R_{\geq 0}\ ,\quad n\in\mathbb{N}^*\right)$$

د ټاکوني یا پېژند له مخې لاندې وېناوې اکویوالنت (برابرارزښته)دي

$$x=\sqrt[n]{b} \qquad \left(b,x\in R_{\geq 0}\ ,\quad n\in\mathbb{N}^*\right)$$

اوس په دویم برابرون کې بنه اووښتوني یا واريابلي b د “b„   ارزښت سره په لومړي
برابرون کې ځای په ځای کوو:

$$x=\sqrt[n]{x^n} \qquad \left(x\in R_{\geq 0}\ ,\quad n\in\mathbb{N}^*\right)$$

ددې لپاره، چې وروسته یوه بله بنه ساده وښايو، یوه بله نومه ونه رامنځ ته کوو: د
اووښتونيx   په ځای a   ږدو:

$$\sqrt[n]{a^n}=a \qquad \underline{\text{mit:}}\ a\in R_{\geq 0}\ ,\ n\in\mathbb{N}^*$$

اوس ددې فرمول غوره والی روښانه کوو:
ريښه نیونه د توان په څټ کوونه ده
فرمول وايي: که ګڼ a په n - م   توان کړو   او له لاس ته راوړني د n-مې ريښې
لاس ته راوړنه را وباسو، بېرته   aلاس ته راځي:
ريښه نیونه په توان کوونه بېرته له منځه وړي، دا په دې مانا چې ريښه نيونه د په توان
کیدنې په څټ کارونه ده، لکه، چې زیاتو، کمون له منځه وړي (بیلګه: $a^{3-3}=a$)

د ريښه نيونې لپاره تمرينونه:

ريښه نيونه د په توان کوني په څت کونه ده

② $\sqrt[42]{6^{42}} =$

① $\sqrt[9]{2^{9}} =$

③ $\sqrt[7]{999^{7}} =$

موږ توان هم په څو ځايونو کې څيړلی، چې دلته يې سره يوځای راوړم.

راته مه برګيږی: زه نه شم کړی، چې زما لهکيکنوتيرشم. دا ډېرتکراردی، خوتاسوکړيشی د خپلي خوښېڅه ولولی.که ډېرپيولولیيا ډېربديلونه ولری، زيانهلري.بياوايم،چې :تکرارد زده کړېموره.

توان (پوتنځ) او ريښه (جذر) Potenz , Wurzel (Root)

په دې برخه کې د توان او ريښي قوانين دخيرني لاندی نيسو، دلته غوره دا ده، چې د کاروني يا استعمال چټکتيا ته پرمختګ (تکامل) ورکړو٠ دا مشوره کيږي، چې ريښه دې په پوتنځ واړول شي، چې د اکسپوننت ګڼ يا جګګڼ يې راشنل وي٠ د دې فورمال ټيک کره د ګڼلو قوانينو په څنګ کې د باوري کيدو لپاره بايد په نيونو(فرضيو) هم ژور فکر وشي٠

د ريښي پيژند د خلاف يا پر څټ عمليو مخه بايد نيول شوي وي، چې د هغې له مخې راديکاند (ريښه ويستونی يعنی هغه ګڼ، چې ريښه يې وستلکيږي،د ريښی نخښې لاندی ګڼ) او هم د ريښی ارزښت نامنفي – يا ناکميز ګڼونه وي٠ د توان زړه پورې ريل اکسپوننت (په جګ) هلته کره دی يا باوري دی، چې د بنسټ لپاره د مثبت ګڼونو نيونه شوي وي٠

که ولرو 2.2.2 ياني د يوه ګڼ په خپل ځان کې ځل کونه، نو لنډ يې داسې ليکو 2^3 . او وايو،چې 2^3 د 2 دريم (۳ –م) توان دی يا دوه په دريم توان .

دلته ۲ بنسټ او ۳ اکسپوننت یا جګکښ یا جګعدد دی. لنډ داسې وایو : ۲ جګ ۳ یا ۲ په جګ د ۳ .

یادونه :

تراوسه مو داسې ویل: ۲ په توان د ۳ . ومو لیدل ، چې دا لوستنه تیک نه ده.

پوتنح یا توان Potenz :

پیژند :

یو توان د همغه فاکتورونو یا ځله وونو د ځل لنډونه ده

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \; .... \; \cdot a \cdot a}_{n \text{ - ځله}}$$

ګڼ a د توان بنسټ بلل کیږي. ګڼ n د توان جګکښ یا اکسپوننت بلل کیږي
a^n توان ا رزښت یا لنډ توان بلل کیږي

لوستل: د a ګڼ n -م توان یا a جګ n

بېلګې:

$5^1 = 5$

$(-1)^6 = 1$ مګر $-1^6 = -1$

$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100000$

$\left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10000} = 0{,}0001$

$0{,}1^5 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}00001$

$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{27}{64}$

$8 \cdot (-2) \cdot 8 \cdot (-2) \cdot 8 \cdot 8 = 8^4 \cdot (-2)^2 = 16384$

$0^7 = 0$

$(\sqrt{7})^3 = \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = 7 \cdot \sqrt{7}$

پيژند:

د $a \in R$ او $n \in N$ لپاره باور لري (د $n \neq 0$ لپاره)

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$n \in N^* \wedge a,b \in R$$

ځانګړی حالت $a^1 = a$

په دې برخه کې ښايو

د پيژند روښانه ونه :

نيسو، چې لاندې افاده يا وپينه شميرو:

3+3+3+3+3

دلته همغه يا همغه ډول زياته ووني سره زياتيږي. د دې لپاره يوه ساده ليکنبڼه پيژنو:

3+3+3+3+3+= 5.3

ځله ونه د همغه ګڼ د څو ځله زياتون لنډه لار ده.

اوس دا پوښتنه رامنځ ته کيږي : چې شميرپوهان د همغه ګڼ د څو ځله د خپل ځان سره ځله ونو يا فاکتورونو لپاره هم يوه ساده لنډه لار لري؟ ياني د وپينې لکه:

3.3.3.3.3

د دې لپاره هم يوه لنډه ليکنلار شته:

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$

جګ اېښول شوی ګڼ «5»Exponent ورکوي، چې 3 دې پنځه ځله د خپل ځان سره ځل يا ضرب شوی وي.

د په توانيدنه د ځلوني ضربوني څخه لومړی کونه

روښانه ونه : دا قاعده يا دا لار له پخوا پيژنو:

ټکي شميرنه(ځل يا ضرب، ويش) له کربښي شميرنې(زياتون،کمون) لومړی ده ، يا فورمال :

شميرکارونه »ځلونه، وېشنه« له شميرکاروني « زياته ونې(همداسې کموونې) څخه لومړيوالی لري.

3+2.4 = 3+(2.4) = 11

يوه ورته لار په توانيدنې لپاره هم شته:

شميرکارونه يانښلونه يا که غواړی «عمليه » په توانکونه و ځله ونې ته لومړيوالی لري.

$10 \cdot 2^3 = 10 \cdot (2^3) = 80$

د کميز بنسټ سره د توان یا پوتنخ کليمه :

یو توان په زیاتیز جګګڼ یا اکسپوننت سره زیاتیز توان ارزښت لري٠

$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

که بنسټ کميز وي، نو دوه حالتونه یو له بل توپير کوو:

که جګګڼ جوړه وي ، نو له دې لاس ته راځي، چې توان ارزښت زیاتیز دی

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

که جګګڼ ناجوړه وي ، نو د توان ارزښت کميز دی

$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

روښانه ونه

تراوسه مو هغه توانونه وڅيړل، چې بنسټ يې زیاتیز وو٠ داسې توانونه تل زیاتیز توان ارزښتونه لري، ځکه، چې زیاتیز ګڼونه سره ځليږي:

$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

اوس داسې حالت را اخلو، چې بنسټ يې کميز دی او جګګڼ يې جوړه ګڼ دی

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

لومړی (-2).(-2) شميرو ، دا چې کميز ځل کيمز زیاتیز ورکوي، نو4+ لاس ته راځي٠ اوس ورپسی ځله ونه (-2).(+4)مخ ته بیایو او 8- لاس ته راځي، ځکه، چې کميز ځل د زیاتیز سره لاس ته کميز راځي٠اوس اخرنی ځلونه کاروو، دا په دې مانا، چې (-2).(-8) ٠ لاس ته راوړنه يې 16+ ده، ځکه چې کميز ځل يې کميز لاس ته ترې زیاتیز راځي او له دې سره 16+ ٠

اوس حالت راوړو، چې بنسټ کميز او جګګڼ یو ناجوړه یا طاق ګڼ دی

$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

لومړی ځله ونه (-2).(-2) یو زیاتیز ګڼ 4+ لاس ته راکوي او دويمه ځله ونه (-2).(+4) ګورو، چې کميز ګڼ 8- راکوي.

مخنخښې قاعده (- لار،- خوی،- قانون) :

پيژند:

که د یوه توان د بنسټ مخ ته یوه کميزنخښه وي، نو دا توان پورې اړه نه لري، دا په دې مانا، چې د دې نخښې توان نه نیول کيږي یا دا نخښه نه په توان کيږي٠

$-a^4 = -(a.a.a.a)$

که بنسټ او مخنخښه په نوک کې رابند وي، نو دا مخنخښه توان پورې اړه لري او له دې امله د بنسټ سره یوځاي توانيږي یا يې توان نیول کيږي

$(-a)^4 = (-a)\cdot(-a)\cdot(-a)\cdot(-a) = a^4$

په ټوليزه توګه باور لري: $(-a)^n \neq -a^n$

روښانه:

موږ وښوول، چې $(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = \mathbf{16}$

که نوکان نه وي ، نو څنګه ؟ ياني که وي $-2^4 = ?$

موږ لا نه دي ويېلي، چې کميز نخښه په توان اړه لري، که نه، موږ تراوسه د داسې حالت لپاره ګېونه نوکانو کې بند کړل٠ دا چې دا ګڼ نوکانو کې بند نه دی، نو کميزنخښه په توان اړه نه لري، ياني کيدی شي، چې ۲ څلور ځله د ځان سره ځل شي ، مګر مخنخښه نه، نو لرو

$-2^4 = -(2\cdot2\cdot2\cdot2) = \mathbf{-16}$

په ټوليزه توګه باور لري $(-a)^n \neq -a^n$

پام : دې فرمولولو ته دي پام وي، چې په ټوليزه توګه دا مانا لري، چې د قاعدو ځانګړيني يا اتثناوي شته دی: دا داسې جګګڼ n که يو ناجوړه ګڼ وي، نو دی:

$(-a)^n = -a^n$

بيلګه: $(-2)^3 = -2^3$:

ځانګړي حالتونه :

1^n

0^n

0^0

a^1

a^0

د توان په هکله 1 يو ځانګړی ځاي نيسي:

که هر څومره څوک 1 له 1سر ځل کړي همغه1 ترې لاس ته راځي:

$1.1.1....1=1$

له دې امله باور لري: $1^n = 1$

يو ورته ځانګړی ځاي (و توان کولو ته) ګڼ 0 هم نيسي: هرڅومره چې ګڼ 0 له ځان سره ځل شي، ګڼ 0 ترې لاس ته راځي٠

$0.0.0...0=0$

له دې امله باور لري:

د صفر سره ــلکه څنګه په ويش کې- توانيدنه يا په توانکونه اجازه نه لري٠

$0^n = 0$ توان نه دی تعريف(لکه $a:0$ پيژند نه لري) :

دا به وروسته وڅيړل شي، ځکه، چې توان له تولګڼونو سره وروسته راځي

00 = nicht definiert

دا لاندې حالت مو په پيل کې د څېړنې لاندې نيولی وو

a1 =a

له صفر سره په توانيدنه يو راکوي، خو چې دا ګڼ له صفر سره برابر نه وي

$$a^0 = 1; a \neq 0$$

موږ بايد $a \neq 0$ ځکه وغواړو، چې صفر په جګ د صفر مو د مخه نه وو پرېښودی

د توانونو ځله ونه، چې همغه بنسټ ولري

د توان قانون الف ۱

د برابر بنسټونو توانونه سره ځل کېږي، جې جګګنونه يې سره زيات شي

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

د $a \in R$ $n,m \in N^*$ سره

يادونه :

لکه چې ګورو دا قانون هلته باور لري، چې جګګنونه پيداينتي ګڼونه وي

موږ په راتلونکې د توان قوانين داسې غزوو، چې دا پورته هم باور ي کوي.

بېلګې

$$10^2 \cdot 10^3 = 10^{2+3} = 10^5$$

$$2^5 \cdot 2^5 = 2^{5+5} = 2^{10}$$

$$9^{40} \cdot 9^2 = 9^{40+2} = 9^{42}$$

$$3^{15} \cdot 3^5 = 3^{15+5} = 3^{20}$$

ښونه :

دا تيک له پيژند ښخه لاس ته راځی، لکه چې پورته مو وليدل

توان له همغه بنسټ سره

$$a^n \cdot a^m =$$

لیکلی شو :

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ - ځله}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{ - ځله}}$$

د ښی خوا ځل کولو څخه لاس ته راځي:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n\text{ - ځله}}$$

د مخه مو وکتل، چې د همغه بنسټ سره توان کې جګګښونه سره زیاتیږي،نو لرو:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

د برابر بنسټیزو توانونو ویشنه :

پوتنځ قانون ب ۱ :

د برابربنسټیز توان د ویشني فرمول کې ۳ ښالتونه سره توپیروو:) د ..... لپاره für
(=

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & m>n \\ 1 & m=n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & m<n \end{cases}$$

د ټولو $\forall n,m \in N^* \wedge a \in R, a \neq 0$ لپاره .

$a \neq 0$ باید غوښتل شوی وي، ځکه چې په صفر ویشنه ناشونی ده یا اجازه نه لري٠

بیلګي :

لومړي، دویم او دریم حالت ته بیلګې :

لومړی حالت $\frac{7^5}{7^3} = 7^{5-3} = 7^2$

دویم حالت $\frac{7^5}{7^5} = 1$

دریم حالت $\frac{7^3}{7^5} = \frac{1}{7^{5-3}} = \frac{1}{7^2}$

بنوونه : د پوتنځ قانون ب ۱ حالت ۱ :
د لاندې لپاره فرمول لټوو:

$$\frac{a^m}{a^n}$$

سره $m > n$ د

د توان قانن له مخې باور لري:
(د لاندې الماني ژباړه: n –ځله)

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ mal} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m-n\ mal}}^{m\ mal}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ mal}}$$

دا چې n له m کوچنی دی کړی شو ، چې a ځله وونی (ځلکېدونی) یا فاکتور لنډ کړو ٠ نو په ماتلاندې کې (m-n) ځله وونیa پاتیږي:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}^{m-n\ \mathrm{mal}}}{1}$$

ماتلاندې لرې کیري ، ماتباندې بیرته د پوتنځ په ډول لیکو:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

سره $m > n$ د

د توانقانون ب ۱ ، حالت ۲ :

موږ د لاندي لپاره فرمول لټوو:

$$\frac{a^m}{a^n} \quad د \quad m = n \quad سره$$

ماتباندې او ماتلاندې برابر دي٠

د ماتشميرني ښخه پوهيږو، چي :

که په مات کي ماتباندې او ماتلاندې برابر وي ، نو د مات ارزښت ۱ دی٠

له دې سره موږ حالت ۲ وښو ده:

$$\frac{a^m}{a^n} = 1$$

د پوتنځ قانون ب ۱ حالت ۳ ښوونه:

موږ د لاندي لپاره فرمول لټوو»

$$\frac{a^m}{a^n} \quad د \quad m < n \quad سره$$

د پوتنځ قانون سره سم باور لري:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m\ mal}}{\underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ mal} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-m\ mal}}_{n\ mal}}$$

دا چي m له n کوچنی دی، نو کری شو چي ځله وونی a لنډ کړو ۰ په ماتلاندې کي(n-m) – ځله ځله وونی a پاتيږي:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{n-m\ \mathrm{mal}}}$$

ماتلاندې بيرته د توان په ځير ليکو:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

د $m < n$ سره

څه چي د ښوولو وو(لنډ : ځ چ ښ)

د a^1 بڼي توان :

جمله : دا چي د توان قانون ب ۱ پیژنو ، کړی شو، د جملي ښوونه اوس سر ته ورسوو، چي د توان په پیژند کي منځ ته راځي:

$$a^1 = a; a \in R$$

دري بیلګي :

$$8^1 = 8; 42^1 = 42; c^1 = c$$

ښوونه : لاندې مات رامنځ ته کوو

$$\frac{a^{n+1}}{a^n}$$

د توان قانون په مات کاروو، او بیایې د a^n, سره لنډوو، نو لاس ته راځي:

$$\frac{a^{n+1}}{a^n} = \frac{a^n \cdot a}{a^n} = a$$

د بلې لور کیدی شي د توان قانون ب۱ ($a^m:a^n=a^{m-n}$) په مات وکاروو، نو لاس ته ر اځي:

$$\frac{a^{n+1}}{a^n} = a^{n+1-n} = a^1$$

دواړه لا سته راوړني چي سره پرتله کړو، نو غوښتونی لاس ته راځي.

د توانونو ضربونه (ځله وو نه) د برابر جګ (جګګڼ یا –عدد) سره توان قانون الف ۲ :

د برابر جګګڼ سره توانونه سره ځلیږي، داسي، چي جګګڼ یې وساتل شي، او بنسټونه یې سره ځل شي:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$n \in N^* \wedge a,b \in R$$

یادونه :

$N^* = \{1,2,3,\ldots..\}$
$N = \{ 0,1,2,3,\ldots.\}$

ځلوربېلګې:

$$2^3 \cdot 5^3 = (2\cdot 5)^3 = 10^3 = 1000$$
$$8^3 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \left(8\cdot \tfrac{1}{2}\right)^3 = 4^3 = 64$$
$$4^2 \cdot 25^2 = (4\cdot 25)^2 = 100^2 = 10000$$
$$p^2 \cdot q^2 = (p\cdot q)^2$$

يوه بله بيلګه :

$$\left(\frac{a}{b\cdot c}\right)^{17}\cdot\left(\frac{b\cdot c^2}{a}\right)^{17} = \left(\frac{a}{b\cdot c}\cdot\frac{b\cdot c^2}{a}\right)^{17} = \left(\frac{a\cdot b\cdot c^2}{a\cdot b\cdot c}\right)^{17} = c^{17}$$

د توانقانون الف۲ وکاروی   د ماتونويوځای کونه   لنډونه

کارونه يا استعمال :
د ځله وونو يا ضريبونو په توانيدنه:
لکه د مخه مو چې وويل: د برابر جګګې سره ګنونه ځل کيږي، داسې چې جګګې ساتي اوبنستونه سره ځله وي۰

$$a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$$
$$n \in N^* \wedge a,b \in R$$

طبعآ دا توانقانون الف ۲ په ښې لور ليکي،دا په دې مانا چې له ښي و کيڼ لور ته ۰ ادا دی :
$(a.b)$ د n سره په توانيږي داسې، چې هر ځله وونی يا فاکتور يې په n –م توان کړي

$$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$
$$n \in N^* \wedge a,b \in R$$

پيداينتي ده، چې دا قاعده له ۲ څخه زياتو ځله وونو لپاره هم باور لري۰
درې بيلګې:

❶ $(5\cdot 2)^2 = 5^2\cdot 2^2$

❷ $(x\cdot y)^5 = x^5\cdot y^5$

❸ $(3\cdot 4)^2 = 3^2\cdot 4^2$

ښوونه :

غواړو وښايو، چې باور لري:

$$a^n\cdot b^n = (a\cdot b)^n$$

د دې لپاره د برخه۱ کې د يوه توان زده شوى پيژند په a^n او همداسې په b^n استعمالوو:

$$a^n\cdot b^n = \underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{n\text{ - ځله ځلكونىa}}\cdot\underbrace{(b\cdot b\cdot b\cdot\ldots\cdot b)}_{n\text{ - ځله ځلكوونى b}}$$

د ځله ولو لپاره اوس د اسوځياتيو قانون باور لري، دا په دې مانا، چې د فاكتورونو ځله وونو لړيرلپسې په خوښه بدلولی شو:

$$a^n\cdot b^n = \underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot\ldots\cdot(a\cdot b)}_{n\text{ –ځله ځله ووني(ځل كووني) (a.b)}}$$

اوس بيرته د مخ ته تير توان پيژند استعمالوو او ليكلی شو :

$$a^n\cdot b^n = (a\cdot b)^n$$

توانقانون ب ۲ :

د برابرو جګګنونو سره توانونه داسې ويشل كيږي، چې جګګنونه په ځاي پاتيږي او بنتونه ويشل كيږي:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

د $n\in N \wedge a,b\in N; b\neq o$ سره

په صفر د ویش اجازه نشته، نو ماتلاندې باید په صفر برابر نه وي

درې بیلګې:

$$\frac{16^2}{4^2} = \left(\frac{16}{4}\right)^2 = 4^2 = \underline{\underline{16}}$$

$$25^3 : 5^3 = (25:5)^3 = 5^3 = \underline{\underline{125}}$$

$$\frac{27^2}{9^2} = \left(\frac{27}{9}\right)^2 = 3^2 = \underline{\underline{9}}$$

سخته یا ستونځمنه بیلګه :

$$\frac{(2x+2)^3}{(x+1)^3} = \left(\frac{2x+2}{x+1}\right)^3 = \left(\frac{2(x+1)}{x+1}\right)^3 = 2^3 = 8$$

توانقانون ب۲   ۲   په ماتباندې کې   لنډونه

وکاروی   له نوکانو وباسی

د ماتونو په توانیدنه :

د برابر جګګې سره توان ویشل کیږي،داسې، چې جګګې یې ساتلی پاتیږي او بنستونه یې ویشل کیږي:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

د $n \in N^* \wedge a,b \in R; b \neq o$ سره

طبعآ کیدي شي، چې توانقانون ب۲ هم په څټ ډول وکارول شي، دا په دې مانا، چې له بنې و کین لور ته٠ د دا داسې وي:

یو مات په n ـ م توان کیږي، که د هغه ماتباندې او ماتلاندې په n ـ م توان شي٠

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

دریمه بیلګې :

❶ $$\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}$$

❷ $$\left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^2 = \frac{(a \cdot b)^2}{c^2} = \frac{a^2 \cdot b^2}{c^2}$$

څه دې وښوول شي؟

غواړو توانقانون وښايو:

د توان وېش د همغه جګکڼ سره

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

ښوونه: د ښوونې لپاره بیرته د توان پېژند ته ځو، چې په برخه ۱ کې مو زده کړې:

a ځله ځله وونی -n

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}}$$

bځله وونی ځله - n

د ماتشمېرنې څخه پوهیږو،چې دا ماتونه په ځانله ځانله ماتونو توټه کولی شو

a ځله ځله وونی n

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}}$$

bځله وونی ځله - n

اوس د توان پېژند پام ته راولو، دا چې مات n ځله منځ ته راځي، اجازه لرو، چې ولیکو:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

د توان توان كونه

د پوتنخ - يا توان قانون ۳

توانونه په توانيږي، داسې چې بنسټونه يې د جګو(اكسپوننتونو) د ځل سره په توان شي

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$

$a \in R \quad m,n \in N^*$

بېلګې

$$\left(10^2\right)^3 = 10^{2 \cdot 3} = 10^6$$

$$\left(7^{10}\right)^3 = 7^{10 \cdot 3} = 7^{30}$$

$$\left[\left(\tfrac{3}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\tfrac{3}{2}\right)^{2 \cdot 3} = \left(\tfrac{3}{2}\right)^6$$

پسې(پسې راتلنه)

د توان په توانه ونه كې توانونه سره بدلېدلى شي

$$\left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m$$

N* ∈R m,n∈ a

درې بېلګې

$$\left(7^3\right)^2 = \left(7^2\right)^3$$

$$\left(2^{10}\right)^{100} = \left(2^{100}\right)^{10}$$

$$\left[\left(\tfrac{7}{9}\right)^{20}\right]^{10} = \left[\left(\tfrac{7}{9}\right)^{10}\right]^{20}$$

د توانقانون ۳ ښوونه د توان په توانكونه

څه بايد وښوول شي؟

غواړو د پوتنخقانون ۳ وښايو

$$\left(a^{m}\right)^{n}=a^{m\cdot n}$$

ښوونه:
د ښوونې لپاره د توان پېژند څخه کار اخلو، چې په برخه ۱ کې مو وپېژند

$$\left(a^{m}\right)^{n}=\underbrace{a^{m}\cdot a^{m}\cdot a^{m}\cdot a^{m}\cdot\ldots\cdot a^{m}}$$

n- ځله ځلوونی a^{m}

په ښې لور د توانقانون ۱ کاروو، چې د برابرو یا همغه بنسټونو ځل تنظیموي:

n- ځله زیاتېدونی m

$$\left(a^{m}\right)^{n}=a^{\overbrace{m+m+m+\ldots+m}}$$

د پیداېښتي ګڼونو د ځل سره سم(۱) باور لري:
n-ځله زیاتېدونی m برابر په n.m دی:

$$\left(a^{m}\right)^{n}=a^{m\cdot n}$$

(۱) بېلګه(پورته ته) 3+3+3+3+3 = 5.3

د توانونو زیاتون:

د توانونو د زیاتون(کمون) لپاره توانقانون نه شته ، چې زیاتون یا کمون ساده کړي. دا په‌دې *مانا چې:*

توان تیک هلته سره زیاتیدی یا کمیدی شي، چې برابر وي، دا په دې مانا چې هم بنسټونه او هم یې جګګونه سره برابر وي..

په دې حالت کې چې توانونه برابر وي نو د زیاتون ور سره بلد دیستریبیوتیو قانون کارول کیږي، چې توانونه سره یو په بل زیات کړو: a.p+b.p=(a+b)p (پام دې وي،چې p د پوتنځ لپاره لیکل شوی دی)

درې بېلګې :

$$\boxed{3\cdot9^7+2\cdot9^7}=(3+2)\cdot9^7=\boxed{5\cdot9^7}$$

$$\boxed{7^5+7^5}=1\cdot7^5+1\cdot7^5=(1+1)\cdot7^5=\boxed{2\cdot7^5}$$

$$\boxed{8\cdot6^6-3\cdot6^6}=(8-3)\cdot6^6=\boxed{5\cdot6^6}$$

د توان زياتون (كمون) لپاره چل ول :

داسې پېښيږي، چې کله کله دوه توانونه په بنسټ او جګګڼ کې سره توپير لري، خو کېدی شي د توان قوانينو په مرسته برابر شي، داسي چې سره زياتيدلی شي.

وګورئ چې لاندې کې څه شوي دي

$$8^3+2^9=$$

$$(2^3)^3+2^9=$$

$$2^{3.3}+2^9=$$

$$2^9+2^9=$$

$$2.2^9=$$

$$2.2^9=2^{10}=1024$$

دريمې برخې ته

په دې برخه کې څه غواړو؟

تر اوسه مو هغه توانونه وڅېړل،چې اکسپوننتونه يا جګګنونه يې زياتيز وو: 2^3

په دې برخه کې هغه توانونه څېړو،چې اکسپوننتونه يې صفر يا کميز ګڼونه وي ياني 2^{-3} , 2^0

مورږ پوهيږو،چې (مطلق) ارزښت څه شی دې ، ياني $|3| = 3$ او $|-5| = 5$

د پوتنخ پيژند و کميز جګ ته غزونه

پيلونه

د مخه مو توان و پيژند، چې جګګنونه يې پيداپښتي ګڼونه وو او لاندې خلتونه مو توپير کړل

د پوتنځ قانون کميز ګڼ ته غزونه

پيلونه :

توانقانون ب۱ داسي دی

لومړی حالت	$m>n$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
دويم حالت	$m=n$	1
دريم حالت	$m<n$	$\frac{1}{a^{n-m}}$

د $a\neq0$ $a\in R$ $m,n\in N^*$ سره

څه به شوي وی، که حالت توپير مو مخ ته نه وی پروت دويم او دريم حالتونه مو د لومړي حالت غوندې مخ ته بيولي وی، ياني د لاندې فرمول په توره:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

په دويم خالت کي به صفرر امنځ ته شي او په دريم حالت کي حتی يو کميز اکسپوننت يا جګ:

$$\frac{7^5}{7^5} = 7^{5-5} = 7^0 \qquad \frac{9^2}{9^5} = 9^{-3}$$

اړيين يو، چې د a^0 لپاره فرمول رامنځ ته کړو او روښانه کړو، چې په توان کي د کميز جګګڼ سره څه پوهيږو:

د توان قانون پراخيدنه و $a^0=1$ ته

پيل : د a^0 لپاره د توانقانون ب ۱ خخه دا لاندې پوهيږو

لومړی حالت	$m>n$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
دويم حالت	$m=n$	1
دريم حالت	$m<n$	$\frac{1}{a^{n-m}}$

لاندې ویش مخ ته بیایو ، چې m=n دی:

$$\frac{a^m}{a^n} \qquad \text{د بېلګې په توګه} \qquad \frac{7^5}{7^5}$$

موږ دا ویش دوه ډوله مخ ته بیایو وار د لومړي خالت په ځېر او لکه چې بلد یو د دویم حالت د پېژند په ځېر:

د دوم حات ځخه لاس ته راځي	د لومړي حالت ځخه لاس ته راځي
$\frac{a^m}{a^n} = 1$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^0$

د برابر اینیووني له لارې لاس ته راځي:

$a^0 = 1$ د $a \neq 0$ سره

بنوونه:

بنایو ، چې (0^0) پیژند نه لري. بنوونه ساده لیکو o^0 یاني 0^{m-m} , او بیا توان قانون 1b کاروو:

$$0^0 = 0^{m-m} = \frac{0^m}{0^m}$$

دا اخرنی وینه تعریف یا پیژند نه لري همداسې (0^0) هم پیژند نه لري

د ویش له لارې مخ ته ځو، لکه په دریم حالت کې

$\frac{a^m}{a^n}$ چېرته،چې $m < n$ دی، د بېلګې په توګه $\frac{9^2}{9^5}$

وېش په دوه ډوله مخ ته بیایو: ،

	د دریم حالت له مخې لاس ته راځي	د لومړي خالت له مخې لاس ته راځي
	$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$	$\frac{m}{n} = a^{m-n} = a^{-(n-m)}$

د برابر ايښوونې له لارې لاس ته راځي:

$$a^{-(n-m)} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

د نيونې له مخې n>m لرو، بانې (n-m) يو زياتيز ګڼ دی، چې b يې نوموو

$$a^{-b} = \frac{1}{a^{b}}$$

د کميز په جګ توان ددې توان په څېڅ ارزښت دی د زياتيز جګګڼ يا اکسپوننت سره

جمله :

موږ همدا اوس و ښوول ، چې

$$a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$$

که د توان په څېڅ ارزښت وليکو نو اکسپوننت خپله مخ نخښه بدلوي، نو
د پوتنځ توان مخنخښه بدلوي، که د بنسټ په څېڅ ارزښت جوړ شي:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n}$$

ښوونه د نسبتي (راشنل) بنسټ(مات) سره:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}} = \frac{1}{\frac{a^{n}}{b^{n}}} = \frac{b^{n}}{a^{n}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

دا مو د مخه ښوولي ، پام دې ورته وشي.

ښوونه : (د تولګنيز بنسټ لپاره)

$$a^{-n} = \frac{1}{a^{n}} = \frac{1^{n}}{a^{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n}$$

پوهېدنه يې له مخه وييڼو څخه روښانه ده

پوتنځقوانين (د تولګنيونو اکسپوننت يا جګګڼ لپاره يا - له ډېرى Z څخه)

توانقانون 1a

$$a^{m} \cdot a^{n} = a^{m+n}$$

توانقانون ب۱

توانقانون الف ۲

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

توانقانون ب۲

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

توانقانون ۳

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

د د پوتنځ د ب۱ قانون تغیرونه. دلته پیداینبتي اکسپوننت یا جګګڼ ته یواځې قانون بدل شوی. نور بنه بدلون ته اړتیا نه شته د قانون پیژند ورشو(تعریف ساحه) ده :

$a,b \in \mathbb{R}^*$ او $m,n \in \mathbb{Z}$

په پورته کې دا مانا لي، جې $a,b \neq o$ دي(ولې ؟ پام دې وته وشي)

د ب۱ حالت۱ د توانقانون بنوونه

حالت ۱ : دواړه جګګنونه کمیز دي

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \qquad r,s < 0$$

موږ د تولګنونو جګګڼ سره داسي مخ ته ځو

$r=-|r| \qquad s=-|s| \qquad z.B.: -5 = -|-5|$

$r=-|r| \qquad s=-|s| \qquad z.B.: -5 = -|-5|$

د نیوني سره سم او کمیز ګڼونه دي، نو لیکلی شو:

$$\frac{a^{-|r|}}{a^{-|s|}} =$$

په لومړي برابرون کې(کیڼ) له ایننوولو څخه لاس ته احٔي:

لیکلی شو :

$$\frac{\frac{1}{a^{|r|}}}{\frac{1}{a^{|s|}}} =$$

له ماتشمېرني لار څخه پوهېږو

$$\frac{1}{a^{|r|}} \cdot \frac{a^{|s|}}{1} = \frac{a^{|s|}}{a^{|r|}} =$$

دا چي دواړه پوتنځونه زیاتیز اکسپوننتونه لري، نو لاس ته راځي:

$$a^{|s|-|r|} = a^{|s|+(-|r|)}$$

د ښوني په پیل کي مو اینوولي : r=-|r|. دا اوس ببرته راګځوو، یاني د|r|- لپاره ببرته r لیکو او همداسي لیکلی شو |s|-=s ⇔ |s|=s-

ددې برابرون ښه بدلوو اود |s| په ځای s- ږدو

$$a^{-s+r} = \boxed{a^{r-s}}$$

د 1b حالت۲ د توانقانون ښوونه

دویم خالت: یو اکسپوننت کمیز دی. د بیلګي په توګه دویم جګګڼ کمیز دی

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \qquad r>0 \quad s<0$$

لیکلی شو:

$$s = -|s| \qquad z.B: -5 = -|-5|$$

$$s = -|s| \qquad z.B: -5 = -|-5|$$

له پورته لاس ته راوړو

$$\frac{a^{r}}{a^{-|s|}} =$$

لیکلی شو
له دي لاس ته اځي

$$\frac{a^{r}}{\frac{1}{a^{|s|}}} =$$

دا چي دواړه جګګنونه زیاتیز اکسپوننتونه یا جګګنونه لري، نو لیکلی شو

$$a^{r} \cdot a^{|s|} =$$

مورږ ليکلي وو $s=-|s|$.
له دې سره لرو

$$a^{r+|s|} =$$

$$a^{r-s}$$

پوتنخقانون الف ۲
دپوتنخقانون الف ۲ بنوونه :
دا قانون د ټولګنيز اکسپوننت يا جګګڼ لپاره بنايو، دا په دې مانا، چې جګ r دې کميز وي

$$a^{r} \cdot b^{r} = (ab)^{r} \qquad r<0$$

ليکلی شو

$$r = -|r| \qquad z.B: -5 = -|-5|$$

په لومړي (کيڼ) برابرون ږدو

$$a^{-|r|} \cdot b^{-|r|} =$$

دا چې جګګڼونه کميز دي ، ليکلی شو:

$$\frac{1}{a^{|r|}} \cdot \frac{1}{b^{|r|}} =$$

سره خلکوو يې :

$$\frac{1}{a^{|r|} \cdot b^{|r|}} =$$

د مخه زده شووو ښخه لاس ته راوړی شو

$$\frac{1}{(ab)^{|r|}} =$$

$$(ab)^{-|r|} =$$

$$(ab)^{r}$$

د ب۲ قانون ښوونه

ِاړو الف ۲ د ټولکښیز جګګڼ لپاره وښایو، دا په دې مانا،ې چګګڼ r دې کمیز وي

$$\frac{a^{r}}{b^{r}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{r} \qquad \text{mit: } r<0$$

دا ې جګګڼ کمیز وى لیکلى شو

$$r = -|r| \qquad z.B: -5 = -|-5|$$

په لړمړني (کین) برابرون کې یې ږدو ، نو لاس ته اځي

$$\frac{a^{-|r|}}{b^{-|r|}} =$$

د کمیز جګګڼ قانون کاروو، نو لاس ته راځي

$$\frac{\frac{1}{a^{|r|}}}{\frac{1}{b^{|r|}}} =$$

د ماتشمېرني قانون پر بنسټ لرو:

$$\frac{1}{a^{|r|}} \cdot \frac{b^{|r|}}{1} = \frac{b^{|r|}}{a^{|r|}} =$$

دا چې دواړه جګګڼونه زیاتیز دي لیکلى شو

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{|r|} =$$

په پورته کې مو لرود . که د بنسټ په څټ ارزښت ولیکو، نو جګګڼ بدأیږي، چې دا لاندې ترې لاسته راځي

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{-r} = \left(\frac{a}{b}\right)^{r}$$

د توان قانون ۳ د الف حالت:

موږ توانقانون ۳ د ټولګنیز جګ سره ښایو. موږ لړمړی خلت څېړو، په کوم کې چې یو جګ کمیز دی او ددې لپاره r<0 ټاکو:

$$\left(a^{r}\right)^{s} = a^{r\cdot s} \quad \text{د} \quad r < 0 \quad \text{سره}$$

دا چې د نیوني له مخې کمیز دی لیکلی شو

$$r = -|r| \quad \text{د بېلګي په توګه} \quad -5 = -|-5|$$

که په لوړي کېن برابرون کې کېښوول شي ترې لاس ته راځي

$$\left(a^{-|r|}\right)^{s} =$$

د کمیز جګګڼ قانون کاروني له مخې لرو

$$\left(\frac{1}{a^{|r|}}\right)^{s} =$$

دا چې دواړه جګګڼونه زیاتیز دي، نو لرو

$$\frac{1^{s}}{\left(a^{|r|}\right)^{s}} =$$

ماتباندې ۱ کېږي، اوس راځو ماتلاندې ته. دا چې دواړه جګګڼونه زیاتیز دي، لرو

$$\frac{1}{a^{|r|\cdot s}} =$$

موږ وښوول $r = -|r| \Rightarrow: -r = |r|$ د $|r|$ په ځای $-r$ لیکو، نو لرو

$$\frac{1}{a^{-r\cdot s}} = a^{r\cdot s}$$

د توانقانون ۳ حالت ۲ ښایو:

جګګڼونه ټولګڼونه دي او دواړه کمیز دي:

$$\left(a^{r}\right)^{s} = a^{r\cdot s} \quad \text{د} \quad r,s < 0 \quad \text{سره}$$

داچې دواړه جګې کمیز دي، لیکلی شو

$$\min^{-1} = \frac{1}{\min^{1}} = \frac{1}{\min}$$

$(a^{r})^{s} = a^{r\cdot s}$ د $r,s < 0$ سره

که په لومړي برابرون(کيڼ لور) کې کېښول شي، لاس ته ترې راځي

$$(a^{-|r|})^{-|s|} =$$

د کميز جګګڼ قانون څخه مار اخلو، نو لرو

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{a^{|r|}}}\right)^{|s|} =$$

د توانقانون پر بنسټ لرو

$$a^{|r|\cdot|s|} =$$

دا چې $|r| = -r$ لرو ، نو له دې $|r| = -r$ او $|s| = -s$: لاس ته ترې راځي ، نو لرو

$$a^{(-r)\cdot(-s)} = a^{r\cdot s}$$

تخنيکي ليکندود د کميز جګګڼ سره د بېلګې په توګه

$$\min^{-1}$$

روښانه ونه

په تخنيک کې أويې لکه دقيقه (min) زيات وخت کميز جګ(پوتنځ). د بېلګې په توګه:

$$\min^{-1}$$

موږ پوهيږو: کميزه مخنځبنه په زياتيزه مخنځبنه ، که د پوتنځ يا بنسټ په څېر ازبنت جوړ شي:

$$\min^{-1} = \frac{1}{\min^{1}}$$

جګګڼ ۱ کېدى شي له ليکلو پاتې شي، ځکه، چې قانون $a^{1}=a$ مو زده کړی

دا اخرنی وينا د ، په دقيقه کی، په مانا ده. دا وينه $\min^{-1}$ د ،، په دقيق کې،، په مانا دی ددې لپاره ځکه $\min^{-1}$ ليکو، چې ليکنه رالنده شي ياني دا يې يواځنی علت دی، چې ماتنځبنه ونه ليکل شي.

برخي ۳ ته معلومات

څه غواړو؟

په برخه ۱ کې مو داسې توانونه وڅېړل، چې جګګې يې پيداښتي ګڼ $n(n\neq0)$ وو:
2^3
په دويمه برخه کې مو توانونه وڅېړل، چې جګګې يې صفر يا کميز ګڼونه کيدی شو:
2^{-3}, 2^0
په برخه ۳ کې مو توانونه وڅېړل،چې جګګنونه يې راشنل ګڼونه وو
$2^{\frac{4}{5}}$ $2^{-\frac{2}{3}}$ او داسې نور.

دلته بايد په ريښه شمېرنه لږ بلد وو، چې څه د مخه او نوره به وروسته وڅېړل شي
د توان غزونه و راشنل جګګې ته
پوښتنه داده، چې ايا د توان غزونې ته اړتيا شته ، او دا د توان غزونې پېژند به څنګه وي
ددې لپارهه د ريښه توان لنډونه د بېلګې په څېر راوړو

$$\sqrt[6]{a^3} = \sqrt[6\cdot\frac{1}{3}]{a^{3\cdot\frac{1}{3}}} = \sqrt[2]{a^1} = \sqrt[2]{a}$$

ګورو، چې څه پېښيږي، که ريښه جګګې لنډ کړو، سره ددې چېرېښه جګګې او جګ يا جګګې پروېش بردي دي، او ريښه جګ داسې لنډ کړو، چې ۱ شي او له ليکلو لودی يا پاتې کېدی شي.

$$\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6\cdot\frac{1}{6}]{a^{5\cdot\frac{1}{6}}} = \sqrt[1]{a^{\frac{5}{6}}} = a^{\frac{5}{6}}$$

دا ځواب پورته پوښتل شوو پوښتنو ته ځواب ورکوي.:

۱ – اړين ده وپېژنو، چې د راشنل جګ لاندې څه پوهيږو، ګوم چې په لنډونه کې رامنځ ته کيږي.
۲ - که دويم برابرون نټوليز وليکو، نو ټيک غوښتل شوی پېژند راکوي، د پوتنح پېژند د راشنل جګګې سره.

$$\sqrt[m]{a^r} = a^{\frac{r}{m}}$$

دا هم اړين ده وښايو ، چې د توان قانون د راشنل جګ لپاره هم باور لري.
پوره د برخې په پای کې راڵی، خو د پوهېدنې لپاره اړين نه دی.

کميز بنستونه منع دي:
ځکه، چې ريښه وونی يا راديکاند به بيا کميز وي، چې پېژند ده لري يا نه دی تعريف:

$$(-2)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-2)^3} = \sqrt[5]{-8} = \text{n.def.}$$

که په ريښه جګ کې کمنز ګڼ وي ، حّ پېښيږي، لکه دا لاندې

$$a^{\frac{3}{-2}} = \sqrt[-2]{a^3}$$

دا اوس په لاندې توګه ليکلی شو

$$a^{\frac{3}{-2}} = a^{\frac{-3}{2}} = \sqrt[2]{a^{-3}}$$

که جګګڼ لسميز وي ، نو څنګه په دې حالت کې هم ستونځې نه شته او ليکلی شو:

$$a^{1.5} = a^{\frac{15}{10}} = a^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{a^3}$$

يو الف د راشنل جګ يا جګګڼ لپاره ښايو

$$a^{\frac{r}{m}} \cdot a^{\frac{s}{n}} = a^{\frac{r}{m}+\frac{s}{n}}$$

د ريښه لوست څخه پوهيږوو چې يو ترم د يوه ګڼ په توان کوو، که د همغه ګڼ ريښه يې ونيسو يانې

$$\sqrt[m\cdot n]{\left(a^{\frac{r}{m}}\right)^{mn}} \cdot \sqrt[mn]{\left(a^{\frac{s}{n}}\right)^{mn}} =$$

د پوتنځ دريم قانون د راشنل نونو لپاره کاروو، نو راکوي

$$\sqrt[m\cdot n]{a^{\frac{r}{m}\cdot mn}} \cdot \sqrt[mn]{a^{\frac{s}{n}\cdot mn}} =$$

په جګګڼ کې m او n همداسې لنډلی شي:

$$\sqrt[m\cdot n]{a^{rn}} \cdot \sqrt[mn]{a^{sm}} =$$

ريشه قانون يو الف کاروو

$$\sqrt[m\cdot n]{a^{rn} \cdot a^{sm}} =$$

د تيولګڼونو لپاره د توان قانون کاروو

$$\sqrt[m\cdot n]{a^{rn+sm}} =$$

په جګ کې m.n له نوکانو راوباسو

$$\sqrt[m\cdot n]{a^{m\cdot n\cdot\left(\frac{r}{m}+\frac{s}{n}\right)}} =$$

توانقانون ۳ د راشنل جگو لپاره وکاروی

$$\sqrt[m\cdot n]{\left(a^{\frac{r}{m}+\frac{s}{n}}\right)^{m\cdot n}} = a^{\frac{r}{m}+\frac{s}{n}}$$

د توانقانون یو ب ښوونه

غواړو توانقانون یو ب د راشنل جګ لپاره وښایو

$$\frac{a^{\frac{r}{m}}}{a^{\frac{s}{n}}} = a^{\frac{r}{m}-\frac{s}{n}}$$

لومړی ماتلاندې او ماتباندې د m.n سره توانیز کوو او بیا

$$\frac{\sqrt[mn]{\left(a^{\frac{r}{m}}\right)^{mn}}}{\sqrt[mn]{\left(a^{\frac{s}{n}}\right)^{mn}}} =$$

m.n -م ریښه جوړو. دلته m,n, پیداښتي ګنونه دي په دواړو جګګنونو د توان دریم قانون کارول کیږي

$$\frac{\sqrt[mn]{a^{\frac{r}{m}\cdot mn}}}{\sqrt[mn]{a^{\frac{s}{n}\cdot mn}}} =$$

اوس لنډیږي ، په ماتلاندې د n او ماتباندې کې د m سره

$$\frac{\sqrt[mn]{a^{rn}}}{\sqrt[mn]{a^{sm}}} =$$

اوس د ریښې دویم قانون کارول کیږي

$$\sqrt[mn]{a^{rn-sm}}$$

اوس m.nپه جګ کې له نوکانو د باندې نیسو ، نو لرو

$$\sqrt[mn]{a^{mn\left(\frac{r}{m}-\frac{s}{n}\right)}}$$

د توان دریم قانون کارولو وروسته لرو

$$\sqrt[mn]{\left(a^{\frac{r}{m}-\frac{s}{n}}\right)^{mn}}$$

د همغه ګن په توانونه او ریښه ونه یو بل له منځه وړي

$$a^{\frac{r}{m}-\frac{s}{n}}$$

ښوونه پوتنځ قانون ۲ الف

غواړو پونځقانون ۲ الف د راشنل جګ لپاره وښایو

$$a^{\frac{r}{n}}\cdot b^{\frac{r}{n}} = (a\cdot b)^{\frac{r}{n}}$$

د ریښه وېستنې له دس پوهیږو:

$$\sqrt[n]{\left(a^{\frac{r}{n}}\right)^n}\cdot\sqrt[n]{\left(b^{\frac{r}{n}}\right)^n}=$$

توانقانون ۳ کاروو د راشنل جګ لپاره

$$\sqrt[n]{a^{\frac{r}{n}\cdot n}}\cdot\sqrt[n]{b^{\frac{r}{n}\cdot n}}=$$

دواړهه جګګښونه لنډېدی شي

$$\sqrt[n]{a^r}\cdot\sqrt[n]{b^r}=$$

ریشه قانون ۱ د کاروی

$$\sqrt[n]{a^r\cdot b^r}=$$

د ټولګښونو جګ لپاره توانقانون ۲ الف وکاروی

$$\sqrt[n]{(a\cdot b)^r}=$$

د راشنل جګ سره د پوتنځ پېژند وکاروی

$$(a\cdot b)^{\frac{r}{n}}$$

د توانقانون ۲ ښوونه

غواړو توانقانون ۲ ب د راشنل جګ لپاره وښایو

$$\frac{a^{\frac{r}{m}}}{b^{\frac{r}{m}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{r}{m}}$$

ماتباندې او ماتلاندې په m -م توان کوو او هم يې m –مه ريښه نيسو، نو لرو

$$\frac{\sqrt[m]{\left(a^{\frac{r}{m}}\right)^m}}{\sqrt[m]{\left(b^{\frac{r}{m}}\right)^m}}=$$

اوس د رشنل جګ لباره د توانقانون ۳ کاروو، نو لرو

$$\frac{\sqrt[m]{a^{\frac{r}{m}\cdot m}}}{\sqrt[m]{b^{\frac{r}{m}\cdot m}}}=$$

اوس ماتباندې او ماتلاندې د m سره لنډوو

$$\frac{\sqrt[m]{a^r}}{\sqrt[m]{b^r}} =$$

د ريښي دوم قانون کاروو

$$\sqrt[m]{\frac{a^r}{b^r}} =$$

اوس په راديکاند يا ريښه وستوني د توان دوم قانون کارول کيږي

$$\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^r} =$$

په اخر کې بيا ،، د پوتنځقانون د راشنل – يا نسبتي جګ سره ،، کارول کيږي

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{r}{m}}$$

۴ . ۵ . تمرينونه

۱ . د توان کلمه، د توان جمعه او تفريق يا زياتون او کمون

۱ . ۱ – د توان په ځير يې وليکئ

a) $(-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1})$ b) $-\left(\frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}}\right)$

c) $-(b-a) \cdot (a-b) \cdot (a-b)$ d) $-(a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b)$

1.2. a) -3^{-4} b) $(-5)^3$ c) $(-2^{-1})^3$ d) $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

1.3. a) $12a^2b - 6ab^2 - 15a^2b + 6ab^2 - 7a^2b$

b) $(3a + 2b)x^4 - x^4(2b - 3a) + x^4(3a + 2b)$

c) $4(a-b)^2 + 2(b-a)^2 - 3(a-b)^2$

d) $18(a-1)^3 - 3(1-a)^3 - 15(a-1)^3 + 4(1-a)^3 + 3(1-a)^3$

۲ – د په توان يا پوتنځ ځل او وېش د برابر بنسټ سره

2.1. a) $\frac{3a^{n+1} \cdot 6x^{n+7} \cdot 9b^{x+1}}{3x^n \cdot 2b^{x+1} \cdot 3a}$ c) $\frac{a^{x+1} \cdot b^{x+3} \cdot a^{3x-1} \cdot b^{x+3}}{a^{x-2} \cdot b^{3-x} \cdot a^x \cdot b^{x+1}}$

b) $\frac{a^{n+1}\cdot a^{n+1}\cdot a^{n}}{a^{0}\cdot a^{n}\cdot a^{n-1}}$

d) $\frac{a^{3n-x}\cdot b^{2n+x}}{a^{n+2x}\cdot b^{2n-x}}\cdot\frac{x^{3n+2}\cdot y^{2n-1}}{x^{2n-3}\cdot y^{n+1}}$

2.2. a) $\frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}} : \frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}}$

c) $\frac{42a^2b^3\cdot x^{n+1}}{36c^3\cdot y^2\cdot z^{n-3}} : \frac{70a^3b^2\cdot x^{n+2}}{54c^2y^4\cdot z^{n-2}}$

b) $\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} : \frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$

d) $\frac{45xa^3\cdot 9y^n(a-1)^2}{9yb^3\cdot 30x^n(a+1)^2} : \frac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$

2.3. a) $(x^{5n+3} + x^{4n+5} - x^{3n+4}) : x^{2n+3}$

b) $(143a^4b^5 - 221a^3b^5 - 247a^5b^4) : 13a^3b^4$

c) $(a^{n+1}b^{x-1} + a^nb^x + a^{n-1}b^{x+1}) : a^{n-2}b^{x-1}$

d) $(16a^8 - a^4b^2 + 9b^4) : (4a^4 - 5a^2b + 3b^2)$

په لاندې کې x وشميرئ

3.1. a) $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2$

b) $4^{-2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$

c) $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

3.2. a) $\frac{18^4(a^2b)^2}{27^3\cdot(2a\sqrt{a}\cdot b)^2}$

b) $\frac{(6ab)^3\cdot(5a^2b)^4}{2^4\cdot 3ab^2\cdot(25a\sqrt{b})^2}$

c) $\left(\frac{4b^2y^2}{6a^2x^2}\right)^3\cdot\left(\frac{8a^3y^2}{6b^3x^3}\right)^4\cdot\left(\frac{18b^3x^6}{16a^3y^3}\right)^2$

d) $\left(\frac{45b^2y^3}{24a^3x}\right)^2\cdot\left(\frac{6bx^3}{9ay^3}\right)^3\cdot\left(\frac{75b^3x^3}{36a^4y}\right)^2$

3.3. a) $\frac{(3a-9b)^2}{81b^2-9a^2}$

b) $\frac{(6a-12b)^2\cdot(3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2}$

c) $\frac{(4a^2-9b^2)^2}{(3a^2-2ab)^2}\cdot\left(\frac{9a^2-4b^2}{2a^2+3ab}\right)^2$

d) $\left(\frac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3\cdot\left(\frac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 : \left(\frac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2$

3.4. a) $\frac{27x^{-5}\cdot y^{-6}\cdot z^{-1}}{45x^{-4}\cdot y^{-5}\cdot z^{0}}\cdot\frac{49x^{-2}\cdot y^{-3}\cdot z^{-4}}{42x^{-3}\cdot y^{-4}\cdot z^{-3}}$

b) $\frac{a^{-2}\cdot x^{-4}\cdot y^{-6}}{b^3\cdot c^{-4}\cdot z^{-5}} : \frac{a^{-3}\cdot b^{-5}\cdot x^{-3}}{c^{-5}\cdot y^{6}\cdot z^{-7}}$

c) $\frac{(ax-ay)^m\cdot(3bx+3by)^n}{(cx^2-cy^2)^{m+n}}$

d) $\left(\frac{(x+y)^{3a-4}}{x^{a-1}y^2} : \frac{y^{2a-5}}{x^{4a-3}(x+y)^{3-2a}}\right)\frac{x^{4-3a}y^{3a-6}}{(x+y)^{a-2}}$

۴ . د کومو شرایطو لاندې کیدی شي دا لاندې عددونه د یوې مربع- یا څلورې ریښې رادیکاند وي؟

4.1. a) $+a, -a$ b) $+a^2, -a^2$ c) $+a^3, -a^3$ d) ab

4.2. a) $+(a-b), -(a-b)$ b) $+(a-b)^2, -(a-b)^2$ c) a^2-b^2 d) a^2+b^2

۵ ــ د ریښو جمعه او تفریق(زیاتوناو کمون)

5.1. a) $6\sqrt{27}+2\sqrt{108}-7\sqrt{75}$

b) $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$

c) $3\sqrt[4]{256}-4\sqrt{49}-7\sqrt[3]{27}+2\sqrt[5]{32}$

d) $3\sqrt{50}-\sqrt{98}+4\sqrt{288}+14\sqrt{162}-\sqrt{25-9}\cdot\sqrt{2}$

5.2. a) $\frac{x(2r^2-4x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}-8x\sqrt{r^2-x^2}$

c) $2\sqrt{(x-k)^2+x^2}-\frac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}}$

b) $\frac{r(4r^2-3rH)}{\sqrt{4r^2-2rH}}-3r\sqrt{4r^2-2rH}$

d) $\frac{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2-\left(c+\frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2}}-\frac{h^2+2\cdot\frac{c^2}{4}}{\sqrt{h^2+\frac{c^2}{4}}}$

5.3. a) $\sqrt{1-x}+\frac{x+1}{2\sqrt{1-x}}$

b) $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}+\frac{3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c) $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

d) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{x}{(x+\sqrt{x^2+a^2})\cdot(\sqrt{x^2+a^2})}$

۶ ــ د ریښو ضرب او وېش

6.1. a) $\sqrt{3\cdot 7}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sqrt{5\cdot 7}$

c) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}:\sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}}$

b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

d) $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2-2ab+a^2}{2}}$

6.2. a) $(3-\sqrt{2})(2+3\sqrt{2})$

c) $\sqrt{12x^2-12x}\cdot\sqrt{3x^2-3}$

b) $\sqrt{8+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{10}}$

d) $\sqrt{a^2+a}\cdot\sqrt{ab+b}$

6.3. a) $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$ c) $\frac{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}}{\sqrt{a+c}-\sqrt{b+c}}$

b) $\sqrt{6x^2-6}\cdot\sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$ d) $\frac{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}}$

۷ – د توان او ریښې حلول

7.1. a) $\sqrt{0{,}04^5}$ b) $\sqrt[3]{4200}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}$ d) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

7.2. a) $\sqrt[2n-1]{a^{4n^2-1}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6\cdot b^{12}}}$

b) $\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6\cdot b^8}}$

7.3. a) $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^4}$ c) $\frac{4\pi r^3-8\pi r^3}{\sqrt{\left(4r^2-2r\cdot\frac{4}{3}\cdot r\right)^3}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}a^2+\sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2+\frac{a^4}{8}}}$ d) $\pm\sqrt{\left(\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}\right)^2-\frac{y_1^2x_0^2}{y_1^2-y_2^2}}-\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}$

7.4. a) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$ c) $\sqrt{a\cdot\sqrt[8]{a^5\cdot\sqrt[3]{a}}}:\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}$

b) $\sqrt[3]{a^3\cdot\sqrt{a^2\cdot\sqrt[5]{a^8\cdot\sqrt[4]{a^3}}}}$ d) $\frac{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[6]{a^4}}}:\frac{\sqrt{a^3\cdot\sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7\cdot\sqrt{a}}}$

۸ – لاندې ماتونه یا کسرونه داسې شکل ته واړوئ، چې مخرج ریښه نه وي.

8.1. a) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{10}{3\sqrt{8}}$ d) $\frac{15}{\sqrt[11]{243}}$

8.2. a) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[9]{x^{13}}}$ c) $\frac{y^2x}{\sqrt{x^3y}}$ d) $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$

8.3. a) $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{5}+1}$ c) $\frac{15}{3-\sqrt{6}}$ d) $\frac{16}{3+\sqrt{5}}$

8.4. a) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$ b) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

8.5. a) $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ b) $\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ c) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{4\sqrt{10}-7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$

8.6. a) $\frac{7\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

b) $\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}$ d) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

۴- الجبري کلمی

د الجبري کلیمو یا ویونو لاندې موږ دا ښکته راوړل شوي څه پوهیږو:

جمعه(زیاتون) : a اوb $a+b$ تفریق(کمون) a او b $a-b$

ضرب(ځل) : $3x = x+x+x$ توان(پوتنځ یا طاقت) $x^3 = x.x.x$

وېش (مات یا کسر): $\frac{a}{b}$ $b \neq 0$ a صورت b مخرج

د a په څټ ارزښت یا معکوس $\frac{1}{a}$ $a \neq 0$

د زیاتون(جمعي) او کمون(تفریق) سره شمیرنه

لومړی: برابرېدولیز زیاتوني(زیاته وونې) یا زیاتېدونې (د جمعي برخې یا اجزا) سره یوځای راټولیږي.	1. $32x + 12y - 4x - 5y - 14x + 2y$ $= 32x - 4x - 14x + 12y - 5y + 2y$ $= 14x + 9y$
دویم: د نوکانو یا قوسونو له مخه مخنخبنه دي په پام کې وی. دریم: د زیاتون (جمعي) هر غړی د ضریب (ځله وونې) سره ضربیږي	2. $3a + (4a - 2b) - 8(b - a)$ $= 3a + 4a - 2b - 8b + 8a$ $= 15a - 10b$

3. $3(2x-4y)-4(3-4x-2y)$ $= 6x-12y-12+16x+8y$ $= \underline{\underline{22x-4y-12}}$ 4. $8xy\cdot(-3x) = 8\cdot(-3)\cdot x\cdot x\cdot y$ $= \underline{\underline{-24x^2y}}$ $9a-\left[5a-(b-8a)\right] = 9a-[5a-b+8a]$ $a-5a+b-8a = \underline{\underline{-4a+b}}$	خلورم: دضربیونو (ځله وونو) ځایونه سره بدلیدلای شي پنځم: قوسونه له دننه دباندې لور ته حل یا له منځه وړل کیږي

د کسرونو(ماتونو) سره شمیرنه <u>Rechnen mit Brüchen</u>

برابرنومیز یا د برابر مخرج کسرونو جمعه داسي ده چي مخرج ساتلی پاتیږي او صورتونه سره جمعه کیږي.

الف- $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{3+4}{5}=\underline{\underline{\frac{7}{5}}}$ ب - $\frac{x}{3}-\frac{2x}{3}=\frac{x-2x}{3}=\underline{\underline{-\frac{x}{3}}}$

نا برابرناميز یا د مختلفو مخرجونو سره نه برابرناميز په برار مخرج (ماتلاندې) کیږي اوبیا سره جمعه کیږي

الف- $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=\frac{5}{10}+\frac{6}{10}=\underline{\underline{\frac{11}{10}}}$ ب - $\frac{x}{4}+\frac{3x}{2}=\frac{x}{4}+\frac{6x}{4}=\frac{7x}{4}=\underline{\underline{\frac{7}{4}x}}$

کسرونه سره ضربیږي، داسي چي صورت د صورت او مخرج د مخرج سره ضرب شي:

الف- $\frac{4}{7}\cdot 3 = \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{1} = \frac{4\cdot 3}{7\cdot 1} = \underline{\underline{\frac{12}{7}}}$

ب - $\frac{3}{4}\cdot\frac{x}{5} = \frac{3\cdot x}{4\cdot 5} = \frac{3x}{20} = \underline{\underline{\frac{3}{20}}}x$

پ - $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1} = \underline{\underline{\frac{x}{2}}}$

ت - $\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{12} = \underline{\underline{\frac{x^2}{36}}}$

کسرونه ویشل کیږي، داسې چې د په ځت یا معکوس ارزښت سره ضرب کړی شي

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$	$= \frac{a}{4\cdot 3c} = \underline{\underline{\frac{a}{12c}}}$

کسرویشنې ته یوځو بیلګې

1. a) $\frac{\frac{2}{5}}{3} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{15}}}$ b) $\frac{\frac{3}{7}}{t} = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{t} = \underline{\underline{\frac{3}{7t}}}$ c) $\frac{1}{\frac{3}{8}} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$

2. a) $\frac{1}{\frac{t}{4}} = \underline{\underline{\frac{4}{t}}}$ b) $\frac{1}{\frac{t}{2}+1} = \frac{1}{\frac{t+2}{2}} = \underline{\underline{\frac{2}{t+2}}}$ c) $\frac{-1+8t}{8} = \underline{\underline{-\frac{1}{8}+t}}$

3. a) $\frac{-4}{2} = -\frac{4}{2} = \frac{4}{-2} = \underline{\underline{-2}}$ b) $\frac{-x}{-a} = \underline{\underline{\frac{x}{a}}}$

پام: $\frac{0}{3} = 0$ مګر $\frac{3}{0}$ تعریف نه دی

کموتاتیو(بدلیدونکي یا تبدیلی) -، اسوڅیاتیو-، دیستریبوتیو قانون

Kommutativ, -Assoziativ,-Distributivgesetz

تبدیلی قانو:

ضرب(ځل) جمعه

$$a + b = b + a \qquad\qquad a \cdot b = b \cdot a$$

بیلګه:

$$3 + 5 = 5 + 3 = \underline{\underline{8}} \qquad\qquad 15 \cdot 5 = 5 \cdot 15 = \underline{\underline{75}}$$

اسوشیاتیو قانون:

ضرب   جمعه

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c \qquad\qquad a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$$

بیلګه:

$$1 + (2 + 3) = (1 + 2) + 3 = 1 + 2 + 3 = \underline{\underline{6}}$$
$$3 \cdot (2 \cdot 4) = (3 \cdot 2) \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = \underline{\underline{24}}$$

دستریبوتیو قانون:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \qquad\qquad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

بیلګه:

$$(2 + 3) \cdot 4 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 8 + 12 = \underline{\underline{20}} \qquad\qquad 2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 6 + 8 = \underline{\underline{14}}$$

د برابرو اووښتونو یا متحولو یوځای کونه:

د برابو متحولو یا اعدادو یوځای کونه

په ضرب کې   په جمعه کې

$$x \cdot x \cdot x \cdot x = \underline{\underline{x^4}} \qquad\qquad x + x + x + x = 4 \cdot x = \underline{\underline{4x}}$$

بیلګه:

$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000 \qquad\qquad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = \underline{\underline{16}}$$
$$a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b = a^3 \cdot b^2 \qquad\qquad x \cdot x \cdot x \cdot x^2 = \underline{\underline{x^5}}$$

له نوکانو یا قوسونو(لیندیو) څخه وستل

د نوکانو یا قوسونو له منځه وړل یا حل کول:

قوسونه له دننه لور څخه دباندې لور ته حل کیږي.

$$a+[b+(c+d)] = a+[b+c+d] = a+b+c+d$$

یو قوس، چې له مخه یې + ده، کېدی شي ترې تیر شو یا ونه لیکو(برېښنول شي)

$$5+\{7+[2+(3-1)]\} = 5+\{7+[2+3-1]\} = 5+\{7+2+3-1\} = 5+7+2+3-1 = \underline{\underline{16}}$$

$$2+(+3) = 2+3 = \underline{\underline{5}} \qquad 2-(+3) = 2-3 = \underline{\underline{-1}}$$
$$2-(-3) = 2+3 = \underline{\underline{5}} \qquad 2+(-3) = 2-3 = \underline{\underline{-1}}$$
$$2\cdot(+3) = 2\cdot 3 = \underline{\underline{6}} \qquad 2\cdot(-3) = -2\cdot 3 = \underline{\underline{-6}}$$
$$-2\cdot(-3) = 2\cdot 3 = \underline{\underline{6}} \qquad -2\cdot(+3) = -2\cdot 3 = \underline{\underline{-6}}$$

$$a-[b-(c-d)] = a-[b-c+d] = a-b+c-d$$

$$5-\{7-[2+(3-1)]\} = 5-\{7-[2+3-1]\} = 5-\{7-2-3+1\} = 5-7+2+3-1 = \underline{\underline{2}}$$

د جمعو ضربول

د جمعو ضربول:

دوه زباتونونه یا جمعې سره ضربیږي، داسې چې د لومړي زیاتون (جمعې) هر زیاتوني د دویمې جمعې د هر زیاتونې (هر د جمعې غړی) سره ضرب کړي او لاس ته راوړنې یې سره جمعه کړی.

$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d$ $(a+b)\cdot(c-d) = a\cdot c - a\cdot d + b\cdot c - b\cdot d$ $(a-b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d - b\cdot c - b\cdot d$ $(a-b)\cdot(c-d) = a\cdot c - a\cdot d - b\cdot c + b\cdot d$	یا یا یا

بیلګه:

$$(x-y)(3-2a)=\underline{\underline{3x-2ax-3y+2ay}}$$
$$(2x-7)(3x+4)=6x^2+8x-21x-28=\underline{\underline{6x^2-13x-28}}$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-ab+ab-b^2=\underline{\underline{a^2-b^2}}$$

د بینومفرمولونه د جمع; د ضرب ځانګړی حالت

د بینوم لومړی فرمول دب دویم فرمول د ب دریم فرمول	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$(3x+2y)^2=\underline{\underline{9x^2+12xy+4y^2}} \qquad (x+2)^2=\underline{\underline{x^2+4x+4}}$$
$$(2x-3y)^2=\underline{\underline{4x^2-12xy+9y^2}} \qquad (x-3)^2=\underline{\underline{x^2-6x+9}}$$
$$(4x+3y)(4x-3y)=\underline{\underline{16x^2-9y^2}} \qquad (x+4)(x-4)=\underline{\underline{x^2-16}}$$

تمرینونه:

ترمونو ۱ : ته :

1-ترمونه راټول (یوځای) کړئ او ساده يي کړئ:

الف- $5x+7y-x+13y$

ب- $\frac{1}{3}a+\frac{4}{9}b+\frac{5}{6}a+\frac{11}{9}b+\frac{1}{6}a$

پ- $10k + 6m - 8n + 5k - m - 2n$

ټ- $4\frac{1}{3}u + 1\frac{1}{2}v - 4z - 2\frac{1}{2}u + 3\frac{1}{4}z - 4\frac{1}{2}v$

ټ- $1,8x + 2,3y + 3,2z - 0,9x - 1,1y - 1,4z$

ث- $7\frac{1}{4}ax - 3\frac{1}{2}bx + 5\frac{2}{3}cx - 2\frac{1}{8}ax + 4\frac{5}{6}bx - 2\frac{1}{9}cx$

2 - قوسونه حل کړئ او ساده يې کړئ

الف: $3u + [4 - (2u - 1) + 8u] + 7$

ب - $6x - [9y - (2x + 4z) - (2x + 3y - 8z)]$

پ- $37s - [2s - (25s + 12t) + (37t - 15s)]$

ت- $8\frac{1}{2}x - \left[\left(3\frac{1}{3}y - 2z\right) - 4x\right] - [4x - (3x - z)]$

ټ- $(u + 2v - 3w) - [4v - (3u + 2v - 3w)]$

ث- $(x - 11) - [x - (5x - 7)] - [2 + (4 - 3x)]$

دريم- زياتونو يا جمعي سره ضرب کړئ.

الف- $x(m + n)$ ب - $-20(-5u + 3v - 1,5w)$

پ - $2,5(4x + 2y)$ ت - $6m(3m - 1,5n - 4mn)$

ټ - $-3m(-m - n)$ ث - $\frac{3}{4}\left(\frac{9}{8}a - \frac{5}{6}b - \frac{1}{12}c\right)$ څلورم- سره ضرب کړئ او سره يوځای يې کړئ.

الف - $2(2x - 3y) - 6x + y$ ب -

$-3m(m - n + 20) - 4m(2m + 8n - 3)$

پ - $9x-2(x-3y)+4(y+4x)$ ت -

$\frac{1}{2}(2x-4)-5(2x+8)+\frac{1}{4}(12x-4)$

ټ - $(a+b)(m-n)$ ث - $(4,2u-2,4v)(5u-10v)$

پنځم- سره ضرب کړی او سره یوځای یې کړی

الف - $(x+2y)(3a+b+2c)$

ب - $16n^2+(2+2n)(8n+5)+4n^2-15$

پ - $(2a+5b-c)(3a-b)$

ت - $(4x-3y)(y+x)+(8x+2y)(3x+4y)$

ټ - $2r^2+(2r-2s)(4r+3)+s^2-6rs$

ث - $(4x+2y)(x-y)-2(x+y)(x-y)$

دلته ډېرې پوښتنې شته، چې راوړلو ته یې فکر اړیین دی

۵ الف- اووښتوني یا واریابلي یا متحولي (سم اند) :

د مختلفو وېينو له پاره د يوې ټاکلي متحولي منطقي – يا سم انديز ډول فورمال ژبنيز ځای نيوونکي .

اووښتوني يا واريابلي يا متحولي (شمير پوهنه) : د ناپيژندونکو، ناټاکلو، متحولو، اووښتونو لپاره په فرمولبندی کي يا هم داسي فرمولونو کي ځای نيوونکي.

د څه لپاره فرمول ته اړتيا لرم ؟

دا اوس مو اووښتونې و پیژندلې. له دې څخه پوهه اوس په فرمول کې ځاي په ځای کوو. یو فرمول یوه شمیرپوهنیزه وېینه یا افاده ده، چې له هغې سره یو ټاکلی پرابلم یا پوښتنه حل یا اوبي کړای شو. لکه د هوارې یا سطحې شمیرلو له پاره او داسې نور.

لاندې څو بیلګې:

بیلګه ۱ :

$a+b=c$

د $a=5$ او $b=3$ سره راکوي

$5+3=8$

زیاتوونی ,, c,, له دې سره ارزښت ۸ لري.

بیلګه ۲ :

$a.b.c=d$

د $a=2$ او $b=3$ او همداسې 4 سره راکوي

$2.3.4=24$

له دې سره $d=24$ دی.

دا دویمه بیلګه د فرمول کارونې لپاره یوه ښه بیلګه ده.

په دې لاندې کې د ترم تعریف ورکول کیږي، دا تعریف د ریاضي د منطق له لارې کیږي. دلته یواځې دا په ګوته کیږي، چې الجبري ویناوي یا افادې څه شی دی.

۵ - ترمونه terms, Termen :

يادونه : پهپورتهدرسکي د ترمونو نومونه اخستل شوي او شميرنه ورسره ځه شوې هم ده، خودا يې پورهکونه يا هغه ددې پوره کونه وبولی.

که په يوه سلسله (لړۍ) کې، يواځې ثابتي (همغه)، اووښتوني(متحولي، واريابلي)کاروني يا عمليې او تخنيکي نخښې کارول شوي وي، ياني اړيکي نه وي کارول شوي، نو دې ته ترم ويل کيږي۰

بيا هم په ياد لرو:

اړيکې لکه برابرون، يا لوي – وړکيوالی.

کاروني: ځل يا ضرب، زياتون، وېش، کمون.

هر يو ترم پورې که متحولې ولرې پيژندډېرۍ يا تعريف سټ (domain) هم اړه لري، دا د داسې متحولو اصلی تعريف سټ domain يوه برخه سټ subset او يا هغې سره برابر ه برخه سټ subset ده، په کوم کې چې د ترم ارزښت بېرته د بنستيز سټ توکی دی.

د ترم ارزښت شميرلکېدی شي، که د مخه ټاکل شوې عمليې اجرا شي، که چېرې متحولې يا واريابلې په ځای د پيژند سټ توکي ځای په ځای شي.

که ترمونه يواځې ثابتې ولري ، نو دا په لويو لاتين تورو(لکه: $(T, T_1, T_2$ په نخښه کيږي.. که ترم متحولې ولري دو دا متحولې بيا په نوکانو کې ليکل کيږي لکه : T(x); T(x,y)

بيلګه

الف : ترم 3/4 + 126 ، چې اووښتوني نه لري په Tسره په نخښه کوو او ليکو:

T=126 + 3/4

$$T = 126 + \frac{3}{4}$$

ب : ترم 10 + 2x چې اووښتوني x لري ياني T(x) = 10 + 2x ۰ د اووښتونو بنسټيزې دې د پيدايښتي ګڼونو- يا د طبيعي اعدادو ډېرىN°وي

تعريفېدېرى د بنسټيزې سره برابره ده، که په ترم کې د اووښتوني يا واريابلې x پهٔ ځاي

يو پيدايښتې ګڼ 2 کيږدو، نو د ترم ارزښت دى : T(2) = 14

پ : (x+2y)/x يا $\frac{x+2y}{x}$

ترم دى چې دوه اووښتوني لري او په T(x,y) سره يې په نخښه کوو ۰ د اووښتونو يا واريابلو بنسټيزې دې د پيدايښتي ګڼۇنو ډېرىN وي, نو د x لپاره تعريفېدېرىN° ده۰ د y لپاره N (پيدايښتى ګڼونديرىN° تعريفېدېرى لپاره ترم نه دى تعريف ياپيژند نه لري) د x = 0 لپاره ترم نه دى تعريف يا پيژند ند لري

د ترم T(x,2y) = (x,y) /x يا $T(x,2y) = \frac{x+2y}{x}$

ارزښتشميرنه د x=2 او y= 3 لپاره په دې ډول ده T(2,3) = (2+6) / 2 = 4 :

يادونه: د ګڼونو لپاره دې دريمه او څلورمه برخه وکتل شي، چې هلته ګڼونديرى ورکړ شوي دي۰

لاندې له بل کتاب څخه بيا

اووښتوني (ناټاکلې، ناڅرګندې (نامعلومې) يا متحولې يعنې تغيرخوړونکې) او ترمونه

اووښتوني يا متحولې يا واريابلې:

په شميرپوهنه يا رياضيات کې توري(لاتين) چې د اعدادو لپاره ځاى په ځاى شوي يا داعدادو ځاى نيوونکي وي، متحولې يا اووښتوني بللکيږي.

دا چې د دې عددونو له پاره په مختلفو حالتونو کې مختلف اعداد ځای په ځای کولی شو، نو متحولې یا تغیرخوړونکې هم بلل کیږي.

ترمونه (ویینې یا افادې): ترمونه، الجبري افادې یا الجبري وېینې زیاتون یا جمعه او ځلونه یا ضربونه دي، چې اووښتونې یا واریابلې ولري. متحولې کیدی شي توانونه هم وي. که ټول توانونه پیداښتي جګګڼ ولري، نو سړی دا الجبري ویینه ټولراشنل ویینه یا پولینوم هم بولې په یوه ټاکلې متحولې کې. د دوه راشنل ویینو مات یا کسر مات ی‌ـــیا کسري راشنل افاده بلل کیږي.

افادې یا ویینې چې په هغو کې متحولې او یا ګڼونه د شمیرنخښو زیاتون او ځل یا ضرب سره تړل کیږي، ترمونه بلل کیږي.

د یو ترم ارزښت داسې لاس ته راځي، چې د هرې متحولې لپاره یو ګڼ کیښوول شي.

بیلګه:

ترم: $x+5$ متحوله: x

د بیلګې په توګه د $x=2$ لپاره د ترم ارزښت: $x+5=2+5=7$

ترم: $x.(x+y)$ اووښتونې : x,y

د بیلګې په توګه د $x=5$ او $y=1$ سره د ترم ارزښت :

$$x.(x+y)=5.(5+1)= 5.6=30$$

د نوکانو وتلو له لارې د ترمونو ساده کونه.

سړی ټولې زیاتیدونې یا د جمعې اعضاوې په ضریبونو(ځله وونو) ټوټه یا تجزیه کوي.

بیا هغه خورا لوي ګډ ضریب (ګډ ځلوونی) له نوکانو وځي:

بیلګه:

$$27x - 27 = 27x - 27 \cdot 1 = \underline{\underline{27(x-1)}} \qquad 8x + 24 = 8x + 8 \cdot 3 = \underline{\underline{8(x+3)}}$$

$$15x + 9y - 21 = 3 \cdot 5x + 3 \cdot 3y - 3 \cdot 7 = \underline{\underline{3(5x + 3y - 7)}}$$

د ضربولو له لارې يې ازماېښت:

$$3(5x + 3y - 7) = 15x + 9y - 21$$

که کميز يا منفي ضريب له نوکانو ووځي، نو د مخنخښي قانون دې په پام کې ونيول شي.

بيلګه:

$$a) \quad -\frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{8}x - 3 = -\frac{6}{8}x^2 + \frac{5}{8}x - \frac{24}{8} = \underline{\underline{-\frac{1}{8}(6x^2 - 5x + 24)}}$$

$$b) \quad -\frac{3}{5} - x + \frac{8}{5}y = -\frac{3}{5} - \frac{5}{5}x + \frac{8}{5}y = \underline{\underline{-\frac{1}{5}(3 + 5x - 8y)}}$$

د نوکانو ښخه وتنه د زياتون يا جمعي ښخه ضرب جوړوي، دا مخته تلنه يا عمليه
ضريبونه هم بلل کيږي

بيلګه:

$$1.) \quad ab + ac + mb + mc = a(b+c) + m(b+c) = \underline{\underline{(b+c)(a+m)}}$$

$$2.) \quad -6am + 12an - 2ap + 3bm - 6bn + bp$$
$$= -2a(3m - 6n + p) + b(3m - 6n + p)$$
$$= \underline{\underline{(3m - 6n + p)(b - 2a)}}$$

د زياتيدونو يا د جمعي اعضاوو ضرب

سره ضربونه بلکيږي، داسې چې د يوې جمعي يا زياتون هر زياتيدونی يا د جمعي غړی
د بلې جمعې د هر غړي سره ضربيږي .

$$(x-2)(x-5) = x^2 - 5x - 2x + 10 = \underline{\underline{x^2 - 7x + 10}}$$

بيلګه:

1.) $(2x-3)(1-tx) = 2x - 2tx^2 - 3 + 3tx = \underline{\underline{-2tx^2 + 3tx + 2x - 3}}$

2.) $(x-2)(x-3)(2x+1) = (x^2 - 5x + 6)(2x+1)$

$= 2x^3 + x^2 - 10x^2 - 5x + 12x + 6 = \underline{\underline{2x^3 - 9x^2 + 7x + 6}}$

د بينوم فرمولونه:دا بيا تکرار دی

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	د بينوم لومړی فرمول:
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	د بينوم دويم فرمول:
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	د بينم دريم فرمول:

بيلګه:

1.) $(2x+1)^2 = 4x^2 + 2\cdot 2x\cdot 1 + 1 = \underline{\underline{4x^2 + 4x + 1}}$

2.) $\left(\frac{1}{2}x - 3\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3x + 9 = \underline{\underline{\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9}}$

3.) $\left(u - \frac{1}{2}v\right)\left(u + \frac{1}{2}v\right) = \underline{\underline{u^2 - \frac{1}{4}v^2}}$

د ترمونو کسرونه:

لومړی: دا لاندې ترم لرو:

$$\frac{3x-3}{2(1-x)}$$

د کوم x-ارزښت لپاره ترم تعریف دی؟

حل یا اوبی:

په پام کې ولرئ: په صفر وېشنه اجازه نه شته.

ترم د ټولو اعدادو لپاره تعریف دی پرته له x=1 څخه.

نو د دې ترم لپاره تعریفدېرY یا – سټ ده: D=R\ {1}

د ترم بڼه د $x \neq 1$ لپاره بدلیږي:

$$\frac{3x-3}{2(1-x)} = \frac{3(x-1)}{2(1-x)} = \frac{3(x-1)}{-2(x-1)} = -\frac{3}{2}$$

دویم: دتعریفسټ(پیژنددېرئ) D وټاکئ

او دا ترم $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$ ساده کړئ

حل: لومړی کسر د ضریبوني په ډول ولیکئ:(x+2)(x-2) =x^2-4

د x=2 یا x=-2 لپاره به مخرج صفر شي.

له دې لاس ته راځي: D=R\{2,-2}

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2-4} = \frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{(x+2)}{(x-2)}$$

دریم:

D وټاکئ او ساده کړئ: $\frac{x-2}{x-3}-\frac{x+2}{2x-6}$

3دواړه ماتلاندي یا د مخرج کسرونه   صفر کوي. له دې لاس ته راځي:

D=R\ {3}

$$\frac{x-2}{x-3}-\frac{x+2}{2x-6}=\frac{x-2}{x-3}-\frac{x+2}{2(x-3)}=\frac{2(x-2)-(x+2)}{2(x-3)}=\frac{x-6}{2x-6}$$

څلورم:

D وټاکئ او سا ده کړئ: $\frac{2x-4}{x}-\frac{8x}{4x-8}$!

صفرځایونه دي: $x=0 \quad \vee \quad x=2 \quad \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$

$$\frac{2x-4}{x}-\frac{8x}{4x-8}=\frac{2x-4}{x}-\frac{8x}{4(x-2)}=\frac{4(x-2)(2x-4)-8x^2}{4x(x-2)}$$

$$=\frac{8x^2-16x-16x+32-8x^2}{4x(x-2)}=\frac{-32x+32}{4x(x-2)}=\frac{-32(x-1)}{4x(x-2)}=\frac{-8(x-1)}{x(x-2)}$$

که د ترمونو متحولو لپاره عددونه کېږدو او دا بیا په پروت ولاړ سیستم کې وکاږو، نو د ترمونو څخه یوه څېره یا یې نور هم ښه کرښې او یا کږې لاس ته راځي.

۶ - تناسب یا تجارتي شمیرنه

۶ .۱ - متناسب proportional یا درېجملې ته مفصل حل

یادونه: دا برخه د کتاب پهپایپه بلبدیلهمتکراررراوړلشوې.

پوښتنه: ولې درېجمله؟

ځکه چې دا کارونه یا عملیه په درې جملو کې پای مومې.

1- یو موټر په سل کیلومتره 100 km کې9,6 لیتره بنزین مصرفوی. د یوې ډکې ټانکۍ سره دی 540 km لرې واټن وهی. دا ټانکۍ څومره تیل خوندی کولای شي ؟ (په پوره لیتر یې راګرد کړی)

100 km 9,6 Liter 540 km ? Liter 100 km 9,6 Liter 1 km سلمه(100.) برخه ضرب یې (ځله) 540 $\frac{9{,}6 Liter \cdot 540}{100} = 51{,}84 Liter \approx 52 Liter$	چې ک م زیاتیږي،نو لږښت هم زیاتیږي. له دې امله دا سیده متناسب دی.

ځواب: ټانکۍ $\underline{\underline{52\ \text{Liter}}}$: تیل خوندي لري

۶ .۲. په څټ یا معکوس متناسب Antiproportional

2 - د یوه انګړ جوړولو لپاره درې کارګر 11,5 ساعته وخت ته اړتیا لری. د دې لپاره به 5 کارګر څومره وخت ته اړتیا ولري.

3 کارګر 11,5 ساعتونه 5 کارګر ?h (یادونه: h د ساعت لپاره) ---------------------- 3 کارګر 11,5 ساعتونه 1 – کارګر 3 ځله زیات وخت 5 کارګر د وخت پنځمه برخه : $\frac{11{,}5h \cdot 3}{5} = 6{,}9h$ هرڅومره چې کارګر ډېر وی همغومره کمو ساعتونو ته ته اړتیا ده. لاس ته راوړنه برعکس متناسب ده (antiproportional ⇒ په څټ متناسب).	که کارګر هرڅومره زیات شي همغومره وخت کمیږی له دې لاس ته راځي (⇐) برعکس متناسب ځواب: پنځه کار ګر دا کارپه $\underline{\underline{6{,}9\,h \approx 7\,h}}$ ساعتونو کې پای ته رسوي $\frac{11{,}5h \cdot 3}{5} = 6{,}9h$

۶ . ۳ - پوښ کونه (لکه په کوتیو کې کېښونه یا بندونه<u>I verschachtelt</u>)I

دریم:

یو $7\ m^2$ لوي 5 mm ملی متره پنډ د ټیم څادر .313,6 kg وزن لري.

یو 6 mm ملی متره پنډ ټیم به څومره وزن ولري، چې یوه د $4\ m^2$ سطحه ولري (په کیلوګرام یې را ګرد کړی)

په لاندې کې مو.Blech , (لوستل: بلښ) ټیم یا د ټم څادر ته ویلي.

$7m^2$ ټیم 5mm پنډ 313,6kg	هر څومره چې ملی متره mm زیات وی همغومره ټیم درنیږي

لاس ته راوړنه سیده متناسب	4m² تیم 6mm پنډ ?kg
هرڅومره چې مربع متر m² زیاتیږي همغومره تیم دروند وي.	7m2 تیم 5mm پنډ313,6kg
⇒ proportional سیده متناسب	1m² تیم 5mm پنډ 7 -مه برخه
	4m²تیم 5mm پنډ 4ځله ډیر
	4m²تیم پنډ 1mm 5 -مه برخه
	4²تیم پنډ 6mm 6 ځله ډیر
	$\frac{313,6kg \cdot 4 \cdot 6}{7 \cdot 5} = 215,04kg \approx 215kg$

ځواب: تیم $\underline{\underline{t\ 215\,kg}}$ وزن لري

. پوښ کونه II <u>verschachtelt II</u>

یادونه: پوښکونه یاپوښونه ده، که په ډیروکوتیویا دیواالونواوداسې نوروکې رابندکړ.
ځلورم- د$720\ m^2$ انکړ لپاره اوه ختګر $160\ h$ ساعته وخت ته اړتیا لري.

5 ختګر به د $600\ m^2$ لپاره څومره وخت ته اړتیا ولري(وخت په ساعتونو او دقیقد وروکړئ)

$$\frac{160h.7.600}{5.720} = 186\bar{6}h = 186\frac{2}{3}h = 186h40\min$$

هرڅومره چې ختګر زیات وی هموغمره لږ وخت نیسي. له دې لاس ته راځي: برعکس متناسب
هرڅومره لږ ختګر همغومره زیات ساعتونه. له دې لاس ته راځي مستقیم متناسب
ځواب. پنځه ختګر $186h\ 40min$ ته اړتیا لري.

پوښونه III (يوبل کې بندونه يا پوښونه:)verschachtelt III

پنځم - دولس کارګرو د په ا وه روځوو روځې نهه ساعته کار کې $390\ m^2$ مرته د سيمټو ديوال جوړ کړ.

د برابر زور يا قدرت څو کارګر بايد په کار واچول شي، چې په مجموع يووېشت روځو کې $2340\ m^2$ بيتون (د سيمټو)ديوال جوړ کړي او د روځې د کار وخت يې فقط اته ساعته وي؟

$390\,m^2$	$7T$	$9h$	$12E$
$2340\,m^2$	$21T$	$8h$	?
$390\,m^2$	$7T$	$9h$	$12E$

$1m^2$	$7T$	$9h$	390 -مه برخه 2340-څله زيات
$2340\,m^2$	$7T$	$9h$	
$2340\,m^2$	$1T$	$9h$	7 -ځله زيات
$2340\,m^2$	$21T$	$9h$	21 –مه برخه
$2340\,m^2$	$21T$	$1h$	9-ځله زيات
$2340\,m^2$	$21T$	$8h$	8 -مه برخه

$$\frac{12E \cdot 2340 \cdot 7 \cdot 9}{390 \cdot 21 \cdot 8} = 27E$$

دريجملې ته پوښتنې:

يادونه: دا دې تل ورسره وليکل شی چې ايا دا اړيکې متناسب او که معکوس متناسب دی.

لومړی- یو ګړندی موټر د 100 km لپاره 9,6 Liter تیل مصرفوی
د 60 Liter ډکې ټانکۍ سره به موټر څو کیلومتره لار ووهي؟2- په یوه مارکیټ کې
دویم – په دوکان کې 40 داني بنسلونه 0,68 € قیمت لري.

همدا ډول به 250 پنسلونه څو € یورو قیمت ولری ؟
دریم - یو سرک 2,4 km کیلومتره اوږدوال په 8,4 m متره جګیږي

څو متره په په برابر پاتې 5 km جګه شی
څلورم- د یوې ګراجې جوړولو لپاره درې کارګر 7,5 ساعتونو ته اړتیا لري.

کار په څومره دوام ولري، که 5 کارګر په کار واچول شي؟
پنځم- یو $6\ m^2$ لوی د مسو ټیم چې$4\ mm$ پنډ د ی $213,6\ kg$ وزن لري.

یو ټیم چې$3\ mm$ پنډ د ی څومره وزن ولری، که سطحه $4\ m^2$ ولري؟شپږم- یو
توریست له یوه پنک څخه د 400 € لپاره432 ډالر اخلي.

هغه په څومره ډالر لاس ته راوړي وی، که هغه 2250 € بدلې کړې وی.

اوم- یو دکاندار د میاشتې خرڅلاو کې، چې ټول 45200 €کیږي 3164 € ګټه تر لاس
کوی . که په بله میاشت کې یې ګټه 220,50 € په پخوانۍ ګټې زیاته وی. خرڅلاو به
یې څږمره وي؟اتم- د پنځو ختګرو لخوا دیوال $616\ m^2$ په 154 ساعتونو
کېحوړیږي .

څومره دیوال کړی شي به برابر توان شپږ ختګر په 160 h کې جوړ کړي.نهم -
که$1800\ m^3$ متره مکعب اوبه چې 12 m متره جګې یووړل شي، یوه څلورکیلوواټ
پمپ ته اړتیاشته

څومره اوبه کېدی شي د اته کیلو واټ پمپ سره 16متره جګې یووړل کېدی شي؟لسم- د
موټر د باډۍ 1280 برخو (پرزو)جوړولو لپاره 4 مستریان په کار دي، چې هر یو 8
h ساعته کار وکړي..

څومره مستریان باید په کار واچول شي، چې د موټر 2400 برخې(پرزی) هره روځ
جوړې کړي او دوه مستریان نور هم پرې زیات شي؟
یولسم- په درې اوتومات الاتو جوړولو ماشین باندې 150 متال پوښونو په یو ساعت
او15 min دقیقو کې جوړېدای شي.

څومره پوښونه به په 2 h 30 min او30 min دقیقو تولید شي، که دوه ماشینونه زیات په کار واچول شي؟

دولسم- د دې لپاره چې $96\ m^2$ د چت سطحه پوښ شي، درې کارګرو ته اړتیا ده چې دوه روځې هره روځ اته ساعته کار وکړی..

څلور کارګر به دا کار په څو روځو کې پای ته ورسوي، چې د چت سطحه پوښ کړي او د روځې یو ساعت کار زیات کړي.؟

دیارلسم- درې روځو کې شپږ ډیزل ماشینونهه هره روځ شپاړس ساعتونو کار کې 2016 Liter لیتره ډیزل سوزي. د تولید زیاتوالي لپاره په راتلونکې کې اته ماشینونه په کار اچول کیږي او د کار وخت په دوه ساعته جګیږي.

د روځې څومره د ډیزلو مصرف باید په پام کې ونیول شي؟
څوارلسم- د اته برېښنا ګروپونو لپاره ، چې د روځی اته ساعته سوزي د میاشتې 18 € مصرف راځي.

څومره لګښت راځي، که دولس ګروپونه په همغه قدرت د روځي شپږ ساعته وسوزي؟
پنځلسم- دولس کارګر دروځې نهه ساعته کار باندې په 7 روځو کې $390m^2$ د سیمټو دیوال جوړوي. څومره کار کر د برابر قدرت سره په ۲۱ روځو کې $2340\ m^2$ د سیمټو دیوال پورته کوی، چې په وخت کار پای کړي او د روځې اته ساعته کار وکړي؟.

۶ . ۴ - په سلو کې شمیرنه:

نمونه یي بیلګه

چې ګومان کوي، چې په سلو کې شمیرنې ته ا ړتیا نه شته اشتباه کوي. په ورځني ژوند کې سړی د په سلو کې شمیرنې سره یراوکار لري یا مخامخ کیږي. د زیات ارزښت د مالیا سره اخستلو کې بنه کې ګټور دی، چې سړی د په سلو کې شمیرنې سره بلد وي، لکه د بیلګې په توګه چې بنزین په څومره په سلو کې ګران شوي دي، که د زیاتقیمت والیا جګه شوې وي او که یا څوک د کور اخستلو لپاره پور کوي یا د یوه موټر اخستلو

سره مینه لري، نو باید وړاندیزونه سره پرته کړای شي او یا د بانک څخه قرضه اخستل کیږي.د لته م مرسته کیږي، که څوک دا وشمیرلی شي. داښه دی، چې د پیسو په کار وبار کې سړی د په سو کې شمیرنې سره بلد وي،(زباړی:مګر متآسفانه چې موږ مو په هیواد کې لا تراوسه دا مسایل داسي په ټولزه توګه نه لرو).

د په سلو کې شمیرلو فرمولونه

$$W = G \cdot \frac{p}{100} \qquad p = \frac{W}{G} \cdot 100 \qquad G = \frac{W}{p} \cdot 100$$

په سلو کې = p په سلو کې ارزښت = W بنسټ ارزښت = G

په سلو کې ارزښت شمیرنه

ښاغلی سپین کور د خرڅلاو دفتر له لورې په 450 000 € پلوری. دفتر 3,5% مزدوری اخلې	$G = 450000\ €$ $W = ?$ $p = 3{,}5\%$ $W = \frac{G \cdot p}{100} = \frac{450000\ € \cdot 3{,}5}{100} = 15750\ €$ د دفتر مزدور 15750 € ده

<u>د په سلو کې ښپې یا –اینووني شمیرنه</u>

د زړو موټرو يو پلورونکي موټر په ۱۲۴۰۰ راونيو. له يوه وخت وروسته يې وکولای چې موټر په ۱۳۲۰۰ و پلوري. د ده ګټه څو په سلو کې وه؟	$G = 12400\ €\quad p = ?$ $W = 13200\ € - 12400\ € = 800\ €$ $p = \frac{W \cdot 100}{G} = \frac{800\ € \cdot 100}{12400\ €} = 6{,}45\%$ ګټه يې 6,45% ا وه.

د بنسټ ارزښت شميرنه

د کوم يوې کوټې سامان اخستل 30% په سلو کې ادا کيږي. دا 3852 € دي. د اخستلو نرخ څومره جګ دی؟	$p = 30\%\quad G = ?$ $W = 3852\ €$ $G = \frac{W \cdot 100}{p} = \frac{3852\ € \cdot 100}{30} = 12840\ €$ د اخستلو نرخ 12840 € : دی

. د زياتشويو بنسټ ارزښت شميرنه:

د 4% په سلو کې د کرايه جګونې وروسته اوس بايد يوه کورنۍ 473,60 € ورکړی. کرايه پخوا له ې څومره € وه؟	پيل نوې کرايه د پخوانی کرايې بنسټ ارزئت ده. له دې لاس ته راځي $\Rightarrow 1{,}04 \cdot G = 473{,}60\ €$ $\Leftrightarrow G = \frac{473{,}60\ €}{1{,}04} = \underline{\underline{455{,}39\ €}}$ زړه کرايه

	د کرایی جګوالی $473{,}60\ € - 455{,}39\ € = 18{,}21\ €$

. د کم شویو بنسټ ارزښتونو شمیرنه

د 10% کې قیمت کمولو یو جنس فقط € 108 دی. هغه لومړنی د خرڅلاو قیمت یې څومره وو؟	ببل: نوی قیمت د لومړي یا بنسټ قیمت 90%دی. $\Rightarrow 0{,}9 \cdot G = 108\ €$ $\Leftrightarrow G = \frac{108\ €}{0{,}9} = 120\ €$ لومړنی د خرڅلاو قیمت یې 120€ وو.

0.5.7.پوښتنې

په سلو کې شمیرنه I

هرې پوښتنې ته یوه ځوابي جمله شتون لري.

لومړی - په یوه ټولګي کې ۱۷ هلکان او ۸نجونې دي.

په ټولګي کې څومره په سلو کې هلکان او همداسې نجونې جوړوي؟

دویم – د یوه موټر د لیست قیمت(د مسلکي اړخه) € 23925 دی. اخستونکی موټر په € 21054 لاس ته راوړي.

قیمت له لیست قیمت څخه څو په سلو لږ دی؟

دریم – د یوه موټر اخستلو قیمت په € 1920,45 جګیږي، ځکه چې په پور یې اخلي.

د موټر لومړنی قیمت به څومره وو، که د موټر ګرانیدل(قیمته کیدل) %10,5   وي؟

څلورم – یو موټر په 400 km کې 47 Liter بنزین مصرفوي، یو بل موټر 65,8 Liter په 700 km کې.

د یو موتر له بل څخه د لګښت مصرف څو په سلو کې جګ دی؟

پنځم - داچې موټر په برخه تادیه کولو اخلي،نوارزښت یې له € 38950 څخه و 42650 €ته لوړیږي.

دا ګرانیدل څو په سلو کې جوړوي؟

شپږم - په یوه مغازه کې په % 5 کې قیمت جګیدلو سره د ژمي ټیرونه په   € 327,60 وړاندې کیږي.

ټیرونه له دې د مخه څومره ګران وو؟

اوم – د دفاع وکیل سکرتره د میاشتې %22 مالیه ورکوي، دا   .€ 435,60 کیږي.

د دې بې مالیه معاش به څومره وي؟

اتم - یو ختګر € 11,76 د ساعت   معاش لري، ځکه چې زیات کار کوي.

دا د ده د نورمال معاش څخه چې   11,20 دی څو په سلو کې جګ دی؟

نهم - یوه پلورونکې له %32,8 معاش کمولو وروسته € 1428   معاش اخلي.

د دې به هغه بې کمولو معاش څومره وي؟

لسم - د یوې فابریکې میخانیکي کار ګر   د ساعت معاش دې له € 11,20 په   %2,5 جګ شي.

دا نوی د ساعت معاش څومره دی؟

یولسم - یو ښتګر د کورجوړونکي ته د جوړښت مصارفو 8,5% خپل معاش ټاکي.

دا معاش په د یوفامیلي کور جوړولو مصارفو € 290300 څومره وي؟

دولسم – یو کور په € 244750 جوړیږي. مصارف د جوړېدو په وخت کې € 259435 ته جګیږي.

دا قیمت جګیدنه څو% ده؟

دیارلسم – تږده یا بنسټ د یوه کره د خاورو $400\ m^3$ حجم(ډکي) سره وهل کیږي.

څومره لاریو ته د$12\ m^3$ بار سره د ځمکې وهلو د 14% کې وړلو لپاره اړتیا شته؟

څوارلسم – د کور سامان خرڅولو مارکېټ یوه ښارګوټي جوړولو لپاره په ټول مالونو 6% قېمت پرېږدي.

د یوه وښو رېبلو ماشین لپاره باید یو اوسیدونکی څومره پیسې ورکړي، که عادي قیمت یې € 164,50 وي.

پنځلسم - یوه میرمن د سپورت سامان مغازه کې یو د کور تمرین اله په € 399,50 اخلي. د یوه سپورت اتحادیې د غړې په توګه یې ورته ارزانه کوي او € 367,54 تادیه کوي.

ارزانښت % کې څومره دی؟

شپاړسم - یو باغوان د وښو تراکتور ارزانه شوی اخلي.

دا څومره په سلو کې ارزانتیا لري، که دی د € 1342,50 په ځای فقط € 1261,95 تادیه کړي؟

اولسم - د یوې ځنځیري ارې لپاره یو باغوان په 3% ارزانښت € 184,30 تادیه کوي.

د ارې اصلې قیمت به څومره وو؟

اتلسم – د یوه موټر بنسټ ارزښت € 27500 دی. ځانګړي سنمبالونه يې قيمت په € 1000 جګوي. د نغدې تاديې له امله اخستونکی موټر 12% ارزانه لاس ته راوړي.

د بنسټ قيمت لپاره په ريښتوني څومره تاديه شوي دي؟

۶ . ۵ - ګټې شميرنه يا ربح شميرنه Zinsrechnung

0.6.1.د شميرلو فرمول:

د ګټې فرمول

$$Z = K \cdot \frac{p}{100} \qquad p = \frac{Z}{K} \cdot 100 \qquad K = \frac{Z}{p} \cdot 100$$

سرمايه = K   ګټه= Z   د ګټې پينه = p

د مياشتې له مخې ګټه شميرل شوې $Z = K \cdot \frac{p}{100 \cdot 12} \cdot m$, وخت په مياشتو=m

ګټه د ورځې له مخې شميرل شوې $Z = K \cdot \frac{p}{100 \cdot 360} \cdot t$ وخت په ورځو=t

يو کال 360د ګټې ورځې ، يوه مياشت 30 د ګټې ورځې.

. د ګټې يا ربح شميرنه <u>Berechnung der Zinsen</u>

په يو کال کې په 5% ګټونه € 850څومره € ګټي؟	$p = 5\%$ $Z = ?$ $K = 850\ €$ $Z = \frac{K \cdot p}{100} = \frac{850\ € \cdot 5}{100} = 42{,}50\ €$

		ګټه 42,50€ ده.

په اوه میاشتو کې په 4,3% ګټونه 1200 € څومره €ګټه راوړي؟	$p = 4{,}3\%$ $Z = ?$ $K = 1200\ €$ $m = 7$ $Z = \frac{K \cdot p \cdot m}{100 \cdot 12} = \frac{1200\ € \cdot 4{,}3 \cdot 7}{100 \cdot 12} = 30{,}10\ €$ ګټې 30,10€ ده.

په 300 ورځوکې په 5,1% ګټونه 950 € څومره €ګټه راوړي؟	$p = 5{,}1\%$ $Z = ?$ $K = 950\ €$ $t = 300$ $Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360} = \frac{950\ € \cdot 5{,}1 \cdot 300}{100 \cdot 360} = 40{,}38\ €$ ګټې 40,38€ ده.

د کاپیتال یا سرمایې شمیرنه

ښاغلی سپین غواړي په یوه بانک کې پیسې واچوي. بانک 4% د کلنی ګټې وړاندیزکوي. ښاغلی سپین باید په بانک کې څومره پیسې واچوي، چې دی په کال کې 2400 € ګټه لاس ته راوړي؟	$p = 4\%$ $K = ?$ $Z = 2400\ €$ $K = \frac{Z \cdot 100}{p} = \frac{2400\ € \cdot 100}{4} = 60000\ €$ ښاغلی سپین باید 60000€ په بانک کې واچوي.

میرمن سپینه له بانک څخه په 10.1.03 په 13,5%ګټونه پیسې پور اخلي . په 15.6.03 کردیت بیرتع ورکوي. بانک € 581,25 ورته د بانک ګټه شمیري. پور به څومره وي؟	د پور د وخت شمیرنه: له 10.1 تر 10.6 پورې 5.30=150 ورځې له 10.6 تر 15.6 پورې 5 ورځې -- له 10.1تر 15.6 پورې 155 ورځې $p = 13{,}5\%$ $K = ?$ $Z = 581{,}25$ € $t = 155$ $Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$ $\Rightarrow K = \frac{Z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot t} = \frac{581{,}25\text{ €} \cdot 100 \cdot 360}{13{,}5 \cdot 155} = 10000\text{ €}$ پور 10000 دی.

د ګټې پېنې شمیرنه<u>Berechnung des Zinssatzes</u>

بناغلی برګ بانک ته د € 18000 پور لپاره باید € 792 ګټه ورکړي. د ګټې پېنه به څومره وي؟	$K = 18000$ € $p = ?$ $Z = 792$ € $p = \frac{Z \cdot 100}{K} = \frac{792\text{ €} \cdot 100}{18000} = 4{,}4\%$ د ګټې پېنه 4,4% ده.

د ګټې د ورځو شمیرنهBerechnung der Zinstage

د € 19200 سرمایه په 4,5% گټونه پور اخستل شوی وو. دې € 249,60 گټه وکړه. وشمیره چې دا سرمایه د څومره وخت لپاره پور شوې وه.	$K = 19200$ € $t = ?$ $p = 4{,}5\%$ $Z = 249{,}60$ € $Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360} \Rightarrow t = \frac{Z \cdot 100 \cdot 360}{K \cdot p} =$ $= \frac{249{,}60 € \cdot 100 \cdot 360}{19200 € \cdot 4{,}5} = 104$ سرمایه د 104 ورځو لپاره پور شوې وه.

0.6.6.پوښتنې

د په سلو کې – او گټې شمیرنه I

هرې پوښتنې ته یو د ځواب جمله شته

لومړی-

د € 22500 پیسو یوه سرمایه په 7,5% گټونه کیښول کیږي.

د 9 میاشتو او 10 ورځو وروسته گټه څومره ده؟

دویم –

د سپین کور په پور اخستل شوی په 8,5 % گټونه د میاشتې€ 637,50 گټه ورکوي.

د ده پور څومره لوي دی؟

دریم –

یو ه سپماکونکي په € 42500 سرمایه یا بدآیی په 6,5% گټونه 552,50 واخستې.

پیسې په بانک کې څومره اوږدې پرتې وې؟

څلورم - د € 33000 پور لپاره باید په 8% گټېپېښه تولو € 9240 گټه ورکړه.

دا پور له څومره وخت وروسته ادا شو؟

پنځم – ښاغلی برگ یو موټر په € 13750 واخست او دا پیسې یې په گټه وکونې پور کړي. په یوه کال کې ښاغلي برگ   د€ 15331,25 پور تادیه کړه.

د گټې پښه به څومره وه؟

شپږم-

یو لاسې کارگر د په € 2300 یو ه کار اله اخلي. دی یوه د6% ارزاني لاس ته راوړي، دا چې دی پیسې نغدې ورکوی، نور هم دا اله په 2% ارزانتیا اخلې.

دی باید کوم قیمت تادیه کړي؟

اوم-

په یوه مارکیټ کې دوه شیان په ځانگړو قیمتونو € 65 او € 47,50 خرڅلاو ته وړاندې کیږي. دواړه شیان سړی په .€ 102 لاس ته راوړی شي.

ارزانتیا څومره ده، که په لومړۍ الې لپاره ارزانتیا 2,5 - ځله زیاته وي، لکه د دویمې ارزانتیا؟

اتم-

یو رده کوونکی یوه د پیسو بټوه د € 1125 سره میندي. دا ورکوونکی قانوني باید   د پیداکیدوپیسې د 5% په گټه ونه د لومړیو   € 500 ورکوي او د پاتې پیسو 3% میندونکي ته ورکړي .

د بیامیندلو ځومره پیسې باید ورکړل شي؟

نهم –

یو   کار گر کار ورکونکي ته څومره د کار قیمت کموي، که هغه د € 13700 لپاره € 12604 و شمیري؟

لسم –

ښاغلی ګل غواړي په یوه باغ کې یو ډنډ جوړ کړي. د ډنډ ډکی یا حجم $15,6\ m^3$ دی.

ښاغلی ګل باید څومره کانتینره خاوره یا ځمکه یوسي، که د یوه 15%راپورته کونې سره په شمیرکې راځي؟

یولسم-

د یوې مغازي د عکسونو برخه کې عکسونه چې 20 x 30 cm دي ځانکړي خرڅلاو تهپه € 0,57 وړاندې کیږي. په عادې ډول دا.€ 0,95 قیمت لري.

دا ارزانونه څو په سلو کې ده؟

دولسم –

ښاغلی سپین یوه بډایی د 5 کالو لپاره په 6%ګټونه ږدي.

دا بډایی به څومره وي، که ښاغلی سپین د 5 کاله وروسته € 45500 بیسې واخلي؟

دیارلسم –

یو تیکه لرونکي د موادو راوړلو لپاره € 8229 تادیه کوي، چې قیمتونه په5,5% جګ شوي.

ده به له دي د مخه څومره پیسې ورکړې وی؟

څوالسم – د دې لپاره چې یوه کوټه په لرګي پوښ شي، $50\ m^2$ د لرګې تختګی شتون لري. دا پوښ کونکې سطحه.$46,8\ m^2$ ده.

څو متره مربعm^2 تختې باید نورې راوړل شي، که د تختو 18% غوڅونې یعنې غورځونې سره وګڼل شي؟

پنځلسم – د جمعې بازار کې 500 g د ځمکې توتان په € 1,75 خرڅلاو ته وړاندې کیږي. د1,5 kg اخستلو سره مشتري فقط .€ 4,50 ورکوي.

د ده زخیره څو په سلو کې ده؟

شپاړسم - لمرچتری، 2,70 m نیمی(قطر) ، چې د الومینیوم توتې جوړه ده په یوه مغازه کې له € 87,50 څخه € 70 ته را ارزانه کیږي.

دا ارزانه کیده څو په سلو کې دي؟

اوه لسم –

د یوه یوکورنیز کور جوړولو لپاره د سپین کورنی باید € 150000 پور کړي. د لومړیو پنځو کالو لپاره د کال 6%ګټه ورکوی، پرته له دې باید د سپین کورنۍ په کال کې1% نورې هم ورکړي.

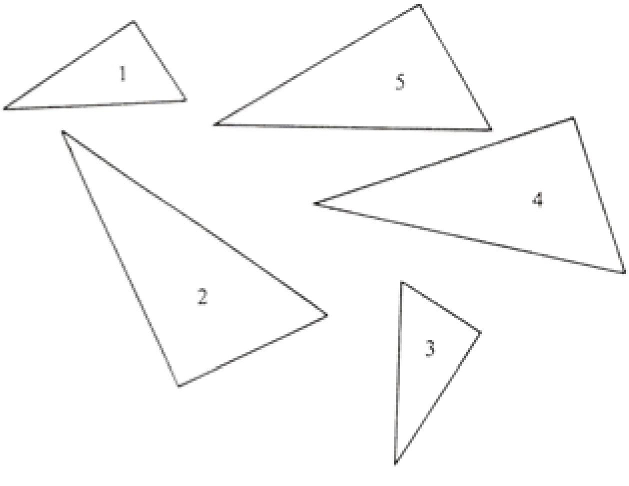
د سپین د کورنې میاشتنی مصرف څومره دی؟

۷ – ورته والیڅیرونه:

څیره ۱۶۶

که چیرې دوه غبرګوني کوچنیان وکتل شي ،نو سم د لاسه ویل کیږي، چې دا دوه یو بل ته ورته دي. شیان یا لیدیدونکي هم یو بل ته ورته بلل کیږي، که ګډ خویونه یا ګډې نخښې ولري، یعني څرګند یو بل ته ورته وي، مګر سره له دې هم یو له بل توپیر کیدونکی وي. په شمیرپوهنه کی داسی نه شو ویلی چی دا شیان یا لیدیدونکي یو بل ته زیات یا کم ورته دي، دا خیالي قضاوت دی چی په شمیرپوهنه کی داسی قضاوت

پیلبیلګه:



څیره ۱۶۷

++

لاندې دريګوډی د کونجونو $\beta = 60°$, $\alpha = 30°$ او $\gamma = 90°$ سره وکاږي. ددې کونجونو سره له يوه زيات دريګوډي موجود دي، چې په ځانګړي توګه د ولاړ کونج ورکړه يواځيوالی يا يواځيتوب نيول کيدی يا فرض کيدی شي. دريګوډي ۱ او ۲ کونګروانيځ دي، دريګوډي ۲ او ۴ هم، مګر دريګوډي ۱ او يا ۱ او ۴ کونګروانيځ نه دي. سره ددې هم دوي زياتی ګډې نخښې لري (کونج، «بڼه»يا «شکل» يا ځيره) دوي يو بل ته ورته دي.

ددوي ترمنځ نور څه ګډ دي يا دوي نور څه ګډ لري؟
له کونګروانيځجملی ځخه مخ ته ځو، د اړخونو اوږدوالی اندازه کوو او راته ښايو چه د اړخونو ځانيونه يا د اړخونو تناثب :

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$

او

$$\frac{|AB|}{|A'''B'''|} = \frac{|BC|}{|B'''C'''|} = \frac{|CA|}{|C'''A'''|}$$

ثابت دی.

پس تعريفوو

تعريف : هوارې ځيرې يا شکلونه هلته يو بل ته ورته دي، کله چی د مناسبو پاي کرښو اوږدوالی په همغه ځانيونه يا تناسب پروت وي او (له دې امله هم) يو د بل سره مناسب کونجونه مساوي لوي وي.

بيلګه : کونګروانيځ ځيرې د ورته شکلونو يو ځانګړی حالت دی، په هغوي کی د

ورکړشوو اړخونو تناسب یا ځاننیونه تل ۱ دی.
له دې امله باید –د کونګرواینځ د ټولیزیدلو یا عمومیت – د دریګوډیو لپاره هم ورته جملې موجود وي.
ددوه یا زیاتو درېګوډیو ترمنځ یو بل ته ورته والی هلته پروت دی یا شته ، موجود دی، کله یی چی مناسب کونجونه سره یو شی وي او دې کونجونو سره مناسب اړخونه یو د بل سره په همداسی تناسب یا ځاننیونه کی پراته وي یا اړیکو کی).
دا هم د درېګوډیو لپاره باور یااعتبار لري، په داسی ډول– د کونګروایىنځ ځخه پر مخ ځو– چی سړی داسی نومولی د ورته والي جملی لیکلی شي.

د ورته والي جملی: درېګوډی یو بل ته هلته ورته دي، که په لاندې کی سره برابر وي

۱ – د درېګوډیو دریواړو اړخونوپه مناسبه توګه د اړخونو تناسب یا ځاننیونه.

$$a : a' = b : b' = c : c' .$$

او یا

۲ – د دوه یو بل سره مناسبو اړخونوتناسب یا ځاننیونه او له دې بندشوې کونج. دا په دې مانا چې

$$a : a' = b : b' \quad \text{او} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

او یا

۳ – د دوه مناسبو اړخونو تناسب او د لوي اړخونو مخامخ کونجونومساویوالی. په دې مانا چی: $a : a' = b : b'$ او $ß = ß'$ د $b > a$ لپاره او یا

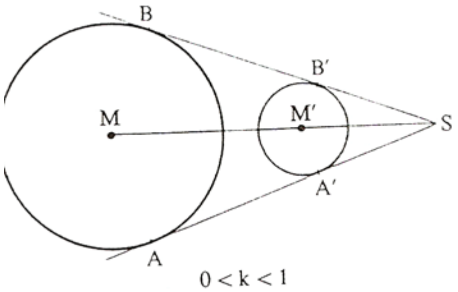
۴ – ددوه کونجونواندازې مساویوالی ، چی په دې ډول ټول کونجونه مساوي دي. دا په دې مانا چی :

په همدې ډول کيدی شي د نورو ځيرو لپاره هم د ورته والی جملی تر فرمول لاندې راوړل شي. ځيرې يو بل ته ورته دي، که دوي د ځانګړو ورتوني ځيروني له لاری يو په بل پريوتی شي.

مهم ورته والي ځيرونی منځني راکښنه ده

تعريف: منځني راکښنه $Z_{S,k}$ د ټکي S (د راګښنلو منځ) او يوه ګڼ k د راکښنلو فاکتور يا ځلونکي په بنسټ يواځنی ټاکلی وي. هر اصلي اوږدوالي ته د منځني راکښنو له لارې په k–ځلی تغير ورکو ل کيږي.

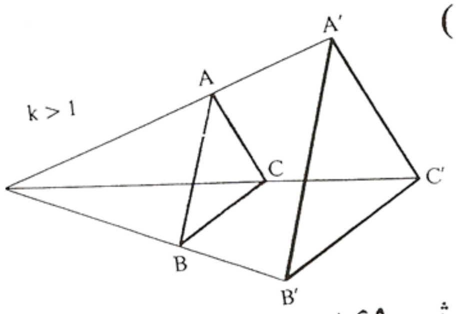
د k لپاره له صفر تر يو ګڼونه پرېښوول کيدی شي. په دې کی بياپخپله له دې پوهيدی شو چی ځيرونه له اصلي کوچنۍ ده. په دې حالت کی له زبيخلو (کيښکلو) غږېږو. ځيرونه نوره هم د راکښنلو باور لري. که k = -1 وي نو اړوند منځني راکښنل په راکښنل منځ S باندې ټکي اينونه ده. د هر بل منفی ګڼ k |=-1| k لپاره کيدی شي په k =(-1).|k| باندې تجزيه شي. له دې وروسته پورته يادونی په همغه هدف استعماليږي يا کارول کيږي.



ځيره ۱۶۸

يادونه : پام دې وشي چی راکښنه به ښه وي او که غزيدنه.

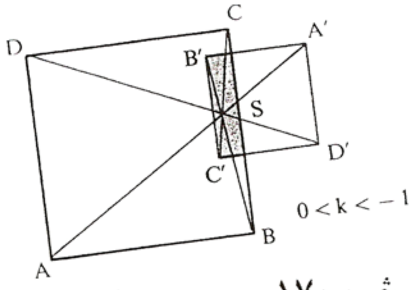
د منځراکښنی جوړښتخیړنه(توضیځ)



ځیره ۱۶۹

۱ – د اصلي هر په نخښنه ټکي د راکښلو منځ S سره و نخلوی.

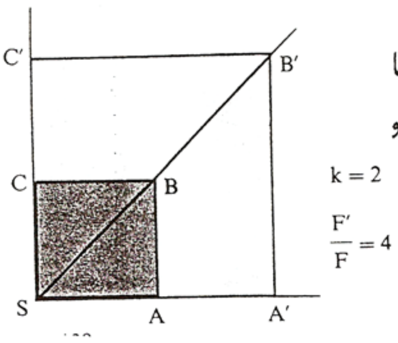
۲ – د هر ټکي P لپاره د|PS| پای کرښي په k ځل کیږي(جوړښت ته د k <0 لپاره هم، مقایسه ځیره) او نوې پای کرښه
|'SP|.k = |SP|
په کرښه چی دټکي S څخه پیل له P, S او 'P تیرېږي وکاري.



ځیره ۱۷۰

۳ – د اصل په ترتیب یا اصل ته ورته ټول ځیره ټکي سره ونښلوی.

دا چی ورته ځیرې (بی له |k| = 1) کونګروانیځ نه دي، نو د هوارې دننه یا منځ هم تغیر خوري، مګر که ټولی خواو یا اړخونه په فاکتور k(د بیلګي په توګه k = 3 , k = 2) تغیر کړو، نو ځیروونکی هواره باید په فاکتورk^2 (یعني $k^2 = 4$, همداسی $k^2 = 9$) تغیر وخوري.



ځیره ۱۷۱

تعري: په يو منځراکښنو، چې فاکتور k ولري د ځيرې هواره 'F او له ځيرې دمخه (اصلي) هوارې F ترمنځ لاندنی تناسب يا ځانښيونه موجود دی.

$$F' : F = k^2 \quad \Rightarrow \quad F' = F.k^2$$

د لته د k مخنخښه کوم رول نه لري ځکه چې منفی ځل منفی بيرته مثبت دی.

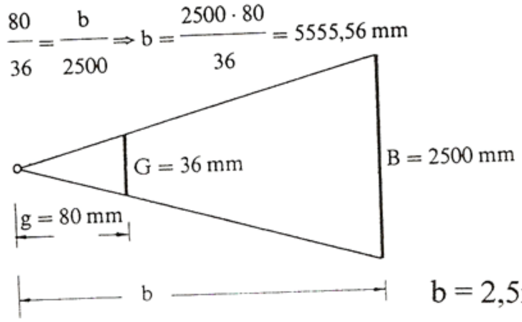
پيلبيلګ:

دياس(دفيلم دياس) (فورمات يا لويوالی 24mm.36mm)
په يوه ديوال چې لويوالی يې 2,5 m . 2,5 m دی د ممکن حده پورې ځيره کيږي. د ښه ټيك جوړولوسره يې له عدسي واټن 8cm دی. پريوستونی يا پرويکتور د ځيرې ديوال څخه بايد څومره لرې وي؟ د دياس هوراه په څو واره لويه شوي ؟

د دياس دځيرونی لپاره لاندې اړيکی باور لري:

$$\frac{\text{د ځيرې جګوالی } B}{\text{د دياسجګوالی } G} = \frac{\text{د ځيرې پراخوالي } b}{\text{د دياس –عدسی لريوالی} g}$$

ځيره ۱۷۲



ممکن ډك په دې مانا، چې 36 mm په 2,5 m بايد لوي شي. په دې توګه د پريوستون ديوال –عدسي واټن په لاندې ډول دی :

$$b = 2,5m.0,08m : 0,036m$$
$$\sim 5,56m$$

د لویوالی فاکتور یا ځلی دی

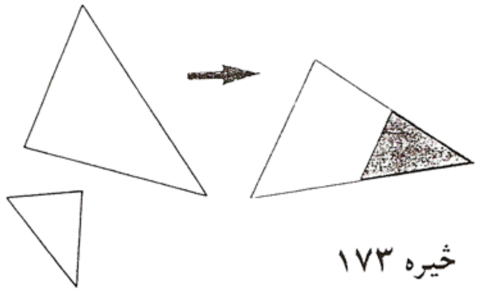
$$k = 2,5 : 0,036 \sim 69,44$$

له دې امله د څیرې هواره ده:

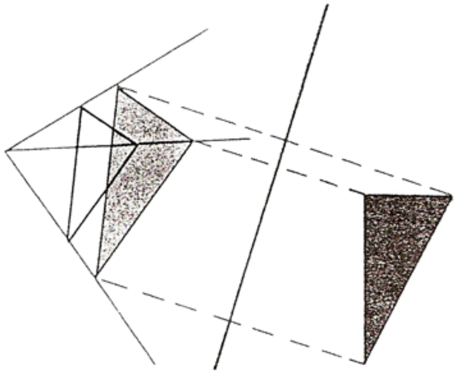
$$F' = 69,44^2 . 0,036 . 0,024 = 4,17 m^2$$

دا د دیاس هوارې 4822,53 واره یا ځله ده.

دا روښانه ده، چې ورته څیرې، د څرخوني، راکښلو له لارې او اینوني له لارې یوه پوزیشن ته راوړل کیږي، په کوم چې سم د لاسه د شکلونو د کونجونو د برابرتوب ورته والی پیژندل کیدی شي.



څیره ۱۷۳



څیره ۱۷۴

تعریف: هره کونګروابنځ څیرونه، هر منځراکښونکی او له دوې هر تړلی یا ځنځیري ایښولشوې یا ځای په ځای شوې څیرونی ورته څیرونی بلل کیږي.

دا چې هره ورته څیرونه بیرته یوه داسې څیرونه باندې راګرځي، نو بیخي باور لري: د ورته

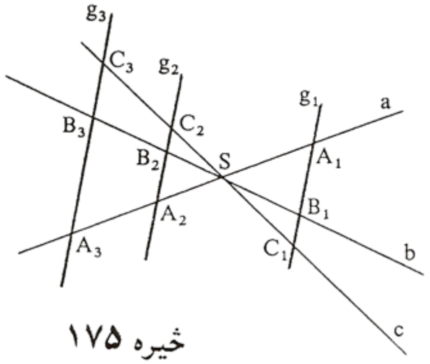
والي خیروني ډیری چی پرلپسی سره وتړل شي یا ځنځیري شي ګروپ جوړوی (د ګروپ لپاره دې، چی شمیرپوهنیزه کلیمه ده، د کتاب پای وکتل شي)

او خیرې او همداسي پیل بیلګه (ډیاسپرویکتور) څخه د وړانګي جمله ټولیزه یا عمومي کیدی شي.

---

۱ . وړانګي جمله: که له یوه ټکي S وتلی وړانګي ...،a,b,c له غبرګو کرښو....، g_2,g_2,g_3 غوڅي شي، نو د یوې وړانګی ټوټی همداسی تناسب کی دی یا همداسی ځان نیسی لکه

د بلی وړانګي ټوټی: دا په دې مانا چی:



خیره ۱۷۵

$$\frac{|SA_1|}{|SA_2|} = \frac{|SB_1|}{|SB_2|} = \frac{|SC_1|}{|SC_2|}$$

او

$$\frac{|SA_1|}{|A_1\,A_3|} = \frac{|SB_1|}{|B_1\,B_3|} = \frac{|SC_1|}{|C_1\,C_3|}$$

په خیره کی د اړیکو ښوونه سم د لاسه په غبرګو کرښو له پوړیزکونجونو او د دریګوډیو ورته والي چی SA_1B_1 او SA_2B_2, SA_1C_1 او SA_2C_2 اوپه همدې ډول د SB_1C_1 او SB_2C_2 سره یی لري.

برسیره پر دې باور لري:

---

۱ . وړانګي جملی په څټ: که له ناپای کرښو....g_1 , g_2 , g_3 څخه د خورې

غونچې یا بهتره ستورې کرښو له لارې ټوټې پرېکړی شي، چې یو بل ته ثابتې یا همغه ځای په ځاي ځاننیونی یا تناسبات څرګندوي، نو دا کرښې یو بل سره غبرګي دي.

۲ . وړانګي جمله:

که له یوه ټکي وتلې وړانګي د غبرګو ناپاکرښو څخه غوځې شي، نو د دوي ټوټې چې له غبرګو دې ځان داسې نیسي یا په داسې تناسب کې دیلکه هغه د ککرټکی څخه وتلې کچ شوې د وړانګو ټوټې.

$$\frac{|SA_1|}{|SA_2|} = \frac{|A_1B_1|}{|A_2B_2|} = \frac{|SB_1|}{|SB_2|} = \frac{|B_1C_1|}{|B_2C_2|} = \frac{|SC_1|}{|SC_2|} = \frac{|A_1C_1|}{|A_2C_2|}$$

۳ . وړانګي جمله:

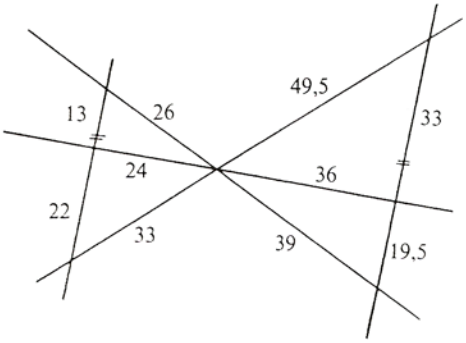
په یوه غبرګې ټوټو ځاننیونه داسې ده لکه پهدې بلې غبرګې ټوټو ځاننیونه یا تناسب:

$$\frac{|A_1 B_1|}{|B_1 C_1|} = \frac{|A_2 B_2|}{|B_2 C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1 C_1|}{|B_1 C_1|} = \frac{|A_2 C_2|}{|B_2 C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1 B_1|}{|A_1 C_1|} = \frac{|A_3 B_3|}{|A_3 C_3|}$$

بیلګه :

۱ . د لمړی وړانګي جملې پسې لرو:

۱ . د وړانګو جملو پسی یا له امله باور لري:



شیره ۱۷۶

1. Strahlensatz: $\frac{26}{39} = \frac{24}{36} = \frac{33}{49,5} = \frac{2}{3}$

لمړی وړانګی جمله

2. Strahlensatz: $\frac{24}{22} = \frac{36}{33}$ oder

۲. وړانګی جمله

$\frac{33}{22} = \frac{49,5}{33}$ oder

$\frac{26}{35} = \frac{39}{52,5}$

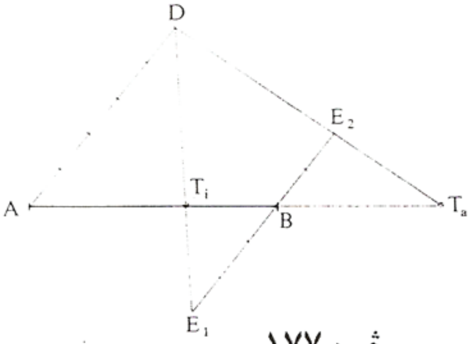
3. Strahlensatz: $\frac{13}{22} = \frac{19,5}{33}$ oder

۳. وړانګی جمله

$\frac{35}{22} = \frac{52,5}{33}$

۲ . د یوې کرښی AB ویشنه یا ټوټونه:

کرښه AB دننه(T_i) په ځاننیونه یا تناسب 5:3 او دباندې (T_a) په تناسب یا ځاننیونه 2 : 5 ویشل کیږي. د دې لپاره د ۲ . وړانګي جمله کارول کیږي یا استعمالیږي:



شیره ۱۷۷

– دننه ټوټوونټکی T_i :

$$\frac{|AD|}{|BE_1|} = \frac{|AT_i|}{|T_i B|} = \frac{5}{3}$$

– د باندې ټوټوونټکی T_a:

$$\frac{|AD|}{|BE_2|} = \frac{|AT_a|}{|T_a B|} = \frac{5}{2}$$

دا جوړښت د ویشنی برسیره

د کرښو د ځل لپاره هم کارول کیدی شي. نو $|AT_a|$ د $|T_aB|$ دوه نیم واره دی.

۳ . طلايي غوڅی یا –غوڅونه:

په طلای غوڅي یوه د a اوږدوالی کرښه داسی ټوټه کیږي، چی برخه ټوټو د x اوږدوالی همداسی د a - x اوږدوالی لپاره اړیکی $a : x = x : (a-x)$ باور لري. دلته x د دواړو برخه کرښو لویه برخه ده دا ویشنه په هنر او ارښیتکتور کی له مانا ډکه ده یا مهم رول لوبوي. له پورته اړیکو څخه لاس ته راځي: $x^2 = a(a-x)$ او له دې بیا $x = \sqrt{a(a-x)}$ لاس ته راځي. دا په دې مانا چی اوږده کرښه د دوو لنډو کرښو او د ټولی کرښی هندسي منځ دی. که دا فرمول نور هم ښه بدلون غوره کړي او د x په لور اوبی یا حل شي، نو ترې لاس ته راځي :

$x = \sqrt{a^2 - ax}$

$x^2\ a^2 - ax$

$0 = x^2 + 1x - a^2$

$x_{1,2} = -(a/2) \pm \sqrt{(a/2)^2 + a^2}$

$= -(a/2) \pm \sqrt{(5/4)a^2}$

$x_1 = 0,5a(\ 5 - 1)$ په کار نه راځي

$x \sim 0,618a$ نو لرو:

د طلايي قاعدې لګه لارې

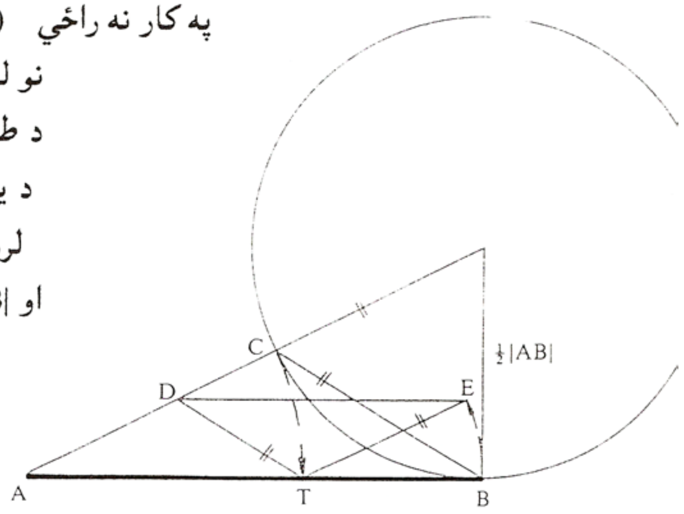
د یوې کرښی $|AB|$ ویشنه

لرو $|AC| = |AT|$

او $|AD| = |TE| = |TB|$

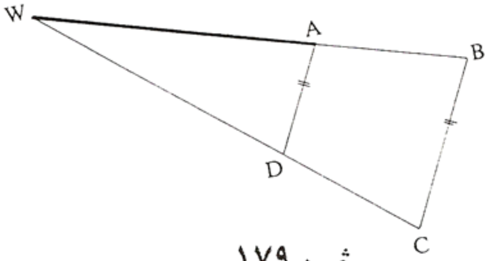
$$\frac{|AB|}{|AT|} = \frac{|AT|}{|TB|}$$

ځیره ۱۷۸



تمرینونه

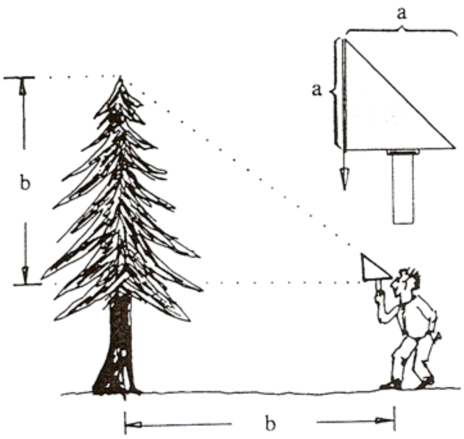
۱ – په کواوردیناتسیستم کی دریګوړی A(2|3), B(6|1), C(3|6) ورکړ شوی دی.
الف) دا دریګوړی د k = 2 په اندازه وغزوی . د غزولو مرکزدې Z(0|0) وي.
ب) دا دریګوړی په (S(-2 | -3 وڅرخوی د 140° = ∝ سره. دا څیره دریګوړی په S باندې د k = -1,5 سره وغزوی.
پ) دا دریګوړی په ۴ یوونو سره لمړی کیڼ لورته او بیا په ۵ یوونونو پورته لورته وکښوی، بالاخره یې په x– محور هنداره کړی او بیا یې بالاخره په ټکي (0|-6) د k = -1 سره وغزوی.
۲ – ایا ټول الف) مساوي پښیز ، ب) مساوي اړخیز، پ) ولاړکونجیز دریګوړی یو بل ته ورته دي ؟
۳ – د یوه مکعب پورته هواره د مرکزی غزونی د غزونفکتور یا غزونځل k سره او د هوانیمي غوڅټکي سره د غزولومرکز په څیر، څنګه تغیریږي؟
۴ – کرښه AB | =10 cm | دننه او دباندې داسی ټوټه کړی، چی په ځانیونی یا تناسب د 5:2 کی سره پراته وي،



څیره ۱۷۹

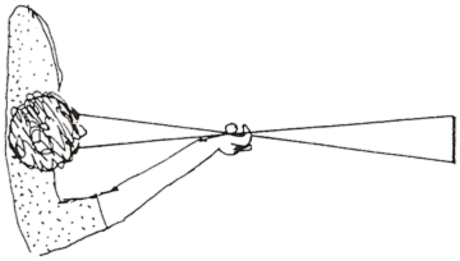
۵ – کرښه CD| =6,5 cm | د «طلای غوڅي قاعدې» له لارې ټوټه کړی.
۶ – د یوه کټونبرج A (څیره ۱۷۹) څخه دې واټن |AW | یوه ځنګل برخی W ته وټاکل شي.
دري ټکی B, C او D په نخښنه کیږي په داسی ډول چی AD||BC وي. اندازه کیږي:AB|=75 m : |BC| = 125 m | او AD|= 100 m | , نو |AW | څومره اوږد دی ؟

۷ – الف) د یوه «ځنګلوالدریکوډي»
سره (څیره) د یوې ونی
جګوالی اندازه کیدی شي. – ونه
څومره لویه ده ، که د ځنګلوال
سترګه له ځمکی څخه ۷۰ ،۱
متره جګه وي، او دی له ونی
۱۰ متره لرې ولاړ وي؟
ب) څنګه (د یوه څرګندوه واټن)
د یوه شي د جګوالی د خپل
متې په مرسته نږدې یا تقریبي
اندازه کولی شي؟
لارښود: ۷ ۱الف وګوری)



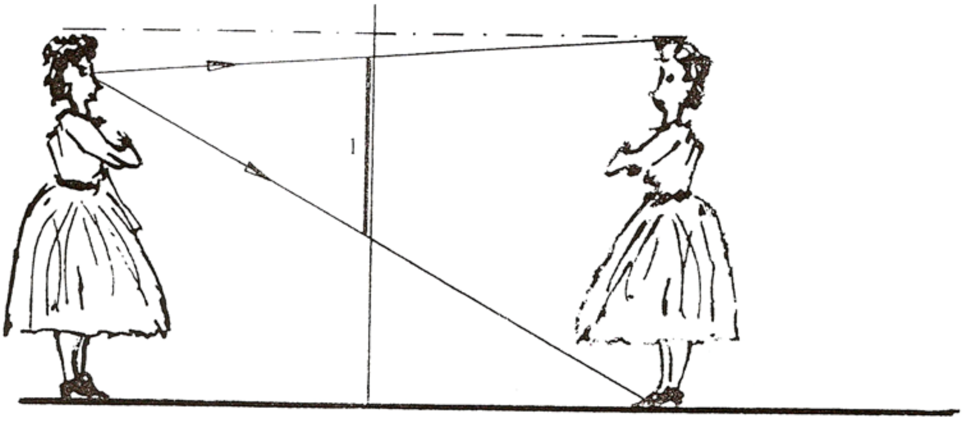
څیره ۱۸۰

پ) په عسکری کي د دوه شیانو
د واټن د اندازه کولو لپاره
« د غټې کوتي ګام » تخنیك
کارول کیږي یا استعمالیږي.
دا داسی صورت نیسی چی
لمړی سړی خپله کینه سترګه
پټوي او غټه ګوته راوباسی،


څیره ۱۸۱

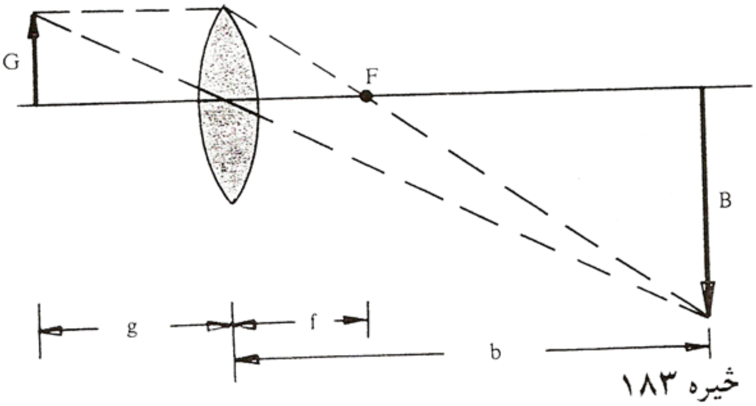
لمړی یو انډول وړ شی، چی ښي
لور ته پروت دی، اندازه کوي او بیا د ښی سترګي په پټولو سره ټیك هغۀ لټوونکی
موخه د زیر لاندې نیسي. دلته د واټن اندازې ورکونی ته سړی څنګه راځي؟
۸ – میرمن څانګه غواړي چی په خپله پوره لویوالی ځان د دالیز په هنداره کی
وګوري. په عادي توګه د دالیز د کوچنوالی له امله ۸۰ سانتي متره له هنداري

لرې، هنداري ته مخامخ ودرېږي.دا هنداره بايد څومره کم له کمه جګه وي چې ميرمن ځانګه د سترګو جګوالی چې ۶۵، ۱ متره دی ټول لويوالی چې ۷۳ ،۱ متره دی وګوري؟



څېره ۱۸۲

۹ - د يوې لينزې يا عدسی يا سترګی له لارې په څېره کی د نور څېرونی



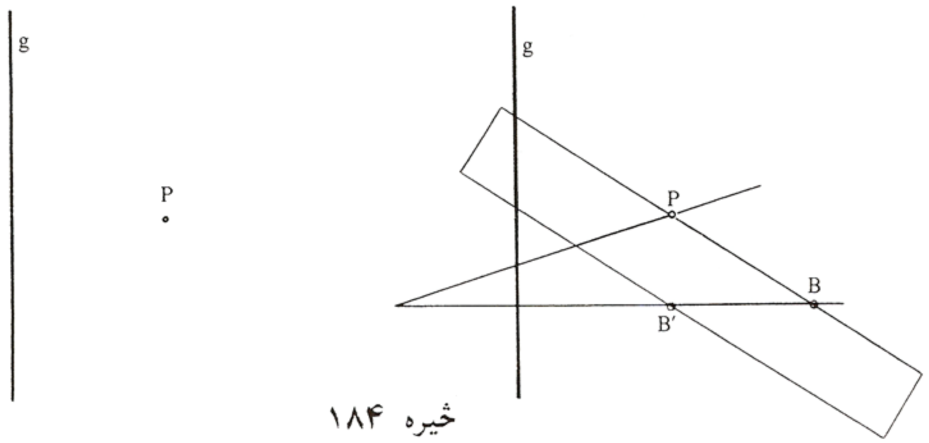
څېره ۱۸۳

جوړښت کتل کیږي. د لینزې یا عدسی لپاره د لینزې یا عدسی
مساوات $(1/g)+(1/b) = (1/f)$ باور لري، پخپله د څیرونی لپاره
مساوات $B / G = b / g$ باور لري(په لغاتو: د څیرې جګوالی د شي جګوالی
سره ځان داسی نیسی لکه د څیرې لریوالی د شي لریوالی ته). دا دواړه
اړیکی د وړانګي له جملی راوباسی !

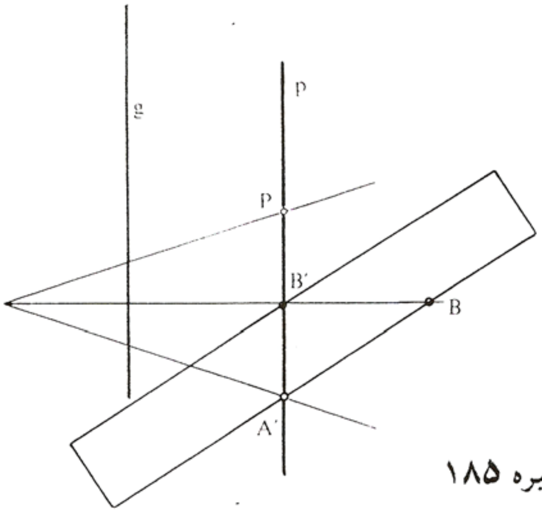
۱۰ – یو ولاړکونجیز دیاپوزیتیویا مثبت دیاس داړخ اوږدوالی ۶ ،۳ سانتي متره
سره او ۴ ،۲ سانتي متره سره یو و هغه ته غبرګ دیوال باندې پریوزې .
څیورونی لینزې یا عدسی، دا شی ۱۲ سانتي متره له دیاس او ۸۰ ،۴ متره
له دیوال لرې دي. د پریوستون دیوال کم له کمه باید څومره وي ؟

۱۱ – یو د دیوال مربع شکله کړکی، چي اړخ یی ۲۰ سانتي متره اوږد دی له یوه
هغه ته غبرګ دیوال څخه ۱۲ متره لرې ده. د هغی کړکی څخه څومره
لرې باید یوه د پریښنا سرچینه ، چی د ټکي بڼه لري، لرې وي چی له کړکی
تیره رڼا یوه د ۱۶ مترمربع هواره روښانه کړي؟

۱۲ – د کوم مرکزې غزوني سره کیدی شي چی یو ګردي دننه دریګوډی په ګردي
راګیر یا ګردي دباندې دریګوډي باندې څیره شي؟ ګردی هوارې یو بل سره



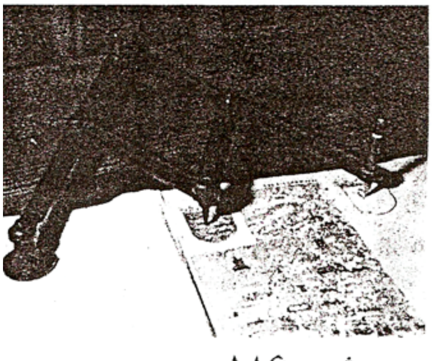
څیره ۱۸۴



څېره ۱۸۵

په کومه ځانییونه یا تناسب ځای نیسی یا پرتی دي؟

۱۳ – د دیسارګ (Desarues) د جملی له مخی کیدی شي چی کرښه g په ټکی P جوړه شي ، که ټول رسم الات یوائي یوه لرګي متهه وي (د بیلګي په توګه کرښی یا خطکش) د دوه غبرګو کانتو سره یا اړخونو سره ځموږ په اختیار کي وي. په دلایلو روښانه کړی، چي ولی په پرلپسی څیرو جوړښت کی د جوړښت لار کار ورکوي.



څیره ۱۸۶

۱۴ – وښایی چی د هر غبرګ اړخیزABCD لپاره باور لري: که د یوه نیمی د په خوښه ټکي P ځخه یوه اړخ ته غبرګه کرښه رسم شي، نوغبرګاړخي منځ ته

راځي، چې ABCD ته منځنۍ یامرکزې ورته دی. د همغه غزولومرکز چېرته پروت دی؟

په دې خویونو د پانتوګراف(Pantograph) یا په ورځنۍ ژبه د ځانې ټونګی دا یوه د رسموولو اله ده قانون هم بینا دی. O په رسمتخته تر زیر لاندې راځي . په پینسل P سره د مخه کښل شوې شیرې باندی حرکت ورکول کیږي، نو په دې توګه دا رسمپینسل یو مرکزي یامنځنۍ ورته شیره رسم کوي (شیره.) په تې مخ کی کښل شوې ده

۱۵ – په یوه ګردۍ کی دوه ټوټونی یا زیني یوبل غوځوي. ټوټې ۱۸ سانتیمتره او ۳۵ سانتي متره دی، د دومی هغه اوږده ټوټه ۳۰ سانتیمتره ده. نا معلومه ټوټه یی وښایی.

۱۶ – څومره لرې سرې کتلی شي

الف) د بحرهوارې څخه ۴۰ متره جګ اندازه ټوکرۍ

ب) د یوه له ځمکی ۲ کیلو متره جګ هوا پوړکی یاهوا بالون،

پ) د یوه الوتونکی کوټګی چې د سپوږمی هوارې څخه۲ کیلومتره جګه وي(r = 1735 km)؟

۱۷ – د شکل ۱ (شیره

الف) لپاره صدق کوي g || h او

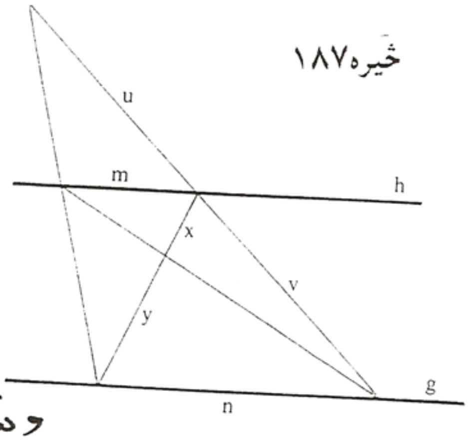
a) $\frac{u}{v} = 1$

b) $\frac{u}{v} = 0{,}5$

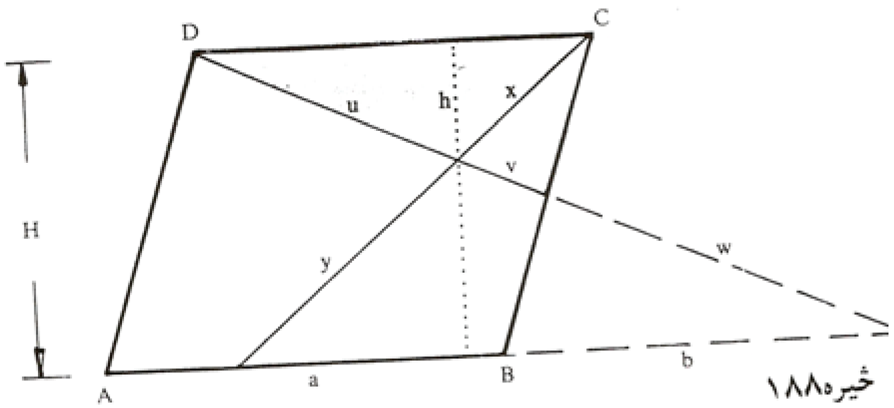
c) $\frac{u}{v} = \frac{2}{3}$

Berechnen Sie $\frac{x}{y}$. وشمېرئ

شیره۱۸۷



۱۸ – وشمیری u / v او x / y (ځیره ب)
د غبرګاړخیز څومه برخه رنګه ده؟



ځیره۱۸۸

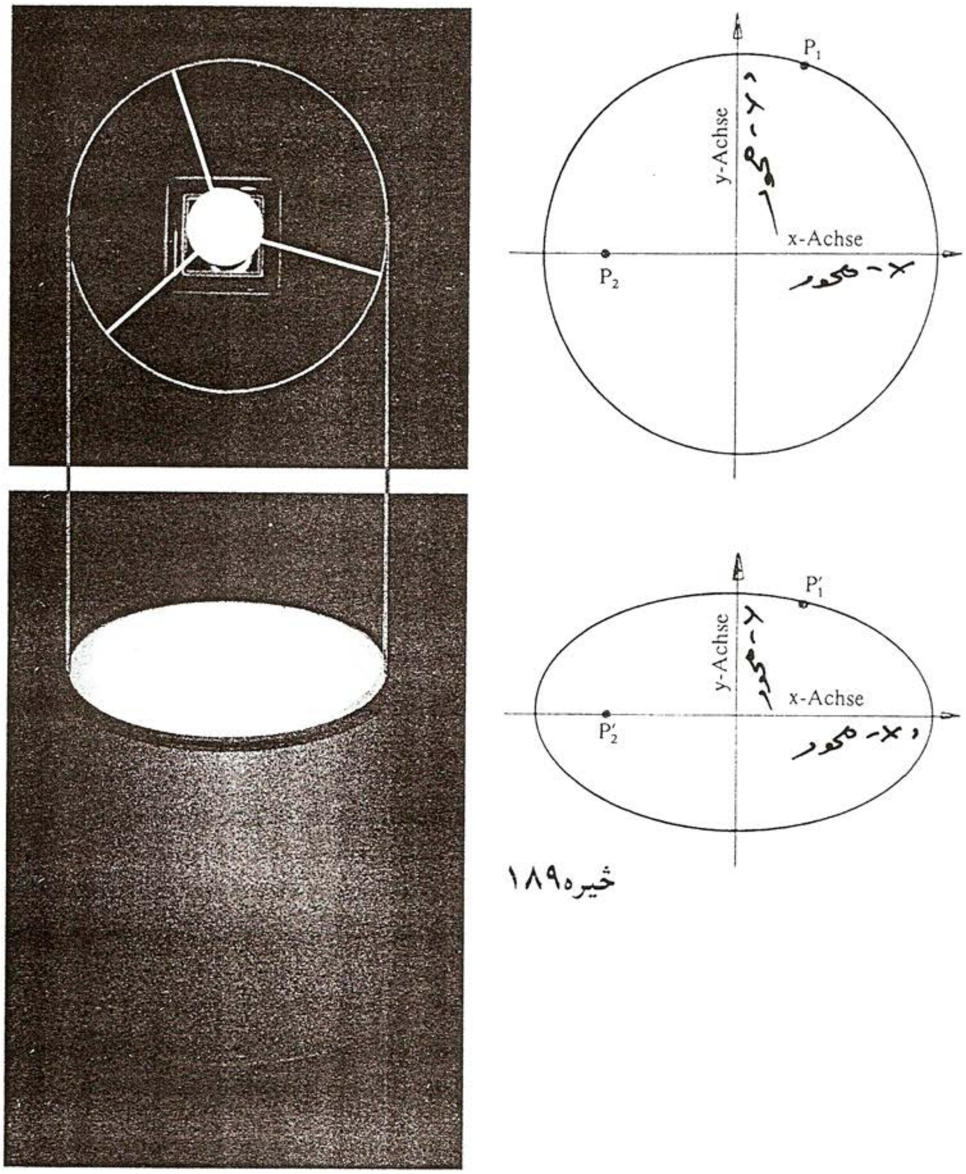
دا لاندې برخه راوړل او لیکل یې ښه دې، خوګومان مې دی چې لړبه ستونځمنه وي. کتل اوراوړل یې راته بیا هم ښه برېښي..

۸ – افینې ځیروني Affine Abbigdung

محوري افینیتي Die axiale Affinität

دبیلګي په توګه مو د مخه تیرو درسونو کی وېوښتل، چې ایا موږ له یوې ګردي
ښیښي توتي چې لړ ځنډه یي ماته ده یوه بله ګرډي توټه چې وړانګه یی له پخوا

کوچنی وي او یا یو ډیرګوډی جوړولی شو، چې سیومتري او په دې توګه ښکلی
.



څیره۱۸۹

وي. دلته موږ اليپسي سره مخامخ شو.
پوښتنه دا ده چي ايا يوه څېرونه شته چي له ګردی څخه اليپسي لاس ته راشي؟
د څيرې۱۸۹/ دليدلو له مخې داسې خيال راپيدا کيږي، چې ګونډې د ګردی او
ايليپسي ترمنځ څه خپلوي شته. دا نو بيا دې لاندې پريکړې ته اجازه ورکوي، چي
يوه څېرونه بايد موجود وي چې د ګردی څېرونه ايليپسي شي.
دا څيرونه بايد کوم خويونه ولري؟
موږ بيا د جوړونې نيونې چې د مخه مو کړي رامنځ ته کوو.
ټولې په پراته(افقي) x− محور باندې پراته ټکي ځاي په ځاي پاتيږي: پس
د x− محور د ځاي په ځاي ټکو کربښې څيرونه ده. د دې په څټ د y − محور ټول
ارزښتونه تغير خوري. پس هره y−محور سره غبرګه کربنه ځای په ځاي کربنه ده.
له دې سره موږ د نوې څيرونې لپاره ټول ضروري خويونه راټول کړل: د افينيتي
محورa سره يوه محوري افينيتي $A_{a;g;k}$ ، د لورکربښې(کربنه چې لوری يې
ځرګندوي لنډ يې: لورکربنه) g او د افينيتي فاکتور |k |= 0 مخ ته پراته دي، که
لاندې شرايط پوره وي :
۱ − هره کربنه 'PP چې له ټکو P او 'P تيره وي د g سره غبرګه ځغلي.
۲ − که *P د'PP او a غوڅټکی وي ، نو لرو : |P*P'| = |k|.|PP*|.
په دې توګه نو يوه محوري افينيتي، دکربښې −،غبرګ − او ټوټه تناسب يا ځاننيونه
ريښتونې ده. اخرنی دا وايي چې په اصلي پايکربښی درې ټکي دا پايکربښه په همغه
تناسب يا ځاننيونه پرې کوي، لکه د څيره ټکی په څيره کربنه باندې.

له دې لاندې د محور افينيتي جوړښت څېړنه لاس ته راځي
۱ − له اصلي کربښي په نخه شوي ټکي (د بيلګي په توګه P) څخه وg سره يوه
غبرګه کربنه وباسې او ددې غوڅټکی د افينيتي محور سره د بيلګي په توګه *P
وبولی.

۲ – له P* څخه $|P'P^*| = k \, .|PP^*|$

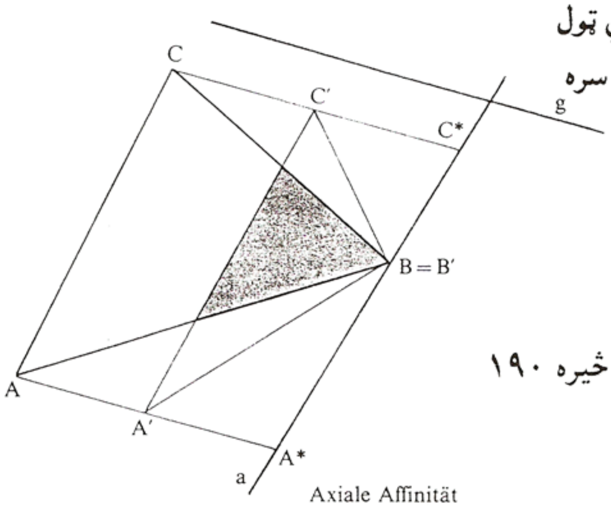
و g ته غبرگي مناسبی کرښی

وکاږی.

۳ – په دې توگه رامنځ ته شوي ټول

ټکي اصل ته په ورته توگه سره

ونښلوی.

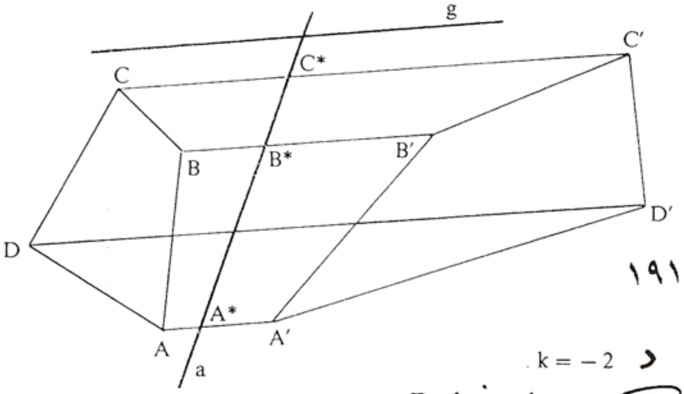


خیره ۱۹۰

Axiale Affinität

د $k = \frac{1}{2}$

آکسیال افینیتی



خیره ۱۹۱

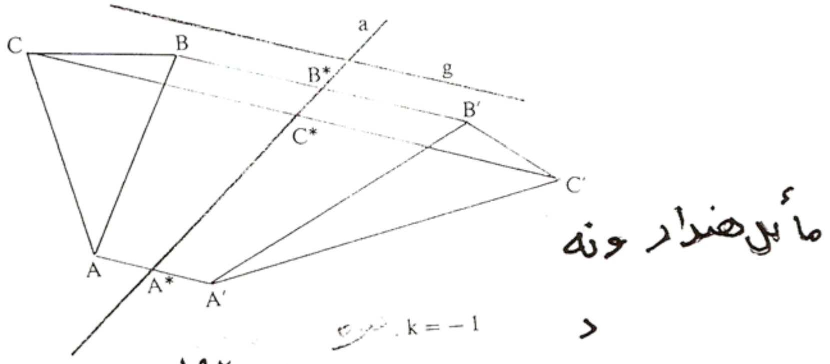
د $k = -2$

آکسیال افینیتی

د $k = 1$ لپاره د هوارې هر ټکی ځای په ځای ټکی دی، ځکه چی ټولی پایکرښی تغیر نه خوري. له دې لرو چی $A_{a;g;1}$ کټمټ یا identisch ایدنتیك دي.
د $k > 0$ لپاره P او *P د a په یوه (همغه) خوا پراته دي(ثیره) ، د $k < 0$ لپاره د a په بدلوخواوو (ش. ۱۵۷)
یو ځیرونه $A_{a;g;k}$ کیدی شي په ځیروونې $A_{a;g\ 1/k}$ بیرته راوکرځي .

مائیل هنداْرونه

مائیل هندارونه یوه ځانګړې محوري افینیتي ده : د $k = -1$ لپاره لریوالی یا فاصله |*PP| همدومره ده لکه لریوالی یا واټن یا فاصله |*P'P| . پس مائیل اینونه محوري افینیتي $A_{a;g;-1}$ ده.



ځیره ۱۹۲

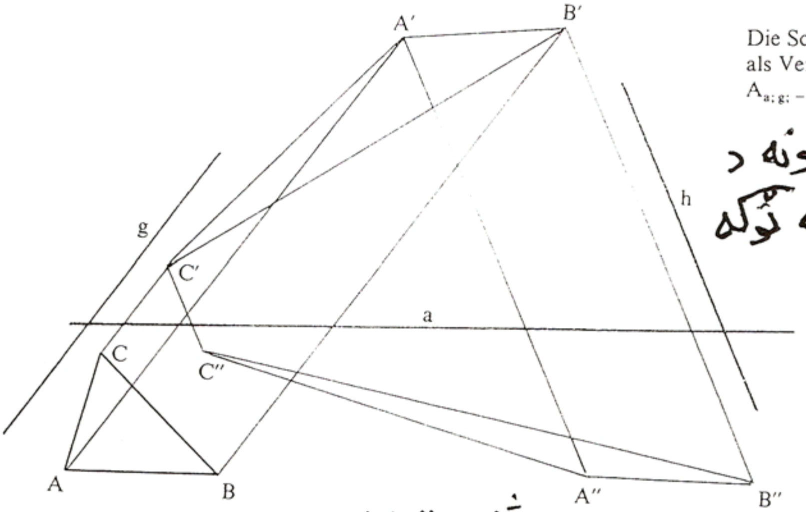
: محوري افينيتي(يو بل سره) تړلو ځانګړي حالتونه:

ياتي كوونه يا بياتيونه Scherung

: دوه محوري افينيتي(يوبل سره) تړل، چې همغه افنيتي محور a ولري،g او h
ختلفلوري محورونه او يو بل ته مخامخ افينيتي فاكتورونه k او 1 / k ولري، نو
ياتيونه(بياتي كونه) ورته وايو.

ياتيونه(يوبل سره)
: تړلو په څير:

$$A_{a;g;-2} \cdot A_{a;g;-½}$$



Die Scherung
als Verknüpfung
$A_{a;g;-2} \cdot A_{a;h;-\frac{1}{2}}$

بياتيونه د
تړنې په توګه

شمیره ۱۹۳

په بیاتیونی کی، لکه څنګه په مائیلی اینوني کی د هواری دننه بی تغیره پاتی کیږي، سره ددې چی د یواځنیو یا ټولو شکلونو تغیر خوړلی شي. (تمرین وګوری)
په عمومي توګه د ځیرې – او اصلي هوارې لپاره په یوه محوري افینیتي کي باور لري : $F'=|k|.F$, او یو په بل پسی کارونو یا عملیو اجرا کولو کی هم په همدې ډول $F' = |k. ... .k|.F$:
دا په دې مانا، چی محوري افینیتي په عمومي توګه هوارې ریښتونی نه ده.

محوراینونه

محوراینونه یوه محوري افیتي ده له $k = -1$ سره. (ځیره ۱۹۲ وګوری)

کونګروانیځ ځیرونه
هره کونګروانیځځیرونه کیدی شي له محوراینونی یوځاي راټوله شي.

منځنی راکښنه(راکښل)
هر منځراکښنه یو افقینه ځیرونه ده.

په عمومي ډول لاندې لاس ته راځي

د ټولو کونګروانیځ ځیرونو، ورته ځیرونو او محوري ځیرونو ډیري، د ټولو افقین ځیرونو ډیری ورکوي. که افینځیرونی یو په پسي اجراشي یو ګروپ جوړوي، داسی په نامه افینګروپ. (ګروپ دې د کتاب په پای کی وکتل شي)

تمرینونه

۱ – یو دریګوډی ABC دې په یوه افین هوارمساوي باندې داسی واړول شي، چیرته چی او | AB | = | AB' |.

۲ – په دریګوډي A(3|5) ,: B(5|4) ; C(3|1) باندې یو محوري افنیتي داسی وکاروي یا استعمال کړی، چی A'(-3|1) او y– محور د افنیتي محور وي.

۳ – د ګردی ځیره د M(2|3) او r = 3 cm سره وټاکی ، که د x–محور د افینیتي محور وي، په ۱ او ۳ کوادرانت یا څلورمه کي لورکرښه او k = 2 د افنینتي فاکتور یا –ځل وي.

۴ – یو دریګوډی په هوار مساوي پنځه ګوډي واړوی.

۵ – یوه ګردی دې د نیمي d = 12 cm او د افنینیتي فاکتور k= ½ سره افینځیره شي. د راپیدا ایلیپسی د هوارې دننه وشمیری. (دوه یو په بل ولاړ محورونه افینیتي محورونه دي چی له منځټکي او لوریزکرښی څخه تیریږي)

۶ – یو تریخ ABCD جوړکړی له a = 8 cm ; c = 3 cm ; d = 5 cm او 40° = ∢ . په دې محورې افینیتي لارښوده کړی، چی د افنیتي محور یی د تریخ منځلاین وي، چی د لورکرښه یي د هغي سره ۵۵ درجي کونج جوړوي او د افنیتي ځل ا –فکتور یی k = 3 /2 دی.

۹ - کرښيز برابرون يا – مساوات يا - معادله

د يوې اووښتونې يا مجهولې سره

که دوه ترمونه د برابروننخښې له لارې يو بل سره وتړل شي، نو يو مساوات يا برابرون ترې منځ ته راځي. که مساوات د x اووښتونې يا متحوله که فقط ۱ . توان ولري، نو سړی د يوه کرښيز مساوات څخه غږيږي.

يادونه: - برابرون،مساوات يا معادله همغه د انګريزي Equation دي.

- برابرون دې د فنکشن يا څيرونې يا تابع سره نه بدليږي.

د کرښيز مساوات بيلګې د حلمتحولې يا –اووښتونې x سره.

1.	$x + 7 = 9$
2.	$12x - 4 = 16 + 2x$
3.	$m + n = x + m - a$
4.	$x - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$
5.	$\frac{2}{3}x - \frac{5}{6} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8} = \frac{4}{5}x - \frac{3}{4}$
6.	$56 - (7x - 9) = 9 + (11x - 3) - (6x + 13)$
7.	$12 - \left[(16 + 7x) + (3x - 1)\right] = 6 + (2x - 5)$
8.	$a^2b + b^2c - \left\{bx - \left[(a^2b - bx) - (b^2c + bx) - a^2b\right] + bx\right\} = 0$

دا له موږ څخه انځور شوي مساواتدولونه په پوښتنو کې زيات منځ ته راتلونکي مساوات دي. د دې لپاره يوه لنډه شننه يا تشريح:

لومړی: ساده مساوات په کين اړخ د متحولې **x** سره.

دويم: ساده مساوات په دواړو لورو د متحولې **x** سره .

دریم: کرښیز مساوات د متحولې **x** سره او بنه متحولې m, n او a سره.

څلورم: ساده کرښیز مساوات د ماتونو یا کسرونو سر او په ښي لور د متحولې سره.

پنځم: کرښیز مساوات د کسرونو سره، په کوم کې چې اووښتونې یا متحوله **x** په دواړو خواوو منځ ته راځي.

شپږم:کرښیزمساوات د نوکانو یا قوسونو افادو سره.

اوم: کرښیز مساواه د کونجیزو او ګردو نوکانو یا قوسونو سره(دوه واره قوسونه)

اتم: مساوات د مارډوله کوډیزو او ګردو نوکانو سره(دریواره قوسونه).

د مخه له دې چې کرښیز مساوات حل شي، یو څو غوره کلیمې، چې د کرښیز مساواتو اړوند زیات رامنځ ته کیږي.

په یاد ولرئ: حلډېرئ یا –سټ(**L**) ټول ارزښتونه خوندي لري، د کومو لپاره چې اووښتونې یا متحوله **x** ځای په ځای کیدی شي. په عادې توګه دا د کرښیز مساواتو لپاره ټیک یو ارزښت دی. دا ارزښت د بنسټډېرئ **(G)** څخه رانیول کیږي.

مساوات حلکیدنه په دې معنا، چې ،، د مساواتو حلډېرئ یا – سټ ټاکنه،،.

په یاد ولرئ: تعریف ورشو یا –ساحه **(D)**چې په مساوات کې منځ ته راځي هغه سټ ده، چې د هغې لپاره د ریاضي ترمونه تعریف دي.

د کرښیز مساواتو حلډېرئ یا حلسټ سرې په ورته بنه بدلون **Äquivalenzumformung** کې پیدا کوي.

اجازه شته:

چې د مساوات په دواړو لورو همغه عدد یا همغه ترم زیات یا کم شي یعنې ورسره جمعه یا ترې تفریق شي.

د مساوات دواړه لورې د همغه یا برابر عدد یا برابر ترم سره ضرب شي یا په برابر عدد یا برابر ترم وه وېشل شي.

اجازه نه شته:

د صفر سره ضربونه، په صفر باندي وېشنه، همداسي د مساوات دواړه خواوې مربع کونه.

بیلګه:

کربنیز مساوات، چي په دواړو خواو یي متحوله x منځ ته راځي.

$12x-4=16+2x$ تعریفسټ D=R ، بنسټسټ G=R

حل د ورته بنه بدلون له لارې منځ ته راځي

په دواړو خواو 4 جمعه کړئ.	$12x-4 = 16+2x \quad \| +4$
له دواړولورو 2x کم کړئ	$\Leftrightarrow 12x = 20+2x \quad \| -2x$
دواړه خواوې په 10و وېشئ	$\Leftrightarrow 10x = 20 \quad \| :10$
له دې لاس ته راځي، چي L={2} حلسټ ده.	$\Leftrightarrow x = 2$

بیلګه:
کربنیز مساوات د بنه واریابلي سره
$Ux-2=8-2x$ د G=R سره یو پارامتر مساوات دی.
د u اووښتوني یا متحوله پارامتر بلل کیږي. متحوله x د حل متحوله ده.
حلسټ د u په واکوالي یا تابعیت کي پیدا کړئ.

پارمتر یا بنه متحوله (بنه اووښتوني) فقط یا ځانله د تعریف سټ څخه د یوه په خوښه توکي لپاره یو ځاینیونکي ده.

بیلګه:
مساوات دماتونو یا کسرونو سره، چي په هغه کي متحوله x په دواړو خواو کي منځ ته راځي.

$$\frac{2}{3}x-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}=\frac{4}{5}x-\frac{3}{4}$$

د x سره زیاتووني یا د جمعي برخه کینږ لور ته راوړې

$$\frac{2}{3}x-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}=\frac{4}{5}x-\frac{3}{4}\,\Big|\,-\frac{4}{5}x$$

د جمعي برخه یا زیاتووني بې له متحولېx بني خوا ته راوړئ

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x-\frac{4}{5}x-\frac{5}{6}-\frac{3}{8}=-\frac{3}{4}\,\Big|\,+\frac{5}{6}+\frac{3}{8}$$

دواړو خواو کي اصلي مخرج یا ماتلاندي پیدا کړئ

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x-\frac{4}{5}x}_{30}=\underbrace{-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{3}{8}}_{HN=48}$$

دواړه خواوې په اصلي مخرج راوړئ

$$\Leftrightarrow \frac{20}{30}x+\frac{15}{30}x-\frac{24}{30}x=-\frac{36}{48}+\frac{40}{48}+\frac{18}{48}$$

دواړه خواوې سره یوځای کړئ او سره ضرب یې کړئ.

$$\Leftrightarrow \frac{11}{30}x=\frac{22}{48}\,\Big|\cdot\frac{30}{11}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{22\cdot 30}{48\cdot 11}=\frac{2\cdot 30}{4\cdot 12}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}\Rightarrow L=\left\{\frac{5}{4}\right\}$$

بیلګه:

کرښیز مساوات د نوکانو افادو سره

$$56-(7x-9)=9+(11x-3)-(6x+13)$$

نوکان حل یا لرې کړئ او له دې سره د مخنخښي قانون په پام کې ولرئ.

$$\Leftrightarrow 56-7x+9=9+11x-3-6x-13$$

تنظیم او سره یوځای کړئ.

$$\Leftrightarrow \quad -7x+65=5x-7\,|\,-5x$$

$$\Leftrightarrow \quad -12x+65=-7\,|\,-65$$

$$\Leftrightarrow \quad -12x=-72\,|:(-12)$$

$$\Leftrightarrow \quad x=6\Rightarrow L=\{6\}$$

بیلګه:

کربنيز مساوات د ګوډيزو يا زاويه يې قوسونو او ګردو قوسونو يا نوکانو سره(دوه ځله نوکان)

$$12-\left[(16+7x)+(3x-1)\right]=6+(2x-5)$$

لومړی ګرد قوسونه يا نوکن حل کړئ

$$\Leftrightarrow 12-[16+7x+3x-1]=6+2x-5$$

سره يوځا کړئ او تنظيم يې کړئ

$$\Leftrightarrow 12-[10x+15] \quad =2x+1$$

کونجيزه قوسونه حل کړئ

$$\Leftrightarrow 12-10x-15 \quad =2x+1$$

سره يوځای او تنظيم کړئ

$$\Leftrightarrow -10x-3 \quad =2x+1 \mid -2x$$

$$\Leftrightarrow -12x-3 \quad = \quad 1 \mid +3$$

$$\Leftrightarrow -12x \quad = \quad 4 \mid :(-12)$$

$$\Leftrightarrow x \quad =\frac{4}{-12}=-\frac{1}{3} \Rightarrow L=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

بيلګه:

کربنيز مساوات د مارپيچ، کونجيزې او ګردو نوکانو يا قوسونو سره.(درې واره قوسونه)

$$a^2b+b^2c-\left\{bx-\left[(a^2b-bx)-(b^2c+bx)-a^2b\right]+bx\right\}=0$$

ګردقوسونه حل کړئ

$$\Leftrightarrow a^2b + b^2c - \left\{bx - \left[a^2b - bx - b^2c - bx - a^2b\right] + bx\right\} = 0$$

سره یوځای کړئ

$$\Leftrightarrow a^2b + b^2c - \left\{bx - \left[-2bx - b^2c\right] + bx\right\} = 0$$

کونجيز قوسونه حل کړئ

$$\Leftrightarrow a^2b + b^2c - \left\{bx + 2bx + b^2c + bx\right\} = 0$$

سره یوځای کړئ

$$\Leftrightarrow a^2b + b^2c - \left\{4bx + b^2c\right\} = 0$$

مارپيچه قوسونه حل کړئ

$$\Leftrightarrow a^2b + b^2c - 4bx - b^2c = 0$$

سره یوځای او تنظيم کړئ

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -4bx + a^2b &= 0 \mid -a^2b \\ \Leftrightarrow -4bx &= -a^2b \mid : (-4b) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-a^2b}{-4b} = \frac{a^2}{4} = \frac{1}{4}a^2 \Rightarrow L = \left\{\frac{1}{4}a^2\right\} \end{aligned}$$

مساوت کړی شي چې د حل متحوله په مخرج کې هم ولري. داسې مساوات کسري مساوات بلل کيږي. کيدی شي دا زيات وخت په کرښيزو مساواتو واړول شي.

بيلګه:

يو کسري مساوات کرښيز مساوات کيږي.

$\frac{2x}{x-1} = 3$

تعريف سټ $D=R\setminus\{1\}$; بدست سټ $G=R$

دواړه خواوې له x-1 سره ضربيږي	$\frac{2x}{x-1} = 3 \quad \mid \cdot (x-1)$
له دواړو لورو 3x کميږي	$\Leftrightarrow 2x = 3x - 3 \quad \mid -3x$
دواړه خواوې په 1- وېشل کيږي	$\Leftrightarrow -x = -3 \quad \mid : (-1)$
	$\Leftrightarrow x = 3$
$\Rightarrow L = \{3\}$ حلسټ ده، ځکه چې $3 \in D$ دی.	

د کرښيزو مساوتو يا – برابرونونو ځانګړي حالتونه:

په زياتو حالتونو کې کرښيز مساوات ټيک يو حل لري، لکه پورته بيلګو چې په ګوته کړل. دا کيدی شي چې کرښيز مساوات يا هيڅ حل ونه لري او يا ناپای ډېر حلونه ولري.

بيلګه:

دا کرښيزمساوات حل نه لري.

$$2x + 3 + x = 4 + 3x \mid -3x$$
$$\Leftrightarrow 2x + x - 3x + 3 = 4 \mid -3$$
$$\Leftrightarrow 3x - 3x = 1$$

له دې لاس ته راځي او برعکس $0x=1$

مساوات حل نه لري له دې لاس ته راځي $L=\{\}$

بيلګه:

دا کرښيز مساوات ناپای زيات حلونه لري

$$
\begin{aligned}
& 4u+2-4(2u-2)+8(0,5u-4)=-22 \quad D=\mathbb{R}, G=\mathbb{R} \\
\Leftrightarrow\ & 4u+2-8u+8+4u-32=-22 \\
\Leftrightarrow\ & 4u-8u+4u+2+8-32=-22 \\
\Leftrightarrow\ & 2+8-32=-22 \\
\Leftrightarrow\ & -22=-22
\end{aligned}
$$

له دې لاس ته راځي L=R مساوات ناپای زيات حلونه لري.

ځکه چې هر $u \in \mathbb{R}$ مو ريښتوني وينا ته بيايي او له دې امله يا له دې سره يو حل دی.

پای يادونه:

د نوو زده کوونکو لپاره مشوره ده چې د مساوات حل لپاره د کوچنيو پلونو يا قدمونو سره مخ ته ولاړ شي. څوک چې زيات په دې کار کې تجربه لري، کيدی شي په همدې يا يوه وخت کې زيات پلونه مخ ته يوسي. دا به په يوه مفصله بيلګه کې وښوول شي.

مفصله بيلګه په لنډه توګه:

$$
\begin{aligned}
& 5(3x+10)-(5+4x)(5-4x)-(2x+3)(8x-2)+20 = (x+1)^2-x^2-2x \\
\Leftrightarrow\ & 15x+50-\left[25-16x^2\right]-\left[16x^2+20x-6\right]+20 = x^2+2x+1-x^2-2x \\
\Leftrightarrow\ & 15x+70-25+\cancel{16x^2}-\cancel{16x^2}-20x+6 = 1 \\
\Leftrightarrow\ & -5x+51 = 1 \mid -51 \\
\Leftrightarrow\ & -5x = -50 \mid :(-5) \\
\Leftrightarrow\ & x = 10 \Rightarrow L=\{10\}
\end{aligned}
$$

۹ . ۱ - کرښيز برابرونونه يا - مساوات شي پوښتنو ته

کرښيز مساوات شيپوښتنو متن- ته

شي پوښتنې څه شی دی؟

د ورځني ژوند څخه د زياتو پرابلمونو راوړنه يا منځ ته رااچونه همداسي د مختلفو پوهنو(علومو) دسپيلين څخه په شميرپوهنيزو يا رياضيکي مساواتو سره نه دي ورکړ شوي، بلکه د داسي شي حالت د پرابلمونو د تشريح له لارې ورکړل کيږي. دا پرابلم شميرپوهنيز کيږي. د دي لپاره کره قوا نين نه شته. د داسي پوښتنو حل تمرين غواړي او لږ بخت. دلته - د دي لپاره چي تيکه پيل وميندل شي – د سمانديز فکر وړاندنيونه ده. په عمل کي زيات وخت داسي دی، چي پرابلم ليکنه په شميرپوهنيز ډول يو بل سره ورته دي او له دي امله دا ليکنه اړونده مساوات زيات اسا نه وي.

لاندې پلونه يا قدمونه د شي پوښتنو لپاره اخلو:

لومړی: متن په غور ولولئ، که ممکن وي يو جدول جمتو کړئ.

دويم: د غوښتونې لويې لپاره يوه متحوله کيږدئ.

دريم: يو مساوات وليکئ، چي شي حا لت تشريح کوي.

څلورم: د اړونده متحولې سره مساوات حل کړئ.

پنځم: حل د اينوونې له لارې و ازمايئ.

شپږم: يوه په وينا تکيه يا ولاړ ځواب وليکئ.

په دې مخ شي پوښتنې چي متن پوښتنې هم بلل کيږي تر څيړنې لاندې نيول کيږي، چي رياضيکي والی يې کرښيزو مساواتو ته لارښودوي يا بيايي.

بیلګه۱: ګڼ يا عدد غواړو پيدا کړو.

د يوه ګڼ لسبرابره چي ۱۰ ترې کم شي د عدد شپږواره کيږي د ۲ پر ورزيات سره.

دا عدد څه بلل کيږي يا کوم دی؟

اينوونه يا پيل:

غوښتونی عدد x دی، د دې لس برابره 10x د ی.

په ۱۰ ترې کم په دې معنا چي ۱۰ ترې تفريقيږي يا کميږي.

دا د دې ښوښتوني ګڼ x شپږ برابره کيږي يعني x 6، چي دوه پرې زيات په دې معنا چي ۲ ور جمعه کيږي يا ورزياتيږي

د دې پيل سره برابرون داسې ليکل کيږي

$$10x - 10 = 6x + 2 \mid -6x$$
$$\Leftrightarrow 4x - 10 = 2 \mid +10$$
$$\Leftrightarrow 4x = 12 \mid :4$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow L = \{3\}$$

ازمايښت:

$$10 \cdot 3 - 10 = 6 \cdot 3 + 2$$
$$\Leftrightarrow 30 - 10 = 18 + 2$$
$$\Leftrightarrow 20 = 20 \;(w)$$

په سم اند کي مووليدل، چي: که w وي، نو د ربښتيا په مانا او کهf وي،نود ناربښتيا په مانا دي.

ځواب:

غوښتونی عدد 3 دی.

بیلګه ۲ : د پلار او د ځوي دعمر ټاکنه

پلار ۳۸ کاله عمر لري او ځوي ۱۱ کاله.

 څو کاله وروسته به پلار دوه واره دومره عمر ولري لکه د هغه ځوي؟

پیل: د x متحوله د هغو کلونو تعداد دی، تر هغې چې پلار دوه واره دومره عمر ولري لکه د هغه ځوي.

دا دې په پام کې ونیول شي، چې ځوی هم x کلونه زوړ شوی دی.

دا مو لاندې مساوات ته لاربښودوي:

$$
\begin{aligned}
& 38 + x = 2(11 + x) \\
\Leftrightarrow\ & 38 + x = 22 + 2x \\
\Leftrightarrow\ & 22 + 2x = 38 + x \mid -x \\
\Leftrightarrow\ & 22 + x = 38 \mid -22 \\
\Leftrightarrow\ & x = 16 \Rightarrow L = \{16\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \text{Probe:} \\
& 38 + 16 = 2(11 + 16) \\
\Leftrightarrow\ & 54 = 2 \cdot 27 \\
\Leftrightarrow\ & 54 = 54 \ \ (w)
\end{aligned}
$$

ځواب:

له ۱۶ کاله وروسته پلار د ځوي دوه برابره عمر ته رسیږي(پلار ۵۴ کاله او ځوي ۲۷ کاله).

بیلګه۳ : د یوه بایسکل ځغلولو تور یا لار:
یو بایسکلوال په دوه ورځنې یوه بایسکلسیالۍ وځي

په لومړۍ ورځ   1/5 لیکه(لار) او 60 km متره په ورزیات وهي.

دویمه ورځ د فاصلې 1/4 او 50 km په ور زیات وهي.

مګر په دواړو ورځو برابر ډیر کیلومتره لار وهي.

دا بایسکلځغلونکی باید په دواړه ورځو کې څومرخ لار ووهي؟

پيل:

متحوله x د تولې لار لپاره ږدو، چې بايسکلوال يې په دواړه ورځو کې وهي.

له دې مساوات څخه لاس ته راځي:

$$\frac{1}{5}x + 60 = \frac{1}{4}x + 50$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x + 50 = \frac{1}{5}x + 60 \mid -\frac{1}{5}x - 50$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{4}x - \frac{1}{5}x}_{HN=20} = 60 - 50$$
$$\Leftrightarrow \frac{5}{20}x - \frac{4}{20}x = 10$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{20}x = 10 \mid \cdot 20$$
$$\Leftrightarrow x = 200 \Rightarrow L = \{200\}$$

Probe:

$$\frac{1}{5}\cdot 200 + 60 = \frac{1}{4}\cdot 200 + 50$$
$$\Leftrightarrow 40 + 60 = 50 + 50$$
$$\Leftrightarrow 100 = 100 \ (w)$$

ځواب:

بايسکلوال بايد ټوله 200 km لار ووهي.

بيلګه۴ :

د (د شګو) پاشلو موټر توان يا استعداد

درې د پاشلو موټرونو A, B او C په يوه شپه کې 360 km سړک وپاشه، A دوه واره ډير لکه B او C 40 km لږ لکه A.

هر موټر څومره کيلو متره سړک وپاشه؟

پيل يا اينووونه يا ږدو:

درې د پاشلو موټرونو A, B او C په يوه شپه کې 360 km سړک وپاشه:

$A + B + C = 360$

دوه واره دومره لکه

$A = 2B$

C له A څخه 40 kmکمه پاشلی

$C = 2B - 40$ یا $C = A - 40$

له دې امله B د متحولې په څیر ټاکل کیږي او لاندې مساوات لیکل کیږي:

$$
\begin{aligned}
& 2B + B + 2B - 40 = 360 \\
\Leftrightarrow\ & 5B - 40 = 360 \mid +40 \\
\Leftrightarrow\ & 5B = 400 \mid : 5 \\
\Leftrightarrow\ & B = 80 \\
& A = 2B \Leftrightarrow A = 2 \cdot 80 = 160 \\
& C = A - 40 \Leftrightarrow C = 160 - 40 = 120
\end{aligned}
$$

Probe:

$$
\begin{aligned}
& 2 \cdot 80 + 80 + 2 \cdot 80 - 40 = 360 \\
\Leftrightarrow\ & 160 + 80 + 160 - 40 = 360 \\
\Leftrightarrow\ & 360 = 360 \ (w)
\end{aligned}
$$

ځواب:

پاشلې: B = 80 km, A = 160 km, C = 120 km.

د متحولې دنخښو د ټاکلویا انتخاب ته یادونه.

په زیاتو حالتونو کې x یا متحوله نامعلومه ده. سړی کړی شي نورې نخښې هم وټاکي، لکه د بیلګې په توګه B د پورته متحولې لپاره.

بیلګه ۵:

یوه د بایسکل لار 4000m اوږده ده. دا په یوه غونډئ او په یوه پله په یوه ګړه تللې ده. غونډئ 28m اوږده ده او کړه د پول 11 خله اوږده ده. پول څومره اوږد دی؟

پیل:

اووښتونې يا متحوله x پول اوږدوالي ښايي. دا چې د لارې ټول اوږدوالي په پول کچيږي، نو له ۲۸ ځله پول جمعه ۱ ځل پول څخه د لار اوږدوالی جوړ دی.له دې مساوات څخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} & 11x + 28x + x = 4000 \\ \Leftrightarrow \quad & 40x = 4000 \,|: 40 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 100 \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} & 11 \cdot 100 + 28 \cdot 100 + 100 = 4000 \\ \Leftrightarrow \quad & 1100 + 2800 + 100 = 4000 \\ \Leftrightarrow \quad & 4000 = 4000 \quad (w) \end{aligned}$$

ځواب: پول سل متره اوږد دی.

بيلګه ۶ : دوه موټر سره مخامخ کيږي.

دوه د ښوونځي زده کوونکي له همغه يوځای کور څخه ښوونځي ته په موټر کې ځي.

A په ساعت کې 60 km ځي، B بيا 45 km.

B زده کوونکي له حرکت يا له تګ څخه ځومره وروسته به دوی سره يوځای شي، که B پنځه دقيقې له A څخه وروسته حرکت وکړي يا وخوزي؟

اينوونه يا پيل:

په مخامخ ځای کې دواړو زده کوونکو برابره لار وهلې.

$$A: \quad s = v_A \cdot t \qquad B: \quad s = v_B \cdot t_1 + v_B \cdot t \qquad t_1 = 5\,\text{min}$$

زده کوونکی B $t_B = t + t_1$ دقيقې په لار دی.

دا چې وخت په دقيقو پوښتل شوی دی، نو چټکتيا يا سرعت په km/min شميرل کيږي.

$$v_A = 60\frac{km}{h} = \frac{60\frac{km}{h}}{60\frac{min}{h}} = 1\frac{km}{min};\qquad v_B = 45\frac{km}{h} = \frac{45\frac{km}{h}}{60\frac{min}{h}} = \frac{3}{4}\frac{km}{min}$$

مساوات

د زده کوونکي B لپاره باور لري:

$$t_B = t_1 + t = 5min + 15min = 20min$$

ځواب:

د زده کوونکي A موټر 15 دقیقی هغه د B موټر20 دقیقې دی، ځکه چې پنځه دقیقې دمخه يې حرکت کړی دی.

بیلګه: یو اوبنی یا اوبه ساتونی(ابدان) وتون - او ننوتون نل لري

یو اوبنی(ابدان) دوه ننوتوننلونه A او B لري او یو وتون نل C لري.

A ځانله اوبنی په ۹۰ دقیقو کې ډکوي، B ځانله دا په ۶۰ دقیقو کې ډکوي او ځانله د C له لارې دا کیدی شي په ۴۵ دقیقو کې تش شي.

په کوم وخت(ساعتونو) دا اوبنی ډکیږي، که دریواړه نلونه په همغه یو وخت کې په کار لویدلي وي؟

پیل: Aځانله اوبني په ۱ دقیقه کې 1/90 ډکوي.

Bځانله اوبنی په ۱ دقیقه کې 1/60 ډکوي.

Cځانله اوبني په ۱ دقیقه کې 1/45 تشوي.

A + B – C اوبني په ۱ دقيقه کې 1/45 - 1/60 + 1/90 ډکوي.

A + B - C په x دقيقو کې ټول اوبنی ډکوي.

د متحولې x سره مساوات ليکل کيږي:

$$\left(\underbrace{\frac{1}{90}+\frac{1}{60}-\frac{1}{45}}_{HN=180}\right)x = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{180}+\frac{3}{180}-\frac{4}{180}\right)x = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{180}x \quad = 1 \,|\cdot 180$$

$$\Leftrightarrow \quad x \quad = 180 \Rightarrow L = \{180\}$$

ځواب: اوبنی به په درې ساعته کې ډک شي.

بيلګه۸:

دوه موټره(براري او بي ام وې Ferrari اوBMW) په يه يا همغه وخت کې په دويسبورګ او برلين کې حرکت کوي او يو بل ته مخامخ ځي. فراري په منځني ډول 160 km/h ځي، BMW 140 km/h . د دويسبورګ او برلين ترمنځ واټن 600 km دی؟ دا د مخامخ کيدو ځای له دويسبورګ څخه څومره لري دی؟

پيل:

په برابروخت کې د موټرو حرکت دا معنا لري، چې دواړه برابر اوږده په لار دي.

برابر واټن $s_F = v_F$ ضرب t وهي.

د BMW وهمې لار $s_B = v_B$ ضرب t ده.

د دواړو واټنونو سره زياتول يا جمعه کول د دويسبورګ او برلين ترمنځ لريوالی دی.

$$v_F \cdot t + v_B \cdot t = 600$$
$$\Leftrightarrow (v_F + v_B) \cdot t = 600 \,|: (v_F + v_B)$$
$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{600}{(v_P + v_B)}$$
$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{600}{(160+140)} = \frac{600}{300} = 2 \Rightarrow L = \{2\}$$

$$s_F = v_F \cdot t = 160 \cdot 2 = 320$$
$$s_B = v_B \cdot t = 140 \cdot 2 = 280$$
$$\text{Probe:}$$
$$160 \cdot 2 + 140 \cdot 2 = 600$$
$$\Leftrightarrow 320 + 280 = 600$$

ځواب:

له دوه ساعته وروسته دواړه موټرونه سره مخامخ کيږي. فراري 320 km له دويسبورګ لرې او 280 km له برلين لرې پروت دی.

بيلګه۹:

په زيږورځي ميله کې ۴ کلن داريوس، لس کلن لوييز او ۱۴ کلن په يوه کاسه شوکولادو په خوړلو پيلکوي. داريوس ځانله دا کاسه په ۳۶ دقيقو کې تشوي، لويز داپه ۱۸ دقيقو کې تشوي او تيل داپه ۶ دقيقو کې کاسه تشوي.

څومره وخت نيسي که دريواړه يو ځای کاسه تشه کړي؟

پيل:

دريواړه يوځای x دقيقو ته اړتيا لري.

دلته برخې په لاندې توګه وېشلکيږي:

$$\left(\underbrace{\frac{1}{36}\cdot x}_{\text{Darius}} + \underbrace{\frac{1}{18}\cdot x}_{\text{Luise}} + \underbrace{\frac{1}{6}\cdot x}_{\text{Till}}\right) = 1$$

د مساوات کينه لور په ګډمخرج ۳۶ راوړل.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{36}x + \frac{2}{36}x + \frac{6}{36}x\right) = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{9}{36}x = 1 \Big| \cdot \frac{36}{9}$$
$$\Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow L = \{4\}$$

ځواب:

په ۴ دقیقو کې د شوکولادو پودینګ دریواړو خوړلی.

پوښتني شته...........۳۵۹

د کرښيز برابرونونوبله لاریا بل ډول یا له بل کتاب څخه.

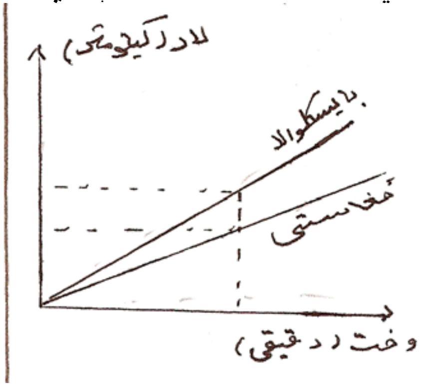
او یا دې پوښتني له دې لاندې برخې څخه راواخستل شي.

۹ . ب ۰ کرښيزبرابرونونه یا خطي-یا لاینیز مساوات د یوې اووښتونې(متحولې، ناپيژندونکی یا مجهولی) سره

پیل بیلګه

یو بایسکل ځغلوونکی او یو پلی له یوه ځایه په همغه وخت خوزي یا حرکت کوي، کوم چې په ګراف کی کښل شوی دی(که د ګراف کښل راته ناشوني شول بخښنه غواړم۰ که بل چا دا کار وکولی شو نو دا به يې هم مرسته وي، خو پرې پوهیدل کومې ستونځې نه لري) بایسکل په ګړی کی ۱۵ کیلومتره ځغلي او پلی ۱۰ کیلو متره

په ګړۍ کي ځغلي. دوي پس له یونیم ساعت سره یوځاي کيږي. هر یو ځومره لار وهي او یو له بل ځومره لرې دي؟



دا موږ دلته، لکه په ځنو کتابونو کی چی د فنکشن د نامه لاندې یادیږي، په همغه نامه نه یادوو خو هدف به همغه وي که دا د برابرون یا مساوات په نامه وبولو .
وخت) په دقیقه (په t ښایو لار) کیلومتر(په s ښایو د لارانځورونی ځخه په ګراف کی ځرګندیږي چی بایسکلځغلوونکی له ۶۰ دقیقو وروسته ۱۵ کیلو متره ځغلیدلي یعني 15km /hاو پلی ۱۰ کیلو متره یعني 10km/h
غواړود هرڅه لمړی وښایو چی هر یو له یونیم ساعت وروسته ځومره لار وهلي او بیا دویمي پوښتني ته ځواب ورکوو.
بایسکل ځغلوونکی به له دوه ساعته وروسته 2.15km = 30 kmځغلیدلی وي او پلی به 2.10km=20kmځغلیدلی وي بایسکل ځغلونکی به له tوخته وروسته t.15km =15.tkmلار وهلي وي. دلته وختt خپلواك اوړیدونی یا نا پژندونکی او لار s بلواك اوړیدونی یا ناپیژندونکی یعني د t په واك کی دی. دا کلیمي به بیا د فنکشن او ځیرونو په برخو کی پوره تر ځیرني لاندې ونیول شي. د بایسکل ځغلوونکي وهلې لار، چی په r یې ښایو برابرون داسی لیکو:

$$S_r = 15.t; t \in Q_0^+$$

د بایسکل ځغلونکی وهلی لار، tچی د بایکلځغلولو وخت دی طبعآ زیاتیز یا مثبت دی ورته دپلي چی په lیي ښایو وهلي لار هم ټاکل کیږي،یعني د l وهلی لار:

$$S_l = 10.t; t \in Q_0^+$$

له دې سره مو وښوول چی دواړه له پیل ټکي له 1,5 ساعته یو له بل ځومره لرې دي.
وهل شوې لار :
د بایسکل ځغلونکي

$$S_r = 15.1,5 = 22,5km$$

د پلي

$S_l = 10.1,5 = 15,0km$

ددې په تعقيب له 1,5 ساعته وروسته دواړه يو له بل 7,5 km لرې دي .

۹ . ۱ لاينيز - يا كربنيز مساوات :

د كربنيز مساوات فرمول د يوې اوښتوني يا مجهولي x سره داسی دی

Ax = a (9. 1)

دلته A , a حقيقي اعداد دي. د (۱ . ۶) برابرون اوبيونه (حل) دا مانا لري چې ټول هغه حقيقي اعداد وښوول شي چی كه په پورته (۱ . ۹) برابرون يا مساوات كې ځای په ځای شي، د مساوات شرايط پوره كړي. د حقيقي اعداد و بنسټيز قانون (۳ – مجه برخه دي وكتل شي) په بنسټ كيدی شي چی د حقيقي عددد مساوات دواړه خواوي په يوه عدد سره ځل يا ضرب كړو. بی له دې چی مساوت زخمي شي. داچی ويش په د $\frac{1}{A}; A \neq 0$ ځل سره برابر دی نو ليكل كيږي

$$x = \frac{a}{A}; A \neq 0; ....(9,2)$$ ....

دا د (۱ . ۹) يواځنی ممكن حل دی٠كه په ښت يا برعكس A = 0 وي، نو دلته دوه حالتونه يو د بل توپيروو

۱ – كه $a \neq 0$ وي: دا مساوات بيا داسی دي $0.x = a; a \neq 0$

دا يو مخامخوالي يا تضاد يا نوره هم ښه په ښتوالی تشكيلوي ، نو په دې حالت كې حقيقي عدد x شته نه دی چی دا(۱ . ۹) مساوات پوره كړي.

۲ - كه a = 0 وي، نو بيا برابرون (۱ . ۹) لاندې شكل نيسي

0.x = 0

دا برابرون بيا د ټولو رييلګڼونو xلپاره پوره (ډك) دی. يا برابرون پوره كوي.

دا بيا داسی هم ليكل كيږي : (په خوښه bel) = xپس دا لاندې باور لري:

برابرون (۱. ۹ .) د $A \neq 0$ لپاره يواځنی تاكلي اوبيونه (۹ .۲) لري A = 0او $a \neq 0$ لپاره اوبيونه نه لري د A = 0 او a = 0 لپاره هر رييلګڼ x اوبيونه يا حل دی.

په دې لاس ته راوړنوکی، د يوې اووښتوني يا مجهولی سره د ربيل برابرونونو د ګڼلو ټوله تيورې خوندي ده .
يو لاينيز برابرون (مساوات) (يو برابرن، چی د برابرونونو په دواړو خواوکی د لاينيزو برابرونونو ترمونو زياتون $a_i + x_i + b_i$ پرت وي) دا مخکني نورمالفورم (۹ . ۱) مو له مخه مخ ته نه دی پروت، پس سړی په دواړو خواو د لاينيزو ترمونو د هدف په لور زياتون (همداسی کمون) له لارې همغه مخکني نورمالفورم ته بيرته راړوي، دا د 2 . II بنستيز قانون له مخی يو ورته فورمبدلون يا بڼه بدلون دی)(د اوبي يا حل ډيری تغير نه دی خوړلی)
د بيلګي په توګه لاندې مساوات ورکړ شوی

$$a_1x - b_1x + c_1 - d_1 = a_2x - b_2x + c_2 - d_2$$

پس کيدی شي چی په دواړو خوا $b_2x + d_1$ ور زيات کړو او $a_2x + c_1$ ترې کم کړو، نو لاس ته راځي

$$a_1x - b_1x - a_2x + b_2x = c_2 - d_2 - c_1 + d_1; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9.3)$$

دلته هغه د x لرونکی غړي د مساوات په کيڼ لور او ثابت د برابرون په ښي لورپراته دي. داسی ليکو

$$A = a_1 - b_1 - a_2 + b_2; a = c_2 - d_2 - c_1 + d_1$$

نو دا برابرون (۳ . ۹) د برابرون (۱ . ۹) سره (ته) کټمټ (ورته) دی، که په لاندې فورم يا بڼه يو مساوات ورکړ شوی وی

$$\frac{a_1}{a_2}x = \frac{b_1}{b_2}$$

(دا تيك هلته موخه ور يا هدفمند دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي) . نو برابرون د x په لور حل کيدلی شي ، که دا په a2 ځل شي او د a1 |=0 په حالت کی په a1 وويشل شي: $x = \frac{a_2b_1}{a_1b_2}$

بيلګه ۹ . ۱ :

برابرون $\frac{a^2x - b^2}{a} - \frac{a(b - ax)}{b} + \frac{b^2}{a}$ هلته موخه ور دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي.

ددې لپاره چې د ماتلاندې څخه ځانونه خلاص کړو، نو پورته ورکړ شوي برابرون د
کېماتلاندې a.b سره ځل کوو:

$$b(a^2x-b^2)-a^2(b-ax)+b^2=a^2b$$

$$a^2bx-b^3-a^2b+a^2x+b^3=a^2b$$

اوس برابرون ترتيبيږي او راټوليږي، xله نوکانو څخه راوځي

$$a^2bx+a^3x=a^2b+b^3+a^2b-b^3$$

$$a^2(ax+b)=2a^2b$$

د $a\neq 0$ له امله کيدی شي په a^2 وويشل شي (a+b)x=2b
دا د لاينيز برابرونونو بنسټيزه بڼه (فورم) (۱ . ۹) ده
که ($a+b\neq 0,(a\neq -b)$) وي ، نو x = 2b /(a + b)
يوګونی يا يواځنی اوبيونه يا حل دی
که(a + b = 0 (a = -b ، نو د $b\neq 0$ له امله اوبيون شته نه ده .
هغه حالت چې ناپاي زياتې اوبيونې يا حلونه منځ ته راځي(د x =په خوښه) ، د
نيونی يا فرضيي له امله چې بايد $b\neq 0$ وي، موجود نه دی.

پام:

په دې هکله زياتې بيلګې کيدی شي راوړل شي، چې ضريب يا ځله وونې په مختلفو توانونو وي۰ زه دلته يواځې دومره يادونه کوم، چې په مساواتو کې، چې اوښتونی يا متحولې ولري، همغهسې شميرل کيږي، لکه په رييلعددونو کې۰

دلته هم بايد دې ته پام وي، چې ماتلاندې صفر نه شي۰ که چيرې اړيينې وې او يا ګرانو لوستونکو يې راوړل وغوښتل، نو زه به بيا دا کار سرته ورسوم او بيلګې به هم راوړم او که چيرې کوم د شميرپوهنې مينه وال په دې هکله د پوښتنو ځوابونه غوښتل، زه به وهڅيږم او دا کار به هم سر ته ورسوم، که لوي ښتن غوښتل۰ زه دومره يادونه کوم، چې په دې هکله زما د شميرپوهنې بنسټيز کتاب کې زياتې بيلګې راوړل شوي، خو نه پوهيږي، چې دا کتاب به چا ته ورسيږي او که نه

بيلګه 9 . ۲ :

برابرون 1= x/a)-((a-x)/2bc)+(a-x)/3c) يواځي
د $a\neq 0,b\neq 0,c\neq 0$ $a\neq 0,b\neq 0,c\neq 0$ لپاره موخه ور دی.
ددې لپاره چې مات لاندې له منځه يوسو، نو مساوات د ا.م.ل. 6abc (اصلي ماتلاندې) سره ځل کوو: 6bcx-3a(a-x)+2ab(a-x) =6abc
وريسی نور، په لاندې ډول، د ځرګندو شميرلارو يا - قاعدو له لارې لاس ته راځي:

$$6bcx-3a^2+3ax+2a^2b-2abx=6abc$$

$(6bc+3a-2ab)x=6abc+3a^2-2a^2b,$
$(6bc+3a-2ab)x=a(6bc+3a-2ab)$
دا بیرته د لاینې مساوات (۹ . ۱) بنستیزه ده، او له دې امله صدق کوي:
د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره $x=a$ د مخ ته پراته مساوات یواځنی حل دی.
د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره د $0x=0$ له امله هر رییل کڼ x اوبیونه ده.
نو لرو $x=a$ د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره د $6bc+3a-2ab=0$ لپاره x په خوښه
دلته د ځیرل شوو برابرونونو، چې په ساده ډول یی لاینیزوالی یا لاینیزتوب پیژندل کیږي، په څنګ کی برابرون شته چې په اصل (پرینځیپ) کی کرښیز یا لاینیز نه دي مګر په لاینیز مساوات یا برابرونونو اړول کیدی شي. دلته ددې غوښتنو په څنګ کی چې د ناپیژندونکو ضریبونو a,b,c ..... لپاره شوي، زیات وخت په x هم شرطونه ایښول کیږي.
ددې لپاره لاندي کی درې ساده بیلګې راوړو:

بیلګه ۹ . ۳ :

برابرون $(8x-9)(3x-4)-(5x-6)^2=(4+x)(3-x)-9$
د لومړي ځل لپاره ځلورى برابرون یا مربع مساوات دی، ځکه چې ځلورى(مربع) غړي لري. د یو له بل ځلولو یا ضربولو وروسته ځلورى غړي له منځه ځي. یو لاینې مساوات د یوې ځانګړې سره سره پاتې کیږي:

$$24x^2-32x-27x+36-(25x^2-60x+36)=12-4x+3x-x^2-9$$

$$-x^2+x=3-x-x^2$$

$$2x=3$$

$$x=3/2$$

بیلګه ۹ . ۴ : برابرون $(2x-a)/(x-b)=1$ یواځې هلته هدفمند دی که حل x دا شرط $x \neq b$ پوره کړي. نو بیا لرو: $2x-a=x-b \Rightarrow x=a-b$
د $x \neq b$ له امله باید باوري وي $a-b \neq b$ له دېامله لرو $a \neq 2b$ پس ورکړ شوی مساوات د $a \neq 2b$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x=a-b$ لري او پرته له دې ($a=2b$ حل نه لري.

بیلګه ۹ . ۵ :
مساوات $(a/x)+(b/x)-(c/x)=1$

يواځي هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نيونو لاندې باور لري- $x = a + b$
. cادا نو د $x \neq 0$ له امله يواځي هلته حل دی، کله
چی $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات يواځي د $a + b \neq c$ لپاره يواځنی ټاکلی
حل $x = a + b - c$ لري، په غير له دې $(a+b=c)$ حل يا اوبيونه نه لري

بيلګه ۹ . ۶ : د لاندې مساوات څيړنه:

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

چی تيك د $abc \neq 0$ لپاره يو هدف لري، بايد د اصلي مات لاندې پيدا کولو لپاره د مات لاندې ك.ک.خ. تکرار شي

$$12150ab^4c^3 = 2^2.3^5.5^3.a.b^4.c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6.3^2.5.a^3.b.c$$

$$5400(abc)^2 = 2^3.3^3.5^2.a^2.b^2.c^2$$

$$................ = 2^6.3^5.5^3.a^3.b.c^3 = 64.243.125.a^3bc^3$$

دا پورته ګڼ اصلي ماتلاندې (ا.م.ل) دی

که برابرون د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي:

$$16a^2(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}) - 225b^3c^2(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}) + 120c.(abcx - \frac{1}{ab^2c}) = 0$$

د نوکانو يو له بل ځلولو راتول، ترتيبونه او ويشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونو يا ضريبونو $(A = 89a^2b^3c^2 \neq 0)$ څخه د نيونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکيري

$x = 1 / a^2b^3c^2, \ abc \neq 0$

د دې وظيفي لپاره د حل نور امکانات نه شته.
تر اوسه مو هغه ماتونه وڅېړل چې مات لاندې يي له ځلونو جوړ وو، غواړو چې اوس
داسې ماتونه وڅېړو چي مات لاندې يي له زياتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې
په ځلوونو ټوټه کيدلي يا تجزيه کيدلی شي .

بيلګه ۹ . ۷ :
برابرون

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2}+\frac{b}{a^2b+b}=\frac{a^2bx}{a^2bx-b}+\frac{b^2(2ax-3)}{a^4x^2x^2-b^2}-1$$

ټيك د دې نيونو سره صدق کوي $ab \neq 0$, $1/a^2$ $\neq$ $|x|$. :
اصلي مات لاندې) ا م ل (په لاندې ډول پيداکوو

$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 -1)$

$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$

$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$

$a^2bx - b = b. (a^2x-1)$

$b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a4x^2 - 1 =$

اصلي ماتلاندی)ا م ل
د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو) چي يو يا څو غړی د نوکانو
دباندې او نور په نوکانو کی بنديږي(، لنډونو او ځلوونو له لارې لاس ته راځي

$.....a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1)$

$2a^2bx-a^2+a^2b^2x-b^2=a^4b^2x^2+a^2b^2x+2ab^2x-3b^2-a^4b^2x^2-b^2$

$..............2a^2bx-2ab^2x=a^2-b^2$

$..................2ab(a-b)x=(a+b)(a-b)$

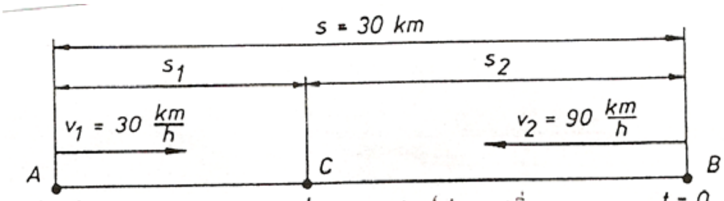
$$....................................x=\frac{a+b}{2ab}$$

د b ≠ a او $ab \neq 0$ لپاره(دا د نیونو له لاري تل پوره دی)که a = b وي،
نو x د $0.x = 0$ له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بی له هغو چی په بنسټیزو
نیونو کی له نیونو د باندې ساتل شوي وي) یعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي(.
په دې حالت کی د x مطلقه ارزښت د کښونو a = b د په څټ ارزښت سره نه شي
مساوي کیدی .د x لپاره نیول شوې نیونی د حل ورکولو کی باید په پام کی نیول
شوي وي دا په دې مانا چي باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq \frac{a+b}{2ab}$$

بیلګه ۹ . ۸ :

دوه ګاډې تمځایونه Aاو B یو له بل km30 لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په
ساعت کی د دیرش کیلومتره 30km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکتیا باندې د B په
لور خوزیږي. د Bڅخه یو تیز ګاډی D د 90km/h ثابت سرعت سره دA په
لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره
مخامخ شي؟دلته دري فزیکي لویي یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په
سومبولونو s , t او vسره وښول شي. ددې شي ځاننیوني لپاره څیره څېره وکاږی



څیره ۱۰۷

پوښتنه » چیرته « د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A
څخه و C ته لریوالي(د بار کاډي لار s1) یا د Bلریوالي وC څخه(د تیزګاډي D
لار s2) سره وشمیرل شي. پوښتنه »کله« د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه
ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو.
دلته دري اوړیدوني یا مجهولی مخ ته لرو s2 , s1 او t .
د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باورې ارزښتونو ماروني یا استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\,t \quad , s_2 = 90\,t \quad , s_1 + s2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه(واحدونه) پرېښوول کيږي. او پريکړه کوو چی لار په کيلو متر او وخت په ساعت ښايو)!
دا درې مجهولی s1 , s2 او t دی د دې برابرونونو يا مساواتو سره چی حل به يی په همداسی په برخه ١١ کی ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چي د يوې له پيژندلو سملاسي نورې هم شميرل کيدی شي. کيدی شي چی دا مساوات په يوې مجهولی مساواتو بيرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کيدی شي s1 , s2 او t وټاکل شي .

که وليکو x = s1 ، نو د اخري برابرون ځخه لاس ته راځي .s2 = 30 - x دا په لمړنيو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s1 / 30 = s2 / 90 = x / 30 = (30 -x) / 90$$

نو لرو

$$x / 30 = (30-x) / 90$$

لاينيز ټاکنبرابرون يا ټاکنبرابرون د x لپاره دی، چی ساده حل کيدی شي:

$$30x = 30 - x , 4x = 30 \quad x = 7,5$$

نو لرو

$$s_1 =7,5 \text{ km} , s_2 = 22 , 5 \text{ km} , t = (7,5 / 30)h= 1h/4 = 15 \text{ min}$$

که وليکوx = s2 ، نو شميرنه لاندې لار غوره کوي يا بهير نيسي:

$$s_1 = 30 - x \ , t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = (30 - x)/ 90$$

$$3(30 - x) = x$$

$$90 = 4x$$

, $x= 22,5$

$$s_2 = 22,5\text{km} , s_1 = 7,5 \text{ km} , t = (22,4/90)h= 1h/4=15 \text{ min}$$

که بالاخره وخت t = x د اووښتوني يا ناپيژندونی په ځير وټاکو، نو بار لري يا صدق کوي: s1 + s2 = 30x + 90 x = 30

$$20x = 30$$

$$x= 30 / 120 = 1/ 4 , t = (1 /4)h = 15 \text{ min}$$

$$s1 = 30t = 30 /4 \text{ km}=7,5\text{km}$$

$$s2 = 90 t = 22,5 \text{ km}$$

دواړه ګاډي له ټکی A ځخه د 0,25 h= 15 min حرکت وروسته په 7 , 5 km لريوالی يو بل سره مخامخ کيږي

بیلګه ۶ . ۵ : مساوات $(a/x)+(b/x)-(c/x)=1$

یواځې هلته هدفمند دی چې $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري $x=a+b-c$. دا نو د $x \neq 0$ له امله یواځې هلته حل دی، کله چې $a+b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځې د $a+b \neq c$ لپاره یواځنی تاکلی حل $x=a+b-c$ لري، په غیر له دې $(a+b=c)$ حل نه لري.

بیلګه ۶ . ۶ : د لاندې مساوات څیړنه

$$\frac{b^3c^2x-\frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3}-\frac{a^2x-\frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc}+\frac{abcx-\frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2}=0,$$

چې تیك د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ك.ګ.ځ. تکرار شي.

$121500ab^4c^3 = 2^2 . 3^5 . 5^3 .a . b^4 .c^3$

$2880a^3bc = 2^6 . 3^2 . 5 . a^3 . b . c$

$5400\ a^2b^2c^2 = 2^3 . 3^3 . 5^2 . a^2b^2c^2$

اصلي ماتلاندې لنډ «ا م ل» $= 2^6 . 3^5 . 5^3 . a^3b.c^3 = 64.243.124.a^3bc^3$

که مساوات د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي

$$16a^2\cdot\left(b^3c^2x-\frac{1}{a^2}\right)-225b^3c^2\cdot\left(a^2x-\frac{1}{b^3c^2}\right)+120ab^2c\cdot\left(abcx-\frac{1}{ab^2c}\right)=0.$$

د نوکانو یو له بل څلولو راټول، ترتیبونه او ویشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونویا ضریبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2 \quad , \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفې لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چې مات لاندې یې له څلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅیړو چې مات لاندې یې له زیاتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې په څلونو توټه کیدلي یا تجزیه کیدلی شي.

بیلګه ۶ . ۷ : مساوات

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2}+\frac{b}{a^2bx+b}=\frac{a^2bx}{a^2bx-b}+\frac{b^2(2ax-3)}{a^4b^2x^2-b^2}-1$$

ټیك د دې نیونو سره صدق کوي: $ab \neq 0$, $|x| \neq 1 / a^2$.

اصلي مات لاندې(ا م ل) په لاندې ډول پیداکوو:

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$
$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$
$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$
$$a^2bx - b = b. \qquad (a^2x-1)$$

اصلي ماتلاندی(ا م ل) $= b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a^4x^2 - 1)$

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو (چې یو یا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کې بندیږي) ، لنډونو او څلوونو له لارې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned}
a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) &= a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1)\\
2a^2bx-a^2+a^2b^2x-b^2 &= a^4b^2x^2+a^2b^2x+2ab^2x-3b^2-a^4b^2x^2+b^2\\
2a^2bx-2ab^2x &= a^2-b^2\\
2ab(a-b)x &= (a+b)(a-b)\\
x &= \frac{a+b}{2ab}
\end{aligned}$$

د $a \neq b$ او $ab \neq 0$ لپاره (دا د نيونو له لارې تل پوره دی)

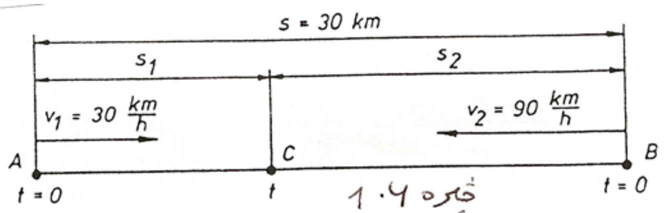
که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$ له امله په خوښه ارزښتونه نيولی شي، بې له هغو چې په بنسټيزو نيونو کې له نيونو د باندې ساتل شوي وي(يعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي). په دې حالت کی د x مطلقه ارزښت د کنونو $a = b$ د په ځتې ارزښت سره نه شي مساوي کيدی.

د x لپاره نيول شوې نيونې د حل ورکولو کې بايد په پام کې نيول شوي وي؛دا په دې مانا چي بايد تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq (a+b) / 2ab$$

بيلګه ۶ . ۸ : دوه ګاډي تمځايونه A او B يو له بل 30 km لرې دي. د A ځخه يو بارګاډی په ساعت کی د ديرش کيلومتره 30 km/h په يوه ثابت سرعت يا چټکی باندې د B په لور حرکت کوي. دB ځخه يو تيز ګاډی D د 90km / h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به يو بل سره مخامخ شي؟

دلته درې فزيکي لويي يو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو t , s او v سره وښول شي. ددې شي ځانتيوني لپاره ځيره ۶ . ۱ ورکړ شوې.



څېره ۱۰۶

پوښتنه « چیرته » د دواړو ګاډو د یوځایوالی تکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي(د بار کاډي لار s_1) یا د B لریوالي و C څخه (د تیزګاډي D لار s_2) سره وشمیرل شي.

پوښتنه «کله» د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو.

دلته درې مجهولی مخ ته لرو s_2 , s_1 او t . د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باوري ارزښتونو استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\,t \;, s_2 = 90\,t \;, s_1 + s_2 = 30$$

(دلته د اندازی یوتونه پریښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو !)

دا درې مجهولی s_2 , s_1 او t دی د درې مساواتو سره چی حل به یی په ۶ الف او یا همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چي د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چی دا مساوات په یوې مجهولی مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کیدی شي s_2 , s_1 او t وټاکل شي. که ولیکو $s_1 = x$ ، نو د اخري مساوات څخه لاس ته راځي $s_2 = 30 - x$. دا په لمړنیو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نو لرو

$$x / 30 = (30-x) / 90$$

لاینی ټاکنمساوات د x لپاره دي، چې ساده حل کیدی شي:

$$30x = 30 - x\ ,\ 4x = 30$$

$$x = 7{,}5$$

نو باور لري:

$$s_1 = 7{,}5\ \text{km},\quad s_2 = 22{,}5\ \text{km},\quad t = \frac{7{,}5}{30}\text{h} = \frac{1}{4}\text{h} = 15\,\text{min}.$$

که s2=x کیږدو،نو شمیرنه په لانې ډول ځغلي یا لاندې لار غوره کوي:

$$s_1 = 30 - x,\quad t = \frac{s_1}{30} = \frac{s_2}{90} = \frac{30-x}{30} = \frac{x}{90}\ ,$$

$$3\,(30 - x) = x,$$
$$90 = 4x,$$
$$x = 22{,}5,$$

$$s_2 = 22{,}5\ \text{km},\ s_1 = 7{,}5\ \text{km},\quad t = \frac{22{,}5}{90}\ \text{h} = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15\,\text{min}.$$

که بالاخره وخت د نامعلومې په څیر وټاکل شي، یعنې x=t ، نو باور لري:

$$s_1 + s_2 = 30x + 90x = 30,$$
$$20\,x = 30,$$
$$x = \frac{30}{120} = \frac{1}{4},\quad t = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15\ \text{min}.$$
$$s_1 = 30\,t = \frac{30}{4}\ \text{km} = 7{,}5\ \text{km},$$
$$s_2 = 90\,t = 22{,}5\ \text{km}.$$

دواړه ګاډي له ټکي A څخه د 0,25h=15minخوزښت(حرکت) وروسته په 17,5kmکې یو بل سره مخامخ کیږي.

٩ . ٢ تمرینونه

١ . ناکرښیز یا نالاینیز مساوات د یوې مجهولې سره

لاندې مساوات حل کړئ aاو b نتیجه يې د ازمايئ! د مجهولو ضريبونو سره
ارزښتونه راوباسئ; چې a او b يې نه شي غوره کولی يا نيولی.
دا ورکړئ چې مساوات د کومو a او b لپاره يواځنی حل لري، حل نه لري
او يا ناپای ډېر حلونه لري.
همداسې تلنه طا رويه د نورو مجهولو ضريبونوسره هم وکړئ، چې په
نورو برخو کې منځ ته راځي.
۱ . ۱ –بې له کسرونو يا ماتونو مساوات حل کړئ.

1.1.1. a) $8\left(\frac{1}{2}x-1\right)-2(x-1)=0$

b) $(3-x)(x+4)-9=(3x-4)(8x-9)-(5x-6)^2$

c) $2a(x+3)=(3+x)(5+2a)$

d) $3a-(7b+11a)-(3x-12b-9c)=(3x-8a)+5b-(3c-6x)$

1.1.2. a) $(a-x)(x+c)=2c(a-x)-(b-x)(c-x)$

b) $a(x+1)(ax+b)+b(a+bx)(1-x)=x^2(a-b)(a+b)$

c) $(x+a)(a-x)-b(b-a)=(x+a)(b-x)$

d) $a^2(x-a)+ab^2=b^2(x+b)-a^2b$

۱ . ۲ – کسري مساوات په مخرج کې د ټاکلو ضريبونو او فاکتورونو سره .

1.2.1. a) $\frac{3x-16}{3}+\frac{2x-10}{5}=3-\frac{x+1}{15}$ b) $4-\frac{10-3x}{5}=3-\frac{10-7x}{10}+\frac{x}{2}$

c) $\frac{2x+1}{2}+\frac{3x+1}{4}+\frac{5x+1}{8}=1-\frac{7x+1}{8}$ d) $\frac{4x+1}{3}+\frac{6x-1}{2}=5+5\cdot\frac{8x-10}{9}$

1.2.2. a) $\frac{4x-3}{20}-\frac{1}{12}(4x-5)=1-\frac{3}{5}(2x+11)$

b) $3(6\frac{1}{2}+x)-\frac{7}{3}(2x-\frac{19}{2})-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}=0$

c) $\frac{7x-16}{3}-\frac{4}{5}(x+1)+6=\frac{3x}{2}$ d) $\frac{3x}{4}-\frac{4}{3}(x-4)=3$

1.2.3. a) $\frac{3x-7}{5}-\frac{7-4x}{7}=\frac{5x-11}{10}-\frac{19-10x}{14}$

b) $\frac{17+4x}{10}-\frac{7+x}{5}=\frac{7x+13}{25}-\frac{5+x}{20}$

c) $\frac{2x-11}{15}-\frac{x}{5}+\frac{59}{40}=\frac{8x-59}{30}-\frac{16x-145}{24}$

d) $\frac{4x+4}{5}-\frac{5x-4}{55}=\frac{2x+9}{4}-\frac{12x-3}{44}$

1.2.4. a) $\frac{5x+17}{3}-\left(\frac{3x+8}{2}-3\right)=\frac{3x+12}{2}-\left(\frac{x+4}{6}+3\right)$

b) $2-\left(\frac{3x+8}{4}-\frac{2x+2}{3}\right)=1-\left(\frac{7x+20}{8}-\frac{2x-7}{3}\right)$

c) $\frac{4-x}{2}-\left(\frac{8-x}{3}-\frac{x+2}{4}\right)+\left(\frac{8-x}{6}-\frac{3(2+x)}{8}\right)+x=1$

d) $\frac{10-14x}{8x}-\left(\frac{6}{5}+\frac{4}{2x}\right)=\frac{5}{8x}-\left(\frac{12}{5}+\frac{14x+1}{10x}\right)$

۱ . ۳ – کسري – یا ماتمساوات، چې په مخرج کې یې نا ټاکلي ضریبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

1.3.1. a) $\frac{ax-1}{bcx}+\frac{bx-1}{acx}+\frac{cx-1}{abx}=0$ b) $\frac{ax-b}{bcx}+\frac{bx-c}{acx}+\frac{cx-a}{abx}=0$

c) $\frac{3(x-b)}{a}-\frac{2(x-a)}{b}-1=0$ d) $\frac{a-b^2}{x}-\frac{c-b^2}{x}-b=0$

1.3.2. a) $\frac{bx-a}{a}+b=bx-1$ b) $\frac{x-a}{a}-a=\frac{x-b}{b}-b$

c) $\frac{a+b}{x}-a=ab-\frac{a-b}{x}$ d) $\frac{ax^2-bx+1}{a}=\frac{bx^2-ax+1}{b}$

1.3.3. a) $\frac{bx-a^2}{a}+\frac{ax-b^2}{b}=\frac{b-ab}{a}+\frac{a-ab}{b}$

b) $\frac{20a-x}{5a}+\frac{6b-cx}{2b}=10-\frac{9c-ax}{3c}$

c) $\frac{a^3}{b}(x-1)-\frac{b+c}{b}(1-2x)=b^2(1-x)+\frac{b+c}{b}$

d) $\frac{x(b-a)}{ab}+\frac{b(c-x)}{ac}=\frac{x+b}{a}-\left(\frac{b}{c}+\frac{x}{b}\right)$

۱ . ۴ - کسري – یا ماتمساوات، چې په مخرج کې یې نا ټاکلي ضریبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

1.4.1. a) $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{2(x+2)}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2(x+2)}$ b) $\frac{12x+5}{16x-15}-\frac{16x+1}{15}=\frac{3-2x}{5}-\frac{2x-1}{3}$

c) $\frac{10-2x}{3}+\frac{13+2x}{7}=\frac{14x+26}{2x+21}-\frac{17+8x}{21}$

d) $\frac{2x^n+7x^{n-1}}{9}+\frac{7x^n-44x^{n-1}}{5x-14}=\frac{4x^n+27x^{n-1}}{18}$

1.4.2. a) $\frac{8x+7}{9x^2-4}=\frac{16}{15x-10}$ b) $\frac{24-5x}{6-2x}-5=\frac{34-14x}{9-3x}$

c) $\frac{x+4}{12x+4}-\frac{x-4}{3x+1}=5$ d) $\frac{10x-11}{12x+18}=\frac{3}{2}-\frac{4x+1}{6x-9}$

e) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{3x-6}=\frac{1}{6}$ f) $\frac{8-x}{5-10x}=2-\frac{5}{3-6x}$

g) $\frac{12x}{10x+5}+\frac{6x-10}{2x+1}-\frac{2x+25}{12x+6}+\frac{10x-1}{8x+4}=2$

h) $\frac{3x-2}{5x+10}-10=\frac{2x+1}{3x+6}+\frac{2(1-4x)}{x+2}$ i) $\frac{6x-1}{4x-6}+\frac{10x-7}{6x-9}=11-\frac{14x+1}{8x-12}$

j) $\frac{3x}{2x-\frac{1}{2}}-\frac{16x^2}{3(4x-1)}=\frac{4(1-x)}{3}-\frac{4}{12x-3}$

1.4.3. a) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+4}{x-2}=2\frac{x-38}{x^2-4}$ b) $\frac{12}{x+4}-\frac{x+4}{x-4}+\frac{x^2}{x^2-16}=0$

c) $\frac{5x^2-120}{10-x}+\frac{3x^2+80x}{10+x}=\frac{2x^3+160}{100-x^2}$

d) $\frac{15x+2}{5x-2}+\frac{25x-2}{5x+2}=\frac{200x^2-25x+18}{25x^2-4}$

e) $\frac{16x^2-20x+4}{4x^2-16}=\frac{2x-1}{2x-4}+\frac{3(2x+1)}{2(x+2)}$

f) $\frac{7x^2+8}{2(x^2-1)}=\frac{2(x+1)}{x-1}+\frac{3x-4}{2x+2}$

g) $\frac{16x^2-6x}{2x+1}-\frac{6x}{1-2x}=\frac{32x^3-16x^2+4x+16}{4x^2-1}$

۱ . ۴ . ۴ –

a) $\frac{2x-5}{x-5}+\frac{3x-5}{x-9}=\frac{5x^2-39x+30}{x^2-14x+45}$

b) $\frac{2x-9}{x-12}+\frac{x-6}{x-24}=\frac{3x^2-87x-36}{x^2-36x+288}$

c) $\frac{11x+6}{x^2-3x-54}=\frac{3x-14}{2x-18}-\frac{3(x+2)}{2x+12}$

d) $\frac{7x-15}{3x-6}+\frac{8x-21}{3x-3}+\frac{10x+21}{3x^2-9x+6}=5$

e) $\frac{1}{3x+21}+\frac{1}{3(x-5)}-\frac{x+6}{4(x^2+2x-35)}=0$

f) $\frac{136x^2-4x-266}{48x^2-32x+5}=\frac{14x-19}{4x-1}-\frac{8x+25}{12x-5}$

g) $\frac{8x-3}{6x-4}+\frac{6x-4}{10x-6}=\frac{116x^2+10x-34}{60x^2-76x+24}$

۱ . ۴. ۵ -

a) $\frac{5x-12}{2}=\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)}{x+1}-\frac{7x-10}{2x-10}$ b) $\frac{28}{45-7x}=\frac{5}{x-9}-\frac{9}{x-5}$;

c) $\frac{x+6}{x-2}+\frac{3x-8}{x-4}=\frac{6(x+9)}{x+6}$ d) $\frac{x-13}{x+3}+\frac{8x+45}{x+5}=\frac{9x+7}{x+2}$

۱ . ۵ – کسري مساوات، چې په مخرج یا مات لاندې کې یې ناټکلي ضریبونه او فکتورونه ورکړ شوي وي.

۱ . ۵ . ۱ –

a) $\frac{2a+x}{2a-x}=\frac{a+b}{a-b}$ b) $\frac{a-b}{2c-x}=\frac{a+b}{2c+x}$

c) $\frac{a}{a-2x}-\frac{b}{b-2x}=0$ d) $\frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}}-\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}}=0$

۱ . ۵ . ۲ -

a) $\frac{a}{x+b}-1=1+\frac{b}{x+b}$ b) $a-\frac{ax}{x-1}=\frac{1}{a}-\frac{x}{ax-1}$

c) $a+b+\frac{x}{a+b}=a-b+\frac{x}{a-b}$ d) $\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{x}=\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x}$

e) $\frac{x}{ab}+ab=\frac{1}{a+b}+(a+b)x$ f) $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2x}{ab}$

g) $\frac{a+1}{b}x+\frac{b+1}{a}x+\frac{2ab}{a+b}=a+b+1$

1.5.3. a) $\frac{2(6x^2-11a^2)}{4x^2-9a^2}=5-\frac{4x+a}{2x+3a}$ b) $\frac{a}{1-x}-\frac{b}{x+1}=\frac{(a-b)(ab+1)}{1-x^2}$

c) $\frac{2a}{2-x}-\frac{2b}{x+2}=\frac{4(a^2b+ab^2+a-b)}{4-x^2}$

d) $\frac{b-x}{a+x}+\frac{1-x}{a-x}=\frac{a(1-2x)}{a^2-x^2}$ e) $\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

f) $\frac{2a+ab^2x}{a+ab^2x}-\frac{a^2(3-2bx)}{a^2-a^2b^4x^2}=\frac{b^2(2ax-1)}{a^2-a^2b^4x^2}-\frac{ab^2x}{a-ab^2x}$

۶,۱ – کسرمساوات یا ماتبرابرون له دوه کسرونو سره

a) $\frac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}$ b) $\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{x}}-\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+1}$

c) $\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\frac{1}{a}}{x+\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}$ d) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}=\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}$

۱ . ۷ .   شي تمرینونه

۱ . ۷ ۱ – که د یوه ګڼ څلور څله او ۱۴ زیاتون ۴۰ وي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

۱ ۷ . ۲ – که د یوه ګڼ څلورڅله او ۴ زیاتون ددې ګڼ او ۱۴ زیاتونسره برابر وي ، نو
هغه ګڼ کوم دی ؟

۱ . ۷ . ۳ – د یوه ګڼ څلورمه برخه او پنځه څله ۴۲ ګڼ ورکوي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

۱ . ۷ . ۴ – که د یوه ګڼ څلوربرابره څخه ۲ کم شي او په یوه ګڼ وویشل شي چې ۴
ترې کم شوی او ۱۱ لاس ته ترې راشي، نو دا ګڼ به کوم وي؟

۱ . ۷ . ۵ – د یوه ګڼ پنځه څله او د ۳ زیاتو دوه څله لوي دی لکه د د ې ګڼ دري
څله او ۱ کمون. دا ګڼ کوم دی؟

۱ . ۷ . ۶ – د یوه ګڼ څلورڅله او ۱۴ کمون نیم دومره لوي دی لکه ددې ګڼ دوه څل
او ۸ . دا ګڼ څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۷ – د یوه ګڼ شپږ ځله او د ۵ کمون یا توپیر چې ددې ګڼ په څلور ځله او ۵ زیاتون وویشل شي، ۱ ور کوي. دا ګڼ څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۸ – د یوه مات ماتباندې په ۵ له ماتلاندې کوچنی دی. که ماتباندې په ۲۳ او مات لاندې په ۸ لوي شي، نو د ورکړشوي مات په څټ ارزښت لاس ته ترې راځي. دا ګڼ څه نومیږي.

۱ . ۷ . ۹ – ۲۵ داسې په دوه ګڼونو بیل کړی یا تجزیه یا ټوټه کړی، چې د مربع توپیر یې ۱۲۵ شي.

۱ . ۷ . ۱۰ – د دوه ګڼونو توپیر یا کمون ۶ او مربع یې ۱۸۰ دی . ګڼونه څه نومیږي؟

۱ . ۷ . ۱۱ – دوه ګڼونه داسې تناسب کې دي، یا یو بل ته داسې ځانونه نیسی . که دوم په لمړی وویشل شي، نو ۲ لاس ته راځي او پاتی یې ۷ دي. دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۷ . ۱۲ – د دوه ځاینیونکي ګڼ پروت زیاتون ۱۲ دی. که له دې ګڼ ۱۸ کم شي، نو یو دوه ځاینیونکی ګڼ لاس ته راځي، د همغه ځایګنیونو سره مګر په څټ ترتیب سره.

۱ . ۷ . ۱۳ – یو زدکړی غواړي د یوه ګڼ څخه مربع ریښه د یو په بل کې بندولو پرینځیپ یا اصول له لارې پیدا کړي. دی لمړی یو ګڼ د ریښی په خیر ټاکي، چې مربع یې په ۲۷ کوچنی دی. بیا یوه ریښه ټاکي ، کومه چې دوه له هغه لوي دی چې لمړی ټاکل شوی. ددې ریښې مربع په ۳۳ لوي دی ، هغه ګڼ کوم دی چې مربع ریښه یې غواړو پیدا کړو ؟

۱ . ۷ . ۱۴ – یو د سپورت ملګرو ټولنه له څلورو ډلو جوړه ده. لمړی ډله ۳۷ دملګرو غړي لري، په داسې حال کې چې نورو ډلی 1 / 4 , 1 / 5 په همدې ډول 1 / 2 غړي په بر کې نیسي. د غړو شمیر څومره دی او د هرې ډلی څومره دي

۱ . ۷ . ۱۵ – یو نفر په درې ورځو کې مجلی په داسې شمیر خرڅوي: په لمړی ورځ 1 / 9، دومه ورځ 1 / 6 او په دریمه ورځ 1 / 4 د مجودو لوټوکه .

دی اوس له هغومجلو د نیمایي دوه کمي د ځان سره لري. هغه څومره مجلی د خرخلاو لپاره لرودي؟

۱ . ۷ . ۱۶ – یوه میلمه د یوه زدکوونکی څخه د هغه د عمر پوښتنه وکړه. زدکوونکي په ټوکه ځواب ورکړ« ځما پلار چی درې میاشتی پخوا یی خپله ۵۵ کلنی ولمانځله، ځما د عمر څلورواره څخه 1 / 4 زیات زوړ دی. » زدکوونکی څومره عمر لري؟

۱ . ۷ . ۱۷ – د یوه زدکوونکي پلار څلورنیم ځله زوړ دی لکه د هغه ځوي. دواړه ۲۷ کاله د هغه د یو اویاکلن نیکه څخه ځوان دي، پلار او ځوي څومره زاړه دي؟

۱ . ۷ . ۱۸ – په یوه معما کی یو زدکوونکی د ې بل ته وايي: « که زه لما سره بټوه کی پیسو سره ۵،۲ افغانی ور زیاتي کړم ، زیاتون یی له ۵ سره ځل یا ضرب کړم او له دې ځل څخه ۱۲ کمی کړم او دا لاس ته راغلی کمون یا توپیر په 11 وویشم نو نتیجه یی ۸ افغانی ده. » هغه زدکوونکی په خپله بټوه کی څومره پیسی لري؟

۱ . ۷ . ۱۹ – په یو په بل پسی تړلو مقاومتونو کی لمړی او دوهم یو ډول لوي دي، دریم دوه ځله او څلورم دریځله دومره لوي دي لکه لمړی دوه یاد شوي مقامتونه، ټول مقاومت ۱۰۵۰ (اومیگا) ، په دې پروت شپانونك ۱۱۰ ولټه دی. اوس الف) یوګونی مقاومتونه څومره لوي دي، ب برققوه، برخه مقاومتونه ؟

۱ . ۷.۲۰ – د دوه غبرگ چالان عمومي مقاومت (ماته متأسفانه په افغانسان کی د فزيك مروج نومونه دې معلوم، خو فكر كوم چي په هدف به پوه شو) دی

a) 1000Ω , b) 2000Ω

یو مقاومت 4000Ω دی، هغه بل څومره لوي دی؟

۱ . ۷ . ۲۱ . د دریې غبرك قاومتونو څخه یی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی او دا دریم یی درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت a) 12kΩ, b) 300Ω وي؟

۲۱ . د درې غبرګو مقاومتونو څخه يې دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی او دا دريم يې دربواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت

الف) $12\,k\Omega$

ب) $300\,\Omega$

وي؟

۲۲ . په اوبو کې يو د لرګي منهه بايد څومره لوي وي، چې د لمبيدو استعداد يې ۷۵۰ نيوټونه وي او د لرګي خاص وزن يا کلکوالی (د فرمول څخه معلوميږي چې دا څه شی دی) $4\,\frac{N}{dm^3}$ وي؟

۷ . ۲۳ د سونګموادو ټانك د دوم ماشين لپاره ۴۰ ليتره ګډوډ د سونګ مواد لري.
څومره تيل او څومره بنزين په ټانك کې موجوددي که ګډونه يې وي؟

۷ . ۲۴ د ښار د ښکلا لپاره د ښارمنځ د سرك په اوږدوالي ۸۵ ونې کينول کيږي.
دا چې د مخه خرکې شوي او تل همغه واټن په يوه متر کوچنی شي ، نو په
سرك بيا ۲۰ ونې زياتی کينښنول کيدی شي. د دې هرې ونې واټن وبلی ته
څومره لويي دی؟

۷ . ۲۵ د بايسکلځغلونوکو ډله له سر څخه ۵۰ متره اوږدوالی لري. هغه ۴۵
کيلومتره په ساعت کی سرعت لري، چی په يوه پله چی اوږدوالی يې
متره دی ، څومره وخت ته ضرورت لري، چی له پله پورې لاړ شي.

۷ . ۲۶ واورومنډه کي ، دا وروسته وړونکی د پروسبرکلني وړونکی څخه يوه نيمه
دقيقه وروسته په ځغاسته پيل کوي. د څو کيلو متره وروسته دی کړی
چی لمړني ځغليدونکي څخه مخ ته شي، که د ده منځنی سرعت ۵ متره
ثانيه کی وي او د لمړي ۸ ، ۴ متره په ثانيه کی وي ؟

۷ . ۲۷ د تامنځي د دز سره د سپورت ميله کي ۲۰۰ متره ځغاستی د منډې ډله په
ځغاسته پيل کوي. ځغليدونکی د پيل کرښي څخه لس متره شا ته ولاړدي.
برخه نيوونکی په منډه پيل کوي ، چی د تومانچی د ډز کرد وګوري دو
وخت توپير څومره دی، که غږ رسيدنه په نظر کی ونه نيول شي او د غږ
سرعت ۳۴۰ متره په ثانيه کی وي؟

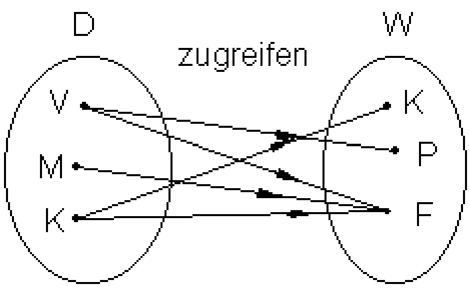
١٠ - اړيکي او فنکشن يا ځيرونه يا تابع

١ . ٠ ١ - د ،،اړيکه،، کلمه يا وى

يوه کورنۍ چې له مور پلار او ځوي څخه جوړه ده د رسختۍ په سفر ځي.

د الوتنې څخه لنډ يوه ستيواردس دپتنوس سره هرې لور ته ځي، چې زاولې k، شوکولادې توتهP او چاکليټ Fپه کې مسافرو ته وړاندې کيږي.

د غشي دياګرام له لارې ښوول کيږي،چې له دې درې کومو خوړو ته څه ته لاس اچوي



پلار P او F ته لاس اچوي، مور K ته لاس اچوي، کوچیK او F را اخلي.

تعريفسډيرىD = Definitionsmenge

ارزښتډيرى W=Wrtemenge

په پورته شکل کې الماني zugreifen په پښتو: راالخستل (پسي تنظيميدل)ا

په دې توګه منظمې جوړې منځ ته راځي، چې يوې اړيکي R ته سره راتوليدى شي.

$$R = \{(V \mid P); (V \mid F); (M \mid F); (K \mid K); (K \mid F)\}$$

اړيکي**Relation** :

یو جوړه سټ، چې د هغې توکي د یوه نظمقانون سره جوړیږي، اړیکې یا ریلیشن بللل کیږي.

که مور، پلار ا ځوي د هر تولید څخه یوه یوه دانه واخلي، نو یوه ځانګړې اړیکه منځ ته راځي،و داسې په نامه د ضرب اړیکې *D x W*.

$$D \times W = \{(V|K);(V|P);(V|F);(M|K);(M|P);(M|F);(K|K);(K|P);(K|F)\}$$

د ضرب سټ یا-ډېرئ *D x W* ټول ممکنه نظمونه په برکې نیسي (هر یو له هر یوه څخه احلې). له دې سره هره برخډېرئ هم یوه اړیکه دهده

ضربډېرئ: ضربسټ *D x W* د ټولو منظمو جوړو ډېرئ یا سټ ده.

(x,y) د $x \in D$ او $y \in W$ | سره .

د پورته بیلګې لپاره باور لري: $R \subset D \times W$ دا په دې مانا، چې اړیکې د ضربست برخسټ یا برخه ډېری د

د اړیکو انځورونه<u>Darstellung von Relationen</u>

سړی کړی شي یو عدد په یوه عددکرښه انځور کړي. د یوه عددونو جوړې لپاره د اعدادو سطحه کارول کیږي. دوه د اعدادوکرښې یو بل غوڅوي او دا په حقیقت کې عمود یا ولاړ او یو د غوټو یا ګنډو جال جوړوي. د دې لپاره اوس نوې کلمې راوړل کیږي.

دا پرته یا افقي د اعدادو کرښه x محور د محور یا د ابسڅیز محور*Abszissenachse* او د y محور یا اوردیناتمحور*Ordinatenachse* بلل کیږي.

د x- او y -محورونو غوڅتکي 0-ضرب یا پیل یا سرچینه بللکیږي. په واحددایره(یوونګردئ) کیدی شي په دواړو محورونو د اعدادوبرخې مختلفې وي.

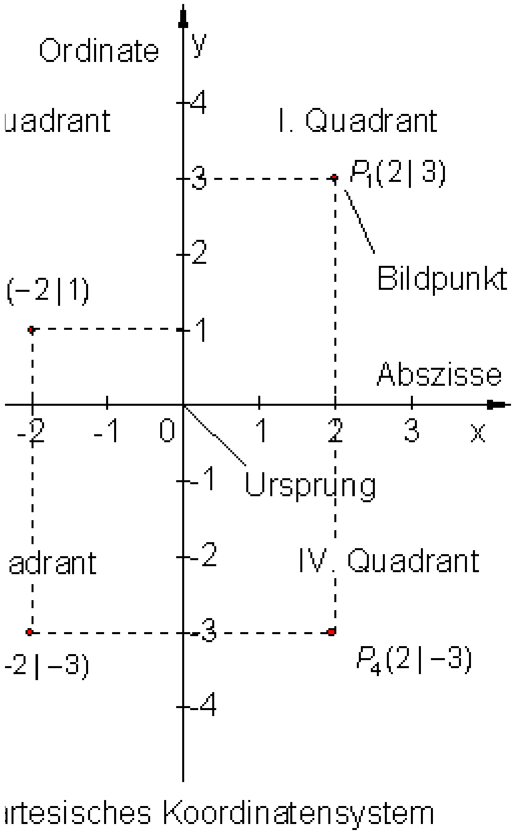
د یوې اعدادو جوړې یا ټولیز د یوې متحولې یا اووښتونې جوړې (x | y) کمپوننتونه کواوردینات با پروت ولاړ محور یا .... بلل کیږي.

له دې سره ابسځیزا (x -محور یا د x – کواوردینات) په لومړي ځای کې قرار لري او اوردینات(y - محور یا y – کواوردینات) د متحولو جوړو په دویم ځای کې پروت دی. هرې د اعدادو جوړې (x | y)پورې یوه ځیره ټکی یا عکسټکی (x | y) اړه لري.

دا لاندې د غوټوجال د فرانسوي شمیرپوه او فیلسوف رنې دسکارتس

Rene Descartesقایمالزاویه(ولاړګوډیز) یا کارتیزي کواوردیناتونوسیستم بلل کیږي.

محورونه کواوردیناتسیستم په څلورو برخو (څلورمو یا ربعو Quadranten) I., II., III.,اوIV وېشي. د کواوردینات له مخنخښې څخه پیژندل کیږي، چې ټکی په کومه څلورمه یا ربع کې پروت دی. ټکی P_1 (2 | 3) په I-مه څلورمه کې ، ټکی P_2 (-2 | 1) په II-مه څلورمه کې پروت دی، ټکی P_3 (-2 | -3) په III –مه څلورمه کې او ټکی P_4 (2 | -3) په IV –مه څلورمه کې پروت دی.



حل:

د منظمو جوړو سټ لپاره

$D = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$
$W = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$
$y = 2x$

دی:

$R = \{(-3|-6); (-2|-4); (-1|-2);$
$(0|0); (1|2); (2|4); (3|6)\}$

ارزښتسټ

$W_R = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$

تعریف سټ

$D_R = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

بیلګه ۱ : لاندې اړیکه ورکړ شوې

$R = \{(x|y) \mid y = 2x\}_{D\times W}$

د $D = \{x \mid -3 \le x \le 3\}_{\mathbb{Z}}$ او

$W = \{y \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{Z}}$ لپاره

غوښتونې:

الف- د منظمو جوړو سټ یا ډېرئ

ب – د اړیکو ارزښتسټ یا ـډېرئ.

پ-د اړیکي تعریفسټ

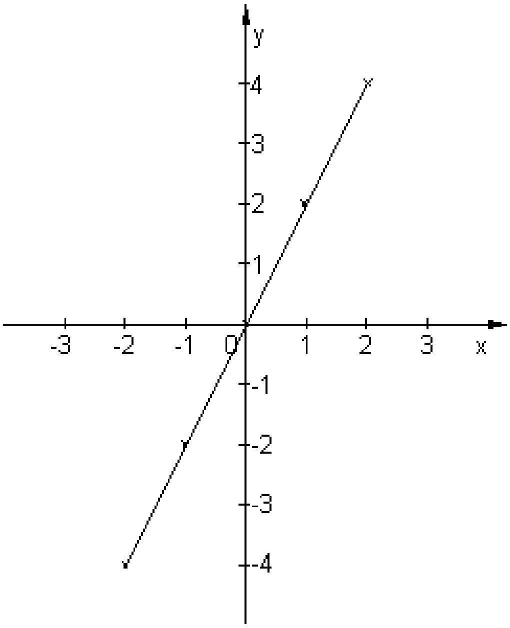
ت- داړیکي ګراف

ټ- د اړیکاف په RxR کي

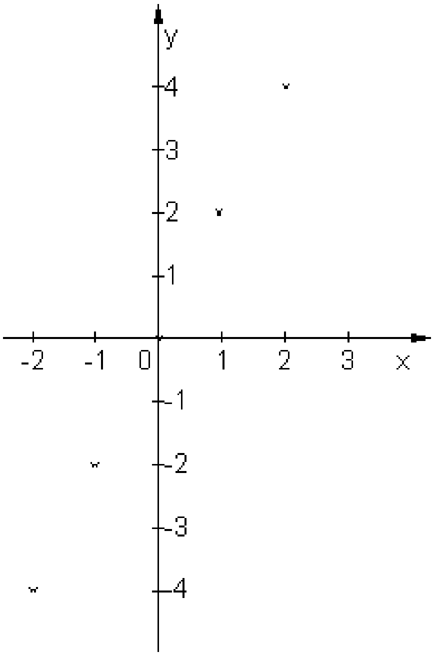
د او $D=\{x \mid -3 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$

او $R=\{\ (x \mid y)\ \big|\ y=2x\ \}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ سره.

ټ-د اړیکو ګراف په IR x IR کې د یوه سراسرې راکښل شوي کرښې څخه جوړ دی.



ت – د اړیکو ګراف فقط له ټکو جوړ دی

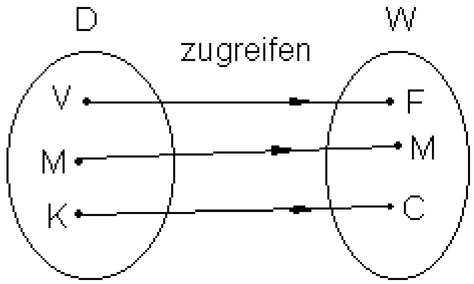


۱۰ . ۲ - د ثیرونې یا تابع – یا بلواک کلمه

Der Funktionsbegriff

نیم ساعت وروسته ستواردس بیرته د یوه پتنوس سره ګرځي او اخبارونه وړاندې کوي.

په پتنوس یو F اخبار یو د مودې اخبار P او د کومیک اخبار C پراته دي.

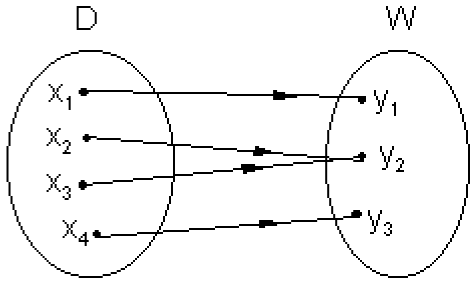


پلار F تر لاسه کوي، مور د مودې اخبار P او ځوي Cتر لاسه کوي.

په دې توکه یویواځنې اړیکه منځ ته راځي.

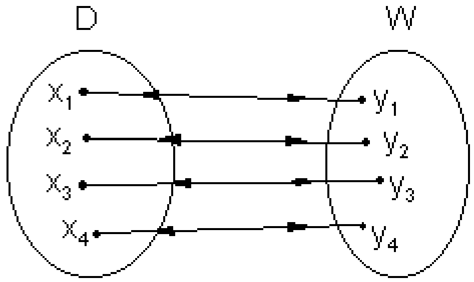
$R = \{ (V \mid F); (M \mid M); (K \mid C) \}$

یواځنۍ اړیکه:



یوه اړیکه یواځنۍ بلل کیږي، که د تعریفورشو هر توکي سره د ارزښتست تیک یو توګی تنظیم شوی وي.

يويو اځنۍ اړيکه:



يوه اړيکه يويواځنۍ بللکيږي، که نظم معکوس يا په ښتکيدونکی هم وي، دا په دې معنا که د D هر توکي د W توکی يو توکی تنظيم وي او په ښتځ له W هر توکی د D د ټيک يوه توکي سره تنظيم وي يعني اړيکي په ښتکيدونکي يا معکوسکيدونکي دي.

تابع:

يو لړترلړه يواځنۍ اړيکه R تابع بللکيږي او په لاندې توګه يې ليکو:

$$R = f = \{(x \mid y) \mid (x_1 \mid y_1); (x_2 \mid y_2); (x_3 \mid y_2); (x_4 \mid y_3)\}_{D \times W}$$

يادونه:

ځيره کوونکی غړی Argument(argument) ، د فنکشن يا بلواك خپلواك اوښتونکی يا خپلواک متحوله

.ځيره کونه، ځيرونه (Abbildung (map,mapping : ځيرونه يوه هندسی کليمه ده، چی يو هندسی څه يا شی په يو بل هندسی څه يا شی باندې ځيره کيږي، کيدی شي، چی د ځيره کوونکي ډيری توکی يا د سټ توکي د يوې بلی ډيری په ټاکلو توکو ځيره شي. کيدی يو توکی څو ځيرې يا کومه ځيره ونه لري او يا يوه ځيره ولري، چی په دې حالت کی بيا دا فنکشن يا بلواك(تابع) هم دی او په دې توګه اوس د ځيرونی الجبري پوهيدنی ته راغلو.

که وليکو f : x -> y نو داسی لوستل کيږي، په فنکشن Function f سره x په y ځيره کيږي. وايو چي y د x ځيره ده.

دا مو ولې تابع بللې؟

دا مو ځکه تابع بللی، چي د y اووښتونی د x تابع ده. یاني د x په واك کي ده، دلته ګورو چی y د x ځیره ده او x خپلواک دی او یا د ځیرې د مخه – یا پخوانی - یا مخکنی اووښتوني ده.

یواځنی - (unique-)eindeutige- داسی ځیرونه کی هر ځیرکوونکی توکی تیك یوه ځیره لری، یانی ځیرکوونکي یی کیدی شي زيات وي د همغی ځیرې سره، لکه ډیر انسانان کړی شي، چی همغه د زیږیدنی نیټه ولري، مګر دا په ځټ یا مخامخ یا معکوس باور نه لري یانی یوه ټاکلی ورځ یواځی د یوه تن د زیږیدنی نیټه یا ورځ نه شي کیدی

-افین(لات. خپلوان)(affine (lat.affinis,eng.affine -

-په باندې(injective) -injektive -:دا هغه ځیرونه (فنکشت یا تابع) ده، چی -د ځیرېدیری هر توکی ځیره وي، یانی د ځیرې په توګه ځاي ونیسی.

په کی - surjektive- surjective- دا هغه ځیرونه ده، چی د ځیره ډیری هر توکی د ځیری په توګه رامنځ ته نه شي یانی داسی توکی هم ولرې چي په ځیرونه یا فنکشن کی ځیره نه وي.

په - bijektive-:که یوه ځیرونه "په باندې" وې او په همدې وخت کی "په کی" نو دا ځیرونه "په" ده یانی injektive + surjektive= bijektive

په = په باندې + په کی

-ورته والي ځیرونه - ځیره کوونه similarity -)Ähnlichkeitsabbildung (transformation. انګریزي یی هم بل څه نه دي او داسی همغه ډول یو شی و بل ځاي ته وړل په داسی توګه، چی باید هرو مرو برابر نه وي.

- یو یواځنی-، یواځنی او یواځنی یواځنی او په ځټ- eineindeutige - یا if and only if. دا ډول ځیرونی یا فنکشنونه، هغه ځیرونی دي، چی د یوې ډیری هرتوکی د بلې

ډېرى يا په ځان يواځى په يوه توكى ښيره كوي او هره ښيره يو ښيره كوونى يانى يوه په ښتې برعكس ښيره لري

په ښتې – (برعكس، يا مخامخ-) (inverse (-invers - : دا ټولې د همغې معنا ويونه(لغات يا كليمي) دي دلته لوريزوالى په پام نيسو په ښتې او مخامخ د لوريزوالي له امله يا همداسي معكوس يا روبرو هم.

۱۰ .۳ - د توابعو انځورونه Darstellungsarten von Funktionen

د ستډوله يا ډېرى ډوله ليكندود: $f = \{(x \mid y) \mid y = f(x)\}_{D \times W}$

تابع د ټولو هغو منظمو جوړو (x | y)ډېرئ يا سټ ده، د كومو لپاره چې تابع مساوات y = f(x) باور لري په بنسټډېرئ D x W كې.

د نظم ليكندود:

$f : x \mapsto f(x)$ د y = f(x) سره په D x W كې.

تابع f د نظم په حيث تعريف ده: x د يوه f(x) سره تنظيميږي د تابعمساوات f(x) = y سره په بنسټښت f(x) = y كې.

په لاندې د سيټ ليكندود غوره ګڼو

بيلګه:

$$f = \{(x \mid y) \mid y = f(x) = 2x + 3\}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$$

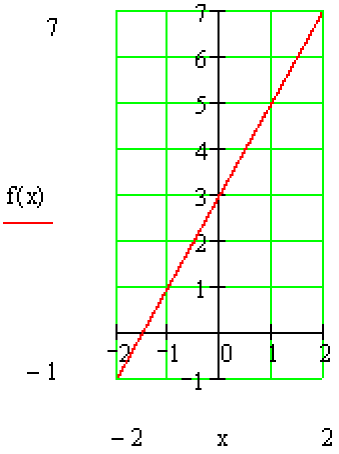
د ارزښتونوو شميرنه

د بيلګي په توګه د x1=-2 لپاره.

$$x_1 = -2 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = 2x_1 + 3$$
$$= f(-2) = 2\cdot(-2) + 3 = -1$$

ارزښتجدول:

x	-2	-1	0	2
$y = f(x)$	-1	1	3	7



۱۰ . ۴ - تابع او معکوس يا په خټ تابع

تولیز:

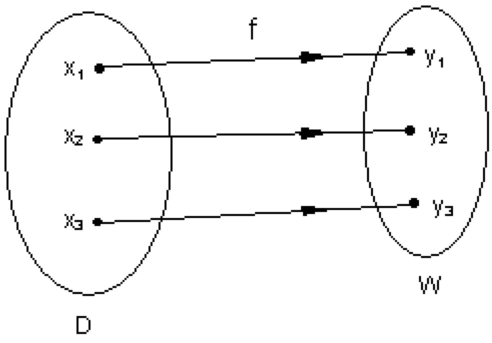
د نظم قانون **f** د تابع مساوات له لارې افاده کيږي، لکه د بيلګي په توګه

$$f = \{(x \mid y) \mid y = f(x) = 2x + 3\}_{D \times W}$$

يا په لنډه بنه:

$$y = f(x) = 2x + 3$$

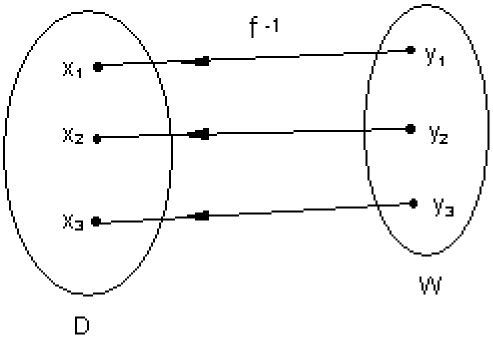
د تابع په يويواځنوالي هم يويواځنی د$\mathbf{f}^{-1}$



نظم هم شتون لري.

دا نظم معکوس یا په ځټ نظم یا
inverse هم بلل کیږي، د بیلګې په توګه

$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$



Die Umkehrfunktion der linearen Funktion

۱۰ .۵ - د کرښیز توابعو معکوس یا په ځټ توابع

تابع

لاندې تابع ورکړ شوی دی

$y = f(x) = 2x + 3$

غوښتنه د معکوس تابع f^{-1}مینډنه او د هغې ګراف دی.

$y = f(x) = 2x + 3$

تابع **f** جګوالی $m = 2$ لري. دا د خپل ګراف سره

ابسخیزا یا پروت محور په ټکي

$P_x (-1,5 \mid 0)$ کې غوځوي او داوردینات محور

یا ولاړ محور په $P_y (0 \mid 3)$ کې غوځوي.

د دې ګراف یوه کرښه ده.

$$x = f(y) \Leftrightarrow x = 2y + 3$$
$$\Leftrightarrow 2y + 3 = x \mid -3$$
$$\Leftrightarrow 2y = x - 3 \mid : 2$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$

معکوس-یا په ځټ تابع:

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$

که د تابع اووښتوني یا متحولې یو له بل سره

بدلي شي او د y پسې په ورته توګه بنه بدلي

شي، نو په داسې توګه سرى معکوس تابع
لاس

ته راړوي.

د معکوس تابع ګراف د تابع د ګراف هندارونه

ده په 45^0-محور باندې.

په توليزه توګه باور لري:

تابع:

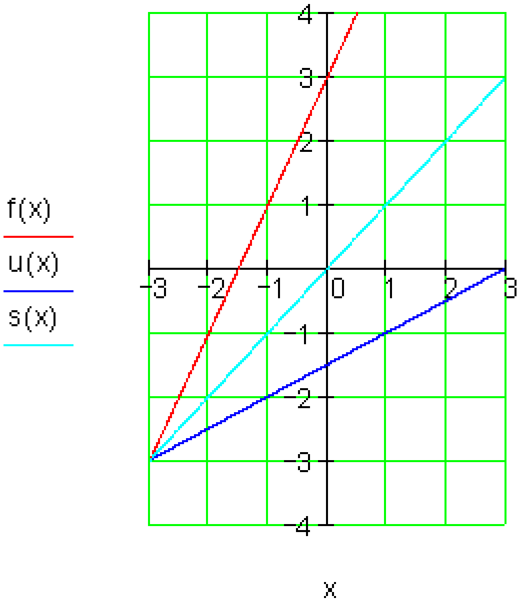
$$y = f(x) = a_1 x + a_0$$

معکوس تابع:

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{a_1} x + \frac{a_0}{a_1}$$

د ساده والي له امله
معکوس

تابع u(x) بولو.



کيدى شي له دې ځايه وروسته په لسم ټولګي کې ريشي.

د مربع(ځلورئ) توابعو معکوس تابع

تلنلار په همغه توګه ده لکه پورته مو په کربښيز مساواتو کې
چې وښووله.

$$y = f(x) = x^2$$

د x او y متحولو بدلونه

$$x = f(y) = y^2 \Leftrightarrow y^2 = x$$

ريښه(جذر) نيونه

$$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \sqrt{x} \quad \text{oder} \quad y = -\sqrt{x}$$

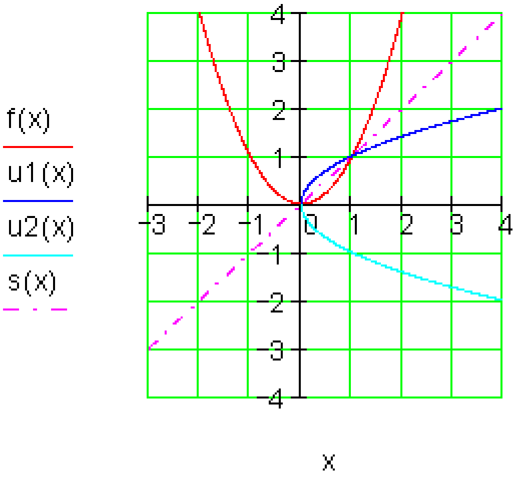
نو دوه معکوس توابع شتون لري:

$$y = u_1(x) = \sqrt{x} \text{ und } y = u_2(x) = -\sqrt{x}$$

د معکوس تابع د جوړولو لپاره د تعريفورشو

محدوده کيږي، د دې لپاره چې يواځنۍ تابع

منځ ته راشي.



.

<u>Die Umkehrfunktion der e- Funktion</u>

د e- تابع معکوس تابع

$y = f(x) = e^x$

د x او y متحولو بدلون

$x = f(y) = e^y \Leftrightarrow e^y = x$

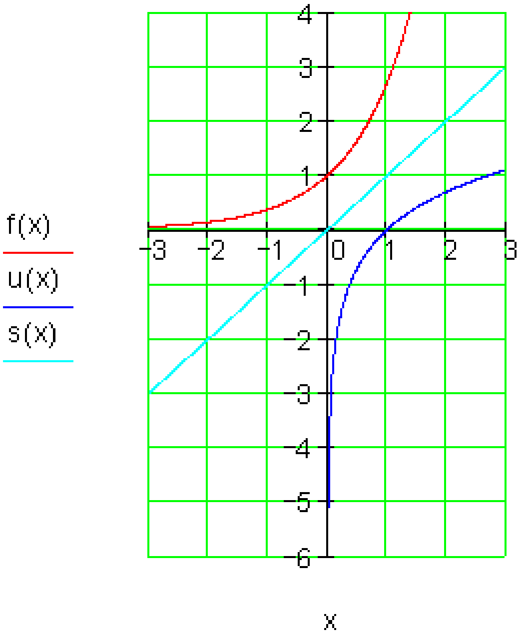
لوګاريمونه

$\Rightarrow \ln\left(e^y\right) = \ln(x)$

$\Leftrightarrow y = \ln(x)$

معکوس تابع

$y = u(x) = \ln(x)$



د معکوس تابع جوړولو سره

تعريف –

ورشو محدوده شوه، ځکه چې

لوګاريتم

فقط د مثبت(زياتيزو) اعدادو

لپاره

تعريف دی.

کيدی شي له دې ځايه وروسته په لسم ټولګي کې راشي

۲ ۰ ٤ ریلیشن یا اړیکې او فنکشن (څیرونه mapping) یا تابع(په خته کې د فنکشن بلواک اووبنتونې ده، خو موږ یې تابع بولو) :

یادونه :

پام دې وي، چې دا هغه ورسره بلد تابع کلمه نه ده، چې وروسته به ورسره بلد شو۰

په دې برخه کې لومړی د ډیری ضرب کلمه پیژنو یا تعریفوو او بیا د ضرب کلمې کارونه څیړو۰

پیژند ۲ ۰ ۹ : د دواړو ډیر M_1 یو او M_2 ډیریضرب(اتیرانضرب) هم ورته وایي، یانې په x سره څلیږي یا ضربیږي

$$M = M_1 x M_2$$

د ټولو تنظیم یا ترتیب شویو توکو

$$x \in M_1, y \in M_2$$

جوړو (x,y) ډیری ده۰

بیلګې

$$M_1 = (a,b\}, M_2 = \{1,2,3\}$$
$$M_1 \times M_2 = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

د جوړو د غوښتل شوي تنظیم له مخې ځل په ډیریو کې کموتاتیو نه دی دا په دې مانا، چې په ټولیزه توګه باور نه لري: $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$

۲ – R دې د ټولو رییلګڼونو ډیری وي· په هندسي مانا د کرښې د ټولو ټکو ډیری· RxR د ټولو رییلګڼونو جوړو ډیری ده، په هندسي مانا د هوارې یا سطحې د ټولو ټکو ډیری ده·

پیژند ۲ ۰ ۱۰ :

ځیرونې یا نظم F لاندې د دوه ډیریو د ضربډیری $M_1 x M_2$ برخډیری پوهیږو·

پس د جوړه تنظیم شوو توکو ډیری، چې له یوه یا ډیرو توکو $x \in M_1$ سره تنظیم $y \in M_2$ یا بهتره په باندې ځیره شي·

داسی هم ویلی شو: د M_1 توکي د M_2 په یوه یا ډیرو توکو تنظیمیږي یا ځیره کیږي·

که $(x.y) \in F \subseteq M_1 \times M_2$ وي، نو x اوریجنل یا اصلي توکی او y ځیره توکی یا پرې تنظیم توکی بلل کیږي·

د ټولو اصلي توکو ډیری پیژندورشو یا تعریفورشو یا پیژندډیری یا تعریفډیری بلل کیږي او د ټولو ځیره یا پرې تنظیم توکو ډیری د ځیرونې پرې تنظیم ډېری، ارزښتورشو یا ارزښتډیری بلل کیږي·

بیلګی

$$M_1 = \{a, b, c, d\}, M_2 = \{1, 2, 3, 4\}$$

د جدول په توگه دM یو توکو څېرونه ونه یا څېره کوونه د M دوه په توکو

څېره توکی   اصلي توکه یا څېره کوونکی توکی

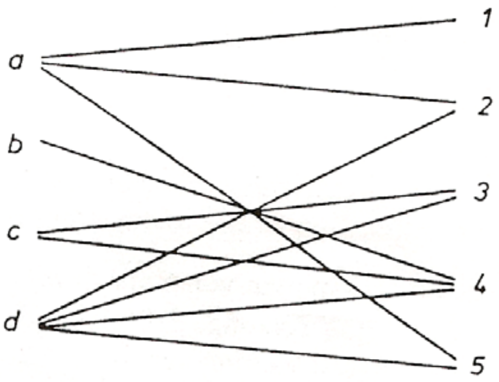
a ------------------------→ 1 , 2 ,5

b ------------------------→ 4

c ------------------------→ 3,4

d ------------------------→ 2,3,4,5

یا دا لاندې:



څېرونه:

F = { (a,1),(a,2),(a,5),(b,4),(c,3),(c,4),(d,2),(d,3),(d,4),(d,5)}

(د M یو او M دوه ډیریو د ټولو توکو جوړو ډیری)

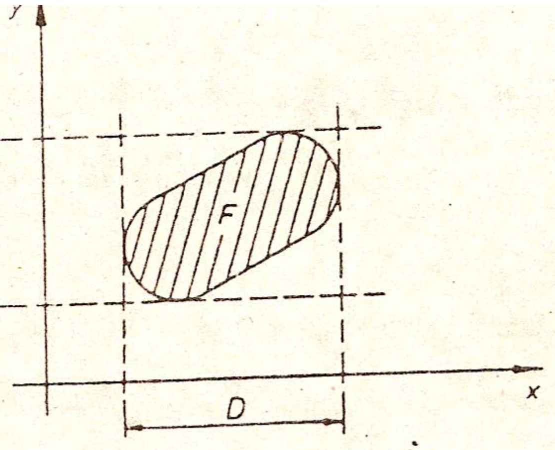


Bild 9.6 ځيره

دريم : هر پيداينتي يا طبيعي ګڼ a د هغه په دوه ځله b=2a باندې ځيره کيږي٠ داسې

پيژند شوې يا تعريف شوې ځيره ونه په لاندې ښه هم انځوريدلی شي٠

$$F = \{(a,b) \mid a \in N, b = 2a\}$$

دلته هم N د پيداينتي يا طبيعي ګڼونو ډيری٠ پيژندډيری يا تعريف- د ټولو پيداينتي ګڼونوډيری ده او ارزښتډيری د ټولو جوړه ګڼونو ډيری ده٠

څلورم : که M يو په يوه ښوونځي کې د ښوونکو ډيری وي او M دوه په ښوونځي کې د ځانګړو ټولګيو ډيری وي نو ښوونکي، چې په ټولګيو کې درس ورکوي دا يوه ځېرونه ده٠ د ښوونکو ډيری د ځانګړو ټولګيو په ډيری کې

موږ د ځېره ونې څلور حالتونه توپيروو:

پيژندونه(دې ته دې ګران لوستونکي ښه پام وکړي):

لکه په لومړۍ بیلګه کې په څیره ونه F کې د1 M ، چې تعریفدیرۍ D سره برابر دۍ او M2 ، چې له څیره ډیرۍ , W سره برابر دۍ ، توکي مو مخ ته پراته دي٠

له یوې څیرونې Fغرېړو د1 M په M2 باندې٠ دلته دې « د » او « په » ته پام وي)

وي دې: $D \subset M_1, W \subset M_2$

لکه په دویمه بیلګه کې ، نو د یوې څیره ونې F غرېړو له M1 په M2 کې (دلته دې

« په » او ,په کې » ته پام ور واړول شي)

وي دې : $D = M_1 \wedge W \subset M_2$

دلته د یوې څیره ونې غرېړو د1 M په M2 کې دلته دې دریمه بیلګه په پام کې راوړل شي٠

وي دې: $D \subset M_1 \wedge W = M_2$

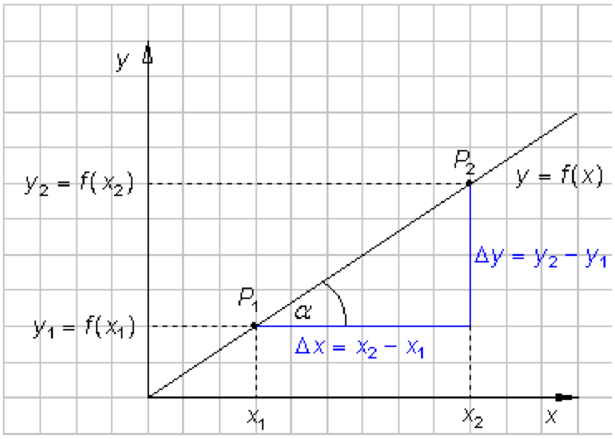
نو د یوې څیره ونې غرېړو له M1 په M2 باندې٠ دلته څلورمه بیلګه د بیلګي په توګه راوړو٠ د دې نیونې لاندې چې ټول ښوونکی ځانګړي ټولګیو ته درس ورکوي٠

یادونه : دا لاندې برخه دې ګران لوستونکي وګوري، خو د دې اوس وخت لپاره لږ ستونځمنه ده او شاید څیرې هم رانه شي، خو که لږ د شمیرپوهنې سره بلد شو، بیا پرې پو هیدل ساده دج٠ زج مخ ته لرم، چې په دې هکله لیکلی کتاب، چې چاپ شوی نه دۍ دلته پر لیکه کړم، چې هلته بیا دا موضوع لږ غزیدلې ده٠

بیلګه ۲ ۰ ۵ : موږ په هواره یا سطحه کې څرګند شوي کږی د ډیریځل RxR په څیر د برابرونونو له لارې رانیسو(R د ریبلګنونو ډیری د ګنګربنې ټکي دي(ګنونه دې وکتل شي))۰

الف) $y = 2x$ یوه څیره ونه ده یا میپینګ دی د R په R باندې ، ځکه چې باور لري

$$D=W=R$$

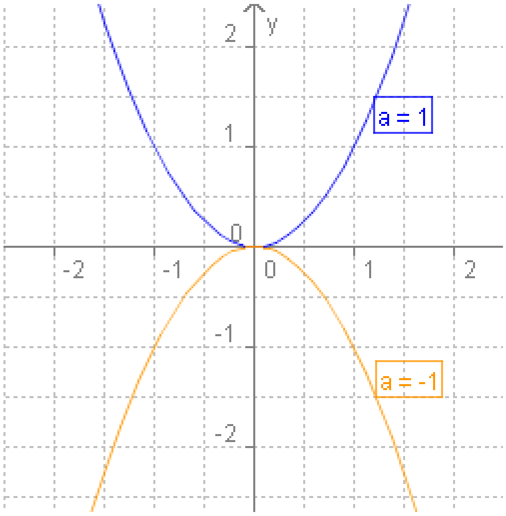


یادونه : په پورته څیره کې برابرون $y = ax+b$ دی.

ب) $y = x^2$

یوه څیره ونه ده د R په R کې ، ځکه چې باور لري

$$D = R\,,\ \ W = [0, \infty]$$



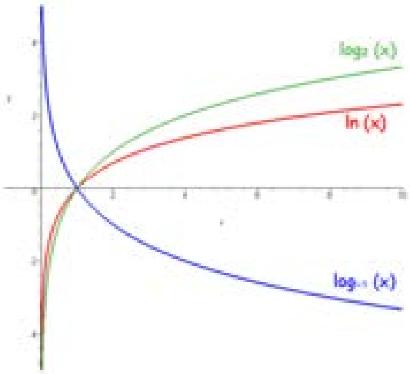
یادونه :

پورته بلواک د $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ډول دی، چې $b = 0 , c = 0$ او $a = 1 , a = -1$ اېښول شوي دي.

پ) $y = \log x$

یوه خیره ونه ده له R په R باندې « ځکه چې باور لري.

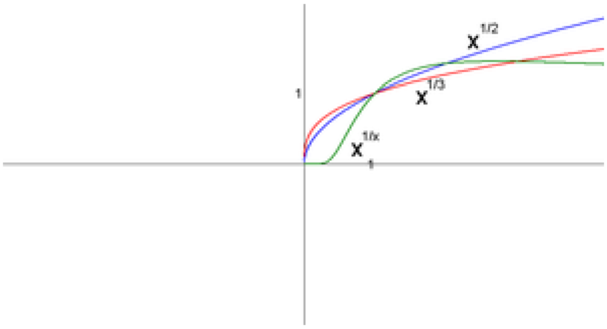
$D = (0, \infty) \wedge W = R$



ت)　　　$y = +\sqrt{x}$

یوه څیرونه ده له R په R ، ځکه چې باور لري

$D = W[0, \infty]$



یادونه : پورته د دویمې ،دریمې او په x -مې ریښې په مانا دی

څیرې له ویکي څخه په مننه راکښته شوي دي٠

پیژند ۲ ٠

یوه څیره ونه E یواځنی بلل کیږي٠ که هر $x \in D$ په تیک یوه $y \in W$

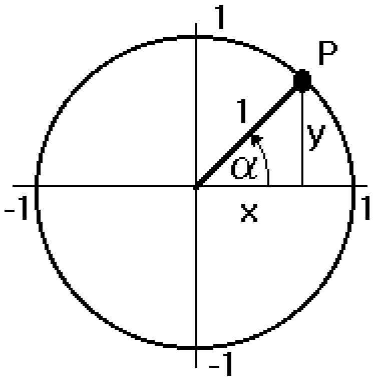
باندې څیره شي٠ دا په دې مانا، چې هر $x \in D$ تیک یووار په $y \in W$

تنظیمدیرئ یا جوړه ډیرئ کې رامنځ ته کیږي٠ یوه یواځنئ څیره ونه فنکشن

یا« بلواک» بلل کیږي او یا لکه تراوسه ورسره بلد یو یوه تابع بلل کیږي٠

پام:

دا دې دلته کره په ګوته شوې وي، چې زه « یوازنئ څیره ونه » بلواک یا فنکشن بولم٠



بیلگه ٢ ٠ ٦

په بیلگه ٢ ٠ ٥ کې له الف تر ت پورې ټولې ځیروني فنکشنونه یا بلواک دی٠ د دې پر ځت لاندې برابرون (یوونگردی یاني گردی، چې وړانگه یې یو یوون یایووالی یا واحد وي ځیره ٠)

انځور شوې ځیره ونه له R په R کې [-1,1]) D=W) فنکشن یا بلواک نه دی ، ځکه چې اصل دوه ځیرې لري یاني که په تنظیمجوړه کې د ځیره ونې لړي پرلپسې(لنډ:لړی) بدله شي، نو یوې پرځت ځیره ونې ته راځو:

پیژند ٢ :

ډیری ده له (x,y) جوړو د ټولو F^{-1} ته پرځښ ځیرونه F ځیره ونې
$(x,y) \in F$ سره ۰

پیژند ۲ ۰

یوه ځیره ونه یویواځنی بلل کیږي، که یواځنیF او F^{-1} یوازنی ځیروه ونې وي، دا په دې مانا، چې که هر $x \in D$ او $y \in W$ ټیک یو ځل په تنظیم کې منځ ته راشي۰

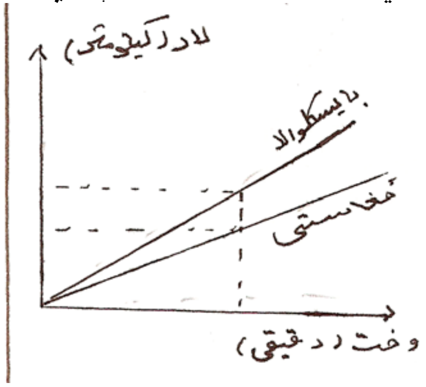
پام :

یادونه : د ځیرونې نوم څخه باید ونه ډار شو دا ځیره ونې ځیرې کوونې (که څوک یو کالی یا رخت ځیرې کوي)او ځیره کوونې توپیر، ځکه سره کیدی شي، چی هغه منځپانګه یې یو له بل توپیر لري۰ موږ پښتو کې نږدې یو ډول لیکونکي ویونه (لغات) لرو، خو دا هغې منځپانګې له مخې توپیریږي۰

۹ ۰ کرښېزبرابرونونه یا خطي-یا لاینیز مساوات د یوې اووښتونې(متحولې، ناپېژندونکی یا مجهولی) سره

پیل بیلګه

یو بایسکل ځغلوونکی او یو پلی له یوه ځایه په همغه وخت خوزي یا حرکت کوي، کوم چې په ګراف کی کښل شوی دی(که د ګراف کښل راته ناشوني شول بخښنه غواړم۰ که بل چا دا کار وکولی شو نو دا به یې هم مرسته وي، خو پرې پوهیدل کومې ستونځې نه لري) بایسکل په ګړۍ کی ۱۵ کیلومتره ځغلي او پلی ۱۰ کیلو متره په ګړۍ کي ځغلي. دوي پس له یونیم ساعت سره یوځاي کیږي. هر یو ځومره لار وهي او یو له بل ځومره لرې دي؟



دا موږ دلته، لکه په ځنو کتابونو کی چی د فنکشن د نامه لاندې یادیږي، په همغه نامه نه یادوو خو هدف به همغه وي که دا د برابرون یا مساوات په نامه وبولو .
وخت) په دقیقه (په t ښایو لار) کیلومتر(په s ښایو د لارانځورونی څخه په ګراف کی ځرګندیږي چی بایسکلځغلوونکی له ۶۰ دقیقو وروسته ۱۵ کیلو متره ځغلیدلي یعني 15km /hاو پلی ۱۰ کیلو متره یعني 10km/h
غواړود هرڅه لمړی وښایو چی هر یو له یونیم ساعت وروسته څومره لار وهلي او بیا دویمي پوښتني ته ځواب ورکوو.
بایسکل ځغلوونکی به له دوه ساعته وروسته 2.15km = 30 kmځغلیدلی وي او پلی به 2.10km=20kmځغلیدلی وي بایسکل ځغلونکی به له tوخته وروسته t.15km =15.tkmلار وهلي وي. دلته وخت t خپلواك اوړیدونی یا نا پژندونکی او لار s بلواك اوړیدونی یا ناپیژندونکی یعني د t په واك کی دی. دا کلیمي به بیا د فنکشن او څیرونو په برخو کی پوره تر څیړني لاندې ونیول شي. د بایسکل ځغلوونکي وهلې لار، چی په r یې ښایو برابرون داسی لیکو:

$$S_r = 15.t; t \in Q_0^+$$

د بایسکل ځغلونکی وهلی لار، tچی د بایکلځغلولو وخت دی طبعاً زیاتیز یا مثبت دی ورته دپلي چی په lیې ښایو وهلي لار هم ټاکل کیږي،یعني د l وهلی لار:

$$S_l = 10.t; t \in Q_0^+$$

له دې سره مو وښوول چی دواړه له پیل ټکي له 1,5 ساعته یو له بل څومره لرې دي.
وهل شوې لار :
د بایسکل ځغلوونکي

$$S_r = 15.1,5 = 22,5km$$

د پلي

$$S_l = 10.1,5 = 15,0km$$

ددې په تعقیب له 1,5 ساعته وروسته دواړه یو له بل 7,5 km لرې دي .

ستيريومتري ((Stereometrie(Körpermessung) :

(د بدن د اندازه کولو پوهه)

بدنکچ یا بدن اندازونه :

په داسی ترڅ کی چی هندسه د هوارې، مستح (هوارو)جوړښتونو او شمیرنو څیړنو سره لاس په ګریوان ده ، ستریومتري د هوايي (فضایي) جوړښتونو، داسی په نامه بدنونو څیړنو ته ځان بخښی . په دې ډول ستریومتري یوه «هوايي(فضاییی) هندسه» یا لکه چی موږ وبلله بدنکچ دی.
یادونه : د هوايي یا فضایي هندسی شکلونو مطلب دادی، چی دلته شکلونه په منظم ډول سور، اوږدوالی او پنډوالی لري٠ کهدا د ځمکی په سر او که د ځمکی لاندې وي، خو د هوايي شکلونو په نامه یی بولو یا موږ دې ته بدنونه وایو، چی ځموږ موخه(هدف) ترې ښه څرګندیدی شي. داسی شیان له پیژندنی څرګندیږي، چی درې اړخونه لري، یعنی په اوږداولی، سور برسیره پنډاولی هم لري).
لکه چی موږ د هوارې په هندسه(هوارکچ) کی د سیخ –یا سیده لاینونو کی ګیر هوارې(ډیرکونجي پولیګون) او کږو لاینونو کی راګیر هوارو (ګردی، ایلیپسی) وپیژندل، نو اوس له بدنونو سره مخامخ کیږو ، کوم چی له مستحه هوارو یا هواریزو هوارو ترمنځ راګیروي (لکه پریزمی او اهرامونه) او داسي چی په ځنو برخو (څیلیندر یا توته ، چی موږ ورسره د استوانی ترنامه بلد یو، کیګل) او یا غونډۍ یا بهتره غونداری، چی د کږو هوارو ترمنځ راګیر وي. لکه چی په هوارو شکلونو او اوږدوالي کی مو د راګیرکوونکو لاینونو(چاپیرونی (–یال)) سره علاقه درلوده، اوس مو علاقه د ټولو راګرځیدونکو هوارو، په نامه هوارپوښونو ،

په پورته کې غودنۍ یا غونډاري نومونو سره مخامخ شو، چې موږ یې تراوسه کره بولو. کره که لهعربې وژباړل شي،نو د پښتو مانا یې غونډوسکه ده. غونډوسکه، غونډاري او یا توپ په همغه مانا دي یعنې کره.

ټولو راګرځیدونکو هوارو زیاتون، دباندې هوارې، او ډکې یا حجومونه، د هوارو متن ټولګی سره ده.
ډکي یا حجمونه په مکعبمتر m^3 په همدې توګه د مکعب متر برخه یا څو واره باندې ورکول کیږي، چې یو په بل اړول یې، لکه چې لاندې ګورو، ساده دي

$$1\ m^3 = 1m.1m.1m = 100cm^3.100cm.100cm = 1\ 000\ 000\ cm^3$$

یعنی :

$$1km^3 = 10^9\ m^3$$

$$1m^3 = 10^6\ cm^3$$

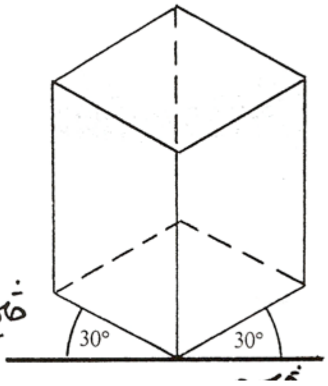
$$1cm^3 = 10^3\ mm^3$$

$$1mm^3 = 10^9\ \mu m^3$$

برسیره پردې په پیچلو شکلونو باندې باید یو لیدونکی یا اوپتیکي نظرلاس ته راوړی شو.

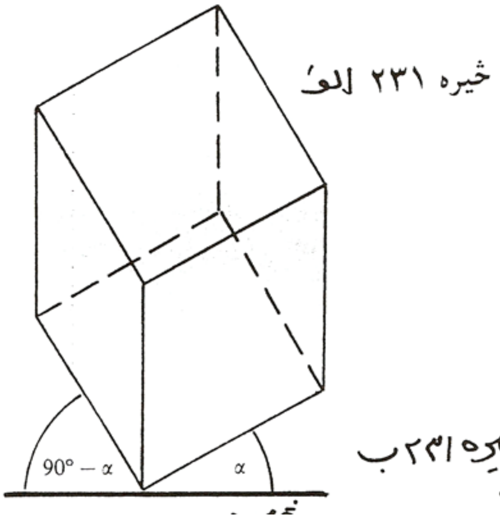
د هندسي بدنونو یا تنونو رسمول

په پرینځیپ کی د بدن درې ډوله ګرافیکي انځورونه موجود ده. دام کی ګیرونه ، مایل انځورونه، او دریتخته ئیز پرویکشن Projektion (دریتیخته ئیز پریوستون).
دا هروې یی مختلفې دندې سر ته رسوي.
د دام ګیرونه اصلاً ددې لپاره په کار راځي، چې د بدن ټوله دباندې هوارې وښولی شي. دا که چیرې راګردي پریکړی شي او سره ونښلول شي، نو د هغه بدن څیره جوړولی شي.



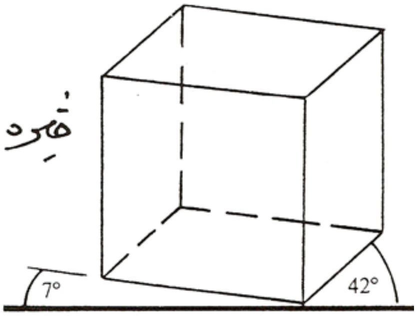
غبرګ لیدنه :

ایزومتري



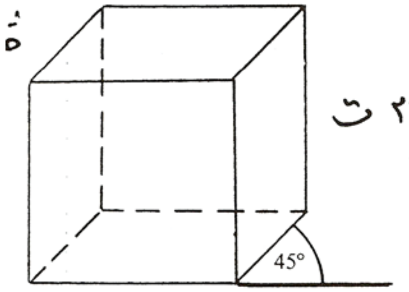
غبرګ لیدنه :

نظامي لیدنه



غبرګ لیدنه :

دیمتري

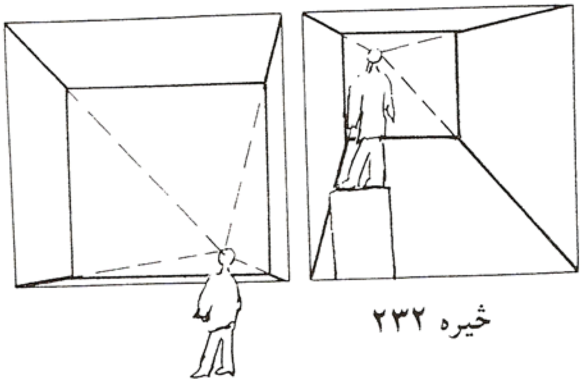


غبرګ لیدنه

د کاوالیرۍ لیدنه:

د استعمال وړ د نظراچولو (د نظر لاندي راوړلو) کښل، مایلځیره کښل دي. دا هوایي پراخیدنه واضح کوي. دلته د کاوالیر پرسپکتیو (مائیل له پورته) او یوه (چینه‌ښی پرسپکتیو (مائیل له ښکته) ترمنځ توپیر کیږي، مګر د دواړو ترمنځ لاندې ګډه قاعده موجود ده: لیدونکي ته جبهیي (فرونتال) ځغلیدونکی لاینونه په

نورمال اوږدوالي، له ليدونكي لرې ځغليدونكي لاينونه مائيل او په لنډ ډول كښل كيږي. لنډونه يې د كونج تر واك ده:

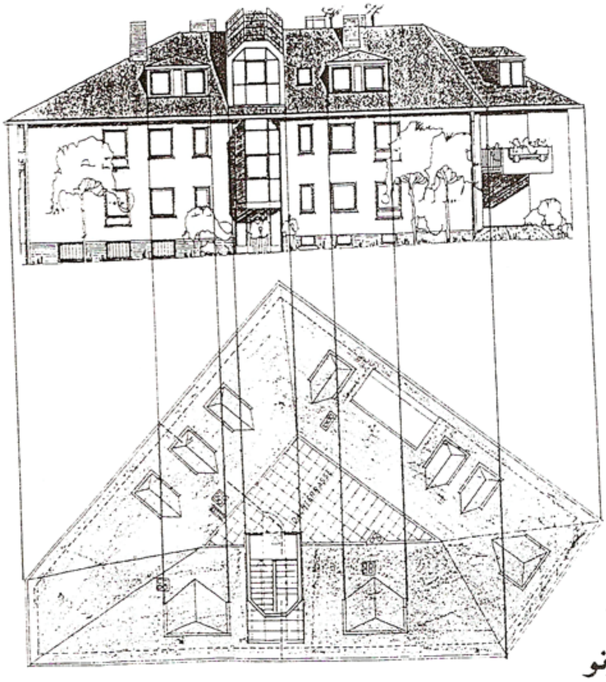


پروت كونج	30°	45°	60°
لنډوونكى فاكتور	2/3	½	1/3

ځيره ۲۳۲

په يوه پرسپكتيو مائيل جوړښت كى طبعاً ځني برخى او نه ځيره شوې د شا خواوي وركيږي، دا په دې مانا چي په كښلو كى نه راځي. له دې امله او په ځانګړي ډول كونجلرونكو بدنونو لپاره درې تختئيزپرويكشن (پريوستون) ګټور دى.

دا يو درې ځلي ولاړ پريوستنې له لارې منځ ته راځي (الف) بنستيز طرز يا غوځي هواره، (ب) اړخيزغوځي يا درز هواره (پ) پورته درز يا غوځي هواره او دا زيات وخت په جوړښترسمونو كى استعماك مومي.



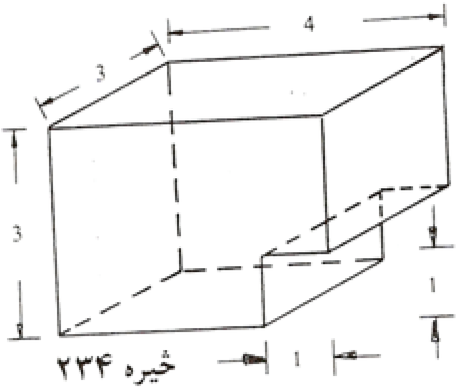
ځيره ۲۳۳

تمرینونه

۱ – د دې شېره بدن څخه درېتختهییز پریوستون وکاږی.

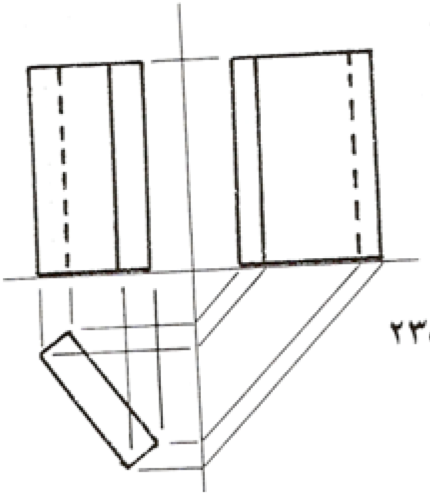
۲ • ددې بدن مائئله شېره وکاږی، کوم چی درېتخه ئیزه شېره پورې اړه لري.

۳ – د یوې ولاړې گردي توتی یا استوانی مایيلی شېرې غوښتل کیږي، چی د بنسټ او ولاړ درخ له لارې ورکړ شوي وي.



شېره ۲۳۴

۴ – یو شپږاړخي نل یا شپږڅنډیز نل وباسی په غبرگ پرسپتکیو انځورونی سره.



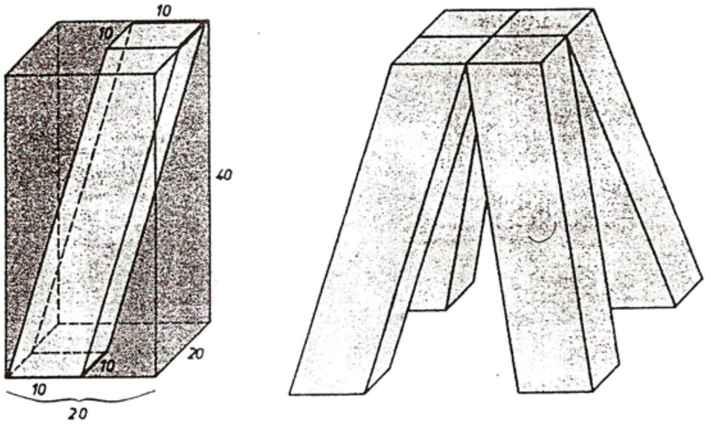
شېره ۲۳۵

پریزماوې Prismen

پیلبیلګه :

۱ = د یوه ستنویا تیرپښو جوړ میز یا Podestپودست(لکه په څیره کی کښل شوی میز) د لاندې جوربښت لپاره یو پښ باید څلور پښی د څلوراړخیز لرګیو په څیره شوي شکل اره کړي. یوه پښه څومره ډکی (حجم) لري ؟

$$V = 10^2 \cdot 40 = 4000cm^3$$



څیره ۲۳۶

۲ – د یوکږولاړې یا مستقیمی پریزما چی جګوالی یي 12 cm دی دباندې هواره او ډکی (حجم)، چی ځمکه او سر یا سرپوښ یی یو سیومتري تراپیځ وي

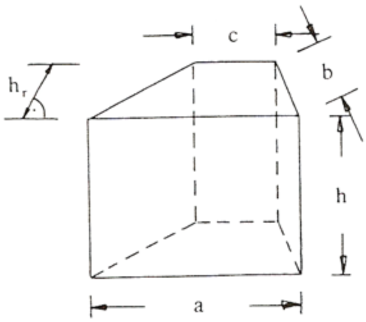
د اړخونو د اوږدوالي $c = 6$, $a = 10$ cm او $h_r = 4$ cm سره څومره دی؟

د تريخ هواره

$$h_r.(a+c) / 2 = 4.(10+6)/2 = 32cm^2$$

ده، نو ډکی یی په لاندې ډول دی:

$$V = G.h = 32.12 = 384 \ cm^3$$



خيره ۲۳۷

د دباندې هوارې لپاره د تريخ اړخ اوږدوالي b ته اړه شته .

دا د پيتاگوراس د جملی په مرسته لاس ته راوړو

$$b = \sqrt{16+4} = 4,47 \ cm$$

له دې امله دباندې هواره ده :

$$O = 2.G+ (2.b +a\ c),h$$

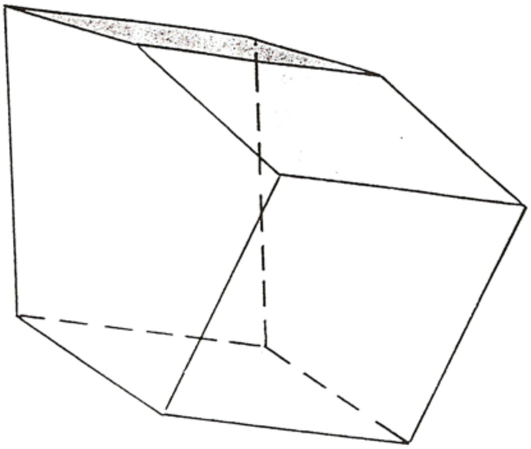
$$O = 64 + (8,84 + 10 + 6).12$$

$$O = 363,28 \ cm^3$$

ساده بدنونه هغه دي، چی يواځي په ډيرگوډيو (پوليگونو) بند شوي وي يا يواځي له ډيرگوډيو راگير وي، او ددې ترمنځ د بيلگي په توگه بيا پريزما ده.

تعريف Prisma : داسی يو هندسي بدن، کوم چی له دوه يو بل سره غبرگو او گونگروانيخو پوليگونويا ډيرگوډيو بند يا راگيروي پريزما بلل کيږي.

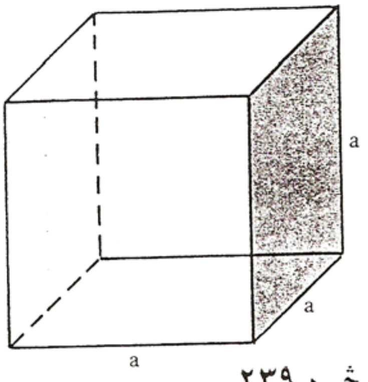
د بنسټ او پورته هوارې د کونگروانيخ له امله د اړخونو هوارې غبرگاړخيز دي.
د پورته هوارې(چت) ولاړ اوږدوالی د پريزما جگوالی بلل کيږي. کيدی شي چی د



ځیره ۲۳۸

یوه اړخ اوږدوالی د جګوالي باور ولري، نو بیا له ولاړې پریزما غږیږو.

د ټولوخورامنظم او په دې ډول خورا ځانګړي پریزما شپږاړخیز یا مکعب دی
(وورفل Würfel) . دا د دباندنی هوراو ۶ کونګروانیځ مربع خواوې لري، او ژی یا اړخونه(کانتی) یی یو په بل نیغي ولاړې دي.



ځیره ۲۳۹

جمله : د یوه شپږ اړخیز یا شپږخوایز (مکعب) د دباندې هوارې O او ډکي (حجم) V لپاره باور لري:

$O = 6a^2$

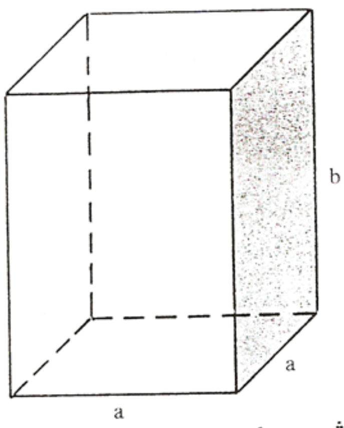
$V = a^3 = a^2 . a = G . h$

بیلګه : څه شی دروند دی یو کورک(Quark یو شکل لرګي ډوله بدن دی، چی د بوتلونو خولی په ټیږي) مکعب چی د یوه اړخ اوردوالی یی 0,3 m وي او که یو د اوسپنی مکعب چی د اړخ اوږدوالی یي 8 cm (د کورک ۷ سختوالی g/cm³ ۰٫۲ د اوسپنی 7,86 g/cm³)

ددې لپاره چې د یوه بدن کتله m لاس ته راوړی شو، نو کلکوالی یا دینسرتی یې د ډکي سره ځلوو.

د کورك مکعب ډکی : $V = (30cm)^2 = 27000\ cm^3$

$m = 27000cm^3\ .0,2g/cm^3 = 5400\ g$



څیره ۲۴۰

د اوسپنی مکعب ډکی :

$V = (8cm)^3 = 512\ cm^3$

$m = 512cm^3\ .7,86\ g/cm^3$

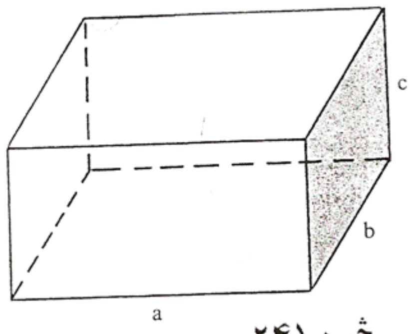
$= 4024\ 32\ g$

د کورکمکعب له دې امله د اوسپنی د مکعب ته نزدې

34% [(5400-4024):4024 ~0,34]

دی یا په بل عبارت، د کورك مکعب نزدې ۳۴ په سلو کی د اوسپنی د مکعب څخه دروند دی.

که د مکعب سټه(ځمکه) یا بسټ او چټ یا سر مربع پاتی شي او نورې خواوې یی تغیر کړي نو یوه مربع ستن(پښه) لاس ته راځي.



څیره ۲۴۱

که ځمکه او سر هم یوه ولاړکوډیز ته «ټولیز» شي یا « عمومیت » پیدا کړي، نویو کوادر Quader منځ ته راځي. هغه درې مختلفی اړخنیمي، مګر مساوي هوا نیمي

ا هواقطرونه لري. دا د پيتاگوراس د جملی په مرسته شميرل کيدی شي.

جمله: د مربع ستن د دباندي هوارې او ډکي (حجم) لپاره صدق کوي:

$$O = 4ab + 2a2$$

$$V = a^2 b$$

د اړخونو نيميو اوږدوالی په لاندي ډول دی

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}\,; \quad d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

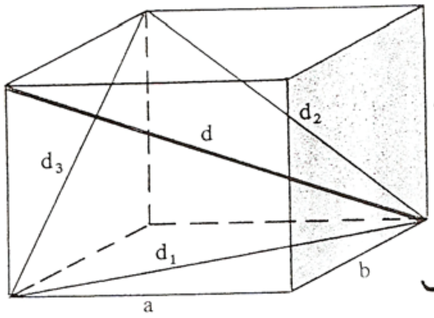
$$d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

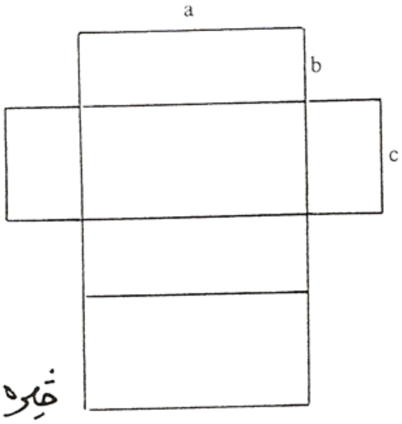
د هوانيميو لپاره صدق کوي:

$$d = \sqrt{d_1^2 + c^2} = \sqrt{d_2^2 + b^2} = \sqrt{d_3^2 + a^2}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

شيره ۲۴۲ الف





شيره ۲۴۲ ب

بیلګه: یو کوادر د کانتو اوږدوالی a = 5cm , b = 4cm (بنسټیز هواره a.b)
او c = 12cm لري:

د پوښهواره: $M = 2.(5.12+ 4.12) = 216\ cm^2$

دباندې هوار. $O = 2.(5.12 + 4,12 + 5.4) = 256\ cm^2$

ډکی (حجم) : $V = 5.4.12 = 240cm^3$

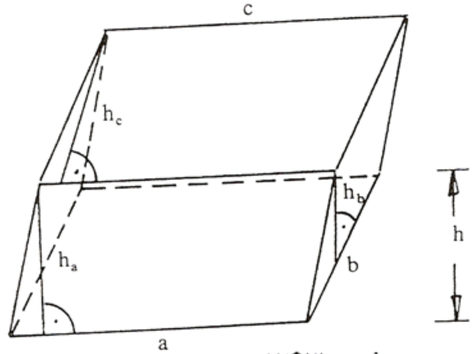
نیمي: $d_1 = \sqrt{25 + 16} = 6,40$ cm, $d_2 = \sqrt{25 + 144} = 13$ cm

$d_3 = \sqrt{16 + 144} = 12,65$ cm

$\Rightarrow d = \sqrt{25 + 16 + 144} = 13,60$ cm

یوه مائیل څلوراړخیزه پریزما د جوړه یو بل سره غبرګو کونګروانیڅ څلورکونجیو سره غبرګ اپیپت یا شپات یا په بل عبارت غبرګهواریز بلل کیږي ، چې موږ به یې له دې ورسته همداسې وبولو. د هغو دباندې هواره د هغه د بنسټ- پورته – او اړخهوارې دوه ځله ده.

دا د غبرګ اړخیز په څیر شمیرل کیږي او په عمومې ډول باور لري:



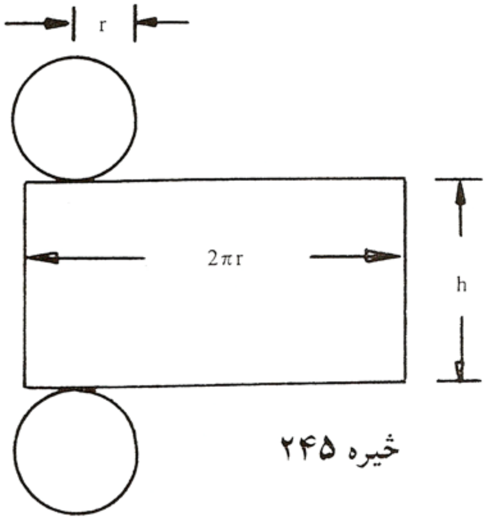
څیره ۲۴۳

جمله: د غبرګهواریز دباندې هواره او ډکی دي:

$O = 2.(a.h_a + b.h_b + c.h_c)$

$V = G.h$

دلته د ډکي شمیرنه د غبرګ اړخیزهوارې په



ښيره ۲۴۵

۱ - د توتی یا استوانه یا
گردیسیلیندر د پریزما سره
خپلوان دی.
۲ - گردي استوانه یا توته پخپله
د په خوبنه فورم شوې پورته -
او لاندې هوارو لپاره یو
ځانگړی حالت دی.
۳ - لمړنی څرگندونه د ولاړ
گردي سلیندر یا توتی یو
ځانگړی مهم حالت وو،
ډکی یا حجم د همغه پرینځیپ
له لارې کیږي لکه د پریزما.
د جال ښوونه یی د
پوښ د خلاصولو له لارې کیږي، له دې سره دوه گردی تړلي راځي چي لاندې
او پورته(دځمکی- او سرپټی هوارې) هوارې دي.

جمله: د یوه ولاړې گردی استوانی یا توتی پوښ، دباندې هوارې او ډکي لپاره باور لري:

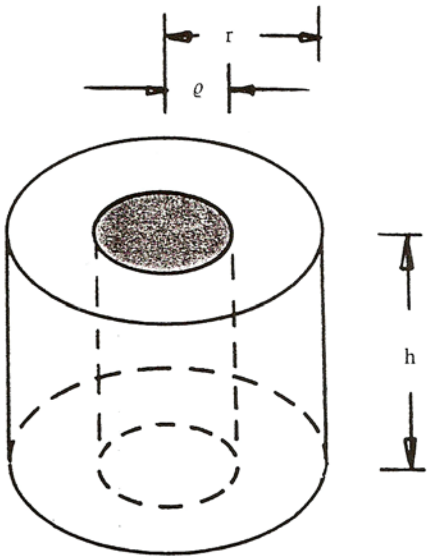
$$M = 2\pi rh$$

$$O = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(r+h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

که د یوې استوانی یا توتی څخه منځنکي سیومترې استوانه چی وړانگه یي له مخکی استوانی یا توتی کوچني وي راوباسل شي، نو دې پاتي ته یی سوری استوانه

یا سوری توته ویل کیږي. د هغه د ځمکی – او سرپټهوارۍ له ګردیکړیو تشکیل دي، دوي دواړه د دباندنی – او دنني پوښ سره دباندۍ هواره ورکوي. ډکی یی د دواړو استوانویا توتو له کمون څخه یا بنسټګردیکړی ځل جګوالی څخه لاس ته راځي



څیره ۲۴۶

جمله: (د یوه سوری سلیندر (استوانه) لپاره باور لري:

$M_{دباندۍ} = 2\pi rh$,

$M_{دننه} = 2\pi\varrho h$

$V = \pi r^2 h - \pi\varrho^2 h$

$= \pi h(r+\varrho)(r-\varrho)$

پیلبیلګه :

یوه د لیفت ستن یا پنبه ۵۰ سانتي متره وړانګه لري او ۲، ۹۰ متره جګه ده، د اعلاناتو هواره به بي څومره لویه وي، که له ستن ستهی د ۴۰ سانتي متره څخه پورته یا جګ تشه یا ازاده پاتیشي؟

له یوه کال وروسته ستن چاپیری ۵۱ ، ۳ متره لري. د یوه کال په ترڅ کی له ستنی

د اعلاناتو څومره کاغز کڅول شوی یا سلیخ شوی ؟

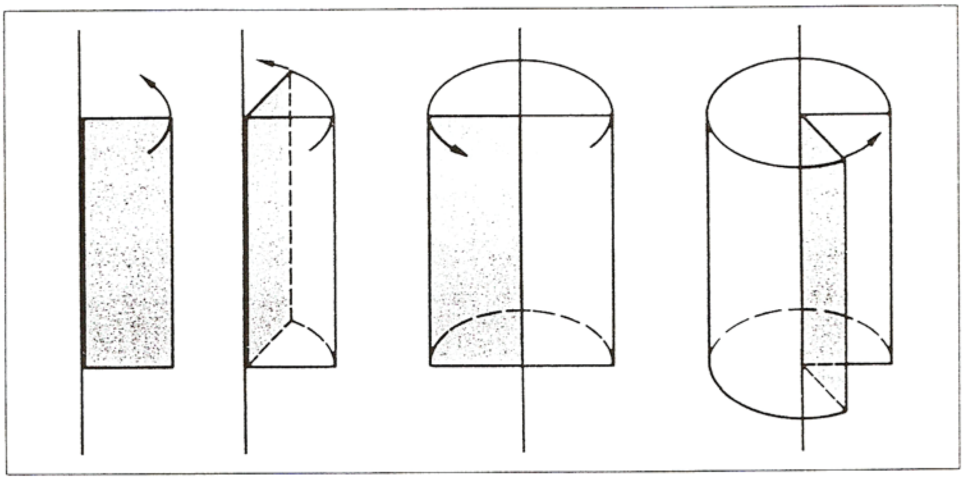
$M = (2,90 - 0,40).2\pi.0,5 = 7,854\ m^2$

$U' = 3,51\ m \Rightarrow r' = U':2\pi = 0,559\ m$

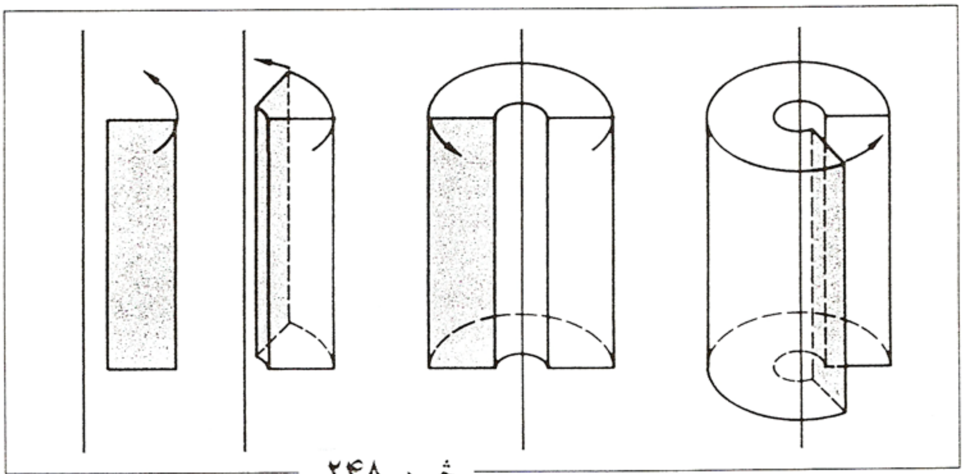
$V_{کاغز} = \pi.2,5.(0,559 + 0,5)(0,559 - 0,5) = 0,491\ m^3$

که د مخه ونیول شي یا فرض شي، چی دا سلیخ شوي کاغذ 0,1 mm پنډ دی،
نو دلته باید ټول $0,491 \cdot 10000 = 4910,m^2$ کاغذ سلیخ شوی وي.

د ګردي – او سوری استوانی یا توتې یا ستن لاندې د یوه ولاړکونجیز
څرخون (Rotation) هم په خیال کی راوړلی شو:



خیره ۲۴۷



خیره ۲۴۸

تمرینونه

۱ – یوه سمه پریزما د شپږکوډیز بنسټ– په همدې ډول سرهوارې سره لرو، چې ۵ سانتي متره جګه ده. هربنسټهوارې اړخ یې ۴ سانتي متره اوږددی. ددې ډکې پوښ او پورته یا ټوله راګرده هواره وشمیرئ.

۲ – یو غبرګهواری ۸۱ مکعب متره ډکی لري او پورته هواره یا ټوله هواره یې ۱۳۲ مربع سانتي متره ده. جګوالی او د اړخ اړخیز c اوږدوالي یې وښایي، که بنسټ هواره یې د اړخونو اوږدوالی ۵ ،۴ سانتي متره او ۳ سانتي متره ولري او دا دواړه اړخونه وي بل سره د ۶۰ درجو کونج جوړ کړي.

۳ – پورته واره او ډکي څنګه تغییر خوري، که د یوه کوادر اړخونه دوه برابره شي؟

۴ – د یوه کوادر دري اړخونه یو بل سره په ۱:۲:۳ څانییونه یا تناسب کې پراته دي، دا څومره اوږد دی، که د دې کوادر ډکي ا مکعب متر وي؟

۵ – یو مکعب د هوانیمی $d = 6\sqrt{3}$ لري. نو ټولهواره، ډکی او اړخ(O , V , a) یې وشمیرئ.

۶ – د شګو موټر کي چې د بارهوااندازه یا بارډکي اندازه یي 2,82m×1,68m÷0,55 وي، څومره مترمکعب شګه ځایږي، که دا د پورته اړخ یا کانتي پورې ډك شي؟ د باروړونکي د بار وزن ۱۵ ، ۱ ټنه دی په بارولو به څومره ورزیات شوی وي ، که شګه یوه ډیبنتی، ټیګوالی یا غلظت $\rho = 2\ g/cm^2$ ولري؟

۷ – په یوه هواره کرښه یو د پټلیو بند باید ډك شي. دا کرښتوټه ۲۵۰ متره اوږده ده، دا پټلیبند ۸ متره جګ دی او په بنسټهواره کې ۳۹ متره ، په سر کې ۲۷ متره سرور دی، د ډکولو لپاره به څومره خاوره بسیا وکړي؟

۸ – د سرك جوړولو ماشین څرخونی (د اوسپنی غټ ه استوانه چې سرك پرې پخوې او په سرك یې څرخوې) ۱،۱۵ متره نیمی لري او د۲۵ ،۲ متره سرور دی

هغه هواره څومره لویه ده، چې څرخې یې په یوه څرخون وهې؟

۹ – یو بایسکل پمپ د ۵ ، ۲ سانتیمتره اورږد رڼا نیمی لري او د پمپ اوږدوالی ۲۸ سانتیمتره دی، د پمپ تشیاډکی څومره دی ؟

۱۰ – د دې لپاره، چې د ګیلاس توته په پروتغوځي باندې څیړو یا معاینه کړو، ۲۰۰ ګرامه پارې نه یې ډکوو(ρ = 13,6 g/cm³) . پوهیږو، چې توته هر ځای کی همغه دننی نیمی لري. دا نیمی څومره دی، که پاره 82 cm جګه وي؟

۱۱ – یوه کچتوته دې، د یوه 5 cm دننه نیمی سره داسی په کچکربنو په نښه شي، چې د هرو دوه پرلپسی کربنو وي د 5 cm³ ډکی وښايي. د دوه څنګ په څنګ کربنو ترمنځ دې واټن څومره وټاکل شي؟

۱۲ – د یوه ولاړګوډیزې وسپنی ټوټی (25 cm × 20 cm) څخه دې یوه کوټی ، بی له سرپوښ او بیښ څخه جوړه شي. ډکی یې وشمیری که الف) چاپیری یې د اوږده اړخ سره برابر وي او ب) که چاپیری یې د لنډ اړخ سره برابر وي؟

۱۳ – د لاندې توتو پاتی کځونه وښايي:

a) r = 5 cm ; h = 12 cm b) r = 9cm ; V = 120 cm³
c) h = 6,5 cm ; O = 300 cm³ d) M = 282 cm² ; V = 424 cm³

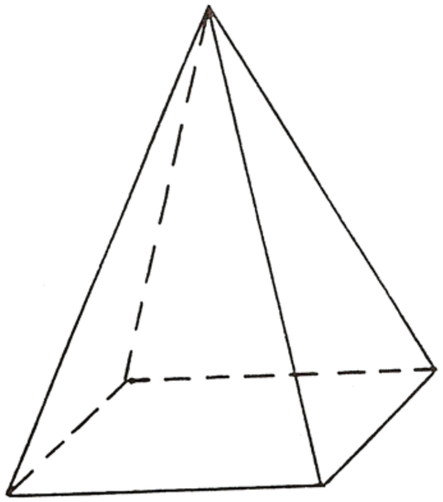
۱۴ – توته څومره ډکی لري، که یو د a اړخ اوږدوالي مکعب په کې خوندي وي؟ پوښ او دباندې یا پاسهواره یې څومره دي؟

۱۵ – د یوې توتی جګی h او وړانګه r ځانونه (3 : 2 (= h : r نیسی. ډکی یې 2000 cm³ دی. h , r او M یې وټاکی.

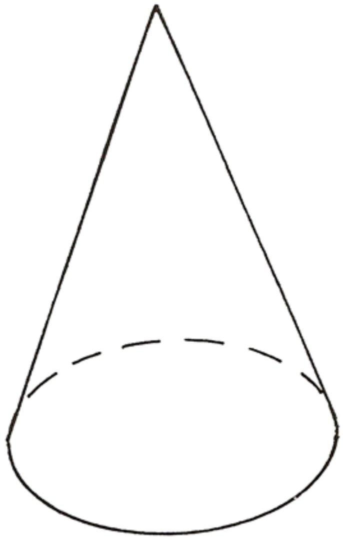
۱۸ – یو ولاړډوله توته یزه ګل کوټی د h = 17 cm جګي سره د سره د سرپوښ او بیښ ایلیپسی د دواړو نیممهرونو a = 30 cm او b = 20 cm سره لري. د دې ډکی څومره دی؟

اهرامونه او مخروطونه Pyramiden und Kegel

که څه هم دواړه بدنونه بدلو ګروپونو پورې اړه لري- اهرام يوائې هواره راګرځيدهواره لري، مخروط مګر راتاو يا کږه هواره.- بياهم زيات ګډونوالی لري، نو له دې امله يې په ګډه غواړو وپيژنو يا معرفي کړو.



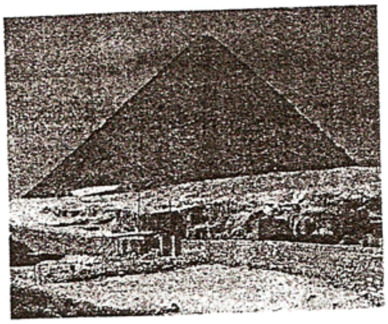
څيره ۲۴۹



څيره ۲۵۰

پيلبيلګه :

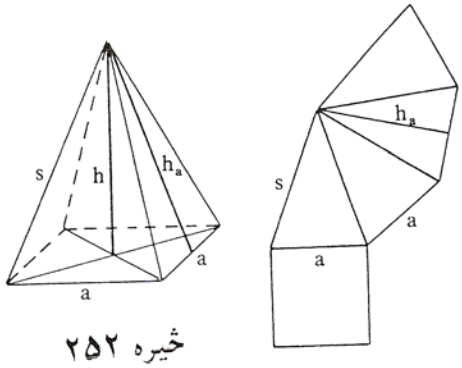
د ۲۵۹۰ او ۲۴۷۰ (م. کال پخوا) ترمنځ په غزه مصر کې په يوه ډير مصرف د فرعون خيوبس د قبر اهرام خيوبساهرام (Cheopspyramide) جوړ شو. د دې د جوړولو لپاره څه سل زره انسانان په کار واچول شو، چې هغوي نزدې دوه نيم ميليونه



خیره ۲۵۱

د تیګو بلاکونه پري کړل ، رایي وړل او یو په بل یی طبقه په طبقه یا پوړی په پوړۍ باید ایښوولي وی. دا د خیوبس اهرام ګومره ډکی (حجم) لري، که هغه یوه لاندې هواره ۲۳۰ متره مربع ولري او جګوالی یی ۱۴۷ متره وي. د هغه لیدوړ دباندې هواره ګومره ده ؟

د خیوبس اهرام د ولاړو اهرامونو ځانګړی حالت جوړوي، ځکه چی د هغی تیره ککره د لاندې هوارې په منځ ټکي نیغه ولاړه ده. هغه اهرامونه چی په هغو کی دا حالت نه وي کاره یا بهتره مائل اهرامونه بلل کیږي. په عمومي ډول یو اهرام راپورته کیږي، که د ډیرګوډي ګوډونه له ډیرګوډي دباندې ټکي سره ونخلول شي. د کونجونو او سرتیرې نخلونلاین ته اړخکانتی (لنډ : اړخ) وایي . لکه چی د جالښوونه یی ښایي، نو دباندې هواره یي له لاندې اړخ او د اړخیزو دریګوډي د یوځایوالي څخه لاس ته راځي، چی وروستی یي پوښ هم بللي شو یا بولو.



خیره ۲۵۲

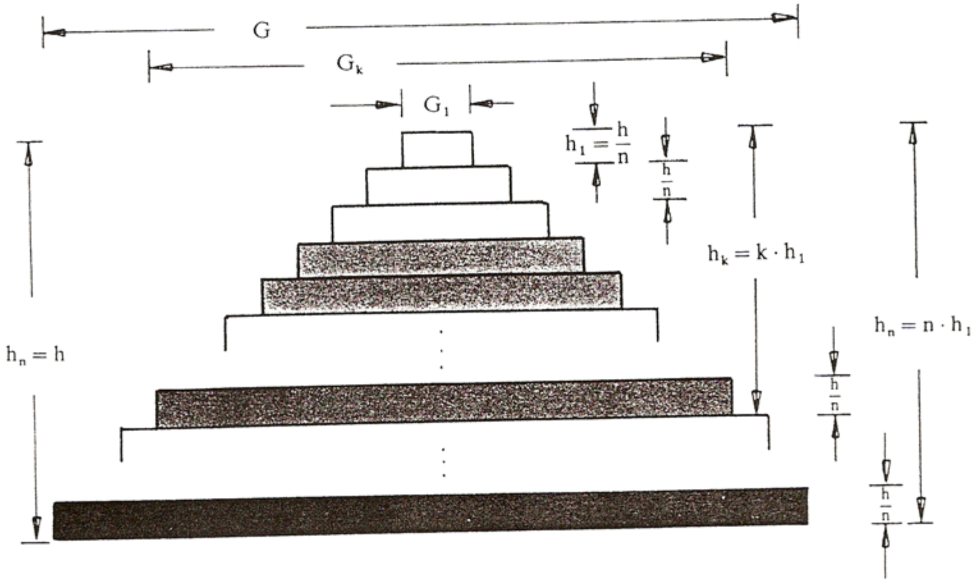
که د ډکي یا حجم ټاکلو لپاره د خیوبس اهرام په مربع شکلي پوړیزتجزه شوی وي، په فکر کی راولو چی د پوړۍ جګوالی یی h / n وي. د وړانګي جملی د خورا پورته پوړۍ د هوارې لپاره لاس ته راځي:

$$h_1^2 : h^2 = G_1 : G \Rightarrow G_1 = G : (h^2 / h_1^2) = G / n^2$$

په ټولیزه توگه (عمومي ډول) :

$$h_k^2 : h^2 = G_k : G$$

$$\Rightarrow G_k = G.(k/n)^2 \quad , G_n = G$$



شیره ۲۵۳

په دې ډول د k –ام زینې پوړي ډکی (حجم) دی

$$V_k = G_k.h / n = Gh.k^2 / n^3$$

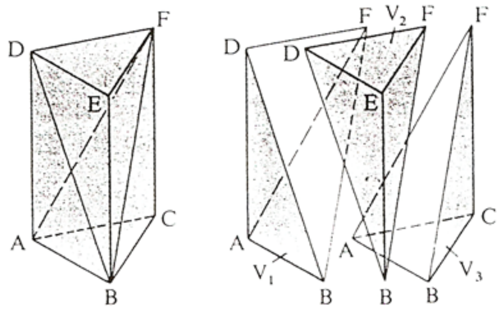
د ټولو پوړیو له زیاتون څخه لرو

$$V_{\text{پوړی}} = Gh.(1^2+2^2+...+n^2) : n^3$$

$$= Gh\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) : n^3$$

$$= Gh\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$$

دا فرمولونه طبعآ د مائیل اهرام لپاره
هم باور لري د پوړیو شمیرنه بیا طبعآ
یو څه اندازه ستونځي لریکه چیرې د
یوه اهرام بنسټ یوه ګردی ونیسو نو
مخروط لاس ته راځي، مخروط سم
ولاړ بلل کیږي ، که د هغه تیره ککره
یا لنډه: ککره په منځټکي (نیغه)
ولاړه وي، نور ټول مخروطونه مائیل
بلل کیږي. دا په لاس کی لرلو له
لارې ګورو، چی د اهرام ډکي یا
حجم شمیرډول په مخروط باندې
هم استعمالیدی شي، که د پوړیو
په ځاي دلته وړې ستنی په پام کی
ونیول شي. لکه په ځیره ۷ کي
د پوښ خورونه یا پوښ جال ښایي
چی پوښ د ګردي ټوټه ده، چی
وړانګه یی د بنسټګردي وړانګه ده
او لینده یی د ګردی چاپیرونکی
کی ورکړ شوی دي:

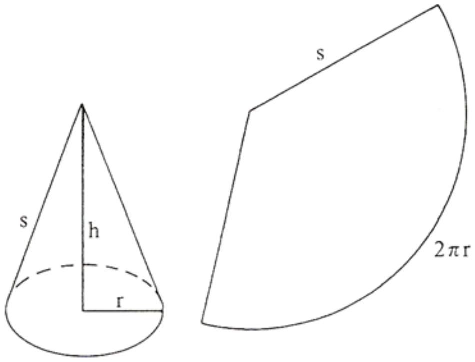


ځیره ۲۵۴

$$F_S = b.r / 2 ,$$

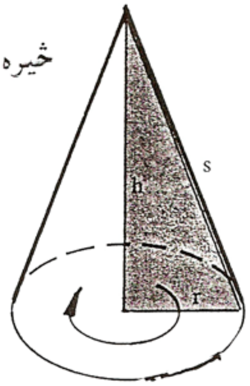
پس لرو

$$M = 2\pi r.s / 2 = s.\pi .r$$



ځیره ۲۵۵

ځیره ۲۵۶



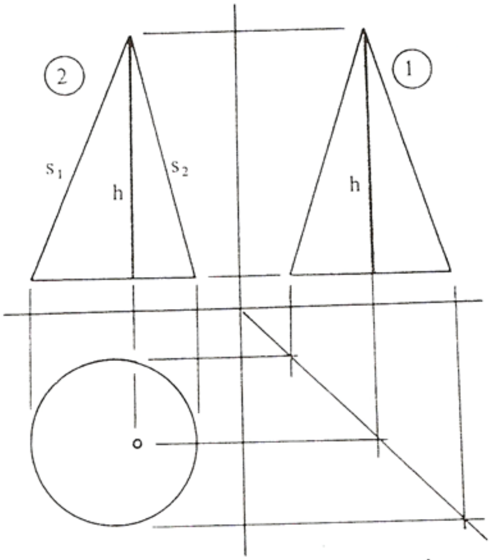
جمله : د ګردي مخروط پوښ، دباندې هواره او حجم لپاره باور لري:

$$M = s.\pi r = \pi.r^2 . 360° / \alpha$$

د $\alpha = 360° . r / s$ سره

$$O = M + \pi r^2 = \pi r (r + s)$$

$$V = \pi r^2 . h / 3$$



خیره ۲۵۷

په پام کی دې وي چی ولاړ مخروط د څرخون په څیر هم په خیال کی راوړل کیدی شي: چی په کانتی یا یوه اړخ د یوه ولاړ دریګوډي څرخون څخه لاس ته راځي.

بیلګه : د ولاړ ګردیمخروط ډکی وشمیری چی د بنستهواري وړانګه یی ۶ سانتیمتره وي د پوښ یو خورا زیات یا عظمي اوږدوالی یی ۱۵ سانتي، او مینیمال پوښ اوږدوالی یی ۱۱ سانتي متره دی؟ د هیرون دریګوډي فرمول سره سړی د غوځهواري په متن یی اخر ته رسوي. (۲)«

$$F = \sqrt{19(19-12)\ (19-15)(19-11)}$$

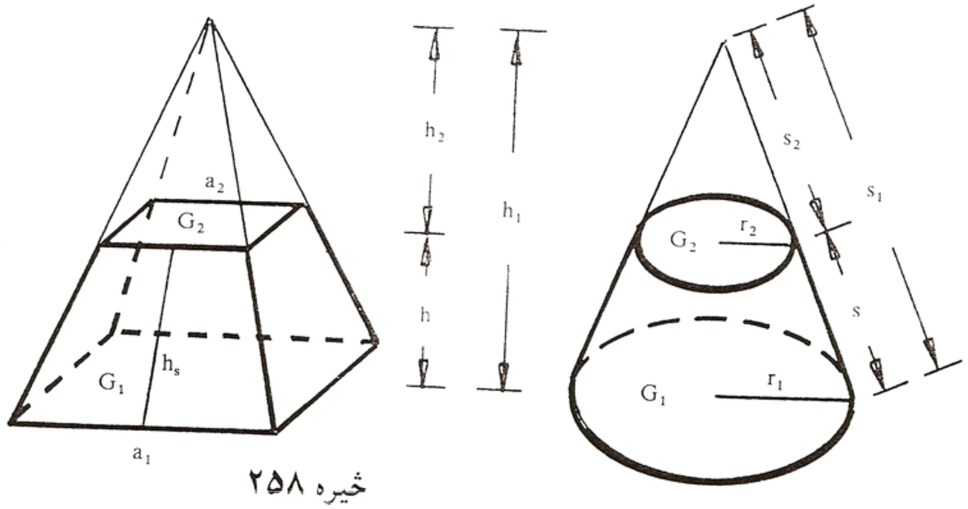
.　　$F = 65,238\ cm^2$

,　　$F = d.h / 2 \Rightarrow h = 2F / d = F / r = 10,87\ cm$

.　　$\Rightarrow V = \pi r^2 h / 3 = 409,79 cm^3$

پخ اهرامونه او پخ مخروطونه

که یو اهرام او یا مخروط په یوه اوږدوالي h بنسټهوارې ته غبرګ پرې کړی شي، نو پخ اهرام او پخ مخروط ترې راجوړیږي) راپيداکيږي یا منځ ته راځي.
د پخ اهرام پوښهواره د یوه ترپخ څخه عبارت دی چې د دوه دریګوډیو له کمون څخه لاس ته راځي.



څیره ۲۵۸

دپخڼکي د اولني اهرام او يا مخروط او د پريشوې څوکی کمون څخه لاس ته راځي، چی دا هم بيرته اهرام او يا مخروط شکلونه لري. (څيره √ وګوری)

$$V = G_1.h_1 / 3 \quad - G_2.h_2 / 3 = [G_1(h+h_2) - G_2h_2]/ 3$$

دا چي په n–ګوډي کی د اړخ اوږدوالی همداسی د ګرديشميرنه کی وړانګه مربعي ډوله کارول کيږي، د وړانګي له جملی د بنستهوارې او سرپوښهوارې يوبل ته ځانونه داسی نيسي لکه د هغو د واټونو مربع د سرچينيزې څوکی څخه.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{h + h_2}{h_2} = \frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (h + h_2) \cdot \sqrt{G_2} = h_2 \cdot \sqrt{G_1}$$

$$\Leftrightarrow h\sqrt{G_2} + h_2\sqrt{G_2} = h_2\sqrt{G_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad h\sqrt{G_2} = h_2(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})$$

$$\Leftrightarrow \quad h_2 = -\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}$$

که د h_2 لپاره پيدا ارزښتونه د ډکيفرمول کی کيښول شي، نو د ترڅنګ بيا يوائي هوارې G_1 , G_2 او G_3 راپيداکيږي.

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[G_1\left(h - \frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right) + G_2\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \left[G_1 \cdot h - \frac{G_1 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} + \frac{G_2 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[\frac{G_1\,h\sqrt{G_2} - G_1\,h\sqrt{G_1} - G_1\,h\sqrt{G_2} + G_2\,h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

که اخري اړیکی د $\sqrt{G_2}$ + $\sqrt{G_1}$ سره پراخه شي(د بینوم دریم فرمول)، نو په دې پسی لاس ته راځي:

$$V = \frac{h}{3}\left[\frac{(G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1})(\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1})}{G_2 - G_1}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2^2 - G_1\sqrt{G_1 G_2} + G_2\sqrt{G_1 G_2} - G_1^2}{G_2 - G_1}\right]$$

د ماتباندې ترم څخه د $G_2 - G_1$

$$G_2^2 - G_1\sqrt{G_1G_2} + G_2\sqrt{G_1G_2} - G_1^2 = (G_2 - G_1)(G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)$$

له امله نوکبند شي او بالاخره د لنډونی څخه لاس ته راځي:

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د اهرام ، په همدې ډول د مخروط ډکي.

په پځمخروط کیدی شي د ګردیهوارې فرمول $G_1 = \pi r_1^2$ او $G_2 = \pi r_2^2$ وکارول شي

جمله: د پخ اهرام پوښ ټوله هواره او ډکی :

د ټول تراپخ هوارو زیاتون = M

$$O = G_1 + G_2 + M$$

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د پځمخروط پوښ پاس یا ټوله یا پورته هواره او ډکی :

$$M = \pi s(r_1 + r_2) = \pi(s_1r_1 - s_2r_2)$$

$$O = \pi s(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi (r_1 s + r_2 s + r_1^2 + r_2^2)$$

$$V = (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\pi h / 3$$

پیلبیلګه

د برنس مجسمی لپاره دې یوه متړه د همغه موادو جوړه شي. دا دې ۱،۵ متره جګ وي، او یوه کتله دې ولري چې ۱۰ ټنه وي(د برنس دیښتی یا کلکوالی) $\rho = 8,7\ g/cm^3$
په پوښتنه کی یو ګرد (پخمخروط) یا یو مربعشکلی (پخ اهرام) راځي. سرپوښهواره دې ، په اندازه ، ۱ مترمربع لوي وي. نورې اندازې وښايي ؟
د دواړو متړو لپاره شمیرنه ورته ځغلي

$$V = m / \rho = 10t / (8,7t/m) = 1,149\ m^3$$

دا چې جګوالی او سرپوښ معلوم دي، بنسټ د یومربع مساوات له لارې لاس ته راځي:

$$V = 1,149 \qquad = 0,5(G_1 + (\sqrt{G_1 .1} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1,299 - G_1 \qquad = \sqrt{G_1}$$

$$\Rightarrow \quad 1,687 + G^2 - 2598G_1 = G_1$$

$$\Leftrightarrow \quad G_1^2 - 3,598\,G + 1,687 \quad = 0$$

$$G_1 = (3,598 / 2) \pm \sqrt{(3,598 /2)^2 - 1,687}$$

$$G_1 = 1.799 \pm 1,245$$

$$\Rightarrow \quad G_1 = 3,044 m^2 \quad \text{یا} \quad G_1 = 0,549 m^2$$

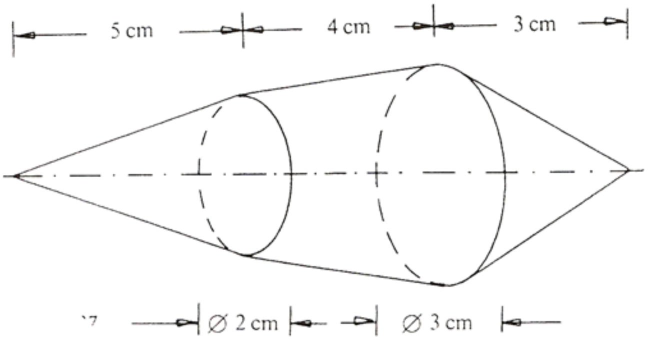
ټ) $h = 12\ cm ; s = 18\ cm$

ث) $h_a = 12\ cm;\ M = 400cm^2$

۲ – د ځیره شوي اهرام پاسهواره او ډکی وشمیری. (لمړی ټرونکربښه له ټګي A ځخه د جګوالی پښیپګي ته وشمیری)

۳ – په کوم جګوالي دې مربع اهرام بنسټهوارې ته غبرګ غوځ شي چې ډکی یې نیم شي؟

۴ – یو ولاړ اهرام د بنسټیز منظم شپږکونجي سره بنسټ لاندې هوارې اړخ یا کانټی $a = 4\ cm$ لري او خوا اړخ اوږدوالی یې $s = 12\ cm$ دی. V او O وشمیری ؟



۵ – د ځیره شوي بدن ډکي وشمیری.

ځیره ۲۶۲

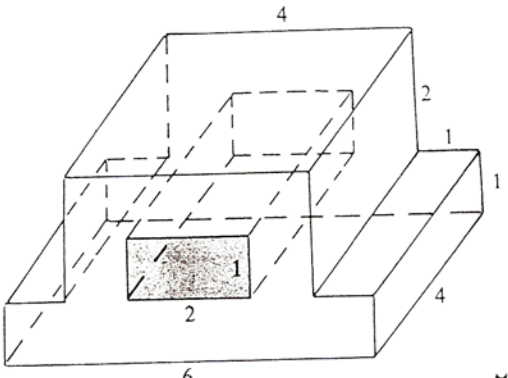
یادداښت: ∅ د نیمي یا قطر په مانا دی [illegible]

۶ – د یوه ګردیګرد برج سر یا سر دې نوي پټ شي. د سرپوښ د هوارې د اندازې لپاره سرپوښوونکی د برج ترمخ داسی ولاړ دی یا داسی ځای نیسي، چې پوښ اوږدوالی s د ۷۵ درجو په یوه کونج ګوري، کوم چې ټیك د سر میلان په ګوته کوي، د سرپوښ هواره ځومره لویه ده، که برج ۵۰ متره جګ وي او د برج نیمي ۱۲ متره وي؟ سرپوښوونکی د برج ځخه ۱۰ متره لرې ولاړ دی او د سترګو جګوالی یې ۸۰ ، ۱ متره دی.

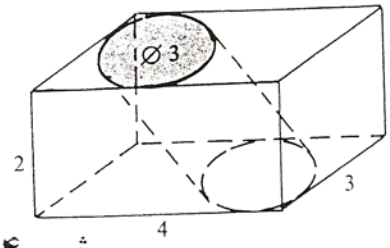
۷ – د یوه برج اهرامډوله سرپوښ چې بنسټ یې مربع او اړخ اوږدوالی یې a = 12cm دی په وسپنه دې پټ شي اړخکانتې یې ۱۴خ متره ده د سرپوښ هواه یې څومره ده؟

دا چت به څومره ارزښت ولري، که یو مترمربع سرپوښول د هرڅه سره ۹۵ المان مارکه ارزښت ولري؟

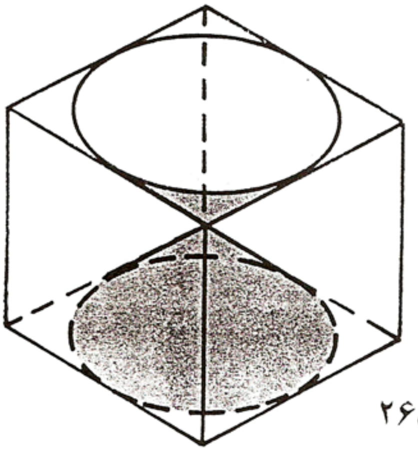
۸ – د څیره شوو بدنونو پاسهواره وشمیری(ورکړه په سانتي متر)



څیره ۲۶۳



څیره ۲۶۴



څیره ۲۶۵

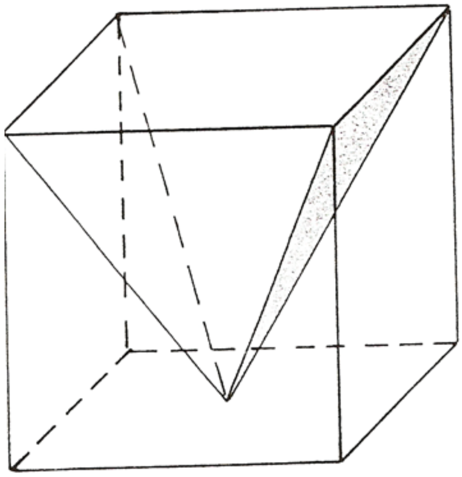
۹ – د پورته څیره شوي بدن ډکی وشمیری.

۱. –په مختلف کارېوېو کی مخروط ډوله خالیګاوې برمه کیږي:

الف) په یوه مکعب چې اړخ اوږدوالی یا کانتی اوږدوالی یی a = 60 cm دی، یو مخروط د جګوالی h = d = a سره

ب) په یوه مکعب کی د a = 60 cm یو سیومتري

چت پورته کانتی یا پورته اړخ ۷ متره اوږد دی . د چتپټووني ډکی وشمیرئ او همداسی د چتپټي سرهواره هم وشمیرئ.



خیره ۲۶۶

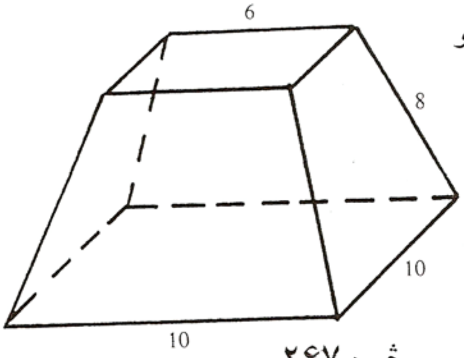
۱۹ – د یو دوه متره ژور بنسټ لپاره ځومره خاوره باید راوویستل شي، که پوره ژی یا غاړه یی ۱۰ متره د غاړې اوږدوالی ولري او ستورېکونج –یعنی هغه کونج چی د غاړې یا اړخ سره د کنلو په لور جوړوي– یی ۶۰ درجی وي؟

۲۰ – د یوه هواډکی ځومره مائیلوالی لري، که د یوه ونی ستهی هوا ډکی شمیرلو لپاره چی مخروط ډوله دی د موټي قاعده وکارول شي، د لاندې سره

$V^* = \pi h\,[(r_1 + r_2)/2]^2$

د $r_1 = 10$ cm سره

او $r_2 = 5$ cm سره؟



خیره ۲۶۷

۲۱ – ځومره مسو ټوټه په کار ده، چی خیره شوې مسخولی جوړه کړای شو (وکړنی په ضیس متر؟ دیسی متر (خیره ۲۶۷ .

۲۲ - جوړ شوي کارپوټی حومره درنی دي (اندازه په سانتي متره)

۲۳-د لاندې پخمخروطونو M ,O او V وشمیرئ

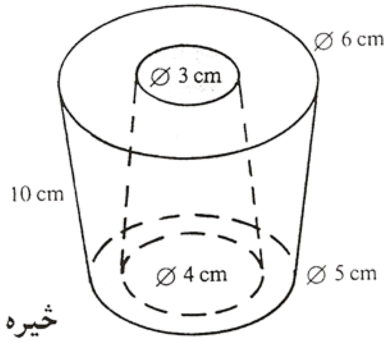
پخ کیګل مخروط

Kegelstümpfe:

a) $r_1 = 12\,\text{cm}$; $r_2 = 10\,\text{cm}$; $h = 8\,\text{cm}$

b) $r_1 = 9\,\text{cm}$; $r_2 = 7\,\text{cm}$; $s = 6\,\text{cm}$

c) $r_1 = 5\,\text{cm}$; $h = 7\,\text{cm}$; $s = 8\,\text{cm}$



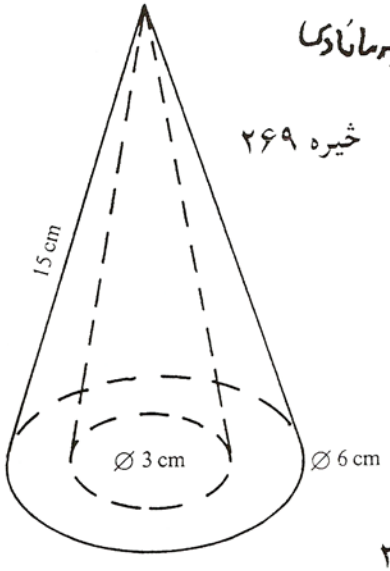
خیره ۲۶۸

Eisenwerkstück $\varrho = 6{,}5\ \text{g/cm}^3$

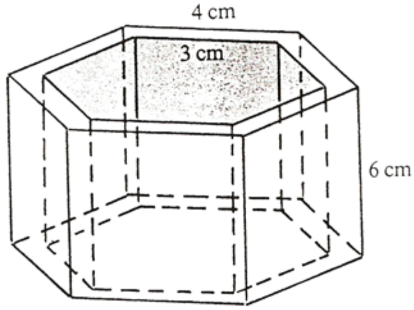
داوسپنې کار ټوټه

ځ په دې کالبوټ کې هم دکلمې پرمانا دی

یا غلطت



خیره ۲۶۹



خیره ۲۷۰

Kunststoffmodell $\varrho = 2{,}5\ \text{g/cm}^3$

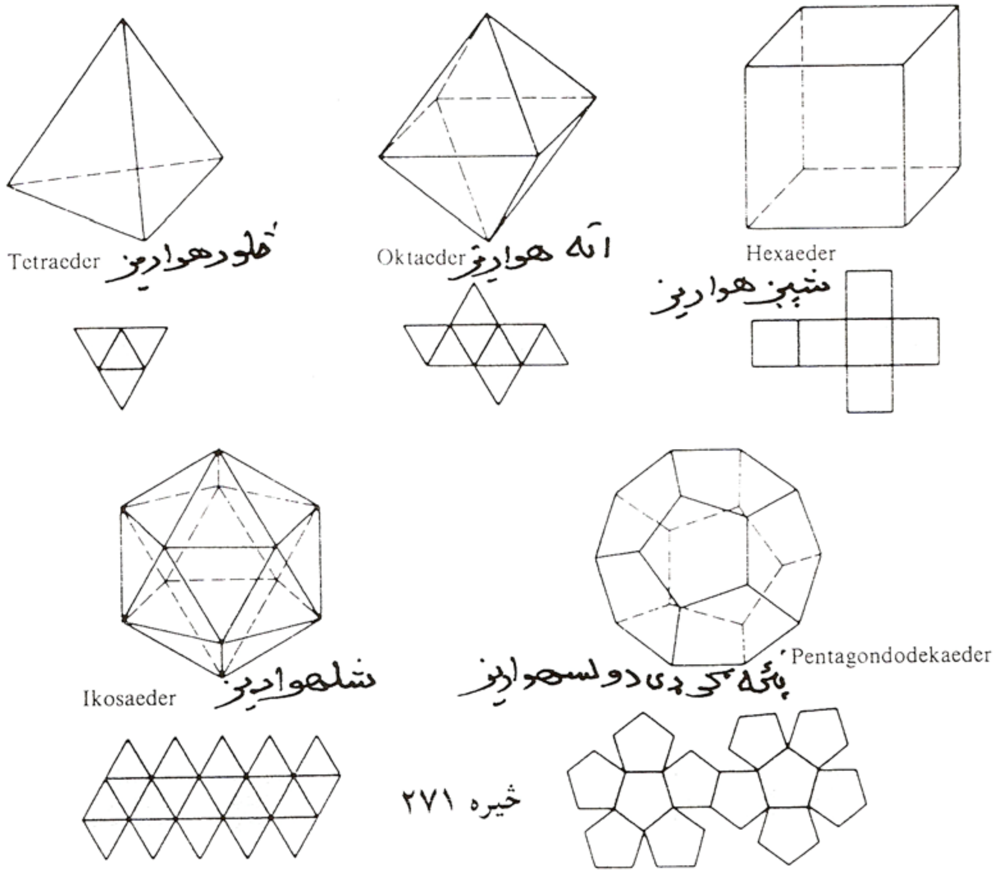
Messingsechskantrohr $\varrho = 8{,}3\ \text{g/cm}^3$

پلاستیک مودل

د مسنګ شپږ اړخیزه ټوټه

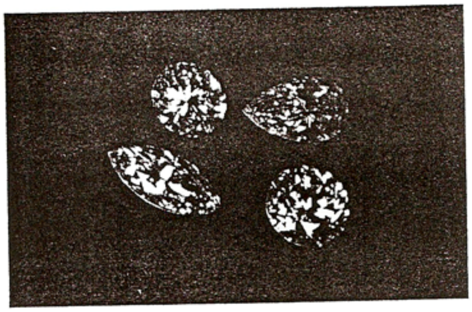
منظم ډیرهواریز

ټول بدنونه ، کوم چی یواځي بندهواري لري یا له وارو رابند وي، پولوئیدر (یونانی : ډیر هواریز) نومیږي. موږ به دا له دې وروسته دا ډیرهواریز وبولو. د دوي ترمنځ ټیك پنځه منظم یو بل ته ناورته بدنونه. دا د شمیرپوهنی له اړخه په ځانګړې توکه په زړه پورې دي، ځکه چی پاس هوارې او ډکي یي بند دي، دا په دې مانا چي د فرمولونو له لاې انځوریدلی شي، او په دې برسیره ، ځکه چی طبعي کریستال دا شکلونه یا فورمونه یا څیرې لري.



څیره ۲۷۱

دا پنځه منظم بدنونهد هواروبندهوأريز ابو كهگ هواربنديزدي : تيترائيدر (څلورهواريز Tetraeder) ، هيكسائيدرHexaeder (شپږهواريز ، مكعب) اوكتائيدرOktaeder (اته هواريز) دوديكائيدر (دولس هواريز ، د خپل اړخهوارو له امله پنتاګون دوديكائيدرPentagondodekaeder پنځه ګوټي دولسهواريزه بلل كيږي)، او په همدې توګه ايكوزائيدر Ikosaeder(شلهواريز) څيرې په تير مخ كې.



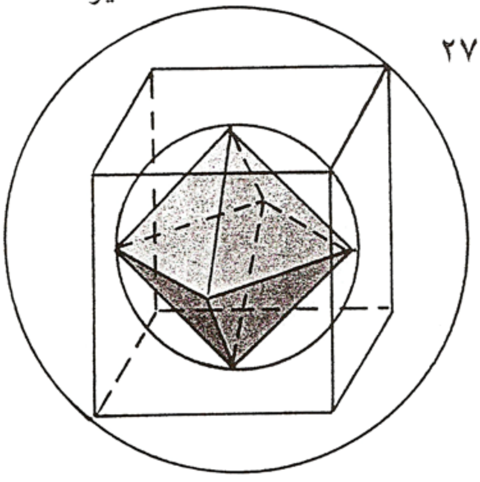
څيره ۲۷۲

بيلګې

د مالګي تيګي مكعب جوړوي، كوپفرسولفيد مينرال Fahlerz تيترائيدر، د ګوګړو كريستال دوديكائيدر او الون (كاليوم الومينيوم سولفات) اوكتائيدر جوړوي.

منظمډيرهواريز پلاتوني (افلاطوني) (خيالي platonische) بدنونه هم ياديږي، ځكه چې يوناني فيلوسوف او شميرنپوه (۴۲۷ تر ۳۴۷ د م. پخوا) په دې نظر وو، چې څلور پخواني عناصر اور، خاوره، اوبه، او هوا په خپل واړه فورم تيترائيدر، ايكوزائيدر، اوكتائيدر او هيكسائيدر په ګوته كوي. د هغه په فكر جهان پخپله يو دوديكائيدر فورم لرووده. په دې پنځو هر يوه بدن كي كيدی

څيره ۲۷۳



Würfel und Oktaeder mit In- bzw. Umkugeln

مکعب او اته هواریز د بیلګی ټیګ او په راکیږ غونډیو بېوه

شي يوه ګردۍ دننه او دباندې وکښل شي. که دا یو په بل کی دننه شي یا په بل عبارت دننه راګیر شي، نو په دې توګه شپږ دننه – او شپږ دباندې هوارې لاس ته راځي ، کومو چی کیپلر Kepler دې عقیدې ته راوستی شو ، کوم (چی هغه وخت معلوم) شپږ پلانیت به په داسی لاره ګرځي، چی د هغوي نیممحوروونه د داسی دننه – او دباندېغوندېي وړانګو سره برابر شي.

لاندې جدول د دې منظم پولوئیدر ډیرهواریزومعلومو لویو پوره معلومات ورکوي.

Polyeder	e	f	k	l	m	α	r	ϱ	O	V
Tetraeder	4	4	6	3	3	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{12}\sqrt{6}$	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Hexaeder	8	6	12	4	3	90°	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}$	$6a^2$	a^3
Oktaeder	6	8	12	3	4	60°	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$	$2a^3\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Dodekaeder	20	12	30	5	3	108°	$\frac{a\sqrt{3}+a\sqrt{15}}{4}$	$\frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{15a^3+7a\sqrt{5}}{4}$
Ikosaeder	12	20	30	3	5	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{a\sqrt{27}+a\sqrt{15}}{12}$	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{15a^3+5a^3\sqrt{5}}{12}$

د لته حروف لاندې ماناوې لرې . a = د کانتې یا اړخ اوږدوالی ، e = د ګوډونو کڼ(تعداد) f = د هواروکڼ. k = بدن اړخونوکڼ، l = د هوارو اړخونو کڼ، m = په هرکونج کی د کانتو یااړخونو کڼ، α = د ګاونډیو هوارو ترمنځ کونج، r = د چاپیرګردي وړانګه ، ϱ = د دننۀ ګردي وړانګه ، O = پاس هواره یا پورته یا ټوله هواره ، V = ډکي.

پنځه یوون ډیرهواریز (Einheitspolyeder) لاندې (a = 1) ارزښتونه لري:

Polyeder	r	ϱ	O	V
Tetraeder	0,6124	0,2041	1,7321	0,1179
Hexaeder	0,8660	0,5	6	1
Oktaeder	0,7071	0,4082	3,4641	0,4714
Dodekaeder	1,4013	1,1135	20,6457	7,6631
Ikosaeder	0,9511	0,7558	8,6603	2,1817

د اویلر د ډیرهواریز جمله، د په خوبنه ډیرهواریز لپاره یو ټاکنمساوات راکوي، د ګوډګنیون e ، اړخګنیون k او هوارګنیون f لپاره:

د اویلر ډیرګوډي یا پولوئید جمله : $e + f - k = 2$

په هرصورت داجمله یواځي د کونوکس یا ننوتو پولوئید یا ډیرهواریز لپاره باور لري، یعنی هغه ، چی په کومو کی ټول نیمي د بدن په دننه کی ځغلي، یعنی منظمو ډیرهواریز لپاره.

بیلګي:

کوادر : $8 + 6 - 12 = 2$

اوکتائید : $6 + 8 - 12 = 2$

دوديکائيد $20 + 12 - 30 = 2$

غونډوسکه یا غونډاری

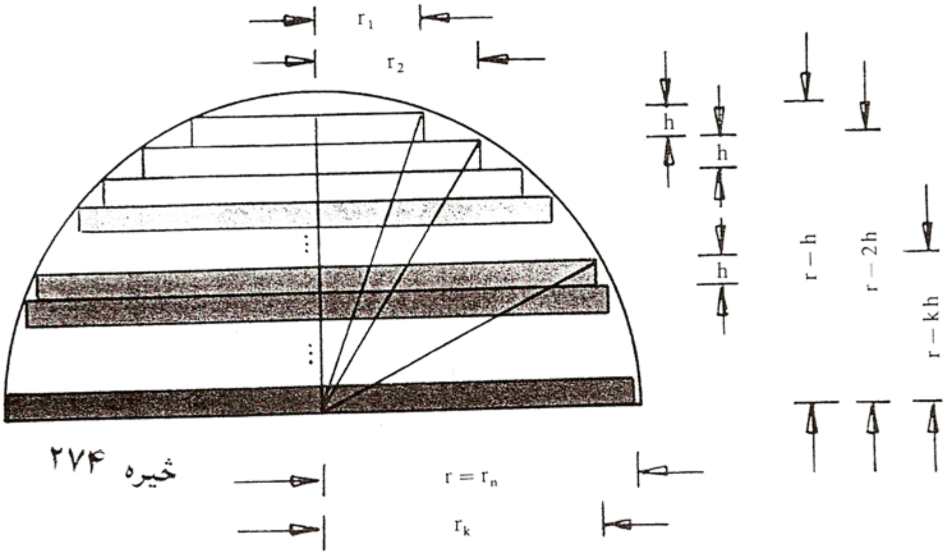
ما خو کرې ته په لومړي سر کې غونډۍ نوم ایښولی وو، خو سم یې غونداری یا غونډوسکه ده، چې کره هم په عربي ژبه کې غونډوسکې ته وایي.

د هندسی له مخې غونډۍ (غونډیغاړې) د ټولو ټکو هغه ځاي دی، چې له یوه په

کلکه یاکره ټاکلی ټکی M څخه چی د غونډۍ منځټکی بلل کیږی همغه واټن r ولري.

غونډۍ نه یوائې د جګدرجئیز یا لوړ سیومتري (هره نیمی په همغه وخت کی سیومتري محور دی) له امله د بدنونو ترمنځ یو ځانګړي رول لري، بلکه هغه مور انسانانو لپاره هم د مانا ډکه ده، ځکه چی ځمکه (نزدې) یو غونډۍ شکل لري . د بیلګي په توګه په کارتوګرافي کی ځمکه اوږدګردیو (میریدیانی Meridiane) باندې ویشل کیږي. په مریدیانی باندې هر واټن د ځمکی وړانکی R ته بیا یوه لینده په ګوته کوي. د ډکي ټاکلو لپاره بیا غونډۍ) ګردی استوانی ته ورته) په کوچنیو ستن ډوله چیتروګانو (کردې ټوټی، چی مور ورته په هسکه مینه کی چیترو وایو . د مات منګی څخه ګردې ځیرې جوړیږي، ټوټه ده) ټوټه کیږي، چی جګوالی یی $h = r / n$ دی. د یوګونو چیتروګانو وړانګو لپاره باور لري یا صدق کوي(د پیتاګوراس جمله) :

$$r_1^2 = r^2 - (r-h)^2 \Rightarrow V_1 = \pi r_1^2 h$$
$$r_2^2 = r^2 - (r-2h)^2 \Rightarrow V_2 = \pi r_2^2 h$$



شیره ۲۷۴

لوړلیز

$$r_k^2 = r^2 - (r - kh)^2 \Rightarrow V_k = \pi r_k^2 h$$
$$r_k^2 = r^2 - (r^2 + k^2h^2 - 2rkh)$$
$$r_k^2 = 2rkh - k^2h^2$$
$$r_k^2 = \frac{2r^2 \cdot k}{n} - \left(\frac{rk}{n}\right)^2$$
$$r_k^2 = r^2\left(\frac{2k}{n} - \frac{k^2}{n^2}\right) \Rightarrow V_k = \pi r^3\left(\frac{2k}{n^2} - \frac{k^2}{n^3}\right)$$

$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) - \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{n^2}\left(\frac{n}{2}(n+1)\right) - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{3} + \frac{3}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right]$$

که د «ستنګیو» ګڼون تلم پورته لاړ شي، نو په نوکانو کی لمړی ترم د مانا دی او لاس ته راځي

نیمغونډاری

$V_{نیمغونډی} = (2/3)\pi r^3 \Rightarrow V_{غونډۍ} = \frac{4}{3}\pi r^3$

د غونډي د پاس هوارې د شمیرلو لپاره دا په خورا زیاتو برخه هوارو ویشي. که دا د ګوډ یا کونج ټکي د منځټکي سره ونښلول شي نو دا یو د اهرامشکل بدن ځان ته غوره کوي د r جګوالي سره.
د دې ټولو اهرامونو ډکیو زیاتون د غونډې ډکی ورکوي. دا د خورا زیاتو هوارو لپاره په نزدې توګه بسیا کوي، که چیرې څوك په پام کی ونه نیسی، چې دا سره د کمو استنثاوو کتل کیږي چی پوره هوار نه دي. برسیره پر دې باید د دې بنسټ هوارو زیاتون د غونډې پاس هوارې سره برابر وي. له دې امله باور لري

غونډي V = د اهرامونوډکیو زیاتون = r. (3 / 1) .

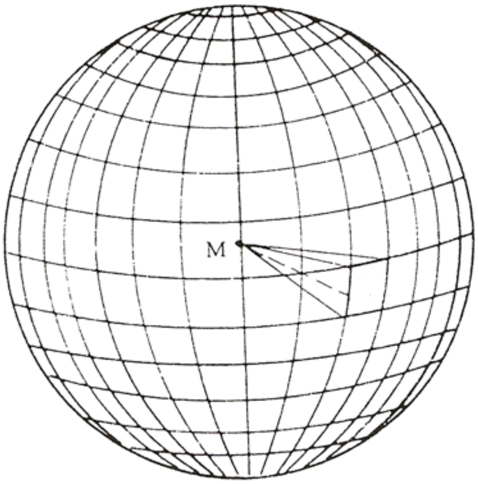
د غونډي پاس یا ټوله هواره

$(1/3) . r . O_{غونډۍ} = د\ غونډۍ = (4/3)\pi r^3$

$O_{غونډۍ} = د\ غونډۍ = 4\pi r^2$

په ټولیزه یا عمومي توګه باور لري

$O = 4\pi r^2 \quad , V = (4/3) \quad r^3$



څیره ۲۷۵

پیلبیلګه:

منځنی ځمکوړانګه ۶۳۷۰ کیلو متره ده . د ځمکی پاسهواره او ډکی څومره دي؟ ځمکه څومره کتله لري،که د ځمکي منځنی سختوالی $5{,}514\ g/cm^3$ د مخه ونیول شي یا فرض شي؟

$O = 5{,}10 . 10^8\ km^2$,

$V = 1{,}08 . 10^{12}\ km^3$;

$m = 5{,}97 . 10^{24}\ kg$

د خالیغونډي ډکی همداسی لاس ته راځي لکه د یوې خالي استواني ډکی (د مخه لوستل شوی دی) د دوه یو په بل کی پرتو کونځینتري غونډیو توپیر یا کمون:

$$V_{خالیغونډۍ} = (4/3)\pi(r_1^3 - r_2^3) \ .$$

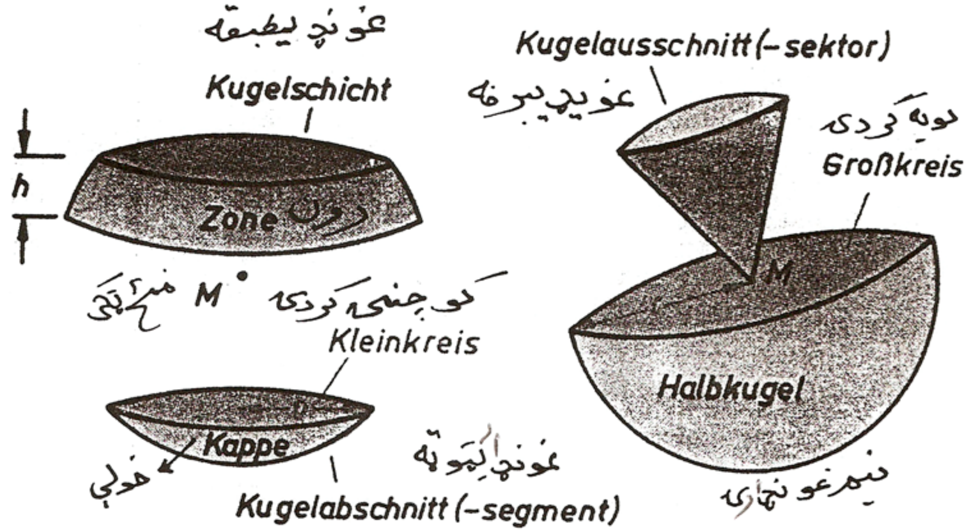
پیلبیلګه:

د اوسپنی خالیغونډۍ کومه کتله لري ، که د باندنینیمی یي ۱۲ سانتیمتره او

د دیوال پنډوالی یی ۸ ملیمتره (دیبنتی یا سختوالی یا ټینګوالی) وي؟

$V = (4/3)\pi(6^3 - 5,2^3) = 315,8\ cm^3; \quad m = V \cdot \rho = 2463,25\ g$

اوس غونډیبرخی په پام کی نیسو. په ټولیزه توګه لاندې بنسټیز فورمونه مخ ته لــ:



خیره ۲۷۶

ددې یوه ټوټه یا زیاتې ټوټې داسی منځ ته راځي ، چی غونډی د یوې یا یا زیاتو ګردیو له خوا غوڅه شي. که داغوڅی د غونډي له منځټکي تیر شي، نو دوه نیمغونډي او یوه لویه ګردی د غوڅهوارې په ځیر منځ ته راځي. که غوڅی له منځټکي تیر نه شي، نو دوه غونډیټوټی منځ ته راځي. د دوه داسی غوڅیو ترمنځ یوه غونډیطبقه منځ ته راځي. که له غونډي یو مخروط ډوله ټوټه رابیله شي، نو غونډیبرخه منځ ته راځي.

پرتله کړی) د دواړو خولیو د یو بل سره مساوي کیښوولو له لارې لرو:

$$\varrho_1^2 h_2 - \varrho_2^2 h_1 + h h_1 h_2 = 0$$

دا بالاخره مور لاندې ته لاربښودوي:

$$V = \frac{\pi h (3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)}{6}$$

د غونډیبرخي ډکي یا غونډیبرخي حجم داسی لاس ته راځي، چی د یوه مخروط او او د ګردیټوټی ډکي سره زیات کړو:

$$V = \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3} + \frac{\pi \varrho^2 (r - h)}{3}$$

دلته بیرته اړیکی (*) کارول کیږي، چی په لاندې ډول څیره بدولون ترې لاس ته راځي $\varrho^2 = h(2r - h)$. په دې توګه د ϱ^2 لپاره ځاي په ځاي کوي او له دې لاس ته راځي :

$$V = \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3} + \frac{\pi h (2r - h)(r - h)}{3}$$

$$\Leftrightarrow V = \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3} + \frac{2\pi r^2 h}{3} - \pi r h^2 + \frac{\pi h^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{2\pi r^2 h}{3}$$

له (*) د په مرسته ځکه په ځای نښی لخه لاس ته راځی

$$V = \frac{2}{3}\pi h \left(\frac{\varrho^2 + h^2}{2h}\right)^2 = \frac{\pi}{6h}(\varrho^2 + h^2)^2$$

د غونډیټوټی پوښهواره M ، چی د غونډیخولی نومیږي او یا کاردینالخولی بلل کیږي، په همغه فکر شمیرل کیږي لکه د غونډې پاس یا ټوله هواره . که د غونډیبرخی د ډیرو اهرامونو د زیاتون په څیر په پام کی ولرو، نو د هغی بنسټهواره همغه غونډیخولی ده. (کړی شو چی غونډیخولی په ځاي کپره ولیکو) نو لرو :

$$Mr / 3 = 2\pi r^2h / 3 \quad \Leftrightarrow \quad M = 2\pi rh$$

که د (*) له لارې بدل شي، نو د غونډېکپرې لپاره لاس ته راځي :

$$M = \pi .(\varrho^2 + h^2)$$

د ټولهوارې د لاس ته راوړلو لپاره دې بیا یواځې د بنسټګردی هواره ور زیاته شي. د غونډېطبقی پوښهوارې ته د غونډېزون Kugelzone وایي. دا د دوه کپرو له کمون څخه لاس ته راځي. ټوله هواره یا پاسهواره یې داسې لاس ته راځي، چې بنسټهواره او سرپوښګردي هوارې وززیات شي. د غونډېټوټې پاس هواره داسې لاس ته رځي، چې د غونډېکپرې هوارېته د مخروطپوښ وززیات شي.

بادر
د غونډېبرخو لپاره لاندې فرمولونه لري :

Kugelabschnitt: (غونډې خولۍ)

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h^2(3r - h) = \tfrac{1}{6}\pi h(3\varrho^2 + h^2)$$
$$M = 2\pi r h = \pi(\varrho^2 + h^2) \quad \text{(Kugelkappe)}$$
$$O = 2\pi r h + \pi\varrho^2 = \pi(2\varrho^2 + h^2)$$

Kugelschicht: غونډې طبقه یا چیترو (غونډېزون)

$$V = \tfrac{1}{6}\pi h(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)$$
$$M = 2\pi r h \quad \text{(Kugelzone)}$$
$$O = \pi(2rh + \varrho_1^2 + \varrho_2^2)$$

Kugelausschnitt غونډېبرخه یا سوځی

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{6h}(\varrho^2 + h^2)^2$$
$$O = \pi r(2h + \varrho)$$

بیلګه:

۱ – د پنیرخرخ د یوه غونډېطبقي فورم یا بڼه لري. د هغه پاس هواره او ډکی وشمیرئ، که وي : $\varrho_1 = \varrho_2 = 25$ cm او $h = 20$ cm.

$$V = (20\pi / 6)(3.25^2 + 3.25^2 + 20^2) = 43458,70 \text{ cm}^2$$
$$= 34,458 \text{ dm}^2$$

وړانګه r د پیتاګوراس د جملي په مرسته لاس ته راځي :

$$r^2 = \rho_1^2 + (h / 2)^2 \Rightarrow r^2 = 25^2 + 10^2 \Rightarrow r = 26,93 \text{ cm}$$

نو لرو

$$O = \pi (2.26,93.20 + 2.25^2) = 7310,59\text{cm2} = 73,11 \text{ dm}^2$$

۲ – یو دلوبی لاټو یا لوبی څرخی د غونډېټوټی بڼه لري د ټولجګوالی $r = 16$ cm

او سور $b = 2\rho = 10$ cm سره. د هغه ډکی او پاسهواره څومره لوي دي؟

د خولی جګوالی د پیتاګوراس د جملی په مرسته لاس ته راځي :

$$(r - h)^2 + \rho^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = - 2rh + h^2 + \rho^2 = r^2$$
$$\Leftrightarrow h^2 - 2rh + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow h^2 - 32h + 25 = 0$$

د دواړو اوبیو یا حلونو $h_1 = 31,2$ cm او $h_2 = 0,8$ cm سره.

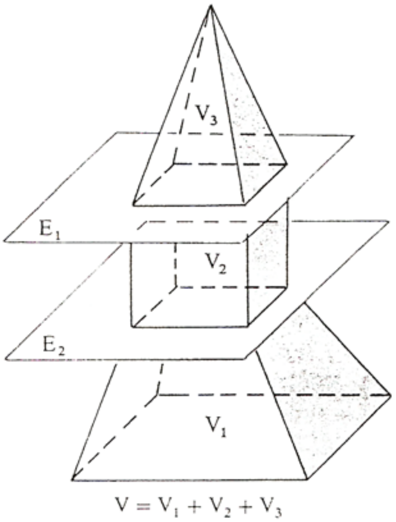
داچی $h < r$ ، نو باید یواځي دوم اوبی یا حل د کارونی یا ګټور وي. له دې امله لاس ته رځي

$$V = 2\pi .16^2 . 0,8 : 3 = 428,93 \text{ cm}^3$$
$$O = 16\pi(2 . 0,8 + 5) = 331,75 \text{ cm}^2$$

په خوښه جوړشوي یا فورم شوي بدنونه

لکه څنګه مو چی زیات تر پام تیر شو، ګټوور دی چی د یوه پیچلي بدن د ډکي یا پاسهوارې د شمیرلو لپاره دا بدن په ګټوره توګه یا هدفمند ډول ټوټي ټوټي کړو.

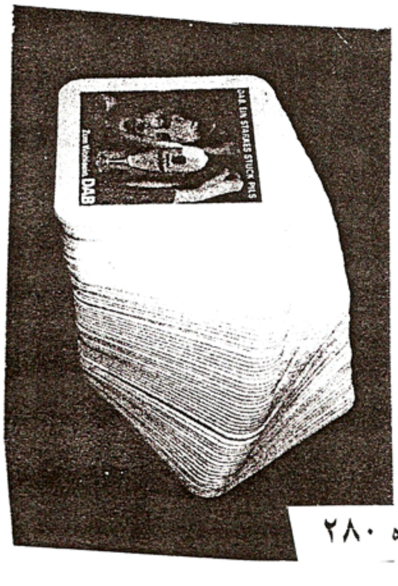
په دې ډول ساده برخه بدنونه منځ ته
راځي، کوم چې ض معلومو فرمولونو
له لارې شمیرل کیدی شي.



څیره ۲۷۹

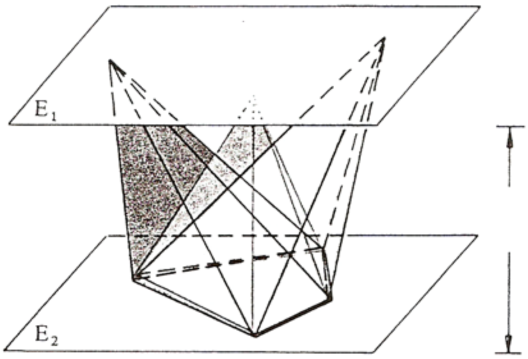
بیلګې :
ددې څیره شوي بدن ډکی له یوه پڅ
اهرام، کوادر یا غبرګاړخیز یا مکعب
او یوه اهرام څخه لاس ته راځي.دا
جوتیږي، که بدن په دوه غوڅیو په
هوارو E_1 او E_2 ټوټه شي .

د بیاتیونی له لارې کیدی شي چې
زیات بدنونه یوبل سره پرتله یا
مقایسه شي(مخروط، اهرامونه)
د ګیلاس اینبولو ټوټې(داسې ډبل
کاغذونه دي چې د پیالیلاندې یا
ریمکابي یا پشکاب په څیر وي او
ګیلاسونه پرې اینبوول کیږي) چې
یو په بل اینبول شوي په پام کی
نیسو. د دې ټوټو د څرخولو ، یا
ځاي بدلولو له لارې جګوالی او
ډکی نه بدلیږي. له دې منځ ته
راغلی پوړی په پام کی نه نیول
کیږي، ځکه چې په تیوري کی



څیره ۲۸۰

دا بدن د ناپای زیاتو طبقو څخه جوړ دی، چی پنډوالي یی په پام کي نه نیول کیږي د دې نور ورزیات استعمال د کاوالیری Cavalieri پرنځیپ دی



جمله :

دوه بدنونه همغه ډکی یا برابر ډکي لري، که د هغو ټول پراته غوڅي په همغه واټن بنسټهوارې ته پراته وي.

په دې کی ضرور نه دی چي غوڅهوارې دی کونګروانیځ وي!

څیره ۲۸۱ : دا بیاتي شوي اهرامونه ډکي برابر دي، ځکه چی همغه جګي او برابر بنسټهوارې لري: V = (1 /2)G.h د کوچنیو واټنونوسره هره غوڅهواره چی د بنسټهوارې سره غبرګه وي، په اهرامونوکی هواربرابر غوڅهوارې خوړوي

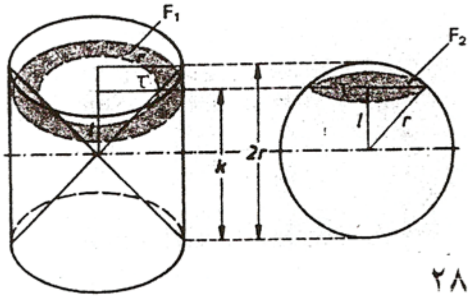
دا د غونډیډکي شمیرلو لپاره یو ښکلی میتود رامنځ ته کوي. د یوې ګردي استوانی یا ګردیټوټی څخه چی وړانګه r لري او 2r جګ دی دوه د څوکو یا ککرې له لارې یو بل ته مخامخ مخروطونه غوڅوي (یو دیابولو) د r = h سره. داپاتی خالیفورم یوه د شګو ساعت پوښ راپه ګوته کوي. د یوې دومی همغی سره برابر ې ګردي استوانی یا ګردیټوټی د وړانګي r په اندازه یو غونډی راغوڅوو. د سیومتري له امله بسیا کوي که لاندې نیمغونډی او د «شګو» ساعتنیمی تر څیرنی لاندی ونیسو. هره غوڅهواره یوه بسټهوارې سره غبرګه هواره راکوي، په غونډي کی ګردی په شګوساعتپوښ کی

ګردیګوته یا ګردیکړی. دلته دې 'r د دیابولو څخه منځ ته راغلي ګردۍ وړانګه وي. r د غونډیغوڅیګردي وړانګه .

د هوارو لپاره چې واټن 1 له همغه بدن منځټکي ولري، باور لري:

$$F_S = \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi (r^2 - r'^2)$$

$$F_K = \pi r^2 = \pi (r^2 - 1^1)$$



څیره ۲۸۲

د وړانګي جملی څخه، برسیره په دې لاس ته راځي: (د شګوساعت)

$$r' / r = 1 / r \Rightarrow r' = 1$$

$$\Rightarrow F_S = \pi (r^2 - 1^2)\, F_K$$

دواړه بدنونه ګورو چې ډکیمساوی یا ډکیبرابر دي.

اوس د استوانی ډکی $V_Z = \pi r^2 h = 2\pi r^3$ دی، ځکه چې $h = 2r$ دی .

د دیابولو ډکی دی :

$$V_D = (2\pi r^2 / 3).(h/2) = \pi r^2 .h / 3 = (2/3)\pi r^2$$

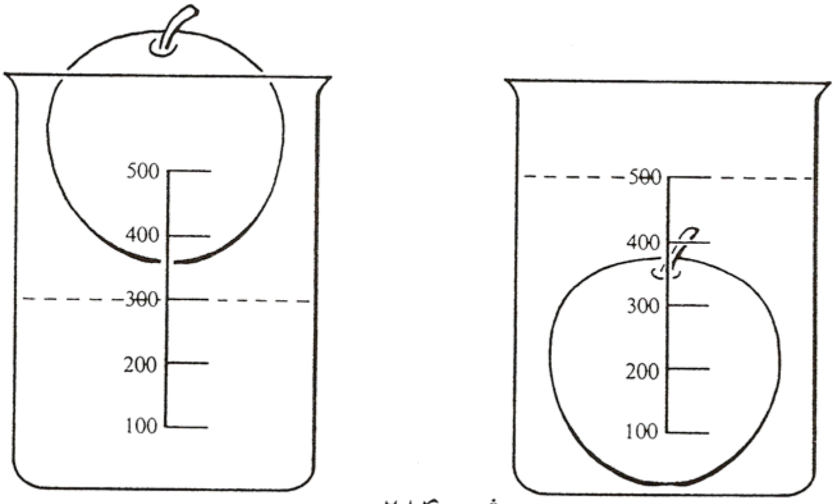
او له دې سره د شګوساعت – او نیمغونډي ډکی :

$$V_K = V_Z - V_D = 2\pi r^3 - (2/3)\pi r^3$$

$$V_K = (6/3)\pi r^3 - (2/3)\pi r^3 = (4/3)\pi r^3$$

د پوره نامنظم شکلونو ډکی د شمیرپوهنی له لارې یا هیڅ نه شمیرل کیږي او یا پوره ټیك د پیچلو شمیرنپوهنو متوضو سره هم نه شمیرل کیږي. لکه د یوې منې یا د یوه

الو ډکی یواځي فزیکی متودونه یا طریقی مرسته کوي چی ډکي یی وشمیرل شي.
لکه په لاندې ښیرو کي ، ځي روښانه شوی دی.



ښیره ۲۸۳ ښیره ۲۸۴

تمرینونه

۱ - د هغه بدن ډکی ښومره لوي دی ، چمنځ ته راځي، که د مکعب په هره هواره یو ولاړ اهرام کیښول شي د s = a سره؟

۲ - یو تیترائیدر ځلورهوایز بدن او یو غونډی برابر پاسهوارې لري. د هغوي ډکی په کوم تناسب یو بل سره پراته دي یا کومه ځانییونه یو بل سره لري؟

۳ - هر منظم پولوئید لپاره یوه دننه غونډی شته . چی د هغه هره هواره په منځښکي کی لمس کوي. ددې وړانګه دی r وي. د پولوئید ډ ګی اوV او O پاسهوارې V = O.r / 3 لپاره دلایل راوړی.

پام وکړی چې پولوئیدر په اهرامونو ټوټه شي چې وړانگه r ولري، په
ډول چې د پولوئید هر اړخهواره د داسی یوه اهرام بنسټهواره وي.

۴ – د المان د پارلمان په سر منه او اټیران چې له طیلا جوړ دي د پارلمان د
ډانگ سره غبرگ د قدرت نخښه جوړوي. دا د پارلمان منه به څومره
وي، که دا د پاکی طیلا څخه جوړ وي(~ 10 cm ; $\rho \sim 19{,}3$ g / cm³
اټیران وزن ثابت یا ځای په ځای پاتیږي)؟

۵ – یوه غونډۍ، توته، اهرام (د هغو بنسټهواره) برابر وړانگی لري، د اه
غونډۍ جگوالی یا جگی داسی وټاکی ، چې الف) همغه ډکي لري» د
برابره پاسهواري لري.

۶ – د یوه غونډۍ ډوله تیلو څاڅکي څخه، چې ۵ میلي متره نیمی لري، له
توئیږي د یوې گردی ډوله تیلو پرده جوړوي، چې نیمی ئی ۱ متر . دا
څومره پنډه ده؟

۷ – د یوې سابونپوښکی دیوال به څومره لوي وي، چې دباندنی نیمی یی
سانتي متره وي، کوم چې له څاڅکی جوړ دی، چې نیمی یی ۵ میلي م

۸ – یوه د ښیښی غونډۍ د دابضنی نیمی سره، چې ۱۲ سانتي متره دی ۲
وزن لري یا درند دی. د هغی دیوال څومره لوي دی ($\sim 2{,}6$g / cm3

۹ – یو هوا بالون یو ۲۵ متره نیمی لري.

الف) دا دننه سمخ یا غار یی څومره دروند دی، که د یو مربع متر و
وزن ۴۵ گرامه وي؟ ب) ډکی څومره وزن لري که
هایدروجن ($\rho = 9.10^{-5}$ g / cm³) د ډکي مادې په څیر وکارول شي؟

۱۰ – یو مکعب کی یو غونډاری یا غونډۍ د خورا لوي ډکی سره خوندي
په یوه غونډاري چې خورا کم ډکی ولری راگیر یا خوندي کیږي.د م
اړخ اوږدوالی 5 cm دی

الف د ټول تن غوځې ځېره وباسی .

ب) د دواړو غونډارو ډکی او پاسهواره وشمیری .

۱۱ – د لاندې هوايي بدنونو ډکي او پاس هوارې څومره لويي دي:

الف) سپوږمی (r = 1735 km)

ب) مارس (r = 3430 km)

پ) وینوس (r = 6305 km)

ت) جوپيتر (ر (r = 71800 km)

۱۲ – د کورکغونډي(ρ = 0, 25 g / cm³) د ۳۶ سانتي متره نيمي سره يوه غونډيډوله د پارې زرې(ρ = 11,4 g / cm³) لري. دا د پاربزرې څومره لوي دی، که غونډی تر نيمايي په ابو کی ډوبه شي؟

۱۳ – د يوه لوي سرې سرې ۴۰۰ میلیونه غونډيډوله د سروپونکی لري، هر يوه د نيمي 0,3 mm سره. د ټولو پونکیو ګډه پاسهواره څومره ده؟

۱۴ – يو غونډی ، چی وړانګه يی r = 10 cm ده، د يوې هوارې ځخه په ۳ سانتي متره ، له منځ يا کوکز ځخه، واټن غوځيږي. د دواړو برخو غوځهوارې او ډکي وشميری.

۱۵ – د پاتی یاد نايادو برخو M,V,h او r د لاندې غونډيبرخو لویوالی وشميری

a) r = 6 cm ; h = 5 cm b) M = 50 cm² ; h = 3 cm

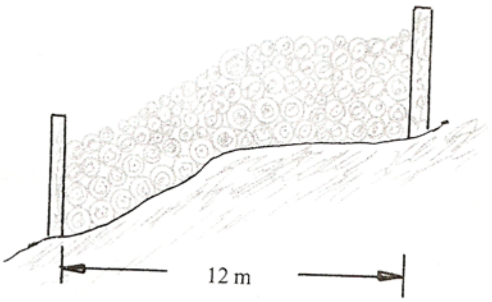
c) h = r = 7 cm d) M = 700cm² ; r = 10 cm

۱۶ – د ځمکی پاسهوارې کومه برخه د ۱۰۰۰۰ متره جګوالی ځخه ليدل کيدی شي(د ځمکی وړانګه ۶۳۷۰ کیلومتره ده)

۱۷ – د يوه غونډي نيمی په ځلورو برابرو برخو ويشل کيږي. په ټوټهټکو کی په نيمی ولاړې درې هوارې اچول کيږي. په کوم ځانښیونه يا تناسب کی الف) د پوښهوارې ، ب) د راپيدا شوو يا منځ ته راغلو غونډي برخو

سره پراته دي؟

۱۸ – په یوه غونډۍ کی، له منځ ځخه لیدلو یا کتلو سره ، هوایی(دلته مطلب د غونډۍ ترمنځ هوا یا د هواډکی دی) پرسیدنه، د دریواړو کواوردیناتو ځخه برابردي. که دا یو له بل توپیر ولري، نو د الیپسوئید ځخه غبرګرو، چی اصلی محورونه یی a,b او c دي. د ایلیپسوئید ډکی د فرمول $V = (4/3)\ a.b.c$ له مخی شمیرل کیږي. ځکه په رینښتونی غونډۍ نه دی، بلکه یو الیپسوئید، چی اصلي محورونه یي $a = c = 6378$ km (د اکواتور وړانګه) او $b = 6357$ km (قطبي وړانګه) لوي دي. (که په کلکه ونیول شي نو د اکواتوروړانګو ترمنځ یو کوچنی توپیر شته) د ځمکي ډکی وشمیری او د مخ ته تیر غونډۍ او غونډۍ برخي کی لوستلو سره یی پرتله کړی)



ځیره ۲۸۵

۱۹ –په یوه زوړندي یا پیچومی باندې ۱ متر اوږد لرګی ډیری شوی، لکه په ځیره ۲۸۵کی چی لیدل کیږي. ځومره د هوامتر لرګی دا 1,20 m جګه د لرګوډیری لري.

۶ - تجارتیشمیرنه

ځانتیونیز یا متناسب او په څټ یاچپه ځانتیونیز یامتناسب بلواك (فنکشنونه)، دریقضیه

په ورځني ژوند کی دې ته اړتیا پیښیږي چې ورکړ شوې لويي (يا ډيروالي) يو د بل سره انډول (مقايسه) کړای شي. د بيلګي په توګه د څپليو لويوالی د ځمکی ارزښت، د میاشتني معاش يو د بل سره انډول. د دوه داسی ګڼونو a او b د انډول لپاره په زيات وخت کي کمون a - b کفايت کوي. دلته نو بيا د دې دوه ګڼونو a او b له توپير څخه غږیږو. په ډيرو وختونو کی دا بسيا (کفايت) نه کوي چې د دوه ګڼونو کمون د هغوله توپیر څخه لاس ته راوړو.

پیلبیلګه:

دوه پټي يو $1800\ m^2$ او بل $2000\ m^2$ يو له بل $200\ m^2$ توپير لري. دا د پټيو لويووالی که $400\ m^2$ او $600\ m^2$ وي، نو ترمنځ کمون هم همدا دی. څه به ووايو که د دواړو ځمکو ويش د يوه ميراث ويش وي؟
هر خل به دا يو $200\ m^2$ ډيره لاس ته راولي نسبت و دې بل ته. ګورو چې په دوم ويش کی $400m^2/600m^2$ د لمړي ميراثخور لپاره تاوان نسبت و لمړي ويش $1800m^2/2000m^2$ ته زيات دی.
دا په دې مانا، چې که هرڅومره ځمکه لويه وي نو په همغه اندازه د دواړو ميراثخورو ترمنځ توپير کميږي.

دا مخته پرته بيلګه ښايي، چې په داسی حالتونو کي دانډول لويي يو بل سره په تناسب يا ځانتيونه کی راوستل کيدي شي

تعريف: که a او b دوه له صفر مختلفی لويي يا ګڼونه وي، نو a / b ويش يا a: b د a تناسب يا ځانتيونه و b ته بلل کيږي.

بيلګه: ۱ – د ځمکو $400m^2$ او $600m^2$ لويوالی يو بل
سره $400/600 = 0,6 = 2/3$ تناسب جوړوي يا يو بل سره ځانيسي. دا
کوچنی ځمکه (پټی) د لوي پټي 66,6% جوړوي.

۲ – د پټيو $1800m^2$ او $2000m^2$ لويوالی يو بل سره په

$$1800/2000=0,9=9/10$$

تناسب يا ځاننيونه کی پراته دي. دا کوچنی پټی د لوي پټي 90%
جوړوي.

۳ – د مودل ګاډي TT لاين (ليکو يا پټليو) او الماني ګاډو د ليکو يا پټليو
سور يو بل سره په لاندې تنساب کی پراته دي

$$12mm/1435mm = 0,00836 \sim 1/120 .$$

۴ – که يو کړندی په 30 دقيقو کې 70km ځغلي، نو د وهل شوې فاصلې
سرعت تناسب ووخت ته په لاندې ډول دی.

$$s/t = 70km / ½ h =140[km/h] = 140km/h .$$

۵ – د يوه هوموژين بدن(د مساويډوله موادوجوړ) سختوالی ρ د هغه د
کتلی(g) ځاننيونه يا تناسب دی ، د هغه بدن ډکي(cm3) ته

$$\rho = m / V [g / cm^3]$$

د يوه لرګي بلاک سختوالی (کثافت)، چی درې کيلو ګرامه دروند او څلور
زره مکعب سانتيمتره ډکی (حجم) لري، $0,75 g / cm^3$ دی

$3000g / 4000 cmw = 0,75 g/cm^3 =$ سختوالیρ.

موږ غواړو، چی اوس ځانونه د بلواک دوه ځانګړو تيپونو يا ډولونو ته متوجه کړو،
دا څنګه، چی موږ په ورځني ژوند کی ډېر واره ورسره مخامخ کيږو، چی له دې
امله يي پيژندنه څموږ لپاره خورا مهمه ده.

پیلبیلګه:

۱ – د یوه نل څخه په 3 دقیقو کی ۱۲ لیتره اوبه راوځي. څو لیتره اوبه به په یوه ورځ کي له دې نل څخه راووځي، څومره په یوه کال کی؟

که په درې دقیقو کي ۱۲ لیتره اوبه له نل څخه راوځي، نو په یوه دقیقه کی باید ۴ لیتره اوبه او په ۲۴ ساعتونو یا ۱۴۴۰ دقیقو کی

طبعاً $5760 = 4 \, . \, 1440$ لیتره اوبه راوځي. او په دې تعقیب په یوه کال کی $2102400 = 360 \, . \, 5760$ لیتره او یا ۲۱۰۲۴ هیکتولیتر اوبه بهیږي.

۲ – څلور کارګر یو ه بنسټ کنده په ۹ ساعتونو کی راپورته اوکانکریټوي.

څومره وخت درې کارګره ضرورت لري او څومره وخت به ۱۰ کارګر ضرورت ولري چی دا ځمکه راپورته کړي اوهم کانکریټ کړي؟

که څلور کارګره ددې لپاره ۹ ساعته ضرورت لري، نو یو کارګر ددې لپاره حتماً زیات وخت په کار لري، یعني څلور خله زیات وخت، پس ۳۶ ساعته، نو درې کارګر په تعقیب $36 : 3 = 12$ ساعته او لس کارګر $36 : 10 = 3{,}6$ ساعته = درې ساعتونه او ۳۶ دقیقي ضرورت لري چی دا ځمکه وکني او کانکریټ کړي.

په دواړو حالتونو کی یو نظم منځ کی پروت دی، دقیق په لمړی بیلګه کی فنکشن وخت —> د اوبو مقدار او په دومه بیلګه کی فنکشن کارګر —> د کارساعتونه.

مګر داوړه فنکشنونه پوره په خپل راوړون ډول کی یو له بل توپیرېږي:

۱ – څومره ډیر وخت چی تیرېږي په همغه اندازه زیاتی اوبه له نل بهیږي.

۲ – څومره چی کارګر زیاتیږي همغومره د کار وخت کمیږي

دې ته ورته د ورکړشوو فنکشنونویا بلواکو شمیرپوهنیزیا ماتیماتیکي لیکدود د فنکشن ورکړدود مختلف لیدل کیږي.

۱- فنکشن f : وخت (دقیقه) ⟵ د اوبو ډیری (ل)

- د فنکشن لیکدود (فنکشن لیکلوقانون) لري $x \to 4x$

په دې ډول د فنکشن مساوات داسی برېښي $y = 4x \; ; \; x \in Q^{+}_{0}$

۲ - فنکشن g : کارګر (څو داني) ← د کاروخت (ساعت h)

د فنکشن لیکدود لري x -> 36/x

په دې ډول د اړوند یا مربوط فنکشن مساوات داسې برېښي $y = 36/x ; x \in N$

تعریف:

یوه لویه x و هغې ته تنظیم شوې لوي y ته سیده متناسب سیده ځانتیونه (په نخښه کې $y \sim x$) بللکیږي که د هغوي تناسب یاڅا ننیونه (ویش) y / x تل یو ثابت ارزښت وساتي : یعنی $y / x = k$ وي.

بلواك(تابع) یا فنکشن $y = kx$ (ثابت $-k$) د تناسب یا ځانتیونی خلوونی یا فاکتور بلل کیږي.

یوه لویه هغې بلی تنظیم شوی لویې ته ناسیده متناسب ده یا ناسیده ځانتیونه کی ده، که د هغو څل تل یوثابت ارزښت وساتي: یعني

$$y.x = k \iff y = k/x$$

بلواك یا فنکشن $y = k/x$ چپه یا په څټ متناسب (antiproportional) یا په څټ ځانتیونکی بلواك یا فنکشن بلل کیږي.

متناسب فنکشن $y = kx$ د یوې لوي دوه برابره، نیم برابر، n –برابره پورې د بلی لویې هم دوه برابره، نیم برابره یا n–برابره پورې اړه لري.

په چپه یا په ځټ متناسب فنکشن y = k / x کی دوه برابره، نیم برابر ... n – برابره پورې د بلي لوي نیم برابر، دوه برابر ... 1/n–برابره تعلق لري(اړه لري) .
په چپه یا په ځټ متناسب فنکشن y = k/x کی د چپه یا ناسیده متناسبوالي ځخه خبرې کیږي. که متناسب او چپه یا په ځټ متناسب فنکشنونه په یوه کواوردینات کی انځور شي، نو لیدل کیږي چی متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون پورته کیدونکی او چپه یا په ځټ متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون لویدونکي دي (د مونوتون کلیمو لپاره دې ځما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي)

بیلګي :

۱ – سیده تناسب یا سیده ځاننیونه:

الف : په شي اخستلو کی د ډیري ارزښت سیده متناسب دی.

ارزښت(افغانی) ډیری(کلیوګرام)

ب : په تیزوالی یاسرعت کی وهل شوې لار د وخت سره سیده متناسب ده

s(km) –> t(s)

۲ – ناسیده تناسب یا ناسیده ځاننیونه

الف : یوې معلومی لار وهلو لپاره تعجیل هغه په بر کی نیولي وخت سره ناسیده متناسب دی: که هرڅومره تعجیل زیات وي په همغه اندازه وخت کمیږي.
ب : د وچو شودو د یوه ځرګند ټاکلي ټول وزن د وړونکوتیو ګڼنه ناسیده متناسب ده د هرې کوتی یویزوزن سره: که هرڅومره زیاتی کوتی په کار واچول شي په همغه ګڼون د کوتیو وزن کمیږي.

تعریف: د لاندې ډول a/b = c/d یا a:b = c:d مساوات د تناسب مساوات یا ځاننیونیز برابرون بلل کیږي (ویل کیږي چی a و b ته ځان داسی نیسي (یا داسی انډول کی ده) لکه c و d ته) دلته a او d د تناسب یا انډول

دباندني غړي دي او b او c د انډول دننی غړي. په هر تنساب کی د دباندنیو غړوځل د دننیو غړو د ځل سره برابر دی:

$$a / b = c / d \iff a . d = c . b$$

اوس ځان باوري کولی شو چی د دننیو غړو بدلول او یا د دباندینو غړو بدلول یو د بل سره په تناسب یا انډول کی تغیر نه راولي. کیدی شی چی ټول دنني غړي د دباندینیو غړو سره بدل شي:

$$a/b = c/d \iff a/c = b/d \iff c/a = d/b \iff b/a = d/c$$

له دې امله کیدی شي چی یو دبل سره برابر زیات تناسبونه یا انډولونه د یو په بل پسی راتلونکو تناسوبونو په څیر ولیکل شي:

$$a/b=c/d = e/f \iff a:c:e = b:d:f$$

دلته باید په پام کی وي چی ویش خانله صورت نیسي یعني تل د دوه ګڼونو.

بیلګي :

۱ – له 21 / 7 = 15 / 5 څخه لاس ته راځي 7.15 = 5.21 یا 7 / 21 = 15/5
یا 15/21=5/7 یا 7/5 = 21/15 .

۲ – د 2/3 = 4/6 = 8/12 لپاره لیکو 12:6:3 = 8:4:2

۳ – یو تناسب چی دننه او دباندې غړي يي یو له بل سره برابر وي ناپریکیدونکی تناسب بولو. په ناپریکیدنکی تنساب یا انډول a:m=m:b یا m:a = b:m

کی m منځنی متناسب انډولی بلل کیږي. منځنی متناسب د نورو دوو غړو a او b جیومتریکي منځ دی.:

$$a / m = m / b \iff m^2 = a.b \implies m = \sqrt{a.b}$$

د a = 16 او b = 9 لپاره m = 12 منځنی متناسب داسی دی:

16/12 = 12/9

۴ څلور انډولونه متناسب یا څانني‌ونیزڅنګه لیکل کېږي؟

18/x=8/5 <=> 18 . 5 = 8x => x = (18 . 5) / 8 = 11,25

په ترتیب تنساسب یا څانني‌ونه یا انډول کی باور لري: 5 / 8 = 18 / 11,25

زیات وخت مود تکست وظیفی د تناسبمساواتو (انډول برابرون) ته لاربنودوي، نو بیا درې ورکړشوو لویو ته څلورم تنساب یا انډول غوښتل کېږي. د داسي وظیفو لپاره سیده یا ناسیده تناسب یوه غوره رول لوبوي. داسي پوښتني د دریقضي شمیرني یا پاي(ختم) شمیرنی لاندې شهرت لري.
د دربقضي شمیرني اصلي پرابلم په دې کی دی، چی د وظیفي ورکول باید څرګند یا روښانه شي، چی ایا دا یوسیده متناسب او که چپه یا په ختې متنساب بلواك (تابع) یا فنکشن دی.

د دري قضي پوښتنی کولو څخه لاندې تکامل منځ ته راځي :
۱ – یوه د شرایطو قضیه، کومه چی ټولی ضروري ورکوني په ګوته کوي.
۲ – یوه د پوښتني قضیه چی غوښتونکی لو یه x متن کي یا خوندي لري او له هغي سیده یا ناسیده د ځواب تناسب ته تکامل ورکوي.
۳ – یوه پایقضیه، په کوم کی چی له یوه یوون(واحد) په ورته یامناسب ډیرون پاي ورکول کیږي.

پیلبیلګه:
یوه الوتکه له الف ځاي تر ب ځاي پورې چی ۸۰۰ کیلومتره واټن دی په ۶ ساعتو او ۴۰ دقیقوکی تی کوي، دا الوتکه به ۲۲۰۰ کیلومتره لار په څو ساعتوکی ووهي؟

د درې جملې له لارې يې ځواب:

الف – د شرايطو قضيه.......... 800km - 6h 40 min

يا............... 800km - 400 min

ب – د پوښتنې قضيه .. .. 2200 km - x min

پ – پايقضيه......... 200km - 400/4min = 100min

2200km - 11.100 min = 1100 min

دا الوتکه به په دې ترتيب د 2200km اوږده واټن لپاره

1100min = 18h20min

ضرورت ولري.

د دې وظيفه د ټيک ځواب لپاره ضروري نيوني دا وي چې سيده تناسب وپيژندل شي: هرڅومره چې د الوتلو واټن لرې کيږي په همغه اندازه الوتکه زيات وخت په بر کې نيسي.

يعنې 2200km اوږد واټن په داسې انډول يا تناسب کې دی لکه 400min و 800 km ته:

$$x / 2200 = 400/800$$

د اکويوالنځ فورم(څيرې –) اوړون له لارې ځخه ځواب x لاس ته راځي:

$$x = (400 . 2200) / 800 = 1100$$

۲ – ۴ کارگر د يوه ديوال وهلو لپاره پنځه ورځې ضرورت لري. د ناروغې له امله يو کارگر د کارلرې پاتيږي. دا راکمه يا راکوچنې ډله اوس څنګه مشغول ده؟ دلته يو ناسيده تناسب يا ځانيونه لرو:

هرڅومره چې کارگر کم وي په همغه اندازه وخت زياتيږي

ددریجملی سره شمیرنه	د تناسب سره شمیرنه
۴ کارګر – ۵ ورځي ۱ کارګر – ۵ . ۴ ورځي ۳ کارګر – ۳ / ۲۰ ورځي پس ۳ کاګر – $6\frac{2}{3}$ ورځي	غوښتونکی کاروخت x د ۵ ورځو سره داسی تناسب کی دی لکه ۴ کارګر و دريِ کارګرو ته $x/5 = 4/3 \Leftrightarrow x = (4.5)/3 = 20 / 3$ ورځي

یوځاي شوي دريِ قضیه:

د ۳۰ جوړه کالیو ګنډلو لپاره ۱۲ درزیان ۲۰ د کار ورځي ضرورت لري. څومره ورځي به ۱۰ درزیان د ۷۰ جوړه کالیو لپاره ضرورت ولري؟

لمړی دريقضیه	دومه دريِ قضیه
(سیده متناسب)	(ناسیده متناسب)
۳۰ جوړه کالي	۱۲ درزیان – ۲۰ ورځي
۷۰ جوړه کالي	۱۰ درزیان – x ورځي

هرڅومره چی کالی زیات وي همغومره زیاتی ورځي، هرڅومره چی درزیان زیات وي همغومره لږې ورځي

۱۰ جوړه کالی –	۱۲ درزیان –	ورځي
۷۰ جوړه کالي	۱۲ درزیان	ورځي
۷۰ جوړه کالي	۲ درزیان –	ورځي
۷۰ جوړه کالي	۱۰ درزیان	ورځي

پس لرو

$x = (20.7.6)/(3.5) = 56$ ورځي

تمرینونه

۱ – لاندې ځانښيونې يا تناسبونه ساده افاده کړئ

a) 200t : 2 kg　　b) 6 m : 6 km

c) 4km / 30min　　d) 3,2 t : 400dm³

۲ – يوه موټر د ۵۵۰۰ کيلو متره اوږدې لار لپاره ۳۸۵ ليتره ډيزل وسزول

الف) په دې تګلوړ ۵۰ ليتره ډيزل د څومره لار لپاره بسيا کوي؟

ب) د يوې ۴۳۰ کيلو متره لار لپاره به دا موټر څومره ډيزل مصرف کړي؟

۳ – که غواړو چې د يوه موټر سره د الف ټکی څخه و ب ته ورسيږو ، نو د ۶۰ کيلومتره په ساعت ته درينيم اعته ضرورت لرو. د الف څخه ب ته سرې په څومره وخت کي رسيدلي شي، که د موټر سرعت په لاندې ډول وي:

a) 50km / h　　b) 110 km / h?

۴ – يو ښار پلان د ۱ : ۱۰۰۰۰ تناسب يا ځانښيونه ورکړ شوی دی. لاندې واټنونه په رينښتونې څومره دی ؟

a) 5 cm　　b) 33 mm　　c) 1 dm

۵ – يو ۸۱ ګڼ څنګه په داسی په ۲ زياتونونو ټوټه کيدی شي، چې ځانښيونه يا تناسب يې داسی وي لکه : 4 : 5 ؟

۶ – د يوه ګڼ او ۵ کمون ځان نيونه يا تناسب و ۷ ته داسی دی ، لکه چې د ۵ کمون ودې ګڼ سره، چې ۴ ته ځا نيسی يا و ۴ ته تناسب يا ځانښيونه؟ دا ګڼ کوم دی؟

۷ – يو فاو وې موټر ۸۰ کيلو متره په ساعت کي ځغلي او په دې پسی په ۱۲۰ متره کی وروسته يو بی ايم وې موټر ۱۲۰ کيلو په ساعت کی ځغلي.

الف) بی ايم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چې د فاو وې څخه مخ ته شي؟

ب) بي ايم وې په دې وخت کی څومره واټن وهلی دی؟

پ) دا بی ايم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چي له فاو وې موټر څخه ۴۰

متره مخ ته شي ؟

۸ – د سونګ سکرو سوزلو له امله د کولنډیاوکسید غاز پیداکیږي. د سونګ سکرو او د راپیدا کولنډیاوکسید Kohlendioxid (Co_2) ترمنځ تناسب یا ځانښیونه 3 : 11 ده.

څو ګرامه سونګسکاره به ۱۰۰ ګرامه کولینډیاکسید رامنځ ته کیږي؟

۹ – له دریو یو په بل اغیزهمند غابنورڅرخي د ۴۸ ، ۳۶ همداسی ۱۶ غاښونو سره دا کوچنی څرخی ۴۰۰ وارې په یوه دقیقه کی ګرځي یا څرخی.

نور دواړه غابنورڅرخی څو واره څرخی یا ګرځی؟

۱۰ – ۹۰۰ تیرې، چی ۳۶ سانتي متره سور لري ۴۰۵۰ کیلو ګرامه وزن لري.

۱۱۰۰ تیرې به څومره وزن ولري، که د همغو موادو جوړې وي او سور یی ۲۴ سانتي متره وي؟

۱۱ – یو د زدکوونکو ورځپاڼه « هیلی »د رحمان بابا د لیسی څخه راوځی د دې لپاره چی د ورځپاڼو ۱۲۰۰ توکه وتړل شي ، څلور زدکوونکی ۳ ساعته کار پرې کوي.

څومره زدکوونکی په کار دې، چی ۲۱۰۰ توکه ورځپاڼی په ټیک دوه ساعته کی وتړي؟

په سلو کې – -Prozent ، په زرو کې – - Primille
ګټه– -Zins او د ګټې د ګټې شمیرنه Zinseszinsrechnung

مور د a / b یا c / d ډولونو انډولونه او یا په همدې ډول ویشنه په مساواتو و ازمایل. د ماتشمیرنې په چوکاټ کې(څما د شمیرپوهنې کتاب دې وکتل شي) به وښوول شي چې څنګه بنسټیز نظم په داسې ماتو کې ټاکل کیدی‌شي. د انډول یا مقایسې لپاره دا هم وړاندېکوولی شو چې دواړه مات لاندې په ګډ ماتلاندې چې 100 وي پراخ شي. دا کم له کمه په نزدې ډول په هر مات کې کیدی شي.

پیلبیلګه:

یو جوړ جامې، چې په ۲۳۰ افغانۍ پلورل کیدې، په ۴۰ افغانی ګرانی شي د ګرانښت تناسب یا څانییونه یی و اولنۍ ارزښت ته څومره دی؟

دا تناسب ۴۰/ ۲۳۰ کیدی شي نزدې په یوه مات چې مات لاندې یې «۱۰۰» وي انځور شي، دا کیدی شي چې د ویشنی له لارې داسی صورته ونیسي:

$$40 / 230 = 0{,}1739 \quad \text{پس} \quad 40 / 230 \sim 17{,}39 / 100$$

قیمتیدل د لمړنې قیمت 1739, 0 څله راکوي. داسې هم وایو چې قیمتیدل په سلو کې نزدې ۱۷ دي.

تعریف: د یوه بنسټیزارزښت G سلمه برخه ددې ګڼ 1 په سلو کې بلل کیږي، او ددې لپاره لیکو 1% د G دی G/100 , په همدې ډول % P له G

د ګټې ارزښت W = P.G/100 له لارې ټاکل کیږي، P په سلو کې جمله
او W په سلو کې ارزښت بلل کیږي.

بنسټ ارزښت G خان و 100 ته داسې نیسي لکه د په سلو کې ارزښت W د په سلو کې جملې P ته، پس

$$\frac{G}{100} = G / 100 = W / P = \frac{W}{P}$$

$$\Leftrightarrow G . P = 100 . W$$

د اخرنې مساوات څخه د فورم اړولو له لارې لاس ته راځي

جمله:

د په سلو کې ټاکنه	بنسټ ارزښت	په سلو کې ارزښت
P = 100 . W / G	G = 100.W/ P	W = G.P / 100

بیلګې:

۱ – د په سلو کې ارزښت	بنسټ ارزښت	په سلو کې ټاکنه
= 16,80 DM	د 120 DM	14 %

۲ – یو نفر باید د یوه نوي بایسکل لپاره DM 60 , 40 یعنی المانی مارکونه د مالیا لپاره (14%) ادا کړي

دا بایسکل څو ارزښت لري، بې له مالیا، او دا د مالیا سره څو ارزښت لري؟
که د 40,60DM په سلو کې ارزښت د په سلو کې ټاکنی 14% وي،

نو باید 40,60 / 14DM د 1% د بنسټارزښت برابر وي. په دې پسی
بنسټ ارزښت (= 100%) د G = (40,60 / 14)100DM = 290 DM
لاس ته راځي.
له دې سره بایسکل ۲۹۰ مارکونه بی مالیا ارزښت لري او ۶۰ ، ۳۳۰
ماروکونه د مالیا سره.
کید ی شي، چی سملاسی هم د مالیا سره ارزښت ته راشو، که د دې لپاره یو
بنسټ ارزښت د ۱۱۴ په سلو کی کینبول شي یا وضعه شي:

G = (40,60 / 14). 114DM = 330,60 DM

۳ - یو جوړ کالي چی ۱۵۰ مارکونه ارزښت لري په ۱۰ په سلو کی ګرانیږي، دا
کالي تر ډیر ځنډ نه پلورل کیږي، نو له دې امله یی بیا دوکانواله په ۱۰ په
سلو کی ارزانوي. پوښتنه داده، چی ایا داکالي به اوس هم ۱۵۰ مارکونه
ارزښت ولري، که څنګه؟
طبعاً نه ، ځکه چی ګرانوالی په ۱۰ ٪ مارکونو زیاتوالی یی په سرچینیز ارزښت
دی ، مګر دا ارزنښت یی په دې اوسني ارزښت، چی 150 + 150.10% = 165DM
په بنسټ منځ ته راځي. له دې امله دا کالي د ارزنښت وروسته اوس

165 - 165.10% = 165 - 16,50 = 145,50DM

مارکونه دی. که لوه وکړو دتوی بنسټ / ارزښت بیا ره د په سلوکی
ارزښت سمیرل کیږی، کیدی شی چی دا دیوه سانګل له لاری وشی.

بیلګي:
اول) د ۳۵۰ ماروکونو ۱۴ ٪ کی داسی شمیرل کیږي: 350.0,14 = 49 DM
دوم) که د ۴۵۶۸ کیلو ګرامه بنسټ ارزښت په ۲۲ ٪ کم شي، نو لاس ته راځي:

4568(1 - 0,22) = 4568.0,78 = 3563,04 DM

دریم) که د $2303\ m^2$ بنسټ ارزښت په 24% جګ شي، نو لاس ته ترې راځي«

$$2303.(1+0,24) = 2303\ .1,24 = 2855,72\ m^2$$

لاندې بنسټېاکنی یا بنسټ مقدارونه دی په مات بڼه ورکړ شي :

$1\% = \frac{1}{100}$	$1\frac{1}{4}\% = \frac{1}{80}$	$1\frac{1}{3}\% = \frac{1}{75}$	$1\frac{2}{3}\% = \frac{1}{60}$
$2\frac{1}{2}\% = \frac{1}{40}$	$3\frac{1}{3}\% = \frac{1}{30}$	$4\frac{1}{6}\% = \frac{1}{24}$	$5\% = \frac{1}{20}$
$6\frac{1}{4}\% = \frac{1}{16}$	$6\frac{2}{3}\% = \frac{1}{15}$	$8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12}$	$11\frac{1}{9}\% = \frac{1}{9}$
$12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$	$16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$	$20\% = \frac{1}{5}$	$25\% = \frac{1}{4}$
$33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$	$50\% = \frac{1}{2}$	$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$	$75\% = \frac{3}{4}$

د یوه بنسټ- یا سته ارزښت G یو په زرمه برخه ۱ پرومیلی (لاتین) واي، چی مونږ یی دلته هم د زرو څخه ۱ بولو:

۱ په زرو کی 1 ‰ له G دی G / 1000

د پرومیلی یا په زرو کی شمیرنی لپاره له دې وروسته انډولګڼ ۱۰۰۰ (په ماتلاندې کی) ، 1000‰ له دې سره یو سته ارزښت دی.

بیلګه :

4,7 ‰ له 3690DM دې: 17,34DM

مونږ غواړو، چی دا اوس د په سلو کی شمیرنی یو ځانګړي بڼی سره مشغول کړو. په ورځني ژوند کی خلك د کور جوړولو لپاره یا د یوې مغازې جوړولو لپاره پیسی (بډایي یا سرمای) پوروي او دا زیات وخت په نوې نړۍ کی له بانکونو څخه، د پور ورکولو له لارې پورورکوونکی څه پیسی باید لاس ته راولی، د ارزښت بایللو تر نامه، چی دې ته د سرمایي ګټه وایي. په بانکی معاملو کی د فعالی ا و غیر فعالی ګټې ترمنځ توپیر باید وشي. فعاله ګټه بانك د پوروړی څخه د ورکړشوې پور په مقابل کي لاس ته راوړي، د دې په څټ یا برعکس څوك چی په بانك کی شمیرکتابچه خلاصوي او په بانك کی پیسی سپما کوي ، نو دمرکزې یا ملي بانك په هدایت د

پیسو د سپما لپاره سپماکونکي هم څه پیسي لاس ته راوړي، چی دې ته به موږ د سپما ګټه ووایو ، په هر صورت په ځنی هیوادونو کي د پورګټی او سپما ګټی ترمنځ توپیر باید له ۲ په سلو کی تر درې په سلو کی څخه زیات نه وي.

په پرینځیپ کی باید د ساده ګټی او داسی په نامه د ګټی ګټی ترمنځ شمیرنو کی توپیر وشي . په داسی حال کی، چی په ساده ګټه کی پوروړی د پورشوي مقدار په بدل کی یوه ټاکلی ګټه ورکوي، چی هغه زیات وخت د یوه کال په منځ کي یعنی د یوه کال تیریدلو سره ټاکل شوې وي او دا ګټه د کال په اخر کی په منظمه توګه ورکول کیږي یا ادا کیږي.

د ګټی ګټی په شمیرلو کی د هغه غونډ وخت ګټه شمیرل کیږی ، چی په هغی کی د ګټی ګټه هم خوندې یا شامل ده، دلته هغه د هرکال ګټه د هغی لمړنی بڼایي ته ورزیاتیږي او بیا د ټولو ګټه د بل کال لپاره شمیرل کیږی او په همدې ډول وړیسی د دوه او یا زیاتو کالو.

لمړی غواړو، چی یواځی ساده ګټی شمیرلو سره ځان په کار واچوو:

پیلبیلګه

یوه د ۳۵۰۰ مارکونو بڼایي یا سرمایه په بانکی شمیرنه کي په بانك کی اینښوولکیږي، چي کلنی ګټه یی 4,5% ده. له 3,5 کالو وروسته دا سرمایه اینښونکي په بانکی شمیرنه کي څومره پیسی لري؟

دلته په پوره هدایت ساده ګټونه مخ ته پرته وي، که څه هم په معمولی توګه داسی شمیرنو کی د ګټی ګټه هم شمیرل کیږي. د په سلو کی شمیرنو بنسټ ارزښت دلته هغه ګټوونکی بڼایي یا سرمایه K (بنسټسرمایه) ده، او د په سلو کی ارزښت ګټه Z ده (په المانی مارکونو) ، د په سلوکی مقدار ، چی ما کله په سلو کي ټاکنه(یعنی په سلو کي څومره اندازه) بللی په %).

دا چې په دنده یا شمیرنه کې ګټه غوښتل شوې(دمخه برخه دې، یعني د په سلو کې ارزښت دې وکتل شي) ددې لپاره لاس ته راځي

Z = K.p / 100 = 3500.4,5 / 100 = 157,50DM

دا د یوه کال لپاره ګټه ده ، په بنسټیزه بڼایي ، چې ۳۵۰۰ مارکونه دي. په درینیمو کالو کې په ساده ګټونه بڼایي، چې بانکی شمیر یې واز کړې 3,5 .157,50 = 551,25DM لاس ته راوړي. په دې توګه به په سپما کتابچه کې 3500 + 551,25 = 4051,25DM (مارکونه) وي.

د ګټې وخت t لکه، چې ومو لیدل یو کال ، زیات یا کم کیدی شي. ، بیا نو په بانکي شمیرنه کې د یوه کال لپاره ۱۲ میاشتې نیسي، چې د هرې میاشتې لپاره ۳۰ ورځې ټاکي، یعنی په ټولیزه توګه ۳۶۰ ورځو په بنسټ بیا بانکی شمیرنی صورت نیسي. د ورځو په بنسټ بانکي شمیرنو کې هغه د سپما ورځ ورسره شمیرل کیږي(د سپماورځ Wertstellung یا Valutierung)، هغه ورځ، چې پیسې بیرته له بانګ اخستلې کیږي یا له بانك بیرته پورته کیږي، نه ورسره شمیرل کیږي.

د ګټې فرمول: Z = K.p / 100 . د ورځنۍ ګټې فرمول: Z = K.p.t / 100.360

بیلګې

لمړی : ۴۵۰۰ مارکونه له ۳ . ۷ . ۱۹۸۷ څخه تر ۱۵ . ۹ ۱۹۹۰ پورې ځومره ګټه کوي، که ګټه %75 , 4 وي.

د ګټې وخت د ورځو په بنسټ شمیرو: t = 12 +60+3.360 = 1152 ورځې.

د ورځنۍ فرمول له مخې لاس ته راځي:

$$Z = K.p.t / 100.360 = 4500.4,75.1152 / 100.360 = 684DM$$

دوم : یوې بنځی په ۱۵ . ۳ . ۱۹۸۷ باندې ۷۹۰ مارکه په بانکي سپما کتابچه کیښوول، او دا پیسی یی بیرته په ۲۰ . ۲ . ۱۹۸۸ له بانك څخه راواخستلی. دې بډایي یا سرمایي څومره ګټه وکړه:

$$p = Z.100.360 / K.t = 30.100.360 / 790.335 = 4,0809 \Rightarrow p \sim 4,08\%$$

دریم : په څومره وخت کی کیدی شي، چی ۱۰۰۰ مارکونه د ساده ګټې په بنسټ ۲۰۰۰ مارکونو ته جګه شي، که بډایي په 4 , 5% ګټه سپما شوې وي؟

$$t = Z.100.360 / K.p = 1000.100.360 / 1000.4,5 = 8000$$

ورځي ۸۰۰۰ = ۲۲ کاله او ۸۰ ورځی

څلورم : یو بډایی ، چی لاتري یی ختلی په ساده ګټونه ، چی ۷ ،۶ په سلو کی ده له بانك څخه د میاشتی ۲۰۰۰ مارکونه ګټه اخلي.

دا د لاترۍ ختنه به څومره جګه وي؟

موږ دا د ګټې فرمول د بډایی په لور اړوو یابدلوو:

$$K = Z.100.360 / p.t = 2000.100.360 / 6,7\ .30 = 358208,95DM$$

لکه چی پوهیږو، بانکونوپرکسیس یا کار کی د ګټې ګټونه معمول ده، او له دې زیات نه. د ګټې ګټه کلنی شمیرل کیږي او بډایي ته ورزیاتیږي.

یو پیلبډایي K_0 ، د یوه کال په اوږدوالی کی د یوې ګټې ټاکه یامقدار $p\%$ سره په ګټه اچول کیږي، د کال په اخر کی د یوې ګټې

$$K_1 = K_0 + K_0\ (p / 100) = K_0\ (1 + p / 100)$$

سره په سپماکتابچه کی لیکل شوې ده.

دلته $K_0.p / 100$ د یوه کال را اچولی ګټه ده، د یو کال په پیلبډایي K_0 سره.

د ټول دوه کاله وروسته دا پیلبډایي د همغی پښیګټې یا ګټې پیل سره داسی لویه شوې

$$K_2 = (K_0 + K_0 . P / 100) + (K_0 + K_0 . P/100).(P/100)$$
$$= K_0 + K_0.P/100 + (K_0.P/100)(P/100)$$

که K_0 له نوکانو یا غیر دباندې ونیول شي نو لاس ته راځي:

$$K_2=K_0(1+2.P/ 100 + P^2 / 100) = K_0(1+ P/100)^2 = K_1(1+ P/100)$$

له درې کاله وروسته دا بډایي یا سرمایه ده:

$$K_3=K_0(1 + P/100)^3 \qquad K_3=K_2(1 + P/100)$$

که دا شمیرنه په ورته توګه دوام پیداکړي، نو د t کالو وروسته په ټولیزه توګه لاندې بډایي لاس ته ترې راځی

$$K_t = K_0 . (1 + P/100)^t = K_{t-1} . (1 + P/100)$$

د (1 + p/100) لپاره غواړود لنډونی له امله q ولیکو، q ګټې فاکتوریا ګټې ځلونی بلل کیږي:

$$q = 1 + p / 100$$

ددې ساده ونی سره لاس ته راځي: د ګټې ګټې فرمول: یوه بډایي K_0 د t کالو وروسته د p% کلنی ګټې باندې(د ګټې جګیدنه) په $K_t = K_0 (1 + p / 100) = K_0.q^t$ لویه شوې

بیلګه : له درینیمو کلو وروسته په ۴،۵ ٪ ګټه ۳۵۰۰ مارکونه په کوم ارزښت لوییږي؟

$K_{3,5} = K_0. q^t = 3500.1,045^{3,5} = 4082,96$ DM مارکونه

د ګټېګټې شمیرنی سره بډایي $K_0 , K_1 , K_2 , K_3 , ..., K_t$ یوه هندسی پرلپسی جوړوي(ددې لپاره دې ځما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي) دا د پیلبډایي K او ځلوني $q = 1 + p / 100$ سره ، ګرافیکی که وکتل شي، نو د ګټې لوییدنی فنکشن $K_t = K_0 . q^t$ یو اکسپوننشل بلواك انځوروي. د تعریفډیري $D = Q$ سره.

ساده ګټه اچونی بیا یو لاینې فنکشن $K_t = = K_0 (1 + p.t / 100) ; t C Q$ په نخښنه کوي.له دې امله بډایي په ساده ګټه اچونه دومره چټکه نه لوییږي، لکه چې په یوه دګټې ګټې اچونی باندې.

بیلګی: ۱ – یو د ۴۷۰۰ افغانیو مقدار یا ارزښت دې د پنځه کلونو لپاره په ساده ګټه اچونه او ب) په د ګټې ګټې اچونی چې ۵۷، ۴ ٪ دی ایښوول کیږي. دا هر پایبډایي څومره لویه ده؟

a) $K_5=K_0(1 + P.t/100) = 4700(1+ 4,75 . 5/ 100) = 5816,25$ Af

$K_5= K_0 + 1116,25 = 5816,25$ Af

b) $K_5 = k_0. q^t = 4700 . 1,0475^5 = 5927,45$ Af

۲ – یوه بډایي د ۵۰۰۰۰ افغانیو په ۳.۵.۹۷ واچول شوه او باید په ۳۱.۱۲.۲۰۰۱ راووستل شي. څومره په ۴.۵ ٪ ګټه باندې لوی شوی دی، که پوره کلونه (له۳۱.۱۲–۱.۱) په ګټه واچول شي؟

$K = [K_0 + K_0.p.t / 100.360].(1 + p/100)^n$
$= [50000 + 50000.4,5.237 / 36000].1,045^4$

$K = 61392.35$ Af

د لویو K_0, q, t او K_t په ګټه فاکتور کی افاده کیدو لپاره رامنځ ته کیږي. د ګټې اخستنی وروسته کیدی شي د سرچینیزې بډایي K_0 پوښتنه رامنځ ته شي، چی د t کلونو په p % ګټونه یا ګټه و بډایي K_t ته بیایي. K_0 د K_t د بډایي د اوس وخت یا حال یا نغد ارزښت بلل کیږي. د K_0 شمیرنه په ورکړشوې بډایي K_t ته چی بیاي دیسکونتونه Diskuntierung یا ګټوني بلل کیږي:

تعریف: د نغدارزښت فرمول

$$K_0 = \frac{K_t}{(1+\frac{p}{100})^t} = \frac{K_t}{q^t} = K_t.(\frac{1}{q})^t$$

دلته $(1/q)$ د ګټوني فاکتور بلل کیږي. د نغدارزښت فرمول له $K_t = K_0.q^t$ اړیکو څخه لاس ته راغلی ، چی د K_0 په لور اوبی یا حل شوي.

بیلګي:

۱ – یو نیکه غواړي د خپل لمسی د پنځمی زیږیدنی له امله یو څه ئیسی بانك کی سپما کړي، د ۵٪ په ګټه . دا پیصي بهه ځومره یا دا مقدار به ځومره لوي، چی دا لمسی په خپله ۲۵ کالیزه ۲۰۰۰۰ مارکونهلاس ته راوړي؟

باید په بانك یکی ۲۳ ، ۹۶۱۲ مارکونه کیښوول شي یا سپما شي..

۲ –د یوه کور خرڅلاو کی دوه اخستونکی مختلف اوفرت یا وړاندیزونه کوي « علاقمند الف ۱۵۰۰۰۰ مارکونه نغد ، ۱۲۰۰۰۰ مارکونه له دوه کاله وروسته او نور ۱۵۰۰۰۰ مارکونه د ټولیزه توګه له شپږ کاله وروسته ادا کړي یعني د کور مالك ته ورکړي.

علاقمند ب غواړي، چی ۱۳۰۰۰۰ مارکونه نغد ، ۱۵۰۰۰۰ مارکونه له درې کالو وروسته او ۱۴۰۰۰۰ مارکونه له نورو دوه کالو وروسته ورکړي.

کوم یو علاقمند ګټور دی، که مور ۸٪ ګټهٔ ونیولي شو یا فرض کړای شو؟

دا چی دواړه ارزښتونه یا وړاندیزونه یو له بل سره پرتله کړاي شو، نو باید دواړه نغد ارزښت ته راوړو.

بیلګه:

یوه د ۸۰۰۰ مارکونو بډايي ، کومه چې د ګټې په ګټونه ولاړه ده، باید ٪۶ کلنی ګټې د څلورو کالو لپاره په بانک کی پاتي شي یا کیښوول شي. بډايي به څومره لویه وي په الف) کلني ، ب) نیمکلنی، خ) میاشتنی، او ت) په ورځنی ګټونه؟

تمرینونه:

۱ – یو جوړ کالي په ارزښت یا نیه کی ۵ ،۴ ٪ کمشو» د دې کالیو لومړنیی نیه ۲۵۰ ماکرونه وه . اوس دا کالي کومه نیه لري؟

۲ – یو پطلون په ۵ ، ۴ ٪ ارزان شو، دا پطلون او س ۲۵۰ مارکونه ارزښت لري. دې پطلون پخوا کومه بیه درلوده؟

۳ – د یوه جاکټ بیه په ۷۰ مارکونوه راکمیږي، دې پخوا ۲۵۰ مارکونه بیه لروده، اوس دا څومره بیه لري یا حومره قمته ده؟

۴ – یو جوړ دریشی په ۹۸ مارکونوګرانیږي او اوس ۴۵۰ مارکونه بیه لري. د ا ګرانښت په سلو کی څومره دی؟

۵ – رابات یو د بیي راکومن دی، چی اخستونکی ته د ځانګړو شرایطو لاندې ورکول کیږي. سکونتو یو بیه کمون دی، چی اخستونکی ته د نغدو پیسو ورکولو له امله ورکول کیږي.

الف) یو د ۵۷ ، ۸۵۰ مارکونو شمیر، یعنی په کاغذ لیکل شوې بیه په ګوته شوې: د لسو ورځو ترمنځ نغد اداکولو په حالت کی ۳٪ سکونتو.
دلته څومره پیسی ورکول کیږي؟
ب) یو اخستونکی د خپل نوي لاس ته راوړي بایسکل کی ۲۰ ٪ رابات لاس ته راوړي، او دا چی هغه پیسی ندې ورکوي، بر سیرهٔ پردې ۲ ٪ سکونتو هم ورکول کیږي. دا باسکل او س دی د دې لپاره بایسکل لپاره ۱۵۶ مارکونه ادا کوي.
دې بایسکل د سکونتو او ربات د مخه څومره بیه لروده؟
۶ – په یوه نغدپیسوبیه ۱۴ ٪ کی د مالیي ورزیاتیږي او ۳ ٪ ربات ورکول کږي.
که پخپله ځان ته شمیر لیلی لیکی شی ، ته به مالیه لومړی ورزیاته کړې او که لمړی به ربات له شمیر کم کړې؟
دا نغده ارزښت به څومره جګ شي، که لومړی مالیه ورزیاته شي او بیا ربات ترې کم شي؟
۷ – اباسین خپ کور دننه په ۱۱۰۰۰۰ ماروکونو بیمه کړی. دی ددې بیمی پوره کوونو لپاره کلنی ۵ ،۱ په زرو ګټه باید نیمی ته ادا کړي. دا څومره ده؟
۸ – یوه ګازره په منځنی توګه 0,5‰ ویټامین A لري. څو ګرامه ګازرې به ۱۵ ملي ګرامه ویټامین A ولري؟
۹ – په یوه موټربیولو کنترول کی د یوه موټرځغلونکی څخه د ازماینی لپاره وینه اخستل کیږي. معاینه دا نتیجه ورکوي، چی موټرځغلوونکی 1,7‰ الکول په وینه کی لري. دابه څو مترمکعبه الکول وي، که ونیسو، چی د وینی ډکی ۷ لیتره وي؟
۱۰ – د ارزښتکاغذ (دا په بانك کی څه کاغذونه دې، چي خلك يی اخلی، په کلنی ټاکلی ګټی سره) یو پیسی ایښوونکی ددضیویدند Dividende (کلنی ګټهٔ ده) ۲۷۰ مارکونه اخلي. څموره پیسیبه هغه ایښودلي وي، که یوه بډایي

په ۵ ، ۷ ٪ گټهٔ اینبوول شوې وي ؟

۱۱ – اباسین په یوه بانکی حساب کی ۷۰۰۰ مارکونه اچوي. له کوم وخت وروسته په ساده ۴ ٪ کی گټبونه، دی ۸۰۰ مارکونه لاس ته راوړي؟

۱۲ –

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګڼې – او کڼې د کڼې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګریزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواريد ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه   د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک   دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسي د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګریزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپیني خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیرپوهنه د اوم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د اتم ټولګې له پاره

شمیرپوهنه د نهم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د لسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د دولسم ټولګي له پاره

ریاضي برای صنف دوازده

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميړي شينواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمريز کې د شينوارو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې ميني د لومړني ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګي پيل او د دويم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتريش برس، چې هلته يې د شميرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان ميړي په ۱۹۷۲ کې له لرې د ميرمن ښاپيرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتريش ته راغی.

ده د ميرمن ښاپيری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوژده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتريش ويانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چې څانګه او اباسين نوميږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سايکولوژي لوستلي.